

getal & ruimte

A



Noordhoff

Dit boek is van jou!

Naam

Klas

Getal & Ruimte

Leerboek
havo A deel 2

Dertiende editie, 2025

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek havo A deel 2

Samen met de delen 1 en 3 van havo wiskunde A bevat dit boek de leerstof van het programma havo wiskunde A, zoals dat met ingang van 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak havo wiskunde A is 320 uur. Elk van de delen 1, 2 en 3 bevat vier hoofdstukken, waarbij in het laatste hoofdstuk van deel 3 de examentraining aan bod komt. Afhankelijk van de verdeling van de studielast over het vierde en vijfde leerjaar kan deel 2 geheel of gedeeltelijk in de tweede helft van het vierde leerjaar worden doorgenomen.

De studielast van hoofdstuk 5 is ongeveer 20 uur. De studielast van elk van de andere drie hoofdstukken in dit boek is ongeveer 25 uur.

In de hoofdstukken komen de volgende (sub)domeinen aan bod.

Hoofdstuk 5	Veranderingen	D
Hoofdstuk 6	Formules en herleiden	B2, C2 en C3
Hoofdstuk 7	Conclusies bij statistiek	E3 en E4
Hoofdstuk 8	Statistiek met de computer	E5

De leerstof van domein D is uitsluitend schoolexamenstof en wordt geheel afgehandeld in hoofdstuk 5.

De leerstof van subdomein E5 dient getoetst te worden in het schoolexamen en komt aan bod in hoofdstuk 8. Indien mogelijk gebruikt men bij dit hoofdstuk het computerprogramma Microsoft Excel. Als dit niet beschikbaar is, kan bijvoorbeeld Google Spreadsheets worden gebruikt. In dat geval dient men erop bedacht te zijn dat wellicht niet alle opdrachten gemaakt kunnen worden. Zie hiervoor de informatie in de digitale leeromgeving.

De digitale leeromgeving van Getal & Ruimte

Bij sommige gedeeltes van het boek kunnen opgaven ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

In het docentenmateriaal staan studiewijzers die een indicatie geven van de hoeveelheid leerstof die per week kan worden doorgewerkt. Verder zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij de hoofdstukken 5, 6 en 7 een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

Zomer 2024

Legenda

V1 Voorkennisopgave

Een opgave over een onderwerp uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk.

O1 Oriënterende opgave

Een opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

2 Gewone opgave

Een opgave waarmee je oefent met wat er in de theorie aan bod is geweest.

R3 Reflectie-opgave

Een opgave waarmee je terugkijkt op een voorgaand probleem, of waarmee je op een andere manier naar voorgaande stof kijkt.

A4 Afsluitende opgave

Een opgave waarmee je oefent op het beoogde beheersingsniveau.

E5 Extra opgave

Een opgave die je extra uitdaagt.

Kennis- en vaardighedencheck

Je controleert of je de kennis en/of vaardigheid beheerst door de bijbehorende opgave te maken.

C1 Checkopgave

Een opgave waarmee je controleert of je de kennis en/of vaardigheid goed beheerst.

Route-aanduiding

1 Een opgave van de basisroute.

2 Een opgave van de middenroute.

3 Een opgave van de uitdagende route.

NB: De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder routeaanduiding

In de Kennis- en vaardigheidentest en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen routeaanduiding.

[► GR](#) Verwijzing naar een module over het gebruik van de grafische rekenmachine. Zie ook het overzicht van de modules achterin dit boek.

[► ICT](#) Verwijzing naar een module over het gebruik van Excel/Spreadsheets. Zie ook het overzicht van de modules achterin dit boek.

[► WERKBLAD](#) Verwijzing naar een werkblad achterin dit boek.

Inhoud

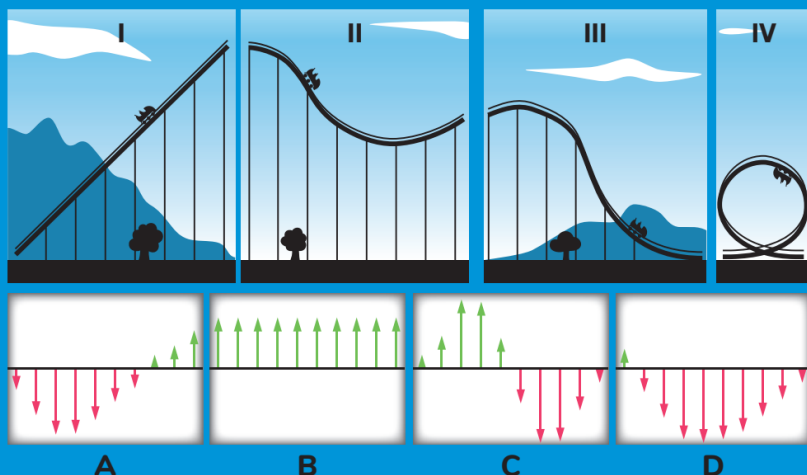
5	Veranderingen	6	7	Conclusies bij statistiek	86
5.1	Stijgen en dalen	8	7.1	Populatieproportie	88
5.2	Toenamedigrammen	17	7.2	Betrouwbaarheidsintervallen toepassen	101
5.3	Differentiequotënten	27	7.3	Steekproefomvang	108
	Kennis- en vaardighedentest	34	7.4	Conclusies trekken	116
	Gemengde opgaven	36		Kennis- en vaardighedentest	128
6	Formules en herleiden	42		Gemengde opgaven	130
6.1	Werken met formules	44	8	Statistiek met de computer	136
6.2	Formules met breuken	56	8.1	Werken met een spreadsheet	138
6.3	Evenredigheden	67	8.2	Werken met datasets	147
6.4	Formules met machten	73	8.3	Draaitabellen en draaigrafieken	153
	Kennis- en vaardighedentest	80		Formuleblad	160
	Gemengde opgaven	82		Werkbladen	162
				Antwoorden Kennis- en vaardighedentests	163
				Overzicht GR-modules	165
				Overzicht Excel/ Spreadsheets-modules	166
				Trefwoordenregister	167
				Verantwoording	169



5

Veranderingen

Tijdens een achtbaanrit meet het karretje elke afgelegde 3 meter de hoogte. Je ziet hieronder vier stukken van de achtbaan en vier diagrammen. In de diagrammen hoort elk pijltje bij het hoogteverschil ten opzichte van de vorige meting. Welk diagram hoort bij welk stuk van de achtbaan?



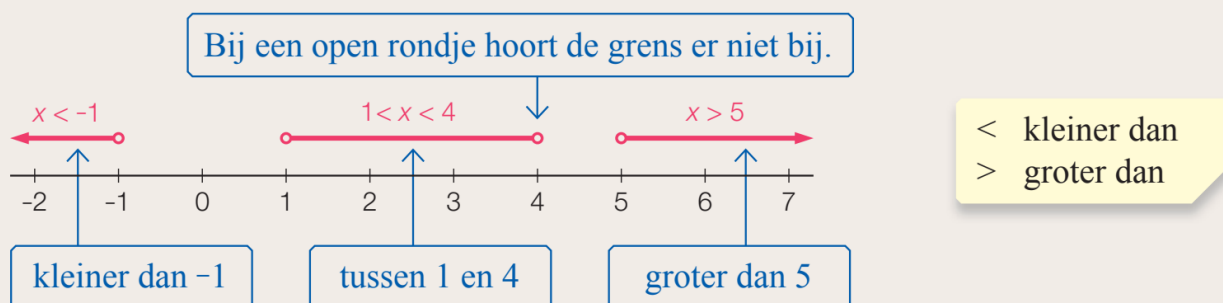
5.1 Stijgen en dalen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de intervallen noteren waarop een grafiek stijgend of dalend is.
- Je kunt onderscheid maken tussen de verschillende soorten van stijgen en dalen.
- Je kunt minima en maxima aflezen in een grafiek.

Voorkennis Intervallen

Een interval is een stukje van de getallenlijn. In de figuur hieronder zijn boven de getallenlijn drie intervallen getekend:



Voorbeeld

a Vul in: x ligt tussen 5 en 9 noteer je als

b Vul in: Bij  hoort de notatie

Uitwerking

a $5 < x < 9$

b $-2 < x < 4$

V1 Vul in.

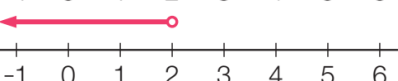
a x ligt tussen 0 en 6 noteer je als

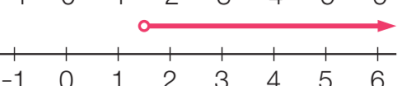
b x is groter dan 7 noteer je als

c x is kleiner dan 12,5 noteer je als

V2 Vul in.

a Bij  hoort de notatie

b Bij  hoort de notatie

c Bij  hoort de notatie

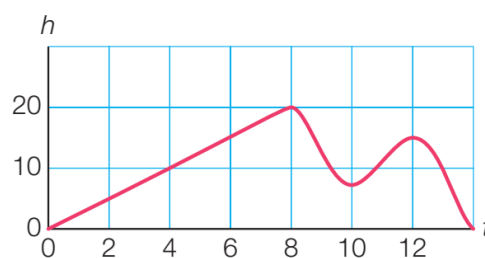
01 In de figuur is een grafiek getekend van de hoogte h in meter tijdens de eerste 14 seconden van een achtbaanrit.

In de eerste 8 seconden word je naar een hoogte van 20 meter getakeld. De grafiek is dus stijgend op het interval $0 < t < 8$.

Vul in.

De grafiek is ook stijgend op $< t <$

De grafiek is dalend op $< t <$ en op $< t <$



Theorie A Stijgen en dalen en de intervalnotatie

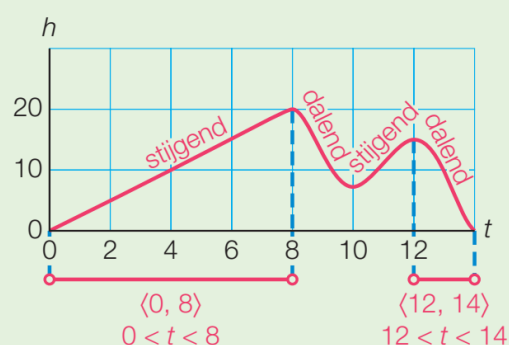
De grafiek uit opgave 1 is **stijgend** op $0 < t < 8$.

Je kunt dit interval ook noteren met de

intervalnotatie: $\langle 0, 8 \rangle$.

De grafiek is stijgend op $\langle 0, 8 \rangle$ en op $\langle 10, 12 \rangle$.

De grafiek is **dalend** op $\langle 8, 10 \rangle$ en op $\langle 12, 14 \rangle$.

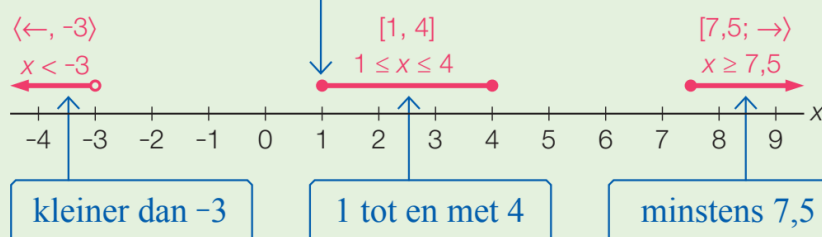


Een interval is een stukje van de getallenlijn.

Tot het **open interval** $\langle 1, 4 \rangle$ behoren alle getallen die tussen 1 en 4 liggen. De grenzen 1 en 4 doen niet mee. Bij het **gesloten interval** $[1, 4]$ doen de grenzen 1 en 4 wel mee. Dit kun je noteren als $1 \leq x \leq 4$.

Tot het interval $[7,5; \rightarrow \rangle$ behoren alle getallen groter dan of gelijk aan 7,5, oftewel $x \geq 7,5$.

Bij een dicht rondje hoort de grens er wel bij.

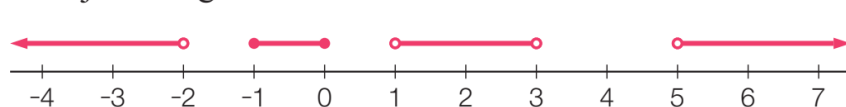


$\leq$ kleiner dan of gelijk aan

$\geq$ groter dan of gelijk aan

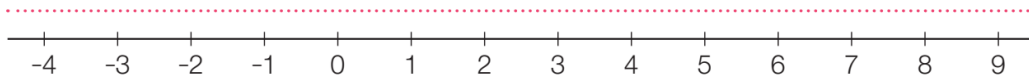
In het dagelijks taalgebruik worden vaak woorden zoals vanaf, minstens, minimaal, hoogstens of maximaal gebruikt wanneer de grens mee doet.

2 Schrijf de volgende intervallen met de intervalnotatie.



3 Teken de volgende intervallen boven de getallenlijn.

$[-4, -2]$, $\langle -1, 2 \rangle$, $[3, 5]$ en $\langle 7, \rightarrow \rangle$



4 Noteer met de intervalnotatie.

a $-8 \leq x \leq 3$ **b** $4 < x < 4,5$ **c** $x \geq 2,1$

5 a Noteer $10 \leq x < 15$ en $x \geq 3,5$ met de intervalnotatie.

*** b** Teken boven de getallenlijn de intervallen bestaande uit alle getallen die *niet* in de intervallen $[-3, -1]$, $\langle 1, 3 \rangle$ of $\langle 7,5; \rightarrow \rangle$ liggen.



A6 Op een veiling worden tomaten aangeboden in de volgende drie gewichtsklassen.

klasse A tussen 23 en 40 gram

klasse B vanaf 40 tot en met 80 gram

klasse C zwaarder dan 80 gram

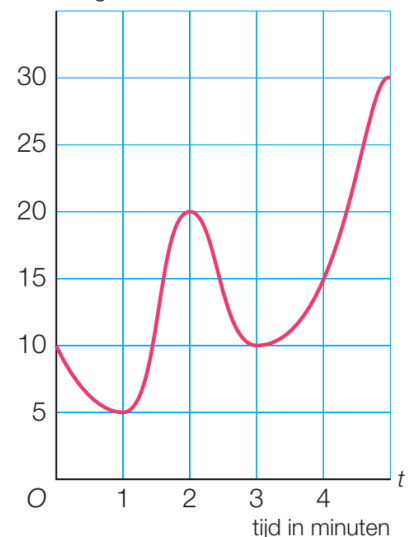
Noteer elke gewichtsklasse met de intervalnotatie.

A7 In de figuur is de vlieghoogte van een drone uitgezet tegen de tijd.

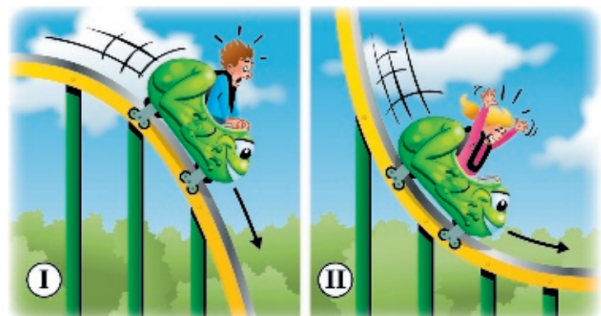
a Op welke open intervallen stijgt de drone? Gebruik de intervalnotatie.

b De vlieghoogte bij $t = 9$ was 20 meter. Kun je concluderen dat de grafiek dalend is op $\langle 5, 9 \rangle$? Licht toe.

Vlieghoogte drone
hoogte in meter



O8 In een attractiepark staat een achtbaan met verschillende spectaculaire bochten en hoogteverschillen. We bekijken twee korte delen van de baan. Zie de figuur met de delen I en II. Op beide delen daalt het wagentje. Toch is het heel anders wanneer je op deel I rijdt dan wanneer je op deel II rijdt. Dat komt doordat je op verschillende manieren daalt. Leg uit wat het verschil in daling is.

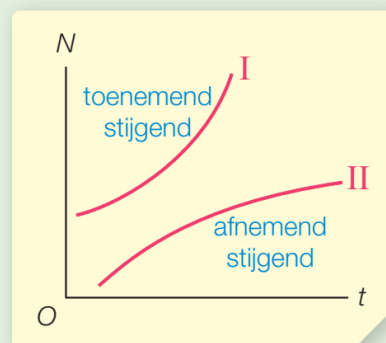


Theorie B Soorten van stijgen en dalen

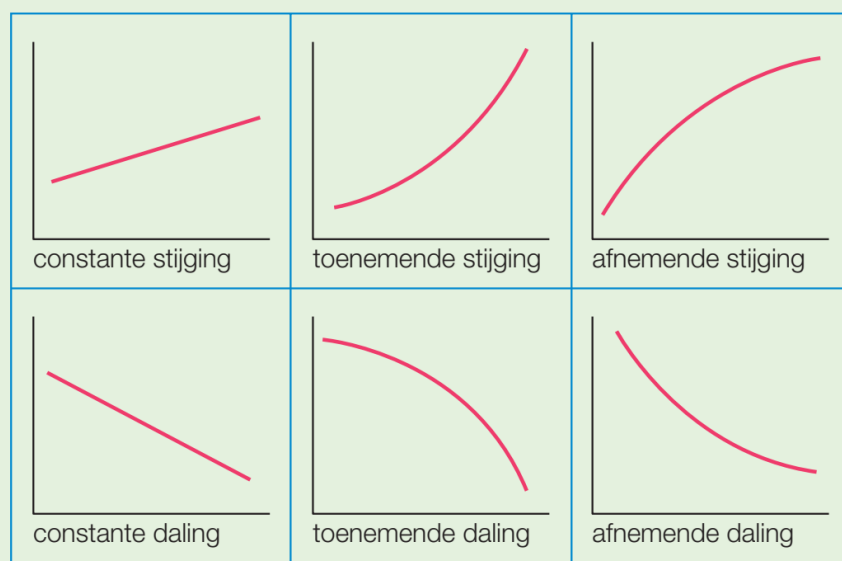
Hiernaast zie je twee grafieken die beide stijgend zijn: als t toeneemt, dan neemt N toe. Maar toch is er een belangrijk verschil tussen de twee grafieken.

Grafiek I wordt steeds steiler. Er is sprake van **toenemende stijging**. Grafiek II wordt steeds minder steil. Er is sprake van **afnemende stijging**.

Hieronder staan de verschillende soorten van stijgen en dalen vermeld.



SOORTEN VAN STIJGEN EN DALEN



Afspraak

Bij vragen over stijgen en dalen noteer je de grootst mogelijke open intervallen met de intervalnotatie.

Voorbeeld

Zie de grafiek.

Welke soorten van stijgen en dalen kun je op het interval $\langle 0, 10 \rangle$ herkennen? Noteer ook de bijbehorende intervallen.

Uitwerking

afnemend dalend op $\langle 0, 2 \rangle$

toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$

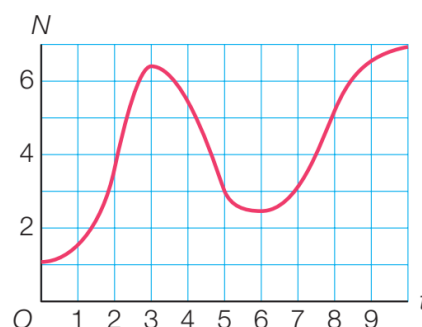
afnemend stijgend op $\langle 4, 6 \rangle$

toenemend dalend op $\langle 6, 10 \rangle$



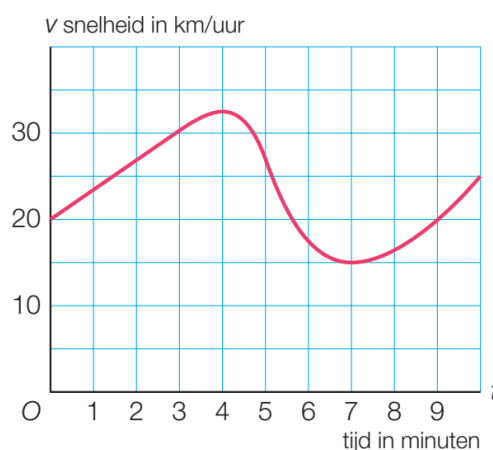
9 Zie de grafiek met t tussen 0 en 10.

- a** Welke soorten van stijgen herken je? Noteer ook de bijbehorende intervallen.
b Welke soorten van dalen herken je? Noteer ook de bijbehorende intervallen.



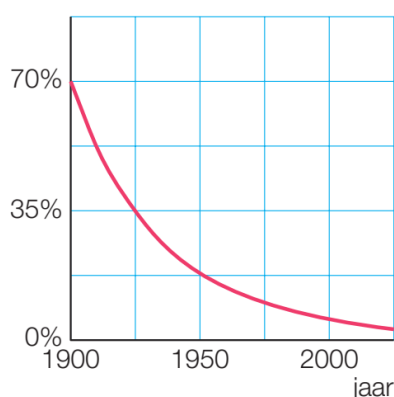
10 De grafiek gaat over de snelheid van een fietser tijdens een tocht door een glooiend landschap.

- a** Welke soorten van stijgen en dalen herken je op het interval $\langle 0, 10 \rangle$? Noteer ook de bijbehorende intervallen.
b Op welk tijdsinterval is de fietser aan het klimmen? Licht toe.

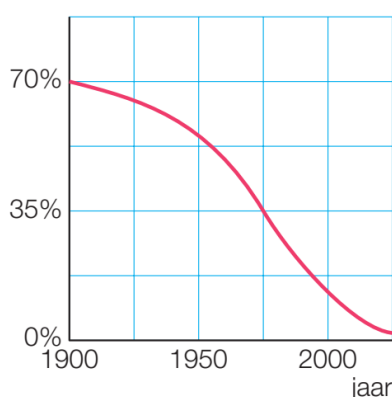


A11 In een onderzoeksverslag over bedreigde talen staan de twee grafieken hieronder. In de grafieken is af te lezen hoeveel procent van de bevolking de oorspronkelijke taal nog spreekt. Welsh is een Keltische taal die in Wales wordt gesproken. Mapudungum is de taal van de Mapuche die vooral in Chili wonen.

WELSH TALIGEN IN WALES



MAPUDUNGUM TALIGEN IN CHILI



- a** In welk jaar begon de daling van het percentage Mapudungumtaligen af te nemen?
b Rond 1800 sprak vrijwel de gehele bevolking van Wales nog Welsh. Een onderzoeker breidt de grafiek uit om dit gegeven op te nemen. Welke soort dalen verwacht je dat de grafiek tussen 1800 en 1900 vertoont? Licht toe.

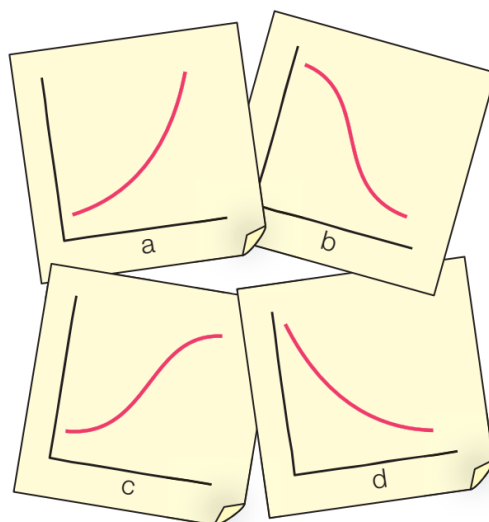


A12 In de figuur zijn vier globale grafieken getekend.

Bij elke grafiek hoort een van de volgende krantenkoppen.

Zoek bij elke grafiek de juiste krantenkop.

- I Afname biodiversiteit bos steeds minder sterk.
- II Explosieve groei verkoop tablets zwakt af.
- III Griepvirus grijpt steeds sneller om zich heen.
- IV Steeds sterkere daling van dollarkoers tot staan gebracht.



E13 De vazen hiernaast hebben dezelfde inhoud en

***** worden met dezelfde snelheid gevuld. Deze opgave gaat over de grafieken waarbij de hoogte h in cm van de waterspiegel is uitgezet tegen de hoeveelheid water w in liter in elk van de vazen.

- a** Van welke soort stijgen is er sprake bij de grafiek van vaas I? En bij de grafiek van vaas II?
- b** Bij welke vaas geeft lineair interpoleren een te hoge schatting van h ? Licht toe met een schets.
- c** Bij welke soort dalen geeft lineair interpoleren een te hoge schatting? Licht toe.



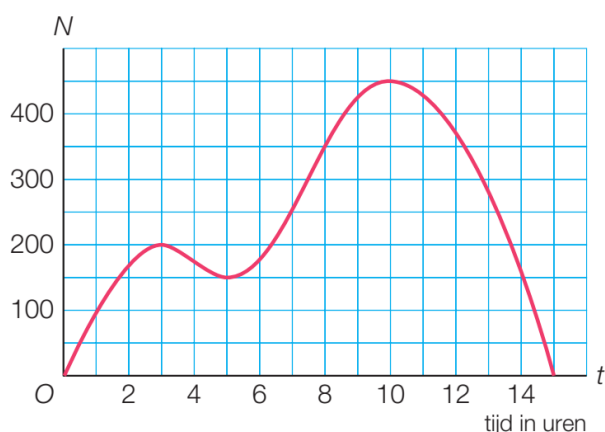
I



II

O14 In de figuur is het aantal mensen N in een winkelcentrum uitgezet tegen

de tijd t in uren met $t = 0$ om 7:00 uur.



Er zijn twee momenten op de dag waarop de grafiek overgaat van stijgend naar dalend.

- a** Welke tijden horen bij deze momenten? Hoeveel mensen waren er op die momenten in het winkelcentrum?
- b** Sasha is midden op de dag gaan winkelen toen de drukte minimaal was. Hoeveel mensen waren er op dat moment in het winkelcentrum?

Theorie C Maximum en minimum

In een duingebied op Vlieland is gedurende twee jaar het aantal konijnen bijgehouden. Zie de grafiek.

De punten A , B en C zijn **toppen** van de grafiek.

Bij het punt A gaat de grafiek over van stijgend naar dalend, daarom bereikt het aantal konijnen bij punt A een **maximum**.

Ook bij punt C is er sprake van een maximum.

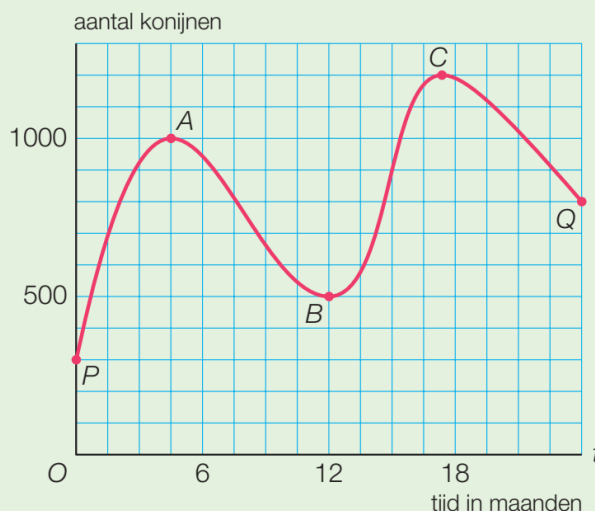
Het maximum bij A is 1000.

Het maximum bij C is 1200.

Je ziet dat er meerdere maxima kunnen zijn. Je moet een maximum dus plaatselijk opvatten.

Bij de top bij punt B gaat de grafiek over van dalend naar stijgend, daarom bereikt het aantal konijnen bij punt B een **minimum**. Ook een minimum moet je plaatselijk opvatten. Het minimum bij B is 500.

Bij de punten P en Q zou er, afhankelijk van of de grafiek daar stopt of doorloopt, ook sprake kunnen zijn van een plaatselijk minimale waarde. In dit boek maken we hier de volgende afspraak over.



Afspraak

Alleen als gevraagd wordt naar de hoogste of laagste waarde bekijken we ook het begin- en eindpunt van de grafiek. Verder laten we deze punten buiten beschouwing bij het bepalen van minima en maxima.

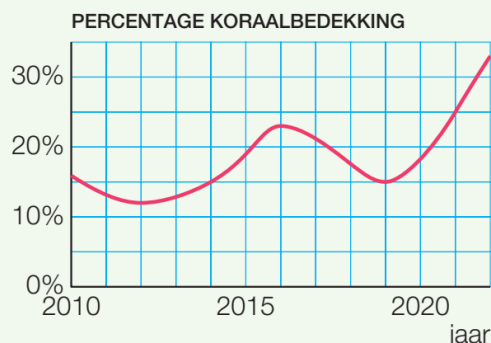
Voorbeeld

Zie de grafiek over de koraalbedekking van het Great Barrier Reef in Australië.

- a Geef de maxima en minima van de grafiek.
- b Wat is het hoogste percentage koraalbedekking dat gedurende deze periode is gemeten?

Uitwerking

- a Het maximum is 23% en de minima zijn 12% en 15%.
- b Het hoogst gemeten percentage is 33%.

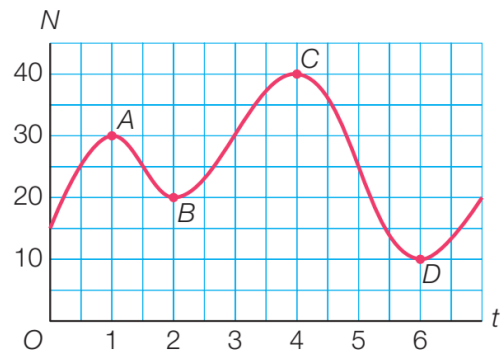


In 2022 werd het hoogste percentage gemeten.

15 Zie de figuur.



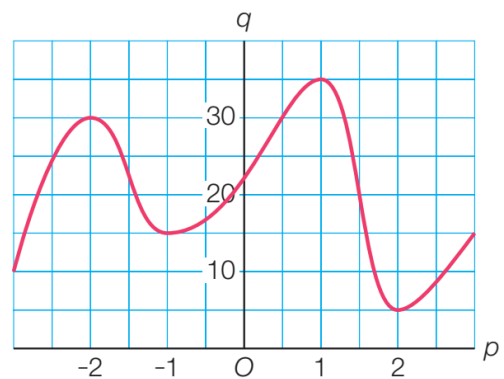
- a** Bij welke punten treedt een maximum op? Geef deze maxima.
b Geef de minima van de grafiek.
c Wat zijn de laagste en de hoogste waarden van N op het interval $[0, 7]$? En op $[0, 3]$? En op $[3, 5]$?



16 Zie de figuur.



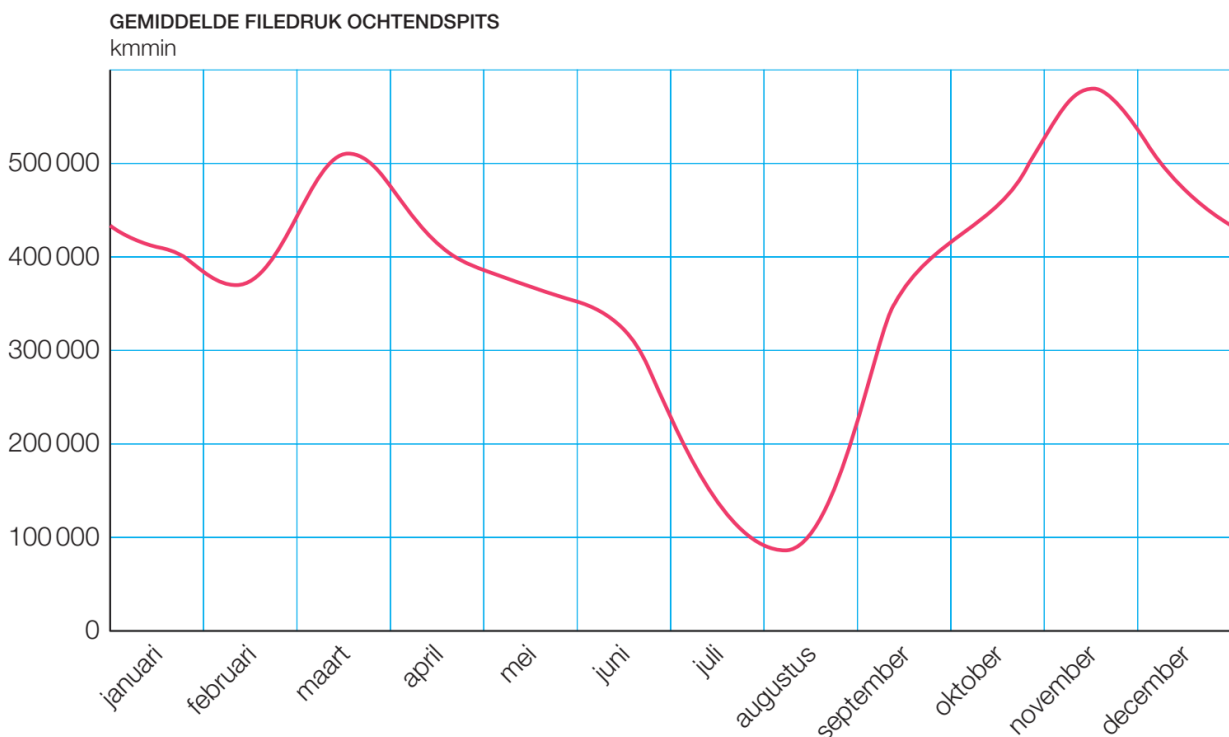
- a** Hoeveel maxima heeft de grafiek? En hoeveel minima?
b Hoe groot is het verschil tussen het grootste maximum en het kleinste minimum van de grafiek?



A17



De filedruk is een maat voor de drukte op de autosnelwegen. De filedruk wordt uitgedrukt in kilometerminuten (kmmin). Een file met een lengte van 10 km die 30 minuten duurt, levert een filedruk op van $10 \cdot 30 = 300$ kmmin. In de figuur zie je een grafiek van de filedruk in de ochtendspits.



- a** Wat is een praktische reden om bij het eindpunt van de grafiek in december niet van een minimale filedruk te spreken?
b Bij het maximum in november stond er in totaal 1900 km file in de ochtendspits. Hoeveel uur duurden deze files in totaal? Rond af op gehelen.
c Hoeveel procent meer filedruk was er bij het maximum in maart vergeleken met het minimum in februari?

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de intervallen noteren waarop een grafiek stijgend of dalend is.
- ☐ Ik kan onderscheid maken tussen de verschillende soorten van stijgen en dalen.
- ☐ Ik kan minima en maxima aflezen in een grafiek.

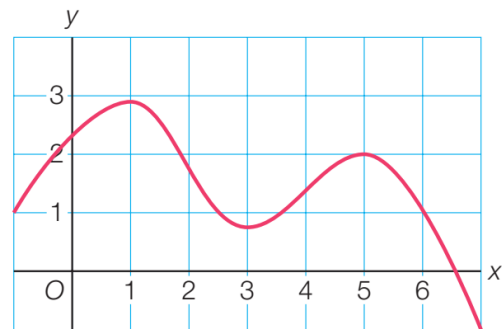
► OPGAVE C1
THEORIE A

► OPGAVE C2
THEORIE B

► OPGAVE C3
THEORIE C

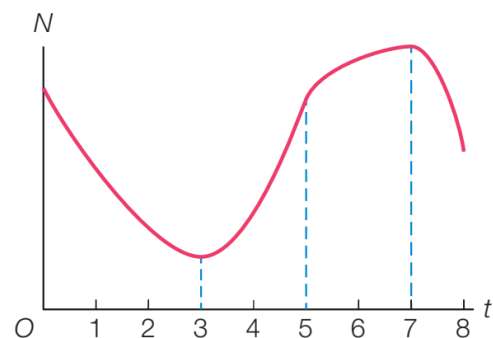
C1 Een grafiek is op twee intervallen stijgend en op twee intervallen dalend. Hiernaast is een deel van deze grafiek getekend.

- a** Noteer de intervallen waarop de grafiek stijgend is.
- b** Noteer de intervallen waarop de grafiek dalend is.



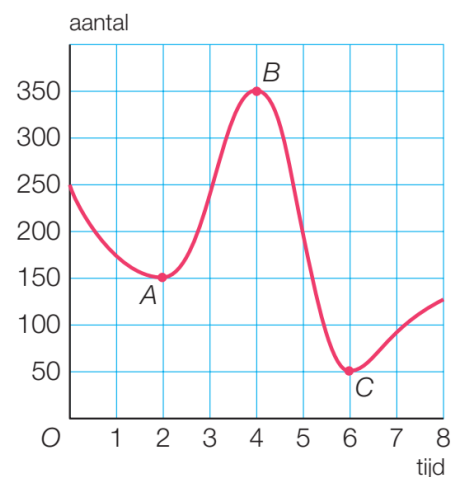
C2 Zie de figuur. In de grafiek komen verschillende soorten van stijgen en dalen voor. Vul de tabel in.

interval	soort van stijgen of dalen
$\langle 0, 3 \rangle$	
$\langle 3, 5 \rangle$	
$\langle 5, 7 \rangle$	
$\langle 7, 8 \rangle$	



C3 Zie de grafiek.

- a** Wat is het maximum?
- b** Het laagste minimum is minder dan het hoogste minimum.
Bereken hoeveel procent minder.



Antwoorden

C1 a $\langle -, 1 \rangle$ en $\langle 3, 5 \rangle$
b $\langle 1, 3 \rangle$ en $\langle 5, - \rangle$

C2 afnemend dalend
toenemend stijgend
afnemend stijgend
toenemend dalend

C3 a 350
b 66,7%

5.2 Toenamedigrammen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij een grafiek of tabel een toenamediagram tekenen.
- Je kunt berekeningen doen met gegevens uit een toenamediagram.
- Je kunt bij een formule een toenamediagram tekenen.

○18



Het aantal radioluisteraars op een doordeweekse dag neemt in de loop van de ochtend toe. Zie de figuur. Hierin is N het aantal luisteraars in duizendtallen en t de tijd in uren met $t = 0$ om 6:00 uur. Van $t = 0$ tot $t = 2$ is de toename $\Delta N = 30 - 5 = 25$. Dus op het interval $[0, 2]$ is $\Delta N = 25$.

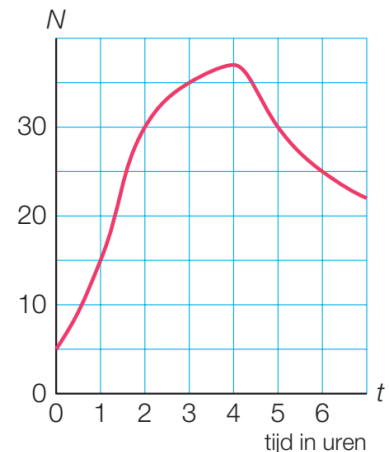
a Op het interval $[4, 6]$ is er sprake van een afname.

Is ΔN dan positief of negatief?

b Vul de tabel in.

interval	$[0, 2]$	$[2, 4]$	$[4, 6]$
ΔN	25		

c Hoe groot is de stapgrootte Δt bij elk interval in de tabel?



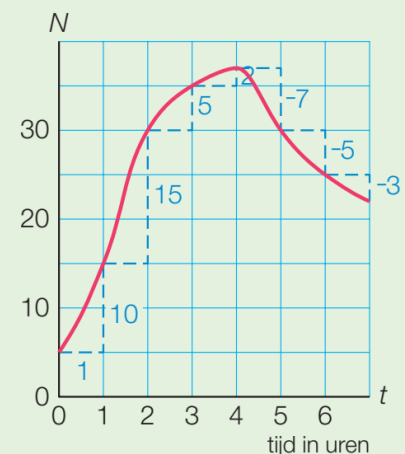
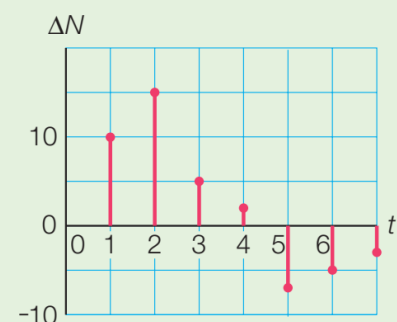
Theorie A Van grafiek naar toenamediagram

In opgave 18 heb je bij een grafiek, waar N tegen t is uitgezet, verschillende toenames van N berekend. Maak je de hele tabel met **stapgrootte** $\Delta t = 1$ bij de grafiek, dan krijg je de volgende tabel.

interval	$[0, 1]$	$[1, 2]$	$[2, 3]$	$[3, 4]$	$[4, 5]$	$[5, 6]$	$[6, 7]$
ΔN	10	15	5	2	-7	-5	-3

Aan de waarden in de tabel kun je niet meer zien hoeveel luisteraars er waren. Maar bijvoorbeeld wel dat het aantal luisteraars bij $t = 5$ minder was dan een uur eerder. De tabel geeft vooral inzicht in de verandering van de aantallen.

Hiernaast is bij de tabel een diagram getekend. Eerst is boven de rechtergrens van elk interval de bijbehorende ΔN uitgezet. Vervolgens zijn staafjes gemaakt door de punten met de t -as te verbinden. Het diagram dat zo ontstaat heet een **toenamediagram**.



In een toenamediagram met stapgrootte $\Delta t = 1$ lees je bij $t = 3$ de toename op het interval $[2, 3]$ af.

Voorbeeld

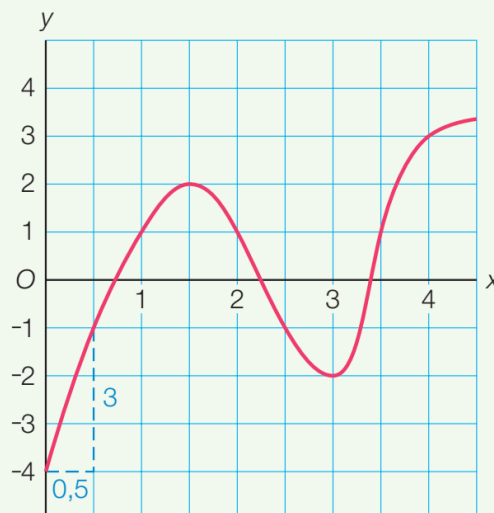
Zie de figuur.

Teken het toenamediagram op $[0; 3,5]$ met stapgrootte $\Delta x = 0,5$.

Aanpak

Maak een tabel met toenamen. De stapgrootte is $0,5$, dus het eerste interval is $[0; 0,5]$.

Zet in het toenamediagram telkens Δy uit boven de rechtergrens van het bijbehorende interval.

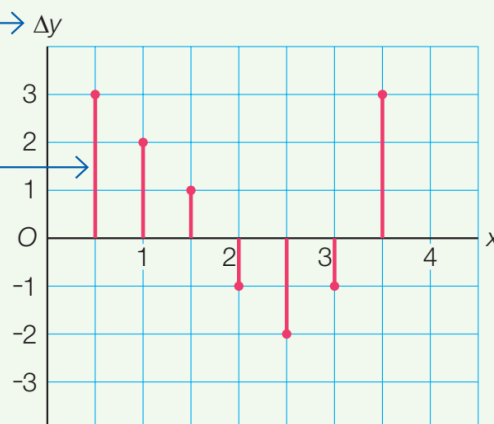


Uitwerking

interval	Δy
$[0; 0,5]$	3
$[0,5; 1]$	2
$[1; 1,5]$	1
$[1,5; 2]$	-1
$[2; 2,5]$	-2
$[2,5; 3]$	-1
$[3; 3,5]$	3

Zet Δy bij de verticale as.

Op $[0; 0,5]$ is de toename 3. Dus het staafje boven $0,5$ heeft lengte 3.

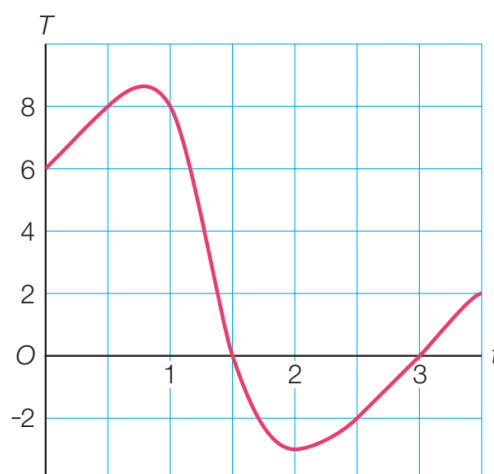


19 Zie het voorbeeld.

☐ ☐ Teken het toenamediagram op $[0, 4]$ met $\Delta x = 1$.

20 Zie de figuur.

- ☐ ☐ *
- Teken het toenamediagram op $[0, 3]$ met $\Delta t = 1$.
 - Teken het toenamediagram op $[0; 3,5]$ met $\Delta t = 0,5$.
 - De grafiek is dalend tussen het maximum en $t = 1$.
Waarom zie je dat niet terug in de toenamediagrammen?
 - Hoe zie je in de toenamediagrammen dat de grafiek toppen heeft?



- 21** De volgende tabel geeft informatie over het aantal grieppatiënten op een school. Hierbij is t de tijd in dagen en N het aantal grieppatiënten.

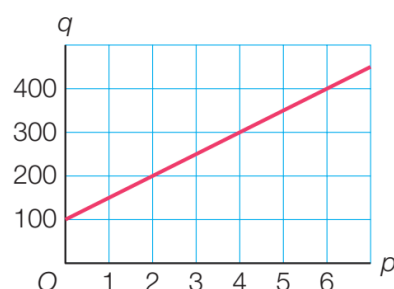
t	0	1	2	3	4	5
N	18	25	27	32	28	23

- Teken het toenamediagram op $[0, 5]$ met $\Delta t = 1$.
- Teken een mogelijk toenamediagram op $[0, 5]$ met $\Delta t = 0,5$.



- 22** Zie de figuur.

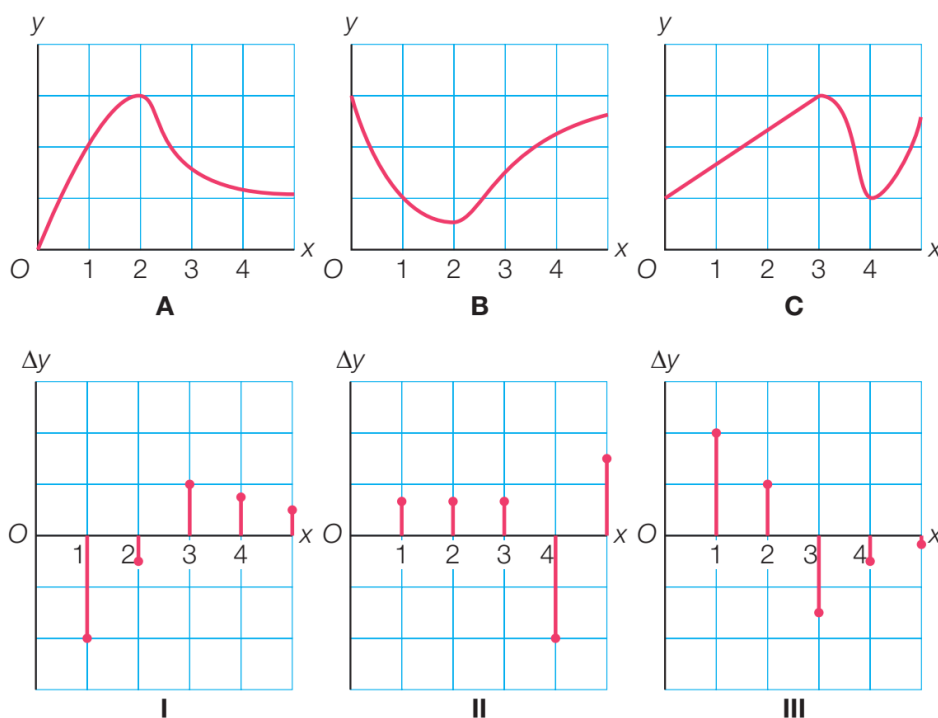
- Stel de formule van de lijn op.
- Teken het toenamediagram op $[0, 4]$ met $\Delta p = 1$.
- Hoe zie je de richtingscoëfficiënt van de lijn terug in het toenamediagram?
- Teken het toenamediagram op $[0, 4]$ met $\Delta p = 1$ bij de lijn $q = -15p + 400$.
- Hoe ziet een toenamediagram van de lijn $q = 200$ eruit?



- 23** Teken een mogelijk toenamediagram bij een grafiek die

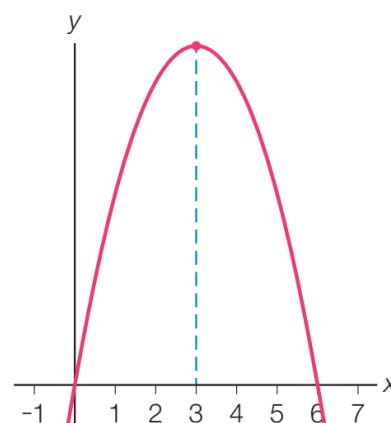
- één maximum heeft
- één minimum heeft
- bij een lineair verband hoort.

- A24** Hieronder zie je drie grafieken en drie toenamediagrammen. Bij elk van de grafieken hoort één van de toenamediagrammen. Zoek bij elke grafiek het juiste toenamediagram. Licht je keuzes toe.



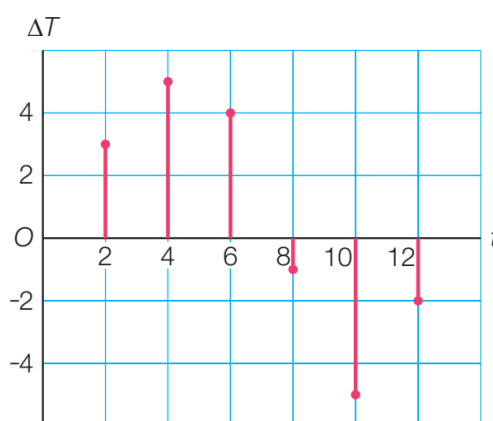
E25 * Zie de grafiek. De grafiek is symmetrisch en heeft één top bij $x = 3$. Bij de grafiek wordt een toenamediagram getekend op $[0, 6]$ met stapgrootte $\Delta x = 1$. Bij $x = 2$ wordt een staafje met $\Delta y = 3$ getekend.

- a Bij welke x -waarde wordt een staafje met $\Delta y = -3$ getekend?
- b Er wordt ook een staafje met $\Delta y = 5$ getekend. Bij welke x -waarde is dat?



O26 ☐ ◎ * Jasmijn heeft op een dag in juni van 8:00 uur tot 20:00 uur het temperatuurverloop bijgehouden. Ze heeft hiervan een toenamediagram gemaakt met stapgrootte 2 uur. Zie de figuur. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 8:00 uur en T de temperatuur in graden Celsius. Om 12:00 uur was het 20°C .

- a Licht toe dat het om 14:00 uur 24°C was.
- b Wat was de temperatuur om 16:00 uur? En om 20:00 uur?
- c Reken na dat de temperatuur om 8:00 uur 12°C was.



Theorie B Van toenamediagram naar grafiek

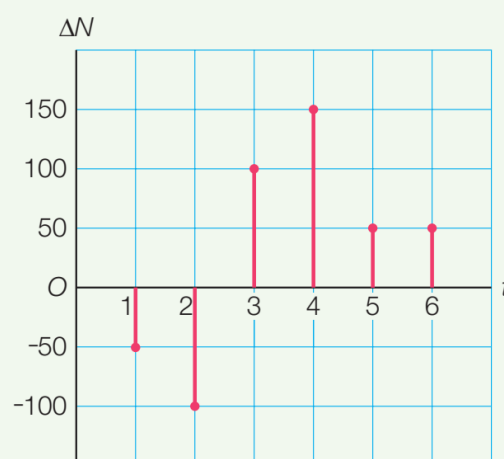
Zijn een toenamediagram en de coördinaten van een punt van de grafiek gegeven, dan kun je coördinaten van andere punten van de grafiek berekenen. Door deze punten kun je vervolgens een grafiek tekenen. Tenzij je nog meer informatie hebt over de grafiek, is in theorie elke grafiek door deze punten mogelijk.

Voorbeeld

Het toenamediagram geeft informatie over het aantal konijnen N in een duingebied. Hierin is t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari.

Op 1 april zijn er 850 konijnen.

- a Teken een grafiek bij deze gegevens.
- b Tussen 1 januari en 1 juli was het aantal konijnen één keer minimaal. De natuurbeheerder beweert dat dit minimum optrad in de maand februari. Kan dit kloppen?



Aanpak

- a** Op 1 april (dus op $t = 3$) geldt dat $N = 850$. Gebruik de toenames uit het toenamediaqram om de andere waarden van N te berekenen.

Uitwerking

a

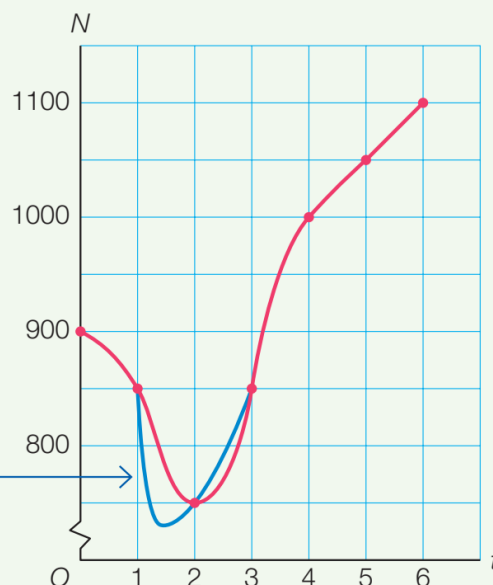
t	N
0	900
1	850
2	750
3	850
4	1000
5	1050
6	1100

-50 ← Zie het staafje bij $t = 1$.
 -100
 $+100$
 $+150$
 $+50$
 $+50$

Zie de rode grafiek.

Merk op dat elke grafiek door de zeven gevonden punten bij het toenamediaqram past.

- b** Ja, dat kan kloppen, zie de blauwe grafiek.

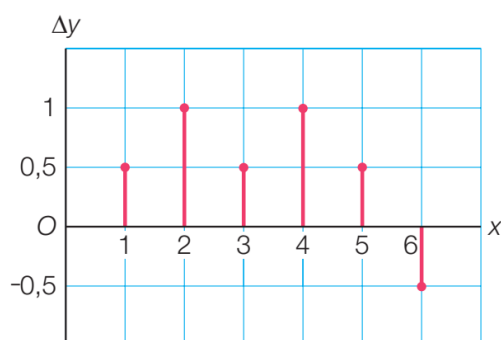


R27 Zie vraag b van het voorbeeld.

□ ⊗ * Zou het aantal konijnen niet in februari, maar in maart minimaal geweest kunnen zijn? Licht toe.

28 Zie het toenamediaqram. Om bij dit toenamediaqram een mogelijke

□ ⊗ * grafiek door het punt (2, 3) te tekenen is een tabel gemaakt.



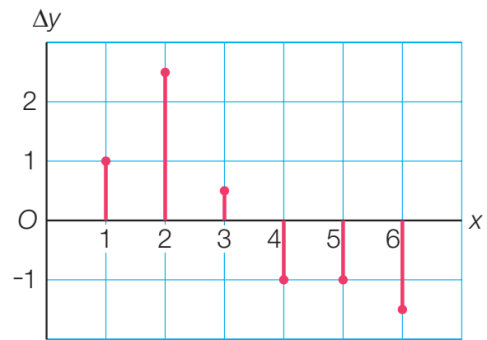
x	y
0	
1	$+0,5$
2	$+$
3	$+$
4	$+$
5	$+$
6	$-$

- a** Vul de getallen bij de pijlen naast de tabel in.
b Welke y -waarde hoort bij $x = 2$? Vul deze in de tabel in.
c Vul de tabel verder in.
d Teken een grafiek die bij het toenamediaqram hoort en door (2, 3) gaat.
e Waarom zijn er meerdere grafieken mogelijk? Teken met een andere kleur nog een mogelijke grafiek.

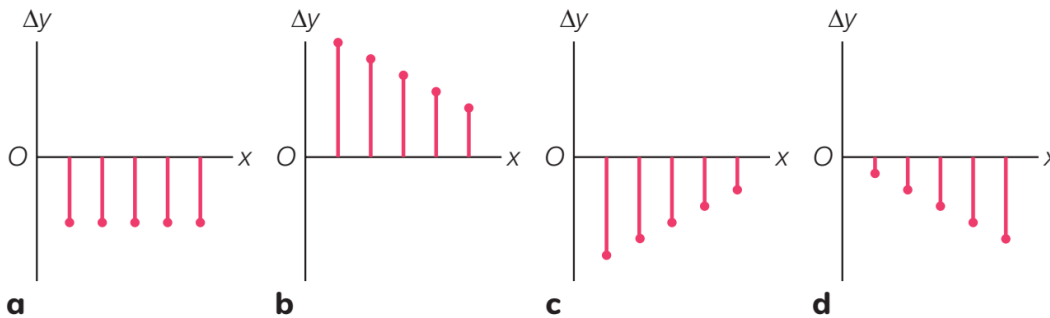
29 Zie het toenamediagram.



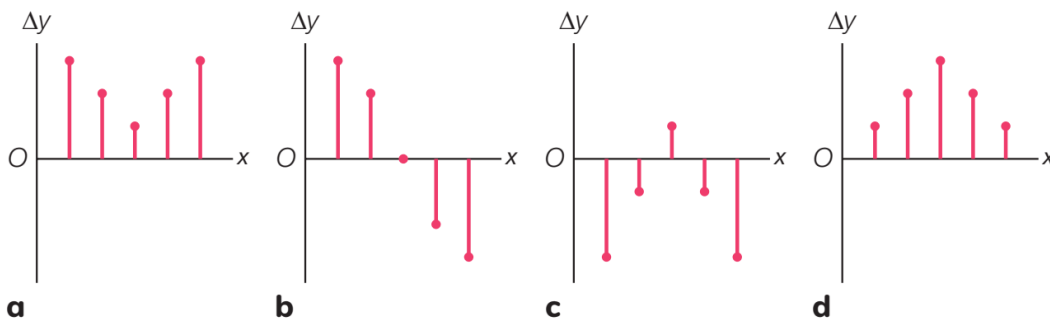
- a** Teken een grafiek die bij het toenamediagram hoort en die door het punt $(3, -2)$ gaat.
- b** De grafiek waarbij dit toenamediagram hoort, heeft maar één maximum. Kan dit maximum optreden bij $x = 2,5$? En bij $x = 1,5$? Licht toe.
- c** Teken het toenamediagram met $\Delta x = 2$ op $[0, 6]$.



30 Geef bij de onderstaande toenamediagrammen de juiste soort van stijgen of dalen. Kies uit: toenemend stijgend, afnemend stijgend, constant stijgend, toenemend dalend, afnemend dalend en constant dalend.



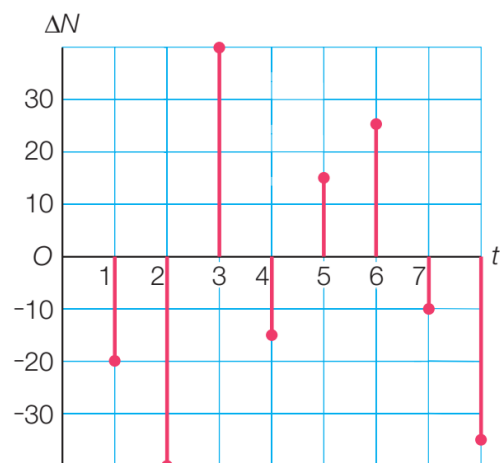
31 Schets mogelijke grafieken bij de volgende toenamediagrammen.



A32 In Nationaal Park De Hoge Veluwe kun je gebruiken van witte leenfietsen. Op een aantal plekken in het park zijn stallingen waar je een fiets kunt meenemen of wegzetten. Een beheerder van het park houdt op een dag vanaf 9:00 uur bij hoeveel fietsen er in één van de stallingen staan. Zie het toenamediagram waarin t de tijd in uren is met $t = 0$ om 9:00 uur en N het aantal fietsen in de stalling. Om 15:00 uur stonden er 110 fietsen in de stalling.



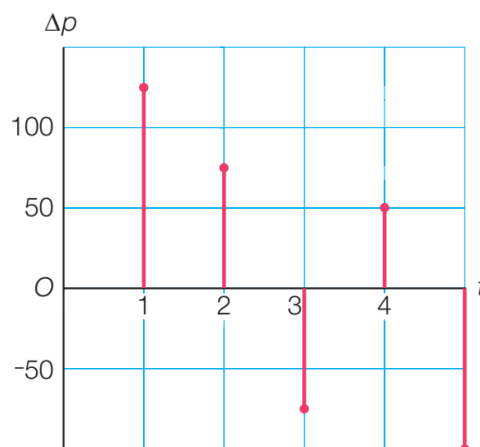
- a** Hoeveel fietsen stonden er om 17:00 uur in de stalling? En om 9:00 uur?
- b** Tussen 10:00 en 11:00 uur hebben in totaal 30 personen een fiets in de stalling gezet. Hoeveel fietsen zijn er tussen 10:00 en 11:00 uur meegenomen?



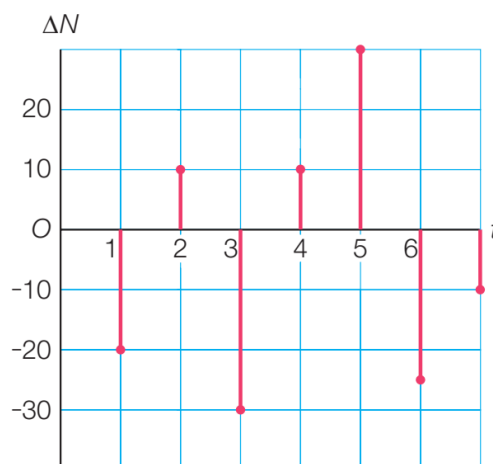
A33

Tijdens de vaart van Dubai naar de haven van Rotterdam houdt de stuurman van een grote olietanker elke dag de verandering van de olieprijs bij. Zie het toenamediaagram. Hierin is t de tijd in dagen met $t = 0$ op 11 maart om 0:00 uur en Δp de prijsverandering in dollarcenten per vat. Een vat komt overeen met 127,2 kg olie. De tanker vervoert 210 000 ton olie. Op 14 maart om 0:00 uur was de olieprijs 101,50 dollar per vat. Geef in deze opgave de antwoorden in miljoenen dollar en rond af op één decimaal.

- Bereken de totale waarde van de olie in de tanker op 16 maart om 0:00 uur. Gebruik dat 1 ton = 1000 kg.
- De stuurman berekent elke dag om 0:00 uur de waarde van de olie in de tanker. Wat is het verschil tussen de hoogste en laagste waarde die hij berekent?

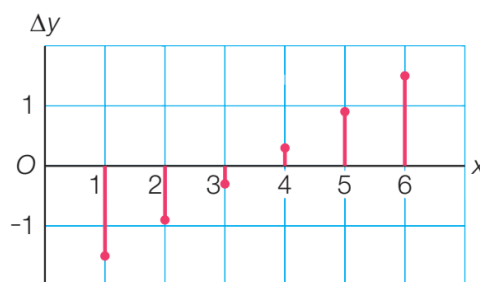
**A34**

Op een zonnige dag houdt Daan bij hoeveel mensen er op een groot terras zitten. Zie het toenamediaagram met t de tijd in uren en $t = 0$ om 15:00 uur en N het aantal mensen op het terras. Onderzoek hoeveel mensen er om 15:00 uur minstens op het terras hebben gezeten.

**E35**

Bij het toenamediaagram hiernaast hoort een grafiek met één minimum.

Voor welke waarden van x kan dit minimum optreden? Geef een zo groot mogelijk interval.



036



Tom maakt bij de formule $N = \frac{36}{2 + 0,5 \cdot 2^t}$ een toenamediagram op $[0, 4]$ met stapgrootte $\Delta t = 1$. Hij is begonnen met de tabel hiernaast.

- Bereken N voor $t = 4$. Vul deze in de tabel in.
- Vul de twee ontbrekende getallen bij de pijlen in.
- Teken het toenamediagram.

t	N
0	14,4
1	12
2	9
3	6
4	

Theorie C Formules en toenamediagrammen

In opgave 36 heb je een toenamediagram getekend bij een gegeven formule. Je kunt de GR gebruiken om bij een formule een tabel te maken. In de volgende module leer je hoe dat gaat.

[►GR] Neem de module **Formules en tabellen** door.

Bij de tabel die de GR geeft, kun je de toenamen berekenen. Vervolgens kun je het toenamediagram tekenen.

Voorbeeld

De directie van een pretpark hanteert voor het aantal personen N in de rij voor de kassa het model $N = t^3 - 12t^2 + 36t$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 9:00 uur. De kassa is geopend van 9:00 uur tot 15:00 uur. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van N .

Teken het toenamediagram op $[0, 6]$ met $\Delta t = 1$.



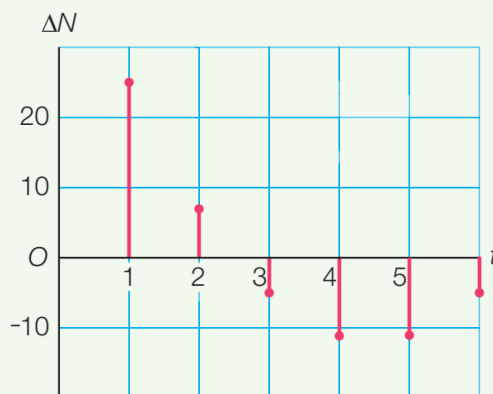
Aanpak

Voer de formule in op de GR en maak een tabel met t en N . Bereken daarna de toenamen.

Uitwerking

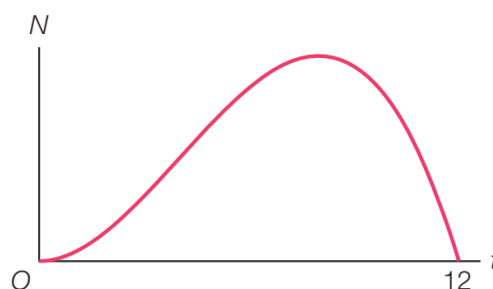
Voer in $y_1 = x^3 - 12x^2 + 36x$.

t	N
0	0
1	25
2	32
3	27
4	16
5	5
6	0



37    Het aantal personen dat zich op een zomerse dag in een dierentuin bevindt, is te beschrijven met de formule $N = 480t^2 - 40t^3$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 9:00 uur. De dierentuin sluit om 21:00 uur. Zie de grafiek.

- Welke soorten van stijgen en dalen herken je in de grafiek?
- Teken het toenamediagram op $[0, 12]$ met $\Delta t = 2$.



38    Gegeven zijn de formules $y_1 = x^2$ en $y_2 = 2^x$.

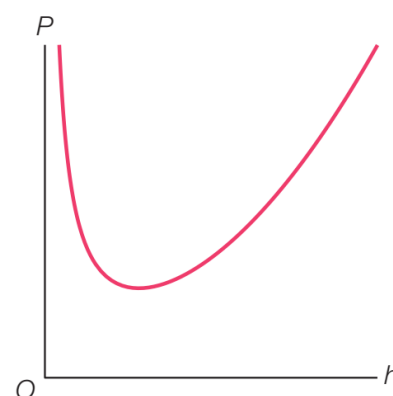
- Teken de toenamediagrammen bij y_1 en y_2 met $\Delta x = 1$ op $[0, 4]$.
- In elk van de toenamediagrammen is een regelmaat te herkennen. Beschrijf deze regelmaat.
- Bij welke formule zal y op den duur het grootst zijn? Licht je antwoord toe aan de hand van de regelmaat die je in vraag b hebt gevonden.

A39    Een fabrikant van verpakkingsmateriaal maakt luxe doosjes voor kleine cadeaus. Hij gebruikt de formule

$$P = 0,45h^2 + \frac{165}{h} + 10,3$$

voor de productiekosten in eurocent per doosje. Hierin is h de hoogte van het doosje in cm. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van P .

- Bereken de totale kosten in euro's voor het produceren van 1200 doosjes met een hoogte van 10 cm.
- De fabrikant overweegt de hoogte van de doosjes te veranderen van 10 naar 12 cm. Bereken met hoeveel procent de productiekosten per doosje dan toenemen.
- Teken het toenamediagram op $[2, 14]$ met $\Delta h = 2$. Rond ΔP af op gehele.
- Hoe zie je in het toenamediagram dat de grafiek van P van afnemend dalend naar toenemend stijgend gaat?



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan bij een grafiek of tabel een toenamediagram tekenen.
- ☐ Ik kan berekeningen doen met gegevens uit een toenamediagram.
- ☐ Ik kan bij een formule een toenamediagram tekenen.

► OPGAVE C4
THEORIE A

► OPGAVE C5
THEORIE B

► OPGAVE C6
THEORIE C

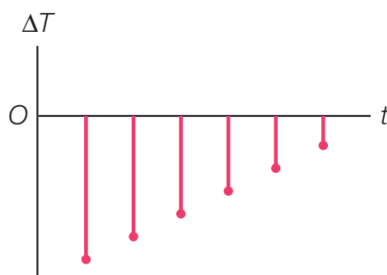
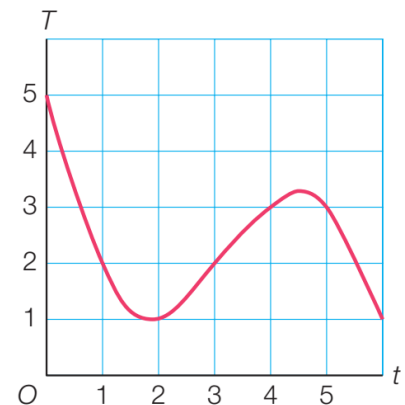
C4 Zie de grafiek.

a Vul de tabel in.

interval	[0, 2]	[2, 4]	[4, 6]
ΔT			

b Teken het toenamediagram op $[0, 6]$ met $\Delta t = 2$.

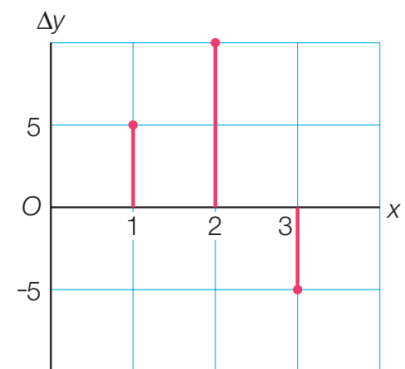
c Matthijs heeft het toenamediagram hieronder getekend bij een deel van de grafiek.



Bij welk interval zou dit toenamediagram kunnen horen?
Kies uit: $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ en $[5, 6]$. Licht je keuze toe.

C5 Zie het toenamediagram. Gegeven is dat de grafiek bij dit toenamediagram door $(1, 1)$ gaat.

- a** Bereken welke y -waarde bij $x = 3$ hoort.
- b** Heeft de bijbehorende grafiek een top? Licht toe.
- c** Kan het zijn dat de grafiek bij dit toenamediagram geheel boven de x -as ligt? Licht toe.



C6 Gegeven is de formule $N = 0,5t^3 - 1,5t^2 - 3$.
Teken het toenamediagram op $[0, 4]$ met $\Delta t = 1$.

Antwoorden

C4 a -4 2 -2

b *

c $[1, 2]$ *

C5 a $y = 6$

b ja *

c nee *

C6 *

5.3 Differentiequotienten

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij een grafiek of tabel differentiequotiënten berekenen.
- Je kunt de betekenis van een differentiequotiënt toelichten in praktische situaties.
- Je kunt bij een formule differentiequotiënten berekenen.

40



In 2024 passeerde Nederland de grens van 18 miljoen inwoners. In de tabel kun je voor verschillende perioden de toename van het aantal inwoners N in miljoenen aflezen.

Stijn bekijkt de tabel en zegt:

“Er is sinds 1840 sprake van een afnemende stijging.”

Welke fout maakt Stijn?

BEVOLKING VAN NEDERLAND

periode	toename ΔN
1840-1940	5,8
1940-1970	4,2
1970-1995	2,4
1995-2015	1,5
2015-2025	1,1

Theorie A Gemiddelde verandering

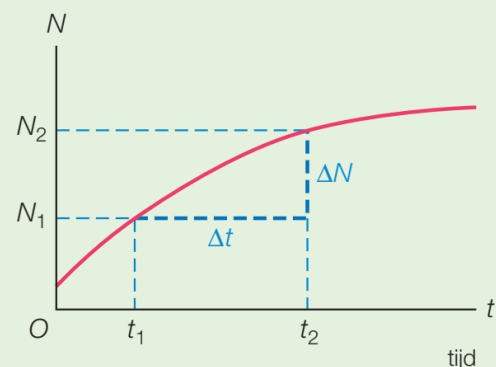
Om veranderingen van inwoneraantallen N te vergelijken, gebruik je ΔN . Het ligt voor de hand om te zeggen: “Hoe groter ΔN , des te sterker verandert N .” Maar je moet hiermee voorzichtig zijn, want ook de lengte Δt van het bijbehorende tijdsinterval speelt een rol.

Om de veranderingen goed met elkaar te vergelijken bekijk je de **gemiddelde veranderingen** per tijdseenheid.

Zo geldt voor de tabel van opgave 40:

- voor de periode 1840-1940 neemt N met 5,8 toe, dus de gemiddelde verandering is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{5,8}{100} = 0,058$ miljoen per jaar.
- voor de periode 1940-1970 neemt N met 4,2 toe, dus de gemiddelde verandering is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{4,2}{30} = 0,14$ miljoen per jaar.

Je ziet dat de gemiddelde verandering is toegenomen van 0,058 tot 0,14 miljoen per jaar. Er is dus geen sprake van een afnemende stijging, zoals Stijn in opgave 40 beweert.



$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ is de gemiddelde verandering van N per tijdseenheid.

41

In de tabel staat informatie over het aantal woningen N in miljoenen in Nederland.

WONINGVOORRAAD NEDERLAND

jaar	1970	1980	1987	1995	2000	2023
N	3,75	4,85	5,59	6,30	6,59	8,05

- a** Hoeveel woningen zijn erbij gekomen in de periode 1980-1987? Bereken voor deze periode de gemiddelde toename per jaar. Geef je antwoord in miljoenen en rond af op drie decimalen.

Hiernaast is een tabel gemaakt met periode,

Δt , ΔN en $\frac{\Delta N}{\Delta t}$.

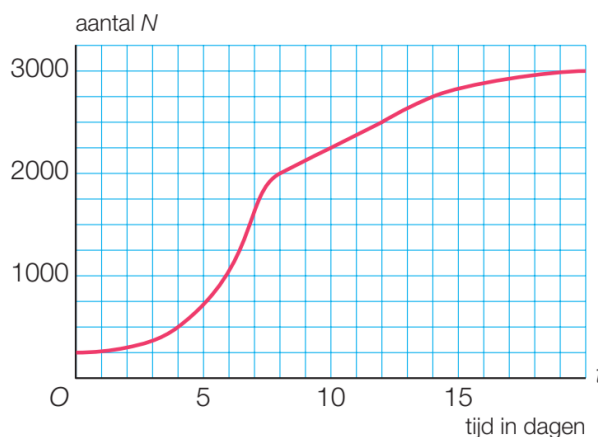
- b** Vul de tabel verder in.
c In welke periode is de gemiddelde toename het grootst?
d Trek een conclusie over het verloop van de woningvoorraad in Nederland.

periode	Δt	ΔN	$\frac{\Delta N}{\Delta t}$
1970-1980	10	1,10	0,110
1980-1987			

42

In de figuur is de groei weergegeven van een populatie fruitvliegjes in een afgesloten ruimte.

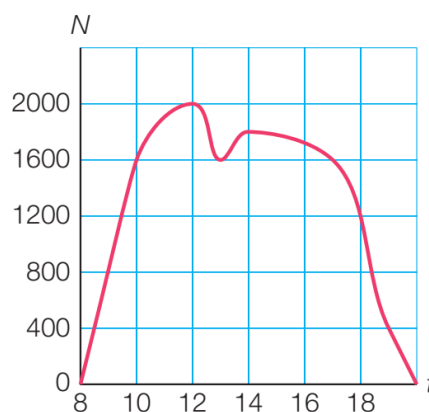
- a** Bereken de gemiddelde toename per dag van het aantal fruitvliegjes gedurende de eerste tien dagen.
b Hoe kun je in de figuur zien dat de gemiddelde toename per dag op $[5, 8]$ groter is dan op $[10, 14]$?
c Zeg zonder berekening op welk interval de gemiddelde toename per dag het grootst is en ook op welk interval het kleinst. Kies uit $[0, 4]$, $[4, 8]$, $[8, 12]$ en $[12, 16]$.



A43

In de figuur is het aantal auto's N op een parkeerterrein bij een dierentuin uitgezet tegen de tijd t in uren. Het betreft een zaterdag in mei.

- a** Bereken $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ op $[9, 13]$.
b Bereken de gemiddelde afname van het aantal auto's per uur op $[12, 17]$.
c Geef een interval waarop de gemiddelde toename 0 auto's per uur is.



A44

Zie opgave 43.

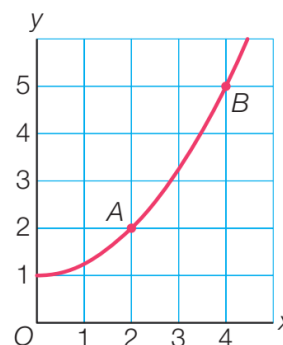
Geef een interval waarop de gemiddelde toename 200 auto's per uur is.

45 Op de grafiek hiernaast liggen de punten $A(2, 2)$ en $B(4, 5)$.



a Bereken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op $[2, 4]$.

b Wat heeft je antwoord van vraag a te maken met de richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B ?

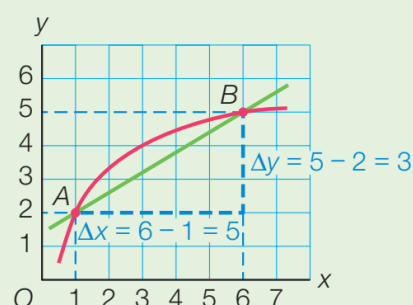


Theorie B Differentiequotiënten bij grafieken

Op het interval $[1, 6]$ in de grafiek hiernaast is $\Delta x = 6 - 1 = 5$ en $\Delta y = 5 - 2 = 3$.

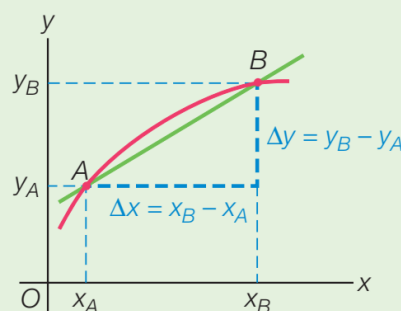
De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5} = 0,6$. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ heet het **differentiequotiënt** van y op het interval $[1, 6]$.

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is de richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B . In plaats van ‘de richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B ’ zeggen we ook ‘de **helling** van de lijn door A en B ’.



Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van y op $[x_A, x_B]$ is

- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (oftewel de helling) van de lijn door A en B
- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



Voorbeeld

Zie de figuur.

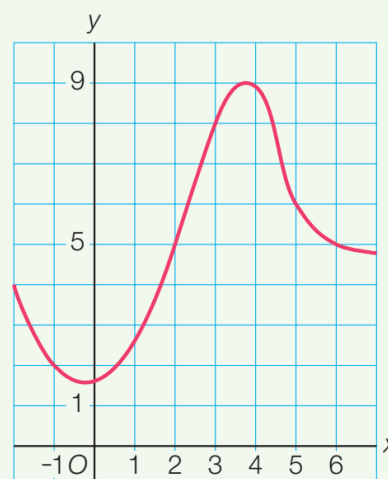
- a Bereken de gemiddelde verandering van y op het interval $[-1, 3]$.
- b Bereken het differentiequotiënt op $[3, 5]$.

Uitwerking

- a De gemiddelde verandering op $[-1, 3]$ is

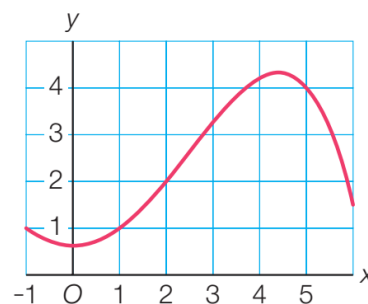
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 2}{3 - (-1)} = 1,5.$$

- b Op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 8}{5 - 3} = -1$.



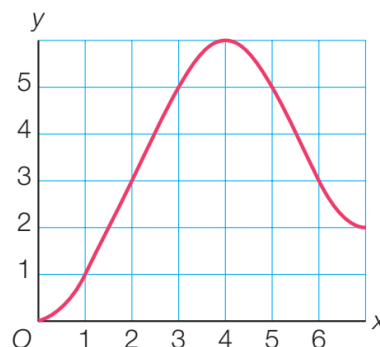
46 Zie de figuur.

- a** Bereken de gemiddelde verandering van y op $[2, 5]$.
b Bereken het differentiequotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op $[-1, 5]$.
c Geef een interval waarop de gemiddelde verandering van y nul is.



47 Zie de figuur.

- a** Bereken het differentiequotient op $[1, 3]$.
b Bereken het differentiequotient op $[4, 6]$.
 Wat betekent het dat je antwoord negatief is?
c Bereken het differentiequotient op $[2, 7]$.
d Geef een interval waarop $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gelijk is aan 0.
e Geef een interval waarop $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gelijk is 1,5.



48 Zie de figuur. De grafiek is een lijn.

- a** Onderzoek wat de differentiequotienten zijn op $[0, 2]$, $[2, 5]$, $[5, 6]$ en $[6, 10]$.
b Geef de formule van de lijn.



A49 De grafiek gaat over het verloop van de

a $\frac{\Delta T}{\Delta t}$?

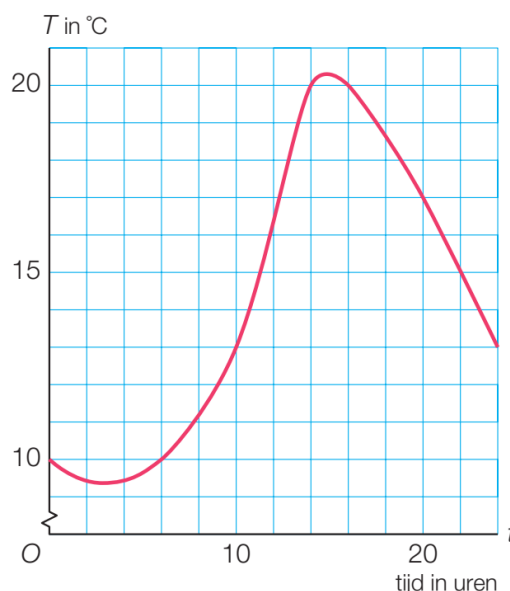
b Bereken $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op $[6, 10]$ en op $[9, 14]$.

c Bereken $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op $[16, 20]$. Wat betekent het dat

dit differentiequotient negatief is?

d Geef twee intervallen waarop de gemiddelde verandering 0°C per uur is.

e Geef een interval waarop de gemiddelde verandering $0,4^\circ\text{C}$ per uur is.

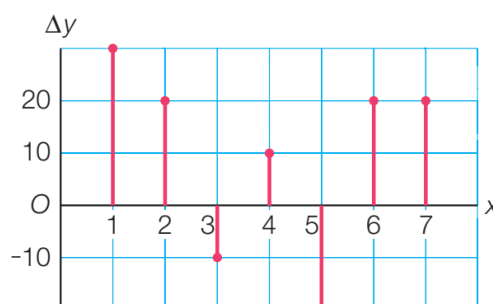


A50 Zie het toenamediagram.

a Bereken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op $[0, 7]$.

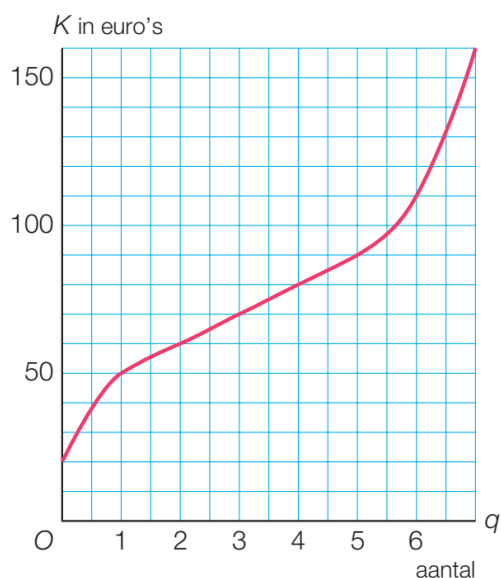
b Bereken het differentiequotient op $[2, 6]$.

c Geef drie andere intervallen waarop de gemiddelde verandering van y nul is.



A51 Zie de kostengrafiek.

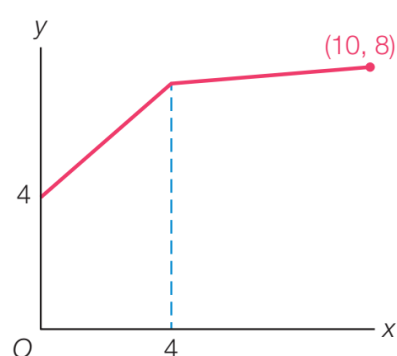
- ⊗*** **a** Op welke van de intervallen $[0, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 6]$ en $[4, 6]$ is de gemiddelde verandering van K in euro's per stuk het grootst? En op welke het kleinst?
- b** Voor welke q is de gemiddelde toename van de kosten op $[0, q]$ gelijk aan die op het interval $[0, 4]$? Licht je antwoord toe met behulp van de figuur.



E52 Een grafiek bestaat uit twee lijnstukken en heeft een knik bij $x = 4$. De grafiek gaat door $(0, 4)$ en $(10, 8)$.

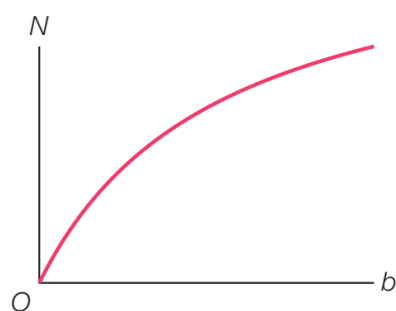
Op $[0, 5]$ geldt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,7$.

Bereken de y -waarde bij $x = 4$.



⊙53 Een ecoduct is een viaduct dat wilde dieren gebruiken om drukke wegen over te steken.

Uit een onderzoek bleek dat het aantal stuks wild (zoals herten, everzwijnen en konijnen) dat per etmaal een ecoduct gebruikt afhankelijk is van de breedte van het ecoduct. Men gebruikt de formule $N = 20 - \frac{100}{b + 5}$. Hierin is b de breedte van het ecoduct in meter en N het aantal stuks wild dat per etmaal het ecoduct gebruikt. Hieronder zie je de grafiek van N .



- a** Reken na dat bij $b = 5$ hoort $N = 10$ en dat bij $b = 15$ hoort $N = 15$.
- b** Bereken de gemiddelde verandering van N als b toeneemt van 5 naar 15 meter.
- c** Bereken het differentiequotiënt op het interval $[15, 20]$.

Theorie C Differentiequotiënten en formules

Om bij de formule $N = 20 - \frac{100}{b+5}$ van opgave 53 het differentiequotiënt op het interval $[15, 25]$ te berekenen ga je als volgt te werk.

- Bereken N bij $b = 15$. Je krijgt $N = 20 - \frac{100}{15+5} = 15$.
- Bereken N bij $b = 25$. Je krijgt $N = 20 - \frac{100}{25+5} = 16,6\dots$
- Bereken het differentiequotiënt $\frac{\Delta N}{\Delta b}$ op $[15, 25]$. Je krijgt
$$\frac{\Delta N}{\Delta b} = \frac{16,6\dots - 15}{25 - 15} \approx 0,17 \text{ stuks wild per etmaal per meter.}$$

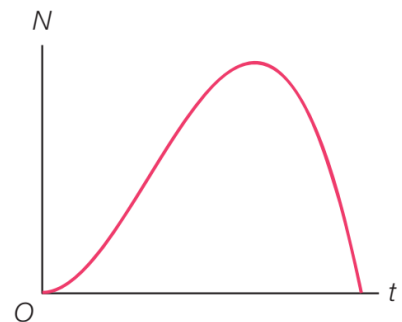
In opgave 53b heb je gezien dat de gemiddelde verandering op het interval $[5, 15]$ gelijk is aan 0,5 stuks wild per etmaal per meter. Dus het verbreden van een ecoduct van 5 naar 15 meter heeft meer effect dan het verbreden van 15 naar 25 meter. In het eerste geval levert elke meter verbreding gemiddeld een toename op van 0,5 stuks wild per etmaal, terwijl in het tweede geval deze toename slechts 0,17 is.

54



In de figuur zie je het verloop van het aantal grieppatiënten N in een stad. Hierbij hoort de formule $N = 140t^2 - 5t^3$ met de tijd t in dagen.

- Bereken het differentiequotiënt op $[3, 8]$.
- Bereken de gemiddelde toename van N op $[10, 16]$.
- Bereken de gemiddelde toename van N in de tweede week.



55



Zie opgave 54 met de formule $N = 140t^2 - 5t^3$. Vera beweert dat er een periode is waarin de gemiddelde toename van N meer dan 1300 patiënten per dag is. Onderzoek of ze gelijk heeft.

A56



Gegeven is de kostenformule $K = q^3 - 6q^2 + 13q + 15$. Hierin is K in duizenden euro's en q de productie in duizendtallen. De productie is maximaal 8000 stuks.

- Wat is de eenheid van $\frac{\Delta K}{\Delta q}$?
- Bereken het differentiequotiënt op $[4, 6]$.
- Onderzoek of de kosten gemiddeld meer toenemen als de productie toeneemt van 4000 tot 6000 stuks of als de productie toeneemt van 3600 tot 6100 stuks.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan bij een grafiek of tabel differentiequotiënten berekenen.
- ☐ Ik kan de betekenis van een differentiequotiënt toelichten in praktische situaties.
- ☐ Ik kan bij een formule differentiequotiënten berekenen.

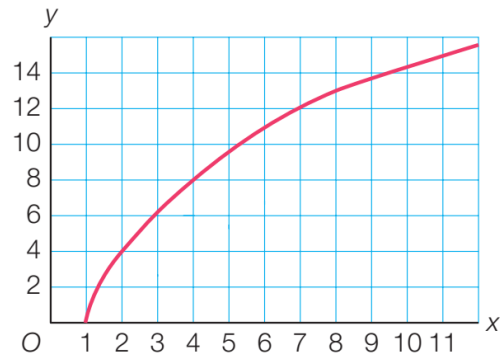
► OPGAVE C7
THEORIE A

► OPGAVE C8
THEORIE B

► OPGAVE C9
THEORIE C

C7 Zie de figuur.

- a** Bereken het differentiequotiënt op $[4, 8]$.
- b** Bij $x = 20$ hoort $y = 16$.
Bereken het differentiequotiënt op $[2, 20]$.



C8 Lars fietst naar school. Met zijn fietscomputer bepaalt hij de afstand A in km die hij aflegt en de tijd t in minuten dat hij fietst. Hij vindt $\frac{\Delta A}{\Delta t} = 0,3$.

- a** Wat is de praktische betekenis van dit differentiequotiënt?

Marc fietst in de bergen. Zijn hoogtemeter geeft aan dat hij op een hoogte van 1500 meter is. Twintig minuten later is zijn hoogte 1200 meter.

- b** Bereken het differentiequotiënt $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ met h de hoogte in meter en t de tijd in minuten. Geef de praktische betekenis van dit differentiequotiënt.

C9 Een bedrijf berekent de maandelijkse opbrengst R in euro's met de formule $R = -0,001q^2 + 12q$. Hierin is q het aantal artikelen dat per maand verkocht wordt. Bereken het differentiequotiënt op het interval $[2000, 3000]$ en geef hiervan de praktische betekenis.

Antwoorden

C7 **a** 1,25
b $\frac{2}{3}$

C8 **a** Zijn gemiddelde snelheid is 0,3 km/minuut.
b -15 meter per minuut

Hij is gemiddeld 15 meter per minuut gedaald.

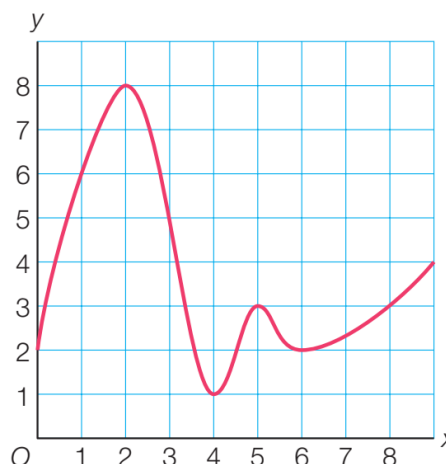
C9 7 euro per stuk

De maandelijkse opbrengst stijgt met gemiddeld 7 euro per stuk als het aantal maandelijks verkochte artikelen toeneemt van 2000 tot 3000 stuks.

Kennis- en vaardigheidentest

5.1 Stijgen en dalen

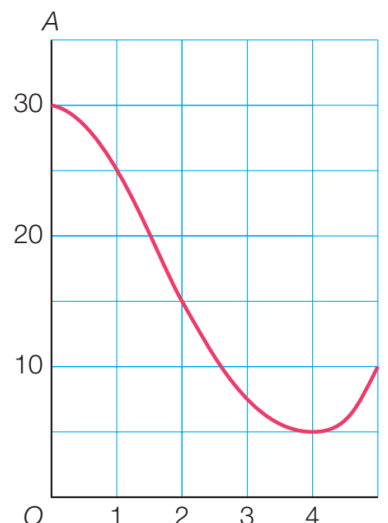
- 1** De grafiek in de figuur is gegeven op het interval $[0, 9]$.
- a** Welke soorten van stijgen en dalen herken je? Noteer telkens ook het bijbehorende interval.
 - b** Geef de minima van de grafiek.
 - c** Hoeveel procent groter is het grootste maximum vergeleken met het kleinste maximum?



- 2** De ontwikkelaar van een nieuwe game houdt bij hoe groot het spelersaantal is. Dat aantal neemt de eerste twee weken met constante stijging toe tot 400 spelers. Vervolgens is er gedurende drie weken sprake van een toenemende stijging tot 2000 spelers. Daarna neemt de stijging af. Acht weken na de lancering van de game bereikt het spelersaantal een maximum van 3200.
- a** Teken een grafiek bij deze gegevens.
 - b** Schat met behulp van de grafiek het spelersaantal zes weken na de lancering.
 - c** Twaalf weken na de lancering bereikt het spelersaantal voor de tweede keer een maximum. Beschrijf het verloop van de grafiek van het spelersaantal van acht tot twaalf weken na lancering. Gebruik daarbij de woorden: toenemende, afnemende, stijging, daling, minimum en maximum.

5.2 Toenamediagrammen

- 3** Zie de figuur.
Teken het toenamediagram met $\Delta t = 1$.



- 4** Voor het printen van onderdelen met een 3D-printer wordt het model $Q = 144t^2 - 24t^3$ gebruikt. Hierbij is Q het totale plasticverbruik in mm^3 en t de printtijd in minuten. De maximale printtijd is 4 minuten.

- a** Toon aan dat $\Delta Q = 264$ op $[1, 2]$. Wat is hiervan de praktische betekenis?
b Teken het toenamediagram op $[0, 4]$ met $\Delta t = 1$.

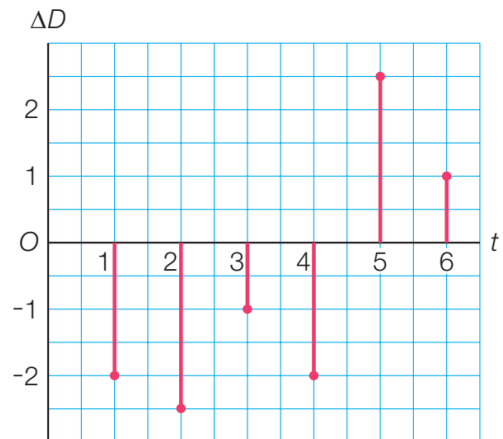
- 5** De apparatuur van een duikboot registreert de verandering van de waterdruk tijdens het duiken. In het toenamediagram zie je een deel van deze registratie. Hierin is t de tijd in kwartieren met $t = 0$ om 8:00 uur en D de waterdruk in bar.

Om 8:30 uur was de waterdruk 4 bar.

- a** Bereken de waterdruk om 9:30 uur.

Hoe dieper je duikt, hoe groter de waterdruk. Aan de oppervlakte is de druk 1 bar en elke 10 meter die je duikt komt daar 1 bar bij.

- b** Hoe laat kwam de duikboot aan de oppervlakte?
c Teken het toenamediagram op $[0, 6]$ met stapgrootte 30 minuten.



5.2 Differentiequotiënten

- 6** Zie de figuur van vraag 3.

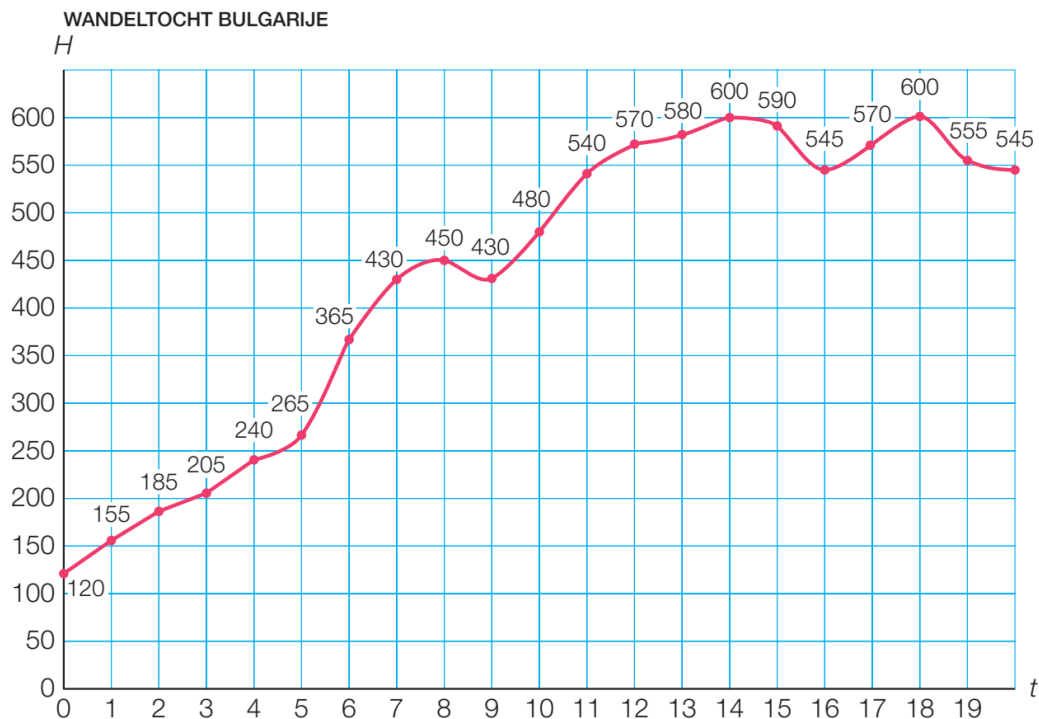
- a** Bereken het differentiequotiënt $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ op de intervallen $[0, 2]$ en $[3, 5]$.
b Noteer een interval waarop het differentiequotiënt gelijk is aan -5 .

- 7** In de formule $W = -0,01q^3 + 1,5q^2 + 30q - 500$ is W de winst in duizenden euro's en q de productie in duizendtallen.

- a** Bereken het differentiequotiënt op $[5, 25]$ en geef hiervan de praktische betekenis.
b Bereken de gemiddelde toename van de winst in euro's per stuk als de productie toeneemt van 50 000 tot 75 000 stuks.
c Bereken de gemiddelde verandering van W in euro's per stuk als de productie toeneemt van 80 000 tot 88 000 stuks.

Gemengde opgaven

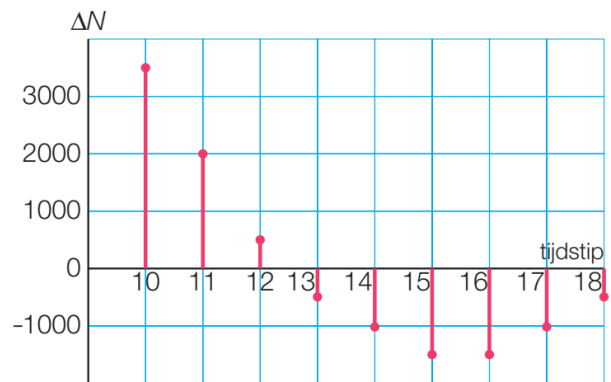
- 1** Stijn en Marlijn nemen tijdens een wandeltocht in Bulgarije een hoogtemeter mee. Ze beginnen hun tocht in het dal en eindigen bij een hut. De resultaten van de hoogtemeter zijn verwerkt in de grafiek. De hoogte H is in meters en de tijd t in kwartieren, met $t = 0$ om 9:00 uur 's ochtends.



- Geef voor alle maxima en minima op het interval $[0, 20]$ aan hoe laat het was en welke hoogte hierbij hoort.
- In welk kwartier zijn Stijn en Marlijn het snelst gestegen? Hoeveel meter was dat?
- Hoeveel meter per minuut stegen Stijn en Marlijn gemiddeld tussen het eerste maximum en het laatste maximum van de tocht?
- Op het interval $[0, x]$ was $\frac{\Delta H}{\Delta t}$ het grootst. Geef de waarde van x . Gebruik de figuur.
- Geef een interval waarop $\frac{\Delta H}{\Delta t} = 0$.
- Teken het toenamediaagram op het interval $[0, 20]$. Neem stapgrootte 1 uur.



- 2** Zie het toenamediagram bij het aantal bezoekers N dat zich in een pretpark bevindt. Om 14:00 uur waren er 7500 bezoekers in het park.
- Hoeveel bezoekers waren er om 11:00 uur?
 - Teken een mogelijke grafiek van het aantal bezoekers tussen 9:00 uur en 18:00 uur.
 - Tessa werkt bij de kassa's van het park. Ze beweert dat tussen 11:00 uur en 12:00 uur meer dan 1000 bezoekers het park zijn binnengekomen. Kan dat kloppen? Licht toe.
 - De directeur van het pretpark beweert dat op het drukste moment van de dag wel 10 000 bezoekers op het park waren. Kan dat kloppen? Licht toe.



- 3** Biologen hebben ontdekt dat in een nationaal park in Europa het aantal koolmezen toenemend stijgt. In 2015 ($t = 0$) waren er 530 koolmezen, in 2025 ($t = 10$) waren dat er 630.
- Teken voor de periode 2015-2025 een mogelijk toenamediagram met $\Delta t = 2$. Ga er hierbij van uit dat de toenames steeds veelvoudig zijn van vijf, dus bijvoorbeeld 10 of 25.

In het park was er bij roodborsten sprake van een constante daling, en wel van 9640 in 2015 tot 8840 in 2025.

- Teken het bijbehorende toenamediagram met $\Delta t = 1$.

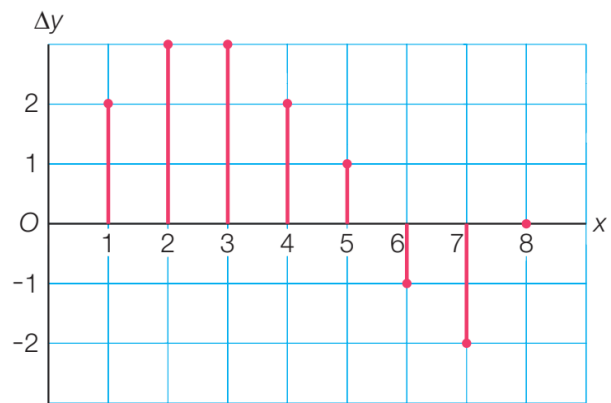
In het park kwamen voor 2015 geen bosuilen voor. In 2015 werden op een zorgvuldig gekozen bosperceel 100 bosuilen uitgezet. Het aantal bosuilen op dit perceel nam jaarlijks met 10% toe.

- Teken voor de periode 2015-2025 het toenamediagram dat hoort bij de bosuilen. Neem $\Delta t = 2$.

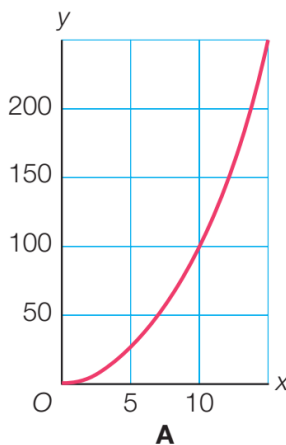
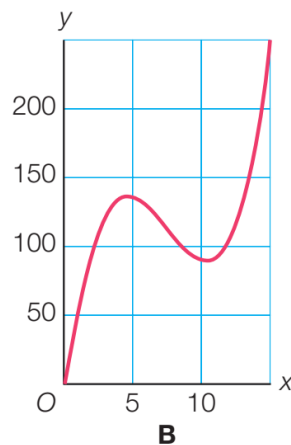
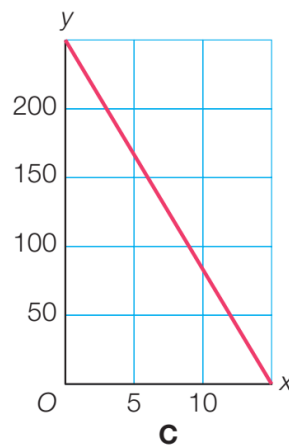
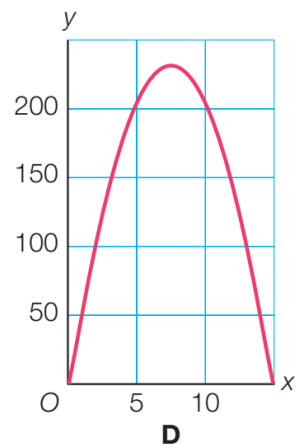
Het aantal sperwers in het park nam in de periode 2015-2025 aanvankelijk toe, maar in 2025 was het aantal sperwers weer gelijk aan dat in 2015.

- Teken een mogelijk toenamediagram bij deze situatie. Neem $\Delta t = 2$.

- 4** Van de grafiek bij het toenamediagram is gegeven dat deze één maximum heeft.
- Voor welke waarden van x kan het maximum optreden? Geef een zo groot mogelijk interval.
 - Bij de grafiek worden gemiddelde toenames berekend op verschillende intervallen die liggen tussen $x = 0$ en $x = 8$. Nandy beweert dat de hoogst mogelijke gemiddelde toename dan gelijk is aan 3.
Ben je het met haar eens? Licht toe.
 - Voor welke van de intervallen $[0, 8]$, $[4, 7]$, $[3, 7]$ en $[3, 8]$ geldt dat $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$?

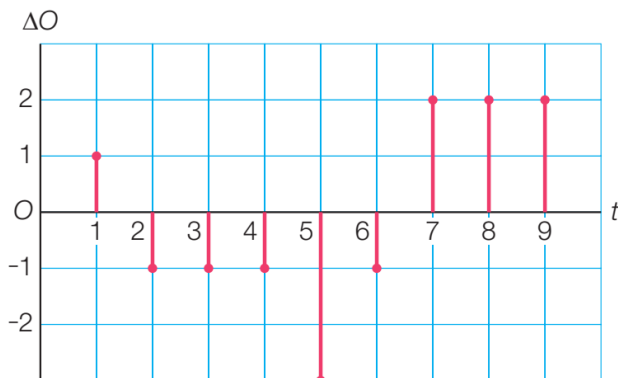
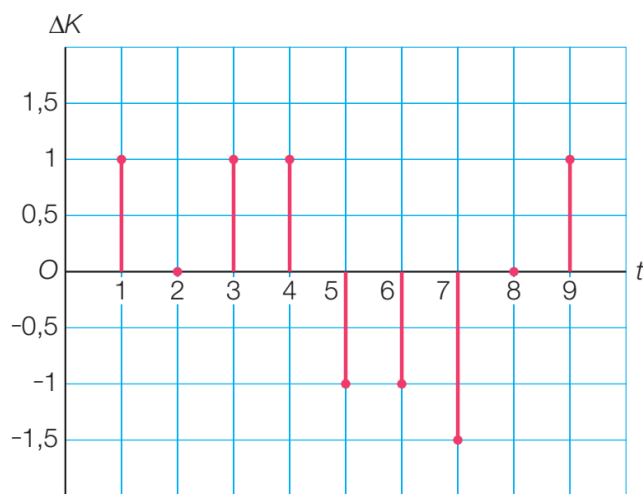


- 5** Geef voor de volgende uitspraken steeds aan welke van de grafieken A, B, C en D erbij passen. Het kan voorkomen dat bij één uitspraak meerdere grafieken passen.



- Er is een interval met $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.
- In het bijbehorende toenamediagram op $[0, 15]$ met $\Delta x = 1$ worden de staafjes van links naar rechts steeds groter.
- Er is een interval waar $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ negatief is.
- Bij elk bijbehorend toenamediagram zijn de staafjes even lang.
- Voor elk interval is $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gelijk.

- 6** Van een bedrijf is de verandering van de opbrengsten en de kosten bijgehouden. Zie de toenamediagrammen. Hierin zijn de maandelijkse opbrengst O en de maandelijkse kosten K in duizenden euro's en de tijd t in maanden waarbij $t = 0$ hoort bij de maand januari 2024.



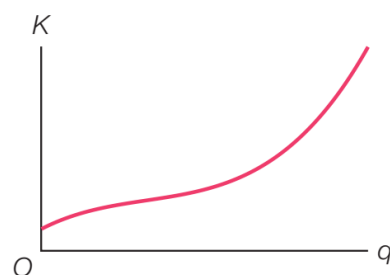
In maart was de opbrengst 15 000 euro. De kosten waren die maand 12 000 euro.

- Hoe groot was de opbrengst in augustus?
- Hoe groot waren de kosten in januari?

De maandelijkse winst W van het bedrijf in duizenden euro's wordt gegeven door de formule $W = O - K$. In maart was de winst dus $15 - 12 = 3$ duizend euro.

- In welke maanden boekte het bedrijf de meeste winst?
- Gedurende drie maanden maakte het bedrijf verlies. Hoeveel euro verlies was dat in totaal?
- Onderzoek of de formule $\Delta W = \Delta O - \Delta K$ ook geldt.
- In de maand nadat het bedrijf een nieuwe directeur aanstelde, was de verandering van de maandelijkse winst voor het eerst weer positief. In welke maand werd de nieuwe directeur aangesteld?
- Het bedrijf maakte in de eerste tien maanden van 2024 gemiddeld 1150 euro winst per maand. De totale winst in 2024 was 21 000 euro. Van november naar december was ΔW gelijk aan 0. Hoeveel euro was de winst in december 2024?

- 7** De totale dagelijkse kosten bij de productie van luxe wekkerradio's worden gegeven door de formule $K = 1,2q^3 - 8q^2 + 25q + 22$. Hierin is K in honderden euro's en is q het aantal geproduceerde wekkerradio's per dag in honderdtallen. Een geschikt venster is x tussen 0 en 8 en y tussen 0 en 325.



- Bereken de totale dagelijkse kosten bij een productie van 500 wekkerradio's per dag.
Hoeveel zijn in dat geval de gemiddelde kosten per wekkerradio?
- Bereken $\frac{\Delta K}{\Delta q}$ op het interval $[5, 7]$.
- Bereken de gemiddelde toename van de dagelijkse kosten als de productie toeneemt van 150 tot 400 stuks.
- Bij welke productie komen de dagelijkse kosten uit op 14 320 euro?
Wat zijn de gemiddelde kosten per wekkerradio dan?
- Op een dag zijn de gemiddelde productiekosten per wekkerradio 25 euro.
Hoeveel stuks worden er die dag geproduceerd? Geef alle mogelijkheden.

- 8** In januari 2024 is Valerie een YouTube kanaal gestart. Met enige regelmaat uploadt ze een video naar haar kanaal. Ze heeft telkens aan het eind van de maand bijgehouden wat het totale aantal video's V is dat ze tot nu toe naar haar kanaal heeft geüpload.

Daarnaast heeft Valerie ook bijgehouden wat het totale aantal abonnees A van haar kanaal is.

In de tabel hiernaast staan ΔV en ΔA weergegeven.

De tijd t is in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2024.

- Hoeveel video's heeft Valerie in het eerste half jaar geüpload?
- De eerste 8 maanden stijgt het aantal abonnees voortdurend. In welke maand heeft ze voor het eerst meer dan 1000 abonnees?
- Volgens Valerie was het aantal abonnees van haar kanaal eerst toenemend stijgend en daarna afnemend stijgend.
Kan ze gelijk hebben? Licht toe.

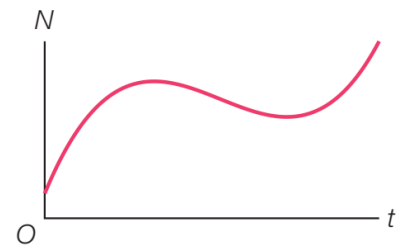
- Bereken $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ op het interval $[0, 5]$ en geef hiervan de praktische betekenis.

- Bereken $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ voor het jaar 2024.

- Het aantal abonnees per video op het kanaal van Valerie bereikt aan het eind van een maand in 2024 een maximum van bijna 430.
Welke maand is dat?

interval	ΔV	ΔA
$[0, 1]$	1	100
$[1, 2]$	1	140
$[2, 3]$	2	285
$[3, 4]$	3	479
$[4, 5]$	4	762
$[5, 6]$	2	941
$[6, 7]$	1	1151
$[7, 8]$	0	1334
$[8, 9]$	1	1247
$[9, 10]$	3	952
$[10, 11]$	2	606
$[11, 12]$	1	368

- 9** Het aantal leden N van sportvereniging Avanti is voor de periode van 2013 tot en met 2025 gegeven door de formule $N = 2t^3 - 41t^2 + 240t + 100$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2013. Een geschikt venster is x tussen 0 en 12 en y tussen 0 en 600.



- a** Teken het toenamediagram op het interval $[0, 12]$ met $\Delta t = 2$.
- b** Bereken het differentiequotient van N op $[1, 5]$.
- c** In 2022 bereikte het aantal leden van Avanti een dieptepunt met een ledenaantal van 394. De penningmeester zei toen dat het allemaal wel meeviel en merkte op dat Avanti dit ledenaantal in het verleden ook al eens had.
Onderzoek in welk jaar dat was.
- d** Bereken de gemiddelde verandering van het aantal leden per maand tussen 1 januari 2014 en 1 juli 2017.



6

Formules en herleiden

Een zwembad met olympische afmetingen is 50 bij 25 meter en minimaal 2 meter diep. Er wordt zo'n zwembad gebouwd met een diepte van d meter. De inhoud I van het zwembad in m^3 wordt gegeven door de formule $I = 1250d$.

Wat is de minimale inhoud van het zwembad?

- A 0 m^3 B 2500 m^3 C is er niet

Welke formule klopt?

- A $d = 1250I$ B $d = I - 1250$ C $d = 0,0008I$

Wat is de formule voor de inhoud L in miljoenen liters?

- A $L = 1,25d$ B $L = 0,125d$ C $L = 125d$

6.1 Werken met formules

Kennis en vaardigheden

- Je kunt substitueren in een lineaire formule.
- Je kunt formules combineren als er eerst een variabele moet worden vrijgemaakt.
- Je kunt substitueren in een kwadratische formule.
- Je kunt werken met formules en grafieken op de GR.

V1 Je kunt $3x(2y - 4)$ herleiden tot $6xy - 12x$ door de haakjes weg te werken. Soms kun je na het wegwerken van de haakjes nog verder herleiden door gelijksoortige termen samen te nemen. Zie hiernaast.

$$\begin{aligned} 4(5 - 2a) - 2(a - b) - 3b &= \\ 20 - 8a - 2a + 2b - 3b &= \\ 20 - 10a - b \end{aligned}$$

Herleid.

- a** $4(x - 10) + 20$ **c** $-3(7b - 5) - 5b$ **e** $2(x + y) + 4x - 3(10 - 2y)$
b $-12(4q + 2)$ **d** $-5(x + 1) + 3(2x - 1)$ **f** $5q - 3(p - 6) + 2(9 - q)$

O1  Om het leesniveau van teksten te bepalen is in 1975 door Rudolf Flesch en Peter Kincaid de formule $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$ ontwikkeld. In deze formule is G een geheel getal dat het leesniveau (de 'grade') aangeeft. Verder staat W voor woordlengte, dat is het gemiddelde aantal lettergrepen per woord en Z voor zinslengte, dat is het gemiddelde aantal woorden per zin.

- a** Bereken de grade van een tekst waarin het gemiddelde aantal lettergrepen per woord 1,9 is en het gemiddelde aantal woorden per zin 7,9.
b Licht toe dat voor de tekst van vraag a geldt $Z = W + 6$.

Voor teksten waarvoor geldt $Z = W + 6$ wordt de formule $G = 11,8W + 0,39(W + 6) - 15,59$.

- c** Licht toe waarom er haakjes om $W + 6$ staan in de formule.
d De formule is te herleiden tot de vorm $G = aW + b$.
Bereken a en b .

Theorie A Substitueren

In opgave 1 is de formule $Z = W + 6$ ingevuld in de formule $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$. We zeggen dat we de twee formules hebben **gecombineerd**. We zeggen ook wel:

$Z = W + 6$ is gesubstitueerd in de formule $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$.

Substitueren betekent vervangen. Je hebt Z vervangen door $W + 6$. Bij substitueren krijg je vaak met het wegwerken van haakjes te maken.

Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $A = 0,03k - 0,6(l - 20)$ en $k = 1,4l + 150$.

De formule van A is te schrijven in de vorm $A = al + b$.

Bereken a en b .

Aanpak

In de vorm $A = al + b$ komt geen k voor, dus vervang k in de formule $A = 0,03k - 0,6(l - 20)$ door $1,4l + 150$. Denk aan haakjes om $1,4l + 150$.

Met een accolade geef je aan welke formules gecombineerd worden.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} A = 0,03k - 0,6(l - 20) \\ k = 1,4l + 150 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 0,03(1,4l + 150) - 0,6(l - 20) \\ A = 0,042l + 4,5 - 0,6l + 12 \\ A = -0,558l + 16,5 \end{array}$$

Dus $a = -0,558$ en $b = 16,5$.

Er wordt gevraagd naar de waarden van a en b .

2 Vul in.



$$\left. \begin{array}{l} T = 0,4q + 2,6p \\ q = 5 - p \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = 0,4(\dots\dots\dots) + 2,6p \\ T = \dots\dots\dots + 2,6p \\ T = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots p \end{array}$$

3 In opgave 1 heb je gewerkt met de formule $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$.



a Neem $Z = 5,2W$ en schrijf de formule van G in de vorm $G = aW + b$.

b Neem $W = 7,8 - 0,5Z$ en schrijf de formule van G in de vorm $G = a + bZ$.

4 a Gegeven zijn de formules $R = 3p - 4q + 5$ en $p = 1,5q + 2$.



Schrijf de formule van R in de vorm $R = aq + b$.

b Gegeven zijn de formules $F = 0,16m - 0,4(5 - 2n)$ en $m = 3 - 2n$.

De formule van F is te schrijven in de vorm $F = an + b$.

Bereken a en b .

5 De vader van Pieter is drie keer zo oud als Pieter. Pieters moeder is twee jaar ouder dan zijn vader en ze is 32 jaar ouder dan Pieter. Pieter, zijn vader en zijn moeder zijn respectievelijk p , v en m jaar oud. Bereken p , v en m .



A6



Het aantal blikken verf q dat een winkelier per week verkoopt, is gegeven door de formule $q = -10p + 0,3A + 150$. Hierin is p de verkoopprijs van een blik in euro's en A het bedrag in euro's dat de winkelier per week aan reclame uitgeeft.

- De winkelier geeft 240 euro per week aan reclame uit en verkoopt 117 blikken verf per week.
Bereken de prijs van een blik.
- De winkelier besluit om per week tien keer de verkoopprijs van één blik aan reclame uit te geven.
Schrijf de formule van q in de vorm $q = ap + b$.
- De winkelier besluit voortaan uit te gaan van de formule $A = 2p + 8$.
Schrijf de formule van q in de vorm $q = ap + b$.



A7



Om te weten hoeveel voedingsstoffen een paard nodig heeft, moet het gewicht van het paard bekend zijn. Omdat het niet zo handig is daarvoor telkens een weegschaal te gebruiken, schatten paardenhouders het gewicht met een formule.

- fokmerries: $G = 5,2BO + 2,6SH - 855$
- rijpaarden: $G = 4,3BO + 3,0SH - 785$

Hierin is G het gewicht in kg, BO de borstomvang in cm en SH de schofthoogte in cm.

- Een fokmerrie heeft een borstomvang van 1,80 meter en een schofthoogte van 1,68 meter.
Bereken het gewicht van de merrie in gehele kg.
- Door een meetfout wordt bij een rijpaard de borstomvang 5 cm te groot gemeten.
Onderzoek hoeveel kg de schatting van het gewicht te hoog uitvalt.
- Schrijf voor rijpaarden waarvoor geldt $BO = SH + 12$ de formule voor G in de vorm $G = a \cdot SH + b$.
- Een fokmerrie en een rijpaard zijn even zwaar. Van de merrie is $BO = 180$ en van het rijpaard is $BO = 185$.
De paarden hebben dezelfde schofthoogte.
Bereken deze schofthoogte in cm nauwkeurig.



V2 In de vergelijking $2x + 3y = 6$ kun je de variabele y vrijmaken.

Dat gaat als volgt:

$$2x + 3y = 6$$

Alle termen met x naar het rechterlid.

$$3y = -2x + 6$$

Alle termen delen door 3.

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

In de formule $y = -\frac{2}{3}x + 2$ is y uitgedrukt in x .

a Druk x uit in y bij $2x + 3y = 6$.

b Maak p vrij bij $4t - 3p = 9$.

c Maak m vrij bij $2(m - 3) - 4n = 6$.

d Gegeven is de formule $B = 12 - 3A$.

Druk A uit in B .

Bij vrijmaken en uitdrukken in herleid je het antwoord.

O8 Gegeven zijn de formules $N = 3p + 4q - 5$ en $q = 2p - 6$. Door de formules te combineren kun je N uitdrukken in p .

a Druk N uit in p .

Je kunt N ook uitdrukken in q . Daarvoor maak je eerst p vrij bij $q = 2p - 6$.

b Maak p vrij bij $q = 2p - 6$.

c Bij vraag b heb je de formule voor p gekregen.

Druk N uit in q door de formules van N en p te combineren.

Theorie B Variabelen vrijmaken en formules combineren

Je kunt de formule $q = 5p + 30$ substitueren in de formule $K = 2p + 3q$.

Je krijgt dan een formule voor K uitgedrukt in p , namelijk

$$K = 2p + 3(5p + 30) = 2p + 15p + 90 = 17p + 90.$$

Na combineren herleid je.

Met dezelfde gegevens kun je ook een formule voor K uitgedrukt in q krijgen. Je maakt dan eerst p vrij bij $q = 5p + 30$.

Dus $q = 5p + 30$ **Verwissel het linker- en rechterlid, zodat de term met p links staat.**

$$5p + 30 = q$$

$$5p = q - 30$$

$$p = 0,2q - 6.$$

Nu kun je $p = 0,2q - 6$ substitueren in $K = 2p + 3q$.

$$\begin{array}{l} K = 2p + 3q \\ p = 0,2q - 6 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} K = 2(0,2q - 6) + 3q \\ K = 0,4q - 12 + 3q \\ K = 3,4q - 12 \end{array} \right.$$

Door p te vervangen, verdwijnt p uit de formule.

En zo is K uitgedrukt in q .

Voorbeeld

Toon aan dat de formules $A = 8s + 3t + 850$ en $2s - 5t = 40$ te combineren zijn tot $A = 23t + 1010$.

Aanpak

In de gevraagde formule is A uitgedrukt in t , dus in de formule $A = 8s + 3t + 850$ moet de variabele s vervangen worden. Maak daarom s vrij bij $2s - 5t = 40$.

Uitwerking

$$2s - 5t = 40$$

$$2s = 5t + 40$$

$$s = 2,5t + 20$$

$$\left. \begin{array}{l} s = 2,5t + 20 \\ A = 8s + 3t + 850 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 8(2,5t + 20) + 3t + 850 \\ A = 20t + 160 + 3t + 850 \\ A = 23t + 1010 \end{array}$$

Bij de opdracht *toon aan* werk je stap voor stap naar de formule toe. Je kunt niet volstaan met het geven van getallenvoorbeelden.

9 Zie het voorbeeld.

$\square$ Toon aan dat $A = 9,2s + 826$.

10 **a** Combineer de formules $T = 3r + 6s + 80$ en $r + 8s = 100$ tot de vorm $T = as + b$.

$\square \odot$

b Gegeven zijn de formules $C = 2a - 3b + 64$ en $5a - 8b = 160$. Druk C uit in a .

11 Gegeven zijn de formules $Q = 5m - n + 125$ en $3m + 5n = 12$.

$\square \odot *$

a Toon aan dat $Q = 5,6m + 122,6$.

b Bereken m voor $Q = 201$. Welke waarde van n hoort hierbij?

12 Janna heeft van een vriend een aantal gewichten

gekregen om mee te trainen. Op de paarse gewichten staat dat ze 1,5 kg per stuk wegen. Op de groene, rode en blauwe gewichten staat niet hoe zwaar ze zijn.

Door te proberen, komt Janna er al snel achter dat gewichten met dezelfde kleur even zwaar zijn.

Verder ontdekt ze dat

- drie rode evenveel wegen als twee groene
- een paarse en een groene evenveel wegen als een blauwe en een rode
- drie paarse en twee groene evenveel wegen als vier rode en een blauwe.

Onderzoek hoe zwaar de groene, rode en blauwe gewichten zijn.



A13 In opgave 1 en 3 heb je gewerkt met de formule van Flesch en Kincaid waarmee het leesniveau van een tekst kan worden bepaald. Computers kunnen ook het leesniveau van een tekst bepalen. Hiervoor is de *Automated Readability Index* (*ARI*) ontwikkeld. De *ARI* gebruikt per woord het aantal tekens in plaats van het aantal lettergrepen. De formule is $ARI = 4,71T + 0,5Z - 21,43$. Hierin is T het gemiddelde aantal tekens per woord en Z het gemiddelde aantal woorden per zin.

- a** Een tekst heeft 20 zinnen, 356 woorden en 1958 tekens.
Bereken de *ARI*.
- b** Voor teksten waarvoor geldt $T = Z - 3$ is de formule te schrijven in de vorm $ARI = aT + b$.
Bereken a en b .
- c** Raoul werkt met teksten waarvan alleen het gemiddelde aantal woorden per zin bekend is. Hij neemt aan dat bij deze teksten het gemiddelde aantal woorden per zin vier keer zo groot is als het gemiddelde aantal tekens per woord.
Geef de formule waarmee Raoul de *ARI* van deze teksten kan berekenen.



A14 Zie opgave 13.

⊙* Een docent Engels gebruikt de *ARI* om in te schatten voor welk leerjaar een tekst geschikt is. Ze gebruikt dat 90% van de *ARI* overeenkomt met het leerjaar L plus 5,6.
Stel de formule voor L op in de vorm $L = aT + bZ + c$.

V3 Voor het wegwerken van dubbele haakjes gebruik je de regel $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.
Hiernaast zie je hoe je $(p - 2q)^2$ herleid.

Herleid.

- a** $(x - 1)(x - 2)$ **c** $(4p + q)^2$
b $(4x + 1)(4x - 1)$ **d** $(3a - 2b)^2$

$$\begin{aligned}(p - 2q)^2 &= \\(p - 2q)(p - 2q) &= \\p^2 - 2pq - 2pq + 4q^2 &= \\p^2 - 4pq + 4q^2 &= \end{aligned}$$

O15 Gegeven zijn de formules $T = m^2 + 4n + 2$ en $m = n - 1$.

⊙* **a** Bereken T voor $n = 5$.

$m = n - 1$ en $T = m^2 + 4n + 2$ combineren geeft $T = (n - 1)^2 + 4n + 2$.

b Toon aan dat $T = n^2 + 2n + 3$.

Theorie C Substitutie in een kwadratische formule

In opgave 15 heb je na het substitueren dubbele haakjes weggewerkt, omdat er in de formule van T een kwadraat voorkomt.

In de formule $A = 3,5k^2$ komt ook een kwadraat voor. Deze formule combineren met $k = l - 3$ gaat als volgt.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} A &= 3,5k^2 \\ k &= l - 3 \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} A &= 3,5(l - 3)^2 \\ A &= 3,5(l - 3)(l - 3) \\ A &= 3,5(l^2 - 3l - 3l + 9) \end{aligned} \\ & \begin{aligned} A &= 3,5(l^2 - 6l + 9) \\ A &= 3,5l^2 - 21l + 31,5 \end{aligned} \end{aligned}$$

Denk aan de haakjes.

Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $N = 3p^2 - q^2 - 28$ en $q - p = 3$. Hiermee is de formule van N te schrijven in de vorm $N = aq^2 + bq + c$.

Bereken a , b en c .

Uitwerking

$$\begin{aligned} q - p &= 3 \\ -p &= -q + 3 \\ p &= q - 3 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} N &= 3(q - 3)^2 - q^2 - 28 \\ N &= 3(q - 3)(q - 3) - q^2 - 28 \\ N &= 3(q^2 - 3q - 3q + 9) - q^2 - 28 \\ N &= 3(q^2 - 6q + 9) - q^2 - 28 \\ N &= 3q^2 - 18q + 27 - q^2 - 28 \\ N &= 2q^2 - 18q - 1 \end{aligned} \right.$$

Dus $a = 2$, $b = -18$ en $c = -1$.

Let op de mintekens.

16 Zie het voorbeeld.

$\square \odot$ Toon aan dat $N = 2p^2 - 6p - 37$.

17 **a** Gegeven zijn de formules $A = 3t^2 - 4s^2 + 5$ en $s = t - 2$.

$\square \odot *$ Schrijf de formule van A in de vorm $A = at^2 + bt + c$.

b De formules $B = 5xy + 20$ en $3x - 2y = 6$ zijn te combineren tot de vorm $B = ax^2 + bx + c$.

Bereken a , b en c .

A18 Tussen de prijs p in euro's en het aantal ijsjes q dat ijscoman Jan per dag verkoopt bestaat het verband $p = -0,002q + 3,1$. De dagopbrengst R in euro's kan worden berekend door de prijs van een ijsje te vermenigvuldigen met het aantal verkochte ijsjes, oftewel $R = p \cdot q$.

- a** Welke prijs hoort bij een verkoop van 1000 ijsjes per dag? Wat is in dat geval de dagopbrengst R ?
- b** Schrijf de formule van R in de vorm $R = aq^2 + bq$.
- c** Bereken de dagopbrengst bij een verkoop van 500 ijsjes per dag.



Jan heeft ook kosten. De kosten per dag in euro's worden gegeven door de formule $K = 0,7q + 180$.

- d** Wat zijn de variabele kosten per ijsje? En wat zijn de vaste kosten?
- e** Bereken K als Jan 500 ijsjes per dag verkoopt. Hoeveel winst maakt Jan dan per dag?

De winst per dag in euro's kan worden berekend door van de opbrengst R de kosten K af te trekken. Je krijgt zo de formule $W = -0,002q^2 + 2,4q - 180$.

- f** Toon dit aan.
- g** Jan verkoopt 450 ijsjes per dag. Bereken de winst per dag en de prijs van een ijsje.
- h** Met hoeveel procent neemt de winst per dag toe als het aantal verkochte ijsjes per dag toeneemt van 400 naar 550?

A19 **a** Gegeven zijn de formules $A = 2t + 5p + 9$ en $2t = -\frac{1}{3}p + 3\frac{2}{3}$.

b De formule van A is te schrijven in de vorm $A = at + b$. Bereken a en b .

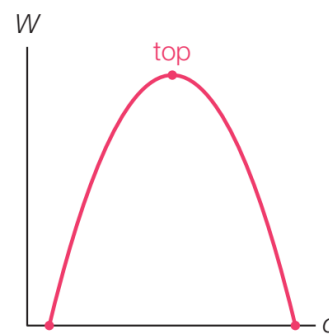
- b** Gegeven zijn de formules $B = 15a^2 - 50(b^2 - 2b)$ en $2b - a = 3$. Toon aan dat $B = 10b^2 - 80b + 135$.

E20 * Combineer de formules $N = 9x^2 - 6xy + y^2$ en $3x - y = 2$ tot de vorm $N = a$.

O21 In opgave 18 over ijscoman Jan is de formule

a $W = -0,002q^2 + 2,4q - 180$ gegeven voor de winst per dag in euro's. Hierin is q het aantal verkochte ijsjes per dag. Hiernaast is W uitgezet tegen q . De top van de grafiek is $(600, 540)$.

- a** Wat is de maximale winst per dag? Hoeveel ijsjes moet Jan per dag verkopen om de maximale winst te behalen?
- b** De snijpunten van de grafiek met de horizontale as liggen bij $q \approx 80,4$ en $q \approx 1119,6$. Hoeveel ijsjes moet Jan verkopen om winst te maken?



Theorie D Toppen en nulpunten berekenen op de GR

De grafiek in opgave 21 is een parabool. Je hebt informatie over de top en de snijpunten met de horizontale as gebruikt om iets te zeggen over de winst. Een snijpunt van een grafiek met de horizontale as heet een nulpunt van de grafiek.

In de volgende module leer je hoe je met de GR coördinaten van toppen en nulpunten van grafieken berekent.

►GR] Neem de module **Grafieken, toppen en nulpunten** door.

We maken onderscheid tussen plotten, schetsen en tekenen van een grafiek.

Plot de grafiek	Schets de grafiek	Teken de grafiek
Laat de GR de grafiek op het scherm tekenen. Zorg dat alle bijzonderheden van de grafiek op het scherm te zien zijn.	Maak in je schrift een schets van de grafiek. Het gaat alleen om de vorm van de grafiek en de ligging ten opzichte van de assen. Je mag daarbij de GR gebruiken. Zet letters bij de assen.	Teken in je schrift nauwkeurig de grafiek en zet getallen en letters bij de assen. Maak eerst een tabel in je schrift.

Bij berekeningen die je met de GR maakt, hoort een toelichting. Zo vermeld je de formules die je invoert en de gebruikte opties. We herinneren je aan de volgende afspraak.

Uitwerking bij gebruik van de GR

- 1 Noteer de formules die je invoert, dus schrijf op $y_1 = \dots$ en $y_2 = \dots$
- 2 Noteer de optie(s) die je gebruikt en geef het resultaat.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

Voorbeeld

De temperatuur van het zeewater voor de Nederlandse kust wordt beschreven door de formule $T = -0,093t^3 + 1,39t^2 - 3,28t + 4,7$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari en $0 \leq t \leq 12$.

- a Schets de grafiek van T .
- b Bereken de temperatuur op 1 juli. Rond af op één decimaal.
- c In welke maand is de temperatuur van het zeewater minimaal? Wat is de minimale temperatuur? Rond af op één decimaal.
- d In welke maanden is de temperatuur van het zeewater 14°C ?

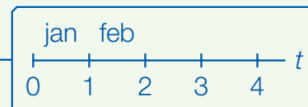
Uitwerking

- a** Voer in $y_1 = -0,093x^3 + 1,39x^2 - 3,28x + 4,7$.



Neem t vanaf 0 tot en met 12 en zet letters bij de assen.

- b** Bij 1 juli hoort $t = 6$.
 $t = 6$ geeft $T \approx 15,0^\circ\text{C}$
- c** De optie minimum geeft $x \approx 1,4$ en $y \approx 2,6$.
Dus in februari. $\leftarrow$
De minimale temperatuur is $2,6^\circ\text{C}$.
- d** Voer in $y_2 = 14$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 5,7$ en $x \approx 10,8$.
Dus in de maanden juni en november.



22 Zie het voorbeeld.



- a** In welke maand is de temperatuur van het zeewater maximaal? Wat is de maximale temperatuur? Rond af op één decimaal.
- b** In welke maanden kwam de temperatuur van het zeewater boven de 19°C ?

23 Het benzineverbruik van een auto is gegeven door de formule



$B = 0,001v^2 - 0,12v + 7,8$. Hierin is B het benzineverbruik in liters per 100 km bij een snelheid van v km per uur.

- a** Schets de grafiek. Bedenk wat geschikte waarden van v zijn.
- b** Mevrouw Van Santen verhoogt haar snelheid van 80 km per uur tot 100 km per uur.
Hoeveel neemt het benzineverbruik toe?
- c** Meneer Van Ast verhoogt zijn snelheid van 30 tot 40 km per uur.
Met hoeveel procent neemt het benzineverbruik af?
- d** Mevrouw Tjong a Sie wil zo zuinig mogelijk rijden.
Welke snelheid moet zij aanhouden?
- e** Op een gegeven moment verbruikt de auto van meneer Vonk 4,5 liter per 100 km.
Wat weet je van zijn snelheid? Rond af op gehelen.
- f** Mevrouw Kerkhof rijdt met een constante snelheid. Ze moet nog 60 km rijden. In de tank zit nog 3 liter benzine.
Met welke snelheid moet mevrouw Kerkhof rijden als ze zonder tanken op de plaats van bestemming wil aankomen? Rond af op één decimaal.

24 Zie opgave 23 met de formule $B = 0,001v^2 - 0,12v + 7,8$.

* Meneer Yates rijdt met een snelheid van 120 km/uur over de snelweg. Met deze snelheid heeft hij genoeg benzine voor een afstand van 60 km, maar de eerstvolgende benzinepomp is 90 km verder. Hij wil de benzinepomp zo snel mogelijk bereiken.

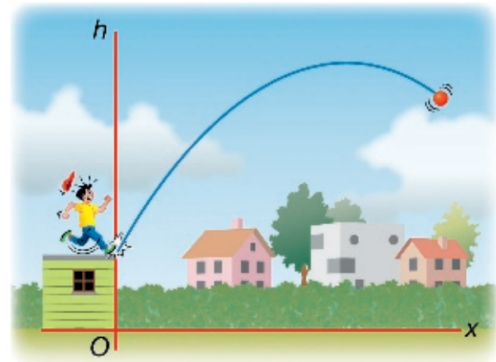
Met welke snelheid moet hij dan rijden? Rond af op gehelen.

25 Luke staat op het platte dak van een schuur en

□ ⊗ * trapt een bal weg. Zie de figuur.

De hoogte van de bal wordt gegeven door de formule $h = -0,09x^2 + 1,8x + 3$. Hierin zijn x en h in meter. Luke trapt de bal minder dan 25 meter weg.

- a Hoe hoog is het schuurtje?
- b Bereken op welke afstand van het schuurtje de bal op de grond komt. Geef het antwoord in dm nauwkeurig.
- c Bereken de maximale hoogte van de bal.
- d Op 18 meter afstand van het schuurtje staat een boom die 5 meter hoog is. Luke trapt de bal in de richting van de boom. Onderzoek of de bal over de boom heen gaat.



Luke wil de formule zo aanpassen, dat de horizontale afstand in decameter is. Er geldt $x = 10d$ met d de afstand in decameter.

- e Licht dit toe.
- f Toon aan dat $h = -9d^2 + 18d + 3$.

A26 Een fabrikant van elektrische apparaten brengt een nieuw model

□ ⊗ * broodrooster op de markt. Een bedrijfseconoom heeft een formule opgesteld voor de opbrengst R per week in euro's bij een weekverkoop van q broodroosters: $R = -0,02q^2 + 30q$ met q kleiner dan 1200.

- a Schets de grafiek van R .
- b Voor welke q is de opbrengst maximaal? Hoeveel is de maximale opbrengst?
- c Hoeveel broodroosters moet de fabrikant per week verkopen om een opbrengst van minstens 8000 euro te hebben?

Het bedrijf heeft ook kosten. Per week zijn deze kosten in euro's gegeven door $K = 5q + 3000$.

- d De grafieken van K en R hebben twee snijpunten. Wat is de praktische betekenis van deze snijpunten? Welke aantallen verkochte broodroosters horen bij deze snijpunten?
- e Voor de winst per week in euro's geldt $W = R - K$. Druk W uit in q .
- f Voor welke q is de winst maximaal? Wat is de maximale winst?

A27



Voor het aantal klanten in een supermarkt is het model $N = -0,15t^4 + 3,35t^3 - 24t^2 + 65t$ opgesteld. Hierin is N het aantal klanten t uur na 8:00 uur.

- Schets de grafiek van N .
- Hoe laat is het volgens de formule het drukst in de supermarkt? Hoeveel klanten zijn er dan?
- Hoe laat verlaat de laatste klant de supermarkt?
- Hoe laat zijn er evenveel klanten in de supermarkt als om kwart over drie?



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan substitueren in een lineaire formule.
- ☐ Ik kan formules combineren als er eerst een variabele moet worden vrijgemaakt.
- ☐ Ik kan substitueren in een kwadratische formule.
- ☐ Ik kan werken met formules en grafieken op de GR.

► OPGAVE C1ab
THEORIE A

► OPGAVE C1c
THEORIE B

► OPGAVE C2
THEORIE C

► OPGAVE C3
THEORIE D

C1 Gegeven zijn de formules $D = 5x + 3y + 30$ en $x = 12 - 2y$.

- Bereken D bij $y = 1$.
- Combineer de formules tot de vorm $D = ay + b$.
- Druk D uit in x .

C2 De formules $E = 0,1p^2 - 0,02q + 4,5$ en $p = q + 3$ zijn te combineren tot de vorm $E = aq^2 + bq + c$.
Bereken a , b en c .

C3 De winst W in honderden euro's per maand van een bedrijf wordt gegeven door de formule $W = -0,02q^2 + 5,2q - 200$. Hierin is q het aantal verkochte artikelen met q kleiner dan 225.

- Schets de grafiek van W .
- Bereken de maximale winst per maand.
- Hoeveel artikelen moeten er verkocht worden om een winst van minstens 10000 euro per maand te hebben?

Antwoorden

C1 a $D = 83$

b $D = -7y + 90$

c $D = 3,5x + 48$

C2 a $0,1$

b $0,58$

c $5,4$

C3 a *

b € 13 800

c 87 t/m 173 artikelen

6.2 Formules met breuken

Kennis en vaardigheden

- Je kunt breuken met letters vereenvoudigen.
- Je kunt de variabele uit de breuk halen.
- Je kunt breuken met letters vermenigvuldigen en delen.
- Je kunt breuken met letters optellen en aftrekken.
- Je kunt variabelen vrijmaken in formules met breuken.

V4 Je weet dat $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$. Hierbij zijn teller en noemer door 3 gedeeld.
En zo is $\frac{7b}{11b} = \frac{7}{11}$. Hierbij zijn teller en noemer door b gedeeld.

Vul in.

a $\frac{3p}{7p} = \dots\dots\dots$

b $\frac{6y}{9y} = \dots\dots\dots$

c $\frac{14a}{20a^2} = \dots\dots\dots$

breuk = $\frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$

O28



$2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$, dus $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} \cdot 2$. En zo is $\frac{p}{5} = \frac{1}{5} \cdot p = \frac{1}{5}p$.

Deel je iets door vijf, dan krijg je één vijfde deel.

Vul in.

a $\frac{a}{7} = \dots\dots\dots a$

b $\frac{2b}{3} = \dots\dots\dots$

Theorie A Breuken herleiden

De breuk $\frac{8}{12}$ kun je vereenvoudigen tot $\frac{2}{3}$ door de teller en de noemer door 4 te delen.

Bij de formule $A = \frac{18ab}{24b}$ kun je de teller en de noemer door $6b$ delen.

Daarmee vereenvoudig je de breuk. Je krijgt $A = \frac{18ab}{24b} = \frac{3a}{4}$. Je kunt alleen door $6b$ delen als b niet 0 is. Bij herleiden hoef je met dit soort uitzonderingen geen rekening te houden.

Je kunt $A = \frac{3a}{4}$ schrijven als $A = \frac{3}{4}a = 0,75a$. Dit heet **de variabele uit de breuk halen**.

Je kunt de formule $B = \frac{4(x-1)}{5}$ als volgt herleiden.

$$B = \frac{4(x-1)}{5} = \frac{4x-4}{5} = \frac{4x}{5} - \frac{4}{5} = 0,8x - 0,8.$$

Het schrijven van $\frac{4x-4}{5}$ als $\frac{4x}{5} - \frac{4}{5}$ heet **uitdelen**. Je hebt 5 uitgedeeld.

Voorbeeld

- a** Schrijf de formule $A = \frac{4x+9}{3x}$ in de vorm $A = a + \frac{b}{x}$.
- b** De formule $B = \frac{y(3x+10)}{2y}$ is te herleiden tot de vorm $B = ax + b$.
Bereken a en b .
- c** Neem $y = 4x$ in de formule $C = \frac{x+y}{6xz}$ en herleid.

Uitwerking

- a** $A = \frac{4x+9}{3x} = \frac{4x}{3x} + \frac{9}{3x} = 1\frac{1}{3} + \frac{3}{x}$
- b** $B = \frac{y(3x+10)}{2y} = \frac{3x+10}{2} = \frac{3x}{2} + \frac{10}{2} = 1,5x + 5$
Dus $a = 1,5$ en $b = 5$.
- c** $C = \frac{x+y}{6xz} \left\{ \begin{array}{l} y = 4x \end{array} \right\} C = \frac{x+4x}{6xz} = \frac{5x}{6xz} = \frac{5}{6z} \leftarrow$

Een variabele in de noemer
kan je niet uit de breuk halen.

- 29** Herleid de formule en haal zo mogelijk de variabele x uit de breuk.



a $A = \frac{xy}{4y}$ **b** $B = \frac{4x+6}{2}$ **c** $C = \frac{6y}{15xy}$

- R30** Je kunt de formule $B = \frac{4(x-1)}{5}$ uit de theorie ook als volgt herleiden.



$$B = \frac{4(x-1)}{5} = \frac{4}{5}(x-1) = 0,8x - 0,8$$

- a** Herleid $D = \frac{3(1-4x)}{4}$ op deze manier.
- b** Herleid $D = \frac{3(1-4x)}{4}$ door eerst de haakjes weg te werken en daarna 4 uit te delen.
- c** Welke manier heeft je voorkeur?

- 31** Herleid het rechterlid van de formule tot de vorm $ax + b$.



a $A = \frac{6x+10}{8}$ **c** $C = \frac{2xy+y}{5y}$ **e** $E = -\frac{3x}{4} + \frac{xy}{4y}$

b $B = \frac{12(x+2)}{4}$ **d** $D = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$ **f** $F = \frac{7x^2y+2xy}{3xy}$

32
□ ⊗ *

- a Neem $y = -7x$ in de formule $K = \frac{8x + y}{10}$ en herleid tot vorm $K = ax$.
- b Toon aan dat de formules $y = 5x - 2$ en $L = \frac{3x - y}{2x}$ zijn te combineren tot $L = \frac{1}{x} - 1$.
- c Neem $y = 4x$ in de formule $M = \frac{y^2}{12x}$ en herleid tot de vorm $M = ax$.

33
⊗ *

Gegeven is de formule $N = \frac{x + y}{xy - x^2}$.

- a Neem $y = 2x$ in de formule van N en herleid.
- b Neem $y = 1 + x$ in de formule van N en herleid tot de vorm $N = a + \frac{b}{x}$.

A34
□ ⊗ *

Voor de gemiddelde snelheid in km/uur geldt de formule $v = \frac{s}{t}$. Hierin is s de afstand in km en t de tijd in uren. Marijke traint voor een wandelvakantie. Elke training is ze 10 uur onderweg en wandelt ze een aantal km volgens de formule $s = 2k + 15$. Hierin is k het aantal keer dat ze heeft getraind.

- a Schrijf voor de training van Marijke de formule van v in de vorm $v = ak + b$.
- b Marijke vindt dat ze goed is voorbereid op de wandelvakantie als ze gemiddeld 5,5 km/uur wandelt. Onderzoek na hoeveel keer trainen dat zo is.

Sven doet aan mountainbiken. Hij probeert het baanrecord te verbreken op een trail van 7,5 km. Na w weken trainen doet hij $30 - 1,2w$ minuten over de trail.

- c Voor de tijd t in uren die hij over de trail doet geldt een formule van de vorm $t = a - bw$. Bereken a en b .
- d Toon aan dat $v = \frac{375}{25 - w}$.
- e Schets de grafiek van v . Neem w tussen 0 en 15.
- f Bij het baanrecord op de trail hoort een gemiddelde snelheid van 23,4 km/uur. Onderzoek na hoeveel weken trainen Sven het baanrecord voor het eerst verbreekt. Rond af op gehelen.



O35
□ ⊗ *

Je weet dat $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. En zo is $\frac{6}{5a} \cdot \frac{3}{4b} = \frac{18}{20ab} = \frac{9}{10ab}$.

Ook weet je dat $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$. En zo is $\frac{6}{5a} : \frac{3}{4b} = \frac{6}{5a} \cdot \frac{4b}{3} = \frac{24b}{15a} = \frac{8b}{5a}$.

Herleid.

- a $\frac{2}{3a} \cdot \frac{6}{a}$ b $\frac{2}{3a} : \frac{6}{a}$

Theorie B Breuken vermenigvuldigen en delen

Bij het vermenigvuldigen van breuken gebruik je

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}.$$

Zo is $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ en $2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$.

De formule $A = \frac{3x}{4} \cdot \frac{2}{5y}$ kun je ook herleiden. Je krijgt

$$A = \frac{3x}{4} \cdot \frac{2}{5y} = \frac{6x}{20y} = \frac{3x}{10y}.$$

De formule $B = 3 \cdot \frac{2x}{y}$ herleid je als volgt: $B = 3 \cdot \frac{2x}{y} = \frac{6x}{y}$.

$$\frac{3}{1} \cdot \frac{2x}{y}$$

De formule $C = x \cdot \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{3x}\right)$ herleid je als volgt tot de vorm $C = ax^2 + b$.

$$C = x \cdot \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{3x}\right) = x \cdot \frac{x}{5} + x \cdot \frac{2}{3x} = \frac{x^2}{5} + \frac{2x}{3x} = \frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{3}.$$

Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk. Bij het herleiden van de

formule $D = \frac{y}{5} : \frac{3y}{x}$ krijg je $D = \frac{y}{5} \cdot \frac{x}{3y} = \frac{xy}{15y} = \frac{x}{15} = \frac{1}{15}x$.

Het omgekeerde

van $\frac{a}{b}$ is $\frac{b}{a}$.

Voorbeeld

a Herleid de formule $A = \frac{2}{7} \cdot \frac{x-y}{x}$ en werk de haakjes weg.

b Herleid de formule $B = \frac{9x}{5y} : \frac{4}{5y}$.

Uitwerking

a $A = \frac{2}{7} \cdot \frac{x-y}{x} = \frac{2(x-y)}{7x} = \frac{2x-2y}{7x}$

b $B = \frac{9x}{5y} : \frac{4}{5y} = \frac{9x}{5y} \cdot \frac{5y}{4} = \frac{45xy}{20y} = \frac{9x}{4} = 2,25x$

36 Herleid de formule en werk zo nodig de haakjes weg.

a $A = \frac{2ab}{3} \cdot \frac{9}{4b}$ **c** $C = \frac{3}{5} \cdot \frac{x+y}{y}$

b $B = \frac{6x}{3} : \frac{4x}{3y}$ **d** $D = \frac{a+3}{b} : \frac{1}{b}$

R37 Zie de uitwerking van voorbeeld b.

⊙* Hoe kun je direct zien dat $\frac{9x}{5y} \cdot \frac{5y}{4} = \frac{9x}{4}$?

38 Herleid de formule en werk zo nodig de haakjes weg.

□ ⊗ *

a $A = \frac{2y}{x} \cdot \frac{x-1}{y}$

c $C = \frac{2x}{y} : \frac{4}{y+1}$

e $E = 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x+1}$

b $B = \frac{a+3}{3} : \frac{a}{2}$

d $D = \frac{3x}{4} \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{6} \right)$

f $F = \frac{4p}{q} \cdot \frac{q}{3} : \frac{p}{q}$

39 **a** Herleid de formule $P = 0,15 \cdot \frac{x}{0,375} \cdot (x-2)$ tot de vorm $P = ax^2 + bx$.

⊗ *

b Herleid de formule $Q = 1,8 \cdot \frac{x+4}{2} : \frac{3}{x-1}$ tot de vorm $Q = ax^2 + bx + c$.

A40 Schilderbedrijf 't Kwassie gebruikt de

□ ⊗ *

formule $U = \frac{0,07M + 0,8A}{A}$ om te

berekenen hoeveel uur een schilderklus duurt. Hierin is M de oppervlakte van de klus in m^2 en A het aantal schilders dat de klus doet.

a Drie schilders gaan $240 m^2$ schilderen. Ze starten om 8:00 uur 's ochtends. Hoe laat zijn ze klaar?

b Een aantal schilders doen 7 uur en 48 minuten over een klus van $400 m^2$. Hoeveel schilders waren dat?



Kleinere schilderklussen zijn minder aantrekkelijk voor schilders. Daarom betaalt Schilderbedrijf 't Kwassie zijn schilders een hoger uurloon voor kleinere klussen. Het uurloon L in euro's hangt af van M . Hiervoor wordt de formule $L = \frac{35M + 150}{M}$ gehanteerd.

c Een schilder krijgt de keuze tussen één klus van $80 m^2$ of twee klussen van elk $35 m^2$. Wat levert in totaal het meeste geld op? Hoeveel scheelt het?

A41 Zie opgave 40.

□ ⊗

Voor het totale loon in euro's van een schilderklus met één schilder geldt $T = U \cdot L$. De formule van T is te schrijven in de vorm $T = aM + b + \frac{c}{M}$.

Bereken a , b en c .

A42 Zie opgave 40.

*

Voor het totale loon in euro's van een schilderklus geldt $T = U \cdot L \cdot A$. De formule van T is te schrijven in de vorm $T = aM + b + cA + \frac{dA}{M}$.

Bereken a , b , c en d .

V5 Je weet dat $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$. En zo is $\frac{2}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a}$.

En verder is $\frac{5x}{2y} - \frac{3x}{2y} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$.

Vul in.

a $\frac{10}{3p} + \frac{2}{3p} = \frac{\dots}{3p}$

b $\frac{2a}{b} - \frac{a}{b} = \frac{\dots}{\dots}$

c $\frac{5y}{6x} - \frac{2y}{6x} = \frac{\dots}{\dots}$

O43 Je weet dat $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15}$ enzovoorts.

□ ⊗ *

En zo is bijvoorbeeld $\frac{3a}{5} = \frac{3ab}{5b}$, maar ook $\frac{3a}{5} = \frac{12a}{20}$ of $\frac{3a}{5} = \frac{6ax}{10x}$.

Vul in.

a $\frac{2}{3x} = \frac{\dots}{6x}$

b $\frac{5a}{7} = \frac{\dots}{7b}$

c $\frac{3}{q} = \frac{\dots}{2pq}$

Theorie C Breuken optellen en aftrekken

De breuken $\frac{5}{9}$ en $\frac{2}{9}$ zijn gelijknamig, want ze hebben dezelfde noemer.

Gelijknamige breuken kun je direct optellen en aftrekken.

Dus $\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ en $\frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. En zo is $A = \frac{2x}{5y} + \frac{3}{5y} = \frac{2x+3}{5y}$.

Om breuken die niet gelijknamig zijn op te tellen, maak je ze eerst gelijknamig.

Dus $\frac{5}{9} + \frac{3}{8} = \frac{40}{72} + \frac{27}{72} = \frac{67}{72}$ en $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

De nieuwe noemer wordt $9 \cdot 8 = 72$.

Het is niet nodig om als nieuwe noemer $4 \cdot 8 = 32$ te nemen.

Schrijf je het rechterlid van de formule $B = \frac{2}{x} + \frac{3}{y}$ als één breuk,

dan krijg je $B = \frac{2}{\textcolor{red}{x}} + \frac{3}{\textcolor{blue}{y}} = \frac{\textcolor{blue}{2}\textcolor{red}{y}}{\textcolor{red}{x}\textcolor{blue}{y}} + \frac{\textcolor{red}{3}\textcolor{blue}{x}}{\textcolor{blue}{y}\textcolor{red}{x}} = \frac{2y+3x}{xy}$.

Schrijf je het rechterlid van de formule $C = \frac{4}{3x} - \frac{2}{x}$ als één breuk,

dan krijg je $C = \frac{4}{3x} - \frac{2}{x} = \frac{4}{3x} - \frac{6}{3x} = \frac{-2}{3x} = -\frac{2}{3x}$.

Schrijf het minteken voor de breuk.

Voorbeeld

Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.

a $A = \frac{2}{5p} - \frac{1}{4p}$

b $B = 5 + \frac{3}{2q}$

Uitwerking

a $A = \frac{2}{5p} - \frac{1}{4p} = \frac{8}{20p} - \frac{5}{20p} = \frac{3}{20p}$

b $B = 5 + \frac{3}{2q} = \frac{10q}{2q} + \frac{3}{2q} = \frac{10q+3}{2q}$

Bedenk dat $5 = \frac{5}{1} = \frac{10q}{2q}$.

44 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.



a $A = \frac{5}{2a} + \frac{3}{2a}$

c $C = 10 - \frac{2}{a}$

b $B = \frac{7}{2a} - \frac{4}{a}$

d $D = \frac{5}{x} + \frac{3}{y}$

45 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.



a $A = \frac{6}{x} - \frac{3y}{2x}$

c $C = x - \frac{2}{5x}$

e $E = \frac{5p}{6q} - \frac{1}{2}p$

b $B = \frac{2}{3a} + \frac{3}{2b}$

d $D = \frac{5}{q} : \frac{2}{p}$

f $F = \frac{2}{3b} + \frac{2a}{bc}$

46 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.

a $A = \frac{2}{x-3} - \frac{4}{3x}$

b $B = 5 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}$

c $C = \frac{6}{a} \cdot \frac{5}{a+b} : \frac{4}{a+b}$

R47



Je kunt $p + \frac{1}{2p}$ schrijven als $\frac{2p^2+1}{2p}$.

a Toon dit aan.

b Deel $2p$ uit in $\frac{2p^2+1}{2p}$ en herleid. Wat valt je op?

E48 Onderzoek wat er op de plek van de puntjes moet staan.

*

a $\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x+4} = \frac{\dots}{(x-1)(x+4)}$

b $\frac{\dots}{x+3} + \frac{3}{x-4} = \frac{x+17}{(x+3)(x+4)}$

A49 Gijs heeft een 3D-printer en verkoopt geprinte

□ ⊗ *

miniaturen online. Van het totaal aantal miniaturen dat hij per dag print, zijn er q die mislukken en p die hij afwerkt en kan verkopen. Voor de dagelijkse kosten K per miniatuur in euro's geldt de formule

$$K = \frac{0,15p + 0,05q + 10}{p + q}.$$

- a** Op maandag heeft Gijs 12 miniaturen geprint, waarvan er 3 zijn mislukt. Wat zijn de kosten per miniatuur die dag?

Op dinsdag mislukt de helft van de miniaturen.

- b** Schrijf de formule van K voor dinsdag in de vorm $K = a + \frac{b}{p}$.

- c** De kosten per miniatuur zijn die dinsdag ongeveer 52 eurocent. Hoeveel miniaturen heeft Gijs geprint?

Op woensdag verkoopt Gijs alle miniaturen die hij die dag heeft geprint voor 2,50 euro per stuk. Geen enkele print mislukt. Voor de winst in euro's geldt $W = O - K$, met O de opbrengst in euro's uit verkoop.

- d** Toon aan dat $W = \frac{2,5p^2 - 0,15p - 10}{p}$.

- e** Gijs maakt die dag winst. Wat weet je van het aantal miniaturen dat hij heeft geprint?



O50 De formule $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ is te herleiden tot $A \cdot D = B \cdot C$.

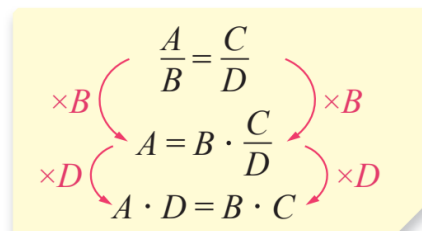
□ ⊗ *

Hiernaast zie je hoe dat gaat.

- a** Gegeven is de formule $\frac{x}{2} = \frac{3}{y}$.

Toon aan dat $xy = 6$.

- b** Maak Q vrij in de formule $\frac{p}{Q} = \frac{1}{p}$.



Theorie D Variabelen vrijmaken in formules met breuken

In opgave 50 heb je gezien dat $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ is te herleiden tot $A \cdot D = B \cdot C$.

Dit heet **kruislings vermenigvuldigen**.

Zo is de formule $\frac{3}{y} = \frac{5}{x}$ te schrijven als $3x = 5y$.

Verder is de formule $x = \frac{4}{y}$ te schrijven als $\frac{x}{1} = \frac{4}{y}$ en dus geldt $xy = 4$.

Je kunt in de formule $P = \frac{Q}{R}$ de variabele R vrijmaken.

Zie hiernaast. Je mag in één keer $P = \frac{Q}{R}$ schrijven als

$R = \frac{Q}{P}$. Je hebt hierbij de **wisseleigenschap** gebruikt.

$$\begin{array}{ccc} & P = \frac{Q}{R} & \\ \times R \swarrow & & \searrow \times R \\ & P \cdot R = Q & \\ \div P \swarrow & & \searrow \div P \\ & R = \frac{Q}{P} & \end{array}$$

kruislings vermenigvuldigen: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ geeft $A \cdot D = B \cdot C$

wisseleigenschap: $P = \frac{Q}{R}$ geeft $R = \frac{Q}{P}$

Voorbeeld

Maak x vrij.

a $\frac{1}{x} = \frac{4}{y}$

b $y = \frac{3}{x-1}$

Uitwerking

a $\frac{1}{x} = \frac{4}{y}$ **kruislings vermenigvuldigen**

$$4x = y$$

$$x = 0,25y$$

b $y = \frac{3}{x-1}$ **wisseleigenschap**

$$x-1 = \frac{3}{y}$$

$$x = \frac{3}{y} + 1$$

51 Maak x vrij.

a $y = \frac{z}{x}$

b $z = \frac{x}{y}$

c $\frac{y}{x} = \frac{2}{z}$

52



a Maak K vrij bij de formule $P = \frac{4}{K+2}$.

b Schrijf de formule $1,6N = \frac{L+1,5}{0,7}$ in de vorm $L = aN + b$.

c Gegeven is de formule $\frac{4M}{0,8x+0,9} = 2x$.

Toon aan dat $M = 0,4x^2 + 0,45x$.

d Maak y vrij bij de formule $\frac{y}{2x} = \frac{4x+7}{4}$.

53



a Gegeven zijn de formules $3x = \frac{7}{y}$ en $K = \frac{3}{2x} + y$.

Schrijf de formule van K in de vorm $K = \frac{23}{ax}$.

b Gegeven zijn de formules $x \cdot y = 10$ en $L = \frac{3}{4}y - \frac{2}{x} : y$.

Toon aan dat $L = \frac{15}{2x} - 0,2$.

A54



Om je te beschermen tegen huidverbranding is het verstandig je in te smeren met zonnebrand. De tijd die je veilig in de zon kunt doorbrengen hangt van vele factoren af. Soms wordt daarvoor de formule

$T = \frac{H \cdot SPF}{UV}$ gehanteerd. Hierin is:

- T de tijd in minuten die je veilig in de zon kunt doorbrengen
- H een getal dat afhangt van je huidtype, zie de tabel
- UV de UV-index die met een geheel getal aangeeft hoeveel straling je krijgt van de zon
- SPF de sun-protection-factor van de zonnebrand die je hebt gesmeerd.

a Vlinder heeft huidtype 2 en smeert zonnebrand met factor 20.

Het is een warme zomerdag met UV-index 10.

Onderzoek of ze veilig 3 uur in de zon kan doorbrengen.

b Maak SPF vrij bij de formule.

c Dennis heeft huidtype 3 en blijft 4 uur in de zon met UV-index 8.

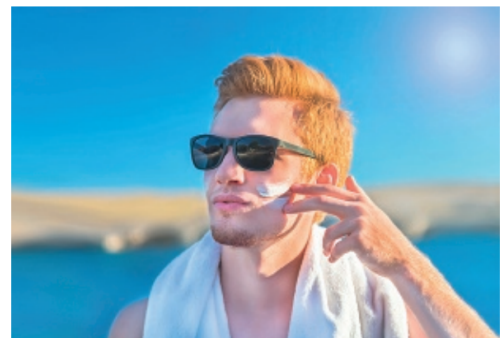
Bereken welke factor zonnebrand hij zou moeten smeren. Rond af op gehele.

d Maak UV vrij bij de formule.

e Koen is op strandvakantie in de tropen. Hij smeert zonnebrand met factor 50, want met huidtype 1 is hij erg gevoelig. Hij kan dan 3 uur en 20 minuten veilig in de zon doorbrengen.

Wat is de UV-index?

huidtype	H
1	60
2	100
3	200
4 & 5	300



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan breuken met letters vereenvoudigen.
- ☐ Ik kan de variabele uit de breuk halen.
- ☐ Ik kan breuken met letters vermenigvuldigen en delen.
- ☐ Ik kan breuken met letters optellen en aftrekken.
- ☐ Ik kan variabelen vrijmaken in formules met breuken.

- OPGAVE C4a
THEORIE A
- OPGAVE C4b
THEORIE A
- OPGAVE C5
THEORIE B
- OPGAVE C6
THEORIE C
- OPGAVE C7
THEORIE D

C4 a Neem $x = 4a$ in de formule $A = \frac{7x}{2ab}$ en herleid.

b Schrijf $B = \frac{3p^2 - 4pq}{5p}$ in de vorm $B = ap + bq$.

C5 Herleid de formule.

a $C = \frac{x}{2y} \cdot \frac{4y}{x+1}$

b $D = \frac{5}{6} : \frac{3a}{2}$

C6 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.

a $E = \frac{5}{2a} - \frac{3}{2a}$

b $F = \frac{5}{2a} + \frac{3}{b}$

c $G = 10 - \frac{3}{b}$

C7 Maak x vrij.

a $y = \frac{x - 0,5}{12z}$

b $3y = \frac{9yz}{10x}$

c $\frac{3}{x} = \frac{5}{y}$

Antwoorden

C4 a $A = \frac{14}{b}$

b $B = 0,6p - 0,8q$

C5 a $C = \frac{2x}{x+1}$

b $D = \frac{5}{9a}$

C6 a $E = \frac{2}{2a} \left(= \frac{1}{a} \right)$

b $F = \frac{6a + 5b}{2ab}$

c $G = \frac{10b - 3}{b}$

C7 a $x = 12yz + 0,5$

b $x = 0,3z$

c $x = 0,6y$

6.3 Evenredigheden

Kennis en vaardigheden

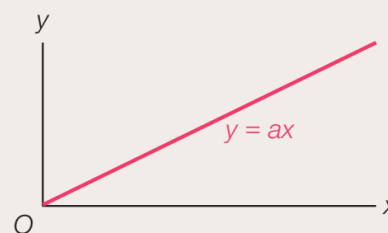
- Je kunt werken met een omgekeerd evenredig verband.
- Je kunt herkennen of je met een (recht) evenredig of omgekeerd evenredig verband te maken hebt.

Voorkennis Recht evenredig

Een lineair verband met beginhoeveelheid 0 heet een (recht) evenredig verband.

y is (recht) evenredig met x

- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De bijbehorende tabel is een verhoudingstabel.
- De grafiek is een lijn door de oorsprong.



Voorbeeld

Het aantal berekeningen A in miljarden dat een computer uitvoert, is evenredig met de rektijd t in seconden. Een bepaalde computer voert 10 miljard berekeningen uit in 4 seconden. Stel de formule van A op.

Aanpak

A is evenredig met t , dus $A = at$.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} A = at \\ t = 4 \text{ en } A = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 4 = 10 \\ a = 2,5 \end{array}$$

Dus $A = 2,5t$.

V6 Zie het voorbeeld.

Een andere computer voert 13,5 miljard berekeningen uit in 2,7 seconden.

- Stel voor deze computer de formule van A op.
- Hoeveel berekeningen voert deze computer uit in een minuut?

V7 De tabel hoort bij een evenredig verband.

- Stel de formule van B op.
- Bereken B bij $p = 15$.

p	4	12	20
B	6	18	30

55 Renée fietst gedurende t uur met een snelheid van 20 km/uur.



- a Bereken hoe ver ze fietst in 4,5 uur.
- b Licht toe dat voor haar afstand s in km geldt $s = 20t$.
- c Met welk soort verband heb je hier te maken?
- d Welk effect heeft een verdubbeling van haar tijd op de afstand?

Matthijs fietst met een snelheid van v km/uur een afstand van 60 km.

- e Bereken hoe lang hij erover doet als hij 15 km/uur fietst.
- f Licht toe dat voor zijn tijd t in uren geldt $t = \frac{60}{v}$.
- g Welk effect heeft een verdubbeling van zijn snelheid op de tijd?

Theorie A Omgekeerd evenredig

In opgave 55 fietst Renée met een snelheid van 20 km/uur. In een tijd van

$\times 3 \left(\begin{array}{l} \times 2 \text{ 1 uur legt zij 20 km af} \\ \times 2 \text{ 2 uur legt zij 40 km af} \\ \times 3 \text{ 3 uur legt zij 60 km af} \end{array} \right) \times 3$

Vermenigvuldig je de tijd met een getal, dan moet je de afstand met hetzelfde getal vermenigvuldigen. De afstand s is (recht) evenredig met de tijd t . De formule is $s = 20t$.

Matthijs maakt een fietstocht van 30 km. Bij een tijd van

$\times 3 \left(\begin{array}{l} \times 2 \text{ 1 uur is de snelheid 30 km/uur} \\ \times 2 \text{ 2 uur is de snelheid 15 km/uur} \\ \times 3 \text{ 3 uur is de snelheid 10 km/uur} \end{array} \right) : 3$

Vermenigvuldig je de tijd met een getal, dan moet je de snelheid door hetzelfde getal delen. We zeggen dat de snelheid v **omgekeerd**

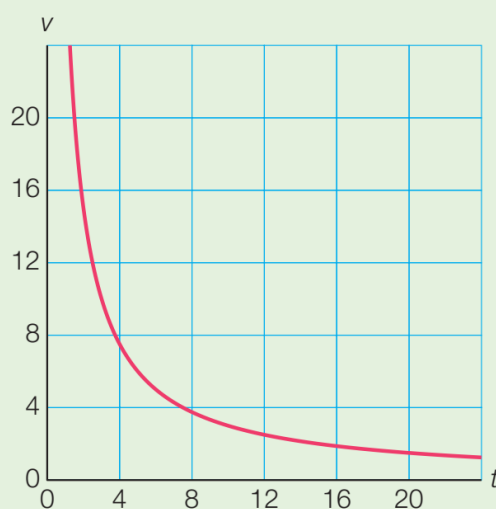
evenredig is met de tijd t . De formule is $v = \frac{30}{t}$.

Zie de bijbehorende tabel en grafiek.

t	1	2	3	4	5	6
v	30	15	10	7,5	6	5

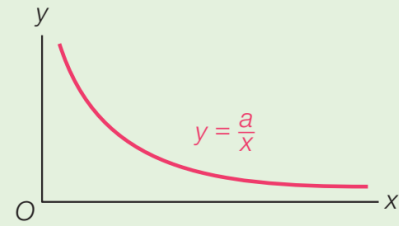
Je kunt $v = \frac{30}{t}$ ook schrijven als $t \cdot v = 30$

en $t = \frac{30}{v}$.



y is omgekeerd evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y door hetzelfde getal delen.
- De formule heeft de vorm $y = \frac{a}{x}$.
- Het product $x \cdot y$ is constant, dus $x \cdot y = a$.



De vorm $x \cdot y = a$ is handig als je wil nagaan of een tabel past bij een omgekeerd evenredig verband.

Voorbeeld

Volgens een bedrijfseconoom is het aantal tandenborstels q dat een bedrijf dagelijks verkoopt omgekeerd evenredig met de prijs p in euro's. Bij een prijs van €3,25 worden 800 tandenborstels verkocht.

- Stel de formule op van q bij een prijs van p euro.
- Bereken de prijs als er 900 tandenborstels worden verkocht.

Aanpak

q is omgekeerd evenredig met p , dus $q = \frac{a}{p}$.

Uitwerking

$$\begin{array}{l} \text{a } q = \frac{a}{p} \\ p = 3,25 \text{ en } q = 800 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{3,25} = 800 \\ a = 2600 \end{array} \right. \leftarrow \begin{array}{l} \text{Vermenigvuldig links en} \\ \text{rechts met } 3,25. \\ \text{Je krijgt } 800 \cdot 3,25 = 2600. \end{array}$$

$$\text{Dus } q = \frac{2600}{p}.$$

$$\text{b } q = 900 \text{ geeft } 900 = \frac{2600}{p} \leftarrow \text{Je kunt de wisseleigenschap gebruiken.}$$
$$p = \frac{2600}{900} \approx 2,89$$

De prijs is €2,89.

56

Zie de formules I, II en III hiernaast.



- Geef bij elke formule aan of er sprake is van een evenredig verband, een omgekeerd evenredig verband of geen van beide.
- Maak b vrij bij formule I.
- Schrijf formule II in de vorm $p = aq$.
- Druk y uit in x bij formule III.

$$\text{I } A = \frac{5,5}{b}$$

$$\text{II } p = \frac{q}{25}$$

$$\text{III } xy = 12$$

57 In welke van de volgende situaties is sprake van een recht evenredig verband en in welke van een omgekeerd evenredig verband?

- a Het aantal mensen dat van één noodrantsoen moet leven en de hoeveelheid voedsel per persoon.
- b Het aantal producten dat een machine aflevert en de tijd die de machine draait.
- c Het aantal auto's op een veerboot en de beschikbare plaats per auto.
- d De snelheid van een roeiboot en de afstand die de boot in 22 minuten aflegt.

58 Volgens een onderzoeksbureau is het aantal per maand verkochte vulpennen van het merk Waterman omgekeerd evenredig met de prijs p in euro's. Bij een prijs van €40,50 is de maandverkoop 6480 vulpennen.

- a Stel de formule op van q bij een prijs van p euro.
- b Bereken de maandelijkse verkoop bij een prijs van €32,40.
- c Bereken welke prijs bij een maandelijkse verkoop van 5400 vulpennen hoort.

59 Een bungalowpark heeft regelmatig te kampen met wateroverlast. De eigenaars van de bungalows besluiten drainage aan te leggen. Er worden drainagebuizen aangebracht die voor de afvoer van het water zorgen. De totale kosten van de aanleg zijn 288 000 euro. De oppervlakte van het vakantiepark is 120 000 m². Afgesproken wordt dat de parkbewoners samen de totale aanlegkosten opbrengen. Het te betalen bedrag aan aanlegkosten is recht evenredig met de oppervlakte van de kavel. Voor een kavel zijn de aanlegkosten 1536 euro. Bereken de oppervlakte van die kavel.



60 Zie de tabellen hiernaast. Er is sprake van een omgekeerd evenredig verband tussen R en t .

- a Toon aan dat de tabel hiermee in overeenstemming is. Gebruik alle waarden in de tabel.
- b Geef de formule van R .

Er is sprake van een recht evenredig verband tussen N en r .

- c Toon aan dat de tabel hiermee in overeenstemming is. Gebruik alle waarden in de tabel.
- d Geef de formule van N .

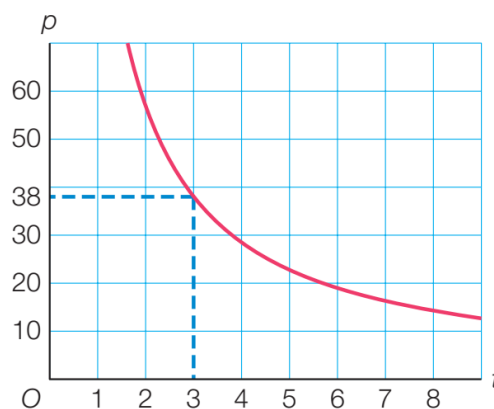
t	5	25	50	125
R	430	86	43	17,2

r	35	80	115	210
N	13,3	30,4	43,7	79,8

A61 Enkele jaren geleden vond een olieramp plaats met de Keystone pijpleiding in Kansas (Verenigde Staten), waarbij veel olie in de omgeving terecht kwam. Natuurlijke processen zorgen voor een afbraak van de olie.

Onderzoek heeft uitgewezen dat het percentage nog aanwezige olie p omgekeerd evenredig is met de verstreken tijd t in jaren. Hierbij is $t > 1,5$. In de grafiek hiernaast vind je verdere informatie.

- Stel de formule op van p .
- Hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid olie is na 5,5 jaar nog aanwezig?
- Hoe lang duurt het tot 95% van de olie is verdwenen?

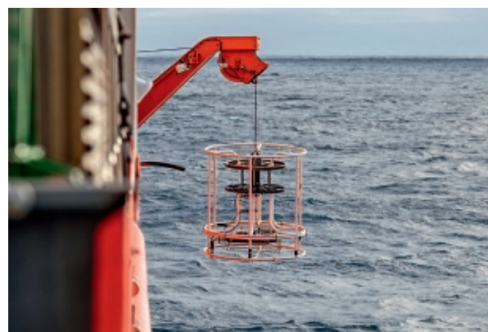


A62 Oceanografisch onderzoek heeft uitgewezen dat de watertemperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ omgekeerd evenredig is met de diepte d in km. Dit verband blijkt alleen te gelden voor diepten groter dan 500 meter. Op een diepte van 2500 meter is de watertemperatuur $1,6^{\circ}\text{C}$.

- Stel de formule op van de watertemperatuur T op een diepte van d km.
- Bereken de watertemperatuur in $^{\circ}\text{C}$ op 4835 meter diepte. Rond af op één decimaal.
- Op hoeveel meter diepte is de watertemperatuur $1,4^{\circ}\text{C}$? Rond af op honderdtallen.

Voor dit onderzoek is meetapparatuur van een schip naar beneden gelaten. De diepte d in km van de apparatuur is evenredig met de tijd t in uren dat de apparatuur zakt. Het duurt 40 minuten om de apparatuur tot een diepte van 500 meter te laten zakken.

- Druk d uit in t .
- Bereken de watertemperatuur in $^{\circ}\text{C}$ die de apparatuur na twee uur zakken meet. Rond af op één decimaal.



A63 Zie opgave 62.

⊗* Onderzoek hoelang de apparatuur aan het zakken is op het moment dat een watertemperatuur van $1,2^{\circ}\text{C}$ gemeten wordt. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

- A64 *** Een apotheker heeft alcohol van 95% op voorraad. Deze oplossing bestaat voor 95% van het volume uit alcohol en voor 5% uit water. De concentratie alcohol is dus 95%. Door water toe te voegen, krijg je een oplossing met een lagere concentratie alcohol.
- a** Toon aan dat je alcohol van 19% krijgt als je 1 liter alcohol van 95% met water aanvult tot 5 liter oplossing.
 - b** Vul je 1 liter alcohol van 95% met water aan tot V liter oplossing dan is de concentratie alcohol c in procenten omgekeerd evenredig met V . Hoeveel water moet je toevoegen aan 1 liter alcohol van 95% om alcohol van 76% te krijgen?
 - c** De apotheker heeft ook waterstofperoxide van 3% op voorraad. Hoeveel van de voorradige oplossing moet worden aangevuld met water om 0,5 liter waterstofperoxide van 0,15% te krijgen?

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan werken met een omgekeerd evenredig verband.
- ☐ Ik kan herkennen of ik met een (recht) evenredig of omgekeerd evenredig verband te maken heb.

► **OPGAVE C8**
THEORIE A

► **OPGAVE C9**
THEORIE A

- C8** De bereidingstijd van een lasagne in een magnetron is omgekeerd evenredig met het ingestelde vermogen. Bij een vermogen V van 800 watt is de bereidingstijd T precies 4 minuten.
- a** Stel de formule van T op.
 - b** Bereken de bereidingstijd bij een vermogen van 850 watt. Geef je antwoord in seconden nauwkeurig.
 - c** Peter bereidt de lasagne in 3 minuten en 12 seconden. Bereken het vermogen.
- C9** In welke van de volgende situaties is sprake van een recht evenredig verband en in welke van een omgekeerd evenredig verband?
- a** Het aantal pakken melk dat je koopt en de prijs van het totaal.
 - b** Het aantal even grote volkstuintjes op een complex van één hectare en de grootte van zo'n volkstuintje.

-
- C8 a** $T = \frac{3200}{V}$
- b** 3 minuten en 46 seconden
 - c** 1000 watt
- C9 a** recht evenredig
- b** omgekeerd evenredig

6.4 Formules met machten

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met de rekenregels voor machten.
- Je kunt werken met gebroken exponenten.
- Je kunt werken met niet-positieve exponenten.

065

□ ⊗ *

Je weet dat $x^2 = x \cdot x$ en $x^3 = x \cdot x \cdot x$.

a Laat zien dat hieruit volgt dat $x^2 \cdot x^3 = x^5$.

b Laat zien dat $(x^2)^3 = x^6$.

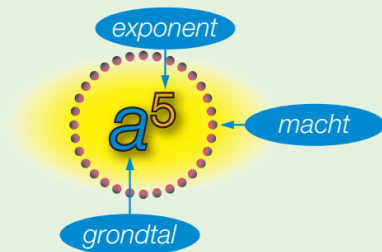
c Laat zien dat $(3x)^4 = 3^4 \cdot x^4$.

Theorie A Machten herleiden

Je weet dat a^5 een macht van a is.

In de macht a^5 is a het grondtal en 5 de exponent.

a^5 is een korte schrijfwijze voor $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, dus voor het product van vijf factoren a .



Rekenen met machten gaat als volgt.

$a^2 \cdot a^5 = \underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ factoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5 \text{ factoren}} = a^{2+5} = a^7$	Bij het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten bij elkaar op.
$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^{5-2} = a^3$	Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af.
$(a^2)^5 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{5 \text{ factoren } a^2} = a^{2 \cdot 5} = a^{10}$	Bij de macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten met elkaar.
$(ab)^4 = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab}_{4 \text{ factoren } ab} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4 \text{ factoren } a} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b}_{4 \text{ factoren } b} = a^4 b^4$	Bij de macht van een product krijg je een product van machten.

Zo krijg je de volgende rekenregels voor machten.

Rekenregels voor machten

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (a^p)^q = a^{pq} \quad (ab)^p = a^p b^p$$

Zo is $(2a^2)^3 = 2^3 \cdot (a^2)^3 = 8a^6$. En $\frac{8a^5}{2a^3} = 4a^2$.

Verder is $3a^3 \cdot a^2 - 4a^5 = 3a^5 - 4a^5 = -a^5$.

Voorbeeld

Herleid de formules.

a $A = (-3a^3)^2 + (-3a^2)^3$

b $B = \frac{2a^7}{7a^4} - \frac{12a^3b}{3ab}$

c $C = -2a^2(3a^3 - a^5)$

$$(-3)^2 = 9 \text{ en } (-3)^3 = -27$$

Uitwerking

a $A = (-3a^3)^2 + (-3a^2)^3 = 9a^6 - 27a^6 = -18a^6$

b $B = \frac{2a^7}{7a^4} - \frac{12a^3b}{3ab} = \frac{2}{7}a^3 - 4a^2$

c $C = -2a^2(3a^3 - a^5) = -6a^5 + 2a^7$

66 Herleid de formule.



a $A = (a^3)^4$

c $C = 6a \cdot (a^4)^2$

b $B = \frac{12x^6}{4x^2}$

d $D = \frac{x^2 \cdot 5x^8}{15x^5}$

67 Herleid de formule.



a $A = (p^2)^3 \cdot (p^3)^5$

c $C = (2q^3)^2 + (3q^6)^2$

e $E = 5(x^8)^2 - 3x^{10}$

b $B = 10x^6 - 5(x^2)^3$

d $D = \frac{-15p^6q^7}{5(pq)^2}$

f $F = \frac{24a^4b^2}{8a^3b} + \frac{(3ab)^3}{(6ab)^2}$

68 **a** Neem $y = x^5$ in de formule $Q = y(6y - x^2)$ en werk de haakjes weg.



b Neem $t = -2a$ in de formule $R = -2at^2 + a^2t$ en herleid.

c Neem $p = (ab)^2$ in de formule $S = \frac{a^5b^3}{abp}$ en herleid.

69 **a** Herleid de formule $A = \frac{(x^3 + x)^2}{x^2}$ tot de vorm $A = ax^b + cx^d + e$.

b Herleid de formule $B = \frac{(2p^2q + pq^4)(2p^2q - pq^4)}{(-5pq)^2}$ tot de vorm $B = ap^b + cq^d$.

Raymond ontwerpt een piramidevormige cadeauverpakking. Voor de inhoud I in cm^3 geldt $I = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$. Hierin is G de oppervlakte van het grondvlak in cm^2 en h de hoogte van de verpakking in cm .

Raymond maakt een prototype met een vierkant

grondvlak waarvoor geldt $G = \frac{9h^2}{10}$.

- a Toon aan dat $I = 0,3h^3$.
- b Het prototype moet een inhoud van een liter hebben. Bereken de hoogte in mm nauwkeurig.

Raymond besluit dat het uiteindelijke ontwerp een zeshoekig grondvlak

krijgt met zijde p cm . Voor de oppervlakte van het grondvlak geldt

$G = \frac{21p^2}{8}$ en verder wil Raymond dat $h = 6p - 2$.

- c Toon aan dat $I = 5,25p^3 - 1,75p^2$.
- d Het uiteindelijke ontwerp moet ook een inhoud van een liter hebben. Bereken de lengte van een zijde van het grondvlak en de hoogte. Geef beide in mm nauwkeurig.



Theorie B Machten met gebroken exponenten

De rekenregels voor machten gelden ook voor machten met gebroken exponenten. Dus bijvoorbeeld

$$x^{1,5} \cdot x^{2,3} = x^{3,8}$$

$$\frac{x^{6,1}}{x^{5,4}} = x^{0,7}$$

$$(x^{1,75})^3 = x^{5,25}$$

$$(4y)^{1,5} = 4^{1,5} \cdot y^{1,5} = 8y^{1,5}$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

Gebroken getallen zijn breuken zoals $\frac{1}{3}$ en $2\frac{3}{5}$ of decimale getallen zoals 3,6.

Voorbeeld

- a Herleid de formule $A = 0,054 \cdot (20x^{1,5})^{3,4}$ tot de vorm $A = ax^n$. Rond a af op gehele.
- b Gegeven zijn de formules $B = 0,6k^{2,25}$ en $k = 15l$. Schrijf de formule van B in de vorm $B = al^b$. Rond a af op gehele.

$$0,054 \cdot 20^{3,4} \approx 1432$$

Uitwerking

$$\text{a } A = 0,054 \cdot (20x^{1,5})^{3,4} = 0,054 \cdot 20^{3,4} \cdot x^{5,1} \approx 1432 \cdot x^{5,1}$$

Dus $A = 1432x^{5,1}$.

$$\text{b } \left. \begin{array}{l} B = 0,6k^{2,25} \\ k = 15l \end{array} \right\} B = 0,6(15l)^{2,25} = 0,6 \cdot 15^{2,25} \cdot l^{2,25} \approx 266 \cdot l^{2,25}$$

Dus $B = 266l^{2,25}$.

71 Herleid de formule tot de vorm $y = ax^n$.

a $y = 5,6x^{1,2} \cdot x^{3,4}$ **c** $y = 0,5(x^{1,2})^{3,1}$ **e** $y = (0,16x^{2,8})^{0,5}$

b $y = \frac{3,6x^{5,6}}{2x^{4,9}}$ **d** $y = \frac{x^{1,6}}{x^{1,4}}$ **f** $y = \left(\frac{x^{1,75}}{x^{1,35}}\right)^{1,5}$

72 Herleid de formule tot de vorm $y = ax^n$. Rond a af op gehele.

a $y = (100x^{0,6})^{1,4}$ **b** $y = 12,8 \cdot (25x^{1,8})^{1,1}$ **c** $y = 0,0018 \cdot (312x^{0,75})^2$

73 **a** Gegeven zijn de formules $K = 20p^{1,15}$ en $p = 80q$.
Schrijf de formule van K in de vorm $K = aq^b$. Rond a af op gehele.

b Gegeven zijn de formules $L = 0,05t^{2,5}$ en $t = 155w^{0,6}$.
Schrijf de formule van L in de vorm $L = aw^b$. Rond a af op gehele.

c Gegeven zijn de formules $M = 50f^{0,75} \cdot g^{1,25}$ en $g = 20f^2$.
Schrijf de formule van M in de vorm $M = af^b$. Rond a af op gehele.

74 **a** Gegeven is de formule $A = \frac{0,18(13,5q^{0,8})^{2,5}}{q^{0,6}}$.
Schrijf de formule in de vorm $A = aq^b$. Rond a af op gehele.

b De formule $B = 1250(6,12x^{1,3} \cdot y^{2,7})^{0,5}$ is te schrijven in de vorm $B = ax^b \cdot y^c$.
Bereken a , b en c . Rond a af op gehele.

A75 Biologen hebben onderzoek gedaan naar de soortenrijkdom van planten en dieren op een aantal eilanden in het Caribisch gebied. Deze eilanden zijn kleiner dan 500 vierkante mijl. Ze vonden voor het aantal soorten N van amfibieën en reptielen het verband $N = 3,3A^{0,3}$. Hierin is N het aantal soorten op het eiland en A de oppervlakte van het eiland in vierkante mijl.



- a** Schets de grafiek.
- b** Bereken het aantal soorten op een eiland met een oppervlakte van 200 vierkante mijl.
- c** Op een eiland leven twintig soorten amfibieën en reptielen. Bereken de oppervlakte van het eiland in vierkante mijl. Rond af op honderdtallen.
- d** Er geldt: bij elke verdubbeling van de oppervlakte hoort een toename van het aantal soorten met een vast percentage. Bereken dit percentage. Rond af op gehele.

Om de formule om te zetten in de vorm $N = aB^{0,3}$ waarin B de oppervlakte in vierkante kilometer is, gebruik je dat 1 vierkante km gelijk is aan 0,386 vierkante mijl, dus dat $A = 0,386B$.

- e** Bereken a . Rond af op één decimaal.

76



a Je weet $\frac{a^3}{a^3} = 1$. Je kunt $\frac{a^3}{a^3}$ ook herleiden met de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.

Laat zien dat hieruit volgt dat $a^0 = 1$.

b Je weet $\frac{a^2}{a^4} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a}}{a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = \frac{1}{a^2}$. Je kunt $\frac{a^2}{a^4}$ ook met $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ herleiden.

Laat zien dat hieruit volgt dat $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

Theorie C Machten met niet-positieve exponenten

In opgave 76 heb je gezien dat geldt $a^0 = 1$.

Je zag ook dat $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$. In het algemeen geldt $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

Er geldt $a^0 = 1$ en $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

De rekenregels voor machten gelden ook bij negatieve exponenten.

Voorbeeld

Herleid de formule $P = \frac{x^{2,4}}{(1,2x^{3,1})^2}$ tot de vorm $P = ax^n$. Rond a af op twee decimalen.

Uitwerking

$$P = \frac{x^{2,4}}{(1,2x^{3,1})^2} = \frac{x^{2,4}}{1,2^2 \cdot (x^{3,1})^2} = \frac{x^{2,4}}{1,44x^{6,2}} \approx 0,69x^{-3,8}$$

Dus $P = 0,69x^{-3,8}$.

$$\frac{1}{1,44} \approx 0,69$$

77



Schrijf het rechterlid van de formule als macht van a .

a $A = (a^{-3})^4$

c $C = (a^{-4})^0 \cdot a^{-1}$

b $B = \frac{a^3}{a^8}$

d $D = a^5 \cdot \frac{1}{a}$

Een macht van a heeft de vorm a^n .

78



Herleid de formule.

a $y = 2 \cdot x^{-7} \cdot x^3$

d $y = 0,4x^{5,3} \cdot \frac{1}{4x^{3,5}}$

b $y = \frac{4x^3}{5x^{-8}}$

e $y = x^{6,3}(3x^{-2,1})^3$

c $y = 4x \cdot (2x^2)^{-3}$

f $y = \frac{x^7}{0,1x^0}$

79
□ ⊗ *

- a Herleid de formule $K = \frac{10x^{3,2}}{(4,5x^{2,5})^2}$ tot de vorm $K = ax^n$. Rond a af op twee decimalen.
- b Herleid de formule $L = \frac{2t^{1,6} \cdot 4t^{2,4}}{16t^6}$ tot de vorm $L = at^n$.

A80
□ ⊗ *

Gegeven is de formule $y = m^n$.

- a Neem $n = 3$ en $m = 0,6a^{0,6}$ en herleid.
- b Neem $n = -3$ en $m = \frac{2,5b^{1,2}}{20b^4}$ en herleid.
- c Neem $n = -2$ en $m = 2p^{3,1} \cdot 5q^{-0,8}$ en herleid.
- d Neem $n = 2$ en $m = 2c + 1,5$ en werk de haakjes weg.

A81
□ ⊗ *

Murat verkoopt tweedehands auto's die tussen twee en twaalf jaar oud zijn. Hij gebruikt de formule $W = \frac{N}{L^{0,5}}$ voor de waarde van een auto in euro's. Hierin is N de nieuwprijs van de auto in euro's. Verder is L een formule die uitgedrukt is in de leeftijd l van de auto in jaren. Voor elk model auto hanteert Murat een andere formule voor L .



- a Van een vijf jaar oude auto was de nieuwprijs 24 500 euro. Verder geldt $L = 1,02l^{1,03}$.
Bereken de waarde van deze auto in honderden euro's nauwkeurig.
- b Murat heeft een auto die 15 000 euro waard is. De nieuwprijs was 56 000 euro. Voor dit model geldt $L = 1,6l$.
Bereken de leeftijd van de auto in jaren. Rond af op één decimaal.
- c Voor een bepaald model auto geldt $L = l^{0,98}$.
Schrijf voor dit model de formule van W in de vorm $W = N \cdot l^a$.

A82
⊗ *

Zie opgave 81.

Voor bepaalde modellen heeft Murat geen formule voor L vastgesteld. Om toch een schatting van de waarde te kunnen geven, hanteert hij in die gevallen $L = 0,82N^{0,08} \cdot l^{0,94}$.
Schrijf de formule van W in de vorm $W = aN^b \cdot l^c$. Rond a af op twee decimalen.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan werken met de rekenregels voor machten.
- ☐ Ik kan werken met gebroken exponenten.
- ☐ Ik kan werken met niet-positieve exponenten.

- **OPGAVE C10**
THEORIE A
- **OPGAVE C11**
THEORIE B
- **OPGAVE C11bc**
THEORIE C

C10 Herleid de formule.

a $A = x^3 \cdot x^4$

b $B = \frac{x^{12}}{x^3}$

c $C = (x^3)^4$

d $D = (3x^4)^3$

C11 Herleid de formule tot de vorm $y = ax^n$. Rond a af op twee decimalen.

a $y = 0,025 \cdot (30x^{1,6})^{1,4}$

b $y = \frac{520}{(10x^{1,2})^{0,4}}$

c $y = \frac{x^{0,03}}{7x^{0,2}}$

Antwoorden

C10 a $A = x^7$

b $B = x^9$

c $C = x^{12}$

d $D = 27x^{12}$

C11 a $y = 2,92x^{2,24}$

b $y = 207,02x^{-0,48}$

c $y = 0,14x^{-0,17}$

Kennis- en vaardigheidentest

6.1 Werken met formules

- 1** **a** Gegeven zijn de formules $R = 3p - q + 2$ en $q = p + 2$.
Combineer deze formules en druk R uit in p .
- b** Gegeven zijn de formules $A = 2kl + 3$ en $k - l = 2$.
Schrijf de formule van A in de vorm $A = al^2 + bl + c$.
- c** De formules $K = 10 - 0,5q^2$ en $q = 2 - p$ zijn te combineren tot de formule $K = -0,5p^2 + 2p + 8$.
Toon dit aan.

- 2** Voor het dagelijks verloop van het aantal auto's in de parkeergarage van een groot winkelcentrum is de formule $N = -0,36t^4 + 13,8t^3 - 176t^2 + 790t$ opgesteld. Hierin is N het gemiddelde aantal auto's en t de tijd in uren met $t = 0$ om 6:00 uur.

- a** Schets de grafiek van N .
- b** Bereken het aantal auto's dat om 21:00 uur in de parkeergarage staat.
- c** Bereken het aantal auto's bij elk maximum.
- d** Vanaf 9:15 uur is het aantal auto's zo groot, dat het lastig is een vrije plek te vinden.
Bereken tot welk tijdstip deze drukte aanhoudt. Rond af op minuten.
- e** Meneer Van den Berg wil het winkelcentrum tijdens de middag bezoeken. Hij wil graag dat er dan veel parkeerruimte is.
Wat is op basis van het model het gunstigste tijdstip? Rond af op halve uren.



6.2 Formules met breuken

- 3** Herleid het rechterlid van de formule tot de vorm $ax + b$.

a $A = \frac{3xy}{6xy} - \frac{4xy}{5y}$

b $B = \frac{2(5-x)}{4}$

c $C = -\frac{3x}{5} + \frac{4}{x} \cdot \frac{2x}{5}$

- 4** **a** Herleid $P = \frac{5y}{6x} : \frac{y}{2}$.

b Schrijf de formule $Q = \frac{4}{3x} + \frac{1}{x}$ in de vorm $Q = \frac{7}{ax}$.

c Schrijf het rechterlid van $R = \frac{2}{x} - \frac{4}{y}$ als één breuk.

- 5** Het bedrijf Kamp & Zo. biedt volledig georganiseerde schoolkampen aan. Voor een groep van x leerlingen die d dagen op kamp gaan, is de prijs in euro's per leerling te berekenen met de formule $P = \frac{1500 + 350(d - 1) + 25dx}{x}$.



- a** Bereken de prijs per leerling bij een driedaags kamp met 250 leerlingen.
- b** Voor een kamp met 20 leerlingen wil een school maximaal 200 euro per leerling besteden. Hoeveel dagen kunnen ze daarvoor maximaal op kamp?
- c** Een school wil één dag op kamp.

Laat zien dat de formule dan te herleiden is tot $P = \frac{1500}{x} + 25$.

- d** Toon aan dat de formule van vraag c te schrijven is als $x = \frac{1500}{P - 25}$.
- e** Voor de totale kosten T in euro's geldt $T = x \cdot P$.
Schrijf voor een kamp van 5 dagen de formule in de vorm $T = ax + b$.

6.3 Evenredigheden

- 6** Gegeven is dat het dagelijks aantal verkochte croissantjes C in een supermarkt omgekeerd evenredig is met de prijs p per croissant in euro. Voor $p = 1,20$ is $C = 40$.



- a** Stel de formule op van C .
- b** Op een dag zijn de croissantjes in de aanbieding van 1,50 euro voor 1,20 euro. Hoeveel meer croissantjes worden die dag verkocht vanwege de aanbieding?

- 7** Het bedrag aan onroerendezaakbelasting (OZB) is evenredig met de vastgestelde waarde van de woning. De familie Duin heeft een woning van 360 000 euro en betaalt hiervoor aan OZB 450 euro per jaar.

- a** Stel de formule op van het jaarlijkse bedrag B aan OZB in euro's bij een woning met een waarde van W euro.
- b** De familie Klapwijk betaalt per jaar 525 euro aan OZB. Bereken de waarde van hun woning.
- c** De familie Vonk heeft een woning met een waarde van 820 000 euro, daardoor betalen ze 0,4% van de totale jaarlijkse inkomsten aan OZB voor de gemeente. Bereken de totale jaarlijkse inkomsten aan OZB voor de gemeente.

6.4 Formules met machten

- 8** Combineer de formules en herleid tot de vorm $K = aq^n$.

a $K = p^2 + 5q^6$ en $p = -5q^3$

c $K = 10p^{1,5}q^{-1,5}$ en $p = 9q^3$

b $K = \frac{p^{0,6}}{8q^{0,1}}$ en $p = 32q^{-0,4}$

d $K = (4p)^{2,5}$ en $p = \frac{1}{q^{0,4}}$

Gemengde opgaven

- 1** De prijs P in euro's voor een taxirit wordt bepaald door een starttarief, de afstand d in km en de tijdsduur t in minuten van de rit. De maximale prijs die een taxi mag rekenen is $P_{\max} = 3,19 + 2,35d + 0,39t$.

a Bereken de maximale prijs van een taxirit van 5 km die 15 minuten duurt.

Taxibedrijf GRT gaat voor de berekening van de ritprijs uit van de formule voor $P_{\max}$ maar rekent bij ritten over een afstand vanaf 5 km voor de eerste 3 km geen kilometertarief. Daaruit volgt dat voor taxiritten bij GRT vanaf 5 km de formule $P_{\text{GRT}} = 3,19 + 2,35(d - 3) + 0,39t$ geldt.

b Licht dit toe.

c Schrijf de formule in de vorm $P_{\text{GRT}} = ad + bt + c$.

In de stad is de gemiddelde snelheid van een taxi 20 km/uur. Daaruit volgt dat een taxirit van d km in de stad $3d$ minuten duurt.

d Toon dit aan.

e Schrijf de formule voor de maximale prijs van een taxirit in de stad in de vorm $P_{\max} = p + qd$.

- 2** Bij meerkeuzetoetsen kan de methode *correction for guessing* gebruikt worden. Bij deze methode wordt rekening gehouden met het feit dat je bijvoorbeeld bij het gokken van 40 vierkeuzevragen, er gemiddeld 10 juist zal beantwoorden. De formule $S = G - \frac{F}{K - 1}$ wordt gebruikt voor het berekenen van de score S . Hierin is G het aantal goede antwoorden, F het aantal foute antwoorden en K het aantal keuzemogelijkheden.

a Bereken de score van iemand met 10 goede antwoorden op een toets van 20 tweekeuzevragen. Licht toe hoe je dit antwoord had kunnen voorspellen.

Er geldt aantal vragen = $G + F$. Hiermee is de formule van S bij een toets van 20 driekeuzevragen te schrijven als $S = 1,5G - 10$.

b Toon dit aan.

Om de score S om te zetten in het cijfer C gebruikt men de formule

$$C = \frac{S}{\text{maximale score}} \cdot 9 + 1.$$

- c** Hoeveel vragen moet je goed beantwoorden op een toets van 20 driekeuzevragen om minstens een 5,5 te halen?
- d** De formules van S en C die horen bij een toets van 30 vierkeuzevragen zijn te combineren tot de vorm $C = a \cdot G + b$. Bereken a en b .

- 3** **a** Schrijf het rechterlid van de formule $A = \frac{2}{p} - \frac{p}{q}$ als één breuk.
- b** Toon aan dat $B = \frac{1}{3}q + 4 + \frac{5}{q}$ te schrijven is als $B = \frac{q^2 + 12q + 15}{3q}$.
- c** Schrijf het rechterlid van de formule $C = 3q - 2 \cdot \frac{2q}{2q+1}$ als één breuk en herleid.
- d** Herleid de formule $D = \frac{-(4p^3q)^2}{(-2q)^4}$.
- e** Schrijf het rechterlid van de formule $E = 3q \cdot \frac{q}{q-1} : \frac{q}{q+1}$ als één breuk en herleid.
- f** Herleid de formule $F = \left(\frac{9p^{1,25}}{p^{-0,15}} \right)^{1,5}$.
- g** Combineer de formule $G = p - \frac{3q}{2p}$ en $q = 2p$ tot de vorm $G = aq + b$.

- 4** Een bank wil zijn klanten stimuleren om meer geld op de spaarrekening te houden. Ze gebruikt daarvoor een puntensysteem. Hoe meer je spaart, des te meer punten krijg je aan het einde van het jaar. Afhankelijk van het aantal punten en je spaargeld krijg je een bedrag uitgekeerd. Voor het berekenen van het aantal punten na een jaar sparen hanteert de bank de formule $p = 2S - 1$. Hierbij is p het aantal punten en S het gemiddelde spaarbedrag in duizenden euro's. Voor het bedrag B in euro dat de bank aan het einde van het jaar uitkeert, geldt de formule $B = 3p + 4S$.
- a** Matthijs heeft gedurende een jaar gemiddeld 2000 euro op zijn spaarrekening staan. Welk bedrag krijgt hij uitgekeerd?
- b** Mark krijgt van de bank te horen dat hij 9 punten heeft gespaard. Welk bedrag krijgt hij uitgekeerd?
- c** Sabine krijgt 97 euro uitgekeerd. Wat was het gemiddelde bedrag op haar spaarrekening gedurende het afgelopen jaar en hoeveel punten kreeg ze?

- 5** **a** Combineer de formules $A = 4p - q + 20$ en $p - q = 10$ tot de vorm $A = ap + b$.
- b** De formules $B = 2pq - 3p + 4$ en $5p - 8q = 160$ zijn te combineren tot de vorm $B = aq^2 + bq + c$. Bereken a , b en c .
- c** Gegeven zijn de formules $W = 18 - 7,5p + 2q$ en $3q - 15p = 5$. Druk W uit in q en herleid.
- d** Combineer de formules $F = 3xy + 4xz + 8$, $y = 2x + 5$ en $x + z = 6$ tot de vorm de formule $F = ax^2 + bx + c$.

- 6** Dominion is een kaartspel waarbij spelers kaarten kopen om zoveel mogelijk overwinningspunten te scoren. Hiernaast zie je twee kaarten uit het spel. De kaart Hertogdom geeft 3 overwinningspunten en de kaart Hertog geeft 1 overwinningspunt voor elke kaart Hertogdom die de speler tijdens het spel koopt. Het is lastig in te schatten hoeveel van elke soort kaart je het beste kunt kopen om zoveel mogelijk overwinningspunten te scoren. In deze opgave onderzoeken we de beste strategie.



- a** Remco wil in totaal vijf kaarten kopen.

Hoeveel Hertogdommen en Hertogen kan hij het beste kopen?

Om de beste strategie te vinden voor verschillende aantallen kaarten kun je formules gebruiken. Noem het aantal Hertogdommen x en het aantal Hertogen y . Het is nu mogelijk een formule op te stellen voor het aantal overwinningspunten S uitgedrukt in x en y . Deze formule is $S = 3x + xy$.

- b** Licht deze formule toe.

Als Remco in totaal 9 kaarten koopt, geldt $x + y = 9$.

- c** Stel voor het geval dat Remco 9 kaarten koopt een formule voor S uitgedrukt in x op en herleid deze formule.

- d** Wat is de beste strategie bij 9 kaarten?

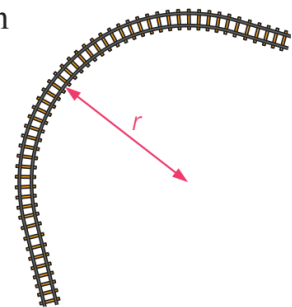
- e** Wat is het maximale aantal overwinningspunten dat je met 12 kaarten kunt halen?

- 7** Bij de aanleg van spoorwegen moet in een bocht *verkanting* worden toegepast: de buitenste rail ligt iets hoger dan de binnenste rail. Hiermee wordt voorkomen dat de trein uit de bocht vliegt. Het hoogteverschil h is omgekeerd evenredig met de straal r van de bocht. Bij een straal van 750 meter is het hoogteverschil 120 mm.

- a** Stel de formule op van het hoogteverschil h . Neem h in mm en r in meter.

- b** Hoeveel mm is het hoogteverschil bij een straal van 500 meter?

- c** In Nederland mag het hoogteverschil niet meer dan 15 cm zijn. Welke straal hoort bij een hoogteverschil van 15 cm?



Bij elke snelheid hoort een andere formule van h . Op het traject Keulen - Frankfurt geldt een hoogteverschil van maximaal 170 mm. Met dit hoogteverschil kan de ICE met een snelheid van 300 km/uur een bocht met een straal van 3320 meter nemen.

- d** Stel voor deze snelheid de formule van h op.



- 8** Bij grote etappekoersen in het wielrennen maakt de wedstrijdleiding vaak enkele tijdschema's voor een etappe. Je hebt dan drie schema's: een langzaam schema, een snel schema en een schema daartussenin. Tijdens de koers houdt men in de gaten op welk schema gereden wordt. Bij een etappe in de Tour de France wordt gestart om 12:15 uur. Het langzame schema geeft aan dat bij een gemiddelde snelheid van 42 km/uur de finish om 17:30 uur is. De finish blijkt om 16:55 uur te zijn. Met welke gemiddelde snelheid is in deze etappe gereden?



- 9** Pascal van Norden (Gouda, 5 september 1972) is een Nederlandse ultraloper. Hij is gespecialiseerd in lange afstanden. In 2017 prolongeerde hij in Winschoten zijn titel Nederlands kampioen 100 km. Hij legde deze afstand af in 6 uur, 55 minuten en 10 seconden. Daarmee was zijn gemiddelde snelheid (afgerond op drie decimalen) gelijk aan 14,452 km/uur. We vragen ons in deze opgave af hoe gelijkmatig Pascal tijdens deze race heeft gelopen. Als hij steeds even hard liep, moet er sprake zijn van een evenredig verband tussen de afgelegde afstand en de tijd. In de tabel zie je de tussentijden na telkens 10 km.

6 uur, 55 minuten en 10 seconden is
 $6 + \frac{55}{60} + \frac{10}{3600} = 6,919... \text{ uur.}$
 100 km in 6,919... uur,
 dus gemiddelde snelheid is
 $\frac{100}{6,919...} \approx 14,452 \text{ km/uur.}$

TUSSENTIJDEN BIJ DE KAMPIOENSRACE VAN PASCAL VAN NORDEN, 2017

afstand in km	10	20	30	40	50
tijd	40:25	1:21:08	2:01:36	2:41:42	3:22:03
afstand in km	60	70	80	90	100
tijd	4:02:50	4:44:26	5:27:44	6:11:35	6:55:10

Je kunt berekenen dat zijn gemiddelde snelheid tijdens de eerste 10 km gelijk was aan 14,845 km/uur.

- a** Licht dit toe met een berekening en bereken de gemiddelde snelheid in km/uur over de eerste 20 km en de eerste 30 km. Rond af op drie decimalen.

Je ziet dat de berekende gemiddelde snelheden niet precies aan elkaar gelijk zijn. Het gemiddelde van de drie in vraag a berekende snelheden is 14,813 km/uur. We nemen aan dat er een evenredig verband bestaat tussen de afgelegde afstand en de tijd als de gemiddelde snelheid niet meer dan 1% afwijkt van deze 14,813 km/uur. Dat betekent dat er een evenredig verband bestaat als de gemiddelde snelheid tussen 14,665 en 14,961 km/uur ligt.

- b** Bereken tot welke afstand het evenredige verband opgaat.



7

Conclusies bij statistiek

Op de achtergrondfoto zie je een paar dubbele rijen auto's in Taiwan. De dubbele rij met het grootste deel gele auto's bestaat voor ongeveer 10% uit gele auto's.

Welke dubbele rij is dit?

A de 1^e van links B de 2^e van links C de 3^e van links

Door dit kader kun je niet meer zien welk deel van de auto's op de foto geel is.

Welk deel verwacht je dat geel is?

A 0,01 B 0,03 C 0,06 D 0,10

Een onderzoeker wil bepalen welk deel van de auto's in Taiwan geel is.

Waarom is het kijken naar auto's op een parkeerplaats geen goede onderzoeksmethode?

7.1 Populatieproportie

Kennis en vaardigheden

- Je kunt rekenen met de populatie- en de steekproefproportie.
- Je kunt werken met de verdeling van de steekproefproportie.
- Je kunt een 95%-betrouwbaarheidsinterval berekenen voor de populatieproportie.
- Je kunt de betekenis van een 95%-betrouwbaarheidsinterval geven.
- Je kunt een 95%-betrouwbaarheidsinterval berekenen voor het populatiegemiddelde.

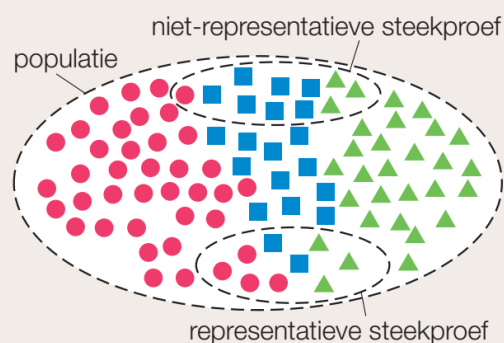
Voorkennis Steekproeven

Een statistisch onderzoek kan zich richten op individuele mensen, maar kan ook betrekking hebben op bijvoorbeeld huishoudens of scholen. Soms gaat een onderzoek over producten, zoals lampen of pakken melk. De totale groep waarop een onderzoek zich richt, heet de populatie.

Het onderzoeken van de hele populatie lukt in veel gevallen niet, bijvoorbeeld omdat het veel werk is.

Het deel van de populatie dat je daadwerkelijk onderzoekt, heet de steekproef.

Je wilt met de conclusie van een onderzoek iets over de populatie zeggen. Daarom is het belangrijk dat de steekproef een goede afspiegeling is van de populatie, oftewel dat de steekproef representatief is. Als een steekproef aselekt en voldoende groot is, dan zal deze over het algemeen een representatieve steekproef opleveren.



Een steekproef is aselekt als elk element van de populatie een even grote kans heeft om in de steekproef voor te komen.

V1 Juul wil onderzoeken welk percentage van de auto's met een Nederlands kenteken een blauwe kleur heeft. Voor haar onderzoek telt ze het aantal auto's met een Nederlands kenteken in haar straat en hoeveel daarvan blauw zijn.

- Omschrijf de populatie bij het onderzoek van Juul.
- Is de steekproef van Juul aselekt? Licht toe.





Van de 9,41 miljoen auto's met een Nederlands kenteken hebben er 1,04 miljoen een blauwe kleur. Hieruit volgt dat het deel van de auto's met een blauwe kleur ongeveer 0,111 is.

a Toon dit aan.

Bij een steekproef wordt van 1350 auto's met een Nederlands kenteken de kleur bepaald. Het blijkt dat er 151 een blauwe kleur hebben.

b Bereken het deel blauwe auto's in de steekproef. Rond af op drie decimalen.

Theorie A Populatieproportie en steekproefproportie

In opgave 1 ging het om welk deel van de auto's het kenmerk 'is blauw' heeft. De wiskundige term voor *deel* is **proportie**.

Een proportie is het deel van het totaal dat een bepaald kenmerk heeft.

Een proportie is een getal tussen 0 en 1.

Een proportie van een populatie noemen we een **populatieproportie** en deze geven we aan met de letter p .

In opgave 1 was de populatieproportie $p = \frac{1,04}{9,41} \approx 0,111$.

Een proportie van een steekproef noemen we een **steekproefproportie** en deze geven we aan met $\hat{p}$. Spreek $\hat{p}$ uit als p dakje.

In opgave 1 was de steekproefproportie $\hat{p} = \frac{151}{1350} \approx 0,112$.

Proportie en percentage worden vaak door elkaar gebruikt. Zo is een proportie van 0,112 hetzelfde als een percentage van 11,2%.

Afspraak

Rond percentages af op één decimaal en proporties op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

Het aantal elementen in de populatie noemen we de **populatieomvang**.

In opgave 1 was de populatieomvang 9,41 miljoen auto's.

Het aantal elementen in de steekproef noemen we de **steekproefomvang**.

In opgave 1 was de steekproefomvang 1350 auto's.

De populatieproportie p van een kenmerk in de populatie is

$$p = \frac{\text{aantal met het kenmerk in de populatie}}{\text{populatieomvang}}.$$

De steekproefproportie $\hat{p}$ van een kenmerk in de steekproef is

$$\hat{p} = \frac{\text{aantal met het kenmerk in de steekproef}}{\text{steekproefomvang}}.$$

2 De dagproductie literpakken melk in een melkfabriek is 10 000. Hiervan hebben 120 pakken te weinig inhoud. In een steekproef worden 250 pakken van de dagproductie onderzocht op de inhoud. Hiervan blijken er 4 te weinig inhoud te hebben.
Bereken de populatieproportie en de steekproefproportie bij literpakken melk met te weinig inhoud.

3 In een pot zitten 80 knikkers. Hiervan zijn er 16 rood.

- a Bereken de proportie rode knikkers.
- b Van de knikkers is 12,5% blauw.
Wat is de proportie blauwe knikkers?
- c Bas haalt een aantal knikkers uit de pot. Daarna zitten er 9 gele knikkers in de pot en is de proportie gele knikkers 0,15.
Hoeveel knikkers zitten er nog in de pot?

A4 Uit de gegevens van de Nederlandse overheid blijkt dat er 1,23 miljoen zzp'ers zijn onder de 9,46 miljoen werkende Nederlanders.

Bij een steekproef onder zzp'ers blijkt dat 1612 van de ondervraagden pensioen opbouwen, daarmee komt de steekproefproportie van het kenmerk 'bouwt pensioen op' op afgerond 0,64.

- a Bereken de populatieproportie zzp'ers. Rond af op twee decimalen.
- b Bereken de steekproefomvang.

A5 Bij een steekproef onder werknemers in Nederland werd onder andere het kenmerk 'werknemer is tevreden over het werk' onderzocht. De steekproefomvang was 1246 en $\hat{p} = 0,740$.

Hoeveel werknemers in de steekproef gaven aan niet tevreden te zijn over het werk?

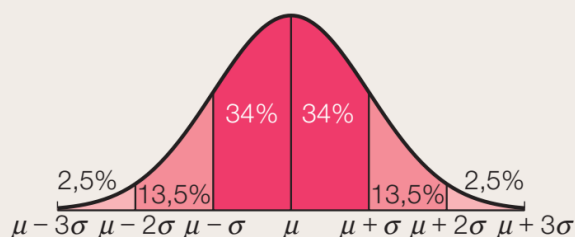
Voorkennis De normale verdeling

In veel situaties treden afwijkingen van het gemiddelde willekeurig op, zoals bijvoorbeeld bij de lengten van Nederlandse 20-jarige mannen, de levensduur van de lampen van een bepaald type en de gewichten van kilopakken koffie. In deze situaties heb je te maken met een normale verdeling. De bijbehorende kromme heet de normaalkromme.

Bij normale verdelingen met gemiddelde μ en standaardafwijking σ gebruiken we de volgende vuistregels:

Van alle waarnemingsgetallen ligt

- ongeveer 68% tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- ongeveer 95% tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$
- bijna 100% tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.



Voorbeeld

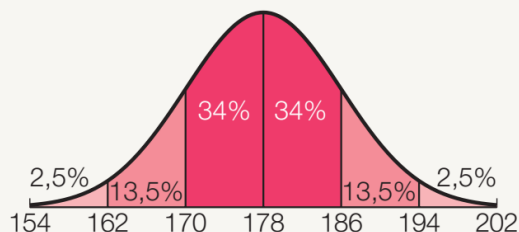
Van een groep mannen is de lengte normaal verdeeld met $\mu = 178$ cm en $\sigma = 8$ cm.

Bereken hoeveel procent van de mannen een lengte heeft tussen 162 en 178 cm.

Uitwerking

Zie de schets.

Dus $13,5\% + 34\% = 47,5\%$ van de mannen.



- V2** Van een groep baby's is het geboortegewicht normaal verdeeld met gemiddelde $\mu = 3500$ gram en standaardafwijking $\sigma = 450$ gram.
- a** Van hoeveel procent van de baby's is het geboortegewicht meer dan 4400 gram?
 - b** Hoeveel procent van de baby's heeft een geboortegewicht tussen 2600 gram en 3950 gram?
 - c** Van hoeveel procent van de baby's wijkt het geboortegewicht minder dan 900 gram van het gemiddelde af?
- V3** Verf bestaat onder andere uit vaste deeltjes. De proportie vaste deeltjes in de blikken verf van een fabrikant is normaal verdeeld met een gemiddelde van 0,48 en een standaardafwijking van 0,04. Bij hoeveel procent van de blikken ligt de proportie vaste deeltjes
- a** tussen 0,44 en 0,52
 - b** tussen 0,40 en 0,56?

- O6** Jan, Piet en Klaas willen ieder afzonderlijk onderzoeken wat de proportie grijze auto's met een Nederlands kenteken is. Ze nemen elk een aselechte steekproef van 136 auto's. De steekproefproportie grijze auto's is bij Jan 0,301, bij Piet 0,353 en bij Klaas 0,316.
- a** Hoe kan het dat Jan, Piet en Klaas verschillende steekproefproporties vinden?

Van alle auto's met een Nederlands kenteken is bij de Dienst Wegverkeer (RDW) de kleur geregistreerd. Zo weet de RDW dat de populatieproportie grijze auto's 0,320 is.

- b** Katrijn neemt ook een aselechte steekproef van 136 auto's, hiervan blijken er slechts 30 grijs te zijn.
Is deze uitkomst meer of minder waarschijnlijk dan die van Jan? Licht toe.
- c** Hoeveel grijze auto's verwacht je gemiddeld bij aselechte steekproeven van 136 auto's?

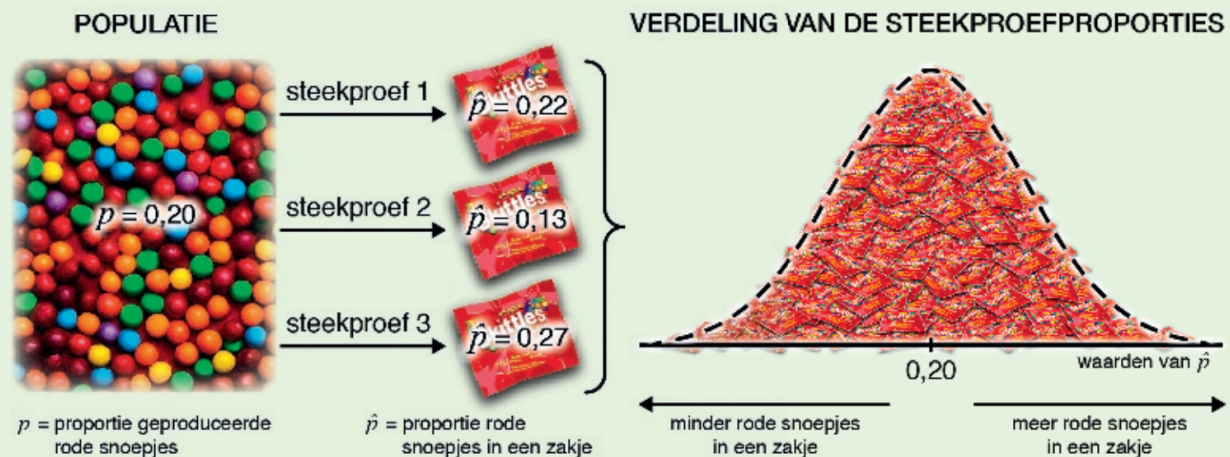
Theorie B De verdeling van steekproefproporties

In opgave 6 heb je gezien dat verschillende steekproeven uit dezelfde populatie verschillende steekproefproporties kunnen opleveren. Ook zag je dat niet alle mogelijke steekproefproporties even waarschijnlijk zijn.

Toeval speelt een rol.

De verdeling die aangeeft hoe waarschijnlijk de verschillende steekproefproporties zijn, heet de verdeling van de steekproefproporties.

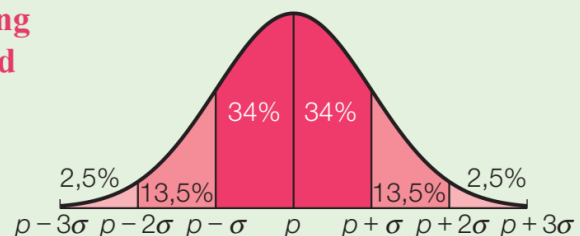
Bij een voldoende grote steekproefomvang is zo'n **steekproevenverdeling** bij benadering normaal verdeeld.



Voor de verdeling van de steekproefproporties gebruik je het volgende.

Bij populatieproportie p en steekproefomvang n is de steekproefproportie normaal verdeeld met gemiddelde p en standaardafwijking

$$\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

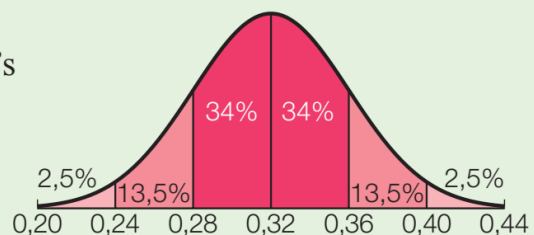


De proportie grijze auto's met een Nederlands kenteken is 0,32. Voor steekproeven van 136 auto's uit deze populatie zijn de steekproefproporties normaal verdeeld met gemiddelde 0,32 en

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,32(1-0,32)}{136}} = 0,04.$$

Zie de figuur hiernaast.

Als je veel steekproeven neemt van 136 auto's dan krijg je bij ongeveer 95% van die steekproeven een steekproefproportie tussen 0,24 en 0,40. Bij ongeveer 5% van de steekproeven wijkt de steekproefproportie meer dan 0,08 af van de populatieproportie.



Je mag in dit boek aannemen dat steekproeven aselekt zijn, tenzij anders is aangegeven.

Voorbeeld

In een land heeft 60% van de bevolking bruine ogen. Bij steekproeven van 24 personen wordt de proportie personen met bruine ogen genoteerd. Bereken bij welk percentage van de mogelijke steekproeven de steekproefproportie tussen 0,5 en 0,7 zal liggen.

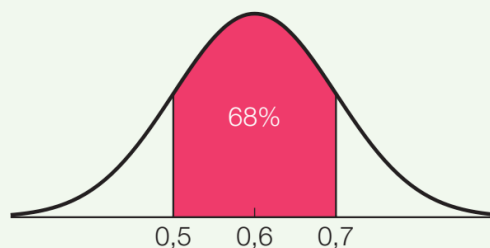
Aanpak

Schets een normaalkromme en gebruik de vuistregels bij de normale verdeling.

Uitwerking

$$\mu = p = 0,6 \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{0,6(1 - 0,6)}{24}} = 0,1$$

Zie de schets, dus bij 68% van de steekproeven.



7 Van de auto's met een Nederlands kenteken is 4% groen. Er wordt een steekproef genomen van 600 auto's waarbij de steekproefproportie van het kenmerk groen wordt berekend.

- a Bereken bij hoeveel procent van de mogelijke steekproeven de steekproefproportie kleiner is dan 0,032.
- b Tussen welke proporties verwacht je dat de middelste 95% van de steekproefproporties zal liggen?

8 Van de ruim 8 miljoen woningen in Nederland is 43% een huurwoning. Bij diverse onderzoeken bestaan de steekproeven uit een flink aantal aselekt gekozen woningen.

- a Een aantal van deze steekproeven had een omvang van 400 woningen. Bij hoeveel procent van deze steekproeven verwacht je dat de proportie huurwoningen kleiner is dan 0,38?
- b Tussen welke proporties verwacht je dat de middelste 95% van de steekproefproporties zal liggen bij een steekproefomvang van 1600?
- c Bij een onderzoek blijkt 50% van de woningen in de steekproef van lengte 1600 een huurwoning te zijn. Geef commentaar.

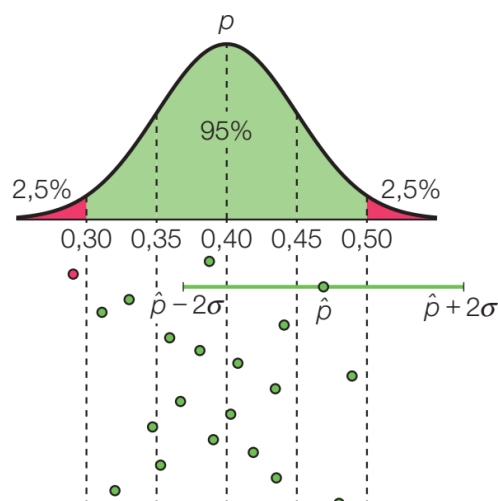
A9 De klas van meneer Verheijen voert in de stad een onderzoek uit. Alle 30 leerlingen selecteren willekeurig 25 personen en noteren onder andere de proportie mannen onder deze 25 personen. Neem aan dat $p = 0,5$.

- a Het blijkt dat 90% van de leerlingen een steekproefproportie tussen 0,4 en 0,6 heeft genoteerd. Dit resultaat maakt meneer Verheijen achterdochtig. Laat met een berekening zien dat hij hier reden toe heeft.
- b Pieter vond in zijn steekproef $\hat{p} = 0,28$. Betekent dit dat hij iets verkeerd heeft gedaan? Licht toe.

Op het Mary Cartwright College zitten ruim 2000 leerlingen, waarvan 40% in de bovenbouw. Bij steekproeven van 96 leerlingen wordt telkens de proportie bovenbouwleerlingen genoteerd. Zie de steekproevenverdeling hiernaast.

Er worden 20 steekproeven genomen. In de figuur zijn onder de verdeling de resultaten van deze steekproeven getekend.

- Steekproef A had $\hat{p} = 0,33$. Zet in de figuur een A bij deze steekproef.
- Bij steekproef B is rondom $\hat{p}$ ook het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ aangegeven met een lijnstuk. Ligt p in het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$?
- Teken bij steekproef A het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ rondom $\hat{p} = 0,33$. Ligt p hier ook in het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$?
- Ligt bij de rode steekproef p in $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$?
- Bij hoeveel procent van de intervallen ligt p in het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$?

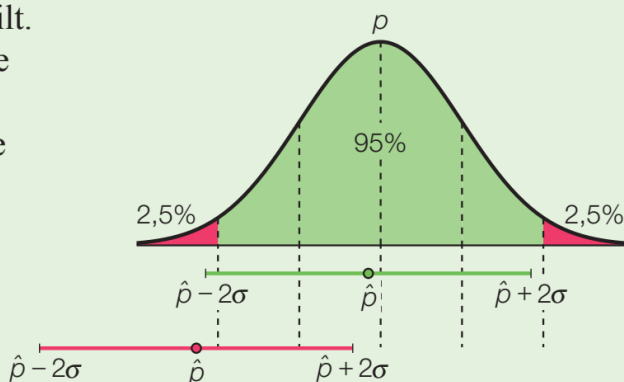


Theorie C Betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie

In opgave 10 werden steekproeven genomen van 96 leerlingen. Van de gevonden steekproefproporties $\hat{p}$ zullen de meeste weinig verschillen van de populatieproportie p . Dat is goed nieuws, want in de praktijk is p onbekend en wil je die juist te weten komen met een steekproef.

Uit de verdeling van de steekproefproporties volgt dat 95% van de mogelijke steekproefproporties $\hat{p}$ maximaal 2σ van de populatieproportie p verschilt. Omgekeerd is het ook zo dat p in 95% van de gevallen maximaal 2σ van $\hat{p}$ verschilt.

In de figuur hiernaast is van twee mogelijke steekproefproporties het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ onder de verdelingskromme weergegeven. Maar liefst 95% van de gevallen zijn zoals het groene interval, waarbij p in $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ ligt. Slechts 5% van de gevallen zijn zoals het rode interval, waarbij p buiten $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ ligt.



Het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ wordt het **95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie** genoemd.

Om het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ te berekenen heb je p nodig bij het berekenen van $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. Omdat p onbekend is, schatten we in deze formule de waarde van p met de gevonden steekproefproportie. In de formule van σ vervangen we dus p door $\hat{p}$. Voor grotere waarden van n zal deze schatting steeds beter kloppen.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$. Hierin is $\hat{p}$ de steekproefproportie en $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ met n de steekproefomvang.

Met het 95%-betrouwbaarheidsinterval wordt aangegeven dat je met 95% betrouwbaarheid weet dat de populatieproportie p in dit interval ligt. Als je een 95%-betrouwbaarheidsinterval hebt berekend, heb je 95% zekerheid dat dit interval p bevat.

Voorbeeld

Twee dagen voor de Tweede Kamerverkiezingen wordt aan 1200 stemgerechtigde Nederlanders gevraagd of ze van plan zijn te gaan stemmen.

Van deze 1200 zeggen er 756 inderdaad te gaan stemmen.

- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie stemgerechtigde Nederlanders die van plan zijn te gaan stemmen.
- b Welke informatie geeft dit interval in deze context?

Uitwerking

a $\hat{p} = \frac{756}{1200} = 0,63$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,63(1-0,63)}{1200}} = 0,0139\dots$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,63 - 2 \cdot 0,0139\dots \approx 0,602$

$\hat{p} + 2\sigma = 0,63 + 2 \cdot 0,0139\dots \approx 0,658$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,602; 0,658]$.

- b Het interval $[0,602; 0,658]$ bevat met 95% zekerheid de populatieproportie stemgerechtigde Nederlanders die van plan zijn te gaan stemmen.

Rond proporties in een betrouwbaarheidsinterval af op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

11 Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie bij



- a $\hat{p} = 0,46$ en $n = 250$
- b een steekproef van 700 personen waarbij 36% het onderzochte kenmerk had
- c een steekproef waarbij 56 van de 100 onderzochte personen het onderzochte kenmerk hadden.

12 Een bioloog onderzoekt de verhouding tussen de aantallen mannetjes en vrouwtjes van de bruine kikker in bergmeren van de Pyreneeën. Van de 150 onderzochte kikkers blijken er maar liefst 117 een mannetje te zijn.



- a Bereken de steekproefproportie mannetjeskikkers.
- b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie mannetjeskikkers.
- c Welke informatie geeft het interval van vraag b in deze context?



A13 Bij een onderzoek naar het roken van sigaretten worden 840 volwassenen ondervraagd. Hiervan blijken er 158 te roken.



- a Is de variabele 'rookt sigaretten' kwalitatief of kwantitatief? Licht toe.
- b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie volwassenen die roken.

Bij het onderzoek zijn 409 mannen en 431 vrouwen ondervraagd. Van de mannen rookten er 93.

- c Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rokers onder volwassen mannen. Doe dat ook voor vrouwen.
- d Overlappen de betrouwbaarheidsintervallen van vraag c? Licht toe.

A14 Bij een onderzoek onder de werknemers van een bedrijf bleek dat 192 van de ondervraagde werknemers fysieke klachten had als gevolg van het werk, hiermee kwam de steekproefproportie op 0,6621.



Stel het 95%-betrouwbaarheidsinterval op voor de proportie werknemers met fysieke klachten als gevolg van het werk.

A15 Bij de presidentsverkiezingen in een land moet gekozen worden tussen de kandidaten A en B. In een peiling die voorafgaat aan de verkiezingen zeggen 935 mensen te gaan stemmen. Hiervan zeggen er 487 op kandidaat A te gaan stemmen, de anderen kiezen voor kandidaat B. Onderzoek of je met een betrouwbaarheid van 95% kunt zeggen dat kandidaat A de verkiezingen zal gaan winnen.



Op een fruitveiling wordt een partij appels aangeboden. Joris wil weten hoe zwaar de appels in de partij gemiddeld zijn. Hij neemt een steekproef van 64 appels. Het gemiddelde gewicht van deze appels is 147 gram. Verder berekent hij dat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde gewicht in grammen van de appels in de partij [143, 151] is.

- Waar in het betrouwbaarheidsinterval ligt het gemiddelde gewicht van de appels in de steekproef?
- Licht toe dat het onwaarschijnlijk is dat de appels in de partij gemiddeld minder dan 143 gram of meer dan 151 gram wegen.

Theorie D Betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde

In opgave 16 heeft Joris een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een populatiegemiddelde berekend op basis van een steekproef. Bij zulke steekproeven is het steekproefgemiddelde normaal verdeeld net zoals dat bij de steekproefproportie het geval is.

In de steekproef van Joris is het gemiddelde gewicht per appel 147 gram. Een korte notatie voor dit **steekproefgemiddelde** is $\bar{X} = 147$ gram. Bij de gewichten van de appels in de steekproef van Joris kan ook de **steekproefstandaardafwijking** S worden berekend. Het berekenen van zo'n steekproefstandaardafwijking bij de metingen in een steekproef hoeft je niet zelf te doen. Bij de steekproef van Joris was $S = 16$ gram.

Bij 95% van de steekproeven zal het interval $[\bar{X} - 2\sigma, \bar{X} + 2\sigma]$ het populatiegemiddelde bevatten. Daarom wordt dit het **95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde** genoemd.

Je kunt σ schatten op basis van S met $\sigma = \frac{S}{\sqrt{n}}$.

We kunnen nu op basis van de steekproef van Joris met $n = 64$ en $S = 16$ het 95%-betrouwbaarheidsinterval opstellen voor het gemiddelde gewicht van de appels in de partij.

Met $\bar{X} = 147$ en $\sigma = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{16}{\sqrt{64}} = 2$ krijg je

$$\bar{X} - 2\sigma = 147 - 2 \cdot 2 = 143$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 147 + 2 \cdot 2 = 151$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is [143, 151] gram.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is $[\bar{X} - 2\sigma, \bar{X} + 2\sigma]$. Hierin is $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde en $\sigma = \frac{S}{\sqrt{n}}$ met S de steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.

Voorbeeld

Bij een onderzoek onder 715 Nederlandse jongeren naar hun smartphonegebruik, blijkt de gemiddelde dagelijkse gebruiksduur 3,5 uur te zijn. De bijbehorende standaardafwijking is 1 uur en 10 minuten.

- a Bereken in minuten nauwkeurig het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde dagelijkse gebruiksduur onder jongeren.
- b Welke informatie geeft dit interval in deze context?

Uitwerking

a $\bar{X} = 3,5 \cdot 60 = 210$ minuten, $\sigma = \frac{60 + 10}{\sqrt{715}} = 2,61... \text{ minuten}$

$$\bar{X} - 2\sigma = 210 - 2 \cdot 2,61... \approx 205$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 210 + 2 \cdot 2,61... \approx 215$$

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [205, 215] minuten.

- b De gemiddelde dagelijkse gebruiksduur van de smartphone van Nederlandse jongeren ligt met 95% zekerheid tussen ongeveer 205 en 215 minuten.

- 17** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde bij



a $\bar{X} = 100$, $S = 24$ en $n = 144$

- b een steekproefomvang van 100 waarbij het steekproefgemiddelde 80,5 is en de steekproefstandaardafwijking 15,5 is

c $\bar{X} = 12,50$ en $\frac{S}{\sqrt{n}} = 0,65$.

- 18** Een supermarkt verkoopt bakjes kersen. Op de bakjes staat dat de inhoud 350 gram is. Pim en Vera onderzoeken of de inhoud gemiddeld 350 gram is. Pim neemt een steekproef van 25 bakjes en berekent het gemiddelde gewicht per bakje en de standaardafwijking. Hij krijgt $\bar{X} = 346$ gram en $S = 14$ gram.



- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde bij de steekproef van Pim.
- b Waarom is er op basis van het betrouwbaarheidsinterval geen aanleiding om te twijfelen aan de gemiddelde inhoud?

Vera zegt: als we $\bar{X} = 346$ gram en $S = 14$ gram hadden gevonden in een steekproef van lengte 100 dan gaf het betrouwbaarheidsinterval wel aanleiding tot twijfel.

- c Licht met een berekening toe hoe Vera tot deze uitspraak komt.

- 19**  Bij een steekproef van 65 basisschoolleerlingen is de gemiddelde leeftijd waarop zij het zwemdiploma A halen 6 jaar en 9 maanden. De standaardafwijking is 10 maanden.
- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde leeftijd in maanden waarop basisschoolleerlingen het zwemdiploma A halen. Rond af op één decimaal.
 - Welke informatie geeft het interval van vraag a in deze context?



- A20**  Lang zitten brengt gezondheidsrisico's met zich mee. Daarom wordt er regelmatig onderzoek gedaan naar het zitgedrag van Nederlanders. In de tabel zie je van twee jaren de resultaten van zo'n onderzoek.

ZITTIJD PER DAG

	2015 ($n = 10\,665$)	2021 ($n = 9\,754$)
$\bar{X}$	8 uur en 45 minuten	9 uur en 6 minuten
S	2 uur en 36 minuten	5 uur en 3 minuten

- Ga na dat voor 2015 het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde zittijd per dag van Nederlanders [8 uur en 42 minuten, 8 uur en 48 minuten] is.
- Onderzoek of de 95%-betrouwbaarheidsintervallen voor de gemiddelde zittijd per dag van 2015 en 2021 elkaar overlappen.

De steekproefgemiddelden in de tabel zijn berekend op basis van de zittijd voor doordeweekse dagen en weekenddagen. Voor alleen doordeweekse dagen in 2021 is het 95%-betrouwbaarheidsinterval [9 uur en 24 minuten, 9 uur en 36 minuten] berekend.

- Wat was het steekproefgemiddelde voor doordeweekse dagen in 2021?
- Laat met een berekening zien dat in 2021 het steekproefgemiddelde voor weekenddagen 8 uur en 6 minuten was.

- A21**  Bij een onderzoek naar de educatie van volwassen Nederlanders is een steekproef van 144 personen genomen. Hierbij is voor het gemiddelde aantal jaren scholing het 95%-betrouwbaarheidsinterval [11,4; 12,1] vastgesteld.
- Onderzoek of de personen in de steekproef in totaal meer of minder dan 17 eeuwen scholing hebben gehad.
 - Onderzoek wat de steekproefstandaardafwijking S is.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan rekenen met de populatie- en de steekproefproportie.
- ☐ Ik kan werken met de verdeling van de steekproefproportie.
- ☐ Ik kan een 95%-betrouwbaarheidsinterval berekenen voor de populatieproportie.
- ☐ Ik kan de betekenis van een 95%-betrouwbaarheidsinterval geven.
- ☐ Ik kan een 95%-betrouwbaarheidsinterval berekenen voor het populatiegemiddelde.

- OPGAVE C1ab
THEORIE A
- OPGAVE C1c
THEORIE A
- OPGAVE C2a
THEORIE B
- OPGAVE C2b
THEORIE C
- OPGAVE C3
THEORIE D

C1 Personenauto's die 40 jaar of ouder zijn, worden oldtimers genoemd. Er zijn 220 125 oldtimers in Nederland. De proportie groene oldtimers is 0,16.

- a Hoeveel groene oldtimers zijn er in Nederland?
- b Bij een steekproef van oldtimers was de proportie groene auto's 0,18 en dat komt overeen met 45 auto's.
Bereken de steekproefomvang.
- c Er worden steekproeven genomen van 84 oldtimers.
Bij hoeveel procent van deze steekproeven verwacht je een proportie groene oldtimers groter dan 0,24?

C2 Er nemen 795 mensen deel aan een onderzoek naar vrijwilligerswerk door volwassen Nederlanders. Van hen doen er 326 vrijwilligerswerk.

- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie volwassen Nederlanders die vrijwilligerswerk doen.
- b Welke informatie geeft het interval van vraag a in deze context?

C3 Bij een onderzoek naar de gezondheid van chihuahua's wordt van 210 chihuahua's het gewicht bepaald. Hierbij wordt een gemiddeld gewicht van 2280 gram gevonden met een standaardafwijking van 340 gram. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde gewicht van chihuahua's. Rond af op gehele grammen.

Antwoorden

- C1** a 35 220 groene oldtimers
b 250 oldtimers
c 2,5%
- C2** a $[0,375; 0,445]$
b Het interval $[0,375; 0,445]$ bevat met 95% zekerheid de populatieproportie volwassen Nederlanders die vrijwilligerswerk doen.
- C3** $[2233, 2327]$ gram

7.2 Betrouwbaarheidsintervallen toepassen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bepalen welk type betrouwbaarheidsinterval past bij een situatie.
- Je kunt werken met verschillende notaties voor betrouwbaarheidsintervallen.

O22



Voor een onderzoek naar het kijkgedrag van jongeren op YouTube zijn de volgende deelvragen opgesteld.

- 1 Welk percentage van de jongeren kijkt dagelijks een video op YouTube?
- 2 Hoeveel tijd besteden jongeren dagelijks aan het kijken van YouTubevideo's?

In de tabel zie je een deel van de verzamelde gegevens die horen bij deze deelvragen.

- a** Noem bij elke deelvraag de variabele die erbij hoort en geef aan of deze kwalitatief of kwantitatief is.

De onderzoekers willen gebruikmaken van betrouwbaarheidsintervallen om een conclusie te trekken over het kijkgedrag van de populatie.

- b** Bij welke deelvraag hoort een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie? En bij welke een betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde?

kijkt dagelijks	kijktijd (minuten)
ja	35
ja	125
nee	85
ja	67
nee	45
ja	25

Theorie A Soorten betrouwbaarheidsintervallen

In dit hoofdstuk heb je kennis gemaakt met twee soorten betrouwbaarheidsintervallen.

- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie. Hiervoor heb je het steekproefresultaat $\hat{p}$ nodig.
- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde. Hiervoor heb je de steekproefresultaten $\bar{X}$ en S nodig.

Vaak kun je aan de gegevens in een opgave zien welk soort betrouwbaarheidsinterval gevraagd wordt.

Als je met een kwalitatieve variabele te maken hebt kun je alleen een betrouwbaarheidsinterval voor een populatieproportie opstellen.

Bij een kwalitatieve variabele kun je op basis van $\hat{p}$ en n het betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie opstellen.

Bij een kwantitatieve variabele kun je op basis van $\bar{X}$, S en n het betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde opstellen.

Behalve met betrouwbaarheidsintervallen voor de populatieproportie en het populatiegemiddelde kun je ook te maken krijgen met betrouwbaarheidsintervallen voor bijvoorbeeld percentages en aantallen.

Voorbeeld

Er zijn 8,8 miljoen vrouwen in Nederland. Bij een onderzoek naar haarkleur onder vrouwen in Nederland blijkt dat 227 van de 500 vrouwen in de steekproef bruin haar hebben.

- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aantal vrouwen met bruin haar in Nederland. Geef het betrouwbaarheidsinterval in miljoenen en rond af op één decimaal.
- b Welke informatie geeft dit interval in deze context?

Aanpak

- a Bereken de grenzen van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de *proportie* vrouwen met bruin haar en vermenigvuldig die grenzen met het totale aantal vrouwen in Nederland.

Uitwerking

- a $\hat{p} = \frac{227}{500} = 0,454$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,454(1 - 0,454)}{500}} = 0,022...$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,454 - 2 \cdot 0,022... = 0,409...$ en $0,409... \cdot 8,8 \approx 3,6$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,454 + 2 \cdot 0,022... = 0,498...$ en $0,498... \cdot 8,8 \approx 4,4$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aantal vrouwen met bruin haar in Nederland is $[3,6; 4,4]$ miljoen.
- b Het aantal vrouwen in Nederland met bruin haar ligt met 95% zekerheid tussen ongeveer 3,6 en 4,4 miljoen.

23



Het centrum van Eindhoven heeft 10 163 inwoners. Bij een steekproef onder 170 van deze inwoners gaven 59 aan lid te zijn van een sportclub. Stel voor inwoners van het centrum van Eindhoven het 95%-betrouwbaarheidsinterval op voor

- a de proportie die lid is van een sportclub
- b het percentage dat lid is van een sportclub
- c het aantal dat lid is van een sportclub.

Een betrouwbaarheidsinterval voor een percentage stel je op via het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie.

24



Geef bij de onderstaande onderzoeksvragen steeds aan of een betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde of voor een proportie het meest voor de hand ligt. Licht je antwoorden toe.

- a Hoeveel tijd besteden mannen dagelijks aan hun uiterlijk?
- b Welk percentage eindexamenleerlingen heeft al een rijbewijs?
- c Welk deel van de Nederlanders doet aan afvalscheiding?
- d Zijn basketballers of voetballers sneller op de 100 m sprint?
- e Scoren veel leerlingen op school boven het landelijk gemiddelde?

25



Bij een steekproef van 150 middelbare scholieren bleek dat 60% van de scholieren het afgelopen schooljaar meer dan 120 minuten per week aan wiskundehuiswerk besteedde. Verder bleek voor het aantal minuten wiskundehuiswerk per week te gelden dat $\bar{X} = 150$ en $S = 40$.

- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddeld aantal minuten wiskundehuiswerk per week.
- b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie leerlingen die meer dan 120 minuten per week aan wiskundehuiswerk besteedden.



A26



Op een congres werden aselekt 200 van de 1390 aanwezigen gevraagd mee te doen aan een enquête over rijbewijzen. Het bleek dat 79 van de deelnemers aan de enquête geen rijbewijs hadden. Bij de deelnemers die wel een rijbewijs hadden, bleek de gemiddelde leeftijd waarop het rijbewijs behaald was 21,7 jaar met een standaardafwijking van 3,7 jaar.

- a Wat betekent aselekt in deze context?
- b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde leeftijd waarop bezoekers van dit congres met een rijbewijs, hun rijbewijs behaalden. Rond af op één decimaal.
- c Een van de deelnemers denkt dat een derde van alle bezoekers van het congres geen rijbewijs heeft. Onderzoek of deze proportie in het 95%-betrouwbaarheidsinterval ligt.



A27 Bij 135 lo-docenten is een



Coopertest afgenomen. Je mag ervan uitgaan dat dit een representatieve steekproef is. De deelnemers moesten 12 minuten hardlopen en daarbij een zo groot mogelijke afstand afleggen. In de tabel zie je een schaal voor de beoordeling van resultaten. Van de 75 mannelijke docenten bleken er 3 een zeer slechte conditie te hebben en 12 een slechte conditie. Afstanden onder de 2000 m voor mannen worden door de organisatie als onvoldoende bestempeld.

BEOORDELING RESULTATEN COOPERTEST

beoordeling	geslacht	
	m	v
zeer slecht	0 – 1600 m	0 – 1500 m
slecht	1600 – 2000 m	1500 – 1800 m
redelijk	2000 – 2400 m	1800 – 2200 m
goed	2400 – 2800 m	2200 – 2700 m
zeer goed	2800 – 3200 m	2700 – 3100 m
uitstekend	3200 – 3600 m	3100 – 3500 m

- a** Stel dat er 4000 mannelijke lo-docenten in Nederland zijn. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aantal mannelijke lo-docenten met een onvoldoende conditie.
- b** Bij de 60 vrouwelijke docenten was de gemiddelde afstand 2750 m met een steekproefstandaardafwijking van 550 m. Kun je met 95% zekerheid concluderen dat de gemiddelde vrouwelijke lo-docent een zeer goede conditie heeft? Licht toe.

A28 Laura en Storr onderzoeken voor hun profielwerkstuk hoeveel inwoners van Nijmegen tevreden zijn met de manier van afval inzamelen.



Van de 500 Nijmegenaren in hun steekproef zijn er 425 tevreden over de manier van afval inzamelen. Op basis van dit resultaat en het gegeven dat Nijmegen 187 duizend inwoners heeft, willen ze met een 95%-betrouwbaarheidsinterval weergeven hoeveel Nijmegenaren achter de manier van afval inzamelen staan. Bereken dit betrouwbaarheidsinterval en rond af op duizendtallen.

E29 Dani en Jay hebben krasloten als onderwerp voor hun profielwerkstuk.



Uit hun onderzoek blijkt dat bij een steekproef van 400 loten er 160 een prijs hadden. Dus gemiddeld moet iemand 2,5 kraslot kopen om een prijs te hebben. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde aantal krasloten dat nodig is om een prijs te hebben en rond af op twee decimalen.

O30 Bij een onderzoek staat dat het 95%-betrouwbaarheidsinterval $[5, 11]$ is.



Dit kun je ook schrijven als 8 ± 3 .

- a** Licht dit toe.
- b** Vul in.
- $[15, 19]$ kun je schrijven als $17 \pm \dots$
- $[0,8; 0,9]$ kun je schrijven als $\dots \pm \dots$

Theorie B Verschillende notaties voor betrouwbaarheidsintervallen

Op het formuleblad bij het centraal examen staan de formules voor de 95%-betrouwbaarheidsintervallen als volgt genoteerd.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \text{ met } p \text{ de steekproefproportie en } n \text{ de steekproefomvang.}$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ met } \bar{X} \text{ het steekproefgemiddelde, } n \text{ de steekproefomvang en } S \text{ de steekproefstandaardafwijking.}$$

Er zijn drie opmerkelijke verschillen tussen de notatie op het formuleblad bij het centraal examen en de notatie in dit boek.

1. In plaats van intervalnotatie wordt een notatie met $\pm$ gebruikt.
2. Voor de steekproefproportie wordt p in plaats van $\hat{p}$ gebruikt.
3. Op de plek van σ staat $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ of $\frac{S}{\sqrt{n}}$.

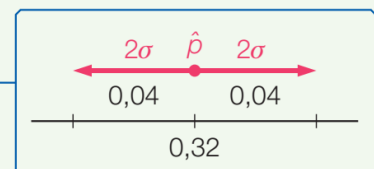
Soms wordt het dakje op de p bij de steekproefproportie weggelaten. Het is dan belangrijk dat je zelf goed kunt inschatten of je met p of $\hat{p}$ te maken hebt.

In de notatie op het formuleblad zijn de formules voor de onder- en bovengrens van een interval samengevoegd met het $\pm$ -teken. Door in plaats van dit teken een $-$ te nemen krijg je de formule voor de ondergrens van het interval. Neem je $+$ dan krijg je de bovengrens. Wanneer je het interval $[0,55; 0,85]$ in deze notatie schrijft krijg je $0,7 \pm 0,15$. Het voordeel van deze notatie is dat de steekproportie of het steekproefgemiddelde direct af te lezen is (in dit geval 0,7). Het nadeel is dat de grenzen niet direct af te lezen zijn.

Voorbeeld

Gegeven is het 95%-betrouwbaarheidsinterval $0,32 \pm 0,04$.

- a Schrijf dit betrouwbaarheidsinterval in de intervalnotatie.
- b Bereken de standaardafwijking σ .



Uitwerking

- a $0,32 - 0,04 = 0,28$ en $0,32 + 0,04 = 0,36$, dus $[0,28; 0,36]$.
- b $2\sigma = 0,04$ dus $\sigma = 0,02$.

31

- a** Schrijf het betrouwbaarheidsinterval $[0,405; 0,435]$ in de $\pm$ -notatie.
- b** Schrijf het interval $0,21 \pm 0,015$ in de intervalnotatie.
- c** Bij een steekproef met $n = 210$ zijn de resultaten $\bar{X} = 180$ en $S = 9,8$. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze steekproef. Schrijf het resultaat in beide notaties. Rond af op twee decimalen.
- d** In een wetenschappelijk tijdschrift staat bij de steekproefresultaten $p = 0,12$ en $n = 11\,733$ genoteerd. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze steekproef. Schrijf het resultaat in beide notaties.

32

- Bij een onderzoek naar woningtypen onder Nederlanders met een huurwoning bleek dat van de 26 580 respondenten er 10 098 in een rijtjeshuis wonen.
- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage huurders dat in een rijtjeshuis woont. Geef je antwoord in de intervalnotatie.
 - b** Dennis beweert dat de populatieproportie 0,40 zal zijn. Is dit op basis van je antwoord bij a waarschijnlijk? Licht toe.
 - c** Het onderzoek werd in verschillende provincies uitgevoerd en leverde uiteenlopende resultaten op. In Friesland was het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aantal huurders dat in een rijtjeshuis woont gelijk aan $28\,723 \pm 1442$. Bereken hoeveel de steekproefproportie van Friesland verschilt van de steekproefproportie van heel Nederland. Gebruik dat er in Friesland 117 000 huurders zijn.

A33

- Uit een onderzoek van het Voedingscentrum blijkt dat Nederlanders fors te weinig groenten eten. Het advies is om 250 gram groente per dag te eten, maar dat lukt niet veel mensen. Uit cijfers van het Voedingscentrum blijkt dat een Nederlander gemiddeld 127 gram groente per dag eet. Ilja kan dit maar moeilijk geloven en doet een klein onderzoek onder haar vrienden. Bij $n = 50$ vindt zij een gemiddelde van 210 gram groente per dag met een standaardafwijking van 80 gram.
- a** Laat met het 95%-betrouwbaarheidsinterval zien dat het hier waarschijnlijk niet om een representatieve steekproef gaat. Welke notatie van het betrouwbaarheidsinterval is hier het handigst? Licht toe.
 - b** Uit het onderzoek van het Voedingscentrum blijkt dat het slecht gesteld is met de dagelijkse hoeveelheid groente die jongens van 14-18 jaar eten. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze groep was 130 ± 40 gram. Volgens Bart kun je aan dit betrouwbaarheidsinterval zien dat 95% van de jongens van 14-18 jaar dagelijks tussen 90 en 170 gram groenten eet. Licht toe waarom Bart geen gelijk heeft.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan bepalen welk type betrouwbaarheidsinterval past bij een situatie.
- ☐ Ik kan werken met verschillende notaties voor betrouwbaarheidsintervallen.

► OPGAVE C4
THEORIE A

► OPGAVE C5
THEORIE B

- C4** Op een muziekfestival werden willekeurig 150 van de 1200 bezoekers gevraagd deel te nemen aan een enquête over muziekvoorkeur. Uit de resultaten bleek dat 90 van de ondervraagden de voorkeur gaven aan popmuziek. Onder degenen die popmuziek prefereerden, was de gemiddelde leeftijd 27,5 jaar met een standaardafwijking van 4,2 jaar.
- a** Stel het 95%-betrouwbaarheidsinterval op voor het aantal bezoekers dat de voorkeur geeft aan popmuziek.
 - b** Stel het 95%-betrouwbaarheidsinterval op voor de gemiddelde leeftijd van alle bezoekers die de voorkeur geven aan popmuziek. Rond af op één decimaal.

- C5**
- a** Bij een onderzoek met $n = 500$ is de steekproefproportie 0,34. Stel het 95%-betrouwbaarheidsinterval op in zowel de intervalnotatie als in de $\pm$ -notatie.
 - b** Bij een onderzoek met $n = 135$ zijn de steekproefresultaten $\bar{X} = 27$ en $S = 8$. Stel het 95%-betrouwbaarheidsinterval op in zowel de intervalnotatie als in de $\pm$ -notatie. Rond af op één decimaal.
 - c** Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een proportie is $[0,767; 0,793]$. Schrijf dit interval in de $\pm$ -notatie en geef de standaardafwijking.
 - d** Schrijf het 95%-betrouwbaarheidsinterval $5,42 \pm 0,83$ in de intervalnotatie.

Antwoorden

- C4**
- a** $[624, 816]$ bezoekers (of 720 ± 96 bezoekers)
 - b** $[26,6; 28,4]$ jaar (of $27,5 \pm 0,9$ jaar)
- C5**
- a** $[0,298; 0,382]$ en $0,34 \pm 0,042$
 - b** $[25,6; 28,4]$ en $27 \pm 1,4$
 - c** $0,78 \pm 0,013$ en $\sigma = 0,0065$
 - d** $[4,59; 6,25]$

7.3 Steekproefomvang

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de breedte van een betrouwbaarheidsinterval berekenen.
- Je kunt de steekproefomvang berekenen bij een betrouwbaarheidsinterval.

O34



Noura en Jos doen onderzoek naar autobezit in Zutphen.

Ze proberen allebei de onderzoeksvraag ‘Wat is de proportie personen in Zutphen die een auto bezit?’ te beantwoorden. Ze nemen allebei een steekproef. Zie de tabel.

	Noura	Jos
n	500	100
$\hat{p}$	0,47	0,48

- Bereken de 95%-betrouwbaarheidsintervallen voor Noura en Jos.
- Bereken welk betrouwbaarheidsinterval het breedst is.
- Met welk betrouwbaarheidsinterval is de onderzoeksvraag nauwkeuriger te beantwoorden? Verklaar dit verschil in nauwkeurigheid.

Theorie A Nauwkeurigheid van een betrouwbaarheidsinterval

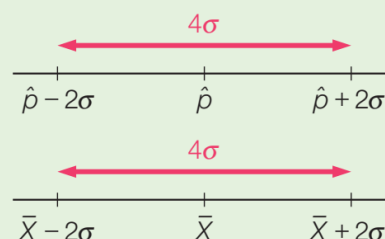
In opgave 34 heb je gezien dat de nauwkeurigheid bij betrouwbaarheidsintervallen kan verschillen. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van Noura heeft een kleinere breedte en dus een grotere *nauwkeurigheid* dan die van Jos. Met het betrouwbaarheidsinterval van Noura is daarom de onderzoeksvraag preciezer te beantwoorden.

Merk op dat beide betrouwbaarheidsintervallen een *betrouwbaarheid* van 95% hebben, dus dat in beide gevallen het betrouwbaarheidsinterval met 95% zekerheid de populatieproportie bevat.

Bij een 95%-betrouwbaarheidsinterval neem je aan twee kanten een marge van 2σ op het steekproefgemiddelde of op de steekproefproportie. Dus de breedte van een 95%-betrouwbaarheidsinterval is 4σ .

De breedte van een 95%-betrouwbaarheidsinterval is 4σ , dus

- voor de populatieproportie is dat $4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$
- voor het populatiegemiddelde is dat $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.



Als onderzoeker heb je alleen invloed op de steekproefomvang n . Je kunt immers wel de grootte van de steekproef kiezen, maar niet de resultaten. Een grotere waarde van n geeft een kleinere breedte en dus een nauwkeuriger betrouwbaarheidsinterval.

Een grotere steekproef geeft een smaller 95%-betrouwbaarheidsinterval en dus meer nauwkeurigheid.

Voorbeeld

Van kinderen uit Nederland, Duitsland en Frankrijk is onderzocht welk deel van hen allergieën heeft. Zie de tabel.

Onderzoek voor welk land het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval het meest nauwkeurig is.

	n	$\hat{p}$
Nederland	160	0,25
Duitsland	155	0,30
Frankrijk	170	0,30

Uitwerking

Het interval van Frankrijk is nauwkeuriger dan dat van Duitsland, want de waarden van $\hat{p}$ zijn gelijk maar bij Frankrijk is n groter.

$$\text{Frankrijk: breedte} = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{170}} \approx 0,141$$

$$\text{Nederland: breedte} = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{160}} \approx 0,137$$

Het betrouwbaarheidsinterval voor Nederland is het meest nauwkeurig.

R35 Hoe groter de steekproef, hoe nauwkeuriger het betrouwbaarheidsinterval.

☐◎✱ Toch is de steekproefomvang in onderzoeken altijd beperkt.

Geef hiervoor twee praktische redenen.

36 Bij een vergelijkend onderzoek tussen volwassen Nederlanders en Italianen die op het platteland leven, is gekeken naar de systolische bloeddruk gemeten in mmHG. Zie de tabel.

☐

Onderzoek bij welke groep het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval het meest nauwkeurig is.

	n	$\bar{X}$	S
Nederlandse mannen	48	130	9
Nederlandse vrouwen	55	125	8
Italiaanse mannen	45	120	7
Italiaanse vrouwen	50	115	10



37 Jochem doet onderzoek naar de kleur van de personenauto's die in Nederland rondrijden. Hij neemt zich voor om van 900 auto's de kleur te noteren. Van de eerste 575 auto's zijn er 47 rood.

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rode auto's in Nederland op basis van de eerste 575 auto's. Welke informatie geeft het betrouwbaarheidsinterval in deze context?

Bij de laatste 325 auto's zijn er 30 rood.

- b** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rode auto's in Nederland op basis van alle 900 onderzochte auto's.
- c** Is je antwoord bij vraag b betrouwbaarder dan bij vraag a? En hoe zit het met de nauwkeurigheid?

38 Van 38 meisjes en 43 jongens is bij een leeftijd van 6 maanden en 12 maanden de lengte in cm genoteerd. Zie de tabel. Bij deze tabel kunnen voor de lengte vier 95%-betrouwbaarheidsintervallen worden opgesteld. Onderzoek welk van de vier intervallen het meest nauwkeurig is.

LENGTE KINDEREN IN CM

	n	6 maanden		12 maanden	
		$\bar{X}$	S	$\bar{X}$	S
meisjes	38	66,2	2,8	73,6	3,2
jongens	43	68,0	3,1	76,8	3,4

A39 Anna onderzoekt het gemiddelde gewicht van Nederlandse huiskatten. Ze heeft van een dierenarts de gegevens van 200 huiskatten gekregen. In de tabel staan enkele statistieken bij de gegevens.

- a** Noem de twee variabelen die in de tabel voorkomen. Zijn de variabelen kwalitatief of kwantitatief?
- b** Beredeneer, dus zonder berekening, dat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde gewicht bij de vrouwelijke katten nauwkeuriger is dan die bij de mannelijke katten.
- c** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde gewicht van de vrouwelijke huiskat. Geef je antwoord in de intervalnotatie en rond af op gehele grammen.
- d** Voor de mannelijke huiskatten berekende Anna het 95%-betrouwbaarheidsinterval [4053 gram, 4349 gram]. Anna besluit het interval te noteren als [4,1 kg; 4,3 kg]. Dit heeft effect op de betrouwbaarheid van het interval.

Is de betrouwbaarheid van het nieuwe interval meer of minder dan 95%? Licht toe.

GEWICHT HUISKATTEN

	geslacht	
	m	v
n	91	109
$\bar{X}$	4201 gram	3215 gram
S	705 gram	620 gram



- A40** Van kinderen uit Nederland, Frankrijk, Duitsland en Zweden is onderzocht hoeveel van hen volledig gevaccineerd zijn volgens het nationale vaccinatieprogramma. Enkele gegevens van dit onderzoek zie je in de tabel.
- Vul de tabel verder in. Rond zo nodig af op twee decimalen.



	steekproef			95%-betrouwbaarheidsinterval	
	n	gevaccineerd	$\hat{p}$	interval	breedte
Nederland		170	0,85	[; 0,90]	
Frankrijk	140	112		$\pm$	
Duitsland	150			$0,84 \pm 0,06$	
Zweden		207		[0,86;]	0,08

- E41** Een onderzoeker hoeft bij het opstellen van een betrouwbaarheidsinterval niet voor 95% zekerheid te kiezen. Regelmatig worden bijvoorbeeld 90%- of 99%-betrouwbaarheidsintervallen gebruikt.

- a** Bedenk een situatie waarbij de voorkeur uitgaat naar een 99%-betrouwbaarheidsinterval.

Betrouwbaarheidsintervallen hebben altijd dezelfde vorm, dus voor een populatiegemiddelde is dat $\left[\bar{X} - a \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + a \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$.

- b** Bij een 90%-betrouwbaarheidsinterval is a kleiner dan 2 en bij een 99%-betrouwbaarheidsinterval is a groter dan 2.

Verklaar dit met de vuistregels bij de normale verdeling.

Bij de gegevens $\bar{X} = 12,5$, $S = 3,2$ en $n = 200$ krijg je het 99%-betrouwbaarheidsinterval $[11,92; 13,08]$. Hieruit volgt dat voor een 99%-betrouwbaarheidsinterval geldt dat $a \approx 2,6$.

- c** Laat dit met een berekening zien.

Voor een 90%-betrouwbaarheidsinterval geldt $a \approx 1,6$.

- d** Bereken bij dezelfde gegevens het 90%-betrouwbaarheidsinterval.

Het 99%-betrouwbaarheidsinterval is minder nauwkeurig dan het 90%-betrouwbaarheidsinterval.

- e** Verklaar dit.

- f** Een onderzoeker wil een 99%-betrouwbaarheidsinterval opstellen. Wat kan de onderzoeker doen om toch een grote nauwkeurigheid te krijgen?

Meneer Mutsaers geeft aardrijkskunde in de bovenbouw. Hij vraagt zich af welk deel van de Nederlandse havo-bovenbouwleerlingen een ander continent heeft bezocht. Hij besluit de leerlingen op zijn school te bevragen via een online enquête. Uit zijn enquête blijkt dat van de 70 respondenten er 28 een ander continent hebben bezocht.

- a** Bereken het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval.



Meneer Mutsaers vindt dit interval te onnauwkeurig en gaat daarom een grotere steekproef nemen. Hij wil een 95%-betrouwbaarheidsinterval met een breedte van maximaal 0,1. Hij neemt aan dat de steekproefproportie weer 0,4 zal zijn. Hij stelt daarom de vergelijking

$$4 \cdot \sqrt{\frac{0,4(1 - 0,4)}{n}} = 0,1 \text{ op.}$$

- b** Licht deze vergelijking toe.

De oplossing van deze vergelijking is $n = 384$.

- c** Laat dit zien.

- d** Meneer Mutsaers neemt een steekproef van 400 leerlingen en het blijkt dat 180 hiervan een ander continent hebben bezocht. Krijgt hij zo een breedte van maximaal 0,1?

Theorie B Berekenen van de steekproefomvang

In opgave 42 kreeg je de vergelijking $4 \cdot \sqrt{\frac{0,4(1 - 0,4)}{n}} = 0,1$. Door deze vergelijking op te lossen kun je bij het 95%-betrouwbaarheidsinterval de steekproefomvang n berekenen die nodig is om bij een proportie van 0,4 een breedte van 0,1 te krijgen.

Het oplossen van deze vergelijking kan met de GR. Je krijgt $n = 384$.

Voor een breedte van maximaal 0,1 heb je bij $\hat{p} = 0,4$ dus een steekproefomvang van minstens 384 nodig.

Om de steekproefomvang te berekenen bij de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval los je een vergelijking op.

- Bij een proportie: $\text{breedte} = 4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$
- Bij een gemiddelde: $\text{breedte} = 4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

Voorbeeld

Bereken de steekproefomvang als het 95%-betrouwbaarheidsinterval

a voor de populatieproportie $[0,555; 0,605]$ is

b voor het populatiegemiddelde $[999, 1005]$ is en geldt dat $S = 48$.

Uitwerking

a breedte $= 0,605 - 0,555 = 0,05$ en $\hat{p} = \frac{0,555 + 0,605}{2} = 0,58$

$$\text{Los op } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,58(1 - 0,58)}{n}} = 0,05.$$

$$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,58 \cdot 0,42}{x}} = 0,05 \text{ geeft } x \approx 1559.$$

Dus de steekproefomvang is 1559.

b breedte $= 1005 - 999 = 6$ en $S = 48$

$$\text{Los op } 4 \cdot \frac{48}{\sqrt{n}} = 6.$$

$$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \frac{48}{\sqrt{x}} = 6 \text{ geeft } x = 1024.$$

Dus de steekproefomvang is 1024.

43 Bereken de steekproefomvang als het 95%-betrouwbaarheidsinterval



a voor de populatieproportie $[0,34; 0,46]$ is

b voor het populatiegemiddelde $[540, 590]$ is en geldt dat $S = 205$.

44 Het gemiddeld aantal uren dat Nederlanders in de buitenlucht doorbrengen, verschilt per dag. Uit onderzoek blijkt dat voor zondagen het 95%-betrouwbaarheidsinterval $[3,0; 3,4]$ uur is, met een steekproefstandaardafwijking van 1,6 uur.



Hoe groot was de steekproefomvang bij dit onderzoek?



45 Mario overweegt een koffiezaak te openen in het centrum van 's-Hertogenbosch. Hij wil onderzoeken hoeveel koffie de klanten van koffiezaken in 's-Hertogenbosch dagelijks gemiddeld drinken. Bij de onderzoeksresultaten zal een 95%-betrouwbaarheidsinterval worden opgesteld met een maximale breedte van 50 mL.



Onderzoek hoe groot de steekproef minimaal moet zijn. Ga bij je berekening uit van $S = 180$ mL.

A46 Een onderzoeker wil met een groot onderzoek aantonen dat een specifieke bijwerking van een medicijn in ongeveer 15% van de gevallen optreedt. Om dit nauwkeurig te doen wil ze een 95%-betrouwbaarheidsinterval met een breedte van maximaal 3%. Om tijd en kosten te besparen, wil ze niet meer proefpersonen onderzoeken dan nodig is.
Hoeveel proefpersonen moeten er minimaal in haar steekproef zitten? Neem aan dat $\hat{p} = 0,15$.

A47 Bij een Brits onderzoek door een datingwebsite voor heteroseksuelen is bekeken op welke leeftijd mensen 'de ware' ontmoeten. Bij het onderzoek bestond de steekproef uit 2000 personen waarvan een deel uit mannen en een deel uit vrouwen bestond. Het bleek dat voor mannen de gemiddelde leeftijd van ontmoeten van 'de ware' op 28 jaar lag. Met 95% zekerheid wijkt het populatiegemiddelde hier niet meer dan 6 maanden van af. Voor de groep mannen was S gelijk aan 7 jaar en 9 maanden.
Bereken welk percentage van de personen in de steekproef een man was.

E48 Bij een onderzoek naar de moeilijkheid van het havo wiskunde A examen zijn 850 examenkandidaten ondervraagd. Uit het onderzoek blijkt dat een groot deel van de ondervraagden het examen te moeilijk vond. De breedte van het bijhorende 95%-betrouwbaarheidsinterval was 0,05.
Bereken hoeveel van de ondervraagden het examen te moeilijk vonden.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan de breedte van een betrouwbaarheidsinterval berekenen.

► OPGAVE C6
THEORIE A

☐ Ik kan de steekproefomvang berekenen bij een betrouwbaarheidsinterval.

► OPGAVE C7
THEORIE B

- C6** Van kinderen uit Nederland, Duitsland, Frankrijk en Spanje is onderzocht hoeveel van hen obesitas hebben. Zie de tabel. Bij elk land in de tabel kun je een 95%-betrouwbaarheidsinterval opstellen. Onderzoek bij welk land dit interval het meest nauwkeurig is.

	n	$\hat{p}$
Nederland	160	0,15
Duitsland	180	0,20
Frankrijk	140	0,20
Spanje	200	0,25

- C7** Volgens een artikel gaat 40% van de volwassen Nederlanders regelmatig met de fiets naar het werk.

a Manouk wil controleren of dit percentage klopt. Zij wil een 95%-betrouwbaarheidsinterval opstellen met een breedte van maximaal 0,05.

Bereken hoe groot de steekproef minimaal moet zijn. Neem aan dat $\hat{p} = 0,40$.

Voor de mensen die regelmatig met de fiets naar het werk gaan is het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde woon-werkafstand $[7,2; 7,8]$ km. Hierbij is $S = 3,6$.

b Bereken de steekproefomvang.



Antwoorden

C6 Nederland

C7 a 1536 volwassenen

b 576 mensen

7.4 Conclusies trekken

Kennis en vaardigheden

- Je kunt met de ϕ -coëfficiënt de grootte van het verschil tussen twee groepen bepalen.
- Je kunt met $\max V_{cp}$ de grootte van het verschil tussen twee groepen bepalen.
- Je kunt door boxplots te vergelijken de grootte van het verschil tussen twee groepen bepalen.
- Je kunt met effectgrootte de grootte van het verschil tussen twee groepen bepalen.

○49
□◎*

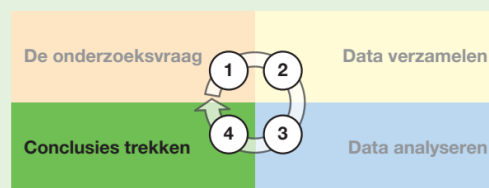
Bij het examenuitje in havo 5 kunnen de leerlingen kiezen tussen zeilen of naar Disneyland Parijs. In de tabel zie je wat de leerlingen hebben gekozen.

- a Met welke variabelen heb je in de tabel te maken? Zijn deze variabelen kwalitatief of kwantitatief? Licht toe.
- b Vind je dat er een groot, middelmatig of gering verschil is tussen de keuze van de jongens en die van de meisjes?

	zeilen	Disneyland	
jongen	21	18	39
meisje	15	31	46
	36	49	85

Theorie A ϕ -coëfficiënt

In hoofdstuk 2 heb je geleerd over de eerste drie fasen van de statistische cyclus. In dit hoofdstuk heb je betrouwbaarheidsintervallen opgesteld. Betrouwbaarheidsintervallen kun je gebruiken in de vierde fase van de statistische cyclus: conclusies trekken.



In deze paragraaf richten we ons op het onderzoeken van de grootte van het verschil tussen twee groepen. Denk bijvoorbeeld aan een onderzoek waarbij de effectiviteit van een nieuwe behandeling wordt beoordeeld. Een testgroep wordt onderworpen aan de nieuwe behandeling, terwijl een controlegroep de gebruikelijke behandeling krijgt. De vraag is dan: Hoe effectief is de nieuwe behandeling? Oftewel: hoe groot is het verschil tussen de testgroep en de controlegroep?

Om bij dit soort onderzoeken een conclusie te trekken, bereken je vaak eerst een **associatiemaat**. Een associatiemaat kun je gebruiken om na te gaan hoeveel twee groepen van elkaar verschillen.

Aan de hand van de associatiemaat bepaal je vervolgens met de bijbehorende vuistregels of het verschil *groot*, *middelmatig* of *gering* is. Er zijn meerdere associatiematen. Welke je gebruikt is afhankelijk van de variabelen die een rol spelen en de gegevens die je hebt.

De associatiematen en vuistregels voor het bepalen van de grootte van het verschil staan bij het centraal examen op het formuleblad (zie bladzijde 160). Je hoeft ze dus niet uit het hoofd te leren.

Een tabel als die van opgave 49, die de frequentie weergeeft bij elke combinatie van waarden, heet een **kruistabel**. Vaak worden ook totale frequenties bij de kruistabel genoteerd.

De variabelen geslacht en uitje in de tabel van opgave 49 zijn nominaal en hebben elk twee mogelijke waarden.

	zeilen	Disneyland	
jongen	21	18	39
meisje	15	31	46
	36	49	85

Bij twee nominale variabelen met elk twee waarden gebruiken we als associatiemaat de **phi-coëfficiënt**.

Bij de 2×2-kruistabel hiernaast bereken je de phi-coëfficiënt met

	waarde I	waarde II	
waarde I	a	b	$a + b$
waarde II	c	d	$c + d$
	$a + c$	$b + d$	

$$phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}.$$

Op het formuleblad staat dit als volgt genoteerd.

$$2 \times 2\text{-kruistabel} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ met } phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}},$$

waarin a , b , c en d absolute aantallen zijn.

Hieronder is phi berekend voor de tabel van opgave 49.

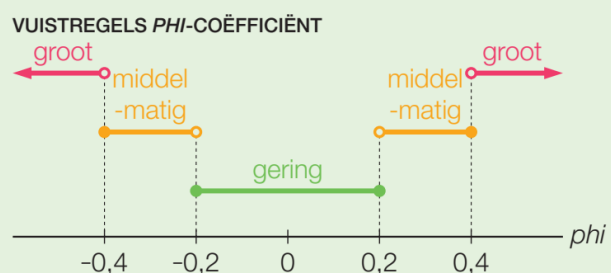
$$phi = \frac{21 \cdot 31 - 18 \cdot 15}{\sqrt{(21+18)(21+15)(18+31)(15+31)}} \approx 0,214$$

Op het formuleblad staan ook de volgende vuistregels om op basis van de waarde van phi een conclusie te trekken over de grootte van het verschil tussen twee groepen.

- als $phi < -0,4$ of $phi > 0,4$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $-0,4 \leq phi < -0,2$ of $0,2 < phi \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $-0,2 \leq phi \leq 0,2$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Het verschil tussen de keuze van de jongens en die van de meisjes wat betreft het examenuitje is dus middelmatig, want $0,2 < phi \leq 0,4$.

Hiernaast staan de vuistregels schematisch weergegeven.



50



Er is onderzoek gedaan naar de tevredenheid van huishoudens over de woonsituatie. Daarbij is onderscheid gemaakt tussen huurwoningen en koopwoningen. Zie de tabel.

	tevredenheid		
	ontevreden	tevreden	
huurwoning	485	3172	3657
koopwoning	180	6163	6343
	665	9335	10000

Onderzoek met behulp van de *phi*-coëfficiënt of het verschil in tevredenheid groot, middelmatig of gering is.

51



Bij sommige medicijnen hangt het wel of niet optreden van bijwerkingen samen met de aanwezigheid van een genetische factor bij de patiënt. In deze opgave bekijken we een onderzoek onder 80 patiënten die een bepaald medicijn gebruiken. Van de patiënten hebben 29 de genetische factor die wordt onderzocht.

Van de 32 patiënten die bijwerkingen hadden bleek bij 17 de genetische factor aanwezig te zijn.

		bijwerkingen		
		wel	niet	
genetische factor	wel			
	niet			

- Vul de kruistabel in.
- Onderzoek met de *phi*-coëfficiënt of het verschil in bijwerkingen tussen de patiënten met en de patiënten zonder de genetische factor groot, middelmatig of gering is.

A52

‘Windmolens voor de kust verpesten mijn strandbezoek’. Dat is de stelling die aan 2081 Nederlandse en 512 Duitse toeristen werd voorgelegd. Het Duitse deel van het onderzoek werd gedaan door onderzoeksbureau Growth from Knowledge in opdracht van milieuorganisatie Natuur en Milieu. Het bleek dat 620 Nederlanders het eens waren met de stelling, terwijl dit aantal bij de Duitse toeristen maar 72 was.

- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie Duitse toeristen die het eens zijn met deze stelling.
- Onderzoek met behulp van de *phi*-coëfficiënt of het verschil in mening tussen Duitse en Nederlandse toeristen groot, middelmatig of gering is.

**A53**

Maken jongeren zich zorgen over de toekomst? In de tabel zie je per schooltype het aantal respondenten dat meedeelde aan het onderzoek en het aantal daarvan dat zich zorgen maakt over de toekomst.

	basis- onderwijs	voortgezet onderwijs	hbo
aantal respondenten	752	1673	1249
aantal dat zich zorgen maakt over de toekomst	129	331	122

Uit de gegevens blijkt dat er een verschil is in het zich wel of niet zorgen maken over de toekomst tussen leerlingen in het voortgezet onderwijs en studenten op het hbo.

Onderzoek met behulp van de *phi*-coëfficiënt of dit verschil groot, middelmatig of gering is.

54 Fenne heeft onderzoek gedaan naar de relatie tussen werksector en besteedbaar inkomen. Voor de werksector is onderscheid gemaakt tussen werken bij de overheid of bij een bedrijf. Het inkomen is ingedeeld bij vijf categorieën waarbij 1 het laagste inkomen is en 5 het hoogste. Zie de tabel.

- Wat is het meetniveau van de variabele inkomenscategorie?
- Vind je dat er een groot, middelmatig of gering verschil is in inkomenscategorie tussen overheid en bedrijfsleven?

inkomens- categorie	werksector	
	overheid	bedrijf
1	25	11
2	58	34
3	24	32
4	7	26
5	6	12

Theorie B Maximaal verschil in cumulatief percentage

Bij een ordinale variabele gebruik je de associatiemaat **maximaal verschil in cumulatief percentage** ($\max V_{cp}$) om de grootte van het verschil te bepalen.

De $\max V_{cp}$ bereken je bij de gegevens van opgave 54 als volgt.

- Bereken voor beide werksectoren bij elke inkomenscategorie de cumulatieve frequentie.
- Bereken voor beide werksectoren bij elke inkomenscategorie het cumulatieve percentage, oftewel de relatieve cumulatieve frequentie.
- Bereken bij elke inkomenscategorie het verschil van de cumulatieve percentages (de V_{cp}).
- Kijk wat het grootste verschil is, dat is de $\max V_{cp}$.

In de tabel hieronder is deze berekening uitgevoerd.

inkomens- categorie	werksector				V_{cp}
	overheid		bedrijf		
	cum. freq.	cum. perc.	cum. freq.	cum. perc.	
1	25	20,8%	11	9,6%	11,2%
2	83	69,2%	45	39,1%	30,1%
3	107	89,2%	77	67,0%	22,2%
4	114	95%	103	89,6%	5,4%
5	120	100%	115	100%	0%

max V_{cp}

$\max V_{cp}$

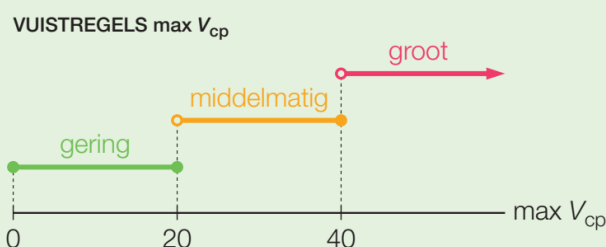
De vuistregels die we hanteren om met de $\max V_{cp}$ een conclusie te trekken over de grootte van het verschil tussen twee groepen, staan op het formuleblad.

Maximaal verschil in cumulatief percentage ($\max V_{cp}$)
(met voor beide groepen een steekproefomvang $n > 100$)

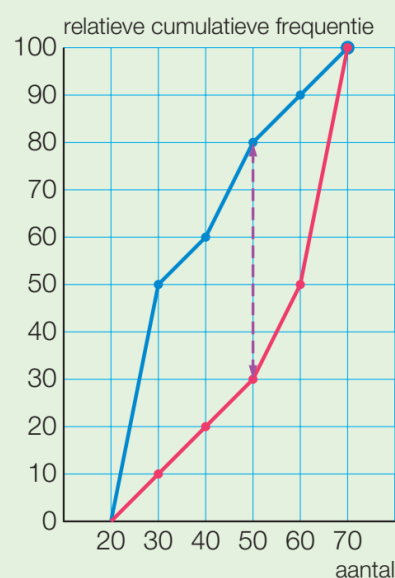
- als $\max V_{cp} > 40$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $20 < \max V_{cp} \leq 40$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $\max V_{cp} \leq 20$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

In de tabel zie je dat het maximale verschil in cumulatief percentage 30,1 is. Het verschil in inkomenscategorie tussen overheid en bedrijfsleven is dus middelmatig, want $20 < \max V_{cp} \leq 40$.

Hiernaast staan de vuistregels schematisch weergegeven.



Zijn de gegevens gepresenteerd in bijvoorbeeld een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon of een stapeldiagram met relatieve frequenties, dan kun je zonder het maken van een tabel bepalen waar het verschil in cumulatieve percentages maximaal is. Zo vind je de $\max V_{cp}$ in de figuur hiernaast door te zoeken naar de grootste verticale afstand tussen de twee relatieve cumulatieve frequentiepolygoenen. Dit geeft $\max V_{cp} = 80 - 30 = 50$. Het verschil is dus groot, want $\max V_{cp} > 40$.



55
□ ⊗ *

Glas & Reparatie is een bedrijf dat autoruiten repareert. Na een reparatie wordt de klant gevraagd mee te werken aan een klanttevredenheidsonderzoek. In de tabel zie je hoe de klanten van de vestigingen in Arnhem en Nijmegen hebben geantwoord bij de stelling “Ik ben snel en deskundig geholpen”. Onderzoek met de $\max V_{cp}$ of het verschil tussen de vestigingen in Arnhem en Nijmegen wat betreft het beantwoorden van deze stelling groot, middelmatig of gering is.

IK BEN SNEL EN DESKUNDIG GEHOLPEN

	Arnhem	Nijmegen
zeer mee oneens	5	3
mee oneens	6	1
neutraal	12	18
mee eens	38	66
zeer mee eens	64	32

56 Voor twee hotels staan de beoordelingen in het gestapelde staafdiagram hiernaast.



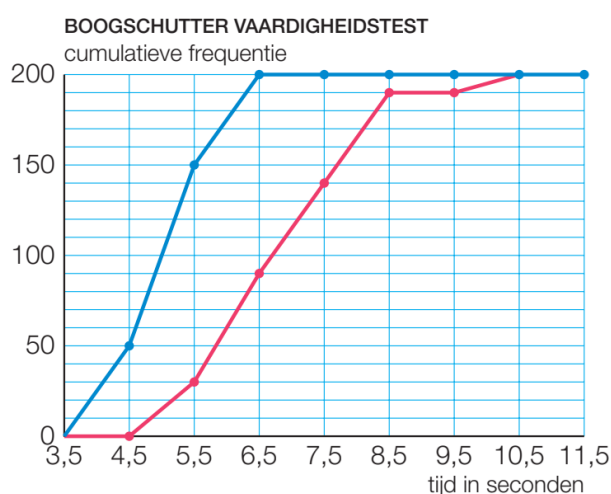
- Wat is het meetniveau van de variabele beoordeling?
- Onderzoek met de max V_{cp} of het verschil in beoordeling tussen de hotels groot, middelmatig of gering is.



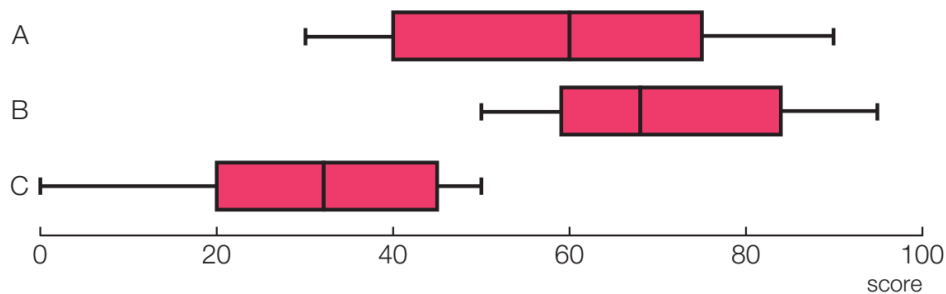
A57 Bij een vaardigheidstest wordt aan boogschutters gevraagd om zo snel mogelijk een doelwit te raken. De proefpersonen zijn verdeeld in twee groepen: Groep 1 had een klein doelwit. Groep 2 had een groot doelwit. De resultaten van het onderzoek zijn verwerkt in de figuur.



- Welke cumulatieve frequentiepolygoon hoort bij het kleine doelwit? Licht toe.
- Onderzoek met de max V_{cp} of het verschil in tijd tussen de groepen groot, middelmatig of gering is.



58 In de boxplots zijn van drie groepen leerlingen de scores op een toets verwerkt.



Zet groot, middelmatig en gering op de juiste plaats.
Het verschil in score tussen

groep A en groep B is

groep B en groep C is

groep A en groep C is

Theorie C Boxplots vergelijken en effectgrootte

Voor het bepalen van de grootte van het verschil bij kwantitatieve variabelen leer je twee manieren. Deze manieren zijn **twee boxplots vergelijken** en de **effectgrootte** berekenen.

Twee boxplots vergelijken

Voor het vergelijken van twee boxplots gebruik je het eerste kwartiel, de mediaan en het derde kwartiel. Op het formuleblad staan de volgende vuistregels.

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen¹⁾ elkaar niet overlappen, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- in alle andere gevallen zeggen we “het verschil is gering”.

noot 1 De ‘box’ is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Effectgrootte

Wanneer bij twee groepen zowel het gemiddelde als de standaardafwijking bekend is, gebruik je als associatiemaat de effectgrootte. Op het formuleblad staat de formule voor de effectgrootte en de bijbehorende vuistregels.

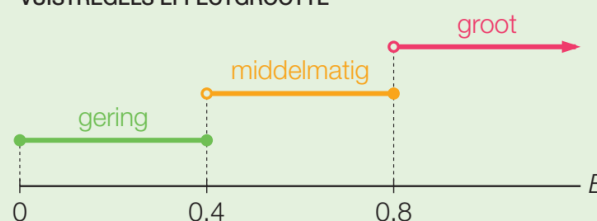
Effectgrootte $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2)}}$, met $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ de steekproefgemiddelden

($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Hiernaast staan de vuistregels schematisch weergegeven.

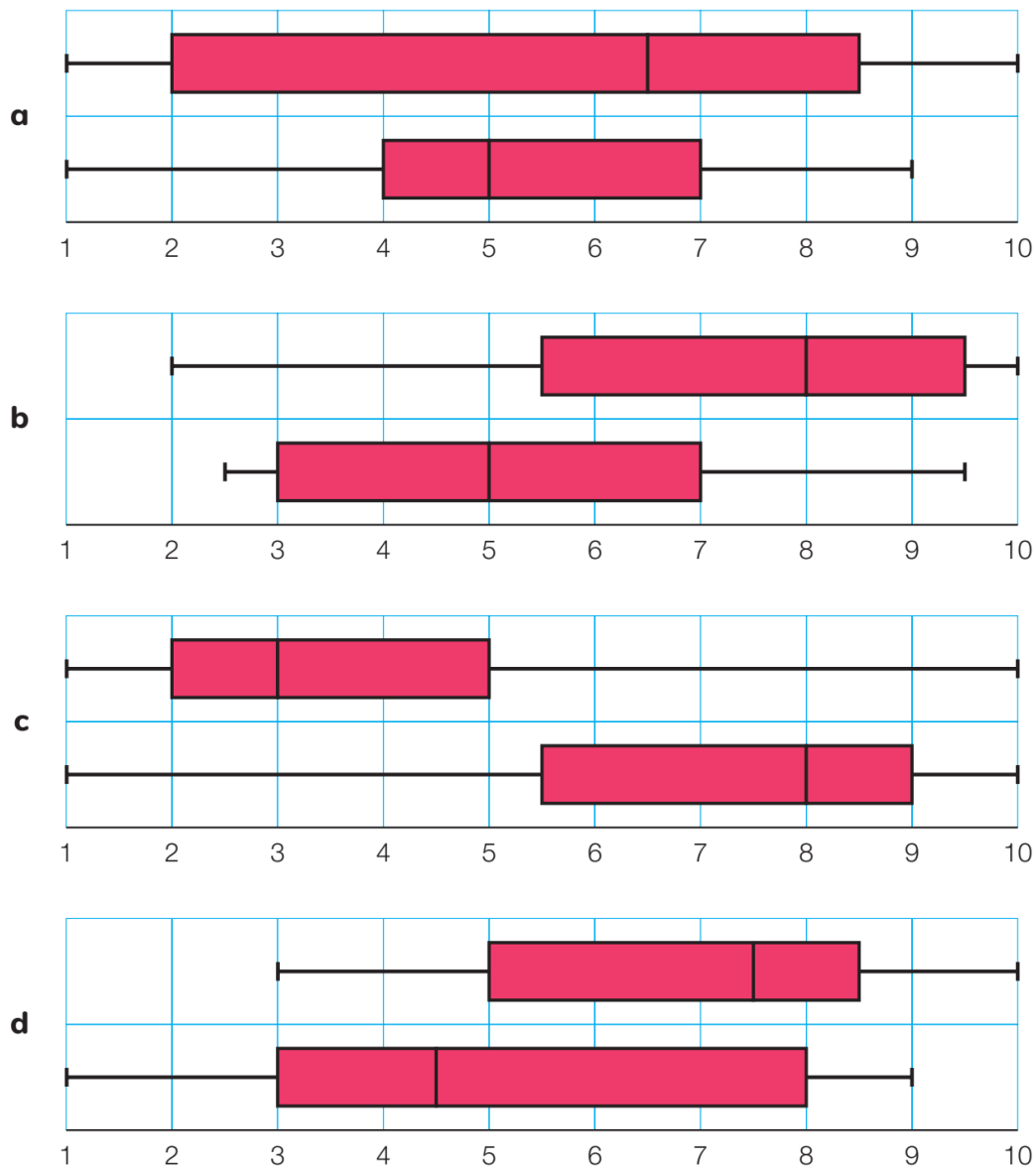
VUISTREGELS EFFECTGROOTTE



59



In de figuur zie je vier keer de boxplots van twee groepen. Vergelijk de boxplots en bepaal of het verschil tussen de boxplots groot, middelmatig of gering is.



60



Van twee merken appelsap is de inhoud van een aantal pakken vergeleken. De resultaten staan in de tabel.

INHOUD 1 LITERPAK APPELSAP

	gem.	stand. afw.
merk A	1007 mL	3 mL
merk B	1012 mL	10 mL

- a** Welke variabelen zijn hier gebruikt? Zijn dit kwalitatieve of kwantitatieve variabelen?
- b** Onderzoek met de effectgrootte of het verschil in inhoud tussen de merken groot, middelmatig of gering is.

Aardbeienkweker Femke experimenteert met twee soorten grond. Ze wil onderzoeken hoe groot het verschil in opbrengst per aardbeiplant is bij deze grondsoorten.

Ze neemt een steekproef van 119 planten die in grondsoort 1 zijn gegroeid en een steekproef van 175 planten die in grondsoort 2 zijn gegroeid. Van deze planten registreert ze de opbrengst in gram aardbei per plant.

In de tabel zijn gegevens van beide steekproeven weergegeven.

	$\bar{X}$	S
grondsoort 1	242	15
grondsoort 2	254	12

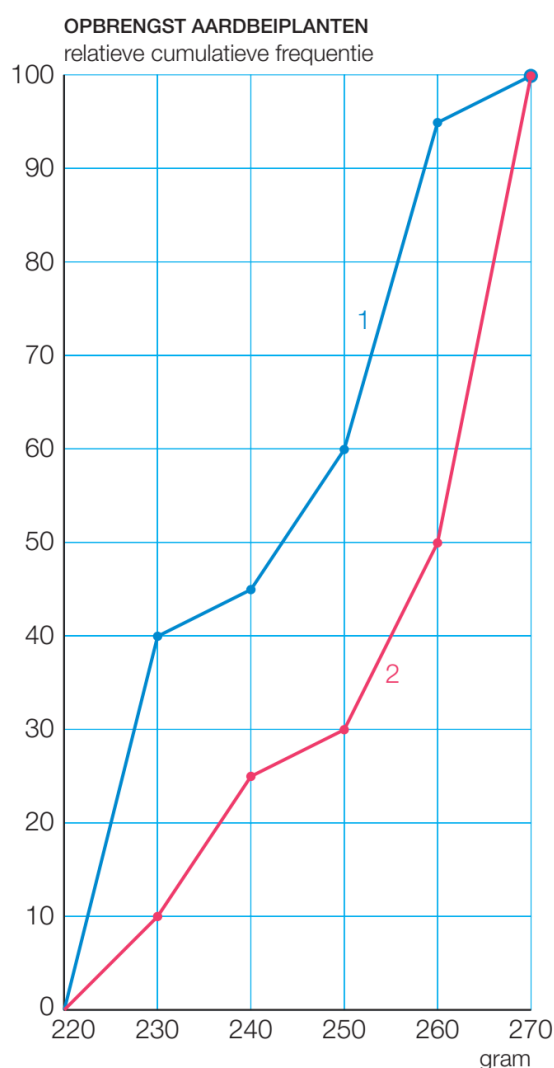
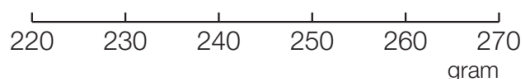
- a** Onderzoek met de effectgrootte of het verschil in opbrengst groot, middelmatig of gering is.

De gegevens van beide steekproeven zijn ook verwerkt in de figuur.

- b** Onderzoek met de max V_{cp} of het verschil in opbrengst groot, middelmatig of gering is.

Het is ook mogelijk een conclusie te trekken over het verschil in opbrengst door twee boxplots te vergelijken.

- c** Teken onder de figuur de boxplots en gebruik deze om te onderzoeken of het verschil in opbrengst groot, middelmatig of gering is.
- d** Een onderzoeker beweert dat je hier beter een conclusie kunt trekken op basis van de effectgrootte dan op basis van boxplots vergelijken.
Geef hiervoor een argument.
- e** Onderzoek of de 95%-betrouwbaarheidsintervallen elkaar overlappen.



In de tabel zie je de resultaten van een steekproef van jongens die na een normale zwangerschapsduur zijn geboren.

GEBOORTEGEWICHT JONGENS

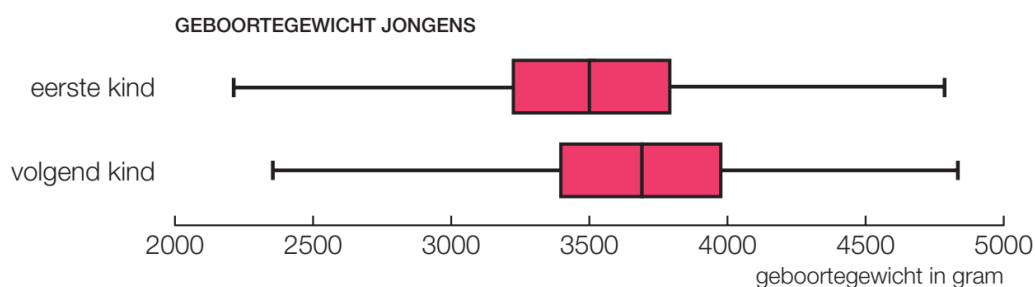
	gem.	stand. afw.
eerste kind	3497 gram	428 gram
volgend kind	3673 gram	442 gram

Het geboortegewicht van eerste kinderen blijkt gemiddeld lager te zijn dan dat van volgende kinderen.

- a** Onderzoek met de effectgrootte of het verschil in geboortegewicht tussen eerste kind en volgend kind groot, middelmatig of gering is.
- b** Stel dat de standaardafwijkingen kleiner zouden zijn dan die in de tabel.

Zou de effectgrootte dan kleiner of groter zijn? Licht toe.

Hieronder zijn de boxplots getekend bij de geboortegewichten van jongens die na een normale zwangerschapsduur zijn geboren.



- c** Welke conclusie over de grootte van het verschil in geboortegewicht kun je trekken op grond van de boxplots?
- d** Bij vraag a heb je een andere conclusie getrokken dan bij vraag c over de grootte van het verschil in geboortegewicht. Geef een argument waarom de conclusie op basis van boxplots vergelijken in dit geval beter te verdedigen is.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan met de *phi*-coëfficiënt de grootte van het verschil tussen twee groepen bepalen.
- ☐ Ik kan met max V_{cp} de grootte van het verschil tussen twee groepen bepalen.
- ☐ Ik kan door boxplots te vergelijken de grootte van het verschil tussen twee groepen bepalen.
- ☐ Ik kan met de effectgrootte de grootte van het verschil tussen twee groepen bepalen.

► OPGAVE C8
THEORIE A

► OPGAVE C9
THEORIE B

► OPGAVE C10
THEORIE C

► OPGAVE C11
THEORIE C

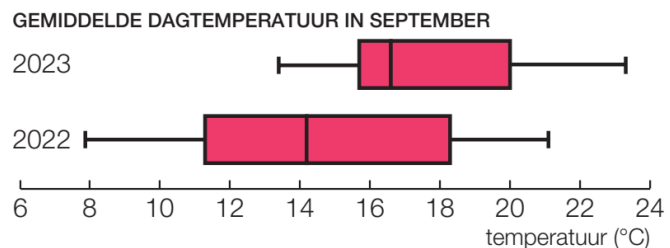
C8 Bij een onderzoek gaf 93% van de 414 niet-rokende ouders aan dat hun kinderen thuis niet mogen roken. Onder de 219 rokende ouders in dit onderzoek was dat 74%.

Onderzoek met de *phi*-coëfficiënt of het verschil tussen rokende en niet-rokende ouders wat betreft het thuis mogen roken van hun kinderen groot, middelmatig of gering is.

C9 In de tabel zie je hoe ouders hebben geantwoord bij de stelling “Ik probeer mijn mobiele apparaten zo weinig mogelijk te gebruiken als mijn kind in de buurt is.” Onderzoek met de max V_{cp} of het verschil in antwoorden tussen ouders van 0-1 jarige kinderen en ouders van 4-6 jarige kinderen groot, middelmatig of gering is.

	leeftijd kind	
	0-1	4-6
helemaal mee oneens	3	10
mee oneens	16	74
neutraal	40	107
mee eens	55	108
helemaal mee eens	22	35

C10 Zie de figuur. Onderzoek met de boxplots of het verschil tussen de gemiddelde dagtemperatuur in september 2023 vergeleken met september 2022 groot, middelmatig of gering is.



C11 Bij een onderzoek naar de invloed van leeftijd op het geheugen worden van twee groepen vrouwen geheugentestscores gemeten. De eerste groep bestaat uit 20-jarigen en de tweede uit 40-jarigen. Zie de tabel. Onderzoek met de effectgrootte of het verschil in geheugentestscores tussen 20- en 40-jarige vrouwen groot, middelmatig of gering is.

	$\bar{X}$	S
20-jarigen	90,3	13,42
40-jarigen	85,1	11,68

Antwoorden

C8 middelmatig

C9 gering

C10 middelmatig

C11 middelmatig

Kennis- en vaardighedentest

7.1 Populatieproportie

- 1** Op een school met 1447 leerlingen zijn er 123 leerlingen die meer dan 20 uur per week gamen.
Bij een steekproef geven 12 leerlingen aan dat ze meer dan 20 uur per week gamen, waarmee de steekproefproportie op 0,09 komt.
 - a** Bereken de populatieproportie. Rond af op drie decimalen.
 - b** Bereken het aantal leerlingen in de steekproef.
- 2** Een kwart van de huishoudens heeft één of meer homeopathische middelen in huis. Bij een onderzoek wordt van 75 huishoudens bepaald welk deel een homeopathisch middel in huis heeft.
Bereken bij welk percentage van de mogelijke steekproeven de steekproefproportie tussen 0,2 en 0,3 ligt.
- 3** Bij een onderzoek onder 1500 huishoudens blijken er 400 homeopathische middelen in huis te hebben.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie huishoudens dat homeopathische middelen in huis heeft.
- 4** Voor een onderzoek naar de wachttijd bij de helpdesk van een internetprovider zijn 300 gesprekken geanalyseerd. Hierbij is de gemiddelde wachttijd 3 minuten en 20 seconden. De bijbehorende standaardafwijking is 45 seconden.
 - a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde wachttijd bij de helpdesk van deze internetprovider in seconden nauwkeurig.
 - b** Welke informatie geeft dit interval in deze context?

7.2 Betrouwbaarheidsintervallen toepassen

- 5** In 2023 waren er 6149 basisscholen. Uit een steekproef van 225 basisscholen bleek dat op 135 scholen dagelijks digitale leermiddelen werden gebruikt. Uit dezelfde steekproef bleek dat er gemiddeld 224 leerlingen per basisschool waren. De bijbehorende standaardafwijking was 39.
 - a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage basisscholen waar in 2023 dagelijks digitale leermiddelen werden gebruikt.
 - b** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aantal basisschoolleerlingen in 2023.
- 6** Bij een onderzoek staat bij de steekproefresultaten vermeld dat $\hat{p} = 0,28$ en $n = 224$.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze steekproef. Schrijf het resultaat in de intervalnotatie en de $\pm$ -notatie.

7.3 Steekproefomvang

- 7 In de tabel zie je voor drie filialen van een restaurantketen de steekproefproportie van klanten die aangeven zeer tevreden te zijn over de bediening en de bijbehorende steekproefomvang. Onderzoek bij welk filiaal het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval het meest nauwkeurig is.

filiaal	n	$\hat{p}$
A	150	0,82
B	250	0,76
C	250	0,82

- 8 Bereken de steekproefomvang als het 95%-betrouwbaarheidsinterval
a voor het populatiegemiddelde $[268, 272]$ is en geldt dat $S = 45$
b voor de populatieproportie $0,395 \pm 0,023$ is.

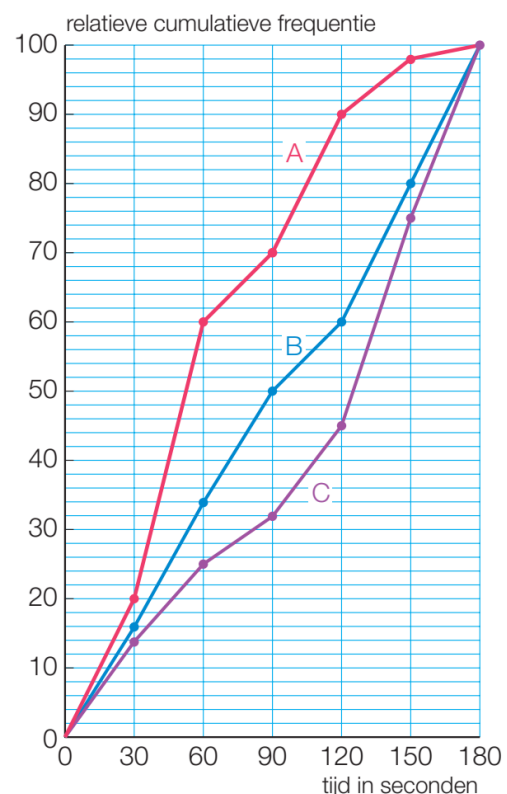
7.4 Conclusies trekken

- 9 In de tabel hiernaast zie je van het afgelopen jaar hoeveel van de kandidaten van de rijsscholen A en B bij hun eerste rijexamen slaagden. Onderzoek met de *phi*-coëfficiënt of het verschil groot, middelmatig of gering is.

	geslaagd	
	ja	nee
A	34	57
B	66	60

- 10 Bij een onderzoek naar de levensduur van espressoapparaten bleek dat de gemiddelde levensduur van onderzochte apparaten van het type Gustoso 5,4 jaar was en de standaardafwijking 1,6 jaar. Van het type Robusto was het gemiddelde 6,6 jaar en de standaardafwijking 1,2 jaar. Onderzoek met de effectgrootte of het verschil groot, middelmatig of gering is.

- 11 **[WERKBLAD]** Een supermarktketen heeft onderzoek gedaan naar de wachttijd bij de kassa. Bij elk filiaal is van 300 klanten de wachttijd genoteerd. In de figuur hiernaast zijn de resultaten van drie filialen verwerkt.
- Bij welk filiaal is de wachttijd bij de kassa het kortst?
 - Onderzoek met de $\max V_{cp}$ of het verschil in wachttijd tussen de filialen A en B groot, middelmatig of gering is. Doe dit ook voor de filialen B en C en voor de filialen A en C.
 - Teken in de figuur op het werkblad de boxplots van de filialen A, B en C en onderzoek of je met de boxplots dezelfde conclusies trekt als bij vraag b.

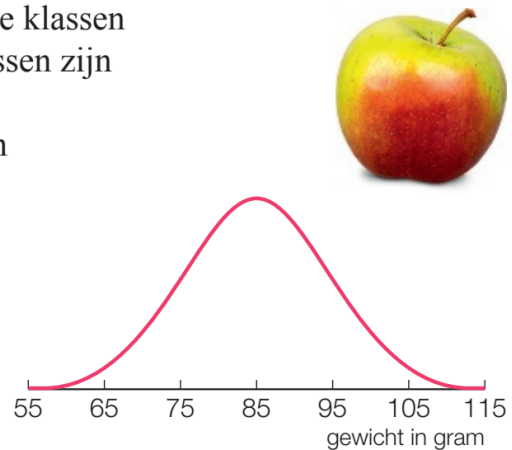


Gemengde opgaven

- 1** Fruitteler Hoekzema verdeelt zijn Elstar-appels in de klassen *klein*, *midden* en *groot*. De gewichten in de drie klassen zijn normaal verdeeld.

De kleine appels wegen gemiddeld 85 gram met een standaardafwijking van 10 gram. Voor de Elstars in de middenklasse zijn deze getallen 130 gram en 15 gram, en voor de grote appels 180 gram en 20 gram.

Hiernaast is de relatieve verdelingskromme van de appels in de klasse *klein* getekend.



- a** Neem de figuur over en teken hierin de relatieve verdelingskrommen van de twee andere klassen.
- b** Hoekzema neemt uit elk van de klassen *midden* en *groot* een steekproef. Zie de tabel hiernaast. Onderzoek of de 95%-betrouwbaarheidsintervallen van het gemiddelde gewicht van de appels in deze twee klassen elkaar overlappen.

	midden	groot
n	16	25
$\bar{X}$	132	175
S	18	20

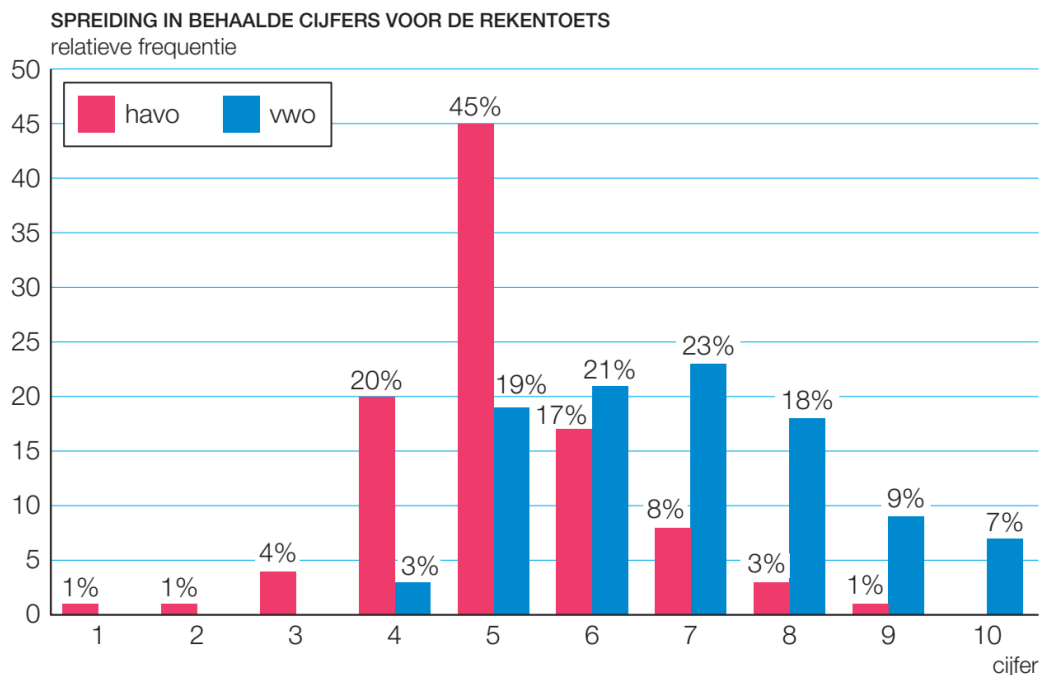
- 2** Het Nibud heeft de uitgaven van Nederlandse scholieren met leeftijden tussen 12 en 18 jaar onderzocht. Het blijkt dat de uitgaven aan kleding en schoenen verschillen tussen jongens en meisjes. Je ziet in de tabel een overzicht van de bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsintervallen voor de gemiddelde uitgaven per maand.

UITGAVEN PER MAAND AAN KLEDING EN SCHOENEN

	geslacht	
	jongens ($n = 1635$)	meisjes ($n = ?$)
bedrag in euro	[42,15; 43,85]	[38,20; 39,80]

- a** Welke twee variabelen zijn in de tabel gebruikt? Geef bij deze variabelen aan of het een kwalitatieve of een kwantitatieve variabele is.
- b** Bereken de gemiddelde uitgaven aan kleding en schoenen bij de jongens en bij de meisjes in de steekproef.
- c** Bereken de steekproefstandaardafwijking S voor de uitgaven aan kleding en schoenen bij de jongens. Rond af op centen.
- d** Bij de meisjes was de steekproefstandaardafwijking 16,12 euro. Bereken de steekproefomvang bij de meisjes.
- e** Ga met de effectgrootte na of de grootte van het verschil in uitgaven aan kleding en schoenen tussen jongens en meisjes groot, middelmatig of gering is.

- 3** In 2014 werd de eerste verplichte rekentoets als onderdeel van het eindexamen afgenomen. In de figuur zijn de resultaten van deze toets gepresenteerd. Inmiddels is de rekentoets afgeschaft als examenonderdeel.



Onderzoek met de max V_{cp} of het verschil in cijfers tussen havo en vwo groot, middelmatig of gering is.

- 4** Kees en Frits doen voor het vak statistiek een onderzoek met als onderzoeksvraag ‘Welk deel van de M&M’s is rood?’ Voor hun onderzoek openen ze een doos met daarin een aantal zakjes M&M’s en tellen ze van elke kleur het aantal M&M’s. In de tabel hieronder staat het resultaat.

kleur	blauw	bruin	groen	oranje	rood	geel	totaal
aantal	487	398	489	530	371	375	2650

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rode M&M’s. Geef dit betrouwbaarheidsinterval in de intervalnotatie en de $\pm$ -notatie.
- b** Volgens Kees is de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie oranje M&M’s ongeveer 15% groter dan van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rode M&M’s. Onderzoek of Kees gelijk heeft.

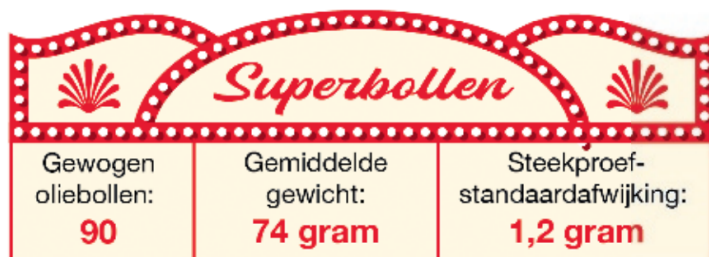


- 5 Een voetbalblad heeft onderzoek gedaan naar de blessuretijd die scheidsrechters toekennen in de Eredivisie.
- Op basis van gegevens van 31 wedstrijden van scheidsrechter Kuiper is berekend dat hij gemiddeld 4 minuten en 13 seconden bijtelde. De bijbehorende standaardafwijking was 1 minuut en 23 seconden.
- a Bereken voor scheidsrechter Kuiper het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde blessuretijd. Rond af op gehele seconden.

Over alle wedstrijden die in Europa in een seizoen zijn gespeeld, was de gemiddelde blessuretijd 3 minuten en 45 seconden.

- b Valt dit binnen het betrouwbaarheidsinterval van vraag a?
- c Was de conclusie bij vraag b anders geweest als het voor Kuipers gegeven gemiddelde en de gegeven standaardafwijking waren gebaseerd op 41 wedstrijden?

- 6 Bij een praktische opdracht voor wiskunde onderzoeken de leerlingen van havo-4 het gewicht van de (gewone) oliebolletjes van verschillende oliebolletjeskramen in de stad. Elke klas krijgt zijn eigen kraam om te onderzoeken. Hieronder zie je de resultaten die aan het eind van het onderzoek zijn gerapporteerd.



Onderzoek bij welke kraam het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval het meest nauwkeurig is.

7 Uit een steekproef onder melkveehouderijen kwam het volgende naar voren: het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie melkveehouderijen die deelnemen aan een duurzaamheidsinitiatief is $[0,459; 0,521]$. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddeld aantal koeien per melkveehouderij is $[112,48; 115,52]$.

- Bereken de standaardafwijking S voor het aantal koeien per melkveehouderij. Rond af op één decimaal.
- Ten tijde van het onderzoek waren er 15 261 melkveehouderijen. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aantal koeien bij melkveehouderijen. Geef je antwoord in miljoenen en rond af op twee decimalen.

8 Corinne doet onderzoek naar ziekenhuispatiënten die minstens twee weken in het ziekenhuis verblijven. Ze neemt zowel bij ziekenhuis A als bij ziekenhuis B een steekproef van 288 van deze patiënten. In de tabel hiernaast zie je het gemiddelde en de standaardafwijking van het aantal ligdagen van de door haar onderzochte personen.

AANTAL LIGDAGEN

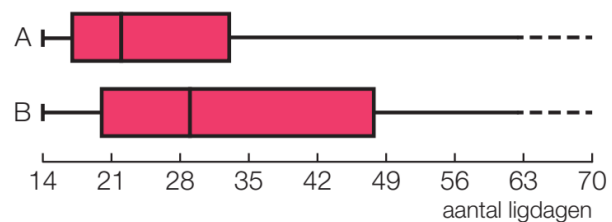
	$\bar{X}$	S
A	28,7	17,8
B	37,7	25,6

- Met de effectgrootte bepaalt Corinne of het verschil in ligdagen groot, middelmatig of gering is. Welke conclusie trekt Corinne? Licht toe.

De onderzoeksbegeleider van Corinne adviseert haar om ook de boxplots van het aantal ligdagen te vergelijken.

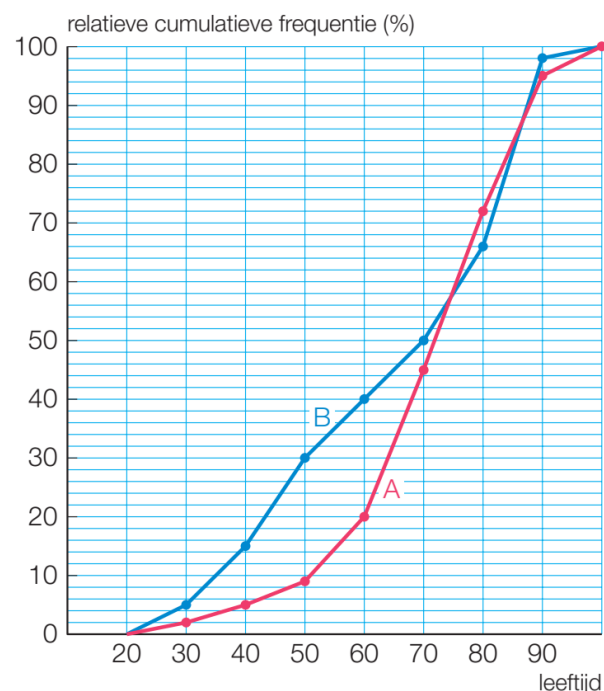
In de figuur hiernaast zie je voor beide ziekenhuizen (delen van) de boxplots.

- Welke conclusie trekt Corinne over de grootte van het verschil op basis van de boxplots?



In de figuur hiernaast zie je voor beide ziekenhuizen de leeftijdsopbouw van de onderzochte patiënten.

- Onderzoek met de $\max V_{cp}$ of het verschil in leeftijdsopbouw groot, middelmatig of gering is.



9 In een onderzoeksrapport over de financiële situatie van studenten staat de tabel hiernaast. Er zijn in totaal 2723 studenten ondervraagd.

- a** Welke variabelen staan in de tabel?
Geef van elk van deze variabelen het meetniveau. Licht je antwoord toe.
- b** Onderzoek met de *phi*-coëfficiënt of het verschil in het hebben van een bijbaan tussen de mannen en de vrouwen groot, middelmatig of gering is.

		bijbaan		
		ja	nee	
geslacht	m	763	327	1090
	v	1176	457	1633
		1939	784	2723

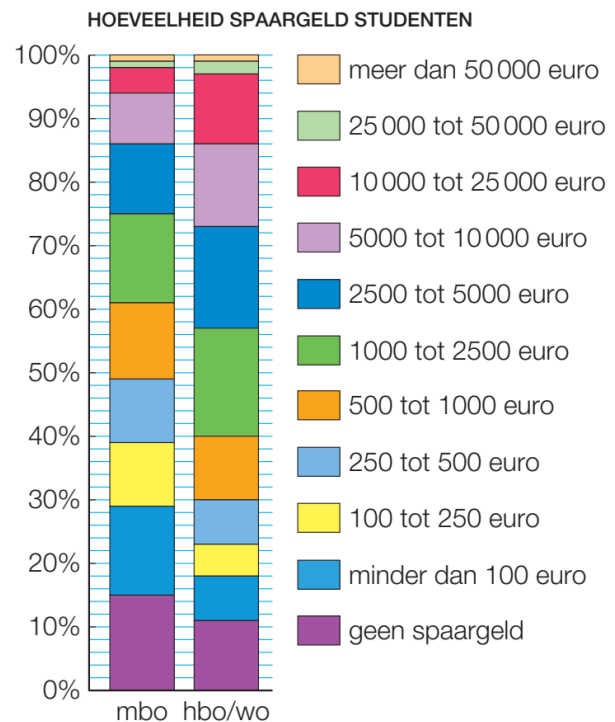
Uit het rapport blijkt dat er een verschil bestaat tussen hbo-studenten en wo-studenten in het hebben van een bijbaan. Een deel van de resultaten staat in de tabel hiernaast.

- c** Onderzoek met de *phi*-coëfficiënt of dit verschil groot, middelmatig of gering is.

		bijbaan		
		ja	nee	
opleidingsniveau	hbo	1200	379	
	wo			
		1939	784	2723

Tussen mbo-studenten en hbo/wo-studenten bestaat een verschil in de hoeveelheid spaargeld die zij hebben. Zie de figuur hiernaast.

- d** Onderzoek met de max V_{cp} of dit verschil groot, middelmatig of gering is.







8

Statistiek met de computer

In dit hoofdstuk werk je met een spreadsheetprogramma, zoals bijvoorbeeld Microsoft Excel of Google Spreadsheets. De modules en de bestanden die in dit hoofdstuk genoemd worden, vind je in de digitale leeromgeving.

Open het bestand *SportersRio2016*. Dit bestand bevat informatie van meer dan 11 000 sporters die meededen aan de Olympische Zomerspelen in Rio de Janeiro 2016. De informatie is in een bepaalde volgorde gesorteerd op land, geboortedatum en geslacht.

Welke sport beoefent de oudste sporter uit China? Wat is het gewicht van de enige Nederlandse taekwondo-deelnemer? En hoe heet de langste vrouw van het damesbasketbalteam uit Senegal?

8.1 Werken met een spreadsheet

Kennis en vaardigheden

- Je kunt data invoeren in een spreadsheet, bijvoorbeeld met de vulgreep.
- Je kunt formules invoeren met behulp van relatieve en absolute verwijzingen.
- Je kunt lijn-, cirkel- en staafdiagrammen maken en opmaken.
- Je kunt data selecteren en sorteren.
- Je kunt boxplots maken.

Theorie A Data invoeren

Een **spreadsheet** of **(digitaal) rekenblad** bestaat uit cellen in rijen en kolommen. Elke cel kan een getal, een tekst of een formule bevatten. Formules maken het mogelijk om bijvoorbeeld bij een kolom het gemiddelde te berekenen en dit weer te geven in een cel. Een spreadsheet is dynamisch. Dat wil zeggen dat de uitkomsten van formules direct opnieuw worden berekend als je de waarde in een cel verandert.

[►ICT](#) Neem de module **Data invoeren** door.

1 De tabel gaat over aantallen verkochte woningen in de gemeente Utrecht.



Open een nieuw rekenblad en voer de tabel in. Gebruik zo mogelijk de vulgreep.

	A	B	C	D	E
1	jaar	1e kwartaal	2e kwartaal	3e kwartaal	4e kwartaal
2	2013	544	484	710	882
3	2015	878	1016	1383	1474
4	2017	1243	1239	1472	1404
5	2019	1104	1086	1281	1291
6	2021	1595	1002	1125	1101
7	2023	956	1022	1119	1172

Theorie B Formules en verwijzingen

[►ICT](#) Neem de module **Formules en verwijzingen** door.

Het berekenen van kwartielen met een spreadsheetprogramma kan iets andere antwoorden opleveren dan met de methode die je in de onderbouw hebt geleerd. Voor grote aantallen gegevens, zoals in dit hoofdstuk, zijn eventuele verschillen erg klein.

2

In het bestand *ProefwerkScores* zie je voor elke leerling van een klas hoeveel punten hij of zij gehaald heeft voor elk van de vragen van een proefwerk. In rij 2 zie je de maximale score per vraag.

- a Bereken in cel Y2 hoeveel punten er maximaal gescoord konden worden bij dit proefwerk. Welke functie heb je gebruikt?
- b Bereken in cel Y3 hoeveel punten Joris gescoord heeft bij dit proefwerk. Gebruik de vulgreep in kolom Y om de scores van de andere leerlingen te berekenen. Welke leerling heeft de meeste punten gehaald en welke leerling de minste?

Belangrijke functies
 SOM
 AANTAL
 GEMIDDELDE
 MEDIAAN
 MIN
 MAX
 STDEV.P
 KWARTIEL.INC
 AFRONDEN

Het cijfer voor dit proefwerk wordt berekend met de formule

$$\text{cijfer} = \frac{\text{score}}{\text{max score}} \times 9 + 1.$$

- c Bereken in cel Z3 het cijfer dat Joris voor dit proefwerk heeft gehaald. Gebruik in je formule een absolute verwijzing naar cel Y2 en een relatieve verwijzing naar cel Y3.
- d Gebruik de functie AFRONDEN in de formule van Z3 om het cijfer af te ronden op één decimaal. Gebruik de vulgreep om de cijfers van de andere leerlingen te berekenen.

Gebruik F4 voor het wisselen tussen absolute en relatieve verwijzingen.

De docent is geïnteresseerd in de statistieken van de proefwerkresultaten.

- e Bereken voor elke vraag het gemiddelde, de standaardafwijking, de laagste score, Q_1 , de mediaan, Q_3 en de hoogste score. Doe dit ook voor de totaalscores en de cijfers.
- f Gebruik formules om de volgende vragen te beantwoorden.
 - Bij welke vragen is de interkwartielafstand van de scores 2,5?
 - Bij welke vragen is het gemiddelde gelijk aan de mediaan?

A3

In het bestand *CijfersKlas* zie je een overzicht van toetscijfers van een klas. Het eindcijfer wordt bepaald door een gewogen gemiddelde te nemen van de cijfers. In rij 1 zie je hoe vaak elke toets meetelt voor het eindcijfer.

- a Bereken voor elke leerling het eindcijfer in één decimaal. Denk aan het gebruik van relatieve en absolute verwijzingen.
- b Bereken in cel J25 het gemiddelde eindcijfer van de klas in twee decimalen.
- c Als de laatste toets niet 5, maar 6 keer meetelt, dan is het gemiddelde eindcijfer van de klas hoger.
 Hoeveel scheelt het met het gemiddelde van vraag b?

Theorie C Diagrammen

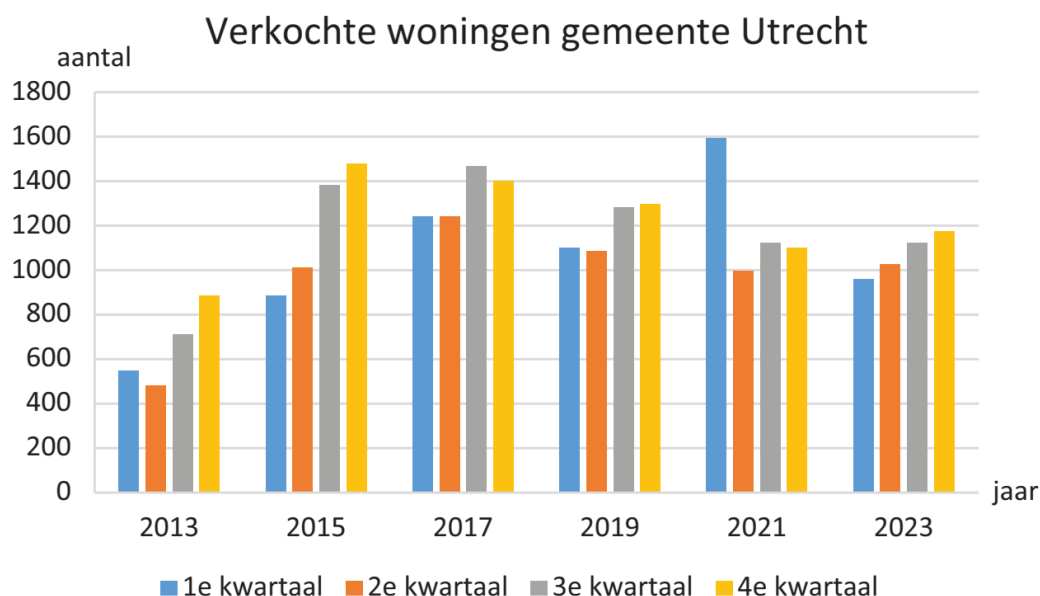
Onderzoeksgegevens worden meestal verzameld in tabellen. Tabellen geven echter niet altijd een goed overzicht van de gegevens. Daarom worden bij tabellen vaak diagrammen gemaakt. Een diagram vat de gegevens op een grafische manier samen. Bekende diagrammen zijn lijn-, staaf-, stapel- en cirkeldiagrammen. Een diagram moet snel inzicht geven in de gegevens. Zorg bij het maken van diagrammen dus voor

- een passende titel
- duidelijke informatie bij de assen en/of een legenda
- een geschikte schaalverdeling met eventueel roosterlijnen
- logisch kleurgebruik.

[►ICT](#) Neem de module **Diagrammen** door.

Bij het namaken van diagrammen in de volgende opgaven is het belangrijk dat de opzet gelijk is. Je gebruikt dus hetzelfde soort diagram, dezelfde variabelen, labels en schaalverdelingen. Details als lettertype, kleuren, posities en afstanden mogen verschillen, zolang het diagram maar duidelijk is. Raadpleeg bij twijfel je docent.

- 4** Open het bestand *WoningVerkoopUtrecht* en maak bij de gegevens een samengesteld staafdiagram, zoals in de figuur.



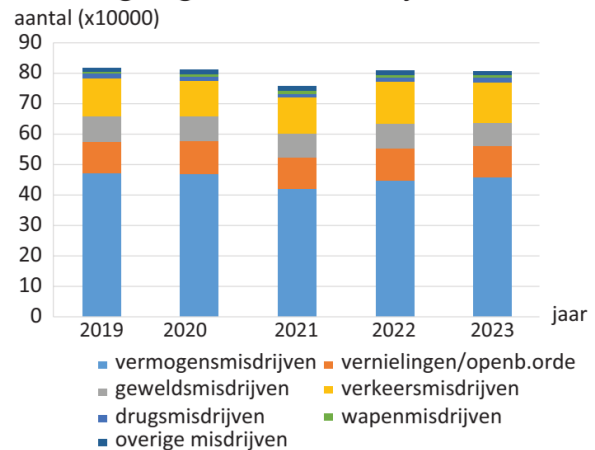
In het bestand *Criminaliteit* staan cijfers over geregistreerde criminaliteit in Nederland in de jaren 2015 tot en met 2023.

- Maak voor de jaren 2019 tot en met 2023 het stapeldiagram van de eerste figuur.
- Het lijndiagram in de tweede figuur geeft de ontwikkeling weer van het totaal aantal misdrijven in de periode 2015-2023.

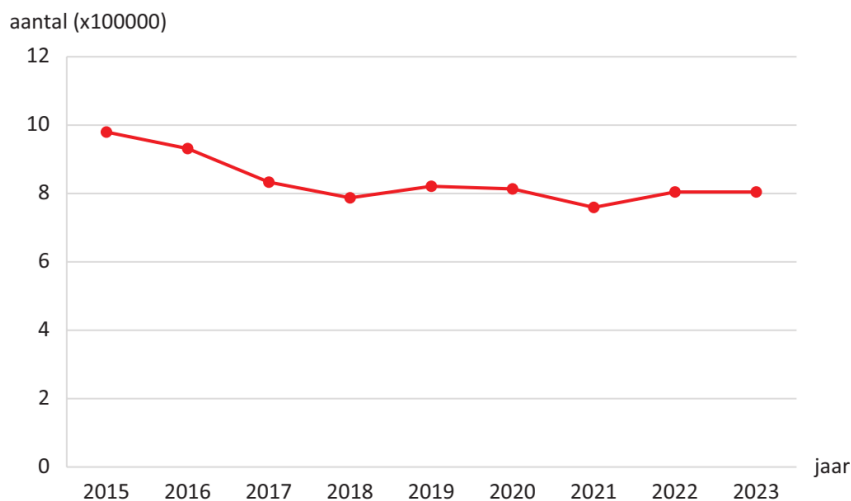
Maak dit diagram.

- Het diagram in de derde figuur geeft weer hoe de in 2023 gepleegde misdrijven zijn verdeeld over de verschillende categorieën. Maak dit diagram.

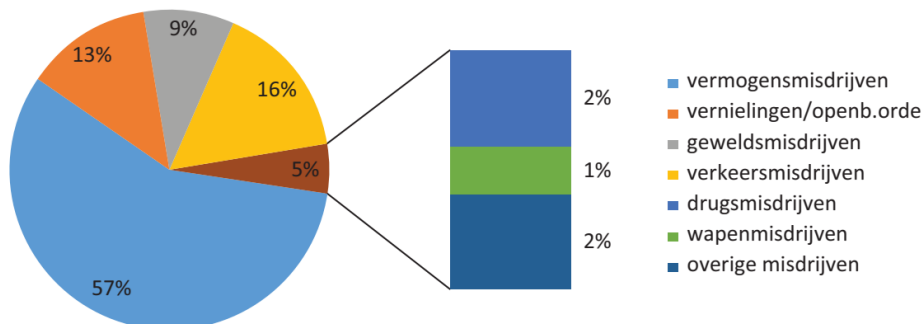
Aantallen geregistreerde misdrijven Nederland



Ontwikkeling misdrijven Nederland



Verdeling misdrijven in 2023



Voorkennis Centrummaten

Om aan te geven waar het centrum van gegevens zich bevindt, kun je gebruikmaken van een centrummaat.

Centrummaten

gemiddelde	$\text{gemiddelde} = \frac{\text{som van de waarnemingsgetallen}}{\text{aantal waarnemingsgetallen}}$
mediaan	Als de waarnemingsgetallen in volgorde van grootte staan, dan is <ul style="list-style-type: none">• bij een oneven aantal getallen de mediaan het middelste getal• bij een even aantal getallen de mediaan het gemiddelde van de middelste twee getallen.
modus	De modus is het waarnemingsgetal met de grootste frequentie. Zijn er twee of meer waarnemingsgetallen met de grootste frequentie, dan bestaat de modus niet.

Zijn er bij een statistisch onderzoek veel verschillende waarnemingsgetallen, dan maak je meestal een indeling in klassen. Bij de klasse $[20, 25)$ doet de linkergrens 20 mee, maar de rechtergrens 25 niet. Het klassenmidden is 22,5.

Om bij een klassenindeling het gemiddelde te schatten, maak je gebruik van de klassenmiddens. Je kunt bij een klassenindeling de mediaan niet meer berekenen, maar je kunt vaak wel berekenen in welke klasse de mediaan ligt. In plaats van de modus spreken we bij een klassenindeling van de modale klasse.

V1 Van een groep museumbezoekers is de leeftijd genoteerd. De resultaten staan in de tabel.

AANTAL MUSEUMBEZOEKERS

leeftijd	frequentie
$[0, 15)$	12
$[15, 30)$	10
$[30, 45)$	13
$[45, 60)$	24
$[60, 75)$	21
$[75, 90)$	2

- Bereken met klassenmiddens een schatting van de gemiddelde leeftijd. Rond af op één decimaal.
- In welke klasse ligt de mediaan?
- Geef de modale klasse.

Voorkennis Boxplots en spreidingsmaten

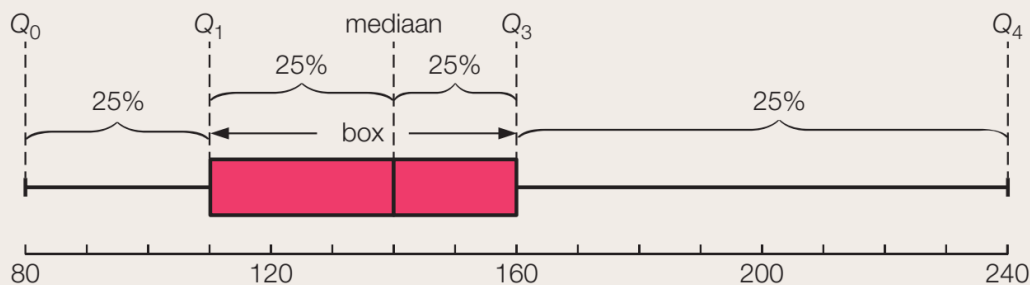
Een boxplot is een diagram dat de spreiding van gegevens in beeld brengt.

Alleen bij een kwantitatieve variabele kun je een boxplot maken.

De mediaan verdeelt een serie waarnemingsgetallen in twee helften. Van elk van deze helften kun je vervolgens weer de mediaan bepalen.

De mediaan van de eerste helft heet het eerste kwartiel. Notatie: Q_1 .

De mediaan van de tweede helft heet het derde kwartiel. Notatie: Q_3 .



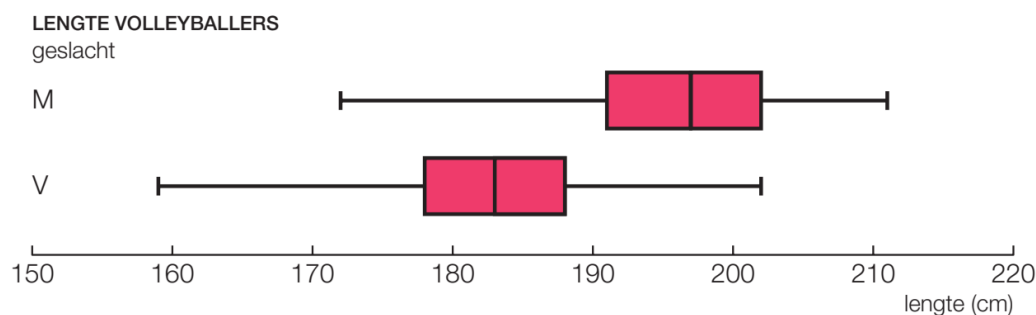
De box van een boxplot is het middelste gedeelte tussen het eerste en derde kwartiel.

Verder ken je de volgende spreidingsmaten:

- spreidingsbreedte = grootste getal (Q_4) – kleinste getal (Q_0)
- interkwartielafstand = $Q_3 - Q_1$
- standaardafwijking σ .

De standaardafwijking geeft een beeld van hoe ver metingen gemiddeld afwijken van het gemiddelde.

- V2** Op de Olympische Spelen 2016 in Rio de Janeiro namen aan het volleybaltoernooi zowel bij de mannen als de vrouwen 192 sporters deel. Voor beide geslachten is de lengte verwerkt in boxplots. Zie de figuur.



- Hoeveel vrouwen zijn kleiner dan 1,83 meter?
- Frits beweert dat de langste vrouw langer is dan de meeste mannen. Licht zijn uitspraak toe.
- Is de spreidingsbreedte van de lengte groter bij de mannen of de vrouwen? Licht toe.

Theorie D Boxplots en uitbijters

Je hebt geleerd dat een boxplot de spreiding van data in beeld brengt. Boxplots die met de computer gemaakt zijn, worden meestal verticaal weergegeven.

Soms worden niet alle gegevens in de boxplot opgenomen. Waarden die ver van de box van de boxplot liggen, worden **uitschieters** of **uitbijters** genoemd. Deze worden als losse punten buiten de boxplot getekend.

Een veelgebruikte vuistregel is:

Een uitbijter is een waarnemingsgetal dat meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand onder het eerste of boven het derde kwartiel ligt.

[►ICT] Neem de module **Boxplots** door.

6



Bij een voetbalclub is bijgehouden hoe vaak iedere speler de bal kan hooghouden. De trainer heeft berekend dat $Q_1 = 10$, $Q_3 = 24$ en mediaan = 20.

a Clara kan de bal 56 keer hooghouden.

Bereken of deze waarde volgens de vuistregel een uitbijter is.

b Sommige jonge voetballers kunnen de bal maar één keer hooghouden.

Waarom zijn deze waarden volgens de vuistregel geen uitbijters?

7



In het bestand *MiddelbareScholen* staan gegevens over het aantal leerlingen en het aantal middelbare scholen per gemeente in Nederland.

a Op welke variabele is het bestand gesorteerd?

b Sorteert het bestand op het aantal leerlingen, van hoog naar laag.

c Maak de boxplot bij het aantal leerlingen van de 20 gemeenten met het grootste aantal leerlingen. Welke gemeenten horen bij de uitbijterpunten?

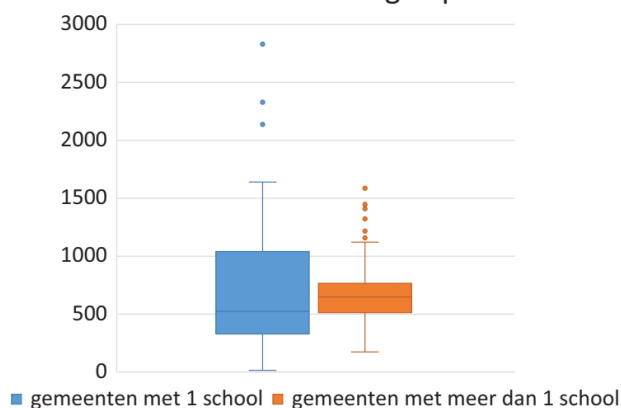
d Bereken in kolom D voor elke gemeente het gemiddeld aantal leerlingen per school.

e De boxplots in de figuur geven informatie over het gemiddeld aantal leerlingen per school in gemeenten met één school en gemeenten met meer dan één school.

Maak dit diagram.

f Noem een opvallend verschil tussen de twee boxplots.

Gemiddeld aantal leerlingen per school



Informatief Twee boxplots vergelijken

Voor het bepalen van de grootte van het verschil bij kwantitatieve variabelen kun je twee boxplots vergelijken.

Het gedeelte tussen het eerste en het derde kwartiel heet de box.

Hanteer de volgende vuistregels.

- Als de boxen elkaar niet overlappen, dan zeggen we *het verschil is groot*.
- Als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot ligt buiten de box van de andere boxplot, dan zeggen we *het verschil is middelmatig*.
- In alle andere gevallen zeggen we *het verschil is gering*.

8 Het bestand *SportersRio2016* bevat de gegevens van 11 538 sporters die deelnamen aan de Olympische Spelen 2016 in Rio de Janeiro.



- Van hoeveel sporters staat de lengte niet in de dataset?
- Maak in één figuur voor zowel mannen als vrouwen een boxplot bij de variabele Lengte.
- Mannen vanaf een bepaalde lengte worden als uitbijterpunten weergegeven in de boxplot.
Welke lengte is dat? Om hoeveel mannen gaat het hier?
- Er is één opvallende uitbijter bij de lengte van de vrouwen.
Zou deze lengte kunnen kloppen?
- Zie het informatief hierboven.
Bepaal door het vergelijken van twee boxplots hoe groot het verschil in lengte tussen de mannelijke en de vrouwelijke sporters is.
- Bepaal door het vergelijken van twee boxplots hoe groot het verschil in gewicht tussen de mannelijke en de vrouwelijke sporters is.

Pas op met uitbijters.
Dit kunnen fouten in de dataset zijn.

A9 Het bestand *VerwijzingenHalt* bevat gegevens over het aantal verwijzingen per gemeente naar de organisatie Het Alternatief (HALT). Het doel van deze organisatie is om jeugdcriminaliteit te voorkomen en bestraffen. Een verwijzing naar HALT wordt meestal door de politie of een leerplichtambtenaar gedaan.



Suzanne wil onderzoeken hoe groot het verschil in het aantal verwijzingen naar HALT is tussen grote en kleine gemeenten. Ze berekent eerst voor elke gemeente de verwijzingsgraad. Dat is het aantal verwijzingen naar HALT per 10 000 inwoners. Daarna vergelijkt ze de boxplot met de verwijzingsgraad van de 50 grootste gemeenten met die van de 50 kleinste gemeenten.

Voer het onderzoek van Suzanne uit. Welke conclusie trekt ze? Gebruik het informatief hierboven.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan data invoeren in een spreadsheet, bijvoorbeeld met de vulgreep.
- ☐ Ik kan formules invoeren met behulp van relatieve en absolute verwijzingen.
- ☐ Ik kan lijn-, cirkel- en staafdiagrammen maken en opmaken.
- ☐ Ik kan data selecteren en sorteren.
- ☐ Ik kan boxplots maken.

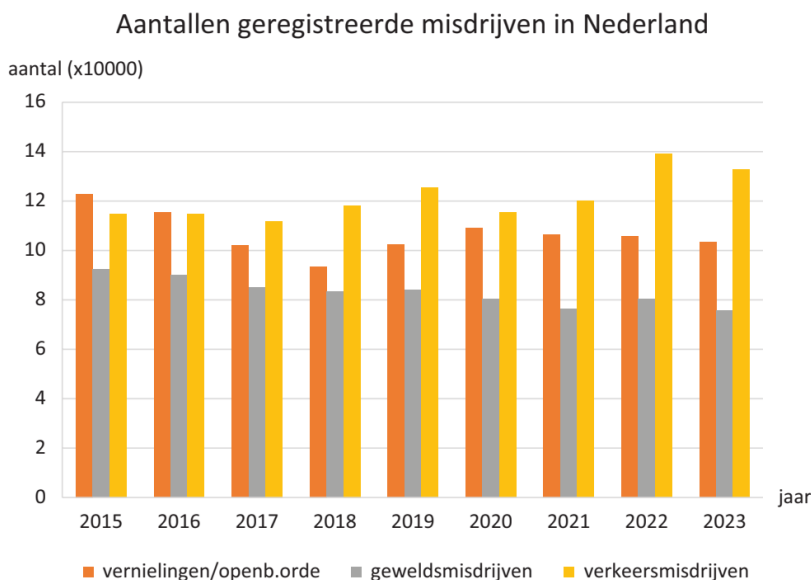
- OPGAVE C1a
THEORIE A
- OPGAVE C1b
THEORIE B
- OPGAVE C2
THEORIE C
- OPGAVE C3
THEORIE D
- OPGAVE C3
THEORIE D

C1 Juf Roosmarijn maakt voor haar leerlingen in groep 4 een spiekbrieftje van de vermenigvuldigingstafels. In de figuur zie je hiervan een gedeelte, tot en met het getal 4. In de eerste rij en eerste kolom staan de (vetgedrukte) getallen die worden vermenigvuldigd, in de overige cellen de uitkomsten.

- a** Neem kolom A en rij 1 over en vul beide aan tot en met het getal 10 met behulp van de vulgreep.
- b** Maak in cel B2 een formule met absolute en relatieve verwijzingen en gebruik deze om de overige cellen te vullen.

	A	B	C	D	E
1		1	2	3	4
2	1	1	2	3	4
3	2	2	4	6	8
4	3	3	6	9	12
5	4	4	8	12	16

C2 Maak met behulp van de gegevens in het bestand *Criminaliteit* de volgende figuur.



C3 Maak met behulp van de gegevens in het bestand *SportersRio2016* in één figuur voor zowel de mannen als de vrouwen een boxplot bij de variabele Leeftijd.

Antwoorden

C1 a *

b *

C2 *

C3 *

8.2 Werken met datasets

Kennis en vaardigheden

- Je kunt in een tabel sorteren en filteren.
- Je kunt de totaalrij van een tabel gebruiken.
- Je kunt een variabele toevoegen aan een tabel, bijvoorbeeld door andere variabelen te combineren.
- Je kunt de weergave van een getal in een cel aanpassen.

○10

Gebruik het bestand *SportersRio2016*.

□◎*

Bereken het gemiddelde gewicht van de Japanse voetballers.

Theorie A Zoeken in een dataset

Om zonder problemen gebruik te kunnen maken van een aantal geavanceerde mogelijkheden van spreadsheetprogramma's, is het belangrijk dat je werkt met een zogenaamde **nette dataset**. Bij een nette dataset zijn de kolommen voorzien van kolomkoppen en zijn de cellen die grenzen aan de dataset leeg. Bovendien staan gegevens die bij elkaar horen steeds in één rij. De informatie in zo'n rij heet een **record**.

Een nette dataset geeft je onder andere de mogelijkheid gegevens te **sorteren** en te **filteren**. Je kunt dan bijvoorbeeld snel het gemiddelde van een deelgroep berekenen.

►ICT] Neem de module **Zoeken in een dataset** door.

Zet bij de volgende opgaven indien nodig de dataset om in een Tabel en zorg bij gebruik van Excel dat de totaalrij aanstaat.

Afspraak

Geef bij de beantwoording van de vragen steeds aan

- in welke kolommen je welke filters gebruikt
- in welke kolommen je op welke manier sorteert
- welke functies je gebruikt.

11

□◎*

De volgende vragen gaan over het weer in De Bilt. Gebruik het bestand *WeerHistorie*, dat een nette dataset bevat met weergegevens gemeten door het weerstation in De Bilt.

- Hoeveel variabelen bevat de dataset?
- Van hoeveel dagen bevat de dataset gegevens?
- Op welke datum was de gemiddelde temperatuur het hoogst?
- Op hoeveel dagen was het gemiddeld 0 °C of kouder?
- Wat is het totaal aantal uren zonneschijn dat is gemeten in de jaren 2021, 2022 en 2023 samen?

12 Open het bestand *SportersRio2016*.



- a Welke sport beoefent de oudste sporter? En de jongste?
- b Hoeveel procent van de sporters was 16 jaar of jonger?
- c Wat was de gemiddelde leeftijd van de Nederlandse sporters? Rond af op gehelen.
- d De sporters die meedoen aan de triatlon hebben een lager gemiddeld gewicht dan de roeiers.
Hoeveel kg scheelt het? Rond af op gehelen.
- e Volgens een journalist zijn de vrouwelijke Nederlandse sporters gemiddeld 4 cm langer dan de vrouwelijke sporters uit andere landen. Klopt dit? En hoe zit dat bij de mannelijke sporters?
- f Hoeveel procent van de gouden medailles werd gewonnen door sporters uit de Verenigde Staten?



A13 In het bestand *StudentenEnquete* zijn gegevens verzameld van 271 studenten.



- a De gemiddelde lengte van de studenten in groep D is groter dan die van de studenten in groep A.
Hoeveel cm scheelt het? Rond af op gehelen.
- b Hoeveel procent van de studenten heeft een linkshandige ouder?

Het gemiddeld aantal uren slaap per etmaal van de studenten zie je in de kolom UrenSlaap. Studenten die gemiddeld minder dan 8 uur slapen, hebben een korte slaapduur. Een slaapduur van minstens acht uur noemen we lang.

- c Vul de kruistabel in.
- d Welk percentage van de vrouwelijke studenten heeft een korte slaapduur? Is dit groter of kleiner dan het percentage bij de mannelijke studenten?

	slaapduur		totaal
	kort	lang	
man			
vrouw			
totaal			

Zie het informatief op de volgende bladzijde.

- e Onderzoek met behulp van 95%-betrouwbaarheidsintervallen of het verschil in gemiddeld aantal uren slaap tussen mannelijke en vrouwelijke studenten significant is.
- f Luc ziet dat studenten die uit een plattelandsdorp komen vaker uitwonend zijn dan studenten die uit een grote stad komen. Onderzoek met behulp van 95%-betrouwbaarheidsintervallen of het verschil in woonsituatie significant is.

Informatief Betrouwbaarheidsintervallen

Om twee groepen met elkaar te kunnen vergelijken, kun je gebruikmaken van betrouwbaarheidsintervallen.

- Voor een populatiegemiddelde is het 95%-betrouwbaarheidsinterval gelijk aan $\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$. Hierin is $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, S de steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.
- Voor een populatieproportie is het 95%-betrouwbaarheidsinterval gelijk aan $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$. Hierin is $\hat{p}$ de steekproefproportie en σ de standaardafwijking.

Voor de standaardafwijking geldt de formule $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$. Hierin is n de steekproefomvang.

We noemen het verschil tussen twee groepen significant als de 95%-betrouwbaarheidsintervallen elkaar niet overlappen.

○14



Bij een enquête onder de gasten van hotel De Negensprong is gevraagd naar de mate van tevredenheid over het ontbijtbuffet. Men kon daarbij kiezen uit de volgende antwoorden:

slecht matig voldoende ruim voldoende goed

In het bestand *Ontbijtbuffet* zijn de antwoorden op deze vraag in een tabel verzameld.

Bij nader inzien wil de hoteleigenaar alleen onderscheid maken tussen positieve, neutrale en negatieve beoordelingen.

Daarom wil hij de antwoorden 'ruim voldoende' en 'goed' vervangen door 'Positief' en de antwoorden 'matig' en 'slecht' door 'Negatief'. De beoordeling 'voldoende' beschouwt hij als een neutraal antwoord en wil hij dus 'Neutraal' noemen. De hoteleigenaar bedenkt de volgende aanpak.

- 1 Maak een nieuwe kolom aan door in cel D1 Beoordeling te typen.
- 2 Filter de kolom Ontbijtbuffet op 'ruim voldoende' en 'goed', zet in de eerste cel van de nieuwe kolom 'Positief' en gebruik de vulgreep om de kolom te vullen.
- 3 Filter de kolom Ontbijtbuffet op 'matig' en 'slecht', zet in de eerste cel van de nieuwe kolom 'Negatief' en gebruik de vulgreep om de kolom te vullen.
- 4 Vul op dezelfde wijze de juiste cellen van de nieuwe kolom met 'Neutraal'.

Onderzoek of deze aanpak werkt.

Theorie B Hercoderen en formules

In opgave 14 heb je een nieuwe variabele gemaakt, die gebaseerd is op een bestaande variabele. Dit wordt het **hercoderen** van een variabele genoemd.

Je kunt ook een nieuwe variabele toevoegen die waarden van verschillende bestaande variabelen combineert. In opgave 13 heb je gebruikgemaakt van een getalfilter om onderzoek te doen naar de kortslapers. Wil je onderzoek doen onder de uitwonende, vrouwelijke kortslapers dan moet je *nóg* twee filters juist instellen. Het is dan handig te beschikken over een nieuwe variabele die aangeeft of een student al dan niet een uitwonende, vrouwelijke kortslaper is. Je hebt daarna slechts één filter nodig om deze groep te bekijken. In de volgende module wordt uitgelegd hoe je dit doet.

[►ICT] Neem de module **Hercoderen** door.

15 Gebruik het bestand *SportersRio2016*.



Voeg een variabele *AtletiekVrouwBenelux* toe, die met de waarden Ja/Nee aangeeft of een sporter een vrouw uit de Benelux is die aan atletiek doet. Denk aan de afspraak op bladzijde 147.

Geef het in je uitwerking aan als je een nieuwe variabele toevoegt.

16 Gebruik het bestand *SportersRio2016*.



- a Voeg een variabele *Medailles* toe, die aangeeft hoeveel medailles een sporter in totaal won.
- b Hoeveel sporters wonnen meer dan één medaille?
Hoeveel van hen wonnen ten minste één gouden medaille?
- c Welke sporter won de meeste medailles?

17 Bij koud weer voelt het op een dag met veel wind kouder aan dan op een dag met weinig wind. Om de gevoelstemperatuur te berekenen kan deze formule worden gebruikt:



$$G = 1,41 - 1,162W + 0,98T + 0,0124W^2 + 0,0185WT$$

Hierin is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en W de windsnelheid in m/s.

Open het bestand *WeerHistorie*.

Onderzoek met behulp van de gemiddelde temperatuur en de gemiddelde windsnelheid welke dag het koudst aanvoelde.

A18 Ga uit van de gegevens in het bestand *SportersRio2016*.



Gebruik in deze opgave alleen de gegevens van sporters waarvan zowel het gewicht als de lengte in de dataset staat.

a Ga na dat dit voor 10858 sporters het geval is.

Er bestaan diverse formules om de energiebehoefte E per dag van volwassenen te schatten. Een voorbeeld daarvan zijn de formules van Roza & Shizgal, waarmee je het zogeheten basaal metabolisme in kcal berekent.

- voor mannen: $E = 88,362 + 13,397G + 4,799H - 5,677L$
- voor vrouwen: $E = 447,593 + 9,247G + 3,098H - 4,33L$

In deze formules is G het gewicht in kg, H de lengte in cm en L de leeftijd in jaren. In deze opgave houden we geen rekening met inspanning of andere factoren, die leiden tot een grotere energiebehoefte.

b Voeg in het bestand *SportersRio2016* een variabele *EnergieBehoefte* toe en bereken deze voor alle sporters waarvan zowel het gewicht als de lengte in de dataset staat. Gebruik daarbij de leeftijd in gehele jaren en maak onderscheid tussen mannen en vrouwen. Rond af op een geheel getal.

A19 Sinds een aantal jaren gebruikt het KNMI voor het berekenen van de gevoelstemperatuur niet meer de formule van opgave 17. Tegenwoordig gebruikt men de formule



$$G = 13,12 + 0,6215T - 11,37(3,6W)^{0,16} + 0,3965T(3,6W)^{0,16}.$$

Hierin is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en W de windsnelheid in m/s. Deze formule geldt voor $W > 1,3$. Als de windsnelheid 1,3 m/s of lager is, dan gaan we ervan uit dat de gevoelstemperatuur gelijk is aan de luchttemperatuur.

Gebruik het bestand *WeerHistorie*.

Onderzoek op welke dag volgens deze formule het verschil tussen de gemiddelde temperatuur en de gevoelstemperatuur het grootst was. Gebruik voor T de gemiddelde temperatuur en voor W de gemiddelde windsnelheid.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan in een tabel sorteren en filteren.
- ☐ Ik kan de totaalrij van een tabel gebruiken.
- ☐ Ik kan een variabele toevoegen aan een tabel, bijvoorbeeld door andere variabelen te combineren.
- ☐ Ik kan de weergave van een getal in een cel aanpassen.

► OPGAVE C4
THEORIE A

► OPGAVE C4
THEORIE A

► OPGAVE C5
THEORIE B

► OPGAVE C4 EN C5
THEORIE B

C4 Gebruik het bestand *WeerHistorie*.

- a** Een dag wordt tropisch genoemd als de maximumtemperatuur 30 °C of hoger is.
Wat was de gemiddelde temperatuur van alle tropische dagen? Rond af op twee decimalen.
- b** Het jaar 1965 was één van de natste jaren sinds de neerslag wordt gemeten.
Hoeveel mm neerslag viel er in dat jaar in totaal? Op welke dag regende het dat jaar het langst?

C5 Voor de dosering van bepaalde medicijnen is het belangrijk om een schatting te kunnen maken van de lichaamsoppervlakte. Hiervoor bestaan diverse formules. Eén daarvan is de formule van Dubois. Deze formule luidt:
$$\text{oppervlakte} = 0,007184 \cdot \text{lengte}^{0,725} \cdot \text{gewicht}^{0,425}$$

Hierin is de oppervlakte in m², de lengte in cm en het gewicht in kg.
Voeg in het bestand *SportersRio2016* een variabele Oppervlakte toe, die voor alle sporters met de formule van Dubois een schatting geeft van de lichaamsoppervlakte. Rond af op één decimaal.

Antwoorden

C4 a 24,06°C

b 1151,9 mm

18 december

C5 *

8.3 Draaitabellen en draaigrafieken

Kennis en vaardigheden

- Je kunt frequentie- en kruistabellen maken met behulp van een draaitabel.
- Je kunt een klassenindeling maken door groeperen in een draaitabel.
- Je kunt bij een draaitabel een draaigrafiek maken en aanpassen.
- Je kunt datums groeperen en filteren.
- Je kunt een diagram met een secundaire as maken.

O20
□ ⊗ *

In het bestand *Maaltijdbezorging* vind je gegevens van een enquête die is gehouden onder inwoners van Australië van 18 tot en met 33 jaar.

- Hoeveel mannen deden mee aan het onderzoek? En hoeveel vrouwen?
- Geef van elk van de steden (Adelaide, Brisbane, Melbourne, Perth en Sydney) aan hoeveel personen meededen aan het onderzoek.
- Vul de kruistabel in.

		geslacht		
		M	V	
stad	Adelaide			
	Brisbane			
	Melbourne			
	Perth			
	Sydney			
				386

Theorie A Draaitabellen maken

In opgave 20 heb je door herhaald gebruik van filters een kruistabel gemaakt. Voor deze kruistabel heb je minstens negen keer een filter moeten instellen.

Wil je bijvoorbeeld een kruistabel maken waarin per leeftijd is af te lezen hoeveel mannen en vrouwen meededen aan het onderzoek, dan is dat met filters instellen veel werk. In een spreadsheet kun je met behulp van **draaitabellen** snel dergelijke kruistabellen maken.

Een draaitabel is een tabel die data uit een nette dataset op een dynamische manier kan samenvatten, rangschikken en groeperen.

Een draaitabel kan onder andere kruistabellen maken met aantallen, gemiddelden, standaardafwijkingen en minima.

► ICT] Neem de module **Draaitabellen** door.

DEELNEMERS ONDERZOEK

	M	V	
18 jaar	1	0	1
19 jaar	3	1	4
20 jaar	6	3	9
21 jaar	17	6	23
22 jaar	30	26	56
23 jaar	32	41	73
⋮			
32 jaar	10	6	16
33 jaar	1	0	1
	221	165	386

21 Open het bestand *SportersRio2016*.



a Maak een kruistabel met aantallen

- met als rij-variabele Geslacht en als kolomvariabele Leeftijd
- met als rij-variabele Leeftijd en als kolomvariabele Geslacht.

Wat is de modale leeftijd bij de vrouwelijke sporters?

b Maak kruistabellen waarmee de volgende vragen te beantwoorden zijn.

- Bij welke sporten staan evenveel mannen als vrouwen in de dataset?
- Welke sport beoefende de oudste sporter met een gouden medaille?

Door variabelen in rijen of kolommen te verwisselen (draaien) kun je de brongegevens op andere manieren samenvatten.

22 In het bestand *Speerwerpen* is van alle speerwerpers de beste afstand genoteerd die ze hebben geworpen bij de kwalificatieronde tijdens de Olympische Spelen 2016.



Maak een kruistabel waarin de kleinste, de gemiddelde en de grootste geworpen afstanden zijn af te lezen, uitgesplitst naar geslacht en vervolgens naar groep. Rond af op twee decimalen.



A23 Gebruik het bestand *Wiskunde*, waarin gegevens zijn verzameld van leerlingen op twee middelbare scholen in Portugal die een wiskundevak volgen.



In de laatste kolom vind je het resultaat op het eindrapport, uitgedrukt in een cijfer van 0 tot 20.

Rana wil onderzoeken of leerlingen die in de stad wonen, gemiddeld een hoger resultaat hebben op het eindrapport dan leerlingen die op het platteland wonen.

a Maak voor Rana de kruistabel die het gemiddelde resultaat op het eindrapport voor de genoemde woonomgevingen weergeeft. Welke conclusie trekt Rana?

Sofanias beweert dat uit de dataset blijkt dat voor de leerlingen geldt dat

- hoe ouder ze zijn, hoe lager hun resultaat op het eindrapport is
- meisjes gemiddeld een hoger resultaat op hun eindrapport hebben dan jongens.

b Onderzoek of Sofanias gelijk heeft. Licht je antwoord toe met behulp van één draaitabel met het gemiddelde resultaat op het eindrapport.

024 Het bestand *LeerlingGegevens* bevat informatie over leerlingen van het Playfair College.

- a Maak met behulp van een draaitabel een frequentietabel van alle voorkomende lichaamslengtes. Waarom geeft deze frequentietabel geen goed beeld van de verdeling?
- b Voeg aan de dataset de nieuwe variabele *LengteKlasse* toe, die aangeeft tot welk van de lengteklassen 150-159, 160-169, ... de leerling behoort.
- c Maak met behulp van een draaitabel een frequentietabel bij de variabele *LengteKlasse*.

Theorie B Groeperen en draaigrafieken

In opgave 24 heb je door middel van hercoderen een klassenindeling gemaakt. In een spreadsheet is het mogelijk om op een dynamische manier een klassenindeling te maken. Het maken van een klassenindeling komt neer op het **groeperen** van de waarden van een variabele.

Het is ook mogelijk een diagram bij een draaitabel te maken dat met de draaitabel meeverandert. Zo'n dynamisch diagram heet een **draaigrafiek**.

[►ICT] Neem de module **Groeperen en draaigrafieken** door.

Afspraak

Maak in deze paragraaf de genoemde diagrammen met behulp van draaitabellen/draaigrafieken. Maak elke grafiek netjes op. Zorg dus voor voldoende informatie bij de assen, een passende titel en zo nodig een legenda.

25 Ga uit van het bestand *StudentenEnquete*.

- a Maak een cirkeldiagram bij de variabele *Groep*. Zorg ervoor dat in het diagram de aantallen studenten per groep te zien zijn.
- b Maak een staafdiagram bij de variabele *Lengte*. Neem een klassenindeling tussen 155 en 195, met stapgrootte 5. Je krijgt dan een tabel zoals hiernaast.
- c Maak een staafdiagram bij de variabele *UrenSlaap*. Neem een klassenindeling tussen 5 en 10, met stapgrootte 1.
- d Maak een cirkeldiagram bij de variabele *AantalBroersEnZussen*. Meer dan vijf broers en zussen komt niet vaak voor. Groepeer daarom de aantallen broers en zussen boven vijf in een groep met de naam 'meer dan 5'.

	aantal
< 155	5
155-159	11
160-164	27
165-169	32
170-174	46
175-179	41
180-184	47
185-189	42
190-194	13
>195	7
totaal	271

26 Gebruik het bestand *Speerwerpen*.



- a** Maak met een draaitabel een frequentietabel van de geworpen afstanden. Neem een klassenindeling tussen 55 en 90, met stapgrootte 5.
- b** Maak bij de tabel van vraag a een staafdiagram.
- c** Met welke standaardverdeling heb je hier te maken?
- d** Pas de draaitabel en de draaigrafiek aan, zodat mannen en vrouwen apart worden weergegeven. Hoe is het antwoord op vraag c te verklaren?

Bij zowel de mannen als de vrouwen waren de atleten opgedeeld in de groepen A en B.

- e** Pas het staafdiagram van vraag d aan, zodat zowel bij de mannen als bij de vrouwen de resultaten van de A- en de B-groep snel vergeleken kunnen worden.

A27 Open het bestand *Maaltijdbezorging*.

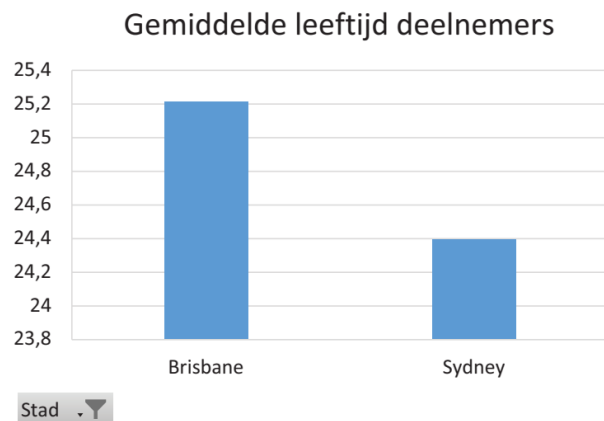


- a** Maak het staafdiagram in de figuur, waarin voor twee steden te zien is wat de gemiddelde leeftijd van de deelnemers is.
- b** Maak een stapeldiagram waarin per opleidingsniveau af te lezen is hoeveel mannen en vrouwen aan het onderzoek hebben meegedaan.
- c** Met een cirkeldiagram kan worden weergegeven in hoeverre alleenstaande mannen een korte bezorgtijd belangrijk vinden.

Maak dit cirkeldiagram en zorg ervoor dat de percentages zichtbaar zijn in het diagram.

- d** Maak een staafdiagram waarin voor vrouwen uit Brisbane per opleidingsniveau is te zien wat de gemiddelde grootte is van het huishouden.

Gemiddelde van Leeftijd



A28 Ga uit van het bestand *Wiskunde*.



Ezra maakt vier groepen. De groepen bestaan uit personen die

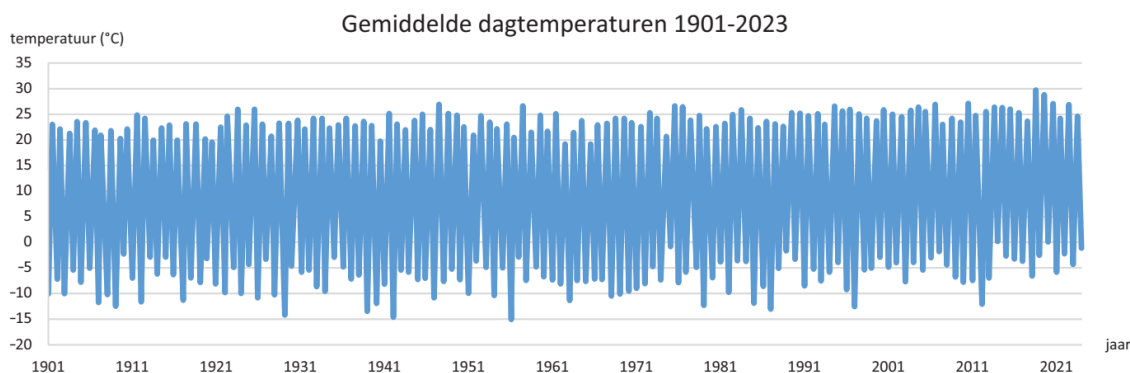
- zowel hulp thuis krijgen als bijles hebben
 - alleen bijles hebben
 - alleen hulp thuis krijgen
 - geen hulp thuis en geen bijles hebben.
- a** Voeg een variabele Hulp toe, die voor elke leerling aangeeft tot welke van de vier groepen deze behoort.
- b** Maak een cirkeldiagram dat laat zien hoe de aantallen van de groepen zich verhouden. Zorg ervoor dat de aantallen zichtbaar zijn in het diagram.

Suze wil onderzoeken of leerlingen die weinig lessen missen, gemiddeld een hoger resultaat op het eindrapport halen. Daartoe maakt ze een staafdiagram met op de horizontale as het aantal uren absentie, ingedeeld in klassen met stapgrootte 10.

- c** Voer het onderzoek van Suze uit. Wat is haar conclusie?

Het bestand *TemperatuurHistorie* bevat een dataset met alle door het weerstation in De Bilt gemeten temperaturen in de periode van 1901 tot en met 2023.

Nathalie heeft een artikel gelezen over de opwarming van de aarde. Ook in Nederland zou een stijgende trend te zien zijn in de gemiddelde dagtemperaturen. Ze heeft deze stijgende trend in beeld proberen te brengen door alle temperaturen in de dataset te selecteren en er een lijndiagram bij te maken. Ze krijgt de volgende figuur.



- a Vind je dat de stijgende trend goed in beeld wordt gebracht? Licht toe.
- b Van hoeveel dagen is de temperatuur in het bestand opgenomen? Zijn al deze dagen in het lijndiagram goed te onderscheiden?

Sven maakt eerst een draaitabel waarin de gemiddelde temperaturen per jaar zijn weergegeven. Hierbij maakt hij een lijndiagram. Hij tekent de verticale as van 7°C tot 12°C .

- c Maak het lijndiagram van Sven. Is de stijgende trend goed zichtbaar? Licht toe.

Theorie C Groeperen van datums

Het lijndiagram van Nathalie in opgave 29 geeft geen goed beeld van de stijgende trend in temperaturen. Dit komt doordat het lijndiagram uit veel te veel gegevenspunten bestaat. In het diagram is het patroon van de jaargetijden nog enigszins te herkennen, maar dit verbergt grotendeels de trend. Het is beter een lijndiagram te maken met als gegevenspunten bijvoorbeeld de gemiddelde jaartemperaturen, of de gemiddelde maandtemperaturen van de maand mei door de jaren heen. In de volgende module leer je hoe je dit soort diagrammen maakt.

[► ICT] Neem de module [Groeperen van datums](#) door.

In het bestand *WoningVerkoop* zie je informatie over woningverkoop in Nederland in de periode 2000 tot en met 2023. De variabele *AantalVerkochteWoningen* geeft aan hoeveel bestaande woningen (dus exclusief nieuwbouw) er in totaal in de betreffende maand zijn verkocht.

- Groep de variabele *Periode* op jaren én kwartalen en maak voor de periode 2013-2020 een lijndiagram van de verkochte aantallen woningen. Welk patroon is in het diagram te herkennen?
- Maak een draaigrafiek voor de jaren 2000-2023 met daarin:
 - een staafdiagram waarmee op de primaire as is te zien hoeveel woningen er dat jaar verkocht zijn;
 - een lijndiagram waarmee op de secundaire as is te zien wat de gemiddelde verkoopprijs van een woning was.

Regelmatig verschijnen er in de krant en op internet artikelen over weerrecords. Het artikel hieronder gaat over het weer in De Bilt in juni 2023. Op enkele plaatsen ontbreken getallen. Met het begrip 'normaal' wordt telkens het gemiddelde in de maanden juni van de jaren 1991-2020 bedoeld.

Artikel Juni 2023: recordwarm, recordzonnig en zeer droog

Met een gemiddelde temperatuur van °C tegen normaal °C was het de warmste junimaand sinds 1901. Op de tweede plek staat met °C. Met gemiddeld over het land 24 mm neerslag tegen normaal 66 mm was de maand zeer droog. In De Bilt viel mm tegen mm normaal. Het landelijk gemiddelde neerslagtekort was eind juni opgelopen tot ongeveer 170 mm. Een tekort van deze grootte komt normaal in minder dan 5% van de jaren voor. Met gemiddeld over het land 328 uren zon tegen 214 uur normaal was de maand extreem zonnig. In De Bilt scheen de zon uur, tegen uur normaal.

Ga uit van het bestand *WeerDeBilt*. Op het tabblad *Historie* zijn de gegevens vanaf 1951 tot en met 2023 verzameld. Op het tabblad *Tijdvak* 1991-2020 zijn de gegevens van de jaren 1991-2020 nog eens apart opgenomen. Op het tabblad *Juni 2023* zijn de gegevens van juni 2023 apart opgenomen.

- Onderzoek welke getallen in het artikel op de puntjes moeten staan. Rond indien nodig af op één decimaal.
- Vul de juiste gegevens in op het tabblad *Temperaturen juni*. Maak bij de gegevens een lijndiagram waarin de normale temperatuur in juni en de temperatuur in juni 2023 te zien zijn.
- Maak een grafiek waarin voor juni 2023 per dag op de primaire as met een lijndiagram de gemiddelde temperatuur wordt weergegeven, en op de secundaire as met een staafdiagram het aantal uren zon.

Kennis- en vaardighedencheck

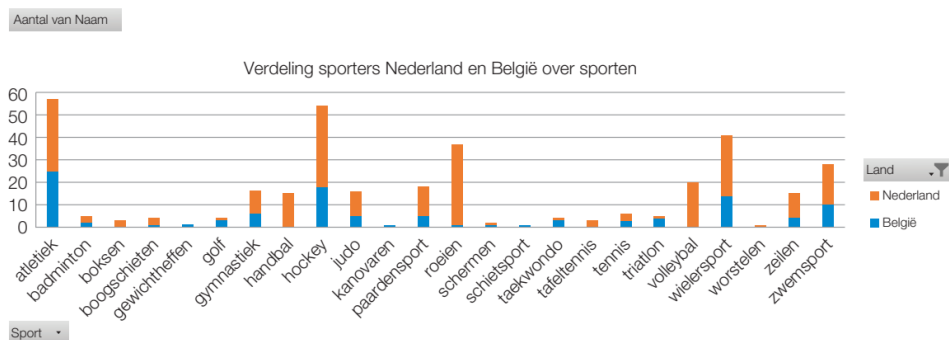
- ☐ Ik kan frequentie- en kruistabellen maken met behulp van een draaitabel.
- ☐ Ik kan een klassenindeling maken door groeperen in een draaitabel.
- ☐ Ik kan bij een draaitabel een draaigrafiek maken en aanpassen.
- ☐ Ik kan datums groeperen en filteren.
- ☐ Ik kan een diagram met een secundaire as maken.

- OPGAVE C6
THEORIE A
- OPGAVE C6b
THEORIE B
- OPGAVE C7
THEORIE B
- OPGAVE C8
THEORIE C
- OPGAVE C8
THEORIE C

C6 Gebruik in deze opgave het bestand *SportersRio2016* en maak gebruik van draaitabellen.

- a Maak een kruistabel waarin af te lezen is hoeveel medailles er door de VS zijn gewonnen, zowel uitgesplitst naar goud, zilver en brons (in kolommen), als naar mannen en vrouwen (in rijen).
- b Maak een draaitabel waarin af te lezen is hoe lichaamslengtes (in rijen) voor de sporters uit Nederland verdeeld zijn over leeftijdsgroepen (in kolommen). Zorg ervoor dat in elk geval de lengteklasse 1,4-1,6 en de leeftijdsklasse 10-19 voorkomen.

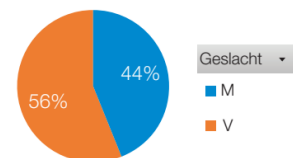
C7 Open *SportersRio2016* en maak de volgende twee diagrammen na met behulp van draaigrafieken.



Land

Aantal van Naam

Man/vrouw-verdeling van sporters uit Nederland



C8 Gebruik het bestand *WeerDeBilt*.

Maak een draaigrafiek waarin op de primaire as met een lijndiagram zowel de gemiddelde minimumtemperatuur als de gemiddelde maximumtemperatuur per jaar wordt weergegeven, en op de secundaire as met een staafdiagram de totale neerslag per jaar. Zorg voor een titel boven het diagram en labels bij de assen.

Antwoorden

C6 a *
b *

C7 *

C8 *

Formuleblad

Vuistregels voor de grootte van het verschil van twee groepen

2×2-kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $\phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$,

waarin a , b , c en d absolute aantallen zijn.

- als $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Maximaal verschil in cumulatief percentage ($\max V_{cp}$)
(met voor beide groepen een steekproefomvang $n > 100$)

- als $\max V_{cp} > 40$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $20 < \max V_{cp} \leq 40$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $\max V_{cp} \leq 20$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Effectgrootte $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$, met $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ de steekproefgemiddelden

($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen¹⁾ elkaar niet overlappen, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- in alle andere gevallen zeggen we “het verschil is gering”.

noot 1 De ‘box’ is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \text{ met } p \text{ de steekproefproportie en } n \text{ de steekproefomvang.}$$

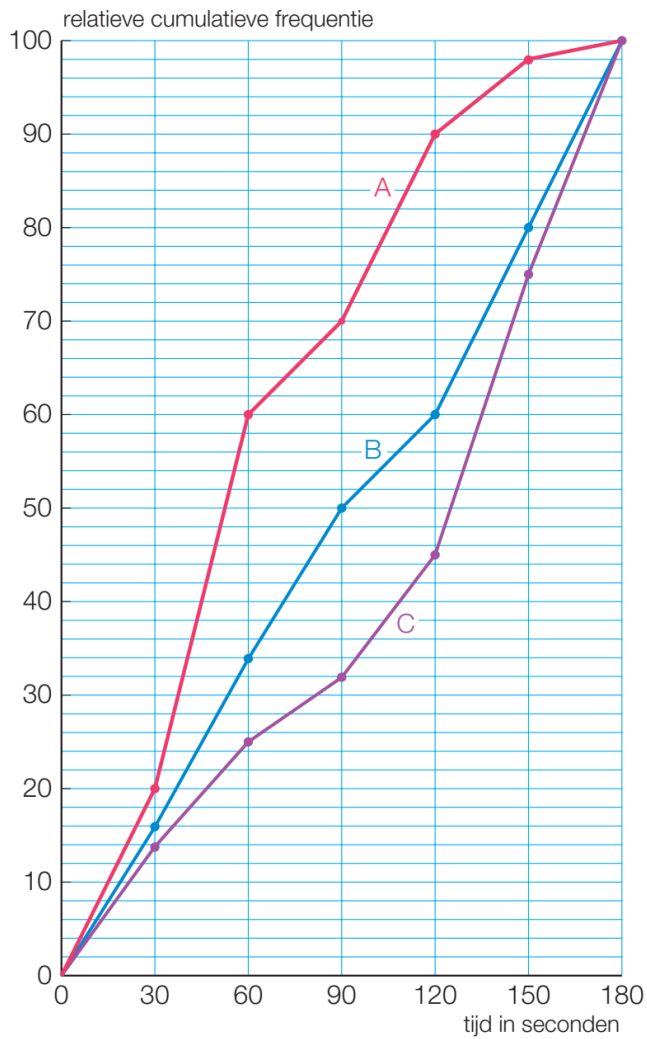
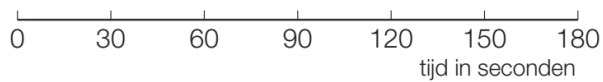
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ met } \bar{X} \text{ het steekproefgemiddelde, } n \text{ de steekproefomvang en } S \text{ de steekproefstandaardafwijking.}$$

Werkbladen

11

blz. 129



Antwoorden Kennis- en vaardigheidentests

Hoofdstuk 5

- 1** a afnemend stijgend:
 $\langle 0, 2 \rangle$ en $\langle 4,5; 5 \rangle$
toenemend dalend:
 $\langle 2, 3 \rangle$ en $\langle 5; 5,5 \rangle$
afnemend dalend:
 $\langle 3, 4 \rangle$ en $\langle 5,5; 6 \rangle$
toenemend stijgend:
 $\langle 4; 4,5 \rangle$ en $\langle 6, 9 \rangle$
b 1 en 2
c 166,7%
- 2** a *
b ruim 2600 spelers
c Achtereenvolgens: toenemende daling, afnemende daling, minimum, toenemende stijging, afnemende stijging, maximum.
- 3** *
- 4** a *
Het plasticverbruik neemt toe met 264 mm^3 als de printtijd toeneemt van 1 tot 2 minuten.
b *
- 5** a 4,5 bar
b 9:00 uur
c *
- 6** a -7,5 en 1,25
b bijvoorbeeld $[0, 1]$ of $[2, 4]$
- 7** a Als de productie toeneemt van 5000 tot 25 000 stuks, neemt de winst met gemiddeld 67,25 euro per stuk toe.
b €98,75 per stuk
c €70,16 per stuk

Hoofdstuk 6

- 1** a $R = 2p$
b $A = 2l^2 + 4l + 3$
c *
- 2** a *
b 600 auto's
c 1147 en 608 auto's
d 09:49 uur
e 16:30 uur
- 3** a $A = -0,8x + 0,5$
b $B = -0,5x + 2,5$
c $C = -0,6x + 1,6$
- 4** a $P = \frac{5}{3x}$
b $Q = \frac{7}{3x}$
c $R = \frac{2y - 4x}{xy}$
- 5** a €83,80 per leerling
b 3 dagen
c *
d *
e $T = 125x + 2900$
- 6** a $C = \frac{48}{p}$
b 8 croissants meer
- 7** a $B = 0,00125W$
b 420 000 euro
c 256 250 euro
- 8** a $K = 30q^6$
b $K = q^{-0,34}$
c $K = 270q^3$
d $K = 32q^{-1}$

Hoofdstuk 7

- 1** a 0,085
b 133 leerlingen

2 68%

3 [0,244; 0,290] (of $0,267 \pm 0,023$)

- 4** a [195, 205] seconden
(of 200 ± 5 seconden)
b *

- 5** a [53,5%; 66,5%]
(of $60\% \pm 6,5\%$)
b [1 345 401, 1 409 351] leerlingen
(of $1\,377\,376 \pm 31\,975$ leerlingen)

6 [0,22; 0,34]
 $0,28 \pm 0,06$

7 filiaal C

8 a 2025
b 1807

9 gering

10 groot

- 11** a filiaal A
b A en B: middelmatig
B en C: gering
A en C: groot
c *
A en B: niet
B en C: wel
A en C: niet

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen.
- De toets Ans, en fouten verbeteren.
- Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen.
- Decimaal getal omzetten in een breuk.

havo A deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 8

Formules, grafieken en snijpunten

- Formules invoeren en grafieken plotten.
- De optie snijpunt gebruiken.

havo A deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 29

Vergelijkingen oplossen

- Oplossen van vergelijkingen met de GR.

havo A deel 1
hoofdstuk 3
bladzijde 139

Formules en tabellen

- Bij een formule een tabel maken.

havo A deel 2
hoofdstuk 5
bladzijde 24

Grafieken, toppen en nulpunten

- Het kiezen van een geschikt venster.
- De opties snijpunt, nulpunt, maximum en minimum.

havo A deel 2
hoofdstuk 6
bladzijde 52

Allerlei

- Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR.
-

Overzicht Excel/Spreadsheets-modules

Module

Data invoeren

- lege werkmap aanmaken
- data handig invoeren in rijen en kolommen
- vulgreep gebruiken
- cellen opmaken

Havo A deel 2
hoofdstuk 8
bladzijde 138

Formules en verwijzingen

- absolute verwijzingen naar cellen
- relatieve verwijzingen naar cellen
- verwijzingen gebruiken in formules

Havo A deel 2
hoofdstuk 8
bladzijde 138

Diagrammen

- lijn-, staaf-, stapel- en cirkeldiagrammen maken

Havo A deel 2
hoofdstuk 8
bladzijde 140

Boxplots

- boxplots maken

Havo A deel 2
hoofdstuk 8
bladzijde 144

Zoeken in een dataset

- omzetten van nette dataset in Tabel
- sorteren en filteren
- bij gebruik van Excel: werken met totaalrij

Havo A deel 2
hoofdstuk 8
bladzijde 147

Hercoderen

- hercoderen van variabelen

Havo A deel 2
hoofdstuk 8
bladzijde 150

Draaitabellen

- draaitabellen maken

Havo A deel 2
hoofdstuk 8
bladzijde 153

Groeperen en draaigrafieken

- groeperen van waarden in draaitabellen
- maken van draaigrafieken

Havo A deel 2
hoofdstuk 8
bladzijde 155

Groeperen van datums

- groeperen van datums

Havo A deel 2
hoofdstuk 8
bladzijde 157

Trefwoordenregister

- voor de
populatieproportie 94, 101
- voor het
populatiegemiddelde 97,
101

A
afnemende daling 11
afnemende stijging 11
aselect 88
associatiemaat 116

B
betrouwbaarheid 108
(95%-)
betrouwbaarheids-
intervallen 94
 breedte van - 108, 112
 nauwkeurigheid van -
 108, 109
 notaties voor - 105
 soorten - 101
 - voor de
 populatieproportie 94
 - voor een aantal 102
 - voor een
 percentage 102
 - voor het
 populatiegemiddelde 97
boxplot 143
boxplots vergelijken 123
breedte van een 95%-
betrouwbaarheidsinterval
108, 112
breuken
 - aftrekken 61
 - delen 59
 gelijknamige - 61
 - herleiden 56
 - optellen 61
 - vermenigvuldigen 59

C
combineren 44
constante daling 11
constante stijging 11

D
dalend 9
daling
 afnemende - 11
 constante - 11
 toenemende - 11
dataset 147
differentiequotiënt 29
digitaal rekenblad 138
draaigrafiek 155
draaitabel 153

E
effectgrootte 123
evenredig 67
 omgekeerd - 68
 recht - 67
exponent 73

F
filteren 147
formuleblad 160

G
gebroken exponent 75
gebroken getal 75
gelijknamige breuken 61
gemiddelde verandering
27, 29
gesloten interval 9
grafiek
 - plotten 52
 - schetsen 52
 - tekenen 52
groeperen 155
grondtal 73

H
helling 29
hercoderen 150

I
interval 8, 9
 gesloten - 9
 open - 9
intervalnotatie 9

K
kruislings
 vermenigvuldigen 64
kruistabel 117

M
machten 73
 - herleiden 73
 rekenregels voor - 73, 77
machten met gebroken
exponenten 75
machten met negatieve
exponenten 77
maximaal verschil in
 cumulatief
 percentage 120
maximum 14
max V_{cp} 120
minimum 14

N
nauwkeurigheid van een
betrouwbaarheidsinterval
108
nette dataset 147
normaalkromme 90
normale verdeling 90
nulpunt 52

O

omgekeerd evenredig 68
open interval 9

P

phi-coëfficiënt 117
plotten 52
populatie 88
populatieomvang 89
populatieproportie 89
proportie 89

R

recht evenredig 67
record 147
rekenblad 138
rekenregels voor
 machten 73, 77
representatieve
 steekproef 88

S

schetsen 52
sorteren 147
spreadsheet 138
stapgrootte 17

steekproef 88

 representatieve - 88
steekproefgemiddelde 97
steekproefomvang 89
steekproefproportie 89
steekproefstandaard-
 afwijking 97
steekproevenverdeling 92
stijgend 9
stijging
 afnemende - 11
 constante - 11
 toenemende - 11
substitueren 44

T

tekenen 52
toenamediaagram 17
toenemende daling 11
toenemende stijging 11
top 14
totaalrij 147

U

uitbijter 144
uitdelen 56
uitschieter 144

V

variabele uit de breuk
 halen 56
variabele vrijmaken 47, 64
vuistregels bij
 - boxplots
 - vergelijken 123, 160
 - de normale
 verdeling 90
 - effectgrootte 123, 160
 - max V_{cp} 121, 160
 - *phi*-coëfficiënt 117, 160
verdeling van
 - het steekproef-
 gemiddelde 97
 - de steekproef-
 proporties 92

W

wisseleigenschap 64

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Oscar Casander, Arnhem

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Foto's

Shutterstock: p. 6-7, 12, 23, 25, 31, 42-43, 46 (b, o), 48, 51, 58, 60, 63 (b, o), 65, 70, 71 (b, o), 75, 76, 78, 80, 81 o, 84 o, 85, 86-87, 96, 99, 109, 110, 112, 113, 119, 130, 131, 136-137, 151, 154

Stijn Voets: p. 36

Sabine de Waal: p. 37

iStockphoto: p. 81 b

999 Games: p. 84 b

ANP / Egbert Hartman: p. 88

ANP / Sabine Joosten: p. 103

ANP / David Rozing: p. 111

ANP / Sander Koning: p. 115

ANP / Soenar Chamid sportfotografie / Sander Chamid: p. 148

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

0 / 25



© 2025 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06453-2

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten