

getal & ruimte

A



Noordhoff

Dit boek is van jou!

Naam

Klas

Getal & Ruimte

Leerboek
havo A deel 1

Dertiende editie, 2025

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek havo A deel 1

Samen met de delen 2 en 3 van havo wiskunde A bevat dit boek de leerstof van het programma havo wiskunde A, zoals dat met ingang van 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak havo wiskunde A is 320 uur. Elk van de delen 1, 2 en 3 bevat vier hoofdstukken, waarbij opgemerkt kan worden dat in het laatste hoofdstuk van deel 3 de examentraining aan bod komt.

De vier hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 25 uur.

In de hoofdstukken komen de volgende (sub)domeinen aan bod.

Hoofdstuk 1	Rekenen en groei	B1, B2, C1 en C2
Hoofdstuk 2	De statistische cyclus	E
Hoofdstuk 3	Lineaire verbanden	C4
Hoofdstuk 4	Combinatoriek	B3

Het subdomein van hoofdstuk 4 wordt alleen in het schoolexamen getoetst. Zie voor verdere details de handleiding.

De actief lerende leerling

In deze 13^e editie tweede fase zijn er nieuwe elementen in de leerboeken opgenomen die het actieve leren van de leerlingen ondersteunen en stimuleren.

Elke paragraaf begint met een opsomming van de kennis en vaardigheden die aan bod komen. Hiermee wordt enerzijds een vervolg gegeven aan de onderbouwboeken, waarin er aan het begin van elke paragraaf een opsomming van de leerdoelen staat. Anderzijds vindt aansluiting plaats bij de parate kennis en vaardigheden uit de syllabus. Met de Kennis- en vaardighedencheck (KVC) aan het eind van een paragraaf kunnen leerlingen controleren of ze de kennis en vaardigheden van de paragraaf beheersen. Met de Kennis- en vaardighedentest (KVT) aan het eind van het hoofdstuk kunnen leerlingen controleren of ze de kennis en vaardigheden van het hoofdstuk beheersen. De antwoorden van de KVC's staan direct onder de opgaven en de antwoorden van de KVT's zijn achter in het boek te vinden. De leerling krijgt zo de mogelijkheid om snel te controleren of de kennis en vaardigheden worden beheerst.

De productieve vaardigheden uit de syllabus komen vooral aan bod in de afsluitende opgaven en in de Gemengde opgaven. Het is belangrijk dat leerlingen beseffen dat deze opgaven het beoogde eindniveau hebben. Daarom zijn de Gemengde opgaven in deze editie direct achter de KVT geplaatst.

Een andere vernieuwing in deze editie is het regelmatig terug laten keren van onderwerpen uit eerdere hoofdstukken of paragrafen, ook wel bekend als gespreid en gevarieerd oefenen. Uit onderzoek blijkt dat leerlingen daarmee beter leren onderscheiden en herkennen wanneer zij welke aanpak kunnen gebruiken en dat daarmee de stof beter beklijft. Zie voor verdere details de handleiding.

Naast de nieuwe elementen heeft de Voorkennis een andere plek gekregen. Voorkennis is nu te vinden aan het begin van een (sub)paragraaf waar het activeren ervan wenselijk is.

Drie leerroutes

Net als in de 12^e editie wordt er in deze editie gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Door te werken met deze routes maken leerlingen niet alle aangeboden opgaven. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen ongeveer in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen. In de basisroute ligt veel nadruk op het inslijpen van basisvaardigheden. In de middenroute worden enkele gewone opgaven overgeslagen en in plaats hiervan maken de leerlingen opgaven die dieper op de stof ingaan. De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder gewone opgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken. De docent kan bepalen in welke route een leerling start, of het aan de leerling zelf overlaten. In geval van twijfel is het verstandig de leerling in de middenroute te laten beginnen. Het is van belang om regelmatig te monitoren of de gekozen route de juiste is.

De digitale leeromgeving van Getal & Ruimte

Bij sommige gedeeltes van het boek kunnen opgaven ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Tevens kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

In het docentenmateriaal staan studiewijzers die een indicatie geven van de hoeveelheid leerstof die per week kan worden doorgewerkt. Verder zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

Voorjaar 2024

Legenda

V1 Voorkennisopgave

Een opgave over een onderwerp uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk.

O1 Oriënterende opgave

Een opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

2 Gewone opgave

Een opgave waarmee je oefent met wat er in de theorie aan bod is geweest.

R3 Reflectie-opgave

Een opgave waarmee je terugkijkt op een voorgaand probleem, of waarmee je op een andere manier naar voorgaande stof kijkt.

A4 Afsluitende opgave

Een opgave waarmee je oefent op het beoogde beheersingsniveau.

E5 Extra opgave

Een opgave die je extra uitdaagt.

Kennis- en vaardighedencheck

Je controleert of je de kennis en/of vaardigheid beheerst door de bijbehorende opgave te maken.

C1 Checkopgave

Een opgave waarmee je controleert of je de kennis en/of vaardigheid goed beheerst.

Route-aanduiding

1 Een opgave van de basisroute.

2 Een opgave van de middenroute.

3 Een opgave van de uitdagende route.

NB: De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder routeaanduiding

In de Kennis- en vaardigheidentest en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen routeaanduiding.

[▶ GR](#) Verwijzing naar een module over het gebruik van de grafische rekenmachine. Zie ook het overzicht van de modules achter in dit boek.

[▶ WERKBLAD](#) Verwijzing naar een werkblad achter in dit boek.

Inhoud

1	Rekenen en groei	6	3	Lineaire verbanden	112
1.1	Rekenen	8	3.1	Lineaire formules	114
1.2	Procenten	19	3.2	Lineaire formules opstellen	123
1.3	Exponentiële groei	27	3.3	Vergelijkingen en ongelijkheden	129
1.4	Informatie in tabellen en grafieken	34	3.4	Lineaire vergelijkingen met twee variabelen	136
	Kennis- en vaardighedentest	46	3.5	Interpoleren, extrapoleren en lineaire modellen	142
	Gemengde opgaven	48		Kennis- en vaardighedentest	150
2	De statistische cyclus	56		Gemengde opgaven	152
2.1	De onderzoeksvraag	58	4	Combinatoriek	156
2.2	Data verzamelen	63	4.1	Regels bij telproblemen	158
2.3	Data analyseren	70	4.2	Permutaties en combinaties	166
2.4	Kwartielen en spreiding	80	4.3	Combinatoriek toepassen	175
2.5	Statistische verdelingen	89	4.4	Allerlei telproblemen	181
	Kennis- en vaardighedentest	104		Kennis- en vaardighedentest	186
	Gemengde opgaven	106		Gemengde opgaven	188
				Werkbladen	194
				Antwoorden Kennis- en vaardighedentests	198
				Overzicht GR-modules	200
				Trefwoordenregister	201
				Verantwoording	203



1

Rekenen en groei

Het Pieterpad is een langeafstandswandelpad (LAW) van 492 km van Pieterburen in Groningen naar de Sint Pietersberg in Limburg. Hardloper Addie van Vleuten heeft het hele pad in een recordtijd van 78 uur en 10 minuten gelopen. Het Pieterpad is een van de langste LAW's van Nederland, maar het is slechts 67,9% van de lengte van het Nederlands Kustpad dat langs de gehele kust loopt. Op 1 januari 1970 was er 1624 km LAW in Nederland, dat aantal is jaarlijks met 2,9% toegenomen.

- 1 Hoeveel meter per seconde liep Addie van Vleuten?
A 1,748 B 1,750 C 6,294 D 6,300
- 2 Wat is de lengte in km van het Nederlands Kustpad?
A 334 B 650 C 725 D 826
- 3 Hoeveel km LAW kwam erbij in 2020?
A 47 B 60 C 191 D 197

1.1 Rekenen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt rekenen met grote en kleine getallen in de wetenschappelijke notatie.
- Je kunt rekenen met lengte-, oppervlakte- en inhoudsmaten.
- Je kunt rekenen met tijd, afstand en snelheid.
- Je kunt rekenen met verhoudingen.

Theorie A De grafische rekenmachine

Bij het vak wiskunde werk je met de grafische rekenmachine, voortaan afgekort met GR. Modules met uitleg over de GR vind je bij het digitale materiaal online.

►GR] Neem de module [Berekeningen op het basisscherm](#) door.

01 In 2023 had Nederland 17,9 miljoen inwoners.



- a De Nederlandse overheid gaf in dat jaar ongeveer 390 miljard euro uit. Bereken de gemiddelde uitgaven per inwoner in 2023 in duizenden euro's.
- b Een menselijk lichaam bestaat gemiddeld uit $3 \cdot 10^{12}$ cellen. Bereken het totale aantal cellen van alle inwoners van Nederland in 2023.

Theorie B Grote en kleine getallen

Bij het werken met grote getallen worden vaak woorden gebruikt om de grootte van een getal aan te geven.

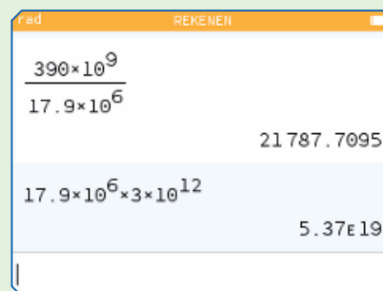
- duizend = $1000 = 10^3$ **3 nullen**
- miljoen = $1\,000\,000 = 10^6$ **6 nullen**
- miljard = $1\,000\,000\,000 = 10^9$ **9 nullen**

In opgave 1a heb je de gemiddelde uitgaven per inwoner uitgerekend. De berekening die hierbij hoort is $\frac{390 \cdot 10^9}{17,9 \cdot 10^6}$.

Het totale aantal cellen in opgave 1b is een groot getal. De GR geeft dan het antwoord in de **wetenschappelijke notatie**. Zie hiernaast.

De notatie $5,37\text{E}19$ betekent $5,37 \cdot 10^{19}$. Om dit antwoord in de gewone notatie te schrijven, verschuif je de komma 19 plaatsen naar rechts.

Dus $5,37 \cdot 10^{19} = 53\,700\,000\,000\,000\,000\,000$.



17,9 miljoen is hetzelfde als $17,9 \cdot 10^6$. Dit getal staat niet in de wetenschappelijke notatie, omdat de komma niet direct achter het eerste cijfer staat. Zet je $17,9 \cdot 10^6$ in de wetenschappelijke notatie dan krijg je $1,79 \cdot 10^7$.

In de wetenschappelijke notatie staat een getal in de vorm $a \cdot 10^b$. Hierin is a een getal tussen 1 en 10.

Het getal $3,9 \cdot 10^{11}$ is hetzelfde als $390 \cdot 10^9$, oftewel 390 miljard.

De wetenschappelijke notatie wordt ook gebruikt voor kleine getallen.

Bij de berekening van bijvoorbeeld $0,03^7$ geeft de GR

$2,187\text{E-}11$ en dit betekent $2,187 \cdot 10^{-11}$.

Schrijf je dit getal in de gewone notatie, dan krijg je

$2,187 \cdot 10^{-11} = 0,000\,000\,000\,021\,87$.

↑
komma 11 plaatsen naar links

Merk op dat $0,000\,000\,000\,021\,87$ met 11 nullen begint, dit zie je terug in de exponent van $2,187 \cdot 10^{-11}$.

2 Bereken. Schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie.



a $3,5 \cdot 10^6 \times 0,4 \cdot 10^4$

b $1200 \cdot 55\,000$

c $12,5 \text{ miljoen} \times 460\,000$

d $0,018 \times 5 \cdot 10^{-6}$

e $\frac{1,5 \text{ duizend}}{3 \text{ miljard}}$

f $0,8^{12} \cdot 2,5^{20}$

3 Schrijf de antwoorden in de wetenschappelijke notatie. Rond zo nodig af op twee decimalen.



a In 2023 leefden er 7,9 miljard mensen op aarde. Een handvol zand bevat 10 000 korrels.

Stel dat iedereen twee handen vol zand oppakt, hoeveel korrels zand worden er dan opgepakt?

b De gemiddelde massa van een lichaamscel bij mensen is $1,25 \cdot 10^{-12}$ kg. Uit hoeveel cellen bestaat een mens van 75 kilogram?

c Alle mieren op aarde wegen samen 40 miljard kg. Er zijn naar schatting $2,0 \cdot 10^{16}$ mieren op aarde.

Bereken het gemiddelde gewicht van een mier in kg.

A4 Schrijf de antwoorden in de wetenschappelijke notatie. Rond af op twee decimalen.



- a** Er zijn 1,5 miljoen hardlopers in Nederland die gemiddeld 2,3 keer per week hardlopen en gemiddeld 7,6 km per keer afleggen. Bereken hoeveel km er wordt hardgelopen in een jaar.
- b** De maan draait elke 27,3 dagen in een ellipsvormige baan rond de aarde. De baanlengte is 2 413 400 km. Hoeveel km legt de maan in een eeuw tijd rond de aarde af? Je hoeft geen rekening te houden met schrikkeljaren.

A5 **a** Hoeveel foto's van 700 kB passen er op een harde schijf van 2,4 TB? Geef je antwoord in gehele miljoenen.



- b** De 8,3 miljoen Nederlandse huishoudens hebben een gemiddeld spaartegoed van 54 000 euro. Bereken het totale spaartegoed in euro's van alle Nederlandse huishoudens. Geef je antwoord in gehele miljarden.

1 kB = 10^3 byte
1 TB = 10^{12} byte

A6 Van een neutronenster is bekend dat de massa tussen $1,39 \cdot 10^{30}$ kg en $6,97 \cdot 10^{30}$ kg ligt. Het volume ligt tussen $1,88 \cdot 10^{12}$ m³ en $2,36 \cdot 10^{12}$ m³. De massadichtheid ρ wordt berekend met de formule



$\rho = \frac{m}{V}$. Hierin is m de massa in kg en V het volume in m³.

Bereken de maximale dichtheid van de neutronenster. Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.

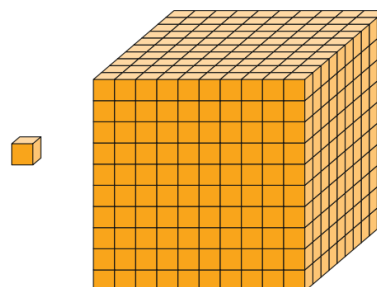
O7 De afmetingen van de kleine kubus hiernaast zijn 1 bij 1 bij 1 cm.



- a** Geef de hoogte van de grote kubus
- in cm
 - in dm
 - in mm.

Een zijvlak van de kleine kubus heeft een oppervlakte van 1 cm².

- b** Bereken de totale oppervlakte van de grote kubus
- in cm²
 - in dm²
 - in mm².
- c** De inhoud van de grote kubus is één liter. Bereken de inhoud van de kleine kubus
- in liter
 - in cm³
 - in mm³.

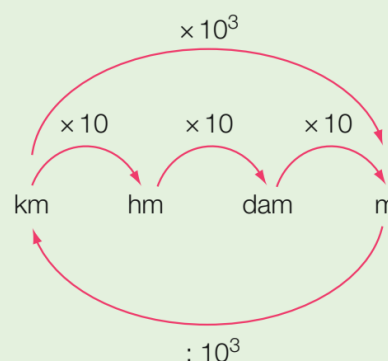


Theorie C Lengte, oppervlakte en inhoud

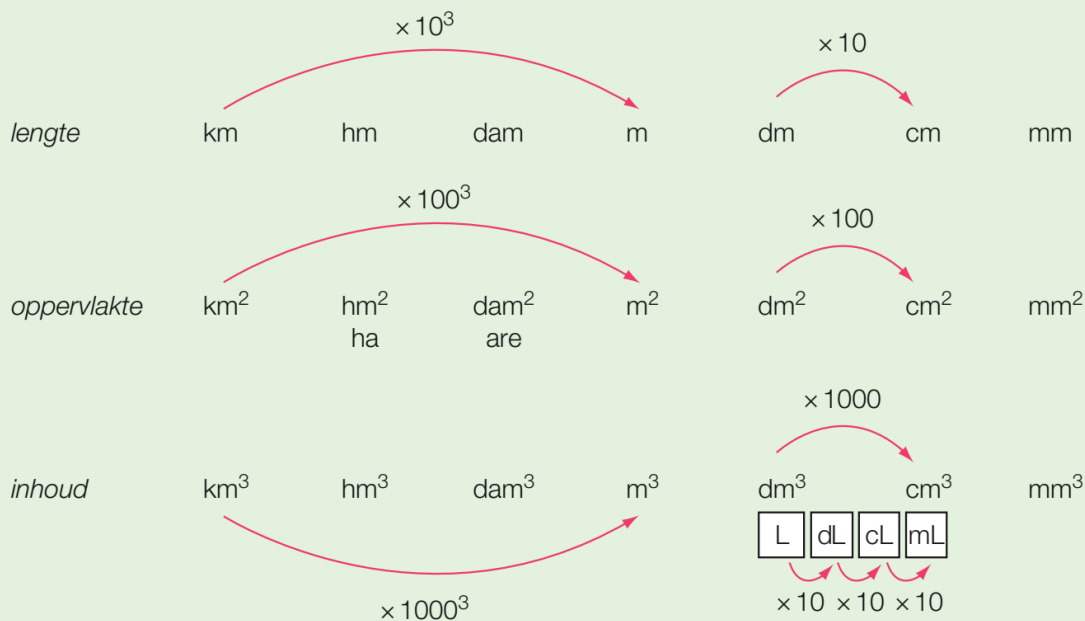
Je weet dat 1 km = 10 hm en 1 hm = 100 meter. Zie het schema hiernaast.

Merk op dat 1 km = 1000 meter = 10^3 meter en

dus ook 1 meter = $\frac{1}{1000}$ km = $\frac{1}{10^3}$ km.



Hoe je lengtematen, oppervlaktematen en inhoudsmaten omrekent, zie je in het schema hieronder. Bij het omrekenen van km^2 naar m^2 gebruik je $1 \text{ km}^2 = 100 \cdot 100 \cdot 100 \text{ m}^2 = 100^3 \text{ m}^2$ en dus ook $1 \text{ m}^2 = \frac{1}{100^3} \text{ km}^2$.



Voorbeeld

Gisele bouwt een muziekstudio in haar kelder. In de rechthoekige ruimte van 4,25 bij 6,32 meter is een gietvloer van polyurethaan aangelegd. De gietvloer heeft een gemiddelde dikte van 8,5 mm.

- Bereken in gehele liters hoeveel polyurethaan gebruikt is voor de gietvloer.
- Langs de muren van de studio hangt een strook geluiddempend materiaal met een oppervlakte van $19,75 \text{ m}^2$. Bereken in cm nauwkeurig de hoogte van de strook geluiddempend materiaal.

Aanpak

- Omdat $1 \text{ liter} = 1 \text{ dm}^3$ kun je eerst m en mm omrekenen naar dm.

Uitwerking

- $4,25 \text{ m} = 42,5 \text{ dm}$, $6,32 \text{ m} = 63,2 \text{ dm}$ en $8,5 \text{ mm} = 0,085 \text{ dm}$
inhoud = $42,5 \cdot 63,2 \cdot 0,085 = 228,31 \text{ dm}^3 \approx 228 \text{ liter}$

In gehele liters, dus het antwoord in liter en afgerond op gehelen.

- lengte = $2 \cdot 4,25 + 2 \cdot 6,32 = 21,14 \text{ m}$
De strook heeft een hoogte van $\frac{19,75}{21,14} \approx 0,93 \text{ meter}$.

In cm nauwkeurig, dus antwoorden zoals 0,93 m of 9,3 dm of 93 cm zijn juist.

8 Vul in.

- a** 52 hm = m **e** $1,45 \cdot 10^{-8} \text{ km}^3 = \dots\dots\dots \text{m}^3$
b $3,4 \cdot 10^7 \text{ mm} = \dots\dots\dots \text{km}$ **f** 5045 L = m^3
c $4,3 \text{ km}^2 = \dots\dots\dots \text{m}^2$ **g** 0,06 dL = mL
d $6,1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 = \dots\dots\dots \text{ha}$ **h** $7,5 \cdot 10^5 \text{ mm}^3 = \dots\dots\dots \text{L}$

R9 In de theorie staat dat $1 \text{ km}^2 = 100 \cdot 100 \cdot 100 \text{ m}^2 = 100^3 \text{ m}^2$.

⊠* Jos zegt: omdat $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ is $1 \text{ km}^2 = 1000^2 \text{ m}^2$.

- a** Reken na dat 100^3 hetzelfde is als 1000^2 .
b Licht de aanpak van Jos toe.
c Bereken op de manier van Jos hoeveel m^2 overeenkomt met 5 km^2 .

10

⊠*

- a** Ronald heeft 52 m^2 hout geleverd en had precies genoeg aan 4 liter verf. Bereken in mm in welke dikte Ronald de verf heeft aangebracht. Rond af op twee decimalen.
b De kraan in de keuken van Kees en Sandra lekt. Er lekt elke twee seconden één druppel water uit de kraan. Volgens Kees is dat geen probleem, want in een jaar tijd lekt er dan nog geen 8 liter water weg. Onderzoek met een berekening of Kees gelijk heeft. Gebruik dat een druppel een inhoud heeft van $5 \cdot 10^{-2} \text{ mL}$.

A11

⊠*

De hoeveelheid neerslag wordt meestal gegeven in mm. De gemiddelde jaarlijkse neerslag in De Bilt is ongeveer 880 mm. Dat betekent dat er in een jaar op één vierkante meter in totaal 880 liter neerslag valt.

- a** Licht dit toe.

De gemiddelde jaarlijkse neerslagduur in De Bilt is ongeveer 624 uur.

Tijdens een wolkbreuk in De Bilt valt er in 20 minuten 24 mm neerslag. De neerslagintensiteit (het aantal mm neerslag per uur) tijdens de wolkbreuk was veel groter dan de gemiddelde neerslagintensiteit gedurende een jaar.

- b** Bereken hoeveel keer groter. Rond af op gehele.
c Bereken hoeveel m^3 neerslag er tijdens de wolkbreuk viel op een voetbalveld van 102 bij 65 meter in De Bilt.



A12 In de maand juli valt er gemiddeld 81 mm neerslag in De Bilt. Neem aan dat dit gemiddelde voor heel Nederland geldt.
 Bereken in gehele m³ nauwkeurig hoeveel neerslag er gemiddeld per Nederlander in de maand juli valt in heel Nederland. Gebruik dat de oppervlakte van Nederland (inclusief binnenwater) 41 500 km² is en dat Nederland 18 miljoen inwoners heeft.

- O13** Stijn heeft de Bruggenloop Nijmegen gelopen. Hij legde het parcours van 7 km af in 27 minuten en 45 seconden. Om zijn gemiddelde snelheid in km per uur te berekenen, deel je de afstand in km door de tijd in uren.
- Licht toe dat 45 seconden = 0,75 minuten.
 - Geef de tijd van Stijn in uren.
 - Bereken de gemiddelde snelheid van Stijn in km per uur. Rond af op één decimaal.



Theorie D Tijd, afstand en snelheid

Snelheden worden in het dagelijks leven meestal gegeven in km per uur (km/uur). Bij wandelen heb je een snelheid van ongeveer 5 km/uur. Een topatleet loopt de marathon met een snelheid van ongeveer 20 km/uur en op snelwegen mag je overdag met de auto 100 km/uur.

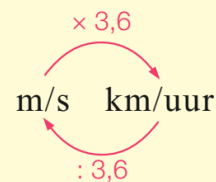
Soms is het nodig om een snelheid om te rekenen van meter per seconde (m/s) naar km/uur of omgekeerd.

Omdat 1 uur = 60 · 60 = 3600 seconden krijg je
 1 m/s = 3600 m/uur = 3,6 km/uur.

Dus 1 m/s = 3,6 km/uur.

Omgekeerd is $1 \text{ km/uur} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s}$.

$$\begin{aligned} \text{snelheid} &= \frac{\text{afstand}}{\text{tijd}} \\ \text{afstand} &= \text{snelheid} \times \text{tijd} \\ \text{tijd} &= \frac{\text{afstand}}{\text{snelheid}} \end{aligned}$$



Voorbeeld

Op 20 augustus 2009 liep Usain Bolt de 200 meter in 19,19 seconden. Hoeveel km/uur was zijn gemiddelde snelheid? Rond af op drie decimalen.

Uitwerking

De gemiddelde snelheid is

$$\frac{200}{19,19} \text{ m/s} = \frac{200}{19,19} \cdot 3,6 \text{ km/uur} \approx 37,520 \text{ km/uur}.$$

14

- a** Het wereldrecord 100 meter sprint voor vrouwen staat op naam van Florence Griffith-Joyner met een tijd van 10,49 seconden.

Bereken in km/uur haar gemiddelde snelheid. Rond af op drie decimalen.

- b** De hardloper Eliud Kipchoge liep op 25 september 2022 de marathon van Berlijn in 2 uur, 1 minuut en 9 seconden. Zijn gemiddelde snelheid was 20,897 km/uur.

Bereken in meters nauwkeurig de lengte van de marathon van Berlijn.

- c** Op 23 juli 2023 liep de Nederlandse atlete Sifan Hassan de 5000 meter met een gemiddelde snelheid van 21,092 km/uur. Ze deed er iets langer dan 14 minuten over.

Bereken hoeveel seconden langer. Rond af op één decimaal.

**A15**

Jori loopt een paar keer per week hard. Hij heeft een korte route van 6,0 km en een lange route van 16,8 km.

- a** Zijn record op de korte route is precies 25 minuten.

Met welke gemiddelde snelheid in km/uur heeft hij die keer gelopen?

- b** Bij zijn record op de lange route was zijn gemiddelde snelheid 14 km/uur.

Bereken zijn recordtijd in minuten nauwkeurig.

- c** Het hardloophorloge van Jori geeft telkens na één km de km-tijd en de gemiddelde snelheid over deze km.

Welke km-tijd moet Jori gemiddeld aanhouden als hij zijn korte route in 26 minuten wil lopen?

- d** Ter voorbereiding op een marathon doet Jori een duurloop. Hij loopt 1 uur en 50 minuten met een gemiddelde snelheid van 12,6 km/uur.

Welke afstand heeft Jori gelopen? Geef je antwoord in km nauwkeurig.

A16

Gijs kijkt uit zijn raam tijdens onweer. Hij ziet dat er bliksem inslaat in een toren op 5,4 km afstand. Pas later hoort hij het geluid van de donder. Geluid heeft een snelheid van 1235 km/uur.

- a** Hoeveel seconden na de inslag hoort hij het geluid van de donder?

Rond af op één decimaal.

- b** Het licht van de inslag bereikt Gijs vrijwel direct. Het doet er slechts $1,8 \cdot 10^{-5}$ seconden over.

Bereken in km/uur de snelheid van het licht. Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie.

E17

Tussen de plaatsen A en B ligt een snelweg met een lengte van 100 km.

Kees rijdt van A naar B en terug. Op de heenreis is zijn gemiddelde snelheid 80 km/uur en op de terugreis 120 km/uur.

Toon aan dat gemiddelde snelheid over heen- en terugreis samen 96 km/uur is.

18



Hiernaast zie je hoeveel ingrediënten nodig zijn om voor zes personen romig aardbeienijs te maken. Hoeveel eieren zijn nodig om voor tien personen dit ijs te maken? En hoeveel gram poedersuiker?



Theorie E Verhoudingen

Jesse verdient met zijn bijbaantje € 6,50 per uur. Hierbij hoort de volgende **verhoudingstabel**.

aantal gewerkte uren	1	2	3	8	12
bedrag in euro's	6,50	13	19,50	52	78

Diagram showing scaling factors: 1 to 2 is $\times 2$, 2 to 13 is $\times 2$, 3 to 8 is $\times 4$, 8 to 52 is $\times 4$, 12 to 78 is $\times 4$.

We zeggen dat de **verhouding** tussen het aantal gewerkte uren en het bedrag in euro's steeds hetzelfde is.

De verhouding $2 : 13$ spreek je uit als *twee staat tot dertien*.

Door $8 : 52$ en $12 : 78$ te vereenvoudigen zie je dat deze verhoudingen gelijk zijn aan $2 : 13$.

Vereenvoudig een verhouding zo ver mogelijk.

In een verhoudingstabel hebben de getallen die onder elkaar staan telkens dezelfde verhouding.

Om een bedrag van 225 euro te verdelen in de verhouding $2 : 3$, maak je eerst $2 + 3 = 5$ gelijke delen. Eén deel is $\frac{1}{5} \cdot 225 = 45$ euro, dus de bedragen zijn $2 \cdot 45 = 90$ euro en $3 \cdot 45 = 135$ euro.

Ook $2 : 5 : 8$ is een verhouding. Om een bedrag van 360 euro in deze verhouding te verdelen, maak je eerst $2 + 5 + 8 = 15$ gelijke delen. Eén deel is $\frac{1}{15} \cdot 360 = 24$ euro, dus de bedragen zijn $2 \cdot 24 = 48$ euro,

$5 \cdot 24 = 120$ euro en $8 \cdot 24 = 192$ euro.

De bedragen zijn ook in één keer te berekenen:

$\frac{2}{15} \cdot 360 = 48$ euro, $\frac{5}{15} \cdot 360 = 120$ euro en $\frac{8}{15} \cdot 360 = 192$ euro.

Voorbeeld

Op een school komen de leerlingen uit de plaatsen A, B en C in de verhouding $8 : 7 : 5$. Er zijn 68 leerlingen meer uit B dan uit C. Hoeveel leerlingen komen uit plaats A?

Aanpak

Bedenk dat B zeven delen en C vijf delen heeft, dus B heeft twee delen meer dan C.

Uitwerking

Twee delen zijn 68 leerlingen, dus één deel is 34 leerlingen.
Het aantal leerlingen uit A is $8 \cdot 34 = 272$.

19



- a** In een klas van 25 leerlingen zitten jongens en meisjes in de verhouding $2 : 3$.
Bereken hoeveel meisjes er in de klas zitten.
- b** De verhouding tussen jeugdleden en volwassen leden op een sportclub is $5 : 2$. Er zijn 84 volwassen leden.
Hoeveel jeugdleden heeft de club?

20



- a** In China zijn er 105 mannen per 100 vrouwen. Het totale aantal inwoners is 1,4 miljard.
Hoeveel mannen telt China meer dan vrouwen? Geef je antwoord in miljoenen en rond af op gehelen.
- b** In Nederland is de verhouding tussen jongeren (0-19 jaar), volwassenen (20-64 jaar) en ouderen (65+ jaar) ongeveer $35 : 105 : 36$.
Er zijn 6,9 miljoen minder ouderen dan volwassenen.
Bereken het totaal aantal inwoners van Nederland.

21



- Anna, Bram en Eva doen mee aan een estafetteloop van in totaal 24 km. Ze verdelen de afstand als volgt: Bram loopt twee keer zo ver als Anna en Eva loopt drie keer zo ver als Anna.
- a** Hoeveel km moet ieder afleggen?
- b** De gemiddelde snelheden van Anna, Bram en Eva hebben de verhouding $4 : 3 : 5$. Bram is 6 km/uur langzamer dan Eva.
Onderzoek of ze in totaal meer of minder dan twee uur over de estafetteloop doen.



A22

- a** In een dorp is de verhouding van het aantal volwassen mannen tot het aantal volwassen vrouwen gelijk aan $2 : 3$. De verhouding van het aantal volwassen vrouwen tot het aantal kinderen is gelijk aan $6 : 1$. Wat is de verhouding van het aantal volwassenen (mannen en vrouwen) tot het aantal kinderen?
- b** Olivia, Ina en Nathalie hebben 770 noten geraapt. Ze verdelen ze in de verhouding van hun leeftijden. Voor iedere 3 noten die Olivia krijgt, krijgt Ina er 4. Voor iedere 7 noten die Nathalie krijgt, krijgt Ina er 6. Hoeveel noten krijgt de jongste?

A23

Een rivier splitst zich in drie takken, zie hiernaast. Bij een aanvoer van minder dan $2400 \text{ m}^3/\text{s}$ verhouden de afvoeren in de takken I, II en III zich als $3 : 4 : 5$.

- a** Bereken de afvoeren in I, II en III als er $2340 \text{ m}^3/\text{s}$ wordt aangevoerd.

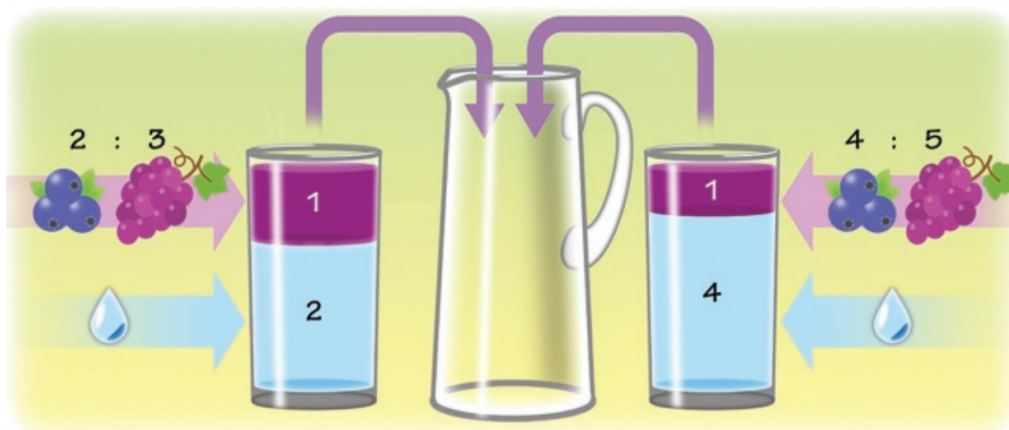
De afvoer in tak II mag niet meer zijn dan $800 \text{ m}^3/\text{s}$. Als deze afvoer meer dreigt te worden, dan zorgt de stuw in II ervoor dat de afvoer daar $800 \text{ m}^3/\text{s}$ is. De afvoeren in I en III verhouden zich dan als $3 : 5$.

- b** Bereken de afvoeren in I, II en III als er $3000 \text{ m}^3/\text{s}$ wordt aangevoerd.
- c** Bereken de aanvoer als via tak III de afvoer $1500 \text{ m}^3/\text{s}$ is.

**E24**

Voor een karaf vruchtenmixdrank wordt de inhoud van twee even grote glazen gemengd. De glazen zijn geheel gevuld en bevatten een mix van vruchtensap en water. In het eerste glas is dit vruchtensap en water in de verhouding $1 : 2$ en in het tweede glas is deze verhouding $1 : 4$. Het sap in het eerste glas is bosbessen- en druivensap in de verhouding $2 : 3$. In het tweede glas is dat $4 : 5$.

Onderzoek wat de verhouding bosbessensap : druivensap : water is in de karaf.



Met de kennis- en vaardighedencheck kun je controleren of je de kennis en vaardigheden van de paragraaf kent en beheerst. Achter elke kennis of vaardigheid wordt verwezen naar de bijbehorende checkopgave en theorie. Maak de checkopgave en controleer je antwoord. De antwoorden staan onder de opgaven. Heb je het antwoord niet goed of twijfel je hoe je de uitwerking moet noteren, bekijk dan het uitwerkingenboek en bestudeer zo nodig nogmaals de aangegeven theorie.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan rekenen met grote en kleine getallen in de wetenschappelijke notatie.
- ☐ Ik kan rekenen met lengte-, oppervlakte- en inhoudsmaten.
- ☐ Ik kan rekenen met tijd, afstand en snelheid.
- ☐ Ik kan rekenen met verhoudingen.

► OPGAVE C1a
THEORIE B

► OPGAVE C1b
THEORIE C

► OPGAVE C1c
THEORIE D

► OPGAVE C2
THEORIE E

C1 Een rechthoekig zwembad is 46 meter lang en overal even diep. Het bevat 4,6 miljoen liter water.

- a** Het volume van een druppel water is $5 \cdot 10^{-5}$ liter.
Hoeveel druppels water zitten er in het zwembad? Geef je antwoord in miljarden.
- b** De oppervlakte van het zwembad is 0,184 hectare.
Bereken in cm de diepte van het water in het zwembad.
- c** Een zwemmer zwemt een uur en een kwartier lang baantjes. Een baantje is één keer de gehele lengte van het zwembad. Haar gemiddelde snelheid is 0,8 m/s.
Bereken hoeveel baantjes ze heeft gezwommen.

C2 Eefje heeft een spel gewonnen van haar broertje en zusje. Ze scoorde 24 punten meer dan haar zusje, die de laagste score had. De scores zijn verdeeld in de verhouding 3 : 4 : 7.
Hoeveel punten scoorde Eefje meer dan haar broertje?

Antwoorden

- C1** **a** 92 miljard druppels
b 250 cm
c 78 baantjes
- C2** 18 punten

1.2 Procenten

Kennis en vaardigheden

- Je kunt vermenigvuldigingsfactoren gebruiken bij procentberekeningen.
- Je kunt een relatieve verandering berekenen.
- Je kunt vermenigvuldigingsfactoren gebruiken bij meerdere relatieve veranderingen.

Voorkennis Rekenen met procenten

Hoeveel is 16,8% van 720?

16,8% van 720 is $0,168 \cdot 720 = 120,96$.

Hoeveel procent is 22,3 van 720?

22,3 van 720 is $\frac{22,3}{720} \cdot 100\% \approx 3,1\%$.

Rond percentages af op één decimaal.

81 is 45% van het totaal.

Hoeveel is het totaal?

$0,45 \times \text{totaal} = 81$, dus het totaal is $\frac{81}{0,45} = 180$.

V1 Bereken.

- | | |
|-----------------------|----------------------------|
| a 32% van 720 | c 0,08% van 5000 |
| b 3,1% van 180 | d 91,8% van 528 000 |

V2 Hoeveel procent is

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| a 92 van 305 | c 0,3 van 17 |
| b 1,8 van 3,9 | d 832 van 21 000? |

V3 Bereken telkens het totaal.

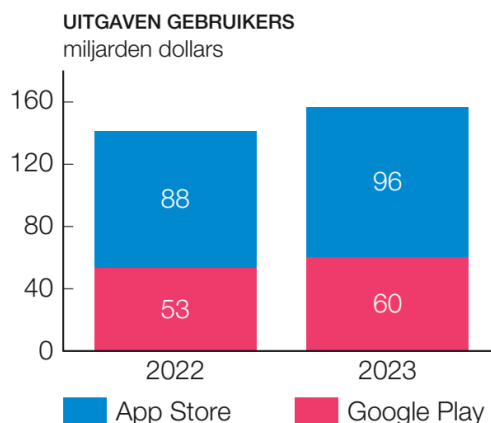
- | | |
|----------------------|-------------------------|
| a 720 is 12% | c 28,2 is 2,35% |
| b 0,96 is 50% | d 1,591 is 0,86% |

O25 In de figuur hiernaast zie je de uitgaven van gebruikers van de App Store en Google Play in 2022 en 2023.

Floris beweert dat de uitgaven van gebruikers van de App Store meer zijn toegenomen dan de uitgaven van gebruikers van Google Play.

Ilse is het hier niet mee eens.

Waarom zijn beide beweringen te verdedigen?



Theorie A Procentuele verandering

Bij wiskunde krijg je vaak te maken met vragen als

- In welke periode is de toename het grootst?
- Wat is het meest toegenomen?

Je onderscheidt hierbij **absolute** en **relatieve veranderingen**.

Bij veranderingen in aantallen gaat het om absolute veranderingen.

Bij veranderingen in procenten gaat het om relatieve veranderingen.

Een ledlamp van € 7,25 wordt 16% in prijs verhoogd.

De nieuwe prijs is $1,16 \cdot 7,25 = € 8,41$.

Het getal 1,16 heet de **vermenigvuldigingsfactor** bij een relatieve toename van 16%. Omgekeerd hoort bij de vermenigvuldigingsfactor 1,132 een relatieve toename van 13,2%.

16% erbij geeft
 $100\% + 16\% = 116\%$,
dus $\times 1,16$.

Een boek van € 19,95 wordt met 12% korting verkocht.

De nieuwe prijs is $0,88 \cdot 19,95 \approx € 17,56$.

Bij een relatieve afname van 12% hoort de vermenigvuldigingsfactor 0,88. Omgekeerd hoort bij de vermenigvuldigingsfactor 0,75 een relatieve afname van 25%.

12% eraf geeft
 $100\% - 12\% = 88\%$,
dus $\times 0,88$.

Bij een relatieve verandering geldt:
nieuw = vermenigvuldigingsfactor $\times$ oud

Bij subtropisch zwemparadijs De Dolfijn betaalde je vorig jaar € 15,95 voor een dagkaart. Dit jaar is dat € 16,75. Om te berekenen hoeveel procent de prijs is gestegen *ten opzichte van de oude prijs*, bedenk je het volgende.

oud = 15,95 en nieuw = 16,75

De toename is nieuw – oud = $16,75 - 15,95$.

Dit geeft relatieve toename = $\frac{16,75 - 15,95}{15,95} \cdot 100\% \approx 5,0\%$.

relatieve verandering = $\frac{\text{nieuw} - \text{oud}}{\text{oud}} \times 100\%$

Bij een afname geeft deze formule een negatieve uitkomst.

Wordt een jas van 130 euro aangeboden voor 98 euro, dan krijg je

$\frac{98 - 130}{130} \cdot 100\% \approx -24,6\%$.

Aan het minteken zie je dat er sprake is van een afname. De relatieve afname is ongeveer 24,6%.

Voorbeeld

Het aantal inwoners in een gemeente nam in de periode 2020-2025 met 2,3% af tot 45 800. De prognose is dat in 2030 het aantal inwoners 43 100 zal zijn.

- a Bereken het aantal inwoners in 2020.
- b Bereken de verwachte procentuele afname in de periode 2025-2030.

Aanpak

$100\% - 2,3\% = 97,7\%$, dus de vermenigvuldigingsfactor is 0,977.

$$0,977 \times \text{oud} = \text{nieuw}, \text{ dus } \text{oud} = \frac{\text{nieuw}}{0,977}.$$

Uitwerking

a Het aantal inwoners is $\frac{45\,800}{0,977} \approx 46\,900$. ←

Er is afgerond op honderdtallen, omdat het aantal inwoners is gegeven in honderdtallen.

b relatieve verandering = $\frac{43\,100 - 45\,800}{45\,800} \cdot 100\% \approx -5,9\%$

Dus de afname is 5,9%.

Bij veel opdrachten is vermeld hoe nauwkeurig je het antwoord moet geven. Staat er geen informatie over de vereiste nauwkeurigheid, dan houd je je bij procentberekeningen aan de volgende vuistregels.

Vuistregels voor afronden

- Geef nieuw en oud in dezelfde nauwkeurigheid.
- Rond percentages af op één decimaal.

26



- a Een park verhoogt zijn toegangsprijs met 16%. De prijs was € 8,50. Bereken de nieuwe prijs.
- b Sam koopt een brood met 35% korting voor € 1,13. Wat was de prijs zonder korting?
- c Het koor van Janna krijgt volgende week vijf nieuwe leden. Dat is een toename van 12%. Hoeveel leden heeft het koor nu?
- d Piet koopt een jaarabonnement bij zijn nieuwe sportschool voor 720 euro. Vorig jaar betaalde hij bij zijn oude sportschool nog 850 euro. Bereken de procentuele verandering.
- e Marieke betaalt nu € 151,25 per maand voor haar basisverzekering, volgend jaar wordt dat € 163,40. Wat is de relatieve toename?

27



- a Een streamingdienst geeft tijdelijk een korting van 40% op een abonnement dat normaal € 9,95 per maand kost. Hoeveel euro korting is dat?
- b Een bibliotheek leent deze maand 651 boeken uit. Dat is een toename van 4% ten opzichte van de maand ervoor. Hoeveel boeken werden vorige maand uitgeleend?
- c Op het Bezuidenoord Lyceum zitten 348 vierdejaars, waarvan er 153 vwo doen, de rest doet havo. Bereken hoeveel procent van de vierdejaars havo doet.
- d Noura ziet een broek van 60 euro. Ze krijgt 18% kassakorting. Wat moet ze afrekenen?

28



- In 2021 waren er in een stad 240 geboorten. In 2022 waren dat er 324. Neem aan dat de procentuele toename elk jaar hetzelfde is.
- a Hoeveel geboorten waren er in 2023?
- b Hoeveel geboorten waren er in 2020?

A29



Zie de tabel over het aantal havoleerlingen per profiel in de periode 2018-2022. Ook zijn absolute en relatieve veranderingen van de aantallen leerlingen in deze periode opgenomen in de tabel. Bereken de ontbrekende getallen.

LEERLINGEN HAVO 4 EN 5 PER PROFIEL

	jaar		verandering	
	2018	2022	absoluut	relatief
NT	13 700		-4100	
NG	29 100			-10,0%
EM		53 100		-1,7%
CM			3000	21,7%

R30



Verbind elk van de vragen hieronder met de juiste berekening.

- | | |
|--|---|
| 1 Hoeveel procent is 36 van 45? | A $\frac{45 - 36}{36} \cdot 100\% = 25\%$ |
| 2 Hoeveel is 25% van 36? | B $\frac{36}{0,75} = 48$ |
| 3 36 is 75% van het totaal. Hoeveel is het totaal? | C $0,25 \cdot 36 = 9$ |
| 4 Hoeveel procent is een toename van 36 tot 45? | D $\frac{36}{45} \cdot 100\% = 80\%$ |
| 5 36 neemt met 25% af. Wat krijg je? | E $\frac{36}{1,25} = 28,8$ |
| 6 Na 25% toename krijg je 36. Wat had je? | F $0,75 \cdot 36 = 27$ |

R31 In vraag b van het voorbeeld wordt de relatieve verandering berekend



met $\frac{\text{nieuw} - \text{oud}}{\text{oud}} \times 100\%$. Mayke berekent in plaats daarvan de vermenigvuldigingsfactor met $\frac{\text{nieuw}}{\text{oud}}$.

- a Bereken de vermenigvuldigingsfactor en rond af op drie decimalen.
- b Hoe kun je aan de vermenigvuldigingsfactor zien dat de afname 5,9% is?

32 Op het Maya College zitten 150 vwo-leerlingen en 200 havo-leerlingen.



Er zitten dus minder leerlingen op het vwo dan op de havo.

Je wil berekenen hoeveel procent minder dat is.

- a Waarom kun je niet spreken van nieuw en oud?

Er zitten 50 leerlingen minder op het vwo, dat is

$$\frac{50}{200} \cdot 100\% = 25\% \text{ minder leerlingen dan op de havo.}$$

- b Bereken hoeveel procent meer leerlingen er op de havo zitten dan op het vwo.
- c Het aantal docenten is 54% minder dan het aantal havo-leerlingen.
Hoeveel procent minder is het aantal docenten dan het aantal vwo-leerlingen?



A33 De volgende vragen gaan over de Tweede Kamerverkiezing van



22 november 2023. In totaal brachten 10 517 680 mensen hun stem uit.

Rond in deze opgave aantallen af op honderdtallen.

- a De PVV boekte grote winst. Er stemden 2 450 878 mensen op deze partij. Dat is maar liefst 118% meer dan in 2021.
Hoeveel mensen stemden in 2021 op de PVV?
- b GroenLinks-PvdA haalde 1 643 073 stemmen en NSC haalde 1 343 287 stemmen.
Hoeveel procent minder stemmen haalde NSC, vergeleken met GroenLinks-PvdA?
- c In 2021 was de VVD nog de grootste partij. Toen stemden er 2 279 130 mensen op deze partij. In 2023 waren dat er 689 611 minder.
Met hoeveel procent is het aantal VVD-stemmen afgenomen in 2023 vergeleken met 2021?
- d Het opkomstpercentage was 77,7%.
Hoeveel stemgerechtigden telde Nederland in 2023?
- e Vergeleken met 2021 leverde D66 stemmen in. In 2021 stemden 1 565 861 mensen op D66. In 2023 waren dat er 58% minder.
Hoeveel mensen stemden in 2023 op D66?
- f Vergeleken met 2021 stemden er 381 232 meer mensen op de BBB.
Dat komt neer op een toename van 365%.
Hoeveel mensen stemden in 2023 op de BBB?

Krantenartikel **Minder auto's verkocht, maar wel veel meer elektrische**

Het aantal elektrische auto's in Nederland stijgt snel. Van de nieuw verkochte auto's in 2022 reed 23% volledig op stroom, meldt brancheorganisatie RAI Vereniging. In 2021 was dat nog 11%. Ook het aandeel (plug-in) hybride auto's nam toe, van 33% in 2021 naar 36% in 2022. De meeste nieuw verkochte auto's zijn weliswaar nog steeds benzineauto's, maar het aandeel slinkt snel. In 2021 kwam dat aandeel met 46% voor het eerst onder de helft uit en in 2022 is dat gezakt naar 38,5%.

Volgens de RAI Vereniging waren er op 1 januari 2023 in Nederland 340 600 volledig elektrische auto's, dat is 3,8% van het totaal.

In 2022 zijn er 312 000 nieuwe auto's verkocht, 10 000 minder dan in 2021.

De autoverkoop loopt sinds 2020 terug als gevolg van de coronacrisis, onder meer door de lockdowns en problemen met de levering van onderdelen.

bron: nos.nl

- a Hoeveel auto's waren er op 1 januari 2023 in Nederland?
- b Hoeveel procent van de elektrische auto's op 1 januari 2023 zijn in 2022 verkocht?
- c Bereken met hoeveel het aantal nieuw verkochte (plug-in) hybride auto's in 2022 is gestegen in vergelijking met 2021.
- d Bereken met hoeveel procent het aantal nieuw verkochte benzineauto's in de periode 2021-2022 afnam.

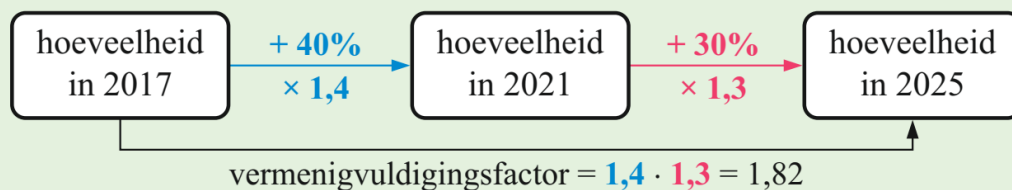
- a Tijdens de drie zomermaanden is een hotel voor 88% bezet, de andere maanden voor slechts 40%.

Voor hoeveel procent is het hotel het hele jaar gemiddeld bezet?

- b Een dorstige kameel bestaat voor 84% van zijn gewicht uit water. Nadat hij zijn dorst heeft gelest, weegt hij 800 kg en bestaat voor 85% uit water. Hoeveel woog hij voordat hij begon te drinken?

Theorie B Procent op procent

Neemt een hoeveelheid in de periode 2017-2021 met 40% toe en in de periode 2021-2025 met 30% toe, dan bereken je de procentuele verandering in de periode 2017-2025 als volgt.



Omdat $1,4 \cdot 1,3 = 1,82$ is de procentuele toename in de periode 2017-2025 gelijk aan 82%.

36



- a** In de periode 2015-2020 nam het aantal leerlingen op het Hypatia Lyceum met 13,1% toe. In de periode 2020-2024 nam het aantal leerlingen met 8,2% af.

Bereken de procentuele verandering van het aantal leerlingen in de periode 2015-2024.

- b** Floor wil een treinticket Amsterdam-Parijs kopen. Ze kijkt vier keer op de website en elke keer is de prijs anders. De relatieve veranderingen zijn achtereenvolgens -4,9%, +8,3% en -3,4%.

Is de ticketprijs toe- of afgenomen sinds de eerste keer dat ze op de website keek? Met hoeveel procent?

- c** Het bedrag op een spaarrekening groeit jaarlijks met 2,3% rente.

Bereken met hoeveel procent het bedrag na 10 jaar is toegenomen.

37



- De ouders van Johnny huren een appartement. De huurprijs is vier opeenvolgende jaren verhoogd met 3,1% per jaar.

Na de huurverhogingen betalen ze € 1456,21 per maand.

Bereken de huurprijs voor de verhogingen.

38



- De ouders van Johnny huren een appartement. De huurprijs is vier opeenvolgende jaren verhoogd met 3,1% per jaar. Het jaar daarna wordt de huurprijs verlaagd.

Onderzoek hoeveel procent de verlaging moet zijn om de huurprijs over deze vijf jaar onveranderd te laten.

A39



- In het staafdiagram hiernaast zie je de winstontwikkeling van een bedrijf.

- a** Met hoeveel procent is de winst toegenomen in de periode 2021-2026?

- b** Onderzoek in welke periode van drie opeenvolgende jaren de winst procentueel het meest toegenomen is.

A40



Zie opgave 39.

In de periode 2020-2024 nam de winst af met 3%.

Met hoeveel procent nam de winst af in 2021 ten opzichte van het jaar ervoor? Rond af op één decimaal.

R41



Bij procentberekeningen is een fout snel gemaakt.

Wat is er mis bij de volgende uitspraken?

- a** In 2022 was de winst van een bedrijf 15% meer dan in 2021 en in 2023 was de winst zelfs 25% meer dan in 2022.

Dus de winst in 2023 was 40% meer dan in 2021.

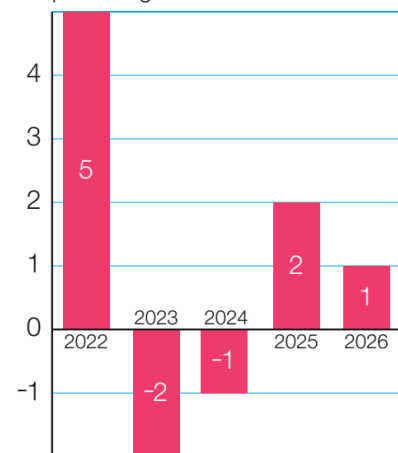
- b** Een hoeveelheid is met 10% toegenomen tot 3080.

Dus de hoeveelheid was eerst $0,9 \cdot 3080 = 2722$.

- c** Hajar heeft 60 euro en Joris heeft 50 euro. Dus Hajar heeft

$\frac{60 - 50}{60} \cdot 100\% \approx 16,7\%$ meer geld dan Joris.

TOENAME VAN DE WINST T.O.V. HET JAAR ERVOOR
percentage



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan vermenigvuldigingsfactoren gebruiken bij procentberekeningen.
- ☐ Ik kan een relatieve verandering berekenen.
- ☐ Ik kan vermenigvuldigingsfactoren gebruiken bij meerdere relatieve veranderingen.

► OPGAVE C3ab
THEORIE A

► OPGAVE C3cde
THEORIE A

► OPGAVE C4
THEORIE B

C3 In 2023 telde klimvereniging 't Bouldertje 449 leden. De contributie bedroeg in dat jaar € 24,50. In de periode 2023-2024 nam het aantal leden met 24,7% toe.

- a** Bereken het aantal leden in 2024.
- b** De contributie is in de periode 2022-2023 met 6,5% gedaald. Wat was de contributie in 2022?

Om meer leden te trekken, besloot de vereniging om in 2024 de jaarlijkse contributie met € 2,50 te verlagen ten opzichte van 2023.

- c** Bereken de relatieve verandering van de contributie in de periode 2023-2024.
- d** De inkomsten van de vereniging bestaan alleen uit de contributiegelden. Zijn de jaarlijkse inkomsten in de periode 2023-2024 toe- of afgenomen? Met hoeveel procent?
- e** Klimvereniging De Toppers telde 580 leden in 2023. Hoeveel procent minder leden had 't Bouldertje vergeleken met De Toppers?

C4 Ari, Ben en Channah kopen een broodje bij een lunchzaak. Ben's broodje is 2,5% duurder dan dat van Ari en het broodje van Channah is 8,4% goedkoper dan dat van Ben. Hoeveel procent goedkoper is het broodje van Channah, vergeleken met dat van Ari?

Antwoorden

- C3**
- a** 560 leden
 - b** € 26,20
 - c** -10,2%
 - d** toegenomen met 12,0%
 - e** 22,6%
- C4** 6,1%

1.3 Exponentiële groei

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij gegeven beginwaarde en groeipercentage een formule van exponentiële groei opstellen en er berekeningen mee doen.
- Je kunt met behulp van de GR vraagstukken oplossen bij exponentiële groei.

042



Op 1 oktober heeft Murat 1240 volgers op social media. Dat aantal neemt elke week met 5% toe. In de tabel is N het aantal volgers op social media en t het aantal weken na 1 oktober.

VOLGERS MURAT OP SOCIAL MEDIA

t	0	1	2	3
N	1240			

- Vul de tabel verder in. Rond telkens af op gehele.
- Bonny berekent dat Murat op een gegeven moment $1240 \cdot 1,05^{12} \approx 2227$ volgers heeft. Hoeveel weken na 1 oktober is dat?
- Bereken het aantal volgers acht weken na 1 oktober.

Theorie A Exponentiële groei

Het aantal volgers van Murat in opgave 42 groeit elke week met 5%. Het aantal wordt dus elke week met 1,05 vermenigvuldigd. Je hebt hier te maken met een voorbeeld van **exponentiële groei**. Het getal waarmee telkens wordt vermenigvuldigd, heet de **groeifactor**. Hier is de groeifactor 1,05 per week. De **beginwaarde** (of **beginhoeveelheid**) is de waarde op $t = 0$. Hier is dat 1240 volgers.

Voor het aantal volgers N geldt:

op $t = 0$ is $N = 1240$

op $t = 1$ is $N = 1240 \cdot 1,05 = 1240 \cdot 1,05^1$

op $t = 2$ is $N = 1240 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 1240 \cdot 1,05^2$

op $t = 3$ is $N = 1240 \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 1240 \cdot 1,05^3$

Algemeen geldt $N = 1240 \cdot 1,05^t$.

Neemt een hoeveelheid met 5% toe, dan is 1,05 de vermenigvuldigingsfactor. Neemt een hoeveelheid elke week met 5% toe, dan is 1,05 de groeifactor per week.

Exponentiële groei

beginwaarde b

$$\begin{array}{l}
 b \cdot g \\
 b \cdot g^2 \\
 b \cdot g^3 \\
 \vdots \\
 b \cdot g^t
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \times g \\
 \times g \\
 \times g \\
 \\
 \end{array}$$

Formule voor exponentiële groei

$$N = b \cdot g^t$$

b is de beginhoeveelheid of beginwaarde

g is de groeifactor per tijdseenheid

In de formule voor exponentiële groei staat de variabele in de exponent.

Negatieve groeifactoren komen niet voor, maar de groeifactor kan wel kleiner dan 1 zijn. De hoeveelheid neemt dan af. Ook in deze gevallen spreken we van exponentiële groei, hoewel de uitdrukkingen 'exponentiële afname' en 'exponentieel verval' ook gebruikt worden.

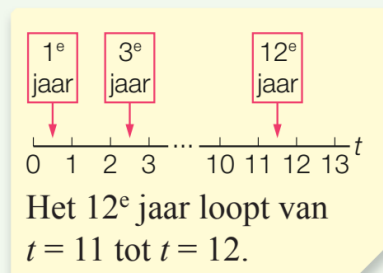
Voorbeeld

In een natuurgebied leven 1890 herten. Dat aantal neemt jaarlijks met 4,7% toe.

- a Stel de formule op van het aantal herten N na t jaar.
- b Hoeveel herten zijn er na zes jaar?
- c Met hoeveel neemt het aantal herten in het twaalfde jaar toe? Rond af op tientallen.

Uitwerking

- a $N = 1890 \cdot 1,047^t$
- b $t = 6$ geeft $N = 1890 \cdot 1,047^6 \approx 2490$
Dus na zes jaar zijn er ongeveer 2490 herten.
- c Het 12^e jaar loopt van $t = 11$ tot $t = 12$.
De toename is $1890 \cdot 1,047^{12} - 1890 \cdot 1,047^{11} \approx 150$.



43



- a Een hoeveelheid N neemt met 6,5% per uur af. Op $t = 0$ is $N = 450$.
Stel de formule op van N met t in uren.
- b Een bedrag B in euro's verdubbelt elke maand. Op $t = 0$ is $B = 15,52$.
Stel de formule op van B na t maanden.
- c Het aantal kinderen in een tropisch zwemparadijs neemt tijdens een ochtend in de zomervakantie elk kwartier met 4,5% toe. Om 8:00 uur opent het zwemparadijs en er zijn dan 122 kinderen.
Bereken het aantal kinderen om kwart over tien.

44



- Na de kernramp van Tsjernobyl in 1986 werd een groot gebied afgesloten voor mensen. Dat bleek goed nieuws voor wilde dieren. Zo leefden er op 1 januari 1987 in dit gebied 280 reeën en nam dit aantal daarna jaarlijks met 12% toe.
- a Stel de formule op van het aantal reeën N . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1987.
 - b Met hoeveel nam het aantal reeën in 1990 toe? Rond af op tientallen.
 - c Wat is de relatieve verandering van het aantal reeën in de periode 1987-1990?

45



Zie opgave 44.

- a Elke x jaar is er sprake van een verdubbeling van het aantal reeën.
Onderzoek wat x is. Rond af op gehelen.
- b Mark heeft voor het aantal reeën de formule $N = 280 \cdot g^d$ opgesteld.
Hierin is d de tijd in decennia met $d = 0$ op 1 januari 1987.
Bereken g . Rond af op drie decimalen.

A46

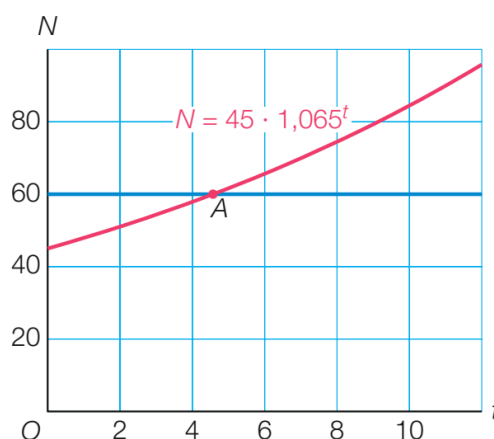
Bij het zuiveren van afvalwater gebruikt men het begrip biochemisch zuurstofverbruik (BZV) als maat voor de verontreiniging van het water. In deze opgave gaan we uit van huishoudelijk afvalwater met een BZV van 185 mg/liter. Hoe schoner het water, des te lager het BZV.

Neem aan dat door het zuiveren het BZV met 15,5% per dag afneemt.

- Stel de formule op van het BZV van huishoudelijk afvalwater na t dagen zuiveren.
- Hoeveel neemt het BZV af tijdens de vierde dag van de zuivering? Geef je antwoord in mg/liter en rond af op gehele.
- Met hoeveel procent neemt het BZV af in de eerste week van de zuivering?
- Een laborant meet het BZV na 5 dagen zuiveren. Drie dagen later meet de laborant nogmaals het BZV. Uit de metingen blijkt dat in deze drie dagen het BZV met ongeveer 20 mg/liter is afgenomen. Komt deze afname overeen met de afname op basis van de formule?

O47

Het aantal inwoners van een stad neemt exponentieel toe. Hierbij hoort de formule $N = 45 \cdot 1,065^t$ met N het aantal inwoners in duizendtallen en t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2022. Hiernaast is de grafiek van N getekend. Ook is een horizontale lijn getekend op hoogte $N = 60$. De grafiek en de lijn snijden elkaar in het punt A . De t -coördinaat van A is ongeveer 4,6. In welk jaar heeft de stad 60 duizend inwoners?



Theorie B Grafieken en snijpunten op de GR

In opgave 47 zijn de grafieken en het snijpunt gegeven. Uit de coördinaten van het snijpunt volgt dat na ongeveer 4,6 jaar de stad 60 000 inwoners heeft.

Als de grafieken niet zijn gegeven, kun je de grafische rekenmachine de grafieken laten tekenen. Het laten tekenen van een grafiek door de GR heet **plotten**. Heb je twee grafieken geplot die een snijpunt hebben, dan kun je de GR de coördinaten van het snijpunt laten berekenen. In de volgende module leer je hoe dat gaat.

►GR] Neem de module **Formules, grafieken en snijpunten** door.

Gebruik je opties van de GR bij het oplossen van een probleem, dan is alleen een antwoord niet voldoende. Hieronder zie je aan welke voorwaarden de uitwerking moet voldoen.

Uitwerking bij gebruik van de GR

- 1 Noteer de formules die je invoert, dus schrijf op $y_1 = \dots$ en $y_2 = \dots$
- 2 Noteer de optie(s) die je gebruikt en geef het resultaat.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

Bij sommige grafische rekenmachines kan het lastig zijn om een juist venster te bepalen bij een opgave. In dit hoofdstuk geven we daarom waar nodig een voorstel voor een geschikt venster.

Voorbeeld

Door verdwenen broedgebieden en intensivering van de landbouw zijn er steeds minder kieviten in Nederland. Nesten lopen gevaar door maaien, bemesten, ploegen en zaaien.

In maart 2000 waren er nog 250 000 broedparen kieviten in Nederland. Daarna is dat aantal jaarlijks met 4,5% afgenomen.

- a Stel de formule op van het aantal broedparen kieviten in Nederland. Neem het aantal broedparen N in duizendtallen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in maart 2000.
- b In maart van welk jaar waren er voor het eerst minder dan 90 000 broedparen kieviten in Nederland? Een geschikt venster is x tussen 0 en 40 en y tussen 0 en 250.



Uitwerking

a $N = 250 \cdot 0,955^t$.

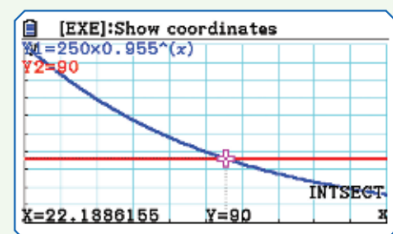
b $250 \cdot 0,955^t = 90$

Voer in $y_1 = 250 \cdot 0,955^x$ en $y_2 = 90$.

De optie snijpunt geeft $x = 22,18\dots$

Dus in maart 2023.

bij $t = 22$ nog niet,
bij $t = 23$ voor het eerst wel



48



De stad Bujumbura in Burundi is een van de snelst groeiende steden ter wereld. In januari 2020 had de stad 1,013 miljoen inwoners. De verwachting is dat dit aantal met 26% per jaar zal groeien.

- Stel de formule op van het aantal inwoners van Bujumbura. Neem het aantal inwoners N in miljoenen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in januari 2020.
- In januari van welk jaar is het aantal inwoners van Bujumbura voor het eerst meer dan 4 miljoen? Een geschikt venster is x tussen 0 en 10 en y tussen 0 en 8.
- Na hoeveel jaar is het aantal inwoners van Bujumbura verdubbeld ten opzichte van het aantal inwoners in januari 2020? Rond af op gehelen.

49



Volgens een onderzoek van de Verenigde Naties (VN) uit 2007 zal het aantal inwoners van Afrika met 1,7% per jaar toenemen. Op 1 januari 2007 woonden er 876 miljoen mensen in Afrika.

Een geschikt venster is x tussen 0 en 25 en y tussen 0 en 1400.

- Stel de formule op van het aantal inwoners van Afrika. Neem het aantal inwoners N_A in miljoenen en de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2007.
- Bereken in welk jaar er 1 miljard mensen in Afrika wonen.

In hetzelfde onderzoek staat dat de bevolking van Europa met 0,1% per jaar zal afnemen. Op 1 januari 2007 woonden er 731 miljoen mensen in Europa.

- Stel de formule op van het aantal inwoners van Europa. Neem het aantal inwoners N_E in miljoenen en de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2007.
- Bereken in welk jaar het aantal inwoners van Europa met 2% is afgenomen ten opzichte van 1 januari 2007.
- De voorspellingen van de VN zijn niet uitgekomen. Op 1 januari 2022 was het aantal inwoners van Afrika 1,427 miljard en in Europa 721 miljoen.

Bereken welke van de twee voorspellingen op 1 januari 2022 procentueel het meest afwijkt in vergelijking met het werkelijke aantal inwoners.



A50 Ter bescherming tegen röntgenstraling wordt vaak lood gebruikt.



Bij elke mm dikte van het lood dringt 30% minder röntgenstraling door. De bijbehorende formule is $I = 100 \cdot 0,70^d$. Hierin is I de intensiteit van de straling in procenten en d de dikte van het lood in mm.

- a Hoeveel procent van de straling dringt door lood met een dikte van 2 mm?
- b Met hoeveel procent neemt de straling af bij lood met een dikte van een halve cm?
- c Plot de grafiek van $I = 100 \cdot 0,70^d$. Neem x tussen 0 en 20. Welke waarden van y zijn geschikt?
- d Men wil dat maximaal 20% van de straling doordringt. Bereken in mm de dikte van het lood die men moet gebruiken. Rond af op één decimaal.



Ter bescherming tegen röntgenstraling wordt ook beton gebruikt. Per mm beton dringt 2,2% minder straling door.

- e Bereken in mm de dikte van het beton die men moet gebruiken om maximaal 20% van de straling te laten doordringen. Rond af op gehele.

A51 Zie opgave 50.



Een muur van 12 cm dik is gemaakt van lood en beton in de verhouding 1 : 7.

Hoeveel procent van de straling wordt door de muur tegengehouden?

A52 Tijdens een chemische reactie neemt het aantal deeltjes van stof A met



3,5% per seconde af. Tegelijkertijd neemt het aantal deeltjes van stof B met 4,1% per seconde toe. Aan het begin van de reactie zijn er $4,02 \cdot 10^{11}$ deeltjes van stof A en $7,80 \cdot 10^9$ deeltjes van stof B aanwezig. Na één minuut wordt de reactie gestopt.

- a Stel de formules van N_A en N_B op. Neem N in miljarden deeltjes en t in seconden met $t = 0$ aan het begin van de reactie.
- b Als de reactie wordt gestopt, zijn er meer deeltjes van stof B aanwezig dan van stof A.
Hoeveel procent meer?
- c Na hoeveel seconden is het aantal deeltjes van stof A en stof B gelijk? Rond af op gehele. Een geschikt venster is x tussen 0 en 60 en y tussen 0 en 500.
- d Na een bepaalde tijd zijn er $1,38 \cdot 10^{11}$ deeltjes van stof A aanwezig. Hoeveel deeltjes van stof B zijn er dan aanwezig? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.

A53 Zie opgave 52.



Na hoeveel seconden is het aantal deeltjes van stof B 50% meer dan het aantal deeltjes van stof A? Rond af op één decimaal.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan bij gegeven beginwaarde en groeipercentage een formule van exponentiële groei opstellen en er berekeningen mee doen.

► OPGAVE C5
THEORIE A

☐ Ik kan met behulp van de GR vraagstukken oplossen bij exponentiële groei.

► OPGAVE C6
THEORIE B

C5 Brian neemt om 8:00 uur 250 mg van een medicijn. Dit medicijn wordt in zijn lichaam afgebroken. De hoeveelheid medicijn neemt per uur met 14% af.

- a Stel de formule op van de hoeveelheid medicijn M in mg. Neem de tijd t in uren met $t = 0$ om 8:00 uur.
- b Bereken met hoeveel mg de hoeveelheid medicijn afneemt tussen 12:00 en 16:00 uur. Rond af op gehelen.

C6 Het aantal bacteriën N in een kweekschtaaltje neemt elke minuut met 1,9% toe. Op $t = 0$ zijn er 15 000 bacteriën in het schtaaltje.

- a Stel de formule van N op. Neem de tijd t in minuten.
- b Plot de grafiek van N . Een geschikt venster is x tussen 0 en 60 en y tussen 0 en 60 000.
- c Na hoeveel gehele minuten is het aantal bacteriën voor het eerst verdubbeld?

Antwoorden

C5 a $M = 250 \cdot 0,86^t$

b 62 mg

C6 a $N = 15\,000 \cdot 1,019^t$

b *

c na 37 minuten

* geeft aan dat een antwoord hier niet is opgenomen. Het gaat dan om antwoorden zoals tabellen, figuren, redeneringen en toelichtingen. Zie voor ontbrekende antwoorden het antwoorden- of uitwerkingenboek.

1.4 Informatie in tabellen en grafieken

Kennis en vaardigheden

- Je kunt berekeningen doen met gegevens uit tabellen.
- Je kunt berekeningen doen met gegevens die uitgezet zijn in grafieken.
- Je kunt omgaan met grafiekenbundels.

Theorie A Tabellen

Tabellen worden vaak gebruikt om een grote hoeveelheid cijfermateriaal op een overzichtelijke wijze te presenteren. Vandaar dat je deze regelmatig in kranten, tijdschriften en leerboeken aantreft.

Bij een tabel moet het duidelijk zijn wat elk getal in de tabel voorstelt.

Let bij een tabel op het volgende.

- Maakt de titel duidelijk waar de tabel over gaat?
- Is het duidelijk wat de rijen en de kolommen voorstellen?
- Zijn moeilijke begrippen toegelicht?

54

In de tabel staan gegevens over de melkveehouderij in Nederland.



OMVANG MELKVEEHOUDERIJ

jaar	aantal bedrijven	aantal melkkoeien × 1000	totale melkproductie in 1000 ton*
1980	67 200	2356	11 851
1990	47 000	1878	...
2000	29 500	1504	10 733
2010	19 800	1479	11 626
2020	15 700	1593	13 987

*1 ton = 1000 kg = 971 liter melk

- Met hoeveel bedrijven per dag is de Nederlandse melkveehouderij gekrompen in de periode 1980-2020? Rond af op één decimaal.
- Bereken met hoeveel procent de gemiddelde melkproductie per koe is toegenomen in de periode 1980-2020.
- In 2020 hadden de 100 grootste bedrijven gemiddeld 500 koeien per bedrijf.
Hoeveel koeien per bedrijf hadden de andere bedrijven gemiddeld in 2020? Rond af op gehelen.
- In 1990 werd er gemiddeld 232,9 m³ melk per bedrijf geproduceerd.
Bereken in tonnen de totale melkproductie in 1990. Rond af op duizendtallen.

Bij het vaststellen van de premie van een autoverzekering gebruikt verzekeraar Garantie & Risico een bonus-malusregeling. Schadevrij rijden wordt beloond met een korting op de premie. De korting kan oplopen tot 80%. Bij schade kan het percentage afnemen. Het is zelfs mogelijk dat een toeslag op de premie wordt toegepast. Ga uit van een basispremie van € 1000 per jaar.

Bij het aangaan van de verzekering geldt trede 6 als uitgangspunt. Je krijgt direct 35% korting en betaalt dus € 650 voor het eerste jaar. Zie de tabel.

BONUS/MALUSLADDER AUTOVERZEKERING

bonus/ malus-trede	korting/ toeslag in %	nieuwe bonus/malustrede na een verzekeringsjaar met:				
		0 schades	1 schade	2 schades	3 schades	4+ schades
21	80	21	16	11	6	1
20	80	21	15	10	5	1
19	80	20	14	9	4	1
18	80	19	13	8	3	1
17	80	18	12	7	2	1
16	80	17	11	6	1	1
15	80	16	10	5	1	1
14	80	15	9	4	1	1
13	75	14	8	3	1	1
12	70	13	7	2	1	1
11	65	12	6	1	1	1
10	55	11	5	1	1	1
9	50	10	4	1	1	1
8	45	9	3	1	1	1
7	40	8	2	1	1	1
6	35	7	1	1	1	1
5	20	6	1	1	1	1
4	+10	5	1	1	1	1
3	+10	4	1	1	1	1
2	+10	3	1	1	1	1
1	+10	2	1	1	1	1

Mevrouw Zalm gaat op 1 januari 2015 de verzekering aan. Ze rijdt vijf jaar zonder schade.

a Licht toe dat in 2020 mevrouw Zalm € 350 premie betaalt.

b In 2020 heeft mevrouw Zalm één schade.

Op welke trede is ze op 1 januari 2021? Hoeveel moet ze betalen?

c In de jaren 2021, 2022, 2023 en 2024 rijdt mevrouw Zalm schadevrij.

In 2025 heeft ze twee schades.

Op welke trede is mevrouw Zalm op 1 januari 2026? Hoeveel premie moet ze dan betalen?

56 Zie opgave 55.



Ga weer uit van een basispremie van € 1000.

Meneer Verbeek zit op 1 januari 2020 op trede 12. Hij betaalt dan € 300 voor zijn autoverzekering. In 2020 heeft hij één schade van € 450. Hij meldt deze schade bij de verzekeraar en krijgt het bedrag vergoed.

- Op welke trede is meneer Verbeek op 1 januari 2021? Hoeveel betaalt hij dan?
- In de jaren 2021, 2022, 2023 en 2024 rijdt meneer Verbeek schadevrij. Hoeveel euro heeft hij in totaal betaald aan de verzekeraar in de periode van 1 januari 2021 tot en met 1 januari 2025?
- Neem aan dat meneer Verbeek de in 2020 opgelopen schade niet bij de verzekeraar zou hebben gemeld. Op 1 januari 2021 zit hij dus op trede 13. Enzovoort. Hoeveel euro zou hij dan aan de verzekeraar hebben betaald in de periode van 1 januari 2021 tot en met 1 januari 2025?
- Vergelijk de antwoorden op de vragen b en c. Welk advies zou je aan een automobilist geven wanneer het tot een schade komt?



A57



De Benelux is sinds 1944 een regionale intergouvernementele samenwerking tussen België, Nederland en Luxemburg. In de tabel staat informatie over de landen van de Benelux. De gegevens zijn van 2023.

GEGEVENS BENELUX-LANDEN

land	aantal inwoners ×1000	aandeel beroeps- bevolking	bevolkings- dichtheid ¹	totale bruto inkomen in miljarden euro's	aantal personen per huishouden
België	11 698	40,3%	391	534	2,39
Nederland	17 922	54,1%	431	956	2,21
Luxemburg	654	41,6%	253	56	2,37
Benelux			409	1564	2,28

¹ bevolkingsdichtheid is het gemiddelde aantal inwoners per km²

- Vul de tabel verder in.
- In welk land is het bruto inkomen per inwoner het grootst?
- Hoeveel procent groter is de oppervlakte van Nederland vergeleken met de oppervlakte van België?
- Het huishoudinkomen is het gemiddelde inkomen in euro's per huishouden. Bereken het huishoudinkomen van Luxemburg. Rond af op duizendtallen.

Verzekeraar Garantie & Risico biedt ook zorgverzekeringen aan. Naast de verplichte basisverzekering zijn er ook aanvullende verzekeringen mogelijk. Iedereen heeft een wettelijk verplicht eigen risico van 385 euro. Je kunt het eigen risico echter ook verhogen. In dat geval krijg je een korting op de premie. Zie hiernaast voor de zorgverzekeringen die Garantie & Risico aanbiedt.

- a** Mevrouw Lever is 56 jaar. Ze neemt een basisverzekering en een aanvullende verzekering Royaal. Ze neemt geen aanvullende tandartsverzekering. Mevrouw Lever betaalt per maand en ze verhoogt het eigen risico met 200 euro. Bereken hoeveel premie ze jaarlijks moet betalen.
- b** Elsemieke is 22 jaar. Ze sluit een basisverzekering af, verhoogt haar eigen risico met 500 euro en neemt een aanvullende tandartsverzekering Intro. Ze betaalt per halfjaar. Bereken hoeveel premie Elsemieke per halfjaar betaalt.

Indien je werkgever afspraken heeft gemaakt met de zorgverzekeraar is het mogelijk om 40% extra korting te krijgen op aanvullende verzekeringen.

- c** Femke is 35 jaar en breidt de basisverzekering uit met een aanvullende verzekering Royaal en een aanvullende tandartsverzekering Start. Ze verhoogt het eigen risico niet. Femke wil kosten besparen door gebruik te maken van de korting via haar werkgever en door per jaar te betalen. Bereken welk bedrag Femke hierdoor in een jaar aan premie bespaart.

ZORGVERZEKERING GARANTIE & RISICO

Eigen risico			Premie
Premie bij € 385 eigen risico			€ 139,45
Premie bij € 485 eigen risico			€ 135,45
Premie bij € 585 eigen risico			€ 131,45
Premie bij € 685 eigen risico			€ 127,45
Premie bij € 785 eigen risico			€ 123,45
Premie bij € 885 eigen risico			€ 119,45
Aanvullende verzekeringen			
Leeftijd	Intro	Start	Royaal
0 t/m 17	€ 0	€ 0	€ 0
18 t/m 34	€ 9,25	€ 21,75	€ 37,95
35 t/m 54	€ 9,95	€ 23,75	€ 45,75
vanaf 55	€ 10,95	€ 23,95	€ 45,50
Aanvullende tandartsverzekeringen			
Leeftijd	Intro	Start	Royaal
0 t/m 17	n.v.t	n.v.t	n.v.t
18 t/m 29	€ 16,95	€ 24,80	€ 45,75
vanaf 30	€ 17,95	€ 26,95	€ 51,50
De premies zijn per maand. Bij betaling per halfjaar wordt 1,25% korting en bij betaling per jaar wordt 3% korting gegeven op de te betalen premie.			



59

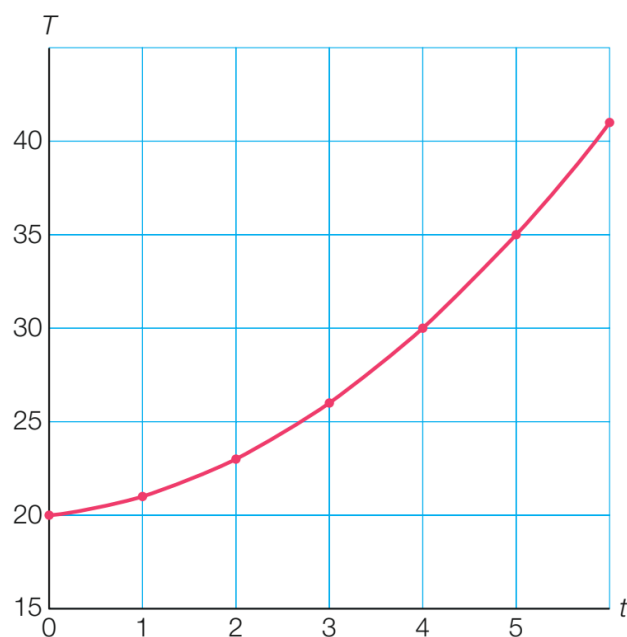
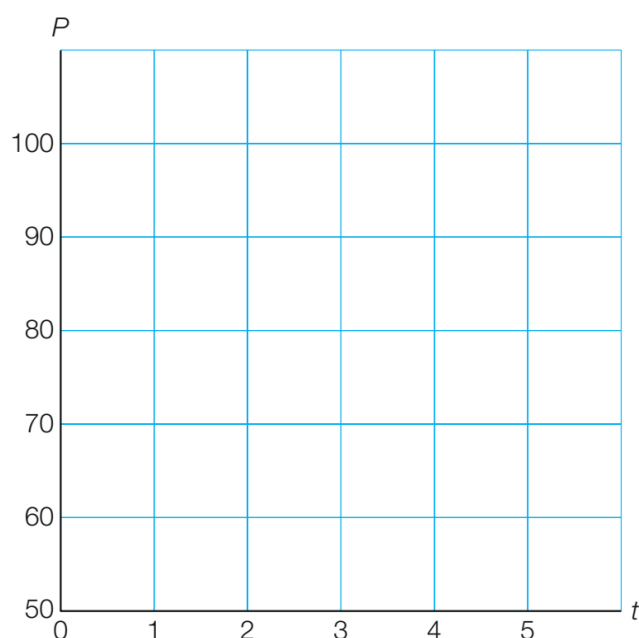
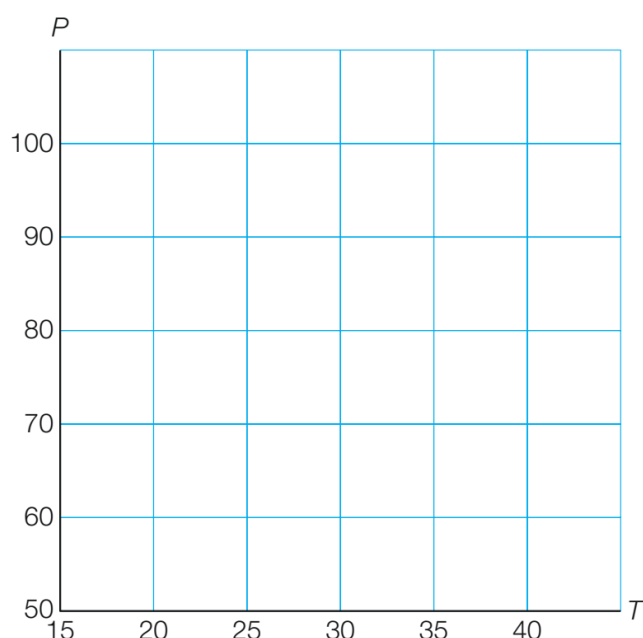


Eva meet tijdens een experiment de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ en de druk P in kPa. Zie de tabel met t de tijd in minuten.

t	0	1	2	3	4	5	6
T	20	21	23	26	30	35	41
P	100	80	70	65	70	80	100

In de grafiek hiernaast staat t op de horizontale as en T op de verticale as.

- Teken de grafiek met t op de horizontale as en P op de verticale as in de figuur linksonder.
- Teken de grafiek met T op de horizontale as en P op de verticale as in de figuur rechtsonder.

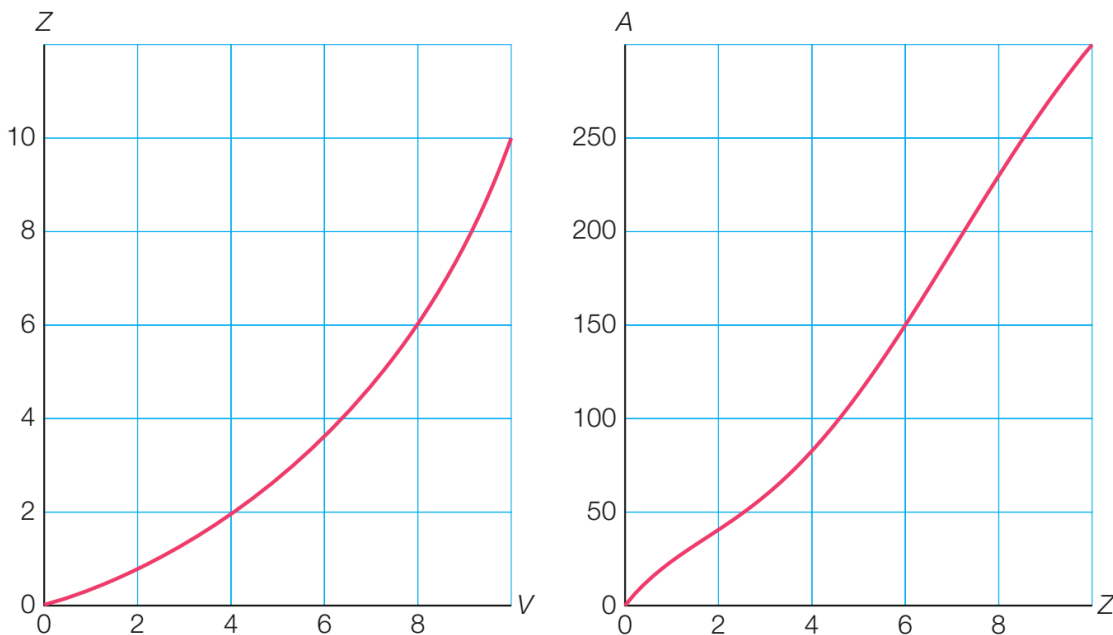


Theorie B Uitzetten tegen

In de grafieken van opgave 59 is informatie over de tijd, temperatuur en druk overzichtelijk weergegeven. In de bovenste figuur is de temperatuur T **uitgezet tegen** de tijd t . Ook heb je P tegen t uitgezet.

P uitzetten tegen t betekent dat je een grafiek tekent waarbij P op de verticale as en t op de horizontale as staat.

Op de Veluwe zouden volgens natuurbeheerders maximaal 1350 wilde zwijnen moeten leven. In jaren dat er veel eikels en beukennotjes zijn, neemt het aantal wilde zwijnen explosief toe. Soms zijn er het jaar daarop dan wel 10 000 wilde zwijnen op de Veluwe. Met zo'n grote populatie neemt ook het aantal aanrijdingen tussen voertuigen en wilde zwijnen toe.



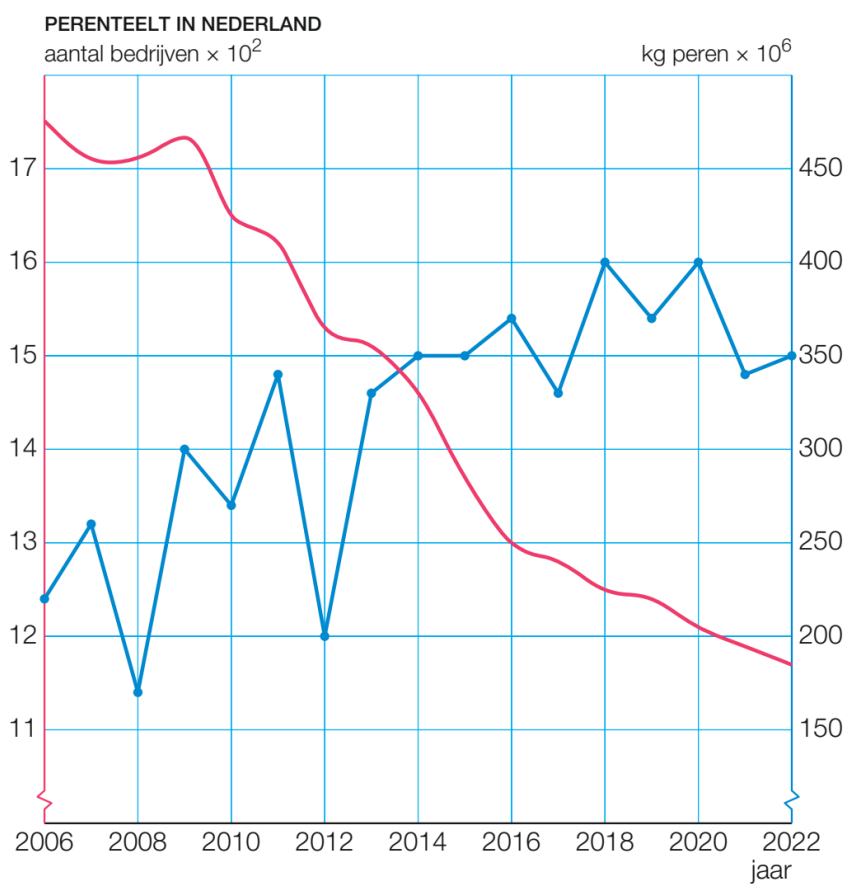
In de linker figuur is Z uitgezet tegen V . Hierbij is Z het aantal wilde zwijnen op de Veluwe in duizendtallen en V de hoeveelheid voedsel in miljoenen kg eikels en beukennotjes in het jaar daarvoor.

In de rechter figuur is A uitgezet tegen Z . Hierbij is A het aantal aanrijdingen op de Veluwe tussen voertuigen en wilde zwijnen.

- Met welk percentage neemt het aantal aanrijdingen toe als de hoeveelheid voedsel toeneemt van 4 tot 8 miljoen kg?
- In een jaar zijn er 80 aanrijdingen met wilde zwijnen op de Veluwe. Schat de hoeveelheid voedsel in het jaar daarvoor.
- Teken een grafiek waarin je het aantal aanrijdingen uitzet tegen de hoeveelheid voedsel in het jaar daarvoor. Maak eerst een tabel.



De figuur gaat over het aantal fruittelers in Nederland dat peren levert en de perenoogst van deze bedrijven.

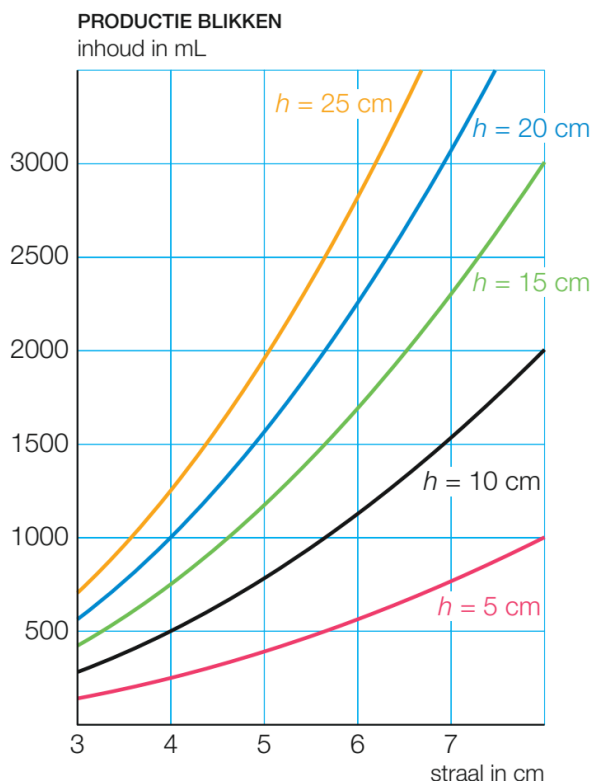


Je ziet dat er in 2014 ongeveer 1460 fruittelers van peren waren en dat de totale perenoogst van deze bedrijven in totaal ongeveer 350 miljoen kg was.

- Hoe groot was de gemiddelde perenoogst per bedrijf in 2016? Rond af op duizendtallen.
- Het aantal bedrijven is in de periode 2009-2022 afgenomen. Met hoeveel procent?
- De perenoogst wisselt nogal sterk van jaar tot jaar. Dat komt onder andere omdat de oogst van het weer afhangt. Hoeveel procent is de grootste oogst meer dan de kleinste oogst in de periode 2006-2022?
- De grafiek van het aantal bedrijven is als een vloeiende kromme getekend en de grafiek van de perenoogst als losse lijnstukken. Waarom is dat zo gedaan, denk je?
- In 2021 werd er in totaal op 10 066 hectare landbouwgrond peren verbouwd. Hoeveel was in 2021 de perenoogst per m^2 ? Rond af op één decimaal.
- In Nederland worden veel appels en peren geproduceerd, maar het telen van peren is steeds populairder geworden. Van de totale appel- en perenoogst in 2006 was 37% peer. In 2022 was dat opgelopen tot 59%. Was de totale appel- en perenoogst in 2022 vergeleken met 2006 groter, kleiner of ongeveer gelijk?

Het bedrijf Bloozen produceert cilindervormige blikken met verschillende afmetingen. In de figuur is de inhoud in mL uitgezet tegen de straal in cm. Voor een aantal hoogtes h in cm is de bijbehorende grafiek getekend.

Je ziet bijvoorbeeld dat een blik met straal 4 cm en hoogte 20 cm een inhoud van ongeveer 1000 mL heeft.



- Wat is de inhoud van een blik met straal 8 cm en hoogte 15 cm?
- Het bedrijf wil blikken produceren met een inhoud van 2500 mL en een hoogte van 25 cm.
Wat is de straal in cm? Rond af op één decimaal.
- Hoeveel keer zo groot wordt de inhoud van een blik, als de straal verdubbeld maar de hoogte gelijk blijft?

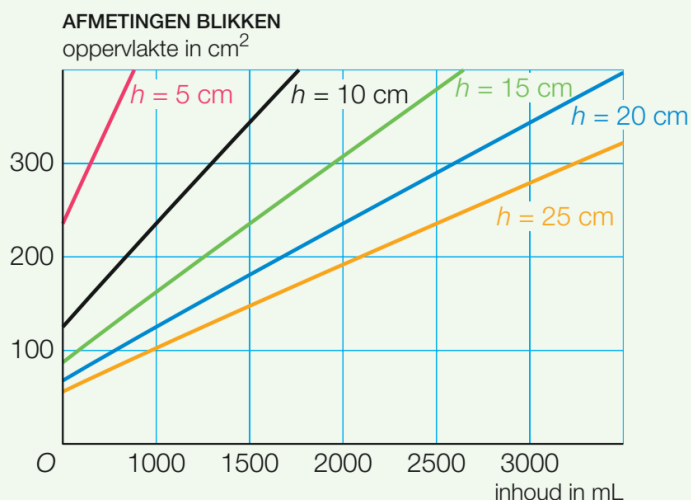
Theorie C Grafiekenbundels

In de figuur van opgave 62 is bij de blikkenproductie van het bedrijf Bloozen voor een aantal hoogtes de grafiek getekend waarbij de inhoud is uitgezet tegen de straal. Zo'n figuur heet een **grafiekenbundel**.
Let bij het aflezen van grafiekenbundels goed op het opschrift en wat er bij de assen staat. Gebruik een geodriehoek of liniaal om nauwkeurig af te lezen.

Voorbeeld

De productiekosten van blikken zijn afhankelijk van de oppervlakte van de blikken. In de figuur hiernaast is de oppervlakte in cm^2 uitgezet tegen de inhoud in mL. Voor een aantal hoogtes h in cm is de bijbehorende grafiek getekend.

- a** Een klant wil blikken met een inhoud van 2250 mL, waarvan de hoogte mag variëren van 15 tot 20 cm. Lees in de figuur af wat de minimale oppervlakte van deze blikken is.
- b** Een andere klant wil een blik met een oppervlakte van 200 cm^2 en een inhoud van 1 liter. Schat met behulp van de figuur wat de hoogte van het blik is.

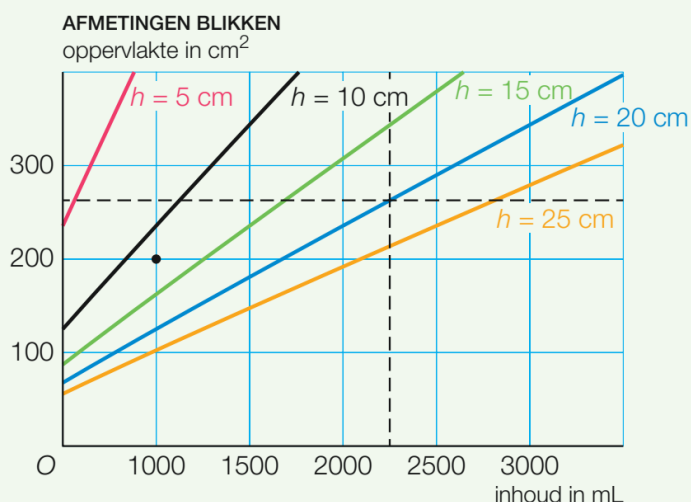


Aanpak

- a** Teken een verticale lijn bij inhoud 2250 mL en kijk tussen $h = 15$ en $h = 20$ waar de oppervlakte minimaal is.
- b** Teken het punt (1000, 200). Dit ligt tussen $h = 10$ en $h = 15$.

Uitwerking

- a** Zie de figuur. De oppervlakte is minimaal bij $h = 20$. Aflezen geeft: de minimale oppervlakte is 260 cm^2 .
- b** Zie de figuur. Een schatting van de hoogte is 12 cm.

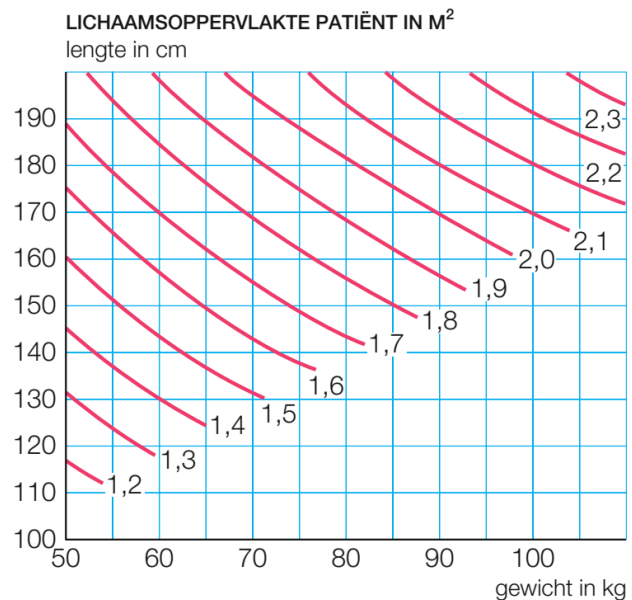


63



Voor de juiste dosering van sommige medicijnen is het van belang de lichaamsoppervlakte van de patiënt te kennen. In de figuur is voor verschillende lichaamsoppervlakten de lengte in cm tegen het gewicht in kg uitgezet.

- Een patiënt weegt 65 kg en heeft een lichaamsoppervlakte van $1,6 \text{ m}^2$. Hoe lang is de patiënt?
- Twee patiënten zijn beide 1,70 meter lang. De zwaarste weegt 100 kg en de lichtste is 10% lichter. Hoeveel procent minder lichaamsoppervlakte heeft de lichtste patiënt?
- Een patiënt van 180 cm heeft een lichaamsoppervlakte van $20\,500 \text{ cm}^2$. Schat het gewicht van de patiënt.
- Een patiënt van 140 cm lang en 72,5 kg neemt medicijn A en medicijn B in de gewichtsverhouding 2 : 5. De dosering van medicijn A is $1,2 \cdot 10^{-5}$ gram per cm^2 lichaamsoppervlakte. Bereken het aantal gram van medicijn B dat de patiënt neemt.



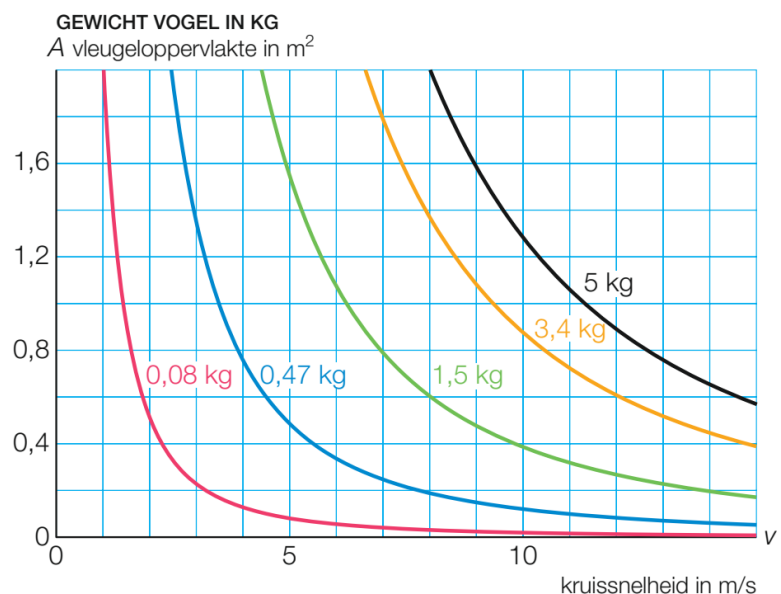
A64



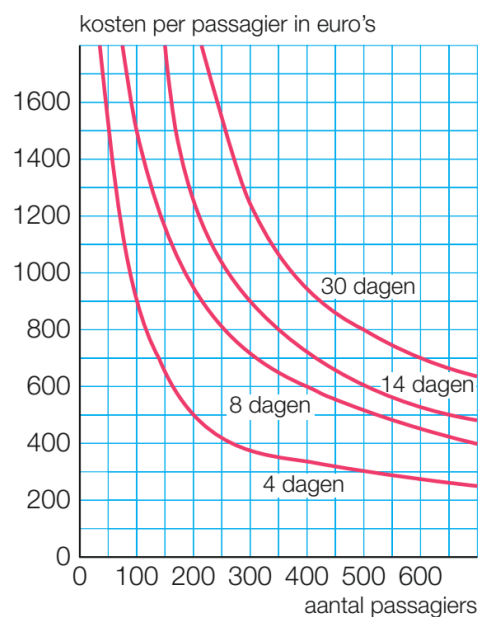
In de tabel zie je van enkele vogels het gewicht. In de grafiek is voor een aantal gewichten de vleugeloppervlakte A van vogels uitgezet tegen de kruissnelheid v . Hierin is A in m^2 en v in m/s . De kruissnelheid is de snelheid waarbij het energieverbruik per afgelegde afstand minimaal is. Gebruik de tabel en de figuur bij het beantwoorden van de vragen.

- Een vogel heeft een kruissnelheid van 14 m/s en een vleugeloppervlakte van $0,2 \text{ m}^2$. Welke vogel is dat?
- Een kiekendief heeft een kruissnelheid van 30 km/uur . Hoeveel cm^2 is de vleugeloppervlakte? Rond af op gehelen.
- Een zeearend heeft een vleugeloppervlakte van 7200 cm^2 . Hij vliegt op kruissnelheid over een afstand van 200 km. Hoe lang doet hij hierover? Geef het antwoord in kwartieren nauwkeurig.

vogel	gewicht
spreeuw	80 gram
kiekendief	470 gram
wilde eend	1 kg
blauwe reiger	1,5 kg
ooievaar	3,4 kg
zeearend	5 kg
kraanvogel	5,5 kg
albatros	8 kg



A65 De firma Suncruises is eigenaar van het schip Sun of the Sea. Dit schip heeft een maximale capaciteit van 700 passagiers. De kosten voor Suncruises van een trip met de Sun of the Sea hangen af van de duur van de trip en van het aantal passagiers. Zie de figuur. Je leest bijvoorbeeld af dat bij een cruise van 4 dagen bij een bezetting met 200 passagiers de kosten 500 euro per passagier zijn. Op een cruise met 300 passagiers maakt Suncruises een winst van 27 000 euro. Voor de cruise betaalt een passagier 990 euro. Hoeveel dagen duurt de cruise?



66 Zie opgave 65.
***** Bij een cruise van 30 dagen maakt de firma Suncruises een winst van 53 000 euro, dat komt overeen met een winst van 11,7%. Hoeveel betaalt een passagier voor deze cruise?

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan berekeningen doen met gegevens uit tabellen.
- ☐ Ik kan berekeningen doen met gegevens die uitgezet zijn in grafieken.
- ☐ Ik kan omgaan met grafiekenbundels.

► **OPGAVE C7**
THEORIE A
 ► **OPGAVE C8**
THEORIE B
 ► **OPGAVE C9**
THEORIE C

C7 In de tabel staat informatie over de parlementen van enkele landen.

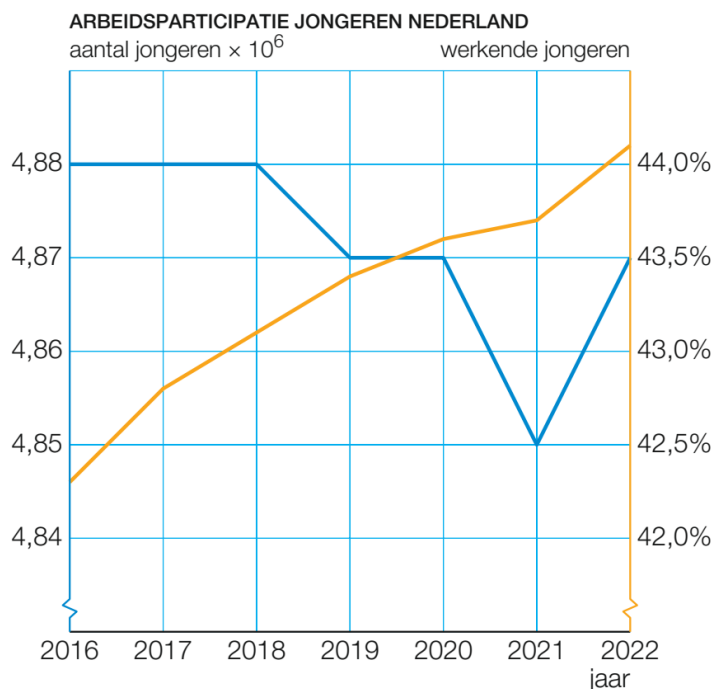
PARLEMENTSLEDEN PER LAND 2023

land	aantal inwoners in miljoenen	aantal parlementsleden	aantal parlementsleden per 100 000 inwoners
Duitsland		736	0,890
Nederland	17,9	150	
Denemarken	5,9		3,034

- a** Vul de tabel verder in.
b Stel dat Nederland evenveel parlementsleden per 100 000 inwoners zou hebben als Denemarken. Hoeveel parlementsleden zou Nederland dan hebben?

C8 In de figuur hiernaast staan lijndiagrammen met informatie over het aantal jongeren (0-25 jaar) in Nederland en het percentage van deze jongeren dat betaald werk heeft.

- a** Met hoeveel procent is het aantal jongeren in Nederland afgenomen in de periode 2018-2021?
- b** Is het aantal werkende jongeren toe- of afgenomen in de periode 2016-2022? Met hoeveel procent?

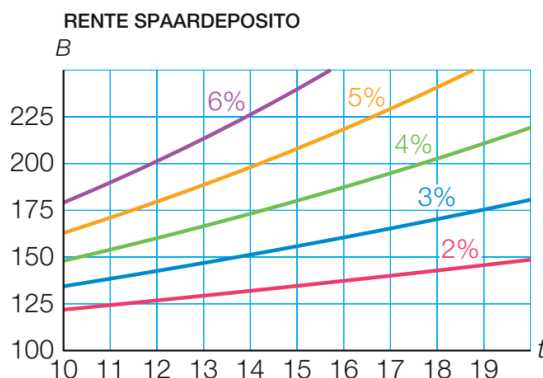


C9 Een bedrag wordt voor 10 tot 20 jaar vastgezet in een spaardepósito waarover een jaarlijkse rente wordt betaald.

Een spaardepósito is een spaarrekening waarvan je pas na een vooraf afgesproken tijd geld kunt opnemen.

Hiernaast is voor verschillende jaarlijkse rentepercentages het bedrag op de rekening B in duizenden euro's uitgezet tegen de tijd t in jaren.

- a** Hoe groot is het bedrag na 14 jaar bij een rente van 6%?
- b** Na 20 jaar is het bedrag 200 duizend euro. Schat het rentepercentage.
- c** Het bedrag na 19 jaar is hoger bij 4% dan bij 3% rente. Hoeveel procent hoger? Rond af op gehele.



Antwoorden

- C7** **a** 82,7 miljoen inwoners
179 parlementsleden
0,838 parlementsleden per 100 000 inwoners
- b** 543
- C8** **a** 0,6%
- b** toegenomen met 4,0%
- C9** **a** 226 duizend euro
- b** 3,5%
- c** 20%

Kennis- en vaardighedentest

1.1 Rekenen

- 1** Rosa heeft een emmer met een inhoud van 20 liter. Ze bouwt een zandkasteel waarvoor ze 35 emmers zand gebruikt. Een cm^3 zand bevat ongeveer 10 000 zandkorrels.

Uit hoeveel zandkorrels bestaat het zandkasteel ongeveer? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie.

- 2** De CN Tower in Toronto was met 553 meter jarenlang het hoogste vrijstaande bouwwerk ter wereld. De CN Tower wordt veel door toeristen bezocht die met de lift in 58 seconden naar het eerste uitkijkpunt op 350 meter hoogte worden gebracht.

- a** Bereken de gemiddelde snelheid van deze lift in km/uur. Rond af op één decimaal.
- b** Een andere lift brengt je in 23 seconden van het eerste naar het tweede uitkijkpunt. De gemiddelde snelheid van deze lift is 15,3 km/uur. Bereken in meters nauwkeurig op welke hoogte het tweede uitkijkpunt zich bevindt.



- 3** In een verf fabriek worden jaarlijks vier miljoen blikken verf geproduceerd. Deze verf wordt verpakt in blikken van 0,5 liter, 1 liter en 2,5 liter in de verhouding 6 : 7 : 7.

Bereken hoeveel liter verf er jaarlijks in de fabriek wordt geproduceerd.

1.2 Procenten

- 4 a** De huurprijs voor een woning is met 3,5% toegenomen tot € 745,20. Wat was de oorspronkelijke huurprijs?
- b** In 2023 was een energierekening € 1232. In 2022 was dat € 1318. Bereken de procentuele verandering.
- c** Het aantal werknemers bij een bedrijf is met 45 afgenomen. Dat was een daling van 13,8%. Hoeveel werknemers heeft het bedrijf nu?

- 5** De jaarlijkse kostenontwikkeling van een bouwbedrijf ten opzichte van het jaar ervoor is weergegeven in de tabel

- a** Bereken de relatieve verandering van de kosten in de periode 2021-2025.
- b** In 2023 waren de kosten 1,70 miljoen euro. Bereken de kosten in 2025 en in 2022.

jaar	percentage
2022	4,0%
2023	2,4%
2024	-0,4%
2025	0,7%

1.3 Exponentiële groei

- 6** Het aantal inwoners in een stadje in de Alpen nam sinds 1980 jaarlijks met 4,2% af. Op 1 januari 2000 werd er een wintersportgebied geopend en sindsdien neemt het aantal inwoners jaarlijks met 5,1% toe. Op 1 januari 1980 had het stadje 75 duizend inwoners. In deze opgave is een geschikt venster x tussen 0 en 25 en y tussen 0 en 100.
- a** Stel voor de periode 1980-2000 de formule op voor het aantal inwoners N_1 in duizendtallen met t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 1980.
 - b** Onderzoek of het inwonertal onder de 30 duizend kwam.
 - c** Stel de formule op voor het aantal inwoners N_2 in duizendtallen na de opening van het wintersportgebied. Neem t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2000. Rond de beginwaarde af op duizendtallen.
 - d** Bereken in welk jaar het inwonertal weer het peil van 1 januari 1980 bereikt.

1.4 Informatie in tabellen en grafieken

- 7** Zie de tabel.

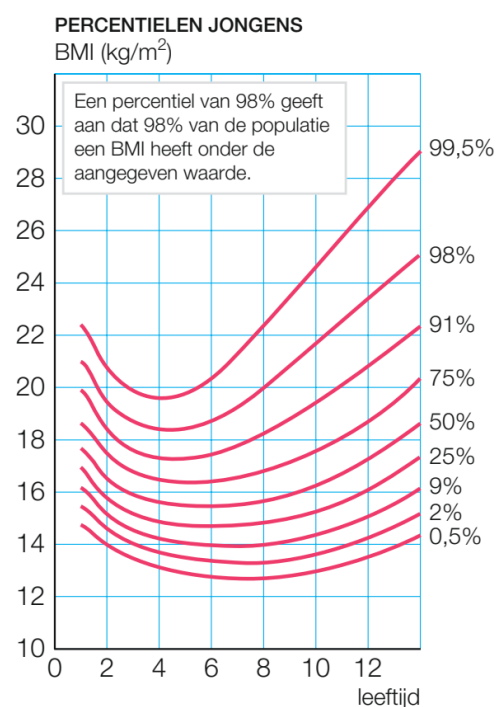
BLOEMBOLLENTEELT NEDERLAND

- a** Vul de tabel verder in.
- b** In 2023 lag wereldwijd 65% van de oppervlakte voor bloembollenteelt in Nederland.
Wat was de oppervlakte buiten Nederland?
- c** Is de opbrengst per bedrijf toe- of afgenomen in de periode 2021-2023? Met hoeveel procent?
- d** Bereken de gemiddelde opbrengst in euro's per m² bloembollen in 2022.

	2021	2022	2023
oppervlakte in km ²		280,4	283,4
aantal bedrijven	1583		1648
opp. in ha per bedrijf	17,22	17,33	
opbrengst in miljarden euro's	20,2	23,1	24,6

- 8** **[WERKBLAD]** De BMI is de verhouding tussen het gewicht en het kwadraat van de lengte van een persoon. De figuur gaat over de BMI van jongens. In de figuur is voor een aantal percentielen de BMI uitgezet tegen de leeftijd. Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat 25% van de 12-jarige jongens een BMI van 16 of minder heeft.

- a** Sam is 12 jaar en zijn BMI zit bij de laagste 9%.
Wat weet je van zijn BMI?
- b** Finn is jarig en heeft een BMI van 18. Zijn BMI zit bij de hoogste 9%.
Hoe oud kan hij geworden zijn?
- c** Levi is 6 jaar en heeft een BMI van 17.
Schat hoeveel procent van de 6-jarige jongens een hogere BMI heeft dan Levi.
- d** Zet in een grafiek voor jongens van tien jaar de percentielen uit tegen de BMI.



Gemengde opgaven

- 1** Zie de tabel met informatie over de bovenbouw van de havo-afdeling van een school.

LEERLINGVERDELING BOVENBOUW HAVO

schooljaar	aantal leerlingen 4 havo	percentage blijven zitten	aantal leerlingen 5 havo	percentage gezakt
2020-2021	104		88	12,5%
2021-2022	110	16,4%	94	10,6%
2022-2023	101	17,8%	99	8,1%
2023-2024	96	12,5%		14,0%
2024-2025	106	14,2%	98	17,3%

- a** In het schooljaar 2020-2021 bleven 22 leerlingen in 4 havo zitten. Hoeveel procent was dat?
- b** In het schooljaar 2023-2024 zakten 13 leerlingen voor hun havo examen. Hoeveel leerlingen zaten er in 5 havo?
- c** Met hoeveel procent is het totaal aantal leerlingen in de bovenbouw havo in het schooljaar 2024-2025 toegenomen ten opzichte van het schooljaar 2020-2021?
- d** In het schooljaar 2025-2026 is het aantal leerlingen in 4 havo ten opzichte van het schooljaar 2024-2025 met 5,7% toegenomen. Hoeveel leerlingen zaten er in het schooljaar 2025-2026 in 4 havo?
- e** Het totale aantal leerlingen in de bovenbouw havo is in het schooljaar 2020-2021 met 3,5% afgenomen ten opzichte van het schooljaar 2019-2020. In het schooljaar 2019-2020 zaten er 92 leerlingen in de examenklas. Hoeveel leerlingen zaten dat schooljaar in 4 havo?



- 2** De Europese Unie maakt regels voor vissers om visstanden op peil te houden. Het aantal woorden W waarin deze regels worden opgeschreven, groeit exponentieel. In 1983 waren er 3500 woorden nodig om de visregels op te schrijven. In 2013 waren dat er 21 000.

a Bereken de procentuele toename van het aantal woorden in de periode 1983-2013.

De gemiddelde jaarlijkse toename van het aantal woorden is 6,15%.

- b** Komt dat ongeveer overeen met je antwoord bij vraag a?
c Bereken het aantal woorden in 1980. Rond af op tientallen.
d Stel de formule op van W . Neem t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1980. Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.
e Hoeveel woorden telden de visregels in 1992? Rond je antwoord af op honderdtallen.
f Dit wiskundeboek bevat ongeveer 55 000 woorden. Bereken met behulp van de formule van vraag d in welk jaar de visregels van de EU uit evenveel woorden bestaan als dit wiskundeboek. Een geschikt venster is x tussen 0 en 50 en y tussen 0 en 70 000.



- 3** De firma Kleijn produceert onder andere planken voor laminaatvloeren. Deze planken bestaan uit een goedkope onderlaag met daarbovenop een laag fineer van 1,5 mm dikte. De planken hebben een lengte van 1,4 meter en een breedte van 20 cm.

a Bereken hoeveel cm^3 fineer voor een plank gebruikt wordt.

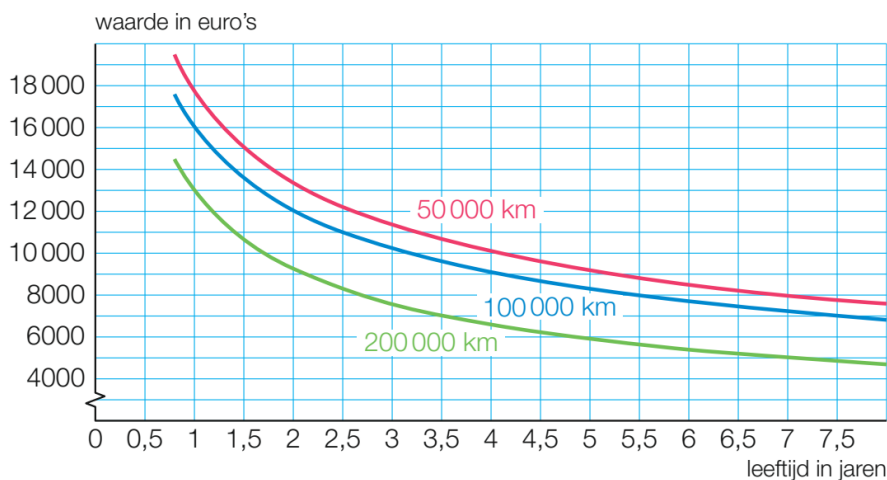
Kleijn verkoopt deze planken in pakken op pallets. In een pak gaan 12 planken en op een pallet gaan 60 pakken. Maandelijks produceert Kleijn 324 pallets.

b Bereken hoeveel m^3 fineer Kleijn gebruikt voor de maandproductie van deze planken. Rond af op één decimaal.

Kleijn levert ook planken voor massief houten vloeren. Deze worden gemaakt in de houtsoorten beuken, eiken en esdoorn in de verhouding 2 : 5 : 1. Er worden maandelijks 5775 meer eiken planken geproduceerd dan beuken planken.

c Bereken hoeveel planken voor massief houten vloeren er in totaal per maand worden geproduceerd.

- 4** De dagwaarde van een auto is afhankelijk van het type auto, de leeftijd en de kilometerstand. Alle auto's in deze opgave zijn nieuw gekocht. Voor een bepaald type auto is in de figuur voor drie kilometerstanden de dagwaarde van de auto af te lezen bij een bepaalde leeftijd in jaren.



- Wat is de dagwaarde van dit type auto als deze 200 000 km heeft gereden en 7 jaar oud is?
- De auto's van Herbert en Tom zijn van dit type en hebben dezelfde dagwaarde. De auto van Herbert is 5,5 jaar oud en heeft 100 000 kilometer gereden. De auto van Tom heeft 50 000 km gereden. Hoe oud is de auto van Tom?
- Jeroen heeft op 1 juli 2023 een auto van dit type gekocht voor 21 000 euro. Hij heeft voor de auto een verzekering afgesloten en betaalt een gemiddelde premie van € 38 per maand. Stel dat hij op 1 januari 2030 een ongeluk krijgt als de auto een kilometerstand heeft van 100 000 km. Jeroen krijgt dan van de verzekeraar de dagwaarde uitgekeerd en wil een nieuwe auto van 21 000 euro aanschaffen. Hoeveel euro is Jeroen door het afsluiten van de verzekering goedkoper uit dan wanneer hij geen verzekering had afgesloten?

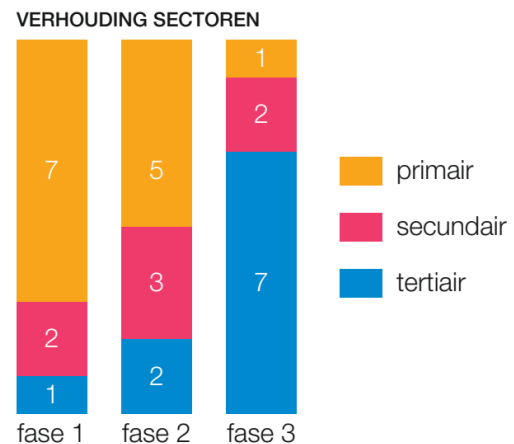
Voor een ander type auto geldt voor de dagwaarde in euro's bij een kilometerstand van 130 000 km de formule $D = 25\,000 \cdot g^t$. Hierin is t de tijd in maanden. De dagwaarde van dit type auto neemt met 1,5% per maand af.

- Geef g .
- Suzanne heeft 130 000 km gereden in een auto van dit type. Bereken in maanden nauwkeurig hoe lang ze de auto heeft als de dagwaarde 9800 euro is.
- Jilt rijdt gemiddeld 200 km per week in dit type auto. Bereken de dagwaarde bij een kilometerstand van 130 000 km. Rond af op honderden euro's.
- Francien heeft op 1 juli 2021 een auto van dit type gekocht voor 28 500 euro. Op 1 maart 2024 bereikt ze een kilometerstand van 130 000 km en verkoopt ze de auto voor de dagwaarde. Ze maakt daarbij verlies. Bereken het gemiddelde verlies per maand. Rond af op gehelen.

5 Volgens het drie-sectoren model uit de eerste helft van de twintigste eeuw is de economie van een land in drie sectoren op te delen:

- De primaire sector die grondstoffen en voedsel levert.
- De secundaire sector die grondstoffen verwerkt.
- De tertiaire sector die diensten levert.

Volgens Jean Fourastié (1907-1990), een van grondleggers van het drie-sectoren model, ontwikkelen alle economieën zich in drie fases. In fase 1 is de beroepsbevolking van een land in de verhouding 7 : 2 : 1 over de sectoren verdeeld, in fase 2 is dat 5 : 3 : 2 en in fase 3 is deze verhouding 1 : 2 : 7.



- a** Een land zit in fase 1 en heeft een beroepsbevolking van 12 miljoen mensen. Nadat het land zich heeft ontwikkeld naar fase 2 werken er 3,9 miljoen mensen in de secundaire sector.
- Is het aantal mensen dat werkt in de primaire sector toe- of afgenomen? Met hoeveel?
- b** Van een land in fase 2 werken er 0,8 miljoen minder mensen in de tertiaire sector dan in de secundaire sector. Het land ontwikkelt zich naar fase 3, waarbij de beroepsbevolking is verdubbeld. Hoeveel mensen werken er nu in de tertiaire sector?
- c** Stel dat in een land het aantal mensen dat in de primaire sector werkt gelijk blijft tijdens de ontwikkeling van fase 1 via fase 2 naar fase 3. Hoeveel keer zo groot is de beroepsbevolking dan geworden?

6 In een land breekt een besmettelijke infectieziekte uit. Twee virologen maken een schatting van de situatie op 1 januari. Zie de tabel.

PROGNOSE UITBRAAK INFECTIEZIEKTE

	viroloog A	viroloog B
aantal	12 000	24 000
groei per dag	4,5%	2,8%

- a** Stel de formules op van de geschatte aantallen besmettingen N_A en N_B in duizendtallen. Neem telkens t in dagen met $t = 0$ op 1 januari.
- b** Volgens viroloog A zullen er na een week minder besmettingen zijn dan volgens viroloog B. Hoeveel minder? Rond af op duizendtallen.
- c** Na 28 dagen zullen er volgens viroloog B een bepaald aantal besmettingen zijn. Volgens viroloog A zal dat aantal besmettingen pas enkele dagen later voorkomen. Hoeveel dagen later? Rond af op gehelen. Een geschikt venster is x tussen 0 en 50 en y tussen 0 en 80.

7 Hiernaast zie je enkele gedeelten uit de tarieven van een camping. Gebruik deze informatie om de volgende vragen te beantwoorden.

- a** De heer en mevrouw Andel staan in het laagseizoen zes nachten op een elektraplats. Ze hebben niet gereserveerd. Hoeveel betalen ze in totaal?
- b** De familie Bot bestaat uit twee volwassenen. Ze reserveren een comfortplaats van 1 tot en met 15 augustus. Laat met een berekening zien dat ze €432,56 moeten betalen.
- c** Anne en Kim willen van 7 mei tot en met 25 mei op een XXL plaats staan. Bij het reserveren vragen ze zich af wat voordeliger is: het aantal nachten betalen of gebruik maken van het arrangement van de meimaand. Bij het arrangement voor een XXL plaats geldt een toeslag van 55 euro. Onderzoek wat het voordeligst is.
- d** Meneer en mevrouw Damen hebben van 25 mei tot en met 10 juni een plaats gereserveerd op het natuurkampeerterrein. Zelf zijn ze deze hele periode aanwezig. Hun twee kinderen (15 en 17 jaar) komen bij hen kamperen van vrijdag 31 mei tot en met maandag 3 juni. Hoeveel betaalt de familie Damen in totaal?

TARIEVEN KAMPEREN

Plaats	Laagseizoen	Hoogseizoen
Elektraplaats	€ 21,50	€ 26,70
Comfortplaats	€ 23,50	€ 28,70
Hondenterrein	€ 24,50	€ 29,70
XXL plaats	€ 25,50	€ 30,70
Natuurkampeerterrein	€ 18,50	€ 23,70

*All-in tarieven voor 2 personen per nacht exclusief toeristenbelasting

***Laagseizoen:** 29/3 t/m 28/5, 12/6 t/m 12/7 en 24/8 t/m 25/10

***Hoogseizoen:** 29/5 t/m 11/6, 13/7 t/m 23/8

Overige tarieven

Extra persoon vanaf 2 jaar p.p.p.n	€ 4,20
Toeristenbelasting p.p.p.n	€ 0,92
Reserveringskosten per plaats/per reservering	€ 5,00

Arrangementen	Periode	Prijs per 2 personen
Maand april	29-03 t/m 26-04	€ 230,00
Voorseizoen Compleet	29-03 t/m 23-06	€ 920,00
Voorseizoen t/m Pinksteren	29-03 t/m 11-06	€ 800,00
Meivakantie	27-04 t/m 06-05	overnachtingstarief
Meimaand	06-05 t/m 27-05	€ 370,00
Hemelvaart	29-05 t/m 03-06	€ 155,00
Pinksteren	07-06 t/m 11-06	€ 135,00



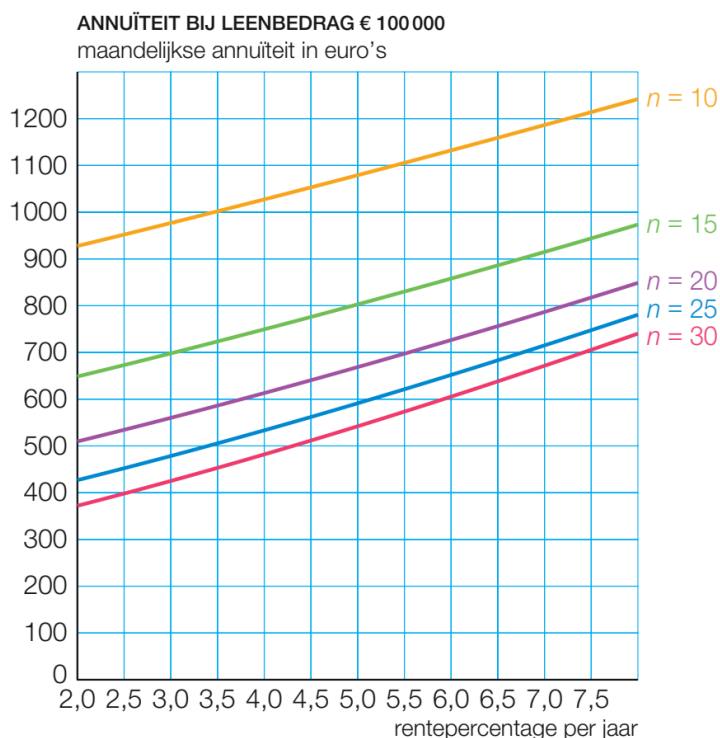
8 Bij een hypotheek op basis van annuïteit betaal je gedurende de looptijd een vast bedrag per maand. Dit bedrag, de maandelijkse annuïteit, bestaat voor een gedeelte uit rente en voor een gedeelte uit aflossing van de hypotheek. In het begin van de looptijd betaal je vooral rente, en aan het eind vooral aflossing.

Het resultaat is dat je maandelijks hetzelfde bedrag betaalt, en dat aan het eind van de looptijd het volledige hypotheekbedrag is afgelost.

De maandelijkse annuïteit hangt af van het geleende bedrag, de looptijd en het rentepercentage.

In de figuur is uitgegaan van een hypotheek van 100 000 euro.

De maandelijkse annuïteit in euro's is uitgezet tegen het rentepercentage per jaar. De looptijd n is in jaren. In deze opgave gebruik je alleen de looptijden die in de figuur zijn aangegeven. Zo lees je bijvoorbeeld af dat bij een rentepercentage van 6% en een looptijd van 15 jaar, de maandelijkse annuïteit ongeveer 860 euro is. Leen je 150 000 euro in plaats van 100 000 euro, dan is de maandelijkse annuïteit anderhalf keer zo groot, dus ongeveer 1290 euro.



- a** De familie Donders neemt een annuïteitenhypotheek van 350 000 euro. Ze kunnen per maand maximaal 2100 euro betalen. De rente is 5,0%. Welke looptijd raad jij aan?

De rente is afhankelijk van de looptijd. Zie de tabel hiernaast.

looptijd (jaren)	10	15	20	25	30
rentepercentage	3,5	4,0	5,0	5,5	6,0

De familie Everaars neemt een annuïteitenhypotheek van 250 000 euro.

Ze kunnen per maand maximaal 1750 euro betalen.

- b** Welke looptijd raad je de familie Everaars aan in het geval dat ze een zo laag mogelijke maandlast willen hebben? Licht toe.
- c** Welke looptijd raad je de familie Everaars aan in het geval dat ze de hypotheek zo snel mogelijk willen aflossen? Hoeveel is dan de maandlast?

- 9** In Nederland geldt overdag op alle snelwegen een maximumsnelheid van 100 km/uur. Eerder was dat vaak 120 km/uur. In deze opgave ga je onderzoeken hoe groot de milieuwinst is van snelheidsbeperkingen en hoeveel langer je onderweg bent.
- Meneer Dijk woont in Arnhem en werkt in Groningen.



Om naar zijn werk te gaan legt hij 170 km in de auto af, zie de tabel. Ga er in deze opgave van uit dat hij overal de toegestane maximumsnelheid rijdt. Je hoeft geen rekening te houden met oponthoud door files en dergelijke.

maximumsnelheid in km/uur	30	50	100
afstand in km	2	6	162

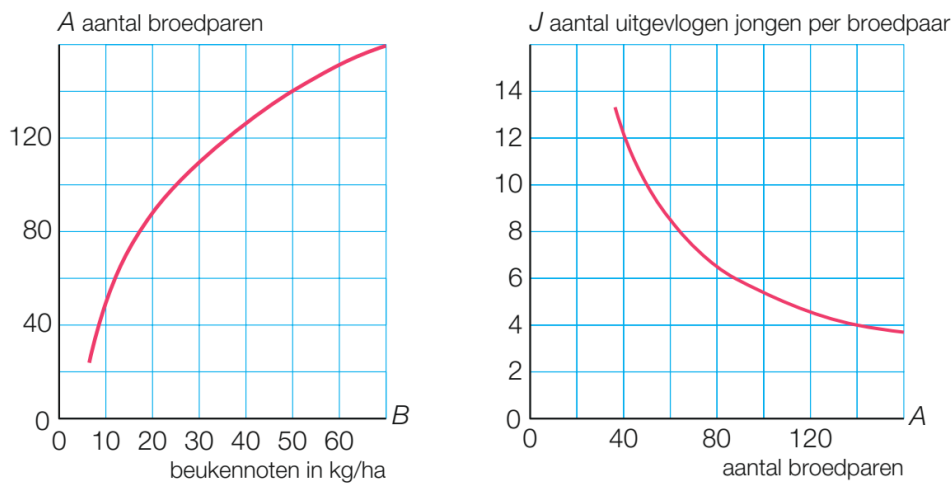
- Bereken hoe lang meneer Dijk over de afstand Arnhem-Groningen doet.
- Stel dat de maximumsnelheid van 100 naar 120 km/uur gaat. Hoeveel korter doet meneer Dijk dan over de afstand Arnhem-Groningen? Hoeveel procent is dat?

In de tabel hieronder zie je welk benzineverbruik bij de auto van meneer Dijk hoort. Je leest bijvoorbeeld af dat bij een snelheid van 120 km/uur het benzineverbruik 7,7 liter per 100 km is.

snelheid in km/uur	30	50	100	120
verbruik in liter/100 km	8,3	5,8	5,5	7,7

- Onderzoek hoeveel procent meer benzine meneer Dijk gebruikt als de maximumsnelheid van 100 naar 120 km/uur gaat. Ga ervan uit dat meneer Dijk overal de toegestane maximumsnelheid rijdt.

- 10** Biologen ontdekten op een onderzoeksterrein een verband tussen de hoeveelheid beukennoten B in de winter en het aantal broedparen van koolmezen A in het voorjaar daarop. Ook bleek het gemiddelde aantal uitgevlogen koolmezenjongen J per broedpaar af te hangen van het aantal broedparen in het gebied. Zie de figuren.



- Stel dat op het terrein 20 kg beukennoten per ha voorkomt. Hoeveel jongen vlogen er dan per broedpaar uit?
- Stel dat er gemiddeld tien jongen per broedpaar uitvliegen. Wat weet je van het aantal kg beukennoten per ha in de winter ervoor?
- Het onderzoeksterrein is 6 ha groot en heeft een opbrengst van 300 kg beukennoten. Hoeveel jongen vlogen in totaal uit?





$$y = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 5}$$
$$y = \sqrt{16 \cdot 0.009}$$

1. $\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{3x^2 - 7}$

$$\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{3x^2 - 7}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3x^2 - 7x + 4 \end{cases}$$

If $3 < \pi < 4$

$$\left\{1, \frac{4}{3}\right\} \cup \dots$$

2. $|\cos x|$

$$\rightarrow \left\{ \cos x \right\}$$
$$\rightarrow \left\{ \cos x \right\}$$

2

De statistische cyclus

Mariska heeft voor wiskunde drie cijfers gehaald die één keer meetellen en twee cijfers die dubbel tellen. Voor de laatste toets krijgt ze nog één cijfer dat dubbel telt. Zie de tabel.

CIJFERS MARISKA

cijfer	4,3	4,8	5,2	6,8	4,8	...
weging	1	1	1	2	2	2

1 Welk cijfer moet Mariska halen om gemiddeld een 5,5 te staan?

- A 5,6 B 5,7 C 6,0 D 7,1

Helaas heeft Mariska voor de laatste toets een 5,4 gehaald. Ze mag één toets van het jaar herkansen.

2 Kan ze afgerond een 7 komen te staan?

2.1 De onderzoeksvraag

Kennis en vaardigheden

- Je kunt in een onderzoek de vier fasen van de statistische cyclus herkennen.
- Je kunt een onderzoeksvraag kritisch beoordelen.
- Je kunt de populatie bepalen bij een onderzoeksvraag.
- Je kunt een steekproef kritisch beoordelen en de begrippen representatief en aselekt gebruiken.

01



Daan en Emma doen een onderzoek. Hieronder staan zes activiteiten die ze hebben uitgevoerd bij hun onderzoek.

Welke volgorde is logisch?

- 1 Het afvragen of de onderzoeksvraag is beantwoord en zo nodig nieuwe vragen opstellen.
- 2 Het interpreteren van alle verzamelde informatie om te kijken of de onderzoeksvraag hiermee beantwoord kan worden.
- 3 Een overzicht maken van alle aspecten die bij het onderwerp komen kijken, om zo tot de onderzoeksvraag te komen.
- 4 Het beantwoorden van de onderzoeksvraag op basis van de uitkomsten van de verzamelde enquêtes en gevonden informatie.
- 5 Vaststellen welke kenmerken onderzocht moeten worden om de onderzoeksvraag te kunnen beantwoorden.
- 6 Het afnemen van enquêtes en opzoeken van informatie over het onderwerp.

Theorie A Fasen in de statistische cyclus

Bij een statistisch onderzoek probeert men op basis van verzamelde gegevens antwoord te vinden op een vraag. De **statistiek** houdt zich bezig met methoden en technieken voor het verzamelen, verwerken, analyseren en presenteren van gegevens. De verzamelde gegevens worden **data** genoemd.

Deze data staan centraal in de **statistische cyclus**: het proces van opstellen van een onderzoeksvraag, verzamelen en analyseren van data en hieruit conclusies trekken. Het woord cyclus wijst erop dat het doorlopen van deze stappen vaak nieuwe (vervolg)vragen oplevert die verder onderzocht kunnen worden.

In de eerste fase van de statistische cyclus wordt de **onderzoeksvraag** geformuleerd. Er is een goed geformuleerde onderzoeksvraag nodig om het onderzoek gedegen uit te voeren en uiteindelijk een duidelijke conclusie te kunnen formuleren.



- 2** Geef bij elk van de stappen uit opgave 1 aan op welke plek ze het best in de statistische cyclus passen.

- 3** Lees de onderstaande tekst over kijkonderzoek.

Artikel **Kijkonderzoek**

Voor veel Nederlanders is televisiekijken een belangrijke tijdsbesteding. Per dag kijken we in Nederland per persoon ongeveer 3 uur televisie. De kijkcijfers zijn voor televisiemakers en zenders een graadmeter voor succes. Onderzoeksbureau GfK voert kijkcijferonderzoek uit voor de Stichting KijkOnderzoek (SKO). Het kijkonderzoek laat zien hoeveel mensen er kijken naar zenders en programma's. Met behulp van deze gegevens kunnen inhoud en tijdstip van programma's afgestemd worden op wat de kijker belangrijk vindt. Het succes van een programma telt bovendien mee bij het bepalen van het tarief voor een reclamespot in de omliggende reclameblokken.

Hieronder staan vier fragmenten uit het kijkonderzoek.
Geef voor elk van de fragmenten aan bij welke fase in de statistische cyclus dit het best past.

- | | |
|--|---|
| <p>A</p> <p>Nadat de metergegevens van alle panelhuishoudens naar GfK zijn gestuurd, wordt vastgesteld naar welke zenders is gekeken. Dit gebeurt door middel van Enhanced Audio Matching; bij deze techniek wordt gebruikgemaakt van het matchen van audio samples.</p> | <p>B</p> <p>SKO stelt dagelijks de standaardresultaten kijkdichtheid, marktaandeel en de absolute aantallen kijkers ter beschikking. Deze informatie komt op de website en is bedoeld voor het algemene publiek. De resultaten die SKO op de website publiceert, zijn onder voorwaarden te gebruiken en de bronvermelding is verplicht.</p> |
| <p>C</p> <p>Op basis van de achtergrondkenmerken van de panelleden zijn verschillende vragen te onderzoeken: hoeveel 13 t/m 19-jarigen kijken naar een bepaald programma, hoeveel autobezitters hebben de commercial voor een nieuwe personenwagen gezien, kijken alleen sportliefhebbers naar sportprogramma's? Het is belangrijk de vragen scherp te formuleren en af te bakenen voor er tot verder onderzoek wordt overgegaan.</p> | <p>D</p> <p>Elk huishouden dat meedoet aan het kijkonderzoek krijgt op alle televisietoestellen in huis een 'kijkmeter'. De kijkmeter kan automatisch registreren dat een toestel aanstaat en slaat deze informatie op. De kijkmeter legt vast wat er in het televisietoestel gebeurt, maar kan niet 'zien' wat zich in de kamer afspeelt en wie er naar de televisie kijken. Daarom moeten alle personen van 3 jaar en ouder die kijken zich aanmelden.</p> <p style="text-align: right;">bron: SKO</p> |

- 4** Voor kijkonderzoek wordt niet van elke Nederlander het kijkgedrag onderzocht.
a Noem een mogelijke reden hiervoor.

Over de groep Nederlanders in het onderzoek schrijft SKO het volgende.
'Het is voldoende om een representatieve groep te onderzoeken. Representatief wil zeggen dat de groep net zo is opgebouwd als de bevolking, met een overeenkomstig percentage jongeren, vrouwen, hoger opgeleiden, enzovoort.'
b Waarom denk je dat SKO wil dat de te onderzoeken groep representatief is?

Hieronder staan enkele ideeën voor onderzoeksvragen voor een profielwerkstuk. Met elke vraag is iets mis.

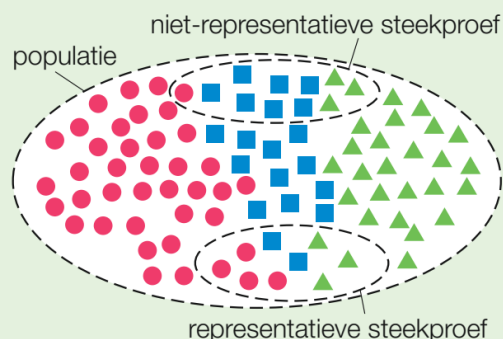
Verbind elk van de vragen met een kritiekpunt dat er het best bij past.

- | | |
|--|---|
| <p>I Waarom zijn eigenaren van benzineauto's minder milieubewust dan eigenaren van elektrische auto's?</p> <p>II Beïnvloedt alcoholconsumptie voor het rijden de rijvaardigheid?</p> <p>III Wat is het effect van social media?</p> <p>IV Hebben goede leerlingen een betere band met docenten?</p> <p>V Hoe kunnen we het klimaatprobleem oplossen?</p> | <p>A De vraag is te omvangrijk en moet worden afgebakend.</p> <p>B De vraag bevat vage woorden die eerst gedefinieerd moeten worden.</p> <p>C De vraag is niet specifiek genoeg.</p> <p>D De vraag gaat uit van een (foute) veronderstelling.</p> <p>E De vraag is niet nieuw, het antwoord is algemeen bekend.</p> |
|--|---|

Theorie B Een steekproef nemen

Een statistisch onderzoek hoeft zich niet te richten op individuele mensen, maar kan ook betrekking hebben op bijvoorbeeld huishoudens of scholen. Soms gaat een onderzoek over producten, zoals lampen of pakken melk. De totale groep waarop een onderzoek zich richt heet de **populatie**.

Het onderzoeken van de hele populatie lukt in veel gevallen niet, bijvoorbeeld omdat het teveel werk is. Het deel van de populatie dat je daadwerkelijk onderzoekt heet de **steekproef**. Je wilt met de conclusie van een onderzoek iets over de populatie zeggen. Daarom is het belangrijk dat de steekproef een goede afspiegeling is van de populatie, oftewel dat de steekproef **representatief** is.



Een steekproef is representatief als zij een goede afspiegeling is van de populatie.

Om de kans op een representatieve steekproef te vergroten, streven onderzoekers ernaar dat elk element van de populatie een even grote kans heeft om in de steekproef te komen, oftewel dat de steekproef **aselect** is.

Een steekproef is aselect als elk element van de populatie een even grote kans heeft om in de steekproef voor te komen.

Naast het nemen van een aselechte steekproef moet de onderzoeker ook goed nadenken over de grootte van de steekproef. Daarbij is het bijvoorbeeld belangrijk hoe groot de populatie is en hoe zeldzaam het te onderzoeken kenmerk is. Als een aselechte steekproef voldoende groot is, dan zal deze over het algemeen een representatieve steekproef opleveren.

6 Omschrijf bij de volgende onderzoeksvragen een populatie.



- a** Welke vervolgonopleidingen kiezen de leerlingen van je school?
- b** In welk weekblad staan de meeste illustraties?
- c** Welk percentage van de inwoners van Appelscha is daar ook geboren?
- d** Hoe effectief is een nieuw geneesmiddel tegen hooikoorts?

A7



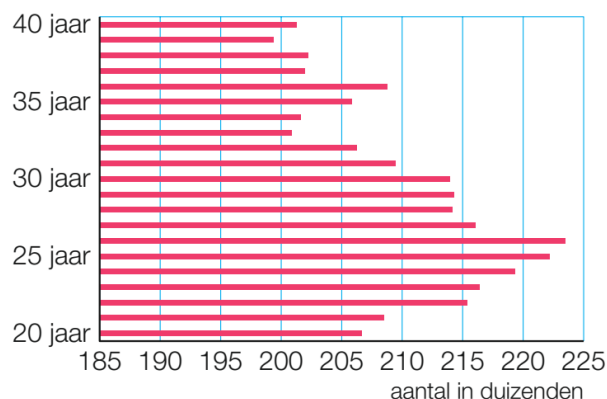
- a** Er wordt een onderzoek gedaan naar de fruitconsumptie van Nederlanders van 20 tot en met 40 jaar door van elke leeftijd evenveel personen te ondervragen.

Leg uit waarom deze steekproef niet aselechte is. Gebruik de figuur hiernaast.

- b** Bij een onderzoek worden 100 mensen ondervraagd.

Kun je hier te maken hebben met een steekproef die voldoende groot is? Licht toe.

LEEFTIJDOPBOUW NEDERLANDSE BEVOLKING



8 Leg uit waarom de volgende steekproeven waarschijnlijk niet



representatief zijn en geef aan hoe deze verbeterd kunnen worden.

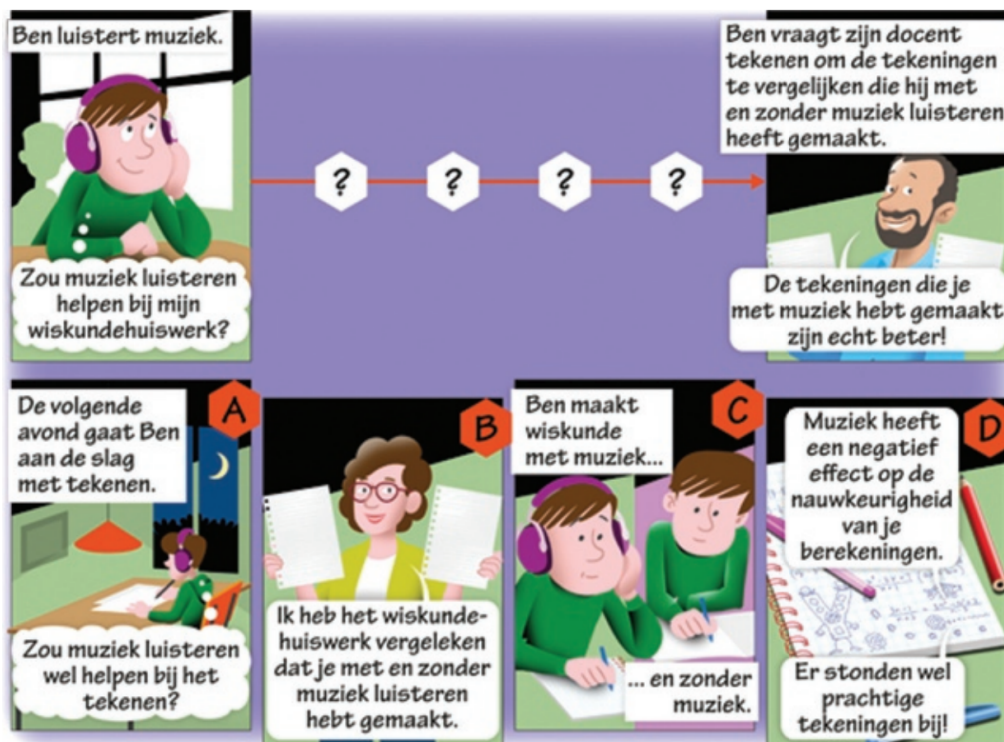
- a** Een onderzoeksbureau wil de mening weten van de Nederlander over klimaatverandering.
Op een zaterdagmiddag wordt op een druk kruispunt in de stad een groot aantal voorbijgangers ondervraagd.
- b** Bij een onderzoek naar het percentage Nederlanders met de zeer zeldzame aandoening dextrocardie, waarbij het hart rechts in het lichaam zit in plaats van links, worden aselechte 100 Nederlanders onderzocht.
- c** Bij een onderzoek naar eenzaamheid onder kinderen wordt een aselechte steekproef genomen onder middelbare scholieren.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan in een onderzoek de vier fasen van de statistische cyclus herkennen.
- ☐ Ik kan een onderzoeksvraag kritisch beoordelen.
- ☐ Ik kan de populatie bepalen bij een onderzoeksvraag.
- ☐ Ik kan een steekproef kritisch beoordelen en de begrippen representatief en aselekt gebruiken.

- OPGAVE C1
THEORIE A
- OPGAVE C2a
THEORIE A
- OPGAVE C2b
THEORIE B
- OPGAVE C2c
THEORIE B

C1 Zie de cartoon. Zet de plaatjes in de juiste volgorde en bedenk bij welke fase van de statistische cyclus de plaatjes A, B, C en D horen.



- C2** Voor een onderzoek is de volgende onderzoeksvraag opgesteld.
‘Halen luie scholieren gemiddeld lagere cijfers voor economie?’
Om deze vraag te beantwoorden, worden willekeurig 300 scholieren ondervraagd die onvoldoende staan voor economie.
- a Wat is er mis met deze onderzoeksvraag?
 - b Omschrijf de populatie.
 - c Waarom is deze steekproef niet aselekt?

Antwoorden

- C1** C data verzamelen, B data analyseren,
D conclusies trekken, A de onderzoeksvraag
- C2** a De onderzoeksvraag bevat een vaag woord: lui.
b Alle scholieren die het vak economie volgen.
c Leerlingen met een voldoende hebben geen kans om in de steekproef te komen.

2.2 Data verzamelen

Kennis en vaardigheden

- Je kent de begrippen (statistische) variabele, waarde en dataset.
- Je kunt in een gegeven situatie de variabelen benoemen.
- Je kunt van een variabele bepalen of deze kwalitatief of kwantitatief is.
- Je kunt van een kwalitatieve variabele bepalen of het meetniveau nominaal of ordinaal is.
- Je kunt van een kwantitatieve variabele bepalen of deze discreet of continu is.

□ ⊙ *

Leerlingen van een school hebben de enquête hiernaast ingevuld.

- a Van welke enquêtevragen heb je de antwoorden nodig om de volgende onderzoeksvraag te beantwoorden?
‘Verschillen de leerlingen uit de eerste klas met de leerlingen uit de vierde klas in de mate van tevredenheid over hun rooster?’
- b Welke van de volgende twee gemiddelden kun je met de antwoorden van de enquête berekenen en welke niet? Licht toe.
 - De gemiddelde afstand tot school.
 - Het gemiddelde aantal tussenuren per week.
- c De antwoorden op enquêtevraag 6 zijn getallen. Sari berekent hiervan het gemiddelde. Geef commentaar.

Enquête	
1. Ik zit in leerjaar	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6
2. Ik ben <u>15</u> jaar oud.	
3. Mijn woonplaats is <u>Lochem</u> .	
4. Ik woon <u>3,4</u> km van school.	
5. Op hoeveel schooldagen was je afgelopen periode ziek? <u>0</u>	
6. Mijn kluisnummer is <u>341</u> .	
7. Hoe tevreden ben je met je rooster?	☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ontevreden tevreden
8. Hoeveel tussenuren heb je per week?	☐ 0 – 2 ☐ 3 – 5 ☒ 6 – 8 ☐ meer dan 8
DANK VOOR HET INVULLEN	

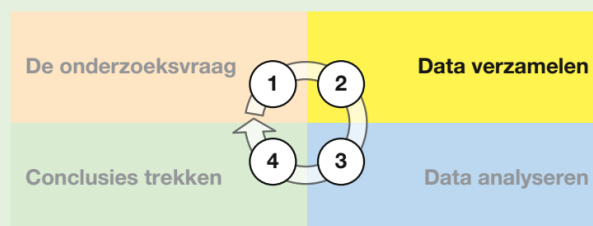
Theorie A Statistische variabelen en data

In deze paragraaf richten we ons op fase 2 van de statistische cyclus: Data verzamelen.

Om antwoord te vinden op de onderzoeksvraag moeten er bij een statistisch onderzoek gegevens worden verzameld.

Er zijn verschillende manieren om aan gegevens te komen. Voor veel onderzoeken kan gebruik worden gemaakt van reeds verzamelde gegevens. Een bekende bron voor gegevens over Nederland is het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS).

Voor sommige onderzoeken zullen de juiste gegevens niet beschikbaar zijn. De onderzoeker zal dan gegevens moeten verzamelen, bijvoorbeeld door middel van een enquête of experiment.



In de enquête van opgave 9 wordt naar meerdere kenmerken gevraagd. Bij statistiek heten de kenmerken die je onderzoekt **variabelen**, omdat ze verschillende **waarden** kunnen aannemen (ze zijn variabel). In het overzicht hieronder zie je de antwoorden van enkele leerlingen op de enquête van opgave 9. Zo'n verzameling van gegevens noemt men een **dataset**. Je ziet bijvoorbeeld dat bij de variabele woonplaats de waarden Ruurlo en Laren voorkomen.

data = gegevens
set = verzameling

ID	leerjaar	leeftijd	woonplaats	afstand	dagen ziek	kuisnummer	tevredenheid	tussenuren
0001	6	18	Ruurlo	12,1	4	82	4	0 - 2
0002	5	16	Laren	6,6	0	368	5	0 - 2
0003	4	16	Borculo	11,5	0	245	2	3 - 5
0004	2	13	Laren	6,9	1	219	1	6 - 8
0005	3	15	Barchem	5,9	0	271	5	3 - 5
0006	4	16	Borculo	12,3	0	19	2	6 - 8
0007	2	14	Laren	6,1	2	250	4	3 - 5
0008	5	17	Lochem	0,5	1	316	1	meer dan 8
0009	1	12	Haarlo	14,2	0	117	1	meer dan 8
0010	4	15	Lochem	3,4	0	341	1	6 - 8
0011	2	13	Borculo	10,9	0	187	5	3 - 5
0012	1	12	Ruurlo	10,8	0	203	3	6 - 8
0013	4	15	Lochem	3,6	3	365	3	3 - 5

In de statistiek maken we onderscheid tussen **kwantitatieve variabelen** en **kwalitatieve variabelen**.

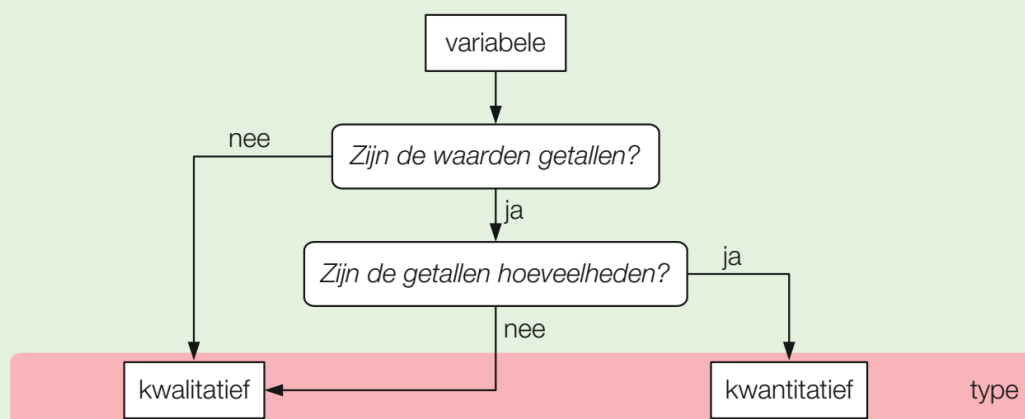
Kwantitatieve variabelen betreffen een hoeveelheid, zoals bijvoorbeeld reisafstand en het aantal ziekte-dagen.

Een ander woord voor hoeveelheid is *kwantiteit*.

Kwalitatieve variabelen betreffen een eigenschap die geen hoeveelheid is, zoals bijvoorbeeld woonplaats.

Van sommige variabelen zoals kuisnummer zijn de waarden wel getallen, maar geen hoeveelheden. Een onderzoeker zal bijvoorbeeld nooit het gemiddelde kuisnummer berekenen. Daarom is kuisnummer een kwalitatieve variabele.

Bij twijfel kun je als volgt te werk gaan om te bepalen of een variabele kwalitatief of kwantitatief is.



10 Zie de enquête van opgave 9 en het deel van de bijbehorende dataset in theorie A.

- a** De ingevulde enquête in opgave 9 is van Joris. Hij komt ook voor in de dataset.
Welke identificatiecode (ID) heeft hij in de dataset?
- b** De variabele ID hoort niet bij een vraag uit de enquête.
Waarom is deze variabele toegevoegd, denk je?
- c** Is de variabele ID kwalitatief of kwantitatief? Licht toe.
- d** Geef van de variabelen 'leeftijd' en 'tevredenheid' aan of deze kwalitatief of kwantitatief zijn.

11 Zie de tabel.

11

TOP 5 BEST BETAALDE SPORTERS 2023

rang	naam	sport	inkomen (\$)
1	Christiano Ronaldo	voetbal	124 miljoen
2	Lionel Messi	voetbal	118 miljoen
3	Kylian Mbappé	voetbal	109 miljoen
4	LeBron James	basketbal	109 miljoen
5	Saúl Álvarez	boksen	100 miljoen

- a** Welke variabelen komen voor in de tabel?
- b** Van welke van deze variabelen zijn de waarden getallen?
- c** Van welke variabele zijn de getallen hoeveelheden?
- d** Geef van elk van de vier variabelen aan of ze kwalitatief of kwantitatief zijn.

A12 Bij een medisch onderzoek worden vaak veel factoren onderzocht. Hiernaast zie je een deel van een ingevulde vragenlijst. Welke variabelen zijn kwantitatief en welke kwalitatief?

A12

A hand is shown filling out a medical questionnaire. The questionnaire has the following fields and values: patiëntnummer (11235813), geboortjaar (1985), roken (nee), and aantal keer sporten per week (2).

A13 Bij een enquête over het aantal koppen koffie dat Nederlanders per dag drinken, kun je kiezen uit:

A13

0 koppen 1 kop 2 koppen 3 koppen 4 of meer koppen

- a** Is in deze enquête de variabele 'aantal koppen koffie' kwalitatief of kwantitatief?
- b** De onderzoeker kan op basis van de verzamelde gegevens niet berekenen hoeveel koppen koffie de respondenten gemiddeld drinken per dag.
Wat had de onderzoeker anders moeten doen om het gemiddelde wel te kunnen berekenen?

De mensen die deelnemen aan een steekproef worden respondenten genoemd.

○14 Een enquête voor autobezitters bevat de volgende vragen.



I Hoe vaak maakt u gebruik van de auto? Kies uit

☐ nooit ☐ soms ☐ regelmatig ☐ vaak

II Wat voor type auto rijdt u? Kies uit

☐ benzine ☐ diesel ☐ hybride ☐ elektrisch ☐ anders

a Is de variabele 'autogebruik' kwalitatief of kwantitatief? En de variabele 'type auto'?

b Bij welke vraag is er duidelijk sprake van een logische volgorde van de antwoordmogelijkheden? Licht toe.

Theorie B Meetniveau van een kwalitatieve variabele

Bij kwalitatieve variabelen is het van belang hoe ze zijn gemeten.

Als de waarden een logische volgorde (ordening) hebben, is de variabele gemeten op **ordinaal** niveau. Dat is het geval bij de variabele autogebruik in opgave 14.

Als de volgorde niet van belang is, zoals bij de variabele type auto, is er gemeten op **nominaal** niveau. De **meetniveaus** nominaal en ordinaal horen bij een kwalitatieve variabele.

Een variabele die op nominaal niveau is gemeten, is een **nominale variabele**.

Een variabele die op ordinaal niveau is gemeten, is een **ordinale variabele**.

Nominaal is afgeleid van het Latijnse woord *nomen*, dat naam betekent.

MEETNIVEAUS KWALITATIEVE VARIABELE

meetniveau	omschrijving
nominaal	De verschillende categorieën worden <i>benoemd</i> , maar er is geen logische volgorde in de waarden van de variabele.
ordinaal	Er is een logische <i>ordening</i> in de waarden van de variabele.

15



De afdeling Onderzoek en Statistiek van de gemeente Amsterdam doet sinds 1999 jaarlijks onderzoek naar Amsterdammers: De Burgermonitor. In de tabel staan enkele variabelen en de bijbehorende waarden. Geef van elke variabele het meetniveau.

leeftijdsgroep	16 t/m 29	30 t/m 54	55-plus
onderwijsniveau (hoogst afgerond)	basisschool, vmbo, mbo 1	havo, vwo, mbo 2/3/4	hbo, wo
migratieachtergrond	wel	geen	
huishouden	alleenstaand	meer personen	

A16 Er wordt onderzoek gedaan naar de vakantiebestemming van Nederlanders in de herfstvakantie.

Bedenk in de context van dit onderzoek

- a een kwantitatieve variabele
- b een nominale variabele en een ordinale variabele en bedenk voor beide variabelen drie mogelijke waarden.

O17 Op een school is in elk lokaal het aantal leerlingen geteld en de temperatuur in graden Celsius gemeten.

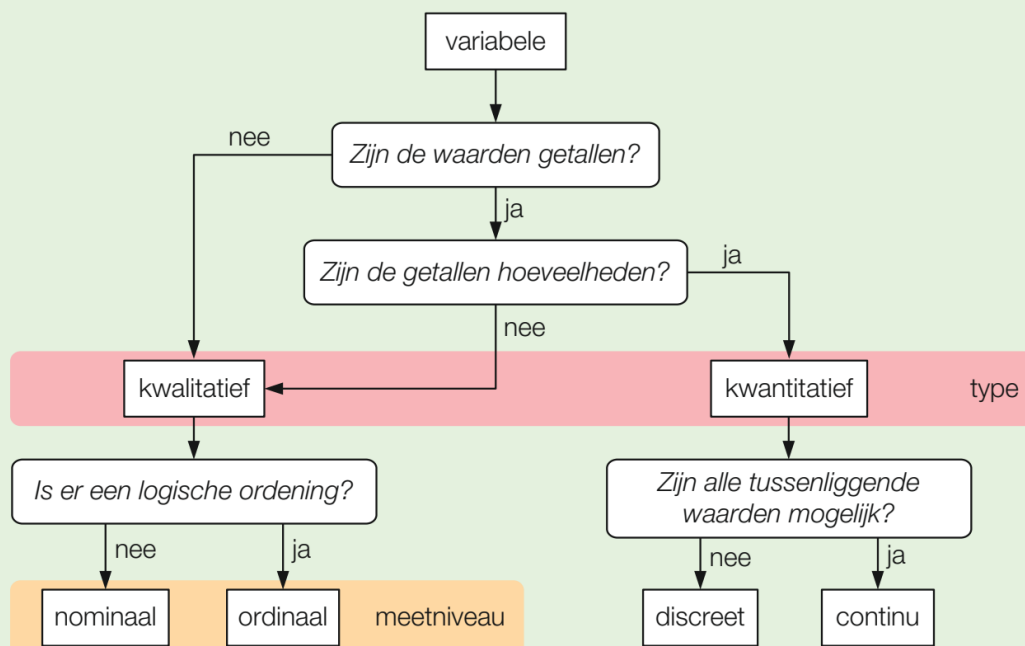
- a Is de variabele 'aantal leerlingen' kwalitatief of kwantitatief? En de variabele 'temperatuur in graden Celsius'?
- b Een van de waarden is 26,2.
Bij welke variabele hoort deze waarde? Licht toe.

Theorie C Discrete en continue variabelen

In opgave 17 heb je gezien dat bij de variabele 'aantal leerlingen' alleen gehele waarden mogelijk zijn. Een kwantitatieve variabele waarbij bepaalde tussenliggende waarden niet mogelijk zijn, is een **discrete variabele**.

Een kwantitatieve variabele waarbij alle tussenliggende waarden mogelijk zijn, is een **continue variabele**. In opgave 17 kan de thermometer misschien niet alle tussenliggende waarden weergeven, maar in principe zou je de temperatuur nauwkeuriger kunnen meten. De variabele 'temperatuur in graden Celsius' is dus een continue variabele.

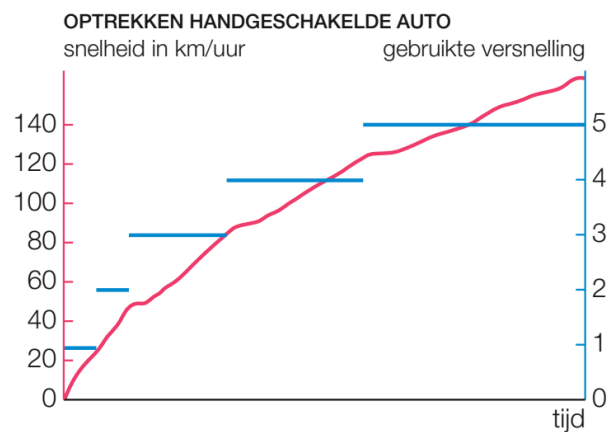
Bij het indelen van variabelen kun je het volgende schema gebruiken.



18



Voor een auto met vijf versnellingen zijn in de figuur de snelheid en de gebruikte versnelling uitgezet tegen de tijd. Is de variabele 'snelheid' discreet of continu? En de variabele 'gebruikte versnelling'?



19



Geef in elk van de volgende situaties aan over welke twee variabelen het gaat en welke variabele discreet en welke variabele continu is. Licht je antwoorden toe.

- Een bewoner van een flat ziet op een display op welke verdieping de lift zich bevindt en een liftmonteur bepaalt de hoogte van de lift boven de grond.
- Een medewerker van een schoenenwinkel meet van elke klant de voetslengte in cm en bepaalt vervolgens de schoenmaat.

A20



Een appelkweker verzamelt de volgende informatie.

- Het aantal appels per boom.
- De soort van elke boom.
- Het gewicht van elke appel.
- De kwaliteitsklasse (1, 2 of 3) van elke appel.

Geef van elke kwalitatieve variabele het meetniveau. En bepaal van elke kwantitatieve variabele of deze discreet of continu is.



R21



Marc en Petra willen de gemiddelde leeftijd van de inwoners van hun dorp bepalen. Ze nemen een representatieve steekproef en overwegen één van de volgende twee enquêtevragen:

- Wat is uw geboortedatum?
- Hoe oud bent u?

Bij welke van de twee vragen verwacht je een hogere gemiddelde leeftijd? Licht toe.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik ken de begrippen (statistische) variabele, waarde en dataset.
- ☐ Ik kan in een gegeven situatie de variabelen benoemen.
- ☐ Ik kan van een variabele bepalen of deze kwalitatief of kwantitatief is.
- ☐ Ik kan van een kwalitatieve variabele bepalen of het meetniveau nominaal of ordinaal is.
- ☐ Ik kan van een kwantitatieve variabele bepalen of deze discreet of continu is.

► OPGAVE C3a
THEORIE A

► OPGAVE C3a
THEORIE A

► OPGAVE C3b
THEORIE A

► OPGAVE C3c
THEORIE B

► OPGAVE C3d
THEORIE C

C3 Bij een onderzoek onder slechtzienden is voor elke deelnemer een kaart ingevuld. Zie hiernaast.

Onderzoek slechtziendheid
De deelnemer

1. is slechtziend vanwege (reden opgeven)
2. voelt zich nooit / zelden / soms / vaak / altijd beperkt
3. loopt zonder begeleiding dagelijks ... km buiten
4. krijgt begeleiding van ... personen

a Van elke deelnemer worden de gegevens in een dataset verwerkt.

Geef een mogelijke naam voor de variabelen in de dataset. Geef van elke variabele een mogelijke waarde.

- b** Welke variabelen zijn kwalitatief en welke kwantitatief?
- c** Geef van elke kwalitatieve variabele het meetniveau.
- d** Bepaal van elke kwantitatieve variabele of deze discreet of continu is.

Antwoorden

- C3 a** reden slechtziendheid, ziekte
mate van beperkt voelen, zelden
dagelijks km lopen, 8,6
aantal begeleiders, 2
- b** kwalitatief: mate van beperkt voelen, reden slechtziendheid
kwantitatief: dagelijks km lopen, aantal begeleiders
- c** reden slechtziendheid: nominaal
mate van beperkt voelen: ordinaal
- d** dagelijks km lopen: continu
aantal begeleiders: discreet

2.3 Data analyseren

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met de centrummaten gemiddelde, modus en mediaan.
- Je kunt rekenen met absolute en relatieve frequenties.
- Je kunt werken met een klassenindeling.
- Je kunt werken met histogrammen en frequentiepolygonen.

Voorkennis Centrummaten

Je kunt gebruikmaken van het gemiddelde om aan te geven waar het centrum van de gegevens zich bevindt. Het gemiddelde is daarom een voorbeeld van een centrummaat. Andere centrummaten zijn de mediaan en de modus.

Centrummaten

gemiddelde	$\text{gemiddelde} = \frac{\text{som van de waarnemingsgetallen}}{\text{aantal waarnemingsgetallen}}$
mediaan	Als de waarnemingsgetallen in volgorde van grootte staan, dan is <ul style="list-style-type: none">• bij een oneven aantal getallen de mediaan het middelste getal• bij een even aantal getallen de mediaan het gemiddelde van de middelste twee getallen.
modus	De modus is het waarnemingsgetal met de grootste frequentie. Zijn er twee of meer waarnemingsgetallen met de grootste frequentie, dan bestaat de modus niet.

Voorbeeld

Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus van
8 5 3 6 3 4 8 3

Uitwerking

$$\text{gemiddelde} = \frac{8 + 5 + 3 + 6 + 3 + 4 + 8 + 3}{8} = 5$$

3 3 3 4 5 6 8 8 ← In volgorde van grootte.
middelste twee

$$\text{mediaan} = \frac{4 + 5}{2} = 4,5$$

$$\text{modus} = 3$$

V1 Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus van

a 12 9 9 5 13 7 8

b 18 21 25 18 24 17

V2 Bij een groepsproject zijn de 18 leerlingen in groepjes van vier of vijf ingedeeld. In de tabel hiernaast zie je dat twee van de vijf leerlingen in groep 3 het cijfer 6 hebben.

- Welke groep heeft het hoogste gemiddelde cijfer?
- Wat is de modus van alle cijfers samen?
- Bij welke groep is de mediaan het laagst?

CIJFERS GROEPSPROJECT

groep 1	5	4	6	4	5
groep 2	6	7	7	8	
groep 3	9	6	8	7	6
groep 4	5	6	7	5	

Voorkennis Frequentietabel en centrummaten

In de frequentietabel hiernaast zie je de behaalde cijfers bij een toets Frans.

Je ziet dat het waarnemingsgetal 8 frequentie 3 heeft. Dat betekent dat drie leerlingen een 8 hebben gehaald.

De totale frequentie is $2 + 6 + 6 + 8 + 3 + 2 = 27$.

Er zijn dus 27 leerlingen die de toets hebben gemaakt.

De som van de waarnemingsgetallen krijg je als volgt.

$$2 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 8 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9 = 172$$

Dus het gemiddelde cijfer is $\frac{172}{27} \approx 6,4$.

Er zijn 27 waarnemingsgetallen, dus de mediaan is het 14^e waarnemingsgetal. Zie het schema hiernaast.

De eerste $2 + 6 = 8$ waarnemingsgetallen zijn allemaal 4 of 5. De volgende 6 waarnemingsgetallen zijn allemaal 6.

Je hebt dan $8 + 6 = 14$ waarnemingsgetallen gehad. Het 14^e waarnemingsgetal is een 6, dus de mediaan van de cijfers is 6.

De modus is het waarnemingsgetal met de grootste frequentie.

Dus de modus van de cijfers is 7.

CIJFERS TOETS FRANS

cijfer	4	5	6	7	8	9
frequentie	2	6	6	8	3	2

27 waarnemingsgetallen

13

1

13

mediaan = 14^e waarnemingsgetal

V3 Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus bij de frequentietabel.

HUISWERKOPGAVEN PER WEEK

aantal	11	12	13	14	15	16
frequentie	4	3	5	6	1	5

V4 Bij restaurant Sapori is een weekend lang van elke reservering bijgehouden voor hoeveel personen er werd gereserveerd. Zie de tabel.

RESERVERINGEN SAPORI

aantal personen	1	2	3	4	5	6	10
frequentie	6	22	8	8	4	3	5

- Hoeveel reserveringen waren er dit weekend?
- Voor hoeveel gasten werd er in totaal gereserveerd?
- Bereken het gemiddelde, de modus en de mediaan. Rond zo nodig af op één decimaal.

Van zes personen is hun favoriete kleur en hun lengte in een dataset verwerkt. Zie hiernaast.

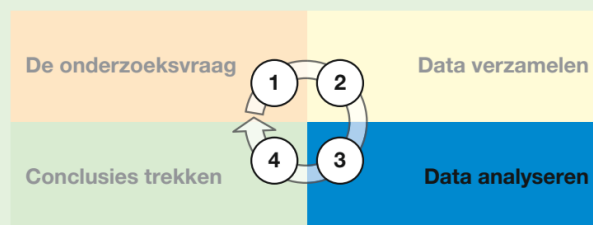
- Waarom lukt het niet om bij de variabele 'favoriete kleur' het gemiddelde of de mediaan van de waarden te berekenen?
- Wat is de modus bij 'favoriete kleur'?
- José wil de modus van de waarden van de variabele 'lengte in cm' weten. Geef commentaar.
- Bereken de gemiddelde lengte in cm. Rond af op één decimaal.
- Waarom geeft het gemiddelde geen goede indruk van de lengte van deze zes personen? Is dat ook het geval als de persoon die geel als favoriete kleur heeft niet in de dataset zou zitten?

favoriete kleur	lengte in cm
blauw	119
blauw	116
rood	104
geel	185
blauw	112
groen	110

Theorie A Het analyseren van data

In deze paragraaf richten we ons op fase 3 van de statistische cyclus: Data analyseren.

Het is meestal niet mogelijk om direct conclusies te verbinden aan de gegevens in een dataset. Daarvoor moet de data eerst geanalyseerd worden. Bijvoorbeeld door centrummaten te berekenen, tabellen te maken of diagrammen te tekenen.



Verschillende situaties vragen om verschillende centrummaten. Bij kwalitatieve variabelen kun je de modus gebruiken. Bij kwantitatieve variabelen heb je de keuze uit alle centrummaten.

In opgave 22 heb je gezien dat het gemiddelde niet altijd een juiste indruk geeft van het centrum van de waarnemingsgetallen. Het gemiddelde is bijvoorbeeld gevoelig voor uitschieters. Een **uitschieter** (of **uitbijter**) is een waarnemingsgetal dat erg afwijkt van de andere waarnemingsgetallen.

VOOR- EN NADELEN BIJ DRIE CENTRUMMATEN

	voordeel	nadeel
gemiddelde	gebruikt alle waarnemingsgetallen	gevoelig voor uitschieters
mediaan	ongevoelig voor uitschieters	alleen de waarde van de middelste waarneming(en) is van belang
modus	kan bij elk type variabele	een kleine verandering kan een hele andere modus opleveren

Data van een onderzoek wordt meestal gepresenteerd in diagrammen en tabellen. Daarom wordt een diagram of tabel ook wel een **presentatie** (of **representatie**) van de data genoemd. Welke presentatie de voorkeur heeft, hangt af van de data en wat de onderzoeker wil laten zien.

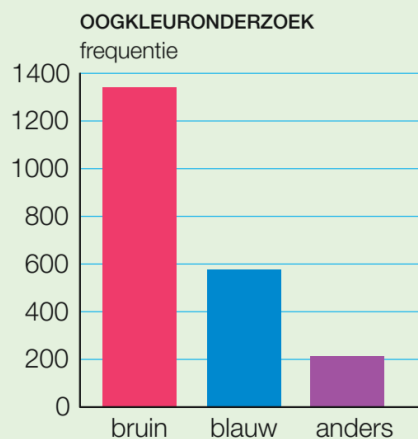
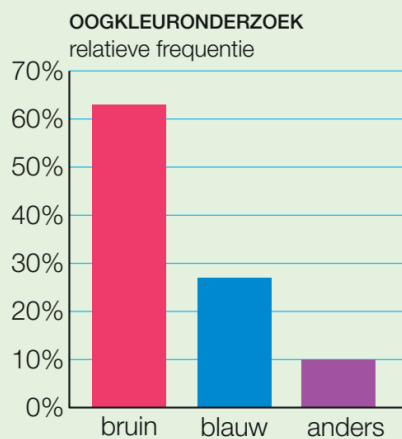
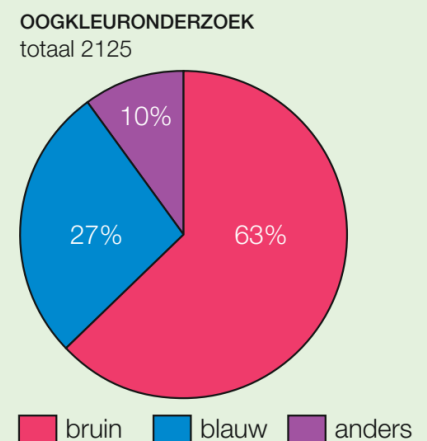
Bij een onderzoek naar oogkleur in de VS zijn 2125 personen onderzocht. In de tabel hiernaast is van elke waarde van de variabele oogkleur zowel de **absolute frequentie** als de **relatieve frequentie** opgenomen.

Zo is de relatieve frequentie van oogkleur bruin gelijk aan $\frac{1339}{2125} \cdot 100\% \approx 63\%$.

OOGKLEURONDERZOEK VS

oogkleur	bruin	blauw	anders
absolute frequentie	1339	574	212
relatieve frequentie	63%	27%	10%

De variabele oogkleur is kwalitatief. Veelgebruikte diagrammen bij een kwalitatieve variabele zijn staaf- en cirkeldiagrammen. Zie hieronder.



23

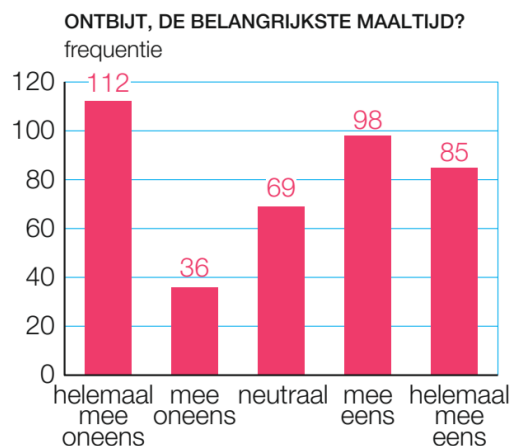


Welke centrummaat is het meest geschikt om de volgende waarnemingen te karakteriseren? Licht toe.

- Op een verjaardagsfeestje hebben de aanwezigen de volgende leeftijden:
17, 20, 22, 17, 19, 21 en 68 jaar.
- Van tien leerlingen is de haarkleur:
blond, rood, bruin, bruin, zwart, bruin, bruin, blond, bruin en blond.
- Een verkoper verkoopt op de zes werkdagen van een week de volgende aantallen fietsen:
8, 7, 4, 5, 8 en 6.
- Bij een natuurkundeproef meten tien leerlingen het volume van dezelfde glazen bol. De metingen leveren op:
48, 48, 48, 48, 53, 48, 48, 48, 48 en 48 cm³.



- 24** Bij een enquête is gevraagd in hoeverre men het eens is met stelling ‘het ontbijt is de belangrijkste maaltijd van de dag’. Zie de figuur hiernaast.
- Van welk meetniveau is hier sprake?
 - Wat is de modus?
 - Bereken de relatieve frequentie bij ‘helemaal mee oneens’ en bij ‘mee oneens’.
 - Hoeveel procent van de mensen heeft positief (‘helemaal mee eens’ of ‘mee eens’) geantwoord?
 - Licht toe of de modus hier een goed beeld geeft van de mate waarin men het eens was met de stelling.



- 25** In klas 4HB is nauwgezet het aantal telaarcomers per dag geregistreerd.
- Hoeveel dagen is er geregistreerd?
 - Bereken het gemiddelde.
 - Bereken op hoeveel procent van de dagen er 4 leerlingen per dag te laat zijn gekomen.
 - Wanneer de afdelingscoördinator het gemiddelde ziet, is hij erg ontstemd. Hij vindt het gemiddelde aantal telaarcomers onaanvaardbaar hoog. Door het gebruiken van een andere centrummaat weet de klas de afdelingscoördinator milder te stemmen.
Hoe doet de klas dat?

TELAATKOMERS IN 4HB

aantal	0	1	2	3	4	5	32
frequentie	1	5	5	3	3	2	1

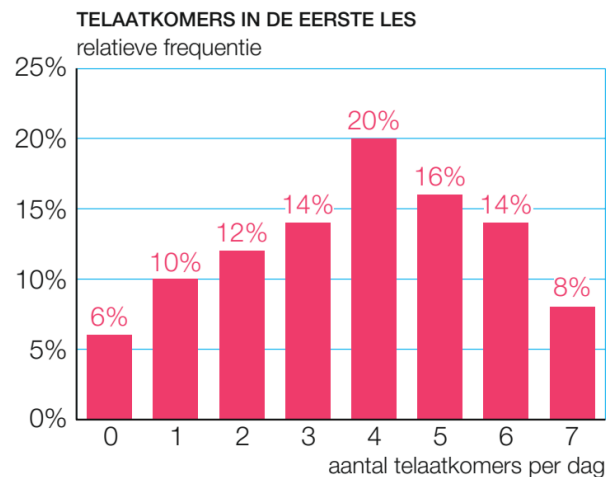
- A26** Aan een groep leerlingen is gevraagd op hoeveel dagen ze de afgelopen week gesnoept hebben. De eerste 30 resultaten zie je hiernaast.
- Met welke variabele heb je hier te maken? Is deze variabele kwalitatief of kwantitatief?
 - Zet de centrummaten bij de eerste 30 resultaten op volgorde van klein naar groot.
 - Aan het einde van het onderzoek zijn er 40 leerlingen ondervraagd. Het gemiddelde is nu 3,5 geworden en de modus is gelijk gebleven. Geef een mogelijke frequentietabel bij deze situatie.

aantal dagen	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

- 27** Jori heeft vijf keer een bordspel gespeeld. Zijn scores waren achtereenvolgens 51, 57, 51, 51 en 55.
- De maximale score bij dit spel is 60 en de minimale score 50.
- Hoe vaak moet hij het spel nog minstens spelen om
- een gemiddelde score van 55 te krijgen
 - de modus van zijn scores groter dan het gemiddelde te laten worden
 - de mediaan van zijn scores groter dan het gemiddelde te laten worden?

De verzuimbeheerder op het Montessori College heeft een aantal dagen bijgehouden hoeveel leerlingen te laat in hun eerste les kwamen. Alle data van haar onderzoek is verwerkt in het diagram hiernaast.

- Je ziet dat bij twee telaarcomers per dag het percentage 12 hoort. Omschrijf wat die 12% betekent.
- Bereken het gemiddelde aantal leerlingen dat te laat kwam in de eerste les.



De verzuimbeheerder schrok ervan dat tijdens de onderzoeksperiode er op 33 dagen meer dan vijf leerlingen te laat in hun eerste les waren.

- Hoeveel dagen duurde het onderzoek?
- Bereken hoe vaak de verzuimbeheerder genoteerd heeft dat een leerling te laat in de eerste les kwam.

Pim heeft een webwinkel. Hij heeft een tijdje bijgehouden hoeveel bestellingen hij per week kreeg. De aantallen staan hieronder.

70 35 79 67 63 51 37
69 23 27 38 73 36 54
46 42 33 21 48 45 32
52 76 47 59 49 40 50

Waarom is het niet zinvol hierbij een frequentietabel te maken?

Theorie B Klassenindeling

In opgave 29 komt elk waarnemingsgetal maar één keer voor. Het heeft dan geen zin een frequentietabel te maken, want alleen de frequentie 1 komt voor. Om een beter inzicht te krijgen in de aantallen bestellingen kun je ze indelen in groepen. Deze groepen heten **klassen**.

Omdat het kleinste aantal bestellingen 21 is en het grootste aantal bestellingen 79, is een verstandige **klassenindeling** $[20, 30)$, $[30, 40)$, $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$ en $[70, 80)$. Bij deze klassenindeling krijg je de tabel hiernaast.

Met $[$ geef je bij de klasse $[20, 30)$ aan dat 20 wel tot de klasse behoort en met $)$ dat 30 niet tot de klasse behoort. Bij deze klasse heten 20 en 30 de **klassengrenzen**. Bij deze klasse is de **klassenbreedte** $30 - 20 = 10$.

Het **klassenmidden** is $\frac{20 + 30}{2} = 25$.

BESTELLINGEN PER WEEK

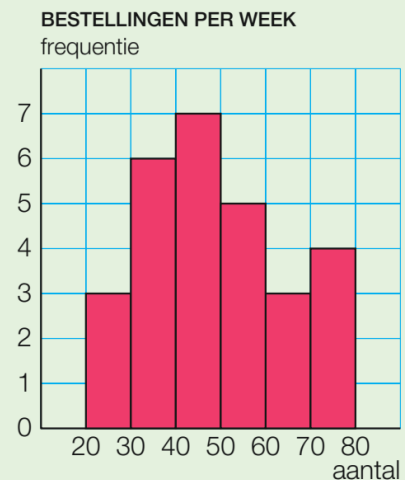
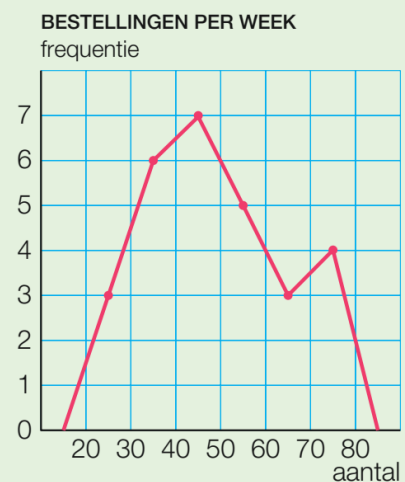
aantal	frequentie
$[20, 30)$	3
$[30, 40)$	6
$[40, 50)$	7
$[50, 60)$	5
$[60, 70)$	3
$[70, 80)$	4

Hiernaast is het **histogram** getekend bij de frequentietabel. Een histogram heeft op de horizontale as een kwantitatieve variabele met een klassenindeling en op de verticale as de frequentie. In een histogram staan de staven tegen elkaar aan.

Bij een klassenindeling kun je ook een lijndiagram tekenen. Je zet dan stippen boven de klassenmiddens. Het begin- en eindpunt liggen op de horizontale as. Zo'n lijndiagram heet een **frequentiepolygoon**. Zie de figuur rechtsonder.

Bij het maken van een klassenindeling gaan de meetwaarden verloren. Je ziet immers alleen nog het aantal meetwaarden per klasse. Daarom kun je aan de hand van een klassenindeling niet meer berekenen wat het gemiddelde was. Bij een klassenindeling kun je wel een schatting geven van het gemiddelde door te rekenen met de klassenmiddens.

In plaats van de modus spreken we bij een klassenindeling van de **modale klasse**, dat is de klasse met de grootste frequentie. Ook de mediaan is bij een klassenindeling niet meer te berekenen. Je kunt vaak wel berekenen in welke klasse de mediaan ligt.



Voorbeeld

Van een aantal leerlingen is het gewicht vastgesteld. Zie de frequentietabel hiernaast.

- Bereken met klassenmiddens een schatting van het gemiddelde gewicht per leerling.
- In welke klasse ligt de mediaan?
- Geef de modale klasse.

Uitwerking

- totale frequentie = $4 + 7 + 12 + 14 + 5 + 8 = 50$
 gemiddelde = $\frac{4 \cdot 52,5 + 7 \cdot 57,5 + \dots + 8 \cdot 77,5}{50} = 65,8 \text{ kg}$

- De mediaan is het gemiddelde van het 25^e en 26^e getal, dit ligt in de klasse $[65, 70)$.
- De modale klasse is $[65, 70)$.

GEWICHT LEERLINGEN IN KG

gewicht	frequentie
$[50, 55)$	4
$[55, 60)$	7
$[60, 65)$	12
$[65, 70)$	14
$[70, 75)$	5
$[75, 80)$	8

In de eerste drie klassen zitten $4 + 7 + 12 = 23$ getallen.

R30 Zie het voorbeeld.

⊠ ⊙ * Bij het maken van de klassenindeling zijn de meetwaarden verloren gegaan. Uit de meetwaarden bleek dat de leerlingen samen 3192 kg wogen. Hoeveel procent wijkt het werkelijke gemiddelde af van de schatting met de klassenmiddens?

31 Van een aantal levensmiddelen in een supermarkt is de prijs genoteerd. Zie de frequentietabel hiernaast.

- Heb je hier te maken met een continue of een discrete variabele? Licht toe.
- Een zak snoep kost €3,00. In welke klasse valt dit?
- Bereken met klassenmiddens een schatting van de gemiddelde prijs.
- In welke klasse ligt de mediaan?
- Geef de modale klasse.

PRIJS LEVENSMIDDELEN

prijs in centen	frequentie
$\langle 0, 100]$	26
$\langle 100, 200]$	17
$\langle 200, 300]$	21
$\langle 300, 400]$	8
$\langle 400, 500]$	13
$\langle 500, 600]$	2

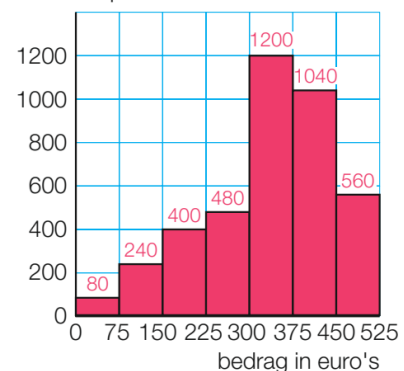
32 Van de eerste 4000 bestellingen bij een webwinkel zijn de bedragen per bestelling verwerkt in het histogram hiernaast. De eerste klasse is de klasse $\langle 0, 75]$.

- Onderzoek of de mediaan in de modale klasse ligt.

Door te rekenen met de klassengrenzen kun je berekenen dat het gemiddelde bedrag per bestelling groter is dan €297, maar niet meer is dan €372.

- Toon dit met berekeningen aan.

BEDRAG PER BESTELLING
frequentie



33 Aan de docenten van het Noorderveld College is gevraagd hoe oud ze zijn. Zie de frequentietabel hiernaast.

- Een docent Frans zegt dat de gemiddelde leeftijd van de docenten 40 jaar is. Onderzoek of dit kan kloppen.
- Kan de mediaan 47 jaar zijn? Licht toe.
- De conciërge beweert dat de modus van de leeftijden 36 is. Waarom kan dit niet kloppen?

LEEFTIJD DOCENTEN

leeftijd	frequentie
$[25, 35)$	18
$[35, 45)$	3
$[45, 55)$	40
$[55, 65)$	9
$[65, 75)$	2

34 Hiernaast staat het *steel-bladdiagram* bij het aantal werknemers per winkel in een winkelcentrum. Van het aantal 32 op de onderste regel is 3 de steel (het aantal tientallen) en 2 het blad (het aantal eenheden).

AANTAL WERKNEMERS

0	3 4 4 4 6 6 7 7 8 8 8 9 9
1	2 4 6 6 8 8 8 8 9
2	0 2 3 5 8
3	2 3 4
tientallen	eenheden

- Geef de modus.

Een steel-bladdiagram kun je opvatten als een bijzondere klassenindeling.

- Wat zijn de klassen van het gegeven steel-bladdiagram?
- In welke klasse ligt de mediaan?

A35 Aan een groep ouderparen is gevraagd op welke leeftijd van de man en de vrouw het eerste kind geboren is. Zie het *dubbel steel-bladdiagram* hiernaast.

- a Hoeveel ouderparen zijn ondervraagd?
- b Hoeveel mannen van deze groep waren 33 jaar bij de geboorte van het eerste kind? En hoeveel vrouwen waren 35 jaar?
- c Hoeveel mannen waren jonger dan 30 jaar? En hoeveel vrouwen?
- d Luuk maakt een klassenindeling van de mannen en vrouwen samen. Hij neemt als eerste klasse $[18, 24)$. Hoeveel personen komen er in de klasse $[30, 36)$? En hoeveel in de hoogste klasse?

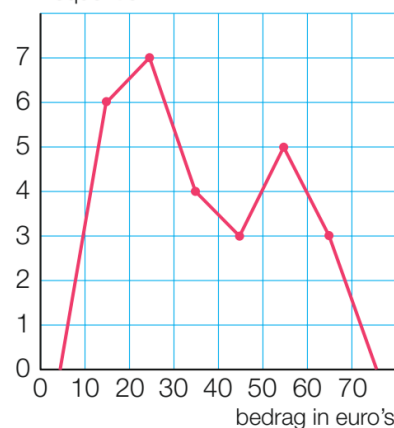
LEEFTIJD OUDERS BIJ GEBOORTE EERSTE KIND

man		vrouw
9	1	8 9 9 9
6 5 5 3 3	2	0 0 2 3
6 4 4 3 0	3	5 5
8 4 3	4	0 1 2 2 3 3
1 0	5	
eenheden	tientallen	eenheden

A36 Op een koopzondag zijn van de winkels in een winkelstraat de gemiddelde bonbedragen (de gemiddelde besteding per kopende klant) verwerkt in de frequentiepolygoon. De eerste klasse is $[10, 20)$.

- a Kun je berekenen hoeveel betalende klanten er waren?
- b Bereken de relatieve frequentie van de klasse $[50, 60)$ en geef de praktische betekenis hiervan.
- c In welke klasse ligt de mediaan?
- d Bereken met klassenmiddens een schatting van het gemiddelde. Rond af op gehelen.

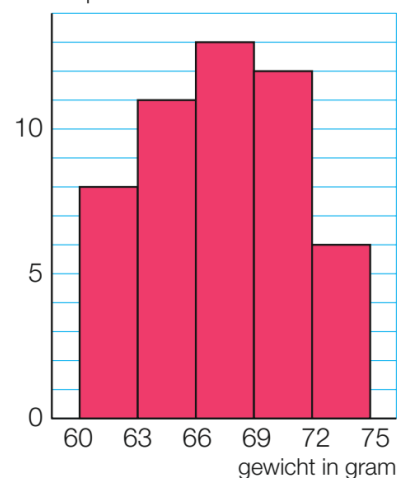
GEMIDDELD BONBEDRAG
frequentie



A37 Van 50 eieren is het gewicht vastgesteld. De resultaten zijn verwerkt in de figuur hiernaast met als eerste klasse $[60, 63)$.

- a Met welke variabele heb je hier te maken? Is deze variabele kwalitatief of kwantitatief?
- b Geef de modale klasse.
- c Matthijs beweert dat het totale gewicht van de eieren minstens 3291 gram en minder dan 3441 gram is. Toon aan dat hij gelijk heeft.
- d Onderzoek of het mogelijk is dat het gemiddelde en de mediaan in verschillende klassen liggen.

GEWICHT EIEREN
frequentie



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan werken met de centrummaten gemiddelde, modus en mediaan.
- ☐ Ik kan rekenen met absolute en relatieve frequenties.
- ☐ Ik kan werken met een klassenindeling.
- ☐ Ik kan werken met histogrammen en frequentiepolygonen.

► OPGAVE C4a,
C5 EN C6bc
THEORIE A

► OPGAVE C4b
THEORIE A

► OPGAVE
C5 EN C6
THEORIE B

► OPGAVE C6
THEORIE B

C4 Bij een vlindertelling is op verschillende routes het aantal vlinders geteld. De resultaten zijn verwerkt in de tabel hiernaast.

VLINDERS PER ROUTE

aantal	0	1	2	3	4	5	18
frequentie	3	4	7	6	4	2	1

- a** Van het gemiddelde, de modus en de mediaan is er één minder geschikt als centrummaat bij deze gegevens. Welke is dat en waarom?
- b** Bereken de relatieve frequentie bij drie vlinders per route.

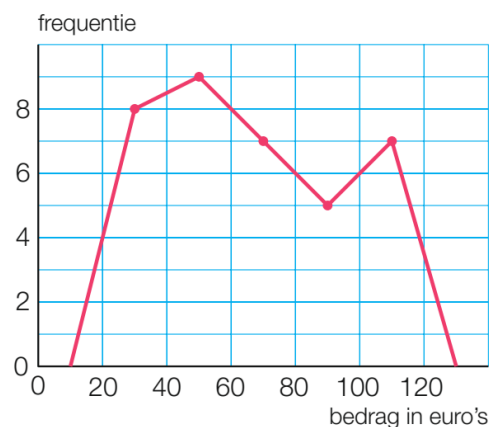
C5 Zie de klassenindeling hiernaast.

- a** Bereken met klassenmiddens een schatting van het gemiddelde gewicht. Rond af op gehele kg.
- b** Geef de modale klasse.
- c** Volgens Jelle is het gemiddelde gewicht 55 kg. Kan hij gelijk hebben? Licht toe.

gewicht in kg	frequentie
[40, 50>	33
[50, 60>	29
[60, 70>	19
[70, 80>	6
[80, 90>	23

C6 Zie de frequentiepolygoon hiernaast. De eerste klasse is de klasse [20, 40).

- a** Hoeveel bedragen zijn in de figuur verwerkt?
- b** In welke klasse ligt de mediaan?
- c** Onderzoek of het gemiddelde in de modale klasse kan liggen.



Antwoorden

C4 a gemiddelde, vanwege de uitschieter

C5 a 61 kg **b** [40, 50>

C6 a 36 bedragen **b** [60, 80>

b 22,2%

c Nee, het kleinst mogelijke gemiddelde is 56,09... kg.

c * dat kan

2.4 Kwartielen en spreiding

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met (relatieve) cumulatieve frequentiepolygonen.
- Je kunt werken met de spreidingsmaten spreidingsbreedte en interkwartielafstand.
- Je kunt werken met gegevens in een boxplot.
- Je kunt een boxplot tekenen bij een (relatieve) cumulatieve frequentiepolygoon.

O38



Bij de receptie van een hotel wordt een tijdje bijgehouden hoelang elk gesprek duurt. Zie de klassenindeling hiernaast.

- Hoeveel gesprekken duurden 4 minuten of korter?
- Hoeveel procent van de gesprekken duurde 4 minuten of korter?

GESPREKSDUUR RECEPTIE

tijd in minuten	frequentie
$\langle 0, 1]$	18
$\langle 1, 2]$	23
$\langle 2, 3]$	14
$\langle 3, 4]$	8
$\langle 4, 5]$	15

Theorie A Cumulatieve frequentie

Tel je bij de frequentie van een waarnemingsgetal alle voorgaande frequenties op, dan krijg je de **cumulatieve frequentie**. Bij de gegevens van opgave 38 zijn hiernaast de cumulatieve frequenties berekend.

Je kunt in de tabel aflezen dat er 63 gesprekken waren die 4 minuten of korter duurden. Ook zie je dat er in totaal van 78 gesprekken de duur is bijgehouden.

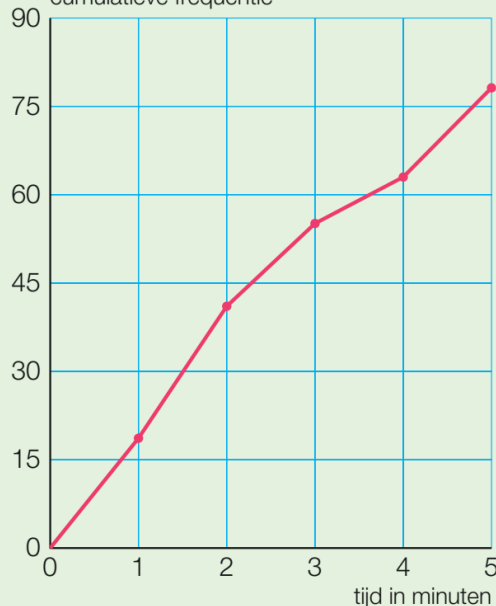
GESPREKSDUUR RECEPTIE

tijd in minuten	frequentie	cumulatieve frequentie
$\langle 0, 1]$	18	18
$\langle 1, 2]$	23	41
$\langle 2, 3]$	14	55
$\langle 3, 4]$	8	63
$\langle 4, 5]$	15	78

Hiernaast is de **cumulatieve frequentiepolygoon** getekend. De cumulatieve frequenties zijn telkens uitgezet boven de rechtergrens van elke klasse. Het beginpunt ligt op de horizontale as. Druk je de cumulatieve frequentie uit in procenten van de totale frequentie, dan noemen we dit de **relatieve cumulatieve frequentie**.

De relatieve cumulatieve frequentie van 4 is $\frac{63}{78} \cdot 100\% \approx 80,8\%$. Dus 80,8% van de gesprekken duurde 4 minuten of korter.

GESPREKSDUUR RECEPTIE
cumulatieve frequentie



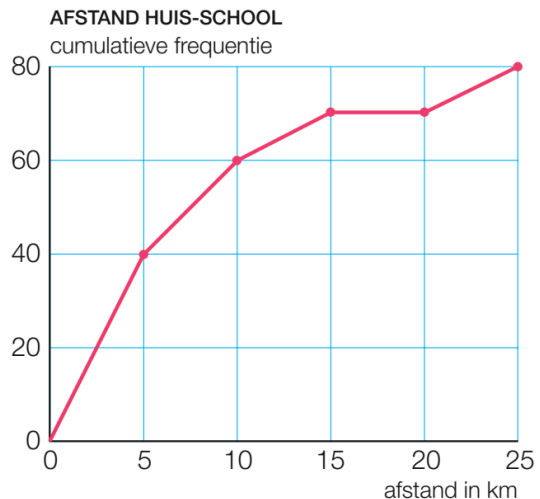
De mediaan verdeelt een serie waarnemingsgetallen in twee helften, de relatieve cumulatieve frequentie van de mediaan is dus 50%.

Een frequentiepolygoon bij relatieve cumulatieve frequenties heet een **relatieve cumulatieve frequentiepolygoon**.

39
□ ⊙ *

Van een groep studenten is de afstand huis-school genoteerd. Zie de cumulatieve frequentiepolygoon in de figuur hiernaast, waarbij de eerste klasse $[0, 5)$ is.

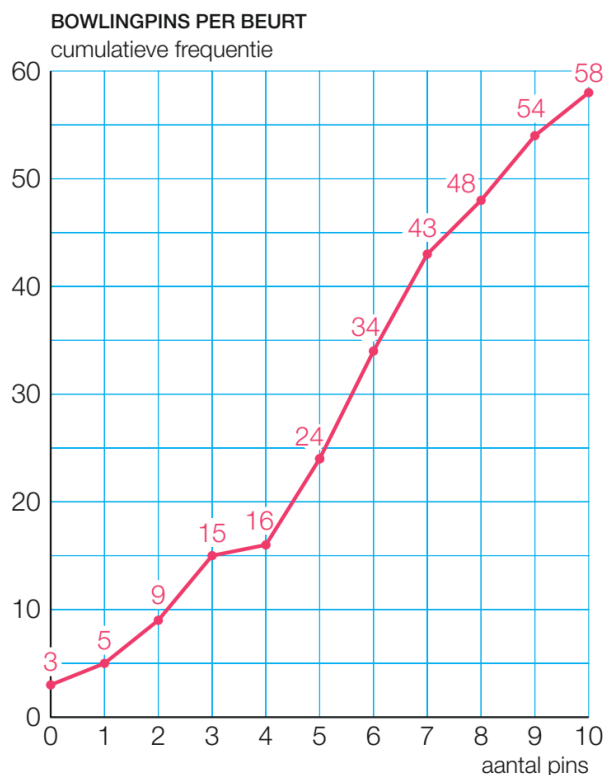
- Hoeveel studenten zijn bij het onderzoek betrokken?
- Hoeveel studenten wonen minder dan 10 km van school?
- Hoeveel studenten wonen minstens 20 km van school?
- Teken een histogram met absolute frequenties bij de figuur.



40
□ ⊙ *

Caroline gaat een avondje bowlen met vrienden. Elke keer als iemand aan de beurt is, worden er maximaal 10 pins omgegooid. Caroline heeft bij elke beurt genoteerd hoeveel pins er zijn omgegooid en de resultaten verwerkt in de figuur hiernaast.

- Is de variabele 'aantal pins' discreet of continu? Licht toe.
- Heb je hier te maken met een klassenindeling? Licht toe.
- Hoeveel beurten zijn er geweest?
- Hoe vaak zijn er meer dan 6 pins omgegooid?
- Wat is de relatieve frequentie van 10 pins omgooien?
- Geef de modus.

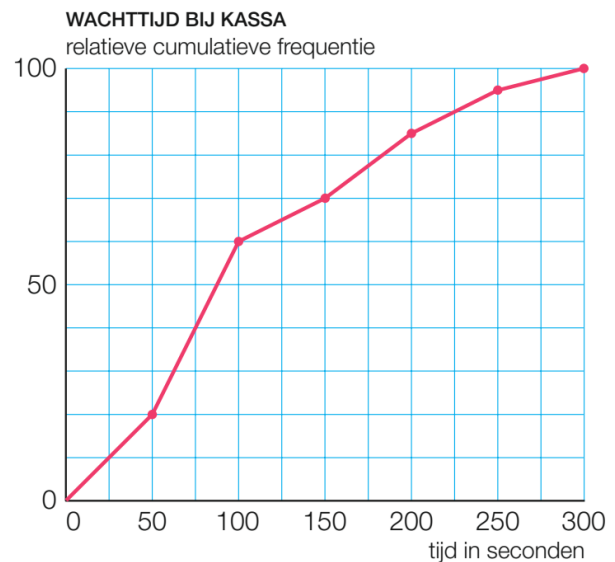


41



In een supermarkt is bijgehouden hoeveel seconden een klant in de rij bij de kassa staat tot hij aan de beurt is. De wachttijden van 300 klanten zijn verwerkt in de relatieve cumulatieve frequentiepolygoon in de figuur hiernaast, waarbij de eerste klasse $[0, 50)$ is.

- Hoeveel procent van de klanten stond minder dan 100 seconden in de rij? Hoeveel klanten zijn dat?
- Hoeveel klanten moesten minstens 2,5 minuut wachten?
- Hoeveel klanten moesten minstens 100, maar minder dan 200 seconden wachten?
- Geef de modale klasse.

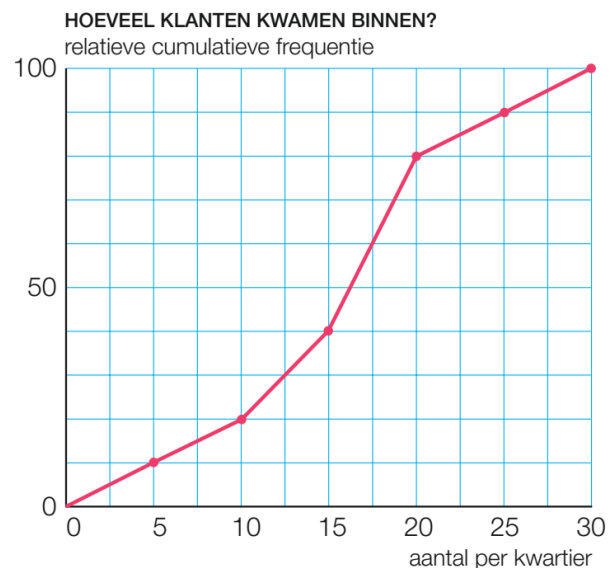


A42



In een winkel is op een dag van 10:00 tot 20:00 uur genoteerd hoeveel klanten er per kwartier de winkel binnenkwamen. Zie de figuur hiernaast, waarbij de eerste klasse $[0, 5)$ is.

- Hoeveel kwartieren kwamen minder dan 20 klanten binnen?
- Hoeveel kwartieren kwamen minstens 15 klanten binnen?
- Hoeveel kwartieren kwamen minstens 10, maar minder dan 25 klanten de winkel binnen?
- In welke klasse ligt de mediaan?



Voorkennis Kwartielen

De mediaan verdeelt een serie waarnemingsgetallen in twee helften. Van elk van deze helften kun je vervolgens weer de mediaan bepalen. De mediaan van de eerste helft heet het eerste kwartiel. Notatie: Q_1 . De mediaan van de tweede helft heet het derde kwartiel. Notatie: Q_3 .

De Q komt van het Engelse woord *quartile*, dat kwartiel betekent.

Q_1 en Q_3 berekenen van 5, 7, 3, 11, 7, 5, 8, 9 en 6

Zet de getallen in volgorde van grootte.

3 5 5 6 **7** 7 8 9 11
mediaan

Splits de serie getallen in twee even grote groepen en geef van beide groepen de mediaan.

- Bij een oneven aantal waarnemingsgetallen laat je de mediaan weg om twee even grote groepen te krijgen. Zie hiernaast.
- Bij een even aantal waarnemingsgetallen hoef je niets weg te laten om twee even grote groepen te krijgen.

eerste helft tweede helft
3 **5 5** 6 7 **8 9** 11
 $Q_1 = 5$ $Q_3 = \frac{8+9}{2} = 8,5$

Het kleinste waarnemingsgetal (Q_0), de mediaan (Q_2) en het grootste waarnemingsgetal (Q_4) zijn ook kwartielen. De kwartielen verdelen een serie waarnemingsgetallen in vier groepen die elk bestaan uit (ongeveer) een kwart van de waarnemingsgetallen. De vijf kwartielen worden samen de *vijfgetallensamenvatting* genoemd.

De vijfgetallensamenvatting

- kleinste getal (Q_0)
- eerste kwartiel (Q_1)
- mediaan (Q_2)
- derde kwartiel (Q_3)
- grootste getal (Q_4)

V5 Bereken de vijfgetallensamenvatting van de volgende getallen.

a 26 54 32 70 62 67 38 51 62 58

b 8,3 1,7 2,6 1,9 3,2 7,9 6,3

O43 Hieronder zie je van drie leerlingen de proefwerkcijfers voor Engels.



PROEFWERKCIJFERS ENGELS

leerling	cijfers							gemiddelde	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Aafke	6,1	6,5	6,7	7,0	7,1	7,2	7,7	6,9	6,1	6,5	7,0	7,2	7,7
Ben	4,5	4,8	5,1	7,0	8,6	8,8	9,5	6,9	4,5	4,8	7,0	8,8	9,5
Chris	4,5	6,3	6,5	7,0	7,1	7,4	9,5	6,9	4,5	6,3	7,0	7,4	9,5

- Waarom geven het gemiddelde en de mediaan geen goede indruk van het verschil in cijfers van deze leerlingen?
- Bij wie liggen de cijfers het dichtst bij de mediaan?
- Bij wie liggen de cijfers het verst van de mediaan?

Theorie B Spreiding en boxplot

In opgave 43 heb je gezien dat series waarnemingsgetallen onderling flink kunnen verschillen, zelfs als het gemiddelde en de mediaan gelijk zijn. De cijfers van Aafke verschillen onderling maar weinig. We zeggen dat de **spreiding** bij de cijfers van Aafke klein is.

Bij Ben en Chris is de spreiding groter dan bij Aafke. Dit wordt duidelijk door de **spreidingsbreedte** te berekenen. De spreidingsbreedte is het verschil tussen het grootste en het kleinste getal.

$$\text{spreidingsbreedte} = \text{grootste getal } (Q_4) - \text{kleinste getal } (Q_0)$$

De spreidingsbreedte bij Aafke is $7,7 - 6,1 = 1,6$.

Bij Ben en Chris is dat $9,5 - 4,5 = 5,0$.

Ook bij Ben en Chris is de spreiding anders. Door het berekenen van de **interkwartielafstand** (ook wel kwartielafstand) wordt dit duidelijk. De interkwartielafstand is het verschil tussen het derde en het eerste kwartiel.

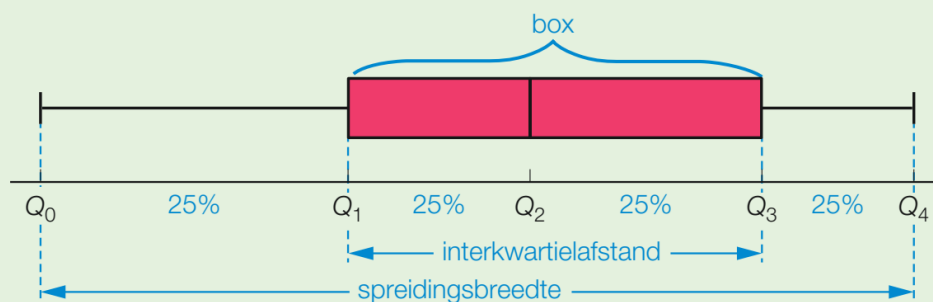
$$\text{interkwartielafstand} = \text{derde kwartiel } (Q_3) - \text{eerste kwartiel } (Q_1)$$

Bij Aafke is de interkwartielafstand $7,2 - 6,5 = 0,7$, bij Ben is dat $8,8 - 4,8 = 4,0$ en bij Chris is de interkwartielafstand $7,4 - 6,3 = 1,1$.

De spreidingsbreedte en de interkwartielafstand zijn voorbeelden van **spreidingsmaten**.

Een spreidingsmaat drukt de spreiding van de data uit in een getal.

De kwartielen kunnen visueel weergegeven worden in een **boxplot**. Zie hieronder.

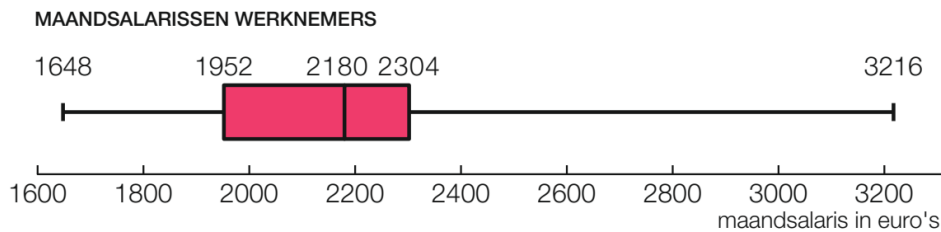


Een boxplot begint bij het kleinste waarnemingsgetal en eindigt bij het grootste waarnemingsgetal. De breedte van een boxplot komt dus overeen met de spreidingsbreedte. De **box** van een boxplot is het middelste gedeelte tussen het eerste en het derde kwartiel. De breedte van de box komt dus overeen met de interkwartielafstand. Een boxplot bestaat uit vier delen, die elk (ongeveer) 25% van de waarnemingsgetallen bevatten.

44



Van de 250 werknemers van een ICT-bedrijf is het maandsalaris in een boxplot verwerkt. Zie de figuur hieronder.

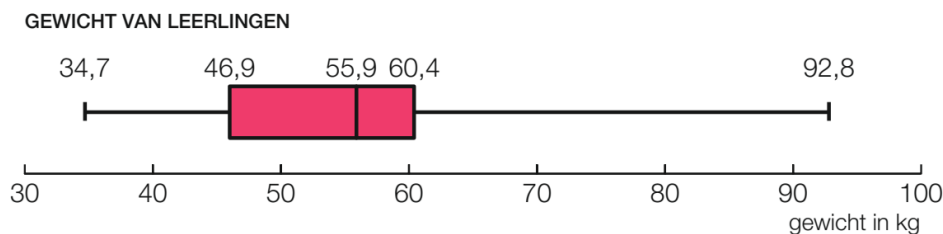


- Bereken de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.
- Hoeveel werknemers hebben een maandsalaris tussen 1952 en 2304 euro?
- Wat weet je van de maandsalarissen van de 25% werknemers met de hoogste maandsalarissen?

45



Van een grote scholengemeenschap zijn de gewichten van alle 2184 leerlingen genoteerd. Zie de boxplot hieronder.



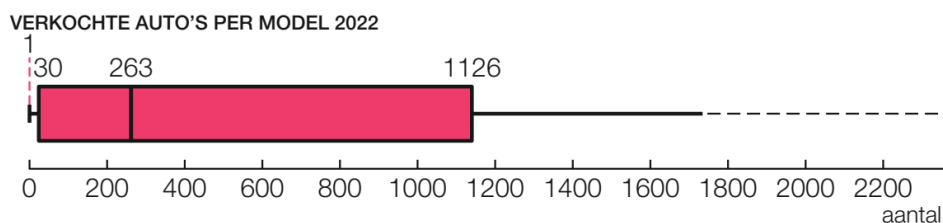
Een leerling trekt uit bovenstaande gegevens de volgende conclusies. Geef bij elke conclusie aan of deze juist is of onjuist. Licht toe.

- Er zijn meer leerlingen die een gewicht hebben tussen 60,4 en 92,8 kg dan tussen 55,9 en 60,4 kg.
- Er zijn meer dan 550 leerlingen die lichter zijn dan 46,9 kg.
- Er vallen minder leerlingen binnen dan buiten de box.
- Meer dan driekwart van de leerlingen is lichter dan het gemiddelde van het kleinste en grootste gewicht.

A46



Met 9669 auto's was de Peugeot 208 in het jaar 2022 het meest verkochte automodel in Nederland. In dat jaar werden van 345 verschillende automodellen auto's verkocht. Zie de boxplot hieronder.



- Van hoeveel modellen werden er meer dan 1126 stuks verkocht?
- Bereken de spreidingsbreedte en de kwartielafstand.
- Wat weet je van het aantal verkochte auto's per model van de 25% minst verkochte modellen?
- Waarom geeft bij deze data de mediaan een beter beeld van het centrum dan het gemiddelde?

Theorie C Boxplot bij een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon

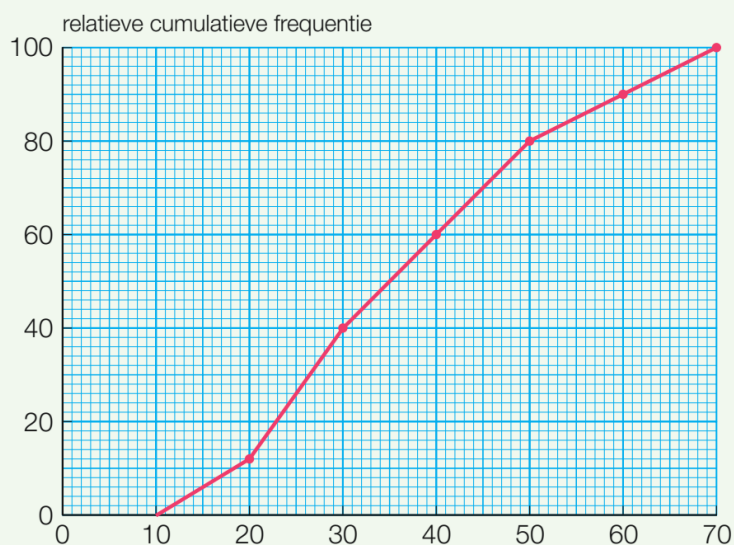
Bij het maken van een klassenindeling gaan meetwaarden verloren. Maak je op basis van een klassenindeling een boxplot, dan gaan er weer gegevens verloren. Toch kan dat nuttig zijn, bijvoorbeeld om een beter beeld te krijgen van de spreiding. In het voorbeeld zie je hoe je een boxplot maakt bij een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon.

Voorbeeld

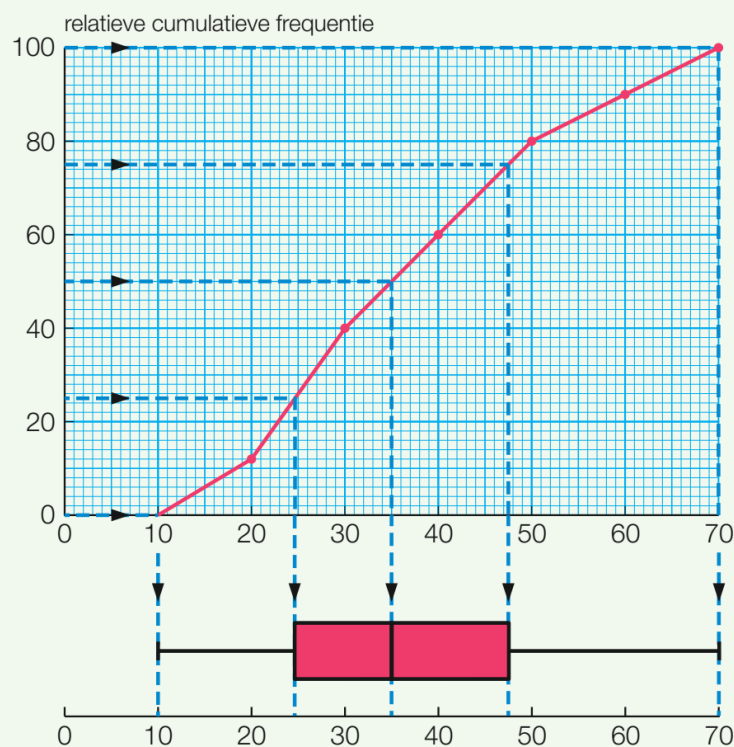
Zie de relatieve cumulatieve frequentiepolygoon hiernaast, waarbij de eerste klasse $[10, 20)$ is. Teken bij de figuur de boxplot.

Aanpak

Bepaal de vijf getallen die voor de boxplot nodig zijn, door te kijken welke waarden bij de cumulatieve percentages 0, 25, 50, 75 en 100 horen.



Uitwerking



Laat zien hoe je te werk gaat bij het bepalen van de waarden uit een diagram. Hiernaast is dat gedaan met stippellijnen.

R47 In de boxplot van het voorbeeld is de mediaan bij 35 getekend.



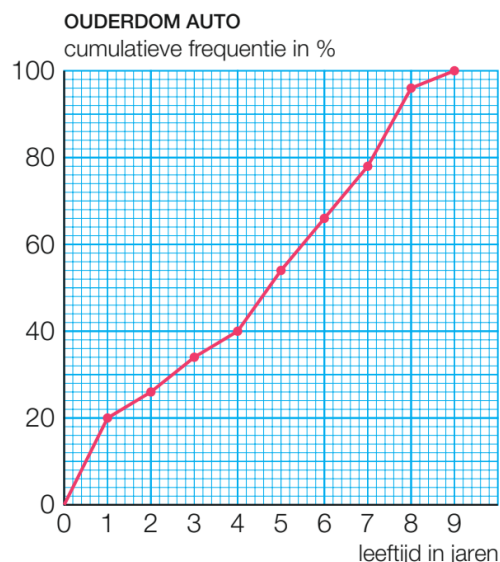
Zou het kunnen dat de mediaan van de oorspronkelijke data 38 is?

48



WERKBLAD Tijdens een autoshow wordt een groot aantal tweedehands auto's aangeboden. De figuur hiernaast geeft informatie over de ouderdom van de aangeboden auto's, waarbij de eerste klasse $[0, 1)$ is.

- Teken bij de figuur de boxplot.
- Onderzoek of een kwart van de auto's in de autoshow ouder dan 6 jaar en 2 maanden kan zijn.



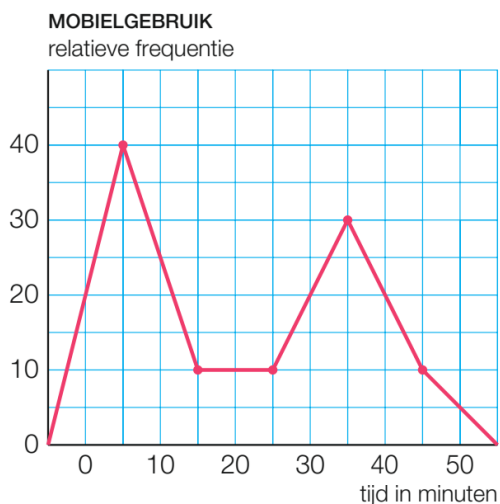
49



Op een dag is van een aantal leerlingen bijgehouden hoeveel minuten ze tijdens de pauzes hun mobiel gebruikten.

De resultaten zijn verwerkt in de relatieve frequentiepolygoon in de figuur hiernaast, waarbij de eerste klasse $[0, 10)$ is.

- Teken bij de figuur de boxplot.
- Welke interkwartielafstand volgt uit de boxplot?
- Onderzoek of de werkelijke interkwartielafstand 38 minuten kan zijn.



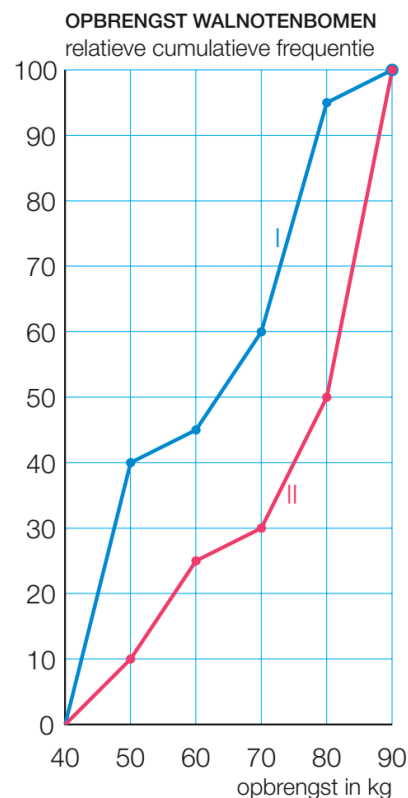
A50



WERKBLAD Pietro Pallina bezit twee stukken land met walnotenbomen. Op perceel I staan 200 bomen, op perceel II staan 160 bomen.

De opbrengst per boom in kg is verwerkt in de figuur hiernaast, waarbij de eerste klasse $[40, 50)$ is.

- Bereken het totale aantal bomen met een opbrengst van minstens 70 kg.
- Hoeveel procent van de bomen heeft een opbrengst van minder dan 60 kg?
- Teken bij de figuur de boxplots.
- Op een van de percelen was de gemiddelde opbrengst per boom het grootst. Bij welk perceel is dat? Licht toe.
- Zou het kunnen dat de medianen bij de oorspronkelijke data voor beide percelen gelijk zijn?



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan werken met (relatieve) cumulatieve frequentiepolygonen.
- ☐ Ik kan werken met de spreidingsmaten spreidingsbreedte en interkwartielafstand.
- ☐ Ik kan werken met gegevens in een boxplot.
- ☐ Ik kan een boxplot tekenen bij een (relatieve) cumulatieve frequentiepolygoon.

► OPGAVE C7abc
THEORIE A

► OPGAVE C8a
THEORIE B

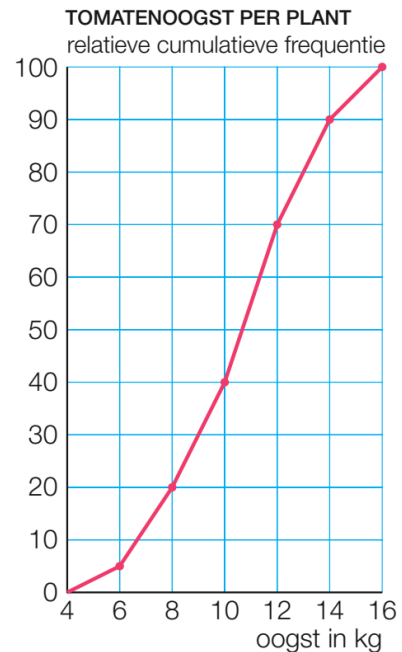
► OPGAVE C8
THEORIE B

► OPGAVE C7d
THEORIE C

C7

► **WERKBLAD** Een tomatenkweker heeft van elk van zijn 280 tomatenplanten de opbrengst in kg bijgehouden. De gegevens zijn verwerkt in de figuur hiernaast. De eerste klasse is $[4, 6)$ kg.

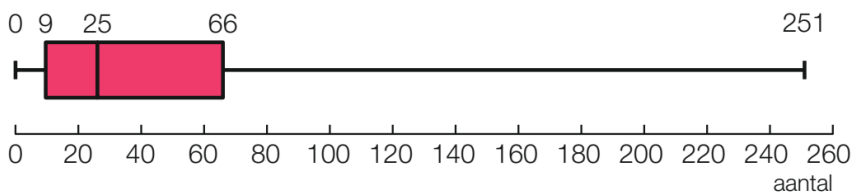
- a Hoeveel procent van de planten brachten minstens 10 kg tomaten op?
- b Hoeveel planten brachten minstens 8 maar minder dan 12 kg tomaten op?
- c Geef de modale klasse.
- d Teken bij de figuur de boxplot.



C8

Er wordt jaarlijks bijgehouden hoeveel zittenblijvers er op elke schoolvestiging in Nederland zijn. De gegevens van 1304 vestigingen in 2022 zijn in de onderstaande boxplot verwerkt.

ZITTENBLIJVERS PER VESTIGING



- a Bereken de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.
- b Hoeveel vestigingen hadden meer dan 25 zittenblijvers?
- c Waarom geeft bij deze data de mediaan een beter beeld van het centrum dan het gemiddelde?
- d Verbeter de volgende bewering. Er zijn meer vestigingen met meer dan 66 zittenblijvers dan vestigingen met minder dan 9 zittenblijvers.

Antwoorden

- C7 a 60% b 140 planten c $[10, 12)$ d *
- C8 a 251 en 57 zittenblijvers b 652 c *
- d Er zijn ongeveer evenveel vestigingen met meer dan 66 zittenblijvers als vestigingen met minder dan 9 zittenblijvers.

2.5 Statistische verdelingen

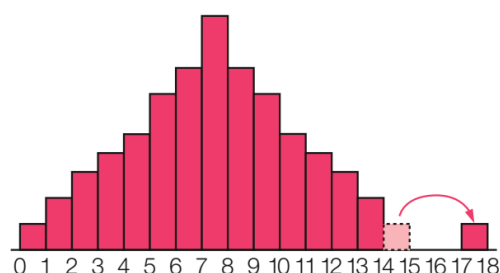
Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met de volgende standaardverdelingen: symmetrisch, linksscheef, rechtsscheef, meertoppig en uniform.
- Je kunt een (cumulatieve) verdelingskromme schetsen.
- Je kunt werken met de standaardafwijking.
- Je kunt de vuistregels bij de normale verdeling toepassen.

051



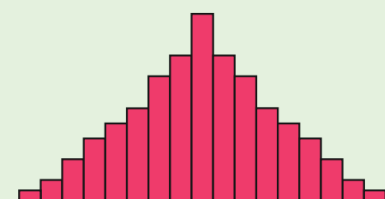
In de figuur hiernaast zie je een histogram waarbij het laatste staafje naar rechts wordt verplaatst. Welk effect heeft deze verandering op het gemiddelde en op de mediaan? Kies uit: neemt toe, blijft gelijk of neemt af. Licht je antwoorden toe.



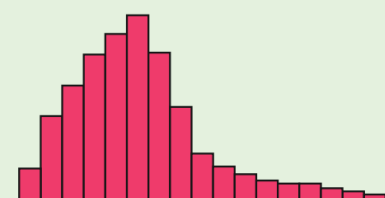
Theorie A Standaardverdelingen

In een histogram is de verdeling van de data goed te zien. We onderscheiden een aantal **standaardverdelingen**.

Bij een **symmetrische verdeling** is de verdeling van de data links en rechts van het midden gespiegeld. Het gemiddelde en de mediaan liggen in dezelfde klasse. Als de symmetrische verdeling één top heeft, liggen het gemiddelde en de mediaan in de modale klasse.

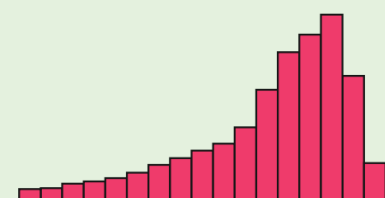


Bij een **scheve verdeling** is de data aan één kant meer verspreid. Dit deel heet ook wel de **staart** van de verdeling. Bij een **rechts-scheve verdeling** ligt de staart rechts en bij een **links-scheve verdeling** links.

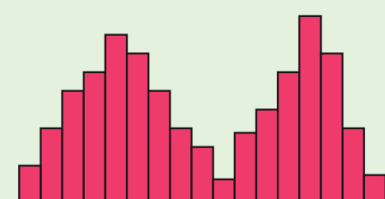


In het algemeen ligt het gemiddelde meer richting de staart van de verdeling dan de mediaan.

De mediaan geeft hierdoor een beter beeld van het centrum van de verdeling dan het gemiddelde.



Bij een **meertoppige verdeling** zijn meerdere toppen binnen de data te onderscheiden. De spreiding is relatief groot.

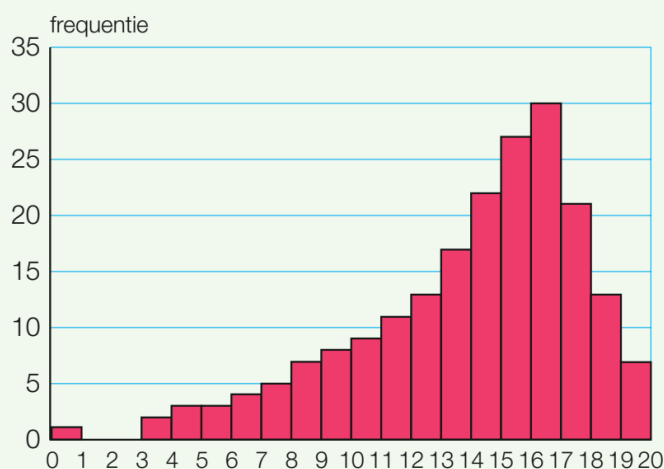
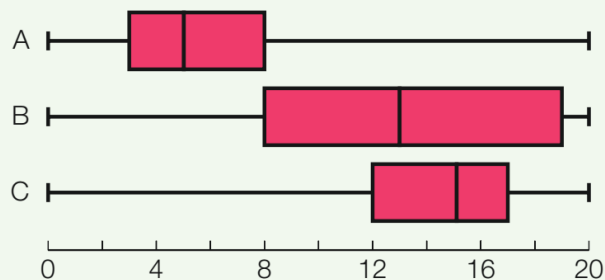


Bij een **uniforme verdeling** heeft elke klasse (vrijwel) dezelfde frequentie.



Voorbeeld

Zie het histogram hieronder. Eén van de boxplots hoort bij dit histogram. Onderzoek welke boxplot dat is.



Uitwerking

Boxplot A hoort niet bij het histogram, omdat in het histogram tussen 8 en 20 meer dan 25% van de data ligt.

Boxplot B hoort niet bij het histogram, omdat in het histogram tussen 19 en 20 minder dan 25% van de data ligt.

Dus boxplot C hoort bij het histogram.

52
□ ⊗ *

Van enkele sportclubs is de verdeling van de leeftijden van de leden onderzocht. Zie de klassenindeling.

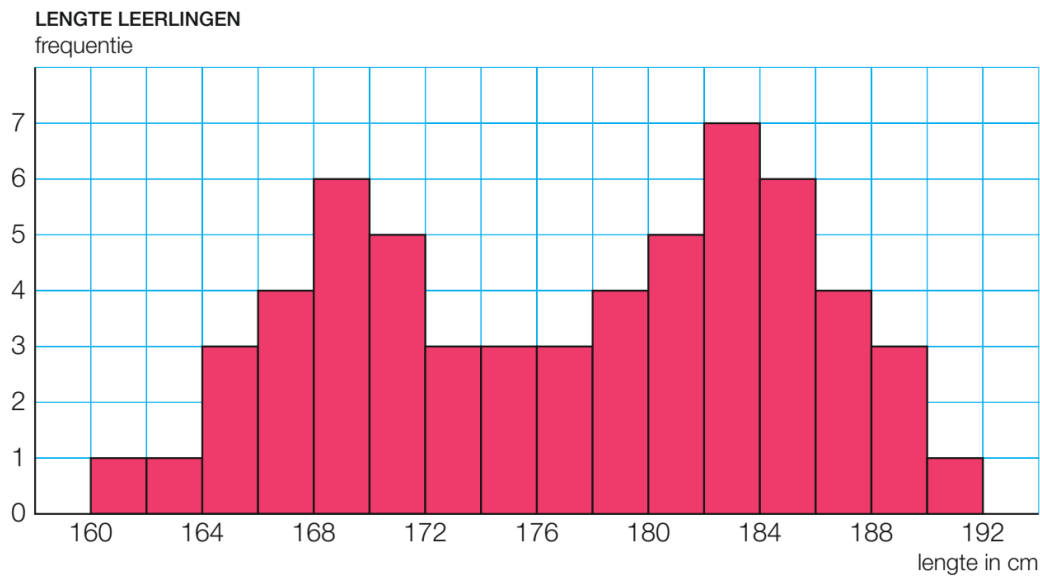
Geef bij elke club aan welke standaardverdeling er het best bij past.

LEEFTIJDVERDELING LEDEN SPORTCLUBS

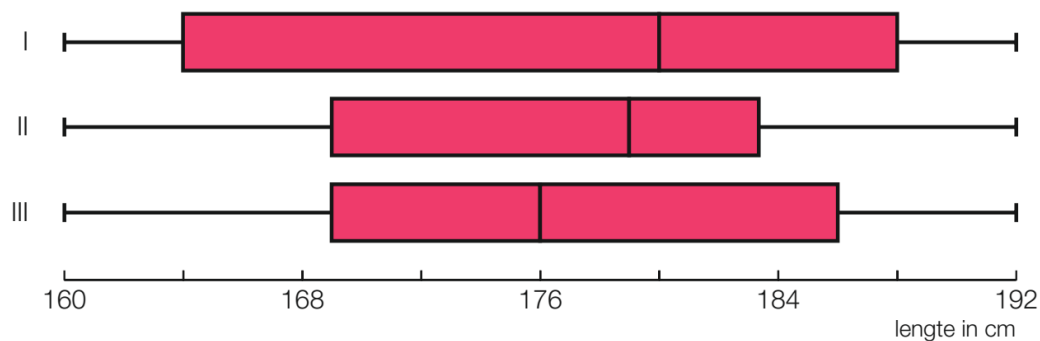
leeftijd	club A	club B	club C	club D
[0, 10)	24	10	39	1
[10, 20)	47	11	72	12
[20, 30)	31	11	43	26
[30, 40)	10	10	25	46
[40, 50)	4	11	52	24
[50, 60)	2	10	61	10
[60, 70)	1	11	41	2



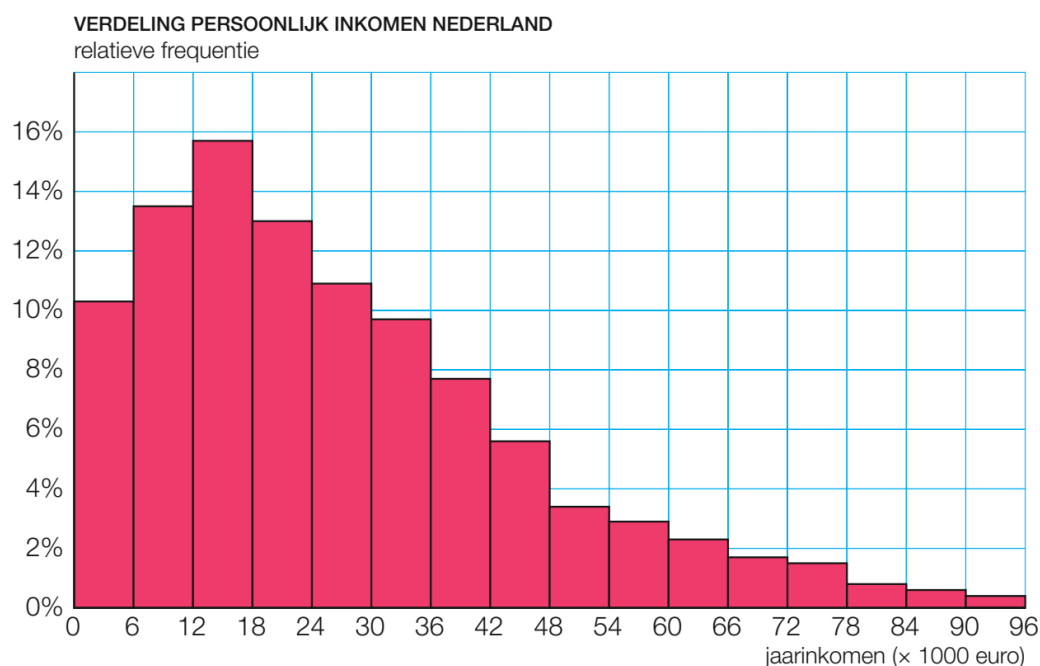
Zie de figuur hieronder met de verdeling van de lengten van 59 leerlingen. De eerste klasse is $[160, 162)$.



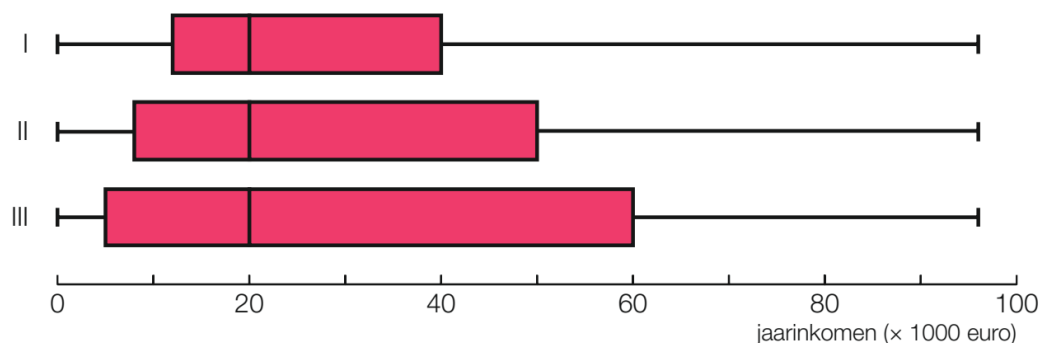
- a** Er zijn twee toppen in het histogram.
Wat is een mogelijke verklaring hiervoor?
- b** Geef de modale klasse.
- c** In de figuur hieronder zie je drie boxplots.
Welke van de drie past het beste bij de bovenstaande figuur? Licht toe.



In de figuur hieronder zie je een gedeelte van de verdeling van het persoonlijk inkomen in Nederland.



- a** In de krant staat dat het doorsnee inkomen ongeveer 26 700 euro is. Onderzoek met behulp van de figuur of dit de mediaan of het gemiddelde is.
- b** Een journalist wil met het gemiddelde of de mediaan een beeld geven van wat in Nederland een gangbaar inkomen is. Welke van de twee centrummaten geeft een beter beeld? Licht toe.
- c** Als alle staven in het histogram even hoog zouden zijn, dan is er sprake van een uniforme verdeling. Heeft iedereen dan hetzelfde inkomen?
- d** In de figuur hieronder zie je drie boxplots. Welke van de drie past het best bij het histogram? Licht toe.

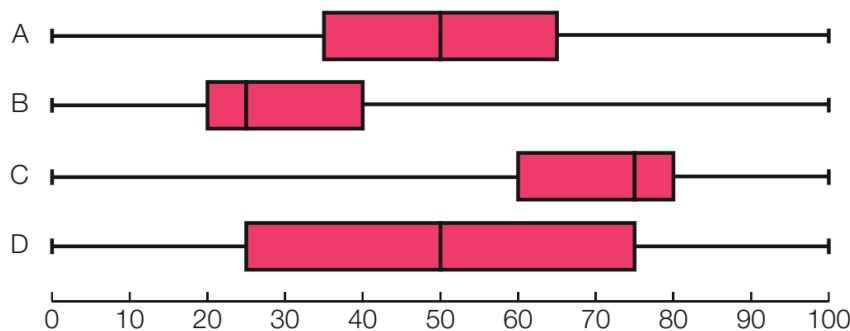


A55 In de figuur hieronder zijn vier boxplots getekend. Deze horen bij de verdelingen I, II, III en IV.



Geef van elke verdeling aan welke boxplot erbij hoort.

- I De verdeling is uniform.
- II De verdeling is symmetrisch met één top.
- III De verdeling is rechtsscheef.
- IV De verdeling is linksscheef.

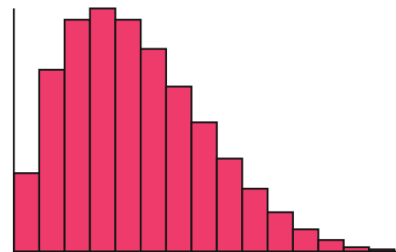


O56 Zie het histogram.



Welke uitspraak is juist?

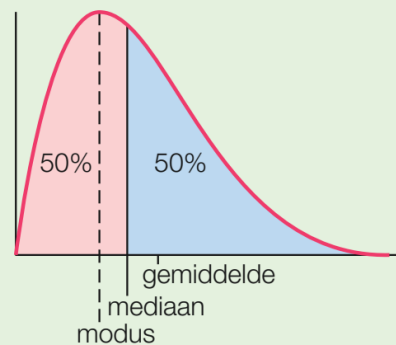
- A De mediaan ligt in de modale klasse.
- B De mediaan ligt links van de modale klasse.
- C De mediaan ligt rechts van de modale klasse.



Theorie B Verdelingskrommen

Het histogram in opgave 56 geeft een goed beeld van de frequentieverdeling. Je kunt ook een globale grafiek van de verdeling schetsen, zie de figuur hiernaast. Zo'n grafiek heet een **verdelingskromme**.

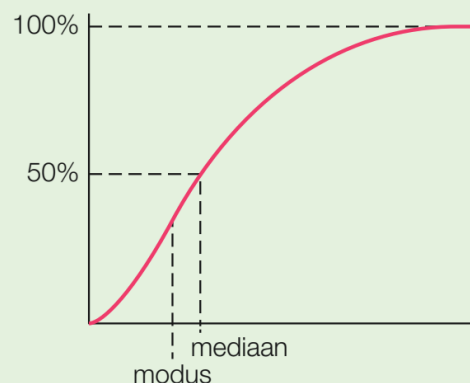
Bij een verdelingskromme ligt de modus bij de top. De mediaan verdeelt de oppervlakte onder de kromme in twee gebieden met gelijke oppervlakte. Bij een rechtsscheve verdeling is het gemiddelde groter dan de mediaan. Bij een symmetrische verdeling zijn het gemiddelde en de mediaan gelijk.



Hiernaast is ook de **relatieve cumulatieve verdelingskromme** getekend.

Is een verdelingskromme gegeven, dan kun je daarbij een schets maken van de cumulatieve verdelingskromme en andersom.

De cumulatieve verdelingskromme is het steilst bij de modus.



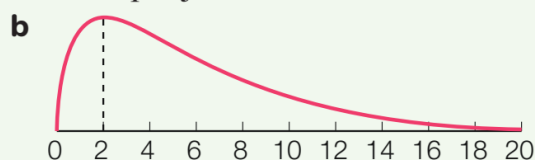
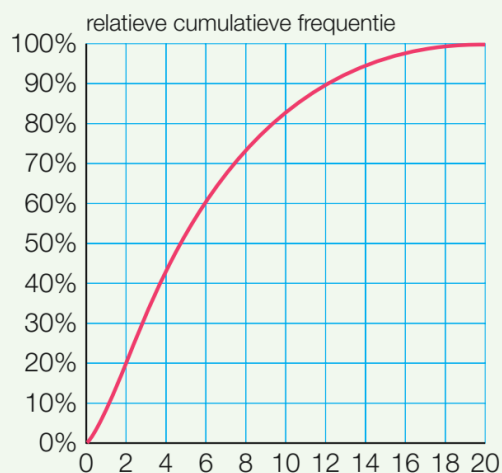
Voorbeeld

Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme in de figuur hiernaast.

- Licht toe dat je te maken hebt met een rechts-scheve verdeling met een top bij 2.
- Schets de bijbehorende verdelingskromme. Neem de horizontale as van 0 tot 20 met stapgrootte 2.

Uitwerking

- In het begin is de kromme erg steil, dus zijn daar veel waarnemingsgetallen. Op het eind is de kromme minder steil, dus daar zijn weinig waarnemingsgetallen. Dus het is een rechts-scheve verdeling. De kromme is het steilst bij 2, dus de verdelingskromme heeft een top bij 2.



57 Zie het voorbeeld.

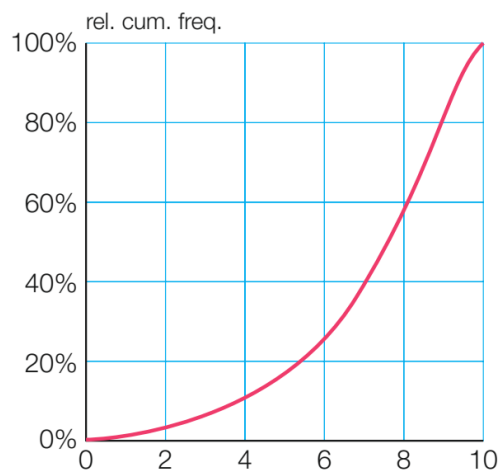
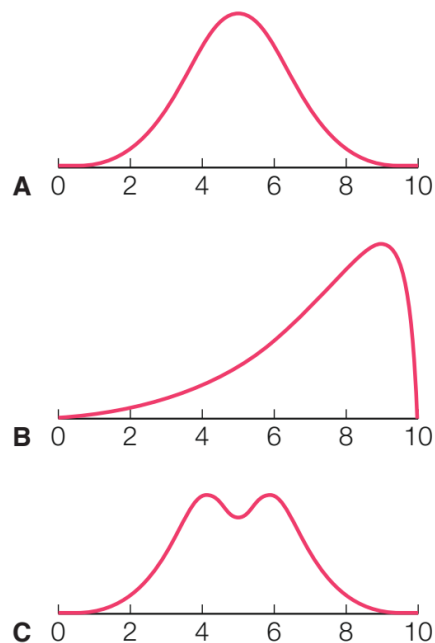


- Geef een schatting van de mediaan met behulp van de relatieve cumulatieve verdelingskromme. Hoe ligt hier het gemiddelde ten opzichte van de mediaan?
- Licht toe dat bij het steilste stuk van de relatieve cumulatieve verdelingskromme de modus hoort.

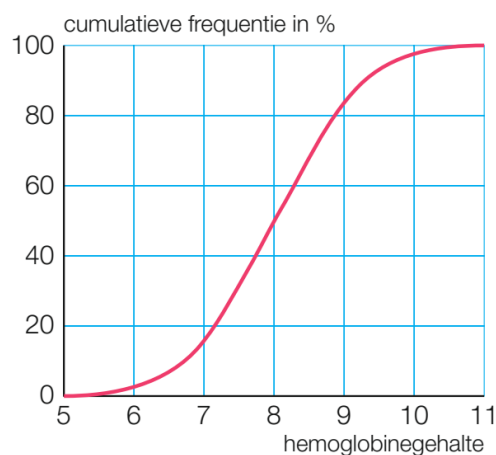
58 Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme in de figuur hieronder.



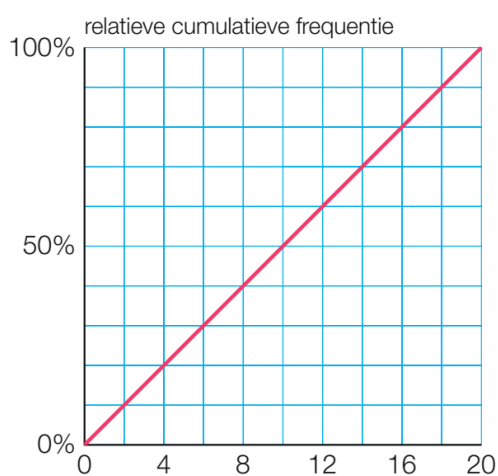
Welke van de verdelingskrommen hoort hierbij? Licht toe.



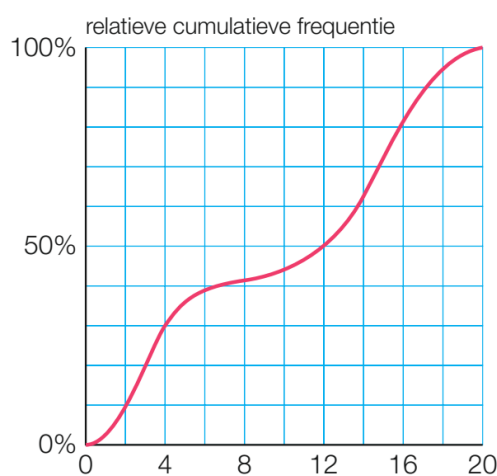
- 59** Bij een medisch onderzoek is het hemoglobinegehalte van een grote groep Nederlandse mannen gemeten. Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme hiernaast.
- a** Met welke standaardverdeling heb je te maken? Licht toe.
 - b** Schets de bijbehorende verdelingskromme. Neem de horizontale as van 5 tot 11 met stapgrootte 1.
 - c** Schat het gemiddelde hemoglobinegehalte van de onderzochte groep.



- 60** Zie de relatieve cumulatieve verdelingskrommen hieronder. Met welke standaardverdelingen heb je te maken? Licht toe.



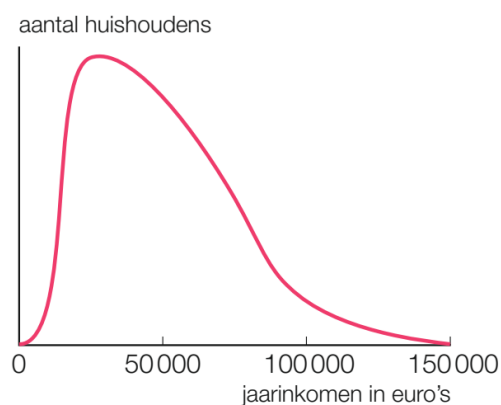
a



b

- 61** De verdelingskromme in de figuur geeft informatie over de verdeling van de jaarinkomens van de huishoudens van een groot aantal gemeentes.

- a** Zet op volgorde van klein naar groot: mediaan, modus en gemiddelde. Licht toe.
- b** Schets de relatieve cumulatieve verdelingskromme. Neem de horizontale as van 0 tot 150 000 met stapgrootte 50 000.



Theorie C De standaardafwijking

Bij het berekenen van de centrummaat gemiddelde gebruik je van elk waarnemingsgetal de waarde. Een spreidingsmaat die dit ook doet is de **standaardafwijking** (soms ook **standaarddeviatie** genoemd).

Verander je een waarnemingsgetal, dan zal dit dus effect hebben op het gemiddelde en de standaardafwijking. Bij de centrummaat gemiddelde wordt vaak de standaardafwijking als spreidingsmaat gebruikt.

Je hoeft de standaardafwijking niet met de hand te kunnen uitrekenen. Wil je toch weten hoe dat gaat? Zie het informatief op bladzijde 98. Het is wel belangrijk dat je weet hoe de standaardafwijking ongeveer werkt, zodat je deze spreidingsmaat verstandig kunt gebruiken.

- De standaardafwijking is een spreidingsmaat, dus een grotere standaardafwijking gaat samen met méér spreiding.
- Bij symmetrische verdelingen met één top geeft de standaardafwijking een beeld van hoe ver metingen gemiddeld afwijken van het gemiddelde.
- Grote afwijkingen (bijvoorbeeld uitschieters) hebben een relatief groot effect op de standaardafwijking.

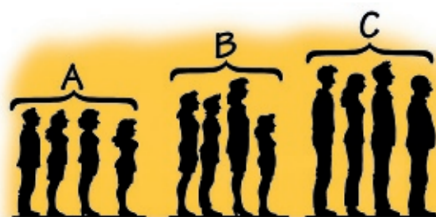
VOOR- EN NADELEN BIJ DRIE SPREIDINGSMATEN

	voordeel	nadeel
standaardafwijking	gebruikt de waarden van alle waarnemingsgetallen	gevoelig voor uitschieters
interkwartielafstand	ongevoelig voor uitschieters	gebruikt alleen Q_1 en Q_3
spreidingsbreedte	eenvoudig te bepalen	gebruikt alleen Q_0 en Q_4 extreem gevoelig voor uitschieters

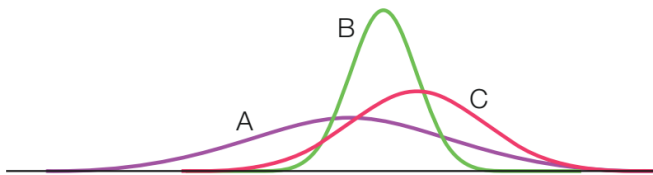
62



- a Bij welke van de groepen hiernaast is de standaardafwijking van de lengte het grootst? Licht toe.
- b Roel wil met een spreidingsmaat demonstreren hoe stabiel zijn cijfers zijn. Er is echter één uitzonderlijk slecht cijfer. Welke spreidingsmaat raad je aan? Licht toe.

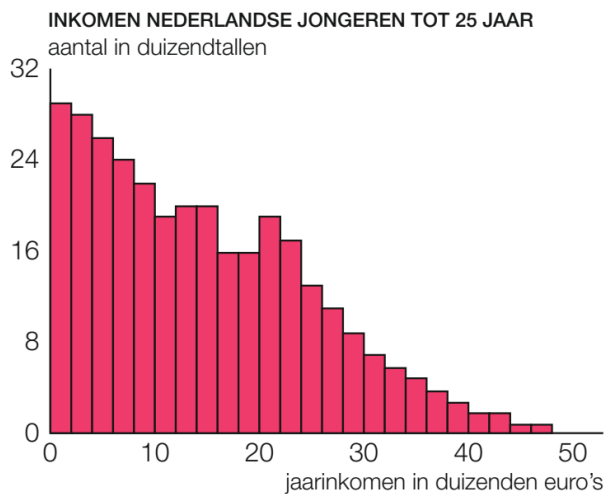


63 In de figuur staan drie symmetrische verdelingen.



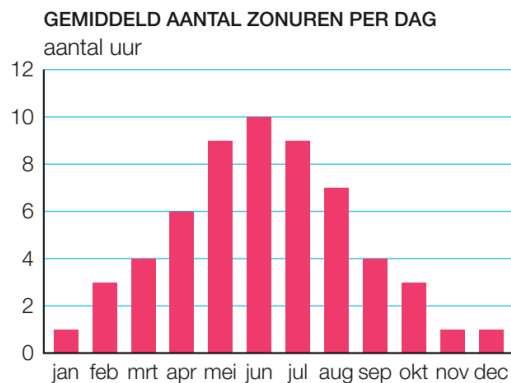
De bijbehorende standaardafwijkingen zijn gelijk aan 0,5; 1 en 1,5.
Geef bij elke verdeling de standaardafwijking.

A64 In het histogram zie je de inkomensverdeling van Nederlandse jongeren tot 25 jaar.

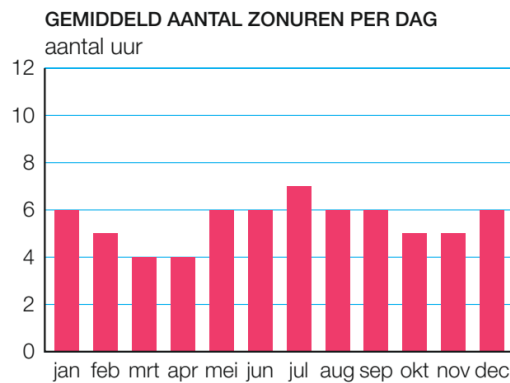


Welke centrum- en spreidingsmaat kun je gebruiken om aan te geven dat een grote groep jongeren een laag inkomen heeft, maar dat er onderling wel grote verschillen zijn? Licht toe.

A65 In onderstaande figuren kun je voor iedere maand het gemiddeld aantal zonuren per dag in de steden Helsinki en Quito aflezen. De standaardafwijking bij Helsinki is groter dan bij Quito. Welke van de twee figuren hoort bij Quito? Licht toe.

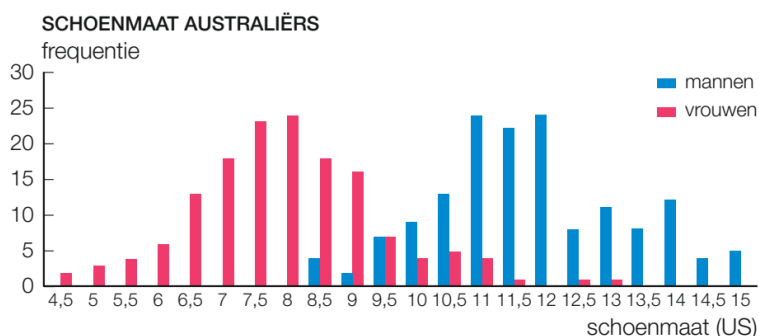


A



B

Bij een onderzoek is de schoenmaat van mannen en vrouwen uit Australië met een voetafwijking onderzocht. Zie de frequentieverdelingen in de figuur.



In de figuur heb je te maken met een kwantitatieve en een kwalitatieve variabele.

- Benoem de kwantitatieve variabele en licht toe of deze discreet of continu is.
- Benoem de kwalitatieve variabele en licht toe wat het meetniveau is.
- Op welke populatie is dit onderzoek gericht?
- Vul de tabel in. Gebruik de getallen 1,5 1,5 2,4 8,0 9,9 11,8.

	gemiddelde	standaardafwijking
mannen		
vrouwen		
totaal		

Informatief Standaardafwijking met de hand berekenen

De standaardafwijking met de hand berekenen is een hele klus en daarom wordt dat bijna altijd elektronisch gedaan. Het kan natuurlijk wel inzicht geven als je een keer ziet hoe je de standaardafwijking met de hand berekent. Hieronder zie je het stappenplan voor het berekenen van de standaardafwijking bij een aantal waarnemingsgetallen.

- Bereken het gemiddelde van de waarnemingsgetallen.
- Bereken voor elk waarnemingsgetal het verschil met het gemiddelde.
- Tel de kwadraten van al deze verschillen bij elkaar op.
- Deel de uitkomst door het aantal waarnemingsgetallen.
- Neem de wortel van de uitkomst van stap 4. Dit getal is de standaardafwijking van de waarnemingsgetallen.

E67 Lees het bovenstaande informatief.

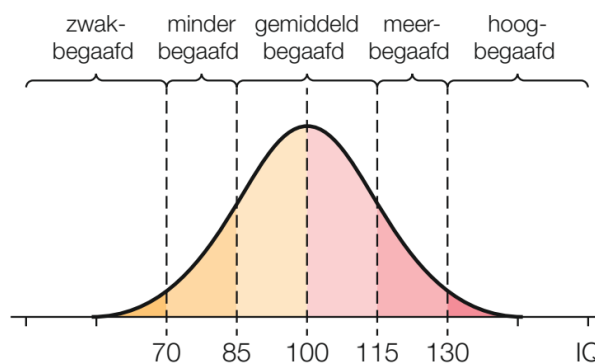
In de figuur zie je de rijen A, B en C.

- Bereken de standaardafwijking van rij A.
- Hoe kun je, zonder de standaardafwijking te berekenen, zien dat de standaardafwijkingen van rij A en rij B gelijk zijn?
- Geef de standaardafwijking van rij C.

rij A:	0, 2, 3, 4, 6
rij B:	10, 12, 13, 14, 16
rij C:	3, 3, 3, 3, 3, 3

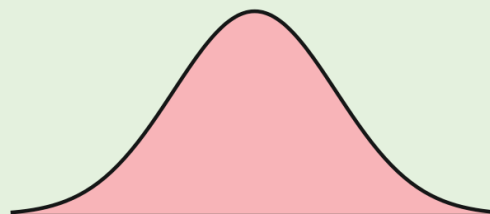
Het intelligentiequotiënt (IQ) is een maat voor intelligentie. Het IQ heeft een symmetrische verdeling zoals in de figuur hiernaast. Van de 18 miljoen Nederlanders zijn er 12,3 miljoen gemiddeld begaafd en ongeveer 0,45 miljoen zijn hoogbegaafd.

- Welk percentage Nederlanders is gemiddeld begaafd?
- Welk percentage Nederlanders is minder begaafd?
- Hoeveel procent van de Nederlanders heeft een IQ tussen 70 en 130?



Theorie D De normale verdeling

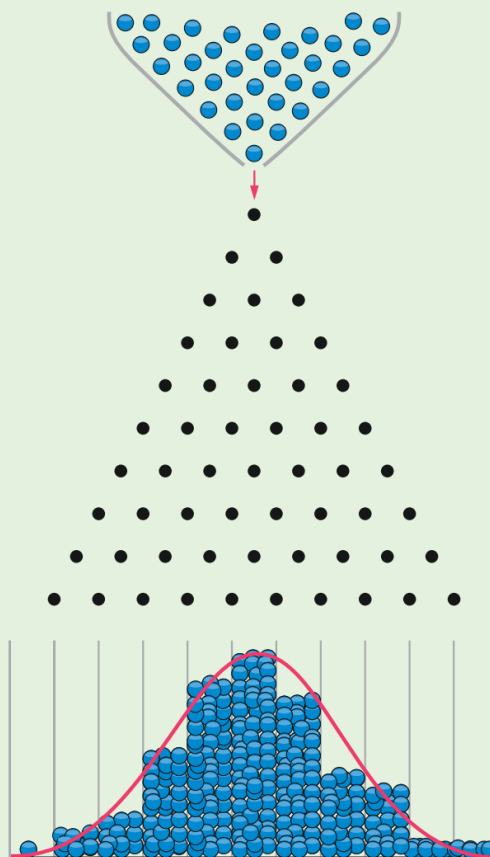
In de figuur hiernaast is de verdelingskromme bij een bijzondere symmetrische verdeling getekend. Deze klokvormige kromme heet de **normaalkromme** en hoort bij de **normale verdeling**.



In veel situaties waarbij afwijkingen van het gemiddelde willekeurig optreden, is het resultaat een normale verdeling. Dit verrassende resultaat kun je demonstreren met het *bord van Galton*, waarbij een groot aantal balletjes op onderliggende pinnetjes valt en steeds willekeurig naar links of rechts stuitert. Elk balletje neemt een onvoorspelbare route, maar het resultaat van alle balletjes samen is toch steeds goed te voorspellen met de normale verdeling.

Normale verdelingen komen veel voor in het dagelijks leven. De normale verdeling past bijvoorbeeld goed bij de verdeling van

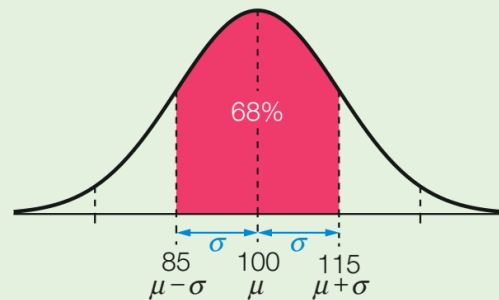
- de lengte van Nederlandse 20-jarige mannen
- het aantal branduren van een bepaald type lamp
- de gewichten van kilopakken koffie.



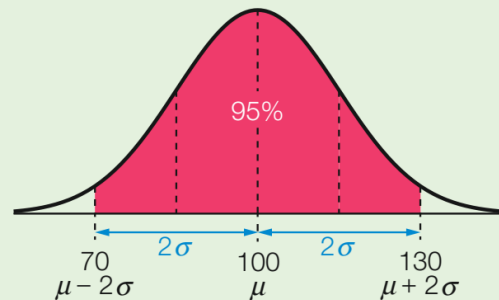
Bij de normale verdeling wordt het gemiddelde aangegeven met de Griekse letter μ . Spreek μ uit als mu. Voor de standaardafwijking gebruiken we de Griekse letter σ . Spreek σ uit als sigma.

gemiddelde μ
standaardafwijking σ

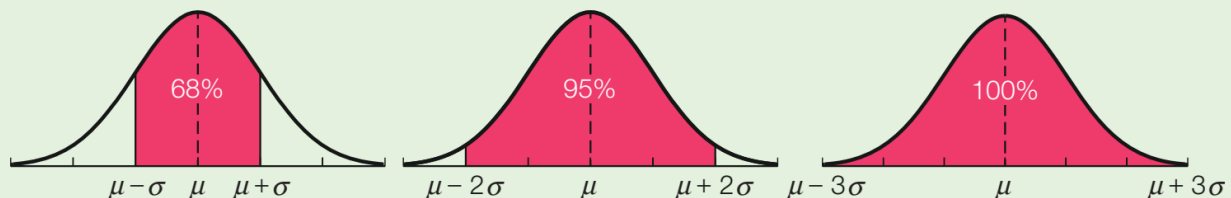
De scores van de IQ test in opgave 68 zijn normaal verdeeld met $\mu = 100$ en $\sigma = 15$. Je hebt in deze opgave berekend dat ongeveer 68% van de scores tussen 85 en 115, dus tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ ligt.



Ook heb je gezien dat 95% van de scores tussen 70 en 130, dus tussen $\mu - 2\sigma$ and $\mu + 2\sigma$ ligt.



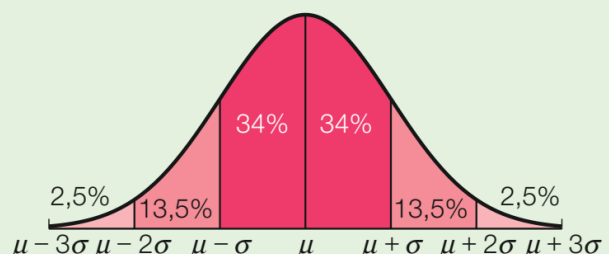
Bij elke normale verdeling ligt ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen minder dan σ van μ af. En ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt minder dan 2σ van μ af. En bijna 100% ligt minder dan 3σ van μ af.



Uit de symmetrie van de normaalkromme volgen de percentages in de verschillende gebieden in de figuur hieronder. Onthoud deze percentages.

Vuistregels bij de normale verdeling

- ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$
- bijna 100% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$



Bij berekeningen met de vuistregels mag je de woorden ongeveer en bijna weglaten.

Voorbeeld

Van 600 baby's is gegeven dat het geboortegewicht normaal verdeeld is. Het gemiddelde $\mu = 3500$ gram en de standaardafwijking $\sigma = 450$ gram.

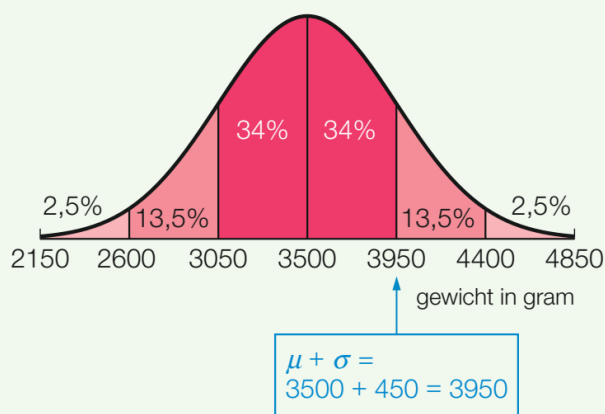
- a Van hoeveel procent van de baby's is het geboortegewicht meer dan 4400 gram?
- b Hoeveel baby's hebben een geboortegewicht tussen 2600 gram en 3950 gram?
- c Van hoeveel baby's wijkt het geboortegewicht meer dan 900 gram van het gemiddelde af?

Aanpak

Schets een normaalkromme en zet getallen bij de horizontale as.

Uitwerking

- a Zie de schets. Dus 2,5% van de baby's.
- b $13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$, dus $0,815 \cdot 600 = 489$ baby's.
- c 900 gram is 2σ , dus van $2,5\% + 2,5\% = 5\%$, dus dat zijn $0,05 \cdot 600 = 30$ baby's.



69

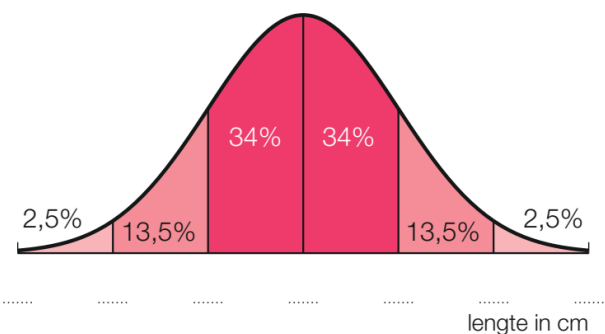


Van een groep volwassen vrouwen is de lengte normaal verdeeld met $\mu = 170$ cm en $\sigma = 5$ cm.

- a Zet in de figuur hiernaast onder de horizontale as de juiste getallen.

Van hoeveel procent van de vrouwen is de lengte

- b tussen 165 en 180 cm
- c minder dan 160 cm
- d meer dan 175 cm
- e tussen 160 en 170 cm?



70



Van 200 konijnen is het gewicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 2,1 kg en een standaardafwijking van 0,3 kg.

- a Hoeveel procent van de konijnen is zwaarder dan 2,7 kg?
- b Hoeveel procent van de konijnen heeft een gewicht tussen 1,5 en 2,4 kg?
- c Bereken het aantal konijnen dat lichter is dan 1,8 kg.
- d Wat weet je van de gewichten van de vijf lichtste konijnen van deze groep?

A71 Van 5000 appels is het gewicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 180 gram en een standaardafwijking van 11 gram.



- a Hoeveel appels wegen tussen 158 en 191 gram?
- b Hoeveel appels zijn lichter dan 191 gram?
- c Wat weet je van de gewichten van de zwaarste 125 appels?
- d Van hoeveel appels wijkt het gewicht meer dan 11 gram van het gemiddelde af?

Appels met een gewicht tussen 140 en 158 gram worden verkocht als kinderappels.

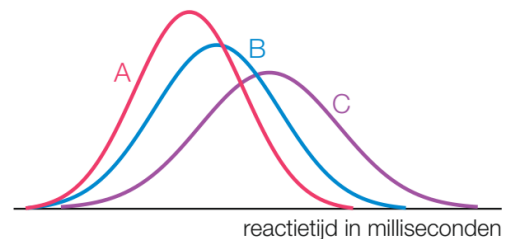
- e Hoeveel appels uit deze partij kunnen worden verkocht als kinderappels?

A72 Bij drie grote groepen mannen wordt van elke man de reactietijd gemeten.



De eerste groep bestaat uit 18-jarigen, de tweede uit 30-jarigen en de derde uit 60-jarigen. Jongere mannen zullen over het algemeen sneller reageren dan oudere mannen.

- a Welke kromme hoort bij de 18-jarigen? En welke bij de 60-jarigen? Licht je antwoorden toe.
- b De groep 18-jarigen heeft een gemiddelde reactietijd van 420 ms. Bijna alle 18-jarigen en 30-jarigen hebben reactietijden vanaf 210 ms, maar de standaardafwijking van de 30-jarigen is 10% groter dan die van de 18-jarigen. Bereken de gemiddelde reactietijd van 30-jarige mannen.



Informatief De normale verdeling

Veel beroemde geleerden hebben zich beziggehouden met de normale verdeling. Omstreeks 1730 gebruikte de Fransman Abraham de Moivre (1667-1754) als eerste de normale verdeling. Hij ontdekte dat vele kleine toevalligheden in de natuur merkwaardig genoeg tot mooie regelmatige verdelingen kunnen leiden. Ook de veelzijdige geleerde Gauss (1777-1855) werd gefascineerd door de normaalkromme en hij slaagde erin de formule op te stellen bij de kromme. Vandaar dat ook de naam Gauss-kromme gebruikt wordt.

De Belg Adolphe Quetelet (1796-1874) ontdekte dat normaalkrommen goed gebruikt kunnen worden om menselijke kenmerken zoals lichaamslengte en voetlengte te beschrijven.



Carl Friedrich Gauss

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan werken met de volgende standaardverdelingen: symmetrisch, linksscheef, rechtsscheef, meertoppig en uniform.
- ☐ Ik kan een (cumulatieve) verdelingskromme schetsen.
- ☐ Ik kan werken met de standaardafwijking.
- ☐ Ik kan de vuistregels bij de normale verdeling toepassen.

► OPGAVE C9ab
THEORIE A

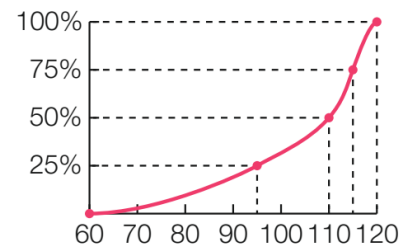
► OPGAVE C9c
THEORIE B

► OPGAVE C10d
THEORIE C

► OPGAVE C10abc
THEORIE D

C9 Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme.

- a** Met welke standaardverdeling heb je hier te maken?
- b** Is het gemiddelde groter of kleiner dan de mediaan? Licht toe.
- c** Schets de bijbehorende verdelingskromme. Neem de horizontale as van 60 tot 120 met stapgrootte 10.



C10 Van een partij van 1600 tennisballen is het gewicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 58,2 gram en een standaardafwijking van 0,6 gram.

- a** Hoeveel procent van de tennisballen is zwaarder dan 57 gram?
- b** Wat weet je van de 256 lichtste tennisballen?

Bij officiële wedstrijden moet een tennisbal tussen 56 en 59,4 gram wegen.

- c** Hoeveel tennisballen uit deze partij voldoen aan dit criterium?
- d** Als de standaardafwijking hoger dan 0,6 zou zijn, zijn er dan meer of minder tennisballen die aan het criterium voldoen? Licht toe.

Antwoorden

C9 a links-scheve verdeling

b kleiner *

c *

C10 a 97,5%

b die zijn lichter dan 57,6 gram

c 1560 tennisballen

d minder *

Kennis- en vaardighedentest

2.1 De onderzoeksvraag

- 1 Welke vier fasen onderscheiden we in de statistische cyclus?
- 2 Om de onderzoeksvraag ‘Presteren middelbare scholieren slechter bij de coopertest na het eten van ongezonde voeding?’ te beantwoorden, worden aselekt 200 leerlingen uit voorexamenklassen onderzocht.
 - a Omschrijf de populatie.
 - b Waarom is deze steekproef niet aselekt?

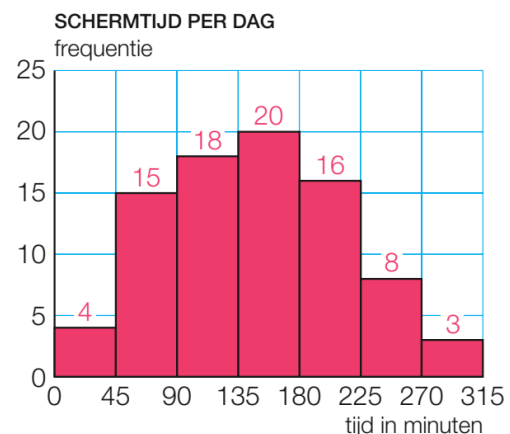
2.2 Data verzamelen

- 3 Hiernaast zie je van een patiënt enkele van de verzamelde gegevens bij een slaaponderzoek. Geef van elke kwalitatieve variabele het meetniveau en bepaal van elke kwantitatieve variabele of deze discreet of continu is.



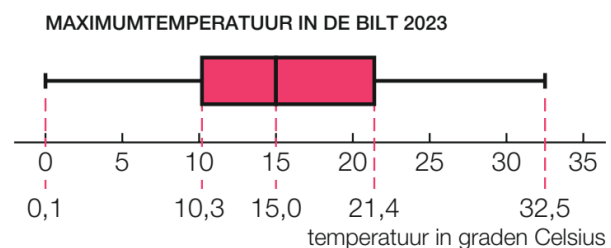
2.3 Data analyseren

- 4 In het histogram zie je informatie over de schermtijd per dag van Renée. De schermtijd is het aantal minuten dat je op je telefoon kijkt. De eerste klasse is $[0, 45)$.
 - a Bereken van hoeveel dagen de schermtijden per dag verwerkt zijn in het histogram.
 - b Onderzoek of de mediaan in de modale klasse ligt.
 - c Bereken op hoeveel procent van de dagen de schermtijd van Renée minder dan 3 uur was.
 - d Kan de gemiddelde schermtijd meer dan 3 uur per dag geweest zijn? Licht toe.



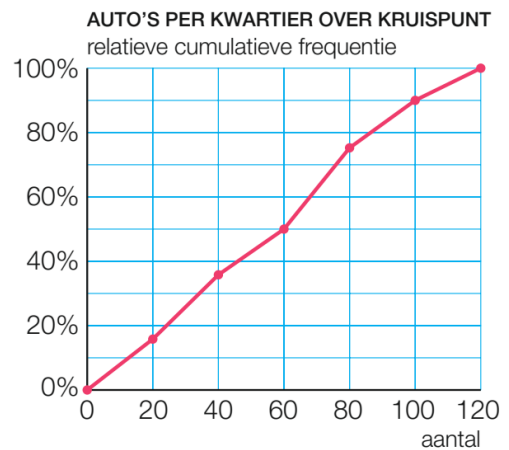
2.4 Kwartielen en spreiding

- 5 In het jaar 2023 is elke dag de maximumtemperatuur in De Bilt genoteerd. Zie de boxplot.
 - a Hoeveel dagen is in 2023 de maximumtemperatuur meer dan $21,4^{\circ}\text{C}$ geweest?
 - b Volgens Lars is de spreidingsbreedte meer dan drie keer zo groot als de interkwartielafstand. Onderzoek of Lars gelijk heeft.



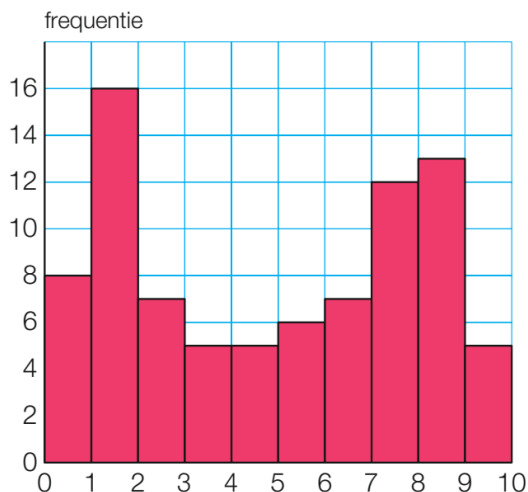
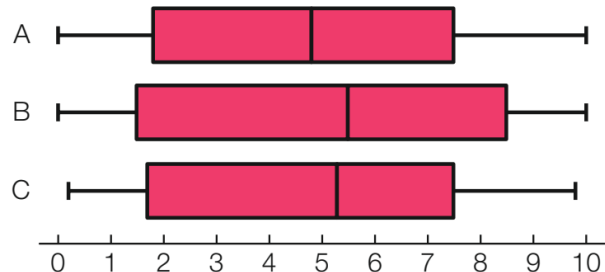
- 6** Op een kruispunt is gedurende 35 uren geteld hoeveel auto's per kwartier het kruispunt passeerden. Zie de figuur hiernaast, waarbij de eerste klasse $[0, 20)$ is.

- Hoeveel kwartieren passeerden er minder dan 40 auto's het kruispunt?
- Bereken de absolute frequentie van de klasse $[80, 100)$.
- Teken bij de figuur de boxplot.
- Jasper beweert dat er tijdens de telling meer dan 9400 auto's het kruispunt passeerden. Kan dat kloppen? Licht toe met een berekening.

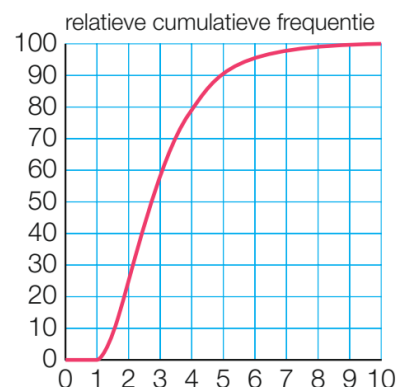


2.5 Statistische verdelingen

- 7** In het histogram zijn 84 waarnemingsgetallen verwerkt. De eerste klasse is $[0, 1)$.
Welke van de drie boxplots past het best bij het histogram? Licht toe.



- 8** Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme.
- Met welke standaardverdeling heb je te maken?
 - Zet op volgorde van klein naar groot: mediaan, modus en gemiddelde. Licht toe.
 - Schets de bijbehorende verdelingskromme. Neem de horizontale as van 0 tot 10 met stapgrootte 1.

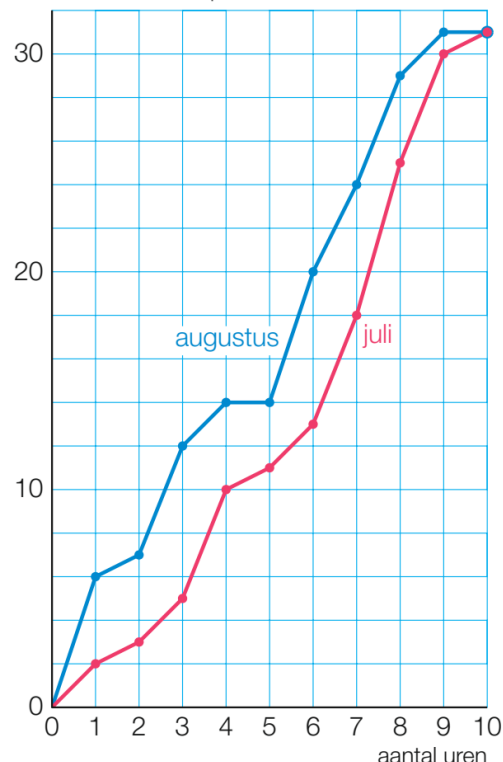


- 9** Van 4000 bananen is gegeven dat het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 138 gram en een standaardafwijking van 19 gram.
- Hoeveel procent van deze bananen heeft een gewicht van meer dan 157 gram?
 - Van hoeveel bananen wijkt het gewicht minder dan 38 gram af van het gemiddelde?
 - Wat weet je van het gewicht van de lichtste 100 bananen?

Gemengde opgaven

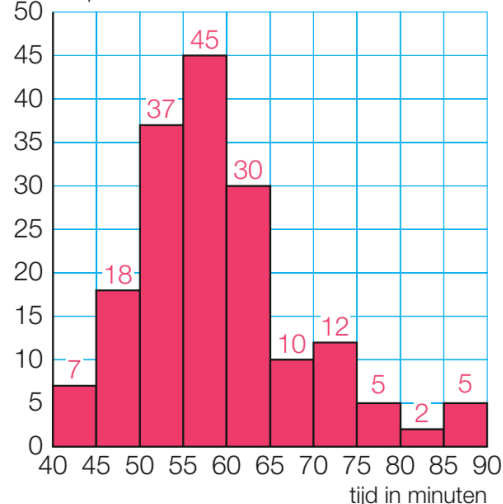
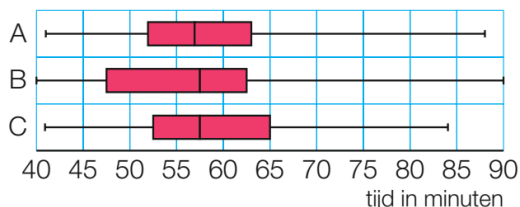
- 1** Gedurende de maanden juli en augustus is het aantal uren zonneshijns per dag in De Bilt bijgehouden. Zie de twee cumulatieve frequentiepolygonen in de figuur, waarbij de eerste klasse $[0, 1)$ is.
- Is de variabele 'aantal uren zonneshijns per dag' discreet of continu? Licht toe.
 - Hoeveel dagen waren er in
 - juli met minder dan 6 uur zon
 - augustus met minstens 6 uur zon
 - juli met minstens 4 uur, maar minder dan 8 uur zon?
 - Welke maand was het zonnigst? Licht toe.
- In juli scheen de zon gemiddeld 5,7 uur per dag.
- Geef een schatting van het totale aantal uren zonneshijns in juli en augustus samen. Kies uit 315 uur, 355 uur en 395 uur. Licht toe.

UREN ZONNESCHIJN PER DAG DE BILT
cumulatieve frequentie



- 2** In 2023 deden er 171 mannen mee aan de 11 kilometer Bedriegertjesloop in Rozendaal. In de figuur hiernaast zijn de gelopen tijden van deze deelnemers in een histogram weergegeven. De eerste klasse is $[40, 45)$.
- Onderzoek of de mediaan in de modale klasse valt.
 - Bereken of de gemiddelde looptijd 62 minuten geweest kan zijn.
 - Hieronder zie je drie boxplots. Welke past het best bij de gelopen tijden? Licht toe.

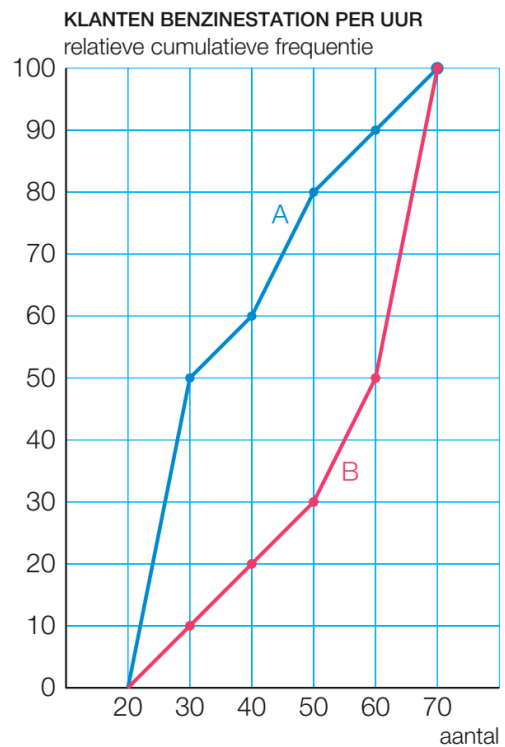
frequentie



- Stel dat de zeven snelste en zeven langzaamste deelnemers niet mee hadden gedaan. Zou de standaardafwijking hierdoor groter worden, kleiner worden of gelijk blijven? Licht toe.

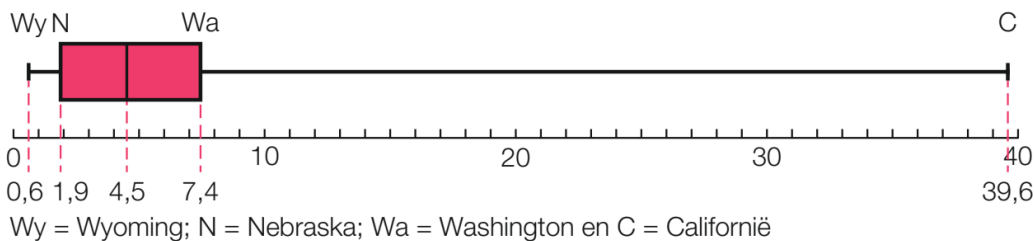
- 3** Van twee benzinestations is bijgehouden hoeveel klanten er per uur hebben getankt. Het onderzoek duurde vijf dagen, telkens van 8:00 tot 20:00 uur. De resultaten zie je in de figuur. De eerste klasse is $[20, 30)$.

- Hoeveel uren tankten bij A minder dan 30 klanten?
- Hoeveel uren tankten bij B minstens 40 klanten?
- Een van de onderzoekers beweert dat op twee van de vijf dagen bij benzinestation B steeds minder dan 50 klanten per uur tankten. Waarom kan dit niet kloppen?
- Teken een boxplot bij de polygoon van B.



- 4** In 2019 hadden de 50 staten van de VS samen 326 miljoen inwoners. De verdeling van het aantal inwoners per staat is verwerkt in de boxplot.

BEVOLKING VAN DE 50 STATEN VAN DE VS IN MILJOENEN



- Bereken de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.
- Hoeveel staten hebben minstens zoveel inwoners als Nebraska?
- Waarom staat er boven de mediaan geen Amerikaanse staat?

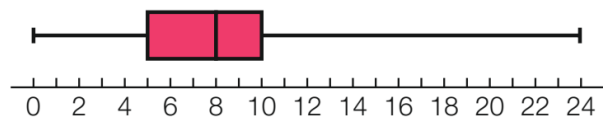
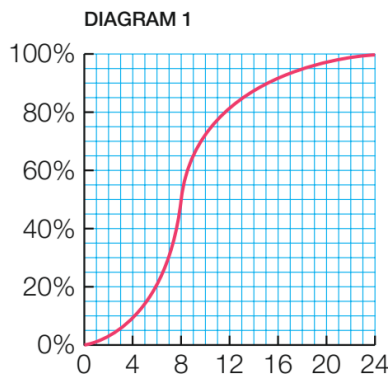
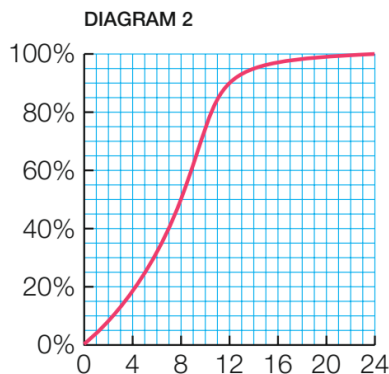
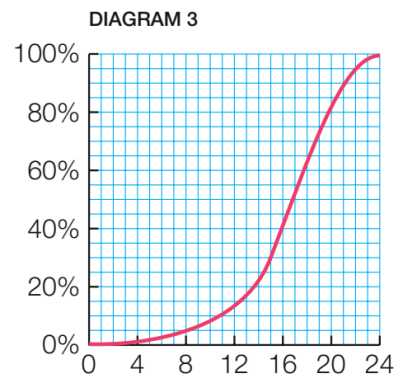
- 5** Een fabrikant levert tennisballen waarvan de stuithoogte normaal verdeeld is met een gemiddelde van 143 cm en een standaardafwijking van 2 cm. De stuithoogte van een tennisbal wordt bepaald door deze vanaf een hoogte van 2,54 m los te laten boven een betonnen ondergrond. Volgens de norm van de ITF (Internationale Tennisfederatie) zijn ballen met een stuithoogte tussen 135 en 147 cm geschikt om in wedstrijden te gebruiken. Voor een toernooi wordt een partij van 1800 ballen aangeschaft.

- Hoeveel van deze ballen hebben naar verwachting een stuithoogte van meer dan 147 cm?
- Wat weet je van de 288 ballen met de kleinste stuithoogte?

In wedstrijden worden meestal gasge vulde tennisballen gebruikt. Deze verliezen echter snel hun stuithoogte. Van een partij van 160 gebruikte tennisballen is de stuithoogte normaal verdeeld met een gemiddelde van 139 cm en een standaardafwijking van 4 cm.

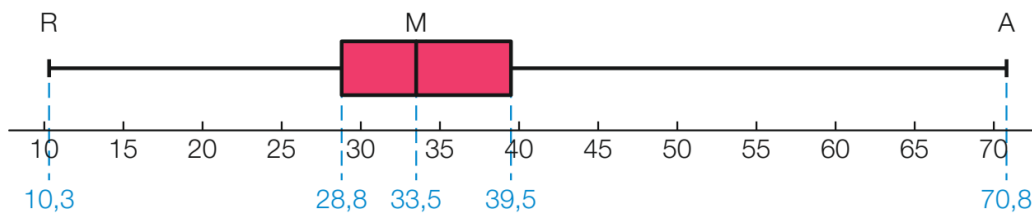
- Hoeveel van deze tennisballen zijn niet meer geschikt om in een wedstrijd te gebruiken volgens de regels van de ITF?

- 6** Een van de onderstaande relatieve cumulatieve frequentiepolygonen past bij de boxplot. Welke is dat? Licht toe.



- 7** Begin 2022 telde Nederland 345 gemeenten. In Rozendaal was toen 10,3% van de woningen een huurwoning en in Montferland was dat 33,5%. Zie de boxplot. Woningen die geen huurwoning zijn, zijn koopwoningen.

PERCENTAGE HUURWONINGEN PER GEMEENTE



R = Rozendaal, M = Montferland en A = Amsterdam

- Bereken de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.
- Een leerling trekt uit bovenstaande gegevens de volgende conclusies. Geef bij elke conclusie aan of deze juist is of onjuist. Licht toe.
 - Van alle gemeenten had Amsterdam het kleinste aantal koopwoningen.
 - Er zijn minder gemeenten met minder dan 28,8% huurwoningen dan gemeenten met meer dan 39,5% huurwoningen.
 - Per gemeente is gemiddeld 33,5% van de woningen een huurwoning.
 - In de meeste gemeenten is meer dan 60% van de woningen een koopwoning
- Met 260 huurwoningen was op Schiermonnikoog 43,8% van de woningen een huurwoning. Rozendaal had 625 koopwoningen. Welke van deze twee gemeenten had meer woningen? Hoeveel procent meer?

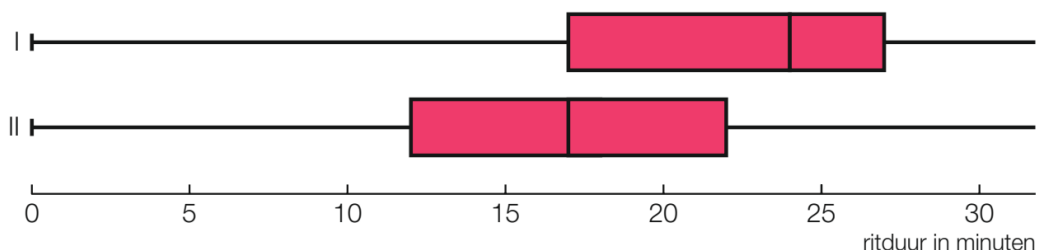
Het gemiddelde aantal huurwoningen per gemeente was 9955 en van alle woningen in Nederland was 42,76% een huurwoning.

- Bereken het totale aantal woningen in Nederland. Rond af op honderdtallen.

- 8** Twee taxichauffeurs, de ene uit Amsterdam en de andere uit Zutphen, hebben gedurende een aantal maanden de tijdsduur van elke taxirit bijgehouden. In de tabel zie je hoe de duur van de ritten van beide chauffeurs verdeeld is. Je ziet bijvoorbeeld dat van de chauffeur uit Zutphen 22 procent van de ritten tussen 20 en 25 minuten duurde.
- Voor de tabel is een kwantitatieve en een kwalitatieve variabele gebruikt.

ritduur in minuten	Amsterdam	Zutphen
[0, 5)	1%	2%
[5, 10)	5%	14%
[10, 15)	12%	19%
[15, 20)	18%	29%
[20, 25)	23%	22%
[25, 30)	30%	11%
vanaf 30	11%	3%

- Benoem de kwantitatieve variabele en licht toe of deze discreet of continu is.
- Benoem de kwalitatieve variabele en licht toe wat het meetniveau is.
- Met welke standaardverdelingen heb je hier te maken? Kies uit: linksscheef, rechtsscheef, symmetrisch of meertoppig.
- Geef een mogelijke praktische verklaring voor het verschil in de verdelingen van de ritduur van beide chauffeurs.
- Volgens Margot kun je in de tabel zien dat de chauffeur uit Amsterdam veel meer minuten in de taxi heeft gereden dan de chauffeur uit Zutphen. Ben je het met haar eens? Licht toe.
- Voor beide steden geldt dat je met behulp van de tabel geen goede schatting kunt maken van de gemiddelde ritduur. Waarom is dat zo?
- In de boxplots hieronder zijn de gegevens van de chauffeurs verwerkt tot twee (gedeelten van) boxplots. Welke hoort bij de chauffeur uit Amsterdam? Licht toe.



- Schets in één figuur van beide chauffeurs de relatieve cumulatieve verdelingskromme. Neem de horizontale as van 0 tot 30.

9 Sportstapelen (Engels: *sport stacking*, ook bekend als *cup stacking* of *speed stacking*) is een sport waarbij zo snel mogelijk plastic bekertjes gestapeld moeten worden in bepaalde formaties.

Beoefenaars van de sport plaatsen plastic bekertjes op elkaar in bepaalde formaties en in vooraf bepaalde volgordes. Je speelt dit spel tegen een andere speler of tegen de klok. Vaak worden piramiden van drie, zes of tien bekertjes gemaakt.



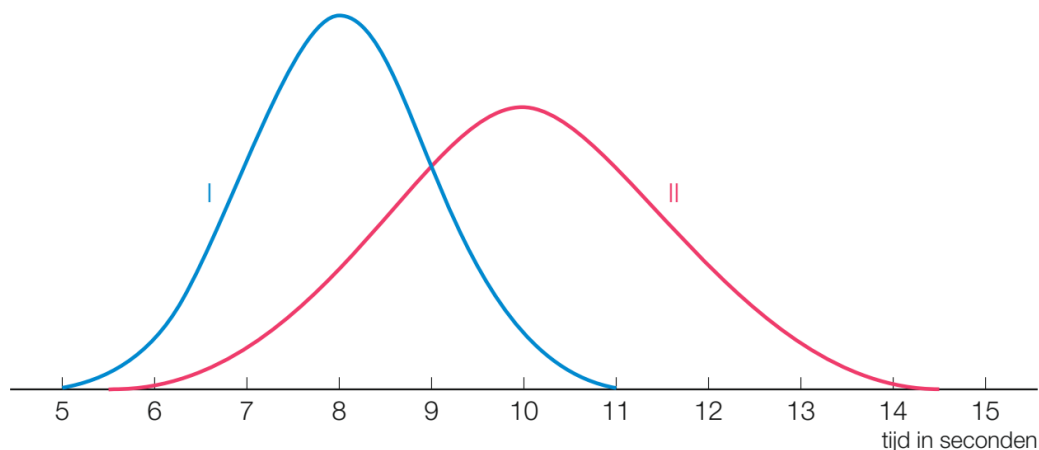
Deskundigen zeggen dat deze sport de tweehandigheid, concentratie en oog-handcoördinatie bevordert.

Twee even grote groepen sportstapelaars hebben tegen de klok gespeeld.

De resultaten zijn weergegeven in de verdelingskrommen hieronder.

Neem aan dat de tijden van beide groepen normaal verdeeld zijn.

Van de meer ervaren groep is de standaardafwijking 1 seconde en van de minder ervaren groep is deze 1,5 seconden.



- a** Geef twee redenen waarom kromme I bij de meer ervaren sportstapelaars hoort.
- b** Licht aan de hand van de vuistregels bij de normale verdeling toe hoe de standaardafwijking van 1,5 seconden van de minder ervaren groep uit de figuur volgt.
- c** Welk percentage van de meer ervaren groep behaalde tijden onder de 6 seconden?
- d** Hoeveel procent van de minder ervaren groep was sneller dan de 2,5% langzaamste stapelaars uit de meer ervaren groep?
- e** Door de twee groepen samen te nemen ontstaat een verdelingskromme voor de tijden van de sportstapelaars als geheel. Welke soort verdeling past het beste bij die verdelingskromme? Kies uit linksscheef, rechtsscheef, symmetrisch of tweekoppig. Licht toe met een schets.

10 In Nijmegen wil het RSC (Radboud Sportcentrum) een onderzoek doen naar hoe sportief Nijmeegse studenten zijn. Hieronder staan twee mogelijke onderzoeksvragen.

I Waarom zijn studenten in Nijmegen minder sportief dan studenten in andere steden?

II Doen studenten in Nijmegen veel aan sport?

a Geef bij elke vraag een punt van kritiek.

De volgende twee methoden voor het nemen van een steekproef worden overwogen.

1 Op de website van het RSC wordt een poll geplaatst. Een poll is een korte lijst van stellingen met meerkeuzeantwoorden.

2 Men kiest tien willekeurige studentnummers en benadert de studenten die bij deze nummers horen.

b Leg van elk van beide methoden uit waarom deze waarschijnlijk geen representatieve steekproef oplevert.

11 Hieronder staat een aantal stappen van een onderzoek. Zet ze in de juiste volgorde en geef bij elke stap aan bij welke fase van de statistische cyclus deze hoort.

A Bij de behandeling krijgt een deel van de patiënten met ernstige vermoeidheidsklachten alleen psychologische begeleiding en een deel wordt ook begeleid door een fysiotherapeut. Patiënten vullen zowel voor als na de behandeling een vragenlijst in.

B De psychologen vragen zich af of het inzetten van een fysiotherapeut ook bij andere ziektebeelden van nut kan zijn. Ze doen een onderzoeksvoorstel voor het inzetten van de fysiotherapeut bij het behandelen van patiënten met chronische pijnklachten.

C Aan de hand van de antwoorden op de vragenlijst wordt door de psychologen bepaald wat de effectiviteit van de behandeling is.

D Het blijkt dat patiënten die zijn begeleid door een fysiotherapeut sneller herstellen dan patiënten die alleen psychologische begeleiding hebben gehad.

E Psychologen van een specialistische praktijk overwegen de inzet van een fysiotherapeut bij de behandeling van patiënten met ernstige vermoeidheidsklachten. Ze vermoeden dat patiënten dan sneller herstellen.





3

Lineaire verbanden

Tijdens een parachutesprong wordt op 1,2 km hoogte een stopwatch gestart. De temperatuur is dan 0°C . Na 150 seconden is het 6°C en is de hoogte nog 200 meter.

Ga uit van lineaire verbanden tussen de hoogte en de tijd, de temperatuur en de tijd en de temperatuur en de hoogte. Noem het aantal verstreken minuten op de stopwatch t , de hoogte in meters h en de temperatuur in graden Celsius T .

- 1 Wat is de temperatuur als de stopwatch 1 minuut aangeeft?
A $2,4^{\circ}\text{C}$ B 3°C C $3,6^{\circ}\text{C}$ D 4°C
- 2 Welke formules kloppen bij deze situatie?
A $T = 2,4t$ B $t = 25T$ C $h = 1200 - 400t$
- 3 Het lineaire model klopt niet voor de gehele sprong. Wat weet je van t als de parachutist landt?
A $t < 3$ B $t = 3$ C $t > 3$

3.1 Lineaire formules

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij een formule van de vorm $y = ax + b$ de grafiek tekenen.
- Je kent de betekenis van a en b in een formule van de vorm $y = ax + b$.
- Je kunt een formule van de vorm $y = ax + b$ opstellen door de waarden van a en b uit een tekst te halen.
- Je kunt werken met een (recht) evenredig verband.

01



Gegeven zijn vier lineaire formules en de bijbehorende grafieken.

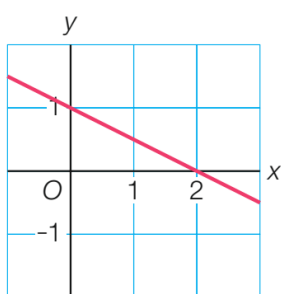
Zoek bij elke formule de juiste grafiek.

I $y = 0,5x + 1$

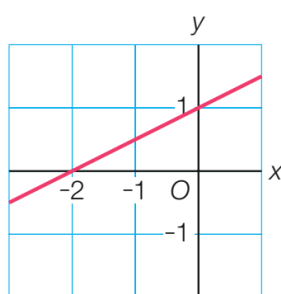
II $y = -0,5x + 1$

III $y = 0,5x - 1$

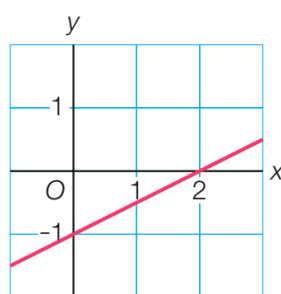
IV $y = -0,5x - 1$



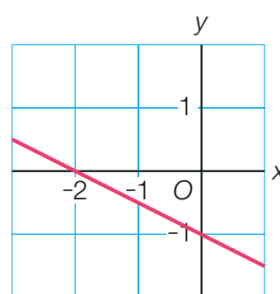
A



B



C



D

Theorie A De lineaire formule

De grafiek van een **lineaire formule** is een lijn. De formule van lijn l hiernaast is $y = 0,5x + 2$.

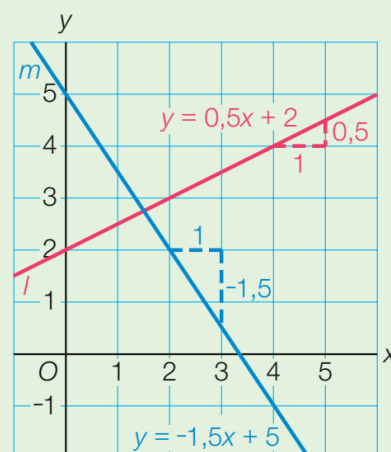
Voor deze lijn geldt:

- het snijpunt met de y -as is $(0, 2)$
- ga je 1 naar rechts, dan ga je 0,5 omhoog.

Het getal 0,5 in de formule $y = 0,5x + 2$ heet de **richtingscoëfficiënt** van de lijn. We noteren 'de richtingscoëfficiënt van lijn l is 0,5' als $rc_l = 0,5$.

Van de lijn m : $y = -1,5x + 5$ hiernaast is de richtingscoëfficiënt $-1,5$. Dus $rc_m = -1,5$. Dit betekent: ga je 1 naar rechts, dan ga je $-1,5$ omhoog.

Dat is hetzelfde als 1 naar rechts en 1,5 omlaag en ook hetzelfde als 2 naar rechts en 3 omlaag.



m : $y = -1,5x + 5$
betekent:
de formule van lijn m
is $y = -1,5x + 5$.

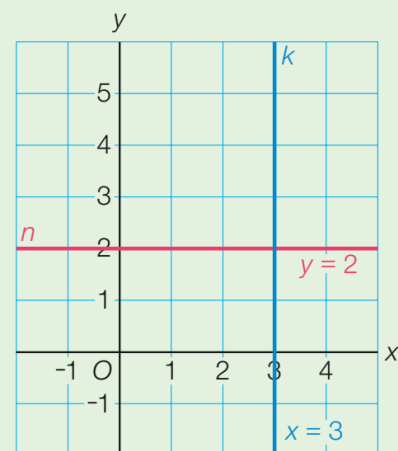
**Van de lijn $y = ax + b$ is de richtingscoëfficiënt a .
 $rc = a$ betekent: 1 naar rechts en a omhoog.
De lijn $y = ax + b$ snijdt de y -as in het punt $(0, b)$.**

De lijnen $p: y = 3x - 5$ en $q: y = 3x + 7$ hebben dezelfde richtingscoëfficiënt. Daarom zijn de lijnen p en q evenwijdig.

Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.

Van de horizontale lijn n hiernaast is $rc_n = 0$. Immers, ga je 1 naar rechts, dan ga je 0 omhoog. Dus de formule is $n: y = 0x + 2$. Hiervoor schrijven we kortweg $n: y = 2$. Op lijn n liggen alle punten met y -coördinaat 2.

Op de verticale lijn k hiernaast liggen alle punten met x -coördinaat 3. Daarom heeft lijn k de formule $k: x = 3$. Een verticale lijn heeft geen richtingscoëfficiënt.



**De lijn $y = 5$ is de horizontale lijn door het punt $(0, 5)$.
Alle punten op deze lijn hebben y -coördinaat 5.
De lijn $x = 6$ is de verticale lijn door het punt $(6, 0)$.
Alle punten op deze lijn hebben x -coördinaat 6.**

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $l: y = -0,8x + 3$, $m: y = 3$ en $n: x = 4$.

- Teken deze lijnen in één figuur.
- Ligt het punt $A(10, -6)$ op l ?
- Lijn k is evenwijdig met l en gaat door het punt $B(0, 12)$.
Geef de formule van k .

Voor $x = 0$ en $x = 5$ krijg je mooie y -waarden.

Uitwerking

a lijn l :

x	0	5
y	3	-1

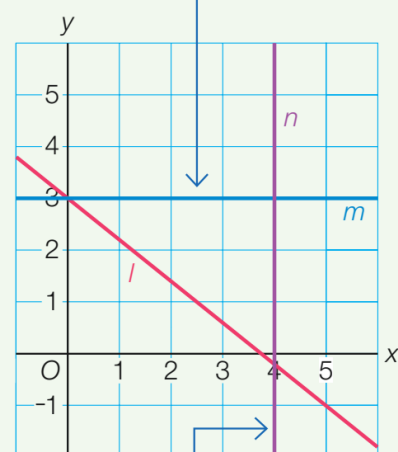
Zie de figuur.

b $x = 10$ geeft $y = -0,8 \cdot 10 + 3 = -5$,
dus $A(10, -6)$ ligt niet op l .

c $k: y = -0,8x + 12$

k heeft dezelfde richtingscoëfficiënt als l .
Het snijpunt met de y -as is $(0, 12)$.

m is de horizontale lijn door $(0, 3)$.



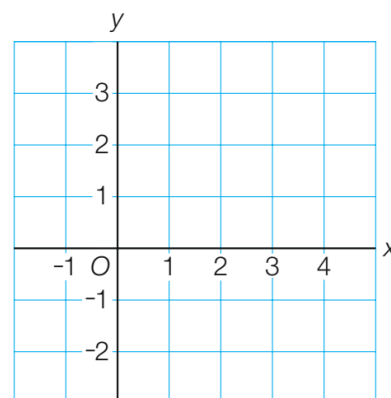
n is de verticale lijn door $(4, 0)$.

- 2** Gegeven zijn de lijnen $k: y = -3x + 2$, $m: y = 0,5x - 1$,
 $p: y = 2$ en $q: y = 2x$.

- a** Op welke lijn ligt het punt $A(14, 6)$?
b Vul in.

$$rc_k = \dots \quad rc_m = \dots \quad rc_p = \dots \quad rc_q = \dots$$

- c** Volgens Joël zijn lijnen p en q evenwijdig.
 Heeft Joël gelijk? Licht toe.
d Teken deze lijnen in de figuur.
e Lijn n heeft richtingscoëfficiënt $-0,5$ en snijdt de
 y -as in het punt $(0, -4)$.
 Geef de formule van n .



- 3** Gegeven zijn de lijnen $p: y = 4 - 2,5x$ en $q: y = 1,2x - 2$.

- a** Ligt het punt $A(-16, -36)$ op een van deze lijnen?
b Teken p en q in één figuur.
c De lijn p snijdt de y -as in het punt B . De lijn k gaat door B en is
 evenwijdig met de lijn q .
 Geef de formule van k .
d De lijn l gaat door de oorsprong $O(0, 0)$ en is evenwijdig met de lijn p .
 Geef de formule van l .
e De lijn q snijdt de y -as in het punt C .
 Geef de formule van de horizontale lijn m die door het punt C gaat.

- A4** Gegeven zijn de lijnen $k: y = 0,6x - 3$, $l: y = -1,5x + 4$ en m . Lijn m
 heeft $rc_m = 2,5$ en gaat door het punt $(0, -1)$.

- a** Het punt A heeft x -coördinaat -10 en ligt op l .
 Bereken de y -coördinaat van A .
b Op welke lijn ligt het punt $B(-1; -3,5)$?
c Teken k , l en m in één figuur.
d Geef de formule van de lijn n die door de oorsprong gaat en
 evenwijdig is met k .
e De lijn k snijdt de x -as in het punt C . De lijn p gaat door C en is
 evenwijdig met de y -as.
 Geef de formule van p .
f De lijn l snijdt de y -as in het punt D .
 De lijn q gaat door D en is evenwijdig met de x -as.
 Geef de formule van q .

- 5** De horizontale lijn k en de verticale lijn l gaan beide door het punt $(5, 4)$.
***** Lijn k snijdt de y -as in het punt A en lijn l snijdt de x -as in het punt B .
 Lijn m heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{3}$ en gaat door A .
 Onderzoek of m ook door B gaat.

A6
□ ⊗ *

Bij de productie van artikelen onderscheidt men twee soorten kosten, namelijk *vaste kosten* en *variabele kosten*. De vaste kosten zijn onafhankelijk van de productieomvang. Bijvoorbeeld de kosten van de machines en de huur van de bedrijfsruimte. De variabele kosten hangen af van de productieomvang. Bijvoorbeeld de kosten van grondstoffen, materialen en arbeid.

Een firma produceert balpennen. De kosten K in euro's die per dag gemaakt worden voor het produceren van q balpennen zijn gegeven door de formule $K = 0,25q + 200$.

- a Hoeveel zijn de vaste kosten? En hoeveel zijn de variabele kosten per balpen?
- b Het punt $(500, 325)$ ligt op de grafiek van K . Wat is de praktische betekenis van dit punt?

Na verloop van tijd zijn de variabele kosten gestegen tot 30 eurocent per balpen. De vaste kosten zijn in dezelfde periode verdubbeld.

- c Geef de nieuwe formule van de kosten.
- d Welke invloed heeft een stijging van de variabele kosten op de grafiek? En de stijging van de vaste kosten?

A7
⊗ *

Zie opgave 6.

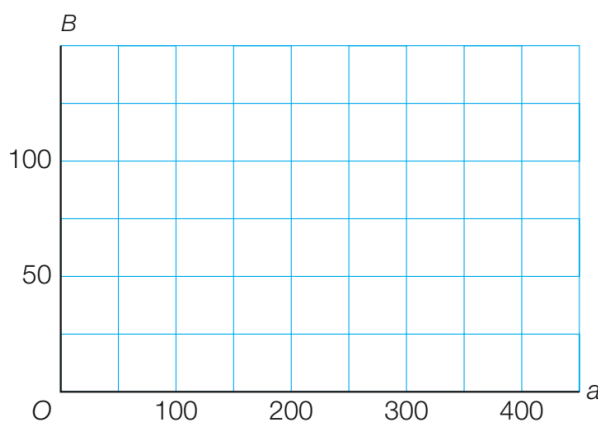
Volgens de directeur van de firma is vanwege de gestegen kosten het produceren van 1500 balpennen per dag meer dan 50% duurder geworden.

Onderzoek of de directeur gelijk heeft.

A8
□ ⊗ *

Bij autoverhuurbedrijf Rent-a-car kun je voor één dag een bestelauto huren. Met de formule $B_R = 0,1a + 75$ kun je berekenen hoeveel euro je moet betalen als je a km rijdt.

- a Hoeveel euro moet je betalen bij een afstand van 50 km?
- b Teken de grafiek van B_R in het assenstelsel.
- c In de formule staan twee getallen. Welke informatie geeft 0,1 over het verhuurtarief? En welke informatie geeft 75?



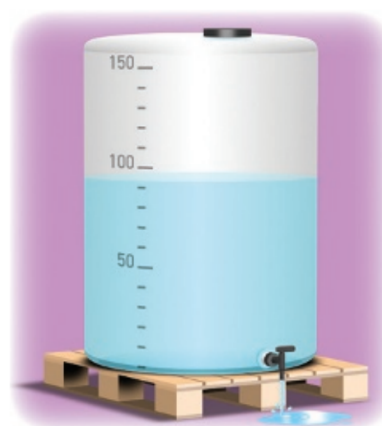
Autoverhuurbedrijf Cheap rekent een vast bedrag van 50 euro en een bedrag van 25 cent per km.

- d Stel de formule op van het bedrag B_C in euro's dat je bij Cheap betaalt als je a km rijdt en teken de grafiek van B_C in het assenstelsel van vraag b.
- e Welk bedrijf is het voordeligst bij een rit van 220 km? Hoeveel scheelt het?

09
□ ⊗ *

In een cilindervormig vat staat het water 1,2 meter hoog. Na opening van een kraan stroomt het vat met constante snelheid leeg. Per kwartier daalt het waterpeil met 30 cm. Emma stelt een formule op van de waterhoogte h in cm t minuten na het openen van de kraan. Ze krijgt $h = 1,2 - 30t$.

- Wat doet ze fout?
- Hoeveel cm daalt het waterpeil per minuut? Wat is de beginhoogte in cm van het water?
- Stel de formule van h op.



Theorie B Formule bij een lineair verband

In opgave 9 is er sprake van een **lineair verband** tussen het waterpeil en de tijd. Bij het opstellen van de formule heb je eenheden omgerekend.

Kijk bij het opstellen van een formule bij een lineair verband goed naar de gevraagde eenheden en reken zo nodig om.

Voorbeeld

Aan het wateroppervlak heerst een druk van 1,015 bar. Onder water neemt per hectometer de druk met 10 bar toe. Stel de formule op van de druk P in bar op een waterdiepte van d meter.

Uitwerking

$$10 \text{ bar per hectometer} = \frac{10}{100} \text{ bar per meter} = 0,1 \text{ bar per meter}$$

$$\text{Dus } P = 1,015 - 0,1d.$$

Je kunt de formule ook schrijven als $P = -0,1d + 1,015$.

10
□ ⊗ *

- Een industriële oven warmt met 720°C per uur op. Als de oven wordt aangezet is de temperatuur 22°C . Stel de formule op van de temperatuur T in $^\circ\text{C}$ na m minuten. Ga uit van een lineair verband.
- Een parachutist opent zijn parachute op een hoogte van 600 meter en daalt met een constante snelheid van 18 km/uur. Stel de formule op van de hoogte h in meter t seconden na het openen van de parachute.
- Op 1 januari 2022 was er 540 miljoen ha tropisch regenwoud in het Amazonegebied. Door met name houtkap neemt de oppervlakte hiervan dagelijks met 2600 ha af. Stel de formule op van de oppervlakte A in miljoenen ha tropisch regenwoud in het Amazonegebied t jaar na 1 januari 2022. Je hoeft geen rekening te houden met schrikkeljaren.

- A11** Tim en Jelmer gaan naar een concert in Nijmegen. Jelmer gebruikt een taxi van taxibedrijf A om bij het concert te komen. Voor deze rit van 12 km betaalt Jelmer €25,80 en geen instaptarief.
- Tim gebruikt een taxi van taxibedrijf B. Hij betaalt €12,40 voor zijn rit van 5 km, dat is inclusief het instaptarief van €1,95.
- Bij beide taxibedrijven bestaat er een lineair verband tussen de kosten K in euro's en de afstand d van de rit in km.
- Stel de formules van K_A en K_B op.
 - Tim had ook voor taxibedrijf A kunnen kiezen en Jelmer voor B. Bereken voor beide of dat voordeliger was geweest.

- O12** Een machine produceert elke vier minuten 560 flessen.
- Stel de formule op voor het aantal flessen N dat in t minuten door deze machine wordt geproduceerd. Ga uit van een lineair verband.
 - Hoe zie je aan de formule van vraag a dat er in 0 minuten geen flessen worden geproduceerd?

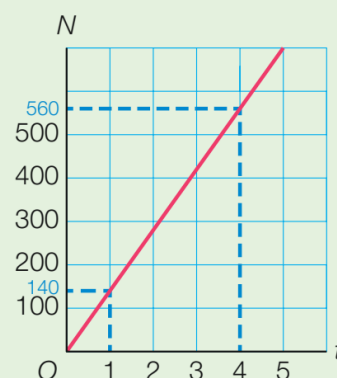
Theorie C Recht evenredig

Bij de machine uit opgave 12 is er tussen het aantal geproduceerde flessen N en het aantal minuten t een lineair verband met beginhoeveelheid 0. Een lineair verband met beginhoeveelheid 0 heet een **(recht) evenredig verband**.

De machine produceert per minuut 140 flessen, dus de formule is $N = 140t$. In de tabel is er een vaste verhouding tussen N en t en de grafiek is een lijn door de oorsprong $O(0, 0)$.

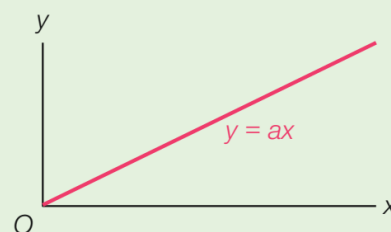
tijd t in minuten	1	2	3	4	...
aantal flessen N	140	280	420	560	...

) $\times 140$



y is (recht) evenredig met x

- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De bijbehorende tabel is een verhoudingstabel.
- De grafiek is een lijn door de oorsprong.



Voorbeeld

Gegeven is dat B evenredig is met n . Bij $n = 12$ hoort $B = 99$.

- a Stel de formule van B op.
- b Bereken B voor $n = 14,8$.

Uitwerking

- a $B = an$
 $n = 12$ en $B = 99$ invullen geeft $a \cdot 12 = 99$
 $a = 8,25$

Dus $B = 8,25n$.

- b $n = 14,8$ geeft $B = 8,25 \cdot 14,8 = 122,1$

- 13** Gegeven is dat y evenredig is met x . Bij $x = 15$ hoort $y = 24$.

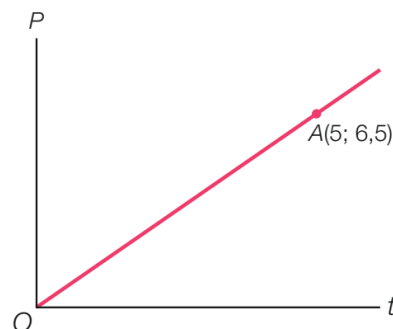
- a Stel de formule van y op.
- b Bereken y bij $x = 60$.
- c Gegeven is dat L evenredig is met d . Je krijgt $L = 240$ bij $d = 30$.
Welke waarde van L hoort bij $d = 340$?

- 14** Zie de figuur.

- a Stel de formule van P op.

- 15** Gegeven zijn de punten $O(0, 0)$, $P(0, 1)$, $Q(1, 0)$ en $R(1, 1)$.

- * Door elk tweetal punten gaat een lijn.
Geef van elke lijn de formule in de vorm $y = ax + b$.



- A16** De tabellen hieronder horen bij lineaire verbanden.

I	x	0	1	2
	y	0	1,2	2,4

III	x	1	2	3
	y	0,3	0,6	0,9

II	x	0	1	2
	y	0,7	1,4	2,1

IV	x	-1	0	1
	y	4	2	0

- a Bij welke twee tabellen hoort een recht evenredig verband? Licht toe.
- b Stel de formules bij de tabellen I, II, III en IV op.

- 17** Een bij moet maar liefst 6250 km afleggen om tot een productie van 50 gram honing te komen. Ga ervan uit dat de productie honing h in mg evenredig is met de afgelegde afstand d in km.

- a Stel de formule van h op.
- b Een bij legt in zijn leven een afstand van 40 000 km af, dat is ongeveer de omtrek van de aarde.
Hoeveel is de totale honingproductie in kg van deze bij?

A18 De bewoners van appartementencomplex ‘Zuiderwal’ hebben te maken met gemeenschappelijke servicekosten. De afspraak is deze kosten evenredig te verdelen op basis van de vloeroppervlakte.

□ ⊙ *

De familie De Jager heeft een appartement met een vloeroppervlakte van 84 m^2 . Ze betalen jaarlijks 1890 euro aan servicekosten.

- a Stel de formule op van de jaarlijkse servicekosten K in euro's bij een vloeroppervlakte van $A \text{ m}^2$.
- b De familie Prieshof betaalt per jaar 2750 euro aan servicekosten. Onderzoek of hun appartement groter of kleiner is dan 120 m^2 .
- c De familie Verbeek heeft een vloeroppervlakte van 75 m^2 , dat is 1,2% van de totale vloeroppervlakte van het complex. Bereken de jaarlijkse servicekosten van het gehele appartementencomplex.

A19 De munteenheid van Thailand is de baht en de wisselkoers is 38,7 baht voor 1 euro. In werkelijkheid zijn er ook nog wisselkosten, maar in deze opgave hoef je daar geen rekening mee te houden.

□ ⊙ *

- a Hoeveel baht krijg je als je 200 euro ruilt voor baht?
- b Stel de formule op voor het aantal baht b dat je krijgt als je e euro ruilt.
- c Is b evenredig met e ? Licht toe.

Otto is op reis in Thailand. Als hij geld opneemt bij een pinautomaat in Thailand, dan krijgt hij baht. De euro's op zijn bankrekening worden dus geruild voor baht. Otto heeft, voordat hij op reis ging, 500 euro opgenomen en geruild voor baht om mee te nemen. Daarnaast pint hij tijdens zijn reis elke dag voor 80 euro aan baht.

- d Stel de formule op voor het totale opgenomen bedrag B in baht op dag d van de reis.
- e Is B evenredig met d ? Licht toe.



E20 Zie opgave 19.

*

Otto reist in totaal twee weken en heeft dan 60 250 baht uitgegeven. Hij ruilt het resterende bedrag weer om voor euro's. Hij krijgt voor elke 40 baht 1 euro. Je hoeft weer geen rekening te houden met wisselkosten.

- a Bereken hoeveel euro hij krijgt.
- b Er geldt dat e evenredig is met b . Stel de formule van e op.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan bij een formule van de vorm $y = ax + b$ de grafiek tekenen.
- ☐ Ik ken de betekenis van a en b in een formule van de vorm $y = ax + b$.
- ☐ Ik kan een formule van de vorm $y = ax + b$ opstellen door de waarden van a en b uit een tekst te halen.
- ☐ Ik kan werken met een (recht) evenredig verband.

- OPGAVE C1b
THEORIE A
- OPGAVE C1
THEORIE A
- OPGAVE C2a EN C3a
THEORIE B
- OPGAVE C2c EN C3
THEORIE C

C1 Gegeven is de lijn l : $y = -2x + 3$.

- a** Vul in: $rc_l = \dots\dots\dots$ en het snijpunt van l met de y -as is $(\dots\dots\dots, \dots\dots\dots)$.
- b** Teken de grafiek van l .
- c** De lijn k gaat door het punt $(0, -5)$ en is evenwijdig met l .
Stel de formule van k op.
- d** Lijn l snijdt de y -as in het punt A . De lijn m heeft richtingscoëfficiënt 4 en snijdt de y -as ook in het punt A .
Stel de formule van m op.

C2 Een zonnebloem groeit 9,8 cm per week. Op 10 juli om 12 uur 's middags is de plant 1,2 meter hoog.

- a** Stel de formule op van de hoogte h van de zonnebloem in cm. Neem de tijd t in dagen met $t = 0$ op 10 juli om 12 uur 's middags.
- b** Wat is de hoogte van de zonnebloem op 25 juli om 12 uur 's middags?
- c** Is h evenredig met t ? Licht toe.

C3 Een gymdocent zet een parcours uit en plaatst elke vijf stappen een pylon.

- a** Stel de formule op van het aantal geplaatste pylonnen P na s stappen.
- b** Is P evenredig met s ? Licht toe.

Antwoorden

C1 a -2 en $(0, 3)$

b *

c k : $y = -2x - 5$

d m : $y = 4x + 3$

C2 a $h = 1,4t + 120$

b 141 cm

c nee *

C3 a $P = 0,2s$

c ja *

3.2 Lineaire formules opstellen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de formule van een lijn opstellen bij een gegeven punt en richtingscoëfficiënt.
- Je kunt de richtingscoëfficiënt berekenen bij twee gegeven punten.
- Je kunt een lineaire formule opstellen bij een praktische situatie.

021

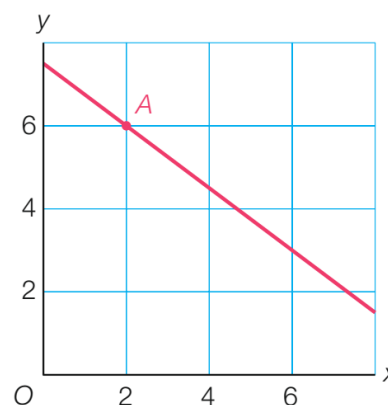


Van een lijn is bekend dat de richtingscoëfficiënt $-0,75$ is en dat de lijn door het punt A gaat. Zie de figuur. Welke van de volgende formules is juist? Licht je keuze toe.

A $y = -0,75x + 7,4$

B $y = -0,75x + 7,5$

C $y = -0,75x + 7,6$



Theorie A Lineaire formule opstellen bij gegeven rc en punt

In opgave 21 ligt het punt $A(2, 6)$ op een lijn met richtingscoëfficiënt $-0,75$.

De formule is dus van de vorm $y = -0,75x + b$.

$$\begin{aligned} x = 2 \text{ en } y = 6 \text{ invullen in } y = -0,75x + b \text{ geeft } -0,75 \cdot 2 + b &= 6 \\ -1,5 + b &= 6 \\ b &= 7,5 \end{aligned}$$

Dus de formule is $y = -0,75x + 7,5$.

Voorbeeld

De hoeveelheid water in een regenton neemt per minuut toe met $0,75$ liter.

Na 10 minuten zit er 25 liter in de regenton.

Stel de formule op voor de hoeveelheid water N in liters na t minuten.

Uitwerking

$$\begin{aligned} N &= 0,75t + b \\ t = 10 \text{ en } N = 25 &\left\{ \begin{aligned} 0,75 \cdot 10 + b &= 25 \\ 7,5 + b &= 25 \\ b &= 17,5 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dus $N = 0,75t + 17,5$.

Met een accolade geef je aan welke gegevens gecombineerd worden.

22



a De lijn l gaat door het punt $A(5, 8)$ en $rc_l = 2$.

Stel de formule van l op.

b De lengte van een brandende kaars neemt per minuut af met $0,5$ mm.

Na een uur is de lengte van de kaars 55 mm. Stel de formule op voor de lengte l van de kaars in mm na t minuten branden.

23 Gegeven is de lijn $k: y = 0,4x + 3$. Lijn l is evenwijdig met lijn k en gaat door het punt $(5, 9)$.

- a** Stel de formule op van lijn l .
b Lijn m heeft richtingscoëfficiënt $-1,8$ en gaat door het punt $(-10, 5)$.
 Bereken de coördinaten van het snijpunt van m met de y -as.

A24 Tijdens een speciale editie van hardloopwedstrijd het Molenhoeks Makkie mogen hardlopers zelf het moment van starten kiezen en achteraf hun tijd inzenden. Janne doet mee aan de wedstrijd. Ze loopt de hele race met een tempo van 4 minuten per kilometer.

- a** Stel de formule op voor de afgelegde afstand A_J in km na t minuten.

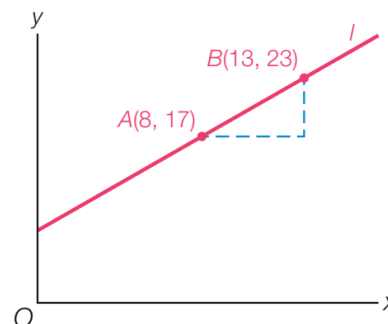
Marlijn is eerder gestart dan Janne, dus op $t = 0$ zal ze al een bepaalde afstand hebben afgelegd. Marlijn loopt met een vast tempo van 5 minuten per kilometer. Als Janne 10 minuten onderweg is passeert ze Marlijn.

- b** Stel de formule op voor de afgelegde afstand A_M in km van Marlijn t minuten na het starten van Janne.
c Bij welke formule is er sprake van een evenredig verband tussen A en t ?

25 Zie de figuur met drie lijnstukken. Bij de lijnstukken horen de richtingscoëfficiënten $\frac{1}{3}$ en $1\frac{2}{3}$.
 Stel de formules op van de lijnen waarvan deze lijnstukken een deel zijn.



O26 De lijn l gaat door de punten A en B . Zie de figuur.
a Ga je op lijn l van A naar B , dan ga je 5 naar rechts en 6 omhoog. Hoe volgt dit uit de coördinaten van A en B ?
b Hoeveel ga je omhoog op lijn l als je 1 naar rechts gaat? Wat is dus de richtingscoëfficiënt van l ?
c Stel de formule van l op.



Theorie B Lineaire formules opstellen bij twee punten

Om bij een lijn door twee gegeven punten de formule op te stellen, begin je vaak met het berekenen van de richtingscoëfficiënt.

In opgave 26 waren de punten $A(8, 17)$ en $B(13, 23)$ op lijn l gegeven.

Hieruit volgt: Ga je $13 - 8 = 5$ naar rechts dan ga je $23 - 17 = 6$ omhoog.

verschil x -coördinaten
 $x_B - x_A$

verschil y -coördinaten
 $y_B - y_A$

Bij één naar rechts hoort $\frac{23 - 17}{13 - 8} = \frac{6}{5} = 1,2$ omhoog.

Dus $rc_l = 1,2$.

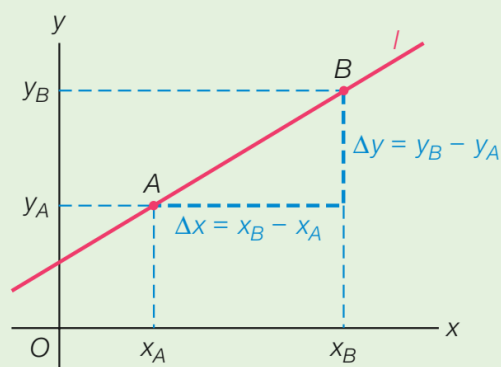
x_A is de x -coördinaat van A .
 y_A is de y -coördinaat van A .

In het algemeen geldt $rc = \frac{\text{verschil van de } y\text{-coördinaten}}{\text{bijbehorende verschil van de } x\text{-coördinaten}}$.

Om de berekening kort te noteren gebruiken we voor het verschil van de y -coördinaten $\Delta y = y_B - y_A$ en voor het bijbehorende verschil van de x -coördinaten $\Delta x = x_B - x_A$. Zie de figuur hiernaast.

Dus $rc = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bij een lijn van de vorm $y = ax + b$ door de punten A en B geldt dat $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



Spreek Δ uit als delta.

Voorbeeld

Lijn l gaat door de punten $P(2, -1)$ en $Q(6, 5)$.
Stel de formule van l op.

Uitwerking

$y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-1)}{6 - 2} = 1,5$ ← **Bereken eerst a .**

$y = 1,5x + b$
 $x = 2$ en $y = -1$ } $1,5 \cdot 2 + b = -1$ ← **Bereken daarna b .**
 $3 + b = -1$
 $b = -4$

Dus $l: y = 1,5x - 4$.

R27 Zie het voorbeeld.



a Lotte berekent $\Delta y = y_P - y_Q$ in plaats van $\Delta y = y_Q - y_P$.

Welke Δx hoort daarbij? Laat zien dat ze ook $rc_l = 1,5$ krijgt.

b Lars gebruikt de coördinaten van het punt Q om b te berekenen in $y = 1,5x + b$. Laat zien dat hij ook $b = -4$ krijgt.

28 Stel de formule op van de lijn



a k door $A(-1, 1)$ en $B(1, 4)$

b l door $C(2, 0)$ en $D(-3, 5)$

c m door $P(25, 493)$ en $Q(75, 229)$.

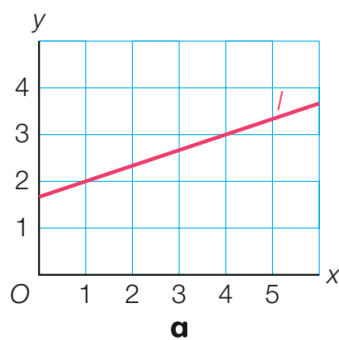
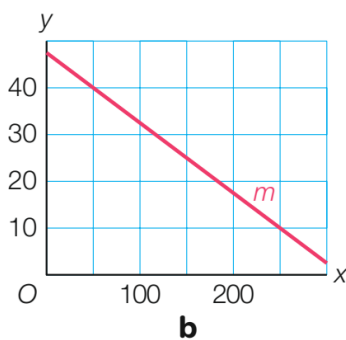
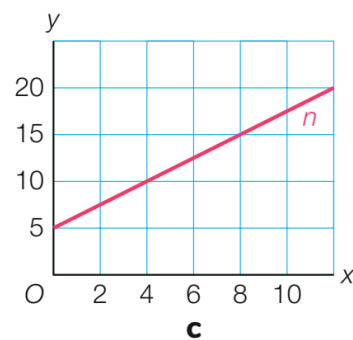
29 **a** De lijn p gaat door de punten $A(-23, -125)$ en $B(17, 155)$.



Stel de formule van lijn p op.

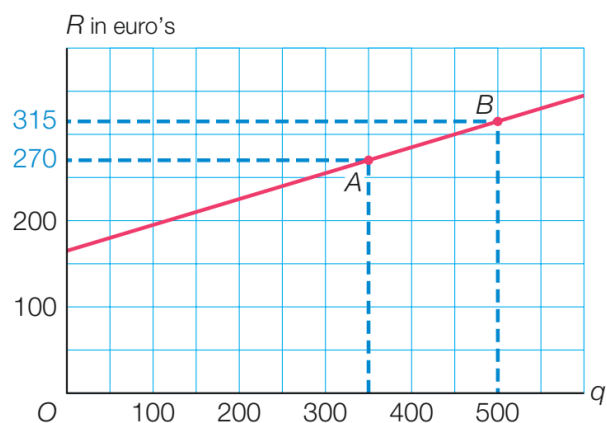
b De lijn q is evenwijdig met de lijn die hoort bij het evenredige verband door $C(-12, 4)$. Verder gaat q door het punt $D(-8, 14)$.
Stel de formule van lijn q op.

A30 Stel de formules op van de lijnen l , m en n . Gebruik alleen punten die je goed kunt aflezen.



O31 Mevrouw Hak is vertegenwoordiger in bonbons. Ze ontvangt een basisloon per week en een beloning per verkochte doos. Er bestaat een lineair verband tussen het aantal verkochte dozen q en haar weekinkomen R . Bij een weekverkoop van 350 dozen is haar inkomen 270 euro. Zie punt A in de figuur.

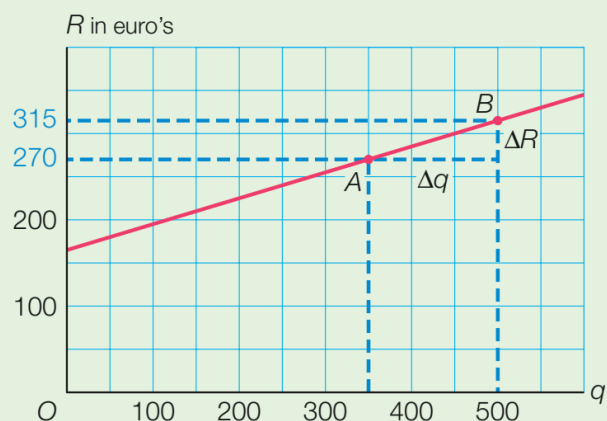
- Geef de praktische betekenis van punt B .
- Hoeveel verdient mevrouw Hak per doos?
- Hoeveel is het basisloon per week?
- Stel de formule van R op in de vorm $R = aq + b$.



Theorie C Lineaire verbanden bij praktische situaties

In opgave 31 is er sprake van een lineair verband tussen het aantal verkochte dozen bonbons q en het weekinkomen R in euro's van mevrouw Hak. De formule is dus van de vorm $R = aq + b$. Ga je op de grafiek $500 - 350 = 150$ naar rechts, dan ga je $315 - 270 = 45$ omhoog. Voor de richtingscoëfficiënt geldt dus:

$$a = \frac{\Delta R}{\Delta q} = \frac{45}{150} = 0,3.$$



Bij een lineair verband tussen R en q hoort een formule van de vorm $R = aq + b$ met richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta R}{\Delta q}$.

Voorbeeld

Een marktkoopman verkoopt T-shirts. De ervaring leert dat bij een prijs van 5 euro er 90 T-shirts per week verkocht worden. Bij een prijs van 8 euro is de weekverkoop nog maar 30 stuks. Er bestaat een lineair verband tussen de prijs p in euro's van een T-shirt en de weekverkoop q . Stel de formule van q op.

Aanpak

De formule van q is van de vorm $q = ap + b$, dus $a = \frac{\Delta q}{\Delta p}$.

Uitwerking

$$q = ap + b \text{ met } a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{30 - 90}{8 - 5} = -20$$

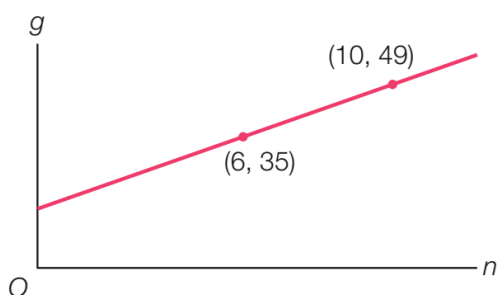
$$\left. \begin{array}{l} q = -20p + b \\ p = 5 \text{ en } q = 90 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -20 \cdot 5 + b = 90 \\ -100 + b = 90 \\ b = 190 \end{array}$$

Dus $q = -20p + 190$.

32



- a** Tussen K en m bestaat een lineair verband.
Voor $m = 5$ is $K = 10$ en voor $m = 12$ is $K = 115$.
Stel de formule op van K .
- b** Tussen F en R bestaat een lineair verband.
Voor $R = 15$ is $F = 300$ en voor $R = 42$ is $F = 138$.
Stel de formule op van F .
- c** Stel de formule op van de lijn in de figuur hieronder.



33

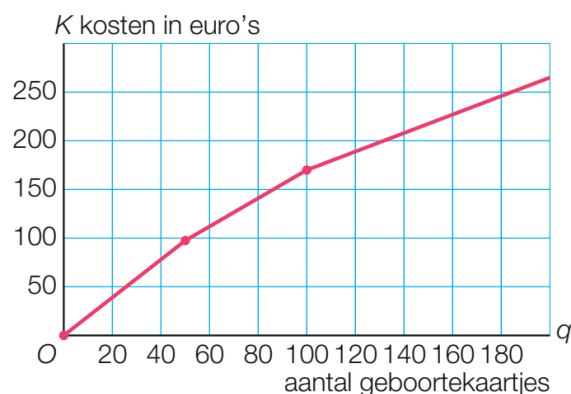


Bij een energiebedrijf bestaat de jaarlijkse elektriciteitsrekening uit een bedrag per kWh verbruikte elektriciteit en een vast bedrag per aansluiting (het vastrecht). De families Kühler en Kolkman zijn klanten van dit bedrijf. De familie Kühler heeft 3250 kWh verbruikt en moet € 841,60 betalen. De familie Kolkman heeft 4426 kWh verbruikt en moet € 1112,08 betalen.

- a** Stel de formule op van het bedrag B in euro's bij een verbruik van e kWh.
- b** Hoeveel is het vastrecht? Hoeveel is de prijs per kWh?

A34

Bij geboortekaartjes hangt het van het bestelde aantal af hoeveel je per kaartje betaalt. Hoe meer je bestelt, hoe goedkoper de kaartjes per stuk worden. Een drukker hanteert de volgende prijzen: de eerste 50 kaartjes kosten € 1,95 per stuk. De volgende 50 kaartjes zijn € 1,45 per stuk. De daaropvolgende kaartjes zijn nog voordeliger geprijsd. In de figuur zie je de grafiek bij deze situatie.



- Waarom bestaat de grafiek uit drie gedeeltes?
- Geef de formule van het eerste gedeelte van de grafiek.
- Toon aan dat bij het tweede gedeelte van de grafiek de formule $K = 1,45q + 25$ hoort.
- Voor 200 kaartjes betaal je € 265.
Stel de formule op van het derde gedeelte van de grafiek.
- Karlijn bestelt 75 geboortekaartjes en een week later nog een keer. Hoeveel goedkoper zou ze uit zijn geweest als ze de kaartjes in één keer had besteld?

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de formule van een lijn opstellen bij een gegeven punt en richtingscoëfficiënt.
- ☐ Ik kan de richtingscoëfficiënt berekenen bij twee gegeven punten.
- ☐ Ik kan een lineaire formule opstellen bij een praktische situatie.

► **OPGAVE C4**
THEORIE A

► **OPGAVE C5**
THEORIE B

► **OPGAVE C6**
THEORIE C

C4 Gegeven is de lijn $l: y = -1,5x + b$.

- Bereken de waarde van b in het geval dat het punt $A(3; 4,5)$ op lijn l ligt.
- Op lijn $m: y = 2x + 3$ ligt het punt B met x -coördinaat 4.
Bereken b in het geval dat lijn l ook door B gaat.

C5 Stel een formule van de vorm $y = ax + b$ op voor de lijn door de punten $(4, 6)$ en $(2, 9)$.

C6 Scott verkoopt zelfgemaakte tapas op de markt. Hij gaat uit van een lineair verband tussen het verwachte aantal verkochte tapas q en de prijs p per tapa in eurocenten. Bij $p = 75$ geldt $q = 400$ en bij $p = 125$ geldt $q = 200$. Stel de formule van q op.

Antwoorden

C4 a $b = 9$

b $b = 17$

C5 $y = -1,5x + 12$

C6 $q = -4p + 700$

3.3 Vergelijkingen en ongelijkheden

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de coördinaten van het snijpunt van twee lijnen berekenen.
- Je kunt lineaire vergelijkingen toepassen in praktische situaties.
- Je kunt een lineaire ongelijkheid oplossen.

V1 Hiernaast zie je hoe je de vergelijking $10x - 4 = 7x + 20$ oplost met de balansmethode. Je hoeft de rode tussenstappen niet op te schrijven.

Los op.

- a** $5x - 3 = 3x + 5$ **c** $2x - 5 = 6x + 3$
b $7x + 1 = 4x - 8$ **d** $2x - 2 = 3x - 7$

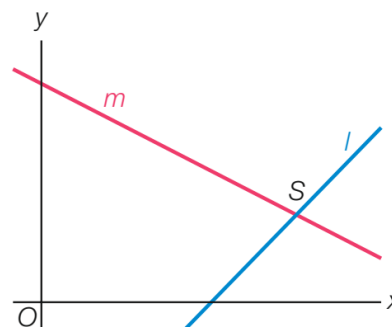
$$\begin{array}{rcl}
 10x - 4 & = & 7x + 20 \\
 -7x & & -7x \\
 \hline
 3x - 4 & = & 20 \\
 +4 & & +4 \\
 \hline
 3x & = & 24 \\
 :3 & & :3 \\
 \hline
 x & = & 8
 \end{array}$$

O35 In de figuur zie je lijn m : $y = 5 - x$. Deze lijn snijdt de x -as in het punt A .

- a** Wat is de y -coördinaat van A ?
b Welke vergelijking moet je oplossen om de x -coördinaat van A te berekenen? Doe dat.

In de figuur zie je ook lijn l : $y = 2x - 4$.

- c** Bereken de coördinaten van het snijpunt van lijn l met de x -as.



Het punt S is het snijpunt van m en l . De x -coördinaat van S is de oplossing van de vergelijking $5 - x = 2x - 4$.

- d** Licht dit toe.
e Bereken de x -coördinaat van S .
f Bereken de y -coördinaat van S .

Theorie A Snijpunten van lijnen berekenen

In opgave 35 heb je de vergelijking $2x - 4 = 0$ opgelost om het snijpunt van lijn l met de x -as te berekenen. Voor een snijpunt van een lijn met de x -as geldt dat $y = 0$. Let op het verschil: voor het snijpunt met de y -as neem je $x = 0$.

In opgave 35 heb je ook de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken van m : $y = 5 - x$ en l : $y = 2x - 4$ berekend. De x -coördinaat van het snijpunt is de x -waarde waarvoor beide formules dezelfde y -waarde geven. Voor het snijpunt geldt dus $5 - x = 2x - 4$.

Bij het snijpunt P van de lijnen $y = 15x - 31$ en $y = 7x + 5$ hoort de vergelijking $15x - 31 = 7x + 5$. De oplossing van deze vergelijking is de x -coördinaat van P . De oplossing is $x = 4,5$. Zie hiernaast.

$x = 4,5$ geeft $y = 15 \cdot 4,5 - 31 = 36,5$, dus $P(4,5; 36,5)$.

$$\begin{array}{rcl}
 15x - 31 & = & 7x + 5 \\
 8x & = & 36 \\
 x & = & 4,5
 \end{array}$$

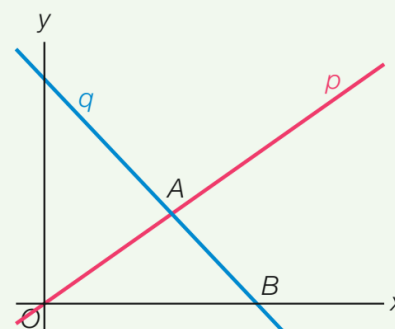
Werkschema: Het snijpunt berekenen van twee lijnen met formules van de vorm $y = ax + b$.

- 1 Stel de rechterleden van de formules aan elkaar gelijk.
- 2 Los de vergelijking op. De oplossing is de x -coördinaat van het snijpunt.
- 3 Bereken de y -coördinaat van het snijpunt door deze x -coördinaat bij een van de formules in te vullen.

Voorbeeld

In de figuur zijn de grafieken getekend bij de formules $p: y = 0,8x$ en $q: y = 3 - 1,2x$. Punt A is het snijpunt van de lijnen p en q . Punt B is het snijpunt van de lijn q en de x -as.

- a Bereken de coördinaten van punt A .
- b Bereken de coördinaten van punt B .



Uitwerking

- a Los op $0,8x = 3 - 1,2x$.
 $2x = 3$
 $x = 1,5$
 $x = 1,5$ geeft $y = 0,8 \cdot 1,5 = 1,2$
Dus $A(1,5; 1,2)$.
- b Los op $3 - 1,2x = 0$
 $-1,2x = -3$
 $x = 2,5$
Dus $B(2,5; 0)$.

R36 Zie voorbeeld a.

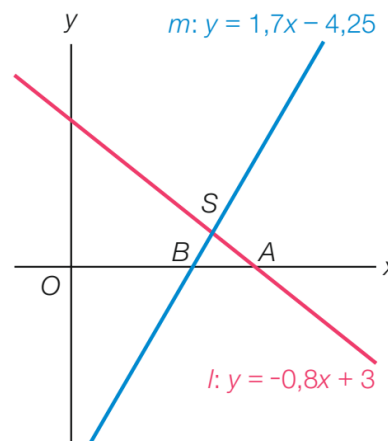


Waarom denk je dat ervoor gekozen is om $x = 1,5$ in te vullen in de formule $y = 0,8x$ en niet in de formule $y = 3 - 1,2x$?

37 De lijnen $l: y = -0,8x + 3$ en $m: y = 1,7x - 4,25$ snijden elkaar in het punt S . Zie de figuur.



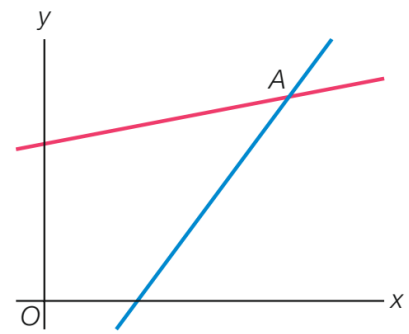
- a Bereken de coördinaten van S .
- b De lijn l snijdt de x -as in het punt A . Bereken de coördinaten van A .
- c De lijn m snijdt de x -as in het punt B . Bereken de coördinaten van B .
- d De lijn m snijdt de y -as in het punt C . Bereken de coördinaten van C .



38 In de figuur zijn de lijnen $y = 0,25x + 3$ en $y = 1,75x - 2,4$ getekend.



- a** Punt A is het snijpunt van de lijnen.
Bereken de coördinaten van punt A .
- b** De lijnen snijden de x -as in twee verschillende punten.
Het linker snijpunt is punt B .
Bereken de coördinaten van punt B .



39 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen



- a** $k: y = 2x - 6$ en $l: y = 5 - 3x$
- b** $m: y = -2,5x + 5$ en $n: y = 25$.

40 Gegeven is de lijn $n: y = -2,5x + 35$.



- a** De lijn n snijdt de x -as in het punt P en de y -as in het punt Q .
Bereken de coördinaten van de punten P en Q .
- b** Op n ligt het punt R met $x_R = -20$.
Bereken y_R .
- c** Op n ligt het punt S met $y_S = 45$.
Bereken x_S .
- d** De lijn m gaat door $(4, 4)$ en hoort bij een evenredig verband.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van m en n .

A41 Tijdens een vlucht van een Airbus A320 is er na 250 km vliegen 11 ton kerosine in de brandstoftanks aanwezig, 1200 km verder is dat nog 7,4 ton. Er bestaat een lineair verband tussen de aanwezige hoeveelheid kerosine k in ton en de vluchtafstand V in km.



- a** Stel de formule op van k .



Als veiligheidsmaatregel worden de piloten gewaarschuwd als er in de tanks nog maar 1,5 ton kerosine zit.

- b** Hoeveel km na de start gaat het alarm af? Rond af op honderdtallen.
- c** Hoeveel km kan er dan nog gevlogen worden?

A42 Zie opgave 41.



Bij een andere vlucht met een Airbus A320 gaat er 12 ton kerosine mee. Het kerosineverbruik per km is 5% hoger dan bij de vlucht van opgave 41. Na hoeveel km vliegen is de nog aanwezige hoeveelheid kerosine bij beide vluchten gelijk? Rond af op honderdtallen.

A43 Richelle maakt een tandem skydive.

□ ⊗ * Op 1200 meter hoogte wordt de parachute geopend en vanaf dat moment daalt ze een kilometer per 2,5 minuut.

Bij dit deel van de val wordt de hoogte van Richelle gegeven door de formule $h = 1,2 - 0,4t$. Hierbij is t de tijd in minuten en h de hoogte in kilometers.

- Laat met een berekening zien dat de richtingscoëfficiënt volgt uit de gegevens.
- Op 700 meter hoogte neemt ze een selfie. Hoeveel seconden is de parachute dan geopend?

Om zacht te landen verlaagt de tandemmaster vanaf 80 meter hoogte de valsnelheid. Zo landen ze veilig op $t = 3,5$.

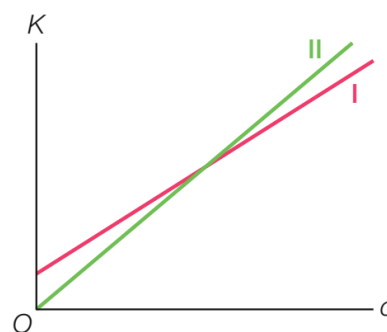
- Met welke gemiddelde snelheid dalen zij deze laatste 80 meter? Geef je antwoord in km per uur en rond af op één decimaal.



O44 Taxibedrijf A berekent het rittarief met de formule

□ ⊗ * $K_A = 1,2d + 20$. Taxibedrijf B gebruikt de formule $K_B = 1,6d$. In deze formules zijn K de kosten in euro's bij een rit van d km. Zie de figuur.

- Welke grafiek hoort bij bedrijf A? Licht toe.
- Bereken bij welke afstand de bedrijven even duur zijn.
- Bij welke afstanden is bedrijf A goedkoper?



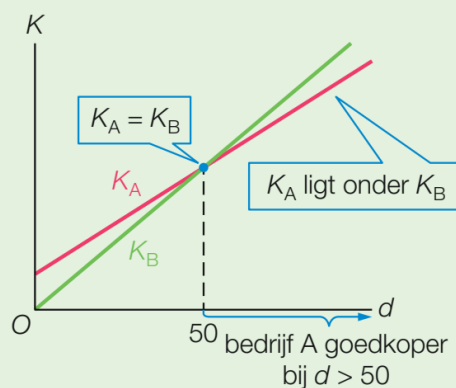
Theorie B Lineaire ongelijkheden oplossen

In opgave 44 heb je berekend bij welke afstand taxibedrijven A en B even duur zijn. Bij deze afstand hebben de formules K_A en K_B dezelfde uitkomst. Je kunt dit noteren met de vergelijking $K_A = K_B$.

De oplossing van deze vergelijking is $d = 50$, dus bij een afstand van 50 km zijn de bedrijven even duur.

Je kunt ook bepalen bij welke afstanden taxibedrijf A goedkoper is dan B. De formule van K_A heeft dan een kleinere uitkomst dan de formule van K_B . Je kunt dit noteren met de **ongelijkheid** $K_A < K_B$ (spreek uit: K_A kleiner dan K_B). De oplossing van de ongelijkheid bestaat uit alle waarden van d waarvoor geldt $K_A < K_B$. Je kunt deze oplossing vinden door te kijken waar de grafiek van K_A onder de grafiek van K_B ligt. Hiernaast zie je dat voor afstanden groter dan 50 km bedrijf A goedkoper is dan B.

De oplossing van de ongelijkheid is dus $d > 50$.



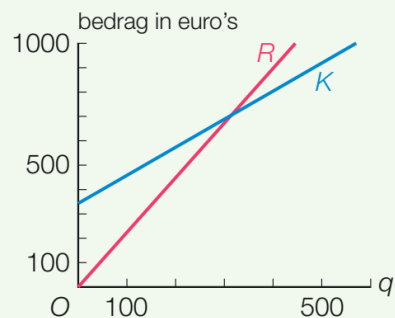
Werkschema: oplossen van de ongelijkheid $A < B$

- 1 Los de vergelijking $A = B$ op.
- 2 Kijk waar de grafiek van A onder de grafiek van B ligt.
- 3 Geef antwoord op de vraag.

Voorbeeld

IJssalon Sophia hanteert voor de opbrengst R in euro's de formule $R = 2,25q$. Hierin is q het aantal verkochte ijsjes per week. De kosten K in euro's zijn $K = 1,15q + 352$. Zie de figuur.

Hoeveel ijsjes moet Sophia per week verkopen om winst te maken?



Uitwerking

Sophia maakt winst als $R > K$.

Los op $2,25q = 1,15q + 352$ ←

$$1,10q = 352$$

$$q = 320$$
 ←

de vergelijking bij de ongelijkheid

de oplossing van de vergelijking

Uit de figuur volgt dat Sophia meer dan

320 ijsjes moet verkopen om winst te maken. ←

$R > K$ voor $q > 320$

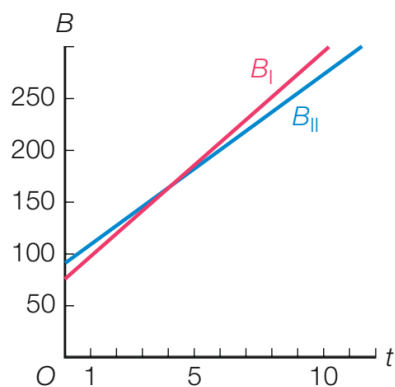
R45 Zie het voorbeeld.

☐ ⊗ * Wat is de situatie voor Sophia als $q < 320$?

46 De reparatiebedrijven I en II gebruiken de tarieven

☐ ⊗ $B_I = 22t + 80$ en $B_{II} = 18t + 96$. Hierbij is B het bedrag in euro's en t de reparatietijd in uren.

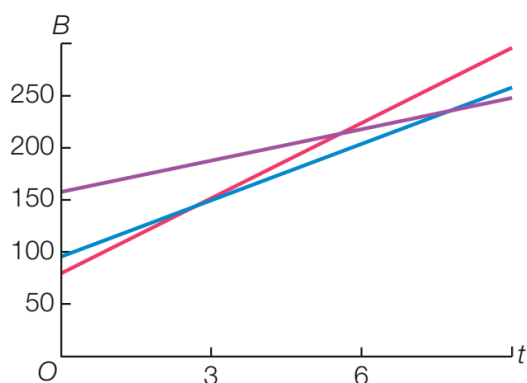
Onderzoek bij welke reparatietijden bedrijf I voordeliger is dan bedrijf II.



47 De reparatiebedrijven I, II en III gebruiken de

* tarieven $B_I = 24t + 80$, $B_{II} = 18t + 96$ en $B_{III} = 10t + 158$. Hierbij is B het bedrag in euro's en t de reparatietijd in uren.

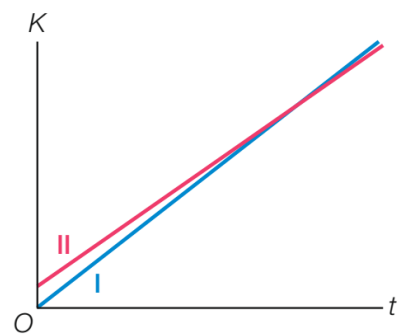
Bereken in minuten nauwkeurig bij welke reparatietijden bedrijf II het meest voordelig is.



A48 Schilder I berekent zijn tarief met de formule $K_I = 38t$.

□ ⊙ * Hierbij is t de werktijd in uren. Schilder II gebruikt ook een lineaire formule voor zijn tarief. Hij rekent een starttarief van 24 euro en een klus van 20 uur kost in totaal 704 euro. Zie de figuur.

Bereken bij welke werktijden schilder II goedkoper is.



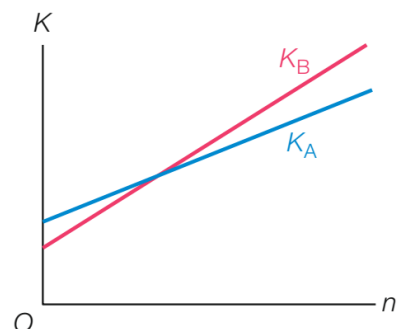
A49 Nienke overweegt lid te worden van een golfclub. Golfclub Andantino rekent een contributie van €435 per jaar. Daarbij komt €12 per keer golfen. De contributie bij golfclub Bastion is €350 per jaar, vermeerderd met €17,50 per keer golfen. Neem aan dat Nienke per jaar n keer gaat golfen.

a Geef de formule van de jaarlijkse kosten K_A in euro's als Nienke voor Andantino kiest. Doe dat ook voor de jaarlijkse kosten K_B bij Bastion.



In de figuur hiernaast zijn de grafieken van K_A en K_B getekend.

- b** Bij hoeveel keer golfen per jaar is Nienke bij Andantino goedkoper uit?
- c** Nienke wil zo vaak mogelijk golfen, maar niet meer dan €600 kosten per jaar hebben. Van welke club moet Nienke dan lid worden?



Kennis- en vaardighedencheck

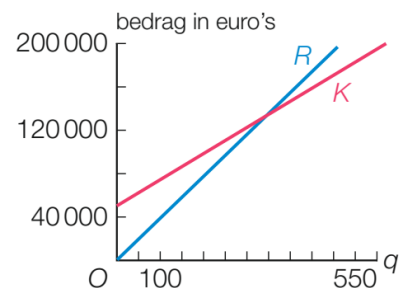
- ☐ Ik kan de coördinaten van het snijpunt van twee lijnen berekenen.
- ☐ Ik kan lineaire vergelijkingen toepassen in praktische situaties.
- ☐ Ik kan een lineaire ongelijkheid oplossen.

► OPGAVE C7
THEORIE A

► OPGAVE C8
THEORIE A

► OPGAVE C9
THEORIE B

- C7** Gegeven zijn de lijnen $y = 3x + 18$ en $y = 4,5x - 4,5$.
- a** Bereken de coördinaten van het snijpunt van deze lijnen.
 - b** De lijnen snijden de x -as in twee verschillende punten. Het linker snijpunt met de x -as is punt A .
Bereken de coördinaten van punt A .
- C8** Bij een zwemevenement zwemt Jori 1200 meter door een gracht. Op het moment dat Jori start met zwemmen, rent zijn broertje Woud hem vanaf het eindpunt tegemoet over de weg langs de gracht. Hierbij horen de formules $A_J = 120t$ en $A_W = 1200 - 60t$. In deze formules is t de tijd in minuten na de start en A de afstand in meters tot het startpunt van Jori.
- a** Laat met een berekening zien dat de broers 2,5 minuut na de start nog 750 meter van elkaar verwijderd zijn.
 - b** Bereken de afstand tussen de broers op het moment dat Jori 600 meter heeft afgelegd.
 - c** Hoe lang na de start treffen de broers elkaar? Geef je antwoord in seconden nauwkeurig. Welke afstand heeft Jori dan al gezwommen?
- C9** Een fabrikant van wasmachines rekent per week op 50 000 euro aan vaste kosten en een bedrag van 250 euro aan variabele kosten per machine. Hij verkoopt de machines voor 400 euro per stuk.
- a** Stel de formule op van de kosten K en van de opbrengst R bij een productie van q machines per week.
 - b** Hoeveel wasmachines moet de fabrikant produceren in een week om winst te maken?



Antwoorden

- C7** **a** (15, 63)
b $A(-6, 0)$
- C8** **a** *
b 300 m
c 6 min 40 s 800 m
- C9** **a** $K = 250q + 50\,000$
 $R = 400q$
b minimaal 334 wasmachines

3.4 Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt y uitdrukken in x bij een vergelijking van de vorm $px + qy = r$.
- Je kunt de grafiek tekenen bij een vergelijking van de vorm $px + qy = r$.
- Je kunt een vergelijking van de vorm $px + qy = r$ opstellen.
- Je kunt werken met vergelijkingen van de vorm $px + qy = r$ bij praktische situaties.

50



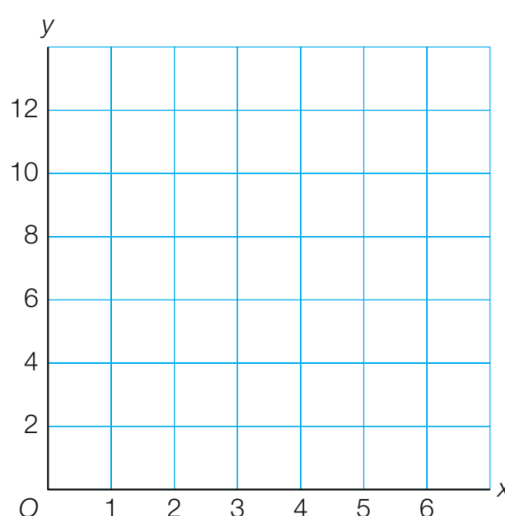
Voor een activiteit bestelt de gymdocent broodjes.

Deelnemende leerlingen mogen kiezen uit een broodje hamburger van 6 euro of een broodje gezond van 3 euro. De totale kosten zijn 42 euro. Stel x is het aantal broodjes hamburger en y is het aantal broodjes gezond.

a Hoeveel broodjes gezond zijn er besteld als er vier broodjes hamburger zijn besteld?

b Vul de tabel in.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y								



c Teken de punten uit de tabel in het assenstelsel. Wat valt je op?

d Vul in.

De x broodjes hamburger kosten samen $6x$ euro.

De y broodjes gezond kosten samen euro.

De totale kosten zijn 42 euro, dus $6x + \dots = \dots$

Theorie A Vergelijkingen van de vorm $px + qy = r$

In opgave 50 heb je de vergelijking $6x + 3y = 42$ opgesteld. Hierin kun je y **vrijmaken**. Dat gaat als volgt.

$$6x + 3y = 42 \quad \text{Breng } 6x \text{ naar rechts.}$$

$$3y = -6x + 42 \quad \text{Deel alle termen door 3.}$$

$$y = -2x + 14$$

Hiermee is y vrijgemaakt. Je kunt ook zeggen dat y is **uitgedrukt in** x .

Je ziet dat er een lineair verband bestaat tussen y en x . De grafiek van

$6x + 3y = 42$ is dus een rechte lijn met richtingscoëfficiënt -2 . De

vergelijking $6x + 3y = 42$ is een voorbeeld van een **lineaire vergelijking met twee variabelen**.

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $px + qy = r$. De grafiek is een rechte lijn.

$2x - 3y = 6$ is een vergelijking van de vorm

$px + qy = r$ met $p = 2$, $q = -3$ en $r = 6$.

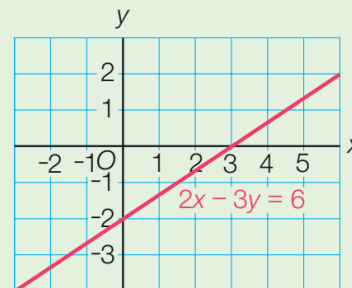
Om de bijbehorende lijn te tekenen, bereken je de coördinaten van twee punten.

$x = 0$ geeft $2 \cdot 0 - 3y = 6$ oftewel $-3y = 6$, dus $y = -2$.

$y = 0$ geeft $2x - 3 \cdot 0 = 6$ oftewel $2x = 6$, dus $x = 3$.

Zo krijg je de tabel

x	0	3
y	-2	0



De lijn gaat door $(0, -2)$ en $(3, 0)$. Zie de figuur.

Het punt $(9, 4)$ ligt ook op de lijn $2x - 3y = 6$, want

$x = 9$ en $y = 4$ invullen geeft $2 \cdot 9 - 3 \cdot 4 = 6$ en dit klopt.

Voorbeeld

Gegeven is de lijn $l: 2x - 5y = 8$.

a Onderzoek of het punt $(14, 3)$ op l ligt.

b Teken l .

c Maak y vrij.

$\neq$ betekent 'is niet gelijk aan'

Uitwerking

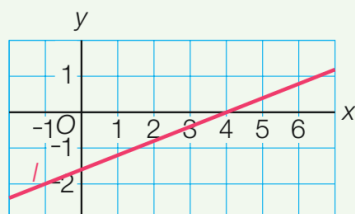
a $x = 14$ en $y = 3$ geeft $2 \cdot 14 - 5 \cdot 3 = 13 \neq 8$. Dus $(14, 3)$ ligt niet op l .

b

x	-1	4
y	-2	0

$x = -1$ geeft
 $2 \cdot -1 - 5y = 8$
 $-2 - 5y = 8$
 $-5y = 10$
 $y = -2$

$y = 0$ geeft
 $2x - 5 \cdot 0 = 8$
 $2x = 8$
 $x = 4$



c $2x - 5y = 8$
 $-5y = -2x + 8$
 $y = 0,4x - 1,6$

R51 In het voorbeeld is in de tabel bij $x = -1$ berekend dat $y = -2$.



- a Bereken y bij $x = 0$.
- b Waarom denk je dat niet voor $x = 0$ is gekozen?

52 Gegeven is de lijn m : $3x + 2y = 12$.



- a Onderzoek of het punt $(4, 1)$ op m ligt.
- b Teken m .
- c Druk y uit in x .
- d Geef rc_m .

53 Jan koopt bij een tuincentrum twaalf coniferen en vier appelbomen. Hij moet hiervoor 270 euro betalen. Stel dat één conifeer x euro kost en één appelboom y euro, dan geldt $12x + 4y = 270$.



- a Jan denkt zich te herinneren dat de prijs van een conifeer 13 euro was en de prijs van een appelboom 29 euro. Onderzoek of dit kan kloppen.
- b Druk y uit in x .
- c Twee appelbomen kosten 48 euro. Bereken hoeveel een conifeer kost.

54 a Maak y vrij bij $15x + 12y = 2520$.



- b Druk p uit in q bij $3p - 1,2q = 16,5$.
- c Maak b vrij bij $5a - 2b = 16$.

A55 Bij elk van de onderstaande situaties hoort één van de formules.

⊗* Geef bij elke situatie de formule. Licht je antwoorden toe.

I een lijn met $rc = -2$ door $(1, 3)$

$$k: 2x + y = 0$$

II 2 appels en 4 bananen kosten 2,50 euro

$$l: x = -2y + 1,25$$

III een recht evenredig verband door $(3, -6)$

$$m: 2x + y = 5$$

A56 Sandra en Marcel gaan samen met vier vrienden



koffie en thee drinken in een café. Ze bestellen 2 muntthee en 4 koffie en moeten 18 euro afrekenen. In de figuur zie je de grafiek bij deze situatie, waarbij x de prijs van een muntthee en y de prijs van een koffie in euro's is.

- a Stel dat de prijs van een muntthee 5 euro is. Lees uit de grafiek af wat dan de prijs van een koffie is.
- b Stel bij deze situatie een formule op van de vorm $px + qy = r$.



Twee andere klanten in hetzelfde café moeten voor een koffie en een muntthee 6,50 euro afrekenen.

- c Teken de bijbehorende grafiek in de figuur.
- d Wat is de prijs van een muntthee en wat is de prijs van een koffie?

057



In een restaurant is plaats voor 52 gasten. Er zijn in totaal 19 tafels, waarvan x tafels voor vier gasten en de overige y tafels voor twee gasten. Bij deze situatie horen de vergelijkingen $x + y = 19$ en $4x + 2y = 52$.

- Licht dit toe.
- Druk y uit in x bij beide vergelijkingen.
- De grafieken die bij de formules horen, hebben een snijpunt. Bereken de coördinaten van dit snijpunt.
- Hoeveel tafels voor vier gasten heeft het restaurant? En hoeveel tafels voor twee gasten?

Theorie B Vergelijkingen met twee variabelen toepassen

In opgave 57 heb je twee vergelijkingen gebruikt om uit te rekenen hoeveel tafels van verschillende soorten een restaurant heeft.

Bij situaties met twee variabelen kun je als volgt te werk gaan.

Werkschema: situaties met twee variabelen

- Noem de variabelen x en y .
- Stel twee vergelijkingen op.
- Druk y uit in x bij beide vergelijkingen en stel ze aan elkaar gelijk.
- Los de verkregen vergelijking op.
- Gebruik de oplossing van de vergelijking om de vraag te beantwoorden.

Vergelijkingen mag je met de GR oplossen. Dat kan op verschillende manieren. In de volgende module leer je hoe dat gaat.

► GR] Neem de module [Vergelijkingen oplossen](#) door.

Voorbeeld

Meubelzaak Lefat verkoopt in een actieweek in totaal 52 tafels en stoelen. Een tafel kost 750 euro en een stoel 350 euro. De verkochte tafels en stoelen brengen tijdens de actieweek in totaal 24 600 euro op. Bereken hoeveel tafels en hoeveel stoelen in de actieweek werden verkocht.

Uitwerking

x = aantal tafels en y = aantal stoelen

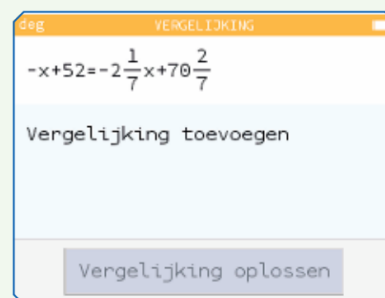
$$\begin{aligned} x + y &= 52 & 750x + 350y &= 24\,600 \\ y &= -x + 52 & 350y &= -750x + 24\,600 \\ & & y &= -2\frac{1}{7}x + 70\frac{2}{7} \end{aligned}$$

Dus $-x + 52 = -2\frac{1}{7}x + 70\frac{2}{7}$.

De optie oplossen bij $-x + 52 = -2\frac{1}{7}x + 70\frac{2}{7}$ geeft $x = 16$.

$x = 16$ geeft $y = -16 + 52 = 36$

Er zijn 16 tafels en 36 stoelen verkocht.



In het voorbeeld op de vorige bladzijde is een vergelijking opgelost met de optie oplossen op de GR. Dit kan ook met de optie snijpunt, zoals in het voorbeeld op bladzijde 30 is gedaan.

Je kunt lineaire vergelijkingen ook met de balansmethode oplossen.

R58 In het voorbeeld is het aantal tafels x en het aantal stoelen y genoemd.

   Je kunt ook het aantal tafels t noemen en het aantal stoelen s .

Licht toe dat je dan hetzelfde antwoord krijgt.

59 Roel koopt kaasbollen en bruine bollen bij de bakker. Hij koopt in totaal

 dertien bollen. Een kaasbol kost 1,50 euro en een bruine bol kost

1,20 euro. Hij moet 18 euro afrekenen.

Je gaat twee vergelijkingen met de variabelen x en y opstellen bij deze situatie.

a Wat noem je x ? En wat y ?

b Stel twee vergelijkingen op bij de situatie.

c Druk in beide vergelijkingen y uit in x en stel ze aan elkaar gelijk.

d Los de vergelijking van vraag c op.

e Gebruik de oplossing van vraag d om y te berekenen.

f Hoeveel kaasbollen en hoeveel bruine bollen koopt Roel?

60 In een envelop zitten briefjes van 5 en 10 euro. In totaal zitten er 20

  briefjes in met een totale waarde van 135 euro.

Bereken hoeveel briefjes van 5 euro en hoeveel briefjes van 10 euro er in de envelop zitten.

61 Bij een attractiepark is de entreprijs voor jongeren 5 euro goedkoper

   dan de entreprijs voor volwassenen. Twee jongeren en twee

volwassenen betalen in totaal 80 euro.

Bereken de entreprijs van een volwassene.

A62 Rijwielhandelaar Lentink heeft in de maand april twee typen elektrische

   fietsen in de aanbieding gehad. Type A kostte 1575 euro en type B

kostte 2025 euro. In totaal zijn er in april 38 fietsen van deze typen verkocht en deze brachten in totaal 66 150 euro op.

Bereken hoeveel fietsen van type A en hoeveel fietsen van type B in de maand april zijn verkocht.

A63 Op de verjaardag van Marjan is de gemiddelde leeftijd van de 15
 aanwezige jongens en meisjes 16,4 jaar. De jongens zijn gemiddeld
15,6 jaar en de meisjes 16,8 jaar.

Hoeveel jongens zijn er op de verjaardag?

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan y uitdrukken in x bij een vergelijking van de vorm $px + qy = r$.
- ☐ Ik kan de grafiek tekenen bij een vergelijking van de vorm $px + qy = r$.
- ☐ Ik kan een vergelijking van de vorm $px + qy = r$ opstellen.
- ☐ Ik kan werken met vergelijkingen van de vorm $px + qy = r$ bij praktische situaties.

- OPGAVE C10
THEORIE A
- OPGAVE C11
THEORIE A
- OPGAVE C12a
THEORIE A EN B
- OPGAVE C12b
THEORIE B

- C10**
- a** Maak y vrij bij $1,5x + 2,5y = 15$.
 - b** Druk a uit in b bij $6a - 12b = 24$.
 - c** Maak q vrij bij $4p + 8q = 2$.

- C11** Teken de grafiek bij de vergelijking $3x - 4y = 12$.

- C12** Op een camping wordt een barbecue gehouden. Kinderen betalen €6 en volwassenen €8. In totaal brengt de barbecue €1764 op. Aan de barbecue doen 250 personen mee.
- a** Stel twee vergelijkingen op bij de situatie.
 - b** Bereken hoeveel kinderen aan de barbecue meedoen.

Antwoorden

- C10 a** $y = -0,6x + 6$
b $a = 2b + 4$
c $q = -0,5p + 0,25$
- C11 ***
- C12 a** bijvoorbeeld $x + y = 250$ en $6x + 8y = 1764$
b 118 kinderen

3.5 Interpoleren, extrapoleren en lineaire modellen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt lineair interpoleren en lineair extrapoleren.
- Je kunt werken met een lineair model.
- Je kunt uitkomsten van een model kritisch beoordelen.

064



In de tabel staat informatie over het aantal sportclubs in Nederland.

SPORTCLUBS IN NEDERLAND

jaar	2000	2009	2015	2021
aantal	26 620	28 700	28 210	25 450

- a** Tymon is benieuwd hoeveel sportclubs er in 2012 waren. Hij bedenkt: '2012 ligt halverwege 2009 en 2015, dus in 2012 waren er 28 455 sportclubs.'

Laat zien hoe Tymon aan dat aantal komt. Welke aanname heeft hij gedaan?

In de periode 2015-2021 nam het aantal sportclubs sterk af.

- b** Hoeveel was de totale afname in die periode?
- c** Hoeveel was dan de gemiddelde afname per jaar?
- d** Neem aan dat in de periode 2015-2021 het aantal sportclubs ieder jaar met hetzelfde aantal afnam.
Schat met behulp van deze aanname het aantal sportclubs in 2019.
- e** Neem aan dat de jaarlijkse afname na 2021 hetzelfde blijft als in de periode 2015-2021.
Schat met behulp van deze aanname het aantal sportclubs in 2025.

Theorie A Interpoleren en extrapoleren

Bij een tabel met waarnemingsresultaten kun je tussenliggende waarden schatten. Dat heet **interpoleren**. Bij **extrapoleren** geef je een schatting van een waarde die buiten de serie waarnemingen ligt.

Interpoleren: schatten van een tussenliggende waarde.

Extrapoleren: schatten van een waarde die buiten de gegevens ligt.

Ga je hierbij uit van een lineair verband, dan heet dat **lineair interpoleren** en **lineair extrapoleren**.

Het aantal ijssalons in Nederland neemt al jaren toe. In 2020 waren er 945 ijssalons en in 2023 was dat aantal toegenomen tot 1206.

Het aantal ijssalons in 2022 bereken je met lineair interpoleren als volgt.

In 3 jaar 261 erbij, dus gemiddeld $\frac{261}{3} = 87$ per jaar erbij.

Het jaar 2022 is 2 jaar na 2020, dus in 2022 verwacht je $945 + 2 \cdot 87 = 1119$ ijssalons.

Met lineair extrapoleren kun je op dezelfde wijze schatten hoeveel ijssalons er in het jaar 2027 zijn, namelijk $1206 + 4 \cdot 87 = 1554$.

		+3
t	2020	2023
N	945	1206
		+261

Voorbeeld

Gegeven is de volgende tabel.

jaar	2000	2007	2011	2016	2025
aantal	570	408	181	220	194

- a Bereken het aantal in 2014 met lineair interpoleren. Rond af op gehele.
- b Bereken het aantal in 2032 met lineair extrapoleren. Rond af op gehele.

Aanpak

- a 2014 ligt tussen 2011 en 2016, dus gebruik het gedeelte van de tabel dat hiernaast staat.

		+5
jaar	2011	2016
aantal	181	220
		+39

- b Gebruik de dichtstbijzijnde gegevens om het aantal in 2032 te schatten. Dus gebruik het gedeelte van de tabel dat hiernaast staat.

		+9
jaar	2016	2025
aantal	220	194
		-26

Uitwerking

- a In 5 jaar $220 - 181 = 39$ meer, dus per jaar $\frac{39}{5} = 7,8$ meer.

2014 is 3 jaar na 2011, dus in 2014 is het aantal $181 + 3 \cdot 7,8 \approx 204$.

- b In 9 jaar $220 - 194 = 26$ minder, dus per jaar $\frac{26}{9} = 2,8\ldots$ minder.

2032 is 7 jaar na 2025, dus in 2032 is het aantal $194 - 7 \cdot 2,8\ldots \approx 174$.

65 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

- a** Bereken het aantal in 2027 met lineair extrapoleren. Rond af op gehelen.
b Bereken het aantal in 2004 met lineair interpoleren. Rond af op gehelen.

66 Zie de tabel hieronder.

EINDEXAMENLEERLINGEN MET CHINEES IN HET VAKKENPAKKET

jaar	2014	2017	2021
aantal	55	155	264

- a** Bereken met lineair interpoleren het aantal eindexamenleerlingen met Chinees in 2016. Rond af op gehelen.
b Bereken met lineair extrapoleren het aantal eindexamenleerlingen met Chinees in 2024. Rond af op gehelen.

R67 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

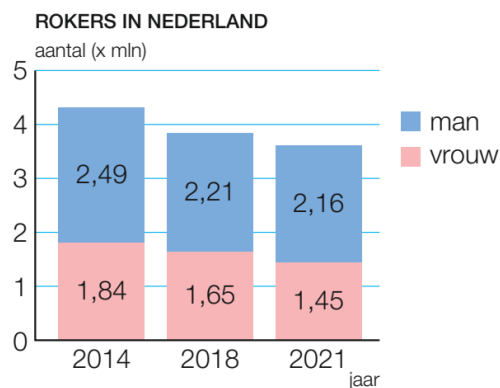
***** Jos berekent het aantal in 2014 door de formule $N = 7,8t + 181$ op te stellen en $t = 3$ in te vullen.

- a** Licht toe dat dit ook een juiste aanpak is.
b Kun je deze formule ook gebruiken om met lineair interpoleren het aantal in 2012 te berekenen? En in 2020? Licht toe.
c Stel een formule op waarbij je met lineair extrapoleren het aantal in 2028 kan berekenen.

A68 De figuur hiernaast gaat over rokers in

Nederland. Geef in deze opgave de antwoorden in miljoenen en rond zo nodig af op twee decimalen.

- a** Bereken met lineair interpoleren het aantal rokende mannen in 2016.
b Bereken met lineair interpoleren het totale aantal rokende mannen en vrouwen in 2020.
c Bereken met lineair extrapoleren het aantal rokende vrouwen in 2011.



A69 Daan maakt een ballonvaart. De boordcomputer meet voortdurend de hoogte en de temperatuur. Zie de tabel hieronder.

TEMPERATUUR TIJDENS BALLONVAART

hoogte in meter	100	150	225	300	350
temperatuur in °C	20,8	20,2	19,2	18,1	17,4

- a** Bereken met lineair interpoleren de temperatuur op 180 meter hoogte.
b Bereken met lineair extrapoleren de temperatuur op 420 meter hoogte. Rond af op één decimaal.
c Bereken met lineair extrapoleren de temperatuur op de grond.

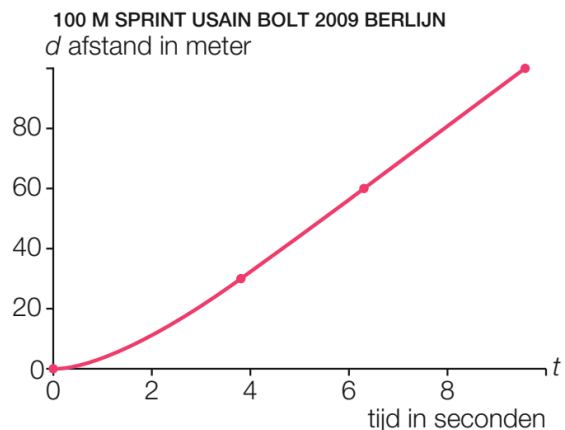
A70 Zie opgave 69.

***** Bereken met lineair interpoleren de hoogte waarop de temperatuur $20,0^\circ\text{C}$ is.

O71 In Berlijn liep Usain Bolt in 2009 de beste tijd ooit op de 100 meter sprint. In de tabel staan zijn tussentijden t in seconden bij verschillende afstanden d in meter.

- a** Bereken met lineair interpoleren welke afstand Bolt heeft afgelegd na 5 seconden. Geef je antwoord in dm nauwkeurig.
- b** Bereken met lineair interpoleren welke afstand Bolt heeft afgelegd na 1 seconde. Geef je antwoord in dm nauwkeurig.
- c** Leg aan de hand van de grafiek uit welke van de schattingen van vraag a en b het beste overeenkomt met de werkelijkheid.
- d** Waarom is lineair interpoleren bij de start van de sprint onverstandig?

t	0	3,78	6,29	9,58
d	0	30	60	100

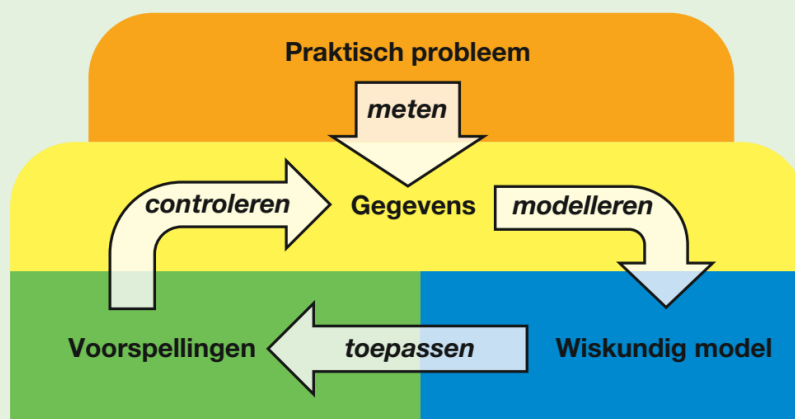


Theorie B Lineaire modellen

In opgave 71 heb je met lineair interpoleren afstanden berekend na 1 seconde en na 5 seconden. Door aan te nemen dat de grafiek vanaf een bepaald punt bij benadering een lijn is maakte je gebruik van een **wiskundig model**.

Wiskundig modelleren kan bijvoorbeeld met een lineair verband.

Bij het gebruik van een wiskundig model is het belangrijk om te controleren of de voorspellingen van het model passen bij de gemeten gegevens. Het proces van het opstellen van een wiskundig model en het aanpassen hiervan heet **modelvorming**. Zie het schema hieronder.



72



Op een winterse dag meet Bart van 7:00 uur tot 21:00 uur elke twee uur de temperatuur. De resultaten zijn verwerkt in de figuur.

- a** Na het verrichten van de metingen is één meetwaarde verloren gegaan en geschat met lineair interpoleren.

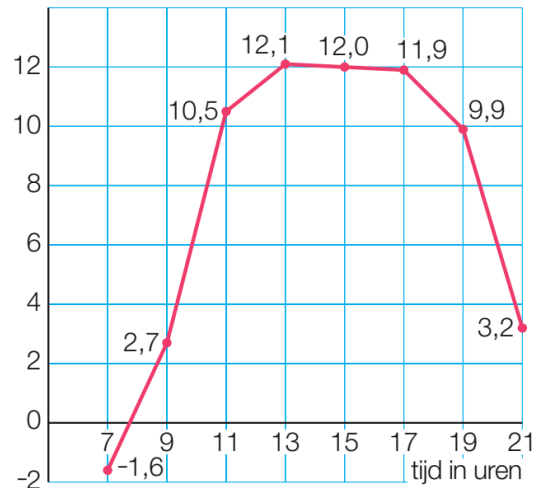
Licht toe welke tijd bij deze meting hoort.

Bart heeft om 19:00 uur met lineair extrapoleren een schatting gemaakt van de temperatuur om 21:00 uur. Zijn schatting is hoger dan de werkelijke temperatuur van $3,2\text{ }^{\circ}\text{C}$.

- b** Leg uit hoe je dit met behulp van de figuur kunt zien.

- c** Bereken hoeveel procent zijn schatting afwijkt van de werkelijke temperatuur.

TEMPERATUURVERLOOP WINTERSE DAG
temperatuur in $^{\circ}\text{C}$



73

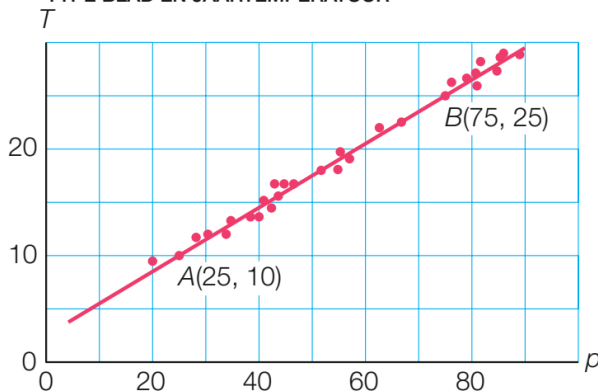


Bij bomen en planten komen gaafrandige en geveerde bladeren voor.

Opmerkelijk is dat in de tropen de meeste planten en bomen gaafrandige bladeren hebben. Verder weg van de evenaar zijn de planten met geveerde bladeren in de meerderheid.

Onderzoek heeft uitgewezen dat het verband tussen de gemiddelde lokale jaartemperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ en het percentage gaafrandige soorten p goed beschreven kan worden met een lineair model. Het lineaire model wordt gebruikt om met fossiele flora de gemiddelde lokale jaartemperatuur in het verleden te bepalen.

TYPE BLAD EN JAARTEMPERATUUR



geveerd

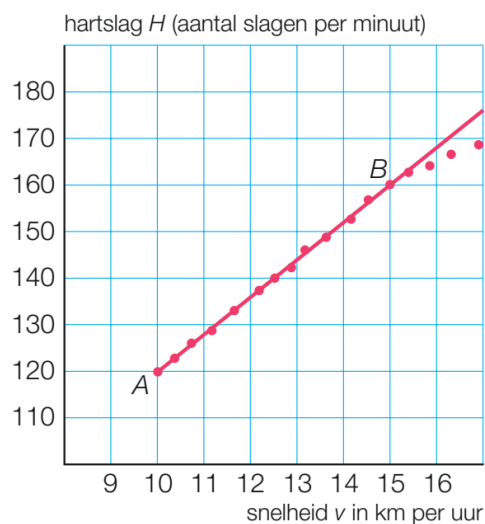


gaafrandig

- a** Stel de formule van het model op. Gebruik de punten A en B van de grafiek.
- b** Bij een onderzoek van fossiele flora uit het Carboon (ruim 300 miljoen jaar geleden) blijkt tussen de 80% en 85% van de planten uit gaafrandige soorten te bestaan. Onderzoek met het lineaire model welke gemiddelde lokale jaartemperaturen hierbij horen.

De Conconitest is een hardlooptest die wordt gebruikt door sporters om te bepalen wanneer er verzuring van de spieren optreedt. Tijdens de test wordt de hartslag gemeten en elke 200 meter wordt de snelheid opgevoerd. Bij bepaalde snelheden bestaat er bij benadering een lineair verband tussen de snelheid v in km per uur en de hartslag H in aantal slagen per minuut. Het punt waar de hartslag begint af te wijken van dit lineaire model heet de anaerobe drempel en op dat moment begint verzuring op te treden.

Kees doet de Conconitest. De meetresultaten zijn uitgezet in de figuur. De lijn is het lineaire model van de hartslag van Kees.



- a** Stel de formule op van het lineaire model. Gebruik de punten A en B .

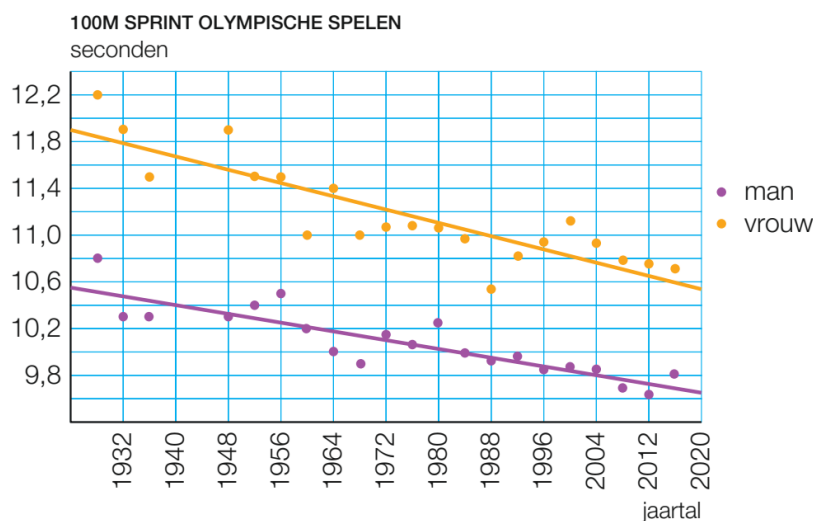
De anaerobe drempel blijkt bij Kees bij 15,8 km/uur en 164 slagen per minuut te liggen.

- b** Bereken hoeveel procent zijn hartslag dan afwijkt van het lineaire model.

Door extra training weet Kees zijn anaerobe drempel te verhogen. Tijdens de Conconitest wordt nu bij een snelheid van 12 km/uur een hartslag van 142 slagen per minuut gemeten. Zijn hartslag in rust (bij $v = 0$) is onveranderd gebleven. Bij een hartslag van 178 slagen per minuut begint verzuring op te treden.

- c** Bereken welke snelheid bij de anaerobe drempel van Kees hoort. Rond af op één decimaal.

Bij het atletiekonderdeel 100 meter sprint op de Olympische Spelen verbeteren de vrouwen zich sneller dan de mannen. Zie de figuur hieronder met de tijden van de vrouwelijke en mannelijke winnaars en de bijbehorende lineaire modellen. De Olympische Spelen worden om de vier jaar gehouden.



Tijdens de Olympische Spelen van 1948 in Londen was de Nederlandse Fanny Blankers-Koen de snelste vrouw op de 100 meter.

- Is dat vergeleken met het model een snelle of langzame tijd? Licht toe.
- Jim Hines was de eerste atleet die bij de Olympische Spelen de 100 meter sprint in minder dan 10 seconden liep. In welk jaar was dat?

Bij het model voor de winnende tijden van de vrouwen hoort de formule $V = -0,0142t + 12,237$ met V in seconden en t in jaren met $t = 0$ in 1900.

- Gebruik het model om te voorspellen in welk jaar tijdens de Olympische Spelen voor het eerst een vrouw de mijlpaal van minder dan 10 seconden zal bereiken.
- De formule bij het model voor de winnende tijden van de mannen is van de vorm $M = at + b$ met M in seconden en t in jaren met $t = 0$ in 1900. Stel de formule op. Gebruik daarbij dat het model bij 1940 een tijd van 10,4 seconden geeft en bij 2004 een tijd van 9,8 seconden.
- Gebruik de modellen om te berekenen in welk jaar tijdens de Olympische Spelen de vrouwen voor het eerst sneller zullen zijn dan de mannen. Welke gemiddelde snelheid in km/uur hoort daarbij?
- Wat zegt het antwoord van vraag e over de bruikbaarheid van deze lineaire modellen om voorspellingen te doen die ver in de toekomst liggen? Licht toe.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan lineair interpoleren en lineair extrapoleren.
- ☐ Ik kan werken met een lineair model.
- ☐ Ik kan uitkomsten van een model kritisch beoordelen.

- OPGAVE C13
THEORIE A
- OPGAVE C14a
THEORIE B
- OPGAVE C14b
THEORIE B

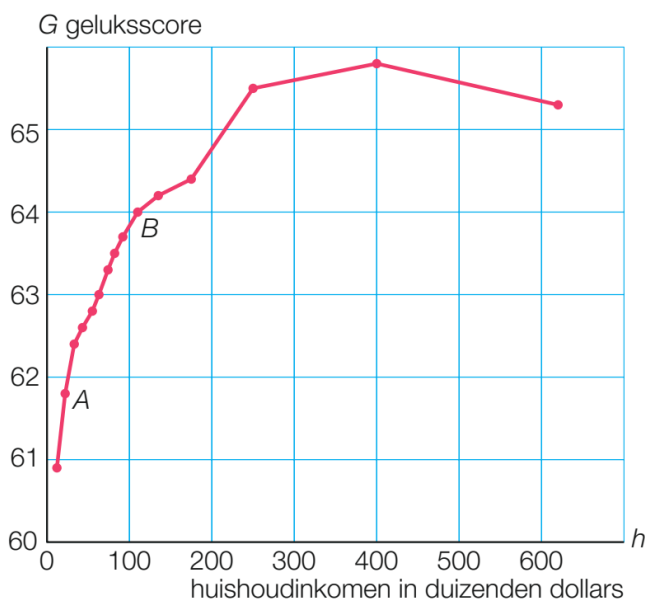
C13 Gegeven is de tabel hiernaast.

- a** Bereken met lineair interpoleren het aantal woningen in 1990. Rond af op duizendtallen.
- b** Bereken met lineair extrapoleren het aantal woningen in 2026.

WONINGEN IN NEDERLAND

jaar	1930	1971	1998	2023
aantal $\times$ 1000	1824	3873	6425	8125

C14 In 2020 is een Amerikaans onderzoek gepubliceerd dat kijkt naar de samenhang tussen inkomen en geluk. In de figuur zie je een grafiek waar de geluksscore G is uitgezet tegen het huishoudinkomen h in duizenden dollars.



h	G
12	60,9
22	61,8
33	62,4
43	62,6
55	62,8
63	63,0
74	63,3
82	63,5
92	63,7
110	64,0
135	64,2
175	64,4
250	65,5
400	65,8
620	65,3

Voor huishoudinkomens van \$22 000 tot en met \$110 000 gaan we uit van het lineaire model $G = a \cdot h + b$.

- a** Gebruik de punten A en B om de formule van G op te stellen.
- b** Voor hogere huishoudinkomens gebruikt een onderzoeker het model $G = 0,002h + 64,046$ voor de geluksscore. Bereken hoeveel procent dit model afwijkt van de tabel bij huishoudinkomens van \$400 000.

Antwoorden

- C13 a** 5669 duizend woningen
b 8329 duizend woningen
- C14 a** $G = 0,025h + 61,25$
b 1,4%

Kennis- en vaardighedentest

3.1 Lineaire formules

- 1** De lijn k gaat door het punt $A(0, -1)$ en is evenwijdig met de lijn $l: y = -0,5x + 4$. Lijn m is de grafiek bij een recht evenredig verband. Het punt $B(-2, 3)$ ligt op lijn m .
- a** Geef de formule van k .
 - b** Stel de formule op van m .
 - c** De grafieken van k en m snijden elkaar in punt $C(1; -1,5)$.
Teken de grafieken van k en m en laat zien dat dit klopt.
- 2** Uit een tuinslang stroomt elk kwartier 105 liter water een zwembad in. Er wordt een stopwatch gestart als er 1 m^3 water in het bad zit.
- a** Stel de formule op voor het aantal liter water W in het zwembad t minuten nadat de stopwatch is gestart.
 - b** Hoeveel water zit er in het zwembad na 2 uur en 20 minuten?
 - c** Hoeveel eerder had de stopwatch gestart moeten worden, opdat er sprake is van een evenredig verband tussen W en t ? Geef je antwoord in seconden nauwkeurig.

3.2 Lineaire formules opstellen

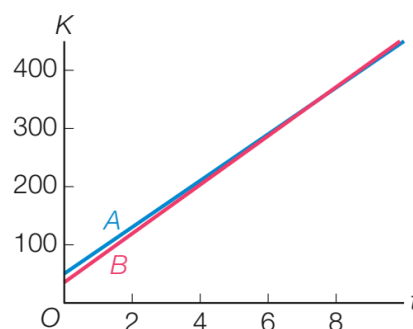
- 3** De lijn k heeft richtingscoëfficiënt 2,4 en gaat door het punt $A(-5, 2)$.
- a** Stel de formule van k op.
- Lijn l gaat door punt A en door punt $B(3, -2)$.
- b** Stel de formule van l op.
 - c** Lijn m hoort bij een evenredig verband en gaat ook door punt A . Punt C ligt op lijn m en recht boven punt B .
Bereken de coördinaten van C .
- 4** Er bestaat een lineair verband tussen het aantal toeschouwers A bij voetbalclub ATC en de entreprijs p in euro's. Bij een prijs van €7,50 komen er 800 toeschouwers, maar dat aantal zakt tot 665 bij een prijs van €9,75.
- a** Stel de formule van A op.
 - b** Bereken het aantal toeschouwers bij een prijs van €11,25.

3.3 Vergelijkingen en ongelijkheden

- 5** Gegeven zijn de lijnen $p: y = 2x - 2$ en $q: y = 3x - 7$.
- a** Bereken het snijpunt van deze lijnen.
 - b** De lijnen p en q hebben elk een snijpunt met de lijn $y = 25$.
Bereken de coördinaten van het rechter snijpunt.

- 6** Nicole vergelijkt de prijzen van twee schilders voor het schilderen van de kozijnen van haar huis. De totale kosten K in euro's voor een klus van t uur worden bij schilder A gegeven door de formule $K_A = 40t + 50$ en bij schilder B door de formule $K_B = 42t + 35$.

- a** Bereken bij welk aantal uren schilder B goedkoper is.
b Bij schilder A betaalde Nicole 500 euro voor de klus. Bereken hoeveel duurder deze klus was geweest bij schilder B. Neem aan dat de schilder even lang over de klus zou hebben gedaan.



3.4 Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

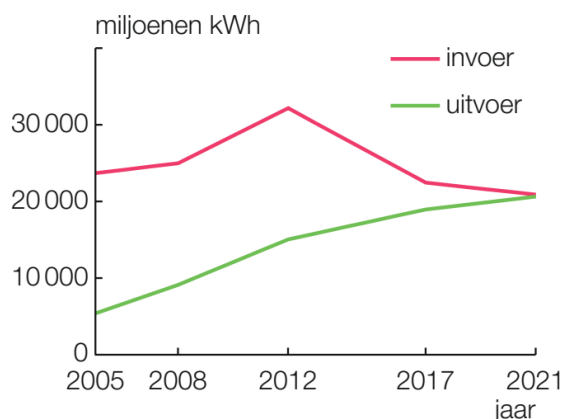
- 7** Rederij Doexen verzorgt rondvaarten. Bij een van de rondvaarten zijn er 80 passagiers aan boord. In totaal betalen deze passagiers €990 voor de rondvaart. Volwassenen betalen €15 voor de rondvaart en kinderen €12. Bereken hoeveel kinderen er aan boord zijn.

3.5 Interpoleren, extrapoleren en lineaire modellen

- 8** De tabel en de bijbehorende figuur geven informatie over de invoer en uitvoer van elektriciteit in Nederland in miljoenen kWh per jaar.

INVOER EN UITVOER IN MILJOENEN KWH

jaar	invoer	uitvoer
2005	23 693	5 398
2008	24 966	9 116
2012	32 155	15 046
2017	22 444	18 944
2021	20 885	20 632



- a** Bereken met lineair interpoleren de uitvoer van elektriciteit in 2011.
b Bereken met lineair extrapoleren de invoer van elektriciteit in 2025.
c Bereken met lineair interpoleren het verschil tussen de invoer en uitvoer van elektriciteit in 2015.
d Stel formules op voor lineaire modellen bij de invoer I en de uitvoer U in miljoenen kWh per jaar met $t = 0$ in 2005. Gebruik de gegevens van 2005 en 2021.
e Past een lineair model beter bij de invoer of bij de uitvoer van elektriciteit? Licht toe.
f Gebruik de modellen van vraag d om de invoer en uitvoer van elektriciteit in 2030 te berekenen. Geef je antwoord in miljoenen kWh en rond af op gehelen.

Gemengde opgaven

- 1** Bij het onderhoud van een zwembad in de tuin van een villa wordt het water uit het bad gepompt. Voordat het pompen begon, zat er 110 m^3 water in het bad en na twee uur is er 30 000 liter weggepompt. Er bestaat een lineair verband tussen het aantal liter water W in het zwembad en de tijd t in minuten.
- a** Stel de formule op van W . Neem t in minuten met $t = 0$ op het moment dat men begint te pompen.
 - b** Bereken hoe lang het duurt totdat er nog 72 m^3 water in het zwembad zit.
 - c** Na 7 uur pompen is het zwembad nog niet leeg.
Bereken hoeveel minuten het leegpompen dan nog duurt.

- 2** Als je muziek downloadt van een streamingdienst kunnen de bestanden erg groot zijn. Je kunt ervoor kiezen om de bestanden in een kleiner formaat op te slaan, maar dan gaat wel de kwaliteit achteruit. De grootte en kwaliteit zijn afhankelijk van de bitrate. Hoe hoger de bitrate, hoe hoger de kwaliteit. De bitrate wordt gegeven in kb/s. De bestandsgrootte van een nummer is evenredig met de bitrate. Een bepaald nummer heeft een bestandsgrootte van 6,4 MB als het wordt opgeslagen met een bitrate van 320 kb/s.
- a** Druk de bestandsgrootte M van dit bestand uit in de bitrate B , met M in MB en B in kb/s.
 - b** Bereken de bestandsgrootte in MB als dit nummer wordt opgeslagen met een bitrate van 128 kb/s.

Sinds de opkomst van streaming van muziek zitten de inkomsten van de muziekindustrie in de lift. Zie de tabel.

INKOMSTEN UIT STREAMING IN NEDERLAND

jaar	2012	2015	2017	2022
inkomsten in miljoenen euro's	17,8	61,3	108,6	223,9

- c** Bereken met lineair interpoleren de inkomsten uit streaming van muziek in Nederland in 2014.
- d** Bereken met lineair extrapoleren de inkomsten uit streaming van muziek in Nederland in 2025. Rond af op miljoenen euro's.

- 3**
- a** Een marktkoopman verkoopt appels en peren. Hij verkoopt in totaal 305 kg en zijn opbrengst is € 400. Stijn koopt bij deze marktkoopman een kg appels en een kg peren en moet daarvoor 2,75 euro afrekenen. De peren zijn per kg 25 cent goedkoper dan de appels.
Bereken hoeveel kg appels de marktkoopman in totaal verkoopt.
 - b** In een schoolkantine is de vegetarische wrap 25% goedkoper dan de wrap met vlees. Op een dag worden 22 vegetarische wraps en 18 wraps met vlees verkocht voor 193,20 euro.
Bereken hoeveel een wrap met vlees kost.

- 4** De in Nederland gebruikte schoenmaten vinden hun oorsprong in Frankrijk. Uitgangspunt was een Franse lengtemaat: de steek. De Franse steek is 6,67 mm. De schoenmaat geeft de lengte van de schoen in Franse steken aan.

- a** Is de schoenmaat evenredig met de lengte van een schoen in mm?
b Hoeveel mm hoort bij schoenmaat 43? Rond af op gehelen.

In Nederland wordt regelmatig het Engelse schoenmaatsysteem gebruikt. Zie de tabel. Er bestaat een lineair verband tussen E en F .

SCHOENMATEN

Engelse maat E	4	6	8	10	12
Franse maat F	37	39,5	42	44,5	47

- c** Is E evenredig met F ? Licht toe.
d Stel de formule van F op.
e Geef de Franse maat afgerond op halven bij een Engelse maat van 7,5.

- 5** Bob bestelt meerdere gordijnen op de website van Gordijnen & Rails. Bob komt op de website deze tabel tegen.

type plooï	breedte stof per meter rails	toeslag per meter stof	totale prijs gordijn
enkel	210 cm	geen	totale stofprijs + totale toeslag
dubbel	230 cm	2,- euro	
driedubbel	260 cm	4,- euro	
plat	310 cm	4,50 euro	

Je kunt met behulp van de tabel berekenen dat een gordijn met een dubbele plooï voor een rails van twee meter een breedte heeft van 460 cm. Als de stofprijs 60 euro per meter is, dan zijn de totale kosten van dit gordijn dus $4,6 \cdot 60 + 4,6 \cdot 2 = 285,20$ euro.

De breedte B in cm van een gordijn is dus afhankelijk van de lengte r in cm van de bijbehorende gordijnrail en het type plooï.

- a** Een van de gordijnen komt aan een rails van 150 cm te hangen. Bob wil hiervoor een gordijn met enkele plooï.
 Bereken de breedte van het gordijn.
b Stel de formule op in de vorm $B = ar$ voor een gordijn met een dubbele plooï.
c Bob bestelt een gordijn met driedubbele plooï voor een rails van 240 cm. De prijs van de stof is 54 euro per meter.
 Bereken de totale kosten van dit gordijn.
d De stof van een gordijn kost p euro per meter en wordt in platte plooï besteld voor een rails van één meter.
 Stel de formule op van de totale kosten K van het gordijn in euro's in de vorm $K = ap + b$.

6 In de figuur zie je het verband tussen de productiekosten K per dag in euro's en de dagproductie q . De grafiek bestaat uit drie stukken.

a Het eerste stuk begint in $(0, 500)$ en eindigt in $(1000, 1200)$.

Stel de formule op van dit gedeelte.

b Doe dit ook voor de gedeelten II en III.

c Vul in.

Productiekosten:

$K = \dots\dots\dots q + \dots\dots\dots$ voor q vanaf 0 tot en met 1000

$K = \dots\dots\dots$ voor q vanaf $\dots\dots\dots$ tot en met $\dots\dots\dots$

$K = \dots\dots\dots$ voor q vanaf $\dots\dots\dots$ tot en met $\dots\dots\dots$

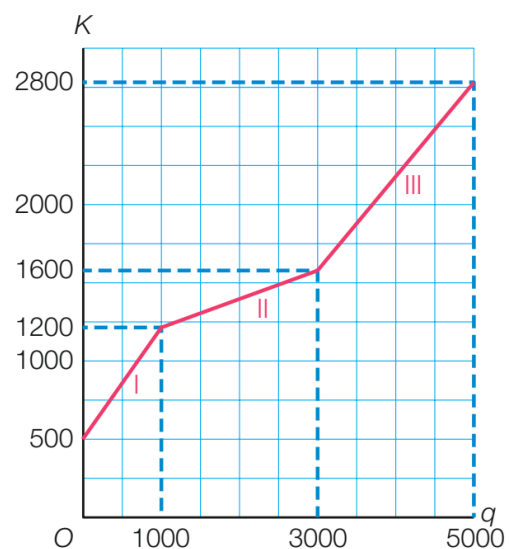
d Hoeveel procent zijn de productiekosten bij een dagproductie van 3500 stuks meer dan bij een dagproductie van 1500 stuks?

e De artikelen worden verkocht voor €2,60 per stuk.

Bereken de winst bij een dagproductie van 2600 stuks.

Sinds kort is de dagproductie meer dan 5000 stuks. Er blijkt dat bij een dagproductie van 7000 stuks de productiekosten 3500 euro per dag zijn.

f Bereken met behulp van lineair interpoleren de productiekosten bij een dagproductie van 6300 stuks.



7 De hoeveelheid huishoudelijk afval per inwoner is in Nederland in de periode 1970-2000 voortdurend toegenomen, maar daarna nam het af. Zie de tabel.

HUISHOUDELIJK AFVAL IN AANTAL KG PER INWONER PER JAAR

jaar	1970	1988	1995	2000	2004	2012	2022
aantal kg	281	395	482	566	561	518	461

a Bereken met lineair interpoleren de hoeveelheid huishoudelijk afval per inwoner in 1992. Rond af op gehele.

b Bereken met lineair extrapoleren de hoeveelheid huishoudelijk afval per inwoner in 2025. Rond af op gehele.

Joris gebruikt de gegevens van 1970 en 2000 om het model

$N = 9,5t + 281$ op te stellen.

c Laat zien hoe Joris aan dit model komt.

d Waarom past het model van Joris vanaf een bepaald moment niet meer bij de werkelijkheid?

e Hoeveel procent wijkt het model van Joris af van de werkelijkheid in het jaar 2004?

- 8** Twee producenten van stroopwafels waren jaren in een race verwickeld wie het eerste 100 miljoen stroopwafels geproduceerd zou hebben. Beide fabrieken openden tegelijk op 1 januari 1999. De eerste jaren leek producent A te gaan winnen met een jaarlijkse productie van 4 miljoen stroopwafels tegenover de 3 miljoen stroopwafels die producent B jaarlijks produceerde. Door een innovatie in productietechniek won producent B echter de race door op 1 januari 2023 stroopwafel nummer 100 miljoen te produceren. De innovatie bij producent B maakte een productie van 5 miljoen stroopwafels per jaar mogelijk. Voor fabrikant A geldt de formule $N_A = 4t$ voor het totale aantal geproduceerde stroopwafels in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1999.

a Stel de formules op van N_B voor en na de innovatie en vul in.

$N_B = \dots\dots\dots$ voor t tot en met $\dots\dots\dots$

$N_B = \dots\dots\dots$ voor t groter dan $\dots\dots\dots$

b Na de innovatie wist bedrijf B zijn achterstand om te zetten in een voorsprong.

Bereken hoeveel jaar na de innovatie dit was.

- 9** Antropologen kunnen de lichaamslengte van een mens schatten aan de hand van de lengte van een bot dat ze bij opgravingen vinden. Daarbij gebruiken ze onder andere de humerus, dat is het bot dat van de elleboog naar de schouder loopt. Voor de lichaamslengte L in cm en de lengte van de humerus x in cm worden de volgende modellen gebruikt.

Mannen: $L_M = 2,89x + 70,6$

Vrouwen: $L_V = 2,75x + 71,5$

De modellen zijn alleen bruikbaar als de gevonden humerus tussen 10 en 40 cm lang is.

- a** Bij opgravingen vindt men een humerus met een lengte van 31 cm. Men neemt aan dat deze humerus van een man afkomstig is. Hoe lang was deze man? En als deze humerus van een vrouw was geweest, hoe lang zou deze vrouw dan zijn geweest? Rond af op gehele cm.
- b** Hoeveel cm is de humerus van een man met een lichaamslengte van 180 cm? En van een vrouw van dezelfde lichaamslengte? Rond af op één decimaal.
- c** Is het volgens de modellen mogelijk dat een man en een vrouw met dezelfde lichaamslengte ook dezelfde lengte humerus hebben? Licht toe.
- d** Bij welke lengte van de humerus is er volgens de formules een verschil van 4 cm in lichaamslengte tussen mannen en vrouwen?

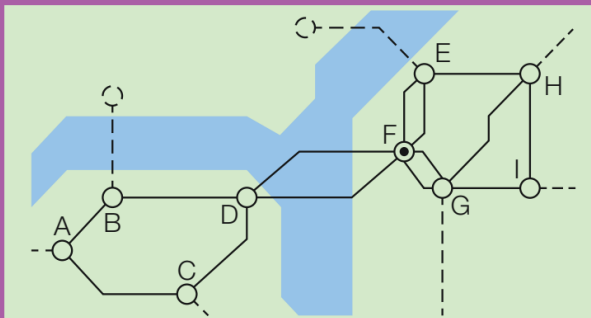




4

Combinatoriek

Zie de metrokaart. Ann reist samen met vier vrienden van station A naar H. Op station F willen ze een broodje halen. Ze kunnen op vier manieren van A naar F.



Op hoeveel manieren kunnen ze van F naar H?

- A: 3 B: 4 C: 6 D: 8

Op hoeveel manieren kunnen ze van A naar H?

- A: 8 B: 24 C: 60 D: 120

Van de groep passen er maar drie in de metrotrein die gaat vertrekken. Hoeveel verschillende gezelschappen van drie personen kunnen mee?

- A: 3 B: 8 C: 10 D: 15

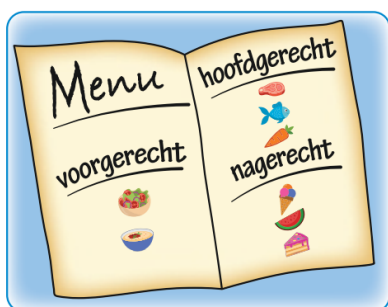
4.1 Regels bij telproblemen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de vermenigvuldigingsregel samen met de somregel gebruiken.
- Je kunt het aantal mogelijkheden berekenen in situaties met of zonder herhaling.

01
□ ◎ *

In een restaurant kiest Annette voor een driegangendiner. Zie de menukaart hieronder. In het boomdiagram hiernaast staan alle mogelijke driegangendiners overzichtelijk weergegeven.



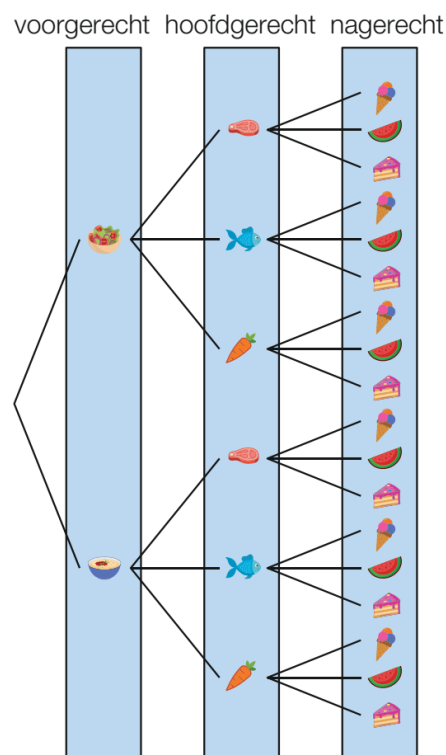
- a Uit hoeveel verschillende driegangendiners kan Annette kiezen? En hoeveel driegangendiners zijn er zonder vis?

In plaats van het boomdiagram kun je ook het volgende wegendiagram tekenen.



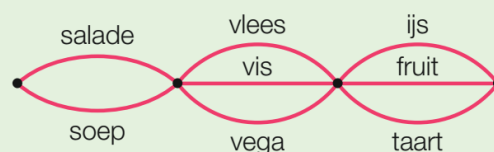
Je kunt met het wegendiagram berekenen dat er $2 \cdot 3 \cdot 3$ verschillende driegangendiners zijn.

- b Hoe kun je met het wegendiagram het aantal driegangendiners zonder vis berekenen?
- c Freek wil een twee- of driegangendiner. Bij een tweegangendiner zit geen nagerecht. Hoeveel mogelijkheden heeft hij in totaal?



Theorie A De vermenigvuldigingsregel en de somregel

In opgave 1 werd gevraagd uit hoeveel verschillende driegangendiners Annette kan kiezen. Haar keuzemogelijkheden voor het driegangdiner zijn overzichtelijk te presenteren in een wegendiagram.

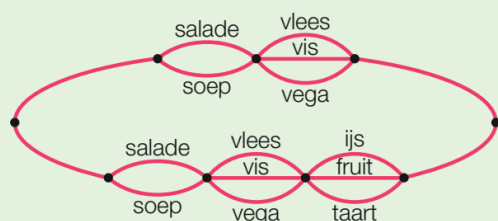


Om het wegendiagram te doorlopen kies je een eerste gerecht *en* een tweede gerecht *en* een derde gerecht. Daarom gebruik je de **vermenigvuldigingsregel**. Je vermenigvuldigt de opeenvolgende aantallen keuzemogelijkheden. Aan het wegendiagram kun je zien dat Annette $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ verschillende mogelijkheden voor het driegangendiner heeft.

Vuistregel

Bij *en* vermenigvuldig je.

In opgave 1 had Freek de keuze uit een twee- of driegangendiner. Daarbij hoort het volgende wegendiagram.



In dit wegendiagram zijn twee verschillende situaties te onderscheiden. Je kiest voor een tweegangendiner *of* je kiest voor een driegangendiner. In dit geval gebruik je behalve de vermenigvuldigingsregel ook de **somregel**. Bij de somregel tel je het aantal mogelijkheden van de verschillende situaties bij elkaar op.

Zo krijg je het totale aantal keuzemogelijkheden:
aantal = $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 = 24$.

Vuistregel

Bij *of* tel je op.

Voorbeeld

Bij de keuze voor een warme drank kan gekozen worden uit koffie, thee of chocolademelk. De koffie en chocolademelk kunnen met of zonder slagroom besteld worden en bij de thee is er keuze uit drie smaken. Bereken het aantal mogelijkheden voor een warme drank.

Aanpak

Teken eventueel een wegendiagram om het aantal mogelijkheden in beeld te brengen. Bereken vervolgens het aantal mogelijkheden met de vermenigvuldigingsregel en de somregel.

Uitwerking

aantal = $2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7$



2 Zie de figuur.

Tussen de plaatsen P en Q stroomt een rivier die bij M en N kan worden overgestoken. Op hoeveel manieren kun je van P naar Q?



3 Gijs en Liz spreken af om samen iets te gaan doen.

Ze hebben tijd om één film te kijken en kunnen kiezen uit vier films. In plaats van een film kijken, kunnen ze ook een wandeling maken en daarna een bordspel doen, waarbij ze uit twee wandelingen kunnen kiezen en uit drie bordspellen.

- a** Bereken hoeveel mogelijkheden ze hebben om samen iets te doen. Teken eventueel een wegendiagram om de situatie overzichtelijk weer te geven.

Sienna en Morris willen samen iets vergelijkbaars doen, maar zij kunnen kiezen uit tien films, vijf wandelingen en twaalf bordspellen.

- b** Waarom is het niet handig om hierbij een wegendiagram te tekenen?
c Bereken hoeveel mogelijkheden Sienna en Morris hebben om samen iets te doen.



4 Woonwarenhuis Comfi verkoopt kasten van het type KD. Deze zijn er in de breedtematen 40 cm, 60 cm en 80 cm. De kasten zijn in de kleuren wit, zwart, rood en bruin verkrijgbaar. Elke kast heeft een deur van hout, matglas of helder glas, waarbij de houten deuren leverbaar zijn in de kleuren wit, zwart, rood en groen.

Hoeveel kasten van het type KD kun je samenstellen?

5 Een docent stelt een toets samen uit een bestand met toetsopgaven. Het aantal beschikbare opgaven per paragraaf zie je in de tabel.

TOETSOPGAVEN

paragraaf	1	2	3	4
aantal	3	2	4	3

Hoeveel toetsen kan de docent samenstellen uit dit bestand als

- a** ze uit elke paragraaf één opgave voor de toets kiest
b ze één opgave kiest uit paragraaf 1 of 2 en één opgaven uit elk van de andere paragrafen?

De docent maakt een extra opgave voor het toetsbestand en kan nu 108 verschillende toetsen samenstellen met uit elke paragraaf één opgave.

- c** Onderzoek bij welke paragraaf ze de extra opgave heeft gemaakt.

A6



In tapasrestaurant Mediterana hebben ze tapas uit de landen Spanje, Italië en Portugal. Voor elk land heb je de keuze uit 15 tapas met keuze uit vlees, vis en veganistische gerechten. De verdeling zie je in de tabel.

Coen gaat met zijn vrienden bij Mediterana eten. Ze hebben afgesproken de eerste ronde Spaanse tapas te eten, de tweede ronde Italiaanse tapas en de laatste ronde tapas uit Portugal. Coen mag elke ronde een van de tapas uitkiezen. Hoeveel mogelijkheden heeft Coen als hij

- a een Italiaans visgerecht wil en verder twee vlees tapas
- b geen vlees tapas wil
- c drie vlees of drie vis of drie veganistische tapas wil
- d een veganistische tapa en twee vis tapas wil?

	vlees	vis	vegan
Spaans	8	4	3
Italiaans	5	7	3
Portugees	4	7	4



A7



De RDW is de Nederlandse overheidsdienst die de registratie van gemotoriseerde voertuigen verzorgt. Dat gaat met behulp van een kenteken, dat is een unieke cijfer- en lettercombinatie die op de voor- en achterkant van een gemotoriseerd voertuig moet worden bevestigd. De RDW bepaalt hoeveel letters en cijfers op de kentekens moeten staan en in welke volgorde. Elke paar jaar wordt een nieuwe serie kentekens in gebruik genomen. Zie de tabel hiernaast.

- a Hoeveel verschillende kentekens waren er in de eerste serie mogelijk?

In 1965 nam de RDW een nieuwe serie in gebruik en in 1973 weer.

- b Hoeveel kentekens kon de RDW in totaal uitgeven vóór 1973?

Vanaf de vierde serie gebruikt de RDW geen klinkers (A, E, I, O, U en Y) meer in de kentekens. De letters C en Q gebruikt de RDW ook niet, omdat deze letters te veel op een 0 lijken.

- c Hoeveel verschillende kentekens waren er mogelijk in serie 5?

Serie	Jaartal	Combinatie
1	1951	XX-99-99
2	1965	99-99-XX
3	1973	99-XX-99
4	1978	XX-99-XX
5	1991	XX-XX-99
6	1999	99-XX-XX
7	2005	99-XXX-9
8	2009	9-XXX-99
9	2006	XX-999-X
10	2008	X-999-XX
11	2015	XXX-99-X
12	2021	X-99-XXX
13	2016	9-XX-999
14	2019	999-XX-9

X = letter, 9 = cijfer

A8 Zie opgave 7.

***** In serie 7 werden voor het eerst drie letters achter elkaar op het kenteken gezet. De volgende drie lettercombinaties worden niet door de RDW uitgegeven: GVD, KKK, KVT, LPF, NSB, PKK, PSV, TBS, PVV, SGP en VVD.

- a** Hoeveel verschillende kentekens waren er mogelijk in serie 7?
- b** Hoeveel kentekens met de letters RDW (in deze volgorde en zonder streepjes) zijn er in totaal mogelijk in de eerste 14 series?

O9 Drie vrienden spelen een spel waarbij elke speler mag kiezen uit één van de acht verschillende karakters.

Hoeveel situaties zijn mogelijk wanneer

- a** elke speler een verschillend karakter moet kiezen
- b** karakters vaker gekozen mogen worden?



Theorie B Met of zonder herhaling

Het is bij telproblemen belangrijk je af te vragen of **herhalingen** zijn toegestaan.

In opgave 9 kozen drie spelers uit acht verschillende karakters.

Zonder herhaling

Als karakters niet vaker gekozen mogen worden, heb je te maken met een situatie zonder herhaling.

Het aantal manieren om de karakters te verdelen is

$$\begin{array}{ccccccc} \text{aantal} = & & 8 & & \times & & 7 & & \times & & 6 & & = 336 \\ & & \uparrow & & & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\ \boxed{\text{De eerste speler kiest uit 8 karakters.}} & & & & \boxed{\text{Daarna kiest de tweede speler uit 7 karakters.}} & & & & \boxed{\text{Ten slotte kiest de derde speler uit 6 karakters.}} \end{array}$$

Met herhaling

Als karakters wel vaker gekozen mogen worden, heb je te maken met een situatie met herhaling.

Het aantal manieren om de karakters te verdelen is

$$\begin{array}{ccccccc} \text{aantal} = & & 8 & & \times & & 8 & & \times & & 8 & & = 512 \\ & & \uparrow & & & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\ \boxed{\text{De eerste speler kiest uit 8 karakters.}} & & & & \boxed{\text{De tweede speler kiest ook uit 8 karakters.}} & & & & \boxed{\text{De derde speler kiest ook uit 8 karakters.}} \end{array}$$

Voorbeeld

Een bedrijf laat een nieuwe website maken. De achtergrond van de website moet bestaan uit drie gekleurde horizontale banen. Voor de kleur van de banen wordt gekozen uit vijf kleuren.

Hoeveel mogelijke achtergronden voor de website zijn er als

- a alle banen een verschillende kleur hebben
- b twee aan elkaar grenzende banen niet dezelfde kleur mogen hebben?

Op de website komen ook vier gekleurde kaders. Hiervoor wordt gekozen uit zes kleuren.

- c Hoeveel mogelijke manieren zijn er om de kaders te kleuren als alle kaders dezelfde of juist een verschillende kleur moeten hebben?

Uitwerking

a aantal = $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b aantal = $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$

c aantal = $6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 366$

Voor de derde baan zijn weer vier kleuren mogelijk.

10



Landenvlaggen zijn een symbool voor nationale eenheid. Ze zeggen vaak wat over het land en zijn geschiedenis. Veel landen hebben een vlag met drie verticale banen.

In deze opgave beperken we ons tot de kleuren zwart, wit, blauw, rood, groen, geel en oranje.

- a Hoeveel vlaggen met drie verticale banen zijn te vormen als banen verschillende kleuren hebben?
- b Hoeveel vlaggen met drie verticale banen zijn met deze kleuren te vormen als twee aan elkaar grenzende banen verschillende kleuren hebben.

De vlag van Denemarken bestaat uit een kruis met vier vlakken.

- c Op hoeveel manieren is dit patroon te kleuren als het kruis een andere kleur heeft dan elk van de vier vlakken, waarbij de vier vlakken van kleur mogen verschillen?



11



Bij een uitwisseling maakt een groep van acht Nederlandse en tien Franse leerlingen een wandeling door Lille. Eén leerling maakt foto's, één leerling maakt een verslag en één leerling bepaalt de route.

Op hoeveel manieren zijn drie leerlingen aan te wijzen als

- a Nederlandse leerlingen de foto's en het verslag maken en een Franse leerling de route bepaalt
- b een Franse leerling de route bepaalt en het verder niet uitmaakt
- c de foto's en het verslag niet allebei door Franse leerlingen en niet allebei door Nederlandse leerlingen worden gemaakt?

- 12** * Hoeveel routes zijn er in de figuur hiernaast als je begint en eindigt in A en zowel L als R wilt bezoeken, waarbij je elke weg maar één keer mag gebruiken?



- A13** Mattheijs organiseert een filmavond voor zijn vrienden.

Op deze avond worden drie films gedraaid van verschillende genres uit de film-top-25. In de tabel zie je hoe vaak elk genre in de top-25 voorkomt.

- Hoeveel mogelijkheden zijn er om de avond te vullen als
- a ze eerst naar een tekenfilm kijken, dan naar een comedy en als laatste naar een horrorfilm
 - b ze eerst naar een comedy en als laatste naar een drama kijken?

Marlies organiseert een filmavond waarop naar drie verschillende films uit dezelfde top-25 wordt gekeken.

Hoeveel mogelijkheden zijn er als

- c ze eerst een horrorfilm, vervolgens een actiefilm en ten slotte weer een horrorfilm kijken
- d één van de drie films een actiefilm is?

DE FILM-TOP-25

genre	aantal
drama	4
comedy	5
actie	7
horror	4
romantiek	3
tekenfilm	2

- A14** In deze opgave gaat het om getallen van vier cijfers, waarin alleen de cijfers 3, 4, 5, 6, 7 en 8 voorkomen.

Hoeveel van die getallen zijn er in het geval

- a elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
- b elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal groter dan 6000 moet zijn
- c elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden
- d elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal tussen 6000 en 6500 moet liggen?

- A15** Roel ontwerpt een spel waarbij de speler vier keer met één dobbelsteen gooit. Er zijn drie situaties die punten opleveren.

- 1 Alle vier de ogen aantallen zijn verschillend.
- 2 Er is geen enkele keer 6 ogen voorgekomen.
- 3 De dobbelsteen viel nooit twee worpen achter elkaar op hetzelfde ogenantal.

Roel wil dat een situatie die vaker voorkomt, minder punten oplevert dan een situatie die minder vaak voorkomt.

Bereken welke van de drie situaties het meeste punten oplevert.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de vermenigvuldigingsregel samen met de somregel gebruiken.
- ☐ Ik kan het aantal mogelijkheden berekenen in situaties met of zonder herhaling.

► OPGAVE C1
THEORIE A

► OPGAVE C2
THEORIE B

C1 Een schoenfabrikant laat je zelf schoenen samenstellen. Je kunt kiezen uit 3 standaardmodellen en 2 premiummodellen. Bij het standaardmodel kun je voor de veters en de kleuraccenten op de schoen beide kiezen uit 5 kleuren, maar is het logo op de schoen altijd zwart. Bij de premiummodellen heb je voor veters en kleuraccenten beide 6 keuzes en is het logo goud- of zilverkleurig. Bereken hoeveel verschillende schoenen je zo kunt samenstellen.

C2 In een bedrijf krijgt elk artikel een code. Bij het coderen gebruikt men de letters *o*, *p*, *q*, *r*, *s* en *t*. Een voorbeeld van een drielettercode is *spp*.

- a** Hoeveel drielettercodes zijn mogelijk als
 - elke letter maar één keer gebruikt mag worden
 - elke letter vaker gebruikt mag worden?
- b** Hoeveel vierlettercodes zijn mogelijk waarbij niet twee dezelfde letters naast elkaar staan?
- c** Het bedrijf gebruikt per artikel uitsluitend een vierlettercode waarbij herhalingen zijn toegestaan of een vijflettercode waarbij herhalingen niet zijn toegestaan. Hoeveel codes zijn mogelijk?

Antwoorden

C1 219

C2 a 120

216

b 750

c 2016

4.2 Permutaties en combinaties

Kennis en vaardigheden

- Je kunt een faculteit, een aantal permutaties en een aantal combinaties berekenen.
- Je kunt herkennen of je met permutaties of combinaties te maken hebt en je kunt het bijbehorende aantal mogelijkheden berekenen.
- Je kunt de vermenigvuldigings- en somregel gebruiken in situaties waar je met permutaties en combinaties te maken hebt.

Theorie A Permutaties

Voor het organiseren van een feestavond melden zich acht leerlingen aan. We noemen ze A, B, C, D, E, F, G en H. Uit deze acht leerlingen worden er drie gekozen: de eerste zorgt voor het drinken, de tweede voor de hapjes en de derde voor de muziek.

We vragen ons af op hoeveel manieren de drie leerlingen gekozen kunnen worden. Het antwoord volgt uit de vermenigvuldigingsregel. Het aantal manieren is $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Een mogelijke verdeling is BDF. We noemen BDF een **rangschikking** van drie leerlingen uit acht leerlingen. Een ander woord voor rangschikking is **permutatie**.

Dus het aantal permutaties van 3 uit 8 is $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Bij een permutatie heb je te maken met een situatie zonder herhaling.

Het aantal permutaties van 4 uit 7, dus het aantal rangschikkingen van vier dingen die je uit zeven dingen kiest, is $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Het aantal permutaties van 10 dingen, dus het aantal rangschikkingen van 10 dingen is $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$. Een handige notatie voor dit product is $10!$ (spreek uit: 10 **faculteit**). Dus $10! = 3\,628\,800$. En zo is $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Het aantal permutaties van 7 dingen, dus het aantal rangschikkingen van zeven dingen is $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

De GR heeft opties waarmee je faculteiten en aantallen permutaties kunt berekenen.

- TI $!$ en nPr vind je via f2.
- Casio $!$ en nPr vind je in het OPTN-PROB-menu.
- NumWorks Faculteit en Permutatie vind je in de toolbox bij Kansrekening-Combinatoriek.
- HP Factorieel en Permutatie vind je bij Kans in het werksetmenu ( Wisk.

Voorbeeld

Aan een hardloophwedstrijd doen 16 atleten mee.

- a Op hoeveel manieren kunnen de gouden, de zilveren en de bronzen medaille bij deze atleten terecht komen?
- b In hoeveel volgorden kunnen de 16 atleten de finish passeren?
- c Hoeveel mogelijkheden zijn er om een top-8 van de atleten samen te stellen?

Uitwerking

- a aantal = $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$
- b aantal = $16! \approx 2,1 \cdot 10^{13}$
- c aantal = $16 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 9 = 518918400$

↑
Gebruik 16P8 of permute(16, 8) op de GR.



16



- a Simone heeft twaalf bordspellen. Ze stelt een top-5 samen.

Op hoeveel manieren kan dat?

- b Bij een spellentoernooi staan 56 stoelen. Er komen 23 spelers de zaal binnen. Elke speler neemt plaats op een stoel.

Op hoeveel manieren kan dat?

- c Voor een spelavond nemen zes vriendinnen ieder een verschillend bordspel mee. Ze zullen elk spel één keer spelen.

Hoeveel volgorden zijn mogelijk?



17



- a Martin is de viercijferige pincode van zijn bankpas vergeten, maar hij weet nog wel dat alle cijfers verschillend zijn.

- a Hoeveel procent van alle mogelijke pincodes bestaat uit vier verschillende cijfers?

- b Hij herinnert zich na een tijdje dat de cijfers 2, 5, 8 en 9 in zijn code voorkomen.

Hoeveel verschillende pincodes zijn er met deze cijfers mogelijk?

A18



- a Luus heeft een muziekplaylist gemaakt met haar tien favoriete nummers. De totale speelduur van de playlist is 28 minuten en 12 seconden. Ze luistert altijd op shuffle, de tien nummers worden dan in een willekeurige volgorde afgespeeld.

Bereken hoeveel jaar Luus nodig zou hebben om de playlist op alle mogelijke verschillende volgordes achter elkaar te beluisteren.

A19 De selectie van het eerste team van volleybalvereniging Avanti bestaat uit negen spelers. Bij het begin van de competitie wordt een foto van de selectie gemaakt. De fotograaf zet de spelers op een rij.

- a** Hoeveel rijen zijn mogelijk?
- b** Op hoeveel manieren kun je een aanvoerder en een reserveaanvoerder kiezen?
- c** Voor de wedstrijd tegen Smash deelt de trainer de shirts met de rugnummers 1 tot en met 6 uit.
Op hoeveel manieren kan dat?

R20 Een bedrijf gebruikt codes met de letters a, b, c, d, e en f .

⊙* Bedenk een vraag waarbij er

- a** $6!$ codes zijn
- b** 6^4 codes zijn
- c** $6 \cdot 5 \cdot 4$ codes zijn
- d** 6^3 codes zijn.

O21 Katya, Linde en Marit zitten op het schoolplein. De conciërge vraagt of twee van hen kunnen helpen met het tillen van een tafel. Katya denkt dat er zes verschillende paren te vormen zijn om te helpen tillen. Zie hiernaast.

Welke fout maakt Katya? Hoeveel verschillende paren zijn er?

Katya en Linde
Katya en Marit
Linde en Marit
Linde en Katya
Marit en Katya
Marit en Linde

Theorie B Combinaties

Na een schoolfeest maken drie leerlingen de zaal schoon. De leerlingen Annelies, Bert, Casper, Daan en Evelien stellen zich beschikbaar.

Op hoeveel manieren is uit deze vijf leerlingen een schoonmaakploeg van drie leerlingen te vormen?

Het voor de hand liggende antwoord $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ is niet goed.

Je moet er rekening mee houden dat de schoonmaakploeg ABC (Annelies, Bert en Casper) dezelfde ploeg is als bijvoorbeeld BAC.

Binnen de schoonmaakploeg is de volgorde niet van belang, dus de ploegen ABC, ACB, BAC, BCA, CAB en CBA zijn allemaal dezelfde schoonmaakploeg. In de figuur zie je dat er maar 10 schoonmaakploegen mogelijk zijn.

Bij schoonmaakploegen van 3 leerlingen zijn er telkens $3! = 6$ volgorden die op dezelfde schoonmaakploeg neerkomen.

Voor het juiste aantal mogelijke schoonmaakploegen moet je dus $5 \cdot 4 \cdot 3$ door $3!$ delen. Het aantal schoonmaakploegen is

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10.$$

ALLE MOGELIJKE SCHOONMAAKPLOEGEN

1	ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA	←
2	ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA	←
3	ABE	AEB	BAE	BEA	EAB	EBA	←
4	ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA	←
5	ACE	AEC	CAE	CEA	EAC	ECA	←
6	ADE	AED	DAE	DEA	EAD	EDA	←
7	BCD	BDC	CBD	CDB	DBC	DCB	←
8	BCE	BEC	CBE	CEB	EBC	ECB	←
9	BDE	BED	DBE	DEB	EBD	EDB	←
10	CDE	CED	DCE	DEC	ECD	EDC	←

telt steeds maar voor één

Is bij het kiezen van drie dingen uit vijf dingen de volgorde *niet* van belang, zoals bij de schoonmaakkploeg, dan spreken we van het aantal **combinaties** van 3 uit 5. Het aantal combinaties van 3 uit 5 noteren we als $\binom{5}{3}$. Spreek uit: vijf boven drie.

Het aantal combinaties van 4 uit 7 noteer je als $\binom{7}{4}$.

Dit is het aantal manieren om 4 dingen te kiezen uit 7 dingen waarbij de volgorde niet van belang is.

Let op het verschil met permutaties, waarbij de volgorde van de gekozen dingen *wel* van belang is.

Op de GR vind je de optie voor combinaties in hetzelfde menu als de optie voor permutaties. Op de TI en Casio worden combinaties weergegeven met nCr. Ga met de GR na dat $\binom{7}{4} = 35$.

Voorbeeld

Frauke heeft tien boeken in de kast staan die ze al heeft gelezen. Ze besluit er drie weg te geven.

Hoeveel mogelijkheden zijn er

- a als ze drie vrienden elk één boek geeft
- b als ze één vriendin drie boeken geeft?

Aanpak

Er moeten drie boeken uit tien boeken gekozen worden. Dus je hebt te maken met permutaties of combinaties. Ga per situatie na of de volgorde van belang is.

Uitwerking

a aantal = $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ De volgorde is van belang, dus permutaties.

b aantal = $\binom{10}{3} = 120$ De volgorde is niet van belang, dus combinaties.

22



Gaat het bij de volgende situaties om combinaties of om permutaties?

- a Uit een klas worden zes leerlingen gekozen om boodschappen te doen voor het schoolfeest.
- b In een klas worden vijf identieke bioscoopbonnen verloot.
- c Een vereniging kiest uit haar leden een voorzitter, een secretaris en een penningmeester.
- d Uit een top tien stel je een eigen top drie samen.
- e Van 500 leerlingen komen er 300 naar het schoolfeest.

23



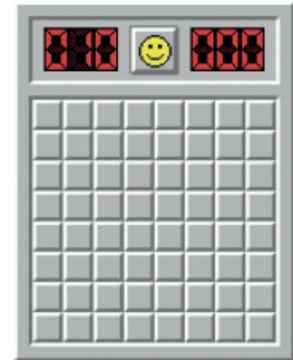
- a Uit een klas van 30 leerlingen worden 5 leerlingen geselecteerd voor een klankbordgroep. Hoeveel verschillende selecties zijn er mogelijk?
- b Een tweedehandswinkel heeft een assortiment van 100 unieke producten. Voor een kwaliteitscontrole zal de helft van het assortiment gecontroleerd worden. Hoeveel verschillende samenstellingen zijn er voor deze steekproef mogelijk?
- c Uit de selectie van 20 spelers wordt een top-5 toekomstige talenten samengesteld. Hoeveel top-5 lijstjes zijn mogelijk?
- d In een grabbelton zitten tien verschillende prijzen. Drie kinderen grabbelen elk een prijs. Op hoeveel manieren kan dat?



A24



- Bij het spel mijnenveger worden in een speelveld van 8×8 vakjes 10 mijnen geplaatst. Elk vakje bevat wel of geen mijn. Hoeveel mogelijke opstellingen zijn er?



A25



- Op de boekenplank van Yvonne staan zes Engelse, vijf Franse en drie Duitse boeken.
- a Op hoeveel manieren kunnen deze 14 boeken gerangschikt worden?
- Sabine leent drie boeken van Yvonne.
- b Hoeveel drietallen zijn er mogelijk?
- c Hoeveel drietallen zijn er mogelijk als Sabine een Engels, een Frans en een Duits boek wil lenen?
- d Hoeveel drietallen zijn mogelijk als Sabine drie Engelse boeken leent?

E26



- De vier kleurpotloden hiernaast kunnen op verschillende volgorden naast elkaar worden gelegd. Sebas kan door zijn kleurenblindheid het verschil tussen groen en rood niet zien. Hoeveel verschillende volgorden kan Sebas zien?



Theorie C Werken met permutaties en combinaties

In het volgende voorbeeld gebruik je de vermenigvuldigingsregel en de somregel, in een situatie waar je met permutaties en combinaties te maken hebt.

Voorbeeld

Aysha koopt graag een langspeelplaat (lp) van muziek die ze leuk vindt. Ze heeft een overzicht gemaakt van de genres van al haar platen, zie de tabel hiernaast.

Aysha leent een aantal lp's uit aan Kees.

Op hoeveel manieren kan dat als hij

- a** drie of vier popplaten leent
- b** in totaal vijf platen leent, waarvan drie rockplaten?

Aysha stelt een top-3 samen van haar favoriete platen.

- c** Op hoeveel manieren kan dat als haar top-3 uit één genre bestaat?

genre	aantal
pop	9
rock	12
metal	5

Aanpak

- a** Hij leent drie *of* vier popplaten, dus gebruik de somregel. Bij het lenen van platen is de volgorde niet van belang, dus combinaties.
- b** Hij leent drie rockplaten *en* twee niet-rockplaten, dus gebruik de vermenigvuldigingsregel.
- c** Ze stelt een top-3 samen van pop *of* rock *of* metal, dus gebruik de somregel. Bij een top-3 is de volgorde van belang, dus permutaties.

Uitwerking

a aantal = $\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 210$

Er zijn 14 niet-rockplaten.

b aantal = $\binom{12}{3} \cdot \binom{14}{2} = 20\,020$

c aantal = $9 \cdot 8 \cdot 7 + 12 \cdot 11 \cdot 10 + 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1884$

27



In de tabel zie je de verdeling naar leeftijd van de volwassenen die in een flatgebouw wonen.

Voor een onderzoek worden acht van deze mensen geënquêteerd.

Hoeveel achttallen zijn er met

- a** uitsluitend mannen
- b** vier vrouwen
- c** drie personen uit de middelste leeftijdsgroep
- d** meer dan zes personen uit de jongste leeftijdsgroep?

Voor de Vereniging van Eigenaren wordt een bestuur gekozen bestaande uit een voorzitter, secretaris en penningmeester.

Hoeveel verschillende besturen zijn er mogelijk met

- e** uitsluitend vrouwen
- f** met iemand uit de oudste leeftijdsgroep als voorzitter?

LEEFTIJD BEWONERS FLATGEBOUW

	18 tot 25	25 tot 40	40+	
man	8	20	8	36
vrouw	12	16	5	33
	20	36	13	69

28 In de tabel zie je de verdeling naar leeftijd van een vierde klas.

□ ⊙ * Er wordt een klankbordgroep van vier leerlingen gekozen.

Hoeveel klankbordgroepen zijn mogelijk

- a** met twee 15-jarigen en twee 18-jarigen
- b** met twee 15-jarigen en één 18-jarige
- c** met drie of vier 17-jarigen
- d** met allemaal leerlingen van dezelfde leeftijd?

Uit deze klas van 28 leerlingen worden er twee gekozen die het klassenuitje gaan voorbereiden. De eerste leerling organiseert de activiteit en de tweede leerling regelt het vervoer.

Hoeveel tweetallen zijn mogelijk als

- e** één van de twee 17 jaar is
- f** ze beide even oud zijn?

leeftijd	aantal
15	6
16	14
17	5
18	3

A29 Smoothies worden gemaakt door fruit, groenten en zuivelproducten in een blender te mixen tot een gladde substantie. Soms wordt hieraan nog een extra flavourshot toegevoegd, bijvoorbeeld honing.

□ ⊙ *

Bij de Smoothie-Beach-Bar kun je smoothies krijgen in drie formaten: small, medium en large. Door ingrediënten te kiezen van de kaart hieronder kun je zelf je smoothie samenstellen.

INGREDIËNTEN SMOOTHIE

zuivel	fruit	groente	flavourshot
kwark	aardbei	avocado	karamel
melk	appel	bleekselderij	chocola
yoghurt	ananas	komkommer	kokos
	banaan	pompoen	hazelnoot
	bosbes	rode kool	honing
	framboos	spinazie	citroen
	mango	tomaat	mint
	peer	boerenkool	vanille
	perzik	wortel	
	kiwi		



Je kiest eerst een zuivelsoort. Deze vul je aan met één of meer van de overige ingrediënten.

- a** Daniëlle wil een smoothie met drie fruitsoorten, twee groentesoorten en geen flavourshot.
Hoeveel verschillende smoothies zijn er mogelijk?
- b** Levi wil een large smoothie zonder yoghurt, met één of twee fruitsoorten, drie groentesoorten en één flavourshot.
Hoeveel mogelijkheden zijn er voor hem?
- c** Lise wil een kwarksmoothie met verder alleen maar groenten.
Hoeveel mogelijkheden zijn er als zij minstens twee en hoogstens vier groentesoorten wil?

A30



Restaurant MiniBurger serveert kleine hamburgerbroodjes met verschillende soorten beleg. Ondanks dat lang niet alle gerechten vlees bevatten, spreekt het restaurant toch bij elk soort broodje van een burger. Hieronder zie je welke soorten burgers mogelijk zijn.

vlees	vis	vegetarisch
spicy chicken	fishburger	zeewierburger
Texas burger	knoflookgarnalen	zwarte bonenburger
serranoham	calamares	gegrilde groente
chorizo	gerookte zalm	asperges
	zeebaarsfilet	spinazie-kaasburger
		champignonburger

Stijn gaat lunchen bij MiniBurger, hij krijgt dan een aantal burgers naar keuze op één plank geserveerd. Stijn kiest altijd voor verschillende burgers. Hoeveel mogelijkheden heeft hij met

- a twee vlees-, één vis- en twee vegetarische burgers
- b een volledig vegetarische lunch van vier of vijf burgers
- c één vegetarische burger en daarnaast drie visburgers of drie vleesburgers?



Het restaurant heeft vier keuzes voor een dessert.

- d Hoeveel mogelijkheden heeft Stijn om een plank samen te stellen van vier verschillende burgers en daarna al dan niet een dessert?

Het restaurant stelt een wekelijkse burger top-3 samen.

- e Op hoeveel manieren kunnen daar alleen maar burgers van één soort op staan?

31



Er zitten twaalf verschillende kleurpotloden in een bak. Aafje, Bert en Charlie pakken er achtereenvolgens eentje. Daarna pakt Daniële er nog drie.

- a Hoeveel mogelijkheden zijn er daarbij?
- b Voor de samenstelling van de overgebleven potloden zijn er verschillende mogelijkheden. Hoeveel mogelijkheden?



E32



Meneer Marsman laat een groep leerlingen statistisch onderzoek doen. Daarvoor moeten enquêtes worden afgenomen in vier wijken van de stad. Meneer Marsman kiest vier leerlingen. Als die elk een eigen wijk krijgen toegewezen, dan zijn er 1680 mogelijkheden. Hoeveel mogelijkheden zijn er als de leerlingen alle wijken gezamenlijk doen?

Kennis- en vaardighedencheck

- | | |
|--|---|
| ☐ Ik kan een faculteit, een aantal permutaties en een aantal combinaties berekenen. | ► OPGAVE C3
THEORIE A EN B |
| ☐ Ik kan herkennen of ik met permutaties of combinaties te maken heb en ik kan het bijbehorende aantal mogelijkheden berekenen. | ► OPGAVE C4
THEORIE A EN B |
| ☐ Ik kan de vermenigvuldigings- en somregel gebruiken in situaties waar je met permutaties en combinaties te maken hebt. | ► OPGAVE C5
THEORIE C |

C3 Bereken $3!$ en $\binom{6}{3}$ en het aantal permutaties van 3 uit 7.

C4 Vijf leerlingen doen mee aan een schrijfwedstrijd. De prijzen zijn boekenbonnen. Hoeveel mogelijkheden zijn er om de prijzen te verdelen als

- a** drie leerlingen een boekenbon winnen met dezelfde waarde
- b** alle leerlingen een boekenbon winnen met een verschillende waarde
- c** twee leerlingen een boekenbon winnen met een verschillende waarde?

C5 In een klas zitten 13 jongens en 16 meisjes.

- a** Uit deze klas wordt een klankbordgroep van vijf leerlingen gekozen. Hoeveel groepen met minstens vier meisjes zijn er?
- b** Uit deze klas wordt een voorzitter, een vicevoorzitter, een secretaris en een penningmeester gekozen die samen een comité vormen. Veel van de mogelijke comités bestaan uit zowel jongens als meisjes. Bij hoeveel mogelijke comités is dit niet het geval?

Antwoorden

- C3** 6
20
210
- C4** **a** 10
b 120
c 20
- C5** **a** 28028
b 60840

4.3 Combinatoriek toepassen

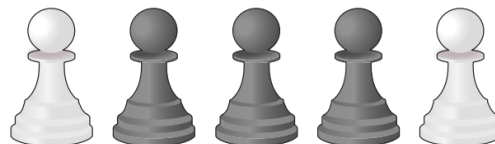
Kennis en vaardigheden

- Je kunt herkennen of een telprobleem is om te zetten in een rijtje A's en B's en in zo'n geval het bijbehorende aantal mogelijkheden berekenen.
- Je kunt telproblemen overzichtelijk opdelen in situaties die je kunt tellen.

O33



Otto heeft vijf pionnen uit een schaakset op een rijtje gezet. Het zijn twee witte en drie zwarte pionnen. Hoeveel verschillende rijtjes kan hij maken?



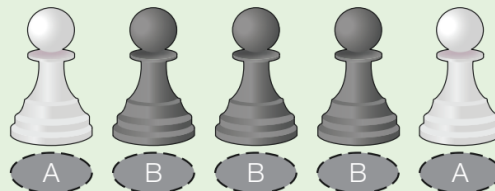
Theorie A Het aantal rijtjes bestaande uit A's en B's

In opgave 33 werd gevraagd naar het aantal rijtjes met 2 witte en 3 zwarte pionnen. Je kunt dit probleem als volgt aanpakken.

Er zijn vijf plekken waar de pionnen kunnen staan, waarbij op twee plekken een witte pion moet komen. Heb je de witte pionnen geplaatst, dan heb je verder geen keuzevrijheid meer. De drie zwarte pionnen komen immers op de overgebleven plekken te staan.

De vraag is dus op hoeveel manieren je voor de witte pionnen, twee plekken uit vijf plekken kunt kiezen. Omdat de volgorde niet van belang is, heb je te maken met combinaties. Het aantal manieren is dus $\binom{5}{2} = 10$.

Je kunt soortgelijke problemen vertalen naar een situatie waarbij je een rijtje maakt met een bepaald aantal A's en een bepaald aantal B's. In opgave 33 ging het om een rijtje van 2 A's (witte pionnen) en 3 B's (zwarte pionnen).



Maak je een rijtje van 2 A's en 3 B's dan is het aantal mogelijke rijtjes gelijk aan $\binom{2+3}{2} = \binom{5}{2} = 10$.

In plaats van eerst de 2 witte pionnen neer te zetten, kun je ook beginnen met het neerzetten van de 3 zwarte pionnen. Zo zie je dat ook geldt $\binom{5}{3} = 10$. En zo is het aantal rijtjes bestaande uit twee A's en zes B's gelijk aan $\binom{2+6}{2} = \binom{8}{2} = 28$ en ook aan $\binom{2+6}{6} = \binom{8}{6} = 28$.

$$\binom{8}{2} = \binom{8}{6}$$
$$\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

Voorbeeld

Een kok maakt een stapel van rode en witte borden.

Hoeveel mogelijke stapels zijn er

- a met in totaal 8 borden, waarvan 6 rode
- b met 5 rode borden en 7 witte borden
- c in totaal bij een stapel van 10 borden?

Uitwerking

a aantal = $\binom{8}{6} = 28$

b aantal = $\binom{12}{5} = 792$

Er zijn $5 + 7 = 12$ borden in totaal.

c aantal = $2^{10} = 1024$

Er zijn 2 mogelijkheden voor elk bord in de stapel.



34



Fayla gooit vijf keer met een geldstuk. Telkens noteert zij K (kop) of M (munt). Hiernaast zie je een mogelijke serie. Deze serie heeft drie keer kop en twee keer munt.



- a Hoeveel series met drie keer kop en twee keer munt zijn mogelijk?
- b Hoeveel mogelijke series zijn er met 4 keer kop?
- c Hoeveel series zijn er in totaal mogelijk?
- d Hoeveel mogelijke series zijn er met zes keer munt als Fayla tien keer met een geldstuk gooit?

35



Niet alle telproblemen zijn te vertalen naar een situatie waarbij je een rijtje maakt met een bepaald aantal A's en B's.

Geef bij elk van de onderstaande situaties aan welke zijn te vertalen naar rijtjes A's en B's en bereken hierbij het aantal mogelijke rijtjes.

- a Lisa heeft een wachtwoord dat bestaat uit 3 enen en 5 nullen.
- b Bob wil boven de deur een rijtje van twee rode, twee witte en vier gele tegels zetten.
- c Een leeg fietsenrek wordt voor de helft gevuld door er vijf OV-fietsen in te zetten.
- d Met vier dobbelstenen vier verschillende aantallen ogen gooien.

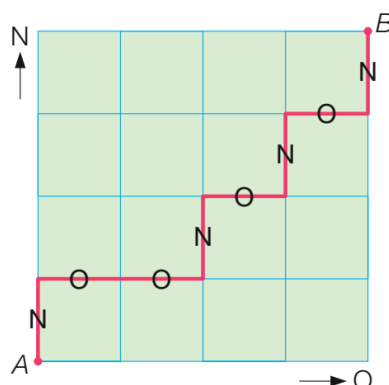
36



Voor een toelatingsexamen moeten 20 tweekeuzevragen worden beantwoord. Een kandidaat wordt toegelaten als hij minstens 80% van de vragen juist beantwoordt.

Op hoeveel manieren kun je het formulier invullen om toegelaten te worden? Hoeveel procent is dat van het totale aantal manieren om het formulier in te vullen?

- 37** Van sommige steden bestaat de plattegrond uit een rechthoekig stratenplan. Op de foto zie je een stukje van zo'n plattegrond in Barcelona en een route van A naar B .



De route uit de plattegrond is ook schematisch weergegeven in het rooster met de richtingen noord (N) en oost (O). Deze route geven we aan met het rijtje NOONONON.

Bereken het aantal routes zonder omwegen van A naar B .

- A38** In de figuur zie je een gedeelte van de plattegrond van een badplaats. Op hoeveel manieren kun je zonder omwegen
- van S naar T lopen
 - van S naar U lopen
 - van S naar het strand lopen?



- 39** Zie opgave 38.
- *** Op hoeveel manieren kun je zonder omwegen van S via Y naar het strand lopen?

- A40** Bij een voetbalwedstrijd met eindstand 2-4 is een mogelijk scoreverloop 1-0, 1-1, 1-2, 2-2, 2-3, 2-4. Hoeveel scoreverlopen zijn mogelijk bij een wedstrijd met
- eindstand 2-4
 - in totaal 6 doelpunten?

- 041** Op het Johanna Westerdijk College doen zowel leerlingen als docenten mee aan de jaarlijkse talentenshow. De jury kiest elk jaar acht winnaars. Ze zorgen er altijd voor dat onder de winnaars meer leerlingen dan docenten zitten en dat het niet alleen leerlingen zijn.
- Een mogelijkheid is dat zes leerlingen en twee docenten winnen. Wat zijn de andere mogelijkheden?
 - Dit jaar doen er twintig leerlingen en zes docenten mee aan de talentenshow. Op hoeveel manieren kan de groep van acht winnaars worden samengesteld?

Theorie B Telproblemen structureren

Bij telproblemen zoals in opgave 41 is het handig om een aantal situaties te onderscheiden voordat je gaat rekenen. Hiermee voorkom je dat je mogelijkheden vergeet mee te tellen. Heb je het aantal mogelijkheden per situatie berekend, dan gebruik je de somregel om het totale aantal mogelijkheden te krijgen.

Voorbeeld

Bij het spel Dominion kies je voordat het spel begint 10 verschillende kaarten. Het maakt niet uit in welke volgorde deze kaarten gekozen worden. Bij het spel kun je in totaal uit 26 kaarten kiezen. In de tabel zie je een overzicht van de verschillende soorten kaarten.

kaartsoort	overwinning	actie	aanval	verdediging
aantal	1	20	4	1

Mark wil een set van 10 kaarten kiezen die aan de volgende voorwaarden voldoen: als hij een aanvalskaat heeft gekozen, wil hij ook de verdedigingskaart hebben. Verder wil hij niet meer dan 2 aanvalskarten kiezen.

Bereken hoeveel mogelijke sets van 10 kaarten hij kan kiezen.

Uitwerking

0 aanvalskarten *of*

1 aanvalskaat en 1 verdedigingskaart *of*

2 aanvalskarten en 1 verdedigingskaart

$$\text{aantal} = \binom{22}{10} + \binom{4}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{21}{8} + \binom{4}{2} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{21}{7} = 2\,158\,286$$

42



Janne geeft een dag in de week spinningles. Om de trainingsopbouw te ondersteunen maakt ze gebruik van muziek uit verschillende genres. In de tabel zie je een voorselectie waar ze uit wil kiezen.

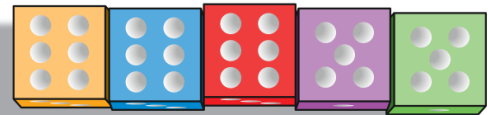
genre	dance	pop	hiphop
aantal nummers	6	5	8



Haar les bestaat uit vijf fasen, waaronder een warming up aan het begin en de cooling down aan het eind. Ze wil bij elke fase een verschillend muziknummer kiezen en stelt daarvoor een playlist samen. Ze wil beginnen en eindigen met een popnummer en tussendoor afwisselend een dance- en een hiphopnummer gebruiken.

Op hoeveel manieren kan ze een playlist samenstellen?

43 Elsbeth gooit met vijf dobbelstenen. Ze vraagt zich af hoeveel mogelijkheden er zijn om in totaal 28 ogen te gooien. Ze bedenkt dat ‘drie zessen en twee vijven’ één van de mogelijke situaties is.



- a Wat is de andere situatie om in totaal 28 ogen te gooien?
- b Laat zien dat er in totaal 15 mogelijkheden zijn om met vijf dobbelstenen 28 ogen te gooien.

A44 a Julia gooit met zes dobbelstenen.

Hoeveel mogelijkheden zijn er om in totaal 34 ogen te gooien?

b Wolf gooit met vijf dobbelstenen.

Hoeveel mogelijkheden zijn er om meer dan 27 ogen te gooien?

A45 Jori maakt een trein met vier wagons. Hij heeft de keuze uit zes wagons met de nummers 3, 4, 5, 6, 7 en 8. Hieronder staan twee mogelijke opstellingen.



Zo ontstaat een getal van vier cijfers.

Hoeveel verschillende treinen kan Jori maken

- a waarbij het getal groter dan 5500 is
- b waarbij het getal kleiner dan 6460 is?

A46 Van een basketbalteam mogen 3 spelers meedoen aan een 3x3 toernooi.

Het team bestaat uit drie soorten spelers: 2 guards, 4 centers en 3 forwards. De coach wil niet meer dan één center selecteren en minstens een guard in de selectie hebben.

Op hoeveel manieren kan hij een team voor het 3x3 toernooi samenstellen?



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan herkennen of een telprobleem is om te zetten in een rijtje A's en B's en in zo'n geval het bijbehorende aantal mogelijkheden berekenen.

► **OPGAVE C6**
THEORIE A

☐ Ik kan telproblemen overzichtelijk opdelen in situaties die ik kan tellen.

► **OPGAVE C7**
THEORIE B

C6 In een gezin met drie kinderen zijn er acht verschillende klusjes te doen. De klusjes worden op één van de volgende manieren over de kinderen verdeeld.

- 1 Het jongste kind hoeft geen klusje te doen. De andere twee doen er beide vier.
- 2 De jongste twee kinderen doen ieder twee klusjes en het oudste kind de rest.

Welke van de bovenstaande situaties is te vertalen naar rijtjes A's en B's? Bereken bij deze situatie het aantal mogelijke verdelingen van de klusjes.

C7 Zes vrienden sluiten aan in de rij voor de kantine. Dennis wil direct achter Eke staan en hij wil als een van de eerste vier aan de beurt zijn. Als Eke niet de voorste is, wil Claire de voorste zijn. Op hoeveel volgorden kunnen de zes vrienden aansluiten zodat aan alle wensen is voldaan?

Antwoorden

C6 situatie 1 70

C7 36

4.4 Allerlei telproblemen

Kennis en vaardigheden

- Als een telprobleem past bij een aanpak uit dit hoofdstuk, kun je dit herkennen en de aanpak toepassen bij het oplossen van het telprobleem.
- Je kunt puzzelen op een aanpak bij een telprobleem.

Theorie A Een juiste aanpak kiezen

Bij telproblemen zie je niet altijd direct welke aanpak mogelijk is. Soms herken je het probleem van een eerdere opgave. Zo niet, verdiep je dan in het probleem, bijvoorbeeld door een mogelijkheid uit te schrijven. De volgende vragen kunnen je daarna verder helpen.

- Moet je de aantallen vermenigvuldigen of optellen?
- Zijn herhalingen toegestaan?
- Heb je te maken met aantallen permutaties of combinaties?
- Is het telprobleem om te zetten naar rijtjes A's en B's?
- Is het handig om situaties te onderscheiden voordat je gaat rekenen?

In de volgende opgaven komen allerlei soorten telproblemen door elkaar voor. Houd bij het oplossen steeds bovenstaande vragen in gedachten.

- 47** Muriël laat de schijven hiernaast elk één keer draaien. Nadat de schijven zijn uitgedraaid, wijst elk van de pijlen een sector aan.

Hoeveel uitkomsten zijn er

- a met drie keer een A
- b met drie keer dezelfde letter
- c met twee keer een A en één keer een C
- d zonder B
- e met drie dezelfde kleuren
- f met twee keer groen en één keer rood?



- 48** Michiel staat bij een kraam waar zes verschillende spellen te koop zijn. Hij heeft genoeg geld om alle zes de spellen te kopen. Hij twijfelt nog hoeveel en welke spellen hij wil kopen.

- a Hoeveel mogelijkheden heeft hij in totaal?
- b Hoeveel mogelijkheden heeft hij om drie spellen te kopen?

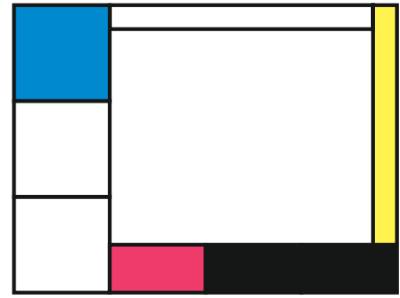


49



Tijdens een ckv-les kleuren de leerlingen de vlakverdeling hiernaast. Van de acht rechthoeken moeten er vier gekleurd worden met rood, geel, blauw en zwart. Elke kleur moet één keer gebruikt worden. De andere rechthoeken blijven wit. Zo ontstaat een Mondriaan-compositie.

Hoeveel composities zijn mogelijk?



50



Yara wil een doos met planten bestellen voor in haar kamer.

Ze heeft de keuze uit 15 soorten vetplanten, 20 soorten cactussen en 10 soorten varens.

Yara wil 3 verschillende soorten kiezen.

Bereken hoeveel drietallen er mogelijk zijn waarbij

- a één cactus zit
- b een vetplant, cactus en varen zit
- c geen varen zit
- d er minstens één vetplant en hoogstens één cactus zit.



51



Op haar telefoon gebruikt Elske een 4×4 rooster voor haar apps.

Elske gebruikt niet alle 16 plaatsen. Ze heeft haar 12 meest gebruikte apps op het homescreen gerangschikt.

- a Op hoeveel manieren kan dit?
- b Op hoeveel manieren kan dit als ze de linker kolom leeg laat?
- c Op hoeveel manieren kan dit als ze in elke rij één plaats leeg laat?



52



Winkelier Gerritzen heeft zijn etalage versierd met feestverlichting.

Deze verlichting bestaat uit 19 lampjes die onafhankelijk van elkaar groen licht, rood licht of geen licht geven.

Een mogelijke situatie is: de lampjes 2, 5, 7, 9, 10, 12 en 18 branden groen, de lampjes 3, 8, 13, 16 en 19 branden rood en de overige lampjes zijn uit.

- a Hoeveel situaties zijn er in totaal mogelijk?

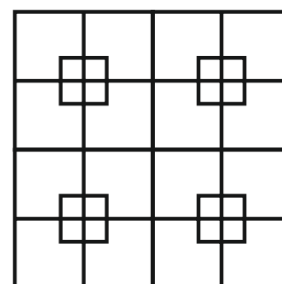
In hoeveel situaties branden

- b er vijf lampjes rood en de rest groen
- c alle lampjes waarbij er minder dan drie rood zijn
- d alle lampjes afwisselend rood en groen
- e in elk geval het eerste, het middelste en het laatste lampje?

- 53** Een team bestaande uit drie jongens en vier meisjes probeert een escaperoom op te lossen. Voor het laatste onderdeel moeten vier verschillende taken tegelijkertijd worden uitgevoerd.
Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er als er twee jongens en twee meisjes de taken uitvoeren?



- 54** Hoeveel vierkanten zijn er in de figuur hiernaast te ontdekken?



Theorie B Puzzelen bij telproblemen

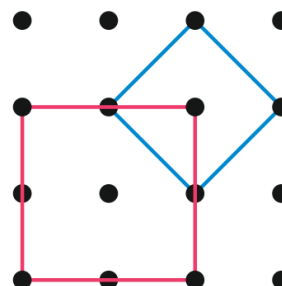
Opgave 54 hoort niet duidelijk bij één van de technieken die je in dit hoofdstuk hebt geleerd. Toch kun je met dit soort problemen aan de slag. De Hongaarse wiskundige Pólya (1887-1985) heeft onderzoek gedaan naar oplossingsstrategieën van mensen die goed zijn in het oplossen van wiskundige problemen. In zijn werk noemt hij de volgende vier stappen.

- 1 Begrijp het probleem.
- 2 Puzzel op een aanpak.
- 3 Voer je aanpak uit.
- 4 Reflecteer op je aanpak en de gevonden oplossing.

Bij de volgende opgaven gebruik je niet altijd een van de geleerde technieken uit het hoofdstuk. Probeer de stappen van Pólya toe te passen bij het oplossen van de opgaven.

- 55** Levi gaat een hardloopschema maken. Hij wil iedere week drie dagen hardlopen, telkens op dezelfde dagen. Hij wil nooit twee dagen achter elkaar hardlopen.
Hoeveel verschillende schema's kan Levi maken?

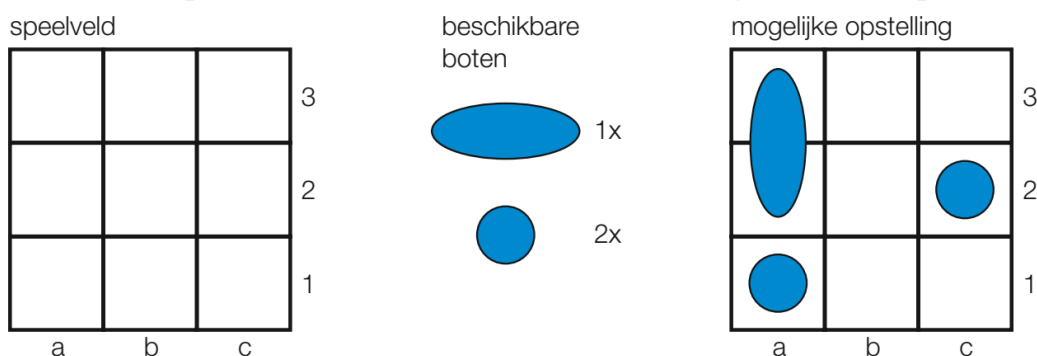
- 56** In de figuur zie je een rooster met 16 stippen. Je kunt verschillende vierkanten maken waarbij de hoekpunten van het vierkant stippen zijn.
Onderzoek hoeveel verschillende vierkanten je zo kunt maken.



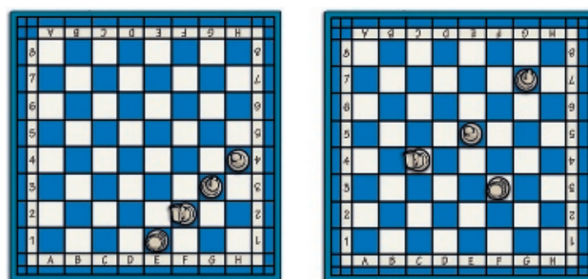
57 Een bedrijf heeft zes afdelingen. Na een grote sollicitatieronde worden er zes nieuwe medewerkers aangenomen, die worden verdeeld over meerdere afdelingen.
Hoeveel mogelijke verdelingen zijn er?

58 Bij een toernooi met tien spelers en twee scheidsrechters schudt normaal gesproken iedereen elkaar voor de wedstrijd de hand. Helaas is er een onsportieve speler die weigert de handen van de spelers te schudden.
Hoe vaak worden er handen geschud?

59 Meneer Kieboom is een fanatiek speler van het spel zeeslag. Op vakantie speelt hij vaak een vereenvoudigde versie van het spel. Bij deze versie plaats je één grote boot en twee kleine bootjes op een veld van 3 bij 3 hokjes. Zie de figuur. De grote boot neemt twee hokjes in en mag niet diagonaal geplaatst worden. De kleine bootjes nemen één hokje in.
Onderzoek op hoeveel manieren meneer Kieboom zijn boten kan plaatsen.



60 Harm wil van de witte schaakstukken een paard, een loper, een toren en een pion op een schaakbord van 8 bij 8 velden plaatsen zodat in elke rij en in elke kolom hoogstens één stuk staat.
Op hoeveel manieren kan dit?



61 Bij een spel moeten Mitchel en Pieter de buit van 5 goudstukken en 10 zilverstukken verdelen. De enige eis is dat elke speler iets moet krijgen.
Op hoeveel manieren kunnen ze de buit verdelen?



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Als een telprobleem past bij een aanpak uit dit hoofdstuk, kan ik dit herkennen en de aanpak toepassen bij het oplossen van het telprobleem.

► OPGAVE C8
THEORIE A

☐ Ik kan puzzelen op een aanpak bij een telprobleem.

► OPGAVE C9
THEORIE B

C8 Uit een klas van 28 leerlingen wordt een basketbalteam van acht spelers samengesteld.

- a Hoeveel teams zijn mogelijk?
- b De t-shirts met de rugnummers 1 tot en met 8 worden over de acht spelers verdeeld.

Op hoeveel manieren kan dat?

- c Vijf leerlingen uit de klas zijn langer dan 190 cm.

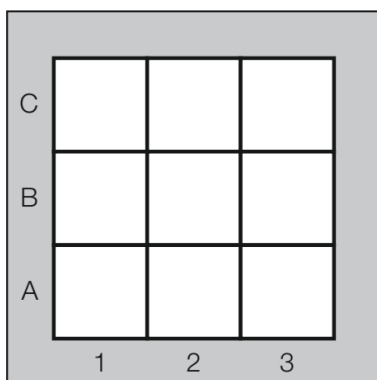
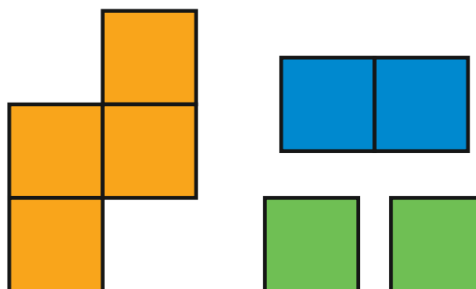
Hoeveel teams zijn mogelijk met minstens drie leerlingen die langer dan 190 cm zijn?

- d Bij basketbal zijn er vijf posities in het veld, zoals center en pointguard.

Op hoeveel manieren kunnen deze gevuld worden als er acht spelers beschikbaar zijn?



C9 Zie de figuur. Jim vraagt zich af op hoeveel manieren hij de vier stukken op het 3 bij 3 rooster kan leggen. De stukken zijn gekleurd aan de bovenzijde, maar hebben een witte achterkant. Jim wil alle stukken naast elkaar leggen met de gekleurde zijde naar boven. Bereken op hoeveel verschillende manieren dit kan.



Antwoorden

C8 a 3 108 105

b 40 320

c 382 536

d 6720

C9 36

Kennis- en vaardighedentest

4.1 Regels bij telproblemen

- 1** In de supermarkt kan Jeroen kiezen uit vijf soorten pasta, vier verschillende sauzen en drie soorten groenten. Hij stelt een gerecht samen met één soort pasta, één soort saus en één soort groente.
- a** Op hoeveel manieren kan dat?
 - b** Spagetti en linguine zijn twee van de beschikbare soorten pasta, maar Jeroen wil graag een andere soort. Verder wil hij courgette als groente.
Op hoeveel manieren kan hij dan een gerecht samenstellen?

- 2** Een bedrijf gebruikt artikelcodes van vijf cijfers. Hoeveel codes zijn er mogelijk als deze
- a** geen nullen bevat
 - b** met een 3 begint en eindigt
 - c** uit vijf verschillende cijfers bestaat
 - d** uit vijf dezelfde cijfers bestaat?

- 3** Bij een schaakvereniging worden uit de 19 leden willekeurig twee leden gekozen om tegen elkaar te spelen. De speler die als eerste gekozen wordt speelt met wit, de ander met zwart. In de tabel zie je hoeveel jongens en meisjes lid zijn en wat hun favoriete opening is.

favoriete opening	jongen	meisje
de Caro-Kann	3	6
het damegambiet	4	2
de Siciliaanse	2	2

- Hoeveel tweetallen zijn mogelijk waarbij
- a** een jongen met wit en een meisje met zwart speelt
 - b** beide spelers jongens of beide spelers meisjes zijn
 - c** beide spelers niet het damegambiet als favoriete opening hebben
 - d** beide spelers dezelfde favoriete opening hebben?



4.2 Permutaties en combinaties

- 4** Christel kijkt acht video's op YouTube.
- a** Hoeveel volgordes zijn daarbij mogelijk?
 - b** Ze geeft vijf van de video's een like.
Op hoeveel manieren kan dat?
 - c** Ze deelt een van de video's met haar zusje, een andere met haar broer en weer een andere met een vriendin.
Op hoeveel manieren kan dat?

- 5** De redactie van een schoolkrant bestaat uit zes vierdeklassers en acht vijfdeklassers.
- a** Uit de redactie wordt een hoofdredacteur, een beeldredacteur, een distributeur en een opmaker gekozen.
Op hoeveel manieren kan dat als ze allemaal uit hetzelfde leerjaar komen?
 - b** Een docent komt op bezoek bij de redactie, zij wordt rondgeleid door een groep van drie redactieleden.
Op hoeveel manieren kan die groep worden samengesteld als er minstens één vijfdeklasser bij zit?

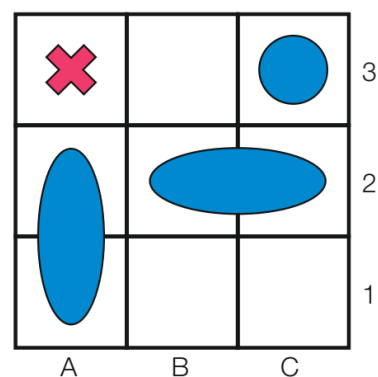
4.3 Combinatoriek toepassen

- 6** Giel doet een test waarbij hij een aantal beroepen te zien krijgt. Bij elk beroep moet hij beoordelen of hij het bij zichzelf vindt passen. Hij drukt op J als dat zo is en op N als dat niet zo is. Achteraf krijgt hij een lijst met de antwoorden die hij achtereenvolgens heeft gegeven.
- a** Stel dat Giel vier beroepen bij zichzelf vond passen en twaalf niet.
Hoeveel verschillende lijsten zijn er dan mogelijk?
 - b** Stel dat Giel twintig beroepen te zien kreeg.
Hoeveel verschillende lijsten zijn er dan mogelijk?
- 7** Djoeke wil een kool, twee soorten paddestoelen en één soort aardappelen kopen. Ze kan kiezen uit 3 soorten kool, 4 soorten paddestoelen en aardappelen van de soort Eigenheimer of Bintje. Bij boerenkool wil ze altijd Eigenheimers en bij spitskool wil ze geen oesterzwammen. Bereken het totale aantal keuzemogelijkheden voor Djoeke.

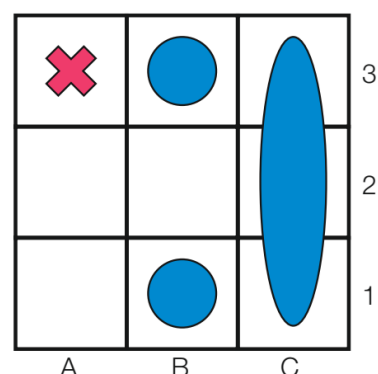
4.4 Allerlei telproblemen

- 8** Adriana en Adriaan spelen het spel zeeslag op een veld van 3 bij 3 hokjes. Voor het plaatsen van de boten hebben ze twee varianten bedacht. Bij variant I plaatsen spelers een horizontale en een verticale boot die elk twee hokjes innemen en een boot die één hokje inneemt. Bij variant II plaatsen spelers een boot die drie hokjes inneemt, die zowel horizontaal als verticaal geplaatst mag worden, en twee boten die elk één hokje innemen. Beide spelers weten dat de ander altijd het vakje A3 als eerste bombardeert, dus ze plaatsen daar nooit een boot. Onderzoek bij welke variant de meeste opstellingen mogelijk zijn.

voorbeeld variant I



voorbeeld variant II



Gemengde opgaven

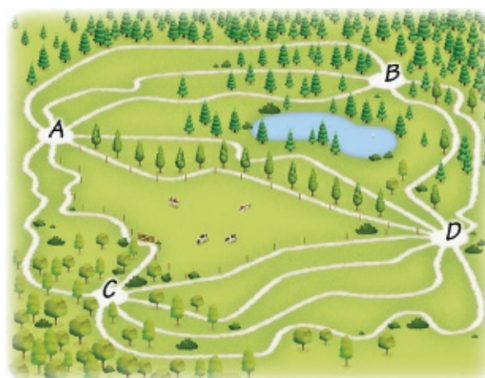
- 1** In de figuur zie je een kaart met wandelroutes tussen de plaatsen A, B, C en D. Ga er bij de volgende vragen vanuit dat je elke plaats hooguit één keer aandoet.

Op hoeveel manieren kun je

- a van A naar D
- b van A naar C?

Lorenzo maakt een rondwandeling van A, naar B, naar D en weer naar A. Hij wil minstens een keer over een van de wegen die langs het meer lopen.

- c Hoeveel verschillende rondwandelingen zijn mogelijk?



- 2** De Netflix-serie Kaleidoscope bestaat uit 8 afleveringen, met een kleur als titel. Voor het verhaal maakt het niet uit in welke volgorde je de afleveringen kijkt.

- a Hoeveel mogelijke volgordes zijn er in totaal?

Als je niet specifiek voor een volgorde kiest, dan bepaalt de Netflix-app de volgorde. Netflix zegt bij het afspelen een willekeurige volgorde te hanteren, waarbij wel altijd de aflevering 'White - The Heist' als laatste wordt afgespeeld.

- b Hoeveel mogelijke volgordes zijn er dan?

Volgens verschillende kijkers klopt het niet wat Netflix zegt. De kijkers beweren dat Groen en Geel altijd bij de eerste twee zitten en daarna in willekeurige volgorde Blauw, Oranje en Paars worden afgespeeld. Tot slot worden Rood, Roze en Wit in die volgorde afgespeeld.

- c Hoeveel procent van het totaal aantal mogelijke volgordes van vraag a is dat? Rond af op twee decimalen.

KALEIDOSCOPE IN CHRONOLOGICAL ORDER	
VIOLET	– 24 YEARS BEFORE
GREEN	– 7 YEARS BEFORE
YELLOW	– 6 WEEKS BEFORE
ORANGE	– 3 WEEKS BEFORE
BLUE	– 5 DAYS BEFORE
WHITE	– THE HEIST
RED	– THE MORNING AFTER
PINK	– 6 MONTHS AFTER

- 3** Om de deur van een laboratorium te openen moet bij een paneel een toegangscode worden ingevoerd. Een medewerker moet achtereenvolgens vijf keer een tweetal cijfers tegelijkertijd indrukken.

- a Op hoeveel manieren kun je een tweetal cijfers tegelijkertijd indrukken?
- b Hoeveel toegangscode's zijn er mogelijk?
- c Hoeveel toegangscode's bevatten alle cijfers?

Volgens het beveiligingsprotocol moet minstens 99,9999% van de mogelijke toegangscode's geen toegang geven en moet elke medewerker een unieke toegangscode hebben.

- d Onderzoek hoeveel medewerkers het bedrijf maximaal kan hebben.



- 4** In het brailleschrift worden de tekens gevormd door zes stippen die al dan niet voelbaar gemaakt zijn. Hieronder zie je enkele letters in brailleschrift. Een zwarte stip is voelbaar, een open rondje niet.

A	B	C	D	E	F	G

- Hoeveel tekens zijn mogelijk als er twee stippen voelbaar zijn?
- Hoeveel tekens zijn in totaal mogelijk? Het teken met geen enkele zwarte stip doet hierbij niet mee.
- Hoeveel tekens zijn mogelijk waarbij de helft van de stippen voelbaar is, waarvan er precies één in de middelste rij zit?

- 5** Een gemeenteraad bestaat uit negen leden. Er zijn drie CDA-leden, drie PvdA-leden, twee VVD-leden en één lid van de partij Gemeentebelangen.

Er moet een commissie van drie leden worden samengesteld.

- Hoeveel commissies zijn mogelijk met twee CDA-leden?
- Hoeveel commissies zijn in totaal mogelijk?
- Hoeveel commissies zijn mogelijk waarin geen leden van dezelfde partij zitten?

Er worden vijf raadsleden gekozen die in een rij gaan staan om een toespraak te geven.

- Hoeveel verschillende rijen zijn er mogelijk?

- 6** Van de letters van het woord WISKUNDE ga je codes van vijf letters vormen.

Op hoeveel manieren kan dit als

- elke letter maar één keer in een code mag voorkomen
- elke letter meer dan één keer mag voorkomen
- de codes met een W beginnen en op een N eindigen en elke letter maar één keer mag voorkomen?

≡ **WISKUNDE** ≡

- 7** In deze opgave maak je getallen van vijf cijfers. Daarbij mag je alleen gebruikmaken van de cijfers 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8.
Hoeveel getallen zijn er als je
- a** elk cijfer één keer mag gebruiken en het getal begint met een 4
 - b** elk cijfer vaker mag gebruiken en het getal eindigt op een 5
 - c** elk cijfer vaker mag gebruiken en het getal groter is dan 30 000
 - d** elk cijfer vaker mag gebruiken en het getal groter is dan 46 000
 - e** elk cijfer één keer mag gebruiken en het getal kleiner is dan 64 000
 - f** elk cijfer vaker mag gebruiken en het getal precies twee vijven bevat die naast elkaar staan?

- 8** Het alarmsysteem van de familie Schiereck kan worden aan- en uitgezet middels een pincode van vier cijfers. Elk cijfer mag vaker gebruikt worden. Aan de slijtage van de knoppen op het cijferpaneel van het alarmsysteem is duidelijk te zien dat de knoppen voor de cijfers 4, 7 en 8 het meest gebruikt worden. Ga ervan uit dat de viercijferige pincode is opgebouwd uit deze drie cijfers.
Hoeveel mogelijke pincodes zijn er dan?

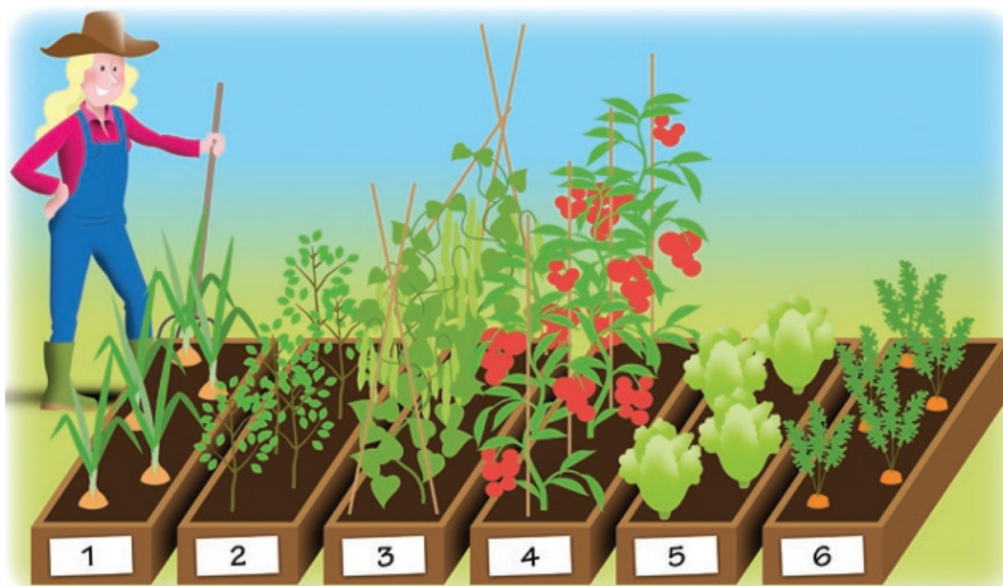
- 9** Janita heeft achter het huis 6 genummerde bakken staan om groente in te verbouwen. Ze gaat aardappels, peulen, tomaten, sla, uien en wortels verbouwen in deze bakken. Ze moet nog een keuze maken welk gewas in welke bak zal komen.
- a** Hoeveel volgorden zijn er in totaal mogelijk?

Janita wil een volgorde waarbij wortels en uien naast elkaar staan. Door deze eis vallen veel volgorden, die eerder mogelijk waren, af.

- b** Hoeveel volgorden vallen hierdoor af?

Op advies van haar oma wil ze de aardappels en tomaten zo ver mogelijk uit elkaar hebben.

- c** Welk percentage van het totale aantal volgorden blijft over als je beide eisen combineert?



- 10** Sara en Alex spelen een kaartspel tegen elkaar. Ze spelen vijf partijen en kijken daarna wie de meeste partijen heeft gewonnen. Die is dan de grote winnaar. Een mogelijk scoreverloop is 1-0, 2-0, 2-1, 2-2, 2-3. Hierbij is Alex de grote winnaar.

- a Hoeveel scoreverlopen zijn er mogelijk waarbij Alex maar één keer verliest?
- b Hoeveel scoreverlopen zijn er mogelijk waarbij Sara de grote winnaar is?



Na een aantal keer spelen realiseren Sara en Alex zich dat ze kunnen stoppen met spelen zodra een van hen drie keer heeft gewonnen, de ander kan dan niet meer de grote winnaar worden. Ze besluiten met deze nieuwe regel te spelen.

- c Hoeveel scoreverlopen zijn er mogelijk als Alex de eerste twee partijen wint?
- d Hoeveel scoreverlopen zijn er mogelijk waarbij minstens vier partijen worden gespeeld?

- 11** Een distributiecentrum gebruikt een code met blauwe en witte vakjes in een rechthoek van 4 bij 5. Zie de figuur.

- a Bereken het aantal codes met zes blauwe vakjes.
- b Hoeveel verschillende codes zijn er in totaal te maken?
- c Hoeveel codes zijn er mogelijk met in de eerste kolom één blauw vakje, in de tweede kolom twee blauwe vakjes, in de derde kolom drie blauwe vakjes en in de vierde kolom vier blauwe vakjes?

Een code heet *positief* als meer dan de helft van de vakjes blauw is en een code heet *open* als de middelste zes vakjes wit zijn.

- d Hoeveel procent van de codes is positief?
- e Hoeveel positieve codes zijn open?

kolom			
1	2	3	4
■	□	□	■
□	■	□	□
■	■	□	■
■	□	□	□
□	□	■	□

- 12** In een tuincentrum zijn een aantal planten in de aanbieding. Zie de tabel hieronder.

eenjarige planten	vaste planten	moestuinplanten	heesters
begonia viooltje afrikaantje vlijtig liesje vergeet-mij-nietje	hortensia geranium pioenroos	aardbei peterselie munt boerenkool	vlinderstruik magnolia roos

Bas koopt een aantal planten die in de aanbieding zijn.

Op hoeveel manieren kan hij

- a** twee verschillende eenjarige planten, een vaste plant en een heester kiezen
- b** uit elke categorie twee verschillende planten kiezen?

Eugene twijfelt of hij een moestuin wil beginnen. Hij koopt in totaal acht verschillende soorten planten die in de aanbieding zijn. Hij koopt hierbij drie moestuinplanten of geen enkele moestuinplant.

- c** Op hoeveel manieren kan dat?

Bij de ingang van het tuincentrum staat dat ze 50 verschillende soorten meerjarige planten verkopen. Stanley wil vijf van deze soorten in de voortuin en vijf andere in de achtertuin.

- d** Op hoeveel manieren kan dat?



13 Voor het spel ‘*Wie is de mol?*’ wordt door zes kandidaten een opdracht uitgevoerd. Hiervoor moeten twee duo’s in de stad Sevilla foto’s maken. Het ene duo maakt foto’s van drie kerken en het tweede duo van drie musea. Verder is er een kandidaat die de fotoduo’s aanwijzingen geeft, zodat deze weten waar de te fotograferen gebouwen staan. De zesde kandidaat moet na afloop van de opdracht de zes foto’s op volgorde van bouwjaar van de gefotografeerde gebouwen leggen.

a Op hoeveel manieren kunnen de kandidaten worden verdeeld over de verschillende taken?

De kandidaat die de foto’s op volgorde moet leggen, heeft geen idee van de bouwjaren van de gebouwen op de foto’s. Wel denkt hij dat de kerken in ieder geval allemaal ouder zijn dan de musea. Hij besluit op basis hiervan een gok te wagen.

b Hoeveel volgordes zijn dan mogelijk?

De kandidaat krijgt te horen dat het klopt dat de kerken allemaal ouder zijn dan de musea, maar dat geen enkele foto op de goede plek ligt. Hij mag nog een poging wagen.

c Hoeveel volgordes blijven dan nog over?

Gedurende de dag heeft een van de kandidaten, ‘de mol’, geprobeerd om de opdracht te saboteren.

De dag wordt afgesloten met een individuele test. Ter afsluiting van deze test wordt aan alle kandidaten gevraagd wie zij denken dat de mol is.

De mol krijgt na de test een lijstje te zien met daarop, op alfabetische volgorde, de namen van de andere vijf kandidaten en daarachter de door hen genoemde mol. Slechts twee van deze kandidaten hebben de juiste mol genoemd.

d Hoeveel verschillende lijstjes kan de mol te zien krijgen?

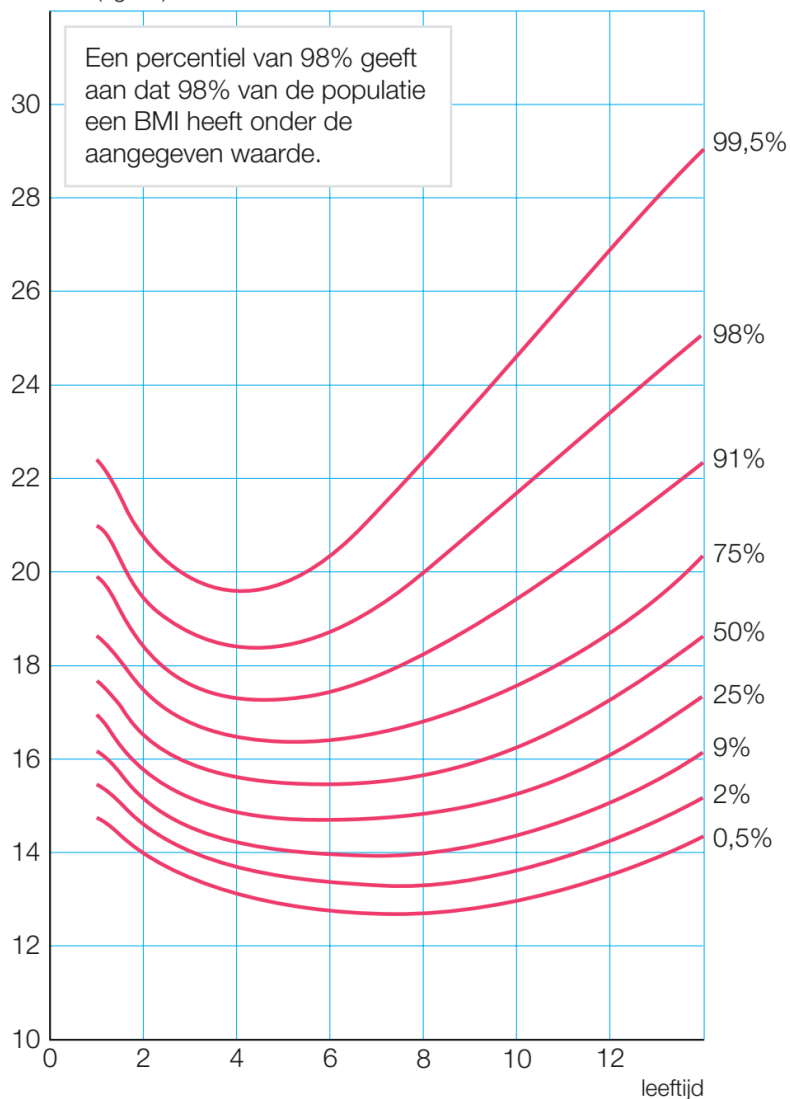


Werkbladen

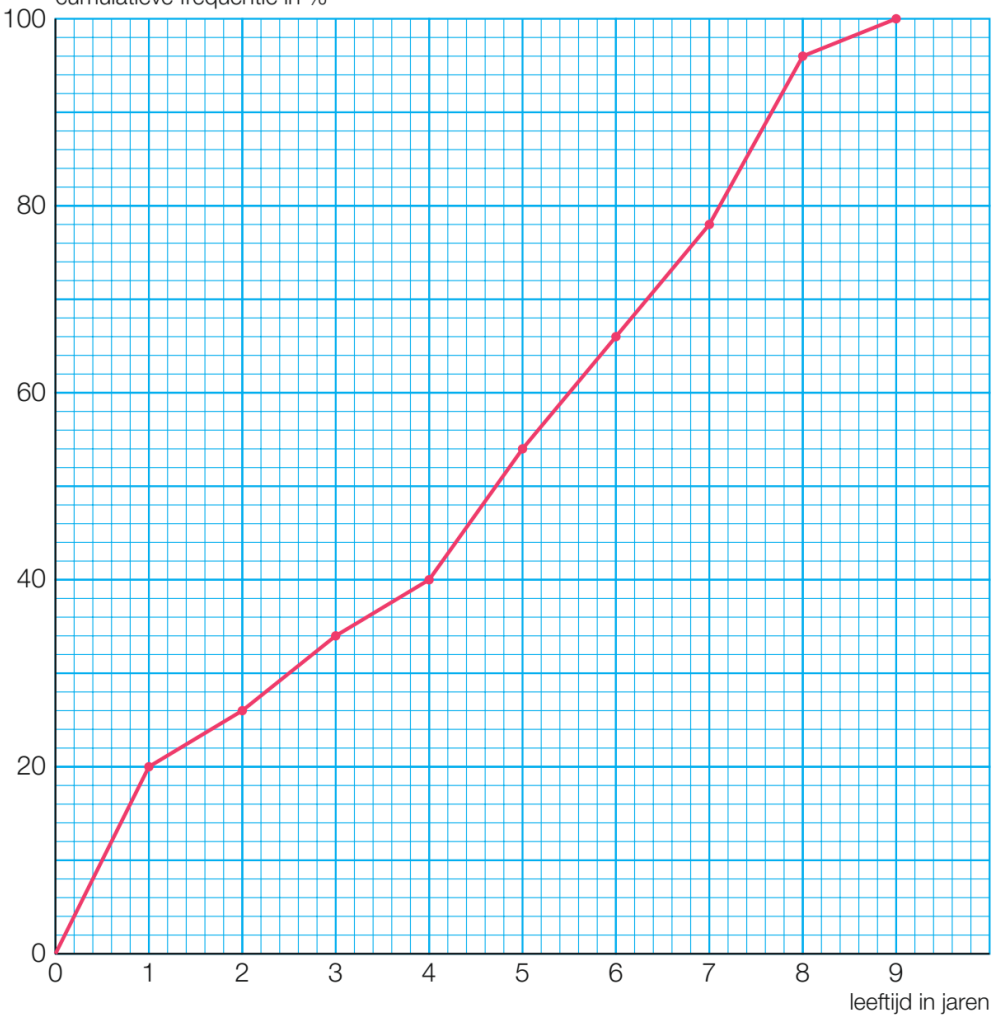
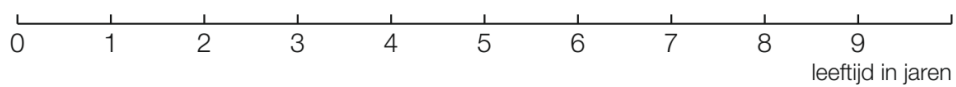
8

blz 47

PERCENTIELEN JONGENS BMI (kg/m²)

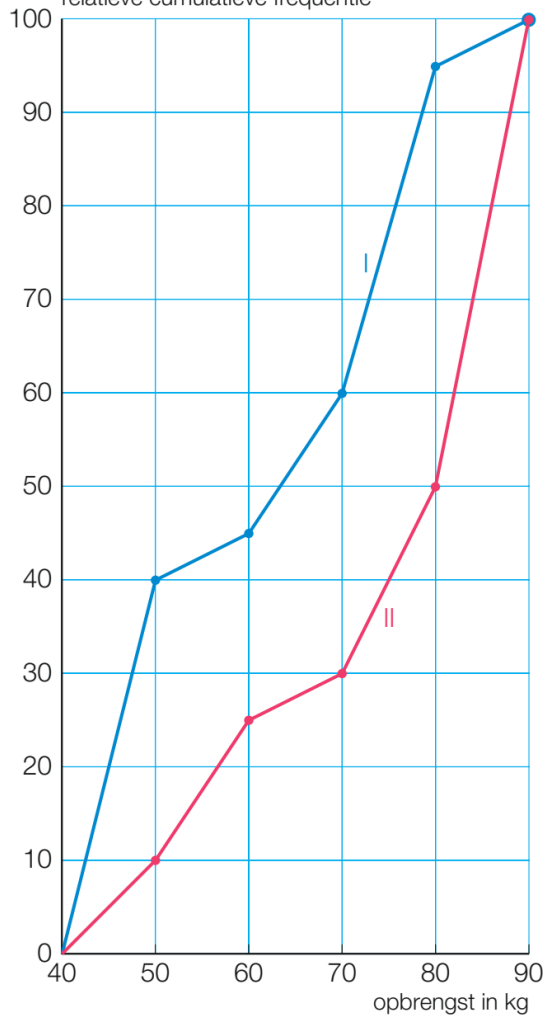
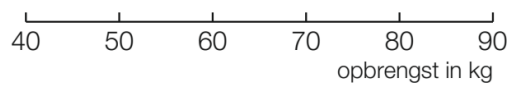


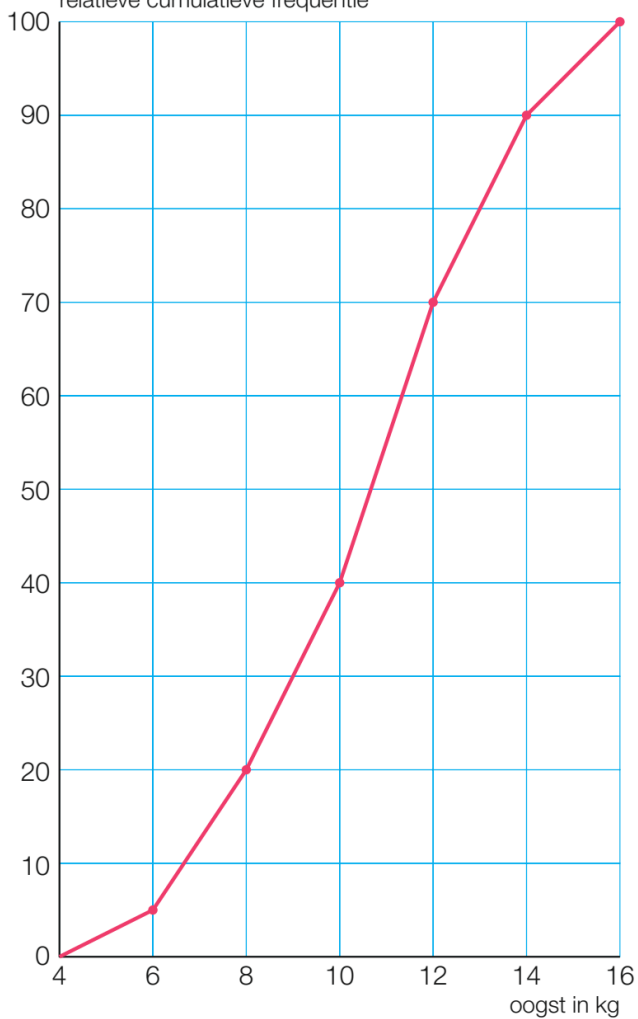
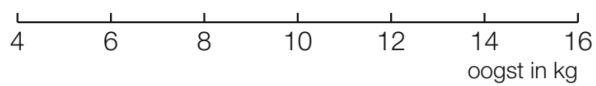
cumulatieve frequentie in %



OPBRENGST WALNOTENBOMEN

relatieve cumulatieve frequentie



TOMATENOOGST PER PLANT
relatieve cumulatieve frequentie

Antwoorden Kennis- en vaardigheidentests

Hoofdstuk 1

1 $7 \cdot 10^9$ zandkorrels

2 a 21,7 km/uur
b 448 meter

3 5,5 miljoen liter

4 a 720 euro
b -6,5%
c 281 werknemers

5 a 6,8%
b 2025: 1,71 miljoen euro
2022: 1,66 miljoen euro

6 a $N_1 = 75 \cdot 0,958^t$
b Het inwonertal kwam niet onder 30 duizend.
c $N_2 = 32 \cdot 1,051^t$
d 2017

7 a 272,6 km²
1618 bedrijven
17,20 ha per bedrijf
b 152,6 km²
c toegenomen
17,0%
d 82,38 euro/m²

8 a 15 of lager
b 3, 4, 5, 6 of 7 jaar
c 17%
d *

Hoofdstuk 2

1 de onderzoeksvraag
data verzamelen
data analyseren
conclusies trekken

2 a middelbare scholeren
b *

3 slaapligging: nominaal
aantal ademstops: discreet
langste ademstop (s): continu
moe overdag: ordinaal

4 a 84 dagen
b ja *
c 67,9%
d nee *

5 a 91 dagen
b nee *

6 a 49 kwartieren
b 21 kwartieren
c *
d nee *

7 boxplot C *

8 a rechtsscheef
b modus, mediaan,
gemiddelde *
c *

9 a 16%
b 3800 bananen
c maximaal 100 gram

Hoofdstuk 3

1 a $k: y = -0,5x - 1$
b $m: y = -1,5x$
c *

2 a $W = 7t + 1000$
b 1890 liter
c 142 minuten en 51 seconden

- 3** a $k: y = 2,4x + 14$
 b $l: y = -0,5x - 0,5$
 c $C(3; -1,2)$
- 4** a $A = -60p + 1250$
 b 575 toeschouwers
- 5** a $(5, 8)$
 b $(13,5; 25)$
- 6** a minder dan 7,5 uur
 b 7,50 euro
- 7** 70 kinderen
- 8** a 13 563,5 miljoen kWh
 b 19 326 miljoen kWh
 c 8943,6 miljoen kWh
 d $I = -175,5t + 23\,693$
 $U = 952,125t + 5398$
 e uitvoer *
 f invoer: 19 306 miljoen kWh
 uitvoer: 29 201 miljoen kWh

Hoofdstuk 4

- 1** a 60
 b 12
- 2** a 59 049
 b 1000
 c 30 240
 d 10
- 3** a 90
 b 162
 c 156
 d 114
- 4** a 40 320
 b 56
 c 336
- 5** a 2040
 b 334
- 6** a 1820
 b 1 048 576
- 7** 24
- 8** variant I

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen.
- De toets Ans, en fouten verbeteren.
- Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen.
- Decimaal getal omzetten in een breuk.

havo A deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 8

Formules, grafieken en snijpunten

- Formules invoeren en grafieken plotten.
- De optie snijpunt gebruiken.

havo A deel
hoofdstuk 1
bladzijde 29

Vergelijkingen oplossen

- Oplossen van vergelijkingen met de GR.

havo A deel
hoofdstuk 3
bladzijde 139

Allerlei

- Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR
-

Trefwoordenregister

A

absolute frequentie 73
absolute verandering 20
afstand 13
aselect 60

B

beginhoeveelheid 27
beginwaarde 27
boomdiagram 158
box 84
boxplot 84

C

centrummaat 70, 71, 72
combinatie 169
continue variabele 67
cumulatieve frequentie 80
cumulatieve
 frequentiepolygoon 80
cumulatieve
 verdelingskromme 93

D

data 58
dataset 64
delta 125
derde kwartiel 83
discrete variabele 67

E

eerste kwartiel 83
evenredig 119
evenredig verband 119
evenwijdige lijnen 115
exponentieel verval 28
exponentiële afname 28
exponentiële groei 27
extrapoleren 142

F

faculteit 166
frequentie
 absolute – 73

 cumulatieve – 80
 relatieve – 73
 relatieve
 cumulatieve – 80
frequentiepolygoon 76
 cumulatieve – 80
 relatieve
 cumulatieve – 81
frequentietabel 71

G

gemiddelde 70, 71, 72
GR 8
grafiekenbundel 41
groefactor 27
grootste getal 83

H

herhalingen 162
histogram 76
horizontale lijn 115

I

inhoud 11
inhoudsmaat 11
interkwartielafstand 84, 96
interpoleren 142

K

klasse 75
klassenbreedte 75
klassengrens 75
klassenindeling 75
klassenmidden 75
kleinste getal 83
kwalitatieve variabele 64
kwantitatieve variabele 64
kwartiel 83
kwartielafstand 84, 96

L

lengte 11
lengtemaat 11
lineair extrapoleren 142

lineair interpoleren 142
lineair verband 118
lineaire formule 114
lineaire vergelijking met
 twee variabelen 136
links-scheve verdeling 89

M

mediaan 70, 71, 72, 83
meertoppige verdeling 89
meetniveau 66
met herhaling 162
modale klasse 76
modelvorming 145
modus 70, 71, 72

N

nominaal 66
nominale variabele 66
normaalkromme 99
normale verdeling 99

O

onderzoeksvraag 58
ongelijkheid 132
oppervlakte 11
oppervlaktemaat 11
ordinaal 66
ordinale variabele 66

P

permutatie 166
plotten 29
populatie 60
presentatie 73
procentberekeningen 19, 20
procent op procent 24

R

rangschikking 166
recht evenredig 119
recht evenredig
 verband 119
rechts-scheve verdeling 89

relatieve cumulatieve
frequentie 80
relatieve cumulatieve
frequentiepolygoon 81
relatieve cumulatieve
verdelingskromme 93
relatieve frequentie 73
relatieve verandering 20
representatie 73
representatief 60
respondent 65
richtingscoëfficiënt 114,
124, 126
rijtje bestaande uit A's en
B's 175

S

scheve verdeling 89
snelheid 13
snijpunt van lijnen 129
somregel 159
spreiding 84
spreidingsbreedte 84, 96
spreidingsmaat 84, 96
staart 89
standaardafwijking 96
standaarddeviatie 96
standaardverdeling 89
statistiek 58
statistische cyclus 58

steekproef 60
symmetrische verdeling 89

T

tabel 34
tijd 13

U

uitbijter 72
uitdrukken in 136
uitschieter 72
uitzetten tegen 38
uniforme verdeling 89

V

variabele 64
continue – 67
discrete – 67
nominale – 66
ordinale – 66
kwalitatieve – 64
kwantitatieve – 64
venster 30
veranderingen,
absolute – 20
relatieve – 20
verband
lineair – 118
verdeling
links-scheve – 89
meertoppige – 89

normale – 99
rechts-scheve – 89
scheve – 89
standaard – 89
symmetrische – 89
uniforme – 89
verdelingskromme 93
cumulatieve – 93
relatieve
cumulatieve – 93
verhouding 15
verhoudingstabel 15
vermenigvuldigings-
factor 20
vermenigvuldigings-
regel 159
verticale lijn 115
vijfgetallen-
samenvatting 83
vrijmaken 136

W

waarden 64
wegendiagram 158
wetenschappelijke
notatie 8
wiskundig model 145

Z

zonder herhaling 162

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Oscar Casander, Arnhem en Haasart

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Cartografie: Van Oort redactie en kartografie, Almere

Foto's

Shutterstock: p. 6-7, 13, 48, 49, 54r, 55, 112-113, 121, 131, 132, 146 (2x), 156-157, 161, 172, 173 (2x), 178, 182, 183, 186, 191, 192, 193

ANP / Eugene Winthagen: p. 12

ANP / Imago Sportfotodienst: p. 14

iStockphoto: p. 30, 46, 56-57, 90, 134, 164, 177, 179, 185

Jeroen Oerlemans / De Beeldunie: p. 36

ANP / Rob Voss: p. 39

Sabine de Waal: p. 52

Ernst van Oort: p. 54l

Getty Images: p. 102, 110

ANP / Eyevine: 155

999 Games / www.999games.nl: p. 162, 167

Microsoft: p. 170

Stijn Voets: p. 181

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleenen.

0 / 25



© 2025 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06452-5

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten