

getal & ruimte

A



Noordhoff

Dit boek is van jou!

Naam

Klas

Getal & Ruimte

Leerboek
havo A deel 3

Dertiende editie, 2026

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd
M. Daems

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek havo A deel 3

Samen met de delen 1 en 2 van havo wiskunde A bevat dit boek de leerstof van het programma havo wiskunde A, zoals dat met ingang van 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak havo wiskunde A is 320 uur. Elk van de delen 1, 2 en 3 bevat vier hoofdstukken, waarbij in het laatste hoofdstuk van deel 3 de examentraining aan bod komt.

In dit boek worden in de eerste drie hoofdstukken de gedeelten van de domeinen behandeld die in de delen 1 en 2 nog niet aan de orde zijn geweest. Bovendien wordt in deze hoofdstukken leerstof uit voorgaande delen herhaald. Deze drie hoofdstukken hebben elk een studielast van ongeveer 30 uur. Daarmee komt de totale studielast van de eerste 11 hoofdstukken op ongeveer 285 uur. Er blijft zo tijd over voor hoofdstuk 12 Examentraining. In de eerste drie hoofdstukken komen de volgende subdomeinen aan bod.

Hoofdstuk 9	Exponentiële verbanden	B2, C4 en C5
Hoofdstuk 10	Statistiek gebruiken	E1 t/m E4
Hoofdstuk 11	Formules en variabelen	B2 en C1 t/m C4

In hoofdstuk 12 Examentraining is de leerstof verdeeld in zes paragrafen. Ook in deze editie beginnen de eerste vijf paragrafen met een of twee opgaven waarin korte vragen staan die betrekking hebben op de leerstof in de paragraaf en die geënt zijn op examenvragen. In de theorie die daarop volgt, wordt elk onderwerp kort en bondig herhaald. Daarna volgen passende examenopgaven die gekozen zijn uit recente examens tot en met 2024. De gemengde opgaven bij hoofdstuk 12 bestaan uit een flink aantal korte opgaven, die niet gesorteerd staan op onderwerp. Hierin komen de basisvaardigheden die een leerling voor het examen nodig heeft aan de orde.

Het schoolexamen en het centraal examen

Niet alle in de delen 1, 2 en 3 van havo A aangeboden onderwerpen worden centraal geëxamineerd. De (sub)domeinen B3, D en E5 komen uitsluitend op het schoolexamen aan de orde. In de boeken staan deze onderwerpen in deel 1 hoofdstuk 4 (Handig tellen), in deel 2 hoofdstuk 5 (Veranderingen) en hoofdstuk 8 (Statistiek met de computer). Alle onderwerpen die behandeld worden in havo A deel 3 behoren tot de stof voor het centraal examen.

De digitale leeromgeving van Getal & Ruimte

Bij sommige gedeeltes van het boek kunnen opgaven ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

In het docentenmateriaal staan studiewijzers die een indicatie geven van de hoeveelheid leerstof die per week kan worden doorgewerkt. Verder zijn bij de hoofdstukken 9, 10 en 11 toetsopgaven opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk van deze hoofdstukken een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

Voorjaar 2026

Legenda

V1 Voorkennisopgave

Een opgave over een onderwerp uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk.

O1 Oriënterende opgave

   Een opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

2 Gewone opgave

   Een opgave waarmee je oefent met wat er in de theorie aan bod is geweest.

R3 Reflectie-opgave

   Een opgave waarmee je terugkijkt op een voorgaand probleem, of waarmee je op een andere manier naar voorgaande stof kijkt.

A4 Afsluitende opgave

   Een opgave waarmee je oefent op het beoogde beheersingsniveau.

E5 Extra opgave

   Een opgave die je extra uitdaagt.

☐ **Kennis- en vaardighedencheck**

Je controleert of je de kennis en/of vaardigheid beheerst door de bijbehorende opgave te maken.

C1 Checkopgave

Een opgave waarmee je controleert of je de kennis en/of vaardigheid goed beheerst.

Routeaanduiding

1 Een opgave van de basisroute.



2 Een opgave van de middenroute.



3 Een opgave van de uitdagende route.



NB: De symbolen van de routeaanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder routeaanduiding

In de Kennis- en vaardigheidentest, in de Gemengde opgaven en in de Examentraining hebben opgaven geen routeaanduiding.

[▶ WERKBLAD](#) Verwijzing naar een werkblad achterin dit boek.

Inhoud

9	Exponentiële verbanden	6	11	Formules en variabelen	108
9.1	Exponentiële groei	8	11.1	Grafieken en gebieden	110
9.2	Formules bij exponentiële groei	18	11.2	Herleiden en vrijmaken	116
9.3	Exponentiële en lineaire groei	25	11.3	Redeneren met formules	122
9.4	Herleiden en redeneren	40	11.4	Formulevaardigheden	126
	Kennis- en vaardighedentest	48		Kennis- en vaardighedentest	138
	Gemengde opgaven	50		Gemengde opgaven	140
10	Statistiek gebruiken	56	12	Examentraining	146
10.1	Statistische diagrammen	58	12.1	Algemene vaardigheden	148
10.2	Causaliteit en groepen vergelijken	68	12.2	Lineaire verbanden	169
10.3	Statistiek toepassen	79	12.3	Exponentiële verbanden	180
	Kennis- en vaardighedentest	98	12.4	Herleiden en redeneren	196
	Gemengde opgaven	100	12.5	Statistiek	208
			12.6	Onderzoeksopgaven	235
				Gemengde opgaven	242
				Formuleblad	254
				Werkbladen	256
				Antwoorden Kennis- en vaardighedentests	269
				Overzicht GR-modules	270
				Examenwerkwoorden	271
				Trefwoordenregister	273
				Verantwoording	274



A photograph of a pond filled with green lily pads and several white water lilies in bloom. The water is dark blue. A blue hexagonal graphic is overlaid on the right side of the image, containing the chapter title and text.

9

Exponentiële verbanden

In een meer wordt een bepaald soort waterlelie geïntroduceerd. De totale oppervlakte van de bladeren neemt snel toe. Elke twaalf weken verachtvoudigt de oppervlakte van de bladeren. Na 48 weken is het hele meer bedekt. Na hoeveel weken was het meer voor een achtste deel bedekt?

A 4 B 6 C 24 D 36

Een ecooloog sloeg al na tien weken alarm over de snelle groei van de waterlelie.

Hoeveel weken daarna was de oppervlakte alweer verdubbeld?

A 1,5 B 3 C 4 D 6

9.1 Exponentiële groei

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij een beginwaarde en een groeifactor per tijdseenheid een formule van exponentiële groei opstellen en er berekeningen mee uitvoeren.
- Je kunt werken met verdubbelingstijd en halveringstijd.

Voorkennis Groeifactor en groeipercentage

Neemt een hoeveelheid per jaar met 15% toe, dan wordt de hoeveelheid met 1,15 per jaar vermenigvuldigd. De factor 1,15 is de groeifactor per jaar.

Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 1,26 is, dan heb je te maken met een toename van 26% per jaar.

Bij een jaarlijkse afname van 12% hoort een groeifactor van 0,88 per jaar.

Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 0,982 is, dan heb je te maken met een afname van 1,8% per jaar.

15% erbij geeft $100\% + 15\% = 115\%$,
dus $\times 1,15$

$\times 1,26$, dus 126%

$126\% - 100\% = 26\%$, dus 26% erbij

12% eraf geeft $100\% - 12\% = 88\%$,
dus $\times 0,88$

$\times 0,982$, dus 98,2%

$100\% - 98,2\% = 1,8\%$, dus 1,8% eraf

V1 Vul in.

toename in procenten	13%	3,3%	120%	0,7%			
groeifactor					1,06	2,5	1,237

V2 Vul in.

afname in procenten	13%	41,8%	6,2%	0,3%			
groeifactor					0,98	0,999	0,246

V3 a Een hoeveelheid neemt per jaar met 12,7% toe.

Geef de groeifactor per jaar.

b Een hoeveelheid neemt per maand met 6,8% af.

Geef de groeifactor per maand.

c Bij een exponentiële groei is de groeifactor 1,735 per maand.

Geef het groeipercentage per maand.

d Bij een exponentiële groei is de groeifactor 0,845 per dag.

Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per dag af?

01 Gegeven zijn vier formules en de bijbehorende grafieken.

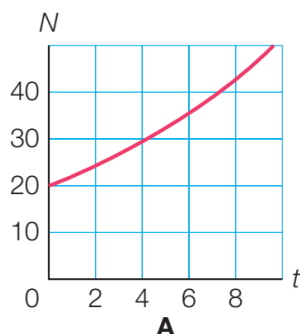
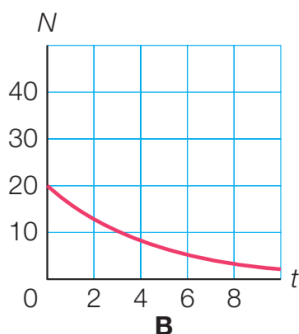
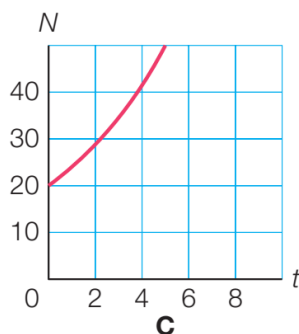
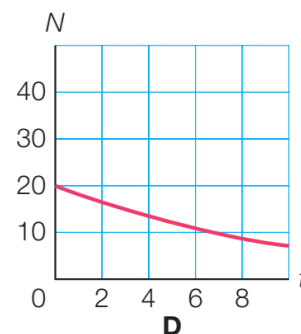
☐⊗* Zoek bij elke formule de juiste grafiek.

I $N = 20 \cdot 1,2^t$

II $N = 20 \cdot 1,1^t$

III $N = 20 \cdot 0,8^t$

IV $N = 20 \cdot 0,9^t$



Theorie A Exponentiële groei

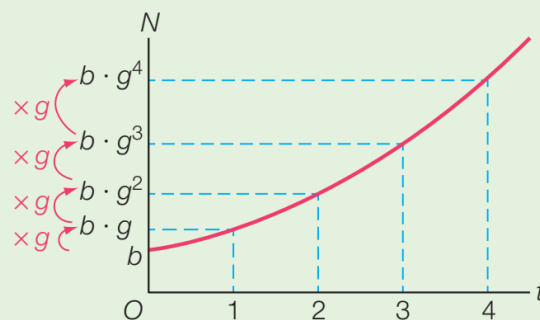
Het **groeipercentage** van het aantal abonnees op een YouTube-kanaal is 18% per maand. Het aantal wordt dus elke maand met 1,18 vermenigvuldigd. Je hebt hier te maken met een voorbeeld van *exponentiële groei*. Het getal waarmee telkens wordt vermenigvuldigd, heet de *groefactor*. Bij het YouTube-kanaal is de groefactor 1,18 per maand. De *beginwaarde* (of *beginhoeveelheid*) is de waarde op $t = 0$. Als op $t = 0$ het YouTube-kanaal 496 abonnees heeft, dan geldt voor het aantal abonnees N na t maanden $N = 496 \cdot 1,18^t$. We zeggen dat er een exponentieel verband bestaat tussen N en t .

t	N
0	496
1	$496 \cdot 1,18^1$
2	$496 \cdot 1,18^2$
3	$496 \cdot 1,18^3$
$\vdots$	$\vdots$

Dus $N = 496 \cdot 1,18^t$.

Bij exponentiële groei

- wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal (de groefactor) vermenigvuldigd
- hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, waarin b de beginwaarde (of beginhoeveelheid) is en g de groefactor per tijdseenheid.

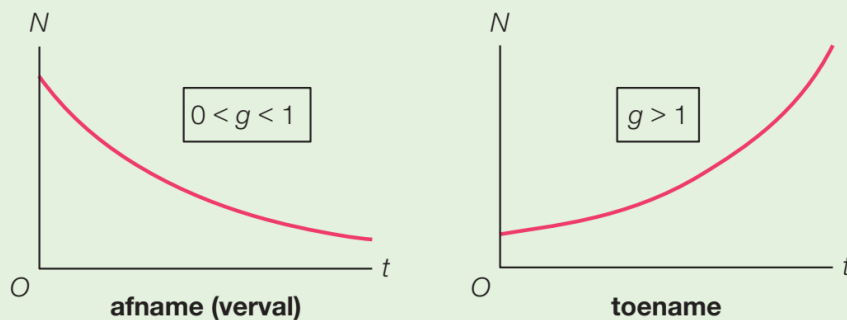


In een formule voor exponentiële groei staat de variabele in de exponent.



Negatieve groeifactoren komen niet voor. De groefactor kan wel tussen 0 en 1 liggen. De hoeveelheid neemt dan af. Ook in deze gevallen spreken we van exponentiële groei, hoewel ook de uitdrukkingen 'exponentiële afname' en 'exponentieel verval' gebruikt worden.

Bij de grafiek van $N = b \cdot g^t$ kun je dus twee situaties onderscheiden: voor g tussen 0 en 1 is de grafiek afnemend dalend en voor g groter dan 1 is de grafiek toenemend stijgend.



Afspraak

In de opgaven mag je uitgaan van een exponentieel verband als er sprake is van een groeifactor per tijdseenheid.

Voorbeeld

De waterhyacint is een drijvende waterplant die zich in warme klimaten snel kan verspreiden over het wateroppervlak. Dit heeft negatieve gevolgen voor diverse dier- en plantensoorten in het water. De waterhyacint wordt daarom in veel landen in de wereld bestreden.

In een meer komt deze plant voor. Elke dag wordt op hetzelfde tijdstip een luchtfoto genomen van het meer. Op basis van de luchtfoto wordt de door de plant bedekte oppervlakte bepaald. Het blijkt dat de oppervlakte elke dag met 7% toeneemt. Op 1 maart is de door de plant bedekte oppervlakte 52 m^2 .



- Stel de formule op van de door de waterhyacint bedekte oppervlakte A in m^2 . Neem t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 maart.
- Hoeveel m^2 is bedekt op 25 maart? Rond af op gehele.
- Op welke dag stelt men voor het eerst vast dat de bedekte oppervlakte meer is dan 650 m^2 ?

Uitwerking

- $A = 52 \cdot 1,07^t$
- $t = 24$ geeft $A = 52 \cdot 1,07^{24} \approx 264$
Dus er is dan 264 m^2 bedekt.
- $52 \cdot 1,07^t = 650$
Voer in $y_1 = 52 \cdot 1,07^x$ en $y_2 = 650$.
De optie snijpunt geeft $x = 37,33\dots$
Dus $t = 38$, dat is op 8 april.

Bij $t = 37$ nog niet, bij $t = 38$ voor het eerst wel.

- 2** Lars en Karsten hebben allebei een YouTube-kanaal. Lars heeft 3120 abonnees en dat aantal groeit maandelijks met 7%. Karsten heeft 5310 abonnees. Dit aantal neemt met 2% per maand af. Het aantal abonnees van Lars na t maanden is N_L . Bij Karsten is dat N_K . Stel de formules op van N_L en N_K .

- 3** Op 1 januari 2024 wordt een zonnepaneel in gebruik genomen. De capaciteit van dit paneel is dan 400 wattpiek (Wp). Door degradatie van het paneel neemt deze capaciteit elk jaar met 0,5% af.

- a** Stel de formule op voor de capaciteit C in Wp. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2024.
- b** In welk jaar is de capaciteit gedaald tot 375 Wp? En in welke maand van dat jaar is dat?

1 jaar is 12 maanden

- 4** De halsbandparkiet komt van oorsprong niet in Nederland voor. De populatie in Nederland ontstond doordat vrijgelaten of ontsnapte dieren zich gingen voortplanten.

In 1990 waren er naar schatting 400 halsbandparkieten in het wild in Nederland. Sindsdien is dit aantal elk jaar met 1,12 vermenigvuldigd. Halsbandparkieten veroorzaken veel schade bij fruittelers, doordat ze appels en peren in boomgaarden stukpikken. Volgens fruitteiler Jan Boer uit Barendrecht kost hem dat jaarlijks tienduizend euro aan omzet.

- a** Stel de formule op van het aantal in het wild voorkomende halsbandparkieten N in Nederland. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1990.
- b** In welk jaar waren er voor het eerst meer dan 15 000 in het wild voorkomende halsbandparkieten in Nederland?
- c** Neem aan dat in 2020 de totale omzetschade bij fruittelers veroorzaakt door de halsbandparkiet 3,2 miljoen euro was en dat deze omzetschade elk jaar met 10% toeneemt. Bereken de gemiddelde omzetschade die één halsbandparkiet veroorzaakt in 2030. Rond af op gehele euro's.

- 5** Op $t = 0$ zijn er in een vijver 150 kikkers en 300 salamanders. Het aantal kikkers neemt per jaar met 6% toe en het aantal salamanders neemt per jaar met 6% af. Bereken na hoeveel jaar er evenveel kikkers als salamanders in de vijver zijn. Rond het antwoord af op één decimaal.



- 6** Een hoeveelheid neemt het eerste jaar met 10% toe. De hoeveelheid neemt in het tweede jaar met 10% af. Het derde jaar neemt de hoeveelheid weer met 10% toe, het vierde jaar neemt de hoeveelheid weer met 10% af, enzovoort. Na hoeveel jaar heb je voor het eerst minder dan 80% van de beginhoeveelheid?

A7

Een astmapatiënt met een ernstige astma-aanval krijgt van een arts een injectie met theofylline. Dit medicijn zorgt ervoor dat spieren in de luchtwegen ontspannen, waardoor de luchtwegen verwijden en de patiënt meer lucht krijgt. Direct na toediening van de injectie is de concentratie theofylline in het bloed 15 microgram per mL. Vervolgens neemt de concentratie door afbraak in de lever langzaam af. Bij niet-rokers neemt de concentratie C van theofylline in het bloed af met 11% per uur, terwijl dat bij rokers 16% per uur is.

- Stel voor zowel rokers als niet-rokers de formule op van de concentratie theofylline C in microgram per mL na t uur.
- Schets de grafieken in één figuur.

De daling van de concentratie in het eerste uur na toediening is bij rokers groter dan bij niet-rokers.

- Hoeveel microgram per mL scheelt het?

Het medicijn is uitgewerkt als C minder dan 10 microgram per mL is. De patiënt krijgt om 11:35 uur de injectie.

- Hoe laat is het medicijn uitgewerkt als de patiënt een roker is? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

8

Zie opgave 7.

Een astmapatiënt blijkt een niet-roker te zijn. Hij krijgt om 11:35 uur een injectie theofylline. Om 13:50 uur krijgt hij een nieuwe injectie, de onderhoudsdosis, waardoor de concentratie C direct met 2,5 microgram per mL toeneemt. Het medicijn is uitgewerkt als C minder dan 10 microgram per mL is.

Hoe laat is het medicijn uitgewerkt? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

A9

Harm en Francy storten bij de geboorte van hun zoon Jop 6633 euro op een kinderrekening-beleggen. Harm verwacht een rendement van 5,5% per jaar, terwijl Francy een rendement van 8% per jaar verwacht. Het rendement is de winst over een bepaalde periode uitgedrukt in procenten.

- Stel voor de verwachting van Harm de formule op van het bedrag B in euro's op de rekening t jaar na de geboorte van Jop.
- Welk bedrag verwacht Harm op de rekening als Jop 18 jaar oud wordt? En welk bedrag verwacht Francy?
- Volgens Francy is het bedrag op de rekening eerder uitgegroeid tot 10000 euro dan volgens Harm.
Bereken in maanden nauwkeurig hoeveel eerder.
- Volgens Harm neemt het bedrag in het 18^e levensjaar van Jop minder toe dan volgens Francy. Hoeveel gehele euro's minder?

A10

Zie opgave 9.

De financieel adviseur van Harm en Francy verwacht dat het bedrag op de 18^e verjaardag van Jop 22045 euro bedraagt. Van welk jaarlijks rendement gaat hij uit? Rond af op één decimaal.

Een hoeveelheid van 20 neemt elk jaar met een factor 1,034 toe. Om te berekenen hoeveel jaar het duurt voordat deze hoeveelheid is verdubbeld, kun je de vergelijking $20 \cdot 1,034^t = 40$ oplossen. Hierin is t de tijd in jaren.

- a Licht deze vergelijking toe.
- b Los de vergelijking op. Rond af op één decimaal.
- c Na tien jaar is de hoeveelheid ongeveer 27,94.
Bereken hoeveel jaar later deze hoeveelheid is verdubbeld. Rond af op één decimaal.
- d Stel dat de beginhoeveelheid 50 was.
Bereken na hoeveel jaar deze hoeveelheid is verdubbeld. Rond af op één decimaal.
- e Vergelijk je antwoorden bij vraag b, c en d. Wat valt je op?

Theorie B Verdubbelingstijd en halveringstijd

Om een goed beeld te krijgen van de snelheid van een exponentiële toename, kun je de verdubbelingstijd gebruiken.

De **verdubbelingstijd** is de tijdsduur die nodig is voor de verdubbeling van een hoeveelheid bij exponentiële groei.

In opgave 11 kreeg je bij een groei met groeifactor 1,034 steeds dezelfde verdubbelingstijd, namelijk 20,7 jaar. Dat betekent dat de hoeveelheid elke 20,7 jaar verdubbelt.

Elke vergelijking in opgave 11 is te vereenvoudigen tot $1,034^t = 2$. Hiernaast zie je hoe dat gaat bij het verdubbelen van een hoeveelheid van 20 en het verdubbelen van een hoeveelheid b . De verdubbelingstijd hangt dus alleen af van de groeifactor en is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$.

$$\begin{array}{l} 20 \cdot 1,034^t = 40 \\ 1,034^t = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{)} : 20 \\ \text{)} : 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b \cdot 1,034^t = 2b \\ 1,034^t = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{)} : b \\ \text{)} : b \end{array}$$

De verdubbelingstijd is de tijd waarin een hoeveelheid verdubbelt bij exponentiële groei. Is de groeifactor g , dan vind je de verdubbelingstijd door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen.

Heb je te maken met een exponentiële afname, dan kun je de **halveringstijd** berekenen. Dit is de tijdsduur die nodig is voor de halvering van een hoeveelheid. Je vindt de halveringstijd door de vergelijking $g^t = 0,5$ op te lossen.

De halveringstijd is de tijd waarin een hoeveelheid halveert bij exponentiële groei. Is de groeifactor g , dan vind je de halveringstijd door de vergelijking $g^t = 0,5$ op te lossen.

Voorbeeld

- a Een populatie neemt jaarlijks met 8,6% af.
Bereken de halveringstijd. Geef het antwoord in maanden nauwkeurig.
- b Gegeven is de formule $N = 200 \cdot 1,12^t$. Hierin is t de tijd in jaren.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- c Een hoeveelheid verdubbelt elke 15 jaar.
Bereken het groeipercentage per jaar.

Uitwerking

- a $0,914^t = 0,5$.

De optie oplossen bij $0,914^x = 0,5$ geeft $x = 7,708...$

De halveringstijd is 7 jaar en $0,708... \cdot 12 \approx 8$ maanden.

- b $1,12^t = 2$

De optie oplossen bij $1,12^x = 2$ geeft $x = 6,116...$

De verdubbelingstijd is 6 jaar en $0,116... \cdot 12 \approx 1$ maand.

- c Er geldt $g^{15} = 2$ met g de groeifactor per jaar.

De optie oplossen bij $x^{15} = 2$ geeft $x \approx 1,047$.

Dus het groeipercentage is 4,7% per jaar.



1 jaar is 12 maanden

R12 Een hoeveelheid neemt met 5% per jaar toe. Jimi zegt: “Een



verdubbeling is een toename van 100%, dus de verdubbelingstijd is $100 : 5 = 20$ jaar.”

- a Welke fout maakt Jimi?
- b De verdubbelingstijd bij een toename van 5% per jaar is veel korter dan 20 jaar.
Bereken deze verdubbelingstijd in jaren. Rond af op één decimaal.

13



- a Een hoeveelheid neemt dagelijks met 2% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in gehele dagen.
- b Een hoeveelheid neemt per jaar met 8% af.
Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.
- c Een hoeveelheid verdubbelt elke week.
Bereken het groeipercentage per dag.
- d Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 5 jaar en 3 maanden.
Bereken de groeifactor per jaar. Rond af op drie decimalen.

14



- a** Voor het aantal inwoners van Ghana geldt de formule $N = 25,2 \cdot 1,0235^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2010 en N het aantal inwoners in miljoenen.

Bereken de verdubbelingstijd van het aantal inwoners van Ghana. Rond af op gehele jaren.

- b** De bevolking van Gambia neemt elk jaar met 2,5% toe. De bevolking van Gabon neemt elk jaar met 2,1% toe.

Beredeneer, zonder de verdubbelingstijden te berekenen, bij welk land de bevolking een langere verdubbelingstijd heeft.



15



Het aantal boerenbedrijven in Nederland halveert bij benadering elke 25 jaar. In 1950 waren er in Nederland 410 000 boerenbedrijven.

- a** Stel een formule op voor het aantal boerenbedrijven N in Nederland. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1950. Rond de groeifactor af op drie decimalen.

- b** In 2023 waren er 50 600 boerenbedrijven in Nederland.

Bereken hoeveel procent het aantal boerenbedrijven volgens de formule afwijkt van het werkelijke aantal in 2023.



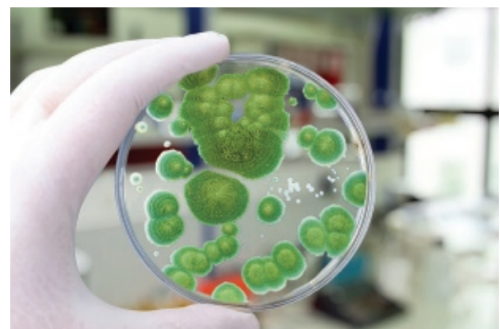
16



Penicilline is een antibacteriële stof die in 1928 in de schimmel *Penicillium* ontdekt werd door de Schotse arts-bacterioloog Alexander Fleming. Sinds de jaren 40 wordt deze schimmel op grote schaal gekweekt en hiermee zijn vele miljoenen mensenlevens gered.

Het aantal cellen in een kweek van *Penicillium* neemt met 20% per uur toe.

- a** Bereken de verdubbelingstijd in minuten nauwkeurig.
- b** Bereken in minuten nauwkeurig de benodigde tijd om de hoeveelheid cellen te laten vertienvoudigen.
- c** Onderzoek na hoeveel minuten de hoeveelheid cellen met 5% is toegenomen. Rond af op gehelen.



A17

In Nederland werd in 2003 bijna 61 miljard euro aan zorg en welzijn uitgegeven. Sindsdien zijn deze uitgaven enorm toegenomen, maar niet in elke periode was de groei even groot. Zie de tabel. Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat in 2004 en 2005 de groei van de uitgaven ten opzichte van het jaar ervoor 3,7% was.

periode	jaren	groei t.o.v. het jaar ervoor
I	2004 en 2005	3,7%
II	2006 t/m 2012	4,8%
III	2013 t/m 2015	0,6%
IV	2016 t/m 2018	3,1%

a Laat met een berekening zien dat in

2005 bijna 65,6 miljard euro werd uitgegeven aan zorg en welzijn.

Een nadeel van het geven van groeipercentages is dat je de groei mogelijk onderschat. Verdubbelingstijden kunnen een beter beeld geven van de sterkte van de groei.

b Bereken voor elke periode de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.

c In een krantenartikel uit eind 2015 staat dat de uitgaven aan zorg en welzijn sinds 2003 met 52% zijn toegenomen.

Onderzoek of dit in overeenstemming is met de gegevens hierboven.

In de periode 2019 t/m 2021 trad er door Covid-19 een sterke stijging op. De verdubbelingstijd bij de groei in deze periode was slechts 9 jaar en 10 maanden.

d Bereken voor de jaren in de periode 2019 t/m 2021 het groeipercentage ten opzichte van het jaar ervoor.

A18

Exoten zijn planten en dieren die niet op eigen kracht, maar door de mens in Nederland terecht zijn gekomen. Als zo'n exoot zich permanent kan vestigen en zich snel kan vermeerderen in onze natuur, dan spreken we van een invasieve exoot.

In deze opgave bekijken we een invasieve exoot waarvan het aantal exemplaren gedurende een periode exponentieel toeneemt met een verdubbelingstijd van T jaar.

a Hoeveel keer zoveel exemplaren zijn er na drie keer T jaar? En na vier keer T jaar?

Op $t = 0$ zijn er van deze exoot 10 000 exemplaren in Nederland. De verdubbelingstijd is 1,5 jaar. Onderzoekers waarschuwen dat een kritische grens wordt bereikt als er nog eens 30 000 exemplaren bijkomen.

b Bereken hoeveel jaar het nog duurt voordat de kritische grens wordt bereikt als er geen maatregelen worden getroffen.

c Op $t = 0$ is men begonnen met de bestrijding van de soort. Daardoor remt de groei en wordt de verdubbelingstijd 5 jaar.

Bereken hoeveel jaar het dan duurt voordat de kritische grens wordt bereikt.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan bij een beginwaarde en een groeifactor per tijdseenheid een formule van exponentiële groei opstellen en er berekeningen mee uitvoeren.

► OPGAVE C1
THEORIE A

☐ Ik kan werken met verdubbelingstijd en halveringstijd.

► OPGAVE C2
THEORIE B

C1 De Australische zeeleeuw staat op de lijst van bedreigde diersoorten. Daarom wordt één keer per jaar het aantal pups geteld.

In 2010 werden er 5860 pups geteld. Daarna is dit aantal jaarlijks met 2,6% afgenomen.

- a Stel de formule op voor het aantal pups N van de Australische zeeleeuw. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2010.
- b Met hoeveel is het aantal pups afgenomen in de periode 2016-2020?
- c In welk jaar werden er voor het eerst minder dan 4200 pups geteld?



C2 a Een hoeveelheid neemt dagelijks met 67,3% af. Bereken de halveringstijd in minuten nauwkeurig.

- b Een hoeveelheid verdubbelt elke 10 jaar. Bereken het groeipercentage per jaar.

Antwoorden

C1 a $N = 5860 \cdot 0,974^t$

b 500

c 2023

C2 a 14 uur en 53 minuten (of 893 minuten)

b 7,2%

9.2 Formules bij exponentiële groei

Kennis en vaardigheden

- Je kunt groeifactoren en groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid.
- Je kunt bij allerlei situaties een formule van exponentiële groei opstellen.

019



De tabel hiernaast hoort bij exponentiële groei.

a Met welk getal wordt N per twee jaar vermenigvuldigd?

b Met welk getal wordt N per vier jaar vermenigvuldigd? En per zes jaar?

c Erwin beweert dat N per jaar met 4,5 wordt vermenigvuldigd.

Laat zien dat Erwin niet gelijk heeft. Wat is wel de groeifactor per jaar?

tijd in jaren	0	2	4
hoeveelheid N	1	9	81

Theorie A Groeifactoren omzetten naar een andere tijdseenheid

De tabel hieronder hoort bij exponentiële groei. De beginwaarde is 10 en de groeifactor per uur is 3.

EXPONENTIËLE GROEI

t	0	1	2	3	4	5	6
N	10	$10 \cdot 3^1 = 30$	$10 \cdot 3^2 = 90$	$10 \cdot 3^3 = 270$	$10 \cdot 3^4 = 810$	$10 \cdot 3^5 = 2430$	$10 \cdot 3^6 = 7290$

Je ziet

- per 2 uur is de groeifactor 3^2
- per 3 uur is de groeifactor 3^3 .

In het algemeen geldt:

per n uur is de groeifactor 3^n .

Deze regel geldt ook voor niet-gehele waarden van n :

- per half uur ($\frac{1}{2}$ uur) is de groeifactor $3^{\frac{1}{2}} \approx 1,732$
- per kwartier ($\frac{1}{4}$ uur) is de groeifactor $3^{\frac{1}{4}} \approx 1,316$
- per minuut ($\frac{1}{60}$ uur) is de groeifactor $3^{\frac{1}{60}} \approx 1,018$.

rad	REKENEN
$3^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{3} \approx 1.732050808$
$3^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{3} \approx 1.316074013$
$3^{\frac{1}{60}}$	$\sqrt[60]{3} \approx 1.018478864$

Afspraak

Rond groeifactoren af op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

Bij exponentiële groei met groeifactor g per tijdseenheid is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Om te berekenen wat de groeifactor per week is bij een groeifactor van 0,60 per dag, gebruik je

$$g_{\text{dag}} = 0,60 \text{ geeft } g_{\text{week}} = 0,60^7 \approx 0,028. \quad 1 \text{ week is 7 dagen}$$

Om te berekenen wat het groeipcentage per dag is bij een toename van 70% per week, gebruik je

$$g_{\text{week}} = 1,70 \text{ geeft } g_{\text{dag}} = 1,70^{\frac{1}{7}} \approx 1,079. \quad 1 \text{ dag is } \frac{1}{7} \text{ week}$$

Het groeipcentage per dag is 7,9%.

Bij exponentiële groei gaat het omzetten van een groeipcentage naar een andere tijdseenheid via groeifactoren.

Voorbeeld

- a Een hoeveelheid neemt per zes uur met 18% toe.
Hoeveel procent is de toename per dag?
- b Een hoeveelheid neemt per jaar met 60% af.
Hoeveel procent is de afname per maand?

Uitwerking

- a $g_{6 \text{ uur}} = 1,18$
 $g_{\text{dag}} = 1,18^4 \approx 1,939$ 1 dag is 4 keer 6 uur
De toename is 93,9% per dag.
- b $g_{\text{jaar}} = 0,4$
 $g_{\text{maand}} = 0,4^{\frac{1}{12}} \approx 0,926$
De afname is 7,4% per maand.

20 Een hoeveelheid neemt per dag met 16% af.

- a Bereken de groeifactor per week.
- b Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per uur af?

Een hoeveelheid neemt per kwartier met 12% toe.

- c Hoeveel procent is de toename per uur?
- d Hoeveel is de procentuele toename per vijf minuten?

21
□ ◎ *

- a Bij een exponentiële groei hoort een groeifactor van 1,3 per dag.
Bereken het groeipercentage per vier uur.
- b Een hoeveelheid neemt per jaar met 0,08% toe.
Hoeveel procent is de toename per eeuw?
- c Een hoeveelheid neemt per week met 180% toe.
Hoeveel procent is de toename per dag?

R22
□ ◎ *

- Een hoeveelheid heeft een verdubbelingstijd van 4 jaar.
- Lotte en Anne vragen zich af wat het groeipercentage per jaar is.
- a Lotte pakt het aan zoals bij vraag c van het voorbeeld op bladzijde 14.
Ze noteert $g^4 = 2$ met g de groeifactor per jaar.
Los deze vergelijking op en geef het groeipercentage per jaar.
- b Anne pakt het aan zoals in het voorbeeld op de vorige bladzijde.
Ze noteert $g_{4\text{ jaar}} = 2$.
Bereken g_{jaar} en geef het groeipercentage per jaar.
- c Welke van bovenstaande manieren heeft je voorkeur?
- d Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 10 maanden.
Bereken de groeifactor per maand.

23
□ ◎ *

- Ga bij de volgende vragen uit van een exponentieel verband.
- a Het beleid van de regering is erop gericht om de hoeveelheid opgewekte energie door particulieren met zonnecellen elke drie jaar met een factor 2,5 te vermenigvuldigen.
Bereken het benodigde groeipercentage per jaar.
- b In de periode 2016-2023 is de hoeveelheid verbruikte energie afkomstig van windmolens op zee vertienvoudigd.
Bereken het groeipercentage per jaar.
- c Het aantal muziekwinkels is in 12 jaar tijd met 22% afgenomen.
Hoeveel procent is de afname per jaar?
- d Het aantal deeltjes van een radioactieve stof halveert elke 12 seconden.
Bereken de procentuele afname per minuut.



A24
□ ◎ *

Wikipedia is een populair naslagwerk op internet. De start van Wikipedia was in januari 2001. Tot januari 2006 nam het aantal maandelijks geplaatste artikelen op de Engelstalige Wikipedia exponentieel toe. In januari 2006 werden 240 keer zoveel artikelen geplaatst als in januari 2001.

- a Bereken het groeipercentage per maand.

In januari 2025 was het aantal maandelijks geplaatste artikelen met 36% afgenomen vergeleken met januari 2006.

- b Met hoeveel procent nam in de periode 2006-2025 het aantal maandelijks geplaatste artikelen per jaar af? Ga uit van exponentiële afname.
- c In januari 2025 was het aantal maandelijks geplaatste artikelen ongeveer 5000.
Schat het aantal geplaatste artikelen in januari 2001. Rond af op tientallen.

A25 Uit een onderzoek in Nederland blijkt dat het aantal loopkevers dramatisch is afgenomen. De onderzoekers vonden een halveringstijd van 12 jaar. Uit een onderzoek in Duitsland blijkt dat in 27 jaar 76% van de loopkevers is verdwenen.
Onderzoek of deze twee resultaten met elkaar in lijn zijn. Ga uit van exponentiële afname.

O26 Een bacteriecultuur groeit exponentieel. Op $t = 5$ zijn er 50 000 bacteriën. Op $t = 9$ zijn er 300 000 bacteriën. Hierbij is t in uren.
a Toon aan dat $g_{4 \text{ uur}} = 6$.
b Toon aan dat $g_{\text{uur}} = 1,5650...$

Bij deze situatie hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$ met N het aantal bacteriën en g de groeifactor per uur. Om b te berekenen, kun je de vergelijking $b \cdot 1,5650...^5 = 50\,000$ gebruiken.

c Licht dit toe en bereken b . Rond af op honderdtallen.

Theorie B Een formule opstellen bij exponentiële groei

Weet je bij exponentiële groei de hoeveelheden op twee tijdstippen, dan kun je de bijbehorende formule opstellen. Je berekent hiertoe eerst de groeifactor per tijdseenheid en vervolgens de beginhoeveelheid.

Voorbeeld

Het totaal geïnstalleerd vermogen van zonnepanelen in Nederland is in de periode van 2012 tot 2023 bij benadering exponentieel toegenomen. Dit vermogen wordt meestal vermeld in megawatt (MW). In 2012 was dit 312 MW. In 2023 was dat toegenomen tot 24 400 MW.

Stel de formule op van het totaal geïnstalleerd vermogen van zonnepanelen in Nederland. Neem het vermogen V in megawatt en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2009. Rond b af op gehelen.

2012 tot 2023 is 11 jaar

Rond tussendoor niet af.

Uitwerking

$$V = b \cdot g^t \text{ met } g_{11 \text{ jaar}} = \frac{24\,400}{312}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{24\,400}{312}\right)^{\frac{1}{11}} = 1,4863...$$

$$\left. \begin{array}{l} V = b \cdot 1,4863...^t \\ t = 3 \text{ en } V = 312 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,4863...^3 = 312 \\ b = \frac{312}{1,4863...^3} \approx 95 \end{array}$$

Dus $V = 95 \cdot 1,486^t$.

NORM DRIJF AUTO REËL GRAD WJN

$\left(\frac{24400}{312}\right)^{\frac{1}{11}}$

 $\frac{312}{1,4863^3}$
 Antw³

1.486319905

 95.02058776

27



- a** Een bacteriesoort groeit exponentieel. Op $t = 3$ zijn er 150 000 bacteriën en op $t = 8$ zijn dat er 1 250 000. Hierbij is t in uren. Stel de formule op van het aantal bacteriën B . Rond de beginhoeveelheid af op duizendtallen.
- b** Een hoeveelheid radioactieve stof neemt elke 5,5 dagen met 36% af. Op 5 januari is er 0,6 gram. Stel de formule op van de hoeveelheid radioactieve stof H in gram. Neem de tijd t in dagen met $t = 0$ op 1 januari. Rond de beginhoeveelheid af op twee decimalen.

28



- In 2024, toen de zorguitgaven per Nederlander 6200 euro waren, werd verwacht dat de zorguitgaven per Nederlander exponentieel zouden stijgen. In het jaar 2034 zouden de zorguitgaven per Nederlander al 8100 euro zijn.
- a** Stel de formule op van het bedrag B dat per Nederlander aan zorg wordt uitgegeven. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2020. Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.
- b** Voor welk jaar verwacht men dat de zorguitgaven per Nederlander voor het eerst meer dan 10 000 euro zullen zijn?

29



- Water absorbeert rood licht meer dan blauw licht. Daarom ziet op grote diepte alles er blauw uit. Zo is in de Caribische Zee op vijf meter diepte al 92% van het rode licht geabsorbeerd. Op deze diepte dringt dus slechts 8% van het rode licht door. Er bestaat een exponentieel verband tussen het percentage P van het rode licht dat doordringt en de diepte d in meter.
- a** Stel de formule op van P .
- b** Op welke diepte wordt 99% van het rode licht geabsorbeerd? Geef je antwoord in dm nauwkeurig.
- c** Matthijs is aan het duiken op een diepte van 3 meter. Hij wil duiken naar een diepte waarop half zoveel rood licht doordringt. Hoeveel meter dieper moet hij duiken? Rond af op één decimaal.

30



- In de wereld wordt steeds meer plastic geproduceerd. In 1977 werd 50 miljard kg geproduceerd en in 2015 was dat toegenomen tot 322 miljard kg. Neem aan dat de toename exponentieel is.
- a** Stel de formule op van de plasticproductie N in miljarden kg. Neem t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1980. Geef de beginhoeveelheid in miljarden kg nauwkeurig.

Onderzoekers vonden op de bodem van de oceaan nabij Californië lagen met microplastics. Elke laag hoort bij een jaar. In de laag die bij 1972 hoort, vond men 6 deeltjes microplastic per 100 cm^2 . In de laag van 1994 was dat 17 deeltjes per 100 cm^2 .

- b** Onderzoek of de hoeveelheid microplastic in de lagen van de bodem met ongeveer hetzelfde percentage per jaar toeneemt als de wereldwijde productie van plastic. Neem aan dat de toename exponentieel is.

A31



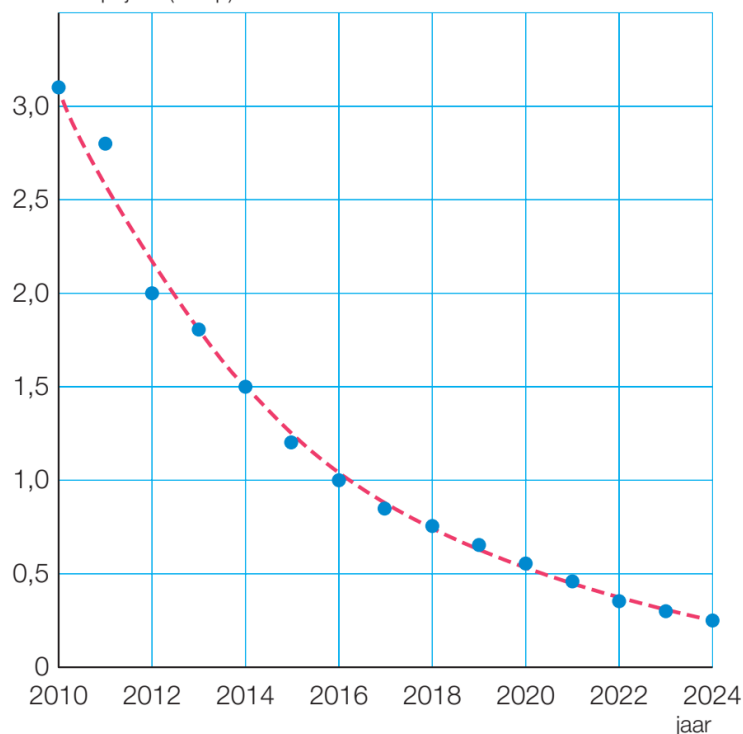
De kosten voor zonnepanelen zijn in de periode 2010 tot 2024 bij benadering exponentieel gedaald. In de figuur staat de kostprijs P in euro per Wp (wattpiek) met stippen uitgezet voor verschillende jaren. Bij de stippen is een exponentieel model opgesteld, zie de rode grafiek.

- a** Lees uit de rode grafiek af wat de halveringstijd van P is. Geef je antwoord in jaren nauwkeurig.

De stippen bij de jaartallen 2014 en 2024 liggen op de rode grafiek.

- b** Gebruik deze stippen om de halveringstijd van P in maanden nauwkeurig te berekenen.
- c** Gebruik deze stippen om de formule van P op te stellen. Neem t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2010. Rond de beginhoeveelheid af op twee decimalen.
- d** Vanaf welk jaar is volgens het model de prijs per Wp voor het eerst minder dan 20 eurocent?

PRIJSONTWIKKELING ZONNEPANELEN
kostprijs P (€/Wp)



A32



Sinds 2019 nemen de aantallen publieke laadpunten, thuislaadpunten en snellaadpunten voor elektrische auto's in Nederland exponentieel toe.

In de periode van 1 januari 2020 tot 1 januari 2024 nam het aantal publieke laadpunten P met 199% toe tot 145 200 stuks.

- a** Stel de formule op van P . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2019. Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.

Het aantal thuislaadpunten T was op 1 januari 2024 al 487 590 terwijl dat er op 1 januari 2021 nog 165 010 waren. Met deze gegevens kun je het model $T = 80\,130 \cdot 1,435^t$ opstellen met t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2019.

- b** Toon dit aan.
- c** In welke maand van welk jaar waren er 250 000 thuislaadpunten?

Het aantal snellaadpunten S op 1 januari 2024 was 4320 en de verdubbelingstijd is 2,5 jaar.

- d** Stel de formule op van het aantal snellaadpunten S . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2019.
- e** Onderzoek hoeveel snellaadpunten er bij zijn gekomen in de laatste zes maanden van 2024.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan groeifactoren en groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid.

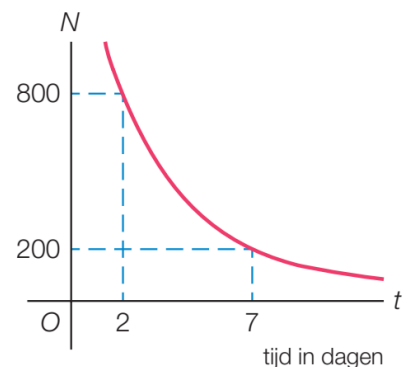
► OPGAVE C3
THEORIE A

☐ Ik kan bij allerlei situaties een formule van exponentiële groei opstellen.

► OPGAVE C4
THEORIE B

- C3** a Een hoeveelheid neemt per kwartier met 3,2% toe.
Hoeveel procent is de toename per uur?
- b Een hoeveelheid neemt per dag met 76,5% af.
Hoeveel procent is de afname per uur?

- C4** a Een hoeveelheid H halveert elke 15 jaar. Op 1 januari 2025 is $H = 508$.
Stel de formule op van H met t de tijd in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2020. Rond de beginhoeveelheid af op gehelen.
- b Zie de grafiek.
Stel de formule op die bij de exponentiële afname van N hoort. Rond de beginhoeveelheid af op gehelen.
- c Voor een hoeveelheid J na t dagen geldt de formule $J = b \cdot g^t$. J neemt elke 5 weken met 70% toe. Na 3 weken is de hoeveelheid 17,2.
Bereken de hoeveelheid na 10 dagen. Rond af op één decimaal.



Antwoorden

- C3** a 13,4%
b 5,9%
- C4** a $H = 640 \cdot 0,955^t$
b $N = 1393 \cdot 0,758^t$
c 14,6

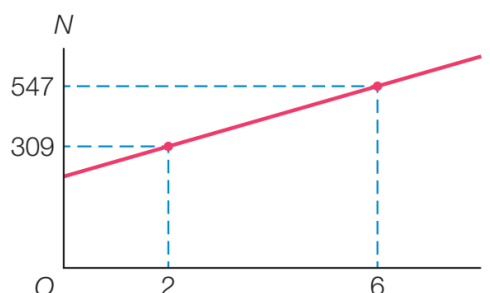
9.3 Exponentiële en lineaire groei

Kennis en vaardigheden

- Je kunt herkennen of je met lineaire of exponentiële groei te maken hebt en op basis hiervan de juiste werkwijze kiezen.
- Je kunt bepalen of gegevens overeenkomen met een lineair of een exponentieel verband.
- Je kunt werken met logaritmische schaalverdelingen en grafieken uitgezet op logaritmisch papier.

V4 Het aantal muurhagedissen N in Nederland neemt sinds 2010 vrijwel lineair toe. Zie de grafiek met t de tijd in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2010.

- a** Met hoeveel is het aantal muurhagedissen toegenomen in de periode 1 januari 2012 tot 1 januari 2016? Hoeveel is dat gemiddeld per jaar?
- b** Hoeveel muurhagedissen waren er op 1 januari 2010?
- c** Stel de formule op voor het aantal muurhagedissen N . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2010.



Voorkennis Lineaire formules

In opgave V4 heb je een voorbeeld gezien van een lineair verband. Bij een lineair verband is de grafiek een rechte lijn en neemt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal toe of af. De formule is van de vorm $N = at + b$, waarin a de toename per tijdseenheid is en b de beginhoeveelheid, oftewel de hoeveelheid op $t = 0$. Weet je bij lineaire groei de hoeveelheden op twee tijdstippen, dan kun je de formule opstellen. Zie het voorbeeld hieronder.

Voorbeeld

De hoeveelheid N groeit lineair. Op $t = 5$ is $N = 130$ en op $t = 8$ is $N = 190$. Stel de formule op van N .

Uitwerking

$$N = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{190 - 130}{8 - 5} = 20$$

$$\left. \begin{array}{l} N = 20t + b \\ t = 5 \text{ en } N = 130 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 20 \cdot 5 + b = 130 \\ 100 + b = 130 \\ b = 30 \end{array}$$

Dus $N = 20t + 30$.

V5 Ga in deze opgave uit van lineaire verbanden.

a Op $t = 4$ is $H = 552$ en op $t = 10$ is $H = 600$.

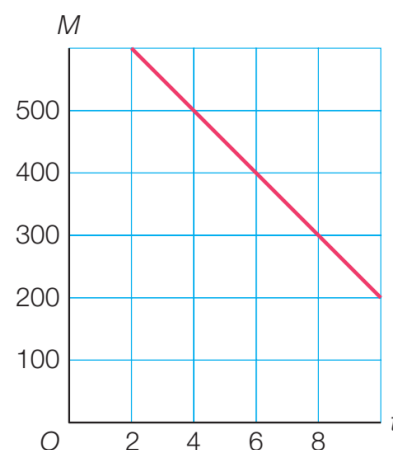
Stel de formule op van H .

b Zie de grafiek.

Stel de formule op van M .

c Het aantal fastfoodrestaurants N in Nederland neemt toe. In 2019 waren er 15 800 van zulke restaurants en in 2024 waren dat er 19 040.

Stel de formule op van N . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2015.



O33 Het aantal gecertificeerde biologische landbouwbedrijven

□ ⊗ * in Nederland neemt lineair toe. Op 31 december 2014 waren er 3738 van deze bedrijven en op 31 december 2023 waren dat er 5745.

a Bereken met hoeveel het aantal gecertificeerde biologische landbouwbedrijven per jaar toeneemt.

De oppervlakte in Nederland waarop biologische landbouw plaatsvindt (het bio-areaal) neemt exponentieel toe. Op 31 december 2014 was er 56 300 ha bio-areaal en op 31 december 2023 was dat 87 350 ha.

b Bereken de groeifactor per jaar.



Theorie A Lineaire en exponentiële verbanden

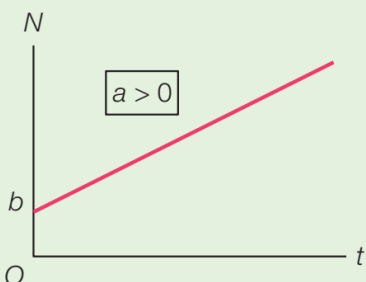
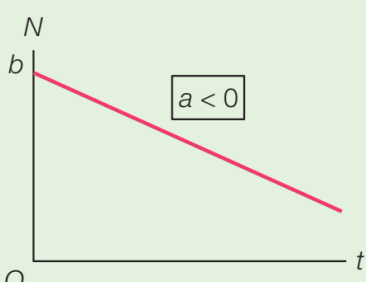
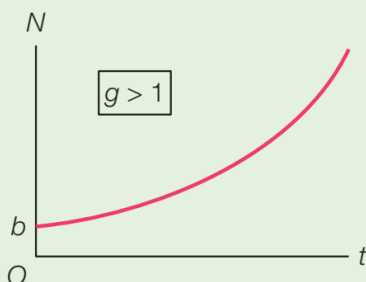
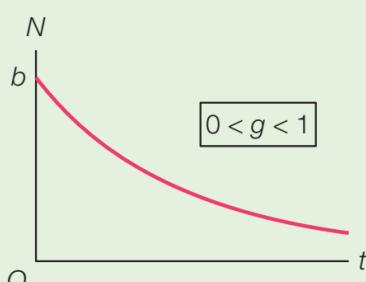
In opgave 33 heb je berekend dat het aantal gecertificeerde biologische landbouwbedrijven in Nederland elk jaar met $\frac{5745 - 3738}{9} = 223$

toeneemt. Dit is een voorbeeld van *lineaire groei*. Ook heb je berekend

dat het bio-areaal elk jaar $\left(\frac{87350}{56300}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 1,050$ keer zo groot wordt. Dit is

een voorbeeld van *exponentiële groei*.

Bij lineaire groei komt er per tijdseenheid dezelfde hoeveelheid bij, terwijl bij exponentiële groei per tijdseenheid vermenigvuldigd wordt met hetzelfde getal (de groeifactor).

	Lineair verband	Exponentieel verband
kenmerk	De hoeveelheid neemt per tijdseenheid met hetzelfde getal toe of af.	De hoeveelheid wordt per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
formule	$N = at + b$ Hierin is <ul style="list-style-type: none"> • b de beginhoeveelheid (of beginwaarde). • a toename per tijdseenheid: <ul style="list-style-type: none"> - bij een toename is $a > 0$ - bij een afname is $a < 0$. 	$N = b \cdot g^t$ Hierin is <ul style="list-style-type: none"> • b de beginhoeveelheid (of beginwaarde). • g de groeifactor per tijdseenheid: <ul style="list-style-type: none"> - bij een toename is $g > 1$ - bij een afname is $0 < g < 1$.
grafieken	<p>De grafiek is een (rechte) lijn.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Bij een toename is de grafiek constant stijgend:  <ul style="list-style-type: none"> • Bij een afname is de grafiek constant dalend: 	<p>De grafiek is een kromme.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Bij een toename is de grafiek toenemend stijgend:  <ul style="list-style-type: none"> • Bij een afname is de grafiek afnemend dalend: 
voorbeeld	Voor $t = 0$ is $N = 150$ en voor $t = 5$ is $N = 600$.	
berekening	$a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{600 - 150}{5} = 90$	$g = \left(\frac{600}{150}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,320$
formule	$N = 90t + 150$	$N = 150 \cdot 1,320^t$

Voorbeeld

Op 1 januari 2018 waren er in Nederland 742 duizend motorfietsen en 702 duizend snorfietsen. Op 1 januari 2023 waren er 794 duizend motorfietsen en 823 duizend snorfietsen. Ga ervan uit dat in de periode 2015-2023 het aantal motorfietsen jaarlijks met een vast percentage toenam, terwijl het aantal snorfietsen met een vast aantal per jaar toenam.

- a** Stel een formule op van het aantal motorfietsen N_m in duizendtallen.
Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2015. Rond de beginhoeveelheid af op één decimaal.
- b** Stel een formule op van het aantal snorfietsen N_s in duizendtallen.
Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2015.

Uitwerking

Exponentiële groei, want vaste jaarlijkse procentuele toename.

a $N_m = b \cdot g^t$ met $g = \left(\frac{794}{742}\right)^{\frac{1}{5}} = 1,0136\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N_m = b \cdot 1,0136\dots^t \\ t = 3 \text{ en } N_m = 742 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,0136\dots^3 = 742 \\ b = \frac{742}{1,0136\dots^3} \approx 712,4 \end{array}$$
$$N_m = 712,4 \cdot 1,014^t$$

Lineaire groei, want vaste jaarlijkse toename.

b $N_s = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{823 - 702}{8 - 3} = 24,2$

$$\left. \begin{array}{l} N_s = 24,2t + b \\ t = 3 \text{ en } N_s = 702 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 24,2 \cdot 3 + b = 702 \\ 72,6 + b = 702 \\ b = 629,4 \end{array}$$
$$N_s = 24,2t + 629,4$$

34 Zie de tabel hiernaast.



- a** Ga uit van lineaire groei.
Stel de formule op van N .
- b** Ga uit van exponentiële groei.
Stel de formule op van N . Rond de beginhoeveelheid af op gehelen.
- c** Met welke soort stijging heb je bij lineaire toename te maken? En welke soort stijging bij exponentiële toename?

t	5	9
N	18	35

35



Een portie verse spinazie en een portie diepvriesspinazie bevatten elk 80 mg vitamine C. Bij verse spinazie neemt de hoeveelheid vitamine C per dag met 18 mg af. Bij diepvriesspinazie neemt de hoeveelheid vitamine C aanvankelijk per dag met 15% af. H_v is het aantal mg vitamine C dat na t dagen nog aanwezig is in de verse spinazie. H_d is het aantal mg vitamine C dat na t dagen nog aanwezig is in de diepvriesspinazie.



- Stel de formules op van H_v en H_d .
- Hoeveel mg vitamine C bevat de diepvriesspinazie op het moment dat de verse spinazie geen vitamine C meer bevat? Rond af op gehele.
- Bij diepvriesspinazie stabiliseert de hoeveelheid vitamine C zich op een niveau van 40% van de beginhoeveelheid. Na hoeveel tijd is dit? Rond af op gehele uren.

36



Ans en Bo doneren regelmatig hun haar aan de Haarstichting. Deze stichting gebruikt het haar om personen met kanker aan een pruik te helpen. Ga er in deze opgave van uit dat haar met een constante snelheid aangroeit. Ans en Bo zijn op 1 maart 2025 naar de kapper geweest. Ze hebben op twee momenten daarna hun haarlengte gemeten. Zie de tabel.



HAARLENGTE IN CM 2025

	Ans	Bo
1 april	6,4	6,3
1 juli	9,1	9,6

- Stel formules op van de haarlengte L_A van Ans en L_B van Bo. Neem L_A en L_B in cm en de tijd t in maanden met $t = 0$ op 1 maart 2025.
- In welke maand van welk jaar is de haarlengte van Bo 2 cm meer dan de haarlengte van Ans?
- Voor de volgende donatie van het haar, moet het haar langer zijn dan 25 cm. Ans en Bo willen weer tegelijk naar de kapper gaan. Bereken vanaf welke datum dat kan.

A37 Het gebruik van stikstofmest in de landbouw neemt wereldwijd met een vast percentage per jaar toe. In 2022 was het wereldwijde gebruik 113,5 miljoen ton en het is de verwachting dat dit in 2033 toegenomen zal zijn tot 119,9 miljoen ton.

In Europa neemt het gebruik van stikstofmest juist af met een vaste hoeveelheid per jaar. In 2022 was het gebruik in Europa 9,76 miljoen ton en in 2030 zal het gebruik naar verwachting nog 9,60 miljoen ton zijn. Stel K_W is het wereldwijde gebruik van stikstofmest in miljoenen ton en K_E is het gebruik van stikstofmest in miljoenen ton in Europa.

- Stel de formules van K_W en K_E op. Neem t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2020. Rond de beginhoeveelheid zo nodig af op honderdduizendtallen.
- Hoeveel procent van de totale hoeveelheid in de landbouw gebruikte stikstofmest in 2020 werd in Europa gebruikt? En hoeveel is dat naar verwachting in 2033?

A38 Zie opgave 37.

⊠ ⊙ * In welk jaar wordt er volgens deze verwachtingen buiten Europa voor het eerst meer dan 114 miljoen ton stikstofmest gebruikt in de landbouw?

O39 Zie de tabel hiernaast.

⊠ ⊙ * Peter denkt dat er sprake is van een lineair verband tussen N en t .

- Laat zien dat Peter geen gelijk heeft.
- Laat zien dat er wel sprake kan zijn van een exponentieel verband.

t	0	2	4
N	250	300	360

Theorie B Lineaire en exponentiële groei nagaan

Bij een lineair verband heb je bij even grote intervallen te maken met een vaste toe- of afname. In opgave 39 kon je nagaan dat de *verschillen* $300 - 250 = 50$ en $360 - 300 = 60$ niet gelijk zijn, dus dat er geen sprake is van een lineair verband.

Bij een exponentieel verband heb je bij even grote intervallen te maken met een vaste groeifactor. In opgave 39 kon je nagaan dat de *quotiënten* $\frac{300}{250} = 1,2$ en $\frac{360}{300} = 1,2$ gelijk zijn, dus dat er sprake kan zijn van een exponentieel verband.

In praktische situaties zullen de verschillen of quotiënten nooit precies gelijk zijn, maar alleen bij benadering. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Het aantal werklozen is in Nederland in de periode 2014-2023 flink gedaald. In de tabel zie je het aantal werklozen N in duizendtallen voor verschillende jaren.

jaar	2014	2017	2020	2023
N	740	580	460	360

- a Toon aan dat er bij de tabel geen sprake is van een lineair verband.
- b Toon aan dat de tabel bij benadering klopt bij een exponentieel verband.

Aanpak

- a Laat zien dat er geen sprake is van een vaste afname per drie jaar.
- b Laat zien dat de groeifactor per drie jaar steeds gelijk is.

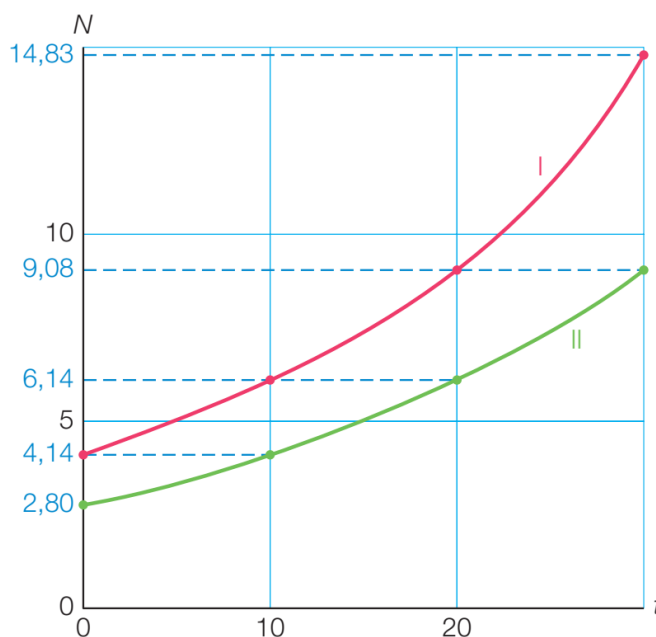
Uitwerking

- a $580 - 740 = -160$ en $460 - 580 = -120$ ← Eén afwijkend verschil is genoeg.
De verschillen per 3 jaar zijn niet gelijk, dus er is geen sprake van een lineair verband bij de tabel.

- b $\frac{580}{740} = 0,783\dots$, $\frac{460}{580} = 0,793\dots$ en $\frac{360}{460} = 0,782\dots$ ← Gebruik alle tabelwaarden.
De groeifactoren per 3 jaar zijn ongeveer gelijk, dus de tabel klopt bij benadering bij een exponentieel verband.

40
□ ⊗ *

In de figuur hiernaast is de hoeveelheid N uitgezet tegen de tijd t in jaren voor de modellen I en II. Onderzoek bij welk model de gegevens het beste overeenkomen met een exponentieel verband en bereken van dit model de groeifactor per jaar.



A41 Hoe hoger je je bevindt, hoe lager de luchtdruk P en hoe lager het kookpunt T van water. Zie de tabel.



Het verband tussen P en h is exponentieel en het verband tussen T en h is lineair.

- Toon aan dat de tabel hiermee overeenstemt.
- Stel van beide verbanden de formule op. Gebruik de waarden bij 0 en 7 km hoogte. Rond indien nodig af op drie decimalen.
- Een alpinist kookt water in het basiskamp van Mount Everest op een hoogte van 5400 meter. Bereken het kookpunt in gehele graden Celsius.
- Op de top van de Mount Everest is de luchtdruk 320 hPa. Bereken de hoogte van de Mount Everest in tientallen meters nauwkeurig.

hoogte h in km	luchtdruk P in hPa	kookpunt T water in °C
0	1013	100,3
1	889	96,9
2	780	93,6
3	685	90,2
7	406	76,7

A42 Een projectontwikkelaar is gespecialiseerd in het bouwen van woontorens met op de begane grond winkels en vanaf de eerste verdieping appartementen. Zij rekent voor de bouwlaag op de begane grond 7,5 miljoen euro. Hoeveel ze rekent voor de bouwkosten K in miljoenen euro's is afhankelijk van het aantal verdiepingen. Zie de tabel. Hierin is n het aantal verdiepingen met appartementen.



n	0	8	14	21	32
K	7,5	11,25	15,25	21,75	37,98

- Bereken met behulp van lineair interpoleren de bouwkosten in het geval de woontoren bestaat uit 25 verdiepingen met appartementen. Rond af op tienduizenden euro's.
 - Toon aan dat tussen K en n geen lineair verband bestaat.
- Tussen K en n bestaat een exponentieel verband.
- Laat zien dat de waarden in de tabel hiermee in overeenstemming zijn.
 - Bereken met hoeveel procent de bouwkosten toenemen als er twee verdiepingen met appartementen bij komen.
 - Gebruik de gegevens bij 21 en 32 verdiepingen om de bouwkosten in tienduizenden euro's nauwkeurig te berekenen in het geval de woontoren bestaat uit 25 verdiepingen met appartementen. Hoeveel verschilt dit met het antwoord van vraag a?
 - De projectontwikkelaar wil dat de bouwkosten maximaal 19,5 miljoen euro bedragen. Stel de formule op van K en bereken daarmee hoeveel verdiepingen met appartementen zij voor dit bedrag kan bouwen.



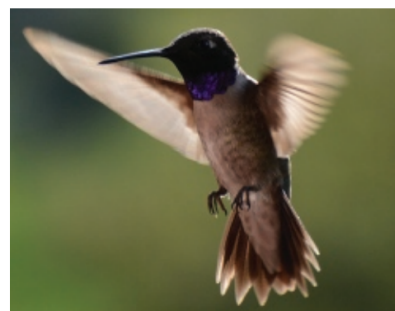
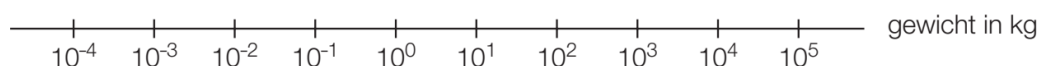
○43 In de tabel staan van een aantal dieren de gewichten.

- ⊗ * **a** Hoeveel keer zo zwaar is de walvis als de wasbeer?
En hoeveel keer zo zwaar als de kolibrie?

We willen de gewichten op een getallenlijn zetten.

- b** Hoe lang moet de getallenlijn worden als 1 mm overeenkomt met 1 gram?
c Hoe lang moet de getallenlijn worden als 1 mm overeenkomt met 1000 kg? Welk bezwaar is tegen deze stapgrootte in te brengen?
d Hieronder is een getallenlijn getekend met een bijzondere schaalverdeling.
Geef op deze getallenlijn het gewicht van de prachtkever, zeehond en walvis aan.

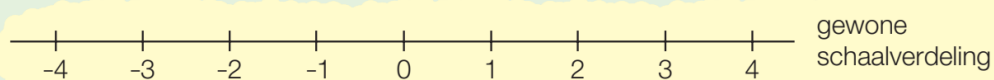
prachtkever	0,001 kg
kolibrie	0,005 kg
muis	0,02 kg
wasbeer	10 kg
zeehond	100 kg
paard	600 kg
olifant	5500 kg
walvis	100 000 kg



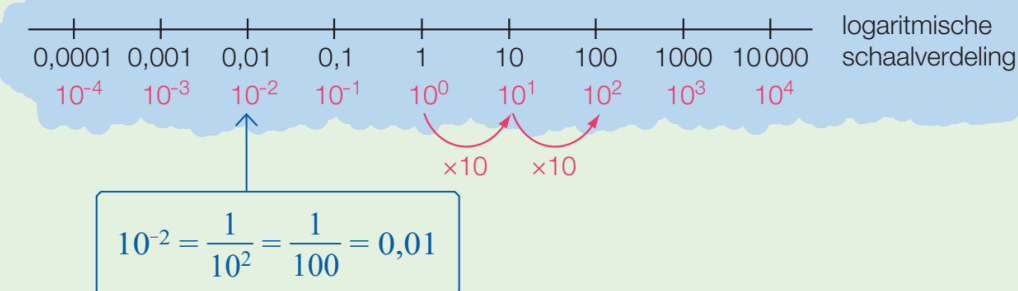
- e** Welk regelmaat zit er in de getallen op deze getallenlijn?

Theorie C Logaritmische schaalverdeling

In opgave 43 heb je gezien dat je de waarnemingsgetallen niet goed kunt uitzetten op een getallenlijn met een gewone schaalverdeling. Daarom gebruiken we in dit soort gevallen een **logaritmische schaalverdeling**. Bij een gewone schaalverdeling zit er tussen de getallen 0 en 1 evenveel afstand als tussen de getallen 1 en 2, enzovoort.



Bij een logaritmische schaalverdeling zit er tussen de getallen $10^0 = 1$ en $10^1 = 10$ evenveel afstand als tussen de getallen $10^1 = 10$ en $10^2 = 100$. Bij een vaste stapgrootte hoort bij een logaritmische schaalverdeling dus een vaste factor.



Hiernaast zie je een gedeelte van een vel **logaritmisch papier**. Op de y -as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Op deze as staat het getal 1 bij het snijpunt met de x -as. Op de x -as is een gewone schaalverdeling gekozen.

Met de getallen langs de y -as kun je bij elke horizontale lijn te weten komen welke y -waarde erbij hoort.

Van onder naar boven zie je eerst de getallen 1, 2, 3, ..., 9 en $10^1 = 10$.

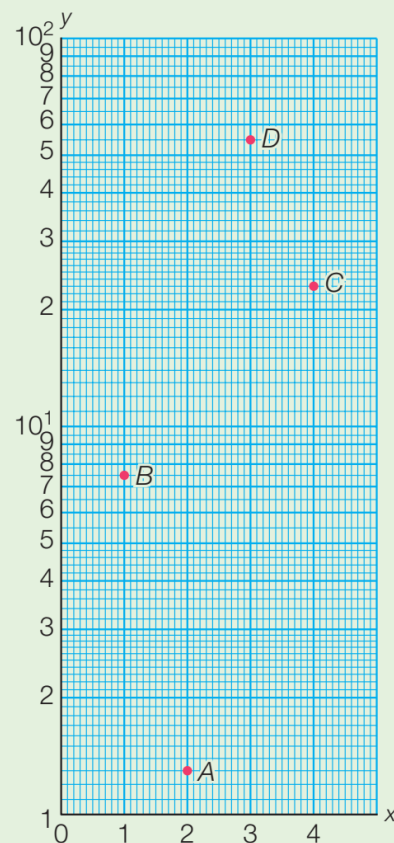
De lijn direct boven de lijn $y = 10$ hoort bij $y = 11$, dan $y = 12$, $y = 13$, ... tot en met $y = 20$.

Bij de lijn $y = 20$ staat 2, want $2 \cdot 10^1 = 20$.

Verder naar boven krijg je vervolgens lijnen bij de waarden 21, 22, 23, ..., 29 en 30.

Tussen 30 en 40 staan alleen nog maar lijnen bij 32, 34, 36 en 38.

Tussen 50 en 60 staat alleen nog maar een lijn bij 55.



44 Zie het logaritmisch papier hier rechtsboven.



a Je ziet in de figuur wel de lijn $y = 17$, maar niet de lijn $y = 37$.

Bij welke van de volgende y -waarden is een lijn getekend?

49 9,5 2,4 1,25 0

b Welke y -waarden horen bij de punten A tot en met D ?

c Bij een onderzoek variëren de meetresultaten van 10^3 tot 10^5 . Om deze gegevens op het logaritmisch papier in de theorie te kunnen uitzetten, zet men op de verticale as 10^3 op de hoogte van de horizontale as en 10^5 bij de bovenste horizontale lijn.

Bij het punt A hoort dan de y -waarde 1300.

Welke y -waarden horen in dit geval bij de punten B , C en D ?

45 [**WERKBLAD**] Bij desinfectie wordt het aantal schadelijke micro-



organismen op oppervlakken en voorwerpen verminderd. In de tabel zie je hoe het aantal micro-organismen N tijdens het uitkoken van een medisch instrument afneemt. In deze tabel is t de tijd in minuten dat het uitkoken duurt.

a Teken de punten die uit de tabel volgen op het logaritmisch papier en verbind de getekende punten door lijnstukken.

b Gebruik de grafiek die je in vraag a hebt getekend om het aantal micro-organismen te schatten op $t = 1,5$ en $t = 2,5$.

c Lees af na hoeveel minuten het aantal micro-organismen is teruggebracht tot 100. Geef het antwoord in één decimaal.

t	N
0	100 000
1	15 000
2	2000
3	400
4	50

46



a Vul de tabel hiernaast in.

b [WERKBLAD] Teken op het logaritmisch papier op het werkblad de punten die uit de tabel volgen. Teken door de punten de grafiek van $N = 4 \cdot 3^t$.

c Teken in dezelfde figuur de grafiek van $N = 5000 \cdot 0,6^t$.

d Wat valt je op aan de grafieken?

t	0	2	4	6
$N = 4 \cdot 3^t$				

Theorie D Grafieken op logaritmisch papier

De grafiek van de formule $N = b \cdot g^t$ is op logaritmisch papier een rechte lijn. In opgave 46 heb je daar enkele voorbeelden van gezien. Als omgekeerd een grafiek op logaritmisch papier een rechte lijn is, dan hoort de grafiek bij een exponentieel verband.

Bij een rechte lijn op logaritmisch papier hoort exponentiële groei, dus een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$.

Voorbeeld

Hiernaast is de grafiek van N getekend op logaritmisch papier.

Stel de formule op van N . Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.

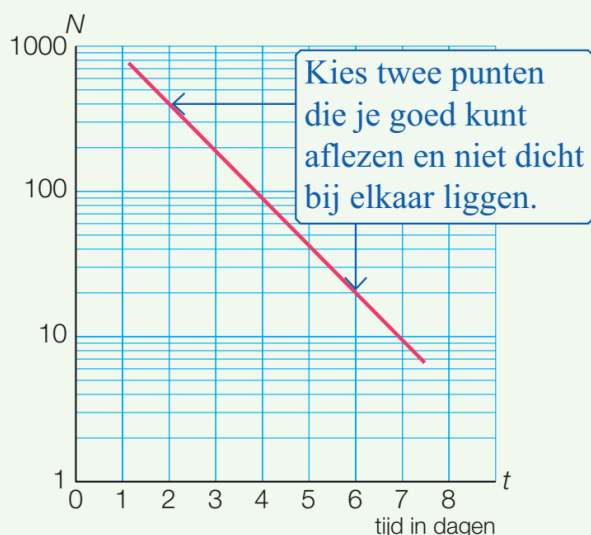
Uitwerking

Bij $t = 2$ hoort $N = 400$ en bij $t = 6$ hoort $N = 20$.

$$N = b \cdot g^t \text{ met } g = \left(\frac{20}{400}\right)^{\frac{1}{4}} = 0,4728...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,4728...^t \\ t = 2 \text{ en } N = 400 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,4728...^2 = 400 \\ b = \frac{400}{0,4728...^2} \approx 1790 \end{array}$$

Dus $N = 1790 \cdot 0,473^t$.

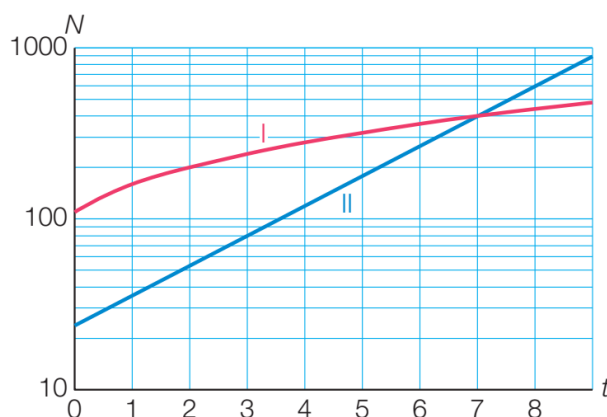


47



Eya heeft van een lineair en een exponentieel verband de grafieken getekend op logaritmisch papier. Zie de figuur hiernaast.

Stel de bijbehorende formules op. Rond de beginhoeveelheid zo nodig af op één decimaal.



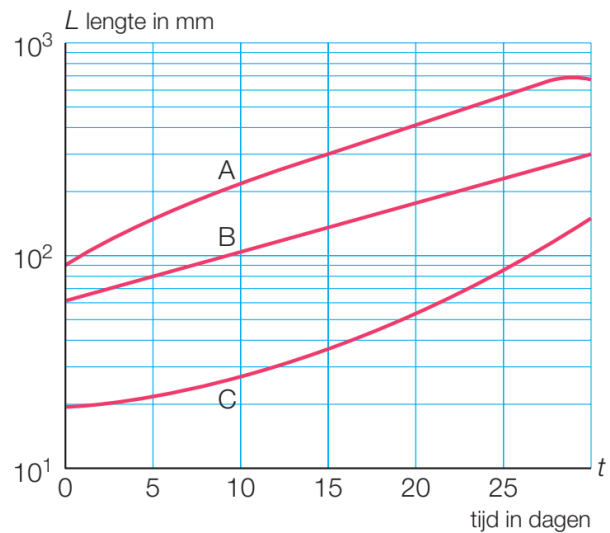
► **WERKBLAD** Van drie planten A, B en C is in de maand juni de lengte bijgehouden. De bijbehorende grafieken zijn hiernaast getekend. De verticale as heeft een logaritmische schaalverdeling.

- a Bij welke plant is sprake van exponentiële groei? Stel van deze plant de formule op van de lengte L in mm na t dagen. Rond de beginhoeveelheid af op gehelen.
- b Plant D groeit exponentieel. Na 5 dagen is de lengte 30 mm en na 25 dagen is de lengte 400 mm.

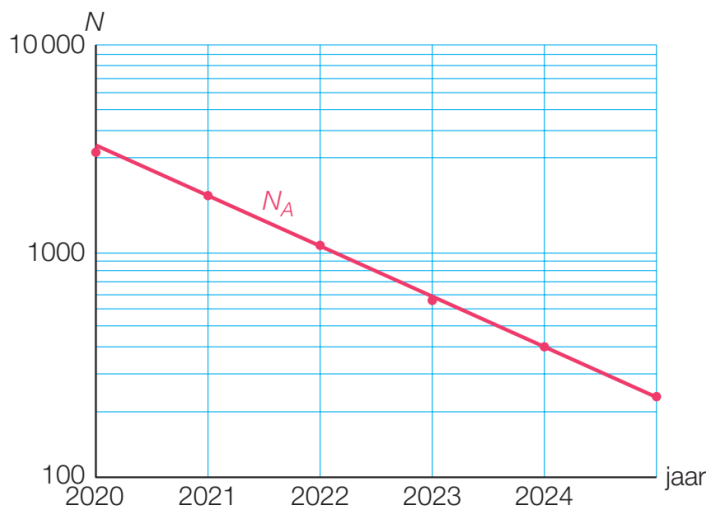
Teken op het werkblad de grafiek van de lengte van plant D.

- c Plant E groeit exponentieel met dezelfde groeifactor als plant B en na 10 dagen is de lengte 3 cm.

Teken in de figuur van vraag b de grafiek van de lengte van plant E.



Biologen hebben van twee vogelsoorten het aantal broedparen in een groot natuurgebied bijgehouden. Op het logaritmisch papier is voor soort A het aantal broedparen N uitgezet tegen de tijd in jaren en is de grafiek bij het model N_A getekend.



- a Stel de formule van N_A op. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2020 en rond de beginhoeveelheid af op gehelen.

De tabel hiernaast hoort bij soort B.

- b Zet de gegevens van soort B uit op het logaritmisch papier. Van welke soort stijging is er sprake bij N_B ? Licht toe.

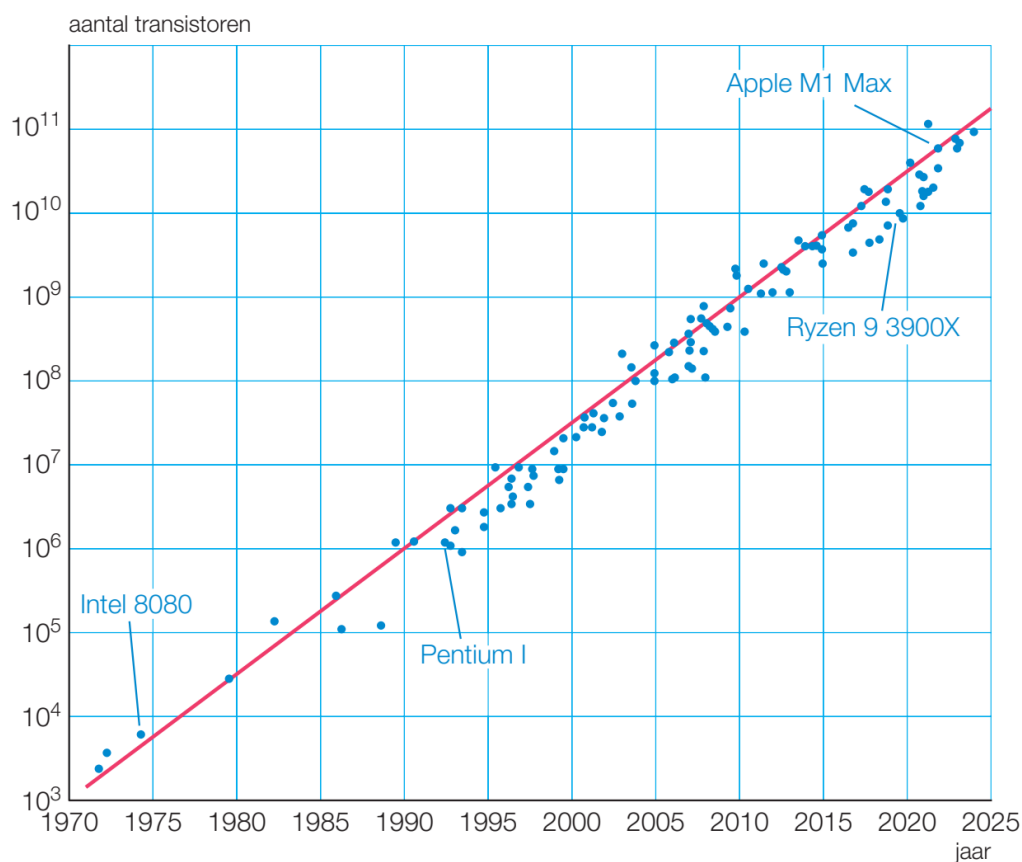
- c Onderzoek of het totale aantal broedparen van de soorten A en B samen is toegenomen of afgenomen in 2025 ten opzichte van 2024.

jaar	2020	2021	2022	2023	2024	2025
N_B	400	600	900	1350	2000	3000

Elke computer gebruikt transistoren om berekeningen te maken. Hoe meer transistoren, hoe sneller de computer. In de begintijd van computers ging het om enkele honderden transistoren per computer. Tegenwoordig zijn dat er vele miljarden, die in zogenaamde microprocessors zijn verwerkt.

In 1965 voorspelde de wetenschapper Gordon Moore dat het aantal transistoren per microprocessor exponentieel zou gaan groeien met een verdubbelingstijd van twee jaar. Deze voorspelling staat bekend als de wet van Moore.

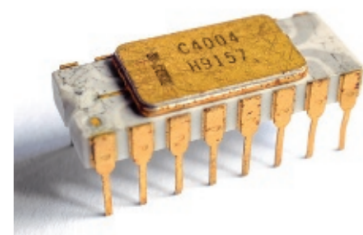
In de figuur hieronder is op logaritmisch papier van enkele microprocessors het aantal transistoren per microprocessor uitgezet tegen het jaar van verschijnen. Verder geeft de lijn een goede indruk van de ontwikkeling tussen 1971 en 2025.



- Laat met een berekening zien dat de lijn in de figuur bij benadering overeenkomt met de wet van Moore.
- Stel de formule van de lijn op. Neem N het aantal transistoren en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1971. Rond b af op honderdtallen.

Luuk en Maria doen een voorspelling van het aantal transistoren per microprocessor in 2032. Luuk gebruikt hiervoor de formule van de lijn. Maria gebruikt de wet van Moore en gaat uit van de Intel 4004. Zie hiernaast.

- Hoeveel procent groter is de voorspelling van Maria dan die van Luuk?

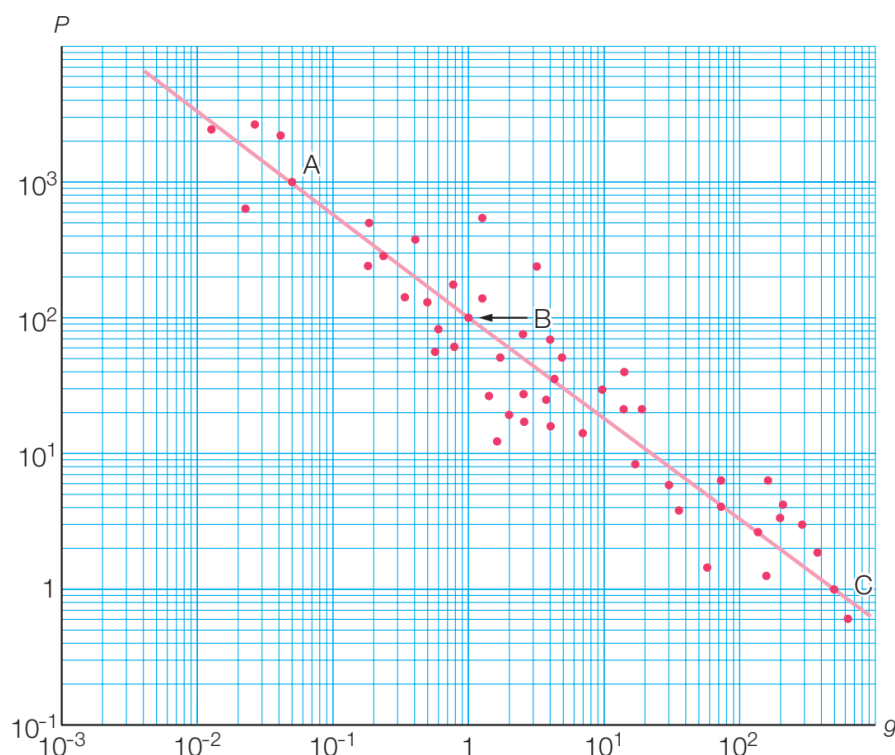


De Intel 4004 was in 1971 de eerste commercieel verkrijgbare microprocessor. Deze had slechts 2300 transistoren en kostte \$ 60.

A51



In de figuur zie je dubbellogaritmisch papier: beide assen hebben een logaritmische schaalverdeling. Van verschillende soorten zoogdieren is de populatiedichtheid P in aantal dieren per km^2 uitgezet tegen het lichaamsgewicht g in kg van een volwassen exemplaar. Je ziet bijvoorbeeld dat bij soort A het lichaamsgewicht 0,05 kg hoort en een populatiedichtheid van 1000 dieren per km^2 .



- Geef het gewicht en de populatiedichtheid van soort B en van soort C.
- Sabine beweert dat lichtere zoogdieren over het algemeen met meer soortgenoten op een km^2 leven. Volgt dit uit de figuur? Licht toe.
- Een van de stippen in de figuur hoort bij een diersoort met een lichaamsgewicht van 30 kg. Deze diersoort leeft in een gebied van 3500 km^2 . Bereken hoeveel van deze dieren er in dit gebied leven.
- Wetenschappers hebben het verband tussen P en g gemodelleerd. Zie de rode grafiek in de figuur. Gebruik de punten bij de soorten A, B en C om aan te tonen dat er geen sprake is van een lineair verband en ook niet van een exponentieel verband.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan herkennen of ik met lineaire of exponentiële groei te maken heb en op basis hiervan de juiste werkwijze kiezen.

► OPGAVE C5
THEORIE A

☐ Ik kan bepalen of gegevens overeenkomen met een lineair of een exponentieel verband.

► OPGAVE C6
THEORIE B

☐ Ik kan werken met logaritmische schaalverdelingen en grafieken uitgezet op logaritmisch papier.

► OPGAVE C7
THEORIE C, D

C5 In de gemeenten Uitwijkerwaard en Leegdam neemt het aantal inwoners af. De halveringstijd van het aantal inwoners in Uitwijkerwaard is 12 jaar. In Leegdam neemt het aantal inwoners elke maand met 100 af. In 2022 had Uitwijkerwaard nog 60 duizend inwoners. In 2025 had Leegdam nog 50 duizend inwoners. Stel de formules op van het aantal inwoners N_U en N_L in duizendtallen. Neem t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2022.

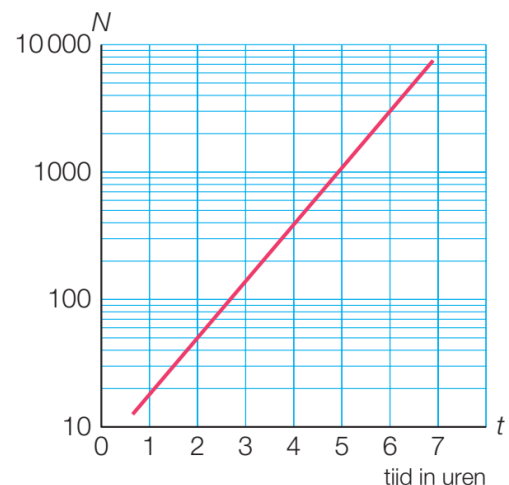
C6 Gegeven is de volgende tabel met t de tijd in maanden.

t	0	3	6	10
N	48,24	40,07	33,28	25,98

- a** Onderzoek of de gegevens in de tabel overeenkomen met een lineair verband.
b Onderzoek of de gegevens in de tabel overeenkomen met een exponentieel verband.

C7 Hiernaast is een grafiek op logaritmisch papier getekend.

- a** Welke waarde van N hoort bij $t = 6$? En welke waarde van t hoort bij $N = 50$?
b Stel de formule van N op. Rond de beginhoeveelheid af op twee decimalen.



