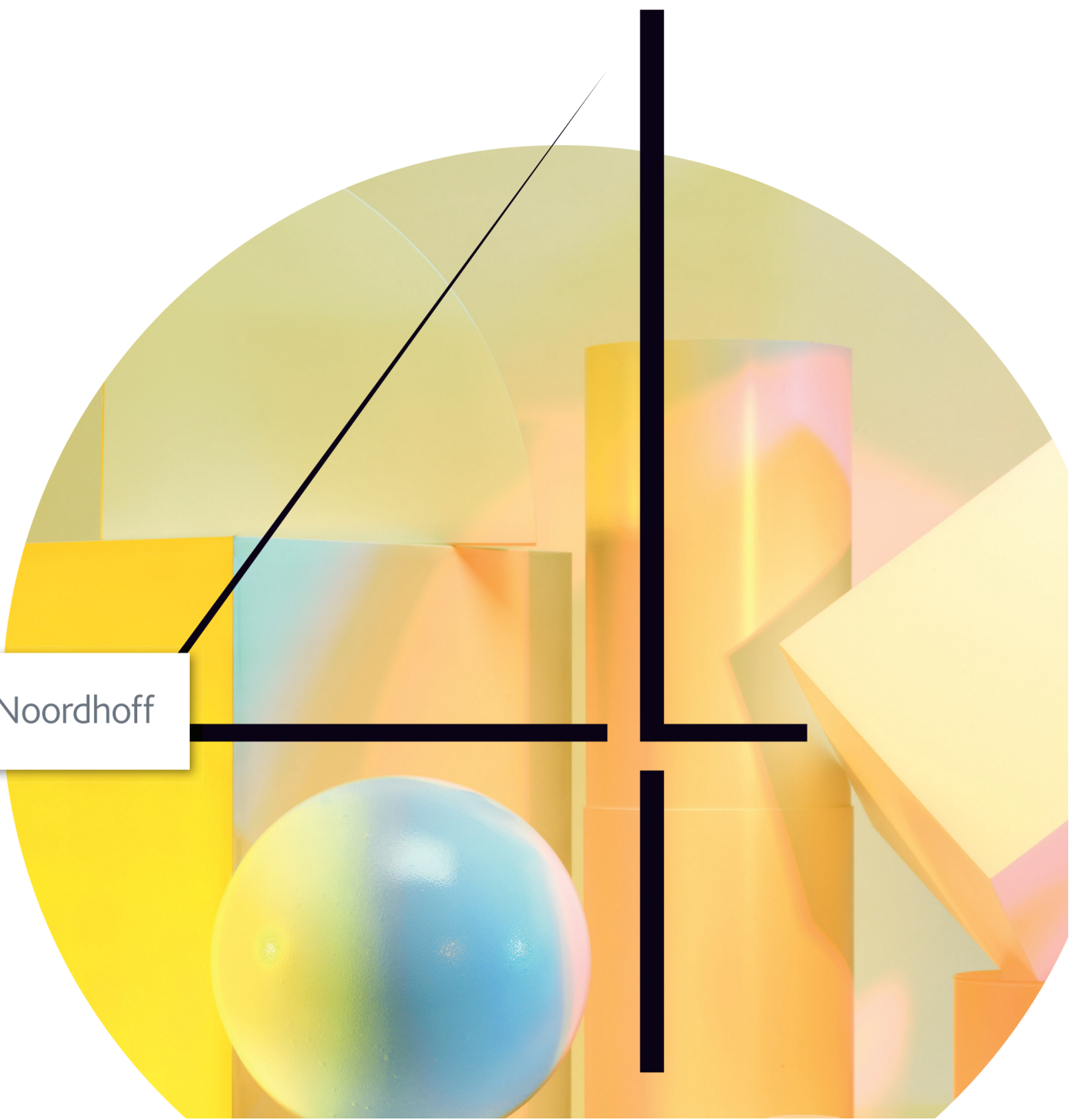


getal & ruimte

A



Noordhoff



Getal & Ruimte

Uitwerkingen havo A deel 2

Dertiende editie, 2025

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd

Inhoud

5	Veranderingen	4
6	Formules en herleiden	25
7	Conclusies bij statistiek	51
8	Statistiek met de computer	74

5 Veranderingen

5.1 Stijgen en dalen

Bladzijde 8

- V1** a $0 < x < 6$
b $x > 7$
c $x < 12,5$

- V2** a $1 < x < 4,5$
b $x < 2$
c $x > 1,5$

Bladzijde 9

- 1** De grafiek is ook stijgend op $10 < t < 12$.
De grafiek is dalend op $8 < t < 10$ en op $12 < t < 14$.

- 2** $\langle \leftarrow, -2 \rangle$, $[-1, 0]$, $\langle 1, 3 \rangle$ en $\langle 5, \rightarrow \rangle$

Bladzijde 10



- 4** a $[-8, 3]$ b $\langle 4; 4,5 \rangle$ c $[2,1; \rightarrow \rangle$

- 5** a $[10, 15]$ en $[3,5; \rightarrow \rangle$



- 6** klasse A: $\langle 23, 40 \rangle$
klasse B: $[40, 80]$
klasse C: $\langle 80, \rightarrow \rangle$

- 7** a De drone stijgt op $\langle 1, 2 \rangle$ en op $\langle 3, 5 \rangle$.
b Nee, de grafiek kan op $\langle 5, 9 \rangle$ bijvoorbeeld dalend, stijgend en weer dalend zijn.

- 8** Bij deel I daal je steeds meer en bij deel II daal je steeds minder.

Bladzijde 12

- 9** a toenemend stijgend op $\langle 0, 2 \rangle$ en op $\langle 6, 8 \rangle$
afnemend stijgend op $\langle 2, 3 \rangle$ en op $\langle 8, 10 \rangle$
b toenemend dalend op $\langle 3, 5 \rangle$
afnemend dalend op $\langle 5, 6 \rangle$

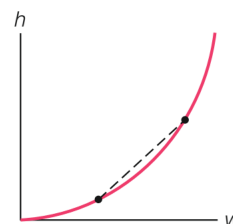
- 10** a constant stijgend op $\langle 0, 3 \rangle$
afnemend stijgend op $\langle 3, 4 \rangle$
toenemend dalend op $\langle 4, 5 \rangle$
afnemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$
toenemend stijgend op $\langle 7, 10 \rangle$
b Tijdens het klimmen neemt de snelheid van de fietser af. Dus op $\langle 4, 7 \rangle$.

- 11** a In het jaar 1975.
b De grafiek moet nog 30% dalen in één eeuw. Vloeiend verlengen van de grafiek naar 1800 geeft een toenemende daling.

Bladzijde 13

- 12** Grafiek a hoort bij krantenkop III.
 Grafiek b hoort bij krantenkop IV.
 Grafiek c hoort bij krantenkop II.
 Grafiek d hoort bij krantenkop I.

- 13** **a** Bij vaas I is er sprake van een afnemende stijging.
 Bij vaas II is er sprake van een toenemende stijging.
b Zie de schets van de grafiek van vaas II hiernaast. Er is een lijnstuk getekend tussen twee punten op de grafiek. Zo'n lijnstuk ligt bij een toenemende stijging altijd boven de grafiek. Dus lineair interpoleren geeft een te hoge schatting van h bij vaas II.
c Als je een lijnstuk tekent tussen twee punten op een grafiek bij een afnemende daling, dan ligt het lijnstuk altijd boven de grafiek. Dus geeft lineair interpoleren bij een afnemende daling een te hoge schatting.



- 14** **a** Dat was om 10:00 uur en om 17:00 uur.
 Om 10:00 uur waren er 200 mensen en om 17:00 uur waren er 450 mensen.
b Er waren op dat moment 150 mensen.

Bladzijde 15

- 15** **a** Bij de punten A en C treedt een maximum op.
 De maxima zijn 30 en 40.
b De minima zijn 20 en 10.
c Op $[0, 7]$ is 10 de laagste en 40 de hoogste waarde van N .
 Op $[0, 3]$ is 15 de laagste en 30 de hoogste waarde van N .
 Op $[3, 5]$ is 25 de laagste en 40 de hoogste waarde van N .
- 16** **a** De grafiek heeft twee maxima en twee minima.
b Het grootste maximum is 35 en het kleinste minimum is 5.
 Dus het verschil is $35 - 5 = 30$.
- 17** **a** De grafiek sluit eind december aan op begin januari.
b Bij het maximum in november is de filedruk 580 000 kmmin.
 Deze files duurden in totaal $\frac{580\,000}{1900} = 305,2\dots$ minuten, oftewel $\frac{305,2\dots}{60} \approx 5$ uur.
c Het maximum in maart is 510 000 kmmin.
 Het minimum in februari is 370 000 kmmin.
 Dus $\frac{510\,000 - 370\,000}{370\,000} \cdot 100\% \approx 37,8\%$ meer.

Bladzijde 16

- C1** **a** Stijgend op $\langle \leftarrow, 1 \rangle$ en op $\langle 3, 5 \rangle$.
b Dalend op $\langle 1, 3 \rangle$ en op $\langle 5, \rightarrow \rangle$.

interval	soort van stijgen of dalen
$\langle 0, 3 \rangle$	afnemend dalend
$\langle 3, 5 \rangle$	toenemend stijgend
$\langle 5, 7 \rangle$	afnemend stijgend
$\langle 7, 8 \rangle$	toenemend dalend

- C3** **a** Het maximum is 350.
b Het hoogste minimum is 150 en het laagste minimum 50.
 Dat is $\frac{150 - 50}{150} \cdot 100\% \approx 66,7\%$ minder.

5.2 Toenamediagrammen

Bladzijde 17

18 a Bij een afname is ΔN negatief.

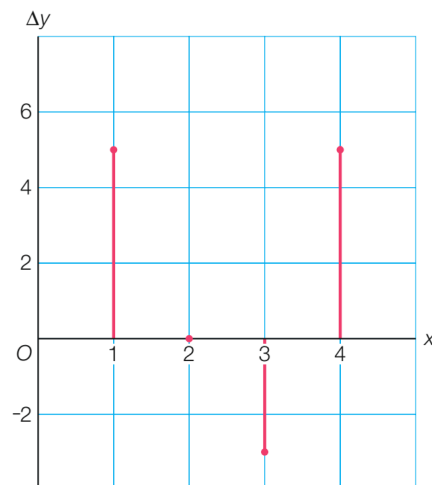
b interval	$[0, 2]$	$[2, 4]$	$[4, 6]$
ΔN	25	7	-12

c Bij elk interval in de tabel geldt $\Delta t = 2$.

Bladzijde 18

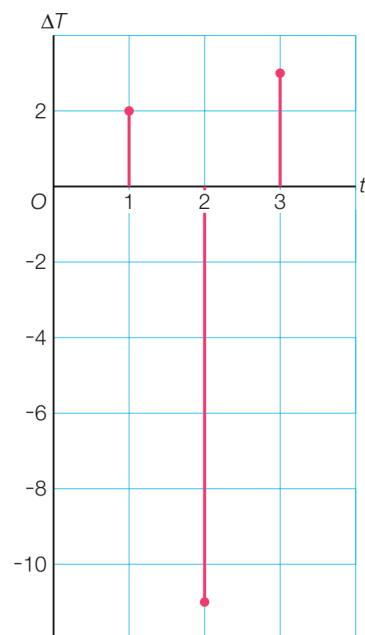
19 interval	Δy
$[0, 1]$	5
$[1, 2]$	0
$[2, 3]$	-3
$[3, 4]$	5

Zie de figuur.



20 a interval	ΔT
$[0, 1]$	2
$[1, 2]$	-11
$[2, 3]$	3

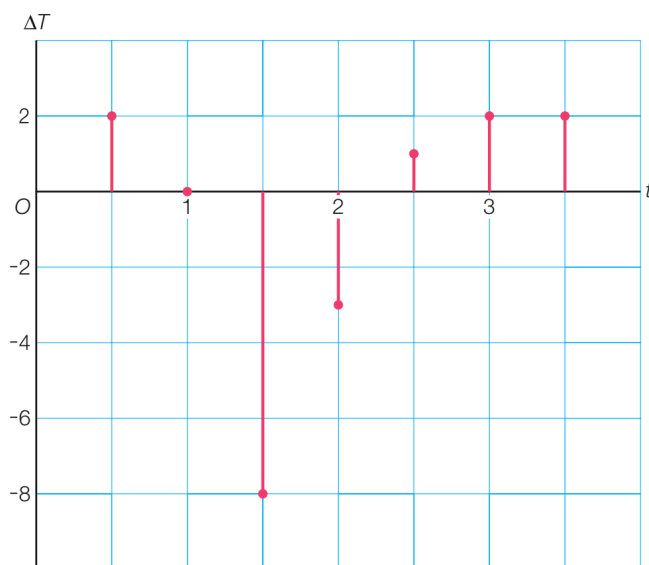
Zie de figuur.



b	interval	ΔT
	$[0; 0,5]$	2
	$[0,5; 1]$	0
	$[1; 1,5]$	-8
	$[1,5; 2]$	-3
	$[2; 2,5]$	1
	$[2,5; 3]$	2
	$[3; 3,5]$	2

Zie de figuur.

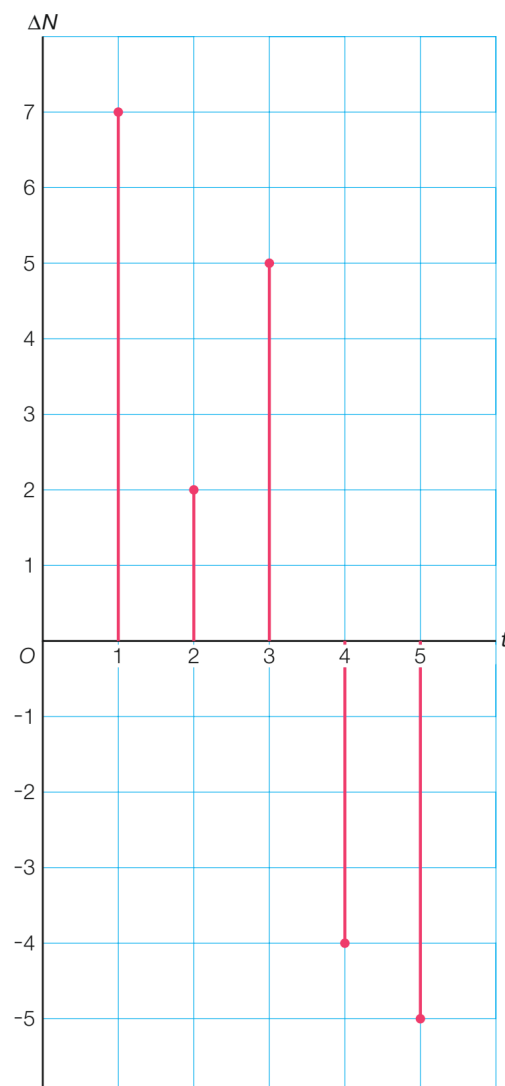
- c** De stapgrootte in de toenamedigrammen is te groot om de daling van de grafiek tussen het maximum en $t = 1$ weer te geven. Op de intervallen $[0, 1]$ en $[0,5; 1]$ is de waarde van ΔT namelijk niet negatief.
- d** In de toenamedigrammen zie je dat er sprake is van toename (stijging), vervolgens van afname (daling) en vervolgens weer van toename (stijging). Bij een overgang van stijgend naar dalend of dalend naar stijgend is er sprake van een top. De grafiek heeft dus minstens twee toppen.



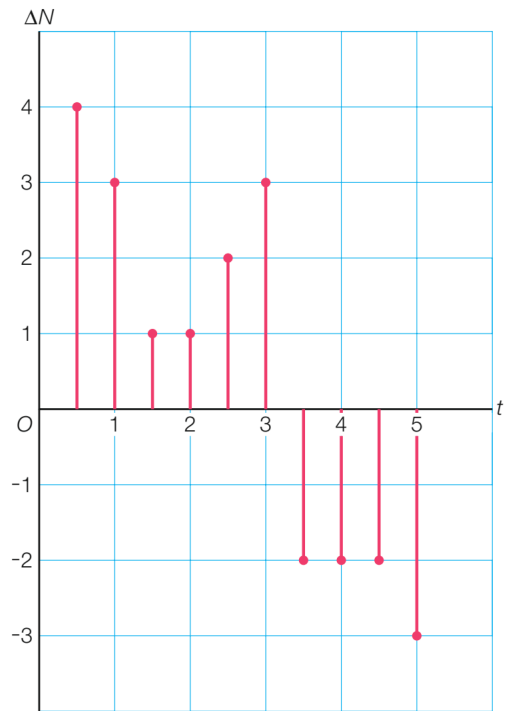
Bladzijde 19

21 a	interval	ΔN
	$[0, 1]$	7
	$[1, 2]$	2
	$[2, 3]$	5
	$[3, 4]$	-4
	$[4, 5]$	-5

Zie de figuur.



- b** Verdeel de toename 7 op $[0, 1]$ in twee toenames van bijvoorbeeld 4 en 3, enzovoort. Zie de figuur.



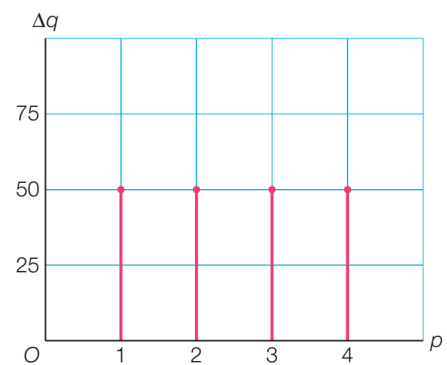
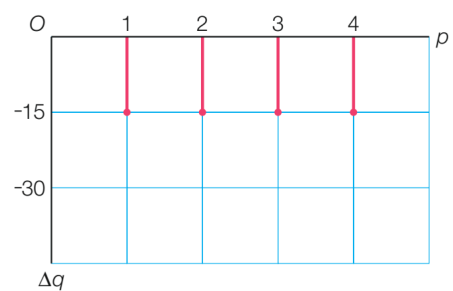
- 22 a** $q = ap + b$ met $a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{200 - 100}{2 - 0} = 50$ en $b = 100$
Dus $q = 50p + 100$.

b

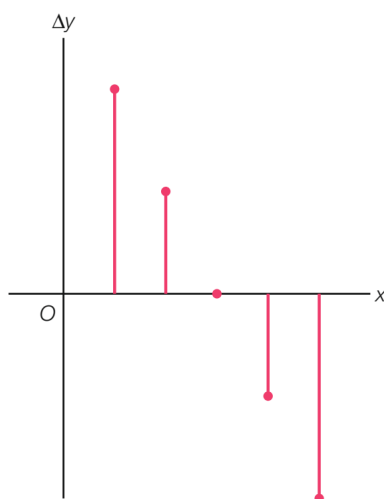
interval	Δq
$[0, 1]$	50
$[1, 2]$	50
$[2, 3]$	50
$[3, 4]$	50

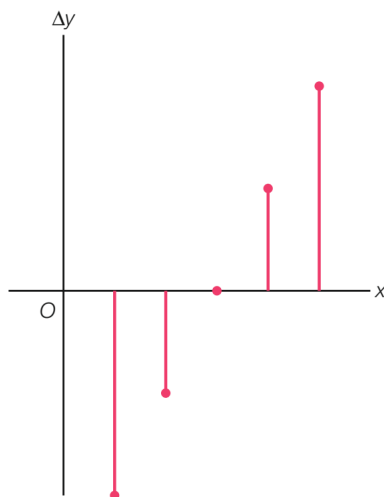
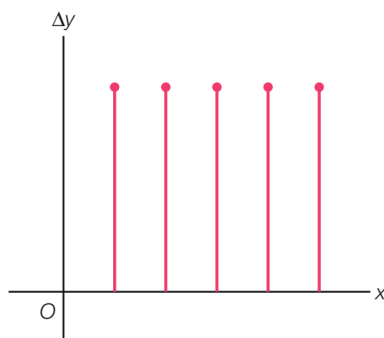
Zie de figuur.

- c** Op elk interval met $\Delta p = 1$ geldt $\Delta q = 50$ en dat is de richtingscoëfficiënt van de lijn.
d De richtingscoëfficiënt is -15 , dus op elk interval met $\Delta p = 1$ geldt $\Delta q = -15$. Zie de figuur.
e De richtingscoëfficiënt is 0 , dus op elk interval geldt $\Delta q = 0$.
In een toenamesdiagram hebben alle staafjes lengte 0 .



- 23 a** bijvoorbeeld



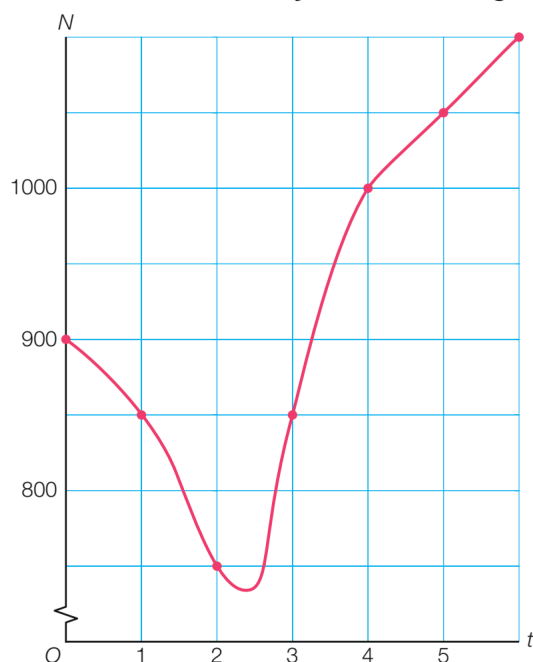
b bijvoorbeeld**c** bijvoorbeeld

- 24** Bij A hoort III, want tussen 0 en 2 afnemend stijgend en daarna dalend.
 Bij B hoort I, want tussen 0 en 2 afnemend dalend en daarna stijgend.
 Bij C hoort II, want tussen 0 en 3 constant stijgend, dan dalend en daarna weer stijgend.

Bladzijde 20

- 25 a** Bij $x = 2$ wordt een staafje met $\Delta y = 3$ getekend, dus op $[1, 2]$ is de toename 3.
 De lijn $x = 3$ is de symmetrieas van de grafiek, dus op $[4, 5]$ is de afname 3.
 Dus het staafje met $\Delta y = -3$ wordt getekend bij $x = 5$.
- b** De grafiek is afnemend stijgend op $[0, 3]$. Op $[1, 2]$ is de toename 3, dus alleen bij $[0, 1]$ kan een grotere toename dan 3 horen. Dus het staafje met $\Delta y = 5$ wordt getekend bij $x = 1$.
- 26 a** Bij 12:00 hoort $t = 4$ en bij 14:00 uur hoort $t = 6$. Op $[4, 6]$ is $\Delta T = 4$, dus de temperatuur om 14:00 uur was $20 + 4 = 24^\circ\text{C}$.
- b** Op $[6, 8]$ is $\Delta T = -1$, dus de temperatuur om 16:00 uur was $24 - 1 = 23^\circ\text{C}$.
 Op $[8, 10]$ is $\Delta T = -5$ en op $[10, 12]$ is $\Delta T = -2$, dus de temperatuur om 20:00 was $23 - 5 - 2 = 16^\circ\text{C}$.
- c** Op $[0, 2]$ is $\Delta T = 3$ en op $[2, 4]$ is $\Delta T = 5$, dus de temperatuur om 8:00 uur was $20 - 3 - 5 = 12^\circ\text{C}$.

27 Ja, dat kan. Je hebt dan bijvoorbeeld de volgende grafiek.



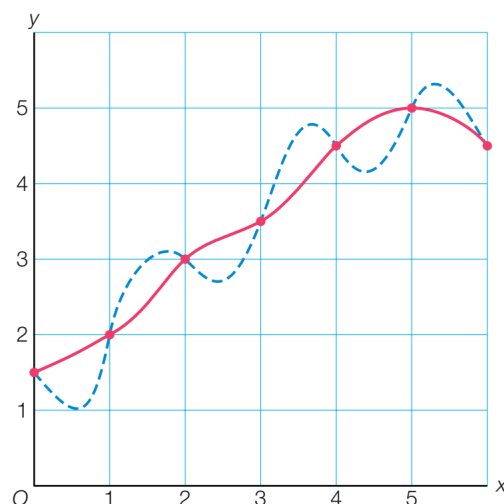
28 a, b, c

x	y
0	1,5
1	2
2	3
3	3,5
4	4,5
5	5
6	4,5

+0,5
+1
+0,5
+1
+0,5
-0,5

d Zie de rode grafiek.

e Alleen de punten (0; 1,5), (1, 2), (2, 3), ... liggen vast. Elke grafiek door deze punten is mogelijk. Zie de blauwe grafiek.



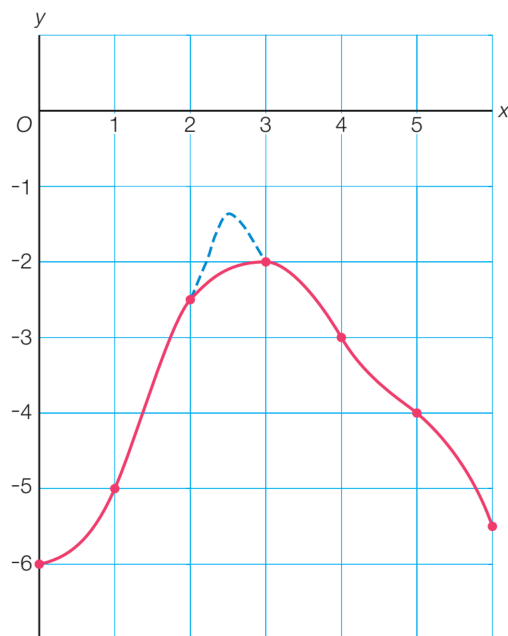
29 a

x	y
0	-6
1	-5
2	-2,5
3	-2
4	-3
5	-4
6	-5,5

+1
+2,5
+0,5
-1
-1
-1,5

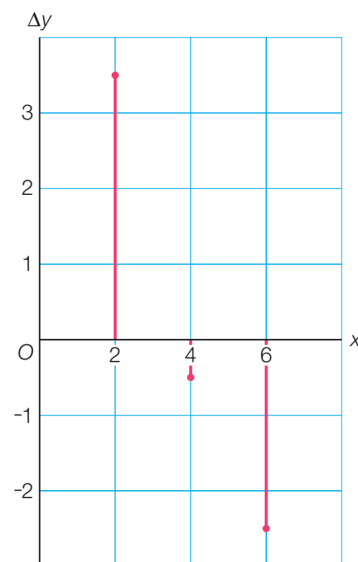
Zie de figuur.

b Dit maximum kan optreden bij $x = 2,5$. Zie het gestippelde stuk in de grafiek van vraag a. Het maximum kan niet optreden bij $x = 1,5$, want er is al een maximum tussen $x = 2$ en $x = 4$ en er is gegeven dat er maar één maximum is.



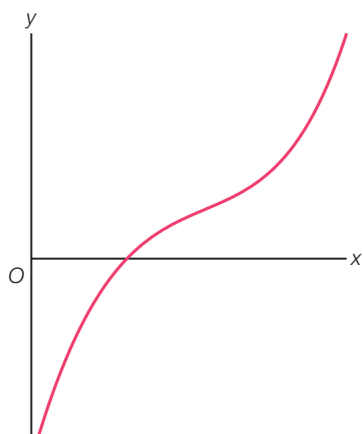
c	interval	Δy
	$[0, 2]$	3,5
	$[2, 4]$	-0,5
	$[4, 6]$	-2,5

Zie de figuur.

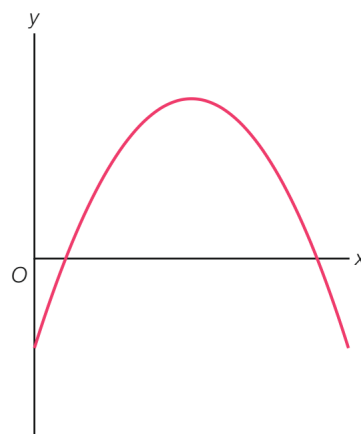


- 30**
- a** constant dalend
 - b** afnemend stijgend
 - c** afnemend dalend
 - d** toenemend dalend

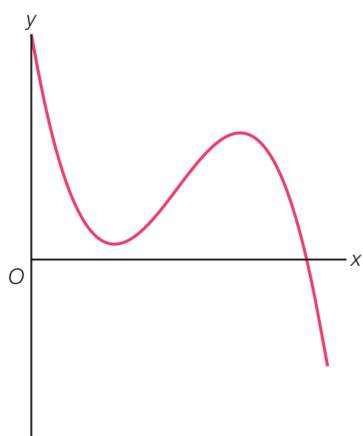
- 31**
- a** bijvoorbeeld



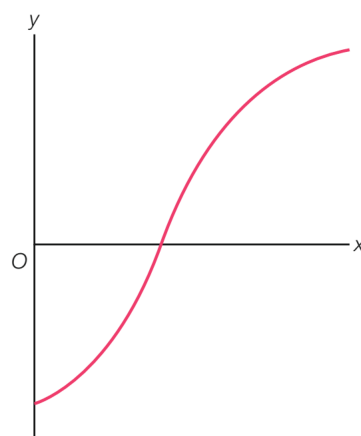
- b** bijvoorbeeld



- c** bijvoorbeeld



- d** bijvoorbeeld



- 32 a** Om 17:00 uur stonden er $110 - 10 - 35 = 65$ fietsen.
Om 9:00 uur stonden er $110 - 25 - 15 + 15 - 40 + 40 + 20 = 105$ fietsen.
- b** Tussen 10:00 en 11:00 uur is er netto een afname van 40.
Als 30 personen een fiets hebben neergezet, zijn er dus 70 fietsen meegenomen.

Bladzijde 23

- 33 a** Op 16 maart om 0:00 uur is de olieprijs $101,50 + 0,50 - 1 = 101$ dollar per vat.
De tanker bevat $\frac{210\,000\,000}{127,2} = 1\,650\,943,3\dots$ vaten olie.
De totale waarde is $1\,650\,943,3\dots \cdot 101 \approx 166,7$ miljoen dollar.
- b** Het grootste prijsverschil is $1,25 + 0,75 = 2$ dollar per vat.
Dus het gevraagde verschil is $1\,650\,943 \cdot 2 \approx 3,3$ miljoen dollar.

- 34** Stel er zitten om 15:00 uur 100 mensen op het terras. Je krijgt dan de volgende tabel.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
N	100	80	90	60	70	100	75	65

$\xrightarrow{-20}$ $\xrightarrow{+10}$ $\xrightarrow{-30}$ $\xrightarrow{+10}$ $\xrightarrow{+30}$ $\xrightarrow{-25}$ $\xrightarrow{-10}$

In dat geval zou het laagste aantal mensen op het terras 60 zijn. Omdat op alle tijdstippen moet gelden dat N minstens 0 is, hadden er 60 minder mensen op het terras kunnen zitten.

Dus om 15:00 uur zaten er minstens $100 - 60 = 40$ mensen op het terras.

Alternatieve uitwerking:

Stel er zitten om 15:00 uur x mensen op het terras. Je krijgt dan de volgende tabel.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
N	x	$x - 20$	$x - 10$	$x - 40$	$x - 30$	x	$x - 25$	$x - 35$

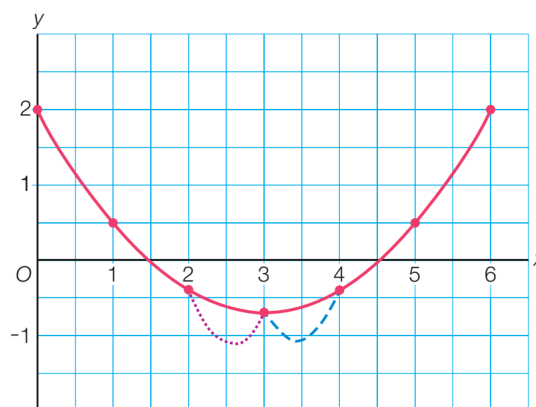
$\xrightarrow{-20}$ $\xrightarrow{+10}$ $\xrightarrow{-30}$ $\xrightarrow{+10}$ $\xrightarrow{+30}$ $\xrightarrow{-25}$ $\xrightarrow{-10}$

Omdat op alle tijdstippen moet gelden dat N minstens 0 is moet x tenminste 40 zijn.

Dus om 15:00 uur zaten er minstens 40 mensen op het terras.

- 35** Omdat je de waarden van x wilt weten, maakt het niet uit bij welke y -waarde je begint. Kies bijvoorbeeld $y = 2$ bij $x = 0$.

x	y
0	2 $\xrightarrow{-1,5}$
1	0,5 $\xrightarrow{-0,9}$
2	-0,4 $\xrightarrow{-0,3}$
3	-0,7 $\xrightarrow{+0,3}$
4	-0,4 $\xrightarrow{+0,9}$
5	0,5 $\xrightarrow{+1,5}$
6	2

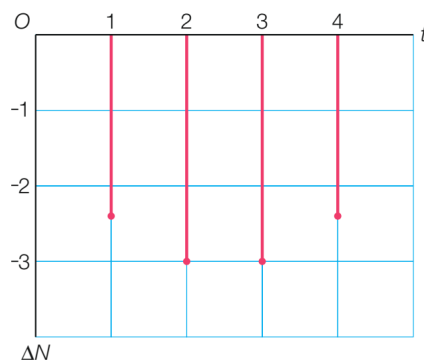


In de getekende rode grafiek treedt het minimum op bij $x = 3$. Verder zijn er twee andere mogelijkheden voor het minimum getekend. Omdat gegeven is dat de grafiek één minimum heeft, kan dit overal op $\langle 2, 4 \rangle$ optreden.

36 a, b $t = 4$ geeft $N = \frac{36}{2 + 0,5 \cdot 2^4} = 3,6$

t	N
0	14,4
1	12
2	9
3	6
4	3,6

$-2,4$
 -3
 -3
 $-2,4$



c Zie de figuur.

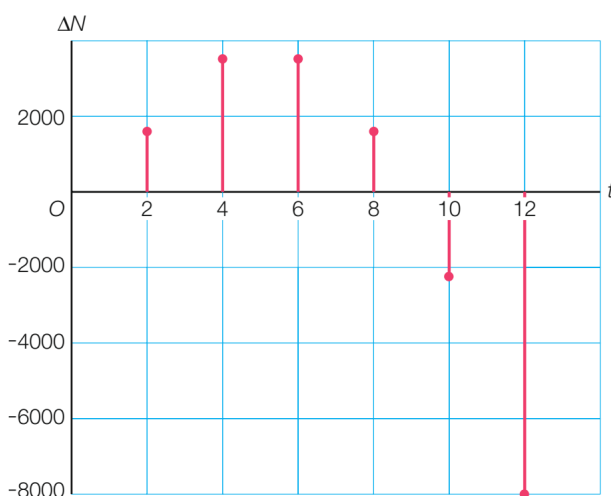
37 a Toenemend stijgend, afnemend stijgend en toenemend dalend.

b Voer in $y_1 = 480x^2 - 40x^3$.

t	N
0	0
2	1600
4	5120
6	8640
8	10240
10	8000
12	0

$+1600$
 $+3520$
 $+3520$
 $+1600$
 -2240
 -8000

Zie de figuur.



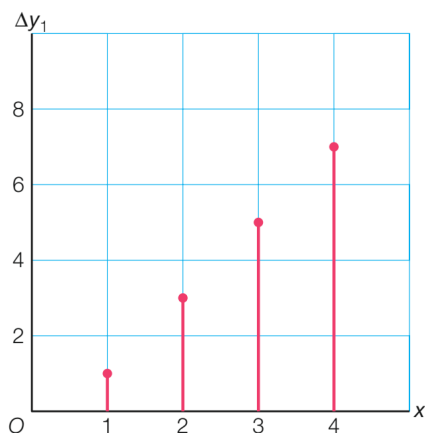
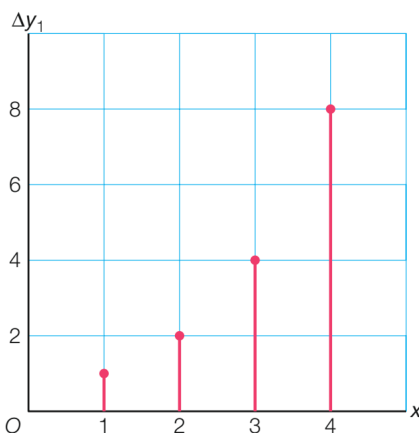
38 a Voer in $y_1 = x^2$ en $y_2 = 2^x$.

x	y_1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

$+1$
 $+3$
 $+5$
 $+7$

x	y_2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

$+1$
 $+2$
 $+4$
 $+8$



b Bij y_1 wordt de toename telkens 2 groter ten opzichte van de vorige toename.

Bij y_2 verdubbelt de toename telkens ten opzichte van de vorige toename.

c De toename groeit sneller bij y_2 dan bij y_1 , omdat telkens verdubbelen sneller groeit dan telkens 2 groter worden.

Dus bij de formule $y_2 = 2^x$ wordt y op den duur het grootst.

