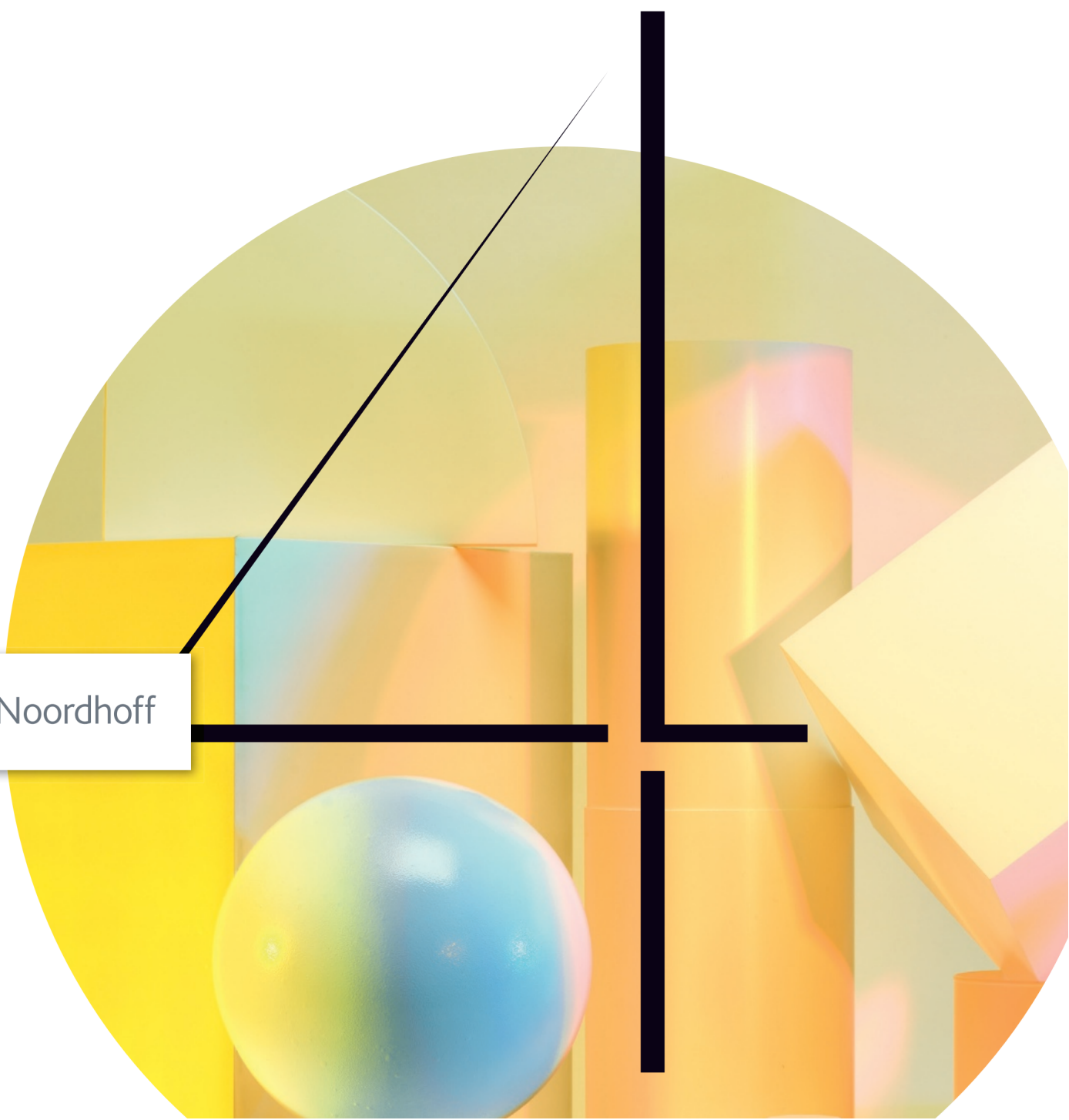


getal & ruimte

A



Noordhoff



Getal & Ruimte

Uitwerkingen havo A deel 1

Dertiende editie, 2025

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd

Inhoud

1	Rekenen en groei	4
2	De statistische cyclus	23
3	Lineaire verbanden	43
4	Combinatoriek	68

1 Rekenen en groei

1.1 Rekenen

Bladzijde 8

- 1 a** De gemiddelde uitgaven per inwoner waren $\frac{390 \text{ miljard}}{17,9 \text{ miljoen}} = \frac{390\,000\,000\,000}{17\,900\,000} \approx 22\,000$ euro.
- b** Het totale aantal cellen van alle inwoners van Nederland was toen $3 \cdot 10^{12} \times 17\,900\,000 = 5,37 \cdot 10^{19}$.

Bladzijde 9

- 2 a** $3,5 \cdot 10^6 \times 0,4 \cdot 10^4 = 1,4 \cdot 10^{10}$
- b** $1200 \cdot 55\,000 = 6,6 \cdot 10^7$
- c** $12,5 \text{ miljoen} \times 460\,000 = 12,5 \cdot 10^6 \times 460\,000 = 5,75 \cdot 10^{12}$
- d** $0,018 \times 5 \cdot 10^{-6} = 9 \cdot 10^{-8}$
- e** $\frac{1,5 \text{ duizend}}{3 \text{ miljard}} = \frac{1,5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^9} = 5 \cdot 10^{-7}$
- f** $0,8^{12} \cdot 2,5^{20} = 6,25 \cdot 10^6$
- 3 a** Dat zijn $7,9 \cdot 10^9 \times 10\,000 \times 2 = 1,58 \cdot 10^{14}$ korrels zand.
- b** Een mens van 75 kg bestaat uit $\frac{75}{1,25 \cdot 10^{-12}} = 6 \cdot 10^{13}$ cellen.
- c** Het gemiddelde gewicht van een mier is $\frac{40 \cdot 10^9}{2,0 \cdot 10^{16}} = 2 \cdot 10^{-6}$ kg.

Bladzijde 10

- 4 a** Zij lopen in een jaar $2,3 \times 52 \times 7,6 \times 1,5 \cdot 10^6 \approx 1,36 \cdot 10^9$ km.
- b** In een eeuw draait de maan $\frac{100 \times 365}{27,3} = 1336,996 \dots$ keer rond de aarde.
De maan legt in die tijd $1336,996 \dots \cdot 2\,413\,400 \approx 3,23 \cdot 10^9$ km af.
- 5 a** Op een schijf van 2,4 TB passen $\frac{2,4 \cdot 10^{12}}{700 \cdot 10^3} \approx 3$ miljoen foto's van 700 kB.
- b** Het totale spaartegoed van alle Nederlandse huishoudens is $54\,000 \times 8,3 \cdot 10^6 = 4,482 \cdot 10^{11} = 448,2 \cdot 10^9 \approx 448$ miljard euro.
- 6** De maximale dichtheid krijg je bij een zo groot mogelijke massa en een zo klein mogelijk volume.
De maximale dichtheid van de neutronenster is $\frac{6,97 \cdot 10^{30}}{1,88 \cdot 10^{12}} \approx 3,7 \cdot 10^{18}$ kg per m³.

- 7 a** 10 cm 10 cm = 1 dm 10 cm = 100 mm
- b** $6 \cdot 10 \cdot 10 = 600 \text{ cm}^2$ $600 \text{ cm}^2 = 6 \text{ dm}^2$ $600 \text{ cm}^2 = 60\,000 \text{ mm}^2$
- c** De kleine kubus past $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ keer in de grote kubus.
 $\frac{1}{1000} = 0,001$ liter $0,001 \text{ liter} = 0,001 \text{ dm}^3 = 1 \text{ cm}^3$ $1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$

Bladzijde 12

- 8 a** 52 hm = 5200 m **e** $1,45 \cdot 10^{-8} \text{ km}^3 = 14,5 \text{ m}^3$
- b** $3,4 \cdot 10^7 \text{ mm} = 34 \text{ km}$ **f** 5045 L = 5,045 m³
- c** $4,3 \text{ km}^2 = 4\,300\,000 \text{ m}^2$ **g** 0,06 dL = 6 mL
- d** $6,1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 = 610 \text{ ha}$ **h** $7,5 \cdot 10^5 \text{ mm}^3 = 0,75 \text{ L}$
- 9 a** $100^3 = 1\,000\,000 = 1000^2$
- b** 1 km² is 1000 bij 1000 meter, dus de oppervlakte is 1000² m².
- c** $5 \text{ km}^2 = 5 \cdot 1000^2 = 5\,000\,000 \text{ m}^2$

- 10 a** $4 \text{ L} = 4 \text{ dm}^3 = 4 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$ en $52 \text{ m}^2 = 52 \cdot 10^6 \text{ mm}^2$
 De dikte van de verf is $\frac{4 \cdot 10^6}{52 \cdot 10^6} \approx 0,08 \text{ mm}$.
- b** Per jaar lekt er $5 \cdot 10^{-2} \cdot 30 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 788\,400 \text{ mL} = 788,4 \text{ L}$ water. Kees heeft dus niet gelijk.

- 11 a** $880 \text{ mm} = 8,8 \text{ dm}$ en $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$.
 Dus op 100 dm^2 valt $8,8 \text{ dm}$ neerslag, dat is een volume van $8,8 \cdot 100 = 880 \text{ dm}^3 = 880 \text{ L}$.
- b** De gemiddelde intensiteit gedurende een jaar is $\frac{880}{624} = 1,41\ldots \text{ mm per uur}$.
 De intensiteit tijdens de wolkbreuk is $3 \cdot 24 = 72 \text{ mm per uur}$.
 Dat is dus $\frac{72}{1,41\ldots} \approx 51$ keer groter.
- c** De oppervlakte van het voetbalveld is $102 \cdot 65 = 6630 \text{ m}^2$.
 24 mm neerslag is 24 L per m^2 , dus $24 \cdot 6630 = 159\,120 \text{ L} = 159,12 \text{ m}^3$.

Bladzijde 13

- 12** $81 \text{ mm} = 0,081 \text{ m}$ en $41\,500 \text{ km}^2 = 41\,500 \cdot 10^6 \text{ m}^2$
 Er valt in juli in Nederland $0,081 \times 41\,500 \cdot 10^6 = 3,3615 \cdot 10^9 \text{ m}^3$ neerslag.
 Per inwoner is dat $\frac{3,3615 \cdot 10^9}{18 \cdot 10^6} \approx 187 \text{ m}^3$.

- 13 a** Er gaan 60 seconden in een minuut. Dus 45 seconden is $\frac{45}{60} = 0,75$ minuten.
- b** De tijd is $\frac{27,75}{60} = 0,4625$ uur.
- c** De gemiddelde snelheid is $\frac{7}{0,4625} \approx 15,1 \text{ km per uur}$.

Bladzijde 14

- 14 a** De gemiddelde snelheid is $\frac{100}{10,49} \text{ m/s} = \frac{100}{10,49} \cdot 3,6 \text{ km/uur} \approx 34,318 \text{ km/uur}$.
- b** 2 uur, 1 minuut en 9 seconden $= 2 + \frac{1}{60} + \frac{9}{3600} = 2,019\ldots \text{ uur}$
 De lengte van de marathon van Berlijn is $20,897 \cdot 2,019\ldots \approx 42,195 \text{ km}$.
- c** $21,092 \text{ km/uur} = \frac{21,092}{3,6} \text{ m/s} = 5,858\ldots \text{ m/s}$.
 Ze deed er $\frac{5000}{5,858\ldots} = 853,40\ldots$ seconden over, oftewel $\frac{853,40\ldots}{60} = 14,223\ldots$ minuten.
 Ze deed er $0,223\ldots \cdot 60 \approx 13,4$ seconden langer over dan 14 minuten.

- 15 a** 25 minuten is $\frac{25}{60} = 0,416\ldots$ uur.
 De gemiddelde snelheid is $\frac{6,0}{0,416\ldots} = 14,4 \text{ km/uur}$.
- b** Zijn recordtijd is $\frac{16,8}{14} = 1,2$ uur.
 Dus 1 uur en $0,2 \cdot 60 = 12$ minuten (of 72 minuten).
- c** Dat is een gemiddelde km-tijd van $\frac{26}{6,0} = 4\frac{1}{3}$ minuten = 4 minuten en 20 seconden.
- d** 1 uur en 50 minuten is $1 + \frac{50}{60} = 1,833\ldots$ uur.
 Hij heeft $12,6 \cdot 1,833\ldots \approx 23 \text{ km}$ gelopen.

- 16 a** Hij hoort de inslag $\frac{5,4}{1235} = 0,0043\dots$ uur $= 0,0043\dots \cdot 3600$ seconden $\approx 15,7$ seconden na de inslag.

b $1,8 \cdot 10^{-5}$ seconden $= \frac{1,8 \cdot 10^{-5}}{3600}$ uren $= 5 \cdot 10^{-9}$ uur

De snelheid van het licht is $\frac{5,4}{5 \cdot 10^{-9}} = 1,08 \cdot 10^9$ km/uur.

- 17** Over de heenweg doet Kees $\frac{100}{80} = 1\frac{1}{4}$ uur en over de terugweg doet hij $\frac{100}{120} = \frac{5}{6}$ uur, dus over de heen- en terugweg samen doet hij $1\frac{1}{4} + \frac{5}{6} = 2\frac{1}{12}$ uur.

De gemiddelde snelheid over de heen- en terugweg samen is $\frac{200}{2\frac{1}{12}} = 96$ km/uur.

Bladzijde 15

- 18** Per persoon zijn $\frac{12}{6} = 2$ eieren nodig, dus voor 10 personen zijn $10 \cdot 2 = 20$ eieren nodig.

Per persoon is $\frac{75}{6} = 12,5$ gram poedersuiker nodig, dus voor 10 personen is

$10 \cdot 12,5 = 125$ gram poedersuiker nodig.

Bladzijde 16

- 19 a** Er zitten $\frac{3}{5} \cdot 25 = 15$ meisjes in de klas.
b Twee delen zijn 84 personen, dus één deel is 42 personen.
De club heeft $5 \cdot 42 = 210$ jeugdleden.

- 20 a** $105 + 100 = 205$ delen zijn 1,4 miljard oftewel 1400 miljoen inwoners, dus één deel is $\frac{1400}{205} = 6,829\dots$ miljoen inwoners.
Er zijn $5 \cdot 6,829\dots \approx 34$ miljoen meer mannen dan vrouwen.
b $105 - 36 = 69$ delen zijn 6,9 miljoen inwoners, dus één deel is $\frac{6,9}{69} = 0,1$ miljoen inwoners.
In totaal zijn er $35 + 105 + 36 = 176$ delen, dus $176 \cdot 0,1 = 17,6$ miljoen inwoners van Nederland.

- 21 a** Anna, Bram en Eva lopen afstanden in de verhouding 1 : 2 : 3.
In totaal $1 + 2 + 3 = 6$ delen.
Anna loopt $\frac{1}{6} \cdot 24 = 4$ km, Bram loopt $\frac{2}{6} \cdot 24 = 8$ km en Eva $\frac{3}{6} \cdot 24 = 12$ km.
b Twee delen is 6 km/uur, dus één deel is 3 km/uur.
De gemiddelde snelheden van Anna, Bram en Eva zijn achtereenvolgens $4 \cdot 3 = 12$ km/uur, $3 \cdot 3 = 9$ km/uur en $5 \cdot 3 = 15$ km/uur.
Anna loopt $\frac{4}{12}$ uur, Bram loopt $\frac{8}{9}$ uur en Eva loopt $\frac{12}{15}$ uur.
In totaal doen ze er $\frac{4}{12} + \frac{8}{9} + \frac{12}{15} \approx 2,02$ uur over, dat is meer dan twee uur.

Bladzijde 17

- 22 a** Voor elke 2 volwassen mannen zijn er 3 volwassen vrouwen, dus voor elke 4 volwassen mannen zijn er 6 volwassen vrouwen.
Voor elke 6 volwassen vrouwen is er 1 kind. Dus voor elke $4 + 6 = 10$ volwassenen is er 1 kind.
De gezochte verhouding is 10 : 1.

Alternatieve uitwerking

volwassen mannen : volwassen vrouwen $= 2 : 3 = 4 : 6$

volwassen vrouwen : kinderen $= 6 : 1$

volwassen mannen : volwassen vrouwen : kinderen $= 4 : 6 : 1$

Dus volwassenen : kinderen $= 10 : 1$.

- b** Voor iedere 4 noten die Ina kreeg, kreeg Olivia er 3,
 dus voor iedere 12 noten die Ina kreeg, kreeg Olivia er 9.
 Voor iedere 6 noten die Ina kreeg, kreeg Nathalie er 7,
 dus voor elke 12 noten die Ina kreeg, kreeg Nathalie er 14.
 Olivia, Ina en Nathalie kregen noten in de verhouding 9 : 12 : 14.
 In totaal $9 + 12 + 14 = 35$ delen.
 Olivia, de jongste, kreeg $\frac{9}{35} \cdot 770 = 198$ noten.

Alternatieve uitwerking

Olivia : Ina = 3 : 4 = 9 : 12

Nathalie : Ina = 7 : 6 = 14 : 12

Olivia : Ina : Nathalie = 9 : 12 : 14.

Het totaal aantal delen is $9 + 12 + 14 = 35$.

Olivia, de jongste, kreeg $\frac{9}{35} \cdot 770 = 198$ noten.

- 23 a** In totaal $3 + 4 + 5 = 12$ delen.
 De afvoer in I is $\frac{3}{12} \cdot 2340 = 585 \text{ m}^3/\text{s}$.
 De afvoer in II is $\frac{4}{12} \cdot 2340 = 780 \text{ m}^3/\text{s}$.
 De afvoer in III is $\frac{5}{12} \cdot 2340 = 975 \text{ m}^3/\text{s}$.
- b** De afvoer in II zou $\frac{4}{12} \cdot 3000 = 1000 \text{ m}^3/\text{s}$ zijn. Dat is te veel, dus de afvoer in II wordt door de stuw beperkt tot $800 \text{ m}^3/\text{s}$.
 Er blijft dan nog $2200 \text{ m}^3/\text{s}$ over voor afvoeren I en III in de verhouding 3 : 5.
 In totaal $3 + 5 = 8$ delen
 De afvoer in I is $\frac{3}{8} \cdot 2200 = 825 \text{ m}^3/\text{s}$.
 De afvoer in III is $\frac{5}{8} \cdot 2200 = 1375 \text{ m}^3/\text{s}$.
- c** De afvoer in III is groter dan bij vraag b, dus de afvoer in II is $800 \text{ m}^3/\text{s}$ en de afvoeren in I en III verhouden zich als 3 : 5.
 Vijf delen zijn $1500 \text{ m}^3/\text{s}$, dus één deel is $300 \text{ m}^3/\text{s}$.
 De afvoer in I is $3 \cdot 300 = 900 \text{ m}^3/\text{s}$.
 De aanvoer is dus $900 + 800 + 1500 = 3200 \text{ m}^3/\text{s}$.

- 24** Voor het eerste glas geldt:
 bosbessensap : druivensap = 2 : 3, dus 5 delen vruchtensap.
 vruchtensap : water = 1 : 2 = 5 : 10
 Dus bosbessensap : druivensap : water = 2 : 3 : 10.

Voor het tweede glas geldt:

bosbessensap : druivensap = 4 : 5, dus 9 delen vruchtensap.

vruchtensap : water = 1 : 4 = 9 : 36

Dus bosbessensap : druivensap : water = 4 : 5 : 36.

De verhouding bosbessensap : druivensap : water in het eerste glas is 2 : 3 : 10 oftewel 6 : 9 : 30.

Dat zijn 45 delen, net als in de verhouding 4 : 5 : 36 in het tweede glas.

De verhouding bosbessensap : druivensap : water in de karaf is dus $10 : 14 : 66 = 5 : 7 : 33$.

Bladzijde 18

- C1 a** Er zitten $\frac{4,6 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^{-5}} = 9,2 \cdot 10^{10} = 92 \cdot 10^9 = 92$ miljard druppels in het zwembad.
- b** $4,6 \cdot 10^6$ liter = $4,6 \cdot 10^9 \text{ cm}^3$ en $0,184 \text{ ha} = 1,84 \cdot 10^7 \text{ cm}^2$
 De diepte van het water in het zwembad is $\frac{4,6 \cdot 10^9}{1,84 \cdot 10^7} = 250 \text{ cm}$.
- c** 1 uur en een kwartier = $1,25 \text{ uur} = 1,25 \cdot 3600 \text{ seconden} = 4500 \text{ s}$
 Ze zwemt $0,8 \cdot 4500 = 3600$ meter, dat zijn $\frac{3600}{46} = 78,26 \dots$ baantjes.
 Dus ze heeft 78 baantjes gezwommen.

- C2** Eefje scoorde vier delen meer dan haar zusje.
 Vier delen zijn 24 punten, dus één deel is 6 punten.
 Eefje scoorde 3 delen meer dan haar broertje, dat zijn $3 \cdot 6 = 18$ punten.

1.2 Procenten

Bladzijde 19

V1 **a** $0,32 \cdot 720 = 230,4$ **c** $0,0008 \cdot 5000 = 4$
b $0,031 \cdot 180 = 5,58$ **d** $0,918 \cdot 528\,000 = 484\,704$

V2 **a** $\frac{92}{305} \cdot 100\% \approx 30,2\%$ **c** $\frac{0,3}{17} \cdot 100\% \approx 1,8\%$
b $\frac{1,8}{3,9} \cdot 100\% \approx 46,2\%$ **d** $\frac{832}{21\,000} \cdot 100\% \approx 4,0\%$

V3 **a** $0,12 \times \text{totaal} = 720$, dus $\text{totaal} = \frac{720}{0,12} = 6000$.
b $0,50 \times \text{totaal} = 0,96$, dus $\text{totaal} = \frac{0,96}{0,50} = 1,92$.
c $0,0235 \times \text{totaal} = 28,2$, dus $\text{totaal} = \frac{28,2}{0,0235} = 1200$.
d $0,0086 \times \text{totaal} = 1,591$, dus $\text{totaal} = \frac{1,591}{0,0086} = 185$.

- 25** Floris: De uitgaven van gebruikers bij de App Store is toegenomen met $96 - 88 = 8$ miljard.
De uitgaven van gebruikers bij Google Play is toegenomen met $60 - 53 = 7$ miljard.
Dus de toename is bij de App Store groter.

Ilse: De procentuele toename bij de App Store is $\frac{96 - 88}{88} \cdot 100\% \approx 9,1\%$.

De procentuele toename bij Google Play is $\frac{60 - 53}{53} \cdot 100\% \approx 13,2\%$.

Dus de procentuele toename is bij Google Play groter.
Beide uitspraken zijn dus te verdedigen.

Bladzijde 21

- 26** **a** De nieuwe prijs is $1,16 \cdot 8,50 = 9,86$ euro.
b De prijs zonder korting is $\frac{1,13}{0,65} \approx 1,74$ euro.
c Het koor heeft nu $\frac{5}{0,12} \approx 42$ leden.
d De verandering is $\frac{720 - 850}{850} \cdot 100\% \approx -15,3\%$.
e De relatieve toename is $\frac{163,40 - 151,25}{151,25} \cdot 100\% \approx 8,0\%$.

Bladzijde 22

- 27** **a** De korting is $0,40 \cdot 9,95 = 3,98$ euro.
b Er werden $\frac{651}{1,04} \approx 626$ boeken uitgeleend.
c $348 - 153 = 195$ vierdejaars doen havo, dat is $\frac{195}{348} \cdot 100\% \approx 56,0\%$.
d Ze moet $0,82 \cdot 60 = 49,20$ euro afrekenen.

- 28** **a** De procentuele toename per jaar is $\frac{324 - 240}{240} \cdot 100\% = 35\%$.
In 2023 waren er $1,35 \cdot 324 \approx 437$ geboorten.
b In 2020 waren er $\frac{240}{1,35} \approx 178$ geboorten.

29 Bij NT: het aantal leerlingen in 2022 is $13\,700 - 4100 = 9600$ en

de relatieve verandering is $\frac{-4100}{13\,700} \cdot 100\% \approx -29,9\%$.

Bij NG: het aantal leerlingen in 2022 is $29\,100 \cdot 0,90 \approx 26\,200$ en
de absolute verandering is $29\,100 - 26\,200 = 2900$.

Bij EM: het aantal leerlingen in 2018 is $\frac{53\,100}{0,983} \approx 54\,000$ en
de absolute verandering is $54\,000 - 53\,100 = 900$.

Bij CM: het aantal leerlingen in 2018 is $\frac{3000}{0,217} \approx 13\,800$ en
het aantal leerlingen in 2022 is $13\,800 + 3000 = 16\,800$.

LEERLINGEN HAVO 4 EN 5 PER PROFIEL

	jaar		verandering	
	2018	2022	absoluut	relatief
NT	13 700	9600	-4100	-29,9%
NG	29 100	26 200	2900	-10,0%
EM	54 000	53 100	900	-1,7%
CM	13 800	16 800	3000	21,7%

30 1-D: Hoeveel procent is 36 van 45? $\frac{36}{45} \cdot 100\% = 80\%$

2-C: Hoeveel is 25% van 36? $0,25 \cdot 36 = 9$

3-B: 36 is 75% van het totaal. Hoeveel is het totaal? $\frac{36}{0,75} = 48$

4-A: Hoeveel procent is een toename van 36 tot 45? $\frac{45 - 36}{36} \cdot 100\% = 25\%$

5-F: 36 neemt met 25% af. Wat krijg je? $0,75 \cdot 36 = 27$

6-E: Na 25% toename krijg je 36. Wat had je? $\frac{36}{1,25} = 28,8$

Bladzijde 23

31 a vermenigvuldigingsfactor = $\frac{43\,100}{45\,800} \approx 0,941$

b $(1 - 0,941) \cdot 100\% = 5,9\%$ of $100\% - 0,941 \cdot 100\% = 5,9\%$

32 a Je hebt niet te maken met tijd, dus ook niet met nieuw en oud.

b Er zitten $\frac{50}{150} \cdot 100\% \approx 33,3\%$ meer leerlingen op de havo dan op het vwo.

c Het aantal docenten is $0,46 \cdot 200 = 92$.

Het aantal docenten is $150 - 92 = 58$ minder dan het aantal vwo-leerlingen.

Dat is $\frac{58}{150} \cdot 100\% \approx 38,7\%$ minder.

33 a Er stemden toen $\frac{2\,450\,878}{2,18} \approx 1\,124\,300$ mensen op de PVV.

b NSC haalde $\frac{1\,643\,073 - 1\,343\,287}{1\,643\,073} \cdot 100\% \approx 18,2\%$ minder stemmen dan GroenLinks-PvdA.

c Het aantal VVD-stemmen is met $\frac{689\,611}{2\,279\,130} \cdot 100\% \approx 30,3\%$ afgenomen.

d Het aantal stemgerechtigden was $\frac{10\,517\,680}{0,777} \cdot 100\% \approx 13\,536\,300$.

e Er stemden $0,42 \cdot 15\,658\,61 \approx 657\,700$ mensen op D66.

f In 2021 stemden $\frac{381\,232}{3,65} \approx 104\,447$ mensen op de BBB.

Dus in 2023 waren dat $104\,447 + 381\,232 \approx 485\,700$ mensen.

Bladzijde 24

- 34 a** Op 1 januari 2023 waren er $\frac{340\,600}{0,038} \approx 8\,963\,200$ auto's.
- b** Van de 312 000 verkochte auto's in 2022 reed 23% elektrisch, dat zijn $0,23 \cdot 312\,000 = 71\,760$ auto's.
Dus $\frac{71\,760}{340\,600} \cdot 100\% \approx 21,1\%$ van de elektrische auto's is in 2022 verkocht.
- c** In 2021 zijn er $312\,000 + 10\,000 = 322\,000$ nieuwe auto's verkocht.
Het aantal nieuw verkochte (plug-in) hybride auto's
in 2021 was $0,33 \cdot 322\,000 = 106\,260$
in 2022 was $0,36 \cdot 312\,000 = 112\,320$.
Dus dit aantal is met $112\,320 - 106\,260 = 6060$ gestegen.
- d** Het aantal nieuw verkochte benzineauto's
in 2021 was $0,46 \cdot 322\,000 = 148\,120$
in 2022 was $0,385 \cdot 312\,000 = 120\,120$.
De relatieve verandering is $\frac{120\,120 - 148\,120}{148\,120} \cdot 100\% \approx -18,9\%$.
Dus het nam af met 18,9%.
- 35 a** De gemiddelde bezetting is $\frac{3 \cdot 88\% + 9 \cdot 40\%}{12} = 52\%$.
- b** Van een dorstige kameel is 16% geen water. Nadat de kameel zijn dorst heeft gelest is dat 15%.
De kameel weegt $\frac{800}{0,15} = 120$ kg zonder water. Dus de dorstige kameel woog $\frac{120}{0,16} = 750$ kg.

Bladzijde 25

- 36 a** $1,131 \cdot 0,918 \approx 1,038$, dus de verandering in de periode 2015-2024 was ongeveer 3,8%.
- b** $0,951 \cdot 1,083 \cdot 0,966 \approx 0,995$. De ticketprijs is afgenomen met ongeveer 0,5%.
- c** $1,023^{10} \approx 1,255$. Dus na 10 jaar is het bedrag met ongeveer 25,5% toegenomen.
- 37** $1,031^4 = 1,1298\dots$, dus de huurprijs voor de verhogingen was $\frac{1456,21}{1,1298\dots} \approx 1288,81$ euro.
- 38** Er moet gelden: $1,031^4 \times factor = 1$, dus $factor = \frac{1}{1,031^4} \approx 0,885$.
De verlaging moet ongeveer 11,5% zijn.
- Alternatieve uitwerking*
Als de huurprijs volgend jaar 1,031 keer zo groot is, dan was de huurprijs vorig jaar $\frac{1}{1,031} = 0,9699\dots$ keer zo groot.
 $0,9299\dots^4 \approx 0,885$, dus de verlaging moet ongeveer 11,5% zijn.
- 39 a** $1,05 \cdot 0,98 \cdot 0,99 \cdot 1,02 \cdot 1,01 \approx 1,049$, dus de winst is in deze periode toegenomen met 4,9%.
- b** Voor 2021-2024 geldt de factor $1,05 \cdot 0,98 \cdot 0,99 = 1,01871$.
Voor 2022-2025 geldt de factor $0,98 \cdot 0,99 \cdot 1,02 = 0,989604$.
Voor 2023-2026 geldt de factor $0,99 \cdot 1,02 \cdot 1,01 = 1,019898$.
Dus in de periode 2023-2026 is de winst procentueel het meest toegenomen.
- 40** Er moet gelden: $factor \times 1,05 \cdot 0,98 \cdot 0,99 = 0,97$, dus $factor = \frac{0,97}{1,05 \cdot 0,98 \cdot 0,99} \approx 0,952$.
De winst nam af met ongeveer 4,8%.

- 41 a** Procentuele veranderingen kunnen niet bij elkaar worden opgeteld.
De winst neemt eerst met 15% toe en daarna met 25%. Dus je vermenigvuldigt met 1,15 en met 1,25.
In totaal vermenigvuldig je met $1,15 \cdot 1,25 = 1,4375$, dus de winst neemt met ongeveer 43,8% toe.
- b** De nieuwe hoeveelheid is 10% meer dan de oude hoeveelheid, maar dan is de oude hoeveelheid niet 10% minder dan de nieuwe hoeveelheid.
De hoeveelheid was eerst $\frac{3080}{1,10} = 2800$.
- c** Er is berekend hoeveel geld Joris minder heeft dan Hajar in plaats van hoeveel geld Hajar meer heeft dan Joris.
Als je wilt weten hoeveel procent Hajar meer heeft dan Joris dan moet je delen door het bedrag dat Joris heeft.
Hajar heeft $\frac{60 - 50}{50} \cdot 100\% = 20\%$ meer geld dan Joris.

Bladzijde 26

- C3 a** In 2024 had de vereniging $1,247 \cdot 449 \approx 560$ leden.
- b** In 2022 was de contributie $\frac{24,50}{0,935} \approx \text{€}26,20$.
- c** De relatieve verandering is $\frac{-2,50}{24,50} \cdot 100\% \approx -10,2\%$.
- d** De inkomsten in 2023 waren $449 \cdot 24,50 = 11\,000,50$ euro.
De inkomsten in 2024 waren $560 \cdot 22 = 12\,320$ euro.
De inkomsten zijn dus toegenomen met $\frac{12\,320 - 11\,000,50}{11\,000,50} \cdot 100\% \approx 12,0\%$.
- e** 't Bouldertje had $\frac{580 - 449}{580} \cdot 100\% \approx 22,6\%$ minder leden.

- C4** $1,025 \cdot 0,916 \approx 0,939$, dus het broodje van Channah is ongeveer 6,1% goedkoper dan dat van Ari.