Antwoorden

C5 $N_U = 60 \cdot 0,944^t$ en $N_L = -1,2t + 53,6$

C6 a komt niet overeen

b komt overeen

C7 a $N = 3000$ $t = 2$

b $N = 6,45 \cdot 2,783^t$

9.4 Herleiden en redeneren

Kennis en vaardigheden

- Je kunt exponentiële formules herleiden tot de vorm $N = b \cdot g^t$.
- Je kunt bij een formule met een grenswaarde beredeneren wat die grenswaarde is.
- Je kunt bij een formule beredeneren of de bijbehorende grafiek stijgend of dalend is.

052

□ ⊗ *

Je weet $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, dus ook $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$.

a Vul in $\frac{1}{4^t} = 4^{\dots\dots\dots}$.

Je weet $(a^p)^q = a^{pq}$, dus ook $a^{pq} = (a^p)^q$.

b Vul in $4^{-t} = (4^{-1})^{\dots\dots\dots}$.

c Laat zien dat de formule $N = 15 \cdot \frac{1}{4^t}$ te schrijven is als $N = 15 \cdot 0,25^t$.

d Wat voor soort verband is $N = 15 \cdot \frac{1}{4^t}$ dus?

Theorie A Formules herleiden tot de vorm $N = b \cdot g^t$

Soms is een formule bij een exponentieel verband niet in de vorm $N = b \cdot g^t$ geschreven. Je kunt de formule dan wel herleiden tot deze vorm. In opgave 52 heb je $N = 15 \cdot \frac{1}{4^t}$ herleid tot $N = 15 \cdot 0,25^t$.

Ook $A = \frac{11}{2,5^t}$ kun je herleiden tot de vorm $A = b \cdot g^t$. Daarbij worden de regels $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$ en $a^{pq} = (a^p)^q$ gebruikt. Je krijgt

$$A = \frac{11}{2,5^t} = 11 \cdot \frac{1}{2,5^t} = 11 \cdot 2,5^{-t} = 11 \cdot 2,5^{-1 \cdot t} = 11 \cdot (2,5^{-1})^t = 11 \cdot 0,4^t.$$

$$\frac{1}{2,5^t} = 2,5^{-t}$$

$$2,5^{-1 \cdot t} = (2,5^{-1})^t$$

Ook de formule $B = 12 \cdot 1,5^{2+0,78t}$ hoort bij een exponentieel verband. Bij het herleiden van deze formule tot de vorm $B = b \cdot g^t$ gebruik je de regel $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$ en daarna de regel $a^{pq} = (a^p)^q$. Dit gaat als volgt.

$$B = 12 \cdot 1,5^{2+0,78t} = 12 \cdot 1,5^2 \cdot 1,5^{0,78t} = 27 \cdot (1,5^{0,78})^t \approx 27 \cdot 1,372^t$$

$$1,5^{2+0,78t} = 1,5^2 \cdot 1,5^{0,78t}$$

$$1,5^{0,78t} = (1,5^{0,78})^t$$

Rekenregels voor machten

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Voorbeeld

Schrijf de formule $P = \frac{84}{37 \cdot 0,9^t}$ in de vorm $P = b \cdot g^t$. Rond b en g af op twee decimalen.

Uitwerking

$$P = \frac{84}{37 \cdot 0,9^t} = \frac{84}{37} \cdot \frac{1}{0,9^t} = \frac{84}{37} \cdot 0,9^{-t} = \frac{84}{37} \cdot (0,9^{-1})^t \approx 2,27 \cdot 1,11^t$$

Dus $P = 2,27 \cdot 1,11^t$.

53 Schrijf de volgende formules in de vorm $N = b \cdot g^t$.



a $N = 2 \cdot 0,8^{-t}$

b $N = \frac{4}{0,2^t}$

c $N = \frac{2 \cdot 20^t}{20^{2t}}$

54 **a** Schrijf de formule $K = 3,2 \cdot \frac{5,6}{4 \cdot 1,25^t}$ in de vorm $K = b \cdot g^t$.



b Schrijf de formule $L = 10^{2x+3}$ in de vorm $L = b \cdot g^x$.

c Schrijf de formule $M = 8 \cdot 2,4^{3-t}$ in de vorm $M = b \cdot g^t$. Rond b af op gehele en g op drie decimalen.

55 **a** Herleid de formule $N = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t$ tot $N = 5^{2-t}$.



b Gegeven zijn de formules $O = \frac{36}{p}$ en $p = \left(\frac{1}{6}\right)^t$.

Combineer de formules tot $O = 6^{t+2}$.

Bedenk dat $25 = 5^2$ en $\frac{1}{5} = 5^{-1}$.

56 **a** Schrijf de formule $P = 2 \cdot 2,5^t + \frac{60}{0,4^t}$ in de vorm $P = b \cdot g^t$.



b Schrijf de formule $M = 100 \left(2 + \frac{25}{12 \cdot 0,9^t} \right)$ in de vorm $M = a + b \cdot g^t$.

Rond b af op gehele en g op twee decimalen.

A57

Bij de verdamping van benzine wordt de hoeveelheid benzine B in mL die na t uur nog over is, gegeven door de formule $B = b \cdot 2,718^{-kt}$. Hierin is k een constante die afhangt van allerlei factoren en b is de beginhoeveelheid in mL.

Matthijs rijdt in zijn oldtimer. Na een tussenstop ontdekt hij een plasje van 50 mL benzine onder zijn oldtimer. Neem aan dat bij deze situatie $k = 1,39$ hoort.

- Herleid de formule van B tot de vorm $B = b \cdot g^t$. Rond g af op drie decimalen.
- Bereken de halveringstijd van het plasje benzine in minuten nauwkeurig.

Als Matthijs in zijn garage het benzinefilter vervangt, lekt er 15 mL benzine op de grond. Na 1 uur is hiervan nog de helft over.

Bij deze situatie hoort een andere waarde van k .

- Toon aan dat $k \approx 0,693$.
- Na hoeveel minuten is er voor het eerst minder dan 1 mL van de gelekte vloeistof over? Geef je antwoord in gehele minuten.

**A58**

In 1937 werden in Finland enkele Noord-Amerikaanse bevers (*castor canadensis*) geïntroduceerd. Tot het jaar 2000 werd het aantal bevers gegeven door het model

$$B = \frac{100}{9 \cdot 0,926^t} \text{ met } t \text{ in jaren en } t = 0 \text{ in } 1937.$$

- Schets de grafiek.
- Uit onderzoek bleek dat er ongeveer 960 Noord-Amerikaanse bevers in Finland waren. In welk jaar is dit onderzoek gedaan?
- Schrijf de formule in de vorm $B = b \cdot g^t$. Rond b af op gehele en g op drie decimalen.
- Hoeveel bevers werden er in 1937 geïntroduceerd?
- Met hoeveel procent groeide het aantal Noord-Amerikaanse bevers in Finland jaarlijks?



59



In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $N = 90 \cdot 0,5^t$.

Als t heel groot wordt, dan nadert $90 \cdot 0,5^t$ tot 0.

a Licht dit toe.

We bekijken nu de formule $A = 100 - 90 \cdot 0,5^t$.

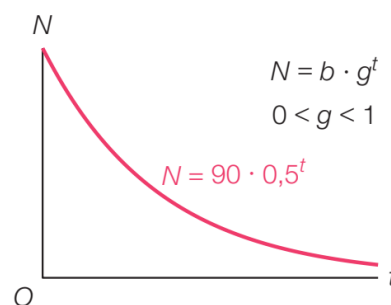
b Tot welk getal nadert A als t heel groot wordt?

c Vul in: *toe* of *af*.

Als t toeneemt, dan neemt $0,5^t$, dus dan neemt

$90 \cdot 0,5^t$, dus dan neemt $100 - 90 \cdot 0,5^t$

d Hoe kun je op grond van vraag c concluderen dat de grafiek van A stijgend is?

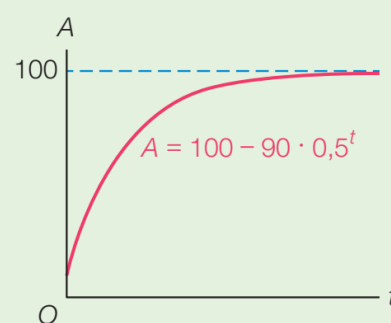


Theorie B Redeneren met groeiformules

In opgave 59 heb je bij de formule $A = 100 - 90 \cdot 0,5^t$ beredeneerd dat de grafiek van A stijgend is. Ook heb je beredeneerd dat A nadert tot 100 als t heel groot wordt.

We zeggen daarom dat de **grenswaarde** 100 is. De waarde 100 wordt echter niet bereikt.

In de figuur hiernaast is de grafiek van A getekend en is met een stippellijn de grenswaarde aangegeven. Bij een stijgende grafiek wordt de grenswaarde soms ook wel het **verzadigingsniveau** genoemd.



Bij een redenering werk je stap voor stap toe naar een conclusie over de formule of de grafiek. Getallenvoorbeelden of een schets van de grafiek mogen geen onderdeel van je redenering zijn.

Bij het beredeneren kom je twee soorten opdrachten tegen. We lichten deze toe aan de hand van de formule $N = 40(2 - 0,9^t)$.

1 Beredeneer wat de grenswaarde van N is.

Als t heel groot wordt,

dan nadert $0,9^t$ tot 0, $\leftarrow$ $0 < g < 1$, dus g^t nadert tot 0

dus dan wordt $2 - 0,9^t \approx 2$, $\leftarrow$ $2 - 0 = 2$

dus dan wordt $40(2 - 0,9^t) \approx 80$. $\leftarrow$ $40(2 - 0) = 80$

Dus $N \approx 80$ als t heel groot wordt. De grenswaarde is 80.

2 Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.

Als t toeneemt,

dan neemt $0,9^t$ af, ←

$0 < g < 1$, dus g^t neemt af

dus neemt $2 - 0,9^t$ toe, ←

Als je van 2 iets afhaalt dat kleiner wordt, dan wordt wat je overhoudt groter.

dus dan neemt $40(2 - 0,9^t)$ toe.

Dus als t toeneemt, neemt N toe. Dus de grafiek van N is stijgend.

Bij het beredeneren wat de grenswaarde is, begint de redenering met “Als t heel groot wordt, dan ...”

Bij het beredeneren of een grafiek stijgend of dalend is, begint de redenering met “Als t toeneemt, dan ...”

Bij formules met g^t , gebruik je bij het redeneren:

	$0 < g < 1$	$g > 1$
als t heel groot wordt, dan	nadert g^t tot 0	wordt g^t heel groot
als t toeneemt, dan	neemt g^t af	neemt g^t toe

Bij de opgaven in deze paragraaf gaan we er steeds van uit dat $t \geq 0$ is.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $B = \frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t}$.

- Beredeneer wat de grenswaarde is.
- Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van B dalend is.

Uitwerking

- Als t heel groot wordt, dan wordt $1,6^t$ heel groot, dus dan wordt $0,5 \cdot 1,6^t$ heel groot, dus dan wordt $1 + 0,5 \cdot 1,6^t$ ook heel groot.

Dus dan wordt $\frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t} \approx 0$. ←

Deel je 120 door een heel groot getal, dan krijg je ongeveer 0.

Dus de grenswaarde is 0.

- Als t toeneemt, dan neemt $1,6^t$ toe, dus dan neemt $0,5 \cdot 1,6^t$ toe, dus dan neemt $1 + 0,5 \cdot 1,6^t$ toe

en dan neemt $\frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t}$ af. ←

Deel je 120 door een steeds groter positief getal, dan krijg je een steeds kleinere uitkomst.

Dus de grafiek van B is dalend.

60 Het aantal vissen in een meer is gegeven door de formule



$N = \frac{5000}{2 + 5,5 \cdot 0,74^t}$. Hierin is N het aantal vissen en t de tijd in maanden.

- a** Beredeneer wat de grenswaarde is door op de puntjes de juiste getallen in te vullen.

Als t heel groot wordt, nadert $0,74^t$ tot

Dan wordt $5,5 \cdot 0,74^t \approx$

en $2 + 5,5 \cdot 0,74^t \approx$

Dus dan wordt $\frac{5000}{2 + 5,5 \cdot 0,74^t} \approx \frac{5000}{\dots} = \dots$.

De grenswaarde is dus vissen.

- b** Beredeneer dat de grafiek stijgend is door op de puntjes *toe* of *af* in te vullen.

Als t toeneemt, dan neemt $0,74^t$,

dan neemt $5,5 \cdot 0,74^t$,

en dan neemt $2 + 5,5 \cdot 0,74^t$,

dus dan neemt $\frac{5000}{2 + 5,5 \cdot 0,74^t}$

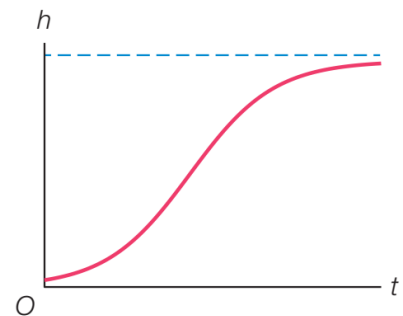
De grafiek van N is dus stijgend.

61 Bij de groei van een zonnebloem is de hoogte h gegeven



door de formule $h = \frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t}$. Hierin is h de hoogte in cm en t de tijd in weken.

- a** Beredeneer dat uit de formule volgt dat de zonnebloem voortdurend hoger wordt.
b Hoe hoog is de zonnebloem op $t = 3$?
c Beredeneer wat de grenswaarde is.
d Bereken in één decimaal vanaf welke t de zonnebloem hoger dan 2,5 meter is.

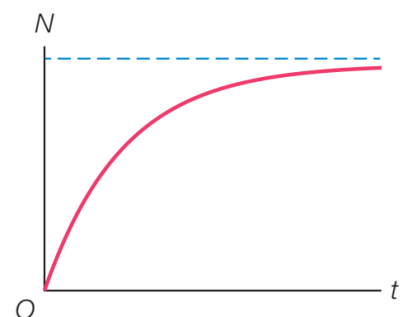


62 Belangrijk nieuws verspreidt zich razendsnel in een school.



Het aantal leerlingen N dat op een zeker tijdstip t van een belangrijk feit op de hoogte is, wordt gegeven door de formule $N = 1200(1 - 0,7^t)$ met t in uren en $t = 0$ om 9:00 uur.

- a** Beredeneer dat uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.
b Bij de grafiek van N hoort een lijn die het verzadigingsniveau aangeeft. Welke lijn is dat? Wat is de praktische betekenis van het verzadigingsniveau?
c Hoe laat hebben 950 leerlingen het nieuws gehoord? Rond af op minuten.



63



a Beredeneer hoe uit de formule $A = 5 - \frac{0,2}{1,4^t}$ volgt dat de grafiek van A stijgend is.

b Beredeneer bij de formule $B = 320(2 - 0,98^t)$ wat de grenswaarde is.

c Beredeneer aan de hand van de formule $C = \frac{720}{8 + 2,1 \cdot 1,8^t}$ of de grafiek van C stijgend of dalend is.

64



Gegeven is de formule $P = 1200 - \frac{2000}{5 - 4 \cdot 0,65^k}$.

a Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek van P stijgend of dalend is.

b Beredeneer wat de grenswaarde van P is.

A65



Een bioloog doet een onderzoek naar het aantal fruitvliegjes in een afgesloten ruimte. De tijd t is in dagen met $t = 0$ op 1 april om 0:00 uur en N is het aantal fruitvliegjes. De tellingen zijn als punten in de figuur uitgezet.

a Met hoeveel procent is het aantal fruitvliegjes tussen $t = 35$ en $t = 45$ toegenomen?

Tot $t = 30$ gaat de bioloog uit van exponentiële groei met een groeipercentage van 16% per dag.

b Bereken, uitgaande van de metingen op $t = 15$ en $t = 25$, het groeipercentage per dag. Rond af op één decimaal.

c Gebruik het groeipercentage 16% om het aantal fruitvliegjes op 23 april om 0:00 uur te berekenen.

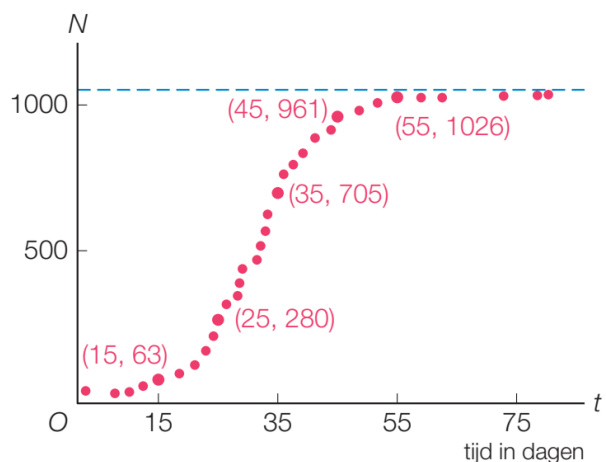
De bioloog benadert het groeiproces met $N = \frac{1035}{1 + 210 \cdot 0,84^t}$.

d Hoeveel procent wijkt op $t = 45$ het aantal fruitvliegjes volgens de formule af van de telling van de bioloog?

e Beredeneer dat de grafiek van N stijgend is.

De bioloog verwacht dat het aantal fruitvliegjes op den duur 1035 zal worden.

f Beredeneer dat de formule hiermee in overeenstemming is.



A66

Hoelang kun je woorden onthouden? Om deze vraag te beantwoorden voerden onderzoekers een experiment uit. Deelnemers kregen een groot aantal woorden in paren te zien. Even later kregen ze als test één van de twee woorden te zien en moesten ze het bijbehorende woord geven. Hoe langer de onderzoekers wachtten met de test, hoe minder woorden de deelnemers zich nog konden herinneren.

De onderzoekers vonden de formule $P = \frac{92}{2,39^t} + \frac{32}{1,04^t} + 10$. Hierin is

P het percentage woorden dat correct wordt herinnerd en t de tijd in minuten vanaf het zien van de paren woorden.

- Waarom kan deze formule niet gelden voor $t = 0,5$?
- Hoelang duurt het tot de helft van de woorden nog correct wordt herinnerd? Rond af op gehele seconden.
- Beredeneer wat de grenswaarde is van deze formule. Wat is hiervan de praktische betekenis?
- De formule is te schrijven in de vorm $P = 92 \cdot a^t + 32 \cdot b^t + 10$. Bereken a en b . Rond af op drie decimalen.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan exponentiële formules herleiden tot de vorm $N = b \cdot g^t$.

► OPGAVE C8
THEORIE A

☐ Ik kan bij een formule met een grenswaarde beredeneren wat die grenswaarde is.

► OPGAVE C9a
THEORIE B

☐ Ik kan bij een formule beredeneren of de bijbehorende grafiek stijgend of dalend is.

► OPGAVE C9b
THEORIE B

C8 Herleid $N = 150 \cdot \frac{20}{3 \cdot 1,2^t}$ tot de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond g af op twee decimalen.

C9 Gegeven is de formule $N = \frac{150}{3 + 20 \cdot 0,6^t}$.

- Beredeneer dat de grenswaarde 50 is.
- Beredeneer aan de hand van de formule dat de grafiek van N stijgend is.

Antwoorden

C8 $N = 1000 \cdot 0,83^t$

C9 a *

b *

Kennis- en vaardigheidentest

9.1 Exponentiële groei

- 1** Een hoeveelheid N neemt met 0,3% per jaar toe. Op $t = 0$ is $N = 2400$.
- a** Stel de formule van N op. Neem t in jaren.
 - b** Vanaf welke gehele waarde van t is N groter dan 2700?
- 2**
- a** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 15,5% toe. Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
 - b** Een hoeveelheid verdubbelt elke 21 jaar. Bereken het groeipercentage per jaar.
- 3**
- a** Een hoeveelheid neemt per uur met 12% af. Bereken de halveringstijd in minuten nauwkeurig.
 - b** Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 7,8 dagen. Bereken de groeifactor per dag.
 - c** Gegeven is de formule $N = 195 \cdot 0,975^t$. Hierin is t de tijd in jaren. Bereken de halveringstijd in jaren. Rond af op één decimaal.

9.2 Formules bij exponentiële groei

- 4** Een hoeveelheid neemt per dag met 36% toe.
- a** Bereken het groeipercentage per week. Rond af op gehele.
 - b** Bereken het groeipercentage per uur.
- 5** Bij een exponentiële afname hoort een groeifactor van 0,75 per tien jaar.
- a** Hoeveel procent is de afname per jaar?
 - b** Hoeveel procent is de afname per 25 jaar?
- 6** Een hoeveelheid N neemt exponentieel af. Op $t = 4$ is $N = 1500$ en op $t = 7$ is $N = 1200$. Hierbij is t de tijd in dagen. Stel de formule van N op. Rond de beginhoeveelheid af op gehele.
- 7** In de populaire Marvelfilms verschijnen in de loop der jaren steeds meer personages. Om deze toename te bepalen hebben onderzoekers alle interacties tussen personages in Marvelfilms in kaart gebracht. Op basis van deze analyse konden ze voor elke Marvelfilm het aantal belangrijke personages berekenen en vervolgens voor elk jaar het gemiddeld aantal belangrijke personages P per film. In 2008 waren dit er gemiddeld 8,1 per film en in 2019 al 14,4. Deze toename bleek exponentieel te zijn.
- a** Stel de formule op van P . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2008.
 - b** Bereken in welk jaar er voor het eerst gemiddeld meer dan 20 belangrijke personages per Marvelfilm optreden, als de genoemde groei doorzet.



9.3 Exponentiële en lineaire groei

8 Het aantal gebruikers van parkeerapp ParkLine nam vanaf 1 januari met een vast aantal per dag toe. Na 91 dagen had ParkLine 2134 gebruikers en 20 weken daarna waren dat er 2974. Bij parkeerapp GoRilla nam het aantal gebruikers sinds 1 januari toe met 0,8% per dag. Het bleek dat GoRilla 14 weken na 1 januari 655 gebruikers had.

- Stel de formules op voor de aantallen gebruikers N_{PL} van ParkLine en N_{GR} van GoRilla. Neem in beide formules de tijd t in dagen met $t = 0$ op 1 januari. Rond de beginhoeveelheden zo nodig af op gehele.
- Hoeveel procent meer gebruikers had Parkline toen GoRilla 750 gebruikers had?
- Hoeveel dagen na 1 januari had GoRilla voor het eerst meer gebruikers dan Parkline?

9 Zie de tabel met hoeveelheden P , Q en R , en t de tijd in jaren.

- Het verband tussen P en t is exponentieel en het verband tussen Q en t is lineair. Toon aan dat de tabel hiermee overeenstemt.
- Het verband tussen R en t is niet lineair en niet exponentieel. Toon dit aan.

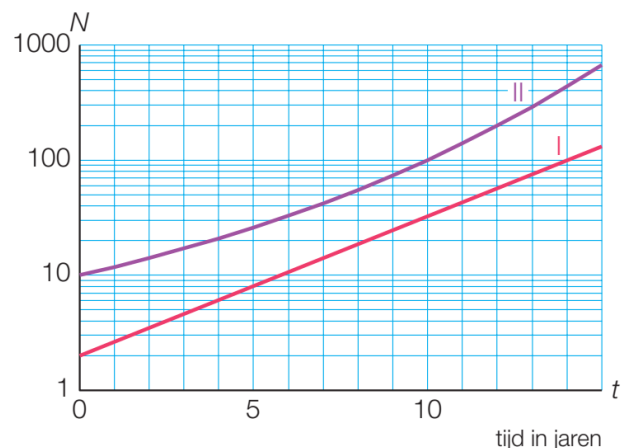
t	0	4	8	12
P	17 830	20 505	23 580	27 120
Q	17 830	18 045	18 260	18 475
R	17 830	18 365	18 900	19 845

10 Zie de figuur. Op de verticale as is een logaritmische schaal gebruikt.

- Een van de getekende grafieken hoort bij een exponentieel verband. Stel bij deze grafiek de formule op.

Gegeven is de formule $N = 300 \cdot 0,736^t$.

- Van welke soort dalen is er sprake bij de grafiek van deze formule? Licht toe.
- Teken in de figuur de grafiek van N .



9.4 Herleiden en redeneren

11 Gegeven is de formule $N = \frac{5000}{200 + 12 \cdot 0,78^t}$.

- Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.
- Beredeneer wat de grenswaarde is.

12 Rond in deze opgave zo nodig af op twee decimalen.

- Schrijf de formule $N = \frac{3000}{15 \cdot 1,12^t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$.
- Schrijf de formule $M = 200 \cdot 0,8^{4-3t}$ in de vorm $M = b \cdot g^t$.

Gemengde opgaven

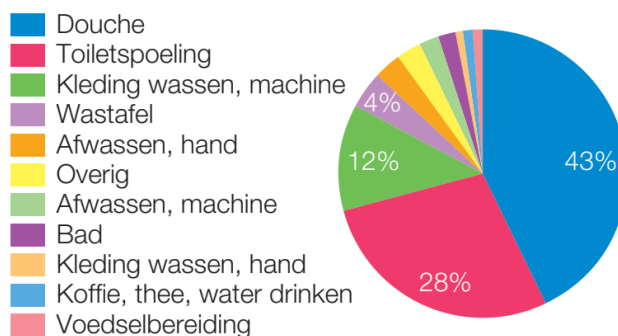
- 1** a Schrijf de formule $N = \frac{1750}{121 \cdot 1,8^t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b en g af op twee decimalen.
- b Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 4,5% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- c Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 15 uur en 45 minuten.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per uur afneemt.
- d Een hoeveelheid neemt per 10 uur met 3,5% toe.
Hoeveel procent is de toename per dag?
- e Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. Op $t = 4$ is $N = 5000$ en op $t = 6,5$ is $N = 6000$. Hierbij is t de tijd in uren.
Stel de formule op van N . Rond de beginhoeveelheid af op honderdtallen.
- f Gegeven is de formule $N = 512(3 \cdot 1,06^t - 2)$.
Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.

- 2** In 1990 verbruikten Nederlanders gemiddeld 145 liter drinkwater per dag. In 2017 was dat 125 liter. Ga uit van exponentiële afname.
Uit de gegevens volgt dat voor de hoeveelheid verbruikt drinkwater per persoon per dag geldt $N = 145 \cdot 0,9945^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1990.

- a Toon aan dat deze formule bij benadering juist is.

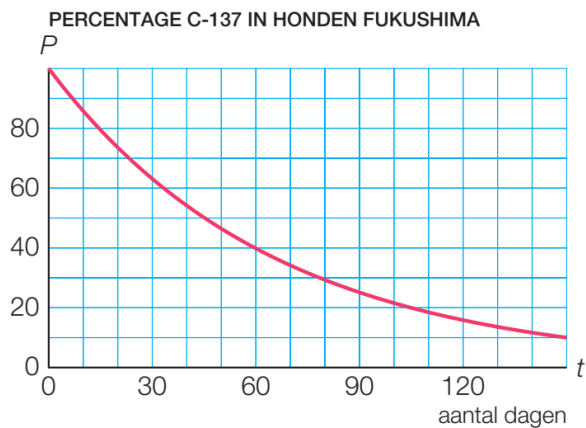
In het diagram hiernaast staan de toepassingen van drinkwater in 2013. Het waterverbruik neemt al jaren af voor de meeste toepassingen, zoals toiletspoeling en kleding wassen. Voor douchen is er echter sprake van een lineaire toename van het waterverbruik.

- b Stel de formule op voor het waterverbruik D voor douchen in liter per dag per persoon. Gebruik dat er in het jaar 2000 per persoon 45,9 liter per dag werd verbruikt voor douchen. Neem t de tijd in dagen met $t = 0$ in 1990. Rond in de formule af op één decimaal.
- c Bereken in welk jaar voor het eerst minstens de helft van het waterverbruik van Nederlanders voor rekening komt van douchen als deze trends doorzetten.



- 3** Op 11 maart 2011 vond een kernramp plaats bij de Japanse stad Fukushima. Er werden daarbij radioactieve deeltjes de lucht in geblazen, waaronder cesium-137. Onderzoekers hebben gedurende 150 dagen gemeten hoeveel van deze deeltjes aanwezig waren in honden uit het besmette gebied. De hoeveelheid cesium-137 bij de eerste meting is hierbij gelijkgesteld aan 100%.

In de figuur is het percentage P van cesium-137 dat nog in de honden aanwezig was, uitgezet tegen het aantal dagen t . Ga uit van een exponentiële afname.



- Stel de formule op van P .
- Hoeveel procent cesium-137 was er na 200 dagen nog in de honden over?
- Bereken de halveringstijd van het percentage cesium-137. Rond af op gehele dagen.
- Na hoeveel maanden is er minder dan 1% van de beginhoeveelheid cesium-137 aanwezig in de honden?

- 4** Vanaf 1 januari 2018 is het aantal vissen in ‘Vijvers de Beukenhorst’ bijgehouden. Het aantal vissen blijkt exponentieel af te nemen. In de periode van 1 januari 2021 tot 1 januari 2024 was de afname maar liefst 73%. Op 1 januari 2025 waren er nog maar 100 vissen.

- Stel de formule op van het aantal vissen N . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2018. Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.
- Bereken het aantal vissen in ‘Vijvers de Beukenhorst’ op 1 juli 2022. Rond af op honderdtallen.
- Bereken in maanden nauwkeurig de halveringstijd van het aantal vissen.
- Bereken in welke maand van welk jaar er voor het eerst minder dan 500 vissen in ‘Vijvers de Beukenhorst’ waren.

5 Tijdens ruimtereizen is de zwaartekracht die op het lichaam van astronauten werkt zeer gering. Als gevolg hiervan neemt de dichtheid van hun botten af. Het verloop van deze afname tijdens ruimtereizen wordt gegeven door de formule $B = 69 - 69 \cdot 0,99936^t$. Hierin is B de procentuele afname van de botdichtheid en t de tijd in dagen.

- a** Beredeneer wat de grenswaarde is. Leg uit hoe hieruit volgt dat astronauten altijd minstens 31% botdichtheid behouden.

Het risico op botbreuken wordt bepaald aan de hand van een T-score.

Hoe lager deze score, hoe groter het risico op botbreuken.

Er geldt $T = -0,07B - 0,15$. Ruimtevaartorganisatie NASA vindt T-scores boven de -2 acceptabel. Deze T-score is vooral relevant bij lange ruimtereizen, zoals een bemande missie naar Mars. Voor zo'n reis zijn twee scenario's uitgewerkt: 500 of 1000 dagen. Het nadeel van de kortere reis is een hoger energieverbruik.

- b** Onderzoek voor beide scenario's of ze acceptabele T-scores opleveren.
- c** Bereken hoeveel dagen een astronaut in de ruimte mag zijn als zij boven de norm voor de T-score van de NASA moet blijven.
- d** Volgens Shadan komt de T-score nooit onder -5 .
Onderzoek of zij gelijk heeft.

6 Door vergrijzing en een zeer laag geboortecijfer neemt het aantal inwoners van Japan sinds 2018 met een constante snelheid af. Op 1 januari 2020 had Japan nog 125,40 miljoen inwoners en op 1 januari 2024 waren dat er 123,32 miljoen. De verwachting is dat deze trend doorzet.

Door een jonge bevolking en een hoog geboortecijfer neemt het aantal inwoners van Ethiopië toe. Sinds 2018 is het jaarlijks groeipercentage constant. De verwachting is dat ook deze trend doorzet. In de periode 1 januari 2018 tot 1 januari 2024 is het aantal inwoners van Ethiopië met 17,2% toegenomen tot 132,05 miljoen op 1 januari 2024.

- a** Stel de formule op voor het aantal inwoners van Japan N_J in miljoenen. Doe dit ook voor het aantal inwoners van Ethiopië N_E in miljoenen. Neem in beide formules de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2018. Rond de beginhoeveelheden zo nodig af op twee decimalen.
- b** Bereken in welke maand van welk jaar Japan en Ethiopië evenveel inwoners hadden.
- c** Hoeveel inwoners heeft Ethiopië als het aantal inwoners van Japan 121,76 miljoen is? Geef je antwoord in honderdduizendtallen nauwkeurig.



Shibuya Scramble Crossing, Tokyo

- 7** In de onderstaande tabel staat het totale aantal sterfgevallen ten gevolge van Covid-19 voor drie landen in 2020. Je ziet dat er in België tot en met 28 maart in totaal 353 personen zijn overleden.

	22 mrt	23 mrt	24 mrt	25 mrt	26 mrt	27 mrt	28 mrt
België	75	88	122	178	220	289	353
Ecuador	14	18	27	28	34	36	48
Italië	5476	6077	6820	7503	8215	9134	10023

In één van deze drie landen is er in deze periode bij benadering sprake van exponentiële groei van het totale aantal sterfgevallen door Covid-19.

- Onderzoek in welk land dat is.
- Bereken hoeveel dagen na 28 maart in dit land het totale aantal sterfgevallen boven een miljoen zou uitkomen, als de exponentiële groei zou doorzetten.

- 8** Bij de groei van het aantal inwoners van een stad hoort de formule

$$N = \frac{65\,000}{1 + 2,5 \cdot 0,92^t}$$

met $t = 0$ op 1 januari 1960.

- Met hoeveel is het aantal inwoners toegenomen tussen 1 januari 1960 en 1 januari 1970? En met hoeveel tussen 1 januari 1970 en 1 januari 1980?
- Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.
- Beredeneer wat de grenswaarde is.
- Zal het aantal inwoners vanaf 2020 nog flink toenemen? Licht toe.
- In welke maand van welk jaar waren er 50 000 inwoners?

- 9** De schuimplaten van AcustiDemp absorberen het geluid in de middenfrequenties. Het percentage van het geluid dat door een plaat dringt, is afhankelijk van de dikte van de plaat. Zie de tabel.

- Het verband tussen de dikte van de plaat en het percentage geluid dat doordringt is exponentieel. Toon aan dat de tabel hiermee overeenstemt.
- Bereken voor een plaat met een dikte van 3,8 cm het percentage geluid dat doordringt.
- Bereken de dikte van een plaat waarbij 15% van het geluid doordringt. Rond af op gehele mm.

dikte plaat in cm	percentage geluid dat doordringt
1,5	56,1
2,5	38,1
3,5	25,9
4,5	17,6
5,5	12,0
6,5	8,2

10 Er wordt vaak gedacht dat de luchtkwaliteit van een ruimte sterk verbetert door de aanwezigheid van planten. Onderzoekers die zich met deze vraag bezighouden, gaan voor een kamer van 125 m^3 uit van de formule $N = b \cdot 0,992^s \cdot t$. Hierin zijn N en b de nieuwe en oude concentraties schadelijke deeltjes in ppm, is s de proportie gezuiverde lucht per m^3 per uur per plant en t de tijd in uren. Voor $s = 0,25$ is de formule te herleiden tot $N = b \cdot 0,998^t$.

- a Toon dit aan.
- b Toon aan dat de halveringstijd van de concentratie schadelijke deeltjes in de kamer bij een plant met $s = 0,25$ ruim 14 dagen is.

Voor een gemiddelde plant geldt $s = 0,06$.

- c Bereken de halveringstijd van de concentratie schadelijke deeltjes in de kamer bij een gemiddelde plant. Rond af op gehele dagen.

In de kamer is de concentratie van de kankerverwekkende stof benzeen $0,8 \text{ ppm}$.

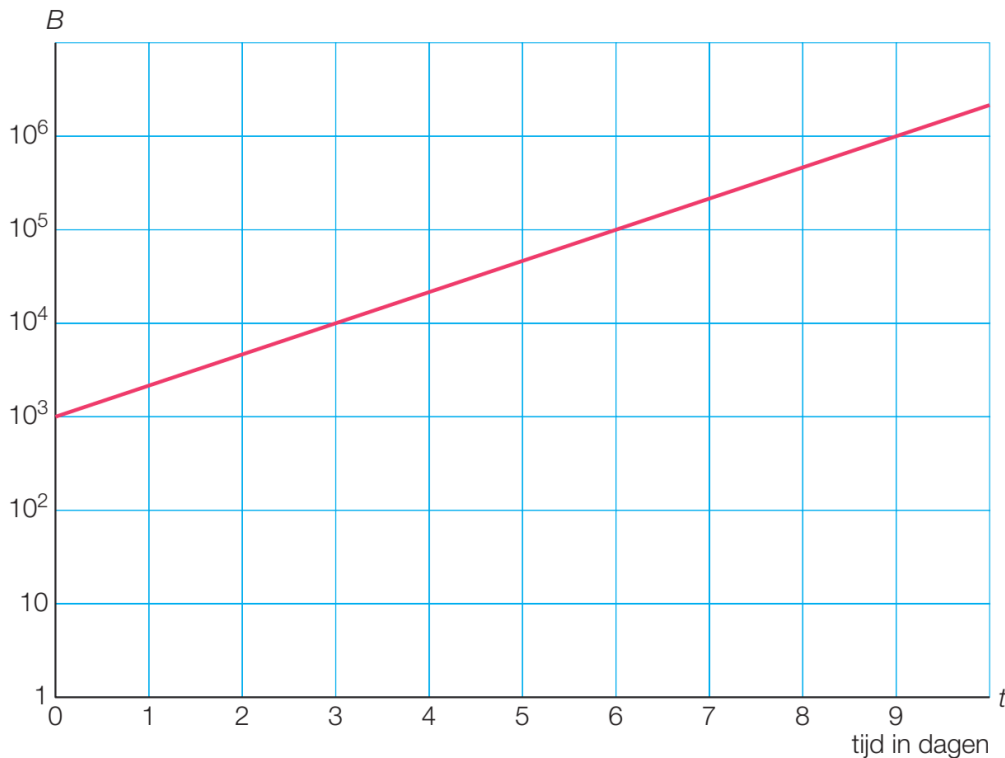
- d Bereken na hoeveel dagen de veilige hoeveelheid van $0,2 \text{ ppm}$ wordt bereikt door een gemiddelde plant.

Om de effectiviteit van luchtzuivering door planten te bepalen wordt deze vergeleken met het zuiverende effect van doorstroom van lucht in een ruimte. Neem aan dat in huizen door doorstroom per uur gemiddeld 70% van de concentratie schadelijke deeltjes uit de lucht verdwijnt.

- e Hoeveel keer zo lang doet een gemiddelde plant in de kamer erover om dezelfde zuivering te bereiken? Rond af op honderdtallen.
- f Wat concludeer je over de effectiviteit van planten voor de zuivering van lucht in binnenruimtes?



- 11** Bij een onderzoek naar de houdbaarheid van kip werd gekeken naar het aantal bacteriën per kilogram verse kip. Hierbij werd 1 kg verse kip bewaard in een koelkast die op 0°C was ingesteld en werd bijgehouden hoe het aantal bacteriën B per kg verse kip zich ontwikkelde. In de figuur is het verband weergegeven tussen B en de tijd t in dagen vanaf het moment dat de kip de koelkast in ging. De verticale as heeft een logaritmische schaalverdeling.



Volgens de Warenwet mogen er ten hoogste 50 miljoen bacteriën per kg kip aanwezig zijn. Zijn er meer bacteriën aanwezig, dan kan het niet meer veilig worden gegeten.

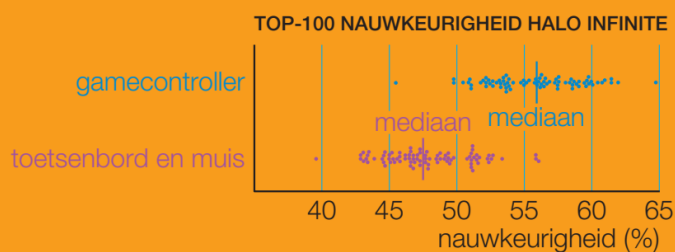
Stel de formule op bij de lijn in de figuur en bereken daarmee na hoeveel dagen de kip niet meer veilig gegeten kan worden. Rond af op één decimaal.



10

Statistiek gebruiken

Bij veel computergames is er discussie over wat beter werkt: toetsenbord en muis, of een gamecontroller. Een speler van de computergame Halo Infinite wil de onderstaande data gebruiken in de zoektocht naar het antwoord op deze vraag.



Welke methode voor het bepalen van de grootte van het verschil tussen deze twee groepen zou je gebruiken? Zie het formuleblad op bladzijde 254.

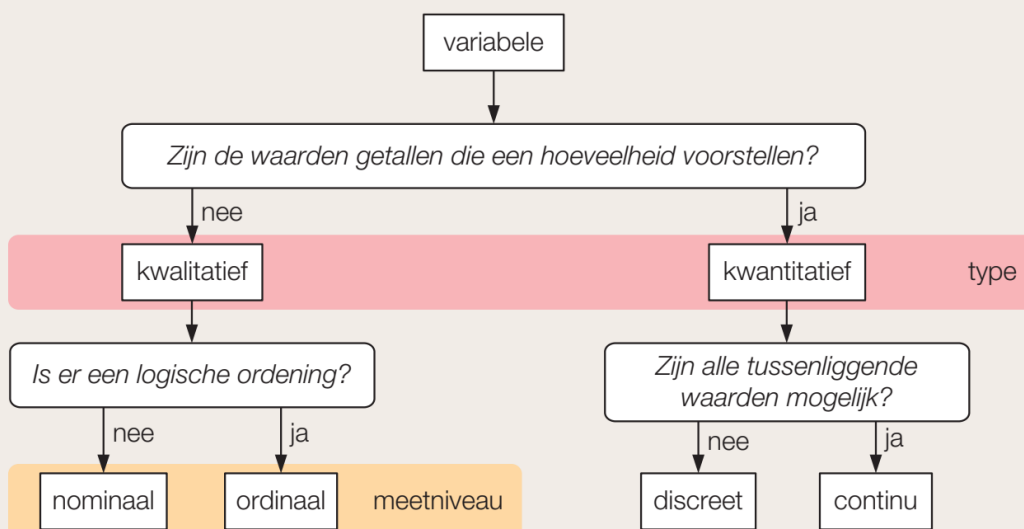
10.1 Statistische diagrammen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met verschillende (re)presentaties van data, waaronder dotplots en spreidingsdiagrammen.
- Je kunt geschikte diagrammen kiezen voor het (re)presenteren van data.

Voorkennis Statistische variabelen

Bij statistiek heten de kenmerken die je onderzoekt variabelen. We maken onderscheid tussen kwalitatieve en kwantitatieve variabelen. De kwalitatieve variabelen hebben een meetniveau (nominaal of ordinaal). Bij kwantitatieve variabelen kun je onderscheid maken tussen discreet en continu. Voor het indelen van een variabele kijk je naar de *waarden* die deze aan kan nemen en gebruik je het volgende schema.



In het voorbeeld zie je hoe je dit schema gebruikt. Noteer bij soortgelijke opgaven waarin een toelichting wordt gevraagd je antwoord zoals in het voorbeeld.

Voorbeeld

Bij een onderzoek is van 10 000 producten onder andere de variabele productcode gebruikt, met als waarden getallen van 13 cijfers.

Is deze variabele nominaal, ordinaal, discreet of continu? Licht toe.



Uitwerking

Nominaal, want de waarden zijn geen hoeveelheden en hebben geen logische volgorde.

- V1** In de vragenlijst hieronder komen een aantal variabelen voor. Geef bij elke variabele aan of deze nominaal, ordinaal, discreet of continu is. Licht toe.

Vragenlijst: Omcirkelen wat van toepassing is

geboortejaar: 2004

hoogst genoten opleiding: geen / middelbare school / mbo / hbo / wo

telefoonnummer: 0786127768

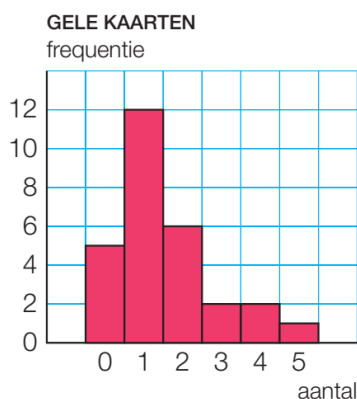
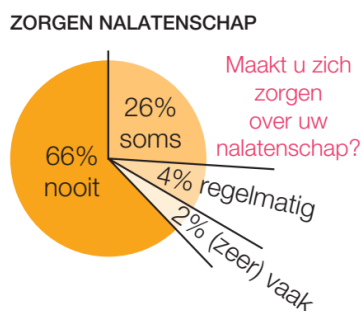
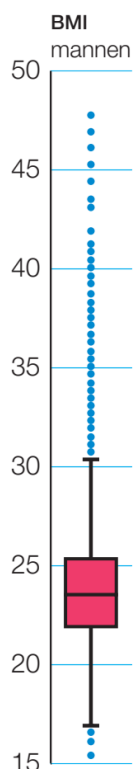
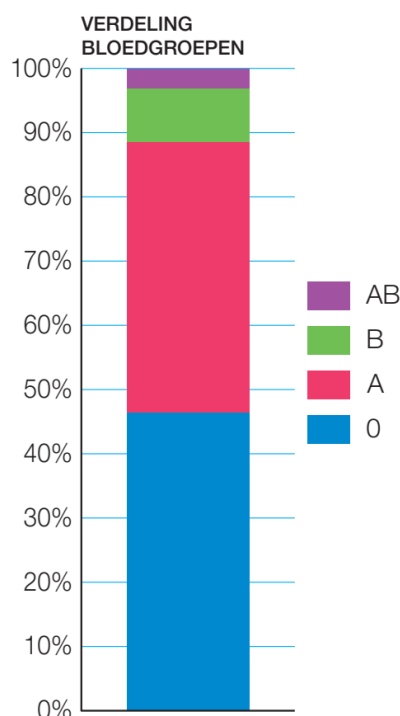
mogen we u mail sturen? ja / nee

- V2** Ibrahim, Senna en Wissal schieten herhaaldelijk met pijl en boog op een doel met verschillend gekleurde zones. Elke pijl is een aantal punten waard, afhankelijk van de zone die geraakt wordt. Hoe dicht bij het midden, hoe meer punten een zone waard is. Na elk schot wordt van de onderstaande variabelen de waarde genoteerd. Geef van elke variabele aan of deze nominaal, ordinaal, discreet of continu is. Licht toe.



- De kleur van de zone die is geraakt.
- Het aantal punten van de zone die is geraakt.
- De snelheid waarmee de pijl is afgeschoten.
- De naam van degene die de pijl heeft geschoten.

- V3** Zie de diagrammen hieronder. Geef van elke kwalitatieve variabele het meetniveau en geef van elke kwantitatieve variabele aan of deze discreet of continu is. Licht toe.



Een onderzoeker vraagt in een enquête onder andere naar het geslacht van de respondenten. Ze wil de resultaten van de enquête verwerken in enkele diagrammen.

- a Kan ze bij de variabele ‘geslacht’ een lijndiagram maken? Licht toe.
- b Kan ze bij de variabele ‘geslacht’ een cirkeldiagram maken? Licht toe.

Theorie A Geschikte diagrammen bij data

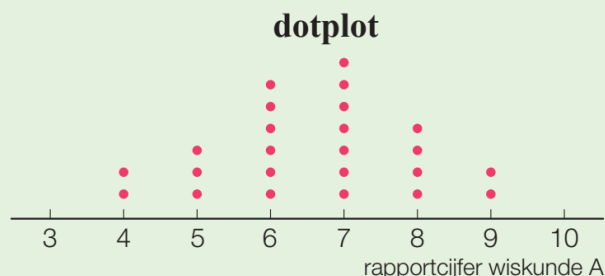
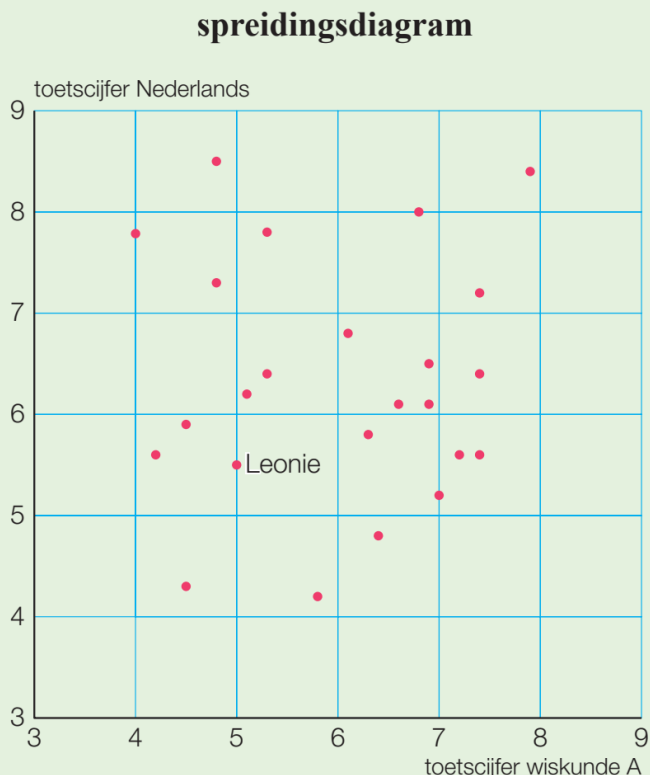
Voor de presentatie van data kun je kiezen uit verschillende typen diagrammen.

Bekijk je bijvoorbeeld de verdeling van rapportcijfers voor het vak wiskunde A, dan geeft de **dotplot** hiernaast een goed overzicht. Bekijk je echter de samenhang tussen de toetscijfers wiskunde A en de toetscijfers Nederlands, dan kun je beter gebruikmaken van een

spreidingsdiagram zoals hiernaast. De punten in een spreidingsdiagram worden gezamenlijk een **puntenwolk** genoemd.

In het spreidingsdiagram zie je dat Leonie een 5 heeft gehaald voor de toets van wiskunde A en een 5,5 voor de toets van Nederlands.

Een spreidingsdiagram is dus geschikt om een samenhang in beeld te brengen. Maar wil je bijvoorbeeld een verloop in de tijd laten zien, dan kun je beter een lijndiagram maken. Wat je wil laten zien, bepaalt de keuze voor het diagram dat je gebruikt. Bij het kiezen van een diagram is ook het type data waarover je beschikt van belang. Bij kwalitatieve data kun je niet alle diagrammen maken, maar bij kwantitatieve data kan dat wel. Zie hieronder.



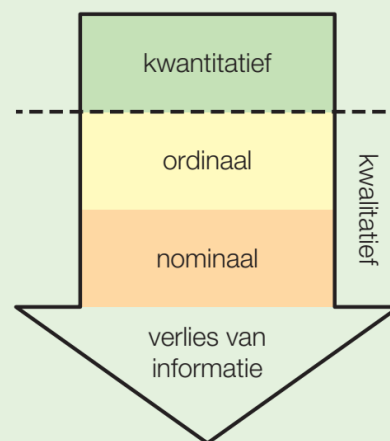
Diagrammen die mogelijk zijn bij kwantitatieve data

puntenwolk / spreidingsdiagram
histogram
boxplot
steel-bladdiagram
lijndiagram

dotplot
(gestapeld) staafdiagram
cirkeldiagram
(relatieve) (cumulatieve) frequentiepolygoon

ook mogelijk bij kwalitatieve data

Bij het maken van een diagram is het meestal nodig om eerst de data te verwerken. Heb je bijvoorbeeld van een partij eieren de gewichten van de eieren gemeten, dan kun je deze kwantitatieve data gebruiken om de eieren in te delen in de categorieën S, M, L en XL. Hierbij heb je de gegevens van de kwantitatieve variabele ‘gewicht’ verwerkt om de kwalitatieve variabele ‘categorie’ te maken. Bij de variabele ‘categorie’ kun je bijvoorbeeld een cirkeldiagram of een staafdiagram maken. Merk op dat het indelen in categorieën eenrichtingsverkeer is: je kunt uit de categorieën niet de oorspronkelijke kwantitatieve data terughalen. In het diagram hiernaast is dat met een pijl aangegeven.



Voorbeeld

Stefan heeft van alle leerlingen in zijn klas de lengte in cm nauwkeurig gemeten.

- a Zijn de metingen van Stefan kwalitatief of kwantitatief? Licht toe.
- b Stefan heeft in een cirkeldiagram met twee sectoren weergegeven welk deel van de leerlingen in zijn klas minstens 1,70 m is. Licht toe dat hier een kwalitatieve variabele bij hoort.
- c Geef voor elk van de drie centrummaten aan of je deze uit het cirkeldiagram kunt aflezen.

Uitwerking

- a Kwantitatief, want de waarden zijn hoeveelheden.
- b De variabele die gebruikt is bij het maken van het cirkeldiagram heeft de waarden ‘tot 1,70 m’ en ‘minstens 1,70 m’. Dit zijn geen hoeveelheden, dus de variabele is kwalitatief.
- c Het gemiddelde en de mediaan niet, maar wel de modus.

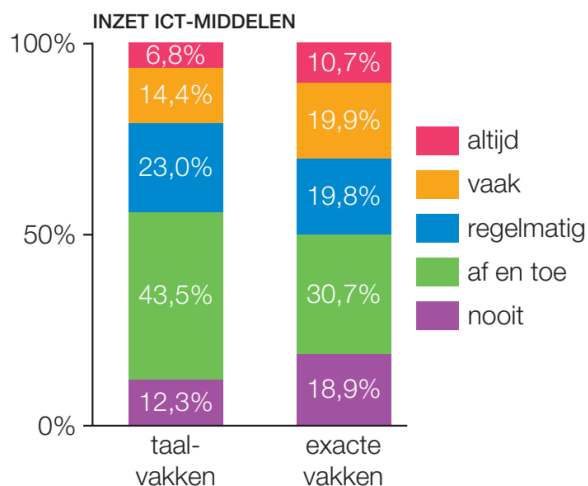
2 Zie het voorbeeld.



Stefan besluit nog een diagram te maken. Hij maakt daarom bij de variabele ‘lengte’ de variabele ‘lengteklasse’ met als klassen: $\langle \leftarrow; 1,70 \rangle$, $\langle 1,70; 1,90 \rangle$ en $\langle 1,90; \rightarrow \rangle$.

- a Wat is het meetniveau van de variabele lengteklasse?
- b Noem twee diagrammen die Stefan kan gebruiken om de data van de variabele lengteklasse te presenteren.
- c Waarom kan hij uit de klassenindeling geen goede schatting meer berekenen van de gemiddelde lengte?

- 3** Bij taal- en exacte vakken op de middelbare school is onderzocht in welke mate digitale middelen (ICT-middelen) werden ingezet. Zie het gestapeld staafdiagram hiernaast.
- Wat is het meetniveau van de variabele ‘mate van inzet’?
 - Wat is de relatieve cumulatieve frequentie van *vaak* bij de taalvakken? En bij de exacte vakken?
 - Welke centrum- en spreidingsmaten zijn bij dit diagram te gebruiken?
 - Linda wil in een ander type diagram presenteren hoe de mate van inzet van ICT-middelen bij de taalvakken verdeeld is. Welk diagram zou je aanraden? Licht toe.



- 4** Samuel doet een klein onderzoek in de bovenbouw van zijn middelbare school. Hij vraagt daarbij 32 leerlingen naar het aantal liedjes dat ze dagelijks op hun mobiel streamen vanuit de databundel. Zijn resultaten staan verwerkt in het dubbel steel-bladdiagram. Je ziet dat er één jongen is die dagelijks 25 liedjes streamt.

AANTAL DAGELIJKS BELUISTERDE LIEDJES VIA STREAMING

jongens		meisjes
3 1 0	0	0 0 0 0 0 0 0 0 3 5
8 7 4 1 1 0	1	0 0 5
5	2	
0	3	
0	4	
0 0	5	0
0	6	0
	7	5
eenheden	tientallen	eenheden

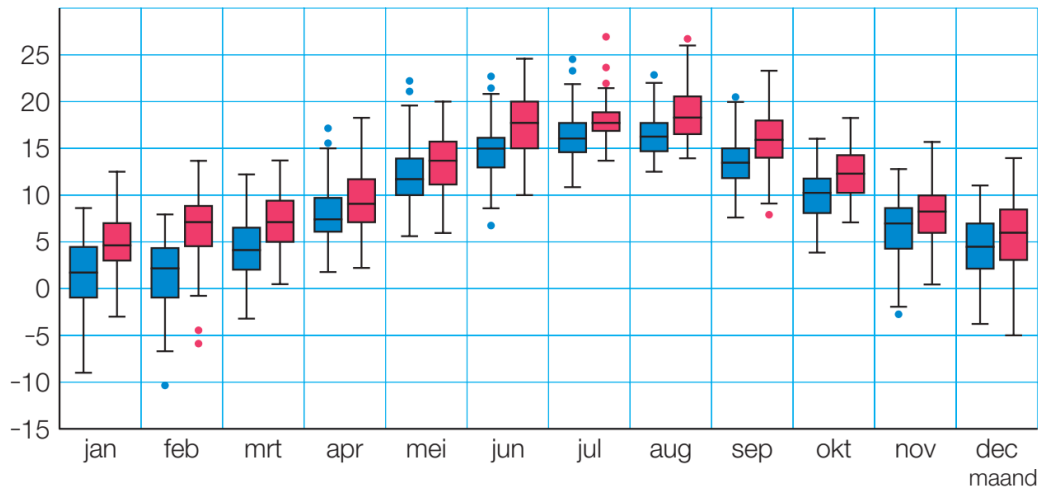
- Welke variabele is gebruikt voor het splitsen van de groepen links en rechts in het dubbel steel-bladdiagram? Wat is hiervan het meetniveau?

Samuel berekende $\bar{X}_1 = 22,7$ met $S_1 = 19,2$ en $\bar{X}_2 = 13,4$ met $S_2 = 23,9$.

- Koos hij voor groep 1 de jongens of de meisjes? Licht toe.
- Welke centrum- en spreidingsmaten had hij nog meer kunnen gebruiken om de groepen te vergelijken?
- Thom kreeg van Samuel het dubbel steel-bladdiagram toegestuurd. Hij wil onderzoeken of er een samenhang is tussen de leeftijd en het aantal muzieknummers dat dagelijks gestreamd wordt. Hij heeft daarvoor ook nog een dotplot van de leeftijden bij dit onderzoek tot zijn beschikking. Heeft hij zo voldoende informatie voor een puntenwolk? Licht toe.

In de figuur zijn voor twee perioden van 5 jaar de gemiddelde Nederlandse dagtemperaturen in elke maand vergeleken met behulp van boxplots. In deze opgave noemen we het tijdvak 1951-1955 periode I en het tijdvak 2020-2024 periode II.

GEMIDDELDE DAGTEMPERATUREN IN PERIODEN 1951-1955 EN 2020-2024
gemiddelde dagtemperatuur

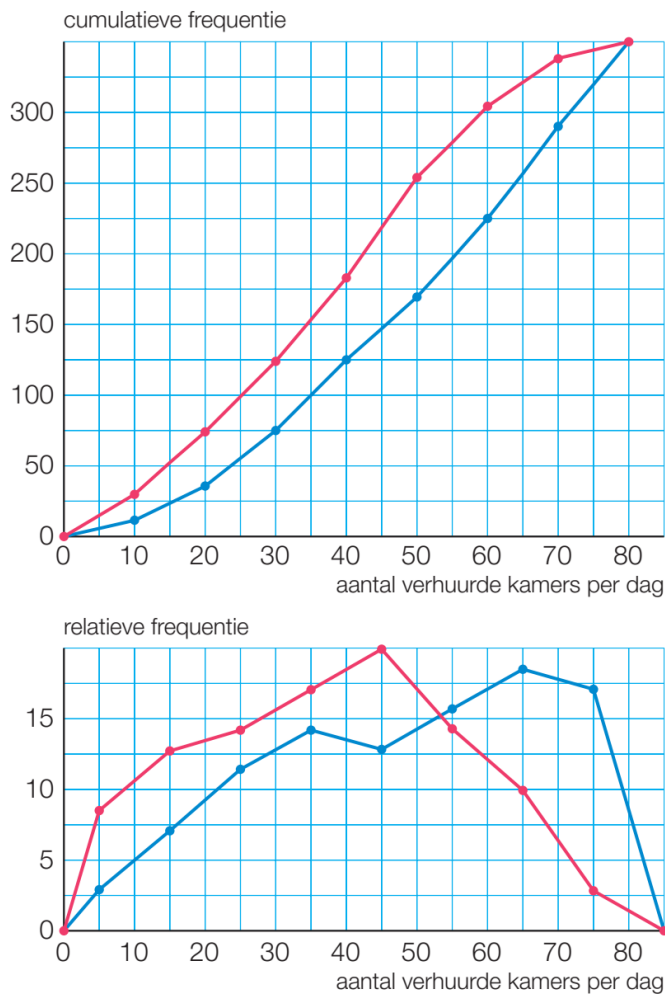


- Is de variabele gemiddelde dagtemperatuur kwalitatief of kwantitatief? Wat is het meetniveau van de variabele maand?
- In de figuur is de opwarming van de aarde goed te zien. De gemiddelde dagtemperaturen van periode I zijn doorgaans lager dan de gemiddelde dagtemperaturen van periode II. Welke boxplots horen bij periode II? Licht toe.

In de figuur zijn bij sommige boxplots stippen gezet. Dit zijn uitschieters die meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand van de box af liggen.

- Yoeri is verbaasd dat de rode boxplot in januari geen uitschieter heeft. Bereken bij welke temperaturen er sprake zou zijn van een uitschieter.
- Noem een maand en periode waarin je verwacht dat het gemiddelde lager zal zijn dan de mediaan. Licht je antwoord toe.
- Marlijn maakt bij de gegevens in de figuur een boxplot bij elke periode. De twee boxplots die ze zo krijgt, hebben vrijwel dezelfde spreidingsbreedte. Bereken deze spreidingsbreedte in gehele graden nauwkeurig. Neem de uitschieters hierbij niet mee.

Het gaat niet goed met hotel Bergzicht. Het hotel verdient vooral aan de verhuur van kamers en juist deze inkomstenbron is de afgelopen jaren flink teruggelopen. In de diagrammen hieronder staan voor de jaren 2019 en 2024 de aantallen verhuurde kamers per dag verwerkt met als eerste klasse $[0, 10)$.



In de diagrammen is van de genoemde jaren niet de data van elke dag van dat jaar verwerkt.

a Hoeveel dagen per jaar werden in de diagrammen verwerkt? Licht toe.

Bij het maken van de diagrammen is men vergeten een legenda toe te voegen. Omdat bekend is dat de verhuur terugloopt, is toch te achterhalen welke polygonen bij welk jaar horen.

b Welke polygonen horen bij de kamerverhuur van 2024? Licht toe.

c Gebruik de modale klasse en een schatting van de mediaan om te demonstreren dat het slecht gaat met de kamerverhuur in hotel Bergzicht.

Doordat bij het verwerken van de data een klassenindeling is gebruikt, is niet meer precies af te lezen wat de mediaan van het aantal verhuurde kamers elk jaar is. De eigenaar van het hotel denkt zich te herinneren dat de medianen 40 en 53 verhuurde kamers per dag waren.

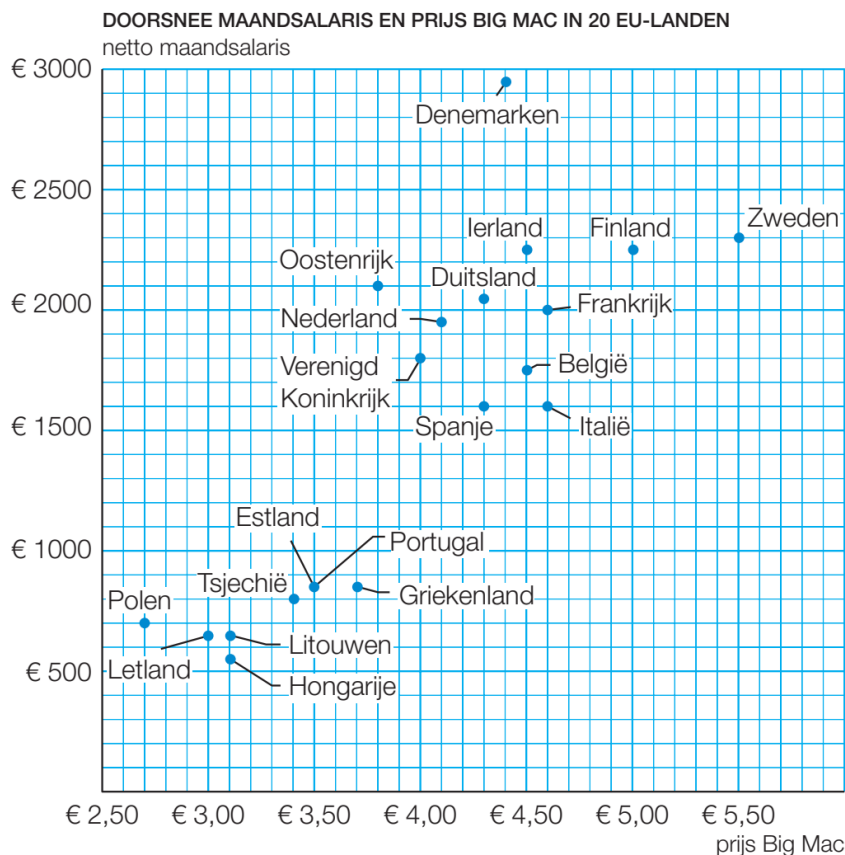
d Onderzoek met de figuren of dit zou kunnen kloppen.

e Onderzoek met behulp van de relatieve frequentiepolygonen tot welk aantal verhuurde kamers per dag de rode cumulatieve frequentiepolygoon steiler omhoog gaat dan de blauwe.

A7



Niet alle EU-landen zijn even welvarend. Omdat elk EU-land McDonalds restaurants heeft en al deze restaurants de zogenaamde Big Mac serveren, kun je deze hamburger gebruiken om het welvaartsniveau tussen verschillende EU-landen te vergelijken. In een onderzoek uit 2019 is dat gedaan. Zie het spreidingsdiagram.



In het diagram wordt een verband gelegd tussen het doorsnee netto maandsalaris en de prijs van een Big Mac in verschillende EU-landen.

- Hoe zie je in het diagram dat bij hogere Big Mac prijzen over het algemeen hogere doorsnee netto maandsalarissen horen?
- In de titel boven het diagram staat dat er 20 EU-landen zijn vergeleken, terwijl er maar 19 punten in het diagram staan. Leg uit waardoor dit komt.

Op de verticale as staat het doorsnee netto maandsalaris. Uit de formulering is niet duidelijk welke centrummaat hierbij is gebruikt.

- Welke centrummaat is hiervoor niet geschikt? Licht toe. Gebruik dat de verdeling van maandsalarissen rechts-scheef is.
- Is de variabele doorsnee netto maandsalaris kwalitatief of kwantitatief?
- Onderzoek in welk land je in 2019 de meeste Big Macs kon kopen voor het doorsnee netto maandsalaris in dat land.

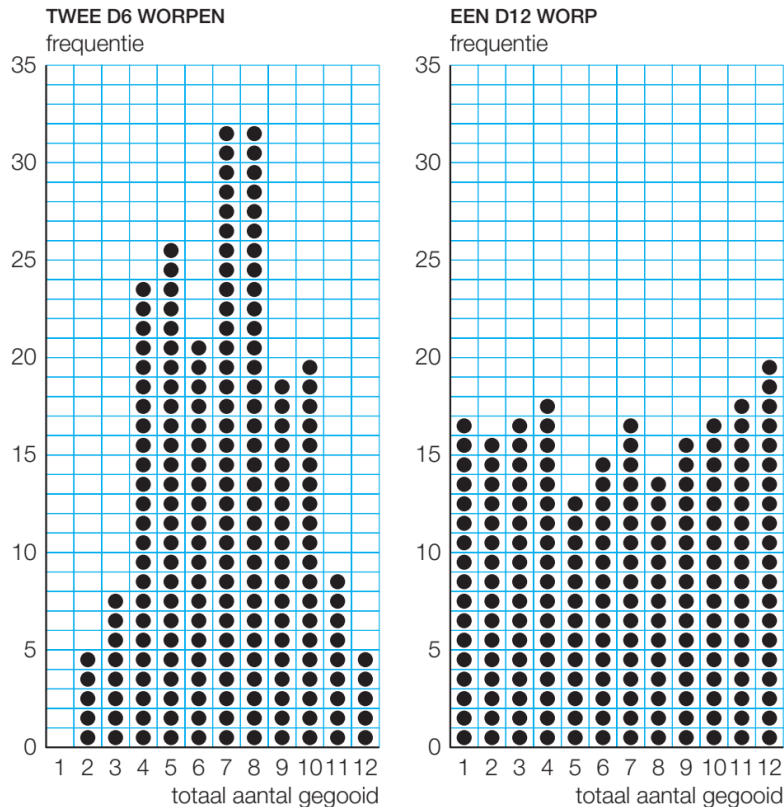
In sommige landen is de Big Mac in verhouding tot het doorsnee netto maandsalaris zo duur dat je er minder dan 250 keer een Big Mac van kunt kopen.

- Onderzoek in welke landen dit het geval is.

A8



Roel en Michiel spelen een spel waarbij je twee opties hebt voor je dobbelsteenworpen. Optie 1 is een worp met twee dobbelstenen met 6 vlakken (deze dobbelstenen worden ook wel D6 genoemd). Optie 2 is een worp met één dobbelsteen met 12 vlakken (zo'n dobbelsteen heet een D12). Ze voeren voor beide opties een experiment uit met 200 worpen. De resultaten zie je in de figuur.



a In welk type diagram staan de resultaten in de figuur gepresenteerd?

Bij het spel dat ze spelen is er een situatie waarin een speler in totaal minstens 10 moet gooien. Er is ook een situatie waarin een speler in totaal niet minder dan 4 mag gooien.

b Geef voor elke situatie aan welke optie (1 of 2) je zou aanraden.

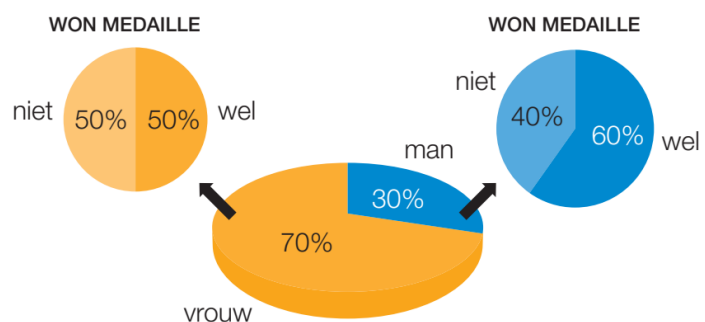
c Welke standaardverdeling hoort bij optie 1? En welke bij optie 2?

d Bij welke verdeling hoort de kleinste standaardafwijking? Licht toe.

E9



Bij een sportgala is een groot aantal sporters gevraagd of ze een olympische medaille hebben gewonnen. De resultaten staan in het diagram. Je ziet bijvoorbeeld dat van de ondervraagden op het gala 70% vrouw is. Onderzoek welk percentage van de medaillewinnaars vrouw is.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met verschillende (re)presentaties van data, waaronder dotplots en spreidingsdiagrammen.

► **OPGAVE C1**
THEORIE A

☐ Ik kan geschikte diagrammen kiezen voor het (re)presenteren van data.

► **OPGAVE C1f EN C2**
THEORIE A

C1 In het spreidingsdiagram en in de dotplots zijn de kwantitatieve variabelen lengte en gewicht van enkele sporters verwerkt.

a Wat was het gewicht van de langste sporter?

De oorspronkelijke data is afgerond.

b Voor welke afronding is gekozen?

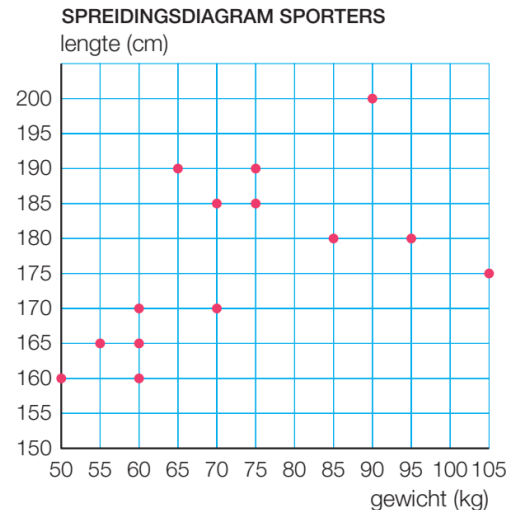
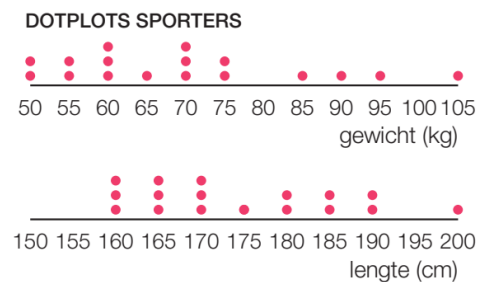
c Noem een nadeel van het afronden van de data.

d Van hoeveel sporters zijn de gegevens in de diagrammen verwerkt?

e Er zijn stippen in het spreidingsdiagram waar meerdere sporters bij horen.

Welke gewichten horen bij deze stippen?

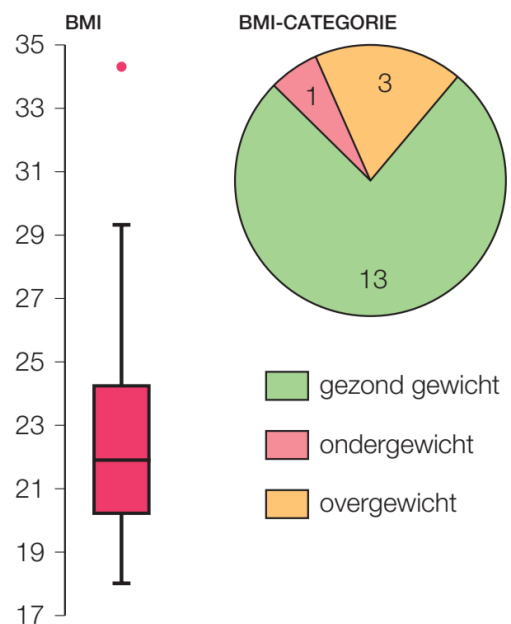
f Noem een voordeel van de presentatie in het spreidingsdiagram en een voordeel van de presentatie in de dotplots.



C2 In het cirkeldiagram en de boxplot zijn gegevens over de BMI van de sporters uit opgave C1 verwerkt.

a Welk van deze diagrammen zou je kiezen om de spreiding van de BMI's weer te geven?

b Waarom denk je dat er gekozen is voor BMI-categorieën in plaats van kwantitatieve data in het cirkeldiagram?



Antwoorden

C1 a 90 kg

b gewicht op 5 kg
lengte op 5 cm

c Hierbij is informatie verloren gegaan.

d 17 sporters

e 50, 55 en 70 kg

f *

C2 a de boxplot

b *

10.2 Causaliteit en groepen vergelijken

Kennis en vaardigheden

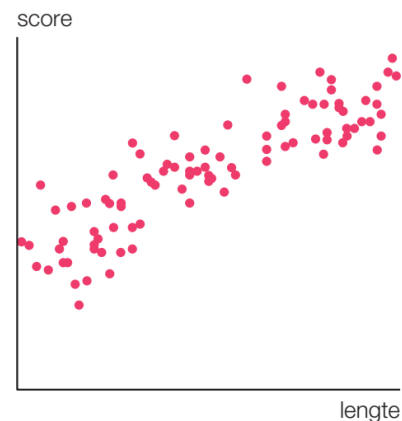
- Je kunt een samenhang tussen twee variabelen herkennen en beschrijven.
- Je kunt onderscheid maken tussen samenhang en causaliteit.
- Je kunt met behulp van het formuleblad de grootte van het verschil tussen twee groepen bepalen.

○10



Bij een onderzoek op het Russel College zijn van leerlingen gegevens over hun lengte en hun score op een algemene kennistoets verzameld. In de figuur is de score op de toets uitgezet tegen de lengte.

- Licht toe hoe je in de figuur kunt zien dat er een samenhang is tussen de lengte en de score.
- Is een grotere lengte een oorzaak van het hoger scoren op de algemene kennistoets? Licht toe.



Theorie A Samenhang en causaliteit

In opgave 10 is er sprake van een **samenhang** tussen de lengte van een scholier en de score op een algemene kennistoets, maar met gezond verstand kun je bedenken dat langer zijn niet de *oorzaak* is van hogere scores. Bovendien kun je de samenhang tussen de lengte en de score verklaren met het aantal jaren onderwijs: leerlingen met meer jaren onderwijs zijn over het algemeen langer en scoren over het algemeen hoger op een algemene kennistoets.

Als blijkt dat het aantal jaren onderwijs wel de oorzaak is van hoge scores, dan is er sprake van een **oorzakelijk verband** tussen het aantal jaren onderwijs en de score. In plaats van oorzakelijk verband spreken we ook wel van een **causaal verband** of **causaliteit**.

Om te weten te komen of een samenhang ook causaal is, moet worden onderzocht of aan de volgende twee voorwaarden is voldaan.

Voorwaarden voor een causaal verband bij een samenhang

- 1 De oorzaak moet voorafgaan aan het gevolg.
- 2 Er mogen geen andere variabelen zijn die de samenhang verklaren.

Tenzij anders vermeld, gaan we er in de opgaven van uit dat als er een oorzakelijk verband in de onderzochte groep bestaat, het ook in de populatie bestaat.

Of aan de eerste voorwaarde voor causaliteit is voldaan, is meestal makkelijk na te gaan. De leerlingen in het onderzoek hebben eerst een bepaald aantal jaren onderwijs genoten, waarna de algemene kennistoets is afgenomen. Niet andersom.

In het algemeen is het niet eenvoudig om na te gaan of aan de tweede voorwaarde voor causaliteit is voldaan.

In de praktijk komt het onderzoeken van causaliteit er vaak op neer dat variabelen die de samenhang kunnen verklaren één voor één worden uitgesloten. Hoe meer variabelen worden uitgesloten, hoe waarschijnlijker het wordt dat het inderdaad om een oorzakelijk verband gaat. Er hoeft daarentegen maar één variabele te zijn die de samenhang verklaart, om te zeggen dat er geen sprake is van een causaal verband. In opgave 11 zie je hoe dat gaat.

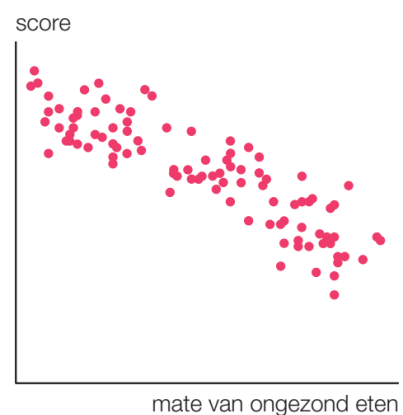
Je kunt soms alle variabelen die de samenhang kunnen verklaren in één keer uitsluiten met een handige onderzoeksofzet. Zie opgave 14. In de praktijk is dit vaak kostbaar.

11



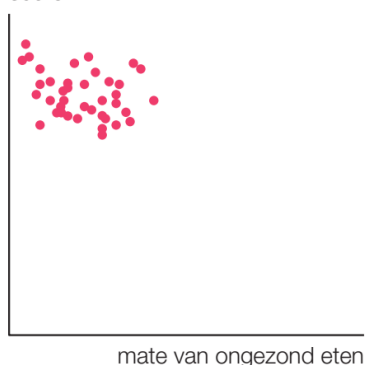
Van de onderzochte leerlingen op het Russel College is ook gekeken hoe ongezond ze aten in de aanloop naar het afnemen van de algemene kennistoets. Zie de figuur hiernaast.

- a Hoe zie je dat er een samenhang is tussen de mate van ongezond eten en de score?
- b Is aan de eerste voorwaarde voor een causaal verband voldaan?

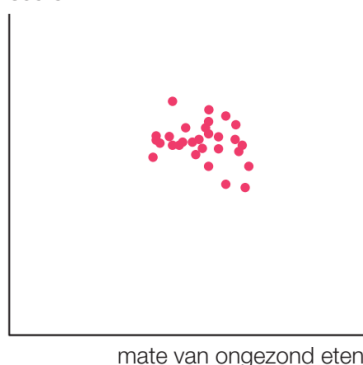


Tijdens het onderzoek is ook bepaald hoe gedisciplineerd leerlingen zijn. De onderzoekers vermoeden dat discipline een variabele kan zijn die zowel de mate van ongezond eten als de score verklaart. Ze splitsen de figuur in drie stukken op basis van de discipline van de onderzochte leerlingen. Zie de figuur hieronder.

DISCIPLINE: HOOG
score



DISCIPLINE: MATIG
score



DISCIPLINE: LAAG
score



- c Leg uit hoe je kunt zien dat er binnen elk van de drie categorieën van discipline vrijwel geen samenhang is tussen de mate van ongezond eten en de score.
- d Hoe zie je dat leerlingen met meer discipline minder ongezond eten en hoger scoren op de toets?
- e Licht toe dat er dus geen sprake is van een causaal verband tussen de mate van ongezond eten en de score.
- f Weet je nu zeker dat er sprake is van een causaal verband tussen discipline en de score?

12



In de volgende gevallen is er wel sprake van een samenhang maar zie je met gezond verstand meteen dat er geen sprake is van een causaal verband. Geef steeds een variabele die de samenhang kan verklaren.

- a Hoe meer ijsjes er in een week worden verkocht, hoe meer (bijna) verdrinkingsgevallen in die week.
- b Mensen die een muts dragen zijn vaker verkouden.
- c Hoe hoger het energieverbruik van gezinnen in een straat, hoe groter het aantal dure auto's in de straat.
- d Hoe meer brandweerlieden een brand bestrijden, hoe meer schade de brand aanricht.



13



Een gymleraar wil aantonen dat gewichtheffen een oorzaak is van grotere bovenarmen. Hij laat daarom de jongens tijdens de gymles gewichtheffen. De meisjes volgen het gewone gymlesprogramma. Na drie maanden stelt hij vast dat de jongens over het algemeen een grotere omvang van de bovenarmen hebben dan de meisjes.

- a Kun je op basis van de gekozen onderzoeksopzet concluderen dat gewichtheffen een oorzaak is van grotere bovenarmen? Licht toe.



Naar aanleiding van kritiek op zijn eerste onderzoeksopzet vraagt de gymleraar welke leerlingen uit zijn klassen willen gewichtheffen. Deze leerlingen gaan drie maanden gewichtheffen, de rest van de leerlingen volgt de gewone gymles. Van de leerlingen die meededen met gewichtheffen is de omvang van de bovenarmen meer toegenomen dan die van de rest van de leerlingen.

- b Kun je nu wel concluderen dat gewichtheffen een oorzaak is van grotere bovenarmen? Licht toe.

A14

Wiskundedocent mevrouw Vos volgt nauwgezet het boek in haar havo 5-klas bij wiskunde A. Naast het gewone huiswerk geeft ze elke les een aantal opgaven op uit de serie opgaven die vanaf bladzijde 242 achter in dit boek staan. Ze constateert dat de leerlingen die vaker deze opgaven maken, hogere cijfers halen op toetsen. Ze vraagt zich af of er een oorzakelijk verband is tussen het maken van deze opgaven en de cijfers op toetsen.

- a** Licht toe waarom inzet een variabele zou kunnen zijn die de samenhang verklaart tussen het maken van de genoemde opgaven en de cijfers op toetsen.

Wetenschappers in de VS hebben in 2019 onderzocht of het voortdurend afwisselen van onderwerp bij het maken van wiskundeopgaven betere resultaten oplevert bij toetsen.

Hiervoor werden 800 scholieren aselekt in twee groepen ingedeeld. Bij groep 1 gingen de opgaven per les over hetzelfde onderwerp. Bij groep 2 werden naast de opgaven over het behandelde onderwerp ook opgaven aangeboden over andere onderwerpen. Na vier maanden werd in beide groepen dezelfde onverwachte toets afgenomen. Het gemiddelde in groep 1 was een 4,4 en in groep 2 een 6,5.

De onderzoekers verwachten dat alle niveaus van inzet ongeveer gelijk verdeeld zijn over de groepen.

- b** Licht dit toe.
c Verwacht je dat inzet het verschil tussen de groepen verklaart? Licht toe.
d Licht toe dat het door de opzet van het onderzoek onwaarschijnlijk is dat een andere variabele het verschil tussen de cijfers van de groepen verklaart.
e Is aan de eerste voorwaarde voor een causaal verband bij een samenhang voldaan? Licht toe.
f Leg uit of je op basis van de beschreven onderzoeksopzet kunt zeggen dat het maken van opgaven over afwisselende onderwerpen een oorzaak is van het halen van hoge cijfers voor wiskunde.

Bij aselekt indelen worden leerlingen door toeval ingedeeld in een groep.

O15

Je kent vier manieren voor het bepalen van de grootte van het verschil tussen twee groepen. Deze staan ook op het formuleblad op bladzijde 254.

In België hebben verhoudingsgewijs meer huishoudens een hond dan in Nederland. Jarno wil de grootte van dit verschil bepalen. Hij heeft beschikking over de gegevens in de tabel. Je ziet dat in de steekproef van 595 Belgische huishoudens er 144 een hond hebben.

Kan Jarno de effectgrootte gebruiken? En de *phi*-coëfficiënt? Licht toe.

	hond		
	wel	niet	
België	144	451	595
Nederland	133	568	701
	277	1019	

Theorie B Groepen vergelijken

Op het formuleblad bij het centraal examen staan de vuistregels waarmee je de grootte van het verschil tussen twee groepen kunt bepalen (zie bladzijde 254). Welke je gebruikt, hangt af van de beschikbare gegevens.

	Welke gegevens heb je nodig van de twee groepen?	Tips & aandachtspunten
<i>phi</i>-coëfficiënt	De frequenties bij een variabele met twee categorieën.	<ul style="list-style-type: none"> • De enige associatiemaat mogelijk bij een nominale variabele. • Gebruik of maak een kruistabel. • Gebruik voor a, b, c en d van het formuleblad de absolute aantallen die het kenmerk <i>wel</i> en <i>niet</i> hebben (en dus niet een totaal of een percentage).
$\max V_{cp}$	De (relatieve) (cumulatieve) frequenties bij een klassen-indeling of bij een ordinale variabele.	<ul style="list-style-type: none"> • Soms is het mogelijk de $\max V_{cp}$ direct af te lezen in een diagram. • Zo niet, dan kun je een tabel maken om de $\max V_{cp}$ te vinden. • Gebruik de $\max V_{cp}$ niet als je maar twee categorieën of klassen hebt.
effectgrootte	De steekproefgemiddelden ($\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$) en de steekproefstandaard-afwijkingen (S_1 en S_2).	<ul style="list-style-type: none"> • Zorg dat je in de formule de <u>grootste</u> $\bar{X}$ min de kleinste $\bar{X}$ doet.
boxplots vergelijken	Q_1 , de mediaan en Q_3 of (een schets van) de boxplots	<ul style="list-style-type: none"> • Let op dat de box niet hetzelfde is als de boxplot. • Soms kun je de cumulatieve percentages 25%, 50% en 75% gebruiken, wat overeenkomt met respectievelijk Q_1, de mediaan en Q_3.

Voorbeeld

Aan havo 5-leerlingen van de scholen A en B is gevraagd of ze vinden dat Spaans in plaats van Duits gegeven zou moeten worden. Zie de tabel.

	school	
	A	B
helemaal niet mee eens	57	23
niet mee eens	28	41
mee eens	27	37
helemaal mee eens	16	21

- Wat is het meetniveau van de mening over Spaans als vak in plaats van Duits? Licht toe.
- Tom wil het verschil in mening over Spaans als vak in plaats van Duits tussen school A en school B berekenen met behulp van de effectgrootte.
Leg uit waarom dat niet kan.
- Onderzoek met behulp van het formuleblad of de grootte van het verschil in mening groot, middelmatig of gering is.

Uitwerking

- Ordinaal, want de waarden zijn geen hoeveelheden en hebben een logische volgorde.
- De effectgrootte kan alleen bij een kwantitatieve variabele berekend worden, dus niet bij een ordinale variabele.
- Ordinale variabele met meer dan twee categorieën, dus $\max V_{cp}$.

	school A		school B		V_{cp}
	cum. freq.	cum. perc.	cum. freq.	cum. perc.	
helemaal niet mee eens	57	44,5%	23	18,9%	25,6% ← max V_{cp}
niet mee eens	85	66,4%	64	52,5%	13,9%
mee eens	112	87,5%	101	82,8%	4,7%
helemaal mee eens	128	100%	122	100%	0%

De $\max V_{cp}$ is 25,6.

Omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$ is het verschil middelmatig.

R16 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

☐◎* Bij de variabele ‘mening over Spaans in plaats van Duits als vak’ is het ook mogelijk om de *phi*-coëfficiënt te berekenen. Daarvoor moeten de gegevens wel eerst bewerkt worden. Kies hiervoor de categorieën negatief en positief. Voor de categorie negatief tel je ‘helemaal niet mee eens’ en ‘niet mee eens’ bij elkaar op. Voor de categorie positief doe je hetzelfde met ‘helemaal mee eens’ en ‘mee eens’.

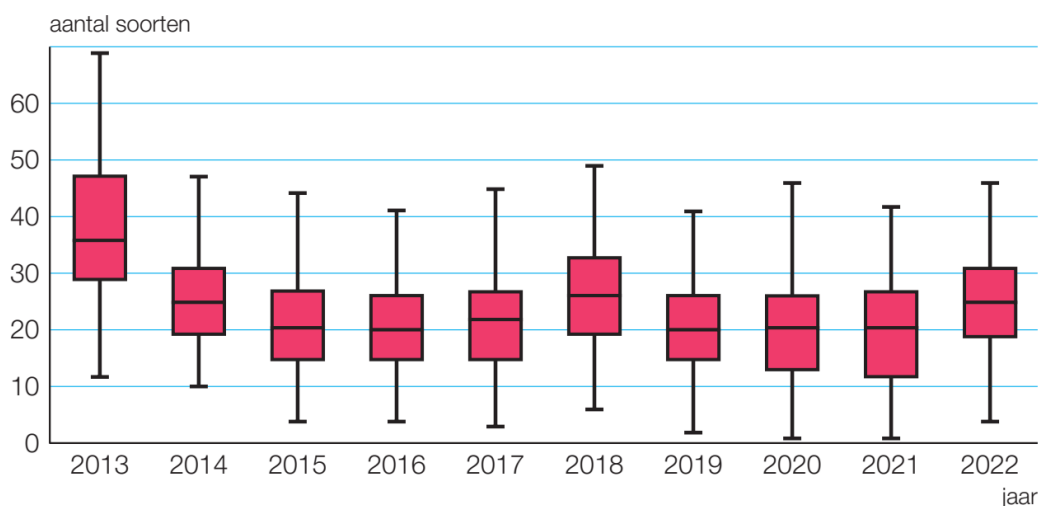
	school	
	A	B
negatief	85	
positief		

- Vul de tabel verder in.
- Onderzoek met behulp van de *phi*-coëfficiënt of de grootte van het verschil in mening groot, middelmatig of gering is.
- Je hebt bij vraag b een andere conclusie getrokken dan in het voorbeeld. Welke conclusie is het beste te verdedigen? Licht toe.