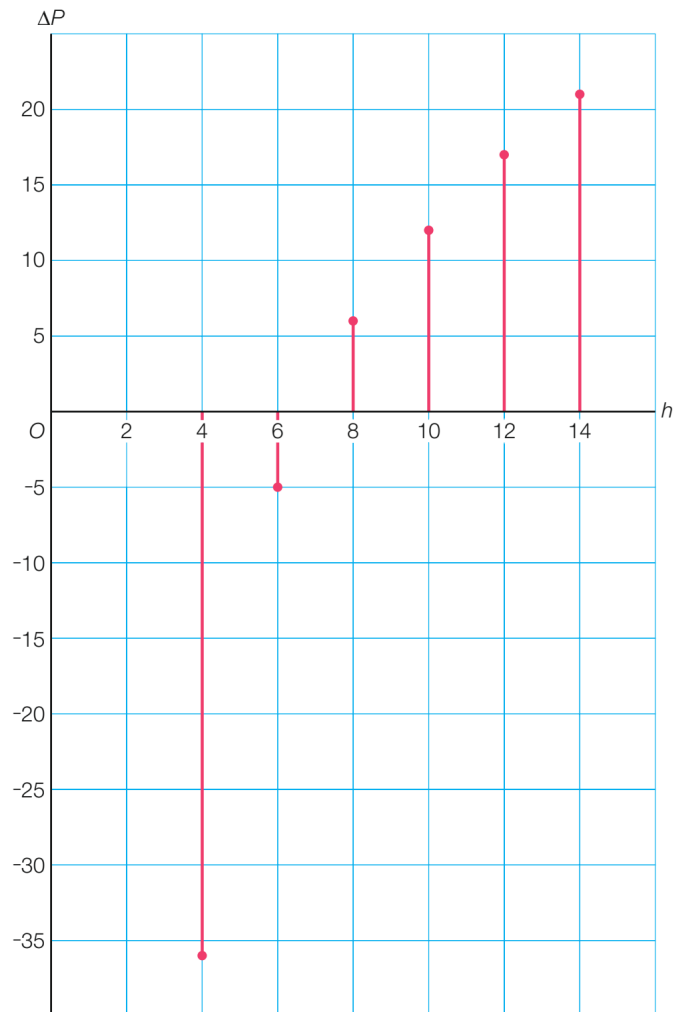
- 39 a** $h = 10$ geeft $P = 71,8$
De totale kosten zijn
 $1200 \cdot 0,718 = \text{€} 861,60$.
- b** $h = 12$ geeft $P = 88,85$
De productiekosten per doosje nemen toe
met $\frac{88,85 - 71,8}{71,8} \cdot 100\% \approx 23,7\%$.
- c** Voer in $y_1 = 0,45x^2 + \frac{165}{x} + 10,3$.

h	P
2	94,6
4	58,7...
6	54
8	59,7...
10	71,8
12	88,8...
14	110,2...

$\left. \begin{array}{l} -36 \\ -5 \\ +6 \\ +12 \\ +17 \\ +21 \end{array} \right\}$

Zie de figuur.

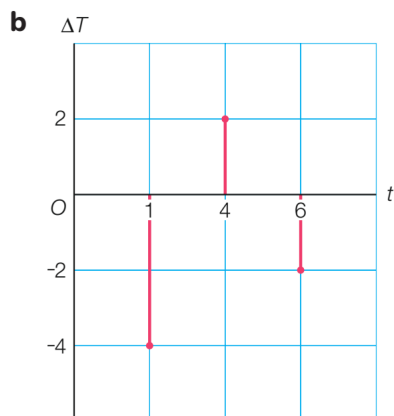
- d** De staafjes liggen eerst onder de h -as en worden steeds korter, dus afnemend dalend.
Daarna liggen de staafjes boven de h -as en worden steeds langer, dus toenemend stijgend.



Bladzijde 26

C4 a

interval	$[0, 2]$	$[2, 4]$	$[4, 6]$
ΔT	-4	2	-2



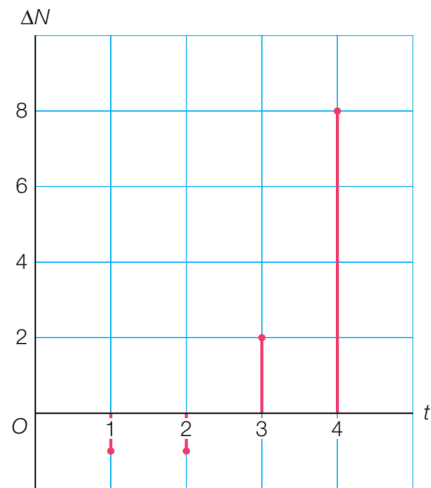
- c** Het toenamediagram hoort bij een afnemende daling, dus het interval $[1, 2]$.

- C5 a** Bij $x = 1$ hoort $y = 1$, dus bij $x = 3$ hoort $y = 1 + 10 - 5 = 6$.
- b** In het toenamediagram is te zien dat de grafiek van stijgend naar dalend gaat, dus de grafiek heeft een top.
- c** Bij $x = 1$ hoort $y = 1$, dus bij $x = 0$ hoort $y = 0 - 5 = -4$.
De grafiek kan dus niet geheel boven de x -as liggen.

C6 Voer in $y_1 = 0,5x^3 - 1,5x^2 - 3$.

t	N
0	-3
1	-4
2	-5
3	-3
4	5

Zie de figuur.



5.3 Differentiequotienten

Bladzijde 27

- 40** Stijn vergeet rekening te houden met de lengten van de perioden. In de periode 1840-1940 bijvoorbeeld is de toename per jaar slechts $\frac{5,8}{100} = 0,058$ miljoen inwoners en dat is minder dan in de periode 1940-1970 met $\frac{4,2}{30} = 0,14$ miljoen inwoners per jaar.

Bladzijde 28

- 41 a** Er zijn $5,59 - 4,85 = 0,74$ miljoen woningen bij gekomen.
De gemiddelde toename is $\frac{0,74}{7} \approx 0,106$ miljoen woningen per jaar.

b	periode	Δt	ΔN	$\frac{\Delta N}{\Delta t}$
	1970-1980	10	1,1	0,110
	1980-1987	7	0,74	0,106
	1987-1995	8	0,71	0,089
	1995-2000	5	0,29	0,058
	2000-2023	23	1,46	0,063

- c** De gemiddelde toename is het grootst in de periode 1970-1980.
d De woningvoorraad nam steeds toe, maar de sterkste toename was in de periode 1970-1980.

- 42 a** Op $[0, 10]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{2250 - 250}{10 - 0} = 200$.

De gemiddelde toename gedurende de eerste 10 dagen is 200 fruitvliegjes per dag.

- b** Op $[5, 8]$ is de grafiek steiler dan op $[10, 14]$.
c Het grootst op $[4, 8]$, het kleinst op $[0, 4]$.

- 43 a** Op $[9, 13]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 800}{13 - 9} = 200$ auto's per uur.

- b** Op $[12, 17]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 2000}{17 - 12} = -80$ auto's per uur.

Dus de gemiddelde afname is 80 auto's per uur.

- c** Bijvoorbeeld $[10, 17]$, want bij $t = 10$ en $t = 17$ zijn de waarden van N gelijk.

- 44** Bijvoorbeeld $[10, 12]$, omdat $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{2000 - 1600}{12 - 10} = 200$ auto's per uur.

Bladzijde 29

- 45** **a** Op $[2, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 2}{4 - 2} = 1,5$.
- b** De richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B is ook $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 2}{4 - 2} = 1,5$.

Bladzijde 30

- 46** **a** De gemiddelde verandering op $[2, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 2}{5 - 2} = \frac{2}{3}$.
- b** Op $[-1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 1}{5 - (-1)} = 0,5$.
- c** Bijvoorbeeld $[-1, 1]$, want bij $x = -1$ en $x = 1$ zijn de y -waarden gelijk.
- 47** **a** Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 1}{3 - 1} = 2$.
- b** Op $[4, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 6}{6 - 4} = -1,5$.
- Dat $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ negatief is, betekent dat er sprake is van een afname.
- c** Op $[2, 7]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 3}{7 - 2} = -0,2$.
- d** Bijvoorbeeld $[3, 5]$, want bij $x = 3$ en $x = 5$ zijn de y -waarden gelijk.
- e** Bijvoorbeeld $[0, 2]$, want $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 0}{2 - 0} = 1,5$.
- 48** **a** Omdat het een rechte lijn is, zijn de differentiequotiënten op elk interval gelijk aan de richtingscoëfficiënt. Dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5$.
- b** $y = 5x + 5$

- 49** **a** Het differentiequotient $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ heeft de eenheid $^{\circ}\text{C}$ per uur.
- b** Op $[6, 10]$ is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{13 - 10}{10 - 6} = 0,75$ $^{\circ}\text{C}$ per uur.
- Op $[9, 14]$ is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{20 - 12}{14 - 9} = 1,6$ $^{\circ}\text{C}$ per uur.
- c** Op $[16, 20]$ is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{17 - 20}{20 - 16} = -0,75$ $^{\circ}\text{C}$ per uur.
- Dat het differentiequotient negatief is, betekent dat de temperatuur daalde vanaf 16:00 tot en met 20:00 uur.
- d** Bijvoorbeeld $[0, 6]$ en $[10, 24]$.
- e** Bijvoorbeeld $[10, 20]$, want $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{17 - 13}{20 - 10} = 0,4$ $^{\circ}\text{C}$ per uur.

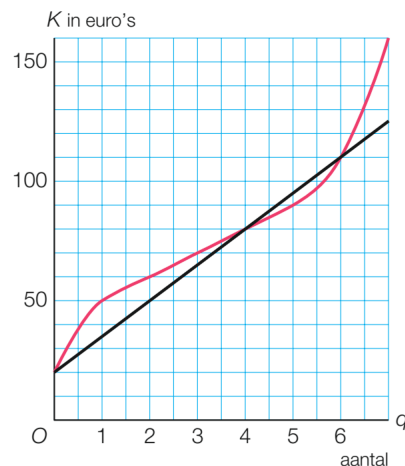
- 50** **a** Op $[0, 7]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30 + 20 - 10 + 10 - 20 + 20 + 20}{7 - 0} = 10$.
- b** Op $[2, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-10 + 10 - 20 + 20}{6 - 2} = 0$.
- c** Op $[1, 5]$, $[2, 4]$ en $[4, 6]$.

Bladzijde 31

- 51 a** Op $[0, 1]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{50 - 20}{1 - 0} = 30$ euro per stuk.
 Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{70 - 50}{3 - 1} = 10$ euro per stuk.
 Op $[3, 6]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{110 - 70}{6 - 3} \approx 13,33$ euro per stuk.
 Op $[4, 6]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{110 - 80}{6 - 4} = 15$ euro per stuk.

Dus het grootst op $[0, 1]$ en het kleinst op $[1, 3]$.

- b** Teken de lijn door $(0, 20)$ en $(4, 80)$. Deze lijn snijdt de grafiek ook in het punt $(6, 110)$. Zie de figuur.
 Dus de gevraagde q is 6.



- 52** Op $[0, 5]$ geldt $\Delta x = 5$ en $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,7$. Dit geeft $\frac{\Delta y}{5} = 0,7$, oftewel $\Delta y = 5 \cdot 0,7 = 3,5$.

De grafiek gaat door $(0, 4)$ en met $\Delta x = 5$ en $\Delta y = 3,5$ gaat de grafiek dus ook door $(5; 7,5)$.

Op $[5, 10]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 7,5}{10 - 5} = 0,1$.

Dus bij $x = 4$ hoort $y = 7,5 - 0,1 = 7,4$.

- 53 a** $b = 5$ geeft $N = 20 - \frac{100}{5 + 5} = 10$

$b = 15$ geeft $N = 20 - \frac{100}{15 + 5} = 15$

- b** Op $[5, 15]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta b} = \frac{15 - 10}{15 - 5} = 0,5$ stuks wild per etmaal per meter.

- c** $b = 20$ geeft $N = 16$

Op $[15, 20]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta b} = \frac{16 - 15}{20 - 15} = 0,2$ stuks wild per etmaal per meter.

Bladzijde 32

- 54 a** $t = 3$ geeft $N = 1125$
 $t = 8$ geeft $N = 6400$
 Op $[3, 8]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{6400 - 1125}{8 - 3} = 1055$ patiënten per dag.

- b** $t = 10$ geeft $N = 9000$
 $t = 16$ geeft $N = 15360$
 Op $[10, 16]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{15360 - 9000}{16 - 10} = 1060$ patiënten per dag.

- c** De tweede week is van $t = 7$ tot $t = 14$.
 $t = 7$ geeft $N = 5145$
 $t = 14$ geeft $N = 13720$
 Op $[7, 14]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{13720 - 5145}{14 - 7} = 1225$ patiënten per dag.

- 55** Plot de grafiek en kijk waar deze het steilst is. Dat is in de buurt van $t = 9$.
 $t = 9$ geeft $N = 7695$
 $t = 10$ geeft $N = 9000$ (zie opgave 54b)
 Op $[9, 10]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{9000 - 7695}{1} = 1305$ patiënten per dag.
 Dus Vera heeft gelijk.

- 56 a** K is in duizenden euro's en q in duizendtallen, dus de gemiddelde verandering van K is in euro's per stuk.
- b** $q = 2$ geeft $K = 25$
 $q = 5$ geeft $K = 55$
 Op $[2, 5]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{55 - 25}{5 - 2} = 10$ euro per stuk.
- c** $q = 4$ geeft $K = 35$
 $q = 6$ geeft $K = 93$
 Op $[4, 6]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{93 - 35}{6 - 4} = 29$ euro per stuk.
 $q = 3,6$ geeft $K = 30,696$
 $q = 6,1$ geeft $K = 98,021$
 Op $[3,6; 6,1]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{98,021 - 30,696}{6,1 - 3,6} = 26,93$ euro per stuk.
- Dus de kosten nemen gemiddeld meer toe bij een toename van de productie van 4000 tot 6000 stuks.

Bladzijde 33

- C7 a** Op $[4, 8]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{13 - 8}{8 - 4} = 1,25$.
- b** Op $[2, 20]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16 - 4}{20 - 2} = \frac{2}{3}$.

- C8 a** Zijn gemiddelde snelheid is 0,3 kilometer per minuut.
- b** $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{1200 - 1500}{20} = -15$ meter per minuut
 Hij is gemiddeld 15 meter per minuut gedaald.

- C9** $q = 2000$ geeft $R = 20\,000$
 $q = 3000$ geeft $R = 27\,000$
 Op $[2000, 3000]$ is $\frac{\Delta R}{\Delta q} = \frac{27\,000 - 20\,000}{3000 - 2000} = 7$ euro per stuk.

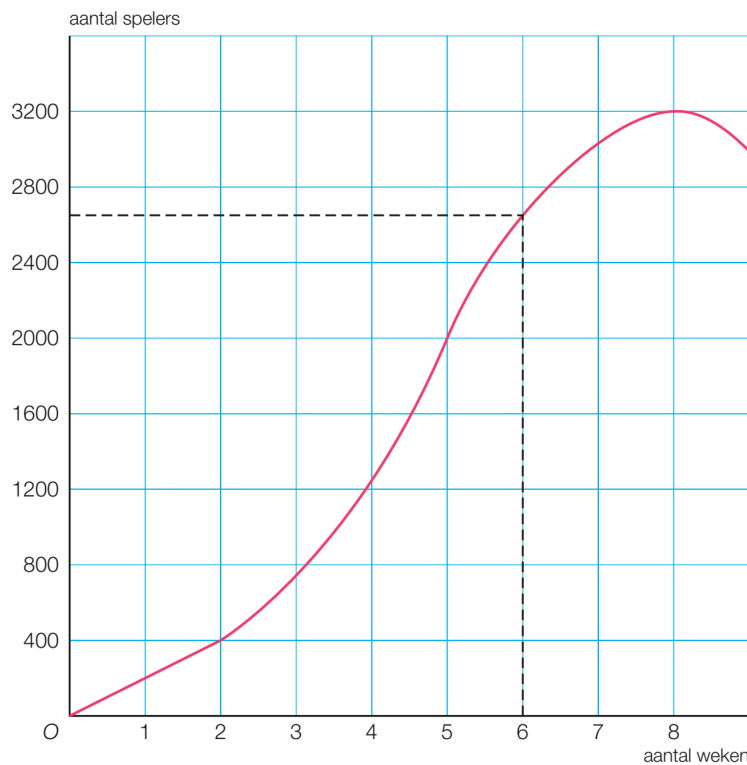
De maandelijkse opbrengst stijgt met gemiddeld 7 euro per stuk als het aantal maandelijks verkochte artikelen toeneemt van 2000 tot 3000 stuks.

Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 34

- 1 a** Afnemend stijgend op $\langle 0, 2 \rangle$ en $\langle 4,5; 5 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 2, 3 \rangle$ en $\langle 5; 5,5 \rangle$.
 Afnemend dalend op $\langle 3, 4 \rangle$ en $\langle 5,5; 6 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle 4; 4,5 \rangle$ en $\langle 6, 9 \rangle$.
- b** De minima zijn 1 en 2.
- c** $\text{percentage} = \frac{8-3}{3} \cdot 100\% \approx 166,7\%$

2 a, b

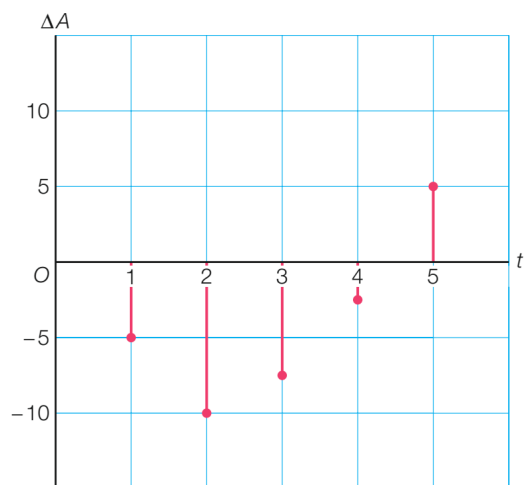


- b** Zie de grafiek. De schatting is ruim 2600 spelers.
c Achtereenvolgens: toenemende daling, afnemende daling, minimum, toenemende stijging, afnemende stijging, maximum.

3

interval	ΔA
$[0, 1]$	-5
$[1, 2]$	-10
$[2, 3]$	-7,5
$[3, 4]$	-2,5
$[4, 5]$	5

Zie de figuur.



Bladzijde 35

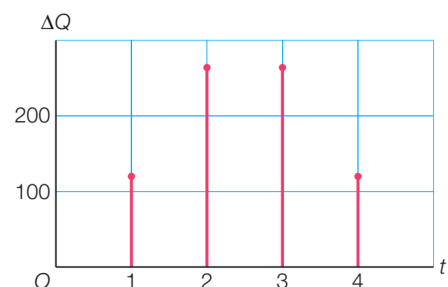
- 4 a** $t = 1$ geeft $Q = 120$
 $t = 2$ geeft $Q = 384$
 $\Delta Q = 384 - 120 = 264$
 Het plasticverbruik neemt toe met 264 mm^3 als de printtijd toeneemt van 1 tot 2 minuten.

- b** Voer in $y_1 = 144x^2 - 24x^3$

t	Q
0	0
1	120
2	384
3	648
4	768

$\rightarrow +120$
 $\rightarrow +264$
 $\rightarrow +264$
 $\rightarrow +120$

Zie de figuur.



- 5 a** Bij 8:30 uur hoort $t = 2$ en $D = 4$. Bij 9:30 hoort $t = 6$ en $D = 4 - 1 - 2 + 2,5 + 1 = 4,5$.
Om 9:30 uur was de waterdruk 4,5 bar.

b

t	tijd	D
0	8:00	8,5
1	8:15	6,5
2	8:30	4
3	8:45	3
4	9:00	1
5	9:15	3,5
6	9:30	4,5

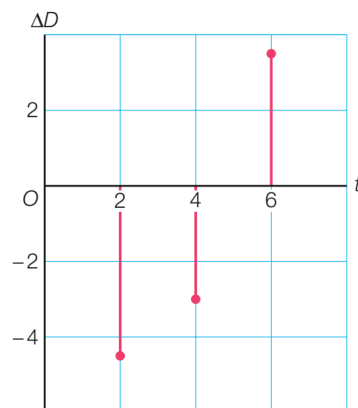
Op $t = 4$ is $D = 1$, dus om 9:00 uur kwam de duikboot aan de oppervlakte.

c

t	D
0	8,5
2	4
4	1
6	4,5

$\curvearrowright -4,5$
 $\curvearrowright -3$
 $\curvearrowright +3,5$

Zie de figuur.



- 6 a** $t = 0$ geeft $A = 30$ en $t = 2$ geeft $A = 15$.

Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{15 - 30}{2 - 0} = -7,5$.

$t = 3$ geeft $A = 7,5$ en $t = 5$ geeft $A = 10$.

Op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{10 - 7,5}{5 - 3} = 1,25$.

- b** Bijvoorbeeld $[0, 1]$ of $[2, 4]$.

- 7 a** $q = 5$ geeft $W = -313,75$

$q = 25$ geeft $W = 1031,52$

Op $[5, 25]$ is $\frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{1031,52 - (-313,75)}{25 - 5} = 67,25$ euro per stuk.

Als de productie toeneemt van 5000 tot 25 000 stuks, neemt de winst met gemiddeld 67,25 euro per stuk toe.

- b** $q = 50$ geeft $W = 3500$

$q = 75$ geeft $W = 5968,75$

Op $[50, 75]$ is $\frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{5968,75 - 3500}{75 - 50} = 98,75$.

De gemiddelde toename is 98,75 euro per stuk.

- c** $q = 80$ geeft $W = 6380$

$q = 88$ geeft $W = 6941,28$

Op $[80, 88]$ is $\frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{6941,28 - 6380}{88 - 80} = 70,16$.

De gemiddelde verandering is 70,16 euro per stuk.

Gemengde opgaven

Bladzijde 36

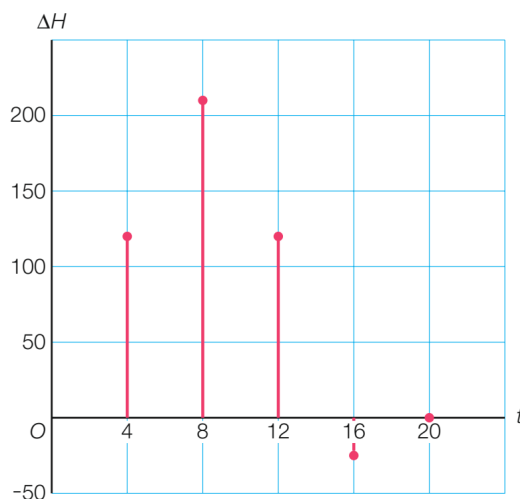
- 1 a** maximum is 450 meter om 11:00 uur
 minimum is 430 meter om 11:15 uur
 maximum is 600 meter om 12:30 uur
 minimum is 545 meter om 13:00 uur
 maximum is 600 meter om 13:30 uur
- b** In het 6^e kwartier. Ze stegen van 265 m naar 365 m, dat is 100 m.
- c** Het eerste maximum is 450 om 11:00 uur en het laatste maximum is 600 om 13:30 uur.
 $600 - 450 = 150$ m in 2,5 uur = 150 minuten, dus de gemiddelde stijging is 1 meter per minuut.
- d** Op $[0, x]$ is $\frac{\Delta H}{\Delta t}$ het grootst als de lijn door $(0, 120)$ en een ander punt op de grafiek zo steil mogelijk is. De steilste lijn gaat door $(0, 120)$ en $(7, 430)$, dus $x = 7$.
- e** Bijvoorbeeld $[14, 18]$.

f

t	B
0	120
4	240
8	450
12	570
16	545
20	545

$\begin{matrix} \text{+120} \\ \text{+210} \\ \text{+120} \\ \text{-25} \\ \text{+0} \end{matrix}$

Zie de figuur.



Bladzijde 37

- 2 a** Om 11:00 uur waren er $7500 + 1000 + 500 - 500 = 8500$ bezoekers.

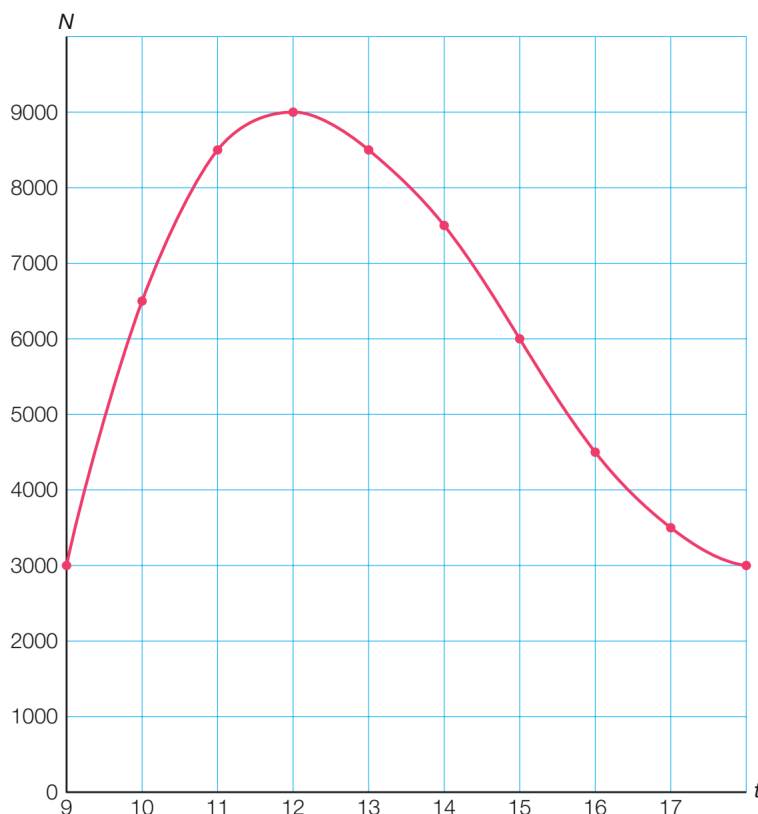
b

t	N
9	3000
10	6500
11	8500
12	9000
13	8500
14	7500
15	6000
16	4500
17	3500
18	3000

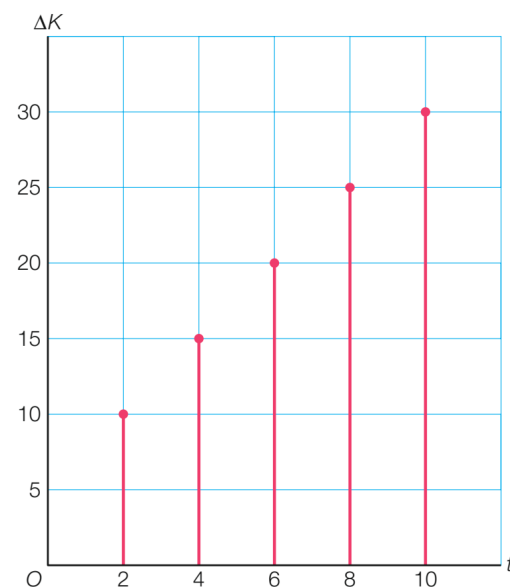
$\begin{matrix} \text{+3500} \\ \text{+2000} \\ \text{+500} \\ \text{-500} \\ \text{-1000} \\ \text{-1500} \\ \text{-1500} \\ \text{-1000} \\ \text{-500} \end{matrix}$

Bijvoorbeeld de grafiek hiernaast.

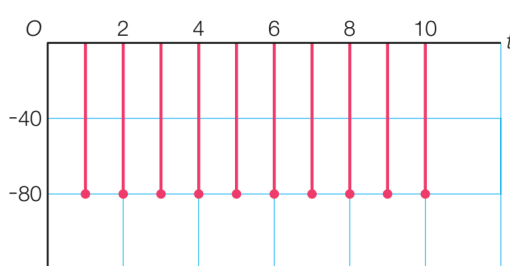
- c** Dat kan kloppen.
 Bij $t = 12$ hoort $\Delta N = 500$, maar dit is de netto toename. Er kunnen best 1100 bezoekers het park zijn binnengelopen en 600 het park hebben verlaten. Ook dan is $\Delta N = 500$.
- d** Het is mogelijk dat er bijvoorbeeld tussen 11 uur en 12 uur 10000 bezoekers waren, want elke grafiek door de punten is in theorie mogelijk.



- 3 a** $\Delta t = 2$, dus tussen 2015 en 2025 zijn er 5 tijdsintervallen.
De totale toename van het aantal koolmezen K moet $630 - 530 = 100$ zijn, en de toenames worden steeds groter (toenemende stijging), dus neem bijvoorbeeld de toenames 10, 15, 20, 25 en 30.
Zie de figuur.



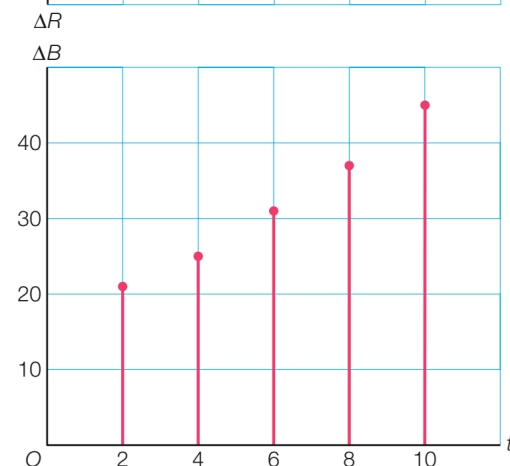
- b** $\Delta t = 1$, dus 10 tijdsintervallen.
Constance daling, dus de daling van het aantal roodborsten R is per jaar $\frac{9640 - 8840}{10} = 80$.
Zie de figuur.



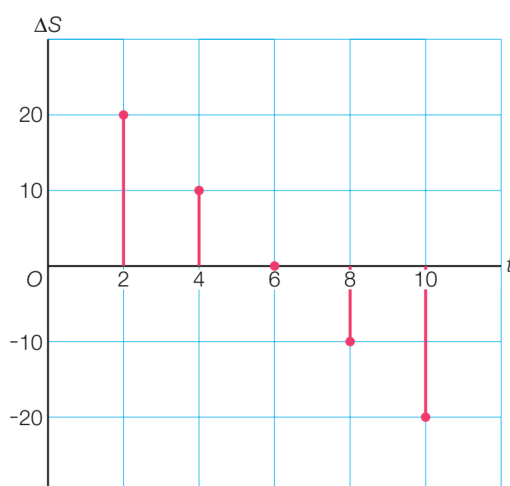
- c** Voer in $y_1 = 100 \cdot 1,1^x$.
Zie de tabel met het aantal bosuilen B .

t	B
0	100
2	121
4	146
6	177
8	214
10	259

Zie de figuur.



- d** De toenames moeten optellen tot 0. Neem voor het aantal sperwers S bijvoorbeeld de toenames 20, 10, 0, -10 en -20.
Zie de figuur.



Bladzijde 38

- 4 a** $\langle 4, 6 \rangle$
b Nee, elke grafiek door de punten is mogelijk. Tussen $x = 2$ en $x = 2,5$ kan de grafiek bijvoorbeeld met 2 toenemen. De gemiddelde toename op het interval $[2; 2,5]$ is dan 4.
c De intervallen $[3, 7]$ en $[3, 8]$.

- 5 a** B en D
b A
c B, C en D
d C
e C

Bladzijde 39

- 6 a** Gebruik het toenamediagram bij de opbrengst.
 $15 - 1 - 1 - 3 - 1 + 2 = 11$, dus in augustus was de opbrengst 11 000 euro.
b Gebruik het toenamediagram bij de kosten.
 $12 + 0 - 1 = 11$, dus in januari waren de kosten 11 000 euro.

maand	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt
opbrengst	15	16	15	14	13	10	9	11	13	15
kosten	11	12	12	13	14	13	12	10,5	10,5	11,5
winst	4	4	3	1	-1	-3	-3	0,5	2,5	3,5

- In de maanden januari en februari boekte het bedrijf de meeste winst.
d $1 + 3 + 3 = 7$, dus het verlies was in totaal 7000 euro.
e Van januari naar februari geldt $\Delta W = 0$, $\Delta O = 1$ en $\Delta K = 1$, dus er geldt $\Delta W = \Delta O - \Delta K$.
 En zo geldt altijd dat $\Delta W = \Delta O - \Delta K$.
f Zie de tabel, dat was in juli, want van juli naar augustus was de verandering van de maandelijkse winst voor het eerst positief.
g De winst in november en december samen was $21\,000 - 11\,500 = 9500$ euro. Omdat van november naar december geldt $\Delta W = 0$, was de winst in december even groot als in november. Dus zowel in november als in december is de winst 4750 euro.

Bladzijde 40

- 7 a** 500 wekkerradio's, dus $q = 5$.
 $q = 5$ geeft $K = 97$, dus de kosten zijn 9700 euro.
 $\frac{9700}{500} = 19,40$, dus de gemiddelde kosten zijn € 19,40 per wekkerradio.
b $q = 7$ geeft $K = 216,6$
 Op $[5, 7]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{216,6 - 97}{7 - 5} = € 59,80$ per wekkerradio.
c $q = 1,5$ geeft $K = 45,55$
 $q = 4$ geeft $K = 70,8$
 Op $[1,5; 4]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{70,8 - 45,55}{4 - 1,5} = € 10,10$ per wekkerradio.
d 14 320 euro, dus $K = 143,2$.
 Los op $1,2q^3 - 8q^2 + 25q + 22 = 143,2$.
 Voer in $y_1 = 1,2x^3 - 8x^2 + 25x + 22$ en $y_2 = 143,2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 6$, dus bij een productie van 600 stuks.
 De gemiddelde kosten per wekkerradio zijn dan $\frac{14320}{600} \approx € 23,87$.
e Voer in $y_2 = 25x$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 1,98$ en $x \approx 6,19$.
 Er worden dagelijks 198 of 619 stuks geproduceerd.

- 8 a** $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 2 = 13$ video's
b $100 + 140 + 285 + 479 = 1004$, dus in april.
c Ja, ΔA is steeds positief, dus A is stijgend.
 Eerst neemt ΔA steeds toe, daarna neemt ΔA af.
d Op $[0, 5]$ is $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{11}{5} = 2,2$ video's per maand.
 Valerie heeft in de eerste vijf maanden van het jaar gemiddeld 2,2 video's per maand geüpload.
e Op $[0, 12]$ is $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{21}{12} = 1,75$ video's per maand.
f Op $t = 8$ is $\frac{A}{V} = \frac{5192}{14} \approx 370$ video's per maand.
 Op $t = 9$ is $\frac{A}{V} = \frac{6439}{15} \approx 429$ video's per maand.
 Op $t = 10$ is $\frac{A}{V} = \frac{7391}{18} \approx 411$ video's per maand.
 Dat is op $t = 9$, dus eind september.

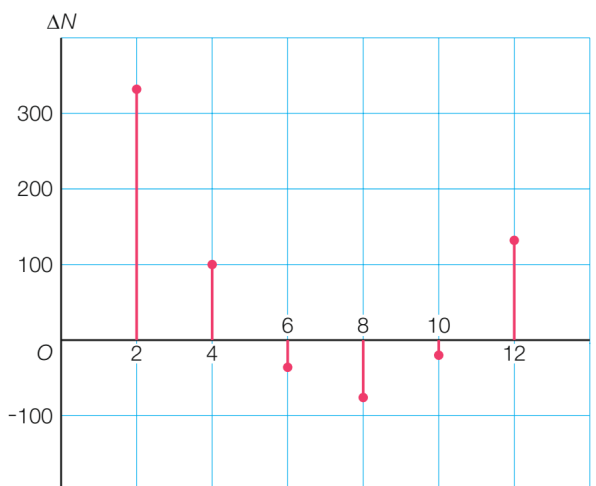
Bladzijde 41

- 9 a** Voer in $y_1 = 2x^3 - 41x^2 + 240x + 100$.

t	B
0	100
2	432
4	532
6	496
8	420
10	400
12	532

Zie de figuur.

- b** Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{525 - 301}{5 - 1} = 56$ leden per jaar.
c Voer in $y_2 = 394$.
 De optie snijpunt geeft $x = 1,65 \dots$
 Dus in het jaar 2014.
d Bij 1 januari 2014 hoort $t = 1$ en bij 1 juli 2017 hoort $t = 4,5$.
 $t = 1$ geeft $N = 301$
 $t = 4,5$ geeft $N = 532$
 Op $[1; 4,5]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{532 - 301}{4,5 - 1} = 66$ leden per jaar = 5,5 leden per maand.



6 Formules en herleiden

6.1 Werken met formules

Bladzijde 44

V1

- a** $4(x - 10) + 20 = 4x - 40 + 20 = 4x - 20$
b $-12(4q + 2) = -48q - 24$
c $-3(7b - 5) - 5b = -21b + 15 - 5b = -26b + 15$
d $-5(x + 1) + 3(2x - 1) = -5x - 5 + 6x - 3 = x - 8$
e $2(x + y) + 4x - 3(10 - 2y) = 2x + 2y + 4x - 30 + 6y = 6x + 8y - 30$
f $5q - 3(p - 6) + 2(9 - q) = 5q - 3p + 18 + 18 - 2q = 3q - 3p + 36$

- 1 a** $W = 1,9$ en $Z = 7,9$ geeft $G = 11,8 \cdot 1,9 + 0,39 \cdot 7,9 - 15,59 = 9,911$
b $7,9 = 1,9 + 6$ dus bij $Z = 7,9$ en $W = 1,9$ is $Z = W + 6$.
c Als er geen haakjes zouden staan om $W + 6$ dan wordt $0,39$ alleen vermenigvuldigd met W . Maar de factor $0,39$ moet vermenigvuldigd worden met Z dus met $W + 6$. Daarom staan er haakjes.
d $G = 11,8W + 0,39(W + 6) - 15,59$
 $G = 11,8W + 0,39W + 2,34 - 15,59$
 $G = 12,19W - 13,25$
Dus $a = 12,19$ en $b = -13,25$.

Bladzijde 45

- 2**
$$\left. \begin{array}{l} T = 0,4q + 2,6p \\ q = 5 - p \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = 0,4(5 - p) + 2,6p \\ T = 2 - 0,4p + 2,6p \\ T = 2 + 2,2p \end{array}$$

- 3 a**
$$\left. \begin{array}{l} G = 11,8W + 0,39Z - 15,59 \\ Z = 5,2W \end{array} \right\} \begin{array}{l} G = 11,8W + 0,39(5,2W) - 15,59 \\ G = 11,8W + 2,028W - 15,59 \\ G = 13,828W - 15,59 \end{array}$$

b
$$\left. \begin{array}{l} G = 11,8W + 0,39Z - 15,59 \\ W = 7,8 - 0,5Z \end{array} \right\} \begin{array}{l} G = 11,8(7,8 - 0,5Z) + 0,39Z - 15,59 \\ G = 92,04 - 5,9Z + 0,39Z - 15,59 \\ G = 76,45 - 5,51Z \end{array}$$

- 4 a**
$$\left. \begin{array}{l} R = 3p - 4q + 5 \\ p = 1,5q + 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} R = 3(1,5q + 2) - 4q + 5 \\ R = 4,5q + 6 - 4q + 5 \\ R = 0,5q + 11 \end{array}$$

b
$$\left. \begin{array}{l} F = 0,16m - 0,4(5 - 2n) \\ m = 3 - 2n \end{array} \right\} \begin{array}{l} F = 0,16(3 - 2n) - 0,4(5 - 2n) \\ F = 0,48 - 0,32n - 2 + 0,8n \\ F = 0,48n - 1,52 \end{array}$$

Dus $a = 0,48$ en $b = -1,52$.

- 5** Uit de tekst volgt: $v = 3p$ en $m = v + 2$ en $m = p + 32$.
Uit $m = v + 2$ en $m = p + 32$ volgt $v + 2 = p + 32$.
$$\left. \begin{array}{l} v + 2 = p + 32 \\ v = 3p \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3p + 2 = p + 32 \\ 2p = 30 \\ p = 15 \end{array}$$

 $p = 15$ geeft $v = 3 \cdot 15 = 45$ en $m = 15 + 32 = 47$.

Bladzijde 46

6 a $A = 240$ en $q = 117$ geeft $-10p + 0,3 \cdot 240 + 150 = 117$
 $-10p + 222 = 117$
 $-10p = -105$
 $p = 10,5$

De prijs van een blik is € 10,50.

b Uit de tekst volgt $A = 10p$.

$$\left. \begin{array}{l} q = -10p + 0,3A + 150 \\ A = 10p \end{array} \right\} \begin{array}{l} q = -10p + 0,3 \cdot 10p + 150 \\ q = -10p + 3p + 150 \\ q = -7p + 150 \end{array}$$

c
$$\left. \begin{array}{l} q = -10p + 0,3A + 150 \\ A = 2p + 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} q = -10p + 0,3(2p + 8) + 150 \\ q = -10p + 0,6p + 2,4 + 150 \\ q = -9,4p + 152,4 \end{array}$$

7 a $BO = 180$ en $SH = 168$ geeft $G = 5,2 \cdot 180 + 2,6 \cdot 168 - 855 = 517,8$

De merrie weegt ongeveer 518 kg.

b De 5 cm borstomvang te veel draagt $4,3 \cdot 5 = 21,5$ kg bij aan het gewicht.
 De schatting van het gewicht valt dus 21,5 kg te hoog uit.

c
$$\left. \begin{array}{l} G = 4,3BO + 3,0SH - 785 \\ BO = SH + 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} G = 4,3(SH + 12) + 3,0SH - 785 \\ G = 4,3SH + 51,6 + 3,0SH - 785 \\ G = 7,3SH - 733,4 \end{array}$$

d $5,2 \cdot 180 + 2,6SH - 855 = 4,3 \cdot 185 + 3,0SH - 785$

$81 + 2,6SH = 10,5 + 3,0SH$

$-0,4SH = -70,5$

$SH \approx 176$

Dus de schofthoogte is 1,76 m.

Bladzijde 47

V2 a $2x + 3y = 6$
 $2x = -3y + 6$
 $x = -1,5y + 3$

b $4t - 3p = 9$
 $-3p = -4t + 9$
 $p = 1\frac{1}{3}t - 3$

c $2(m - 3) - 4n = 6$
 $2m - 6 - 4n = 6$
 $2m = 4n + 12$
 $m = 2n + 6$

d $B = 12 - 3A$
 $3A = -B + 12$
 $A = -\frac{1}{3}B + 4$

8 a
$$\left. \begin{array}{l} N = 3p + 4q - 5 \\ q = 2p - 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} N = 3p + 4(2p - 6) - 5 \\ N = 3p + 8p - 24 - 5 \\ N = 11p - 29 \end{array}$$

b $q = 2p - 6$
 $-2p = -q - 6$
 $p = 0,5q + 3$

c
$$\left. \begin{array}{l} N = 3p + 4q - 5 \\ p = 0,5q + 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} N = 3(0,5q + 3) + 4q - 5 \\ N = 1,5q + 9 + 4q - 5 \\ N = 5,5q + 4 \end{array}$$

Bladzijde 48

9

$$\begin{aligned} 2s - 5t &= 40 \\ -5t &= -2s + 40 \\ t &= 0,4s - 8 \\ A &= 8s + 3t + 850 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 2s - 5t &= 40 \\ -5t &= -2s + 40 \\ t &= 0,4s - 8 \\ A &= 8s + 3t + 850 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} A &= 8s + 3(0,4s - 8) + 850 \\ A &= 8s + 1,2s - 24 + 850 \\ A &= 9,2s + 8,26 \end{aligned}$$

10

a $r + 8s = 100$
 $r = -8s + 100$
 $T = 3r + 6s + 80$ $\left. \vphantom{\begin{aligned} r &= -8s + 100 \\ T &= 3r + 6s + 80 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} T &= 3(-8s + 100) + 6s + 80 \\ T &= -24s + 300 + 6s + 80 \\ T &= -18s + 380 \end{aligned}$

b $5a - 8b = 160$
 $-8b = -5a + 160$
 $b = 0,625a - 20$
 $C = 2a - 3b + 64$ $\left. \vphantom{\begin{aligned} b &= 0,625a - 20 \\ C &= 2a - 3b + 64 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} C &= 2a - 3(0,625a - 20) + 64 \\ C &= 2a - 1,875a + 60 + 64 \\ C &= 0,125a + 124 \end{aligned}$

11

a $3m + 5n = 12$
 $5n = -3m + 12$
 $n = -0,6m + 2,4$
 $Q = 5m - n + 125$ $\left. \vphantom{\begin{aligned} n &= -0,6m + 2,4 \\ Q &= 5m - n + 125 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} Q &= 5m - (-0,6m + 2,4) + 125 \\ Q &= 5m + 0,6m - 2,4 + 125 \\ Q &= 5,6m + 122,6 \end{aligned}$

b $5,6m + 122,6 = 201$
 $5,6m = 78,4$
Dus $m = 14$.
 $m = 14$ invullen in $n = -0,6m + 2,4$ geeft $n = -0,6 \cdot 14 + 2,4 = -6$
Dus $n = -6$.

12

Noem het gewicht in kg van de paarse, groene, rode en blauwe gewichten achtereenvolgens p , g , r en b .

Janna weet $p = 1,5$.

Uit haar ontdekkingen volgt:

- $3r = 2g$
- $p + g = b + r$ en met $p = 1,5$ geeft dit $1,5 + g = b + r$
- $3p + 2g = 4r + b$ en met $p = 1,5$ en $3r = 2g$ geeft dit $3 \cdot 1,5 + 3r = 4r + b$
 $4,5 = r + b$

Uit $1,5 + g = b + r$ en $4,5 = r + b$ volgt $1,5 + g = 4,5$, dus $g = 3$.

Uit $g = 3$ en $3r = 2g$ volgt $3r = 6$, dus $r = 2$.

Uit $4,5 = r + b$ en $r = 2$ volgt $4,5 = 2 + b$, dus $b = 2,5$

Dus de groene wegen 3 kg, de rode 2 kg en de blauwe 2,5 kg.

Bladzijde 49

13

a $T = \frac{1958}{356} = 5,5$ en $Z = \frac{356}{20} = 17,8$ geeft $ARI = 4,71 \cdot 5,5 + 0,5 \cdot 17,8 - 21,43 = 13,375$

b $T = Z - 3$
 $-Z = -T - 3$
 $Z = T + 3$
 $ARI = 4,71T + 0,5Z - 21,43$ $\left. \vphantom{\begin{aligned} Z &= T + 3 \\ ARI &= 4,71T + 0,5Z - 21,43 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} ARI &= 4,71T + 0,5(T + 3) - 21,43 \\ ARI &= 4,71T + 0,5T + 1,5 - 21,43 \\ ARI &= 5,21T - 19,93 \end{aligned}$

dus $a = 5,21$ en $b = -19,93$.

c Voor Raoul moet de ARI worden uitgedrukt in Z en er geldt $Z = 4T$.

$$4T = Z$$

$$T = 0,25Z$$

$$ARI = 4,71T + 0,5Z - 21,43 \left. \vphantom{\begin{aligned} T &= 0,25Z \\ ARI &= 4,71T + 0,5Z - 21,43 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} ARI &= 4,71(0,25Z) + 0,5Z - 21,43 \\ ARI &= 1,1775Z + 0,5Z - 21,43 \\ ARI &= 1,6775Z - 21,43 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14 \quad & L + 5,6 = 0,9ARI \\
 & L = 0,9ARI - 5,6 \\
 & ARI = 4,71T + 0,5Z - 21,43 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} L + 5,6 = 0,9ARI \\ L = 0,9ARI - 5,6 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} L &= 0,9(4,71T + 0,5Z - 21,43) - 5,6 \\ L &= 4,239T + 0,45Z - 19,287 - 5,6 \\ L &= 4,239T + 0,45Z - 24,887 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{V3} \quad & \text{a} \quad (x-1)(x-2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2 \\
 & \text{b} \quad (4x+1)(4x-1) = 16x^2 - 4x + 4x - 1 = 16x^2 - 1 \\
 & \text{c} \quad (4p+q)^2 = (4p+q)(4p+q) = 16p^2 + 4pq + 4pq + q^2 = 16p^2 + 8pq + q^2 \\
 & \text{d} \quad (3a-2b)^2 = (3a-2b)(3a-2b) = 9a^2 - 6ab - 6ab + 4b^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad & \text{a} \quad n = 5 \text{ geeft } m = 5 - 1 = 4 \\
 & \quad n = 5 \text{ en } m = 4 \text{ geeft } T = 4^2 + 4 \cdot 5 + 2 = 38 \\
 & \text{b} \quad T = (n-1)^2 + 4n + 2 \\
 & \quad T = (n-1)(n-1) + 4n + 2 \\
 & \quad T = n^2 - n - n + 1 + 4n + 2 \\
 & \quad T = n^2 + 2n + 3
 \end{aligned}$$

Bladzijde 50

$$\begin{aligned}
 16 \quad & \left. \begin{aligned} q - p &= 3 \\ q &= p + 3 \\ N &= 3p^2 - q^2 - 28 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} N &= 3p^2 - (p+3)^2 - 28 \\ N &= 3p^2 - (p+3)(p+3) - 28 \\ N &= 3p^2 - (p^2 + 3p + 3p + 9) - 28 \\ N &= 3p^2 - (p^2 + 6p + 9) - 28 \\ N &= 3p^2 - p^2 - 6p - 9 - 28 \\ N &= 2p^2 - 6p - 37 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17 \quad & \text{a} \quad \left. \begin{aligned} A &= 3t^2 - 4s^2 + 5 \\ s &= t - 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= 3t^2 - 4(t-2)^2 + 5 \\ A &= 3t^2 - 4(t-2)(t-2) + 5 \\ A &= 3t^2 - 4(t^2 - 2t - 2t + 4) + 5 \\ A &= 3t^2 - 4(t^2 - 4t + 4) + 5 \\ A &= 3t^2 - 4t^2 + 16t - 16 + 5 \\ A &= -t^2 + 16t - 11 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad & 3x - 2y = 6 \\
 & -2y = -3x + 6 \\
 & y = 1,5x - 3 \\
 & \left. \begin{aligned} y &= 1,5x - 3 \\ B &= 5xy + 20 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} B &= 5x(1,5x - 3) + 20 \\ B &= 7,5x^2 - 15x + 20 \end{aligned} \\
 & \text{Dus } a = 7,5, b = -15 \text{ en } c = 20.
 \end{aligned}$$

Bladzijde 51

$$\begin{aligned}
 18 \quad & \text{a} \quad q = 1000 \text{ geeft } p = -0,002 \cdot 1000 + 3,1 = 1,1 \\
 & \quad \text{Bij een verkoop van 1000 ijsjes hoort een prijs van € 1,10 per stuk.} \\
 & \quad p = 1,1 \text{ en } q = 1000 \text{ geeft } R = 1,1 \cdot 1000 = 1100 \\
 & \quad \text{De dagopbrengst is in dat geval 1100 euro.} \\
 & \text{b} \quad R = p \cdot q = (-0,002q + 3,1)q = -0,002q^2 + 3,1q \\
 & \quad \text{Dus } R = -0,002q^2 + 3,1q. \\
 & \text{c} \quad q = 500 \text{ geeft } R = -0,002 \cdot 500^2 + 3,1 \cdot 500 = 1050 \\
 & \quad \text{Bij een verkoop van 500 ijsjes per dag is de dagopbrengst 1050 euro.} \\
 & \text{d} \quad \text{De variabele kosten zijn 0,70 euro per ijsje.} \\
 & \quad \text{De vaste kosten zijn 180 euro per dag.} \\
 & \text{e} \quad q = 500 \text{ geeft } K = 0,7 \cdot 500 + 180 = 530 \\
 & \quad \text{Verder is } R = 1050 \text{ (zie c), dus hij maakt dan een winst van} \\
 & \quad 1050 - 530 = 520 \text{ euro per dag.}
 \end{aligned}$$

f $W = R - K$

$$W = -0,002q^2 + 3,1q - (0,7q + 180)$$

$$W = -0,002q^2 + 3,1q - 0,7q - 180$$

$$W = -0,002q^2 + 2,4q - 180$$

g $q = 450$ geeft $W = -0,002 \cdot 450^2 + 2,4 \cdot 450 - 180 = 495$

$$q = 450 \text{ geeft } p = -0,002 \cdot 450 + 3,1 = 2,2$$

Bij een verkoop van 450 ijsjes per dag is de winst 495 euro per dag en de prijs per ijsje €2,20.

h $q = 400$ geeft $W = -0,002 \cdot 400^2 + 2,4 \cdot 400 - 180 = 460$

$$q = 550 \text{ geeft } W = -0,002 \cdot 550^2 + 2,4 \cdot 550 - 180 = 535$$

De winst per dag neemt dan toe met $\frac{535 - 460}{460} \cdot 100\% \approx 16,3\%$.

19 a $2t = -\frac{1}{3}p + 3\frac{2}{3}$

$$\frac{1}{3}p = -2t + 3\frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} p = -6t + 11 \\ A = 2t + 5p + 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 2t + 5(-6t + 11) + 9 \\ A = 2t - 30t + 55 + 9 \\ A = -28t + 64 \end{array}$$

Dus $a = -28$ en $b = 64$.

b $2b - a = 3$

$$-a = -2b + 3$$

$$a = 2b - 3$$

$$\left. \begin{array}{l} B = 15a^2 - 50(b^2 - 2b) \end{array} \right\} \begin{array}{l} B = 15(2b - 3)^2 - 50(b^2 - 2b) \\ B = 15(2b - 3)(2b - 3) - 50(b^2 - 2b) \\ B = 15(4b^2 - 6b - 6b + 9) - 50b^2 + 100b \\ B = 15(4b^2 - 12b + 9) - 50b^2 + 100b \\ B = 60b^2 - 180b + 135 - 50b^2 + 100b \\ B = 10b^2 - 80b + 135 \end{array}$$

20 $3x - y = 2$

$$-y = -3x + 2$$

$$y = 3x - 2$$

$$\left. \begin{array}{l} N = 9x^2 - 6xy + y^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} N = 9x^2 - 6x(3x - 2) + (3x - 2)^2 \\ N = 9x^2 - 18x^2 + 12x + (3x - 2)(3x - 2) \\ N = 9x^2 - 18x^2 + 12x + 9x^2 - 6x - 6x + 4 \\ N = 9x^2 - 18x^2 + 12x + 9x^2 - 12x + 4 \\ N = 4 \end{array}$$

Alternatieve uitwerking

$$N = 9x^2 - 6xy + y^2 = (3x - y)^2$$

$$\left. \begin{array}{l} N = (3x - y)^2 \\ 3x - y = 2 \end{array} \right\} N = 2^2 = 4$$

21 a De maximale winst per dag is 540 euro. Om de maximale winst te behalen moeten er 600 ijsjes worden verkocht.

b Hij moet minimaal 81 en maximaal 1119 ijsjes verkopen om winst te maken.

Bladzijde 53

22 a Voer in $y_1 = -0,093x^3 + 1,39x^2 - 3,28x + 4,7$.

De optie maximum geeft $x \approx 8,6$ en $y \approx 20,1$.

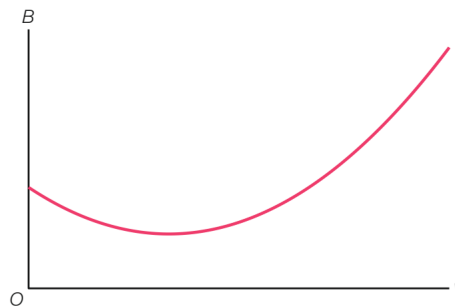
Dus in september. De maximale temperatuur is $20,1^\circ\text{C}$.

b Voer in $y_2 = 19$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 7,5$ en $x \approx 9,6$.

Dus in de maanden augustus tot en met oktober.

- 23 a** Voer in $y_1 = 0,001x^2 - 0,12x + 7,8$.
Zie de schets hiernaast.
- b** $x = 80$ geeft $y_1 = 4,6$ en $x = 100$ geeft $y_1 = 5,8$.
Het benzineverbruik neemt dus toe met $5,8 - 4,6 = 1,2$ liter per 100 km.
- c** $x = 30$ geeft $y_1 = 5,1$ en $x = 40$ geeft $y_1 = 4,6$.
De procentuele verandering is $\frac{4,6 - 5,1}{5,1} \cdot 100\% \approx -9,8\%$.
Zijn benzineverbruik neemt af met 9,8%.
- d** De optie minimum geeft $x = 60$.
Ze moet 60 km per uur rijden.
- e** $B = 4,5$. Voer in $y_2 = 4,5$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 42,7$ en $x \approx 77,3$.
Zijn snelheid is 43 km per uur of 77 km per uur.
- f** Haar verbruik mag dan hoogstens $\frac{3}{60} \cdot 100 = 5$ liter per 100 km zijn.
Voer in $y_2 = 5$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 31,72$ en $x \approx 88,28$.
Ze moet een snelheid tussen 32 en 88 km per uur aanhouden.

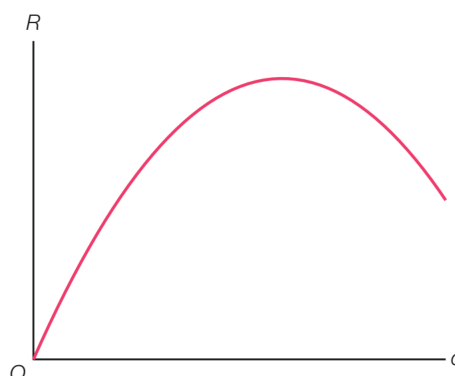


Bladzijde 54

- 24** $v = 120$ geeft $B = 7,8$ liter per 100 km.
Dat is dus 0,078 liter per km. Hij heeft dus $60 \cdot 0,078 = 4,68$ liter in de tank.
Hij mag dus maximaal 4,68 liter per 90 km verbruiken,
oftewel $\frac{4,68}{90} \cdot 100 = 5,2$ liter per 100 km.
Voer in $y_2 = 5,2$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 28,4$ en $x \approx 91,6$.
Dus hij moet met een snelheid van 91 km/uur rijden.

- 25 a** $x = 0$ geeft $h = 3$
Het schuurtje is 3 meter hoog.
- b** Voer in $y_1 = -0,09x^2 + 1,8x + 3$.
De optie nulpunt geeft $x \approx 21,5$.
De bal komt na 21,5 meter op de grond.
- c** De optie maximum geeft $y = 12$.
De maximale hoogte is 12 meter.
- d** $x = 18$ geeft $y_1 = 6,24$
Op 18 meter afstand van het schuurtje is de hoogte van de bal 6,24 m. Dus de bal gaat over de boom heen.
- e** 1 decameter = 10 meter, dus d decameter = $10d$ meter
- f**
$$\left. \begin{array}{l} h = -0,09x^2 + 1,8x + 3 \\ x = 10d \end{array} \right\} \begin{array}{l} h = -0,09(10d)^2 + 1,8 \cdot 10d + 3 \\ h = -0,09 \cdot 100d^2 + 18d + 3 \\ h = -9d^2 + 18d + 3 \end{array}$$

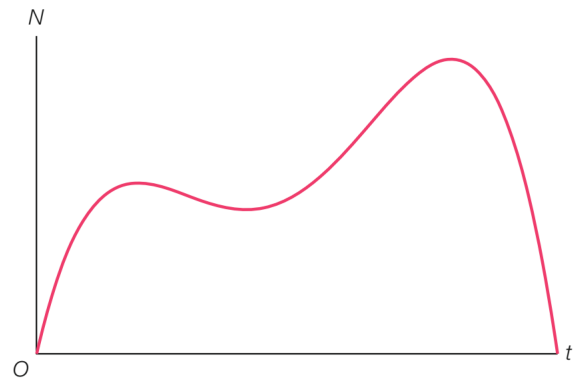
- 26 a** Voer in $y_1 = -0,02x^2 + 30x$.
Zie de schets hiernaast.
- b** De optie maximum geeft $x = 750$ en $y = 11\,250$.
De opbrengst is maximaal voor $q = 750$.
De maximale opbrengst is 11 250 euro per week.
- c** Voer in $y_2 = 8000$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 346,9$ en $x \approx 1153,1$.
De opbrengst is minstens 8000 euro bij een verkoop van 347 tot en met 1153 broodroosters per week.
- d** Bij de waarden van q die bij deze snijpunten horen is $K = R$, dus er is dan geen winst en geen verlies.
Voer in $y_2 = 5x + 3000$.
De optie snijpunt geeft $x = 134,46\dots$ en $x = 1115,53\dots$.
Bij de snijpunten horen ongeveer 134 en ongeveer 1116 broodroosters.



- e** $W = R - K = -0,02q^2 + 30q - (5q + 3000) = -0,02q^2 + 30q - 5q - 3000 = -0,02q^2 + 25q - 3000$
f Voer in $y_1 = -0,02x^2 + 25x - 3000$.
 De optie maximum geeft $x = 625$ en $y = 4812,5$.
 De winst is maximaal voor $q = 625$.
 De maximale winst is 4812,50 euro per week.

Bladzijde 55

- 27 a** Voer in $y_1 = -0,15x^4 + 3,35x^3 - 24x^2 + 65x$.
 Zie de schets hiernaast.
b De optie maximum geeft $x = 9,579...$ en $y \approx 102,0$.
 $9,579...$ uur is 9 uur en $0,579... \cdot 60 = 35$ minuten.
 Dus om 17:35 uur is het het drukst.
 Er zijn dan 102 klanten.
c De optie nulpunt geeft $x = 12,023...$
 $12,023...$ uur is 12 uur en $0,023... \cdot 60 = 1$ minuut.
 Dus om 20:01 uur verlaten de laatste klanten de supermarkt.
d Bij 15:15 uur hoort $t = 7,25$ en dat geeft $N \approx 72$.
 Voer in $y_2 = 72$.
 De optie snijpunt geeft $x = 11,036...$
 $11,036...$ uur is 11 uur en $0,036... \cdot 60 = 2$ minuten.
 Dus om 19:02 uur zijn er evenveel klanten in de supermarkt als om kwart over drie.



- C1 a** $y = 1$ geeft $x = 12 - 2 \cdot 1 = 10$
 $y = 1$ en $x = 10$ geeft $D = 5 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + 30 = 83$.

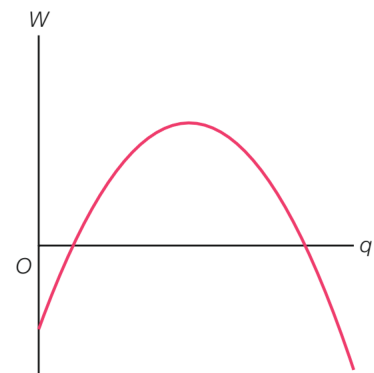
$$\begin{aligned} \text{b } \left. \begin{aligned} D &= 5x + 3y + 30 \\ x &= 12 - 2y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} D &= 5x + 3y + 30 \\ D &= 5(12 - 2y) + 3y + 30 \\ D &= 60 - 10y + 3y + 30 \\ D &= -7y + 90 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } \left. \begin{aligned} x &= 12 - 2y \\ 2y &= -x + 12 \\ y &= -0,5x + 6 \\ D &= 5x + 3y + 30 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} D &= 5x + 3y + 30 \\ D &= 5x + 3(-0,5x + 6) + 30 \\ D &= 5x - 1,5x + 18 + 30 \\ D &= 3,5x + 48 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C2 } \left. \begin{aligned} E &= 0,1p^2 - 0,02q + 4,5 \\ p &= q + 3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} E &= 0,1(q + 3)^2 - 0,02q + 4,5 \\ E &= 0,1(q + 3)(q + 3) - 0,02q + 4,5 \\ E &= 0,1(q^2 + 6q + 9) - 0,02q + 4,5 \\ E &= 0,1q^2 + 0,6q + 0,9 - 0,02q + 4,5 \\ E &= 0,1q^2 + 0,58q + 5,4 \end{aligned} \end{aligned}$$

Dus $a = 0,1$, $b = 0,58$ en $c = 5,4$.

- C3 a** Voer in $y_1 = -0,02x^2 + 5,2x - 200$.
 Zie de schets hiernaast.
b De optie maximum geeft $y = 138$.
 De maximale winst is $138 \cdot 100 = 13\,800$ euro per maand.
c Bij 10000 euro winst hoort $W = 100$.
 Voer in $y_2 = 100$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 86,4$ en $x \approx 173,6$.
 Dus bij een verkoop vanaf 87 tot en met 173 artikelen per maand.



6.2 Formules met breuken

Bladzijde 56

$$\text{V4 a } \frac{3p}{7p} = \frac{3}{7} \quad \text{b } \frac{6y}{9y} = \frac{2}{3} \quad \text{c } \frac{14a}{20a^2} = \frac{7}{10a}$$

$$28 \text{ a } \frac{a}{7} = \frac{1}{7}a \quad \text{b } \frac{2b}{3} = \frac{2}{3}b$$

Bladzijde 57

$$29 \text{ a } A = \frac{xy}{4y} = \frac{1}{4}x$$

$$\text{b } B = \frac{4x+6}{2} = \frac{4x}{2} + \frac{6}{2} = 2x + 3$$

$$\text{c } C = \frac{6y}{15xy} = \frac{2}{5x}$$

$$30 \text{ a } D = \frac{3(1-4x)}{4} = \frac{3}{4}(1-4x) = 0,75 - 3x$$

$$\text{b } D = \frac{3(1-4x)}{4} = \frac{3-12x}{4} = \frac{3}{4} - \frac{12x}{4} = 0,75 - 3x$$

c *

$$31 \text{ a } A = \frac{6x+10}{8} = \frac{6x}{8} + \frac{10}{8} = 0,75x + 1,25$$

$$\text{b } B = \frac{12(x+2)}{4} = \frac{12x+24}{4} = 3x+6 \quad (\text{of } B = \frac{12(x+2)}{4} = \frac{12}{4}(x+2) = 3(x+2) = 3x+6)$$

$$\text{c } C = \frac{2xy+y}{5y} = \frac{2xy}{5y} + \frac{y}{5y} = \frac{2x}{5} + \frac{1}{5} = 0,4x + 0,2 \quad (\text{of } C = \frac{2xy+y}{5y} = \frac{2x+1}{5} = \frac{2x}{5} + \frac{1}{5} = 0,4x + 0,2)$$

$$\text{d } D = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = x \quad (\text{of } D = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x)$$

$$\text{e } E = -\frac{3x}{4} + \frac{xy}{4y} = -\frac{3}{4}x + \frac{x}{4} = -0,75x + 0,25x = -0,5x$$

$$\text{f } F = \frac{7x^2y+2xy}{3xy} = \frac{7x^2y}{3xy} + \frac{2xy}{3xy} = 2\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Bladzijde 58

$$32 \text{ a } \left. \begin{array}{l} K = \frac{8x+y}{10} \\ y = -7x \end{array} \right\} K = \frac{8x-7x}{10} = \frac{x}{10} = 0,1x$$

$$\text{b } \left. \begin{array}{l} L = \frac{3x-y}{2x} \\ y = 5x-2 \end{array} \right\} L = \frac{3x-(5x-2)}{2x} = \frac{3x-5x+2}{2x} = \frac{-2x+2}{2x} = \frac{-2x}{2x} + \frac{2}{2x} = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

$$\text{c } \left. \begin{array}{l} M = \frac{y^2}{12x} \\ y = 4x \end{array} \right\} M = \frac{(4x)^2}{12x} = \frac{4x \cdot 4x}{12x} = \frac{16x^2}{12x} = \frac{4x}{3} = 1\frac{1}{3}x$$

$$33 \text{ a } \left. \begin{array}{l} N = \frac{x+y}{xy-x^2} \\ y = 2x \end{array} \right\} N = \frac{x+2x}{x \cdot 2x - x^2} = \frac{3x}{2x^2 - x^2} = \frac{3x}{x^2} = \frac{3}{x}$$

$$\text{b } \left. \begin{array}{l} N = \frac{x+y}{xy-x^2} \\ y = 1+x \end{array} \right\} N = \frac{x+1+x}{x(1+x) - x^2} = \frac{2x+1}{x+x^2-x^2} = \frac{2x+1}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$$

34 a $v = \frac{s}{t}$
 $t = 10$ en $s = 2k + 15$ } $v = \frac{2k + 15}{10} = \frac{2k}{10} + \frac{15}{10} = 0,2k + 1,5$

b $0,2k + 1,5 = 5,5$
 $0,2k = 4$
 $k = 20$

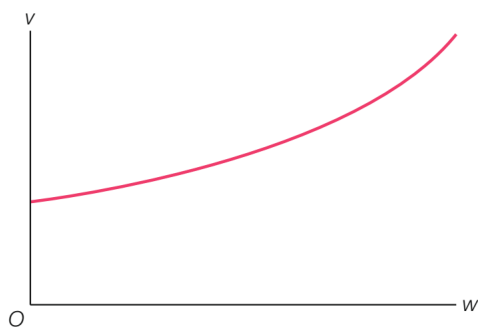
Dus na 20 keer trainen.

c Hij doet $\frac{30 - 1,2w}{60} = \frac{30}{60} - \frac{1,2w}{60} = 0,5 - 0,02w$ uur over de trail, dus $t = 0,5 - 0,02w$.
 $a = 0,5$ en $b = 0,02$.

d $v = \frac{s}{t}$
 $t = 0,5 - 0,02w$ en $s = 7,5$ } $v = \frac{7,5}{0,5 - 0,02w} = \frac{375}{25 - w}$

In de laatste stap zijn teller en noemer vermenigvuldigd met 50.

e Voer in $y_1 = \frac{375}{25 - x}$.



f $\frac{375}{25 - w} < 23,4$

Voer in $y_2 = 23,4$.

De optie snijpunt geeft $x = 8,97...$

Dus na 9 weken.

35 a $\frac{2}{3a} \cdot \frac{6}{a} = \frac{12}{3a^2} = \frac{4}{a^2}$

b $\frac{2}{3a} : \frac{6}{a} = \frac{2}{3a} \cdot \frac{a}{6} = \frac{2a}{18a} = \frac{1}{9}$

Bladzijde 59

36 a $A = \frac{2ab}{3} \cdot \frac{9}{4b} = \frac{18ab}{12b} = \frac{3a}{2} = 1,5a$

b $B = \frac{6x}{3} : \frac{4x}{3y} = \frac{6x}{3} \cdot \frac{3y}{4x} = \frac{18xy}{12x} = \frac{3y}{2} = 1,5y$

c $C = \frac{3}{5} \cdot \frac{x+y}{y} = \frac{3(x+y)}{5y} = \frac{3x+3y}{5y}$

d $D = \frac{a+3}{b} : \frac{1}{b} = \frac{a+3}{b} \cdot \frac{b}{1} = \frac{b(a+3)}{b} = a+3$

- 37** De factor $5y$ staat in de eerste breuk in de noemer en in de tweede breuk in de teller, na vermenigvuldigen krijg je een breuk met de factor $5y$ in zowel de teller als de noemer dus die kun je wegdelen.

Bladzijde 60

38 a $A = \frac{2y}{x} \cdot \frac{x-1}{y} = \frac{2y(x-1)}{xy} = \frac{2(x-1)}{x} = \frac{2x-2}{x} \left(= 2 - \frac{2}{x} \right)$

b $B = \frac{a+3}{3} : \frac{a}{2} = \frac{a+3}{3} \cdot \frac{2}{a} = \frac{2(a+3)}{3a} = \frac{2a+6}{3a} \left(= \frac{2}{3} + \frac{2}{a} \right)$

c $C = \frac{2x}{y} : \frac{4}{y+1} = \frac{2x}{y} \cdot \frac{y+1}{4} = \frac{2x(y+1)}{4y} = \frac{2xy+2x}{4y} = \frac{xy+x}{2y} \left(= 0,5x + \frac{x}{2y} \right)$

d $D = \frac{3x}{4} \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{6} \right) = \frac{3x}{4} \cdot \frac{2}{x} - \frac{3x}{4} \cdot \frac{x}{6} = \frac{6x}{4} - \frac{3x^2}{24} = 1,5 - 0,125x^2$

$$\text{e } E = 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x+1} = \frac{2xy}{y(x+1)} = \frac{2x}{x+1}$$

$$\text{f } F = \frac{4p}{q} \cdot \frac{q}{3} \cdot \frac{p}{q} = \frac{4p}{q} \cdot \frac{q}{3} \cdot \frac{q}{p} = \frac{4pq^2}{3pq} = \frac{4q}{3} = 1\frac{1}{3}q$$

$$\text{39 a } P = 0,15 \cdot \frac{x}{0,375} \cdot (x-2) = \frac{0,15x(x-2)}{0,375} = \frac{0,15x^2 - 0,3x}{0,375} = \frac{0,15x^2}{0,375} - \frac{0,3x}{0,375} = 0,4x^2 - 0,8x$$

$$\begin{aligned} \text{b } Q &= 1,8 \cdot \frac{x+4}{2} : \frac{3}{x-1} = 1,8 \cdot \frac{x+4}{2} \cdot \frac{x-1}{3} = \frac{1,8(x+4)(x-1)}{6} = \frac{1,8(x^2 - x + 4x - 4)}{6} = \frac{1,8(x^2 + 3x - 4)}{6} \\ &= \frac{1,8x^2 + 5,4x - 7,2}{6} = \frac{1,8x^2}{6} + \frac{5,4x}{6} - \frac{7,2}{6} = 0,3x^2 + 0,9x - 1,2 \end{aligned}$$

$$\text{40 a } M = 240 \text{ en } A = 3 \text{ geeft } U = \frac{0,07 \cdot 240 + 0,8 \cdot 3}{3} = 6,4$$

Ze doen er 6 uur en $0,4 \cdot 60 = 24$ minuten over, dus ze zijn om 14:24 uur klaar.

$$\text{b } M = 400 \text{ geeft } U = \frac{0,07 \cdot 400 + 0,8A}{A} = \frac{28 + 0,8A}{A}$$

7 uur en 48 minuten = 7,8 uur

$$\text{Er moet dus gelden } \frac{28 + 0,8A}{A} = 7,8.$$

$$\text{De optie oplossen bij } \frac{28 + 0,8x}{x} = 7,8 \text{ geeft } x = 4.$$

Dus dat waren 4 schilders.

$$\text{c } M = 80 \text{ geeft } L = \frac{35 \cdot 80 + 150}{80} \approx 36,88 \text{ en } U = \frac{0,07 \cdot 80 + 0,8 \cdot 1}{1} = 6,4,$$

dus de klus van 80 m² levert $6,4 \cdot 36,88 \approx 236,03$ euro op.

$$M = 35 \text{ geeft } L = \frac{35 \cdot 35 + 150}{35} \approx 39,29 \text{ en } U = \frac{0,07 \cdot 35 + 0,8 \cdot 1}{1} = 3,25,$$

dus de twee klussen van 35 m² leveren $2 \cdot 3,25 \cdot 39,29 \approx 255,39$ euro op.

De twee klussen van 35 m² leveren meer op. Het scheelt $255,39 - 236,03 = 19,36$ euro.

$$\text{41 } A = 1 \text{ geeft } U = \frac{0,07M + 0,8}{1}$$

$$T = U \cdot L = \frac{0,07M + 0,8}{1} \cdot \frac{35M + 150}{M} = \frac{(0,07M + 0,8)(35M + 150)}{M} = \frac{2,45M^2 + 10,5M + 28M + 120}{M}$$

$$= \frac{2,45M^2 + 38,5M + 120}{M} = \frac{2,45M^2}{M} + \frac{38,5M}{M} + \frac{120}{M} = 2,45M + 38,5 + \frac{120}{M}$$

Dus $a = 2,45$, $b = 38,5$ en $c = 120$.

$$\begin{aligned} \text{42 } T &= U \cdot L \cdot A \\ &= \frac{0,07M + 0,8A}{A} \cdot \frac{35M + 150}{M} \cdot A = \frac{(0,07M + 0,8A)(35M + 150) \cdot A}{AM} = \frac{(0,07M + 0,8A)(35M + 150)}{M} \end{aligned}$$

$$= \frac{2,45M^2 + 10,5M + 28AM + 120A}{M} = \frac{2,45M^2}{M} + \frac{10,5M}{M} + \frac{28AM}{M} + \frac{120A}{M}$$

$$= 2,45M + 10,5 + 28A + \frac{120A}{M}$$

Dus $a = 2,45$, $b = 10,5$, $c = 28$ en $d = 120$.

Bladzijde 61

$$\text{V5 a } \frac{10}{3p} + \frac{2}{3p} = \frac{12}{3p}$$

$$\text{b } \frac{2a}{b} - \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

$$\text{c } \frac{5y}{6x} - \frac{2y}{6x} = \frac{3y}{6x}$$

$$\text{43 a } \frac{2}{3x} = \frac{4}{6x}$$

$$\text{b } \frac{5a}{7} = \frac{5ab}{7b}$$

$$\text{c } \frac{3}{q} = \frac{6p}{2pq}$$

Bladzijde 62

44 a $A = \frac{5}{2a} + \frac{3}{2a} = \frac{8}{2a} \left(= \frac{4}{a} \right)$

b $B = \frac{7}{2a} - \frac{4}{a} = \frac{7}{2a} - \frac{8}{2a} = -\frac{1}{2a}$

c $C = 10 - \frac{2}{a} = \frac{10a}{a} - \frac{2}{a} = \frac{10a - 2}{a}$

d $D = \frac{5}{x} + \frac{3}{y} = \frac{5y}{xy} + \frac{3x}{xy} = \frac{3x + 5y}{xy}$

45 a $A = \frac{6}{x} - \frac{3y}{2x} = \frac{12}{2x} - \frac{3y}{2x} = \frac{12 - 3y}{2x}$

b $B = \frac{2}{3a} + \frac{3}{2b} = \frac{4b}{6ab} + \frac{9a}{6ab} = \frac{9a + 4b}{6ab}$

c $C = x - \frac{2}{5x} = \frac{5x^2}{5x} - \frac{2}{5x} = \frac{5x^2 - 2}{5x}$

d $D = \frac{5}{q} : \frac{2}{p} = \frac{5}{q} \cdot \frac{p}{2} = \frac{5p}{2q}$

e $E = \frac{5p}{6q} - \frac{1}{2p} = \frac{5p}{6q} - \frac{p}{2} = \frac{5p}{6q} - \frac{3pq}{6q} = \frac{5p - 3pq}{6q}$

f $F = \frac{2}{3b} + \frac{2a}{bc} = \frac{2c}{3bc} + \frac{6a}{3bc} = \frac{6a + 2c}{3bc}$

46 a $A = \frac{2}{x-3} - \frac{4}{3x} = \frac{6x}{3x(x-3)} - \frac{4(x-3)}{3x(x-3)} = \frac{6x - 4(x-3)}{3x(x-3)} \left(= \frac{2x + 12}{3x^2 - 9x} \right)$

b $B = 5 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{5}{1} - \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{5p^2}{p^2} - \frac{2p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{5p^2 - 2p - 1}{p^2}$

c $C = \frac{6}{a} \cdot \frac{5}{a+b} : \frac{4}{a+b} = \frac{6}{a} \cdot \frac{5}{a+b} \cdot \frac{a+b}{4} = \frac{30(a+b)}{4a(a+b)} \left(= \frac{15}{2a} \right)$

47 a $p + \frac{1}{2p} = \frac{2p^2}{2p} + \frac{1}{2p} = \frac{2p^2 + 1}{2p}$

b $\frac{2p^2 + 1}{2p} = \frac{2p^2}{2p} + \frac{1}{2p} = p + \frac{1}{2p}$

Het is de omgekeerde herleiding van vraag a.

Bladzijde 63

48 a $\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x+4} = \frac{2(x+4)}{(x-1)(x+4)} + \frac{5(x-1)}{(x-1)(x+4)} = \frac{2x+8}{(x-1)(x+4)} + \frac{5x-5}{(x-1)(x+4)} = \frac{7x+3}{(x-1)(x+4)}$

Dus op de puntjes moet $7x + 3$ staan.

b $\frac{A}{x+3} + \frac{3}{x-4} = \frac{A(x-4)}{(x+3)(x-4)} + \frac{3(x+3)}{(x+3)(x-4)} = \frac{Ax-4A}{(x+3)(x-4)} + \frac{3x+9}{(x+3)(x-4)} = \frac{Ax+3x+9-4A}{(x+3)(x-4)}$

Er moet gelden $Ax + 3x = x$, dus $A = -2$ (en er moet gelden $9 - 4A = 17$, dus $-4A = 8$ en dus $A = -2$).

Dus op de puntjes moet -2 staan.

49 a $q = 3$ en $p = 9$ geeft $K = \frac{0,15 \cdot 9 + 0,05 \cdot 3 + 10}{9 + 3} \approx 0,96$

De kosten per miniatuur zijn 0,96 euro.

b Als de helft van de miniaturen mislukt dan geldt $q = p$.

$$K = \frac{0,15p + 0,05q + 10}{p + q} \left. \vphantom{K = \frac{0,15p + 0,05q + 10}{p + q}} \right\} K = \frac{0,15p + 0,05p + 10}{p + p} = \frac{0,2p + 10}{2p} = \frac{0,2p}{2p} + \frac{10}{2p} = 0,1 + \frac{5}{p}$$

c Er moet gelden $0,1 + \frac{5}{p} = 0,52$.

De optie oplossen bij $0,1 + \frac{5}{x} = 0,52$ geeft $x \approx 11,9$.

Dus hij heeft $2 \cdot 12 = 24$ miniatures geprint.

d $q = 0$ geeft $K = \frac{0,15p + 10}{p}$ en verder geldt $O = 2,5p$.

$$W = O - K = 2,5p - \frac{0,15p + 10}{p} = \frac{2,5p^2}{p} - \frac{0,15p + 10}{p} = \frac{2,5p^2 - (0,15p + 10)}{p} = \frac{2,5p^2 - 0,15p - 10}{p}$$

e Er moet gelden $\frac{2,5p^2 - 0,15p - 10}{p} > 0$.

Voer in $y_1 = \frac{2,5x^2 - 0,15x - 10}{x}$.

De optie nulpunt geeft $x = 2,03 \dots$

Uit de plot volgt dat hij minimaal 3 miniatures heeft geprint.

50 a $\frac{x}{2} = \frac{3}{y}$ links en rechts vermenigvuldigen met 2 geeft $x = \frac{6}{y}$ en vervolgens links en rechts vermenigvuldigen met y geeft $xy = 6$.

b

$$\begin{array}{c} \frac{p}{Q} = \frac{1}{p} \\ \times Q \quad \left(\frac{p}{Q} = \frac{1}{p} \right) \times Q \\ p = \frac{Q}{p} \\ \times p \quad \left(p = \frac{Q}{p} \right) \times p \\ p^2 = Q \end{array}$$

Alternatieve uitwerking

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ geeft $A \cdot D = B \cdot C$, dus $\frac{p}{Q} = \frac{1}{p}$ geeft $p \cdot p = Q \cdot 1$, dus $Q = p^2$.

Bladzijde 64

51 a $y = \frac{z}{x}$ geeft $x = \frac{z}{y}$ b $z = \frac{x}{y}$ geeft $x = yz$ c $\frac{y}{x} = \frac{2}{z}$ geeft $2x = yz$
 $x = 0,5yz$

Bladzijde 65

52 a $P = \frac{4}{K+2}$

$$K+2 = \frac{4}{P}$$

$$K = \frac{4}{P} - 2$$

b $1,6N = \frac{L+1,5}{0,7}$

$$L+1,5 = 1,6N \cdot 0,7$$

$$L+1,5 = 1,12N$$

$$L = 1,12N - 1,5$$

c $\frac{4M}{0,8x+0,9} = 2x$

$$4M = 2x(0,8x+0,9)$$

$$4M = 1,6x^2 + 1,8x$$

$$M = 0,4x^2 + 0,45x$$

d $\frac{y}{2x} = \frac{4x+7}{4}$

$$4y = 2x(4x+7)$$

$$4y = 8x^2 + 14x$$

$$y = 2x^2 + 3,5x$$

53 a $3x = \frac{7}{y}$ geeft $y = \frac{7}{3x}$

$$\left. \begin{array}{l} K = \frac{3}{2x} + y \\ y = \frac{7}{3x} \end{array} \right\} K = \frac{3}{2x} + \frac{7}{3x} = \frac{9}{6x} + \frac{14}{6x} = \frac{23}{6x}$$

b $xy = 10$ geeft $y = \frac{10}{x}$

$$\left. \begin{array}{l} L = \frac{3}{4}y - \frac{2}{x} : y \\ y = \frac{10}{x} \end{array} \right\} L = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{x} - \frac{2}{x} : \frac{10}{x} = \frac{30}{4x} - \frac{2}{x} \cdot \frac{x}{10} = \frac{30}{4x} - \frac{2x}{10x} = \frac{15}{2x} - 0,2$$

54 a $H = 100$, $SPF = 20$ en $UV = 10$ geeft $T = \frac{100 \cdot 20}{10} = 200$

200 minuten is 3 uur en 20 minuten, ze kan dus veilig 3 uur in de zon doorbrengen.

b $T = \frac{H \cdot SPF}{UV}$
 $H \cdot SPF = T \cdot UV$
 $SPF = \frac{T \cdot UV}{H}$

c $H = 200$, $T = 4 \cdot 60 = 240$ en $UV = 8$ geeft $SPF = \frac{240 \cdot 8}{200} = 9,6$

Hij moet dus zonnebrand met factor 10 smeren.

d $T = \frac{H \cdot SPF}{UV}$
 $UV = \frac{H \cdot SPF}{T}$

e $SPF = 50$, $H = 60$ en $T = 3 \cdot 60 + 20 = 200$ geeft $UV = \frac{60 \cdot 50}{200} = 15$.

De UV-index is dan 15.

C4 a $A = \frac{7x}{2ab}$ $\left. \begin{array}{l} A = \frac{7x}{2ab} \\ x = 4a \end{array} \right\} A = \frac{7x}{2ab} = \frac{7 \cdot 4a}{2ab} = \frac{28a}{2ab} = \frac{14}{b}$

b $B = \frac{3p^2 - 4pq}{5p} = \frac{3p^2}{5p} - \frac{4pq}{5p} = 0,6p - 0,8q$

C5 a $C = \frac{x}{2y} \cdot \frac{4y}{x+1} = \frac{4xy}{2y(x+1)} = \frac{2x}{x+1}$

b $D = \frac{5}{6} : \frac{3a}{2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3a} = \frac{10}{18a} = \frac{5}{9a}$

C6 a $E = \frac{5}{2a} - \frac{3}{2a} = \frac{2}{2a} \left(= \frac{1}{a} \right)$

b $F = \frac{5}{2a} + \frac{3}{b} = \frac{5b}{2ab} + \frac{6a}{2ab} = \frac{6a+5b}{2ab}$

c $G = 10 - \frac{3}{b} = \frac{10b}{b} - \frac{3}{b} = \frac{10b-3}{b}$

C7

a $y = \frac{x - 0,5}{12z}$
 $x - 0,5 = 12yz$
 $x = 12yz + 0,5$

b $3y = \frac{9yz}{10x}$
 $10x = \frac{9yz}{3y}$
 $10x = 3z$
 $x = 0,3z$

c $\frac{3}{x} = \frac{5}{y}$
 $5x = 3y$
 $x = 0,6y$

6.3 Evenredigheden

Bladzijde 67

V6

a $A = at$
 $t = 2,7$ en $A = 13,5$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} A = at \\ t = 2,7 \text{ en } A = 13,5 \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} a \cdot 2,7 = 13,5 \\ a = 5 \end{matrix}$

Dus $A = 5t$.

b $t = 60$ geeft $A = 5 \cdot 60 = 300$, dus 300 miljard berekeningen.

V7

a $B = ap$
 $p = 4$ en $B = 6$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} B = ap \\ p = 4 \text{ en } B = 6 \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} a \cdot 4 = 6 \\ a = 1,5 \end{matrix}$

Dus $B = 1,5p$.

b $p = 15$ geeft $B = 1,5 \cdot 15 = 22,5$

Bladzijde 68

55

- a** 20 km per uur, dus in 4,5 uur fietst ze $4,5 \cdot 20 = 90$ km.
b 20 km per uur, dus in t uur fietst ze $20t$ km. Dus $s = 20t$.
c Met een evenredig verband.
d Bij verdubbeling van haar tijd verdubbelt de afstand.
e Per uur 15 km, dus 60 km in $\frac{60}{15} = 4$ uur.
f Per uur v km, dus 60 km in $\frac{60}{v}$ uur. Dus $t = \frac{60}{v}$.
g Bij verdubbeling van zijn snelheid, halveert de tijd.

Bladzijde 69

56

- a** I: omgekeerd evenredig verband
 II: evenredig verband
 III: omgekeerd evenredig verband
- b** $A = \frac{5,5}{b}$ geeft $b = \frac{5,5}{A}$
- c** $p = \frac{q}{25} = \frac{1}{25} \cdot q = 0,04q$
- d** $xy = 12$ geeft $y = \frac{12}{x}$

Bladzijde 70

57

- a** omgekeerd evenredig
b recht evenredig
c omgekeerd evenredig
d recht evenredig

58 a
$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{a}{p} \\ p &= 40,50 \text{ en } q = 6480 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{a}{40,50} &= 6480 \\ a &= 262\,440 \end{aligned}$$

Dus $q = \frac{262\,440}{p}$.

b $p = 32,40$ geeft $q = \frac{262\,440}{32,40} = 8100$
De maandelijkse verkoop is 8100 stuks.

c $q = 5400$ geeft $5400 = \frac{262\,440}{p}$
$$p = \frac{262\,440}{5400} = 48,6$$

De prijs is € 48,60.

59 K zijn de aanlegkosten in euro's en A is de oppervlakte in m^2 .

$$\left. \begin{aligned} K &= a \cdot A \\ A &= 120\,000 \text{ en } K = 288\,000 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a \cdot 120\,000 &= 288\,000 \\ a &= 2,4 \end{aligned}$$

Dus $K = 2,4A$.

$K = 1536$ geeft $2,4A = 1536$
 $A = 640$

De oppervlakte van die kavel is 640 m^2 .

Alternatieve uitwerking

De aanlegkosten in euro's zijn $\frac{288\,000}{120\,000} = 2,4$ keer zo groot als de oppervlakte in m^2 .

Dus de oppervlakte van die kavel is $\frac{1536}{2,4} = 640 \text{ m}^2$.

60 a $5 \cdot 430 = 2150$, $25 \cdot 86 = 2150$, $50 \cdot 43 = 2150$ en ook $125 \cdot 17,2 = 2150$
Het product $R \cdot t$ is constant, dus de tabel is in overeenstemming met een omgekeerd evenredig verband tussen R en t .

b $R = \frac{a}{t}$ met $a = t \cdot R = 2150$ (vraag a)

Dus $R = \frac{2150}{t}$.

c $\frac{13,3}{35} = 0,38$, $\frac{30,4}{80} = 0,38$, $\frac{43,7}{115} = 0,38$ en $\frac{210}{79,8} = 0,38$

Het quotiënt $\frac{N}{r}$ is constant, dus de tabel is in overeenstemming met een recht evenredig verband tussen N en r .

d $N = ar$ met $a = \frac{N}{r} = 0,38$ (vraag c)

Dus $N = 0,38r$.

Bladzijde 71

61 a
$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{a}{t} \\ t &= 3 \text{ en } p = 38 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{a}{3} &= 38 \\ a &= 114 \end{aligned}$$

Dus $p = \frac{114}{t}$.

b $t = 5,5$ geeft $p = \frac{114}{5,5} \approx 20,7$, dus er is dan nog 20,7% van de olie aanwezig.

c Bij 95% verdwenen olie hoort $p = 5$.

$p = 5$ geeft $5 = \frac{114}{t}$, dus $t = \frac{114}{5} = 22,8$.

Het duurt 22,8 jaar.

62 a
$$\left. \begin{array}{l} T = \frac{a}{d} \\ d = 2,5 \text{ en } T = 1,6 \end{array} \right\} \frac{a}{2,5} = 1,6$$

$$a = 4$$

Dus $T = \frac{4}{d}$.

b $d = 4,835$ geeft $T = \frac{4}{4,835} \approx 0,8$.

Dus de watertemperatuur is daar $0,8^\circ\text{C}$.

c $T = 1,4$ geeft $1,4 = \frac{4}{d}$

$$d = \frac{4}{1,4} = 2,857\dots$$

Dus op ongeveer 2900 meter diepte.

d
$$\left. \begin{array}{l} d = at \\ t = \frac{40}{60} \text{ en } d = 0,5 \end{array} \right\} \frac{a \cdot \frac{40}{60}}{a} = 0,5$$

$$a = 0,75$$

Dus $d = 0,75t$.

e $t = 2$ geeft $d = 0,75 \cdot 2 = 1,5$

$d = 1,5$ geeft $T = \frac{4}{1,5} \approx 2,7$, dus na 2 uur zakken meet de apparatuur $2,7^\circ\text{C}$.

63 $T = 1,2$ invullen in $T = \frac{4}{d}$ geeft $1,2 = \frac{4}{d}$

$$d = \frac{4}{1,2} = 3\frac{1}{3}$$

$d = 3\frac{1}{3}$ invullen in $d = 0,75t$ geeft $0,75t = 3\frac{1}{3}$

$$t = 4,44\dots$$

Dus na ongeveer 4 uur en $0,44\dots \cdot 60 \approx 27$ minuten.

Bladzijde 72

- 64 a** In 1 liter alcohol van 95% zit 0,95 liter alcohol en 0,05 liter water. Na toevoegen van 4 liter water heb je 5 liter oplossing waarvan 0,95 liter alcohol is.

Dus $\frac{0,95}{5} \cdot 100\% = 19\%$ van het volume bestaat dan uit alcohol, dat is dus alcohol van 19%.

b
$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{a}{c} \\ c = 95 \text{ en } V = 1 \end{array} \right\} \frac{a}{95} = 1$$

$$a = 95$$

Dus $V = \frac{95}{c}$.

$c = 76$ geeft $V = \frac{95}{76} = 1,25$.

Dus je moet $1,25 - 1 = 0,25$ liter water toevoegen.

c
$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{a}{c} \\ c = 0,15 \text{ en } V = 0,5 \end{array} \right\} \frac{a}{0,15} = 0,5$$

$$a = 0,075$$

Dus $V = \frac{0,075}{c}$.

$c = 3$ geeft $V = \frac{0,075}{3} = 0,025$

Je moet dus 0,025 liter van de voorradige oplossing met water aanvullen.

C8

$$\left. \begin{array}{l} a \quad T = \frac{a}{V} \\ V = 800 \text{ en } T = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{800} = 4 \\ a = 3200 \end{array}$$

$$\text{Dus } T = \frac{3200}{V}.$$

$$b \quad V = 850 \text{ geeft } T = \frac{3200}{850} = 3,76\dots$$

Dus 3 minuten en $0,76\dots \cdot 60 \approx 46$ seconden.

$$c \quad 3 \text{ minuten en } 12 \text{ seconden} = 3,2 \text{ minuten}$$

$$T = 3,2 \text{ geeft } 3,2 = \frac{3200}{V}$$

$$V = \frac{3200}{3,2} = 1000$$

Dus 1000 watt.

C9

a recht evenredig

b omgekeerd evenredig

6.4 Formules met machten

Bladzijde 73

65

$$a \quad x^2 \cdot x^3 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$$

$$b \quad (x^2)^3 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^6$$

$$c \quad (3x)^4 = 3x \cdot 3x \cdot 3x \cdot 3x = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = 3^4 \cdot x^4$$

Bladzijde 74

66

$$a \quad A = (a^3)^4 = a^{12}$$

$$b \quad B = \frac{12x^6}{4x^2} = 3x^4$$

$$c \quad C = 6a \cdot (a^4)^2 = 6a \cdot a^8 = 6a^9$$

$$d \quad D = \frac{x^2 \cdot 5x^8}{15x^5} = \frac{5x^{10}}{15x^5} = \frac{1}{3}x^5$$

67

$$a \quad A = (p^2)^3 \cdot (p^3)^5 = p^6 \cdot p^{15} = p^{21}$$

$$b \quad B = 10x^6 - 5(x^2)^3 = 10x^6 - 5x^6 = 5x^6$$

$$c \quad C = (2q^3)^2 + (3q^6)^2 = 4q^6 + 9q^{12}$$

$$d \quad D = \frac{-15p^6q^7}{5(pq)^2} = \frac{-15p^6q^7}{5p^2q^2} = -3p^4q^5$$

$$e \quad E = 5(x^8)^2 - 3x^{10} = 5x^{16} - 3x^{10}$$

$$f \quad F = \frac{24a^4b^2}{8a^3b} + \frac{(3ab)^3}{(6ab)^2} = 3ab + \frac{27a^3b^3}{36a^2b^2} = 3ab + 0,75ab = 3,75ab$$

68

$$a \quad \left. \begin{array}{l} Q = y(6y - x^2) \\ y = x^5 \end{array} \right\} Q = x^5(6x^5 - x^2) = 6x^{10} - x^7$$

$$b \quad \left. \begin{array}{l} R = -2at^2 + a^2t \\ t = -2a \end{array} \right\} \begin{array}{l} R = -2a(-2a)^2 + a^2(-2a) \\ R = -2a \cdot 4a^2 - 2a^3 \\ R = -8a^3 - 2a^3 = -10a^3 \end{array}$$

$$c \quad \left. \begin{array}{l} S = \frac{a^5b^3}{abp} \\ p = (ab)^2 = a^2b^2 \end{array} \right\} S = \frac{a^5b^3}{ab \cdot a^2b^2} = \frac{a^5b^3}{a^3b^3} = a^2$$

69

$$a \quad A = \frac{(x^3 + x)^2}{x^2} = \frac{(x^3 + x)(x^3 + x)}{x^2} = \frac{x^6 + x^4 + x^4 + x^2}{x^2} = \frac{x^6 + 2x^4 + x^2}{x^2} = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$b \quad B = \frac{(2p^2q + pq^4)(2p^2q - pq^4)}{(-5pq)^2} = \frac{4p^4q^2 - 2p^3q^5 + 2p^3q^5 - p^2q^8}{25p^2q^2} \\ = \frac{4p^4q^2 - p^2q^8}{25p^2q^2} = \frac{4p^4q^2}{25p^2q^2} - \frac{p^2q^8}{25p^2q^2} = 0,16p^2 - 0,04q^6$$

Bladzijde 75

70

$$a \quad \left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \\ G = \frac{9h^2}{10} \end{array} \right\} I = \frac{1}{3} \cdot \frac{9h^2}{10} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 0,9h^2 \cdot h = 0,3h^3$$

$$b \quad 1 \text{ liter} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

Er moet gelden $0,3h^3 = 1000$.

De optie oplossen bij $0,3x^3 = 1000$ geeft $x = 14,938 \dots$

Dus de hoogte is ongeveer 14,9 cm.

$$c \quad \left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \\ G = \frac{21p^2}{8} \end{array} \right\} I = \frac{1}{3} \cdot \frac{21p^2}{8} \cdot (6p - 2) = \frac{1}{3} \cdot 2,625p^2 \cdot (6p - 2) \\ h = 6p - 2 \quad = 0,875p^2 \cdot (6p - 2) = 5,25p^3 - 1,75p^2$$

$$d \quad \text{Er moet gelden } 5,25p^3 - 1,75p^2 = 1000.$$

De optie oplossen bij $5,25x^3 - 1,75x^2 = 1000$ geeft $x = 5,866 \dots$

$p = 5,866 \dots$ invullen in $h = 6p - 2$ geeft $h = 6 \cdot 5,866 \dots - 2 = 33,201 \dots$

Dus de lengte van een zijde is ongeveer 5,9 cm en de hoogte is 33,2 cm.

Bladzijde 76

71

$$a \quad y = 5,6x^{1,2} \cdot x^{3,4} = 5,6x^{4,6}$$

$$b \quad y = \frac{3,6x^{5,6}}{2x^{4,9}} = 1,8x^{0,7}$$

$$c \quad y = 0,5(x^{1,2})^{3,1} = 0,5x^{3,72}$$

$$d \quad y = \frac{x^{1,6}}{x^{1,4}} = x^{0,2}$$

$$e \quad y = (0,16x^{2,8})^{0,5} = 0,4x^{1,4}$$

$$f \quad y = \left(\frac{x^{1,75}}{x^{1,35}} \right)^{1,5} = (x^{0,4})^{1,5} = x^{0,6}$$

72

$$a \quad y = (100x^{0,6})^{1,4} \approx 631x^{0,84}$$

Dus $y = 631x^{0,84}$.

$$b \quad y = 12,8 \cdot (25x^{1,8})^{1,1} = 12,8 \cdot 25^{1,1} \cdot x^{1,98} \approx 442x^{1,98}$$

Dus $y = 442x^{1,98}$.

$$c \quad y = 0,0018 \cdot (312x^{0,75})^2 = 0,0018 \cdot 312^2 \cdot x^{1,5} \approx 175x^{1,5}$$

Dus $y = 175x^{1,5}$.

73

$$a \quad \left. \begin{array}{l} K = 20p^{1,15} \\ p = 80q \end{array} \right\} K = 20(80q)^{1,15} = 20 \cdot 80^{1,15} \cdot q^{1,15} \approx 3087q^{1,15}$$

Dus $K = 3087q^{1,15}$.

$$b \quad \left. \begin{array}{l} L = 0,05t^{2,5} \\ t = 155w^{0,6} \end{array} \right\} L = 0,05(155w^{0,6})^{2,5} = 0,05 \cdot 155^{2,5} \cdot w^{1,5} \approx 14955w^{1,5}$$

Dus $L = 14955w^{1,5}$.

$$c \quad \left. \begin{array}{l} M = 50f^{0,75} \cdot g^{1,25} \\ g = 20f^2 \end{array} \right\} M = 50f^{0,75} \cdot (20f^2)^{1,25} = 50f^{0,75} \cdot 20^{1,25} \cdot f^{2,5} \approx 2115 \cdot f^{3,25}$$

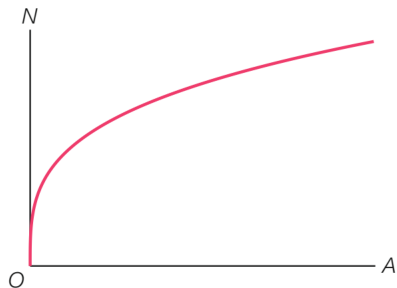
Dus $M = 2115 \cdot f^{3,25}$.

74 a $A = \frac{0,18(13,5q^{0,8})^{2,5}}{q^{0,6}} = \frac{0,18 \cdot 13,5^{2,5} \cdot q^2}{q^{0,6}} \approx 121q^{1,4}$

Dus $A = 121q^{1,4}$.

b $B = 1250(6,12x^{1,3} \cdot y^{2,7})^{0,5} = 1250 \cdot 6,12^{0,5} \cdot x^{0,65} \cdot y^{1,35} \approx 3092x^{0,65} \cdot y^{1,35}$
Dus $a \approx 3092$, $b = 0,65$ en $c = 1,35$.

75 a Voer in $y_1 = 3,3 \cdot x^{0,3}$.



b $A = 200$ geeft $N = 3,3 \cdot 200^{0,3} \approx 16$, dus 16 soorten.

c Er moet gelden $3,3 \cdot A^{0,3} = 20$.

De optie oplossen bij $3,3 \cdot x^{0,3} = 20$ geeft $x = 405,8 \dots$

De oppervlakte van het eiland is ongeveer 400 vierkante mijl.

d Bij een verdubbeling van de oppervlakte A hoort een oppervlakte van $2A$.

$N = 3,3(2A)^{0,3} = 3,3 \cdot 2^{0,3} \cdot A^{0,3} \approx 1,23 \cdot 3,3A^{0,3}$, dus 1,23 keer het aantal soorten.

De procentuele toename is dus ongeveer 23%.

Alternatieve uitwerking

Neem bijvoorbeeld $A = 100$ en $A = 200$.

$A = 100$ geeft $N = 3,3 \cdot 100^{0,3} = 13,13 \dots$ en $A = 200$ geeft $N = 3,3 \cdot 200^{0,3} = 16,17 \dots$

De procentuele toename is $\frac{16,17 \dots - 13,13 \dots}{13,13 \dots} \cdot 100\% \approx 23\%$.

e $\left. \begin{array}{l} N = 3,3 \cdot A^{0,3} \\ A = 0,386B \end{array} \right\} N = 3,3 \cdot (0,386B)^{0,3} = 3,3 \cdot 0,386^{0,3} \cdot B^{0,3} \approx 2,5B^{0,3}$
Dus $a \approx 2,5$.

Bladzijde 77

76 a $\frac{a^3}{a^3} = 1$ en ook $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$, dus $a^0 = 1$.

b $\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2}$ en ook $\frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}$, dus $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

77 a $A = (a^{-3})^4 = a^{-12}$

b $B = \frac{a^3}{a^8} = a^{-5}$

c $C = (a^{-4})^0 \cdot a^{-1} = a^0 \cdot a^{-1} = a^{-1}$

d $D = a^5 \cdot \frac{1}{a} = a^5 \cdot a^{-1} = a^4$

78 a $y = 2 \cdot x^{-7} \cdot x^3 = 2x^{-4}$

b $y = \frac{4x^3}{5x^{-8}} = 0,8x^{11}$

c $y = 4x \cdot (2x^2)^{-3} = 4x \cdot 0,125x^{-6} = 0,5x^{-5}$

d $y = 0,4x^{5,3} \cdot \frac{1}{4x^{3,5}} = \frac{0,4x^{5,3}}{4x^{3,5}} = 0,1x^{1,8}$

e $y = x^{6,3}(3x^{-2,1})^3 = x^{6,3} \cdot 27x^{-6,3} = 27x^0 = 27$

f $y = \frac{x^7}{0,1x^0} = \frac{x^7}{0,1 \cdot 1} = \frac{x^7}{0,1} = 10x^7$

Bladzijde 78

79 a $K = \frac{10x^{3,2}}{(4,5x^{2,5})^2} = \frac{10x^{3,2}}{20,25x^5} \approx 0,49x^{-1,8}$
 Dus $K = 0,49x^{-1,8}$.
b $L = \frac{2t^{1,6} \cdot 4t^{2,4}}{15t^6} = \frac{8t^4}{15t^6} = \frac{8}{15}t^{-2}$

80 a $y = m^n$
 $n = 3$ en $m = 0,6a^{0,6}$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} y = m^n \\ n = 3 \text{ en } m = 0,6a^{0,6} \end{matrix}} \right\} y = (0,6a^{0,6})^3 = 0,216a^{1,8}$
b $y = m^n$
 $n = -3$ en $m = \frac{2,5b^{1,2}}{20b^4}$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} y = m^n \\ n = -3 \text{ en } m = \frac{2,5b^{1,2}}{20b^4} \end{matrix}} \right\} y = \left(\frac{2,5b^{1,2}}{20b^4} \right)^{-3} = (0,125b^{-2,8})^{-3} = 512b^{8,4}$
c $y = m^n$
 $n = -2$ en $m = 2p^{3,1} \cdot 5q^{-0,8}$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} y = m^n \\ n = -2 \text{ en } m = 2p^{3,1} \cdot 5q^{-0,8} \end{matrix}} \right\} y = (2p^{3,1} \cdot 5q^{-0,8})^{-2} = 0,25p^{-6,2} \cdot 0,04q^{1,6} = 0,01p^{-6,2} \cdot q^{1,6}$
d $y = m^n$
 $n = 2$ en $m = 2c + 1,5$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} y = m^n \\ n = 2 \text{ en } m = 2c + 1,5 \end{matrix}} \right\} y = (2c + 1,5)^2 = (2c + 1,5)(2c + 1,5) = 4c^2 + 3c + 3c + 2,25 = 4c^2 + 6c + 2,25$

81 a $l = 5$ geeft $L = 1,02 \cdot 5^{1,03} = 5,35 \dots$
 $L = 5,35 \dots$ en $N = 24\,500$ geeft $W = \frac{24\,500}{5,35 \dots^{0,5}} = 10\,590,0 \dots$

De waarde van deze auto is ongeveer 10 600 euro.

b $W = 15\,000$ en $N = 56\,000$ geeft $15\,000 = \frac{56\,000}{L^{0,5}}$

De optie oplossen bij $15\,000 = \frac{56\,000}{x^{0,5}}$ geeft $x = 13,93 \dots$

$L = 13,93 \dots$ geeft $1,6l = 13,93 \dots$

$l \approx 8,7$

Dus de leeftijd van de auto is 8,7 jaar.

Alternatieve uitwerking

$W = \frac{N}{L^{0,5}}$
 $W = 15\,000, N = 56\,000$ en $L = 1,6l$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} W = \frac{N}{L^{0,5}} \\ W = 15\,000, N = 56\,000 \text{ en } L = 1,6l \end{matrix}} \right\} \frac{56\,000}{(1,6l)^{0,5}} = 15\,000$

De optie oplossen bij $\frac{56\,000}{(1,6x)^{0,5}} = 15\,000$ geeft $x \approx 8,7$.

Dus de leeftijd van de auto is 8,7 jaar.

c $W = \frac{N}{L^{0,5}}$
 $L = l^{0,98}$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} W = \frac{N}{L^{0,5}} \\ L = l^{0,98} \end{matrix}} \right\} W = \frac{N}{(l^{0,98})^{0,5}} = \frac{N}{l^{0,49}} = N \cdot \frac{1}{l^{0,49}} = N \cdot l^{-0,49}$

82 $W = \frac{N}{L^{0,5}}$
 $L = 0,82N^{0,08} \cdot l^{0,94}$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} W = \frac{N}{L^{0,5}} \\ L = 0,82N^{0,08} \cdot l^{0,94} \end{matrix}} \right\} W = \frac{N}{(0,82N^{0,08} \cdot l^{0,94})^{0,5}} = \frac{N}{0,82^{0,5} \cdot N^{0,04} \cdot l^{0,47}} \approx 1,10N^{0,96} \cdot l^{-0,47}$
 Dus $W = 1,10N^{0,96} \cdot l^{-0,47}$.

Bladzijde 79

C10 a $A = x^3 \cdot x^4 = x^7$
b $B = \frac{x^{12}}{x^3} = x^9$
c $C = (x^3)^4 = x^{12}$
d $D = (3x^4)^3 = 27x^{12}$

C11 a $y = 0,025 \cdot (30x^{1,6})^{1,4} = 0,025 \cdot 30^{1,4} \cdot x^{2,24} \approx 2,92x^{2,24}$
Dus $y = 2,92x^{2,24}$.

b $y = \frac{520}{(10x^{1,2})^{0,4}} = \frac{520}{10^{0,4} \cdot x^{0,48}} = \frac{520}{10^{0,4}} \cdot \frac{1}{x^{0,48}} \approx 207,02x^{-0,48}$
Dus $y = 207,02x^{-0,48}$.

c $y = \frac{x^{0,03}}{7x^{0,2}} = \frac{1}{7}x^{-0,17} \approx 0,14x^{-0,17}$
Dus $y = 0,14x^{-0,17}$.

Kennis en vaardigheidentest

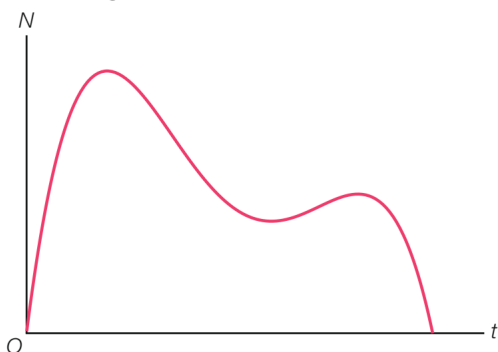
Bladzijde 80

1 a $\left. \begin{array}{l} R = 3p - q + 2 \\ q = p + 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} R = 3p - (p + 2) + 2 \\ R = 3p - p - 2 + 2 \\ R = 2p \end{array}$

b $\left. \begin{array}{l} k - l = 2 \\ k = l + 2 \\ A = 2kl + 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 2(l + 2)l + 3 \\ A = 2l(l + 2) + 3 \\ A = 2l^2 + 4l + 3 \end{array}$

c $\left. \begin{array}{l} K = 10 - 0,5q^2 \\ q = 2 - p \end{array} \right\} \begin{array}{l} K = 10 - 0,5(2 - p)^2 \\ K = 10 - 0,5(2 - p)(2 - p) \\ K = 10 - 0,5(4 - 4p + p^2) \\ K = 10 - 2 + 2p - 0,5p^2 \\ K = 8 + 2p - 0,5p^2 \end{array}$
Dus $K = -0,5p^2 + 2p + 8$.

2 a Voer in $y_1 = -0,36x^4 + 13,8x^3 - 176x^2 + 790x$.



b Bij 21:00 uur hoort $t = 15$.
 $t = 15$ geeft $N = 600$
Om 21:00 uur staan er 600 auto's in de parkeergarage.

c De optie maximum geeft $y \approx 1147$ en $y \approx 608$.
Dus de maxima zijn 1147 en 608 auto's.

d Bij 09:15 uur hoort $t = 3,25$.
 $t = 3,25$ geeft $N = 1142,06\dots$

Voer in $y_2 = 1142,06\dots$

De optie snijpunt geeft $x = 3,82\dots$ (en $x = 3,25$).

3 uur en $0,82\dots \cdot 60 \approx 49$ minuten na 06:00 uur is om 09:49 uur.

Dus deze drukte houdt aan tot 09:49 uur.

e De optie minimum geeft $x = 10,71\dots$

10 uur en $0,71\dots \cdot 60 \approx 43$ minuten na 06:00 uur is om 16:43 uur.

Afgerond op halve uren is 16:30 uur het meest gunstige tijdstip.

3 a $A = \frac{3xy}{6xy} - \frac{4xy}{5y} = 0,5 - 0,8x = -0,8x + 0,5$
b $B = \frac{2(5-x)}{4} = \frac{10-2x}{4} = \frac{10}{4} - \frac{2x}{4} = 2,5 - 0,5x = -0,5x + 2,5$
c $C = -\frac{3x}{5} + \frac{4}{x} \cdot \frac{2x}{5} = -0,6x + \frac{8x}{5x} = -0,6x + 1,6$

4 a $P = \frac{5y}{6x} : \frac{y}{2} = \frac{5y}{6x} \cdot \frac{2}{y} = \frac{10y}{6xy} = \frac{5}{3x}$
b $Q = \frac{4}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3x} + \frac{3}{3x} = \frac{7}{3x}$
c $R = \frac{2}{x} - \frac{4}{y} = \frac{2y}{xy} - \frac{4x}{xy} = \frac{2y-4x}{xy}$

Bladzijde 81

5 a $d = 3$ en $x = 250$ geeft $P = \frac{1500 + 350(3-1) + 25 \cdot 3 \cdot 250}{250} = 83,8$, dus € 83,80 per leerling.

b $x = 20$ geeft $P = \frac{1500 + 350(d-1) + 25 \cdot d \cdot 20}{20} (= 57,5 + 42,5d)$

Met $P = 200$ krijg je $\frac{1500 + 350(d-1) + 25 \cdot d \cdot 20}{20} = 200$.

De optie oplossen bij $\frac{1500 + 350(x-1) + 25 \cdot x \cdot 20}{20} = 200$ geeft $x \approx 3,35$.

Ze kunnen maximaal 3 dagen op kamp.

c $d = 1$ geeft $P = \frac{1500 + 350(1-1) + 25 \cdot 1 \cdot x}{x} = \frac{1500 + 25x}{x} = \frac{1500}{x} + \frac{25x}{x} = \frac{1500}{x} + 25$

d $P = \frac{1500}{x} + 25$

$P - 25 = \frac{1500}{x}$

$x = \frac{1500}{P-25}$

e $d = 5$ geeft $P = \frac{1500 + 350(5-1) + 25 \cdot 5 \cdot x}{x} = \frac{2900 + 125x}{x}$

$$\left. \begin{array}{l} T = x \cdot P \\ P = \frac{2900 + 125x}{x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = x \cdot \frac{2900 + 125x}{x} \\ T = 2900 + 125x \end{array}$$

Dus $T = 125x + 2900$.

6 a $C = \frac{a}{p}$
 $p = 1,20$ en $C = 40$ $\left. \begin{array}{l} \frac{a}{1,20} = 40 \\ a = 48 \end{array} \right\}$

Dus $C = \frac{48}{p}$.

b $p = 1,50$ geeft $C = 32$ en $p = 1,20$ geeft $C = 40$
Dus $40 - 32 = 8$ croissants meer.

7 a $B = aW$
 $W = 360\,000$ en $B = 450$ $\left. \begin{array}{l} a \cdot 360\,000 = 450 \\ a = 0,00125 \end{array} \right\}$

Dus $B = 0,00125W$.

b $B = 525$ geeft $0,00125W = 525$
 $W = 420\,000$

De waarde van hun woning is 420 000 euro.

c $W = 820\,000$ geeft $B = 0,00125 \cdot 820\,000 = 1025$

De familie Vonk betaalt 1025 euro per jaar.

Dus de totale inkomsten aan OZB voor de gemeente zijn $\frac{1025}{0,004} = 256\,250$ euro.

8

$$\begin{aligned} \text{a } & \left. \begin{array}{l} K = p^2 + 5q^6 \\ p = -5q^3 \end{array} \right\} K = (-5q^3)^2 + 5q^6 = 25q^6 + 5q^6 = 30q^6 \\ \text{b } & \left. \begin{array}{l} K = \frac{p^{0,6}}{8q^{0,1}} \\ p = 32q^{-0,4} \end{array} \right\} K = \frac{(32q^{-0,4})^{0,6}}{8q^{0,1}} = \frac{8q^{-0,24}}{8q^{0,1}} = q^{-0,34} \\ \text{c } & \left. \begin{array}{l} K = 10p^{1,5} \cdot q^{-1,5} \\ p = 9q^3 \end{array} \right\} K = 10(9q^3)^{1,5} \cdot q^{-1,5} = 10 \cdot 9^{1,5} \cdot q^{4,5} \cdot q^{-1,5} = 270q^3 \\ \text{d } & \left. \begin{array}{l} K = (4p)^{2,5} \\ p = \frac{1}{q^{0,4}} = q^{-0,4} \end{array} \right\} K = (4q^{-0,4})^{2,5} = 32q^{-1} \end{aligned}$$

Gemengde opgaven

Bladzijde 82

- 1 a Invullen van $d = 5$ en $t = 15$ geeft $P_{\max} = 3,19 + 2,35 \cdot 5 + 0,39 \cdot 15 = 20,79$.
De maximale prijs is €20,79.
- b Als je d km rijdt, betaal je 3 km minder. Dus in de formule van $P_{\max}$ wordt d vervangen door $d - 3$.
- c $P_{\text{GRT}} = 3,19 + 2,35(d - 3) + 0,39t = 3,19 + 2,35d - 7,05 + 0,39t = 2,35d + 0,39t - 3,86$
- d Bij 20 km/uur duurt een rit van d km $\frac{d}{20}$ uur.

$$\text{Dat is } 60 \cdot \frac{d}{20} = 3d \text{ minuten.}$$

Alternatieve uitwerking

20 km/uur = 1 km/3 minuten

Dus een rit van d km duurt $3d$ minuten.

$$\begin{aligned} \text{e } & \left. \begin{array}{l} P_{\max} = 3,19 + 2,35d + 0,39t \\ t = 3d \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_{\max} = 3,19 + 2,35d + 0,39 \cdot 3d \\ P_{\max} = 3,19 + 2,35d + 1,17d \\ P_{\max} = 3,19 + 3,52d \end{array} \end{aligned}$$

- 2 a Invullen van $G = 10$, $F = 10$ en $K = 2$ in de formule van S geeft $S = 10 - \frac{10}{2-1} = 0$.
Als je 20 tweekeuzevragen op de gok beantwoordt, dan verwacht je er 10 goed te hebben. Dat zou geen punten op moeten leveren.

$$\begin{aligned} \text{b } & \left. \begin{array}{l} K = 3 \text{ geeft } S = G - \frac{F}{3-1} = G - \frac{F}{2} = G - 0,5F \\ G + F = 20 \\ F = 20 - G \end{array} \right\} \begin{array}{l} S = G - 0,5(20 - G) \\ S = G - 10 + 0,5G \\ S = 1,5G - 10 \end{array} \end{aligned}$$

- c Invullen van $C = 5,5$ en maximale score = 20 in de formule van C geeft $\frac{S}{20} \cdot 9 + 1 = 5,5$
 $0,45 \cdot S = 4,5$
 $S = 10$

$$\begin{aligned} \text{Invullen van } S = 10 \text{ in } S = 1,5G - 10 \text{ geeft } 1,5G - 10 &= 10 \\ 1,5G &= 20 \\ G &= 13,33... \end{aligned}$$

Je moet dus minstens 14 vragen goed beantwoorden.

$$\begin{aligned} \text{d } & \left. \begin{array}{l} K = 4 \text{ geeft } S = G - \frac{F}{4-1} = G - \frac{F}{3} = G - \frac{1}{3}F \\ G + F = 30 \\ F = 30 - G \end{array} \right\} \begin{array}{l} S = G - \frac{1}{3}(30 - G) = G - 10 + \frac{1}{3}G = \frac{4}{3}G - 10 \\ S = \frac{4}{3}G - 10 \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} C = \frac{S}{30} \cdot 9 + 1 \\ S = \frac{4}{3}G - 10 \end{array} \right\} C &= \frac{\frac{4}{3}G - 10}{30} \cdot 9 + 1 = \frac{9(\frac{4}{3}G - 10)}{30} + 1 = \frac{12G - 90}{30} + 1 = \frac{12G}{30} - \frac{90}{30} + 1 = 0,4G - 2 \\ \text{Dus } a &= 0,4 \text{ en } b = -2. \end{aligned}$$

3

$$\mathbf{a} \quad A = \frac{2}{p} - \frac{p}{q} = \frac{2q}{pq} - \frac{p^2}{pq} = \frac{2q - p^2}{pq}$$

$$\mathbf{b} \quad B = \frac{1}{3}q + 4 + \frac{5}{q} = \frac{q}{3} + 4 + \frac{5}{q} = \frac{q^2}{3q} + \frac{12q}{3q} + \frac{15}{3q} = \frac{q^2 + 12q + 15}{3q}$$

$$\mathbf{c} \quad C = 3q - 2 \cdot \frac{2q}{2q+1} = \frac{3q(2q+1)}{2q+1} - \frac{2 \cdot 2q}{2q+1} = \frac{6q^2 + 3q - 4q}{2q+1} = \frac{6q^2 - q}{2q+1}$$

$$\mathbf{d} \quad D = \frac{-(4p^3q)^2}{(-2q)^4} = \frac{-16p^6q^2}{16q^4} = -\frac{p^6}{q^2}$$

$$\mathbf{e} \quad E = 3q \cdot \frac{q}{q-1} : \frac{q}{q+1} = \frac{3q}{1} \cdot \frac{q}{q-1} \cdot \frac{q+1}{q} = \frac{3q^2(q+1)}{q(q-1)} = \frac{3q(q+1)}{q-1} = \frac{3q^2 + 3q}{q-1}$$

$$\mathbf{f} \quad F = \left(\frac{9p^{1,25}}{p^{-0,15}} \right)^{1,5} = (9p^{1,4})^{1,5} = 27p^{2,1}$$

$$\mathbf{g} \quad \left. \begin{array}{l} q = 2p \\ p = 0,5q \\ G = p - \frac{3q}{2p} \end{array} \right\} G = 0,5q - \frac{3q}{2 \cdot 0,5q} = 0,5q - \frac{3q}{q} = 0,5q - 3$$

4

$$\mathbf{a} \quad S = 2 \text{ geeft } p = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \text{ en } B = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17$$

Dus hij krijgt 17 euro uitgekeerd.

$$\mathbf{b} \quad p = 9 \text{ geeft } 2S - 1 = 9$$

$$2S = 10$$

$$S = 5$$

$$p = 9 \text{ en } S = 5 \text{ geeft } B = 3 \cdot 9 + 4 \cdot 5 = 47$$

Dus hij krijgt 47 euro uitgekeerd.

$$\mathbf{c} \quad \left. \begin{array}{l} B = 3p + 4S \\ p = 2S - 1 \end{array} \right\} B = 3(2S - 1) + 4S = 6S - 3 + 4S = 10S - 3$$

$$B = 97 \text{ geeft } 10S - 3 = 97$$

$$10S = 100$$

$$S = 10$$

$$S = 10 \text{ geeft } p = 2 \cdot 10 - 1 = 19$$

Het gemiddelde bedrag op haar spaarrekening was 10000 euro en ze kreeg 19 punten.

5

$$\mathbf{a} \quad p - q = 10$$

$$-q = -p + 10$$

$$q = p - 10$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 4p - q + 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 4p - (p - 10) + 20 \\ A = 4p - p + 10 + 20 \\ A = 3p + 30 \end{array}$$

$$\mathbf{b} \quad 5p - 8q = 160$$

$$5p = 8q + 160$$

$$p = 1,6q + 32$$

$$\left. \begin{array}{l} B = 2pq - 3p + 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} B = 2(1,6q + 32)q - 3(1,6q + 32) + 4 \\ B = 2q(1,6q + 32) - 4,8q - 96 + 4 \\ B = 3,2q^2 + 64q - 4,8q - 92 \\ B = 3,2q^2 + 59,2q - 92 \end{array}$$

Dus $a = 3,2$, $b = 59,2$ en $c = -92$.

$$\mathbf{c} \quad 3q - 15p = 5$$

$$-15p = -3q + 5$$

$$p = 0,2q - \frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} W = 18 - 7,5p + 2q \end{array} \right\} \begin{array}{l} W = 18 - 7,5(0,2q - \frac{1}{3}) + 2q \\ W = 18 - 1,5q + 2,5 + 2q \\ W = 0,5q + 20,5 \end{array}$$

$$\mathbf{d} \quad x + z = 6$$

$$z = -x + 6$$

$$y = 2x + 5$$

$$\left. \begin{array}{l} F = 3xy + 4xz + 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} F = 3x(2x + 5) + 4x(-x + 6) + 8 \\ F = 6x^2 + 15x - 4x^2 + 24x + 8 \\ F = 2x^2 + 39x + 8 \end{array}$$

Bladzijde 84

6 a aantal Hertogdommen	0	1	2	3	4	5
aantal Hertogen	5	4	3	2	1	0
aantal overwinningpunten	0	7	12	15	16	15

Remco kan het beste 4 Hertogdommen en 1 Hertog kopen.

- b** Het aantal punten voor x Hertogdommen is $3x$ en het aantal punten voor y Hertogen is xy , dus $S = 3x + xy$.

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ y &= 9 - x \\ S &= 3x + xy \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} S &= 3x + x(9 - x) \\ S &= 3x + 9x - x^2 \\ S &= 12x - x^2 \end{aligned} \right.$$

- d** Voer in $y_1 = 12x - x^2$ en maak een tabel.

Lees uit de tabel af dat y_1 maximaal 36 is voor $x = 6$.

De beste strategie is het kopen van 6 Hertogdommen en 3 Hertogen.

$$\begin{aligned} x + y &= 12 \\ y &= 12 - x \\ S &= 3x + xy \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} S &= 3x + x(12 - x) \\ S &= 3x + 12x - x^2 \\ S &= 15x - x^2 \end{aligned} \right.$$

Voer in $y_1 = 15x - x^2$ en maak een tabel.

Lees uit de tabel af dat y_1 maximaal 56 is voor zowel $x = 7$ als $x = 8$.

Dus het maximale aantal overwinningpunten met 12 kaarten is 56.

$$\begin{aligned} 7 \quad a \quad h &= \frac{a}{r} \\ r &= 750 \text{ en } h = 120 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{a}{750} &= 120 \\ a &= 120 \cdot 750 = 90\,000 \end{aligned} \right.$$

Dus $h = \frac{90\,000}{r}$.

b $r = 500$ geeft $h = \frac{90\,000}{500} = 180$

Het hoogteverschil is 180 mm.

- c** 15 cm = 150 mm, dus $h = 150$.

$$\begin{aligned} h &= 150 \text{ geeft } \frac{90\,000}{r} = 150 \\ r &= \frac{90\,000}{150} = 600 \end{aligned}$$

Hierbij hoort een straal van 600 m.

$$\begin{aligned} d \quad h &= \frac{a}{r} \\ r &= 3320 \text{ en } h = 170 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{a}{3320} &= 170 \\ a &= 170 \cdot 3320 = 564\,400 \end{aligned} \right.$$

Dus $h = \frac{564\,400}{r}$.

Bladzijde 85

- 8** Bij het langzame schema hoort een tijdsduur van 5 uur en 15 minuten = $5\frac{1}{4}$ uur.

De werkelijke tijdsduur is 4 uur en 40 minuten = $4\frac{2}{3}$ uur.

De lengte van de etappe is $5\frac{1}{4} \cdot 42 = 220,5$ km.

Dus in de etappe is met een gemiddelde snelheid van $\frac{220,5}{4\frac{2}{3}} = 47,25$ km/uur gereden.

9 a De tijd over de eerste 10 km is 40 minuten 25 seconden $= \frac{40}{60} + \frac{25}{60 \cdot 60}$ uur $\approx 0,67361$ uur.

De gemiddelde snelheid over de eerste 10 km is $\frac{10 \text{ km}}{0,67361 \text{ uur}} \approx 14,845 \text{ km/uur}$.

De gemiddelde snelheid over de eerste 20 km is $\frac{20 \text{ km}}{1 + \frac{21}{60} + \frac{8}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,790 \text{ km/uur}$.

De gemiddelde snelheid over de eerste 30 km is $\frac{30 \text{ km}}{2 + \frac{1}{60} + \frac{36}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,803 \text{ km/uur}$.

b De gemiddelde snelheid over de eerste 40 km is $\frac{40 \text{ km}}{2 + \frac{41}{60} + \frac{42}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,842 \text{ km/uur}$.

De gemiddelde snelheid over de eerste 50 km is $\frac{50 \text{ km}}{3 + \frac{22}{60} + \frac{3}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,848 \text{ km/uur}$.

De gemiddelde snelheid over de eerste 60 km is $\frac{60 \text{ km}}{4 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,825 \text{ km/uur}$.

De gemiddelde snelheid over de eerste 70 km is $\frac{70 \text{ km}}{4 + \frac{44}{60} + \frac{26}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,766 \text{ km/uur}$.

De gemiddelde snelheid over de eerste 80 km is $\frac{80 \text{ km}}{5 + \frac{27}{60} + \frac{44}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,646 \text{ km/uur}$.

Dus het evenredige verband gaat op tot en met 70 kilometer.

7 Conclusies bij statistiek

7.1 Populatieproportie

Bladzijde 88

- V1** **a** Alle auto's met een Nederlands kenteken.
b Nee, auto's met een Nederlands kenteken die niet in de straat van Juul staan hebben geen kans om in de steekproef te komen.

Bladzijde 89

- 1** **a** $\frac{1,01}{9,41} \approx 0,111$
b Het deel blauwe auto's is $\frac{151}{1350} \approx 0,112$.

Bladzijde 90

- 2** $p = \frac{120}{10000} = 0,012$
 $\hat{p} = \frac{4}{250} = 0,016$

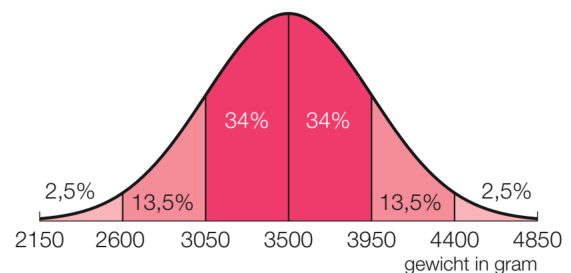
- 3** **a** De proportie rode knikkers is $\frac{16}{80} = 0,2$.
b De proportie blauwe knikkers is $\frac{12,5}{100} = 0,125$.
c Er zitten nog $\frac{9}{0,15} = 60$ knikkers in de pot.

- 4** **a** $p = \frac{1,23}{9,46} \approx 0,13$
b De steekproefomvang is $\frac{1612}{0,64} \approx 2519$.

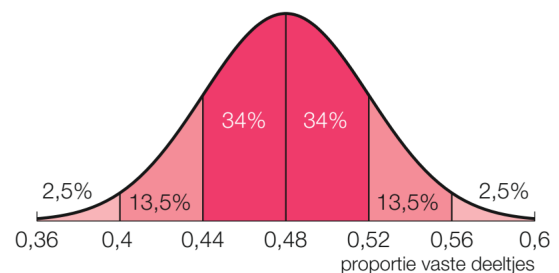
- 5** $1 - 0,740 = 0,260$
Dus $0,260 \cdot 1246 \approx 324$ werknemers.

Bladzijde 91

- V2** **a** Zie de schets.
Dus van 2,5% van de baby's.
b Zie de schets.
Dus $13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$ van de baby's.
c 900 gram is twee standaardafwijkingen, dus van 95% van de baby's.



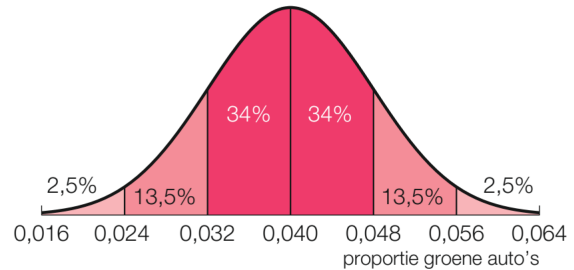
- V3** **a** Zie de schets.
Dus bij $34\% + 34\% = 68\%$ van de blikken.
b Zie de schets.
Dus bij $13,5\% + 34\% + 34\% + 13,5\% = 95\%$ van de blikken.



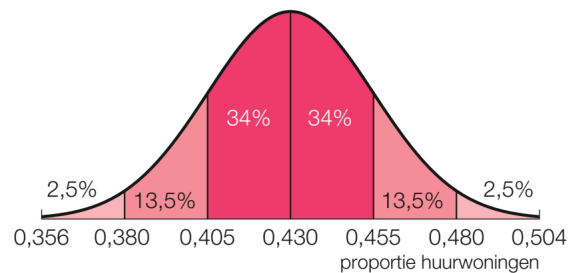
- 6 a** Het hangt van toeval af welke auto's ze in hun steekproef krijgen.
- b** De steekproefproportie is bij Katrijn $\frac{30}{136} \approx 0,221$, dus haar steekproefproportie wijkt meer af van het gemiddelde dan die van Jan.
De steekproef van Katrijn is daarom minder waarschijnlijk.
- c** Je verwacht gemiddeld $0,320 \cdot 136 = 43,52$ grijze auto's.

Bladzijde 93

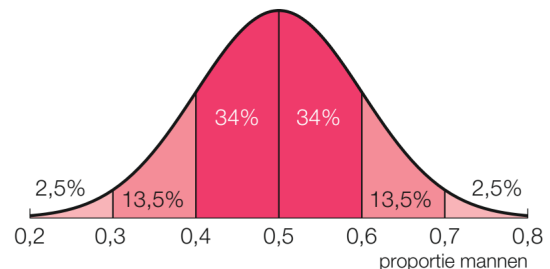
- 7 a** $\mu = p = 0,04$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,04(1 - 0,04)}{600}} = 0,008$
Zie de schets, dus bij $2,5\% + 13,5\% = 16\%$ van de steekproeven.
- b** De middelste 95%, dus tussen $\mu - 2\sigma = 0,024$ en $\mu + 2\sigma = 0,056$.



- 8 a** $\mu = p = 0,43$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,43(1 - 0,43)}{400}} = 0,02475\dots$
Zie de schets, dus bij ongeveer 2,5% van de steekproeven.
- b** $\mu = p = 0,43$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,43(1 - 0,43)}{1600}} = 0,01237\dots$
De middelste 95%, dus tussen $\mu - 2\sigma = 0,43 - 2 \cdot 0,01237\dots \approx 0,405$ en $\mu + 2\sigma = 0,43 + 2 \cdot 0,01237\dots \approx 0,455$.
- c** Dat is $0,5 - 0,43 = 0,07$ hoger dan het gemiddelde.
Dit is $\frac{0,07}{0,01237\dots} \approx 6$ keer de standaardafwijking boven het gemiddelde en dus zeer onwaarschijnlijk.

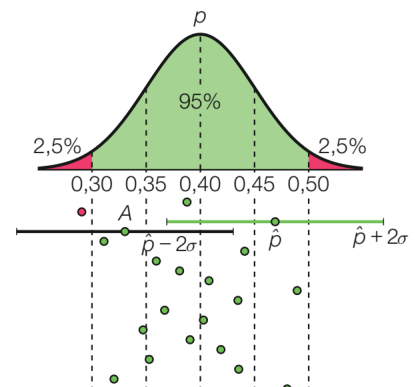


- 9 a** $\mu = p = 0,5$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,5(1 - 0,5)}{25}} = 0,1$
Zie de schets. Je verwacht dat $34\% + 34\% = 68\%$ van de steekproefproporties tussen 0,4 en 0,6 ligt en dus zeker niet 90% zoals bij de leerlingen van meneer Verheijen.
- b** Zie de schets. 2,5% van de steekproeven heeft een proportie tussen 0,2 en 0,3. $\hat{p} = 0,28$ kan voorkomen en dus betekent dit niet dat Pieter iets verkeerd heeft gedaan.



Bladzijde 94

- 10 a** Zie de figuur.
- b** Ja, want het interval loopt door de stippellijn bij p .
- c** Zie de figuur.
Ja, want het interval loopt door de stippellijn bij p .
- d** Nee, want de rode steekproef ligt meer dan 2σ van p .
- e** Bij $\frac{19}{20} \cdot 100\% = 95\%$ van de intervallen.



Bladzijde 95

- 11 a** $\hat{p} = 0,46$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,46(1 - 0,46)}{250}} = 0,0315\dots$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,46 - 2 \cdot 0,0315\dots \approx 0,397$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,46 + 2 \cdot 0,0315\dots \approx 0,523$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,397; 0,523]$.

- b** $\hat{p} = 0,36$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,36(1 - 0,36)}{700}} = 0,0181\dots$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,36 - 2 \cdot 0,0181\dots \approx 0,324$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,36 + 2 \cdot 0,0181\dots \approx 0,396$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,324; 0,396]$.

- c** $\hat{p} = \frac{56}{100} = 0,56$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,56(1 - 0,56)}{100}} = 0,0496\dots$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,56 - 2 \cdot 0,0496\dots \approx 0,461$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,56 + 2 \cdot 0,0496 \approx 0,659$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,461; 0,659]$.

Bladzijde 96

- 12 a** $\hat{p} = \frac{117}{150} = 0,78$

- b** $\sigma = \sqrt{\frac{0,78(1 - 0,78)}{150}} = 0,0338\dots$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,78 - 2 \cdot 0,0338\dots \approx 0,712$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,78 + 2 \cdot 0,0338\dots \approx 0,848$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,712; 0,848]$.

- c** Het interval $[0,712; 0,848]$ bevat met 95% zekerheid de populatieproportie mannelijke bruine kikkers in bergmeren van de Pyreneeën.

- 13 a** De variabele 'rookt sigaretten' is kwalitatief, want de waarden zijn geen getallen.

- b** $\hat{p} = \frac{158}{840} = 0,188\dots$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,188\dots(1 - 0,188\dots)}{840}} = 0,0134\dots$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,188\dots - 2 \cdot 0,0134\dots \approx 0,161$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,188\dots + 2 \cdot 0,0134\dots \approx 0,215$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,161; 0,215]$.

- c** Voor de mannen geldt $\hat{p} = \frac{93}{409} = 0,227\dots$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,227\dots(1 - 0,227\dots)}{409}} = 0,0207\dots$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,227\dots - 2 \cdot 0,0207\dots \approx 0,186$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,227\dots + 2 \cdot 0,0207\dots \approx 0,269$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rokers onder volwassen mannen is $[0,186; 0,269]$.

Van de vrouwen rookten er $158 - 93 = 65$, dus voor de vrouwen geldt

- $\hat{p} = \frac{65}{431} = 0,150\dots$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,150\dots(1 - 0,150\dots)}{431}} = 0,0172\dots$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,150\dots - 2 \cdot 0,0172\dots \approx 0,116$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,150\dots + 2 \cdot 0,0172\dots \approx 0,185$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rokers onder volwassen vrouwen is $[0,116; 0,185]$.

- d** De bovengrens 0,185 bij de vrouwen is kleiner dan de ondergrens 0,186 bij mannen, dus de intervallen overlappen niet.

- 14** Dus $\frac{192}{0,6621} \approx 290$ werknemers werden ondervraagd.

$$\hat{p} = 0,6621 \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{0,6621(1 - 0,6621)}{290}} = 0,0277\dots$$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,6621 - 2 \cdot 0,0277\dots \approx 0,607$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,6621 + 2 \cdot 0,0277\dots \approx 0,718$$

Het 95% betrouwbaarheidsinterval is $[0,607; 0,718]$.

- 15** Voor kandidaat A geldt $\hat{p} = \frac{487}{935} = 0,520\dots$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,520\dots(1 - 0,520\dots)}{935}} = 0,0163\dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,5208\dots - 2 \cdot 0,0163\dots \approx 0,488$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,5208\dots + 2 \cdot 0,0163\dots \approx 0,554$$

Om te winnen heeft een kandidaat meer dan de helft van de stemmen nodig, maar het 95%-betrouwbaarheidsinterval $[0,488; 0,554]$ bevat proporties kleiner dan 0,5 en proporties groter dan 0,5. Dus je kunt niet met 95%-betrouwbaarheid zeggen dat kandidaat A de verkiezingen zal gaan winnen.

Bladzijde 97

- 16** **a** Het gemiddelde gewicht ligt in het midden van het betrouwbaarheidsinterval.
b Het interval $[143; 151]$ bevat met 95% zekerheid het gemiddelde gewicht van de appels. Het is dus onwaarschijnlijk dat de appels gemiddeld minder dan 143 of meer dan 151 gram wegen.

Bladzijde 98

- 17** **a** $\bar{X} = 100$ en $\sigma = \frac{24}{\sqrt{144}} = 2$

$$\bar{X} - 2\sigma = 100 - 2 \cdot 2 = 96$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 100 + 2 \cdot 2 = 104$$

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[96; 104]$.

- b** $\bar{X} = 80,5$ en $\sigma = \frac{15,5}{\sqrt{100}} = 1,55$

$$\bar{X} - 2\sigma = 80,5 - 2 \cdot 1,55 = 77,4$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 80,5 + 2 \cdot 1,55 = 83,6$$

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[77,4; 83,6]$.

- c** $\bar{X} = 12,50$ en $\sigma = \frac{S}{\sqrt{n}} = 0,65$

$$\bar{X} - 2\sigma = 12,50 - 2 \cdot 0,65 = 11,20$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 12,50 + 2 \cdot 0,65 = 13,80$$

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[11,20; 13,80]$.

- 18** **a** $\bar{X} = 346$ gram en $\sigma = \frac{14}{\sqrt{25}} = 2,8$ gram

$$\bar{X} - 2\sigma = 346 - 2 \cdot 2,8 = 340,4$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 346 + 2 \cdot 2,8 = 351,6$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[340,4; 351,6]$ gram.

- b** De gemiddelde inhoud van 350 gram ligt in het 95%-betrouwbaarheidsinterval. Het interval geeft dus geen aanleiding om te twifelen aan de gemiddelde inhoud.
c Bij $n = 100$ wordt de bovengrens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval

$$\bar{X} + 2\sigma = 346 + 2 \cdot \frac{14}{\sqrt{100}} = 348,8 \text{ gram. De gemiddelde inhoud van 350 gram ligt}$$

nu niet in het interval.

19 a $\bar{X} = 12 \cdot 6 + 9 = 81$ maanden en $\sigma = \frac{10}{\sqrt{65}} = 1,24 \dots$ maanden

$$\bar{X} - 2\sigma = 81 - 2 \cdot 1,24 \dots \approx 78,5$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 81 + 2 \cdot 1,24 \dots \approx 83,5$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[78,5; 83,5]$ maanden.

- b** De gemiddelde leeftijd waarop basisschoolleerlingen hun zwemdiploma A behaalden ligt met 95% zekerheid tussen ongeveer 78,5 en 83,5 maanden.

20 a $\bar{X} = 8 \cdot 60 + 45 = 525$ minuten en $\sigma = \frac{2 \cdot 60 + 36}{\sqrt{10665}} = 1,51 \dots$ minuten

$$\bar{X} - 2\sigma = 525 - 2 \cdot 1,51 \dots = 521,97 \dots \text{ minuten, oftewel 8 uur en 42 minuten.}$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 525 + 2 \cdot 1,51 \dots = 528,02 \dots \text{ minuten, oftewel 8 uur en 48 minuten.}$$

b $\bar{X} = 9 \cdot 60 + 6 = 546$ minuten en $\sigma = \frac{5 \cdot 60 + 3}{\sqrt{9754}} = 3,06 \dots$ minuten

De ondergrens van het interval bij 2021 is $\bar{X} - 2\sigma = 546 - 2 \cdot 3,06 \dots = 539,86 \dots$ minuten.

Dat is groter dan de bovengrens van 528,02... minuten bij het interval van 2015, dus de betrouwbaarheidsintervallen overlappen elkaar niet.

- c** $\bar{X}$ ligt in het midden van het interval, dus dat is 9 uur en 30 minuten.

- d** Het gemiddelde aantal minuten zitten per week in 2021 is $7 \cdot 546 = 3822$ minuten.

9 uur en 30 minuten is 570 minuten, dus voor doordeweekse dagen is het

gemiddelde aantal minuten zitten per week $5 \cdot 570 = 2850$ minuten.

In het weekend is dat $3822 - 2850 = 972$ minuten. Dus gemiddeld

$972 : 2 = 486$ minuten per weekenddag, oftewel 8 uur en 6 minuten.

21 a $\bar{X}$ ligt in het midden van het interval, dus $\bar{X} = \frac{11,4 + 12,1}{2} = 11,75$ jaar per

volwassene. In totaal is dat $144 \cdot 11,75 = 1692$ jaar scholing.

$1692 < 1700$, dus de personen in de steekproef hebben samen minder dan 17 eeuwen scholing gehad.

b $\bar{X} = 11,75$, dus $2\sigma = 12,1 - 11,75 = 0,35$ en $\sigma = \frac{0,35}{2} = 0,175$ jaar per volwassene.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{S}{\sqrt{n}} \\ \sigma &= 0,175 \text{ en } \sqrt{n} = \sqrt{144} = 12 \end{aligned} \right\} 0,175 = \frac{S}{12}$$

Dus de steekproefstandaardafwijking is 2,1 jaar per volwassene.

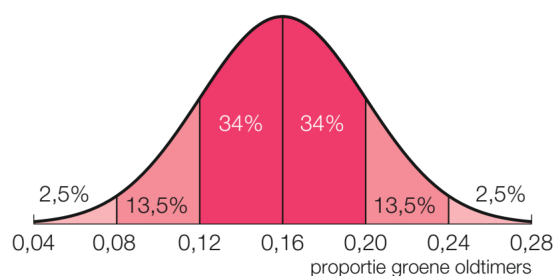
Bladzijde 100

C1 a $0,16 \cdot 220\,125 = 35\,220$ groene oldtimers

b $\frac{45}{0,18} = 250$ oldtimers

c $p = 0,16$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,16(1 - 0,16)}{84}} = 0,04$

Zie de schets, dus bij 2,5%.



C2 a $\hat{p} = \frac{326}{795} = 0,41 \dots$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,41 \dots (1 - 0,41 \dots)}{795}} = 0,0174 \dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,41 \dots - 2 \cdot 0,0174 \dots \approx 0,375$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,41 \dots + 2 \cdot 0,0174 \dots \approx 0,445$$

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,375; 0,445]$.

- b** Het interval $[0,375; 0,445]$ bevat met 95% zekerheid de populatieproportie volwassen Nederlanders die vrijwilligerswerk doen.

C3 $\bar{X} = 2280$ en gram $\sigma = \frac{340}{\sqrt{210}} = 23,46... \text{ gram}$

$$\bar{X} - 2\sigma = 2280 - 2 \cdot 23,46... \approx 2233$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 2280 + 2 \cdot 23,46... \approx 2327$$

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [2233, 2327] gram.

7.2 Betrouwbaarheidsintervallen toepassen

Bladzijde 101

- 22 a** Bij deelvraag 1 hoort de kwalitatieve variabele: kijkt dagelijks.
Bij deelvraag 2 hoort de kwantitatieve variabele: kijktijd (minuten).
b Bij deelvraag 1 hoort een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.
Bij deelvraag 2 hoort een betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde.

Bladzijde 102

23 a $\hat{p} = \frac{59}{170} = 0,347... \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{0,347...(1 - 0,347...)}{170}} = 0,036...$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,347... - 2 \cdot 0,036... \approx 0,274$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,347... + 2 \cdot 0,036... \approx 0,420$$

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,274; 0,420].

- b** Bij 0,274 hoort 27,4% en bij 0,408 hoort 40,8%.
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [27,4%; 40,8%].

c $0,274... \cdot 10\,163 \approx 2785$

$$0,420... \cdot 10\,163 \approx 4269$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [2785, 4269] leden.

Bladzijde 103

- 24 a** Het gaat om de kwantitatieve variabele *tijd*, dus een betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde ligt het meest voor de hand.
b Het gaat om de kwalitatieve variabele *wel/geen rijbewijs*, dus een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie ligt het meest voor de hand.
c Het gaat om de kwalitatieve variabele *wel/niet afval scheiden*, dus een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie ligt het meest voor de hand.
d Het gaat om een kwantitatieve variabele zoals *snelheid* of *tijd*, dus een betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde ligt het meest voor de hand.
e Het gaat om de kwalitatieve variabele *wel/geen score boven het landelijk gemiddelde*, dus een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie ligt het meest voor de hand.

25 a $\bar{X} = 150$ minuten en $\sigma = \frac{40}{\sqrt{150}} = 3,26... \text{ minuten}$

$$\bar{X} - 2\sigma = 150 - 2 \cdot 3,26... \approx 143,5$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 150 + 2 \cdot 3,26... \approx 156,5$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [143,5; 156,5] minuten.

b $\hat{p} = 0,6$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,6(1 - 0,6)}{150}} = 0,04$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,6 - 2 \cdot 0,04 = 0,52$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,6 + 2 \cdot 0,04 = 0,68$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,52; 0,68].

- 26 a** Dat alle aanwezigen op het congres een even grote kans hadden om in de steekproef te komen.

b $\bar{X} = 21,7$ jaar en $\sigma = \frac{3,7}{\sqrt{200 - 79}} = 0,33 \dots$ jaar

$$\bar{X} - 2\sigma = 21,7 - 2 \cdot 0,33 \dots \approx 21,0$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 21,7 + 2 \cdot 0,33 \dots \approx 22,4$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [21,0; 22,4] jaar.

c $\hat{p} = \frac{79}{200} = 0,395$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,395(1 - 0,395)}{200}} = 0,034 \dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,395 - 2 \cdot 0,034 \dots \approx 0,326$$

$\frac{1}{3}$ ligt tussen 0,326 en 0,395, dus $\frac{1}{3}$ ligt in het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Bladzijde 104

27 a $\hat{p} = \frac{3 + 12}{75} = 0,2$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,2(1 - 0,2)}{75}} = 0,0461 \dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,2 - 2 \cdot 0,0461 \dots = 0,107 \dots \text{ en } 4000 \cdot 0,107 \dots \approx 430$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,2 + 2 \cdot 0,0461 \dots = 0,292 \dots \text{ en } 4000 \cdot 0,292 \dots \approx 1170$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [430, 1170] mannelijke lo-docenten.

b $\bar{X} = 2750$ meter en $\sigma = \frac{550}{\sqrt{60}} = 71,0 \dots$ meter

$$\bar{X} - 2\sigma = 2750 - 2 \cdot 71,0 \dots \approx 2608$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 2750 + 2 \cdot 71,0 \dots \approx 2892$$

Het interval [2608, 2892] ligt niet geheel binnen het interval [2700, 3100] dat een zeer goede conditie aangeeft. Dus kun je niet met 95% zekerheid concluderen dat de gemiddelde vrouwelijke lo-docent een zeer goede conditie heeft.

28 $\hat{p} = \frac{425}{500} = 0,85$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,85(1 - 0,85)}{500}} = 0,015 \dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,85 - 2 \cdot 0,015 \dots = 0,818 \dots \text{ en } 0,818 \dots \cdot 187\,000 \approx 153\,000$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,85 + 2 \cdot 0,015 \dots = 0,881 \dots \text{ en } 0,881 \dots \cdot 187\,000 \approx 165\,000$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [153 000, 165 000] Nijmegenaren.

29 $\hat{p} = \frac{160}{400} = 0,4$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,4(1 - 0,4)}{400}} = 0,024 \dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,4 - 2 \cdot 0,024 \dots = 0,351 \dots$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,4 + 2 \cdot 0,024 \dots = 0,448 \dots$$

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie winnende krasloten is [0,351... ; 0,448...].

Als de proportie winnende krasloten 0,4 is moet je voor één winnend kraslot

gemiddeld $\frac{1}{0,4} = 2,5$ krasloten kopen. Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval

bij het gemiddelde aantal krasloten dat nodig is om een prijs te hebben, heeft

ondergrens $\frac{1}{0,448 \dots} \approx 2,23$ en bovengrens $\frac{1}{0,351 \dots} \approx 2,85$.

Het gevraagde 95%-betrouwbaarheidsinterval is dus [2,23; 2,85] krasloten.

- 30 a** Het teken $\pm$ betekent 'plus of min' en $8 - 3 = 5$ en $8 + 3 = 11$.

- b** [15, 19] kun je schrijven als 17 ± 2

[0,8; 0,9] kun je schrijven als $0,85 \pm 0,05$

- 31** a $\frac{0,405 + 0,435}{2} = 0,42$ en $0,42 - 0,405 = 0,015$, dus $0,42 \pm 0,015$.
 b $0,21 - 0,015 = 0,195$ en $0,21 + 0,015 = 0,225$, dus $[0,195; 0,225]$.
 c $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 180 \pm 2 \cdot \frac{9,8}{\sqrt{210}} \approx 180 \pm 1,35$, oftewel $[178,65; 181,35]$.
 d $p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,12 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,12(1-0,12)}{11\,733}} \approx 0,12 \pm 0,006$, oftewel $[0,114; 0,126]$.

- 32** a $\hat{p} = \frac{10\,098}{26\,580} = 0,379\dots$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,379\dots(1-0,379\dots)}{26\,580}} = 0,0029\dots$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,379\dots - 2 \cdot 0,0029\dots \approx 0,374$, oftewel 37,4%
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,379\dots + 2 \cdot 0,0029\dots \approx 0,386$, oftewel 38,6%
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[37,4\%; 38,6\%]$.
 b Dit is niet waarschijnlijk, want 40% ligt niet in het interval $[37,4\%; 38,6\%]$.
 c De steekproefproportie in Friesland is $\frac{28\,723}{117\,000} = 0,245\dots$
 Het verschil is $0,379\dots - 0,245\dots \approx 0,134$.

- 33** a $\bar{X} = 210$ gram en $\sigma = \frac{80}{\sqrt{50}} = 11,31\dots$ gram
 $\bar{X} - 2\sigma = 210 - 2 \cdot 11,31\dots \approx 187$
 $\bar{X} + 2\sigma = 210 + 2 \cdot 11,31\dots \approx 233$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[187, 233]$ gram (of 210 ± 23 gram).
 Omdat 127 gram ver buiten dit interval ligt, gaat het hier waarschijnlijk niet om een representatieve steekproef. De intervalnotatie is hier het handigst, want dan kun je goed zien dat 127 gram niet in het interval ligt.
 b Het 95%-betrouwbaarheidsinterval betekent dat met 95% zekerheid de gemiddelde groente-inname van jongeren van 14-18 jaar tussen 90 en 170 gram per dag is. Het interval geeft een betrouwbare schatting van het populatiegemiddelde op basis van de steekproef, maar zegt niets over hoeveel groenten 95% van de jongens eten.

- C4** a $\hat{p} = \frac{90}{150} = 0,6$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{150}} = 0,04$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,6 - 2 \cdot 0,04 = 0,52$ en $0,52 \cdot 1200 = 624$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,6 + 2 \cdot 0,04 = 0,68$ en $0,68 \cdot 1200 = 816$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[624, 816]$ bezoekers (of 720 ± 96 bezoekers).
 b $\bar{X} = 27,5$ jaar en $\sigma = \frac{4,2}{\sqrt{90}} = 0,44\dots$ jaar
 $\bar{X} - 2\sigma = 27,5 - 2 \cdot 0,44\dots \approx 26,6$
 $\bar{X} + 2\sigma = 27,5 + 2 \cdot 0,44\dots \approx 28,4$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[26,6; 28,4]$ jaar (of $27,5 \pm 0,9$ jaar).

- C5** a $\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,34 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{500}} \approx 0,34 \pm 0,042$, oftewel $[0,298; 0,382]$
 b $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 27 \pm 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{135}} \approx 27 \pm 1,4$, oftewel $[25,6; 28,4]$
 c $\hat{p} = \frac{0,767 + 0,793}{2} = 0,78$ en $2\sigma = 0,78 - 0,767 = 0,013$
 Dus $0,78 \pm 0,013$ en $\sigma = \frac{0,013}{2} = 0,0065$.
 d $5,42 - 0,83 = 4,59$ en $5,42 + 0,83 = 6,25$, dus $[4,59; 6,25]$.

7.3 Steekproefomvang

Bladzijde 108

- 34 a** Noura: $\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,47 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,47(1-0,47)}{500}} \approx 0,47 \pm 0,045$ (of $[0,425; 0,515]$)
Jos: $\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,48 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,48(1-0,48)}{100}} \approx 0,48 \pm 0,100$ (of $[0,380; 0,580]$)
- b** Noura: breedte $\approx 2 \cdot 0,045 = 0,09$
Jos: breedte $\approx 2 \cdot 0,100 = 0,2$
Dus het betrouwbaarheidsinterval van Jos is het breedst.
- c** De onderzoeksvraag is het bepalen van de populatieproportie. Het interval van Noura is minder breed en geeft dus een nauwkeuriger antwoord op de onderzoeksvraag.
Haar interval is nauwkeuriger omdat ze meer mensen heeft ondervraagd.

Bladzijde 109

- 35** Bijvoorbeeld: grotere steekproeven kosten meer tijd en meer geld.

- 36** Nederlandse mannen: $4 \cdot \frac{9}{\sqrt{48}} = 5,19 \dots$ mmHG
Nederlandse vrouwen: $4 \cdot \frac{8}{\sqrt{55}} = 4,31 \dots$ mmHG
Italiaanse mannen: $4 \cdot \frac{7}{\sqrt{45}} = 4,17 \dots$ mmHG
Italiaanse vrouwen: $4 \cdot \frac{10}{\sqrt{50}} = 5,65 \dots$ mmHG

Het interval bij Italiaanse mannen is het meest nauwkeurig.

Alternatieve uitwerking

Voor een nauwkeurig interval moet S zo klein mogelijk en n zo groot mogelijk zijn.
Situaties waarbij S groter is en n kleiner zullen dus nooit een nauwkeuriger interval opleveren.
De nauwkeurigheid bij de Nederlandse mannen is dus zeker lager dan bij de Nederlandse vrouwen.
De nauwkeurigheid bij de Italiaanse vrouwen is dus zeker lager dan bij de Nederlandse vrouwen.
Wat overblijft is het vergelijken van de Nederlandse vrouwen met de Italiaanse mannen:

$$\text{Nederlandse vrouwen: } 4 \cdot \frac{8}{\sqrt{55}} = 4,31 \dots \text{ mmHG}$$

$$\text{Italiaanse mannen: } 4 \cdot \frac{7}{\sqrt{45}} = 4,17 \dots \text{ mmHG}$$

Het interval bij Italiaanse mannen is het meest nauwkeurig.

Bladzijde 110

- 37 a** $\hat{p} = \frac{47}{575} = 0,081 \dots$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,081 \dots (1 - 0,081 \dots)}{575}} = 0,011 \dots$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,081 \dots - 2 \cdot 0,011 \dots \approx 0,059$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,081 \dots + 2 \cdot 0,011 \dots \approx 0,105$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,059; 0,105]$ (of $0,082 \pm 0,023$).
Het interval $[0,059; 0,105]$ bevat met 95% zekerheid de proportie rode auto's in Nederland.

b Bij de 900 onderzochte auto's zijn er $47 + 30 = 77$ auto's rood.

$$\hat{p} = \frac{77}{900} = 0,085... \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{0,085...(1 - 0,085...)}{900}} = 0,093...$$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,085... - 2 \cdot 0,093... \approx 0,067$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,085... + 2 \cdot 0,093... \approx 0,104$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,067; 0,104]$ (of $0,086 \pm 0,019$).

c De antwoorden zijn beide even betrouwbaar (de betrouwbaarheid is 95%).

Het antwoord bij vraag b is nauwkeuriger, want het interval is minder breed.

38 meisjes van 6 maanden oud: breedte $= 4 \cdot \frac{2,8}{\sqrt{38}} = 1,81... \text{ cm}$

meisjes van 12 maanden oud: breedte $= 4 \cdot \frac{3,2}{\sqrt{38}} = 2,07... \text{ cm}$

jongens van 6 maanden oud: breedte $= 4 \cdot \frac{3,1}{\sqrt{43}} = 1,89... \text{ cm}$

jongens van 12 maanden oud: breedte $= 4 \cdot \frac{3,4}{\sqrt{43}} = 2,07... \text{ cm}$

Het interval voor meisjes van 6 maanden oud is het meest nauwkeurig.

Alternatieve uitwerking

Per waarde van n hoeft je alleen de kleinste waarde van S te bekijken als je het meest nauwkeurige interval zoekt.

meisjes van 6 maanden oud: breedte $= 4 \cdot \frac{2,8}{\sqrt{38}} = 1,81... \text{ cm}$

jongens van 6 maanden oud: breedte $= 4 \cdot \frac{3,1}{\sqrt{43}} = 1,89... \text{ cm}$

Het interval voor meisjes van 6 maanden oud is het meest nauwkeurig.

39 a geslacht: kwalitatief
gewicht: kwantitatief

b Bij de vrouwelijke katten is S kleiner en n groter dan bij de mannelijke katten.

Dus de breedte $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ is kleiner bij de vrouwelijke katten en dus is dat interval nauwkeuriger.

c $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 3215 \pm 2 \cdot \frac{620}{\sqrt{109}} \approx 3215 \pm 119$, dus $[3096, 3334]$ gram

d Door het afronden van $[4053, 4349]$ gram tot $[4100, 4300]$ gram, wijken de grenzen minder dan 2σ af van $\bar{X}$. Dit interval bevat dus met minder dan 95% zekerheid het populatiegemiddelde en is daarom minder dan 95% betrouwbaar.

Bladzijde 111

40

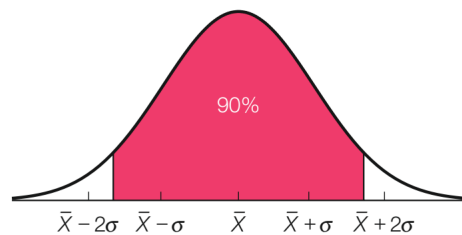
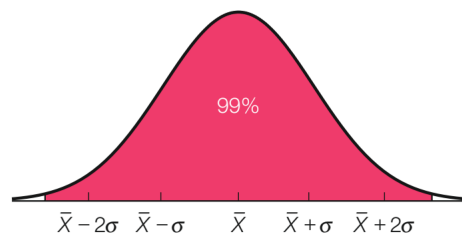
	steekproef			95%-betrouwbaarheidsinterval	
	n	gevaccineerd	$\hat{p}$	interval	breedte
Nederland	200	170	0,85	[0,80; 0,90]	0,10
Frankrijk	140	112	0,8	0,8 $\pm$ 0,07	0,14
Duitsland	150	126	0,84	0,84 $\pm$ 0,06	0,12
Zweden	230	207	0,9	[0,86; 0,94]	0,08

- 41 a** Dit zijn situaties waarbij het heel belangrijk is om meer zekerheid te hebben over de waarde van de populatieproportie of het populatiegemiddelde. Bijvoorbeeld bij het bepalen van een veilige dosis medicatie, de proportie gifstoffen in drinkwater of de veiligheidsmarges bij de bouw van een brug.

- b** Bij 95% betrouwbaarheid is volgens de vuistregels bij de normale verdeling de afwijking van het

populatiegemiddelde $2\sigma = 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, dus dan geldt $a = 2$.

Bij 90% betrouwbaarheid is de afwijking kleiner dan 2σ (zie de bovenste figuur), dus $a < 2$. En bij 99% betrouwbaarheid is de afwijking groter dan 2σ (zie de onderste figuur), dus $a > 2$.



- c** Er geldt $\bar{X} - a \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 11,92$.

$$\bar{X} = 12,5, S = 3,2 \text{ en } n = 200 \text{ geeft } 12,5 - a \cdot \frac{3,2}{\sqrt{200}} = 11,92$$

$$\text{De optie oplossen bij } 12,5 - x \cdot \frac{3,2}{\sqrt{200}} = 11,92$$

geeft $x = 2,56 \dots$

Dus $a \approx 2,6$.

- d** $\bar{X} = 12,5, S = 3,2, n = 200$ en $a = 1,6$ geeft $\left[12,5 - 1,6 \cdot \frac{3,2}{\sqrt{200}}; 12,5 + 1,6 \cdot \frac{3,2}{\sqrt{200}} \right] \approx [12,14; 12,86]$ (of $12,5 \pm 0,36$).

- e** Om de betrouwbaarheid te verhogen neem je meer marge op het steekproefgemiddelde. Dit maakt het betrouwbaarheidsinterval breder en dus minder nauwkeurig. Bij het 99%-betrouwbaarheidsinterval krijg je zo een breedte van ongeveer $4 \cdot 2,6$ terwijl dit bij het 90%-betrouwbaarheidsinterval maar ongeveer $4 \cdot 1,6$ is.

- f** Bij grotere waarden van n worden betrouwbaarheidsintervallen smaller. Een onderzoeker kan dus een grotere steekproef nemen.

Bladzijde 112

- 42 a** $\hat{p} = \frac{28}{70} = 0,4$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{70}} = 0,058 \dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,4 - 2 \cdot 0,058 \dots \approx 0,283$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,4 + 2 \cdot 0,058 \dots \approx 0,517$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,283; 0,517]$ (of $0,4 \pm 0,117$).

- b** Er geldt breedte $= 4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$. Met $\hat{p} = 0,4$ en breedte $= 0,1$ krijg je $4 \cdot \sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{n}} = 0,1$.

- c** Invullen van $n = 384$ geeft $4 \cdot \sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{384}} = 0,1$ dus het klopt.

- d** $\hat{p} = \frac{180}{400} = 0,45$ en dit geeft breedte $= 4 \cdot \sqrt{\frac{0,45(1-0,45)}{400}} = 0,099 \dots$

Hij krijgt dus inderdaad een breedte van maximaal 0,1.

Bladzijde 113

- 43 a** breedte $= 0,46 - 0,34 = 0,12$ en $\hat{p} = \frac{0,34 + 0,46}{2} = 0,4$

$$\text{Los op } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{n}} = 0,12.$$

$$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{x}} = 0,12 \text{ geeft } x \approx 267.$$

Dus de steekproefomvang was 267.

b breedte = $590 - 540 = 50$ en $S = 205$

$$\text{Los op } 4 \cdot \frac{205}{\sqrt{n}} = 50.$$

$$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \frac{205}{\sqrt{x}} = 50 \text{ geeft } x \approx 269.$$

Dus de steekproefomvang was 269.

44 breedte = $3,4 - 3,0 = 0,4$ uur en $S = 1,6$ uur

$$\text{Los op } 4 \cdot \frac{1,6}{\sqrt{n}} = 0,4.$$

$$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \frac{1,6}{\sqrt{x}} = 0,4 \text{ geeft } x = 256.$$

Dus de steekproefomvang was 256 Nederlanders.

45 breedte = 50 mL en $S = 180$ mL

$$\text{Los op } 4 \cdot \frac{180}{\sqrt{n}} = 50.$$

$$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \frac{180}{\sqrt{x}} = 50 \text{ geeft } x = 207,36.$$

Dus de grootte van de steekproef moet minimaal 208 klanten van koffiezaken zijn.

Bladzijde 114

46 breedte = 0,03 en $\hat{p} = 0,15$

$$\text{Los op } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,15(1 - 0,15)}{n}} = 0,03.$$

$$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,15(1 - 0,15)}{x}} = 0,03 \text{ geeft } x = 2266,6\dots$$

Dus er moeten minimaal 2267 proefpersonen in haar steekproef zitten.

47 Bij de mannen geldt: breedte = $2 \cdot 6 = 12$ maanden en $S = 7 \cdot 12 + 9 = 93$ maanden

$$\text{Los op } 4 \cdot \frac{93}{\sqrt{n}} = 12.$$

$$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \frac{93}{\sqrt{x}} = 12 \text{ geeft } x = 961.$$

$$\text{Dus } 961 \text{ mannen oftewel } \frac{961}{2000} \cdot 100\% \approx 48,1\%.$$

48 breedte = 0,05 en $n = 850$

$$\text{Los op } 4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{850}} = 0,05.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 4 \cdot \sqrt{\frac{x(1 - x)}{850}} \text{ en } y_2 = 0,05$$

De optie snijpunt geeft $x = 0,157\dots$ en $x = 0,842\dots$

Het betrof een groot deel, dus $\hat{p} = 0,842\dots$ (en niet $\hat{p} = 0,157\dots$)

Dat zijn $0,842\dots \cdot 850 \approx 716$ ondervraagden.

C6 Nederland: $4 \cdot \sqrt{\frac{0,15(1-0,15)}{160}} = 0,1129\dots$

Duitsland: $4 \cdot \sqrt{\frac{0,20(1-0,20)}{180}} = 0,1192\dots$

Frankrijk: $4 \cdot \sqrt{\frac{0,20(1-0,20)}{140}} = 0,1352\dots$

Spanje: $4 \cdot \sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{200}} = 0,1224\dots$

Het interval bij Nederland is het meest nauwkeurig.

Alternatieve uitwerking

Bij gelijke $\hat{p}$ is het interval met grotere n nauwkeuriger.

Het interval bij Duitsland is dus nauwkeuriger dan die bij Frankrijk.

Wat overblijft is het vergelijken van Nederland, Duitsland en Spanje.

Nederland: $4 \cdot \sqrt{\frac{0,15(1-0,15)}{160}} = 0,1129\dots$

Duitsland: $4 \cdot \sqrt{\frac{0,20(1-0,20)}{180}} = 0,1192\dots$

Spanje: $4 \cdot \sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{200}} = 0,1224\dots$

Het interval bij Nederland is het meest nauwkeurig.

C7 a breedte = 0,05 en $\hat{p} = 0,4$

Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{n}} = 0,05$.

De optie oplossen bij $4 \cdot \sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{x}} = 0,05$ geeft $x = 1536$.

De grootte van de steekproef moet minimaal 1536 zijn.

b Het betreft een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde.
breedte = $7,8 - 7,2 = 0,6$ en $S = 3,6$

Los op $4 \cdot \frac{3,6}{\sqrt{n}} = 0,6$.

De optie oplossen bij $4 \cdot \frac{3,6}{\sqrt{x}} = 0,6$ geeft $x = 576$.

De steekproefomvang is 576.

7.4 Conclusies trekken

Bladzijde 116

49 a examenuitje: kwalitatief, want de waarden *zeilen* en *Disneyland* zijn geen getallen
geslacht: kwalitatief, want de waarden *jongen* en *meisje* zijn geen getallen

b *

Bladzijde 118

50 $\phi = \frac{485 \cdot 6163 - 3172 \cdot 180}{\sqrt{3657 \cdot 665 \cdot 9335 \cdot 6343}} \approx 0,202$

Omdat $0,2 \leq \phi \leq 0,4$ is het verschil middelmatig.

51 a

		bijwerkingen		
		wel	niet	
genetische factor	wel	17	12	29
	niet	15	36	51
		32	48	80

$$b \quad \phi = \frac{17 \cdot 36 - 12 \cdot 15}{\sqrt{29 \cdot 32 \cdot 48 \cdot 51}} \approx 0,287$$

Omdat $0,2 \leq \phi \leq 0,4$ is het verschil middelmatig.

Bladzijde 119

52 a

$$\hat{p} = \frac{72}{512} = 0,140... \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{0,140...(1 - 0,140...)}{512}} = 0,015...$$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,140... - 2 \cdot 0,015... \approx 0,110$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,140... + 2 \cdot 0,015... \approx 0,171$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,110; 0,171]$ (of $0,141 \pm 0,031$).

b

		eens met stelling		
		wel	niet	
nationaliteit toerist	NL	620	1461	2081
	DE	72	440	512
		692	1901	2593

$$\phi = \frac{620 \cdot 440 - 1461 \cdot 72}{\sqrt{2081 \cdot 692 \cdot 1901 \cdot 512}} \approx 0,142$$

Omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

53

		zorgen toekomst		
		wel	niet	
onderwijs	vo	331	1342	1673
	hbo	122	1127	1249
		453	2469	2922

$$\phi = \frac{331 \cdot 1127 - 1342 \cdot 122}{\sqrt{1673 \cdot 453 \cdot 2469 \cdot 1249}} \approx 0,137$$

Omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

Bladzijde 120

54 a

Ordinaal, want de waarden zijn geen hoeveelheden, maar hebben wel een logische volgorde.

b *

55

	Arnhem		Nijmegen		V_{cp}
	cum. freq.	cum. perc.	cum. freq.	cum. perc.	
zeer mee oneens	5	4%	3	2,5%	1,5%
mee oneens	11	8,8%	4	3,3%	5,5%
neutraal	23	18,4%	22	18,3%	0,1%
mee eens	61	48,8%	88	73,3%	24,5% ← max V_{cp}
zeer mee eens	125	100%	120	100%	0%

De max V_{cp} is 24,5.

Omdat $20 \leq \max V_{cp} \leq 40$ is het verschil middelmatig.

Bladzijde 122

56

- a** Ordinaal, want de waarden zijn geen hoeveelheden, maar hebben wel een logische volgorde.

b

	hotel 1	hotel 2	V_{cp}
	cum. perc.	cum. perc.	
☹️	0%	40%	40%
😞	20%	70%	50% ← max V_{cp}
😄	60%	90%	30%
😄	100%	100%	0%

De max V_{cp} is 50.

Omdat max $V_{cp} > 40$ is het verschil groot.

57

- a** De onderste cumulatieve frequentiepolygoon. Bij een klein doelwit heb je langer nodig om het doelwit te raken. Je verwacht dan relatief veel frequenties bij hogere tijden. Dit klopt met de onderste frequentiepolygoon, want daar neemt de cumulatieve frequentie vooral toe bij hogere tijden.

b

tijd (sec)	klein doelwit		groot doelwit		V_{cp}
	cum. freq.	cum. perc.	cum. freq.	cum. perc.	
3,5 - 4,5	50	25%	0	0%	25%
4,5 - 5,5	150	75%	30	15%	60% ← max V_{cp}
5,5 - 6,5	200	100%	90	45%	55%
6,5 - 7,5	200	100%	140	70%	30%
7,5 - 8,5	200	100%	190	95%	5%
8,5 - 9,5	200	100%	190	95%	5%
9,5 - 10,5	200	100%	200	100%	0%

De max V_{cp} is 60.

Omdat max $V_{cp} > 40$ is het verschil groot.

Alternatieve uitwerking

Voor beide groepen is de totale frequentie 200, dus de max V_{cp} ligt bij het maximale verschil in cumulatieve frequentie. In de figuur lees je af dat dit $150 - 30 = 120$ is.

$$\frac{120}{200} \cdot 100\% = 60\%, \text{ dus de max } V_{cp} \text{ is } 60.$$

Omdat max $V_{cp} > 40$ is het verschil groot.

58

- Het verschil in score tussen groep A en groep B is gering
groep B en groep C is groot
groep A en groep C is middelmatig

Bladzijde 124

- 59**
- a** De boxen overlappen elkaar en geen van de medianen ligt buiten de box van de andere boxplot. Dus het verschil is gering.
 - b** De boxen overlappen elkaar en er ligt een mediaan buiten de box van de andere boxplot. Dus het verschil is middelmatig.
 - c** De boxen overlappen elkaar niet. Dus het verschil is groot.
 - d** De boxen overlappen elkaar en er ligt een mediaan buiten de box van de andere boxplot. Dus het verschil is middelmatig.

- 60**
- a** merk: kwalitatief, want de waarden zijn geen hoeveelheden
inhoud: kwantitatief, want de waarden zijn hoeveelheden

b $E = \frac{1012 - 1007}{\frac{1}{2}(10 + 3)} \approx 0,769$

Omdat $0,4 < E \leq 0,8$ is het verschil middelmatig.

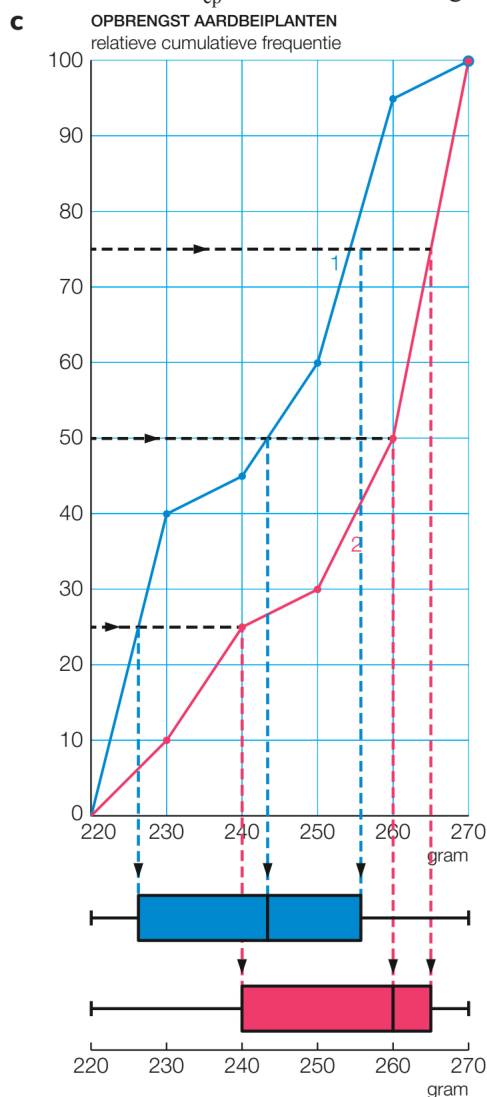
Bladzijde 125

61

- a** $E = \frac{254 - 242}{\frac{1}{2}(12 + 15)} \approx 0,889$

Omdat $E > 0,8$ is het verschil groot.

- b** De V_{cp} is maximaal bij 260 gram.
 $\max V_{cp} = 95 - 50 = 45$
Omdat $\max V_{cp} > 40$ is het verschil groot.



De boxen overlappen elkaar en er ligt een mediaan buiten de box van de andere boxplot, dus het verschil is middelmatig.

d Bij het berekenen van de effectgrootte is de oorspronkelijke data gebruikt, terwijl de boxplots zijn geschat op basis van een klassenindeling.

e De bovengrens bij grondsoort I is $\bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 242 + 2 \cdot \frac{15}{\sqrt{119}} = 244,75\dots$ en

de ondergrens bij grondsoort II is $\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 254 - 2 \cdot \frac{12}{\sqrt{175}} = 252,81\dots$

De bovengrens 244,75... bij grondsoort I is kleiner dan de ondergrens 252,81... bij grondsoort II, dus de 95%-betrouwbaarheidsintervallen overlappen elkaar niet.

Bladzijde 126

62 a $E = \frac{3673 - 3497}{\frac{1}{2}(442 + 428)} \approx 0,405$

Omdat $0,4 < E \leq 0,8$ is het verschil middelmatig.

b Als de standaardafwijkingen kleiner zijn, dan deel je door een kleiner getal. De effectgrootte wordt dan dus groter.

c De boxen overlappen elkaar en er ligt geen mediaan buiten de box van de andere boxplot, dus het verschil is gering.

d Bij de effectgrootte in vraag a is maar net sprake van een middelmatig verschil, een kleine verandering in gemiddelde of standaardafwijking had voor een gering verschil kunnen zorgen. Bij vraag c liggen beide medianen enigszins verwijderd van de rand van de box van de andere boxplot. Bij kleine veranderingen zou deze conclusie onveranderd blijven.

Bladzijde 127

C8

		thuis roken?		
		wel	niet	
roker	wel	57	162	219
	niet	29	385	414
		86	547	633

$$\phi = \frac{57 \cdot 385 - 162 \cdot 29}{\sqrt{219 \cdot 86 \cdot 547 \cdot 414}} \approx 0,264$$

Omdat $0,2 < \phi \leq 0,4$ is het verschil middelmatig.

C9

	kind 0 – 1 jaar		kind 4 – 6 jaar		V_{cp}
	cum. freq.	cum. perc.	cum. freq.	cum. perc.	
helemaal mee oneens	3	2,2%	10	3,0%	0,8%
mee oneens	19	14,0%	84	25,1%	11,1%
neutraal	59	43,4%	191	57,2%	13,8% $\leftarrow \max V_{cp}$
mee eens	114	83,8%	299	89,5%	5,7%
helemaal mee eens	136	100%	334	100%	0%

Reken je met onafgeronde waarden dan vind je bij 'mee oneens' een V_{cp} van 11,2%.

Dit heeft geen effect op het antwoord.

De $\max V_{cp}$ is 13,8.

Omdat $\max V_{cp} < 20$ is het verschil gering.

C10 De boxen overlappen elkaar en er ligt een mediaan buiten de box van de andere boxplot, dus het verschil is middelmatig.

C11 $E = \frac{90,3 - 85,1}{\frac{1}{2}(13,42 + 11,68)} \approx 0,414$

Omdat $0,4 < E \leq 0,8$ is het verschil middelmatig.

Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 128

1 a $p = \frac{123}{1447} \approx 0,085$

b $\frac{12}{0,09} \approx 133$ leerlingen

2 $p = 0,25$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,25(1 - 0,25)}{75}} = 0,05$

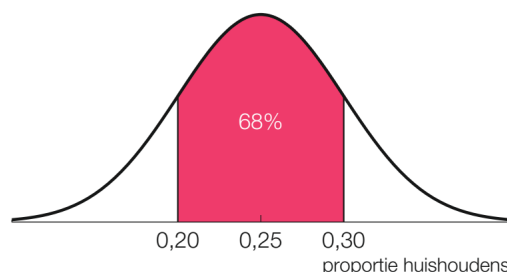
Zie de schets, bij 68% van de mogelijke steekproeven.

3 $\hat{p} = \frac{400}{1500} = 0,266\dots$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,266\dots(1 - 0,266\dots)}{1500}} = 0,011\dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,266\dots - 2 \cdot 0,011\dots \approx 0,244$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,266\dots + 2 \cdot 0,011\dots \approx 0,290$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,244; 0,290]$
(of $0,267 \pm 0,023$).



4 a $\bar{X} = 3 \cdot 60 + 20 = 200$ seconden en $\sigma = \frac{45}{\sqrt{300}} = 2,59\dots$ seconden

$$\bar{X} - 2\sigma = 200 - 2 \cdot 2,59\dots \approx 195$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 200 + 2 \cdot 2,59\dots \approx 205$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[195, 205]$ seconden (of 200 ± 5 seconden).

b De gemiddelde wachttijd bij de helpdesk ligt met 95% zekerheid tussen 195 seconden en 205 seconden.

5 a $\hat{p} = \frac{135}{225} = 0,6$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,6(1 - 0,6)}{225}} = 0,032\dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,6 - 2 \cdot 0,032\dots \approx 0,535, \text{ oftewel } 53,5\%$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,6 + 2 \cdot 0,032\dots \approx 0,665, \text{ oftewel } 66,5\%$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[53,5\%; 66,5\%]$ (of $60\% \pm 6,5\%$).

b $\bar{X} = 224$ leerlingen per basisschool en $\sigma = \frac{39}{\sqrt{225}} = 2,6$ leerlingen per basisschool

$$\bar{X} - 2\sigma = 224 - 2 \cdot 2,6 = 218,8 \text{ en } 218,8 \cdot 6149 \approx 1\,345\,401$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 224 + 2 \cdot 2,6 = 229,2 \text{ en } 229,2 \cdot 6149 \approx 1\,409\,351$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[1\,345\,401, 1\,409\,351]$ leerlingen
(of $1\,377\,376 \pm 31\,975$ leerlingen).

6 $0,28 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,28(1-0,28)}{224}} = 0,28 \pm 0,06$, oftewel $[0,22; 0,34]$

Bladzijde 129

7 filiaal A: breedte $= 4 \cdot \sqrt{\frac{0,82(1-0,82)}{150}} = 0,125\dots$

filiaal B: breedte $= 4 \cdot \sqrt{\frac{0,76(1-0,76)}{250}} = 0,108\dots$

filiaal C: breedte $= 4 \cdot \sqrt{\frac{0,82(1-0,82)}{250}} = 0,097\dots$

Het interval bij filiaal C is het meest nauwkeurig.

Alternatieve uitwerking

Bij gelijke $\hat{p}$ is het interval met grotere n nauwkeuriger.

Het interval bij filiaal C is dus nauwkeuriger dan die bij filiaal A.

Wat overblijft is het vergelijken van filialen B en C.

filiaal B: breedte $= 4 \cdot \sqrt{\frac{0,76(1-0,76)}{250}} = 0,108\dots$

filiaal C: breedte $= 4 \cdot \sqrt{\frac{0,82(1-0,82)}{250}} = 0,097\dots$

Het interval bij filiaal C is het meest nauwkeurig.

8 a breedte $= 272 - 268 = 4$ en $S = 45$

Los op $4 \cdot \frac{45}{\sqrt{n}} = 4$.

De optie oplossen bij $4 \cdot \frac{45}{\sqrt{x}} = 4$ geeft $x = 2025$.

Dus de steekproefomvang is 2025.

b breedte $= 2 \cdot 0,023 = 0,046$ en $\hat{p} = 0,395$

Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,395(1-0,395)}{n}} = 0,046$.

De optie oplossen bij $4 \cdot \sqrt{\frac{0,395(1-0,395)}{x}} = 0,046$ geeft $x \approx 1807$.

Dus de steekproefomvang is 1807.

9 $\phi = \frac{34 \cdot 60 - 57 \cdot 66}{\sqrt{(34+57)(34+66)(57+60)(66+60)}} \approx -0,149$

Omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

10 $E = \frac{6,6 - 5,4}{\frac{1}{2}(1,2 + 1,6)} \approx 0,857$

Omdat $E > 0,8$ is het verschil groot.

- 11 a** Bij filiaal A is de wachttijd het kortst.
b Verschil tussen A en B:
 De V_{cp} is maximaal bij 120 seconden.
 $\max V_{cp} = 90 - 60 = 30$.
 Omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$ is het verschil middelmatig.

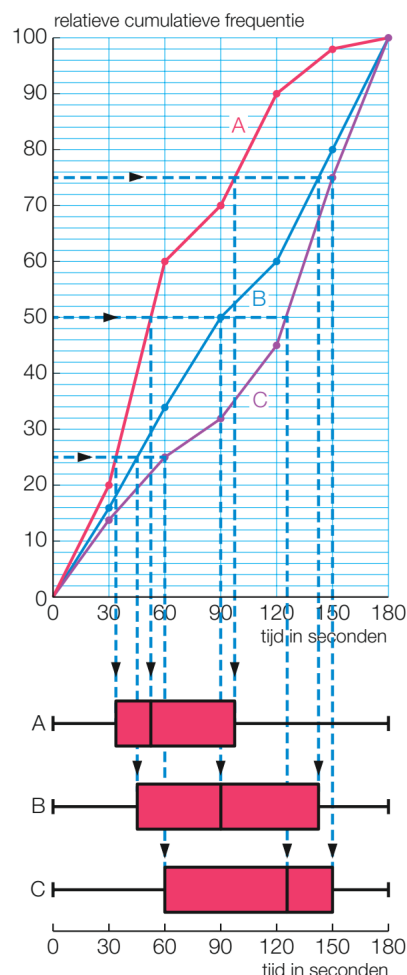
Verschil tussen B en C:
 De V_{cp} is maximaal bij 90 seconden.
 $\max V_{cp} = 50 - 32 = 18$.
 Omdat $\max V_{cp} \leq 20$ is het verschil gering.

Verschil tussen A en C:
 De V_{cp} is maximaal bij 120 seconden.
 $\max V_{cp} = 90 - 45 = 45$.
 Omdat $\max V_{cp} > 40$ is het verschil groot.

- c** Verschil tussen A en B:
 De boxen overlappen elkaar en geen van de medianen ligt buiten de box van de andere boxplot. Dus het verschil is gering.
 Dit is niet dezelfde conclusie als bij vraag b.

Verschil tussen B en C:
 De boxen overlappen elkaar en geen van de medianen ligt buiten de box van de andere boxplot. Dus het verschil is gering.
 Dit is dezelfde conclusie als bij vraag b.

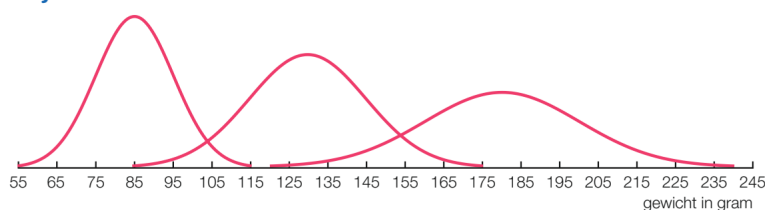
Verschil tussen A en C:
 De boxen overlappen elkaar en er ligt een mediaan buiten de box van de andere boxplot. Dus het verschil is middelmatig.
 Dit is niet dezelfde conclusie als bij vraag b.



Gemengde opgaven

Bladzijde 130

1 a



- b** De bovengrens bij midden is $\bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 132 + 2 \cdot \frac{18}{\sqrt{16}} = 141$ gram en

de ondergrens bij groot is $\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 175 - 2 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}} = 167$ gram.

Dus de 95%-betrouwbaarheidsintervallen overlappen elkaar niet.

2 a

geslacht: kwalitatief, want de waarden zijn geen hoeveelheden
 bedrag in euro: kwantitatief, want de waarden zijn hoeveelheden

- b** Bij de jongens is het gemiddelde $\frac{42,15 + 43,85}{2} = 43$ euro.

Bij de meisjes is het gemiddelde $\frac{38,20 + 39,80}{2} = 39$ euro.

c breedte = $43,85 - 42,15 = 1,7$

Los op $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{1635}} = 1,7$.

De optie oplossen bij $4 \cdot \frac{x}{\sqrt{1635}} = 1,7$ geeft $x \approx 17,18$.

Dus de steekproefstandaardafwijking bij de jongens is 17,18 euro.

d breedte = $39,80 - 38,20 = 1,6$ en $S = 16,12$

Los op $4 \cdot \frac{16,12}{\sqrt{n}} = 1,6$.

De optie oplossen bij $4 \cdot \frac{16,12}{\sqrt{x}} = 1,6$ geeft $x \approx 1624$.

De steekproefomvang bij de meisjes was 1624.

e $E = \frac{43 - 39}{\frac{1}{2}(17,18 + 16,12)} \approx 0,240$

Omdat $E \leq 0,4$ is het verschil gering.

Bladzijde 131

3

cijfer	havo		vwo		V_{cp}
	perc.	cum. perc.	perc.	cum. perc.	
1	1%	1%	0%	0%	1%
2	1%	2%	0%	0%	2%
3	4%	6%	0%	0%	6%
4	20%	26%	3%	3%	23%
5	45%	71%	19%	22%	49% ← max V_{cp}
6	17%	88%	21%	43%	45%
7	8%	96%	23%	66%	30%
8	3%	99%	18%	84%	15%
9	1%	100%	9%	93%	7%
10	0%	100%	7%	100%	0%

De max V_{cp} is 49.

Omdat max $V_{cp} > 40$ is het verschil groot.

Alternatieve uitwerking

Bij hogere cijfers dan 5 zijn de percentages havo telkens kleiner dan bij het vwo, dus zal de V_{cp} alleen afnemen. Het volstaat dus om de V_{cp} te bekijken bij de cijfers tot en met 5.

Bereken eerst V_p = percentage havo – percentage vwo.

cijfer	V_p	V_{cp}
1	1%	1%
2	1%	2%
3	4%	6%
4	17%	23%
5	26%	49% ← max V_{cp}

De max V_{cp} is 49.

Omdat max $V_{cp} > 40$ is het verschil groot.

4 a $\hat{p} = \frac{371}{2650} = 0,14$ geeft $\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,14(1-0,14)}{2650}} \approx 0,14 \pm 0,013$, oftewel $[0,127; 0,153]$

b Bij de oranje M&M's geldt $\hat{p} = \frac{530}{2650} = 0,2$, dus breedte $= 4 \cdot \sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{2650}} = 0,0310\dots$

Bij de rode M&M's geldt breedte $= 4 \cdot \sqrt{\frac{0,14(1-0,14)}{2650}} = 0,0269\dots$

$\frac{0,0310\dots}{0,0269\dots} \approx 1,15$, dus ongeveer 15% groter. Dus Kees heeft gelijk.

Bladzijde 132

5 a $\bar{X} = 4 \cdot 60 + 13 = 253$ seconden en $\sigma = \frac{60 + 23}{\sqrt{31}} = 14,90\dots$ seconden

$\bar{X} - 2\sigma = 253 - 2 \cdot 14,90\dots \approx 223$

$\bar{X} + 2\sigma = 253 + 2 \cdot 14,90\dots \approx 283$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[223, 283]$ seconden (of 253 ± 30 seconden).

b 3 minuten en 45 seconden is $3 \cdot 60 + 45 = 225$ seconden

Ja, dit valt binnen het 95%-betrouwbaarheidsinterval van vraag a.

c Je krijgt dan $\sigma = \frac{60 + 23}{\sqrt{41}} = 12,96\dots$ seconden.

$\bar{X} - 2\sigma = 253 - 2 \cdot 12,96\dots \approx 227$

De gemiddelde blesuretijd van 225 seconden valt dan niet meer in het betrouwbaarheidsinterval.

Dus ja, de conclusie was dan anders geweest.

6 De Oliebollenbaas: breedte $= 2 \cdot 1,6 = 3,2$ gram

Koning Oliebol: breedte $= 4 \cdot \frac{1,603}{\sqrt{40}} = 1,013\dots$ gram

Superbollen: breedte $= 4 \cdot \frac{1,2}{\sqrt{90}} = 0,505\dots$ gram

Altijd Oliebollen: breedte $= 77,56 - 76,44 = 1,12$ gram

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij Superbollen is het meest nauwkeurig.

Bladzijde 133

7 a Uit het interval $[0,459; 0,521]$ volgt:

breedte $= 0,521 - 0,459 = 0,062$ en $\hat{p} = \frac{0,459 + 0,521}{2} = 0,49$

Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,49(1-0,49)}{n}} = 0,062$.

De optie oplossen bij $4 \cdot \sqrt{\frac{0,49(1-0,49)}{x}} = 0,062$ geeft $x \approx 1040$.

Dus de steekproefomvang is 1040.

Uit het interval $[112,48; 115,52]$ volgt:

breedte $= 115,52 - 112,48 = 3,04$ koeien per melkveehouderij

Los op $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{1040}} = 3,04$.

De optie oplossen bij $4 \cdot \frac{x}{\sqrt{1040}} = 3,04$ geeft $x \approx 24,5$.

Dus de standaardafwijking $S = 24,5$ koeien per melkveehouderij.

b $112,48 \cdot 15261 = 1\,716\,557,28$

$115,52 \cdot 15261 = 1\,762\,950,72$

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval is ongeveer $[1,72; 1,76]$ miljoen koeien.

8 a $E = \frac{37,7 - 28,7}{\frac{1}{2}(25,6 + 17,8)} \approx 0,415$

Omdat $0,4 < E \leq 0,8$ concludeert Corinne dat het verschil middelmatig is.

- b De boxen overlappen elkaar en geen van de medianen ligt buiten de box van de andere boxplot.

Dus Corinne concludeert dat het verschil gering is.

- c De V_{cp} is maximaal bij de leeftijd 50 jaar.

$$\max V_{cp} = 30 - 9 = 21$$

Omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$ is het verschil middelmatig.

Bladzijde 134

- 9 a geslacht: nominaal

bijbaan: nominaal

Want bij beide variabelen zijn de waarden geen getallen en zit er geen logische volgorde in de waarden.

b $phi = \frac{763 \cdot 457 - 327 \cdot 1176}{1090 \cdot 1939 \cdot 784 \cdot 1633} \approx 0,124$

Omdat $-0,2 \leq phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

- c Vul de tabel verder in. Je krijgt

		bijbaan		
		ja	nee	
opleidingsniveau	hbo	1200	379	1579
	wo	739	405	1144
		1939	784	2723

$$phi = \frac{1200 \cdot 405 - 379 \cdot 739}{\sqrt{1579 \cdot 1939 \cdot 784 \cdot 1144}} \approx 0,124$$

Omdat $-0,2 \leq phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

d

klasse	V_{cp}	
geen	15 - 11 = 4%	
< 100	29 - 18 = 11%	
100-250	39 - 23 = 16%	
250-500	49 - 30 = 19%	
500-1000	61 - 40 = 21% ← max V_{cp}	
1000-2500	75 - 57 = 18%	
2500-5000	86 - 73 = 13%	
5000-10 000	94 - 86 = 8%	
10 000-25 000	98 - 97 = 1%	
25 000-50 000	99 - 99 = 0%	
> 50 000	100 - 100 = 0%	

De max V_{cp} is 21.

Omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$ is het verschil middelmatig.

Alternatieve uitwerking

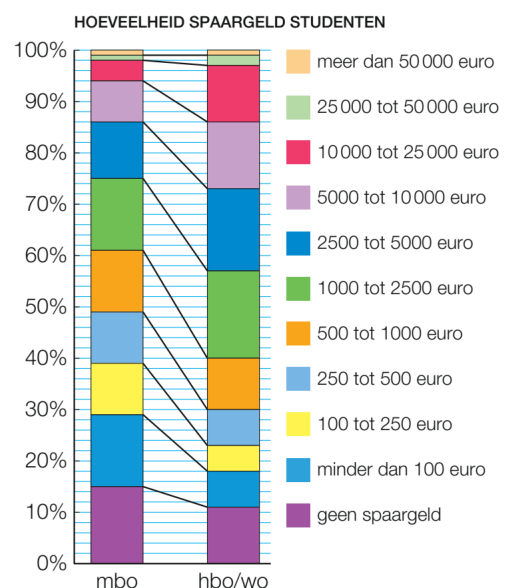
Verbind de overeenkomstige klassen van beide groepen met lijnstukken. Zie de figuur hiernaast.

Het steilste lijnstuk hoort bij de klasse met de max V_{cp} .

max V_{cp} is de V_{cp} van de klasse 500 tot 1000.

$$\max V_{cp} = 61 - 40 = 21.$$

Omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$ is het verschil middelmatig.



8 Statistiek met de computer

8.1 Werken met een spreadsheet

Bladzijde 138

1 *

Bladzijde 139

- 2 a Gebruik de functie SOM.
 $Y2 = \text{SOM}(B2:X2)$ geeft 82 punten.
b $Y3 = \text{SOM}(B3:X3)$ geeft 61 punten voor Joris.
Lisa heeft de meeste punten gehaald, Kim de minste.
c $Z3 = Y3/Y\$2*9+1$ geeft het cijfer 7,695...
d $Z3 = \text{AFRONDEN}(Y3/Y\$2*9+1;1)$ geeft het cijfer 7,7.
e $B27 = \text{GEMIDDELDE}(B3:B25)$
 $B28 = \text{STDEV.P}(B3:B25)$
 $B29 = \text{MIN}(B3:B25)$
 $B30 = \text{KWARTIEL.INC}(B3:B25;1)$
 $B31 = \text{MEDIAAN}(B3:B25)$
 $B32 = \text{KWARTIEL.INC}(B3:B25;3)$
 $B33 = \text{MAX}(B3:B25)$
Met de vulgreep bereken je in één keer de overige waarden.
f $B34 = B32 - B30$ en gebruik de vulgreep.
Bij de vragen 14 en 15 is de interkwartielafstand 2,5.
 $B35 = B27 - B31$ en gebruik de vulgreep.
Bij de vragen 2, 3 en 20 is het verschil nul, dus het gemiddelde gelijk aan de mediaan.
- 3 a $J3 = \text{AFRONDEN}((B3*B\$1+C3*C\$1+D3*D\$1+ \dots +I3*I\$1)/\text{SOM}(B\$1:I\$1);1)$
Gebruik de vulgreep om de overige cijfers te berekenen.
De eindcijfers zijn achtereenvolgens
6,7 5,7 7,2 3,8 6,9 5,7 6,8 5,2 4,9 4,9 5,4 6,4
4,8 7,9 6,3 6,0 6,3 5,3 7,0 8,1 6,6.
b $J25 = \text{AFRONDEN}(\text{GEMIDDELDE}(J3:J23);2)$ geeft het gemiddelde
eindcijfer 6,09.
c $I1 = 6$ geeft het gemiddelde eindcijfer 6,10.
Het scheelt 0,01 punt met het gemiddelde van vraag b.

Bladzijde 140

- 4 Selecteer de cellen A1:E7 en maak het juiste staafdiagram (in Excel:
Gegroepeerde kolom). Maak het diagram verder op.

Bladzijde 141

- 5 a Selecteer de cellen A1:H1 en tegelijk (houd Ctrl ingedrukt) A6:H10 en maak
het juiste staafdiagram (Gestapelde kolom). Klik (indien nodig) bij
Gegevens selecteren op Rijen/kolommen omdraaien.
Kies bij As opmaken voor Weergave-eenheden 10 000. Maak het diagram
verder op.
b Voeg een kolom toe door in cel I1 Totaal te typen.
 $I2 = \text{SOM}(B2:H2)$ en gebruik de vulgreep.
Selecteer de cellen A1:A10 en tegelijk I1:I10 en maak een lijndiagram (Lijn
met markeringen).
Kies bij As opmaken voor Weergave-eenheden 100 000. Maak het diagram
verder op.
c Selecteer de cellen B1:H1 en tegelijk B10:H10 en maak een cirkeldiagram
(Staaf-van-cirkel).
Voeg Gegevenslabels toe en kies bij Gegevenslabels opmaken voor
Percentage in plaats van Waarde. Maak het diagram verder op.

Bladzijde 142

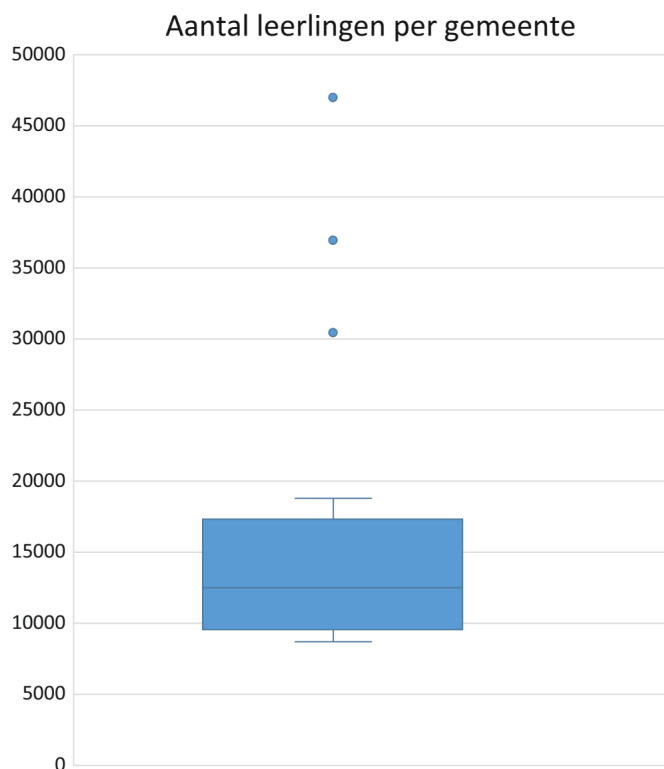
- V1 a** totale frequentie = $12 + 10 + 13 + 24 + 21 + 2 = 82$
gemiddelde = $\frac{12 \cdot 7,5 + 10 \cdot 22,5 + 13 \cdot 37,5 + 24 \cdot 52,5 + 21 \cdot 67,5 + 2 \cdot 82,5}{82} \approx 44,5$ jaar
- b** De mediaan is het gemiddelde van het 41^e en 42^e getal.
Omdat $12 + 10 + 13 = 35$ en $35 + 24 = 59$ ligt de mediaan in de klasse $[45, 60)$.
- c** De modale klasse is $[45, 60)$.

Bladzijde 143

- V2 a** De helft van de vrouwen is kleiner dan 1,83 meter. Dat zijn $\frac{192}{2} = 96$ vrouwen.
- b** De langste vrouw is 202 cm en driekwart van de mannen is kleiner dan 202 cm.
- c** Bij de mannen is de spreidingsbreedte $211 - 172 = 39$ cm.
Bij de vrouwen is de spreidingsbreedte $202 - 159 = 43$ cm.
De spreidingsbreedte is groter bij de vrouwen.

Bladzijde 144

- 6 a** De interkwartielafstand is $24 - 10 = 14$ en $24 + 1,5 \cdot 14 = 45$.
De waarde 56 is dus een uitbijter.
- b** $10 - 1,5 \cdot 14 = -11$. De waarde 1 is dus geen uitbijter.
- 7 a** Het bestand is gesorteerd op de variabele Gemeente.
- b** Sorteer de kolom AantalLeerlingen met 'Sorteren van laag naar hoog'.
- c** Selecteer de cellen B268 (Arnhem) tot en met B287 (Amsterdam) en maak een boxplot (Box-and-whisker). Maak het diagram verder op.



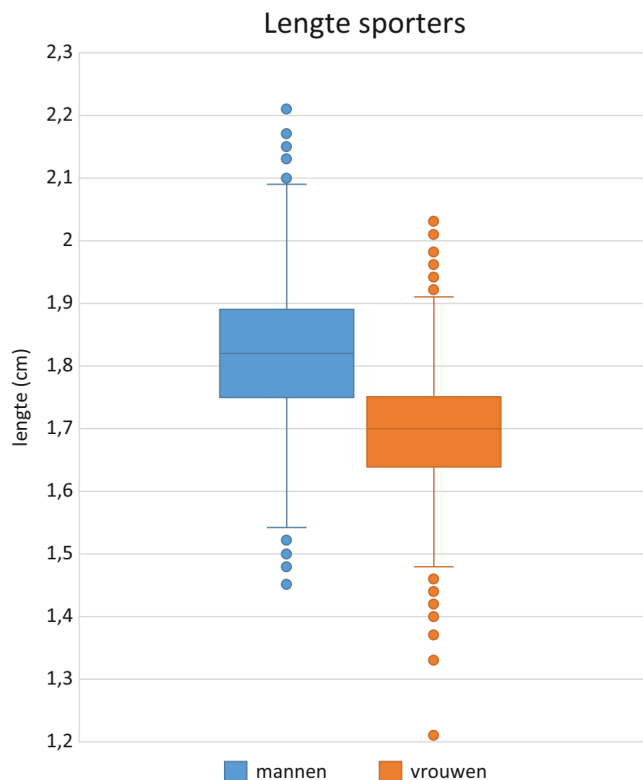
Bij de uitbijterpunten horen de gemeenten Den Haag, Rotterdam en Amsterdam.

- d** Voeg een kolom toe door in cel D1 GemiddeldAantalLeerlingen te typen.
 $D2=B2/C2$ en gebruik de vulgreep.
- e** Sorteer de kolom AantalScholen met 'Sorteren van laag naar hoog'.
Selecteer de cellen D2:D91 en maak hierbij een boxplot (Box-and-whisker).
Kies Gegevens selecteren (door met de rechtermuisknop op de boxplot te klikken). Bewerk reeks 1 en geef deze de naam 'gemeenten met 1 school'.
Voeg een nieuwe reeks toe en noem deze 'gemeenten met meer dan 1 school' en selecteer bij Reekswaarden de cellen D92:D287. Maak het diagram verder op.

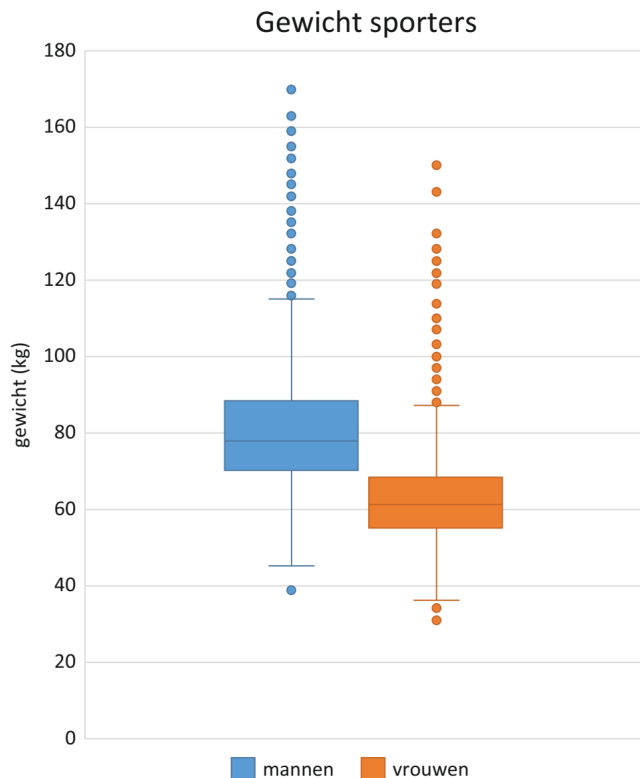
- f** Bij gemeenten met meer dan één middelbare school is de spreiding van het gemiddeld aantal leerlingen per school veel kleiner dan bij gemeenten met één middelbare school.

Bladzijde 145

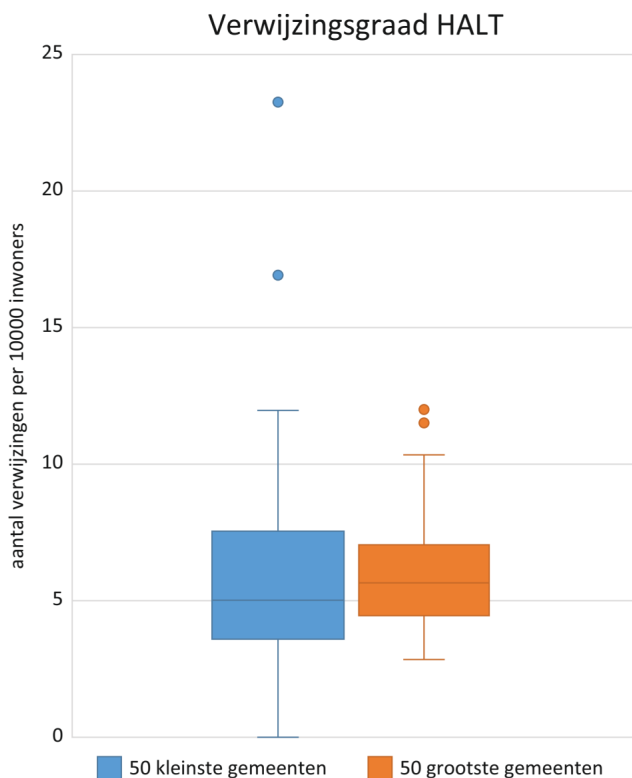
- 8 a** Sorteer de kolom Lengte met 'Sorteren van laag naar hoog'. De cellen E11210 tot en met E11539 zijn leeg, dus van 330 sporters staat de lengte niet in de dataset.
- b** Sorteer de kolom Lengte met 'Sorteren van laag naar hoog' en daarna de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z'. Selecteer de cellen E2:E6143 (de lengten van de mannen) en maak hierbij een boxplot (Box-and-whisker). Kies Gegevens selecteren (door met de rechtermuisknop op de boxplot te klikken). Bewerk reeks 1 en geef deze de naam 'mannen'. Voeg een nieuwe reeks toe en noem deze 'vrouwen' en selecteer bij Reekswaarden de cellen E6335:E11400 (de lengten van de vrouwen). Maak het diagram verder op.



- c** Die lengte is 2,10 meter. Je ziet in de tabel dat het gaat om 32 mannen.
- d** De opvallende lengte is 1,21 meter. Dit lijkt een fout in de dataset te zijn.
- e** De boxen overlappen elkaar (net) en beide medianen liggen buiten de box van de andere boxplot, dus het verschil is middelmatig.
- f** Sorteer eerst de kolom Gewicht met 'Sorteren van laag naar hoog' en daarna de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z'. Selecteer de cellen F2:F5874 (de gewichten van de mannen) en maak hierbij een boxplot. Kies Gegevens selecteren (door met de rechtermuisknop op de boxplot te klikken). Bewerk reeks 1 en geef deze de naam 'mannen'. Voeg een nieuwe reeks toe en noem deze 'vrouwen' en selecteer bij Reekswaarden de cellen F6335:F11340 (de gewichten van de vrouwen). Maak het diagram verder op.



- 9** Voeg een kolom toe door in cel D1 Verwijzingsgraad te typen.
 $D2=C2/B2*10000$ en gebruik de vulgreep.
 Sorteer de kolom Bevolkingsaantal met 'Sorteren laag naar hoog' en maak een boxplot (Box-and-whisker).
 Gebruik een reeks voor de 50 kleinste gemeenten (Schiermonnikoog tot en met Waterland) en een tweede reeks voor de 50 grootste gemeenten (Roosendaal tot en met Amsterdam). Maak het diagram verder op.



De boxen overlappen elkaar en beide medianen vallen binnen de box van de andere boxplot, dus het verschil is gering.

C1

a *

b $B2=B\$1*\$A2$ en gebruik de vulgreep.

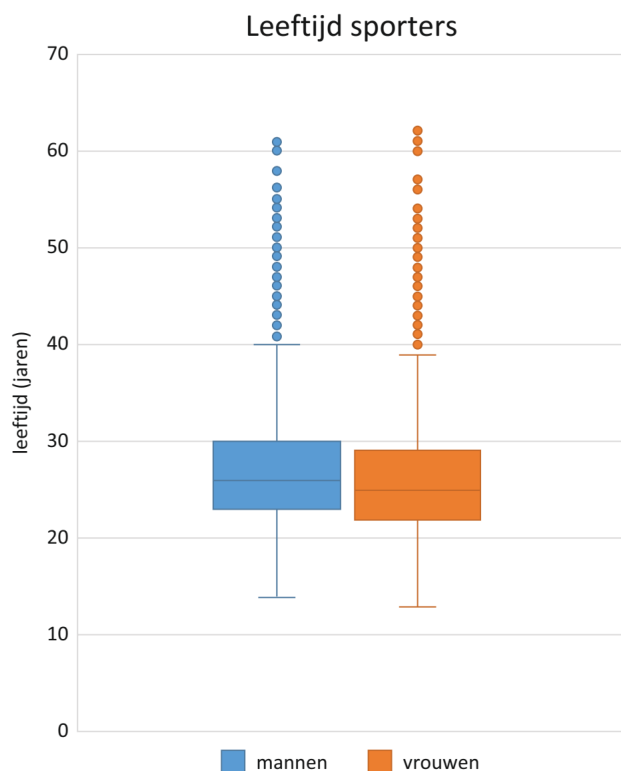
C2

Selecteer de cellen A1:A10 en tegelijk C1:E10 en maak het juiste staafdiagram (Gegroepeerde kolom).

Kies bij As opmaken voor Weergave-eenheden 10000. Maak het diagram verder op.

C3

Sorteer eerst de kolom Leeftijd met 'Sorteren van laag naar hoog' en daarna de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z'. Maak een boxplot (Box-and-whisker). Gebruik een reeks voor mannen en een tweede reeks voor vrouwen. Maak het diagram verder op.



8.2 Werken met datasets

10

Sorteer eerst de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z' en daarna de kolom Sport met 'Sorteren van A naar Z'. Selecteer de cellen F8037:F8058 (de gewichten van de Japanse voetbal mannen) en lees rechtsonder in beeld af dat hun gemiddelde gewicht 74,1 kg is.

Alternatieve uitwerking

Sorteer eerst de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z' en daarna de kolom Sport met 'Sorteren van A naar Z'. Typ in een lege cel $=\text{GEMIDDELDE}(F8037:F8058)$ en lees af dat het gemiddelde gewicht van de Japanse voetbal mannen ongeveer 74,1 kg is.

11

a De dataset bevat 11 variabelen.

b Kiezen van 'Aantal' in kolom A van de totaalrij geeft 26663.
De dataset bevat gegevens van 26663 dagen.

c Sorteer de kolom GemiddeldeTemperatuur met 'Sorteren van hoog naar laag'.
Op 27 juli 2018 was de gemiddelde temperatuur het hoogst.

d Filter de kolom GemiddeldeTemperatuur op 'Is kleiner dan of gelijk aan' 0.
Kiezen van 'Aantal' in kolom C van de totaalrij geeft 1655.
Op 1655 dagen was het gemiddeld 0°C of kouder.

- e** Filter uit vraag d verwijderen.
 Filter de kolom Datum op 2021, 2022 en 2023.
 Kiezen van 'Som' in kolom H van de totaalrij geeft 5776,5.
 Het totaal aantal uren zonneshijns dat is gemeten in de jaren 2021, 2022 en 2023 samen is 5776,5 uur.

Bladzijde 148

- 12 a** Sorteert eerst de kolom Leeftijd met 'Sorteren van hoog naar laag' en daarna met 'Sorteren van laag naar hoog'.

De oudste sporter doet aan paardensport en de jongste aan zwemsport.

- b** Kiezen van 'Aantal' in kolom D van de totaalrij geeft 11 538.

Filter de kolom Leeftijd op 'Is kleiner dan of gelijk aan' 16.

Nu geeft 'Aantal' in kolom D van de totaalrij 82.

Dus $\frac{82}{11\,538} \cdot 100\% \approx 0,7\%$ van de sporters was 16 jaar of jonger.

- c** Filter uit vraag b verwijderen.

Filter de kolom Land op Nederland.

Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom D van de totaalrij geeft 26,78...

De gemiddelde leeftijd van de Nederlandse sporters was 27 jaar.

- d** Filters uit vraag c verwijderen.

Filter de kolom Sport op triatlon.

Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom F van de totaalrij geeft 60,63... kg.

Filter de kolom Sport op roeien.

Aflezen in kolom F van de totaalrij geeft 79,93... kg.

Het scheelt $79,93... - 60,63... \approx 19$ kg.

- e** Filter uit vraag d verwijderen.

Filter de kolom Land op Nederland en filter de kolom Geslacht op V.

Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom E van de totaalrij geeft 1,747... m.

Filter de kolom Land op alles behalve Nederland.

Aflezen in kolom E van de totaalrij geeft 1,698... m.

Het verschil is dus $1,747... - 1,698... \approx 0,05$ m = 5 cm.

De journalist heeft dus niet gelijk.

Filter de kolom Geslacht op M en voer dezelfde handelingen uit als hierboven bij de vrouwen.

Het verschil bij de mannen is $1,850... - 1,820... \approx 0,03$ m = 3 cm.

- f** Filters uit vraag e verwijderen.

Filter de kolom Goud op alles behalve 0.

Kiezen van 'Som' in kolom H van de totaalrij geeft 666 gouden medailles.

Filter de kolom Land op Verenigde Staten.

Aflezen in kolom H van de totaalrij geeft 139 gouden medailles.

Dus $\frac{139}{666} \cdot 100\% \approx 20,9\%$ van de gouden medailles werd gewonnen door

sporters uit de Verenigde Staten.

- 13 a** Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom C van de totaalrij.

Filteren van de kolom Groep op D geeft 177,47... cm.

Filteren van de kolom Groep op A geeft 173,5 cm.

Het verschil is $177,47... - 173,5 \approx 4$ cm.

- b** Filter uit vraag a verwijderen.

Filter kolom LR-handig-moeder op L.

Kiezen van 'Aantal' in kolom I van de totaalrij geeft 15 linkshandige moeders.

Filter kolom LR-handig-vader op L.

Aflezen in kolom J van de totaalrij geeft 1 paar met ouders die beiden linkshandig zijn.

Filter verwijderen uit kolom LR-handig-moeder.

Aflezen in kolom J van de totaalrij geeft 28 linkshandige vaders.

In totaal hebben $15 + 28 - 1 = 42$ studenten een linkshandige ouder.

Dus $\frac{42}{271} \cdot 100\% \approx 15,5\%$ van de studenten heeft een linkshandige ouder.

- c Filters uit vraag b verwijderen.

Kies 'Aantal' in kolom G van de totaalrij.

Filter de kolom Geslacht op M. Aflezen in kolom G van de totaalrij geeft 139 mannen en dus $271 - 139 = 132$ vrouwen.

Filter de kolom UrenSlaap op 'Kleiner dan' 8.

Filter de kolom Geslacht op M. Aflezen in kolom G van de totaalrij geeft

101 kortslapers bij de mannen en dus $139 - 101 = 38$ langslapers bij de mannen.

Kolom Geslacht filteren op V. Aflezen in kolom G van de totaalrij geeft 93

kortslapers bij de vrouwen en dus $132 - 93 = 39$ langslapers bij de vrouwen.

	slaapduur		totaal
	kort	lang	
man	101	38	139
vrouw	93	39	132
totaal	194	77	271

- d Bij de vrouwen heeft $\frac{93}{132} \cdot 100\% \approx 70,5\%$ een korte slaapduur. Bij de

mannen is dat $\frac{101}{139} \cdot 100\% \approx 72,7\%$.

Bij de vrouwen is dit percentage dus kleiner dan bij de mannen.

- e Filters uit vraag c verwijderen.

Filter de kolom Geslacht op M en kies 'Gemiddelde' in kolom G van de totaalrij. Lees af dat de gemiddelde slaapduur voor mannen 7,052 uur is.

Kies in kolom G van de totaalrij vervolgens voor 'Stdev' en lees af dat de standaardafwijking 1,290 uur is.

Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$\left[7,052 - 2 \cdot \frac{1,290}{\sqrt{139}}; 7,052 + 2 \cdot \frac{1,290}{\sqrt{139}} \right] \approx [6,83; 7,27].$$

Filter de kolom Geslacht op V en kies 'Gemiddelde' in kolom G van de totaalrij. Lees af dat de gemiddelde slaapduur voor vrouwen 7,172 uur is.

Kies in kolom G van de totaalrij vervolgens voor 'Stdev' en lees af dat de standaardafwijking 1,321 uur is.

Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$\left[7,172 - 2 \cdot \frac{1,321}{\sqrt{132}}; 7,172 + 2 \cdot \frac{1,321}{\sqrt{132}} \right] \approx [6,94; 7,40].$$

De 95%-betrouwbaarheidsintervallen overlappen elkaar. Er is dus geen significant verschil.

- f Filter uit vraag e verwijderen.

Kies 'Aantal' in kolom K van de totaalrij.

Filter de kolom Herkomst op plattelandsdorp. Aflezen in kolom K van de totaalrij geeft 49 studenten uit een plattelandsdorp. Filter de kolom

Woonsituatie op Uitwonend. Aflezen in kolom K van de totaalrij geeft 34 uitwonende studenten uit een plattelandsdorp en dus $49 - 34 = 15$

thuiswonende studenten uit een plattelandsdorp.

Filter de kolom Herkomst op grote stad. Aflezen in kolom K van de totaalrij

geeft 22 uitwonende studenten uit een grote stad. Filter verwijderen uit

kolom Woonsituatie en aflezen in Kolom K van de totaalrij geeft in totaal 37 studenten uit een grote stad. Er zijn dus $37 - 22 = 15$ thuiswonende

studenten uit een grote stad.

	herkomst	
	plattelandsdorp	grote stad
thuiswonend	15	15
uitwonend	34	22
totaal	49	37

Voor de uitwonende studenten uit een plattelandsdorp geldt $\hat{p} = \frac{34}{49} = 0,6938\dots$ en

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,6938\dots \cdot (1 - 0,6938\dots)}{49}} = 0,0658\dots$$

Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,6938\dots - 2 \cdot 0,0658\dots; 0,6938\dots + 2 \cdot 0,0658\dots]$
 $\approx [0,562; 0,826]$.

Voor de uitwonende studenten uit een grote stad geldt $\hat{p} = \frac{22}{37} = 0,5945\dots$ en

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,5945\dots \cdot (1 - 0,5945\dots)}{37}} = 0,0807\dots$$

Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,5945\dots - 2 \cdot 0,0807\dots; 0,5945\dots + 2 \cdot 0,0807\dots]$
 $\approx [0,433; 0,756]$.

De 95%-betrouwbaarheidsintervallen overlappen elkaar. Er is dus geen significant verschil.

Bladzijde 149

- 14** Deze aanpak werkt.

Bladzijde 150

- 15** Maak een nieuwe kolom door in cel L1 AtletiekVrouwBenelux te typen.
Filter de kolom Land op België, Luxemburg en Nederland. Filter de kolom Geslacht op V en filter de kolom Sport op Atletiek.
Zet in de eerste cel van de nieuwe kolom Ja en gebruik de vulgreep.
Verwijder alle filters en filter de kolom AtletiekVrouwBenelux op Lege cellen.
Zet in de eerste cel van de kolom Nee en gebruik de vulgreep.
Verwijder alle filters.

- 16** **a** Maak een nieuwe kolom door in cel L1 Medailles te typen.
L2=SOM(H2:J2)
b Kiezen van 'Aantal' in kolom L van de totaalrij en filteren van de kolom Medailles op 'Groter dan' 1 geeft 129 sporters met meer dan één medaille.
Filteren van de kolom Goud op 'Groter dan' 0 en aflezen in kolom L van de totaalrij geeft 89 sporters met meer dan één medaille, waarvan ten minste één gouden.
c Verwijderen van alle filters en de kolom Medailles sorteren met 'Sorteren van hoog naar laag' geeft Michael Phelps met 6 medailles.

- 17** Maak een nieuwe kolom door in cel L1 Gevoelstemperatuur te typen.
L2=1,41-1,162*B2+0,98*C2+0,0124*B2^2+0,0185*B2*C2
Sorteer de kolom Gevoelstemperatuur met 'Sorteren van laag naar hoog'.
De dag die het koudst aanvoelde was 1 februari 1956.

Bladzijde 151

- 18** **a** Filter in de kolommen Lengte en Gewicht de Lege cellen eruit.
Kiezen van 'Aantal' in kolom E van de totaalrij geeft 10858 sporters.
b Voeg een kolom toe door in cel L1 Energiebehoefte te typen.
Filter de kolom Geslacht op M.
L2=AFRONDEN(88,362+13,397*F2+4,799*E2*100-5,677*D2;0) en gebruik de vulgreep.
Filter de kolom Geslacht op V.
L2=AFRONDEN(447,593+9,247*F2+3,098*E2*100-4,33*D2;0) en gebruik de vulgreep.
Verwijder het filter.

- 19** Maak een nieuwe kolom door in cel L1 Gevoelstemperatuur te typen.
 Filter de kolom GemiddeldeWindsnelheid op 'Is kleiner dan of gelijk aan' 1,3.
 $L709=C709$ en gebruik de vulgreep.
 Filter de kolom GemiddeldeWindsnelheid op 'Groter Dan' 1,3.
 $L2=13,12+0,6215*C2-11,37*(3,6*B2)^{0,16}+0,3965*C2*(3,6*B2)^{0,16}$ en
 gebruik de vulgreep.
 Verwijder alle filters en maak een nieuwe kolom door in cel M1 Verschil te
 typen.
 $M2=L2-C2$
 De kolom Verschil eerst sorteren met 'Sorteren van hoog naar laag' en daarna
 met 'Sorteren van laag naar hoog' geeft het grootste verschil op 31 januari 1956.

Bladzijde 152

- C4** **a** Filter de kolom MaximaleTemperatuur op 'Is groter dan of gelijk aan' 30.
 Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom C van de totaalrij geeft 24,06...
 De gemiddelde temperatuur van alle tropische dagen was 24,06 °C.
b Filter uit vraag a verwijderen.
 Filter de kolom Datum op 1965.
 Kiezen van 'Som' in kolom J van de totaalrij geeft 1151,9.
 In 1965 viel in totaal 1151,9 mm neerslag.
 Sorteert de kolom Neerslagduur met 'Sorteren van hoog naar laag'.
 Op 18 december regende het dat jaar het langst.

- C5** Filter in de kolommen Lengte en Gewicht de Lege cellen eruit.
 Voeg een kolom toe door in cel L1 Oppervlakte te typen.
 $L2 = \text{AFRONDEN}(0,007184*(100*E2)^{0,725}*F2^{0,425};1)$

8.3 Draaitabellen en draaigrafieken

Bladzijde 153

- 20** **a** Kies 'Aantal' in kolom B van de totaalrij.
 Filteren van kolom Geslacht op M geeft 221 mannen en filteren op V geeft
 165 vrouwen.
b Kies 'Aantal' in kolom F van de totaalrij.
 Filteren van kolom Stad op Adelaide geeft 70, filteren op Brisbane geeft 88,
 filteren op Melbourne geeft 73, filteren op Perth geeft 72 en filteren op
 Sydney geeft 83 personen.
c Filter per Stad op M en op V.

		geslacht		
		M	V	
stad	Adelaide	37	33	70
	Brisbane	39	49	88
	Melbourne	50	23	73
	Perth	41	31	72
	Sydney	54	29	83
		221	165	386

- 21 a** De modale leeftijd bij de vrouwelijke sporters is 25 jaar.
- b**
- Maak een draaitabel met als rij-variabele Sport en als kolomvariabele Geslacht en kies bij Waarden voor Aantal van Geslacht.
Bij de sporten badminton, basketbal, boogschieten, hockey, moderne vijfkamp, taekwondo, tafeltennis, triatlon en volleybal staan evenveel mannen als vrouwen in de dataset.
 - Maak een draaitabel met als rij-variabele Leeftijd en als kolomvariabele Goud en kies bij Waarden voor Aantal van Goud.
De oudste winnaar van een gouden medaille is 58. Dubbelklikken op de waarde 1 in de tabel geeft een nieuw tabblad met de gegevens van deze sporter.
De oudste goudenmedaillewinnaar deed aan paardensport.

Alternatieve uitwerking

Maak een draaitabel met als rij-variabele Leeftijd en als Kolomvariabele Sport, filter op Goud en kies bij Waarden voor Aantal van Goud.
Selecteer bij het filter Meerdere items selecteren en vink 0 uit.
De oudste goudenmedaillewinnaar deed aan paardensport.

- 22** Maak een draaitabel met als rij-variabelen Geslacht en Groep en zorg bij Waarden voor Min van Afstand, Gemiddelde van Afstand en Max van Afstand.
Stel de getalnotatie van Gemiddelde van Afstand in op twee decimalen.

Rijlabels	Min van Afstand (m)	Gemiddelde van Afstand (m)	Max van Afstand (m)
= M	71,93	79,95	88,68
A	71,93	79,70	84,46
B	72,61	80,21	88,68
= V	53,42	59,92	67,11
A	54,94	60,20	64,3
B	53,42	59,63	67,11
Eindtotaal	53,42	70,69	88,68

- 23 a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Omgeving en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van Eindcijfer.
Stel de getalnotatie eventueel in op één decimaal.

Rijlabels	Gemiddelde van Eindcijfer
platteland	9,5
stad	10,7
Eindtotaal	10,4

Rana concludeert dat leerlingen die in de stad wonen gemiddeld een hoger resultaat hebben op het eindrapport dan leerlingen die op het platteland wonen.

- b** Maak een draaitabel met Leeftijd als rij-variabele, Geslacht als kolomvariabele en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van Eindcijfer.
Stel de getalnotatie eventueel in op één decimaal.

Gemiddelde van Eindcijfer	Kolomlabels		
Rijlabels	M	V	Eindtotaal
15	12,7	9,6	11,3
16	11,6	10,5	11,0
17	10,0	10,5	10,3
18	9,8	9,3	9,5
19	8,0	8,4	8,2
Eindtotaal	10,9	9,9	10,4

Naarmate jongens ouder zijn, hebben ze gemiddeld een lager resultaat op het eindrapport. Voor meisjes geldt dat niet (helemaal).
Gemiddeld hebben meisjes een hoger resultaat op hun eindrapport dan jongens.
Sofanias heeft dus niet (helemaal) gelijk.

Bladzijde 155

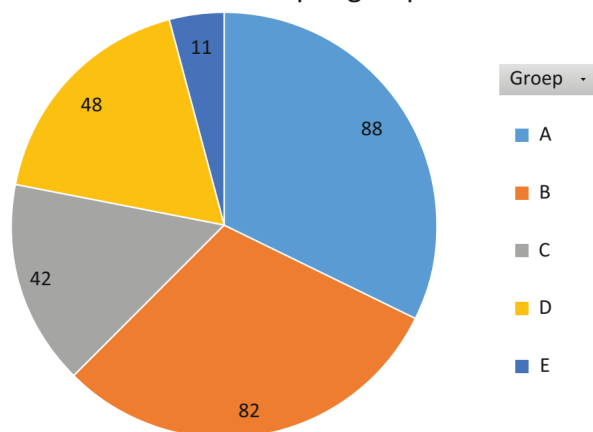
- 24 a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Lengte en kies bij Waarden voor Aantal van LeerlingID.
Er komen zeer veel verschillende lengtes voor en de meeste lengtes hebben een lage frequentie. Dat levert een weinig overzichtelijke frequentietabel op.
- b** Maak een nieuwe kolom door LengteKlasse te typen in cel H1 van het werkblad DATASET.
Filter Lengte met getalfilter Tussen op 'Is groter dan of gelijk aan' 150 en 'Is kleiner dan of gelijk aan' 159.
Typ in de eerste cel van de nieuwe kolom 150–159 en gebruik de vulgreep. Herhaal deze handeling voor de overige lengteklassen.
- c** Maak een draaitabel met als rij-variabele LengteKlasse en kies bij Waarden voor Aantal van LeerlingID.

Rijlabels	Aantal van LeerlingID
150-159	9
160-169	44
170-179	54
180-189	31
190-199	8
Eindtotaal	146

- 25 a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Groep en kies bij Waarden voor Aantal van Groep.
Maak als draaigrafiek een cirkeldiagram (Cirkel). Voeg Gegevenslabels toe. Maak het diagram verder op.

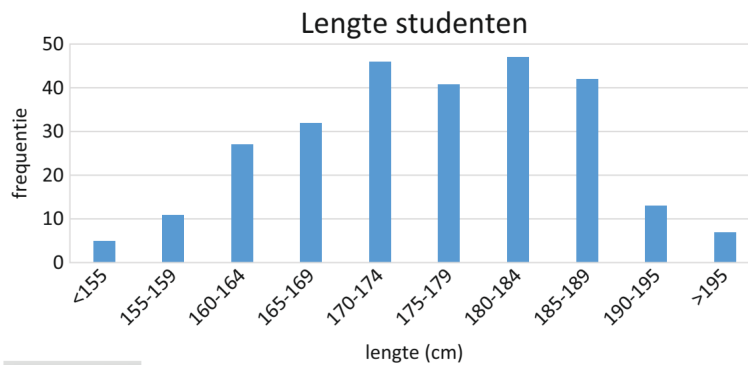
Aantal van Groep

Aantallen studenten per groep



- b** Maak een draaitabel met als rij-variabele Lengte en kies bij Waarden voor Aantal van Groep.
Kies bij Lengte voor groeperen: Beginnen bij 155, Eindigen bij 195 en Op 5.
Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gegroepeerde kolom). Maak het diagram verder op.

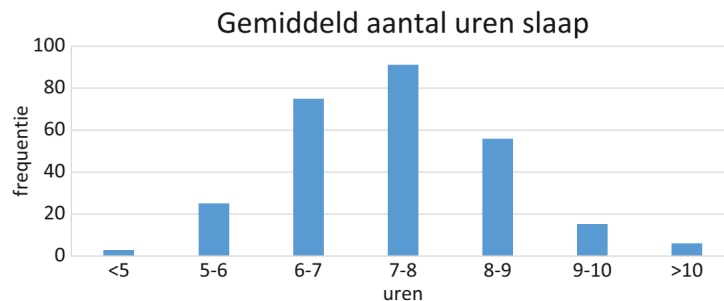
Aantal van Groep



Lengte (cm) -

- c Maak een draaitabel met als rij-variabele UrenSlaap en kies bij Waarden voor Aantal van Groep.
Kies bij UrenSlaap voor groeperen: Beginnen bij 5, Eindigen bij 10 en Op 1.
Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gegroepeerde kolom). Maak het diagram verder op.

Aantal van Groep

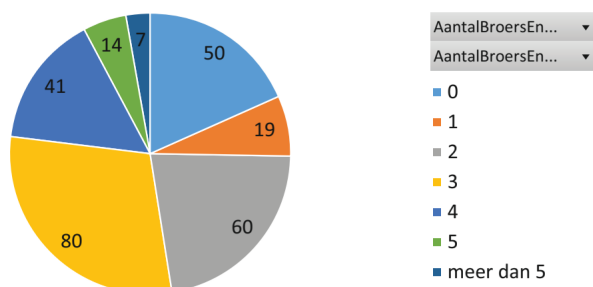


UrenSlaap -

- d Maak een draaitabel met als rij-variabele AantalBroersEnZussen en kies bij Waarden voor Aantal van AantalBroersEnZussen.
Kies bij AantalBroersEnZussen voor groeperen van 6 en 7 broers en zussen, en verander de naam van 'Groep 1' in 'meer dan 5'.
Maak als draaigrafiek een cirkeldiagram (Cirkel). Voeg eventueel Gegevenslabels toe. Maak het diagram verder op.

Aantal van AantalBroersEnZussen

Aantal broers en zussen



+ -

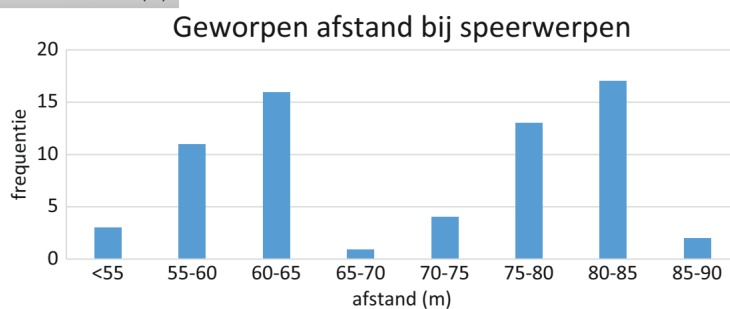
- a Maak een draaitabel met als rij-variabele Afstand en kies bij Waarden voor Aantal van Afstand.

Kies bij Afstand voor groeperen: Beginnen bij 55, Eindigen bij 90 en Op 5.

Rijlabels	Aantal van Afstand (m)
<55	3
55-60	11
60-65	16
65-70	1
70-75	4
75-80	13
80-85	17
85-90	2
Eindtotaal	67

- b Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gegroepeerde kolom). Maak het diagram verder op.

Aantal van Afstand (m)

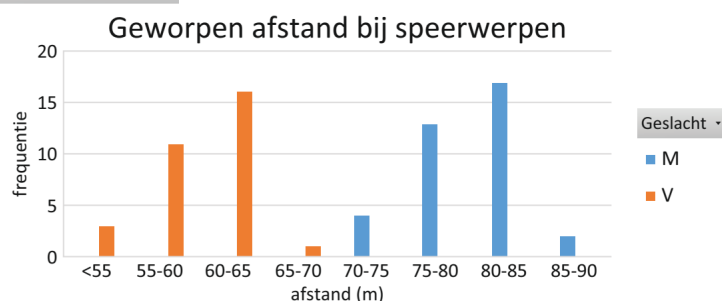


Afstand (m)

- c Je hebt te maken met een meertoppige verdeling.

- d Voeg Geslacht toe als kolomvariabele.

Aantal van Afstand (m)

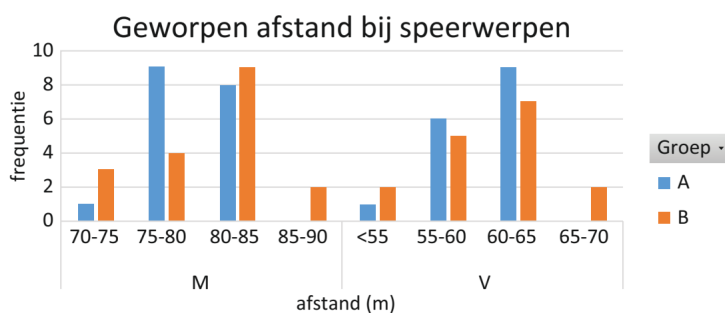


Afstand (m)

De mannen gooien verder dan de vrouwen. Dit veroorzaakt de twee toppen.

- e Versleep Geslacht van Kolommen naar Rijen en zet Geslacht boven Afstand. Voeg Groep toe als kolomvariabele.

Aantal van Afstand (m)

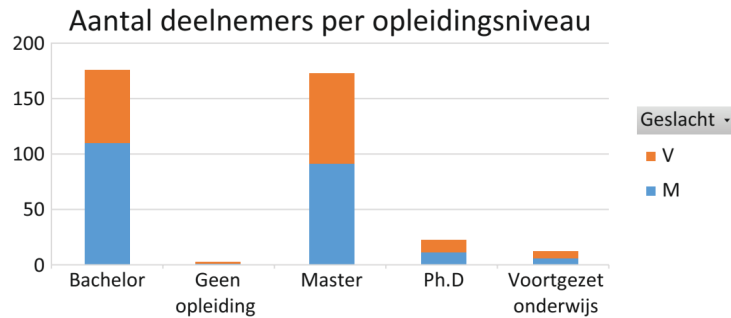


Geslacht Afstand (m)

+ -

- a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Stad en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van Leeftijd.
Filter vervolgens in de draaitabel op de juiste steden.
Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gegroepeerde kolom). Maak het diagram verder op.
Je kunt ook eerst een diagram maken van de ongefilterde tabel en dan in het diagram filteren.
- b** Maak een draaitabel met Opleiding als rij-variabele, Geslacht als kolomvariabele en kies bij Waarden voor Aantal van Geslacht.
Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gestapelde kolom). Maak het diagram verder op.

Aantal van Geslacht

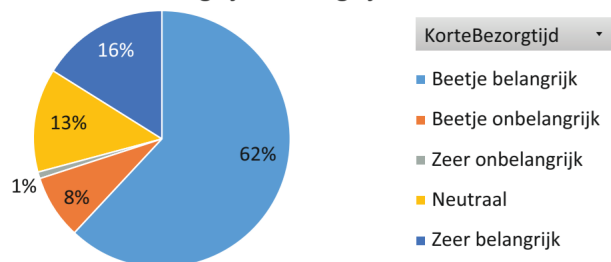


Opleiding

- c** Maak een draaitabel met KorteBezorgtijd als rij-variabele, Geslacht en BurgerlijkeStaat als kolomvariabele en kies bij Waarden voor Aantal van KorteBezorgtijd.
Filter in de draaitabel op man en alleenstaand.
Maak als draaigrafiek een cirkeldiagram (Cirkel). Voeg Gegevenslabels toe en kies bij Gegevenslabels opmaken voor Percentage in plaats van Waarde.
Maak het diagram verder op.
Je kunt ook eerst een diagram maken van de ongefilterde tabel en dan in het diagram filteren.

Aantal van KorteBezorgtijd

Vind je een korte bezorgtijd belangrijk?

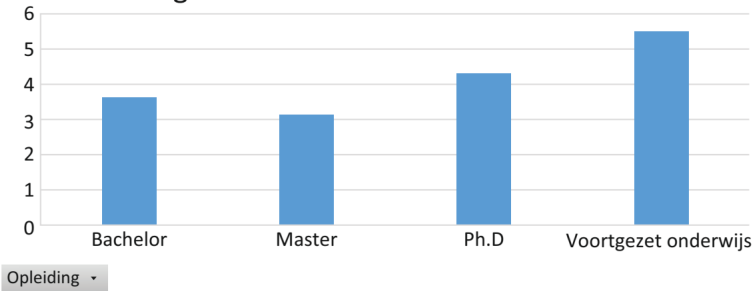


Geslacht

BurgerlijkeStaat

- d** Maak een draaitabel met als Opleiding als rij-variabele, Geslacht en Stad als kolomvariabelen, en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van GrootteHuishouden.
Filter in de draaitabel op vrouw en Brisbane.
Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gegroepeerde kolom). Maak het diagram verder op.
Je kunt ook eerst een diagram maken van de ongefilterde tabel en dan in het diagram filteren.

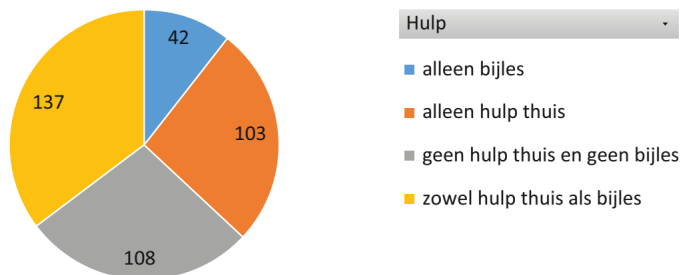
Gemiddelde grootte huishouden voor vrouwen uit Brisbane



- 28 a** Maak een nieuwe kolom door Hulp te typen in cel V1.
Filter Thuishulp op ja en Bijles op ja.
Typ in de eerste cel van de nieuwe kolom 'zowel hulp thuis als bijles' en gebruik de vulgreep.
Herhaal deze handelingen voor de overige groepen 'alleen bijles', 'alleen hulp thuis' en 'geen hulp thuis en geen bijles'.
- b** Maak een draaitabel met als rij-variabele Hulp en kies bij Waarden voor Aantal van Hulp.
Maak als draaigrafiek een cirkeldiagram (Cirkel). Voeg Gegevenslabels toe. Maak het diagram verder op.

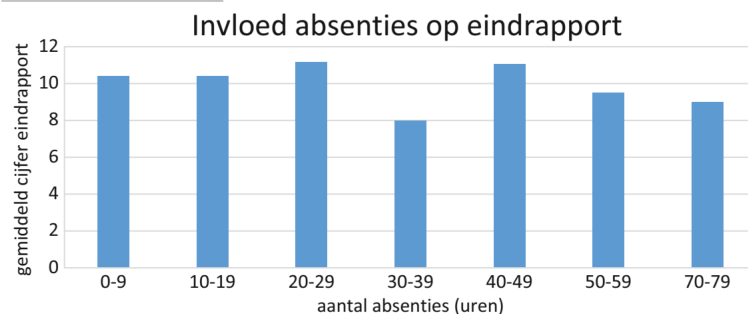
Aantal van Hulp

Aantal leerlingen met hulp



- c** Maak een draaitabel met als rij-variabele Absenties en kies bij Waarden voor Gemiddelde van Eindcijfer.
Kies bij Absenties voor groeperen: Beginnen bij 0, Eindigen bij 79 en Op 10.
Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gegroepeerde kolom). Maak het diagram verder op.

Gemiddelde van Eindcijfer

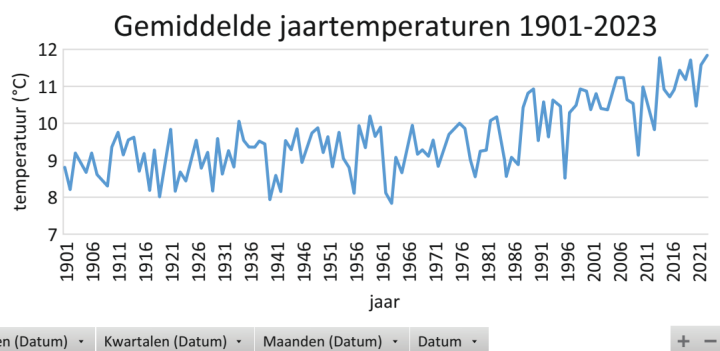


Absenties

De conclusie van Suze is dat je niet kunt stellen dat leerlingen die weinig lessen missen, gemiddeld een beter resultaat op het eindrapport halen.

- a** Nee, er zijn zoveel datapunten dat de grafiek onoverzichtelijk is.
- b** Kies Aantal in kolom A van de totaalrij. Aflezen geeft 44 925 dagen. Deze dagen zijn niet allemaal in het lijndiagram te onderscheiden.
- c** Maak een draaitabel met als rij-variabele Datum en zorg bij waarde voor Gemiddelde van GemiddeldeTemperatuur.
- Het kan zijn dat Excel zelf al voor een groepering per jaar zorgt. Als dat niet zo is, dan kies je voor Groeperen en selecteer je Jaren.
- Maak als draaigrafiek een lijndiagram (Lijn). Maak het diagram verder op. Pas de grenzen voor de as aan.
- De stijgende trend is in de figuur goed zichtbaar.

Gemiddelde van GemiddeldeTemperatuur (°C)



- a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Periode en zorg bij Waarden voor Som van AantalVerkochteWoningen.
- Het kan zijn dat Excel zelf al voor een groepering op jaren en kwartalen zorgt. Als dat niet zo is, dan kies je voor Groeperen en selecteer je Jaren en Kwartalen.
- Filter de variabele Periode met een Datumfilter op Tussen 1-1-2013 en 31-12-2020. Je kunt ook in de draaitabel bij Rijlabels de juiste jaren selecteren.
- Maak als draaigrafiek een lijndiagram (Lijn). Maak het diagram verder op.

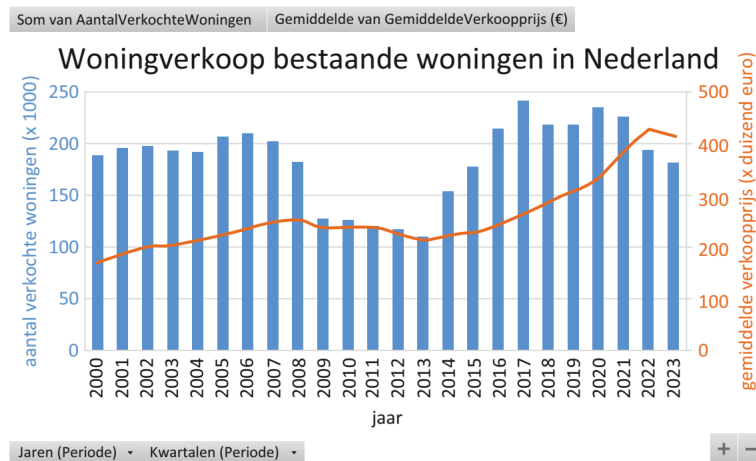
Som van AantalVerkochteWoningen



Vrijwel elk jaar neemt de kwartaalverkoop binnen een jaar per kwartaal toe en steeds is het aantal verkochte woningen in het eerste kwartaal van een jaar minder dan in het laatste kwartaal van het voorgaande jaar.

- b** Maak een draaitabel met als rij-variabele Periode en zorg bij Waarden voor Som van AantalVerkochteWoningen en Gemiddelde van GemiddeldeVerkoopprijs.
- Het kan zijn dat Excel zelf al voor een groepering op jaren zorgt. Als dat niet zo is, dan kies je voor Groeperen en selecteer je Jaren.
- Maak als draaigrafiek een combinatiediagram (Combinatie). Kies bij de grafiek van de aantal verkochte woningen voor het type Gegroepeerde kolom en bij de gemiddelde verkoopprijs voor Lijn. Vink voor de tweede grafiek de Secundaire as aan.

Maak het diagram verder op. Pas eventueel de grenzen en eenheden voor beide verticale assen aan.



- 31 a** Maak op het tabblad Juni 2023 de totaalrij aan. Kies Gemiddelde in kolom C van de totaalrij en lees af dat de gemiddelde temperatuur in juni 2023 ongeveer 19,4°C is. Dus het getal dat op de eerste puntjes moet staan is 19,4.

Maak bij de gegevens in het tabblad Tijdvak 1991-2020 een draaitabel met als rij-variabele Datum en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van GemiddeldeTemperatuur. Groepeer Datum op Maanden. Lees bij juni af dat de normale gemiddelde temperatuur ongeveer 16,1 °C is. Dus het getal dat op de tweede puntjes moet staan is 16,1. Bewaar deze draaitabel.

Maak bij de gegevens in het tabblad Historie een draaitabel met als rij-variabele Datum en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van GemiddeldeTemperatuur. Kies bij Groeperen indien nodig voor zowel Maanden als Jaren. Zet de rij-variabele Maanden (Datum) bovenaan bij de rij-variabelen. Filter de variabele Datum op Alle datums in de periode juni. Sorteer de waarden van Gemiddelde van GemiddeldeTemperatuur met 'Sorteren van hoog naar laag'. Merk op dat 2023 inderdaad op plek 1 staat. Op plek 2 staat 2021 met ongeveer 18,2°C. Dus de getallen die op de derde en vierde puntjes moeten staan zijn 2021 en 18,2.

Kies op het tabblad Juni 2023 in kolom J van de totaalrij voor Som en lees af dat er in juni 2023 in totaal 14,3 mm neerslag viel. Dit is het getal dat op de eerste puntjes in de tweede alinea moet staan. Voeg aan de draaitabel over het Tijdvak 1991-2020 bij Waarden Som van HoeveelheidNeerslag toe. In totaal viel er in deze 30 jaar in de maanden juni 2116,2 mm neerslag, dat is gemiddeld ongeveer 70,5 mm per maand. Het getal op de tweede puntjes in de tweede alinea is dus 70,5.

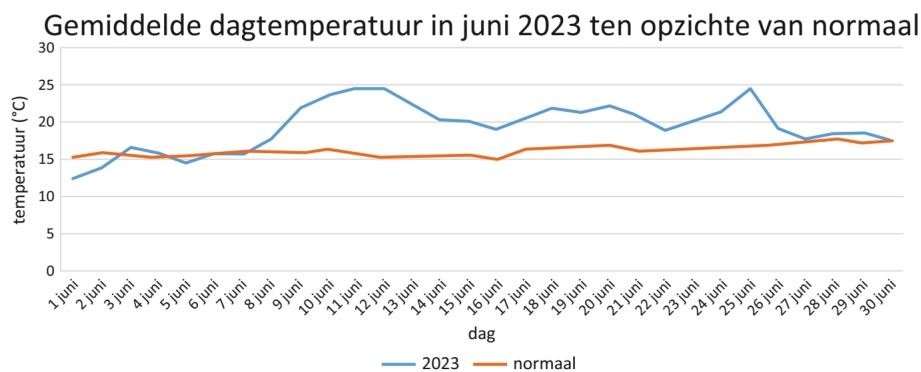
Kies op het tabblad Juni 2023 in kolom H van de totaalrij voor Som en lees af dat in juni 2023 de zon in totaal 326 uur scheen. Het getal op de eerste puntjes in de derde alinea is dus 326. Voeg aan de draaitabel over het Tijdvak 1991-2020 bij Waarden Som van Zonneschijnduur toe. In totaal scheen de zon in deze 30 jaar in de maanden juni 6214,4 uur, dat is gemiddeld ongeveer 207,1 uur per maand. Het getal op de laatste puntjes is dus 207,1.

- b** Zet in de cellen B3 t/m B32 van het tabblad Temperaturen juni de gemiddelde dagtemperaturen van juni 2023. Kopieer deze uit kolom C van het tabblad Juni 2023.

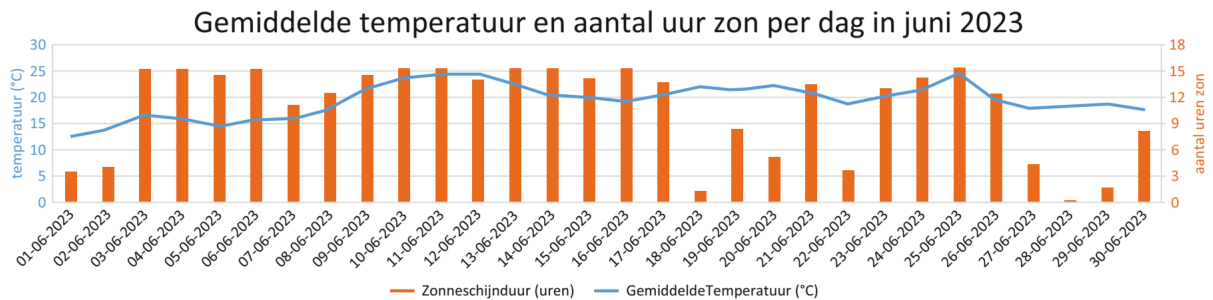
Gebruik de draaitabel bij het tabblad Tijdvak 1991-2020 uit vraag a. Kies bij Groeperen voor zowel Maanden als Dagen. Zet de rij-variabele Maanden (Datum) bovenaan bij de rij-variabelen. Kopieer de gemiddelde dagtemperaturen van juni in de periode 1991-2020 naar de cellen C3 t/m C32 van het tabblad Temperaturen juni. Zorg ervoor dat de getallen in één decimaal worden weergegeven. Je krijgt de volgende tabel.

	A	B	C
1	GemiddeldeTemperatuur (°C)		
2	Dag	2023	normaal
3	1 juni	12,5	15,3
4	2 juni	13,9	16,0
5	3 juni	16,6	15,5
6	4 juni	15,9	15,2
7	5 juni	14,5	15,4
8	6 juni	15,7	15,9
9	7 juni	15,9	16,1
10	8 juni	17,8	16,1
11	9 juni	21,8	15,9
12	10 juni	23,6	16,2
13	11 juni	24,5	15,8
14	12 juni	24,3	15,2
15	13 juni	22,4	15,4
16	14 juni	20,3	15,6
17	15 juni	20	15,5
18	16 juni	19,1	15,1
19	17 juni	20,5	16,2
20	18 juni	21,9	16,4
21	19 juni	21,3	16,6
22	20 juni	22,1	16,8
23	21 juni	20,8	16,1
24	22 juni	18,9	15,9
25	23 juni	20,2	16,2
26	24 juni	21,3	16,6
27	25 juni	24,5	16,7
28	26 juni	19,2	17,1
29	27 juni	17,7	17,3
30	28 juni	18,4	17,7
31	29 juni	18,6	17,3
32	30 juni	17,6	17,6

Maak een lijndiagram (Lijn) en maak het verder op.



- c Selecteer in het tabblad Juni 2023 de cellen A1:A31 en tegelijk C1:C31 én H1:H31. Maak een combinatiediagram (Combinatie). Kies bij de grafiek van de gemiddelde temperatuur voor het type Lijn en bij de zonnenschijnduur voor Gegroepeerde kolom. Vink voor de tweede grafiek de Secundaire as aan. Maak het diagram verder op. Pas eventueel de grenzen en de eenheden voor de secundaire as aan.



Bladzijde 159

- C6** a Maak een draaitabel met als rij-variabele Geslacht, filter op Land en zorg bij Waarden voor Som van Goud, Som van Zilver en Som van Brons. Filter in de draaitabel op Verenigde Staten.

Land **Verenigde Staten**

Rijlabels	Som van Goud	Som van Zilver	Som van Brons
M	54	25	36
V	85	29	35
Eindtotaal	139	54	71

- b Maak een draaitabel met als rij-variabele Lengte, kolomvariabele Leeftijd, filter op Land en kies bij Waarden voor Aantal van Naam. Filter in de draaitabel op Nederland.
- Kies bij Lengte voor groeperen: Beginnen bij 1,4 en Eindigen bij 2,2 en Op 0,2.
- Kies bij Leeftijd voor groeperen: Beginnen bij 10, Eindigen bij 50 en Op 10.

Land **Nederland**

Aantal van Naam	Kolomlabels				
Rijlabels	10-19	20-29	30-39	40-50	Eindtotaal
1,4-1,6		5			5
1,6-1,8	4	86	27	2	119
1,8-2	3	89	23	4	119
2-2,2		5	1		6
Eindtotaal	7	185	51	6	249

- C7** • Maak een draaitabel met als rij-variabele Geslacht, filter op Land en kies bij Waarden voor Aantal van Naam. Filter in de draaitabel op Nederland. Maak als draaigrafiek een cirkeldiagram (Cirkel). Voeg Gegevenslabels toe en kies bij Gegevenslabels opmaken voor Percentage in plaats van Waarde. Maak het diagram verder op.
- Maak een draaitabel met Sport als rij-variabele en Land als kolomvariabele en kies bij Waarden voor Aantal van Naam. Filter in de draaitabel op Nederland en België. Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gestapelde kolom). Maak het diagram verder op.

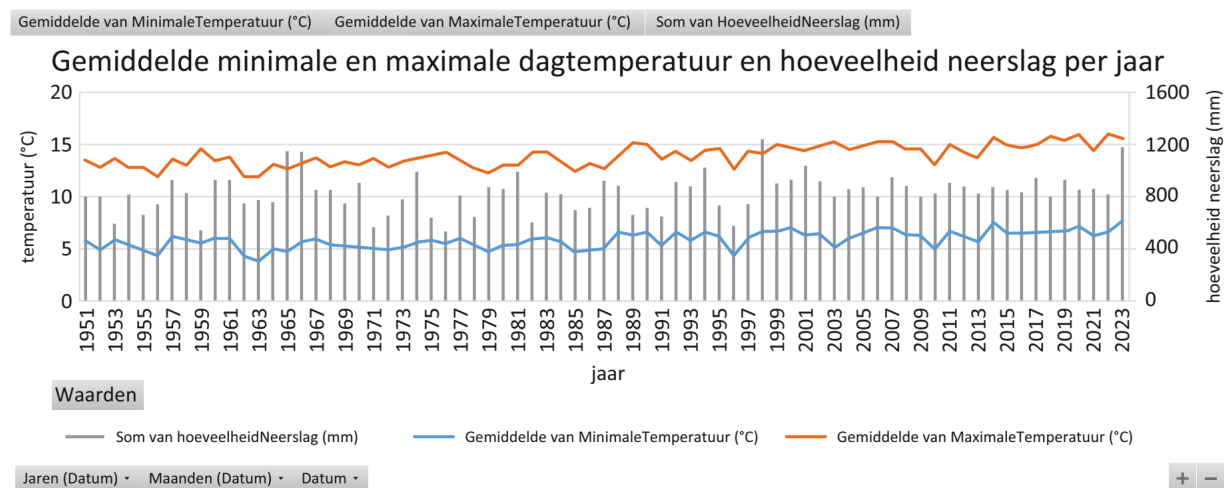
Bij het eerste diagram kun je ook eerst een diagram maken van de ongefilterde tabel en dan in het diagram filteren.

C8

Maak bij de gegevens in het tabblad Historie een draaitabel met als rij-variabele Datum, en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van MinimaleTemperatuur, Gemiddelde van MaximaleTemperatuur en Som van HoeveelheidNeerslag. Het kan zijn dat Excel zelf al voor een groepering per jaar zorgt. Als dat niet zo is, dan kies je voor Groeperen en selecteer je Jaren.

Maak als draaigrafiek een combinatiediagram (Combinatie). Kies bij de grafieken van de minimale en maximale temperatuur voor het type Lijn en bij de hoeveelheid neerslag voor Gegroepeerde kolom. Vink voor de laatste grafiek de Secundaire as aan.

Maak het diagram verder op. Pas eventueel de grenzen en de eenheden voor beide verticale assen aan.



Verantwoording

Beeld

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlelen.

0 / 25



© 2025 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06490-7