1.3 Exponentiele groei

Bladzijde 27

- 42 a**
- | t | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----|------|------|------|------|
| N | 1240 | 1302 | 1367 | 1435 |
- b** 12 weken
- c** Het aantal volgers is $1240 \cdot 1,05^8 \approx 1832$.

Bladzijde 28

- 43 a** $N = 450 \cdot 0,935^t$
- b** $B = 15,52 \cdot 2^t$
- c** Kwart over tien is 9 kwartieren na 8:00 uur.
Het aantal kinderen om kwart over tien is $122 \cdot 1,045^9 \approx 181$.
- 44 a** $N = 280 \cdot 1,12^t$
- b** 1990 loopt van $t = 3$ tot $t = 4$.
De toename was $280 \cdot 1,12^4 - 280 \cdot 1,12^3 \approx 50$ reeën.
- c** $t = 3$ geeft $N = 280 \cdot 1,12^3 \approx 393$
De relatieve verandering is $\frac{393 - 280}{280} \cdot 100\% \approx 40,4\%$.
- 45 a** $1,12^6 = 1,973\dots$ en $1,12^7 \approx 2,210\dots$
Ongeveer een verdubbeling elke 6 jaar, dus $x \approx 6$.
- b** $g = 1,12^{10} \approx 3,106$

Bladzijde 29

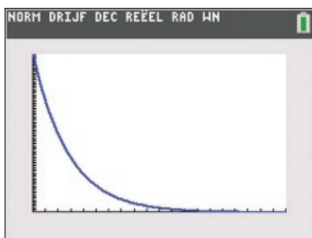
- 46** **a** $BZV = 185 \cdot 0,845^t$
b De vierde dag loopt van $t = 3$ tot $t = 4$.
 Het BZV neemt af met $185 \cdot 0,845^3 - 185 \cdot 0,845^4 \approx 17$ mg/liter.
c $t = 7$ geeft $BZV = 185 \cdot 0,845^7 = 56,90\dots$
 $\frac{56,90\dots - 185}{185} \cdot 100\% \approx -69,2\%$, dus in de eerste week neemt het BZV af met 69,2%.
d Op basis van de formule verwacht je $185 \cdot 0,845^5 - 185 \cdot 0,845^8 \approx 31,6$ mg/liter.
 Dus het komt niet overeen.
- 47** Er geldt $N = 60$ bij $t \approx 4,6$. Dus ongeveer 4,6 jaar na 1 januari 2022 heeft de stad 60 duizend inwoners, dat is in het jaar 2026.

Bladzijde 31

- 48** **a** $N = 1,013 \cdot 1,26^t$
b $1,013 \cdot 1,26^t = 4$
 Voer in $y_1 = 1,013 \cdot 1,26^x$ en $y_2 = 4$.
 De optie snijpunt geeft $x = 5,94\dots$
 Dus in januari van het jaar 2026 is het aantal inwoners voor het eerst meer dan 4 miljoen.
c $1,013 \cdot 1,26^t = 2,026$
 Voer in $y_1 = 1,013 \cdot 1,26^x$ en $y_2 = 2,026$.
 De optie snijpunt geeft $x = 2,99\dots$
 Dus na ongeveer drie jaar is het aantal inwoners verdubbeld.
- 49** **a** $N_A = 876 \cdot 1,017^t$
b $876 \cdot 1,017^t = 1000$
 Voer in $y_1 = 876 \cdot 1,017^x$ en $y_2 = 1000$.
 De optie snijpunt geeft $x = 7,85\dots$
 Dus in het jaar 2014 wonen er 1 miljard mensen in Afrika.
c $N_E = 731 \cdot 0,999^t$
d Als het aantal inwoners met 2% is afgenomen is het aantal inwoners
 $731 \cdot 0,98 = 716,38$ miljoen.
 $731 \cdot 0,999^t = 716,38$
 Voer in $y_1 = 731 \cdot 0,999^x$ en $y_2 = 716,38$.
 De optie snijpunt geeft $x = 20,19\dots$
 Dus in het jaar 2027 is het aantal inwoners 2% afgenomen ten opzichte van 1 januari 2007.
e $t = 15$ geeft $N_A = 876 \cdot 1,017^{15} = 1128,02\dots$ en $N_E = 731 \cdot 0,999^{15} = 720,11\dots$
 Het procentuele verschil ten opzichte van het werkelijke aantal is
 bij Afrika $\frac{1427 - 1128,02\dots}{1427} \cdot 100\% \approx 21,0\%$ en bij Europa $\frac{721 - 720,11\dots}{721} \cdot 100\% \approx 0,1\%$.
 De voorspelling van het aantal inwoners van Afrika wijkt procentueel het meest af.

Bladzijde 32

- 50** **a** $d = 2$ geeft $I = 100 \cdot 0,70^2 = 49$, dus er dringt 49% van de straling door.
b $d = 5$ geeft $I = 100 \cdot 0,70^5 \approx 16,8$, dus de straling neemt met $100\% - 16,8\% = 83,2\%$ af.
c Omdat I een percentage is dat tussen 0 en 100 kan liggen, zijn y -waarden tussen 0 en 100 geschikt.



- d** $100 \cdot 0,70^d = 20$
 Voer in $y_1 = 100 \cdot 0,70^x$ en $y_2 = 20$.
 De optie snijpunt geeft $x = 4,51\dots$
 Dus men moet minimaal 4,6 mm dik lood gebruiken.

- e $100 \cdot 0,978^d = 20$
 Voer in $y_1 = 100 \cdot 0,978^x$ en $y_2 = 20$.
 De optie snijpunt geeft $x = 72,34\dots$
 Dus men moet minimaal 73 mm dik beton gebruiken.

- 51 De dikte van het lood is $\frac{1}{8} \cdot 120 = 15$ mm en de dikte van het beton is $120 - 15 = 105$ mm.
 $100 \cdot 0,70^{15} \cdot 0,978^{105} \approx 0,05$, dus er dringt ongeveer 0,05% straling door. De muur houdt ongeveer 99,95% van de straling tegen.

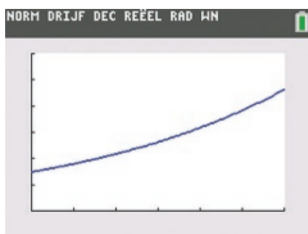
- 52 a $4,02 \cdot 10^{11} = 402$ miljard en $7,80 \cdot 10^9 = 7,8$ miljard
 $N_A = 402 \cdot 0,965^t$ en $N_B = 7,8 \cdot 1,041^t$.
 b $t = 60$ geeft $N_A = 402 \cdot 0,965^{60} = 47,40\dots$ en $N_B = 7,8 \cdot 1,041^{60} = 86,92\dots$
 Van stof B is er dan $\frac{86,92\dots - 47,40\dots}{47,40\dots} \cdot 100\% \approx 83,3\%$ meer dan van stof A.
 c $402 \cdot 0,965^t = 7,8 \cdot 1,041^t$
 Voer in $y_1 = 402 \cdot 0,965^x$ en $y_2 = 7,8 \cdot 1,041^x$.
 De optie snijpunt geeft $x = 52,00\dots$
 Dus na ongeveer 52 seconden is het aantal deeltjes van stof A en stof B gelijk.
 d $1,38 \cdot 10^{11} = 138$ miljard
 $402 \cdot 0,965^t = 138$
 Voer in $y_2 = 138$.
 De optie snijpunt geeft $x = 30,01\dots$
 $t = 30,010\dots$ geeft $N_B = 7,8 \cdot 1,041^{30,01\dots} = 26,04\dots$
 Dus van stof B zijn er dan ongeveer 26 miljard $= 2,6 \cdot 10^{10}$ deeltjes.

- 53 Als het aantal deeltjes van stof B 50% meer is dan het aantal deeltjes van stof A, dan geldt $N_B = 1,5 \cdot N_A$.
 $7,8 \cdot 1,041^t = 1,5 \cdot 402 \cdot 0,965^t$
 Voer in $y_1 = 1,5 \cdot 402 \cdot 0,965^x$ en $y_2 = 7,8 \cdot 1,041^x$.
 De optie snijpunt geeft $x = 57,35\dots$
 Dus na ongeveer 57,4 seconden is het aantal deeltjes van stof B 50% meer dan het aantal deeltjes van stof A.

Bladzijde 33

- C5 a $M = 250 \cdot 0,86^t$
 b Tussen 12:00 en 16:00 uur is van $t = 4$ tot $t = 8$.
 De hoeveelheid medicijn neemt met $250 \cdot 0,86^4 - 250 \cdot 0,86^8 \approx 62$ mg af.

- C6 a $N = 15\,000 \cdot 1,019^t$
 b Voer in $y_1 = 15\,000 \cdot 1,019^x$.



- c $15\,000 \cdot 1,019^t = 30\,000$
 Voer in $y_2 = 30\,000$.
 De optie snijpunt geeft $x = 36,82\dots$
 Dus na ongeveer 37 minuten is het aantal bacteriën voor het eerst verdubbeld.

1.4 Informatie in tabellen en grafieken

Bladzijde 34

- 54 a In die 40 jaar is het aantal bedrijven gekrompen met $67\,200 - 15\,700 = 51\,500$.
 Dat zijn $\frac{51\,500}{365,25 \cdot 40} \approx 3,5$ (of $\frac{51\,500}{365 \cdot 40} \approx 3,5$) bedrijven per dag.

b In 1980 was de gemiddelde melkproductie per koe $\frac{11\,851}{2356} = 5,03\dots$ ton.

In 2020 was de gemiddelde melkproductie per koe $\frac{13\,987}{1593} = 8,78\dots$ ton.

Dat is een toename van $\frac{8,78\dots - 5,03\dots}{5,03\dots} \cdot 100\% \approx 74,6\%$.

c De 100 grootste bedrijven hadden $100 \cdot 500 = 50\,000$ koeien.

De andere 15 600 bedrijven hadden samen dus $1\,593\,000 - 50\,000 = 1\,543\,000$ koeien.

Dat zijn gemiddeld $\frac{1\,543\,000}{15\,600} \approx 99$ koeien per bedrijf.

d $232,9 \text{ m}^3 = 232\,900$ liter

De productie per bedrijf is $\frac{232\,900}{971} = 239,85\dots$ ton.

De totale melkproductie is $239,85\dots \cdot 47\,000 \approx 11\,273\,000$ ton.

Bladzijde 35

55 a In de kolom '0 schades' kun je zien dat ze elk schadevrij jaar een trede omhoog gaat. Na vijf jaar schadevrij is ze dus op trede 11.

Ze krijgt dan 65% korting, dus ze moet $0,35 \cdot 1000 = €350$ betalen.

b Zie de kolom '1 schade', op 1 januari 2021 is ze op trede 6.

Ze moet dan $0,65 \cdot 1000 = €650$ betalen.

c Op 1 januari 2026 is ze op trede 1.

Ze moet dan $1,1 \cdot 1000 = €1100$ betalen.

Bladzijde 36

56 a Hij is dan op trede 7 en moet $0,6 \cdot 1000 = €600$ betalen.

b Hij heeft $600 + 550 + 500 + 450 + 350 = €2450$ betaald.

c Hij zou dan $250 + 200 + 200 + 200 + 200 = €1050$ hebben betaald.

d Het verschil van de totalen is $2450 - 1050 = €1400$. Dat is meer dan de schade van 450 euro. Door het melden van de schade zijn de totale kosten voor meneer Verbeek hoger geworden dan wanneer hij de schade zelf had betaald.

Advies: vraag je af of het verstandig is om de schade te melden. Bij een niet te hoog schadebedrag kan het verstandig zijn de schade zelf te betalen, mits je de jaren daarna schadevrij rijdt.

57 a aantal inwoners $\times 1000$ Benelux: $11\,698 + 17\,922 + 654 = 30\,274$

De totale beroepsbevolking in de Benelux is

$0,403 \cdot 11\,698 + 0,541 \cdot 17\,922 + 0,416 \cdot 654 = 14\,682,16$ duizend.

aandeel beroepsbevolking Benelux: $\frac{14\,682,16}{30\,274} \cdot 100\% \approx 48,5\%$

b Het bruto inkomen in België is $\frac{534 \cdot 10^9}{11\,698 \cdot 10^3} \approx 45\,649$ euro, in Nederland is dat

$\frac{956 \cdot 10^9}{17\,922 \cdot 10^3} \approx 53\,342$ euro en in Luxemburg is dat $\frac{56 \cdot 10^9}{654 \cdot 10^3} \approx 85\,627$ euro.

Dus in Luxemburg is het bruto inkomen per inwoner het grootst.

c De oppervlakte van Nederland is $\frac{17\,922}{431} = 41,58\dots$ duizend km^2 .

De oppervlakte van België is $\frac{11\,698}{391} = 29,91\dots$ duizend km^2 .

De oppervlakte van Nederland is $\frac{41,58\dots - 29,91\dots}{29,91\dots} \cdot 100\% \approx 39,0\%$ groter vergeleken met de oppervlakte van België.

d Er zijn $\frac{654 \cdot 10^3}{2,37} \approx 275\,949$ huishoudens in Luxemburg.

Het huishoudinkomen in Luxemburg is $\frac{56 \cdot 10^9}{275\,949} \approx 203\,000$ euro.

Alternatieve uitwerking

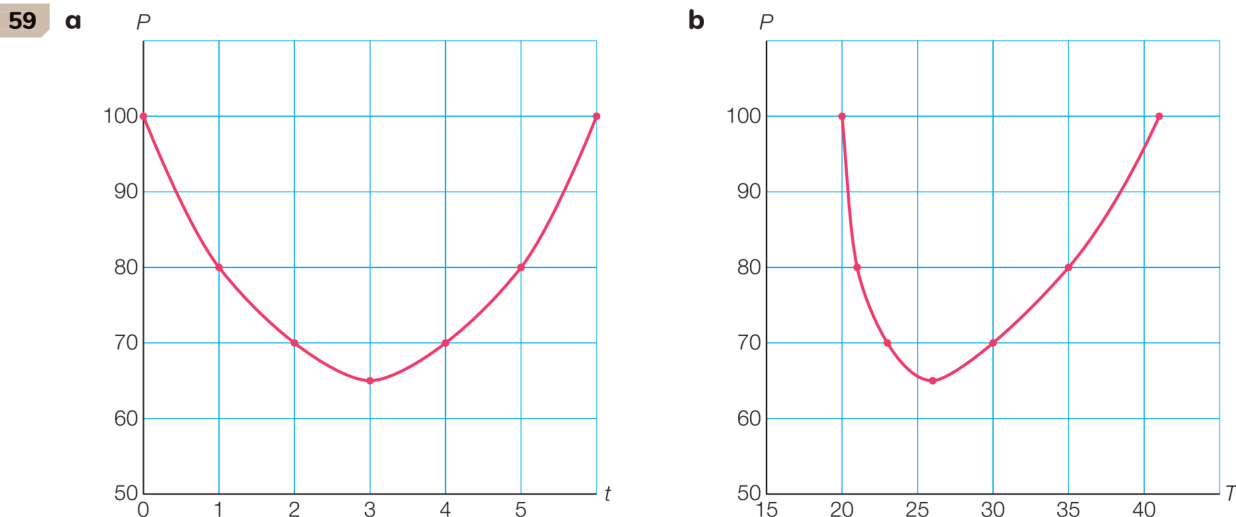
Het bruto inkomen per inwoner in Luxemburg is 85 626,9... euro (zie vraag b).

Het huishoudinkomen in Luxemburg is dus $2,37 \cdot 85\,626,9\dots \approx 203\,000$ euro.

Bladzijde 37

- 58 a** Mevrouw Lever betaalt $131,45 + 45,50 = € 176,95$ per maand.
Per jaar is dat $12 \cdot 176,95 = € 2123,40$.
- b** De maandelijkse premie is $119,45 + 16,95 = € 136,40$ euro.
Ze krijgt 1,25% korting dus ze betaalt per halfjaar $6 \cdot 0,9875 \cdot 136,4 = € 808,17$.
- c** Zonder kortingen betaalt Femke $12 \cdot (139,45 + 45,75 + 26,95) = € 2545,80$ per jaar.
Op de aanvullende verzekeringen krijgt ze 40% korting en op het totaal 3% korting.
Dus met kortingen betaalt ze $0,97 \cdot 12 \cdot (139,45 + 0,6 \cdot 45,75 + 0,6 \cdot 26,95) \approx € 2130,93$ per jaar.
Ze bespaart dus $2545,80 - 2130,93 = € 414,87$ per jaar.

Bladzijde 38

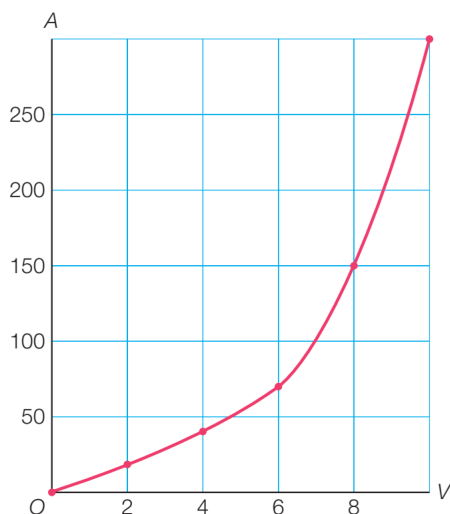


Bladzijde 39

- 60 a** Aflezen (bij de linker figuur) geeft: bij $V = 4$ hoort $Z = 2$.
Aflezen (bij de rechter figuur) geeft: bij $Z = 2$ hoort $A = 40$.
- Aflezen (bij de linker figuur) geeft: bij $V = 8$ hoort $Z = 6$.
Aflezen (bij de rechter figuur) geeft: bij $Z = 6$ hoort $A = 150$.
- Het aantal aanrijdingen neemt toe met $\frac{150 - 40}{40} \cdot 100\% = 275\%$.
- b** Aflezen (bij de rechter figuur) geeft: bij $A = 80$ hoort $Z = 4$.
Aflezen (bij de linker figuur) geeft: bij $Z = 4$ hoort $V = 6,4$.
De hoeveelheid voedsel was 6,4 miljoen kg eikels en beukennotjes.

c

V	0	2	4	6	8	10
Z	0	0,8	2	3,6	6	10
A	0	20	40	70	150	300



Bladzijde 40

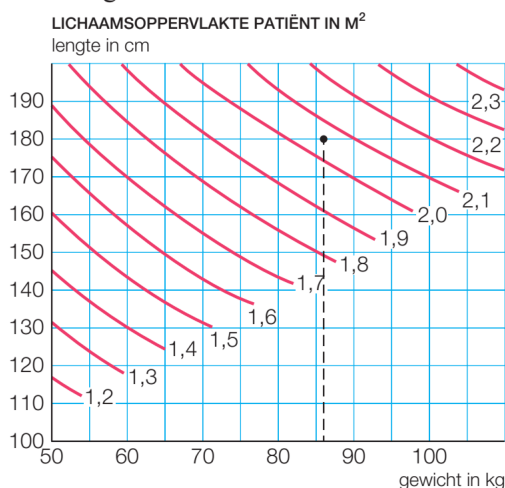
- 61 a** Aflezen geeft: in 2016 was de oogst $370 \cdot 10^6$ kg en het aantal bedrijven $13 \cdot 10^2$.
De gemiddelde perenoogst per bedrijf was $\frac{370 \cdot 10^6}{13 \cdot 10^2} \approx 285\,000$ kg peren.
- b** Aflezen geeft: in 2009 waren er $17,3 \cdot 10^2$ bedrijven en in 2022 waren er $11,7 \cdot 10^2$ bedrijven.
De relatieve verandering is $\frac{11,7 - 17,3}{17,3} \cdot 100\% \approx -32,4\%$, dus een afname van 32,4%.
- c** Aflezen geeft: de kleinste perenoogst is $170 \cdot 10^6$ kg en de grootste oogst is $400 \cdot 10^6$ kg.
Dat is $\frac{400 - 175}{175} \cdot 100\% \approx 128,6\%$ meer.
- d** Het aantal bedrijven verandert ook gedurende het jaar, de punten op de vloeiende kromme hebben allemaal betekenis. De perenoogst is slechts op één moment per jaar gemeten, de tussenliggende punten op de lijnstukken hebben geen betekenis.
- e** $10\,066 \text{ ha} = 100\,660\,000 \text{ m}^2$
Aflezen geeft: in 2021 was de oogst $340 \cdot 10^6$ kg.
De perenoogst was $\frac{340 \cdot 10^6}{100\,660\,000} \approx 3,4$ kg per m^2 .
- f** Aflezen geeft: in 2006 was de oogst $220 \cdot 10^6$ kg peren en in 2022 was dat $350 \cdot 10^6$ kg peren.
De totale appel- en perenoogst in 2006 was $\frac{220}{0,37} \approx 595$ miljoen kg.
De totale appel- en perenoogst in 2022 was $\frac{350}{0,59} \approx 593$ miljoen kg.
Dus de totale appel- en perenoogst was in 2022 en 2006 ongeveer gelijk.

Bladzijde 41

- 62 a** Aflezen geeft: bij straal = 8 cm en $h = 15$ cm hoort inhoud = 3000 mL. Dus de inhoud is 3000 mL.
- b** Aflezen geeft: bij inhoud = 2500 mL en $h = 25$ cm hoort straal = 5,6 cm. Dus de straal is 5,6 cm.
- c** bijvoorbeeld:
Aflezen geeft: bij $h = 10$ cm en straal = 4 cm hoort inhoud = 500 mL en bij $h = 10$ cm en straal = 8 cm hoort inhoud = 2000 mL.
Dat is dus $\frac{2000}{500} = 4$ keer zo groot.

Bladzijde 43

- 63 a** Aflezen geeft: bij 65 kg en $1,6 \text{ m}^2$ hoort een lengte van 150 cm.
Dus de patiënt is 1,50 m lang.
- b** Aflezen geeft: bij 170 cm en 100 kg hoort een oppervlakte van $2,1 \text{ m}^2$.
Aflezen geeft: bij 170 cm en $(100 \cdot 0,9 =) 90$ kg hoort een oppervlakte van $2,0 \text{ m}^2$.
 $\frac{2,0 - 2,1}{2,1} \cdot 100\% \approx -4,8\%$, dus de lichtste patiënt heeft 4,8% minder lichaamsoppervlakte.
- c** $20\,500 \text{ cm}^2 = 2,05 \text{ m}^2$
Zie de figuur.



Een schatting van het gewicht bij 180 cm en $2,05 \text{ m}^2$ is 86 kg.

- d** Aflezen geeft: bij 72,5 kg en 140 cm hoort een oppervlakte van $1,6 \text{ m}^2$.
 $1,6 \text{ m}^2 = 16\,000 \text{ cm}^2$.
 De patiënt neemt dus $1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 16\,000 = 0,192$ gram van medicijn A.
 Twee delen zijn 0,192 gram, dus één deel is $\frac{0,192}{2} = 0,096$ gram.
 De patiënt neemt dus $5 \cdot 0,096 = 0,48$ gram van medicijn B.

- 64 a** Aflezen geeft: bij 14 m/s en $0,2 \text{ m}^2$ hoort een gewicht van 1,5 kg.
 De vogel is dus een blauwe reiger.
- b** De kiekendief heeft een gewicht van 470 g = 0,47 kg en een kruissnelheid van
 $30 \text{ km/uur} = \frac{30}{3,6} \text{ m/s} \approx 8,3 \text{ m/s}$.
 Aflezen geeft: bij 0,47 kg en 8,3 m/s hoort een vleugeloppervlakte van $0,18 \text{ m}^2 = 1800 \text{ cm}^2$.
- c** De zeearend heeft een gewicht van 5 kg en een vleugeloppervlakte van $7200 \text{ cm}^2 = 0,72 \text{ m}^2$.
 Aflezen geeft: bij 5 kg en $0,72 \text{ m}^2$ hoort een kruissnelheid van
 $13 \text{ m/s} = 13 \cdot 3,6 \text{ km/uur} = 46,8 \text{ km/uur}$.
 De zeearend doet er $\frac{200}{46,8} \approx 4,27$ uur over. Dat is ongeveer 4 uur en een kwartier.

Bladzijde 44

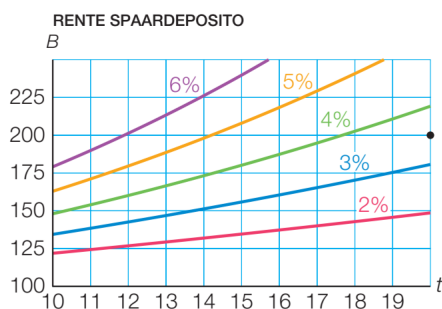
- 65** De winst per passagier is $\frac{27\,000}{300} = 90$ euro.
 De kosten per passagier zijn $990 - 90 = 900$ euro.
 Je leest in de grafiek af dat de cruise 14 dagen duurt.
- 66** De opbrengst van de cruise is $\frac{53\,000}{0,117} \approx 453\,000$ euro. Dus de kosten zijn ongeveer
 $453\,000 - 53\,000 = 400\,000$ euro.
 Proberen geeft dat hierbij hoort 500 passagiers en 800 euro kosten per passagier.
 Een passagier betaalt $\frac{453\,000}{500} = 906$ euro voor deze cruise.

- C7 a** Duitsland heeft $\frac{736}{0,890} \cdot 100\,000 \approx 82,7$ miljoen inwoners.
 Nederland heeft 17,9 miljoen = $179 \cdot 100\,000$ inwoners, dus $\frac{150}{179} \approx 0,838$
 parlementsleden per 100 000 inwoners.
 Denemarken heeft 5,9 miljoen = $59 \cdot 100\,000$ inwoners, dus
 $59 \cdot 3,034 \approx 179$ parlementsleden.
- b** Nederland zou dan $179 \cdot 3,034 \approx 543$ parlementsleden hebben.

Bladzijde 45

- C8 a** In 2018 was het aantal jongeren $4,88 \cdot 10^6$ en in 2021 was dat aantal $4,85 \cdot 10^6$.
 De relatieve verandering is $\frac{4,85 - 4,88}{4,88} \cdot 100\% \approx -0,6\%$, dus het is met 0,6% afgenomen.
- b** In 2016 was het aantal jongeren 4,88 miljoen waarvan er 42,3% werkte.
 In 2016 waren er dus $0,423 \cdot 4,88$ miljoen = 2,06424 miljoen werkende jongeren.
 In 2022 was het aantal jongeren 4,87 miljoen waarvan er 44,1% werkte.
 In 2022 waren er dus $0,441 \cdot 4,87$ miljoen = 2,14767 miljoen werkende jongeren.
 Dus het aantal werkende jongeren is toegenomen met $\frac{2,14767 - 2,06424}{2,06424} \cdot 100\% \approx 4,0\%$.

- C9** **a** Aflezen geeft: bij $t = 14$ en 6% hoort $B \approx 226$. Dus 226 duizend euro.
b Zie de figuur.



- Een schatting van het rentepercentage bij $t = 20$ en $B = 200$ is 3,5%.
c Aflezen geeft: bij $t = 19$ en 4% hoort $B \approx 210$ en bij $t = 19$ en 3% hoort $B = 175$.
Dus het bedrag is ongeveer $\frac{210 - 175}{175} \cdot 100\% = 20\%$ hoger.

Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 46

- 1** Ze gebruikt $20 \cdot 35 = 700$ liter = $700\,000 \text{ cm}^3$ zand.
Dat zijn ongeveer $700\,000 \cdot 10\,000 = 7 \cdot 10^9$ zandkorrels.
- 2** **a** Deze lift heeft een gemiddelde snelheid van $\frac{350}{58} \text{ m/s} = \frac{350}{58} \cdot 3,6 \text{ km/uur} \approx 21,7 \text{ km/uur}$.
b $15,3 \text{ km/uur} = \frac{15,3}{3,6} \text{ m/s} = 4,25 \text{ m/s}$
Het tweede uitzichtpunt bevindt zich op $350 + 23 \cdot 4,24 \approx 448$ meter hoogte.
- 3** In totaal $6 + 7 + 7 = 20$ delen.
Er worden jaarlijks $\frac{6}{20} \cdot 4 = 1,2$ miljoen blikken van 0,5 liter geproduceerd.
Er worden jaarlijks $\frac{7}{20} \cdot 4 = 1,4$ miljoen blikken van 1 en 2,5 liter geproduceerd.
In totaal wordt er jaarlijks $1,2 \cdot 0,5 + 1,4 \cdot 1 + 1,4 \cdot 2,5 = 5,5$ miljoen liter verf geproduceerd.
- 4** **a** De oorspronkelijke huurprijs was $\frac{745,20}{1,035} = 720$ euro.
b De procentuele verandering is $\frac{1232 - 1318}{1318} \cdot 100\% \approx -6,5\%$.
c $\frac{45}{0,138} \approx 326$ werknemers, dus het bedrijf heeft nu $326 - 45 = 281$ werknemers.
- 5** **a** $1,04 \cdot 1,024 \cdot 0,996 \cdot 1,007 \approx 1,068$, dus de relatieve verandering is 6,8%.
b De kosten in 2025 waren $1,70 \cdot 0,996 \cdot 1,007 \approx 1,71$ miljoen euro.
De kosten in 2022 waren $\frac{1,70}{1,024} \approx 1,66$ miljoen euro.

Bladzijde 47

- 6** **a** $N_1 = 75 \cdot 0,958^t$
b $t = 20$ geeft $N_1 = 75 \cdot 0,958^{20} \approx 31,8$
Begin 2020 is het inwonertal 31,8 duizend en daarna gaat het inwonertal weer stijgen, dus het inwonertal komt niet onder 30 duizend.
c $N_2 = 32 \cdot 1,051^t$
d $32 \cdot 1,051^t = 75$
Voer in $y_1 = 32 \cdot 1,051^x$ en $y_2 = 75$.
De optie snijpunt geeft $x = 17,12\dots$
Dus in het jaar 2017.

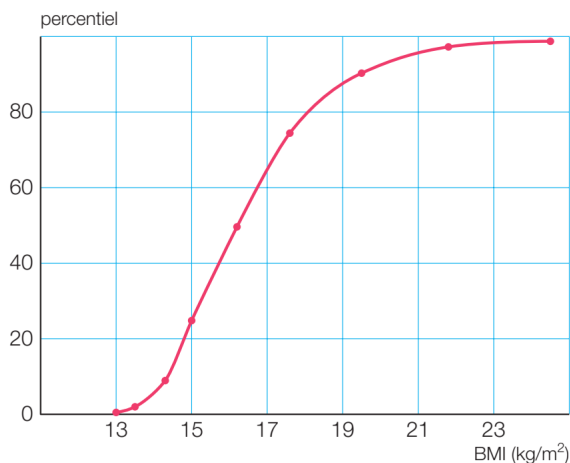
- 7 a** De oppervlakte in 2021 is $1583 \cdot 17,22 = 27259,26 \text{ ha} \approx 272,6 \text{ km}^2$.
 $280,4 \text{ km}^2 = 28040 \text{ ha}$, dus het aantal bedrijven in 2022 is $\frac{28040}{17,33} \approx 1618$.
 $283,4 \text{ km}^2 = 28340 \text{ ha}$, dus de oppervlakte in ha per bedrijf in 2023 is $\frac{28340}{1648} \approx 17,20$.
- b** De totale oppervlakte was $\frac{283,4}{0,65} = 436 \text{ km}^2$. Hiervan lag $436 - 283,4 = 152,6 \text{ km}^2$ buiten Nederland.

Alternatieve uitwerking

- De oppervlakte buiten Nederland was $\frac{35\%}{65\%} \cdot 283,4 = 152,6 \text{ km}^2$.
- c** De opbrengst per bedrijf in 2021 was $\frac{20,2}{1583} = 0,012\dots$ miljard euro.
De opbrengst per bedrijf in 2023 was $\frac{24,6}{1648} = 0,014\dots$ miljard euro.
De opbrengst per bedrijf is dus toegenomen met $\frac{0,014\dots - 0,012\dots}{0,012\dots} \cdot 100\% \approx 17,0\%$.
- d** $280,4 \text{ km}^2 = 280,4 \text{ miljoen m}^2$
Dus per m^2 is de opbrengst $\frac{23,1 \cdot 10^9}{280,4 \cdot 10^6} \approx 82,38$ euro.

- 8 a** Aflezen geeft: bij 12 jaar en 9% hoort een BMI van 15. Sam heeft een BMI van 15 of lager.
- b** Aflezen geeft: bij BMI 18 en 91% hoort een leeftijd van 2,5 jaar of 7,5 jaar.
Hij kan dus 3, 4, 5, 6 of 7 jaar oud zijn geworden.
- c** Aflezen bij 6 jaar en BMI 17 geeft een percentiel midden tussen 75% en 91%. Een schatting van het percentiel van Levi is $\frac{75\% + 91\%}{2} = 83\%$, dus 17% van de 6-jarige jongens heeft een hogere BMI dan Levi.

d BMI	13	13,5	14,3	15	16,2	17,6	19,5	21,8	24,6
percentiel	0,5	2	9	25	50	75	91	98	99,5



Gemengde opgaven

Bladzijde 48

- 1 a** Dat is $\frac{22}{104} \cdot 100\% \approx 21,2\%$.
- b** Er zaten $\frac{13}{0,14} \approx 93$ leerlingen in 5 havo.
- c** In 2020-2021 waren er $104 + 88 = 192$ leerlingen en in 2024-2025 waren dat er $106 + 98 = 204$.
De toename is $\frac{204 - 192}{192} \cdot 100\% \approx 6,3\%$.

- d** Dat waren $1,057 \cdot 106 \approx 112$ leerlingen.
- e** Het aantal leerlingen in de bovenbouw havo in het schooljaar 2019-2020 was $\frac{104 + 88}{0,965} \approx 199$.
Dus in 4 havo zaten $199 - 92 = 107$ leerlingen.

Bladzijde 49

- 2 a** De procentuele toename is $\frac{21\,000 - 3\,500}{3\,500} \cdot 100\% = 500\%$.
- b** Bij 6,15% toename per jaar is de groeifactor 1,0615.
Voor 30 jaar is de groeifactor $1,0615^{30} \approx 5,992$, dus een toename van 499,2%.
Dus dat komt ongeveer overeen.
- c** In 1980 is het aantal woorden $\frac{3\,500}{1,0615^3} \approx 2\,930$.
- d** $W = 2\,930 \cdot 1,0615^t$
- e** $t = 12$ geeft $N = 2\,930 \cdot 1,0615^{12} \approx 6\,000$
Dus in 1992 telden de visregels ongeveer 6000 woorden.
- f** $2\,930 \cdot 1,0615^t = 55\,000$
Voer in $y_1 = 2\,930 \cdot 1,0615^x$ en $y_2 = 55\,000$
De optie snijpunt geeft $x = 49,13\dots$
Dus in het jaar 2029.
- 3 a** 1,5 mm = 0,15 cm en 1,4 meter = 140 cm
Dus $0,15 \cdot 140 \cdot 20 = 420 \text{ cm}^3$ fineer.
- b** $420 \cdot 12 \cdot 60 \cdot 324 = 97\,977\,600 \text{ cm}^3 \approx 98,0 \text{ m}^3$
- c** In totaal $2 + 5 + 1 = 8$ delen.
3 delen zijn 5775 planken, dus 1 deel is $\frac{5775}{3} = 1\,925$ planken.
Dus in totaal $8 \cdot 1\,925 = 15\,400$ planken per maand.

Bladzijde 50

- 4 a** Aflezen geeft: bij 7 jaar en 200 000 km hoort een dagwaarde van 5000 euro.
- b** Aflezen geeft: bij 5,5 jaar en 100 000 km hoort een dagwaarde van 8000 euro.
Aflezen geeft: bij een dagwaarde van 8000 en 50 000 km hoort een leeftijd van 7 jaar.
Dus de auto van Tom is 7 jaar oud.
- c** Van 1 juli 2023 t/m 1 januari 2030 is 6,5 jaar oftewel 78 maanden.
De totale verzekeringskosten waren $78 \cdot 38 = 2\,964$ euro.
Aflezen geeft: bij 6,5 jaar en 100 000 km hoort een dagwaarde 7500 euro.
Dus Jeroen is $7500 - 2\,964 = 4\,536$ euro goedkoper uit.
- d** $g = 0,985$
- e** $25\,000 \cdot 0,985^t = 9\,800$
Voer in $y_1 = 25\,000 \cdot 0,985^x$ en $y_2 = 9\,800$
De optie snijpunt geeft $x = 61,96\dots$
Dus ze heeft de auto ongeveer 62 maanden, oftewel 5 jaar en 2 maanden.
- f** Bij een kilometerstand van 130 000 km heeft hij de auto $\frac{130\,000}{200} = 650$ weken,
dat zijn ongeveer $\frac{650}{52} \cdot 12 = 150$ maanden.
 $t = 150$ geeft $D = 25\,000 \cdot 0,985^{150} \approx 2\,600$, dus de dagwaarde is dan ongeveer 2600 euro.
- g** De leeftijd van de auto is dan $6 + 24 + 2 = 32$ maanden.
 $t = 32$ geeft $D = 25\,000 \cdot 0,985^{32} \approx 15\,413,43$.
Het gemiddelde verlies per maand is $\frac{28\,500 - 15\,413,43}{32} \approx 409$ euro.

Bladzijde 51

- 5 a** In fase 1 in totaal $7 + 2 + 1 = 10$ delen.
 In fase 1 werken er $\frac{7}{10} \cdot 12 = 8,4$ miljoen mensen in de primaire sector.
 In fase 2 zijn 3 delen 3,9 miljoen mensen, dus 1 deel is 1,3 miljoen mensen. Dus in de primaire sector werken dan $5 \cdot 1,3 = 6,5$ miljoen mensen.
 Het aantal is dus afgenomen met $8,4 - 6,5 = 1,9$ miljoen mensen.
- b** In fase 2 in totaal $5 + 3 + 2 = 10$ delen.
 In fase 2 is 1 deel 0,8 miljoen, dus 10 delen zijn 8 miljoen.
 In fase 3 in totaal $1 + 2 + 7 = 10$ delen.
 In fase 3 is de beroepsbevolking $2 \cdot 8 = 16$ miljoen mensen, waarvan er $\frac{7}{10} \cdot 16 = 11,2$ miljoen in de tertiaire sector werken.
- c** Stel er werken steeds 7 miljoen mensen in de primaire sector.
 In fase 1 is de omvang van beroepsbevolking dan 10 miljoen.
 In fase 3 is de omvang van de beroepsbevolking dan 70 miljoen.
 De beroepsbevolking is dus 7 keer zo groot geworden.

Alternatieve uitwerking

In fase 1 werkt $\frac{7}{10} = 0,7$ deel van de bevolking in de primaire sector. In fase 3 is dat $\frac{1}{10} = 0,1$ deel.

Dus de beroepsbevolking is $\frac{0,7}{0,1} = 7$ keer zo groot geworden.

- 6 a** $N_A = 12 \cdot 1,045^t$ en $N_B = 24 \cdot 1,028^t$
- b** $24 \cdot 1,028^7 - 12 \cdot 1,045^7 \approx 13$, dus 13 duizend minder.
- c** $t = 28$ geeft $N_B = 24 \cdot 1,028^{28} \approx 52,002$
 $12 \cdot 1,045^t = 52,002$
 Voer in $y_1 = 12 \cdot 1,045^x$ en $y_2 = 52,002$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 33,3$, dus na 33 dagen.
 Dat is 5 dagen later.

Bladzijde 52

- 7 a** Ze betalen voor de plaats en de toeristenbelasting, dat is in totaal $6 \cdot 21,50 + 2 \cdot 6 \cdot 0,92 = 140,04$ euro.
- b** Het betreft 14 nachten in het hoogseizoen en ze reserveren, dus ze betalen $14 \cdot 28,70 + 5 + 2 \cdot 14 \cdot 0,92 = 432,56$ euro.
- c** Het betreft 18 nachten in het laagseizoen en ze reserveren, dat kost $18 \cdot 25,50 + 5 + 2 \cdot 18 \cdot 0,92 = 497,12$ euro als ze het aantal nachten betalen.
 Nemen ze een arrangement, dan kost het $370 + 55 + 5 + 2 \cdot 18 \cdot 0,92 = 463,12$ euro.
 Dus het arrangement is voordeliger.
- d** 25 mei t/m 28 mei is het laagseizoen, dat zijn 3 nachten.
 29 mei t/m 10 juni is het hoogseizoen, dat zijn 12 nachten.
 De kinderen komen 3 nachten en voor hen hoeven alleen de extra kosten en de toeristenbelasting betaald te worden.
 Ze betalen $3 \cdot 18,50 + 12 \cdot 23,70 + 5 + 2 \cdot 15 \cdot 0,92 + 2 \cdot 3 \cdot 4,20 + 2 \cdot 3 \cdot 0,92 = 403,22$ euro.

Bladzijde 53

- 8 a** De familie Donders kan voor het lenen van 100 000 euro een maandelijkse annuïteit van maximaal $\frac{2100}{3,5} = 600$ euro betalen. In de grafiek lees je af bij 5,0% en maximaal 600 euro, dat een looptijd van 25 jaar het meest geschikt is voor de familie Donders.
- b** Door af te lezen krijg je onderstaande tabel.

looptijd (jaren)	10	15	20	25	30
rentepercentage	3,5	4,0	5,0	5,5	6,0
maandlasten	1000	750	670	630	610

De maandlasten zijn het laagst bij een looptijd van 30 jaar.

- c** De familie Everaars kan voor het lenen van 100 000 euro een maandelijkse annuïteit van maximaal $\frac{1750}{2,5} = 700$ euro betalen. Om de hypotheek zo snel mogelijk af te lossen willen ze een zo hoog mogelijke maandlast. Dat is 670 euro bij een looptijd van 20 jaar en een rentepercentage van 5,0%.
De maandlast van de familie Everaars wordt dan $2,5 \cdot 670 = 1675$ euro.

Bladzijde 54

- 9 a** Hij doet er $\frac{2}{30} + \frac{6}{50} + \frac{162}{100} = 1,806\dots$ uur over, dat is $1,806\dots \cdot 60 = 108,4$ minuten.
Oftewel 1 uur, 48 minuten en $0,4 \cdot 60 = 24$ seconden.
- b** Hij doet er dan $\frac{2}{30} + \frac{6}{50} + \frac{162}{120} = 1,536\dots$ uur over, dat is $1,536\dots \cdot 60 \approx 92,2$ minuten.
Dus hij doet er ongeveer $108,4 - 92,2 = 16,2$ minuten korter over, dat is $\frac{16,2}{108,4} \cdot 100\% \approx 14,9\%$ korter.
- c** Zijn benzineverbruik is nu $\frac{2}{100} \cdot 8,3 + \frac{6}{100} \cdot 5,8 + \frac{162}{100} \cdot 5,5 = 9,424$ liter.
Dat wordt dan $\frac{2}{100} \cdot 8,3 + \frac{6}{100} \cdot 5,8 + \frac{162}{100} \cdot 7,7 = 12,988$ liter.
Dat is $\frac{12,988 - 9,424}{9,424} \cdot 100\% \approx 37,8\%$ meer.

Bladzijde 55

- 10 a** Aflezen (bij de linker figuur) geeft: bij $B = 20$ hoort $A = 88$.
Aflezen (bij de rechter figuur) geeft: bij $A = 88$ hoort $J = 6$.
Dus 6 jongen per broedpaar.
- b** Aflezen (bij de rechter figuur) geeft: bij $J = 10$ hoort $A = 50$.
Aflezen (bij de linker figuur) geeft: bij $A = 50$ hoort $B = 10$.
Dus 10 kg beukennoten per hectare.
- c** Het aantal kg beukennoten per hectare is $B = \frac{300}{6} = 50$.
Aflezen (bij de linker figuur) geeft: bij $B = 50$ hoort $A = 140$.
Aflezen (bij de rechter figuur) geeft: bij $A = 140$ hoort $J = 4$.
Er waren 140 broedparen met gemiddeld 4 jongen per broedpaar, dus er vlogen in totaal $140 \cdot 4 = 560$ jongen uit.

2 De statistische cyclus

2.1 De onderzoeksvraag

Bladzijde 58

- 1 De logische volgorde is 3-5-6-2-4-1.

Bladzijde 59

- 2 de onderzoeksvraag: 3, 5 en 1
data verzamelen: 6
data analyseren: 2
conclusies trekken: 4 en 1

- 3 A data analyseren
B conclusies trekken
C de onderzoeksvraag
D data verzamelen

- 4 a Dat zijn te veel mensen, dus dat kost te veel tijd en geld.
b Omdat de conclusies van het onderzoek dan iets zeggen over de gehele Nederlandse bevolking.

Bladzijde 60

- 5 I – D
II – E
III – C
IV – B
V – A

Bladzijde 61

- 6 a alle leerlingen van je school die een vervolgopleiding kiezen
b alle weekbladen
c alle inwoners van Appelscha
d alle mensen met hooikoorts
- 7 a Niet alle Nederlanders van 20 tot en met 40 jaar hebben een even grote kans om in de steekproef te komen. Je ziet bijvoorbeeld dat er relatief veel 26-jarigen en relatief weinig 39-jarigen zijn. Dus een 26-jarige heeft minder kans om in de steekproef te komen dan een 39-jarige.
b Ja, dat ligt aan het onderzoek. De steekproef kan groot genoeg zijn als de populatie niet groot is en het te onderzoeken kenmerk niet zeldzaam is.
- 8 a De steekproef is niet aselekt, omdat niet alle Nederlanders een even grote kans hebben om op zaterdag in de stad bij het kruispunt langs te komen. Bijvoorbeeld mensen die liever de natuur in gaan hebben minder kans om in de steekproef te komen dan mensen die de stad in gaan.
Het is beter om op verschillende dagen en plekken naar meningen te vragen.
b Komt een aandoening bijvoorbeeld bij 1 op de 10000 mensen voor, dan is het waarschijnlijk dat er bij de 100 mensen die je onderzoekt niemand zit met de aandoening. Je hebt dan geen goede afspiegeling van de populatie.
Het is beter om (veel) meer mensen te onderzoeken.
c In de populatie (kinderen) zitten personen (bijvoorbeeld basisschoolleerlingen) die geen kans hebben om in de steekproef te komen. Dus de steekproef is niet aselekt.
Het is beter om ook leerlingen die niet op de middelbare school zitten in de steekproef te hebben.

Bladzijde 62

C1 De juiste volgorde is C-B-D-A.

- C data verzamelen
- B data analyseren
- D conclusies trekken
- A de onderzoeksvraag

C2 **a** De onderzoeksvraag bevat een vaag woord: lui.

b Alle scholieren die het vak economie volgen.

c Leerlingen met een voldoende hebben geen kans om in de steekproef te komen.

2.2 Data verzamelen

Bladzijde 63

9 **a** Je hebt de antwoorden nodig van de vragen 1 en 7.

b • Wel, je kunt van de ingevulde getallen bij vraag 4 het gemiddelde berekenen.

• Niet, doordat de keuzeopties bij vraag 8 geen getallen zijn.

c Het gemiddelde heeft waarschijnlijk geen betekenis, omdat een kluisnummer geen hoeveelheid is.

Bladzijde 65

10 **a** 0010

b Zodat je kunt verwijzen naar de rij met antwoorden van een specifieke leerling.

c Kwalitatief, want het stelt geen hoeveelheid voor.

d leeftijd: kwantitatief

tevredenheid: is kwalitatief

11 **a** rang, naam, sport en inkomen (\$)

b rang en inkomen (\$)

c inkomen (\$)

d rang, naam en sport: kwalitatief

inkomen (\$): kwantitatief

12 kwalitatief: patiëntnummer, roken

kwantitatief: geboortejaar, aantal keer sporten per week

13 **a** kwalitatief

b De onderzoeker had een aantal moeten laten invullen, zodat de verzamelde data kwantitatief is.

Bladzijde 66

14 **a** autogebruik: kwalitatief

type auto: kwalitatief

b Bij vraag I. Daar wordt het naar rechts steeds vaker.

15 leeftijdsgroep: ordinaal

onderwijsniveau: ordinaal

migratieachtergrond: nominaal

huishouden: nominaal

Bladzijde 67

16 **a** bijvoorbeeld:

reiskosten in euro's

b bijvoorbeeld:

nominaal: plaats van bestemming (Nijmegen, Epe, Texel)

ordinaal:onzekerheid (laag, middel, hoog)

- 17** a aantal leerlingen: kwantitatief
temperatuur in graden Celsius: kwantitatief
b De waarde 26,2 hoort bij temperatuur in graden Celsius, want aantal leerlingen kan alleen gehele waarden aannemen.

Bladzijde 68

- 18** snelheid is continu
gebruikte versnelling is discreet
- 19** a Verdieping is discreet, want niet alle tussenliggende waarden zijn mogelijk.
Hoogte is continu want alle tussenliggende waarden zijn mogelijk.
b Voetlengte is continu want alle tussenliggende waarden zijn mogelijk.
Schoenmaat is discreet, want niet alle tussenliggende waarden zijn mogelijk.
- 20** I kwantitatief en discreet
II kwalitatief en nominaal
III kwantitatief en continu
IV kwalitatief en ordinaal
- 21** De gemiddelde leeftijd zal hoger zijn bij de vraag "Wat is uw geboortedatum?" We ronden leeftijden in het dagelijks taalgebruik namelijk altijd naar beneden af. Daarom zal elke leeftijd die berekend is op basis van de geboortedatum minstens zo hoog zijn als dezelfde leeftijd op basis van de vraag "Hoe oud bent u?"

Bladzijde 69

- C3** a mogelijke naam: reden slechtaandheid, mogelijke waarde: ziekte
mogelijke naam: mate van beperkt voelen, mogelijke waarde: zelden
mogelijke naam: dagelijks km lopen, mogelijke waarde: 8,6
mogelijke naam: aantal begeleiders, mogelijke waarde: 2
b kwalitatief: mate van beperkt voelen, reden slechtaandheid
kwantitatief: dagelijks km lopen, aantal begeleiders
c reden slechtaandheid: nominaal
mate van beperkt voelen: ordinaal
d dagelijks km lopen: continu
aantal begeleiders: discreet

2.3 Data analyseren

Bladzijde 70

- V1** a $\text{gemiddelde} = \frac{12 + 9 + 9 + 5 + 13 + 7 + 8}{7} = 9$
 5 7 8 9 9 12 13
 middelste
 mediaan = 9
 modus = 9
- b $\text{gemiddelde} = \frac{18 + 21 + 25 + 18 + 24 + 17}{6} = 20,5$
 17 18 18 21 24 25
 middelste twee
 mediaan = $\frac{18 + 21}{2} = 19,5$
 modus = 18

Bladzijde 71

V2 a $\text{gemiddelde groep 1} = \frac{5 + 4 + 6 + 4 + 5}{5} = 4,8$

$\text{gemiddelde groep 2} = \frac{6 + 7 + 7 + 8}{4} = 7$

$\text{gemiddelde groep 3} = \frac{9 + 6 + 8 + 7 + 6}{5} = 7,2$

$\text{gemiddelde groep 4} = \frac{5 + 6 + 7 + 5}{4} = 5,75$

Dus groep 3 heeft het hoogste gemiddelde cijfer.

b $\text{modus} = 6$

c groep 1: 4 4 5 5 6, dus mediaan = 5

groep 2: mediaan = 7

groep 3: 6 6 7 8 9, dus mediaan = 7

groep 4: 5 5 6 7, dus mediaan = $\frac{5 + 6}{2} = 5,5$

Dus bij groep 1 is de mediaan het laagst.

V3 $\text{totale frequentie} = 4 + 3 + 5 + 6 + 1 + 5 = 24$

$\text{gemiddelde} = \frac{4 \cdot 11 + 3 \cdot 12 + 5 \cdot 13 + 6 \cdot 14 + 1 \cdot 15 + 5 \cdot 16}{24} = 13,5$ huiswerkopgaven per week

$\text{mediaan} = \frac{12^{\text{e}} \text{ getal} + 13^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{13 + 14}{2} = 13,5$ huiswerkopgaven per week

$\text{modus} = 14$ huiswerkopgaven per week

V4 a $\text{aantal reserveringen} = 6 + 22 + 8 + 8 + 4 + 3 + 5 = 56$

b $\text{aantal gasten} = 6 \cdot 1 + 22 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 10 = 194$

c $\text{gemiddelde} = \frac{194}{56} \approx 3,5$ persoon per reservering

$\text{mediaan} = \frac{28^{\text{e}} \text{ getal} + 29^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{2 + 3}{2} = 2,5$ persoon per reservering

$\text{modus} = 2$ personen per reservering

Bladzijde 72

22 a Omdat het geen getallen zijn.

b blauw

c Elke lengte komt maar één keer voor, dus er is geen modus.

d $\text{gemiddelde} = \frac{119 + 116 + 104 + 185 + 112 + 110}{6} \approx 124,3$ cm per persoon

e Het gemiddelde is erg hoog door de persoon met een lengte van 185 cm.

Zonder die persoon is het gemiddelde $\frac{561}{5} = 112,2$ cm en dan geeft het gemiddelde wel een goede indruk.

Bladzijde 73

23 a De mediaan is het meest geschikt. De dataset bevat een uitschieter en daar is het gemiddelde gevoelig voor. De modus is 17, dat is tevens de laagste leeftijd die voorkomt, en dat geeft hier geen goede indruk van de leeftijden.

b De modus is het meest geschikt. De andere centrummaten zijn niet te gebruiken.

c Het gemiddelde en de mediaan zijn het meest geschikt. De modus is 8, dat geeft geen goede indruk van het aantal verkochte fietsen, want dat is tevens het grootste aantal dat voorkomt.

d De mediaan en de modus zijn het meest geschikt. De dataset bevat een uitschieter (waarschijnlijk een meetfout) en daar is het gemiddelde gevoelig voor.

Bladzijde 74

- 24** **a** ordinaal
b helemaal mee oneens
c totale frequentie = $112 + 36 + 69 + 98 + 85 = 400$
 relatieve frequentie 'helemaal mee oneens' = $\frac{112}{400} \cdot 100\% = 28\%$
 relatieve frequentie 'mee oneens' = $\frac{36}{400} \cdot 100\% = 9\%$
d $\frac{98 + 85}{400} \cdot 100\% \approx 45,8\%$ van de mensen heeft positief geantwoord.
e De modus geeft geen goed beeld, want het aantal mensen dat het eens is met de stelling is groter dan het aantal dat het oneens is met de stelling.

- 25** **a** aantal dagen = $1 + 5 + 5 + 3 + 3 + 2 + 1 = 20$
b gemiddelde = $\frac{1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 32}{20} = 3,9$ telaarcomers per dag
c Op $\frac{3}{20} \cdot 100\% = 15\%$ van de dagen kwamen er 4 leerlingen te laat.
d mediaan = $\frac{10^{\text{e}} \text{ getal} + 11^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2$ telaarcomers per dag
 De leerlingen gebruiken de mediaan, want die is veel lager dan het gemiddelde.

- 26** **a** De variabele is 'aantal dagen gesnoept afgelopen week'.
 Deze variabele is kwantitatief.
b totale frequentie is $2 + 4 + 6 + 5 + 4 + 4 + 3 + 2 = 30$
 gemiddelde = $\frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + \dots + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 7}{30} = \frac{99}{30} = 3,3$ dagen per leerling
 mediaan = $\frac{15^{\text{e}} \text{ getal} + 16^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3$ dagen per leerling
 modus = 2 dagen per leerling
 Dus op volgorde van klein naar groot: modus, mediaan, gemiddelde.
c Het nieuwe totaal is $40 \cdot 3,5 = 140$.
 Het oude totaal was 99, dus er moet $140 - 99 = 41$ dagen snoepen bijkomen in 10 metingen.
 Een voorbeeld van een mogelijke frequentietabel is:

aantal dagen gesnoept	0	1	2	3	4	5	6	7
frequentie	3	5	7	6	5	5	5	4

- 27** **a** Minstens twee keer. Hij moet twee keer het maximum van 60 punten scoren.
b Minstens drie keer. Hij moet drie keer 55 punten of drie keer 57 punten scoren om de modus te laten veranderen, beide opties zijn goed.
c Minstens twee keer. Hij kan met één keer spelen de mediaan maximaal verhogen naar 53 (door 55 of hoger te scoren), maar het gemiddelde is dan hoger dan 53. Met twee keer spelen lukt het wel. Als hij bijvoorbeeld twee keer 54 scoort, dan is de mediaan 54 en het gemiddelde ongeveer 53,3.

Bladzijde 75

- 28** **a** Op 12% van de dagen kwamen er 2 leerlingen te laat in de eerste les.
b Het totale percentage is 100.
 gemiddelde = $\frac{6 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + \dots + 14 \cdot 6 + 8 \cdot 7}{100} = 3,76$ leerlingen per dag
c Bij meer dan vijf leerlingen te laat hoort $14\% + 8\% = 22\%$.
 Het onderzoek duurde dus $\frac{33}{0,22} = 150$ dagen.
d Ze heeft dat $150 \cdot 3,76 = 564$ keer genoteerd.

- 29** Elk waarnemingsgetal komt maar één keer voor, dus je krijgt een frequentietabel met overal frequentie 1. Een frequentietabel is pas zinvol als je de dataset ermee kunt samenvatten.

Bladzijde 77

- 30** Het werkelijke gemiddelde is $\frac{3192}{50} = 63,84$ kg per leerling.

De procentuele afwijking is $\frac{63,84 - 65,8}{65,8} \cdot 100\% \approx -3,0\%$.

Het werkelijke gemiddelde wijkt dus 3,0% af van de schatting.

- 31 a** Met een discrete variabele, want niet alle tussenliggende waarden zijn mogelijk (bijvoorbeeld een prijs van 3,001 euro).

b In de klasse $\langle 200, 300]$.

c totale frequentie = $26 + 17 + 21 + 8 + 13 + 2 = 87$

$$\text{gemiddelde} = \frac{26 \cdot 50 + 17 \cdot 150 + \dots + 13 \cdot 450 + 2 \cdot 550}{87} \approx 217 \text{ cent per product}$$

d De mediaan is het 44^e getal, dit ligt in de klasse $\langle 200, 300]$.

e De modale klasse is $\langle 0, 100]$.

- 32 a** De modale klasse is $\langle 300, 375]$.

De mediaan is het gemiddelde van het 2000^e getal en het 2001^e getal, dit ligt in de klasse $\langle 300, 375]$. Dus de mediaan ligt in de modale klasse.

b Rekenen met linkergrenzen geeft

$$\text{gemiddelde} = \frac{80 \cdot 0 + 240 \cdot 75 + \dots + 560 \cdot 450}{4000} = 297 \text{ euro per bestelling.}$$

Rekenen met rechtergrenzen geeft

$$\text{gemiddelde} = \frac{80 \cdot 75 + 240 \cdot 150 + \dots + 560 \cdot 525}{4000} = 372 \text{ euro per bestelling.}$$

(Of gebruik dat de rechtergrens in elke klasse 75 hoger is dan de linkergrens en dat de uitkomst bij het rekenen met de rechtergrenzen dus $297 + 75 = 372$ is.)

- 33 a** totale frequentie = $18 + 3 + 40 + 9 + 2 = 72$

Rekenen met linkergrenzen geeft

$$\text{gemiddelde} = \frac{18 \cdot 25 + 3 \cdot 35 + 40 \cdot 45 + 9 \cdot 55 + 2 \cdot 65}{72} \approx 41,4 \text{ jaar.}$$

De gemiddelde leeftijd van de docenten is minstens 41,4 jaar, dus de bewering van de docent Frans kan niet kloppen.

b De mediaan is het gemiddelde van het 36^e en 37^e getal, dit ligt in de klasse $[45, 55]$. Dus de mediaan kan 47 jaar zijn.

c De leeftijd 36 ligt in de klasse $[35, 45]$ en heeft daarom een maximale frequentie van 3. Binnen de klasse $[45, 55]$ vallen maximaal 10 leeftijden (van 45 tot en met 54)

met een gemiddelde frequentie van $\frac{40}{10} = 4$. Zeker één van deze leeftijden zal dus een

grotere frequentie hebben dan 3. Daarom kan de bewering van de conciërge niet kloppen.

- 34 a** 18 werknemers per winkel

b $[0, 10)$, $[10, 20)$, $[20, 30)$ en $[30, 40)$

c totale frequentie = $13 + 9 + 5 + 3 = 30$

De mediaan is het gemiddelde van het 15^e en 16^e getal, dit ligt in de klasse $[10, 20)$.

Bladzijde 78

- 35 a** aantal mannen = $1 + 5 + 5 + 3 + 2 = 16$

aantal vrouwen = $4 + 4 + 2 + 6 = 16$

Dus 16 ouderparen.

b Eén man was 33 jaar en twee vrouwen waren 35 jaar.

c Zes mannen en acht vrouwen waren jonger dan 30 jaar.

d Er komen zes personen in de klasse $[30, 36)$ en drie personen in de hoogste klasse $[48, 52)$.

- 36** a Nee, de frequenties geven niet de aantallen klanten weer maar de aantallen winkels met het betreffende gemiddelde bonbedrag.
 b totale frequentie = $6 + 7 + 4 + 3 + 5 + 3 = 28$
 relatieve frequentie = $\frac{5}{28} \cdot 100\% \approx 17,9\%$
 Dus bij 17,9% van de winkels was de gemiddelde besteding per kopende klant minstens 50 en minder dan 60 euro.
 c De mediaan is het gemiddelde van het 14^e en 15^e waarnemingsgetal, dit ligt in de klasse $[30, 40)$.
 d gemiddelde = $\frac{6 \cdot 15 + 7 \cdot 25 + \dots + 3 \cdot 65}{28} \approx 36$ euro per winkel.

- 37** a De variabele is 'gewicht ei in gram'. Deze variabele is kwantitatief.
 b De modale klasse is $[66, 69)$.
 c Het minimale gewicht is $60 \cdot 8 + 63 \cdot 11 + 66 \cdot 13 + 69 \cdot 12 + 72 \cdot 6 = 3291$ gram.
 Het gewicht is minder dan $63 \cdot 8 + 66 \cdot 11 + 69 \cdot 13 + 72 \cdot 12 + 75 \cdot 6 = 3441$ gram.
 d De mediaan is het gemiddelde van het 25^e getal en het 26^e getal, dit ligt in de klasse $[66, 69)$.
 Het gemiddelde is minimaal $\frac{3291}{50} \approx 65,8$ gram per ei.
 Dus ja, dat is mogelijk, want het gemiddelde kan in de klasse $[63, 66)$ liggen.

Bladzijde 79

- C4** a Het gemiddelde. De uitschieter 18 zorgt voor een relatief hoog gemiddelde van ongeveer 2,96 vlinders per route, terwijl de modus en mediaan 2 vlinders per route zijn.
 b totale frequentie = $3 + 4 + 7 + 6 + 4 + 2 + 1 = 27$
 relatieve frequentie = $\frac{6}{27} \cdot 100\% \approx 22,2\%$

- C5** a totale frequentie = $33 + 29 + 19 + 6 + 23 = 110$
 gemiddelde = $\frac{33 \cdot 45 + 29 \cdot 55 + 19 \cdot 65 + 6 \cdot 75 + 23 \cdot 85}{110} \approx 61$ kg
 b De modale klasse is $[40, 50)$.
 c Het gemiddelde is minimaal $\frac{33 \cdot 40 + 29 \cdot 50 + 19 \cdot 60 + 6 \cdot 70 + 23 \cdot 80}{110} = 56,09 \dots$ kg.
 Jelle kan dus geen gelijk hebben.

- C6** a Er zijn $8 + 9 + 7 + 5 + 7 = 36$ bedragen in de figuur verwerkt.
 b De mediaan is het gemiddelde van het 18^e en 19^e getal, dit ligt in de klasse $[60, 80)$.
 c De modale klasse is $[40, 60)$.
 Rekenen met linkergrenzen geeft gemiddelde = $\frac{8 \cdot 20 + 9 \cdot 40 + \dots + 7 \cdot 100}{36} \approx 56,67$ euro.
 Het gemiddelde kan dus in de modale klasse liggen.

2.4 Kwartielen en spreiding

Bladzijde 80

- 38** a $18 + 23 + 14 + 8 = 63$ gesprekken
 b totale frequentie = $63 + 15 = 78$
 Dus $\frac{63}{78} \cdot 100\% \approx 80,8\%$ van de gesprekken.

Bladzijde 81

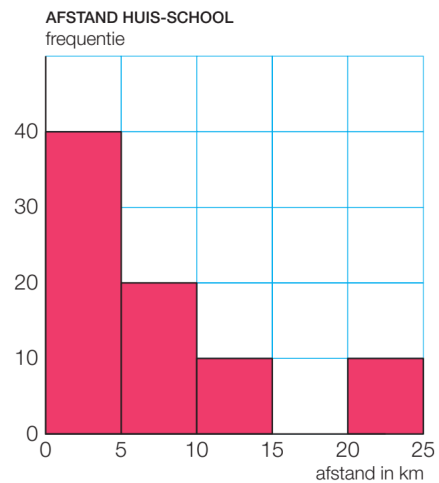
- 39** a Aflezen van de maximale cumulatieve frequentie geeft 80 studenten.
 b Aflezen bij 10 km geeft cumulatieve frequentie 60.
 Dus 60 studenten.

- c** Aflezen bij 20 km geeft cumulatieve frequentie 70.
Dus $80 - 70 = 10$ studenten.

d

afstand in km	frequentie
$[0, 5)$	40
$[5, 10)$	20
$[10, 15)$	10
$[15, 20)$	0
$[20, 25)$	10

Zie de figuur.



- 40**
- a** Discreet, want niet alle tussenliggende waarden zijn mogelijk (bijvoorbeeld 1,5 pins).
 - b** Nee. Er zijn geen waarden samengevoegd tot een klasse en daarom staat de stip steeds recht boven de waarde van 'aantal pins'.
 - c** Aflezen van de maximale cumulatieve frequentie geeft 58 beurten.
 - d** Aflezen bij 6 pins geeft cumulatieve frequentie 34. Er werden dus 34 keer 6 pins of minder omgegooid.
Dus $58 - 34 = 24$ keer zijn er meer dan 6 pins omgegooid..
 - e** Aflezen bij 9 pins geeft cumulatieve frequentie 54. Er werden dus 54 keer 9 pins of minder omgegooid.
Dus $58 - 54 = 4$ keer zijn er 10 pins omgegooid. De relatieve frequentie is dus $\frac{4}{58} \cdot 100\% \approx 6,9\%$.
 - f** Bij de modus hoort de grootste toename van de cumulatieve frequentie.
Dus de modus is 6 pins.

Bladzijde 82

- 41**
- a** Aflezen bij 100 seconden geeft 60%, dus $0,6 \cdot 300 = 180$ klanten.
 - b** $2,5 \text{ minuut} = 2,5 \cdot 60 \text{ seconden} = 150 \text{ seconden}$
Aflezen bij 150 seconden geeft 70%, dus 70% moest korter dan 2,5 minuut wachten.
Dus $100\% - 70\% = 30\%$ moest minstens 2,5 minuut wachten, dat zijn $0,3 \cdot 300 = 90$ klanten.
 - c** Aflezen bij 100 seconden geeft 60% en bij 200 seconden geeft 85%. Minstens 100 seconden, maar minder dan 200 seconden is $85\% - 60\% = 25\%$, dus $0,25 \cdot 300 = 75$ klanten.
 - d** Bij de klasse met de grootste frequentie hoort het steilste lijnstuk.
Dus de klasse $[50, 100)$.
- 42**
- a** Van 10:00 uur tot 20:00 uur is 10 uur = $10 \cdot 4 \text{ kwartieren} = 40 \text{ kwartieren}$.
Bij minder dan 20 klanten per kwartier hoort 80%, dus $0,8 \cdot 40 = 32 \text{ kwartieren}$.
 - b** Bij minstens 15 klanten per kwartier hoort $100\% - 40\% = 60\%$, dus $0,6 \cdot 40 = 24 \text{ kwartieren}$.
 - c** Bij minstens 10 klanten, maar minder dan 25 klanten hoort $90\% - 20\% = 70\%$, dus $0,7 \cdot 40 = 28 \text{ kwartieren}$.
 - d** De mediaan heeft relatieve cumulatieve frequentie 50%.
Aflezen bij relatieve cumulatieve frequentie 50% geeft een waarde in de klasse $[15, 20)$.
Dus de mediaan ligt in $[15, 20)$.

Bladzijde 83**V5**

- a** 26 32 38 51 54 58 62 62 67 70
 $Q_0 = 26$ en $Q_4 = 70$
 $Q_2 = \frac{5^{\text{e}} \text{ getal} + 6^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{54 + 58}{2} = 56$
 $Q_1 = 38$ en $Q_3 = 62$
- b** 1,7 1,9 2,6 3,2 6,3 7,9 8,3
 $Q_0 = 1,7$ en $Q_4 = 8,3$
 $Q_2 = 3,2$
 $Q_1 = 1,9$ en $Q_3 = 7,9$

- 43 a** De cijfers verschillen, maar het gemiddelde en de mediaan niet.
b Bij Aafke. Haar cijfers wijken maximaal 0,9 af van de mediaan.
c Bij Ben. Bij Ben en Chris wijken de laagste en hoogste cijfers 2,5 af van de mediaan, maar bij Ben wijken de meeste andere cijfers ook meer af van de mediaan dan bij Chris.

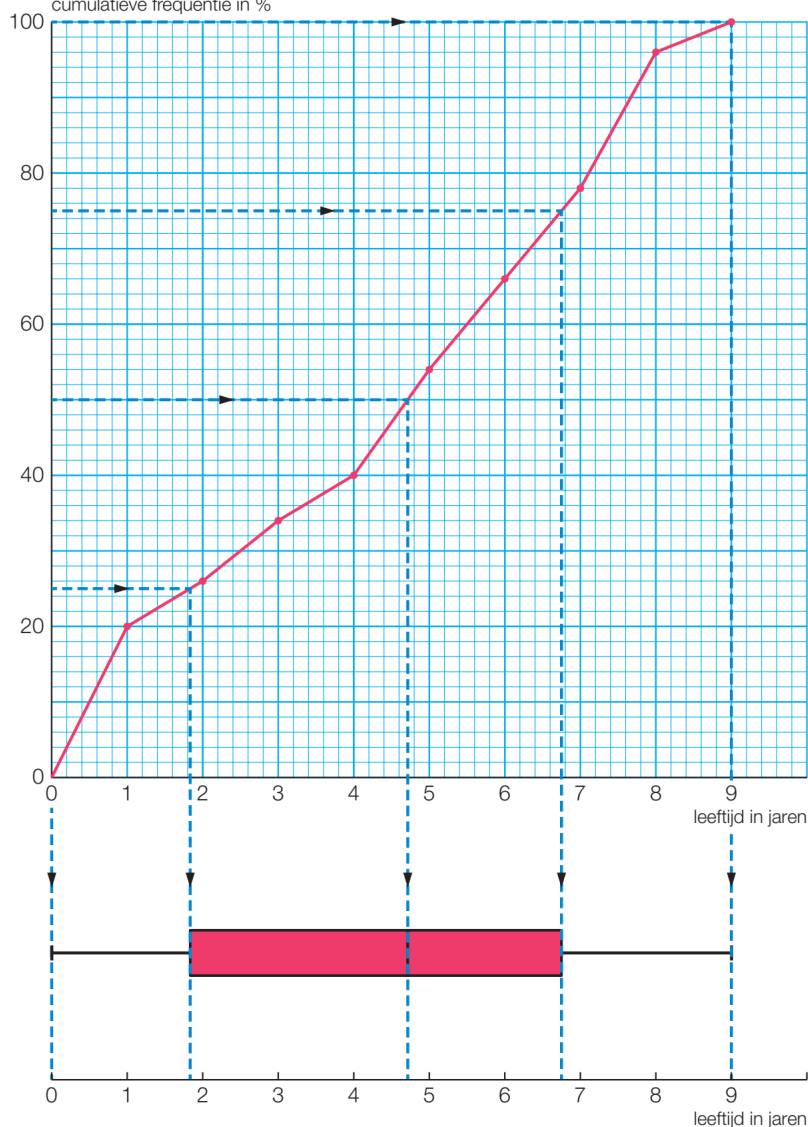
Bladzijde 85

- 44 a** spreidingsbreedte = $3216 - 1648 = 1568$ euro per maand
interkwartielafstand = $2304 - 1952 = 352$ euro per maand
b Dat is ongeveer 50% van de werknemers, dus $0,5 \cdot 250 = 125$ werknemers.
c Deze werknemers vallen tussen Q_3 en Q_4 .
Dus de maandsalarissen variëren van 2304 tot en met 3216 euro per maand.
- 45 a** Onjuist. Het is allebei ongeveer een kwart van de leerlingen.
b Onjuist. Het is ongeveer een kwart van de leerlingen, dat zijn $0,25 \cdot 2184 = 546$ leerlingen.
c Onjuist. Zowel binnen als buiten de box valt de helft van de leerlingen.
d Juist. Het gemiddelde van het kleinste en grootste gewicht is $\frac{34,7 + 92,8}{2} = 63,75$ kg
per leerling. Dat valt in het laatste deel van de boxplot, dus meer dan 75% van de leerlingen weegt minder dan 63,75 kg.
- 46 a** Meer dan Q_3 , dus ongeveer een kwart oftewel $0,25 \cdot 345 = 86,25$ modellen.
Dus van 86 modellen.
b spreidingsbreedte = $9669 - 1 = 9668$ verkochte auto's per model
kwartielafstand = $1126 - 30 = 1096$ verkochte auto's per model
c De aantallen van de 25% minst verkochte modellen liggen tussen Q_0 en Q_1 .
Van deze modellen werden minimaal 1 en maximaal 30 auto's verkocht.
d Het gemiddelde zal door de uitschieter van 9669 verkochte auto's relatief hoog zijn.
De mediaan is ongevoelig voor uitschieters en geeft daarom een beter beeld.

Bladzijde 87

- 47** Ja, de klasse met de mediaan is $[30, 40)$. De mediaan kan dus ook 38 zijn.

OUDERDOM AUTO
cumulatieve frequentie in %

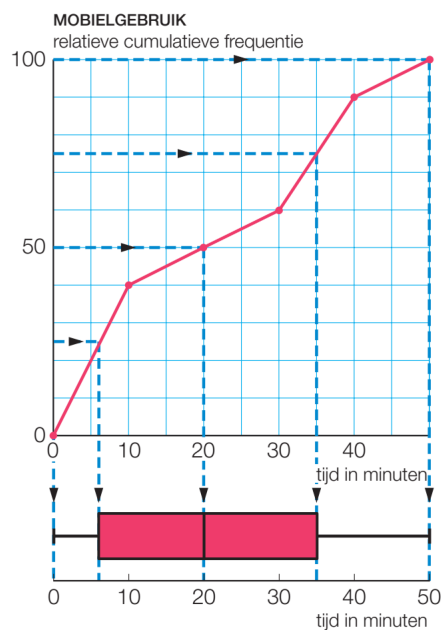


- b** Zie de figuur. Aflezen bij cumulatieve frequentie 75% geeft een waarde in de klasse $[6, 7[$. Omdat 6 jaar en 2 maanden ook in de klasse $[6, 7[$ ligt, kan het kloppen.

tijd in minuten	relatieve cumulatieve frequentie
$[0, 10[$	40
$[10, 20[$	50
$[20, 30[$	60
$[30, 40[$	90
$[40, 50[$	100

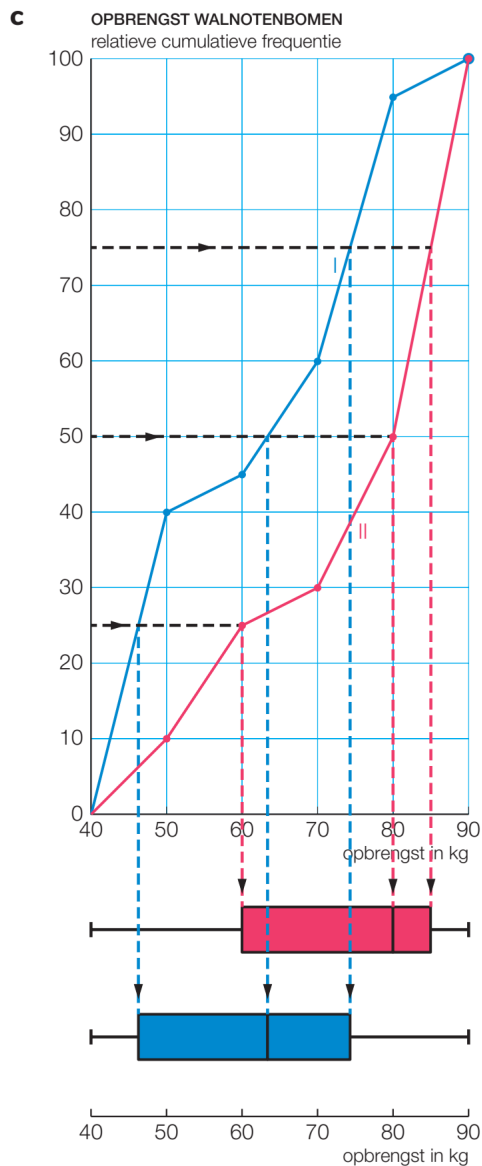
Zie de figuur.

- b** De interkwartielafstand die uit de boxplot volgt is $35 - 6 = 29$ minuten.
- c** Q_1 valt in de klasse $[0, 10[$ en Q_3 valt in de klasse $[30, 40[$. De werkelijke interkwartielafstand is dus minimaal 20, maar kleiner dan 40 minuten. De werkelijke interkwartielafstand kan dus 38 minuten zijn.



- a** Op perceel I: $100\% - 60\% = 40\%$, dus $0,4 \cdot 200 = 80$ bomen.
 Op perceel II: $100\% - 30\% = 70\%$, dus $0,7 \cdot 160 = 112$ bomen.
 Dat zijn in totaal $80 + 112 = 192$ bomen.
- b** Op perceel I: 45% oftewel $0,45 \cdot 200 = 90$ bomen.
 Op perceel II: 25% oftewel $0,25 \cdot 160 = 40$ bomen.
 In totaal dus $90 + 40 = 130$ bomen oftewel

$$\frac{130}{200 + 160} \cdot 100\% = 37,5\%.$$

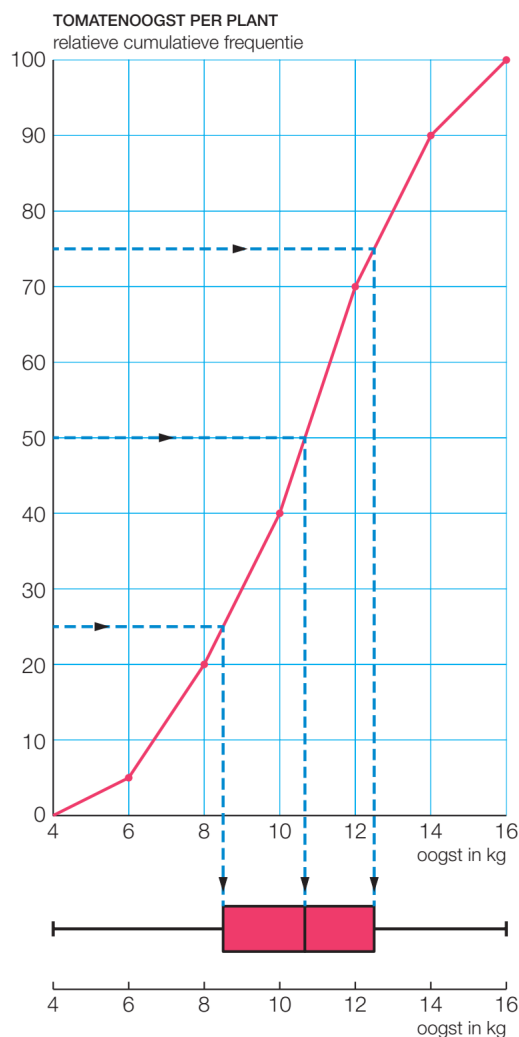


- d** Op perceel II. Bij de hogere gewichtsklassen zijn de grafiekdelen steiler, daar horen grotere frequenties bij, wat betekent dat hogere opbrengsten per boom op dat perceel relatief vaak voorkomen.
- e** Nee, voor perceel I ligt de mediaan in $[60, 70)$ terwijl de mediaan voor perceel II groter dan 70 kg is.

Bladzijde 88

C7

- a $100\% - 40\% = 60\%$ van de planten bracht minstens 10 kg op.
- b Bij minstens 8 maar minder dan 12 kg tomaten hoort $70\% - 20\% = 50\%$, dus $0,5 \cdot 280 = 140$ planten.
- c Bij de klasse met de grootste frequentie hoort het steilste lijnstuk.
Dus de klasse $[10, 12)$.
- d Zie de figuur.



C8

- a spreidingsbreedte = $251 - 0 = 251$ zittenblijvers
kwartielfstand = $66 - 9 = 57$ zittenblijvers
- b Meer dan de mediaan, dus ongeveer 50%
oftewel $0,5 \cdot 1304 = 652$ vestigingen.
- c Het gemiddelde zal door de uitschieter van 251
zittenblijvers relatief hoog zijn. De mediaan is ongevoelig
voor uitschieters en geeft daarom een beter beeld.
- d Bijvoorbeeld:
Er zijn (ongeveer) evenveel vestigingen met meer
dan 66 zittenblijvers als vestigingen met minder dan
9 zittenblijvers.

2.5 Statistische verdelingen

Bladzijde 89

- 51 Het gemiddelde neemt toe, want de som van de waarnemingsgetallen wordt hoger,
terwijl het aantal waarnemingsgetallen gelijk blijft.
De mediaan blijft gelijk, want de middelste waarnemingen veranderen niet.

Bladzijde 90

- 52 Club A: de data ligt meer verspreid bij de hogere leeftijden, dus een rechts-scheve verdeling.
Club B: elke klasse heeft vrijwel dezelfde frequentie, dus een uniforme verdeling.
Club C: er is een top te onderscheiden bij $[20, 30)$ en bij $[50, 60)$, dus een meertoppige verdeling.
Club D: de modale klasse is $[30, 40)$ en de frequenties bij de klassen eronder en erboven
zijn vrijwel gespiegeld. Dus een symmetrische verdeling.

Bladzijde 91

- 53 a Het betreft een groep korte en een groep lange leerlingen. Bijvoorbeeld meisjes en
jongens of een eerste klas en een vijfde klas.
- b De modale klasse is $[182, 184)$.
- c Boxplot I kan niet passen, omdat in het histogram tussen 160 cm en 164 cm veel
minder dan 25% van de data ligt.
Boxplot III kan niet passen, omdat in het histogram meer dan 50% van de data rechts
van 176 cm ligt.
Boxplot II past het beste, want in het histogram ligt bijvoorbeeld ongeveer 25% van
de data tussen 179 cm en 183 cm.

Bladzijde 92

- 54 a** De relatieve cumulatieve frequentie bij 24 000 euro is ongeveer $10,3\% + 13,4\% + 15,6\% + 13,0\% = 52,3\%$. De mediaan is dus minder dan 24 000 euro. Het inkomen van 26 700 euro is dus het gemiddelde.
- b** De mediaan, omdat het gemiddelde relatief ver richting de staart van de verdeling ligt terwijl veel meer mensen inkomens rond de mediaan hebben.
- c** Als alle staven even hoog zouden zijn, dan komen alle inkomens tussen 0 en 96 000 euro ongeveer even vaak voor. Dus dan heeft niet iedereen hetzelfde inkomen.
- d** In het histogram kun je aflezen dat ongeveer $10,3\% + 13,4\% = 23,7\%$ van de inkomens onder 12 000 euro ligt oftewel dat Q_1 meer dan 12 000 euro is. Dit klopt niet met boxplots II en III, want daar ligt Q_1 onder de 10 000 euro. Het klopt wel met boxplot I. In het histogram is verder af te lezen dat ongeveer $10,3\% + 13,4\% + 15,6\% + 13,0\% + 10,8\% + 9,7\% = 72,8\%$ van de inkomens onder de 36 000 euro ligt en dat $72,8\% + 7,7\% = 80,5\%$ onder de 42 000 euro ligt. Dus Q_3 ligt tussen 36 000 en 42 000 euro. Dit klopt niet met boxplots II en III, maar wel met boxplot I. Dus boxplot I past het beste.

Bladzijde 93

- 55** Bij I hoort D, want elk kwart heeft dezelfde spreiding.
Bij II hoort A, want dit is naast D de enige andere symmetrische verdeling.
Bij III hoort B, want bij een rechts-scheve verdeling ligt het laatste kwart breed verspreid.
Bij IV hoort C, want bij een links-scheve verdeling ligt het eerste kwart breed verspreid.
- 56** Uitspraak C is juist, want de modale klasse is de vierde staaf en de eerste vier staven zijn samen minder dan 50%.

Bladzijde 94

- 57 a** Aflezen bij cumulatieve frequentie 50% geeft 4,8, dus een schatting van de mediaan is 4,8. Het gemiddelde ligt verder richting de staart van de verdeling (dus verder naar rechts).
- b** Bij de modus hoort het hoogste punt van de verdelingskromme en daardoor stijgt de cumulatieve verdelingskromme hier het snelst. Daarom zal de verdelingskromme bij de modus het steilste zijn.
- 58** Verdelingskromme B, want het steilste stuk van de cumulatieve verdelingskromme ligt bij ongeveer 9 en dat is de modus van verdelingskromme B.

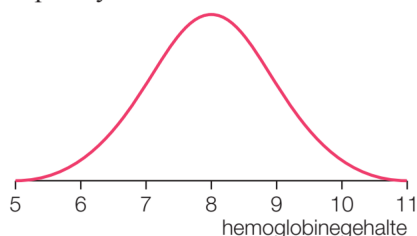
Alternatieve uitwerking

De verdelingskrommen A en C zijn symmetrisch en dus zijn de medianen 5. Aflezen in de cumulatieve verdelingskromme bij 50% geeft als mediaan ongeveer 7,5. Dit komt niet overeen, dus verdelingskromme B hoort erbij.

Bladzijde 95

- 59 a** Het is een symmetrische verdeling, want de relatieve cumulatieve verdelingskromme is puntsymmetrisch.

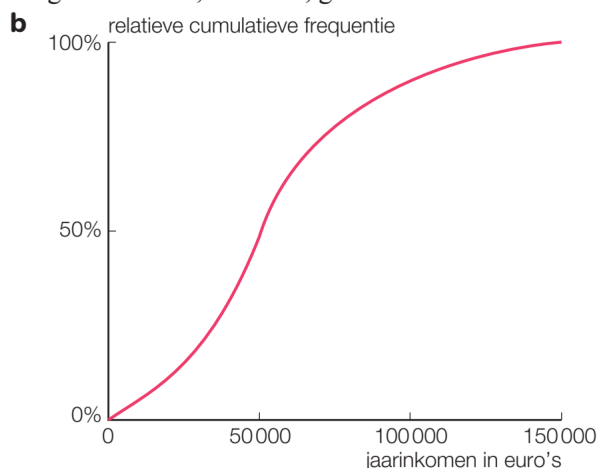
b



- c** Bij een symmetrische verdeling is het gemiddelde gelijk aan de mediaan. De mediaan aflezen bij relatieve cumulatieve frequentie 50% geeft een gemiddeld hemoglobinegehalte van 8.

- 60 a** De cumulatieve verdelingskromme is overal even steil, de verdelingskromme is dus overal even hoog, dus er is sprake van een uniforme verdeling.
- b** Er zijn twee steile gedeelten in de cumulatieve verdelingskromme, dus er is sprake van een tweetoppige verdeling.

- 61 a** De modus hoort bij de top, dus is ongeveer 30 000 euro. Hier ligt minder dan 50% van de oppervlakte voor, dus de mediaan ligt hier rechts van. Omdat het een rechts-scheve verdeling is, ligt het gemiddelde rechts van de mediaan. Dus op volgorde van klein naar groot: modus, mediaan, gemiddelde.



Bladzijde 96

- 62 a** De standaardafwijking is het grootst bij groep B. De spreiding van de lengte is daar het grootst.
b De interkwartielafstand, want die is ongevoelig voor de uitschieter.

Bladzijde 97

- 63** Bij een bredere verdelingskromme liggen de waarnemingsgetallen meer verspreid en is de standaardafwijking dus groter.
 kromme A: standaardafwijking 1,5
 kromme B: standaardafwijking 0,5
 kromme C: standaardafwijking 1

- 64** Je kunt de modus en de spreidingsbreedte of standaardafwijking gebruiken. In deze rechts-scheve verdeling is de modus de kleinste van de drie centrummaten. De modus geeft dus goed aan dat een grote groep jongeren een laag inkomen heeft. De mediaan geeft dit minder goed aan en het gemiddelde is door de uitschieter zelfs relatief hoog. De spreidingsbreedte en standaardafwijking zullen beiden een grote spreiding aangeven, omdat ze gevoelig zijn voor het kleine aantal hoge inkomens. Beide geven dus goed aan dat er onderling grote verschillen in inkomen zijn. De interkwartielafstand is niet geschikt, omdat de onderlinge verschillen bij de middelste 50% relatief klein zijn.

- 65** Figuur B hoort bij Quito. De spreiding van het aantal zonen is daar het kleinst, dus de standaardafwijking is daar ook het kleinst.

Bladzijde 98

- 66 a** De kwantitatieve variabele is schoenmaat (US), deze variabele is discreet want niet alle tussenliggende waarden zijn mogelijk (bijvoorbeeld 13,05).
b De kwalitatieve variabele is geslacht, deze variabele is nominaal omdat er geen logische volgorde in de waarden van de variabele (man en vrouw) is.
c De populatie is: mannen en vrouwen in Australië met een voetafwijking.
d Zie de tabel. Het centrum van de verdeling van de mannen ligt bij 11,8 en bij de vrouwen bij 8,0. Omdat het gemiddelde van de totale groep hier tussenin moet liggen is dit 9,9. De grootste standaardafwijking hoort bij de totale groep, dus dat is 2,4. De andere standaardafwijkingen zijn dus 1,5.

	gemiddelde	standaardafwijking
mannen	11,8	1,5
vrouwen	8,0	1,5
totaal	9,9	2,4

67

a $\text{gemiddelde} = \frac{0 + 2 + 3 + 4 + 6}{5} = 3$

De verschillen met het gemiddelde zijn -3, -1, 0, 1 en 3.

Optellen van de kwadraten van de verschillen geeft $(-3)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2 = 20$.

Delen door het aantal waarnemingsgetallen geeft $\frac{20}{5} = 4$.

Worteltrekken geeft $\sqrt{4} = 2$.

De standaardafwijking is 2.

- b Alle waarden zijn precies 10 hoger, dus de spreiding is gelijk. Het gemiddelde is nu 13 en vanaf stap 2 zijn alle verschillen hetzelfde als bij rij A. Je krijgt uiteindelijk dus dezelfde standaardafwijking.

- c De standaardafwijking van rij C is 0. Dit komt doordat alle verschillen gelijk zijn aan 0.

Bladzijde 99

68

a $\frac{12,3}{18} \cdot 100\% \approx 68,3\%$

- b De verdeling is symmetrisch, dus 50% van de mensen heeft een IQ onder de 100.

Het percentage zwakbegaafden is net als het percentage hoogbegaafden $\frac{0,45}{18} \cdot 100\% = 2,5\%$.

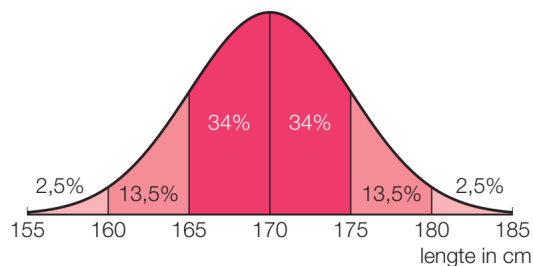
Het percentage bij 'minder begaafd' is dus $50\% - 0,5 \cdot 68,33\% - 2,5\% \approx 13,3\%$.

- c Iedereen behalve de zwak- en hoogbegaafden, dus $100\% - 2 \cdot 2,5\% = 95\%$.

Bladzijde 101

69

a



- b $34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%$ van de vrouwen

- c 2,5% van de vrouwen

- d $13,5\% + 2,5\% = 16\%$ van de vrouwen

- e $13,5\% + 34\% = 47,5\%$ van de vrouwen

70

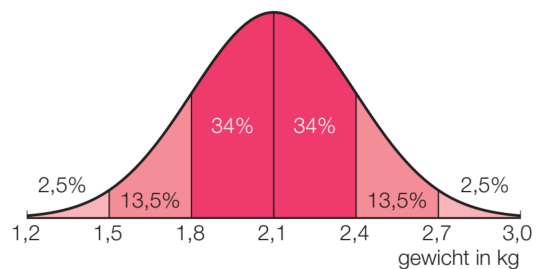
- a Zie de schets. Dus 2,5% van de konijnen.

- b $13,5\% + 68\% = 81,5\%$ van de konijnen

- c $2,5\% + 13,5\% = 16\%$, dus $0,16 \cdot 200 = 32$ konijnen.

- d De vijf lichtste konijnen, dat is $\frac{5}{200} \cdot 100\% = 2,5\%$ van de konijnen.

Dus die wegen maximaal 1,5 kg.



Bladzijde 102

71

- a Zie de schets.

$13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$, dus $0,815 \cdot 5000 = 4075$ appels.

- b $50\% + 34\% = 84\%$, dus $0,84 \cdot 5000 = 4200$ appels.

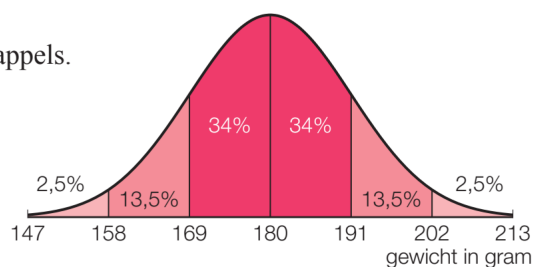
- c De zwaarste 125 appels, dat is $\frac{125}{5000} \cdot 100\% = 2,5\%$ van de appels.

Dus die wegen minimaal 202 gram.

- d $2,5\% + 13,5\% + 13,5\% + 2,5\% = 32\%$, dus $0,32 \cdot 5000 = 1600$ appels.

- e Alle appels met een gewicht lager dan 158 gram.

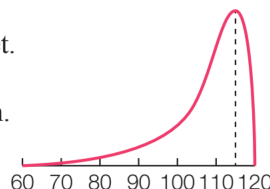
Dat zijn $0,025 \cdot 5000 = 125$ appels.



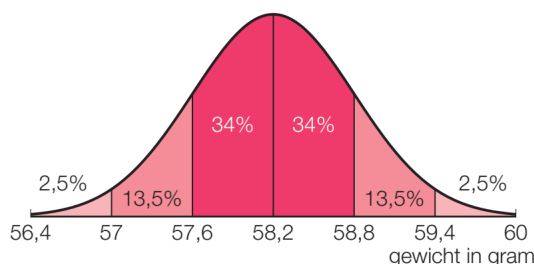
- 72 a** De 18-jarigen zijn de snelste groep, dus hun gemiddelde reactietijd is het laagste. Dus bij de 18-jarigen hoort kromme A.
Bij de 60-jarigen hoort de hoogste gemiddelde reactietijd, dus kromme C.
- b** Bij de 18-jarigen geldt $\mu = 420$ ms en $\mu - 3\sigma = 210$ ms.
Dus bij de 18-jarigen is $3\sigma = 420 - 210 = 210$ ms, dus $\sigma = 210 : 3 = 70$ ms.
Bij de 30-jarigen geldt dus $\sigma = 1,1 \cdot 70 = 77$ ms.
De gemiddelde reactietijd van de 30-jarigen is dus $210 + 3 \cdot 77 = 441$ ms.

Bladzijde 103

- C9 a** Een links-scheve verdeling, omdat de data links sterk verspreid ligt en rechts niet.
- b** Bij een scheve verdeling ligt het gemiddelde meer richting de staart van de verdeling dan de mediaan. Het gemiddelde is hier dus kleiner dan de mediaan.
- c** De kromme begint bij 60 en eindigt bij 120. Verder is de kromme het steilst bij 115, dus de modus is 115. Zie de schets.



- C10 a** Zie de schets.
Dus $100\% - 2,5\% = 97,5\%$ van de tennisballen.
- b** De lichtste 256 tennisballen, dat is $\frac{256}{1600} \cdot 100\% = 16\%$ van de tennisballen.
Dus die zijn lichter dan 57,6 gram.
- c** Alle tennisballen met een gewicht lager dan 59,4 gram voldoen. Dus $100\% - 2,5\% = 97,5\%$, dus $0,975 \cdot 1600 = 1560$ tennisballen.
- d** De spreiding ten opzichte van het gemiddelde is dan groter, dus de grafiek wordt lager en breder. De oppervlakte van het grafiekdeel tussen de grenzen van het criterium wordt dan kleiner. Er zullen dan dus minder tennisballen voldoen.



Kennis- en vaardigheidentest

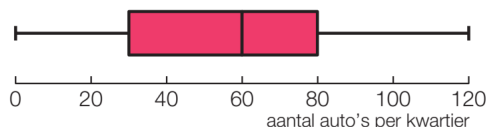
Bladzijde 104

- 1** de onderzoeksvraag
data verzamelen
data analyseren
conclusies trekken
- 2 a** Alle middelbare scholieren.
b Doordat in de steekproef alleen voorexamenklassen werden onderzocht hebben andere scholieren geen kans om in de steekproef te komen.
- 3** slaapligging: kwalitatief, nominaal
aantal ademstops: kwantitatief, discreet
langste ademstop (s): kwantitatief, continu
moe overdag: kwalitatief, ordinaal
- 4 a** totale frequentie = $4 + 15 + 18 + 20 + 16 + 8 + 3 = 84$
Dus van 84 dagen.
- b** De mediaan is het gemiddelde van het 42^e en 43^e getal, dit ligt in de klasse $[135, 180)$.
De modale klasse is $[135, 180)$.
De mediaan ligt dus in de modale klasse.
- c** 3 uur = 180 minuten
Dus op $\frac{4 + 15 + 18 + 20}{84} \cdot 100\% \approx 67,9\%$ van de dagen.
- d** Rekenen met rechtergrenzen geeft
gemiddelde = $\frac{4 \cdot 45 + 15 \cdot 90 + \dots + 8 \cdot 270 + 3 \cdot 315}{84} \approx 169,8$ minuten per dag.
Dat is minder dan 180 minuten, dus dat kan niet.

- 5 a** $Q_3 = 21,4^\circ\text{C}$, dus op ongeveer 25% van de dagen, dus dat zijn $0,25 \cdot 365 \approx 91$ dagen.
b spreidingsbreedte = $32,5 - 0,1 = 32,4^\circ\text{C}$
interkwartielafstand = $21,4 - 10,3 = 11,1^\circ\text{C}$
 $\frac{32,4}{11,1} \approx 2,9$, dus Lars heeft geen gelijk.

Bladzijde 105

- 6 a** 35 uren = 140 kwartieren
Bij minder dan 40 auto's hoort 35%, dus $0,35 \cdot 140 = 49$ kwartieren.
b Bij $[80, 100)$ hoort $90\% - 75\% = 15\%$ en dat zijn $0,15 \cdot 140 = 21$ kwartieren.
c Aflezen bij 0%, 25%, 50%, 75% en 100% geeft de aantallen 0, 30, 60, 80 en 120.



- d** De relatieve frequenties per klasse zijn achtereenvolgens: 15%, 20%, 15%, 25%, 15% en 10%.
Rekenen met rechtergrenzen geeft
gemiddelde = $0,15 \cdot 20 + 0,2 \cdot 40 + \dots + 0,1 \cdot 120 = 67$ auto's per kwartier.
Dat zijn in totaal $67 \cdot 140 = 9380$ auto's maximaal. Het kan dus niet kloppen.

- 7** De mediaan is het gemiddelde van het 42^e en 43^e waarnemingsgetal, dus de mediaan ligt tussen 5 en 6.
Boxplot A valt af, want daar is de mediaan kleiner dan 5.
 Q_3 is het gemiddelde van het 63^e en 64^e waarnemingsgetal, dus Q_3 ligt tussen 7 en 8.
Boxplot B valt af, want daar is Q_3 groter dan 8.
Dus boxplot C past het best bij het histogram.

Alternatieve uitwerking

Maak een tabel met relatieve cumulatieve frequenties.

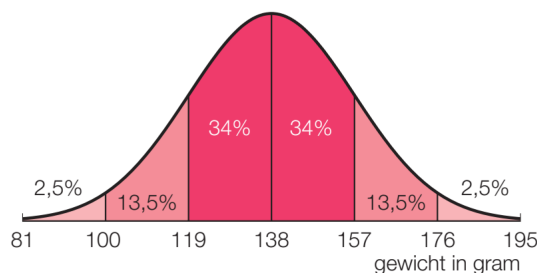
klasse	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 7)	[7, 8)	[8, 9)	[9, 10]
cum. freq.	9,5%	28,6%	36,9%	42,9%	48,8%	56,0%	64,3%	78,6%	94,0%	100%

Je kunt in de tabel aflezen dat Q_1 in $[1, 2)$ ligt, Q_2 in $[5, 6)$ en Q_3 in $[7, 8)$. Dus boxplot C past het best bij het histogram.

- 8 a** Een rechts-scheve verdeling. Je kunt namelijk zien dat de relatieve cumulatieve frequentie rechts vrijwel niet meer toeneemt en dat dit dus de staart van de verdeling is.
b Bij het steilste stuk hoort de modus, dus $\text{modus} = 2$. Bij de modus is de relatieve cumulatieve frequentie nog niet 50%, dus de mediaan is groter dan de modus. Bij een rechts-scheve verdeling ligt het gemiddelde meer richting de staart dan de mediaan. Dus het gemiddelde is groter dan de mediaan.
Op volgorde van klein naar groot: modus, mediaan, gemiddelde.
c De kromme begint bij 1 en eindigt bij 10. De top ligt bij de modus, dus bij 2. Zie de schets.



- 9 a** Zie de schets.
Meer dan 157 gram is $13,5\% + 2,5\% = 16\%$,
dus $0,16 \cdot 4000 = 640$ bananen.
b Minder dan 2σ afwijken van μ , dus 95%, dat zijn $0,95 \cdot 4000 = 3800$ bananen.
c De lichtste 100 bananen, dat is $\frac{100}{4000} \cdot 100\% = 2,5\%$ van de bananen.
Die wegen dus maximaal 100 gram.



Gemengde opgaven

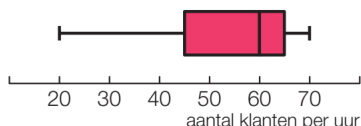
Bladzijde 106

- 1**
- a** Continu, want alle tussenliggende waarden zijn mogelijk.
 - b** Het aantal dagen in juli met minder dan 6 uur zon was 13.
Het aantal dagen augustus met minstens 6 uur zon was $31 - 20 = 11$.
Het aantal dagen in juli met minstens 4 uur, maar minder dan 8 uur zon was $25 - 10 = 15$.
 - c** De cumulatieve frequentiepolygoon van juli loopt steiler bij de hoge aantallen uren zonneshijn per dag. Dus juli was het zonnigst.
 - d** In juli scheen de zon $31 \cdot 5,7 = 176,7$ uur.
In augustus was het minder zonnig, dus het totaal aantal uren in juli en augustus zal kleiner zijn dan $2 \cdot 176,6 = 353,4$ uur.
Dus het totaal aantal is 315 uur.
- 2**
- a** De modale klasse is $[55, 60)$.
De mediaan is het 86^e getal, dit valt in de klasse $[55, 60)$.
Dus de mediaan valt in de modale klasse.
 - b** Rekenen met rechtergrenzen geeft
$$\text{gemiddelde} = \frac{7 \cdot 45 + 18 \cdot 50 + \dots + 2 \cdot 85 + 5 \cdot 90}{171} = 61,5 \dots \text{ minuten.}$$

Het gemiddelde is minder dan 61,5... minuten, dus 62 minuten is onmogelijk.
 - c** Q_1 is het 43^e waarnemingsgetal en ligt dus in $[50, 55)$. Dus boxplot B valt af.
 Q_4 ligt in $[85, 90)$. Dus boxplot C valt af.
Boxplot A past dus het best bij de gelopen tijden.
 - d** De verschillen ten opzichte van het gemiddelde worden dan kleiner, dus de standaardafwijking zou dan kleiner worden.

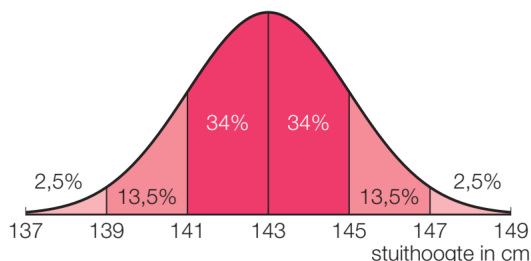
Bladzijde 107

- 3**
- a** 5 dagen 12 uur meten, dus $5 \cdot 12 = 60$ uren metingen.
Bij minder dan 30 klanten hoort 50%, dus $0,5 \cdot 60 = 30$ uren.
 - b** Bij minstens 40 klanten hoort $100\% - 20\% = 80\%$, dus $0,8 \cdot 60 = 48$ uren.
 - c** Twee van de vijf dagen is 24 uur.
Bij minder dan 50 klanten per uur hoort 30% en dat is $0,3 \cdot 60 = 18$ uur. Dat klopt dus niet.
 - d** Aflezen bij 0%, 25%, 50%, 75% en 100% geeft 20, 45, 60, 65 en 70.

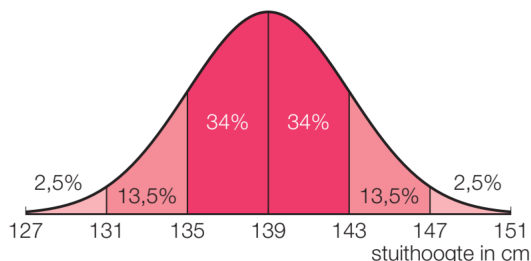


- 4**
- a** spreidingsbreedte = $39,6 - 0,6 = 39,0$ miljoen inwoners
interkwartielafstand = $7,4 - 1,9 = 5,5$ miljoen inwoners
 - b** Op volgorde van klein naar groot is Nebraska de 13^e staat.
Er hebben dus $50 - 13 = 37$ staten minstens zoveel inwoners.
 - c** De mediaan is het gemiddelde van het 25^e en 26^e waarnemingsgetal.
Daar hoort dus geen staat bij.

- 5 a** Zie de schets.
 $2,5\%$, dus $0,025 \cdot 1800 = 45$ tennisballen.
- b** De 288 ballen met de kleinste stuithoogte, dat is
 $\frac{288}{1800} \cdot 100\% = 16\%$ van de tennisballen.
 Dus die hebben een stuithoogte van maximaal 141 cm.



- c** Zie de schets.
 Wel geschikt zijn $34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%$ van de gasge vulde tennisballen.
 Dus het percentage niet geschikte ballen is $100\% - 81,5\% = 18,5\%$ en dat zijn $0,185 \cdot 160 \approx 30$ tennisballen.

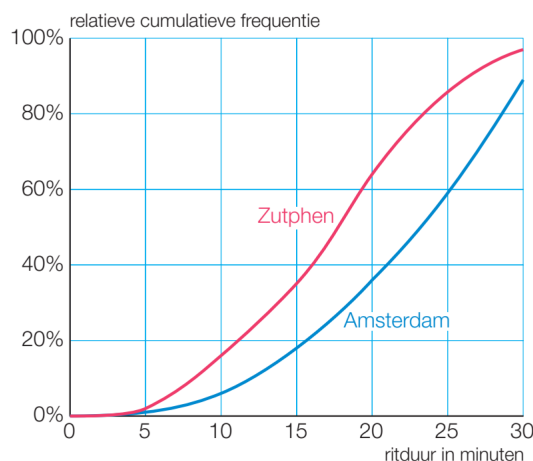


Bladzijde 108

- 6** Uit de boxplot volgt dat de mediaan 8 is.
 Aflezen bij 50% geeft bij diagram 1 en diagram 2 de mediaan 8, maar bij diagram 3 niet.
 Dus diagram 3 valt af.
 Uit de boxplot volgt dat $Q_1 = 5$.
 Aflezen bij 25% geeft $Q_1 = 6,5$ bij diagram 1 en $Q_1 = 5$ bij diagram 2.
 Dus diagram 1 valt af.
 Dus diagram 2 past bij de boxplot.
- 7 a** spreidingsbreedte = $70,8\% - 10,3\% = 60,5\%$
 interkwartielafstand = $39,5\% - 28,8\% = 10,7\%$
- b** I is onjuist. Je kunt alleen percentages, en dus geen aantallen aflezen.
 II is onjuist. Beide groepen bestaan uit 25% van de gemeenten.
 III is onjuist. De mediaan is 33,5%, je kunt het gemiddelde niet aflezen in de boxplot.
 IV is juist. $Q_3 = 39,5\%$, dus bij driekwart van de gemeenten is minder dan 39,5% van de woningen een huurwoning en dus minstens $100\% - 39,5\% = 60,5\%$ een koopwoning.
- c** Het aantal woningen in Schiermonnikoog was $\frac{260}{0,438} \approx 594$.
 In Rozendaal was 10,3% van de woningen een huurwoning. Dus het percentage koopwoningen in Rozendaal was $100\% - 10,3\% = 89,7\%$. Het aantal woningen in Rozendaal was dus $\frac{625}{0,897} \approx 697$.
 Dus Rozendaal had $\frac{697 - 594}{594} \cdot 100\% \approx 17,3\%$ meer woningen dan Schiermonnikoog.
- d** totale aantal huurwoningen = $345 \cdot 9955 = 3\,434\,475$
 Dus het totale aantal woningen in Nederland was $\frac{3\,434\,475}{0,4276} \approx 8\,032\,000$.

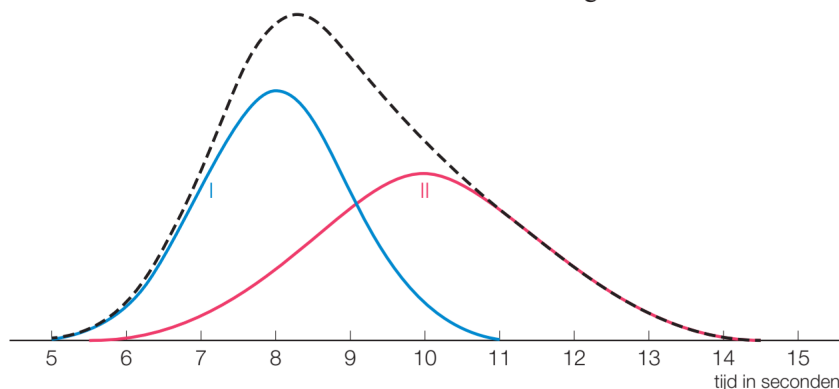
Bladzijde 109

- 8 a** De kwantitatieve variabele is 'ritduur in minuten'. Deze variabele is continu, want alle tussenliggende waarden zijn mogelijk.
- b** De kwalitatieve variabele is 'stad'. Het meetniveau is nominaal, want in de waarden van de variabelen zit geen logische volgorde.
- c** Amsterdam: linksscheef
Zutphen: symmetrisch
- d** In Amsterdam zijn veel gebieden slecht of niet bereikbaar met de auto. Hierdoor is bij korte afstanden reizen per taxi vaak niet handig. Dit kan een reden zijn dat er vooral langere ritduren in Amsterdam voorkomen.
- e** Nee, je ziet alleen percentages. Dus de verhouding tussen korte en lange ritten kun je aflezen, maar het kan zijn dat de chauffeur uit Zutphen veel meer ritten (en dus werkuren) heeft gemaakt.
- f** Dit komt door de klasse 'vanaf 30'. Hoge ritduren kunnen nog een groot effect hebben op de gemiddelde ritduur.
- g** Bij Q_1 hoort 25%, bij de chauffeur uit Amsterdam valt dit in de klasse $[15, 20)$.
Dus boxplot I hoort bij de chauffeur uit Amsterdam.
- h** Zie de figuur.



Bladzijde 110

- 9 a** Ze hebben gemiddeld minder tijd nodig en er is minder spreiding in hun resultaten.
- b** De grafiek loopt ongeveer van 5,5 seconden tot 14,5 seconden. Dit is 6 standaardafwijkingen. Dus $6\sigma = 14,5 - 5,5 = 9$ oftewel $\sigma = 9 : 6 = 1,5$ seconden.
- c** Bij de ervaren groep geldt $\mu = 8$ en $\sigma = 1$. Bij 6 seconden hoort $\mu - 2\sigma$, dus 2,5%.
- d** Bij de 2,5% langzaamste stapelaars uit de meer ervaren groep hoort ondergrens $\mu + 2\sigma = 10$ seconden. Dit is het gemiddelde (en de mediaan) van de minder ervaren groep, dus 50%.
- e** Als je de hoogte van de grafieken optelt bij elke tijd krijg je een top tussen 8 en 9 en een staart rechts oftewel een rechts-scheve verdeling. Zie de schets.



Bladzijde 111

- 10 a** I: De vraag gaat uit van een (foute) veronderstelling.
II: De vraag bevat een vaag woord. Wat is veel?
- b** 1: De steekproef is niet aselekt, want studenten die de website van het RSC niet bezoeken, hebben geen kans om in de steekproef te komen.
2: De steekproefomvang is erg klein.
- 11** De juiste volgorde is E-A-C-D-B.
E de onderzoeksvraag
A data verzamelen
C data analyseren
D conclusies trekken
B de onderzoeksvraag

3 Lineaire verbanden

3.1 Lineaire formules

Bladzijde 114

- 1** formule I hoort bij grafiek B
 formule II hoort bij grafiek A
 formule III hoort bij grafiek C
 formule IV hoort bij grafiek D

Bladzijde 116

- 2 a** $x = 14$ geeft m : $y = 0,5 \cdot 14 - 1 = 6$, dus A ligt op m .
 Bij de andere lijnen geeft $x = 14$ geen $y = 6$.
b $rc_k = -3$ $rc_m = \frac{1}{2}$ $rc_p = 0$ $rc_q = 2$
c rc_p is niet gelijk aan rc_q , dus Joël heeft geen gelijk.
d lijn k :

x	0	1
y	2	-1

lijn m :

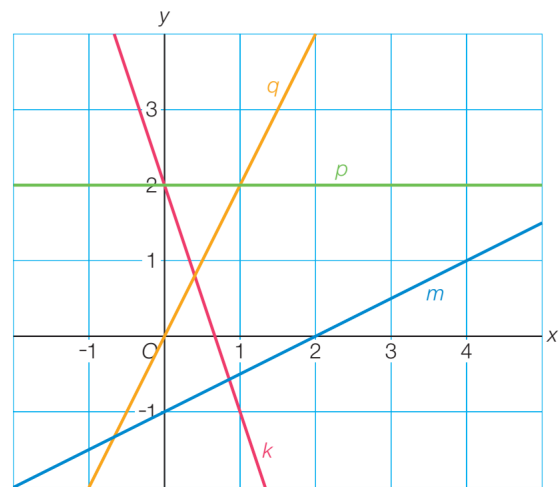
x	0	4
y	-1	1

lijn q :

x	0	2
y	0	4

Zie de figuur.

- e** n : $y = -0,5x - 4$



- 3 a** $x = -16$ geeft p : $y = 4 - 2,5 \cdot -16 = 44$, dus A ligt niet op p .
 $x = -16$ geeft q : $y = 1,2 \cdot -16 - 2 = -21,2$, dus A ligt niet op q .
 Dus A ligt niet op een van deze lijnen.

- b** lijn p :

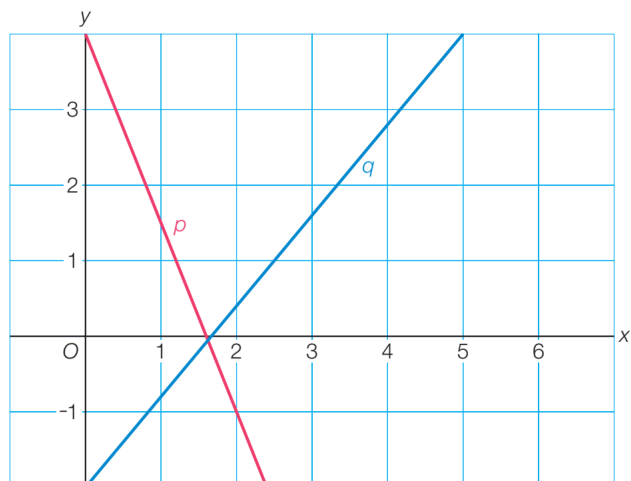
x	0	2
y	4	-1

lijn q :

x	0	5
y	-2	4

Zie de figuur.

- c** k : $y = 1,2x + 4$
d l : $y = -2,5x$
e m : $y = -2$



- 4 a** $x = -10$ geeft $y = -1,5 \cdot -10 + 4 = 19$
Dus de y -coördinaat van A is 19.
- b** De formule van lijn m is $y = 2,5x - 1$.
 $x = -1$ geeft $y = 2,5 \cdot -1 - 1 = -3,5$, dus B ligt op m .
Bij de andere lijnen geeft $x = -1$ geen $y = -3,5$.
- c** lijn k :

x	0	5
y	-3	0

lijn l :

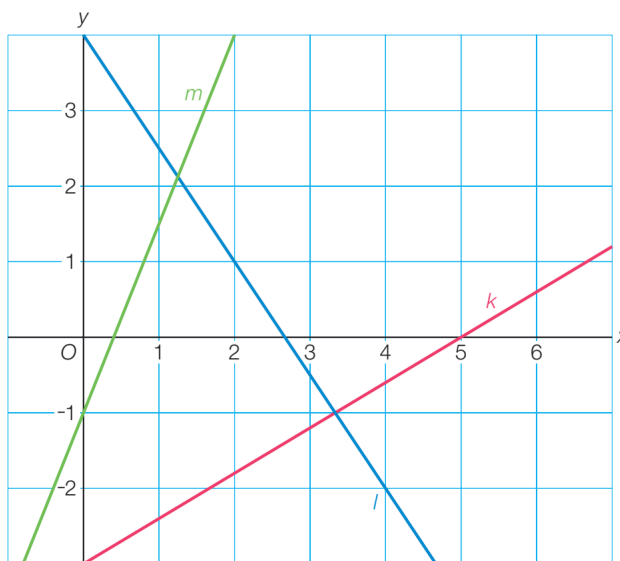
x	0	4
y	4	-2

lijn m :

x	0	2
y	-1	4

Zie de figuur.

- d** $n: y = 0,6x$
e door $C(5, 0)$, dus $p: x = 5$
f $q: y = 4$



- 5** $A(0, 4)$ en $B(5, 0)$
 $m: y = -\frac{2}{3}x + 4$
 $x = 5$ geeft $y = -\frac{2}{3} \cdot 5 + 4 = \frac{2}{3}$, dus m gaat niet door B .

Bladzijde 117

- 6 a** De vaste kosten zijn 200 euro.
De variabele kosten zijn 0,25 euro per balpen.
- b** Bij een productie van 500 balpennen zijn de kosten 325 euro per dag.
- c** $K = 0,3q + 400$
- d** Bij een stijging van de variabele kosten wordt de grafiek steiler.
Bij een stijging van de vaste kosten komt het snijpunt met de y -as hoger te liggen.

- 7** $q = 1500$ gaf eerst $K = 0,25 \cdot 1500 + 200 = 575$
 $q = 1500$ geeft nu $K = 0,3 \cdot 1500 + 400 = 850$
Dus de procentuele toename is $\frac{850 - 575}{575} \cdot 100\% \approx 47,8\%$.

Het is minder dan 50% duurder geworden, dus de directeur heeft geen gelijk.

- 8 a** $a = 50$ geeft $B_R = 0,1 \cdot 50 + 75 = 80$
Dus je moet 80 euro betalen.

a	0	250
B_R	75	100

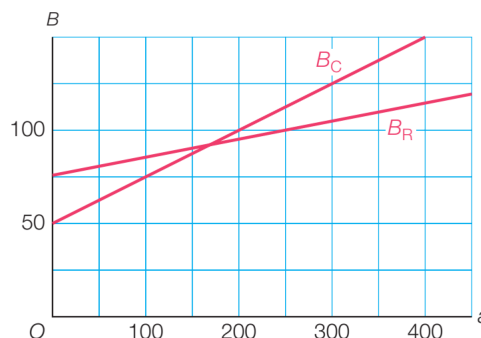
Zie de figuur.

- c** 0,1 is de huurprijs in euro per kilometer.
75 is de vaste huurprijs in euro's.
- d** $B_C = 0,25a + 50$

a	0	200
B_C	50	100

Zie de figuur.

- e** $a = 220$ geeft $B_R = 0,1 \cdot 220 + 75 = 97$
 $a = 220$ geeft $B_C = 0,25 \cdot 220 + 50 = 105$
Dus Rent-a-car is het voordeligst. Het scheelt $105 - 97 = 8$ euro.



Bladzijde 118

- 9 a** Ze heeft de eenheden uit de tekst niet omgerekend naar de eenheden die in de formule gebruikt worden.
- b** Het waterpeil daalt met $\frac{30}{15} = 2$ cm per minuut.
De beginhoogte van het water is $1,2 \cdot 100 = 120$ cm.
- c** $h = 120 - 2t$

- 10 a** $720^\circ\text{C per uur} = \frac{720}{60}^\circ\text{C per minuut} = 12^\circ\text{C per minuut}$
Dus $T = 22 + 12m$.
- b** $18 \text{ km/uur} = \frac{18}{3,6} \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$
Dus $h = 600 - 5t$.
- c** $2600 \text{ ha per dag} = 2600 \cdot 365 \text{ ha per jaar} = 949\,000 \text{ ha per jaar} = 0,949 \text{ miljoen ha per jaar}$
Dus $A = 540 - 0,949t$.

Bladzijde 119

- 11 a** Taxibedrijf A kost 25,80 euro per 12 km. Dat is $\frac{25,80}{12} = 2,15$ euro per km.
Dus $K_A = 2,15d$.
Taxibedrijf B kost $12,40 - 1,95 = 10,45$ euro per 5 km. Dat is $\frac{10,45}{5} = 2,09$ euro per km.
Dus $K_B = 2,09d + 1,95$.
- b** $d = 5$ geeft $K_A = 2,15 \cdot 5 = 10,75$
Dat is minder dan € 12,40, dus voor Tim zou het voordeliger zijn geweest.
 $d = 12$ geeft $K_B = 2,09 \cdot 12 + 1,95 = 27,03$
Dat is meer dan € 25,80, dus voor Jelmer zou het niet voordeliger zijn geweest.

- 12 a** De machine produceert $\frac{560}{4} = 140$ flessen per minuut.
Dus $N = 140t$.
- b** De formule is van de vorm $N = at + b$ met $b = 0$. Dus bij $t = 0$ krijg je $N = 0$.

Bladzijde 120

- 13 a** $y = ax$
 $x = 15$ en $y = 24$ invullen geeft $a \cdot 15 = 24$
 $a = 1,6$
Dus $y = 1,6x$.
- b** $x = 60$ geeft $y = 1,6 \cdot 60 = 96$.
- c** $L = ad$
 $d = 30$ en $L = 240$ invullen geeft $a \cdot 30 = 240$
 $a = 8$
Dus $L = 8d$.
 $d = 340$ invullen geeft $L = 8 \cdot 340 = 2720$.

- 14** $P = at$
 $t = 5$ en $P = 6,5$ invullen geeft $a \cdot 5 = 6,5$
 $a = 1,3$
Dus $P = 1,3t$.

- 15** De lijn door O en P : verticale lijn door $(0, 0)$, dus $x = 0$.
De lijn door O en Q : horizontale lijn door $(0, 0)$, dus $y = 0$.
De lijn door O en R : y is evenredig met x en de lijn gaat door $(1, 1)$, dus $y = x$.
De lijn door P en Q : $rc = -1$ en de lijn gaat door $(0, 1)$, dus $y = -x + 1$.
De lijn door P en R : horizontale lijn door $(0, 1)$, dus $y = 1$.
De lijn door Q en R : verticale lijn door $(1, 0)$, dus $x = 1$.

- 16 a** Bij tabel I hoort een recht evenredig verband, want de bijbehorende grafiek is een lijn door $(0, 0)$.
 Bij tabel II hoort geen recht evenredig verband, want de bijbehorende grafiek gaat niet door $(0, 0)$.
 Bij tabel III hoort een recht evenredig verband, want er is een vaste verhouding tussen x en y .
 Bij tabel IV hoort geen recht evenredig verband, want de bijbehorende grafiek gaat niet door $(0, 0)$.
- b** Tabel I: $rc = 1,2$ en de lijn gaat door $(0, 0)$.
 Dus $y = 1,2x$.
- Tabel II: $rc = 0,7$ en de lijn gaat door $(0; 0,7)$.
 Dus $y = 0,7x + 0,7$.
- Tabel III: $rc = 0,3$ en y is evenredig met x .
 Dus $y = 0,3x$.
- Tabel IV: $rc = -2$ en de lijn gaat door $(0, 2)$.
 Dus $y = -2x + 2$.

- 17 a** $h = ad$
 $d = 6250$ en $h = 50\,000$ invullen geeft $a \cdot 6250 = 50\,000$
 $a = 8$
 Dus $h = 8d$.
- b** $d = 40\,000$ geeft $h = 8 \cdot 40\,000 = 320\,000$
 Dus de totale honingproductie van deze bij is $320\,000$ mg, oftewel $0,32$ kg.

Bladzijde 121

- 18 a** $K = aA$
 $A = 84$ en $K = 1890$ invullen geeft $a \cdot 84 = 1890$
 $a = 22,5$
 Dus $K = 22,5A$.
- b** $A = 120$ geeft $K = 22,5 \cdot 120 = 2700$
 Ze betalen 2750 euro, dat is meer dan 2700 euro.
 Dus hun appartement is groter dan 120 m^2 .
- c** De vloeroppervlakte van het complex is $\frac{75}{0,012} = 6250 \text{ m}^2$.
 $A = 6250$ geeft $K = 22,5 \cdot 6250 = 140\,625$
 Dus de jaarlijkse servicekosten zijn $140\,625$ euro.
- 19 a** Voor 200 euro krijg je $38,7 \cdot 200 = 7740$ baht.
- b** $b = 38,7e$
- c** b is evenredig met e , want de formule heeft de vorm $b = ae$.
- d** $e = 500$ geeft $b = 38,7 \cdot 500 = 19\,350$
 $e = 80$ geeft $b = 38,7 \cdot 80 = 3096$
 Dus $B = 3096d + 19\,350$.
- e** B is niet evenredig met d , want de formule heeft niet de vorm $B = ad$.

- 20 a** 2 weken = 14 dagen
 $d = 14$ geeft $B = 3096 \cdot 14 + 19\,350 = 62\,694$
 Dus hij heeft nog $62\,694 - 60\,250 = 2444$ baht over.
 Daar krijgt hij $\frac{2444}{40} = 61,10$ euro voor.
- b** $e = \frac{b}{40}$ oftewel $e = 0,025b$

Bladzijde 122

C1 a $rc_l = -2$ en het snijpunt van l met de y -as is $(0, 3)$.

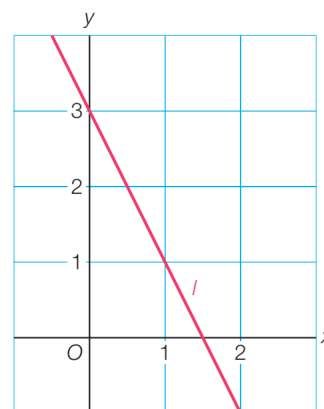
b

x	0	2
y	3	-1

Zie de figuur.

c $k: y = -2x - 5$

d $m: y = 4x + 3$



C2 a $1,2 \text{ m} = 120 \text{ cm}$

$9,8 \text{ cm per week} = \frac{9,8}{7} \text{ cm per dag} = 1,4 \text{ cm per dag}$

Dus $h = 1,4t + 120$.

b 25 juli is 15 dagen na 10 juli, dus $t = 15$.

$t = 15$ geeft $h = 1,4 \cdot 15 + 120 = 141$

Dus de hoogte van de zonnebloem is 141 cm.

c h is niet evenredig met t , want de formule heeft niet de vorm $h = at$.

C3 a $P = as$

$s = 5$ en $P = 1$ invullen geeft $a \cdot 5 = 1$
 $a = 0,2$

Dus $P = 0,2s$.

b P is evenredig met s , want de formule heeft de vorm $P = as$.

3.2 Lineaire formules opstellen

Bladzijde 123

21 Bij $x = 2$ moet gelden dat $y = 6$.

$x = 2$ invullen in $y = -0,75x + 7,5$ geeft $y = -0,75 \cdot 2 + 7,5 = 6$.

Dus formule B is juist.

22 a $\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ x = 5 \text{ en } y = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 5 + b = 8 \\ 10 + b = 8 \\ b = -2 \end{array}$

Dus $l: y = 2x - 2$.

b $\left. \begin{array}{l} l = -0,5t + b \\ t = 60 \text{ en } l = 55 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,5 \cdot 60 + b = 55 \\ -30 + b = 55 \\ b = 85 \end{array}$

Dus $l = -0,5t + 85$.

Bladzijde 124

23 a $\left. \begin{array}{l} y = 0,4x + b \\ x = 5 \text{ en } y = 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,4 \cdot 5 + b = 9 \\ 2 + b = 9 \\ b = 7 \end{array}$

Dus $l: y = 0,4x + 7$.

b $\left. \begin{array}{l} y = -1,8x + b \\ x = -10 \text{ en } y = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,8 \cdot -10 + b = 5 \\ 18 + b = 5 \\ b = -13 \end{array}$

Dus het snijpunt van m met de y -as is $(0, -13)$.

- 24 a** 4 minuten per km is $\frac{1}{4} = 0,25$ km per minuut

Dus $A_J = 0,25t$.

- b** $t = 10$ geeft $A_J = 0,25 \cdot 10 = 2,5$

5 minuten per km is $\frac{1}{5} = 0,2$ km per minuut

$$\left. \begin{array}{l} A_M = 0,2t + b \\ t = 10 \text{ en } A_M = 2,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,2 \cdot 10 + b = 2,5 \\ 2 + b = 2,5 \\ b = 0,5 \end{array}$$

Dus $A_M = 0,2t + 0,5$.

- c** Bij de formule $A_J = 0,25t$ is er sprake van een evenredig verband.

- 25** Eerste lijnstuk: $y = \frac{1}{3}x$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tweede lijnstuk: } y = 1\frac{2}{3}x + b \\ x = 3 \text{ en } y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{2}{3} \cdot 3 + b = 1 \\ 5 + b = 1 \\ b = -4 \end{array}$$

Dus $y = 1\frac{2}{3}x - 4$.

Derde lijnstuk: $x = 4$ geeft $y = 1\frac{2}{3} \cdot 4 - 4 = 2\frac{2}{3}$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + b \\ x = 4 \text{ en } y = 2\frac{2}{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot 4 + b = 2\frac{2}{3} \\ 1\frac{1}{3} + b = 2\frac{2}{3} \\ b = 1\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $y = \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

- 26 a** Het verschil van de x -coördinaten is $13 - 8 = 5$, dus je gaat 5 naar rechts.
Het verschil van de y -coördinaten is $23 - 17 = 6$, dus je gaat 6 omhoog.

- b** Als je 1 naar rechts gaat, ga je $\frac{6}{5} = 1,2$ omhoog.

Dus de richtingscoëfficiënt van l is 1,2.

$$\left. \begin{array}{l} \text{c } y = 1,2x + b \\ x = 8 \text{ en } y = 17 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,2 \cdot 8 + b = 17 \\ 9,6 + b = 17 \\ b = 7,4 \end{array}$$

Dus $l: y = 1,2x + 7,4$.

Bladzijde 125

- 27 a** Hierbij hoort $\Delta x = x_P - x_Q$.

Ze krijgt $rc_l = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 5}{2 - 6} = 1,5$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{b } y = 1,5x + b \\ x = 6 \text{ en } y = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,5 \cdot 6 + b = 5 \\ 9 + b = 5 \\ b = -4 \end{array}$$

- 28 a** $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 1}{1 - -1} = 1,5$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1,5x + b \\ x = -1 \text{ en } y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,5 \cdot -1 + b = 1 \\ -1,5 + b = 1 \\ b = 2,5 \end{array}$$

Dus $k: y = 1,5x + 2,5$.

- b** $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 0}{-3 - 2} = -1$

$$\left. \begin{array}{l} y = -x + b \\ x = 2 \text{ en } y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 + b = 0 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $l: y = -x + 2$.

c $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{229 - 493}{75 - 25} = -5,28$

$$\left. \begin{array}{l} y = -5,28x + b \\ x = 25 \text{ en } y = 493 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -5,28 \cdot 25 + b = 493 \\ -132 + b = 493 \\ b = 625 \end{array}$$

Dus m : $y = -5,28x + 625$.

29 a $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{155 - (-125)}{17 - (-23)} = 7$

$$\left. \begin{array}{l} y = 7x + b \\ x = -23 \text{ en } y = -125 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7 \cdot (-23) + b = -125 \\ -161 + b = -125 \\ b = 36 \end{array}$$

Dus p : $y = 7x + 36$.

b $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3}$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ x = -8 \text{ en } y = 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot (-8) + b = 14 \\ 2\frac{2}{3} + b = 14 \\ b = 11\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus q : $y = -\frac{1}{3}x + 11\frac{1}{3}$.

Bladzijde 126

30 a l gaat door $(1, 2)$ en $(4, 3)$

$$y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 2}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + b \\ x = 1 \text{ en } y = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot 1 + b = 2 \\ \frac{1}{3} + b = 2 \\ b = 1\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus l : $y = \frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$.

b m gaat door $(50, 40)$ en $(250, 10)$

$$y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10 - 40}{250 - 50} = -0,15$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -0,15x + b \\ x = 50 \text{ en } y = 40 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,15 \cdot 50 + b = 40 \\ -7,5 + b = 40 \\ b = 47,5 \end{array}$$

Dus m : $y = -0,15x + 47,5$.

c n gaat door $(0, 5)$ en $(4, 10)$

$$y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10 - 5}{4 - 0} = 1,25 \text{ en } b = 5$$

Dus n : $y = 1,25x + 5$.

31 a Punt $B(500, 315)$ betekent dat mevrouw Hak bij een weekverkoop van 500 dozen een inkomen van 315 euro heeft.

b Mevrouw Hak verdient $315 - 270 = 45$ euro bij de verkoop van $500 - 350 = 150$ dozen.
Dus ze verdient $\frac{45}{150} = 0,3$ euro per doos.

Alternatieve uitwerking

$$R = aq + b \text{ met } a = \frac{315 - 270}{500 - 350} = 0,3$$

Dus mevrouw Hak verdient 0,3 euro per doos.

- c** Ze verdient 0,3 euro per doos, dus bij 350 dozen is dat $350 \cdot 0,3 = 105$ euro.
 Bij een weekverkoop van 350 dozen is haar inkomen 270 euro.
 Dus het basisloon per week is $270 - 105 = 165$ euro.

Alternatieve uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} R = 0,3q + b \\ q = 350 \text{ en } R = 270 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,3 \cdot 350 + b = 270 \\ 105 + b = 270 \\ b = 165 \end{array}$$

Dus het basisloon per week is 165 euro.

- d** $R = aq + b$ met $a = 0,3$ en $b = 165$
 Dus $R = 0,3q + 165$.

Bladzijde 127

32 a $K = am + b$ met $a = \frac{\Delta K}{\Delta m} = \frac{115 - 10}{12 - 5} = 15$

$$\left. \begin{array}{l} K = 15m + b \\ m = 5 \text{ en } K = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 15 \cdot 5 + b = 10 \\ 75 + b = 10 \\ b = -65 \end{array}$$

Dus $K = 15m - 65$.

b $F = aR + b$ met $a = \frac{\Delta F}{\Delta R} = \frac{138 - 300}{42 - 15} = -6$

$$\left. \begin{array}{l} F = -6R + b \\ R = 15 \text{ en } F = 300 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -6 \cdot 15 + b = 300 \\ -90 + b = 300 \\ b = 390 \end{array}$$

Dus $F = -6R + 390$.

c $g = an + b$ met $a = \frac{\Delta g}{\Delta n} = \frac{49 - 35}{10 - 6} = 3,5$

$$\left. \begin{array}{l} g = 3,5n + b \\ n = 6 \text{ en } g = 35 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3,5 \cdot 6 + b = 35 \\ 21 + b = 35 \\ b = 14 \end{array}$$

Dus $g = 3,5n + 14$.

33 a $B = ae + b$ met $a = \frac{\Delta B}{\Delta e} = \frac{1112,08 - 841,6}{4426 - 3250} = 0,23$

$$\left. \begin{array}{l} B = 0,23e + b \\ e = 3250 \text{ en } B = 841,6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,23 \cdot 3250 + b = 841,6 \\ 747,5 + b = 841,6 \\ b = 94,1 \end{array}$$

Dus $B = 0,23e + 94,1$.

- b** Het vastrecht is 94,10 euro en de prijs per kWh is 0,23 euro oftewel 23 eurocent.

Bladzijde 128

- 34 a** Er zijn drie verschillende kosten per kaartje, dus heeft de grafiek drie gedeeltes.

b $K = 1,95q$

- c** Voor 50 kaartjes betaal je $50 \cdot 1,95 = 97,50$ euro.

Bij het tweede gedeelte van de grafiek zijn de kosten 1,45 euro per kaartje.

$$\left. \begin{array}{l} K = 1,45q + b \\ q = 50 \text{ en } K = 97,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,45 \cdot 50 + b = 97,5 \\ 72,5 + b = 97,5 \\ b = 25 \end{array}$$

Dus $K = 1,45q + 25$.

- d** Voor 100 kaartjes betaal je $1,45 \cdot 100 + 25 = 170$ euro.

$$K = aq + b \text{ met } a = \frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{265 - 170}{200 - 100} = 0,95$$

$$\left. \begin{array}{l} K = 0,95q + b \\ q = 100 \text{ en } K = 170 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,95 \cdot 100 + b = 170 \\ 95 + b = 170 \\ b = 75 \end{array}$$

Dus $K = 0,95q + 75$.

- e** $q = 75$ invullen in $K = 1,45q + 25$ geeft $K = 1,45 \cdot 75 + 25 = 133,75$
 Dus ze heeft $2 \cdot 133,75 = 267,50$ euro betaald.
 $q = 2 \cdot 75 = 150$ invullen in $K = 0,95q + 75$ geeft $K = 0,95 \cdot 150 + 75 = 217,50$
 Dus ze zou $267,50 - 217,50 = 50$ euro goedkoper uit zijn geweest.

C4 a
$$\left. \begin{array}{l} y = -1,5x + b \\ x = 3 \text{ en } y = 4,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,5 \cdot 3 + b = 4,5 \\ -4,5 + b = 4,5 \\ b = 9 \end{array}$$

b $x = 4$ geeft $y = 2 \cdot 4 + 3 = 11$, dus $B(4, 11)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -1,5x + b \\ x = 4 \text{ en } y = 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,5 \cdot 4 + b = 11 \\ -6 + b = 11 \\ b = 17 \end{array}$$

C5 $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9 - 6}{2 - 4} = -1,5$

$$\left. \begin{array}{l} y = -1,5x + b \\ x = 4 \text{ en } y = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,5 \cdot 4 + b = 6 \\ -6 + b = 6 \\ b = 12 \end{array}$$

Dus $y = -1,5x + 12$.

C6 $q = ap + b$ met $a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{200 - 400}{125 - 75} = -4$

$$\left. \begin{array}{l} q = -4p + b \\ p = 75 \text{ en } q = 400 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 \cdot 75 + b = 400 \\ -300 + b = 400 \\ b = 700 \end{array}$$

Dus $q = -4p + 700$.

3.3 Vergelijkingen en ongelijkheden

Bladzijde 129

V1 a	$5x - 3 = 3x + 5$	c	$2x - 5 = 6x + 3$
	$2x - 3 = 5$		$-4x - 5 = 3$
	$2x = 8$		$-4x = 8$
	$x = 4$		$x = -2$
b	$7x + 1 = 4x - 8$	d	$2x - 2 = 3x - 7$
	$3x + 1 = -8$		$-x - 2 = -7$
	$3x = -9$		$-x = -5$
	$x = -3$		$x = 5$

35 a De y -coördinaat van A is 0.

b $5 - x = 0$
 $-x = -5$
 $x = 5$

c $2x - 4 = 0$
 $2x = 4$
 $x = 2$
 Dus $(2, 0)$.

d Als je de x -coördinaat van het snijpunt in beide formules invult, dan krijg je de y -coördinaat van het snijpunt. Dus je krijgt dezelfde waarde voor y . Hieruit volgt $5 - x = 2x - 4$.

e $5 - x = 2x - 4$
 $-3x = -9$
 $x = 3$

Dus de x -coördinaat van S is 3.

f $x = 3$ geeft $y = 5 - 3 = 2$, dus de y -coördinaat van S is 2.

Bladzijde 130

36 De formule $y = 0,8x$ heeft minder rekenstappen dan de formule $y = 3 - 1,2x$.

37 a Los op $1,7x - 4,25 = -0,8x + 3$
 $2,5x = 7,25$
 $x = 2,9$

$x = 2,9$ geeft $y = 1,7 \cdot 2,9 - 4,25 = 0,68$

Dus $S(2,9; 0,68)$.

b Los op $-0,8x + 3 = 0$
 $-0,8x = -3$
 $x = 3,75$

Dus $A(3,75; 0)$.

c Los op $1,7x - 4,25 = 0$
 $1,7x = 4,25$
 $x = 2,5$

Dus $B(2,5; 0)$.

d $x = 0$ geeft $y = 1,7 \cdot 0 - 4,25 = -4,25$, dus $C(0; -4,25)$.

Bladzijde 131

38 a Los op $0,25x + 3 = 1,75x - 2,4$
 $-1,5x = -5,4$
 $x = 3,6$

$x = 3,6$ geeft $y = 0,25 \cdot 3,6 + 3 = 3,9$

Dus $A(3,6; 3,9)$.

b In de figuur zie je dat de lijn $y = 0,25x + 3$ de x -as verder naar links zal snijden.

Los op $0,25x + 3 = 0$

$0,25x = -3$

$x = -12$

Dus $B(-12; 0)$.

39 a Los op $2x - 6 = 5 - 3x$
 $5x = 11$
 $x = 2,2$

$x = 2,2$ geeft $y = 2 \cdot 2,2 - 6 = -1,6$

Dus het snijpunt is $(2,2; -1,6)$.

b Los op $-2,5x + 5 = 25$
 $-2,5x = 20$
 $x = -8$

Dus het snijpunt is $(-8, 25)$.

40 a Los op $-2,5x + 35 = 0$
 $-2,5x = -35$
 $x = 14$

Dus $P(14, 0)$.

$x = 0$ geeft $y = -2,5 \cdot 0 + 35 = 35$, dus $Q(0, 35)$.

b $x = -20$ geeft $y = -2,5 \cdot -20 + 35 = 85$
Dus $y_R = 85$.

c Los op $-2,5x + 35 = 45$
 $-2,5x = 10$
 $x = -4$

Dus $x_S = -4$.

d $y = ax$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{4} = 1$

Dus $m: y = x$.

Los op $-2,5x + 35 = x$
 $-3,5x = -35$

$x = 10$

$x = 10$ geeft $y = 10$

Dus het snijpunt is $(10, 10)$.

41 a $k = aV + b$ met $a = \frac{\Delta k}{\Delta V} = \frac{7,4 - 11}{1200} = -0,003$

$$\left. \begin{array}{l} k = -0,003V + b \\ V = 250 \text{ en } k = 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,003 \cdot 250 + b = 11 \\ -0,75 + b = 11 \\ b = 11,75 \end{array}$$

Dus $k = -0,003V + 11,75$.

b Los op $-0,003V + 11,75 = 1,5$
 $-0,003V = -10,25$
 $V = 3416,6\dots$

Dus na ongeveer 3400 km gaat het alarm af.

c Per km wordt er 0,003 ton kerosine verbruikt.

Dus er kan dan nog $\frac{1,5}{0,003} = 500$ km gevlogen worden.

Alternatieve uitwerking

Los op $-0,003V + 11,75 = 0$

$-0,003V = -11,75$

$V = 3916,6\dots$

Dus er kan dan nog $3916,6\dots - 3416,6\dots = 500$ km gevlogen worden.

42 Het verbruik is $1,05 \cdot 0,003 = 0,00315$ ton kerosine per km.

Dus $k = -0,00315V + 12$.

Los op $-0,00315V + 12 = -0,003V + 11,75$

$-0,00015V = -0,25$

$V = 1666,6\dots$

Dus na ongeveer 1700 km vliegen is de aanwezige hoeveelheid kerosine bij beide vluchten gelijk.

Bladzijde 132

43 a Ze daalt 1 km per 2,5 minuut, dus per minuut daalt ze $\frac{1}{2,5} = 0,4$ km.

Dus de richtingscoëfficiënt is $-0,4$.

Alternatieve uitwerking

$rc = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{-1}{2,5} = -0,4$

b 700 meter = 0,7 km

Los op $1,2 - 0,4t = 0,7$

$-0,4t = -0,5$

$t = 1,25$

De parachute is dan $1,25 \cdot 60 = 75$ seconden geopend.

c 80 meter = 0,08 km

Los op $1,2 - 0,4t = 0,08$

$-0,4t = -1,12$

$t = 2,8$

Dus over de laatste 0,08 km doen ze $3,5 - 2,8 = 0,7$ minuten, oftewel $\frac{0,7}{60} = 0,011\dots$ uur.

Dat is een gemiddelde snelheid van $\frac{0,08}{0,011\dots} \approx 6,9$ km/uur.

44 a De grafiek van bedrijf A snijdt de y-as in het punt (0, 20) en de grafiek van bedrijf B snijdt de y-as in het punt (0, 0).

Dus grafiek I hoort bij bedrijf A.

b Los op $1,2d + 20 = 1,6d$

$-0,4d = -20$

$d = 50$

Dus bij een afstand van 50 km zijn de bedrijven even duur.

c Uit de figuur volgt dat bedrijf A goedkoper is bij afstanden groter dan 50 km.

Bladzijde 133

45 Als $q < 320$, dan ligt K boven R in de figuur. Dus dan maakt Sophia verlies.

46 Bedrijf I is voordeliger als $B_I < B_{II}$.

$$\text{Los op } 22t + 80 = 18t + 96$$

$$4t = 16$$

$$t = 4$$

Uit de figuur volgt dat bedrijf I voordeliger is bij reparatietijden korter dan 4 uur.

47 Bedrijf II is het meest voordelig als $B_{II} < B_I$ en $B_{II} < B_{III}$.

$$\text{Los op } 24t + 80 = 18t + 96 \text{ en } 18t + 96 = 10t + 158$$

$$6t = 16$$

$$8t = 62$$

$$t = 2\frac{2}{3}$$

$$t = 7\frac{3}{4}$$

Uit de figuur volgt dat bedrijf II het meest voordelig is tussen $t = 2\frac{2}{3}$ en $t = 7\frac{3}{4}$.

Dat zijn reparatietijden tussen 2 uur en 40 minuten en 7 uur en 45 minuten.

Bladzijde 134

48 $K_{II} = at + 24$ met $a = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{704 - 24}{20} = 34$

$$\text{Dus } K_{II} = 34t + 24.$$

Schilder II is goedkoper als $K_{II} < K_I$.

$$\text{Los op } 38t = 34t + 24$$

$$4t = 24$$

$$t = 6$$

Uit de figuur volgt dat schilder II het goedkoopst is bij werktijden langer dan 6 uur.

49 a $K_A = 12n + 435$

$$K_B = 17,5n + 350$$

b Nienke is goedkoper uit bij Andantino als $K_A < K_B$.

$$\text{Los op } 12n + 435 = 17,5n + 350$$

$$-5,5n = -85$$

$$n = 15,4\dots$$

Uit de figuur volgt dat Nienke goedkoper uit is bij Andantino als ze minstens 16 keer per jaar golft.

c Los op $12n + 435 = 600$ en $17,5n + 350 = 600$

$$12n = 165$$

$$17,5n = 250$$

$$n = 13,75$$

$$n = 14,2\dots$$

Bij Andantino kan ze 13 keer per jaar golfen en bij Bastion is dat 14 keer per jaar.

Dus ze moet lid worden van Bastion.

Bladzijde 135

C7 a Los op $3x + 18 = 4,5x - 4,5$

$$-1,5x = -22,5$$

$$x = 15$$

$$x = 15 \text{ geeft } y = 3 \cdot 15 + 18 = 63$$

Dus het snijpunt is (15, 63).

b Los op $3x + 18 = 0$ en $4,5x - 4,5 = 0$

$$3x = -18$$

$$4,5x = 4,5$$

$$x = -6$$

$$x = 1$$

Het meest linker snijpunt is $A(-6, 0)$.

C8

- a** $t = 2,5$ geeft $A_J = 120 \cdot 2,5 = 300$ en $A_W = 1200 - 60 \cdot 2,5 = 1050$
De broers zijn dan nog $1050 - 300 = 750$ meter van elkaar verwijderd.
- b** Los op $120t = 600$
 $t = 5$
 $t = 5$ geeft $A_W = 1200 - 60 \cdot 5 = 900$
De broers zijn dan nog $900 - 600 = 300$ meter van elkaar verwijderd.
- c** Los op $120t = 1200 - 60t$
 $180t = 1200$
 $t = 6,66\dots$
 $t = 6,66\dots$ geeft $A_J = 120 \cdot 6,66\dots = 800$
Dus na 6 minuten en $0,66\dots \cdot 60 = 40$ seconden treffen de broers elkaar.
Jori heeft dan al 800 meter gezwommen.

C9

- a** $K = 250q + 50\,000$
 $R = 400q$
- b** Het bedrijf maakt winst als $R > K$.
Los op $250q + 50\,000 = 400q$
 $-150q = -50\,000$
 $d = 333,3\dots$
Uit de figuur volgt dat het bedrijf winst maakt bij een productie van minimaal 334 wasmachines per week.

3.4 Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

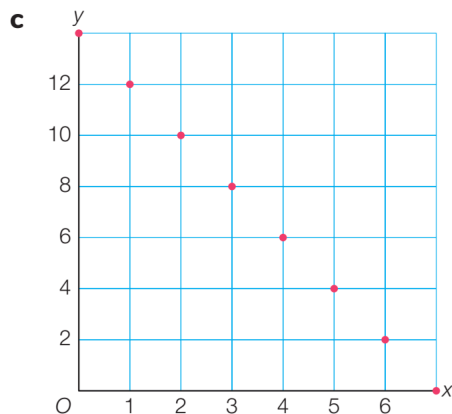
Bladzijde 136

50

- a** Vier broodjes hamburger kosten $4 \cdot 6 = 24$ euro.
Dan werd er voor $42 - 24 = 18$ euro broodjes gezond besteld.
Dat zijn $\frac{18}{3} = 6$ broodjes gezond.

b

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	14	12	10	8	6	4	2	0



De punten liggen op een lijn.

- d** De x broodjes hamburger kosten samen $6x$ euro.
De y broodjes gezond kosten samen $3y$ euro.
De totale kosten zijn 42 euro, dus $6x + 3y = 42$.

51 a $x = 0$ geeft $2 \cdot 0 - 5y = 8$
 $-5y = 8$
 $y = -1,6$

b Het punt $(0; -1,6)$ is moeilijker tekenen.

52 a $x = 4$ en $y = 1$ geeft $3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14 \neq 12$, dus het punt $(4, 1)$ ligt niet op m .

b

x	0	4
y	6	0

Zie de figuur.

c $3x + 2y = 12$
 $2y = -3x + 12$
 $y = -1,5x + 6$

d $rc_m = -1,5$

53 a $x = 13$ en $y = 29$ geeft $12 \cdot 13 + 4 \cdot 29 = 272$
 Jan moest 270 euro betalen, dus dit kan niet kloppen.

b $12x + 4y = 270$
 $4y = -12x + 270$
 $y = -3x + 67,5$

c Een appelboom kost $\frac{48}{2} = 24$ euro.

$y = 24$ geeft $12x + 4 \cdot 24 = 270$
 $12x + 96 = 270$
 $12x = 174$
 $x = 14,5$

Dus een conifeer kost 14,5 euro.

54 a $15x + 12y = 2520$
 $12y = -15x + 2520$
 $y = -1,25x + 210$

b $3p - 1,2q = 16,5$
 $3p = 1,2q + 16,5$
 $p = 0,4q + 5,5$

c $5a - 2b = 16$
 $-2b = -5a + 16$
 $b = 2,5a - 8$

55 Bij situatie I kan je als volgt een formule opstellen.

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ x = 1 \text{ en } y = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + b = 3 \\ -2 + b = 3 \\ b = 5 \end{array}$$

Dus $y = -2x + 5$.

Dit kun je herleiden tot $2x + y = 5$.

Dus situatie I hoort bij de formule m : $2x + y = 5$.

Bij situatie II kun je als volgt een formule opstellen.

Stel x is de prijs van een appel in euro's en y de prijs van een banaan in euro's, dan geldt $2x + 4y = 2,5$.

Dit kun je herleiden tot $x = -2y + 1,25$.

Dus situatie II hoort bij de formule l : $x = -2y + 1,25$.

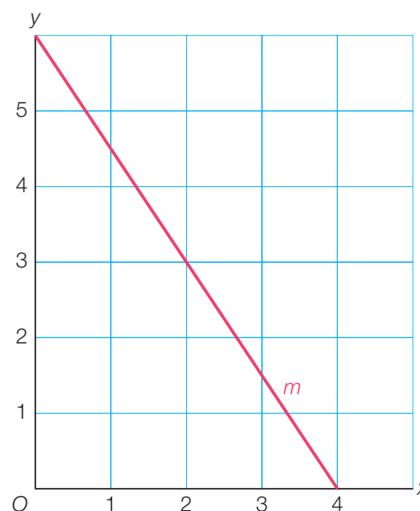
Bij situatie III kun je als volgt een formule opstellen.

$y = ax$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6}{3} = -2$

Dus $y = -2x$.

Dit kun je herleiden tot $2x + y = 0$.

Dus situatie III hoort bij de formule k : $2x + y = 0$.

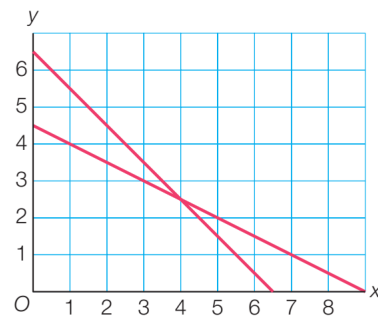


- 56** **a** Aflezen bij $x = 5$ geeft $y = 2$.
Dus de prijs van een koffie is dan 2 euro.
b Bijvoorbeeld $2x + 4y = 18$.
c Hierbij hoort $x + y = 6,50$.

x	0	6,5
y	6,5	0

Zie de figuur.

- d** De grafieken snijden elkaar in $(4; 2,5)$, dus de prijs van een muntthee is 4 euro en de prijs van een koffie is 2,50 euro.



Bladzijde 139

- 57** **a** Er zijn in totaal 19 tafels, dus $x + y = 19$.
Er is in totaal plaats voor $4x$ gasten aan tafels voor vier gasten en $2y$ gasten aan tafels voor twee gasten. In totaal is er plaats voor 52 gasten, dus $4x + 2y = 52$.
b $x + y = 19$ $4x + 2y = 52$
 $y = -x + 19$ $2y = -4x + 52$
 $y = -2x + 26$
c Los op $-x + 19 = -2x + 26$
 $x = 7$
 $y = -7 + 19 = 12$
Dus het snijpunt is $(7, 12)$.
d Het restaurant heeft 7 tafels voor vier gasten en 12 tafels voor twee gasten.

Bladzijde 140

- 58** Als je andere letters gebruikt, zoals s en t , dan blijven de berekeningen verder hetzelfde. Je krijgt dus ook hetzelfde antwoord.

- 59** **a** Bijvoorbeeld x = aantal kaasbollen en y = aantal bruine bollen.
b $x + y = 13$ en $1,5x + 1,2y = 18$
c $x + y = 13$ $1,5x + 1,2y = 18$
 $y = -x + 13$ $1,2y = -1,5x + 18$
 $y = -1,25x + 15$
Dus $-x + 13 = -1,25x + 15$.
d De optie oplossen bij $-x + 13 = -1,25x + 15$ geeft $x = 8$.
e $x = 8$ geeft $y = -8 + 13 = 5$
f Roel koopt 8 kaasbollen en 5 bruine bollen.

- 60** x = aantal briefjes van 5 euro en y = aantal briefjes van 10 euro
 $x + y = 20$ $5x + 10y = 135$
 $y = -x + 20$ $10y = -5x + 135$
 $y = -0,5x + 13,5$
Dus $-x + 20 = -0,5x + 13,5$.
De optie oplossen bij $-x + 20 = -0,5x + 13,5$ geeft $x = 13$.
 $x = 13$ geeft $y = -13 + 20 = 7$
Er zitten 13 briefjes van 5 euro en 7 briefjes van 10 euro in de envelop.

- 61** x = entreprijs volwassenen in euro's en y = entreprijs jongeren in euro's
 $y = x - 5$ $2x + 2y = 80$
 $2y = -2x + 80$
 $y = -x + 40$
Dus $x - 5 = -x + 40$.
De optie oplossen bij $x - 5 = -x + 40$ geeft $x = 22,5$.
De entreprijs van een volwassene is 22,50 euro.

62 x = aantal fietsen van type A en y = aantal fietsen van type B

$$\begin{aligned}x + y &= 38 & 1575x + 2025y &= 66\,150 \\y &= -x + 38 & 2025y &= -1575x + 66\,150 \\& & y &= -\frac{7}{9}x + 32\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\text{Dus } -x + 38 = -\frac{7}{9}x + 32\frac{2}{3}.$$

De optie oplossen bij $-x + 38 = -\frac{7}{9}x + 32\frac{2}{3}$ geeft $x = 24$.

$$x = 24 \text{ geeft } y = -24 + 38 = 14.$$

Er zijn 24 fietsen van type A en 14 fietsen van type B verkocht.

63 De totale leeftijd van de aanwezige jongens en meisjes is $15 \cdot 16,4 = 246$.

x = aantal jongens en y = aantal meisjes

$$\begin{aligned}x + y &= 15 & 15,6x + 16,8y &= 246 \\y &= -x + 15 & 16,8y &= -15,6x + 246 \\& & y &= -\frac{13}{14}x + 14\frac{9}{14}\end{aligned}$$

$$\text{Dus } -x + 15 = -\frac{13}{14}x + 14\frac{9}{14}.$$

De optie oplossen bij $-x + 15 = -\frac{13}{14}x + 14\frac{9}{14}$ geeft $x = 5$.

Er zijn 5 jongens op de verjaardag.

Alternatieve uitwerking

x = aantal jongens en y = aantal meisjes

$$\begin{aligned}x + y &= 15 & 15,6x + 16,8y &= 246 \\y &= -x + 15 & \frac{15,6x + 16,8y}{15} &= 16,4 \\& & 16,8y + 15,6x &= 246 \\& & 16,8y &= -15,6x + 246 \\& & y &= -\frac{13}{14}x + 14\frac{9}{14}\end{aligned}$$

$$\text{Dus } -x + 15 = -\frac{13}{14}x + 14\frac{9}{14}.$$

De optie oplossen bij $-x + 15 = -\frac{13}{14}x + 14\frac{9}{14}$ geeft $x = 5$.

Er zijn 5 jongens op de verjaardag.

Bladzijde 141

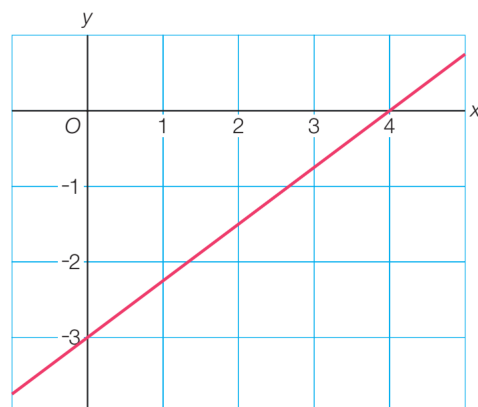
- C10** **a** $1,5x + 2,5y = 15$
 $2,5y = -1,5x + 15$
 $y = -0,6x + 6$
b $6a - 12b = 24$
 $6a = 12b + 24$
 $a = 2b + 4$
c $4p + 8q = 2$
 $8q = -4p + 2$
 $q = -0,5p + 0,25$

C11

x	0	4
y	-3	0

Zie de figuur.

- C12** **a** x = aantal kinderen en y = aantal volwassenen
 $x + y = 250$ en $6x + 8y = 1764$
b $x + y = 250$ $6x + 8y = 1764$
 $y = -x + 250$ $8y = -6x + 1764$
 $y = -0,75x + 220,5$
Dus $-x + 250 = -0,75x + 220,5$.
De optie oplossen bij $-x + 250 = -0,75x + 220,5$ geeft $x = 118$.
Er doen 118 kinderen mee aan de barbecue.



3.5 Interpoleren, extrapoleren en lineaire modellen

Bladzijde 142

- 64 a** Tymon heeft $\frac{28\,700 + 28\,210}{2} = 28\,455$ berekend.
Hij heeft aangenomen dat de afnamen in de perioden 2009-2012 en 2012-2015 gelijk waren.
- b** De totale afname was $28\,210 - 25\,450 = 2\,760$ sportclubs.
- c** Van 2015 tot 2021 is 6 jaar.
De gemiddelde afname was $\frac{2\,760}{6} = 460$ sportclubs per jaar.
- d** 2019 is 4 jaar na 2015, dus een schatting van het aantal sportclubs in 2019 is $28\,210 - 4 \cdot 460 = 26\,370$.
- e** 2025 is 4 jaar na 2021, dus een schatting van het aantal sportclubs in 2025 is $25\,450 - 4 \cdot 460 = 23\,610$.

Bladzijde 144

- 65 a** In 9 jaar 26 minder, dus per jaar $\frac{26}{9} = 2,8\ldots$ minder.
2027 is 2 jaar na 2025, dus in 2027 is het aantal $194 - 2 \cdot 2,8\ldots \approx 188$.
- b** In 7 jaar $570 - 408 = 162$ minder, dus per jaar $\frac{162}{7} = 23,1\ldots$ minder.
2004 is 4 jaar na 2000, dus in 2004 is het aantal $570 - 4 \cdot 23,1\ldots \approx 477$.
- 66 a** In 3 jaar $155 - 55 = 100$ meer leerlingen, dus per jaar $\frac{100}{3} = 33,3\ldots$ meer leerlingen.
2016 is 2 jaar na 2014, dus in 2016 is het aantal leerlingen $55 + 2 \cdot 33,3\ldots \approx 122$.
- b** In 4 jaar $264 - 155 = 109$ meer leerlingen, dus per jaar $\frac{109}{4} = 27,25$ meer leerlingen.
2024 is 3 jaar na 2021, dus in 2024 is het aantal leerlingen $264 + 3 \cdot 27,25 \approx 346$.
- 67 a** Jos gaat uit van een lineair verband tussen het aantal N en t in jaren met $t = 0$ in 2011.
In de periode 2011-2016 is de richtingscoëfficiënt 7,8. Dus $N = 7,8t + 181$.
Bij $t = 3$ krijg je het aantal in 2014.
- b** Het jaar 2012 ligt tussen 2011 en 2016, dus je kunt het aantal in 2012 met de formule berekenen.
Voor het jaar 2020 geldt dat niet.
- c** In de periode 2016-2025 is de richtingscoëfficiënt $\frac{-26}{9} = -2\frac{8}{9}$.
Neem $t = 0$ in 2025. Dit geeft $N = -2\frac{8}{9}t + 194$.
- 68 a** In 4 jaar $2,49 - 2,21 = 0,28$ miljoen minder rokende mannen, dus
per jaar $\frac{0,28}{4} = 0,07$ miljoen minder rokende mannen.
2016 is 2 jaar na 2014, dus in 2016 is het aantal
rokende mannen $2,49 - 2 \cdot 0,07 = 2,35$ miljoen.
- b** aantal rokende mannen en vrouwen in 2028 = $2,21 + 1,65 = 3,86$ miljoen
aantal rokende mannen en vrouwen in 2021 = $2,16 + 1,45 = 3,61$ miljoen
In 3 jaar $3,86 - 3,61 = 0,25$ miljoen minder rokende mannen en vrouwen dus
per jaar $\frac{0,25}{3} = 0,083\ldots$ miljoen minder rokende mannen en vrouwen.
2020 is 2 jaar na 2018, dus in 2020 is het aantal rokende mannen en vrouwen
 $3,86 - 2 \cdot 0,083\ldots \approx 3,69$ miljoen.
- c** In 4 jaar $1,84 - 1,65 = 0,19$ miljoen minder rokende vrouwen, dus per jaar
 $\frac{0,19}{4} = 0,0475$ miljoen minder rokende vrouwen.
2011 is 3 jaar vóór 2014, dus in 2011 is het aantal
rokende vrouwen $1,84 + 3 \cdot 0,0475 \approx 1,98$ miljoen.

- 69 a** In 75 meter $20,2 - 19,2 = 1^\circ\text{C}$ minder, dus per meter $\frac{1}{75} = 0,013\dots^\circ\text{C}$ minder.
180 meter is 30 meter hoger dan 150 meter, dus op 180 meter hoogte is de temperatuur $20,2 - 30 \cdot 0,013\dots = 19,8^\circ\text{C}$.
- b** In 50 meter $18,1 - 17,4 = 0,7^\circ\text{C}$ minder, dus per meter $\frac{0,7}{50} = 0,014^\circ\text{C}$ minder.
420 meter is 70 meter hoger dan 350 meter, dus op 420 meter hoogte is de temperatuur $17,4 - 70 \cdot 0,014 \approx 16,4^\circ\text{C}$.
- c** In 50 meter $20,8 - 20,2 = 0,6^\circ\text{C}$ minder, dus per meter $\frac{0,6}{50} = 0,012^\circ\text{C}$ minder.
De grond is 100 meter lager dan 100 meter, dus op de grond is de temperatuur $20,8 + 100 \cdot 0,012 = 22^\circ\text{C}$.

Bladzijde 145

- 70** In 75 meter $20,2 - 19,2 = 1^\circ\text{C}$ minder, dus per graad 75 meter minder.
 $20,0^\circ\text{C}$ is $0,2^\circ\text{C}$ minder dan $20,2^\circ\text{C}$, dus het is $20,0^\circ\text{C}$ op hoogte $150 + 0,2 \cdot 75 = 165$ meter.

Alternatieve uitwerking

Neem de temperatuur T in $^\circ\text{C}$ op hoogte h in meters.

$$h = aT + b \text{ met } a = \frac{\Delta h}{\Delta T} = \frac{225 - 150}{19,2 - 20,2} = -75$$

$$\left. \begin{array}{l} h = -75T + b \\ T = 20,2 \text{ en } h = 150 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -75 \cdot 20,2 + b = 150 \\ -1515 + b = 150 \\ b = 1665 \end{array}$$

Dus $h = -75T + 1665$.

$T = 20$ geeft $h = -75 \cdot 20 + 1665 = 165$

Dus op hoogte 165 meter is de temperatuur $20,0^\circ\text{C}$.

- 71 a** Hij liep 30 meter in $6,29 - 3,78 = 2,51$ seconden, dus per seconde $\frac{30}{2,51} = 11,95\dots$ meter.
 $t = 5$ is 1,22 seconden na $t = 3,78$, dus na 5 seconden heeft hij $30 + 1,22 \cdot 11,95\dots \approx 44,6$ meter afgelegd.
- b** Hij liep 30 meter in 3,78 seconden, dus per seconde $\frac{30}{3,78} = 7,93\dots$ meter.
Dus na 1 seconde heeft hij ongeveer 7,9 meter afgelegd.
- c** Tussen $t = 3,78$ en $t = 6,29$ komt de grafiek goed overeen met een lijn. Tussen $t = 0$ en $t = 3,78$ is dat niet het geval. Dus de schatting met lineair interpoleren van vraag a komt het best overeen met de werkelijkheid.
- d** Bij de start van de sprint is er geen sprake van een lineair verband tussen d en t .

Bladzijde 146

- 72 a** Het punt $(15; 12,0)$ ligt op een lijn tussen de punten $(13; 12,1)$ en $(17; 11,9)$.
Dus de meting 12,0 is geschat met lineair interpoleren. Hierbij hoort de tijd 15:00 uur.
- b** Als je een lijn tekent door de punten $(17; 11,9)$ en $(19; 9,9)$ dan ligt het punt bij 21:00 uur op deze lijn hoger dan het punt $(21; 3,2)$.
- c** In 2 uur $11,9 - 9,9 = 2^\circ\text{C}$ minder. Dus om 21:00 uur is de temperatuur $9,9 - 2 = 7,9^\circ\text{C}$.
Deze schatting wijkt $\frac{7,9 - 3,2}{3,2} \cdot 100\% \approx 146,9\%$ af van de werkelijke temperatuur.

- 73 a** $T = ap + b$ met $a = \frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{25 - 10}{75 - 25} = 0,3$

$$\left. \begin{array}{l} T = 0,3p + b \\ p = 25 \text{ en } T = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,3 \cdot 25 + b = 10 \\ 7,5 + b = 10 \\ b = 2,5 \end{array}$$
Dus $T = 0,3p + 2,5$.
- b** $p = 80$ geeft $T = 0,3 \cdot 80 + 2,5 = 26,5$
 $p = 85$ geeft $T = 0,3 \cdot 85 + 2,5 = 28$
Dus hierbij horen temperaturen tussen $26,5^\circ\text{C}$ en 28°C .

Bladzijde 147

- 74 a** Aflezen geeft $A(10, 120)$ en $B(15, 160)$.

$$H = av + b \text{ met } a = \frac{\Delta H}{\Delta v} = \frac{160 - 120}{15 - 10} = 8$$

$$\left. \begin{array}{l} H = 8v + b \\ v = 10 \text{ en } H = 120 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 \cdot 10 + b = 120 \\ 80 + b = 120 \\ b = 40 \end{array}$$

Dus $H = 8v + 40$.

- b** $v = 15,8$ geeft $H = 8 \cdot 15,8 + 40 = 166,4$

Zijn hartslag wijkt dan $\frac{166,4 - 164}{164} \cdot 100\% \approx 1,5\%$ af van het lineaire model.

- c** Zijn hartslag in rust is 40 slagen per minuut.

$$H = av + 40 \text{ met } a = \frac{\Delta H}{\Delta v} = \frac{142 - 40}{12} = 8,5$$

Dus $H = 8,5v + 40$.

Los op $8,5v + 40 = 178$

$$8,5v = 138$$

$$v \approx 16,2$$

Dus de anaerobe drempel van Kees ligt bij een snelheid van ongeveer 16,2 km/uur.

Bladzijde 148

- 75 a** Dat is een langzame tijd, want het punt dat erbij hoort ligt boven de lijn van het model.

- b** Dat was in 1968 met een tijd van 9,9 seconden.

- c** Los op $-0,0142t + 12,237 = 10$

$$-0,0142t = -2,237$$

$$t = 157,5 \dots$$

Omdat de Olympische spelen om de vier jaar worden gehouden is dat in het jaar

$$1900 + 160 = 2060.$$

- d** $M = at + b$ met $a = \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{9,8 - 10,4}{104 - 40} = -0,009375$

$$\left. \begin{array}{l} M = -0,009375t + b \\ t = 40 \text{ en } M = 10,4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,009375 \cdot 40 + b = 10,4 \\ -0,375 + b = 10,4 \\ b = 10,775 \end{array}$$

Dus $M = -0,009375t + 10,775$.

- e** Los op $-0,009375t + 10,775 = -0,0142t + 12,237$

$$0,004825t = 1,462$$

$$t = 303,0 \dots$$

Dus in het jaar $1900 + 304 = 2204$.

$t = 304$ geeft $V = -0,0142 \cdot 304 + 12,237 = 7,9202$

Dat is $\frac{100}{7,9202} \text{ m/s} = \frac{100}{7,9202} \cdot 3,6 \approx 45,5 \text{ km/uur}$.

- f** Deze gemiddelde snelheid is menselijk onmogelijk, dus met deze lineaire modellen kun je geen voorspellingen doen die ver in de toekomst liggen.

Bladzijde 149

C13

- a** In 27 jaar $6425 - 3873 = 2552$ duizend meer woningen, dus per jaar $\frac{2552}{27} = 94,5 \dots$

duizend meer woningen.

1990 is 19 jaar na 1971, dus in 1990 is het aantal woningen

$$3873 + 19 \cdot 94,5 \dots \approx 5669 \text{ duizend.}$$

- b** In 25 jaar $8125 - 6425 = 1700$ duizend meer woningen, dus per jaar $\frac{1700}{25} = 68$ duizend

meer woningen.

2026 is 3 jaar na 2023, dus in 2026 is het aantal woningen $8125 + 3 \cdot 68 = 8329$ duizend.

C14

a $G = ah + b$ met $a = \frac{\Delta G}{\Delta h} = \frac{64 - 61,8}{110 - 22} = 0,025$

$$\left. \begin{array}{l} G = 0,025h + b \\ h = 110 \text{ en } G = 64 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,025 \cdot 110 + b = 64 \\ 2,75 + b = 64 \\ b = 61,25 \end{array}$$

Dus $G = 0,025h + 61,25$.

b $h = 400$ geeft $G = 0,002 \cdot 400 + 64,046 = 64,846$

De procentuele afwijking is $\frac{64,846 - 65,8}{65,8} \cdot 100\% \approx -1,4\%$.

Dus het model wijkt 1,4% af.

Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 150

1 a $k: y = -0,5x - 1$

b $y = ax$

$x = -2$ en $y = 3$ invullen geeft $a \cdot -2 = 3$
 $a = -1,5$

Dus $m: y = -1,5x$.

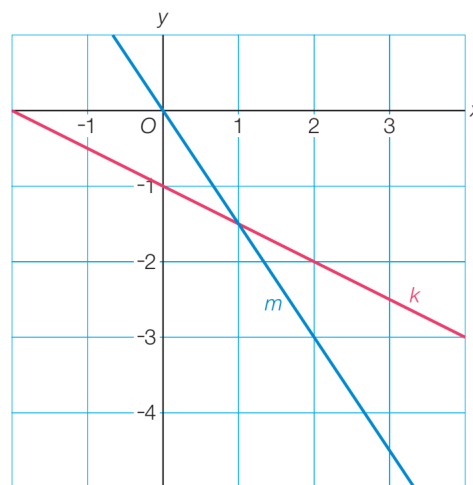
c lijn k :

x	0	2
y	-1	-2

lijn m :

x	0	2
y	0	-3

Zie de figuur.



2 a 105 liter water per kwartier = $\frac{105}{15}$ liter per minuut = 7 liter per minuut

$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ liter}$

Dus $W = 7t + 1000$.

b 2 uur en 20 minuten = 140 minuten

$t = 140$ geeft $W = 7 \cdot 140 + 1000 = 1980$

Dus er zit dan 1980 liter water in het zwembad.

c De stopwatch had dan tegelijk met het vullen van het zwembad moeten starten.

De stopwatch had dus $\frac{1000}{7} = 142,85\ldots$ minuten eerder gestart moeten worden.

Dat is 142 minuten en $0,85\ldots \cdot 60 \approx 51$ seconden.

3 a $y = 2,4x + b$ $\left\{ \begin{array}{l} 2,4 \cdot -5 + b = 2 \\ -12 + b = 2 \\ b = 14 \end{array} \right.$

Dus $k: y = 2,4x + 14$.

b $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 - 2}{3 - -5} = -0,5$

$$\left. \begin{array}{l} y = -0,5x + b \\ x = 3 \text{ en } y = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,5 \cdot 3 + b = -2 \\ -1,5 + b = -2 \\ b = -0,5 \end{array}$$

Dus $l: y = -0,5x - 0,5$.

- c** $y = ax$
 $x = -5$ en $y = 2$ invullen geeft $a \cdot -5 = 2$
 $a = -0,4$
 Dus m : $y = -0,4x$.
 $x_C = x_B = 3$
 $x = 3$ geeft $y = -0,4 \cdot 3 = -1,2$
 Dus $C(3; -1,2)$.

4 a $A = ap + b$ met $a = \frac{\Delta A}{\Delta p} = \frac{665 - 800}{9,75 - 7,5} = -60$

$$\left. \begin{array}{l} A = -60p + b \\ p = 7,5 \text{ en } A = 800 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -60 \cdot 7,5 + b = 800 \\ -450 + b = 800 \\ b = 1250 \end{array}$$

Dus $A = -60p + 1250$.

- b** $p = 11,25$ geeft $A = -60 \cdot 11,25 + 1250 = 575$
 Het aantal toeschouwers is 575.

5 a Los op $2x - 2 = 3x - 7$
 $-x = -5$
 $x = 5$

$x = 5$ geeft $y = 2 \cdot 5 - 2 = 8$

Dus het snijpunt is $(5, 8)$.

b Los op $2x - 2 = 25$ en $3x - 7 = 25$
 $2x = 27$ $3x = 32$
 $x = 13,5$ $x = 10\frac{2}{3}$

Het rechter snijpunt is $(13,5; 25)$.

Bladzijde 151

6 a Schilder B is goedkoper als $K_B < K_A$.
 Los op $40t + 50 = 42t + 35$
 $-2t = -15$
 $t = 7,5$

Uit de figuur volgt dat klussen korter dan 7,5 uur bij schilder B goedkoper zijn.

b Los op $40t + 50 = 500$
 $40t = 450$
 $t = 11,25$
 $t = 11,25$ geeft $K_B = 42 \cdot 11,25 + 35 = 507,5$
 Dus de klus zou $507,50 - 500 = 7,50$ euro duurder zijn geweest bij schilder B.

7 $x =$ aantal kinderen en $y =$ aantal volwassenen
 $x + y = 80$ $12x + 15y = 990$
 $y = -x + 80$ $15y = -12x + 990$
 $y = -0,8x + 66$

Dus $-x + 80 = -0,8x + 66$.

De optie oplossen bij $-x + 80 = -0,8x + 66$ geeft $x = 70$.

Er zijn 70 kinderen aan boord.

8 a In 4 jaar $15\,046 - 9116 = 5930$ miljoen kWh meer, dus per jaar
 $\frac{5930}{4} = 1482,5$ miljoen kWh meer.
 2011 is 3 jaar na 2008, dus in 2011 is de uitvoer van elektriciteit
 $9116 + 3 \cdot 1482,5 = 13\,563,5$ miljoen kWh.
b In 4 jaar $22\,444 - 20\,885 = 1559$ miljoen kWh minder, dus per jaar
 $\frac{1559}{4} = 389,75$ miljoen kWh minder.
 2025 is 4 jaar na 2021, dus in 2025 is de invoer van elektriciteit
 $20\,885 - 4 \cdot 389,75 = 19\,326$ miljoen kWh.

- c** In 2012 is het verschil $32\,155 - 15\,046 = 17\,109$ miljoen kWh.
 In 2017 is het verschil $22\,444 - 18\,944 = 3\,500$ miljoen kWh.
 In 5 jaar $17\,109 - 3\,500 = 13\,609$ miljoen kWh minder, dus per jaar
 $\frac{13\,609}{5} = 2\,721,8$ miljoen kWh minder.
 2015 is 3 jaar na 2012, dus in 2015 is het verschil tussen de invoer en de uitvoer van elektriciteit $17\,109 - 3 \cdot 2\,721,8 = 8\,943,6$ miljoen kWh.
- d** $I = at + 23\,693$ met $a = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{20\,885 - 23\,693}{16 - 0} = -175,5$
 Dus $I = -175,5t + 23\,693$.
 $U = at + 5398$ met $a = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{20\,632 - 5398}{16 - 0} = 952,125$
 Dus $U = 952,125t + 5398$.
- e** De grafiek van de uitvoer van elektriciteit wijkt minder af van een lijn dan de grafiek van de invoer van elektriciteit.
 Dus een lineair model past beter bij de uitvoer van elektriciteit.
- f** $t = 25$ geeft $I = -175,5 \cdot 25 + 23\,693 \approx 19\,306$
 Dus de invoer van elektriciteit in 2030 is ongeveer 19 306 miljoen kWh.
 $t = 25$ geeft $U = 952,125 \cdot 25 + 5398 \approx 29\,201$
 Dus de uitvoer van elektriciteit in 2030 is ongeveer 29 201 miljoen kWh.

Gemengde opgaven

Bladzijde 152

- 1 a** $30\,000$ liter water per 2 uur $= \frac{30\,000}{120}$ liter per minuut $= 250$ liter per minuut
 $110\text{ m}^3 = 110\,000$ liter
 Dus $W = 110\,000 - 250t$.
- b** $72\text{ m}^3 = 72\,000$ liter
 Los op $110\,000 - 250t = 72\,000$
 $-250t = -38\,000$
 $t = 152$
 Na 152 minuten (oftewel 2 uur en 32 minuten) zit er nog 72 m^3 in het zwembad.
- c** 7 uur $= 420$ minuten
 $t = 420$ geeft $W = 110\,000 - 250 \cdot 420 = 5\,000$
 Dus het leegpompen duurt nog $\frac{5\,000}{250} = 20$ minuten.
- Alternatieve uitwerking*
 Los op $110\,000 - 250t = 0$
 $-250t = -110\,000$
 $t = 440$
 440 minuten is 7 uur en 20 minuten, dus het leegpompen duurt nog 20 minuten.

- 2 a** $M = aB$
 $B = 320$ en $M = 6,4$ invullen geeft $a \cdot 320 = 6,4$
 $a = 0,02$
 Dus $M = 0,02B$.
- b** $B = 128$ geeft $M = 0,02 \cdot 128 = 2,56$
 Dus de bestandsgrootte 2,56 MB.
- c** In 3 jaar $61,3 - 17,8 = 43,5$ miljoen euro meer, dus per jaar $\frac{43,5}{3} = 14,5$ miljoen euro meer.
 2014 is 2 jaar na 2012, dus in 2014 zijn de inkomsten $17,8 + 2 \cdot 14,5 = 46,8$ miljoen euro.
- d** In 5 jaar $223,9 - 108,6 = 115,3$ miljoen euro meer, dus per jaar $\frac{115,3}{5} = 23,06$ miljoen euro meer.
 2025 is 3 jaar na 2022, dus in 2025 zijn de inkomsten $223,9 + 3 \cdot 23,06 \approx 293$ miljoen euro.

- 3 a** De appels kosten 1,50 euro per kg en de peren 1,25 euro per kg.

x = aantal kg appels en y = aantal kg peren

$$x + y = 305 \quad 1,5x + 1,25y = 400$$

$$y = -x + 305 \quad 1,25y = -1,5x + 400$$

$$y = -1,2x + 320$$

$$\text{Dus } -x + 305 = -1,2x + 320.$$

De optie oplossen bij $-x + 305 = -1,2x + 320$ geeft $x = 75$.

Hij verkoopt 75 kg appels.

- b** x = prijs van een wrap met vlees in euro's en y = prijs van een vegetarische wrap in euro's

$$y = 0,75x \quad 18x + 22y = 193,2$$

$$22y = -18x + 193,2$$

$$y = -\frac{9}{11}x + \frac{483}{55}$$

$$\text{Dus } 0,75x = -\frac{9}{11}x + \frac{483}{55}.$$

De optie oplossen bij $0,75x = -\frac{9}{11}x + \frac{483}{55}$ geeft $x = 5,6$.

De prijs van een wrap met vlees is 5,60 euro.

Bladzijde 153

- 4 a** Ja, want er is sprake van een vaste verhouding bij het omrekenen van schoenmaat naar de lengte van de schoen in mm.

- b** Bij schoenmaat 43 hoort lengte $43 \cdot 6,67 \approx 287$ mm.

- c** Nee, want er is geen sprake van een vaste verhouding tussen E en F . Bijvoorbeeld

$$\frac{37}{4} = 9,25 \text{ en } \frac{39,5}{6} \approx 6,58.$$

- d** $F = aE + b$ met $a = \frac{\Delta F}{\Delta E} = \frac{39,5 - 37}{6 - 4} = 1,25$

$$\left. \begin{array}{l} F = 1,25E + b \\ E = 4 \text{ en } F = 37 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,25 \cdot 4 + b = 37 \\ 5 + b = 37 \\ b = 32 \end{array}$$

$$\text{Dus } F = 1,25E + 32.$$

- e** $E = 7,5$ geeft $F = 1,25 \cdot 7,5 + 32 \approx 41,5$

- 5 a** Bij een enkele plooï is de breedte $\frac{210}{100} = 2,1$ keer de lengte van de rails.

Dus de breedte van het gordijn is $2,1 \cdot 150 = 315$ cm.

- b** $B = ar$

$$r = 100 \text{ en } B = 230 \text{ invullen geeft } a \cdot 100 = 230$$

$$a = 2,3$$

$$\text{Dus } B = 2,3r.$$

- c** Bij een driedubbele plooï is de breedte $\frac{260}{100} = 2,6$ keer de lengte van de rails.

Dus de breedte van het gordijn is $2,6 \cdot 2,4 = 6,24$ m.

De kosten zijn $6,24 \cdot 54 + 6,24 \cdot 4 = 361,92$ euro.

- d** Bij een platte plooï is de breedte $\frac{310}{100} = 3,1$ keer de lengte van de rails.

Dus de breedte van het gordijn is 3,1 meter.

De kosten voor de enkele plooï zijn $4,5 \cdot 3,1 = 13,95$ euro.

Dus $K = 3,1p + 13,95$.

6 a $K = aq + 500$ met $a = \frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{1200 - 500}{1000 - 0} = 0,7$

Dus $K = 0,7q + 500$.

b gedeelte II:

$$K = aq + b \text{ met } a = \frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{1600 - 1200}{3000 - 1000} = 0,2$$

$$\left. \begin{array}{l} K = 0,2q + b \\ q = 1000 \text{ en } K = 1200 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,2 \cdot 1000 + b = 1200 \\ 200 + b = 1200 \\ b = 1000 \end{array}$$

Dus $K = 0,2q + 1000$.

gedeelte III:

$$K = aq + b \text{ met } a = \frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{2800 - 1600}{5000 - 3000} = 0,6$$

$$\left. \begin{array}{l} K = 0,6q + b \\ q = 3000 \text{ en } K = 1600 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,6 \cdot 3000 + b = 1600 \\ 1800 + b = 1600 \\ b = -200 \end{array}$$

Dus $K = 0,6q - 200$.

c Productiekosten:

$K = 0,7q + 500$ voor q tussen 0 en 1000

$K = 0,2q + 1000$ voor q tussen 1000 en 3000

$K = 0,6q - 200$ voor q tussen 3000 en 5000

d $q = 1500$ geeft $K = 0,2 \cdot 1500 + 1000 = 1300$

$q = 3500$ geeft $K = 0,6 \cdot 3500 - 200 = 1900$

Dus de productiekosten zijn $\frac{1900 - 1300}{1300} \cdot 100\% \approx 46,2\%$ meer.

e $q = 2600$ geeft $K = 0,2 \cdot 2600 + 1000 = 1520$

De winst is $2600 \cdot 2,6 - 1520 = 5240$ euro.

f Als de dagproductie met 2000 stuks toeneemt, stijgen de productiekosten met

700 euro per dag, dus per stuk stijgen de productiekosten met $\frac{700}{2000} = 0,35$ euro per dag.

6300 is 1300 meer dan 5000, dus de productiekosten bij een dagproductie van 6300 stuks zijn $2800 + 1300 \cdot 0,35 = 3255$ euro.

7 a In 7 jaar $482 - 395 = 87$ kg meer, dus per jaar $\frac{87}{7} = 12,4\ldots$ kg meer.

1992 is 4 jaar na 1988, dus in 1992 was de hoeveelheid huishoudelijk afval $395 + 4 \cdot 12,4\ldots \approx 445$ kg per inwoner.

b In 10 jaar $518 - 461 = 57$ kg minder, dus per jaar $\frac{57}{10} = 5,7$ kg minder.

2025 is 3 jaar na 2022, dus in 2025 is de hoeveelheid huishoudelijk afval $461 - 3 \cdot 5,7 \approx 444$ kg per inwoner.

c Hij neemt N de hoeveelheid huishoudelijk afval in kg per huishouden en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1970.

$$N = at + 281 \text{ met } a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{566 - 281}{30 - 0} = 9,5$$

Dus $N = 9,5t + 281$.

d Het model gaat uit van een toename, maar in de periode na het jaar 2000 is er sprake van een afname.

e $t = 34$ geeft $N = 9,5 \cdot 34 + 281 = 604$

Het model wijkt in 2004 dus $\frac{604 - 561}{561} \cdot 100\% \approx 7,7\%$ af van de werkelijkheid.

- 8 a** Voor de innovatie geldt:

$$N_B = 3t$$

Na de innovatie geldt:

$$\left. \begin{array}{l} N_B = 5t + b \\ t = 24 \text{ en } N_B = 100 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \cdot 24 + b = 100 \\ 120 + b = 100 \\ b = -20 \end{array}$$

$$\text{Dus } N_B = 5t - 20.$$

$$\text{Los op } 3t = 5t - 20$$

$$-2t = -20$$

$$t = 10$$

Dus:

$$N_B = 3t \quad \text{voor } t \text{ tot en met } 10$$

$$N_B = 5t - 20 \quad \text{voor } t \text{ groter dan } 10$$

- b** Los op $4t = 5t - 20$

$$-t = -20$$

$$t = 20$$

Dat was $20 - 10 = 10$ jaar na de innovatie.

- 9 a** $x = 31$ geeft $L_M = 2,89 \cdot 31 + 70,6 \approx 160$

Dus deze man was ongeveer 160 cm lang.

$$x = 31 \text{ geeft } L_V = 2,75 \cdot 31 + 71,5 \approx 157$$

Dus de vrouw zou 157 cm lang geweest zijn.

- b** man:

$$\text{Los op } 2,89x + 70,6 = 180$$

$$2,89x = 109,4$$

$$x \approx 37,9$$

De lengte van de humerus is ongeveer 37,9 cm.

vrouw:

$$\text{Los op } 2,75x + 71,5 = 180$$

$$2,75x = 108,5$$

$$x \approx 39,5$$

De lengte van de humerus is ongeveer 39,5 cm.

- c** Los op $2,89x + 70,6 = 2,75x + 71,5$

$$0,14x = 0,9$$

$$x \approx 6,4$$

Dus nee, want de modellen zijn alleen bruikbaar bij een humerusb lengte tussen 10 en 40 cm.

- d** Bij humerusb lengten tussen 10 en 40 cm geldt $L_M > L_V$, dus bij een verschil van 4 cm in lichaamslengte hoort de vergelijking $L_M = L_V + 4$.

$$\text{Los op } 2,89x + 70,6 = 2,75x + 71,5 + 4$$

$$0,14x = 4,9$$

$$x = 35$$

Dus bij een humerusb lengte van 35 cm.

4 Combinatoriek

4.1 Regels bij telproblemen

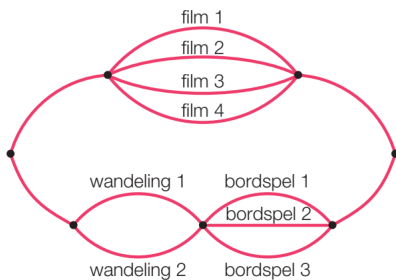
Bladzijde 158

- 1 a** Annette kan uit 18 driegangendiners kiezen.
Er zijn 12 driegangendiners zonder vis.
b $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$
c Er zijn $2 \cdot 3 = 6$ tweegangendiners.
Freek heeft $6 + 18 = 24$ mogelijkheden in totaal.

Bladzijde 160

- 2** via M *of* via N
aantal = $3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 14$

- 3 a** film *of* wandeling en bordspel



- b** Er zijn te veel mogelijkheden om overzichtelijk te kunnen tekenen.
c aantal = $10 + 5 \cdot 12 = 70$

- 4** Je kiest uit 3 maten *en* uit 4 kleuren *en* het materiaal.
Voor het materiaal heb je 4 kleuren hout *of* 2 typen glas.
aantal = $3 \cdot 4 \cdot (4 + 2) = 72$

Alternatieve uitwerking

Je hebt een houten deur in 4 kleuren *of* een glazen deur in 2 typen.
aantal = $3 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 2 = 72$

- 5 a** aantal = $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 72$
b paragraaf 1 *of* paragraaf 2
aantal = $3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
c Ze heeft een opgave gemaakt bij paragraaf 2, want dan krijg je $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 108$ toetsen.

Alternatieve uitwerking

Het aantal toetsen is $\frac{108}{72} = 1,5$ keer zo groot geworden.

Dus ze heeft een opgave gemaakt bij paragraaf 2, want $\frac{3}{2} = 1,5$.

Bladzijde 161

- 6 a** aantal = $8 \cdot 7 \cdot 4 = 224$
b Van de tapas zonder vlees zijn er $4 + 3 = 7$ Spaans, $7 + 3 = 10$ Italiaans en $7 + 4 = 11$ Portugees.
aantal = $7 \cdot 10 \cdot 11 = 770$
c drie vlees *of* drie vis *of* drie vegan
aantal = $8 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot 7 \cdot 7 + 3 \cdot 3 \cdot 4 = 392$
d vegan-vis-vis *of* vis-vegan-vis *of* vis-vis-vegan
aantal = $3 \cdot 7 \cdot 7 + 4 \cdot 3 \cdot 7 + 4 \cdot 7 \cdot 4 = 343$

- 7** **a** aantal = $26^2 \cdot 10^4 = 6\,760\,000$
b serie 1 *of* serie 2
aantal = $26^2 \cdot 10^4 + 10^4 \cdot 26^2 = 13\,520\,000$
c Er zijn $26 - 8 = 18$ beschikbare letters.
aantal = $18^4 \cdot 10^2 = 10\,497\,600$

Bladzijde 162

- 8** **a** Voor de drie letters zijn er $18^3 - 11 = 5821$ mogelijkheden.
aantal = $10^2 \cdot 5821 \cdot 10 = 5\,821\,000$
b Dit is alleen mogelijk in series 7, 8, 11 en 12.
aantal = $10^3 + 10^3 + 10^2 \cdot 18 + 18 \cdot 10^2 = 5600$

- 9** **a** aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$
b aantal = $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$

Bladzijde 163

- 10** **a** aantal = $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$
b aantal = $7 \cdot 6 \cdot 6 = 252$
c aantal = $7 \cdot 6^4 = 9072$

- 11** **a** aantal = $8 \cdot 7 \cdot 10 = 560$
b aantal = $10 \cdot 17 \cdot 16 = 2720$
c Frans-Nederlands-Frans *of*
Frans-Nederlands-Nederlands *of*
Nederlands-Frans-Nederlands *of*
Nederlands-Frans-Frans
aantal = $10 \cdot 8 \cdot 9 + 10 \cdot 8 \cdot 7 + 8 \cdot 10 \cdot 7 + 8 \cdot 10 \cdot 9 = 2560$

Alternatieve uitwerking

Voor de foto's en het verslag krijg je Frans-Nederlands *of* Nederlands-Frans.
aantal = $10 \cdot 8 \cdot 16 + 8 \cdot 10 \cdot 16 = 2560$

Bladzijde 164

- 12** A naar R naar L naar A *of* A naar L naar R naar A
aantal = $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 864$
- 13** **a** aantal = $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$
b Er zijn $7 + 4 + 3 + 2 = 16$ films anders dan comedy of drama.
aantal = $5 \cdot 16 \cdot 4 = 320$
c aantal = $4 \cdot 7 \cdot 3 = 84$
d Er zijn $4 + 5 + 4 + 3 + 2 = 18$ films anders dan actie.
actie-anders-anders *of* anders-actie-anders *of* anders-anders-actie
aantal = $7 \cdot 18 \cdot 17 + 18 \cdot 7 \cdot 17 + 18 \cdot 17 \cdot 7 = 6426$
- 14** **a** aantal = $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
b Het eerste cijfer moet 6, 7 of 8 zijn, dus 3 mogelijkheden voor het eerste cijfer.
aantal = $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$
c aantal = $6^4 = 1296$
d Het eerste cijfer moet een 6 zijn. Het tweede cijfer moet een 3 of 4 zijn.
aantal = $1 \cdot 2 \cdot 6^2 = 72$
- 15** Situatie 1 komt $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ keer voor.
Situatie 2 komt $5^4 = 625$ keer voor.
Situatie 3 komt $6 \cdot 5^3 = 750$.
Dus situatie 1 levert het meeste punten op.

Bladzijde 165

C1 standaardmodel *of* premiummodel
totaal aantal = $3 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 219$

- C2**
- a** aantal = $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
aantal = $6^3 = 216$
 - b** aantal = $6 \cdot 5^3 = 750$
 - c** aantal = $6^4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 2016$

4.2 Permutaties en combinaties

Bladzijde 167

- 16**
- a** aantal = $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$
 - b** aantal = $56 \cdot 55 \cdot \dots \cdot 35 \cdot 34 = 8,2 \cdot 10^{37}$
 - c** aantal = $6! = 720$

- 17**
- a** In totaal zijn er $10^4 = 10\,000$ pincodes mogelijk.
Er zijn $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ pincodes met vier verschillende cijfers.
Dat is $\frac{5040}{10\,000} \cdot 100\% = 50,4\%$.
 - b** aantal = $4! = 24$

- 18** $12 \text{ seconden} = 12 : 60 = 0,2 \text{ minuten}$, dus $28 \text{ minuten en } 12 \text{ seconden} = 28,2 \text{ minuten}$.
Er zijn $10! = 3\,628\,800$ volgordes mogelijk.
Dat duurt $3\,628\,800 \cdot 28,2 = 102\,332\,160$ minuten.
Dus Luus heeft $\frac{102\,332\,160}{60 \cdot 24 \cdot 365} \approx 195$ jaar nodig.

Bladzijde 168

- 19**
- a** aantal = $9! = 362\,880$
 - b** aantal = $9 \cdot 8 = 72$
 - c** aantal = $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60\,480$
- 20**
- a** Hoeveel 6-lettercodes zonder herhaling zijn er mogelijk?
 - b** Hoeveel 4-lettercodes met herhaling zijn er mogelijk?
 - c** Hoeveel 3-lettercodes zonder herhaling zijn er mogelijk?
 - d** Hoeveel 3-lettercodes met herhaling zijn er mogelijk?

- 21** Katya heeft alle paren dubbel geteld. Het paar 'Katya en Linde' is bijvoorbeeld hetzelfde als 'Linde en Katya'.
Er zijn drie verschillende paren.

Bladzijde 169

- 22**
- a** combinaties
 - b** combinaties
 - c** permutaties
 - d** permutaties
 - e** combinaties

Bladzijde 170

- 23**
- a** aantal = $\binom{30}{5} = 142\,506$
 - b** aantal = $\binom{100}{50} \approx 1,01 \cdot 10^{29}$
 - c** aantal = $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1\,860\,480$
 - d** aantal = $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

24 Er zijn $8 \cdot 8 = 64$ vakjes.

$$\text{aantal} = \binom{64}{10} \approx 1,5 \cdot 10^{11}$$

25 a Er zijn $6 + 5 + 3 = 14$ boeken in totaal.

$$\text{aantal} = 14! \approx 8,7 \cdot 10^{10}$$

b $\text{aantal} = \binom{14}{3} = 364$

c $\text{aantal} = 6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$

d $\text{aantal} = \binom{6}{3} = 20$

26 Er zijn $4! = 24$ verschillende volgorden.

Voor elk van deze volgorden is er één andere volgorde die er voor Sebas hetzelfde uit ziet, namelijk die waar het groene en rode potlood verwisseld zijn. Hij kan dus de helft van de volgorden onderscheiden.

$$\text{aantal} = 24 : 2 = 12$$

Alternatieve uitwerking

Sebas kan rood en groen niet onderscheiden, maar geel en blauw wel.

Voor rood en groen is de volgorde niet van belang, dus zijn er $\binom{4}{2}$ mogelijkheden.

Voor geel en blauw is de volgorde wel van belang, dus zijn er $2 \cdot 1$ mogelijkheden.

$$\text{aantal} = \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 12$$

Bladzijde 171

27 a $\text{aantal} = \binom{36}{8} = 30\,260\,340$

b $\text{aantal} = \binom{33}{4} \cdot \binom{36}{4} = 2\,410\,392\,600$

c $\text{aantal} = \binom{36}{3} \cdot \binom{33}{5} = 1\,694\,579\,040$

d 7 of 8 personen uit de jongste leeftijdsgroep

$$\text{aantal} = \binom{20}{7} \cdot \binom{49}{1} + \binom{20}{8} = 3\,924\,450$$

e $\text{aantal} = 33 \cdot 32 \cdot 31 = 32\,736$

f $\text{aantal} = 13 \cdot 68 \cdot 67 = 59\,228$

Bladzijde 172

28 a $\text{aantal} = \binom{6}{2} \cdot \binom{3}{2} = 45$

b $\text{aantal} = \binom{6}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{19}{1} = 855$

c $\text{aantal} = \binom{5}{3} \cdot \binom{23}{1} + \binom{5}{4} = 235$

d Alle leerlingen zijn 15 of 16 of 17 jaar oud.

$$\text{aantal} = \binom{6}{4} + \binom{14}{4} + \binom{5}{4} = 1021$$

e De eerste of de tweede leerling is 17 jaar oud.

$$\text{aantal} = 5 \cdot 23 + 23 \cdot 5 = 230$$

f De leerlingen zijn 15 of 16 of 17 of 18 jaar oud.

$$\text{aantal} = 6 \cdot 5 + 14 \cdot 13 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 238$$

- 29 a** Ze kiest het formaat *en* de zuivelsoort *en* de fruitsoorten *en* de groentesoorten *en* geen flavourshot.

$$\text{aantal} = \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{8}{0} = 38\,880$$

- b** Ze kiest 1 *of* 2 fruitsoorten.

$$\text{aantal} = 1 \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{8}{1} + 1 \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{8}{1} = 73\,920$$

- c** Ze kiest 2 *of* 3 *of* 4 groentesoorten.

$$\text{aantal} = \binom{3}{1} \cdot 1 \cdot \binom{10}{0} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{8}{0} + \binom{3}{1} \cdot 1 \cdot \binom{10}{0} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{8}{0} + \binom{3}{1} \cdot 1 \cdot \binom{10}{0} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{8}{0} = 738$$

Bladzijde 173

30 a $\text{aantal} = \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{6}{2} = 450$

b $\text{aantal} = \binom{6}{4} + \binom{6}{5} = 21$

c $\text{aantal} = \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{3} + \binom{6}{1} \cdot \binom{4}{3} = 84$

- d** Hij kiest wel *of* geen dessert.

$$\text{aantal} = \binom{15}{4} \cdot \binom{4}{1} + \binom{15}{4} = 6825$$

- e** De burgers zijn met vlees *of* met vis *of* vegetarisch.

$$\text{aantal} = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 = 204$$

31 a $\text{aantal} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \binom{9}{3} = 110\,880$

- b** Er blijven 6 potloden over.

$$\text{aantal} = \binom{12}{6} = 924$$

- 32** Proberen geeft dat $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$, dus de groep bestaat uit 8 leerlingen.

Dus er zijn $\binom{8}{4} = 70$ mogelijkheden.

Alternatieve uitwerking

Vier leerlingen kunnen op $4! = 24$ manieren een wijk toegewezen krijgen.

Dus als ze gezamenlijk alle wijken doen zijn er $1680 : 24 = 70$ mogelijkheden.

Bladzijde 174

C3 $3! = 6$

$$\binom{6}{3} = 20$$

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

C4 a $\text{aantal} = \binom{5}{3} = 10$

b $\text{aantal} = 5! = 120$

c $\text{aantal} = 5 \cdot 4 = 20$

- C5 a** Er zitten 4 *of* 5 meisjes in de klankbordgroep.

$$\text{aantal} = \binom{16}{4} \cdot \binom{13}{1} + \binom{16}{5} = 28\,028$$

- b** Er zitten alleen jongens *of* alleen meisjes in het comité.

$$\text{aantal} = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 + 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 60\,840$$

4.3 Combinatoriek toepassen

Bladzijde 175

- 33** Hij kan 10 verschillende rijtjes maken:

WWZZZ	ZWZWZ
WZWZZ	ZWZZW
WZZWZ	ZZWWZ
WZZZW	ZZWZW
ZWWZZ	ZZZWW

Alternatieve uitwerking

Verdeel de 5 posities van het rijtje over de pionnen. De witte pionnen krijgen 2 van de 5 posities en de zwarte pionnen de overgebleven 3 posities.

$$\text{aantal} = \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 10$$

Bladzijde 176

34 a $\text{aantal} = \binom{5}{3} = 10$

b $\text{aantal} = \binom{5}{4} = 5$

c $\text{aantal} = 2^5 = 32$

d $\text{aantal} = \binom{10}{6} = 210$

- 35 a** Deze situatie is te vertalen naar rijtjes A's en B's.

$$\text{aantal} = \binom{8}{3} = 56$$

- b** Deze situatie is niet te vertalen naar rijtjes A's en B's.

- c** Deze situatie is te vertalen naar rijtjes A's en B's.

$$\text{aantal} = \binom{10}{5} = 252$$

- d** Deze situatie is niet te vertalen naar rijtjes A's en B's.

- 36** 80% van 20 is $0,8 \cdot 20 = 16$, dus je moet minstens 16 vragen juist beantwoorden.

Dat is 16 of 17 of 18 of 19 of 20 vragen juist.

Dus je kunt op $\binom{20}{16} + \binom{20}{17} + \binom{20}{18} + \binom{20}{19} + \binom{20}{20} = 6196$ manieren het formulier invullen

om toegelaten te worden. Dat is $\frac{6196}{2^{20}} \cdot 100\% \approx 0,6\%$ van het totale aantal manieren.

Bladzijde 177

- 37** Het zijn rijtjes van 8 letters met 4 keer N en 4 keer O.

$$\text{aantal} = \binom{8}{4} = 70$$

38 a $\text{aantal} = \binom{10}{3} = 120$

b $\text{aantal} = \binom{10}{1} = 10$

c $\text{aantal} = 2^{10} = 1024$

- 39** Je loopt van S naar Y zonder omwegen *en* van Y naar het strand zonder omwegen.

$$\text{aantal} = \binom{5}{2} \cdot 2^5 = 320$$

- 40 a** In totaal 6 doelpunten, waarvan 2 voor de thuisploeg en 4 voor de uitploeg.

$$\text{aantal} = \binom{6}{2} = 15$$

b $\text{aantal} = 2^6 = 64$

- 41 a** De andere mogelijkheden zijn:
vijf leerlingen en drie docenten
zeven leerlingen en één docent.
- b** 5 leerlingen en 3 docenten *of*
6 leerlingen en 2 docenten *of*
7 leerlingen en 1 docent
- $$\text{aantal} = \binom{20}{5} \cdot \binom{6}{3} + \binom{20}{6} \cdot \binom{6}{2} + \binom{20}{7} \cdot \binom{6}{1} = 1\,356\,600$$

Bladzijde 178

- 42** pop-dance-hiphop-dance-pop *of* pop-hiphop-dance-hiphop-pop
- $$\text{aantal} = 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 = 11\,520$$

Bladzijde 179

- 43 a** vier zessen en een vier
- b** drie zessen en twee vijven *of*
vier zessen en een vier
- $$\text{aantal} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 15$$
- 44 a** vier zessen en twee vijven *of*
vijf zessen en een vier
- $$\text{aantal} = \binom{6}{4} + \binom{6}{5} = 21$$
- b** drie zessen en twee vijven (28 ogen) *of*
vier zessen en een vier (28 ogen) *of*
vier zessen en een vijf (29 ogen) *of*
vijf zessen (30 ogen)
- $$\text{aantal} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 21$$

- 45 a** de eerste wagon is 6, 7 of 8 *of*
de eerste wagon is 5 en de tweede is 6, 7 of 8
- $$\text{aantal} = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 216$$
- b** de eerste wagon is 3, 4 of 5 *of*
de eerste wagon is 6 en de tweede is 3 *of*
de eerste wagon is 6 en de tweede is 4 en de derde is 3 of 5 (want 4 is al gebruikt)
- $$\text{aantal} = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 198$$

- 46** 2 guards en 1 center *of*
2 guards en 1 forward *of*
1 guard en 1 center en 1 forward *of*
1 guard en 2 forwards
- $$\text{aantal} = \binom{2}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{2}{2} \cdot \binom{3}{1} + \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} + \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{2} = 37$$

Bladzijde 180

- C6** Alleen situatie 1 is te vertalen naar rijtjes A's en B's.
- $$\text{aantal} = \binom{8}{4} = 70$$

- C7** Eke staat vooraan en Dennis als tweede *of*
Claire staat vooraan en Eke als tweede en Dennis als derde *of*
Claire staat vooraan en Eke als derde en Dennis als vierde
- $$\text{aantal} = 1 \cdot 1 \cdot 4! + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3! + 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2! = 36$$

53

j-j-m-m of
j-m-j-m of
j-m-m-j of
m-j-m-j of
m-j-j-m of
m-m-j-j

$$\text{aantal} = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 432$$

Alternatieve uitwerking

Er zijn $\binom{3}{2}$ mogelijkheden om 2 jongens te kiezen, $\binom{4}{2}$ mogelijkheden om 2 meisjes te kiezen en $4!$ mogelijkheden om de 4 taken te verdelen.

$$\text{aantal} = \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4! = 432$$

54

Tel het aantal vierkanten per grootte, van klein naar groot.

$$\text{aantal} = 16 + 4 + 16 + 9 + 4 + 1 = 50$$

55

Begrijp het probleem

- Tussen twee dagen hardlopen zitten één of twee dagen niet hardlopen.
- De laatste en eerste dag van een week zijn opeenvolgend (bijvoorbeeld zondag en maandag).

Puzzel op de aanpak

Schrijf enkele mogelijke hardloopschema's op. Je merkt dat er maar weinig mogelijkheden zijn.

Voer de aanpak uit

MaWoVr DiDoZo
MaWoZa DiVrZo
MaDoZa WoVrZo
DiDoZa

Dus Levi kan 7 verschillende schema's maken.

Reflecteer op je aanpak en de gevonden oplossing

- Interessant is dat er geen berekening wordt gebruikt bij deze aanpak.
- Tijdens het puzzelen merk je dat elk schema precies 2 opeenvolgende rustdagen heeft. Je kunt dus ook het aantal schema's bepalen door deze 2 opeenvolgende rustdagen te plannen, de rest ligt dan vast. Je kunt op elke dag van de week aan je 2 opeenvolgende rustdagen beginnen, dus er zijn 7 schema's.

56

Begrijp het probleem

- Er zijn vierkanten van verschillende groottes mogelijk.
- De vierkanten mogen door meerdere stippen gaan, zolang de hoekpunten maar stippen zijn.
- De zijden van een vierkant hoeven niet verticaal en horizontaal te zijn.

Puzzel op de aanpak

Er zijn 3 groottes mogelijk met zijden verticaal en horizontaal.

Er zijn 2 groottes mogelijk met zijden diagonaal. Zie de figuur.

Tel het aantal vierkanten per grootte.

Voer de aanpak uit

Met zijden verticaal en horizontaal:

klein 9 vierkanten

middel 4 vierkanten

groot 1 vierkant

Met zijden diagonaal:

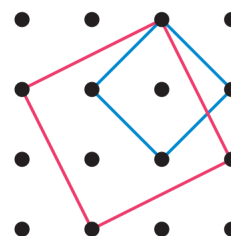
klein 4 vierkanten

groot 2 vierkanten

Je kunt dus $9 + 4 + 1 + 4 + 2 = 20$ vierkanten maken.

Reflecteer op je aanpak en de gevonden oplossing

- Deze opgave lijkt op opgave 54, en de oplossingen lijken daarom ook op elkaar.
- De vierkanten met zijden verticaal en horizontaal zijn makkelijker te zien dan de vierkanten met zijden diagonaal (zeker de grootste).



57 *Begrijp het probleem*

- Het is mogelijk dat meerdere nieuwe medewerkers op dezelfde afdeling terechtkomen.
- Het is ook mogelijk dat er op bepaalde afdelingen geen nieuwe medewerkers terechtkomen.
- Het kan niet zo zijn dat alle nieuwe medewerkers op dezelfde afdeling terechtkomen.

Puzzel op de aanpak

Je kunt berekenen hoeveel mogelijkheden je hebt om 6 medewerkers over 6 afdelingen te verdelen. Maar dan tel je de mogelijkheden mee waar ze allemaal op dezelfde afdeling terechtkomen, dus die mogelijkheden moeten ervan af.

Voer de aanpak uit

Er zijn $6^6 = 46\,656$ mogelijkheden om 6 medewerkers over 6 afdelingen te verdelen.

Er zijn 6 mogelijkheden waarbij ze allemaal op dezelfde afdeling zijn aangenomen.

Dus er zijn $46\,656 - 6 = 46\,650$ mogelijkheden.

Reflecteer op je aanpak en de gevonden oplossing

- Het ging hier om tellen met herhaling, behalve dat er een klein aantal gevallen niet mogelijk was.
- Door tijdelijk de extra voorwaarde (niet alle nieuwe medewerkers op dezelfde afdeling) te negeren, werd de berekening makkelijker.

58 *Begrijp het probleem*

- Er zijn in totaal 12 personen die handen schudden.
- De onsportieve speler schudt alleen de handen van de scheidsrechters.

Puzzel op de aanpak

Normaal gesproken schudt elk tweetal handen, dus wil je het aantal tweetallen tellen.

Omdat de onsportieve speler hier niet aan meedoet, gaat het om 11 personen. De onsportieve speler schudt maar twee keer handen.

Voer de aanpak uit

Er zijn $\binom{11}{2} = 55$ tweetallen bij 11 personen.

In totaal wordt er $55 + 2 = 57$ keer handen geschud.

Reflecteer op je aanpak en de gevonden oplossing

Door het speciale geval (de onsportieve speler) tijdelijk buiten beschouwing te laten, werd het probleem makkelijker.

59 *Begrijp het probleem*

- De grote boot kan verticaal of horizontaal geplaatst worden.
- De kleine bootjes zijn identiek.

Puzzel op de aanpak

Er is een beperkt aantal mogelijkheden voor het plaatsen van de grote boot. Dit aantal kun je tellen. Voor verticale en horizontale plaatsing zijn er evenveel mogelijkheden.

Na het plaatsen van de grote boot zijn er nog 7 hokjes over voor de 2 kleine boten.

Meneer Kieboom plaatst de grote boot *en* de 2 kleine boten. Dus vermenigvuldigen.

Voer de aanpak uit

Voor het plaatsen van de grote boot zijn er $2 \cdot 6 = 12$ mogelijkheden.

Voor het plaatsen van de 2 kleine boten zijn er $\binom{7}{2} = 21$ mogelijkheden.

In totaal zijn er $12 \cdot \binom{7}{2} = 252$ manieren om de boten te plaatsen.

Reflecteer op je aanpak en de gevonden oplossing

Door de situatie op te delen in twee handelingen die meneer Kieboom uitvoert, kan de vermenigvuldigingsregel toegepast worden.

60 Begrijp het probleem

- Als er een stuk op een veld staat, dan kan er geen ander stuk staan op de velden er links en rechts van (rij), en op de velden erboven en eronder (kolom).
- Er moeten in totaal 4 stukken worden geplaatst.
- Er zijn $8^2 = 64$ velden.

Puzzel op de aanpak

Je kunt de stukken één voor één neerzetten. Er zijn dan zijn 64 mogelijkheden voor het eerste stuk. Voor het tweede stuk zijn er dan een rij en kolom minder beschikbaar, dus nog $7^2 = 49$ mogelijkheden. Enzovoorts.

Voer de aanpak uit

$$\text{aantal} = 8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 = 2\,822\,400$$

Reflecteer op je aanpak en de gevonden oplossing

- Omdat we te maken hebben met een vierkant bord waar telkens een rij en kolom af gehaald wordt, zien we een rijtje kwadraten in onze berekening.
- Het zou nu makkelijk zijn om te berekenen hoeveel mogelijkheden er zijn met meer dan 4 stukken.
- Een alternatieve aanpak is om 4 verschillende uit 8 rijen *en* 4 verschillende uit 8 kolommen te kiezen. Je krijgt dan $\text{aantal} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$, oftewel $8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2$ in een andere volgorde geschreven.

61 Begrijp het probleem

De eis is dat elke speler iets moet krijgen. Voor Mitchel betekent dat dat hij niet 0 munten mag krijgen en ook niet alle munten.

Puzzel op de aanpak

Zonder de eis zou Mitchel van 0 tot en met 5 goudstukken krijgen en van 0 tot en met 10 zilverstukken. Dat kan op $6 \cdot 11 = 66$ manieren. Bij twee van deze manieren krijgt Mitchel geen munten of alle munten en wordt dus niet aan de eis voldaan, dus die moeten ervan af.

Voer de aanpak uit

$$\text{aantal} = 66 - 2 = 64$$

Reflecteer op je aanpak en de gevonden oplossing

- Door tijdelijk de extra voorwaarde (Mitchell mag niet 0 of alle munten krijgen) te negeren, werd de berekening makkelijker.
- In plaats van over beide spelers tegelijk te redeneren, was het nuttig om de eis te vertalen naar één speler.

Bladzijde 185**C8**

a $\text{aantal} = \binom{28}{8} = 3\,108\,105$

b $\text{aantal} = 8! = 40\,320$

- c** 3 spelers langer en 5 spelers korter dan 190 cm *of*
 4 spelers langer en 4 spelers korter dan 190 cm *of*
 5 spelers langer en 3 spelers korter dan 190 cm

$$\text{aantal} = \binom{5}{3} \cdot \binom{23}{5} + \binom{5}{4} \cdot \binom{23}{4} + \binom{5}{5} \cdot \binom{23}{3} = 382\,536$$

d $\text{aantal} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

C9

Het grootste stuk kan op 4 manieren worden gelegd. Het één na grootste stuk kan daarna op 3 manieren gelegd worden. Tot slot zijn er 3 plaatsen voor de laatste 2 stukken, dus

$$\binom{3}{2} \text{ mogelijkheden.}$$

$$\text{aantal} = 4 \cdot 3 \cdot \binom{3}{2} = 36$$

Bladzijde 186

- 1 a aantal = $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
 b aantal = $3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$
- 2 a aantal = $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 59049$
 b aantal = $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 1000$
 c aantal = $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$
 d aantal = $10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 10$
- 3 a aantal = $9 \cdot 10 = 90$
 b aantal = $9 \cdot 8 + 10 \cdot 9 = 162$
 c aantal = $13 \cdot 12 = 156$
 d beide Caro-Kann *of* beide damegambiet *of* beide Siciliaanse
 aantal = $9 \cdot 8 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 114$
- 4 a aantal = $8! = 40320$
 b aantal = $\binom{8}{5} = 56$
 c aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Bladzijde 187

- 5 a allemaal vierdeklassers *of* allemaal vijfdeklassers
 aantal = $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 2040$
 b 1 vijfde- en 2 vierdeklassers *of* 2 vijfde- en 1 vierdeklasser *of* 3 vijfdeklassers
 aantal = $\binom{8}{1} \cdot \binom{6}{2} + \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{1} + \binom{8}{3} = 334$
- 6 a aantal = $\binom{16}{4} = 1820$
 b $2^{20} = 1048576$
- 7 boerenkool en 2 van 4 soorten paddenstoelen en Eigenheimers *of* spitskool en 2 van 3 soorten paddenstoelen (geen oesterzwammen) en 1 van 2 soorten aardappelen *of* de andere kool en 2 van 4 soorten paddenstoelen en 1 van 2 soorten aardappelen
 aantal = $1 \cdot \binom{4}{2} \cdot 1 + 1 \cdot \binom{3}{2} \cdot 2 + 1 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 = 24$
- 8 Bij variant I kun je vier situaties onderscheiden:
 1. De verticale boot wordt in kolom A geplaatst, dat kan op 1 manier en er zijn dan 3 mogelijkheden voor de horizontale boot.
 2. De verticale boot wordt bovenin kolom B geplaatst, dat kan op 1 manier en er zijn dan 2 mogelijkheden voor de horizontale boot.
 3. De verticale boot wordt onderin kolom B geplaatst, dat kan op 1 manier en er is dan 1 mogelijkheid voor de horizontale boot.
 4. De verticale boot wordt in kolom C geplaatst, dat kan op 2 manieren en er zijn dan telkens 3 mogelijkheden voor de horizontale boot.
 Voor de horizontale en verticale boot zijn er dus $1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 12$ mogelijkheden.
 Voor de kleine boot zijn er dan nog 4 hokjes beschikbaar.
 aantal variant I = $12 \cdot 4 = 48$
- Bij variant II kan de grote boot op 4 manieren geplaatst worden. Voor de kleine boten zijn er dan nog 5 hokjes beschikbaar.
 aantal variant II = $4 \cdot \binom{5}{2} = 40$
- Dus bij variant I zijn de meeste opstellingen mogelijk.

Gemengde opgaven

Bladzijde 188

- 1 a** ABD of AD of ACD
aantal = $3 \cdot 2 + 2 + 2 \cdot 4 = 16$
- b** AC of ADC of ABDC
aantal = $2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 4 = 34$
- c** Hij loopt 1 of 2 of 3 keer over een weg langs het meer, de mogelijkheden zijn:
AB of BD of DA of (AB en BD) of (AB en DA) of (BD en DA) of (AB en BD en DA)
aantal = $1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 10$

Alternatieve uitwerking

Zonder de voorwaarde zijn er in totaal $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ rondwandelingen.

Verder zijn er $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ rondwandelingen die geen enkele weg langs het meer hebben.

Er zijn dus $12 - 2 = 10$ rondwandelingen mogelijk die minstens een weg langs het meer hebben.

- 2 a** aantal = $8! = 40\,320$
- b** aantal = $7! \cdot 1 = 5040$
- c** aantal = $2! \cdot 3! \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 12$
- Dat is $\frac{12}{40\,320} \cdot 100\% \approx 0,03\%$ van het totale aantal mogelijke volgorden.

- 3 a** aantal = $\binom{10}{2} = 45$
- b** aantal = $\binom{10}{2}^5 = 184\,528\,125$
- c** Een toegangscode bevat $5 \cdot 2 = 10$ cijfers, dus elk cijfer wordt één keer gebruikt.
aantal = $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 113\,400$
- d** Slechts 0,0001% van de codes mag toegang geven. $0,000001 \cdot 184\,528\,125 = 184,5\dots$, dus het bedrijf mag maximaal 184 medewerkers hebben.

Bladzijde 189

- 4 a** aantal = $\binom{6}{2} = 15$
- b** aantal = $2^6 - 1 = 63$
- c** links midden of rechts midden
aantal = $\binom{4}{2} + \binom{4}{2} = 12$

- 5 a** aantal = $\binom{3}{2} \cdot \binom{6}{1} = 18$
- b** aantal = $\binom{9}{3} = 84$
- c** CDA-PvdA-VVD of CDA-PvdA-GB of CDA-VVD-GB of PvdA-VVD-GB
aantal = $3 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 39$
- d** aantal = $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$

- 6 a** aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$
- b** aantal = $8^5 = 32\,768$
- c** aantal = $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 120$

- 7** **a** aantal = $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
b aantal = $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 = 2401$
c aantal = $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 14406$
d het eerste cijfer is 4 en het tweede cijfer is groter dan 5 *of* het eerste cijfer is groter dan 4
aantal = $1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 + 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 10633$
e het eerste cijfer is kleiner dan 6 *of* het eerste cijfer is 6 en het tweede cijfer is kleiner dan 4
aantal = $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1560$
f 55XXX *of* X55XX *of* XX55X *of* XXX55
aantal = $1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 = 864$

Bladzijde 190

- 8** Eén van de cijfers moet dubbel gebruikt zijn.
2 vieren *of* 2 zevens *of* 2 achten
aantal = $\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 + \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 + \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 36$

- 9** **a** aantal = $6! = 720$
b De wortels kunnen op 5 manieren links van de uien komen en op nog eens 5 manieren rechts van de uien. Dit zijn 10 mogelijkheden.
Met deze eis zijn er $10 \cdot 4! = 240$ mogelijkheden.
Er zijn dus $720 - 240 = 480$ mogelijkheden afgevallen.
c De tomaten kunnen in de eerste bak en de aardappels in de laatste bak, of andersom.
Dat zijn 2 mogelijkheden.
De wortels kunnen nu nog maar op drie manieren links van de uien komen en op nog eens 3 manieren rechts van de uien. Dit zijn 6 mogelijkheden.
Met beide eisen zijn er $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$ mogelijkheden.
Dus er blijft $\frac{24}{720} \cdot 100\% \approx 3,3\%$ van het totale aantal volgorden over.

Bladzijde 191

- 10** **a** aantal = $\binom{5}{1} = 5$
b Sara wint 3 *of* 4 *of* 5 partijen
aantal = $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 16$
c AAA *of* AASA *of* AASSA *of* AASSS
Dus 4 mogelijkheden.
d Als er 4 partijen worden gespeeld en Sara wint, zijn de mogelijkheden:
SSAS *of* SASS *of* ASSS, dus aantal = 3.
Als er 5 partijen worden gespeeld en Sara wint zijn de mogelijkheden:
SSAAS *of* SASAS *of* SAASS *of* ASASS *of* ASSAS *of* AASSS, dus aantal = 6.
Dus als Sara wint is het aantal $3 + 6 = 9$.
Als Alex wint zijn er evenveel scoreverlopen mogelijk.
Het totaal aantal is dus $2 \cdot 9 = 18$.

11

a aantal = $\binom{20}{6} = 38\,760$

b aantal = $2^{20} = 1\,048\,576$

c aantal = $\binom{5}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} = 2500$

d Het aantal codes met de helft blauw is $\binom{20}{10} = 184\,756$.

Dus het aantal codes met minder of meer dan de helft blauw is $2^{20} - 184\,756 = 863\,820$.

Het aantal codes met meer dan de helft blauw is $\frac{863\,820}{2} = 431\,910$.

Dat is $\frac{431\,910}{2^{20}} \cdot 100\% \approx 41,2\%$ van de codes.

Alternatieve uitwerking

Het aantal blauwe vakjes is 11 of 12 of 13 of 14 of 15 of 16 of 17 of 18 of 19 of 20.

$$\text{aantal} = \binom{20}{11} + \binom{20}{12} + \binom{20}{13} + \binom{20}{14} + \binom{20}{15} + \binom{20}{16} + \binom{20}{17} + \binom{20}{18} + \binom{20}{19} + \binom{20}{20} = 431\,910$$

Dat is $\frac{431\,910}{2^{20}} \cdot 100\% \approx 41,2\%$ van de codes.

- e** Van de 14 buitenste vakjes moeten er 11 of 12 of 13 of 14 blauw zijn bij een positieve en open code.

$$\text{aantal} = \binom{14}{11} + \binom{14}{12} + \binom{14}{13} + \binom{14}{14} = 470$$

Bladzijde 192

12

a aantal = $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} = 90$

b aantal = $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} = 540$

- c** 3 moestuinplanten of 0 moestuinplanten

$$\text{aantal} = \binom{4}{3} \cdot \binom{11}{5} + \binom{11}{8} = 2013$$

d aantal = $\binom{50}{5} \cdot \binom{45}{5} \approx 2,6 \cdot 10^{12}$

Alternatieve uitwerking:

Stanley kiest 10 van de 50 soorten en daarvan 5 voor in de voortuin.

$$\text{aantal} = \binom{50}{10} \cdot \binom{10}{5} \approx 2,6 \cdot 10^{12}$$

Bladzijde 193

13

a aantal = $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 180$

b aantal = $3! \cdot 3! = 36$

- c** Stel, de kerken lagen eerst als $k_1 k_2 k_3$, dan zijn er twee andere volgorden mogelijk, namelijk $k_2 k_3 k_1$ en $k_3 k_1 k_2$.

Voor de musea zijn ook twee andere volgorden mogelijk.

Dus aantal = $2 \cdot 2 = 4$.

- d** De naam van de mol staat 2 keer in het lijstje, dat kan op $\binom{5}{2} = 10$ manieren.

Verder staan er 3 andere namen op het lijstje, waarbij telkens uit 4 namen is gekozen, want mensen kiezen nooit zichzelf. Dat kan op $4^3 = 64$ manieren.

Dus aantal = $10 \cdot 64 = 640$.

Verantwoording

Beeld

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlelen.

0 / 25



© 2025 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06489-1