17 Biologen hebben in Duitsland op een aantal locaties het aantal soorten insecten onderzocht in de periode 2013 tot en met 2022. Zie de figuur hieronder.

☐◎*

- Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in het aantal soorten insecten tussen 2013 en 2022 groot, middelmatig of gering is.
- Geef twee jaren waartussen het verschil groot is.
- Lisa beweert dat als je 2013 buiten beschouwing laat, de verschillen tussen alle jaren gering zijn. Ga na of ze gelijk heeft.



18



Hardlopers kunnen gebruikmaken van een exoskelet. Dat is een omhulling met kleine motortjes, die moet zorgen dat het lichaam minder energie nodig heeft om voort te bewegen. Onderzoekers lieten deelnemers met en zonder exoskelet op een lopende band 9 km/uur hardlopen. Hierbij werd gemeten hoeveel energie verbruikt werd.



Omdat het gewicht van deelnemers geen rol mocht spelen is de verbruikte energie uitgedrukt in watt per kilogram. Zie de tabel hieronder.

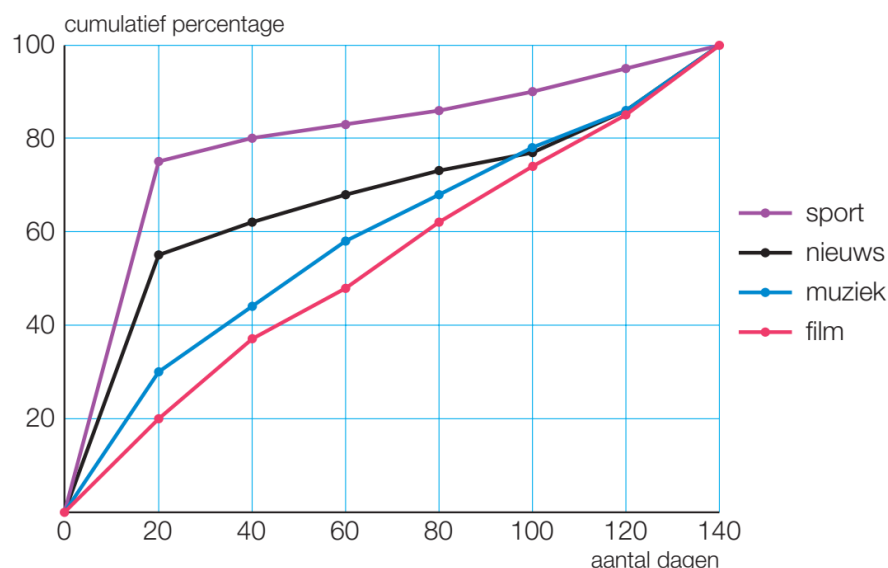
	met exoskelet	zonder exoskelet
gemiddeld energieverbruik in watt per kg	8,70	9,57
standaardafwijking in watt per kg	0,83	0,79

Bereken met behulp van het formuleblad of het verschil in energieverbruik met en zonder exoskelet groot, middelmatig of gering is.

19



Hoe snel een filmpje op YouTube aan populariteit verliest, hangt af van het onderwerp. Onderzoekers hebben het verloop van het aantal kijkers onderzocht voor 50 000 YouTube-video's over een periode van 140 dagen. De video's zijn ingedeeld in vier categorieën. In de figuur hieronder staan relatieve cumulatieve frequentiepolygonen van deze gegevens. De eerste klasse is $[0, 20)$.



- Verklaar het opvallende verschil in het verloop van het aantal kijkers tussen video's over sport en over film.
- Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil tussen muziekvideo's en elk van de andere categorieën groot, middelmatig of gering is.

20



Er wordt vaak gedacht dat oorlog voeren een bezigheid is van mannen. Onderzoekers hebben deze aanname onderzocht door na te gaan of koningen relatief vaker oorlog voerden dan koninginnen. Daartoe bekeken ze in de periode 1480-1913 in verschillende koninkrijken per jaar wie er aan de macht was en of er oorlog werd gevoerd. In totaal werden er 3586 van zulke jaren bekeken. Hiervan was 596 jaar een koningin aan de macht. Verder werd in 889 jaren oorlog gevoerd, waarvan in 154 jaren een koningin aan de macht was.

a Vul de tabel in.

	oorlogsjaren	vredesjaren
koningen		
koninginnen		

- b Hoeveel procent van de oorlogsjaren werden onder een koning uitgevochten?
- c Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil groot, middelmatig of gering is.



Elizabeth I, koningin van Engeland en Ierland van 17-11-1558 tot 24-03-1603

A21



Werkt geweld om je doelen te bereiken als protestgroep? Om die vraag te beantwoorden werden 324 protestgroepen onderzocht die actief waren tussen 1900 en 2006. Zie de tabel hieronder. In totaal waren 108 protestgroepen geweldloos.

	geweldloos	gewelddadig
mislukking	21%	62%
gedeeltelijk succes	25%	13%
succes	54%	25%



Martin Luther King Jr. was een invloedrijke burgerrechtenactivist die opkwam voor de rechten van de zwarte bevolking in de VS door middel van geweldloos verzet.

- a Licht toe dat er 58 protestgroepen zowel geweldloos als succesvol waren.
- b Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil tussen geweldloze en gewelddadige protestgroepen groot, middelmatig of gering is.
- c Bewerk de gegevens in de tabel zodat er twee categorieën zijn. Voeg daartoe 'gedeeltelijk succes' en 'succes' samen tot één categorie. Onderzoek vervolgens met behulp van het formuleblad of het verschil tussen geweldloze en gewelddadige protestgroepen groot, middelmatig of gering is.

A22 Om de mate van geluk tussen landen te vergelijken wordt



gebruikgemaakt van vragenlijsten. Hierop geven inwoners van een land met een geheel rapportcijfer aan hoe gelukkig ze zijn. In de tabel zijn de cumulatieve percentages gegeven van de scores van duizend inwoners van China en duizend inwoners van de VS in 2019.

geluk	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
China	0%	1%	2%	5%	17%	40%	65%	89%	98%	100%
VS	2%	2%	4%	8%	22%	34%	55%	80%	91%	100%

- a** Pascal denkt dat in China 11% van de mensen hun geluk een 8 of hoger geeft. Volgens Daniek moet dat 35% zijn. Wie heeft er gelijk? Licht toe.
- b** Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in geluk tussen China en de VS groot, middelmatig of gering is.

Als mensen hun geluk een 5 of lager geven, noemen we dat ‘ongelukkig’. Bij een 6 of hoger, noemen we dat ‘gelukkig’.

- c** Vul de kruistabel in en onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in geluk groot, middelmatig of gering is.



	ongelukkig	gelukkig	
China			
VS			
			2000

R23 In de tabel hiernaast zie je welke soort



wiskunde is gekozen door jongens en meisjes op het Spinoza College. Amar berekent de *phi*-coëfficiënt en komt tot de conclusie dat er geen verschil is tussen jongens en meisjes wat betreft de keuze voor wiskunde A of B.

- a** Hoe komt hij tot deze conclusie?
- b** Bereken het percentage leerlingen dat wiskunde A kiest voor zowel de jongens als de meisjes. Komt dit overeen met de conclusie van Amar?

Het verschil tussen de groepen zou maximaal zijn als alle jongens wiskunde A hadden gekozen en alle meisjes wiskunde B. Of andersom.

- c** Bereken in beide gevallen de *phi*-coëfficiënt. Welke conclusie trek je over de minimale en maximale waarde van de *phi*-coëfficiënt?

	jongens	meisjes
wiskunde A	20	24
wiskunde B	30	36



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan een samenhang tussen twee variabelen herkennen en beschrijven.
- ☐ Ik kan onderscheid maken tussen samenhang en causaliteit.
- ☐ Ik kan met behulp van het formuleblad de grootte van het verschil tussen twee groepen bepalen.

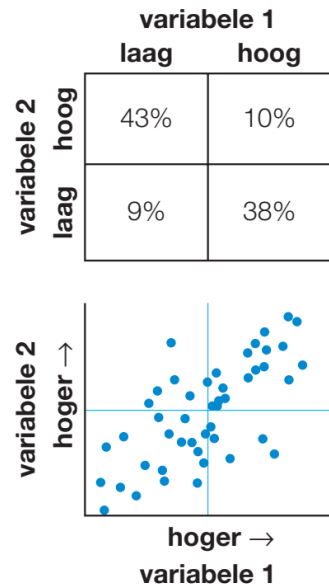
► **OPGAVE C3**
EN C4ab
THEORIE A

► **OPGAVE C4**
THEORIE A

► **OPGAVE C5**
THEORIE B

C3 Zie de kruistabel en de puntenwolk hiernaast.
Geef bij de volgende situaties aan of de bijbehorende samenhang het beste past bij de tabel of bij de puntenwolk.
Licht je antwoorden toe.

- Aantal vragen goed bij een woordjesoverhoring (variabele 1) en hoeveelheid tijd besteed aan het leren van de woordjes (variabele 2).
- Aantal verkochte loempia's (variabele 1) en prijs per loempia (variabele 2).
- Aantal verkochte ijsjes (variabele 1) en gemiddelde dagtemperatuur (variabele 2).



C4 Het is bekend dat mensen die veel hebben gegamed over het algemeen een lagere reactietijd hebben.

- Is er sprake van een samenhang?
- Teken een mogelijke puntenwolk bij deze situatie.
- Kun je concluderen dat vaker gamen een oorzaak is voor het hebben van een lagere reactietijd? Licht toe.

C5 Het computerspel Halo Infinite kan met toetsenbord en muis (T&M) gespeeld worden, of met een gamecontroller (GC). Voor een onderzoek zijn de nauwkeurigheidsscores van een groep spelers met een gamecontroller vergeleken met een groep spelers met toetsenbord en muis. Zie de tabel.

- Welke methode van het formuleblad kun je gebruiken om de grootte van het verschil tussen deze twee groepen te bepalen?
- Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil groot, middelmatig of gering is.

NAUWKEURIGHEIDSSCORES		
		GC T&M
cumulatieve percentages	gem. score	56 47
	25%	51 45
	50%	55 47
	75%	59 52

Antwoorden

C3 **a** puntenwolk, *
b kruistabel, *
c puntenwolk, *

C4 **a** ja
b *
c nee, *

C5 **a** boxplots vergelijken
b middelmatig verschil

10.3 Statistiek toepassen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt kennis van statistiek toepassen binnen de context van een onderzoek.
- Je kunt kennis van statistiek toepassen om een onderzoeksopzet kritisch te beoordelen.

Voorkennis Steekproeven en de normale verdeling

Bij onderzoek wordt meestal slechts een deel van de populatie onderzocht: de steekproef. Het aantal elementen in de populatie noemen we de populatieomvang. Het aantal elementen in de steekproef noemen we de steekproefomvang.

De populatieproportie p van een kenmerk in de populatie is

$$p = \frac{\text{aantal met het kenmerk in de populatie}}{\text{populatieomvang}}.$$

De steekproefproportie $\hat{p}$ van een kenmerk in de steekproef is

$$\hat{p} = \frac{\text{aantal met het kenmerk in de steekproef}}{\text{steekproefomvang}}.$$

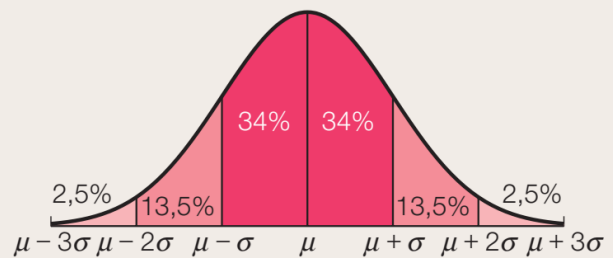
Met het resultaat van de steekproef wil een onderzoeker iets zeggen over de populatie. Daarvoor is het belangrijk dat de steekproef aselekt en voldoende groot is. Zo ontstaat uit een (bij benadering) normaal verdeelde steekproevenverdeling een steekproefresultaat dat meestal representatief is voor de populatie. Dat wil zeggen dat de steekproefproportie of het steekproefgemiddelde niet veel verschilt van de populatieproportie of het populatiegemiddelde.

Een steekproef is aselekt als elk element uit de populatie een even grote kans heeft om in de steekproef voor te komen.

Bij een normale verdeling kun je nagaan hoe waarschijnlijk uitkomsten zijn als je het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ kent. Bij een normale verdeling horen de volgende vuistregels:

- ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$
- bijna 100% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.

De normale verdeling is symmetrisch. Combineer je dit gegeven met de zojuist genoemde vuistregels, dan volgen de percentages in de figuur hiernaast.



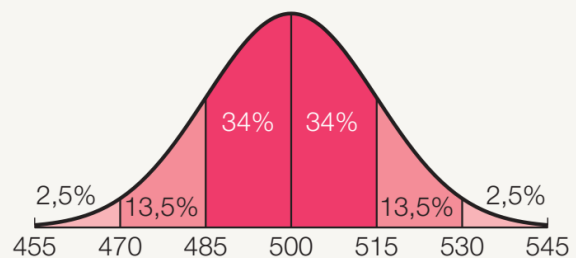
Voorbeeld

Het gewicht van een groep van 8000 producten is normaal verdeeld met gemiddelde 500 gram en standaardafwijking 15 gram.

- Hoeveel producten wegen meer dan 530 gram?
- Wat weet je van de gewichten van de middelste 95% van deze groep producten?
- De populatieproportie defecte producten is 0,002. Hoeveel producten zijn defect?

Uitwerking

- Zie de schets.
Bij 2,5% van de producten, dus
bij $0,025 \cdot 8000 = 200$ producten.
- Die wegen tussen de 470 en 530 gram.
- Er zijn $0,002 \cdot 8000 = 16$ producten defect.



V4 Van een partij van 3940 producten is niet bekend of het gewicht van de producten normaal verdeeld is. Wel is bepaald dat het gemiddelde 400 gram is en de standaardafwijking 15 gram. Het blijkt dat 97 van deze producten lichter dan 370 gram zijn. Dit is ongeveer gelijk aan wat je op basis van een normale verdeling zou verwachten. Toon dat aan.

V5 Onderzoekers willen weten welk deel van de patiënten in een ziekenhuis een levensbedreigende ziekte heeft. In een steekproef van 80 kinderen op de kinderafdeling blijken er zes een levensbedreigende ziekte te hebben.

- Bereken de steekproefproportie.
- Is de steekproef aselekt? Licht toe.
- Het blijkt dat 50 patiënten in het ziekenhuis een levensbedreigende ziekte hebben. Hiermee komt de populatieproportie op 0,05. Bereken het aantal patiënten in het ziekenhuis.

V6 Van een bepaald type zandloper is bekend dat in 95% van de gevallen de doorlooptijd tussen 54 en 66 minuten ligt. Bij de doorlooptijd hoort een normale verdeling met gemiddelde μ en standaardafwijking σ .

- a Bereken de waarden van μ en σ .
- b Bij Omar loopt de zandloper na 66 minuten nog.
In welk percentage van de gevallen komt dit voor?

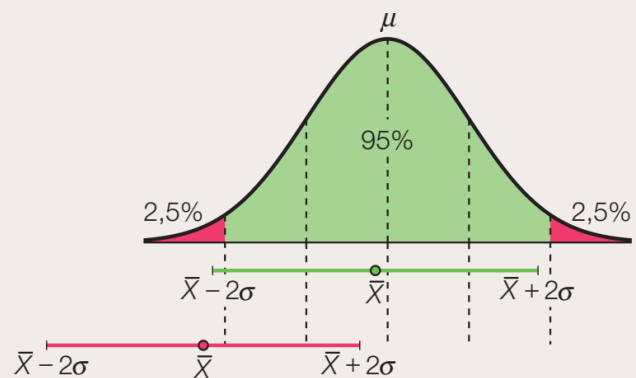


Voor een kwaliteitsonderzoek wordt aselect een aantal zandlopers onderzocht op defecten. Van deze zandlopers blijken er vijf defect. Dat is 1,2% van de steekproef.

- c Geef de steekproefproportie en bereken de steekproefomvang.

Voorkennis Betrouwbaarheidsintervallen

Wil je op basis van een steekproef iets zeggen over het populatiegemiddelde μ , dan bereken je het steekproefgemiddelde $\bar{X}$. Rondom $\bar{X}$ kun je een 95%-betrouwbaarheidsinterval opstellen dat met 95% zekerheid μ bevat, want bij 95% van de steekproeven krijg je een interval zoals het groene interval hiernaast.

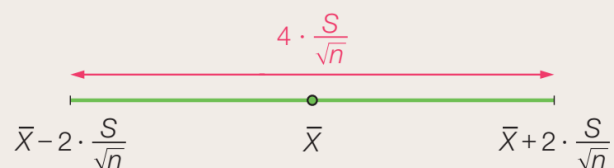


Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, met $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, n de steekproefomvang en S de steekproefstandaardafwijking.

De breedte van dit interval is $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.

Je kunt ook gebruiken:

$$[\bar{X} - 2\sigma, \bar{X} + 2\sigma] \text{ met } \sigma = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

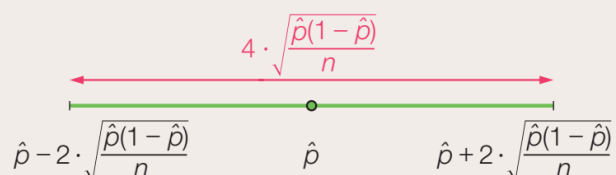


Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is $\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, met $\hat{p}$ de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

De breedte van dit interval is $4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

Je kunt ook gebruiken:

$$[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma] \text{ met } \sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$



Voorbeeld

Uit onderzoek van het RIVM in 2023 blijkt dat slechts 45% van de 16,9 miljoen Nederlanders ouder dan 4 jaar aan de bewegingsrichtlijnen voldoet. Neem aan dat voor dit onderzoek een aselechte steekproef van 5000 respondenten werd genomen.

- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aantal Nederlanders ouder dan 4 jaar dat aan de richtlijnen voldoet. Geef het betrouwbaarheidsinterval in miljoenen en rond af op één decimaal.
- b Het RIVM wil voor het volgende onderzoek dat de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval maximaal 0,02 is. Bereken welke steekproefomvang hierbij hoort. Ga uit van $\hat{p} = 0,5$.

Aanpak

- a Bereken eerst de grenzen van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.
- b Gebruik de formule voor de breedte met $\hat{p} = 0,5$ en breedte = 0,02 en los de vergelijking op die je zo krijgt.

Uitwerking

a $\hat{p} = 0,45$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,45(1 - 0,45)}{5000}} = 0,007\dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,45 - 2 \cdot 0,007\dots = 0,435\dots \text{ en } 0,435\dots \cdot 16,9 \approx 7,4$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,45 + 2 \cdot 0,007\dots = 0,464\dots \text{ en } 0,464\dots \cdot 16,9 \approx 7,8$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aantal Nederlanders ouder dan 4 jaar dat aan de richtlijnen voldoet is $[7,4; 7,8]$ miljoen (of $7,6 \pm 0,2$ miljoen).

b Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,5(1 - 0,5)}{n}} = 0,02$.

De optie oplossen bij $4 \cdot \sqrt{\frac{0,5(1 - 0,5)}{x}} = 0,02$ geeft $x = 10\,000$.

De steekproefomvang moet dus minstens 10 000 zijn.

V7 Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor

- a het populatiegemiddelde bij $\bar{X} = 120$, $S = 36$ en $n = 144$
- b het populatiegemiddelde bij $\bar{X} = 18$ en $\frac{S}{\sqrt{n}} = 0,32$
- c de populatieproportie bij $\hat{p} = 0,48$ en $n = 380$
- d het populatiepercentage bij $\hat{p} = \frac{5}{9}$ en $n = 10\,000$.

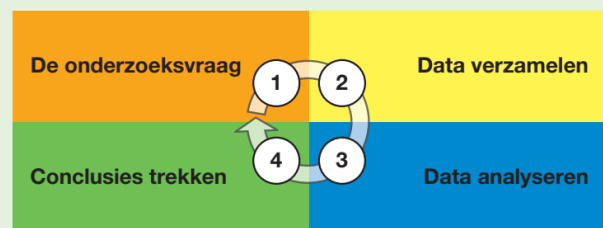
Rond in een betrouwbaarheidsinterval proporties af of drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

- V8** Bereken welke steekproefomvang minimaal nodig is voor een 95%-betrouwbaarheidsinterval met
- a $\hat{p} = 0,3$ en een maximale breedte van van 0,04
 - b $S = 4$ en een maximale breedte van 0,8.

- V9** Bij een steekproef van 150 middelbare scholieren bleek dat 60% van de scholieren het afgelopen schooljaar meer dan 120 minuten per week aan wiskundehuiswerk besteedt. Verder bleek voor het aantal minuten wiskundehuiswerk per week te gelden dat $\bar{X} = 150$ en $S = 40$.
- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddeld aantal minuten wiskundehuiswerk per week. Rond zo nodig af op één decimaal.
 - b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie leerlingen die meer dan 120 minuten per week aan wiskundehuiswerk besteedt.

Theorie A Statistiek bij onderzoek

De rest van het hoofdstuk bestaat uit een serie opgaven waarbij je alle behandelde statistische technieken door elkaar gebruikt, vaak in de context van een onderzoek. Je leert kritisch kijken naar de onderzoeksopzet en oefent met het herkennen van welke technieken wanneer nodig zijn.



- 24** Volgens kwaliteitseisen moet een bepaald type olijven in 95% van de gevallen een diameter tussen 17 en 19 mm hebben. Van een partij olijven is de diameter normaal verdeeld met een gemiddelde van 18 mm.

- a Wat is op basis van deze informatie de maximale standaardafwijking waarmee deze partij olijven aan de eis voldoet?
- b Een onderzoeker wil nagaan of grotere olijven over het algemeen sneller bederven.

Welk type diagram is hiervoor geschikt en welke informatie is nodig om dit diagram te maken?



25



Er wordt vaak beweerd dat 97% van de klimaatwetenschappers denkt dat opwarming van de aarde door de mens wordt veroorzaakt. Een van de bronnen voor dit percentage is een steekproef van 79 klimaatwetenschappers, waarvan 77 de mens als oorzaak voor de opwarming zien.

a Benoem wat in deze peiling de populatie en wat de steekproef is.

Voor een andere studie zijn geen wetenschappers ondervraagd, maar zijn de samenvattingen gelezen van alle 12 000 wetenschappelijke artikelen over klimaatverandering uit de periode 1991-2011.

Van deze artikelen gaf twee derde geen mening over de bewering dat de mens bijdraagt aan klimaatverandering. Uit de overige artikelen bleek wel een mening en hiervan stelde 97,1% dat de mens bijdraagt aan klimaatverandering.

b Bram ziet 0,971 als een populatieproportie.

Wat is volgens Bram de populatie?

c Sabine ziet 0,971 als een steekproefproportie bij een steekproef uit de populatie van alle 12 000 artikelen.

Leg uit of deze steekproef aselekt is.



26



Hiernaast zie je een tabel met de lengte van mannelijke deelnemers aan een sportevenement. In de tabel staan percentielen. Het percentiel 48,0 bij de klasse 1,72-1,82 betekent dat 48,0% van de mannen een lengte heeft van maximaal 1,82 meter.

Met de percentielen uit de tabel en het gegeven dat er 190 mannelijke deelnemers langer dan 2,02 m waren, kun je berekenen hoeveel mannen deelnamen aan het evenement.

a Bereken dit aantal en rond af op honderdtallen.

De lengtes zijn bij benadering normaal verdeeld. De aantallen wijken iets af ten opzichte van wat je zou verwachten op basis van een normale verdeling met een gemiddelde van 1,82 meter en een standaardafwijking van 10 cm.

b Laat zien dat de percentielen in de tabel weinig verschillen van de vuistregels bij de normale verdeling.

LENGTE MANNEN

lengte in m	percentiel
<1,52	0,1
1,52-1,62	2,0
1,62-1,72	14,7
1,72-1,82	48,0
1,82-1,92	83,2
1,92-2,02	97,0
2,02-2,12	99,9
>2,12	100

27



In een land zijn er voor elke autobezitter twee mensen zonder auto. In een steekproef blijken 18 van de 80 ondervraagden een auto te hebben. De populatieproportie valt buiten het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

a Toon dit met een berekening aan.

b Lieke beweert dat hieruit volgt dat de steekproef niet aselekt was.

Leg uit waarom je het wel of niet eens bent met Lieke.

28

Noem bij elk van de onderstaande onderzoeken de populatie. Als er sprake is van een aselechte steekproef uit de populatie, bereken dan het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie. Als er geen sprake is van een aselechte steekproef uit de populatie, licht dan toe waarom dat niet zo is.

- a In 2012 waren er onaangekondigde controles bij een aselechte steekproef van 119 piercing- en tatoeageshops uit een lijst van alle dergelijke shops in Nederland. Hiervan bleken er 36 niet aan alle eisen te voldoen.
- b Voor een onderzoek naar hacken onder Nederlandse jongeren wordt aselekt een steekproef van 1044 jongeren genomen uit een panel van 33 000 mensen. Deze panelleden hebben zich aangemeld om aan onderzoeken deel te nemen. Van de jongeren in de steekproef zegt 14,2% wel eens een mobiele telefoon gehackt te hebben.
- c Voor een onderzoek naar de beeldvorming van een zanger op een social media platform heeft een onderzoeker toegang tot alle data van dat platform. Hierin staan 5000 berichten over de zanger, waarvan er 1800 negatief blijken te zijn.

29

In de onderstaande gevallen is er geen sprake van een aselechte steekproef.

- a In een winkelstraat worden voorbijgangers gevraagd om mee te werken aan een onderzoek naar de spierkracht van Nederlanders. Hierbij moeten ze een gewicht zo lang mogelijk met gestrekte arm omhoog houden. Slechts 1 op de 25 voorbijgangers wil meedoen. Verwacht je dat de gemiddelde tijdsduur in de steekproef lager of hoger is dan in de populatie? Licht toe.
- b In 2018 onderzocht de Nederlandse Voedsel- en Warenautoriteit (NVWA) 93 boerenbedrijven die werden verdacht van fraude bij de registratie van dieren. Hiervan bleken 45 inderdaad fraude te hebben gepleegd. Verwacht je dat de steekproefproportie lager of hoger is dan de populatieproportie van alle boerenbedrijven? Licht toe.

R30

Een onderzoeker wil weten wat de proportie linkshandige Nederlanders is.

Hij gaat ervan uit dat de Nederlandse bevolking uit 18 miljoen mensen bestaat.

- a Bereken hoeveel mensen hij moet opnemen in zijn steekproef voor een 95%-betrouwbaarheidsinterval met een maximale breedte van 0,02. Gebruik $\hat{p} = 0,15$.

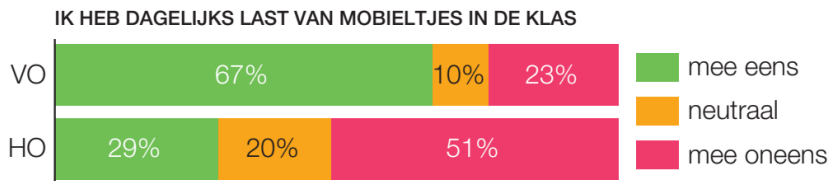
De onderzoeker vraagt zich af of de proportie linkshandigen in de wereld hetzelfde is als in Nederland. Hij wil weer een 95%-betrouwbaarheidsinterval met een maximale breedte van 0,02 opstellen. Hij gaat ervan uit dat de wereldbevolking uit 8,2 miljard mensen bestaat en dat de steekproefproportie weer 0,15 is.

- b Onderzoek of het aantal mensen in de steekproef minder, meer of gelijk moet zijn aan het aantal bij vraag a.
- c Er worden nooit aselechte steekproeven genomen van de wereldbevolking. Leg uit waarom dat praktisch gezien moeilijk is.

31



Sinds 1 januari 2024 is het gebruik van mobiele telefoons niet meer toegestaan op middelbare scholen. Voorafgaand aan dit besluit is veel onderzoek gedaan naar effecten van mobieltjes in de klas. De resultaten van een van deze onderzoeken staan in het staafdiagram.



Het staafdiagram is gemaakt op basis van een steekproef van honderden docenten uit het VO (voortgezet onderwijs) en 37 docenten uit het HO (hoger onderwijs).

Deze opgave gaat over de 95%-betrouwbaarheidsintervallen voor het percentage docenten dat dagelijks last heeft van mobieltjes in de klas.

Er is een groot verschil in steekproefomvang tussen het VO en HO.

- Wat is het effect hiervan op de 95%-betrouwbaarheidsintervallen?
- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor docenten in het HO.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor docenten in het VO is [62,8%; 71,2%].

- Bereken de steekproefomvang bij het VO afgerond op honderdtallen.

32



Nederlanders eten te veel suiker. Met suiker bedoelen we alle suikers die niet van nature aanwezig zijn in fruit, groente en zuivel. Om aandacht te vragen voor de overmatige suikerconsumptie is de zogenaamde suikermaxdag bedacht. Suikermaxdag is de dag waarop gemiddeld genomen de aanbevolen maximum hoeveelheid suiker voor een heel jaar geconsumeerd is. In deze opgave beperken we ons tot Nederlandse kinderen van 14-18 jaar. De richtlijn van de Wereldgezondheidsorganisatie voor deze kinderen is een maximum van 55 gram suiker per dag. Uit een steekproef in 2024 van 500 Nederlandse kinderen in de leeftijd 14-18 jaar blijkt het volgende over de dagelijkse suikerconsumptie: $\bar{X} = 89$ gram en $S = 35$ gram. Op basis hiervan is berekend dat suikermaxdag 14 augustus 2024 was (dag 227).

- Toon dit aan met een berekening. Gebruik dat 2024 in totaal 366 dagen telt.

De datum van suikermaxdag is afhankelijk van het steekproefresultaat en hoeft voor de populatie dus niet precies op 14 augustus 2024 te vallen.

- Leg uit waarom dat zo is.
- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de datum van suikermaxdag in 2024. Geef je antwoord in de intervalnotatie.

dag	datum
229	16-8-2024
228	15-8-2024
227	14-8-2024
226	13-8-2024
225	12-8-2024
224	11-8-2024
223	10-8-2024
222	9-8-2024
221	8-8-2024
220	7-8-2024
219	6-8-2024
218	5-8-2024
217	4-8-2024
216	3-8-2024
215	2-8-2024
214	1-8-2024

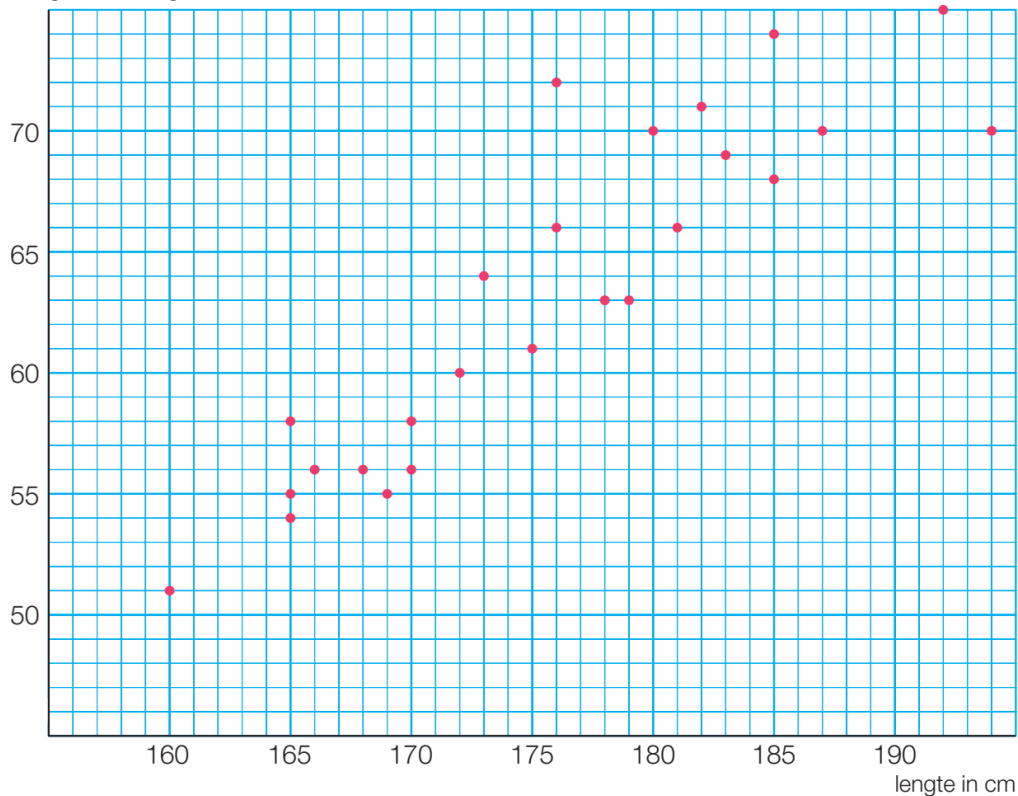
suikermax



Bij een onderzoek is van 25 jongens het gewicht en de lengte gemeten. De resultaten staan in het spreidingsdiagram.

GEWICHT EN LENGTE 25 JONGENS

gewicht in kg



- Kun je op basis van het diagram van zowel de lengte als het gewicht de modus bepalen? Licht toe.
- Heeft de jongen met de mediane lengte ook het mediane gewicht? Licht toe.
- De onderzoeker maakt op basis van de lengte vijf even grote groepen, oplopend van de 20% kortste jongens tot en met de 20% langste jongens.
Bij welke van deze groepen is de spreidingsbreedte van de lengte het grootst?
- Hoeveel procent van de jongens hoort zowel bij de langste 12% als bij de zwaarste 12% van de onderzoeksgroep?

De onderzoeker vraagt zich af of de lengte van de deelnemende jongens bij benadering normaal verdeeld is. Zij berekent dat hun gemiddelde lengte 176 cm is met een standaardafwijking van 9 cm. Om een van de vuistregels te controleren bekijkt ze het aantal jongens met een lengte in de klasse $[167, 185]$.

- Welke vuistregel controleert ze hiermee en wat is haar conclusie?

Bij medisch onderzoek wordt gebruikgemaakt van referentiewaarden. Wat referentiewaarden zijn, wordt in het volgende fragment toegelicht.

fragment Referentiewaarden

Binnen de referentiewaarden valt 95% van de analyseresultaten, verkregen bij onderzoek van de gekozen, gezonde bevolkingsgroep. Dat wil zeggen dat 2,5% van de personen (1 op 40) een lagere, en 2,5% van de personen (ook 1 op 40) een hogere uitslag heeft.

Bron: Farmacotherapeutisch Kompas

In deze opgave nemen we aan dat het hemoglobinegehalte en het HDL-cholesterolgehalte (gemeten in mmol per liter bloed) normaal verdeeld zijn. De bijbehorende referentiewaarden staan in de tabel.

- Is het gemiddelde HDL-cholesterolgehalte groter bij gezonde mannen of bij gezonde vrouwen? Hoe zit dat met de standaardafwijking?
- Verwacht je op basis van de vuistregels bij de normale verdeling dat meer of minder dan 16% van de gezonde vrouwen een hemoglobinegehalte groter dan 9,5 mmol/L heeft?

REFERENTIEWAARDEN IN MMOL/L

	hemoglobine	HDL-cholesterol
man	8,5 - 11	0,90 - 2,10
vrouw	7,5 - 10	1,10 - 2,20

Een andere waarde die men kan meten in bloed is het LDL-cholesterolgehalte. De resultaten van een onderzoek naar de LDL-cholesterolgehalten bij twee groepen personen staan in de tabel.

- Onderzoek met behulp van het formuleblad of er sprake is van een groot, middelmatig of gering verschil tussen de groepen wat betreft het LDL-cholesterolgehalte.

Bij meer dan 2,50 mmol per liter bloed is er sprake van een verhoogd risico op hart- en vaatziekten.

- Onderzoek met behulp van het formuleblad of er sprake is van een groot, middelmatig of gering verschil tussen de groepen wat betreft het al dan niet hebben van een verhoogd risico op hart- en vaatziekten.

LDL-CHOLESTEROLGEHALTE IN MMOL/L

	groep	
	A	B
$\langle \leftarrow; 2,00 \rangle$	132	64
$\langle 2,00; 2,50 \rangle$	184	96
$\langle 2,50; 3,00 \rangle$	125	121
$\langle 3,00; 4,00 \rangle$	57	97
$\langle 4,00; \rightarrow \rangle$	14	24
totaal	512	402

Hoe harder de muziek, hoe mooier het klinkt, denken veel producenten van muziek. Ze willen daarom dat de liedjes van hun artiesten zo hard mogelijk worden afgespeeld. Ze kunnen natuurlijk niet bepalen hoe hard jij het volume zet. Maar muziek heeft ook een digitale hardheid, die producenten wel kunnen aanpassen. Deze digitale hardheid wordt uitgedrukt in dBFS. Het hardste geluid dat mogelijk is, heeft een waarde van 0 dBFS, terwijl minder harde geluiden negatieve waarden hebben. Om zoveel mogelijk tonen in de buurt van 0 dBFS te krijgen, veranderen producenten de spreiding van de digitale hardheid in hun liedjes en stellen ze vervolgens de hardste toon in op 0 dBFS.

a Maken ze daartoe de spreiding groter of kleiner? Licht toe.

In de figuur zie je voor een aantal jaren de verdeling van de gemiddelde digitale hardheid in dBFS van duizenden liedjes. Een onderzoeker concludeert dat de hardheid in geen enkel jaar normaal verdeeld is.

b Geef een mogelijke statistische redenering die de onderzoeker hiervoor gebruikt kan hebben.

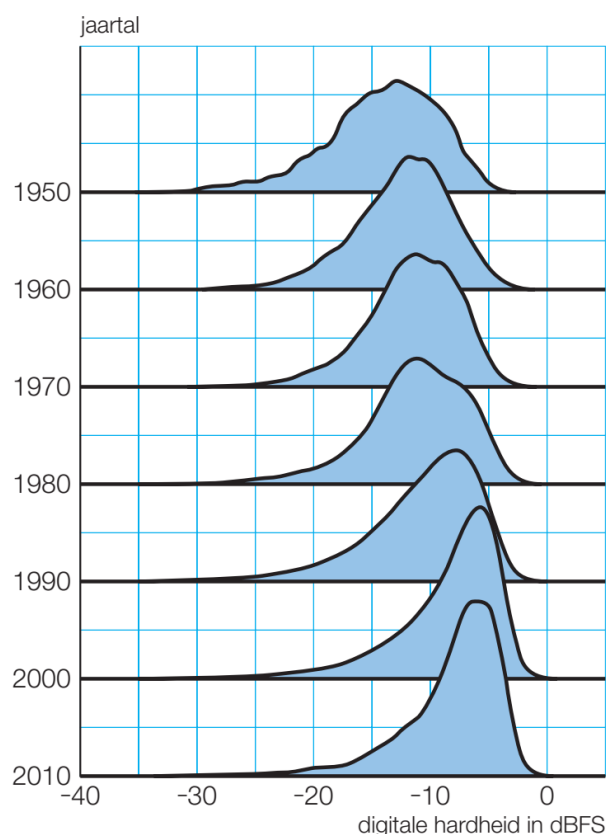
De ontwikkeling van de gemiddelde digitale hardheid van muziek kan beschreven worden met de formule $H = -14 + 0,067t$. Hierin is H de gemiddelde digitale hardheid in dBFS en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1950.

c Leg met behulp van de figuur uit of de keuze voor het gemiddelde als centrummaat een overschatting of een onderschatting van de meest voorkomende digitale hardheid geeft.

d Bereken in welk jaar volgens de formule de gemiddelde digitale hardheid 0 dBFS zal zijn en beschrijf hoe liedjes in dat jaar dan klinken.

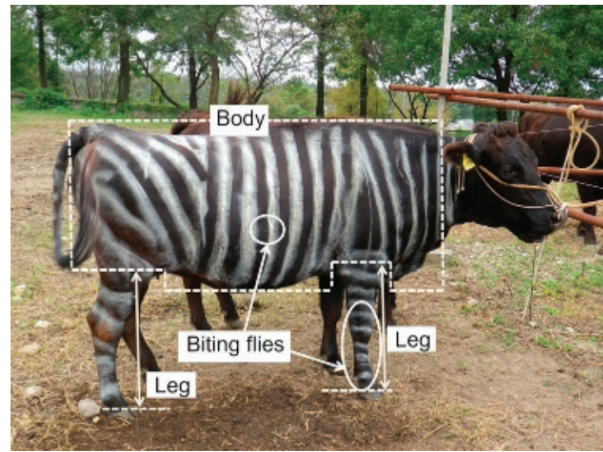
Zover zal het niet komen, want sinds 2010 neemt de gemiddelde digitale hardheid weer iets af en geldt de formule voor H dus niet meer. Een aanleiding hiervoor was het album *Death Magnetic* van Metallica. Het verschil tussen de hardste en zachtste tonen was hier door de producent zo klein gemaakt dat volgens sommige fans de muziek vervormd was. Streamingdiensten zoals Spotify hebben naar aanleiding van deze kritiek hun beleid aangepast. Ze berekenen sindsdien van elk liedje de gemiddelde digitale hardheid en passen het afspeelvolumen hierop aan, zodat alle liedjes even hard klinken.

e Leg uit waarom bij liedjes van het album *Death Magnetic* van Metallica door dit beleid de hardste toon minder hard klinkt dan bij liedjes met een grote spreiding.



Koeien worden soms duizenden keren per dag gestoken door vliegen, waardoor de koeien gewicht verliezen en minder melk geven. Dit levert de veehouderij wereldwijd een kostenpost van miljarden euro's op.

Bekend is dat zebra's minder last hebben van vliegen. Bij een onderzoek in Japan werden daarom witte strepen op zes zwarte wagyu koeien geleverd. Deze koeien werden vergeleken met zes zwarte wagyu koeien zonder strepen. De wetenschappers telden op basis van foto's en videobeelden hoe vaak koeien reageerden op vliegen (schudden van de kop, stampen, flapperen met de oren, enzovoort) en hoeveel vliegen op de foto's te zien waren.



- a** Noem twee kwalitatieve variabelen die een rol spelen in dit onderzoek.

Van elke koe werden vele foto's gemaakt om het aantal vliegen te tellen. Zie de tabel.

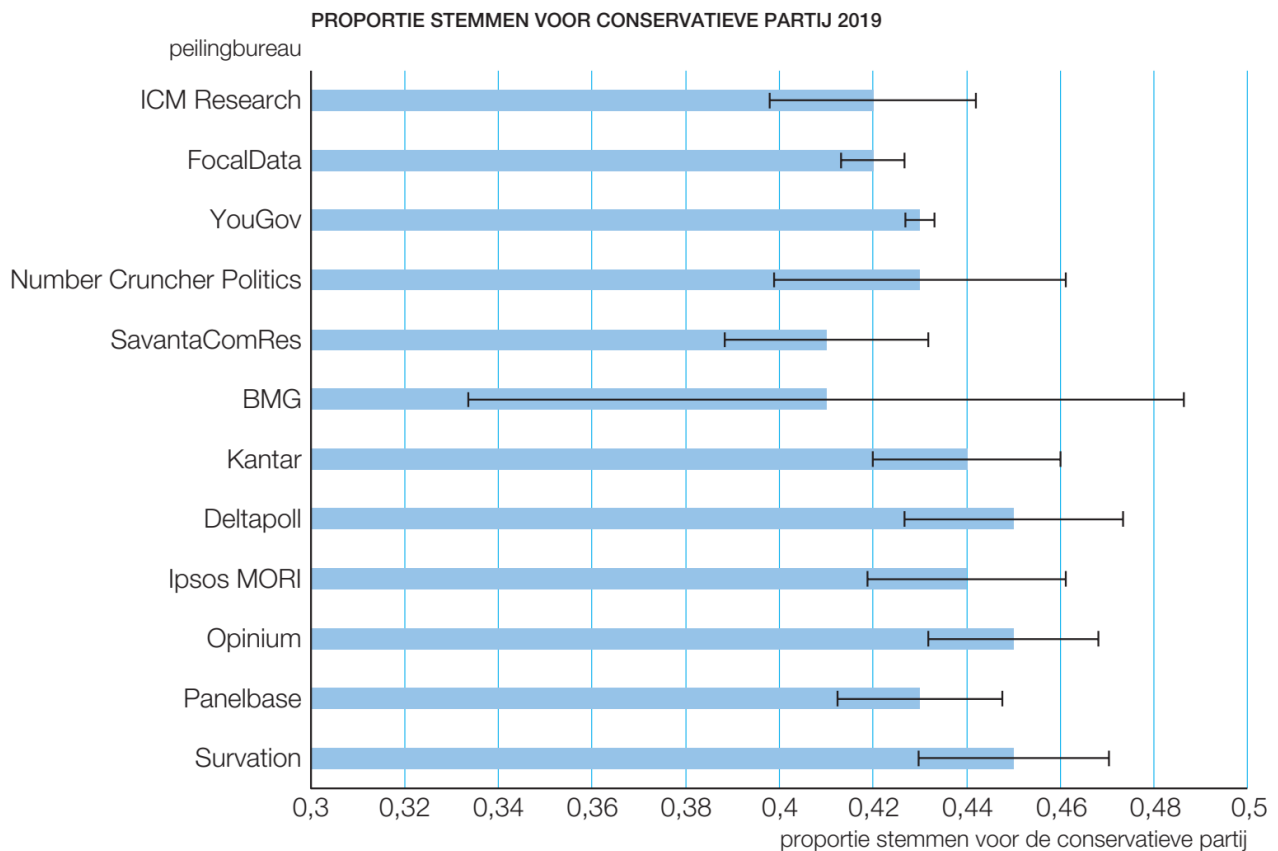
	aantal vliegen per foto	
	gemiddelde	standaardafwijking
zwarte koeien	128,8	68,6
gestreepte koeien	55,5	35,2

- b** Bereken met behulp van het formuleblad de grootte van het verschil tussen het gemiddelde aantal vliegen per foto bij de twee groepen koeien.

De foto's van de koeien werden van slechts één zijde genomen. Neem aan dat het aantal vliegen twee keer zo groot is als op een foto. Verder is bekend dat de vliegen gemiddeld elke vier minuten een keer steken. De Japanse boer Joji vindt het verven van zijn zwarte wagyu koeien veel gedoe, maar weet dat er een flink verminderde melkproductie is als zijn koeien gemiddeld meer dan 2000 keer per uur worden gestoken. Dat wil hij voorkomen.

- c** Zou je hem op basis van de onderzoeksresultaten aanraden zijn koeien te verven? Licht toe met een berekening.
- d** Bij het onderzoek was ook een derde groep zwarte wagyu koeien opgenomen die zwart waren geleverd. Waarom hebben de wetenschappers dit gedaan?
- e** Een onderzoeker trekt de conclusie dat gestreepte koeien minder vaak gestoken worden. Door de gekozen onderzoeksopzet is deze conclusie echter te algemeen. Noem hiervoor twee aspecten uit de gekozen onderzoeksopzet.

In de week voorafgaand aan de verkiezingen in het Verenigd Koninkrijk in 2019 werden er peilingen uitgevoerd. In de figuur zie je de proportie stemmen voor de conservatieve partij volgens 12 peilingbureaus. Aan het einde van de staven is steeds het 95%-betrouwbaarheidsinterval weergegeven.



- a Voor de peiling van Deltapoll zijn 1800 mensen ondervraagd en was de steekproefproportie 0,45.
Bereken de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval dat bij deze peiling hoort en bepaal of deze ongeveer overeenkomt met de figuur.
- b Aan de grootste peiling deden 105 612 mensen mee en aan de kleinste 166.
Leg op basis van de figuur uit welk peilingbureau bij welke steekproefomvang hoort.
- c Bepaal met behulp van de figuur de steekproefomvang van de steekproef van Kantar.

Bij de verkiezingen wonnen de conservatieven met 44% procent van de stemmen. Dus $p = 0,44$ kan gezien worden als de populatieproportie.

- d Bij BMG ligt de populatieproportie binnen het 95%-betrouwbaarheidsinterval.
Waarom is dat niet zo indrukwekkend?
- e Bij hoeveel procent van de organisaties ligt de populatieproportie binnen het 95%-betrouwbaarheidsinterval? Is dat meer of minder dan je zou verwachten? Geef een mogelijke verklaring.

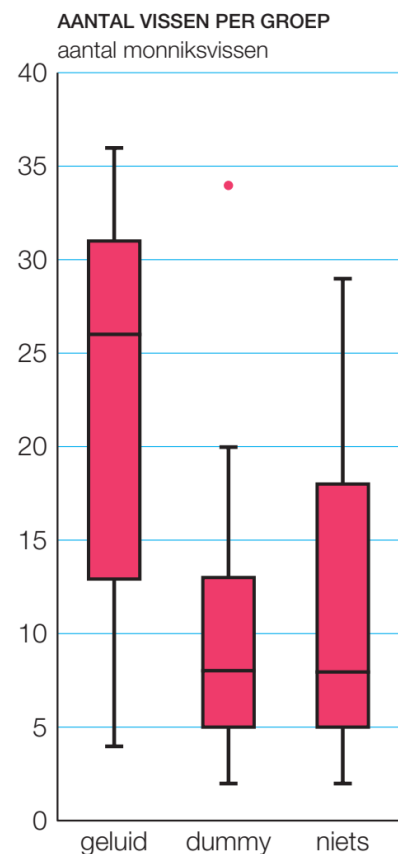
Door de verzuring van oceanen sterven koraalriffen in hoog tempo af. De afbraak van koraal kan geremd worden door er vissen naartoe te lokken. Wetenschappers hebben daarom onderzocht of er meer vissen naar een koraalrif zwemmen als er geluiden van gezonde koraalriffen worden afgespeeld. Ze selecteerden hiervoor 33 aangetaste koraalriffen voor de kust van Australië, die ze aselekt in drie groepen verdeelden. In groep 1 werd het geluid van gezonde koraalriffen afgespeeld met onderwaterluidsprekers, in groep 2 stonden alleen de luidsprekers zonder dat er geluid uit kwam en in groep 3 werd niets gedaan.



- a** Leg uit waarom ervoor gekozen is om in groep 2 luidsprekers te plaatsen waar geen geluid uit kwam.

Gedurende 40 dagen is er meerdere keren per dag gemeten hoeveel monniksvissen zich in de koraalriffen bevinden. De resultaten van één dag van het onderzoek staan in de figuur en de tabel. De term ‘dummy’ verwijst naar groep 2, waar luidsprekers stonden die geen geluid maakten. Je ziet dat bij de groep ‘dummy’ een punt buiten de boxplot ligt. Dit punt ligt meer dan anderhalf keer de interkwartielafstand boven het derde kwartiel.

- b** Toon dit aan met een berekening.
c Saffa beweert dat er in groep 3 meer metingen zijn met meer dan 18 vissen dan metingen met minder dan 5 vissen.
 Leg uit of ze gelijk heeft.
d Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil tussen groep 1 en elk van de beide andere groepen groot, middelmatig of gering is. Doe dat op twee verschillende manieren.



	$\bar{X}$	S
geluid	21,6	9,8
dummy	11,3	9,0
niets	12,1	8,8

Ook voor de overige dagen van het onderzoek zijn er in de groep ‘geluid’ in het algemeen meer vissen geteld dan in de andere twee groepen.

- e** Leg uit of je op basis van de onderzoeksopzet en de resultaten mag concluderen dat geluid van gezonde koraalriffen afspelen een oorzaak is van de aanwezigheid van meer monniksvissen.

Haal je betere cijfers als je langer slaapt? Om dat te onderzoeken kregen 100 studenten aan de Amerikaanse universiteit MIT drie maanden voor een scheikundetoets een fitbit mee. Dat is een horloge dat onder andere bijhoudt hoelang je slaapt. De resultaten staan in de figuren hiernaast. De rode lijnen geven de samenhang weer.

a Heeft de student met de hoogste score ook de langste gemiddelde slaapduur? Sliep de student met de laagste score gemiddeld ook het kortst?

b Leg bij de volgende uitspraken uit of ze volgen uit de figuren.

I Studenten met een gemiddelde slaapduur van minstens acht uur haalden tenminste 70 punten.

II Studenten die vaker ongeveer even lang slapen, scoren over het algemeen beter.

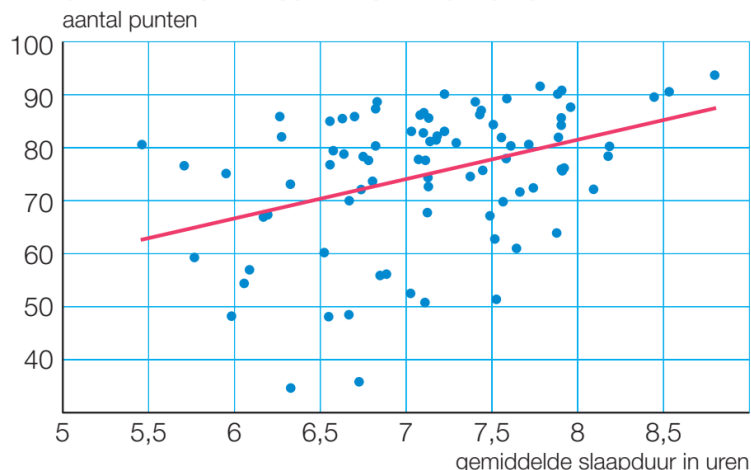
Er was geen samenhang tussen het aantal uren slaap op de nacht voor de toets en de score op de toets.

Om ook het effect van slapen op lange termijn vast te stellen werden de studenten in twee groepen ingedeeld. Studenten links van de mediaan werden 'slechte slapers' genoemd en studenten rechts van de mediaan 'goede slapers'. De goede slapers scoorden gemiddeld 6,57 punten beter op de toets dan de slechte slapers. De standaardafwijking van de slechte slapers was 11,01 punten en die van de goede slapers 13,71 punten.

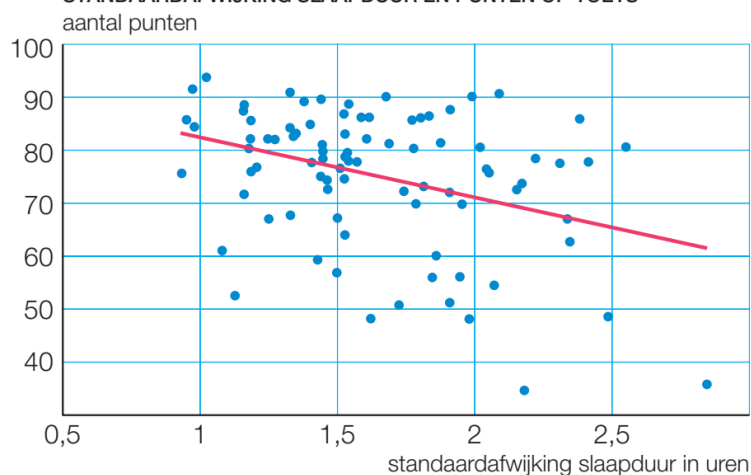
c Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in score tussen goede en slechte slapers groot, middelmatig of gering is.

d Kun je concluderen dat voor deze studenten een lange slaapduur de oorzaak is van goede scores? Licht toe.

GEMIDDELDE SLAAPDUUR EN PUNTEN OP TOETS



STANDAARDAFWIJKING SLAAPDUUR EN PUNTEN OP TOETS



Veel Nederlanders met een laag inkomen hebben het gevoel dat hun mening niet telt. Onderzoekers wilden weten of dit zo is. Ze verzamelden opiniepeilingen uit de periode 1979 tot en met 2012, waarin er aan Nederlanders werd gevraagd wat ze van een voorstel vinden. Er werden voorstellen voorgelegd zoals: 'Er moet een referendum over de afschaffing van de euro komen.' Vervolgens maakten ze onderscheid tussen de meningen van mensen met een laag inkomen en een hoog inkomen. Elk punt in het spreidingsdiagram is een voorstel. Op de assen is het percentage dat een voorstel steunt voor beide groepen af te lezen.



- a** Voorstel A in het spreidingsdiagram ging over de verhoging van het minimumloon.

Hoeveel procent van de mensen met een hoog inkomen was voorstander van dit voorstel? En hoeveel procent bij de lage inkomens?

Het spreidingsdiagram is in vier vlakken verdeeld. In het vlak rechtsboven staan voorstellen waar zowel de lage als de hoge inkomens in meerderheid voorstander van zijn.

- b** Geef de betekenis van het vlak linksboven.

De kleur van de punten geeft aan of een voorstel gerealiseerd is. Rood betekent dat het voorstel niet is gerealiseerd en groen betekent dat het wel is gerealiseerd. In het vlak linksboven staan 38 voorstellen.

- c** Bepaal hoeveel procent van deze voorstellen gerealiseerd is.

Van de voorstellen in het vlak rechtsonder zijn 10 van de 30 voorstellen gerealiseerd. Er is een verschil tussen de vlakken rechtsonder en linksboven wat betreft het realiseren van voorstellen.

- d** Toon met behulp van percentages aan dat er verschil is en geef de praktische betekenis van dit verschil.
- e** Onderzoek met behulp van het formuleblad of dit verschil groot, middelmatig of gering is.

Tarik stelt vast dat de voorstellen in het vlak rechtsboven vaak zijn gerealiseerd en dat deze ook door mensen met lage inkomens worden gesteund. Volgens hem toont dit aan dat er wel naar hen geluisterd wordt.

- f** Waarom kan Tarik deze conclusie niet trekken?

Hoewel katten voor de gezelligheid in huis worden gehaald zijn het eigenlijk roofdieren. Er bestaan daarom zorgen over de invloed van jagende huiskatten op beschermde diersoorten.

Onderzoekers willen graag weten hoe groot het jachtgebied van katten is. Om deze oppervlakte te bepalen, hebben onderzoekers GPS-trackers bevestigd aan 925 huiskatten die naar buiten mogen. Neem aan dat deze steekproef aselekt is.

De gemiddelde oppervlakte van het jachtgebied van de katten in de steekproef was $0,019 \text{ km}^2$ met een standaardafwijking van $0,012 \text{ km}^2$.

- a Beredeneer op basis van deze gegevens dat de oppervlakte van het jachtgebied in de steekproef niet normaal verdeeld kan zijn.
- b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de oppervlakte van het jachtgebied in km^2 .

Er waren drie katten in de steekproef die per dag jaagden op een gebied van meer dan 1 km^2 . Een van deze katten was Max, waarvan een route te zien is op de foto hiernaast. Gedurende 50 aselekt gekozen dagen is de oppervlakte van het jachtgebied van Max bijgehouden. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval dat hoort bij de oppervlakte van zijn jachtgebied in km^2 is $[1,273; 3,478]$. Hieruit volgt dat S ongeveer gelijk is aan 3,9.

- c Bereken S in drie decimalen.

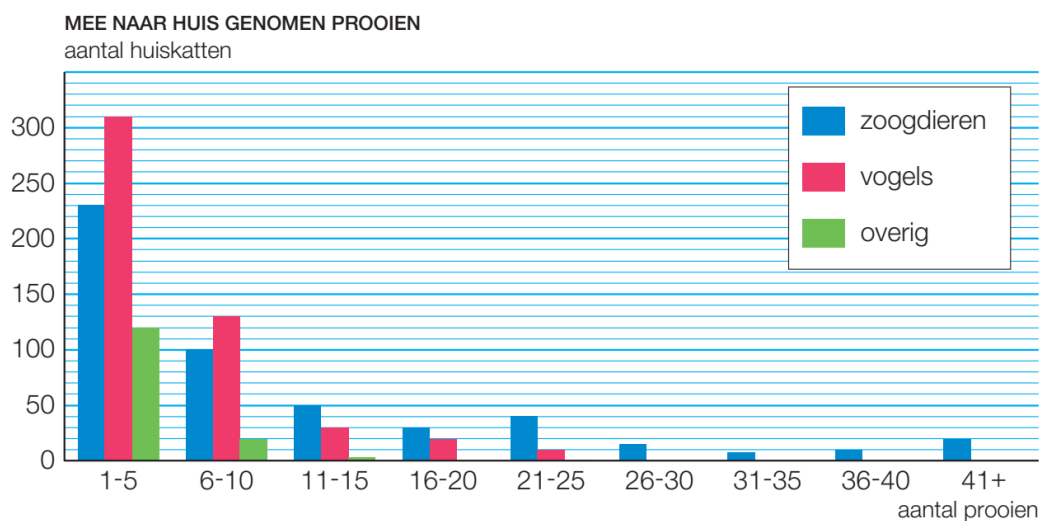
Door het jachtgebied van Max meer dan 50 dagen te onderzoeken, kun je een nauwkeuriger betrouwbaarheidsinterval opstellen.

- d Bereken hoeveel dagen het onderzoek moet duren om een 95%-betrouwbaarheidsinterval met een breedte van 1 km^2 te krijgen. Neem aan dat $S = 3,9 \text{ km}^2$.



A42

In Groot-Brittannië werd een representatieve steekproef van 986 kattenbezitters genomen. Zij hielden gedurende vijf maanden bij hoeveel prooien hun kat mee naar huis nam. Neem aan dat elke kattenbezitter één kat heeft. De resultaten staan in het staafdiagram.



Amel trekt op grond van het staafdiagram twee conclusies bij deze gegevens.

- I Alle huiskatten hebben minstens één vogel mee naar huis genomen.
- II Er werden meer vogels dan zoogdieren mee naar huis genomen.
- a Toon met berekeningen aan dat je deze conclusies niet kunt trekken.
- b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie huiskatten in Groot-Brittannië die vogels mee naar huis nemen.

Het totale aantal mee naar huis genomen prooien in de periode van de steekproef is 14 370. Het totale aantal huiskatten in Groot-Brittannië is 9 miljoen. Neem verder aan dat 25% van de prooien mee naar huis wordt genomen en dat de katten gedurende het jaar evenveel prooien vangen.

- c Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het totale aantal prooien in miljoenen per jaar dat door huiskatten wordt gevangen in Groot-Brittannië. Gebruik dat $S = 14,1$ mee naar huis genomen prooien per kat.

A43

Zie opgave 42.

Een onderzoeker wil een 95%-betrouwbaarheidsinterval opstellen voor het aantal prooien per jaar van de 2,6 miljoen Nederlandse huiskatten. Op basis van onder andere de bovenstaande studie verwacht ze een gemiddelde van 140 prooien per kat per jaar. Hoeveel kattenbezitters moeten in haar steekproef zitten, zodat haar 95%-betrouwbaarheidsinterval een maximale breedte van 50 miljoen heeft? Ga ervan uit dat de kattenbezitters allemaal één kat hebben en gebruik dat $S = 134$ prooien per kat per jaar.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan kennis van statistiek toepassen binnen de context van een onderzoek.
- ☐ Ik kan kennis van statistiek toepassen om een onderzoeksopzet kritisch te beoordelen.

► OPGAVE C6
THEORIE A

► OPGAVE C7
THEORIE A

C6 Het Trimbos instituut heeft in 2023 onderzoek gedaan naar online gokken. Online gokken is verboden voor minderjarigen, toch zijn er jongeren in de leeftijd van 12-16 jaar die online gokken. Zie de tabel.

- a** Geef van elke variabele in de tabel het meetniveau. Licht toe.
- b** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiepercentage leerlingen uit deze populatie dat gokt.
- c** Er is een verschil in opleiding tussen de groep die gokt en de groep die niet gokt.
Onderzoek met behulp van het formuleblad of dit verschil groot, middelmatig of gering is.
- d** Het bleek dat 11,4% van de 3405 jongens in de steekproef gokt, terwijl dit slechts 66 van de 3474 meisjes betrof.
Bereken met behulp van het formuleblad of het verschil tussen de groepen groot, middelmatig of gering is.

opleiding	gokken	
	wel	niet
vmbo-bk	112	1162
vmbo-gt	133	1493
havo	133	1854
vwo	76	1916

C7 In 2024 was er een nieuwsitem van Nieuwsuur over het feit dat geneeskundestudenten verplicht zijn om mee te werken als proefpersoon voor lichamelijke onderzoeken. Een docent geneeskunde wil weten wat geneeskundestudenten in Nederland hiervan vinden. Hij besluit de vraag voor te leggen aan al zijn geneeskundestudenten.
Geef twee punten van kritiek op de onderzoeksopzet.

Antwoorden

- C6 a** opleiding: ordinaal, *
wel/niet gokken: nominaal, *
- b** $6,6\% \pm 0,6\%$ of $[6,0\%; 7,2\%]$
- c** gering verschil
- d** gering verschil
- C7** *

Kennis- en vaardighedentest

10.1 Statistische diagrammen

- 1** Raoul is fan van de serie Dexter. Voor een onderzoeksopdracht heeft hij data verzameld bij het eerste seizoen van de serie. Hij heeft per aflevering informatie over de releasedatum, de titel, het oordeel van recensenten (rapportcijfer afgerond op gehelen) en het oordeel van het publiek (rapportcijfer afgerond op gehelen). Het verslag van Raoul bevat de volgende deelvragen:
- I Wat was het verloop van de beoordelingen gedurende seizoen 1?
 - II Was er samenhang tussen het publieksoordeel en dat van recensenten?
 - III Welke verdeling hoorde bij de beoordelingen van seizoen 1?
- Raoul gebruikt een dotplot, een lijndiagram en een spreidingsdiagram. Geef bij elke vraag aan welk diagram het meest geschikt is. Licht toe.

10.2 Causaliteit en groepen vergelijken

- 2** Wetenschappers verzamelden gegevens van 40 monarchvlinders die in gevangenschap zijn opgegroeid. Ze vergeleken deze met een groep van 41 monarchvlinders in het wild. Onder de vlinders in gevangenschap waren 24 mannetjes en bij die in het wild 27.
- a Is de variabele geslacht kwalitatief of kwantitatief?
 - b Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in geslacht tussen monarchvlinders in gevangenschap en in het wild groot, middelmatig of gering is.

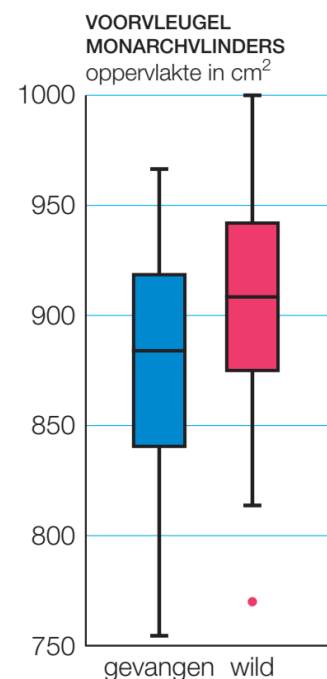
Van beide groepen vlinders is de oppervlakte van een voorvleugel gemeten. Zie de tabel en boxplots.

VOORVLEUGELOPPERVLAKTE

	gevangen	wild
$\bar{X}$	877,1 cm ²	903,1 cm ²
S	55,7 cm ²	73,3 cm ²



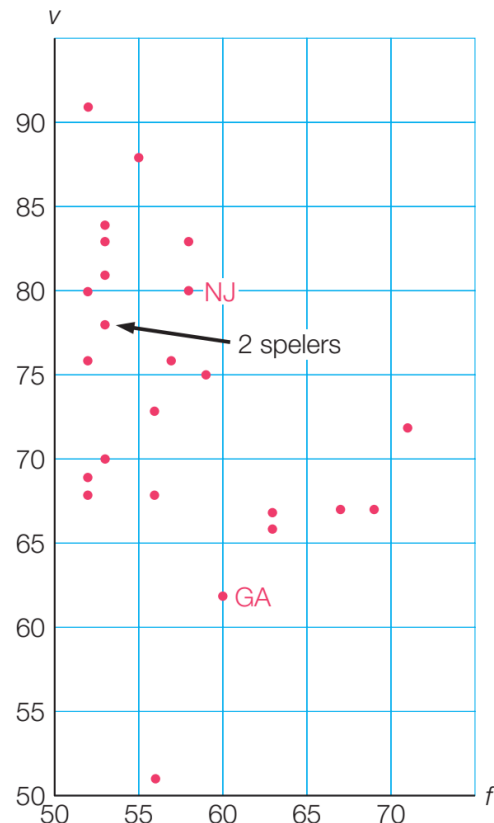
- c Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil tussen de groepen wat betreft voorvleugelloppervlakte groot, middelmatig of gering is. Doe dat op twee verschillende manieren.
- d Mag je op grond van dit onderzoek concluderen dat gevangenschap voor deze vlinders een oorzaak is van een kleinere oppervlakte van de voorvleugel? Licht toe.



10.3 Statistiek toepassen

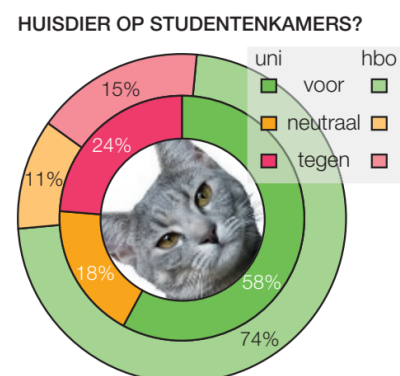
3 Bij basketbal wordt een gescoord schot dat niet een vrije worp is een fieldgoal genoemd. Het fieldgoalpercentage f geeft aan hoeveel procent van de schoten raak is. Het vrijeworppcentage v geeft aan hoeveel procent van de vrije worpen raak is. In de figuur hiernaast zie je f en v van de 25 NBA spelers die in seizoen 2024-2025 het hoogste fieldgoalpercentage hadden.

- Jalen Duren en Nic Claxton zijn de enige spelers in dit diagram waarvan het vrijeworppcentage lager is dan het fieldgoalpercentage. Van hen is Jalen Duren de beste vrijeworpschutter. Onderzoek welk punt bij Jalen Duren hoort.
- Wat is de mediaan van de vrijeworppercents van de spelers in het diagram?
- Welke standaardverdeling hebben de fieldgoalpercentages van de spelers in het diagram?
- Nicola Jokić (NJ in het diagram) heeft 450 vrije worpen genomen, voor Giannis Antetokounmpo (GA in het diagram) waren dat er 700. Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in aantal rake en gemiste vrije worpen tussen deze spelers groot, middelmatig of gering is.



4 Een studententijdschrift wil weten of studenten het een goed idee vinden om huisdieren te houden op studentenkamers. Ze houden hiervoor een enquête onder hun lezers. Op basis van deze steekproef van ruim vierhonderd hbo-studenten en 38 universitaire studenten is de figuur hiernaast gemaakt. Je ziet dat 74% van de hbo-studenten en 58% van de universitaire studenten voor het houden van huisdieren op studentenkamers zijn.

- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage universitaire studenten dat vóór huisdieren op studentenkamers is.
- Voor de hbo-studenten is het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij het percentage voorstanders $[69,9\%; 78,1\%]$. Bereken het aantal hbo-studenten in de steekproef. Rond af op tientallen.
- Op basis van dit onderzoek concludeert het tijdschrift in het bijbehorende artikel dat het merendeel van de studenten het een goed idee vindt om huisdieren te houden op studentenkamers. Geef op basis van de onderzoeksopzet een reden waarom deze conclusie niet getrokken kan worden.



Gemengde opgaven

- 1** In de zorgsector is al langere tijd sprake van hoge werkdruk en zorgen over beloning. In deze opgave kijken we naar gegevens over verpleegkundigen die werkzaam zijn in ziekenhuizen. Verpleegkundigen verdienden in 2020 gemiddeld een bruto-uurloon van €23,18. Daarmee verdienen zij 11% minder dan werknemers buiten de zorg met hetzelfde opleidingsniveau.
- a** Bereken het gemiddelde bruto-uurloon in 2020 van werknemers buiten de zorg met hetzelfde opleidingsniveau als verpleegkundigen. Geef je antwoord in centen nauwkeurig.

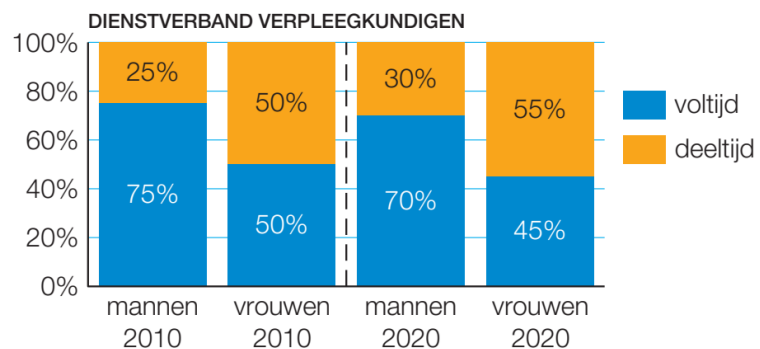
In een onderzoek kregen verpleegkundigen de volgende drie stellingen voorgelegd:

1. Ik ervaar tijdsdruk.
2. Ik kan voldoende herstellen tussen diensten.
3. Ik vind het werk mentaal zwaar.

De antwoordmogelijkheden waren telkens: nooit, soms, vaak of altijd.

- b** Leg uit waarom de drie variabelen bij deze stellingen kwalitatief zijn. Leg ook uit waarom de variabelen ordinaal zijn.

In zowel 2010 als 2020 is onderzoek gedaan naar het soort dienstverband van verpleegkundigen. In beide jaren zijn 800 verpleegkundigen onderzocht. De resultaten zijn samengevat in de figuur.



Uit de figuur blijkt dat 45% van de vrouwelijke verpleegkundigen in de steekproef van 2020 voltijds werkt. Dat waren 270 vrouwen.

- c** Stel voor vrouwelijke verpleegkundigen in 2020 het 95%-betrouwbaarheidsinterval op van het percentage met een voltijdsbaan.
- d** Rosalie concludeert op basis van de figuur dat het totale aantal voltijds werkende verpleegkundigen in de steekproef van 2020 is afgenomen ten opzichte van 2010. Dit hoeft echter niet het geval te zijn omdat de samenstelling van de steekproef in 2010 onbekend is. Geef een getallenvoorbeeld van het aantal mannen en het aantal vrouwen in de steekproef van 2010, waarbij deze conclusie niet valt te trekken.

- 2** Sporters die lager dan 40 punten scoren op een conditietest krijgen een serie extra conditietrainingen aangeboden. De scores van 50 sporters die de extra conditietrainingen hebben gedaan worden gebruikt om na te gaan of de extra trainingen het gewenste effect hebben. In de tabel zie je van deze sporters het gemiddelde en de standaardafwijking van de scores op de conditietest voor de trainingen en na de trainingen.

SCORE

	gem.	stand.afw.
voor	31,2	2,9
na	38,4	3,1

- a** Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in scores groot, middelmatig of gering is.

Omdat de conditietest die wordt gebruikt veel tijd kost, onderzoekt coach Wim of deze test vervangen kan worden door een nieuw ontwikkelde test. Bij deze nieuwe test liggen de scores tussen 0 en 10. Wim neemt bij 20 sporters zowel de oude als de nieuwe test af. De resultaten zijn verwerkt in de figuur hiernaast. Daarin is ook een lineair model opgenomen.

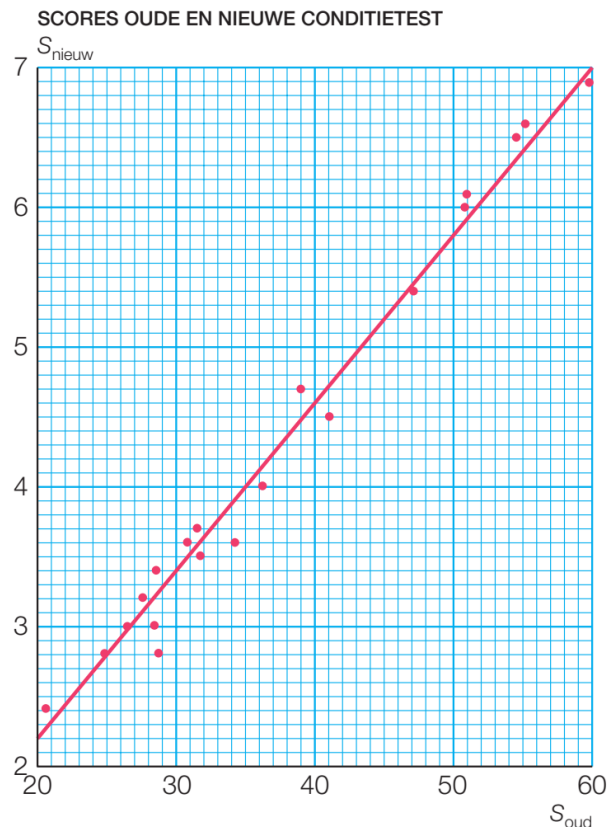
- b** Stel de formule op bij dit model.

- c** Een sporter scoort een 8,4 op de nieuwe test.

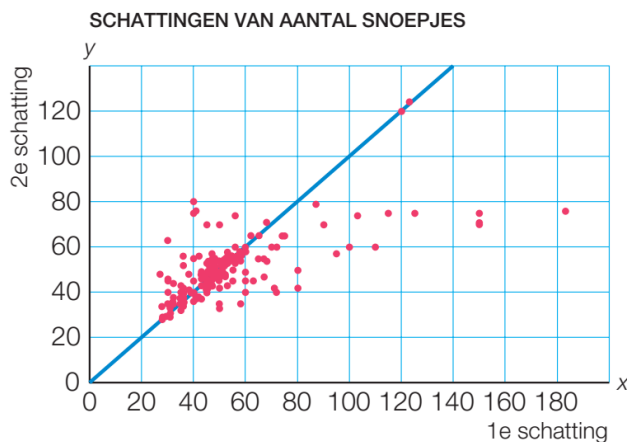
Welke score verwacht je dat deze sporter bij de oude test gehaald zou hebben? Rond af op gehelen.

Het model wordt gebruikt voor de omzetting van de oude scores in de nieuwe scores.

- d** Bij welke scores op de nieuwe test worden de extra conditietrainingen aangeboden?
- e** Het kan voorkomen dat een sporter bij de nieuwe test niet, maar bij de oude test wel extra trainingen krijgt aangeboden of juist andersom. Bij hoeveel van de 20 sporters uit de figuur is dat het geval? Licht toe.



- 3** In een experiment werd aan 14-jarige leerlingen gevraagd om het aantal snoepjes in een doorzichtige pot te schatten. De leerlingen maakten eerst zelfstandig een schatting. Daarna maakten ze na een discussie met andere leerlingen opnieuw een schatting. Zie de figuur hieronder. Het aantal snoepjes in de pot was 57.



- a** Is de schatting van het aantal snoepjes een kwalitatieve of een kwantitatieve variabele?
- b** In de figuur is de lijn $y = x$ getekend. Geef de praktische betekenis van de punten die op deze lijn liggen.
- c** Licht toe hoe je kunt zien dat leerlingen met schattingen van meer dan 80 hun schatting bijna allemaal naar beneden hebben bijgesteld.

Informatief Go

Lange tijd konden computers bij spellen geen serieuze tegenstand bieden aan de mens. Stapje voor stapje is hierin verandering gekomen. Al in het jaar 1952 was een computer even goed als de mens in boter-kaas-en-eieren. Maar het duurde tot 1997 voordat een computer de beste menselijke schaker ter wereld wist te verslaan. Dat komt doordat er bij schaken veel meer mogelijkheden zijn dan bij boter-kaas-en-eieren. Het Aziatische bordspel Go heeft op zijn beurt weer veel meer mogelijkheden dan schaken. Pas in 2016 versloeg een computer Lee Sedol, de toenmalige wereldkampioen.



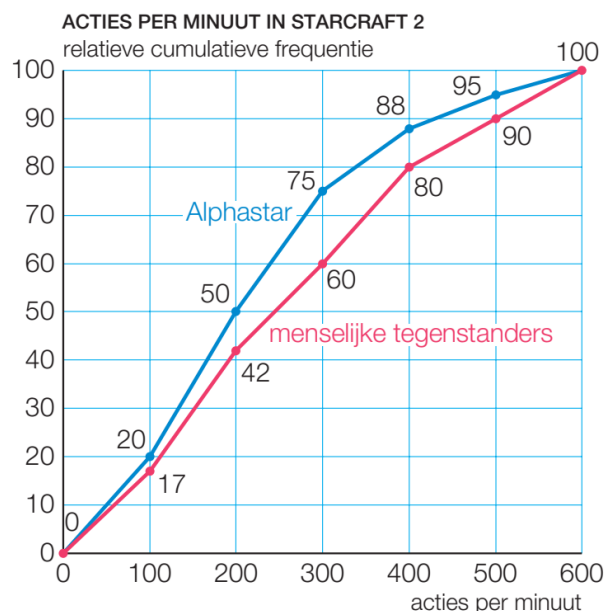
4 In 2019 nam het computerprogramma Alphastar het op tegen de beste menselijke spelers van het computerspel Starcraft 2. In dit spel moeten spelers elkaar verslaan met een leger. De eenheden van de legers kunnen vrij bewegen over een slagveld. Het aantal mogelijkheden is daardoor vele malen groter dan bij bordspellen. Het is daarom moeilijk voor programmeurs om de vele regels van een winnende strategie te schrijven. Alphastar lost dit probleem op door razendsnel heel vaak tegen zichzelf te spelen en zo zichzelf regels te leren.

De makers van Alphastar wilden hun programma van menselijke tegenstanders laten winnen door strategie en niet door snelheid. Daarom hebben ze het aantal acties dat het programma in een minuut kan uitvoeren begrensd. Hiernaast zie je de relatieve cumulatieve frequentiepolygonen van het aantal acties per minuut van Alphastar en zijn menselijke tegenstanders.

a Caroline denkt op basis van de figuur dat Alphastar per minuut meer acties uitvoert dan zijn menselijke tegenstanders, omdat de bijbehorende polygoon hoger ligt.

Leg uit of je het met haar eens bent.

b Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in acties per minuut tussen Alphastar en zijn menselijke tegenstanders groot, middelmatig of gering is.



In het spel Starcraft 2 kunnen drie rassen gespeeld worden: Protoss, Terran en Zerg. Elk ras heeft andere mogelijkheden. Alphastar speelde als elk van de rassen tegen menselijke tegenstanders. Elke wedstrijd had een winnaar. In de tabel hiernaast staat welk deel van de wedstrijden Alphastar gewonnen heeft. Zo zie je dat Alphastar als Protoss 14 wedstrijden heeft gespeeld tegen een menselijke speler die ook Protoss was, waarvan het er 11 won.

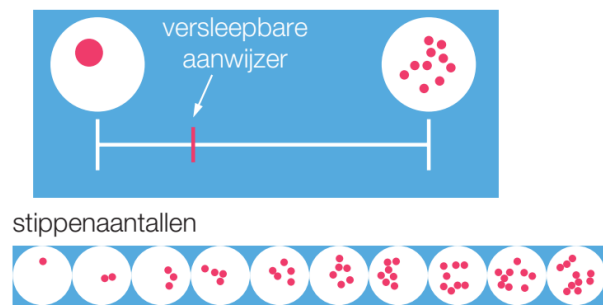
		Menselijke tegenstanders		
		Protoss	Terran	Zerg
Alphastar	Protoss	11/14	4/4	10/12
	Terran	4/8	4/7	10/15
	Zerg	8/14	5/10	5/8

c Toon met een berekening aan dat Alphastar bijna twee keer zo vaak won als zijn menselijke tegenstanders.

d Bekijk de wedstrijden waarin Alphastar en zijn menselijke tegenstanders hetzelfde ras speelden.

Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in gewonnen wedstrijden groot, middelmatig of gering is.

5 Bij kwantitatieve variabelen is een belangrijke eigenschap dat verschillen even groot zijn. De afstand tussen 1 en 2 is dus hetzelfde als de afstand tussen 9 en 10. Mensen die hebben leren rekenen, vinden dit logisch: het verschil is in beide gevallen immers 1. Maar is dat ook logisch zonder kennis van rekenen?



Om dat te onderzoeken hebben wetenschappers leden van de Munduruku-stam in de Amazone onderzocht. De stamleden werd gevraagd om op een lijnstuk, zoals in figuur rechtsboven, aan te geven waar verschillende stippenaantallen horen te staan.

- a** Welk soort variabele is de positie van de aanwijzer? Geef indien mogelijk ook het meetniveau van de variabele of geef aan of deze discreet of continu is.

Ter vergelijking werd deze vraag ook voorgelegd aan inwoners van de VS. De resultaten van beide groepen staan in de figuren hiernaast. Je ziet bijvoorbeeld dat de Munduruku het stippenaantal 2 op de positie van 3 op de getallenlijn zetten. De wetenschappers trokken de volgende twee conclusies.

- 1 Inwoners uit de VS vinden de afstand tussen 1 en 2 net zo groot als de afstand tussen 9 en 10.
- 2 Inheemse volken vinden grotere aantallen doorgaans dichter bij elkaar liggen.

Eén van deze conclusies werd later preciezer geformuleerd.

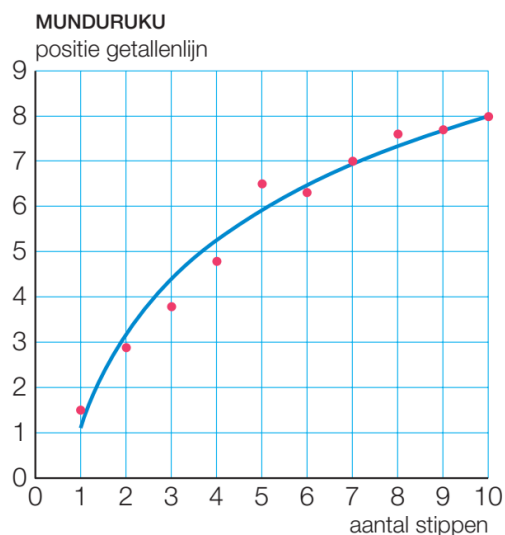
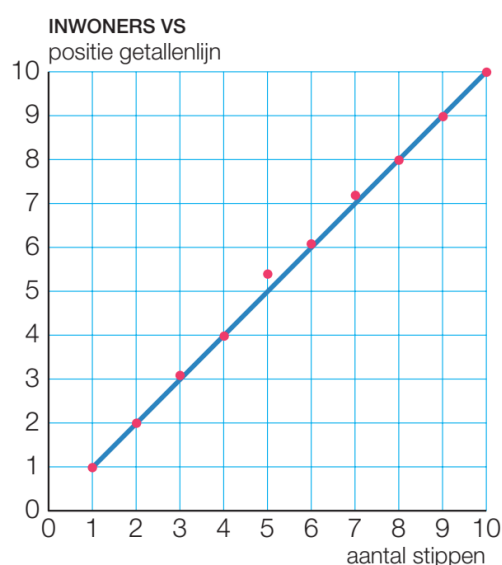
- b** Welke conclusie was dat? Licht toe en geef een suggestie voor een verbetering van de conclusie.

De onderzoekers willen een voorbeeld geven bij conclusie 2. Daartoe bekijken ze de spreidingsbreedte van de aanwijzerpositie bij de laagste 50% stippenaantallen en de hoogste 50% stippenaantallen voor beide groepen.

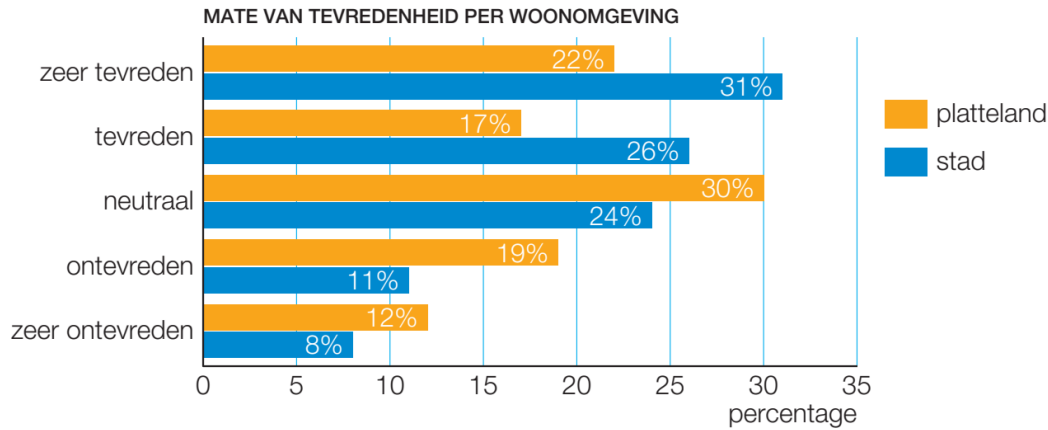
- c** Bepaal deze spreidingsbreedten.

Voor het onderzoek is een aselechte steekproef van 33 Munduruku genomen. Voor deze deelnemers is de gemiddelde positie op de getallenlijn van het stippenaantal 5 gelijk aan 6,5 met een standaardafwijking van 1,896.

- d** Toon aan dat je met minstens 95% betrouwbaarheid kunt zeggen dat de Munduruku het stippenaantal 5 niet op de positie van 5 op de getallenlijn plaatsen.



- 6** Bij een onderzoek werd aan inwoners van steden en inwoners van het platteland gevraagd hoe tevreden ze zijn over het openbaar vervoer in hun regio. Bij het beantwoorden van de enquêtevraag over hun tevredenheid konden respondenten kiezen uit vijf categorieën variërend van zeer ontevreden tot zeer tevreden. De resultaten zijn weergegeven in het onderstaande staafdiagram.



- a** Geef aan van welke twee variabelen er sprake is in dit onderzoek en geef telkens aan of het een nominale of ordinale variabele is. Licht je antwoorden toe.
- b** Bereken voor beide groepen de mediaan en geef de modus.
- c** Van de respondenten waren er 200 stadsbewoners. Stel een 95%-betrouwbaarheidsinterval op voor de populatieproportie stadsbewoners die *zeer tevreden* is.
- d** Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in de mate van tevredenheid tussen de groepen groot, middelmatig of gering is.



7 Bij de meeste vissen wordt het geslacht van de nakomelingen bepaald door de geslachtschromosomen die zij van de ouders krijgen. Omgevingsfactoren hebben meestal geen invloed op het geslacht. Maar bij sommige vissen, evenals bij sommige reptielen, blijkt juist de temperatuur een doorslaggevende factor in het geslacht van de nakomelingen te zijn. Men onderzoekt bij welke vissoorten dit het geval is omdat de opwarming van de aarde een enorme impact kan hebben op de populaties van deze vissoorten.

Een bioloog heeft van de populaties A en B van de soort *Odontesthes argentinensis* het aantal mannetjes en het aantal vrouwtjes in een steekproef van pasgeboren vissen vastgesteld. Beide steekproeven hebben een omvang van 300. Populatie A leeft in water met een gemiddelde temperatuur van 24°C en populatie B in water dat gemiddeld 27°C is. Zie de tabel hiernaast.

		geslacht	
		M	V
populatie	A (24°C)	118	182
	B (27°C)	176	124

a Onderzoek met behulp van het formuleblad of de grootte van het verschil groot, middelmatig of gering is.

Uit de tabel volgt dat voor populatie A de percentageverhouding mannetjes : vrouwtjes gelijk is aan 39 : 61.

b Geef de percentageverhouding mannetjes : vrouwtjes bij populatie B.

Op basis van de percentageverhoudingen besluit de bioloog nader onderzoek te doen naar de verhouding mannetjes : vrouwtjes bij verschillende watertemperaturen.

In een laboratorium wordt bij een aantal watertemperaturen de verhouding mannetjes : vrouwtjes van de nakomelingen vastgesteld. In de tabel hieronder zie je de eerste resultaten.

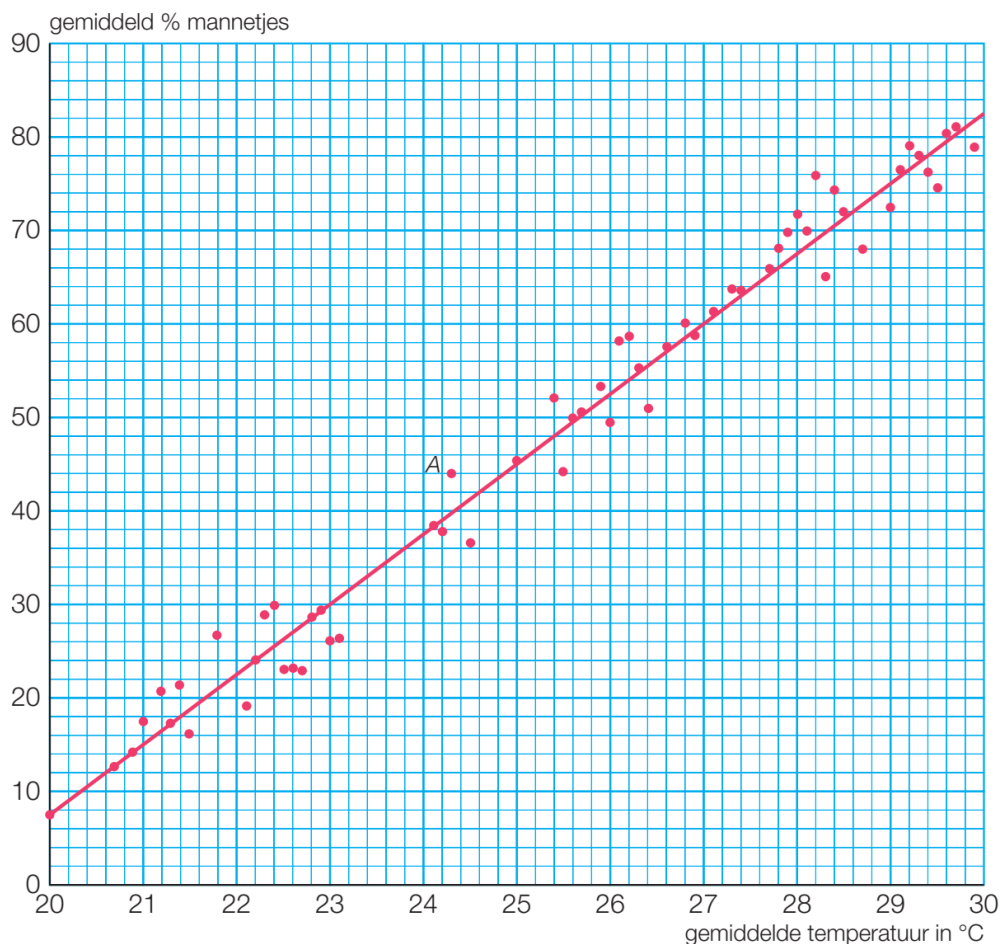
Op basis van eerder onderzoek naar temperatuurafhankelijke geslachtsverhouding bij vissen en de tabel hieronder, neemt de bioloog aan dat er een lineair verband bestaat tussen de temperatuur en het percentage mannetjes. Volgens haar neemt het percentage mannetjes bij elke temperatuurstijging van 1°C toe met 6,4.

temperatuur in $^{\circ}\text{C}$	21,6	24,4	27,2	29,7
mannetjes : vrouwtjes	24 : 76	42 : 58	60 : 40	76 : 24

c Laat met berekeningen zien dat de aanname van de bioloog te verdedigen is.

d Bereken bij welke temperatuur de verhouding mannetjes : vrouwtjes naar verwachting 1 : 1 is. Rond af op één decimaal.

Van een andere vissoort waarvan de geslachtsverhouding temperatuurafhankelijk is, zijn van een flink aantal onderzoeken de resultaten samengebracht in de figuur op de volgende bladzijde. Hierin is ook een lineair model getekend. Dit model geeft het verband weer tussen de gemiddelde temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ en het gemiddeld percentage mannetjes P_m .



- e** Stel de formule op van het verband tussen de gemiddelde temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ en het gemiddeld percentage mannetjes P_m en geef ook een formule van het verband tussen T en het gemiddeld percentage vrouwtjes P_v .
- f** Bij een temperatuur van $24,3^{\circ}\text{C}$ is van een aselechte steekproef van 250 nakomelingen het geslacht bepaald. Het percentage mannetjes bleek 44% te zijn, zie het punt A in de figuur. Stel hierbij een 95%-betrouwbaarheidsinterval op voor het percentage mannetjes. Valt het percentage mannetjes dat bij deze temperatuur volgt uit de formule van vraag e binnen dit interval?

Met behulp van het model in de figuur kan men op basis van de watertemperatuur een voorspelling doen over de verhouding mannetjes : vrouwtjes bij populaties van deze vissensoort in de natuur. We gaan ervan uit dat bij elke temperatuur het percentage mannetjes normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 3%.

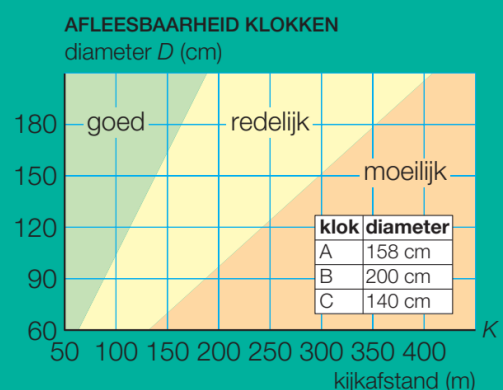
- g** Teken in de figuur het gebied waarin de middelste 95% ligt van de percentages mannetjes bij elk van de temperaturen tussen 20 en 30 graden. Licht je werkwijze toe.
- h** Van een populatie in de natuur die leeft in water met een gemiddelde temperatuur van 24°C blijkt dat 8 op de 25 nakomelingen een mannetje is. Valt deze verhouding binnen het gebied van vraag g? Licht toe.



11

Formules en variabelen

In de publieke ruimte kom je regelmatig klokken tegen. Om van grote afstand afleesbaar te zijn, bestaan er richtlijnen voor de diameter van een klok. Zie de figuur.



Bij welke van de volgende kijkafstanden zijn alle klokken in de tabel redelijk afleesbaar?

A: 130-390 m B: 180-270 m C: 130-270 m

Voor de grenslijn tussen redelijk en moeilijk afleesbaar geldt het verband $5,4K - 10D = 108$.

Hoeveel neemt K toe als de diameter 1 cm groter wordt?

A: 1,85 m B: 0,54 m C: 10 m

11.1 Grafieken en gebieden

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met ongelijkheden en de bijbehorende gebieden.

Voorkennis De vergelijking $px + qy = c$

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $px + qy = c$. De grafiek is een rechte lijn.

Om de lijn k : $2x + 3y = 12$ te tekenen, bereken je de coördinaten van twee punten op de lijn.

$x = 0$ geeft $2 \cdot 0 + 3y = 12$, oftewel $3y = 12$, dus $y = 4$.

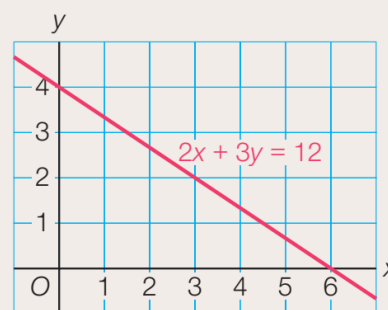
$y = 0$ geeft $2x + 3 \cdot 0 = 12$, oftewel $2x = 12$, dus $x = 6$.

Zo krijg je de tabel

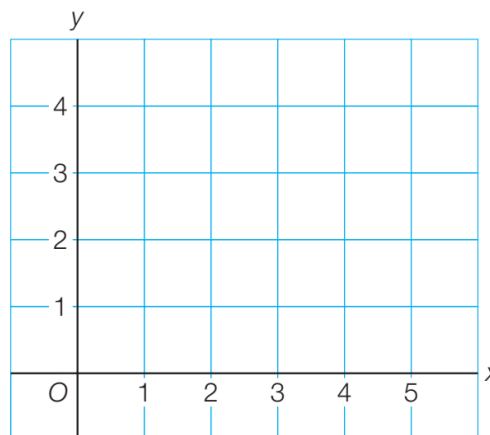
x	0	6
y	4	0

De lijn gaat door $(0, 4)$ en $(6, 0)$. Zie de figuur.

Je kunt met een berekening nagaan dat het punt $(15, -6)$ op k ligt, want $2 \cdot 15 + 3 \cdot -6 = 12$.

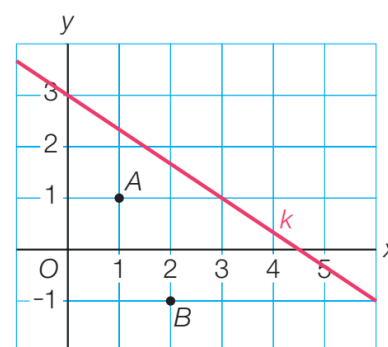


- V1** Gegeven zijn de lijnen k : $2x + 5y = 10$,
 l : $3x - y = 0$, m : $y = 4$ en n : $x = 3$.
- Teken de lijnen in de figuur.
 - Op welke lijnen ligt het punt $(-5, 4)$?
 - Ligt het punt $(2, 7)$ op l ? En het punt $(20, 60)$?



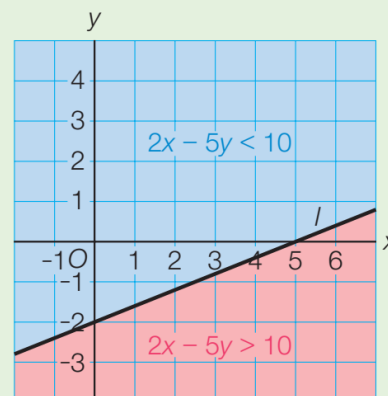
- O1**  Hiernaast is de lijn k : $2x + 3y = 9$ getekend. De punten A en B liggen aan dezelfde kant van lijn k . Voor deze punten is de waarde van $2x + 3y$ kleiner dan 9.

- Toon dit aan.
- Kies een ander punt dat aan dezelfde kant van lijn k ligt en ga na dat hiervoor ook geldt $2x + 3y < 9$.
- Kies een punt aan de andere kant van lijn k en ga na dat voor dit punt geldt $2x + 3y > 9$.
- Het gebied onder lijn k kun je aangeven met de ongelijkheid $2x + 3y < 9$.
Geef de ongelijkheid van het gebied boven lijn k .



Theorie A Ongelijkheden en halfvlakken

De lijn l : $2x - 5y = 10$ verdeelt het vlak in twee **halfvlakken**. De grafiek van de ongelijkheid $2x - 5y < 10$ is het halfvlak dat bestaat uit alle punten waarvoor de uitkomst van $2x - 5y$ kleiner is dan 10. Dit is het gebied boven lijn l dat met blauw in de figuur hiernaast is aangegeven.



Om na te gaan dat de ongelijkheid $2x - 5y < 10$ bij het gebied boven lijn l hoort, hoef je voor slechts één punt $2x - 5y$ te berekenen. Kies hiervoor een punt dat niet op de lijn ligt. Het rekt makkelijk als je het punt $(0, 0)$ kiest. De berekening wordt dan $2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0$ en dit is inderdaad kleiner dan 10. Dus alle punten die aan dezelfde kant van lijn l liggen als $(0, 0)$, vormen het halfvlak $2x - 5y < 10$. Alle punten die aan de andere kant van lijn l liggen vormen dus het halfvlak $2x - 5y > 10$. De lijn $2x - 5y = 10$ noemen we de grenslijn.

De grafiek van $2x + 3y \geq 6$ is een **halfvlak met rand**. De rand is de lijn $2x + 3y = 6$. Bij het tekenen van een halfvlak met rand geef je de rand dezelfde kleur als het halfvlak. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Teken de grafiek van $2x + 3y \geq 6$.

Aanpak

Teken eerst de grenslijn $2x + 3y = 6$. Kies vervolgens een punt dat niet op de lijn ligt en ga na of dit punt aan de ongelijkheid $2x + 3y \geq 6$ voldoet. Teken daarna het juiste gebied.

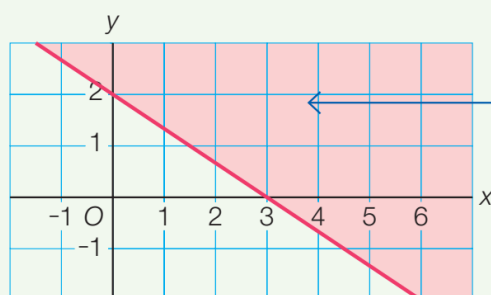
Uitwerking

$$2x + 3y = 6$$

x	0	3
y	2	0

$\nlessgtr$ betekent 'is niet groter dan of gelijk aan'

$$(0, 0) \text{ geeft } 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \nlessgtr 6$$



Kleur het gebied waar $(0, 0)$ niet in ligt.

2 Teken in verschillende figuren de grafiek van

- a** $x + 2y \geq 6$ **b** $x - y \leq 2$ **c** $x \geq 3$ **d** $y \leq 2$

3 Keshi gaat de grafiek van $2x + y \leq 0$ tekenen.

- a** Waarom kun je $(0, 0)$ niet gebruiken om het juiste gebied te bepalen?
b Kies een geschikt punt en teken de grafiek van $2x + y \leq 0$.

A4 Teken in verschillende figuren de grafiek van

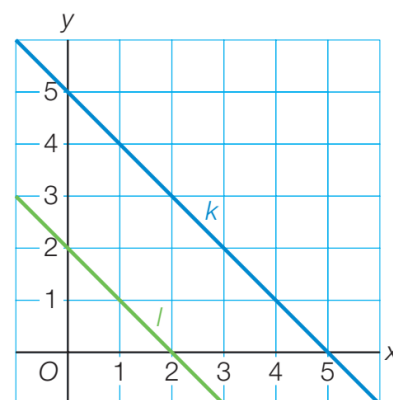
- a** $3x + 4y \leq 12$ **b** $x - y \geq 0$ **c** $y \geq 3x$ **d** $y \leq 4 - x$

5 Hiernaast zijn de lijnen $k: x + y = 5$ en $l: x + y = 2$

getekend. Voor het halfvlak boven lijn l geldt $x + y > 2$ en voor het halfvlak onder lijn k geldt $x + y < 5$.

Voor punten die in beide halfvlakken liggen, geldt dus $2 < x + y < 5$.

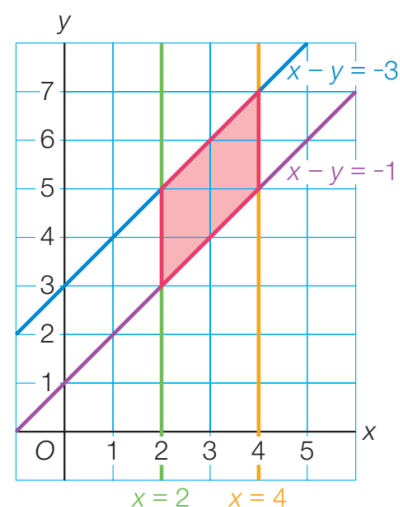
- a** Waar liggen deze punten?
b Teken het gebied waarvoor geldt $2 \leq x + y \leq 5$.



6 Voor het rode gebied in de figuur hiernaast geldt

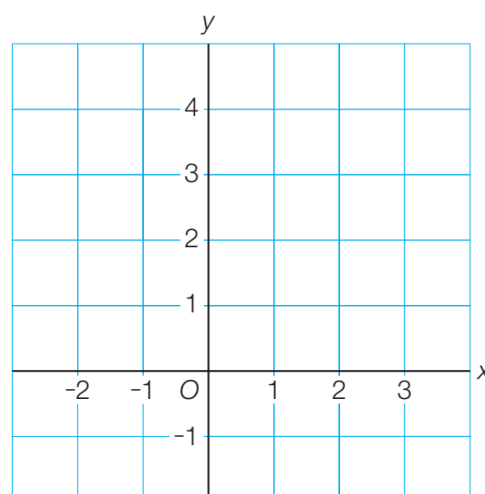
$2 \leq x \leq 4$ en $-3 \leq x - y \leq -1$.

- a** Licht dit toe.
b Teken het gebied waarvoor geldt $0 \leq x \leq 2$ en $5 \leq y \leq 7$.
c Teken het gebied waarvoor geldt $x - y \geq -1$, $x \leq 2$ en $y \geq 0$.

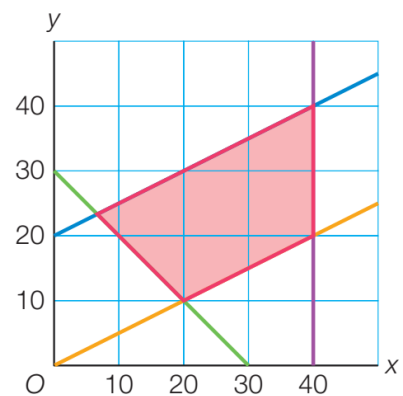


7 Teken het gebied waarvoor geldt $1 \leq y \leq 4$ en

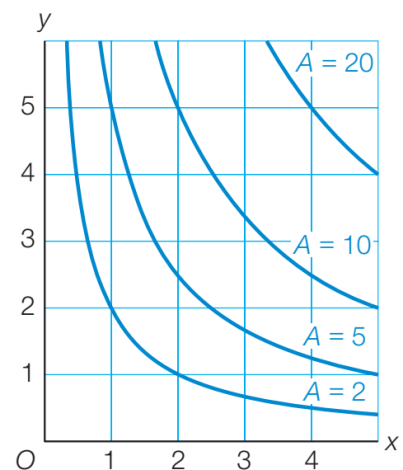
$2x + 3y \geq 6$.



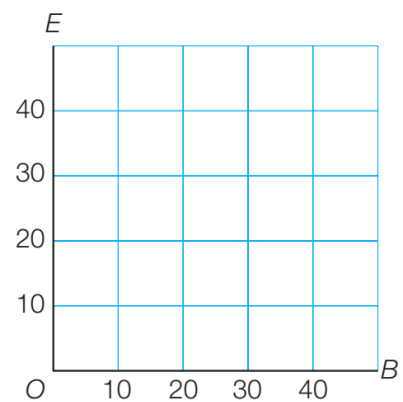
- 8** Zie het gebied hiernaast.
***** Schrijf de ongelijkheden op die bij dit gebied horen.



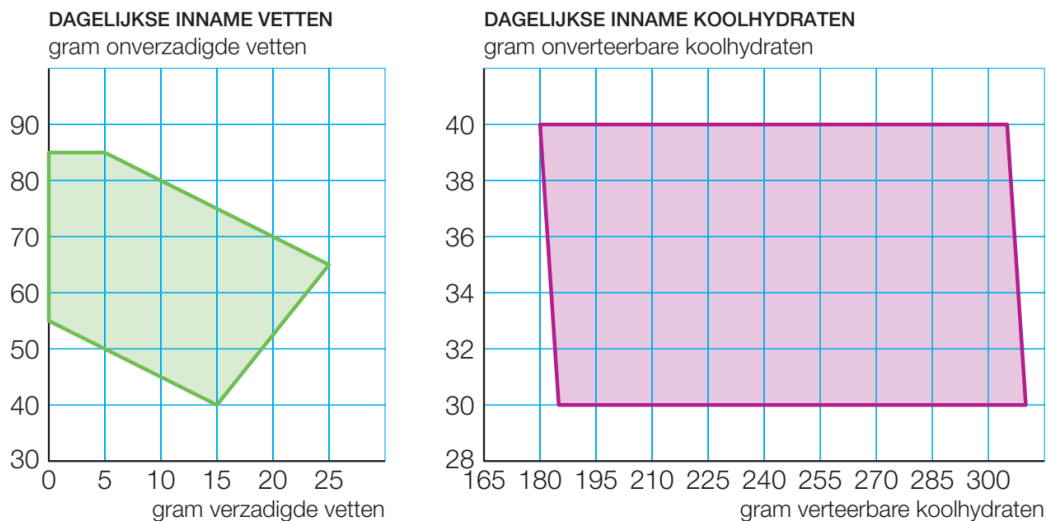
- 9** Gegeven zijn de formules $A = xy$ en $B = 2x - y$. Hiernaast is voor enkele waarden van A de grafiek getekend.
***** Teken het gebied waarvoor geldt $2 \leq A \leq 10$ en $0 \leq B \leq 4$.



- A10** In een nieuw aan te leggen plantsoen wil men beuken en eiken planten. Er is plaats voor maximaal 40 bomen.
***** Verder wil men minimaal 10 en ten hoogste 25 eiken en ook minstens evenveel eiken als beuken.
 Noem het aantal beuken B en het aantal eiken E .
a Welke ongelijkheden horen bij de situatie?
b Teken het gebied dat bij de ongelijkheden van vraag a hoort.
c Onderzoek met het gebied van vraag b hoeveel beuken men nog maximaal kan planten als wordt gekozen voor 15 eiken.



In ons voedsel zitten voedingsstoffen, zoals vetten en koolhydraten. Ons lichaam haalt energie uit deze voedingsstoffen. Vetten kun je indelen in verzadigde en onverzadigde vetten. In het algemeen geldt dat onverzadigde vetten gezonder zijn. Koolhydraten kun je indelen in verteerbare koolhydraten (zoals suikers) en onverteerbare koolhydraten (zoals vezels). Stef heeft advies van een diëtist gekregen over de dagelijkse hoeveelheid vetten en koolhydraten die hij zou moeten consumeren. Zie de gebieden hieronder.



Onderzoek met behulp van de figuren wat voor Stef

- a de minimale dagelijkse hoeveelheid verteerbare koolhydraten is
- b het maximum van het totale dagelijkse aantal gram vetten is.

Stef consumeert regelmatig meer dan 7,5 keer zoveel verteerbare koolhydraten als onverteerbare.

- c Teken in de figuur rechtsboven het gebied dat hierbij hoort en dat aan het advies van de diëtist voldoet.

Behalve uit vetten en koolhydraten haalt men ook energie uit eiwitten. Een eenheid voor energie is kilocalorie (kcal). In de tabel staat hoeveel kcal verschillende voedingsstoffen per gram opleveren. Stef heeft een dagelijkse energiebehoefte van minimaal 2000 kcal.

- d Hij consumeert op een dag 230 gram koolhydraten, waarvan 30 gram onverteerbaar. Verder eet hij 60 gram vetten waarvan 10 gram verzadigd. De rest van zijn energie komt uit eiwitten. Bereken hoeveel gram eiwitten hij deze dag binnenkrijgt als hij aan zijn energiebehoefte voldoet.
- e Wat betreft eiwitten is het advies om tussen de 50 en 150 gram per dag te consumeren. Stef wil zich aan alle adviezen houden. Verder wil hij zo min mogelijk verteerbare koolhydraten en zoveel mogelijk onverzadigde vetten consumeren. Onderzoek of hij aan zijn energiebehoefte kan voldoen.

vetten (verzadigd of onverzadigd)	9 kcal/gram
koolhydraten (verteerbaar)	4 kcal/gram
koolhydraten (onverteerbaar)	2 kcal/gram
eiwitten	4 kcal/gram

A12

Stijn heeft een wiskundig model bedacht om bij de eindstand van een voetbalwedstrijd in een getal S uit te drukken hoe spectaculair de wedstrijd was. De formule is $S = (x + 1)(y + 1)$. Hierin zijn x en y de aantallen doelpunten die respectievelijk door de thuisploeg en de uitploeg zijn gemaakt.

Bij een eindstand 2-3 heeft de thuisploeg twee doelpunten gemaakt en de uitploeg 3 doelpunten.

- a** Toon aan dat een wedstrijd met eindstand 2-3 volgens het model spectaculairder is dan een wedstrijd met eindstand 1-4.

Zie de grafiekenbundel hiernaast.

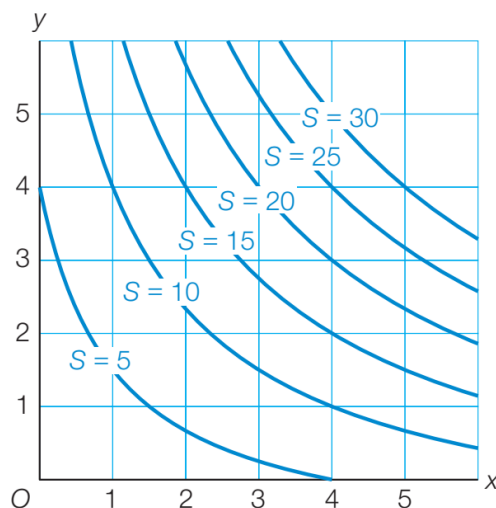
- b** Bepaal met behulp van de figuur alle eindstanden waarvoor geldt $S < 5$.

Voor het totale aantal doelpunten T geldt $T = x + y$.

- c** Licht dit toe.
d Onderzoek met behulp van de figuur of $T = 6$ een waarde van $S = 15$ op kan leveren.
e Licht met behulp van de figuur toe dat bij gelijkspel $S = 30$ niet mogelijk is.

Stijn gaat naar een thuiswedstrijd van zijn favoriete team: de Grote Rakkers. Hij verwacht dat er in totaal niet meer dan vijf doelpunten gemaakt zullen worden en dat zijn team niet zal verliezen. Verder verwacht hij geen hele spectaculaire wedstrijd, dus dat $5 \leq S \leq 10$.

- f** Teken het gebied bij de verwachting van Stijn en onderzoek welke eindstanden hierbij horen.



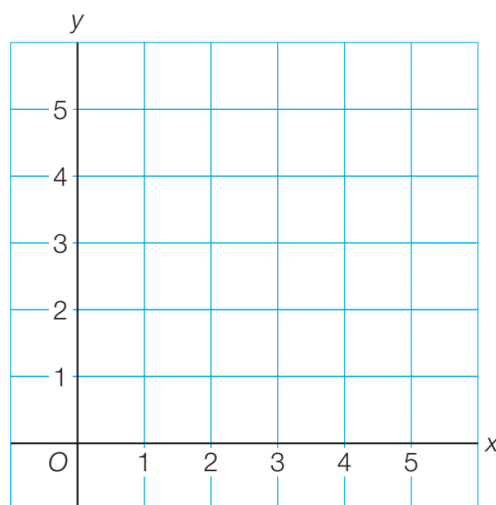
Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met ongelijkheden en de bijbehorende gebieden.

► **OPGAVE C1**
THEORIE A

C1

Teken het gebied waarvoor geldt $x \leq 5$ en $1 \leq y \leq 4$ en $2x + y \geq 6$.



Antwoorden

C1 *

11.2 Herleiden en vrijmaken

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met de rekenregels voor wortels.
- Je kunt variabelen vrijmaken in formules met een wortel.

○13

□ ⊗ *

- a Bereken $\sqrt{3^2}$, $\sqrt{4^2}$ en $\sqrt{5^2}$. Wat valt je op?
- b Bereken $\sqrt{4 \cdot 9}$ en $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$. Wat valt je op?
- c Bereken $\sqrt{\frac{64}{16}}$ en $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}}$. Wat valt je op?

Theorie A Rekenregels voor wortels

In opgave 13 heb je enkele voorbeelden van rekenregels voor wortels ontdekt. Je kunt ze gebruiken om formules met wortels te herleiden.

Rekenregels voor wortels

$$\sqrt{a^2} = a \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Andersom geldt ook

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{en} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

De formule $A = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{5q}$ kun je als volgt herleiden.

$$A = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{5q} = \sqrt{2p \cdot 5q} = \sqrt{10pq}$$

Verder kun je nog de factor 10 uit het wortelteken halen. Je herleidt dan tot de vorm $A = c\sqrt{pq}$. Je krijgt $A = \sqrt{10pq} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{pq} \approx 3,16\sqrt{pq}$. Waarbij c is afgerond op twee decimalen.

Bij het herleiden van de formule $B = \sqrt{16k}$ tot de vorm $B = c\sqrt{k}$ hoef je c niet af te ronden: $B = \sqrt{16k} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{k} = 4\sqrt{k}$.

Je kunt ook een factor onder het wortelteken brengen. Zo is de formule $C = 3\sqrt{x}$ te schrijven in de vorm $C = \sqrt{ax}$.

Je krijgt $C = 3\sqrt{x} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{9x}$.

$$3 = \sqrt{3^2} = \sqrt{9}$$

Voorbeeld

- a** Schrijf het rechterlid van de formule $L = \sqrt{3p} \cdot \sqrt{1,5q}$ als één wortel.
- b** Schrijf de formule $M = 5,3\sqrt{12,6t}$ in de vorm $M = c\sqrt{t}$. Rond c af op één decimaal.
- c** Schrijf de formule $N = 2,5\sqrt{\frac{1,2}{x}}$ in de vorm $N = \sqrt{\frac{a}{x}}$.

Uitwerking

- a** $L = \sqrt{3p} \cdot \sqrt{1,5q} = \sqrt{3p \cdot 1,5q} = \sqrt{4,5pq}$
- b** $M = 5,3\sqrt{12,6t} = 5,3 \cdot \sqrt{12,6} \cdot \sqrt{t} \approx 18,8\sqrt{t}$

Dus $M = 18,8\sqrt{t}$.

c $N = 2,5\sqrt{\frac{1,2}{x}} = \sqrt{6,25} \cdot \sqrt{\frac{1,2}{x}} = \sqrt{6,25 \cdot \frac{1,2}{x}} = \sqrt{\frac{7,5}{x}}$

$2,5 = \sqrt{2,5^2} = \sqrt{6,25}$

$\frac{6,25}{1} \cdot \frac{1,2}{x} = \frac{6,25 \cdot 1,2}{1 \cdot x}$

- 14** Schrijf het rechterlid van de formule als één wortel en herleid zo mogelijk.



- a** $A = \sqrt{3a} \cdot \sqrt{5b}$ **c** $C = 5 \cdot \sqrt{3x} \cdot \sqrt{12y}$
- b** $B = \frac{\sqrt{10a}}{\sqrt{5}}$ **d** $D = \frac{\sqrt{20x}}{\sqrt{2y}}$

- 15** Bepaal door te herleiden welke van de twee rechthoeken de grootste oppervlakte heeft.



$\sqrt{3a}$
 $\sqrt{5a}$

I

$\sqrt{2a}$
 $\sqrt{7a}$

II

$2\sqrt{b}$
 $\sqrt{6b}$

I

$\sqrt{5b}$
 $\sqrt{5b}$

II

$\sqrt{3c+1}$
 $\sqrt{3}$

I

$\sqrt{c}$
3

II

a
b
c

- 16** **a** Schrijf de formule $P = 0,04\sqrt{225x}$ in de vorm $P = a\sqrt{x}$.



- b** Schrijf de formule $Q = \frac{3\sqrt{p} \cdot \sqrt{8p}}{\sqrt{0,05p}}$ in de vorm $Q = \sqrt{ap}$.
- c** Schrijf de formule $R = 2\sqrt{2p} \cdot \sqrt{8p}$ in de vorm $R = ap$.

- 17** Schrijf de volgende formules in de vorm $F = c\sqrt{ab}$.



Rond c zo nodig af op twee decimalen.

- a** $F = \sqrt{5a} \cdot \sqrt{6b}$ **c** $F = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2a} \cdot \sqrt{3b}$ **e** $F = 3\sqrt{ab} + 4\sqrt{ab}$
- b** $F = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3ab}$ **d** $F = 6\sqrt{3a} \cdot \sqrt{7b}$ **f** $F = \sqrt{25ab} - \sqrt{9ab}$

A18

a Toon aan dat $N = \sqrt{\frac{27x^3y}{3xy}}$ is te schrijven als $N = 3x$.

b Schrijf $M = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12a}}$ in de vorm $M = \frac{1}{c\sqrt{a}}$.

A19

Laat je een steen van een brug in het water vallen, dan kun je berekenen hoelang de steen erover doet om het water te raken. Er geldt namelijk $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ met t de tijd in seconden en h de hoogte van de brug in meter. Op aarde geldt $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

a Schrijf de formule in de vorm $t = c\sqrt{h}$. Rond c af op twee decimalen.

b Shaz staat op een brug van 84 meter hoog en laat een steen vallen.

Bereken in seconden nauwkeurig hoelang de steen erover doet om het water te raken.

c Uit de formule volgt dat de tijd met een vast percentage toeneemt als de hoogte van de brug verdubbelt.

Onderzoek met welk percentage de tijd dan toeneemt.



Voorkennis Vrijmaken bij formules met breuken

Voor het vrijmaken van variabelen in formules met breuken ken je

het kruislings vermenigvuldigen: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ geeft $A \cdot D = B \cdot C$

en de wisseleigenschap: $P = \frac{Q}{R}$ geeft $R = \frac{Q}{P}$.

Voorbeeld

Maak x vrij.

a $\frac{1}{x} = \frac{4}{y}$

b $y = \frac{3}{x-1}$

Uitwerking

a $\frac{1}{x} = \frac{4}{y}$
 $4x = y$
 $x = 0,25y$

kruislings vermenigvuldigen

b $y = \frac{3}{x-1}$
 $x-1 = \frac{3}{y}$
 $x = \frac{3}{y} + 1$

wisseleigenschap

V2 Maak y vrij.

a $x = \frac{4}{y+2}$

b $\frac{y}{2x} = \frac{4x+7}{4}$

O20 **a** Wat is $(\sqrt{3})^2$ en $(\sqrt{4})^2$? En wat is $(\sqrt{x})^2$?

b Maak x vrij in de formule $y = \sqrt{x}$ door het linker- en rechterlid te kwadrateren.

Theorie B Variabelen vrijmaken in formules met wortels

De regel $(\sqrt{a})^2 = a$ kun je gebruiken om bij $\sqrt{a} = b$ de wortel weg te werken. Kwadrateer het linker- en rechterlid. Je krijgt $(\sqrt{a})^2 = b^2$ en dit geeft $a = b^2$.

$$\sqrt{a} = b \text{ geeft } a = b^2$$

Deze regel gebruik je ook om bij de formule $F = 2\sqrt{G}$ de variabele G uit te drukken in F . Voordat je de regel kan toepassen, zorg je ervoor dat de wortel apart staat. Je krijgt

$$2\sqrt{G} = F$$

Deel links en rechts door 2 om de vorm $\sqrt{a} = b$ te krijgen.

$$\sqrt{G} = 0,5F$$

Kwadrateer het linker- en rechterlid.

$$G = (0,5F)^2$$

Gebruik $(ab)^p = a^p b^p$.

$$G = 0,25F^2.$$

Voorbeeld

Schrijf formule $G = 10\sqrt{\frac{2}{k}}$ in de vorm $k = \frac{a}{G^2}$.

Uitwerking

$$10\sqrt{\frac{2}{k}} = G$$

Deel links en rechts door 10.

$$\sqrt{\frac{2}{k}} = 0,1G$$

Kwadrateer het linker- en rechterlid.

$$\frac{2}{k} = 0,01G^2$$

Gebruik de wisseleigenschap.

$$\frac{2}{0,01G^2} = k$$

Vermenigvuldig teller en noemer met 100.

$$\frac{200}{G^2} = k, \text{ dus } k = \frac{200}{G^2}$$

21 a Maak S vrij bij de formule $R = 5\sqrt{2S}$.



b Schrijf de formule $P = \sqrt{\frac{Q}{1,8}}$ in de vorm $Q = a \cdot P^2$.

22 a Schrijf de formule $B = 0,5\sqrt{\frac{20}{Q}}$ in de vorm $Q = a \cdot B^n$.



b Maak R vrij bij de formule $\frac{5}{H} = \frac{3}{\sqrt{R}}$.

23 Gegeven is de formule $y = m\sqrt{n}$.



a Neem $n = 10x$ en $m = \frac{1}{3}$ en maak x vrij.

b Neem $n = 1,44x^2$ en $m = 4x^2$ en schrijf in de vorm $y = ax^n$.

24 Combineer de formules $K = \sqrt{p}$ en $n = p + K$ tot $n = K(K + 1)$.



A25 Merel bouwt slingerklokken. Voor de tijd die een slinger erover doet om één keer heen en weer te slingeren geldt $T = \pi \cdot \sqrt{0,408 \cdot l}$. Hierin is T de slingertijd in seconden en l de lengte van de slinger in meter.



De formule is te herleiden tot de vorm $T = a \cdot \sqrt{l}$.

a Bereken a . Rond af op drie decimalen.

b Merel bouwt een klok met een slinger van 99,4 cm lang.

Ga na dat de slingertijd ongeveer 2 seconden is.

De formule $T = \pi \cdot \sqrt{0,408 \cdot l}$ is te schrijven in de vorm $l = b \cdot T^2$ met $b \approx 0,2483$.

c Bereken b afgerond op vijf decimalen.

d Merel wil een klok bouwen met een slingertijd van een halve seconde.

Bereken de lengte van de slinger in mm nauwkeurig.



Informatie Is een wortel een macht?

Het is je misschien opgevallen dat de regel $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ voor wortels lijkt op de regel $(ab)^p = a^p b^p$ voor machten. Dat is geen toeval. De wortel $\sqrt[p]{p}$ kun je namelijk schrijven als de macht $p^{0,5}$.

Elke wortel is als macht te schrijven en andersom. Hiermee is ook de regel $\sqrt{a^2} = a$ aan te tonen. Kijk maar: $\sqrt{a^2} = (a^2)^{0,5} = a^1 = a$.

De regel $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ volgt direct uit de regel $(ab)^p = a^p b^p$:
 $\sqrt{ab} = (ab)^{0,5} = a^{0,5} b^{0,5} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met de rekenregels voor wortels.

☐ Ik kan variabelen vrijmaken in formules met een wortel.

► OPGAVE C2 EN C3
THEORIE A

► OPGAVE C4
THEORIE B

C2 a Herleid de formule $K = \sqrt{3x} \cdot \sqrt{4y}$ tot de vorm $K = \sqrt{axy}$.

b Herleid de formule $L = \frac{\sqrt{4pq}}{\sqrt{2p}}$ tot de vorm $L = \sqrt{aq}$.

c Herleid de formule $M = \sqrt{1,5s} \cdot \sqrt{6s}$ tot de vorm $M = as$.

C3 Gegeven is de formule $N = 1,8\sqrt{2,5x}$.

a Herleid de formule tot de vorm $N = a\sqrt{x}$. Rond a af op één decimaal.

b Herleid de formule tot de vorm $N = \sqrt{ax}$.

C4 Maak Q vrij bij $P = 25\sqrt{0,002Q}$.

Antwoorden

C2 a $K = \sqrt{12xy}$

b $L = \sqrt{2q}$

c $M = 3s$

C3 a $N = 2,8\sqrt{x}$

b $N = \sqrt{8,1x}$

C4 $Q = 0,8P^2$

11.3 Redeneren met formules

Kennis en vaardigheden

- Je kunt redeneren met allerlei verbanden.

Voorkennis Redeneren met groeiformules

Bij een redenering werk je stap voor stap toe naar een conclusie over de formule of de grafiek. Getallenvoorbeelden of een schets van de grafiek mogen geen onderdeel van je redenering zijn.

Bij het beredeneren wat de *grenswaarde* of het *verzadigingsniveau* is, begint de redenering met “Als t heel groot wordt, dan ...”

Als t heel groot wordt, dan

- wordt g^t heel groot als $g > 1$
- wordt $g^t \approx 0$ als $0 < g < 1$.

Bij het beredeneren of een grafiek stijgend of dalend is, begint de redenering met “Als t toeneemt, dan ...”

Als t toeneemt, dan

- neemt g^t toe als $g > 1$
- neemt g^t af als $0 < g < 1$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $N = \frac{60}{3 - 2 \cdot 0,85^t}$.

- Beredeneer wat de grenswaarde is.
- Beredeneer of de grafiek van N stijgend of dalend is.

Uitwerking

- Als t heel groot wordt, dan nadert $0,85^t$ tot 0, dus dan wordt $2 \cdot 0,85^t \approx 0$, dus dan wordt $3 - 2 \cdot 0,85^t \approx 3$.

Dus dan wordt $\frac{60}{3 - 2 \cdot 0,85^t} \approx 20$.

Dus de grenswaarde is 20.

- Als t toeneemt, dan neemt $0,85^t$ af, dus dan neemt $2 \cdot 0,85^t$ af, dus dan neemt $3 - 2 \cdot 0,85^t$ toe en dan neemt $\frac{60}{3 - 2 \cdot 0,85^t}$ af.

Dus de grafiek van N is dalend.

V3 a Beredeneer dat de grafiek van $A = 25 - \frac{2}{1,4^t}$ stijgend is.

- Beredeneer bij de formule $B = 7,5(2 + 0,79^t)$ wat de grenswaarde is.

026 Gegeven zijn de volgende formules.



I $y = 2 - x$ II $y = -2x$ III $y = x^2$ IV $y = \frac{2}{x}$ V $y = \sqrt{x}$

Stel dat x toeneemt en $x > 0$.

Geef bij elke formule aan of y dan toe- of afneemt.

Theorie A Redeneren met allerlei verbanden

In hoofdstuk 9 heb je geleerd te redeneren met formules waarin g^t centraal staat. Het is ook mogelijk te redeneren met formules waarin vormen zoals x^n of $\sqrt{x}$ voorkomen. Zie hieronder.

Als x toeneemt, dan

- neemt $\sqrt{x}$ toe
- neemt x^n toe als $n > 0$
- neemt x^n af als $n < 0$.

Als x heel groot wordt, dan

- wordt $\sqrt{x}$ heel groot
- wordt x^n heel groot als $n > 0$
- nadert x^n tot 0 als $n < 0$.

We nemen steeds aan dat $x > 0$, tenzij anders vermeld.

Voorbeeld

a Beredeneer dat de grafiek van $A = 100 - \frac{20}{3x+1}$ stijgend is.

b Beredeneer wat de grenswaarde van $B = \frac{10}{\sqrt{x}+1} + 5$ is.

Uitwerking

a Als x toeneemt, dan neemt $3x$ toe, dus $3x+1$ neemt dan toe, dus $\frac{20}{3x+1}$ neemt dan af en $100 - \frac{20}{3x+1}$ neemt dan toe.

Dus de grafiek van A is stijgend.

b Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot,

dus dan wordt $\sqrt{x}+1$ heel groot, dus dan wordt $\frac{10}{\sqrt{x}+1} \approx 0$ en

dan wordt $\frac{10}{\sqrt{x}+1} + 5 \approx 5$.

Dus de grenswaarde is 5.

27 **a** Beredeneer dat de grafiek van $P = 3,5 \cdot \sqrt{x} - 2$ stijgend is.



b Beredeneer wat de grenswaarde van $Q = 2 - \frac{10}{x^2+1}$ is.

c Beredeneer of de grafiek van $R = \frac{20}{2x+3} + 50$ stijgend of dalend is.

28 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.



a $A = 40 + \frac{80}{2 + \sqrt{x}}$

b $B = \frac{18\,000}{250 + 333 \cdot 0,65^x}$

c $C = 1,02 - 0,85x^{-0,4}$

A29 **a** Gegeven is de formule $K = -2 + 9\sqrt{\frac{1}{6L}}$.



Beredeneer dat K toeneemt als L afneemt.

b Gegeven zijn de formules $M = 0,5^{-N}$ en $M = \frac{1}{P}$.

Neem aan dat N toeneemt. Beredeneer of P dan toe- of afneemt.

A30 Laurens heeft gemerkt dat fietsen met zachte banden veel zwaarder is dan met harde banden. Daarom onderzoekt hij de invloed van de bandenspanning op de rolweerstand. De grootte van de rolweerstand hangt af van een getal C . Hiervoor gebruikt Laurens de formule



$$C = 0,005 \cdot \left(\frac{4}{P}\right)^{0,7} \text{ met } P \text{ de}$$

bandenspanning in bar. Bij een lagere waarde van C hoort een kleinere rolweerstand.

De fabrikant van de fiets van Laurens adviseert een bandenspanning van 4 bar. Bij een bandenspanning van 3 bar is C ruim 22% groter dan bij een bandenspanning van 4 bar.

a Laat zien dat dit klopt.

b Beredeneer met de formule dat de rolweerstand toeneemt als de bandenspanning afneemt.

Voor de fietssnelheid s in km/uur geldt het model $s = \frac{V}{2180 \cdot C}$. Hierin is

V het vermogen dat de fietser levert in watt.

c Bij een bandenspanning van 4 bar is de fietssnelheid van Laurens hoger dan bij een bandenspanning van 3 bar.

Onderzoek hoeveel kilometer per uur het scheelt. Neem aan dat Laurens een vermogen levert van 300 watt. Rond af op gehelen.

d Beredeneer met beide formules dat voor personen die hetzelfde vermogen leveren een hogere bandenspanning tot een hogere snelheid leidt.



31

⊙*

a Gegeven is de formule $A = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$.

Vul *toe* of *af* in.

Als x toeneemt, dan neemt $1-x$

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$

Van $\frac{1-x}{\sqrt{x}}$ neemt de teller en de noemer,

dus $\frac{1-x}{\sqrt{x}}$ neemt

Dus de grafiek van A is dalend.

b Beredeneer of de grafiek van $B = x\left(3 + \frac{x}{22}\right)$ stijgend of dalend is.

c Beredeneer of de grafiek van $C = \frac{x^{2,3} + 1}{20 \cdot 0,3^x}$ stijgend of dalend is.

A32

⊙*

Gegeven is de formule $P = 0,2 \cdot \frac{(500 - Q) \cdot R}{0,5 \cdot S}$ met $R > 0$.

Q en P nemen toe en R blijft gelijk.

Beredeneer of S dan toe- of afneemt.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan redeneren met allerlei verbanden.

► OPGAVE C5
THEORIE A

C5

a Beredeneer of bij $y = \frac{12}{2 + \sqrt{x}} + 5$ een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.

b Gegeven is de formule $P = 100 - \frac{20}{6} \cdot (50 - N)$.

Beredeneer dat P afneemt als N afneemt.

Antwoorden

C5 a dalend

5

b *

11.4 Formulevaardigheden

Kennis en vaardigheden

- Je kunt formulevaardigheden toepassen in allerlei situaties.

Voorkennis Herleiden van breuken

Bij het herleiden van formules met breuken gebruik je:

• $\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{ab}{3} = \frac{ab}{3a} = \frac{1}{3}b$$

- Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

$$\frac{3}{x} : \frac{y}{2} = \frac{3}{x} \cdot \frac{2}{y} = \frac{6}{xy}$$

- Om breuken op te tellen of af te trekken, maak je ze eerst gelijknamig.

$$\frac{3}{2q} + \frac{1}{p} = \frac{3p}{2pq} + \frac{2q}{2pq} = \frac{3p + 2q}{2pq}$$

V4 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.

a $A = \frac{1}{x} + \frac{y}{2x}$

d $D = \frac{4}{a} - \frac{3}{b}$

b $B = \frac{2b}{a} \cdot \frac{3}{4}$

e $E = 5 + \frac{2}{x}$

c $C = \frac{3p}{2} : \frac{5q}{p}$

f $F = y \cdot \frac{2}{x}$

Voorkennis Herleiden van machten

Bij het herleiden van formules met machten gebruik je de volgende rekenregels.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$3x^4 \cdot 2x^6 = 6x^{10}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$(pq^3)^2 = p^2 q^6$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$\frac{a^3 b^5}{a^3 b^4} = a^0 b^1 = b$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

$$\left(\frac{2x}{y}\right)^3 = \frac{8x^3}{y^3}$$

$$a^0 = 1 \text{ en } b^1 = b$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(4y^3)^2 = 16y^6$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$5d^{-4} = \frac{5}{d^4}$$

Verder gebruik je deze regels ook bij het herleiden van exponentiële

verbanden: $N = \frac{2}{3 \cdot 0,8^t} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{0,8^t} = \frac{2}{3} \cdot 0,8^{-t} = \frac{2}{3} \cdot (0,8^{-1})^t \approx 0,67 \cdot 1,25^t$.

V5 Herleid de formule.

a $P = (-2a^4)^2 \cdot a^3$

d $S = 20(a^5)^2 - (3a^5)^2$

b $Q = x^{-2} \cdot \frac{x^7}{x^2}$

e $T = (x^{0,34} \cdot x^{1,04})^{2,5}$

c $R = 3(pq)^6 \cdot p$

f $U = \frac{(ab)^{1,2}}{a^{0,2}}$

V6 **a** Schrijf de formule $K = 3,2 \cdot \frac{5,6}{4 \cdot 1,25^t}$ in de vorm $K = b \cdot g^t$.

b Toon aan dat $L = 25^{0,5x-1}$ is te herleiden tot $L = 0,04 \cdot 5^x$.

c Herleid $M = \frac{3y + 4y^{1,2}}{2y}$ tot de vorm $M = a + by^c$.

Voorkennis Substitueren en combineren

Je kunt de formule $q = 5p + 30$ substitueren in de formule $K = 2p + 3q$.

Je krijgt dan een formule voor K uitgedrukt in p , namelijk

$$K = 2p + 3(5p + 30) = 2p + 15p + 90 = 17p + 90.$$

Na combineren herleid je.

Met dezelfde gegevens kun je ook een formule voor K uitgedrukt in q krijgen. Je maakt dan eerst p vrij bij $q = 5p + 30$.

Dus $q = 5p + 30$

$$5p + 30 = q$$

$$5p = q - 30$$

$$p = 0,2q - 6$$

Daarna substitueer je $p = 0,2q - 6$ in $K = 2p + 3q$.

$$K = 2p + 3q$$

$$p = 0,2q - 6$$

$$K = 2(0,2q - 6) + 3q$$

$$K = 0,4q - 12 + 3q$$

$$K = 3,4q - 12$$

Door p te vervangen,
verdwijnt p uit de formule.

En zo is K uitgedrukt in q .

V7 **a** Gegeven zijn de formules $R = 3p - 4q + 5$ en $p = 1,5q + 2$.

Schrijf de formule van R in de vorm $R = aq + b$.

b Gegeven zijn de formules $C = 2a - 3b + 64$ en $5a - 8b = 160$.

Druk C uit in a .

c Combineer de formules $K = p^2 + 5q^6$ en $p = -5q^3$ tot de vorm $K = aq^n$.

Theorie A Allerlei formules herleiden

In de volgende opgaven ga je gemengd oefenen met de vaardigheden die je hebt opgedaan voor herleiden en vrijmaken bij formules.

33

□ ⊗ *

- a Schrijf het rechterlid van de formule $M = \frac{5}{t} - 3t$ als één breuk.
- b Combineer de formules $R = \frac{0,5p + 5}{q}$ en $p = q^2 - 8q$ tot $R = 0,5q - 4 + \frac{5}{q}$.
- c Schrijf de formule $N = \frac{423}{5 \cdot 1,3^t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond g af op drie decimalen.
- d Combineer de formules $P = 20 + \frac{n}{5}$ en $n = 3 - 2t$ tot de vorm $P = at + b$.
- e Herleid de formule $P = \left(\frac{5,1x^{1,6}}{3x^{1,7}}\right)^4$ tot de vorm $P = ax^b$. Rond a af één decimaal.

A34

□ ⊗ *

- a Toon aan dat de formule $N = \frac{3t^{-1,12}}{2t} \cdot t^{3,15}$ te herleiden is tot $N = 1,5t^{1,03}$.
- b Herleid de formule $F = \frac{100}{6 + K}$ tot de vorm $K = \frac{a}{F} + b$.
- c Herleid de formule $M = \frac{1}{3} \cdot \frac{2t+1}{5} \cdot \frac{6}{t+1}$ tot $M = \frac{4t+2}{5t+5}$.
- d Druk x uit in y vrij bij $2(x-5) - 3(y+1) = 15$.
- e Combineer de formules $1,5A = 6 - 0,6\sqrt{N}$ en $B = N - 1$ tot de vorm $B = (aA + b)^2 + c$.
- f Maak A vrij bij $\frac{4A}{3(2t-20)} = 16$.
- g Gegeven is de formule $H = \frac{5pq}{12(6-r)}$.
Neem $H = 15$ en $q = 6$ en herleid de formule tot de vorm $p = ar + b$.
- h Gegeven is de formule $L = t^2 \cdot \frac{5-x}{5y} + 6$.
Neem $L = 16$ en $t = 5$ en herleid de formule tot de vorm $y = ax + b$.

A35

*

- a Herleid $A \cdot \left(2 - \frac{x}{50}\right) = 1$ tot de vorm $x = a + \frac{b}{A}$.
- b Schrijf het rechterlid van $N = \frac{5}{t+1} - \frac{4}{t}$ als één breuk en herleid de teller.
- c Herleid $8 - \frac{2y}{x+6} = x$ tot de vorm $y = ax^2 + bx + c$.
- d Combineer $F = \frac{2}{5} \cdot \frac{1-p-q}{16} : \frac{1-p}{10}$ en $q = 0,5p$ tot de vorm $F = \frac{3q+a}{8q+b}$.
- e Herleid de formule $P = \sqrt{30Q} - \sqrt{5Q}$ tot de vorm $P = a\sqrt{Q}$. Rond a af op twee decimalen.

Theorie B Formulevaardigheden

In de volgende opgaven ga je gemengd oefenen met allerlei formulevaardigheden en het gebruik van de GR. Op bladzijde 270 vind je het overzicht van de GR modules.

Voorbeeld

Twee onderzoekers hebben elk een model opgesteld voor het aantal diersoorten A in een natuurgebied voor de periode 2020-2050.

$A_I = -2,15t^2 + 71t + 750$ met t de tijd in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2020.

$A_{II} = \frac{1500}{1 + 1,02^{-m}}$ met m de tijd in maanden en $m = 0$ op 1 januari 2020.

- Toon aan dat $A_{II} \approx \frac{1500}{1 + 0,788^t}$ met t de tijd in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2020.
- Bereken het maximale aantal diersoorten volgens model I.
- In januari van welk jaar zijn er voor het eerst 10% minder diersoorten volgens model I dan volgens model II?

Uitwerking

- a** Er geldt $m = 12t$.

Controle: $t = 1$ geeft $m = 12$ en dat klopt: één jaar heeft 12 maanden.

$$A_{II} = \frac{1500}{1 + 1,02^{-m}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ m = 12t \end{array} \right\} A_{II} = \frac{1500}{1 + 1,02^{-12t}}$$

$$A_{II} = \frac{1500}{1 + (1,02^{-12})^t}$$

$$a^{pq} = (a^p)^q$$

$$A_{II} \approx \frac{1500}{1 + 0,788^t}$$

- b** Voer in $y_1 = -2,15x^2 + 71x + 750$.
De optie maximum geeft $y \approx 1336$.
Dus maximaal 1336 diersoorten.

Noteer de formule die je invoert op de GR en welke optie je gebruikt.

- c** Er moet gelden $A_I = 0,9 \cdot A_{II}$.

Controle: $A_{II} = 100$ geeft $A_I = 90$ en dat klopt: A_I is 10% minder dan A_{II} .

$$\text{Voer in } y_2 = 0,9 \cdot \frac{1500}{1 + 0,788^x}.$$

De optie snijpunt geeft $x = 17,9...$
Dus in januari van het jaar 2038.

R36 Zie het voorbeeld.



- Toon aan dat $A_I \approx -0,01493m^2 + 5,917t + 750$.
- Beredeneer wat het verzadigingsniveau van model II is.
- Het verzadigingsniveau van model II is groter dan het maximum van model I. Bereken hoeveel procent groter.
- In januari van welk jaar zijn er voor het eerst 10% meer diersoorten volgens model II dan volgens model I?

Winkels hebben van de artikelen die ze verkopen een bepaalde voorraad. Deze voorraad moet niet te groot zijn, want dan krijg je te maken met hoge voorraadkosten. Met de *formule van Camp* is de optimale bestelhoeveelheid Q te berekenen voor winkels die te maken hebben met een constante vraag naar een bepaald artikel.

Deze formule is $Q = \sqrt{\frac{2Bn}{V}}$. Hierin is

- B de bestelkosten per bestelling in euro's
 - n het aantal verkochte artikelen per jaar
 - V de voorraadkosten in euro's per stuk per jaar.
- a** Een winkel verkoopt per jaar 2400 vazen van een bepaald model. De bestelkosten zijn 15 euro per bestelling en de voorraadkosten per vaas per jaar zijn 5 cent.
- Bereken de optimale bestelhoeveelheid voor deze vazen.

De kosten voor het bestellen van strijkplanken zijn 25 euro en de voorraadkosten zijn 80 cent per strijkplank per jaar. Hiermee is de formule voor strijkplanken te schrijven in de vorm $Q = c\sqrt{n}$.

- b** Bereken c . Rond af op één decimaal.
- c** De optimale bestelhoeveelheid blijkt 100 strijkplanken te zijn.
- Bereken hoeveel strijkplanken per jaar worden verkocht.

Een bepaald soort gezichtsmasker moet gekoeld bewaard worden. Van deze gezichtsmaskers zijn de bestelkosten 50 euro en hangen de voorraadkosten af van het aantal verkochte artikelen. Hiervoor geldt $V = 150 \cdot n^{-1}$. Hiermee is de formule van Camp voor gezichtsmaskers te schrijven in de vorm $Q = d \cdot n$.

- d** Bereken d . Rond af op drie decimalen.
- e** Stel het aantal verkochte gezichtsmaskers per jaar wordt k keer zo groot.
- Wat voor effect heeft dat op de optimale bestelhoeveelheid?



A38

Het bedrijf Klienstra houdt zich bezig met het schoonhouden van grote gebouwen, zoals kantoren en scholen. Het tarief hangt af van de vloeroppervlakte van het schoon te maken gebouw. Voor oppervlakten tot 10 000 m² kun je het tarief berekenen met de formule $K = 27,5 + \frac{15}{x}$.

Hierin is K het bedrag in euro's per m² dat per jaar betaald moet worden en x de oppervlakte in duizenden m².

- Met hoeveel procent dalen de kosten per m² als de schoon te maken oppervlakte toeneemt van 1000 tot 1500 m²?
- Beredeneer met de formule dat het bedrag per m² afneemt naarmate de oppervlakte toeneemt.
- Een bedrijf wil voor het schoonmaken niet meer dan €29,50 per m² per jaar betalen. Wat weet je van de oppervlakte van dit bedrijf als ze met Klienstra in zee gaan?
- Klienstra maakt het kantoorgebouw van de firma Garantie & Risico schoon. Hiervan is de oppervlakte 2000 m². Hoeveel moet de firma per jaar aan schoonmaakkosten betalen?
- De totale jaarlijkse schoonmaakkosten J zijn te schrijven in de vorm $J = ax + b$. Bereken a en b .

A39

Een thermosfles wordt getest door deze te vullen met kokendheet water. Daarna wordt op verschillende tijdstippen de temperatuur van het water in de fles gemeten. Zie de tabel, waarin T de temperatuur in °C is na t minuten.

t	0	19	31	65
T	100	80	70	50

- Licht toe dat bij de tabel geen lineair verband hoort.

De onderzoeker gaat uit van het model $T = \frac{80}{1,015^t} + 20$.

- Schets de grafiek van T . Ga op de horizontale as tot $t = 120$.
- Controleer of het model bij benadering klopt met de gegevens.
- Wat is volgens het model de temperatuur in °C nauwkeurig na een uur?
- Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van het water in de thermosfles gedaald is tot 40 °C. Rond af op gehele.

Volgens het model neemt het water op den duur de temperatuur van de omgeving aan.

- Beredeneer dat deze omgevingstemperatuur 20 °C is.

Voor het verschil tussen de temperatuur van het water in de thermosfles en de omgevingstemperatuur geldt $V = T - 20$. Deze formule is te herleiden tot $V = 80 \cdot 0,98522^t$.

- Toon dit aan.
- Bereken de halveringstijd van V in minuten nauwkeurig.
- Schrijf de formule in de vorm $V = b \cdot g^k$ met k de tijd in kwartieren. Rond g af op drie decimalen.



A40

Bij een onderzoek naar de toestand van het Great Barrier Reef voor de noordoostkust van Australië is een formule opgesteld voor de temperatuur van het zeewater voor de kust. De formule is $F = 0,252m^2 - 3,06m + 84,2$. Hierin is F de temperatuur van het zeewater in graden Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) en m de tijd in maanden met $m = 0$ op 1 januari en $0 \leq m \leq 12$.

a Bereken hoeveel $^{\circ}\text{F}$ de minimale temperatuur van het zeewater is.

Voor het omrekenen van graden Fahrenheit naar graden Celsius ($^{\circ}\text{C}$)

gebruik je de formule $C = \frac{F - 32}{1,8}$. Hierin is C de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$

en F de temperatuur in $^{\circ}\text{F}$.

Deze formule is te schrijven als $F = 1,8C + 32$.

b Toon dit aan.

c Bereken in graden Celsius hoeveel de temperatuur van het zeewater afneemt tussen 1 februari en 1 april. Rond af op één decimaal.

De formule $F = 0,252m^2 - 3,06m + 84,2$ is om te zetten naar de formule $C = 0,14m^2 - 1,7m + 29$. Hierin is C de temperatuur van het zeewater in $^{\circ}\text{C}$.

d Toon dit aan.

**A41**

Zie opgave 40.

De formule $C = 0,14m^2 - 1,7m + 29$ is om te zetten naar een formule van de vorm $C = ad^2 + bd + 29$. Hierin is d de tijd in dagen met $d = 0$ op 1 januari.

Bereken a en b . Gebruik hierbij dat een maand gemiddeld 30,4 dagen heeft. Geef a en b in de wetenschappelijke notatie en rond af op twee decimalen.

De lengte L van de remweg van een auto in meter kan worden berekend met de

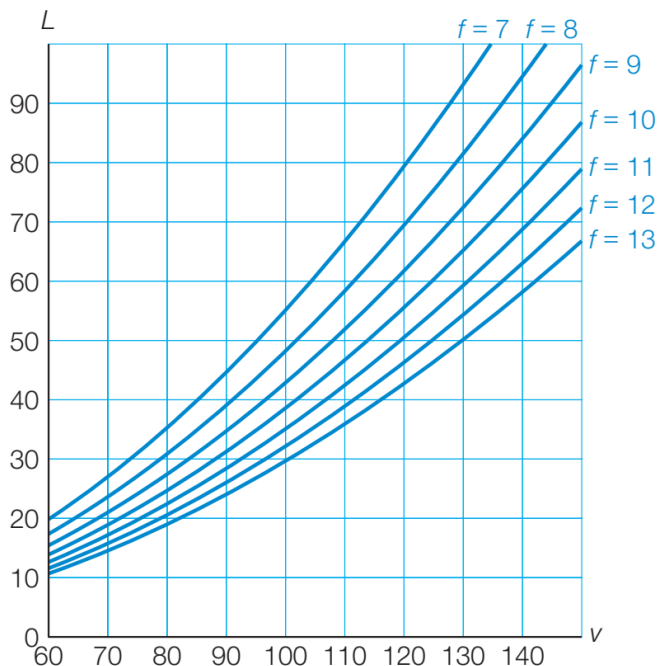
formule $L = \frac{v^2}{25,92f}$. Hierin is v de snelheid van de auto in km/uur op het moment dat er met remmen wordt begonnen. Verder is f een positief getal dat afhangt van allerlei factoren zoals het wegdek, de weersomstandigheden en de autobanden.

Hiernaast is een grafiekenbundel getekend voor verschillende waarden van f .

- Is een hoge of een lage waarde van f veiliger? Licht toe.
- Bij een snelheid van 50 km/uur is er sprake van een omgekeerd evenredig verband tussen L en f . Toon dit aan.
- Als de snelheid met een 20% toeneemt, neemt de remweg met een vast percentage toe. Onderzoek wat dit percentage is.
- Onder normale omstandigheden geldt op de A6 tussen Almere en Lelystad dat $9 \leq f \leq 12$. Auto's rijden hier tussen de 80 en 110 km/uur. Teken het gebied dat hierbij hoort.
- Bereken in meters nauwkeurig het verschil tussen de kortste en de langste remweg in het gebied van vraag d.

De formule wordt soms gebruikt om na een ongeluk te bepalen hoe snel een auto reed. Bijvoorbeeld door de lengte van een remspoor te meten.

- Schrijf de formule in de vorm $v = c\sqrt{L \cdot f}$. Rond c af op één decimaal.
- Na een ongeluk op een weg met een maximumsnelheid van 50 km/uur is door de politie bepaald dat de remweg tussen 25 en 30 meter lang was en dat $f = 11,5$. Bereken hoeveel km/uur de auto minstens te hard reed. Rond af op gehele.



Voor Nederlandse jongens bestaat er een lineair verband tussen de hoofdomtrek H in cm en de leeftijd L in jaren. Dit verband is van de vorm $H = 0,45L + c$. Hierbij is L tussen 6 en 18.

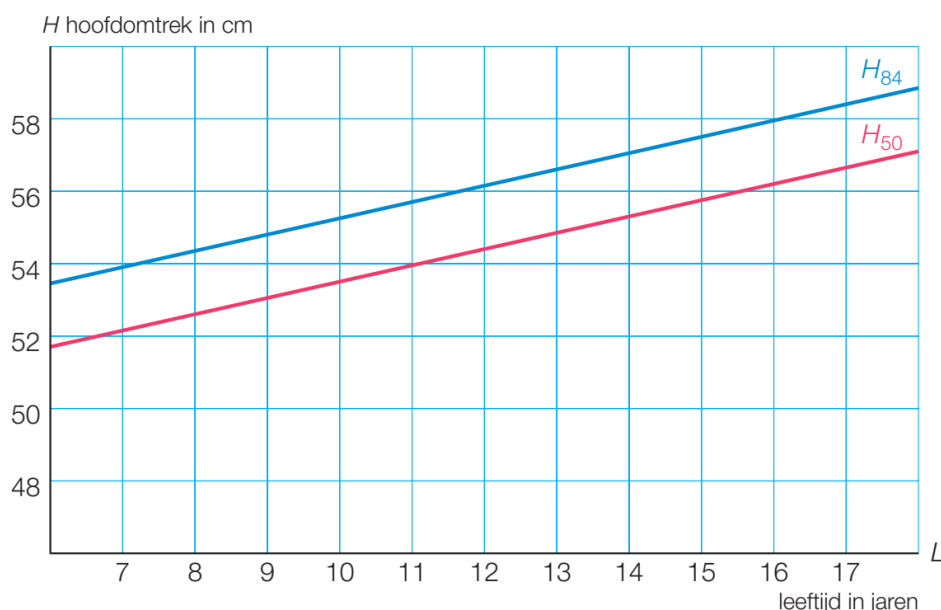
Voor jongens van dezelfde leeftijd is de hoofdomtrek normaal verdeeld.

De gemiddelde hoofdomtrek noteren we met H_{50} , omdat 50% van de jongens een kleinere hoofdomtrek heeft dan het gemiddelde. Er geldt $H_{50} = 0,45L + 49$.

a Bas is 16 jaar en heeft een hoofdomtrek van 58 cm.

Is zijn hoofdomtrek boven- of ondergemiddeld?

Hieronder zijn de lijnen $H_{50} = 0,45L + 49$ en $H_{84} = 0,45L + 50,75$ getekend.



De lijn H_{84} ligt één standaardafwijking boven de lijn H_{50} .

b Licht dit toe met de vuistregels bij de normale verdeling en onderzoek wat de standaardafwijking is.

c Geef de formule van H_{16} .

d Gebruik een vuistregel bij de normale verdeling om het gebied te tekenen waarin de hoofdomtrek van 95% van alle Nederlandse jongens van 12 tot en met 16 jaar ligt.

e Bas wil bij een bepaalde gemiddelde hoofdomtrek de leeftijd berekenen, daarom schrijft hij de formule van H_{50} in de vorm $L = aH_{50} + b$.

Bereken a en b . Rond a af op twee decimalen en b op gehele.

Het is van belang dat een schildpad voor ze aan haar winterslaap begint in een goede conditie verkeert. Als ze te licht is, dan is de kans groot dat ze door haar reserves heen raakt en sterft. Als ze te zwaar is heeft ze wellicht eitjes of gezondheidsproblemen. Deze opgave gaat over Griekse landschildpadden (*Testudo hermanni*). De conditie van deze schildpadden is te berekenen met de Jackson ratio $J = \frac{g}{l^3}$. Hierin is g het gewicht van de schildpad in gram en l de lengte in cm. In de tabel is voor verschillende waarden van J de conditie beschreven.

J	conditie
$\langle \leftarrow; 0,17 \rangle$	te licht
$\langle 0,17; 0,23 \rangle$	goed
$[0,23; \rightarrow]$	te zwaar



Schildpad Janet weegt 1195 gram en heeft een lengte van 19,2 cm.

a Laat zien dat Janet te licht is voor een winterslaap.

Bij $J = 0,21$ is er sprake van een ideale conditie.

b Druk g uit in l voor schildpadden in ideale conditie.

c Bereken hoeveel procent zwaarder Janet had moeten zijn voor een ideale conditie.

d Een schildpad met een lengte van 14,5 cm is in goede conditie. Wat weet je van het gewicht? Geef je antwoord in grammen nauwkeurig.

e Van twee schildpadden die hetzelfde gewicht hebben, is bekend dat de grootste een Jackson ratio van 0,17 heeft. Beredeneer met de formule of de kleinste schildpad te licht is of niet.

Bij een bepaald medicijn wordt de hoeveelheid werkzame stof W uitgedrukt in een getal. Bij de productie is de hoeveelheid werkzame stof 100. Als de hoeveelheid werkzame stof is gedaald tot 25, is het niet meer effectief.

Bij een bewaartemperatuur van 20°C is na 10 dagen de hoeveelheid werkzame stof nog 84. Neem aan dat er een lineair verband is tussen de hoeveelheid werkzame stof W_{20} bij een bewaartemperatuur van 20°C en de tijd t in dagen.

a Stel de formule op van W_{20} .

Ook na 26 dagen en na 52 dagen wordt W_{20} gemeten. Zie de tabel.

HOUDBAARHEID BIJ 20°C

t in dagen	0	10	26	52
W_{20}	100	84	64	41

b Toon aan dat de tabel niet in overeenstemming is met het lineaire model.

Bij de tabel past een model van de vorm $W_{20} = 100 \cdot g^t$ met $g \approx 0,983$.

c Toon aan dat $g \approx 0,983$. Gebruik de gegevens in de tabel bij $t = 0$ en $t = 52$.

d Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid werkzame stof per week af?

e Na hoeveel dagen is volgens het exponentiële model het medicijn niet meer effectief?

Bij een bewaartemperatuur van 4°C is het medicijn langer houdbaar.

Hiervoor is het model $W_4 = 110 - 5,83\sqrt{t} + 2,94$ opgesteld.

f Bereken W_4 voor $t = 52$. Wat is hiervan de praktische betekenis?

g Binnen een maand is er bij een bewaartemperatuur van 4°C al 25% meer werkzame stof over dan bij een bewaartemperatuur van 20°C . Onderzoek na hoeveel dagen dit het geval is. Rond af op gehelen.

h De $HF_{A \rightarrow B}$ (houdbaarheidsfactor van A naar B) is hoeveel keer zo lang het medicijn effectief blijft als je een bewaartemperatuur van $B^{\circ}\text{C}$ gebruikt in plaats van $A^{\circ}\text{C}$.

Bereken $HF_{20 \rightarrow 4}$. Rond af op één decimaal.



A46



De veelgebruikte vuistregel dat een hondenleeftijd keer zeven gelijk is aan een mensenleeftijd klopt niet. Uit deze vuistregel volgt bijvoorbeeld dat een hondenleeftijd van 2 jaar vergelijkbaar is met een mensenleeftijd van 14 jaar. In werkelijkheid is in dit geval een mensenleeftijd van ongeveer 40 jaar een veel betere schatting. Bovendien is er bij hondenleeftijden een verschil tussen kleine rassen (tot 15 kg), middelgrote rassen (15 tot 45 kg) en grote rassen (vanaf 45 kg).

In de tabel hiernaast zie je een omrekening die de situatie veel beter weergeeft.

Voor alle rassen kun je een model van de vorm $m = 30\sqrt{h} + ah$ gebruiken. Hierin is h de hondenleeftijd in jaren, m de bijbehorende mensenleeftijd in jaren en a een getal dat afhangt van de grootte van het ras. Voor kleine rassen geldt $a = -1,8$.

Er is bij kleine rassen een hondenleeftijd tussen 11 en 12 jaar waarbij het model $m_{\text{klein}} = 30\sqrt{h} - 1,8h$ dezelfde bijbehorende mensenleeftijd oplevert als de veelgebruikte vuistregel.

honden- leeftijd in jaren	bijbehorende mensenleeftijd in jaren		
	klein ras	middelgroot ras	groot ras
1	28	29	30
2	39	40	43
4	53	56	60
10	77	84	95
15	89	100	
20	100		

- Bereken deze hondenleeftijd in één decimaal.
- Bereken bij welke hondenleeftijd het verschil tussen het model en de vuistregel maximaal is. Hoeveel is dit maximale verschil in mensenjaren? Rond af op één decimaal.

Stel dat een hulphond van een middelgroot ras met pensioen mag bij een hondenleeftijd die bij een mensenleeftijd van 67 jaar hoort.

- Bereken de waarde van a die hoort bij middelgrote rassen en gebruik deze om de pensioenleeftijd van deze hond te berekenen. Rond af op één decimaal.

A47



Zie opgave 46.

Een hond van een groot ras wordt volgens het model maximaal 100 mensenjaren oud.

- Hoe oud wordt een hond van een groot ras maximaal in hondenjaren? Rond af op gehelen.

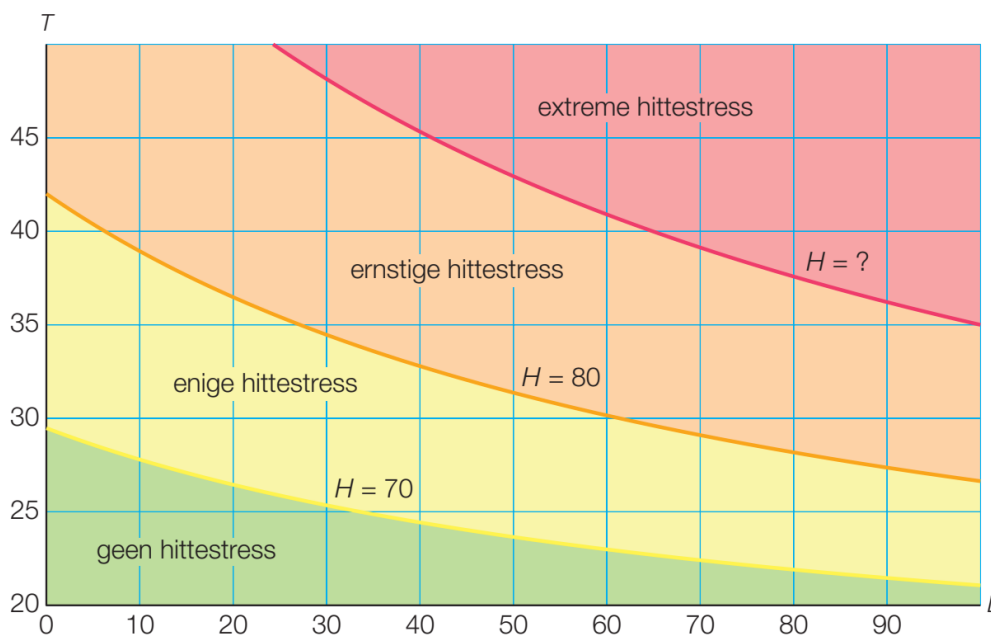
Het verschil tussen m_{groot} en m_{klein} neemt toe bij toenemende hondenjaren. Hierbij is m_{groot} de mensenleeftijd in het model bij de grote rassen.

- Bereken bij welke hondenleeftijd het verschil tussen m_{groot} en m_{klein} 10 jaar is. Rond af op één decimaal.

Kennis- en vaardigheidentest

11.1 Grafieken en gebieden

- 1** Bij een temperatuur van T °C en een relatieve luchtvochtigheid van $L\%$ wordt de hitte-index H gegeven door de formule $H = 0,8T + 0,01L \cdot (T - 14,4) + 46,4$. Deze formule wordt door boeren gebruikt om te bepalen hoeveel hittestress hun dieren ervaren. Hittestress kan allerlei problemen veroorzaken en bij extreme hittestress is er grote kans op sterfte.
- In de figuur hieronder hoort bij elke grenslijn een bepaalde waarde van H .



- a** In een stal wordt een relatieve luchtvochtigheid van 60% gemeten. Onderzoek met behulp van de figuur bij welke temperaturen de dieren in deze stal enige hittestress ervaren.
- b** Bereken welke waarde van H bij de grens tussen ernstige en extreme hittestress hoort.
- c** In een kleine stal is een klimaatsysteem geïnstalleerd, waarmee de temperatuur en de luchtvochtigheid geregeld worden. Hierdoor gelden de ongelijkheden $T \leq 30$ en $L + 5T \leq 180$. Teken het gebied dat hierbij hoort.

11.2 Herleiden en vrijmaken

- 2 a** Schrijf de formule $N = \frac{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{10xy}}{\sqrt{5y}}$ in de vorm $N = ax$.
- b** Maak p vrij bij de formule $9q = 1,5 \cdot \sqrt{16p}$.
- c** De formule $\frac{3M}{4} = \sqrt{5K}$ is te herleiden tot de vorm $M = a\sqrt{K}$. Bereken a . Rond af op twee decimalen.

- 3** Het licht van een lamp is op afstand minder intens dan van dichtbij. De lichtintensiteit hangt af van het vermogen van de lamp en de afstand tot

de lamp. Een fabrikant maakt lampen waarvoor geldt $r = \frac{\sqrt{P}}{3,545\sqrt{I}}$. Hierin is P het vermogen in watt, I de lichtintensiteit in lux en r de afstand in meter.

- a** Bij een 40-wattlamp wordt 0,5 lux gemeten.
Bereken de afstand in dm nauwkeurig.
- b** Schrijf voor een lamp van 500 watt de formule in de vorm $r = \frac{c}{\sqrt{I}}$.
Rond c af op één decimaal.
- c** De fabrikant wil van lampen met een bepaald vermogen de lichtintensiteit op verschillende afstanden berekenen. Daarom schrijven ze de formule in de vorm $I = \frac{P}{ar^2}$.
Bereken a . Rond af op drie decimalen.

11.3 Redeneren met formules

- 4** **a** Gegeven is de formule $\frac{A}{-5} = 2 - \sqrt{x}$.
Beredeneer of A toe- of afneemt als x afneemt.
- b** Gegeven is de formule $y = \frac{100}{2 + 0,2^x} - \sqrt{16 - \frac{25}{x}}$.
Beredeneer wat de grenswaarde is.

11.4 Formulevaardigheden

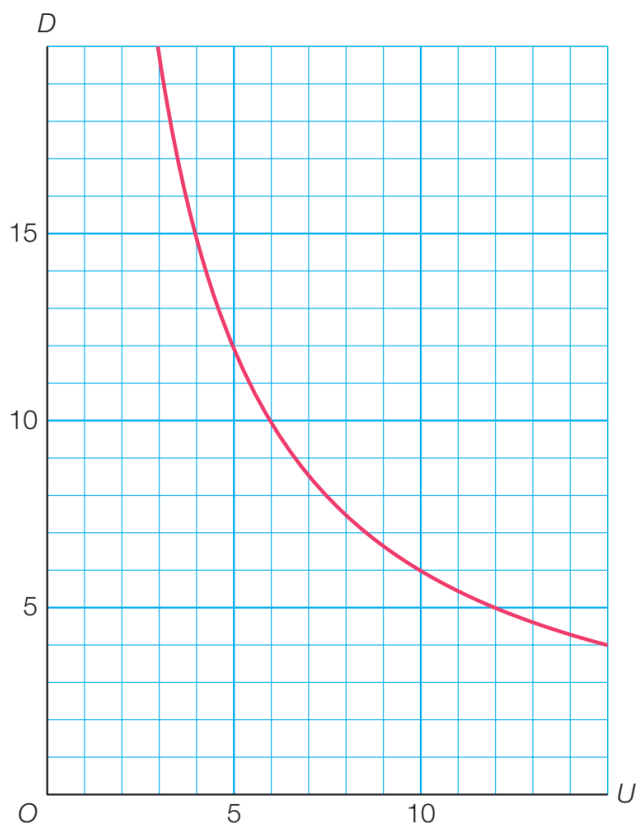
- 5** Voor de dagelijkse stroomkosten S in euro's van industriële elektrische machines geldt de formule $S = 0,4W \cdot \left(u + \frac{24 - u}{k}\right)$. Hierin is u de dagelijkse gebruiksduur in uren, W het vermogen van de machine in kilowatt tijdens gebruik en k hoeveel keer kleiner het vermogen is als de machine in stand-by staat (niet in gebruik).
- a** Op een dag zijn de stroomkosten 45 euro voor een machine met een vermogen van 25 kilowatt en $k = 500$.
Bereken in minuten nauwkeurig de gebruiksduur op deze dag.
- b** Hoe groter k , hoe minder stroom de machine in stand-by gebruikt.
Beredeneer dat de stroomkosten van een machine die de hele dag in stand-by staat tot nul naderen als k heel groot wordt.
- c** Een bedrijf wil een bepaalde machine continu in gebruik hebben, maar hiervoor niet meer dan 120 euro per dag aan stroomkosten kwijt zijn.
Wat mag het maximale vermogen in kilowatt van deze machine zijn?
- d** Schrijf voor een machine met $W = 2$ en $k = 10$ de formule in de vorm $S = au + b$.



Gemengde opgaven

- 1** Een hotel wil de gevel laten schilderen. Schilder Jan zegt dat dit een klus van minstens 60 uur is. Hij hanteert daarom de ongelijkheid $D \cdot U \geq 60$. Hierin is D het aantal dagen dat de klus duurt en U het aantal uur dat hij per dag aan het werk is. Verder wil Jan maximaal 8 uur per dag werken en wil het hotel graag dat de klus niet langer dan 14 werkdagen duurt.

- Welke andere twee ongelijkheden horen bij de situatie?
- Teken in de figuur het gebied dat bij de drie ongelijkheden hoort. De grafiek van $D \cdot U = 60$ is al getekend.
- Laat met een berekening zien dat de klus maximaal 112 uur mag duren. Welk punt in het gebied van vraag b komt hiermee overeen?



Jan rekent 20 euro per uur en 50 euro voorrijkosten per dag.

- Onderzoek wat de minimale kosten voor het hotel zijn als de klus 80 uur duurt.

Voor de totale kosten K in euro's geldt de formule $K = 50 \cdot D + 20 \cdot D \cdot U$.

- Licht dit toe.
- Het hotel wil dat de totale kosten maximaal 2500 euro zijn. Jan wil graag elke dag 6 uur werken. Onderzoek of dat mogelijk is als ook aan de andere voorwaarden wordt voldaan.

- 2** **a** Schrijf de formule $A = 5p - \frac{6}{p^2}$ als één breuk.

- Herleid de formule $B = \frac{7q}{3q-12} \cdot (q-2) - \frac{1}{3} \cdot \frac{5q}{q-4}$ tot één breuk.

- Toon aan dat $K = \frac{1}{3}q + 4 + \frac{5}{q}$ te schrijven is als $K = \frac{q^2 + 12q + 15}{3q}$.

- Herleid de formule $N = \frac{2t^3}{\left(\frac{5}{3t^{-4}}\right)} \cdot t^2$ tot de vorm $N = at^b$.

- Druk C uit in v bij $v + 8 = \frac{2C}{4 + 2v}$.

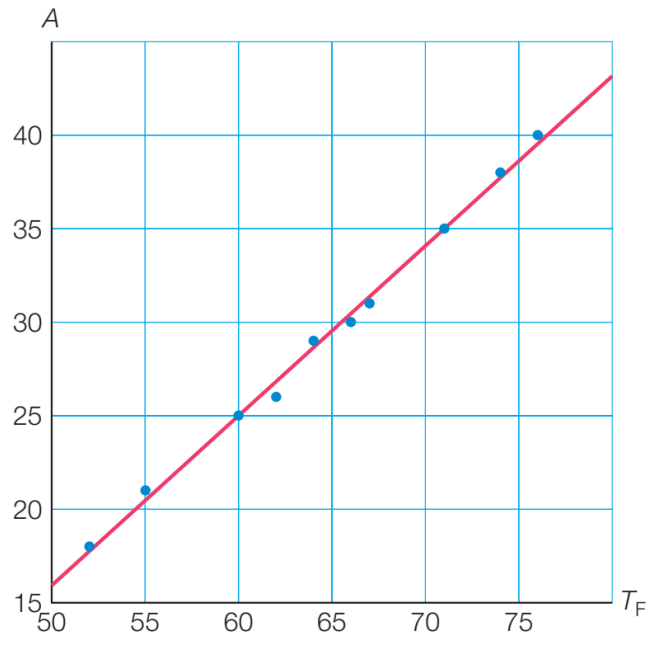
- Druk y uit in x bij $\frac{5y-6}{9x} = 2\frac{2}{3}$.

- 3** **a** Schrijf het rechterlid van de formule $N = \frac{1}{12}a \cdot \frac{(2a+3)a}{4a+4}$ als één breuk en werk de haakjes weg.
- b** Schrijf het rechterlid van de formule $P = \frac{(a-5)(a+6)}{a-2} + a + 1$ als één breuk en werk de haakjes weg.
- c** Maak p vrij bij de formule $Q = \frac{5}{3p+2}$.
- d** Gegeven is $4 - \frac{H}{x^2+1} = 11$.
Maak H vrij.

- 4** **a** Gegeven is de formule $x = 3\sqrt{2y} - 8x + 3$.
Druk y uit in x .
- b** Gegeven zijn de formules $F = \frac{0,1a}{2a-1} \cdot (2b+1)$ en $a = 0,25b + 2$.
Druk F uit in a , schrijf het rechterlid van de formule als één breuk en werk de haakjes weg.
- c** De formules $G = \frac{k-p^2}{k^2}$ en $p = k + 2$ zijn te combineren tot een formule van de vorm $G = a + \frac{b}{k} + \frac{c}{k^2}$.
Bereken a , b en c .

- 5** De verontreiniging V door uitlaatgassen op een weg hangt af van het aantal auto's A dat per minuut passeert en van de windsnelheid w in meter per seconde.
Onderzoek leverde de formule $V = -0,35Aw + 8,4A$ op, waarin V een maat is voor de verontreiniging.
- a** Op een dag meet men op de N328 een windsnelheid van 18 m/s en $V = 84$.
Hoeveel auto's passeren er per minuut?
- b** De dag ervoor passeerden 75 auto's per minuut en was $V = 160$.
Wat was die dag de windsnelheid?
- c** Stel de formule op van V voor de situatie dat er 60 auto's per minuut passeren.
- d** Voor de situatie dat de windsnelheid 10 m/s is, is de formule te herleiden tot de vorm $A = aV$.
Bereken a . Rond af op drie decimalen.

6 Wetenschappers in de VS hebben onderzocht of krekels vaker tjirpen bij hogere temperaturen. Een tjirp is het karakteristieke geluid dat een mannetjeskrekkel maakt door zijn vleugels langs elkaar te wrijven. In de figuur zie je van een onderzochte krekkel het aantal keer tjirpen A gedurende 15 seconden bij verschillende temperaturen T_F in graden Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$). De onderzoekers hebben bij de gegevens een model gemaakt, zie de rode lijn. Hierbij hoort



de formule $A = \frac{10T_F - 325}{11}$.

- a** Laat met een berekening zien dat een krekkel volgens het model meer dan 9000 keer per uur tjirpt bij een temperatuur van 75°F .
- b** Schrijf de formule in de vorm $T_F = aA + b$.

Leden van de scouting gebruiken de volgende methode voor het schatten van de temperatuur. Tel het aantal keren tjirpen van een krekkel gedurende 15 seconden en tel daar vervolgens 33 bij op. Het resultaat is de temperatuur in graden Fahrenheit.

- c** Komt de methode van de scouting ongeveer overeen met de formule die je hebt gevonden bij vraag b?

Omrekenen tussen de temperatuur in graden Celsius T_C en de temperatuur in graden Fahrenheit T_F gaat met de formule $1,8T_C = T_F - 32$.

- d** Combineer $1,8T_C = T_F - 32$ en $A = \frac{10T_F - 325}{11}$ tot de vorm $T_C = aA + b$.

Rond a en b af op één decimaal.

- e** Om de temperatuur in graden Celsius te schatten, gebruikt de scouting de volgende methode. Tel het aantal keren tjirpen van een krekkel gedurende 9 seconden. Dat is de temperatuur in graden Celsius. Onderzoek of deze methode ongeveer overeenkomt met de formule die je hebt gevonden bij vraag d.

- 7** **a** Gegeven zijn de formules $W = 18 - 7,5p + 2q$ en $3q - 15p = 5$.

Schrijf W in de vorm $W = aq + b$.

