

& GETAL | C & RUIMTE



Noordhoff

Getal & Ruimte

vwo C deel 4

Twaalfde editie, 2022

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
E. Terlaak

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek vwo C deel 4

Samen met de delen 1, 2 en 3 van vwo wiskunde C bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde C, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld. Bij het schrijven van dit boek is goed gekeken naar de examens die de laatste jaren zijn afgenomen. Dat betekent dat ervoor gezorgd is dat de theorie en de opgaven aansluiten bij de vraagstelling en het niveau die op het centraal examen gangbaar zijn.

Dit boek is bestemd voor het zesde leerjaar. De hoofdstukken 12, 13 en 14 hebben samen een studielast van ongeveer 50 uur. Daarmee komt de totale studielast van de hoofdstukken 1 tot en met 14 plus het hoofdstuk met het keuzeonderwerp op ongeveer 350 uur. Er blijft dan tijd over om te werken aan hoofdstuk 15 Examentraining, omdat de totale studielast voor het vak vwo wiskunde C 480 uur is.

In hoofdstuk 12 Rijen worden de onderdelen van het domein D behandeld die over rijen gaan. Er wordt gewerkt met recursieve en directe formules, in het bijzonder bij rijen die horen bij lineaire en exponentiële verbanden. Er is aandacht voor de verschillende notaties die bij rijen kunnen voorkomen. In een GR-module bij de verschillende typen van de grafische rekenmachine wordt het rijen-invoerscherm uitgelegd. In de laatste paragraaf worden rijen gebruikt bij patronen en meetkundige figuren. Het begrip somrij hoort niet bij de leerstof van wiskunde C.

In hoofdstuk 13 Meetkunde toepassen wordt het tekenen in perspectief uitgebreid met het halveren en verdubbelen. In de tweede paragraaf worden de eigenschappen van regelmatige veelhoeken gebruikt voor berekeningen en voor het tekenen in perspectief. De gulden snede komt in een aparte paragraaf aan de orde. In de paragraaf Aanzichten en inhouden worden allerlei berekeningen en tekeningen gemaakt, waarbij steeds een kunstwerk of een gebouw het uitgangspunt is.

In de eerste paragraaf van hoofdstuk 14 Werken met formules worden de andere onderdelen van domein D behandeld. Hieronder vallen de verschillende soorten van stijgen en dalen en de begrippen gemiddelde verandering en helling van een grafiek in een punt. In het laatste gedeelte van de eerste paragraaf wordt behandeld wat de leerling moet weten van periodieke verschijnselen (zoals genoemd in domein C). In de tweede en de derde paragraaf komen veel algebraïsche vaardigheden aan de orde bij het herleiden van formules met breuken, het vrijmaken van variabelen en het combineren van formules. In paragraaf 14.3 wordt het rekenen met machten en het herleiden van formules met exponenten en logaritmen besproken. In de laatste paragraaf komt aan de orde hoe bij een formule beredeneerd kan worden wat de grenswaarde is en of de grafiek stijgend of dalend is.

In hoofdstuk 15 Examentraining is de leerstof onderverdeeld in zes paragrafen. Deze paragrafen beginnen met een opgave waarin korte vragen staan die betrekking hebben op de leerstof in de paragraaf en die geënt zijn op examenvragen. In de theorie die daarop volgt, wordt elk onderwerp bondig herhaald. Daarna volgen passende examenopgaven die gekozen zijn uit de examens van 2017 (pilot), 2018 en 2019. De gemengde opgaven bij hoofdstuk 15 bestaan ook in deze editie uit een flink aantal korte opgaven, die niet gesorteerd staan op onderwerp. Hierin komen alle basisvaardigheden aan de orde die een leerling voor het examen nodig heeft.

Drie leerroutes

De opbouw van de hoofdstukken 12, 13 en 14 is dezelfde als in de delen 1, 2 en 3. In deze editie wordt naast de verschillende soorten opgaven gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen. Zie voor verdere toelichting zo nodig het voorwoord van deel 1, 2 of 3.

In hoofdstuk 15 Examentraining is geen routing aanwezig.

Het schoolexamen en het centraal examen

Alle in dit boek aangeboden onderwerpen behoren tot de leerstof van het centraal examen.

Domein E (Statistiek en kansrekening) en domein H (Keuzeonderwerpen) worden niet centraal geëxamineerd. Deze domeinen dienen samen met domein A (Vaardigheden) aan de orde te komen in het schoolexamen.

Getal & Ruimte online

Alle opgaven worden ook digitaal aangeboden. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij de hoofdstukken 12, 13 en 14 toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant-en-klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

Voorjaar 2021

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

02 Oriëntatie-opgave

   Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 Gewone opgave

   Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 Reflectie-opgave

   In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 Afsluitende opgave

   De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 Extra opgave

   Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute



2 Middenroute



3 Uitdagende route



NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder route-aanduiding

In de Diagnostische toets, de Gemengde opgaven en de Examentraining hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▶GR] Verwijzing naar een module van de GR-handleiding.

[▶WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

12 Rijen 6

Beginopdracht Traplopen 8

Voorkennis Lineaire en
exponentiële groei 9

12.1 Rijen en verbanden 11

12.2 Notaties en rijen op de GR 19

12.3 Rijen en meetkundige figuren 28

Eindopdracht Fibonacci en het
gulden getal 38

Diagnostische toets 40

13 Meetkunde toepassen 42

Beginopdracht Centre Pompidou
Málaga 44

Voorkennis Perspectief 45

13.1 Halveren en verdubbelen
in perspectief 47

13.2 Regelmatige veelhoeken 55

13.3 De gulden snede 62

13.4 Aanzichten en inhouden 68

Eindopdracht De Markthal 77

Diagnostische toets 78

14 Werken met formules 80

Beginopdracht Bevolkingsgroei 82

Voorkennis Intervallen en de
delta-notatie 83

14.1 Stijgen en dalen van grafieken 85

14.2 Formules herschrijven 100

14.3 Formules met exponenten
en logaritmen 109

14.4 Redeneren met formules 116

Eindopdracht Modellen bij
bevolkingsgroei 125

Diagnostische toets 126

15 Examentraining 128

15.1 Algemene vaardigheden 130

15.2 Combinatoriek en rijen 149

15.3 Werken met formules en
grafieken 163

15.4 Formules met exponenten
en logaritmen 176

15.5 Logisch redeneren 193

15.6 Meetkunde 203

Gemengde opgaven 222

Examenwerkwoorden 246

Overzicht GR-modules 247

Overzicht routes 248

Trefwoordenregister 251

Verantwoording 252



12

Rijen

Wat leer je?

- Werken met recursieve en directe formules van rijen.
- De relatie tussen rijen en lineaire en exponentiële verbanden.
- Verschillende notaties die bij rijen kunnen voorkomen.
- De GR gebruiken om rijen door te rekenen.
- Rijen gebruiken bij meetkundige figuren.



Beginopdracht Traplopen

In zijn huis heeft Leo een trap met 16 treden. Als hij die trap op loopt, kan hij steeds 1 trede tegelijk nemen. Hij zet dan 16 stappen. Hij kan ook steeds een trede overslaan, dan hoeft hij maar 8 stappen te zetten. Een combinatie is ook mogelijk: soms een stap van 1 trede, soms een stap van 2 treden. Leo vraagt zich af op hoeveel manieren hij de trap op kan lopen. We gaan er daarbij van uit dat hij nooit een stap terug zet en niet meer dan 2 treden tegelijk neemt.

Om het aantal manieren te berekenen, kijkt Leo eerst naar kortere trappen. Een trap van 1 trede kan hij maar op één manier op lopen. Een trap van 2 treden kan op twee manieren: twee stappen van elk 1 trede, of één stap van 2 treden. Dat noteert hij achtereenvolgens als 1 1 en 2.

Een trap van 3 treden kun je op drie manieren op lopen. Een van die manieren is 2 1.

- Noteer de andere twee manieren.
- Noteer systematisch de manieren om een trap van 4 treden op te lopen. Hoeveel manieren zijn er? En hoeveel manieren zijn er om een trap van 5 treden op te lopen?

Leo bedenkt dat hij het aantal manieren bij een trap van 4 treden ook anders kan vinden. Je komt op de vierde trede door een stap van 1 trede vanaf de derde trede, óf door een stap van 2 treden vanaf de tweede trede. Het aantal manieren bij een trap van 4 treden is dus het aantal manieren bij een trap van 3 treden plus het aantal manieren bij een trap van 2 treden.

- Ga na dat je dan hetzelfde antwoord vindt.

Hij stelt de volgende tabel op voor het aantal manieren A waarop je een trap van n treden op kan lopen.

- Maak de tabel van $n = 1$ tot en met $n = 16$.

n	1	2	3	4	5	...	16
$A(n)$	1	2	3	...	...	...	...

Leo bedenkt dat bij deze situatie de formule $A(n) = A(n-1) + A(n-2)$ hoort. Bij $n = 5$ krijg je dan $A(5) = A(4) + A(3)$.

- Wat krijg je als je in deze formule $n = 16$ neemt?

Op internet vindt hij een andere formule voor $A(n)$. Deze formule is

$$A(n) = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

- Bereken met deze formule $A(16)$.
- Wat is het voordeel van de tweede formule, vergeleken met de eerste formule?

Voorkennis Lineaire en exponentiële groei

Theorie A Tabellen bij groei

In de tabel hiernaast is t de tijd in uren. De hoeveelheid N neemt per 3 uur steeds met 12 toe, immers $52 - 40 = 12$ en $64 - 52 = 12$, enzovoort.

t	5	8	11	14	17
N	40	52	64	76	88

Per uur is de toename $\frac{12}{3} = 4$.

De formule die bij de tabel hoort, is van de vorm $N = 4t + b$.

Invullen van $t = 5$ en $N = 40$ geeft $4 \cdot 5 + b = 40$,

dus $b = 20$.

Bij de tabel hoort lineaire groei met formule $N = 4t + 20$.

Er is een lineair verband tussen t en N .

In de tabel hiernaast is t de tijd in uren. De hoeveelheid N wordt per 3 uur steeds met 1,5

vermenigvuldigd, immers $\frac{60}{40} = 1,5$ en $\frac{90}{60} = 1,5$,

t	5	8	11	14	17
N	40	60	90	135	202,5

enzovoort.

We zeggen dat de groeifactor per 3 uur gelijk is aan 1,5,

dus $g_{3 \text{ uur}} = 1,5$.

Dit geeft $g_{\text{uur}} = 1,5^{\frac{1}{3}} \approx 1,1447...$

De formule die bij de tabel hoort, is van de vorm

$N = b \cdot 1,1447...^t$.

Invullen van $t = 5$ en $N = 40$ geeft $b \cdot 1,1447...^5 = 40$,

dus $b = \frac{40}{1,1447...^5} \approx 20,35$.

Bij de tabel hoort exponentiële groei met formule $N = 20,35 \cdot 1,145^t$.

Er is een exponentieel verband tussen t en N .

Lineaire groei

- Per tijdseenheid neemt de hoeveelheid met hetzelfde getal toe.
- De formule is van de vorm $N = at + b$.

Exponentiële groei

- Per tijdseenheid wordt de hoeveelheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
- De formule is van de vorm $N = b \cdot g^t$.

Bij de tabel hiernaast hoort een exponentieel verband, dus

$y = b \cdot g^n$ met $g^7 = \frac{600}{716}$ en dit geeft $g = \left(\frac{600}{716}\right)^{\frac{1}{7}} = 0,9750...$

Invullen van $n = 2$ en $y = 716$ in $y = b \cdot 0,9750...^n$ geeft

$b \cdot 0,9750...^2 = 716$, dus $b = 753$.

De formule is $y = 753 \cdot 0,975^n$.

n	2	5	9
y	716	663	600

- 1** Gegeven is de tabel hiernaast.
Toon aan dat bij de tabel een lineair verband hoort
en stel de formule van y op.

n	0	1	2	3	4
y	250	285	320	355	390

- 2** Gegeven is de tabel hiernaast.
Toon aan dat bij de tabel een exponentieel
verband hoort en stel de formule van y op.

n	0	1	2	3	4
y	250	400	640	1024	1638,4

- 3** Bij de tabel hiernaast hoort een formule van de vorm $y = b \cdot g^n$.
Bereken b en g .

n	2	5
y	1250	2160

- 4** Bij de tabel hiernaast hoort een formule van de vorm $y = an + b$.
Bereken a en b .

n	10	25
y	293	212

- 5** De tabel hiernaast hoort bij een lineair verband.

- a** Welke waarde van y hoort bij $n = 13$?
b Voor welke waarde van n geldt $y = 0$?

n	0	1	2
y	256	248	240

- 6** De tabel hiernaast hoort bij een exponentieel verband.

- a** Welke waarde van y hoort bij $n = 6$?
b Vanaf welke waarde van n is y groter dan 5000?

n	3	5	7
y	400	576	829,44

- 7** Zie de tabel hiernaast.

- a** Stel de formule op als er sprake is van een lineair
verband tussen n en y .
b Stel de formule op als er sprake is van een exponentieel
verband tussen n en y .

n	3	7
y	320	20

12.1 Rijen en verbanden



01 Hieronder staan vijf getallenrijen met een regelmaat.

Onderzoek bij elke rij de regelmaat en geef het volgende getal in de rij.

A 11, 18, 25, 32, 39, ...

B 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

C 238, 206, 174, 142, 110, ...

D $121\frac{1}{2}$, 81, 54, 36, 24, ...

E 4, 9, 16, 25, 36, ...

Theorie A Recursieve en directe formules

Renske heeft een nieuwe baan. Haar maandsalaris bedraagt 2000 euro. Met haar werkgever is zij overeengekomen dat zij jaarlijks een loonsverhoging van 160 euro per maand krijgt. Dus in het tweede jaar is haar maandsalaris 2160 euro. In het derde jaar is het 2320 euro, enzovoort.

Zo ontstaat de **rij** 2000, 2160, 2320, 2480, 2640, 2800, ...

De getallen in de rij heten de **termen**.

Hieronder is de eerste term van de rij genoteerd met u_0 , de tweede term met u_1 , de derde term met u_2 , enzovoort.

2000	2160	2320	2480	2640	...
u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	...

Bij de rij 2000, 2160, 2320, 2480, 2640, 2800, ... is

$$u_0 = 2000$$

$$u_1 = 2000 + 160 = u_0 + 160$$

$$u_2 = 2160 + 160 = u_1 + 160$$

$$u_3 = 2320 + 160 = u_2 + 160$$

$$\text{Algemeen is } u_n = u_{n-1} + 160.$$

nieuwe term

u_{n-1} is de voorafgaande term van u_n

In de formule $u_n = u_{n-1} + 160$ is n een positief geheel getal.

Neem je $n = 10$, dan krijg je $u_{10} = u_9 + 160$.

u_0 is de eerste term.
 u_9 is de tiende term.
 De zesde term is u_5 .
 De negende term is u_8 .

De voorafgaande term

- van u_6 is u_5
- van u_{10} is u_9
- van u_n is u_{n-1} .

De formule $u_n = u_{n-1} + 160$ is een voorbeeld van een **recursieve formule**. Met alleen de recursieve formule kun je de termen van de rij niet berekenen. Je moet daarvoor ook de **beginterm** weten.

De beginterm wordt ook wel de startwaarde genoemd.

Bij de rij 2000, 2160, 2320, 2480, 2640, 2800, ... is de beginterm 2000.

Zo krijg je $u_n = u_{n-1} + 160$ met $u_0 = 2000$.

We spreken af dat je bij een recursieve formule altijd de beginterm vermeldt.

Recursief komt van het Latijnse woord *recurrere*, dat wederkeren betekent. De voorafgaande term keert terug in de nieuwe term.

Een recursieve formule van een rij geeft aan hoe je elke term uit de voorafgaande term berekent.
Als ook de beginterm bekend is, dan ligt de rij vast.

De rij $u_n = u_{n-1} + 160$ met $u_0 = 2000$ kun je doorrekenen op het basisscherm van de GR met [ans].

- Tik in 2000 [enter].
- Tik in + 160 [enter], [enter], [enter], ...

Zie het GR-scherm hiernaast.

Op de Casio en op de NW gebruik je [EXE] in plaats van [enter].

NORM DRIJF AUTO REEEL RAD WN	
2000	2000
Antw+160	2160
Antw+160	2320
Antw+160	2480

Om u_{40} te berekenen, heb je u_{39} nodig en dus ook u_{38} en u_{37} en ...

Een formule waarmee je direct een term kunt berekenen, zonder dat je de voorafgaande termen nodig hebt, heet een **directe formule**.

Bij de rij $u_n = u_{n-1} + 160$ met $u_0 = 2000$ hoort de directe formule $u_n = 2000 + 160 \cdot n$.

Je krijgt $u_{40} = 2000 + 160 \cdot 40 = 8400$.

$$\begin{array}{lcl}
 u_0 & = & 2000 \\
 u_1 & = & 2000 + 160 \\
 u_2 & = & 2000 + 160 \cdot 2 \\
 u_2 & = & 2000 + 160 \cdot 3 \\
 \vdots & & \\
 u_n & = & 2000 + 160 \cdot n
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \nearrow + 160 \\
 \nearrow + 160 \\
 \nearrow + 160
 \end{array}$$

Bij de rij met directe formule $u_n = 3n^2 - 6n$ en beginterm u_0 is de eerste term gelijk aan $u_0 = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 = 0$ en de vijfde term gelijk aan $u_4 = 3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 = 24$.

Een directe formule kun je doorrekenen door deze in te voeren op het formule-invoerscherm.

Bij de rij $u_n = 3n^2 - 6n$ voer je in $y_1 = 3x^2 - 6x$ en maak je een tabel met $x = 0, 1, 2, 3, \dots$

Voorbeeld

Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,25 \cdot u_{n-1} - 10$ met $u_0 = 100$.

- a Bereken de vijfde en de zesde term van de rij. Rond af op twee decimalen.
- b Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 500$?

Uitwerking

- a De GR geeft $u_4 \approx 186,48$ en $u_5 \approx 223,11$.

De vijfde term is u_4

- b $u_9 \approx 487,03$ en $u_{10} \approx 598,79$.
Dus vanaf de 11^e term is $u_n > 500$.

NORM DRIJF AUTO REEL RAD MN	
100	100
1.25*Antw-10	115
1.25*Antw-10	133.75
1.25*Antw-10	157.1875

R2 Zie vraag b van het voorbeeld.

 Waarom wordt in de uitwerking niet alleen u_{10} genoemd, maar ook u_9 ?

3 Gegeven is de recursieve formule $u_n = 0,9 \cdot u_{n-1} + 50$ met $u_0 = 200$.

-  a Bereken de zevende en de achtste term van de rij. Rond af op twee decimalen.
- b Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 400$?

4 Gegeven is de recursieve formule $u_n = 10 + 20 \cdot \sqrt{u_{n-1}}$ met $u_0 = 50$.

-  a Bereken de vierde en de vijfde term van de rij. Rond af op twee decimalen.
- b Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 419,5$?
- c Is er een term waarvoor $u_n > 420$? Licht toe.

5 Gegeven is de directe formule $u_n = 2n^2 + 7n - 3$ met beginterm u_0 .

-  a Bereken de zesde en de zevende term.
- b Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 500$?

6 Gegeven is de directe formule $u_n = 3n + \frac{24}{n+2}$ met beginterm u_0 .

-  a Bereken de vijfde en de zevende term.
- b Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 50$?
- c Welke termen van de rij zijn een geheel getal?

A7 a Gegeven is de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + \frac{u_{n-1}}{1 + u_{n-1}}$ met $u_0 = 25$.

Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 35$?

- b Gegeven is de directe formule $u_n = -0,3n^2 + 5n - 10$.
Hoeveel termen van de rij zijn positief?



Bij de volgende zes rijen zijn er vijf met eenzelfde soort regelmaat.

Welke van deze rijen heeft deze regelmaat niet? Licht toe.

A 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...

B 100, 120, 140, 160, 180, 200, ...

C 2, 5, 10, 17, 26, 37, ...

D 80, 75, 70, 65, 60, 55, ...

E 19, 18, 17, 16, 15, 14, ...

F 3, 10, 17, 24, 31, 38, ...

Theorie B Rij en lineaire verbanden

Bij de rij 75, 80, 85, 90, 95, 100, ... is het verschil van twee opeenvolgende termen constant. Het **constante verschil** noteren we met v . Dus hier is $v = 5$.

De recursieve formule van de rij 75, 80, 85, 90, 95, 100, ... met beginterm u_0 is $u_n = u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 75$.

De directe formule van een rij met constant verschil v en beginterm u_0 krijg je als volgt. De opeenvolgende termen zijn

- u_0
- $u_1 = u_0 + v$
- $u_2 = u_1 + v = u_0 + v + v = u_0 + v \cdot 2$
- $u_3 = u_2 + v = u_0 + 2v + v = u_0 + v \cdot 3$

Enzovoort.

Algemeen is $u_n = u_0 + v \cdot n$.

De directe formule van de rij 75, 80, 85, 90, 95, 100, ... met beginterm u_0 is $u_n = 75 + 5 \cdot n$.

En van de rij 100, 80, 60, 40, 20, ... met beginterm u_0 is de directe formule $u_n = 100 - 20 \cdot n$.

Bij een rij met een constant verschil hoort een lineair verband. Bij het lineaire verband $y = an + b$ geldt immers: als n toeneemt met 1, dan neemt y steeds met hetzelfde getal a toe.

In de directe formule van een rij met een constant verschil komt u_0 dus overeen met b en komt v overeen met a .

Bij een rij is n altijd een geheel getal.

Bij een rij waarbij het verschil van twee opeenvolgende termen steeds hetzelfde getal is, hoort een lineair verband.

Van een rij u_n met constant verschil v en beginterm u_0 is

- de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_0
- de directe formule $u_n = u_0 + v \cdot n$.

Voorbeeld

- a** Gegeven is de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + 6$ met $u_0 = 10$.
Stel de directe formule van u_n op.
- b** Gegeven is de rij 11, 15, 19, 23, 27, ...
De hoeveelste term van de rij is 647?

Uitwerking

- a** Rij bij lineair verband met $u_0 = 10$ en $v = 6$, dus $u_n = 10 + 6 \cdot n$.
- b** Rij bij lineair verband met $u_0 = 11$ en $v = 4$, dus $u_n = 11 + 4 \cdot n$.
Los op $11 + 4n = 647$
 $4n = 636$
 $n = 159$
Dus de 160^e term is 647.

R9 Zie het voorbeeld. Bij de uitwerking van vraag b wordt de directe formule van de rij gebruikt.
Waarom is het gebruik van de recursieve formule niet handig?

10 Gegeven is de rij $u_n = u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 218$.
a Stel de directe formule van u_n op.
b Bereken de 25^e term van de rij.
c De hoeveelste term van de rij is 498?

11 Gegeven is de rij $u_n : 13, 18, 23, 28, 33, \dots$ met beginterm u_0 .
a Waarom hoort deze rij bij een lineair verband?
b Stel de recursieve en de directe formule op van de rij.
c Bereken de 38^e term van de rij.
d Hoeveel termen zijn kleiner dan 650?

A12 Gegeven is de rij $u_n : 1023, 1016, 1009, 1002, 995, \dots$
a De hoeveelste term van de rij is 246?
b Hoeveel positieve termen heeft de rij?

E13 Van een rij met een constant verschil is de som van de eerste en de vierde term gelijk aan 10, en is de som van de eerste vier termen gelijk aan de vijfde term.
Geef de eerste vijf termen van deze rij.

O14 Bij de volgende vier rijen zijn er drie met eenzelfde soort regelmaat.
Welke van deze rijen heeft deze regelmaat niet? Licht toe.
A 3, 6, 12, 24, 48, 96, ...
B 160, 80, 40, 20, 10, 5, ...
C 5, 7, 10, 14, 19, 25, 32, ...
D 64, 96, 144, 216, 324, ...

Theorie C Rijen en exponentiële verbanden

Van de rij 64, 96, 144, 216, 324, ... is het quotiënt van twee opeenvolgende termen steeds 1,5.

$$\frac{96}{64} = 1,5; \quad \frac{144}{96} = 1,5; \quad \frac{216}{144} = 1,5; \quad \text{enzovoort.}$$

Elke term van de rij 64, 96, 144, 216, 324, ... ontstaat door de voorafgaande term met 1,5 te vermenigvuldigen.

Het getal 1,5 heet de **factor** van de rij. De factor van de rij geven we aan met r .

De recursieve formule van de rij 64, 96, 144, 216, 324, ... met beginterm u_0 is $u_n = 1,5 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 64$.

De directe formule van een rij met constante factor r en beginterm u_0 krijg je als volgt. De opeenvolgende termen zijn

- $u_0 = u_0$
- $u_1 = u_0 \cdot r = u_0 \cdot r^1$
- $u_2 = u_1 \cdot r = u_0 \cdot r \cdot r = u_0 \cdot r^2$
- $u_3 = u_2 \cdot r = u_0 \cdot r^2 \cdot r = u_0 \cdot r^3$

Enzovoort.

Algemeen is dus $u_n = u_0 \cdot r^n$.

Bij een rij met een constante factor hoort een exponentieel verband. Bij het exponentiële verband $y = b \cdot g^n$ geldt immers: als n toeneemt met 1, dan wordt y steeds met hetzelfde getal g vermenigvuldigd.

In de directe formule van een rij met een constante factor komt u_0 dus overeen met b en komt r overeen met g .

Bij een rij is n altijd een geheel getal.

De letter r voor factor komt van het woord reden (verhouding). Je komt het woord nog tegen in evenredig (gelijke verhouding hebbend).

Bij een rij waarbij het quotiënt van twee opeenvolgende termen steeds hetzelfde getal is, hoort een exponentieel verband.

Van een rij u_n met constante factor r en beginterm u_0 is

- de recursieve formule $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met beginterm u_0
- de directe formule $u_n = u_0 \cdot r^n$.

Voorbeeld

Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,75 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 10$.

- a Stel de directe formule op.
- b Bereken de elfde term van de rij. Rond af op gehelen.
- c Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 75\,000$?

Uitwerking

- a Rij bij exponentieel verband met $u_0 = 10$ en $r = 1,75$, dus
 $u_n = 10 \cdot 1,75^n$.

- b De elfde term is $u_{10} = 10 \cdot 1,75^{10} \approx 2694$.

- c Voer in $y_1 = 10 \cdot 1,75^x$.

Uit de tabel volgt $x = 15$ geeft $y \approx 44\,215$ en

$x = 16$ geeft $y \approx 77\,376$.

Dus vanaf de 17^e term is $u_n > 75\,000$.

15 Gegeven is de rij u_n : 1250, 1500, 1800, 2160, 2592, ... met beginterm u_0 .



- a Laat zien dat bij deze rij een exponentieel verband hoort.
- b Stel de directe formule op van de rij.
- c Bereken de 13^e term. Rond af op gehelen.
- d Vanaf welke n is u_n groter dan 15 000?

A16 Stel de directe formule op van de volgende rijen.



- a $u_n = 0,5 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 200$
- b $u_n = 3,5 + u_{n-1}$ met $u_0 = 50$
- c $u_n = \frac{u_{n-1}}{0,4}$ met $u_0 = 14$

R17 Hieronder zie je nog eens de eerste vier rijen van opgave 1. Bij de rijen



A en C hoort een constant verschil en bij de rijen B en D hoort een constante factor.

Stel van elk van de rijen de directe formule op en gebruik deze om de tiende term te berekenen. Rond zo nodig af op twee decimalen.

A 11, 18, 25, 32, 39, ...

B 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

C 238, 206, 174, 142, 110, ...

D $121\frac{1}{2}$, 81, 54, 36, 24, ...

Terugblik

Rijen en lineaire verbanden

Een rij waarbij het verschil tussen twee opeenvolgende termen constant is, hoort bij een lineair verband.

Van een rij u_n met constant verschil v en beginterm u_0 is

- de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_0
- de directe formule $u_n = u_0 + v \cdot n$.

Van de rij 102, 99, 96, 93, 90, ... is $u_0 = 102$ en $v = -3$.

De recursieve formule is $u_n = u_{n-1} - 3$ met $u_0 = 102$.

De directe formule is $u_n = 102 - 3 \cdot n$.

Een van de termen van deze rij is 15.

De bijbehorende n volgt uit $102 - 3n = 15$, dus $-3n = -87$.

Dit geeft $n = 29$, dus de 30^e term is 15.

Rijen en exponentiële verbanden

Een rij waarbij het quotiënt van twee opeenvolgende termen constant is, hoort bij een exponentieel verband. Dit quotiënt heet de factor van de rij.

Van een rij u_n met constante factor r en beginterm u_0 is

- de recursieve formule $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met beginterm u_0
- de directe formule $u_n = u_0 \cdot r^n$.

Van de rij 100; 105; 110,25; 115,76; 121,55; ... is $u_0 = 100$ en $r = 1,05$.

De recursieve formule is $u_n = 1,05 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 100$.

De directe formule is $u_n = 100 \cdot 1,05^n$.

De twaalfde term is $u_{11} = 100 \cdot 1,05^{11} \approx 171,03$.

Om te berekenen vanaf welke n de termen groter zijn dan

500, voer je in $y_1 = 100 \cdot 1,05^x$. Uit de tabel hiernaast

volgt $u_{32} \approx 476,49$ en $u_{33} \approx 500,32$.

Dus vanaf $n = 33$ is $u_n > 500$.

NORM DRIJF AUTO REEEL RAD WN				
DRUK OP + VOOR TAB				
X	Y1			
25	338.64			
26	355.57			
27	373.35			
28	392.01			
29	411.61			
30	432.19			
31	453.8			
32	476.49			
33	500.32			
34	525.33			
35	551.6			
X=33				

12.2 Notaties en rijen op de GR



Gegeven is de rij 12, 15, 18, 21, 24, ... die bij een lineair verband hoort.

De recursieve formule is $u_n = u_{n-1} + 3$ met beginterm $u_0 = 12$.

Kim neemt beginterm $u_1 = 12$ en noteert de rij als $u_n = u_{n-1} + 3$ met beginterm $u_1 = 12$.

Licht toe dat dit een juiste notatie is. Welk voordeel heeft deze notatie?

Theorie A Beginterm u_0 of u_1

Gegeven is de rij 25, 29, 33, 37, ... die bij een lineair verband hoort.

Neem je als beginterm u_0 , dan is de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + 4$ met $u_0 = 25$ en de directe formule $u_n = 25 + 4 \cdot n$.

In sommige praktische situaties ligt het meer voor de hand om als beginterm u_1 te nemen.

De recursieve formule is dan $u_n = u_{n-1} + 4$ met $u_1 = 25$.

De directe formule is nu echter $u_n = 25 + 4 \cdot (n - 1)$.

Ga maar na. Je krijgt

$$u_1 = 25 + 4 \cdot (1 - 1) = 25 + 4 \cdot 0 = 25$$

$$u_2 = 25 + 4 \cdot (2 - 1) = 25 + 4 \cdot 1 = 29$$

$$u_3 = 25 + 4 \cdot (3 - 1) = 25 + 4 \cdot 2 = 33$$

Enzovoort.

Van een rij u_n met constant verschil v en beginterm u_1 is

- de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_1
- de directe formule $u_n = u_1 + v \cdot (n - 1)$.

Bij een rij die hoort bij een exponentieel verband krijg je iets soortgelijks.

Zo hoort bij de rij 120, 180, 270, 405, ... de recursieve formule

$$u_n = 1,5 \cdot u_{n-1} \text{ met } u_0 = 120, \text{ maar ook } u_n = 1,5 \cdot u_{n-1} \text{ met } u_1 = 120.$$

Bij deze laatste formule is $u_1 = 120$, $u_2 = 1,5 \cdot 120 = 180$, enzovoort.

Je hebt geleerd dat de directe formule is $u_n = 120 \cdot 1,5^n$ met beginterm u_0 .

Maar neem je beginterm u_1 , dan is de directe formule $u_n = 120 \cdot 1,5^{n-1}$.

Je krijgt dan: de eerste term is $u_1 = 120 \cdot 1,5^{1-1} = 120 \cdot 1,5^0 = 120$, de

tweede term is $u_2 = 120 \cdot 1,5^{2-1} = 120 \cdot 1,5^1 = 180$, enzovoort.

Van een rij u_n met constante factor r en beginterm u_1 is

- de recursieve formule $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met beginterm u_1
- de directe formule $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$.

Voorbeeld

Geef bij de volgende rijen de directe formule. Neem als eerste term u_1 .

- a 80, 75, 70, 65, 60, ...
- b 80, 40, 20, 10, 5, ...

Uitwerking

- a Rij bij lineair verband met $u_1 = 80$ en $v = -5$, dus $u_n = 80 - 5 \cdot (n - 1)$.
- b Rij bij exponentieel verband met $u_1 = 80$ en $r = 0,5$, dus $u_n = 80 \cdot 0,5^{n-1}$.

R19 Zie het voorbeeld.



De formule $u_n = 80 - 5 \cdot (n - 1)$ is te herleiden tot $u_n = 85 - 5 \cdot n$.

- a Laat deze herleiding zien.
- b Licht toe dat de formule $u_n = 85 - 5 \cdot n$ ook meteen bij de gegeven termen van de rij op te schrijven is.

De formule $u_n = 80 \cdot 0,5^{n-1}$ is te herleiden tot $u_n = 160 \cdot 0,5^n$.

- c Laat deze herleiding zien.
- d Licht toe dat de formule $u_n = 160 \cdot 0,5^n$ ook meteen bij de gegeven termen van de rij op te schrijven is.

20



Geef bij de volgende rijen de directe formule. Neem als eerste term u_1 .

- a 24, 30, $37\frac{1}{2}$, $46\frac{7}{8}$, ...
- b 63, 70, 77, 84, ...
- c 13,5; 12,8; 12,1; 11,4; ...
- d 1024, 256, 64, 16, ...

A21



Geef bij de volgende rijen de directe formule.

- a $u_n = u_{n-1} - 0,8$ met beginterm $u_1 = 12,6$
- b $u_n = \frac{2}{3} \cdot u_{n-1}$ met beginterm $u_1 = 36$

O22



Van de rij u_n is gegeven $u_2 = 12$ en $u_5 = 324$.

- a Als u_n bij een lineair verband hoort, dan is het constante verschil 104. Toon dit aan met een berekening.
- b Als u_n bij een exponentieel verband hoort, dan is de constante factor 3. Toon dit aan met een berekening.

Theorie B Formules opstellen bij gegeven termen

In opgave 22 heb je gezien dat bij een rij met de termen $u_2 = 12$ en $u_5 = 324$ het constante verschil 104 kan horen. Met beginterm u_0 is de directe formule van de vorm $u_n = u_0 + 104 \cdot n$. Vervolgens is u_0 te berekenen door te gebruiken dat $u_2 = 12$. Je krijgt $u_0 + 104 \cdot 2 = 12$ en dat geeft $u_0 = -196$.

Dus de directe formule is $u_n = -196 + 104 \cdot n$.

Bij de termen $u_2 = 12$ en $u_5 = 324$ kan ook de constante factor 3 horen. Met beginterm u_0 is de directe formule van de vorm $u_n = u_0 \cdot 3^n$. Invullen van $u_2 = 12$ geeft $u_0 \cdot 3^2 = 12$, dus $u_0 = 1\frac{1}{3}$. Dus de directe formule is $u_n = 1\frac{1}{3} \cdot 3^n$.

Voorbeeld

Van een rij u_n is gegeven $u_2 = 1800$ en $u_5 = 14\,400$.

- a Neem aan dat u_n bij een exponentieel verband hoort en stel de directe formule op.
- b Verder is gegeven dat $u_7 = 46\,656$.
Laat zien dat u_n niet bij een exponentieel verband hoort.

Uitwerking

- a Stel $u_n = u_0 \cdot r^n$.

$$r^3 = \frac{u_5}{u_2} = \frac{14\,400}{1800} = 8, \text{ dus } r = 8^{\frac{1}{3}} = 2.$$

$$u_n = u_0 \cdot 2^n \text{ en } u_2 = 1800 \text{ geeft } u_0 \cdot 2^2 = 1800, \text{ dus } u_0 = 450.$$

De directe formule is $u_n = 450 \cdot 2^n$.

- b Invullen van $n = 7$ in de formule geeft $u_7 = 450 \cdot 2^7 = 57\,600$.
 $57\,600 \neq 46\,656$, dus u_n hoort niet bij een exponentieel verband.



In de theorie is bij de gegevens $u_2 = 12$ en $u_5 = 324$ de directe formule opgesteld van zowel een rij die hoort bij een lineair verband als van een rij die hoort bij een exponentieel verband. Daarbij is als beginterm u_0 genomen.

Neem je als beginterm u_1 , dan krijg je dezelfde directe formules.

- a Toon dit aan.
- b Neem je bij dit soort situaties liever u_0 of u_1 als beginterm? Licht toe.



- a Van een rij u_n met constant verschil is gegeven $u_5 = 130$ en $u_{15} = 90$.
Stel van u_n de directe formule op.
- b Van een rij u_n met constante factor is gegeven $u_3 = 54$ en $u_{10} = 118\,098$.
Stel van u_n de directe formule op.

25

- A26**

A26

- E27**

E27

- 028

028

028

- 028

028

028

- 028

Ik ben bang dat ik u niet begrijp.

Zeg maar 's hoor.

Goed dan.

Maar 's, 's, 's, 's, 's, 's begrijp ik ock niet.

R29
□ ⊗ *

Gegeven is de rij met recursieve formule $u_n = u_{n-1} + 15$ met $u_1 = 100$ van opgave 28.

Geef van deze rij een directe formule

- a in de notatie $A_n = \dots$
- b in de notatie $A(n) = \dots$
- c in de notatie $A_{n+1} = \dots$

30
□ ⊗ *

a Gegeven is de rij $u_n = u_{n-1} + 2 \cdot n$ met $u_0 = 32$.

Schrijf de rij in de notatie $u(n+1) = \dots$

b Gegeven is de rij $u(n) = 3 \cdot 4^{n-1}$ met $u(0) = 8$.

Schrijf de rij in de notatie $u_{n+1} = \dots$

A31
□ ⊗ *

a Gegeven is de rij $u_n = u_{n-1} + 5 \cdot n$ met $u_0 = 100$.

Schrijf de rij in de notatie $u(n+1) = \dots$

b Gegeven is de rij $a(n+1) = 4 \cdot a(n) - 3$ met $a(0) = 12$.

Schrijf de rij in de notatie $a_n = \dots$

A32
□ ⊗ *

Bij het wereldrecord champagneglazen stapelen wordt een piramidevormige toren gebouwd. Elke laag van de toren heeft de vorm van een driehoek. Het aantal glazen in de n^{e} laag is $D_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

- a Bereken het aantal glazen in de bovenste laag.
- b De 21^e laag bevat meer glazen dan de 20^e laag.
Bereken hoeveel meer.

Het totale aantal glazen in een toren met n lagen is te berekenen met de formule $P_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. Hierin is P_n het n^{e} *piramidegetal*.

- c Uit hoeveel glazen bestaat een toren van 40 lagen?

Bij het wereldrecord in 2021 van een Nederlands team werd een toren bestaande uit 54 740 glazen gebouwd.

- d Uit hoeveel lagen bestond de toren en uit hoeveel glazen bestond de onderste laag?
- e Bij een volgende recordpoging wordt de toren één laag hoger.
Hoeveel extra glazen zijn er nodig?



Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,5 \cdot u_{n-1} - 4$ met $u_0 = 10$.

- Bereken de achtste term. Rond af op één decimaal.
- Wat is de eerste term die groter is dan 500?

Theorie D Het rijen-invoerscherm van de GR

De recursieve formule van opgave 33 kun je doorrekenen op het basisscherm van de GR. Maar om de vragen van opgave 33 te beantwoorden, is het handig om een tabel bij de rij te hebben. Dat lukt door de rij in te voeren op het rijen-invoerscherm van de GR. Nadat de rij is ingevoerd, kun je een tabel laten maken.

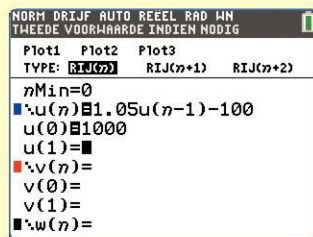
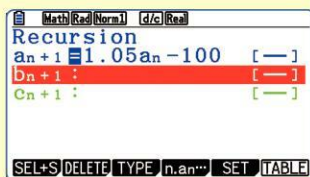
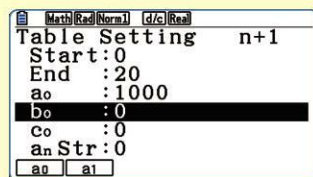
[►GR] Hoe je een rij invoert op de GR en hierbij een tabel maakt, leer je in de module **Het rijen-invoerscherm**. Neem eerst deze module door.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde is de recursieve formule

$$K_n = 1,05 \cdot K_{n-1} - 100 \text{ met } K_0 = 1000 \text{ gegeven.}$$

Het hangt van het merk GR af hoe je deze rij invoert.

- Op de TI voer je in $u(n) = 1,05u(n-1) - 100$ met $n\text{Min} = 0$ en $u(0) = 1000$.
- Op de HP voer je in $U1(N) = 1,05U1(N-1) - 100$ met Start N: 0 en $U1(0) = 1000$.
- Op de NW voer je in $u_{n+1} = 1,05u_n - 100$ met $u_0 = 1000$.
- Op de Casio voer je in $a_{n+1} = 1,05a_n - 100$ met Start: 0 en $a_0 = 1000$.



In de uitwerking van het voorbeeld op de volgende bladzijde wordt de invoer van de vier rekenmachines niet apart genoemd. Er staat:

Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.

Het is echter verstandig om in jouw uitwerking op te schrijven wat jij invoert. Dus als je een TI hebt, dan schrijf je op:

Voer in $u(n) = 1,05u(n-1) - 100$ met $n\text{Min} = 0$ en $u(0) = 1000$.

Voorbeeld

Gegeven is de recursieve formule $K_n = 1,05 \cdot K_{n-1} - 100$ met $K_0 = 1000$.

- a Voor welke waarden van n ligt K_n tussen 500 en 600?
- b Vanaf welke waarde van n is $K_n < 0$?

Uitwerking

- a Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $K_6 \approx 659,9$; $K_7 \approx 592,9$; $K_8 \approx 522,5$ en $K_9 \approx 448,7$.

Dus voor $n = 7$ en $n = 8$ ligt K_n tussen 500 en 600.

- b $K_{14} \approx 20,1$ en $K_{15} \approx -78,9$
Dus vanaf $n = 15$ is $K_n < 0$.

NORM DRIJF AUTO REEEL RAD HN				
DRUK OP + VOOR TAB				
n	u(n)			
0	1000			
1	950			
2	897,5			
3	842,38			
4	784,49			
5	723,72			
6	659,9			
7	592,9			
8	522,54			
9	448,67			
10	371,11			
n=0				

- 34** Gegeven is de recursieve formule $L(n) = 0,96 \cdot L(n-1) + 200$ met $L(0) = 1000$.

- a Voor welke waarden van n ligt $L(n)$ tussen 2000 en 2500?
- b Vanaf welke waarde van n is $L(n) > 3000$?

- 35** Gegeven is de recursieve formule $P_{n+1} = 1,25 \cdot P_n - 100$ met $P_1 = 500$.

- a Voor welke waarden van n ligt P_n tussen 1000 en 1500?
- b Vanaf welke waarde van n is $P_n > 5000$?

- 36** Gegeven is de recursieve formule $G(n+1) = 500 - 1,06 \cdot G(n)$ met $G(1) = 100$.

- a De hoeveelste term is de eerste die negatief is?
- b Hoeveel termen liggen tussen 500 en 700?

- 37** Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,5 \cdot u_{n-1} + 2n$ met $u_0 = 10$.

- a Bereken in twee decimalen de tiende term van de rij.
- b Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 10000$?

- A38** Gegeven is de recursieve formule $H_k = 1,15 \cdot H_{k-1} + \frac{100}{H_{k-1}}$ met $H_1 = 100$.

- a Welke term ligt het dichtst bij 275?
- b Hoeveel termen zijn kleiner dan 1000?
- c Voor welke waarde van k is $H_k - H_{k-1}$ voor het eerst groter dan 200?

A39
 *

In figuur 12.1 zie je een toren van kubussen die bestaat uit vier lagen. Je ziet dat laag 1 bestaat uit 10 kubussen, laag 2 uit 8 kubussen, laag 3 uit 5 kubussen en laag 4 uit 1 kubus.

Voor het aantal kubussen A_n in laag n van deze toren geldt de formule $A_n = A_{n-1} - n$ met $A_1 = 10$.

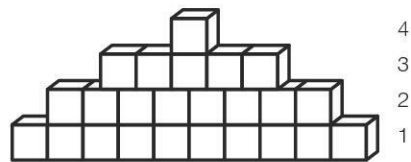
- a** Laat zien dat de formule $A_n = A_{n-1} - n$ met $A_1 = 10$ hoort bij de toren in figuur 12.1.

Voor een toren geldt de formule $A_n = A_{n-1} - n$ met $A_1 = 100$.

- b** Uit hoeveel lagen bestaat deze toren? Hoeveel kubussen heeft de bovenste laag van deze toren?

Joop wil een toren van 20 lagen maken waarbij de formule $A_n = A_{n-1} - n$ hoort.

- c** Welke waarden kan Joop voor A_1 kiezen?



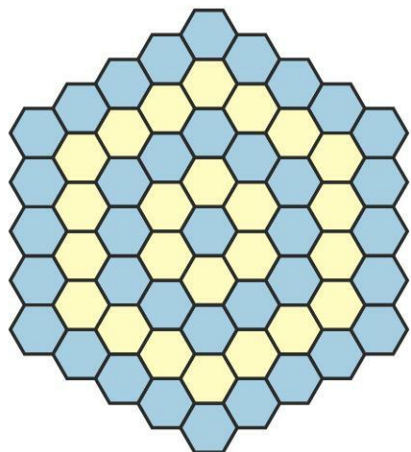
figuur 12.1

A40
 *

In de figuur hiernaast zie je een patroon dat is opgebouwd uit regelmatige zeshoeken. In het midden zit een blauwe zeshoek en daaromheen zitten om en om ringen die bestaan uit gele zeshoeken en ringen die bestaan uit blauwe zeshoeken. De eerste ring bevat zes gele zeshoeken, de tweede ring bevat twaalf blauwe zeshoeken, enzovoort.

Het aantal zeshoeken in de n^e ring is $A(n)$. Bij deze rij hoort een lineair verband.

- a** Stel van $A(n)$ de directe en de recursieve formule op.
b De hoeveelste ring bevat 240 zeshoeken? Zijn deze zeshoeken geel of blauw?



figuur 12.2

We bekijken nu alleen de ringen met de blauwe zeshoeken.

Dus de eerste ring bevat nu twaalf zeshoeken. Het aantal blauwe zeshoeken in de p^e ring van de blauwe zeshoeken is $B(p)$.

- c** Stel van $B(p)$ de directe en de recursieve formule op.

Bekijk alleen de ringen met de gele zeshoeken.

Het aantal gele zeshoeken in de q^e ring van de gele zeshoeken is $G(q)$.

- d** Stel van $G(q)$ de directe en de recursieve formule op.

Terugblik

Beginterm u_0 of u_1

Bij de recursieve formule van een rij hoort een beginterm. Deze beginterm kan u_0 of u_1 zijn.

Van een rij u_n met constant verschil v en beginterm u_1 is

- de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_1
- de directe formule $u_n = u_1 + v \cdot (n - 1)$.

Van een rij u_n met constante factor r en beginterm u_1 is

- de recursieve formule $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met beginterm u_1
- de directe formule $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$.

Formules opstellen bij gegeven termen

De rij u_n met $u_3 = 12\,800$ en $u_5 = 8192$ kan bij een lineair verband of een exponentieel verband horen.

Als u_n een rij is bij een lineair verband en de beginterm is u_0 , dan is de directe formule van de vorm $u_n = u_0 + v \cdot n$.

$$\text{Je krijgt } v = \frac{8192 - 12\,800}{5 - 3} = -2304.$$

Uit $u_3 = 12\,800$ volgt $u_0 + (-2304) \cdot 3 = 12\,800$ en dit geeft $u_0 = 19\,712$.

$$\text{Dus } u_n = 19\,712 - 2304 \cdot n.$$

Als u_n een rij is bij een exponentieel verband en de beginterm is u_0 , dan is de directe formule van de vorm $u_n = u_0 \cdot r^n$.

$$\text{Je krijgt } r^2 = \frac{u_5}{u_3} = \frac{8192}{12\,800} = 0,64, \text{ dus } r = 0,8.$$

Uit $u_3 = 12\,800$ volgt $u_0 \cdot 0,8^3 = 12\,800$ en dit geeft $u_0 = 25\,000$.

$$\text{Dus } u_n = 25\,000 \cdot 0,8^n.$$

Verschillende notaties bij rijen

Behalve de notatie met u_n kom je ook andere notaties tegen, bijvoorbeeld met de letter A in plaats van u , of de notatie met $u(n)$ of u_{n+1} .

De rij $u_n = 1,03 \cdot u_{n-1} - 500 \cdot n$ met $u_0 = 15\,000$ wordt met deze notaties

- $A_n = 1,03 \cdot A_{n-1} - 500 \cdot n$ met $A_0 = 15\,000$
- $u(n) = 1,03 \cdot u(n-1) - 500 \cdot n$ met $u(0) = 15\,000$
- $u_{n+1} = 1,03 \cdot u_n - 500 \cdot (n+1)$ met $u_0 = 15\,000$.

Het rijen-invoerscherm van de GR

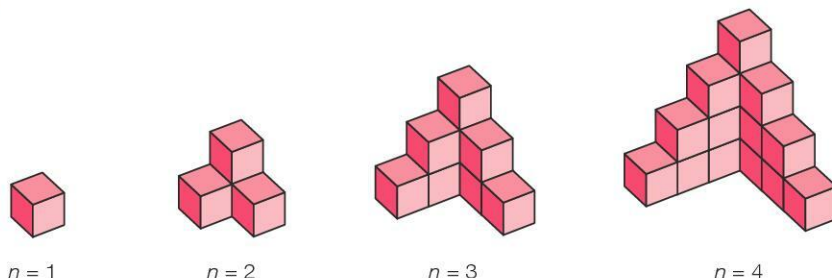
De rij $u_n = 1,03 \cdot u_{n-1} - 500 \cdot n$ met $u_0 = 15\,000$ is niet door te rekenen op het basisscherm. Je rekent deze rij door op het rijen-invoerscherm.

Ook een recursieve formule als $u_n = 2 \cdot u_{n-1} - 3 \cdot u_{n-2}$ met $u_0 = 5$ en $u_1 = 10$ en een directe formule als $u_n = 2n^2 - 3n + 4$ kun je doorrekenen op het rijen-invoerscherm.

12.3 Rijen en meetkundige figuren

041
□ ⊗ *

Hieronder zie je een rij met bouwwerken van gestapelde kubussen.



figuur 12.3

- Tel voor elk van de vier bouwwerken uit hoeveel kubussen het bestaat.
- Stel een directe formule op voor het aantal kubussen K_n in het n^e bouwwerk.
- Bereken voor elk bouwwerk het verschil in het aantal kubussen in het betreffende bouwwerk en het volgende bouwwerk. Laat zien dat bij deze verschillen een lineair verband hoort.

Theorie A Van directe formule naar recursieve formule

Bij opgaven met rijen kun je te maken krijgen met meetkundige figuren, zoals in opgave 41. Vaak kun je daarbij niet gebruikmaken van de formules die horen bij rijen met constante verschillen of constante factoren.

In het voorbeeld hieronder is de directe formule gegeven en wordt hiermee de recursieve formule afgeleid.

Voorbeeld

Zie de bouwwerken in opgave 41. De directe formule voor het aantal kubussen K_n in het n^e bouwwerk is $K_n = n^2$.

Leid de recursieve formule van K_n af met behulp van de directe formule.

Aanpak

Voor de recursieve formule geldt $K_n = K_{n-1} + \dots$ oftewel $K_n - K_{n-1} = \dots$. Bereken wat op de puntjes moet staan door $K_n - K_{n-1}$ uit te drukken in n . Gebruik dat $K_{n-1} = (n-1)^2$.

Uitwerking

$$K_{n-1} = (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$$

$$K_n - K_{n-1} = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1$$

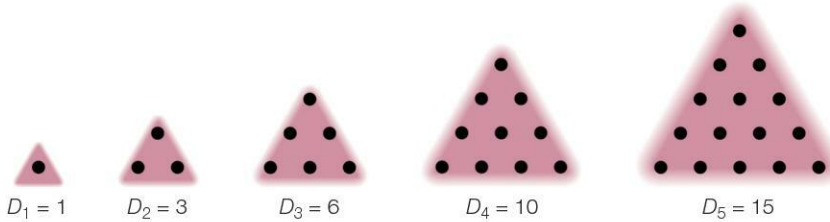
Dus $K_n = K_{n-1} + 2n - 1$ met $K_1 = 1$.

Bij het verschil hoort een lineair verband.



42
□ ⊙ *

In figuur 12.4 staan de eerste vijf *driehoeksgetallen*.



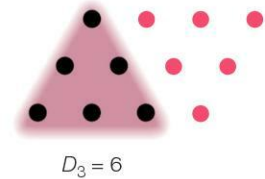
figuur 12.4

Het n^e driehoeksgetal D_n is te berekenen met de directe formule $D_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

- Bereken het twaalfde driehoeksgetal.
- Het hoeveelste driehoeksgetal is 325?
- Leid de recursieve formule van D_n af met behulp van de directe formule.

E43
*

In opgave 42 is de directe formule van D_n gegeven. Je kunt aantonen dat deze formule juist is. Doe dit door gebruik te maken van het idee van figuur 12.5.



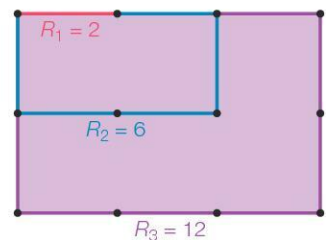
figuur 12.5

44
□ *

In figuur 12.6 staan de eerste drie *rechthoeksgetallen* uitgebeeld.

Het n^e rechthoeksgetal R_n is te berekenen met de directe formule $R_n = n^2 + n$.

- Toon aan dat deze formule juist is.
- Het hoeveelste rechthoeksgetal is 156?
- Leid de recursieve formule van R_n af met behulp van de directe formule.



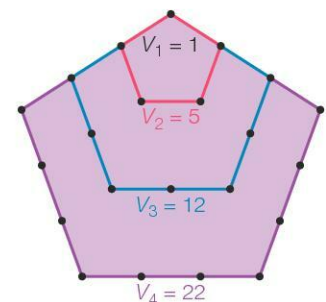
figuur 12.6

A45
□ ⊙ *

In figuur 12.7 staan de eerste vier *vijfhoeksgetalen* uitgebeeld.

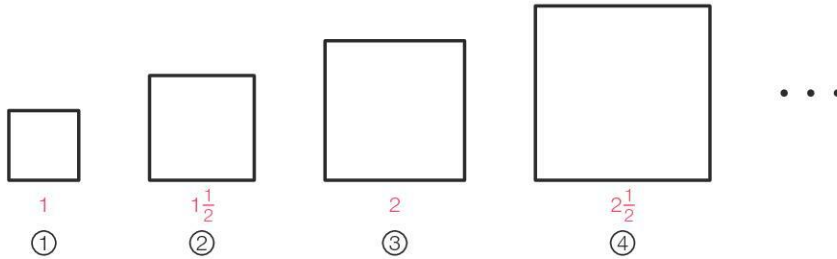
Het n^e vijfhoeksgetal V_n is te berekenen met de directe formule $V_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$. Bij de vijfhoeksgetalen hoort ook een recursieve formule.

Stel deze recursieve formule op.



figuur 12.7

Hieronder zie je een rij vierkanten.



figuur 12.8

Vierkant 1 heeft zijde 1, vierkant 2 heeft zijde $1\frac{1}{2}$, enzovoort.

Voor vierkant n geldt voor de zijde $z(n)$ de recursieve formule $z(n) = z(n-1) + \frac{1}{2}$ met $z(1) = 1$. De directe formule is $z(n) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$.

- Bereken de zijde van vierkant 11.
- Van welk vierkant is de zijde 10?

Voor de oppervlakte $O(n)$ van vierkant n is de directe formule

$$O(n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}.$$

- Bereken van welke vierkanten de oppervlakte tussen 125 en 150 ligt.
- Leid de recursieve formule van $O(n)$ af met behulp van de directe formule.

Theorie B Regelmaat bij meetkundige figuren

De vierkanten in opgave 46 zijn voorbeelden van meetkundige figuren. Meetkundige figuren in twee dimensies worden vlakke figuren genoemd. Voorbeelden zijn vierkanten, rechthoeken, driehoeken en cirkels. In drie dimensies spreken we van ruimtelijke figuren. Dat zijn bijvoorbeeld kubussen, balken, piramides en bollen.

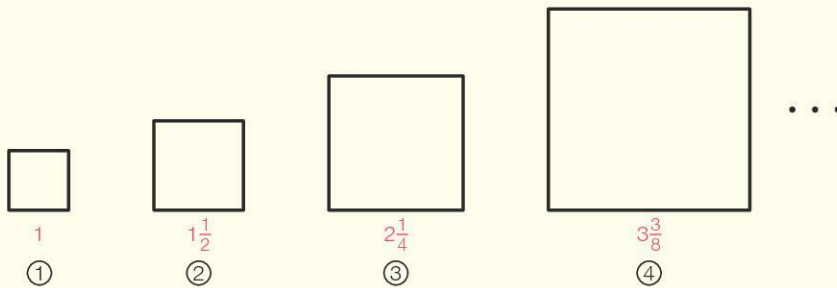
In de komende opgaven krijg je steeds te maken met rijen van meetkundige figuren, waarin een zekere regelmaat zit. Deze regelmaat kan zowel een constant verschil, als een constante factor zijn.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde heb je te maken met een rij vierkanten waarbij elk vierkant een vergroting is van het voorafgaande vierkant.

In hoofdstuk 8 heb je geleerd dat bij het vergroten van een figuur met vergrotingsfactor k elke afmeting met k wordt vermenigvuldigd. Daardoor worden oppervlakten met k^2 en (bij ruimtefiguren) inhoudten met k^3 vermenigvuldigd.

Voorbeeld

Gegeven is de volgende rij vierkanten.



figuur 12.9

Elk volgend vierkant ontstaat door de lengte van de zijden van het vierkant ervoor met $1\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen. De lengte van de zijden van het n^e vierkant is Z_n .

- a Stel van Z_n een recursieve en een directe formule op.
- b Vanaf welke n is $Z_n > 100$?

De omtrek van het n^e vierkant is P_n .

- c Stel van P_n een recursieve en een directe formule op.

De oppervlakte van het n^e vierkant is O_n .

- d Stel van O_n een recursieve formule op.

Voor O_n geldt $O_n = \frac{4}{9} \cdot (2\frac{1}{4})^n$.

- e Toon dit aan.
- f Bereken de som van de oppervlakten van de eerste drie vierkanten.

Uitwerking

- a recursieve formule $Z_n = 1\frac{1}{2} \cdot Z_{n-1}$ met $Z_1 = 1$
directe formule $Z_n = 1 \cdot (1\frac{1}{2})^{n-1}$ oftewel $Z_n = (1\frac{1}{2})^{n-1}$
- b Voer in $y_1 = (1\frac{1}{2})^{x-1}$.
Uit de tabel volgt $Z_{12} \approx 86,5$ en $Z_{13} \approx 129,7$.
Dus vanaf $n = 13$ is $Z_n > 100$.
- c recursieve formule $P_n = 1\frac{1}{2} \cdot P_{n-1}$ met $P_1 = 4$
directe formule $P_n = 4 \cdot (1\frac{1}{2})^{n-1}$
- d lengte zijden keer $1\frac{1}{2}$, dus oppervlakte keer $(1\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{4}$.
Dus $O_n = 2\frac{1}{4} \cdot O_{n-1}$ met $O_1 = 1$.
- e $O_n = O_1 \cdot r^{n-1}$ met $r = (1\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{4}$.
Dus $O_n = 1 \cdot (2\frac{1}{4})^{n-1} = (2\frac{1}{4})^n \cdot (2\frac{1}{4})^{-1} = \frac{4}{9} \cdot (2\frac{1}{4})^n$.
- f $O_1 + O_2 + O_3 = \frac{4}{9} \cdot (2\frac{1}{4})^1 + \frac{4}{9} \cdot (2\frac{1}{4})^2 + \frac{4}{9} \cdot (2\frac{1}{4})^3 = 8,3125$

$$\begin{aligned} P_1 &= 4 \\ P_2 &= 6 \\ P_3 &= 9 \\ \text{dus } r &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

R47
☐ ⊙ *

Zie het voorbeeld.

De lengte van de zijden wordt met $1\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd.

a Hoe volgt hieruit dat ook de omtrek met $1\frac{1}{2}$ wordt vermenigvuldigd?

De directe formule van O_n is ook op te stellen door te gebruiken dat

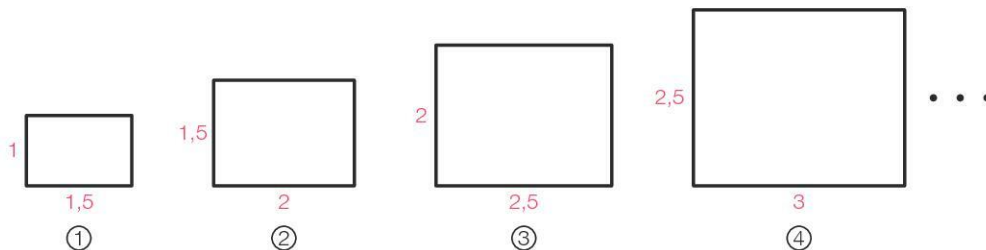
$$O_n = (Z_n)^2.$$

b Licht toe dat geldt $O_n = (Z_n)^2$.

c Toon aan dat ook hieruit volgt $O_n = \frac{4}{9} \cdot (2\frac{1}{4})^n$.

48
☐ ⊙

Gegeven is de volgende rij rechthoeken.



figuur 12.10

Van rechthoek 5 zijn de lengten van de zijden 3,5 en 3.

a Licht dit toe.

De lengte van de lange zijde van de n^e rechthoek is L_n .

De lengte van de korte zijde van de n^e rechthoek is K_n .

b Stel zowel van L_n als van K_n een recursieve en een directe formule op.

De omtrek van de n^e rechthoek is P_n .

c Stel van P_n een recursieve en een directe formule op.

d Vanaf welke n is $P_n > 50$?

De oppervlakte van de n^e rechthoek is O_n . Voor O_n geldt de directe formule $O_n = 0,25n^2 + 0,75n + 0,5$.

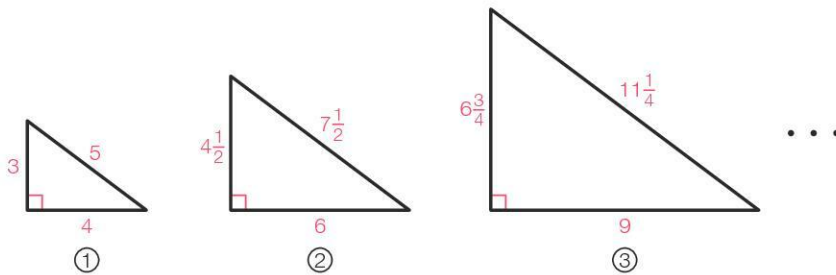
e Laat zien hoe deze formule uit de directe formule van L_n en de directe formule van K_n volgt.

f Vanaf welke n is $O_n > 100$?

g Leid de recursieve formule van O_n af met behulp van de directe formule.

h Bereken de som van de oppervlakten van de eerste vier rechthoeken.

Gegeven is de volgende rij rechthoekige driehoeken.



figuur 12.11

Van driehoek 4 zijn de lengten van de rechthoekszijden $13\frac{1}{2}$ en $10\frac{1}{8}$.

a Licht dit toe.

De lengte van de lange rechthoekszijde van de n^e rechthoekige driehoek is $L(n)$. De lengte van de korte rechthoekszijde van de n^e rechthoekige driehoek is $K(n)$.

b Stel zowel van $L(n)$ als van $K(n)$ een recursieve en een directe formule op.

De omtrek van de n^e rechthoekige driehoek is $P(n)$.

De recursieve formule van $P(n)$ is $P(n) = 1\frac{1}{2} \cdot P(n-1)$ met $P(1) = 12$ en de directe formule is $P(n) = 8 \cdot (1\frac{1}{2})^n$.

c Toon aan dat deze formules juist zijn.

d Vanaf welke n is $P(n) > 1000$?

De oppervlakte van de n^e rechthoekige driehoek is $O(n)$.

Voor $O(n)$ geldt de directe formule $O(n) = 2\frac{2}{3} \cdot (2\frac{1}{4})^n$.

e Toon aan dat deze formule juist is.

f Vanaf welke n is $O(n) > 1000$?

g Bereken de som van de oppervlakten van de vierde, vijfde en zesde rechthoekige driehoek. Rond af op twee decimalen.



Het kunstwerk 'De rode driehoeken' van André Volten staat in Deventer.

50



Van een rij rechthoeken delen we telkens de breedte door de lengte. Zo

krijg je de rij $\frac{7}{8}, \frac{9}{11}, \frac{11}{14}, \frac{13}{17}, \frac{15}{20}, \frac{17}{23}, \dots$

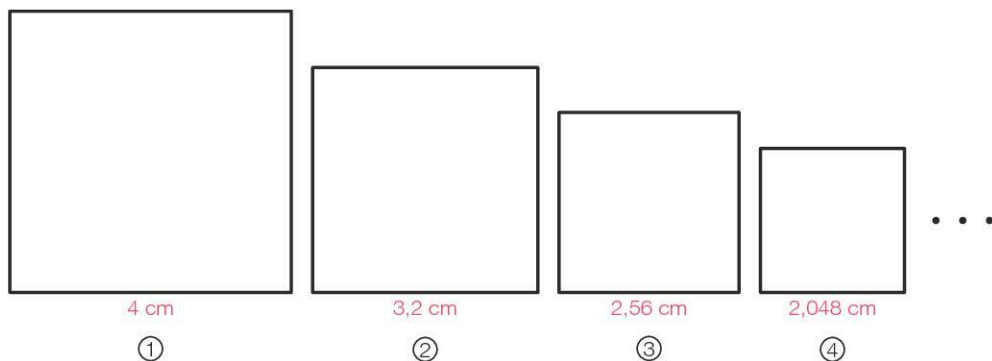
We noemen deze rij u_n , de breedte van de n^e rechthoek B_n en de lengte van de n^e rechthoek L_n . Er geldt dus dat $u_n = \frac{B_n}{L_n}$.

- Geef de directe formule van u_n .
- De lengte van de n^e rechthoek is n meer dan de breedte van de n^e rechthoek.
Toon dit aan.
- Voor grote waarden van n geldt dat $L_n \approx p \cdot B_n$.
Geef de waarde van p in één decimaal.
- Bereken vanaf welke n de oppervlakte van de rechthoek meer is dan 1000.

A51



Gegeven is de volgende rij vierkanten.



figuur 12.12

Elk volgend vierkant ontstaat door de lengte van de zijde van het vierkant ervoor met 0,8 te vermenigvuldigen. De lengte van de zijde van het n^e vierkant is Z_n .

- Stel van Z_n een recursieve en een directe formule op.
- Vanaf welke n is de zijde van het vierkant minder dan 1 cm?

De oppervlakte in cm^2 van het n^e vierkant is O_n .

- Stel van O_n een recursieve formule op.
- De directe formule van O_n is te schrijven als $O_n = a \cdot b^n$.
Bereken a en b .
- Vanaf welke n is de oppervlakte van het vierkant minder dan $0,1 \text{ cm}^2$?
- Bereken de som van de oppervlakten van de eerste vijf vierkanten.
Rond af op twee decimalen.

A52
  

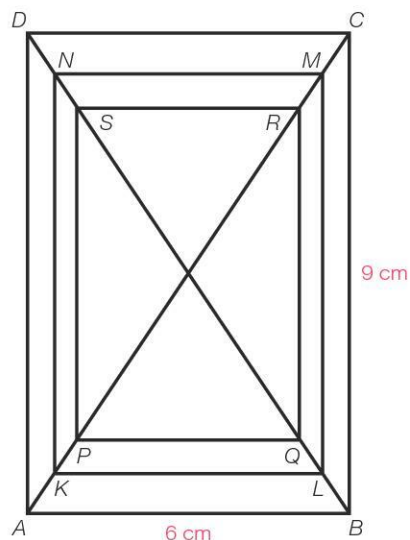
Gegeven is de rechthoek $ABCD$ met $AB = 6$ cm en $BC = 9$ cm. In de rechthoek wordt een kleinere rechthoek $KLMN$ getekend zo, dat $KL = \frac{5}{6} \cdot AB$ en $LM = \frac{5}{6} \cdot BC$. Dit proces wordt voortdurend herhaald, dus $PQ = \frac{5}{6} \cdot KL$ en $QR = \frac{5}{6} \cdot LM$, enzovoort. Zie de figuur hiernaast.

We noemen rechthoek $ABCD$ de eerste rechthoek, rechthoek $KLMN$ de tweede rechthoek, enzovoort. De omtrek in cm van de n^e rechthoek is $P(n)$.

- Stel voor $P(n)$ een directe formule op.
- Bereken vanaf welke n geldt $P(n) < 1$ cm.

De oppervlakte in cm^2 van de n^e rechthoek is $O(n)$. Voor $O(n)$ geldt $O(n) = a \cdot b^n$.

- Bereken a en b .
- Vanaf welke n is $O(n) < 0,1 \text{ cm}^2$?



figuur 12.13

A53
  

Gegeven is het vierkant $ABCD$ met zijde 7 cm. In het vierkant wordt een kleiner vierkant $PQRS$ getekend zo, dat $AP = BQ = CR = DS = \frac{3}{7} AB$. Op dezelfde manier wordt in vierkant $PQRS$ een kleiner vierkant $KLMN$ getekend. Dus $PK = \frac{3}{7} PQ$. Dit proces wordt voortdurend herhaald. Zie figuur 12.14.

De lengten van de zijden van de opeenvolgende vierkanten vormen een rij met constante factor. Deze constante factor is $\frac{5}{7}$.

- Toon aan dat deze constante factor inderdaad $\frac{5}{7}$ is.

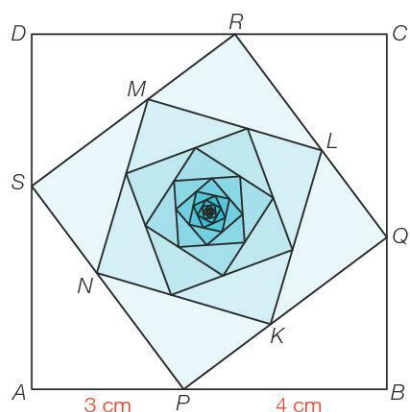
We noemen vierkant $ABCD$ het eerste vierkant, vierkant $PQRS$ het tweede vierkant, enzovoort.

De omtrek in cm van het n^e vierkant is $P(n)$.

- Stel van $P(n)$ een directe formule op en bereken vanaf welke n de omtrek minder is dan 1 cm.

De oppervlakte in cm^2 van het n^e vierkant is $O(n)$.

- Stel van $O(n)$ een recursieve en directe formule op.
- Vanaf welke n is $O(n) < 0,01 \text{ cm}^2$?



figuur 12.14

A54
□ ⊙ *

Van een rij driehoeken geldt voor de basis van de n^e driehoek de formule $b_n = 2n + 2$. Voor de hoogte van de n^e driehoek geldt $h_n = 6 + (-1)^n$.

- a Bereken de oppervlakten van de eerste drie driehoeken waarbij n oneven is. Welke regelmaat zie je?
- b Bereken de oppervlakten van de eerste drie driehoeken waarbij n even is. Welke regelmaat zie je?
- c Bereken van de hoeveelste driehoek de oppervlakte gelijk is aan 175.
- d De oppervlakte van driehoek $n + 1$ is 35 meer dan de oppervlakte van driehoek n .
Bereken n .

A55
*

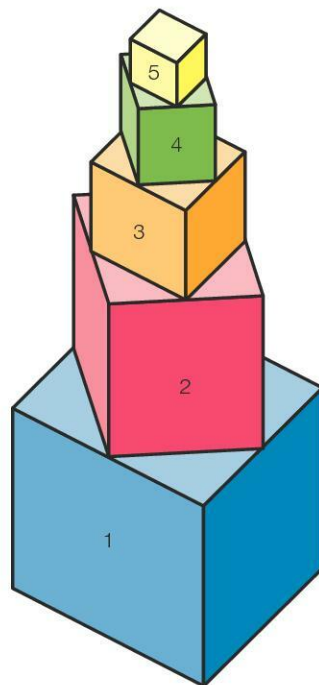
In figuur 12.15 zie je een stapel van vijf kubussen.

De ribbe van kubus 1 is 6 cm en de ribbe van kubus 5 is 1,5 cm.

De ribben van de opeenvolgende kubussen worden steeds met een vaste factor r vermenigvuldigd.

Afgerond op twee decimalen is $r = 0,71$.

- a Bereken deze factor r in vier decimalen.
- b Bereken in mm nauwkeurig de hoogte van de stapel.

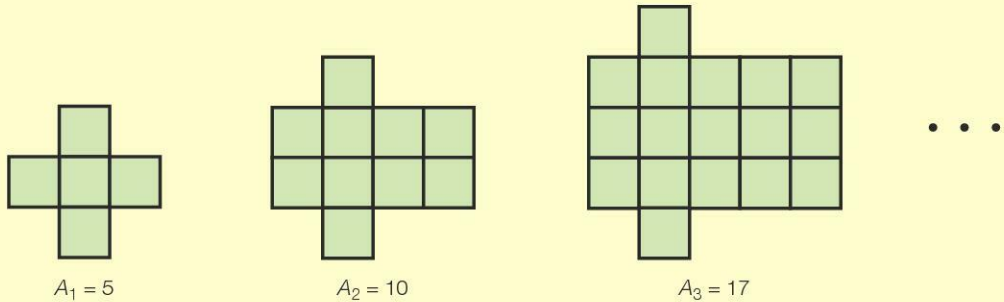


figuur 12.15

Terugblik

Van directe formule naar recursieve formule

Rebecca maakt met vierkanten een patroon. Zie de figuur hieronder. De directe formule voor het aantal vierkanten A_n dat nodig is voor het n^e patroon is $A_n = n^2 + 2n + 2$.



Je kunt de recursieve formule van A_n als volgt afleiden uit de directe formule.

$$A_{n-1} = (n-1)^2 + 2(n-1) + 2 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 2 + 2 = n^2 + 1$$

$$A_n - A_{n-1} = n^2 + 2n + 2 - (n^2 + 1) = n^2 + 2n + 2 - n^2 - 1 = 2n + 1$$

Dus $A_n = A_{n-1} + 2n + 1$ met $A_1 = 5$.

Regelmaat bij meetkundige figuren

In de figuur hiernaast zie je een rij gelijkvormige driehoeken. De eerste driehoek heeft rechthoekszijden 3 en 4. Elke volgende driehoek is een vergroting van de driehoek ervoor met vergrotingsfactor 1,25.

De directe formule van de lengte $K(n)$ van de korte rechthoekszijde van de n^e rechthoekige driehoek is $K(n) = 3 \cdot 1,25^{n-1}$.

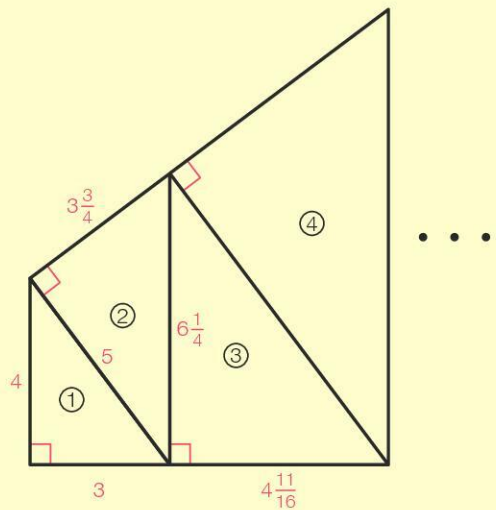
Voor de lengte van de lange rechthoekszijde geldt $L(n) = 4 \cdot 1,25^{n-1}$.

Voor de oppervlakte $O(n)$ krijg je de directe formule

$$O(n) = O(1) \cdot (1,25^2)^{n-1} = 6 \cdot 1,5625^{n-1} = 6 \cdot 1,5625^{-1} \cdot 1,5625^n = 3,84 \cdot 1,5625^n.$$

Omdat je hier met een vergrotingsfactor te maken hebt, is het niet nodig om de formule van $O(n)$ op te stellen met $O(n) = \frac{1}{2} \cdot K(n) \cdot L(n)$.

De som van de oppervlakten van de eerste vier gelijkvormige driehoeken is $O(1) + O(2) + O(3) + O(4)$.



Eindopdracht Fibonacci en het gulden getal

In de beginopdracht heb je kunnen rekenen aan het aantal manieren A om een trap van n treden op te lopen. Daarbij gingen we ervan uit dat je nooit een stap terug doet en altijd 1 óf 2 treden tegelijk neemt. Leo bedacht bijvoorbeeld dat je op de vierde trede komt door een stap van 1 trede vanaf de derde trede, óf door een stap van 2 treden vanaf de tweede trede.

De recursieve formule voor het aantal manieren A om op de n^e trede te komen (met $n > 2$) is $A(n) = A(n-1) + A(n-2)$ met $A(1) = 1$ en $A(2) = 2$.

- Licht dit toe aan de hand van het idee van Leo.
- Uit hoeveel treden bestaat een trap die je op de beschreven manier op 89 manieren op kunt lopen? En op hoeveel manieren kun je zo een trap van 16 treden oplopen? Kijk eventueel in de GR-module hoe je deze recursieve formule invoert op het rijen-invoerscherm.

De rij $A(n)$ is een variant op de rij van Fibonacci.

Ook bij de rij van Fibonacci is elke term de som van de twee voorafgaande termen. De recursieve formule is

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \text{ met } f(1) = 1 \text{ en } f(2) = 1.$$

Deze rij is vernoemd naar de Italiaanse wiskundige en koopman Leonardo van Pisa (1175-1250), bijgenaamd Fibonacci. De getallen in deze rij komen terug op allerlei plekken in de wiskunde, economie, kunst en natuur. Voorbeelden in de natuur zijn de verdeling van takken aan bomen en de ordening van de schubben van een dennenappel.

De rij van Fibonacci heeft bijzondere eigenschappen, waarvan je er een aantal gaat onderzoeken met de GR.

- Je kunt als volgt controleren dat een getal m in de rij van Fibonacci zit: er geldt dan dat $5m^2 + 4$ óf $5m^2 - 4$ een kwadraat is van een geheel getal. Bijvoorbeeld: voor $m = 8$ geldt dat $5 \cdot 8^2 + 4 = 324$ en dat is het kwadraat van 18. Dus 8 zit in de rij van Fibonacci. Controleer op deze manier of 987, 1024, 2585 en 4181 in de rij van Fibonacci zitten.
- Er geldt $f(n-1) \cdot f(n+1) = (f(n))^2 + (-1)^{n+1}$. Laat dit zien met twee getallenvoorbeelden.
- Bereken in drie decimalen $\frac{f(10)}{f(9)}$, $\frac{f(11)}{f(10)}$, $\frac{f(12)}{f(11)}$ en $\frac{f(13)}{f(12)}$. Welk vermoeden krijg je?

In figuur 12.16 geldt $AB : BC = AC : AB$.

Stel $BC = 1$ en $AB = \varphi$.

Uit de verhouding volgt dan dat $\varphi^2 = \varphi + 1$.

- Laat dit zien.



figuur 12.16

De positieve oplossing van deze vergelijking is $\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,618$.

- Controleer dat $\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ inderdaad een oplossing van de vergelijking $\varphi^2 = \varphi + 1$ is.

Het getal φ wordt het *gulden getal* genoemd. De verdeling van het lijnstuk in figuur 12.16 heet de *gulden snede* en komt in hoofdstuk 13 aan bod. Het gulden getal blijkt allerlei relaties te hebben met de rij van Fibonacci. Eén van die relaties ben je tegengekomen in de laatste vraag op de vorige bladzijde.

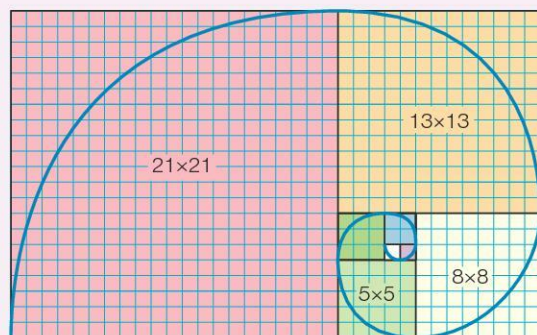
- Omschrijf in woorden wat die relatie is.

Net als je in de beginopdracht hebt kunnen zien dat er een directe formule is voor $A(n)$, is er ook een directe formule voor de rij van

Fibonacci. Deze formule is $f(n) = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})^n - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}$.

- Schrijf deze formule met behulp van φ .

In figuur 12.17 is de zogeheten fibonacci-spiraal getekend. Deze spiraal blijkt een goede benadering te zijn van de *gulden spiraal*. De gulden spiraal kom je op allerlei gebieden tegen, net als de rij van Fibonacci, het gulden getal en de gulden snede. Zo is de Trap van Bramante in het Vaticaan, die je ziet op de openingsfoto van dit hoofdstuk, gebaseerd op de gulden spiraal.



figuur 12.17

- Leg aan de hand van de figuur uit hoe je de fibonacci-spiraal kunt tekenen. Zoek eventueel extra informatie op internet.
- Zoek op de kaft van je wiskundeboek waar de rij van Fibonacci terugkomt.

Diagnostische toets

12.1 Rijen en verbanden

- 1** **a** Gegeven is de rij $u_n = n^2 + 0,5n + 5$ met beginterm u_0 .
Bereken van deze rij de vijfde en tiende term.
- b** Gegeven is de rij $u_n = u_{n-1} + \sqrt{3 + u_{n-1}}$ met beginterm $u_0 = 1$.
Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 20$?
- 2** Gegeven is de rij $u_n : 3125, 2500, 1875, 1250, \dots$ met beginterm u_0 , die hoort bij een lineair verband.
- a** Stel de recursieve en de directe formule op van de rij.
- b** Hoeveel positieve termen heeft de rij?
- 3** Gegeven is de rij $u_n : 2; 2,6; 3,38; 4,394; \dots$ met beginterm u_0 , die hoort bij een exponentieel verband.
- a** Stel de recursieve en de directe formule op van de rij.
- b** Bereken de achtste term van de rij. Rond af op twee decimalen.

12.2 Notaties en rijen op de GR

- 4** Van een rij is $w_4 = 12$ en $w_7 = 324$.
- a** Neem aan dat w_n een rij is met constant verschil en beginterm w_1 .
Stel de directe formule van w_n op.
- b** Neem aan dat w_n een rij is met constante factor en beginterm w_0 .
Stel de directe formule van w_n op.
- 5** **a** Gegeven is de rij $T(n) = T(n-1) - 7 \cdot n$ met $T(0) = 12$.
Schrijf de rij in de notatie $u_{n+1} = \dots$
- b** Gegeven is de rij $w_{n+1} = 3 \cdot w_n + 6$ met $w_1 = 10$.
Schrijf de rij in de notatie $w(n) = \dots$
- 6** Gegeven is de recursieve formule $A_n = 0,75 \cdot A_{n-1} + n$ met $A_0 = 12$.
- a** Bereken de vierde term van de rij.
- b** Voor welke waarden van n ligt A_n tussen 30 en 50?

- 7** Bij het stapelen van bierkragen volgens een bepaalde methode wordt het aantal kragen in de n^e laag gegeven door de formule $K_n = (2n - 1)^2$. Het totale aantal kragen in een piramide met n lagen is te berekenen met de formule $T_n = \frac{1}{3}n(2n + 1)(2n - 1)$.

- a** Uit hoeveel kragen bestaat een toren van 32 lagen? Hoeveel kragen zitten er dan in de onderste laag?

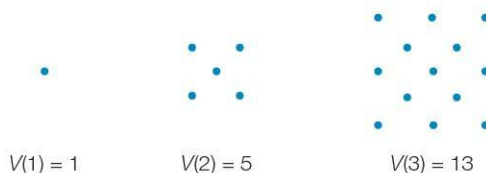


Op 5 juni 2011 is in de Noord-Duitse plaats Satow het wereldrecord bierkragen stapelen verbeterd. Bij dit record werden in totaal 105 995 kragen gestapeld volgens de methode die hoort bij bovenstaande formules. De gebruikte kragen hadden een lengte van 40 cm, een breedte van 30 cm en een hoogte van 25 cm.

- b** Hoe hoog was de stapel? En hoeveel m^2 was het grondvlak van het bouwwerk?

12.3 Rijen en meetkundige figuren

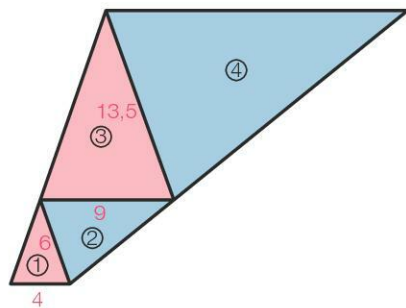
- 8** Hafid maakt met stippen een patroon. Zie de figuur hiernaast. Het aantal stippen $V(n)$ dat nodig is voor het n^e patroon is te berekenen met de directe formule $V(n) = 2n^2 - 2n + 1$. Leid de recursieve formule van $V(n)$ af met behulp van de directe formule.



figuur 12.18

- 9** In de figuur hiernaast zie je een rij van gelijkvormige gelijkbenige driehoeken. In de figuur is steeds de lengte van de kortste zijde van de driehoek gegeven.

- a** Stel de recursieve en de directe formule op van de lengte $K(n)$ van de kortste zijde van de n^e gelijkbenige driehoek.
- b** Bereken de hoogte die hoort bij de kortste zijde van driehoek 1 en toon daarmee aan dat de oppervlakte van driehoek 1 in vier decimalen gelijk is aan 11,3137.
- c** Stel de directe formule op van de oppervlakte $O(n)$ van de n^e gelijkbenige driehoek.
- d** Bereken de som van de oppervlakten van de eerste vier gelijkbenige driehoeken. Rond af op één decimaal.



figuur 12.19

13

Meetkunde toepassen

Wat leer je?

- Halveren en verdubbelen in perspectieftekeningen.
- Berekeningen maken met regelmatige veelhoeken.
- In perspectief tekenen van regelmatige veelhoeken.
- Wat de gulden snede, het gulden getal en de gulden rechthoek is.
- Teken en rekenen bij kunstwerken en gebouwen.

Centre
Pompidou
Málaga



Beginopdracht Centre Pompidou Málaga

[► WERKBLAD] Het museum Centre Pompidou Málaga bevindt zich grotendeels ondergronds. Op het dak, dat als plein fungeert, staat een grote kubus die de tentoonstellingszalen van daglicht voorziet. De kubus, genaamd El Cubo, is aan de buitenkant voorzien van even grote vierkante panelen van gekleurd en helder glas. Zie de foto hieronder. De zijde van de kubus is 12 meter. Je ziet dat de glazen kubus op een betonnen rand staat. Deze rand heeft een hoogte van 60 cm.



- Bereken vanaf welke hoogte de foto is genomen.

Patrice tekent het aanzicht van de kubus op schaal 1 : 300 in de richting van de gele pijl, dus in de richting van een diagonaal van het grondvlak van de kubus.

Op de foto zie je op de onderste rij een rood paneel.

- Bereken de afmetingen van dit paneel in het aanzicht van Patrice.
Geef je antwoord in cm en rond af op één decimaal.

Voorkennis Perspectief

Theorie A Teken en in perspectief en berekeningen

Een perspectiefafbeelding is gebaseerd op centrale projectie vanuit één punt op het tafereel, zie figuur 13.1.

Bij centrale projectie heb je te maken met de volgende eigenschappen.

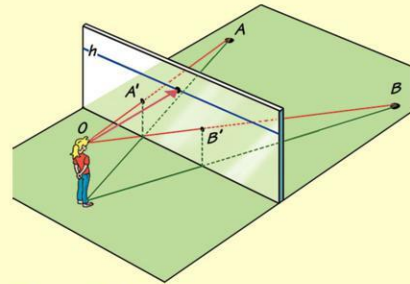
- 1 De horizon in het tafereel ligt op ooghoogte en is evenwijdig met het horizontale vlak.
- 2 Als twee horizontale lijnen niet evenwijdig met het tafereel zijn, dan snijden in het tafereel de beelden elkaar op de horizon.
- 3 Alle onderling evenwijdige lijnen die evenwijdig met het tafereel zijn, worden als evenwijdige lijnen afgebeeld.

In figuur 13.2 heb je te maken met drie balken in éénpuntperspectief, omdat de voorvlakken van de balken evenwijdig zijn met het tafereel. De zijvlakken die niet evenwijdig met het tafereel zijn, hebben één verdwijnpunt V op de horizon.

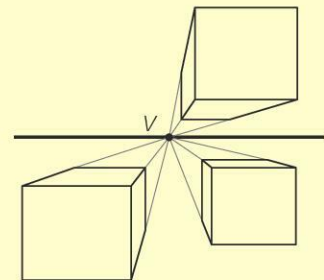
In figuur 13.3 is een balk in perspectief getekend. Je hebt te maken met tweepuntperspectief, omdat geen van de verticale vlakken evenwijdig is met het tafereel.

De verdwijnpunten P en Q liggen op de horizon.

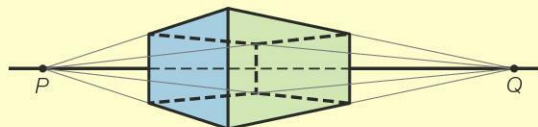
Op de foto hiernaast zie je het kunstwerk Philemon en Baucis van Carl Andre. Het kunstwerk staat in het Kröller-Müller Museum en is 90 cm hoog. Met dit gegeven kun je berekenen vanaf welke hoogte de foto genomen is. Je gebruikt dat de horizon op ooghoogte is.



figuur 13.1



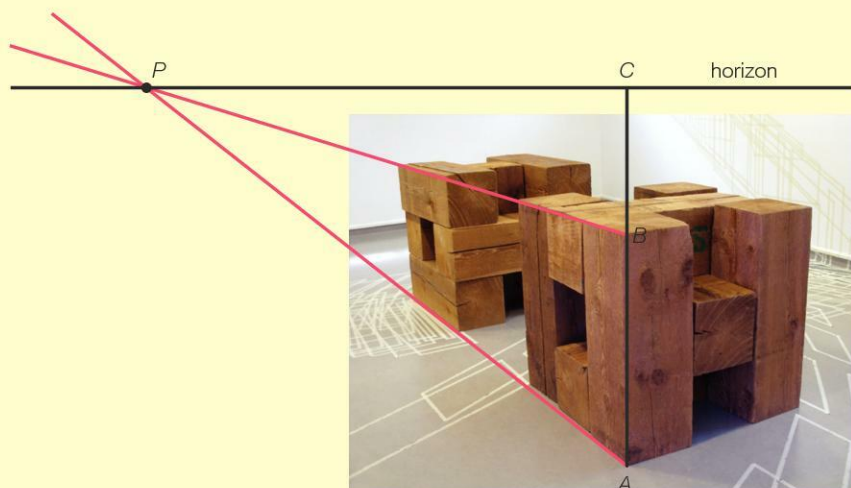
figuur 13.2 Drie balken in éénpuntperspectief.



figuur 13.3 Een balk in tweepuntperspectief.



figuur 13.4



figuur 13.5

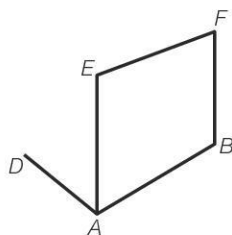
In de figuur zijn het verdwijnpunt P en de horizon getekend. Omdat de horizon horizontaal is, is één verdwijnpunt voldoende om de horizon te tekenen. Opmeten geeft $AB = 3,0$ cm en $AC = 5,0$ cm. Dus 3,0 cm komt overeen met 90 cm en daarom komt 5,0 cm overeen met $\frac{5,0}{3,0} \cdot 90 \approx 150$ cm. De foto is vanaf een hoogte van ongeveer 150 cm genomen.

- 1** [**WERKBLAD**] In figuur 13.6 zie je het begin van een perspectieftekening van de balk $ABCD EFGH$. Deze figuur staat ook op het werkblad.

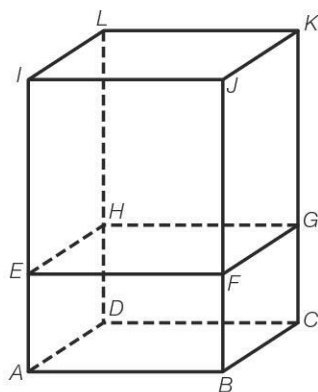
a Maak de perspectieftekening af.

Op de balk wordt nog een andere balk gezet op de manier van figuur 13.7. Deze balk is twee keer zo hoog als de balk $ABCD EFGH$.

b Teken op het werkblad ook deze balk in de perspectieftekening.



figuur 13.6



figuur 13.7

- 2** [**WERKBLAD**] Op de foto zie je het Nanolab op de campus van de Universiteit Twente. De daklijn aan de rechterkant loopt af naar beneden. De foto is genomen van een hoogte van 5,4 m en je kijkt recht op een hoek van het gebouw. Bereken de hoogte van het dak op deze hoek. Geef je antwoord in dm nauwkeurig.

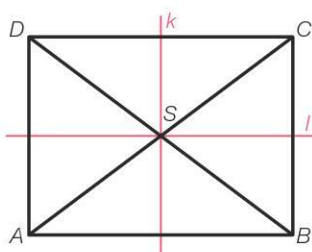


figuur 13.8

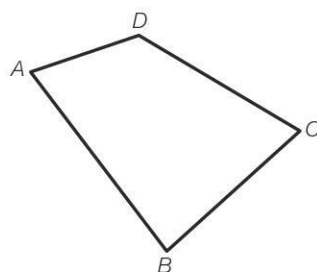
13.1 Halveren en verdubbelen in perspectief



01 [▶ WERKBLAD] In figuur 13.9 is de rechthoek $ABCD$ op ware grootte getekend en in figuur 13.10 in perspectief. In figuur 13.9 is het snijpunt S van de diagonalen getekend en de lijnen k en l door S evenwijdig aan de zijden.



figuur 13.9



figuur 13.10

- Teken in de perspectieftekening op het werkblad de verdwijnpunten P en Q en vervolgens het punt S en de lijnen k en l .
- De punten K , L , M en N zijn de middens van de zijden van de rechthoek. Teken deze punten in de perspectieftekening.

Theorie A Halveren in perspectief

In een rechthoek delen de diagonalen elkaar middendoor. Deze eigenschap gebruik je bij het halveren in perspectief.

Hiernaast zie je een foto van een rechthoekig zwembad.

Om het midden M te tekenen van de linkerkant van het zwembad ga je als volgt te werk.

- Teken het verdwijnpunt P van de voorkant en de achterkant van het zwembad.
- Teken het snijpunt S van de diagonalen van het zwembad.
- Het midden M is het snijpunt van de lijn door P en S en de linkerkant.

Zie figuur 13.12.



figuur 13.11



figuur 13.12

Voorbeeld

In figuur 13.13 zie je een weg met twee lantaarnpalen ernaast. In deze perspectieftekening is de horizon horizontaal.

- a** Precies midden tussen de lantaarnpalen wordt een derde lantaarnpaal geplaatst.

Teken deze lantaarnpaal op de juiste plaats.

- b** Teken de middenstreep van de weg. Gebruik dat de boom recht tegenover de tweede lantaarnpaal staat. Licht je werkwijze toe.



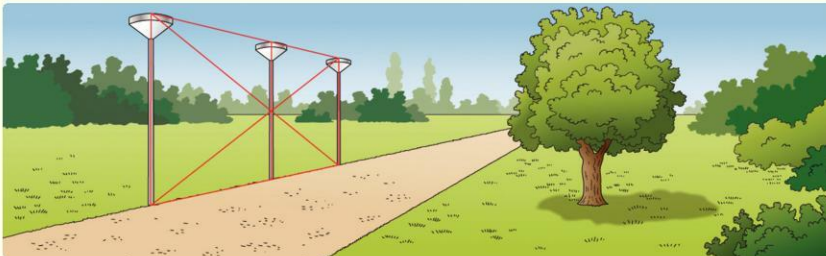
figuur 13.13

Aanpak

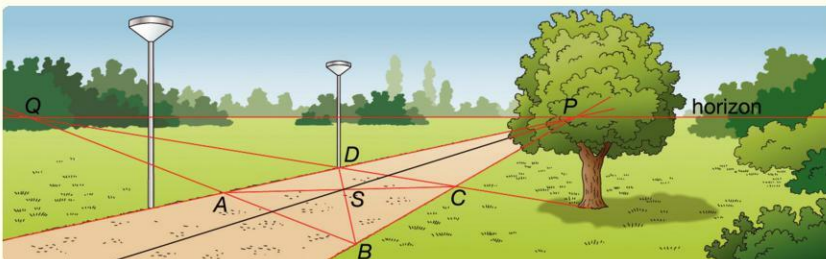
- a** Beschouw de lantaarnpalen als zijden van een rechthoek en gebruik het snijpunt van de diagonalen van deze rechthoek.

Uitwerking

a



- b**
- verdwijnpunt P en de horizon
 - lijn door onderkanten boom en lantaarnpaal geeft Q op horizon
 - rechthoek $ABCD$ met snijpunt S van diagonalen
 - middenstreep door P en S



2

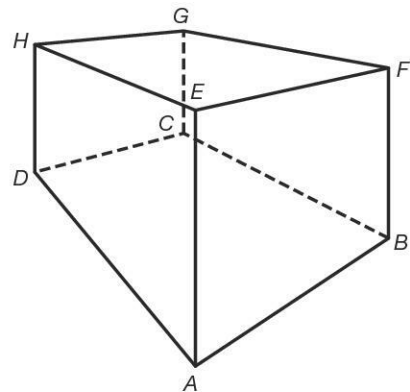
[► WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je de Nachtwacht van Rembrandt van Rijn. Het doek toont de schutterscompagnie van kapitein Frans Banninck Cocq, die zelf in deftig zwart met de rode sjerp van zijn rang is geportretteerd. Onderzoek of het hoofd van de kapitein precies in het midden van het schilderij staat afgebeeld.



figuur 13.14

3

[► WERKBLAD] De balk $ABCD EFGH$ is hiernaast in perspectief getekend. Er zijn twee vlakken, evenwijdig met de opstaande zijvlakken, die samen de balk in vier delen met gelijke inhoud verdelen. Teken op het werkblad deze twee vlakken.

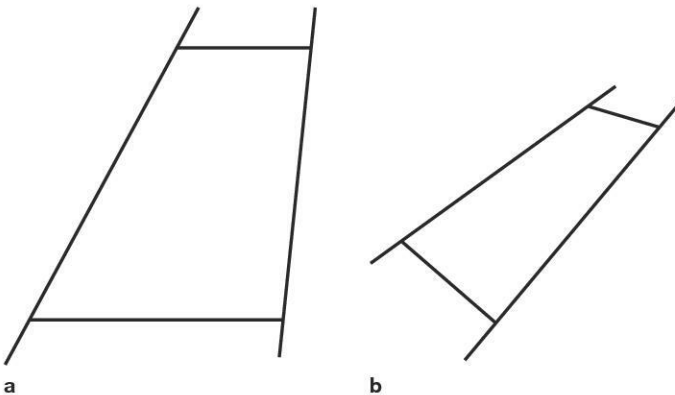


figuur 13.15

4

[► WERKBLAD] In figuur 13.16a is in perspectief een laddertje getekend dat plat op de grond is gelegd. Van de vijf sporten zijn alleen de eerste en de laatste getekend.

- a Teken op het werkblad de overige drie sporten op de juiste plaatsen. Licht je werkwijze toe.



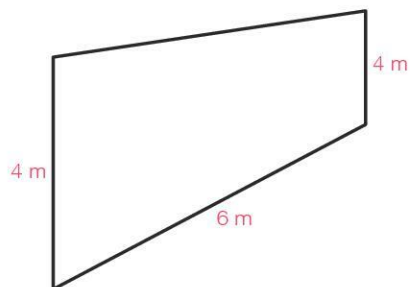
figuur 13.16

- b In figuur 13.16b is een andere perspectieftekening gemaakt van het laddertje. Teken op het werkblad de overige drie sporten op de juiste plaatsen. Licht je werkwijze toe.

A5
☐ ◎ *

[► WERKBLAD] In figuur 13.17 is een wand in een museum getekend. De afmetingen zijn 6 bij 4 meter. Tegen deze wand hangt een schilderij van 3 meter breed en 2 meter hoog. Het schilderij hangt zowel in de breedte als in de hoogte precies in het midden van de wand.

Teken op het werkblad de omtrek van dit schilderij op de juiste plaats. Licht je werkwijze toe.



figuur 13.17

A6
☐ ◎ *

[► WERKBLAD] In de VS is dragraceren een populaire sport. Daarbij rijden twee snelle auto's een wedstrijd tegen elkaar op een lange, rechte baan. De auto's starten naast elkaar bij de startstreep. De auto die het eerst over de finishlijn komt, heeft gewonnen. In figuur 13.18 zie je een deel van een baan met de finishlijn. Ook zie je twee lichtmasten die de baan verlichten.



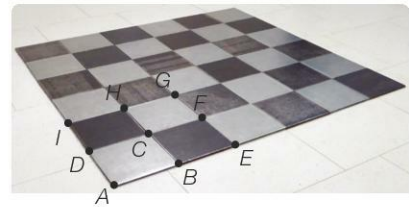
figuur 13.18

- a Tussen de twee getekende lichtmasten staan nog drie lichtmasten. Alle lichtmasten staan op gelijke afstand van elkaar.
Teken deze drie lichtmasten op de juiste plaats op het werkblad.
- b Teken de middenstreep van de baan op het werkblad. Licht je werkwijze toe.
- c De linker lichtmast staat ter hoogte van de startstreep.
Teken de startstreep op het werkblad.



[▶ WERKBLAD] Op de foto zie je het kunstwerk *Steel Zinc Plain* (1969) van Carl Andre dat bestaat uit 36 vierkante vlakken. Er zijn vier vlakken met letters aangegeven.

- Teken de horizon door gebruik te maken het verdwijnpunt P van AD en BC en het verdwijnpunt Q van AB en DC .
- Teken het verdwijnpunt R van AC en BF .

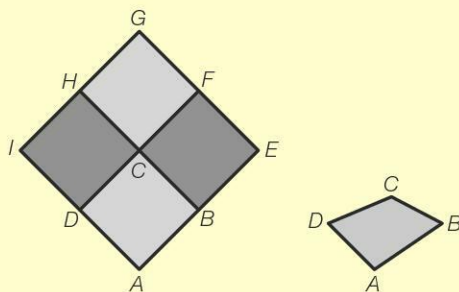


figuur 13.19

Theorie B Verdubbelen in perspectief

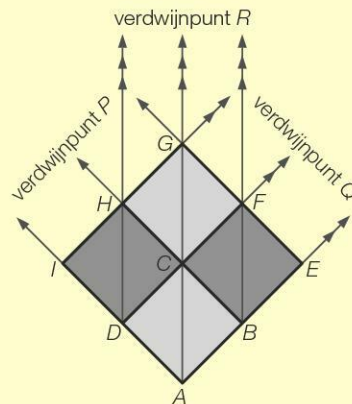
In figuur 13.20a zie je de vier vlakken van het kunstwerk van opgave 7 die met letters zijn aangegeven.

In figuur 13.20b is vlak $ABCD$ in perspectief getekend.



a
figuur 13.20

b

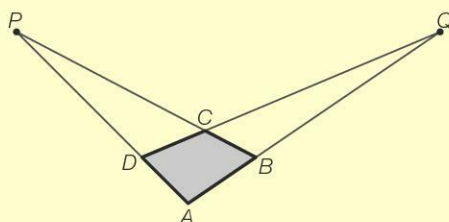


figuur 13.21 Evenwijdige lijnen hebben in perspectief hetzelfde verdwijnpunt.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde is de opdracht om hierbij vlak $BEFC$ in perspectief te tekenen. We maken daarbij gebruik van de verdwijnpunten P , Q en R die in figuur 13.21 zijn aangegeven.

In de perspectieftekening tekenen we eerst de verdwijnpunten P en Q en de horizon. Daarna gebruiken we het verdwijnpunt R van AC en BF om het punt F te tekenen.

Zie verder het voorbeeld op de volgende bladzijde.

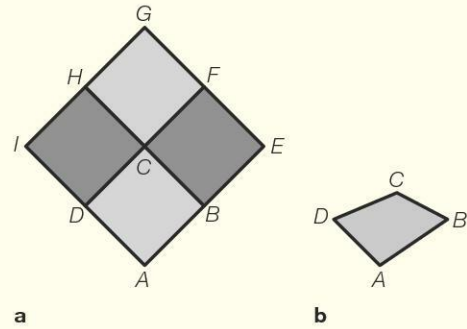


figuur 13.22 De verdwijnpunten P en Q in de perspectieftekening.

Voorbeeld

In figuur 13.23a zijn vier vierkante vlakken van het kunstwerk Steel Zinc Plain van Carl Andre getekend. Vlak $ABCD$ is in figuur 13.22b in perspectief getekend.

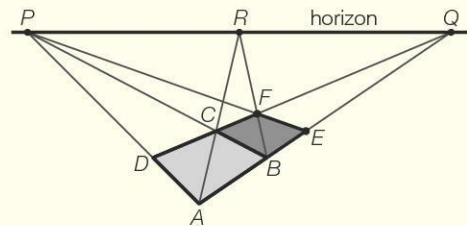
Teken in de perspectieftekening vlak $BEFC$. Licht je werkwijze toe.



figuur 13.23

Uitwerking

- verdwijnpunten P en Q en horizon
- AC heeft verdwijnpunt R
- BR snijden met DQ geeft F
- PF snijden met AQ geeft E



R8 Zie het voorbeeld.

☐⊙* Licht toe waarom AC en BF hetzelfde verdwijnpunt hebben.

9 [**WERKBLAD**] Zie het voorbeeld.

☐⊙* Teken de overige twee vlakken. Licht je werkwijze toe.

10 [**WERKBLAD**] In de figuur zie je nog eens de weg met het voorbeeld op bladzijde 48 met de twee lantaarnpalen.

Teken een derde en vierde lantaarnpaal rechts van deze twee lantaarnpalen. Alle lantaarnpalen staan even ver van elkaar af en zijn even hoog. Gebruik dat de boom recht tegenover de tweede lantaarnpaal staat. Licht je werkwijze toe.



figuur 13.24

11


[> WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je een kunstwerk van de Franse kunstenaar Daniel Buren. Het plein van het Palais Royal in Parijs is verdeeld in vele even grote vlakken en in het midden van elk vlak is een zwart-witte pilaar geplaatst. Op het werkblad zie je een foto van een deel van het plein. Hierbij is het vlak vooraan in het midden niet geheel getekend. Teken dit vlak in de perspectieftekening. Licht je werkwijze toe.

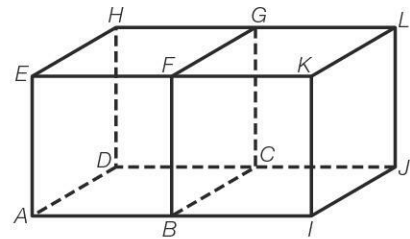


figuur 13.25

12


[> WERKBLAD] Gegeven is de kubus $ABCD EFGH$. Op het werkblad zie je een begin van de perspectieftekening van de kubus.

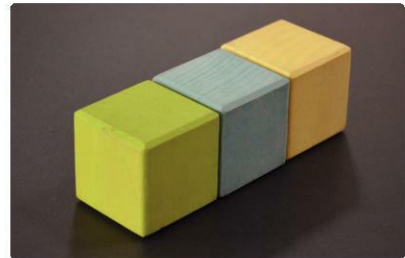
- Maak op het werkblad de perspectieftekening van de kubus af. Licht je werkwijze toe.
- Tegen de kubus aan staat de kubus $BIJC FKLK$. Zie figuur 13.26. Teken deze kubus in de perspectieftekening. Licht je werkwijze toe.



figuur 13.26

13


[> WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je drie blokjes. Op het werkblad zie je het middelste blokje in perspectief. Teken in deze figuur de beide andere blokjes. Licht je werkwijze toe.



figuur 13.27

A14


[> WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je het kunstwerk 'Archi' van Daniel Buren in de Italiaanse stad La Spezia. Je ziet een aantal bogen die aan de voorkant blauw of geel zijn. De zijkanten van de bogen zijn zwart-wit gestreept en op de achterkanten zijn spiegels gemaakt. De bogen staan allemaal even ver uit elkaar. Op het werkblad zie je de foto zonder de voorste blauwe boog.

- Teken de voorkant van deze blauwe boog op het werkblad. Licht je werkwijze toe.
- De foto is genomen vanaf een hoogte van 1,80 meter. Bereken de hoogte van de doorgang onder de bogen. Rond je antwoord af op gehele dm.



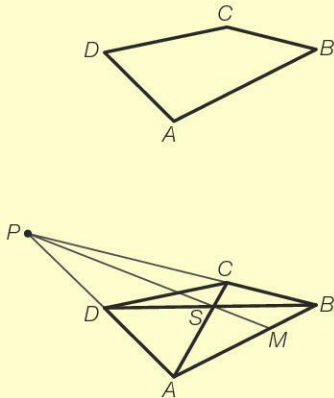
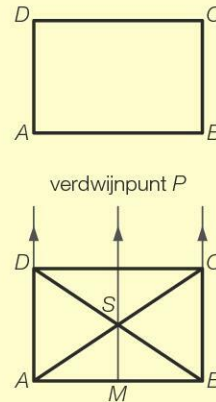
figuur 13.28

Terugblik

Halveren in perspectief

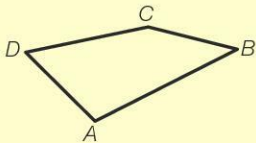
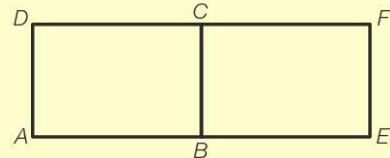
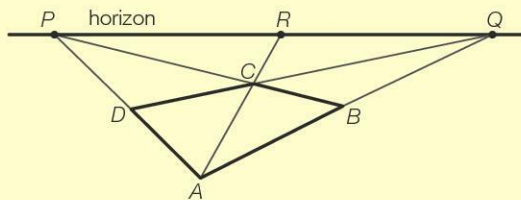
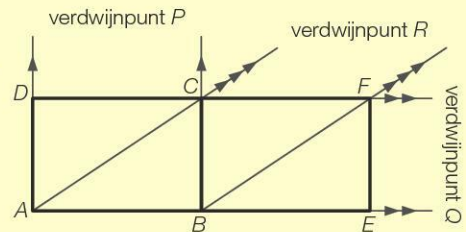
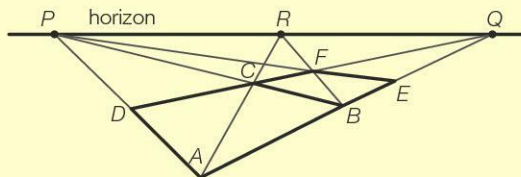
Hieronder zie je hoe je in een perspectieftekening van rechthoek $ABCD$ het midden M van AB tekent.

Je gebruikt het verdwijnpunt P van AD en BC en bovendien het snijpunt S van de diagonalen AC en BD .



Verdubbelen in perspectief

Gegeven is rechthoek $ABCD$. Om in een perspectieftekening de rechthoek $BEFC$ erbij te tekenen, gebruik je het verdwijnpunt P van AD , BC en EF , het verdwijnpunt Q van AB en DC en het verdwijnpunt R van AC en BF .



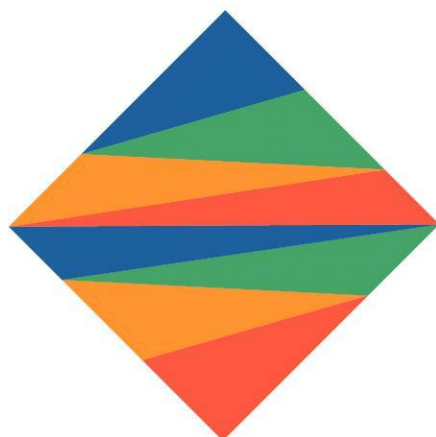
13.2 Regelmatige veelhoeken

015
□ ⊗ *

In de figuur hiernaast zie je het werk *Einheit* aus flächengleichen Farben van de kunstenaar Max Bill. Het vierkant is verdeeld in acht kleurvlakken met gelijke oppervlakte.

Je kunt je afvragen hoe Max Bill de zijden van het vierkant heeft verdeeld om op deze manier acht driehoeken met gelijke oppervlakte te krijgen.

Welke verdeling vind je door opmeten? Klopt het dat de acht driehoeken gelijke oppervlakten hebben?

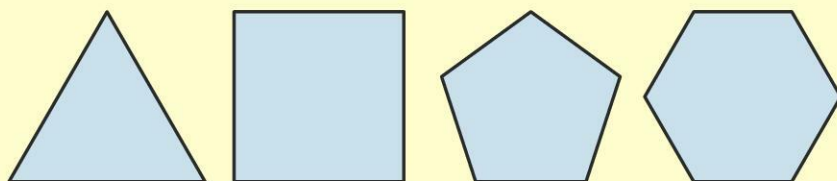


figuur 13.29

Theorie A Oppervlakte bij regelmatige veelhoeken

Een **regelmatige veelhoek** is een veelhoek waarvan alle zijden even lang zijn en de hoeken even groot.

Bekende regelmatige veelhoeken zijn de gelijkzijdige driehoek, het vierkant, de regelmatige vijfhoek en de regelmatige zeshoek.



figuur 13.30 De eerste vier regelmatige veelhoeken.

In het voorbeeld heb je te maken met twee gelijkzijdige driehoeken. De ene driehoek is een vergroting van de andere driehoek met vergrotingsfactor k . Je hebt daarbij de volgende regels geleerd.

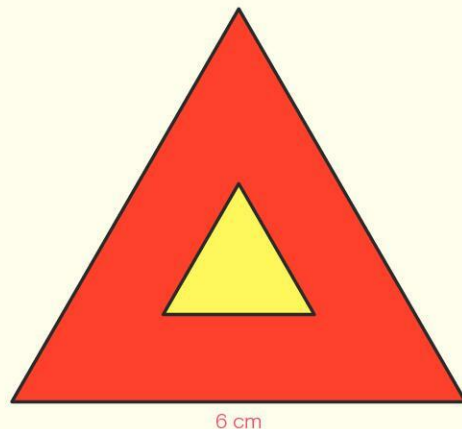
Bij vergroting met factor k

- is elke afmeting van het beeld k keer de overeenkomstige afmeting van het origineel
- is de oppervlakte van het beeld k^2 keer de oppervlakte van het origineel.

Voorbeeld

In figuur 13.31 is een gelijkzijdige driehoek met zijde 6 cm getekend met daarin een gelijkzijdige driehoek, zodat de gehele figuur symmetrisch is.

- Neem de zijde van de kleine driehoek 2 cm.
Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van het rode gedeelte als die van de gele driehoek?
- Bereken de zijde van de gele driehoek in het geval de oppervlakte hiervan net zo groot is als de oppervlakte van het rode gedeelte. Rond af op mm.



figuur 13.31

Uitwerking

- lengte zijde gele driehoek $= \frac{1}{3} \cdot$ lengte zijde grote driehoek, dus $k = \frac{1}{3}$
 $O(\text{gele driehoek}) = k^2 \cdot O(\text{grote driehoek})$
 $k^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, dus $O(\text{gele driehoek}) = \frac{1}{9} \cdot O(\text{grote driehoek})$ en dus
 $O(\text{rode gedeelte}) = \frac{8}{9} \cdot O(\text{grote driehoek})$.
Dus de oppervlakte van het rode gedeelte is 8 keer zo groot als de oppervlakte van de gele driehoek.
- $O(\text{gele driehoek}) = \frac{1}{2} \cdot O(\text{grote driehoek})$, dus $k^2 = \frac{1}{2}$. Dit geeft $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$.
zijde gele driehoek $= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot$ zijde grote driehoek $= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 6 \approx 4,2$ cm



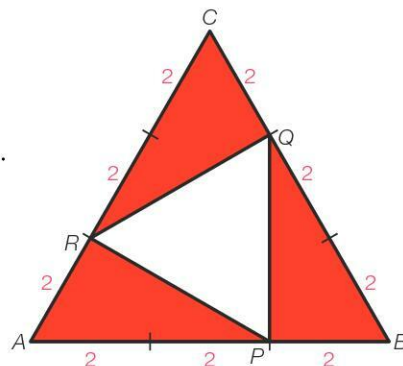
Zie het voorbeeld.

- Neem de zijde van de kleine driehoek 2,5 cm.
Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van het rode gedeelte als die van de gele driehoek?
- Teken de grote driehoek en teken hierin de driehoek waarvan de oppervlakte de helft is van de oppervlakte van de grote driehoek. Gebruik de symmetrie-assen van de grote driehoek.



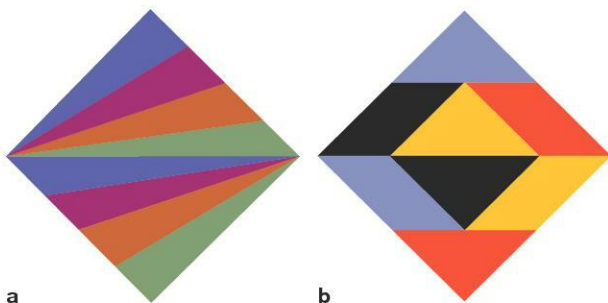
Gegeven is driehoek ABC met zijden van 6. Deze zijden zijn verdeeld in drie gelijke stukken, waarna driehoek PQR op de aangeven wijze is getekend. Zie figuur 13.32.

- Bereken welk gedeelte van driehoek ABC rood is.
- Verdeel PQ , QR en PR in drie gelijke stukken en teken op dezelfde manier als in figuur 13.32 een driehoek KLM binnen driehoek PQR en kleur deze driehoek KLM blauw. Bereken welk gedeelte van driehoek ABC blauw is.



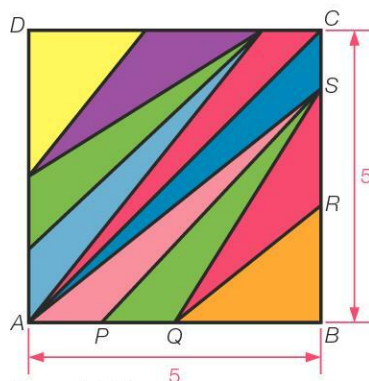
figuur 13.32

- 18** In figuur 13.33a en b zie je twee werken van de kunstenaar Max Bill.
Toon aan dat in beide figuren het vierkant wordt verdeeld in acht stukken met gelijke oppervlakte.



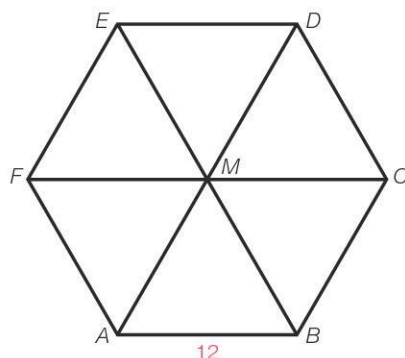
figuur 13.33

- 19** Het vierkant $ABCD$ in figuur 13.34 is verdeeld in tien stukken met gelijke oppervlakte. Hieruit volgt dat $CS = 1$.
a Licht dit toe.
b Licht toe dat $BR = RS$ en dat dus geldt $BR = RS = 2$.
c Bereken AP , PQ en BQ .



figuur 13.34

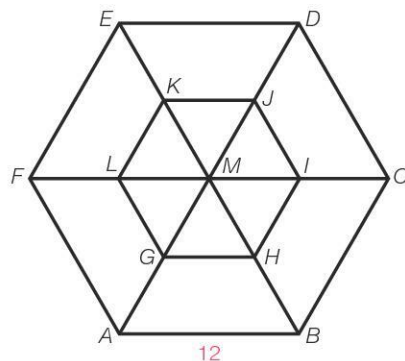
- 20** In figuur 13.35 zie je de regelmatige zeshoek $ABCDEF$ met zijde 12. De drie getekende diagonalen snijden elkaar in het midden M van de zeshoek. Er zijn zes gelijkzijdige driehoeken ontstaan, waarvan driehoek ABM er een is. De oppervlakte van driehoek ABM is 62,35. Hierbij is afgerond op twee decimalen.
a Bereken de oppervlakte van driehoek ABM waarbij je afrondt op drie decimalen.
b Bereken de oppervlakte van $ABCDEF$. Rond af op één decimaal.



figuur 13.35

Binnen de zeshoek $ABCDEF$ wordt de regelmatige zeshoek $GHIJKL$ getekend zoals in figuur 13.36.

- c** Neem $GH = 4$ en bereken de oppervlakte van $GHIJKL$. Rond af op twee decimalen.
d Neem $GH = 3$. Er geldt dan dat $O(GHIJKL) = \frac{1}{16} \cdot O(ABCDEF)$. Toon dit aan zonder de oppervlakte van $GHIJKL$ te berekenen.
e Bereken GH in het geval dat $O(GHIJKL) = \frac{1}{10} \cdot O(ABCDEF)$. Rond af op twee decimalen.
f Neem $GH = 5$ en bereken de afstand tussen de evenwijdige zijden AB en GH . Rond af op twee decimalen.

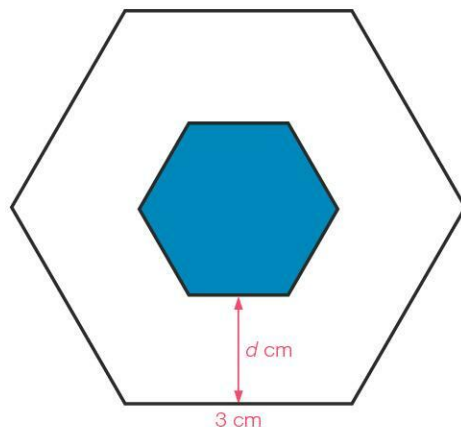


figuur 13.36

- 21** In figuur 13.37 zie je een regelmatige zeshoek met zijde 3 cm. Daarbinnen is een blauwe regelmatige zeshoek getekend zo, dat de gehele figuur symmetrisch is. De afstand tussen de zeshoeken is d cm.

Bereken d in twee decimalen in het geval

- de zijde van de blauwe zeshoek $1\frac{1}{2}$ cm is
- de oppervlakte van de blauwe zeshoek de helft is van de oppervlakte van de grote zeshoek.

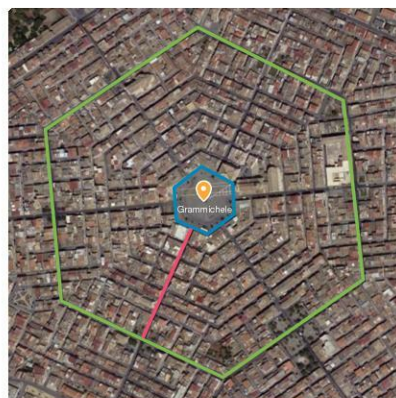


figuur 13.37

- A22** Hiernaast zie je een luchtfoto van het Italiaanse stadje Grammichele op het eiland Sicilië. Het centrale plein heeft de vorm van een regelmatige zeshoek met zijden van 50 meter. Zie de blauwe zeshoek. De groene regelmatige zeshoek is een weg die om het centrum loopt. De zijde van deze zeshoek is 275 meter.

Jonas wandelt vanaf de rand van het plein over de weg die met rood is aangegeven naar de groene zeshoek. Vervolgens loopt hij over de groene zeshoek om het centrum, om daarna langs dezelfde weg terug te keren naar het plein. Hij wandelt met een snelheid van gemiddeld 4,5 km/uur.

Bereken hoeveel minuten hij over de wandeling doet.

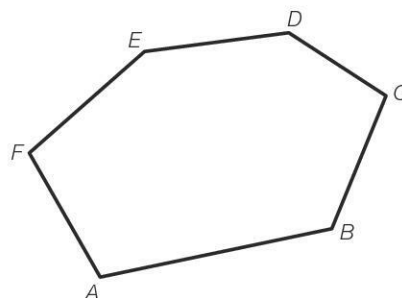


figuur 13.38

- 23** [▶ WERKBLAD] Op het werkblad zie je nog eens het werk Einheit aus flächengleichen Farben van Max Bill. De zijde is 8 cm genomen. In opgave 15 heb je de verdeling van de zijden gevonden door opmeten. Je kunt de verdeling van de zijden ook berekenen. Bereken deze verdeling.

- 024** [▶ WERKBLAD] In de figuur hiernaast zie je een tekening van de regelmatige zeshoek $ABCDEF$ in tweepuntsperspectief. De figuur staat ook op het werkblad. Op het werkblad is ook de horizon getekend.

- Verleng de zijden BC , CD , EF en AF in de richting van de horizon.
- Wat valt je op? Geef hiervoor een verklaring.

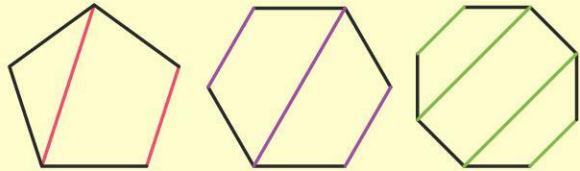


figuur 13.39

Theorie B Regelmatige veelhoeken in perspectief

In het voorbeeld zie je hoe je door gebruik te maken van enkele gegeven zijden een perspectieftekening van een regelmatige achthoek kunt afmaken. Je maakt gebruik van de eigenschap dat evenwijdige lijnen die niet evenwijdig zijn met het tafereel, elkaar snijden op de horizon.

Bij het tekenen van regelmatige veelhoeken in perspectief maak je gebruik van de evenwijdigheid die in deze veelhoeken voorkomt. Zie de figuur hiernaast.

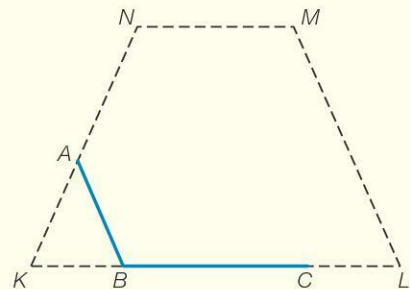


figuur 13.40

Voorbeeld

In figuur 13.41 is vierkant $KLMN$ in perspectief getekend, waarin precies de regelmatige achthoek $ABCDEFGH$ past. De zijden AB en BC van de achthoek zijn al getekend en KL is evenwijdig met de horizon.

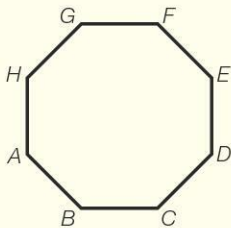
Maak de perspectieftekening af. Licht je werkwijze toe.



figuur 13.41

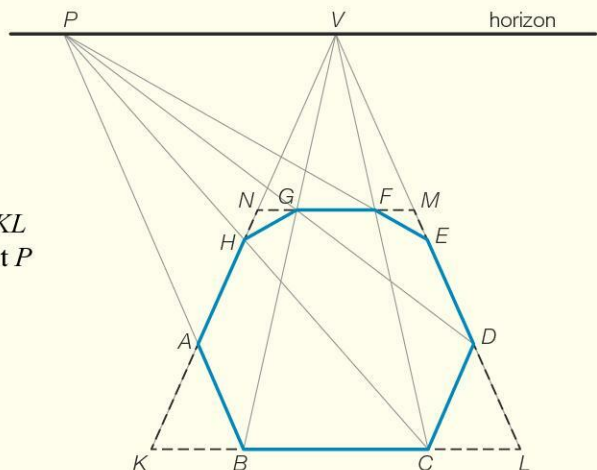
Aanpak

Schets een regelmatige achthoek niet in perspectief waarin je kunt zien welke lijnen evenwijdig zijn. Zet de letters op de juiste plek.



Uitwerking

- KN en LM verlengen geeft verdwijnpunt V
- horizon door V evenwijdig met KL
- BA verlengen geeft verdwijnpunt P
- CP en KN snijden geeft H
- BV en NM snijden geeft G
- PG en LM snijden geeft D
- CV en NM snijden geeft F
- PF en LM snijden geeft E
- achthoek $ABCDEFGH$



R25

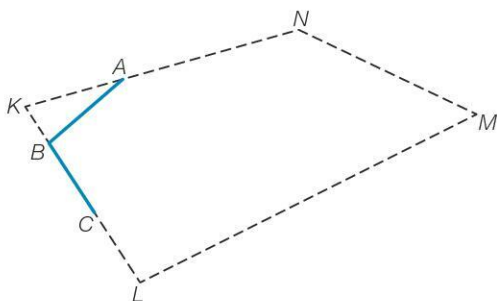
Zie het voorbeeld.

Uit welk gegeven volgt dat je te maken hebt met éénpuntperspectief?

26

[> WERKBLAD] In de figuur hiernaast zie je vierkant $KLMN$ van het voorbeeld. Bovendien is het begin van de regelmatige achthoek $ABCDEFGH$ getekend in perspectief.

Maak de perspectieftekening op het werkblad af. Licht je werkwijze toe.



figuur 13.42

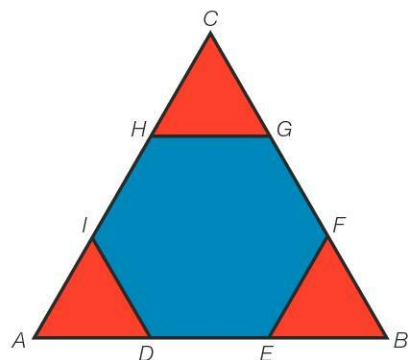
A27

[> WERKBLAD] In de figuur hiernaast zie je de gelijkzijdige driehoek ABC . Door van deze driehoek de drie rode, gelijkzijdige driehoeken weg te halen, ontstaat de blauwe regelmatige zeshoek $DEFGHI$.

a Licht toe dat $AD = DE = BE$.

Op het werkblad is driehoek ABC in perspectief getekend. Ook is de horizon getekend.

b Teken op het werkblad de regelmatige zeshoek. Licht je werkwijze toe.



figuur 13.43

A28

[> WERKBLAD] In de figuur hiernaast zie je twee zogenaamde landvelden van het spel Catan. Op het werkblad is het gele landveld in perspectief getekend. Ook is een rechthoek getekend waarin de zeshoek precies past.

Teken op het werkblad het andere landveld. Zorg ervoor dat de landvelden bij de zijde DE aan elkaar liggen. Licht je werkwijze toe.



figuur 13.44

Terugblik

Regelmatige veelhoeken en oppervlakte

Een regelmatige veelhoek is een veelhoek waarvan alle zijden even lang zijn en alle hoeken even groot.

In de draaisymmetrische figuur hiernaast zie je een vierkant met zijde 5, een rood vierkant, vier gele driehoeken en vier blauwe driehoeken. De figuur moet zo worden gemaakt dat

$$O(\text{rood}) = O(\text{geel}).$$

We vragen ons af wat dan de verhouding

$$O(\text{geel}) : O(\text{blauw}) \text{ is.}$$

Stel de zijde van het rode vierkant is a , dan is

$$O(\text{rood}) = a^2.$$

Neem een zijde van het rode vierkant als basis

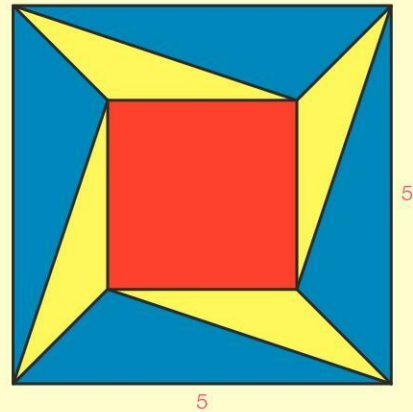
van een gele driehoek, dan is de bijbehorende hoogte $\frac{5-a}{2} = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a$,

$$\text{dus } O(\text{geel}) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot (2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a) = 2a(2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a) = 5a - a^2.$$

Er geldt $O(\text{rood}) = O(\text{geel})$, dus $a^2 = 5a - a^2$ oftewel $2a^2 = 5a$ en dit geeft $a = 2\frac{1}{2}$.

$$\text{Dus } O(\text{rood}) = O(\text{geel}) = (2\frac{1}{2})^2 = 6,25 \text{ en } O(\text{blauw}) = 5^2 - 6,25 - 6,25 = 12,5.$$

$$\text{Dus } O(\text{geel}) : O(\text{blauw}) = 6,25 : 12,5 = 1 : 2.$$



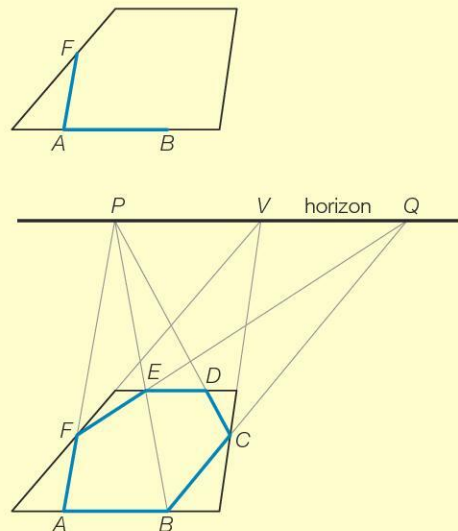
Regelmatige veelhoeken in perspectief

Bij het in perspectief tekenen van regelmatige veelhoeken maak je gebruik van de eigenschap dat evenwijdige lijnen die niet evenwijdig zijn met het tafereel, elkaar snijden op de horizon.

In de figuur hiernaast is het begin gemaakt van de perspectieftekening van de regelmatige zeshoek $ABCDEF$. Ook is de rechthoek getekend die precies om de zeshoek heen past. Omdat AB evenwijdig is met het tafereel heb je met éénpuntperspectief te maken.

Deze tekening maak je als volgt af.

- Teken het verdwijnpunt V en de horizon evenwijdig met AB .
- AF heeft verdwijnpunt P .
- BP geeft hoekpunt E op rechthoek.
- FE heeft verdwijnpunt Q .
- BQ geeft hoekpunt C op rechthoek.
- CP geeft hoekpunt D op rechthoek.
- Teken zeshoek $ABCDEF$.



13.3 De gulden snede

029




Zie figuur 13.45 met het lijnstuk AC met daarop het punt B . Met deze figuur is iets merkwaardigs aan de hand: de verhouding $AB : BC$ is hetzelfde als de verhouding $AC : AB$.

In de figuur geldt dus $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.

Neem je $b = 1$ en $a = \varphi$ dan krijg je $\varphi^2 = \varphi + 1$.

a Toon dit aan.

De vergelijking $\varphi^2 = \varphi + 1$ heeft twee oplossingen, waarvan er één positief is.

b Bereken de positieve oplossing van deze vergelijking. Rond af op drie decimalen.



figuur 13.45

Theorie B De gulden snede en de regelmatige vijfhoek

In figuur 13.46 geldt $AB : BC = AC : AB$.

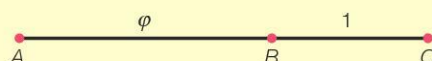
Je kunt ook zeggen dat AB een vergroting is van BC met vergrotingsfactor φ (de Griekse letter phi) en dat AC een vergroting is van AB met dezelfde vergrotingsfactor φ .

In opgave 29 heb je gezien dat hieruit volgt dat $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Deze vergelijking heeft twee oplossingen, namelijk $\varphi \approx -0,618$ en $\varphi \approx 1,618$.

Het getal $\varphi \approx 1,618$ wordt het **gulden getal** genoemd.

De verdeling van een lijnstuk waarbij de verhouding tussen het grootste en het kleinste deel gelijk is aan de verhouding tussen het hele lijnstuk en het grootste deel, heet de **gulden snede**.



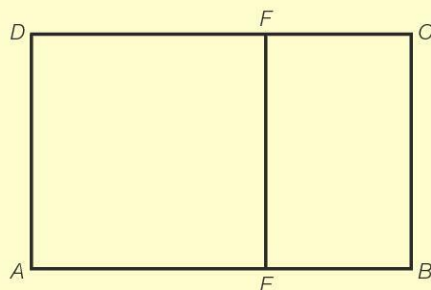
figuur 13.46

De gulden snede is de verdeling van een lijnstuk waarbij de verhouding tussen het grootste en het kleinste deel gelijk is aan de verhouding tussen het hele lijnstuk en het grootste deel.

Het gulden getal is $\varphi \approx 1,618$.

In figuur 13.47 zie je een **gulden rechthoek**, dat wil zeggen dat $AB = \varphi \cdot AD$, dus $AB \approx 1,618AD$.

Het bijzondere van een gulden rechthoek is dat na het weghalen van een vierkant de overgebleven rechthoek weer een gulden rechthoek is. Zie opgave 30.



figuur 13.47 De gulden rechthoek $ABCD$ met het vierkant $AEFD$.

R30 Zie figuur 13.47 met de gulden rechthoek $ABCD$.

***** Neem $AD = 1$ en $AB = \varphi$ en toon hiermee aan dat rechthoek $EBCF$ ook een gulden rechthoek is.

31 Zie figuur 13.48. Om de eerste drie tekeningen is een rechthoek getekend. De vierde is van zichzelf rechthoekig.

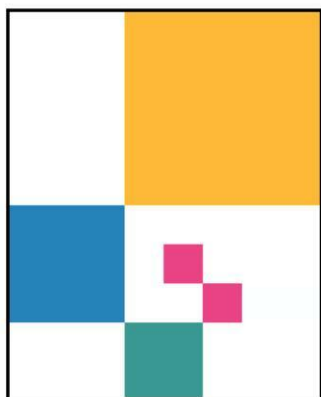
Onderzoek bij welke rechthoeken bij benadering sprake is van een gulden rechthoek.



I



II



III



IV

figuur 13.48

32 Georges Pierre Seurat (1859-1891) was een Franse kunstschilder en tekenaar.

Het werk van Seurat behoort tot het pointillisme, een schilderijstijl binnen het impressionisme. Hiernaast zie je zijn werk *Parade de cirque* (1889).

Licht toe hoe Seurat gebruik heeft gemaakt van de gulden rechthoek.



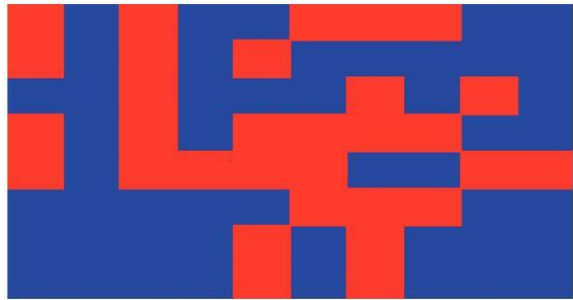
figuur 13.49

33
□ ⊙ *

In de figuur hiernaast zie je een kunstwerk van 90 cm bij 44,5 cm. De kunstenaar heeft het schilderij verdeeld in 80 even grote rechthoeken en deze vervolgens blauw of rood ingekleurd. Hierbij maakt hij gebruik van de cijfers van het getal $\varphi = 1,6180...$

Het eerste cijfer (1) correspondeert met de eerste rechthoek, het tweede cijfer (6) met de tweede rechthoek, enzovoort. Hierbij begint hij linksboven. Bij een oneven cijfer kleurt de kunstenaar de rechthoek rood en bij een even cijfer kleurt hij deze blauw.

- Is de 20^e decimaal van φ even of oneven? Licht toe.
- Toon met een berekening aan dat elk van de 80 rechthoeken bij benadering een gulden rechthoek is.



figuur 13.50

34
□ ⊙ *

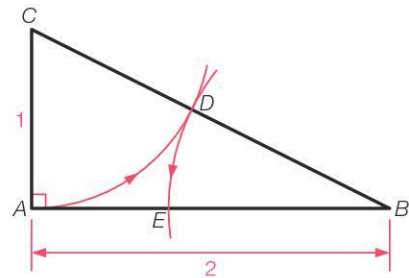
In de figuur hiernaast zie je hoe je in een rechthoekige driehoek de gulden snede kunt tekenen.

- Teken een rechthoekige driehoek ABC met $\angle A = 90^\circ$, $AB = 2$ en $AC = 1$.
- Teken een deel van de cirkel met middelpunt C en straal CA . Het snijpunt van deze cirkel met BC is D .
- Teken een deel van de cirkel met middelpunt B en straal BD . Het snijpunt van deze cirkel met AB is E .

Hiermee is zijde AB verdeeld volgens de gulden snede.

Je gaat dit in deze opgave aantonen.

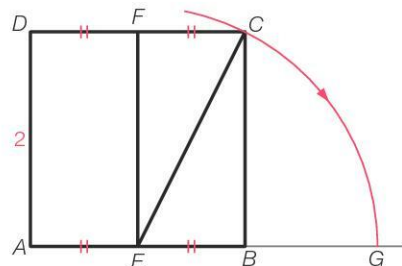
- Bereken BC en BD . Laat de wortel staan.
- Bereken AE . Laat de wortel staan.
- Toon aan dat AB door E verdeeld is volgens de gulden snede.



figuur 13.51

A35
□ ⊙ *

Hiernaast is het vierkant $ABCD$ met zijde 2 getekend. E en F zijn middens van zijden van het vierkant. Er is een deel van een cirkel getekend met middelpunt E en straal EC . Zo ontstaat het punt G op het verlengde van AB . Toon aan dat het lijnstuk AG door B verdeeld wordt volgens de gulden snede.



figuur 13.52

De gulden snede zit ook verborgen in een regelmatige vijfhoek.

In de regelmatige vijfhoek $ABCDE$ hiernaast snijden de diagonalen AD en CE elkaar in het punt S . Je gaat aantonen dat het lijnstuk AD door S verdeeld wordt volgens de gulden snede, dus dat geldt $AS = \varphi \cdot DS$. Ook ga je aantonen dat $AD = \varphi \cdot AB$, of algemeen gezegd: in een regelmatige vijfhoek is een diagonaal φ keer zo lang als de zijde van de vijfhoek.

Hierbij gebruik je eigenschappen van een parallellogram en een ruit. Zoals je weet is een parallellogram een vierhoek waarvan beide paren overstaande zijden evenwijdig zijn, en is een ruit een vierhoek waarvan alle zijden even lang zijn. Je gebruikt:

- in een parallellogram zijn de overstaande zijden even lang;
- als in een parallellogram de diagonalen loodrecht op elkaar staan, dan is het parallellogram een ruit.

Uit de symmetrie in figuur 13.53 volgt dat CE evenwijdig is met AB en dat AD evenwijdig is met BC . Hieruit volgt dat $ABCS$ een parallellogram is.

a Licht toe dat hieruit volgt dat $AB = CS$ en $BC = AS$.

Als je in figuur 13.53 een lijn tekent door de punten B en S , dan volgt uit de symmetrie van de vijfhoek dat deze lijn de diagonaal AC loodrecht snijdt.

b Hoe volgt hieruit dat $ABCS$ een ruit is, dus dat $AB = BC = CS = AS$?

Bekijk nu de gelijkvormige driehoeken ACS en DES . Driehoek ACS is een vergroting van driehoek DES met vergrotingsfactor $k = \frac{AC}{DE}$ en

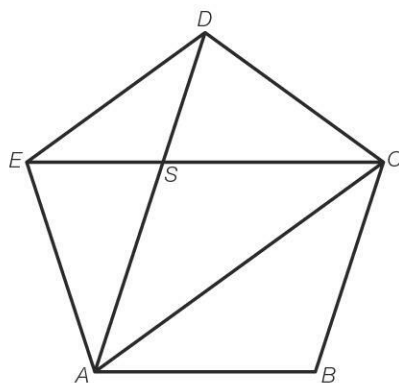
$$\text{ook } k = \frac{AS}{DS}.$$

Je kunt $k = \frac{AC}{DE}$ ook schrijven als $k = \frac{AD}{AS}$.

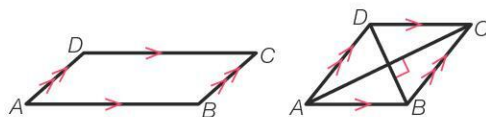
c Licht dit toe.

d Licht toe dat uit $k = \frac{AS}{DS}$ en $k = \frac{AD}{AS}$ volgt dat het lijnstuk AD door S verdeeld wordt volgens de gulden snede, dus dat geldt $AS = \varphi \cdot DS$.

e Licht toe hoe uit het bovenstaande volgt dat in een regelmatige vijfhoek een diagonaal φ keer zo lang is als de zijde van de vijfhoek.



figuur 13.53 In een regelmatige vijfhoek zijn alle diagonalen even lang.



figuur 13.54 Een ruit is een parallellogram waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan.

Het ministerie van Defensie van de Verenigde Staten van Amerika is gevestigd in het Pentagon te Arlington, vlakbij Washington D.C. De zijde van de buitenste regelmatige vijfhoek is 280 meter.



figuur 13.55

Om te berekenen hoeveel ha de oppervlakte van het gebied is dat binnen de buitenste vijfhoek ligt, tekenen we om de vijfhoek een rechthoek $PQRS$ zoals in figuur 13.56. Er geldt $PQ \approx 453$ m.

- a** Toon dit aan. Gebruik dat in een regelmatige vijfhoek een diagonaal φ keer zo lang is als de zijde van de vijfhoek.

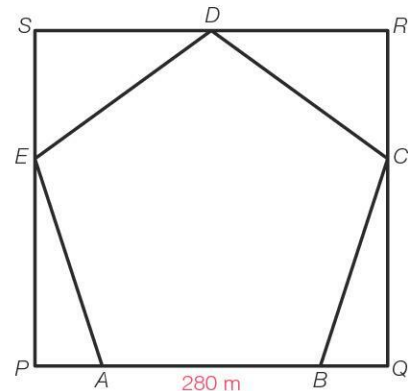
Uit $PQ = 453$ m volgt $BQ = 86,5$ m en dus $CQ \approx 266,3$ m.

- b** Toon dit aan.

Uit $RS = PQ = 453$ m volgt $DR = 226,5$ m en dus $CR \approx 164,6$ m.

- c** Toon dit aan.

- d** Bereken hoeveel ha de oppervlakte is van het gebied dat binnen de buitenste vijfhoek van het Pentagon ligt. Rond af op één decimaal.



figuur 13.56

Terugblik

De gulden snede

De gulden snede is de verdeling van een lijnstuk waarbij de verhouding tussen het grootste en het kleinste deel gelijk is aan de verhouding tussen het hele lijnstuk en het grootste deel.

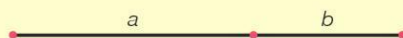
Dus in de figuur hiernaast geldt $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.

Neem je $b = 1$ en $a = \varphi$, dan krijg je $\frac{\varphi}{1} = \frac{\varphi+1}{\varphi}$

en dit geeft $\varphi^2 = \varphi + 1$.

De positieve oplossing van deze vergelijking is $\varphi \approx 1,618$.

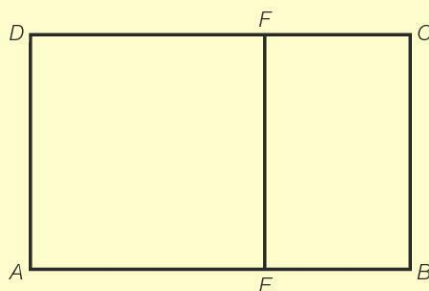
Het getal $\varphi \approx 1,618$ wordt het gulden getal genoemd.



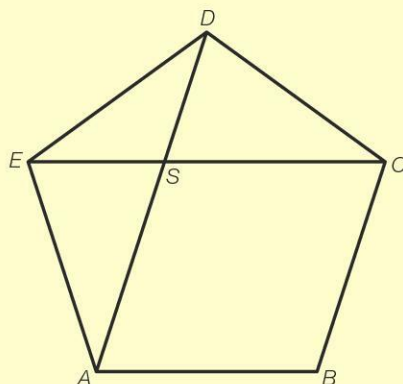
In de figuur hiernaast zie je de gulden rechthoek $ABCD$.

Er geldt $\frac{AB}{AD} = \varphi$ oftewel $AB = \varphi \cdot AD$.

Door een gulden rechthoek op te delen in een vierkant en een rechthoek zoals in de figuur hiernaast, ontstaat de nieuwe gulden rechthoek $EBCF$.



Ook in een regelmatige vijfhoek is de gulden snede te ontdekken. In de figuur hiernaast is $AS = \varphi \cdot DS$ en $CE = \varphi \cdot AB$.



13.4 Aanzichten en inhoud

O38
☐ ⊗ *

Op de foto hiernaast zie je het kunstwerk *The way north, south and west* van Carl Andre. Het werk bestaat uit balken van rood cederhout, elk met een afmeting van 30 bij 30 bij 90 cm. De dichtheid van rood cederhout is $0,55 \text{ kg/dm}^3$.

- a Teken op schaal 1 : 15 het vooraanzicht, het zijaanzicht en het bovenaanzicht.
- b Bereken het totale gewicht van het kunstwerk.



figuur 13.57

Theorie A Teken en rekenen bij kunstwerken

In opgave 38 heb je het vooraanzicht, het zijaanzicht en het bovenaanzicht van een kunstwerk getekend.

Om het gewicht van het kunstwerk te berekenen, heb je de inhoud nodig en de dichtheid van het materiaal waarvan het kunstwerk is gemaakt. De dichtheid wordt meestal gegeven in kg/dm^3 en daarom is het handig de inhoud te berekenen in dm^3 .

In het voorbeeld op de volgende bladzijde zie je hoe je uit de gegeven aanzichten en het begin van een perspectieftekening de perspectieftekening van het gehele kunstwerk maakt.

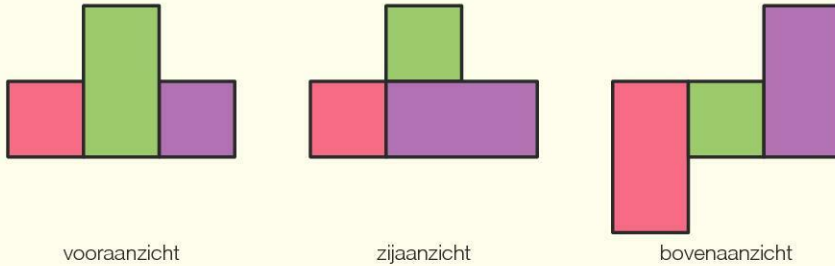


figuur 13.58 Het werk *Uncarved Blocks* van Carl Andre bestaat uit 15 elementen.

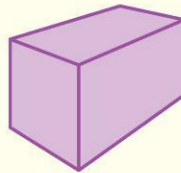
Voorbeeld

In figuur 13.59 zie je drie aanzichten van een kunstwerk dat uit drie gelijke balken bestaat. In figuur 13.60 is de rechterbalk in perspectief getekend.

Teken in de perspectieftekening de middelste balk. Licht je werkwijze toe.



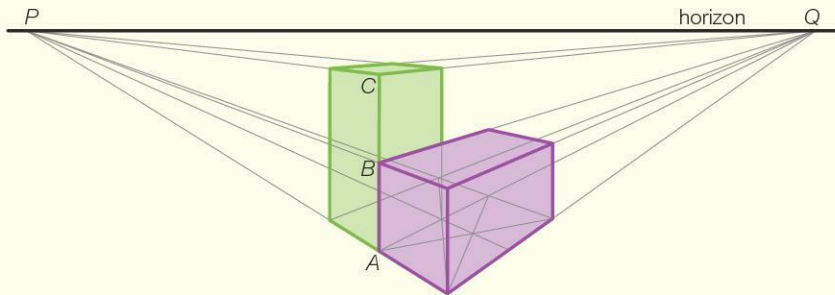
figuur 13.59



figuur 13.60

Uitwerking

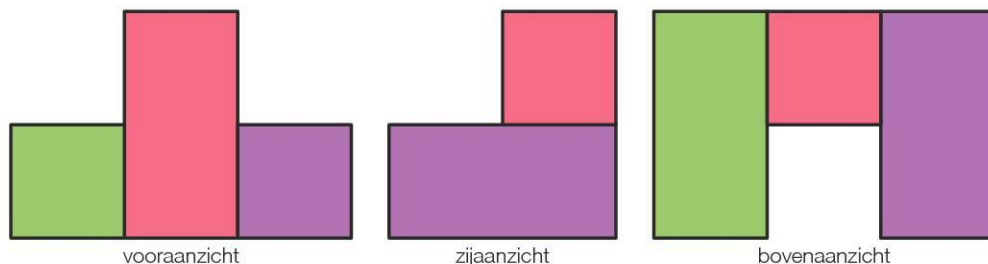
- verdwijnpunten P en Q en de horizon
- halveer grondvlak rechterbalk en verdubbel dit voor grondvlak middelste balk
- opmeten AB geeft AC , want $AC = 2 \cdot AB$
- teken bovenkant middelste balk met behulp van P en Q



[► WERKBLAD] Zie het voorbeeld.

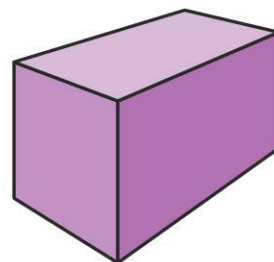
- In de tekening is de lengte van de ribbe AC gevonden door opmeten. Licht toe waarom dat mag.
- Licht toe hoe je met punt C en de verdwijnpunten P en Q het bovenste vlak van de middelste balk kan tekenen.
- Teken op het werkblad de linkerbalk in de perspectieftekening.

[► WERKBLAD] In figuur 13.61 zie je de drie aanzichten op schaal 1 : 30 van een kunstwerk dat uit drie gelijke balken bestaat. In figuur 13.62 is een begin gemaakt van de perspectieftekening van dit kunstwerk.



figuur 13.61

- Maak de perspectieftekening af.
- De perspectieftekening is getekend vanuit een denkbeeldig gezichtspunt. Bereken op welke hoogte dit punt ligt. Geef je antwoord in gehele cm.
- Het kunstwerk is gemaakt van graniet dat een dichtheid heeft van $2,7 \text{ kg/dm}^3$. Bereken het totale gewicht van het kunstwerk. Rond het antwoord af op een geheel aantal kg.

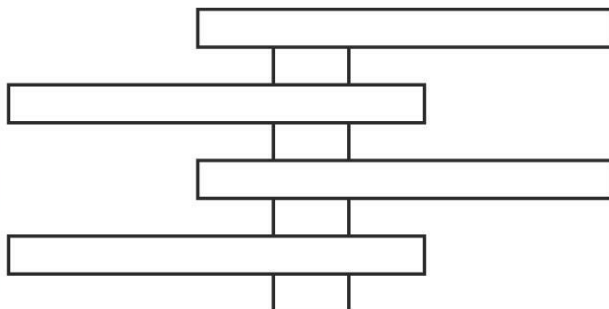


figuur 13.62

In het Rijksmuseum in Amsterdam staat het kunstwerk Acht gestapelde balken van Carel Visser. In figuur 13.63a zie je een foto van dit kunstwerk en in figuur 13.63b het vooraanzicht op schaal 1 : 25.



a



b

figuur 13.63

- Teken het zijaanzicht en het bovenaanzicht op schaal 1 : 25.
- Bereken de inhoud van het kunstwerk in dm^3 nauwkeurig.
- Het kunstwerk wordt vervoerd in een balkvormige kist waar het precies in past. Bereken hoeveel procent van de kist door het kunstwerk in beslag wordt genomen.

Op de foto in figuur 13.64 zie je een werk van Sol LeWitt, een Amerikaanse beeldhouwer, schilder en tekenaar (1928-2007).



figuur 13.64

De eerste balk (links) is opgebouwd uit $8 \times 1 \times 8$ kubusjes. De tweede balk is opgebouwd uit $7 \times 2 \times 7$ kubusjes, enzovoort.

a Uit hoeveel kubusjes is de derde balk opgebouwd?

De laatste balk is opgebouwd uit $1 \times 8 \times 1$ kubusjes. In totaal zijn er dus acht balken.

b Welke van deze acht balken bevat het grootste aantal kubusjes?

Sol LeWitt heeft ook een variatie op dit werk gemaakt, zie de foto hiernaast.

De eerste balk (links) is een stapel van acht kubusjes. De tweede balk is opgebouwd uit $2 \times 2 \times 7$ kubusjes, enzovoort.

c Uit hoeveel kubusjes is de derde balk opgebouwd?

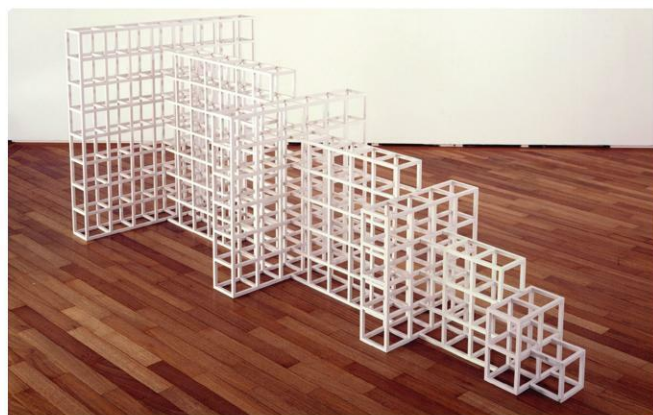
d Uit hoeveel balken bestaat dit kunstwerk? Hoeveel kubusjes zijn in totaal gebruikt?



figuur 13.65

Op de foto hieronder zie je nog een soortgelijk kunstwerk van Sol LeWitt.

e Zoek de regelmaat en bereken uit hoeveel kubusjes dit werk bestaat.



figuur 13.66

A43
☐ ⊙ *

[► WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je het Einstein monument in Ulm, de geboorteplaats van Einstein. De kunstenaar is Max Bill. Het kunstwerk bestaat uit 12 staande granieten balken die symbool staan voor de 12 uren van de dag en 12 liggende granieten balken die symbool staan voor de 12 uren van de nacht. De afmetingen van de balken zijn 40 bij 40 bij 200 cm.

- Hoe hoog is het kunstwerk?
- Op welke hoogte is de foto genomen?
- Het graniet heeft een dichtheid van $2,7 \text{ kg/dm}^3$. Bereken het gewicht van het kunstwerk.
- Teken op schaal 1 : 80 de drie aanzichten.



figuur 13.67

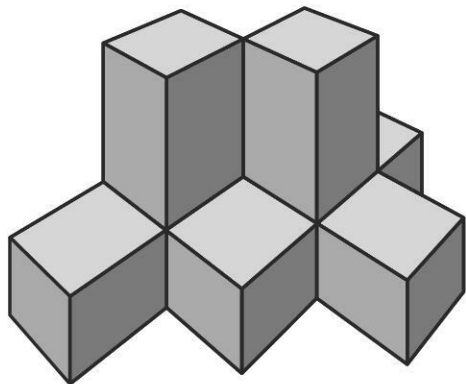
A44
☐ ⊙ *

[► WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je het kunstwerk Still Blue Range van Carl Andre. Het bestaat uit acht kubussen met ribben van 20 cm en drie balken van 20 bij 20 bij 60 cm.

- Teken op schaal 1 : 10 de drie aanzichten.
- Het kunstwerk is gemaakt van Belgisch blauw hardsteen dat een dichtheid heeft van $2,8 \text{ kg/dm}^3$. Bereken het totale gewicht van het kunstwerk.
- In de figuur hieronder is een begin gemaakt van een perspectieftekening van het kunstwerk. Deze figuur staat ook op het werkblad. Je ziet het rechtergedeelte van het kunstwerk. Maak de perspectieftekening af.



figuur 13.68



figuur 13.69

Het Gasuniegebouw is een kantoorgebouw in het zuiden van de stad Groningen. Het gebouw is ontworpen door het architectenbureau Alberts en Van Huut uit Amsterdam. Er zijn 18 verdiepingen en de grootste hoogte is 89 meter. Er is 45 000 m² aan kantoorruimte en de totale inhoud van het gebouw is 225 000 m³.

Er is een maquette van het gebouw gemaakt op schaal 1 : 125.

- Wat is de grootste hoogte van deze maquette?
- Hoeveel dm² aan kantoorruimte heeft deze maquette?
- Hoeveel dm³ is de inhoud van de maquette? Rond af op gehelen.



figuur 13.70

Theorie B Teken en rekenen bij gebouwen

Emre kijkt door een raam en ziet in de verte een toren staan. Het raam heeft een hoogte van 120 cm en de toren is 35 meter hoog. Emre staat op een afstand van 1,5 meter van het raam. Met deze gegevens kun je berekenen wat de afstand is tussen het raam en de toren. Opmeten in figuur 13.71 geeft hoogte raam is 3,8 cm en hoogte toren is 2,1 cm.

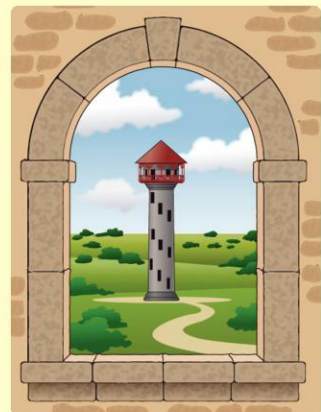
Als Emre de toren op het raam zou tekenen, dan zou deze $\frac{2,1}{3,8} \cdot 1,2 = 0,66...$ meter hoog zijn.

In figuur 13.72 is driehoek ABC een vergroting van driehoek ADE .

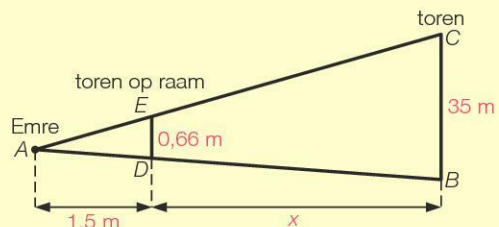
De vergrotingsfactor is $\frac{35}{0,66...}$.

Er geldt $\frac{35}{0,66...} \cdot 1,5 = 1,5 + x$ en dat geeft $x \approx 78$.

De toren staat dus ongeveer 78 meter van het raam.



figuur 13.71



figuur 13.72

Van de toren is een maquette op schaal 1 : 75 gemaakt. Dat wil zeggen dat alle afmetingen van de toren 75 keer zo groot zijn als de afmetingen in de maquette. De oppervlakten zijn 75² keer zo groot en de inhoud is 75³ keer zo groot.

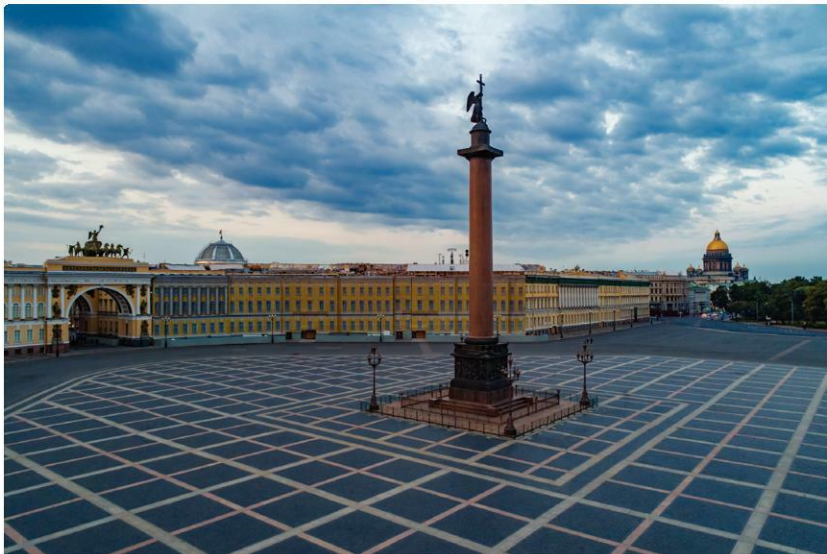
Is de inhoud van de maquette 1,4 dm³, dan is de inhoud van de toren 75³ · 1,4 = 590 625 dm³, dus ongeveer 591 m³.

[► WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je de Alexanderzuil op het paleisplein in Sint-Petersburg. De zuil is in totaal 48 meter hoog en weegt 700 ton. De fotograaf stond op een afstand van 38 meter voor de zijde van de poort waar de fotograaf tegenaan kijkt. De hoogte van de doorgang onder de poort is 17 meter.



figuur 13.73

- a Bereken hoe ver de fotograaf van de zuil staat.
- b Achter de zuil zie je het wereldberoemde museum De Hermitage. In de souvenirwinkel van dit museum kun je een bouwpakket kopen van de Alexanderzuil. Op de doos staat dat de hoogte van het model $9\frac{1}{2}$ inch is.
Hoe zwaar zou het model zijn als het van hetzelfde materiaal zou zijn gemaakt als de zuil? Gebruik dat $1 \text{ inch} = 2,54 \text{ cm}$ en geef je antwoord in grammen nauwkeurig.
- c Hieronder zie je een foto van de Alexanderzuil vanuit een ander perspectief.
Bereken vanaf welke hoogte deze foto genomen is.



figuur 13.74

47



[► WERKBLAD] In de figuur hiernaast zie je een foto-impressie van het Pontsteigergebouw in Amsterdam. De grootste hoogte van het gebouw is 90 meter en de inhoud is $200\,000\text{ m}^3$.

Er is een maquette gemaakt van het Pontsteigergebouw. De inhoud van deze maquette is 59 dm^3 .

- Bereken in cm nauwkeurig de grootste hoogte van deze maquette.
- Voor het in figuur 13.75 gekozen perspectief heeft men een denkbeeldig punt gekozen van waaruit de foto-impressie is getekend. Bereken de hoogte van dit denkbeeldige punt.



figuur 13.75

A48



[► WERKBLAD] In figuur 13.76 zie je een foto van het zogenaamde Basket Building in Newark (Ohio, Verenigde Staten). Zowel het grondvlak als het dak van het gebouw is een rechthoek. De oppervlakte van het grondvlak is $24\,192\text{ square feet}$.

- Hoeveel m^2 is dat? Gebruik dat $1\text{ foot} = 30,48\text{ cm}$.

Het dak is 63 bij 43 meter en is een vergroting van het grondvlak van het gebouw. Op het werkblad staat het vooraanzicht van het gebouw op schaal $1 : 1000$.

- Teken op schaal $1 : 1000$ het zijaanzicht van het gebouw.

Het gebouw is een replica van een Longaberger medium boodschappenmand. Zie figuur 13.77. De gebruikte schaal is $1 : 160$.

De stalen handvatten bovenop het gebouw wegen elk $75\,000\text{ kg}$.

Als je ervan uit zou gaan dat de handvatten van het gebouw een exacte replica zijn van de handvatten van de Longaberger boodschappenmand en dus ook van hetzelfde materiaal zijn, dan kun je berekenen wat het gewicht van één zo'n handvat van de boodschappenmand zou zijn.

- Bereken dit gewicht. Rond af op gehele grammen.



figuur 13.76



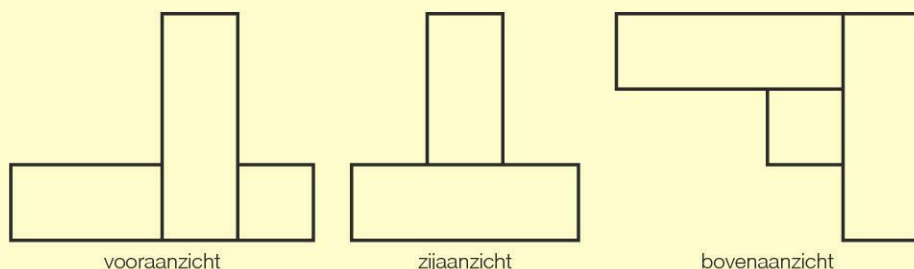
figuur 13.77

Terugblik

Tekenen en rekenen bij kunstwerken

Op de foto hiernaast zie je het kunstwerk *Uncarved Blocks* van Carl Andre, dat uit 15 elementen bestaat.

In de figuur hieronder zie je van een van deze elementen de drie aanzichten.



Met de gegeven aanzichten kun je achterhalen bij welk element deze aanzichten horen.

De aanzichten zijn op schaal 1 : 30 en de balken zijn van rood cederhout met een dichtheid van $0,55 \text{ kg/dm}^3$. Met deze gegevens kun je het gewicht van het element berekenen.

Je hebt met drie balken te maken, elk met een afmeting van $30 \times 30 \times 90 \text{ cm}$, dus de inhoud van een balk is $3 \cdot 3 \cdot 9 = 81 \text{ dm}^3$.

Het totale gewicht van dit element is $3 \cdot 81 \cdot 0,55 \approx 134 \text{ kg}$.

Tekenen en rekenen bij gebouwen

De piramidewoningen op de foto zijn verkleiningen van de beroemde piramide van Cheops in Egypte. De oorspronkelijke piramide van Cheops was 230 bij 230 meter en had een hoogte van 146,6 meter.

De grote piramide op de foto heeft een inhoud van 400 m^3 . Met deze gegevens kun je de hoogte van deze piramide berekenen.

De inhoud van de piramide van Cheops is $\frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 146,6 \approx 2\,585\,047 \text{ m}^3$, dus er geldt

$k^3 = \frac{2\,585\,047}{400}$ en dit geeft $k \approx 18,63$.

Dus de hoogte van de grootste piramide op de foto is $\frac{146,6}{18,63} \approx 7,9 \text{ meter}$.



$$I_{\text{piramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Eindopdracht De Markthal

[► WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je de Markthal in Rotterdam. De hal bestaat uit een grote boog die aan de binnenkant op de begane grond 37 meter breed is en 117 meter lang. De hoogte van de hal aan de binnenkant is 34 meter.

- Bereken met behulp van de foto op het werkblad vanaf welke hoogte deze foto genomen is.



Op de tweede foto zie je een deel van de binnenzijde van de Markthal. De binnengevel van de Markthal is bekleed met een groot kunstwerk van Arno Coenen en Iris Roskam, getiteld 'Horn des overvloeds'.

- Florian beweert dat het kunstwerk een oppervlakte heeft van $11\,000\text{ m}^2$. Kan dit kloppen? Licht toe met een berekening.



In het midden van de tweede foto is door de glazen pui de Blaaktoren zichtbaar. Deze woontoren is 61 meter hoog en staat hemelsbreed op een afstand van 108 meter van de glazen pui van de Markthal.

- Bereken met behulp van de foto op het werkblad hoe ver de fotograaf verwijderd is van de glazen pui.

De Blaaktoren heeft in de Rotterdamse volksmond de bijnaam 'Het potlood', omdat de omtrek bij benadering een regelmatige zeshoek is en het gebouw een puntdak heeft. Anne wil een draadmodel in perspectief tekenen van de Blaaktoren. Ze gaat uit van een prisma met als grondvlak een regelmatige zeshoek en een piramidevormig dak. Ze tekent eerst een balk, waar het prisma precies in past. In de figuur op het werkblad zie je de balk die Anne getekend heeft. Anne heeft het punt van waaruit de perspectieftekening is opgebouwd zo gekozen, dat het precies op dezelfde hoogte ligt als de top van het dak.

- Maak deze perspectieftekening af.

Diagnostische toets

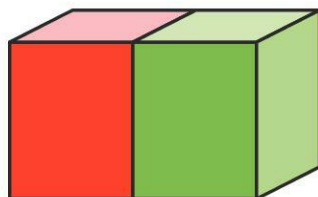
13.1 Halveren en verdubbelen in perspectief

- 1 [► WERKBLAD] In de figuur hiernaast zie je een zwembad. Esmee wil in de lengterichting van dit zwembad vier even brede banen aanbrengen. Ze gebruikt daarvoor gekleurde lijnen. Teken op het werkblad de gekleurde lijnen.



figuur 13.78

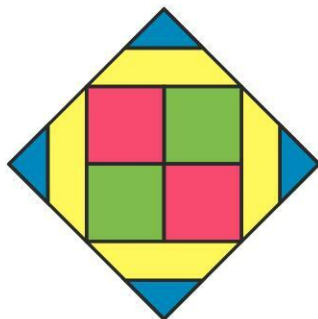
- 2 [► WERKBLAD] In de figuur hiernaast zie je twee gekleurde blokjes die even groot zijn. Op het werkblad zie je een perspectieftekening van het rode blokje. Teken het groene blokje er in perspectief bij.



figuur 13.79

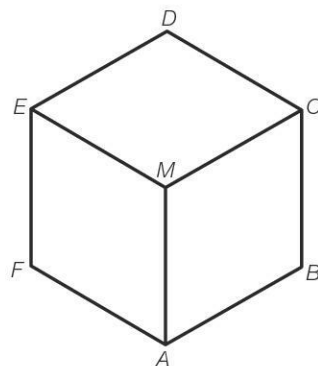
13.2 Regelmatige veelhoeken

- 3 In de figuur hiernaast zie je een kunstwerk dat bestaat uit vier even grote driehoeken, vier even grote trapezia en een vier even grote vierkanten. De zijde van het kunstwerk is 80 cm en is verdeeld in vier gelijke stukken.
- Toon aan dat de oppervlakte van een trapezium drie keer zo groot is als de oppervlakte van een driehoek.
 - Toon aan dat geldt $4 \cdot O(\text{driehoek}) = O(\text{vierkant})$.



figuur 13.80

- 4 [► WERKBLAD] In de figuur hiernaast zie je de regelmatige zeshoek $ABCDEF$ met daarin het middelpunt M en de lijnstukken AM , CM en EM . Op het werkblad is een begin van de zeshoek in eenpuntperspectief getekend. Maak de perspectieftekening van de zeshoek op het werkblad af. Kleur in de perspectieftekening alle lijnstukken die je in de figuur hiernaast ziet rood.

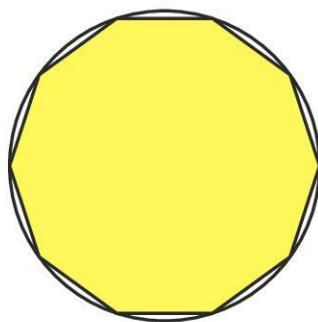


figuur 13.81

13.3 De gulden snede

- 5** In de figuur hiernaast zie je een regelmatige tienhoek en een cirkel door de hoekpunten van de tienhoek. Bij een regelmatige tienhoek geldt dat de straal van de cirkel die door de hoekpunten van de tienhoek gaat precies φ keer zo groot is als de zijde van de tienhoek. Hierbij is φ het gulden getal.

Bereken in mm^2 nauwkeurig de oppervlakte van de tienhoek als gegeven is dat de zijde van de tienhoek 3 cm is.

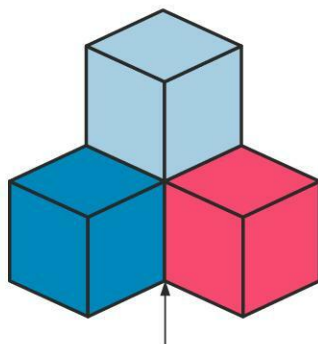


figuur 13.82

13.3 Aanzichten en inhouden

- 6** [► WERKBLAD] Hiernaast zie je een logo dat bestaat uit vier gestapelde kubussen. Voor een congres wordt het logo van blokken hout gemaakt en getoond bij de ingang van de congreszaal. De kubussen hebben ribben van 35 cm.

- Teken op schaal 1 : 10 het vooraanzicht in de richting van de pijl.
- Op het werkblad is een begin gemaakt met de perspectieftekening van het houten logo. Maak de perspectieftekening op het werkblad af.



figuur 13.83

- 7** [► WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie de boog van Constantijn in Rome. De hoogte van de boog is 21 meter. De foto staat ook op het werkblad.

- Bereken vanaf welke hoogte de foto is genomen. Geef het antwoord in meters en rond af op gehele.

Er is ook een bronzen miniatuurversie van de boog van Constantijn. De miniatuurversie heeft een hoogte van 30 cm en een volume van 10 dm^3 .

- Bereken het volume van de miniatuurversie in kubieke inch. Gebruik dat $1 \text{ inch} = 2,54 \text{ cm}$. Rond af op gehele.
- Bereken de inhoud van de echte boog van Constantijn. Rond af op gehele m^3 .



14

Werken met formules

Wat leer je?

- Berekenen van gemiddelde veranderingen.
- Het verband tussen de helling van een grafiek en de snelheid van verandering.
- Werken met periodieke verschijnselen en trend.
- Formules herschrijven en variabelen vrijmaken.
- Herleiden van formules met exponenten en logaritmen.
- Redeneren met formules.



Beginopdracht Bevolkingsgroei

De wereldbevolking is in de periode van 1970 tot 2020 meer dan verdubbeld. Waren er in 1970 nog 3,7 miljard mensen, in 2020 was dit aantal toegenomen tot 7,8 miljard.

Twee landen die hebben bijgedragen aan deze toename zijn Nigeria en Bangladesh. Nigeria is het land met de meeste inwoners van Afrika. Net als het Aziatische Bangladesh hoort Nigeria bij de tien landen met de grootste bevolkingsomvang van de wereld.



Bangladesh

In de tabel hieronder zie je de bevolkingsontwikkeling van deze landen. Hierin zijn de aantallen inwoners in miljoenen.

	1970	1980	1990	2000	2010	2020
Bangladesh	66,9	80,6	105,3	127,7	147,6	164,7
Nigeria	56,1	73,7	95,6	122,9	159,7	206,6

- Ga zowel voor Nigeria als Bangladesh na of de bevolking verhoudingsgewijs sneller of minder snel is toegenomen dan in de hele wereld.

In de tabel hiernaast is een begin gemaakt met het berekenen van de gemiddelde toename per jaar van het aantal inwoners in Bangladesh en Nigeria.

- Licht het getal 1,37 in de tabel toe en vul de tabel verder in.
- Trek enkele conclusies uit de ingevulde tabel.

gemiddelde toename per jaar in miljoenen		
periode	Bangladesh	Nigeria
1970-1980	1,37	
1980-1990		
1990-2000		
2000-2010		
2010-2020		

De omvang van de bevolking van Nigeria kan worden benaderd door de formule $\log(N) = 0,0113t + 1,749$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1970 en N de bevolkingsomvang in miljoenen.

- Onderzoek bij welk van de jaren in de gegeven tabel het met de formule berekende aantal procentueel het meest afwijkt van het werkelijke aantal inwoners.

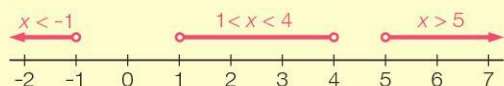


Nigeria

Voorkennis Intervallen en de delta-notatie

Theorie A Intervallen noteren

Een interval is een aaneengesloten stuk van de getallenlijn.
In de figuur hieronder zijn boven de getallenlijn drie intervallen getekend.



figuur 14.1

Voorbeeld

a Vul in: x ligt tussen 5 en 9 noteer je als ...

b Vul in: Bij  hoort de notatie ...

Uitwerking

a $5 < x < 9$

b $-2 < x < 4$

1 Vul in.

a x ligt tussen 0 en 6 noteer je als ...

b x ligt tussen 3,5 en 6,4 noteer je als ...

c x is groter dan 7 noteer je als ...

d x is kleiner dan 12,5 noteer je als ...

2 Vul in.

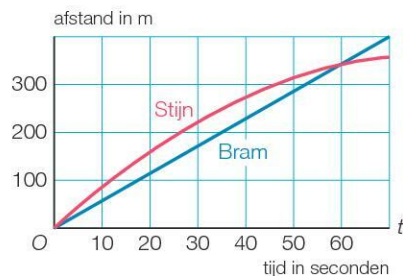
a Bij  hoort de notatie ...

b Bij  hoort de notatie ...

c Bij  hoort de notatie ...

d Bij  hoort de notatie ...

- 3** Stijn en Bram houden een hardlooptwedstrijd over 400 meter. In de figuur hiernaast is de afstand uitgezet tegen de tijd.
- Wie lag halverwege voor?
 - Wie heeft de wedstrijd gewonnen?
 - In welk tijdsinterval lag Stijn voor op Bram?



figuur 14.2

Theorie B De delta-notatie

Om de formule op te stellen van de lijn k door de punten $A(1, 3)$ en

$B(5, 6)$ ga je uit van $k: y = ax + b$ en bereken je eerst $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

In deze notatie is de letter Δ gebruikt, dat is de Griekse hoofdletter D, de eerste letter van differentie (= verschil). Spreek Δ uit als delta.

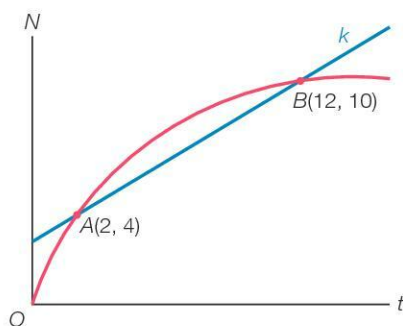
Je krijgt $\Delta y = 6 - 3 = 3$ en $\Delta x = 5 - 1 = 4$, dus $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } A(1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 1 + b = 3 \\ \frac{3}{4} + b = 3 \\ b = 2\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{4}$.

- 4** Gegeven zijn de punten $P(2, 4)$ en $Q(7, 10)$.
- Licht toe dat $\Delta x = 5$. Wat is de bijbehorende Δy ?
 - Stel de formule op de van de lijn l door P en Q .

- 5** In de figuur hiernaast is N uitgezet tegen t . Op de grafiek van N liggen de punten $A(2, 4)$ en $B(12, 10)$. De lijn k gaat door A en B . Stel de formule op van k .



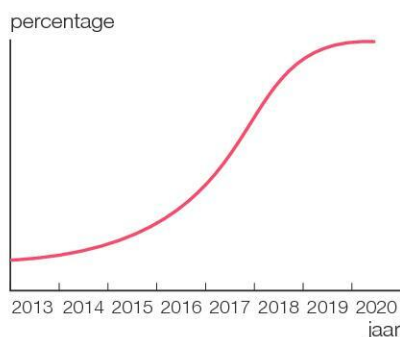
figuur 14.3

14.1 Stijgen en dalen van grafieken



In de figuur hiernaast kun je zien dat het percentage 75-plussers dat in Nederland gebruik maakt van sociale media in de jaren 2013-2020 steeds is gestegen. Toch is er een verschil tussen de stijging tot en met 2017 en de stijging vanaf 2018.

Leg uit wat dit verschil is.



figuur 14.4

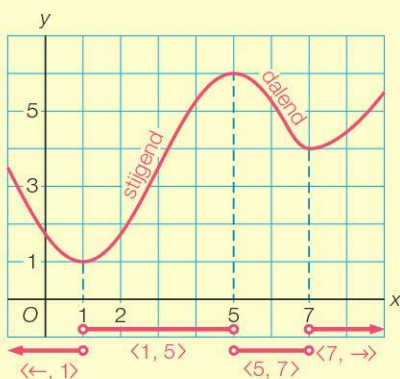
Theorie A Intervallen en stijgen en dalen

Zie figuur 14.5. Als x toeneemt van 1 tot 5, dan ga je langs de grafiek omhoog. De grafiek is dus **stijgend** tussen $x = 1$ en $x = 5$. We kunnen ook zeggen: de grafiek is stijgend voor $1 < x < 5$. We noteren dit met de **intervalnotatie** $\langle 1, 5 \rangle$. Voortaan zeggen we: de grafiek is stijgend op het **interval** $\langle 1, 5 \rangle$.

Een interval is een stukje getallenlijn. Tot het **open interval** $\langle 1, 5 \rangle$ behoren alle getallen die tussen 1 en 5 liggen. De grenzen 1 en 5 doen niet mee. Bij de getallenlijn in het kader hiernaast is dat met open rondjes aangegeven. De grafiek in figuur 14.5 is **dalend** op het interval $\langle 5, 7 \rangle$.

De grafiek is stijgend voor elke x groter dan 7. We zeggen dat de grafiek stijgend is op het interval $\langle 7, \rightarrow \rangle$. De grafiek is dalend op het interval $\langle \leftarrow, 1 \rangle$.

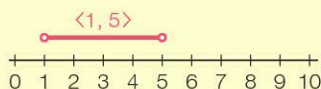
Behalve open intervallen zijn er ook **gesloten intervallen**. Bij een gesloten interval doen de grenzen wel mee. Hiernaast zie je het gesloten interval $[1, 6]$. Dit is de notatie voor $1 \leq x \leq 6$. Let op dat bij $1 < x < 6$ de grenzen 1 en 6 niet meedoen. Bij $1 \leq x \leq 6$ doen de grenzen 1 en 6 wel mee. Ook aan de dichte rondjes hiernaast kun je zien dat de grenzen 1 en 6 meedoen.



figuur 14.5

Intervallen

Bij het open interval $\langle 1, 5 \rangle$ doen de grenzen 1 en 5 niet mee.



Tot het interval $\langle 5, \rightarrow \rangle$ behoren alle getallen groter dan 5.

Tot het interval $\langle \leftarrow, 3 \rangle$ behoren alle getallen kleiner dan 3.



Bij het gesloten interval $[1, 6]$ doen de grenzen 1 en 6 ook mee.



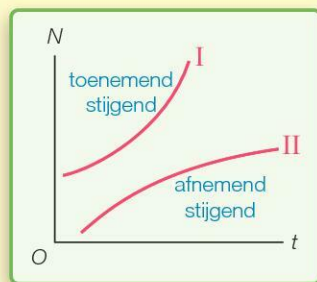
Hiernaast zie je twee grafieken die beide stijgend zijn. Ga je van links naar rechts over de grafieken, dan ga je omhoog. Maar toch is er een belangrijk verschil tussen de twee grafieken.

Bij grafiek I is de toename steeds groter; de grafiek gaat steeds steiler omhoog. Er is sprake van

toenemende stijging.

Bij grafiek II komt er telkens minder bij; de grafiek gaat steeds minder steil omhoog. Er is sprake van

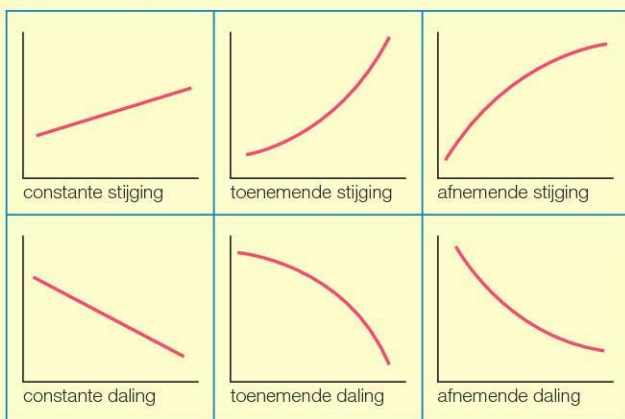
afnemende stijging.



SOORTEN VAN STIJGEN EN DALEN

Hiernaast staan de verschillende soorten van stijgen en dalen vermeld.

Op de vraag welke soorten van stijgen en dalen je in een grafiek herkent, noteer je de grootst mogelijke open intervallen. Zie het voorbeeld.



Voorbeeld

Welke soorten van stijgen en dalen kun je op het interval $[0, 10]$ in figuur 14.6 herkennen? Noem ook de bijbehorende intervallen.

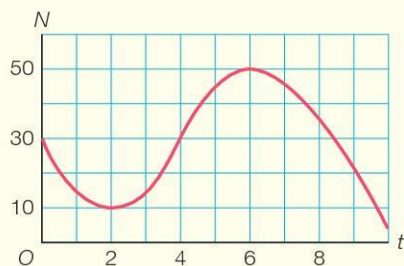
Uitwerking

afnemend dalend op $\langle 0, 2 \rangle$

toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$

afnemend stijgend op $\langle 4, 6 \rangle$

toenemend dalend op $\langle 6, 10 \rangle$



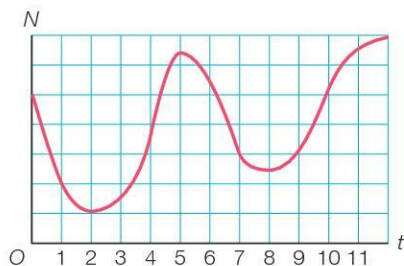
figuur 14.6



Zie figuur 14.7 met t tussen 0 en 12.

a Welke soorten van stijgen herken je? Noem ook de bijbehorende intervallen.

b Welke soorten van dalen herken je? Noem ook de bijbehorende intervallen.

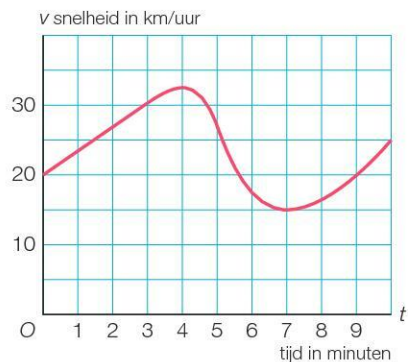


figuur 14.7

A3
  *

De grafiek in figuur 14.8 gaat over de snelheid van een fietser tijdens een tocht door een glooiend landschap.

- Welke soorten van stijgen en dalen herken je op het interval $[0, 10]$? Noem ook de bijbehorende intervallen.
- Op welk tijdsinterval is de fietser aan het klimmen?



figuur 14.8

04
  *

In 2017 passeerde Nederland de grens van 17 miljoen inwoners. In de tabel kun je voor verschillende perioden de toename ΔN van het aantal inwoners N in miljoenen aflezen.

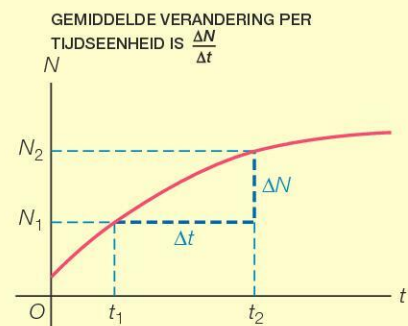
Stijn bekijkt de tabel en zegt: “Er is sinds 1840 sprake van een afnemende stijging.” Welke fout maakt Stijn?

BEVOLKING VAN NEDERLAND

periode	ΔN
1840-1940	5,8
1940-1970	4,2
1970-1990	1,9
1990-2010	1,6
2010-2020	0,8

Theorie B Gemiddelde veranderingen

Om veranderingen van inwoneraantallen N te vergelijken, gebruik je ΔN . Het ligt voor de hand om te zeggen: ‘Hoe groter ΔN , des te sterker verandert N .’ Let er echter op dat ook de lengte Δt van het tijdsinterval een rol speelt. Om de veranderingen goed met elkaar te vergelijken, bekijk je de **gemiddelde veranderingen** per tijdseenheid.



figuur 14.9

Zo geldt voor de tabel in opgave 4:

- voor de periode 1840-1940 neemt N met 5,8 toe, dus de gemiddelde verandering is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{5,8}{100} = 0,058$ miljoen per jaar;
- voor de periode 1940-1970 neemt N met 4,2 toe, dus de gemiddelde verandering is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{4,2}{30} = 0,14$ miljoen per jaar.

$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ is de gemiddelde verandering van N per tijdseenheid.

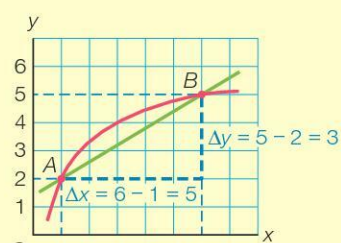
Op het interval $[1, 6]$ in figuur 14.10 is $\Delta x = 6 - 1 = 5$ en $\Delta y = 5 - 2 = 3$.

De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5} = 0,6$.

De gemiddelde verandering $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is de

richtingscoëfficiënt van de lijn AB in figuur 14.10.

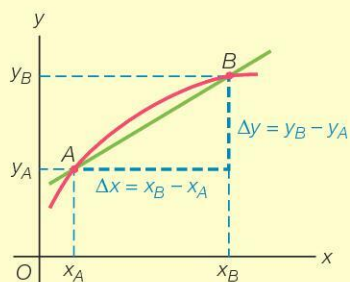
In plaats van ‘de richtingscoëfficiënt van de lijn AB ’ zeggen we ook ‘de **helling** van de lijn AB ’.



figuur 14.10

De gemiddelde verandering $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van y op $[x_A, x_B]$ is

- de richtingscoëfficiënt (oftewel de helling) van de lijn AB
- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



Voorbeeld

Zie figuur 14.11.

Bereken de gemiddelde verandering van y op de intervallen $[-1, 3]$ en $[3, 5]$.

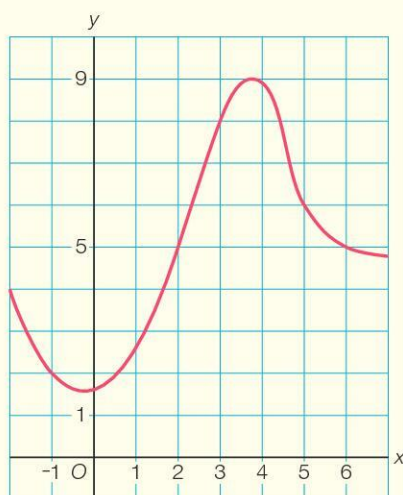
Uitwerking

De gemiddelde verandering op $[-1, 3]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 2}{3 - (-1)} = \frac{6}{4} = 1,5.$$

De gemiddelde verandering op $[3, 5]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 8}{5 - 3} = \frac{-2}{2} = -1.$$



figuur 14.11

5 Zie figuur 14.11.



a Bereken de gemiddelde verandering van y op de intervallen $[2, 5]$, $[3, 6]$ en $[-1, 5]$.

b Noem een interval waarop de gemiddelde verandering van y nul is.

- 6** In de tabel staat informatie over het aantal woningen N in miljoenen in Nederland.

WONINGVOORRAAD NEDERLAND

jaar	1920	1947	1964	1970	1980	1987	1995	2000	2019
N	1,37	2,12	3,15	3,75	4,85	5,59	6,30	6,59	7,82

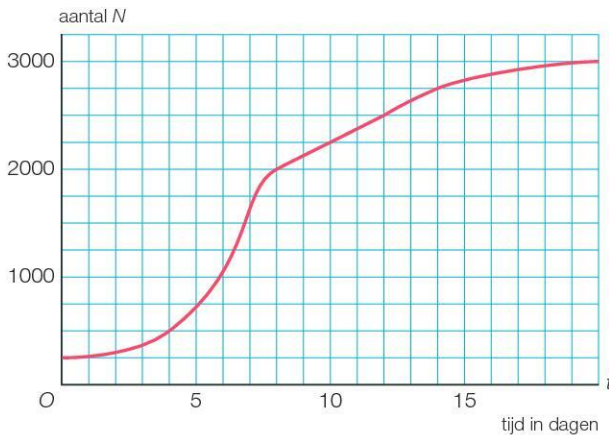
- a** Met hoeveel neemt N toe in de periode 1980-1987? Wat is de gemiddelde toename per jaar in deze periode?

Hieronder is een begin gemaakt van de tabel met periode, Δt , ΔN en $\frac{\Delta N}{\Delta t}$.

periode	Δt	ΔN	$\frac{\Delta N}{\Delta t}$
1920-1947	27	0,75	0,028
...	...	...	...

- b** Neem de tabel over en vul verder in.
c In welke periode is de gemiddelde toename het grootst?
d Trek een conclusie over het verloop van de woningvoorraad in Nederland.

- 7** In figuur 14.12 is de groei weergegeven van een populatie fruitvliegjes in een afgesloten ruimte.



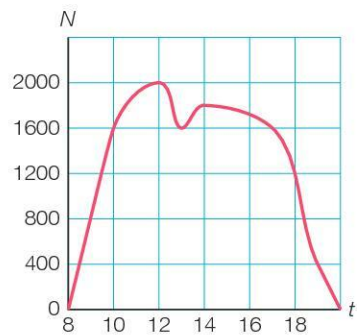
figuur 14.12

- a** Bereken de gemiddelde toename per dag van het aantal fruitvliegjes gedurende de eerste tien dagen.
b Hoe kun je in de figuur zien dat de gemiddelde toename per dag op $[2, 8]$ groter is dan op $[10, 14]$?
c Zeg zonder berekening op welk interval de gemiddelde toename per dag het grootst is en ook op welk interval het kleinst. Kies uit $[0, 4]$, $[4, 8]$, $[8, 12]$ en $[12, 20]$.

A8
□ ⊗ *

In figuur 14.13 is het aantal auto's N op een parkeerterrein bij een dierentuin uitgezet tegen de tijd t in uren. Het betreft een zaterdag in mei.

- Bereken $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ op het interval $[9, 13]$.
- Bereken de gemiddelde verandering van N op het interval $[12, 17]$. Wat betekent het dat je antwoord negatief is?
- Geef een interval waarop de gemiddelde toename 100 auto's per uur is.
- Geef een interval waarop de gemiddelde afname 200 auto's per uur is.

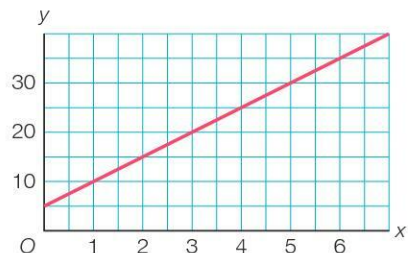


figuur 14.13

R9
□ ⊗ *

Zie figuur 14.14. De grafiek is een lijn.

- Bereken de gemiddelde verandering op de intervallen $[0, 2]$, $[2, 5]$, $[5, 6]$ en $[6, 10]$.
- Wat kun je zeggen van de gemiddelde veranderingen als de grafiek een lijn is?

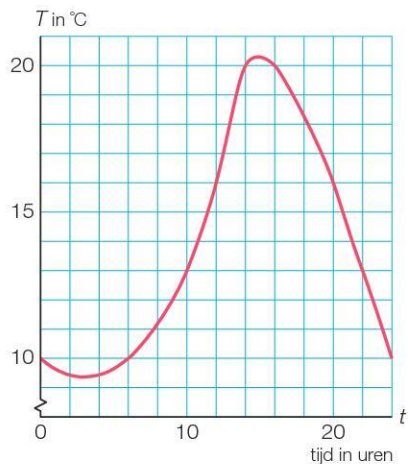


figuur 14.14

A10
□ ⊗ *

[> WERKBLAD] De grafiek in figuur 14.15 gaat over het verloop van de temperatuur op een dag in mei.

- Bereken $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op $[6, 10]$ en op $[9, 14]$.
- Geef een interval waarop de gemiddelde verandering $-0,3^\circ\text{C/uur}$ is.
- Voor welke t is de gemiddelde toename van de temperatuur op $[0, t]$ gelijk aan die op het interval $[0, 10]$? Licht je antwoord toe met behulp van het werkblad.
- Voor welke t is de gemiddelde toename van de temperatuur op $[0, t]$ maximaal? Licht je antwoord toe met behulp van het werkblad.



figuur 14.15

E11
*

Van een grafiek is het volgende bekend: de grafiek gaat door het punt $(0, 2)$ en

- op $[0, 2]$ is de gemiddelde verandering $\frac{1}{4}$
 - op $[0, 5]$ is de gemiddelde verandering $\frac{1}{5}$
 - op $[1, 3]$ is de gemiddelde verandering $1\frac{1}{2}$
 - op $[1, 5]$ is de gemiddelde verandering $\frac{1}{2}$.
- Bereken de gemiddelde verandering op $[3, 5]$.
 - Is het mogelijk dat de gemiddelde verandering op $[1, 4]$ gelijk is aan $1\frac{1}{2}$? Licht toe.

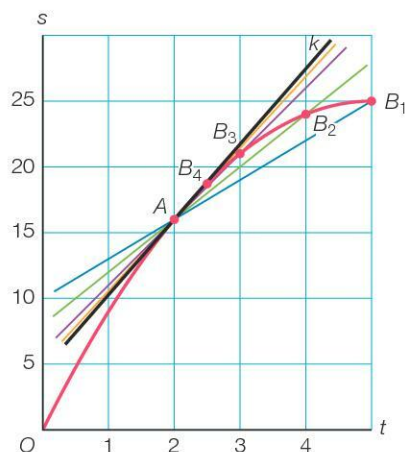
Gegeven is de formule $s = -t^2 + 10t$ met t op $[0, 5]$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.

Klaas berekent de gemiddelde snelheden op de intervallen $[2, 5]$, $[2, 4]$, $[2, 3]$ en $[2, 2,5]$. Hij krijgt achtereenvolgens 3 m/s, 4 m/s, 5 m/s en 5,5 m/s.

In figuur 14.16 is de grafiek van $s = -t^2 + 10t$ getekend. Ook zijn de lijnen AB_1 , AB_2 , AB_3 en AB_4 getekend.

De helling van de lijn AB_1 geeft de gemiddelde snelheid op het interval $[2, 5]$.

Van welk deze lijnen komt de helling het dichtst in de buurt van de helling van de lijn k die de grafiek van s in A raakt?



figuur 14.16

Theorie C Snelheid en raaklijn

In figuur 14.17 zie je een **tijd-afstandgrafiek**.

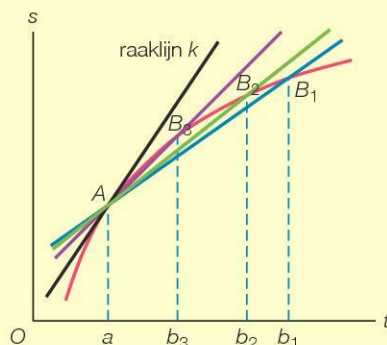
Door de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$.

De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de richtingscoëfficiënten van de lijnen AB_1 , AB_2 , AB_3 , ...

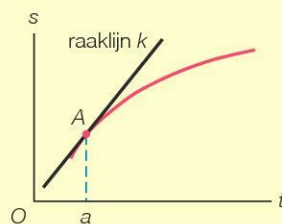
Hoe dichter B bij A komt te liggen, des te meer zal de lijn AB lijken op de lijn k die de grafiek in A raakt.

De lijn k is de **raaklijn** van de grafiek in A .

De snelheid op $t = a$ is dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A .



figuur 14.17



rc_k is de snelheid op $t = a$

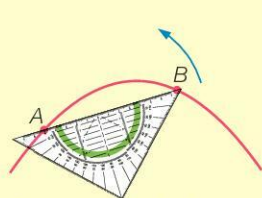
In een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.

Ook bij andere grafieken dan bij tijd-afstandgrafieken geeft de richtingscoëfficiënt van de raaklijn **de snelheid van verandering**.

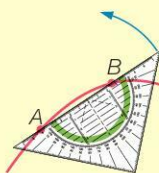
In plaats van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A zeggen we ook **de helling van de grafiek** in het punt A .

Hieronder zie je hoe je de raaklijn tekent in het punt A van een grafiek.

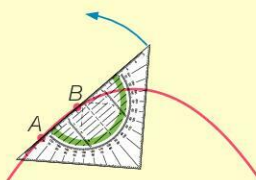
ZO KRIJG JE DE RAAKLIJN IN HET PUNT A



Draai de geodriehoek om het punt A .



Het punt B komt steeds dichterbij het punt A te liggen.



Zodra B samenvalt met A is de lijn AB overgegaan in de raaklijn in A .

Voorbeeld

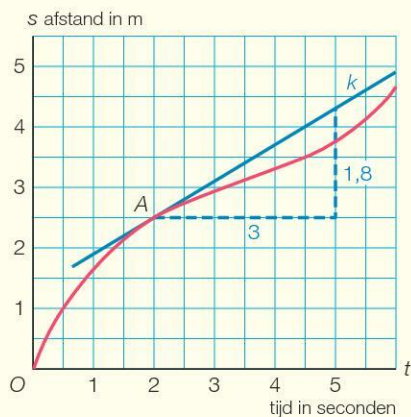
Zie de grafiek in figuur 14.18.

Schat de snelheid op $t = 2$.

Aanpak

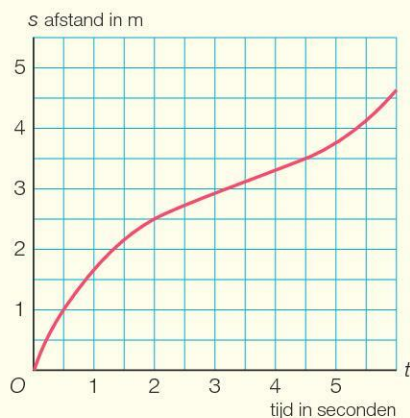
Teken de raaklijn k in het punt op de grafiek met $t = 2$. Bereken rc_k door twee geschikte punten op k te kiezen en de bijbehorende Δt en Δs af te lezen. Neem Δt voldoende groot.

Uitwerking



$$rc_k = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{1,8}{3} = 0,6$$

De snelheid op $t = 2$ is ongeveer 0,6 m/s.



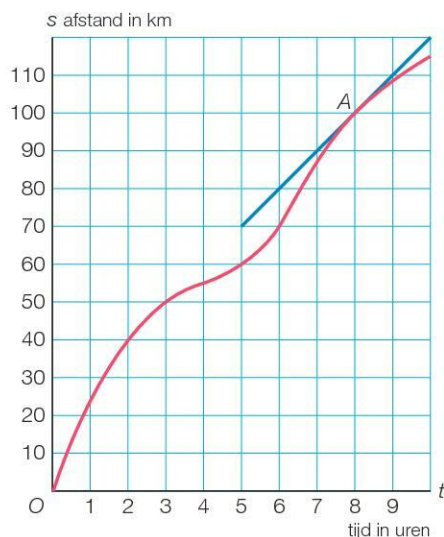
figuur 14.18

Voor Δs neem je het verschil van de s -coördinaten van twee punten op de raaklijn en dus niet op de grafiek. Je moet immers de rc van de raaklijn hebben.



[▶ WERKBLAD] In figuur 14.19 zie je een tijd-afstandgrafiek.

- In het punt A is de raaklijn van de grafiek getekend. Schat de snelheid op $t = 8$.
- Schat de snelheid op $t = 3$.
- Neemt de snelheid gedurende de eerste vier uur toe of af? Hoe zie je dat aan de grafiek?
- Voor welke t schat je dat de snelheid minimaal is?

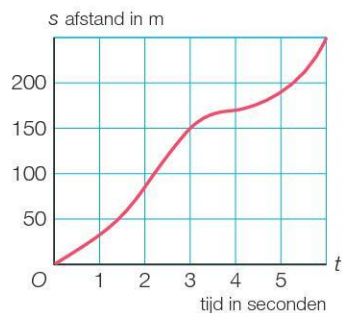


figuur 14.19



[▶ WERKBLAD] Gegeven is de tijd-afstandgrafiek in figuur 14.20.

- Schat de snelheid in gehele m/s op $t = 3$ en op $t = 5$.
- Voor welke t is de snelheid minimaal? Licht toe.
- Voor welke t is de gemiddelde snelheid op $[2, t]$ minimaal? Licht toe.
- Hoeveel tijdstippen zijn er tussen $t = 0$ en $t = 6$ waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[0, 6]$? Licht toe.

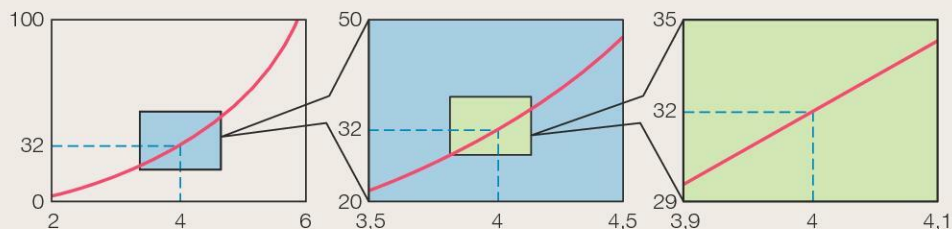


figuur 14.20

INFORMATIEF

Inzoomen op de grafiek

In de figuren hieronder is ingezoomd op de grafiek van $s = \frac{1}{2}t^3$.



Hoe meer je inzoomt, hoe meer de grafiek op een rechte lijn gaat lijken.

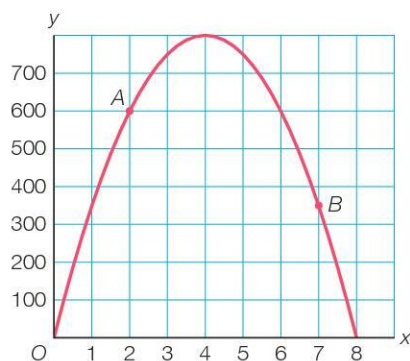
De helling van deze lijn geeft de snelheid op $t = 4$.

Zoom je in op de grafiek bij $t = 3$, dan geeft de helling de snelheid op $t = 3$.

15 [▶WERKBLAD] Zie de grafiek in figuur 14.21.



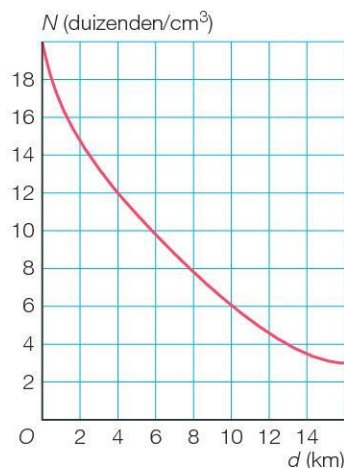
- Geef een schatting van de snelheid van verandering in het punt A .
- Geef een schatting van de helling in het punt B .



figuur 14.21

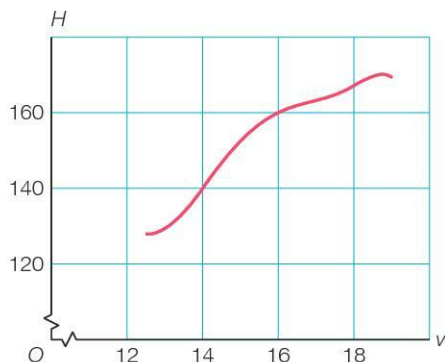
A16 [▶WERKBLAD] Een onderzoeksbureau heeft onderzoek gedaan naar de hoeveelheid ultrafijnstof in de omgeving van een vliegveld. In figuur 14.22 is de gevonden hoeveelheid ultrafijnstofdeeltjes N in duizenden per cm^3 uitgezet tegen de afstand tot het vliegveld d in km.

Schat met behulp van de figuur de waarde van de helling van de grafiek bij $d = 4$ en leg uit wat de betekenis is van deze waarde.



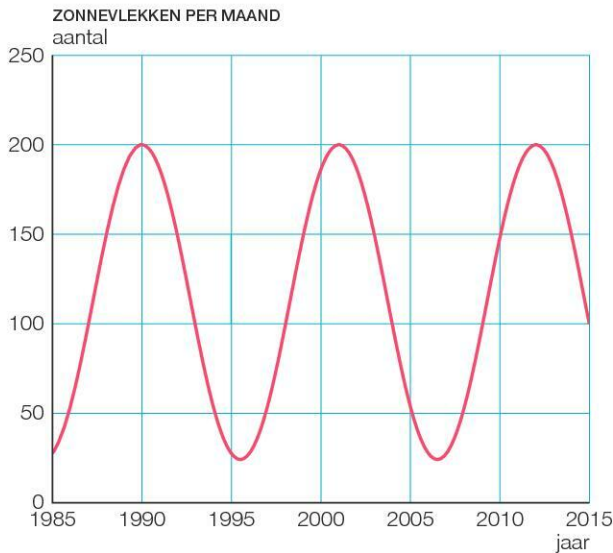
figuur 14.22

A17 [▶WERKBLAD] Atleet Hans heeft het verband tussen zijn hartslag en zijn snelheid bij het hardlopen onderzocht. In de grafiek in figuur 14.23 is het resultaat weergegeven. De hartslag H in slagen per minuut is uitgezet tegen de snelheid v in km/uur. Schat met behulp van de figuur de waarde van de helling van de grafiek bij $v = 16$ en leg uit wat de betekenis is van deze waarde.



figuur 14.23

Zonnevlekken zijn donkere plekken die relatief koelere plaatsen op de zon aangeven. Hoe meer zonnevlekken, hoe actiever de zon. Wetenschappers vermoeden dat er een verband is tussen de zonneactiviteit en het klimaat op aarde. De zonneactiviteit is bij benadering een periodiek verschijnsel. In figuur 14.24 zie je een periodiek model van het aantal zonnevlekken. Je ziet dat er in 2012 een maximum optrad.



figuur 14.24

- Geef de periode van de zonneactiviteit.
- Hoeveel jaren achtereen is het aantal zonnevlekken meer dan 150 per maand?
- In welk jaar na 2025 zal er voor het eerst weer een maximum optreden?
- In welk jaar in de 19^e eeuw trad er voor het laatst een maximum op?

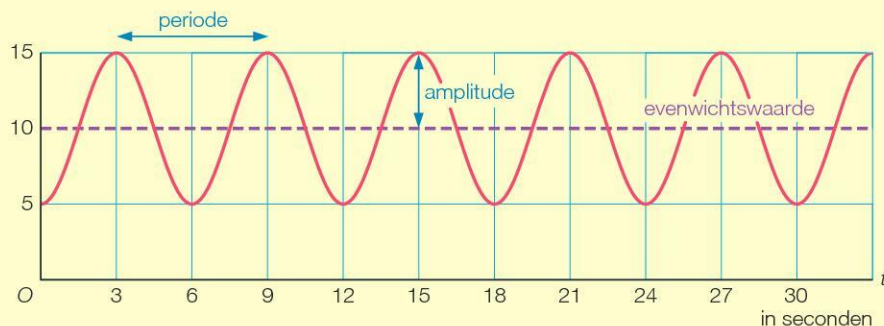
Theorie D Periodieke verschijnselen en trend

De zonneactiviteit is een voorbeeld van een verschijnsel dat zich met een zekere regelmaat herhaalt. Je hebt te maken met een **periodiek verschijnsel**. De grafiek herhaalt zich elke 11 jaar. Daarom is de **periode** van de zonneactiviteit 11 jaar.

De periode van een periodiek verschijnsel is de lengte van het kleinste tijdsinterval waarin alle kenmerkende eigenschappen optreden.

Bij de periodieke grafiek in figuur 14.25 hoort een periode van 6 seconden.

De grafiek schommelt om de **evenwichtswaarde**. De evenwichtswaarde is het gemiddelde van het maximum en het minimum.



figuur 14.25

In figuur 14.25 is de evenwichtswaarde $\frac{15 + 5}{2} = 10$.

Het verschil tussen de grootste waarde en de evenwichtswaarde is de **amplitude**. In figuur 14.25 is de amplitude = $15 - 10 = 5$.

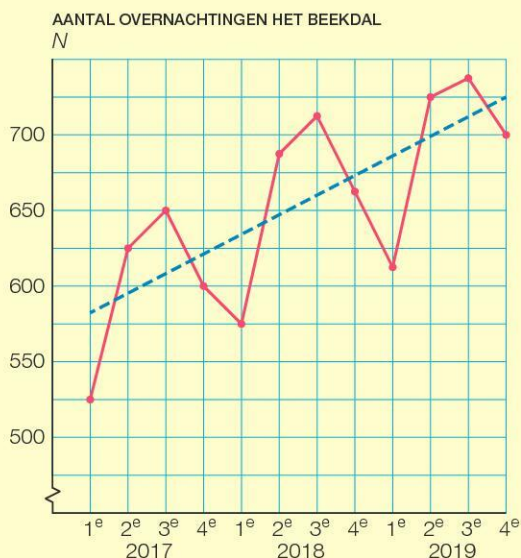
$$\text{evenwichtswaarde} = \frac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2}$$

$$\text{amplitude} = \text{maximum} - \text{evenwichtswaarde}$$

Bij hotel Het Beekdal heeft men van een aantal jaren het aantal overnachtingen N per kwartaal bijgehouden. Zie de figuur hiernaast. Het aantal overnachtingen neemt in de loop van de jaren toe. Wel zijn de aantallen onderhevig aan seizoensinvloeden. We zeggen dat er een stijgende **trend** is waar te nemen.

Een trend kan zowel stijgend als dalend zijn. Schommelt de grafiek om een lijn, dan heet die lijn de **trendlijn**. Zie de stippellijn in de figuur hiernaast.

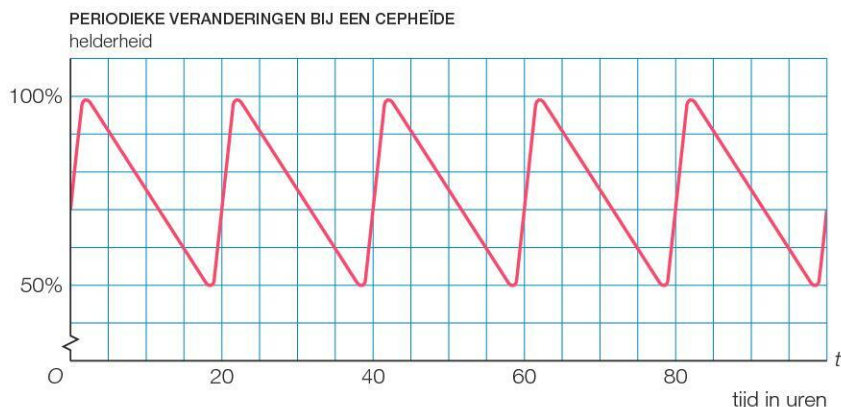
Een lange-termijnontwikkeling heet een trend. De grafiek schommelt om een lijn of een kromme die de trend weergeeft.



figuur 14.26

Astronomen hebben ontdekt dat bij een aantal sterren de helderheid niet constant is. Bij sommige sterren treden deze helderheidswisselingen periodiek op. Een groep van deze sterren heet Cepheïden, genoemd naar een ster uit het sterrenbeeld Cepheus, waarbij men voor het eerst deze schommelingen in helderheid waarnam.

De grafiek in figuur 14.27 laat het verloop van de helderheid bij zo'n ster zien.



figuur 14.27

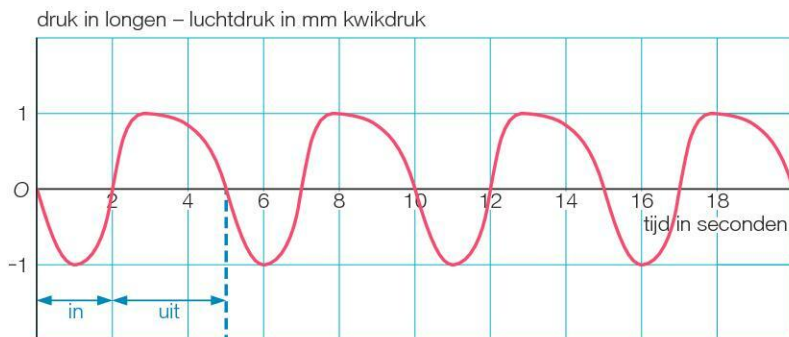
- Geef de periode van de helderheid.
- Hoeveel procent is de helderheid na 140 uur? En hoeveel na 6 dagen?
- Hoelang duurt de overgang van maximale naar minimale helderheid? En hoelang duurt de overgang van minimale naar maximale helderheid?
- Hoeveel uren achterelkaar is de helderheid meer dan 80%?
- Op vrijdag 1 maart om 5:00 uur neemt amateur-astronoom Peters maximale helderheid waar.
Op welke tijdstippen kan zij op zaterdag 2 maart maximale helderheid waarnemen? En op welk tijdstip kan Peters op woensdag 6 maart maximale helderheid waarnemen?



20


Ons in- en uitademen heeft te maken met de druk in de longen.

In figuur 14.28 zie je hoe de druk in de longen van een gezonde volwassene in rust varieert met de tijd. De grafiek geeft het verschil aan tussen de druk in de longen en de luchtdruk.



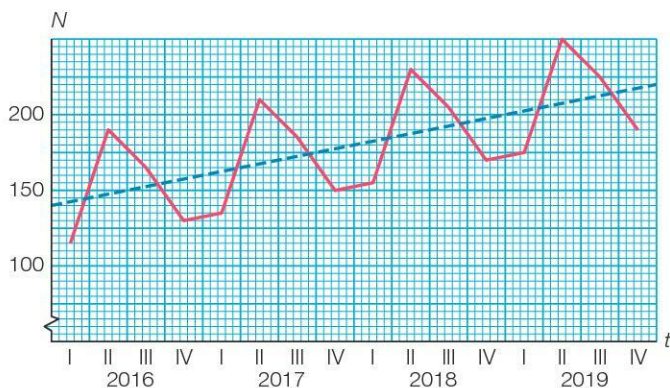
figuur 14.28

- Lees de periode van de ademhaling van deze persoon af.
- Hoeveel keer per minuut ademt deze persoon in?
- Hoeveel is het verschil in druk na 48 seconden? En hoeveel na 4 minuten en 26 seconden?
- Per ademhaling wordt een halve liter lucht ingeademd. Hoeveel liter lucht wordt per etmaal ingeademd?
- Tijdens een zware inspanning verdubbelt het aantal ademhalingen. Per ademhaling wordt dan 3 liter lucht ingeademd. Geef de periode van de ademhaling tijdens de zware inspanning. Hoeveel liter lucht wordt er dan per kwartier ingeademd?

A21


In figuur 14.29 zie je hoeveel elektrische fietsen Lentink sinds het begin van 2016 elk kwartaal heeft verkocht.

- De grafiek vertoont een seizoensschommeling om de trendlijn. Stel de formule op van deze trendlijn. Neem t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2016.
- Geef door middel van extrapoleren een schatting van het aantal verkochte elektrische fietsen in het eerste kwartaal van 2022.
- Bereken het totale aantal verkochte elektrische fietsen in 2016 en geef een schatting van de totale verkoop in 2023.



figuur 14.29

Terugblik

Intervallen, stijgen en dalen

Als een grafiek stijgend is tussen $x = 1$ en $x = 3$, dan zeggen we dat de grafiek stijgend is op het interval $\langle 1, 3 \rangle$.

Zowel bij stijgen als bij dalen maken we onderscheid tussen verschillende soorten, namelijk constant, toenemend en afnemend.

Gemiddelde veranderingen

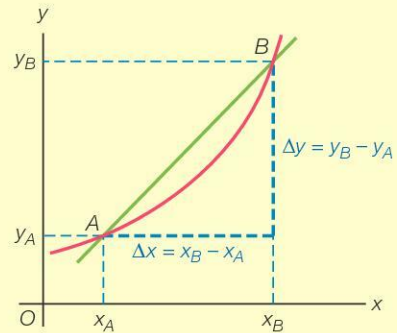
Om veranderingen op intervallen van verschillende lengte te vergelijken, gebruik je gemiddelde veranderingen.

De gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

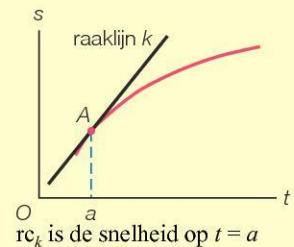
De volgende begrippen komen op hetzelfde neer:

- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$;
- de richtingscoëfficiënt (helling) van de lijn AB .



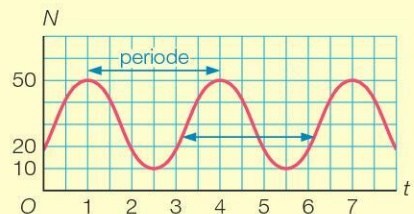
Snelheid op $t = a$ en raaklijn

In een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.



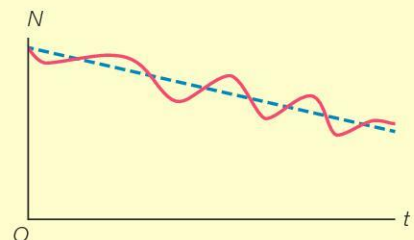
Periodieke verschijnselen

Bij een periodiek verschijnsel hoort een grafiek die zich steeds herhaalt. De kortste tijd die verstrijkt tot herhaling optreedt, heet de periode. In de figuur hiernaast is de periode 3. Op $t = 7$ is $N = 50$, dus ook op $t = 10, t = 13, t = 16, \dots$ is $N = 50$.



Trend

Een lange-termijnontwikkeling heet een trend. De bijbehorende grafiek schommelt om een lijn of een kromme die de trend weergeeft. In de figuur hiernaast zie je een dalende trend. De stippellijn is de trendlijn.



14.2 Formules herschrijven



- a** Je kunt $\frac{5}{x} \cdot \frac{6}{y}$ als één breuk schrijven.

Welke van de volgende uitkomsten is juist?

I $\frac{30}{xy}$

II $\frac{30}{x+y}$

III $\frac{30xy}{x+y}$

IV $\frac{6x+5y}{xy}$

- b** Je kunt $\frac{5}{x} + \frac{6}{y}$ als één breuk schrijven.

Welke van de volgende uitkomsten is juist?

I $\frac{11}{x+y}$

II $\frac{11}{xy}$

III $\frac{6x+5y}{x+y}$

IV $\frac{6x+5y}{xy}$

Theorie A Breuken herleiden

Voor het rekenen met breuken heb je een aantal regels geleerd.

Bij *optellen en aftrekken van breuken* maak je de breuken eerst **gelijknamig**.

Zo is $\frac{10}{x} - \frac{7}{2x} = \frac{20}{2x} - \frac{7}{2x} = \frac{20-7}{2x} = \frac{13}{2x}$ en

$$\frac{3}{x-1} - x = \frac{3}{x-1} - \frac{x}{1} = \frac{3}{x-1} - \frac{x(x-1)}{x-1} = \frac{3-x(x-1)}{x-1} = \frac{3-x^2+x}{x-1} = \frac{-x^2+x+3}{x-1}.$$

Kies de gemeenschappelijke noemer zo eenvoudig mogelijk.

Bij *vermenigvuldigen van breuken* gebruik je

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}.$$

Bij het als één breuk schrijven van $\frac{3}{a} \left(2 - \frac{5}{b} \right)$ krijg je

$$\frac{3}{a} \left(2 - \frac{5}{b} \right) = \frac{3}{a} \cdot 2 - \frac{3}{a} \cdot \frac{5}{b} = \frac{6}{a} - \frac{15}{ab} = \frac{6b}{ab} - \frac{15}{ab} = \frac{6b-15}{ab}.$$

Je ziet dat bij het vermenigvuldigen van een breuk met een getal, je alleen de teller hoeft te vermenigvuldigen.

Bij *delen door een breuk* gebruik je de regel ‘delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde’.

Bij $\frac{y-2}{x-1} : \frac{y}{5}$ krijg je

$$\frac{y-2}{x-1} : \frac{y}{5} = \frac{y-2}{x-1} \cdot \frac{5}{y} = \frac{(y-2) \cdot 5}{(x-1) \cdot y} = \frac{5y-10}{y(x-1)}.$$

In de teller van een breuk werk je haakjes weg.
In de noemer mag je de haakjes laten staan.

Als je gebroken vormen moet herleiden, dan vereenvoudig je de breuk zo ver mogelijk.

De breuk $\frac{6x(x-4)}{x(x-3)}$ vereenvoudig je tot $\frac{6(x-4)}{x-3} = \frac{6x-24}{x-3}$.

In de formule $y = 18 + \frac{\left(\frac{120}{x}\right)}{5}$ staat een breuk in de teller.

Om deze breuk weg te werken, vermenigvuldig je teller en noemer van $\frac{\left(\frac{120}{x}\right)}{5}$ met x . Je krijgt $y = 18 + \frac{\left(\frac{120}{x}\right)}{5} = 18 + \frac{\left(\frac{120}{x}\right) \cdot x}{5 \cdot x} = 18 + \frac{120}{5x} = 18 + \frac{24}{x}$.

Dus de formule $y = 18 + \frac{\left(\frac{120}{x}\right)}{5}$ is te herleiden tot $y = 18 + \frac{24}{x}$.

Bij de formule $A = \frac{x^2 + 3x + 8}{2x}$ kun je **uitdelen**. Het uitdelen van $2x$ gaat als volgt.

$$A = \frac{x^2 + 3x + 8}{2x} = \frac{x^2}{2x} + \frac{3x}{2x} + \frac{8}{2x} = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} + \frac{4}{x}$$

Voorbeeld

Toon aan dat de formule $T = \frac{600a}{5b + \frac{a^2}{3b}}$ te schrijven is als $T = \frac{1800ab}{a^2 + 15b^2}$.

Uitwerking

$$T = \frac{600a}{5b + \frac{a^2}{3b}} = \frac{600a \cdot 3b}{\left(5b + \frac{a^2}{3b}\right) \cdot 3b} = \frac{1800ab}{15b^2 + \frac{a^2}{3b} \cdot 3b} = \frac{1800ab}{15b^2 + a^2}, \text{ dus } T = \frac{1800ab}{a^2 + 15b^2}$$

Vermenigvuldig teller en noemer van de grote breuk met $3b$.

$\frac{\text{teller}}{\text{noemer}} \times \text{noemer} = \text{teller}$



Gegeven is de formule $y = \frac{x}{\left(\frac{200}{x^2}\right)}$.

- In de theorie staat dat je bij delen door een breuk kunt vermenigvuldigen met het omgekeerde.
Gebruik dit om de breuk in de noemer weg te werken.
- Laat zien dat je het antwoord van vraag a ook kunt vinden door zowel de teller x als de noemer $\frac{200}{x^2}$ met x^2 te vermenigvuldigen.
- Darija zegt: 'Als je de teller en noemer vermenigvuldigt met x^2 , dan vermenigvuldigt je de breuk eigenlijk met 1.'
Leg uit wat zij hiermee bedoelt.

24



Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk en herleid.

$$a \quad A = \frac{3}{x} \cdot \frac{5}{y}$$

$$c \quad N = \frac{500}{a} - 70$$

$$e \quad P = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}$$

$$b \quad y = 5 + \frac{3}{x-2}$$

$$d \quad D = \frac{350}{x} \left(1 - \frac{2}{x}\right)$$

$$f \quad C = \frac{6000}{\left(\frac{2x}{x-4}\right)}$$

25



Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk en herleid.

$$a \quad N = \frac{100}{a} + \frac{200}{b}$$

$$c \quad y = \frac{0,5}{x+3} - 0,2x$$

$$e \quad E = \frac{150}{x} : \frac{x-4}{x}$$

$$b \quad B = \frac{3}{2x} \cdot \frac{x^3}{5y}$$

$$d \quad P = \frac{380}{t^2} - \frac{40}{t}$$

$$f \quad F = 8x \left(3 + \frac{5}{x^2}\right)$$

26



Werk de breuken in de teller en/of noemer weg.

$$a \quad \frac{15 + \frac{3}{x}}{x}$$

$$c \quad \frac{\left(\frac{50}{x}\right)}{10}$$

$$e \quad p + 25 \cdot \frac{\left(\frac{100}{p}\right)}{5}$$

$$b \quad \frac{20a}{b + \frac{a^2}{2b}}$$

$$d \quad \frac{50}{\left(\frac{10}{t}\right)}$$

$$f \quad \frac{3 + \frac{2}{x}}{7 - \frac{1}{x}}$$

27



Deel uit.

$$a \quad A = \frac{5x^2 + 4x + 3}{x}$$

$$b \quad T = \frac{3x^2 + 6x + 180}{4x}$$

$$c \quad y = \frac{5a^2 + 10a}{2a^2}$$

A28



$$a \quad \text{Schrijf de formule } A = 18 \cdot \frac{\left(\frac{500}{x}\right)}{10} + 25x \text{ in de vorm } A = \frac{p}{x} + qx.$$

$$b \quad \text{Toon aan dat de formule } T = \frac{50a}{\frac{a^2}{5b} + 2b} \text{ te schrijven is als } T = \frac{250ab}{a^2 + 10b^2}.$$

$$c \quad \text{Deel } 2t \text{ uit bij de formule } N = \frac{2t^2 - 5t + 50}{2t}.$$

29



$$a \quad \text{Schrijf het rechterlid van de formule } A = 5 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} \text{ als één breuk.}$$

$$b \quad \text{Schrijf het rechterlid van de formule } B = \frac{6}{x} \cdot \frac{5}{x+y} : \frac{4}{x+y} \text{ als één breuk en zo eenvoudig mogelijk.}$$

$$c \quad \text{Deel } 36x^5 \text{ uit bij de formule } C = \frac{12x^7 + 6x^5 + 18x^3}{36x^5}.$$

- a** Maak x vrij bij de formule $y = 4x - 15$.
b Druk p uit in Q bij de formule $Q = 5\sqrt{2p - 3}$.
c Schrijf de formule $y = 50x^{1,25}$ in de vorm $x = ay^b$. Rond a af op drie decimalen.

Theorie B Variabelen vrijmaken

Je hebt geleerd hoe je variabelen vrijmaakt bij lineaire formules, wortelformules, machtsformules en gebroken formules.

In opgave 30 heb je kunnen nagaan of je dit beheerst. In de voorbeelden zie je nog eens hoe het vrijmaken van variabelen bij wortelformules, machtsformules en gebroken formules gaat. Zoals je weet komen de begrippen 'vrijmaken', 'uitdrukken in' en 'schrijven als functie van' op hetzelfde neer.

Bij het vrijmaken van variabelen is het belangrijk om stap voor stap te werken en goed te kijken of er haakjes nodig zijn.

Voorbeeld

- a** Maak x vrij bij de formule $y = 3\sqrt{4x - 1}$.
b Druk t uit in K bij $K = 64(2t - 1)^3$.

Uitwerking

- a** $y = 3\sqrt{4x - 1}$ x vrijmaken, dus linker- en rechterlid wisselen.
 $3\sqrt{4x - 1} = y$ Deel beide leden door 3.
 $\sqrt{4x - 1} = \frac{1}{3}y$ Gebruik $\sqrt{A} = B$ geeft $A = B^2$.
 $4x - 1 = (\frac{1}{3}y)^2$ $(\frac{1}{3}y)^2 = \frac{1}{3}y \cdot \frac{1}{3}y = \frac{1}{9}y^2$
 $4x = \frac{1}{9}y^2 + 1$ Deel beide leden door 4.
 $x = \frac{1}{36}y^2 + \frac{1}{4}$
- b** $K = 64(2t - 1)^3$ t vrijmaken, dus linker- en rechterlid wisselen.
 $64(2t - 1)^3 = K$ Deel beide leden door 64.
 $(2t - 1)^3 = \frac{1}{64}K$ Gebruik $A^3 = B$ geeft $A = \sqrt[3]{B}$.
 $2t - 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{64}K}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{64}K} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} \cdot \sqrt[3]{K} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{K}$
 $2t = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{K} + 1$ Deel beide leden door 2.
 $t = \frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{K} + \frac{1}{2}$

Voorbeeld

Schrijf de formule $y = 24x^{-1,2}$ in de vorm $x = ay^b$. Rond a af op één decimaal en b op twee decimalen.

Uitwerking

$$y = 24x^{-1,2}$$

$$24x^{-1,2} = y$$

$$x^{-1,2} = \frac{1}{24}y$$

$$x = \left(\frac{1}{24}y\right)^{\frac{1}{1,2}}$$

$$x = \left(\frac{1}{24}\right)^{\frac{1}{1,2}} \cdot y^{\frac{1}{1,2}}$$

$$x \approx 14,1 \cdot y^{-0,83}$$

$$\text{Dus } x = 14,1y^{-0,83}.$$

x vrijmaken, dus linker- en rechterlid wisselen.

Deel beide leden door 24.

Gebruik $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$.

Gebruik $(ab)^p = a^p \cdot b^p$.

Bereken $\left(\frac{1}{24}\right)^{\frac{1}{1,2}}$ en $\frac{1}{-1,2}$.

31 Druk x uit in y . Rond zo nodig af op twee decimalen.



a $y = 4(x - 1) + 6$

b $5x - 3y = 20$

c $y = \frac{1}{2}\sqrt{6x + 15}$

d $y = 125(4x - 1)^3$

e $y = 0,2x^{1,6}$

f $y = 5x^{-1,25}$

O32



Gegeven is de formule $A = 5 - \frac{12}{B + 1}$.

Schrijf B als functie van A .

Theorie C Kruislings vermenigvuldigen

Je hebt in de onderbouw geleerd dat je een vergelijking als $\frac{5}{x+3} = \frac{2}{3}$

kunt oplossen met **kruislings vermenigvuldigen**. Je krijgt

$$2 \cdot (x + 3) = 5 \cdot 3, \text{ enzovoort.}$$

Je gebruikt ook het kruislings vermenigvuldigen bij het vrijmaken van p

in de formule $\frac{5q}{p+3} = \frac{2}{3}$.

Je krijgt $2 \cdot (p + 3) = 3 \cdot 5q$

$$2p + 6 = 15q$$

$$2p = 15q - 6$$

$$p = 7\frac{1}{2}q - 3$$

Kruislings vermenigvuldigen

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ geeft } AD = BC$$

Voorbeeld

a Maak t vrij bij de formule $N = 10 + \frac{5}{2t+3}$.

b Gegeven is $\frac{2}{y+4} = \frac{3}{x-1}$.

Maak y vrij.

Uitwerking

a $N = 10 + \frac{5}{2t+3}$ t vrijmaken, dus zet de term $\frac{5}{2t+3}$ apart.

$N - 10 = \frac{5}{2t+3}$ Gebruik de wisseleigenschap: uit $C = \frac{A}{B}$ volgt $B = \frac{A}{C}$.

$2t+3 = \frac{5}{N-10}$ Breng 3 naar het rechterlid.

$2t = \frac{5}{N-10} - 3$ Deel beide leden door 2.

$t = \frac{5}{2N-20} - 1\frac{1}{2}$

b $\frac{2}{y+4} = \frac{3}{x-1}$ Kruislings vermenigvuldigen.

$3(y+4) = 2(x-1)$ Werk de haakjes weg.

$3y + 12 = 2x - 2$ Breng 12 naar het rechterlid.

$3y = 2x - 14$ Deel beide leden door 3.

$y = \frac{2}{3}x - 4\frac{2}{3}$

R33 Zie a van het voorbeeld.



Schrijf het rechterlid van $t = \frac{5}{2N-20} - 1\frac{1}{2}$ als één breuk.

A34 a Gegeven is de formule $N = 6 - \frac{2}{t+1}$.



De formule is te schrijven in de vorm $t = \frac{N+a}{bN+c}$.

Bereken a , b en c .

b Toon aan dat de formule $\frac{4A}{A+B} = 3 - A$ te herleiden is tot $B = \frac{A^2 + A}{3 - A}$.

c Maak v vrij als gegeven is dat $\frac{3}{v-2} = \frac{5}{b-6}$.

O35
☐⊙*

Gegeven zijn de formules $N = 3p + 4q - 5$ en $q = 2p - 3$.

Om N uit te drukken in q maak je eerst p vrij bij de formule $q = 2p - 3$.

Je krijgt $p = \frac{1}{2}q + 1\frac{1}{2}$.

a Licht toe hoe uit $q = 2p - 3$ volgt $p = \frac{1}{2}q + 1\frac{1}{2}$.

De formules $N = 3p + 4q - 5$ en $p = \frac{1}{2}q + 1\frac{1}{2}$ zijn te combineren tot de formule $N = 5\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}$.

b Toon dit aan.

Theorie D Variabelen vrijmaken en formules combineren

De formules $K = 18 + 2p + 3q$ en $q = 5p + 30$ zijn te combineren tot de vorm $K = aq + b$.

Daartoe maak je eerst p vrij bij de formule $q = 5p + 30$.

$q = 5p + 30$ geeft $5p = q - 30$, dus $p = \frac{1}{5}q - 6$.

$$\left. \begin{array}{l} K = 18 + 2p + 3q \\ p = \frac{1}{5}q - 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} K = 18 + 2(\frac{1}{5}q - 6) + 3q \\ K = 18 + \frac{2}{5}q - 12 + 3q \\ K = 3\frac{2}{5}q + 6 \end{array}$$

Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $A = 8s + 3t + 850$ en $2s - 5t = 40$.

Schrijf de formule van A in de vorm $A = at + b$.

Uitwerking

Maak eerst s vrij bij $2s - 5t = 40$.

$$2s - 5t = 40$$

$$2s = 5t + 40$$

$$s = 2\frac{1}{2}t + 20$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 8s + 3t + 850 \\ s = 2\frac{1}{2}t + 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 8(2\frac{1}{2}t + 20) + 3t + 850 \\ A = 20t + 160 + 3t + 850 \\ A = 23t + 1010 \end{array}$$

Om A uit te drukken in t , moet in de formule $A = 8s + 3t + 850$ de variabele s worden vervangen door een formule waarbij s is uitgedrukt in t .

R36
☐⊙*

Zie het voorbeeld.

Neem $A = 2321$ en bereken t en s .

37
☐

a Combineer de formules $T = 3r + 6s + 80$ en $r + 8s = 100$ tot de vorm $T = as + b$.

b Combineer de formules $C = 2a - 3b + 64$ en $5a - 8b = 160$ tot de vorm $C = ma + n$.

38 Gegeven zijn de formules $Q = 5m - n + 125$ en $3m + 5n = 12$.

a Schrijf de formule van Q in de vorm $Q = am + b$.

b Neem $Q = 201$ en bereken m en n .

A39 **a** Gegeven zijn de formules $A = 2t + 5p + 9$ en $t = -\frac{1}{3}p + 3\frac{2}{3}$.

b De formule van A is te schrijven in de vorm $A = at + b$.

Bereken a en b .

b De formules $B = 5xy + 20$ en $3x - 2y = 6$ zijn te combineren tot de vorm $B = ax^2 + bx + c$.

Bereken a , b en c .

A40 **a** Gegeven zijn de formules $N = \frac{5x}{8}(16y - 4\frac{4}{5}z)$, $y = 2x - 1$ en $z = 6x - 1$.

De formule van N is te schrijven in de vorm $N = ax^2 + bx$.

Bereken a en b .

b De formules $P = \frac{18x^2 - 6}{3x} + \frac{y^2 + 2}{2y}$ en $xy = 2$ zijn te combineren tot

de vorm $P = ax + \frac{b}{x}$.

Bereken a en b .

A41 Een groothandel wil de klanten in een gebied vanuit een aantal magazijnen bevoorraden. Daartoe wordt het gebied onderverdeeld in een aantal even grote deelgebieden met elk een eigen magazijn. Hebben de deelgebieden een grote oppervlakte, dan krijgt de groothandel te maken met hoge afleveringskosten, maar met lage opslagkosten. De totale maandelijkse kosten per deelgebied zijn te berekenen met de formule

$K = \frac{1200}{x} + 2,5\sqrt{x} + 30$. Hierin is x de oppervlakte in km^2 van het deelgebied en zijn K de kosten in duizenden euro's.

a Bij een toename van de oppervlakte per deelgebied van 20 km^2 naar 40 km^2 nemen de kosten af.

Met hoeveel procent?

b Bereken bij welke oppervlakte per deelgebied de kosten minimaal zijn. Rond af op gehele km^2 .

De oppervlakte van de totaal te bevoorraden deelgebieden samen is 6000 km^2 . Het aantal magazijnen n is te berekenen met de formule

$$n = \frac{6000}{x}.$$

De formules $K = \frac{1200}{x} + 2,5\sqrt{x} + 30$ en $n = \frac{6000}{x}$ zijn te combineren tot

de vorm $K = an + \frac{b}{\sqrt{n}} + 30$.

c Bereken a en b . Rond b af op gehele.

Terugblik

Breuken herleiden

In de formule $T = 5a + \frac{18a}{8 + \frac{3}{a}}$ werk je de breuk $\frac{3}{a}$ weg door de teller en de noemer van $\frac{18a}{8 + \frac{3}{a}}$ met a te vermenigvuldigen.

$$\text{Je krijgt } T = 5a + \frac{18a}{8 + \frac{3}{a}} = 5a + \frac{18a \cdot a}{(8 + \frac{3}{a}) \cdot a} = 5a + \frac{18a^2}{8a + 3}.$$

Zo nodig herleid je de vorm in het rechterlid tot één breuk.

$$T = 5a + \frac{18a^2}{8a + 3} = \frac{5a(8a + 3)}{8a + 3} + \frac{18a^2}{8a + 3} = \frac{40a^2 + 15a + 18a^2}{8a + 3} = \frac{58a^2 + 15a}{8a + 3}$$

Bij de formule $K = \frac{5q^2 + 8q + 16}{2q}$ kun je $2q$ uitdelen.

$$\text{Je krijgt } K = \frac{5q^2 + 8q + 16}{2q} = \frac{5q^2}{2q} + \frac{8q}{2q} + \frac{16}{2q} = 2\frac{1}{2}q + 4 + \frac{8}{q}.$$

Variabelen vrijmaken

Bij het vrijmaken van B in de formule $A = \frac{1}{6}\sqrt{3B + 12}$ krijg je

$$\sqrt{3B + 12} = 6A$$

$$3B + 12 = 36A^2$$

$$3B = 36A^2 - 12$$

$$B = 12A^2 - 4$$

Bij het vrijmaken van D in de formule $C = 25D^{1,5}$ krijg je $D^{1,5} = 0,04C$ geeft $D = (0,04C)^{\frac{1}{1,5}} = 0,04^{\frac{1}{1,5}} \cdot C^{\frac{1}{1,5}} \approx 0,117C^{\frac{2}{3}}$. Dus $D = 0,117C^{\frac{2}{3}}$.

Bij het vrijmaken van p in de formule $\frac{q+3}{2p} = \frac{3}{q+4}$ gebruik je kruislings

vermenigvuldigen. Je krijgt $2p \cdot 3 = (q+3)(q+4)$

$$6p = q^2 + 7q + 12$$

$$p = \frac{1}{6}q^2 + 1\frac{1}{6}q + 2$$

Variabelen vrijmaken en formules combineren

De formules $D = 5x + 3y + 30$ en $3x - 2y = 28$ zijn te combineren tot de vorm $D = ax + b$.

Eerst maak je y vrij bij de formule $3x - 2y = 28$.

Je krijgt $-2y = -3x + 28$, dus $y = 1\frac{1}{2}x - 14$.

$$\left. \begin{array}{l} D = 5x + 3y + 30 \\ y = 1\frac{1}{2}x - 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} D = 5x + 3(1\frac{1}{2}x - 14) + 30 \\ D = 5x + 4\frac{1}{2}x - 42 + 30 \end{array}$$

$$D = 9\frac{1}{2}x - 12$$

14.3 Formules met exponenten en logaritmen

O42


a Je kunt $x^2 \cdot x^3$ herleiden tot één macht.

Welke van de volgende uitkomsten is juist?

I x^6

II x^8

III x^5

IV x^9

b Je kunt $\frac{x^2}{x^3}$ herleiden tot één macht.

Welke van de volgende uitkomsten is juist?

I $x^{\frac{2}{3}}$

II x

III x^5

IV x^{-1}

c Welke van de volgende uitkomsten is gelijk aan $\frac{3}{x}$?

I $3x$

II $3x^{-1}$

III $\frac{1}{3}x$

IV x^{-3}

Theorie A Rekenregels voor machten

Je hebt de rekenregels voor machten geleerd.

$$\begin{array}{llll} a^p \cdot a^q = a^{p+q} & (a^p)^q = a^{pq} & a^0 = 1 & a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} \\ \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} & (ab)^p = a^p b^p & a^{-p} = \frac{1}{a^p} & a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \end{array}$$

Deze rekenregels kun je gebruiken om formules met machten en exponenten te herleiden.

Voorbeeld

a Schrijf $\frac{3}{4}a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

b Schrijf de formule $y = 60 \cdot (\frac{1}{2}x^2)^4 \cdot \frac{3}{x^{10}}$ in de vorm $y = ax^n$.

c Schrijf de formule $y = 100 \cdot 2^{2x-1}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$.

Uitwerking

a $\frac{3}{4}a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = \frac{3b \cdot b^{\frac{1}{2}}}{4a^{\frac{1}{3}}} = \frac{3b\sqrt{b}}{4 \cdot \sqrt[3]{a}}$

b $y = 60 \cdot (\frac{1}{2}x^2)^4 \cdot \frac{3}{x^{10}} = 60 \cdot (\frac{1}{2})^4 \cdot (x^2)^4 \cdot 3x^{-10} = 60 \cdot \frac{1}{16}x^8 \cdot 3x^{-10} = 11,25x^{-2}$
 Dus $y = 11,25x^{-2}$.

c $y = 100 \cdot 2^{2x-1} = 100 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-1} = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2^2)^x = 50 \cdot 4^x$
 Dus $y = 50 \cdot 4^x$.

R43 Zie de theorie.

- ☐⊗*** **a** Schrijf $\sqrt{x}$ als macht van x . Welke rekenregel gebruik je daarbij?
b Schrijf $\frac{1}{x}$ als macht van x . Welke rekenregel gebruik je daarbij?

44 Schrijf als macht van a .

- ☐⊗** **a** $a^5 \cdot \left(\frac{1}{a^3}\right)^2$
b $\frac{a}{a^{10}} \cdot (a^4)^n$
c $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$

45 Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

- ☐⊗*** **a** $\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{2\frac{1}{2}}$
b $(6a^2)^{-\frac{1}{3}}$
c $\left(\frac{1}{a^2}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot (b^{-1\frac{1}{2}})^3$

$$\frac{3}{4}a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{1\frac{1}{2}} = \frac{3b \cdot b^{\frac{1}{2}}}{4a^{\frac{1}{3}}} = \frac{3b\sqrt{b}}{4 \cdot \sqrt[3]{a}}$$

A46 Schrijf als macht van 2 of 3.

- ☐⊗*** **a** $16\sqrt{2}$ **d** $9 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{9}}$
b $\frac{1}{27} \cdot \sqrt[3]{3}$ **e** $32 \cdot 2^x$
c $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ **f** $\frac{3^x}{81}$

A47 Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^n$ of $y = b \cdot g^x$.

- ☐⊗*** **a** $y = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3$
b $y = 153 \cdot 3^{3x-2}$
c $y = \frac{10}{x^3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt[3]{x^2}$
d $y = 0,001 \cdot 4^{\frac{1}{3}x+6}$

O48 **a** Voor welke waarde van x geldt $2^x = 32$?

- ☐⊗*** **b** Hoeveel is ${}^2\log(32)$?
c Voor welk grondtal g geldt ${}^g\log(x) = \log(x)$?
d Bereken $\log(100)$ met je GR. Hoe had je deze uitkomst zonder GR kunnen vinden?
e Voor welke g en a geldt dat $\frac{\log(5)}{\log(2)} = {}^g\log(a)$?

Theorie B Herleiden van formules met exponenten en logaritmen

De exponent waarvoor geldt $2^x = 5$ noteren we als ${}^2\log(5)$, waarbij log staat voor logaritme en 2 het grondtal van de logaritme is.

De vergelijking $2^x = 32$ heeft als oplossing $x = {}^2\log(32)$. Maar de oplossing is ook $x = 5$, want $2^5 = 32$. Dus ${}^2\log(32) = 5$.

De log-toets op je rekenmachine staat voor ${}^{10}\log$.

Om ${}^2\log(5)$ te berekenen op de rekenmachine kun je gebruikmaken van de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$. Je krijgt ${}^2\log(5) = \frac{\log(5)}{\log(2)} \approx 2,32$.

Op de TI, HP en NW kun je ook intikken $\log(5,2)$. Gebruik hierbij de komma. Op de Casio kun je ook de optie logab uit het OPTN-CALC menu gebruiken.

Je kent de volgende gelijkwaardige afspraken over logaritmen.

- $g^{{}^g\log(x)} = x$
- ${}^g\log(g^x) = x$
- ${}^g\log(x) = a$ betekent $x = g^a$

Uit de eerste afspraak volgt dat $3 = 10^{\log(3)}$.

Uit de tweede afspraak volgt dat $3 = \log(10^3)$.

Je ziet dat g^x en ${}^g\log(x)$ omgekeerde bewerkingen zijn, want ze heffen elkaar op.

Om variabelen vrij te maken bij exponenten en logaritmen gebruik je de afspraak ${}^g\log(x) = a$ betekent $x = g^a$.

Zo maak je in de formule $p = 3 + \log(q)$ als volgt q vrij.

$$p = 3 + \log(q)$$

$$\log(q) = p - 3$$

$$q = 10^{p-3}$$

In de formule $y = 10 - 3^x$ maak je als volgt x vrij.

$$y = 10 - 3^x$$

$$3^x = 10 - y$$

$$x = {}^3\log(10 - y)$$

Voorbeeld

- a Druk t uit in N bij $N = 5 + 10^{t+2}$.
- b Schrijf de formule $K = {}^2\log(x - 3) + 1$ in de vorm $x = a + b \cdot 2^K$.
- c De formule $\log(p) = 1,3 + 0,12q$ is te schrijven in de vorm $p = b \cdot g^q$. Bereken de waarden van b en g . Rond b af op gehele en g op twee decimalen.

Uitwerking

- a $N = 5 + 10^{t+2}$
 $10^{t+2} = N - 5$ Gebruik $10^A = B$ geeft $A = \log(B)$.
 $t + 2 = \log(N - 5)$
 $t = \log(N - 5) - 2$
- b $K = {}^2\log(x - 3) + 1$ Gebruik ${}^2\log(A) = B$ geeft $A = 2^B$.
 ${}^2\log(x - 3) = K - 1$
 $x - 3 = 2^{K-1}$
 $x = 3 + 2^{K-1}$
 $x = 3 + 2^K \cdot 2^{-1}$
 $x = 3 + \frac{1}{2} \cdot 2^K$
- c $\log(p) = 1,3 + 0,12q$
 $p = 10^{1,3 + 0,12q}$
 $p = 10^{1,3} \cdot 10^{0,12q}$
 $p = 10^{1,3} \cdot (10^{0,12})^q$
 $p \approx 20 \cdot 1,32^q$
Dus $b = 20$ en $g = 1,32$.

R49 Zie de uitwerking van c van het voorbeeld.



- a Welke afspraak voor logaritmen is gebruikt bij het herleiden van $\log(p) = 1,3 + 0,12q$ tot $p = 10^{1,3 + 0,12q}$?
- b Welke rekenregel voor machten is gebruikt bij het herleiden van $p = 10^{1,3 + 0,12q}$ tot $p = 10^{1,3} \cdot 10^{0,12q}$?
- c Welke rekenregel voor machten is gebruikt bij het herleiden van $p = 10^{1,3} \cdot 10^{0,12q}$ tot $p = 10^{1,3} \cdot (10^{0,12})^q$?

50



- a Schrijf de formule $N = 20 \cdot 1,3^{t-2}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op gehele.
- b Schrijf de formule $P = 1500 \cdot 0,85^{3t+1}$ in de vorm $P = b \cdot g^t$. Rond g af op drie decimalen.
- c Schrijf de formule $\log(N) = 0,243t + 2,3$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op gehele en g op twee decimalen.
- d Schrijf de formule $\log(T) = 3,93 - 0,086t$ in de vorm $T = b \cdot g^t$. Rond b af op gehele en g op twee decimalen.
- e Schrijf de formule $t = 5,7 \cdot \log(Q) - 12,4$ in de vorm $Q = b \cdot g^t$. Rond b af op gehele en g op twee decimalen.

51
□ ⊗ *

- a Schrijf de formule $N = 50 \cdot 2^{4t-1}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$.
- b Schrijf de formule $N = 50 \cdot 2^{4t-1}$ in de vorm $t = a + b \cdot {}^2\log(cN)$.
- c Schrijf de formule $\log(N) = 0,54t + 3,12$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op gehele en g op twee decimalen.
- d Maak t vrij bij de formule $K = 40 \cdot 10^{2t-0,8}$.

E52
*

- a De formule $\log(x) = 3 \cdot \log(y)$ is te herleiden tot de vorm $x = y^a$. Laat dit zien.
- b De formule $\log(P) = 2 + 3 \cdot \log(Q)$ is te schrijven in de vorm $P = a \cdot Q^b$. Bereken a en b .

53
□ ⊗ *

Het aantal Europeanen met hooikoortsklachten neemt met name onder invloed van klimaatverandering flink toe. Bij het aantal hooikoortspatiënten hoort het verband $\log(N) = 0,0107t + 1,518$. Hierin is N het aantal hooikoortspatiënten in miljoenen in Europa en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2016.

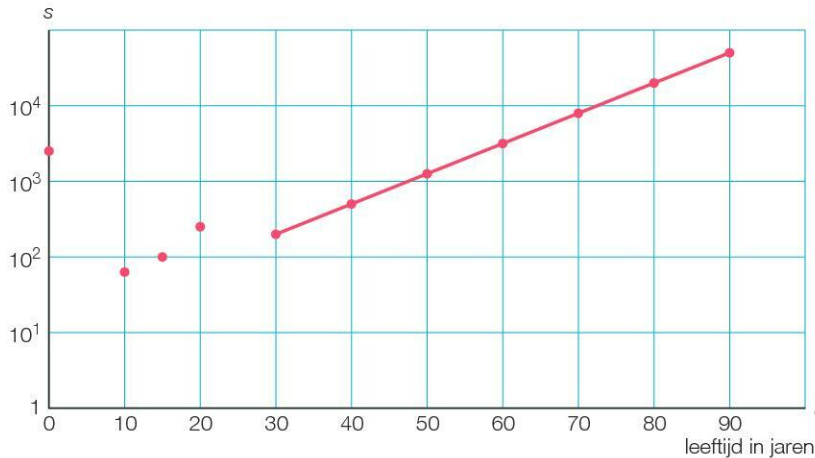
- a Bereken het aantal hooikoortspatiënten in Europa in 2021. Rond af op miljoenen.

Neem aan dat het aantal hooikoortspatiënten zich zal blijven ontwikkelen volgens het gegeven verband.

- b In welk jaar zullen er voor het eerst meer dan 70 miljoen hooikoortspatiënten zijn in Europa?
- c Schrijf het verband in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op gehele en g op drie decimalen.



[▶ WERKBLAD] In de Verenigde Staten is voor een aantal leeftijden onderzoek gedaan naar het aantal sterfgevallen per 100 000 inwoners. Om de resultaten in één figuur duidelijk te kunnen weergeven, is op de verticale as een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Zie figuur 14.30. Hierin is l de leeftijd in jaren en s het aantal sterfgevallen per 100 000 inwoners.



figuur 14.30

- Bereken het aantal sterfgevallen per 100 000 inwoners bij de twintigjarigen.
- Welk percentage van de pasgeboren baby's sterft binnen een jaar?
- Onder de vijfjarigen is het aantal sterfgevallen per 100 000 inwoners gelijk aan 126.
Teken het punt P dat hierbij hoort. Geef een toelichting.

Voor leeftijden tussen 30 en 90 jaar geldt de formule
 $\log(s) = 0,040l + 1,10$.

- Bereken met behulp van de formule bij welke leeftijd er 12 600 sterfgevallen per 100 000 inwoners zijn.
- Schrijf de formule in de vorm $s = b \cdot g^l$. Geef b in één decimaal en g in drie decimalen.

Voor de inwoners van Europa geldt voor leeftijden tussen 30 en 90 jaar de formule $s = 4,8 \cdot 1,109^l$. De bijbehorende grafiek is in het assenstelsel van figuur 14.30 een rechte lijn.

- Teken de bijbehorende lijn in de figuur.
- Bereken bij welke leeftijd tussen 30 en 90 jaar de aantallen sterfgevallen per 100 000 inwoners in de VS en Europa gelijk zijn.

Terugblik

Rekenregels voor machten

$$\begin{array}{llll} a^p \cdot a^q = a^{p+q} & (a^p)^q = a^{pq} & a^0 = 1 & a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} \\ \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} & (ab)^p = a^p b^p & a^{-p} = \frac{1}{a^p} & a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \end{array}$$

Deze rekenregels kun je gebruiken om formules met machten en exponenten te herleiden.

Om de formule $N = 300 \cdot 0,7^{2t+1}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$ te schrijven, ga je als volgt te werk.

$$N = 300 \cdot 0,7^{2t+1} \quad \text{Gebruik } a^p \cdot a^q = a^{p+q}.$$

$$N = 300 \cdot 0,7^{2t} \cdot 0,7^1 \quad \text{Gebruik } (a^p)^q = a^{pq}.$$

$$N = 300 \cdot 0,7 \cdot (0,7^2)^t \quad \text{Bereken } 300 \cdot 0,7 \text{ en } 0,7^2.$$

$$\text{Dus } N = 210 \cdot 0,49^t.$$

Herleiden van formules met exponenten en logaritmen

Om de formule $\log(N) = 0,051t + 2,74$ te schrijven in de vorm $N = b \cdot g^t$ ga je als volgt te werk.

$$\log(N) = 0,051t + 2,74 \quad \text{Gebruik } \log(A) = B \text{ geeft } B = 10^A.$$

$$N = 10^{0,051t + 2,74} \quad \text{Gebruik } a^{p+q} = a^p \cdot a^q.$$

$$N = 10^{0,051t} \cdot 10^{2,74} \quad \text{Gebruik } a^{pq} = (a^p)^q.$$

$$N = 10^{2,74} \cdot (10^{0,051})^t \quad \text{Bereken } 10^{2,74} \text{ en } 10^{0,051}.$$

$$N \approx 550 \cdot 1,125^t$$

$$\text{Dus } N = 550 \cdot 1,125^t.$$

Om x vrij te maken bij de formule $y = 20 \cdot 10^{0,1x+2}$ ga je als volgt te werk.

$$y = 20 \cdot 10^{0,1x+2} \quad \text{Verwissel beide leden.}$$

$$20 \cdot 10^{0,1x+2} = y \quad \text{Deel beide leden door 20.}$$

$$10^{0,1x+2} = 0,05y \quad \text{Gebruik } 10^A = B \text{ geeft } A = \log(B).$$

$$0,1x + 2 = \log(0,05y) \quad \text{Breng 2 naar het rechterlid.}$$

$$0,1x = -2 + \log(0,05y) \quad \text{Vermenigvuldig beide leden met 10.}$$

$$x = -20 + 10 \cdot \log(0,05y)$$

14.4 Redeneren met formules

O55
☐⊗*

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $N = b \cdot g^t$ met $0 < g < 1$. De grafiek van N is dalend en N nadert tot 0 als t heel groot wordt.

In deze opgave bekijken we de formule $A = 100 - 90 \cdot 0,8^t$.

Als t heel groot wordt, dan nadert $90 \cdot 0,8^t$ tot 0.

a Hoe volgt hieruit dat $A \approx 100$ als t heel groot wordt?

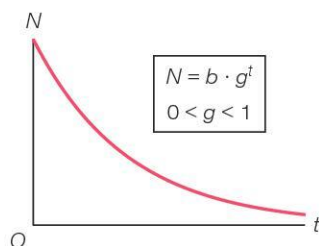
b Vul in: toe of af.

Als t toeneemt, dan neemt $0,8^t$..., dus dan neemt

$90 \cdot 0,8^t$..., dus dan neemt $100 - 90 \cdot 0,8^t$...

c Hoe kun je op grond van vraag b concluderen dat de grafiek van A stijgend is?

d Schets de grafiek van A . Gebruik de GR. Neem daarbij x tussen 0 en 20 en y tussen 0 en 100. Is de grafiek inderdaad stijgend?



figuur 14.31

Theorie A Redeneren met groeiformules

In opgave 55 heb je bij de formule van $A = 100 - 90 \cdot 0,8^t$ beredeneerd dat A nadert tot 100 als t heel groot wordt. Je hebt ook beredeneerd dat de grafiek van A stijgend is.

Bij een redenering werk je stap voor stap toe naar een conclusie over de formule of de grafiek, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken of de grafiek te plotten.

Je gebruikt bij redeneren met formules met g^t waarbij $0 < g < 1$

- als t heel groot wordt, dan nadert g^t tot 0
- als t toeneemt, dan neemt g^t af.

Bij het beredeneren kom je twee typen opdrachten tegen. We lichten dit toe aan de hand van de formule $N = 80(1 - 0,9^t)$.

1 Beredeneer wat N ongeveer zal zijn als t heel groot wordt.

Uitwerking

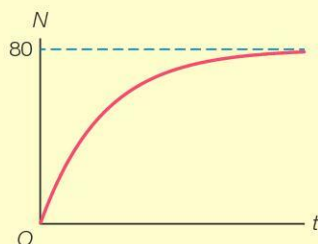
Als t heel groot wordt, dan nadert $0,9^t$ tot 0, dus dan wordt $1 - 0,9^t \approx 1$, dus dan wordt $80(1 - 0,9^t) \approx 80$. Hieruit volgt dat $N \approx 80$ als t heel groot wordt.

2 Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.

Uitwerking

Als t toeneemt, dan neemt $0,9^t$ af, dus neemt $1 - 0,9^t$ toe, dus dan neemt $80(1 - 0,9^t)$ toe. Dus de grafiek van N is stijgend.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $N = 80(1 - 0,9^t)$. Met een stippellijn is aangegeven dat de **grenswaarde** gelijk is aan 80. We zeggen ook wel dat 80 het **verzadigingsniveau** is.



figuur 14.32

Ook bij de formule $B = \frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t}$ kun je beredeneren wat de grenswaarde is. Verder kun je beredeneren dat de grafiek van B dalend is.

Je gebruikt bij redeneren met formules met g^t waarbij $g > 1$

- als t heel groot wordt, dan wordt g^t heel groot
- als t toeneemt, dan neemt g^t toe.

Bij de opgaven in deze paragraaf gaan we er steeds van uit dat $t \geq 0$ is.

Zo krijg je bij de formule $B = \frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t}$:

- 1 Beredeneer wat de grenswaarde van B is.

Uitwerking

Als t heel groot wordt, dan wordt $1,6^t$ heel groot, dus dan wordt $0,5 \cdot 1,6^t$ heel groot, dus dan wordt $1 + 0,5 \cdot 1,6^t$ ook heel groot. Dus dan wordt

$$\frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t} \approx 0.$$

Dus de grenswaarde van B is 0.

Deel je 120 door een heel groot getal, dan krijg je ongeveer 0.

- 2 Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van B dalend is.

Uitwerking

Als t toeneemt, dan neemt $1,6^t$ toe, dus dan neemt $0,5 \cdot 1,6^t$ toe, dus

dan neemt $1 + 0,5 \cdot 1,6^t$ toe en dan neemt $\frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t}$ af.

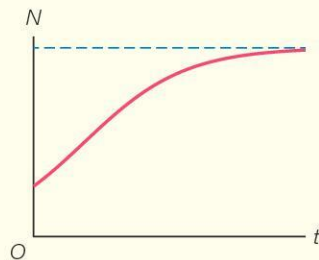
Dus de grafiek van B is dalend.

Voorbeeld

Het aantal vissen in een meer is gegeven door de formule

$N = \frac{5000}{2 + 5,5 \cdot 0,74^t}$. Hierin is N het aantal vissen en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2010.

- a Bereken wat het verzadigingsniveau is.
- b Bereken hoe uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.



figuur 14.33

Uitwerking

- a Als t heel groot wordt, dan nadert $0,74^t$ tot 0. Dan wordt

$5,5 \cdot 0,74^t \approx 0$ en $2 + 5,5 \cdot 0,74^t \approx 2$. Dus dan wordt

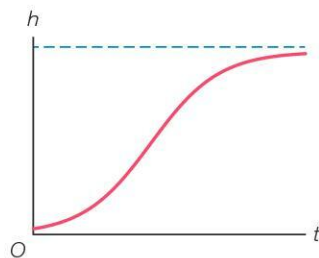
$\frac{5000}{2 + 5,5 \cdot 0,74^t} \approx \frac{5000}{2} = 2500$, dus het verzadigingsniveau is 2500 vissen.

- b Als t toeneemt, dan neemt $0,74^t$ af, dus ook $5,5 \cdot 0,74^t$ neemt af, dus ook $2 + 5,5 \cdot 0,74^t$ neemt af, dus $\frac{5000}{2 + 5,5 \cdot 0,74^t}$ neemt toe. De grafiek van N is dus stijgend.

Deel je 5000 door een steeds kleiner positief getal, dan krijg je een steeds grotere uitkomst.

56 Bij de groei van een zonnebloem is de hoogte h gegeven door de formule $h = \frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t}$. Hierin is h de hoogte in cm en t de tijd in weken.

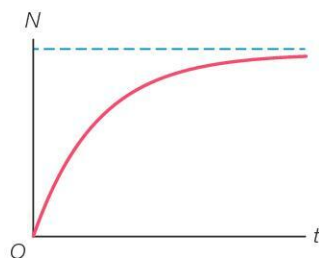
- a Bereken dat uit de formule volgt dat de zonnebloem voortdurend hoger wordt.
- b Hoe hoog is de zonnebloem op $t = 3$?
- c Bereken wat de grenswaarde is.
- d Bereken in één decimaal vanaf welke t de zonnebloem hoger dan 2,5 meter is.



figuur 14.34

57 Belangrijk nieuws verspreidt zich razendsnel in een school. Het aantal leerlingen N dat op een zeker tijdstip t van een belangrijk feit op de hoogte is, wordt gegeven door de formule $N = 1200(1 - 0,7^t)$ met t in uren en $t = 0$ om 9:00 uur.

- a Bereken dat uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.
- b Bij de grafiek van N hoort een lijn die het verzadigingsniveau aangeeft. Welke lijn is dat? Wat is de praktische betekenis van het verzadigingsniveau?
- c Hoe laat hebben 950 leerlingen het nieuws gehoord? Rond af op minuten.



figuur 14.35

58
□ ⊗ *

- a** Beredeneer bij de formule $N = \frac{500}{20 + 13 \cdot 0,85^t}$ wat het verzadigingsniveau is.
- b** Gegeven is de formule $N = \frac{720}{8 + 2,1 \cdot 1,8^t}$.
Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.
- c** Gegeven is de formule $N = 8000(1 + 1,5^t)$.
Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.
- d** Gegeven is de formule $N = 160 - 50 \cdot 0,8^t$.
Beredeneer wat de grenswaarde is.

A59
□ ⊗ *

Een bioloog doet een onderzoek naar het aantal fruitvliegjes in een afgesloten ruimte. De tijd t is in dagen met $t = 0$ op 1 april om 0:00 uur en N is het aantal fruitvliegjes. De tellingen zijn als punten in figuur 14.36 uitgezet.

- a** Met hoeveel procent is het aantal fruitvliegjes tussen $t = 35$ en $t = 45$ toegenomen?

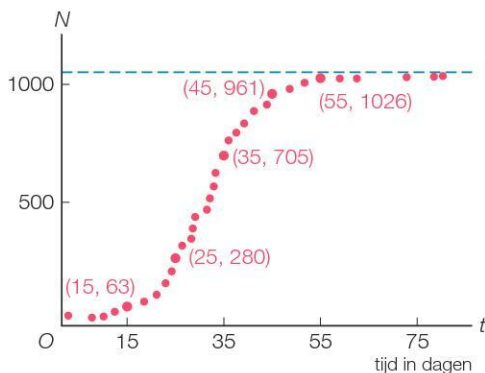
Tot $t = 30$ gaat de bioloog uit van exponentiële groei met een groeipercentage van 16% per dag.

- b** Bereken, uitgaande van de metingen op $t = 15$ en $t = 25$, het groeipercentage per dag. Rond af op één decimaal.
- c** Gebruik het groeipercentage 16% om het aantal fruitvliegjes op 23 april om 0:00 uur te berekenen.

De bioloog benadert het groeiproces met

$$\text{de groeiformule } N = \frac{1035}{1 + 210 \cdot 0,84^t}.$$

- d** Hoeveel procent wijkt op $t = 45$ het aantal fruitvliegjes volgens de formule af van de telling van de bioloog?
- e** De bioloog verwacht dat het aantal fruitvliegjes op den duur vrijwel 1035 zal worden.
Beredeneer dat de groeiformule hiermee in overeenstemming is.



figuur 14.36



A60

Hoe lang kun je woorden onthouden? Om deze vraag te beantwoorden, voerden onderzoekers een experiment uit. Deelnemers kregen een groot aantal woorden in paren te zien. Even later kregen ze als test één van de twee woorden te zien en moesten ze het bijbehorende woord geven. Hoe langer de onderzoekers wachtten met de test, hoe minder woorden de deelnemers zich nog konden herinneren.

De onderzoekers vonden de formule $P = \frac{92}{2,39^t} + \frac{32}{1,04^t} + 10$. Hierin is P het percentage woorden dat correct wordt herinnerd en t de tijd in minuten vanaf het zien van de paren woorden.

- Waarom kan deze formule niet gelden voor $t = 0,5$?
- Hoe lang duurt het tot de helft van de woorden nog correct wordt herinnerd? Rond af op gehele seconden.
- Beredeneer wat de grenswaarde is van deze formule. Wat is hiervan de praktische betekenis?
- De formule is te schrijven in de vorm $P = 92 \cdot a^t + 32 \cdot b^t + 10$. Bereken a en b . Rond af op drie decimalen.

O61

In de volgende formules is $x > 0$.

Wat weet je van y als x toeneemt? Kies uit de antwoorden 'y neemt toe' en 'y neemt af'.

- $y = 1 - 0,9^x$
- $y = \frac{20}{2x + 1}$
- $y = 10 + \frac{1}{x^2}$
- $y = \frac{3\sqrt{x+1}}{10}$

Theorie B Redeneren met allerlei formules

In het voorbeeld zie je hoe je bij de formules $y = 100 - \frac{20}{3x + 1}$,

$y = \frac{10}{x^2 + 1} - 5$ en $y = \frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ beredeneert of de grafiek van y stijgend of dalend is. Daarbij nemen we steeds $x > 0$, tenzij anders vermeld.

Bij dit soort redeneringen gebruiken we

- als x toeneemt, dan neemt ax toe als $a > 0$
- als x toeneemt, dan neemt ax af als $a < 0$
- als x toeneemt, dan neemt x^n toe als $n > 0$
- als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe.

Voorbeeld

Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort.

a $y = 100 - \frac{20}{3x + 1}$

b $y = \frac{10}{x^2 + 1} - 5$

c $y = \frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$

Uitwerking

- a** Als x toeneemt, dan neemt $3x$ toe, dus $3x + 1$ neemt toe, dus $\frac{20}{3x + 1}$ neemt af en $100 - \frac{20}{3x + 1}$ neemt toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

- b** Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe, dus dan neemt $x^2 + 1$ toe en $\frac{10}{x^2 + 1}$ neemt af, dus dan neemt $\frac{10}{x^2 + 1} - 5$ ook af.

Dus de grafiek van y is dalend.

- c** Als x toeneemt, dan neemt $0,8^x$ af en $50 \cdot 0,8^x$ neemt af.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe.

Van $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ neemt af.

Dus de grafiek van y is dalend.



62

- a** In de theorie staat 'als x toeneemt, dan neemt x^n toe als $n > 0$ '.

Gebruik dit en de rekenregel $a^p = \frac{1}{a^p}$ om te beredeneren dat de grafiek van $y = 5x^{-3}$ dalend is.

- b** Zie het voorbeeld.

Bij elk van de gegeven formules hoort een grafiek met een grenswaarde.

Beredeneer bij elk van de formules wat de grenswaarde is.



63

Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.

a $y = 250 - \frac{100}{x}$

b $y = \frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2 + 1}$

c $N = 1250(2 - 3 \cdot 0,75^t)$

64



Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.

a $y = 25 + \frac{12}{x^2}$

b $y = 40 - \frac{80}{2 + \sqrt{x}}$

c $N = \frac{18\,000}{250 + 333 \cdot 0,65^t}$

A65



Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort.

a $A = x \left(3 + \frac{x}{22} \right)$

b $B = \frac{x^{2,3} + 1}{20 \cdot 0,3^x}$

c $C = \frac{3^{2x} + 1}{1 + 3^{-x}}$

A66



Uit de lengte L van de remweg van een auto kan met de vuistregel

$L = \frac{v^2}{25f}$ de snelheid worden bepaald waarmee gereden is. Hierin is L in

meters en is v de snelheid in km/uur. Verder is f een positief getal dat afhangt van het wegdek, de weersomstandigheden en de autobanden.

- a** Hoe volgt uit de formule dat bij een hogere snelheid en een vaste waarde van f een langere remweg hoort?
- b** Door een sneeuwbus neemt de grip en daarmee de waarde van f af. Beredeneer met de formule dat de remweg langer wordt.
- c** Druk voor remwegen van 38 meter f uit in v .
- d** Met hoeveel procent neemt de lengte van de remweg toe bij een 20% hogere snelheid?
- e** Bij het gebruik van zomerbanden is bij een bepaalde snelheid de remweg 40 meter. Door winterbanden te gebruiken, neemt f met 8,4% toe. Daardoor heb je bij verder gelijke omstandigheden bij een hogere snelheid een remweg van 40 meter. Bereken hoeveel procent hoger. Rond af op één decimaal.

A67



Het is van belang dat de schildpad voor ze aan haar winterslaap begint, in een goede conditie verkeert, want anders is de kans groot dat ze door haar reserves heen raakt en sterft.

De conditie van een schildpad is te

berekenen met de Jackson ratio $J = \frac{g}{l^3}$.

Hierin is het gewicht g van de schildpad in gram en l de lengte in cm.

Schildpadden van de soort *T. hermanni* met een J van rond de 0,21 verkeren in een goede conditie. Maar is $J < 0,17$, dan is de conditie onvoldoende.

Van twee *T. hermanni* schildpadden die hetzelfde gewicht hebben, is bekend dat de grootste een Jackson ratio van 0,17 heeft.

Beredeneer met de formule of de kleine schildpad in voldoende conditie verkeert.



Een van de oudste methoden om de gevoelstemperatuur te berekenen, is de methode van Siple en Passel.

De formule die hierbij hoort is $G = 33 + (T - 33) \cdot W$ met $W = 0,474 + 0,454\sqrt{w} \cdot (1 - 0,1\sqrt{w})$. Hierin is G de gevoelstemperatuur in $^{\circ}\text{C}$, T de luchttemperatuur in $^{\circ}\text{C}$ op 1,50 meter hoogte en w de windsnelheid in m/s op 10 meter hoogte. De formule geldt voor windsnelheden tussen 0 en 25 m/s.

- a Uit de formule van G volgt dat er een luchttemperatuur is die bij elke windsnelheid dezelfde gevoelstemperatuur oplevert.
Toon dit aan.
- b Schets de grafiek van W voor w tussen 0 en 25. Welke soort van stijgen of dalen heeft de grafiek van W ?
- c Beredeneer met de schets van vraag b en de formule van G dat bij luchttemperaturen rondom het vriespunt de gevoelstemperatuur afneemt als de windsnelheid toeneemt.



Terugblik

Redeneren met groeiformules

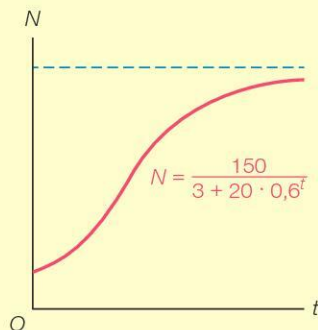
Gegeven is de formule $N = \frac{150}{3 + 20 \cdot 0,6^t}$. In de figuur hiernaast geeft de stippellijn het verzadigingsniveau aan.

Bij de formule van N kun je als volgt beredeneren wat het verzadigingsniveau is.

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,6^t$ tot 0. Dan wordt $20 \cdot 0,6^t \approx 0$ en $3 + 20 \cdot 0,6^t \approx 3$. Dus dan wordt

$$\frac{150}{3 + 20 \cdot 0,6^t} \approx \frac{150}{3} = 50.$$

Dus het verzadigingsniveau is 50.



Bij de formule van N kun je als volgt beredeneren dat de grafiek stijgend is.

Als t toeneemt, dan neemt $0,6^t$ af, dus ook $20 \cdot 0,6^t$ neemt af, dus ook

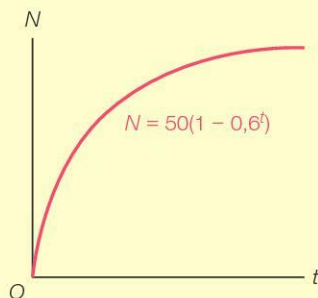
$3 + 20 \cdot 0,6^t$ neemt af. Dus $\frac{150}{3 + 20 \cdot 0,6^t}$ neemt toe.

De grafiek van N is dus stijgend.

Gegeven is de formule $N = 50 \cdot (1 - 0,6^t)$. Zie de figuur hiernaast. Bij de formule van N kun je als volgt beredeneren dat de grafiek stijgend is.

Als t toeneemt, dan neemt $0,6^t$ af, dus neemt $1 - 0,6^t$ toe, dus dan neemt $50(1 - 0,6^t)$ toe.

De grafiek van N is dus stijgend.



Bij de formule van N kun je als volgt beredeneren wat de grenswaarde is.

Als t heel groot wordt, nadert $0,6^t$ tot 0. Dan wordt

$1 - 0,6^t \approx 1$ en $50 \cdot (1 - 0,6^t) \approx 50 \cdot 1 = 50$.

Dus de grenswaarde is 50.

Redeneren met formules

Je kunt beredeneren dat bij de formule $y = 200 - \frac{50}{x\sqrt{x}}$ een stijgende grafiek hoort. Dat gaat als volgt.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe, dus dan neemt $x\sqrt{x}$ ook toe, dus

dan neemt $\frac{50}{x\sqrt{x}}$ af, dus dan neemt $200 - \frac{50}{x\sqrt{x}}$ toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

Eindopdracht Modellen bij bevolkingsgroei

In de beginopdracht heb je kunnen zien dat Bangladesh en Nigeria vergelijkbare inwoneraantallen hebben, maar sinds 1970 een verschillende bevolkingsgroei hebben gekend.

De omvang van de bevolking van Nigeria kan worden benaderd met het model $\log(N) = 0,0113t + 1,749$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1970 en N de bevolkingsomvang in miljoenen.

- Licht toe waarom dit model waarschijnlijk geen realistische voorspellingen kan opleveren voor de lange termijn.

De omvang van de bevolking van Bangladesh kan benaderd worden met

het model $N = \frac{218}{1 + 2,93 \cdot 0,96^t}$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ in

1965 en N de bevolkingsomvang in miljoenen.

- Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de bevolking van Bangladesh toeneemt.
- Beredeneer wat de grenswaarde van het aantal inwoners van Bangladesh is.

In 1970 had Bangladesh meer inwoners dan Nigeria. In de jaren daarna nam de bevolking van Nigeria sneller toe.

- In welk jaar hadden Bangladesh en Nigeria volgens de modellen evenveel inwoners?

Neem aan dat de gegeven modellen gebruikt kunnen worden om de toekomstige inwoneraantallen van Bangladesh en Nigeria te voorspellen.

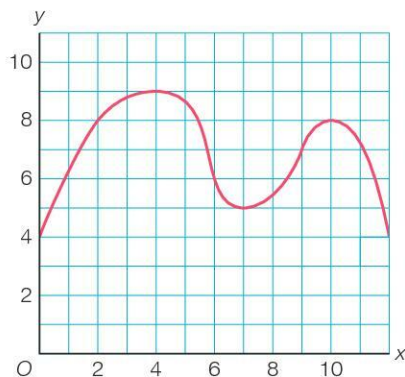
- In welk jaar zal Nigeria voor het eerst meer dan twee keer zoveel inwoners hebben als Bangladesh?

Diagnostische toets

14.1 Stijgen en dalen van grafieken

1 Zie figuur 14.37.

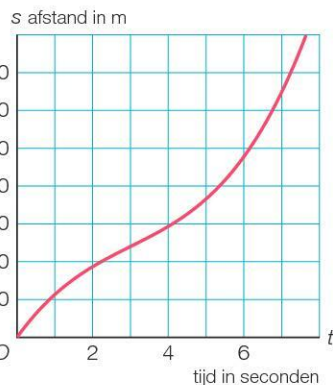
- Welke soorten van stijgen en dalen herken je? Noem ook de bijbehorende intervallen.
- Bereken de gemiddelde verandering van y op de intervallen $[0, 4]$ en $[2, 12]$.



figuur 14.37

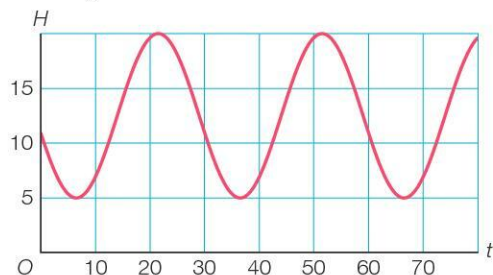
2 [▶ WERKBLAD] In figuur 14.38 zie je een tijd-afstandgrafiek.

- Schat de snelheid op $t = 1$ en op $t = 6$.
- Voor welke t schat je dat de snelheid minimaal is? Hoe groot is deze minimale snelheid?
- Hoeveel tijdstippen zijn er tussen $t = 0$ en $t = 6$ waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[0, 6]$? Licht toe.



figuur 14.38

3 In figuur 14.39 zie je een grafiek bij een periodiek verschijnsel met t in uren en H in meters.



figuur 14.39

Lees de periode, de evenwichtswaarde en de amplitude af.

14.2 Formules herschrijven

4 a Schrijf het rechterlid van de formule $y = \frac{25}{2x} \left(3 + \frac{5}{x} \right)$ als één breuk.

b Schrijf de formule $H = \frac{120x}{\frac{x}{4y} + 3xy}$ in de vorm $H = \frac{ay}{b + cy^2}$.

c Deel $6f$ uit bij de formule $P = \frac{3f^2 + 120f + 6}{6f}$.

5 a Druk p uit in q als gegeven is dat $q = \frac{3-p}{2p+1}$.

b Toon aan dat $y = 2\sqrt{2x-5}$ te herleiden is tot $x = \frac{1}{8}y^2 + 2\frac{1}{2}$.

c Maak s vrij als gegeven is dat $\frac{2}{s+3} = \frac{6}{t+2}$.

6 a Combineer de formules $A = 3s - 4t + 8$ en $s - 2t = 5$ tot de vorm $A = at + b$.

b Gegeven zijn de formules $A = \frac{3x}{2}(12y - 3z)$, $y = x - 3$ en $z = 2x + 5$.

De formule van A is te schrijven in de vorm $A = px^2 + qx$.
Bereken p en q .

14.3 Formules met exponenten en logaritmen

7 a Schrijf de formule $N = 80 \cdot \left(\frac{1}{4}x^3\right)^2$ in de vorm $N = ax^n$.

b Schrijf de formule $N = 12 \cdot 1,25^{2t+1}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$.

8 a Maak t vrij bij de formule $N = \frac{1}{4} \cdot 10^{3-2t}$.

b Schrijf de formule $1,3 \cdot \log(N) = 0,65t + 3,38$ in de vorm $N = b \cdot g^t$.
Rond b af op gehele en g op drie decimalen.

14.4 Redeneren met formules

9 Gegeven is de formule $N = \frac{5000}{200 + 12 \cdot 0,78^t}$.

a Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.

b Beredeneer wat het verzadigingsniveau is.

10 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.

a $K = 4 - \frac{7}{2t+1}$ met $t > 0$

b $y = \frac{50 \cdot 0,3^x}{\sqrt{x} + 2} + 1200$

15

Examentraining

Waar moet je bij het examen op letten?

- Het is belangrijk dat je je goed inleeft in het probleem van de opgave. Daarvoor is vaak de eerste vraag bedoeld.
- Ga gegeven reken- en afleesvoorbeelden zorgvuldig na, dit helpt je bij het maken van de vragen.
- Lees uit grafieken en figuren nauwkeurig af. Gebruik dus je geodriehoek. Onnauwkeurig aflezen kost punten.
- Schrijf bij vragen waar je niet helemaal uitkomt in elk geval op wat je wél weet. Dat kan punten opleveren.
- Schrijf tussenstappen op.
- Ga steeds na of je antwoord hebt gegeven op de gestelde vraag. Let ook op de afronding.



15.1 Algemene vaardigheden

- 1 a** In de tabel zie je de jaarlijkse procentuele groei van een populatie Schotse hooglanders.

jaar	2016	2017	2018	2019	2020	2021
toename	18%	20%	32%	4%	16%	7%

Je ziet dat de populatie in 2017 met 20% is toegenomen ten opzichte van 2016.

Bereken met hoeveel procent de populatie is gegroeid in de periode 2017 tot en met 2020.

- b** Zie de tabel in vraag a. Het gemiddelde van de percentages bij 2018 en 2019 is 18%.

Onderzoek of dit betekent dat de gemiddelde jaarlijkse toename over deze jaren ook 18% is.

- c** In januari 2021 zijn er in een gebied 380 Schotse hooglanders en dit aantal neemt naar verwachting jaarlijks met 8% toe.

Bereken in welk jaar er dan voor het eerst meer dan 750 Schotse hooglanders in het gebied zijn.

- d** In 2015 maakte een bedrijf 25 000 euro winst met de verkoop van tandenborstels. Dat was 32% van de totale winst. In 2020 maakte de winst op tandenborstels 35% uit van de totale winst. De winst op de tandenborstels was toen 42 000 euro.

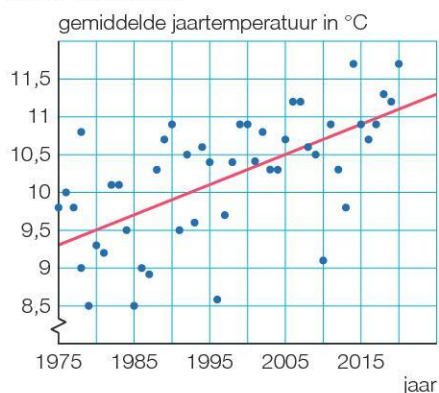
Bereken met hoeveel procent de totale winst is toegenomen in 2020 ten opzichte van 2015.

- e** In de eerste week van 2018 had een sportschool 280 bezoekers, die in totaal 350 uur in de sportschool verbleven. In de eerste week van 2020 waren er 340 bezoekers en de totale verblijfsduur van deze bezoekers was 80% meer dan in de eerste week van 2018.

Bereken hoeveel minuten de gemiddelde verblijfsduur in de eerste week van 2020 langer was dan die in de eerste week van 2018.

- f** Vanaf 1975 is de gemiddelde jaartemperatuur in Nederland voortdurend toegenomen. Zie de grafiek hiernaast. In de figuur is ook de trendlijn getekend. Je ziet dat volgens deze trendlijn in 1990 de gemiddelde jaartemperatuur $9,9^{\circ}\text{C}$ was. In 2020 was dit toegenomen tot $11,1^{\circ}\text{C}$.

Stel bij deze trendlijn een formule op van de vorm $T = at + b$ met T de gemiddelde jaartemperatuur in graden Celsius en t de tijd in jaren en $t = 0$ in 1975. Bereken vervolgens met deze formule in welk jaar de gemiddelde jaartemperatuur $12,1^{\circ}\text{C}$ zal zijn.



figuur 15.1

- g** Het aantal landbouwbedrijven in Noord-Holland is in de periode 2005-2019 vrijwel lineair afgenomen van 5850 tot 3515. Neem aan dat deze lineaire afname zich zo voortzet.
Bereken in welk jaar er voor het eerst minder dan 2500 landbouwbedrijven in Noord-Holland zullen zijn.
- h** De brandweer in Rozendam heeft in de eerste week van april bijgehouden hoeveel uren er zaten tussen twee opeenvolgende meldingen. Zie de tabel. Je ziet dat er tussen de eerste en de tweede melding zes uren zaten.

MELDINGEN EERSTE WEEK VAN APRIL

aantal uren sinds de vorige melding	26	6	3	14	5	28	42	27
--	----	---	---	----	---	----	----	----

Onderzoek of op grond van deze tabel de volgende conclusies kunnen worden getrokken. Geef hierbij telkens een sluitende redenering.

- 1 De tweede en de vijfde melding kunnen op dezelfde dag hebben plaatsgevonden.
- 2 Op de laatste dag van maart is er geen melding geweest.

Bij veel examenvragen is de informatie die je nodig hebt om een vraag te beantwoorden gegeven in een uitgebreide tekst, een tabel of een diagram. Soms moet je de informatie van de tekst combineren met de informatie die in een tabel of een diagram staat.

Door je te verdiepen in de situatie kom je erachter welke berekening nodig is om de vraag te beantwoorden.

Procenten

27% betekent 27 van de 100, dus $27\% = \frac{27}{100} = 0,27$.

27% van 320 is $0,27 \cdot 320 = 86,4$.

Procentberekeningen

- 1 Hoeveel procent is 12 van 65?

12 van 65 is $\frac{12}{65} \times 100\% \approx 18,5\%$.

- 2 Een hoeveelheid neemt toe van 825 tot 917.

De relatieve toename is

$$\frac{917 - 825}{825} \times 100\% \approx 11,2\%.$$

- 3 Bereken 18,7% van 728.

18,7% van 728 is $0,187 \cdot 728 \approx 136$.

- Procentuele verandering is $\frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\%$.
- Een verandering in procenten is een relatieve verandering.
- Een verandering in aantallen (hoeveelheid) is een absolute verandering.

- 4 • Een hoeveelheid van 836 neemt met 42,7% toe.
Je krijgt $1,427 \cdot 836 \approx 1193$.
- Een hoeveelheid van 8,12 miljoen neemt met 17,6% af.
Je krijgt $0,824 \cdot 8,12 \approx 6,69$ miljoen.
- 5 • Een hoeveelheid neemt met 38% toe tot 376.
Je had $\frac{376}{1,38} \approx 272$.
- Een hoeveelheid neemt met 57% af tot 6,3 miljoen.
Je had $\frac{6,3}{0,43} \approx 14,7$ miljoen.
- 6 Een hoeveelheid van 320 is 35% van het totaal.
Het totaal is $\frac{320}{0,35} \approx 914$.
- 7 Een hoeveelheid neemt met 10% toe. De dan ontstane hoeveelheid neemt met 20% toe.
Omdat $1,10 \cdot 1,20 = 1,32$ is de totale procentuele toename 32%.

Interpoleren en extrapoleren

Bij een tabel met waarnemingsgetallen kun je interpoleren en extrapoleren. Bij interpoleren schat je een tussenliggende waarde. Bij extrapoleren schat je een waarde die buiten de gegevens ligt.

Bij grafisch interpoleren en grafisch extrapoleren schat je een waarde aan de hand van een grafiek.

Bij lineair interpoleren en lineair extrapoleren maak je een berekening waarbij je uitgaat van een lineair verband.

Bij de tabel

a	12	18	25	36	50
P	720	950	1428	2831	4180

bereken je P voor $a = 33$ met behulp van lineair interpoleren als volgt.

a	25	36
P	1428	2831

$+11$
 $+1403$

Bij $\Delta a = 1$ hoort $\Delta P = \frac{1403}{11}$.

Bij $\Delta a = 8$ hoort $\Delta P = 8 \cdot \frac{1403}{11}$.

Dus voor $a = 33$ is $P = 1428 + 8 \cdot \frac{1403}{11} \approx 2448$.

Voor het berekenen van P met behulp van lineair extrapoleren bij $a = 57$ gebruik je het gedeelte

36	50
2831	4180

van de tabel.

Lineaire formules

De formule $y = ax + b$ is de algemene vorm van een lineaire formule.

De bijbehorende grafiek is de lijn met richtingscoëfficiënt (rc) a , die de y -as snijdt in het punt $(0, b)$.

$rc = a$ betekent: 1 naar rechts en a omhoog.

Van de lijn $y = ax + b$ door de punten A en B is

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Bij de lineaire formule $p = aq + b$ is $a = \frac{\Delta p}{\Delta q}$.

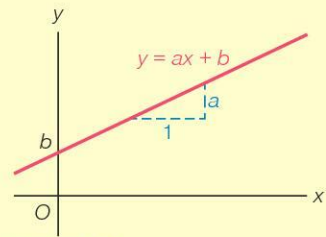
De lijn in figuur 15.3 gaat door de punten $A(4, 22)$ en $B(12, 78)$.

De formule van de lijn krijg je als volgt.

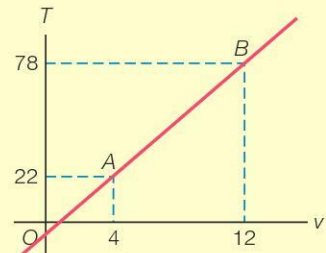
$$T = av + b \text{ met } a = \frac{\Delta T}{\Delta v} = \frac{78 - 22}{12 - 4} = 7$$

$$\left. \begin{array}{l} T = 7v + b \\ v = 4 \text{ en } T = 22 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7 \cdot 4 + b = 22 \\ 28 + b = 22 \\ b = -6 \end{array}$$

Dus $T = 7v - 6$.



figuur 15.2



figuur 15.3

Evenredige en omgekeerd evenredige verbanden

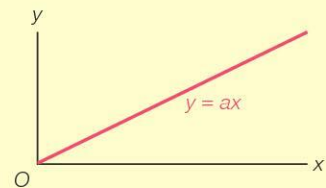
y is (recht) evenredig met x :

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan wordt y ook met dat getal vermenigvuldigd.
- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong $(0, 0)$.
- De tabel is een verhoudingstabel.

Weet je dat s evenredig is met t en dat $s = 0,2$ voor $t = 2,5$, dan krijg je als volgt de formule van s .

$$\left. \begin{array}{l} s = at \\ t = 2,5 \text{ en } s = 0,2 \end{array} \right\} a \cdot 2,5 = 0,2 \text{ oftewel } a = \frac{0,2}{2,5} = 0,08$$

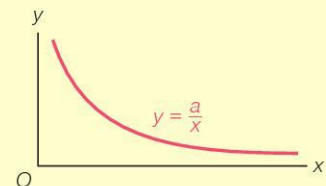
Dus $s = 0,08t$.



figuur 15.4

y is omgekeerd evenredig met x :

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan wordt y door hetzelfde getal gedeeld.
- Het product xy is constant, dus $xy = a$ oftewel $y = \frac{a}{x}$.
- De grafiek is een hyperbool.



figuur 15.5

De bereidingstijd van vlees in een magnetron is omgekeerd evenredig met het ingestelde vermogen. Bij een vermogen V van 800 watt is de bereidingstijd T vier minuten. De formule van T krijg je als volgt.

Omgekeerd evenredig, dus $T = \frac{a}{V} \cdot \left. \vphantom{\frac{a}{V}} \right\} \frac{a}{800} = 4$ oftewel $a = 4 \cdot 800 = 3200$

$$T = 4 \text{ en } V = 800$$

$$\text{Dus } T = \frac{3200}{V}.$$

Grafieken en de GR

Op de GR kun je formules invoeren, hierbij tabellen maken en grafieken plotten. Bij de grafieken kun je

- bij een gegeven x -waarde de y -waarde berekenen
- de coördinaten van snijpunten berekenen (met de optie snijpunt)
- de coördinaten van toppen berekenen (met de opties maximum en minimum)
- de coördinaten van snijpunten met de horizontale as berekenen (met de optie nulpunt).

Geef de volgende toelichting bij gebruik van de GR.

- 1 Noteer de formules die je invoert.
Schrijf dus op $y_1 = \dots$, $y_2 = \dots$, enzovoort.
- 2 Noteer de optie die je gebruikt en geef het resultaat.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

Ontbreekt deze toelichting in je examenuitwerking, dan leidt dat tot puntenaftrek.

Bij het kiezen van een geschikt venster kunnen de volgende vuistregels van pas komen.

Vuistregels voor het vinden van een geschikt venster

- De kleinste en de grootste waarde van x volgen uit de gegevens of de context.
- Gebruik bij de TI ZoomFit, en bij de Casio en de NW Auto om op het spoor te komen van geschikte waarden voor y . Bij de HP kun je het aanraakscherm gebruiken om de y -waarden aan te passen.

Hiernaast zie je de grafiek van $N = 20t^{1,4} - 6t^{1,8}$ met $0 < t < 20$.

Ook is de lijn $N = 100$ getekend.

Om te berekenen voor welke waarden van t geldt dat $N > 100$, voer je in $y_1 = 20x^{1,4} - 6x^{1,8}$ en $y_2 = 100$.

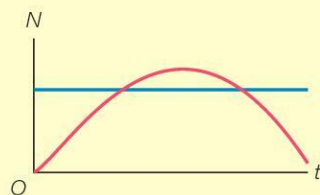
De optie snijpunt geeft $x = 6,452...$ en $x = 15,069...$

Wordt het antwoord gevraagd in twee decimalen, dan krijg je t tussen 6,46 en 15,06. Let hierbij op de juiste afronding. Zo is voor $t = 6,45$ nog niet $N > 100$.

Om het maximum van N te berekenen, gebruik je de optie maximum.

De optie maximum geeft $x = 10,822...$ en $y = 124,706...$

Dus het maximum is ongeveer 124,7 voor $t \approx 10,8$.



2 2017-I

Veel mensen denken erover om zonnepanelen aan te schaffen. Bedrijven spelen daarop in en geven daar allerlei informatie over op hun websites. In onderstaande tabel zie je een overzicht van de prijs en opbrengst van verschillende zonnepaneelsystemen van een bedrijf.

aantal panelen	8	12	18
aanschafprijs van het systeem	€ 4699	€ 6299	€ 8599
verwachte elektriciteitsopbrengst (kWh per jaar)	1667	2500	3750

De overheidssubsidie van 15% van de aanschafprijs is nog niet verwerkt in de prijzen van de tabel. De overheidssubsidie bedraagt maximaal € 650.

De *terugverdientijd* is de periode die het duurt tot het aankoopbedrag van het systeem is terugverdiend via besparing op de elektriciteitskosten. In het begin van 2013 schafte iemand het systeem van 12 zonnepanelen aan met overheidssubsidie.

Bereken, uitgaande van de verwachte elektriciteitsopbrengst, in welk jaar het aankoopbedrag volledig is terugverdiend. Gebruik dat een kWh elektriciteit € 0,225 kost.

3 2017-II

De Amsterdamse Waterleidingduinen (de AWD) is een duingebied bij Zandvoort. In het gebied komen damherten voor. Deze damherten worden jaarlijks geteld. Hiervoor wordt het leefgebied verdeeld in zogenoemde telgebieden.

Aan het einde van de winter worden in elk telgebied drie tellingen uitgevoerd, de eerste 's avonds rond zonsondergang, de tweede de volgende ochtend rond zonsopkomst, waarna op dezelfde dag rond zonsondergang de derde telling plaatsvindt.

De tellers zijn ervaren personen. Zij kunnen de verschillende geslachten en leeftijden van de damherten goed onderscheiden. Er worden geen damherten dubbel geteld. In onderstaande tabel zie je het resultaat van de telling van 2012 in één van de telgebieden.

	bok (mannelijk)	hinde (vrouwelijk)	jonge bok	jonge hinde	totaal
telronde 1	80	90	40	50	260
telronde 2	75	105	35	40	250
telronde 3	70	95	30	45	240

Men gaat ervan uit dat de damherten tussen twee telrondes niet naar een ander telgebied zijn gegaan. Met deze resultaten kun je vaststellen hoeveel damherten er minimaal aanwezig zijn in dit telgebied.

a Bereken het minimaal aanwezige aantal damherten in dit telgebied.

Voor de minimumschatting van het aantal damherten in het totale duingebied van de AWD worden de minimaal aanwezige damherten van alle telgebieden bij elkaar opgeteld.

In werkelijkheid is het aantal damherten in de AWD groter.

Men maakt hierbij een schatting van het aantal damherten dat niet door de tellers is gezien.

In de tabel hiernaast staan voor een aantal jaren de minimumschatting en de totaalschatting.

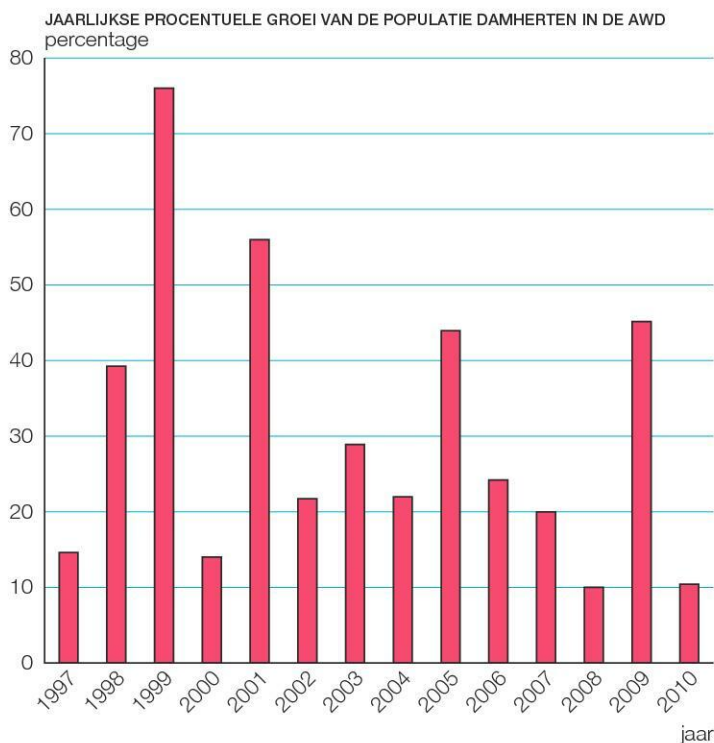
Vanaf 2008 werden er geen totaalschattingen meer gepubliceerd. Er is gebleken dat de verhouding tussen de minimumschatting en de totaalschatting in de jaren 2005, 2006 en 2007 telkens ongeveer gelijk was. Neem aan dat deze verhouding vanaf 2008 hetzelfde blijft, dan kunnen de totaalschattingen wel gemaakt worden.

b Toon aan dat deze verhoudingen telkens ongeveer gelijk waren en maak hiermee totaalschattingen voor de jaren 2008, 2009 en 2010. Geef je antwoorden in honderdtallen nauwkeurig.

jaar	AWD minimum- schatting	AWD totaal- schatting
2005	512	1401
2006	654	1742
2007	660	1802
2008	726	niet bekend
2009	1084	niet bekend
2010	1178	niet bekend

*Aantonen dat is een
examenwerkwoord.
Zie bladzijde 246.*

Al sinds 2007 wordt onderzocht of de populatie damherten in de AWD door middel van jacht beheerd moet worden. De populatie groeit elk jaar, maar er zijn grote verschillen. In de figuur zie je de procentuele toename van de populatie in de jaren 1997 tot en met 2010.



figuur 15.6

Je kunt in de figuur bijvoorbeeld aflezen dat de populatie in 1998 met ongeveer 39% is gestegen ten opzichte van 1997.

- c** Bereken met behulp van de figuur met hoeveel procent de populatie damherten is gegroeid in de periode van 1997 tot en met 2000.

Als je het gemiddelde van alle groeipercentages in de figuur uitrekt, kom je uit op iets meer dan 29%. Dat betekent echter niet dat voor de gehele periode de gemiddelde jaarlijkse groei dan ook ruim 29% is.

- d** Geef zelf een voorbeeld waarin je laat zien dat als het gemiddelde van de groeipercentages van twee achtereenvolgende jaren 29% is, dat niet hoeft te betekenen dat de gemiddelde jaarlijkse groei over die periode van twee jaar ook 29% is.

Door allerlei oorzaken is de gemiddelde jaarlijkse groei van de populatie damherten in de AWD vanaf 2007 gelijk aan 15%. Op het landgoed San Rossore, een duingebied ter hoogte van de stad Pisa in Italië, is gebleken dat een grote hoeveelheid damherten niet tot problemen hoeft te leiden. Hier bereikte de populatie damherten in een omrasterde situatie een dichtheid van 200 damherten per km^2 .

De oppervlakte van de AWD is 34 km^2 .

- e Bereken, uitgaande van een groei van 15% per jaar vanaf 2007, in welk jaar die dichtheid in de AWD voor het eerst bereikt zal worden. Ga hierbij uit van de totaalschatting in 2007.

4 2017-II

De Engelse onderzoeker Arthur Evans vond in 1900 op het eiland Kreta honderden kleitabletten met een onbekend schrift. De meeste van die tabletten bevatten 10 of 11 tekens waarmee meestal 5 tot 7 woorden werden geschreven.

Met behulp van deze gegevens kan je iets zeggen over het gemiddeld aantal tekens per woord op een tablet.

Bereken op basis van bovenstaande gegevens tussen welke grenzen het gemiddeld aantal tekens per woord op een tablet ligt. Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

5 2018-II

Vliegtuigen stoten veel vervuilend CO_2 uit. Daarom moet de luchtvaart een belangrijke bijdrage leveren aan de vermindering van de CO_2 -uitstoot.

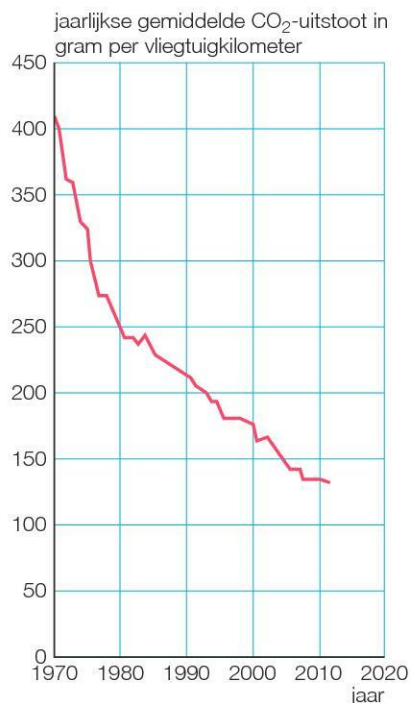
De CO_2 -uitstoot van vliegtuigen wordt gemeten in gram CO_2 per zogeheten vliegtuigkilometer. Een *vliegtuigkilometer* is een afgelegde kilometer door een vliegtuigpassagier.

In figuur 15.7 zie je vanaf het jaar 1970 de jaarlijkse gemiddelde CO_2 -uitstoot per vliegtuigkilometer.

In de figuur is te zien dat de jaarlijkse gemiddelde CO_2 -uitstoot per vliegtuigkilometer sinds 1970 sterk daalt.

In de periode van 1980 tot 2010 is de jaarlijkse gemiddelde CO_2 -uitstoot per vliegtuigkilometer vrijwel lineair gedaald van 250 tot 135 gram. Neem aan dat deze lineaire daling zich zo voortzet.

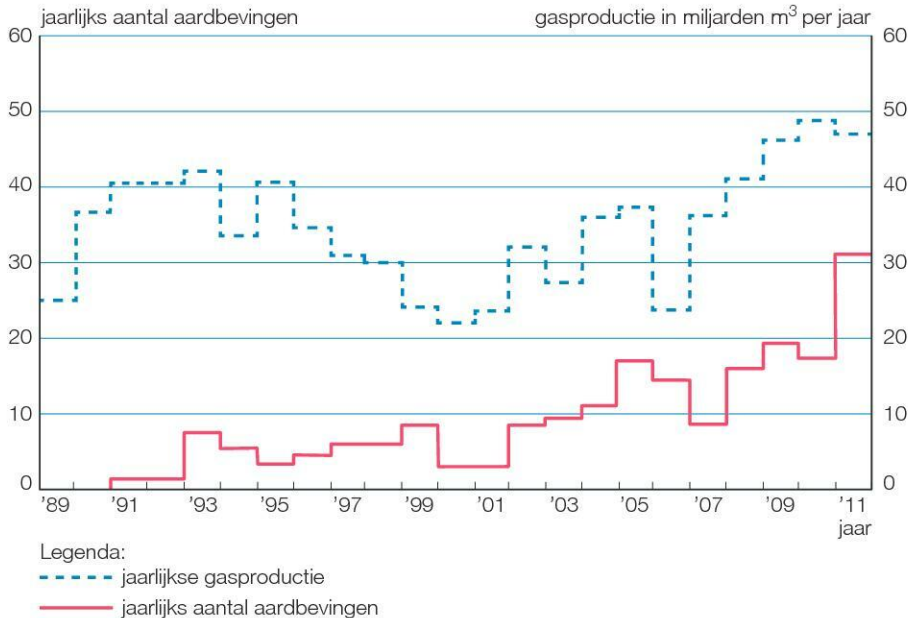
Bereken in welk jaar de jaarlijkse gemiddelde CO_2 -uitstoot per vliegtuigkilometer dan voor het eerst onder de 50 gram zal komen.



figuur 15.7

6 2019-I

In de provincie Groningen vinden, als gevolg van gasproductie, regelmatig aardbevingen plaats. In 2013 is daar grootschalig onderzoek naar gedaan. Zo werd er gekeken naar het verband tussen de gasproductie en aardbevingen. Enkele resultaten daarvan staan in figuur 15.8. Hier zie je bijvoorbeeld dat er in 1993 zeven aardbevingen zijn geweest en er in datzelfde jaar 42 miljard kubieke meter gas is geproduceerd.



figuur 15.8

We bekijken de volgende drie beweringen:

- 1 De gasproductie en het aantal aardbevingen zijn over de gehele periode 2000-2011 procentueel evenveel gestegen.
- 2 Als na 2000 de gasproductie daalt, dan heeft dat altijd een jaar later ook een daling van het aantal aardbevingen tot gevolg.
- 3 In de periode 2005-2011 is de gemiddelde stijging per jaar van het aantal aardbevingen groter dan in de periode 1998-2004.

Geef van elke bewering aan of deze waar is of niet. Gebruik in je toelichting gegevens uit figuur 15.8.

7 2018-II

Op 13 april 2013 heropende het Amsterdamse Rijksmuseum, na een verbouwing van tien jaar. Het museum doet er sindsdien veel aan om publiciteit te genereren: er zijn grote exposities in de tuinen en er worden grote aanwinsten verworven.

Ook online timmert het museum aan de weg. Zo is het gedeelte van de website van het museum waar je je eigen collectie kunt samenstellen ongekend populair.



Het aantal bezoeken aan de website nam van 2 861 948 in 2012 toe tot 6 091 312 in 2013. Daarnaast nam het gemiddelde aantal pagina's dat per bezoek opgevraagd werd toe van 5,62 tot 7,35.

- a** Bereken met hoeveel procent het totale aantal opgevraagde pagina's in 2013 is toegenomen ten opzichte van 2012. Rond je antwoord af op gehele procenten.

Het aantal bezoeken aan de website nam dus toe van 2 861 948 in 2012 tot 6 091 312 in 2013. De totale verblijfsduur in 2012 van al die bezoeken samen was 15 025 248 minuten. De totale verblijfsduur in 2013 was 3,75 keer zo groot als de totale verblijfsduur in 2012.

- b** Bereken hoeveel de gemiddelde verblijfsduur per bezoek in 2013 langer was dan in 2012. Rond je antwoord af op gehele minuten.

Enige tijd later bracht het Rijksmuseum een publicatie uit over de economische waarde van het Rijksmuseum. Daarin werd beschreven wat (direct of indirect) de bijdrage van een Rijksmuseumbezoeker aan het Nederlandse bruto binnenlands product (BBP) is. Er werd toen nog uitgegaan van 1,5 miljoen bezoekers aan het museum in 2013.

Als er meer dan 1,5 miljoen Rijksmuseumbezoekers zijn, dan levert elke Rijksmuseumbezoeker boven die 1,5 miljoen, direct of indirect, een bijdrage van € 110 aan het BBP. In formulevorm: $B = 110 \cdot (x - 1,5)$ met B de bijdrage aan het BBP in miljoenen euro's en x het aantal bezoekers van het museum in miljoenen (met $x > 1,5$).

- c** Bereken bij hoeveel bezoekers de bijdrage aan het BBP € 200 miljoen is. Rond je antwoord af op tienduizenden bezoekers.

Onder het Rijksmuseum loopt een onderdoorgang, die veelvuldig door voetgangers en fietsers gebruikt wordt. Amsterdammers vreesden dat, na de heropening, de onderdoorgang voor fietsers verboden zou worden, omdat zich hierin ook de ingangen van het museum bevinden en het dan te druk zou kunnen gaan worden.

Vóór de heropening is dan ook onderzoek gedaan naar het aantal voetgangers dat zich tegelijkertijd zou gaan ophouden in de onderdoorgang. Hierbij was vooral het aantal voetgangers tijdens de piekuren op drukke dagen van belang. Uitgaande van het aantal van 2 miljoen jaarlijkse museumbezoekers, andere passanten én rekening houdend met enkele aannames die onder de tabel staan, kan de tabel worden ingevuld.

TOTAAL AANTAL VOETGANGERS (MUSEUMBEZOEKERS EN PASSANTEN SAMEN)

aantal per op een...	dag	gemiddeld uur	piekuur	minuut in een gemiddeld uur	minuut in een piekuur
rustige dag					
gemiddelde dag	15 100				
drukke dag					

- Op een drukke dag zijn er driemaal zoveel voetgangers als op een gemiddelde dag; op een rustige dag is dat $1/3^{\text{e}}$ deel van het aantal voetgangers op een gemiddelde dag.
- In een gemiddeld uur loopt er $1/10^{\text{e}}$ deel van het dagelijks aantal voetgangers, tijdens een piekuur loopt er $1/5^{\text{e}}$ deel van het dagelijkse aantal.
- Elke minuut loopt er $1/60^{\text{e}}$ deel van het aantal dat er in een uur loopt.

Om een beeld te krijgen van de drukte wordt uit de voorgaande cijfers de voetgangersdichtheid k (het aantal voetgangers per vierkante meter)

berekend met de formule $k = \frac{\text{aantal voetgangers per minuut}}{60 \times \text{loopsnelheid} \times \text{breedte van het voetpad}}$.

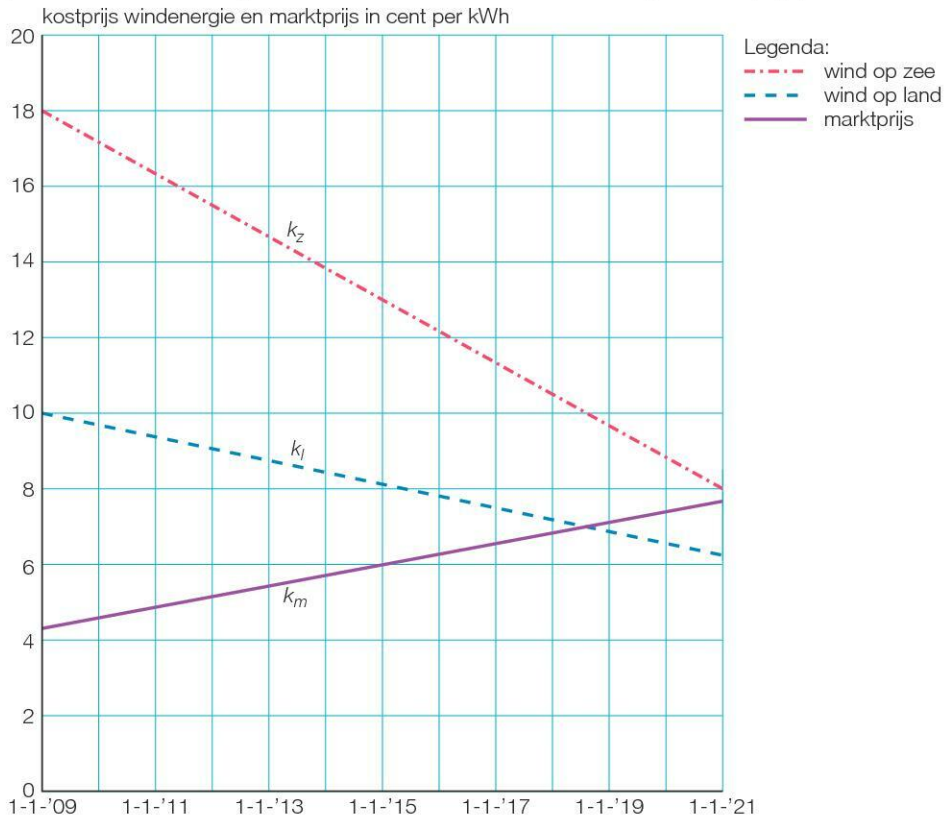
Hierin is de loopsnelheid in m/s en de breedte van het voetpad in m.

De gemiddelde loopsnelheid is 0,75 m/s. De beschikbare breedte van de voetpaden in de onderdoorgang is 6 meter. Als de voetgangersdichtheid boven de 0,71 komt, is er sprake van onacceptabele drukte.

- d** Ga met een berekening na of de voetgangersdichtheid op het drukste moment, een minuut tijdens een piekuur op een drukke dag, onder de 0,71 blijft. Je kunt hierbij gebruikmaken van de tabel.

8 2018-I

In een krant stond eind 2013 bij een artikel over de toekomst van windenergie de onderstaande figuur. In de figuur wordt de kostprijs voor het produceren van windenergie vergeleken met de kosten voor het produceren van energie in een traditionele kolencentrale (de marktprijs).



figuur 15.9

De grafieken zijn gebaseerd op een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model is het mogelijk om op ieder willekeurig tijdstip de kostprijs van energie uit te rekenen.

De formule voor de marktprijs k_m is $k_m = 0,28 \cdot t + 4,3$.

De formule voor de kostprijs van windenergie k_l van windmolens op land is $k_l = -0,31 \cdot t + 10,0$.

Voor beide formules geldt: k is de prijs in cent per kWh (kilowattuur) en t is de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2009.

We nemen in deze opgave aan dat de prijzen zich ook na 2020 volgens deze lineaire verbanden blijven ontwikkelen.

Door de duurdere windmolens op zee is de kostprijs van windenergie van die windmolens op dit moment nog steeds hoger dan die van windmolens op land. Maar door de voortdurende innovaties gaat dat veranderen.

- Stel met behulp van de figuur een formule op voor de kostprijs k_z van windenergie van windmolens op zee en bereken daarmee in welk jaar de windenergie van land en die van zee evenveel kosten.

Rond 2011 was de kostprijs van windenergie van windmolens op land nog tweemaal zo hoog als de marktprijs.

- b** Bereken in welk jaar de marktprijs tweemaal zo hoog zal zijn als de kostprijs van windenergie van windmolens op land.

In de provincie Flevoland staan veel windmolens en er zijn daar veel huishoudens die voorzien worden van windenergie van windmolens op land. Er wordt in deze provincie daarom vaak gebruikgemaakt van de gemiddelde prijs van windenergie en ‘traditionele’ energie, dus het gemiddelde van k_l en k_m . Voor deze gemiddelde prijs k_g kan een formule worden opgesteld van de vorm $k_g = at + b$.

- c** Bereken de waarden van a en b in twee decimalen.

In 2013 werd door alle windmolens op zee in totaal gemiddeld 228 000 kWh per uur opgewekt. De windmolens zijn per dag maar gemiddeld 5 uur in bedrijf.

Neem aan dat een huishouden in Nederland jaarlijks ongeveer 3500 kWh verbruikt.

- d** Bereken hoeveel huishoudens in Nederland er geheel 2013 van energie konden worden voorzien met energie van windmolens op zee. Rond je antwoord af op honderdtallen.

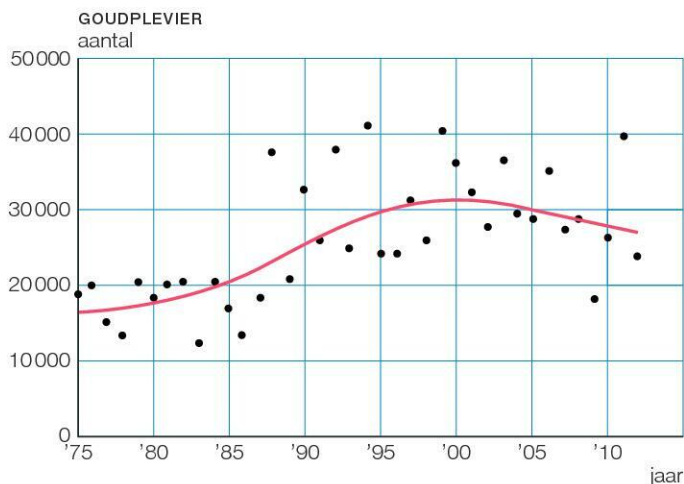
In 2013 was de totale productie van energie door alle windmolens (op land en op zee) in Nederland gelijk aan 5,95 miljard kWh. Hiermee kon in 5% van de landelijke energiebehoefte worden voorzien. Er werd toen voorspeld dat tien jaar later windmolens, met een totale energieproductie van 23 miljard kWh, in 15% van de landelijke energiebehoefte zouden voorzien.

- e** Bereken met hoeveel procent de totale landelijke energiebehoefte volgens deze voorspelling tussen 2013 en 2023 zou toenemen. Rond je antwoord af op gehele procenten.



9 2019-I

Een goudplevier (zie foto) is een vogel die niet in Nederland broedt, maar tijdens zijn trektochten wel in Nederland te vinden is. Er zijn grote verschillen in aantallen goudplevieren tussen de verschillende jaren. In figuur 15.10 zijn de aantallen goudplevieren in Nederland in de jaren 1975 tot en met 2012 weergegeven als zwarte stippen.



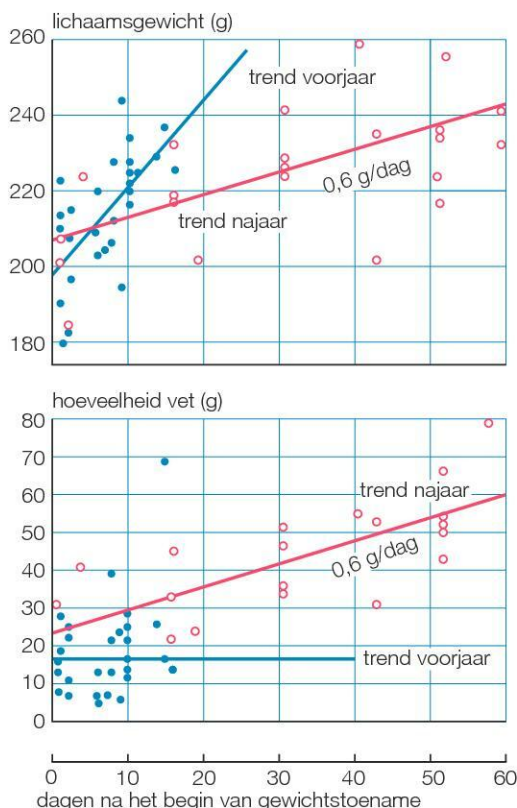
figuur 15.10

In figuur 15.10 is ook een kromme getekend die de trend aangeeft. We nemen aan dat vanaf 2003 deze trend een rechte lijn is en dat dit ook na 2012 zo blijft.

- a Bereken hoeveel goudplevieren er volgens de trendlijn zijn in 2020.
Geef je antwoord in gehele duizendtallen.

Tijdens hun verblijf in Nederland bouwen de goudplevieren een reserve op voor de komende trektochten. Hierdoor nemen ze toe in gewicht. In figuur 15.11 zie je het resultaat van een onderzoek naar deze gewichtstoename: van een aantal op verschillende tijdstippen gevangen goudplevieren is het gewicht en/of de hoeveelheid vet bepaald. De open rode stippen horen bij waarnemingen in het najaar en de dichte blauwe stippen bij waarnemingen in het voorjaar. Ook zijn de trendlijnen getekend.

Op grond van specifieke biologische kenmerken kunnen de onderzoekers bepalen wanneer de gewichtstoename van een goudplevier begint. Aan de hand van de trendlijnen in figuur 15.11 kun je onderzoeken of de stellingen op de volgende bladzijde waar zijn.



figuur 15.11

I In het voorjaar is de gemiddelde gewichtstoename per dag van een goudplevier ongeveer 2 keer zo groot als in het najaar.

II De gewichtstoename in het voorjaar bestaat niet uit vet.

b Onderzoek voor elk van beide stellingen of deze waar is.

Onderzoeken of is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 246.

Het *vetpercentage* van een vogel is de hoeveelheid lichaamsvet als percentage van het totale gewicht van de vogel. Er geldt dus $\text{vetpercentage} = \frac{\text{hoeveelheid vet (in gram)}}{\text{totale gewicht (in gram)}} \times 100$.

Met behulp van de trendlijnen (in figuur 15.11) is een formule op te stellen voor P_{voorjaar} het vetpercentage in het voorjaar. Als je dat doet met de punten (0, 198) en (20, 244) uit de grafiek voor het totale

lichaamsgewicht, dan ontstaat de formule $P_{\text{voorjaar}} = \frac{1600}{2,3 \cdot t + 198}$ met t

de tijd in dagen na het begin van de gewichtstoename.

Hierbij is P_{voorjaar} het vetpercentage van de vogel in het voorjaar en t de tijd in dagen na het begin van de gewichtstoename.

c Laat zien, gebruikmakend van de grafieken in figuur 15.11 en de punten (0, 198) en (20, 244), dat deze formule inderdaad uit de gegevens volgt.

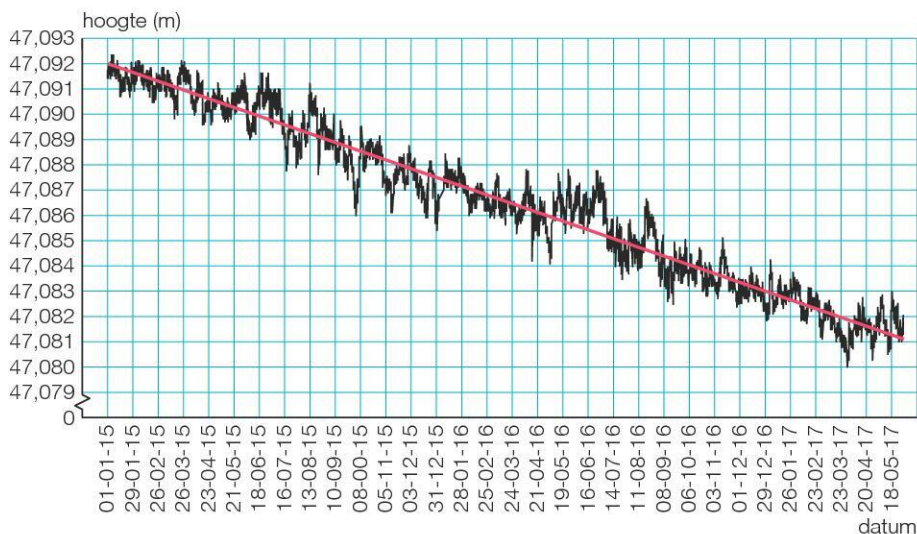
Laten zien dat is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 246.

10 2019-II

Bodemdaling kan ontstaan door natuurlijke processen maar ook door menselijk handelen. Bij de gaswinning uit het Groningen-gasveld is er sprake van bodemdaling veroorzaakt door menselijk handelen. In deze opgave gaan we uit van de gegevens zoals die tot en met 2017 bekend waren. We nemen verder aan dat ontwikkelingen die tot op dat moment geconstateerd zijn, zich in de periode daarna op dezelfde wijze voortzetten.

Metingen van deze bodemdaling worden onder andere gedaan door zogeheten GPS-monitoring-stations, die zeer nauwkeurig posities bepalen. Een van deze stations staat boven op een gebouw bij het Eemskanaal. Elk uur wordt de hoogte van de GPS-antenne (ten opzichte van zeeniveau) van dit station gemeten.

In figuur 15.12 zijn alle metingen vanaf 1 januari 2015 om 0:00 uur tot en met 31 mei 2017 om 23:00 uur weergegeven.



figuur 15.12

Het jaar 2016 was een schrikkeljaar.

a Bereken om hoeveel metingen het in figuur 15.12 gaat.

In figuur 15.12 is ook de trendlijn van de hoogte van de GPS-antenne weergegeven. Zoals je kunt zien, is de eenheid op de horizontale as vier weken.

Als de bodemdaling onveranderd doorgaat, zal de hoogte van de GPS-antenne in de toekomst lager dan 47 meter zijn.

b Bereken in welk jaar dat volgens de gegeven trendlijn voor het eerst zal zijn.

Als gevolg van de bodemdaling vinden er in Groningen en omgeving aardbevingen plaats. In de tabel zie je hoe snel de aardbevingen elkaar in het jaar 1993 opvolgden.

AARDBEVINGEN IN 1993 (CHRONOLOGISCH)

aantal dagen sinds de vorige beving	63	21	7	14	40	9	44	0	13	17	27	12	18	3	59	29
--	----	----	---	----	----	---	----	---	----	----	----	----	----	---	----	----

Voorbeeld: de 0 in de tabel geeft aan dat de 7e en 8e aardbeving in 1993 op dezelfde dag plaatsvonden.

Op basis van de tabel en de afzonderlijke lengtes van de kalendermaanden kunnen de volgende conclusies worden getrokken:

- De tweede en vierde aardbeving in 1993 kunnen in één kalendermaand plaatsgevonden hebben.
 - De eerste aardbeving in 1993 werd voorafgegaan door minstens één aardbevingsvrije kalendermaand.
- c Geef voor beide conclusies een sluitende redenering.

11 2018-II

Carmen gaat cupcakes bakken.

Zij gebruikt daarvoor de onderstaande ingrediënten:

Voor 12 vanille cupcakes

- 180 gram boter
- 135 gram suiker
- 8 gram vanillesuiker
- 4 eieren
- 180 gram zelfrijzend bakmeel
- snufje zout

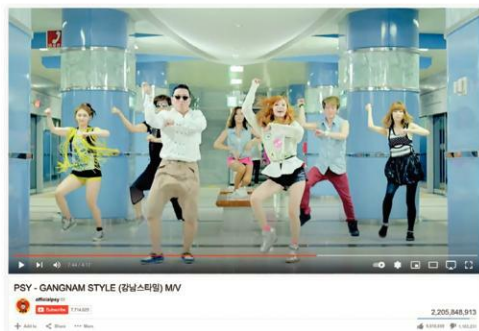


Carmen heeft 300 gram suiker in huis en van alle andere ingrediënten heeft ze ruim voldoende. Ze wil zo veel mogelijk cupcakes bakken. Bereken hoeveel cupcakes Carmen maximaal kan bakken.

12 2019-I

Het nummer Gangnam Style van de Zuid-Koreaanse zanger Psy is de eerste YouTube-video die vaker dan 1 miljard keer bekeken is; die grens werd bereikt op 21 december 2012.

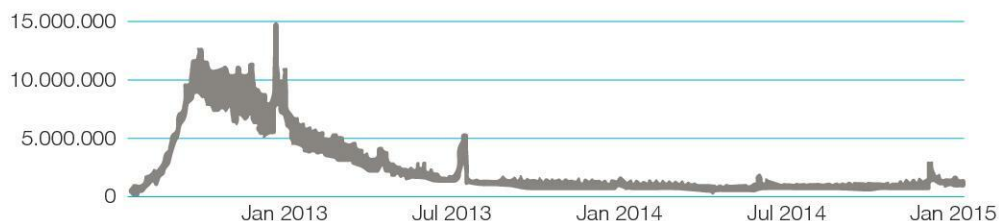
Op de foto staat rechts onderaan de teller van 12 januari 2015, rond vier uur 's middags: toen was de video ruim 2,2 miljard maal bekeken.



Er wordt veel tijd besteed aan het kijken naar de 4 minuten en 12 seconden durende video. Ga er bij de volgende vraag van uit dat iedereen de video van begin tot einde bekeek.

- a** Bereken hoeveel tijd in jaren er in totaal tot 12 januari 2015, vier uur 's middags, al was besteed aan het kijken naar de video. Geef je antwoord in gehele honderdtallen.

Je kunt op YouTube statistieken opvragen over de video. Zie figuur 15.13.



figuur 15.13

De grafiek in figuur 15.13 geeft het aantal views per dag weer. Dat aantal is dus ook de dagelijkse verandering van het *totale* aantal views van Gangnam Style.

Met behulp van de gegevens uit figuur 15.13 zou je ook een totaalgrafiek, een grafiek van het *totale* aantal views, kunnen maken. De pieken laten we dan voor het gemak buiten beschouwing. Over het stijgen en dalen van de totaalgrafiek worden de volgende beweringen gedaan:

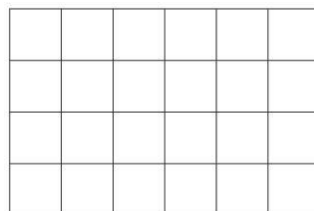
- I de totaalgrafiek is eerst toenemend stijgend en daarna afnemend dalend;
- II de totaalgrafiek is eerst afnemend stijgend en daarna toenemend stijgend;
- III de totaalgrafiek is eerst toenemend stijgend en daarna afnemend stijgend.

- b** Leg uit welke van de drie beweringen de juiste is.

Uitleggen is een examenwoord. Zie bladzijde 246.

15.2 Combinatoriek en rijen

- 13 a** In de rechthoek hiernaast zijn zes kolommen met elk vier vakjes. In de eerste en in de zesde kolom wordt één vakje gekleurd, in de tweede en in de vijfde kolom worden twee vakjes gekleurd en in de derde en in de vierde kolom worden drie vakjes gekleurd.
Op hoeveel manieren kan dat?



figuur 15.14

- b** De rechthoek hiernaast is verdeeld in 24 gelijke vierkantjes. In de rechthoek plaatsen we rechthoekjes die bestaan uit twee of drie aaneengesloten vierkantjes. We plaatsen telkens één zo'n rechthoekje.
Bereken op hoeveel verschillende manieren dat kan.
- c** Een bedrijf maakt codes van acht verschillende letters. Voor de eerste drie en de laatste drie letters worden de medeklinkers B, D, F, G, H, K, L, M, N, P, R, S, T, V en W gebruikt. Voor de middelste twee letters worden de klinkers A, E, I, O en U gebruikt.
Bereken hoeveel codes het bedrijf zo kan maken.
- d** Bij een concert wordt een rij van 20 lampen gebruikt die op het podium zijn gericht. Er branden vijf lampen rood, vijf lampen blauw, vijf lampen groen en vijf lampen geel.
Bereken op hoeveel manieren men de kleuren in deze rij kan rangschikken.
- e** Een bedrijf gebruikt codes van acht tekens: eerst vier letters en dan vier cijfers. Voor de letters worden A, B, C, D, E, F, G en H gebruikt en voor de cijfers 1 tot en met 9. In een code mogen niet dezelfde letters voorkomen en er mogen niet twee dezelfde cijfers naast elkaar staan.
Bereken hoeveel verschillende codes het bedrijf kan maken.
- f** Gegeven is de rij $-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{10}{5}, -\frac{13}{5}, \frac{16}{5}, \dots$
Hieronder staan drie formules, waarbij $n = 1, 2, 3, \dots$
Onderzoek welke van deze drie formules bij de rij hoort.

$$\text{I } u_n = \frac{3n-2}{(-5)^n} \quad \text{II } u_n = \frac{2-3n}{5 \cdot (-1)^n} \quad \text{III } u_n = \frac{2-3n}{5 \cdot (-1)^{n-1}}$$

- g** Gegeven is de rij $u_n = \sqrt{115} \left(\frac{(-2)^n}{(4n+1) \cdot 5^n} \right)$ met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
Bereken de som van de eerste vier termen van deze rij. Rond af op drie decimalen.
- h** Bij een stapel blokken hoort $n = 1$ bij de bovenste laag, $n = 2$ bij de laag daaronder, enzovoort. De bovenste laag bestaat uit 7 blokken en elke volgende laag heeft 12 blokken meer.
Stel een formule op voor het aantal blokken A_n op de n^{e} laag en bereken daarmee vanaf welke laag er meer dan 200 blokken in een laag zitten.

- i** Annet maakt een rij van 10 steeds kleiner wordende vierkanten. De zijde van het eerste vierkant is 20 cm en de zijde van het tiende vierkant is 1 cm.

Als Annet de zijden van de achtereenvolgende vierkanten steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigt, kan de lengte van de zijde van het n -de vierkant worden berekend met een formule van de vorm

$$l_n = a \cdot l_{n-1} \text{ met } l_1 = 20.$$

Als ze de zijden van de achtereenvolgende vierkanten steeds met hetzelfde getal laat afnemen, kan de lengte van de zijde van het n -de vierkant worden berekend met een formule van de vorm $L_n = L_{n-1} - b$ met $L_1 = 20$.

Bereken a en b . Rond daarbij a af op drie decimalen. Stel vervolgens van l_n en L_n directe formules op en gebruik deze formules om te berekenen bij welk vierkant het verschil in zijde bij beide situaties maximaal is. Geef het maximale verschil in twee decimalen.

- j** Gegeven is de rij $\begin{cases} B_n = 1,55 \cdot B_{n-1} \\ B_1 = 5 \end{cases}$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

B_n is een geheel getal, waarbij steeds op de normale manier wordt afgerond.

Er geldt dat $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 5 + 8 + 12 + 19 = 44$.

Bereken $B_1 + B_2 + \dots + B_7$.

- k** De rij C_n hoort bij een exponentieel verband. Er geldt $C_0 = 10$ en $C_{15} = 19,8$. Stel de recursieve formule voor C_n op. Rond in de formule af op vier decimalen.

- l** Gegeven is de formule $K_n = \frac{a(1 - g^{n+2})}{1 - g^2}$ waarbij n een geheel getal is

en $g > 0$. Er geldt $K_0 = 2$ en $K_1 = 6,5$.

Bereken a en g en bereken vervolgens vanaf welke n geldt dat $K_n > 100\,000$.

- m** Bij een televisieprogramma wordt een bedrag verdeeld onder n personen. De bedragen die de opeenvolgende personen krijgen, vormen een rij waarbij elk volgend bedrag met een vaste factor wordt vermenigvuldigd. De eerste persoon krijgt 2000 euro en de derde persoon krijgt 1000 euro. Als het te betalen bedrag minder wordt dan 10 euro, dan stopt de uitbetaling. Bereken hoeveel personen een bedrag ontvangen.

Telproblemen

Kan handeling I op p manieren en handeling II op q manieren, dan kan

- handeling I EN handeling II op $p \times q$ manieren
- handeling I OF handeling II op $p + q$ manieren.

Let bij telproblemen op of herhalingen zijn toegestaan.

Maak je getallen van vier cijfers waarbij je de cijfers 4, 5, 6, 7, 8 en 9 mag gebruiken, dan krijg je

- met herhaling $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ mogelijkheden
- zonder herhaling $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ mogelijkheden.

Permutaties

Een *permutatie* is een rangschikking.

Het aantal permutaties van drie dingen die je kiest uit acht dingen, kortweg het aantal permutaties van 3 uit 8, is $8 \cdot 7 \cdot 6$.

Het aantal permutaties van acht dingen is $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$.

Heb je 12 leerlingen, dan

- kun je ze op $12! = 479\,001\,600$ manieren op een rij zetten
- zijn er $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880$ manieren om vier van hen op een rij te zetten.

Combinaties

Een klas van 20 leerlingen kiest uit haar midden een vertegenwoordiging van vijf leerlingen.

Omdat de volgorde er niet toe doet, is het aantal mogelijke vijftallen gelijk aan het aantal *combinaties* van 5 uit 20, notatie $\binom{20}{5}$.

Het aantal combinaties van k uit n , oftewel het aantal manieren om k dingen te kiezen uit n dingen zonder op de volgorde te letten, is $\binom{n}{k}$.

De GR heeft opties waarmee je faculteiten, het aantal permutaties en het aantal combinaties kunt berekenen.

- Op de TI krijg je !, nPr en nCr in het math-KANS-menu of via de functietoets f2.
- Op de Casio krijg je !, nPr en nCr in het OPTN-PROB-menu.
- Op de HP krijg je Factorieel, Permutatie en Combinatie in het werksetmenu Wisk. Kies vervolgens Kans.
- Op de NW krijg je faculteit met ! en permutaties en combinaties krijg je met Kansrekenen en dan Combinatoriek in de Toolbox.

Rijtjes van A's en B's

- Het aantal rijtjes bestaande uit drie A's en zeven B's is $\binom{10}{3}$ en ook $\binom{10}{7}$.
- Het totale aantal rijtjes van tien hokjes met in elk hokje een A of een B is 2^{10} .
- Bij het tien keer gooien met een geldstuk is het aantal series met drie keer munt (en dus zeven keer kop) gelijk aan $\binom{10}{3}$.

Rijtjes met meer dan twee letters

Het aantal rijtjes met vier A's, drie B's en zes C's is $\binom{13}{4} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{6}$.

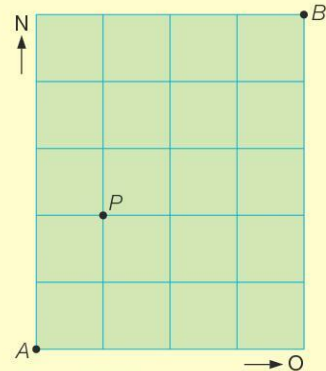
Je kunt bijvoorbeeld ook $\binom{13}{6} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3}$ berekenen, maar ook $\frac{13!}{4! \cdot 3! \cdot 6!}$.

Het aantal getallen van acht cijfers met drie vieren, twee vijven en drie achten is $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3}$, maar ook $\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 3!}$.

Routes in een rooster

Het aantal kortste routes van A naar B in het rooster in de figuur hiernaast is gelijk aan $\binom{9}{5}$ en ook $\binom{9}{4}$. Je hebt immers te maken met een rijtje bestaande uit vijf N's en vier O's.

Het aantal kortste routes van A via P naar B is $\binom{3}{2} \cdot \binom{6}{3}$.



figuur 15.15

Rijen bij lineaire verbanden

Bij een rij waarbij het verschil van twee opeenvolgende termen steeds hetzelfde getal is, hoort een lineair verband.

Van een rij u_n met een constant verschil v en beginterm u_0 is

- de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_0
- de directe formule $u_n = u_0 + v \cdot n$.

Is de beginterm u_1 dan is de directe formule $u_n = u_1 + v \cdot (n - 1)$.

Gegeven is de rij 102, 99, 96, 93, 90, ... met beginterm u_1 .

Omdat $u_1 = 102$ en $v = -3$ is de directe formule $u_n = 102 - 3 \cdot (n - 1)$ oftewel $u_n = 105 - 3 \cdot n$.

De recursieve formule is $u_n = u_{n-1} - 3$ met $u_1 = 102$.

Een van de termen van deze rij is 15.

De bijbehorende n volgt uit $105 - 3n = 15$, dus $-3n = -90$.

Dit geeft $n = 30$, dus de 30^e term is 15.

Rijen bij exponentiële verbanden

Bij een rij waarbij het quotiënt van twee opeenvolgende termen steeds hetzelfde getal is, hoort een exponentieel verband.

Van een rij u_n met constante factor r en beginterm u_0 is

- de recursieve formule $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met beginterm u_0
- de directe formule $u_n = u_0 \cdot r^n$.

Is de beginterm u_1 dan is de directe formule $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$.

Gegeven is de rij 100, 125, 156,25, 195,3125, ... met beginterm u_1 .
 Omdat $u_1 = 100$ en $r = 1,25$ is de directe formule $u_n = 100 \cdot 1,25^{n-1}$.
 De recursieve formule is $u_n = 1,25 \cdot u_{n-1}$ met $u_1 = 100$.

Om te berekenen vanaf welke n de termen van de rij u_n groter zijn dan 500, voer je in $y_1 = 100 \cdot 1,25^{x-1}$.

De tabel geeft bij $x = 8$ hoort $y_1 \approx 476,84$

bij $x = 9$ hoort $y_1 \approx 596,05$.

Dus vanaf $n = 9$ is $u_n > 500$.

NORM DRIJF AUTO REËL RAD WIN				
DRUK OP OM FUNCTIE TE BEWERKEN				
X	Y1			
1	100			
2	125			
3	156.25			
4	195.31			
5	244.14			
6	305.18			
7	381.47			
8	476.84			
9	596.05			
10	745.06			
11	931.32			

Y1=596.04644775391

Getallenrijen en notaties

De rij $u_n = 1,2 \cdot u_{n-1} - 5 \cdot n$ met $u_0 = 100$ is ook te noteren als

- $u(n) = 1,2 \cdot u(n-1) - 5 \cdot n$ met $u(0) = 100$
- $u_{n+1} = 1,2 \cdot u_n - 5 \cdot (n+1)$ met $u_0 = 100$
- $u(n+1) = 1,2 \cdot u(n) - 5 \cdot (n+1)$ met $u(0) = 100$.

Een rij is ook te noteren met een andere letter dan u .

Kies je bij de rij hierboven de letter A in plaats van u , dan krijg je

$A_n = 1,2 \cdot A_{n-1} - 5 \cdot n$ met $A_0 = 100$, enzovoort.

Het rijen-invoerscherm van de GR

Je kunt de rij $u_n = 1,2 \cdot u_{n-1} - 5 \cdot n$ met $u_0 = 100$ doorrekenen op het rijen-invoerscherm.

Ook een recursieve formule als $u_n = 2 \cdot u_{n-1} - 3 \cdot u_{n-2}$ met $u_0 = 5$ en $u_1 = 10$ reken je door op het rijen-invoerscherm.

Een directe formule als $u_n = 2n^2 - 3n + 4$ kun je op twee manieren doorrekenen:

- 1 op het rijen-invoerscherm
- 2 op het formule-invoerscherm door in te voeren $y_1 = 2x^2 - 3x + 4$.

Patronen en getallenrijen

De rij $A_n : 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, \dots$ vertoont een regelmaat. Het zijn kwadraten min 1, want $3 = 2^2 - 1$, $8 = 3^2 - 1$, $15 = 4^2 - 1$, enzovoort.

Noem je de eerste term A_1 , dan is $A_n = (n+1)^2 - 1$ een directe formule van de rij.

Uit deze directe formule is een recursieve formule af te leiden. Dat gaat als volgt.

Uit $A_n = (n+1)^2 - 1$ volgt $A_{n-1} = n^2 - 1$.

$A_n - A_{n-1} = (n+1)^2 - 1 - (n^2 - 1) = n^2 + 2n + 1 - 1 - n^2 + 1 = 2n + 1$

Dus een recursieve formule is $A_n = A_{n-1} + 2n + 1$ met $A_1 = 3$.

14 2017-I

In figuur 15.16 zie je het kunstwerk ‘Seine’ van Ellsworth Kelly, waarin de schittering op het water van de rivier de Seine verbeeld is door middel van zwarte en witte vakjes die allemaal even groot zijn.

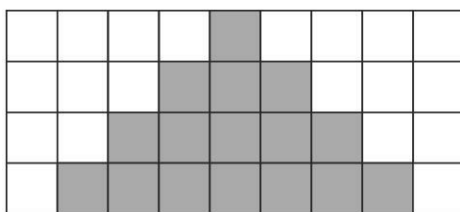


figuur 15.16

Het paneel is ingedeeld in 83 (verticale) kolommen en 41 (horizontale) rijen. De meest linkse kolom is helemaal wit. In de kolom direct rechts daarvan bevindt zich 1 zwart vakje, de kolom daarnaast bevat één zwart vakje meer, enzovoort, totdat in de middelste kolom alle 41 vakjes zwart zijn. Er is maar één kolom met allemaal zwarte vakjes. Daarna bevat elke volgende kolom steeds één zwart vakje minder.

De zwarte vakjes in het kunstwerk zijn willekeurig geplaatst in de kolommen. Kelly heeft dit gedaan door te loten. Op deze manier zijn er veel verschillende eindresultaten mogelijk. Zelfs voor een kleiner kunstwerk van 9 kolommen en 4 rijen zijn er al veel verschillende mogelijkheden.

In figuur 15.17 staat een voorbeeld van 9 kolommen en 4 rijen die op de manier van Kelly van wit en zwart zijn voorzien: net als in het echte kunstwerk heeft de eerste kolom 0 zwarte vakjes, de tweede kolom één enzovoorts en de laatste kolom weer 0.

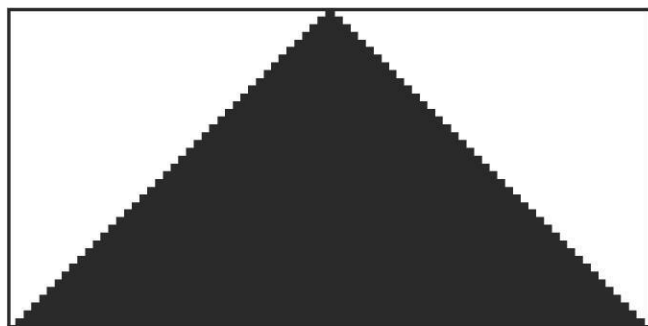


aantal zwarte vakjes: 0 1 2 3 4 3 2 1 0

figuur 15.17

- a** Bereken hoeveel verschillende ‘kunstwerken’ bestaande uit 9 kolommen en 4 rijen met deze procedure te maken zijn.

Om te berekenen hoeveel zwarte vakjes het kunstwerk ‘Seine’ van Kelly in totaal bevat, kun je in gedachten alle zwarte vakjes in de kolommen naar beneden schuiven. Zie figuur 15.18.



figuur 15.18

b Bereken het totale aantal zwarte vakjes in het kunstwerk ‘Seine’.

15 2019-I

Tussen mei 2008 en februari 2013 werd voor personenauto's de kentekenserie gebruikt die door de Rijksdienst voor het Wegverkeer *sidecode 7* genoemd wordt.

Hiernaast staat een van de eerste kentekens uit deze serie.

De kentekens bestaan uit twee cijfers, gevolgd door drie letters en tenslotte nog één cijfer.



figuur 15.19

Als we ervan uitgaan dat er geen beperkingen zijn aan de te gebruiken cijfers en letters, dan zijn er bijna 18 miljoen verschillende kentekens te maken met sidecode 7.

a Bereken het aantal verschillende kentekens met sidecode 7. Geef je antwoord in gehele honderdduizendtallen.

In deze opgave gaan we echter van de volgende beperkingen uit:

- Een kenteken mag niet met 00 beginnen
- De eerste letter is G, H, J, K, L, N, P, R, S, T, X of Z
- Klinkers (A, E, I, O, U, Y) worden niet gebruikt
- De letters C en Q worden niet gebruikt
- Bepaalde drielettercombinaties (zoals NSB) kunnen als aanstootgevend worden gezien en als gevolg daarvan zijn 82 drielettercombinaties uitgesloten.

Een verslaggever van een autotijdschrift schrijft in een artikel dat door al deze beperkingen minder dan 20% van alle mogelijke kentekens uiteindelijk op een personenauto terecht zal komen.

b Ga met een berekening na of de verslaggever gelijk heeft.

16 2017-II

[► WERKBLAD] De Engelse onderzoeker Arthur Evans vond in 1900 op het eiland Kreta honderden kleitabletten die beschreven waren met een onbekend schrift. Op de foto zie je zo'n kleitablet.



Omdat de tekens grotendeels opgebouwd zijn uit lijntjes noemde hij dit schrift Lineair B. Lineair B heeft 90 verschillende tekens waarmee woorden geschreven werden.

De meeste tekens van Lineair B stellen lettergrepen voor die bestaan uit een medeklinker met daarna een klinker, bijvoorbeeld ma, ka, sa, ki, ti, to.

Alice Kober heeft gewerkt aan de ontcijfering van Lineair B. Zij stelde een tabel van 10 tekens op, zie figuur 15.20. Ze wist niet welke medeklinkers ingevuld moesten worden bij medeklinker 1 tot en met 5 en welke klinkers bij klinker 1 en 2. Alice Kober wist echter wel dat de tekens in eenzelfde rij met dezelfde medeklinker beginnen en dat de tekens in eenzelfde kolom dezelfde klinker hebben. Ze wist ook dat het vijf verschillende medeklinkers en twee verschillende klinkers moesten zijn.

Neem aan dat er in de taal van Lineair B in totaal 20 mogelijkheden voor een medeklinker zijn en 5 voor een klinker. Dat betekent dat er $20 \cdot 5 = 100$ verschillende mogelijkheden zijn om aan het symbool linksboven een lettergreep (medeklinker + klinker) te koppelen.

- Bereken op hoeveel verschillende manieren er 5 medeklinkers en 2 klinkers gekozen kunnen worden om aan alle 10 symbolen in de tabel een lettergreep te koppelen.

	klinker 1	klinker 2
medeklinker 1		
medeklinker 2		
medeklinker 3		
medeklinker 4		
medeklinker 5		

figuur 15.20

Michael Ventris zette het werk van Kober voort. In het vervolg van deze opgave zie je in vereenvoudigde vorm hoe hij te werk ging. Ventris slaagde erin verschillende tekens van de tabel van Kober te ontcijferen. Op het werkblad is hiermee een begin gemaakt: het teken linksboven staat voor ti en het teken links in het midden voor ni. Inmiddels waren er ook nieuwe kleitabletten met Lineair B ontdekt op andere plaatsen. Ventris zag dat sommige woorden vaak op de kleitabletten uit Kreta voorkwamen maar helemaal niet op de nieuw ontdekte kleitabletten. Hij veronderstelde dat dit plaatsnamen waren van steden op Kreta. Een van die woorden zie je op het werkblad. Hij ontdekte dat dit woord stond voor A-mi-ni-so, een stad op Kreta. Er zijn dus blijkbaar ook tekens voor losse klinkers, zoals a, i, o. In figuur 15.21 zie je drie woorden in Lineair B. Deze figuur staat ook op het werkblad.



figuur 15.21

We gaan uit van het volgende:

- de gedeeltelijk ontcijferde tabel op het werkblad;
- de ontcijfering van de plaatsnaam A-mi-ni-so, zie het werkblad;
- er zijn vier plaatsnamen op Kreta die in aanmerking komen:
Ko-no-so, Pa-i-to, Ru-ki-to en Tu-li-so, maar we weten nog niet welk woord aan welke plaatsnaam gekoppeld moet worden.

Het lukte Ventris niet om met alleen deze gegevens alle woorden aan een plaatsnaam te koppelen, maar hij vond wel een gedeeltelijke oplossing.

- b** Onderzoek in hoeverre je elk van de drie woorden in figuur 15.21 aan een plaatsnaam kunt koppelen met behulp van bovenstaande uitgangspunten. Licht je antwoord toe.

17 2019-II

Ruim 50 jaar geleden maakte de kunstenaar Peter Struycken het werk ‘Wetmatige beweging’.

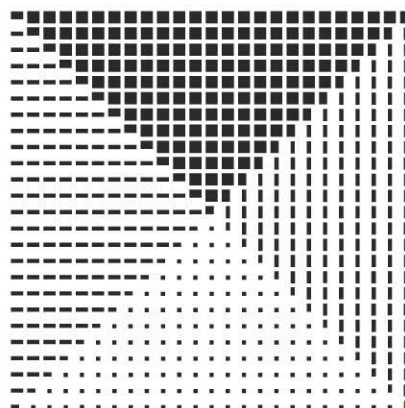
Dit kunstwerk is opgebouwd uit 625 zwarte vormen: vierkanten en andere rechthoeken, die met een bepaalde regelmaat verdeeld zijn over een wit vlak. Zie figuur 15.22.

Elk van de 625 zwarte vormen is gemaakt op basis van een 3×3 -rooster van 9 vierkanten.

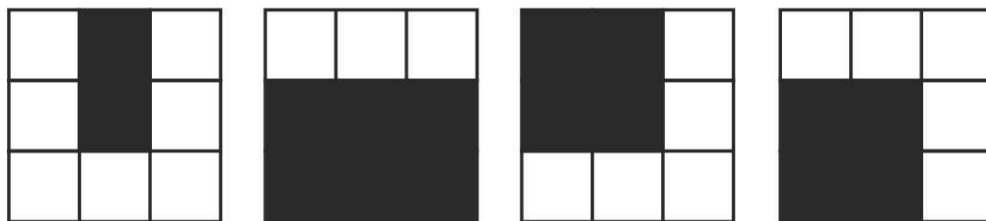
Hierbij gelden de volgende voorwaarden:

- het middelste vierkant in zo’n 3×3 -rooster is altijd zwart;
- een vorm bestaat uit 1, 2, 3, 4, 6 of 9 zwarte vierkanten;
- een vorm is een rechthoek (en kan dus ook een vierkant zijn).

Zie figuur 15.23 voor vier voorbeelden.



figuur 15.22



figuur 15.23

De twee vierkante vormen in figuur 15.23 worden als verschillende vormen opgevat, omdat ze op verschillende plaatsen in het 3×3 -rooster staan.

Bereken hoeveel verschillende vormen de kunstenaar op deze manier kan maken.

18 2019-I

Het totaal aantal aardbevingen A_n in Groningen is te beschrijven door een rij die bij een exponentieel verband hoort. Hierbij is A_n het aantal aardbevingen tot en met maand n , met $n = 0$ in april 1994.

Er geldt $A_0 = 12$ en $A_{220} = 200$.

Stel de recursieve formule voor A_n op.

19 2018-I

In figuur 15.24 zie je een model van een kunstwerk van Elt de Boer: een toren van regelmatige achthoeken op een voet. Het bovenste deel van de voet is de helft van een regelmatig achthoek met daaronder een kubus waarvan de ribbe dezelfde lengte heeft als die van het halve achthoek. Daarboven zie je negen hele achthoeken die naar boven toe steeds kleiner worden.

De kunstenaar maakt de voet zwart en van de 9 achthoeken maakt hij 3 achthoeken rood, 3 oranje en 3 geel.

a Bereken op hoeveel manieren de kunstenaar dit kan doen.

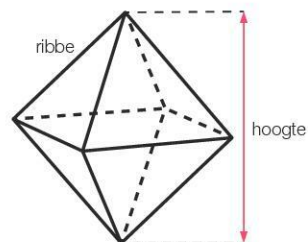


figuur 15.24

Een regelmatig achthoek, zie figuur 15.25, heeft 12 ribben die allemaal even lang zijn. De ribbe van de voet is 20 cm en die van het bovenste achthoek is 4 cm.

De achthoeken worden naar boven toe steeds kleiner. De kunstenaar kan ervoor kiezen de ribbe van de achthoeken steeds met een vaste factor r te vermenigvuldigen. Afgerond op twee decimalen geldt dan $r = 0,84$.

b Bereken de waarde van r in drie decimalen.



figuur 15.25

De kunstenaar had er ook voor kunnen kiezen om de ribbe met een vaste lengte te laten afnemen. De lengten van de ribben van de opeenvolgende achthoeken vormen dan een rij die hoort bij een lineair verband. Deze rij kan benaderd worden met de directe formule $u_n = 20 - 1,78n$. Hierin is n het nummer van het achthoek. In de formule is u_n de lengte in cm van de ribbe van het n -de achthoek. Bij $n = 0$ hoort de lengte van de ribbe van de voet.

c Laat zien hoe de formule $u_n = 20 - 1,78n$ afgeleid kan worden uit de gegevens.

De twee methoden zullen in het algemeen verschillende lengtes geven voor de ribben van de achthoeken uit de serie.

d Onderzoek bij welk achthoek uit de serie dit verschil maximaal is en geef ook aan hoe groot dat verschil is. Rond je antwoord af op gehele millimeters.

20 2017-I

Indiase wiskundigen hebben in de loop van de geschiedenis een grote bijdrage geleverd aan de wiskunde. Ze hebben onder andere onderzocht hoe je het getal π kunt benaderen. In de zesde eeuw schreef de grote Indiase wiskundige Aryabhata het volgende:

Tel vier bij honderd op, vermenigvuldig vervolgens met acht en tel er dan tweeënzestigduizend bij op. Het resultaat is bij benadering de omtrek van een cirkel met diameter twintigduizend.

- a** Bereken, gebruikmakend van de formule *omtrek cirkel* = $\pi \cdot \text{diameter cirkel}$, in vier decimalen welke waarde hieruit volgt voor het getal π .

Het is niet duidelijk hoe Aryabhata aan deze benadering gekomen is.

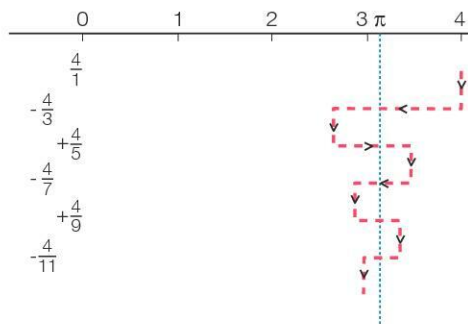
In de 14e eeuw ontdekte de Indiase wiskundige Madhava een manier om de waarde van π te benaderen met behulp van een rij.

Hij begon met 4. Dat is groter dan π . Hij telde hier $-\frac{4}{3}$ bij op. Het resultaat $2\frac{2}{3}$ is nu kleiner dan π . Vervolgens telde hij bij het antwoord $\frac{4}{5}$ op. Het resultaat $3\frac{7}{15}$ is nu weer groter dan π .

Hij ging zo verder, dus:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots$$

Na elke nieuwe term die hij erbij optelde, kwam hij steeds dichterbij het getal π . Zie de figuur.



figuur 15.26

Madhava kon bewijzen dat hij op deze manier inderdaad steeds dichterbij de werkelijke waarde van π kwam. Nadeel van deze manier is echter wel dat je veel termen nodig hebt voor een redelijke benadering van π . Het resultaat na drie termen: $3\frac{7}{15}$ verschilt nog behoorlijk van π .

- b** Bereken hoeveel termen je minimaal nodig hebt om te zorgen dat het verschil met π kleiner is dan 0,1.

Madhava telde voor zijn benadering van π de termen van een rij bij elkaar op, namelijk de termen van de volgende rij: $\frac{4}{1}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{7}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{11}, \dots$. Hieronder staan twee mogelijke formules voor deze rij. Van deze formules is er één juist en de andere niet.

I $u_n = \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{2n-1}$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

II $u_n = \frac{(-4)^{n-1}}{2n-1}$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

- c** Onderzoek welke van deze twee formules de juiste is.

Madhava gaf ook een andere rij, die sneller tot een goede benadering van π leidde. De formule voor deze rij is $v_n = \sqrt{12} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n} \right)$ met

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Hiermee kon hij op soortgelijke wijze als boven een benadering van π vinden die steeds nauwkeuriger wordt naarmate meer termen gebruikt worden.

- d** Geef een benadering van π door de eerste drie termen van deze rij bij elkaar op te tellen en bereken het verschil met de werkelijke waarde van π in twee decimalen.

21 2018-II

Het Amerikaanse bedrijf Tasty Layers heeft zich gespecialiseerd in het maken van heel hoge en grote torens van cupcakes. Voor grote feesten en bruiloften maakt Tasty Layers bouwwerken met daarop honderden cupcakes.

Op de foto zie je een voorbeeld van zo'n bouwwerk. De toren op de foto heeft 9 lagen.

Om uit te rekenen hoeveel cupcakes er (ongeveer) op deze toren staan gebruiken we het volgende model:

$$\begin{cases} A_n = 1,4 \cdot A_{n-1} \\ A_1 = 6 \end{cases}$$

In deze formule is A_n een benadering van het aantal cupcakes op de n^e laag, met $n = 1$ voor de bovenste laag.

Omdat er natuurlijk op iedere laag een geheel aantal cupcakes staat, moeten we de waarden van A_n op de gebruikelijke manier op helen afronden. Omdat $A_2 = 8,4$ komen er 8 cupcakes op de tweede laag, en omdat $A_3 = 1,4 \cdot 8,4 = 11,76$ komen er dus 12 cupcakes op de derde laag. Enzovoort.

Zo krijg je voor de bovenste vijf lagen 6, 8, 12, 16 en 23 cupcakes, dus in totaal 65 cupcakes.

In werkelijkheid staan er 300 cupcakes op de toren.

- a** Bereken hoeveel cupcakes het model afwijkt van de werkelijkheid.

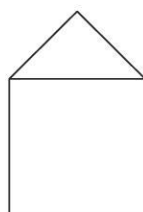
Voor een groot bedrijfsfeest krijgt Tasty Layers de opdracht een cupcaketoren te maken met daarop 1000 cupcakes. Het bedrijf gebruikt voor deze opdracht een toren met op de bovenste laag 6 cupcakes en op elke volgende laag 18 cupcakes meer. We nemen weer $n = 1$ voor de bovenste laag.

- b** Stel een formule op voor het aantal cupcakes op de n^e laag en bereken daarmee vanaf welke laag er meer dan 160 cupcakes op een laag staan.

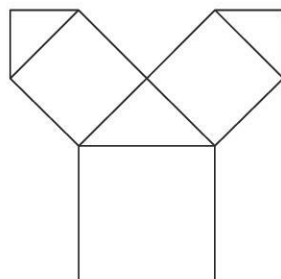


22 2019-II

Veel mensen hebben weleens de boom van Pythagoras gezien. Deze boom bestaat uit vierkanten en gelijkbenige rechthoekige driehoeken. In figuur 15.27 staat het begin van zo'n boom en in figuur 15.28 een door Liv verder uitgewerkte tekening van die boom.

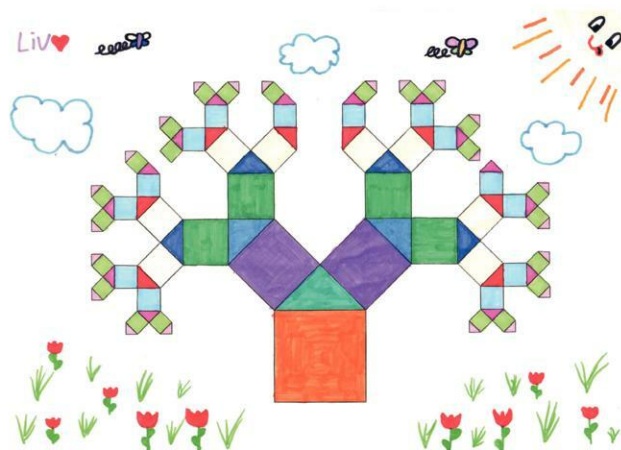


stap 0



stap 1

figuur 15.27



figuur 15.28

Als we de oppervlakte van een vierkant a^2 noemen, dan is de oppervlakte van het vierkant in de volgende stap $\frac{1}{5}a^2$.

De lengtes van de zijden van de opeenvolgende vierkanten vormen een rij waarin elk volgend getal met een vaste factor vermenigvuldigd wordt. Fleur gaat een boom van Pythagoras tekenen. Haar tekenpapier is groot genoeg voor heel veel stappen. Ze begint met een vierkant van 13 cm bij 13 cm. Ze kan geen vierkantje tekenen met een zijde die kleiner dan 1 mm is.

a Bereken na welke stap Fleur stopt met tekenen.

Bij het tekenen van een boom van Pythagoras wordt het aantal nieuwe vierkanten A bij elke volgende stap verdubbeld. Vandaar dat geldt:

$A_n = 2^n$ met $A_0 = 1$ waarbij n het stapnummer is.

Om te bepalen wat het totale aantal getekende vierkantjes tot en met een bepaalde stap n is, kun je een somformule S_n gebruiken.

Als je de getallen uit de rij $b, br, br^2, br^3, \dots, br^n$ op wilt tellen, geldt de

somformule die hoort bij een exponentieel verband: $S_n = \frac{b(1 - r^{n+1})}{1 - r}$.

b Bereken bij welke stap het totale aantal vierkantjes voor het eerst meer dan 2000 is.

15.3 Werken met formules en grafieken

- 23 a** Gegeven is de formule $F = G \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{1,3}$.

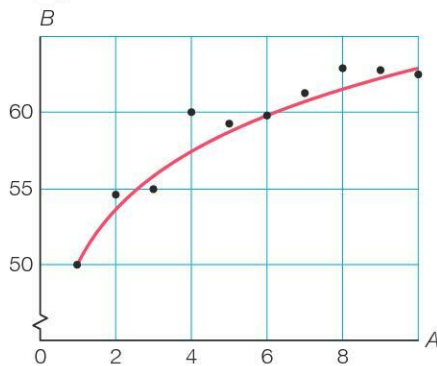
Neem $G = 500$ en $x = 2y$ en bereken F . Rond af op gehele.

- b** In de figuur hiernaast zijn een aantal metingen als punten uitgezet. Verder is een grafiek getekend die zo goed mogelijk bij de punten past. De formule van deze grafiek is $B = 50 \cdot A^{0,1}$. De meting die bij $A = 4$ hoort, ligt boven de grafiek.

Bereken hoeveel procent de meetwaarde bij $A = 4$ boven de waarde van B ligt die je met de formule berekent.

- c** Herleid de formule

$P = (4x - 3 + 3y - 4) \cdot 5 + (15 - 2x)(10 - y)$
tot de vorm $P = axy + b$.



figuur 15.29

- d** Gegeven is de formule $H = \frac{p+10}{q^3}$ met $p > 0$ en $q > 0$.

Beredeneer of H groter of kleiner wordt als p niet verandert en q groter wordt.

- e** Gegeven is de formule $S = \frac{12g}{l^2}$. Hierin is g het gewicht in

Amerikaanse ponden (pounds) en l de lengte in feet.

De formule is te schrijven in de vorm $S = c \cdot \frac{G}{L^2}$ met G in kg en L in m.

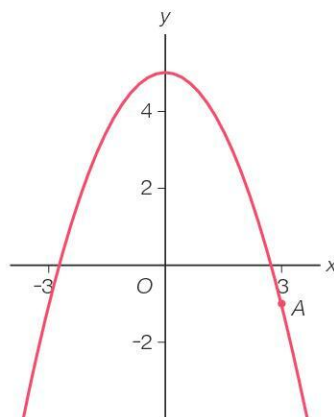
Bereken de waarde van c in deze formule. Rond af op twee decimalen. Gebruik dat 1 pound = 0,453 kg en 1 foot = 30,48 cm.

- f** Gegeven is de formule $y = \frac{50x + 1600}{0,3x + 40}$ met $x > 0$.

De grafiek van y is stijgend. Verder is gegeven dat de grafiek van y voortdurend toenemend stijgend is of voortdurend afnemend stijgend.

Onderzoek met berekeningen of de grafiek van y toenemend stijgend of afnemend stijgend is.

- g** In de figuur hiernaast zie je een parabool met top $(0, 5)$ die door het punt $A(3, -1)$ gaat. De formule die bij de parabool hoort, is van de vorm $y = ax^2 + b$. Bepaal de niet-afgeronde waarden van a en b .



figuur 15.30

- h** De parabool $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ snijdt de x -as in de punten A en B . De parabool y_2 ontstaat door de parabool y_1 over een afstand 3 omhoog te verschuiven. De parabool y_2 snijdt de lijn $y = -3$ in de punten C en D . Het lijnstuk CD is langer dan het lijnstuk AB . Bereken hoeveel keer zo lang. Rond af op twee decimalen.

Formules herleiden

De formule $y = 8 \cdot \frac{2x-3}{4}$ is te herleiden tot de vorm $y = ax + b$.

Denk aan de haakjes.

$$y = 8 \cdot \frac{2x-3}{4} = \frac{8}{4}(2x-3) = 2(2x-3) = 4x-6$$

Gebruik $A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C}$.

Haakjes wegwerken

$$a(b+c) = ab+ac$$

$$(a+b)c = ac+bc$$

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

Dus $a = 4$ en $b = -6$.

De formule $y = 24 + \frac{2p+5}{1,5} \cdot 18$ is te herleiden tot de vorm $y = ap + b$.

$$\begin{aligned} y &= 24 + \frac{2p+5}{1,5} \cdot 18 \text{ geeft } y = 24 + \frac{18}{1,5} \cdot (2p+5) \\ y &= 24 + 12(2p+5) \\ y &= 24 + 24p + 60 \\ y &= 24p + 84 \end{aligned}$$

Dus $a = 24$ en $b = 84$.

De formule $A = 5 + \frac{3}{T}$ is te herleiden tot de vorm $A = \frac{aT+b}{T}$.

$$A = 5 + \frac{3}{T} = \frac{5}{1} + \frac{3}{T} = \frac{5T}{T} + \frac{3}{T} = \frac{5T+3}{T}$$

Bij $T = \frac{x^2-x-8}{2x}$ kun je $2x$ uitdelen.

$$\text{Je krijgt } T = \frac{x^2-x-8}{2x} = \frac{x^2}{2x} - \frac{x}{2x} - \frac{8}{2x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{4}{x}.$$

Bij het herleiden van wortelformules gebruik je de regels

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \text{ en } \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

Zo kun je $y = \sqrt{25x}$ en $y = \sqrt{\frac{3x}{16}}$ herleiden tot de vorm $y = a\sqrt{x}$.

$$y = \sqrt{25x} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{x} = 5\sqrt{x}, \text{ dus } y = 5\sqrt{x}.$$

$$y = \sqrt{\frac{3x}{16}} = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{x} \approx 0,433\sqrt{x}, \text{ dus } y = 0,433\sqrt{x}.$$

Vrijmaken

Bij de formule $2a - 5b = 16$ kun je b als volgt vrijmaken.

$$2a - 5b = 16 \text{ geeft } -5b = -2a + 16$$

$$b = \frac{-2}{-5}a + \frac{16}{-5}$$

$$b = \frac{2}{5}a - 3\frac{1}{5}$$

Hiermee is b uitgedrukt in a .

De formule $A = 200\sqrt{\frac{B}{6}}$ is te herleiden tot de vorm $B = cA^2$.

Dat gaat als volgt.

$$A = 200\sqrt{\frac{B}{6}} \text{ geeft } \sqrt{\frac{B}{6}} = 0,005A \quad \text{Kwadrateren.}$$

$$\frac{B}{6} = 2,5 \cdot 10^{-5}A^2$$

$$B = 1,5 \cdot 10^{-4}A^2$$

$$\text{Dus } c = 1,5 \cdot 10^{-4}.$$

Bij de formule $T = 3\sqrt{p-4}$ maak je p als volgt vrij.

$$3\sqrt{p-4} = T \text{ geeft } \sqrt{p-4} = \frac{1}{3}T$$

$$p-4 = \left(\frac{1}{3}T\right)^2 \quad \left(\frac{1}{3}T\right)^2 = \frac{1}{3}T \cdot \frac{1}{3}T = \frac{1}{9}T^2$$

$$p = \frac{1}{9}T^2 + 4$$

Met kruislings vermenigvuldigen is p vrij te maken bij de

formule $\frac{2p-3}{q} = \frac{q}{2}$. Dat gaat als volgt.

$$\frac{2p-3}{q} = \frac{q}{2} \text{ geeft } 2(2p-3) = q \cdot q$$

$$4p-6 = q^2$$

$$4p = q^2 + 6$$

$$p = \frac{1}{4}q^2 + 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ geeft } AD = BC$$

Bij de formule $P = 50 + \frac{800}{Q}$ maak je als volgt Q vrij.

$$P = 50 + \frac{800}{Q} \text{ geeft } \frac{800}{Q} = P - 50$$

$$Q = \frac{800}{P - 50}$$

$$\frac{A}{B} = C \text{ geeft } B = \frac{A}{C}$$

Bij de formule $y = 5x^{1,8}$ maak je x als volgt vrij.

$$5x^{1,8} = y \text{ geeft } x^{1,8} = \frac{1}{5}y, \text{ dus } x = \left(\frac{1}{5}y\right)^{\frac{1}{1,8}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{1,8}} \cdot (y)^{\frac{1}{1,8}} \approx 0,41y^{0,56}.$$

Neem je $x = 5$ en $V = 20$ in de formule $V = x \cdot \frac{3-p}{2y} + 12$, dan kun je y als volgt uitdrukken in p .

$$\left. \begin{array}{l} V = x \cdot \frac{3-p}{2y} + 12 \\ x = 5 \text{ en } V = 20 \end{array} \right\} 5 \cdot \frac{3-p}{2y} + 12 = 20$$

$$\frac{5(3-p)}{2y} = 8$$

$$5(3-p) = 16y$$

$$16y = 15 - 5p$$

$$y = \frac{15}{16} - \frac{5}{16}p$$

$$y = -\frac{5}{16}p + \frac{15}{16}$$

Met het uitdrukken van y in p heb je een formule van de vorm $y = ap + b$ gekregen. Hierin is $a = -\frac{5}{16}$ en $b = \frac{15}{16}$.

Bij de formule $A = \frac{2b-3}{b+4}$ maak je als volgt b vrij.

$$A = \frac{2b-3}{b+4} \text{ geeft } \frac{2b-3}{b+4} = A$$

$$2b-3 = A(b+4)$$

$$2b-3 = Ab + 4A$$

$$2b - Ab = 4A + 3$$

$$b(2-A) = 4A + 3$$

$$b = \frac{4A+3}{2-A}$$

$$\frac{A}{B} = C \text{ geeft } A = BC$$

Formules combineren

De formules $A = 2t + 3p + 2$ en $5t + p = 20$ zijn te combineren tot de vorm $A = at + b$. Daartoe maak je eerst p vrij bij $5t + p = 20$.

Je krijgt $p = -5t + 20$.

$$\left. \begin{array}{l} A = 2t + 3p + 2 \\ p = -5t + 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 2t + 3(-5t + 20) + 2 \\ A = 2t - 15t + 60 + 2 \\ A = -13t + 62 \end{array}$$

Dus $a = -13$ en $b = 62$.

De formules $A = 2t^2 + 5$ en $3p - t = 1$ zijn te combineren tot de vorm $A = ap^2 + bp + c$. Daartoe maak je eerst t vrij bij $3p - t = 1$.

Je krijgt $-t = -3p + 1$, dus $t = 3p - 1$.

$$\left. \begin{array}{l} A = 2t^2 + 5 \\ t = 3p - 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 2(3p - 1)^2 + 5 \\ A = 2(9p^2 - 6p + 1) + 5 \\ A = 18p^2 - 12p + 2 + 5 \\ A = 18p^2 - 12p + 7 \end{array}$$

Dus $a = 18$, $b = -12$ en $c = 7$.

Merkwaardige producten

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

De formules $N = 20\sqrt{9 - \frac{p}{12}}$ en $p = 60 - 8t$ zijn te combineren.

$$\text{Je krijgt } N = 20\sqrt{9 - \frac{60 - 8t}{12}} = 20\sqrt{9 - (5 - \frac{2}{3}t)} = 20\sqrt{9 - 5 + \frac{2}{3}t}.$$

$$\text{Dus } N = 20\sqrt{\frac{2}{3}t + 4}.$$

$$\frac{60 - 8t}{12} = \frac{60}{12} - \frac{8t}{12} = 5 - \frac{8}{12}t = 5 - \frac{2}{3}t$$

Variabelen in formules

De formule $y = ax^2 + bx + c$ met a niet gelijk aan nul hoort bij een parabool.

Is gegeven dat $a = 0,4$ en $c = -2,6$, dan krijg je $y = 0,4x^2 + bx - 2,6$.

Is bovendien gegeven dat de parabool door het punt $(3, 7)$ gaat, dan kun je als volgt de waarde van b berekenen. Invullen van $x = 3$ en $y = 7$ in de formule $y = 0,4x^2 + bx - 2,6$ geeft $0,4 \cdot 3^2 + b \cdot 3 - 2,6 = 7$

$$3,6 + 3b - 2,6 = 7$$

$$3b = 6$$

$$b = 2$$

Dus de formule is $y = 0,4x^2 + 2x - 2,6$.

In de figuur hiernaast zie je een parabool waarvan de top het punt $T(0, -3)$ is en die door het punt $A(4, 1)$ gaat. De formule die bij deze parabool hoort, is van de vorm $y = ax^2 + b$.

Invullen van $x = 0$ en $y = -3$ geeft $a \cdot 0^2 + b = -3$, dus $b = -3$.

Invullen van $x = 4$ en $y = 1$ in $y = ax^2 - 3$ geeft

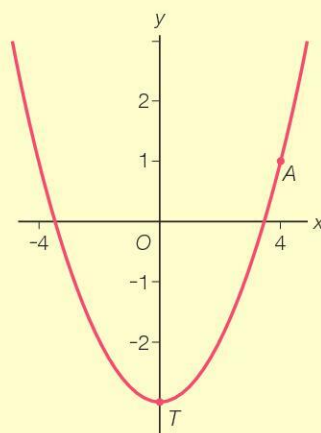
$$a \cdot 4^2 - 3 = 1$$

$$16a - 3 = 1$$

$$16a = 4$$

$$a = 0,25$$

Dus de formule is $y = 0,25x^2 - 3$.



figuur 15.31

Eenheden in formules omzetten

In de formule $B = \frac{6g}{l^{1,9}}$ is g het gewicht in grammen en l de lengte in cm.

De formule is te schrijven in de vorm $B = c \cdot \frac{G}{L^{1,9}}$ met G in kg en L in m.

Er geldt $g = 1000G$ (want bij $G = 1$ hoort $g = 1000$)

en $l = 100L$ (want bij $L = 1$ hoort $l = 100$).

Invullen in de formule geeft

$$B = \frac{6 \cdot 1000G}{(100L)^{1,9}} = \frac{6000G}{100^{1,9} \cdot L^{1,9}} = \frac{6000}{100^{1,9}} \cdot \frac{G}{L^{1,9}} \approx 0,95 \cdot \frac{G}{L^{1,9}}.$$

Dus de waarde van c is ongeveer 0,95 en de formule is $B = 0,95 \cdot \frac{G}{L^{1,9}}$.

De formule $B = 0,95 \cdot \frac{G}{L^{1,9}}$ is om te zetten naar een formule van de vorm

$B = a \cdot \frac{M}{H^{1,9}}$ waarin M het gewicht is in Engelse ponden (lb) en H de lengte in feet.

Gegeven is dat $1 \text{ lb} = 453,6 \text{ gram}$ en $1 \text{ foot} = 30,48 \text{ cm}$.

Omdat je moet omrekenen van kg naar lb, gebruik je dat 1 lb gelijk is aan $0,4536 \text{ kg}$.

Er geldt dus dat $G = 0,4536M$ (want bij $M = 1$ hoort $G = 0,4536$).

Verder geldt $L = 0,3048H$ (want bij $H = 1$ hoort $L = 0,3048$).

Invullen in de formule geeft

$$B = 0,95 \cdot \frac{0,4536M}{(0,3048H)^{1,9}} = 0,95 \cdot \frac{0,4536}{0,3048^{1,9}} \cdot \frac{M}{H^{1,9}} \approx 4,1 \cdot \frac{M}{H^{1,9}}.$$

Dus de waarde van a is ongeveer 4,1 en de formule is $B = 4,1 \cdot \frac{M}{H^{1,9}}$.

Zou bij de vorige omzetting zijn gegeven dat $1 \text{ kg} = 2,20 \text{ lb}$ en

$1 \text{ m} = 3,28 \text{ feet}$, dan gebruik je dat $M = 2,20G$ oftewel $G = \frac{1}{2,20}M$ en

$H = 3,28L$ oftewel $L = \frac{1}{3,28}H$.

Redeneren met formules

Bij het redeneren of bij een formule een stijgende of dalende grafiek hoort, gebruiken we

- als x toeneemt, dan neemt ax toe als $a > 0$
- als x toeneemt, dan neemt ax af als $a < 0$
- als x toeneemt, dan neemt x^n toe als $n > 0$
- als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe.

Bij de formule $N = 250 - \frac{30}{2t+1}$ beredeneer je als volgt dat de grafiek van N stijgend is voor $t > 0$.

Als t toeneemt, dan neemt $2t$ toe, dus $2t + 1$ neemt toe, dus $\frac{30}{2t+1}$ neemt af en $250 - \frac{30}{2t+1}$ neemt toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

Bij de formule $N = 250 - \frac{30}{2t+1}$ beredeneer je als volgt wat de grenswaarde is.

Als t heel groot wordt, dan wordt $2t$ heel groot, dus dan wordt $2t + 1$ heel groot en dan nadert $\frac{30}{2t+1}$ tot 0. Dus dan wordt

$$250 - \frac{30}{2t+1} \approx 250 - 0 = 250.$$

Dus de grenswaarde is 250.

Bij de formule $G = \frac{10}{P^3+2} + 5$ beredeneer je als volgt dat de grafiek van G dalend is voor $P > 0$.

Als P toeneemt, dan neemt P^3 toe, dus $P^3 + 2$ neemt toe en $\frac{10}{P^3+2}$ neemt af, dus dan neemt $\frac{10}{P^3+2} + 5$ ook af.

Dus de grafiek van G is dalend.

Bij de formule $G = \frac{10}{P^3+2} + 5$ beredeneer je als volgt wat de grenswaarde is.

Als P heel groot wordt, dan wordt P^3 heel groot, dus dan wordt

$P^3 + 2$ heel groot en dan nadert $\frac{10}{P^3+2}$ tot 0. Dus dan wordt

$$\frac{10}{P^3+2} + 5 \approx 0 + 5 = 5.$$

Dus de grenswaarde is 5.

24 2017-I

De marathonloper Pete Riegel ontwikkelde een eenvoudige formule om te voorspellen welke tijd een hardloper nodig zou hebben om een bepaalde afstand af te leggen op basis van zijn tijden op eerder gelopen afstanden. De formule is $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{1,07}$. Hierin is T_1 is de tijd,

uitgedrukt in seconden, die gelopen is op de afstand d_1 en T_2 is de voorspelde tijd in seconden op de afstand d_2 . De formule is geldig voor afstanden vanaf 1500 meter tot en met 42 195 meter, de marathon. De formule is onafhankelijk van de gebruikte eenheden, dus d_1 en d_2 mogen bijvoorbeeld allebei in km worden ingevuld of allebei in m.

Harald loopt de 1500 meter in 4 minuten en 52 seconden.

- a** Bereken in minuten en seconden Haralds te verwachten tijd op de 10 000 meter.

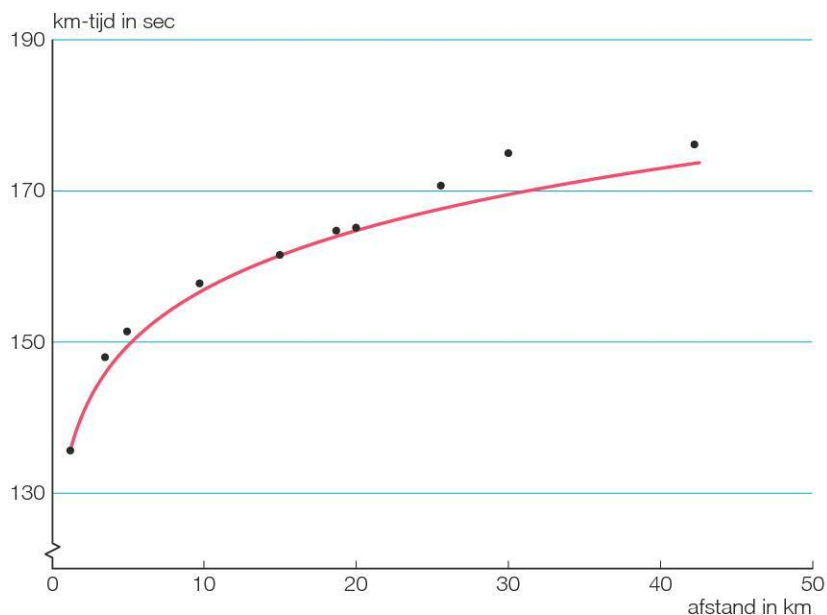
Het ligt voor de hand dat de gemiddelde snelheid lager wordt als de te lopen afstand groter wordt. Olaf loopt de 3000 meter in 8 minuten en 29 seconden. Dat is 509 seconden.

- b** Bereken met behulp van het bovenstaande en de formule van Riegel met hoeveel procent de gemiddelde snelheid van Olaf afneemt als de te lopen afstand verdubbelt.

Een andere maat voor de snelheid is de *kilometertijd* K , het aantal seconden dat een looper gemiddeld per kilometer nodig heeft. In

formulevorm: $K = \frac{T}{d}$. Hierbij is T de totale tijd in seconden en d de afstand in kilometers.

In de figuur hieronder zijn de kilometertijden weergegeven van de wereldrecords hardlopen zoals ze waren in november 2013.



figuur 15.32

De formule van de hier getekende grafiek die zo goed mogelijk bij de verschillende punten past, is van de vorm $K = a \cdot d^{0,07}$. Hierbij is K de kilometertijd in seconden en d de afstand in kilometers.

Het wereldrecord op de 1,5 km (1500 meter) is precies 3 minuten en 26 seconden. Het bijbehorende punt ligt op de grafiek. Op basis hiervan kan berekend worden dat a ongeveer 133 is.

c Bereken de waarde van a in twee decimalen.

De kilometertijd van het wereldrecord op de 30 km ligt boven de kromme.

d Bereken hoeveel procent de kilometertijd op deze afstand hoger is dan de formule voorspelt.

25 2019-I

Een goudplevier is een vogel die niet in Nederland broedt, maar tijdens zijn trektochten wel in Nederland te vinden is. Tijdens hun verblijf in Nederland bouwen de goudplevieren een reserve op voor de komende trektochten. Het *vetpercentage* van een vogel is de hoeveelheid lichaamsvet als percentage van het totale gewicht van de vogel.

Voor de goudplevier geldt $P_{\text{voorjaar}} = \frac{1600}{2,3 \cdot t + 198}$. Hierin is P_{voorjaar} het vetpercentage van de vogel in het voorjaar en t de tijd in dagen na het begin van de gewichtstoename.

a Beredeneer uitsluitend met behulp van de formule voor P_{voorjaar} , zonder getallen in te vullen of een schets te maken, of het vetpercentage in het voorjaar toeneemt of juist afneemt.

Voor het vetpercentage in het najaar gaan we uit van de formule

$P_{\text{najaar}} = \frac{2300 + 60t}{206 + 0,6t}$. Hierin is P_{najaar} het vetpercentage van de vogel in

het najaar en t de tijd in dagen na het begin van de gewichtstoename.

Als je de grafiek van P_{najaar} zou tekenen, zou je zien dat deze stijgt. Het is echter vrij moeilijk te zien of dit een toenemende of afnemende stijging is. Met berekeningen is dit wel te onderzoeken. Je mag er hierbij van uitgaan dat de grafiek of voortdurend toenemend stijgend is of voortdurend afnemend stijgend.

b Onderzoek of de grafiek van P_{najaar} toenemend stijgend of afnemend stijgend is.

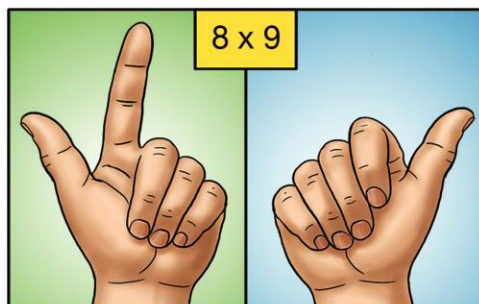
26 2018-I

In Rusland en Polen gebruikten boeren vroeger soms hun handen om twee getallen tussen 5 en 10 met elkaar te vermenigvuldigen.

De methode werkt als volgt:

Je wilt bijvoorbeeld 8 maal 9 uitrekenen.

- Steek aan beide handen vijf vingers op;
- $8 - 5 = 3$, buig aan de ene hand drie vingers om: zie de figuur;
- $9 - 5 = 4$, buig aan de andere hand vier vingers om;
- tel de omgebogen vingers op en vermenigvuldig het antwoord met 10, dus $(3 + 4) \cdot 10 = 70$;
- vermenigvuldig de opgestoken vingers, 2 op de ene hand en 1 op de andere hand, met elkaar: $2 \cdot 1 = 2$;
- tel nu de antwoorden van de vorige twee stappen bij elkaar op: $70 + 2 = 72$.



figuur 15.33

Bij deze methode hoef je alleen maar de tafels van vermenigvuldiging van de getallen van 1 tot en met 5 en van 10 uit het hoofd te kennen.

- a** Ga na of deze methode ook het goede antwoord oplevert bij de vermenigvuldiging 5 maal 5.

De methode is geldig voor alle gehele getallen tussen 5 en 10. Om dit aan te tonen noemen we de getallen die we met elkaar willen vermenigvuldigen x en y . Het aantal omgebogen vingers op de linkerhand is nu $x - 5$. In het voorbeeld van de figuur: $8 - 5 = 3$. Omdat het aantal omgebogen en opgestoken vingers op één hand samen 5 is, is het aantal opgestoken vingers op de linkerhand in het voorbeeld $5 - (8 - 5) = 5 - 3 = 2$.

- b** Leg, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken, uit waarom als er $x - 5$ vingers aan de linkerhand omgebogen zijn het aantal opgestoken vingers op deze hand gelijk is aan $10 - x$.

Op dezelfde manier is het aantal opgestoken vingers op de rechterhand gelijk aan $10 - y$.

Uit deze methode van vermenigvuldigen op de handen volgt dat een uitkomst op de volgende manier berekend kan worden:

omgebogen vingers $\times$ 10 + *opgestoken vingers ene hand* $\times$ *opgestoken vingers andere hand*

Oftewel: $(x - 5 + y - 5) \cdot 10 + (10 - x)(10 - y)$.

- c** Werk de haakjes weg en laat door verder herleiden zien dat dit gelijk is aan $x \cdot y$.

27 2018-II

Sommige mensen hebben een schildpad als huisdier. Bepaalde soorten houden onder natuurlijke omstandigheden een winterslaap. De eigenaar kan ervoor kiezen om zijn schildpad ook in winterslaap te laten gaan, omdat hij anders de hele winter extra licht en warmte moet geven aan zijn huisdier. Een schildpad moet een gezond gewicht hebben bij het begin van zijn winterslaap, anders is er een kans dat hij het niet overleeft. Om vast te stellen of de schildpad een gezond gewicht heeft, wordt vaak de *Jackson Ratio* gebruikt.

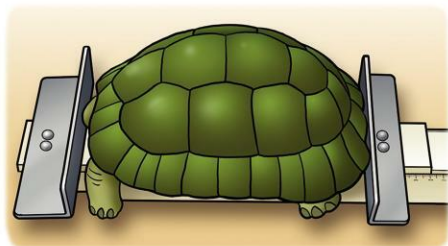
De Jackson Ratio R wordt berekend met de formule $R = \frac{G}{L^3}$. Hierin is G het gewicht van de schildpad in gram en L de lengte van het schild van de schildpad in cm.

Voor de Griekse landschildpad geldt de volgende vuistregel: een schildpad kan veilig aan een winterslaap beginnen als zijn Jackson Ratio tussen 0,18 en 0,22 ligt.

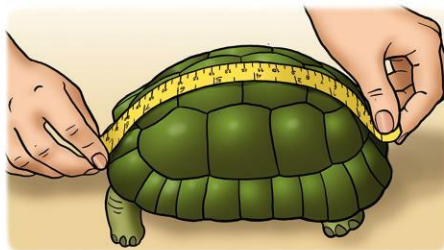
Jesse heeft een Griekse landschildpad met een schildlengte van 15 cm en wil hem een winterslaap laten houden.

- a** Bereken in hele grammen nauwkeurig tussen welke waarden zijn gewicht dan mag liggen volgens de vuistregel.

De lengte van het schild moet recht gemeten worden, bijvoorbeeld door de schildpad met ingetrokken kop tussen een schuifmaat te zetten (zie figuur 15.34). Veronderstel dat iemand toch de lengte over het schild heen meet (zie figuur 15.35).



figuur 15.34



figuur 15.35

- b** Beredeneer of een schildpad door op die manier te meten een grotere of een kleinere Jackson Ratio krijgt dan hij in werkelijkheid heeft.

Op een Engelse website staat het volgende: als je het gewicht meet in Engelse ponden (lbs) en de schildlengte in inches, kun je de Jackson Ratio berekenen met de formule $R = c \cdot \frac{W}{l^3}$. Hierin is W het gewicht in Engelse ponden en l de schildlengte in inches.

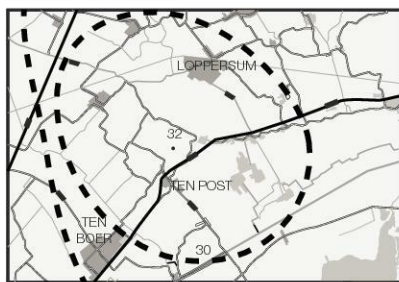
1 Engels pond (lb) $\approx$ 454 gram en 1 inch = 2,54 cm.

De Jackson Ratio moet dan ook weer dezelfde waarde opleveren.

- c** Bereken de waarde van c in deze formule. Rond je antwoord af op één decimaal.

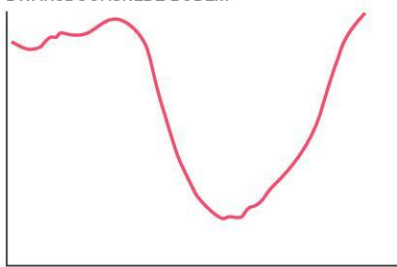
Bodemdaling kan ontstaan door natuurlijke processen maar ook door menselijk handelen. Bij de gaswinning uit het Groningen-gasveld is er sprake van bodemdaling veroorzaakt door menselijk handelen. In deze opgave gaan we uit van de gegevens zoals die tot en met 2017 bekend waren. We nemen verder aan dat ontwikkelingen die tot op dat moment geconstateerd zijn, zich in de periode daarna op dezelfde wijze voortzetten. Het gebied waar sprake is van bodemdaling wordt het *dalingsgebied* genoemd. In het midden van het dalingsgebied, nabij Ten Post, is de bodemdaling het grootst. Tot 2013 was de bodem daar al 32 centimeter gedaald. De bodemdaling is niet overal even groot. Het gebied waar de bodem ten minste 30 centimeter is gedaald, is bij benadering cirkelvormig. Zie figuur 15.36. In figuur 15.37 is bovendien de dwarsdoorsnede van de bodem door het laagste punt geschetst. Rondom het laagste punt heeft deze dwarsdoorsnede bij benadering de vorm van de grafiek van een kwadratisch verband, met andere woorden de vorm van een *parabool*.

BODEMDALING IN CM



figuur 15.36

DWARSDOORSNEDE BODEM

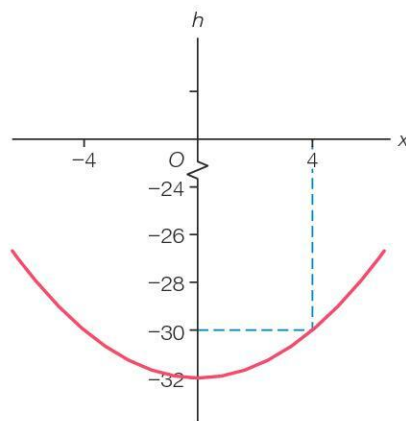


figuur 15.37

We nemen nu aan dat het gebied waar de bodem ten minste 30 centimeter is gedaald cirkelvormig is. Verder nemen we aan dat de dwarsdoorsnede van de bodem rondom het midden van het dalingsgebied de vorm van een parabool heeft. De top van deze parabool komt overeen met het laagste punt van het dalingsgebied.

In 2013 was de straal van het cirkelvormige gebied gelijk aan 4 km en in het laagste punt was de bodem dus 32 centimeter gedaald. In figuur 15.38 is de parabool geschetst bij het model van de dwarsdoorsnede dat bij deze gegevens hoort. De parabool bij het model voor 2013 kan beschreven worden met een formule van de vorm $h = ax^2 + b$. Hierin is x de afstand tot het midden van het dalingsgebied in kilometers en h is de daling van de bodem in centimeters.

a Bepaal de niet-afgeronde waarden van a en b .



figuur 15.38

Bepalen is een examenwoord. Zie bladzijde 246.

Rondom Ten Post blijft de bodem dalen. Daardoor wordt het dalingsgebied ook groter. Men voorspelt dat het gebied rondom Ten Post tot 2080 flink zal blijven dalen. Ook voor 2080 nemen we aan dat het gebied waar de bodem ten minste 30 centimeter is gedaald bij benadering cirkelvormig is. We nemen ook weer aan dat de dwarsdoorsnede van de bodem rondom het midden van het dalingsgebied de vorm van een parabool heeft waarvan de top overeenkomt met het laagste punt van het dalingsgebied. Voor 2080 wordt de parabool beschreven door de formule $h = 0,084x^2 - 47$. Hierin is x weer de afstand tot het midden van het dalingsgebied in kilometers en h is weer de daling van de bodem in centimeters.

Volgens de voorspellingen zal de oppervlakte van het gebied met een daling van ten minste 30 cm in 2080 een stuk groter zijn dan in 2013.

b Bereken hoeveel keer zo groot. Geef je antwoord als geheel getal.

15.4 Formules met exponenten en logaritmen

- 29 a** De prijs van een artikel is in 15 jaar verdubbeld. Neem aan dat de prijs in deze periode exponentieel is toegenomen.

Bereken het jaarlijkse groeipercentage dat hierbij hoort.

- b** Bij een beginhoeveelheid van 600 en een groeipercentage van 4,5% per jaar heb je na 10 jaar evenveel als na 12 jaar bij een beginhoeveelheid van 500 en een groeipercentage van $x\%$ per jaar. Bereken x .

- c** [WERKBLAD] Bij de formule $B = 5 \cdot A^{0,8}$ hoort de rechte lijn in de figuur hiernaast. In de figuur hebben beide assen een logaritmische schaalverdeling. Ook is het punt P getekend.

Bereken hoeveel procent de waarde van B die bij het punt P hoort, groter is dan de waarde van B die je kunt berekenen met de formule.

- d** [WERKBLAD] Zie nogmaals figuur 15.39 met de grafiek die bij de formule $B = 5 \cdot A^{0,8}$ hoort.

Onderzoek met behulp van de figuur op het werkblad welke van de punten $C(0,08; 0,6)$, $D(0,6; 3)$, $E(3, 20)$ en $F(9, 25)$ onder de lijn liggen en teken deze punten op het werkblad.

- e** Gegeven is de formule $B = 5 \cdot A^{0,8}$.

Bereken hoeveel keer zo groot B wordt, als A twee keer zo groot wordt. Rond af op twee decimalen.

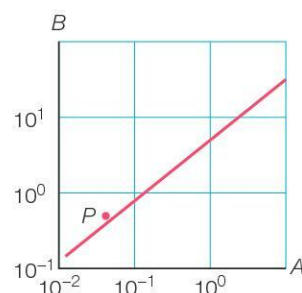
- f** Tussen F en p bestaat een exponentieel verband. Voor $p = 28$ is de waarde van F de helft van de waarde van F die bij $p = 10$ hoort. Bereken de groeifactor die bij dit exponentiële verband hoort. Rond af op drie decimalen.

- g** De figuur hiernaast heeft op de verticale as een logaritmische schaalverdeling. Bereken met behulp van deze figuur de waarde van N die bij $t = 5$ hoort. Rond af op honderdtallen.

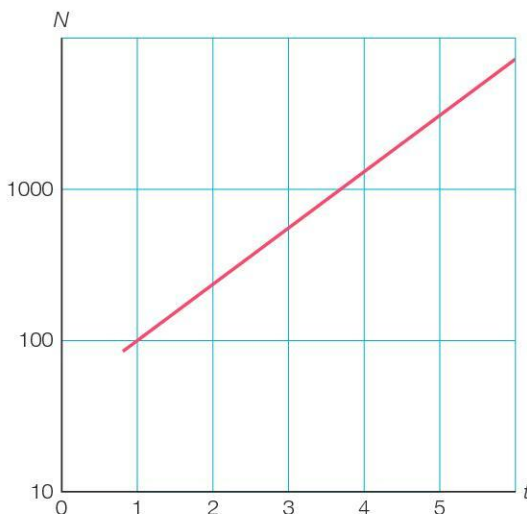
- h** De lijn in de figuur hiernaast hoort bij exponentiële groei. Neem aan dat deze groei zich ook na $t = 6$ voortzet.

Bereken N voor $t = 8$. Rond af op duizendtallen.

- i** Gegeven is de formule $F = a \cdot \log(k)$. Bij $k = 2,5$ hoort $F = 80$. Bereken a . Rond af op gehelen.



figuur 15.39



figuur 15.40

j Een hoeveelheid neemt in 21 dagen toe van 300 naar 1770. Als je aanneemt dat de toename lineair is, dan kun je bij deze gegevens een formule opstellen van de vorm $H_l = at + b$. Als je aanneemt dat de toename exponentieel verloopt, dan kun je een formule opstellen van de vorm $H_e = b \cdot g^t$. In beide formules is t de tijd in dagen. Stel deze formules op en onderzoek hiermee welk model het beste past als verder blijkt dat na 15 dagen de hoeveelheid 1100 is.

k Gegeven is de formule $R = 350 \cdot \log\left(\frac{p}{q}\right)$. Bij de verhouding $\frac{p}{q} = \frac{7}{4}$

krijg je een andere waarde voor R dan bij de verhouding $\frac{p}{q} = \frac{87}{50}$.

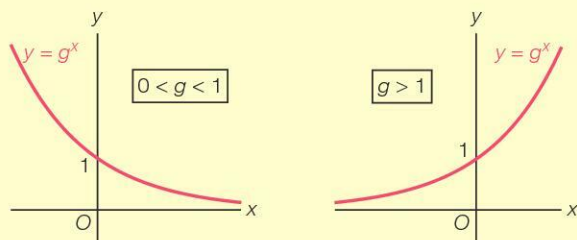
Bereken het verschil tussen deze twee R -waarden. Rond af op twee decimalen.

Exponentiële formules

De grafiek van $y = g^x$ is een standaardgrafiek.

We onderscheiden de situaties

$0 < g < 1$ en $g > 1$.



figuur 15.41

Rekenregels voor machten

De rekenregels voor machten zijn:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p \quad \frac{1}{a^p} = a^{-p} \quad \sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-1} &= \frac{1}{a} \\ a^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{a} \end{aligned}$$

Met deze rekenregels kun je formules omwerken.

Bij het schrijven van de formule $N = 60 \cdot 1,2^{3t-1}$ in

de vorm $N = b \cdot g^t$ krijg je

$$N = 60 \cdot 1,2^{3t-1} = 60 \cdot 1,2^{3t} \cdot 1,2^{-1} = 60 \cdot 1,2^{-1} \cdot (1,2^3)^t = 50 \cdot 1,728^t.$$

Dus $N = 50 \cdot 1,728^t$.

Bij het schrijven van de formule $K = 6000 \cdot (3p)^{0,4} \cdot (4p^2)^{-0,6}$ in de vorm

$K = ap^b$ krijg je

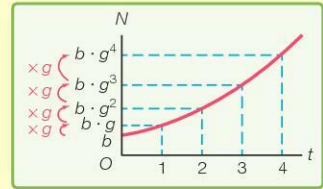
$$\begin{aligned} K &= 6000 \cdot (3p)^{0,4} \cdot (4p^2)^{-0,6} = 6000 \cdot 3^{0,4} \cdot p^{0,4} \cdot 4^{-0,6} \cdot p^{-1,2} \\ &= 6000 \cdot 3^{0,4} \cdot 4^{-0,6} \cdot p^{0,4} \cdot p^{-1,2} \approx 7265 \cdot p^{-0,8}, \text{ dus } K = 7265p^{-0,8}. \end{aligned}$$

Exponentiële groei

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd.

Bij exponentiële groei hoort de formule $N = b \cdot g^t$.

Hierbij is b de beginhoeveelheid en g de groeifactor per tijdseenheid.



Groeifactoren en groeipercentsages

Bij een toename van 12% per tijdseenheid hoort exponentiële groei met groeifactor 1,12. Dus neemt een hoeveelheid N jaarlijks met 12% toe en is de beginhoeveelheid 1250, dan hoort daarbij de formule

$$N = 1250 \cdot 1,12^t.$$

Is g de groeifactor per tijdseenheid, dan is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Is de groeifactor per dag 1,32, dan is de groeifactor per week gelijk aan

$$g_{\text{week}} = 1,32^7 \approx 6,983.$$

En zo volgt uit $g_{\text{dag}} = 1,32$ dat $g_{\text{uur}} = 1,32^{\frac{1}{24}} \approx 1,012$.

Neemt een hoeveelheid per dag met 4% toe, dan bereken je als volgt de procentuele toename per week.

$g_{\text{dag}} = 1,04$, dus $g_{\text{week}} = 1,04^7 \approx 1,316$, dus het groeipercentsage per week is 31,6%.

Het omzetten van een groeipercentsage naar een andere tijdseenheid gaat via groeifactoren.

Neemt een hoeveelheid per uur met 28% af, dan bereken je als volgt de procentuele afname per kwartier.

$g_{\text{uur}} = 0,72$, dus $g_{\text{kwartier}} = 0,72^{\frac{1}{2}} \approx 0,849$, dus de afname per kwartier is 15,1%.

Exponentiële formule opstellen

Bij exponentiële groei kun je de formule opstellen als je op twee tijdstippen de hoeveelheid weet.

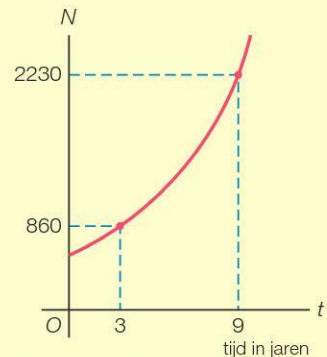
De grafiek in figuur 15.42 hoort bij exponentiële groei.

De bijbehorende formule krijg je als volgt.

Bij $t = 3$ hoort $N = 860$ en bij $t = 9$ hoort $N = 2230$.

$$g_{6\text{ jaar}} = \frac{2230}{860}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{2230}{860}\right)^{\frac{1}{6}} = 1,1721...$$

$$\begin{aligned} N &= b \cdot 1,1721...^t \\ t = 3 \text{ en } N &= 860 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} b \cdot 1,1721...^3 &= 860 \\ b &= \frac{860}{1,1721...^3} = 534,0... \end{aligned} \right.$$



figuur 15.42

Rond je de beginhoeveelheid af op gehelen en de groeifactor op drie decimalen, dan krijg je de formule $N = 534 \cdot 1,172^t$.

Lineaire en exponentiële groei

Voor $t = 3$ is $N = 150$ en voor $t = 8$ is $N = 600$.

- Heb je te maken met *lineaire groei*, dan is $rc = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{600 - 150}{8 - 3} = 90$.

Dus per tijdseenheid neemt N met 90 toe.

- Heb je te maken met *exponentiële groei*, dan is $g = \left(\frac{600}{150}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,320$.

Dus per tijdseenheid wordt N met 1,320 vermenigvuldigd.



Exponentieel verband aantonen

Je kunt aantonen dat bij de tabel hiernaast een exponentieel verband hoort.

Dat gaat als volgt.

$$\frac{10,98}{7,32} = 1,5; \quad \frac{16,47}{10,98} = 1,5 \quad \text{en} \quad \frac{24,71}{16,47} \approx 1,5.$$

Telkens als a met 4 toeneemt, wordt L met 1,5 vermenigvuldigd.

Je hebt dus te maken met een exponentieel verband.

a	8	12	16	20
L	7,32	10,98	16,47	24,71

Wil je weten welke L bij $a = 15$ hoort, dan gebruik je de groefactor $g = 1,5^{\frac{1}{4}} = 1,106...$ en het gegeven dat $L = 10,98$ bij $a = 12$ hoort.

Je krijgt: voor $a = 15$ is

$$L = 10,98 \cdot 1,106...^3 \approx 14,88.$$

a	12	13	14	15	16
L	10,98	...	...	...	16,47

$\times 1,106... \quad \times 1,106... \quad \times 1,106...$

Voor $a = 15$ is

$$L = 10,98 \cdot 1,106...^3$$

Verdubbelingstijd en halveringstijd

De *verdubbelingstijd* bij exponentiële groei is de tijd waarin de hoeveelheid verdubbelt, dus met 2 wordt vermenigvuldigd.

Bij exponentiële groei met groefactor g vind je de verdubbelingstijd t door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen. Deze vergelijking los je grafisch-numeriek op.

De *halveringstijd* bij exponentiële groei is de tijd waarin de hoeveelheid halveert, dus met $\frac{1}{2}$ wordt vermenigvuldigd.

Bij exponentiële groei met groefactor g vind je de halveringstijd t door de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$ op te lossen. Ook deze vergelijking los je grafisch-numeriek op.

Redeneren met groeiformules

Bij de formule $Q = 250(1 - 0,75^t)$ beredeneer je als volgt dat de grafiek van Q stijgend is voor $t > 0$.

Als t toeneemt, dan neemt $0,75^t$ af, dus dan neemt $1 - 0,75^t$ toe, dus dan neemt $250(1 - 0,75^t)$ toe.

Dus de grafiek van Q is stijgend.

Bij de formule $Q = 250(1 - 0,75^t)$ beredeneer je als volgt wat de grenswaarde is.

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,75^t$ tot 0, dus dan wordt $1 - 0,75^t \approx 1$, dus dan wordt $250(1 - 0,75^t) \approx 250$.

Dus de grenswaarde is 250.

Bij de formule $P = \frac{1500}{2 + 5 \cdot 0,8^t}$ beredeneer je als volgt dat de grafiek van P stijgend is voor $t > 0$.

Als t toeneemt, dan neemt $0,8^t$ af, dus dan neemt $5 \cdot 0,8^t$ ook af, dus dan neemt $2 + 5 \cdot 0,8^t$ ook af en daarom neemt $\frac{1500}{2 + 5 \cdot 0,8^t}$ toe.

Dus de grafiek van P is stijgend.

Bij de formule $P = \frac{1500}{2 + 5 \cdot 0,8^t}$ beredeneer je als volgt wat de grenswaarde is.

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,8^t$ tot 0, dus dan wordt $5 \cdot 0,8^t \approx 0$ en $2 + 5 \cdot 0,8^t \approx 2$, dus dan wordt $\frac{1500}{2 + 5 \cdot 0,8^t} \approx \frac{1500}{2} = 750$.

Dus de grenswaarde is 750.

Logaritmen

$y = {}^g\log(x)$ betekent $g^y = x$. Zo is ${}^3\log(81) = 4$, want $3^4 = 81$.

In $y = {}^g\log(x)$ is g het grondtal van de logaritme.

In $y = {}^g\log(x)$ is $g > 0$ en $g \neq 1$ en $x > 0$.

Uit $y = {}^g\log(x)$ en $g^y = x$ volgt $g^{{}^g\log(x)} = x$ en ${}^g\log(g^y) = y$.

Dus $10^{\log(20)} = 20$ en $\log(10^{3\frac{1}{2}}) = 3\frac{1}{2}$.

Met de GR bereken je $\log(5000) \approx 3,70$.

Om ${}^2\log(5000)$ te berekenen, kun je de rekenregel

${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ gebruiken.

Je krijgt ${}^2\log(5000) = \frac{\log(5000)}{\log(2)} \approx 12,29$.

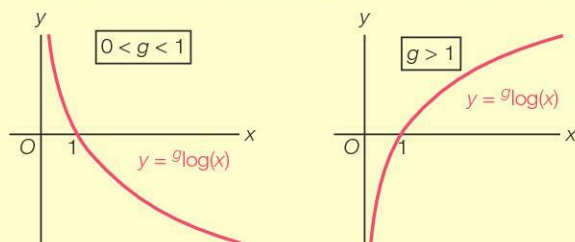
Op de TI, de HP en de NW kun je ook intikken $\log(5000, 2)$.

Op de Casio kun je ook de optie logab uit het OPTN-CALC-menu gebruiken.

$\log(x)$ betekent ${}^{10}\log(x)$

$${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$$

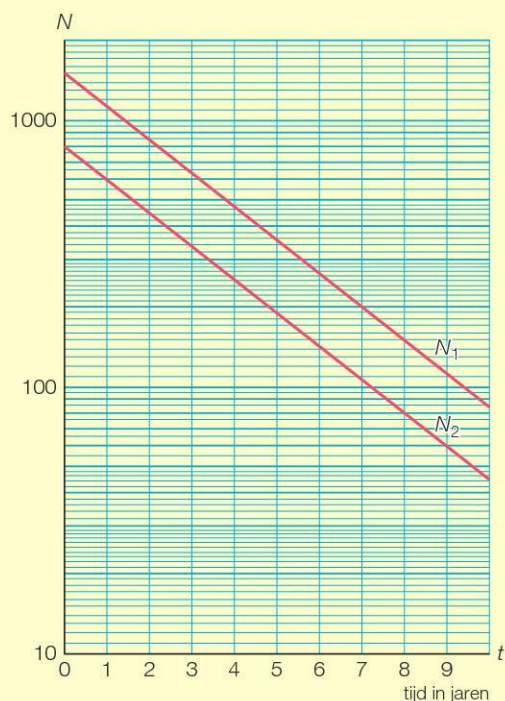
De grafiek van $y = {}^g\log(x)$ is een standaardgrafiek. We onderscheiden de situaties $0 < g < 1$ en $g > 1$.



figuur 15.43

Logaritmisch papier

Bij een rechte lijn op logaritmisch papier hoort exponentiële groei.



figuur 15.44

Op het logaritmisch papier hierboven zijn twee evenwijdige lijnen getekend.

Dit betekent dat de groeifactoren gelijk zijn. Dit kun je ook narekenen.

Lees af dat de grafiek van N_1 door de punten $(0, 1500)$ en $(7, 200)$ gaat.

Dit geeft $g_{7\text{ jaar}} = \frac{200}{1500}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{200}{1500}\right)^{\frac{1}{7}} \approx 0,750$.

Lees af dat de grafiek van N_2 door de punten $(0, 800)$ en $(8, 80)$ gaat.

Dit geeft $g_{8\text{ jaar}} = \frac{80}{800} = 0,1$, dus $g_{\text{jaar}} = 0,1^{\frac{1}{8}} \approx 0,750$.

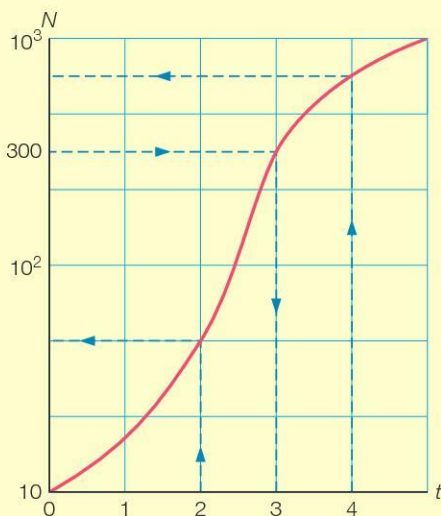
Je ziet dat de groeifactoren per jaar aan elkaar gelijk zijn. De formules zijn $N_1 = 1500 \cdot 0,750^t$ en $N_2 = 800 \cdot 0,750^t$.

In de figuur hiernaast staat op de verticale as een logaritmische schaalverdeling.

Voor $t = 2$ is $N = 10^{1\frac{2}{3}} \approx 46$ en voor $t = 4$ is $N \approx 10^{2+\frac{2}{3}} \approx 10^{2,83} \approx 676$.

Bij $N = 300$ hoort $\log(300) \approx 2,5$, dus 300 staat $3 \cdot 0,5 = 1,5$ cm boven de horizontale lijn $N = 10^2$.

Je leest af: bij $N = 300$ hoort $t \approx 3,0$.



figuur 15.45

Formules met logaritmen omwerken

De formule $5 \cdot \log(P) = 10 - 2t$ is te schrijven in de vorm $P = b \cdot g^t$.

$5 \cdot \log(P) = 10 - 2t$, dus $\log(P) = 2 - 0,4t$

$$P = 10^{2-0,4t}$$

$$P = 10^2 \cdot 10^{-0,4t}$$

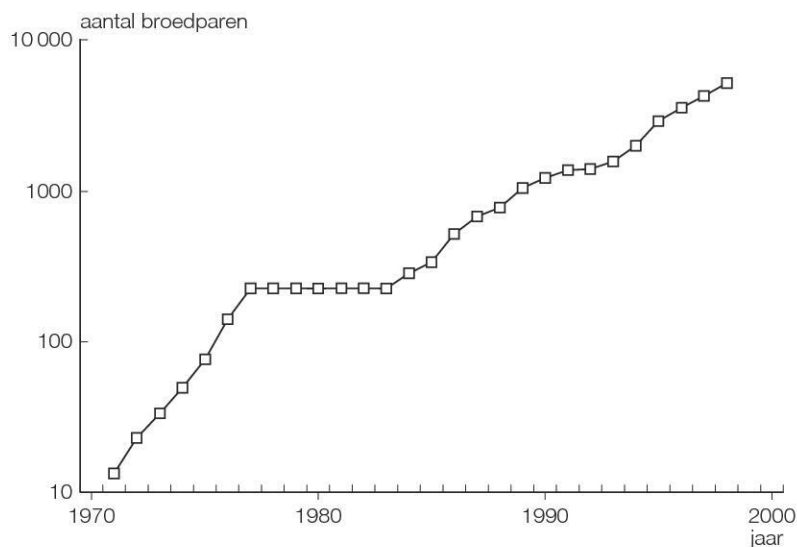
$$P = 100 \cdot (10^{-0,4})^t$$

$$P \approx 100 \cdot 0,398^t$$

Dus $P = 100 \cdot 0,398^t$.

30 2018-I

Grauwe ganzen eten gras en kunnen daardoor schade aan weilanden veroorzaken. Om die reden wordt er veel onderzoek gedaan naar de toename van het aantal grauwe ganzen in Nederland en de mogelijkheden om die toename te beperken.



figuur 15.46

In de figuur is het aantal broedparen van de grauwe gans in Nederland weergegeven voor de jaren 1971 tot en met 1998. Je ziet dat het aantal broedparen snel gegroeid is in deze periode. De verticale as in de figuur heeft een logaritmische schaalverdeling. Het derde punt van de grafiek, horend bij het jaar 1973, ligt tussen 10 en 100.

a Bereken met behulp van de figuur het aantal broedparen in 1973.

Voor de periode 1983-1998 kan de grafiek benaderd worden met een rechte lijn. Omdat de verticale as een logaritmische schaalverdeling heeft, betekent dit dat het aantal broedparen in die periode in werkelijkheid bij benadering exponentieel groeide. Het aantal broedparen van de grauwe gans nam toe van 220 broedparen in 1983 tot 5000 in 1998. Na 1998 nam het aantal verder toe: in 2012 waren er 83 000 broedparen. We vragen ons af of de exponentiële groei in de periode 1983-1998 zich na 1998 op dezelfde wijze voortgezet heeft.

b Onderzoek of het aantal van 83 000 in 2012 past bij een gelijkblijvende exponentiële groei.

In het vervolg van de opgave gaat het niet meer over alleen de broedparen van de grauwe gans, maar over alle grauwe ganzen. Onderzoekers hebben een aantal jaren geleden een model gemaakt om de kosten van de schade te berekenen die door grauwe ganzen wordt veroorzaakt. Ze zijn hierbij uitgegaan van het aantal van 190 000 grauwe ganzen *in de zomer* van 2009: de zomerganzen.

In de winter zijn er in Nederland twee soorten grauwe ganzen. Van de zomerganzen blijft 85% ook in de winter erna. Daar komen de grauwe ganzen bij die alleen in de winter in Nederland verblijven: de winterganzen.

Het aantal zomerganzen groeit volgens dit model met 19% per jaar en het aantal winterganzen met 4% per jaar. In de winter van 2009/2010 waren er 301 800 winterganzen.

De totale schade in de winter van 2009/2010 bedroeg € 2 690 000. We nemen aan dat de schade in een winter recht evenredig is met het totale aantal grauwe ganzen in die winter.

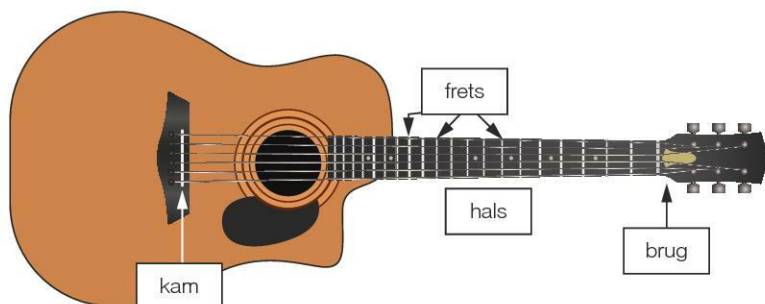
c Bereken het totale schadebedrag in de winter van 2017/2018 volgens dit model. Rond je antwoord af op duizenden euro's.

In verband met de hoge kosten van de schade werden met ingang van het jaar 2013 maatregelen getroffen om het aantal grauwe ganzen te beperken, vooral de zomerganzen. Door deze maatregelen nam ná 2013 het aantal zomerganzen met 14% per jaar af. Het streven was om het aantal zomerganzen terug te brengen tot 100 000.

d Bereken in de zomer van welk jaar er voor het eerst minder dan 100 000 zomerganzen zullen zijn.

31 2017-II

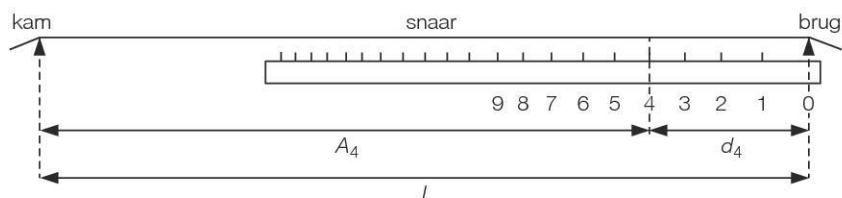
In figuur 15.47 zie je een gitaar. De snaren zijn gespannen tussen de brug en de kam. Op de hals zijn zogenoemde *frets* (smalle metalen strips) te zien.



figuur 15.47

Als je een snaar aanslaat zonder op een fret te drukken, gaat de hele snaar tussen de brug en de kam trillen. Door een snaar tegen een fret aan te drukken, wordt de gebruikte snaarlengte korter. Je krijgt dan een andere toon. Om de goede tonen te krijgen, moet bij het bouwen van een gitaar de juiste plaats van de frets berekend worden.

Figuur 15.48 geeft een schematisch zijaanzicht van de hals. De eerste negen frets zijn daarin vanaf de brug genummerd.



figuur 15.48

De lengte van een snaar in cm tussen de brug en de kam noemen we L . A_n is de afstand in cm tussen de fret met nummer n en de kam, en d_n is de afstand in cm tussen de fret met nummer n en de brug.

In figuur 15.48 zijn A_4 en d_4 aangegeven. Voor A_n geldt de formule $A_n = L \cdot 0,9439^n$.

Van een bepaalde gitaar is de afstand tussen fret nummer 6 en de brug gelijk aan 20 cm.

- a** Bereken de lengte L van een snaar van deze gitaar. Rond je antwoord af op hele cm.

De groeifactor in de formule is berekend op basis van de volgende uitgangspunten:

- er is een exponentieel verband tussen A_n en n ;
 - de 12^e fret ligt precies midden tussen de brug en de kam.
- b** Bereken met behulp van deze twee uitgangspunten de groeifactor in vijf decimalen.

De formule $A_n = L \cdot 0,9439^n$ is een directe formule bij een rij. Bij deze rij kan ook een recursieve formule opgesteld worden.

c Geef deze formule.

In het dagblad Trouw van 6 november 2010 stond een artikel over de gitaarbouwer Yuri Landman. Hij gebruikt voor de plaats van een aantal frets de vuistregels in de onderstaande tabel.

fret	3e fret	5e fret	7e fret	12e fret
afstand tussen brug en fret ten opzichte van de afstand tussen brug en kam	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Ga uit van een afstand tussen brug en kam van 65 cm.

d Onderzoek bij welke van bovenstaande frets de afstanden tussen brug en fret die met deze vuistregels berekend worden, meer dan 1 mm verschillen met de afstanden volgens de formule.

Het is mogelijk om de tabel met vuistregels uit te breiden. We willen een nieuwe vuistregel toevoegen waarbij de afstand tussen brug en fret $\frac{2}{3}$ is ten opzichte van de afstand tussen brug en kam. Hierbij willen we dat het verschil in berekende afstand volgens de nieuwe vuistregel en de formule zo klein mogelijk is.

e Onderzoek welke fret dan hoort bij deze nieuwe vuistregel.

32 2018-II

Carmen gaat cupcakes bakken.

Volgens het recept moeten de cupcakes 20 minuten gebakken worden op een temperatuur van 175°C . Carmen weet dat cupcakes gaar zijn als de kerntemperatuur van de cupcakes 95°C is.

Carmen veronderstelt daarom dat de kerntemperatuur van cupcakes in 20 minuten van kamertemperatuur (20°C) stijgt naar 95°C . Als deze toename exponentieel verloopt, dan hoort daar de formule

$K = 20 \cdot 1,081^t$ bij, met K de kerntemperatuur en t de tijd in minuten.

Hierbij is $t = 0$ het tijdstip waarop de cupcakes de oven ingaan.

De groeifactor 1,081 in de formule is afgerond op drie decimalen.

a Bereken de waarde van deze groeifactor in vijf decimalen.

Carmen vraagt zich af of ze ook had kunnen aannemen dat de kerntemperatuur lineair stijgt. Ze wil onderzoeken welk model het beste past: het lineaire of het eerder gebruikte exponentiële model. Daartoe meet Carmen na 12 minuten de kerntemperatuur van haar cupcakes.

Deze blijkt 52°C te zijn.

b Onderzoek of het lineaire of het exponentiële model het beste past bij deze waarneming.

33 2017-I

Veel mensen denken erover om zonnepanelen aan te schaffen. Bedrijven spelen daarop in en geven daar allerlei informatie over op hun websites. Op een dergelijke website tref je de volgende tekst aan:

Omdat de elektriciteitsprijs voortdurend stijgt, kan investeren in zonnepanelen interessant zijn. Laten we om te beginnen eens uitgaan van een stijging van de elektriciteitsprijs van 5% per jaar. Verder gaan we uit van een zonnepanelen-installatie met een opbrengst van 1750 kWh (kilowattuur) elektriciteit per jaar en een aanschafprijs van €2995.

Op de website wordt uitgegaan van een zonnepanelen-installatie met een aanschafprijs van €2995 en een opbrengst van 1750 kWh elektriciteit per jaar. Om de opbrengst in euro's te berekenen, wordt op diezelfde website gerekend met de prijs die de eigenaar van de zonnepanelen zou moeten betalen als hij de elektriciteit van een elektriciteitsbedrijf zou moeten kopen. Er is gerekend met een prijs van €0,225 per kWh elektriciteit voor het eerste jaar na aanschaf van de zonnepanelen en een jaarlijkse toename van de elektriciteitsprijs van 5%.

Voor de jaarlijkse opbrengst Z in euro's van de zonnepanelen in jaar t geldt nu de formule $Z = 393,75 \cdot 1,05^{t-1}$. Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op het moment van aanschaf van de zonnepanelen.

a Leg uit hoe je deze formule kunt afleiden uit de gegevens.

Om de jaarlijkse stijging van de elektriciteitsprijs van 5% te onderbouwen geeft de website elektriciteitsprijzen uit het verleden. Zo was in 1999 de prijs €0,11 per kWh en in 2011 al €0,22 per kWh. Als je aanneemt dat de elektriciteitsprijs in deze periode exponentieel gegroeid is, kom je echter niet op een (afgerond) jaarlijks groeipercentage van 5.

b Bereken het jaarlijks groeipercentage voor de periode 1999-2011.

Rond je antwoord af op één decimaal.

Omdat het percentage waarmee de elektriciteitsprijs verandert, niet steeds hetzelfde is, staat er op de website een tool waarmee je dit percentage kunt wijzigen. Bij een lagere stijging van de elektriciteitsprijs zal de opbrengst in euro's per jaar van de zonnepanelen-installatie ook lager zijn.

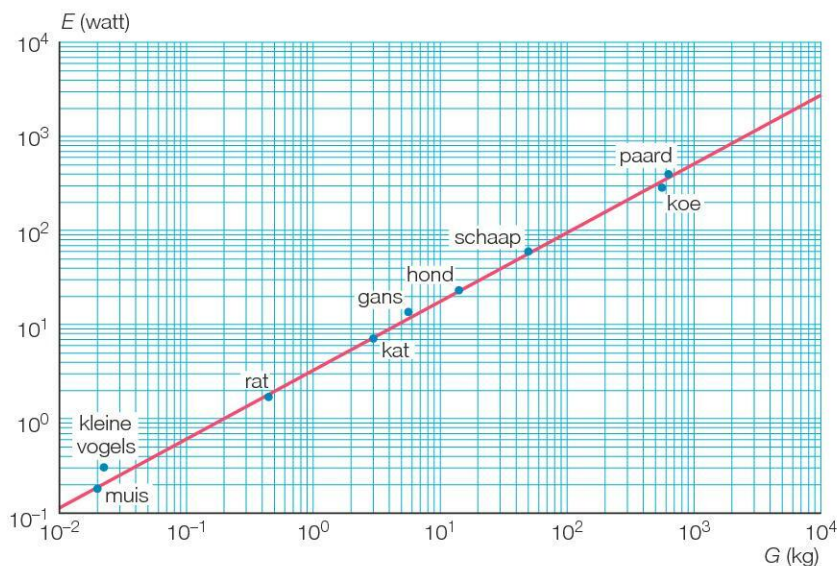
c Bereken met welk percentage per jaar de elektriciteitsprijs minstens moet toenemen om in jaar 20 een opbrengst van de zonnepanelen-installatie van €500 of meer te krijgen. Geef je antwoord in één decimaal.

34 2017-II

[► WERKBLAD] Bij dieren is het energieverbruik afhankelijk van het gewicht. Het verband $E = 3,27 \cdot G^{0,73}$ beschrijft dit. Hierin is E het energieverbruik in watt en G het gewicht in kg.

- a** Bereken hoe zwaar een dier volgens deze formule is als het een energieverbruik heeft van 100 watt. Geef je antwoord in hele kg.

In de figuur staat voor een aantal diersoorten het verband tussen E en G . De lijn in deze figuur is de grafiek die bij de formule hoort. Beide assen hebben een logaritmische schaalverdeling. Deze figuur staat ook op het werkblad.



figuur 15.49

Ook voor veel vogels geldt het verband volgens de formule. Voor kleine vogels echter niet. De stip in de figuur voor kleine vogels is voor vogels van ongeveer 22 gram.

- b** Bereken hoeveel procent groter het energieverbruik van een kleine vogel is dan je op grond van de formule zou verwachten. Geef je antwoord in tientallen procenten.

Er zijn ook zoogdieren waarvoor de formule niet precies klopt. Bijvoorbeeld voor een olifant van 4000 kg geldt dat E ongeveer 2000 watt is en voor een marmot van 3 kg geldt dat E ongeveer 3 watt is.

- c** Geef in de figuur op het werkblad de positie aan van de olifant en de marmot.

Aangeven is een examenwoord. Zie bladzijde 246.

De rechte lijn in de figuur doet vermoeden dat een dier dat twee keer zo zwaar is als een ander dier ook twee keer zo veel energie verbruikt.

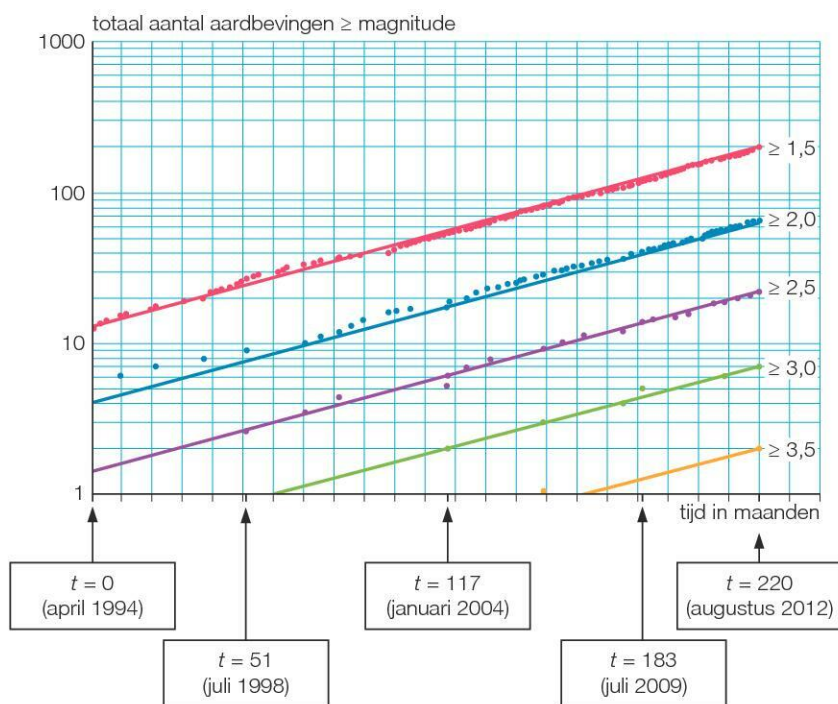
- d** Onderzoek met behulp van de formule of dit vermoeden juist is.

35 2019-I

In de provincie Groningen vinden, als gevolg van gasproductie, regelmatig aardbevingen plaats. In 2013 is daar grootschalig onderzoek naar gedaan. De *magnitude*, de kracht van een aardbeving, wordt uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter.

In figuur 15.50 zijn de Groningse aardbevingen vanaf 1994 verzameld en ingedeeld naar sterkte. Dat geeft bij een logaritmische schaalverdeling langs de verticale as een opvallend patroon: alle grafieken zijn bij benadering evenwijdige rechte lijnen.

Elke stip in deze figuur stelt een aardbeving van een zekere magnitude voor; zo kun je zien dat er vlak voor juli 2009 een aardbeving van magnitude $\geq 3,0$ heeft plaatsgevonden: die aardbeving zie je dus ook terug bij de aardbevingen van de klassen $\geq 2,5$; $\geq 2,0$ en $\geq 1,5$.



figuur 15.50

In het onderzoek werden alleen aardbevingen bekeken die schade zouden kunnen veroorzaken. Omdat aardbevingen met een magnitude van minder dan 1,5 geen schade aanrichten, zijn deze niet in figuur 15.50 opgenomen.

- a Bereken voor augustus 2012 hoeveel procent van het aantal aardbevingen van magnitude $\geq 2,0$ een magnitude van 2,5 of hoger heeft. Geef je antwoord in gehele procenten.

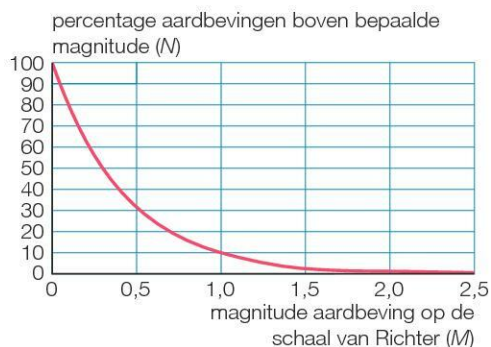
In een rapport van het Staatstoezicht op de Mijnen wordt geconstateerd dat er een duidelijk verband is tussen de magnitude en het percentage aardbevingen boven die magnitude. In figuur 15.51 is dat verband weergegeven.

Zo is bijvoorbeeld af te lezen dat 10% van de aardbevingen een magnitude boven de 1,0 heeft.

Bij deze grafiek hoort de formule

$N = 10^{a-M}$, Hierbij is M de magnitude en N het percentage van de aardbevingen boven magnitude M .

b Laat met een berekening zien dat geldt: $a = 2$.



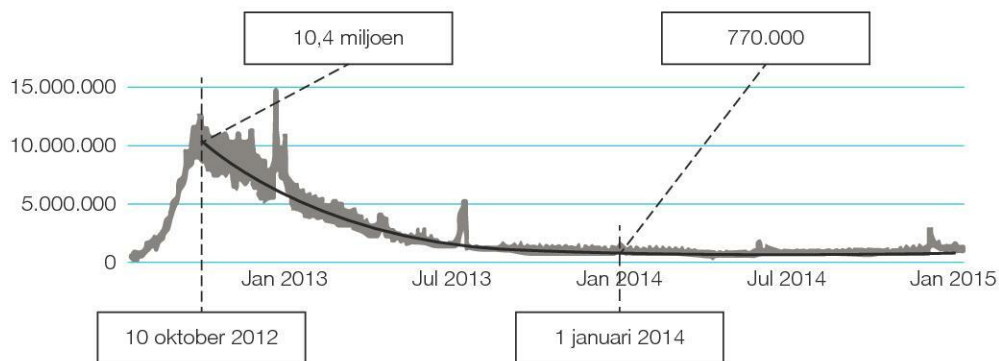
figuur 15.51

36 2019-I

Het nummer Gangnam Style van de Zuid-Koreaanse zanger Psy is de eerste YouTube-video die vaker dan 1 miljard keer bekeken is; die grens werd bereikt op 21 december 2012.

Je kunt op YouTube statistieken opvragen over de video. De grafiek in figuur 15.52 geeft het aantal views per dag weer. Dat aantal is dus ook de dagelijkse verandering van het *totale* aantal views van Gangnam Style.

In de figuur is ook een trendkromme getekend.



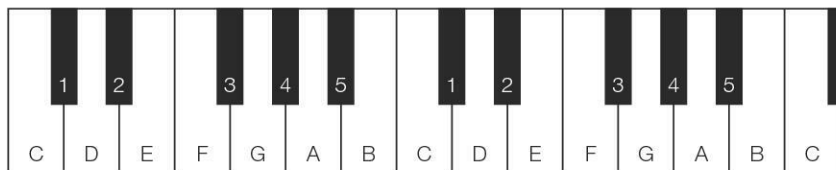
figuur 15.52

Aan de trendkromme in figuur 15.52 is te zien dat op 10 oktober 2012 een dalende trend werd ingezet. Op die datum was het aantal views nog groot, met 10,4 miljoen views per dag. Op 1 januari 2014, 64 weken later, was het dagelijkse aantal views nog maar 770 000.

Als we aannemen dat deze afname exponentieel is, dan geldt $V = 10,4 \cdot 0,96^t$. In deze formule is V het dagelijkse aantal views in miljoenen en t het aantal weken sinds 10 oktober 2012. De groeifactor is hierbij afgerond op twee decimalen.

a Bereken de groeifactor per week in drie decimalen.

b Bereken met de formule in welke maand van welk jaar het aantal views per dag onder de 100 000 zakte.



figuur 15.53

In figuur 15.53 staat een gedeelte van het toetsenbord van een piano afgebeeld. De witte en de zwarte toetsen stellen allemaal verschillende tonen voor. Op de witte toetsen staat ook de naam van de bijbehorende toon. Voor tonen die bij de zwarte toetsen horen, bestaan meerdere namen. In de figuur zijn ze daarom genummerd.

Als je een toets aanslaat op de piano, dan zorgt dat ervoor dat er een snaar gaat trillen. De snelheid van die trilling bepaalt de toon die je hoort. De snelheid waarmee een snaar trilt, noemen we de *frequentie*. De frequentie is het aantal trillingen per seconde en heeft hertz (Hz) als eenheid.

Bijvoorbeeld: de linker toon F in de figuur heeft een frequentie van 352 Hz. Dat betekent dus dat de snaar die deze toon F voortbrengt 352 keer per seconde trilt.

Bij de linker toon A in de figuur hoort een frequentie van 440 Hz.

- a** Bereken hoeveel seconden één trilling die bij deze toon A hoort, duurt. Geef je antwoord in vier decimalen.

Als de frequentie van een toon twee keer zo groot is als die van een andere toon, dan vormen deze twee tonen samen een octaaf. Dus: de toon A met een frequentie van 440 Hz en een toon met een frequentie van 880 Hz vormen samen een octaaf van A. Deze tonen krijgen dezelfde naam, dus ook de toon met een frequentie van 880 Hz noemen we A: dat is de rechter A in de figuur.

Op de meeste moderne piano's is de laagste toon een A met een frequentie van 27,5 Hz. De hoogste A heeft een frequentie van 3520 Hz.

- b** Bereken hoeveel octaven van A zo'n piano omvat.

Twee opeenvolgende C's in de figuur vormen samen een octaaf van C. Voor twee opeenvolgende C's geldt dat de frequentie van de rechter C twee keer zo groot is als die van de linker C, oftewel: de verhouding van hun frequenties is 2 : 1.

Bij het stemmen van een piano wordt ervoor gezorgd dat de verhouding van de frequenties van twee opeenvolgende tonen in een serie als C-1-D-2-E-F-3-G-4-A-5-B-C precies gelijk is. Zie de figuur.

Zo geldt bijvoorbeeld
$$\frac{\text{frequentie toon F}}{\text{frequentie toon E}} = \frac{\text{frequentie toon E}}{\text{frequentie toon D}}$$

Elk van deze verhoudingen is (ongeveer) 1,0595:1.

- c** Laat met een berekening zien dat deze verhouding juist is.

In de praktijk is het werken met deze frequentieverhoudingen niet zo handig. Daarom wordt meestal de zogenaamde toonafstand (TA) gebruikt.

De eenheid van de toonafstand is cent. Er geldt $TA = a \cdot \log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$.

In deze formule is $\frac{f_2}{f_1}$ de frequentieverhouding van twee tonen.

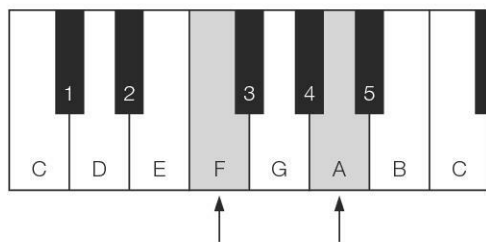
De waarde van a in de formule is zó gekozen dat de toonafstand tussen twee opeenvolgende tonen precies gelijk is aan 100 cent.

Als je uitgaat van het hierboven genoemde getal 1,0595 en daarmee a berekent, dan moet, afgerond op één decimaal, gelden: $a = 3983,9$.

d Bereken op deze wijze de waarde van a in drie decimalen.

De toonafstand tussen twee tonen waar één toon tussen zit, is bij een gestemde piano 200 cent. Zitten er twee tonen tussen, dan is de toonafstand 300 cent, enzovoort.

Als je op een piano meer toetsen tegelijk aanslaat, krijg je een samengestelde klank. Zo kun je een F en de rechts ervan gelegen A tegelijk aanslaan, zie figuur 15.54.



figuur 15.54

De frequentieverhouding van de tonen in deze samengestelde klank is volgens de muziektheorie gelijk aan 5 : 4. Met deze verhouding kun je een toonafstand berekenen volgens de muziektheorie. Je kunt de toonafstand ook berekenen door uit te gaan van het idee dat bij een gestemde piano tussen elke twee opeenvolgende tonen 100 cent zit. Op een gestemde piano wijkt de toonafstand (TA) van de bovenvermelde (uit F en A) samengestelde klank iets af van de toonafstand die volgens de muziektheorie moet gelden.

e Bereken hoeveel cent deze afwijking bedraagt. Geef je antwoord als een geheel getal.

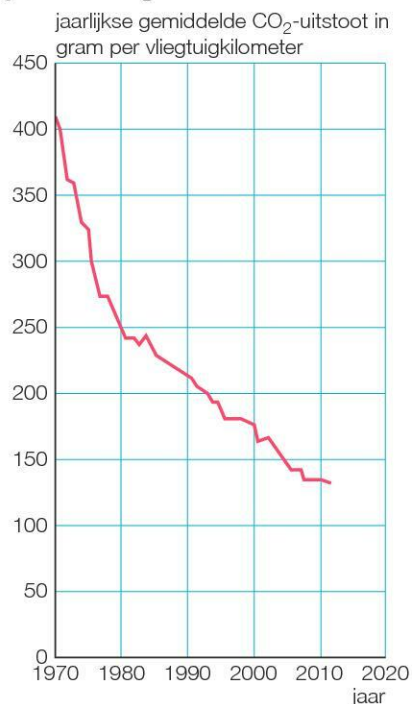
38 2018-II

Vliegtuigen stoten veel vervuilend CO_2 uit. Daarom moet de luchtvaart een belangrijke bijdrage leveren aan de vermindering van de CO_2 -uitstoot.

De CO_2 -uitstoot van vliegtuigen wordt gemeten in gram CO_2 per zogeheten vliegtuigkilometer. Een *vliegtuigkilometer* is een afgelegde kilometer door een vliegtuigpassagier. In figuur 15.55 zie je vanaf het jaar 1970 de jaarlijkse gemiddelde CO_2 -uitstoot per vliegtuigkilometer.

In de periode van 1980 tot 2010 is de jaarlijkse gemiddelde CO_2 -uitstoot per vliegtuigkilometer vrijwel lineair gedaald van 250 tot 135 gram. Het is niet waarschijnlijk dat de uitstoot lineair zal blijven dalen. Een realistischer model gaat uit van een daling die telkens minder sterk wordt tot een zekere grenswaarde is bereikt. Hiervoor geldt de formule $C = 40 + a \cdot b^t$. Hierbij is C de jaarlijkse gemiddelde CO_2 -uitstoot per vliegtuigkilometer in grammen en t in jaren met $t = 0$ in 1980.

- a** Bereken de waarden van a en b om dit model in overeenstemming te krijgen met de eerder gegeven waarden in 1980 en 2010. Geef in je antwoord a als een geheel getal en b afgerond op drie decimalen.



figuur 15.55

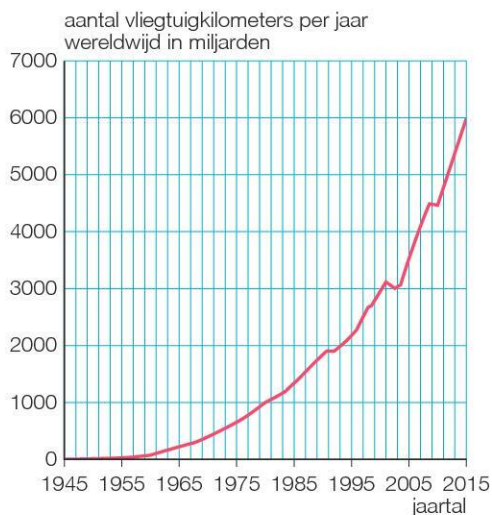
In figuur 15.55 is goed te zien dat de aanvankelijk sterke daling van de jaren 70 steeds minder werd. Daarom wordt ook wel gerekend met een model waarin de jaarlijkse gemiddelde CO_2 -uitstoot per vliegtuigkilometer in de periode van 1970 tot 2010 exponentieel is gedaald met 2,7% per jaar.

Deze daling zal niet het gewenste effect hebben. Het aantal vliegtuigkilometers per jaar stijgt exponentieel. Zie figuur 15.56.

En als het aantal vliegtuigkilometers per jaar blijft stijgen zoals het de afgelopen decennia heeft gedaan, zal de totale jaarlijkse CO_2 -uitstoot niet dalen maar blijven toenemen.

Neem aan dat het aantal vliegtuigkilometers per jaar exponentieel blijft toenemen zoals in de periode van 1980 tot 2015 in figuur 15.56 en dat de jaarlijkse gemiddelde CO_2 -uitstoot per vliegtuigkilometer blijft dalen met 2,7% per jaar.

- b** Bereken met hoeveel procent per jaar de totale jaarlijkse CO_2 -uitstoot dan stijgt in de komende jaren. Rond je antwoord af op één decimaal.



figuur 15.56

15.5 Logisch redeneren

39 a Gegeven zijn de afkortingen

R : het regent;

P : je hebt een paraplu nodig.

Onderzoek of $R \Rightarrow P$ volgt uit de zin ‘Als het niet regent, dan heb je geen paraplu nodig’.

b Gegeven is de volgende redenering.

Als je dapper bent, dan douche je koud af.

Je bent niet dapper, dus je doucht niet koud af.

De bewering in de eerste zin kunnen we met symbolen weergeven als $D \Rightarrow K$.

Geef de bewering in de tweede zin weer in logische symbolen en leg uit dat deze bewering niet volgt uit de bewering in de eerste zin.

c Gegeven zijn de volgende twee beweringen.

1 Als je dapper bent, dan douche je koud af.

2 Als je een slappeling bent, dan douche je niet koud af.

Is uit deze twee beweringen de conclusie ‘Als je een slappeling bent, dan ben je niet dapper’ te trekken? Licht je antwoord toe.

d Michiel leidt op maandag, woensdag en vrijdag een groep bootcampers. In week 12 komen er in totaal 35 deelnemers. Hiervan komen er 4 op alle drie de dagen. Er zijn er 8 die alleen op maandag komen en 6 die alleen op vrijdag komen. Er zijn er 2 die op maandag en woensdag komen (maar niet op vrijdag), 3 die op maandag en vrijdag komen (maar niet op woensdag) en 5 die op woensdag en vrijdag komen (maar niet op maandag).

Onderzoek hoeveel deelnemers er op woensdag komen.

e In het venndiagram hiernaast stelt elke stip een deelnemer aan het bootcamp voor. We gebruiken de volgende afkortingen.

M : de deelnemer kwam op maandag.

W : de deelnemer kwam op woensdag.

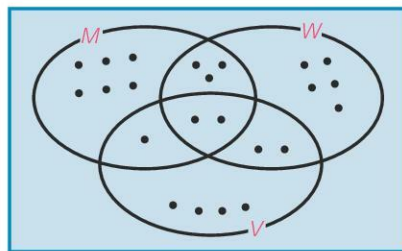
V : de deelnemer kwam op vrijdag.

A : de deelnemer kwam op alle drie de dagen.

Je ziet dat er zes deelnemers waren die alleen op maandag kwamen.

Gegeven is de bewering $(M \wedge W \wedge \neg A) \Rightarrow \neg V$.

Vertaal deze logische symbolen naar een Nederlandse zin en onderzoek of de bewering waar is.



figuur 15.57

- f** In het rooster hiernaast zijn de 9 vakken genummerd. Het vak linksonder heeft nummer 11, het vak daarnaast 21, enzovoort.

Het rooster stelt een gebied voor waarin men op elk vak een eik, een beuk of een kastanje wil planten. Vakken die met een zijde aan elkaar grenzen, mogen niet dezelfde boom bevatten. We spreken de volgende notatie af: E_{13} betekent ‘in vak 13 komt een eik’ en K_{31} betekent ‘in vak 31 komt een kastanje’.

Vertaal de uitspraak ‘In vak 13 komt een eik, dus in vak 12 komt een beuk of een kastanje’ in logische symbolen, waarbij je gebruikmaakt van de afgesproken notaties.

3	13	23	33
2	12	22	32
1	11	21	31
	1	2	3

figuur 15.58

- g** Zie het rooster en de afgesproken notaties in vraag f. Er wordt besloten om in de vakken 13 en 32 een eik te planten en in de vakken 23 en 31 een kastanje. Daaruit volgt dat voor de rest van het gebied de plaatsing van de bomen kan worden weergegeven met de volgende logische redenering, die bestaat uit vier redeneerstappen:
- $(K_{23} \wedge E_{32}) \Rightarrow (B_{22} \wedge B_{33})$
 - $(E_{13} \wedge B_{22}) \Rightarrow \dots$
 - $(B_{22} \wedge K_{31}) \Rightarrow \dots$
 - ...

Geef de eerste stap van deze redenering in een gewone zin en noteer wat er op de puntjes moet staan.

De logische symbolen $\Rightarrow$, $\neg$, $\wedge$ en $\vee$

Een redenering is opgebouwd uit een aantal uitgangspunten en een conclusie. Bij de notatie van een redenering kunnen de symbolen $\Rightarrow$, $\neg$, $\wedge$ en $\vee$ gebruikt worden.

$\Rightarrow$ is het implicatieteken. Hiermee wordt een als-dan-bewering genoteerd.

Een voorbeeld van een als-dan-bewering is

Als je goed je best doet, dan slaag je voor het examen.

We gebruiken de volgende afkortingen.

A : Je doet goed je best;

B : Je slaagt voor je examen.

We noteren de als-dan-bewering dan met $A \Rightarrow B$.

$\neg$ is het ontkenningsteken.

Uit $A \Rightarrow B$ volgt $\neg B \Rightarrow \neg A$, dus

Als je niet slaagt voor het examen, dan heb je niet goed je best gedaan.

A en B zijn proposities. Een propositie is een zin waarin iets wordt beweerd.

Het symbool $\wedge$ betekent en, het symbool $\vee$ betekent of, het inclusieve of, dus het een of het andere of beide.

We gebruiken verder de proposities:

C : Je bent jarig;

D : We vieren feest.

De bewering $(B \vee C) \Rightarrow D$ betekent dan

Als je slaagt voor je examen of als je jarig bent, dan vieren we feest.

De bewering $(\neg B \wedge \neg C) \Rightarrow \neg D$ betekent dan

Als je niet slaagt voor je examen en als je niet jarig bent, dan vieren we geen feest.

Door het zetten van haakjes kan een bewering een andere betekenis krijgen.

Gebruik je naast de afkortingen B , C en D nog de afkorting

E : Je nodigt mensen uit

dan kun je hiermee de bewering $((B \vee C) \wedge E) \Rightarrow D$ opstellen.

In deze bewering vieren we pas feest als er mensen zijn uitgenodigd.

Je kunt ook de bewering $(B \vee (C \wedge E)) \Rightarrow D$ opstellen.

In deze bewering is het voldoende om geslaagd te zijn om feest te vieren.



Noodzakelijke en voldoende voorwaarde

Bij een spel met een dobbelsteen ontvang je 10 euro als je vijf keer achter elkaar even gooit.

Bij de bewering “Alleen als je vier keer achter elkaar even gooit, kun je 10 euro ontvangen” heb je met een noodzakelijke voorwaarde te maken. Het is echter geen voldoende voorwaarde, want je kunt de vijfde keer nog oneven gooien.

Bij de bewering “Als je de vierde keer oneven gooit, dan ontvang je geen 10 euro” heb je met een voldoende voorwaarde te maken. Het is echter geen noodzakelijke voorwaarde, want je kunt ook de vijfde keer oneven gooien.

Bij de bewering “Mits je vijf keer achter elkaar even gooit, ontvang je 10 euro” heb je met een noodzakelijke en voldoende voorwaarde te maken.

Bij een noodzakelijke en voldoende voorwaarde hoort een equivalentie, dat is een bewering van de vorm $A \Leftrightarrow B$.

Venndiagrammen

De als-dan-bewering

Als je goed je best doet, dan slaag je voor het examen
is in beeld te brengen met een venndiagram.

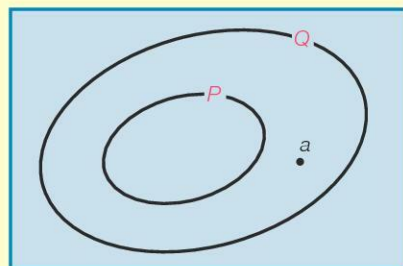
We gebruiken de volgende afkortingen.

P : De mensen die goed hun best doen.

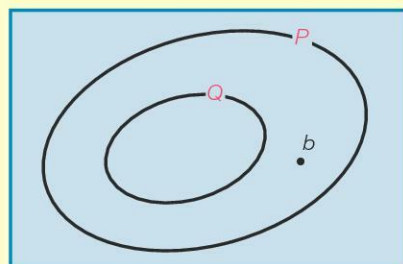
Q : De mensen die slagen voor het examen.

Het venndiagram dat bij de bewering hoort,
staat hiernaast.

Persoon a is iemand die niet goed zijn best heeft
gedaan en toch is geslaagd. Uit het venndiagram
blijkt dat uit $P \Rightarrow Q$ niet volgt $Q \Rightarrow P$.



Het venndiagram hiernaast hoort niet bij de
gegeven als-dan-bewering. Immers persoon b is
iemand die wel zijn best heeft gedaan en toch niet
is geslaagd en dat is niet juist volgens de gegeven
bewering.



Contradictie en paradox

Een contradictie is een bewering die nooit waar is.

Heb je te maken met de propositie A , dan is de bewering $A \wedge \neg A$ een
contradictie.

Een paradox is een schijnbare tegenspraak oftewel een schijncontradictie.

Bij een logische paradox blijkt een logische bewering niet meer te
gelden.

40 2017-I

Bij een experiment onder 300 eerstejaars rechtenstudenten moesten deze
studenten zich buigen over de volgende redenering:

‘Als je stoer bent, dan ga je laat naar bed.

Jij bent niet stoer, dus jij gaat niet laat naar bed.’

De bewering in de eerste zin kunnen we met symbolen weergeven als
 $S \Rightarrow L$.

- a** Geef de bewering in de tweede zin weer in logische symbolen en leg
uit dat deze bewering niet volgt uit de bewering in de eerste zin.

Nu bekijken we de volgende twee beweringen:

1. Als je stoer bent, dan ga je laat naar bed.
2. Als je een watje bent, dan ga je niet laat naar bed.

- b** Is uit dit tweetal beweringen de conclusie ‘Als je een watje bent, dan
ben je niet stoer’ te trekken? Licht je antwoord toe.

41 2017-II

De Engelse onderzoeker Arthur Evans vond in 1900 op het eiland Kreta honderden kleitabletten die beschreven waren met een onbekend schrift. Op de foto zie je zo'n kleitablet.



Omdat de tekens grotendeels opgebouwd zijn uit lijntjes noemde hij dit schrift Lineair B. Lineair B heeft 90 verschillende tekens waarmee woorden geschreven werden.

Elk schrift kan ingedeeld worden bij precies één van de volgende drie typen:

- karakterschrift: elk teken is een apart woord;
- lettergrepenschrift: elk teken is een lettergreep;
- alfabet: elk teken is een letter.

We voeren de volgende afkortingen in:

K: een schrift is een karakterschrift

L: een schrift is een lettergrepenschrift

A: een schrift is een alfabet

D: een schrift heeft duizend of meer tekens

V: een schrift heeft veertig of minder tekens

De volgende twee beweringen zijn waar:

$K \Rightarrow D$

$A \Rightarrow V$

a Vertaal deze twee beweringen in gewone zinnen.

Lineair B heeft, zoals hierboven vermeld is, 90 verschillende tekens.

Omdat 90 minder is dan 1000 en meer dan 40, gelden $\neg D$ en $\neg V$.

Je kunt nu op grond van het voorgaande concluderen dat Lineair B een lettergrepenschrift moet zijn.

b Geef alle redeneerstappen die tot die conclusie leiden. Gebruik daarbij alleen de afkortingen hierboven en logische symbolen.

- In deze drie landen samen worden 39 verschillende letters gebruikt.
- Van deze 39 letters komen er 24 voor in alle drie de landen.
- Er zijn 3 letters die alleen in Rusland voorkomen.
- Het Bulgaarse alfabet heeft 30 letters.
- Alle letters in het Bulgaarse alfabet komen ook voor in het Russische alfabet.
- Het Servische alfabet heeft 6 unieke letters, die dus niet in het Russische of Bulgaarse alfabet voorkomen.

a Onderzoek hoeveel letters het Servische alfabet heeft.

Griekse alfabet

Latijnse alfabet

Russische alfabet

Met behulp van logische symbolen kunnen we beschrijven in welke alfabetten de letters voorkomen. We gebruiken daarvoor de volgende afkortingen:

De letter Π behoort tot de letters waarvoor geldt $R \wedge G$.
Voor een aantal letters geldt $G \wedge L \wedge \neg A$.

c Vertaal deze logische symbolen naar een Nederlandse zin en onderzoek of de bewering waar is.

43 2018-II

De onderstaande tekst is gebaseerd op een artikel van februari 2016 uit het Onderwijsblad van de Algemene Onderwijsbond.

De pabo's krijgen gemiddeld een derde minder nieuwe eerstejaars binnen. Schrijnend is de situatie bij de Haagse Hogeschool waar, volgens de cijfers van Vereniging Hogescholen, de instroom keldert met 58%.

Het Onderwijsblad voorspelde al een flinke duikeling bij de pabo's door de vele toelatingstoetsen. Uiteindelijk noteren de pabo's 1820 nieuwe eerstejaars minder, een daling van 32 procent.

Minister Jet Bussemaker is niet verrast. Zij wijt de daling aan de afschaffing van de studiebeurs en de strengere eisen op de pabo's.

Het artikel spreekt van een daling van 32% nieuwe eerstejaars in 2015 ten opzichte van het jaar ervoor.

- a** Bereken het aantal nieuwe eerstejaars in 2014. Rond je antwoord af op tientallen.

We kijken nu naar de laatste zin van het artikel.

Hiervoor introduceren we de volgende afkortingen.

D: daling van het aantal nieuwe eerstejaars

A: afschaffing van de studiebeurs

S: strengere eisen op de pabo's

Stel nu dat minister Bussemaker met het woordje 'en' bedoelt dat de afschaffing van de studiebeurs in combinatie met de strengere eisen op de pabo's zorgt voor een daling van het aantal nieuwe eerstejaars.

- b** Schrijf dan de uitspraak van minister Bussemaker met behulp van logische symbolen en bovenstaande afkortingen.

Naar aanleiding van de uitspraak van minister Bussemaker vermoedde men op sommige pabo's dat het volgende zou gaan gelden:

$(A \Rightarrow D) \Rightarrow V$.

Hierin betekent de afkorting *V*: het collegegeld wordt verlaagd.

- c** Vertaal de bewering $(A \Rightarrow D) \Rightarrow V$ in een gewone zin.

Bij sommige pabo's krijgen studenten aan het begin van hun eerste jaar een rekentoets. Bij een onvoldoende worden ze in de loop van het eerste jaar bijgespijkerd en krijgen ze voor de zomer een nieuwe rekentoets.

Als ze hier niet voor slagen, mogen ze niet door naar het tweede jaar.

We introduceren weer afkortingen.

R: slagen voor rekentoets

O: overgaan naar tweede jaar

- d** Onderzoek of $R \Rightarrow O$ volgt uit de tekst hierboven.

44 2019-II

In april 2015 zette een tv-presentator uit Singapore een puzzel op het internet die afkomstig was uit een toets voor basisschoolkinderen van een school voor hoogbegaafde kinderen. De puzzel ging vervolgens de hele wereld over, want iedereen vroeg zich af hoe je hem eigenlijk op moest lossen.

Een variant van die puzzel is de volgende.

Amir en Bob hebben net Carina leren kennen en ze willen graag weten wanneer ze jarig is.

Carina geeft ze de lijst hiernaast met 10 mogelijke data.

Daarna vertelt ze aan Amir in welke maand ze jarig is en aan Bob op welke dag van de maand ze jarig is. Amir zegt vervolgens: “Ik weet niet wanneer Carina jarig is, maar ik weet zeker dat Bob het op dit moment ook niet weet.”

Bob reageert hierop: “Eerst wist ik inderdaad niet wanneer Carina jarig is, maar dankzij Amirs opmerking weet ik het nu wel”, waarop Amir concludeert: “Oh, maar dan weet ik het nu ook!”

september	20	21	24
oktober	22	23	
november	19	21	
december	19	20	22

Deze lastige puzzel is op te lossen met behulp van logisch redeneren. We spreken daarvoor de volgende notaties af:

- $A(\text{oktober})$ betekent ‘Carina heeft tegen Amir gezegd dat ze in de maand oktober jarig is’.
- $B(22)$ betekent: ‘Carina heeft tegen Bob gezegd dat ze op de 22e jarig is’.
- $C(20 \text{ december})$ betekent ‘Carina is jarig op 20 december’.

Voor andere dagen en maanden gelden dan vergelijkbare notaties.

In deze notatie kun je bijvoorbeeld schrijven:

$C(20 \text{ september}) \Rightarrow (A(\text{september}) \wedge B(20))$.

a Vertaal bovenstaande logische uitdrukking in een gewone zin.

Vanzelfsprekend kan Amir nooit weten wanneer Carina jarig is. Voor iedere maand zijn immers meerdere dagen mogelijk. Voor Bob ligt dat anders, maar toch zegt Amir zeker te weten dat Bob ook niet weet wanneer Carina jarig is.

Hieruit kun je concluderen dat Carina in november of december jarig is.

b Leg uit hoe je tot deze conclusie komt.

Bob weet dus in eerste instantie niet wanneer Carina jarig is. Je kunt alle mogelijkheden die er voor hem zijn, weergeven in de afgesproken notatie. Omdat inmiddels bekend is dat Carina in november of december jarig is, kunnen we ons beperken tot de dagen die in november en december vóórkomen. Het lijstje met data ziet er nu dus als volgt uit:

november	19	21	
december	19	20	22

Voor elk van de dagen 19, 20, 21 en 22 kan, uitgaande van wat Carina tegen Bob gezegd kan hebben, een logische uitdrukking gemaakt worden.

Door deze vier logische uitdrukkingen te combineren met het gegeven dat Carina in november of december jarig is én het feit dat Bob haar verjaardag weet dankzij dit gegeven, kun je concluderen dat Carina *niet* op de 19e jarig is.

Eén van die logische uitdrukkingen is: $B(20) \Rightarrow C(20 \text{ december})$.

- c** Schrijf voor de andere drie dagen die vóórkomen in de maanden november en december ook zo'n logische uitdrukking op *en* leg uit hoe je aan de conclusie komt dat Carina niet op de 19e jarig is.

We weten dus nu twee dingen:

- 1 Carina is in november of in december jarig;
- 2 Carina is niet op de 19e jarig.

Blijkbaar is dit genoeg informatie voor Amir om erachter te komen wanneer Carina jarig is.

- d** Wanneer is Carina jarig? Licht je antwoord toe met een redenering.

45 2019-I

[►WERKBLAD] Piet Mondriaan (1872-1944) was een Nederlandse kunstschilder die algemeen wordt gezien als één van de grondleggers van de abstracte kunst.

Voorals zijn latere werk, schilderijen bestaand uit zwarte lijnen en rode, gele, blauwe en witte vlakken, is wereldberoemd.

Een kunstenaar wil een schilderij maken dat lijkt op een schilderij van Piet Mondriaan. Hij wil daarbij voor de vlakken de drie kleuren rood, blauw en wit gebruiken. De kunstenaar vindt het niet erg als twee naast elkaar liggende vlakken dezelfde kleur hebben.

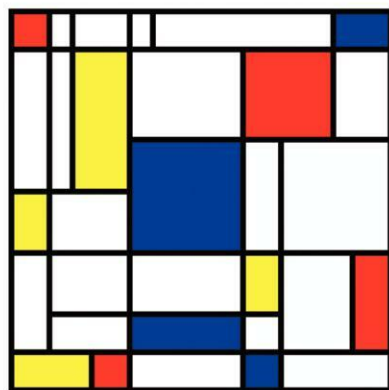
Het aantal manieren waarop hij zijn schilderij in kan kleuren, het aantal mogelijke *kleuringen* dus, hangt af van het aantal vlakken waaruit het schilderij bestaat. Het verband tussen het aantal mogelijke kleuringen M en het aantal vlakken V is $M = 3^V$.

De kunstenaar wil minimaal vijf miljoen mogelijkheden hebben om het schilderij in te kleuren.

- a** Bereken hoeveel vlakken het schilderij dan minstens moet hebben.

Een vriend van de kunstenaar beweert dat, als je in het algemeen het aantal mogelijke kleuringen wilt verdubbelen, je gewoon het aantal vlakken moet verdubbelen.

- b** Onderzoek of dat het geval is.

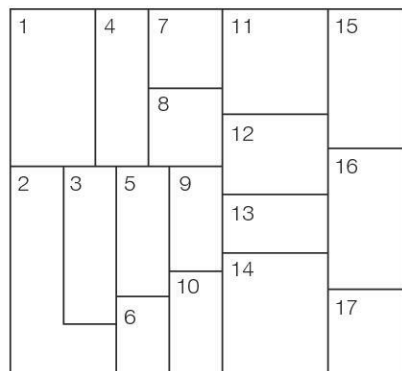


figuur 15.60

Uiteindelijk kiest de kunstenaar voor een schilderij met 17 vlakken, zoals weergegeven in de figuur. De figuur staat ook op het werkblad.

De kunstenaar wil het schilderij van de figuur inkleuren met de drie eerder genoemde kleuren: rood, blauw en wit. Daarnaast besluit hij, bij nader inzien, toch dat twee aan elkaar grenzende vlakken niet dezelfde kleur mogen hebben. We kunnen de kleuring van de verschillende vlakken weergeven met de volgende notatie: W_5 betekent “vlak nummer 5 is wit gekleurd” en B_{12} betekent “vlak nummer 12 is blauw gekleurd”.

De kunstenaar begint met vlak nummer 1 rood te kleuren. Tegen zijn vriend zegt hij “Vlak nummer 1 is rood, dus vlak nummer 4 is blauw of wit”.



figuur 15.61

- c** Vertaal de uitspraak van de kunstenaar in logische symbolen, gebruik makend van bovenstaande notatie.

De kunstenaar kiest ervoor om vlak nummer 4 wit te kleuren. Het gevolg daarvan voor een deel van de rest van het schilderij kan worden weergegeven met de volgende logische redenering, bestaande uit vier redeneerstappen:

- $(R_1 \wedge W_4) \Rightarrow B_3$
- $B_3 \Rightarrow (\neg B_5 \wedge \neg B_2)$
- $(R_1 \wedge \neg B_2) \Rightarrow W_2$
- $(W_2 \wedge B_3) \Rightarrow R_6$

- d** Geef de vier stappen van deze redenering in gewone zinnen.

Voor de rest van de opgave gaan we ervan uit dat kunstenaar blijft bij bovenstaande keuze.

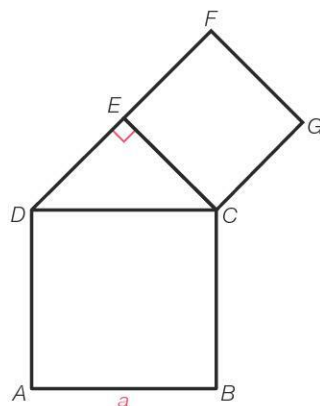
- e** Geef een redenering, weergegeven met de hierboven beschreven notatie en logische symbolen, bestaande uit een aantal redeneerstappen, voor vlak nummer 5 *en* leg daarmee uit waarom de kunstenaar er niet in zal slagen vlak nummer 5 een kleur te geven.

De kunstenaar heeft dus een vierde kleur nodig en kiest ervoor om vlak nummer 5 geel te kleuren. Het is mogelijk om de rest van het kunstwerk in te kleuren zonder een tweede keer de kleur geel in te hoeven zetten. De figuur staat ook, vergroot, op het werkblad.

- f** Geef op het werkblad aan hoe het kunstwerk ingekleurd moet worden, uitgaande van het bovenstaande.

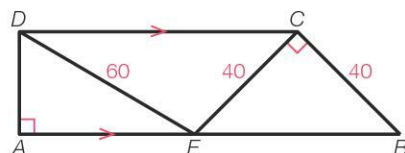
15.6 Meetkunde

- 46 a** In de figuur hiernaast zie je het vierkant $ABCD$ met zijde a . Driehoek CDE is een gelijkbenige rechthoekige driehoek en $CEFG$ is een vierkant. Er geldt dat de diagonaal CF in het verlengde van BC ligt. Toon aan dat het punt F op een afstand $2a$ boven de lijn door de punten A en B ligt.



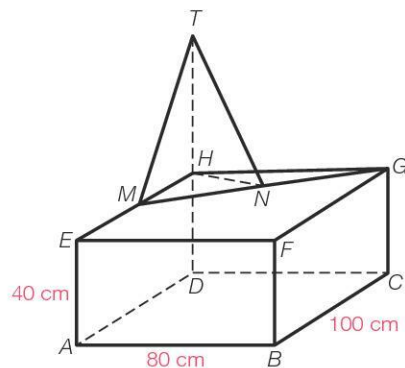
figuur 15.62

- b** In de vierhoek $ABCD$ in de figuur hiernaast is hoek A recht, is CD evenwijdig met AB en is $BC = 40$. Het punt E ligt op AB en er is een rechte hoek bij C . Verder is $CE = 40$ en $DE = 60$.



figuur 15.63

- Bereken de lengte van AB . Rond af op één decimaal.
- c** In de figuur hiernaast zie je de balk $ABCD EFGH$ met $AB = 80$ cm, $AD = 100$ cm en $AE = 40$ cm. Op de balk staat de piramide $THMN$. Het punt T ligt op het verlengde van DH , het punt M is het midden van EH en het punt N is het midden van GM . Verder is $HT = 60$ cm.



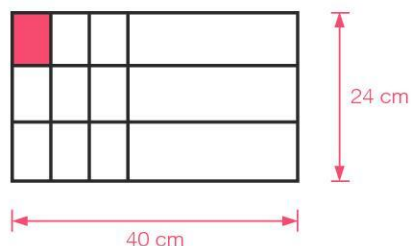
figuur 15.64

- Teken het vooraanzicht en het zijaanzicht van de balk met de piramide op schaal 1 : 20.
- d** Van de piramide $THMN$ in de figuur bij vraag c is de inhoud 20 dm^3 . Toon dit aan met een berekening en bereken de inhoud van het schaalmodel van deze piramide bij een schaal van 1 : 8. Rond af op gehele cm^3 . Zie voor de afmetingen van de piramide vraag c.
- e** Voor een rechthoek met lange zijde a en korte zijde b geldt de gulden-snede-verhouding als geldt $b : a = a : (a + b)$. In de rechthoek hiernaast is de lange zijde 40 cm en de korte zijde 24 cm. Onderzoek of deze rechthoek de gulden-snede-verhouding heeft.



figuur 15.65

- f** Een rechthoek van 40 cm bij 24 cm wordt verdeeld in drie even hoge rijen en een aantal (meer dan drie) even brede kolommen. Zo ontstaat een aantal gelijke rechthoeken, waarvan er een is gekleurd in de figuur hiernaast.



figuur 15.66

- g** [▶ WERKBLAD] In figuur 15.67 zie je een foto van een de blokhut. Deze foto staat ook op het werkblad.

De foto is genomen op een hoogte van 120 cm.

Bereken met behulp van de foto op het werkblad de hoogte van de blokhut.

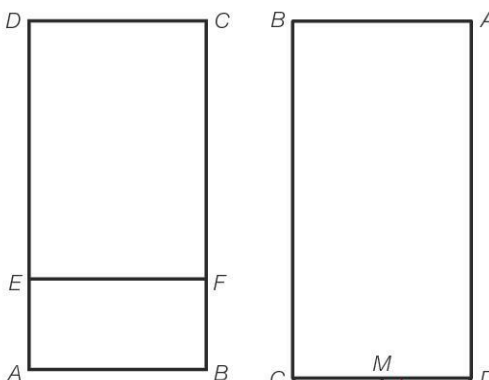


figuur 15.67

- h** [▶ WERKBLAD] Op de zijden van de rechthoek $ABCD$ liggen de punten E en F waarbij $AE = \frac{1}{4}AD$ en $BF = \frac{1}{4}BC$. Zie figuur 15.68.

Op het werkblad is de rechthoek $ABFE$ in perspectief getekend.

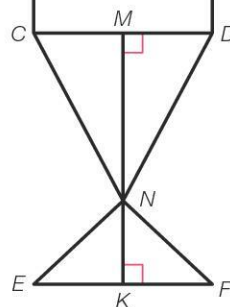
Teken op het werkblad de rechthoek $ABCD$ in perspectief. Licht je werkwijze toe.



figuur 15.68

- i** [▶ WERKBLAD] In figuur 15.69 zie je de rechthoek $ABCD$ waarvan de zijde AD twee keer zo lang is als de zijde AB en M het midden is van de zijde CD . Van driehoek CDN is $CN = DN$ en is MN even lang als CD . Van driehoek EFN is $EN = FN$, $EF = CD$ en is KN de helft van MN , waarbij K het midden is van EF .

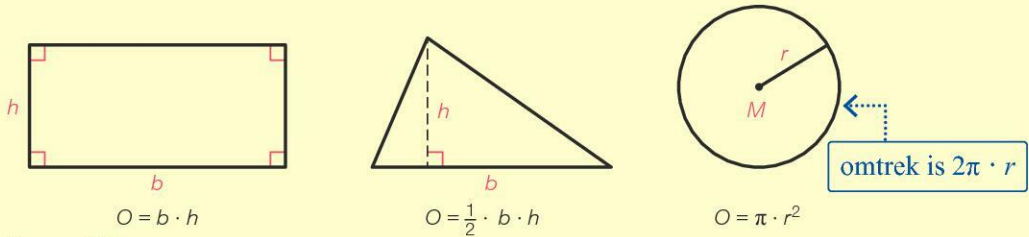
Op het werkblad is rechthoek $ABCD$ in perspectief getekend. Teken driehoek EFN in deze perspectieftekening. Licht je werkwijze toe.



figuur 15.69

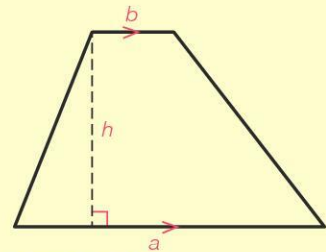
Oppervlakte van vlakke figuren

Bij oppervlakteberekeningen gebruik je de oppervlakteformules van de basisfiguren rechthoek, driehoek en cirkel.



figuur 15.70

Vaak kun je bij het berekenen van de oppervlakte een figuur opsplitsen in basisfiguren of aanvullen tot een basisfiguur. Op deze manier kun je bijvoorbeeld aantonen dat oppervlakte trapezium $= \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$.



figuur 15.71

In figuur 15.72 is de regelmatige achthoek $ABCDEFGH$ ontstaan door hoeken af te snijden van het vierkant $PQRS$ met zijde 5.

Gevraagd wordt na te rekenen dat de zijde van de achthoek ongeveer 2,07 is en de oppervlakte van de achthoek in één decimaal te berekenen.

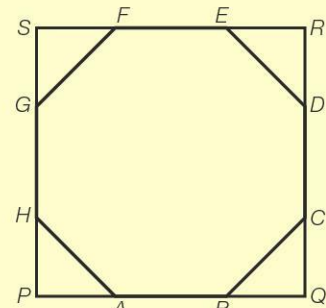
Stel $AP = PH = x$, dan geldt in driehoek APH volgens de stelling van Pythagoras dat $x^2 + x^2 = 2,07^2$.

Dit geeft $2x^2 = 4,2849$ en hieruit volgt $x \approx 1,46$.

Dit geeft $AP + AB + BQ \approx 1,46 + 2,07 + 1,46 = 4,99 \approx 5$, dus het klopt.

$O(\triangle APH) \approx \frac{1}{2} \cdot 1,46^2 = 1,0658$, dus

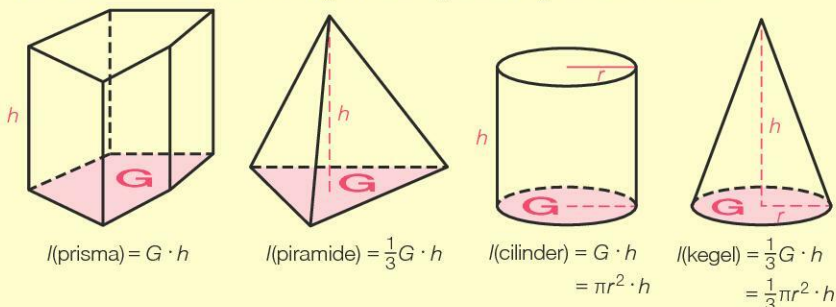
$O(ABCDEFGH) = 5^2 - 4 \cdot 1,0658 \approx 20,7$.



figuur 15.72

Inhoudsformules

Voor de inhoud van ruimtefiguren ken je de volgende formules.



figuur 15.73

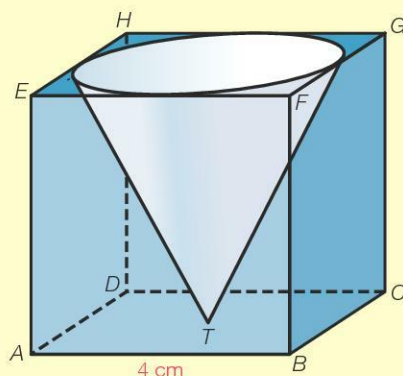
In figuur 15.74 is uit een massieve kubus met ribbe 4 cm een kegel weggehaald. Het grondvlak van de kegel past precies in het bovenvlak van de kubus en de top T van de kegel is het midden van het grondvlak van de kubus.

Gevraagd wordt de inhoud van de overgebleven ruimtefiguur te berekenen.

De inhoud van de kubus is $4^3 = 64 \text{ cm}^3$ en de

inhoud van de kegel is $\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{16}{3}\pi \text{ cm}^3$.

Dus de gevraagde inhoud is $64 - \frac{16}{3}\pi \approx 47,245 \text{ cm}^3$.



figuur 15.74

Gelijkvormige driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee gelijke hoeken hebben. De ene driehoek is dan een vergroting van de andere driehoek.

In figuur 15.75 is $\triangle ABC$ een vergroting van $\triangle AED$ en ook een vergroting van $\triangle AFG$.

Gevraagd wordt om EG te berekenen.

In $\triangle ABC$ is $AC^2 + BC^2 = AB^2$, dus

$AC^2 + 5^2 = 13^2$ en dit geeft $AC = 12$.

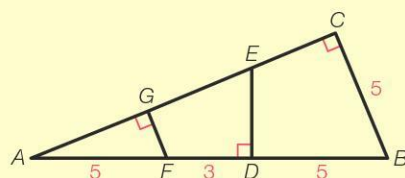
$\triangle AFG$ is een 'vergroting' van $\triangle ABC$ met $k = \frac{AF}{AB} = \frac{5}{13}$,

dus $AG = \frac{5}{13} \cdot AC = \frac{5}{13} \cdot 12 = \frac{60}{13}$.

$\triangle AED$ is een vergroting van $\triangle ABC$ met $k = \frac{AD}{AB} = \frac{8}{13} = \frac{2}{3}$,

dus $AE = \frac{2}{3} \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$.

Dus $EG = AE - AG = 8 - \frac{60}{13} \approx 4,05$.



figuur 15.75

De gulden snede

De gulden snede is de verdeling van een lijnstuk waarbij de verhouding tussen het grootste en het kleinste deel gelijk is aan de verhouding tussen het hele lijnstuk en het grootste deel.

Dus in de figuur hiernaast geldt $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.

Neem je $b = 1$ en $a = \varphi$, dan krijg je $\frac{\varphi}{1} = \frac{\varphi+1}{\varphi}$

en dit geeft $\varphi^2 = \varphi + 1$. De positieve oplossing van deze vergelijking is $\varphi \approx 1,618$.

Het getal $\varphi \approx 1,618$ wordt het gulden getal genoemd.



figuur 15.76

Vergrotingsfactoren

Worden de afmetingen van een ruimtefiguur met factor k vermenigvuldigd, dan wordt de oppervlakte met k^2 vermenigvuldigd en de inhoud met k^3 .

Er is een maquette gemaakt van een gebouw op schaal 1 : 50.

Gegeven is dat de oppervlakte van het dak van het gebouw 120 m^2 is.

In de maquette is dan de oppervlakte van het dak

$$\left(\frac{1}{50}\right)^2 \cdot 120 \text{ m}^2 = 0,048 \text{ m}^2 = 480 \text{ cm}^2.$$

Verder is gegeven dat de inhoud van de maquette $11,2 \text{ dm}^3$ is.

Hieruit volgt dat de inhoud van het gebouw

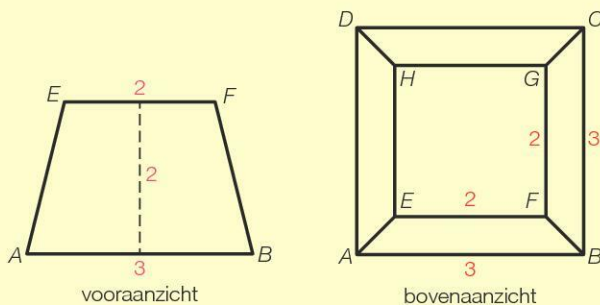
$$50^3 \cdot 11,2 \text{ dm}^3 = 1\,400\,000 \text{ dm}^3 = 1400 \text{ m}^3 \text{ is.}$$

Aanzichten

Van een ruimtefiguur zijn aanzichten te tekenen.

Hiernaast zie je een afgeknotten regelmatige vierzijdige piramide met $AB = 3$, $EF = 2$ en hoogte = 2.

Van deze afgeknotten piramide zijn hieronder het vooraanzicht en het bovenaanzicht getekend.



figuur 15.78

Je kunt het vooraanzicht gebruiken om de inhoud van de afgeknotten piramide te berekenen. Teken het vooraanzicht van de niet-afgeknotten piramide, noem de top T en de hoogte van $\triangle EFT$ h . Zie figuur 15.79.

$\triangle ABT$ is een vergroting van $\triangle EFT$ met

$$\text{vergrotingsfactor } \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

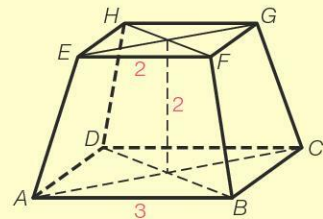
Er geldt dus $1\frac{1}{2}h = h + 2$ en dit geeft $h = 4$.

$I(\text{afgeknotten piramide})$

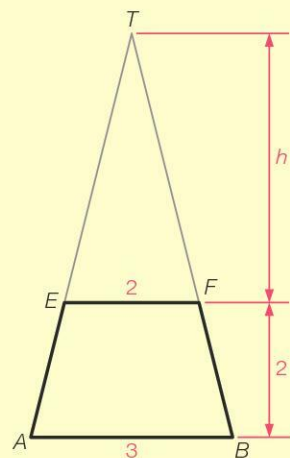
$$= I(\text{hele piramide}) - I(\text{bovenste piramide})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 4 = 18 - 5\frac{1}{3} = 12\frac{2}{3}$$

De inhoud van de afgeknotten piramide is dus $\frac{12\frac{2}{3}}{18} = \frac{19}{27}$ deel van de inhoud van de hele piramide.



figuur 15.77



figuur 15.79

Het getal $\frac{19}{27}$ kun je ook vinden zonder de afzonderlijke inhoudten te berekenen, door gebruik te maken van de vergrotingsfactor $\frac{2}{3}$.

Je krijgt

$$I(\text{bovenste piramide}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot I(\text{hele piramide}) = \frac{8}{27} \cdot I(\text{hele piramide}).$$

Dus

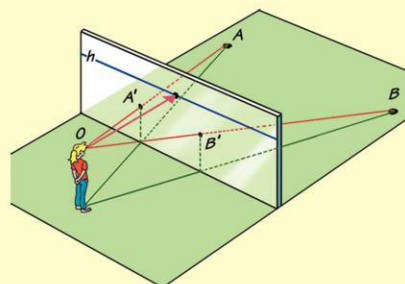
$$I(\text{afgeknotte piramide}) = \left(1 - \frac{8}{27}\right) \cdot I(\text{hele piramide}) = \frac{19}{27} \cdot I(\text{hele piramide}).$$

Centrale projectie

Een perspectiefafbeelding is gebaseerd op centrale projectie vanuit één punt op het tafereel, zie figuur 15.80.

Bij centrale projectie heb je te maken met de volgende eigenschappen.

- 1 De horizon in het tafereel ligt op ooghoogte en is evenwijdig met het horizontale vlak.
- 2 Als twee horizontale lijnen niet evenwijdig met het tafereel zijn, dan snijden in het tafereel de beelden elkaar op de horizon.
- 3 Alle onderling evenwijdige lijnen die evenwijdig met het tafereel zijn, worden als evenwijdige lijnen afgebeeld.



figuur 15.80

Op de foto hiernaast zie je het beeld 'De verwoeste stad' van Ossip Zadkine in Rotterdam. De foto is genomen vanaf een hoogte van 1,80 meter.

Door de horizon te tekenen en de lijnstukken AB en AC op te meten, kun je te weten te komen hoe hoog het beeld inclusief sokkel is.

De tweede voeg van onderen ligt op de foto zowel links als rechts van de hoek op één horizontale lijn. Deze voeg ligt dus op ooghoogte.

Opmeten geeft $AB = 1,4$ cm en

$AC = 7,3$ cm, dus het beeld is

$$\frac{7,3}{1,4} \cdot 1,80 \approx 9,4 \text{ meter hoog.}$$

Bij de berekening is gebruikgemaakt van de eigenschap dat de horizon op ooghoogte ligt.

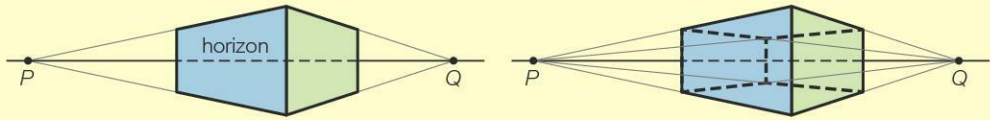


figuur 15.81

Perspectieftekenen

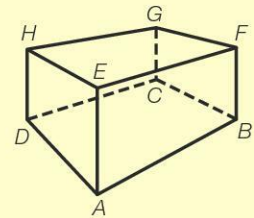
Hieronder is een perspectiefafbeelding van een balk getekend.

De verdwijnpunten P en Q van de horizontale ribben liggen op de horizon.

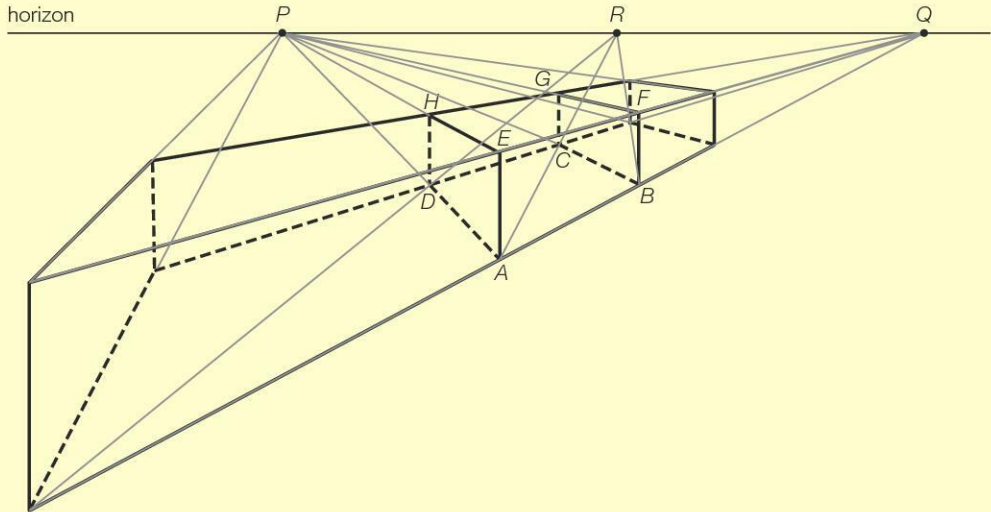


figuur 15.82

In figuur 15.83 is de balk $ABCD EFGH$ in perspectief getekend. Er worden twee dezelfde balken bijgeplaatst: één aan het zijvlak $BCGF$ en één aan het zijvlak $ADHE$. Hieronder zie je hoe deze balken moeten worden getekend in de perspectieftekening. Je maakt gebruik van de horizon en van het verdwijnpunt P van AD en BC , van het verdwijnpunt Q van AB en CD en van het verdwijnpunt R van AC .



figuur 15.83



figuur 15.84

47 2017-I

In figuur 15.85 zie je het kunstwerk ‘Seine’ van Ellsworth Kelly, waarin de schittering op het water van de rivier de Seine verbeeld is door middel van zwarte en witte vakjes die allemaal even groot zijn.



figuur 15.85

Het paneel is ingedeeld in 83 (verticale) kolommen en 41 (horizontale) rijen.

Rechthoeken waarvan de zijden een gulden-snede-verhouding hebben, worden vaak mooi gevonden. In figuur 15.86 zie je een rechthoek met korte zijde k en lange zijde l .

Voor een rechthoek met een gulden-snede-verhouding geldt altijd het volgende: de verhouding van de korte zijde k tot de lange zijde l is gelijk aan de verhouding van de lange zijde tot de korte en de lange zijde samen.

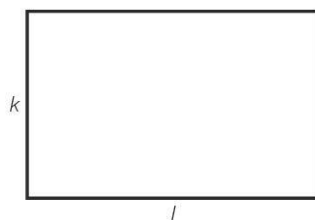
In formulevorm:

$$k : l = l : (k + l).$$

Het kunstwerk ‘Seine’ heeft als afmetingen 41,9 cm bij 114,9 cm.

Kelly heeft de zwarte en witte vakjes waaruit ‘Seine’ is opgebouwd niet vierkant maar rechthoekig gemaakt.

Onderzoek of zo’n vakje van het kunstwerk ‘Seine’ een gulden-snede-verhouding heeft.



figuur 15.86

48 2018-I

[► WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je de voet van een kunstwerk. Het onderste deel is een kubus met een ribbe van 20 cm. Het bovenste deel is een regelmatige vierzijdige piramide waarvan de hoogte 0,7071 keer de ribbe van de kubus is. In de figuur op het werkblad is een begin gemaakt van een aanzicht van de voet van het kunstwerk op schaal 1 : 4. Als kijkrichting is de richting van de pijl op de foto genomen.

Maak het aanzicht op het werkblad af. Licht je werkwijze toe.



figuur 15.87

49 2017-I

[► WERKBLAD] In figuur 15.88 zie je een kunstwerk van Jan van Munster in de vorm van de letters I en K.

Op het werkblad staat een bovenaanzicht van dit kunstwerk op schaal 1 : 20. Het kunstwerk is 50 cm hoog.

Je ziet op het werkblad enkele maten in cm staan van het kunstwerk. Die maten mag je gebruiken bij de volgende vragen.

- a** Teken op het werkblad het rechterzijaanzicht van de letter K op schaal 1 : 20.



figuur 15.88

In de figuur op het werkblad is de breedte van de letter K aangegeven. Bovendien zijn in de letter K twee stippellijnen getekend. Deze stippellijnen maken een rechte hoek met elkaar en het snijpunt ligt precies op de linker rand van de letter K. Er zijn ook nog enkele andere rechte hoeken gegeven. En zoals je ziet, zijn er 8 stukjes van even grote lengte bij de letter K. Je kunt nu aantonen dat elk van deze stukjes ongeveer 35,4 cm is en de breedte van de letter K van het kunstwerk ongeveer 121 cm is.

- b** Laat zien hoe die 35,4 cm en die 121 cm met deze gegevens berekend kunnen worden.

Op het werkblad is de letter K in perspectief getekend.

- c** Teken de letter I op de juiste plaats erbij in deze tekening.

Jan van Munster heeft ook twee IK-paviljoens laten bouwen: twee expositiegebouwen in de vorm van de letters I en K. Zie figuur 15.89. Neem aan dat deze paviljoens een vergroting zijn van het IK-kunstwerk waarbij alle lengtes 8 maal zo groot zijn en dat de dikte van de wanden verwaarloosbaar is.

- d** Bereken de vloeroppervlakte van het paviljoen van de letter I in m² nauwkeurig.



figuur 15.89

50 2018-I

[► WERKBLAD] Op de foto zie je een schilderij van Francis Bacon. Deze foto staat ook vergroot op het werkblad. Een man bevindt zich voor een ruimte met donkere wanden.

Als je aanneemt dat deze ruimte balkvormig is, kun je zien dat de kunstenaar deze ruimte niet precies volgens de regels van het perspectief heeft getekend.

- a** Leg met behulp van de foto op het werkblad uit hoe je dit kunt zien.

Op het werkblad zie je het begin van een juiste perspectieftekening van een model van de balkvormige ruimte op het schilderij. Alleen de achterwand en de vloer zijn aangegeven.

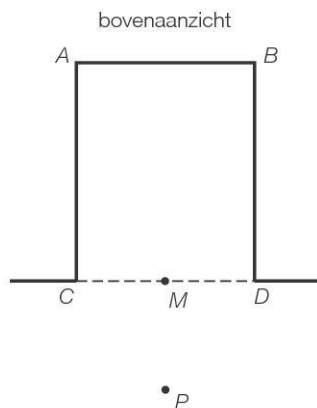
- b** Maak deze perspectieftekening correct af.



figuur 15.90

De man op het schilderij staat voor de balkvormige ruimte. Stel dat het Bacons bedoeling was om de man midden voor de balkvormige ruimte te plaatsen op een afstand die de helft is van de diepte van de ruimte. In de figuur zie je een bovenaanzicht van de balkvormige ruimte waarin een punt P is getekend. De afstand van P tot de voorkant van de ruimte is de helft van de diepte van deze ruimte, dus $MP = 0,5 \cdot AC$.

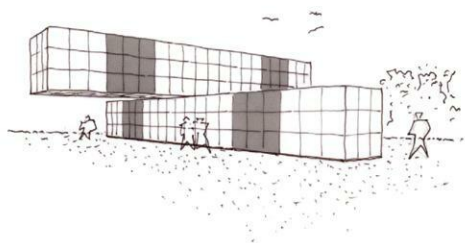
- c** Teken dit punt P in de perspectieftekening op het werkblad.



figuur 15.91

51 2017-II

[► WERKBLAD] De kunstenaar Stanley Brouwn heeft in 2004 een maquette voor een tentoonstellingspaviljoen gemaakt. Zie figuur 15.92. De maquette bestaat uit twee gelijke langwerpige bouwblokken waarvan het ene op de grond staat en het andere daar precies in het midden dwars overheen ligt.



figuur 15.92

De witte vierkanten in figuur 15.92 zouden in werkelijkheid platen moeten worden van 4×4 SB-voet. Eén SB-voet is 26 cm, in het eigen maatsysteem van Stanley Brouwn. De grijze vierkanten in figuur 15.92 zijn de ramen en hebben dezelfde afmetingen als de witte vierkanten. Zoals je in figuur 15.92 kunt zien, zijn beide bouwblokken 3 vierkanten hoog en breed en 21 vierkanten lang.

- a** Bereken hoe groot de totale inhoud van het tentoonstellingspaviljoen in werkelijkheid zou moeten worden. Geef je antwoord in hele m^3 .

In werkelijkheid is er gekozen voor vierkanten van 5×5 SB-voet.

In 2005 is het tentoonstellingspaviljoen geopend. Zie de foto.



figuur 15.93

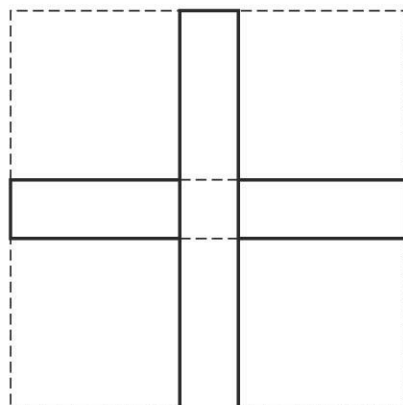
Deze foto van het tentoonstellingspaviljoen staat ook op het werkblad.

- b** Onderzoek met behulp van de foto op het werkblad, zonder een horizon te tekenen, op welke hoogte die foto genomen is. Rond je antwoord af op hele dm.

Op het werkblad moet het tentoonstellingspaviljoen in perspectief getekend worden.

De onderste balk, de plaats waar de bovenste balk op de onderste balk ligt, een paar hulplijnen om het verdwijnpunt V te vinden en het verdwijnpunt V zelf zijn al getekend. De balk die erbovenop komt te liggen moet zo getekend worden dat het tentoonstellingspaviljoen het bovenaanzicht heeft van figuur 15.94 hiernaast.

- c** Maak de perspectieftekening van het gehele tentoonstellingspaviljoen op het werkblad af.



figuur 15.94

52 2018-II

[► WERKBLAD] Op de foto in figuur 15.95 zie je de piramide van het Louvre, die fungeert als ingang voor het museum. Het is een regelmatige vierzijdige piramide met zijvlakken die bestaan uit ruitvormige en driehoekige glazen panelen.



figuur 15.95

Sommige mensen beweren dat er in totaal 666 glazen panelen in de wanden verwerkt zijn. Dit is echter niet juist. De drie zijvlakken zonder ingang hebben aan de onderkant elk 18 driehoekige panelen en daarboven 17 rijen ruitvormige panelen. De onderste van deze 17 rijen heeft 17 ruitvormige panelen en de rijen daarboven hebben telkens één paneel minder.

Het vierde zijvlak is op dezelfde manier opgebouwd, maar het heeft 2 driehoekige en 9 ruitvormige panelen minder doordat daar een opening is voor de ingang.

Voor de som van de getallen 1 tot en met n geldt de formule

$$\text{som} = \frac{1}{2}n(1 + n).$$

a Bereken het totale aantal glazen panelen in de wanden van de piramide.

In juni 2016 liet de Franse kunstenaar JR het voorste zijvlak van de piramide beplakken met een reusachtige foto van het gebouw dat zich achter de piramide bevindt. Zie de foto's in de figuren 15.96 en 15.97.



figuur 15.96



figuur 15.97

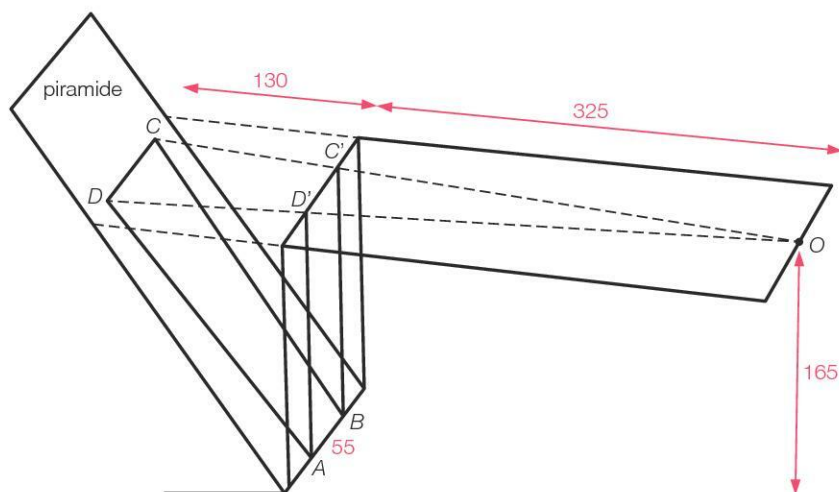
Precies vanaf de plek waar de foto hierboven is gemaakt, leek het net alsof de piramide verdwenen was. De maker van de foto hieronder stond niet precies op deze plek, want de foto op de piramide sluit niet precies aan bij het gebouw daarachter.



figuur 15.98

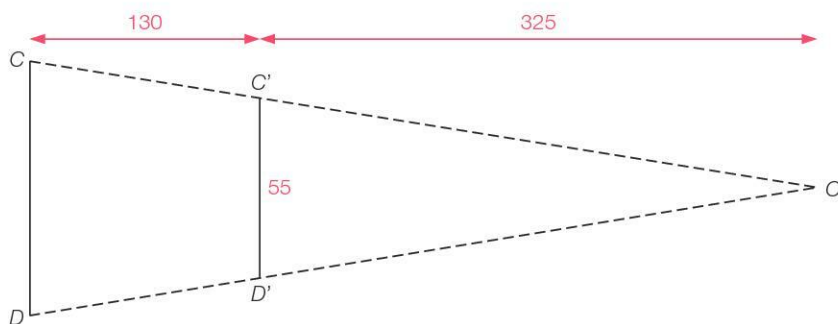
- b** Leg met behulp van een schets van het zijaanzicht van de situatie uit of de maker van de foto in figuur 15.98 dichterbij de piramide stond dan de maker van de foto in figuur 15.97 of juist verder weg.

Als het voorste zijvlak van de piramide verticaal was geweest, had de kunstenaar de foto van het gebouw gewoon vergroot op die verticale wand kunnen plakken. Omdat het voorste zijvlak van de piramide schuin is, moest hij de foto bewerken om het juiste effect te krijgen. Om hiervan een indruk te krijgen is in figuur 15.99 een vereenvoudigde situatie weergegeven. De vierhoek $ABCD$ op de piramide wordt door het oog waargenomen als de verticaal staande rechthoek $ABC'D'$.



figuur 15.99

Het oog bevindt zich op 165 cm hoogte in punt O . Het vlak door O , C , D , C' en D' is horizontaal. In figuur 15.100 is dit vlak apart getekend met daarin aangegeven de maten in cm.



figuur 15.100

Op het werkblad is een begin gemaakt met de tekening van vierhoek $ABCD$ op schaal 1 : 20.

- c Maak de tekening op het werkblad af. Licht je antwoord toe met berekeningen.

[► WERKBLAD] Nabij Rushton in Engeland staat een bijzonder gebouw: Triangular Lodge.

Voor de ontwerper van het gebouw had het getal 3 zoveel betekenis dat alles van dit gebouw in het teken staat van 3.



figuur 15.101

Het grondvlak van het gebouw is een gelijkzijdige driehoek waarvan de zijden 33 feet lang zijn. Eén foot is gelijk aan 30,48 cm. De oppervlakte van dat grondvlak is 471,55 square feet. Dat is ongeveer 44 m².

- a** Bereken, uitgaande van een oppervlakte van 471,55 square feet, de oppervlakte in m². Geef je antwoord in één decimaal.

Bovenstaande foto staat ook op het werkblad. De hoogte aan de buitenkant tot aan de dakrand is 8,22 meter.

- b** Bereken met behulp van de foto op het werkblad op welke hoogte de fotograaf de foto heeft genomen. Geef je antwoord in gehele cm.

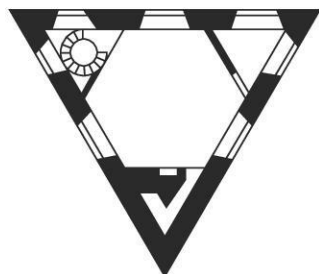
De buitenmuren zijn erg dik. Daardoor is de binnenruimte een gelijkzijdige driehoek met zijden van 8,22 m. Deze ruimte wordt door drie dunnere muren verdeeld in een regelmatige zeshoek en drie gelijkzijdige driehoeken. Zie de figuur.

Op het werkblad is het grondvlak van het gebouw, de gelijkzijdige driehoek dus, in perspectief getekend. Je ziet ook de horizon in de tekening.

Een van de zijden is, zoals je ziet, evenwijdig met de horizon getekend.

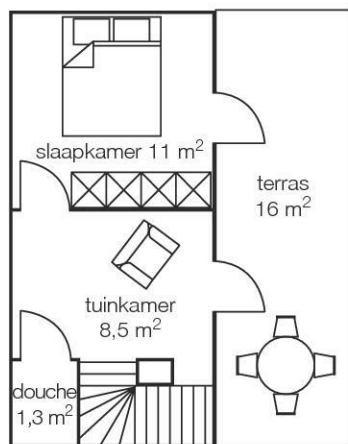
Wat nog niet getekend is, is de regelmatige zeshoek (de zeshoekige kamer waarvan hierboven sprake was).

- c** Teken de regelmatige zeshoek in de driehoek. Je mag daarbij de dikte van de muren verwaarlozen. Licht je werkwijze toe.

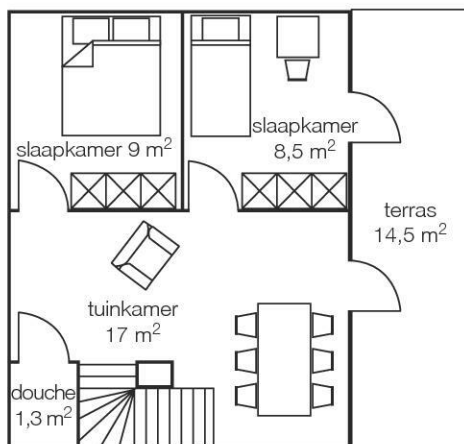


figuur 15.102

[► WERKBLAD] Een architectenbureau heeft voor volle steden een mogelijkheid bedacht om huizen met een plat dak uit te breiden: een dakopbouw die relatief weinig kost, snel te plaatsen is en gemakkelijk is aan te passen aan de individuele wensen van een klant. Aan de hand van deze wensen wordt door middel van een computerprogramma voor elke klant een ontwerp gemaakt, uitgaande van een aantal basismodellen. Bij een van de modellen kan een klant kiezen voor een kleine dakopbouw die, als er nog ruimte is op het platte dak, later eventueel uit te breiden is. In figuur 15.103 zie je de plattegrond van deze dakopbouw met een buitenterras vóór de uitbreiding. In figuur 15.104 zie je de plattegrond met een buitenterras ná de uitbreiding. In deze figuren staan ook oppervlaktes vermeld. De dakopbouw heeft overal een binnenhogte van 2,60 meter, zowel voor als na de uitbreiding.



figuur 15.103



figuur 15.104

Door de uitbreiding veranderen de oppervlaktes van douche en trapgat niet.

- a Bereken met hoeveel m^3 de inhoud van het binnengedeelte van de dakopbouw toeneemt bij de uitbreiding.

In figuur 15.105 zie je een perspectieftekening van een ander basismodel. In deze figuur zie je dat de lengte van de staande balk van dit basismodel 2,90 meter is.



figuur 15.105

Voor het in figuur 15.105 gekozen perspectief – waarbij de horizon horizontaal loopt – heeft men in het computerprogramma een denkbeeldig punt aan moeten geven van waaruit het perspectief getekend moest worden.

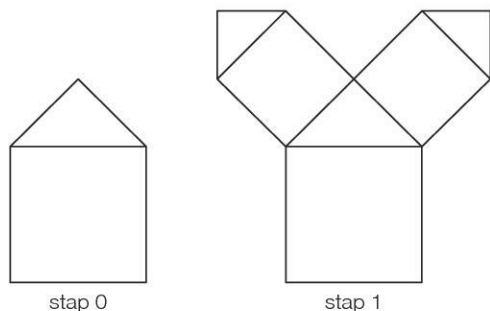
- b** Bereken met behulp van de figuur op het werkblad op welke hoogte dit denkbeeldige punt gekozen is. Geef je antwoord in gehele meters.

De dakopbouw is dus naar wens aan te passen. Een potentiële klant wil een beeld krijgen hoe de dakopbouw eruit zou zien als het basismodel van figuur 15.105 wordt uitgebreid met een piramidevormig dak. Dit piramidevormige dak wordt op de bruine dakrand boven de kamer geplaatst waardoor de hele dakopbouw anderhalf keer zo hoog wordt. De top T van het piramidevormige dak komt precies boven het midden van het huidige dak van de opbouw. Figuur 15.105 staat nogmaals op het werkblad.

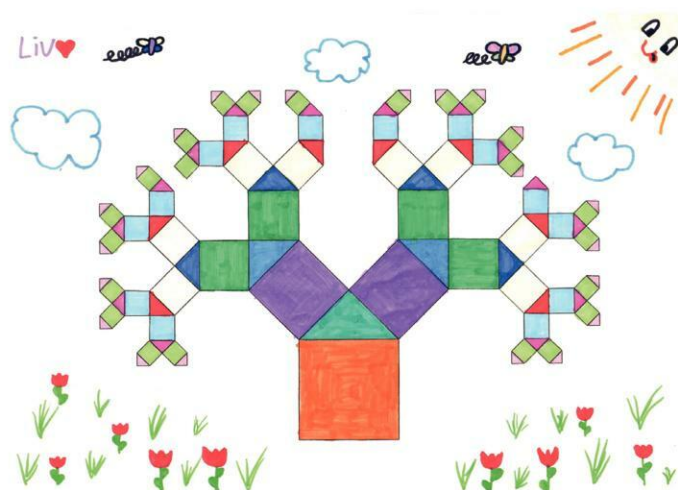
- c** Teken de top T en daarna de rest van het piramidevormige dak in de figuur op het werkblad. Licht je werkwijze toe.

55 2019-II

Veel mensen hebben weleens de boom van Pythagoras gezien. Deze boom bestaat uit vierkanten en gelijkbenige rechthoekige driehoeken. In figuur 15.106 staat het begin van zo'n boom en in figuur 15.107 een door Liv verder uitgewerkte tekening van die boom.



figuur 15.106



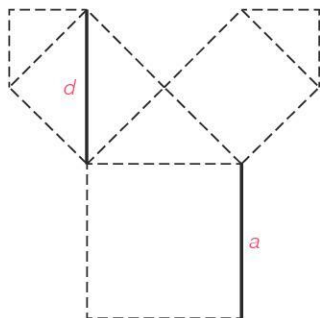
figuur 15.107

De boom in figuur 15.107 begint onderaan in het midden van de lange zijde van het papier met een vierkant en daarop een passende gelijkbenige rechthoekige driehoek. Het vierkant en de driehoek samen noemen we stap 0. Bij iedere volgende stap komt er op elke rechthoekszijde van de driehoek steeds een vierkant met daarop weer een passende driehoek bij. Het vierkant past steeds precies op de rechthoekszijde. Zie ook figuur 15.106.

Je kunt aantonen dat de oppervlaktes van de vierkanten in elke volgende stap half zo groot worden. Anders gezegd: je kunt aantonen dat, als we de oppervlakte van een vierkant a^2 noemen, de oppervlakte van het vierkant in de volgende stap $\frac{1}{2}a^2$ is.

a Toon dit aan.

Een gevolg hiervan is dat de lengte d van de diagonaal in het vierkant in de volgende stap precies gelijk is aan de hoogte a van het vierkant in de vorige stap. Zie figuur 15.108.



figuur 15.108

Hans wil ook een boom van Pythagoras tekenen en begint in het midden van de onderkant van zijn papier met een onderste vierkant van 10 cm bij 10 cm. Hij heeft een vel papier met afmetingen 420 mm bij 594 mm tot zijn beschikking. Hij vraagt zich af of hij wel tot en met stap 5 kan komen met zijn boom. Hij zorgt ervoor dat de zijde van 594 mm de onderkant van zijn tekenpapier is.

- b** Onderzoek met een berekening of de hoogte van deze boom van Pythagoras tot en met stap 5 op dit vel past.

Gemengde opgaven

12 Rijen

- 1** Gegeven zijn de rijen A_n , $v(n)$ en $a(t)$.

A_n : 1000, 977, 954, 931, 908, ...

$v(n)$: 1000; 960; 921,6; 884,73; 849,34656; ...

$a(t) = -t^2 + 18t - 45$

- a** Hoeveel positieve termen heeft de rij A_n ?
- b** Wat is de eerste term van de rij $v(n)$ die kleiner is dan 500?
- c** Hoeveel termen van de rij $a(t)$ zijn groter dan 30?

- 2** Gegeven zijn de rijen u_n en v_n .

u_n : 300, 306, 312, 318, 324, ...

v_n : 0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 1,6; ...

- a** Stel van beide rijen zowel de directe als de recursieve formule op.
Neem als begintermen u_1 en v_1 .
- b** Vanaf welke n is $v_n > u_n$?

- 3** Van een rij is $u_2 = 12$ en $u_7 = 2916$.

- a** Neem aan dat u_n een rij is met constant verschil en beginterm u_0 .
Stel de directe formule van u_n op.
- b** Neem aan dat u_n een rij is met constante factor en beginterm u_1 .
Stel de directe formule van u_n op.

- 4** Stijn doet mee aan een hardloophwedstrijd over 15 km. Hij gebruikt een app op zijn telefoon die na elke kilometer meldt hoelang hij over die kilometer heeft gedaan. De eerste kilometer liep hij in 3 minuten en 55 seconden. Elke kilometer daarna liep hij drie seconden langzamer dan de kilometer daarvoor.

- a** Stel zowel de recursieve als de directe formule op van de tijd t in seconden waarin Stijn de n^e kilometer loopt.
- b** Hoelang doet Stijn over de zevende kilometer?

Stijn bedenkt dat hij misschien beter langzamer had kunnen beginnen, om vervolgens sneller te kunnen eindigen. Tijdens een trainingsloop van 15 kilometer loopt hij een tijd van 4 minuten en 20 seconden over de eerste kilometer. Vervolgens loopt hij elke volgende kilometer twee seconden sneller dan de kilometer daarvoor.

- c** Wat is de eerste kilometer die Stijn sneller loopt dan de overeenkomstige kilometer tijdens de wedstrijd?

5 Maya heeft op 1 januari 2020 een bedrag van 10 000 euro op de bank gezet tegen 0,25% rente per jaar. B_n is het saldo van Maya's rekening in euro's, n jaar na 1 januari 2020.

- Stel de directe formule op van B_n .
- Hoeveel is het saldo op 1 januari 2030?
- In welk jaar staat er voor het eerst meer dan 10 500 euro op de rekening?

6 Hiernaast zie je de eerste vier rijen van een kaartenhuis. Het aantal kaarten in een kaartenhuis met n rijen is te berekenen met de formule $u_n = 1,5n^2 + 0,5n$.

- Uit hoeveel kaarten bestaat een kaartenhuis met zes rijen?
- Een pak kaarten bestaat uit 54 kaarten. Hoeveel rijen kan een kaartenhuis maximaal hebben als daarvoor vijf pakjes kaarten worden gebruikt?
- Uit hoeveel kaarten bestaat de tiende rij van een kaartenhuis?



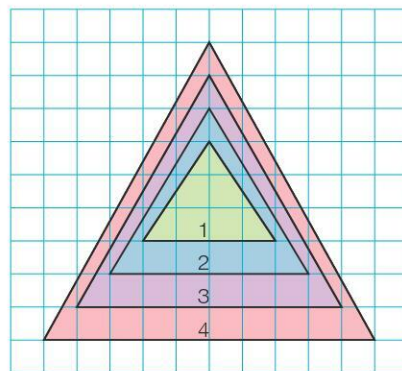
figuur G.1

7 In de figuur hiernaast zie je steeds groter wordende gelijkbenige driehoeken. Driehoek 1 heeft een basis van 4 cm en een hoogte van 3 cm. De basis van de n^e driehoek is B_n cm. De hoogte van de n^e driehoek is H_n cm.

- Stel zowel van B_n als van H_n een recursieve en een directe formule op.

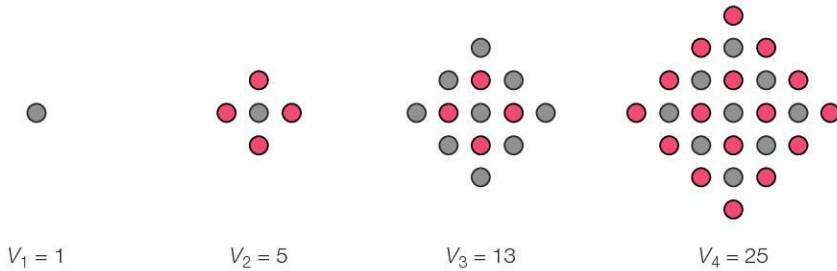
De oppervlakte van een driehoek is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte}$. De oppervlakte van de n^e driehoek is O_n cm². Voor O_n geldt de directe formule $O_n = 2n^2 + 3n + 1$.

- Laat zien hoe deze formule uit de directe formules van B_n en H_n volgt.
- Vanaf welke n is $O_n > 250$?
- Leid de recursieve formule van O_n af met behulp van de directe formule.
- Bereken het verschil in oppervlakte tussen de 15^e en 16^e driehoek.



figuur G.2

- 8** In figuur G.3 staan de eerste vier *gecentreerde vierkantsgetallen*.

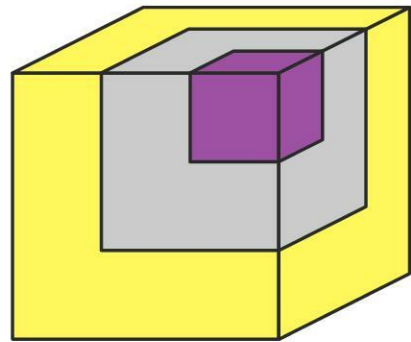


figuur G.3

Het n° gecentreerde vierkantsgetal V_n is te berekenen met de directe formule $V_n = 2n^2 - 2n + 1$.

- Bereken het twaalfde gecentreerde vierkantsgetal.
- Het hoeveelste gecentreerde vierkantsgetal is 1985?
- Leid de recursieve formule van V_n af met behulp van de directe formule.

- 9** In de figuur hiernaast zie je de eerste drie elementen van een kubusvormig object. Het eerste element is de paarse kubus. De ribbe van de paarse kubus is 3 cm. Het tweede, grijze element vormt samen met het eerste element een kubus met ribbe 6 cm. Het derde, gele element vormt samen met de eerste twee elementen een kubus met ribbe 9 cm. En zo verder. De oppervlakte O in cm^2 van de bovenkant van het n° element is $O(n)$. Zo is $O(3) = 9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45 \text{ cm}^2$.



figuur G.4

- Stel van $O(n)$ een recursieve en een directe formule op.

Bij de inhoud I in cm^3 van het n° element hoort de formule $I(n) = 81n^2 - 81n + 27$.

- Welk element is het eerste element met een inhoud van meer dan 10 liter?
- Leid de recursieve formule van $I(n)$ af met behulp van de directe formule.
- Geef de directe formule voor de totale inhoud T van de eerste n elementen samen.

De elementen zijn gemaakt van beton met een dichtheid van $2,3 \text{ kg/dm}^3$.

- Bereken in grammen nauwkeurig het gewicht van het zesde element.
- Welk element is het eerste element dat meer weegt dan de eerste tien elementen samen?

10 Hiernaast zie je een foto van een zogenaamde *hypercone*, ontworpen door Simon Thomas.

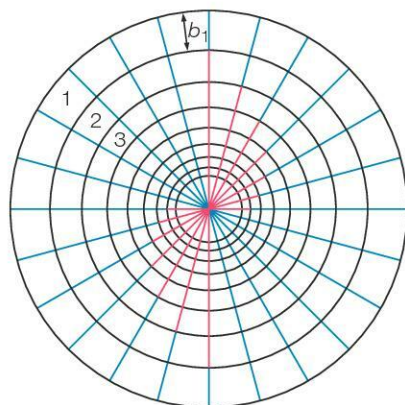
Een hypercone bestaat uit steeds kleiner wordende ringen die ten opzichte van elkaar over een bepaalde as zijn gedraaid. Door te variëren met het aantal ringen en de ligging van de assen, zijn verschillende hypercones te maken, allemaal volgens een vast stappenplan:

- 1 Verdeel een ronde schijf in ringen met een breedte die naar het middelpunt toe exponentieel afneemt.
- 2 Verdeel de schijf in een aantal even grote sectoren.
- 3 Gebruik de snijpunten van de ringen en sectoren om de assen te vinden waar elke ring om wordt gedraaid.
- 4 Draai alle ringen over een vaste hoek om hun eigen as.



In figuur G.5 zie je de opbouw van een hypercone met een diameter van 50 cm, die is opgedeeld in 8 ringen. In de figuur zijn alleen de ringen 1, 2 en 3 voorzien van een nummer. De assen waar de ringen om worden gedraaid zijn roodgekleurd. Zo wordt ring 2 gedraaid om de verticale as. Ring 1 wordt niet gedraaid. Voor de buitendiameter U in cm van de n^e ring

geldt de recursieve formule
$$\begin{cases} U_n = 0,8 \cdot U_{n-1} \\ U_1 = 50 \end{cases}$$



figuur G.5

- a Stel de directe formule van U_n op.
- b Stel de directe formule op van de binnendiameter I_n in cm van de n^e ring.
- c De hypercone is gemaakt van 6 mm dik plaatstaal met een dichtheid van $7,8 \text{ kg/dm}^3$. Bereken in grammen nauwkeurig het gewicht van de 4^e ring. Gebruik dat de oppervlakte O van een cirkel met diameter d gelijk is aan
$$O = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$
- d In de figuur is ook de breedte b_1 van ring 1 aangegeven. De directe formule van de breedte b_n van de n^e ring is te schrijven in de vorm
$$b_n = a \cdot r^n.$$
 Bereken a en r .

13 Meetkundige figuren

- 11** [**► WERKBLAD**] In het dorpje Gelselaar (Gelderland) staat een bankje bij een speelveld voor levend ganzenbord. Zie de foto hiernaast. Het zitvlak van het bankje bestaat uit drie stukken, elk met een dikte van 5 cm. Het middelste stuk is vierkant met een zijde van 80 cm en de andere twee stukken zijn rechthoekig met zijden van 80 cm en 40 cm.



figuur G.6

- Teken het bovenaanzicht van het bankje op schaal 1 : 20.
- Het zitvlak is gemaakt van beton met een dichtheid van $2,8 \text{ gram/cm}^3$. Bereken het gewicht van het zitvlak.
- Op het werkblad is het vierkante deel van het zitvlak van het bankje in perspectief getekend. Maak de perspectieftekening van het zitvlak af. Je hoeft geen rekening te houden met de dikte van het zitvlak.

- 12** [**► WERKBLAD**] Op de Culture Campsite in Rotterdam staat een slaapcabine met de naam Honeycomb, ontworpen door architect Hans Runge. Zie de foto hiernaast. De slaapcabine is bij benadering een prisma met als grondvlak een regelmatige zeshoek. De zijde van de regelmatige zeshoek is 115 cm en de diepte van het prisma is 240 cm. Het prisma staat op poten. Je bereikt de deur via een trap. Op de foto zie je links van de slaapcabine een overkapping. De overkapping, de trap en de poten laten we in deze opgave buiten beschouwing.



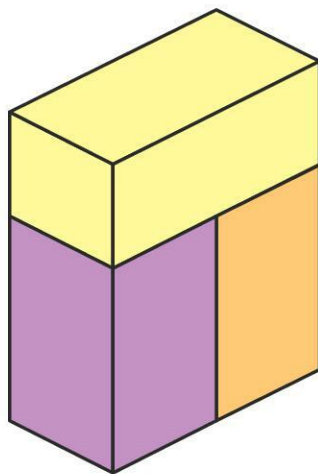
figuur G.7

- Teken op schaal 1 : 50 het voor- en het zijaanzicht van de slaapcabine.

Het bed in de slaapcabine is overdwars geplaatst en heeft aan de bovenkant een lengte van 2,0 m. Het past precies tussen twee zijden van de zeshoek.

- Teken in het vooraanzicht de positie van de bovenkant van het bed.
- Bereken de inhoud van de slaapcabine. Geef het antwoord in m^3 en rond af op één decimaal.
- Op het werkblad is een begin gemaakt met de perspectieftekening van de slaapcabine. Maak de perspectieftekening af. Stippel de lijnstukken die je niet kunt zien.

- 13** [► WERKBLAD] In de figuur hiernaast zie je drie even grote, gestapelde balkjes. Op het werkblad is een begin gemaakt met de perspectieftekening van de balkjes. Maak de perspectieftekening af.



figuur G.8

- 14** [► WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je een rijtje identiek gevormde huizen. Op het werkblad staat een perspectieftekening van het linker huis.
- a** Teken op het werkblad de andere twee huizen.

Links van het linker huis staat een berging die vanaf de voorgevel tot precies halverwege het huis gebouwd is. De breedte van de berging is de helft van de breedte van het huis en de hoogte van de berging is een kwart van de hoogte van het huis.

- b** Teken de berging op het werkblad.

Op het werkblad is een begin gemaakt met een perspectieftekening van een balkvormige kamer in één van de huizen.

- c** Teken op het werkblad de rechter muur.

Judith wil het bovenste kwart van de drie muren in een andere kleur schilderen dan het onderste deel. Ze tekent daarom op deze muren een horizontale lijn op driekwart hoogte.

- d** Teken deze lijn in de perspectieftekening.

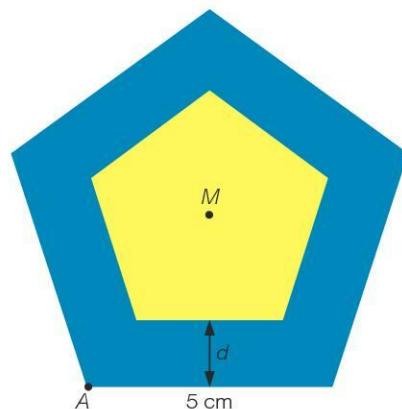


figuur G.9

- 15** In de figuur hiernaast zie je een regelmatige vijfhoek met zijde 5 cm. Daarbinnen is een kleinere regelmatige vijfhoek getekend, zo dat de gehele figuur symmetrisch is. De afstand tussen de zijden van de vijfhoeken is d cm en de afstand van het middelpunt M tot hoekpunt A is 4,25 cm.

Bereken d in twee decimalen in het geval

- a** de zijde van de kleine vijfhoek 2 cm is
b $O(\text{kleine vijfhoek}) = \frac{1}{3} \cdot O(\text{grote vijfhoek})$.



figuur G.10

- 16** [► WERKBLAD] Op de foto hieronder zie je het Vrijheidsbeeld in New York. Het hoogste gebouw in de verte is het One World Trade Centre. Het standbeeld van het Vrijheidsbeeld (dus zonder de sokkel) is 46 meter hoog en weegt 225 ton. Met sokkel (dus vanaf de begane grond) is de hoogte 93 meter. Het One World Trade Centre heeft een hoogte van 541 meter (inclusief de spits). De afstand (hemelsbreed) tussen het Vrijheidsbeeld en het One World Trade Centre is 3,7 km.



figuur G.11

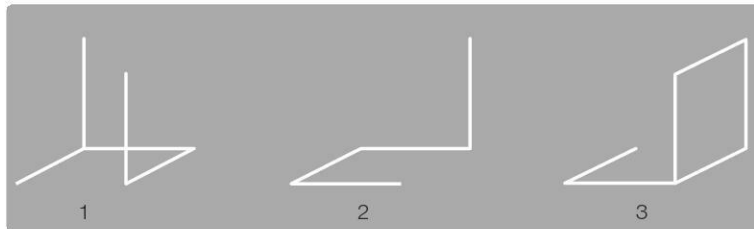
- a** Vanaf welke hoogte is de foto genomen?
b Vanaf welke afstand tot het Vrijheidsbeeld is de foto genomen?

Marijke heeft bij haar bezoek aan New York een miniatuur van het standbeeld van het Vrijheidsbeeld gekocht. Het beeldje is 30 cm hoog en weegt 1,5 kg.

Als het beeldje van hetzelfde materiaal zou zijn gemaakt als het echte standbeeld, zou het veel lichter zijn.

- c** Bereken hoeveel keer zo licht. Rond af op gehelen.

- 17** [► WERKBLAD] In de figuur hieronder zie je drie elementen die horen bij het kunstwerk Incomplete Open Cubes van Sol Lewitt. De elementen zijn kubussen waarvan niet alle ribben zijn gebruikt. Elke gebruikte ribbe is echter altijd verbonden met minstens één andere gebruikte ribbe.



figuur G.12

De ribbe van de kubussen is $1\frac{5}{8}$ inch.

- Teken op schaal 1 : 2 het voor-, rechterzij- en bovenaanzicht van de drie elementen hierboven. Gebruik dat 1 inch = 2,54 cm.
- Teken zelf een element met zes ribben, waarvan de drie aanzichten identiek zijn.
- Op het werkblad zie je een perspectieftekening van element 3. Er is in het computerprogramma dat gebruikt is om de tekening te maken een punt gekozen, van waaruit de perspectieftekening is opgebouwd. Bereken op welke hoogte dit punt gekozen is. Geef het antwoord in inch en rond af op één decimaal.

- 18** In de figuur hiernaast zie je de gulden gelijkbenige driehoek ABC . Dat wil zeggen dat geldt $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB} = \varphi$.

In driehoek ABC zijn de gulden gelijkbenige driehoeken BDA , DEB en EFD getekend. We noemen ABC de eerste driehoek, BDA de tweede driehoek, enzovoort. Er geldt $AB = 5$ cm.

- Bereken AC en BD . Rond af op twee decimalen.

Een zijde van een driehoek is, afgerond op drie decimalen, 0,618 keer zo groot als de overeenkomstige zijde van de voorafgaande driehoek.

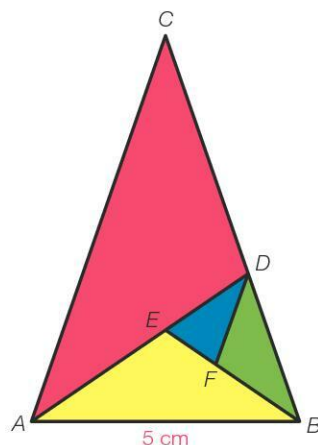
- Toon dit aan.

De oppervlakte van de eerste driehoek is, afgerond op drie decimalen, $19,235$ cm².

- Toon dit aan.

De directe formule voor de oppervlakte in cm² van de n^{e} driehoek is $O(n) = 50,36 \cdot 0,382^n$. Hierbij zijn de getallen 50,36 en 0,382 afgerond.

- Toon aan dat deze formule juist is.
- Vanaf welke driehoek is de oppervlakte kleiner dan 0,01 cm²?



figuur G.13

14 Werken met formules

19 a Schrijf $10 + \frac{6}{a} - \frac{5}{b-1}$ als één breuk.

b De formule $B = 20 + \frac{10x}{x + \frac{x^2}{y}}$ is te schrijven in de vorm $B = \frac{ax + by}{x + y}$.

Bereken a en b .

c De formule $C = \frac{2p^2 + 6}{p} - \frac{3}{2p}$ is te schrijven in de vorm $C = ap + \frac{b}{2p}$.

Bereken a en b .

d Deel $5x^2y$ uit bij de formule $D = \frac{3x^2 + xy + 10y}{5x^2y}$.

20 a Gegeven zijn de formules $P = 3t - 4s + 35$ en $5s - 2t = 10$.

Schrijf de formule van P in de vorm $P = at + b$.

b De formules $B = 3xy - 2x + 4$ en $2x - y = 1$ zijn te combineren tot de vorm $B = ax^2 + bx + c$.

Bereken a , b en c .

21 a Druk T uit in p als gegeven is dat $p = 3 - \frac{2}{3T + 5}$.

b Druk x uit in y als gegeven is dat $y = 3\sqrt{5 - 2x}$.

c Schrijf de formule $N = 10 \cdot \log(t) - 22,5$ in de vorm $t = a \cdot b^N$. Rond a af op gehele en b op drie decimalen.

22 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.

a $y = 100 - \frac{3}{x^2 + 1}$

b $y = 55 - \frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$

c $N = \frac{78}{24 - 16 \cdot 0,56^t}$

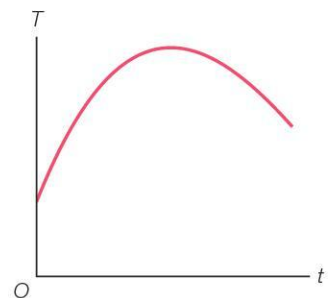
23 Voor de buitentemperatuur op een vroege lentedag gebruikt een weerman het model

$T = 0,001t^3 - 0,09t^2 + 1,8t + 5$. Hierin is T de buitentemperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in uren met $t = 0$ om 00:00 uur 's nachts. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken de gemiddelde verandering van T op het interval $[4, 8]$.

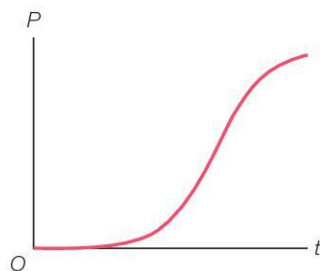
b Bereken de gemiddelde snelheid waarmee de temperatuur toeneemt tussen 00:00 uur en 03:00 uur.

c Bereken de gemiddelde snelheid waarmee de temperatuur verandert tussen 15:00 uur en 17:30 uur.



figuur G.14

- 24** In het jaar 2020 werden wereldwijd miljoenen mensen besmet met het coronavirus (SARS-CoV-2). Wiskundigen hebben voor dit soort uitbraken vele modellen ontwikkeld. In deze opgave bekijken we het logistische groeimodel. Dit model is geschikt om de ontwikkeling van het aantal mensen dat besmet is of ooit besmet is geweest met het virus in beeld te brengen. We gaan er hierbij van uit dat er geen maatregelen worden genomen om verspreiding van het virus tegen te gaan en dat uiteindelijk iedereen besmet zal worden.



figuur G.15

Voor het percentage van de bewoners van een dichtbevolkt gebied dat besmet is (geweest) geldt $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}}$ met t de tijd in dagen en $t = 0$ aan het begin van de eerste dag van de uitbraak.

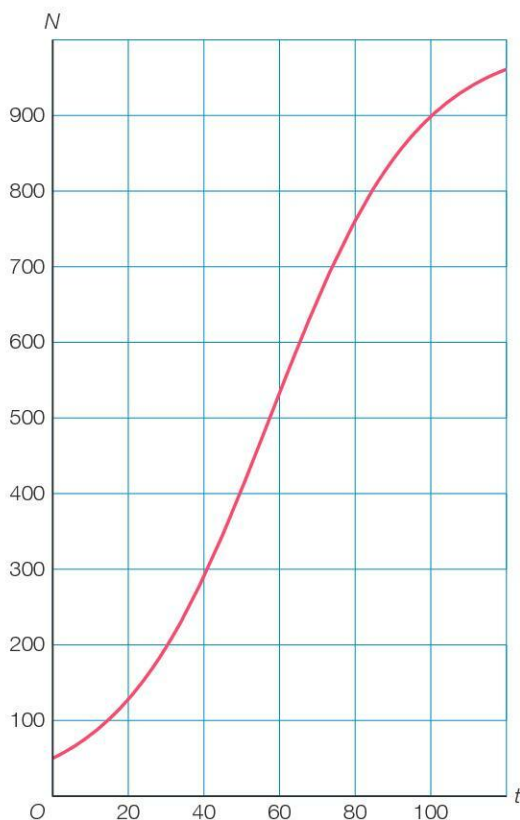
- Hoeveel procent van de bewoners is besmet (geweest) na 10 dagen?
- Na hoeveel dagen is een kwart van de bewoners besmet (geweest)?
- Bereken met behulp van de formule van P dat de grafiek van P stijgend is.
- Bereken met de formule van P dat uiteindelijk alle bewoners besmet zullen zijn (geweest).

- 25** [**WERKBLAD**] Bij een studie naar de groei van een aantal gistcellen in een afgesloten ruimte heeft een onderzoeker het model van figuur G.16 opgesteld. In dit model is N het aantal gistcellen en t de tijd in minuten.

- Met welke snelheid groeit de populatie op $t = 20$?
- Na hoeveel minuten is de groeisnelheid gelijk aan die op $t = 20$?
- Voor welke t groeit de populatie het snelst? Hoeveel is deze groeisnelheid?

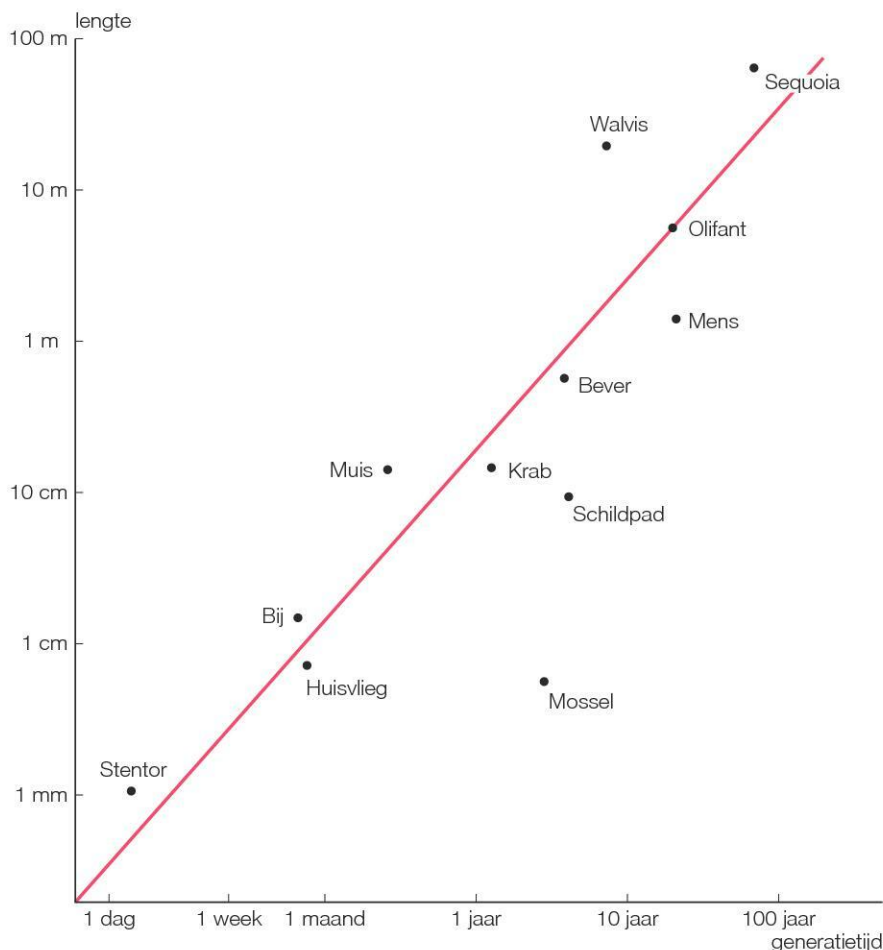
Na enige tijd gewacht te hebben, wil de onderzoeker elke 20 minuten een aantal gistcellen verwijderen om te gebruiken voor nieuwe populaties. Het aantal cellen neemt daarna weer toe volgens de grafiek.

- Stel dat de onderzoeker 40 minuten wacht en dat hij dan 200 gistcellen verwijdert. Kan hij dan elke 20 minuten weer 200 gistcellen verwijderen? Licht je antwoord toe.



figuur G.16

- 26** De generatietijd van een organisme is de tijdsduur tussen twee vergelijkbare ontwikkelingsstadia van opeenvolgende generaties. In combinatie met het aantal nakomelingen per generatie is het een maat voor de snelheid waarmee een soort zich kan uitbreiden onder ideale omstandigheden. Omdat mensen in Nederland gemiddeld rond de 30 jaar hun eerste kind krijgen, is de generatietijd voor mensen in Nederland 30 jaar. Een bacteriesoort die zich iedere 20 minuten splitst, heeft een generatietijd van 20 minuten. Zie de figuur.



figuur G.17

Zowel langs de horizontale as als de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

- a** Lees uit de figuur de generatietijd en lengte van een olifant af.

In zijn algemeenheid kun je stellen dat langere organismen meestal een langere generatietijd hebben. In de figuur is een trendlijn getekend. Bij deze trendlijn hoort de formule $\log(L) = -0,8 + 1,2 \cdot \log(T)$. Hierbij is L de lengte in meters en T de generatietijd in jaren.

- b** Beredeneer met behulp van de formule dat voor de trendlijn geldt: als T toeneemt, dan neemt L toe.

Sommige organismen wijken behoorlijk af van de trendlijn. Zo heeft de mossel een veel langere generatietijd dan je op basis van de lengte zou verwachten.

c Hoeveel keer zo lang is de generatietijd van de mossel in vergelijking met de generatietijd die volgens de trendlijn bij de lengte hoort?

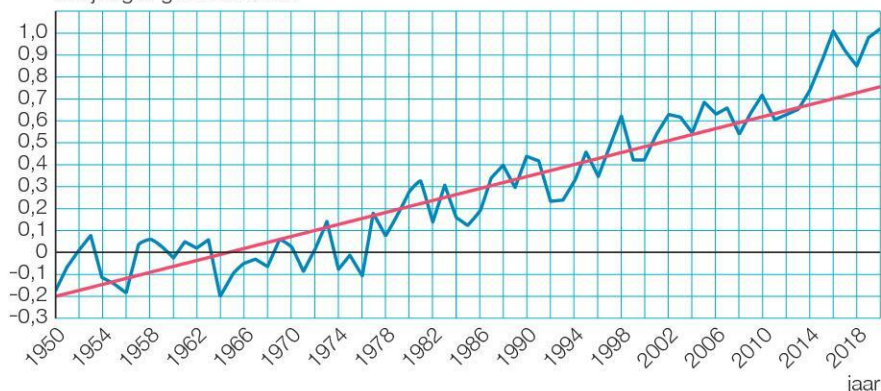
d Er geldt: als T twee keer zo groot wordt, dan neemt L met een vast percentage toe.

Onderzoek met behulp van de formule $\log(L) = -0,8 + 1,2 \cdot \log(T)$ wat dit percentage is.

e De formule $\log(L) = -0,8 + 1,2 \cdot \log(T)$ is te schrijven in de vorm $L = aT^{1,2}$. Bereken de waarde van a . Rond af op twee decimalen.

27 [►WERKBLAD] De NASA houdt al meer dan 100 jaar bij wat de gemiddelde jaartemperatuur op aarde is. In figuur G.18 is voor de jaren 1950-2020 af te lezen hoeveel graden Celsius de temperatuur in een jaar afweek van de gemiddelde jaartemperatuur op aarde over de jaren 1951-1980. Deze gemiddelde jaartemperatuur was $14,0^\circ\text{C}$. Zo kun je in de figuur bijvoorbeeld zien dat in 1976 de gemiddelde jaartemperatuur op aarde $0,1^\circ\text{C}$ lager was dan $14,0^\circ\text{C}$. Hoewel de afwijking voortdurend schommelt, is wel te zien dat deze op den duur steeds groter is geworden. Dit is aangegeven met de trendlijn. De figuur staat vergroot op het werkblad.

JAARLIJKSE AFWIJKING VAN DE GEMIDDELTE JAARTEMPERATUUR VAN 1951-1980
afwijking in graden Celsius



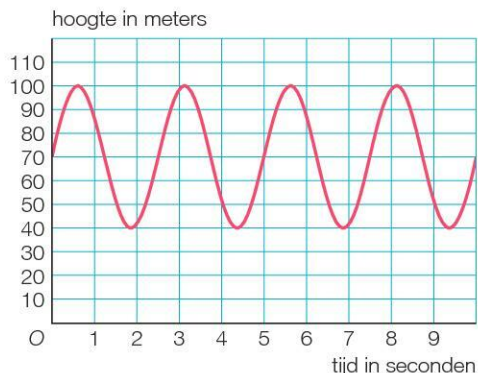
figuur G.18

- In welk jaar in de figuur was de gemiddelde jaartemperatuur op aarde het laagst? Hoeveel graden Celsius was het toen?
- Gedurende hoeveel jaren was de gemiddelde jaartemperatuur op aarde in de periode van 1950-2020 lager dan $14,0^\circ\text{C}$?
- In welk van de jaren 1964, 1976 of 1998 wijkt de temperatuur het meest af van de trendlijn?
- Stel de formule op van de trendlijn. Neem het temperatuurverschil V in $^\circ\text{C}$ en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1950. Rond zo nodig af op vier decimalen.
- In welk jaar zal, uitgaande van een ontwikkeling volgens de trendlijn, de gemiddelde jaartemperatuur op aarde voor het eerst $15,0^\circ\text{C}$ zijn?

- 28** De windmolen van figuur G.19 heeft drie rotoren die vastzitten aan een as. Het uiteinde van een rotor noemen we de rotortip. In figuur G.20 zie je op welke hoogte een rotortip zich gedurende een bepaalde tijd boven de grond bevindt.



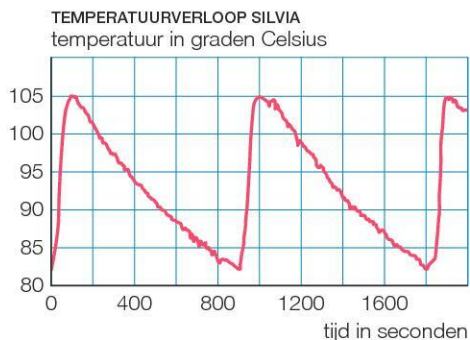
figuur G.19



figuur G.20

- Op welke hoogte zit de as van de windmolen?
- Wat is de lengte van een rotor?
- In hoeveel seconden draait de rotortip één keer rond?
- Bereken de snelheid van de rotortip. Geef het antwoord in m/s en rond af op gehelen.
- Op welke hoogte bevindt de rotortip zich op $t = 35$? En op $t = 64,375$?

- 29** Om met een espressoapparaat altijd even goede espresso te kunnen maken, is het belangrijk om zoveel mogelijk factoren constant te houden. Watertemperatuur speelt daarbij een belangrijke rol. Als bij espressoapparaat Silvia de temperatuur van het water in de boiler te laag wordt, dan wordt het water weer opgewarmd. Hiernaast zie je de grafiek voor het temperatuurverloop van het water in de boiler vanaf een moment dat er weer wordt opgewarmd.



figuur G.21

- Wat is de gemiddelde snelheid waarmee de temperatuur stijgt tijdens het opwarmen?
- Hoe groot is de gemiddelde verandering van de temperatuur tijdens het afkoelen?

Bij het opwarmen en afkoelen van het water hoort een periodiek verband.

- Hoe vaak zal het espressoapparaat per uur het water opwarmen?
- Je kunt alleen tijdens het afkoelen koffiezetten. De ideale temperatuur om koffie te zetten is tussen 90 en 96°C. Hoeveel procent van de tijd kun je koffiezetten bij de ideale temperatuur?

- 30** Bij webwinkel Imara heeft men na oprichting gedurende een jaar bijgehouden hoeveel klanten een account hebben op de website. Het aantal gebruikers A dat een account heeft, is gegeven door de formule $A = \frac{3000}{1 + 100 \cdot 0,97^t}$. Hierin is t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 januari 2021.
- a** Hoeveel klanten hebben een account op 25 januari?
 - b** Hoeveel dagen na 1 januari 2021 kan de webwinkel vieren dat er 2000 klanten zijn met een account?
 - c** Beredeneer aan de hand van de formule dat het aantal klanten met een account voortdurend toeneemt.
 - d** Op een gegeven moment bereikt het aantal klanten met een account een grenswaarde.
Bereken die grenswaarde.

15 Examentraining

- 31** Schrijf de formule $E = 15 \cdot (2N)^{-1,5}$ in de vorm $N = bE^c$. Rond b en c af op twee decimalen.
- 32** Gegeven is de formule $P = -0,005q^2 + 23q$.
Bereken de maximale waarde van P .
- 33** Een hoeveelheid van 649 is 5,64% van het totaal.
Hoeveel is het totaal?
- 34** In een rechthoekige driehoek met rechthoekszijde 6 en hypotenusa 10 past precies een cirkel met straal 2.
Bereken de oppervlakte van het vlakdeel V dat binnen de driehoek en buiten de cirkel ligt. Rond af op twee decimalen.
- 35** Gegeven is $3(P - 5) + 4(3Q + 1) = 61$.
Maak P vrij.
- 36** Hoeveel codes van vijf cijfers zijn er met de cijfers 0, 2, 4, 6 en 8?
- 37** Gegeven zijn de termen $u_2 = 6$ en $u_7 = 45,5625$. Deze termen horen bij een rij met constante factor.
Stel de directe formule op van u_n .
- 38** Herleid $\frac{2}{p} + 3p \cdot \frac{5q}{2p^2}$ tot één breuk.

- 39** België heeft een oppervlakte van $30\,689 \text{ km}^2$ en 11,46 miljoen inwoners. Hoeveel m^2 is de oppervlakte per Belg? Rond af op gehelen.
- 40** De formule $A = 0,18 \cdot (2x - 3) \cdot \frac{x}{0,06}$ is te herleiden tot de vorm $A = ax^2 + bx$.
Bereken a en b .
- 41** Gegeven is dat y evenredig is met x . Voor $x = 12$ is $y = 69$.
Bereken y voor $x = 42$.
- 42** Stel de formule op van de lijn k door de punten $A(2, 18)$ en $B(10, 30)$.
- 43** Herleid $5p \cdot \frac{3}{q} \cdot \frac{1-q}{q}$.
- 44** De staatsschuld van de VS neemt per seconde met 45 486 dollar toe.
Hoeveel dollar is dat per dag? Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.
- 45** Gegeven zijn de volgende afkortingen:
A: Anne is een jongen.
B: Anne spreekt Fries.
C: Anne houdt van zeilen.
Gegeven is de volgende bewering.
Als Anne een meisje is en geen Fries spreekt, dan houdt ze niet van zeilen.
Schrijf deze bewering met logische symbolen en de gegeven afkortingen.
- 46** Een hoeveelheid neemt af van 820 tot 750.
Hoeveel procent is de afname?
- 47** Het Yosemite National Park in Californië heeft een oppervlakte van 1167 square miles.
Hoeveel km^2 is dat? Rond af op gehelen. Gebruik dat 1 mile = 1,61 km.
- 48** De winst van een bedrijf was 31,25 miljoen euro in 2018. In 2019 was de winst 8,5% meer dan in 2018 en in 2020 was de winst 15,3% minder dan in 2019.
Hoeveel was de winst in 2020?
- 49** Werk de haakjes weg bij $(2a - 1)^2 - 4(3a - 1)$ en herleid.
- 50** In de gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 12 ligt het punt D op BC zo, dat $BD = 4$.
Bereken AD in twee decimalen.

51 Hoeveel getallen van vijf cijfers zijn er te maken met de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7 als elk cijfer vaker gebruikt mag worden?

52 Gegeven is de formule $z = 20 + 4^{x-2}$.
Druk x uit in z .

53 Een bedrag wordt verdeeld onder A, B en C in de verhouding $A : B : C = 2 : 3 : 7$.
Zo krijgt C 25 euro meer dan B.
Welk bedrag werd verdeeld?

54 Gegeven is de volgende tabel.

jaar	1995	2003	2014	2020
aantal	520	840	1165	1390

- a** Bereken het aantal in 2010 met lineair interpoleren. Rond af op gehelen.
- b** Bereken het aantal in 2025 met lineair extrapoleren. Rond af op gehelen.
- c** Bereken met lineair interpoleren in welk jaar het aantal 760 was.

55 Gegeven is de rechthoek $ABCD$ met $AB = 10$ en $AD = 6$. Op de zijde CD ligt het punt E waarbij $DE = 3$. De diagonaal AC snijdt het lijnstuk BE in het punt S .
Bereken AS in twee decimalen.

56 Schrijf $\frac{6x+10}{x+3} - 2x$ als één breuk.

57 Een hoeveelheid neemt toe van 115 tot 145.
Hoeveel procent is de toename?

58 Maak b vrij bij $6a - 5b = 18$.

59 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en wat de grenswaarde is.

a $y = 75 - \frac{10}{3x+1}$ met $x > 0$

b $y = \frac{50}{2x^2+1} + 30$ met $x > 0$

c $y = \frac{100 \cdot 0,75^x}{3\sqrt{x}}$ met $x > 0$

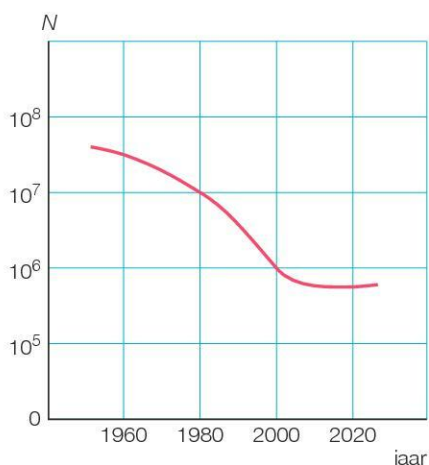
60 Schrijf $\frac{2}{3}a^4b^2$ zonder negatieve exponenten.

- 61** Een bedrijf verkoopt per jaar tussen 150 en 550 van zijn artikelen. De jaarlijkse winst wordt gegeven door de formule $W = -0,01q^2 + 7,5q - 650$. Hierin is q het aantal verkochte artikelen en W de winst in honderden euro's.
- Bereken hoeveel winst per artikel het bedrijf maakt als de jaarverkoop 400 stuks is.
 - Bereken de maximale winst.
- 62** Tussen t en A bestaat een lineair verband. Voor $t = 12$ is $A = 78$ en voor $t = 28$ is $A = 22$.
Stel de formule op van A .
- 63** Gegeven is de volgende bewering.
Als je geen tv wilt kijken, dan gaan we – als je een fiets of een scooter hebt – vanmiddag naar het zwembad.
Deze bewering is opgebouwd uit de volgende vier proposities:
 A : Je wilt tv kijken;
 B : Je hebt een fiets;
 C : Je hebt een scooter;
 D : We gaan vanmiddag naar het zwembad.
- Schrijf de bewering met de letters A , B , C en D en logische symbolen.
Je kunt ook het volgende beweren.
Als we niet naar het zwembad gaan, dan wil je tv kijken of je hebt geen fiets en geen scooter.
 - Schrijf deze bewering met de letters A , B , C en D en logische symbolen zo, dat dit in overeenstemming is met de gegeven bewering.
- 64** Schrijf $(a^{-2})^4 \cdot a^5$ als macht van a .
- 65** Een bedrijf maakt codes van vijf, zes en zeven letters met de letters A en B. Hoeveel van deze codes zijn er met meer A's dan B's?
- 66** Op een dag met zware neerslag viel er in De Bilt 55 mm regen. Hoeveel liter regen viel er die dag in de gemeente De Bilt? Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op twee decimalen. Gebruik dat de oppervlakte van de gemeente De Bilt $67,13 \text{ km}^2$ is.
- 67** In het vierkant $ABCD$ met zijde 6 is het punt M het midden van BC en het punt N het midden van CD .
Bereken de oppervlakte van driehoek AMN .
- 68** Een hoeveelheid neemt per jaar met 5,8% af.
Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.

- 69** Gegeven is de rij $u_n : 800, 840, 882, 926, 1, \dots$
- Stel de recursieve en de directe formule op van de rij. Neem als beginterm u_0 .
 - Hoeveel termen van de rij zijn kleiner dan 1500?
- 70** Herleid $(4a - 1) \cdot \frac{2b}{4a - 1}$.
- 71** Een hoeveelheid neemt met 18,4% toe tot 3015. Hoeveel was de oorspronkelijke hoeveelheid?
- 72** Hoeveel getallen van vijf cijfers zijn er te maken met de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7 als elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden?
- 73** Maak x vrij bij de formule $y = 0,4 \cdot \sqrt[3]{x} + 2$.
- 74** De lijn l gaat door het punt $A(6, 9)$ en $\text{rc}_l = -\frac{1}{3}$. Stel de formule op van l .
- 75** Schrijf de formule $y = \frac{108}{(3x^2)^3}$ in de vorm $y = ax^n$.
- 76** De regelmatige vierzijdige piramide $TABCD$ met $AB = 5$ en hoogte 12 wordt afgeknot op hoogte 7. Bereken de inhoud van de afgeknotten piramide. Rond af op één decimaal.
- 77** Gegeven is de formule $K = 2 \cdot 10^{-7}q^3 - 3 \cdot 10^{-4}q^2 + 0,2q + 100$. Hierin is q de dagproductie in honderdtallen en K de kosten per dag in honderden euro's. Bereken de gemiddelde toename van de kosten als de dagproductie toeneemt van 10 000 tot 20 000 stuks.
- 78** Gegeven is de formule $A = 20x^{1,7}$. Bereken hoeveel keer zo groot A wordt als x verdubbelt. Rond af op twee decimalen.
- 79** Schrijf $\frac{5}{6}a^{-4}b^{\frac{2}{3}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.
- 80** Gegeven zijn de volgende uitgangspunten.
- Alle koeien lopen in de wei.
 - Sommige koeien geven melk.
- Toon aan dat de conclusie 'Sommige dieren die in de wei lopen, maar geen koe zijn, geven melk' niet volgt uit de uitgangspunten. Geef hiertoe een tegenvoorbeeld met behulp van een venndiagram.

- 81** Op hoeveel manieren kun je een feestcommissie van 3 jongens en 2 meisjes kiezen uit een klas met 16 jongens en 13 meisjes?
- 82** Een hoeveelheid neemt per dag met 8,6% toe.
a Hoeveel procent is de toename per week?
b Hoeveel procent is de toename per tien uur?
- 83** Bij de formule $N(x) = 84 + 43,2 \cdot \log(x)$ geldt: als x verdubbelt, dan neemt N steeds met hetzelfde getal toe.
 Bereken dit getal.
- 84** Schrijf de formule $y = \frac{6\sqrt{x}}{2x \cdot \sqrt[3]{x}}$ in de vorm $y = ax^p$.
- 85** De diameter van een virusdeeltje is 50 keer zo klein als de diameter van een bacterie. De bacterie heeft een diameter van 2 micrometer.
 Wat is de diameter van het virusdeeltje? Geef het antwoord in meters in de wetenschappelijke notatie. Gebruik dat 1 micrometer = $\frac{1}{1000}$ mm.
- 86** Gegeven is de regelmatige zeshoek $ABCDEF$ met zijde 4 en middelpunt M . Het punt P ligt op AM en het punt Q ligt op BM zo, dat PQ evenwijdig is met AB en $PQ = 3$.
 Bereken in één decimaal de oppervlakte van $PQCF$.
- 87** Bij het nakijken van een tentamen blijkt dat het wel zo moet zijn dat Ad, Ben of Cor heeft gespiekt. We gaan ervan uit dat één van de drie heeft gespiekt en dat degene die heeft gespiekt niet de waarheid spreekt. De andere twee spreken wel de waarheid.
 De docent vraagt aan alle drie of ze hebben gespiekt en ze ontkennen alle drie.
 Verder doen ze de volgende uitspraken.
 Ad: Ik weet zeker dat Ben niet heeft gespiekt.
 Ben: Cor heeft gespiekt.
 Cor: Ad of Ben heeft gespiekt.
 Zoek uit wie heeft gespiekt.
- 88** Een hoeveelheid neemt per 8 uur met 10,9% af.
a Hoeveel procent is de afname per 50 uur?
b Hoeveel procent is de afname per uur?
- 89** Schrijf $\frac{x^5}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}$ als macht van x .

- 90** Sandra loopt een afstand van 6,5 km met een gemiddelde snelheid van 14,6 km/uur.
Hoeveel minuten en seconden doet zij hierover?
- 91** Van een gebouw is een maquette op schaal 1 : 50 gemaakt. De inhoud van de maquette is 3520 cm^3 .
Bereken hoeveel m^3 de inhoud van het gebouw is.
- 92** Gegeven is de formule $h = 0,02m^3 + 0,4m^2$. Hierin is h de hoogte in cm en m de tijd in maanden.
Zet de formule om naar de vorm $H = aj^3 + bj^2$ met H de hoogte in meters en j de tijd in jaren.
- 93** Gegeven is de formule $M = 25t^b$. Voor $t = 5$ is $M = 70$.
Bereken b . Rond af op twee decimalen.
- 94** Schrijf de formule $N = 75 \cdot {}^2\log(t)$ in de vorm $N = a \cdot \log(t)$. Rond a af op gehele.
- 95** Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 3$ is $N = 326$ en op $t = 11$ is $N = 77$. Hierbij is t in jaren.
Stel de formule op van N .
- 96** Maak a vrij bij de formule $N = 4\sqrt{2a - 3}$.
- 97** Het aantal meloenen dat een marktkoopman op een dag verkoopt, is omgekeerd evenredig met de prijs. Bij een prijs van 80 cent per stuk verkoopt hij 135 meloenen op een dag.
Hoeveel meloenen verkoopt hij op een dag bij een prijs van € 1,10 per stuk?
- 98** Maak S vrij bij de formule $N = 12 - \frac{150}{2S - 1}$.
- 99** Gegeven is de grafiek in de figuur hiernaast.
Bereken met welke factor N is afgenomen in de periode 1960-2020. Rond af op gehele.
- 100** In de gulden rechthoek $ABCD$ met $AD < AB$ wordt het vierkant $AEFD$ met E op AB getekend.
Bereken EC in één decimaal in het geval $AD = 4$.



figuur G.22

- 101** Bereken het aantal rangschikkingen van de letters van het woord KNOOPPUNTEN.
- 102** Herleid de formule $A = 20 \cdot \sqrt[3]{30x}$ tot de vorm $A = c \cdot \sqrt[3]{x}$. Rond c af op één decimaal.
- 103** Gegeven is de rij $u_n : 980, 963, 946, 929, 912, \dots$
- Stel de recursieve en de directe formule op van de rij. Neem als beginterm u_0 .
 - Hoeveel positieve termen heeft de rij?
- 104** Beredeneer bij de volgende formules wat het verzadigingsniveau is.
- $N = \frac{600}{3 + 14 \cdot 0,96^t}$
 - $N = 450(3 - 0,81^t)$
 - $N = 50 - \frac{30}{t + 2}$
- 105** Teken een kubus in tweepuntsperspectief en in éénpuntsperspectief.
- 106** Geef van de grafiek van $y = 0,3(x - 0,16)^4 + 2,2$ de coördinaten van de top.
- 107** Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. Op $t = 4$ is $N = 101$ en op $t = 12$ is $N = 161$. Hierbij is t in dagen. Stel de formule op van N .
- 108** Schrijf de formule $N = 40 + {}^3\log(t)$ in de vorm $N = a + b \cdot \log(t)$. Rond b af op twee decimalen.
- 109** Maak p vrij bij de formule $K = 16(p - 4)^2$ met $p \geq 4$.
- 110** Maak a vrij bij de formule $P = \frac{2a + 1}{3a - 1}$.
- 111** Schrijf de formule $y = 16 \cdot 3^{4-x}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$.
- 112** Gegeven is de formule $N(k) = 12,5 + 10,48 \cdot \log(k)$. Als k drie keer zo groot wordt, dan neem N steeds met hetzelfde getal toe. Bereken dit getal. Rond af op gehelen.
- 113** Een hoeveelheid halveert elke vijf jaar en vier maanden. Bereken hoeveel procent de afname per jaar is.

- 114** Bij een spel zijn er negen kaartjes met de getallen 11 tot en met 19. Elke speler trekt een kaartje met een getal zo, dat de anderen het getal niet kunnen zien. Daarna zeggen ze om de beurt iets over hun getal. Daarbij mogen ze kiezen uit een van de volgende mogelijkheden.

Mijn getal is even.

Mijn getal is oneven.

Mijn getal is priem (dus 11, 13, 17 of 19).

Mijn getal verschilt één van ... (waarbij een getal wordt genoemd).

Mijn getal verschilt twee van ... (waarbij een getal wordt genoemd).

Zodra één van de spelers denkt te weten wat er op het kaartje van elke andere speler staat, zegt deze STOP en noemt van elke speler het getal op het kaartje. Als dit goed is, heeft deze speler de ronde gewonnen. Ad, Ben, Cor en Daan spelen het spel en trekken elk een kaartje. Daarna zeggen ze in de volgorde Ad, Ben, Cor en Daan iets over hun getal.

Ad zegt: Mijn getal is oneven.

Ben zegt: Mijn getal verschilt één van 14.

Cor zegt: Mijn getal is priem.

Daan zegt: Mijn getal is even.

Ad zegt: Mijn getal verschilt twee van 15.

Ben zegt: Mijn getal is priem.

Daan zegt: STOP.

Kan Daan de getallen van de andere kaartjes weten? Licht toe.

- 115** Beredeneer aan de hand van de formules of de grafieken van de volgende formules voor $t \geq 0$ stijgend of dalend zijn.

a $N = \frac{1500}{1 + 20 \cdot 0,91^t}$

b $N = 10 + 20(1 - 0,98^t)$

c $N = 25 - \frac{10}{3 - 0,75^t}$

- 116** In de regelmatige vijfhoek $ABCDE$ snijden de diagonalen AC en BD elkaar in het punt S .

Het lijnstuk AC wordt door S verdeeld volgens de gulden snede en $AC = BD = \varphi \cdot AB$, waarbij φ het gulden getal is. Het punt M is het midden van AC .

Neem $AB = 6$ en bereken MS in één decimaal.

- 117** Stel de formule op van de lijn l door de punten $A(8, 70)$ en $B(20, 55)$.

- 118** Schrijf de formule $N = 25 \cdot 1,85^{t-2}$ in de vorm $t = a + {}^s\log(bN)$.

- 119** Combineer de formules $K = 5p + 4q + 120$ en $2p + 3q = 60$ tot de vorm $K = ap + b$.

120 Gegeven zijn de rijen

$A(n)$: 750, 762, 774, 786, ...

$B(n)$: 100, 120, 144, 172, 8, ...

Bereken vanaf de hoeveelste term geldt $B(n) > A(n)$.

121 Bij een tennisvereniging kun je een abonnement nemen waarmee je op maandag, woensdag en vrijdag mag komen tennissen.

In een week komen op maandag 20 mensen tennissen, op woensdag 17 en op vrijdag 15. Van deze mensen komen er 5 alleen op maandag en woensdag, 6 alleen op maandag, 4 alleen op vrijdag en 4 op alle drie de dagen.

Hoeveel van deze mensen komen alleen op woensdag?

122 Herleid $5a^2 - \frac{3}{a^2}$ tot één breuk.

123 Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 7,3% toe.

Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.

124 Gegeven is de formule $K = aq^{1,15}$. Voor $q = 60$ is $K = 499$.

a Bereken K voor $q = 100$. Rond af op gehele.

b Schrijf de formule in de vorm $q = b \cdot K^c$. Rond b en c af op twee decimalen.

125 Hoeveel mogelijkheden zijn er om met vier dobbelstenen in totaal 21 ogen te gooien?

126 Maak t vrij bij de formule $N = 4 \cdot 10^{0,4t}$.

127 Ronald loopt 9,8 km in 49 minuten en 40 seconden.

Bereken zijn gemiddelde snelheid in km/uur. Rond af op twee decimalen.

128 Een hoeveelheid verdubbelt elke drie jaar.

Bereken het groeipercentage per jaar.

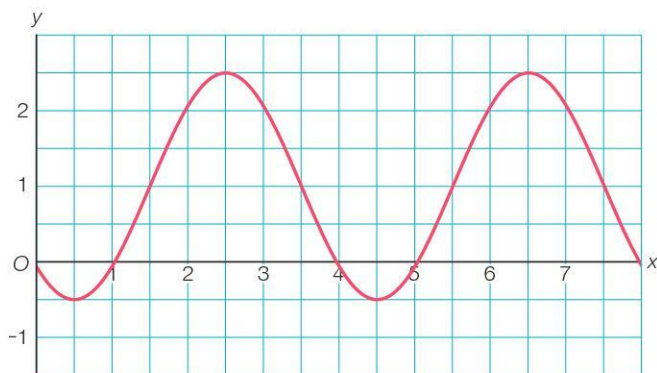
129 Gegeven is de formule $N = \frac{40}{t} + 6$ met $t > 0$.

a Beredeneer wat de grenswaarde is.

b Beredeneer hoe uit de formule van N volgt dat de grafiek van N dalend is.

130 Schrijf de formule $5 \cdot \log(N) = 1,215t + 13,7$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op gehele en g op twee decimalen.

- 131** Geef bij het periodiek verschijnsel hieronder de evenwichtswaarde, de amplitude en de periode.



figuur G.23

- 132** Schrijf de formule $T = \frac{t^2 - 2}{t} + \frac{10}{\left(\frac{3}{t}\right)} + \frac{7}{2t}$ in de vorm $T = at + \frac{b}{2t}$.
- 133** Gegeven is de recursieve formule $u(n) = 3 \cdot u(n-1) - 2 \cdot u(n-2)$ met $u(1) = 5$ en $u(2) = 6$.
a Bereken $u(10)$.
b Vanaf welk n is $u(n)$ meer dan 100 000?
- 134** De formules $F = 3pq + 40$ en $2p - 5q = 40$ zijn te combineren tot de vorm $F = ap^2 + bp + c$.
 Bereken a , b en c .
- 135** Herleid $\frac{7}{2x} - \frac{5}{3x}$ tot één breuk.
- 136** De formule $P = \log(2x - 500) - 3$ is te schrijven in de vorm $x = a + b \cdot 10^P$.
 Bereken a en b .
- 137** In een code van 9 letters staan 2 A's, 3 B's en 4 C's.
 Hoeveel van deze codes zijn er waarbij de 3 B's naast elkaar staan?
- 138** Schrijf de formule $N = 25 \cdot 1,85^{t-2}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op één decimaal.

Examenwerkwoorden

In onderstaande lijst staan de relevante examenwerkwoorden voor wiskunde C. Als in een wiskunde-examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, geldt de betekenis die hiervan in deze lijst is gegeven. Deze lijst met examenwerkwoorden is niet uitputtend.

Aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Afleiden van bijvoorbeeld een formule of een eenheid	Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
Berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.
Noemen, (aan)geven wat, welke, wanneer, hoeveel	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist tenzij anders is aangegeven.
Onderzoeken of	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen.
- De toets Ans en fouten verbeteren.
- Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen.
- Decimaal getal omzetten in breuk.

vwo A/C deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 19

Formules en grafieken

- Formules invoeren en grafieken plotten.
- Tabellen maken.
- De opties snijpunt, nulpunt, maximum en minimum.

vwo A/C deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 37

De binomiale verdeling

- Binomiale kansen berekenen.
- Cumulatieve binomiale kansen berekenen.

vwo C deel 3
hoofdstuk 9
bladzijde 64

De normale verdeling

- Oppervlakten berekenen.
- Grenzen berekenen.
- Het berekenen van μ en σ .

vwo C deel 3
hoofdstuk 9
bladzijde 73,
74 en 77

Het rijen-invoerscherm

- Rijen invoeren.
- Tabel maken bij een rij.

vwo C deel 4
hoofdstuk 12
bladzijde 24

Allerlei

- Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR.
-

Overzicht routes

12 Rijen

12.1 Rijen en verbanden

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

12.2 Notaties en rijen op de GR

opgave	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

33	34	35	36	37	38	39	40

12.3 Rijen en meetkundige figuren

opgave	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

13 Meetkunde toepassen

13.1 Halveren en verdubbelen in perspectief

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
☐ basis														
☒ midden														
* uitdagend														

13.2 Regelmatige veelhoeken

opgave	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
☐ basis														
☒ midden														
* uitdagend														

13.3 De gulden snede

opgave	29	30	31	32	33	34	35	36	37
☐ basis									
☒ midden									
* uitdagend									

13.4 Aanzichten en inhouden

opgave	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
☐ basis											
☒ midden											
* uitdagend											

14 Werken met formules

14.1 Stijgen en dalen van grafieken

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
□ basis											
⊙ midden											
* uitdagend											

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

14.2 Formules herschrijven

opgave	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
□ basis										
⊙ midden										
* uitdagend										

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41

14.3 Formules met exponenten en logaritmen

opgave	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

14.4 Redeneren met formules

opgave	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

Trefwoordenregister

A

afnemende daling 86
afnemende stijging 86
amplitude 96

B

beginterm 12

C

constant verschil 14
constante daling 86
constante factor 16
constante stijging 86

D

dalend 85
daling
 afnemende - 86
 constante - 86
 toenemende - 86
directe formule 12

E

evenwichtswaarde 96

F

factor van een rij 16
Fibonacci 38
 rij van - 38
 - spiraal 39
formule
 directe - 12
 recursieve - 12
formules combineren 106

G

gelijknamige breuken 100
gemiddelde
 verandering 87

gesloten interval 85
grenswaarde 117
gulden getal 62, 39
gulden rechthoek 62
gulden snede 62, 39
gulden spiraal 39

H

halveren in perspectief 47
helling van lijn 88
helling van grafiek 91

I

interval 85
 gesloten - 85
 open - 85
intervalnotatie 85

K

kruislings
 vermenigvuldigen 104

N

notaties bij rijen 22

O

open interval 85

P

periode 95
periodiek verschijnsel 95

R

raaklijn 91
raken 91
recursieve formule 12
redeneren met
 formules 116, 120
regelmatige veelhoek 55

rekenregels voor
 machten 109
rij 11
 - met constant
 verschil 14
 - met constante factor 16
 - van Fibonacci 38
rijen-invoerscherm 24

S

snelheid van
 verandering 91
stijgend 85
stijging
 afnemende - 86
 constante - 86
 toenemende - 86

T

termen van een rij 11
tijd-afstandgrafiek 91
toenemende daling 86
toenemende stijging 86
trend 96
trendlijn 96

U

uitdelen 101

V

variabelen vrijmaken 103,
 111
verdubbelen in
 perspectief 51
vergrotingsfactor 55
verzadigingsniveau 117

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Richard van de Pol, Tilburg; Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Foto's

iStockphoto: p. 6-7, 75 o, 128-129, 140
ANP Foto / Hollandse Hoogte / Toussaint Kluiters: p. 23
Kunstwerk: Andre Volten / Foto: Wouter Klein Velderman: p. 33
ANP Foto / Hollandse Hoogte / Rein van Zanen: p. 41 b
Shutterstock: p. 42-43, 47 (2x), 50 o, 53 (b, o), 63 (lb, rb), 74 (2x), 75 m, 78 b, 79 o, 80-81, 82 (2x), 97, 119, 122, 123, 147, 161, 201, 204, 214 b, 223
Alamy / Imageselect: p. 44, 72 b, 215 o, 225
Kunstwerk: Carl André / Foto: Lida Goede: p. 45 o, 46 b, 51 b
ANP Foto / Eric Brinkhorst: p. 46 o
Getty Images: p. 49, 63 o, 156 b, 197, 217 b, 228
Mark Haneveld, Lochem: p. 53 m, 60 o, 162, 220
Google / Maxar Technologies, Kaartgegevens 2021: p. 58
Vincent van Gogh / Neue Pinakothek München: p. 63 rm
ANP Foto / AFP: p. 66
Carl André / Art Gallery of New South Wales, Australië: p. 68 b
Bridgeman Images / foto: Wolfgang Neeb / kunst: Carl Andre: p. 68 o, 76 b
ANP Foto / Hollandse Hoogte / Marco Okhuizen: p. 70 lo
Sol LeWitt: p. 71 (b, m)
Half-Off B / Sol LeWitt / Foto: Tore Røyneild / The National Museum, Oslo: p. 71 o
Carl Andre / Still Blue Range: p. 72 m
Gasunie, Groningen: p. 73 b
Arons en Gelauff Architecten, beeld CIID: p. 75 b
ANP Foto / Fotopersburo Dijkstra: p. 76 o
Ossip van Duivenbode, Rotterdam: p. 77 b
Roland Meijerink, Rotterdam: p. 77 o, 208, 226 (b, o)
ANP Foto / Hollandse Hoogte / Kim van Dam: p. 113
ANP Foto / VJK Images / Vincent Jannink: p. 143
ANP Foto / Hollandse Hoogte / Astrid Kant: p. 144
Gangnam Style / Psy / Universal International Music: p. 148
©Ellsworth Kelly Foundation, Courtesy Matthew Marks Gallery: p. 154, 210 b
Blauwe Toren / Beeldend kunstenaar Elt de Boer, 't Harde: p. 210 o
Wikimedia Commons: p. 211 b
IK-paviljoens (Jan van Munster (2010) / Foto: Ivo Wennekes: p. 211 o
Francis Bacon, Seated Figure, 1960. © The Estate of Francis Bacon. All rights reserved, DACS / Artimage 2022. Photo: Albertina, Vienna: p. 212 b

Stanley Brouwn / Bertus Mulder, WVAU
Architecten: p. 212 o
Getty Images / foto: Studio Van Damme / Het Gebouw: Bertus Mulder, WVAU Architecten: p. 213
ANP Foto / AFP / Joel Saget: p. 214 b
JR, Paris: p. 215 b
Nationale Beeldbank / Hans Engbers: p. 227
4ever: p. 234

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:

Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,9700 VB
Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 22

© 2022 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73707-8



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



Noordhoff



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-73707-8