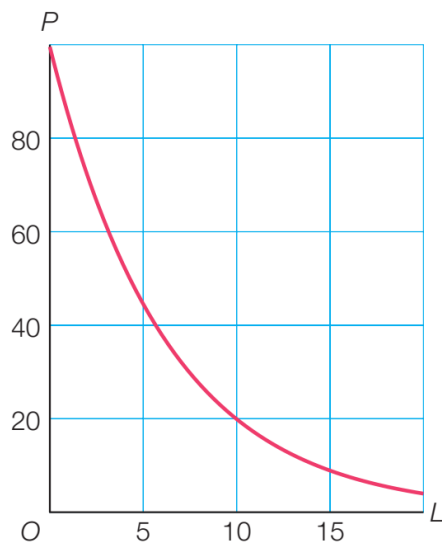
- b** Combineer de formules $F = 3xy + 4xz + 8$, $y = 2x + 5$ en $x + z = 6$ tot de formule $F = 2x^2 + 39x + 8$.

- c** Gegeven is de formule $P = \frac{3k(3l + 8)}{4 + 7m}$.

Neem $P = 6$ en $l = 4$ en herleid de formule tot de vorm $k = am + b$.

- d** Schrijf de formule $G = 12 - 21 \cdot \frac{6 - 7,5h}{63}$ in de vorm $G = ah + b$.

- 8** De dagwaarde van een auto is het bedrag dat een verzekering zou uitkeren als de auto onherstelbaar beschadigd is (total loss). De dagwaarde is afhankelijk van de leeftijd van de auto. De grafiek hiernaast hoort bij het model dat verzekeraar A hanteert voor de dagwaarde P van een auto als percentage van de nieuwprijs. Op de horizontale as staat de leeftijd L van de auto in jaren.



- a** Boris vermoedt dat het model een omgekeerd evenredig verband is. Licht met behulp van de grafiek toe waarom dat niet kan kloppen.
- b** Bij de grafiek hoort een exponentiële afname. Stel de formule van P op.

Verzekeraar B hanteert voor een auto die tussen 3 en 15 jaar oud is een omgekeerd evenredig verband. Zie de tabel.

L	4	6	10
P	37,5%	25%	15%

- c** Stel de formule van P op van verzekeraar B.

Verzekeraar C hanteert het model $P = 95 \cdot 0,83^L + 5$.

- d** Beredeneer dat de grafiek bij dit model dalend is en beredeneer wat de grenswaarde is.

Jean heeft een auto met een nieuwprijs van 21 500 euro. Na een ongeluk is de auto total loss. De auto is dan 12 jaar oud.

- e** Onderzoek welke verzekeraar de hoogste dagwaarde zou uitkeren en bereken deze dagwaarde. Rond af op honderden euro's.

- 9** In het jaar 2020 werden wereldwijd miljoenen mensen besmet met het coronavirus (SARS-CoV-2). Wiskundigen hebben voor dit soort uitbraken vele modellen ontwikkeld.

In deze opgave bekijken we het logistische groeimodel. Dit model is geschikt om de ontwikkeling van het aantal mensen dat besmet is of ooit besmet is geweest met het virus in beeld te brengen. We gaan er hierbij van uit dat er geen maatregelen worden genomen om verspreiding van het virus tegen te gaan en dat uiteindelijk iedereen besmet zal worden. Voor het percentage van de bewoners van een dichtbevolkt gebied dat

besmet is (geweest) geldt $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}}$ met t de tijd in dagen en $t = 0$ aan het begin van de eerste dag van de uitbraak.

- a** Schets de grafiek. Neem $0 \leq t \leq 50$.
- b** Hoeveel procent van de bewoners is besmet (geweest) na 10 dagen?
- c** Na hoeveel dagen is de helft van de bewoners besmet (geweest)?
- d** Beredeneer dat de grafiek van P stijgend is.

Nederland is op te vatten als één dichtbevolkt gebied. Op 1 maart 2020 was de eerste dag van de uitbraak van het coronavirus in Nederland. Er woonden toen 17,4 miljoen mensen in Nederland.

- e** Bereken hoeveel inwoners van Nederland besmet zouden zijn (geweest) op 25 maart 2020. Doe dat ook voor 24 april 2020. Geef je antwoorden in miljoenen en rond af op één decimaal.
- f** Toon aan dat de formule van P te schrijven is als $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 0,812^t}$ en beredeneer met deze formule dat uiteindelijk alle bewoners besmet zullen zijn (geweest).
- g** Joshua woont in de stad New York en wil het model graag als volgt aanpassen.
 - Hij wil direct het aantal besmette personen in New York berekenen in plaats van een percentage.
 - Hij wil dat de tijd in weken wordt genomen in plaats van in dagen.

Hij krijgt een model van de vorm $I = \frac{a}{1 + 1450 \cdot 2^{cw}}$ met I het aantal inwoners van New York dat besmet is (geweest) en w de tijd in weken met $w = 0$ aan het begin van de eerste week van de uitbraak. Neem aan dat New York 10 miljoen inwoners heeft.

Bereken a en c .

- 10** Het vetpercentage van een persoon geeft aan hoeveel procent van het lichaamsgewicht uit vet bestaat. Een model voor het vetpercentage P is $P = \frac{495}{D} - 450$, waarbij D staat voor de

dichtheid van het lichaam.

Een goedkope manier om D te schatten gaat als volgt.

- 1 Bereken de som van de dikte van vier bepaalde huidplooien.
- 2 Bepaal de waarde van D met behulp van de tabel. Gebruik zo nodig lineair interpoleren.
- a Bij Alex zijn de diktes van de huidplooien 32 mm, 27 mm, 26 mm en 31 mm.
Bereken het vetpercentage van Alex.
- b Annelies heeft een vetpercentage van 31,7%.
Bereken de som van de huidplooien van Annelies.
- c Joep woog 108 kg en de som van zijn huidplooien was 110 mm. Hij heeft dit teruggebracht tot 70 mm.
Bereken hoeveel kg hij is afgevallen. Neem aan dat hij alleen vet is kwijtgeraakt. Rond af op gehelen.

som huidplooien in mm	D
20	1,0666
30	1,0540
40	1,0450
50	1,0381
60	1,0324
70	1,0276
80	1,0234
90	1,0198
100	1,0165
110	1,0135
120	1,0108
150	1,0039
180	0,9926

Er bestaan ook andere manieren om het vetpercentage te bepalen, zoals een slimme weegschaal, een onderwatermeting of een scan.

Lieke weegt 60 kg en heeft een scan laten maken waaruit blijkt dat ze 16,8 kg vet heeft. Dat is minder dan volgens het model, want de som van haar huidplooien is 60 mm.

- d Bereken hoeveel procent minder.

Bij een onderwatermeting wordt iemand in een tank water gewogen.

Hiervoor moet de persoon volledig onder water zijn met de longen zo leeg mogelijk (volledig uitgeademd). Hiermee kan een zeer goede schatting van

D worden gevonden. Hierbij wordt de formule $D = \frac{G_{\text{lucht}}}{G_{\text{lucht}} - G_{\text{water}} - I}$

gebruikt, met G_{lucht} het gewicht in kg buiten het water, G_{water} het gewicht in kg onder water en I de inhoud in liter van de longen na volledig uitademen.

- e Karel laat een onderwatermeting doen. Zijn longinhoud na volledig uitademen wordt gemeten op 1220 mL. Zijn gewicht buiten het water is 75,1 kg en zijn gewicht onder water is 2,1 kg.
Bereken het vetpercentage van Karel.

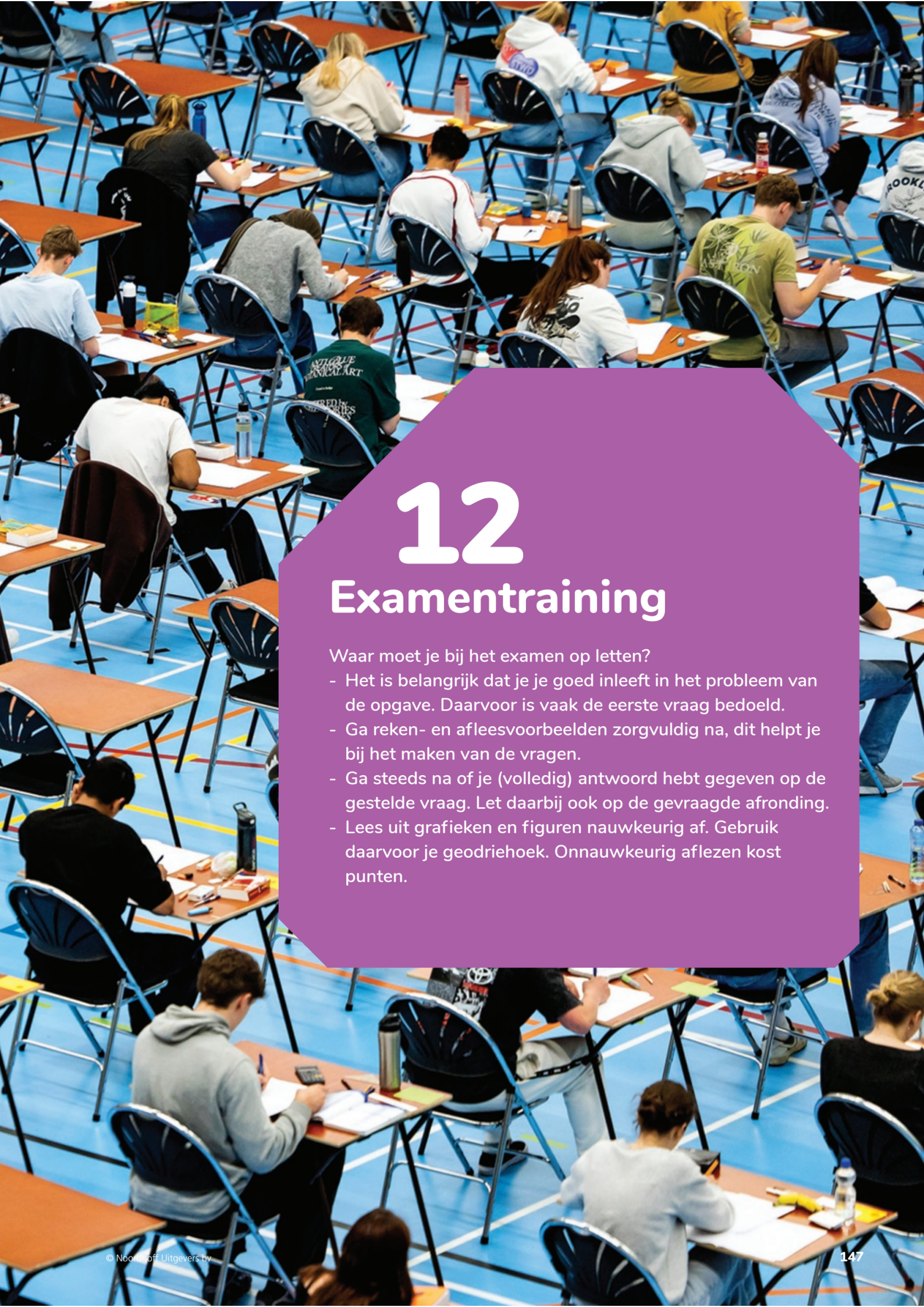
De formules zijn te combineren tot $P = 495 \cdot \frac{G_{\text{lucht}} - G_{\text{water}} - I}{G_{\text{lucht}}} - 450$.

- f Toon dit aan.

- g Een persoon staat op het punt om een onderwatermeting te doen. De longinhoud na volledig uitademen en het gewicht buiten het water zijn dan al gemeten.

Beredeneer dat bij een groter onder water gemeten gewicht, een lager vetpercentage hoort.



A high-angle, wide shot of a classroom where students are seated at individual desks, facing away from the camera. They are all focused on writing or reading papers, suggesting an exam or a quiet study session. The desks are arranged in rows, and the floor is a bright blue with white grid lines. The lighting is bright and even.

12

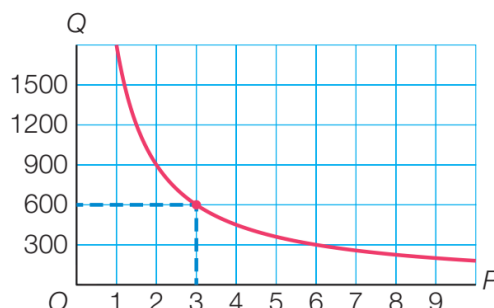
Examentraining

Waar moet je bij het examen op letten?

- Het is belangrijk dat je je goed inleeft in het probleem van de opgave. Daarvoor is vaak de eerste vraag bedoeld.
- Ga reken- en afleesvoorbeelden zorgvuldig na, dit helpt je bij het maken van de vragen.
- Ga steeds na of je (volledig) antwoord hebt gegeven op de gestelde vraag. Let daarbij ook op de gevraagde afronding.
- Lees uit grafieken en figuren nauwkeurig af. Gebruik daarvoor je geodriehoek. Onnauwkeurig aflezen kost punten.

12.1 Algemene vaardigheden

- 1 a** Een hoeveelheid neemt toe van 48 520 tot 69 170.
Hoeveel procent is deze toename?
- b** Voor de hoeveelheden A , B en C gelden de verhoudingen $A : B = 1 : 5$ en $B : C = 2 : 7$.
Bereken de verhouding $A : C$.
- c** Tussen P en Q bestaat een omgekeerd evenredig verband. Zie de figuur hiernaast.
Stel een formule op waarbij je Q uitdrukt in P .
- d** Gegeven is de formule
 $K = 3,1A - 4,12B + 16,05$.
 Neem $K = 24$ en $B = 15$ en bereken A .



Gegeven is de formule $F = \frac{100x}{0,6x^2 + x + 3}$ met $0 < x < 10$.

- e** Schets de grafiek van F en geef de verschillende soorten van stijgen en dalen van de grafiek.
- f** Bereken het maximum van F . Rond af op twee decimalen.
- g** Bereken voor welke waarden van x geldt dat $F > 20$. Rond af op twee decimalen.

Procenten

27% betekent 27 van de 100, dus $27\% = \frac{27}{100} = 0,27$.

27% van 320 is $0,27 \cdot 320 = 86,4$.

Procentberekeningen

- 1 Hoeveel procent is 12 van 65?
 12 van 65 is $\frac{12}{65} \cdot 100\% \approx 18,5\%$.
- 2 Een hoeveelheid neemt toe van 825 tot 917.
 De relatieve toename is
 $\frac{917 - 825}{825} \cdot 100\% \approx 11,2\%$.
- 3 Bereken 18,7% van 728.
 18,7% van 728 is $0,187 \cdot 728 \approx 136$.
- 4 Een hoeveelheid van 320 is 35% van het totaal.
 $0,35 \times \text{totaal} = 320$, dus $\text{totaal} = \frac{320}{0,35} \approx 914$.
- 5 • Een hoeveelheid van 836 neemt met 42,7% toe.
 Je krijgt $1,427 \cdot 836 \approx 1193$.
 • Een hoeveelheid van 8,12 miljoen neemt met 17,6% af.
 Je krijgt $0,824 \cdot 8,12 \approx 6,7$ miljoen.

- Relatieve verandering is $\frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\%$.
- De relatieve verandering is de verandering in procenten.
- De absolute verandering is de verandering in aantallen (hoeveelheden).

- 6 • Een hoeveelheid neemt met 38% toe tot 376.

$$\text{Je had } \frac{376}{1,38} \approx 272.$$

- Een hoeveelheid neemt met 57% af tot 6,3 miljoen.

$$\text{Je had } \frac{6,3}{0,43} \approx 14,7 \text{ miljoen.}$$

- 7 Een hoeveelheid neemt met 10% toe. De zo ontstane hoeveelheid neemt met 20% toe.

Omdat $1,10 \cdot 1,20 = 1,32$, is de totale procentuele toename 32%.

Verhoudingen, evenredig en omgekeerd evenredig

Aron, Bouchra en Carmen verdelen een bedrag in de verhouding

$A : B : C = 2 : 5 : 10$. Als Bouchra 165 euro meer krijgt dan Aron, dan is $5 - 2 = 3$ delen gelijk aan 165 euro, dus 1 deel is 55 euro.

Carmen krijgt $10 \cdot 55 = 550$ euro en het totale bedrag is

$$(2 + 5 + 10) \cdot 55 = 17 \cdot 55 = 935 \text{ euro.}$$

Als M evenredig is met N , dan geldt $M = aN$. Weet je dat bij $N = 18$ hoort

$$M = 135, \text{ dan geldt } 18a = 135, \text{ dus } a = \frac{135}{18} = 7,5.$$

De formule is dus $M = 7,5N$.

Als G omgekeerd evenredig is met R , dan geldt dat $G \cdot R = \text{constant}$.

Hoort $G = 1500$ bij $R = 20$, dan is de constante gelijk aan $1500 \cdot 20 = 30\,000$.

De formule waarbij G is uitgedrukt in R is dan $G = \frac{30\,000}{R}$.

Formules en grafieken op de GR

Op de GR kun je formules invoeren, hierbij tabellen maken en grafieken plotten. Bij de grafieken kun je

- bij een gegeven x -waarde de y -waarde berekenen
- de coördinaten van snijpunten berekenen (met de optie snijpunt)
- de coördinaten van toppen berekenen (met de opties maximum en minimum)
- de coördinaten van snijpunten met de horizontale as berekenen (met de optie nulpunt).

Geef de volgende toelichting bij gebruik van de GR.

- 1 Noteer de formules die je invoert.
Schrijf dus op $y_1 = \dots, y_2 = \dots$, enzovoort.
- 2 Noteer de optie die je gebruikt en geef het resultaat.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

Vergeet de toelichting niet. Dat kost punten op je examen.

Hiernaast zie je de grafiek van $N = 20t^{1,4} - 6t^{1,8}$ met $0 < t < 20$.

Ook is de lijn $N = 100$ getekend.

Om te berekenen voor welke waarden van t geldt dat $N > 100$, voer je in $y_1 = 20x^{1,4} - 6x^{1,8}$ en $y_2 = 100$.

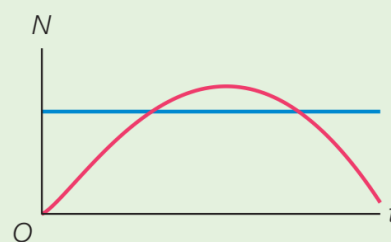
De optie snijpunt geeft $x = 6,452...$ en $x = 15,069...$

Wordt het antwoord gevraagd in twee decimalen, dan krijg je t vanaf 6,46 tot en met 15,06. Let hierbij op de juiste afronding. Zo is voor $t = 6,45$ nog niet $N > 100$.

Om het maximum van N te berekenen, gebruik je de optie maximum.

De optie maximum geeft $x = 10,822...$ en $y = 124,706...$

Dus het maximum is ongeveer 124,7 voor $t \approx 10,8$.



Formules invullen en vergelijkingen oplossen

De formule $C = 4,5D - 5,6E + 21,4$ is een formule met twee variabelen.

Voor $D = 5$ en $E = 6$ krijg je

$$C = 4,5 \cdot 5 - 5,6 \cdot 6 + 21,4 = 10,3.$$

Voor $C = 54$ en $D = 11,6$ krijg je de vergelijking

$$4,5 \cdot 11,6 - 5,6E + 21,4 = 54. \text{ Deze vergelijking kun je met de GR oplossen.}$$

Een vergelijking met de GR oplossen kan met de optie snijpunt en ook met de optie oplossen.

Grafiekenbundels en grafieken tekenen

In de figuur hiernaast is B uitgezet tegen A voor een aantal waarden van L . Uit deze grafiekenbundel lees je bijvoorbeeld het volgende af:

bij $A = 4$ en $B = 4$ hoort $L = 3$

bij $A = 5$ en $L = 2$ hoort $B = 8$

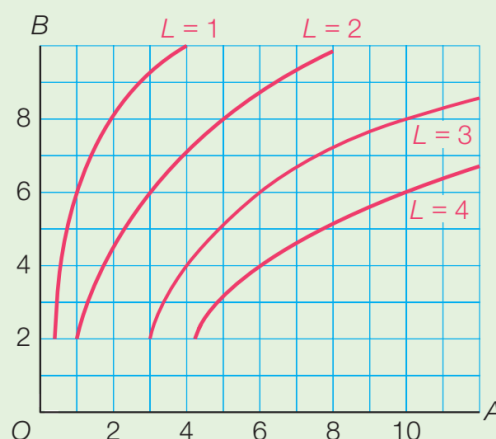
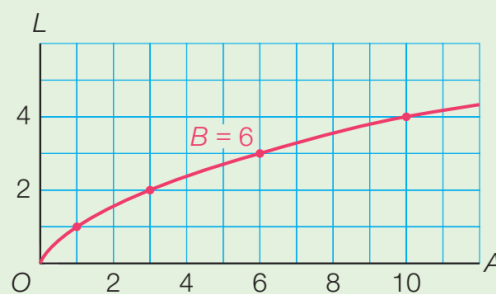
bij $B = 8$ en $L = 3$ hoort $A = 10$.

Je kunt voor bijvoorbeeld $B = 6$ de grafiek tekenen waarbij L is uitgezet tegen A .

Teken daartoe in de figuur de horizontale lijn $B = 6$ en lees bij de verschillende waarden van L af welke A erbij hoort. Je krijgt de volgende tabel.

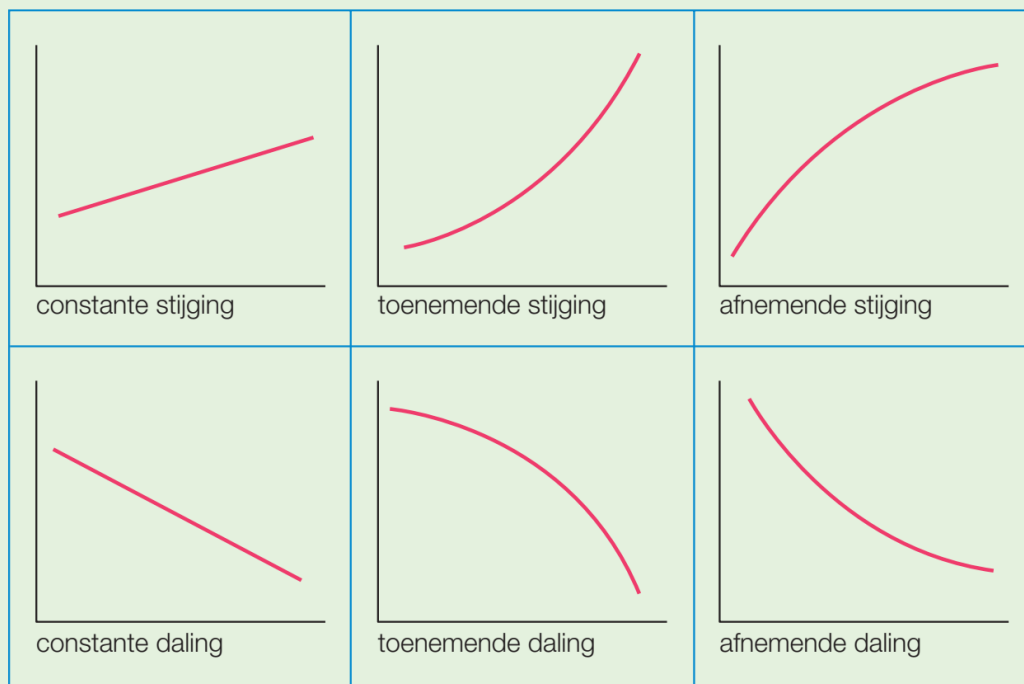
A	1	3	6	10
L	1	2	3	4

Zet deze punten uit in een assenstelsel met een horizontale A -as en een verticale L -as en verbind de punten door een vloeiende kromme. Je krijgt de figuur hiernaast.



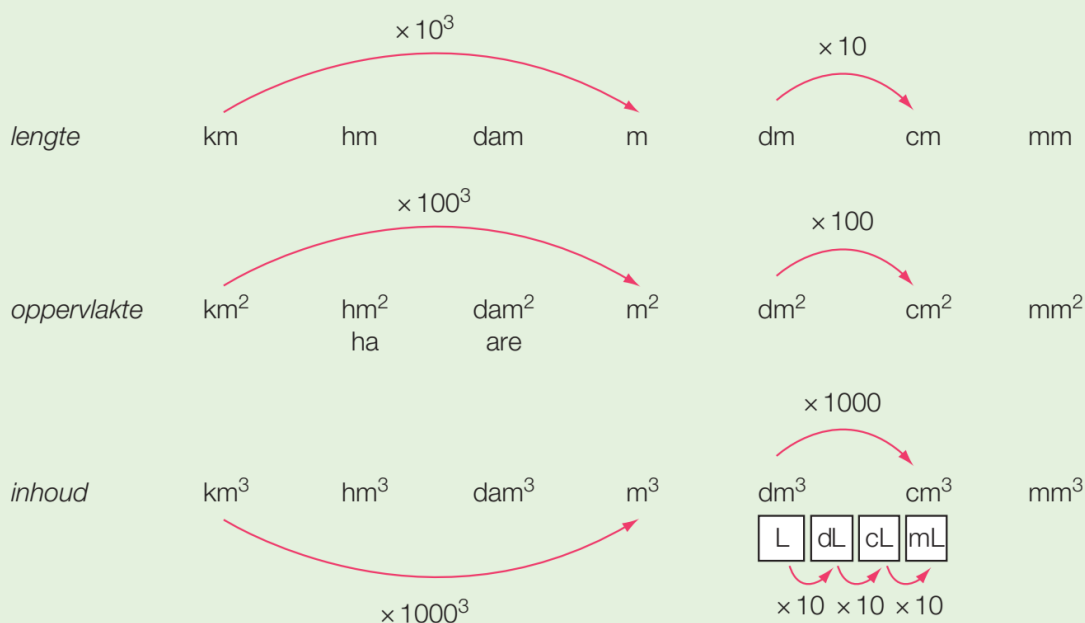
Soorten van stijgen en dalen

Er zijn verschillende soorten van stijgen en dalen.



Lengte, oppervlakte en inhoud

Het volgende schema kun je gebruiken om eenheden om te rekenen.



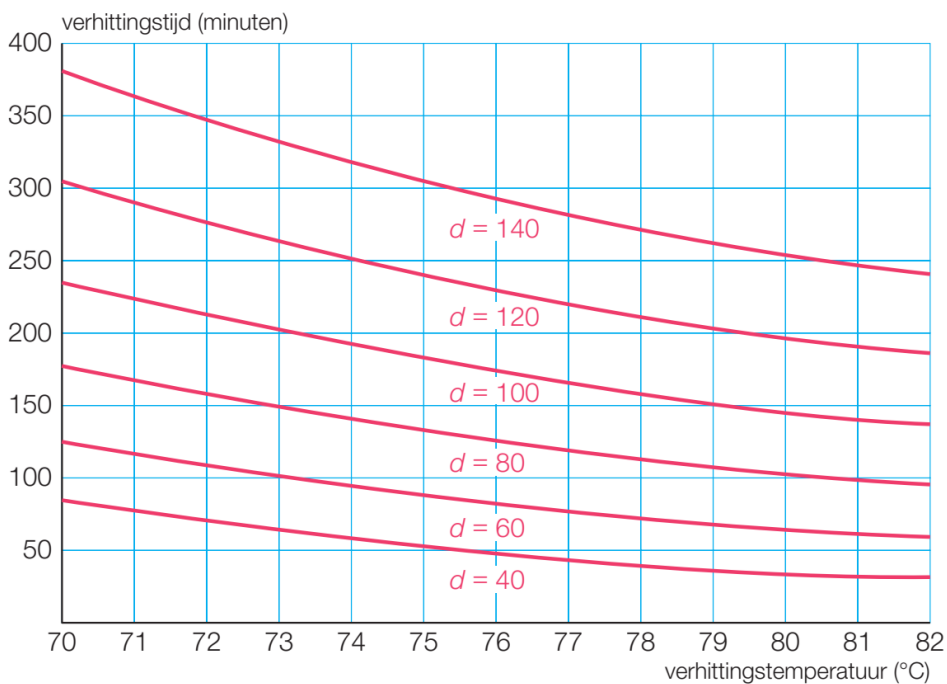
In een etmaal valt 12 mm neerslag. Om te berekenen hoeveel liter er is gevallen in een gebied van 35 km² ga je als volgt te werk.

- Bedenk dat 1 liter = 1 dm³, dus reken de gegevens om naar dm en dm².
- 12 mm = 0,12 dm en 35 km² = 35 · 100⁴ dm²
- Er is 0,12 × 35 · 100⁴ = 420 000 000 dm³ = 420 miljoen liter neerslag gevallen.

WERKBLAD Sommige levensmiddelen kunnen langer houdbaar worden gemaakt door ze te verhitten. Door verhitting zullen de meeste bacteriën in deze levensmiddelen afsterven. Hoe langer er wordt verhit, hoe meer bacteriën er afsterven.

Als een verhitting onder de 100°C heeft plaatsgevonden, noemt men dit pasteurisatie. De onderzoeksorganisatie TNO heeft richtlijnen opgesteld voor het pasteurisatieproces. Hiermee kan een slager die zelf worst maakt, bepalen welke verhittingstemperatuur en verhittingstijd nodig zijn.

In de figuur hieronder zie je de verhittingstemperaturen en verhittingstijden van worsten met diameters d van 40 tot en met 140 mm met tussenstappen van 20 mm. Deze figuur staat vergroot op het werkblad.



In de figuur op het werkblad kun je aflezen dat een worst met een diameter van 100 mm bij een verhittingstemperatuur van 80°C een verhittingstijd van 145 minuten nodig heeft.

Een veelgebruikte verhittingstemperatuur is 75°C .

- a** Teken in het assenstelsel op het werkblad met behulp van de figuur een grafiek waarin de verhittingstijd is uitgezet tegen de diameter bij een verhittingstemperatuur van 75°C .

In plaats van de figuur, gebruiken sommige slagers ook wel formules om de verhittingstijd te berekenen. Bij een verhittingstemperatuur van 78°C berekent men de verhittingstijd V dan met de formule $V = 0,7d + 0,0089d^2$. Hierin is V de verhittingstijd in minuten en d de diameter van de worst in mm.

- b** Bereken met de formule de verhittingstijd van een worst met een diameter van 4,5 cm bij een verhittingstemperatuur van 78°C . Geef je antwoord in hele minuten.

Een slager maakt worsten met verschillende diameters en kiest bij het pasteuriseren altijd voor een verhittingstemperatuur van 78°C . Hij wil het pasteurisatieproces niet langer dan 2,5 uur laten duren.

- c** Bereken met de formule welke diameter deze worsten maximaal mogen hebben. Geef je antwoord in hele mm.

3 2021-I

Een klarinet is een houten blaasinstrument. Een klarinettist moet altijd eerst een korte tijd inspelen om de klarinet op een vaste temperatuur van 31°C te brengen. Als de klarinet koud is, klinken de tonen namelijk lager dan als de klarinet warm is. Dit komt omdat de snelheid van het geluid afhankelijk is van de temperatuur. Dit verband wordt gegeven door de formule $v = 20\sqrt{273 + T}$. Hierin is v de snelheid van het geluid (in m/s) en T de temperatuur (in $^{\circ}\text{C}$).

Met de formule kun je bijvoorbeeld berekenen dat bij een temperatuur van 20°C de snelheid van het geluid ongeveer 342 m/s is. Bij een temperatuur van 31°C is deze snelheid ongeveer 349 m/s.

- a** Bereken hoeveel graden de temperatuur moet toenemen om de snelheid van het geluid te laten stijgen van 339 m/s naar 349 m/s. Geef je antwoord in een geheel aantal graden.

Een toon van de klarinet is te horen als er lucht in de klarinetbuis in trilling gebracht wordt. Door tijdens het spelen gaatjes in de klarinetbuis open of dicht te doen, verandert de lengte L van het gedeelte van de klarinetbuis waarin de lucht trilt. De frequentie van een toon die op een klarinet gespeeld wordt, kun je berekenen met de formule $f = \frac{v}{4L}$.

Hierin is f de frequentie van de toon (in Hz), v de snelheid van het geluid in de klarinet (in m/s) en L de lengte van het gedeelte van de klarinetbuis waarin de lucht trilt (in m).

Els speelt op haar klarinet met de eerder genoemde temperatuur van 31°C een toon die klinkt met een frequentie van precies 440 Hz. Deze toon had bij het begin van het inspelen op de klarinet met een temperatuur van 20°C een andere frequentie dan nu de klarinet een temperatuur van 31°C heeft.

- b** Bereken deze frequentie. Geef je antwoord in een geheel aantal Hz.

4 2021-I

Mensen sturen steeds minder brieven en kaarten. Postzegels zijn in Nederland de afgelopen jaren flink duurder geworden. In de tabel zie je voor 2015 en 2016 onder andere het aantal bezorgde brieven/kaarten en de bijbehorende opbrengst. Dit is het totale bedrag dat aan postzegels is verkocht dat op al die brieven/kaarten is geplakt. De opbrengst in 2016 was lager dan die in 2015, ondanks de verhoging van de postzegelprijs van €0,69 naar €0,73.

BRIEVEN/KAARTEN

jaar	aantal stuks (in miljoenen)	opbrengst (in miljoenen euro's)	postzegelprijs (cent)
2015	2401	1961	69
2016	2213	1877	73

Voor het versturen van brieven/kaarten tot 20 gram heb je 1 postzegel nodig. Voor het versturen van brieven/kaarten vanaf 20 gram tot 50 gram moet je 2 postzegels plakken, en vanaf 50 tot 100 gram 3 postzegels. Neem aan dat op alle brieven/kaarten maximaal 3 postzegels zijn geplakt.

a Leg met behulp van de tabel uit dat op een deel van de brieven/kaarten in 2015 meer dan 1 postzegel moet zijn geplakt.

Neem aan dat in 2016 op 88% van de brieven/kaarten 1 postzegel werd geplakt en op de overige brieven/kaarten 2 of 3 postzegels. Je kunt dan met behulp van de tabel de volgende vergelijking opstellen om het aantal brieven/kaarten met 2 postzegels te berekenen:

$$0,73 \cdot 1947,44 + 1,46 \cdot x + 2,19 \cdot (265,56 - x) = 1877$$

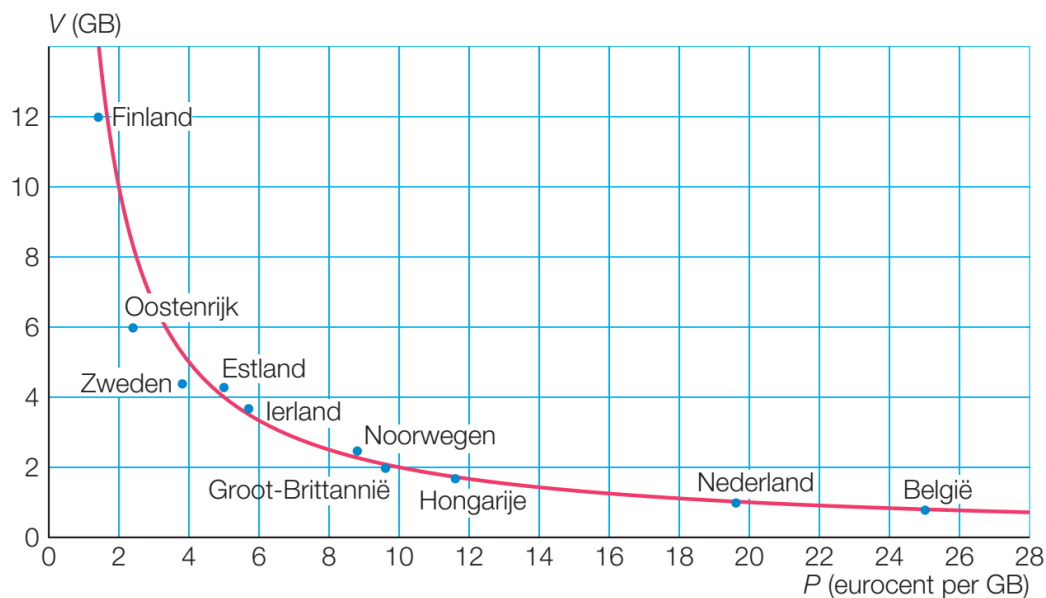
Hierin is x het aantal brieven/kaarten met 2 postzegels in miljoenen.

- b** Leg met berekeningen uit hoe je aan de getallen 1947,44 en 1,46 en 2,19 en 265,56 in deze vergelijking kunt komen.
- c** Bereken het percentage brieven/kaarten met 2 postzegels in 2016. Geef je antwoord in hele procenten.



5 2023-I

In de figuur is voor het jaar 2017 het verband tussen de gemiddelde prijs (P) van het mobiele dataverbruik en het verbruik (V) per simkaart per maand weergegeven.



In de figuur is te zien: hoe hoger de prijs in een bepaald land is, hoe lager het dataverbruik. Bij de trendlijn hoort een omgekeerd evenredig verband. Stel een formule op van dit verband.

6 2021-II

We bekijken een wiskundig model dat het verband geeft tussen de leeftijd van Nederlandse jongens en hun (gemiddelde) lengte op die leeftijd. De lengte van Nederlandse jongens in de puberteit kan worden beschreven met de formule $L_j = \frac{50,9}{1 + 1289,5 \cdot 0,57^t} + 134$. Hierin is t de leeftijd in jaren en L_j de lengte in centimeters.

Rond het negentiende levensjaar, aan het eind van de puberteit, is een jongen bijna uitgegroeid. De formule is echter ook te gebruiken voor de jaren na de puberteit.

- a** Bereken hoeveel centimeter jongens volgens de formule nog groeien vanaf de dag dat ze 19 jaar worden. Geef je antwoord in één decimaal.

Er is ook een wiskundig model voor de lengte van Nederlandse meisjes in de puberteit: $L_m = \frac{48,3}{1 + 245,4 \cdot 0,59^t} + 122,6$. Hierin is t de leeftijd in jaren en L_m de lengte in centimeters.

Het is bekend dat meisjes in de eerste jaren van de puberteit gemiddeld genomen langer zijn dan jongens. Ergens tussen de tiende en dertiende verjaardag is het verschil in lengte tussen jongens en meisjes maximaal.

- b** Bereken dit maximale lengteverschil in centimeters. Geef je antwoord in één decimaal.

7 2021-I

Om te bepalen hoe goed iemands ogen functioneren, wordt vaak gebruikgemaakt van de Snellenkaart. De letters op deze kaart moeten vanaf een afstand van 20 feet (ongeveer 6 meter) worden gelezen. Zie de figuur.

De *visus* is een maat voor de gezichtsscherpte. Deze maat kan met behulp van de Snellenkaart worden uitgedrukt in een score S . Iemand met normaal functionerende ogen kan de letters op regel 8 nog wel lezen, maar de letters op regel 9 niet meer. Bij normaal functionerende ogen hoort een score $S = \frac{20}{20} = 1$. Als een persoon nog kleinere letters kan lezen, dan is de score S groter dan 1. Bij de onderste regel 11 hoort bijvoorbeeld de score $S = \frac{20}{10} = 2$.

Iemand met $S = 0,5$ moet alles van tweemaal zo dichtbij bekijken om hetzelfde op de Snellenkaart te kunnen zien als iemand met $S = 1$. Iemand met $S = 0,1$ moet tienmaal zo dichtbij staan, enzovoort.

E	1	20/200
F P	2	20/100
T O Z	3	20/70
L P E D	4	20/50
P E C F D	5	20/40
E D F C Z P	6	20/30
F E L O P Z D	7	20/25
D E F P O T E C	8	20/20
L E F O D P C T	9	20/15
F D P L T C E O	10	20/13
P E Z O L C F T D	11	20/10

Klaas en Lidy laten hun visus meten. Klaas kan regel 2 nog wel lezen, maar regel 3 niet meer. Lidy kan regel 7 nog wel lezen, maar regel 8 niet meer.

- a** Bereken hoeveel keer zo dicht Klaas bij de Snellenkaart moet staan als Lidy om hetzelfde te kunnen lezen als Lidy.

Er zijn meerdere maten voor de gezichtsscherpte. Voorbeelden hiervan zijn de logMAR-schaal en de ETDRS-letterscore.

Het verband tussen de score S volgens de Snellenkaart en de score M op de logMAR-schaal wordt gegeven door formule 1. Voor het verband tussen de score S en de ETDRS-letterscore E geldt formule 2.

$$S = 10^{-M} \quad (\text{formule 1})$$

$$S = 10^{\frac{E-85}{50}} \quad (\text{formule 2})$$

De Wereldgezondheidsorganisatie noemt mensen met een score S tussen 0,05 en 0,3 slechtziend.

- b** Welke scores van M op de logMAR-schaal komen overeen met de scores $S = 0,05$ en $S = 0,3$? Geef je antwoorden in één decimaal.

Het Centraal Bureau Rijvaardigheidsbewijzen (CBR) stelt als keuringseis dat S minimaal 0,5 moet zijn. Janne heeft een ETDRS-letterscore van 75.

- c** Wordt Janne goedgekeurd door het CBR? Licht je antwoord toe met een berekening.

8 2021-III

Ieder jaar worden er cijfers gepubliceerd over de museumsector in Nederland. In deze opgave bekijken we een aantal van deze museumcijfers.

In tabel 1 staan voor 1 januari 2016 per provincie het aantal musea en het aantal inwoners.

	aantal musea	aantal inwoners	museumdichtheid
Groningen	17	583 721	
Friesland	26	646 040	4,02
Drenthe	12	488 629	2,46
Overijssel	26	1 144 280	2,27
Flevoland	4	404 068	0,99
Gelderland	52	2 035 351	2,55
Utrecht	28	1 273 613	2,20
Noord-Holland	91	2 784 854	3,27
Zuid-Holland	78	3 622 303	2,15
Zeeland	16	381 252	4,20
Noord-Brabant	41	2 498 749	1,64
Limburg	29	1 116 260	2,60
Nederland	420	16 979 120	2,47

In de laatste kolom van deze tabel staat de zogenoemde *museumdichtheid* per provincie. Dit is het aantal musea per 100 000 inwoners.

De museumdichtheid van de provincie Groningen ontbreekt in de tabel.

- a** Onderzoek of de museumdichtheid van Groningen hoger of lager is dan de museumdichtheid van heel Nederland.

De provincie Flevoland heeft de laagste museumdichtheid van alle provincies.

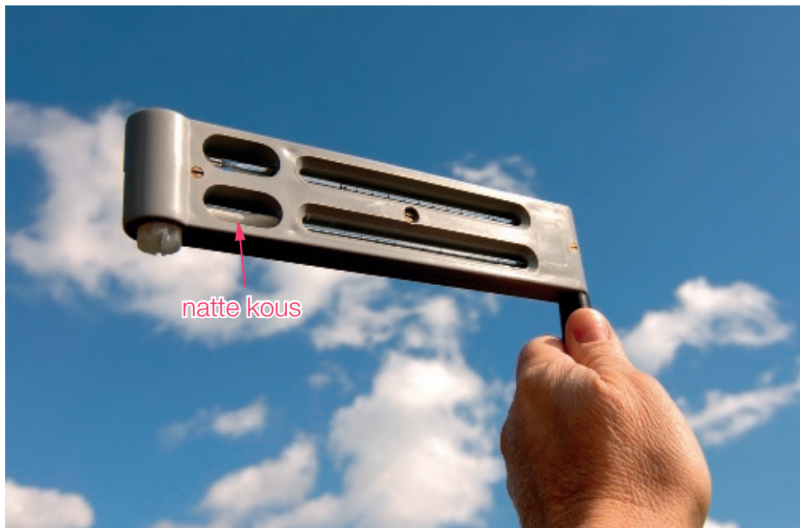
- b** Onderzoek hoeveel musea Flevoland er minstens bij zou moeten hebben om een museumdichtheid in deze provincie te hebben die hoger is dan 2,47.

In het jaar 2011 was de Museumkaart goed voor 4,2 miljoen museumbezoeken. Dat was 20% van het totaal aantal museumbezoeken in 2011. In het jaar 2016 was de Museumkaart goed voor 8,5 miljoen museumbezoeken. Dat was toen 26% van het totaal aantal museumbezoeken.

- c** Bereken met hoeveel procent het totaal aantal museumbezoeken is gestegen in de periode 2011-2016. Geef je antwoord in hele procenten.

[► WERKBLAD] Lucht bevat waterdamp. Hoeveel waterdamp er in de lucht zit, varieert. De (relatieve) *luchtvochtigheid* is een percentage dat aangeeft hoe vochtig de lucht is. Dit ligt tussen 0% (zeer droge lucht) en 100% (verzadigde lucht).

De luchtvochtigheid kan worden gemeten met een *psychrometer*. Dit is een apparaatje met twee thermometers. De ene thermometer is een gewone thermometer: deze meet de luchttemperatuur. De andere thermometer heeft een natte kous om het vloeistofreservoir. Zie de foto.



Door de psychrometer rond te draaien, verdampt water uit de natte kous. Daardoor koelt de kous af en zal de thermometer met de natte kous een lagere temperatuur aangeven dan de luchttemperatuur. We noemen deze temperatuur de *natte temperatuur*.

Met de luchttemperatuur én het verschil tussen de luchttemperatuur en de natte temperatuur kun je de luchtvochtigheid bepalen. Hiervoor gebruik je de tabel die op het werkblad staat.

Ahmed gebruikt op een bepaald moment een psychrometer. De luchttemperatuur is volgens de gewone thermometer 22°C , de natte temperatuur is 17°C .

- a** Bepaal met behulp van de tabel op het werkblad de luchtvochtigheid op dat moment.

Op het werkblad is ook een figuur afgedrukt. In die figuur is voor diverse verschillen tussen de luchttemperatuur en de natte temperatuur de grafiek getekend van de luchtvochtigheid, afhankelijk van de luchttemperatuur.

Op een bepaalde dag daalde de luchttemperatuur van $31,5^{\circ}\text{C}$ naar 15°C , maar de luchtvochtigheid bleef de hele dag 60%.

- b** Bepaal met behulp van de figuur op het werkblad hoeveel de natte temperatuur die dag daalde.

De waarden voor de luchtvochtigheid in de tabel op het werkblad zijn afgerond op hele procenten. De luchtvochtigheid kan nauwkeuriger berekend worden met de volgende formule:

$$L = 100 - \frac{330}{18 + T} \cdot (T - T_{\text{nat}})$$

Hierin is L de luchtvochtigheid in %, T de luchttemperatuur en T_{nat} de natte temperatuur, beide in °C.

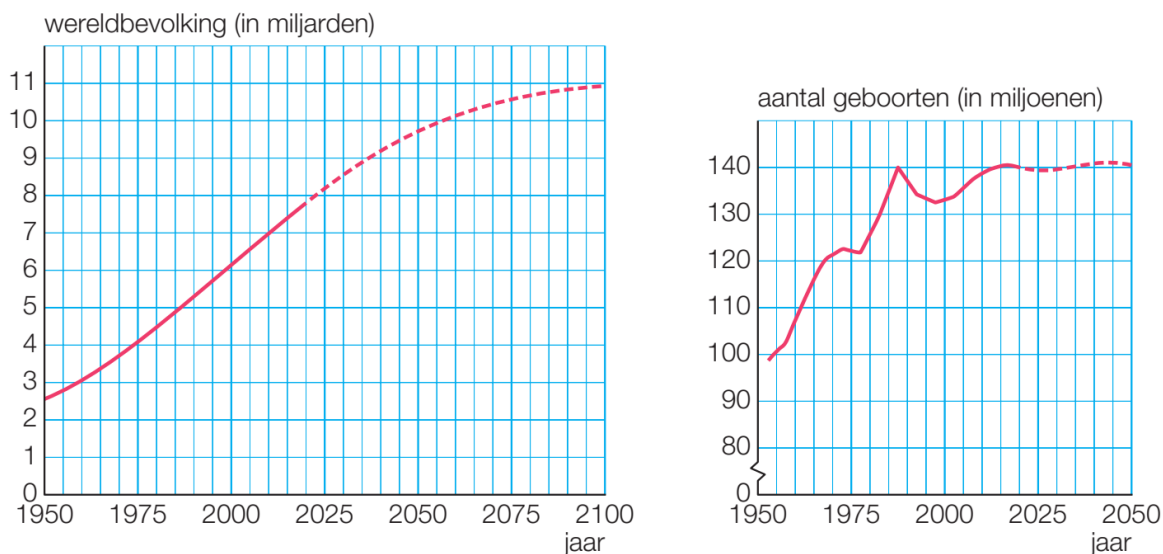
Op 4 november 2015 om 10.30 uur 's ochtends was de luchttemperatuur in Almelo 11 °C. Het verschil tussen de luchttemperatuur en de natte temperatuur was op dat moment 3 °C.

Mijke berekent de luchtvochtigheid met de formule. Jaap berekent de luchtvochtigheid met de tabel. Dit geeft twee verschillende uitkomsten.

c Bereken hoe groot het verschil tussen deze twee uitkomsten is. Geef je antwoord in twee decimalen.

10 2021-II

WERKBLAD De afgelopen eeuwen is het aantal mensen op aarde sterk toegenomen. Sinds enkele decennia is deze toename aan het afnemen. In de linker figuur zie je de groei van de wereldbevolking sinds 1950 en een voorspelling voor de rest van de eenentwintigste eeuw. In de rechter figuur zie je het jaarlijkse aantal geboorten wereldwijd, inclusief een voorspelling tot 2050. Beide figuren staan ook op het werkblad.



Hoewel de wereldbevolking toeneemt, is het jaarlijks aantal geboorten de afgelopen jaren redelijk stabiel. Het *geboortecijfer*, het aantal geboorten per jaar per 1000 mensen, neemt dus af. Bereken met behulp van de figuren op het werkblad hoe groot het geboortecijfer in het jaar 2020 was. Geef je antwoord als een geheel getal.

11 2022-II

Bij parachutespringen spring je uit een vliegtuig. Eerst maak je enige tijd een *vrije val*. Tijdens die vrije val is de parachute nog niet geopend. Daarna open je de parachute en land je met een veilige snelheid op de grond.

Bart springt op een hoogte van 4000 meter uit het vliegtuig en maakt dan een vrije val. Na 50 seconden is hij op 1500 meter hoogte en stopt de vrije val, omdat hij dan zijn parachute opent.

- a** Bereken de gemiddelde snelheid in km/uur van Bart tijdens zijn vrije val.

Tijdens de vrije val die Bart maakt, wordt hij afgeremd door de lucht. Daarom duurt de vrije val van Bart langer dan een *theoretische vrije val* over dezelfde afstand. Een theoretische vrije val is een val ten gevolge van de zwaartekracht zonder dat de val door de lucht wordt afgeremd. Voor de hoogte van een voorwerp tijdens een theoretische vrije val die begint op een hoogte van 4000 meter geldt de formule:

$$h = 4000 - 4,9 \cdot t^2 \quad (\text{formule 1})$$

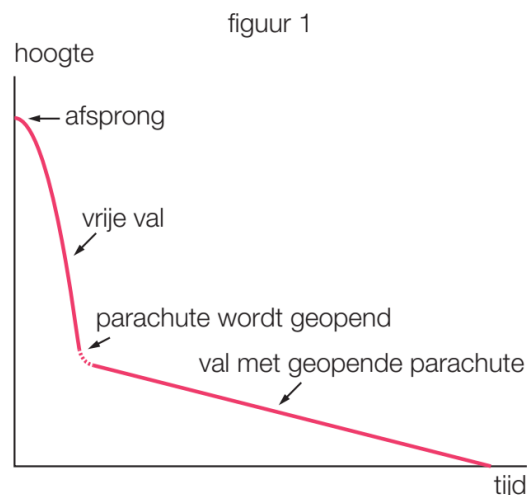
Hierin is h de hoogte van het voorwerp tijdens de theoretische vrije val (in meters) en t de tijd (in seconden) vanaf het moment dat de theoretische vrije val begint.

Er kan berekend worden hoeveel seconden de vrije val van Bart van 4000 meter naar 1500 meter langer duurt dan een theoretische vrije val over dezelfde afstand.

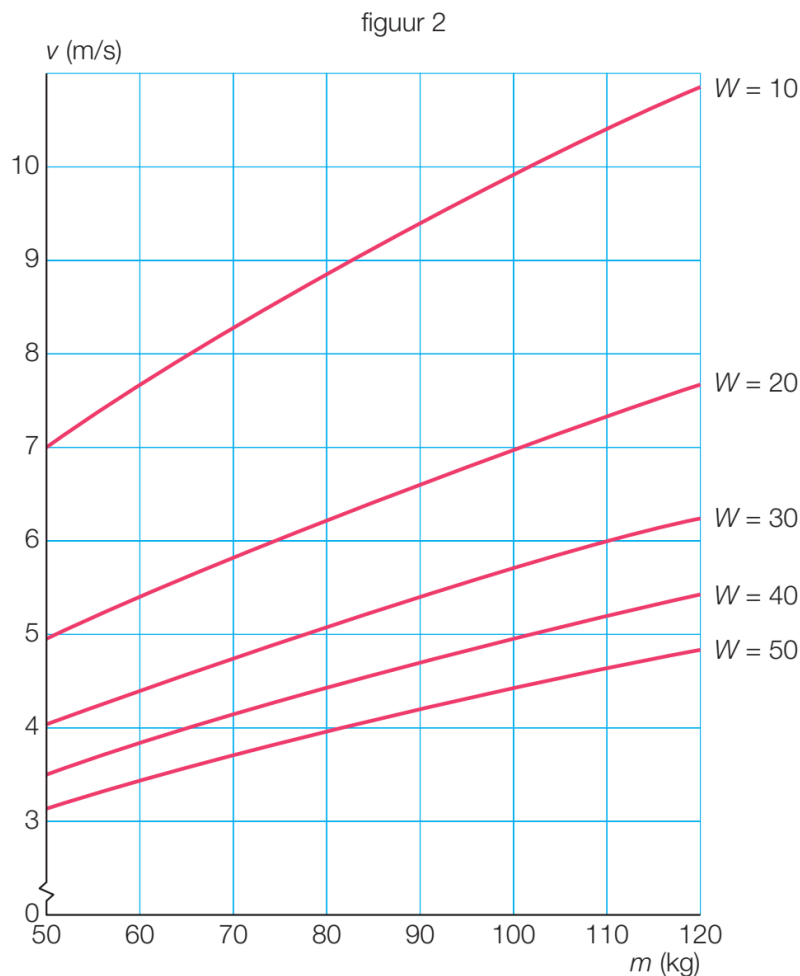
- b** Voer deze berekening uit. Geef je antwoord in een geheel aantal seconden.

Figuur 1 is een schets van het globale verloop van een parachutesprong. Nadat de parachutist uit het vliegtuig gesprongen is, maakt hij een vrije val. Zodra de parachute geopend is, neemt de snelheid in korte tijd flink af. Daarna wordt een constante valsnelheid bereikt. Dat wil zeggen: tot aan de landing heeft de parachutist dezelfde valsnelheid.

De constante valsnelheid op het laatste deel noemen we v (in meters per seconde). Deze snelheid is afhankelijk van de massa m (in kg) van de parachutist (in deze opgave is dat altijd inclusief kleding en parachute) en van de wrijvingscoëfficiënt W van de parachute. Deze wrijvingscoëfficiënt is een getal dat afhangt van onder andere de grootte, de vorm en het materiaal van de parachute. Zo geldt bijvoorbeeld: hoe groter de parachute, hoe groter de wrijvingscoëfficiënt.



Bij een grotere wrijvingscoëfficiënt heb je meer wrijving met de lucht, waardoor je minder snel valt. In figuur 2 is voor een aantal waarden van de wrijvingscoëfficiënt W te zien hoe v afhangt van m .



We kijken nu naar parachutisten met een massa van 90 kg die sprongen maken met parachutes met verschillende wrijvingscoëfficiënten W .

- c** Onderzoek met behulp van figuur 2 of de constante valsnelheid v van deze personen omgekeerd evenredig is met de wrijvingscoëfficiënt W van de parachutes.

Bij figuur 2 hoort de volgende formule voor de constante valsnelheid:

$$v = 3,13 \cdot \sqrt{\frac{m}{W}} \quad (\text{formule 2})$$

Hierin is v de constante valsnelheid in meters per seconde, m de massa van de parachutist in kg en W de wrijvingscoëfficiënt van de parachute.

Tina is een parachutist met een massa van 79 kg. De wrijvingscoëfficiënt van haar parachute is 45. Met deze parachute maakt zij een sprong. Precies 34 seconden na de afsprong is zij op 1300 meter hoogte en bereikt zij haar constante valsnelheid. Op dat moment start het laatste gedeelte van haar parachutesprong.

- d** Bereken met behulp van formule 2 hoelang haar totale sprong duurt. Geef je antwoord in een geheel aantal seconden.

12 2022-I

Op 16 augustus 2009 verbrak Usain Bolt op de wereldkampioenschappen atletiek in Berlijn het wereldrecord op de 100 meter sprint door een tijd te lopen van 9,58 seconden. Het wereldrecord van de vorige wereldrecordhouder, Asafa Powell, was 9,74 seconden.

Stel dat Bolt en Powell bovengenoemde tijden met constante snelheid in dezelfde race hadden gelopen.

- a** Bereken hoeveel meter Powell dan nog te gaan had op het moment dat Bolt finishte. Geef je antwoord in twee decimalen.

De tijd die een sprinter loopt, hangt ook af van de wind die tijdens de sprint waait. Bij rugwind krijgt de sprinter als het ware een duwtje in de rug en zal hij een snellere tijd lopen. De Engelse wiskundige Barrow heeft voor het geval van rugwind de volgende formule afgeleid:

$$Z = 1,03M - 0,03M \cdot \left(1 - \frac{W \cdot M}{100}\right)^2.$$

Hierin is M de tijd (in seconden) die gelopen wordt met rugwindsnelheid W (in meters per seconde) en Z de tijd (in seconden) die gelopen wordt zonder wind.

Een geregistreerde tijd mag alleen als record tellen als de rugwindsnelheid niet groter is dan 2,0 meter per seconde. Toen Bolt in Berlijn zijn wereldrecord van 9,58 seconden liep, was de rugwindsnelheid 0,9 meter per seconde.

- b** Bereken met behulp van de formule welke tijd Bolt gehaald zou hebben als de rugwindsnelheid 2,0 meter per seconde was geweest. Geef je antwoord in twee decimalen.

13 2022-III

Vrijwel alle scenario's voorspellen een groei van de wereldbevolking. Hierdoor zal de voedselproductie omhoog moeten. Niet alleen omdat er meer mensen zullen zijn, maar ook omdat naar verwachting in snel groeiende economieën de gemiddelde voedselconsumptie per persoon zal toenemen. In de tabel zie je de gegevens van de totale wereldbevolking uit 2006 en een voorspelling voor 2050.

	wereldbevolking	totale voedselconsumptie per dag
2006	6569 miljoen	18 000 miljard kilocalorieën
2050	9111 miljoen	28 000 miljard kilocalorieën

Bereken met bovenstaande gegevens met hoeveel kilocalorieën de gemiddelde voedselconsumptie per persoon per dag naar verwachting zal toenemen in de periode van 2006 tot 2050. Geef je antwoord in een geheel aantal kilocalorieën.

14 2022-III

Kanovaren is een Olympische sport. Een van de onderdelen is de vlakwatersprint kajakvaren. Een kajak is een soort kano. Tijdens de Olympische Spelen in Peking in 2008 was de winnende tijd met een eenpersoonskajak op de 500 meter vlakwatersprint voor mannen 1 minuut en 37,252 seconden.

- a** Bereken de gemiddelde snelheid van de winnende kajak op deze afstand in km/u. Geef je antwoord in één decimaal.

Er zijn ook races voor kajaks met 2 of 4 personen. In de tabel staan nog enkele winnende tijden (in seconden) die op de Olympische Spelen van 2008 in Peking met kajaks zijn behaald. Het aantal personen in de boot wordt aangeduid met N .

	mannen 1000 m
$N = 1$	206,323 s
$N = 2$	191,809 s
$N = 4$	175,714 s

Meer personen leveren een grotere gezamenlijke kracht, maar maken de kajak ook zwaarder. Toch wordt er door meer personen sneller gevaren. Natuurkundig is te beredeneren dat er bij benadering het verband $V = c \cdot N^{\frac{1}{3}}$ bestaat. Hierin is V de gemiddelde snelheid in m/s, c een constant getal dat afhangt van het type kajak en de omstandigheden waarin gevaren wordt en N het aantal personen in de boot.

Ook is bekend dat $V = \frac{\text{afstand}}{\text{tijd}}$ (met *afstand* in m en *tijd* in s).

We gaan ervan uit dat V tijdens een wedstrijd constant is. Je kunt dan met de drie winnende tijden in de tabel nagaan dat dit verband tussen V en N bij benadering klopt.

- b** Ga dit voor de mannen op de 1000 meter met berekeningen na.

15 2023-I

De uitgaven aan huisartsenzorg voor één persoon per jaar kan je volgens een eenvoudig model berekenen met de formule $U = 60 + 10 \cdot A$. Hierin is U het bedrag in euro dat voor één persoon per jaar aan huisartsenzorg wordt uitgegeven en A het aantal huisartsconsulten van die persoon per jaar. In 2018 was het gemiddelde aantal huisartsconsulten per persoon gelijk aan 4,5. Stel dat in 2020 het gemiddelde aantal huisartsconsulten per persoon 10% hoger was dan in 2018. Volgens de formule zouden in 2020 de gemiddelde uitgaven aan huisartsenzorg dan ook hoger zijn geweest dan in 2018.

- a** Bereken hoeveel procent hoger. Geef je antwoord in hele procenten.

In de rest van de opgave bedoelen we met de uitdrukkingen ‘het aantal huisartsconsulten’ en ‘de uitgaven aan huisartsenzorg’ steeds de gemiddelde waarden.

Voor ouderen is het aantal huisartsconsulten per persoon per jaar hoger dan voor jongeren. Voor personen van 5 jaar tot en met 64 jaar geldt voor het aantal huisartsconsulten per persoon per jaar A de formule $A = 1,75 + 0,05 \cdot l$.

- b** Bereken bij welke leeftijden volgens deze formule het aantal huisartsconsulten per persoon per jaar lager is dan 4,5.

Waterdiepte werd vroeger vanaf een schip gemeten met behulp van een lang touw met een stuk lood aan het uiteinde. Het lood werd aan het touw het water ingelaten. Lood is zwaar, dus het zinkt. Wanneer het lood de bodem raakte, werd het touw uit het water gehaald. Daarna werd het deel gemeten dat onder water was geweest. Dit deed de schipper door telkens een deel van het touw tussen uitgestrekte handen te pakken. Zie de figuur hiernaast. Het aantal keer dat dat kon, was de diepte in *vadem*. Deze oude lengtemaat geeft dus de spanwijdte aan van de armen van een volwassen man. Omdat het een onnauwkeurige manier van meten is, is deze lengte later precies vastgelegd: 1 vadem is gelijk aan 6 voet. Een voet is even lang als 12 inch en een inch is 25,4 mm. Noemen we de waterdiepte in meter M en de waterdiepte in vadem V , dan kunnen we V omrekenen naar M .

a Geef een formule waarbij M uitgedrukt is in V .

Tegenwoordig meet men waterdiepte met een *echolood*. Dit apparaat bestaat uit een zender en een ontvanger die onder het wateroppervlak bevestigd zijn aan een boot. Het echolood zendt een geluidsgolf naar de bodem en even later wordt de door de bodem teruggekaatste geluidsgolf, de echo, weer door het echolood ontvangen. Er geldt $D = h + 750t$.

Hierin is:

- D de waterdiepte in meter, dus de afstand tussen het wateroppervlak en de bodem;
- t de echotijd tussen het zenden van de geluidsgolf en het ontvangen van de echo in seconden;
- h de afstand tussen de onderkant van het echolood en het wateroppervlak in meter.

Zie de figuur hiernaast.

b Bereken de echotijd als de bodem zich op 10 meter onder het echolood bevindt. Geef je antwoord in seconden en in drie decimalen.

De snelheid waarmee geluid zich verplaatst in water kun je uit de formule afleiden.

Yvonne zegt:

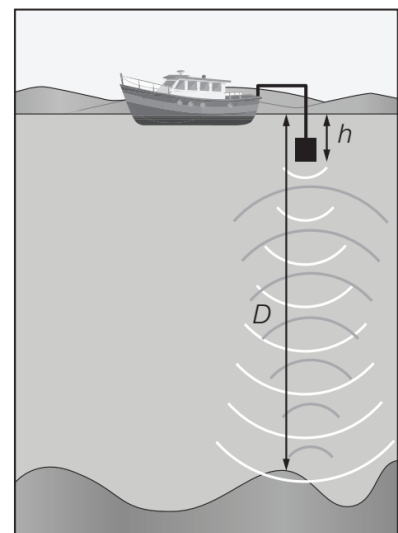
“Die snelheid is de helft van 750, dus 375 meter per seconde.”

Josje zegt:

“Die snelheid is het dubbele van 750, dus 1500 meter per seconde.”

Eén van beiden heeft gelijk.

c Wie heeft gelijk? Leg je antwoord uit met behulp van de formule.



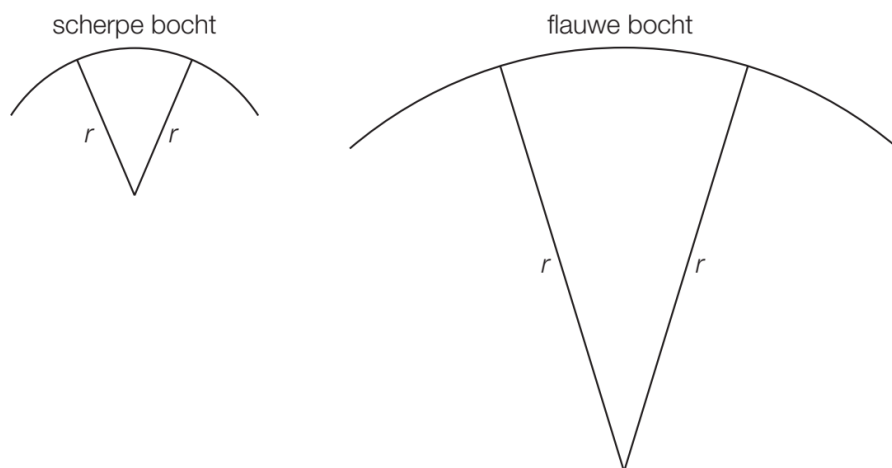
Een groep duikers vaart de zee op en zoekt een zo diep mogelijke plek om veilig voor anker te gaan. De ankerketting is 78 m lang en voor de veiligheid moet deze lengte minstens anderhalf keer de waterdiepte zijn. De waterdiepte die het echolood op deze boot aangeeft, kan door een onnauwkeurige meting 3% afwijken van de werkelijke waterdiepte.

- d** Bereken de maximale waarde die het echolood als waterdiepte mag aangeven om veilig voor anker te kunnen gaan. Geef je antwoord in meter en in één decimaal.

17 2023-I

► WERKBLAD Formule 1 (F1) is de hoogste klasse in de autosport. Gedurende het jaar worden er races gehouden op circuits in verschillende landen. In deze opgave kijken we naar een formule in de F1 die het verschil kan bepalen tussen winnen en verliezen.

In een F1-race moet de coureur steeds inschatten met welke snelheid hij een bocht kan nemen. Voor de scherpste van de bocht geldt: hoe kleiner de straal r van de bocht, hoe scherper de bocht. Zie de figuur.



Als de coureur sneller rijdt dan de maximale bochtensnelheid v , vliegt hij uit de bocht. Onder bepaalde omstandigheden geldt voor een bepaald type F1-auto het volgende verband tussen v en r :

$$r = \frac{4,026 \cdot v^2}{(7644 + 0,1929 \cdot v^2)^{0,8}}$$

Hierin is r de straal van de bocht in meter en v de maximale bochtensnelheid in km per uur.

Een coureur nadert een bocht met een straal van 80 meter.

- a** Bereken met behulp van de formule voor deze bocht de maximale bochtensnelheid in hele km per uur.

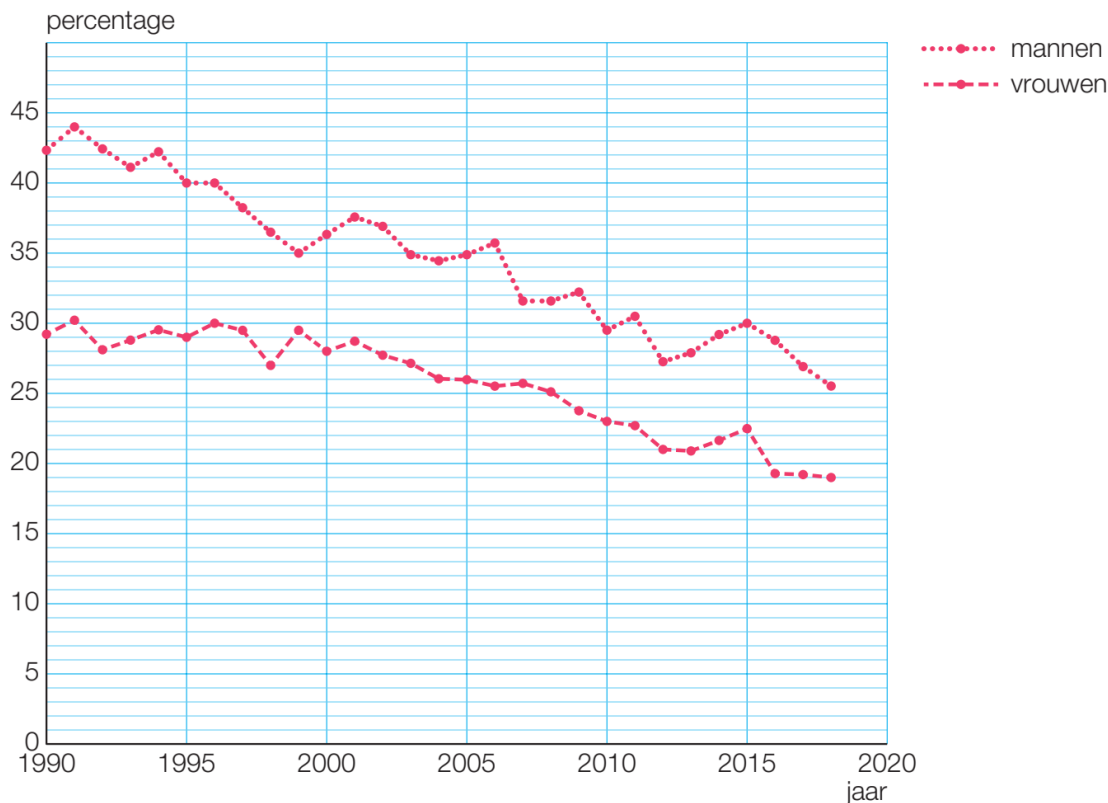
Op het werkblad staat een schets van de grafiek die hoort bij het verband van de formule. In deze schets is de maximale bochtensnelheid v uitgezet tegen de straal r van de bocht.

- b** Geef in de grafiek op het werkblad het gebied aan waar de coureur uit de bocht vliegt. Licht je antwoord toe.

18 2023-II

De figuur hieronder komt uit het rapport Volksgezondheid Toekomst Verkenning 2018 van het RIVM (Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu). In deze figuur zijn voor Nederland het percentage van de mannen dat rookt en het percentage van de vrouwen dat rookt op 1 juli voor de jaren 1990 tot en met 2018 weergegeven.

PERCENTAGE ROKERS 18 JAAR OF OUDER



Op 1 juli 2015 telde Nederland 6 618 000 mannen en 6 853 000 vrouwen van 18 jaar of ouder.

Bereken met behulp van de figuur hoeveel procent van de rokers van 18 jaar of ouder op 1 juli 2015 man was. Geef je antwoord in hele procenten.

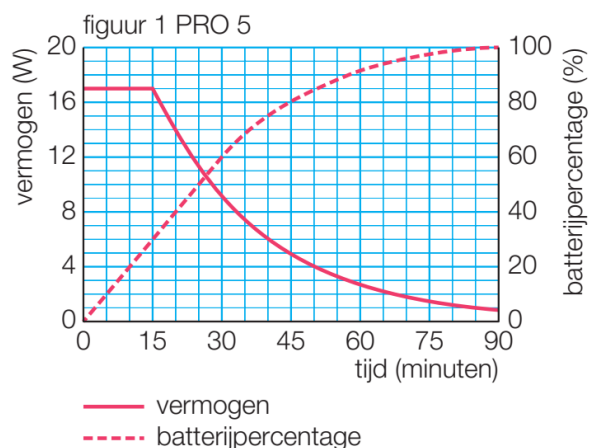
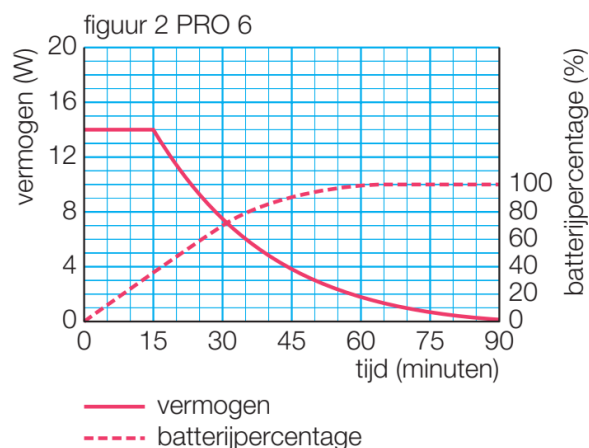
19 2024-I

WERKBLAD Op de foto zie je een telefoon waarvan het batterijpercentage 73% is. Daarmee wordt bedoeld dat de batterij van de telefoon voor 73% is opgeladen. Wanneer het batterijpercentage van een telefoon lager is dan 100%, kan de telefoon worden opgeladen met behulp van een oplader.

Zo'n oplader levert een bepaald vermogen in watt (W). Welk vermogen op een bepaald moment door de oplader wordt geleverd, hangt af van het type telefoon en het batterijpercentage dat de telefoon op dat moment heeft.



In de figuren 1 en 2 zie je de grafieken die horen bij twee types telefoons (PRO 5 en PRO 6). Op de horizontale as staat de tijd vanaf het moment dat de lege telefoon aan de oplader gelegd wordt.



Op het werkblad zijn de figuren vergroot afgebeeld, waarbij de doorgetrokken grafiek en de bijbehorende linker-as zijn weggelaten. Het batterijpercentage van de PRO 5 neemt in de eerste 30 minuten lineair toe. Als het batterijpercentage op dezelfde manier zou blijven toenemen, dan is de totale oplaadtijd (van 0 tot 100%) korter dan nu af te lezen is uit figuur 1.

- a** Bepaal door te tekenen in de figuur op het werkblad hoeveel minuten de totale oplaadtijd in dat geval zou zijn. Geef je antwoord in hele minuten.

Djimon heeft een PRO 5 en Sasha heeft een PRO 6. Ze leggen hun telefoons op hetzelfde moment aan de oplader. Sasha's telefoon had op dat moment een batterijpercentage van 10%. Beide telefoons bereiken na verloop van tijd op precies hetzelfde moment een batterijpercentage van 90%.

- b** Bepaal voor hoeveel procent de batterij van Djimon opgeladen was op het moment dat zijn telefoon aan de oplader gelegd werd. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuren op het werkblad. Geef je antwoord in hele procenten.

Het eerste stuk van de gestippelde grafieken in figuur 1 en figuur 2 is voor zowel de PRO 5 als de PRO 6 te beschrijven door een formule van de vorm $B = c \cdot t$, waarbij B het batterijpercentage in procenten is, t de tijd in minuten en c een getal.

- c** Onderzoek of het getal c bij de PRO 5 groter is dan bij de PRO 6. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuren op het werkblad.

Tijdens het hardlopen gaat je hartslag omhoog. Maar als die heel hoog oploopt, werkt je hart niet meer optimaal. Daarom is het van belang om rekening te houden met je maximale hartslag. De maximale hartslag is onder andere afhankelijk van je leeftijd en je geslacht.

In deze opgave kijken we naar de hartslag van volwassen mannen.

Er zijn verschillende formules om de maximale hartslag te berekenen, bijvoorbeeld voor ongetrainde en getrainde mannen:

$$M_{\text{ongetraind}} = 220 - L \quad (\text{formule 1})$$

$$M_{\text{getraind}} = 205,8 - 0,685 \cdot L \quad (\text{formule 2})$$

Hierin is M de maximale hartslag in aantal slagen per minuut en L de leeftijd in hele jaren.

De hartslag geeft je belangrijke informatie tijdens een training. Met behulp van een sporthorloge kun je je hartslag tijdens de training in de gaten houden.

De tabel geeft voor diverse soorten trainingen advies over de hartslag die je tijdens die training zou moeten aanhouden.



soort training	percentage van de maximale hartslag
warming-up / coolingdown	45 - 60
rustige duurtraining	60 - 70
intensieve duurtraining	70 - 80
maximale duurtraining	80 - 90
zware kortdurende inspanningstraining	90 - 100

Hans is een getrainde man van 48 jaar, houdt een rustige duurtraining en volgt daarbij het advies uit de tabel op.

- a** Bereken welke waarden van de hartslag er voor Hans mogelijk zijn waarbij hij zich houdt aan het advies. Geef de waarden in een geheel aantal slagen per minuut.

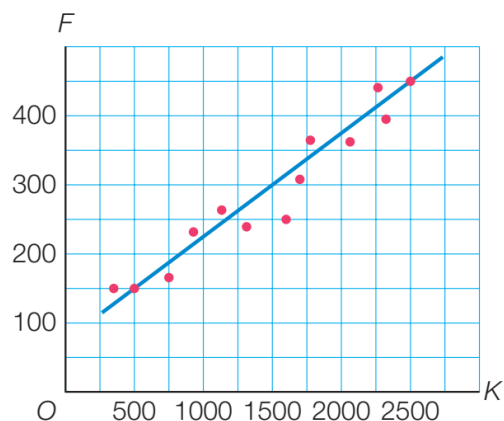
De formules voor de maximale hartslag voor ongetrainde en getrainde mannen verschillen. Je kunt je afvragen bij welke leeftijden ze meer dan 5 slagen per minuut verschillen.

- b** Onderzoek bij welke leeftijden dit het geval is.

12.2 Lineaire verbanden

21 In het assenstelsel hiernaast zijn metingen getekend met rode stippen. De blauwe lijn is het lineaire model dat hierbij hoort.

- Bereken met lineair interpoleren op basis van de metingen bij $K = 500$ en $K = 2500$ de waarde van F bij $K = 1250$.
- Stel de formule bij het model op.
- De meting bij $K = 1600$ wijkt veel af van het model. Hoeveel wijkt de bijbehorende waarde van F af van de waarde van F volgens het model?
- Ga uit van een evenredig verband. Bereken met de formule van een evenredige verband door $(1500, 300)$, welke waarde van F hoort bij $K = 1600$.



In de tabel staan gegevens over de afstand d in meters die een professionele sprinter op de 100 m na t seconden heeft afgelegd.

t	3,78	6,29
d	30	60

- Bereken met lineair extrapoleren hoeveel meter deze atleet na 9 seconden heeft afgelegd. Rond af op één decimaal.
- Bereken met lineair extrapoleren welke tijd bij een afstand van 100 meter hoort. Geef het antwoord in seconden en rond af op twee decimalen.

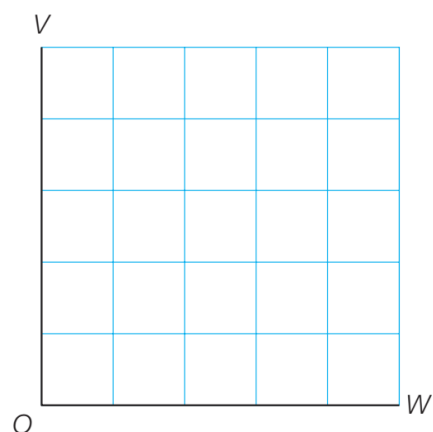
Gegeven is de formule $C = 5 \cdot W + 15 \cdot V$.

We onderscheiden de situaties:

- | | |
|------------------|-------------------|
| $C \leq 20$ | geen waarschuwing |
| $20 < C \leq 30$ | code geel |
| $30 < C \leq 40$ | code oranje |
| $C > 40$ | code rood |

Deze situaties kunnen als vier gebieden worden weergegeven in een assenstelsel zoals hiernaast. De grenzen tussen deze gebieden zijn rechte lijnen.

- Teken in het assenstelsel hiernaast de vier gebieden. Kies hiertoe een geschikte schaalverdeling en geef duidelijk aan welke situatie bij welk gebied hoort.



Lineaire formules

De formule $y = ax + b$ is de algemene vorm van een lineaire formule. De bijbehorende grafiek is de lijn met richtingscoëfficiënt a , die de y -as snijdt in het punt $(0, b)$.

$rc = a$ betekent: 1 naar rechts en a omhoog.

Van de lijn $y = ax + b$ door de punten A en B is

$$rc = a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Bij de lineaire formule $p = aq + b$ is $a = \frac{\Delta p}{\Delta q}$.

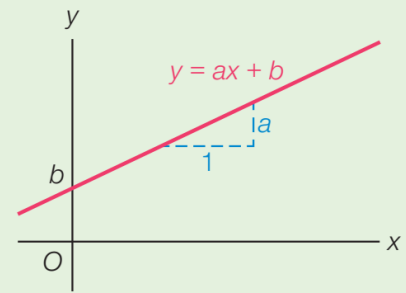
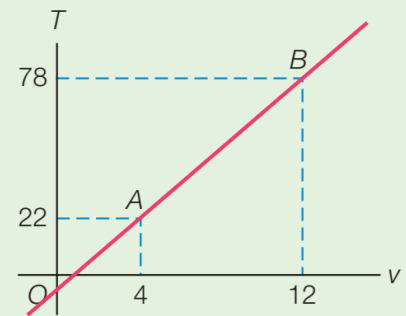
De lijn in de figuur hiernaast gaat door de punten $A(4, 22)$ en $B(12, 78)$.

De formule krijg je als volgt.

$$T = av + b \text{ met } a = \frac{\Delta T}{\Delta v} = \frac{78 - 22}{12 - 4} = 7$$

$$\left. \begin{array}{l} T = 7v + b \\ v = 4 \text{ en } T = 22 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7 \cdot 4 + b = 22 \\ 28 + b = 22 \\ b = -6 \end{array}$$

Dus $T = 7v - 6$.



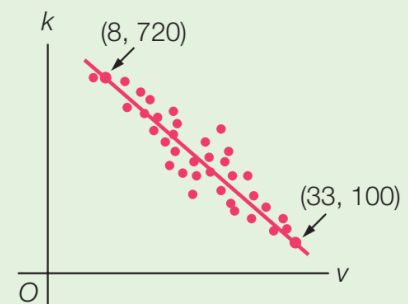
Lineaire modellen

In de figuur is bij een puntenwolk een lineair model opgesteld. De punten $(8, 720)$ en $(33, 100)$ liggen op de lijn. De formule van de lijn stel je als volgt op.

$$k = av + b \text{ met } a = \frac{\Delta k}{\Delta v} = \frac{100 - 720}{33 - 8} = -24,8$$

$$\left. \begin{array}{l} k = -24,8v + b \\ v = 8 \text{ en } k = 720 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -24,8 \cdot 8 + b = 720 \\ -198,4 + b = 720 \\ b = 918,4 \end{array}$$

Dus $k = -24,8v + 918,4$.



Lineair interpoleren en extrapoleren

Als een lineair model goed bij de gegevens past, kun je tussenliggende waarden berekenen met behulp van lineair interpoleren.

In de tabel staan gegevens voor het aantal ijssalons N in Nederland in jaar t . Met lineair interpoleren bereken je als volgt een schatting voor het aantal in 2022.

In 3 jaar 261 ijssalons erbij, dus gemiddeld $\frac{261}{3} = 87$ per jaar erbij.

Het jaar 2022 is 2 jaar na 2020, dus in 2022 verwacht je $945 + 2 \cdot 87 = 1119$ ijssalons.

		+ 3	
t	2020		2023
N	945		1206
		+ 261	

Gebieden tekenen

Bij de formule $T = 1,5A + 4B$ gelden de volgende vier situaties:

- I $T \leq 12$
- II $12 < T \leq 18$
- III $18 < T \leq 24$
- IV $T > 24$

Deze situaties kunnen als vier gebieden worden weergegeven in een assenstelsel met een horizontale A -as en een verticale B -as.

$T = 12$ geeft $1,5A + 4B \leq 12$.

Om de bijbehorende grenslijn en het gebied te tekenen, bereken je de coördinaten van twee punten van de grenslijn $1,5A + 4B = 12$.

$A = 0$ geeft $1,5 \cdot 0 + 4B = 12$, dus $B = 3$.

$B = 0$ geeft $1,5A + 4 \cdot 0 = 12$, dus $A = 8$.

De lijn gaat dus door de punten $(0, 3)$ en $(8, 0)$.

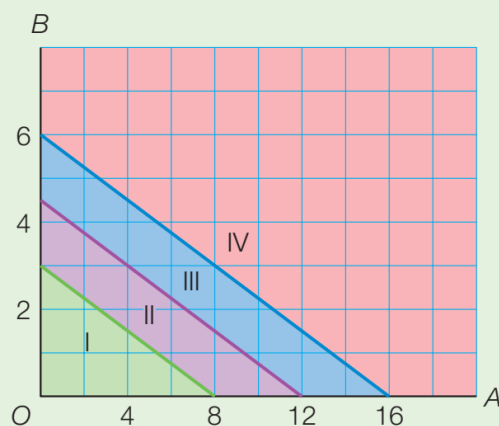
Het controlepunt $(0, 0)$ invullen geeft $1,5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \leq 12$, dus kleur het gebied waar $(0, 0)$ in ligt.

Het gebied bij de ongelijkheid $12 < T \leq 18$ is het gebied tussen de lijnen met $T = 12$ en $T = 18$.

$T = 18$ geeft $1,5A + 4B = 18$ en dit is de lijn door de punten $(0; 4,5)$ en $(12, 0)$.

$T = 24$ geeft $1,5A + 4B = 24$ en dit is de lijn door de punten $(0, 6)$ en $(16, 0)$.

Zo krijg je de figuur hiernaast met de vier gebieden, waarin elk van de situaties is aangegeven.



22 2021-III

De Museumkaart is een persoonsgebonden kaart die een jaar lang onbeperkt toegang geeft tot ongeveer 400 musea in heel Nederland. Het aantal Museumkaarthouders is in de periode 2011-2016 sterk gegroeid. In de tabel staan de aantallen Museumkaarthouders op 1 januari 2011 en op 1 januari 2016. Neem aan dat de groei in deze periode lineair was.

datum	1-1-2011	1-1-2016
aantal Museumkaarthouders	805 594	1 299 650

Bereken, uitgaande van dezelfde lineaire groei in de daaropvolgende jaren, in welk jaar er voor het eerst meer dan 2 miljoen Museumkaarthouders zullen zijn.

[► **WERKBLAD**] Vroeger werd in veel bouwmaterialen asbest gebruikt. Als een oud gebouw gesloopt wordt, kunnen asbestvezels in de lucht terechtkomen. Iemand die langdurig asbestvezels inademt, kan erg ziek worden. Als men vermoedt dat er bij de sloop asbest is vrijgekomen, dan worden er maatregelen genomen op basis van de gemeten hoeveelheid asbestvezels in de lucht.



Er zijn twee hoofdsoorten asbest: wit asbest en blauw asbest. Met behulp van de gemeten concentraties van deze beide hoofdsoorten wordt de

overschrijdingsfactor F berekend. Er geldt $F = \frac{C_{\text{wit}}}{2000} + \frac{C_{\text{blauw}}}{300}$.

Hierin zijn C_{wit} en C_{blauw} de gemeten concentraties witte en blauwe asbestvezels per m^3 lucht. Hoe groter de waarde van de overschrijdingsfactor F is, des te groter is het gevaar. Een van de twee hoofdsoorten asbest is gevaarlijker dan de andere hoofdsoort.

- a** Beredeneer aan de hand van de formule, zonder getallenvoorbeelden te geven, welke hoofdsoort gevaarlijker is: wit of blauw asbest.

Zonder getallenvoorbeeld, dus je mag geen getallen voor C_{wit} en C_{blauw} nemen om F te berekenen.

Afhankelijk van de waarde van F worden maatregelen getroffen. Men onderscheidt drie situaties:

- $F < 0,3$: zeer klein risico, er wordt een beheersplan opgesteld,
- $0,3 \leq F \leq 1$: klein risico, de asbestbron wordt opgespoord en verwijderd,
- $F > 1$: groot risico, er wordt tot ontruiming overgegaan.

Tijdens de verbouwing van een bepaald huis wordt gemeten: $C_{\text{blauw}} = 75$.

- b** Bereken bij welke waarden van C_{wit} wordt geadviseerd om tot ontruiming over te gaan.

In het geval dat $F = 1$ is de formule te schrijven in de vorm

$$\dots \cdot C_{\text{wit}} + \dots \cdot C_{\text{blauw}} = 6000.$$

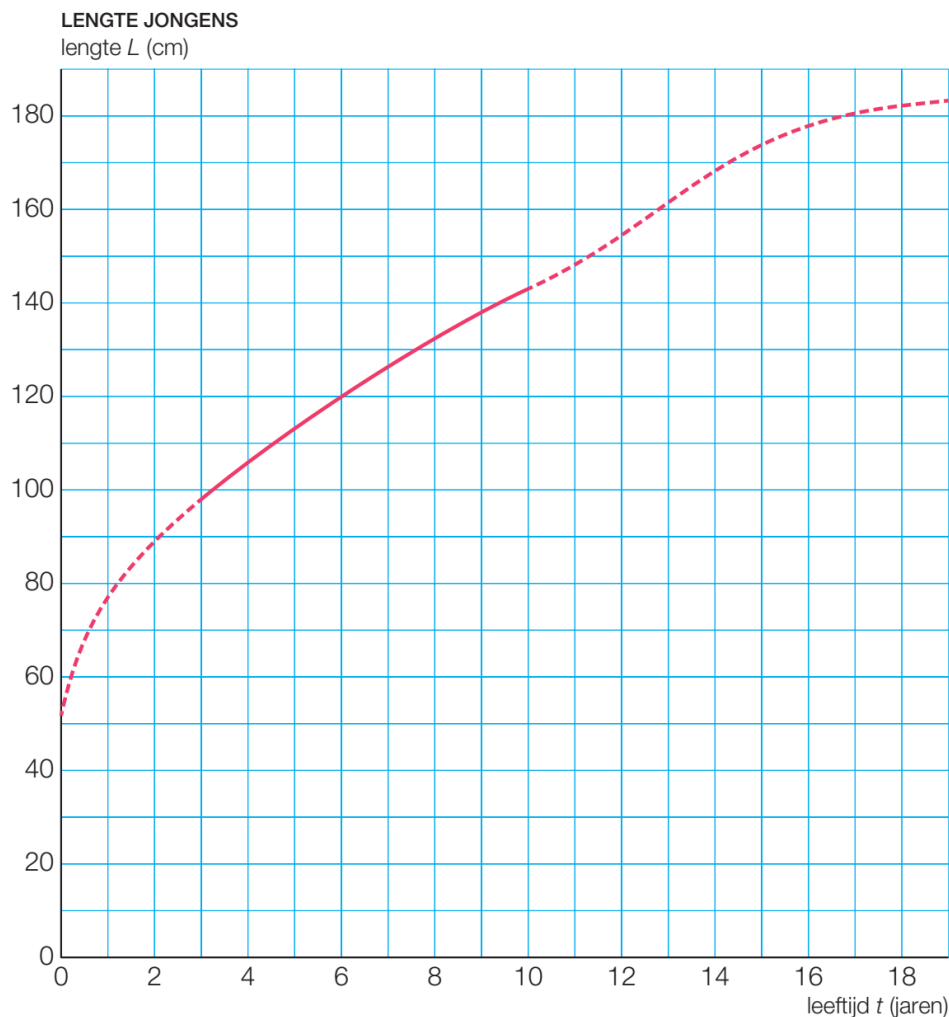
- c** Bereken de getallen die op de puntjes moeten staan.

Op het werkblad is een assenstelsel getekend met horizontaal C_{wit} en verticaal C_{blauw} . De drie risico's (zeer klein, klein en groot) kunnen als gebieden worden weergegeven in dit assenstelsel. De grenzen tussen deze gebieden zijn (rechte) lijnen.

- d** Teken in het assenstelsel op het werkblad de drie risicogebieden. Kies hiertoe een geschikte schaalverdeling en geef duidelijk aan welk risico bij welk gebied hoort.

24 2021-II

We bekijken een wiskundig model dat het verband geeft tussen de leeftijd van Nederlandse jongens en hun (gemiddelde) lengte op die leeftijd. Dit model gaat uit van drie fases: de kleutertijd (0-3 jaar), de kindertijd (3-10 jaar) en de puberteit (vanaf 10 jaar). Zie de figuur.



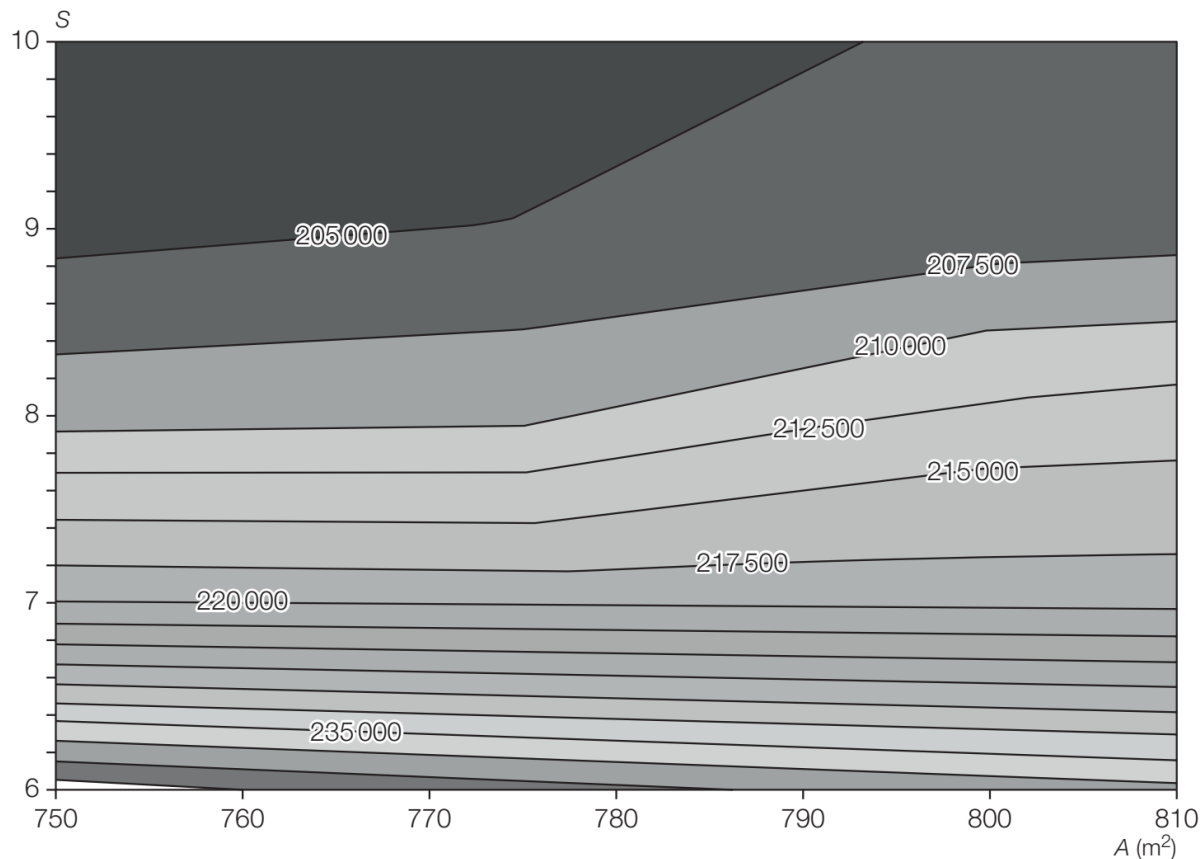
Tijdens de kindertijd neemt de lengte nagenoeg lineair toe. Je kunt dus voor de kindertijd een formule geven waarbij je de lengte L (in centimeter) uitdrukt in de leeftijd t (in jaren).

Stel deze formule op. Geef de getallen in je formule in één decimaal.

25 2023-I

We kijken naar de huisartsconsulten bij personen van 65 jaar of ouder. Neem voor deze leeftijdsgroep aan dat het verband tussen het aantal huisartsconsulten per persoon per jaar en de leeftijd in jaren lineair is. Voor personen van 65 jaar is het aantal huisartsconsulten per persoon per jaar gelijk aan 5. Voor personen van 80 jaar is dit aantal gelijk aan 9. Bereken met deze gegevens het aantal huisartsconsulten per persoon per jaar voor personen die 92 jaar oud zijn. Geef je antwoord als geheel getal.

In de onderstaande figuur is voor een vlucht van 11 000 km het verband tussen het brandstofverbruik V (in kg), de vleugeloppervlakte A en de slankheid S van een vliegtuig weergegeven.



De lijnen die alle punten met gelijk brandstofverbruik met elkaar verbinden, worden *isolijnen* genoemd. Tussen twee opeenvolgende isolijnen zit steeds een verschil van 2500 kg.

In de figuur kun je bijvoorbeeld aflezen dat een vliegtuig met een vleugeloppervlakte van 795 m² en een slankheid van 8 op een vlucht van 11 000 km 212 500 kg brandstof verbruikt. Mark zegt:

“Als dit vliegtuig 25 m² minder vleugeloppervlakte zou hebben en de slankheid zou toenemen tot 9, dan zou dat flink wat brandstof besparen.”

- a** Bereken hoeveel kg brandstof dit vliegtuig zo aan brandstof zou kunnen besparen op een vlucht van 11 000 km.

Het vergroten van de slankheid van een vliegtuig is de moeite waard: een ontwerper van vliegtuigen kan bij een gegeven vleugeloppervlakte veel toekomstig brandstofverbruik besparen door de slankheid van het vliegtuig groter te maken.

Bekijk in de figuur het gebied tussen $S = 6$ en $S = 7$. Op de verticale lijn met $A = 760$ liggen de isolijnen ongeveer even ver van elkaar.

Voor $A = 760$ en S tussen 6 en 7 geldt daarom dat het verband tussen V en S lineair is.

- b** Stel een formule op die V uitdrukt in S voor $A = 760$ en S tussen 6 en 7.

In de winter kan het, vooral als het hard waait, veel kouder aanvoelen dan het in werkelijkheid is. We zeggen dan dat de *gevoelstemperatuur* lager is dan de werkelijke temperatuur.

Tot aan het einde van de vorige eeuw gebruikte het KNMI (Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut) de tabel van Steadman om de gevoelstemperatuur te bepalen. Zie de tabel.

GEVOELSTEMPERAATUUR VOLGENS STEADMAN AFGEROND OP HELEN, IN °C

windsnelheid		werkelijke temperatuur					
in km/u	in m/s (afgerond)	0 °C	-5 °C	-10 °C	-15 °C	-20 °C	-25 °C
10	2,8	-2	-7	-12	-17	-22	-28
15	4,2	-3	-9	-14	-19	-24	-30
20	5,6	-5	-10	-15	-21	-26	-32
25	6,9	-6	-12	-17	-23	-28	-34
30	8,3	-7	-13	-19	-24	-30	-36
35	9,7	-9	-15	-20	-26	-32	-38
40	11,1	-10	-16	-22	-28	-34	-40
45	12,5	-11	-17	-23	-29	-35	-41
50	13,9	-12	-19	-25	-31	-37	-43
55	15,3	-13	-20	-26	-32	-39	-45
60	16,7	-15	-21	-27	-34	-40	-47
65	18,1	-16	-22	-29	-35	-42	-48
70	19,4	-16	-23	-30	-37	-43	-50
75	20,8	-17	-24	-31	-38	-45	-52
80	22,2	-18	-25	-32	-39	-46	-53

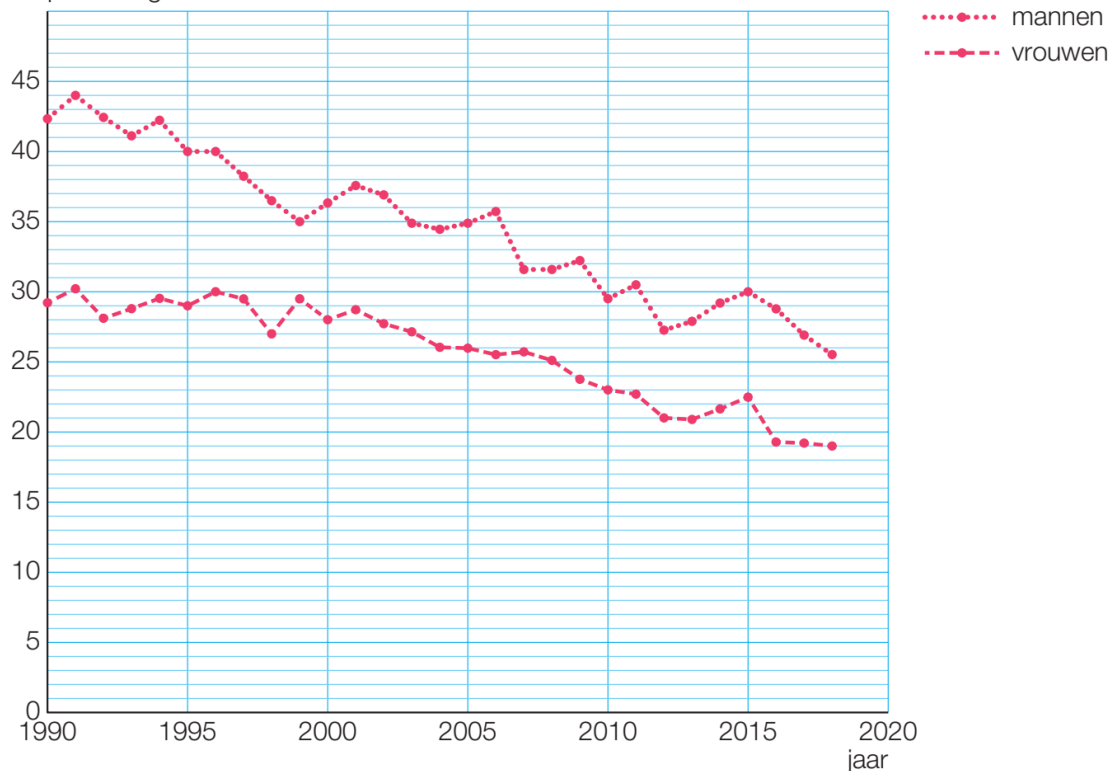
In deze tabel kan de (afgeronde) gevoelstemperatuur worden afgelezen bij een gegeven windsnelheid en werkelijke temperatuur. Zo zie je bijvoorbeeld dat bij een windsnelheid van 30 km/u en een werkelijke temperatuur van -10 °C de gevoelstemperatuur -19 °C is.

Op 16 februari 1956 werd in het Groningse Uithuizermeeden een kouderecord gemeten. Het werd toen -26,8 °C bij een windsnelheid van 25 km/u. Met behulp van de tabel van Steadman kun je berekenen wat de bijbehorende gevoelstemperatuur was. Ga ervan uit dat voor elke windsnelheid het verband tussen de gevoelstemperatuur en de werkelijke temperatuur lineair is.

Bereken deze gevoelstemperatuur. Gebruik hierbij de gevoelstemperaturen die horen bij een werkelijke temperatuur van 0 °C en -25 °C. Geef je antwoord in gehele graden.

Figuur 1 komt uit het rapport Volksgezondheid Toekomst Verkenning 2018 van het RIVM (Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu). In deze figuur zijn voor Nederland het percentage van de mannen dat rookt en het percentage van de vrouwen dat rookt op 1 juli voor de jaren 1990 tot en met 2018 weergegeven.

FIGUUR 1 PERCENTAGE ROKERS 18 JAAR OF OUDER
percentage



Deze hele opgave gaat alleen over mannen en vrouwen van 18 jaar of ouder.

Voor de periode vanaf 2018 heeft het RIVM een formule opgesteld om de ontwikkeling van het percentage van de mannen dat rookt te voorspellen. Men gaat uit van een lineaire afname volgens de volgende formule:

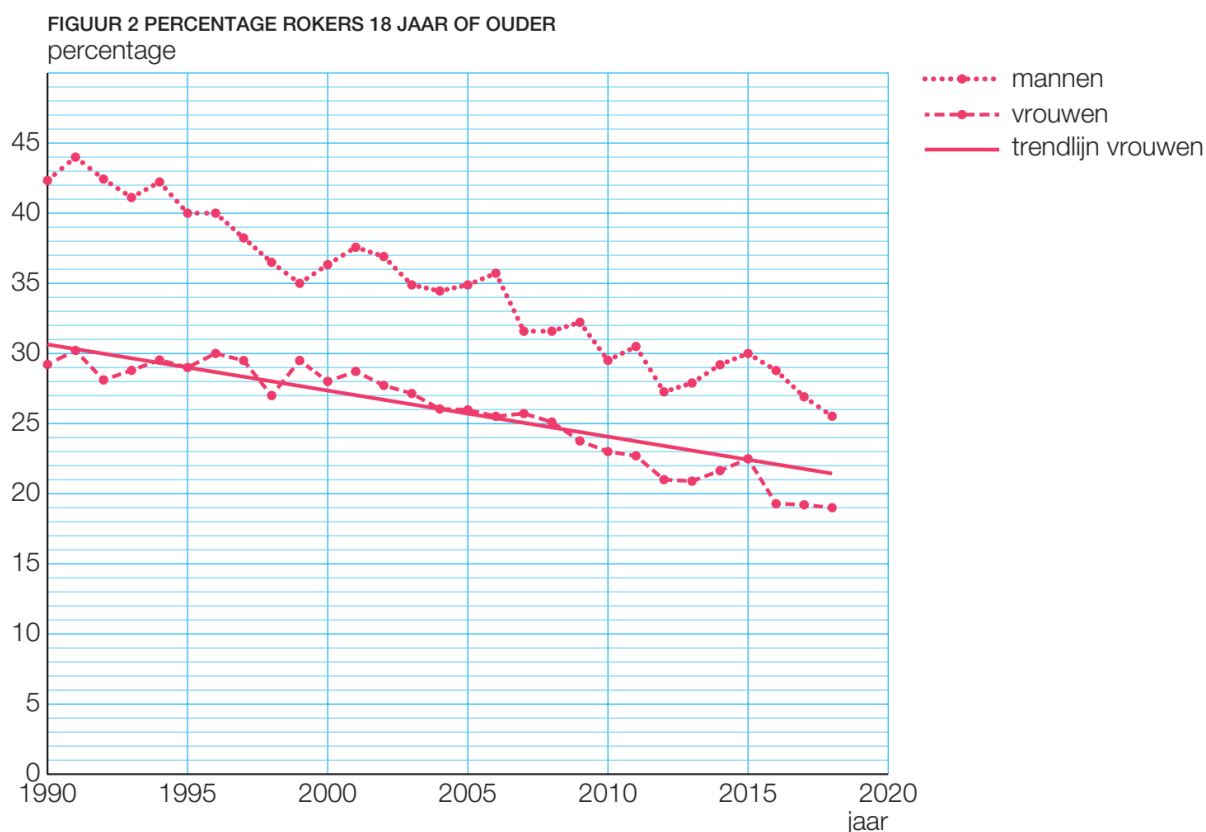
$$P_m = -0,61t + 25,93 \quad (\text{formule 1})$$

Hierin is P_m het percentage van de mannen dat rookt en t het aantal jaren vanaf 1 juli 2018.

Het RIVM beweert dat volgens formule 1 het percentage van de mannen dat rookt voor de start van het jaar 2040 gehalveerd is ten opzichte van 1 juli 2018.

a Onderzoek of deze bewering juist is.

Figuur 2 is ontstaan door in figuur 1 de trendlijn te tekenen voor het percentage van de vrouwen dat rookt.



De percentages van de vrouwen die roken op 1 juli in 1995 en 2004 liggen precies op de trendlijn. Met deze gegevens kan een formule voor de trendlijn worden opgesteld:

$$P_v = -0,33t + 30,67 \quad (\text{formule 2})$$

Hierin is P_v het percentage van de vrouwen dat rookt en t het aantal jaren vanaf 1 juli 1990.

De percentages van de vrouwen die roken in 1995 en 2004 zijn gehele getallen.

b Bereken met deze percentages de getallen in formule 2 in drie decimalen.

Het percentage van de mannen dat rookt, kan vanaf 1 juli 2018 worden berekend met formule 1. Het percentage van de vrouwen dat rookt, kan vanaf 1 juli 1990 worden berekend met formule 2.

c Onderzoek in welk jaar het percentage van de mannen dat rookt en het percentage van de vrouwen dat rookt gelijk zullen zijn.

29 2021-II

Hoewel de wereldbevolking toeneemt, is het jaarlijks aantal geboorten de afgelopen jaren redelijk stabiel. Het *geboortecijfer*, het aantal geboorten per jaar per 1000 mensen, neemt dus af.

Het *sterftecijfer* is het aantal overledenen per jaar per 1000 mensen.

De sterke bevolkingsgroei van de afgelopen 100 jaar kan verklaard worden door het feit dat mensen langer zijn gaan leven door verbeterde levensomstandigheden. Hierdoor is het sterftecijfer gedaald, waardoor er minder mensen stierven dan er geboren werden.

Men verwacht echter over een aantal jaren wel weer een lichte toename van het sterftecijfer. In de tabel zie je voor de jaren 2060 en 2080 de verwachte geboortecijfers en sterftecijfers.

jaar	2060	2080
geboortecijfer	14,0	12,8
sterftecijfer	9,8	10,6

Neem aan dat het geboortecijfer vanaf 2060 lineair afneemt en het sterftecijfer vanaf 2060 lineair toeneemt.

Bereken in welk jaar de bevolkingsgroei dan naar verwachting zal stoppen.

30 2024-II

Een copyshop biedt printabonnementen aan. Voor een vast bedrag per maand kun je een vast aantal pagina's afdrukken. Wil je meer pagina's afdrukken in die maand, dan moet je daarvoor extra betalen. Het aantal extra pagina's dat je afdrukt, wordt bijgehouden door de copyshop. In deze opgave bedoelen we met '(afdruk)kosten' telkens de kosten voor de klant, niet voor de copyshop.

Er zijn verschillende abonnementen. Zie de tabel.

Naam abonnement	Print Gratis	Print Soms	Print Regelmatig
vast bedrag per maand	€0	€3	€5
aantal gratis pagina's per maand	15	50	100
variabele kosten voor extra pagina's	€1 per 10 pagina's	€1 per 10 pagina's	€1 per 15 pagina's

Bijvoorbeeld: als je het Print Soms-abonnement hebt en in een maand 51 pagina's afdrukt, dan zijn de kosten voor die maand $3 + 1 = 4$ euro. Ook 52 pagina's kosten bij dit abonnement 4 euro.

Bij het afdrukken van 35 pagina's in een maand zijn de kosten met een Print Gratis-abonnement lager dan met een Print Soms-abonnement.

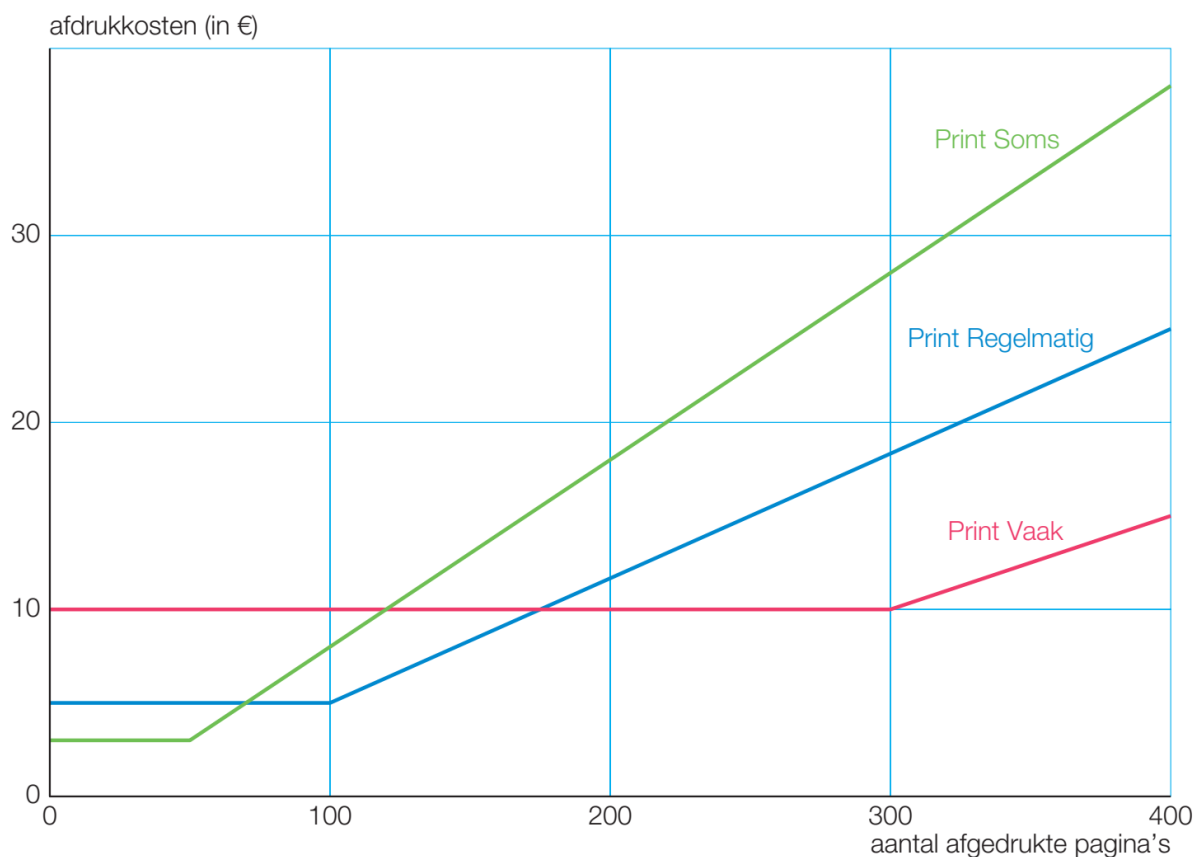
■ Bereken hoeveel procent lager. Geef je antwoord in hele procenten.

Redouan en Jelle hebben beiden het Print Soms-abonnement voor een jaar afgesloten. In dat jaar drukken ze elk 600 pagina's af. Het is mogelijk dat Redouan voor dat jaar een ander bedrag kwijt is dan Jelle.

b Bereken het maximale verschil in euro's dat mogelijk is.

De copyshop besluit dat je voortaan het afdrukken van de extra pagina's niet meer per 10 of 15 pagina's betaalt, maar per stuk. Voor elk abonnement kunnen de kosten per afgedrukte pagina worden berekend met behulp van de variabele kosten uit de onderste rij van de tabel. Zo zijn bijvoorbeeld deze kosten bij het Print Gratis-abonnement 0,10 euro per pagina.

In de figuur zijn voor deze nieuwe situatie de afdrukkosten in een bepaalde maand voor de abonnementen Print Soms en Print Regelmatig weergegeven, afhankelijk van het aantal afgedrukte pagina's. Ook is de grafiek weergegeven van een nieuw abonnement dat de copyshop aanbiedt: Print Vaak.



Met behulp van de beschrijving van de nieuwe situatie en de figuur, zou je aan de tabel (van de oude situatie) een kolom kunnen toevoegen voor het abonnement Print Vaak.

c Bepaal voor het abonnement Print Vaak het vaste bedrag per maand, het aantal gratis pagina's per maand en het aantal extra pagina's dat je voor 1 euro kunt afdrukken. Licht je drie antwoorden toe.

12.3 Exponentiële verbanden

- 31** **a** Een hoeveelheid neemt per jaar met 1,25% toe.
Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid in 20 jaar toe?
- b** Een hoeveelheid neemt per jaar met 0,6% af.
Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid in 100 jaar af?
- c** Een hoeveelheid neemt per jaar met 1,35% toe.
Na hoeveel jaar is de hoeveelheid verdubbeld? Rond af op gehele jaren.
- d** Een hoeveelheid neemt per jaar met 0,05% af.
Bereken de halveringstijd. Rond af op gehele jaren.
- e** Bereken het groeipercentage per jaar bij een verdubbelingstijd van 20 jaar.
- f** De halveringstijd van een hoeveelheid is 577 jaar.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid jaarlijks afneemt. Rond af op drie decimalen.
- g** Toon aan dat de tabel hiernaast in overeenstemming is met een exponentieel verband.
- | | | | | | |
|-----|--------|------------------|------------------|-----|-----|
| A | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 |
| B | 10^8 | $1,5 \cdot 10^6$ | $2,3 \cdot 10^4$ | 340 | 5,1 |
- h** Een hoeveelheid H groeit exponentieel. Op 1 januari 2005 is $H = 3680$ en op 1 januari 2018 is $H = 10\,640$.
Stel de formule op van H . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2000. Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.

► **WERKBLAD** Bij de vragen i en j gebruik je een werkblad.

- i** De lijn die op het logaritmisch papier op het werkblad is getekend, hoort bij een exponentieel verband, dus de formule is van de vorm $N = b \cdot g^t$.
Bereken b in gehelen en g in twee decimalen.
- j** Gegeven zijn de formules $N_1 = 2000 \cdot 0,55^t$ en $N_2 = 250 \cdot 0,55^t$ met t de tijd in jaren. De grafieken van deze formules zijn op logaritmisch papier rechte lijnen.
Teken deze lijnen op het werkblad. Waarom zijn de lijnen evenwijdig?

Exponentiële groei

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid telkens met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Bij exponentiële groei hoort de formule $N = b \cdot g^t$. Hierbij is b de beginhoeveelheid en g de groeifactor per tijdseenheid.

Groeifactoren en groeipercentages

Bij een toename van 12% per tijdseenheid hoort exponentiële groei met groeifactor 1,12. Dus neemt een hoeveelheid N jaarlijks met 12% toe en is de beginhoeveelheid 1250, dan hoort daarbij de formule $N = 1250 \cdot 1,12^t$.

Is g de groeifactor per tijdseenheid, dan is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Is de groeifactor per dag 1,32, dan is de groeifactor per week gelijk aan $g_{\text{week}} = 1,32^7 \approx 6,983$.

En zo volgt uit $g_{\text{dag}} = 1,32$ dat $g_{\text{uur}} = 1,32^{\frac{1}{24}} \approx 1,012$.

Neemt een hoeveelheid per dag met 4% toe, dan bereken je als volgt de procentuele toename per week.

- $g_{\text{dag}} = 1,04$, dus $g_{\text{week}} = 1,04^7 \approx 1,316$
- Het groeipcentage per week is 31,6%.

Het omzetten van een groeipcentage naar een andere tijdseenheid gaat via groeifactoren.

Neemt een hoeveelheid per uur met 28% af, dan bereken je de procentuele afname per kwartier via de groeifactoren g_{uur} en g_{kwartier} .

- $g_{\text{uur}} = 0,72$, dus $g_{\text{kwartier}} = 0,72^{\frac{1}{4}} \approx 0,921$
- De afname per kwartier is 7,9%.

Exponentieel verband nagaan

Het verband tussen L en a in de tabel hiernaast is exponentieel. Je kunt als volgt aantonen dat de tabel hiermee in overeenstemming is.

a	8	12	16	20
L	7,32	10,98	16,47	24,71

$$\frac{10,98}{7,32} = 1,5; \frac{16,47}{10,98} = 1,5 \text{ en } \frac{24,71}{16,47} \approx 1,5$$

Telkens als a met 4 toeneemt, wordt L met (ongeveer) 1,5 vermenigvuldigd.

De tabel klopt dus bij een exponentieel verband.

Wil je weten welke L bij $a = 15$ hoort, dan gebruik je:

de groeifactor is $g = 1,5^{\frac{1}{4}} = 1,106\dots$

en bij $a = 12$ hoort $L = 10,98$.

Je krijgt: voor $a = 15$ is

$$L = 10,98 \cdot 1,106\dots^3 \approx 14,88.$$

a	12	13	14	15	16
L	10,98	...	...	...	16,47

$\times 1,106\dots \times 1,106\dots \times 1,106\dots$

Voor $a = 15$ is

$$L = 10,98 \cdot 1,106\dots^3$$

Exponentiële formule opstellen

Bij exponentiële groei kun je de formule opstellen als je op twee tijdstippen de hoeveelheid weet.

De grafiek hiernaast hoort bij exponentiële groei.

De bijbehorende formule krijg je als volgt.

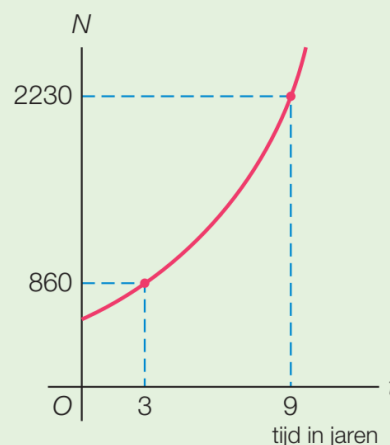
Bij $t = 3$ hoort $N = 860$ en bij $t = 9$ hoort $N = 2230$.

$$g_{6 \text{ jaar}} = \frac{2230}{860}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{2230}{860} \right)^{\frac{1}{6}} = 1,1721...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,1721...^t \\ t = 3 \text{ en } N = 860 \end{array} \right\} b \cdot 1,1721...^3 = 860$$

$$\text{Dus } b = \frac{860}{1,1721...^3} = 534,06...$$

Rond je de beginhoeveelheid af op gehelen en de groeifactor op drie decimalen, dan krijg je de formule $N = 534 \cdot 1,172^t$.



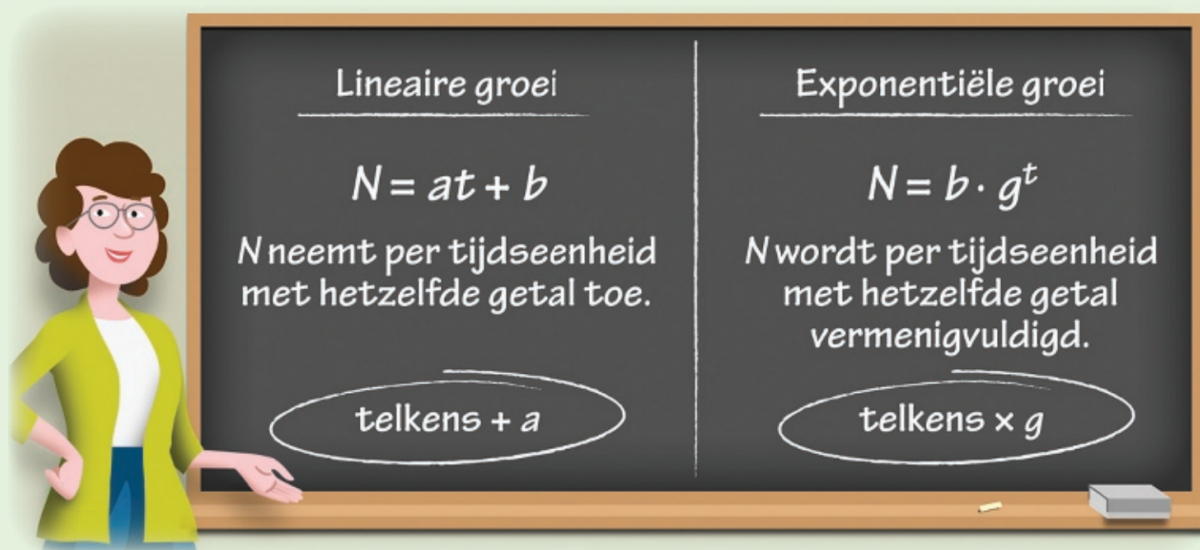
Lineaire en exponentiële groei

Voor $t = 3$ is $N = 150$ en voor $t = 8$ is $N = 600$.

- Heb je te maken met *lineaire groei*, dan is $rc = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{600 - 150}{8 - 3} = 90$.
Dus per tijdseenheid neemt N met 90 toe.

- Heb je te maken met *exponentiële groei*, dan is $g = \left(\frac{600}{150} \right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,320$.

Dus per tijdseenheid wordt N met 1,320 vermenigvuldigd.



Verdubbelingstijd en halveringstijd

De *verdubbelingstijd* is de tijd waarin de hoeveelheid verdubbelt bij exponentiële groei. Bij exponentiële groei met groeifactor g vind je de verdubbelingstijd t door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen.

Is bij een exponentiële groei de toename 2,3% per jaar, dan krijg je de vergelijking $1,023^t = 2$ met t in jaren. Invoeren van de vergelijking $1,023^x = 2$ en gebruik van de optie oplossen geeft $x = 30,48...$, dus de verdubbelingstijd is ongeveer 30,5 jaar.

Je kunt ook de optie snijpunt gebruiken na het invoeren van $y_1 = 1,023^x$ en $y_2 = 2$.

Om bij een verdubbelingstijd van 50 jaar het groeipercentage per jaar te berekenen, bedenk je $g_{50 \text{ jaar}} = 2$, dus $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{50}} = 1,01395\dots$, dus het groeipercentage is ongeveer 1,40% per jaar.

Om de groeifactor per jaar te berekenen, kun je ook de vergelijking $g^{50} = 2$ oplossen met de GR.

De *halveringstijd* is de tijd waarin de hoeveelheid halveert bij exponentiële groei. Bij exponentiële groei met groeifactor g vind je de halveringstijd t door de vergelijking $g^t = 0,5$ op te lossen.

Is bij een exponentiële groei de afname 2,3% per jaar, dan krijg je de vergelijking $0,977^t = 0,5$. Invoeren van de vergelijking $0,977^x = 0,5$ en gebruik van de optie oplossen geeft $x = 29,78\dots$, dus de halveringstijd is ongeveer 29,8 jaar.

Om bij een halveringstijd van 50 jaar het groeipercentage per jaar te berekenen, bedenk je $g_{50 \text{ jaar}} = 0,5$, dus $g_{\text{jaar}} = 0,5^{\frac{1}{50}} = 0,98623\dots$, dus de afname is ongeveer 1,38% per jaar.

Logaritmisch papier

Bij een rechte lijn op logaritmisch papier hoort exponentiële groei.

Op het logaritmisch papier hiernaast zijn twee evenwijdige lijnen getekend. Dit betekent dat de groeifactoren gelijk zijn. Dit kun je ook narekenen.

Je leest af dat de grafiek van N_1 door de punten $(0, 1500)$ en $(7, 200)$ gaat.

Dit geeft $g_{7 \text{ jaar}} = \frac{200}{1500}$, dus

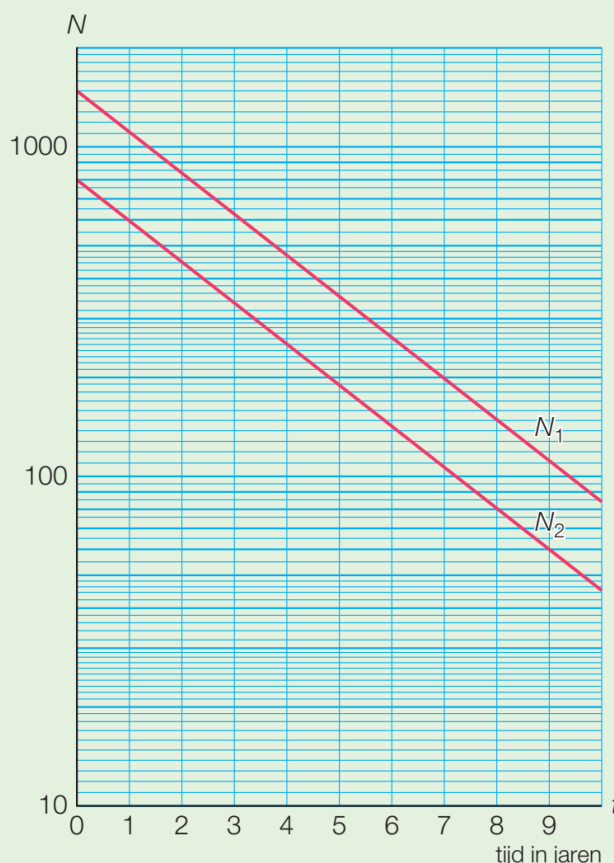
$$g_{\text{jaar}} = \left(\frac{200}{1500} \right)^{\frac{1}{7}} \approx 0,750.$$

Je leest af dat de grafiek van N_2 door de punten $(0, 800)$ en $(8, 80)$ gaat.

Dit geeft $g_{8 \text{ jaar}} = \frac{80}{800} = 0,1$, dus

$$g_{\text{jaar}} = 0,1^{\frac{1}{8}} \approx 0,750.$$

Je ziet dat de groeifactoren per jaar aan elkaar gelijk zijn. De formules zijn $N_1 = 1500 \cdot 0,750^t$ en $N_2 = 800 \cdot 0,750^t$.



32 2021-II

De afgelopen eeuwen is het aantal mensen op aarde sterk toegenomen. Sinds enkele decennia is deze toename aan het afnemen.

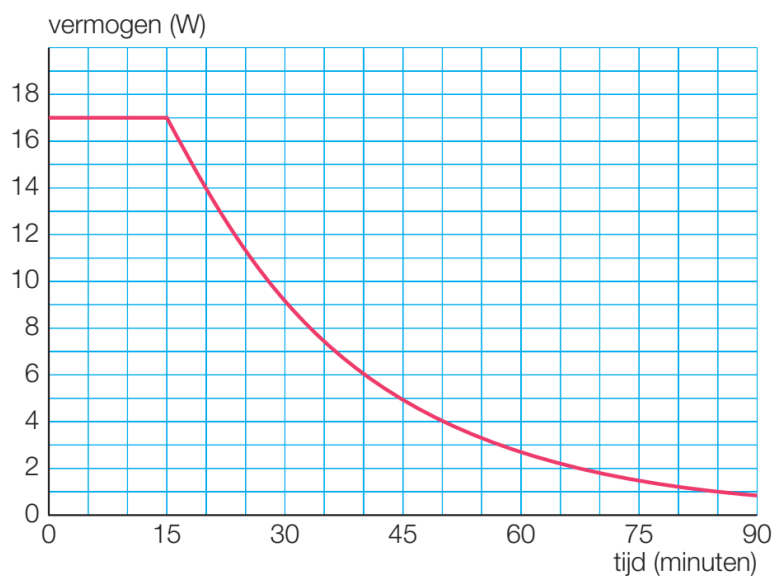
Een mogelijke verklaring voor het afnemen van de toename is het feit dat het gemiddelde aantal kinderen per vrouw in de loop der tijd kleiner is geworden. Zo kregen vrouwen in 1965 gedurende hun leven gemiddeld 5,0 kinderen, in 2018 was dat aantal afgenomen tot 2,4 kinderen.

Neem aan dat in de periode 1965-2018 het gemiddelde aantal kinderen per vrouw afnam volgens een exponentieel verband en dat die afname zich daarna op dezelfde wijze voortzet.

Bereken het gemiddelde aantal kinderen per vrouw in 2035. Geef je antwoord in één decimaal.

33 2024-I

In de grafiek hieronder is het vermogen in watt (W) dat een telefoonlader levert uitgezet tegen de tijd in minuten vanaf het moment dat een lege telefoon aan de oplader gelegd wordt.



In de figuur is te zien dat de oplader de eerste 15 minuten zijn maximale vermogen van 17 W levert. Na deze eerste 15 minuten daalt het geleverde vermogen bij benadering exponentieel.

Bereken met de gegevens bij 20 en bij 85 minuten met hoeveel procent per minuut het geleverde vermogen van de oplader afneemt. Geef je antwoord in hele procenten.

34 2021-II

Gegeven is de formule $A = 10^1 - 0,03 \cdot L^2$.

Laat met berekeningen zien dat het verband tussen L en A niet exponentieel is.

35 2021-I

Een klarinet is een houten blaasinstrument. Alle mogelijke tonen die op het instrument kunnen worden gespeeld, worden samen het bereik genoemd. Het bereik van een klarinet is bijna vier octaven. Een octaaf bestaat uit 12 opeenvolgende toonafstanden. Zie de tabel.



Elke voorafgaande of opeenvolgende octaaf heeft dezelfde namen voor de tonen in dat octaaf.

De frequentie van een toon wordt gegeven in hertz (Hz), dit is het aantal trillingen per seconde. Bij een hogere toon hoort een hogere frequentie. Als je eenzelfde toon één octaaf hoger speelt, wordt de frequentie twee keer zo groot. Er bestaat een exponentieel verband tussen de frequenties en de tonen in de tabel: van elke volgende toon neemt de frequentie met een vast percentage toe. In de tabel zie je van enkele tonen de frequenties.

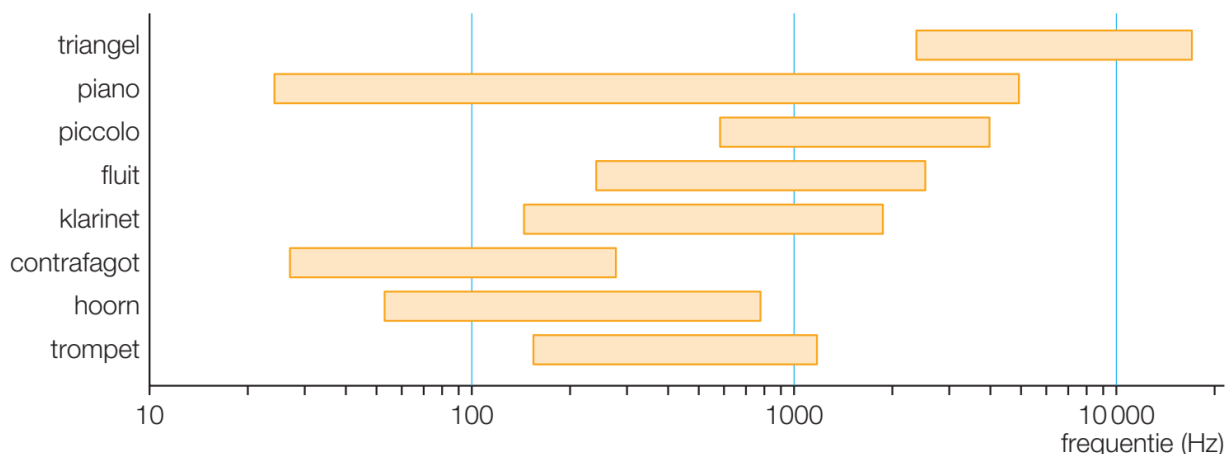
VOORBEELD VAN EEN OCTAAF

toon	A	Bes	B	C	Des	D	Es	E	F	Ges	G	As	A
Frequentie (Hz)	440					587							880

In de tabel is de frequentie van de D-toon afgerond op hele Hz.

- a** Bereken op basis van de frequenties van de A-tonen uit de tabel de frequentie van de D-toon. Geef je antwoord in één decimaal.

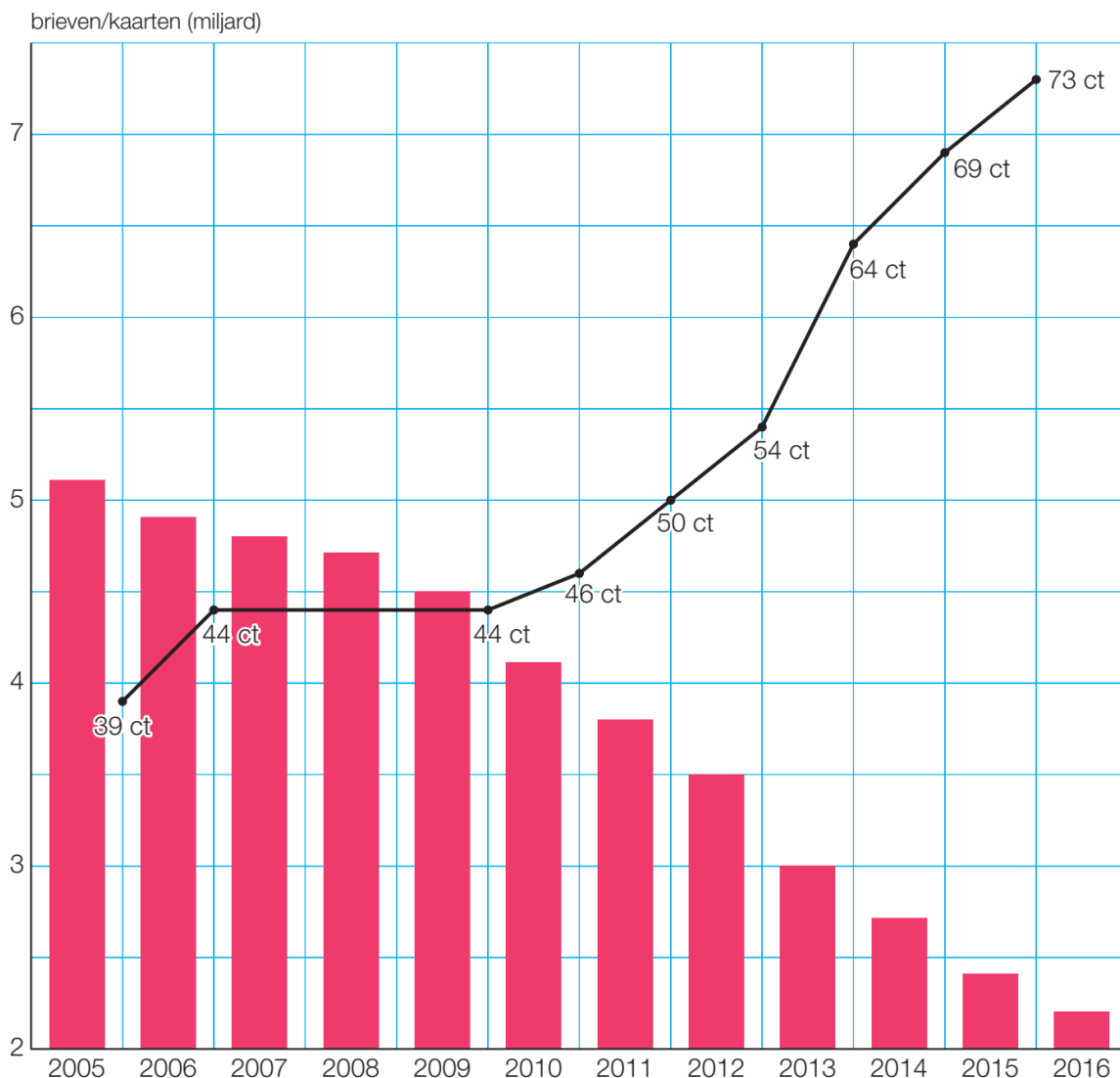
In de figuur wordt op een logaritmische schaalverdeling het bereik van verschillende instrumenten aangegeven.



De laagste toon die een klarinet kan laten horen is een D. De hoogste toon is een A.

- b** Bereken aan de hand van bovenstaande gegevens, de tabel en de figuur de laagste en de hoogste frequentie die een klarinet kan bereiken. Geef je antwoorden in een geheel aantal Hz.

Mensen sturen steeds minder brieven en kaarten. Postzegels zijn in Nederland de afgelopen jaren flink duurder geworden. Elk jaar op 1 januari wordt de prijs zo nodig aangepast. In de figuur zie je de postzegelprijs (in centen) en het aantal brieven/kaarten (in miljarden) dat bezorgd werd in de jaren 2005-2016.



Je kunt in de figuur bijvoorbeeld aflezen dat op 1 januari 2007 de postzegelprijs 44 cent was en dat er in het jaar 2007 4,8 miljard brieven/kaarten werden bezorgd.

Op 1 januari 2010 kostte een postzegel 44 cent. Op 1 januari 2014 was de prijs gestegen tot 64 cent. Veronderstel dat in de periode 2010-2014 de postzegelprijs exponentieel groeide.

- a** Bereken met de bovengenoemde gegevens uit 2010 en 2014 het jaarlijkse groeipercentage van de postzegelprijs. Geef je antwoord in één decimaal.

In de periode 2010-2016 nam het aantal brieven/kaarten dat jaarlijks werd bezorgd bij benadering lineair af. Er werd in 2016 voorspeld dat deze afname zich nog een aantal jaren op deze manier zou voortzetten.

- b** Bereken met de aantallen uit 2010 en 2016 hoeveel miljard brieven/kaarten er in 2020 volgens deze voorspelling bezorgd zouden worden. Geef je antwoord in één decimaal.

In plaats van geld sparen, kun je ook geld beleggen. Dit brengt wel een risico met zich mee: het kan niet alleen winst opleveren, maar ook verlies.

Iemand stort eenmalig een bedrag in een beleggingsfonds. We gaan er in deze opgave van uit dat dit bedrag exponentieel groeit. Het percentage waarmee het bedrag jaarlijks groeit is het *rendement*.

- a** Bereken de verdubbelingstijd in jaren als het rendement gelijk is aan 1,5%. Geef je antwoord in twee decimalen.

In de tabel staat de verdubbelingstijd V in jaren voor enkele rendementen P in procenten.

P	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
V	35,00	28,07	23,45	20,15	17,67	15,75	14,21

Het lukt Jan niet om de verdubbelingstijd bij een rendement van 2,9% precies te berekenen. Hij besluit gebruik te maken van lineair interpoleren en de waarden in de tabel. Zo zal hij een benadering van de verdubbelingstijd vinden.

- b** Bereken de benadering van de verdubbelingstijd in jaren die hij op deze manier vindt. Geef je antwoord in twee decimalen.

Jans benadering van de verdubbelingstijd bij een rendement van 2,9% komt hoger uit dan de precieze verdubbelingstijd. Ook bij elk ander rendement kom je met lineaire interpolatie hoger uit.

- c** Laat dit zien met behulp van een schets.

In het boek *Mijn vermogen* van de Consumentenbond staat een eenvoudige vuistregel om de verdubbelingstijd bij een gegeven rendement te schatten:

“Deel het getal 69 door het rendement. De uitkomst is het aantal jaren dat nodig is om het vermogen te verdubbelen.”

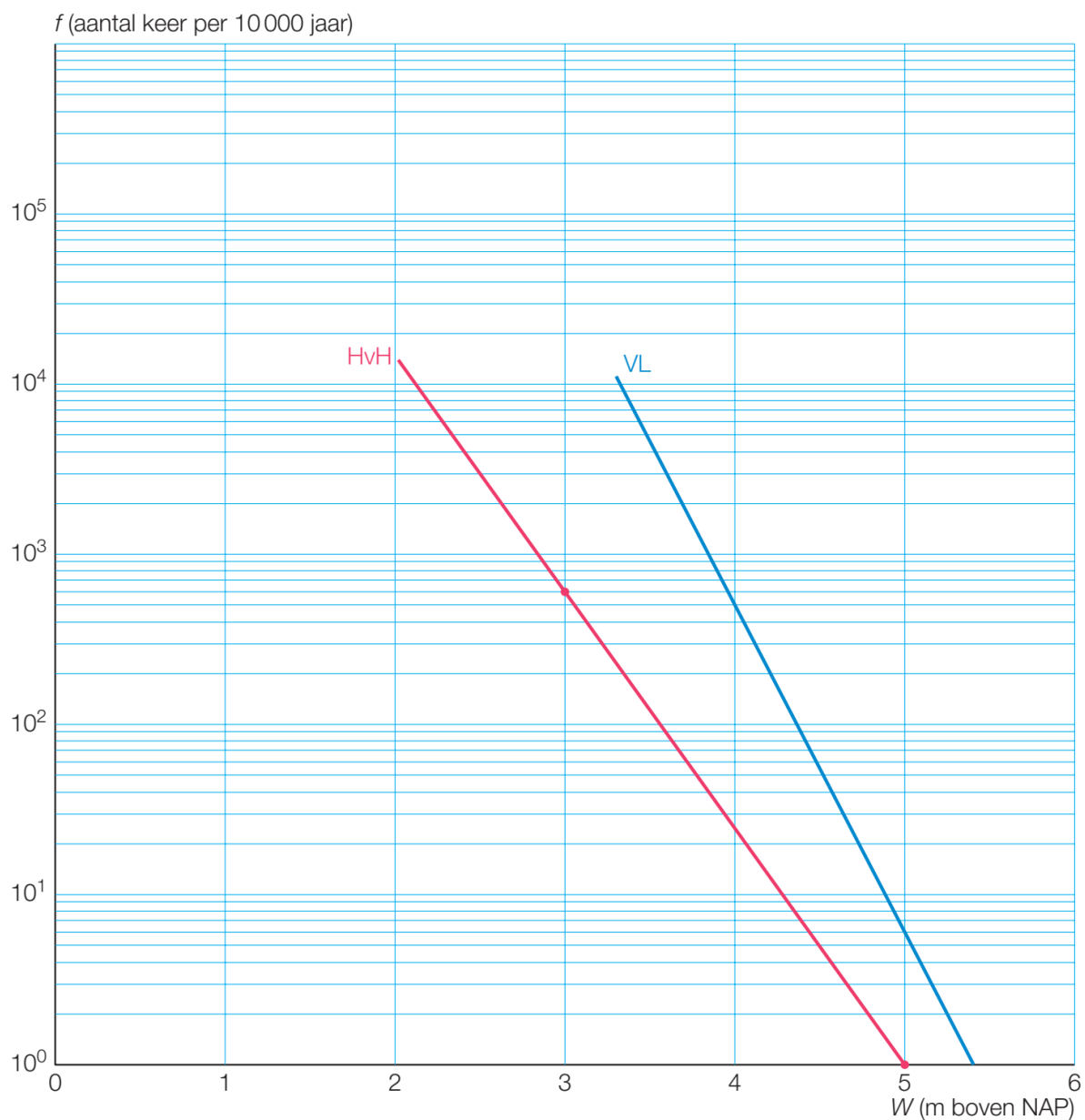
Het verschil tussen de verdubbelingstijd uit de tabel en de verdubbelingstijd volgens de vuistregel blijkt niet zo heel groot te zijn.

- d** Bereken bij een rendement van 3,0% het verschil tussen de verdubbelingstijd uit de tabel en die volgens de vuistregel. Geef je antwoord in gehele maanden.

Met de vuistregel hierboven kun je de verdubbelingstijd schatten bij een gegeven rendement. Sommige mensen willen een vuistregel hebben om het omgekeerde te doen: zij willen weten welk rendement nodig is bij een gegeven verdubbelingstijd.

- e** Geef een vuistregel in woorden om het rendement te schatten bij een gegeven verdubbelingstijd in jaren.

Langs de Nederlandse kust wordt dagelijks op verschillende plaatsen en op verschillende momenten de waterstand gemeten. Op het moment dat de waterstand op een bepaalde plaats niet verder meer toeneemt, is er op die plaats sprake van *hoogwater*. De waterstand die op dat moment gemeten wordt, noemen we de *hoogwaterstand*. Extreme hoogwaterstanden zijn een gevolg van bijvoorbeeld een zware storm. Men heeft gedurende een lange periode de hoogwaterstanden geregistreerd en daarbij onder andere gekeken naar het aantal keer dat de hoogwaterstand hoger is dan een bepaalde waterhoogte W in meter boven NAP (Normaal Amsterdams Peil). Dit wordt de *overschrijdingsfrequentie* f genoemd; deze frequentie wordt uitgedrukt in aantal keer per 10 000 jaar. Er blijkt een exponentieel verband te bestaan tussen de overschrijdingsfrequentie f en de waterhoogte W .



HvH = Hoek van Holland

VL = Vlissingen

In de figuur is voor de plaatsen Hoek van Holland (HvH) en Vlissingen (VL) de zogenaamde *overschrijdingsfrequentielijn* getekend. De overschrijdingsfrequentie f is uitgezet tegen de waterhoogte W . De verticale as heeft een logaritmische schaalverdeling.

Je kunt in de figuur aflezen dat in Hoek van Holland de hoogwaterstand gemiddeld 600 keer per 10 000 jaar hoger is dan 3 meter boven NAP en gemiddeld 1 keer per 10 000 jaar hoger is dan 5 meter boven NAP.

Met behulp van de overschrijdingsfrequentie kun je schatten hoeveel keer een bepaalde hoogwaterstand in de toekomst zal worden overschreden.

- a** Geef op deze wijze een schatting van het aantal keer per 100 jaar dat de hoogwaterstand in Vlissingen hoger zal zijn dan 4 meter boven NAP. Licht je antwoord toe.

Bij de rechte lijnen in de figuur horen formules van de vorm $f = b \cdot g^W$. De grafiek van Hoek van Holland gaat door de punten (3, 600) en (5, 1). Hieruit volgt voor Hoek van Holland het volgende verband tussen de waterhoogte W en de overschrijdingsfrequentie f :

$$f = 8,8 \cdot 10^6 \cdot 0,041^W.$$

Hierin is de groeifactor in drie decimalen gegeven.

- b** Bereken met behulp van beide gegeven punten de groeifactor in vier decimalen.

In de figuur kun je zien: hoe hoger de waterhoogte W , hoe lager de overschrijdingsfrequentie f . Om de overschrijdingsfrequentie te halveren, moet de waterhoogte dus hoger worden.

- c** Onderzoek voor Hoek van Holland hoeveel hoger de waterhoogte moet worden om de overschrijdingsfrequentie te halveren. Geef je antwoord in meter en in één decimaal.

In de figuur is de overschrijdingsfrequentie van Vlissingen bij elke waterhoogte groter dan die van Hoek van Holland.

Er is een waterhoogte waarbij de overschrijdingsfrequentie in Vlissingen 10 keer zo groot is als die in Hoek van Holland.

- d** Bepaal met behulp van de figuur bij welke waterhoogte dit het geval is. Licht je werkwijze toe en geef je antwoord in meter en in één decimaal.

39 2023-II

Bij de 100 meter sprint probeert een atleet in de eerste seconden zo snel mogelijk op topsnelheid te komen.

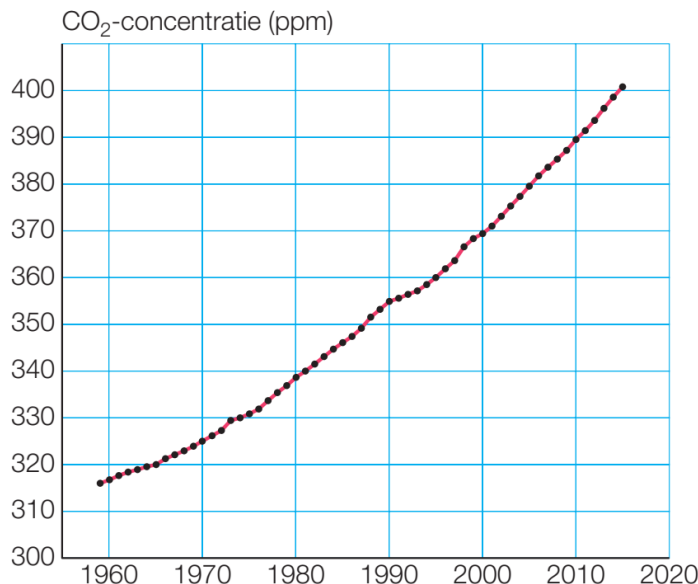
Hierbij hoort de tabel hiernaast met t de tijd in seconden na de start en A de afgelegde afstand in meter.

Je kunt je afvragen of er sprake is van exponentiële groei.

Onderzoek met behulp van de tabelwaarden of er sprake kan zijn van exponentiële groei.

t (s)	1,2	1,9	3,0
A (m)	5	10	20

Vanaf 1959 heeft Charles David Keeling de CO_2 -concentratie in de atmosfeer gemeten. Deze metingen laten zien dat de CO_2 -concentratie in de atmosfeer in de loop van de jaren flink is toegenomen. In de figuur zijn voor de periode 1959-2015 de jaargemiddelden van de CO_2 -concentratie weergegeven. De gebruikte eenheid van de CO_2 -concentratie is ppm (parts per million): het aantal CO_2 -deeltjes per miljoen luchtdeeltjes.



Keeling schatte in 1970 op grond van zijn meetgegevens over de periode 1959-1970 dat het jaargemiddelde van de CO_2 -concentratie vanaf 1970 jaarlijks met 0,3% zou toenemen. Daarmee voorspelde hij hoe hoog het jaargemiddelde van de CO_2 -concentratie in 1995 zou zijn. Die voorspelling wijkt een beetje af van het werkelijke jaargemiddelde van het jaar 1995.

- a** Bereken hoeveel procent de voorspelling afwijkt. Gebruik hierbij de figuur. Geef je antwoord als geheel getal.

De CO_2 -concentratie blijft toenemen. In 2000 was het jaargemiddelde 369,5 ppm, in 2015 was dit opgelopen tot 400,8 ppm.

Tibbe vermoedt op basis van de figuur dat het jaargemiddelde in de periode 2000-2015 groeide volgens een exponentieel verband en dat de groei zich in de jaren daarna voortzet volgens hetzelfde exponentiële verband. Je kunt dan, uitgaande van bovenstaande gegevens, berekenen in welk jaar het jaargemiddelde voor het eerst hoger dan 500 ppm zal zijn.

- b** Bereken op deze manier in welk jaar het jaargemiddelde voor het eerst hoger dan 500 ppm zal zijn.

Marrit is het niet eens met Tibbe: zij vermoedt dat er vanaf het jaar 2000 geen sprake is van exponentiële groei, maar van lineaire groei. Je kunt dan, uitgaande van de jaargemiddelden van 2000 en 2015 en met behulp van lineair extrapoleren, berekenen in welk jaar het jaargemiddelde voor het eerst hoger dan 500 ppm zal zijn.

- c** Bereken op deze manier in welk jaar het jaargemiddelde voor het eerst hoger dan 500 ppm zal zijn.

Wereldwijd worden er afspraken gemaakt met als doel de CO_2 -concentratie omlaag te brengen.

Veronderstel dat het inderdaad lukt om de CO_2 -concentratie na 2015 zodanig te laten dalen dat het jaargemiddelde in 2050 nog maar 350 ppm is. Dan kan er bijvoorbeeld sprake zijn van afname volgens

- een lineair verband of
- een exponentieel verband.

In beide gevallen is het jaargemiddelde in 2015 gelijk en is ook het jaargemiddelde in 2050 gelijk. Echter, een CO_2 -concentratie van bijvoorbeeld 375 ppm wordt in het ene geval op een eerder moment bereikt dan in het andere geval.

- d** Leg uit, zonder berekeningen te geven, in welk van de twee genoemde gevallen de CO_2 -concentratie het eerst de waarde 375 ppm bereikt.

41 2021-III

De totale inkomsten van de Nederlandse musea bestaan uit eigen inkomsten en inkomsten uit subsidies.

De inkomsten uit subsidies daalden in de periode 2011-2016 tot een bedrag van 508 miljoen euro. Twee mogelijke manieren waarop deze daling zou kunnen zijn verlopen, zijn:

- 1 elk jaar met een vast bedrag
- 2 elk jaar met een vast percentage

- a** Beredeneer, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken, bij welke van de twee bovenstaande manieren de musea in het jaar 2014 het grootste bedrag aan subsidies hebben ontvangen.

In 2016 zijn de inkomsten uit subsidies S (508 miljoen euro) bijna gelijk aan de eigen inkomsten E (516 miljoen euro).

Voor de periode na 2016 wordt voorspeld dat de inkomsten uit subsidies jaarlijks met 1% zullen afnemen. Ook wordt voorspeld dat de eigen inkomsten na 2016 jaarlijks met 40 miljoen euro zullen stijgen. Hierbij kunnen de volgende formules worden opgesteld:

$$S = 508 \cdot 0,99^t \text{ en } E = 516 + 40 \cdot t$$

Hierin zijn S en E in miljoenen euro en is t het aantal jaren na 2016. Er komt een moment waarop de inkomsten uit subsidies minder dan 25% van de totale inkomsten zullen vormen.

- b** Onderzoek in welk jaar de inkomsten uit subsidies voor het eerst minder dan 25% van de totale inkomsten zullen vormen.

Veel wetenschappers waren het er tot voor kort over eens dat de groei van de wereldbevolking na 2050 tot stilstand zou komen. Het aantal mensen zou dan in 2050 ongeveer 9 miljard zijn.

Uit nieuwe wetenschappelijke voorspellingen blijkt echter dat er in 2100 mogelijk al 12 miljard mensen op aarde zullen leven.

De wereldbevolking bestond in 1990 uit 5,3 miljard mensen en in 2011 uit 7 miljard mensen. Neem aan dat de wereldbevolking in deze periode exponentieel groeide.

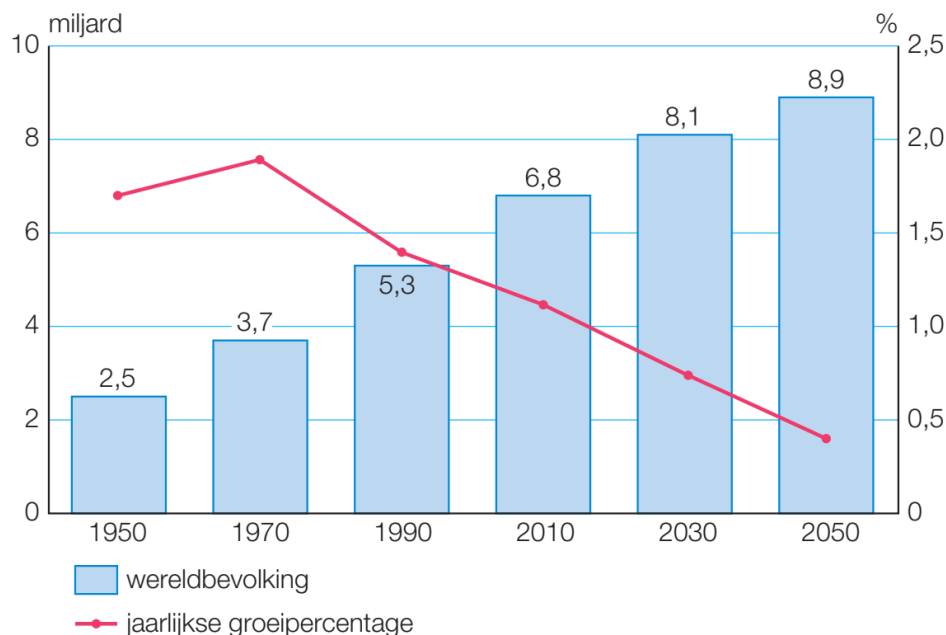
- a** Bereken het hierbij behorende jaarlijkse groeipercentage. Geef je antwoord in één decimaal.

In 2011 bestond de wereldbevolking uit 7 miljard mensen. In 2012 waren er 80 miljoen mensen bijgekomen. Er zijn verschillende scenario's denkbaar voor de groei van de wereldbevolking na 2012.

In een eerste scenario wordt aangenomen dat de groei vanaf 2011 lineair zal zijn.

- b** Bereken in welk jaar de wereldbevolking volgens dit eerste scenario tot 9 miljard mensen zal zijn toegenomen.

Een tweede scenario gaat uit van groei, waarin het jaarlijkse groeipercentage tot 2050 langzaam afneemt. In dit scenario wordt een wereldbevolking van 8,9 miljard mensen in 2050 voorspeld. Zie de figuur.



Verder neemt men in dit scenario aan dat het jaarlijkse groeipercentage dat in de figuur is af te lezen voor het jaar 2050, in de jaren na 2050 blijft gelden.

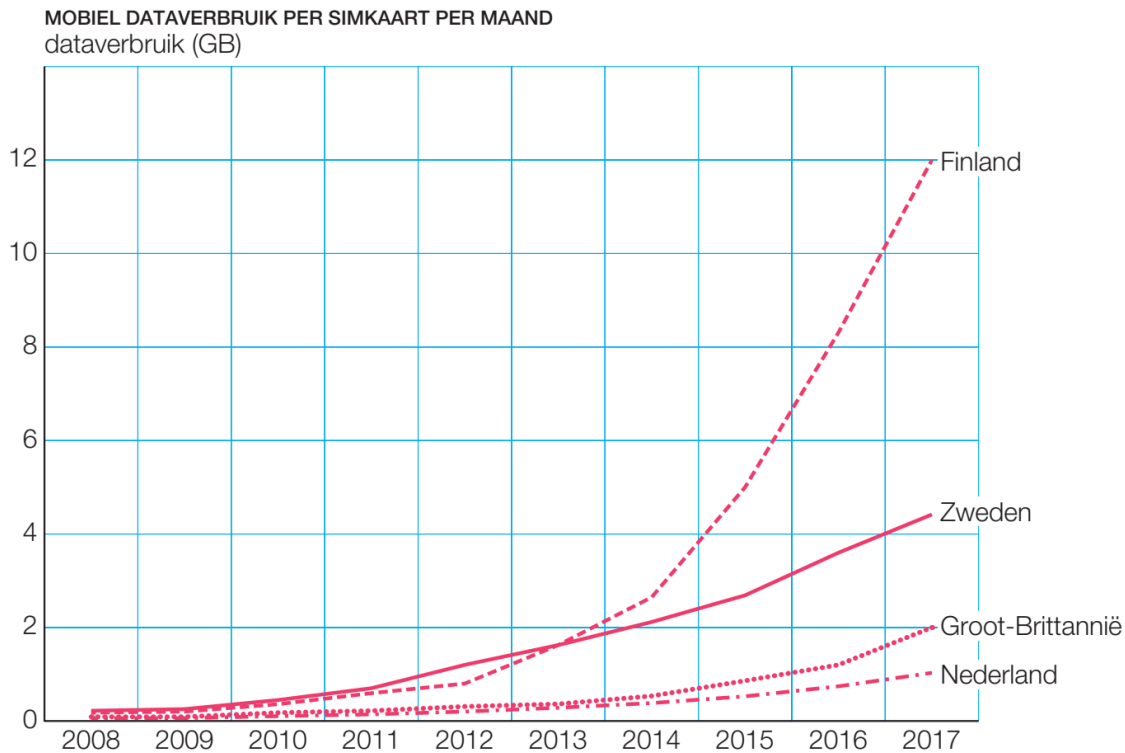
- c** Bereken of daarmee in het jaar 2100 een wereldbevolking van 12 miljard mensen gehaald wordt.

43 2023-I

Op de hele wereld gebruiken mensen hun mobiele telefoon steeds meer. De hoeveelheid verbruikte mobiele data neemt daardoor elk jaar toe. In Nederland was in 2017 het totale mobiele dataverbruik 325 miljoen gigabyte (GB), een stijging van 1050% ten opzichte van 2013.

- a** Bereken het totale mobiele dataverbruik in Nederland in 2013. Geef je antwoord in hele miljoenen GB.

In de figuur is te zien dat het mobiele dataverbruik per simkaart¹⁾ in diverse Europese landen in de periode 2008-2017 enorm is gestegen.



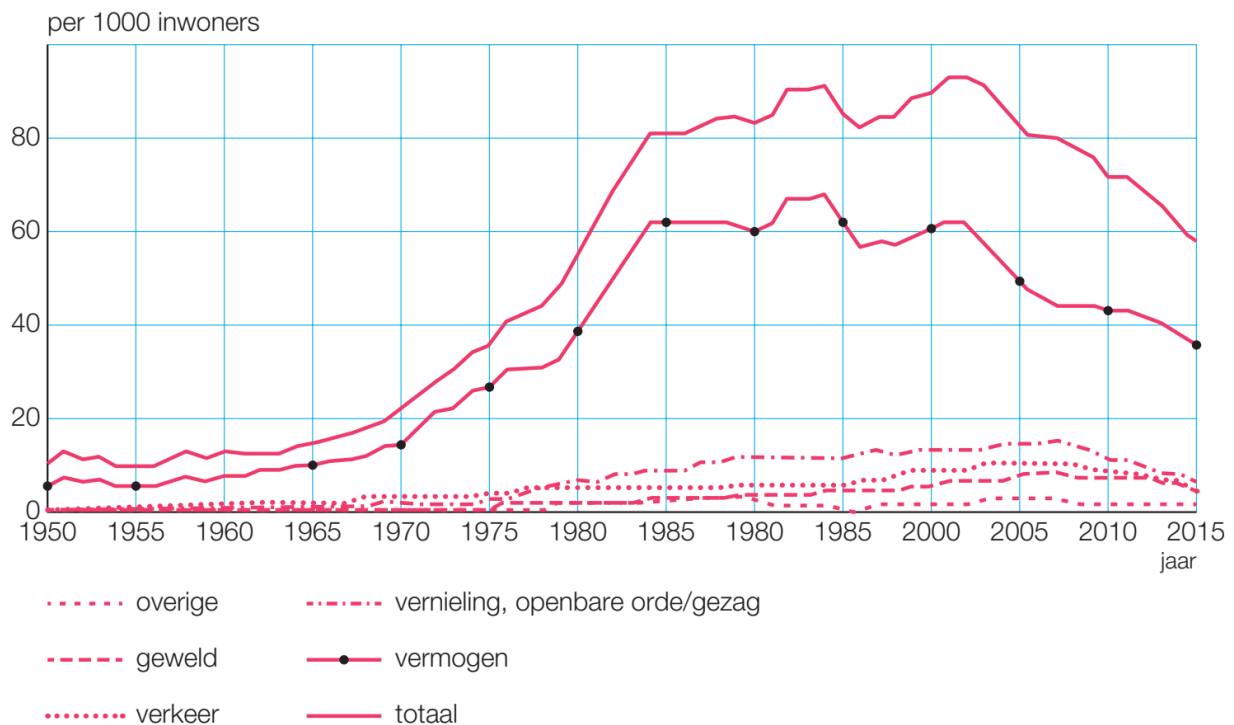
Je kunt in de figuur aflezen dat in Finland in het jaar 2013 het mobiele dataverbruik per simkaart 1,6 GB per maand was. Dit was in 2017 gegroeid naar 12,0 GB per maand. Neem aan dat er in deze periode sprake was van exponentiële groei.

- b** Bereken het jaarlijkse groeipercentage van het mobiele dataverbruik per simkaart per maand in deze periode in Finland. Geef je antwoord in hele procenten.

noot 1 Een simkaart is een chip in een mobiel apparaat. In deze opgave wordt steeds het gemiddelde mobiele dataverbruik per simkaart bedoeld.

44 2023-II

In de onderstaande figuur staat voor Nederland het aantal geregistreerde misdrijven per duizend inwoners per jaar. Er is ook een uitsplitsing gemaakt naar verschillende types misdrijven, waaronder vermogensmisdrijven en geweldsmisdrijven.



Van 1960 tot 1985 steeg het totaal aantal geregistreerde misdrijven van 13 naar 81 per duizend inwoners. Neem aan dat deze stijging exponentieel verliep.

- a** Bereken met deze gegevens het jaarlijkse groeipercentage. Geef je antwoord in één decimaal.

In 1985 was bijna 80% van het totaal aantal geregistreerde misdrijven een vermogensmisdrijf.

- b** Beredeneer met behulp van de figuur, zonder een berekening te maken, of dit percentage in 2002 hoger of lager was dan in 1985.

45 2024-II

In Nederland nam in de periode van 2000 tot en met 2015 de oppervlakte waarop peren werden geteeld, de perenteeltoppervlakte, lineair toe. We kunnen voor die periode de perenteeltoppervlakte beschrijven met de formule $T_p = 6000 + 200t$. Hierin is T_p de perenteeltoppervlakte in hectare en t het aantal gehele jaren na 2000.

In de tabel hieronder staat de appelteeltoppervlakte in 2003 en 2015.

jaar	2003	2015
appelteeltoppervlakte T_a (in hectare)	10296	7600

Ga ervan uit dat de appelteeltoppervlakte in de periode 2000-2015 lineair afnam en dat deze oppervlakte gedurende een kalenderjaar steeds gelijk bleef.

- a** Bereken in welk jaar de perenteeltoppervlakte voor het eerst groter was dan de appelteeltoppervlakte.

Men verwachtte dat na 2015 de appelteeltoppervlakte exponentieel zou afnemen met 19,4% per vijf jaar.

- b** Bereken met hoeveel procent de appelteeltoppervlakte dan per jaar afneemt. Geef je antwoord in één decimaal.

12.4 Herleiden en redeneren

- 46 a** Gegeven zijn de formules $K = 2p\left(\frac{p}{16} + 0,6\right)$, $L = 1,8 - 0,14p^2$ en $M = K - L$.
Schrijf de formule van M in de vorm $M = ap^2 + bp + c$.
- b** Combineer de formules $F = \frac{12,6G}{H}$ en $H = 0,04q^2$ tot de vorm $F = a \cdot G \cdot q^b$.
- c** Gegeven zijn de formules $M = 2,5 \cdot N^{0,6} \cdot p^{0,8}$ en $N = 75n$.
De formule van M is te schrijven in de vorm $M = a \cdot n^b \cdot p^{0,8}$.
Bereken a en b . Rond af op één decimaal.
- d** De formule $Z\left(2 - \frac{R}{50}\right) = 3$ is te herleiden tot $R = 100 - \frac{150}{Z}$.
Laat deze herleiding zien.
- e** De formule $K = 1000 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^q$ is te herleiden tot $K = 10^{3-2q}$.
Laat deze herleiding zien.
- f** De formule $BL = \frac{(180 - R) \cdot Q}{0,75K^2}$ is voor $R = 30$ en $Q = 15$ te herleiden tot de vorm $BL = a \cdot K^b$.
Bereken a en b .
- g** Gegeven is de formule $D = \frac{3A}{B^2 + 2}$ met $A > 0$ en $B > 0$.
 A neemt toe en B neemt af.
Beredeneer of D dan toeneemt of afneemt.
- h** Gegeven is de formule $E = \frac{300 - A}{12B}$ met A tussen 100 en 200 en $B > 0$.
 A en E nemen beide toe.
Beredeneer of B dan toeneemt of afneemt.

Formules herleiden

De formule $y = 24 + \frac{2p+5}{1,5} \cdot 18$ is te herleiden tot de vorm $y = ap + b$. Dat gaat als volgt.

$$\begin{aligned}y &= 24 + \frac{2p+5}{1,5} \cdot 18 \\y &= 24 + \frac{18}{1,5} \cdot (2p+5) \\y &= 24 + 12(2p+5) \\y &= 24 + 24p + 60 \\y &= 24p + 84 \\ \text{Dus } a &= 24 \text{ en } b = 84.\end{aligned}$$

Haakjes wegwerken

$$a(b+c) = ab+ac$$

$$(a+b)c = ac+bc$$

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= \\ac+ad+bc+bd\end{aligned}$$

De formule $N = \frac{1200}{1,5p^{1,3}}$ is te herleiden tot de vorm $N = ap^b$.

Dat gaat als volgt.

$$N = \frac{1200}{1,5p^{1,3}} = \frac{1200}{1,5} \cdot p^{-1,3} = 800p^{-1,3}$$

De formule $Q = \left(\frac{4}{p^3}\right)^{1,5}$ is te herleiden tot de vorm $Q = \frac{a}{p^b}$.

Dat gaat als volgt.

$$Q = \left(\frac{4}{p^3}\right)^{1,5} = \frac{4^{1,5}}{(p^3)^{1,5}} = \frac{8}{p^{4,5}}$$

De formule $M = 16^{0,25t+3}$ is te herleiden tot $M = 4096 \cdot 2^t$.

Dat gaat als volgt.

$$M = 16^{0,25t+3} = 16^{0,25t} \cdot 16^3 = (16^{0,25})^t \cdot 4096 = 4096 \cdot 2^t$$

De formule $K = 3 \cdot \sqrt{5x}$ is te herleiden tot de vorm $K = a \cdot \sqrt{x}$.

Dat gaat als volgt.

$$K = 3 \cdot \sqrt{5x} = 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{x} = 6,70... \cdot \sqrt{x}, \text{ dus } K \approx 6,7 \cdot \sqrt{x}$$

De formule $A = 200\sqrt{B-6}$ is te herleiden tot de vorm $B = cA^2 + d$. Dat gaat als volgt.

$$A = 200\sqrt{B-6}$$

$$200\sqrt{B-6} = A$$

$$\sqrt{B-6} = 0,005A \quad \text{Kwadrater beide leden.}$$

$$B-6 = (0,005A)^2$$

$$B = 0,000025A^2 + 6$$

Variabelen vrijmaken

Met kruislings vermenigvuldigen is p vrij te maken bij de formule

$$\frac{2p-3}{q} = 5. \text{ Dat gaat als volgt.}$$

$$\frac{2p-3}{q} = 5$$

$$\frac{2p-3}{q} = \frac{5}{1}$$

$$2p-3 = 5q$$

$$2p = 5q + 3$$

$$p = 2,5q + 1,5$$

Rekenregels voor machten

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$$

Rekenregels voor wortels

$$(\sqrt{A})^2 = A$$

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$$

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$$

Neem je $x = 5$ en $V = 20$ in de formule $V = x \cdot \frac{3-p}{2y} + 12$, dan kun je y als volgt uitdrukken in p .

$$\begin{aligned} V = x \cdot \frac{3-p}{2y} + 12 & \quad x = 5 \text{ en } V = 20 \quad \left\{ \begin{aligned} 5 \cdot \frac{3-p}{2y} + 12 &= 20 \\ \frac{5(3-p)}{2y} &= 8 \\ \frac{15-5p}{2y} &= \frac{8}{1} \\ 15-5p &= 16y \\ y &= 0,9375 - 0,3125p \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Met het uitdrukken van y in p heb je een formule van de vorm $y = ap + b$ gekregen. Hierin is $a = -0,3125$ en $b = 0,9375$.

Bij de formule $P = 50 + \frac{800}{Q}$ maak je als volgt Q vrij.

$$\begin{aligned} P &= 50 + \frac{800}{Q} \\ \frac{800}{Q} &= P - 50 & \text{Gebruik } \frac{A}{B} = C \text{ geeft } B = \frac{A}{C}. \\ Q &= \frac{800}{P - 50} \end{aligned}$$

Bij de formule $c\left(4 - \frac{k}{25}\right) = 1$ maak je als volgt k vrij.

$$\begin{aligned} c\left(4 - \frac{k}{25}\right) &= 1 \\ 4 - \frac{k}{25} &= \frac{1}{c} \\ -\frac{k}{25} &= \frac{1}{c} - 4 & \text{Vermenigvuldig beide leden met } -25. \\ k &= -\frac{25}{c} + 100 \end{aligned}$$

Formules combineren

De formules $A = 2t + 3p + 2$ en $5t + p = 20$ zijn te combineren tot de vorm $A = at + b$. Daartoe maak je eerst p vrij bij $5t + p = 20$.

Je krijgt $p = -5t + 20$.

$$\begin{aligned} A = 2t + 3p + 2 & \quad p = -5t + 20 \quad \left\{ \begin{aligned} A &= 2t + 3(-5t + 20) + 2 \\ A &= 2t - 15t + 60 + 2 \\ A &= -13t + 62 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dus $a = -13$ en $b = 62$.

De formules $E = 20 \cdot P^{0,15} \cdot Q^{0,95}$, $P = 30R$ en $Q = 40R$ zijn te combineren tot de vorm $E = a \cdot R^b$. Dat gaat als volgt.

Invullen van $P = 30R$ en $Q = 40R$ in $E = 20 \cdot P^{0,15} \cdot Q^{0,95}$ geeft

$$E = 20 \cdot (30R)^{0,15} \cdot (40R)^{0,95}$$

$$E = 20 \cdot 30^{0,15} \cdot R^{0,15} \cdot 40^{0,95} \cdot R^{0,95}$$

$$E \approx 1108 \cdot R^{1,1}$$

$$\text{Dus } E = 1108 \cdot R^{1,1}.$$

$$\begin{aligned} 20 \cdot 30^{0,15} \cdot 40^{0,95} &\approx 1108 \\ R^{0,15} \cdot R^{0,95} &= R^{1,1} \end{aligned}$$

Redeneren met formules

Bij de formule $Q = 250(1 - 0,75^t)$ beredeneer je als volgt dat de grafiek van Q stijgend is voor $t > 0$.

Als t toeneemt, dan neemt $0,75^t$ af, dus dan neemt $1 - 0,75^t$ toe, dus ook $250(1 - 0,75^t)$ neemt toe.

Dus de grafiek van Q is stijgend.

Bij de formule $P = \frac{1500}{2 + 5 \cdot 0,8^t}$ beredeneer je als volgt wat de grenswaarde is.

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,8^t$ tot 0, dus dan wordt $5 \cdot 0,8^t \approx 0$

en $2 + 5 \cdot 0,8^t \approx 2$ en $\frac{1500}{2 + 5 \cdot 0,8^t} \approx \frac{1500}{2} = 750$.

Dus de grenswaarde is 750.

Bij de formule $1,2^A = \frac{1}{80 - B}$ met $A > 0$ beredeneer je als volgt dat

A groter wordt als B kleiner wordt.

Als B kleiner wordt, dan wordt $80 - B$ groter. En dan wordt $\frac{1}{80 - B}$

kleiner. Dat betekent dat $1,2^A$ kleiner moet worden, dus A wordt kleiner.

Gegeven is de formule $F = 1,16 \cdot \frac{(80 - A) \cdot B}{0,17C}$ met $0 < A < 80$, $B > 0$

en $C > 0$. Bij deze formule kun je als volgt beredeneren dat als A en F groter worden en B gelijk blijft, de waarde van C dan kleiner moet worden.

Als A groter wordt, dan wordt $80 - A$ kleiner. Omdat B gelijk blijft, wordt de teller van de breuk kleiner. Omdat F groter wordt, moet de noemer van de breuk ook kleiner worden. Dat betekent dat $0,17C$ kleiner moet worden, dus dat C kleiner moet worden.

47 2022-I

Gegeven is de formule $L = 100 - \frac{330}{45} \cdot (27 - T_{\text{nat}})$. Hierin is L de

luchtvochtigheid in % en T_{nat} de natte temperatuur in °C.

Er geldt: hoe lager de natte temperatuur is, des te lager is de luchtvochtigheid. Dit kan beredeneerd worden aan de hand van de formule.

Geef deze redenering, zonder getallen in te vullen of een schets of tekening van de grafiek van L te maken.

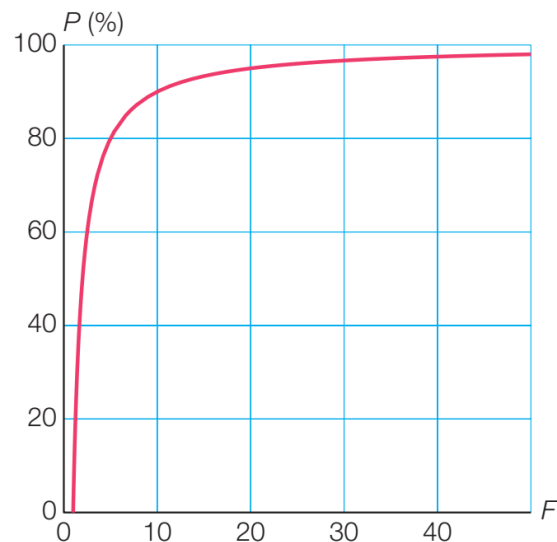
48 2024-I

Zonlicht bevat uv A-straling die diep in de huid kan doordringen en daar schade kan aanrichten. Door crème te gebruiken wordt een deel van die straling geblokkeerd. Voor het percentage P van de uv A-straling dat geblokkeerd wordt, geldt

$P = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{F}\right)$, waarbij F de factor van de crème is.

Hiernaast is de grafiek afgebeeld die bij de formule hoort.

In de figuur is te zien dat de bescherming tegen uv A-straling toeneemt als de waarde van F toeneemt.



- Beredeneer aan de hand van de formule dat de bescherming tegen uv A-straling toeneemt als de waarde van F toeneemt, zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden.
- Bereken vanaf welke factor een crème minimaal 98% van de uv A-straling tegenhoudt.

In de richtlijnen van huidartsen worden vaak alleen de gewenste blokkeringspercentages (P) voor een crème genoemd. Het is dan handig om F te kunnen berekenen met een herleide vorm van de formule voor P .

- Herleid de formule voor P tot een vorm waarin F wordt uitgedrukt in P .

Het is zo dat een crème met factor 30 twee keer zo lang tegen zonnebrand beschermt als een crème met factor 15.

- Onderzoek of het percentage van de uv A-straling dat geblokkeerd wordt door een crème met factor 30 dan ook twee keer zo groot is als dat van een crème met factor 15.

49 2023-I

Gegeven zijn de formules $U = 60 + 10 \cdot A$ en $A = 1,75 + 0,05 \cdot l$.

Door de formules te combineren kan een formule worden afgeleid waarin U wordt uitgedrukt in l . Deze formule kan worden geschreven in de vorm $U = \dots \cdot l + \dots$ waarbij op de puntjes getallen staan.

Geef de afleiding van de formule in deze vorm.

50 2021-I

De visus is een maat voor de gezichtsscherpte. Deze maat kan worden uitgedrukt in een score S . Er zijn ook andere maten voor de gezichtsscherpte. Voorbeelden hiervan zijn de logMAR-schaal en de ETDRS-letterscore.

Het verband tussen de score S en de score M op de logMAR-schaal wordt gegeven door formule 1. Voor het verband tussen de score S en de ETDRS-letterscore E geldt formule 2:

$$S = 10^{-M} \quad (\text{formule 1})$$

$$S = 10^{\frac{E - 85}{50}} \quad (\text{formule 2})$$

Aan de hand van formule 1 en formule 2 kan beredeneerd worden dat als M groter wordt, E kleiner zal worden.

- a** Geef deze redenering, zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden.

Door de twee formules te combineren, kan het volgende verband tussen M en E worden afgeleid:

$$-M = \frac{E - 85}{50}$$

- b** Leid hieruit een formule af waarbij E wordt uitgedrukt in M .

51 2021-II

Sommige mensen proberen een nieuwe relatie te vinden door gebruik te maken van een datingsite. Veel datingsites gebruiken wiskundige technieken om te bepalen in hoeverre twee personen bij elkaar passen.

We bekijken het model $A = 10^{1 - 0,03 \cdot L^2}$. Hierin is A de aantrekkingskracht op het onderwerp 'leeftijd' en L het leeftijdsverschil in jaren.

Naarmate het leeftijdsverschil groter wordt, wordt de aantrekkingskracht op het onderwerp 'leeftijd' kleiner. Je kunt beredeneren dat de formule daarmee in overeenstemming is.

Geef deze redenering zonder getallen in te vullen of een schets/tekening van de grafiek van A te maken.

In de zomermaanden worden pretparken druk bezocht. De wachttijden voor de attracties kunnen dan sterk oplopen. De wachttijd voor een attractie kan berekend

worden met de formule $W = \frac{r \cdot S}{2(1 - r)}$.

Hierin is W de gemiddelde wachttijd van een willekeurige bezoeker in minuten en r de bezettingsgraad van de attractie ($0 < r < 1$). Als voor de bezettingsgraad bijvoorbeeld geldt dat $r = 0,85$, betekent dit dat gemiddeld 85% van de plaatsen in de attractie bezet is. S is de bedieningstijd per bezoeker in seconden. Als bijvoorbeeld een attractie elke 10 minuten 100 bezoekers kan bedienen, geldt $S = 6 \left(= \frac{600 \text{ seconden}}{100 \text{ bezoeken}} \right)$.



In Walibi Belgium is de achtbaan Vampire een populaire attractie, die in de zomermaanden een bezettingsgraad van 98% heeft. De Vampire kan iedere vier minuten 80 bezoekers bedienen.

- a** Bereken hoeveel minuten de gemiddelde wachttijd van een bezoeker voor de Vampire in de zomermaanden is.

In de zomer van 2013 introduceerde Walibi Belgium een zogenoemde voorsteekpas. Met deze pas kan een bezoeker voorrang krijgen bij de attracties. Daardoor zal de wachttijd voor een bezoeker zonder deze pas langer worden. Er zijn nu twee formules voor de wachttijd voor een attractie, namelijk een formule voor de gemiddelde wachttijd W_p in minuten van een bezoeker met de voorsteekpas en een formule voor de gemiddelde wachttijd W_z in minuten van een bezoeker zonder

voorsteekpas: $W_p = \frac{r \cdot S}{2(1 - a \cdot r)}$ en $W_z = \frac{r \cdot S}{2(1 - r)(1 - a \cdot r)}$. Hierin is a het gedeelte van de bezoekers met een voorsteekpas ($0 < a < 1$).

Een andere bekende attractie van Walibi Belgium is de Cobra. Deze attractie heeft een bezettingsgraad van 95% (dus $r = 0,95$) en een bedieningstijd van 6 seconden per bezoeker (dus $S = 6$).

Op 6 juli 2013 kocht 10% van de bezoekers een voorsteekpas, dus $a = 0,10$.

- b** Bereken voor deze dag het verschil in wachttijd bij de Cobra tussen bezoekers zonder voorsteekpas en bezoekers met voorsteekpas. Geef je antwoord in gehele minuten.

De wachttijd van de bezoekers zonder voorsteekpas wordt groter als meer bezoekers een voorsteekpas kopen.

De directie van Walibi Belgium wil dat de wachttijd van bezoekers zonder voorsteekpas bij de Cobra maximaal 80 minuten is.

- c** Bereken hoeveel procent van de bezoekers dan maximaal een voorsteekpas mag hebben. Geef je antwoord in één decimaal.

Voor de Cobra kan de formule van de wachttijd voor bezoekers zonder voorsteekpas worden herleid tot $W_z = \frac{5,7}{0,10 - \dots \cdot a}$.

- d** Geef deze herleiding. Rond het getal dat op de puntjes moet staan niet af.

53 2021-III

Veel restaurants kopen niet-schoongemaakte vis in en maken deze vis zelf schoon. Kop, ingewanden, huid en graten worden dan verwijderd. Van vis die is ingekocht, komt dus in het restaurant maar een deel van het oorspronkelijke gewicht op tafel.

De prijs in euro per kg van niet-schoongemaakte vis wordt de *vuilprijs* genoemd. De *schoonprijs* is de prijs van de schoongemaakte vis in euro per kg. De *portieprijs* is de schoonprijs per portie op het bord.

Hierbij zijn de volgende formules gegeven: $S = a \cdot V$ en $P = \frac{g \cdot S}{1000}$.

Hierin is S de schoonprijs (in €/kg), a een factor die afhankelijk is van de vissoort, V de vuilprijs (in €/kg), g de portiegrootte (in gram) en P de portieprijs (in €).

Neem aan dat in de volgende vraag a en g constant zijn.

- a** Beredeneer, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken, met behulp van bovenstaande formules of de portieprijs twee keer zo groot wordt als de vuilprijs twee keer zo groot wordt.

Als een vis is schoongemaakt, wordt deze in porties verdeeld. We noemen G het gewicht (in kg) van de niet-schoongemaakte vis. Dan geldt voor het aantal porties A :

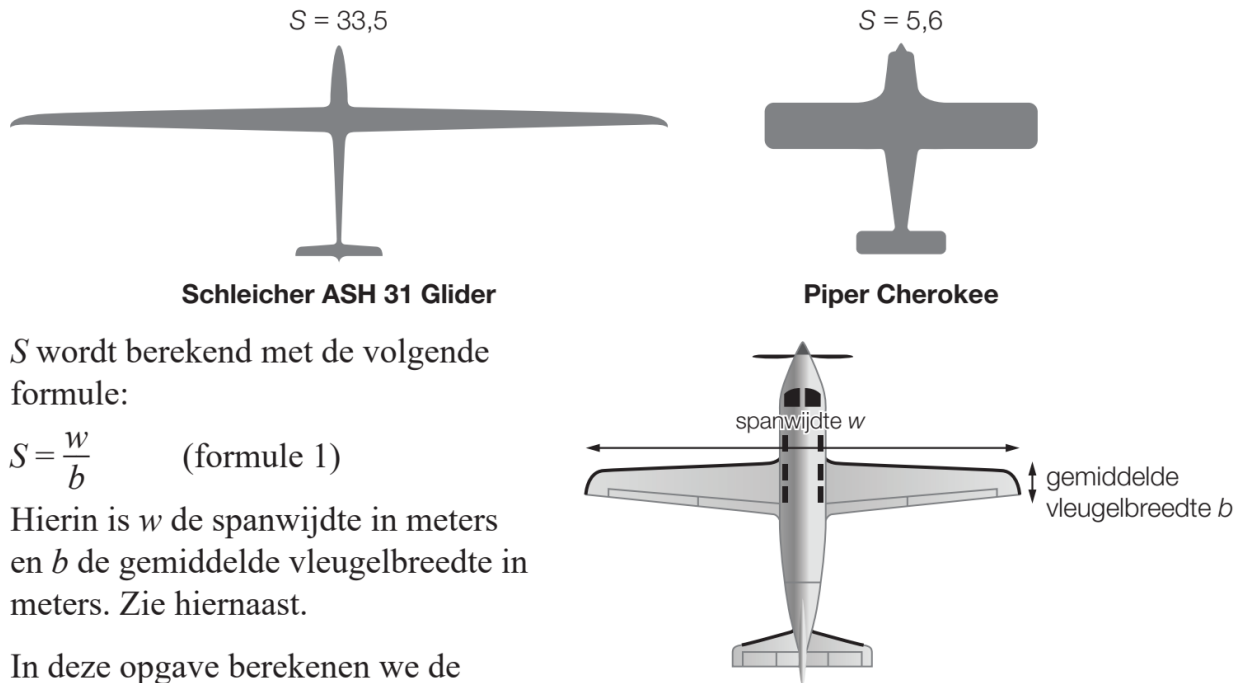
$$A = \frac{1000 \cdot G}{a \cdot g}$$

Hierin is a weer de factor en g weer de portiegrootte (in gram).

Voor de vissoort schol is $a = 2,6$. Sven wil voor deze vissoort per portiegrootte een formule van de vorm $G = \dots \cdot A$, zodat hij snel bij een bepaald aantal porties kan uitrekenen hoeveel kg niet-schoongemaakte schol hij moet inkopen.

- b** Herleid voor porties schol van 150 gram de formule voor A tot de vorm $G = \dots \cdot A$. Geef het getal dat op de puntjes staat in twee decimalen.

Hieronder zie je twee vliegtuigen, de Schleicher ASH 31 Glider en de Piper Cherokee. De *slankheid* van een vliegtuig wordt vaak uitgedrukt in een getal S . In de figuur zie je van beide vliegtuigen de bijbehorende waarde van S . De Schleicher heeft een hogere waarde van S , wat wil zeggen dat die slanker is dan de Piper.



S wordt berekend met de volgende formule:

$$S = \frac{w}{b} \quad (\text{formule 1})$$

Hierin is w de spanwijdte in meters en b de gemiddelde vleugelbreedte in meters. Zie hiernaast.

In deze opgave berekenen we de vleugeloppervlakte van een vliegtuig met de volgende formule:

$$A = w \cdot b \quad (\text{formule 2})$$

Hierin is A de vleugeloppervlakte in m^2 , w de spanwijdte in meters en b de gemiddelde vleugelbreedte in meters.

De Schleicher ASH 31 Glider heeft een spanwijdte van 21 meter.

- a** Bereken de vleugeloppervlakte van dit vliegtuig. Geef je antwoord in een geheel aantal m^2 .

Uit formule 2 volgt:

$$b = \frac{A}{w} \quad (\text{formule 3})$$

De Piper Cherokee met slankheid 5,6 heeft een vleugeloppervlakte van $15,1 \text{ m}^2$. Door gebruik te maken van formule 1 en formule 3 kun je de spanwijdte van dit vliegtuig berekenen.

- b** Bereken de spanwijdte van de Piper Cherokee in meters. Geef je antwoord in één decimaal.

Formule 1 (F1) is de hoogste klasse in de autosport.

Omdat de banden gedurende een F1-race slijten, verliezen ze grip op het wegdek en lopen de rondetijden op. Daarom worden tijdens zogeheten *pitstops* de banden verwisseld voor nieuwe, maar dat wisselen kost wel tijd (pitstraat inrijden, banden wisselen, pitstraat uitrijden).

Voor een bepaald type F1-auto kan het totale tijdverlies T in een race als gevolg van slijtage van de banden en het aantal pitstops, worden

gegeven door de formule $T = \frac{0,5 \cdot b \cdot L^2}{n + 1} + n \cdot P$.

Hierin is:

- T het totale tijdverlies in seconden
- b de bandenslijtage, een getal dat onder andere afhangt van het circuit
- L het aantal ronden van de race
- n het aantal pitstops in de race
- P het gemiddelde tijdverlies in seconden per pitstop

Als we bij een race van 60 ronden uitgaan van een bandenslijtage van 0,1 en een gemiddeld tijdverlies van 20 seconden per pitstop, dan

kunnen we de formule herleiden tot $T = \frac{20n^2 + 20n + 180}{n + 1}$.

a Geef deze herleiding.

b Bereken het optimale aantal pitstops voor de bovenstaande race van 60 ronden.

Als het gemiddelde tijdverlies per pitstop zou kunnen afnemen, dan kan het optimale aantal pitstops misschien toenemen om het totale tijdverlies in de race zo klein mogelijk te houden.

Op een ander circuit, waar de race 45 ronden duurt, geldt voor een bepaalde F1-auto een bandenslijtage van 0,3. Je kunt dan met de formule

$N = -1 + 45\sqrt{\frac{3}{20P}}$ het optimale aantal pitstops bepalen. Hierin is N het (onafgeronde) optimale aantal pitstops en P het gemiddelde tijdverlies in seconden per pitstop.

Op dit circuit geldt voor deze F1-auto dat het gemiddelde tijdverlies van een pitstop 24,8 seconden is. Uit de formule volgt dan dat N ongeveer 2,5 is. Er moet een keuze gemaakt worden of er nu 2 of 3 pitstops moeten plaatsvinden. Deze keuze zou makkelijker zijn als N precies 3 was geweest.

c Bereken hoeveel korter het gemiddelde tijdverlies per pitstop moet zijn om uit te komen op een optimaal aantal pitstops van precies 3. Geef je antwoord in seconden en in één decimaal.

d Beredeneer met de formule van N , zonder getallenvoorbeelden te gebruiken of een schets/tekening van de grafiek van N te maken, dat N toeneemt als het gemiddelde tijdverlies per pitstop afneemt.

56 2022-II

Gegeven is de formule $v = 3,13 \cdot \sqrt{\frac{m}{W}}$.

Neem $W = 40$ en herleid de formule tot de vorm $v = \dots \cdot \sqrt{m}$. Geef daarbij het getal op de puntjes in twee decimalen.

57 2024-I

De Engelse fysioloog Hill stelde dat een hardloopprestatie wordt bepaald door de maximale zuurstofopname Z van het lichaam, uitgedrukt in het aantal milliliters per minuut per kilogram lichaamsgewicht (ml/min per kg). Een formule waarmee Z bij benadering kan worden bepaald is

$Z = 15 \cdot \frac{M}{R}$. Hierin is M de maximale hartslag en R de hartslag in rust,

beide in aantal slagen per minuut.

Een marathon is een hardloopwedstrijd over 42,195 km. De gemiddelde snelheid v waarmee een hardloper een marathon kan lopen, is afhankelijk van Z . Deze gemiddelde snelheid v (in km/uur) kan berekend

worden met de formule $v = \frac{Z}{3,74}$.

Als twee mannen dezelfde hartslag in rust hebben, dan kun je met behulp van de formules beredeneren dat de persoon met een hogere maximale hartslag een snellere tijd kan lopen op de marathon dan de persoon met een lagere maximale hartslag.

a Geef deze redenering zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden.

Jan, die een marathon gaat lopen, heeft een maximale hartslag van 190 slagen per minuut en een hartslag in rust van 60 slagen per minuut.

b Bereken met behulp van de formules de tijd die hij op de marathon gaat lopen. Geef je antwoord in gehele minuten.

De formules zijn te combineren tot $v = \frac{15M}{3,74R}$ met v de gemiddelde

snelheid die een hardloper kan lopen op een marathon. Verder geldt voor een getrainde man $M = 205,8 - 0,685 \cdot L$. Hierin is M de maximale hartslag in aantal slagen per minuut en L de leeftijd in hele jaren.

Vervolgens is er een formule af te leiden die voor een getrainde man v uitdrukt in L en R . Deze formule is te schrijven in de vorm $v = \frac{a - b \cdot L}{R}$.

Hierin zijn a en b getallen.

c Geef deze afleiding. Geef daarbij a en b in één decimaal.

58 2024-II

Een copyshop heeft verschillende abonnementen. In de deze opgave bedoelen we met ‘afdrukkosten’ de afdrukkosten per maand voor de klant en met ‘pagina’s’ afgedrukte pagina’s per maand.

De afdrukkosten (in euro) voor de abonnementen Print Soms K_S en Print Regelmatig K_R worden gegeven door de volgende formules:

$$K_S = \begin{cases} 3 & \text{als } 0 \leq p < 50 \\ 0,1p - 2 & \text{als } p \geq 50 \end{cases}$$

$$K_R = \begin{cases} 5 & \text{als } 0 \leq p < 100 \\ \frac{1}{15}p - 1\frac{2}{3} & \text{als } p \geq 100 \end{cases}$$

Hierin is p het aantal pagina’s.

Voor kleine aantallen pagina’s zijn de afdrukkosten bij het abonnement Print Soms lager dan bij Print Regelmatig.

- a** Bereken met behulp van de formules voor K_S en K_R vanaf welk aantal pagina’s de afdrukkosten bij het abonnement Print Regelmatig lager zijn dan bij Print Soms.

Voor de afdrukkosten per pagina G_R voor het abonnement Print Regelmatig geldt $G_R = \frac{K_R}{p}$. Hierin is p het aantal pagina’s, waarbij p minstens 100 is.

Deze formule kan in de vorm $G_R = a - \frac{b}{p}$ worden geschreven. Hierin zijn a en b positieve getallen en p is het aantal pagina’s, waarbij p minstens 100 is.

- b** Beredeneer met behulp van deze formule of de afdrukkosten per pagina afnemen of toenemen als het aantal pagina’s toeneemt.
c Bepaal de waarden van a en b , zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden voor p . Geef deze waarden in twee decimalen.

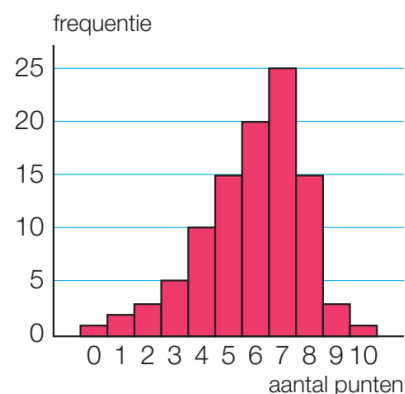
59 2022-I

Gegeven is de formule $\frac{27000}{q} \cdot B = 60q$. Deze formule is te herleiden tot de vorm $q = a \cdot \sqrt{B}$, waarin a een getal is. Laat deze herleiding zien en geef a als geheel getal.

12.5 Statistiek

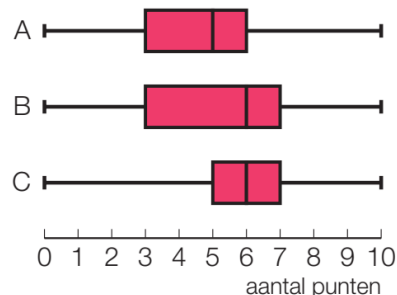
Gebruik bij de opgaven in deze paragraaf het formuleblad zoals dat op het voorblad staat bij het centraal examen. Dit formuleblad vind je op bladzijde 254 van dit boek.

- 60 a** De 100 leerlingen van havo 5 hebben een test gemaakt, waarop je maximaal 10 punten kon behalen. De resultaten zie je in de figuur hiernaast. De centrummaten gemiddelde, modus en mediaan zijn alle drie verschillend. Zet de centrummaten op volgorde van klein naar groot. Licht je antwoord toe.



- b** De resultaten van de test van vraag a zijn in een boxplot verwerkt. Hiernaast zie je drie boxplots waarvan er één bij de test hoort.

Welke van deze boxplots is dat? Licht je antwoord toe.



- c** Bij een onderzoek naar het gevoel van veiligheid in het openbaar vervoer in Amsterdam werden volwassenen ondervraagd die met het openbaar vervoer naar het Rijksmuseum waren gekomen. Van de 1050 ondervraagden gaven 110 te kennen dat ze zich niet veilig voelden in het openbaar vervoer.

De conclusie van de onderzoekers was: 'Ruim tien procent van de gebruikers van het openbaar vervoer in Amsterdam voelt zich daarin niet veilig.'

Leg uit waarom deze conclusie te algemeen is op basis van de gekozen onderzoeksopzet.

- d** Zie het onderzoek in vraag c. Van de 1050 ondervraagde personen woonden 160 in Amsterdam en hiervan gaven 30 aan zich niet veilig te voelen in het openbaar vervoer.

Het is mogelijk op basis van deze gegevens een kruistabel te maken.

Hiernaast is hiervan een begin gemaakt. Met behulp van de ingevulde kruistabel kun je bepalen of het verschil in gevoel van veiligheid in het openbaar vervoer in

Amsterdam tussen personen die in Amsterdam wonen en die niet in Amsterdam wonen groot, middelmatig of gering is.

Vul de kruistabel in en bepaal met behulp van het formuleblad of het genoemde verschil groot, middelmatig of gering is.

- e** In de kruistabel bij vraag d worden variabelen gebruikt. Noem de variabelen uit de kruistabel en geef aan of deze variabelen kwalitatief of kwantitatief zijn. Licht je antwoord toe.

		voelt zich veilig	
		ja	nee
woont in Amsterdam	ja		
	nee		

61 Verschillende groepen leerlingen hebben een test gemaakt waarop je maximaal 550 punten kunt behalen. In totaal deden 10 780 leerlingen deze test. Groep A telde 1240 leerlingen en in groep B zaten 1030 leerlingen. Bij groep A was de gemiddelde score 512 punten en was de standaardafwijking 13,0. Bij groep B was het gemiddelde 521 en de standaardafwijking 7,5.

In de tabel hiernaast staat nog meer informatie over deze test. Je ziet dat bij groep A het 20^e percentiel 501 is. Dit betekent dat 20% van de leerlingen in groep A een score van 501 of lager had.

Bij een van deze groepen zijn de scores normaal verdeeld. Bij de andere groep is dat niet het geval.

- Geef een statistische redenering waarmee je uitlegt voor welke groep de scores niet normaal verdeeld zijn.
- Bepaal met het formuleblad op twee verschillende manieren of het verschil tussen de scores die behaald zijn door de leerlingen van groep A en de scores die behaald zijn door de leerlingen van groep B groot, middelmatig of gering is.

- We bekijken nu de zwakste leerlingen in groep B met een score die minstens tweemaal de standaardafwijking lager ligt dan het gemiddelde.

In de tabel hieronder staat de verdeling van de laagste 10% scores van groep B.

Je ziet dat er 20 leerlingen waren met een score van 508.

percentiel	A	B
5	491	508
10	495	510
15	498	513
20	501	514
25	503	515
50	512	520
75	521	523
80	523	524
85	526	525
90	529	528
95	533	529

score	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510
aantal	1	1	1	2	3	3	4	5	6	14	20	25	25

Uit deze tabel blijkt dat, ondanks dat de scores niet normaal verdeeld zijn, het aantal leerlingen met zo'n lage score toch ongeveer gelijk is aan het aantal dat je op grond van de vuistregels bij de normale verdeling zou verwachten.

Toon dit aan.

In groep C zaten 1180 leerlingen. De scores in deze groep zijn normaal verdeeld. Het blijkt dat de middelste 95% van de leerlingen een score had tussen 502 en 536.

- Bereken de standaardafwijking van de scores in groep C.

In groep D zaten 1117 leerlingen. Deze leerlingen vulden bovendien na afloop van de test een vragenlijst in. Een van de vragen was hoeveel tijd je had gestudeerd voor deze test. Het bleek dat 268 leerlingen meer dan vier uur hadden gestudeerd.

Op basis hiervan kun je het percentage schatten van alle leerlingen die meer dan vier uur hebben gestudeerd bij de voorbereiding van de test. Hierbij gaan we ervan uit dat groep D een representatieve steekproef is.

- e** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van dit percentage. Rond in het eindantwoord af op één decimaal.

Uit de vragenlijst die de leerlingen van groep D hebben ingevuld blijkt dat ze gemiddeld 170 minuten hadden gestudeerd voor deze test. De standaardafwijking was 40 minuten. Op basis hiervan kun je het gemiddeld aantal minuten schatten dat de 10780 leerlingen die deze test maakten, hebben gestudeerd.

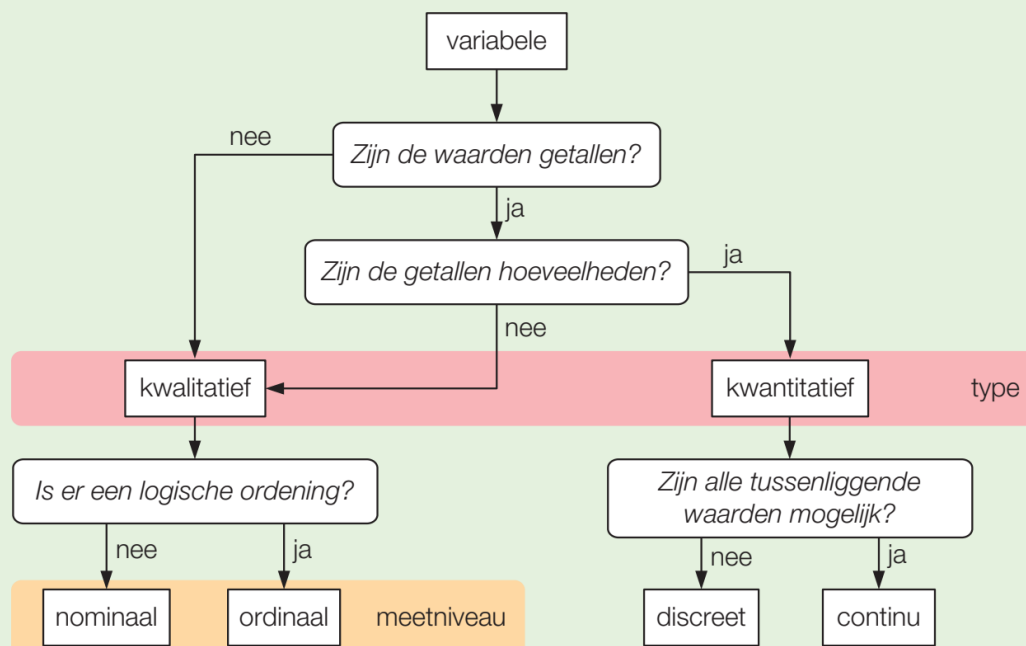
- f** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van dit gemiddelde. Rond in het eindantwoord af op één decimaal.

Soorten variabelen

Een *kwalitatieve variabele* geeft een eigenschap die geen hoeveelheid is weer, bijvoorbeeld beroep, godsdienst of geslacht.

Een *kwantitatieve variabele* geeft een hoeveelheid weer. Voorbeelden zijn temperatuur, snelheid en geboortjaar.

Kwalitatieve en kwantitatieve variabelen kun je nog verder onderverdelen. Zie het schema.



Je kunt met het schema nagaan dat de variabele ‘aantal rotte appels’ een discrete variabele is. En dat de variabele telefoonnummer een nominale variabele is.

Centrum- en spreidingsmaten

De centrummaten zijn *gemiddelde*, *modus* en *mediaan*.

Centrummaten

gemiddelde	$\text{gemiddelde} = \frac{\text{som van de waarnemingsgetallen}}{\text{aantal waarnemingsgetallen}}$
mediaan	Als de waarnemingsgetallen in volgorde van grootte staan, dan is <ul style="list-style-type: none">• de mediaan bij een oneven aantal getallen het middelste getal• de mediaan bij een even aantal getallen het gemiddelde van de middelste twee getallen.
modus	De modus is het waarnemingsgetal met de grootste frequentie. Zijn er twee of meer waarnemingsgetallen met de grootste frequentie, dan bestaat de modus niet.

VOOR- EN NADELEN BIJ DRIE CENTRUMMATEN

	voordeel	nadeel
gemiddelde	gebruikt alle waarnemingsgetallen	gevoelig voor uitschieters
mediaan	ongevoelig voor uitschieters	alleen de waarde van de middelste waarneming(en) is van belang
modus	kan bij elk type variabele	een kleine verandering kan een hele andere modus opleveren

De mediaan van de eerste helft heet het eerste kwartiel. Notatie Q_1 .

De mediaan van de tweede helft heet het derde kwartiel. Notatie Q_3 .

Bij een klassenindeling is de modale klasse de klasse met de grootste frequentie.

Je kunt ook aangeven in welke klasse de mediaan ligt.

Omdat bij een klassenindeling informatie verloren is gegaan, is het gemiddelde niet precies te berekenen.

Je kent de *spreidingsmaten* spreidingsbreedte, interkwartielafstand en standaardafwijking.

De *spreidingsbreedte* is het verschil tussen het grootste en het kleinste waarnemingsgetal.

De *interkwartielafstand* (kwartielafstand) is het verschil tussen het derde en het eerste kwartiel, dus de interkwartielafstand is $Q_3 - Q_1$.

De *standaardafwijking* σ geeft een goede indruk van de spreiding rond het gemiddelde. Ruwweg kun je zeggen dat de getallen gemiddeld σ van het gemiddelde afliegen.

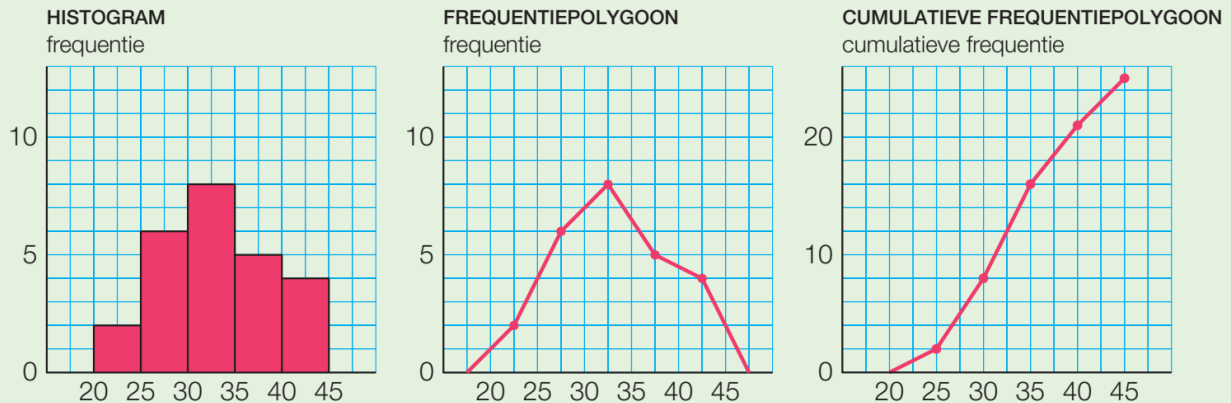
Representaties van data

Een *histogram* is een staafdiagram met op de horizontale as een kwantitatieve variabele met een klassenindeling en op de verticale as de frequentie.

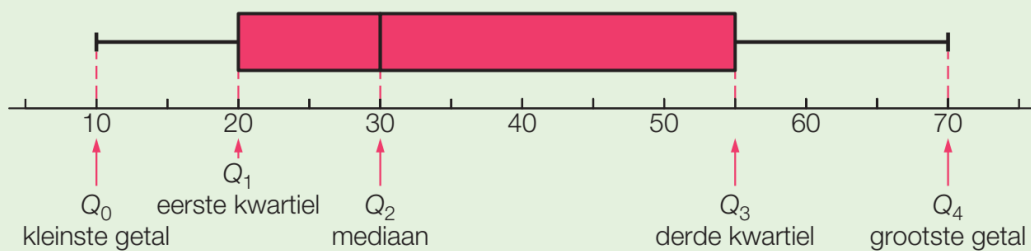
Je kunt bij een klassenindeling ook een *frequentiepolygoon* tekenen.

Begin- en eindpunt liggen op de horizontale as.

Bij een *cumulatieve frequentiepolygoon* zijn de cumulatieve frequenties uitgezet boven de rechtergrens van elke klasse.



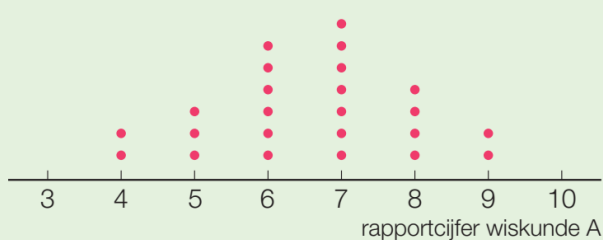
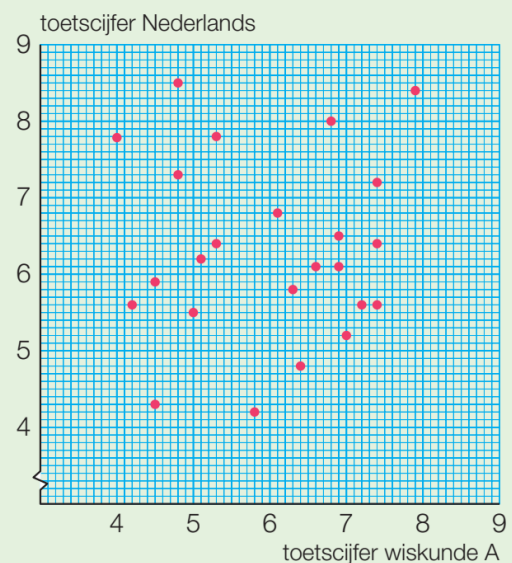
Een *boxplot* is een diagram waarin de verdeling in vier even grote groepen zichtbaar is gemaakt. Elk deel van de boxplot bevat 25% van de waarnemingsgetallen.



In de *dotplot* in de figuur hieronder zijn de rapportcijfers van wiskunde A van een klas weergegeven.

In het *spreidingsdiagram* hiernaast zijn van deze klas toetscijfers Nederlands uitgezet tegen toetscijfers wiskunde A.

De punten in een spreidingsdiagram worden gezamenlijk een *puntenwolk* genoemd.



Groepen vergelijken

Op het formuleblad bij het centraal examen staan de vuistregels waarmee je de grootte van het verschil tussen twee groepen kunt bepalen (zie bladzijde 254). Welke je gebruikt, hangt af van de beschikbare gegevens.

	Welke gegevens heb je nodig van de twee groepen?	Tips & aandachtspunten
<i>phi</i>-coëfficiënt	De frequenties bij een variabele met twee categorieën.	<ul style="list-style-type: none"> • De enige associatiemaat mogelijk bij een nominale variabele. • Gebruik of maak een kruistabel. • Gebruik voor a, b, c en d van het formuleblad de absolute aantallen die het kenmerk <i>wel</i> en <i>niet</i> hebben (en dus niet een totaal of percentages).
max V_{cp}	De (relatieve) (cumulatieve) frequenties bij een klassen-indeling of bij een ordinale variabele.	<ul style="list-style-type: none"> • Soms is het mogelijk de max V_{cp} direct af te lezen in een diagram. • Zo niet, dan kun je een tabel maken om de max V_{cp} te vinden. • Gebruik de max V_{cp} niet als je maar twee categorieën of klassen hebt.
effectgrootte	De steekproefgemiddelden ($\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$) en de steekproefstandaard-afwijkingen (S_1 en S_2).	<ul style="list-style-type: none"> • Zorg dat je in de formule de grootste $\bar{X}$ min de kleinste $\bar{X}$ doet.
boxplots vergelijken	Q_1 , de mediaan en Q_3 of (een schets van) de boxplots	<ul style="list-style-type: none"> • Let op dat de box niet hetzelfde is als de boxplot. • Soms kun je de cumulatieve percentages 25%, 50% en 75% gebruiken, wat overeenkomt met respectievelijk Q_1, de mediaan en Q_3.

Hieronder zie je enkele voorbeelden van het bepalen van de grootte van het verschil tussen twee groepen.

phi-coëfficiënt

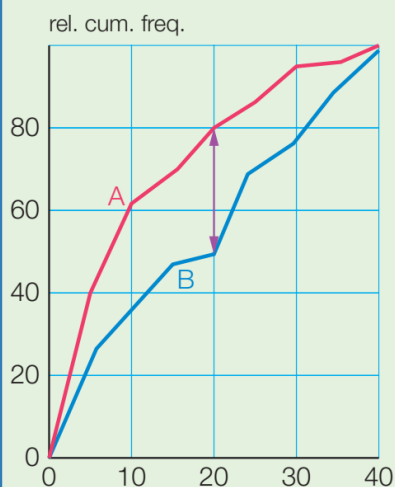
Bij de tabel hiernaast is

$$\phi = \frac{6 \cdot 34 - 38 \cdot 45}{\sqrt{64 \cdot 71 \cdot 72 \cdot 79}} \approx -0,16, \text{ dus het}$$

verschil is gering, want $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$.

	waarde I	waarde II	
waarde 1	26	38	64
waarde 2	45	34	79
	71	72	

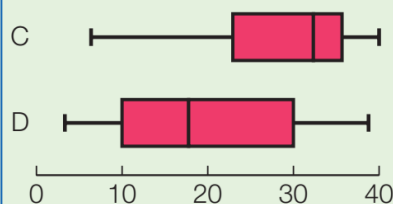
max V_{cp}



$$\max V_{cp} = 30$$

Omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$,
is het verschil middelmatig.

boxplots vergelijken



- De boxen overlappen elkaar.
- Er is een mediaan die buiten de box van de andere boxplot ligt.

Dus het verschil is middelmatig.

effectgrootte

$$\bar{X}_1 = 176 \text{ en } S_1 = 12$$

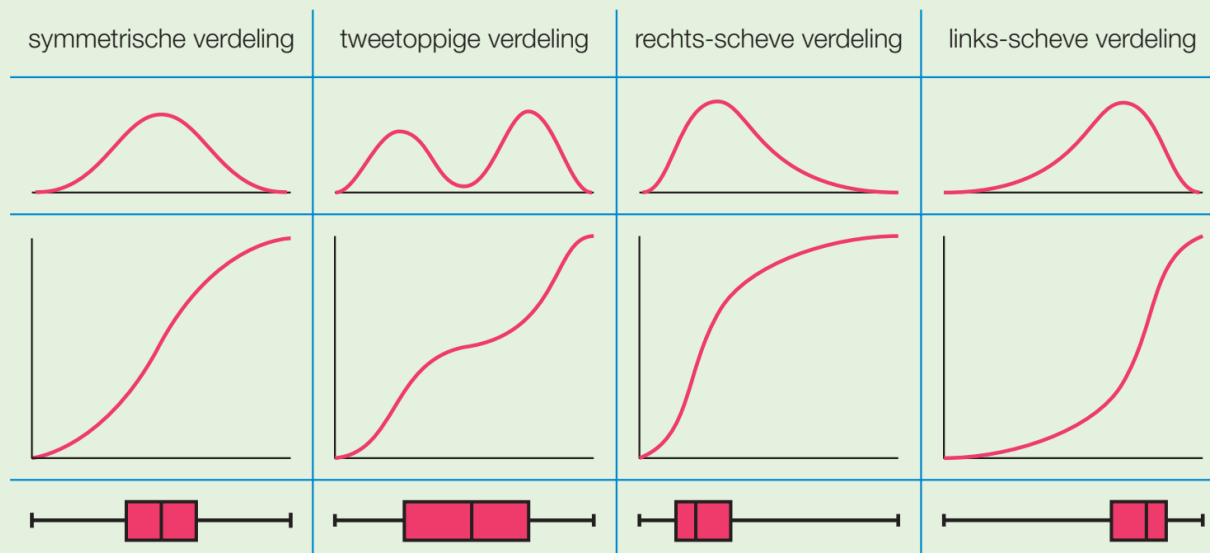
$$\bar{X}_2 = 172 \text{ en } S_2 = 10$$

$$E = \frac{176 - 172}{\frac{1}{2}(12 + 10)} \approx 0,36$$

Omdat $E \leq 0,4$, is het verschil gering.

Verdelingen

Een *verdelingskromme* is een globale grafiek van een verdeling. Hieronder staan de verdelingskrommen bij enkele verdelingen. Daaronder zijn de bijbehorende *cumulatieve verdelingskrommen* en boxplots getekend.



De *normale verdeling* is een continue verdeling waarbij de verdelingskromme symmetrisch is.

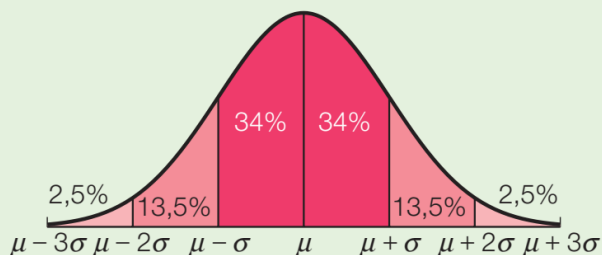
Het gemiddelde, de modus en de mediaan vallen samen.

Het gemiddelde wordt aangegeven met μ en de standaardafwijking met σ .

De normaalkromme is klokvormig.

Bij de normale verdeling horen de volgende vuistregels.

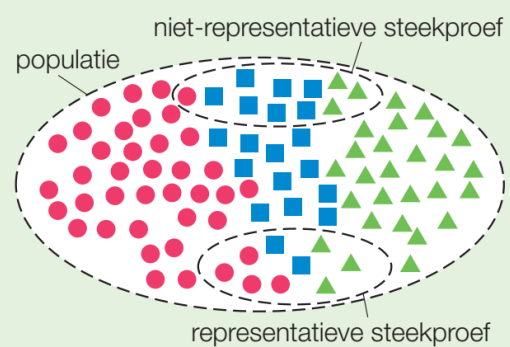
- Ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
- Ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.
- Bijna 100% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.



Betrouwbaarheidsintervallen

De totale groep waarop een onderzoek zich richt heet de *populatie*. Wil men onderzoeken hoeveel procent van de huishoudens twee of meer auto's bezit, dan wordt de populatie gevormd door de huishoudens.

Niet alle huishoudens worden ondervraagd. Men neemt een *steekproef*.



Met het resultaat van de steekproef wil een onderzoeker iets zeggen over de populatie. Daarvoor is het belangrijk dat de steekproef aselekt en voldoende groot is. Zo ontstaat uit een (bij benadering) normaal verdeelde steekproevenverdeling een steekproefresultaat dat meestal representatief is voor de populatie. Dat wil zeggen dat de steekproefproportie of het steekproefgemiddelde niet veel verschilt van de populatieproportie of het populatiegemiddelde.

Een steekproef is aselekt als elk element uit de populatie een even grote kans heeft om in de steekproef voor te komen.

Je hebt te maken met de begrippen populatieproportie en steekproefproportie.

De *populatieproportie* p van een populatie is het deel van de populatie met een bepaald kenmerk.

De *steekproefproportie* $\hat{p}$ van een steekproef is het deel van de steekproef met een bepaald kenmerk.

Voor een populatieproportie is het 95%-betrouwbaarheidsinterval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$.

Hierin is $\hat{p}$ de steekproefproportie en σ de standaardafwijking.

Voor de standaardafwijking geldt de formule $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$. Hierin is n de steekproefomvang.

Is bij een steekproef van lengte 900 de steekproefproportie $\hat{p} = 0,36$,

$$\text{dan is } \sigma = \sqrt{\frac{0,36(1 - 0,36)}{900}} = 0,016.$$

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$[0,36 - 2 \cdot 0,016; 0,36 + 2 \cdot 0,016] = [0,328; 0,392].$$

Op het formuleblad staat:

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}}, \text{ met } p \text{ de steekproefproportie en } n \text{ de steekproefomvang.}$$

Bij $\hat{p} = 0,36$ en $n = 900$ krijg je

$$0,36 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,36(1 - 0,36)}{900}} = 0,36 \pm 0,032.$$

Voor een populatiegemiddelde is het 95%-betrouwbaarheidsinterval

$$[\bar{X} - 2\sigma, \bar{X} + 2\sigma] \text{ met } \sigma = \frac{S}{\sqrt{n}}. \text{ Hierin is } \bar{X} \text{ het steekproefgemiddelde,}$$

S de steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.

Is bij een steekproef van omvang 400 het steekproefgemiddelde $\bar{X} = 35$ en $S = 12$, dan is het 95%-betrouwbaarheidsinterval

$$\left[35 - 2 \cdot \frac{12}{\sqrt{400}}, 35 + 2 \cdot \frac{12}{\sqrt{400}} \right] = [33,8; 36,2].$$

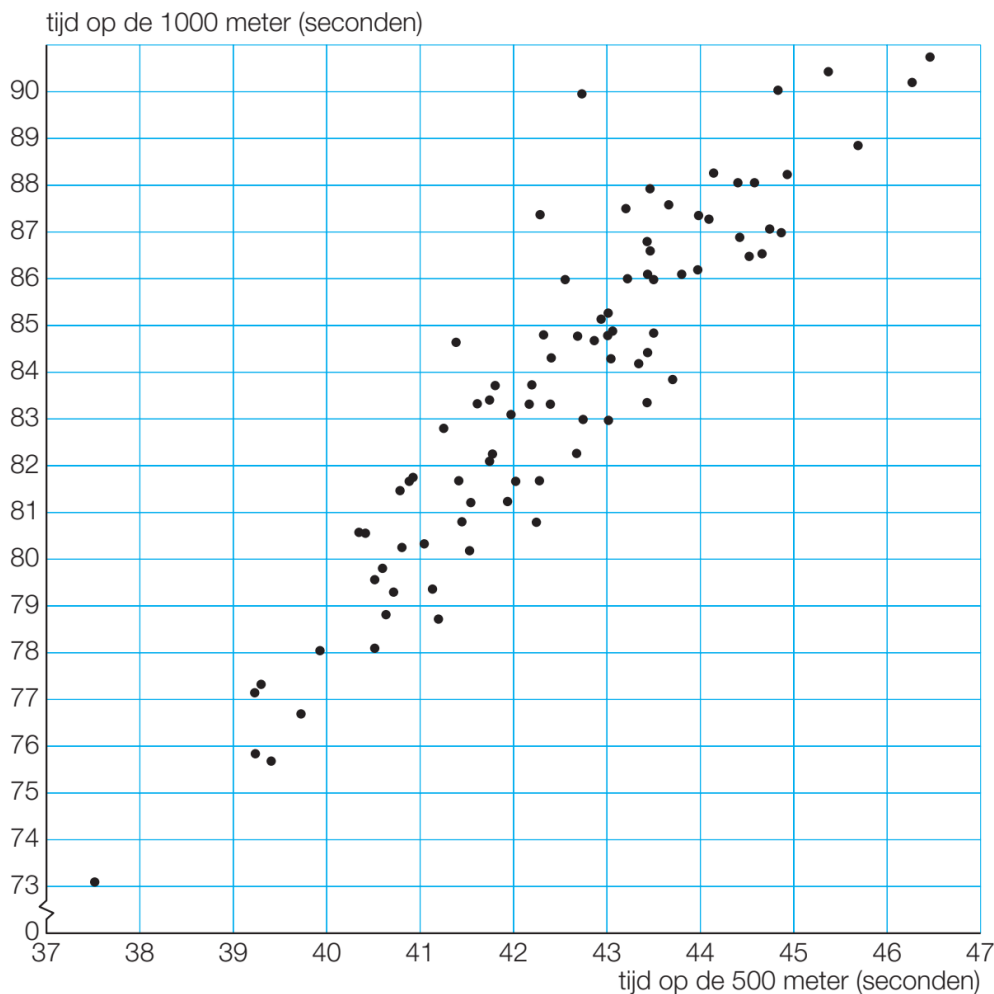
Op het formuleblad staat:

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ met } \bar{X} \text{ het steekproefgemiddelde, } n \text{ de steekproefomvang en } S \text{ de steekproefstandaardafwijking.}$$

$$\text{Bij } n = 400, \bar{X} = 35 \text{ en } S = 12 \text{ krijg je } 35 \pm 2 \cdot \frac{12}{\sqrt{400}} = 35 \pm 1,2.$$

In deze opgave vergelijken we de prestaties van schaatssters, ook al hebben die schaatssters nooit in hetzelfde toernooi geschaatst. Hiervoor maken we gebruik van de persoonlijke recordtijden van schaatssters op zes verschillende afstanden, namelijk de 500, 1000, 1500, 3000, 5000 en 10000 meter. In deze opgave beperken we ons tot 86 topschaatssters en hun persoonlijke recordtijden zoals die begin 2016 bekend waren. De persoonlijke recordtijden van deze 86 schaatssters op de 500 meter en op de 1000 meter zijn weergegeven in een spreidingsdiagram. Zie de figuur hieronder. Elke stip geeft één schaatsster weer.



Bij het spreidingsdiagram worden de volgende uitspraken gedaan over de resultaten van deze 86 schaatssters:

- I Meer dan 90% van de schaatssters heeft de 500 meter afgelegd in minder dan 45,0 seconden.
 - II De mediaan van de tijd op de 1000 meter is ongeveer 81,5 seconden.
 - III De drie snelste schaatssters op de 500 meter zijn ook de drie snelste schaatssters op de 1000 meter.
- a** Onderzoek van elke uitspraak of deze juist is of onjuist.

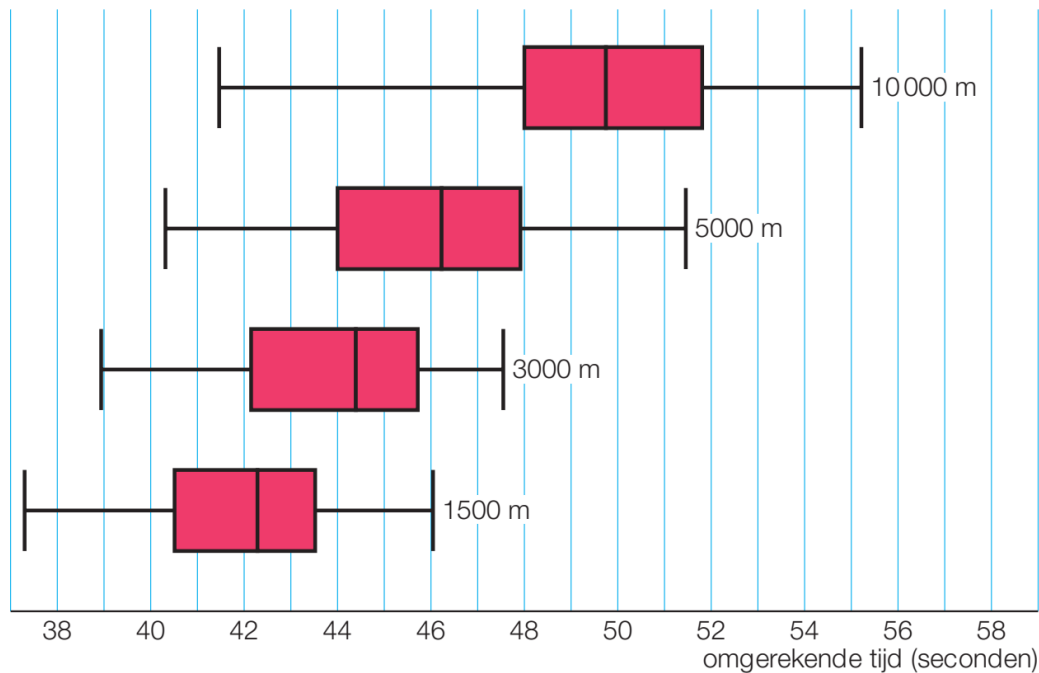
Om de tijden op verschillende afstanden met elkaar te kunnen vergelijken, wordt elke tijd omgerekend naar de gemiddelde tijd per 500 meter.

Stel bijvoorbeeld dat een schaatsster 15 minuten en 20,4 seconden over de 10 000 meter doet. Gemiddeld doet zij dan over 500 meter

$$\frac{15 \cdot 60 + 20,4}{10\,000} \cdot 500 = 46,02 \text{ seconden.}$$

Voor de vier langste afstanden worden de persoonlijke recordtijden van alle 86 schaatssters omgerekend naar de gemiddelde tijd per 500 meter. Deze omgerekende tijden zijn weergegeven in boxplots. Zie de figuur hieronder.

OMGEREKENDE TIJD (GEMIDDELTE TIJD PER 500 METER)



Als je de boxplots onderling vergelijkt, dan kun je met behulp van het formuleblad concluderen dat er een groot verschil is tussen de omgerekende tijden op de 1500 meter en die op de 10 000 meter. Er zijn meer afstanden waarbij er sprake is van een groot verschil.

- b** Noem elk tweetal afstanden waarbij er sprake is van een groot verschil tussen de omgerekende tijden. Licht je antwoord toe.

In de tabel staan de persoonlijke recordtijden van twee van de 86 schaatssters. Zo zie je dat de persoonlijke recordtijd op de 1000 meter van Martina Sáblíková 1:15,86 is. Zij deed er dus 1 minuut, 15 seconden en 86 honderdsten van een seconde over.

	Martina Sáblíková	Caroline Farestveit
recordtijd op de 500 meter in min:sec	0:39,23	0:44,83
recordtijd op de 1000 meter in min:sec	1:15,86	1:30,03
recordtijd op de 1500 meter in min:sec	1:53,44	2:17,08
recordtijd op de 3000 meter in min:sec	3:55,10	4:42,34
recordtijd op de 5000 meter in min:sec	6:42,66	8:06,64
recordtijd op de 10 000 meter in min:sec	13:48,33	16:54,71

Sáblíková wordt gezien als een van de beste schaatssters ooit. Begin 2016 was zowel haar persoonlijke recordtijd op de 5000 meter als haar persoonlijke recordtijd op de 10 000 meter de beste van de 86 schaatssters.

Met behulp van de tabel en de figuren kun je ook voor andere afstanden onderzoeken of Sáblíková's persoonlijke recordtijden de beste waren van deze 86 schaatssters.

c Onderzoek dit zowel voor de 500 meter als voor de 1500 meter.

In de tabel staan ook de persoonlijke recordtijden van Caroline Farestveit. Een fan van Farestveit doet de volgende uitspraak: "Als je Farestveit vergelijkt met de 85 andere schaatssters, dan presteert Farestveit beter op de 10 000 meter dan op de 5000 meter."

d Leg uit dat de uitspraak van de fan juist is.

Het Nibud Scholierenonderzoek brengt het financiële gedrag van scholieren in het voortgezet onderwijs in kaart.

De populatie van dit onderzoek bestaat uit alle vmbo-, havo- en vwo-scholieren in de leeftijd van 12 tot en met 18 jaar. Van een aselechte steekproef van 3260 scholieren uit de populatie zijn gegevens beschikbaar gekomen via online vragenlijsten. We gaan ervan uit dat deze steekproef representatief is.

1530 scholieren in de steekproef hebben een bijbaantje.

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie scholieren met een bijbaantje. Geef de getallen in je antwoord in twee decimalen.

In het rapport staat een tabel met informatie over het gemiddeld aantal uren per week dat een scholier met een bijbaantje werkt. Zie de tabel.

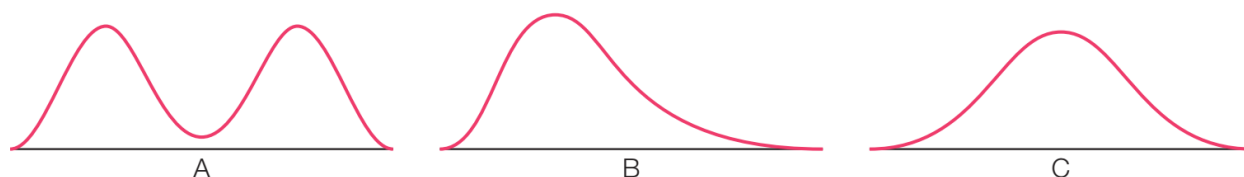
BIJBAAN: GEMIDDELD AANTAL UREN PER WEEK

onderwijsniveau en klas	bijbaan (uren per week)
vmbo bovenbouw (klas 3 en 4)	9
havo / vwo (klas 3)	6
havo bovenbouw (klas 4 en 5)	8
vwo bovenbouw (klas 4, 5 en 6)	6

Als je met behulp van het formuleblad een uitspraak wilt doen over het verschil tussen havo bovenbouwscholieren met een bijbaantje en vwo bovenbouwscholieren met een bijbaantje in het aantal uren dat zij werken, dan heb je meer informatie of misschien wel heel andere informatie nodig dan die in de tabel hierboven staat.

- b** Beschrijf twee manieren om met behulp van het formuleblad een uitspraak te doen over dit verschil tussen deze twee groepen, en geef voor beide manieren aan welke informatie je dan (extra) nodig hebt.

In de steekproef bedroeg het gemiddelde inkomen van een scholier met een bijbaantje 112 euro per maand. De mediaan was 65 euro. In de figuur hieronder zie je drie frequentieverdelingen afgebeeld waarvan er één de frequentieverdeling van het inkomen per maand van een scholier met een bijbaantje in de steekproef weergeeft.



- c** Welke van de drie frequentieverdelingen is dat? Licht je antwoord toe.

Het Nibud wil het inkomen van scholieren met een bijbaantje ook per onderwijsniveau in kaart brengen. Dat hebben ze gedaan door de tabel hieronder in hun onderzoeksrapport te zetten.

BIJBAAN: INKOMEN (IN EURO) PER MAAND VAN 15- EN 16-JARIGEN

onderwijsniveau en klas	gemiddelde	mediaan
vmbo bovenbouw (klas 3 en 4)	149	107
havo / vwo (klas 3)	93	65
havo bovenbouw (klas 4 en 5)	181	142
vwo bovenbouw (klas 4, 5 en 6)	130	101

Deze tabel is gebaseerd op scholieren in de steekproef die 15 of 16 jaar zijn.

- d** Leg uit waarom men niet heeft gekozen voor scholieren in de steekproef die 17 of 18 jaar zijn.

Voor het laatste onderdeel van deze opgave kijken we niet naar het inkomen van scholieren, maar naar een aspect van de uitgaven van scholieren. Dit aspect betreft de vraag hoe vaak scholieren spijt hebben na het doen van een aankoop. Van 1200 aselekt gekozen respondenten (600 jongens en 600 meisjes) is bekend hoe vaak zij spijt hebben na het doen van een aankoop. De resultaten zijn weergegeven in een relatieve frequentietabel, zie de tabel hieronder.

SPIJT NA HET DOEN VAN EEN AANKOOP

	jongens	meisjes	totaal
nooit / zelden	16%	8%	12%
meestal niet	65%	61%	63%
meestal wel	19%	29%	24%
vaak / altijd	0%	2%	1%

- e** Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil tussen jongens en meisjes in hoe vaak zij spijt hebben na het doen van een aankoop gering, middelmatig of groot is.

Veel scholen doen mee met jaarlijkse schooltevredenheidsonderzoeken. De tevredenheid ten aanzien van verschillende onderwerpen wordt gemeten door per onderwerp aan de hand van een vragenlijst een aantal vragen te stellen. De antwoorden worden per onderwerp omgezet in een score waarbij geldt: hoe hoger de score, hoe groter de tevredenheid.

Er zijn 265 scholen die zowel in 2017 als in 2018 aan een bepaald schooltevredenheidsonderzoek hebben meegedaan. Een van deze scholen is Het Gelder.

In 2018 hebben op Het Gelder 674 leerlingen de vragenlijst ingevuld. Zij vormden een aselechte en representatieve steekproef uit de gehele leerlingenpopulatie van Het Gelder. De school kreeg van deze leerlingen een gemiddelde score van 7,24 op het onderwerp ‘begeleiding’. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde score van alle leerlingen van Het Gelder op het onderwerp ‘begeleiding’ was [7,13; 7,35].

- a Bereken de standaardafwijking die bij deze steekproef hoort op dit onderwerp. Geef je antwoord in drie decimalen.

In tabel 1 vind je de schoolscore van Het Gelder, de gemiddelde score van de 265 scholen en de ranking van Het Gelder op een aantal onderwerpen voor zowel 2017 als 2018. De ranking van Het Gelder is de plaats van deze school in de complete lijst van alle 265 scholen, waarbij de scholen van hoge naar lage score zijn gerangschikt.

TABEL 1

onderwerp	2017			2018		
	Het Gelder	alle 265 scholen	ranking	Het Gelder	alle 265 scholen	ranking
begeleiding	7,25	7,11	59	7,24	7,04	50
didactisch handelen	6,72	6,60	97	6,65	6,54	90
pedagogisch klimaat	6,50	6,36	9	6,40	6,19	7
huiswerk	6,37	6,01	4	6,10	5,79	3
activiteiten	7,71	7,79	109	7,68	7,75	105

In tabel 1 kun je zien dat Het Gelder in 2018 op het onderwerp ‘huiswerk’ een schoolscore heeft van 6,10, terwijl de gemiddelde score van de 265 scholen slechts 5,79 is. Daarmee staat Het Gelder op plaats 3 bij het onderwerp ‘huiswerk’. Er zijn dus slechts 2 scholen met een nog grotere tevredenheid over het onderwerp ‘huiswerk’ dan Het Gelder.

De leerlingenraad van Het Gelder beweert op basis van tabel 1 dat de tevredenheid op alle in tabel 1 genoemde onderwerpen in 2018 kleiner is dan in 2017. De schoolleiding van Het Gelder beweert op basis van tabel 1 dat ze in 2018 juist op alle in tabel 1 genoemde onderwerpen een grotere schooltevredenheid ziet in vergelijking met 2017.

b Geef voor beide beweringen een argument.

Als we van alle 265 schoolscores in 2018 op het onderwerp ‘activiteiten’ een verdeling zouden maken, dan zou dit geen normale verdeling opleveren. Dit kun je beredeneren aan de hand van de waarden van de schoolscore van Het Gelder, de gemiddelde score van de 265 scholen en de ranking van Het Gelder uit tabel 1.

c Geef deze redenering.

Niet alleen bij leerlingen wordt de schooltevredenheid gemeten, maar ook bij de ouders. Zij krijgen een andere vragenlijst, maar deze lijst bevat ook een aantal stellingen die aan de leerlingen zijn voorgelegd. Een van deze stellingen is de stelling “Ik zou weer voor deze school kiezen”. In tabel 2 zie je voor deze stelling de resultaten uit 2018 van de 674 leerlingen en de 450 ouders van Het Gelder die de vragenlijst hebben ingevuld.

TABEL 2

STELLING: “IK ZOU WEER VOOR DEZE SCHOOL KIEZEN”

	eens	oneens	totaal
leerlingen	569	105	674
ouders	369	81	450
totaal	938	186	1124

d Onderzoek met behulp van het formuleblad of bij deze stelling het verschil tussen de leerlingen en de ouders groot, middelmatig of gering is.

In tabel 3 staat een andere stelling. Je ziet in tabel 3 de resultaten van een andere school, Het Drentsch College. Deze stelling is in 2018 op die school door 700 leerlingen en 500 ouders beantwoord.

TABEL 3

STELLING: "DE SCHOOLREGELS ZIJN DUIDELIJK"

	leerlingen	ouders
zeer oneens	7 (1%)	10 (2%)
oneens	7 (1%)	15 (3%)
zowel eens als oneens	49 (7%)	60 (12%)
eens	343 (49%)	225 (45%)
zeer eens	294 (42%)	190 (38%)

Met behulp van het formuleblad kun je nagaan dat het verschil tussen de leerlingen en de ouders bij deze stelling gering is.

Als er meer ouders hadden gekozen voor 'zowel eens als oneens' in plaats van 'eens', dan zou het verschil tussen de leerlingen en de ouders groter zijn.

- e Bereken het minimale aantal ouders dat voor 'zowel eens als oneens' in plaats van 'eens' had moeten kiezen, zodat het verschil tussen de leerlingen en de ouders volgens het formuleblad niet meer gering zou zijn, maar minstens middelmatig.

65 2022-I

In veel dorpen geldt een snelheidslimiet van 30 of 50 km/uur. Niet elke automobilist houdt zich hieraan en dit kan onveilige situaties opleveren. Daarom kan iedereen onveilige verkeerssituaties melden bij Veilig Verkeer Nederland (VVN). Als men bij VVN het vermoeden heeft dat het om een gegronde melding gaat, dan gaan vrijwilligers op pad om de snelheid van passerende automobilisten te meten.

Vanuit het dorp Borssele is zo'n melding binnengekomen over de Monsterweg. Vervolgens is op een dinsdagochtend tussen 7 en 9 uur op deze weg de snelheid van 250 passerende automobilisten gemeten.

Aan de hand van de resultaten van deze steekproef wil men een uitspraak doen over het percentage automobilisten dat in een willekeurige week op deze weg te hard rijdt.

- a Leg uit waarom deze steekproef waarschijnlijk niet representatief is en geef aan hoe dat verbeterd kan worden.

Er wordt een nieuwe steekproef op de Monsterweg gehouden die wel representatief is. Op deze weg, waar de snelheidslimiet 50 km/uur is, is de snelheid van 169 auto's gemeten.

Ook wordt er een representatieve steekproef gehouden op de Noordsingel in Borssele. Op deze weg, waar de snelheidslimiet 30 km/uur is, is de snelheid van 100 auto's gemeten.

De resultaten van de twee steekproeven zijn weergegeven in de figuur.

<div> <div>ZONE</div> <div>30</div> </div> <div>Borssele Noordsingel</div>		<div> <div>ZONE</div> <div>50</div> </div> <div>Borssele Monsterweg</div>	
snelheid (km/uur)	aantal auto's	snelheid (km/uur)	aantal auto's
tot 21		tot 21	
21 – 25	2	21 – 25	
26 – 30	7	26 – 30	2
31 – 35	14	31 – 35	4
36 – 40	17	36 – 40	15
41 – 45	22	41 – 45	44
46 – 50	18	46 – 50	46
51 – 55	15	51 – 55	26
56 – 60	4	56 – 60	19
61 – 65		61 – 65	9
66 – 70		66 – 70	4

91 – 95	1		
totaal:	100	totaal:	169

b Ligt de snelheidslimiet op de Noordsingel in de modale klasse? Licht je antwoord toe.

De situatie op de Noordsingel is zorgwekkend: er waren maar weinig automobilisten die zich aan de snelheidslimiet hielden. Men wil het 95%-betrouwbaarheidsinterval berekenen van het percentage automobilisten op de Noordsingel dat te hard rijdt.

c Bereken dit 95%-betrouwbaarheidsinterval. Rond de percentages in je antwoord af op gehele getallen.

Piet wil een diagram maken met de gegevens van de Monsterweg uit de figuur. Hij overweegt de volgende drie diagrammen:

- een boxplot
- een spreidingsdiagram (puntenwolk)
- een cumulatieve relatieve frequentiepolygoon

Hij wil dat uit het diagram af te lezen is hoe groot het percentage van de automobilisten is dat zich aan de snelheidslimiet houdt.

d Geef voor elk van deze drie diagrammen aan of dat hiervoor geschikt is. Licht je antwoord telkens toe.

Voor de Monsterweg wordt onderzocht of een groter deel van de automobilisten zich aan de snelheidslimiet houdt als er matrixborden langs de weg worden geplaatst die de maximumsnelheid aangeven. Zie de foto.

In het eerdere onderzoek (situatie zonder matrixborden) van VVN hielden 111 van de 169 automobilisten op de Monsterweg zich aan de snelheidslimiet. In het vervolgonderzoek, waarin er matrixborden geplaatst waren, hielden 183 van de 213 automobilisten zich aan de snelheidslimiet. In de twee onderzoeken is het deel van de automobilisten dat zich aan de snelheidslimiet houdt dus verschillend.

- e Bepaal met behulp van het formuleblad of dit verschil gering, middelmatig of groot is.



66 2022-II

WERKBLAD De ambulancezorg is in Nederland per regio georganiseerd. Er zijn 25 regio's. Elke regio heeft zijn eigen Regionale Ambulancevoorziening (RAV). Elke RAV beschikt over een aantal ambulances en een meldkamer.

Wanneer er een melding bij de meldkamer binnenkomt, moet men de mate van urgentie van de melding vaststellen en zorgen voor de inzet

van een ambulance: een ambulancerit. De mate van urgentie kan zijn:

- Hoge urgentie: de benodigde zorg is spoedeisend en er is sprake van direct levensgevaar voor de patiënt. We noemen dit een A1-rit.
- Lage urgentie: de benodigde zorg is spoedeisend, maar er is geen direct levensgevaar voor de patiënt. We noemen dit een A2-rit.
- Geen urgentie: de benodigde zorg is niet spoedeisend. We noemen dit een B-rit.

De *responstijd* is de tijd tussen het aannemen van de telefoon in de meldkamer en de aankomst van de ambulance bij de patiënt.

In een rapport over de ambulancezorg in Nederland spelen de volgende vier statistische variabelen een rol:

- regio
- mate van urgentie (van een melding bij de meldkamer)
- aantal ambulanceritten (per jaar per regio)
- responstijd (van een ambulancerit)

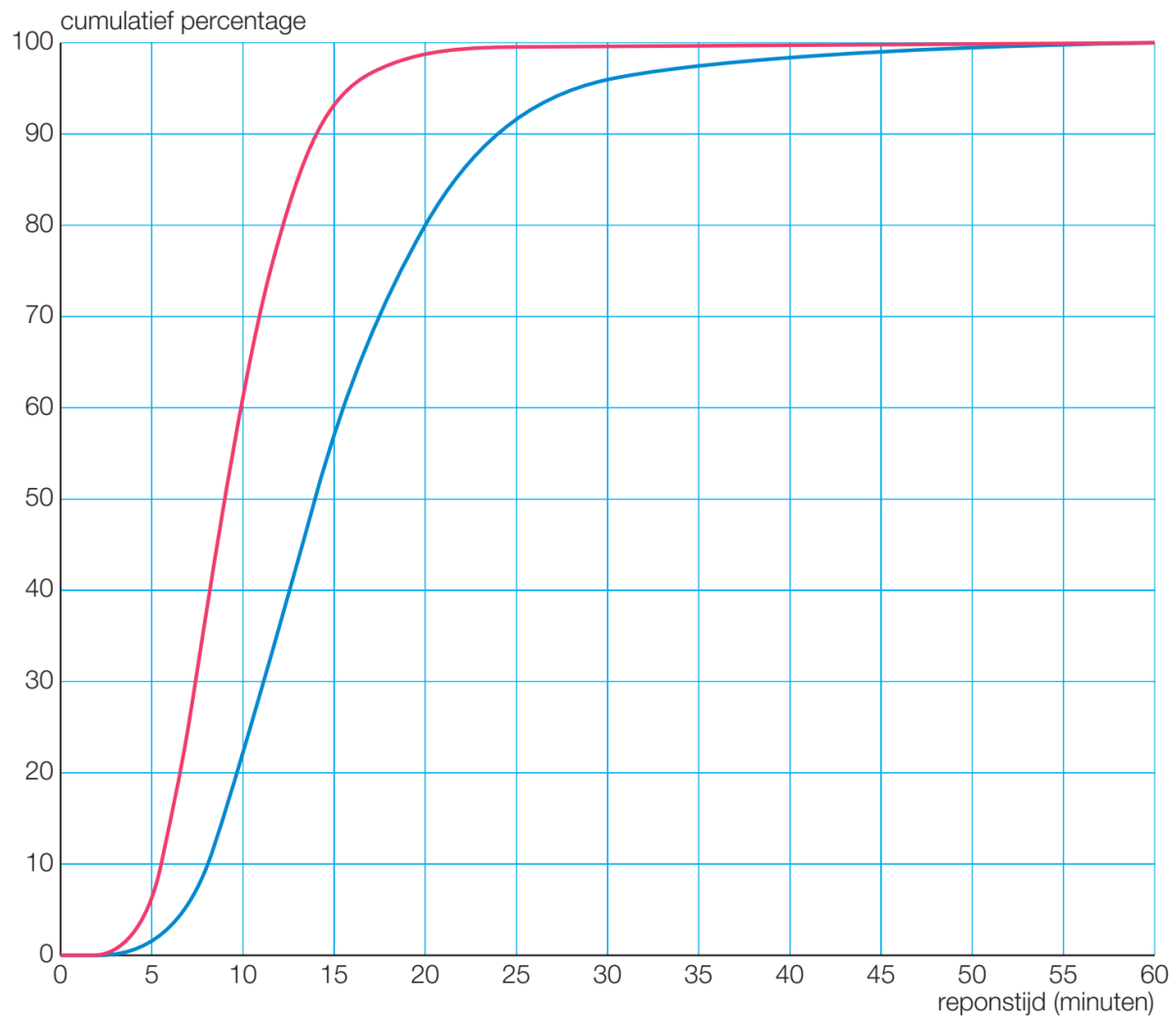
Op het werkblad staan deze vier variabelen in een tabel.

- a Geef voor elk van de vier variabelen in de tabel op het werkblad aan welke soort variabele het betreft. Zet per variabele precies één kruisje.



In de rest van de opgave kijken we alleen naar A1-ritten en A2-ritten. Omdat er bij A1-ritten sprake is van direct levensgevaar voor de patiënt, zijn de responstijden van deze ritten over het algemeen korter dan de responstijden van de A2-ritten.

In de figuur staan de relatieve cumulatieve frequentiepolygonen van de responstijden van de A1-ritten en die van de responstijden van de A2-ritten in 2014. In de figuur is niet aangegeven welke polygoon bij de A1-ritten hoort en welke bij de A2-ritten.



- b** Bepaal met behulp van de figuur de interkwartielafstand van de responstijd van de A1-ritten. Geef hierbij aan welke polygoon je gebruikt hebt en licht je keuze toe.

Het lijkt erop dat een aanzienlijk deel van de jongeren in Nederland te weinig beweegt. Het onderzoek ‘Health Behaviour in School-aged Children’ dat sinds 1985 uitgevoerd wordt, bevat informatie over het beweeggedrag van jongeren in Nederland. Deze opgave gaat over het deel van dit onderzoek dat betrekking heeft op jongeren in het reguliere voortgezet onderwijs in de eerste vier leerjaren. Deze groep beschouwen we in deze opgave als de onderzoekspopulatie.

Aan leerlingen in een aslecte en representatieve steekproef zijn onder andere de volgende vragen over bewegen gesteld:

- Doe je minstens twee keer per week aan sport of speel je minstens twee keer per week buiten?
- Ben je lid van een sportclub?
- Op hoeveel dagen van de afgelopen zeven dagen was je ten minste één uur per dag bezig met lichaamsbeweging?

Van de leerlingen waren een aantal kenmerken bekend, zoals:

- geslacht (meisje, jongen)
- schoolniveau (vmbo, havo, vwo)
- gezinswelvaart (laag, midden, hoog)

De drie genoemde kenmerken zijn kwalitatieve variabelen.

- a** Geef van elk van de drie kenmerken aan of het wel of geen ordinale variabele is. Licht bij elk kenmerk je antwoord toe.

In onderstaande tabel is te zien hoeveel meisjes en hoeveel jongens aan het onderzoek deelnamen. Ook is te zien hoeveel procent van de meisjes en hoeveel procent van de jongens minstens twee keer per week sport of buiten speelt.

	meisjes	jongens	totaal
aantal deelnemers onderzoek	2736	2835	5571
percentage dat minstens twee keer per week sport of buiten speelt	76,4	84,2	80,4

Je kunt nu het 95%-betrouwbaarheidsinterval berekenen voor de populatieproportie van het aantal meisjes dat minstens twee keer per week sport of buiten speelt. Hetzelfde kun je doen voor de jongens.

- b** Onderzoek of deze twee 95%-betrouwbaarheidsintervallen elkaar overlappen.

In de tabel hieronder zie je het aantal leerlingen dat aan het onderzoek deelnam uitgesplitst naar schoolniveau, met daarbij het aantal leerlingen dat lid is van een sportclub.

	vmbo	havo	vwo
aantal deelnemers onderzoek	2745	1612	1214
aantal dat lid is van een sportclub	1779	1188	981

Op basis van bovenstaande tabel kun je een uitspraak doen over het verschil tussen het aantal havo-leerlingen en het aantal vwo-leerlingen in Nederland dat lid is van een sportclub.

- c** Onderzoek met behulp van het formuleblad of dat verschil groot, middelmatig of gering is.

In de tabel hieronder staat het aantal deelnemende leerlingen en het gemiddelde aantal dagen dat zij in de afgelopen zeven dagen minstens één uur per dag bezig waren met lichaamsbeweging, uitgesplitst naar gezinswelvaart.

	gezinswelvaart		
	laag	midden	hoog
aantal deelnemers onderzoek	680	3097	1794
gemiddeld aantal dagen met minstens één uur lichaamsbeweging	3,8	4,2	4,6

Op basis van deze tabel wil Yarah het gemiddelde aantal dagen (met minstens één uur lichaamsbeweging) van de groepen laag en hoog met elkaar vergelijken. Hierbij wil Yarah gebruikmaken van de effectgrootte zoals die op het formuleblad is weergegeven.

Veronderstel dat de standaardafwijking S_1 voor de groep met lage gezinswelvaart even groot is als de standaardafwijking S_2 voor de groep met hoge gezinswelvaart, dus $S_1 = S_2 = S$.

- d** Bereken voor welke waarden van S het verschil middelmatig is.

In 2017 werd er gestaakt door leerkrachten in het basisonderwijs. Er was sprake van aanhoudende onvrede over onder meer het salaris en de werkdruk. In deze opgave wordt met ‘leerkrachten’ telkens ‘leerkrachten in het basisonderwijs’ bedoeld.

Leerkrachten verdienden in 2015 gemiddeld een bruto-uurloon van 26 euro. Daarmee verdienden zij 14 procent minder dan werknemers buiten het onderwijs met hetzelfde opleidingsniveau.

- a** Bereken het gemiddelde bruto-uurloon in 2015 van werknemers buiten het onderwijs met hetzelfde opleidingsniveau. Geef je antwoord in een geheel aantal euro's.

In een enquête in 2017 kregen leerkrachten onder meer de volgende drie vragen voorgelegd:

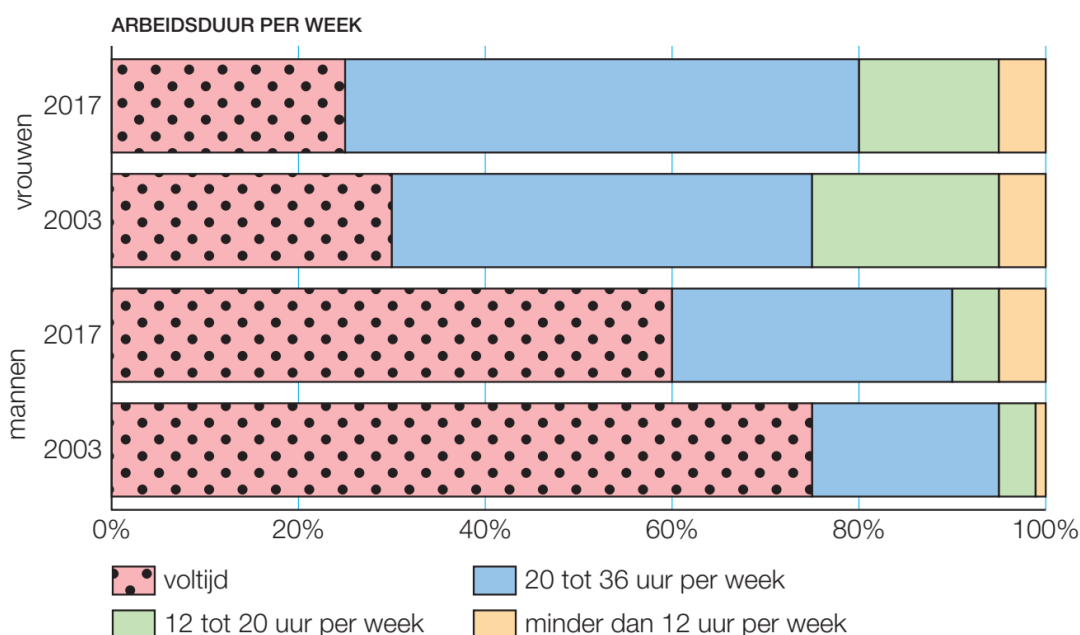
- 1 Moet u erg snel werken?
- 2 Moet u heel veel werk doen?
- 3 Moet u extra hard werken?

Zij konden steeds antwoorden met: ‘nooit’, ‘soms’, ‘vaak’ of ‘altijd’.

Bij deze vragen horen drie variabelen die elk kwalitatief en ordinaal zijn.

- b** Leg uit waarom de drie variabelen kwalitatief zijn. Leg ook uit waarom de drie variabelen ordinaal zijn.

In het basisonderwijs werken veel parttimers. In de rest van deze opgave kijken we naar de arbeidsduur per week van leerkrachten. Zowel in 2003 als in 2017 is hier onderzoek naar gedaan. We nemen aan dat er in 2003 en in 2017 een aselechte steekproef is getrokken uit alle leerkrachten die toen werkzaam waren. In de steekproeven is van elke leerkracht zijn of haar arbeidsduur in uur per week bekend. De steekproefresultaten zijn verwerkt in de figuur hieronder.



Uit de figuur kun je bijvoorbeeld afleiden dat in 2017 bij de mannen de steekproefproportie die voltijds werkt 0,6 is.

Veronderstel dat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de bijbehorende populatieproportie precies $[0,58; 0,62]$ is.

c Bereken met deze gegevens het totaal aantal mannen in de steekproef van 2017.

Op basis van de figuur zou je kunnen denken dat er in de steekproef van alle leerkrachten in 2017 een lager percentage voltijds werkt dan in de steekproef van alle leerkrachten in 2003.

d Geef een getallenvoorbeeld waaruit blijkt dat dit niet noodzakelijk waar hoeft te zijn. Licht je antwoord toe.

We kijken in het laatste onderdeel van deze opgave naar het verschil in arbeidsduur voor mannen en vrouwen die als leerkracht werken.

In een steekproef onder leerkrachten in 2021 was de gemiddelde arbeidsduur voor de mannen 31,2 uur per week met een standaardafwijking van 8,3. De vrouwen werkten gemiddeld 27,2 uur per week met een standaardafwijking van 7,6. Vaak wordt beweerd dat er een groot verschil bestaat in de arbeidsduur per week voor mannen en vrouwen die als leerkracht werken. Bovenstaande gegevens over gemiddelden en standaardafwijkingen in combinatie met de vuistregels op het formuleblad leiden echter tot een andere conclusie, namelijk dat het verschil middelmatig is.

e Laat met een berekening zien dat deze conclusie juist is.

In 2018 verschenen er berichten in de media over de (toilet)hygiëne op Nederlandse basisscholen en middelbare scholen. De berichten waren gebaseerd op drie onderzoeken onder respectievelijk leraren die werkzaam waren binnen het basis- of voortgezet onderwijs, leerlingen tussen de 5 en 16 jaar oud en ouders met een kind tussen de 5 en 16 jaar oud. In totaal namen 630 leraren, 452 leerlingen en 626 ouders deel aan het onderzoek. We nemen aan dat elk van de drie steekproeven aselekt en representatief was.

In de steekproef van de leerlingen gaven 194 van de 452 leerlingen aan regelmatig moeite te hebben met opletten tijdens de les, omdat zij op sommige momenten naar het toilet moeten, maar niet gaan.

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage Nederlandse leerlingen tussen de 5 en 16 jaar oud, waarvoor het bovenstaande geldt. Geef de percentages in je antwoord in gehelen.

Van de 452 leerlingen in de steekproef zaten er 302 op de basisschool en 150 op de middelbare school. Precies de helft van de basisschoolleerlingen gaat op school niet naar het toilet. Bij de middelbare scholieren is dit 60%. In deze steekproef is er dus een verschil tussen basisschoolleerlingen en middelbare scholieren in het deel dat op school niet naar het toilet gaat.

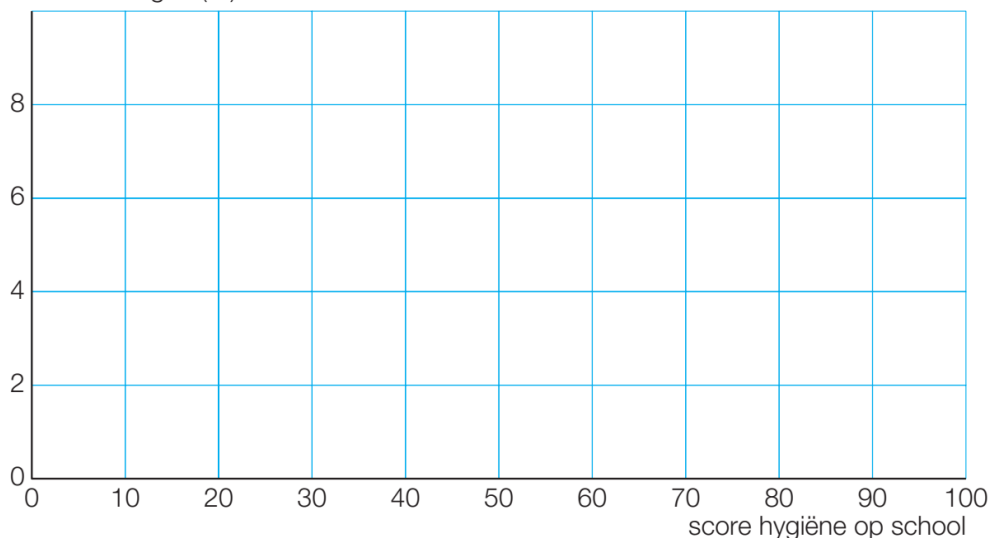
- b** Onderzoek met behulp van het formuleblad of dat verschil groot, middelmatig of gering is.

Veel ouders vermoeden dat een betere hygiëne op een school samengaat met een lager percentage ziekmeldingen onder de leerlingen.

Neem aan dat de hygiëne van een school uitgedrukt wordt in een score tussen 0 en 100 waarbij geldt: hoe hoger de score, hoe beter de hygiëne van de betreffende school.

- c** Geef in de figuur hieronder een schets van een mogelijke puntenwolk die het vermoeden ondersteunt dat een betere hygiëne samengaat met een lager percentage ziekmeldingen.

EEN PUNTENWOLK DIE HET VERMOEDEN ONDERSTEUNT
ziekmeldingen (%)



De 630 leraren in de steekproef hebben gereageerd op de stelling of hun school over voldoende schoonmaakbudget beschikt om de hygiëne op school te kunnen waarborgen. Het resultaat staat in de tabel.

STELLING: HET SCHOONMAAKBUDGET IS VOLDOENDE

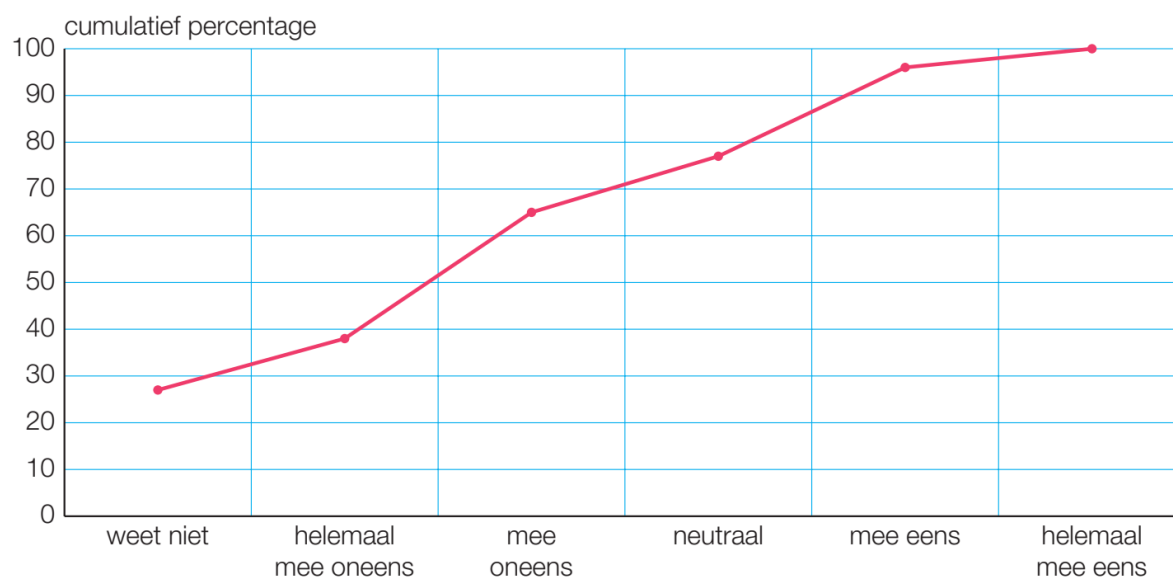
reactie	weet niet	helemaal mee oneens	mee oneens	neutraal	mee eens	helemaal mee eens
percentage	27	11	27	12	19	4

In de media werd naar aanleiding van dit onderzoek geconcludeerd dat ruim een derde van de leraren aangeeft dat het schoonmaakbudget te laag is om de hygiëne te kunnen waarborgen.

Kennelijk had men hiervoor de twee reactiemogelijkheden ‘helemaal mee oneens’ (11%) en ‘mee oneens’ (27%) samengevoegd.

- d** Had men op basis van deze tabel ook een uitspraak over het gemiddelde van de lerarenreacties kunnen doen? Licht je antwoord toe.

Een journalist maakte bij de gegevens uit de tabel een grafiek van het cumulatieve percentage. Zie de figuur.



De manier waarop de reactiemogelijkheid ‘weet niet’ is opgenomen in de grafiek kan misleidend worden genoemd.

- e** Leg uit waarom deze manier misleidend kan worden genoemd en geef aan wat een betere manier is om met deze reactiemogelijkheid om te gaan bij het maken van zo’n grafiek.

Sinds het begin van deze eeuw daalt het totaal aantal geregistreerde misdrijven in Nederland, met name door een daling van het aantal geregistreerde vermogensmisdrijven.

Een voorbeeld van een vermogensmisdrijf is een woninginbraak. Iemand vermoedt dat er in het begin van deze eeuw bij een kleiner percentage van de woningen werd ingebroken dan aan het eind van de vorige eeuw.

Om hier zicht op te krijgen is in 2004 in een aselechte steekproef uit de woningen gekeken bij welk percentage er in dat jaar was ingebroken.

De resultaten kunnen worden vergeleken met die van een aselechte steekproef uit de woningen in 1998. Zie de tabel hieronder.

	1998	2004
aantal woningen	3437	1456
percentage woningen waarbij is ingebroken	2,15	1,58

De tabel laat zien dat het steekproefpercentage woningen waarbij is ingebroken in 2004 lager is dan in 1998. We gaan deze gegevens op twee manieren met elkaar vergelijken.

- a** Onderzoek of het steekproefpercentage uit 2004 in het 95%-betrouwbaarheidsinterval ligt van het populatiepercentage in 1998.

In 2004 is het steekproefpercentage woningen waarbij is ingebroken lager dan in 1998.

- b** Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in steekproefpercentage woningen waarbij is ingebroken in de twee steekproeven groot, middelmatig of gering is.

12.6 Onderzoeksopgaven

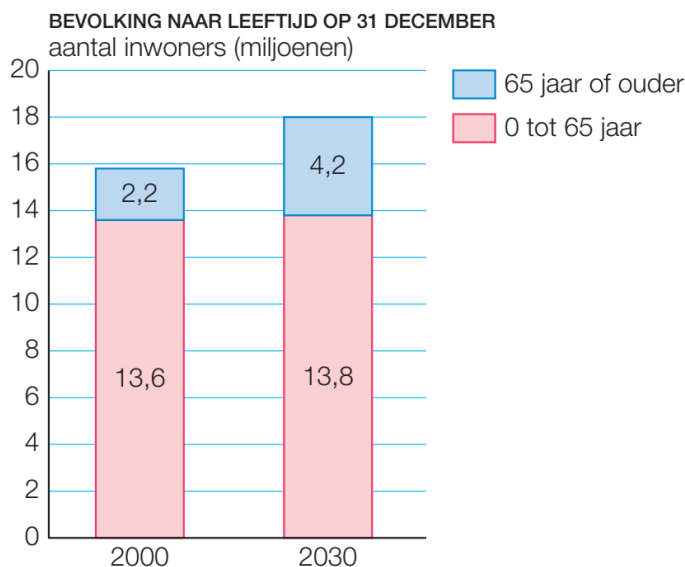
De laatste opgave van het centraal examen is een zogenaamde onderzoeksopgave. In een onderzoeksopgave wordt allerlei informatie gegeven die je moet combineren. Er wordt slechts één vraag gesteld die meestal begint met ‘Onderzoek ...’

Het is de bedoeling dat je zelf de nodige tussenstappen bedenkt.

Ook als je het eindantwoord niet kunt vinden, is het toch verstandig zoveel mogelijk tussenstappen op te schrijven. Ook dat kan nog veel punten opleveren.

2024-II

- 71** Het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek) publiceerde eind 2018 een artikel met prognoses over het aantal inwoners in Nederland waaruit bleek dat dit aantal minstens tot 2030 zal blijven toenemen. Ook beweerde het CBS in dit artikel dat in 2030 bijna een kwart van de bevolking 65-plus (65 jaar of ouder) is. Zie de figuur. De gegevens gelden telkens op 31 december van het jaar.



Op basis van gegevens van de jaren 2000 tot en met 2018 en prognoses van 2019 tot en met 2030 verwacht men dat de totale bevolking in de periode 2000-2030 nagenoeg lineair zal groeien, terwijl het aantal 65-plussers exponentieel zal groeien. In deze opgave gaan we ervan uit dat deze lineaire en exponentiële groei zich beide na 2030 voortzetten.

Onderzoek in welk jaar er op 31 december meer dan een kwart van de bevolking 65-plusser is.

- 72 Regenwater dat op een dak valt, komt in de dakgoot terecht en daarna in verticale regenpijpen. Zie de figuur hieronder.



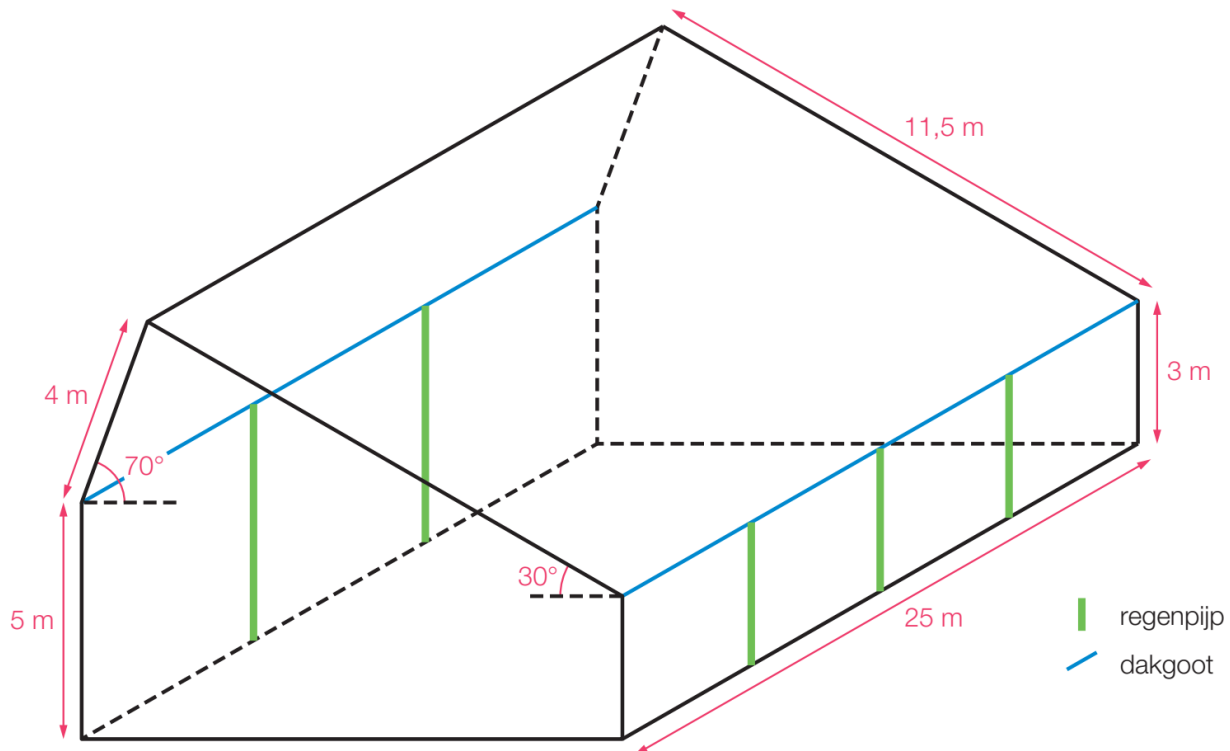
Ook bij hevige regenval moet het water goed afgevoerd kunnen worden. Je kunt daarvoor bijvoorbeeld meerdere regenpijpen plaatsen en/of kiezen voor dikkere regenpijpen.

Om te berekenen hoe groot de hoeveelheid regen is die de regenpijpen per dakdeel moeten kunnen afvoeren, gebruikt men de formule $H = 1,8 \cdot A \cdot f$. Hierin is H de hoeveelheid af te voeren regen in liters/minuut, A de oppervlakte van het dakdeel in m^2 en f een factor die afhangt van de hellingshoek van het dakdeel.

In de tabel staat de factor f voor verschillende hellingshoeken.

hellingshoek van het dakvlak	$0^\circ\text{--}45^\circ$	$46^\circ\text{--}60^\circ$	$61^\circ\text{--}85^\circ$	$86^\circ\text{--}90^\circ$
factor f	1	0,8	0,6	0,3

Boer Pietersma heeft een schuur gebouwd met afmetingen zoals aangegeven in de figuur op de volgende bladzijde. De twee dakdelen, met hellingshoeken van 70° en 30° , zijn rechthoekig van vorm. De groene lijnstukken stellen regenpijpen voor, maar het ligt nog niet vast hoeveel regenpijpen er moeten komen. De blauwe lijnstukken zijn de dakgoten.



Pietersma moet kiezen voor ofwel allemaal dunne regenpijpen ofwel allemaal dikke regenpijpen. De dunne pijpen hebben een diameter van 70 mm, de dikke hebben een diameter van 100 mm. Een dunne pijp kost €9 per meter, een dikke kost €13 per meter.

Je kunt uitrekenen hoeveel water één regenpijp per minuut kan afvoeren. Deze hoeveelheid water heet de *capaciteit* van de regenpijp. De dikke pijpen hebben uiteraard een grotere capaciteit dan de dunne. Je kunt de capaciteit van een pijp berekenen met de formule $C = 0,02 \cdot D^2$. Hierin is D de diameter (in mm) en C de capaciteit (in liters/minuut).

Er is nog een voorschrift waarmee rekening gehouden moet worden. Om het regenwater via de dakgoot snel genoeg af te kunnen voeren, zijn er eisen aan het minimale aantal regenpijpen:

- Bij gebruik van dunne pijpen geldt: voor elke 10 m dakgoot moet minimaal één pijp worden aangesloten.
- Bij gebruik van dikke pijpen geldt: voor elke 20 m dakgoot moet minimaal één pijp worden aangesloten.

Pietersma houdt zich aan de genoemde voorschriften en wil regenpijpen kiezen die zorgen voor de laagste kosten: ofwel allemaal dunne ofwel allemaal dikke.

Onderzoek welk type pijp Pietersma dan moet kiezen: het dunne type of het dikke type.

In het rapport Transport en Mobiliteit 2016 van het Centraal Bureau voor de Statistiek staat informatie over de fijnstofemissie (dit is de hoeveelheid fijnstof die vrijkomt) door het vervoer over de weg, uitgesplitst naar personenvervoer en goederenvervoer. Deze hoeveelheid wordt bepaald door het aantal gereden kilometers te vermenigvuldigen met de fijnstofemissie per gereden kilometer.

In 1990 was het aantal gereden kilometers door het personenvervoer 103 200 miljoen en door het goederenvervoer 16 800 miljoen. In 2014 is het aantal gereden kilometers voor het personenvervoer twee keer zo groot geworden als in 1990 en het aantal gereden kilometers voor het goederenvervoer drie keer zo groot. Ondanks de toename van het aantal gereden kilometers is de totale fijnstofemissie door het wegvervoer in 2014 aanzienlijk minder dan in 1990. Dit komt vooral door het gebruik van betere motoren.

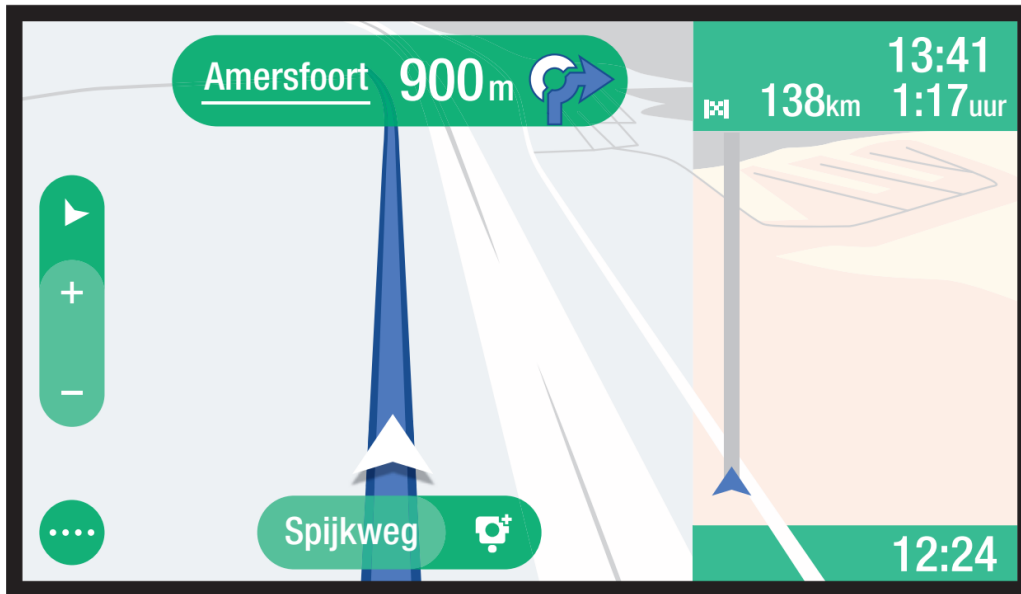
Er moet worden onderzocht met hoeveel procent de totale emissie van fijnstof door het wegvervoer in de periode 1990 tot en met 2014 is gedaald. Daarvoor moeten bovenstaande gegevens over het aantal gereden kilometers en onderstaande aannames over de fijnstofemissie per gereden kilometer worden gebruikt.

In 1990 kwam er gemiddeld genomen bij het personenvervoer per gereden kilometer 0,08 gram fijnstof vrij. Voor het goederenvervoer was dit toen 0,58 gram. In de periode 1990 tot en met 2014 daalde de fijnstofemissie bij het personenvervoer elk jaar met 0,003 gram per gereden kilometer. In dezelfde periode daalde de fijnstofemissie per gereden kilometer bij het goederenvervoer met 9% per jaar.

Onderzoek met behulp van bovenstaande gegevens en aannames met welk percentage de totale emissie van fijnstof door het wegvervoer in 2014 is gedaald ten opzichte van 1990. Geef je antwoord in hele procenten.

[▶ WERKBLAD] Iedere twee weken rijdt Aimee op zaterdag met haar auto van Harderwijk naar Roosendaal om haar ouders te bezoeken. Ze kent de 144 km lange route van Harderwijk naar Roosendaal goed, maar toch gebruikt ze een navigatiesysteem voor onder andere de file-informatie en de verwachte aankomsttijd.

Je ziet een foto van haar navigatiesysteem. De foto is genomen om 12:24 uur. Op dat moment is de verwachte aankomsttijd 13:41 uur en de te verwachten reistijd 1:17 uur. Ze moet nog 138 km rijden.



Op het werkblad zie je van vijf ritten van Harderwijk naar Roosendaal de gegevens van haar navigatiesysteem op vijf verschillende tijdstippen met hierin het tijdstip van vertrek (V), het tijdstip van aankomst (A) en drie tussenliggende tijdstippen.

Elke keer als Aimee bij haar ouders aankomt, vertelt ze kort over haar autorit naar Roosendaal. Hieronder zie je vijf zinnen uit de vijf verhalen die ze heeft verteld bij aankomst.

- A: Ik heb even stilgestaan.
- B: Ik heb een tijdje harder dan 120 km/uur gereden.
- C: Ik heb de tweede helft van de route in minder tijd afgelegd dan de eerste helft.
- D: Ik heb gemiddeld 90 km/uur gereden van Harderwijk naar Roosendaal.
- E: Ik heb omgereden.

Veronderstel dat bij elke rit precies één zin hoort en bij elke zin precies één rit. Dan kun je op basis van de gegevens elke zin met zekerheid koppelen aan een specifieke rit.

Onderzoek welke zin bij welke rit hoort.

2022-III

75

Voor ramen in woningen kunnen verschillende soorten glas gebruikt worden. Zo bestaan er ramen van enkel glas, van dubbelglas en van hoogrendementsglas. Enkel glas isoleert het minst goed. Dat wil zeggen: de warmte blijft minder goed binnenshuis. Dubbelglas isoleert beter. Hoogrendementsglas isoleert het best.

Om verschillende glassoorten te vergelijken gebruikt men de *warmtedoorgangscoefficiënt* U . Er geldt: hoe lager U , des te beter is de isolatie. Om te berekenen hoeveel warmte er door het glas verloren gaat, kan de volgende formule worden gebruikt: $W = U \cdot G \cdot \Delta T$.

Hierin is W het warmteverlies in watt, G de glasoppervlakte in m^2 en ΔT het verschil tussen de binnentemperatuur en de buitentemperatuur in $^\circ\text{C}$.

Er wordt tegenwoordig ook isolatiefolie verkocht. Dit doorzichtige folie wordt op het glas geplakt. De warmtedoorgangscoefficient U van het glas wordt daardoor lager. Zie de tabel.

soort beglazing	U zonder folie	U met folie
enkel glas	5,8	2,5
dubbelglas	2,9	1,6
hoogrendementsglas	1,1	0,97

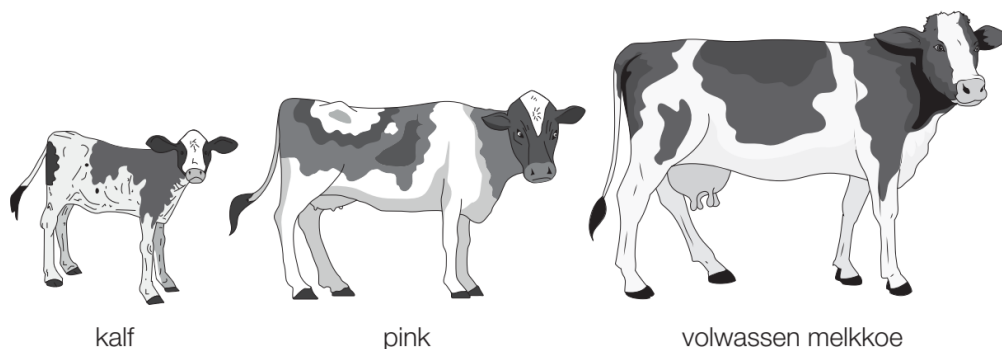
Peter is eigenaar van een woning met $10,65 \text{ m}^2$ enkel glas en $24,85 \text{ m}^2$ dubbelglas. Hij wil het warmteverlies verminderen.

Peter zou al het bestaande glas met folie kunnen beplakken. Hij vindt folie niet mooi en besluit daarom het warmteverlies in zijn woning te verminderen door een gedeelte van het glas in zijn woning te vervangen door hoogrendementsglas. Om te bepalen hoeveel enkel glas en hoeveel dubbelglas hij zal vervangen, kiest hij de volgende uitgangspunten:

- De gemiddelde binnentemperatuur is 19°C en de gemiddelde buitentemperatuur is 9°C .
- Het warmteverlies moet evenveel verminderd worden als wanneer al het bestaande glas met folie beplakt zou worden.
- Hij wil zo weinig mogelijk glasoppervlak vervangen.
- Hij laat alle kosten buiten beschouwing.

Bereken hoeveel enkel glas en hoeveel dubbelglas Peter moet vervangen door hoogrendementsglas. Geef je antwoord in m^2 en in twee decimalen.

- 76** Op melkveebedrijven wordt onderscheid gemaakt tussen jongvee en volwassen melkkoeien. Binnen het jongvee wordt nog onderscheid gemaakt tussen kalveren en pinken.



De grootte van een melkveebedrijf wordt uitgedrukt in het aantal grootvee-eenheden (GVE). In de tabel staat voor hoeveel GVE een dier van een bedrijf meetelt.

		leeftijd (jaar)	aantal GVE
jongvee	kalf	0 tot 1	0,25
	pink	1 tot 2	0,5
volwassen melkkoe		2 of ouder	1

In de periode 2005-2016 zijn melkveebedrijven gemiddeld genomen steeds groter geworden. Vanaf 2005 is het gemiddeld aantal volwassen melkkoeien per melkveebedrijf in Nederland jaarlijks met 3,75% gestegen tot 99 in 2016. Tegelijkertijd steeg het gemiddeld aantal GVE per bedrijf van 84 in 2005 tot 126 in 2016.

Neem aan dat er op elk bedrijf altijd evenveel kalveren als pinken waren. Onderzoek hoeveel stuks jongvee er in de periode 2005-2016 gemiddeld per bedrijf bij zijn gekomen.

Gemengde opgaven

1 Schrijf de formule $P = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3\frac{1}{3}a} \cdot \sqrt{6b}$ in de vorm $P = c\sqrt{ab}$.

2 De winst van een bedrijf was 31,25 miljoen euro in 2018. In 2019 was de winst 8,5% meer dan in 2018 en in 2020 was de winst 15,3% minder dan in 2019.

Hoeveel was de winst in 2020?

3 Gegeven zijn de formules $G = 10m^2n - 2m$ en $m = 2n - 1$.
Schrijf de formule van G in de vorm $G = an^3 + bn^2 + cn + d$.

4 Voorafgaand aan een onderzoek gaat men uit van een steekproefproportie van 0,28. Men wil een steekproef nemen die zo groot is dat de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval hoogstens 0,06 is.

Bereken de minimale steekproefomvang.

5 Aan 242 volwassenen is de stelling ‘Roken in de auto moet worden verboden’ voorgelegd. De resultaten zie je in de tabel hiernaast. Je ziet dat er verschil is tussen de mening van de mannen en de vrouwen. Bepaal met behulp van het formuleblad of het verschil in mening groot, middelmatig of gering is.

	stelling		
	eens	oneens	
mannen	83	41	124
vrouwen	106	12	118
	189	53	242

6 In een bos zijn er drie keer zoveel eiken als beuken. De verhouding aantal eiken : aantal sparren is 2 : 5. Wat is de verhouding aantal beuken : aantal sparren?

7 Maak b vrij bij $6a - 5b = 18$.

8 Tussen het verbruik van drinkwater en het bedrag B dat je jaarlijks betaalt, bestaat een lineair verband. Bij een verbruik van 120 m^3 per jaar betaal je € 172,98 per jaar en bij een verbruik van 148 m^3 betaal je € 202,66.

Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat je betaalt bij een verbruik van $V \text{ m}^3$ per jaar.

9 Gegeven zijn de formules $N = 0,06t^{1,4}$ en $t = 200p^{0,8}$.
Schrijf de formule van N in de vorm $N = ap^b$. Rond a af op gehele.

10 Ronald loopt 9,8 km in 49 minuten en 40 seconden. Bereken zijn gemiddelde snelheid in km/uur. Rond af op twee decimalen.

- 11** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 7,3% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.

- 12** Gegeven is $2,4y = 3 - 0,6\sqrt{x-2}$.
Druk x uit in y .

- 13** Gegeven is de volgende tabel.

jaar	1995	2003	2014	2020
aantal	520	840	1165	1390

- a** Bereken het aantal in 2010 met lineair interpoleren. Rond af op gehelen.
b Bereken het aantal in 2025 met lineair extrapoleren. Rond af op gehelen.
c Bereken met lineair interpoleren in welk jaar het aantal 760 was.

- 14** Werk bij $(2a-1)^2 - 4(3a-1)$ de haakjes weg en herleid.

- 15** Geef van de volgende variabelen aan of ze nominaal of ordinaal zijn.
a het merk van een T-shirt
b de maat van een T-shirt
c de kleur van een T-shirt

- 16** Een hoeveelheid neemt toe van 115 tot 145.
Hoeveel procent is de toename?

- 17** De lijn k gaat door het punt $A(0, 9)$ en $rc_k = -\frac{1}{3}$.
Stel de formule op van k .

- 18** Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 3$ is $N = 326$ en op $t = 11$ is $N = 77$. Hierbij is t in jaren.
Stel de formule op van N . Rond de beginhoeveelheid af op gehelen.

- 19** Van 150 jongens van 1 jaar is de lengte bepaald. Zie de frequentietabel hiernaast.
a Geef de modale klasse.
b In welke klasse ligt de mediaan?
c Welke standaardafwijking hoort bij de tabel? Kies uit 1,0 cm, 3,0 cm, 5,0 cm en 7,0 cm.
d Bereken de relatieve cumulatieve frequentie van de klasse $[74, 76)$.

LENGTE JONGENS IN CM

lengte	frequentie
$[70, 72)$	5
$[72, 74)$	13
$[74, 76)$	16
$[76, 78)$	40
$[78, 80)$	38
$[80, 82)$	25
$[82, 84)$	13

- 20** Een hoeveelheid wordt in drie jaar verdubbeld.
Bereken het groeipercentage per jaar in het geval er sprake is van exponentiële groei.

21 Schrijf bij de volgende formules het rechterlid als één wortel.

a $A = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{2\frac{1}{2}q}$

b $B = \frac{\sqrt{30xy}}{\sqrt{2y}}$

22 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort.

a $N = 50 + \frac{100}{t^2 + 1}$ met $t > 0$

b $y = 300 - \frac{57}{x + 10}$ met $x > 0$

23 Gegeven is de formule $N = \frac{562}{25 \cdot 1,3^t}$.

Schrijf de formule in de vorm $N = b \cdot g^t$ waarbij je g afrondt op drie decimalen en noteer welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek van N hoort.

24 Teken een boxplot die bij een rechts-scheve verdeling hoort.

25 Voor een concert zijn de kaartjes 15 euro en 20 euro. Er zijn in totaal 705 kaartjes verkocht. De opbrengst kwam daarmee op 11 500 euro. Bereken hoeveel kaartjes van 20 euro zijn verkocht.

26 Gegeven zijn de formules $R = 2p - 3q + 50$ en $q = 10 - 4p$. Schrijf de formule van R in de vorm $R = aq + b$.

27 Op een school is de populatieproportie van het aantal leerlingen dat verder dan 3 km van school woont gelijk aan 0,36. Het blijkt namelijk dat 450 leerlingen verder dan 3 km van school wonen. Bij een steekproef van 25 leerlingen uit de havo-5 klassen blijken er 12 leerlingen verder dan 3 km van school te wonen. Bereken het totale aantal leerlingen op deze school en de steekproefproportie van het aantal leerlingen in de havo-5 klassen dat verder dan 3 km van school woont.

28 Bij een steekproef van 80 leaseauto's van één jaar oud is het gemiddeld aantal gereden kilometer 38 500 en de standaardafwijking 14 300 km. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddeld aantal gereden km bij één jaar oude leaseauto's. Rond af op honderden km.

29 Gegeven zijn de formules $F = \frac{50m^{0,54}}{17n^{1,4}}$ en $n = 12m^{0,6}$.

Schrijf de formule van F in de vorm $F = am^b$. Rond a af op twee decimalen.

30 Beredeneer aan de hand van de formules of de grafieken van de volgende formules voor $t \geq 0$ stijgend of dalend zijn.

a $N = \frac{1500}{1 + 20 \cdot 0,91^t}$

b $N = 10 + 20(1 - 0,98^t)$

31 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen $k: y = 3(0,5x - 2)$ en $l: y = 0,6x + 12$.

32 Gegeven zijn de formules $N = 0,15b - 0,05(2a - 3)$ en $b = 0,8a + 4$. Schrijf de formule van N in de vorm $N = pa + q$.

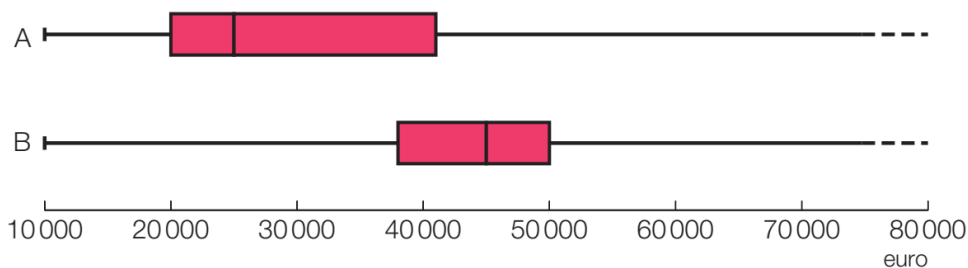
33 Schrijf $(a^{-2})^4 \cdot a^5$ als macht van a .

34 Teken het gebied waarvoor geldt $1 \leq x \leq 5$ en $2 \leq 2x - y \leq 10$.

35 Een hoeveelheid neemt af van 820 tot 750.
Hoeveel procent is de afname?

36 Een hoeveelheid van 649 is 5,64% van het totaal.
Hoeveel is het totaal?

37 In de boxplots zie je de inkomensverdeling van de huishoudens in plaats A en plaats B.



Vergelijk de boxplots en noteer of het verschil tussen de inkomens groot, middelmatig of gering is.

38 Herleid de formule.

a $P = (4a - 1) \cdot \frac{2b}{4a - 1}$

b $A = 5p \cdot \frac{3}{q} \cdot \frac{1 - q}{q}$

39 Geef aan of de variabele continu of discreet is.

a de hoogte van de kerktorens in Nederland

b het aantal treden in een kerktoeren

c de toonhoogte van de kerkklokken in Nederland

40 Toon aan dat de formule $F = \frac{2a^2 - 3a + 4}{2a} + 4a + 1\frac{1}{2}$ te herleiden is tot $F = 5a + \frac{2}{a}$.

41 Bij twee kledingzaken in een winkelcentrum is onderzocht hoeveel het aankoopbedrag per klant is. Bij winkel A is het gemiddeld aankoopbedrag 112 euro. De standaardafwijking is 38 euro. Bij winkel B is het gemiddelde 85 euro en de standaardafwijking 24 euro. Onderzoek of het verschil in aankoopbedrag per klant tussen de winkels A en B groot, middelmatig of gering kan worden genoemd.

42 Een hoeveelheid groeit lineair. Op $t = 8$ is $N = 52$ en op $t = 12$ is $N = 63$. Stel de formule op van N .

43 Los de vergelijking $6x - 33 = -4(x - 12) + 15$ op.

44 Schrijf de formule $M = 200\left(4 + \frac{74}{25 \cdot 0,95^t}\right)$ in de vorm $M = a + b \cdot g^t$. Rond g af op twee decimalen.

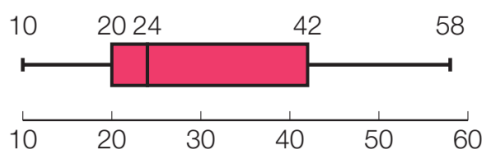
45 Los de vergelijking $1\frac{1}{4}(6t - 1) = 2\frac{1}{2}t + 6$ op.

46 Gegeven is dat y evenredig is met x . Voor $x = 12$ is $y = 69$. Stel de formule van y op en bereken y voor $x = 42$.

47 Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. Op $t = 4$ is $N = 101$ en op $t = 12$ is $N = 161$. Hierbij is t in dagen. Stel de formule op van N . Rond de beginhoeveelheid af op gehelen.

48 De formule $A = 5x^{-1,15} \cdot \frac{3x^{4,25}}{x^2}$ is te herleiden tot de vorm $A = ax^b$. Bereken a en b .

49 In de boxplot hieronder zijn 1060 waarnemingsgetallen verwerkt.



- a** Bereken hoeveel keer zo groot de spreidingsbreedte is als de interkwartielafstand. Rond af op één decimaal.
- b** Hoeveel waarnemingsgetallen liggen tussen 20 en 24?
- c** Volgens Leonie ligt het gemiddelde van de waarnemingsgetallen tussen 24 en 36. Onderzoek of dat klopt.
- d** Geef een schatting van de standaardafwijking van de waarnemingsgetallen. Kies uit 4, 14, 24 en 34.

50 Maak n vrij bij de formule $A = 8 - \frac{12}{n}$.

51 Stel de formule op van de lijn l door de punten $A(8, 70)$ en $B(20, 55)$.

52 België heeft een oppervlakte van $30\,689 \text{ km}^2$ en 11,46 miljoen inwoners. Hoeveel m^2 is de oppervlakte per inwoner? Rond af op gehele.

53 Gegeven zijn de formules $F = 5p^2 - 2q^2 + 10$ en $q = p - 3$. Schrijf de formule van F in de vorm $F = ap^2 + bp + c$.

54 Beredeneer bij de volgende formules wat de grenswaarde is.

a $y = 100 + \frac{50}{x^2 + 1}$

b $N = 50 - \frac{30}{t + 2}$

55 Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde bij

a $\bar{X} = 1200$, $S = 85$ en $n = 625$

b $\bar{X} = 25,62$ en $\frac{S}{\sqrt{n}} = 1,45$.

56 Een hoeveelheid neemt met 18,4% toe tot 3015. Hoeveel was de oorspronkelijke hoeveelheid?

57 Beredeneer bij de volgende formules wat het verzadigingsniveau is.

a $N = \frac{600}{3 + 14 \cdot 0,96^t}$

b $N = 450(3 - 0,81^t)$

58 Neem $y = 2x - 1$ in de formule $K = \frac{x + y}{4x - y}$ en herleid.

59 Voor een onderzoek naar geluidshinder zijn 800 mensen uit de stad en 640 mensen van het platteland ondervraagd. De hinder kon worden aangegeven op een schaal van 1 tot en met 5, waarbij 1 geen hinder was en 5 veel hinder. De resultaten zie je in de tabel. Je ziet dat 16 mensen uit de stad aangaven geen geluidshinder te ondervinden. Onderzoek of de grootte van het verschil in het ervaren van geluidshinder tussen de mensen in de stad en op het platteland groot, middelmatig of gering is.

ERVARING GELUIDSHINDER

	stad	platteland
1	16	112
2	56	128
3	112	320
4	120	48
5	496	32

60 Schrijf de formule $N = 3\sqrt{2a} \cdot \sqrt{5b}$ in de vorm $N = c\sqrt{ab}$. Rond c af op twee decimalen.

61 Een bedrag wordt verdeeld onder A, B en C in de verhouding $A : B : C = 2 : 3 : 7$. Zo krijgt C 25 euro meer dan B. Welk bedrag werd verdeeld?

62 Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie bij
a $\hat{p} = 0,83$ en $n = 280$

b $\hat{p} = \frac{83}{112}$ en $n = 52$.

63 Een hoeveelheid neemt per jaar met 5,8% af. Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.

64 Maak y vrij bij $\frac{2x}{3y} = \frac{5}{7}$.

65 Gegeven is de volgende tabel. Hierin is t de tijd in dagen.

t	2	6	9	14
N	20,60	14,80	10,45	3,20

Er is sprake van een lineair verband tussen N en t .

Toon aan dat de tabel hiermee in overeenstemming is en stel de formule op van N .

66 Een bedrijf verkoopt per jaar tussen 150 en 550 van zijn artikelen. De jaarlijkse winst wordt gegeven door de formule $W = -0,01q^2 + 7,5q - 650$. Hierin is q het aantal verkochte artikelen en W de winst in honderden euro's.

a Bereken hoeveel winst per artikel het bedrijf maakt als de jaarverkoop 400 stuks is.

b Bereken de maximale jaarlijkse winst.

67 **a** Voor een proportie is het 95%-betrouwbaarheidsinterval $0,65 \pm 0,06$. Schrijf dit betrouwbaarheidsinterval in de intervalnotatie en bereken de standaardafwijking σ .

b Voor een gemiddelde is het 95%-betrouwbaarheidsinterval $[1280, 1340]$.

Schrijf dit betrouwbaarheidsinterval in de $\pm$ -notatie en bereken de standaardafwijking S .

68 Op een dag met zware neerslag viel er in De Bilt 55 mm regen. Hoeveel liter regen viel er die dag in de gemeente De Bilt? Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op twee decimalen. Gebruik dat de oppervlakte van de gemeente De Bilt $67,13 \text{ km}^2$ is.

69 Een hoeveelheid neemt per 8 uur met 10,9% af.

a Hoeveel procent is de afname per 50 uur?

b Hoeveel procent is de afname per 20 minuten?

70 Gegeven zijn de formules $B = \frac{6x^2 - y^2}{y^2 + 1}$ en $y = 2x - 1$.

Druk B uit in x en werk de haakjes weg.

71 Op een decemberochtend controleert de politie bij 140 fietsers of de lichten in orde zijn. Het blijkt dat bij 78 de lichten niet in orde zijn. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie fietsers waarvan de lichten niet in orde zijn.

72 Herleid de formule $N = 18 \cdot \frac{2x - 3}{6} + 3x - 5$ tot de vorm $N = ax + b$.

73 Door de uitbraak van een virus komen er veel mensen op de intensive care (ic) terecht. Het aantal patiënten N op de ic dat besmet is met het virus, kan worden beschreven met de formule $N = \frac{90\,000t}{t^2 + 900}$. Hierin is t de tijd in dagen vanaf het moment dat de eerste patiënt op de ic kwam te liggen met t tussen 0 en 100.

- a** Na hoeveel dagen werd het maximale aantal besmette patiënten op de ic bereikt? Om hoeveel patiënten ging het?
- b** Gedurende hoeveel dagen lagen er meer dan 1400 besmette patiënten op de ic?

74 Het aantal meloenen dat een marktkoopman op een dag verkoopt is omgekeerd evenredig met de prijs. Bij een prijs van 80 cent per stuk verkoopt hij 135 meloenen op een dag. Hoeveel meloenen verkoopt hij op een dag bij een prijs van € 1,10 per stuk?

75 Een hoeveelheid halveert elke vijf jaar en vier maanden. Bereken hoeveel procent de afname per jaar is.

76 Schrijf het rechterlid van de formule $K = \frac{24x}{x - 4} \cdot (x + 4) \cdot \frac{1}{8}$ als één breuk en werk de haakjes weg.

77 De lijn l gaat door het punt $A(6, 9)$ en $rc_l = -\frac{1}{3}$. Stel de formule op van l .

78 De staatsschuld van de VS neemt per seconde met 45 486 dollar toe. Hoeveel dollar is dat per dag? Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.

79 Schrijf de formule $N = \frac{200}{133 \cdot 0,6^t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b en g af op drie decimalen.

80 Stel de formule op van de lijn k door de punten $A(2, 18)$ en $B(10, 30)$.

81 Een hoeveelheid neemt per dag met 8,6% toe.

a Hoeveel procent is de toename per week?

b Hoeveel procent is de toename per 10 uur?

82 De formules $T = 6xy - 20x + 15y$ en $2x - 3y = 10$ zijn te combineren tot de vorm $T = ax^2 + bx + c$.

Bereken a , b en c .

83 Sandra loopt een afstand van 6,5 km met een gemiddelde snelheid van 14,6 km/uur.

Bereken hoeveel minuten en seconden ze hierover doet.

84 In een snelkoker wordt water aan de kook gebracht. Daarbij wordt op verschillende tijdstippen de temperatuur gemeten. Zie de tabel, waarin T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ is na t seconden.

t	0	30	60	80	100	110
T	5	20	53	77	95	100

a Licht toe dat bij de tabel geen lineair verband hoort.

b Laat zien dat bij de tabel geen exponentieel verband hoort.

De onderzoeker gaat uit van het model $T = -0,00011t^3 + 0,02t^2 + 5$.

c Controleer of het model klopt voor $t = 30$ en $t = 100$.

d Gebruik de formule om te berekenen na hoeveel seconden de temperatuur 85°C is.

85 Tussen t en A bestaat een lineair verband. Voor $t = 12$ is $A = 78$ en voor $t = 28$ is $A = 22$.

Stel de formule op van A .

86 Gegeven zijn de formules $N = 2k - 3l + 50$ en $k + 2l = 40$.

Schrijf de formule van N in de vorm $N = ak + b$.

87 Van 6000 kiwi's is het gewicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 128 gram en een standaardafwijking van 6 gram.

Hoeveel van deze kiwi's hebben een gewicht tussen 122 en 140 gram?

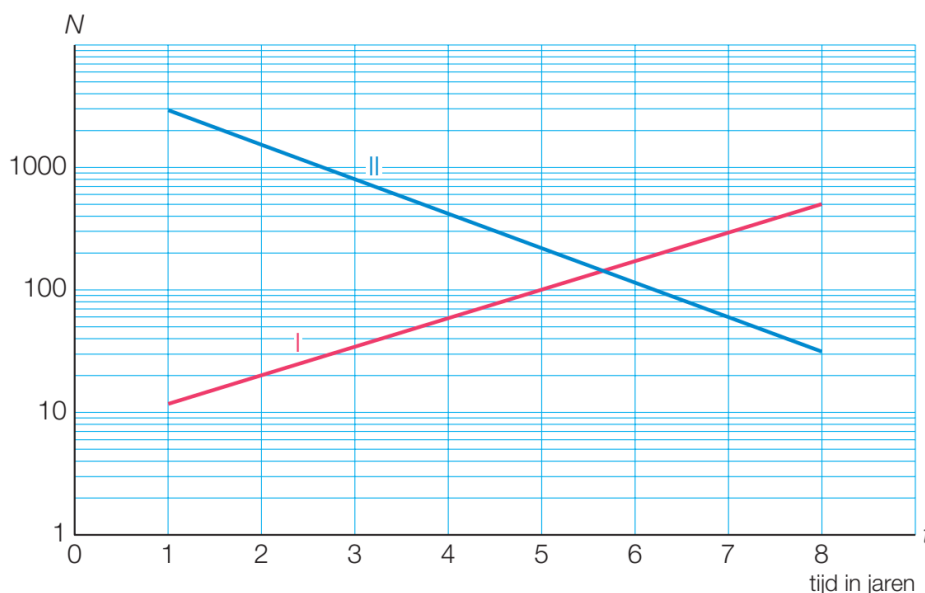
88 Herleid.

a $5a^3 \cdot 4a^2$

b $(-4a^3)^2 - 8a^5 - 10a^6$

c $\frac{16x^2y^3}{24xy}$

- 89** Los de ongelijkheid $2,56x + 30 > 83 - 5(x - 10)$ op. Rond af op twee decimalen.
- 90** Schets een cumulatieve verdelingskromme bij een links-scheve verdeling.
- 91** Op een school met 1350 leerlingen zitten voor elke 11 leerlingen in de tweede en de derde klas, er 6 leerlingen in de eerste klas. Verder zitten voor elke 5 leerlingen in de bovenbouw, er 3 leerlingen in de eerste klas. Hoeveel leerlingen zitten er in de bovenbouw?
- 92** De politie controleert bij 140 scooters of ze zijn opgevoerd. Het blijkt dat voor de proportie scooters die zijn opgevoerd het 95%-betrouwbaarheidsinterval $[0,177; 0,323]$ is. Bereken het aantal scooters in de steekproef dat is opgevoerd.
- 93** Gegeven zijn de formules $A = \frac{4x}{x-1} \cdot (2y-3)$ en $y = 4x + 5$. Druk A uit in x en schrijf de formule als één breuk.
- 94** Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.
- a** $A = 5x - \frac{4}{3x}$ **c** $D = 5a^2 - \frac{3}{a^2}$
- b** $B = \frac{7}{2x} - \frac{5}{3x}$ **d** $E = \frac{2}{p} + 3p \cdot \frac{5q}{2p^2}$
- 95** Hieronder zie je de grafieken I en II op logaritmisch papier.



- a** Stel de formule op van grafiek I. Rond de beginhoeveelheid af op gehelen.
- b** Stel de formule op van grafiek II. Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.

96 In Nederland heeft 23% van de bevolking bloedgroep A. Er worden heel veel steekproeven genomen van 283 Nederlanders, waarbij steeds de proportie met bloedgroep A wordt berekend. Bereken bij welk percentage van deze steekproeven de steekproefproportie tussen 0,18 en 0,28 zal liggen.

97 De kosten per passagier op een cruiseschip bij een tocht van een week worden berekend met de formule $K = 450 + \frac{30\,000}{n}$. Hierin is K in euro's en n het aantal passagiers.

- a** Beredeneer hoe uit de formule van K volgt dat de grafiek dalend is. Licht toe dat dit met de praktijk overeenkomt.
- b** Beredeneer wat de grenswaarde is. Welke praktische betekenis heeft de grenswaarde?
- c** Op het cruiseschip kunnen maximaal 2500 passagiers. Welke prijs per passagier moet de cruisemaatschappij vragen om een winst van 100 000 euro te maken op deze tocht bij het maximale aantal passagiers?

98 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is. Neem $x > 0$.

a $y = 20 - \frac{5}{x}$

b $y = \frac{12 \cdot 0,6^x}{\sqrt{x}}$

c $y = 25 - \frac{80}{x^2 + 2}$

99 Gegeven is de volgende tabel. Hierin is t de tijd in dagen.

t	3	8	12	15
N	446	345	281	241

- a** Er is sprake van een exponentieel verband tussen N en t . Toon aan dat de tabel hiermee in overeenstemming is.
- b** Stel de formule op van N . Rond de beginhoeveelheid af op gehelen.

100 De diameter van een virusdeeltje is 50 keer zo klein als de diameter van een bacterie. De bacterie heeft een diameter van 2 micrometer. Wat is de diameter van het virusdeeltje? Geef het antwoord in meters en in de wetenschappelijke notatie. Gebruik dat $1 \text{ micrometer} = \frac{1}{1000} \text{ mm}$.

101 Maak a vrij bij de formule $P = \frac{3}{4a - 1}$ en schrijf de formule als één breuk.

102 Gegeven is de tabel hiernaast.

a Laat zien dat A niet omgekeerd evenredig is met B .

b Bij de tabel hoort een verband van de vorm $A = \frac{90}{c^B}$.

B	2	3	4	6
A	40	26,7	17,8	7,9

Bereken c en gebruik dit om A bij $B = 5$ te berekenen. Rond A af op één decimaal.

103 Op $t = 0$ zijn er 1560 dieren van soort A en 1450 van soort B. Soort A neemt jaarlijks met 25 dieren toe en het aantal dieren van soort B groeit jaarlijks met 7,8%.

Bereken hoeveel jaar na $t = 0$ er twee keer zoveel dieren van soort B zijn als van soort A. Rond af op één decimaal

104 Gegeven zijn de formules $K = \frac{350 - 2p}{6,13}$ en $L = \frac{5p + 380}{8,27}$.

Bereken voor welke waarden van p geldt dat $K < L$. Rond af op twee decimalen.

Formuleblad

Vuistregels voor de grootte van het verschil van twee groepen

$$2 \times 2\text{-kruistabel } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ met } \phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}},$$

waarin a, b, c en d absolute aantallen zijn

- als $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$, dan zeggen we “het verschil is groot”
- als $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”
- als $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dan zeggen we “het verschil is gering”

Maximaal verschil in cumulatief percentage ($\max V_{cp}$)
(met voor beide groepen een steekproefomvang $n > 100$)

- als $\max V_{cp} > 40$, dan zeggen we “het verschil is groot”
- als $20 < \max V_{cp} \leq 40$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”
- als $\max V_{cp} \leq 20$, dan zeggen we “het verschil is gering”

$$\text{Effectgrootte } E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}, \text{ met } \bar{X}_1 \text{ en } \bar{X}_2 \text{ de steekproefgemiddelden}$$

($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we “het verschil is groot”
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is gering”

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen¹⁾ elkaar niet overlappen, dan zeggen we “het verschil is groot”
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”
- in alle andere gevallen zeggen we “het verschil is gering”

noot 1 De ‘box’ is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \text{ met } p \text{ de steekproefproportie en } n \text{ de steekproefomvang.}$$

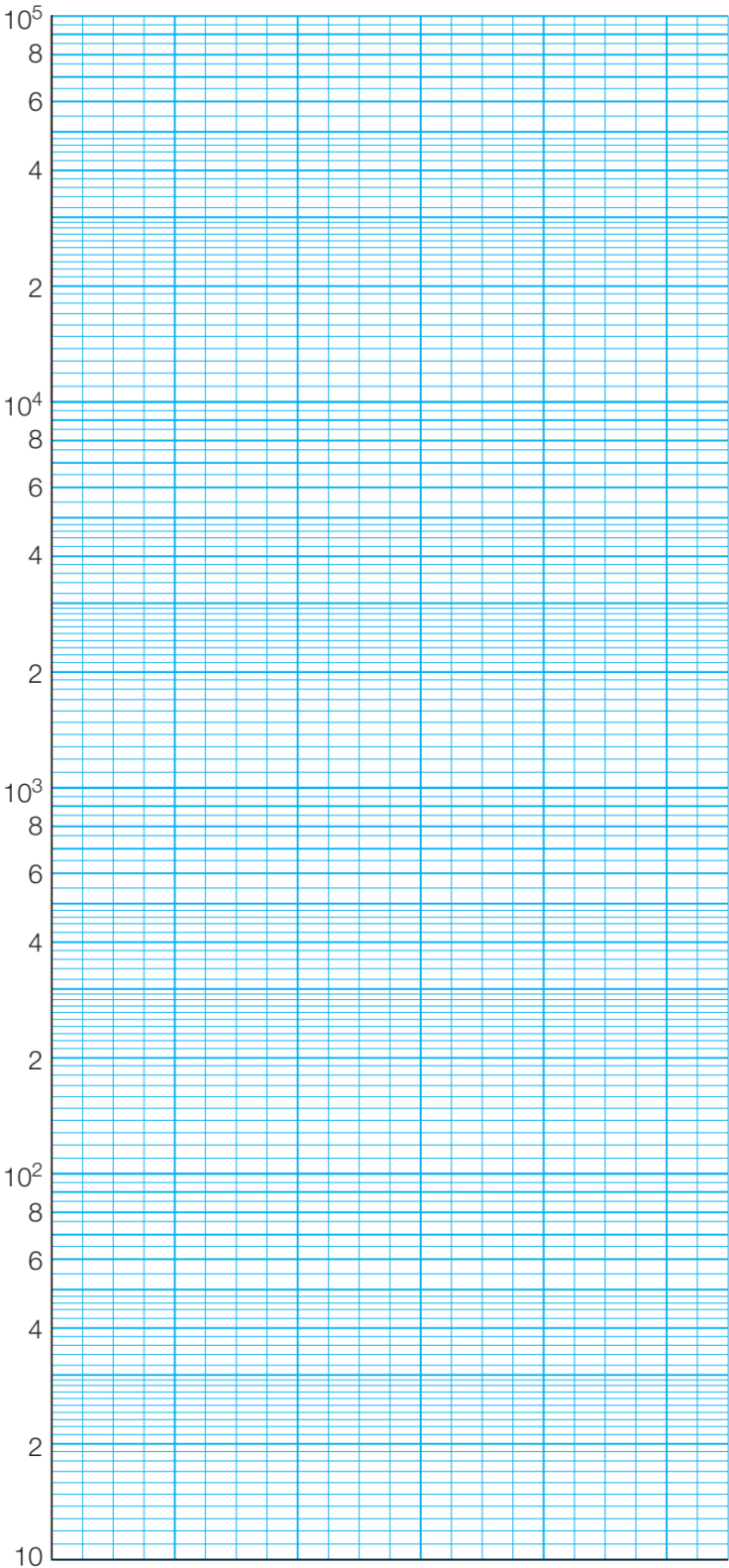
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

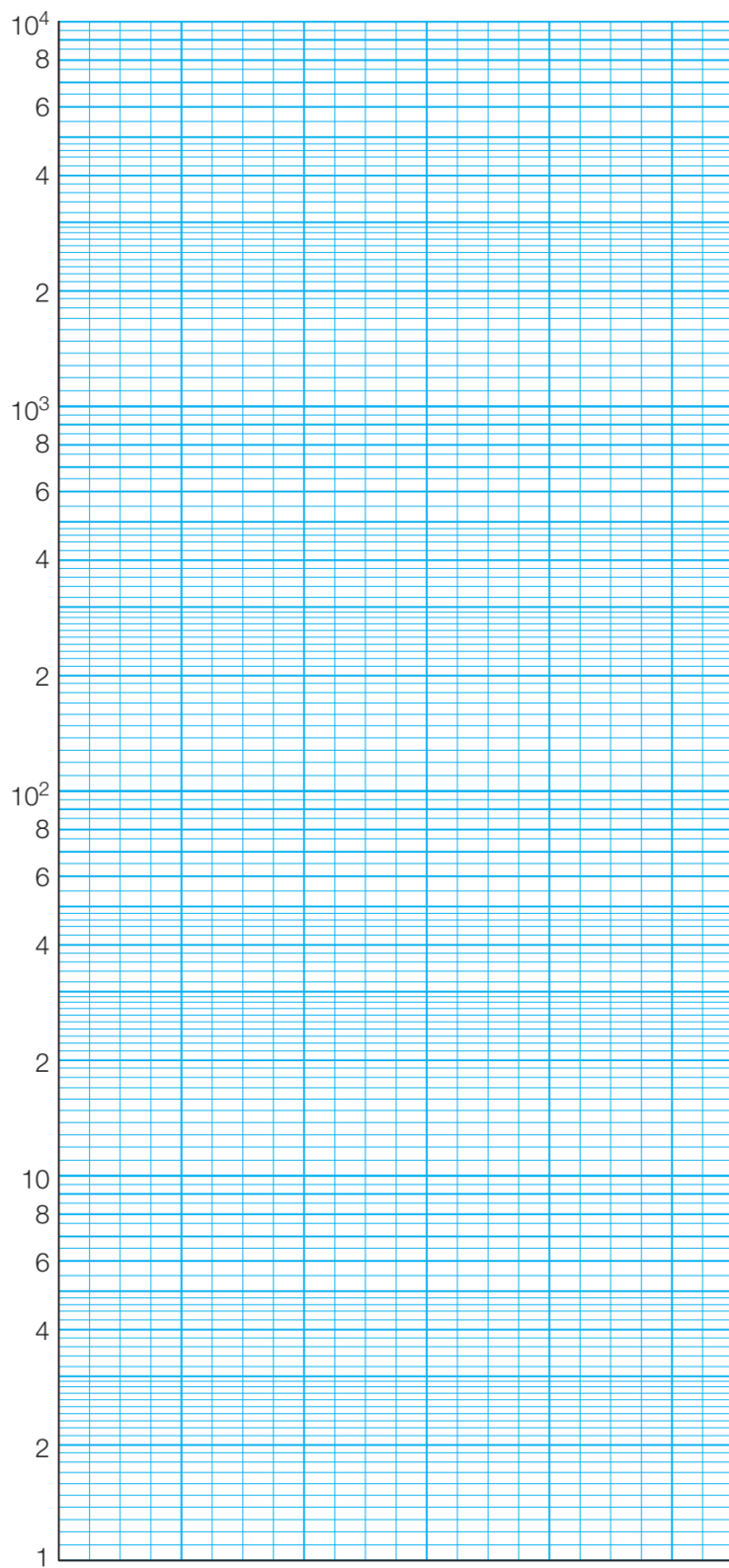
$$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ met } \bar{X} \text{ het steekproefgemiddelde, } n \text{ de steekproefomvang en } S \text{ de steekproefstandaardafwijking.}$$

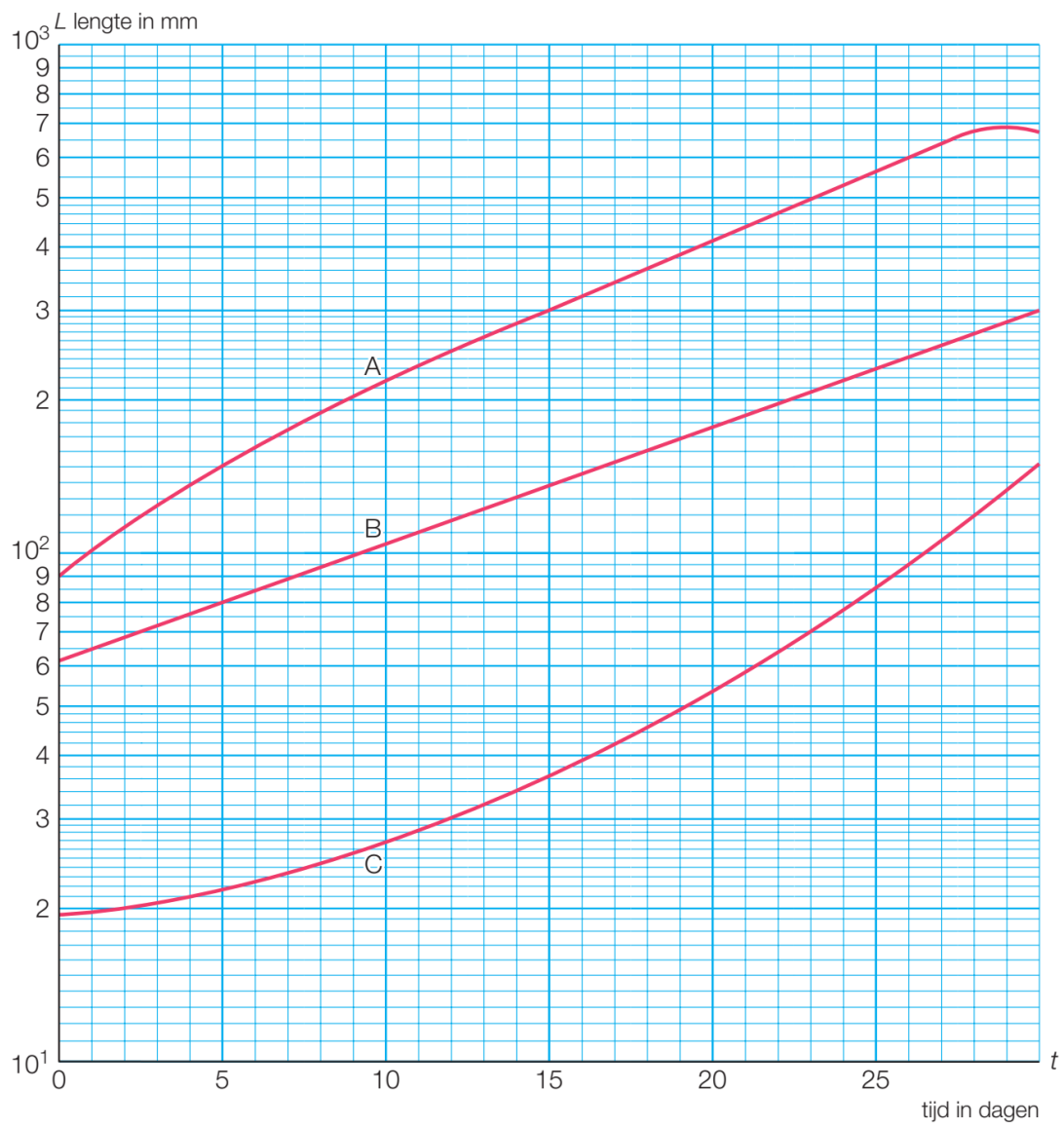
Werkbladen

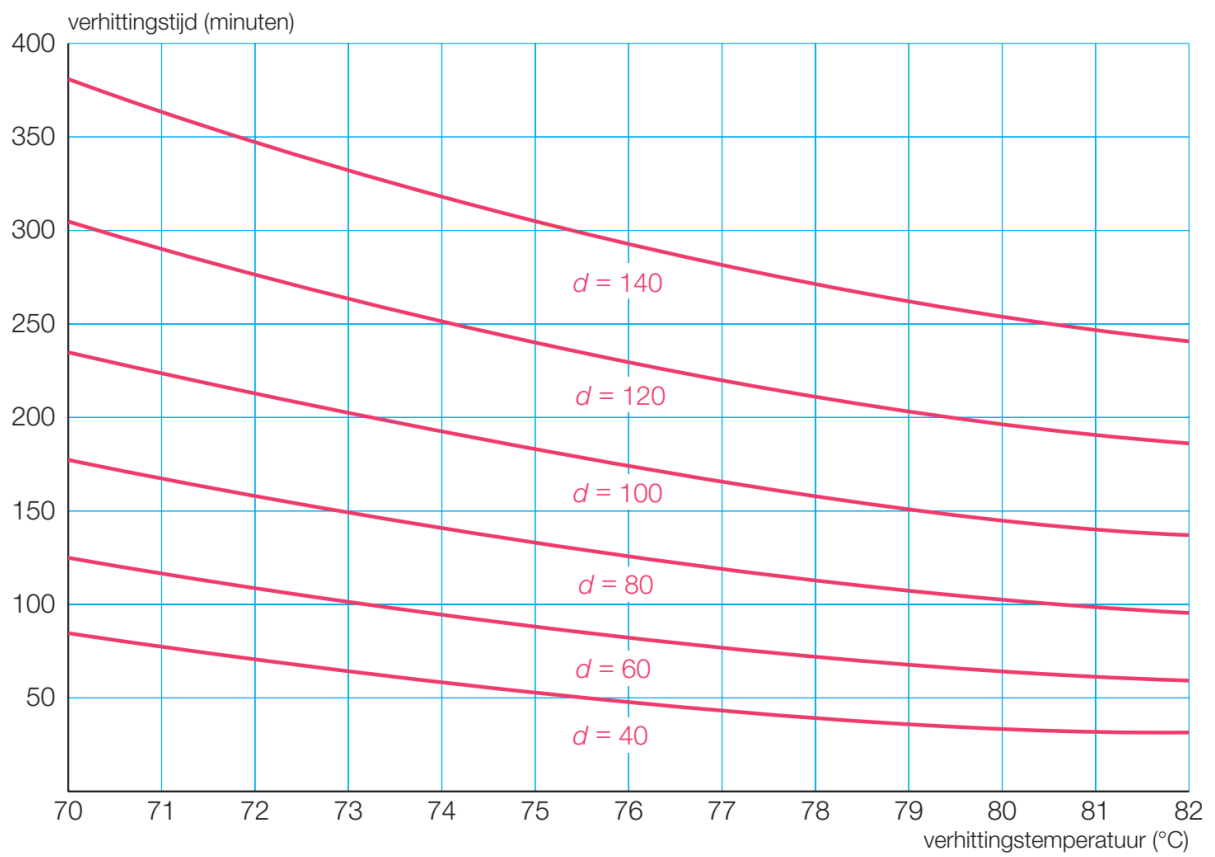
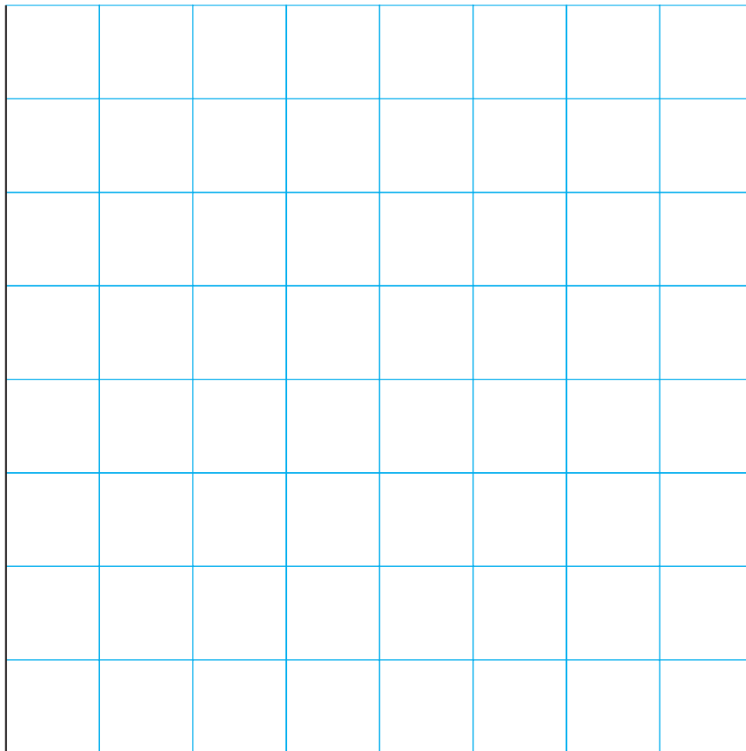
45

blz. 34

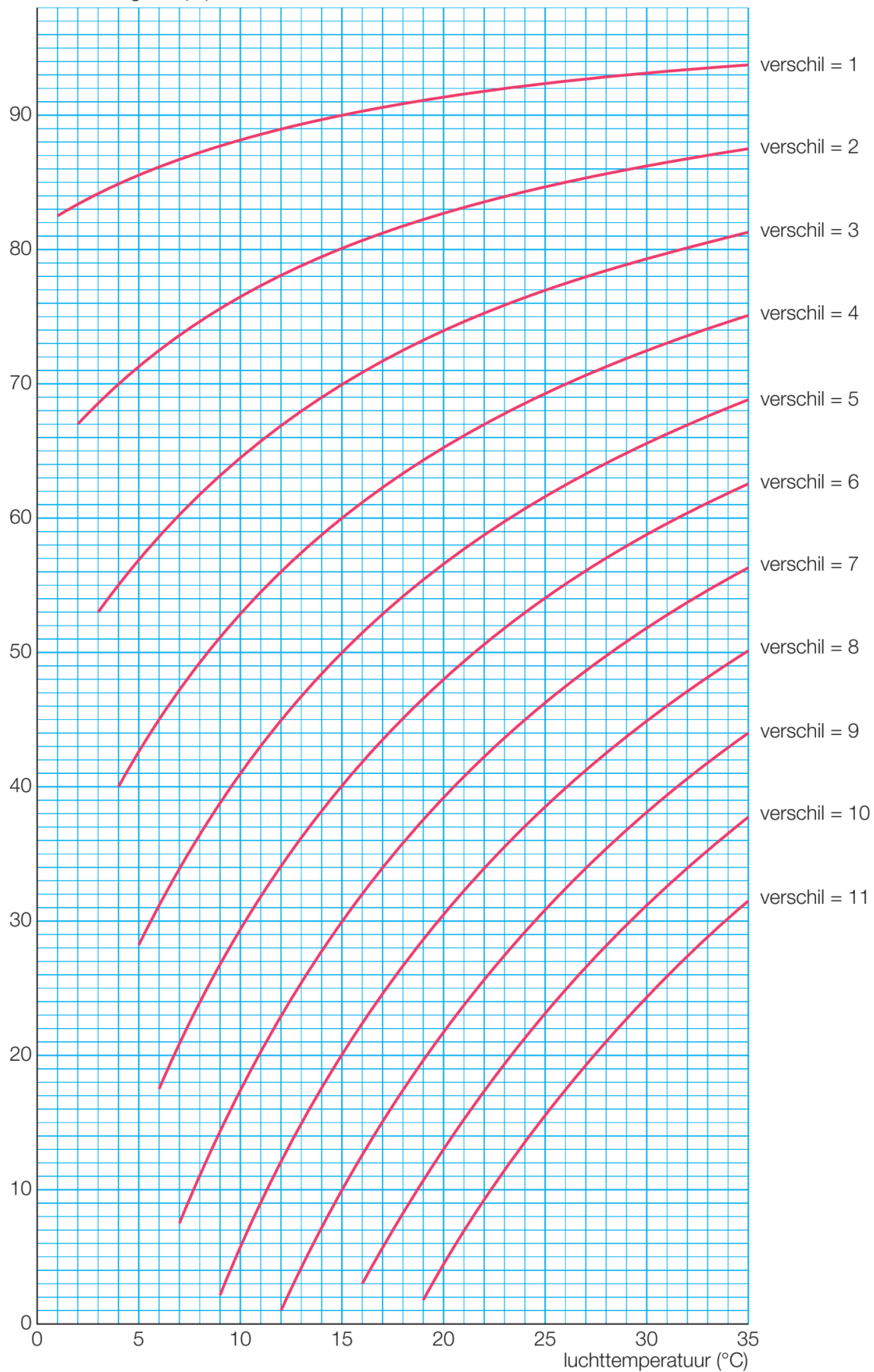




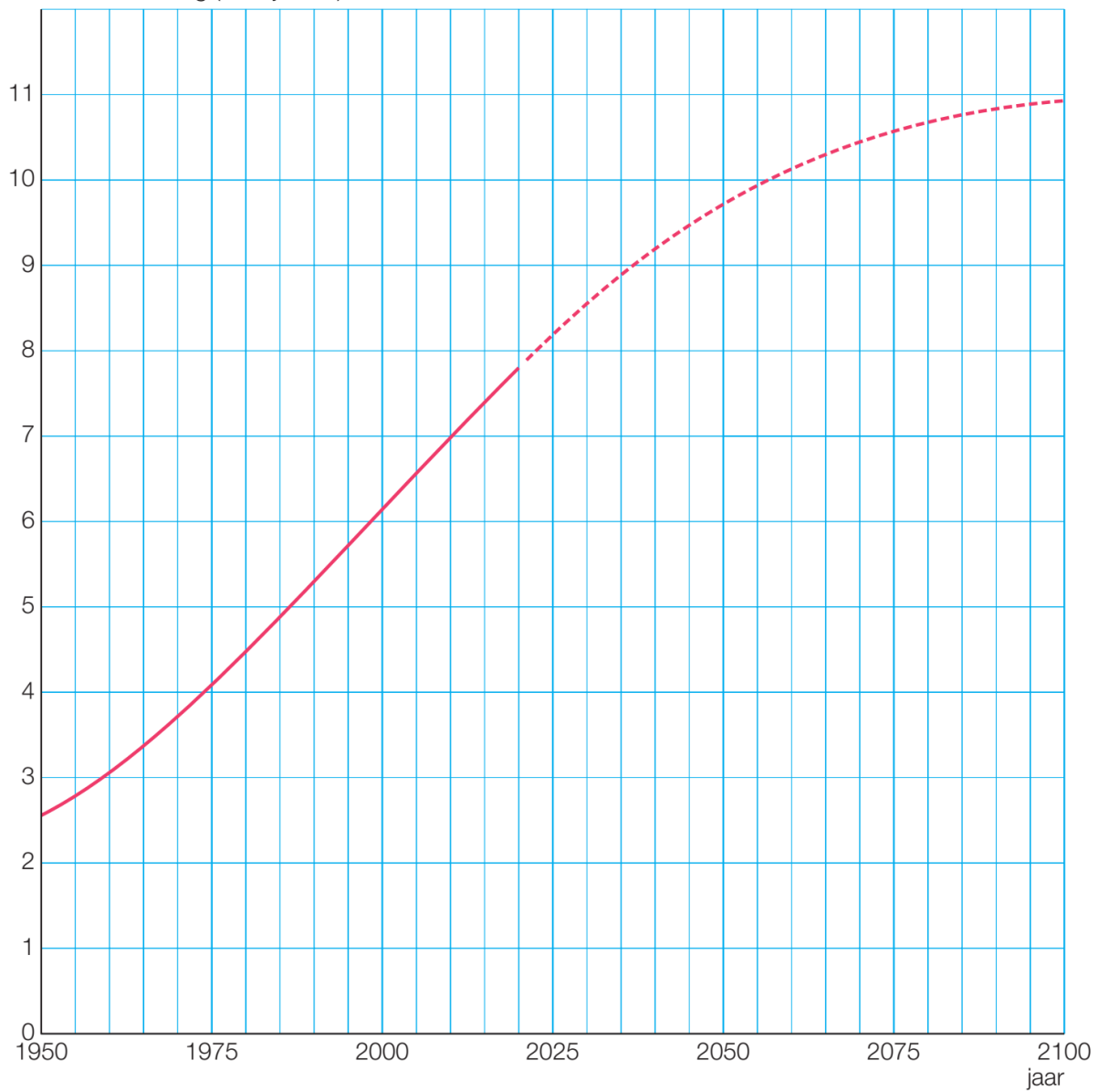


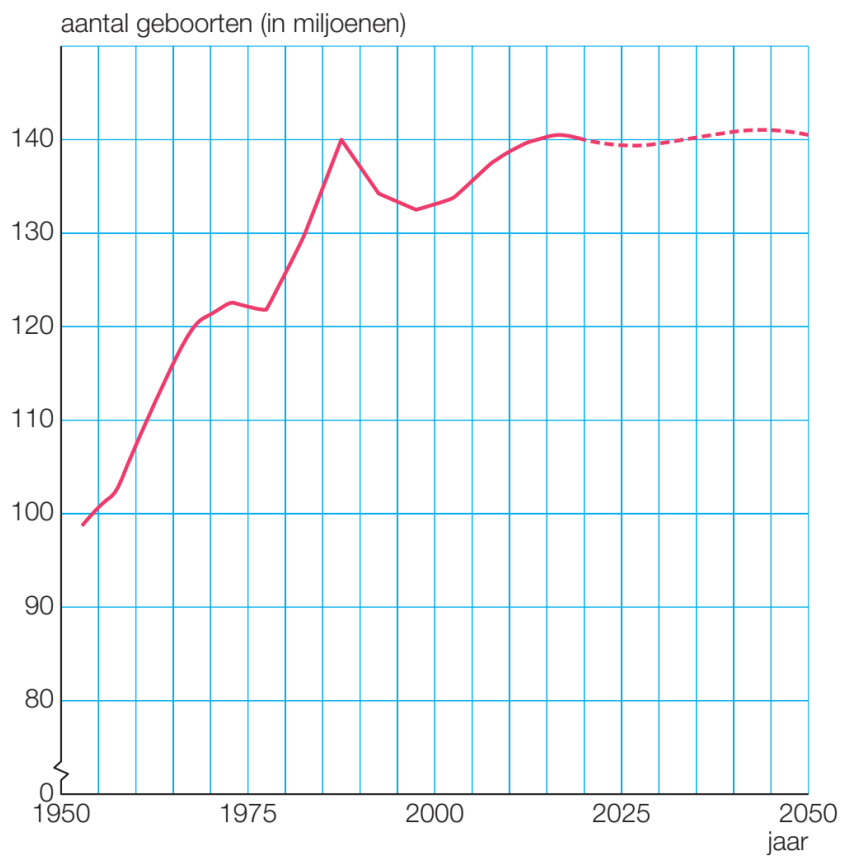


		temperatuurverschil tussen de twee thermometers (°C)											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
luchttemperatuur (°C)	0	100	82										
	1	100	83										
	2	100	84	67									
	3	100	84	69	53								
	4	100	85	70	55	40							
	5	100	86	71	57	43	28						
	6	100	86	73	59	45	31	18					
	7	100	87	74	60	47	34	21	8				
	8	100	87	75	62	49	37	24	11				
	9	100	88	76	63	51	39	27	14	2			
	10	100	88	76	65	53	41	29	18	6			
	11	100	89	77	66	54	43	32	20	9			
	12	100	89	78	67	56	45	34	23	12	1		
	13	100	89	79	68	57	47	36	25	15	4		
	14	100	90	79	69	59	48	38	28	18	7		
	15	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10		
	16	100	90	81	71	61	51	42	32	22	13	3	
	17	100	91	81	72	62	53	43	34	25	15	6	
	18	100	91	82	73	63	54	45	36	27	18	8	
	19	100	91	82	73	64	55	46	38	29	20	11	2
	20	100	91	83	74	65	57	48	39	31	22	13	4
	21	100	92	83	75	66	58	49	41	32	24	15	7
	22	100	92	84	75	67	59	51	42	34	26	18	9
	23	100	92	84	76	68	60	52	44	36	28	20	11
	24	100	92	84	76	69	61	53	45	37	29	21	14
	25	100	92	85	77	69	62	54	46	39	31	23	16



wereldbevolking (in miljarden)

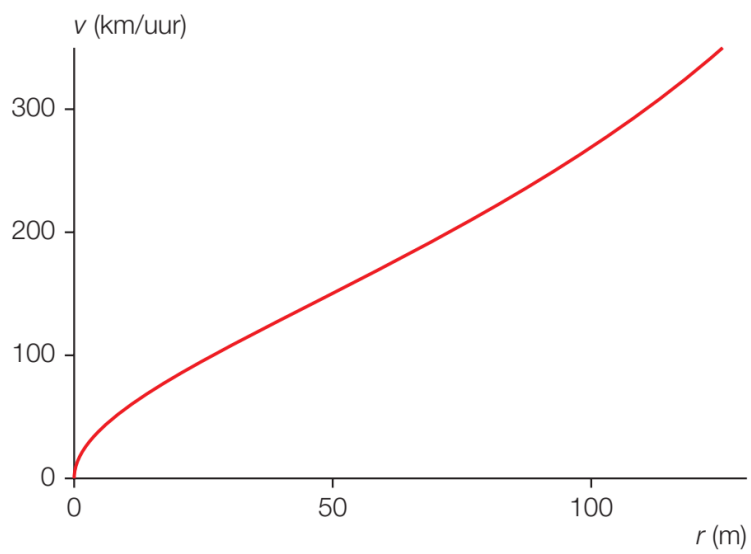




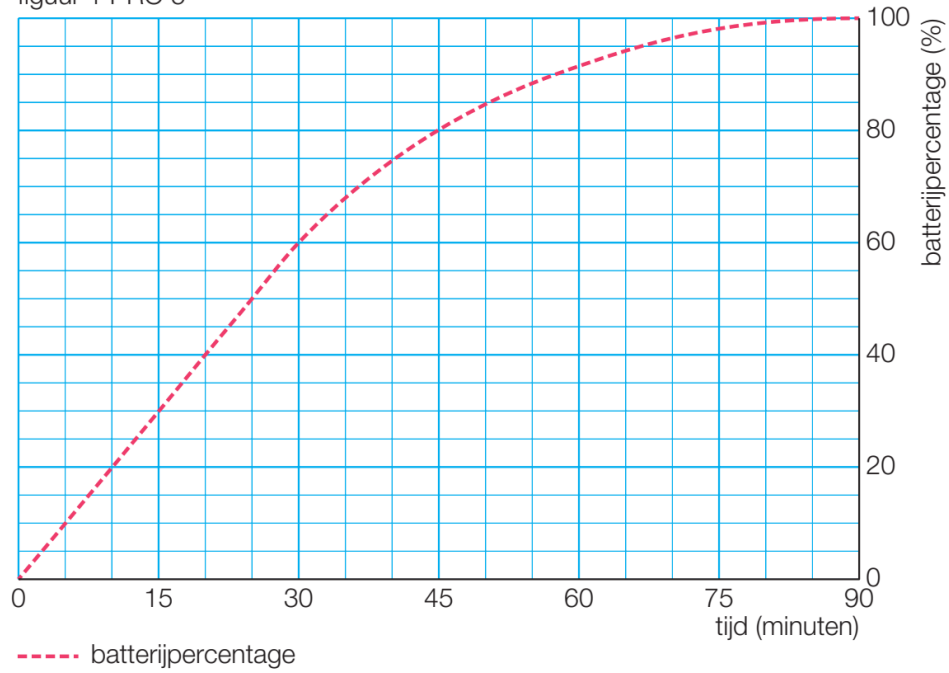
17

blz. 165

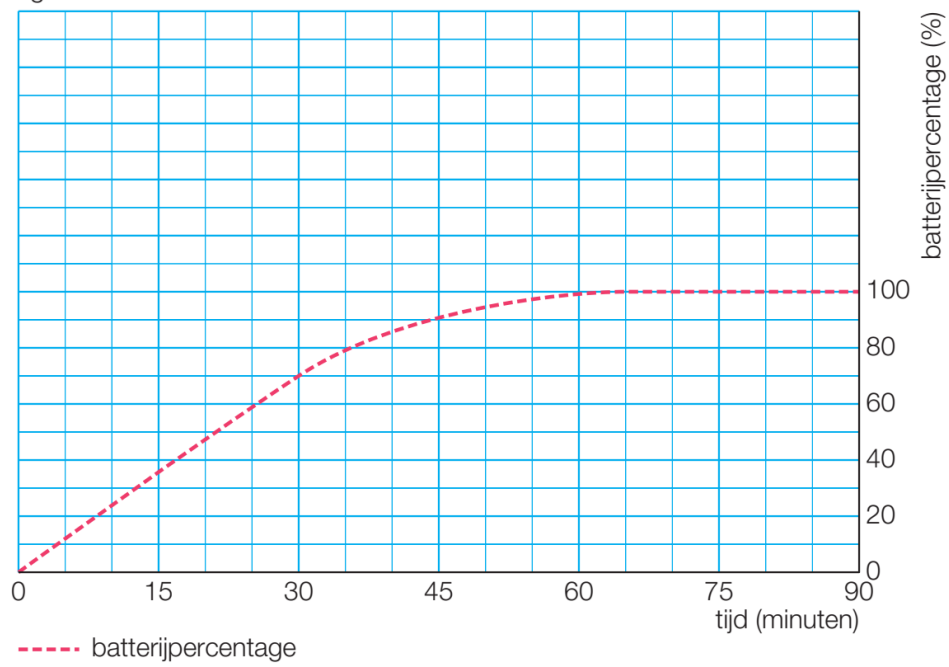
b



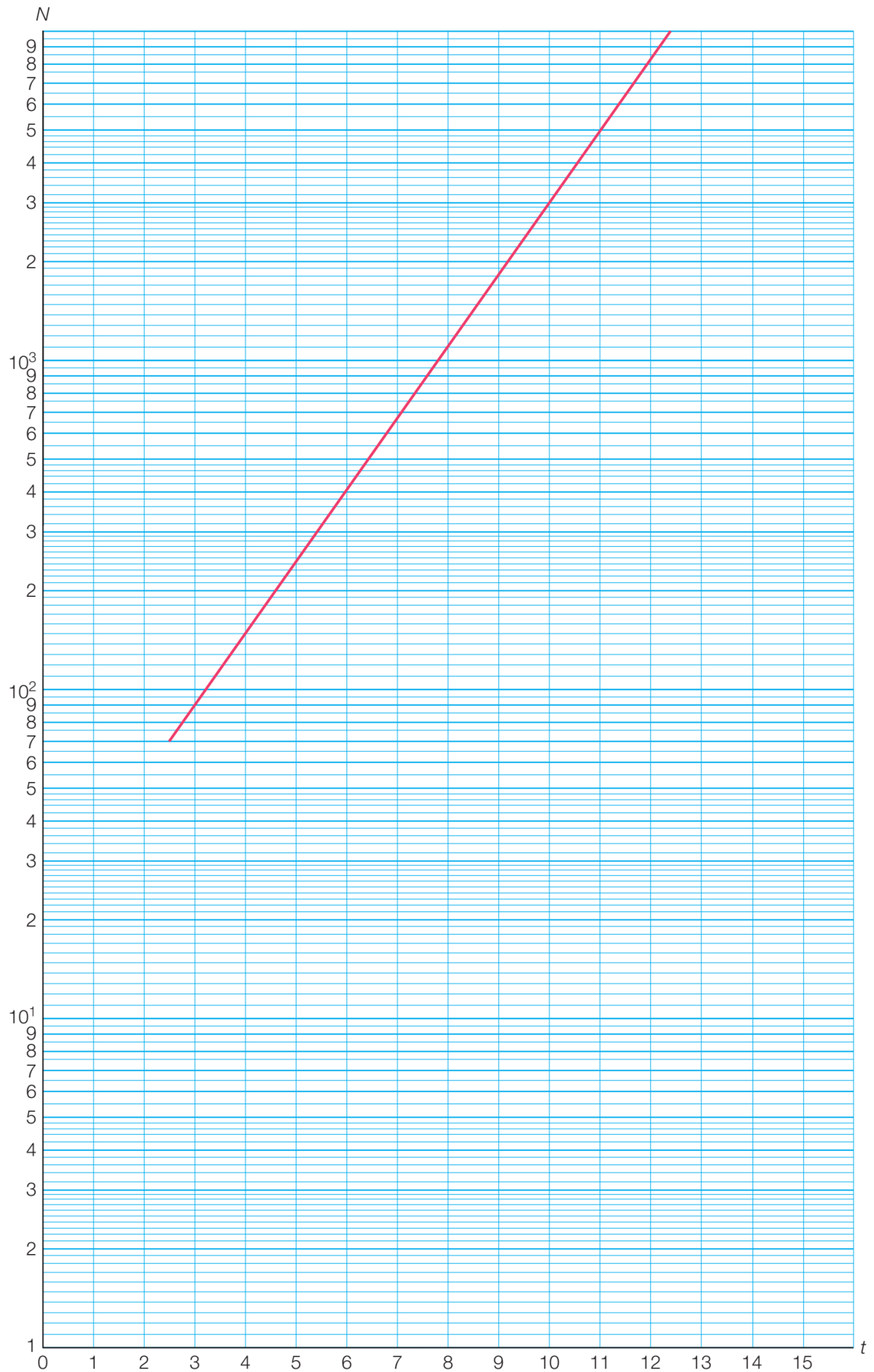
blz. 167 figuur 1 PRO 5



figuur 2 PRO 6



 C_{wit} (aantal vezels per m^3 lucht)



	kwantitatief		kwalitatief	
	discreet	continu	nominaal	ordinaal
regio				
mate van urgentie (van een melding bij de meldkamer)				
aantal ambulanceritten (per jaar per regio)				
responstijd (van een ambulancerit)				

rit 1	V				A
verwachte aankomsttijd	11:33	11:34	11:37	11:36	11:37
aantal nog te rijden km	144	128	72	15	0
nog te verwachten reistijd	1:32	1:23	0:50	0:10	0:00
de tijd op dit moment	10:01	10:11	10:47	11:26	11:37

rit 2	V				A
verwachte aankomsttijd	13:03	13:13	13:15	13:25	13:27
aantal nog te rijden km	144	98	72	74	0
nog te verwachten reistijd	1:32	1:10	0:54	0:56	0:00
de tijd op dit moment	11:31	12:03	12:21	12:29	13:27

rit 3	V				A
verwachte aankomsttijd	12:38	12:46	12:50	12:51	12:52
aantal nog te rijden km	144	72	72	48	0
nog te verwachten reistijd	1:32	0:52	0:52	0:36	0:00
de tijd op dit moment	11:06	11:54	11:58	12:15	12:52

rit 4	V				A
verwachte aankomsttijd	11:43	11:33	11:43	11:44	11:45
aantal nog te rijden km	144	124	72	31	0
nog te verwachten reistijd	1:32	1:13	0:45	0:21	0:00
de tijd op dit moment	10:11	10:20	10:58	11:23	11:45

rit 5	V				A
verwachte aankomsttijd	11:23	11:31	11:30	11:26	11:24
aantal nog te rijden km	144	82	72	40	0
nog te verwachten reistijd	1:32	0:58	0:50	0:27	0:00
de tijd op dit moment	9:51	10:33	10:40	10:59	11:24

Antwoorden Kennis- en vaardigheidentests

Hoofdstuk 9

- 1 a $N = 2400 \cdot 1,003^t$
b $t = 40$
- 2 a 4 jaar en 10 maanden
(of 58 maanden)
b 3,4%
- 3 a 5 uur en 25 minuten
(of 325 minuten)
b 0,915
c 27,4 jaar
- 4 a 761%
b 1,3%
- 5 a 2,8%
b 51,3%
- 6 $N = 2020 \cdot 0,928^t$
- 7 a $P = 8,1 \cdot 1,054^t$
b 2026
- 8 a $N_{PL} = 6t + 1588$
 $N_{GR} = 300 \cdot 1,008^t$
b 203,7%
c 306 dagen
- 9 a *
b *
- 10 a $N = 2 \cdot 1,322^t$
b afnemende daling
c *
- 11 a stijgend
b 25
- 12 a $N = 200 \cdot 0,89^t$
b $M = 81,92 \cdot 1,95^t$

Hoofdstuk 10

- 1 I: lijndiagram, *
II: spreidingsdiagram, *
III: dotplot, *
- 2 a kwalitatief
b gering verschil
c met boxplots: gering verschil
met effectgrootte: middelmatig verschil
d nee, *
- 3 a (69, 67)
b 75%
c rechts-scheef
d gering verschil
- 4 a $58,0\% \pm 16,0\%$
of $[42,0\%; 74,0\%]$
b 460 hbo studenten
c *

Hoofdstuk 11

- 1 a 23 °C tot 30 °C
b $H = 95$
c *
- 2 a $N = 2x$
b $p = 2,25q^2$
c $a \approx 2,98$
- 3 a 2,5 meter
b $r = \frac{6,3}{\sqrt{I}}$
c $a = 12,567$
- 4 a A neemt af
b 46
- 5 a 4 uur en 28 minuten
(of 268 minuten)
b *
c 12,5 kilowatt
d $S = 0,72u + 1,92$

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm <ul style="list-style-type: none">• Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen.• De toets Ans, en fouten verbeteren.• Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen.• Decimaal getal omzetten in een breuk.	havo A deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 8
Formules, grafieken en snijpunten <ul style="list-style-type: none">• Formules invoeren en grafieken plotten.• De optie snijpunt gebruiken.	havo A deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 29
Vergelijkingen oplossen <ul style="list-style-type: none">• Oplossen van vergelijkingen met de GR.	havo A deel 1 hoofdstuk 3 bladzijde 139
Formules en tabellen <ul style="list-style-type: none">• Bij een formule een tabel maken.	havo A deel 2 hoofdstuk 5 bladzijde 24
Grafieken, toppen en nulpunten <ul style="list-style-type: none">• Het kiezen van een geschikt venster.• De opties snijpunt, nulpunt, maximum en minimum.	havo A deel 2 hoofdstuk 6 bladzijde 52
Allerlei <ul style="list-style-type: none">• Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR.	

Examenwerkwoorden

In onderstaande lijst staan de relevante examenwerkwoorden voor wiskunde A. Als in een wiskunde-examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, geldt de betekenis die hiervan in deze lijst is gegeven. Deze lijst met examenwerkwoorden is niet uitputtend.

Aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Afleiden van bijvoorbeeld een formule of een eenheid	Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
Berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.
Noemen, (aan)geven wat, welke, wanneer, hoeveel	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist tenzij anders is aangegeven.
Onderzoeken of	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
Oplossen	Het bepalen van de waarden van een of meer onbekenden die voldoen aan de gegeven vergelijking of ongelijkheid. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

Schetsen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat.
Tekenen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat en voldoende nauwkeurig is. In het geval van een grafiek moet een assenstelsel met schaalverdeling zijn weergegeven.

Trefwoordenregister

A

associatiemaat 72

B

betrouwbaarheids-
interval 81

boxplots vergelijken 72

C

causaal verband 68

causaliteit 68

D

dotplot 60

dubbellogaritmisch
papier 38

E

effectgrootte 72

exponent 9

exponentieel verband 9

exponentieel verval 9

exponentiële afname 9

exponentiële groei 9

formule opstellen
bij - 21

G

grenswaarde 43, 123

groefactor 8, 9

groefactoren omzetten

naar andere
tijdseenheid 18

groeipercentage 9

- omzetten 19

groepen vergelijken 72

grondtal 9

H

halfvlak 111

- met rand 111

halveringstijd 13

K

kruiselings

vermenigvuldigen 118

L

lineaire groei 25, 26

lineair verband 25, 26

logaritmisch papier 34

logaritmische
schaalverdeling 33

M

max V_{cp} 72

N

normale verdeling 79

O

oorzakelijk verband 68

P

ϕ -coefficient 72

populatieproportie 79

puntenwolk 60

R

redeneren met

formules 43, 123

rekenregels voor

wortels 116

S

samenhang 68

spreidingsdiagram 60

statistische variabele 58

steekproefproportie 79

V

verband

exponentieel - 9, 26

lineair - 25, 26

verdubbelingstijd 13

verzadigingsniveau 43

vrijmaken bij

formules met

breuken 118

formules met wortels 119

vrijmaken van

variabelen 119

vuistregels bij de normale

verdeling 79

W

wisseleigenschap 118

wortel

rekenregels voor - 116

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Oscar Casander, Arnhem

Technisch tekenwerk: Integra Software services, India

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Foto's

Shutterstock: p. 6-7, 10, 11, 15 (b, mb, o), 17, 26, 29 (2x), 32, 38, 42 (2x), 48, 52, 54, 56-57, 59 m, 65, 66 (3x), 70 o, 74, 75, 77 b, 81, 83, 92, 95 b, 98, 99, 105, 108-109, 113, 118, 124, 130, 131, 132, 133, 135, 136, 139, 154, 166, 168, 172, 185, 202, 226 o, 236

Photo Bodleian Libraries: p. 15 mo

Noordhoff: p. 18, 21

Sabine de Waal, Hendrik-Ido-Ambacht: p. 20

Mark Haneveld, Lochem: p. 23, 33

Wikimedia Commons / Thomas Nguyen: p. 37

Getty Images: p. 76 b, 77 o, 101

Alamy Stock Photo / Imageselect: p. 76 o, 120

Wikimedia Commons / Tomoki Kojima: p. 90

ANP / Associated Press / Lee Jin-man: p. 102

ANP / Koen van Weel: p. 146-147

Imageselect: p. 158

Stichting Cito: p. 164 b

Shutterstock (beeldbewerking B en U): p. 226 b

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:

Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700

VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.



Wij maken bij Noordhoff sinds 2009 bewust keuzes om onze impact op het klimaat te verkleinen. We volgen de klimaatdoelen van het Klimaatakkoord van Parijs. Scan de QR-code voor meer informatie over ons duurzaamheidsbeleid.

Zo is dit product gemaakt van FSC®-gecertificeerd papier en ander gecontroleerd materiaal. Wij gebruiken plantaardige inkt en onze lijmen zijn op waterbasis en afbreekbaar. Hierdoor is dit product goed te recyclen na gebruik.



0 / 26

© 2026 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06454-9

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten