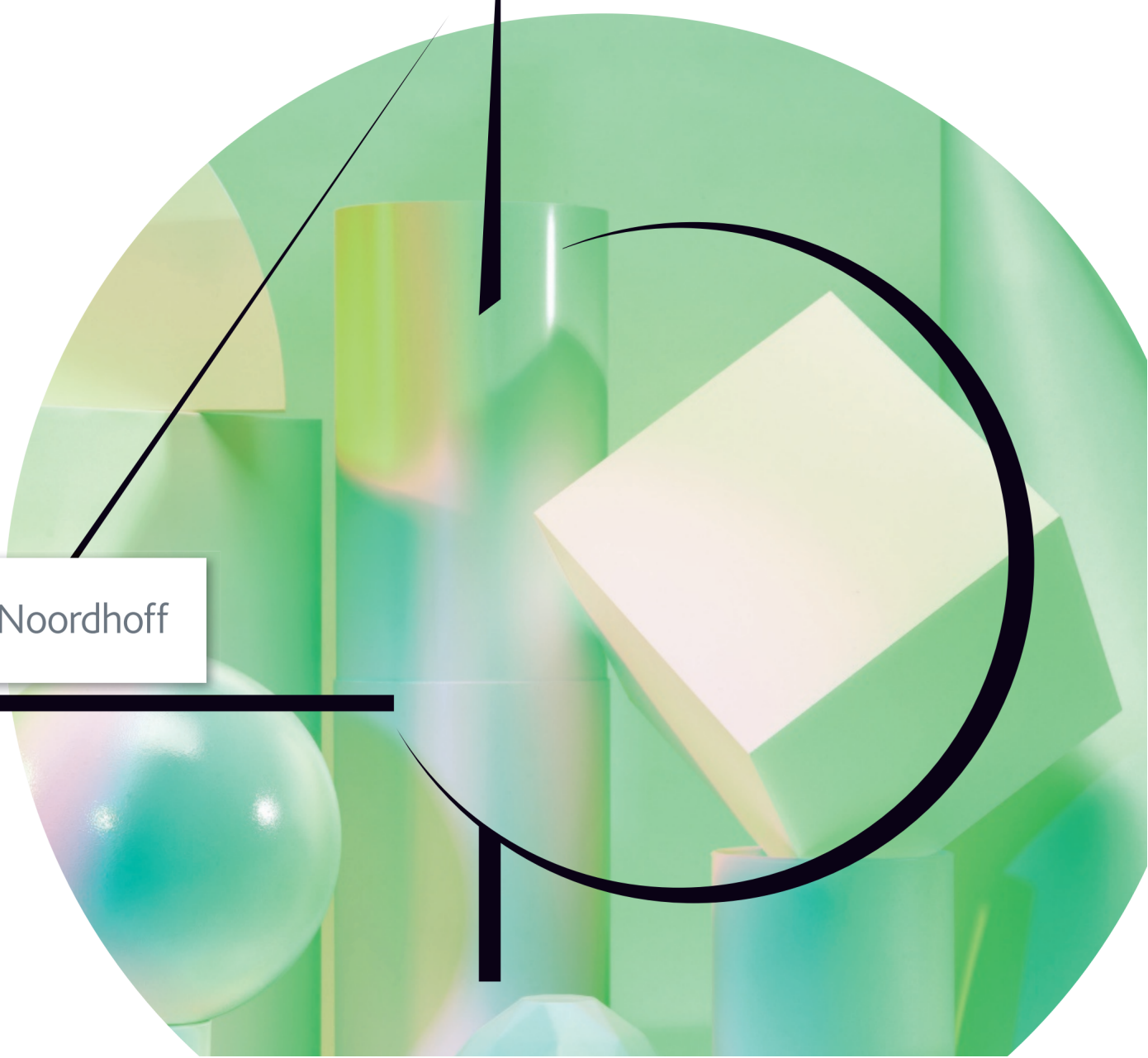


getal & ruimte

A



Noordhoff



Getal & Ruimte

Uitwerkingen havo A deel 3

Dertiende editie, 2026

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd
M. Daems

Inhoud

9	Exponentiële verbanden	4
10	Statistiek gebruiken	29
11	Formules en variabelen	48
12	Examentraining	73

9 Exponentiële verbanden

9.1 Exponentiële groei

Bladzijde 8

V1	toename in procenten	13%	3,3%	120%	0,7%	6%	150%	23,7%
	groefactor	1,13	1,033	2,2	1,007	1,06	2,5	1,237

V2	afname in procenten	13%	41,8%	6,2%	0,3%	2%	0,1%	75,4%
	groefactor	0,87	0,582	0,938	0,997	0,98	0,999	0,246

- V3**
- a** 1,127
 - b** 0,932
 - c** 73,5%
 - d** 15,5%

Bladzijde 9

- 1**
- formule I hoort bij grafiek C
 - formule II hoort bij grafiek A
 - formule III hoort bij grafiek B
 - formule IV hoort bij grafiek D

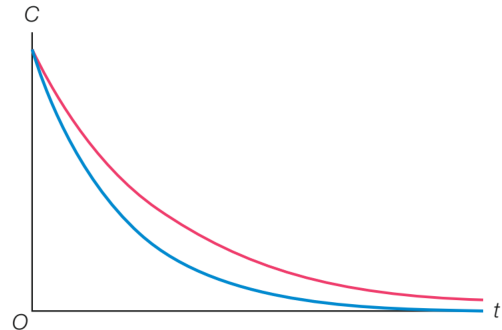
Bladzijde 11

- 2** $N_L = 3120 \cdot 1,07^t$
 $N_K = 5310 \cdot 0,98^t$
- 3**
- a** $C = 400 \cdot 0,995^t$
 - b** $400 \cdot 0,995^t = 375$
 Voer in $y_1 = 400 \cdot 0,995^x$ en $y_2 = 375$.
 De optie snijpunt geeft $x = 12,87...$
 Dus in het jaar $2024 + 12 = 2036$.
 Bij 12,87... hoort 12 jaar en $0,87... \cdot 12 \approx 10,5$ maanden. Dus in de maand november.
- 4**
- a** $N = 400 \cdot 1,12^t$
 - b** Voer in $y_1 = 400 \cdot 1,12^x$ en $y_2 = 15\,000$.
 De optie snijpunt geeft $x = 31,98...$
 Dus in het jaar $1990 + 32 = 2022$.
 - c** Het aantal parkieten in 2030 is $N = 400 \cdot 1,12^{40} \approx 37\,220$.
 De omzetschade in miljoenen euro's in 2030 is $3,2 \cdot 1,10^{10} = 8,29...$
 De gemiddelde omzetschade in 2030 is $\frac{8,29... \text{ miljoen}}{37\,220} \approx 223$ euro per halsbandparkiet.
- 5** Voor het aantal kikkers geldt $N_k = 150 \cdot 1,06^t$ met t de tijd in jaren.
 Voor het aantal salamanders geldt $N_s = 300 \cdot 0,94^t$ met t de tijd in jaren.
 $150 \cdot 1,06^t = 300 \cdot 0,94^t$
 Voer in $y_1 = 150 \cdot 1,06^x$ en $y_2 = 300 \cdot 0,94^x$.
 De optie snijpunt geeft $x = 5,76...$
 Dus na 5,8 jaar.

- 6** De groeifactor per twee jaar is $1,10 \cdot 0,90 = 0,99$.
 Voor het percentage dat overblijft geldt $P = 100 \cdot 0,99^t$ met t de tijd in tweetallen jaren.
 $100 \cdot 0,99^t = 80$
 Voer in $y_1 = 100 \cdot 0,99^x$ en $y_2 = 80$.
 De optie snijpunt geeft $x = 22,20\dots$
 Dus na $2 \cdot 23 = 46$ jaar heb je voor het eerst minder dan 80% van de beginhoeveelheid.

Bladzijde 12

- 7 a** $C_{\text{niet-rokers}} = 15 \cdot 0,89^t$
 $C_{\text{rokers}} = 15 \cdot 0,84^t$
b Voer in $y_1 = 15 \cdot 0,89^x$ en $y_2 = 15 \cdot 0,84^x$.
 Zie de figuur hiernaast.
c De daling in het eerste uur is
 bij niet-rokers $0,11 \cdot 15 = 1,65$ microgram per mL en
 bij rokers $0,16 \cdot 15 = 2,4$ microgram per mL.
 Het scheelt $2,4 - 1,65 = 0,75$ microgram per mL.
d $15 \cdot 0,84^t = 10$
 Voer in $y_1 = 15 \cdot 0,84^x$ en $y_2 = 10$.
 De optie snijpunt geeft $x = 2,32\dots$
 Dus 2 uur en $0,32\dots \cdot 60 \approx 20$ minuten.
 Het medicijn is dan om 13:55 uur uitgewerkt.



- 8** Bij 13:50 uur hoort $t = 2,25$.
 $t = 2,25$ geeft $C_{\text{niet-rokers}} = 15 \cdot 0,89^{2,25} = 11,54\dots$
 De concentratie neemt dan toe tot $11,54\dots + 2,5 = 14,04\dots$ microgram per mL.
 Nu geldt $C = 14,04\dots \cdot 0,89^t$ met t de tijd in uren en $t = 0$ om 13:50 uur.
 $14,04\dots \cdot 0,89^t = 10$
 Voer in $y_1 = 14,04\dots \cdot 0,89^x$ en $y_2 = 10$.
 De optie snijpunt geeft $x = 2,91\dots$
 Dus 2 uur en $0,91\dots \cdot 60 \approx 55$ minuten.
 Het medicijn is dan om 16:45 uur uitgewerkt.

- 9 a** $B_H = 6633 \cdot 1,055^t$
b $t = 18$ geeft $B_H = 6633 \cdot 1,055^{18} \approx 17388,19$
 Dus Harm verwacht 17388,19 euro.
 $B_F = 6633 \cdot 1,08^{18}$
 $t = 18$ geeft $B_F = 6633 \cdot 1,08^{18} \approx 26505,60$
 Dus Francy verwacht 26505,60 euro.
c Voer in $y_1 = 6633 \cdot 1,055^x$ en $y_2 = 6633 \cdot 1,08^x$ en $y_3 = 10000$.
 De optie snijpunt bij y_1 en y_3 geeft $x = 7,66\dots$
 De optie snijpunt bij y_2 en y_3 geeft $x = 5,33\dots$
 Dus volgens Francy is het $7,66\dots - 5,33\dots = 2,33\dots$ jaar eerder. Dat is 2 jaar en $0,33\dots \cdot 12 \approx 4$ maanden eerder (of $5,33\dots \cdot 12 \approx 28$ maanden).
d De toename volgens Harm is $6633 \cdot 1,055^{18} - 6633 \cdot 1,055^{17} \approx 906,49$ euro.
 De toename volgens Francy is $6633 \cdot 1,08^{18} - 6633 \cdot 1,08^{17} \approx 1963,38$ euro.
 Het verschil is $1963,38 - 906,49 \approx 1057$ euro.

- 10** $6633 \cdot g^{18} = 22045$
 Voer in $y_1 = 6633 \cdot x^{18}$ en $y_2 = 22045$.
 De optie snijpunt geeft $x = 1,0690\dots$
 Dus een rendement van 6,9% per jaar.

Bladzijde 13

- 11 a** De hoeveelheid na t jaar is $20 \cdot 1,034^t$. Bij $t = 0$ hoort de hoeveelheid 20. Het dubbele van 20 is 40. De oplossing van $20 \cdot 1,034^t = 40$ geeft dus het aantal jaar voordat deze hoeveelheid is verdubbeld.
- b** Voer in $y_1 = 20 \cdot 1,034^x$ en $y_2 = 40$.
De optie snijpunt geeft $x = 20,73\dots$
Dus $t \approx 20,7$.
- c** Het dubbele van 27,94 is 55,88, dus los op $27,94 \cdot 1,034^t = 55,88$.
Voer in $y_1 = 27,94 \cdot 1,034^x$ en $y_2 = 55,88$.
De optie snijpunt geeft $x = 20,73\dots$
Dus 20,7 jaar later.
- d** Het dubbele van 50 is 100, dus los op $50 \cdot 1,034^t = 100$.
Voer in $y_1 = 50 \cdot 1,034^x$ en $y_2 = 100$.
De optie snijpunt geeft $x = 20,73\dots$
Dus na 20,7 jaar.
- e** Een verdubbeling van de hoeveelheid duurt telkens 20,7 jaar.
Dit is het geval bij een ander startmoment (vraag c) en een andere beginhoeveelheid (vraag d), dus de verdubbelingstijd lijkt alleen afhankelijk van de groeifactor te zijn.

Bladzijde 14

- 12 a** Jimi neemt aan dat de hoeveelheid elk jaar met 5% van de beginhoeveelheid toeneemt.
Maar dat is niet zo, de hoeveelheid neemt elk jaar met 5% van de hoeveelheid *op dat moment* toe.
- b** $1,05^t = 2$
De optie oplossen bij $1,05^x = 2$ geeft $x = 14,206\dots$
De verdubbelingstijd is 14,2 jaar.
- 13 a** $1,02^t = 2$
De optie oplossen bij $1,02^x = 2$ geeft $x = 35,002\dots$
De verdubbelingstijd is 35 dagen.
- b** $0,92^t = 0,5$
De optie oplossen bij $0,92^x = 0,5$ geeft $x = 8,312\dots$
De halveringstijd is 8 jaar en $0,312\dots \cdot 12 \approx 4$ maanden (of $8,312\dots \cdot 12 \approx 100$ maanden).
- c** 1 week = 7 dagen
Er geldt $g^7 = 2$ met g de groeifactor per dag.
De optie oplossen bij $x^7 = 2$ geeft $x = 1,1040\dots$
Het groeipercentage per dag is 10,4%.
- d** 5 jaar en 3 maanden = 5,25 jaar
Er geldt $g^{5,25} = 0,5$ met g de groeifactor per jaar.
De optie oplossen bij $x^{5,25} = 0,5$ geeft $x = 0,8763\dots$
De groeifactor per jaar is 0,876.

Bladzijde 15

- 14 a** $1,0235^t = 2$
De optie oplossen bij $1,0235^x = 2$ geeft $x = 29,840\dots$
De verdubbelingstijd is 30 jaar.
- b** De bevolking van Gabon groeit minder snel en zal er dus langer over doen om te verdubbelen.
- 15 a** Er geldt $g^{25} = 0,5$ met g de groeifactor per jaar.
De optie oplossen bij $x^{25} = 0,5$ geeft $x = 0,9726\dots$
 $N = 410\,000 \cdot 0,973^t$
- b** $t = 2023 - 1950 = 73$ geeft $N = 410\,000 \cdot 0,973^{73} \approx 55\,593$
Dus het model wijkt $\frac{55\,593 - 50\,600}{50\,600} \cdot 100\% \approx 9,9\%$ af van het werkelijke aantal.

- 16 a** $1,2^t = 2$
De optie oplossen bij $1,2^x = 2$ geeft $x = 3,8017...$
De verdubbelingstijd is 3 uur en $0,8017... \cdot 60 \approx 48$ minuten (of $3,8017... \cdot 60 \approx 228$ minuten).
- b** $1,2^t = 10$
De optie oplossen bij $1,2^x = 10$ geeft $x = 12,6292...$
De benodigde tijd is 12 uur en $0,6292... \cdot 60 \approx 38$ minuten (of $12,6292... \cdot 60 \approx 758$ minuten).
- c** $1,2^t = 1,05$
De optie oplossen bij $1,2^x = 1,05$ geeft $x = 0,2676...$
De hoeveelheid cellen met 5% toegenomen na $0,2676... \cdot 60 \approx 16$ minuten.

Bladzijde 16

- 17 a** $61 \cdot 1,037^2 = 65,59...$ miljard euro
- b** Bij periode I hoort $1,037^t = 2$. De optie oplossen bij $1,037^x = 2$ geeft $x \approx 19$, dus de verdubbelingstijd is 19 jaar.
Bij periode II hoort $1,048^t = 2$. De optie oplossen bij $1,048^x = 2$ geeft $x \approx 15$, dus de verdubbelingstijd is 15 jaar.
Bij periode III hoort $1,006^t = 2$. De optie oplossen bij $1,006^x = 2$ geeft $x \approx 116$, dus de verdubbelingstijd is 116 jaar.
Bij periode IV hoort $1,031^t = 2$. De optie oplossen bij $1,031^x = 2$ geeft $x \approx 23$, dus de verdubbelingstijd is 23 jaar.
- c** Uit de gegevens volgt de vermenigvuldigingsfactor $1,037^2 \cdot 1,048^7 \cdot 1,006^3 = 1,5201...$
Dat is een toename van ongeveer 52%, dus het krantenartikel is in overeenstemming met de gegevens.

Alternatieve uitwerking

$$\frac{61 \cdot 1,037^2 \cdot 1,048^7 \cdot 1,006^3 = 92,727... \text{ miljard euro}}{92,727... - 61} \cdot 100\% \approx 52,0\%$$

Het krantenartikel is dus in overeenstemming met de gegevens.

- d** 9 jaar en 10 maanden = $9\frac{10}{12}$ jaar
 $g^{9\frac{10}{12}} = 2$ met g de groeifactor per jaar
De optie oplossen bij $x^{9\frac{10}{12}} = 2$ geeft $x = 1,0730...$
Het groeipcentage ten opzichte van het jaar ervoor was dus 7,3%.

Alternatieve uitwerking

9 jaar en 10 maanden = $9 \cdot 12 + 10 = 118$ maanden
 $g^{118} = 2$ met g de groeifactor per maand
De optie oplossen bij $x^{118} = 2$ geeft $x = 1,0058...$
De groeifactor per jaar is $1,0058...^{12} \approx 1,0730...$
Het groeipcentage ten opzichte van het jaar ervoor was dus 7,3%.

- 18 a** Elke T jaar verdubbelt het aantal exemplaren, dus na drie keer T jaar zijn er $2^3 = 8$ keer zo veel exemplaren.
Na vier keer T jaar zijn er $2^4 = 16$ keer zo veel exemplaren.
- b** De kritische grens wordt bereikt als er $10\,000 + 30\,000 = 40\,000$ exemplaren zijn. Dus het aantal exemplaren is dan twee keer verdubbeld. Dat duurt $2 \cdot 1,5 = 3$ jaar.
- c** Dan duurt het $2 \cdot 5 = 10$ jaar.

Bladzijde 17

- C1 a** $N = 5860 \cdot 0,974^t$
- b** De afname is $5860 \cdot 0,974^6 - 5860 \cdot 0,974^{10} \approx 500$ pups.
- c** $5860 \cdot 0,974^t = 4200$
De optie oplossen bij $5860 \cdot 0,974^x = 4200$ geeft $x = 12,64...$
Dus in het jaar $2010 + 13 = 2023$.

- C2 a** $0,327^t = 0,5$
De optie oplossen bij $0,327^x = 0,5$ geeft $x = 0,620...$
De halveringstijd is $0,620... \cdot 24 = 14,882...$ uur.
Dat is 14 uur en $0,882... \cdot 60 \approx 53$ minuten (of $14,882... \cdot 60 \approx 893$ minuten).
- b** Er geldt $g^{10} = 2$ met g de groeifactor per jaar.
De optie oplossen bij $x^{10} = 2$ geeft $x = 1,0717...$
Het groeipcentage per jaar is 7,2%.

9.2 Formules bij exponentiële groei

Bladzijde 18

- 19** **a** 9
b per vier jaar met $9^2 = 81$
per zes jaar met $9^3 = 729$
c Een jaarlijkse groeifactor van 4,5 geeft een groeifactor per twee jaar van $4,5^2 = 20,25$, terwijl dat 9 moet zijn. De jaarlijkse groeifactor moet 3 zijn, want $3^2 = 9$.

Bladzijde 19

- 20** **a** $g_{\text{dag}} = 0,84$
 $g_{\text{week}} = 0,84^7 \approx 0,295$
b $g_{\text{dag}} = 0,84$
 $g_{\text{uur}} = 0,84^{\frac{1}{24}} \approx 0,993$
De afname is 0,7% per uur.
c $g_{\text{kwartier}} = 1,12$
 $g_{\text{uur}} = 1,12^4 \approx 1,574$
De toename is 57,4% per uur.
d $g_{\text{kwartier}} = 1,12$
 $g_{5 \text{ min}} = 1,12^{\frac{1}{3}} \approx 1,038$
De toename is 3,8% per vijf minuten.

Bladzijde 20

- 21** **a** $g_{\text{dag}} = 1,3$
 $g_{4 \text{ uur}} = 1,3^{\frac{1}{6}} \approx 1,045$
Het groeipercentage per vier uur is 4,5%.
b $g_{\text{jaar}} = 1,0008$
 $g_{\text{eeuw}} = 1,0008^{100} \approx 1,083$
De toename is 8,3% per eeuw.
c $g_{\text{week}} = 2,8$
 $g_{\text{dag}} = 2,8^{\frac{1}{7}} \approx 1,158$
De toename is 15,8% per dag.
22 **a** De optie oplossen bij $x^4 = 2$ geeft $x = 1,1892...$
Dus het groeipercentage per jaar is 18,9%.
b $g_{4 \text{ jaar}} = 2$
 $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{4}} \approx 1,189$
Dus het groeipercentage per jaar is 18,9%.
c *
d $g_{10 \text{ maanden}} = 0,5$
 $g_{\text{maand}} = 0,5^{\frac{1}{10}} \approx 0,933$
Dus de groeifactor per maand is 0,933.

Alternatieve uitwerking

Er geldt $g^{10} = 0,5$ met g de groeifactor per maand.
De optie oplossen bij $x^{10} = 0,5$ geeft $x = 0,9330...$
Dus de groeifactor per maand is 0,933.

- 23** **a** $g_{3 \text{ jaar}} = 2,5$
 $g_{\text{jaar}} = 2,5^{\frac{1}{3}} \approx 1,357$
Het groeipercentage per jaar is 35,7%.
b $g_{7 \text{ jaar}} = 10$
 $g_{\text{jaar}} = 10^{\frac{1}{7}} \approx 1,389$
Het groeipercentage per jaar is 38,9%.
c $g_{12 \text{ jaar}} = 0,78$
 $g_{\text{jaar}} = 0,78^{\frac{1}{12}} \approx 0,980$
De afname per jaar is 2,0%.
d $g_{12 \text{ seconden}} = 0,5$
 $g_{\text{minuut}} = 0,5^5 \approx 0,031$
De afname per minuut is 96,9%.

- 24 a** 5 jaar is $5 \cdot 12 = 60$ maanden
 $g_{60 \text{ maanden}} = 240$
 $g_{\text{maand}} = 240^{\frac{1}{60}} \approx 1,096$
 Het groeipercentage per maand was 9,6%.

- b** $g_{19 \text{ jaar}} = 0,64$
 $g_{\text{jaar}} = 0,64^{\frac{1}{19}} \approx 0,977$
 De afname per maand was 2,3%.

- c** In januari 2006 werden $\frac{5000}{0,64} \approx 7813$ artikelen geplaatst.
 Dus in januari 2001 werden $\frac{7813}{240} \approx 30$ artikelen geplaatst.

Bladzijde 21

- 25** $g_{12 \text{ jaar}} = 0,5$, dus $g_{\text{jaar}} = 0,5^{\frac{1}{12}} \approx 0,944$
 $g_{27 \text{ jaar}} = 0,24$, dus $g_{\text{jaar}} = 0,24^{\frac{1}{27}} \approx 0,949$
 Dat scheelt weinig, dus de twee resultaten zijn met elkaar in lijn.

Alternatieve uitwerking

$g_{12 \text{ jaar}} = 0,5$
 $g_{\text{jaar}} = 0,5^{\frac{1}{12}} = 0,943\dots$
 In 27 jaar is dat $0,943\dots^{27} \approx 0,21$, oftewel een afname van 79%.
 Dat scheelt weinig met 76%, dus de twee resultaten zijn met elkaar in lijn.

- 26 a** $g_{4 \text{ uur}} = \frac{300\,000}{50\,000} = 6$
b $g_{\text{uur}} = 6^{\frac{1}{4}} = 1,5650\dots$
c Invullen van $N = 50\,000$, $g = 1,5650\dots$ en $t = 5$ geeft $b \cdot 1,5650\dots^5 = 50\,000$.
 Dus $b = \frac{50\,000}{1,5650\dots^5} \approx 5300$.

Bladzijde 22

- 27 a** $B = b \cdot g^t$ met $g_{5 \text{ uur}} = \frac{1\,250\,000}{150\,000}$, dus $g = \left(\frac{1\,250\,000}{150\,000}\right)^{\frac{1}{5}} = 1,5281\dots$

$$\left. \begin{array}{l} B = b \cdot 1,5281\dots^t \\ t = 3 \text{ en } B = 150\,000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,5281\dots^3 = 150\,000 \\ b = \frac{150\,000}{1,5281\dots^3} \approx 42\,000 \end{array}$$

Dus $B = 42\,000 \cdot 1,5281^t$.

- b** $H = b \cdot g^t$ met $g_{5,5 \text{ dagen}} = 0,64$, dus $g = 0,64^{\frac{1}{5,5}} = 0,9220\dots$
 Bij 5 januari hoort $t = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} H = b \cdot 0,9220\dots^t \\ t = 4 \text{ en } H = 0,6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,9220\dots^4 = 0,6 \\ b = \frac{0,6}{0,9220\dots^4} \approx 0,83 \end{array}$$

Dus $H = 0,83 \cdot 0,922^t$.

28 a $B = b \cdot g^t$ met $g_{10 \text{ jaar}} = \frac{8100}{6200}$, dus $g = \left(\frac{8100}{6200}\right)^{\frac{1}{10}} = 1,0270\dots$

$$\left. \begin{array}{l} B = b \cdot 1,0270\dots^t \\ t = 4 \text{ en } B = 6200 \end{array} \right\} b \cdot 1,0270\dots^4 = 6200$$

$$b = \frac{6200}{1,0270\dots^4} \approx 5570$$

Dus $B = 5570 \cdot 1,027^t$.

b $5570 \cdot 1,027^t = 10000$

De optie oplossen bij $5570 \cdot 1,027^x = 10000$ geeft $x = 21,9\dots$

Dus voor het eerst in het jaar $2020 + 22 = 2042$.

29 a Op 0 meter diepte dringt 100% rood licht door.

$P = 100 \cdot g^d$ met $g_{5 \text{ meter}} = \frac{8}{100} = 0,08$, dus $g = 0,08^{\frac{1}{5}} \approx 0,603$.
Dus $P = 100 \cdot 0,603^d$.

b Als 99% van het rode licht wordt geabsorbeerd, dan dringt 1% door.

Los op $100 \cdot 0,603^d = 1$.

De optie oplossen bij $100 \cdot 0,603^x = 1$ geeft $x = 9,10\dots$

Dus op een diepte van 9,1 meter wordt 99% van het rode licht geabsorbeerd.

c Het gaat om het halveren van P , dus er moet gelden dat $g^d = 0,5$.

$0,603^d = 0,5$

De optie oplossen bij $0,603^x = 0,5$ geeft $x = 1,37\dots$

Matthijs moet dus 1,4 meter dieper duiken.

30 a $N = b \cdot g^t$ met $g_{38 \text{ jaar}} = \frac{322}{50}$, dus $g = \left(\frac{322}{50}\right)^{\frac{1}{38}} = 1,0502\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,0502\dots^t \\ t = 35 \text{ en } N = 322 \end{array} \right\} b \cdot 1,0502\dots^{35} = 322$$

$$b = \frac{322}{1,0502\dots^{35}} \approx 58$$

Dus $N = 58 \cdot 1,050^t$.

b $g_{22 \text{ jaar}} = \frac{17}{6}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{17}{6}\right)^{\frac{1}{22}} = 1,0484\dots$

Deze groeifactor wijkt weinig af van die bij vraag a. In beide gevallen lijkt sprake van een toename van ongeveer 5% per jaar.

Bladzijde 23

31 a Lees bijvoorbeeld af dat P ongeveer halveert van 3 naar 1,5 tussen 2010 en 2014.

De halveringstijd is dus ongeveer 4 jaar.

b Lees af (2014; 1,5) en (2024; 0,25).

$g_{10 \text{ jaar}} = \frac{0,25}{1,5}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{0,25}{1,5}\right)^{\frac{1}{10}} = 0,8359\dots$

$0,8359\dots^t = 0,5$

De optie oplossen bij $0,8359\dots^x = 0,5$ geeft $x = 3,8685\dots$

De halveringstijd is 3 jaar en $0,8685\dots \cdot 12 \approx 10$ maanden (of 46 maanden).

c $P = b \cdot g^t$ met $g = 0,8359\dots$ (zie vraag b)

$$\left. \begin{array}{l} P = b \cdot 0,8359\dots^t \\ t = 4 \text{ en } P = 1,5 \end{array} \right\} b \cdot 0,8359\dots^4 = 1,5$$

$$b = \frac{1,50}{0,8359\dots^4} \approx 3,07$$

Dus $P = 3,07 \cdot 0,836^t$.

d $3,07 \cdot 0,836^t = 0,20$

De optie oplossen bij $3,07 \cdot 0,836^x = 0,20$ geeft $x = 15,2\dots$

Dus vanaf het jaar $2010 + 16 = 2026$.

32 a $P = b \cdot g^t$ met $g_{4 \text{ jaar}} = 2,99$, dus $g = 2,99^{\frac{1}{4}} = 1,3149\dots$

$$\left. \begin{array}{l} P = b \cdot 1,3149\dots^t \\ t = 5 \text{ en } P = 145\,200 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,3149\dots^5 = 145\,200 \\ b = \frac{145\,200}{1,3149\dots^5} \approx 36\,930 \end{array}$$

Dus $P = 36\,930 \cdot 1,315^t$.

b $T = b \cdot g^t$ met $g_{3 \text{ jaar}} = \frac{487\,590}{165\,010}$, dus $g = \left(\frac{487\,590}{165\,010}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,4349\dots$

$$\left. \begin{array}{l} T = b \cdot 1,4349\dots^t \\ t = 2 \text{ en } T = 165\,010 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,4349\dots^2 = 165\,010 \\ b = \frac{165\,010}{1,4349\dots^2} \approx 80\,130 \end{array}$$

Dus $T = 80\,130 \cdot 1,435^t$.

c $80\,130 \cdot 1,435^t = 250\,000$

De optie oplossen bij $80\,130 \cdot 1,435^x = 250\,000$ geeft $x = 3,150\dots$

Dat is 3 jaar en $0,150\dots \cdot 12 \approx 1,8$ maanden.

Dus in februari 2022.

d $S = b \cdot g^t$ met $g_{2,5 \text{ jaar}} = 2$, dus $g = 2^{\frac{1}{2,5}} = 1,3195\dots$

$$\left. \begin{array}{l} S = b \cdot 1,3195\dots^t \\ t = 5 \text{ en } P = 4320 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,3195\dots^5 = 4320 \\ b = \frac{4320}{1,3195\dots^5} = 1080 \end{array}$$

Dus $S = 1080 \cdot 1,320^t$.

e De laatste 6 maanden van 2024 liggen tussen $t = 5,5$ en $t = 6$.

Dus $1080 \cdot 1,320^6 - 1080 \cdot 1,320^{5,5} \approx 740$ snellaadpunten.

Bladzijde 24

C3 a $g_{\text{kwartier}} = 1,032$

$$g_{\text{uur}} = 1,032^4 \approx 1,134$$

De toename is $13,4\%$ per uur.

b $g_{\text{dag}} = 0,235$

$$g_{\text{uur}} = 0,235^{\frac{1}{24}} \approx 0,941$$

De afname is $5,9\%$ per uur.

C4 a $H = b \cdot g^t$ met $g_{15 \text{ jaar}} = 0,5$, dus $g = 0,5^{\frac{1}{15}} = 0,9548\dots$

$$\left. \begin{array}{l} H = b \cdot 0,9548\dots^t \\ t = 5 \text{ en } P = 508 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,9548\dots^5 = 508 \\ b = \frac{508}{0,9548\dots^5} \approx 640 \end{array}$$

Dus $H = 640 \cdot 0,955^t$.

b $N = b \cdot g^t$ met $g_{5 \text{ dagen}} = \frac{200}{800}$, dus $g = \left(\frac{200}{800}\right)^{\frac{1}{5}} = 0,7578\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,7578\dots^t \\ t = 2 \text{ en } N = 800 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,7578\dots^2 = 800 \\ b = \frac{800}{0,7578\dots^2} \approx 1393 \end{array}$$

Dus $N = 1393 \cdot 0,758^t$.

c $J = b \cdot g^t$ met $g_{5 \text{ weken}} = 1,7$, dus $g = 1,7^{\frac{1}{35}} = 1,0152\dots$

$$\left. \begin{array}{l} J = b \cdot 1,0152\dots^t \\ t = 21 \text{ en } J = 17,2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,0152\dots^{21} = 17,2 \\ b = \frac{17,2}{1,0152\dots^{21}} = 12,51\dots \end{array}$$

$t = 10$ geeft $J = 12,51\dots \cdot 1,0152\dots^{10} \approx 14,6$

Alternatieve uitwerking

$$g_{5 \text{ weken}} = 1,7, \text{ dus } g_{\text{dag}} = 1,7^{\frac{1}{35}} = 1,0152\dots$$

Het verschil tussen 3 weken en 10 dagen is 11 dagen.

$$J = \frac{17,2}{1,0152\dots^{11}} \approx 14,6$$

9.3 Exponentiële en lineaire groei

Bladzijde 25

- V4** **a** De toename is $547 - 309 = 238$ muurhagedissen.
Dat is gemiddeld $\frac{238}{4} = 59,5$ muurhagedissen per jaar.
- b** Bij 1 januari 2010 hoort $t = 0$. Dus $309 - 2 \cdot 59,5 = 190$ muurhagedissen.
- c** $N = 59,5t + 190$

Bladzijde 26

- V5** **a** $H = at + b$ met $a = \frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{600 - 552}{10 - 4} = 8$
- $$\left. \begin{array}{l} H = 8t + b \\ t = 4 \text{ en } H = 552 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 \cdot 4 + b = 552 \\ 32 + b = 552 \\ b = 520 \end{array}$$

Dus $H = 8t + 520$.

- b** Bij $t = 2$ is $M = 600$ en bij $t = 10$ is $M = 200$.

$$M = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{200 - 600}{10 - 2} = -50$$

$$\left. \begin{array}{l} M = -50t + b \\ t = 2 \text{ en } M = 600 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -50 \cdot 2 + b = 600 \\ -100 + b = 600 \\ b = 700 \end{array}$$

Dus $M = -50t + 700$.

- c** Bij $t = 4$ is $N = 15\,800$ en bij $t = 9$ is $N = 19\,040$.

$$N = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{19\,040 - 15\,800}{9 - 4} = 648$$

$$\left. \begin{array}{l} N = 648t + b \\ t = 4 \text{ en } N = 15\,800 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 648 \cdot 4 + b = 15\,800 \\ 2592 + b = 15\,800 \\ b = 13\,208 \end{array}$$

Dus $N = 648t + 13\,208$.

- 33** **a** De toename is $5745 - 3738 = 2007$ bedrijven per 9 jaar.

Dat is een toename van $\frac{2007}{9} = 223$ bedrijven per jaar.

- b** $g_{9 \text{ jaar}} = \frac{87\,350}{56\,300}$
- $$g_{\text{jaar}} = \left(\frac{87\,350}{56\,300} \right)^{\frac{1}{9}} \approx 1,050$$

Bladzijde 28

- 34** **a** $N = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{35 - 18}{9 - 5} = 4,25$

$$\left. \begin{array}{l} N = 4,25t + b \\ t = 5 \text{ en } N = 18 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4,25 \cdot 5 + b = 18 \\ 21,25 + b = 18 \\ b = -3,25 \end{array}$$

$N = 4,25t - 3,25$

- b** $N = b \cdot g^t$ met $g = \left(\frac{35}{18} \right)^{\frac{1}{4}} = 1,1808\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,1808\dots^t \\ t = 5 \text{ en } N = 18 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,1808\dots^5 = 18 \\ b = \frac{18}{1,1808\dots^5} \approx 8 \end{array}$$

$N = 8 \cdot 1,181^t$

- c** Bij lineaire toename constante stijging.
Bij exponentiële toename toenemende stijging.

35

a $H_v = -18t + 80$ en $H_d = 80 \cdot 0,85^t$

b $-18t + 80 = 0$

De optie oplossen bij $-18x + 80 = 0$ geeft $x = 4,44...$

$t = 4,44...$ geeft $H_d = 80 \cdot 0,85^{4,44...} \approx 39$

Dus de diepvriesspinazie bevat op dat moment nog 39 mg vitamine C.

c 40% van 80 mg is $0,4 \cdot 80 = 32$ mg.

$80 \cdot 0,85^t = 32$.

De optie oplossen bij $80 \cdot 0,85^x = 32$ geeft $x = 5,63...$

Dus dit is na 5 dagen en $0,63... \cdot 24 \approx 15$ uur (of 135 uur).

Alternatieve uitwerking

40% van de beginhoeveelheid, dus $0,85^t = 0,4$.

De optie oplossen bij $0,85^x = 0,4$ geeft $x = 5,63...$

Dus dit is na 5 dagen en $0,63... \cdot 24 \approx 15$ uur (of 135 uur).

36

a Bij 1 april hoort $t = 1$ en bij 1 juli hoort $t = 4$.

$L_A = at + b$ met $a = \frac{\Delta L_A}{\Delta t} = \frac{9,1 - 6,4}{4 - 1} = 0,9$

$$\left. \begin{array}{l} L_A = 0,9t + b \\ t = 1 \text{ en } L_A = 6,4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,9 \cdot 1 + b = 6,4 \\ 0,9 + b = 6,4 \\ b = 5,5 \end{array}$$

Dus $L_A = 0,9t + 5,5$.

$L_B = at + b$ met $a = \frac{\Delta L_B}{\Delta t} = \frac{9,6 - 6,3}{4 - 1} = \frac{3,3}{3} = 1,1$

$$\left. \begin{array}{l} L_B = 1,1t + b \\ t = 1 \text{ en } L_B = 6,3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,1 \cdot 1 + b = 6,3 \\ 1,1 + b = 6,3 \\ b = 5,2 \end{array}$$

Dus $L_B = 1,1t + 5,2$.

b Er moet gelden dat $L_B = L_A + 2$, dus $1,1t + 5,2 = 0,9t + 5,5 + 2$.

De optie oplossen bij $1,1x + 5,2 = 0,9x + 5,5 + 2$ geeft $x = 11,5$

Op 1 februari 2026 is $t = 11$, dus in de maand februari van 2026 is de haarlengte van Bo 2 cm meer dan de haarlengte van Ans.

c $L_A = 25$

De optie oplossen bij $0,9x + 5,5 = 25$ geeft $x = 21,66...$

$L_B = 25$

De optie oplossen bij $1,1x + 5,2 = 25$ geeft $x = 18$

Dus vanaf $t \approx 21,66...$ zijn de haarlengten weer langer dan 25 cm.

Op 1 december 2027 is $t = 21$. Dan is $t = 21,66...$ nog $0,66... \cdot 31 = 20,6...$ dagen vanaf 1 december 2027.

Dus vanaf 21 december 2027 kunnen Ans en Bo voor het eerst weer haar doneren.

37 a $K_W = b \cdot g^t$ met $g = \left(\frac{119,9}{113,5}\right)^{\frac{1}{11}} = 1,0049\dots$

$$\left. \begin{array}{l} K_W = b \cdot 1,0049\dots^t \\ t = 2 \text{ en } K_W = 113,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,0049\dots^2 = 113,5 \\ b = \frac{113,5}{1,0049\dots^2} \approx 112,4 \end{array}$$

$$K_W = 112,4 \cdot 1,005^t$$

$$K_E = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta K_E}{\Delta t} = \frac{9,60 - 9,76}{10 - 2} = -0,02$$

$$\left. \begin{array}{l} K_E = -0,02t + b \\ t = 2 \text{ en } K_E = 9,76 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,02 \cdot 2 + b = 9,76 \\ -0,04 + b = 9,76 \\ b = 9,8 \end{array}$$

$$\text{Dus } K_E = -0,02t + 9,8.$$

b In 2020 geldt $K_W = 112,4$ en $K_E = 9,8$.

$$\text{Dus in 2020 was dat } \frac{9,8}{112,4} \cdot 100\% \approx 8,7\%.$$

$$\text{In 2033 is } K_W = 119,9 \text{ en } t = 13 \text{ geeft } K_E = -0,02 \cdot 13 + 9,8 = 9,54.$$

$$\text{Dus in 2033 is dat } \frac{9,54}{119,9} \cdot 100\% \approx 8,0\%.$$

38 Buiten Europa geldt $K_W - K_E = 112,4 \cdot 1,005^t - (-0,02t + 9,8)$.

$$112,4 \cdot 1,005^t - (-0,02t + 9,8) = 114$$

$$\text{Voer in } y_1 = 112,4 \cdot 1,005^t - (-0,02x + 9,8) \text{ en } y_2 = 114.$$

De optie snijpunt geeft $x = 18,7\dots$

Uit de grafieken volgt dat er bij $t = 19$ voor het eerst meer dan 114 miljoen ton stikstof wordt gebruikt.

Dat is in het jaar $2020 + 19 = 2039$.

39 a Tussen $t = 0$ en $t = 2$ geldt $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{300 - 250}{2 - 0} = 25$.

$$\text{Tussen } t = 2 \text{ en } t = 4 \text{ geldt } \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{360 - 300}{4 - 2} = 30.$$

Er is dus geen sprake van een vaste toename per tijdseenheid.

b Tussen $t = 0$ en $t = 2$ geldt $g = \left(\frac{300}{250}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,095\dots$

$$\text{Tussen } t = 2 \text{ en } t = 4 \text{ geldt } g = \left(\frac{360}{300}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,095\dots$$

Er is dus wel sprake van een vaste groeifactor per tijdseenheid.

Bladzijde 31

40 model I: $\frac{6,14}{4,14} = 1,483\dots, \frac{9,08}{6,14} = 1,478\dots, \frac{14,83}{9,08} = 1,633\dots$

$$\text{model II: } \frac{4,14}{2,80} = 1,478\dots, \frac{6,14}{4,14} = 1,483\dots, \frac{9,08}{6,14} = 1,478\dots$$

Dus model II komt het best overeen met een exponentieel verband.

$$\text{De groeifactor per jaar is } \left(\frac{9,08}{2,80}\right)^{\frac{1}{30}} \approx 1,040.$$

Bladzijde 32

41 a $\frac{889}{1013} = 0,8775\dots$, $\frac{780}{889} = 0,8773\dots$, $\frac{685}{780} = 0,8782\dots$ en $\left(\frac{406}{685}\right)^{\frac{1}{4}} = 0,8774\dots$

De groeifactoren per jaar zijn ongeveer gelijk, dus de tabel stemt overeen met een exponentieel verband tussen P en h .

$$96,9 - 100,3 = -3,4, 93,6 - 96,9 = -3,3, 90,2 - 93,6 = -3,4 \text{ en } \frac{76,7 - 90,2}{7 - 3} = -3,375$$

De verschillen per jaar zijn ongeveer gelijk, dus de tabel stemt overeen met een lineair verband tussen T en h .

b $P = 1013 \cdot g^h$ met $g = \left(\frac{406}{1013}\right)^{\frac{1}{7}} \approx 0,878$, dus $P = 1013 \cdot 0,878^h$.

$$T = ah + 100,3 \text{ met } a = \frac{\Delta T}{\Delta h} = \frac{76,7 - 100,3}{7 - 0} \approx -3,371, \text{ dus } T = -3,371h + 100,3.$$

c Bij 5400 m hoort $h = 5,4$.

$$h = 5,4 \text{ geeft } T = -3,371 \cdot 5,4 + 100,3 \approx 82$$

Dus 82°C .

d $1013 \cdot 0,878^h = 320$

De optie oplossen bij $1013 \cdot 0,878^x = 320$ geeft $x = 8,856\dots$

Dus Mount Everest is 8,86 km hoog.

42 a In $32 - 21 = 11$ verdiepingen $37,98 - 21,75 = 16,23$ miljoen euro erbij.

$$\text{Dus } \frac{16,23}{11} = 1,475\dots \text{ miljoen euro meer per verdieping.}$$

Bij 25 verdiepingen zijn de bouwkosten dus $21,75 + 4 \cdot 1,475\dots \approx 27,65$ miljoen euro.

b $\frac{11,25 - 7,5}{8 - 0} = 0,468\dots$ en $\frac{15,25 - 11,25}{14 - 8} = 0,666\dots$

De bouwkosten per verdieping zijn niet gelijk, dus er bestaat geen lineair verband tussen K en n .

c $\left(\frac{11,25}{7,5}\right)^{\frac{1}{8}} = 1,0519\dots$, $\left(\frac{15,25}{11,25}\right)^{\frac{1}{6}} = 1,0520\dots$, $\left(\frac{21,75}{15,25}\right)^{\frac{1}{7}} = 1,0520\dots$ en $\left(\frac{37,98}{21,75}\right)^{\frac{1}{11}} = 1,0519\dots$

De groeifactoren per verdieping zijn ongeveer gelijk, dus de waarden in de tabel stemmen overeen met een exponentieel verband.

d De groeifactor per verdieping is ongeveer 1,052 (zie vraag c).

$$1,052^2 \approx 1,107, \text{ dus een toename van } 10,7\%.$$

e $g = 1,0519\dots$ (zie vraag c), dus bij 25 verdiepingen zijn de bouwkosten $21,75 \cdot 1,0519\dots^4 \approx 26,64$ miljoen euro.

Het verschil met het antwoord van vraag a is ongeveer $27,65 - 26,64 = 1,01$ miljoen euro.

f $K = 7,5 \cdot 1,052^n$ (zie vraag c)

$$7,5 \cdot 1,052^n = 19,5$$

De optie oplossen bij $7,5 \cdot 1,052^x = 19,5$ geeft $x = 18,8\dots$

Dus ze kan 18 verdiepingen met appartementen bouwen.

Bladzijde 33

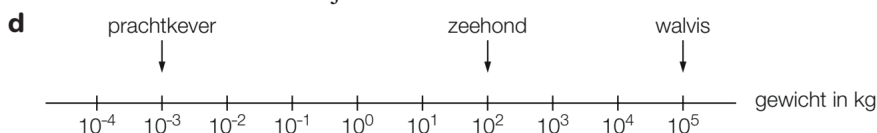
43 a De walvis is $\frac{100000}{10} = 10000$ keer zo zwaar als de wasbeer.

$$\text{De walvis is } \frac{100000}{0,005} = 20000000 \text{ keer zo zwaar als de kolibrie.}$$

b $100000 \text{ kg} = 100000000 \text{ gram}$, dus ongeveer 100000000 mm oftewel 100 km .

c $100000 \text{ kg} = 100 \text{ duizend kg}$, dus ongeveer 100 mm oftewel 10 cm .

Het bezwaar is dat de gewichten van de lichte dieren dan heel dicht op elkaar staan en niet meer af te lezen zijn.

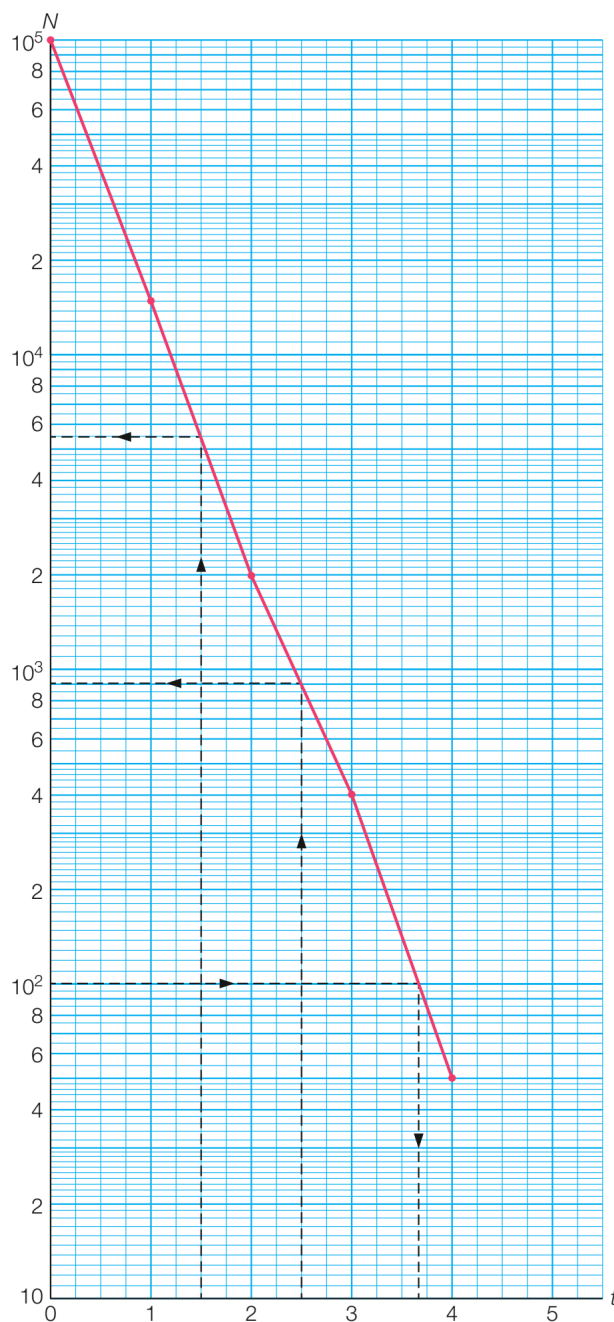


e Tussen twee maatstreepjes wordt steeds met 10 vermenigvuldigd.

Bladzijde 34

- 44** **a** Bij $y = 9,5$ en $y = 2,4$ is een lijn getekend.
b Bij A hoort 1,3, bij B hoort 7,5, bij C hoort 23 en bij D hoort 55.
c De getallen worden allemaal $10^3 = 1000$ keer zo groot, dus bij B hoort 7500, bij C hoort 23 000 en bij D hoort 55 000.

- 45** **a** Zie de figuur hiernaast.
b Aflezen bij $t = 1,5$ geeft $N = 5500$.
 Aflezen bij $t = 2,5$ geeft $N = 900$.
c Aflezen bij $N = 100$ geeft $t = 3,7$.
 Dus na ongeveer 3,7 minuten.



Bladzijde 35

46 a

t	0	2	4	6
$N = 4 \cdot 3^t$	4	36	324	2916

b Zie de rode grafiek hiernaast.

c

t	0	2	4	6
$N = 5000 \cdot 0,6^t$	5000	1800	648	233

Zie de blauwe grafiek hiernaast.

d Het zijn (rechte) lijnen.

47 Grafiek II is een rechte lijn op logaritmisch papier, dus hierbij hoort een exponentieel verband. Bij $t = 3$ hoort $N_{II} = 80$ en bij $t = 7$ hoort $N_{II} = 400$.

$$N_{II} = b \cdot g^t \text{ met } g = \left(\frac{400}{80}\right)^{\frac{1}{4}} = 1,4953\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N_{II} = b \cdot 1,4953\dots^t \\ t = 3 \text{ en } N_{II} = 80 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,4953\dots^3 = 80 \\ b = \frac{80}{1,4953\dots^3} \approx 23,9 \end{array}$$

$$\text{Dus } N_{II} = 23,9 \cdot 1,495^t.$$

Bij grafiek I hoort een lineair verband.

Bij $t = 2$ hoort $N_I = 200$ en bij $t = 7$ hoort $N_I = 400$.

$$N_I = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta N_I}{\Delta t} = \frac{400 - 200}{7 - 2} = 40$$

$$\left. \begin{array}{l} N_I = 40t + b \\ t = 2 \text{ en } N_I = 200 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 40 \cdot 2 + b = 200 \\ 80 + b = 200 \\ b = 120 \end{array}$$

$$\text{Dus } N_I = 40t + 120.$$

Bladzijde 36

48 a Bij plant B, want de bijbehorende grafiek is een rechte lijn op logaritmisch papier.

Bij $t = 5$ hoort $L_B = 80$ en

bij $t = 30$ hoort $L_B = 300$.

$$L_B = b \cdot g^t \text{ met } g = \left(\frac{300}{80}\right)^{\frac{1}{25}} = 1,0542\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} L_B = b \cdot 1,0542\dots^t \\ t = 5 \text{ en } L_B = 80 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,0542\dots^5 = 80 \\ b = \frac{80}{1,0542\dots^5} \approx 61 \end{array}$$

$$\text{Dus } L_B = 61 \cdot 1,054^t.$$

b Zie lijn D hiernaast.

c Plant E heeft dezelfde groeifactor als plant B, dus $L_E = b \cdot 1,0542\dots^t$ (zie vraag a).

$$\left. \begin{array}{l} L_E = b \cdot 1,0542\dots^t \\ t = 10 \text{ en } L_E = 30 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,0542\dots^{10} = 30 \\ b = \frac{30}{1,0542\dots^{10}} \approx 17,7 \end{array}$$

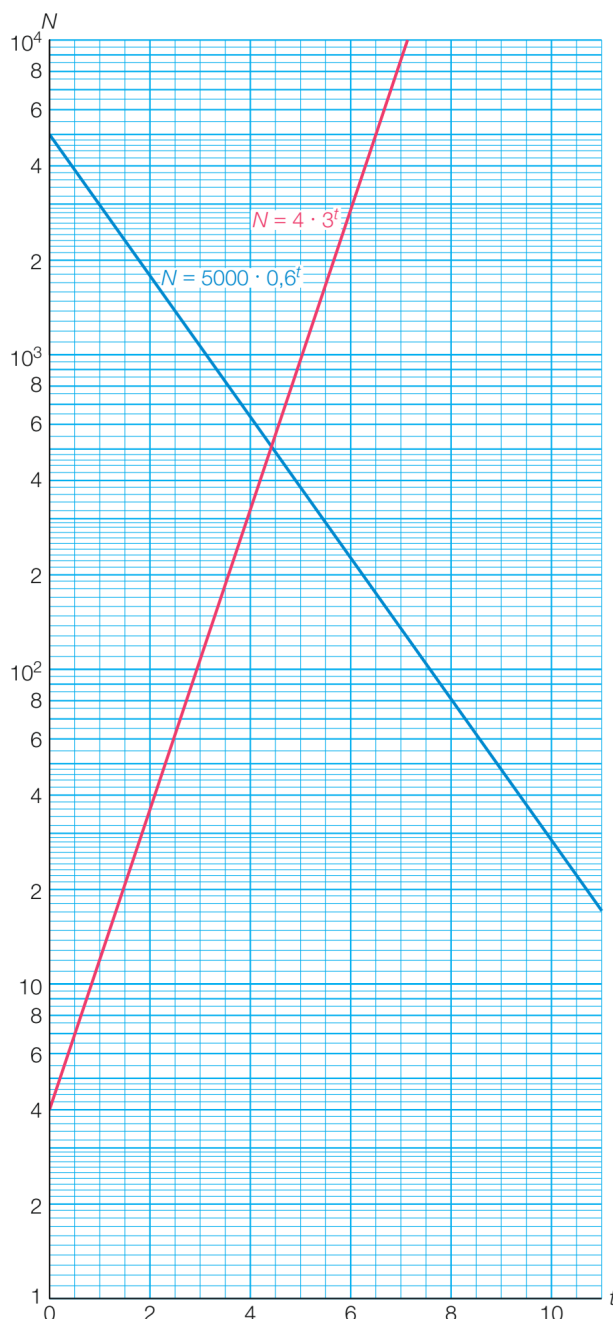
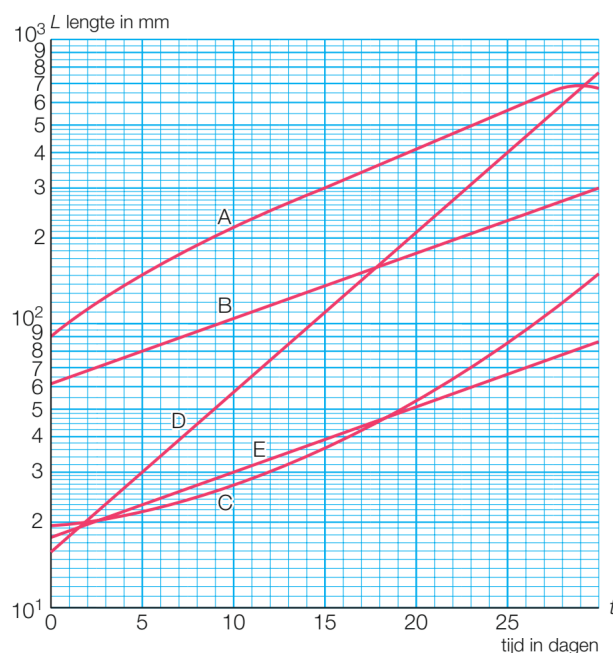
Dus de lijn gaat door ongeveer $(0, 18)$ en $(10, 30)$

Zie lijn E hiernaast.

Alternatieve uitwerking

Omdat plant E dezelfde groeifactor heeft als plant B zijn de lijnen evenwijdig.

Dus teken lijn E, evenwijdig aan lijn B, door het punt $(10, 30)$.



- 49 a** Bij $t = 1$ hoort $N_A = 2000$ en bij $t = 4$ hoort $N_A = 400$.

$$N_A = b \cdot g^t \text{ met } g = \left(\frac{400}{2000}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,5848\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N_A = b \cdot 0,5848\dots^t \\ t = 1 \text{ en } N_A = 2000 \end{array} \right\} b \cdot 0,5848\dots^1 = 2000$$

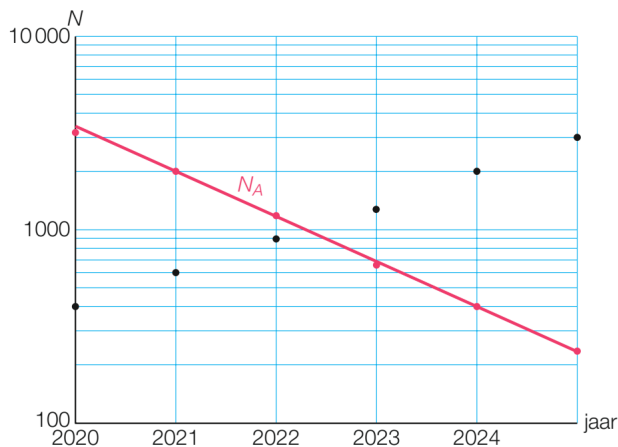
$$b = \frac{2000}{0,5848\dots^1} \approx 3420$$

$$\text{Dus } N_A = 3420 \cdot 0,585^t.$$

- b** Op logaritmisch papier liggen de punten bij benadering op een stijgende (rechte) lijn, zie hiernaast.

Bij N_B is er dus sprake van een exponentieel verband met $g > 1$ en dus van een toenemende stijging.

- c** Je kunt ook aan de getallen in de tabel zien dat er sprake is van een toenemende stijging.
Het aantal broedparen van vogelsoort B neemt in de periode 2024-2025 met 1000 toe.
Het aantal broedparen van vogelsoort A neemt in die periode met veel minder dan 1000 af.
Het aantal broedparen van de soorten A en B samen is dus toegenomen.



Alternatieve uitwerking

In 2024 zijn er van de soorten A en B samen ongeveer $400 + 2000 = 2400$ broedparen.

In 2025 zijn dat ongeveer $240 + 3000 = 3240$ broedparen.

Het aantal broedparen van de soorten A en B samen is dus toegenomen.

Bladzijde 37

- 50 a** De lijn gaat door $(1990, 10^6)$ en $(2010, 10^9)$.

$$g_{20 \text{ jaar}} = \frac{10^9}{10^6}, \text{ dus } g_{2 \text{ jaar}} = \left(\frac{10^9}{10^6}\right)^{\frac{1}{10}} = 1,9952\dots$$

De groeifactor per twee jaar is ongeveer 2, dat komt overeen met de wet van Moore.

- b** Bij $t = 19$ hoort $N = 10^6$ en bij $t = 39$ hoort $N = 10^9$.

$$N = b \cdot g^t \text{ met } g = \left(\frac{10^9}{10^6}\right)^{\frac{1}{20}} = 1,4125\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,4125\dots^t \\ t = 19 \text{ en } N = 10^6 \end{array} \right\} b \cdot 1,4125\dots^{19} = 10^6$$

$$b = \frac{10^6}{1,4125\dots^{19}} \approx 1400$$

$$\text{Dus } N = 1400 \cdot 1,413^t.$$

- c** In 2032 geldt $t = 2032 - 1971 = 61$.

$$\text{Luuk: } t = 61 \text{ geeft } N = 1400 \cdot 1,413^{61} = 2,01\dots \cdot 10^{12}$$

$$\text{Maria: } N = 2300 \cdot g^t \text{ met } g_{2 \text{ jaar}} = 2, \text{ dus } g = 2^{\frac{1}{2}} = 1,414\dots$$

$$t = 61 \text{ geeft } N = 2300 \cdot 1,414\dots^{61} = 3,49\dots \cdot 10^{12}$$

$$\text{De voorspelling van Maria is } \frac{3,49\dots - 2,01\dots}{2,01\dots} \cdot 100\% \approx 73,1\% \text{ groter.}$$

Bladzijde 38

- 51 a** Soort B heeft een gewicht van 1 kg en een populatiedichtheid van $10^2 = 100$ dieren per km^2 .

Soort C heeft een gewicht van $5 \cdot 10^2 = 500$ kg en een populatiedichtheid van 1 dier per km^2 .

- b** In de figuur zie je dat bij een lagere waarde van g over het algemeen een hogere waarde van P hoort.

Dus ja, lichtere zoogdieren wonen over het algemeen met meer zoogdieren op een km^2 .

- c** Aflezen bij $g = 30$ geeft $P = 6$, dus 6 dieren per km^2 .

Er leven dus $3500 \cdot 6 = 21\,000$ van deze dieren in dit gebied.

- d** $A(0,05; 1000)$, $B(1, 100)$ en $C(500, 1)$

$$\frac{100 - 1000}{1 - 0,05} = -947,3\dots \text{ en } \frac{1 - 100}{500 - 1} = -0,19\dots$$

De verschillen per kg lichaamsgewicht zijn niet gelijk, dus er is geen sprake van een lineair verband.

$$\left(\frac{100}{1000}\right)^{\frac{1}{0,95}} = 0,088\dots \text{ en } \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{499}} = 0,99\dots$$

De groeifactoren per kg lichaamsgewicht zijn niet gelijk, dus er is geen sprake van een exponentieel verband.

Bladzijde 39

- C5**
- Er is sprake van een halveringstijd, dus
- N_U
- neemt exponentieel af.

$$g_{12 \text{ jaar}} = 0,5, \text{ dus } g = (0,5)^{\frac{1}{12}} \approx 0,944.$$

$$\text{Dus } N_U = 60 \cdot 0,944^t$$

Elke maand een vaste afname, dus N_L neemt lineair af.

$$N_L = at + b \text{ met } a = 12 \cdot -0,100 = -1,2$$

$$\left. \begin{array}{l} N_L = -1,2t + b \\ t = 3 \text{ en } N_L = 50 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,2 \cdot 3 + b = 50 \\ -3,6 + b = 50 \end{array}$$

$$b = 53,6$$

$$\text{Dus } N_L = -1,2t + 53,6.$$

- C6**
- a
- $\frac{40,07 - 48,24}{3 - 0} = -2,723\dots, \frac{33,28 - 40,07}{6 - 3} = -2,263\dots, \frac{25,98 - 33,28}{10 - 6} = -1,825$

De verschillen zijn niet gelijk, dus de gegevens in de tabel komen niet overeen met een lineair verband.

$$\text{b } \left(\frac{40,07}{48,24}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,9400\dots, \left(\frac{33,28}{40,07}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,9399\dots \text{ en } \left(\frac{25,98}{33,28}\right)^{\frac{1}{4}} = 0,9399\dots$$

De groeifactoren per jaar zijn ongeveer gelijk, dus de gegevens in de tabel komen overeen met een exponentieel verband.

- C7**
- a Bij
- $t = 6$
- hoort
- $N = 3000$
- .

Bij $N = 50$ hoort $t = 2$.

$$\text{b } N = b \cdot g^t \text{ met } g = \left(\frac{3000}{50}\right)^{\frac{1}{4}} = 2,7831\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 2,7831\dots^t \\ t = 2 \text{ en } N = 50 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 2,7831\dots^2 = 50 \\ b = \frac{50}{2,7831\dots^2} \approx 6,45 \end{array}$$

$$\text{Dus } N = 6,45 \cdot 2,7831^t.$$

9.4 Herleiden en redeneren**Bladzijde 40**

- 52** a $\frac{1}{4^t} = 4^{-t}$
 b $4^{-t} = (4^{-1})^t$
 c $N = 15 \cdot \frac{1}{4^t} = 15 \cdot 4^{-t} = 15 \cdot (4^{-1})^t = 15 \cdot 0,25^t$
 d Een exponentieel verband.

Bladzijde 41

- 53** a $N = 2 \cdot 0,8^{-t} = 2 \cdot (0,8^{-1})^t = 2 \cdot 1,25^t$
 b $N = \frac{4}{0,2^t} = 4 \cdot \frac{1}{0,2^t} = 4 \cdot 0,2^{-t} = 5 \cdot (0,2^{-1})^t = 4 \cdot 5^t$
 c $N = \frac{2 \cdot 20^t}{20^{2t}} = 2 \cdot \frac{20^t}{20^{2t}} = 2 \cdot 20^{-t} = 2 \cdot (20^{-1})^t = 2 \cdot 0,05^t$
- 54** a $K = 3,2 \cdot \frac{5,6}{4 \cdot 1,25^t} = 3,2 \cdot \frac{5,6}{4} \cdot \frac{1}{1,25^t} = 4,48 \cdot (1,25^{-1})^t = 4,48 \cdot 0,8^t$
 b $L = 10^{2x+3} = 10^{2x} \cdot 10^3 = 1000 \cdot (10^2)^x = 1000 \cdot 100^x$
 c $M = 8 \cdot 2,4^{3-t} = 8 \cdot 2,4^3 \cdot 2,4^{-t} = 110,592 \cdot (2,4^{-1})^t \approx 111 \cdot 0,417^t$
 Dus $M = 111 \cdot 0,417^t$.

- 55** a $N = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t = 5^2 \cdot (5^{-1})^t = 5^2 \cdot 5^{-t} = 5^{2-t}$
 b $O = \frac{36}{\left(\frac{1}{6}\right)^t} = 36 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^t} = 36 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-t} = 6^2 \cdot (6^{-1})^{-t} = 6^2 \cdot 6^t = 6^{t+2}$

- 56 a** $P = 2 \cdot 2,5^t + \frac{60}{0,4^t} = 2 \cdot 2,5^t + 60 \cdot \frac{1}{0,4^t} = 2 \cdot 2,5^t + 60 \cdot (0,4)^{-t}$
 $= 2 \cdot 2,5^t + 60 \cdot (0,4^{-1})^t = 2 \cdot 2,5^t + 60 \cdot 2,5^t = 62 \cdot 2,5^t$
- b** $M = 100 \left(2 + \frac{25}{12 \cdot 0,9^t} \right) = 200 + \frac{2500}{12 \cdot 0,9^t} = 200 + \frac{2500}{12} \cdot \frac{1}{0,9^t}$
 $= 200 + \frac{2500}{12} \cdot (0,9)^{-t} = 200 + \frac{2500}{12} \cdot (0,9^{-1})^t \approx 200 + 208 \cdot 1,11^t$
Dus $M = 200 + 208 \cdot 1,11^t$.

Bladzijde 42

- 57 a** Invullen van $b = 50$ en $k = 1,39$ geeft $B = 50 \cdot 2,718^{-1,39t}$.
 $B = 50 \cdot 2,718^{-1,39t} = 50 \cdot (2,718^{-1,39})^t \approx 50 \cdot 0,249^t$
Dus $B = 50 \cdot 0,249^t$.
- b** $0,249^t = 0,5$
De optie oplossen bij $0,249^x = 0,5$ geeft $x = 0,4985...$
De halveringstijd is dus $60 \cdot 0,4985... \approx 30$ minuten.
- c** Invullen van $b = 15$ geeft $B = 15 \cdot 2,718^{-kt}$.
Bij $t = 1$ moet gelden dat $B = 0,5 \cdot 15 = 7,5$.
 $7,5 = 15 \cdot 2,718^{-k}$
De optie oplossen bij $7,5 = 15 \cdot 2,718^{-x}$ geeft $x = 0,6932...$
Dus $k \approx 0,693$.

Alternatieve uitwerking

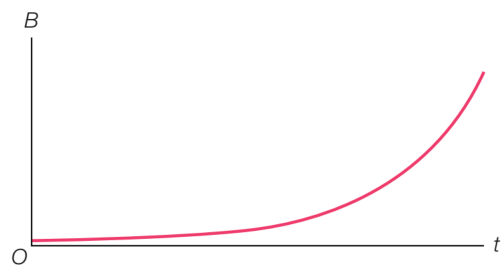
De halveringstijd is 1 uur. Er moet dus gelden dat $2,718^{-k} = 0,5$.
De optie oplossen bij $0,5 = 2,718^{-x}$ geeft $x = 0,6932...$
Dus $k \approx 0,693$.

- d** Invullen van $b = 15$ en $k = 0,693$ geeft $B = 15 \cdot 2,718^{-0,693t}$.
 $15 \cdot 2,718^{-0,693t} = 1$
De optie oplossen bij $15 \cdot 2,718^{-0,693x} = 1$ geeft $x = 3,9081...$
 $60 \cdot 3,9081... = 234,4...$ minuten
Dus na 235 minuten (of 3 uur en 55 minuten).

Alternatieve uitwerking

$g_{\text{uur}} = 0,5$, dus $g_{\text{minuut}} = 0,5^{\frac{1}{60}} = 0,9885...$
Los op $15 \cdot 0,9885...^t = 1$
De optie oplossen bij $15 \cdot 0,9885...^x = 1$ geeft $x = 234,41...$
Dus na 235 minuten (of 3 uur en 55 minuten)

- 58 a** Voer in $y = \frac{100}{9 \cdot 0,926^x}$.
Zie de schets hiernaast.
- b** $\frac{100}{9 \cdot 0,926^t} = 960$
De optie oplossen bij $\frac{100}{9 \cdot 0,926^x} = 960$ geeft $x = 57,99...$
Dus in $1937 + 58 = 1995$.
- c** $B = \frac{100}{9 \cdot 0,926^t} = \frac{100}{9} \cdot \frac{1}{0,926^t} = \frac{100}{9} \cdot 0,926^{-t} = \frac{100}{9} \cdot (0,926^{-1})^t \approx 11 \cdot 1,080^t$
Dus $B = 11 \cdot 1,080^t$.



- d** De beginhoeveelheid van de formule uit vraag c is 11, dus 11 bevers.

Alternatieve uitwerking

$t = 0$ geeft $B = \frac{100}{9 \cdot 0,926^0} = 11,11...$, dus 11 bevers.

- e** De groeifactor van de formule uit vraag c is 1,080, dus een jaarlijkse groei van 8,0%.

Bladzijde 43

- 59** **a** Elke stap gaat de hoeveelheid keer 0,5, dus halveert de hoeveelheid. Dus bij een groot aantal stappen blijft er vrijwel niets over (ongeveer 0).
b Als t heel groot wordt nadert $90 \cdot 0,5^t$ tot 0, dus dan zal $A = 100 - 90 \cdot 0,5^t$ tot 100 naderen.
c Als t toeneemt, dan neemt $0,5^t$ af, dus dan neemt $90 \cdot 0,5^t$ af, dus neemt $100 - 90 \cdot 0,5^t$ toe.
d Als t toeneemt neemt A toe, dus de uitkomst wordt groter voor grotere t -waarden. De grafiek van A is dus stijgend.

Bladzijde 45

- 60** **a** Als t heel groot wordt, nadert $0,74^t$ tot 0. Dan wordt $5,5 \cdot 0,74^t \approx 0$
en $2 + 5,5 \cdot 0,74^t \approx 2$. Dus dan wordt $\frac{5000}{2 + 5,5 \cdot 0,74^t} \approx \frac{5000}{2} = 2500$.

De grenswaarde is dus 2500 vissen.

- b** Als t toeneemt, dan neemt $0,74^t$ af, dan neemt $5,5 \cdot 0,74^t$ af, en
dan neemt $2 + 5,5 \cdot 0,74^t$ af, dus dan neemt $\frac{5000}{2 + 5,5 \cdot 0,74^t}$ toe.

De grafiek van N is dus stijgend.

- 61** **a** Als t toeneemt, dan neemt $0,5^t$ af, dus dan neemt $32 \cdot 0,5^t$ af, dus dan neemt $1 + 32 \cdot 0,5^t$ af,
dus dan neemt $\frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t}$ toe.

Dus de zonnebloem wordt voortdurend hoger.

- b** $t = 3$ geeft $h = \frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^3} = 52$

Dus de zonnebloem is dan 52 cm hoog.

- c** Als t heel groot wordt, nadert $0,5^t$ tot 0. Dan wordt $32 \cdot 0,5^t \approx 0$ en $1 + 32 \cdot 0,5^t \approx 1$.

Dus dan wordt $\frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t} \approx \frac{260}{1} = 260$.

Dus de grenswaarde is 260 cm.

- d** $\frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t} = 250$

De optie oplossen bij $\frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^x} = 250$ geeft $x = 9,643...$

Dus vanaf $t = 9,7$.

- 62** **a** Als t toeneemt, dan neemt $0,7^t$ af, dus dan neemt $1 - 0,7^t$ toe, dus dan neemt $1200(1 - 0,7^t)$ ook toe.
De grafiek van N is dus stijgend.

- b** Als t heel groot wordt, nadert $0,7^t$ tot 0. Dan wordt $1 - 0,7^t \approx 1$.

Dus dan wordt $1200(1 - 0,7^t) \approx 1200 \cdot 1 = 1200$, dus het verzadigingsniveau is 1200 leerlingen.

De lijn is $N = 1200$.

De praktische betekenis van het verzadigingsniveau is dat er 1200 leerlingen op de school zitten.

- c** $1200(1 - 0,7^t) = 950$

De optie oplossen bij $1200(1 - 0,7^x) = 950$ geeft $x = 4,397...$

Dus na 4 uur en $0,397... \cdot 60 \approx 24$ minuten, dat is om 13:24 uur.

Bladzijde 46

- 63** **a** Als t toeneemt, dan neemt $1,4^t$ toe, dus dan neemt $\frac{0,2}{1,4^t}$ af. Dan neemt $5 - \frac{0,2}{1,4^t}$ toe. Dus de grafiek van A is stijgend.

- b** Als t heel groot wordt, nadert $0,98^t$ tot 0. Dan wordt $2 - 0,98^t \approx 2$. Dus dan wordt $320(2 - 0,98^t) \approx 320 \cdot 2 = 640$, dus de grenswaarde is 640.

- c** Als t toeneemt, dan neemt $1,8^t$ toe, dus dan neemt $2,1 \cdot 1,8^t$ ook toe, dus ook $8 + 2,1 \cdot 1,8^t$ neemt dan toe,
dus dan neemt $\frac{720}{8 + 2,1 \cdot 1,8^t}$ af.

Dus de grafiek van C is dalend.

- 64 a** Als k toeneemt, dan neemt $0,65^k$ af, en dan neemt ook $4 \cdot 0,65^k$ af. Dus dan neemt $5 - 4 \cdot 0,65^k$ toe en $\frac{2000}{5 - 4 \cdot 0,65^k}$ af.
Dus de grafiek van P is dalend.
- b** Als k heel groot wordt, nadert $0,65^k$ tot 0. Dan wordt $5 - 4 \cdot 0,65^k \approx 5$. Dus dan wordt $\frac{2000}{5 - 4 \cdot 0,65^k} \approx \frac{2000}{5} = 400$.
Dus de grenswaarde is 400.

- 65 a** De toename is $\frac{961 - 705}{705} \cdot 100\% \approx 36,3\%$.
- b** $g_{10 \text{ dagen}} = \frac{280}{63}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{280}{63}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 1,1609$
Het groeipercentage per dag is 16,1%.
- c** Op 23 april om 0:00 is $t = 22$, dat is 7 dagen na $t = 15$.
Er zijn dan $63 \cdot 1,16^7 \approx 178$ fruitvliegjes.
- d** Voor $t = 45$ is de telling 961 en geeft de formule $N = \frac{1035}{1 + 210 \cdot 0,84^{45}} \approx 956$.
De afwijking is $\frac{961 - 956}{961} \cdot 100\% \approx 0,5\%$.
- e** Als t toeneemt dan neemt $0,84^t$ af en dan neemt $210 \cdot 0,84^t$ af en dan neemt $1 + 210 \cdot 0,84^t$ af en dus neemt $\frac{1035}{1 + 210 \cdot 0,84^t}$ dan toe. Dus de grafiek is stijgend.
- f** Als t heel groot wordt, nadert $0,84^t$ tot 0. Dan wordt $210 \cdot 0,84^t \approx 0$ en $1 + 210 \cdot 0,84^t \approx 1$. Dus dan wordt $\frac{1035}{1 + 210 \cdot 0,84^t} \approx \frac{1035}{1} = 1035$, dus het verzadigingsniveau is 1035.
Dat is in overeenstemming met de verwachting van de bioloog.

Bladzijde 47

- 66 a** $t = 0,5$ geeft $P = \frac{92}{2,39^{0,5}} + \frac{32}{1,04^{0,5}} + 10 \approx 100,9$
Het is niet mogelijk meer dan 100% van de woorden te herinneren, dus de formule kan niet gelden voor $t = 0,5$.
- b** De helft is 50 procent, dus $\frac{92}{2,39^t} + \frac{32}{1,04^t} + 10 = 50$.
Voer in $y_1 = \frac{92}{2,39^x} + \frac{32}{1,04^x} + 10$ en $y_2 = 50$.
De optie snijpunt geeft $x = 2,445...$
Het duurt 4 minuten en $0,445... \cdot 60 \approx 27$ seconden (of 147 seconden).
- c** Als t heel groot wordt, nadert $\frac{92}{2,39^x}$ tot 0 en nadert $\frac{32}{1,04^x}$ tot 0. Dus dan wordt $\frac{92}{2,39^x} + \frac{32}{1,04^x} + 10 \approx 0 + 0 + 10 = 10$, dus de grenswaarde is 10.
Dat betekent dat op den duur nog 10% van de woorden correct wordt herinnerd.
- d** $P = \frac{92}{2,39^t} + \frac{32}{1,04^t} + 10 = 92 \cdot 2,39^{-t} + 32 \cdot 1,04^{-t} + 10$
 $= 92 \cdot (2,39^{-1})^t + 32 \cdot (1,04^{-1})^t + 10 \approx 92 \cdot 0,418^t + 32 \cdot 0,962^t + 10$
Dus $a = 0,418$ en $b = 0,962$.

C8 $N = 150 \cdot \frac{20}{3 \cdot 1,2^t} = 150 \cdot \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{1,2^t} = 1000 \cdot 1,2^{-t} = 1000 \cdot (1,2^{-1})^t \approx 1000 \cdot 0,83^t$
Dus $N = 1000 \cdot 0,83^t$.

- C9 a** Als t heel groot wordt, nadert $0,6^t$ tot 0. Dan wordt $20 \cdot 0,6^t \approx 0$ en dus wordt $3 + 20 \cdot 0,6^t \approx 3$. Dus dan wordt $\frac{150}{3 + 20 \cdot 0,6^t} \approx \frac{150}{3} = 50$.
Dus de grenswaarde is 50.
- b** Als t toeneemt, neemt $0,6^t$ af en dan neemt $20 \cdot 0,6^t$ af en dan neemt $3 + 20 \cdot 0,6^t$ af. Dus neemt $\frac{150}{3 + 20 \cdot 0,6^t}$ toe.
De grafiek van N is dus stijgend.

Bladzijde 48

- 1 a** $N = 2400 \cdot 1,003^t$
b $2400 \cdot 1,003^t = 2700$
 De optie oplossen bij $2400 \cdot 1,003^x = 2700$ geeft $x = 39,31...$
 Dus vanaf $t = 40$.
- 2 a** $1,155^t = 2$
 De optie oplossen bij $1,155^x = 2$ geeft $x = 4,810...$
 Dus de verdubbelingstijd is 4 jaar en $0,810... \cdot 12 \approx 10$ maanden (of 58 maanden).
b $g_{21 \text{ jaar}} = 2$
 $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{21}} \approx 1,034$
 Dus de groei is 3,4% per jaar.
- 3 a** $0,88^t = 0,5$
 De optie oplossen bij $0,88^x = 0,5$ geeft $x = 5,422...$
 Dus de halveringstijd is 5 uur en $0,422... \cdot 60 \approx 25$ minuten (of 325 minuten).
b $g_{7,8 \text{ dagen}} = 0,5$
 $g_{\text{dag}} = 0,5^{\frac{1}{7,8}} \approx 0,915$
c $0,975^t = 0,5$
 De optie oplossen bij $0,975^x = 0,5$ geeft $x = 27,377...$
 Dus de halveringstijd is 27,4 jaar.
- 4 a** $g_{\text{dag}} = 1,36$
 $g_{\text{week}} = 1,36^7 \approx 8,61$
 Het groeipercentage per week is 761%.
b $g_{\text{uur}} = 1,36^{\frac{1}{24}} \approx 1,013$
 Het groeipercentage per uur is 1,3%.
- 5 a** $g_{10 \text{ jaar}} = 0,75$
 $g_{\text{jaar}} = 0,75^{\frac{1}{10}} \approx 0,972$
 De afname per jaar is 2,8%.
b $g_{25 \text{ jaar}} = 0,75^{2,5} \approx 0,487$
 Dus de afname per 25 jaar is 51,3%.
- 6** $N = b \cdot g^t$ met $g = \left(\frac{1200}{1500}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,9283...$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,9283...^t \\ t = 4 \text{ en } N = 1500 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,9283...^4 = 1500 \\ b = \frac{1500}{0,9283...^4} \approx 2020 \end{array}$$

 Dus $N = 2020 \cdot 0,928^t$.
- 7 a** $P = 8,1 \cdot g^t$ met $g = \left(\frac{14,4}{8,1}\right)^{\frac{1}{11}} \approx 1,054$
 Dus $P = 8,1 \cdot 1,054^t$.
b $8,1 \cdot 1,054^t = 20$
 De optie oplossen bij $8,1 \cdot 1,054^x = 20$ geeft $x = 17,18...$
 Dus in het jaar $2008 + 18 = 2026$.

8 a $N_{PL} = at + b$ met $a = \frac{\Delta N_{PL}}{\Delta t} = \frac{2974 - 2134}{20 \cdot 7} = 6$

$$\left. \begin{array}{l} N_{PL} = 6t + b \\ t = 91 \text{ en } N_{PL} = 2134 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6 \cdot 91 + b = 2134 \\ 546 + b = 2134 \\ b = 1588 \end{array}$$

Dus $N_{PL} = 6t + 1588$.

$$N_{GR} = b \cdot 1,008^t$$

$$\left. \begin{array}{l} N_{GR} = b \cdot 1,008^t \\ t = 14 \cdot 7 = 98 \text{ en } N_{GR} = 655 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,008^{98} = 655 \\ b = \frac{655}{1,008^{98}} \approx 300 \end{array}$$

Dus $N_{GR} = 300 \cdot 1,008^t$.

b $300 \cdot 1,008^t = 750$

De optie oplossen bij $300 \cdot 1,008^x = 750$ geeft $x = 114,99\dots$

$t = 115$ geeft $N_{PL} = 6 \cdot 115 + 1588 = 2278$

Dus Parkline had toen $\frac{2278 - 750}{750} \cdot 100\% \approx 203,7\%$ meer gebruikers.

c $300 \cdot 1,008^t = 6t + 1588$

Voer in $y_1 = 300 \cdot 1,008^x$ en $y_2 = 6x + 1588$.

De optie snijpunt geeft $x = 305,4\dots$

Dus 306 dagen na 1 januari.

9 a $\frac{20505}{17830} = 1,1500\dots$, $\frac{23580}{20505} = 1,1499\dots$ en $\frac{27120}{23580} = 1,1501\dots$

De groeifactor per 4 vier jaar is ongeveer gelijk, dus de tabel stemt overeen met een exponentieel verband tussen P en t .

$18045 - 17830 = 215$, $18260 - 18045 = 215$ en $18475 - 18260 = 215$

De verschillen per 4 jaar zijn gelijk, dus de tabel stemt overeen met een lineair verband tussen Q en t .

b $\frac{18365}{17830} = 1,030\dots$ en $\frac{19845}{18900} = 1,05$

De groeifactor per 4 jaar is niet gelijk, dus er is geen sprake van een exponentieel verband tussen R en t .

$18365 - 17830 = 535$ en $19845 - 18900 = 945$

De verschillen per 4 jaar zijn niet gelijk, dus er is geen sprake van een lineair verband tussen R en t .

10 a Grafiek I hoort bij een exponentieel verband, want het is een rechte lijn op logaritmisch papier.

Bij $t = 0$ hoort $N = 2$ en bij $t = 14$ hoort $N = 100$.

$N = 2 \cdot g^t$ met $g = \left(\frac{100}{2}\right)^{\frac{1}{14}} \approx 1,322$

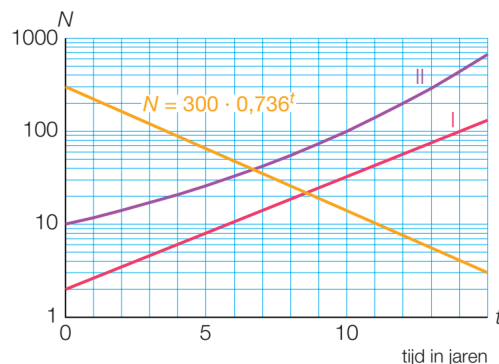
Dus $N = 2 \cdot 1,322^t$.

b Er is sprake van een afnemende daling, want het is een exponentieel verband met $0 < g < 1$.

c Voer in $y_1 = 300 \cdot 0,736^x$.

Maak een tabel en zoek waarden die je precies op deze logaritmische schaalverdeling kunt tekenen, bijvoorbeeld $t = 0$ geeft $N = 300$ en $t = 15$ geeft $N \approx 3$.

Zie de gele grafiek hiernaast.



11 a Als t toeneemt, dan neemt $0,78^t$ af, dus dan neemt $12 \cdot 0,78^t$ af, dus dan neemt $200 + 12 \cdot 0,78^t$ af, en dan neemt $\frac{5000}{200 + 12 \cdot 0,78^t}$ toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

b Als t heel groot wordt, nadert $0,78^t$ tot 0. Dan wordt $12 \cdot 0,78^t \approx 0$ en $200 + 12 \cdot 0,78^t \approx 200$. Dus dan wordt $\frac{5000}{200 + 12 \cdot 0,78^t} \approx \frac{5000}{200} = 25$.

Dus de grenswaarde is 25.

12 a $N = \frac{3000}{15 \cdot 1,12^t} = \frac{3000}{15} \cdot \frac{1}{1,12^t} = 200 \cdot 1,12^{-t} = 200 \cdot (1,12^{-1})^t \approx 200 \cdot 0,89^t$

Dus $N = 200 \cdot 0,89^t$.

b $M = 200 \cdot 0,84^{-3t} = 200 \cdot 0,84^4 \cdot 0,84^{-3t} = 81,92 \cdot (0,84^{-3})^t \approx 81,92 \cdot 1,95^t$

Dus $M = 81,92 \cdot 1,95^t$.

Bladzijde 50

- 1 a** $N = \frac{1750}{121 \cdot 1,8^t} = \frac{1750}{121} \cdot \frac{1}{1,8^t} = \frac{1750}{121} \cdot 1,8^{-t} = \frac{1750}{121} \cdot (1,8^{-1})^t \approx 14,46 \cdot 0,56^t$
Dus $N = 14,46 \cdot 0,56^t$.
- b** $1,045^t = 2$
De optie oplossen bij $1,045^x = 2$ geeft $x = 15,747...$
De halveringstijd is 15 jaar en $0,747... \cdot 12 \approx 9$ maanden (of 189 maanden).
- c** 15 uur en 45 minuten = 15,75 uur
 $g_{15,75 \text{ uur}} = 0,5$
 $g_{\text{uur}} = 0,5^{\frac{1}{15,75}} \approx 0,957$
De hoeveelheid neemt per uur met 4,3% af.
- d** $g_{10 \text{ uur}} = 1,035$
 $g_{\text{dag}} = 1,035^{2,4} \approx 1,086$
De toename per dag is 8,6%.
- e** $N = b \cdot g^t$ met $g = \left(\frac{6000}{5000}\right)^{\frac{1}{2,5}} = 1,0756...$
 $N = b \cdot 1,0756^{...^t}$
 $t = 4$ en $N = 5000$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} N = b \cdot 1,0756^{...^t} \\ t = 4 \text{ en } N = 5000 \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} b \cdot 1,0756^{...^4} = 5000 \\ b = \frac{5000}{1,0756^{...^4}} \approx 3700 \end{matrix}$
Dus $N = 3700 \cdot 1,076^t$.
- f** Als t toeneemt, neemt $1,06^t$ toe en dan neemt $3 \cdot 1,06^t$ toe en dan neemt $3 \cdot 1,06^t - 2$ toe en dan neemt $512(3 \cdot 1,06^t - 2)$ toe.
De grafiek van N is dus stijgend.

- 2 a** Op $t = 0$ is $N = 145$, dus de beginhoeveelheid is 145.
 $N = 145 \cdot g^t$ met $g = \left(\frac{125}{145}\right)^{\frac{1}{27}} \approx 0,9945$
Dus de formule $N = 145 \cdot 0,9945^t$ is bij benadering juist.
- b** In 2013 werd er $145 \cdot 0,9945^{23} = 127,7...$ liter drinkwater per persoon per dag gebruikt.
Hiervan werd $0,43 \cdot 127,7... = 54,9...$ liter gebruikt voor douchen.
 $D = at + b$ met $a = \frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{54,9... - 45,9}{13} = 0,694...$
 $D = 0,694... \cdot t + b$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} D = 0,694... \cdot t + b \\ t = 10 \text{ en } D = 45,9 \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} 0,694... \cdot 10 + b = 45,9 \\ b \approx 39,0 \end{matrix}$
Dus $D = 0,7t + 39,0$.
- c** De helft van het waterverbruik is douchen, dus $D = 0,5N$.
Los op $0,7t + 39,0 = 0,5 \cdot 145 \cdot 0,9945^t$.
De optie oplossen bij $0,7x + 40,0 = 0,5 \cdot 145 \cdot 0,9945^x$ geeft $x = 31,39...$
Dus in het jaar $1990 + 32 = 2022$ (of in de loop van het jaar 2021).

Bladzijde 52

- 3 a** Bij $t = 0$ hoort $P = 100$ en bij $t = 150$ hoort $P = 10$.
 $P = b \cdot g^t$ met $g = \left(\frac{10}{100}\right)^{\frac{1}{150}} \approx 0,985$.
Dus $P = 100 \cdot 0,985^t$.
- b** $t = 200$ geeft $P = 100 \cdot 0,985^{200} \approx 4,9$, dus na 200 dagen was er nog 4,9% over.
- c** $0,985^t = 0,5$
De optie oplossen bij $0,985^x = 0,5$ geeft $x = 45,86...$
Dus de halveringstijd is ongeveer 46 dagen.
- d** $100 \cdot 0,985^t = 1$.
De optie oplossen bij $100 \cdot 0,985^x = 1$ geeft $x = 304,7...$
Dus na 304,7... dagen is er minder dan 1% van de beginhoeveelheid aanwezig. Dat is na ongeveer 10 maanden.

4 a $N = b \cdot g^t$ met $g = 0,27^{\frac{1}{3}} = 0,646\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,646\dots^t \\ t = 7 \text{ en } N = 100 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,646\dots^7 = 100 \\ b = \frac{100}{0,646\dots^7} \approx 2120 \end{array}$$

Dus $N = 2120 \cdot 0,646^t$.

b Op 1 juli 2022 is $t = 4,5$, dus $N = 2120 \cdot 0,646^{4,5} = 296,7\dots$, dus ongeveer 300 vissen.

c $0,646^t = 0,5$

De optie oplossen bij $0,646^x = 0,5$ geeft $x = 1,586\dots$

Dus de halveringstijd is 1 jaar en $0,586\dots \cdot 12 \approx 7$ maanden (of 19 maanden).

d $2120 \cdot 0,646^t = 500$

De optie oplossen bij $2120 \cdot 0,646^x = 500$ geeft $x = 3,305\dots$

Dus 3 jaar en $0,305\dots \cdot 12 \approx 3,7$ maanden na 1 januari 2018.

Dus in de maand april van het jaar 2021.

Bladzijde 52

5 a Als t heel groot wordt, nadert $0,99936^t$ tot 0. Dan wordt $69 \cdot 0,99936^t \approx 0$. Dus dan wordt $69 - 69 \cdot 0,99936^t \approx 69$, dus de grenswaarde is 69.

De botdichtheid neemt minder dan 69% af, dus dan blijft er minstens 31% botdichtheid behouden.

b $t = 500$ geeft $B = 69 - 69 \cdot 0,99936^{500} = 18,9\dots$, dus $T = -0,07 \cdot 18,9\dots - 0,15 \approx -1,47$

Deze T-score is acceptabel.

$t = 1000$ geeft $B = 69 - 69 \cdot 0,99936^{1000} = 32,6\dots$, dus $T = -0,07 \cdot 32,6\dots - 0,15 \approx -2,43$

Deze T-score is niet acceptabel.

c $-0,07B - 0,15 = -2$

De optie oplossen bij $-0,07x - 0,15 = -2$ geeft $x = 26,428\dots$

Dus B mag maximaal 26,428... zijn.

$69 - 69 \cdot 0,99936^t = 26,428\dots$

De optie oplossen bij $69 - 69 \cdot 0,99936^x = 26,428\dots$ geeft $x = 754,3\dots$

Dus maximaal 754 dagen.

Alternatieve uitwerking

$-0,07(69 - 69 \cdot 0,99936^t) - 0,15 = -2$

De optie oplossen bij $-0,07(69 - 69 \cdot 0,99936^x) - 0,15 = -2$ geeft $x = 754,3\dots$

Dus maximaal 754 dagen.

d De grenswaarde van B is 69, dat geeft $-0,07 \cdot 69 - 0,15 = -4,98$.

Dus Shadan heeft gelijk, want de laagst mogelijke T-score is $-4,98$.

6 a $N_J = at + b$ met $a = \frac{\Delta N_J}{\Delta t} = \frac{123,32 - 125,40}{2024 - 2020} = -0,52$

$$\left. \begin{array}{l} N_J = -0,52t + b \\ t = 2 \text{ en } N_J = 125,40 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,52 \cdot 2 + b = 125,40 \\ -1,04 + b = 125,40 \\ b = 126,44 \end{array}$$

Dus $N_J = -0,52t + 126,44$.

$$N_E = b \cdot g^t \text{ met } b = \frac{132,05}{1,172} \approx 112,67 \text{ en } g = 1,172^{\frac{1}{6}} \approx 1,027$$

Dus $N_E = 112,67 \cdot 1,027^t$.

b $-0,52t + 126,44 = 112,67 \cdot 1,027^t$

De optie oplossen bij $-0,52x + 126,44 = 112,67 \cdot 1,027^x$ geeft $x = 3,745\dots$

Dus 3 jaar en $0,745\dots \cdot 12 \approx 8,9$ maanden na 1 januari 2018.

Dus in de maand september van het jaar 2021.

c $-0,52t + 126,44 = 121,76$

De optie oplossen bij $-0,52x + 126,44 = 121,76$ geeft $x = 9$.

$t = 9$ geeft $N_E = 112,67 \cdot 1,027^9 \approx 143,2$

Dus Ethiopië heeft dan 143,2 miljoen inwoners.

- 7 a** Bij exponentiële groei zijn de quotiënten ongeveer gelijk.

In België is dat niet het geval, je krijgt $\frac{88}{75} \approx 1,2$ en $\frac{122}{88} \approx 1,4$.

In Ecuador is dat niet het geval, je krijgt $\frac{18}{14} \approx 1,3$ en $\frac{27}{18} = 1,5$.

Dus in Italië is er sprake van exponentiële groei

(je krijgt $\frac{6077}{5476} \approx 1,1$; $\frac{6820}{6077} \approx 1,1$; $\frac{7503}{6820} \approx 1,1$; $\frac{8215}{7503} \approx 1,1$; $\frac{9134}{8215} \approx 1,1$ en $\frac{10023}{9134} \approx 1,1$).

- b** $g_{6 \text{ dagen}} = \frac{10023}{5476}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{10023}{5476}\right)^{\frac{1}{6}} = 1,106\dots$

$$10023 \cdot 1,106\dots^x = 1\,000\,000$$

De optie oplossen bij $10023 \cdot 1,106\dots^x = 1\,000\,000$ geeft $x = 45,68\dots$

Dus 46 dagen na 28 maart zijn er meer dan een miljoen sterfgevallen.

- 8 a** $t = 0$ geeft $N = \frac{65\,000}{1 + 2,5 \cdot 0,92^0} \approx 18\,571$ en $t = 10$ geeft $N = \frac{65\,000}{1 + 2,5 \cdot 0,92^{10}} \approx 31\,161$

Dus tussen 1 januari 1960 en 1 januari 1970 is het aantal inwoners met $31\,161 - 18\,571 = 12\,590$ toegenomen.

$$t = 20 \text{ geeft } N = \frac{65\,000}{1 + 2,5 \cdot 0,92^{20}} \approx 44\,166$$

Dus tussen 1 januari 1970 en 1 januari 1980 is het aantal inwoners met $44\,166 - 31\,161 = 13\,005$ toegenomen.

- b** Als t toeneemt, dan neemt $0,92^t$ af, dus dan neemt $2,5 \cdot 0,92^t$ af, dus dan neemt $1 + 2,5 \cdot 0,92^t$ af,

dus dan neemt $\frac{65\,000}{1 + 2,5 \cdot 0,92^t}$ toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

- c** Als t heel groot wordt, nadert $0,92^t$ tot 0. Dan wordt $2,5 \cdot 0,92^t \approx 0$ en $1 + 2,5 \cdot 0,92^t \approx 1$.

Dus dan wordt $\frac{65\,000}{1 + 2,5 \cdot 0,92^t} \approx \frac{65\,000}{1} = 65\,000$, dus de grenswaarde is 65 000.

- d** Op 1 januari 2020 is $t = 60$ en dat geeft $N = \frac{65\,000}{1 + 2,5 \cdot 0,92^{60}} \approx 63\,926$.

De grenswaarde is 65 000, dus vanaf 2020 zal het aantal inwoners niet meer flink toenemen.

- e** $\frac{65\,000}{1 + 2,5 \cdot 0,92^t} = 50\,000$

De optie oplossen bij $\frac{65\,000}{1 + 2,5 \cdot 0,92^x} = 50\,000$ geeft $x = 25,42\dots$

Dus 25 jaar en 0,42... $\cdot 12 \approx 5,1$ maanden na 1 januari 1960.

Dus in de maand juni van het jaar 1985.

- 9 a** $\frac{38,1}{56,1} = 0,6791\dots$; $\frac{25,9}{38,1} = 0,6797\dots$; $\frac{17,6}{25,9} = 0,6795\dots$; $\frac{12,0}{17,6} = 0,6818\dots$ en $\frac{8,2}{12,0} = 0,6833\dots$

De groeifactoren per cm plaat zijn ongeveer gelijk, dus de tabel stemt overeen met een exponentieel verband.

- b** 3,8 cm ligt tussen 3,5 cm en 4,5 cm, dus gebruik als beginwaarde 25,9 en als groeifactor per cm

$$\frac{17,6}{25,9} = 0,6795\dots$$

Dus bij een dikte van 3,8 cm dringt $25,9 \cdot 0,6795\dots^{0,3} \approx 23,1$ procent van het geluid door.

- c** 15 ligt tussen 17,6 en 12,0, dus gebruik als beginwaarde 17,6 en als groeifactor per cm $\frac{12,0}{17,6} = 0,6818\dots$

$$17,6 \cdot 0,6818\dots^x = 15.$$

De optie oplossen bij $17,6 \cdot 0,6818\dots^x = 15$ geeft $x = 0,417\dots$

Deze plaat heeft een dikte van ongeveer $4,5 + 0,4 = 4,9$ cm (of 49 mm).

Bladzijde 54**10****a** $s = 0,25$ geeft $N = b \cdot 0,992^{0,25 \cdot t} = b \cdot (0,992^{0,25})^t \approx b \cdot 0,998^t$ **b** $0,998^t = 0,5$ De optie oplossen bij $0,998^x = 0,5$ geeft $x = 346,2\dots$ Dus de halveringstijd is $\frac{346,2\dots}{24} = 14,4\dots$ dagen.**c** $0,992^{0,06t} = 0,5$ De optie oplossen bij $0,992^{0,06x} = 0,5$ geeft $x = 1438,2\dots$ Dus de halveringstijd is $\frac{1438,2\dots}{24} \approx 60$ dagen.**d** $0,8 \cdot 0,992^{0,06t} = 0,2$ De optie oplossen bij $0,8 \cdot 0,992^{0,06x} = 0,2$ geeft $x = 2876,5\dots$ Dus na $\frac{2876,5\dots}{24} \approx 120$ dagen.**e** Als 70% van de concentratie is verdwenen is er nog 30% over, dus $0,992^{0,06t} = 0,3$.De optie oplossen bij $0,992^{0,06x} = 0,3$ geeft $x \approx 2500$.

Dus ongeveer 2500 keer zo lang.

f Planten zijn niet zo effectief om de lucht in binnenruimtes te zuiveren.**Bladzijde 55****11**De lijn gaat door $(0, 10^3)$ en $(9, 10^6)$.

$$B = 10^3 \cdot g^t \text{ met } g = \left(\frac{10^6}{10^3}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 2,154$$

Dus $B = 1000 \cdot 2,154^t$.

$$1000 \cdot 2,154^t = 50 \cdot 10^6$$

De optie oplossen bij $1000 \cdot 2,154^x = 50 \cdot 10^6$ geeft $x = 14,10\dots$

Dus na 14,1 dagen kan de kip niet meer veilig gegeten worden.

10 Statistiek gebruiken

10.1 Statistische diagrammen

Bladzijde 59

- V1** 'geboortejaar' is discreet, want de waarden zijn hoeveelheden en niet alle tussenliggende waarden zijn mogelijk.
'hoogst genoten opleiding' is ordinaal, want de waarden zijn geen hoeveelheden en hebben een logische volgorde.
'telefoonnummer' is nominaal, want de waarden zijn geen hoeveelheden en hebben geen logische volgorde.
'mogen we u mail sturen?' is nominaal, want de waarden zijn geen hoeveelheden en hebben geen logische volgorde.
- V2** **a** Ordinaal, want de waarden zijn geen hoeveelheden en hebben een logische volgorde.
b Discreet, want de waarden zijn hoeveelheden en niet alle tussenliggende waarden zijn mogelijk.
c Continu, want de waarden zijn hoeveelheden en alle tussenliggende waarden zijn mogelijk.
d Nominaal, want de waarden zijn geen hoeveelheden en hebben geen logische volgorde.
- V3** 'aantal gele kaarten' is kwantitatief, want de waarden zijn hoeveelheden. Deze variabele is discreet, want niet alle tussenliggende waarden zijn mogelijk.
'zorgen over nalatenschap' is kwalitatief want de waarden zijn geen hoeveelheden. Het meetniveau van deze variabele is ordinaal, want de waarden hebben een logische ordening.
'BMI' is kwantitatief, want de waarden zijn hoeveelheden. Deze variabele is continu, want alle tussenliggende waarden zijn mogelijk
'bloedgroep' is kwalitatief, want de waarden zijn geen hoeveelheden. Het meetniveau van deze variabele is nominaal, want de waarden hebben geen logische volgorde.

Bladzijde 60

- 1** **a** Nee, dat kan niet. Geslacht is geen kwantitatieve variabele. Bij een lijndiagram staat op de horizontale as een kwantitatieve variabele.
b Ja, dat kan. Je krijgt een cirkeldiagram met een sector voor elk geslacht.

Bladzijde 61

- 2** **a** ordinaal
b staafdiagram en cirkeldiagram
c Vanwege de klassen $\langle \leftarrow; 1,70 \rangle$ en $\langle 1,90; \rightarrow \rangle$. Die hebben geen klassenmidden.

Bladzijde 62

- 3** **a** ordinaal
b Bij de taalvakken: $100\% - 6,8\% = 93,2\%$.
Bij de exacte vakken: $100\% - 10,7\% = 89,3\%$.
c Van de centrummaten alleen de modus.
Geen enkele spreidingsmaat.
d Een cirkeldiagram of (niet gestapeld) staafdiagram met percentages. Deze geven naast het gegeven gestapelde staafdiagram, een goede indruk van de verdeling.
- 4** **a** De variabele geslacht. Het meetniveau is nominaal.
b Hij koos voor groep 1 de jongens.
Bij de jongens komen grotere aantallen (boven 20) relatief vaker voor dan bij de meisjes, en lagere aantallen (onder 20) juist relatief minder vaak. Het gemiddelde is dus bij de jongens groter dan bij de meisjes.
Bij de meisjes is de spreiding van de waarnemingsgetallen groter dan bij de jongens, dus bij de meisjes is de standaardafwijking groter dan bij de jongens.
c Van de centrummaten alleen de mediaan (bij de jongens bestaat de modus niet).
Van de spreidingsmaten de spreidingsbreedte en interkwartielafstand.
d Nee. Voor een puntenwolk moet voor elke leerling zowel het aantal dagelijks beluisterde liedjes als de leeftijd bekend zijn.

Bladzijde 63

- 5**
- a** De variabele gemiddelde dagtemperatuur is kwantitatief.
Het meetniveau van de variabele maand is ordinaal.
 - b** Je ziet dat de blauwe boxplots doorgaans lager liggen dan de rode boxplots. De rode boxplots horen dus bij periode II.
 - c** Aflezen geeft $Q_1 = 3$ en $Q_3 = 7$.
interkwartielafstand = $7 - 3 = 4$
Dus er is sprake van een uitschieter bij een dagtemperatuur van minder dan $3 - 1,5 \cdot 4 \approx -3^\circ\text{C}$ en meer dan $7 + 1,5 \cdot 4 \approx 13^\circ\text{C}$.
 - d** Bijvoorbeeld januari in periode I, want deze boxplot hoort bij een links-scheve verdeling.
 - e** Voor alle boxplots van periode I aflezen van
de laagste dagtemperatuur geeft $Q_0 = -9$
de hoogste dagtemperatuur geeft $Q_4 = 22$.
De spreidingsbreedte is $22 - -9 = 31^\circ\text{C}$.

Alternatieve uitwerking:

Voor alle boxplots van periode II aflezen van
de laagste dagtemperatuur geeft $Q_0 = -5$
de hoogste dagtemperatuur geeft $Q_4 = 26$.
De spreidingsbreedte is $26 - -5 = 31^\circ\text{C}$.

Bladzijde 64

- 6**
- a** Uit de twee cumulatieve frequentiepolygonen lees je af dat er 350 dagen per jaar in zijn verwerkt.
 - b** De rode lijndiagrammen horen bij de kamerverhuur van 2024, want bij deze lijndiagrammen komen grotere aantallen verhuurde kamers minder voor.
 - c** In 2019 is de mediaan ongeveer 51 verhuurde kamers per dag en in 2024 is de mediaan ongeveer 38 verhuurde kamers per dag.
In 2019 is de modale klasse $[60, 70)$ en in 2024 is de modale klasse $[40, 50)$.
 - d** In 2019 ligt de mediaan in $[50, 60)$ en in 2024 in $[30, 40)$.
Een mediaan van 40 verhuurde kamers kan dus niet kloppen, maar 53 verhuurde kamers wel.
 - e** De totalen zijn gelijk, dus als de punten van de ene relatieve frequentiepolygoon boven die van de andere liggen, dan is de frequentie groter. En als de frequentie groter is, dan gaat de cumulatieve frequentiepolygoon steiler omhoog. De rode relatieve frequentiepolygoon ligt boven de blauwe tot en met de klasse $[40, 50)$, dus tot 50 verhuurde kamers per dag gaat de rode cumulatieve frequentiepolygoon steiler omhoog dan de blauwe.

Bladzijde 65

7

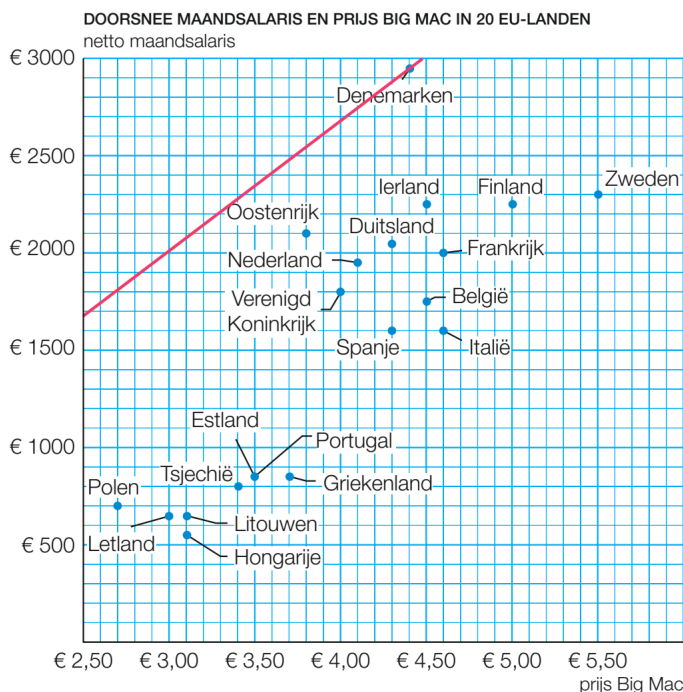
- a De punten liggen rond een lijn van linksonder (lage prijs, laag netto doorsnee maandsalaris) naar rechtsboven (hoge prijs, hoog netto doorsnee maandsalaris), dus bij hogere Big Mac prijzen horen over het algemeen hogere netto doorsnee maandsalarissen.
- b Estland en Portugal horen bij hetzelfde punt.
- c Het gemiddelde is niet geschikt. Omdat de verdeling van de maandsalarissen rechtsscheef is, geeft het gemiddelde maandsalaris een te hoge waarde om nog van een doorsnee maandsalaris te kunnen spreken.
- d kwantitatief

- e Omdat Denemarken een hoog netto maandsalaris had en de prijs van een Big Mac daar niet al te hoog was, komt Denemarken in aanmerking.

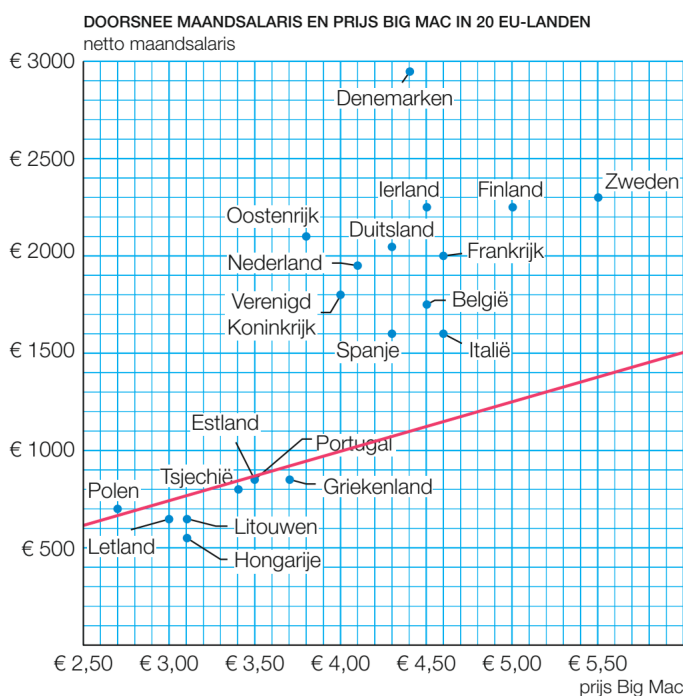
In Denemarken kon je voor een doorsnee netto maandsalaris

ongeveer $\frac{2950}{4,40} \approx 670$ Big Macs kopen.

Bij een prijs van bijvoorbeeld 3 euro zou je dus een netto maandsalaris van $3 \cdot 670 = 2010$ euro moeten hebben om evenveel Big Macs te kunnen kopen. Zie hiernaast de lijn door het punt (3, 2010) en het punt van Denemarken. Er liggen geen punten boven deze lijn, dus het antwoord is Denemarken.



- f Neem bijvoorbeeld prijzen van 3 en 5 euro. Als je 250 keer een Big Mac kan kopen dan zijn de bijbehorende netto maandsalarissen $3 \cdot 250 = 750$ en $5 \cdot 250 = 1250$ euro. Zie hiernaast de lijn door de punten (3, 750) en (5, 1250). De punten van de landen onder deze lijn zijn de landen waar je minder dan 250 keer een Big Mac van het doorsnee netto maandsalaris kunt kopen. Dit zijn de landen Letland, Hongarije, Litouwen, Tsjechië, Estland, Portugal en Griekenland.



Bladzijde 66

8

- a dotplot
- b Bij totaal minstens 10: optie 2. Bij niet minder dan in totaal 4: optie 1.
- c Bij optie 1 hoort een normale verdeling. Bij optie 2 hoort een uniforme verdeling.
- d Bij de D6-worpen. Daar zijn veel uitkomsten rond het gemiddelde en relatief weinig lage en hoge uitkomsten.

- 9** Uitgaande van 100 sporters wonnen er $0,50 \cdot 70 + 0,60 \cdot 30 = 53$ een medaille.
Hierbij waren $0,50 \cdot 70 = 35$ vrouwen.
Dus $\frac{35}{53} \cdot 100\% \approx 66,0\%$ van de medaillewinnaars is vrouw.

Bladzijde 67

- C1**
- a** Aflezen bij 200 cm geeft 90 kg.
 - b** Gewicht is op 5 kg nauwkeurig afgerond.
Lengte is op 5 cm nauwkeurig afgerond.
 - c** Bij het afronden is informatie verloren gegaan.
 - d** In de dotplots staan 17 stippen, dus van 17 sporters.
 - e** Het aantal stippen bij 50 kg in het spreidingsdiagram is kleiner dan het aantal stippen bij 50 kg in de dotplot met gewichten. Dit is ook zo bij 55 en 70 kg. Dus bij de stippen in het spreidingsdiagram waar meerdere sporters bij horen, horen de gewichten 50, 55 en 70 kg.
 - f** In het spreidingsdiagram kun je de relatie tussen gewicht en lengte goed zien.
In de dotplots kun je de onderlinge verdeling van de gewichten en de onderlinge verdeling van de lengten goed zien.
- C2**
- a** De boxplot.
 - b** De variabele BMI heeft veel verschillende waarden, dus dan krijg je ook veel sectoren in het cirkeldiagram. Een cirkeldiagram met veel sectoren is onoverzichtelijk.

10.2 Causaliteit en groepen vergelijken

Bladzijde 68

- 10**
- a** Bij grotere lengten horen over het algemeen hogere scores.
 - b** Nee, je scoort hoger op een algemene kennistoets doordat je meer algemene kennis paraat hebt, niet doordat je langer bent.

Bladzijde 69

- 11**
- a** Bij een grotere mate van ongezond eten hoort over het algemeen een lagere score.
 - b** Ja, de leerlingen hebben gegeten voordat ze de toets maakten.
 - c** In elke figuur hoort bij een hogere mate van ongezond eten niet duidelijk een hogere of juist een lagere score.
 - d** Als de categorie van discipline lager is, dan is de mate van ongezond eten hoger en zijn de scores lager.
 - e** De mate van discipline is een variabele die de samenhang verklaart. Dus er is geen sprake van een causaal verband tussen de mate van ongezond eten en de score.
 - f** Nee, want er zou weer een andere variabele kunnen zijn die deze samenhang verklaart.

Bladzijde 70

- 12**
- a** de temperatuur (bij hogere temperaturen eten mensen meer ijsjes en gaan ze vaker zwemmen)
 - b** de temperatuur (bij lagere temperaturen dragen mensen vaker een muts en kunnen virussen zich makkelijker verspreiden)
 - c** het inkomen van de gezinnen (bij hogere inkomens hebben mensen grotere huizen en rijden ze duurdere auto's)
 - d** de omvang van de brand (bij grotere branden zijn er meer brandweerlieden nodig en richt de brand meer schade aan)
- 13**
- a** Nee, want de omvang van de bovenarmen van de jongens na het gewichtheffen is niet vergeleken met de omvang van voor het gewichtheffen (in plaats daarvan is met de meisjes vergeleken). Er is dus niet vastgesteld of de oorzaak voorafgaat aan het gevolg.
 - b** Er is niet uitgesloten dat er een andere variabele is die de samenhang verklaart. De deelname aan het gewichtheffen was vrijwillig, dus het zou bijvoorbeeld kunnen dat de leerlingen die kozen voor gewichtheffen meer genetische aanleg voor spierontwikkeling hebben of andere activiteiten deden die de omvang van de bovenarmen deed toenemen.

Bladzijde 71

- 14** a Leerlingen met meer inzet zullen zowel beter leren voor toetsen als vaker de genoemde opgaven maken.
 b Omdat de leerlingen aselekt zijn ingedeeld.
 c Alle niveaus van inzet zijn ongeveer gelijk verdeeld over de groepen, dus inzet kan niet het verschil tussen de groepen verklaren.
 d Omdat de leerlingen aselekt in de groepen zijn ingedeeld, zijn alle andere variabelen die de samenhang zouden kunnen verklaren ongeveer gelijk verdeeld over de groepen. Het is daarom niet waarschijnlijk dat een andere variabele het verschil tussen de groepen verklaart.
 e Ja, eerst kwamen de vier maanden les en daarna kwam de toets.
 f Ja, omdat alle andere variabelen die de samenhang zouden kunnen verklaren zijn uitgesloten, is ook aan de tweede voorwaarde voldaan.

- 15** Hij kan de effectgrootte niet gebruiken, want hij weet de steekproefgemiddelden en steekproefstandaardafwijkingen niet.
 Hij kan wel de *phi*-coëfficiënt gebruiken, want hij heeft een kruistabel met absolute aantallen.

Bladzijde 74

- 16** a Zie de kruistabel hiernaast.
 b Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de *phi*-coëfficiënt.

$$\phi = \frac{85 \cdot 58 - 64 \cdot 43}{\sqrt{149 \cdot 128 \cdot 122 \cdot 101}} \approx 0,142$$

Omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

- c De conclusie in het voorbeeld is het beste te verdedigen. Door het omzetten van de ordinale variabele in het voorbeeld naar de nominale variabele in vraag a is informatie verloren gegaan.

	school		
	A	B	
negatief	85	64	149
positief	43	58	101
	128	122	

- 17** a Boxplots, dus gebruik boxplots vergelijken.
 De boxen overlappen elkaar en een mediaan van een boxplot ligt buiten de box van de andere boxplot. Dus het verschil is middelmatig.
 b Bijvoorbeeld tussen de jaren 2013 en 2015, want de boxen overlappen elkaar niet.
 c Lisa heeft gelijk, want de andere boxen overlappen elkaar allemaal en de medianen liggen binnen de boxen van de andere boxplots.

Bladzijde 75

- 18** Steekproefgemiddelden en steekproefstandaardafwijkingen, dus gebruik de effectgrootte.

$$E = \frac{9,57 - 8,70}{\frac{1}{2}(0,79 + 0,83)} \approx 1,074$$

Omdat $E > 0,8$ is het verschil groot.

- 19** a Video's over sport verliezen snel hun actualiteit. Dat is niet het geval bij video's over film.
 b Cumulatieve frequenties bij een klassenindeling, dus gebruik de $\max V_{cp}$.
 Vergeleken met muziekvideo's is
 bij sport $\max V_{cp} = 75 - 30 = 45$ en omdat $\max V_{cp} > 40$ is het verschil groot
 bij nieuws $\max V_{cp} = 55 - 30 = 25$ en omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$ is het verschil middelmatig
 bij film $\max V_{cp} = 30 - 20 = 10$ en omdat $\max V_{cp} \leq 20$ is het verschil gering.

Bladzijde 76

- 20** a Zie de kruistabel hiernaast.
 b $\frac{735}{889} \cdot 100\% \approx 82,7\%$ van de oorlogsjaren werd onder een koning uitgevochten.
 c Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de *phi*-coëfficiënt.

$$\phi = \frac{735 \cdot 442 - 2255 \cdot 154}{\sqrt{2990 \cdot 889 \cdot 2697 \cdot 596}} \approx -0,011$$

Omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

	oorlogsjaren	vredesjaren	
koningen	735	2255	2990
koninginnen	154	442	596
	889	2697	3586

- 21 a** 54% van 108 is $0,54 \cdot 108 \approx 58$.
b Ordinale variabele met meer dan twee categorieën, dus gebruik de $\max V_{cp}$.

	geweldloos cum. perc.	gewelddadig cum. perc.	V_{cp}
mislukking	21%	62%	41% ← $\max V_{cp}$
gedeeltelijk succes	46%	75%	29%
succes	100%	100%	0%

De $\max V_{cp}$ is 41.

Omdat $\max V_{cp} > 40$ is het verschil groot.

- c** De categorieën ‘gedeeltelijk succes’ en ‘succes’ zijn in de tabel hiernaast samengevoegd tot ‘succes’.

De variabele heeft nu twee categorieën, dus bereken absolute aantallen om de ϕ -coëfficiënt te gebruiken. Zie de kruistabel hiernaast.

$$\phi = \frac{23 \cdot 82 - 134 \cdot 85}{\sqrt{157 \cdot 108 \cdot 216 \cdot 167}} \approx -0,384$$

Omdat $-0,4 \leq \phi < -0,2$ is het verschil middelmatig.

	geweldloos	gewelddadig
mislukking	21%	62%
succes	79%	38%

	geweldloos	gewelddadig	
mislukking	23	134	157
succes	85	82	167
	108	216	

Bladzijde 77

- 22 a** Van de ondervraagde Chinezen geeft 65% zijn geluk een 7 of lager. Dat betekent dat 35% zijn geluk een 8 of hoger geeft. Daniek heeft dus gelijk.

- b** Ordinale variabele met meer dan twee categorieën, dus gebruik de $\max V_{cp}$.
 Berekenen van de verschillen per geluksscore geeft $\max V_{cp} = 65 - 55 = 10$.

Omdat $\max V_{cp} \leq 20$ is het verschil gering.

- c** Zie de kruistabel hiernaast.
 Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de ϕ -coëfficiënt.

$$\phi = \frac{170 \cdot 780 - 830 \cdot 220}{\sqrt{1000 \cdot 390 \cdot 1610 \cdot 1000}} \approx -0,063$$

Omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

	ongelukkig	gelukkig	
China	170	830	1000
VS	220	780	1000
	390	1610	

- 23 a** Je krijgt $\phi = 0$, want $20 \cdot 36 - 30 \cdot 24 = 0$.

- b** Bij de jongens kiest $\frac{20}{50} \cdot 100\% = 40\%$ wiskunde A.

Bij de meisjes kiest $\frac{24}{60} \cdot 100\% = 40\%$ wiskunde A.

Dit komt overeen met de conclusie van Amar.

- c** In het geval dat alle jongens wiskunde A kiezen en alle meisjes wiskunde B, krijg je de kruistabel hiernaast.

$$\text{Daarbij hoort } \phi = \frac{50 \cdot 60 - 0 \cdot 0}{\sqrt{50 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 60}} = 1.$$

In het geval dat alle jongens wiskunde B kiezen en alle meisjes wiskunde A, krijg je de kruistabel hiernaast.

$$\text{Daarbij hoort } \phi = \frac{0 \cdot 0 - 60 \cdot 50}{\sqrt{60 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 50}} = -1.$$

De conclusie is dat ϕ minimaal -1 en maximaal 1 is.

	jongens	meisjes	
wiskunde A	50	0	50
wiskunde B	0	60	60
	50	60	

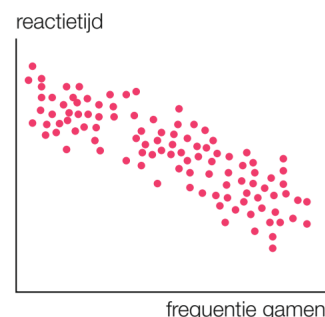
	jongens	meisjes	
wiskunde A	0	60	60
wiskunde B	50	0	50
	50	60	

Bladzijde 78

- C3**
- a** Bij meer tijd besteden aan het leren van de woordjes horen over het algemeen meer vragen goed bij de woordjesoverhoring. Deze samenhang wordt weergegeven in de puntenwolk.
 - b** Bij meer verkochte loempia's hoort over het algemeen een lagere prijs. Deze samenhang wordt weergegeven in de kruistabel.
 - c** Bij meer verkochte ijsjes hoort over het algemeen een hogere dagtemperatuur. Deze samenhang wordt weergegeven in de puntenwolk.

- C4**
- a** ja
 - b** Zie de mogelijke puntenwolk hiernaast.
 - c** Nee, want er zou een variabele kunnen zijn die de samenhang verklaart.

- C5**
- a** Je hebt van beide groepen Q_1 , de mediaan en Q_3 , dus gebruik boxplots vergelijken.
 - b** De boxen overlappen elkaar en een mediaan van een boxplot ligt buiten de box van de andere boxplot. Dus het verschil is middelmatig.



10.3 Statistiek toepassen

Bladzijde 80

- V4** Volgens de vuistregels bij de normale verdeling is bij een gemiddelde van 400 gram en een standaardafwijking van 15 gram 2,5% lichter dan 370 gram. Omdat $0,025 \cdot 3940 \approx 99$, komt een aantal van 97 ongeveer overeen met wat je op basis van een normale verdeling zou verwachten.

- V5**
- a** steekproefproportie = $\frac{6}{80} = 0,075$
 - b** Nee, de steekproef is genomen op de kinderafdeling, dus niet alle patiënten in het ziekenhuis hebben een even grote kans om in de steekproef voor te komen.
 - c** Er zijn $\frac{50}{0,05} = 1000$ patiënten in het ziekenhuis.

Bladzijde 81

- V6**
- a** $\mu = \frac{54 + 66}{2} = 60$ minuten
 $\sigma = \frac{66 - 54}{4} = 3$ minuten
 - b** 2,5%
 - c** steekproefproportie = 0,012
steekproefomvang = $\frac{5}{0,012} \approx 417$ zandlopers

Bladzijde 82

- V7**
- a** $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 120 \pm 2 \cdot \frac{36}{\sqrt{144}} = 120 \pm 6$ (of [114, 126])
 - b** $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 18 \pm 2 \cdot 0,32 = 18 \pm 0,64$ (of [17,36 ; 18,64])
 - c** $\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,48 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,48(1-0,48)}{380}} \approx 0,48 \pm 0,051$ (of [0,429 ; 0,531])
 - d** $\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{5}{9} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{5}{9}(1-\frac{5}{9})}{10\,000}} \approx 0,556 \pm 0,010$ (of [0,546 ; 0,565])

Bladzijde 83

V8

a Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{n}} = 0,04$.

De optie oplossen bij $4 \cdot \sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{x}} = 0,04$ geeft $x = 2100$.

De steekproefomvang moet dus minstens 2100 zijn.

b Los op $4 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} = 0,8$.

De optie oplossen bij $4 \cdot \frac{4}{\sqrt{x}} = 0,8$ geeft $x = 400$.

De steekproefomvang moet dus minstens 400 zijn.

V9

a $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 150 \pm 2 \cdot \frac{40}{\sqrt{150}} \approx 150 \pm 6,5$ (of $[143,5 ; 156,5]$)

b $\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,6 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{150}} = 0,6 \pm 0,08$ (of $[0,52 ; 0,68]$)

24

a $4\sigma = 19 - 17 = 2$, dus $\sigma = 2 : 4 = 0,5$.

Dus de maximale standaardafwijking is dan 0,5 mm.

b Hiervoor is een spreidingsdiagram geschikt.

Het is dan nodig om per olif de diameter en de bederftijd te weten.

Bladzijde 84

25

a De populatie is alle klimaatwetenschappers.

De steekproef is de groep van 79 klimaatwetenschappers uit het onderzoek.

b Volgens Bram bestaat de populatie uit de wetenschappelijke artikelen waarin een mening werd gegeven.

c Niet aselekt, want alleen de wetenschappelijke artikelen waarin een mening werd gegeven hebben kans om in de steekproef te komen.

26

a $100\% - 97\% = 3\%$ van de mannen was langer dan 2,02 m.

Dus er namen $\frac{190}{0,03} \approx 6300$ mannen deel aan het evenement.

b Volgens de vuistregels zou tussen 1,72 m en 1,92 m ongeveer 68% moeten zitten. In de tabel is dat $83,2\% - 14,7\% = 68,5\%$. Dus weinig verschil.

Volgens de vuistregels zou tussen 1,62 m en 2,02 m ongeveer 95% moeten zitten. In de tabel is dat $97,0 - 2,0\% = 95\%$. Dus geen verschil.

Volgens de vuistregels zou tussen 1,52 m en 2,12 m (bijna) 100% moeten zitten. In de tabel is dat $99,9\% - 0,1\% = 99,8\%$. Dus ook hier weinig verschil.

27

a $\hat{p} = \frac{18}{80} = 0,225$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,225 \cdot (1 - 0,225)}{80}} = 0,0466\dots$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,225 - 2 \cdot 0,0466\dots \approx 0,132$

$\hat{p} + 2\sigma = 0,225 + 2 \cdot 0,0466\dots \approx 0,318$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,132 ; 0,318]$.

Voor elke autobezitter zijn er twee mensen zonder auto, dus 1 op de 3 mensen heeft een auto.

De populatieproportie is dus $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ en dit ligt niet in het interval.

b Bij aselekte steekproeven valt de populatieproportie bij 5% van de steekproeven buiten het 95%-betrouwbaarheidsinterval. Dit zou zo'n steekproef kunnen zijn.

Ik ben het daarom niet met Lieke eens.

Bladzijde 85

- 28 a** De populatie is alle piercing- en tatoeageshops in Nederland in 2012.
De steekproef is aselekt.

$$\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{36}{119} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{36}{119}(1-\frac{36}{119})}{119}} \approx 0,303 \pm 0,084 \text{ (of } [0,218 ; 0,387])$$

- b** De populatie is alle Nederlandse jongeren.
Niet aselekt, want niet alle Nederlandse jongeren hebben dezelfde kans om in de steekproef terecht te komen (alleen de panelleden die zichzelf hebben aangemeld).
c De populatie is alle berichten op het sociaal media platform over de zanger.
Het betreft hier geen steekproef, want de hele populatie is onderzocht.

- 29 a** Hoger dan in de populatie, want je verwacht dat met name sterke mensen mee willen doen en die kunnen het gewicht langer omhoog houden.
b Hoger dan in de populatie, want alleen verdachte bedrijven werden onderzocht en je verwacht dat die vaker fraude plegen.

- 30 a** Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,15(1-0,15)}{n}} = 0,02$.

$$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,15(1-0,15)}{x}} = 0,02 \text{ geeft } x = 5100.$$

Dus hij moet minimaal 5100 mensen opnemen in zijn steekproef.

- b** De omvang van de populatie komt niet voor in de formule van het 95%-betrouwbaarheidsinterval, dus de steekproefomvang moet gelijk zijn aan het aantal bij vraag a.
c Omdat niet iedereen geregistreerd staat is het moeilijk om een lijst op te stellen van de wereldbevolking waaruit je een aselechte steekproef kunt nemen.
Ook zijn veel mensen moeilijk te bereiken.

Bladzijde 86

- 31 a** Hoe groter de steekproefomvang hoe nauwkeuriger het 95%-betrouwbaarheidsinterval.
Dus het interval bij de docenten VO is nauwkeuriger dan het interval bij de docenten HO.

$$\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,29 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,29 \cdot (1-0,29)}{37}} \approx 0,29 \pm 0,149 \text{ (of } [0,141 ; 0,439])$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $29\% \pm 14,9\%$ (of $[14,1\% ; 43,9\%]$).

- c** breedte = $0,712 - 0,628 = 0,084$

$$\text{Los op } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,67(1-0,67)}{n}} = 0,084.$$

$$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,67(1-0,67)}{x}} = 0,084 \text{ geeft } x = 501,36...$$

Dus de steekproefomvang is ongeveer 500 docenten.

- 32 a** De richtlijn geeft een maximum van $366 \cdot 55 = 20\,130$ gram suiker in 2024.

Deze hoeveelheid is na $\frac{20\,130}{89} = 226,17...$ dagen geconsumeerd.

Dus op dag 227, dat is op 14 augustus, is de maximum hoeveelheid suiker voor een heel jaar geconsumeerd.

- b** De suikermaxdag is berekend met het steekproefgemiddelde, maar het populatiegemiddelde kan hiervan afwijken, wat een andere suikermaxdag oplevert.

$$\text{c } \bar{X} = 89 \text{ en } \sigma = \frac{35}{\sqrt{500}} = 1,56...$$

$$\bar{X} - 2\sigma = 89 - 2 \cdot 1,56... = 85,86...$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 89 + 2 \cdot 1,56... = 92,13...$$

$$\frac{20\,130}{85,86...} = 234,42..., \text{ dus op dag 235 oftewel 22-8-2024.}$$

$$\frac{20\,130}{92,13...} = 218,49..., \text{ dus op dag 219 oftewel 6-8-2024.}$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de datum van suikermaxdag is $[6-8-2024, 22-8-2024]$.

Bladzijde 87

- 33 a** Nee, want bij het gewicht is er geen modus, want de gewichten 56 kg en 70 kg komen beide drie keer voor.
- b** De mediane lengte (het 13^e waarnemingsgetal als op grootte is gerangschikt) is 176 cm. Bij 176 cm hoort een gewicht van 66 kg of van 72 kg. Het mediane gewicht is echter 63 kg, dus de jongen met de mediane lengte heeft niet het mediane gewicht.
- c** Bij de groepen is de spreidingsbreedte achtereenvolgens $166 - 160 = 6$ cm, $172 - 168 = 4$ cm, $178 - 173 = 5$ cm, $183 - 179 = 4$ cm en $194 - 185 = 9$ cm. Dus bij de 20% langste jongens is de spreidingsbreedte het grootst.
- d** 12% is 3 jongens.
De drie jongens met de grootste lengte hebben een lengte van 187 cm (die heeft een gewicht van 70 kg), 192 cm (die heeft een gewicht van 75 kg) en 194 cm (die heeft een gewicht van 70 kg).
De drie jongens met het grootste gewicht hebben een gewicht van 72 kg (die heeft een lengte van 176 cm), 74 kg (die heeft een lengte van 185 cm) en 75 kg (die heeft een lengte van 192 cm).
Dus alleen de jongen met een lengte van 192 cm en een gewicht van 75 kg hoort bij beide groepen van drie jongens. Dat is dus $\frac{1}{25} \cdot 100\% = 4\%$ van de jongens.
- e** Ze controleert de vuistregel dat ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ ligt. In het spreidingsdiagram hebben 17 jongens een lengte die in de klasse [167, 185] valt.
Dat is dus $\frac{17}{25} \cdot 100\% = 68\%$.
De conclusie is dat dit overeenkomt met de vuistregel.

Bladzijde 88

- 34 a** mannen: $\mu = \frac{0,90 + 2,10}{2} = 1,5$ mmol/L mannen: $\sigma = \frac{2,10 - 0,90}{4} = 0,3$ mmol/L
vrouwen: $\mu = \frac{1,10 + 2,20}{2} = 1,65$ mmol/L vrouwen: $\sigma = \frac{2,20 - 1,10}{4} = 0,275$ mmol/L
Dus het gemiddelde is groter bij vrouwen. Dus de standaardafwijking is groter bij mannen.
- b** $\mu = \frac{7,5 + 10}{2} = 8,75$ mmol/L en $\sigma = \frac{10 - 7,5}{4} = 0,625$ mmol/L
 $\mu + \sigma = 8,75 + 0,625 = 9,375$ mmol/L, dus je verwacht dat 16% van de gezonde vrouwen een hemoglobinegehalte groter dan 9,375 mmol/L heeft.
Dus minder dan 16% heeft een hemoglobinegehalte groter dan 9,5 mmol/L.
- c** Frequenties bij een klassenindeling, dus gebruik de max V_{cp} .

	groep A		groep B		V_{cp}
	cum. freq.	cum. perc.	cum. freq.	cum. perc.	
$\langle \leftarrow; 2,00]$	132	25,8%	64	15,9%	9,9%
$\langle 2,00; 2,50]$	316	61,7%	160	39,8%	21,9% ← max V_{cp}
$\langle 2,50; 3,00]$	441	86,1%	281	69,9%	16,2%
$\langle 3,00; 4,00]$	498	97,3%	378	94,0%	3,3%
$\langle 4,00; \rightarrow$	512	100%	402	100%	0%

De max $V_{cp} = 21,9$.

Omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$ is het verschil middelmatig.

- d** Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de *phi*-coëfficiënt.
Zie de kruistabel hiernaast.

$$\phi = \frac{316 \cdot 242 - 160 \cdot 196}{\sqrt{476 \cdot 512 \cdot 402 \cdot 438}} \approx 0,218$$

Omdat $0,2 < \phi \leq 0,4$ is het verschil middelmatig.

		groep		
		A	B	
verhoogd	geen	316	160	476
risico	wel	196	242	438
		512	402	

Bladzijde 89

- 35** **a** Ze maken de spreiding kleiner. Dan liggen de tonen dichter bij elkaar en zijn er dus ook meer tonen in de buurt van de hardste toon.
- b** De krommen zijn niet symmetrisch.
- c** Eerder een onderschatting, want de verdelingen zijn links-scheef en daarbij is het gemiddelde lager dan de modus en de mediaan.
- d** Oplossen van de vergelijking $-14 + 0,067t = 0$ geeft $t \approx 209$ en hierbij hoort het jaar $1950 + 209 = 2159$. In dat jaar klinken de tonen allemaal even hard.
- e** Doordat de tonen bij *Death Magnetic* dicht bij elkaar liggen, komt de hardste toon niet ver boven de gemiddelde digitale hardheid uit. Bij liedjes met een grote spreiding liggen tonen verder uit elkaar en ligt de hardste toon dus ook verder boven de gemiddelde digitale hardheid.

Bladzijde 90

- 36** **a** Bijvoorbeeld wel/niet geverfd en wel/geen reactie van de koeien op de vliegen.
- b** Steekproefgemiddelden en steekproefstandaardafwijkingen, dus gebruik de effectgrootte.
- $$E = \frac{128,8 - 55,5}{\frac{1}{2}(68,6 + 35,2)} \approx 1,412$$
- Omdat $E > 0,8$ is het verschil groot.
- c** Per uur is het aantal vliegen gemiddeld
bij de zwarte koeien $2 \cdot 128,8 = 257,6$ en
bij de gestreepte koeien $2 \cdot 55,5 = 110$.
Een vlieg steekt elke vier minuten een keer, dus $\frac{60}{4} = 15$ steken per uur.
Het gemiddeld aantal steken per uur is
bij de zwarte koeien $15 \cdot 257,6 = 3864$ en
bij de gestreepte koeien $15 \cdot 110 = 1650$.
Dus ik raad hem aan zijn koeien te verven, want 1650 is minder dan 2000 en 3864 is meer dan 2000.
- d** Om uit te sluiten dat de vliegen wegblijven vanwege de verf en niet het patroon van de verf.
- e** Bijvoorbeeld:
Alleen zwarte wagyu koeien zijn onderzocht, misschien is het anders bij andere soorten.
Het onderzoek vond plaats in Japan. Daar zijn misschien andere vliegen dan elders.

Bladzijde 91

- 37** **a** De breedte is $4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ met $\hat{p} = 0,45$ en $n = 1800$ en dit geeft $4 \cdot \sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{1800}} \approx 0,047$.
In de figuur lees je af: breedte = $0,472 - 0,428 = 0,044$.
Dit komt ongeveer met elkaar overeen.
- b** De grootste peiling heeft de kleinste breedte, dus dat is de peiling van YouGov.
De kleinste peiling heeft de grootste breedte, dus dat is de peiling van BMG.
- c** De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $0,46 - 0,42 = 0,04$ en de steekproefproportie is 0,44.
- $$\text{Los op } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,44 \cdot 0,56}{n}} = 0,04.$$
- $$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,44 \cdot 0,56}{x}} = 0,04 \text{ geeft } x = 2464.$$
- Dus de steekproefomvang is 2464 mensen.
- d** Het betrouwbaarheidsinterval van BMG is heel breed. Dan is de kans groot dat de uitslag er binnen valt, maar kun je van tevoren niet veel zeggen over wat de uitslag gaat zijn.
- e** Bij 9 van de 12, dat is dus bij 75%.
Dat is minder dan je zou verwachten.
Een mogelijke verklaring is dat het maar 12 peilingen zijn. Als je meer peilingen zou houden, zou het percentage hoger kunnen liggen.
Het kan ook zijn dat de steekproeven niet aselekt zijn.

Bladzijde 92

- 38** **a** Het zou kunnen dat vissen op de luidsprekers zelf afkomen en niet op hun geluid. Door luidsprekers zonder geluid te plaatsen kan worden uitgesloten dat dit een rol speelt.
- b** De interkwartielafstand is $13 - 5 = 8$ en $13 + 1,5 \cdot 8 = 25$. De waarneming 34 ligt dus meer dan anderhalf keer de interkwartielafstand boven het derde kwartiel.
- c** Ze heeft geen gelijk, want zowel meer dan 18 als minder dan 5 is 25%.
- d** Boxplots, dus gebruik boxplots vergelijken.
groepen 1 en 2: de boxen overlappen (nog net) en de medianen liggen buiten de box van de andere boxplot, dus het verschil is middelmatig.
groepen 1 en 3: de boxen overlappen en de medianen liggen buiten de box van de andere boxplot, dus het verschil is middelmatig.

Steekproefgemiddelden en steekproefstandaardafwijkingen, dus gebruik de effectgrootte.

$$\text{groepen 1 en 2: } E = \frac{21,6 - 11,3}{\frac{1}{2}(9,8 + 9,0)} \approx 1,096. \text{ Omdat } E > 0,8 \text{ is het verschil groot.}$$

$$\text{groepen 1 en 3: } E = \frac{21,6 - 12,1}{\frac{1}{2}(9,8 + 8,8)} \approx 1,022. \text{ Omdat } E > 0,8 \text{ is het verschil groot.}$$

- e** Aan voorwaarde 1 is voldaan, want eerst zijn de luidsprekers geplaatst en daarna is geteld hoeveel monniksvissen zich in het koraal bevonden.
Ook aan voorwaarde 2 is voldaan. Doordat de koralen aselekt zijn ingedeeld in drie groepen zijn andere variabelen die de samenhang zouden kunnen verklaren ongeveer gelijk verdeeld over de groepen. Deze factoren kunnen dus een verschil niet verklaren. (En ook de vorm van de luidsprekers kan niet de oorzaak zijn, omdat in de groep koralen met de dummy ook minder vissen waren.)
Dus je mag concluderen dat geluid een oorzaak is van de aanwezigheid van meer monniksvissen.

Bladzijde 93

- 39** **a** De student met de hoogste score heeft ook de langste gemiddelde slaapduur (te zien in de bovenste figuur).
De student met de laagste score sliep niet gemiddeld het kortst (ook te zien in de bovenste figuur).
- b** Uitspraak I volgt uit de bovenste figuur: er zijn 6 studenten met een gemiddelde slaapduur van minstens acht uur en deze haalden allemaal tenminste 70 punten.
Uitspraak II volgt uit de onderste figuur: studenten die vaker ongeveer even lang slapen hebben een kleinere standaardafwijking van de slaapduur, en daarbij hoort een hogere score.
- c** Steekproefgemiddelden en steekproefstandaardafwijkingen, dus gebruik de effectgrootte.
$$E = \frac{6,57}{\frac{1}{2}(13,71 + 11,01)} \approx 0,532$$

Omdat $0,4 < E \leq 0,8$ is het verschil middelmatig.
- d** Dat kun je niet concluderen, want er zou een andere variabele kunnen zijn die de samenhang verklaart. Bijvoorbeeld een regelmatige dagindeling.

Bladzijde 94

40

- a** Bij de hoge inkomens was 28% voorstander en bij de lage inkomens 69%.
- b** In het vlak linksboven staan voorstellen waarvan de hoge inkomens geen voorstander zijn en de lage inkomens wel.
- c** In het vlak linksboven is $\frac{3}{38} \cdot 100\% \approx 7,9\%$ van de voorstellen gerealiseerd.
- d** In het vlak rechtsonder is $\frac{10}{30} \cdot 100\% \approx 33,3\%$ van de voorstellen gerealiseerd.

Er worden verhoudingsgewijs meer voorstellen gerealiseerd waar de hoge inkomens voorstander van zijn en de lage inkomens niet, dan er voorstellen worden gerealiseerd waarvan de lage inkomens voorstander zijn en de hoge inkomens niet.

- e** Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de *phi*-coëfficiënt. Zie de kruistabel hiernaast.

$$\phi = \frac{3 \cdot 20 - 35 \cdot 10}{\sqrt{38 \cdot 13 \cdot 55 \cdot 30}} \approx -0,321$$

Omdat $-0,4 \leq \phi < -0,2$ is het verschil middelmatig.

	gerealiseerd	niet- gerealiseerd	
linksboven	3	35	38
rechtsonder	10	20	30
	13	55	

- f** Je kunt hieruit net zo goed de conclusie trekken dat er geluisterd wordt naar mensen met hoge inkomens, want die steunen deze voorstellen ook. Het is daarom beter om te kijken naar de verschillen tussen de vlakken linksboven en rechtsonder, zoals in de vragen d en e is gedaan. En dan blijkt dat er wel verschil is in de mate waarin naar de verschillende inkomensgroepen wordt geluisterd.

Bladzijde 95

41

- a** Bij een normale verdeling ligt 2,5% van de waarnemingsgetallen tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu - 2\sigma$. Maar bij deze steekproef ligt 0% van de waarnemingsgetallen tussen de bijbehorende waarden $-0,017$ en $-0,005$ (want oppervlakte kan niet negatief zijn).

- b** $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 0,019 \pm 2 \cdot \frac{0,012}{\sqrt{925}} \approx 0,0190 \pm 0,0008 \text{ km}^2$ (of $[0,0182 ; 0,0198] \text{ km}^2$).

- c** De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $3,478 - 1,273 = 2,205$.

$$\text{Los op } 4 \cdot \frac{S}{\sqrt{50}} = 2,205.$$

$$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \frac{x}{\sqrt{50}} = 2,205 \text{ geeft } x \approx 3,898.$$

$$\text{Dus } S \approx 3,898.$$

- d** Los op $4 \cdot \frac{3,9}{\sqrt{n}} = 1$

$$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \frac{3,9}{\sqrt{x}} = 1 \text{ geeft } x = 243,36.$$

Dus het jachtgebied van Max moet minimaal 244 dagen onderzocht worden.

Bladzijde 96

42

- a** I Lees af: het aantal katten dat een vogel mee naar huis heeft genomen is $310 + 130 + 30 + 20 + 10 = 500$.

Dus $986 - 500 = 486$ katten hebben geen vogel mee naar huis genomen.

- II Het maximale aantal vogels dat mee naar huis is genomen is

$$5 \cdot 310 + 10 \cdot 130 + 15 \cdot 30 + 20 \cdot 20 + 25 \cdot 10 = 3950.$$

Het minimale aantal zoogdieren dat mee naar huis is genomen is

$$1 \cdot 230 + 6 \cdot 100 + 11 \cdot 50 + 16 \cdot 30 + 21 \cdot 40 + 26 \cdot 15 + 31 \cdot 8 + 36 \cdot 10 + 41 \cdot 20 = 4518.$$

Dus er zijn meer zoogdieren dan vogels mee naar huis genomen.

$$\mathbf{b} \quad \hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{500}{986} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{500}{986} \cdot (1 - \frac{500}{986})}{986}} \approx 0,507 \pm 0,032 \text{ (of } [0,475 ; 0,539])$$

c Per kat geldt voor de periode van 5 maanden:

$$\bar{X} = \frac{14370}{986} = 14,57... \text{ en } \sigma = \frac{14,1}{\sqrt{986}} = 0,449...$$

$$\bar{X} - 2\sigma = 14,57... - 2 \cdot 0,449 = 13,67...$$

$$\bar{X} + 2\sigma = 14,57... + 2 \cdot 0,449 = 15,47...$$

In werkelijkheid worden er 4 keer zoveel prooien mee naar huis genomen. Dus voor een periode van een heel jaar en voor alle 9 miljoen katten krijg je het volgende 95%-betrouwbaarheidsinterval.

$$[4 \cdot \frac{12}{5} \cdot 9 \cdot 13,67..., 4 \cdot \frac{12}{5} \cdot 9 \cdot 15,47...] \approx [1182, 1337] \text{ miljoen (of } 1259 \pm 78 \text{ miljoen)}$$

43 De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde per kattenbezitter is $4 \cdot \frac{134}{\sqrt{n}}$, dus

$$\text{de breedte voor de 2,6 miljoen kattenbezitters is } 2,6 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot \frac{134}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{Los op } 2,6 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot \frac{134}{\sqrt{n}} = 50 \cdot 10^6.$$

$$\text{De optie oplossen bij } 2,6 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot \frac{134}{\sqrt{x}} = 50 \cdot 10^6 \text{ geeft } x = 776,84...$$

Dus minstens 777 kattenbezitters in de steekproef.

Bladzijde 97

C6 a Opleiding is ordinaal, want de waarden zijn geen hoeveelheden en hebben een logische volgorde. Wel/niet gokken is nominaal, want de waarden zijn geen hoeveelheden en hebben geen logische volgorde.

b Van de $112 + 1162 + 133 + 1493 + 133 + 1854 + 76 + 1916 = 6879$ jongeren in de steekproef gokken er $112 + 133 + 133 + 76 = 454$.

$$\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{454}{6879} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{454}{6879} \cdot (1 - \frac{454}{6879})}{6879}} \approx 0,066 \pm 0,006 \text{ (of } [0,060; 0,072])$$

Het gevraagde 95%-betrouwbaarheidsinterval is $6,6\% \pm 0,6\%$ (of $[6,0\%; 7,2\%]$).

c Frequenties bij een ordinale variabele met meer dan twee categorieën, dus gebruik de $\max V_{cp}$.

opleiding	gokken				V_{cp}
	wel		niet		
	cum. freq.	cum. perc.	cum. freq.	cum. perc.	
vmbo-bk	112	24,7%	1162	18,1%	6,6%
vmbo-gt	245	54,0%	2655	41,3%	12,7%
havo	378	83,3%	4509	70,2%	13,1% ← max V_{cp}
vwo	454	100,0%	6425	100,0%	0,0%

De $\max V_{cp} = 13,1$.

Omdat $\max V_{cp} \leq 20$ is het verschil gering.

d Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de ϕ -coëfficiënt.

Zie de kruistabel hiernaast.

$$\phi = \frac{388 \cdot 3408 - 3017 \cdot 66}{\sqrt{3405 \cdot 454 \cdot 6425 \cdot 3474}} \approx 0,191$$

Omdat $-0,2 \leq \phi < 0,2$ is het verschil gering.

	gokken		
	wel	niet	
jongens	388	3017	3405
meisjes	66	3408	3474
	454	6425	

- C7** De steekproef is niet aselekt, want geneeskundestudenten die geen les hebben van deze docent hebben geen kans om in de steekproef te komen. Zijn studenten bevinden zich in een afhankelijkheidspositie en voelen zich mogelijk niet vrij genoeg om zich negatief uit te laten over deze verplichting.

Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 98

- 1** vraag I: lijndiagram, want hierin is het verloop in de tijd goed te zien.
vraag II: spreidingsdiagram, want hierin is de samenhang tussen twee variabelen goed te zien.
vraag III: dotplot, want hierin is de verdeling goed te zien.

- 2 a** kwalitatief
b Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de ϕ -coëfficiënt.
Zie de kruistabel hiernaast.

$$\phi = \frac{24 \cdot 14 - 27 \cdot 16}{\sqrt{51 \cdot 40 \cdot 41 \cdot 30}} \approx -0,061$$

Omdat $-0,2 \leq \phi < 0,2$ is het verschil gering.

- c** Boxplots, dus gebruik boxplots vergelijken.
De boxen overlappen elkaar en geen van beide medianen ligt buiten de box van de andere boxplot.
Dus het verschil is gering.

Steekproefgemiddelden en steekproefstandaardafwijkingen, dus gebruik de effectgrootte.

$$E = \frac{903,1 - 877,1}{\frac{1}{2}(73,3 + 55,7)} \approx 0,403$$

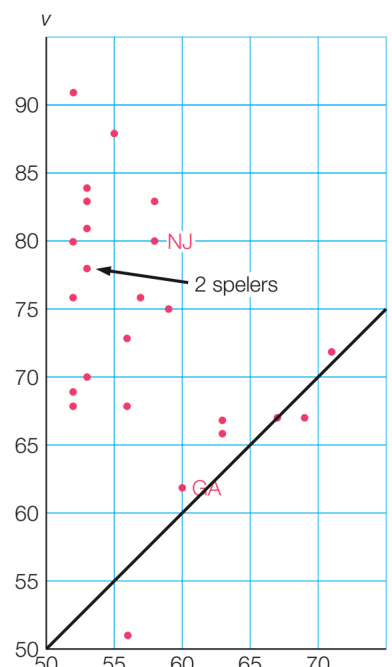
Omdat $0,4 < E \leq 0,8$ is het verschil middelmatig.

- d** Nee, deze conclusie mag je niet trekken, omdat er een andere variabele zou kunnen zijn die de samenhang verklaart.

	gevangen	wild	
man	24	27	51
vrouw	16	14	30
	40	41	

Bladzijde 99

- 3 a** De punten onder de lijn in de figuur hiernaast horen bij spelers van wie v kleiner is dan f . Dit zijn de punten (56, 51) en (69, 67). Jalen Duren heeft een grotere waarde van v , dus het punt (69, 67) hoort bij hem.
b Er zijn 25 waarnemingsgetallen, dus de mediaan is het 13^e getal. Als je van boven naar beneden (of andersom) de stippen in het diagram langsgaat, dan hoort bij de 13^e stip $v = 75$. Dus de mediaan is 75%.
c De verdeling is rechts-scheef, want er staan veel stippen links in de figuur en weinig stippen rechts.



- d** Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de ϕ -coëfficiënt.
Zie de kruistabel hiernaast.

$$\phi = \frac{360 \cdot 266 - 90 \cdot 434}{\sqrt{450 \cdot 794 \cdot 356 \cdot 700}} \approx 0,190$$

Omdat $-0,2 \leq \phi < 0,2$ is het verschil gering.

	raak	gemist	
NJ	360	90	450
GA	434	266	700
	794	356	

4

$$\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,58 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,58 \cdot (1-0,58)}{38}} \approx 0,580 \pm 0,160 \text{ (of } [0,420; 0,740])$$

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage is 58,0% $\pm$ 16,0% (of [42,0%; 74,0%]).

- b** De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie is $0,781 - 0,699 = 0,082$ en $\hat{p} = 0,74$.

$$\text{Los op } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,74 \cdot (1-0,74)}{n}} = 0,082.$$

$$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,74 \cdot (1-0,74)}{x}} = 0,082 \text{ geeft } x = 457,8\dots$$

Het aantal hbo studenten in de steekproef is dus 460.

- c** De steekproef was niet aselekt, want studenten die het studententijdschrift niet lezen hebben geen kans om in de steekproef voor te komen.

Gemengde opgaven

Bladzijde 100

1

a $\frac{23,18}{0,89} \approx 26,04$ euro per uur

- b** Kwalitatief, want de waarden zijn geen getallen.
Ordinaal, want de waarden hebben een logische volgorde.

c $n = \frac{270}{0,45} = 600$

$$\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,45 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,45 \cdot (1-0,45)}{600}} \approx 0,45 \pm 0,041 \text{ (of } [0,409; 0,491])$$

Het gevraagde 95%-betrouwbaarheidsinterval is 45% $\pm$ 4,1% (of [40,9%; 49,1%]).

- d** In 2020 zaten er $800 - 600 = 200$ mannen in de steekproef.

Dus $0,70 \cdot 200 + 270 = 410$ voltijds werkende verpleegkundigen in 2020.

Stel dat de steekproef van 2010 bestaat uit 20 mannen en 780 vrouwen.

Dus $0,75 \cdot 20 + 0,50 \cdot 780 = 405$ voltijds werkende verpleegkundigen in 2010.

Er zou dan juist sprake zijn van een toename van het aantal voltijds werkende verpleegkundigen in de steekproef van 2020 ten opzichte van 2010.

Bladzijde 101

2

- a** Steekproefgemiddelden en steekproefstandaardafwijkingen, dus gebruik de effectgrootte.

$$E = \frac{38,4 - 31,2}{\frac{1}{2}(2,9 + 3,1)} = 2,4$$

Omdat $E > 0,8$, is het verschil groot.

- b** De lijn gaat door de punten (20; 2,2) en (60, 7).

$$S_{\text{nieuw}} = a \cdot S_{\text{oud}} + b \text{ met } a = \frac{\Delta S_{\text{nieuw}}}{\Delta S_{\text{oud}}} = \frac{7 - 2,2}{60 - 20} = 0,12.$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{\text{nieuw}} = 0,12S_{\text{oud}} + b \\ S_{\text{oud}} = 20 \text{ en } S_{\text{nieuw}} = 2,2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,12 \cdot 20 + b = 2,2 \\ 2,4 + b = 2,2 \\ b = -0,2 \end{array}$$

Dus $S_{\text{nieuw}} = 0,12S_{\text{oud}} - 0,2$.

- c** $0,12S_{\text{oud}} - 0,2 = 8,4$

De optie oplossen bij $0,12x - 0,2 = 8,4$ geeft $x = 71,6\dots$

Dus een score van ongeveer 72.

- d** $S_{\text{oud}} = 40$ geeft $S_{\text{nieuw}} = 0,12 \cdot 40 - 0,2 = 4,6$

Dus bij scores lager dan 4,6 op de nieuwe test worden de extra trainingen aangeboden.

- e** Er is één persoon waarvoor geldt $S_{\text{oud}} < 40$ en $S_{\text{nieuw}} > 4,6$. Hierbij hoort het punt (39; 4,7).

Er is ook één persoon waarvoor geldt $S_{\text{oud}} > 40$ en $S_{\text{nieuw}} < 4,6$. Hierbij hoort het punt (41; 4,5).

Dus dat is bij twee sporters het geval.

Bladzijde 102

- 3 a Een kwantitatieve variabele.
b Bij de punten op deze lijn was de schatting voor de discussie gelijk aan de schatting na de discussie. De bijbehorende leerlingen zijn dus niet van gedachten veranderd naar aanleiding van de discussie.
c De punten rechts van de lijn $x = 80$ liggen bijna allemaal onder de lijn $y = 80$.

Bladzijde 103

- 4 a Niet eens. De polygoon van Alphastar ligt hoger, dus minder acties per minuut komt juist vaker voor bij Alphastar.
b $\max V_{cp} = 75 - 60 = 15$, en omdat $\max V_{cp} \leq 20$ is het verschil gering.
c Alphastar won $11 + 4 + 10 + 4 + 4 + 10 + 8 + 5 + 5 = 61$ wedstrijden.
De menselijke tegenstanders wonnen $3 + 0 + 2 + 4 + 3 + 5 + 6 + 5 + 3 = 31$ wedstrijden.
Dat is $\frac{61}{31} \approx 1,97$ keer zo vaak.

- d Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de *phi*-coëfficiënt.

Er zijn $14 + 7 + 8 = 29$ wedstrijden waarin Alphastar en zijn menselijke tegenstander hetzelfde ras speelden. Hiervan won Alphastar er $11 + 4 + 5 = 20$.
Zie de kruistabel hiernaast.

$$\phi = \frac{20 \cdot 20 - 9 \cdot 9}{\sqrt{29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29}} \approx 0,379$$

Omdat $0,2 < \phi \leq 0,4$ is het verschil middelmatig.

	Alphastar	mens	
gewonnen	20	9	29
verloren	9	20	29
	29	29	

Bladzijde 104

- 5 a kwantitatief en continu
b Conclusie 2 is te algemeen, het gaat hier om de Munduruku en niet om alle inheemse volken. Verder gaat het alleen over aantallen tussen 1 en 10, dus 'grotere aantallen' is onduidelijk.
Verbetering conclusie 2:
Munduruku vinden aantallen tussen 5 en 10 dichter bij elkaar liggen dan aantallen tussen 1 en 4.
c Bij de laagste 50% is de spreidingsbreedte $6,5 - 1,5 = 5$.
Bij de hoogste 50% is de spreidingsbreedte $8 - 6,3 = 1,7$.
d $\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 6,5 - 2 \cdot \frac{1,896}{\sqrt{33}} = 5,83...$

Omdat 5 niet tussen 5,83... en 6,5 ligt, kun je met minstens 95% betrouwbaarheid zeggen dat de Munduruku het stippenaantal 5 niet op de positie van 5 op de getallenlijn plaatsen.

Bladzijde 105

- 6 a De variabele 'mate van tevredenheid' is ordinaal, want de waarden zijn geen hoeveelheden en hebben een logische volgorde.
De variabele 'woonomgeving' is nominaal, want de waarden zijn geen hoeveelheden en hebben geen logische volgorde.
b Bij de mediaan hoort cumulatief percentage 50(%.
Voor platteland: $22\% + 17\% = 39\% < 50\%$ en $39\% + 30\% = 69\% > 50\%$, dus de mediaan is 'neutraal'.
Voor stad: $31\% < 50\%$ en $31\% + 26\% = 57\% > 50\%$, dus de mediaan is 'tevreden'.
Voor platteland is de modus 'neutraal' en voor stad is de modus 'zeer tevreden'.
c $\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,31 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,31 \cdot (1-0,31)}{200}} \approx 0,31 \pm 0,065$ (of $[0,245 ; 0,375]$)

- d Relatieve frequenties bij een klassenindeling, dus gebruik de max V_{cp} .

	platteland	stad	
	cum. perc.	cum. perc.	V_{cp}
zeer tevreden	22%	31%	9%
tevreden	39%	57%	18% ← max V_{cp}
neutraal	69%	81%	12%
ontevreden	88%	92%	4%
zeer ontevreden	100%	100%	0%

De max $V_{cp} = 18$.

Omdat max $V_{cp} \leq 20$ is het verschil gering.

Bladzijde 106

- 7 a Een kruistabel met frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de ϕ -coëfficiënt.

$$\phi = \frac{118 \cdot 124 - 182 \cdot 176}{\sqrt{(118 + 182) \cdot (118 + 176) \cdot (182 + 124) \cdot (176 + 124)}} \approx -0,193$$

Omdat $-0,2 < \phi < 0,2$ is het verschil gering.

- b Het percentage mannetjes is $\frac{176}{300} \cdot 100\% \approx 59\%$ en het percentage vrouwtjes is $100\% - 59\% = 41\%$.

De percentageverhouding mannetjes : vrouwtjes = 59 : 41.

- c $\frac{42 - 24}{24,4 - 21,6} \approx 6,4$; $\frac{60 - 42}{27,2 - 24,4} \approx 6,4$ en $\frac{76 - 60}{29,7 - 27,2} = 6,4$

Steeds krijg je ongeveer 6,4% per °C, dus de aanname van de bioloog is te verdedigen.

- d Bij een toename van 1 °C hoort een toename in het percentage mannetjes van 6,4, dus bij 1 procent toename van mannetjes hoort een toename van $\frac{1}{6,4} = 0,15... \text{ °C}$.

De gezochte verhouding van 1 : 1 heeft een percentage mannetjes van 50%, dat is 8% meer dan de 42% bij 24,4 °C. Dus bij 50% mannetjes hoort een temperatuur van $24,4 + 8 \cdot 0,15... \approx 25,7 \text{ °C}$.

Alternatieve uitwerking

Voor P het percentage mannetjes en T de temperatuur in °C geldt: $P = 6,4T + b$

$$\left. \begin{array}{l} P = 6,4T + b \\ T = 24,4 \text{ en } P = 42 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6,4 \cdot 24,4 + b = 42 \\ 156,16 + b = 42 \\ b = -114,18 \end{array}$$

Dus $P = 6,4T - 114,18$.

De gezochte verhouding van 1 : 1 heeft een percentage mannetjes van 50%.

$$6,4T - 114,18 = 50$$

De optie oplossen bij $6,4x - 114,18 = 50$ geeft $x = 25,65$

Dus bij een temperatuur van ongeveer 25,7 °C.

e De best passende lijn gaat door de punten (23, 30) en (27, 60).

$$P_m = aT + b \text{ met } \frac{\Delta P_m}{\Delta T} = \frac{60 - 30}{27 - 23} = 7,5.$$

$$\left. \begin{array}{l} P_m = 7,5T + b \\ T = 23 \text{ en } P_m = 30 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7,5 \cdot 23 + b = 30 \\ 172,5 + b = 30 \\ b = -142,5 \end{array}$$

$$\text{Dus } P_m = 7,5T - 142,5.$$

$$P_v = 100 - P_m = 100 - (7,5T - 142,5) = 100 - 7,5T + 142,5 = -7,5T + 242,5$$

$$\text{Dus } P_v = -7,5T + 242,5.$$

f $\hat{p} = 0,44$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,44 \cdot 0,56}{250}} = 0,031\dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,44 - 2 \cdot 0,031\dots \approx 0,377$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,44 + 2 \cdot 0,031\dots \approx 0,503$$

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [37,7%; 50,3%].

$$T = 24,3 \text{ geeft } P_m = 7,5 \cdot 24,3 - 142,5 = 39,75$$

Ja, 39,75% valt binnen het interval.

g De middelste 95% ligt hoogstens 2σ , dus 6% van het gemiddelde, oftewel van de lijn af.

Dus de middelste 95% ligt tussen de lijnen

$$P_{-2\sigma} = 7,5T - 148,5 \text{ en}$$

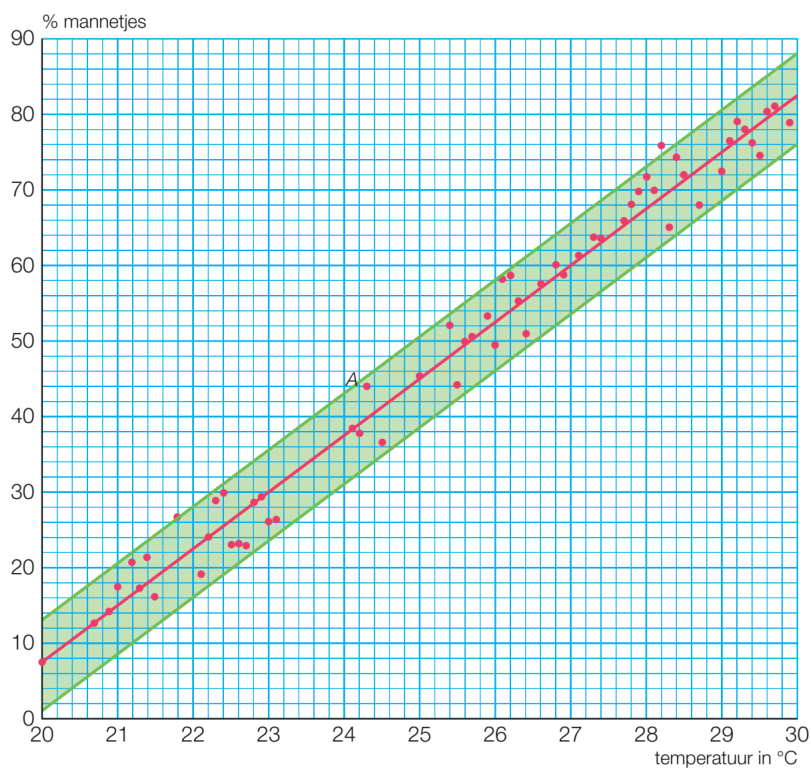
$$P_{+2\sigma} = 7,5T - 136,5.$$

T	20	30
$P_{-2\sigma}$	1,5	76,5
$P_{+2\sigma}$	13,5	88,5

Zie de figuur hiernaast.

h $8 : 25 = 32 : 100$, dus 32% is mannetje.

Lees af bij $T = 24^\circ\text{C}$ dat 32% binnen het gebied van vraag f valt.



11 Formules en variabelen

11.1 Grafieken en gebieden

Bladzijde 110

V1 a lijn k :

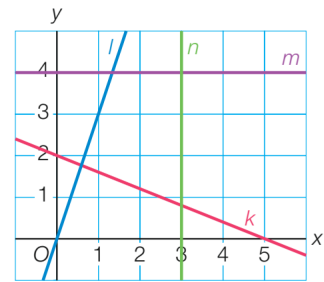
x	0	5
y	2	0

lijn m :

x	0	1
y	0	3

Zie de figuur hiernaast.

- b** $x = -5$ en $y = 4$ geeft $2 \cdot -5 + 5 \cdot 4 = 10$, dus $(-5, 4)$ ligt op k .
 $x = -5$ en $y = 4$ geeft $3 \cdot -5 - 4 = -19 \neq 0$, dus $(-5, 4)$ ligt niet op l .
 Op lijn m liggen punten alle punten met y -coördinaat 4, dus ook $(-5, 4)$ ligt op m .
 Op lijn n liggen punten alleen maar punten met x -coördinaat 3, dus ook $(-5, 4)$ ligt niet op n .
 Dus op lijnen k en m .
- c** $x = 2$ en $y = 7$ geeft $3 \cdot 2 - 7 = -1 \neq 0$, dus $(2, 7)$ ligt niet op l .
 $x = 20$ en $y = 60$ geeft $3 \cdot 20 - 60 = 0$, dus $(20, 60)$ ligt op l .



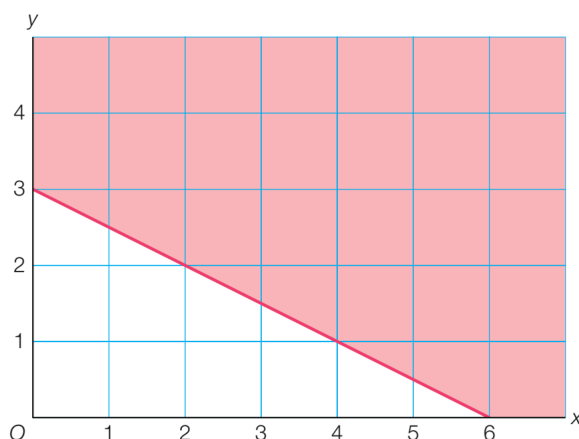
- 1 a** $A(1, 1)$
 $x = 1$ en $y = 1$ geeft $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 < 9$
 $B(2, -1)$
 $x = 2$ en $y = -1$ geeft $2 \cdot 2 + 3 \cdot -1 = 1 < 9$
- b** Neem bijvoorbeeld $(1, 2)$.
 $x = 1$ en $y = 2$ geeft $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8 < 9$
- c** Neem bijvoorbeeld $(3, 2)$.
 $x = 3$ en $y = 2$ geeft $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 > 9$
- d** Bij het gebied boven lijn k hoort de ongelijkheid $2x + 3y > 9$.

Bladzijde 112

2 a $x + 2y = 6$

x	0	6
y	3	0

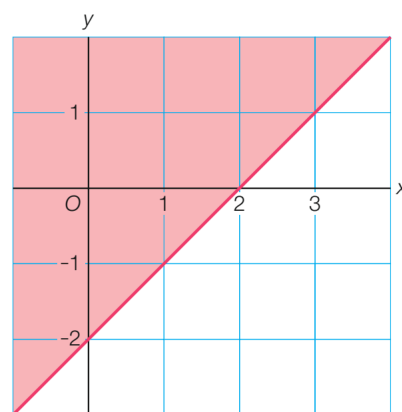
$(0, 0)$ geeft $0 + 2 \cdot 0 = 0 \not\geq 6$



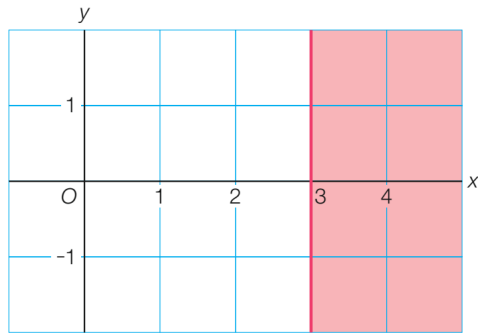
b $x - y = 2$

x	0	2
y	-2	0

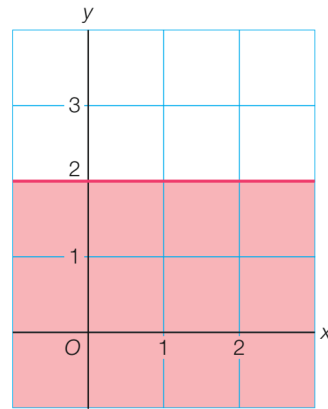
$(0, 0)$ invullen geeft $0 - 0 = 0 \leq 2$



c verticale lijn door (3, 0)



d horizontale lijn door (0, 2)



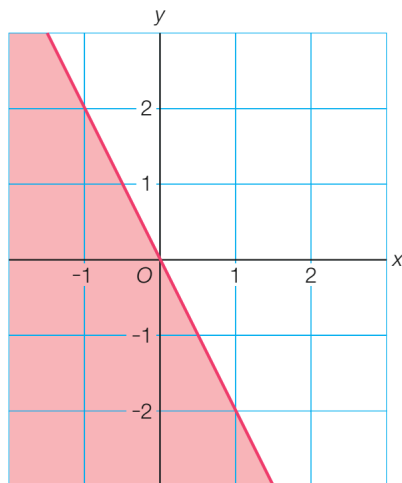
3 a Omdat dit punt op de lijn $2x + y = 0$ ligt.

b $2x + y = 0$

x	0	1
y	0	-2

Neem bijvoorbeeld (0, 1).

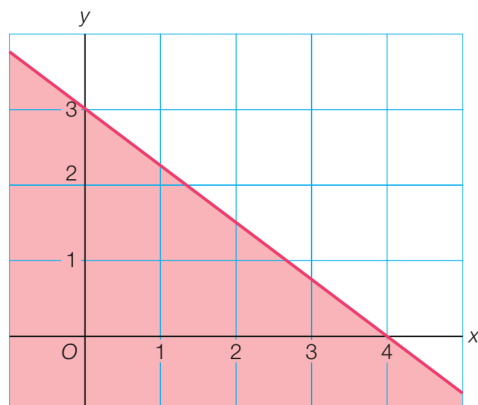
(0, 1) invullen geeft $2 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 0$



4 a $3x + 4y = 12$

x	0	4
y	3	0

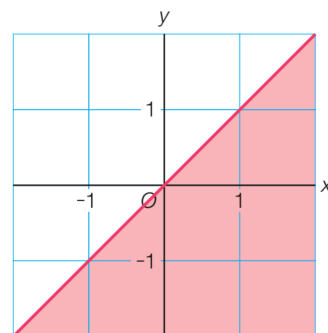
(0, 0) invullen geeft $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \leq 12$



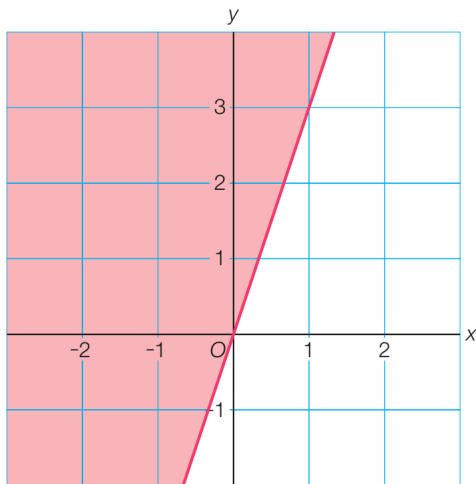
b $x - y = 0$

x	0	1
y	0	1

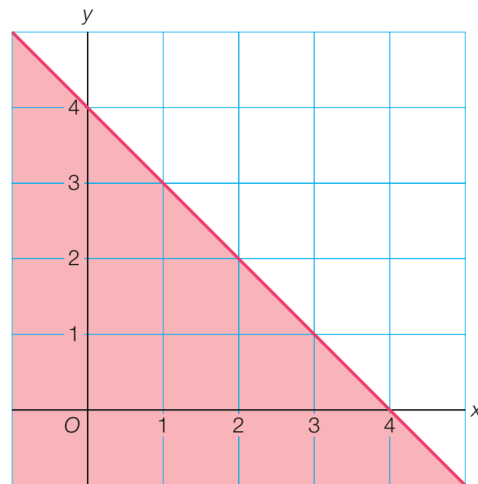
(0, 1) invullen geeft $0 - 1 = -1 \neq 0$



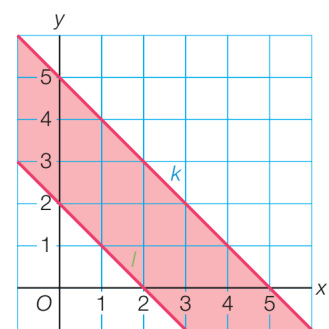
c $y \geq 3x$, dus boven en op lijn $y = 3x$.



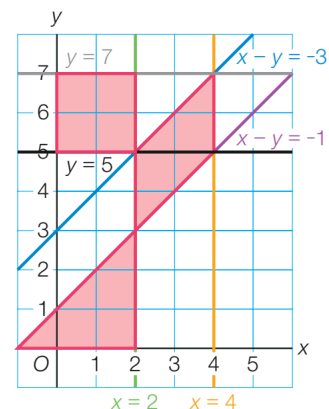
d $y = 4 - x$ is de lijn door $(0, 4)$ met $rc = -1$.
 $y \leq 4 - x$, dus boven en op de lijn $y = 4 - x$.



- 5 a De punten die in beide halfvlakken liggen, dus de punten waarvoor geldt $2 < x + y < 5$, liggen tussen de lijnen k en l .
 b Zie de figuur hiernaast.



- 6 a De punten in het rode gebied liggen tussen en op de lijnen $x = 2$ en $x = 4$. Voor de punten in het rode gebied geldt dus $2 \leq x \leq 4$. De punten in het rode gebied liggen ook tussen en op de lijnen $x - y = -1$ en $x - y = -3$. Voor de punten in het rode gebied geldt dus ook $-3 \leq x - y \leq -1$. Alleen de punten die aan beide ongelijkheden voldoen vormen het rode gebied. Vandaar dat voor het rode gebied geldt $2 \leq x \leq 4$ en $-3 \leq x - y \leq -1$.
 b Vanaf de y -as tot en met de lijn $x = 2$ en ook vanaf de lijn $y = 5$ tot en met de lijn $y = 7$. Zie de figuur hiernaast.
 c Onder en op de lijn $x - y = -1$ en ook tot en met de lijn $x = 2$ en ook boven en op de x -as. Zie de figuur hiernaast.



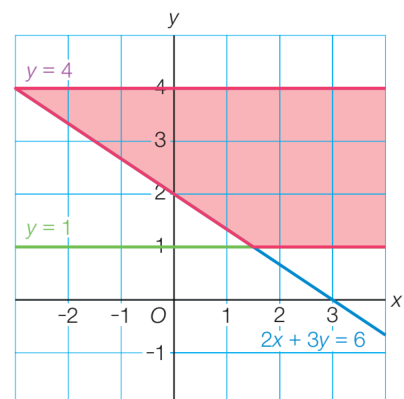
- 7 $2x + 3y = 6$

x	0	2
y	3	0

$(0, 0)$ geeft $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \not\geq 6$

Dus boven en op de lijn $2x + 3y = 6$ en ook tussen en op de lijnen $y = 1$ en $y = 4$.

Zie de figuur hiernaast.



Bladzijde 113

- 8** De paarse lijn is $x = 40$. Op en links van deze lijn, dus $x \leq 40$.

De blauwe en oranje lijnen hebben $rc = \frac{10}{20} = 0,5$.

De blauwe lijn gaat door $(0, 20)$, dus de formule is $y = 0,5x + 20$, oftewel $y - 0,5x = 20$.

De oranje lijn gaat door $(0, 0)$, dus de formule is $y = 0,5x$, oftewel $y - 0,5x = 0$.

Tussen en op de blauwe en oranje lijn, dus $0 \leq y - 0,5x \leq 20$.

De groene lijn gaat door $(30, 0)$ en heeft $rc = -1$, dus de formule is $y = -x + 30$, oftewel $y + x = 30$.

Boven en op deze lijn, dus $x + y \geq 30$.

Dus voor het gebied geldt $x \leq 40$ en $0 \leq y - 0,5x \leq 20$ en $x + y \geq 30$.

- 9** Tussen en op de grafieken van $A = 2$ en $A = 10$. En ook tussen en op de grafieken van $B = 0$ en $B = 4$, oftewel tussen en op de grafieken van $2x - y = 0$ en $2x - y = 4$.

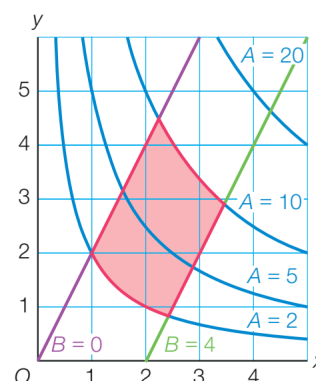
$$2x - y = 0$$

x	0	2
y	0	4

$$2x - y = 4$$

x	2	4
y	0	4

Zie de figuur hiernaast.



- 10 a** Maximaal 40 bomen, dus $B + E \leq 40$.
Minimaal 10 en ten hoogste 25 eiken, dus $10 \leq E \leq 25$.
Minstens evenveel eiken als beuken, dus $E \geq B$.
Het aantal beuken is minstens 0, dus $B \geq 0$.

- b** $B + E = 40$

B	0	40
E	40	0

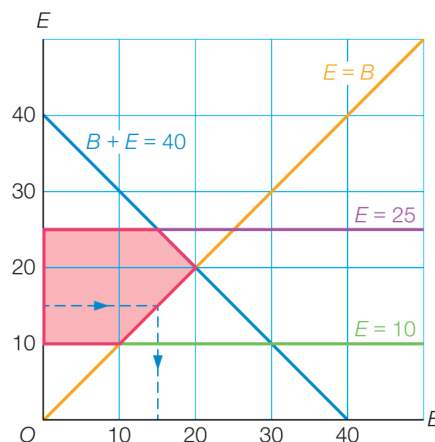
$(0, 0)$ geeft $0 + 0 = 0 \leq 40$, dus op en onder de lijn $B + E = 40$.
Verder tussen de lijnen $E = 10$ en $E = 25$, boven de lijn $E = B$ en rechts van de E -as.

Zie de figuur hiernaast.

- c** Zie de pijlen hiernaast.

$E = 15$ en $E \geq B$ geeft $15 \geq B$.

Als men 15 eiken plant kan men nog maximaal 15 beuken planten.



Bladzijde 114

- 11 a** Het meest linkse punt van het gebied in de rechter figuur aflezen geeft zo min mogelijk verteerbare koolhydraten. Dat is 180 gram.
- b** Aflezen in de linker figuur. Zoveel mogelijk vetten, dus bekijk punten van het gebied die zo hoog mogelijk en zo veel mogelijk naar rechts liggen. Alle punten op het lijnstuk van $(5, 85)$ tot en met $(25, 65)$ geven in totaal 90 gram vet.
NB ga je over de lijn dan zie je dat 5 gram meer verzadigde vetten betekent 5 gram minder onverzadigde vetten.

c Als Stef 30 gram onverteerbare koolhydraten eet, dan eet hij dus meer dan $7,5 \cdot 30 = 225$ gram verteerbare koolhydraten.

Als Stef 40 gram onverteerbare koolhydraten eet, dan eet hij dus meer dan $7,5 \cdot 40 = 300$ gram verteerbare koolhydraten.

Dus kleur het gebied rechts van de lijn door $(225, 30)$ en $(300, 40)$.

Zie de figuur hiernaast.

d 30 gram onverteerbare koolhydraten levert $30 \cdot 2 = 60$ kcal.
 $230 - 30 = 200$ gram verteerbare koolhydraten levert $200 \cdot 4 = 800$ kcal.

60 gram vetten levert $60 \cdot 9 = 540$ kcal.

Uit eiwit haalt hij dus minimaal $2000 - 60 - 800 - 540 = 600$ kcal. Dat komt overeen met minimaal $600 : 4 = 150$ gram eiwit.

e Zo min mogelijk verteerbare koolhydraten, dus 180 gram verteerbare koolhydraten. Binnen het advies mag hij dan nog 40 gram onverteerbare koolhydraten binnen krijgen.

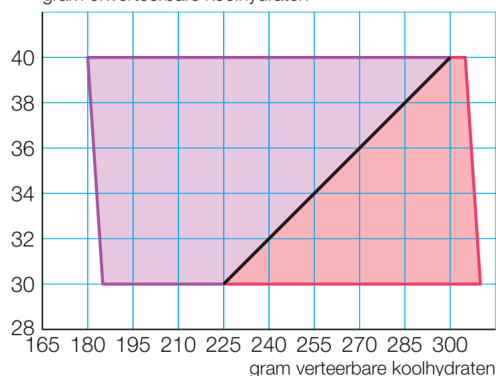
Zo veel mogelijk onverzadigde vetten, dus 85 gram onverzadigde vetten en maximaal 5 gram verzadigde vetten, oftewel maximaal 90 gram vetten.

Verder mag hij maximaal 150 gram eiwitten binnen krijgen.

In totaal krijgt hij dan maximaal $180 \cdot 4 + 40 \cdot 2 + 90 \cdot 9 + 150 \cdot 4 = 2210$ kcal binnen.

$2210 \geq 2000$, dus hij voldoet daarmee aan zijn energiebehoefte.

DAGELIJKSE INNAME KOOLHYDRATEN
gram onverteerbare koolhydraten



Bladzijde 115

12 a $x = 2$ en $y = 3$ geeft $S = (2 + 1)(3 + 1) = 12$.

$x = 1$ en $y = 4$ geeft $S = (1 + 1)(4 + 1) = 10$.

$12 > 10$, dus een wedstrijd met eindstand 2-3 is spectaculairder dan een wedstrijd met eindstand 1-4.

b Roosterpunten (met x en y niet-negatief) onder de lijn $S = 5$ zijn $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ en $(3, 0)$. Dus de eindstanden waarvoor geldt $S < 5$ zijn 0-0, 0-1, 0-2, 0-3, 1-0, 1-1, 2-0 en 3-0.

c x is het aantal doelpunten van de thuisploeg en y is aantal doelpunten van de uitploeg, dus $x + y$ is het totaal aantal doelpunten T . Oftewel $T = x + y$.

d Bij de eindstanden 2-4 en 4-2 is $T = 6$ en $S = 15$ (zie de groene stippen in de figuur). Dus dat kan.

e Bij gelijkspel is van $y = x$. Zie de lijn $y = x$ in de figuur hiernaast. Het snijpunt van de grafieken van $y = x$ en $S = 30$ is niet een roosterpunt. Omdat x en y geheel moeten zijn kan $S = 30$ dus niet bij een gelijkspel.

Alternatieve uitwerking

Bij gelijkspel-eindstand 4-4 is $S = (4 + 1)(4 + 1) = 25$ en bij gelijkspel-eindstand 5-5 is $S = (5 + 1)(5 + 1) = 36$. Dus $S = 30$ kan niet bij gelijkspel, want er bestaat geen gelijkspel eindstand tussen 4-4 en 5-5.

f In totaal niet meer dan vijf doelpunten, dus $T \leq 5$, oftewel $x + y \leq 5$.

$x + y = 5$

x	0	5
y	5	0

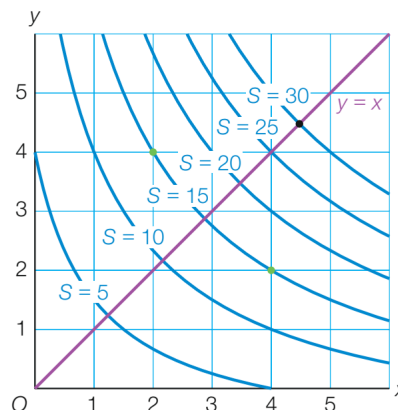
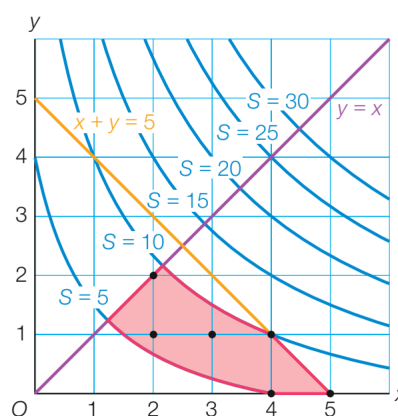
$(0, 0)$ geeft $0 + 0 = 0 < 5$, dus $(0, 0)$ ligt in het halfvlak.

De thuisploeg zal niet verliezen, dus $x \geq y$, oftewel $y \leq x$. Dus onder en op de lijn $y = x$.

Bovendien moet gelden $5 \leq S \leq 10$.

Zie het gebied in de figuur hiernaast.

Bij de verwachting van Stijn horen de eindstanden 4-0, 5-0, 2-1, 3-1, 4-1 en 2-2.



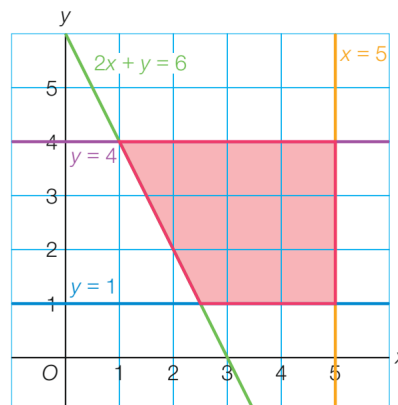
C1 $2x + y = 6$

x	0	3
y	6	0

$(0, 0)$ geeft $2 \cdot 0 + 0 = 0 \neq 6$

Dus boven en op de lijn $2x + y = 6$ en ook tussen en op de lijnen $y = 1$ en $y = 4$ en ook links van de lijn $x = 5$.

Zie de figuur hiernaast.



11.2 Herleiden en vrijmaken

Bladzijde 116

- 13 a** $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$ en $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$. Als je eerst het kwadraat neemt en daarna de wortel dan krijg je weer het getal waar je mee begon.
- b** $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$ en $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$. De uitkomsten zijn gelijk.
- c** $\sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$ en $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2$. De uitkomsten zijn gelijk.

Bladzijde 117

- 14 a** $A = \sqrt{3a} \cdot \sqrt{5b} = \sqrt{3a \cdot 5b} = \sqrt{15ab}$
- b** $B = \frac{\sqrt{10a}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10a}{5}} = \sqrt{2a}$
- c** $C = 5 \cdot \sqrt{3x} \cdot \sqrt{12y} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3x} \cdot \sqrt{12y} = \sqrt{25 \cdot 3x \cdot 12y} = \sqrt{900xy}$
- d** $D = \frac{\sqrt{20x}}{\sqrt{2y}} = \sqrt{\frac{20x}{2y}} = \sqrt{\frac{10x}{y}}$
- 15 a** opp. I = $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{5a} = \sqrt{3a \cdot 5a} = \sqrt{15a^2} (= \sqrt{15} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{15} \cdot a)$
 opp. II = $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{7a} = \sqrt{2a \cdot 7a} = \sqrt{14a^2} (= \sqrt{14} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{14} \cdot a)$
 Dus oppervlakte I is groter dan oppervlakte II, want $\sqrt{15}$ is groter dan $\sqrt{14}$.
- b** opp. I = $2\sqrt{b} \cdot \sqrt{6b} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{6b} = \sqrt{4 \cdot b \cdot 6b} = \sqrt{24b^2} (= \sqrt{24} \cdot \sqrt{b^2} = \sqrt{24} \cdot b)$
 opp. II = $\sqrt{5b} \cdot \sqrt{5b} = \sqrt{5b \cdot 5b} = \sqrt{25b^2} (= \sqrt{25} \cdot \sqrt{b^2} = \sqrt{25} \cdot b)$
 Dus oppervlakte II is groter dan oppervlakte I, want $\sqrt{25}$ is groter dan $\sqrt{24}$.
- c** opp. I = $\sqrt{3c+1} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{(3c+1) \cdot 3} = \sqrt{9c+3}$
 opp. II = $\sqrt{c} \cdot 3 = \sqrt{c} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{c \cdot 9} = \sqrt{9c}$
 Dus oppervlakte I is groter dan oppervlakte II, want $9c+3$ is groter dan $9c$.
- 16 a** $P = 0,04\sqrt{225x} = 0,04\sqrt{225} \cdot \sqrt{x} = 0,6\sqrt{x}$
- b** $Q = \frac{3\sqrt{p} \cdot \sqrt{8p}}{\sqrt{0,05p}} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{p} \cdot \sqrt{8p}}{\sqrt{0,05p}} = \frac{\sqrt{9 \cdot p \cdot 8p}}{\sqrt{0,05p}} = \frac{\sqrt{72p^2}}{\sqrt{0,05p}} = \sqrt{\frac{72p^2}{0,05p}} = \sqrt{1440p}$
- c** $R = 2\sqrt{2p} \cdot \sqrt{8p} = 2\sqrt{2p \cdot 8p} = 2\sqrt{16p^2} = 2\sqrt{16} \cdot \sqrt{p^2} = 2 \cdot 4 \cdot p = 8p$

- 17** a $F = \sqrt{5a} \cdot \sqrt{6b} = \sqrt{5a \cdot 6b} = \sqrt{30ab} = \sqrt{30} \cdot \sqrt{ab} \approx 5,48\sqrt{ab}$, dus $F = 5,48\sqrt{ab}$.
 b $F = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3ab} = \sqrt{12 \cdot 3ab} = \sqrt{36ab} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{ab} = 6\sqrt{ab}$
 c $F = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2a} \cdot \sqrt{3b} = \sqrt{6 \cdot 2a \cdot 3b} = \sqrt{36ab} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{ab} = 6\sqrt{ab}$
 d $F = 6\sqrt{3a} \cdot \sqrt{7b} = 6\sqrt{3a \cdot 7b} = 6\sqrt{21ab} = 6\sqrt{21} \cdot \sqrt{ab} \approx 27,50\sqrt{ab}$, dus $F = 27,50\sqrt{ab}$.
 e $F = 3\sqrt{ab} + 4\sqrt{ab} = 7\sqrt{ab}$
 f $F = \sqrt{25ab} - \sqrt{9ab} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{ab} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{ab} = 5\sqrt{ab} - 3\sqrt{ab} = 2\sqrt{ab}$

Bladzijde 118

- 18** a $N = \sqrt{\frac{27x^3y}{3xy}} = \sqrt{9x^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2} = 3x$
 b $M = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12a}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12a}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 2}}{\sqrt{3 \cdot 12a}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{36a}} = \frac{2}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{a}} = \frac{2}{6\sqrt{a}} = \frac{1}{3\sqrt{a}}$
 (of $M = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12a}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{12a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 12a}} = \sqrt{\frac{4}{36a}} = \sqrt{\frac{1}{9a}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9a}} = \frac{1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{a}} = \frac{1}{3\sqrt{a}}$)

- 19** a $g = 9,8$ geeft $t = \sqrt{\frac{2h}{9,8}} = \frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{9,8}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{h}}{\sqrt{9,8}} \approx 0,45\sqrt{h}$, dus $t = 0,45\sqrt{h}$.

(of $t = \sqrt{\frac{2h}{9,8}} = \sqrt{\frac{2}{9,8} \cdot h} = \sqrt{\frac{2}{9,8}} \cdot \sqrt{h} \approx 0,45\sqrt{h}$, dus $t = 0,45\sqrt{h}$.)

- b $h = 84$ en $g = 9,8$ geeft $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 84}{9,8}} = 4,14...$

Dus de steen doet er 4 seconden over om het water te raken.

- c $h = 84$ geeft $t = 4,14...$ (zie b)

$h = 2 \cdot 84 = 168$ geeft $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 168}{9,8}} = 5,85...$

$\frac{5,85... - 4,14...}{4,14...} \cdot 100\% \approx 41,4\%$, dus de tijd neemt dan toe met 41,4%.

Alternatieve uitwerking

$h = 2h$ geeft $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 2h}{9,8}} = \sqrt{2 \cdot \frac{2h}{9,8}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2h}{9,8}} \approx 1,414 \cdot \sqrt{\frac{2h}{9,8}} = 1,414 \cdot t$

Dus de tijd neemt dan toe met 41,4%.

Bladzijde 119

- V2** a $x = \frac{4}{y+2}$
 $y+2 = \frac{4}{x}$
 $y = \frac{4}{x} - 2$
 b $\frac{y}{2x} = \frac{4x+7}{4}$
 $4y = 2x(4x+7)$
 $4y = 8x^2 + 14x$
 $y = 2x^2 + 3,5x$

- 20** a $(\sqrt{3})^2 = 3$ en $(\sqrt{4})^2 = 4$ en $(\sqrt{x})^2 = x$
 b Het linker- en rechterlid kwadrateren bij $y = \sqrt{x}$ geeft $y^2 = x$, dus $x = y^2$.

Bladzijde 120

- 21** a $5\sqrt{2S} = R$
 $\sqrt{2S} = 0,2R$
 $2S = 0,04R^2$
 $S = 0,02R^2$
 b $\sqrt{\frac{Q}{1,8}} = P$
 $\frac{Q}{1,8} = P^2$
 $Q = 1,8 \cdot P^2$

22 a $0,5\sqrt{\frac{20}{Q}} = B$

$$\sqrt{\frac{20}{Q}} = 2B$$

$$\frac{20}{Q} = 4B^2$$

$$\frac{20}{4B^2} = Q$$

$$\frac{5}{B^2} = Q$$

$$Q = 5 \cdot B^{-2}$$

b $\frac{5}{H} = \frac{3}{\sqrt{R}}$

$$5\sqrt{R} = 3H$$

$$\sqrt{R} = 0,6H$$

$$R = 0,36H^2$$

23 a $\left. \begin{array}{l} y = m\sqrt{n} \\ n = 10x \text{ en } m = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3}\sqrt{10x} = y \\ \sqrt{10x} = 3y \\ 10x = 9y^2 \\ x = 0,9y^2 \end{array}$

b $\left. \begin{array}{l} y = m\sqrt{n} \\ n = 1,44x^2 \text{ en } m = 4x^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 4x^2\sqrt{1,44x^2} \\ y = 4x^2\sqrt{1,44} \cdot \sqrt{x^2} \\ y = 4x^2 \cdot 1,2 \cdot x \\ y = 4,8x^3 \end{array}$

24 $\left. \begin{array}{l} K = \sqrt{p} \\ K^2 = p \\ p = K^2 \\ n = p + K \end{array} \right\} \begin{array}{l} n = K^2 + K \\ n = K(K + 1) \end{array}$

25 a $T = \pi \cdot \sqrt{0,408 \cdot l} = \pi \cdot \sqrt{0,408} \cdot \sqrt{l} \approx 2,007\sqrt{l}$, dus $a \approx 2,007$.

b $l = 0,994$ geeft $T = \pi \cdot \sqrt{0,408 \cdot 0,994} \approx 2$, dus de slingertijd is ongeveer 2 seconden.

c $\pi \cdot \sqrt{0,408 \cdot l} = T$

$$\sqrt{0,408 \cdot l} = \frac{1}{\pi} \cdot T$$

$$\sqrt{0,408 \cdot l} = 0,318... \cdot T$$

$$0,408 \cdot l = 0,101... \cdot T^2$$

$$l = 0,248336... \cdot T^2$$

$$\text{Dus } b \approx 0,24834.$$

d $T = 0,5$ geeft $l = 0,2483 \cdot 0,5^2 \approx 0,062$.

$$\text{Dus de slinger moet } 6,2 \text{ cm lang zijn.}$$

Bladzijde 121

C2 a $K = \sqrt{3x} \cdot \sqrt{4y} = \sqrt{3x \cdot 4y} = \sqrt{12xy}$

b $L = \frac{\sqrt{4pq}}{\sqrt{2p}} = \sqrt{\frac{4pq}{2p}} = \sqrt{2q}$

c $M = \sqrt{1,5s} \cdot \sqrt{6s} = \sqrt{1,5s \cdot 6s} = \sqrt{9s^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{s^2} = 3s$

C3 a $N = 1,8\sqrt{2,5x} = 1,8\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{x} \approx 2,8\sqrt{x}$, dus $N = 2,8\sqrt{x}$

b $N = 1,8\sqrt{2,5x} = \sqrt{3,24} \cdot \sqrt{2,5x} = \sqrt{3,24 \cdot 2,5x} = \sqrt{8,1x}$

C4 $25\sqrt{0,002Q} = P$

$$\sqrt{0,002Q} = 0,04P$$

$$0,002Q = 0,0016P^2$$

$$Q = 0,8P^2$$

11.3 Redeneren met formules

Bladzijde 122

- V3 a Als t toeneemt, dan neemt $1,4^t$ toe, dus dan neemt $\frac{2}{1,4^t}$ af, dus dan neemt $25 - \frac{2}{1,4^t}$ toe.

Dus de grafiek van A is stijgend.

- b Als t heel groot wordt, dan nadert $0,79^t$ tot 0, dus dan wordt $2 + 0,79^t \approx 2$, dus dan wordt $7,5(2 + 0,79^t) \approx 7,5 \cdot 2 = 15$.

Dus de grenswaarde is 15.

Bladzijde 123

- 26 I y neemt af IV y neemt af
II y neemt af V y neemt toe
III y neemt toe

- 27 a Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe, dus dan neemt $3,5 \cdot \sqrt{x}$ toe en dan neemt $3,5 \cdot \sqrt{x} - 2$ ook toe.
Dus de grafiek van P is stijgend.

- b Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 heel groot, dus dan wordt $x^2 + 1$ heel groot en dan nadert $\frac{10}{x^2 + 1}$ tot 0. Dus dan wordt $2 - \frac{10}{x^2 + 1} \approx 2 - 0 = 2$.
Dus de grenswaarde is 2.

- c Als x toeneemt, dan neemt $2x$ toe, dus dan neemt $2x + 3$ toe en dan neemt $\frac{20}{2x + 3}$ af en dan neemt $\frac{20}{2x + 3} + 50$ ook af.
Dus de grafiek van R is dalend.

Bladzijde 124

- 28 a stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe, dus dan neemt $2 + \sqrt{x}$ toe en dan neemt $\frac{80}{2 + \sqrt{x}}$ af en dan neemt $40 + \frac{80}{2 + \sqrt{x}}$ ook af.

Dus de grafiek van A is dalend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot, dus dan wordt $2 + \sqrt{x}$ heel groot en dan nadert

$\frac{80}{2 + \sqrt{x}}$ tot 0. Dus dan wordt $40 + \frac{80}{2 + \sqrt{x}} \approx 40 + 0 = 40$.

Dus de grenswaarde is 40.

- b stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $0,65^x$ af, dus dan neemt $333 \cdot 0,65^x$ af, dus ook $250 + 333 \cdot 0,65^x$ neemt dan af.

Daarom neemt $\frac{18\,000}{250 + 333 \cdot 0,65^x}$ dan toe.

Dus de grafiek van B is stijgend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan nadert $0,65^x$ tot 0, dus dan wordt $333 \cdot 0,65^x \approx 0$ en dan wordt

$250 + 333 \cdot 0,65^x \approx 250 + 0 = 250$. Dan wordt $\frac{18\,000}{250 + 333 \cdot 0,65^x} \approx \frac{18\,000}{250} = 72$.

Dus de grenswaarde is 72.

- c stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $x^{-0,4}$ af, dus dan neemt $0,85x^{-0,4}$ ook af en dan neemt $1,02 - 0,85x^{-0,4}$ toe. Dus de grafiek van C is stijgend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan nadert $x^{-0,4}$ tot 0, dus dan wordt $0,85x^{-0,4} \approx 0$ en dan wordt $1,02 - 0,85x^{-0,4} \approx 1,02 - 0 = 1,02$.

Dus de grenswaarde is 1,02.

- 29 a** Als L afneemt dan neemt $6L$ af en dan neemt $\frac{1}{6L}$ toe, dus dan neemt $\sqrt{\frac{1}{6L}}$ toe en ook $9\sqrt{\frac{1}{6L}}$ neemt dan toe. En dan neemt $-2 + 9\sqrt{\frac{1}{6L}}$ ook toe.

Dus als L afneemt neemt K toe.

Alternatieve uitwerking

Je kunt ook beredeneren dat als L toeneemt, dat K dan afneemt. En dus dat als L afneemt, dat K dan toeneemt.

- b** Als N toeneemt dan neemt $0,5^{-N}$ toe, dus M neemt dan toe en dus neemt $\frac{1}{P}$ toe, maar dan moet P afnemen.
Dus als N toeneemt, dan neemt P af.

- 30 a** $P = 3$ geeft $C = 0,005 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{0,7} = 0,006\dots$ en $P = 4$ geeft $C = 0,005 \cdot \left(\frac{4}{4}\right)^{0,7} = 0,005$.
 $\frac{0,006\dots - 0,005}{0,005} \cdot 100\% \approx 22,3\%$, dus bij een bandenspanning van 3 bar is C inderdaad ruim 22% groter dan bij een bandenspanning van 4 bar.

- b** Bij een lagere waarde van C hoort een kleinere rolweerstand, dus bij een hogere waarde van C hoort een hogere rolweerstand.

Als P afneemt dan neemt $\frac{4}{P}$ toe en dan neemt $\left(\frac{4}{P}\right)^{0,7}$ toe en dan neemt $0,005 \cdot \left(\frac{4}{P}\right)^{0,7}$ ook toe. Dus als de bandenspanning P afneemt dan neemt C toe en dan neemt rolweerstand dus ook toe.

- c** $P = 4$ geeft $C = 0,005$ en $P = 3$ geeft $C = 0,006\dots$ (zie vraag a)

$$C = 0,005 \text{ en } V = 300 \text{ geeft } s = \frac{300}{2180 \cdot 0,005} = 27,53\dots$$

$$C = 0,006\dots \text{ en } V = 300 \text{ geeft } s = \frac{300}{2180 \cdot 0,006\dots} = 22,50\dots$$

Het scheelt $27,52\dots - 22,50 \approx 5$ km/uur.

- d** Als P afneemt dan neemt dan neemt C toe (zie vraag b), dus als P toeneemt dan neemt C af.

Als C afneemt dan neemt $2180 \cdot C$ af en omdat V positief is en gelijk blijft, neemt $\frac{V}{2180 \cdot C}$ dan toe.

Dus als P toeneemt (en V gelijk blijft) dan neemt s toe.

Dus voor personen die hetzelfde vermogen leveren leidt een hogere bandenspanning tot een hogere snelheid.

Bladzijde 125

- 31 a** Als x toeneemt, dan neemt $1 - x$ af.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe.

Van $\frac{1-x}{\sqrt{x}}$ neemt de teller af en de noemer toe,

dus $\frac{1-x}{\sqrt{x}}$ neemt af.

Dus de grafiek van A is dalend.

- b** Als x toeneemt, dan neemt $\frac{x}{22}$ toe, dus dan neemt $3 + \frac{x}{22}$ ook toe. Daarom neemt $x\left(3 + \frac{x}{22}\right)$ ook toe.

Dus de grafiek van B is stijgend.

- c** Als x toeneemt, dan neemt $x^{2,3}$ toe, dus dan neemt $x^{2,3} + 1$ ook toe.

Als x toeneemt, dan neemt $0,3^x$ af, dus dan neemt $20 \cdot 0,3^x$ ook af.

Van $\frac{x^{2,3} + 1}{20 \cdot 0,3^x}$ neemt de teller toe en de noemer af, dus $\frac{x^{2,3} + 1}{20 \cdot 0,3^x}$ neemt toe.

Dus de grafiek van C is stijgend.

32 Als Q toeneemt dan neemt $500 - Q$ af en omdat R gelijk blijft en positief is, neemt $(500 - Q) \cdot R$ ook af.

Als P toeneemt dan neemt $0,2 \cdot \frac{(500 - Q) \cdot R}{0,5 \cdot S}$ toe, dus dan moet $\frac{(500 - Q) \cdot R}{0,5 \cdot S}$ ook toenemen.

Omdat van $\frac{(500 - Q) \cdot R}{0,5 \cdot S}$ de teller afneemt moet de noemer ook afnemen. Dus $0,5 \cdot S$ moet afnemen, dus S neemt af.

Alternatieve uitwerking

Als Q toeneemt dan neemt $500 - Q$ af en omdat R gelijk blijft en positief is, neemt $(500 - Q) \cdot R$ ook af. Stel dat S toeneemt, dan neemt $0,5 \cdot S$ toe.

Van $\frac{(500 - Q) \cdot R}{0,5 \cdot S}$ neemt de teller dan af en de noemer toe, dus dan neemt $\frac{(500 - Q) \cdot R}{0,5 \cdot S}$ af en dan neemt

$0,2 \cdot \frac{(500 - Q) \cdot R}{0,5 \cdot S}$ af. Dus als S toeneemt dan neemt P af. Maar P neemt toe dus dan moet S juist afnemen.

C5 a stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe en dan neemt $2 + \sqrt{x}$ toe en dan neemt $\frac{12}{2 + \sqrt{x}}$ af en dan neemt $\frac{12}{2 + \sqrt{x}} + 5$ ook af.
De grafiek van y is dalend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot en dus ook $2 + \sqrt{x}$ wordt dan heel groot en dan nadert $\frac{12}{2 + \sqrt{x}}$ tot 0, dus dan wordt $\frac{12}{2 + \sqrt{x}} + 5 \approx 0 + 5 = 5$.
De grenswaarde is 5.

b Als N afneemt dan neemt $50 - N$ toe en dan neemt $\frac{20}{6} \cdot (50 - N)$ toe en dan neemt $100 - \frac{20}{6} \cdot (50 - N)$ af. Dus P neemt af als N afneemt.

Alternatieve uitwerking

Je kunt ook beredeneren dat als N toeneemt, dat P dan ook toeneemt. En dus dat als N afneemt, dat P dan ook afneemt.

11.4 Formulevaardigheden

Bladzijde 126

V4 a $A = \frac{1}{x} + \frac{y}{2x} = \frac{2}{2x} + \frac{y}{2x} = \frac{2+y}{2x}$

b $B = \frac{2b}{a} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6b}{4a} = \frac{3b}{2a}$

c $C = \frac{3p}{2} : \frac{5q}{p} = \frac{3p}{2} \cdot \frac{p}{5q} = \frac{3p^2}{10q}$

d $D = \frac{4}{a} - \frac{3}{b} = \frac{4b}{ab} - \frac{3a}{ab} = \frac{4b-3a}{ab}$

e $E = 5 + \frac{2}{x} = \frac{5x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{5x+2}{x}$

f $F = y \cdot \frac{2}{x} = \frac{2y}{x}$

Bladzijde 127

V5 a $P = (-2a^4)^2 \cdot a^3 = 4a^8 \cdot a^3 = 4a^{11}$

b $Q = x^{-2} \cdot \frac{x^7}{x^2} = x^{-2} \cdot x^5 = x^3$

c $R = 3(pq)^6 \cdot p = 3p^6q^6 \cdot p = 3p^7q^6$

d $S = 20(a^5)^2 - (3a^5)^2 = 20a^{10} - 9a^{10} = 11a^{10}$

e $T = (x^{0,34} \cdot x^{1,04})^{2,5} = (x^{1,38})^{2,5} = x^{3,45}$

f $U = \frac{(ab)^{1,2}}{a^{0,2}} = \frac{a^{1,2}b^{1,2}}{a^{0,2}} = ab^{1,2}$

$$\text{V6} \quad \mathbf{a} \quad K = 3,2 \cdot \frac{5,6}{4 \cdot 1,25^t} = 3,2 \cdot \frac{5,6}{4} \cdot \frac{1}{1,25^t} = 4,48 \cdot 1,25^{-t} = 4,48 \cdot (1,25^{-1})^t = 4,48 \cdot 0,8^t$$

$$\mathbf{b} \quad L = 25^{0,5x-1} = 25^{0,5x} \cdot 25^{-1} = (25^{0,5})^x \cdot 0,04 = 5^x \cdot 0,04 = 0,04 \cdot 5^x$$

$$\mathbf{c} \quad M = \frac{3y + 4y^{1,2}}{2y} = \frac{3y}{2y} + \frac{4y^{1,2}}{2y} = 1,5 + 2y^{0,2}$$

$$\text{V7} \quad \mathbf{a} \quad \left. \begin{array}{l} R = 3p - 4q + 5 \\ p = 1,5q + 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} R = 3(1,5q + 2) - 4q + 5 \\ R = 4,5q + 6 - 4q + 5 \\ R = 0,5q + 11 \end{array}$$

$$\mathbf{b} \quad \left. \begin{array}{l} 5a - 8b = 160 \\ -8b = -5a + 160 \\ b = 0,625a - 20 \\ C = 2a - 3b + 64 \end{array} \right\} \begin{array}{l} C = 2a - 3(0,625a - 20) + 64 \\ C = 2a - 1,875a + 60 + 64 \\ C = 0,125a + 124 \end{array}$$

$$\mathbf{c} \quad \left. \begin{array}{l} K = p^2 + 5q^6 \\ p = -5q^3 \end{array} \right\} K = (-5q^3)^2 + 5q^6 = 25q^6 + 5q^6 = 30q^6$$

Bladzijde 128

$$\text{33} \quad \mathbf{a} \quad M = \frac{5}{t} - 3t = \frac{5}{t} - \frac{3t \cdot t}{t} = \frac{5 - 3t^2}{t}$$

$$\mathbf{b} \quad \left. \begin{array}{l} R = \frac{0,5p + 5}{q} \\ p = q^2 - 8q \end{array} \right\} \begin{array}{l} R = \frac{0,5(q^2 - 8q) + 5}{q} \\ R = \frac{0,5q^2 - 4q + 5}{q} \\ R = 0,5q - 4 + \frac{5}{q} \end{array}$$

$$\mathbf{c} \quad N = \frac{423}{5 \cdot 1,3^t} = \frac{423}{5} \cdot \frac{1}{1,3^t} = 84,6 \cdot 1,3^{-t} = 84,6 \cdot (1,3^{-1})^t \approx 84,6 \cdot 0,769^t$$

$$\text{Dus } N = 84,6 \cdot 0,769^t.$$

$$\mathbf{d} \quad \left. \begin{array}{l} P = 20 + \frac{n}{5} \\ n = 3 - 2t \end{array} \right\} \begin{array}{l} P = 20 + \frac{3 - 2t}{5} \\ P = 20 + \frac{3}{5} - \frac{2t}{5} \\ P = 20,6 - 0,4t = -0,4t + 20,6 \end{array}$$

$$\mathbf{e} \quad P = \left(\frac{5,1x^{1,6}}{3x^{1,7}} \right)^4 = (1,7x^{-0,1})^4 = 1,7^4 \cdot (x^{-0,1})^4 \approx 8,4x^{-0,4}$$

$$\text{Dus } P = 8,4x^{-0,4}.$$

34

$$\text{a } N = \frac{3t^{-1,12}}{2t} \cdot t^{3,15} = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^{-1,12}}{t} \cdot t^{3,15} \\ = 1,5 \cdot t^{-2,12} \cdot t^{3,15} = 1,5t^{1,03}$$

$$\text{b } F = \frac{100}{6+K} \\ 6+K = \frac{100}{F}$$

$$K = \frac{100}{F} - 6$$

$$\text{c } M = \frac{1}{3} \cdot \frac{2t+1}{5} \cdot \frac{6}{t+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{t+1} \cdot \frac{2t+1}{5} \\ = \frac{2}{t+1} \cdot \frac{2t+1}{5} = \frac{2(2t+1)}{5(t+1)} = \frac{4t+2}{5t+5}$$

$$\text{d } 2(x-5) - 3(y+1) = 15$$

$$2x - 10 - 3y - 3 = 15$$

$$2x = 3y + 28$$

$$x = 1,5y + 14$$

$$\text{e } 6 - 0,6\sqrt{N} = 1,5A$$

$$-0,6\sqrt{N} = 1,5A - 6$$

$$\sqrt{N} = -2,5A + 10$$

$$\left. \begin{aligned} N &= (-2,5A + 10)^2 \\ B &= N - 1 \end{aligned} \right\} B = (-2,5A + 10)^2 - 1$$

$$\text{f } \frac{4A}{3(2t-20)} = 16$$

$$\frac{4A}{3(2t-20)} = \frac{16}{1}$$

$$4A = 48(2t-20)$$

$$4A = 96t - 960$$

$$A = 24t - 240$$

$$\text{g } \left. \begin{aligned} H &= \frac{5pq}{12(6-r)} \\ H &= 15 \text{ en } q = 6 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{5p \cdot 6}{12(6-r)} &= 15 \\ \frac{30p}{12(6-r)} &= \frac{15}{1} \\ 30p &= 15 \cdot 12(6-r) \\ 30p &= 180(6-r) \\ p &= 6(6-r) \\ p &= 36 - 6r = -6r + 36 \end{aligned}$$

$$\text{h } \left. \begin{aligned} L &= t^2 \cdot \frac{5-x}{5y} + 6 \\ L &= 16 \text{ en } t = 5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 5^2 \cdot \frac{5-x}{5y} + 6 &= 16 \\ 25 \cdot \frac{5-x}{5y} &= 10 \\ \frac{5-x}{5y} &= \frac{10}{25} \\ 50y &= 25(5-x) \\ y &= 0,5(5-x) \\ y &= 2,5 - 0,5x = -0,5x + 2,5 \end{aligned}$$

35

$$\text{a } A \cdot \left(2 - \frac{x}{50}\right) = 1$$

$$2 - \frac{x}{50} = \frac{1}{A}$$

$$-\frac{x}{50} = -2 + \frac{1}{A}$$

$$x = 100 - \frac{50}{A}$$

$$\text{b } N = \frac{5}{t+1} - \frac{4}{t} = \frac{5t}{t(t+1)} - \frac{4(t+1)}{t(t+1)} = \frac{5t-4(t+1)}{t(t+1)} = \frac{5t-4t-4}{t(t+1)} = \frac{t-4}{t(t+1)} \left(= \frac{t-4}{t^2+t}\right)$$

$$\text{c } 8 - \frac{2y}{x+6} = x$$

$$-\frac{2y}{x+6} = x - 8$$

$$-2y = (x-8)(x+6)$$

$$-2y = x^2 + 6x - 8x - 48$$

$$-2y = x^2 - 2x - 48$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 24$$

$$\text{d } 0,5p = q$$

$$p = 2q$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1-p-q}{16} \cdot \frac{1-p}{10} \\ F &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1-2q-q}{16} \cdot \frac{1-2q}{10} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1-3q}{16} \cdot \frac{1-2q}{10} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1-3q}{16} \cdot \frac{10}{1-2q} \\ &= \frac{20(1-3q)}{80(1-2q)} = \frac{1-3q}{4(1-2q)} = \frac{1-3q}{4-8q} = \frac{-1+3q}{-4+8q} = \frac{3q-1}{8q-4} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{e } P = \sqrt{30Q} - \sqrt{5Q} = \sqrt{30} \cdot \sqrt{Q} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{Q} = 5,477... \sqrt{Q} - 2,236... \sqrt{Q} \approx 3,24 \sqrt{Q}$$

$$\text{Dus } P = 3,24 \sqrt{Q}.$$

Bladzijde 129

- 36 a** Er geldt $t = \frac{1}{12}m$.

$$\left. \begin{array}{l} A_I = -2,15t^2 + 71t + 750 \\ t = \frac{1}{12}m \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_I = -2,15\left(\frac{1}{12}m\right)^2 + 71 \cdot \frac{1}{12}m + 750 \\ A_I = -2,15 \cdot \frac{1}{144}m^2 + 71 \cdot \frac{1}{12}m + 750 \\ A_I \approx -0,01493m^2 + 5,92m + 750 \end{array}$$

b $1,02^{-m} = \frac{1}{1,02^m}$

Als m heel groot wordt, dan nadert $1,02^{-m}$ oftewel $\frac{1}{1,02^m}$ tot 0, dus dan wordt $1 + 1,02^{-m} \approx 1 + 0 = 1$ en

dan wordt $\frac{1500}{1 + 1,02^{-m}} \approx \frac{1500}{1} = 1500$. Dus het verzadigingsniveau is 1500.

- c** Het verzadigingsniveau van model II is 1500 (zie vraag b) en het maximum van model I is 1336 (zie voorbeeld vraag b).

Het verzadigingsniveau van model II is dus $\frac{1500 - 1336}{1336} \cdot 100\% \approx 12,3\%$ groter dan het maximum van model I.

- d** Er moet gelden $A_{II} = 1,1 \cdot A_I$.

Voer in $y_1 = \frac{1500}{1 + 0,788^x}$ en $y_2 = 1,1 \cdot (-2,15x^2 + 71x + 750)$.

De optie snijpunt geeft $x = 5,7...$

Dus in januari van het jaar 2026.

Bladzijde 130

- 37 a** $n = 2400$, $B = 15$ en $V = 0,05$ geeft $Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 2400}{0,05}} = 1200$.

Dus de optimale bestelhoeveelheid is 1200 stuks.

- b** $B = 25$ en $V = 0,80$ geeft $Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 25n}{0,80}} = \sqrt{\frac{50n}{0,80}} = \sqrt{62,5n} = \sqrt{62,5} \cdot \sqrt{n} = 7,90... \cdot \sqrt{n}$

Dus $c \approx 7,9$.

- c** $Q = 100$ geeft $7,90... \cdot \sqrt{n} = 100$
 $\sqrt{n} = 12,649...$
 $n = 160$

Dus er worden 160 strijkplanken per jaar verkocht.

- d** $B = 50$ en $V = 150 \cdot n^{-1}$
 $Q = \sqrt{\frac{2Bn}{V}} \left\{ \begin{array}{l} Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 50n}{150 \cdot n^{-1}}} = \sqrt{\frac{2}{3}n^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{n^2} = 0,8164... \cdot n \end{array} \right.$

Dus $d \approx 0,816$.

- e** De optimale bestelhoeveelheid wordt dan ook k keer zo groot want je hebt hier te maken met een recht evenredig verband tussen Q en n .

Bladzijde 131

- 38 a** $x = 1$ geeft $K = 27,5 + \frac{15}{1} = 42,5$ en $x = 1,5$ geeft $K = 27,5 + \frac{15}{1,5} = 37,5$.
 $\frac{37,5 - 42,5}{42,5} \cdot 100\% \approx -11,8\%$, dus de kosten per m^2 dalen dan met 11,8%.

- b** Als x toeneemt, dan neemt $\frac{15}{x}$ af. Dus ook $27,5 + \frac{15}{x}$ neemt af.

Het bedrag per m^2 neemt dus af als de oppervlakte toeneemt.

- c** Voer in $y_1 = 27,5 + \frac{15}{x}$ en $y_2 = 29,5$.

De optie snijpunt geeft $x = 7,5$.

De oppervlakte is dus minstens $7500 m^2$.

- d** Bij $2000 m^2$ hoort $x = 2$. En $x = 2$ geeft $K = 35$

De jaarlijkse kosten zijn $2000 \cdot 35 = 70\,000$ euro.

- e** $J = 1000x \cdot K = 1000x \cdot \left(27,5 + \frac{15}{x}\right) = 27\,500x + \frac{15\,000x}{x} = 27\,500x + 15\,000$

Dus $a = 27\,500$ en $b = 15\,000$.

39

a $\frac{80-100}{19-0} \approx -1,05$ en $\frac{70-80}{31-19} \approx -0,83$
 $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ is niet steeds gelijk, dus geen lineair verband.

b Voer in $y_1 = \frac{80}{1,015^x} + 20$. Zie de schets hiernaast.

c $t = 0$ geeft $T = \frac{80}{1,015^0} + 20 = 100$ $t = 31$ geeft $T = \frac{80}{1,015^{31}} + 20 \approx 70,4$

$t = 19$ geeft $T = \frac{80}{1,015^{19}} + 20 \approx 80,3$ $t = 65$ geeft $T = \frac{80}{1,015^{65}} + 20 \approx 50,4$

Dus het model klopt bij benadering met de gegevens.

d $t = 60$ geeft $T = \frac{80}{1,015^{60}} + 20 \approx 53$.

Dus 53°C .

e Voer in $y_2 = 40$.

De optie snijpunt geeft $x = 93,1\dots$

Dus na ongeveer 93 minuten.

f Als t heel groot wordt, wordt $1,015^t$ heel groot en dan nadert $\frac{80}{1,015^t}$ tot 0, dus dan wordt $\frac{80}{1,015^t} + 20 \approx 0 + 20 = 20$.

De omgevingstemperatuur is dus 20°C .

g $V = T - 20 = \frac{80}{1,015^t} + 20 - 20 = \frac{80}{1,015^t} = 80 \cdot 1,015^{-t} = 80 \cdot (1,015^{-1})^t \approx 80 \cdot 0,98522^t$

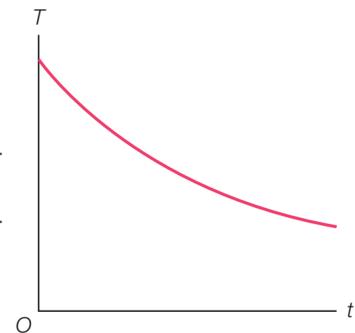
h De optie oplossen bij $0,98522^x = 0,5$ geeft $x = 46,55\dots$

De halveringstijd is ongeveer 47 minuten.

i Er geldt $t = 15k$.

$$\left. \begin{array}{l} V = 80 \cdot 0,98522^t \\ t = 15k \end{array} \right\} \begin{array}{l} V = 80 \cdot 0,98522^{15k} \\ V = 80 \cdot (0,98522^{15})^k \\ V = 80 \cdot 0,7998\dots^k \end{array}$$

Dus $V = 80 \cdot 0,800^k$.



Bladzijde 132

40

a Voer in $y_1 = 0,252x^2 - 3,06x + 84,2$.

De optie minimum geeft $y = 74,91\dots$

De minimale temperatuur is $74,9^\circ\text{F}$.

b $\frac{F-32}{1,8} = C$

$$F - 32 = 1,8C$$

$$F = 1,8C + 32$$

c Bij 1 februari hoort $m = 1$ en bij 1 april hoort $m = 3$.

$m = 1$ geeft $F = 0,252 \cdot 1^2 - 3,06 \cdot 1 + 84,2 = 81,392$, dus $C = \frac{81,392 - 32}{1,8} = 27,44$.

$m = 3$ geeft $F = 0,252 \cdot 3^2 - 3,06 \cdot 3 + 84,2 = 77,288$, dus $C = \frac{77,288 - 32}{1,8} = 25,16$.

De temperatuur neemt met $27,44 - 25,16 \approx 2,3^\circ\text{C}$ af.

$$\left. \begin{array}{l} C = \frac{F-32}{1,8} \\ F = 0,252m^2 - 3,06m + 84,2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} C = \frac{0,252m^2 - 3,06m + 84,2 - 32}{1,8} \\ C = \frac{0,252m^2 - 3,06m + 52,2}{1,8} \\ C = 0,14m^2 - 1,7m + 29 \end{array}$$

Alternatieve uitwerking

$$F = 1,8C + 32 \text{ en } F = 0,252m^2 - 3,06m + 84,2, \text{ dus } 1,8C + 32 = 0,252m^2 - 3,06m + 84,2$$

$$1,8C = 0,252m^2 - 3,06m + 52,2$$

$$C = 0,14m^2 - 1,7m + 29$$

- 41 Er geldt $30,4m = d$.

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{1}{30,4}d \\ C &= 0,14m^2 - 1,7m + 29 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C &= 0,14\left(\frac{1}{30,4}d\right)^2 - 1,7\left(\frac{1}{30,4}d\right) + 29 \\ C &= 0,14\left(\frac{1}{30,4}\right)^2 \cdot d^2 - \frac{1,7}{30,4}d + 29 \\ C &= 0,0001514... m^2 - 0,05592...m + 29 \end{aligned}$$

Dus $a \approx 1,51 \cdot 10^{-4}$ en $b \approx -5,59 \cdot 10^{-2}$.

Bladzijde 133

- 42 a Je ziet in de grafiekenbundel dat hogere waarden van f samengaan met lagere waarden van L . Omdat een kortere remweg veiliger is, zijn hogere waarden van f dus veiliger.

Alternatieve uitwerking

Als f toeneemt neemt $25,92f$ toe en dan neemt $\frac{v^2}{25,92f}$ af.

Dus als f toeneemt dan neemt L , oftewel de remweg, af.

Omdat een kortere remweg veiliger is, zijn hogere waarden van f dus veiliger.

b $v = 50$ geeft $L = \frac{50^2}{25,92f} = \frac{2500}{25,92f} = \frac{96,45...}{f}$

De formule is van de vorm $L = \frac{a}{f}$, dus er is sprake van een omgekeerd evenredig verband tussen L en f .

- c Neem bijvoorbeeld $v = 100$ en $v = 1,2 \cdot 100 = 120$.

$$v = 100 \text{ geeft } L = \frac{100^2}{25,92f} = \frac{10000}{25,92f}$$

$$v = 120 \text{ geeft } L = \frac{120^2}{25,92f} = \frac{14400}{25,92f} = 1,44 \cdot L_{100}$$

De remweg wordt dan dus 1,44 keer zo lang.

De lengte van de remweg neemt dus met 44% toe.

Alternatieve uitwerking

Bij een snelheid van v km/uur is de remweg $L = \frac{v^2}{25,92f}$. Als de snelheid met 20% toeneemt dan wordt

$$\text{de snelheid dus } 1,2v \text{ km/uur. Dit geeft } L = \frac{(1,2v)^2}{25,92f} = \frac{1,44 \cdot v^2}{25,92f} = 1,44 \cdot \frac{v^2}{25,92f}.$$

De remweg wordt dan dus 1,44 keer zo lang.

De lengte van de remweg neemt dus met 44% toe.

- d Zie de figuur hiernaast.

- e Bij de kortste remweg hoort de laagste waarde van v en de hoogste waarde van f , dus $v = 80$ en $f = 12$

$$\text{geeft } L = \frac{80^2}{25,92 \cdot 12} = 20,57...$$

Bij de langste remweg hoort de hoogste waarde van v en de laagste waarde van f , dus $v = 100$ en $f = 9$

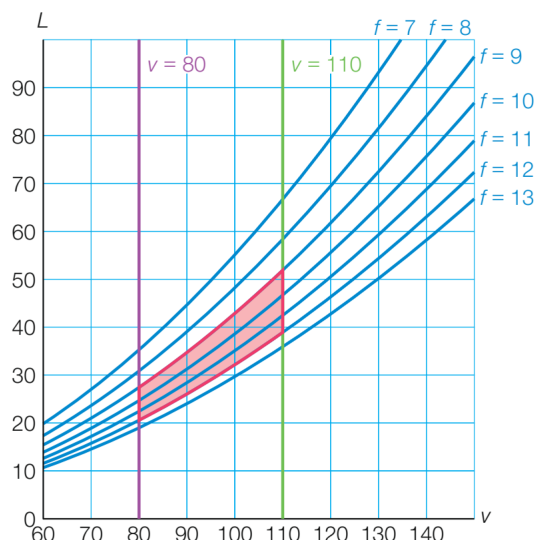
$$\text{geeft } L = \frac{100^2}{25,92 \cdot 9} \approx 42,86...$$

Het verschil is $42,86... - 20,57... \approx 22$ meter.

f $\frac{L}{1} = \frac{v^2}{25,92f}$
 $v^2 = 25,92Lf$
 $v = \sqrt{25,92Lf}$
 $v = \sqrt{25,92} \cdot \sqrt{Lf} \approx 5,1 \cdot \sqrt{L \cdot f}$

Dus $v = 5,1\sqrt{L \cdot f}$

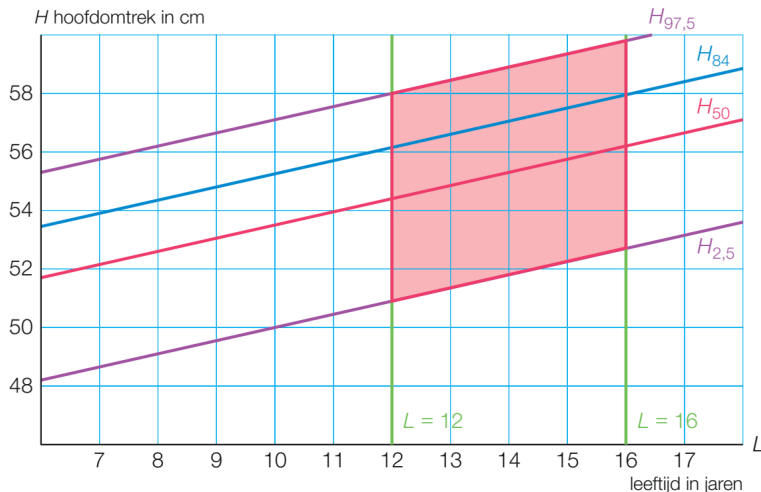
- g De laagste snelheid hoort bij de kortste remweg, dus $L = 25$ en $f = 11,5$ geeft $v = 5,1 \cdot \sqrt{25 \cdot 11,5} \approx 86$
 $86 - 50 = 36$, dus de auto reed minstens 36 km/uur te hard.



Bladzijde 134

43

- a** $L = 16$ geeft $H_{50} = 0,45 \cdot 16 + 49 = 56,2$
 $58 > 56,2$, dus de hoofdomtrek van Bas is bovengemiddeld.
- b** 84% van jongens heeft een hoofdomtrek kleiner dan H_{84} en 50% van jongens heeft een hoofdomtrek kleiner dan H_{50} . Dus $84\% - 50\% = 34\%$ van de jongens heeft een hoofdomtrek tussen H_{50} en H_{84} . Volgens de vuistregels bij de normale verdeling ligt 68% van de metingen tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$. Dus tussen μ en $\mu + \sigma$ ligt 34% van de metingen.
 Omdat $H_{50} = \mu$ komt H_{84} dus overeen met $\mu + \sigma$. Oftewel $H_{84} = H_{50} + \sigma$.
- De standaardafwijking is dus het verschil tussen H_{84} en H_{50} . Dit geeft:
 $\sigma = H_{84} - H_{50} = 0,45L + 50,75 - (0,45L + 49) = 1,75$ cm.
- c** $50\% - 34\% = 16\%$, dus $H_{16} = \mu - \sigma$.
 $H_{16} = H_{50} - 1,75 = 0,45L + 49 - 1,75$,
 dus $H_{16} = 0,45L + 47,25$.
- d** 95% is twee standaardafwijkingen, dus $2 \cdot 1,75 = 3,5$, boven en onder de lijn H_{50} .
 Dit geeft $H_{2,5} = 0,25L + 49 - 3,5$
 $= 0,45L + 45,5$
 en $H_{97,5} = 0,25L + 49 + 3,5$
 $= 0,45L + 52,5$.
 Zie de figuur hiernaast.
- e** $0,45L + 49 = H_{50}$
 $0,45L = H_{50} - 49$
 $L = 2,222... \cdot H_{50} - 108,8...$
 $L \approx 2,22H_{50} - 109$
 Dus $a \approx 2,22$ en $b \approx -109$.



Bladzijde 135

44

- a** $g = 1195$ en $l = 19,2$ geeft $J = \frac{g}{l^3} = \frac{1195}{19,2^3} = 0,168...$
 $0,168... \leq 0,17$, dus schildpad Janet is te licht voor een winterslaap.
- b** $J = 0,21$ geeft $0,21 = \frac{g}{l^3}$
 $\frac{0,21}{1} = \frac{g}{l^3}$
 $g = 0,21l^3$
- c** $l = 19,2$ geeft $g = 0,21 \cdot 19,2^3 = 1486,35...$
 Janet had $\frac{1486,35... - 1195}{1195} \cdot 100\% \approx 24,4\%$ zwaarder moeten zijn.
- d** Bij een goede conditie ligt J tussen 0,17 en 0,23.
 $l = 14,5$ en $J = 0,17$ geeft $0,17 = \frac{g}{14,5^3}$ oftewel $g = 0,17 \cdot 14,5^3 = 518,26...$
 $l = 14,5$ en $J = 0,23$ geeft $0,23 = \frac{g}{14,5^3}$, oftewel $g = 0,23 \cdot 14,5^3 = 701,18...$
 De schildpad heeft een gewicht van minimaal 519 en maximaal 701 gram.
- e** Voor de grootste schildpad geldt $\frac{g}{l^3} = 0,17$.
 Voor de kleinste schildpad is l kleiner, terwijl g gelijk is.
 Dus de teller is gelijk en de noemer is kleiner, dus de breuk $\frac{g}{l^3}$ is groter. Dus voor de kleinste schildpad is $\frac{g}{l^3} > 0,17$, dus deze is niet te licht.

45 a $W_{20} = at + 100$ met $a = \frac{84 - 100}{10} = -1,6$

Dus $W_{20} = -1,6t + 100$.

b $t = 26$ geeft $W_{20} = -1,6 \cdot 26 + 100 = 58,4 \neq 64$

$t = 52$ geeft $W_{20} = -1,6 \cdot 52 + 100 = 16,8 \neq 41$

Dus de tabel is niet in overeenstemming met het lineaire model.

c $g_{52 \text{ dagen}} = \frac{41}{100}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{41}{100}\right)^{\frac{1}{52}} \approx 0,983$.

d $0,983^7 \approx 0,886...$, dus een afname van 11,3% per week.

e De optie oplossen bij $100 \cdot 0,983^x = 25$ geeft $x = 80,85...$

Dus na ongeveer 81 dagen.

f $t = 52$ geeft $W_4 = 110 - 5,83\sqrt{52} + 2,94 = 66,78...$

Na 52 dagen is de hoeveelheid werkzame stof nog ongeveer 66,8.

g Er moet gelden $W_4 = 1,25W_{20}$.

De optie oplossen bij $110 - 5,83\sqrt{x+2,94} = 1,25 \cdot 100 \cdot 0,983^x$ geeft $x = 27,71...$

Dus na ongeveer 28 dagen.

h Bij 20°C is het medicijn na 80,85... dagen niet meer effectief (zie vraag e).

De optie oplossen bij $110 - 5,83\sqrt{x+2,94} = 25$ geeft $x = 209,62...$

$HF_{20 \rightarrow 4} = \frac{209,62...}{80,85...} \approx 2,6$

Bladzijde 137

46 a De formule die bij de vuistregel hoort is $m = 7h$.

$30\sqrt{h} - 1,8h = 7h$.

Voer in $y_1 = 30\sqrt{x} - 1,8x$ en $y_2 = 7x$

De optie snijpunt geeft $x = 11,62...$

De hondenleeftijd is 11,6 jaar.

b De vraag is voor welke h een maximum optreedt bij $30\sqrt{h} - 1,8h - 7h$ oftewel $30\sqrt{h} - 8,8h$.

Voer in $y_1 = 30\sqrt{x} - 8,8x$.

De optie maximum geeft $x \approx 2,9$ en $y \approx 25,6$.

Het verschil is maximaal bij een hondenleeftijd van 2,9 jaar en het maximale verschil in mensenjaren is 25,6 jaar.

c $m_{\text{middel}} = 30\sqrt{h} + ah$ $\left\{ \begin{array}{l} 30\sqrt{1} + a \cdot 1 = 29 \\ h = 1 \text{ en } m_{\text{middel}} = 29 \end{array} \right. \begin{array}{l} 30 + a = 29 \\ a = -1 \end{array}$

Dus $m_{\text{middel}} = 30\sqrt{h} - h$.

De optie oplossen bij $30\sqrt{x} - x = 67$ geeft $x = 5,90...$

Dus de pensioenleeftijd van deze hond is 5,9 jaar.

47 a $m_{\text{groot}} = 30\sqrt{h} + ah$ $\left\{ \begin{array}{l} 30\sqrt{1} + a \cdot 1 = 30 \\ h = 1 \text{ en } m_{\text{groot}} = 30 \end{array} \right. \begin{array}{l} 30 + a = 30 \\ a = 0 \end{array}$

Dus $m_{\text{groot}} = 30\sqrt{h}$.

De optie oplossen bij $30\sqrt{x} = 100$

geeft $x = 11,11...$

Dus maximaal 11 jaar.

b $m_{\text{groot}} - m_{\text{klein}} = 30\sqrt{h} - (30\sqrt{h} - 1,8h) = 30\sqrt{h} - 30\sqrt{h} + 1,8h = 1,8h$

Los op $1,8h = 10$

$h \approx 5,6$

Dus bij een hondenleeftijd van 5,6 jaar.

Bladzijde 138

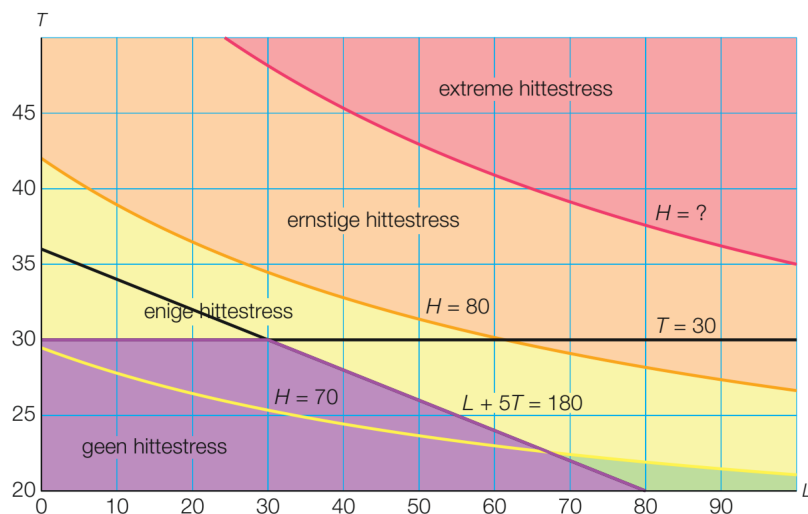
- 1 a** Aflezen in de figuur bij 60% geeft tussen ongeveer 23 °C en 30 °C.

- b** De grenslijn gaat door (100, 35).
 $L = 100$ en $T = 35$ geeft
 $H = 0,8 \cdot 35 + 0,01 \cdot 100 \cdot (35 - 14,4) + 46,4 = 95$.

- c** $L + 5T \leq 180$

L	0	80
T	36	20

(0, 0) geeft $0 + 5 \cdot 0 = 0 \leq 180$, dus op en onder de lijn $L + 5T \leq 180$. Verder ook op en onder de lijn $T = 30$. Zie de figuur hiernaast.



- 2 a** $N = \frac{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{10xy}}{\sqrt{5y}} = \frac{\sqrt{2x \cdot 10xy}}{\sqrt{5y}} = \frac{\sqrt{20x^2y}}{\sqrt{5y}} = \sqrt{\frac{20x^2y}{5y}} = \sqrt{4x^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2} = 2x$

- b** $1,5 \cdot \sqrt{16p} = 9q$

$$\sqrt{16p} = 6q$$

$$16p = 36q^2$$

$$p = 2,25q^2$$

- c** $\frac{3M}{4} = \sqrt{5K}$

$$3M = 4\sqrt{5K}$$

$$M = 1,333... \cdot \sqrt{5K}$$

$$M = 1,333... \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{K} \approx 2,98\sqrt{K}$$

Dus $a \approx 2,98$.

Bladzijde 139

- 3 a** $P = 40$ en $I = 0,5$ geeft $r = \frac{\sqrt{40}}{3,545\sqrt{0,5}} = 2,52...$

Dus op ongeveer 2,5 meter afstand.

- b** $P = 500$ geeft $r = \frac{\sqrt{500}}{3,545\sqrt{I}} \approx \frac{6,3}{\sqrt{I}}$

$$\text{Dus } r = \frac{6,3}{\sqrt{I}}.$$

- c** $r = \frac{\sqrt{P}}{3,545\sqrt{I}}$

$$3,545r = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{I}}$$

$$3,545r = \sqrt{\frac{P}{I}}$$

$$(3,545r)^2 = \frac{P}{I}$$

$$I = \frac{P}{3,545^2 r^2} \approx \frac{P}{12,567 r^2}$$

Dus $a \approx 12,567$.

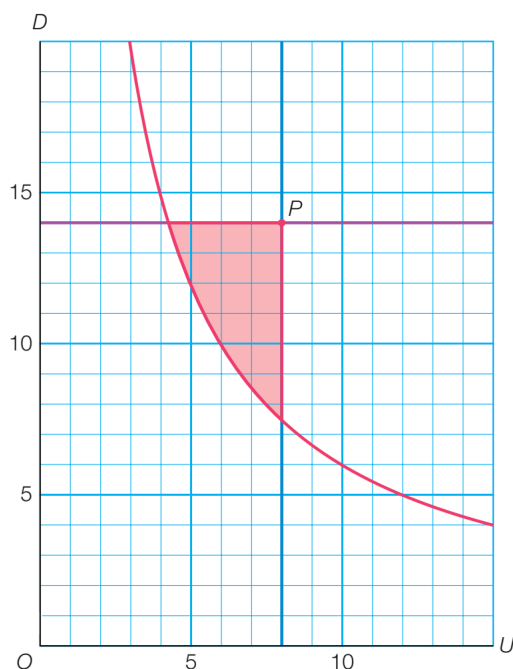
- 4 a** Als x afneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ af en dan neemt $2 - \sqrt{x}$ toe, dus $\frac{A}{-5}$ neemt dan toe.
 Als $\frac{A}{-5}$ toeneemt, dan neemt A af.
 Dus als x afneemt, dan neemt A af.
- b** Als x heel groot wordt, dan nadert $0,2^x$ tot 0, dus dan wordt $2 + 0,2^x \approx 2 + 0 = 2$, dus dan wordt $\frac{100}{2 + 0,2^x} \approx \frac{100}{2} = 50$.
 Als x heel groot wordt, dan nadert $\frac{25}{x}$ tot 0, dus dan wordt $16 - \frac{25}{x} \approx 16 - 0 = 16$ en dan wordt $\sqrt{16 - \frac{25}{x}} \approx \sqrt{16} = 4$.
 De grenswaarde is dus $50 - 4 = 46$.

- 5 a** $S = 45$, $W = 25$ en $k = 500$ geeft $45 = 0,4 \cdot 25 \cdot \left(u + \frac{24 - u}{500}\right)$
 Voer in $y_1 = 45$ en $y_2 = 0,4 \cdot 25 \cdot \left(x + \frac{24 - x}{500}\right)$.
 De optie snijpunt geeft $x = 4,460\dots$
 De gebruiksduur is 4 uur en $0,460\dots \cdot 60 \approx 28$ minuten (of 268 minuten).
- b** Voor een machine die de hele dag in stand-by staat, geldt $u = 0$ en dit geeft $S = 0,4W \cdot \left(0 + \frac{24 - 0}{k}\right) = 0,4W \cdot \left(\frac{24}{k}\right)$.
 Als k heel groot wordt dan nadert $\frac{24}{k}$ tot 0, dus dan wordt $S \approx 0,4W \cdot 0 = 0$.
 Dus als k heel groot wordt, naderen de stroomkosten tot nul.
- c** Voor een machine die continu in gebruik is, geldt $u = 24$ en dit geeft $S = 0,4W \cdot \left(24 + \frac{24 - 24}{k}\right) = 0,4W \cdot \left(24 + \frac{0}{k}\right) = 0,4W \cdot 24 = 9,6W$.
 $9,6W = 120$ geeft $W = 12,5$.
 Dus het maximale vermogen is 12,5 kilowatt.
- d** $W = 2$ en $k = 10$ geeft $S = 0,4 \cdot 2 \cdot \left(u + \frac{24 - u}{10}\right) = 0,8 \cdot (u + 2,4 - 0,1u)$
 $= 0,8 \cdot (0,9u + 2,4) = 0,72u + 1,92$

Gemengde opgaven

Bladzijde 140

- 1 a** $D \leq 14$ en $U \leq 8$. En ook tussen en op de grafieken van $B = 0$ en $B = 4$, oftewel $2x - y = 0$ en $2x - y = 4$.
- b** $(0, 0)$ invullen geeft $0 \cdot 0 = 0 \neq 60$, dus boven en op de grafiek van $D \cdot U = 60$ en ook onder en op de grafiek van $D = 14$ en links en op de grafiek van $U = 8$.
 Zie de figuur hiernaast.
- c** Als Jan 14 dagen lang 8 uur per dag werkt is dat $14 \cdot 8 = 112$ uur.
 Hierbij hoort het punt P in de figuur.
- d** Vanwege de voorrijkosten zijn de kosten minimaal bij zo min mogelijk dagen, dus Jan werkt 8 uur per dag.
 Dus $D = \frac{80}{8} = 10$ dagen.
 De minimale kosten zijn $50 \cdot 10 + 20 \cdot 80 = 2100$ euro.
- e** De voorrijkosten zijn 50 euro per dag oftewel $50 \cdot D$.
 Verder werkt Jan D dagen elke dag U uur, dus in totaal $D \cdot U$ uur. Hij rekent 20 euro per uur oftewel $20 \cdot D \cdot U$. Dus voor de totale kosten geldt $K = 50 \cdot D + 20 \cdot D \cdot U$.



f Er geldt $K = 2500$ en $U = 6$.

$$\left. \begin{array}{l} K = 50D + 20DU \\ K = 2500 \text{ en } U = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 50D + 20D \cdot 6 = 2500 \\ 50D + 120D = 2500 \\ 170D = 2500 \\ D \approx 14,7 \end{array}$$

Dat is niet mogelijk, want de klus zou dan 14,7 dagen duren en dat is te lang.

2 a $A = 5p - \frac{6}{p^2} = \frac{5p^3}{p^2} - \frac{6}{p^2} = \frac{5p^3 - 6}{p^2}$

b $B = \frac{7q}{3q-12} \cdot (q-2) - \frac{1}{3} \cdot \frac{5q}{q-4} = \frac{7q(q-2)}{3q-12} - \frac{5q}{3(q-4)} = \frac{7q^2-14q}{3q-12} - \frac{5q}{3q-12} = \frac{7q^2-14q-5q}{3q-12} = \frac{7q^2-19q}{3q-12}$

c $K = \frac{1}{3}q + 4 + \frac{5}{q} = \frac{q}{3} + 4 + \frac{5}{q} = \frac{q^2}{3q} + \frac{12q}{3q} + \frac{15}{3q} = \frac{q^2 + 12q + 15}{3q}$

d $N = \frac{2t^3}{\left(\frac{5}{3t^4}\right)} \cdot t^2 = 2t^3 \cdot \frac{3t^4}{5} \cdot t^2 = 2t^3 \cdot \frac{3}{5} \cdot t^4 \cdot t^2 = 1,2t^1 = 1,2t$

e $\frac{v+8}{1} = \frac{2C}{4+2v}$

$$2C = (v+8)(4+2v)$$

$$2C = 4v + 2v^2 + 32 + 16v$$

$$2C = 2v^2 + 20v + 32$$

$$C = v^2 + 10v + 16$$

f $\frac{5y-6}{9x} = \frac{2\frac{2}{3}}{1}$

$$5y-6 = 24x$$

$$5y = 24x + 6$$

$$y = 4,8x + 1,2$$

Bladzijde 141

3 a $N = \frac{1}{12}a \cdot \frac{(2a+3)a}{4a+4} = \frac{(2a+3)a^2}{12(4a+4)} = \frac{2a^3+3a^2}{48a+48}$

b $P = \frac{(a-5)(a+6)}{a-2} + a + 1 = \frac{a^2+6a-5a-30}{a-2} + \frac{a(a-2)}{a-2} + \frac{a-2}{a-2}$
 $= \frac{a^2+6a-5a-30+a(a-2)+a-2}{a-2} = \frac{a^2+a-30+a^2-2a+a-2}{a-2} = \frac{2a^2-32}{a-2}$

c $Q = \frac{5}{3p+2}$

$$3p+2 = \frac{5}{Q}$$

$$3p = \frac{5}{Q} - 2$$

$$p = \frac{5}{3Q} - \frac{2}{3} \left(= \frac{5-2Q}{3Q} \right)$$

d $4 - \frac{H}{x^2+1} = 11$

$$\frac{H}{x^2+1} = -7$$

$$H = -7(x^2+1)$$

$$H = -7x^2 - 7$$

4 a $3\sqrt{2y} - 8x + 3 = x$

$$3\sqrt{2y} = 9x - 3$$

$$\sqrt{2y} = 3x - 1$$

$$2y = (3x - 1)^2$$

$$y = \frac{1}{2}(3x - 1)^2$$

b $0,25b + 2 = a$

$$0,25b = a - 2$$

$$b = 4a - 8$$

$$F = \frac{0,1a}{2a-1} \cdot (2b+1) \left. \vphantom{\begin{array}{l} b = 4a - 8 \\ F = \frac{0,1a}{2a-1} \cdot (2b+1) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} F = \frac{0,1a}{2a-1} \cdot (2(4a-8)+1) \\ F = \frac{0,1a}{2a-1} \cdot (8a-16+1) \\ F = \frac{0,1a(8a-15)}{2a-1} = \frac{0,8a^2 - 1,5a}{2a-1} \end{array}$$

c $G = \frac{k-p^2}{k^2} \left. \vphantom{\begin{array}{l} G = \frac{k-p^2}{k^2} \\ p = k+2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} G = \frac{k-(k+2)^2}{k^2} = \frac{k-(k^2+2k+2k+4)}{k^2} = \frac{k-k^2-2k-2k-4}{k^2} \\ = \frac{-k^2-3k-4}{k^2} = \frac{-k^2}{k^2} + \frac{-3k}{k^2} + \frac{-4}{k^2} = -1 + \frac{-3}{k} + \frac{-4}{k^2} \end{array}$

Dus $a = -1$, $b = -3$ en $c = -4$.

5 a $w = 18$ en $V = 84$ geeft $-0,35A \cdot 18 + 8,4A = 84$

$$-6,3A + 8,4A = 84$$

$$2,1A = 84$$

$$A = 40$$

Er passeren 40 auto's per minuut.

b $A = 75$ en $V = 160$ geeft $-0,35 \cdot 75w + 8,4 \cdot 75 = 160$

$$-26,25w + 630 = 160$$

$$-26,25w = -470$$

$$w \approx 17,9$$

De windsnelheid was 17,9 m/s.

c $A = 60$ geeft $V = -0,35 \cdot 60w + 8,4 \cdot 60 = -21w + 504$

d $w = 10$ geeft $V = -0,35A \cdot 10 + 8,4A = -3,5A + 8,4A = 4,9A$

$$V = 4,9A, \text{ dus } A = \frac{1}{4,9} V$$

$$\text{Dus } a = \frac{1}{4,9} \approx 0,204.$$

Bladzijde 142

6 a $T_F = 75$ geeft $A = \frac{10 \cdot 75 - 325}{11} = 38,63...$

38,63...tjirpen per 15 seconden dus per uur zijn dat er $38,63 \cdot 4 \cdot 60 \approx 9273$. Dat is meer dan 9000 keer.

b $\frac{A}{1} = \frac{10T_F - 325}{11}$

$$10T_F - 325 = 11A$$

$$10T_F = 11A + 325$$

$$T_F = 1,1A + 32,5$$

c $T_F = 1,1A + 32,5 \approx A + 33$, dus de methode van de scouting komt ongeveer overeen met de formule van vraag b.

d $A = \frac{10T_F - 325}{11}$ geeft $T_F = 1,1A + 32,5$ (zie vraag b)

$$\left. \begin{array}{l} 1,8T_C = T_F - 32 \\ T_F = 1,1A + 32,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,8T_C = 1,1A + 32,5 - 32 \\ 1,8T_C = 1,1A + 0,5 \end{array}$$

$$T_C \approx 0,6A + 0,3$$

Dus $T_C = 0,6A + 0,3$.

e Een krekel tjirpt A keer gedurende 15 seconden, dus gedurende 9 seconden tjirpt de krekel $\frac{9}{15}A = 0,6A$ keer.

Bij de methode van de scouting hoort dus de formule $T_C = 0,6A$.

Dit komt ongeveer overeen met $T_C = 0,6A + 0,3$, het scheelt 0,3 graden Celsius.

Dus de methode van de scouting komt ongeveer overeen met de formule van vraag d.

$$\begin{aligned}
 7 \quad a \quad & 3q - 15p = 5 \\
 & -15p = -3q + 5 \\
 & -7,5p = -1,5q + 2,5 \\
 & W = 18 - 7,5p + 2q \quad \left. \begin{array}{l} W = 18 - 1,5q + 2,5 + 2q \\ W = 0,5q + 20,5 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b \quad & x + z = 6 \\
 & z = -x + 6 \\
 & y = 2x + 5 \\
 & F = 3xy + 4xz + 8 \quad \left. \begin{array}{l} F = 3x(2x + 5) + 4x(-x + 6) + 8 \\ F = 6x^2 + 15x - 4x^2 + 24x + 8 \\ F = 2x^2 + 39x + 8 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c \quad & P = 6 \text{ en } l = 4 \text{ geeft } \frac{2k(3 \cdot 4 + 8)}{4 + 7m} = 6 \\
 & 2k(3 \cdot 4 + 8) = 6(4 + 7m) \\
 & 2k \cdot 20 = 24 + 42m \\
 & 40k = 24 + 42m \\
 & k = 0,6 + 1,05m = 1,05m + 0,6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d \quad & G = 12 - 21 \cdot \frac{6 - 7,5h}{63} = 12 - \frac{21}{63} \cdot (6 - 7,5h) = 12 - \frac{1}{3}(6 - 7,5h) = 12 - 2 + 2,5h = 2,5h + 10 \\
 & \text{Dus } G = 2,5h + 10.
 \end{aligned}$$

Bladzijde 143

- 8 a Bij een omgekeerd evenredig verband hoort de formule $P = \frac{a}{L}$. Aflezen in de grafiek geeft $P = 100$ bij $L = 0$ en dit klopt niet met de formule, want $\frac{a}{0}$ kan niet. Dus er is geen sprake van een omgekeerd evenredig verband.

Alternatieve uitwerking

Bij een omgekeerd evenredig verband is $P \cdot L$ constant. Het punt $(0, 100)$ in de grafiek geeft $P \cdot L = 0 \cdot 100 = 0$ en het punt $(10, 20)$ geeft $P \cdot L = 10 \cdot 20 = 200$. Dat is niet constant, dus er is geen sprake van een omgekeerd evenredig verband.

$$\begin{aligned}
 b \quad & P = 100 \cdot g^L \\
 & g_{10 \text{ jaar}} = \frac{20}{100}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{20}{100}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 0,851 \\
 & \text{Dus } P = 100 \cdot 0,851^L.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c \quad & \left. \begin{array}{l} P = \frac{a}{L} \\ L = 4 \text{ en } P = 37,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{4} = 37,5 \\ a = 4 \cdot 37,5 = 150 \end{array} \\
 & \text{Dus } P = \frac{150}{L}.
 \end{aligned}$$

- d Als L toeneemt, dan neemt $0,83^L$ af, dus ook $95 \cdot 0,83^L$ neemt af, dus ook $95 \cdot 0,83^L + 5$ neemt af. Dus de grafiek van $P = 95 \cdot 0,83^L + 5$ is dalend.
Als L heel groot wordt, nadert $0,83^L$ tot 0. Dan wordt $95 \cdot 0,83^L \approx 0$ en $95 \cdot 0,83^L + 5 \approx 0 + 5 = 5$. Dus de grenswaarde is 5.

- e verzekeraar A: $P = 100 \cdot 0,851^{12} = 14,4...$

$$\text{verzekeraar B: } P = \frac{150}{12} = 12,5$$

$$\text{verzekeraar C: } P = 95 \cdot 0,83^{12} + 5 = 15,1...$$

Dus verzekeraar C keert de hoogste dagwaarde uit. Dat is $\frac{15,1...}{100} \cdot 21\,500 \approx 3300$ euro.

9 a Voer in $y_1 = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3x}}$.

Zie de figuur hiernaast.

b $t = 10$ geeft $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3 \cdot 10}} \approx 0,5$

Dus 0,5% is besmet (geweest).

c $\frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}} = 50$.

Voer in $y_2 = 50$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 35$.

Dus na 35 dagen.

d Als t toeneemt, dan neemt $-0,3t$ af, dus dan neemt $2^{-0,3t}$ af, dus dan neemt $1450 \cdot 2^{-0,3t}$ af en dan neemt ook $1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}$ af, dus dan neemt $\frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}}$ toe.

De grafiek van P is dus stijgend.

e Bij 25 maart 2020 hoort $t = 24$ en dit geeft $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3 \cdot 24}} \approx 9,2$.

Dus dan zouden er $0,092 \cdot 17,4 \approx 1,6$ miljoen mensen besmet zijn (geweest).

Bij 24 april 2020 hoort $t = 24 + 30 = 54$ en dit geeft $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3 \cdot 54}} \approx 98,1$.

Dus dan zouden er $0,981 \cdot 17,4 \approx 17,1$ miljoen mensen besmet zijn (geweest).

f $2^{-0,3t} = (2^{-0,3})^t \approx 0,812^t$, dus de formule is te schrijven als $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 0,812^t}$.

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,812^t$ tot 0 dus dan wordt $1450 \cdot 0,812^t \approx 0$ en $1 + 1450 \cdot 0,812^t \approx 1 + 0 = 1$.

Dus dan wordt $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 0,812^t} \approx \frac{100}{1} = 100$.

De grenswaarde is 100%, dus uiteindelijk zal de gehele bevolking besmet zijn geweest.

g De grenswaarde van de formule is a , dus met 10 miljoen inwoners geldt $a = 10\,000\,000$.

Er gaan zeven dagen in een week, dus er geldt $t = 7w$.

Dit geeft $-0,3t = -0,3 \cdot 7w = -2,1w$, dus $c = -2,1$.

Alternatieve uitwerking

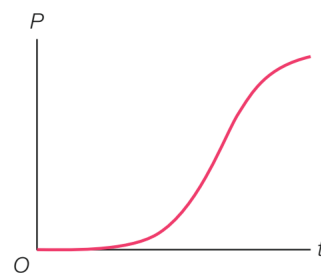
Het aantal besmette personen in New York is P procent van 10 miljoen, dus er geldt

$$I = \frac{P}{100} \cdot 10\,000\,000 \text{ oftewel } I = 100\,000P. \text{ Dit geeft } I = 100\,000 \cdot \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}} = \frac{10\,000\,000}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}},$$

dus $a = 10\,000\,000$.

Er gaan zeven dagen in een week, dus er geldt $t = 7w$.

Dit geeft $-0,3t = -0,3 \cdot 7w = -2,1w$, dus $c = -2,1$.



- a** De som van de huidplooien is $32 + 27 + 26 + 31 = 116$ mm.

Uit de tabel volgt dat D ligt tussen 1,0135 en 1,0108.

Bij een toename van 10 mm neemt D af met $1,0135 - 1,0108 = 0,0027$,

dus per mm een afname van $\frac{0,0027}{10}$.

116 is 6 meer dan 110, dus $D = 1,0135 - 6 \cdot \frac{0,0027}{10} = 1,01188$.

$D = 1,01188$ geeft $P = \frac{495}{1,01188} - 450 \approx 39,2$

Het vetpercentage is 39,2%.

- b** $\frac{495}{D} - 450 = 31,7$.

Voer in $y_1 = \frac{495}{x} - 450$ en $y_2 = 31,7$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,0276$.

Uit de tabel volgt bij $D = 1,0276$ dat de som van de huidplooien 70 mm is.

- c** Uit de tabel volgt bij een som van de huidplooien van 110 mm dat $D = 1,0135$, dus

$$P = \frac{495}{1,0135} - 450 = 38,40\ldots$$

Voor het afvallen bestond zijn lichaam uit $0,3840\ldots \cdot 108 = 41,47\ldots$ kg vet en dus uit

$108 - 41,47\ldots = 66,52\ldots$ kg niet-vet.

Uit de tabel volgt bij een som van de huidplooien van 70 mm dat $D = 1,0276$, dus

$$P = \frac{495}{1,0276} - 450 = 31,70\ldots$$

Na het afvallen is zijn vetpercentage 31,70...%, dus zijn percentage niet-vet is $100 - 31,70\ldots = 68,29\ldots$

Omdat hij alleen vet is kwijtgeraakt heeft hij nog steeds 66,52... kg aan niet-vet, dus zijn lichaamsgewicht is

$$\frac{66,52\ldots}{0,6829\ldots} = 97,40\ldots \text{ kg. Hij is dus } 108 - 97,40\ldots \approx 11 \text{ kg afgevallen.}$$

- d** Uit de tabel volgt bij een som van de huidplooien van 60 mm dat $D = 1,0324$, dus

$$P = \frac{495}{1,0324} - 450 = 29,46\ldots$$

Lieke heeft volgens het model $0,2946\ldots \cdot 60 = 17,67\ldots$ kg vet.

Dus ze heeft volgens de scan $\frac{17,67\ldots - 16,8}{17,67\ldots} \cdot 100\% \approx 5,0\%$ minder vet dan volgens het model.

- e** $I = 1,22$ en $G_{\text{lucht}} = 75,1$ kg $G_{\text{water}} = 2,1$ kg geeft $D = \frac{75,1}{75,1 - 2,1 - 1,22} = 1,0462\ldots$

$$D = 1,0462\ldots \text{ geeft } P = \frac{495}{1,0462\ldots} - 450 \approx 23,1.$$

Het vetpercentage van Karel is dus 23,1%.

- f**
$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{495}{D} - 450 \\ D &= \frac{G_{\text{lucht}}}{G_{\text{lucht}} - G_{\text{water}} - I} \end{aligned} \right\} P = \frac{495}{\left(\frac{G_{\text{lucht}}}{G_{\text{lucht}} - G_{\text{water}} - I} \right)} - 450 = P = 495 \cdot \frac{G_{\text{lucht}} - G_{\text{water}} - I}{G_{\text{lucht}}} - 450$$

- g** Als G_{water} toeneemt (en G_{lucht} en I blijven gelijk), dan neemt $G_{\text{lucht}} - G_{\text{water}} - I$ af en dan

neemt $\frac{G_{\text{lucht}} - G_{\text{water}} - I}{G_{\text{lucht}}}$ af en dan neemt $495 \cdot \frac{G_{\text{lucht}} - G_{\text{water}} - I}{G_{\text{lucht}}}$ af en dan neemt ook

$$495 \cdot \frac{G_{\text{lucht}} - G_{\text{water}} - I}{G_{\text{lucht}}} - 450 \text{ af.}$$

Dus als G_{water} toeneemt (en G_{lucht} en I blijven gelijk), dan neemt P af, dus hoort bij een groter onder water gemeten gewicht een lager vetpercentage.

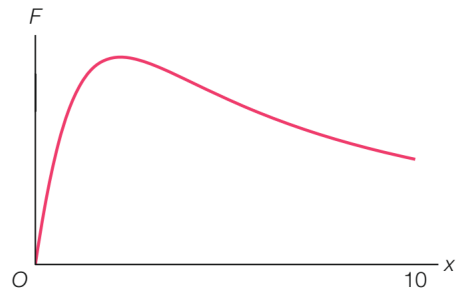
12 Examentraining

12.1 Algemene vaardigheden

Bladzijde 148

- 1 a** De toename is $\frac{69\,170 - 48\,520}{48\,520} \cdot 100\% \approx 42,6\%$.
- b** $A : B = 1 : 5 = 2 : 10$ en $B : C = 2 : 7 = 10 : 35$, dus $A : B : C = 2 : 10 : 35$.
De verhouding $A : C$ is $2 : 35$.
- c**
$$\left. \begin{array}{l} Q = \frac{a}{P} \\ P = 3 \text{ en } Q = 600 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{3} = 600 \\ a = 1800 \end{array}$$

Dus $Q = \frac{1800}{P}$.
- d** $K = 24$ en $B = 15$ geeft $3,1A - 4,12 \cdot 15 + 16,05 = 24$
 $3,1A = 69,75$
 $A = 22,5$
- e** Voer in $y_1 = \frac{100x}{0,6x^2 + x + 3}$.
Zie de schets hiernaast.
De grafiek is achtereenvolgens afnemend stijgend, toenemend dalend en afnemend dalend.
- f** De optie maximum geeft $y = 27,149\ldots$
Het maximum van F is ongeveer $27,15$.
- g** Los op $\frac{100x}{0,6x^2 + x + 3} = 20$.
Voer in $y_2 = 20$.
De optie snijpunt geeft $x = 0,861\ldots$ en $x = 5,805\ldots$
Dus $F > 20$ voor x tussen $0,87$ en $5,80$.

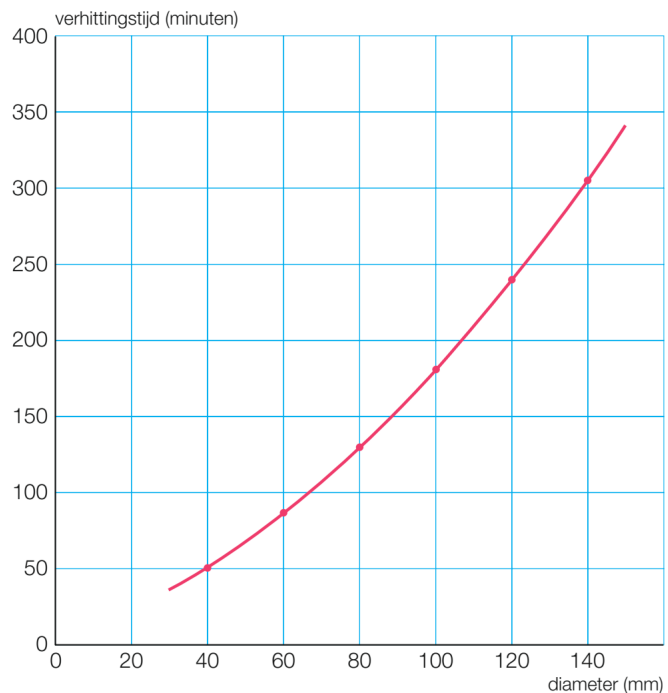


Bladzijde 152

- 2 a**
- | | | | | | | |
|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| d | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 |
| T | 53 | 88 | 133 | 183 | 240 | 305 |
- Zie de figuur hiernaast.
- b** $d = 45$ geeft
 $V = 0,7 \cdot 45 + 0,0089 \cdot 45^2 \approx 50$
Dus 50 minuten.

Bladzijde 153

- c** 2,5 uur = 150 minuten
Los op $0,7d + 0,0089d^2 = 150$.
Voer in $y_1 = 0,7x + 0,0089x^2$ en $y_2 = 150$.
De optie snijpunt geeft $x = 96,3\ldots$
Dus maximaal 96 mm.



- 3 a** Los op $20\sqrt{273 + T} = 339$.
De optie oplossen bij $20\sqrt{273 + x} = 339$ geeft $x = 14,3...$
Dus de temperatuur moet met $31 - 14,3... \approx 17^\circ\text{C}$ toenemen.

Alternatieve uitwerking

De oplossing van $20\sqrt{273 + T} = 339$ is $T = 14,3...$ (zie hierboven).

Los op $20\sqrt{273 + T} = 349$.

De optie oplossen bij $20\sqrt{273 + x} = 349$ geeft $x = 31,5...$

Dus de temperatuur moet met $31,5... - 14,3... \approx 17^\circ\text{C}$ toenemen.

- b** Bij een temperatuur van 31°C hoort $v = 349$ en $f = 440$.

Los op $\frac{349}{4L} = 440$.

De optie oplossen bij $\frac{349}{4x} = 440$ geeft $x = 0,1982...$, dus $L = 0,1982...$

Bij een temperatuur van 20°C hoort $v = 342$.

$v = 243$ en $L = 0,1982...$ geeft $f = \frac{342}{4 \cdot 0,1982...} \approx 431$.

Dus de frequentie was 431 Hz.

Alternatieve uitwerking

$T = 31$ geeft $v = 20\sqrt{273 + 31} = 348,7...$

Los op $\frac{348,7...}{4L} = 440$.

De optie oplossen bij $\frac{348,7...}{4x} = 440$ geeft $x = 0,1981...$, dus $L = 0,1981...$

$T = 20$ geeft $v = 20\sqrt{273 + 20} = 342,3...$

$v = 242,3$ en $L = 0,1981...$ geeft $f = \frac{342,3...}{4 \cdot 0,1982...} \approx 432$.

Dus de frequentie was 432 Hz.

Bladzijde 154

- 4 a** Als er in 2015 op elke brief/kaart één postzegel was geplakt, dan zou de opbrengst $2401 \text{ miljoen} \cdot 0,69 = 1656,69 \text{ miljoen euro}$ zijn geweest.
De opbrengst was hoger, namelijk $1961 \text{ miljoen euro}$, dus op een deel van de brieven/kaarten moet meer dan één postzegel zijn geplakt.
- b** Het aantal brieven/kaarten met één postzegel is $0,88 \cdot 2213 \text{ miljoen} = 1947,44 \text{ miljoen}$.
Elke brief/kaart met twee postzegels levert $2 \cdot 0,73 = 1,46 \text{ euro}$ op.
Het aantal brieven/kaarten met twee of drie postzegels is $0,12 \cdot 2213 \text{ miljoen} = 256,56 \text{ miljoen}$ (of $2213 \text{ miljoen} - 1947,44 \text{ miljoen} = 256,56 \text{ miljoen}$).
Elke brief/kaart met drie postzegels levert $3 \cdot 0,73 = 2,19 \text{ euro}$ op.
- c** De optie oplossen bij $0,73 \cdot 1947,44 + 1,46 \cdot x + 2,19 \cdot (256,56 - x) = 1877$ geeft $x = 172,8...$
Dat is $\frac{172,8...}{2213} \cdot 100\% \approx 8\%$.

Bladzijde 155

- 5** Lees bijvoorbeeld af dat de trendlijn door $(2, 10)$ gaat.

$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{a}{P} \\ P = 2 \text{ en } V = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{2} = 10 \\ a = 20 \end{array}$$

$$\text{Dus } V = \frac{20}{P}.$$

- 6 a** $t = 19$ geeft $L_j = \frac{50,9}{1 + 1289,5 \cdot 0,57^{19}} + 134 \approx 183,4$

Een grote waarde voor t invullen ($t > 25$) geeft $L_j \approx 184,9$ (of beredeneer: grenswaarde = 184,9).

Een jongen groeit dus nog ongeveer $184,9 - 183,4 = 1,5 \text{ cm}$.

- b** Het verschil is $L_m - L_j$, dus voer in $y_1 = \frac{48,3}{1 + 245,4 \cdot 0,59^x} + 122,6 - \left(\frac{50,9}{1 + 1289,5 \cdot 0,57^x} + 134 \right)$.

De optie maximum geeft $y = 2,53...$

Dus het maximale lengteverschil is ongeveer 2,5 cm.

Bladzijde 156

- 7 a** Klaas heeft score $\frac{20}{100} = 0,2$ en Lidy heeft score $\frac{20}{25} = 0,8$.

Dus Klaas moet $\frac{0,8}{0,2} = 4$ keer zo dichtbij staan.

- b** Los op $10^{-M} = 0,05$ en $10^{-M} = 0,3$.
De optie oplossen bij $10^{-x} = 0,05$ geeft $x = 1,30\dots$ en bij $10^{-x} = 0,3$ geeft dat $x = 0,52\dots$
Dus de scores van $M \approx 1,3$ en $M \approx 0,5$ komen overeen met de scores $S = 0,05$ en $S = 0,3$.
- c** $E = 75$ geeft $S = 10^{\frac{75-85}{50}} = 0,6\dots$
Dat is groter dan 0,5, dus Janne wordt goedgekeurd.

Bladzijde 157

- 8 a** In Groningen wonen 5,83721 keer 100 000 inwoners. Dus de museumdichtheid is $\frac{17}{5,83721} = 2,9\dots$

Dat is hoger dan de museumdichtheid in Nederland.

- b** In Flevoland wonen 4,04068 keer 100 000 inwoners. Dus voor een museumdichtheid hoger dan 2,47 zouden er meer dan $2,47 \cdot 4,04068 = 9,98\dots \approx 10$ musea nodig zijn.
Dus Flevoland zou er minstens $10 - 4 = 6$ musea bij moeten hebben.

- c** In 2011 waren er $\frac{4,2 \text{ miljoen}}{0,2} = 21$ miljoen museumbezoeken.

In 2016 waren dat er $\frac{8,5 \text{ miljoen}}{0,26} = 32,6\dots$ miljoen.

De procentuele toename is $\frac{32,6\dots - 21}{21} \cdot 100\% \approx 56\%$.

Bladzijde 158

- 9 a** Het temperatuurverschil is $22 - 17 = 5^\circ\text{C}$.

Aflezen bij luchttemperatuur 22°C en temperatuurverschil 5°C geeft luchtvochtigheid 59%.

- b** Aflezen bij luchtvochtigheid 60% en luchttemperatuur $31,5^\circ\text{C}$ geeft temperatuurverschil 6°C . Dus de natte temperatuur was $31,5 - 6 = 25,5^\circ\text{C}$.

Aflezen bij luchtvochtigheid 60% en luchttemperatuur 15°C geeft temperatuurverschil 4°C . Dus de natte temperatuur was $15 - 4 = 11^\circ\text{C}$.

Dat is een daling van de natte temperatuur van $25,5 - 11 = 14,5^\circ\text{C}$.

Bladzijde 159

- c** $T = 11$ en $T - T_{\text{nat}} = 3$ geeft $L = 100 - \frac{330}{18 + 11} \cdot 3 = 65,86\dots$

Aflezen bij luchttemperatuur 11°C en temperatuurverschil 3°C geeft luchtvochtigheid 66%.

Het verschil is $66\% - 65,86\dots\% \approx 0,14\%$.

- 10** Aflezen bij jaar 2020 geeft wereldbevolking 7,8 miljard en aantal geboorten 140 miljoen.

Dus het geboortecijfer was $\frac{140}{7,8} \approx 18$.

Bladzijde 160

- 11 a** Hij valt $4000 - 1500 = 2500$ meter in 50 seconden.

Dat is gemiddeld $\frac{2500}{50} = 50 \text{ m/s} = 50 \cdot 3,6 \text{ km/uur} = 180 \text{ km/uur}$.

- b** Los op $4000 - 4,9 \cdot t^2 = 1500$.

De optie oplossen bij $4000 - 4,9 \cdot x^2 = 1500$ geeft $x \approx 22,58\dots$ (en $x = -22,58\dots$).

Dus hij deed er $50 - 22,58\dots \approx 27$ seconden langer over.

Bladzijde 161

- c** Aflezen bij 90 kg en twee verschillende waarden van W , bijvoorbeeld:

$W = 20$ geeft $v = 6,6$ en $W = 40$ geeft $v = 4,7$.

$20 \cdot 6,6$ is niet gelijk aan $40 \cdot 4,7$, dus v is niet omgekeerd evenredig met W .

- d** $m = 79$ en $W = 45$ geeft $v = 3,13 \cdot \sqrt{\frac{79}{45}} = 4,14\dots$

Het laatste gedeelte van haar parachutesprong duurt $\frac{1300}{4,14\dots} = 313,46\dots$ seconden.

De totale sprong duurt $34 + 313,46\dots \approx 347$ seconden.

Bladzijde 162

- 12 a** Powell liep met een snelheid van $\frac{100}{9,74} = 10,266... \text{ m/s}$.
 Bolt finishte $9,74 - 9,58 = 0,16$ seconden eerder.
 Dus Powell zou dan nog $0,16 \cdot 10,266... \approx 1,64$ meter te gaan hebben.
- b** $M = 9,58$ en $W = 0,9$ geeft $Z = 1,03 \cdot 9,58 - 0,03 \cdot 9,58 \cdot \left(1 - \frac{0,9 \cdot 9,58}{100}\right)^2 = 9,62...$
 $Z = 9,62...$ en $W = 2,0$ geeft $1,03M - 0,03M \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot M}{100}\right)^2 = 9,62...$
 De optie oplossen bij $1,03x - 0,03x \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{100}\right)^2 = 9,62...$ geeft $x = 9,528...$
 Dus Bolt zou een tijd van 9,53 seconden hebben gehaald.

- 13** gemiddelde 2006 = $\frac{18000 \cdot 10^9}{6569 \cdot 10^6} = 2740,1... \text{ kcal per persoon per dag}$
 gemiddelde 2050 = $\frac{28000 \cdot 10^9}{9111 \cdot 10^6} = 3073,2... \text{ kcal per persoon per dag}$
 De toename is $3073,2... - 2740,1... \approx 333 \text{ kcal per persoon per dag}$.

Bladzijde 163

- 14 a** 1 minuut en 37,252 seconden = 97,252 seconden
 De gemiddelde snelheid is $\frac{500}{97,252} = 5,14... \text{ m/s} = 5,14... \cdot 3,6 \text{ km/u} \approx 18,5 \text{ km/u}$.
- b** Met de tijden uit de tabel krijg je voor
 $N = 1$ de vergelijking $\frac{1000}{206,323} = c \cdot 1^{\frac{1}{5}}$ en de optie oplossen bij $\frac{1000}{206,323} = x \cdot 1^{\frac{1}{5}}$ geeft $x = 4,8...$
 $N = 2$ de vergelijking $\frac{1000}{191,809} = c \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ en de optie oplossen bij $\frac{1000}{191,809} = x \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ geeft $x = 4,8...$
 $N = 4$ de vergelijking $\frac{1000}{175,714} = c \cdot 4^{\frac{1}{5}}$ en de optie oplossen bij $\frac{1000}{175,714} = x \cdot 4^{\frac{1}{5}}$ geeft $x = 4,8...$
 Bij de tijden uit de tabel krijg je dat c constant is, dus het verband tussen V en N klopt bij benadering.
- 15 a** In 2018 is $A = 4,5$, dit geeft $U = 60 + 10 \cdot 4,5 = 105$.
 In 2020 is $A = 1,1 \cdot 4,5 = 4,95$ en dit geeft $U = 60 + 10 \cdot 4,95 = 109,5$.
 De toename is $\frac{109,5 - 105}{105} \cdot 100\% \approx 4\%$.
- b** $1,75 + 0,05 \cdot l = 4,5$
 De optie oplossen bij $1,75 + 0,05x$ geeft $x = 55$.
 Dus bij leeftijden (van 5 jaar) tot en met 54 jaar.

Bladzijde 164

- 16 a** 1 vadem = $6 \cdot 12 \cdot 25,4 \text{ mm} = 1828,8 \text{ mm} = 1,8288 \text{ m}$
 Dus $M = 1,8288V$.
- b** Er geldt $D - h = 10$, dus $D = 10 + h$.

$$\left. \begin{array}{l} D = 10 + h \\ D = h + 750t \end{array} \right\} \begin{array}{l} 10 + h = h + 750t \\ 10 = 750t \\ t \approx 0,013 \end{array}$$

 Dus de echotijd is 0,013 seconden.
- Alternatieve uitwerking*
 Neem bijvoorbeeld $h = 5$, dan is $D = 10 + 5 = 15$, hieruit volgt $5 + 750t = 15$.
 De optie oplossen bij $5 + 750x = 15$ geeft $x = 0,013...$
 Dus de echotijd is 0,013 seconden.
- c** Een toename van t met 1 seconde laat D toenemen met 750 meter.
 Het geluid moet heen én weer, dus in die seconde legt het geluid $2 \cdot 750 = 1500$ meter af.
 De snelheid van het geluid is dus 1500 meter per seconde, dus Josje heeft gelijk.

Bladzijde 165

- d Ze kunnen voor anker gaan als de waterdiepte maximaal $\frac{78}{1,5} = 52$ meter is.
Het echolood mag dan maximaal een diepte van $0,97 \cdot 52 = 50,4$ meter aangeven.

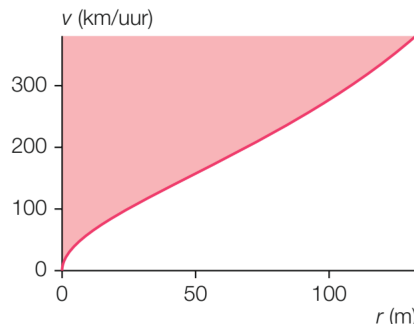
17 a $\frac{4,026 \cdot v^2}{(7644 + 0,1929 \cdot v^2)^{0,8}} = 80$

Voer in $y_1 = \frac{4,026 \cdot x^2}{(7644 + 0,1929 \cdot x^2)^{0,8}}$ en $y_2 = 80$.

De optie snijpunt geeft $x = 218,7...$

Dus de maximale bochtensnelheid is 218 km/uur.

- b De coureur vliegt uit de bocht als de snelheid groter is dan de maximale bochtensnelheid. Die snelheden liggen boven de grafiek. Zie de figuur hiernaast.



Bladzijde 166

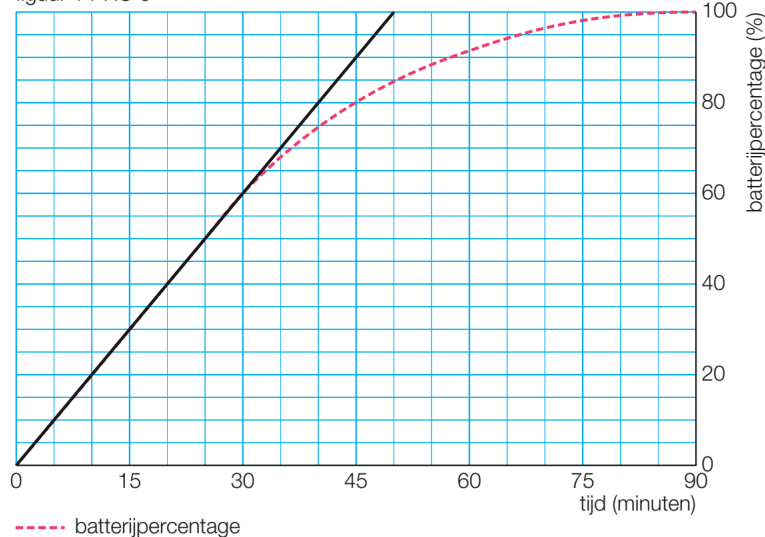
- 18 Aflezen geeft: op 1 juli 2015 rookte 30% van de mannen en 22,5% van de vrouwen.
Dat zijn $0,3 \cdot 6\,618\,000 = 1\,985\,400$ mannen en $0,225 \cdot 6\,853\,000 = 1\,541\,925$ vrouwen.
Het totale aantal rokers is $1\,985\,400 + 1\,541\,925 = 3\,527\,325$.
Het percentage mannen is $\frac{1\,985\,400}{3\,527\,325} \cdot 100\% \approx 56\%$.

Bladzijde 167

- 19 a Zie de figuur hiernaast.
Aflezen bij 100% geeft een totale oplaadtijd van 50 minuten.

- b Aflezen voor Sasha geeft: bij 10% hoort 4 minuten en bij 90% hoort 44 minuten. Dus de telefoons zijn dan $44 - 4 = 40$ minuten aan het opladen.
Aflezen voor Djimon geeft: bij 90% hoort 57,5 minuten. Dus bij het moment van het aan de oplader leggen hoort $57,5 - 40 = 17,5$ minuten.
Aflezen geeft: bij 17,5 minuten hoort 35%.
Dus de batterij van Djimon was toen 35% opgeladen.

figuur 1 PRO 5



- c Hoe groter c , hoe sneller de batterij oplaadt.
In de grafieken is bijvoorbeeld te zien dat in de eerste 30 minuten het batterijpercentage van de PRO 5 met 60% toeneemt en die van de PRO 6 met 70%. Dus de PRO 6 laadt sneller op.
Dus voor de PRO 5 is c juist kleiner.

Bladzijde 168

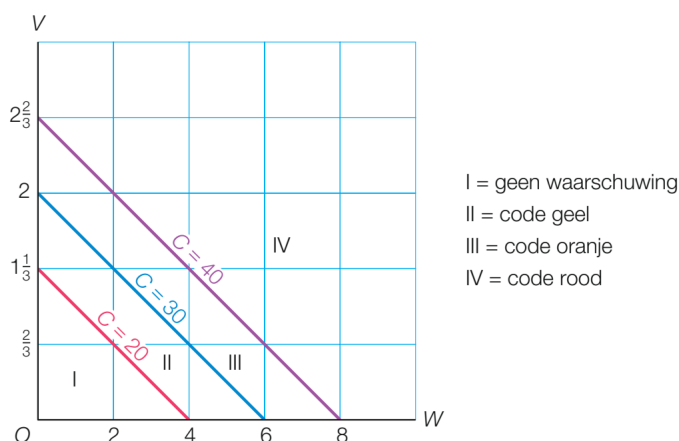
- 20 a $L = 48$ geeft $M_{\text{getraind}} = 205,8 - 0,685 \cdot 48 = 172,92$
 $0,6 \cdot 172,92 = 103,752$ en $0,7 \cdot 172,92 = 121,044$
Dus 104 tot en met 121 slagen per minuut.
- b $M_{\text{ongetraind}} = M_{\text{getraind}} + 5$ $M_{\text{getraind}} = M_{\text{ongetraind}} + 5$
 $220 - L = 205,8 - 0,685 \cdot L + 5$ $205,8 - 0,685 \cdot L = 220 - L + 5$
De optie oplossen bij $L = 48$ De optie oplossen bij $L = 48$
 $220 - x = 205,8 - 0,685x + 5$ $205,8 - 0,685x = 220 - x + 5$
geeft $x = 29,2...$ geeft $x = 60,9...$
Dus bij volwassen mannen tot en met 29 jaar oud en mannen vanaf 61 jaar oud.

12.2 Lineaire verbanden

Bladzijde 169

21

- a** Bij $K = 500$ is $F = 150$ en bij $K = 2500$ is $F = 450$.
 Als K met 2000 toeneemt, dan neemt F met 300 toe,
 dus als K met 1 toeneemt, dan neemt F met dus $\frac{300}{2000} = 0,15$ toe.
 1250 is 750 meer dan $K = 500$, bij $K = 1250$ is $F = 150 + 750 \cdot 0,15 = 262,5$.
- b** De punten $(500, 150)$ en $(2500, 450)$ liggen op de lijn.
 $F = aK + b$ met $a = 0,15$
 $F = 0,15K + b$
 $K = 500$ en $F = 150$ $\left. \begin{array}{l} 0,15 \cdot 500 + b = 150 \\ 75 + b = 150 \\ b = 75 \end{array} \right\}$
 Dus $F = 0,15K + 75$.
- c** Bij de meting hoort bij $K = 1600$ de waarde $F = 250$.
 Bij het model hoort bij $K = 1600$ de waarde $F = 0,15 \cdot 1600 + 75 = 315$.
 De meetwaarde van F wijkt $315 - 250 = 65$ af van de waarde volgens het model.
- d** $F = aK$
 $K = 1500$ en $F = 300$ invullen geeft $a \cdot 1500 = 300$
 $a = 0,2$
 Dus $F = 0,2K$.
 $K = 1600$ geeft $F = 0,2 \cdot 1600 = 320$.
- e** In $6,29 - 3,78 = 2,51$ seconden $60 - 30 = 30$ meter erbij, dus $\frac{30}{2,51} = 11,95...$ meter per seconde erbij.
 $t = 9$ is $2,71$ seconden na $t = 6,29$. Dus $d = 60 + 2,71 \cdot 11,95... \approx 92,4$.
- f** In 30 meter $6,29 - 3,78 = 2,51$ seconden erbij, dus $\frac{2,51}{30} = 0,0836...$ seconden per meter erbij.
 $d = 100$ is 40 meter na $d = 60$. Dus $t = 6,29 + 40 \cdot 0,0836... \approx 9,64$.
 Dus bij een afstand van 100 meter hoort een tijd van 9,64 seconden.
- g** $C = 20$ geeft de vergelijking $5 \cdot W + 15 \cdot V = 20$.
 Dit is een lijn door de punten $(4, 0)$ en $(0, 1\frac{1}{3})$.
 $C = 30$ geeft de vergelijking $5 \cdot W + 15 \cdot V = 30$.
 Dit is een lijn door de punten $(6, 0)$ en $(0, 2)$.
 $C = 40$ geeft de vergelijking $5 \cdot W + 15 \cdot V = 40$.
 Dit is een lijn door de punten $(8, 0)$ en $(0, 2\frac{2}{3})$.



Bladzijde 171

22

- In 5 jaar $1\,299\,650 - 805\,594 = 494\,056$ Museumkaarthouders erbij, dus per jaar $\frac{494\,056}{5} = 98\,811,2$ erbij.
 Er moeten na 1 januari 2016 meer dan $2\,000\,000 - 1\,299\,650 = 700\,350$ Museumkaarthouders bijkomen.
 Dat duurt $\frac{700\,350}{98\,811,2} = 7,08...$ jaar.
 Dus in 2023.

Bladzijde 172

- 23 a C_{blauw} wordt gedeeld door 300 en C_{wit} wordt gedeeld door 2000, dus C_{blauw} levert een grotere bijdrage aan F dan C_{wit} .
Dus blauw asbest is gevaarlijker.

b Los op $\frac{C_{\text{wit}}}{2000} + \frac{75}{300} = 1$
 $\frac{C_{\text{wit}}}{2000} = 0,75$
 $C_{\text{wit}} = 0,75 \cdot 2000 = 1500$

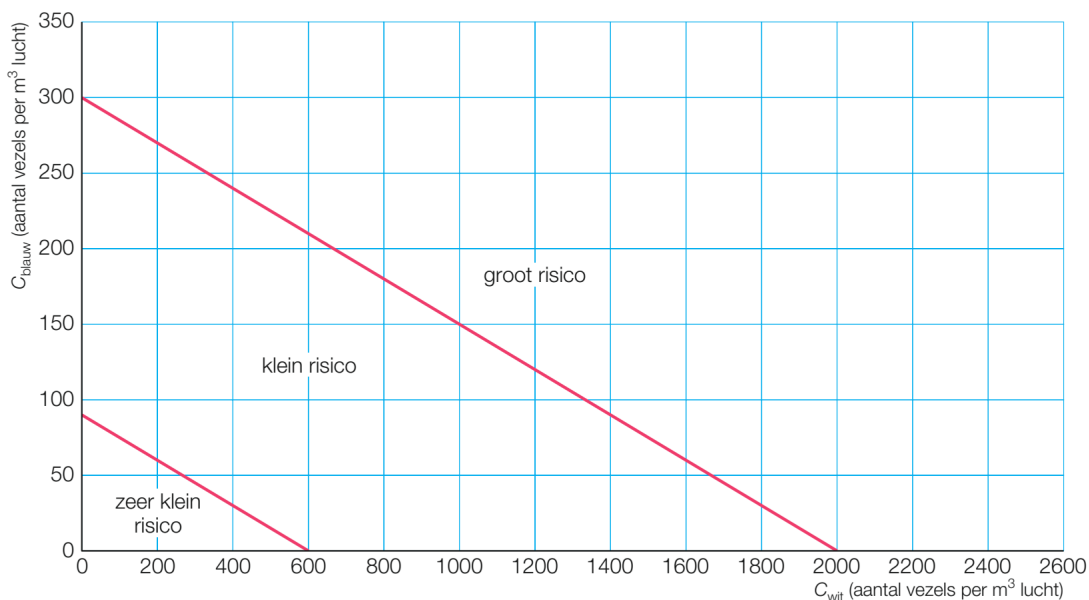
Dus voor $C_{\text{wit}} > 1500$.

c $\frac{C_{\text{wit}}}{2000} + \frac{C_{\text{blauw}}}{300} = 1$
 $3 \cdot C_{\text{wit}} + 20 \cdot C_{\text{blauw}} = 6000$ ↗ ×6000
 De getallen zijn 3 en 20.

d $\frac{C_{\text{wit}}}{2000} + \frac{C_{\text{blauw}}}{300} = 0,3$

C_{wit}	0	600
C_{blauw}	90	0

C_{wit}	0	2000
C_{blauw}	300	0



Bladzijde 173

- 24 De grafiek gaat bijvoorbeeld door (3, 98) en (10, 143).

$L = at + b$ met $a = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{143 - 98}{10 - 3} = 6,42...$

$L = 6,42... \cdot t + b$
 $t = 3$ en $L = 98$ $\left\{ \begin{array}{l} 6,42... \cdot 3 + b = 98 \\ 19,28... + b = 98 \\ b = 78,71... \end{array} \right.$

Dus $L = 6,4t + 78,7$.

- 25 Per $80 - 65 = 15$ levensjaren komen er $9 - 5 = 4$ huisartsconsulten per persoon bij.

Per jaar zijn dat er dus $\frac{4}{15} = 0,26...$

92-jaren zijn $92 - 80 = 12$ jaar ouder dan 80-jarigen, dus het aantal huisartsconsulten per persoon voor 92-jarigen is $9 + 12 \cdot 0,26... \approx 12$.

Bladzijde 174

- 26 a De vleugeloppervlakte zou dan $795 - 25 = 770 \text{ m}^2$ zijn.
 Aflezen van de grafiek bij $S = 9$ en $A = 770 \text{ m}^2$ geeft 205 000 kg brandstof.
 De besparing zou $212\,500 - 205\,000 = 7500 \text{ kg}$ brandstof zijn.

- b** Aflezen van twee punten met $A = 760$ geeft bijvoorbeeld $(6, 242\,500)$ en $(7, 220\,000)$.

$$V = aS + b \text{ met } a = \frac{\Delta V}{\Delta S} = \frac{220\,000 - 242\,500}{7 - 6} = -22\,500$$

$$\left. \begin{array}{l} V = -22\,500 \cdot S + b \\ S = 7 \text{ en } V = 220\,000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -22\,500 \cdot 7 + b = 220\,000 \\ -157\,500 + b = 220\,000 \\ b = 377\,500 \end{array}$$

$$\text{Dus } V = -22\,500S + 377\,500.$$

Bladzijde 175

- 27** Aflezen bij windsnelheid 25 km/u geeft bijvoorbeeld de waarden in de tabel hieronder.

werkelijke temperatuur in °C	0	-25
gevoelstemperatuur in °C	-6	-34

Bij een werkelijke temperatuurdaling van 25 °C, daalt de gevoelstemperatuur met 28 °C,

dat is per 1 °C dus een daling van de gevoelstemperatuur met $\frac{28}{25} = 1,12$ °C.

-26,8 °C is 1,8 °C kouder dan -25 °C, dus bij een werkelijke temperatuur van -26,8 °C is de gevoelstemperatuur $-34 - 1,8 \cdot 1,12 \approx -36$ °C.

Bladzijde 176

- 28 a** $-0,61t + 25,93 = 12,965$

De optie oplossen bij $-0,61x + 25,93 = 12,965$ geeft $x = 21,25...$

$t = 21,25...$ valt in het jaar 2039, dus het percentage is al gehalveerd in 2039.

Dus de bewering is juist.

Bladzijde 177

- b** Bij 1995 hoort $t = 5$ en $P_v = 29$ en bij 2004 hoort $t = 14$ en $P_v = 26$.

$$P_v = at + b \text{ met } a = \frac{26 - 29}{14 - 5} = -0,3333...$$

$$\left. \begin{array}{l} P_v = -0,3333... \cdot t + b \\ t = 5 \text{ en } P_v = 29 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,3333... \cdot 5 + b = 29 \\ -1,6666... + b = 29 \\ b = 30,6666... \end{array}$$

$$P_v = -0,333t + 30,667$$

De getallen zijn dus -0,333 en 30,667.

- c** Bij de formules horen bij de t -waarden verschillende jaartallen. Pas dus bij één van beide formules de beginhoeveelheid aan zodat de t -waarden bij beide formules overeenkomen met dezelfde jaartallen.

Bij het aanpassen van formule 2 krijg je:

1 juli 2018 is 28 jaar na 1 juli 1990, dus de beginhoeveelheid wordt dan $-0,33 \cdot 28 + 30,67 = 21,43$.

De aangepaste formule 2 is $P_v = -0,33t + 21,43$.

$$-0,33t + 21,43 = -0,61t + 25,93$$

De optie oplossen bij $-0,33x + 21,43 = -0,61x + 25,93$ geeft $x = 16,07...$

Dus in het jaar van 2034.

Bladzijde 178

- 29** Voor het geboortecijfer G op een moment t jaar na 2060 geldt:

$$G = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{12,8 - 14,0}{20} = -0,06 \text{ en } b = 14,0$$

$$\text{Dus } G = -0,06t + 14.$$

Voor het sterftcijfer S op een moment t jaar na 2060 geldt:

$$S = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{10,6 - 9,8}{20} = 0,04 \text{ en } b = 9,8$$

$$\text{Dus } S = 0,04t + 9,8.$$

$$-0,06t + 14 = 0,04t + 9,8$$

De optie oplossen bij $-0,06x + 14 = 0,04x + 9,8$ geeft $x = 42$.

Dus in 2102.

- 30 a** De kosten zijn bij Print Soms 3 euro en bij Print Gratis $\frac{35 - 15}{10} = 2$ euro.

Dat is $\frac{3 - 2}{3} \cdot 100\% \approx 33\%$ lager.

Bladzijde 179

- b** Voor het laagste bedrag moet je iedere maand precies 50 pagina's afdrukken en voor het hoogste bedrag moet je in één maand alle 600 pagina's afdrukken.

Het laagste bedrag per jaar is $12 \cdot 3 = 36$ euro.

Het hoogste bedrag per jaar is $12 \cdot 3 + \frac{600 - 50}{10} = 91$ euro.

Het maximale verschil is dus $91 - 36 = 55$ euro.

- c** Het vaste bedrag is 10 euro, want bij 0 afgedrukte pagina's lees je bij de grafiek 10 euro af.
Het aantal gratis pagina's per maand is 300, want de grafiek stijgt pas na 300 afgedrukte pagina's.

De kosten per pagina zijn $\frac{15 - 10}{400 - 300} = 0,05$ euro.

Het aantal pagina's dat je voor 1 euro kunt afdrukken is $\frac{1}{0,05} = 20$.

12.3 Exponentiële verbanden

Bladzijde 180

- 31 a** $g_{\text{jaar}} = 1,0125$, dus $g_{20 \text{ jaar}} = 1,0125^{20} \approx 1,282$

De toename in 20 jaar is 28,2%.

- b** $g_{\text{jaar}} = 0,994$, dus $g_{100 \text{ jaar}} = 0,994^{100} \approx 0,548$

Dus in 100 jaar neemt de hoeveelheid met 45,2% af.

- c** $g_{\text{jaar}} = 1,0135$, dus $1,0135^t = 2$.

De optie oplossen bij $1,0135^x = 2$ geeft $x = 51,6...$

Na 52 jaar is de hoeveelheid verdubbeld.

- d** $g_{\text{jaar}} = 0,9995$, dus $0,9995^t = 0,5$.

De optie oplossen bij $0,9995^x = 0,5$ geeft $x = 1385,9...$

De halveringstijd is 1386 jaar.

- e** $g_{20 \text{ jaar}} = 2$, dus $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{20}} \approx 1,035$.

Het groeipercentage is 3,5% per jaar.

- f** $g_{577 \text{ jaar}} = 0,5$, dus $g_{\text{jaar}} = 0,5^{\frac{1}{577}} \approx 0,99880$.

De hoeveelheid neemt jaarlijks met 0,120% af.

- g** $\frac{1,5 \cdot 10^6}{10^8} = 0,015$; $\frac{2,3 \cdot 10^4}{1,5 \cdot 10^6} \approx 0,0153$; $\frac{340}{2,3 \cdot 10^4} \approx 0,0148$ en $\frac{5,1}{340} = 0,015$

De quotiënten zijn bij benadering gelijk, dus de tabel is in overeenstemming met een exponentieel verband.

- h** $H = b \cdot g^t$

$$g_{13 \text{ jaar}} = \frac{10640}{3680}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{10640}{3680} \right)^{\frac{1}{13}} = 1,0850...$$

$$\left. \begin{array}{l} H = b \cdot 1,0850...^t \\ t = 5 \text{ en } H = 3680 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,0850...^5 = 3680 \\ b = \frac{3680}{1,0850...^5} \approx 2450 \end{array}$$

Dus $H = 2450 \cdot 1,085^t$.

- i** Bij $t = 3$ hoort $N = 90$ en bij $t = 10$ hoort $N = 3000$.

$$g_{7 \text{ jaar}} = \frac{3000}{90}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{3000}{90} \right)^{\frac{1}{7}} = 1,650...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,650...^t \\ t = 3 \text{ en } N = 90 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,650...^3 = 90 \\ b = \frac{90}{1,650...^3} \approx 20 \end{array}$$

Dus $N = 20 \cdot 1,65^t$.

Dus $b \approx 20$ en $g \approx 1,65$.

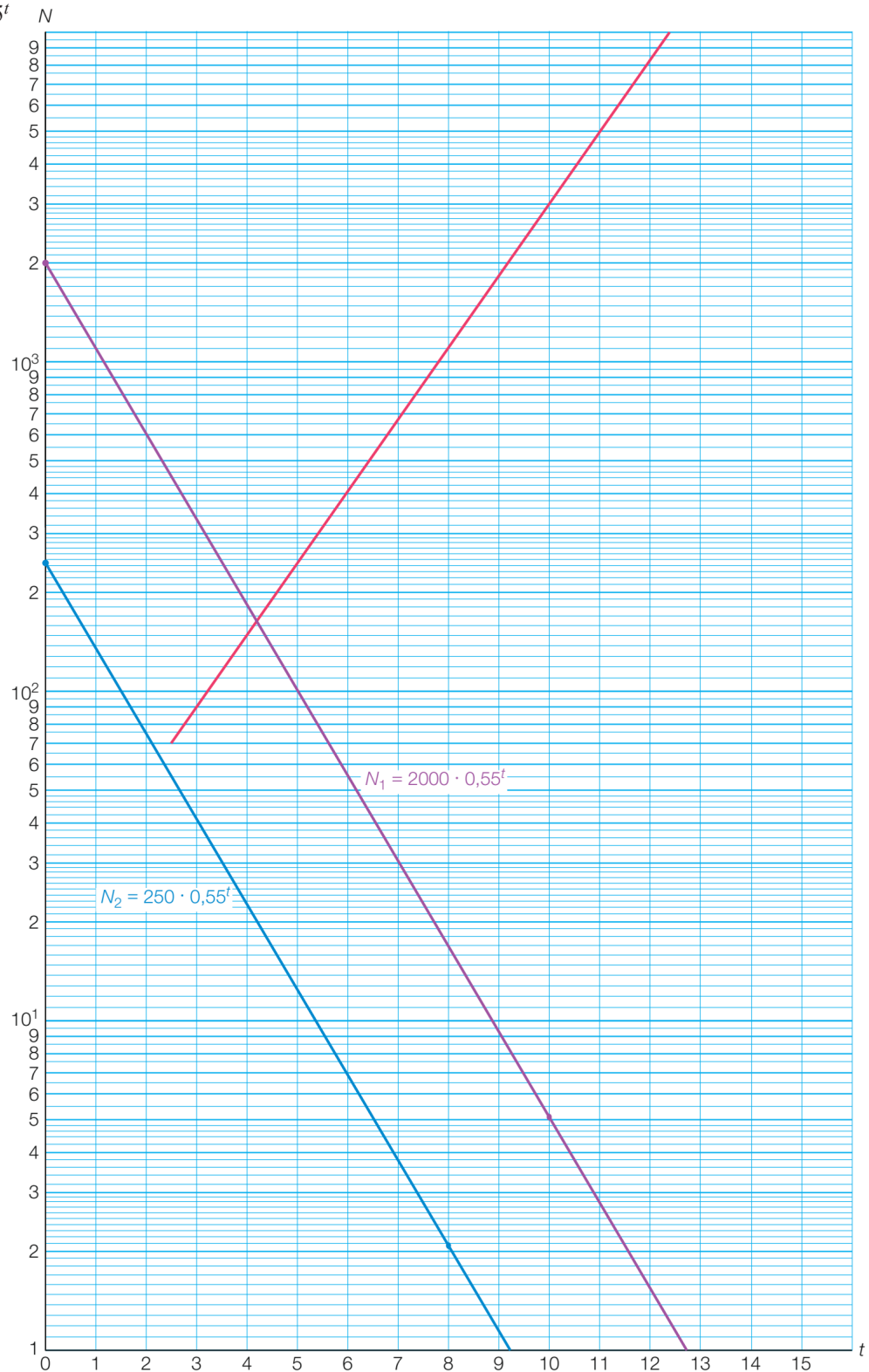
j $N_1 = 2000 \cdot 0,55^t$

t	0	10
N_1	2000	5,1

$N_2 = 250 \cdot 0,55^t$

t	0	8
N_2	250	2,1

De lijnen zijn evenwijdig omdat de groeifactoren gelijk zijn.



Bladzijde 184

32 $g_{53 \text{ jaar}} = \frac{2,4}{5,0}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{2,4}{5,0}\right)^{\frac{1}{53}} = 0,986...$

Het gemiddelde aantal kinderen per vrouw in 2035 is $2,4 \cdot 0,986...^{17} \approx 1,9$

33 Na 20 minuten is het vermogen 14 W en na 85 minuten is dat 1 W.

$g_{65 \text{ minuten}} = \frac{1}{14}$, dus $g_{\text{minuut}} = \left(\frac{1}{14}\right)^{\frac{1}{65}} = 0,960...$

Het geleverde vermogen van de oplader neemt met 4% per minuut af.

34 Bijvoorbeeld

bij $L = 0$ hoort $A = 10$,

bij $L = 1$ hoort $A = 9,33\dots$ en

bij $L = 2$ hoort $A = 7,58\dots$

$$\frac{9,33\dots}{10} = 0,933\dots \text{ en } \frac{7,58\dots}{9,33\dots} = 0,812\dots$$

De quotiënten zijn niet (ongeveer) gelijk aan elkaar, dus het verband tussen L en A is niet exponentieel.

Bladzijde 185

35 a $g_{12 \text{ tonen}} = \frac{880}{440} = 2$, dus $g_{1 \text{ toon}} = 2^{\frac{1}{12}} = 1,059\dots$

De frequentie van de D-toon is $440 \cdot 1,059\dots^5 \approx 587,3$ Hz.

b Zie de figuur: de laagste frequentie van de klarinet ligt tussen 100 en 200 Hz en de hoogste frequentie ligt tussen 1000 en 2000 Hz.

De laagste toon is een D-toon, dus de laagste frequentie is $\frac{587}{2^2} \approx 147$ Hz.

De hoogste toon is een A-toon, dus de hoogste frequentie is $880 \cdot 2 = 1760$ Hz.

Bladzijde 186

36 a $g_{4 \text{ jaar}} = \frac{64}{44}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{64}{44}\right)^{\frac{1}{4}} = 1,0982\dots$

Het jaarlijkse groeipercentage was 9,8%.

b In 2010 werden er 4,1 miljard brieven/kaarten bezorgd en in 2016 was dat 2,2 miljard.

De afname per jaar was dus $\frac{4,1 - 2,2}{6} = 0,316\dots$ miljard.

In 2020 zouden er dus $2,2 - 4 \cdot 0,316\dots \approx 0,9$ miljard brieven/kaarten worden bezorgd.

Bladzijde 187

37 a $1,015^x = 2$

De optie oplossen bij $1,015^x = 2$ geeft $x = 46,555\dots$

Dus 46,56 jaar.

b Als P met 0,5 toeneemt, dan neemt V met $28,07 - 23,45 = 4,62$ af.

Dus als P met 0,1 toeneemt, dan neemt V met $\frac{4,62}{5} = 0,924$ af.

Bij $P = 2,9$ hoort dus $V = 28,07 - 4 \cdot 0,924 = 24,374$.

Hij vindt dus een verdubbelingstijd van ongeveer 24,37 jaar.

c De grafiek van V is afnemend dalend.

Trek je tussen twee punten op de grafiek een (rechte) lijn dan ligt deze lijn altijd boven de grafiek.

Dus een benadering met lineair interpoleren geeft altijd een hogere verdubbelingstijd dan de precieze verdubbelingstijd.

d De verdubbelingstijd volgens de vuistregel is $\frac{69}{3,0} = 23$ jaar.

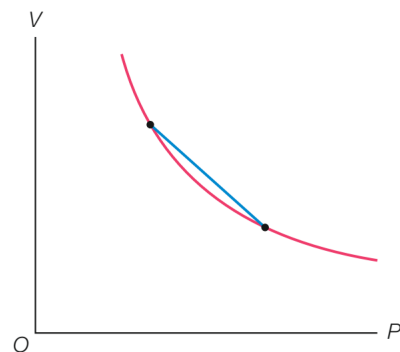
Het verschil met de tabel is $23,45 - 23 = 0,45$ jaar, oftewel $0,45 \cdot 12 \approx 5$ maanden.

e Er geldt: $\text{verdubbelingstijd} = \frac{69}{\text{vermogen}}$, dus

$$\text{vermogen} = \frac{69}{\text{verdubbelingstijd}}$$

Dus de vuistregel is:

Deel het getal 69 door de verdubbelingstijd in jaren. De uitkomst is het rendement dat nodig is om in de gegeven verdubbelingstijd het vermogen te verdubbelen.



Bladzijde 189

- 38 a** Aflezen bij $W = 4$ geeft $f = 500$.
500 keer per 10 000 jaar dus 5 keer per 100 jaar.
- b** $g_{2 \text{ meter}} = \frac{1}{600}$, dus $g_{\text{meter}} = \left(\frac{1}{600}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0,0408$.
- c** $0,041^W = 0,5$
De optie oplossen bij $0,041^x = 0,5$ geeft $x = 0,21...$
Dus de waterhoogte moet 0,2 meter hoger worden.
- d** De verticale afstand tussen de grafieken van HvH en VL moet gelijk zijn aan één macht van 10, oftewel 2 cm in de figuur.
Een verticale afstand van 2 cm tussen de grafieken vind je bij een waterhoogte van 4,6 meter.

39 $\left(\frac{10}{5}\right)^{\frac{1}{0,7}} = 2,691...$ en $\left(\frac{20}{10}\right)^{\frac{1}{1,1}} = 1,877...$

De groeifactoren per seconde zijn niet gelijk, dus er kan geen sprake zijn van exponentiële groei.

Bladzijde 190

- 40 a** Aflezen geeft: in 1970 is het jaargemiddelde 325 ppm en in 1995 is dat 360 ppm.
Keeling voorspelde voor 1995 een concentratie van $325 \cdot 1,003^{25} = 350,2...$ ppm.
De afwijking is $\frac{360 - 350,2...}{360} \cdot 100\% \approx 3\%$.
- b** $g_{15 \text{ jaar}} = \frac{400,8}{369,5}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{400,8}{369,5}\right)^{\frac{1}{15}} = 1,0054....$
 $369,5 \cdot 1,0054...^t > 500$
Voer in $y_1 = 369,5 \cdot 1,0054...^x$
De optie tabel geeft:
bij $x = 55$ is $y_1 = 497,8...$ en bij $x = 56$ is $y_1 = 500,5...$
Dus in 2056 is het jaargemiddelde voor het eerst hoger dan 500 ppm.

Bladzijde 191

- c** In 15 jaar is de toename $400,8 - 369,5 = 31,3$ ppm,
dus in 1 jaar is de toename $\frac{31,3}{15} = 2,086...$ ppm.
Ten opzichte van 2000 moet het nog $500 - 369,5 = 130,5$ ppm stijgen.
Dat duur nog $\frac{130,5}{2,086...} = 62,5...$ jaar.
Dus in 2063 is het jaargemiddelde voor het eerst hoger dan 500 ppm.
- d** De grafiek bij het lineaire verband is constant dalend.
De grafiek bij het exponentiële verband is afnemend dalend.
Bij het exponentiële verband daalt de grafiek dus in het begin sterker dan bij het lineaire verband.
Het exponentiële verband bereikt dus eerder de waarde van 375 ppm.

- 41 a** Manier 1 is een lineaire afname terwijl manier 2 een exponentiële afname is.
Uitgaande van hetzelfde begin- en eindpunt zal de grafiek van een lineaire afname altijd boven de grafiek van een exponentiële afname liggen.
Dus bij manier 1 ontvangen ze het grootste bedrag aan subsidies in 2014.
- b** Voor de totale inkomsten T geldt $T = S + E = 508 \cdot 0,99^t + 516 + 40t$.
Er moet gelden S is 25% van T , dus $S = 0,25T$, oftewel $508 \cdot 0,99^t = 0,25(508 \cdot 0,99^t + 516 + 40t)$.
Voer in $y_1 = 508 \cdot 0,99^x$ en $y_2 = 0,25(508 \cdot 0,99^x + 516 + 40x)$.
De optie snijpunt geeft $x = 18,6...$
Dus in 2035 zijn de inkomsten uit subsidies voor het eerst minder dan 25% van de totale inkomsten.

Bladzijde 192

42 a $g_{21 \text{ jaar}} = \frac{7}{5,3}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{7}{5,3}\right)^{\frac{1}{21}} \approx 1,013$.

Het bijbehorende jaarlijkse groeipercentage is 1,3%.

- b** Er komen dan jaarlijks 80 miljoen = 0,08 miljard mensen bij.
Er moeten nog 9 miljard – 7 miljard = 2 miljard mensen bijkomen.

Dat duurt $\frac{2}{0,08} = 25$ jaar.

Dus volgens dit eerste scenario is de wereldbevolking in 2036 tot 9 miljard mensen toegenomen.

- c** Voor 2050 is het groeipercentage 0,4%, dus $g_{\text{jaar}} = 1,004$.
In 2100 is het aantal mensen dan $8,9 \cdot 1,004^{50} = 10,8\ldots$ miljard.
Dit is minder dan 12 miljard mensen, dus nee, een wereldbevolking van 12 miljard mensen wordt daarmee niet gehaald.

Bladzijde 193

- 43 a** Bij 1050% toename hoort de factor 11,5.

Dus in 2013 was het mobiele dataverbruik $\frac{325}{11,5} \approx 28$ miljoen GB.

- b** $g_{4 \text{ jaar}} = \frac{12}{1,6}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{12}{1,6}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 1,65$.
Het jaarlijkse groeipercentage is 65%.

Bladzijde 194

44 a $g_{25 \text{ jaar}} = \frac{81}{13}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{81}{13}\right)^{\frac{1}{25}} \approx 1,076$.

Het jaarlijkse groeipercentage is 7,6%.

- b** In de figuur is te zien dat in 2002 het totaal aantal geregistreerde misdrijven per 1000 inwoners hoger was dan in 1985, terwijl het aantal vermogensmisdrijven per 1000 inwoners in deze jaren vrijwel gelijk was. Dus het percentage vermogensmisdrijven in 2002 was lager dan in 1985.

Bladzijde 195

45 a $T_a = at + b$ met $a = \frac{7600 - 10\,296}{2015 - 2003} = -224\frac{2}{3}$

$$\left. \begin{array}{l} T_a = -224\frac{2}{3}t + b \\ t = 3 \text{ en } T_a = 10\,296 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -224\frac{2}{3} \cdot 3 + b = 10\,296 \\ -674 + b = 10\,296 \\ b = 10\,970 \end{array}$$

Dus $T_a = -224\frac{2}{3}t + 10\,970$.

Voer in $y_1 = 6000 + 200x$ en $y_2 = -224\frac{2}{3}t + 10\,970$.

De optie tabel geeft:

bij $x = 11$ is $y_1 = 8200$ en $y_2 = 8498,6\ldots$

bij $x = 12$ is $y_1 = 8400$ en $y_2 = 8274$.

Dus in 2012 was de perenteeltoppervlakte voor het eerst groter dan de appelteeltoppervlakte.

- b** $g_{5 \text{ jaar}} = 0,806$, dus $g_{\text{jaar}} = 0,806^{\frac{1}{5}} \approx 0,958$.
De appelteeltoppervlakte neemt dan met 4,2% per jaar af.

12.4 Herleiden en redeneren

Bladzijde 196

46

a
$$\left. \begin{array}{l} M = K - L \\ K = 2q \left(\frac{p}{16} + 0,6 \right) \\ L = 1,8 - 0,14p^2 \end{array} \right\} M = 2p \left(\frac{p}{16} + 0,6 \right) - (1,8 - 0,14p^2) = \frac{2p^2}{16} + 1,2p - 1,8 + 0,14p^2$$
$$= 0,125p^2 + 1,2p - 1,8 + 0,14p^2 = 0,265p^2 + 1,2p - 1,8$$

b
$$\left. \begin{array}{l} F = \frac{12,6G}{H} \\ H = 0,04q^2 \end{array} \right\} F = \frac{12,6G}{0,04q^2} = \frac{12,6}{0,04} \cdot G \cdot q^{-2} = 315 \cdot G \cdot q^{-2}$$

c
$$\left. \begin{array}{l} M = 2,5 \cdot N^{0,6} \cdot p^{0,8} \\ N = 75n \end{array} \right\} M = 2,5 \cdot (75n)^{0,6} \cdot p^{0,8} = 2,5 \cdot 75^{0,6} \cdot n^{0,6} \cdot p^{0,8} \approx 33,3 \cdot n^{0,6} \cdot p^{0,8}$$

Dus $a = 33,3$ en $b = 0,6$.

d
$$Z \left(2 - \frac{R}{50} \right) = 3$$
$$2 - \frac{R}{50} = \frac{3}{Z}$$
$$-\frac{R}{50} = -2 + \frac{3}{Z}$$
$$R = -50 \left(-2 + \frac{3}{Z} \right)$$
$$R = 100 - \frac{150}{Z}$$

e
$$K = 1000 \cdot \left(\frac{1}{100} \right)^q = 10^3 \cdot \left(\frac{1}{10^2} \right)^q = 10^3 \cdot (10^{-2})^q = 10^3 \cdot 10^{-2q} = 10^{3-2q}$$

f
$$R = 30 \text{ en } Q = 15 \text{ geeft } BL = \frac{(180 - 30) \cdot 15}{0,75K^2} = \frac{150 \cdot 15}{0,75} \cdot K^{-2} = 3000 \cdot K^{-2}$$

Dus $a = 3000$ en $b = -2$.

g Als A toeneemt, dan neemt $3A$ toe.
Als B afneemt, dan neemt B^2 af, dus ook $B^2 + 2$ neemt dan af.

Van $D = \frac{3A}{B^2 + 2}$ neemt de teller toe en de noemer af, dus D neemt toe.

h Als E toeneemt, dan neemt $\frac{300 - A}{12B}$ toe. Als A toeneemt, dan neemt $300 - A$ af, maar blijft positief, want A tussen 100 en 200. Dus de noemer $12B$ moet dan afnemen. Dus B neemt dan af.

Bladzijde 200

47

Als T_{nat} kleiner wordt, dan wordt $27 - T_{\text{nat}}$ groter en dan wordt $\frac{330}{45} \cdot (27 - T_{\text{nat}})$ ook groter en dan wordt $100 - \frac{330}{45} \cdot (27 - T_{\text{nat}})$ kleiner.

Dus als T_{nat} kleiner wordt, dan wordt L kleiner, oftewel hoe lager de natte temperatuur is, des te lager is de luchtvochtigheid.

- 48 a** Als F toeneemt, neemt $\frac{1}{F}$ af, dan neemt $1 - \frac{1}{F}$ toe en dan neemt $100 \cdot \left(1 - \frac{1}{F}\right)$ ook toe.

Dus als F toeneemt neemt P toe dus dan wordt er een groter percentage uv-A-straling geblokkeerd en neemt de bescherming tegen uv A-straling dus toe.

b $P = 98$ geeft $100 \cdot \left(1 - \frac{1}{F}\right) = 98$

De optie oplossen bij $100 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 98$ geeft $x = 50$.

Dus vanaf factor 50.

c $100 \cdot \left(1 - \frac{1}{F}\right) = P$

$$100 - \frac{100}{F} = P$$

$$100 - P = \frac{100}{F}$$

$$F = \frac{100}{100 - P}$$

d $F = 30$ geeft $P = 100 - \frac{100}{30} = 96,66\dots$

$$F = 15 \text{ geeft } P = 100 - \frac{100}{15} = 93,33\dots$$

$\frac{96,66\dots}{93,33\dots} = 1,035\dots$, dus nee, het percentage van de uv A-straling dat geblokkeerd wordt door een crème met factor 30 is niet twee keer zo groot is als dat van een crème met factor 15.

Bladzijde 201

49
$$\left. \begin{array}{l} U = 60 + 10A \\ A = 1,75 + 0,05l \end{array} \right\} U = 60 + 10(1,75 + 0,05l) = 60 + 17,5 + 0,5l = 0,5l + 77,5$$

- 50 a** Als M groter wordt, dan wordt $-M$ kleiner, dus dan wordt 10^{-M} ofwel S kleiner.

Als S kleiner wordt, wordt $10^{\frac{E-85}{50}}$ kleiner, dus dan wordt $\frac{E-85}{50}$ kleiner, dus dan wordt E kleiner.

b $\frac{-M}{1} = \frac{E-85}{50}$

$$E - 85 = -50M$$

$$E = -50M + 85$$

- 51** Als L groter wordt, dan wordt L^2 (en ook $0,03L^2$) groter en dan wordt $1 - 0,03L^2$ kleiner en dan wordt $10^{1-0,03L^2}$ kleiner.

Dus als het leeftijdsverschil ofwel L groter wordt, dan wordt A , ofwel de aantrekkingskracht op het onderwerp leeftijd kleiner.

Bladzijde 202

52 a $S = \frac{4 \cdot 60}{80} = 3$ en $r = 0,98$ geeft $W = \frac{0,98 \cdot 3}{2(1-0,98)} = 73,5$, dus 73,5 minuten.

b $S = 6$ en $r = 0,95$ en $a = 0,10$ geeft $W_p = \frac{0,95 \cdot 6}{2(1-0,10 \cdot 0,95)} = 3,149\dots$

$$S = 6 \text{ en } r = 0,95 \text{ en } a = 0,10 \text{ geeft } W_z = \frac{0,95 \cdot 6}{2(1-0,95)(1-0,10 \cdot 0,95)} = 62,983\dots$$

Het verschil is $62,983\dots - 3,149\dots \approx 60$ minuten.

Bladzijde 203

c Er moet dan gelden $\frac{0,95 \cdot 6}{2(1 - 0,95)(1 - a \cdot 0,95)} = 80$.

Voer in $y_1 = \frac{0,95 \cdot 6}{2(1 - 0,95)(1 - x \cdot 0,95)}$ en $y_2 = 80$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,3026...$

Dus maximaal 30,2% mag een voorsteekpas hebben.

d $W_z = \frac{0,95 \cdot 6}{2(1 - 0,95)(1 - a \cdot 0,95)} = \frac{5,7}{0,10(1 - a \cdot 0,95)} = \frac{5,7}{0,10 - 0,095 \cdot a}$

- 53 a** Er is een (recht) evenredig verband tussen S en V en er is ook een (recht) evenredig verband tussen P en S . Dus als V twee keer zo groot wordt, wordt S ook twee keer zo groot en dus wordt P dan ook twee keer zo groot.

b $a = 2,6$ en $g = 150$ geeft $A = \frac{1000 \cdot G}{2,6 \cdot 150} = \frac{1000 \cdot G}{390} = 2,56... \cdot G$.

$$2,56... \cdot G = A$$

$$G = \frac{1}{2,56...} \cdot A$$

$$G = 0,39 \cdot A$$

Alternatieve uitwerking

$$a = 2,6 \text{ en } g = 150 \text{ geeft } \frac{1000 \cdot G}{2,6 \cdot 150} = A$$

$$1000 \cdot G = 2,6 \cdot 150 \cdot A$$

$$G = 0,39 \cdot A$$

Bladzijde 204

54 a $w = 21$ en $S = 33,5$ geeft $33,5 = \frac{21}{b}$, dus $b = \frac{21}{33,5} = 0,62...$

$$w = 21 \text{ en } b = 0,62... \text{ geeft } A = 21 \cdot 0,62... \approx 13$$

Dus de vleugeloppervlakte is 13 m^2 .

b $S = 5,6$ invullen in formule 1 geeft $5,6 = \frac{w}{b}$, dus $b = \frac{w}{5,6}$.

$$A = 15,3 \text{ invullen in formule 3 geeft } b = \frac{15,1}{w}.$$

$$\text{Er moet dus gelden } \frac{w}{5,6} = \frac{15,1}{w}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{x}{5,6} \text{ en } y_2 = \frac{15,1}{x}.$$

De optie snijpunt geeft $x = 9,195...$

Dus de spanwijdte is 9,2 meter.

55 a $L = 60$ en $b = 0,1$ en $P = 20$ geeft $T = \frac{0,5 \cdot 0,1 \cdot 60^2}{n+1} + n \cdot 20 = \frac{180}{n+1} + 20n$

$$= \frac{180}{n+1} + \frac{20n(n+1)}{n+1} = \frac{180 + 20n(n+1)}{n+1}$$

$$= \frac{180 + 20n^2 + 20n}{n+1} = \frac{20n^2 + 20n + 180}{n+1}$$

b Voer in $y_1 = \frac{20x^2 + 20x + 180}{x+1}$.

De optie minimum geeft $x = 2$.

Dus het optimale aantal is 2 pitstops.

c Er moet gelden $-1 + 45\sqrt{\frac{3}{20P}} = 3$.

Voer in $y_1 = -1 + 45\sqrt{\frac{3}{20x}} = 3$ en $y_2 = 3$.

De optie snijpunt geeft $x = 18,98\dots$

Het gemiddelde tijdverlies per pitstop moet dus $24,8 - 18,98\dots \approx 5,8$ seconden korter zijn.

d Als P kleiner wordt dan wordt $20P$ kleiner en dan wordt $\frac{3}{20P}$ groter en dan wordt $45\sqrt{\frac{3}{20P}}$ groter

dus dan wordt $-1 + 45\sqrt{\frac{3}{20P}}$ ook groter, dus N neemt dan toe.

56 $W = 40$ geeft $v = 3,13 \cdot \sqrt{\frac{m}{40}} = 3,13 \cdot \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{40}} = \frac{3,13}{\sqrt{40}} \cdot \sqrt{m} \approx 0,49 \cdot \sqrt{m}$

Dus $v = 0,49 \cdot \sqrt{m}$.

57 a Als M groter wordt en R blijft gelijk, dan wordt $\frac{M}{R}$ en dus ook $15 \cdot \frac{M}{R}$ groter, dus dan wordt Z groter.

Als Z groter wordt dan wordt $\frac{Z}{3,74}$ groter dus dan wordt v , oftewel de gemiddelde snelheid, groter.

Dus degene met de hogere maximale hartslag kan met een hogere gemiddelde snelheid lopen en dus een snellere tijd lopen.

b $M = 190$ en $R = 60$ geeft $Z = 15 \cdot \frac{190}{60} = 47,5$

$Z = 47,5$ geeft $v = \frac{47,5}{3,74} = 12,70\dots$

$12,70\dots$ km/uur, dus $42,195$ km in $\frac{42,195}{12,70\dots} = 3,32\dots$ uur, oftewel in 3 uur en $0,32\dots \cdot 60 \approx 19$ minuten (of 199 minuten).

c
$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{15M}{3,74R} \\ M = 205,8 - 0,685 \cdot L \end{array} \right\} v = \frac{15(205,8 - 0,685 \cdot L)}{3,74R}$$

$$v = \frac{3087 - 10,275 \cdot L}{3,74R} \approx \frac{825,4 - 2,7 \cdot L}{R}$$

Dus $v = \frac{825,4 - 2,7 \cdot L}{R}$.

Bladzijde 207

- 58 a** Er moet gelden $0,1p - 2 < 5$, dus los op $0,1p - 2 = 5$.
 Voer in $y_1 = 0,1x - 2$ en $y_2 = 5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 70$.
 Uit de plot volgt dat vanaf 71 pagina's de afdrukkosten bij Print Regelmatig lager zijn dan bij Print Soms.
- b** a en b zijn positieve getallen, dus als p toeneemt neemt $\frac{b}{p}$ af en dan neemt $a - \frac{b}{p}$ toe.
 Dus de afdrukkosten per pagina (G_R) nemen toe als het aantal pagina's p toeneemt.
- c**
$$\left. \begin{aligned} G_R &= \frac{K_R}{p} \\ K_R &= \frac{1}{15}p - 1\frac{2}{3} \end{aligned} \right\} G_R = \frac{\frac{1}{15}p - 1\frac{2}{3}}{p} = \frac{1}{15} - \frac{1\frac{2}{3}}{p}$$

 Dus $a = \frac{1}{15} \approx 0,07$ en $b = 1\frac{2}{3} \approx 1,67$.

59
$$\frac{27000}{q} \cdot B = 60q$$

$$\frac{27000B}{q} = \frac{60q}{1}$$

$$27000B = 60q^2$$

$$450B = q^2$$

$$q = \sqrt{450B} = \sqrt{450} \cdot \sqrt{B} \approx 21 \cdot \sqrt{B}$$

 Dus $q = 21 \cdot \sqrt{B}$.

12.5 Statistiek

Bladzijde 208

- 60 a** De verdeling is links-scheef, dus het gemiddelde is kleiner dan de mediaan.
 Aantal leerlingen tot en met 5 punten is $1 + 2 + 3 + 5 + 10 + 15 = 36$.
 Aantal leerlingen tot en met 6 punten is $36 + 20 = 56$.
 Dus de mediaan is 6 punten.
 De modus is 7 punten.
 De volgorde is gemiddelde, mediaan, modus.
- b** Aantal leerlingen tot en met 4 punten is 21 en aantal leerlingen tot en met 5 punten is 36, dus $Q_1 = 5$.
 Dus boxplot C hoort bij de test.
- c** Niet alle gebruikers van het openbaar vervoer in Amsterdam zijn ondervraagd, maar alleen volwassen bezoekers van het Rijksmuseum.

d

		voelt zich veilig		
		ja	nee	
woont in Amsterdam	ja	130	30	160
	nee	810	80	890
		940	110	

Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de *phi*-coëfficiënt.

$$phi = \frac{130 \cdot 80 - 30 \cdot 810}{\sqrt{160 \cdot 940 \cdot 110 \cdot 890}} \approx -0,115$$

Omdat $-0,2 \leq phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

- e** 'woont in Amsterdam' is kwalitatief want de waarden zijn geen hoeveelheden.
 'voelt zich veilig' is kwalitatief, want de waarden zijn geen hoeveelheden.

Bladzijde 209

- 61 a** Bij groep A is de verdeling symmetrisch en het gemiddelde is gelijk aan de mediaan (beide 512).
Bij groep B is de verdeling niet symmetrisch en bovendien is het gemiddelde (521) niet precies gelijk aan de mediaan (520).
Dus bij groep B zijn de scores niet normaal verdeeld.
- b** Steekproefgemiddelden en steekproefstandaardafwijkingen, dus gebruik de effectgrootte.

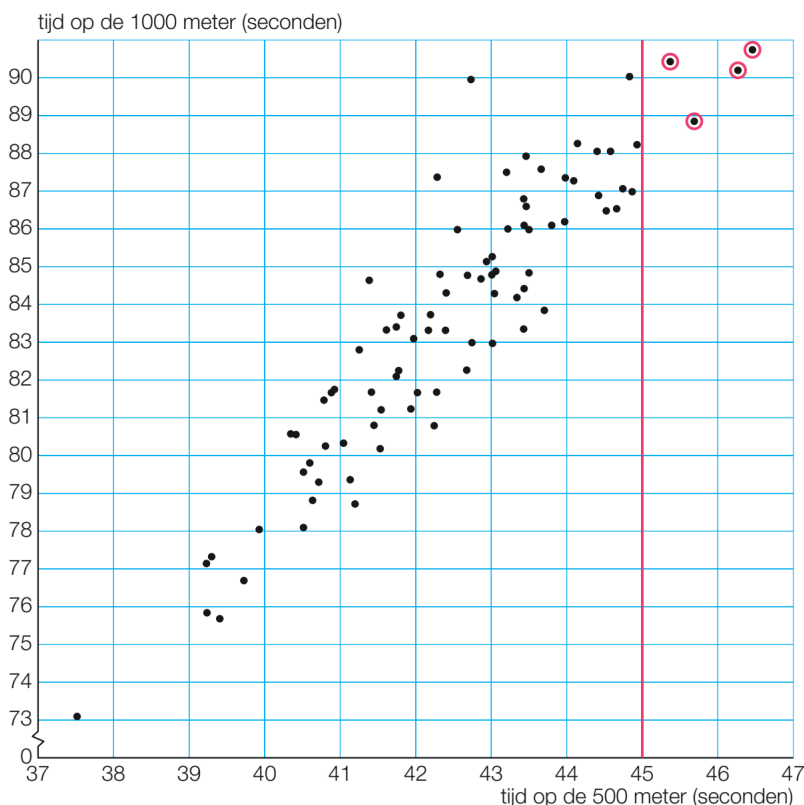
$$E = \frac{521 - 512}{\frac{1}{2}(7,5 + 13,0)} \approx 0,878$$
 Omdat $E > 0,8$ is het verschil groot.
 Je hebt van beide groepen Q_1 , de mediaan en Q_3 , dus gebruik boxplots vergelijken.
 Bij A is $Q_1 = 503$, mediaan = 512 en $Q_3 = 521$.
 Bij B is $Q_1 = 515$, mediaan = 520 en $Q_3 = 523$.
 De boxen overlappen elkaar en een boxplot van een boxplot ligt buiten de box van de andere boxplot.
 Dus het verschil is middelmatig.
- c** Volgens de vuistregels bij de normale verdeling zouden $0,025 \cdot 1030 \approx 26$ leerlingen een score moeten hebben van $\mu - 2\sigma = 521 - 2 \cdot 7,5 = 506$ of lager.
 In de tabel zijn dat er $1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 = 26$.
 Dit komt dus met elkaar overeen.
- d** $4\sigma = 536 - 502 = 34$, dus $\sigma = 8,5$.

Bladzijde 210

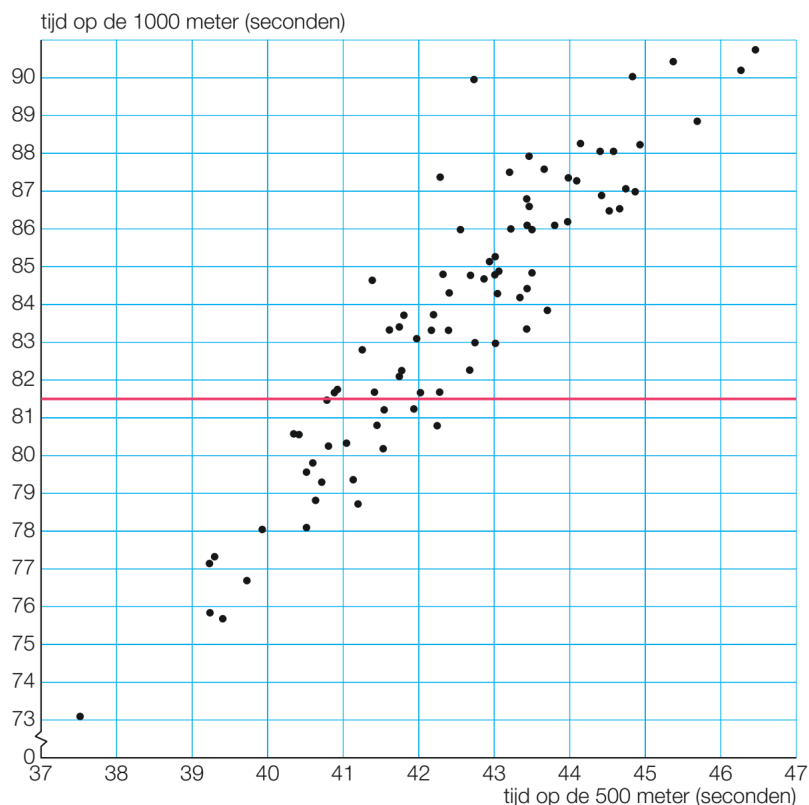
- e** $\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{268}{1117} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{268}{1117} \cdot (1 - \frac{268}{1117})}{1117}} \approx 0,240 \pm 0,026$ (of $[0,214; 0,265]$).
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $24,0\% \pm 2,6\%$ (of $[21,4\%; 26,5\%]$).
- f** $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 170 \pm 2 \cdot \frac{40}{\sqrt{1117}} \approx 170 \pm 2,4$ minuten (of $[167,6; 172,4]$ minuten)

Bladzijde 217

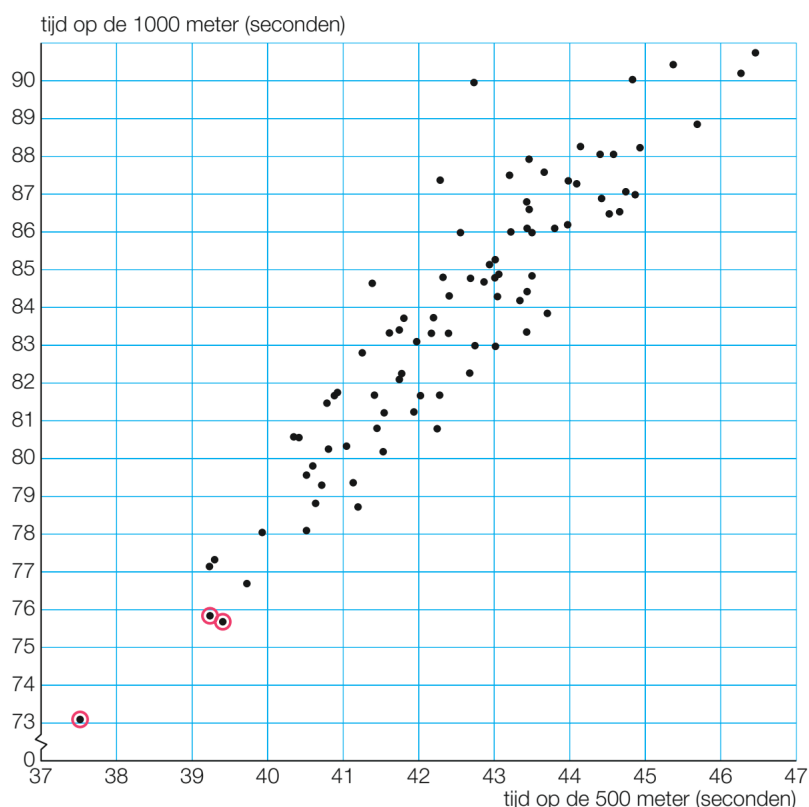
- 62 a** Uitspraak I:
 Zie de figuur hiernaast.
 Er liggen 4 punten rechts van de lijn, dus 4 van de 86 schaatssters hadden een tijd langer dan 45 seconden. Dat is minder dan 10%, dus meer dan 90% had een tijd korter dan 45 seconden.
 Dus uitspraak I is juist.



Uitspraak II:
Zie de figuur hiernaast.
Er liggen (veel) meer punten
boven de lijn, dus de mediaan
is groter dan 81,5 seconden.
Dus uitspraak II is onjuist.



Uitspraak III:
Zie de figuur hiernaast.
De drie schaatssters met de
kortste tijd op de 1000 meter
(omcirkeld in de figuur)
hebben niet de drie kortste
tijden op de 500 meter.
Dus uitspraak III is onjuist.



Bladzijde 218

- b** Bij een groot verschil
overlappen de boxen elkaar
niet, zoals bij de boxplots van
1500 m en 10000 m.
Dat is ook het geval bij de
tweetallen: 1500 m en 5000
m, 3000 m en 10000 m, 5000
m en 10000 m.

Bladzijde 219

- c** 500 meter:

Uit het spreidingsdiagram blijkt dat de snelste tijd op de 500 meter 37,5 seconden is. Dit is minder dan 39,23 seconden, dus de recordtijd van Sáblíková is op deze afstand niet de beste.

1500 meter:

Sáblíková heeft op de 1500 meter een omgerekende tijd van $\frac{60 + 53,44}{1500} \cdot 500 = 37,8...$ seconden.

Uit de boxplots blijkt dat de snelste omgerekende tijd op de 1500 meter 37,3 seconden is. Dit is minder dan 37,8... seconden, dus de recordtijd van Sáblíková is op deze afstand niet de beste.

d Haar omgerekende tijd op de 5000 meter is $\frac{8 \cdot 60 + 6,64}{5000} \cdot 500 = 48,6... \text{ seconden}$.

Haar omgerekende tijd op de 10000 meter is $\frac{16 \cdot 60 + 54,71}{10000} \cdot 500 = 50,7... \text{ seconden}$.

Je kunt in de boxplots aflezen dat Farestveit op de 5000 meter tot de langzaamste 25% behoort en op de 10000 meter tot de middelste 50%. Ze presteert dus in vergelijking beter op de 10000 meter.

Bladzijde 220

63

a $\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{1530}{3260} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1530}{3260} \cdot (1 - \frac{1530}{3260})}{3260}} \approx 0,47 \pm 0,02 \text{ (of } [0,45; 0,49])$

b Hieronder staan drie manieren, waarvan je er twee moet beschrijven als antwoord op de vraag.
Manier 1: met behulp van de effectgrootte, dan heb je voor beide groepen de standaardafwijking nodig.
Manier 2: met behulp van een vergelijking van boxplots, dan heb je voor beide groepen het eerste, tweede en derde kwartiel nodig.

Manier 3: met behulp van het maximale verschil in cumulatief percentage, dan heb je voor beide groepen een (relatieve) (cumulatieve) frequentietabel (of polygoon) nodig.

c De frequentieverdelingen bij A en C vallen af, omdat (bij dit soort symmetrische verdelingen) het gemiddelde gelijk is aan de mediaan.
Dus B.

Bladzijde 221

d Bijvoorbeeld: Als men had gekozen voor 17- en 18-jarigen, dan had men geen of heel weinig leerlingen uit havo/vwo klas 3 in de steekproef zitten (en dan zijn de inkomens tussen alle onderwijsniveaus niet of niet goed in kaart te brengen).

e Relatieve frequenties bij een ordinale variabele met meer dan twee categorieën, dus gebruik de $\max V_{cp}$.

	jongens	meisjes	
	cum perc.	cum perc.	V_{cp}
nooit / zelden	16%	8%	8%
meestal niet	81%	69%	12% ← $\max V_{cp}$
meestal wel	100%	98%	2%
vaak / altijd	100%	100%	0%

De $\max V_{cp} = 12$.

Omdat $\max V_{cp} < 20$ is het verschil gering.

Alternatieve uitwerking:

Door de eerste en laatste twee rijen samen te voegen krijg je frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de ϕ -coëfficiënt.

	jongens	meisjes	
wel spijt	486	414	900
geen spijt	114	186	300
	600	600	

$$\phi = \frac{486 \cdot 186 - 414 \cdot 114}{\sqrt{900 \cdot 600 \cdot 600 \cdot 300}} \approx 0,139$$

Omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

Bladzijde 222

- 64 a** De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is $7,35 - 7,13 = 0,22$ en $n = 674$

$$\text{Los op } 4 \cdot \frac{S}{\sqrt{674}} = 0,22.$$

De optie oplossen bij $4 \cdot \frac{x}{\sqrt{674}} = 0,22$ geeft $x = 1,4278...$

Dus $S = 1,428$.

Bladzijde 223

- b** Voor de bewering van de leerlingenraad:

De schoolscores op alle onderwerpen zijn bij Het Gelder lager in 2018 dan in 2017.

Voor de bewering van de schoolleiding:

De ranking van de school is op alle onderwerpen in 2018 beter dan in 2017.

- c** Bij de mediaan hoort een ranking van 133.

Bij een normale verdeling zou een schoolscore die lager is dan het gemiddelde een ranking hoger dan 133 moeten opleveren, maar de schoolscore 7,68 van Het Gelder ligt onder het gemiddelde van 7,75 en heeft een ranking van 105. De schoolscore kan dus niet normaal verdeeld zijn.

- d** Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de *phi*-coëfficiënt.

$$phi = \frac{569 \cdot 81 - 105 \cdot 369}{\sqrt{674 \cdot 938 \cdot 186 \cdot 450}} \approx 0,032$$

Omdat $-0,2 \leq phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

Bladzijde 224

- e** Relatieve frequenties bij een ordinale variabele met meer dan twee categorieën, dus gebruik de $\max V_{cp}$.

	leerlingen	ouders	
	cum. perc.	cum. perc.	V_{cp}
zeer oneens	1%	2%	1%
oneens	2%	5%	3%
zowel eens als oneens	9%	17%	8% ← max V_{cp}
eens	58%	62%	4%
zeer eens	100%	100%	0%

Om een $\max V_{cp}$ van meer dan 20 te krijgen moet de V_{cp} bij 'zowel eens als oneens' meer dan 12 toenemen. Dus het percentage ouders dat 'zowel eens als oneens' in plaats van 'eens' had moeten kiezen moet met meer dan 12 toenemen. Dat zijn meer dan $0,12 \cdot 500 = 60$ ouders. Dus minimaal 61 ouders.

- 65 a** De steekproef is waarschijnlijk niet representatief omdat deze niet aselekt is. Dit komt doordat er alleen op dinsdagochtend werd gemeten en automobilisten die op andere dagen deze weg gebruiken geen kans hadden om in de steekproef te komen.
Een mogelijke verbetering is om op meerdere dagen per week te meten.

Bladzijde 225

- b** De modale klasse is 41-45 km/uur, hier ligt 30 km/uur niet in.

c $\hat{p} = \frac{100 - 2 - 7}{100} = 0,91$

$$\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,91 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,91 \cdot (1-0,91)}{100}} \approx 0,91 \pm 0,06 \text{ (of } [0,85; 0,97])$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is 91% $\pm$ 6% (of [85%, 97%]).

- d** Een boxplot is niet geschikt, want 66% rijdt langzamer dan de snelheidslimiet en dat percentage zie je in een boxplot niet terug.

Een spreidingsdiagram is niet geschikt, omdat het hier niet gaat om een verband tussen twee variabelen.

Een cumulatieve relatieve frequentiepolygoon is geschikt, omdat hierin valt af te lezen welk percentage langzamer reed, dus ook voor de snelheidslimiet.

Bladzijde 226

- e** Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de *phi*-coëfficiënt.

	hield zich aan de snelheidslimiet	hield zich niet aan de snelheidslimiet	
situatie zonder matrixborden	111	58	169
situatie met matrixborden	183	30	213
	294	88	

$$phi = \frac{111 \cdot 30 - 183 \cdot 58}{\sqrt{169 \cdot 294 \cdot 88 \cdot 213}} \approx -0,239$$

Omdat $-0,4 \leq phi < -0,2$ is het verschil middelmatig.

66 a

	kwantitatief		kwalitatief	
	discreet	continu	nominaal	ordinaal
regio			X	
mate van urgentie (van een melding bij de meldkamer)				X
aantal ambulanceritten (per jaar per regio)	X			
responstijd (van een ambulancerit)		X		

Bladzijde 227

- b** De linker polygoon hoort bij de A1-ritten omdat die over het algemeen een kortere responstijd hebben.
Bij deze polygoon geldt $Q_1 = 7$ minuten en $Q_3 = 11,5$ minuten.
interkwartielafstand = $11,5 - 7 = 4,5$ minuten

Bladzijde 228

67

- a** Geslacht is geen ordinale variabele, want er is geen sprake van een logische ordening.
Schoolniveau is wel een ordinale variabele, want er is sprake van een logische ordening.
Gezinswelvaart is wel een ordinale variabele, want er is sprake van een logische ordening.

- b** Voor de meisjes geldt $\hat{p} = 0,764$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,764(1 - 0,764)}{2736}} = 0,0081\dots$

De bovengrens van het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval is $0,764 + 2 \cdot 0,0081\dots = 0,78\dots$

Voor de jongens geldt $\hat{p} = 0,842$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,842(1 - 0,842)}{2835}} = 0,0068\dots$

De ondergrens van het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval is $0,842 - 2 \cdot 0,0068\dots = 0,82\dots$

Omdat de bovengrens van het interval bij de meisjes kleiner is dan de ondergrens van het interval bij de jongens, overlappen de intervallen elkaar niet.

Bladzijde 229

- c** Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de ϕ -coëfficiënt.
Zie de tabel hiernaast.

$$\phi = \frac{1188 \cdot 233 - 981 \cdot 424}{\sqrt{2169 \cdot 1612 \cdot 1214 \cdot 657}} \approx -0,083$$

Omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

	havo	vwo	
wel lid	1188	981	2169
niet lid	424	233	657
	1612	1214	

- d** $E = \frac{4,6 - 3,8}{\frac{1}{2}(S + S)} = \frac{0,8}{S}$

Bij een middelmatig verschil hoort $0,4 \leq E < 0,8$.

$$\frac{0,8}{S} = 0,4 \text{ geeft } S = \frac{0,8}{0,4} = 2$$

$$\frac{0,8}{S} = 0,8 \text{ geeft } S = \frac{0,4}{0,4} = 1$$

Dus er moet gelden $1 \leq S < 2$.

Bladzijde 230

68

- a** 26 euro komt overeen met 86%, dus $\frac{26}{0,86} \approx 30$ euro.

- b** De variabelen zijn kwalitatief omdat de waarden geen getallen zijn.
De variabelen zijn ordinaal omdat de waarden een logische volgorde hebben.

Bladzijde 231

- c** breedte is $0,62 - 0,58 = 0,04$ en $\hat{p} = 0,6$

$$\text{Los op } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,6(1 - 0,6)}{n}} = 0,04.$$

$$\text{De optie oplossen bij } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,6(1 - 0,6)}{x}} = 0,04 \text{ geeft } x = 2400.$$

Dus 2400 mannen.

- d** Aflezen uit de figuur geeft de tabel hiernaast.

Bijvoorbeeld:

Stel de steekproef van 2003 bestond uit 10 mannen en 90 vrouwen. Het percentage voltijders in 2003 zou dan $0,1 \cdot 75 + 0,9 \cdot 30 = 34,5$ zijn.

Stel de steekproef van 2017 bestond uit 90 mannen en 10 vrouwen.

Het percentage voltijders in 2017 zou dan $0,9 \cdot 60 + 0,1 \cdot 25 = 56,5$ zijn.

Er zou dan sprake zijn van een hoger percentage voltijders in de steekproef van 2017 dan in die van 2003.

- e** Steekproefgemiddelden en steekproefstandaardafwijkingen, dus gebruik de effectgrootte.

$$E = \frac{31,2 - 27,2}{\frac{1}{2}(8,3 + 7,6)} \approx 0,503$$

Omdat $0,4 \leq E < 0,8$ is het verschil middelmatig, dus de conclusie is juist.

	voltijd 2003	voltijd 2017
mannen	75%	60%
vrouwen	30%	25%

69

$$\mathbf{a} \quad \hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{194}{452} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{194}{452} \cdot (1 - \frac{194}{452})}{452}} \approx 0,43 \pm 0,05 \text{ (of } [0,38; 0,48]).$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $43\% \pm 5\%$ (of $[38\%, 48\%]$).

b Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de ϕ -coëfficiënt.

	basisschool	middelbare school	
niet naar toilet	151	90	241
wel naar toilet	151	60	211
	302	150	

$$\phi = \frac{151 \cdot 60 - 90 \cdot 151}{\sqrt{241 \cdot 302 \cdot 150 \cdot 211}} \approx -0,094$$

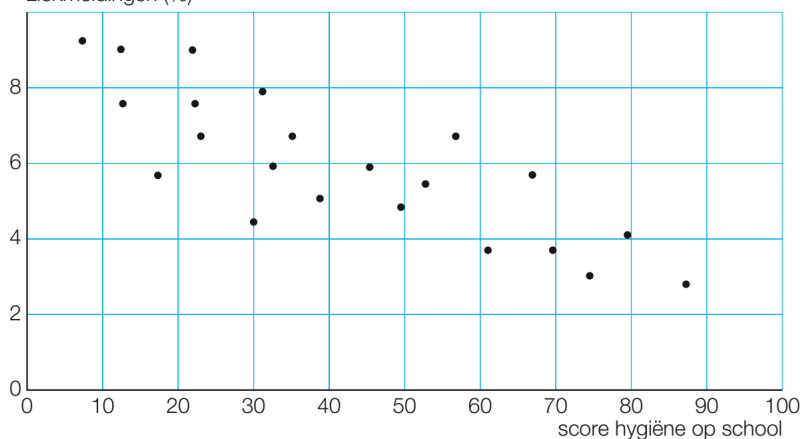
Omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

c Aanpak

Bij het vermoeden hoort een negatieve correlatie (of dalende trendlijn). Bij een lage hygiënescore horen dus relatief veel ziekmeldingen en bij een hoge hygiënescore relatief weinig ziekmeldingen.

Bijvoorbeeld de puntenwolk hieronder.

EEN PUNTENWOLK DIE HET VERMOEDEN ONDERSTEUNT
ziekmeldingen (%)



d Nee, want de reactiemogelijkheden zijn kwalitatief en kunnen dus niet gemiddeld worden.

e Het kan erop lijken dat degenen die 'weet niet' hebben gekozen het er helemaal mee oneens zijn. Een betere manier is bijvoorbeeld het weglaten van deze reactiemogelijkheid uit de grafiek, en de percentages hierop aanpassen.

70

$$\mathbf{a} \quad \hat{p} = 0,0215 \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{0,0215(1-0,0215)}{3437}} = 0,0024...$$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,0215 - 2 \cdot 0,0024... = 0,0165...$$

Dus de ondergrens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is 1,65...%.

Het steekproefpercentage 1,58% ligt dus niet in het 95%-betrouwbaarheidsinterval in 1998.

b Frequenties bij een variabele met twee categorieën, dus gebruik de ϕ -coëfficiënt.

	1998	2004	
wel ingebroken	74	23	97
niet ingebroken	3363	1433	4796
	3437	1456	

$$\phi = \frac{74 \cdot 1433 - 23 \cdot 3363}{\sqrt{97 \cdot 3437 \cdot 1456 \cdot 4796}} \approx 0,019$$

Omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

12.6 Onderzoekopgaven

Bladzijde 235

- 71** Noem de aantallen inwoners in miljoenen N_{totaal} en N_{65+} en t het aantal jaren na 31 december 2000.
- Aflezend bij $t = 0$ (het jaar 2000) geeft $N_{\text{totaal}} = 15,8$ en bij $t = 30$ (het jaar 2030) geeft dit $N_{\text{totaal}} = 18$.
- $$N_{\text{totaal}} = at + b \text{ met } a = \frac{18 - 15,8}{30} = 0,073... \text{ en } b = 15,8.$$
- Dus $N_{\text{totaal}} = 0,073...t + 15,8$.
- Aflezend bij $t = 0$ (het jaar 2000) geeft $N_{65+} = 2,2$ en bij $t = 30$ (het jaar 2030) geeft dit $N_{65+} = 4,2$.
- $$N_{65+} = b \cdot g^t \text{ met } g = \left(\frac{4,2}{2,2}\right)^{\frac{1}{30}} = 1,021... \text{ en } b = 2,2.$$
- Dus $N_{65+} = 2,2 \cdot 1,021...^t$.
- Er moet gelden $N_{65+} > 0,25 \cdot N_{\text{totaal}}$, oftewel $2,2 \cdot 1,021...^t > 0,25(0,073...t + 15,8)$.
- Los op $2,2 \cdot 1,021...^t = 0,25(0,073...t + 15,8)$.
- Voer in $y_1 = 2,2 \cdot 1,021...^x$ en $y_2 = 0,25(0,073...x + 15,8)$.
- De optie snijpunt geeft $x = 33,9...$
- Dus in 2034.

Bladzijde 237

- 72** Voor het kleinere dak geldt $A = 4 \cdot 25 = 100$ en $f = 0,6$ (zie de tabel), dus $H = 1,8 \cdot 100 \cdot 0,6 = 108$.
- Voor het grotere dak geldt $A = 11,5 \cdot 25 = 287,5$ en $f = 1$ (zie de tabel), dus $H = 1,8 \cdot 287,5 \cdot 1 = 517,5$.
- Als Pietersma kiest voor alleen maar dunne regenpijpen, dan is $C = 0,02 \cdot 70^2 = 98$.
- Op basis van de capaciteit zijn er dan links $\frac{108}{98} \approx 1,1$, dus 2 en rechts $\frac{517,5}{98} \approx 5,3$, dus 6 regenpijpen nodig.
- Op basis van de gootlengte zijn er links $\frac{25}{10} = 2,5$, dus 3 en rechts 3 regenpijpen nodig.
- Pietersma moet dan dus 3 regenpijpen voor links en 6 regenpijpen voor rechts kopen.
- De totale lengte dunne regenpijpen is dan $3 \cdot 5 + 6 \cdot 3 = 33$ meter.
- De kosten zijn in dit geval $33 \cdot 9 = 297$ euro.
- Als Pietersma kiest voor alleen maar dikke regenpijpen, dan is $C = 0,02 \cdot 100^2 = 200$.
- Op basis van de capaciteit zijn er dan links $\frac{108}{200} = 0,54$, dus 1 en rechts $\frac{517,5}{200} \approx 2,6$, dus 3 regenpijpen nodig.
- Op basis van de gootlengte zijn er links $\frac{25}{20} = 1,25$, dus 2 en rechts 2 regenpijpen nodig.
- Pietersma moet dan dus 2 regenpijpen voor links en 3 regenpijpen voor rechts kopen.
- De totale lengte dikke regenpijpen is dan $2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19$ meter.
- De kosten zijn in dit geval $19 \cdot 13 = 247$ euro.
- Dus Pietersma moet het dikke type regenpijpen kiezen.

Bladzijde 238

- 73** In 1990 was de totale fijnstofemissie in miljoenen gram $103\,200 \cdot 0,08 + 16\,800 \cdot 0,58 = 18\,000$.
- In 2014 was het aantal gereden kilometers in miljoenen door het personenvervoer $103\,200 \cdot 2 = 206\,400$.
- In 2014 was het aantal gereden kilometers in miljoenen door het goederenvervoer $16\,800 \cdot 3 = 50\,400$.
- In 2014 was de fijnstofemissie in miljoenen gram per kilometer personenvervoer $0,08 - 0,003 \cdot 24 = 0,008$.
- In 2014 was de fijnstofemissie in miljoenen gram per kilometer goederenvervoer $0,58 \cdot 0,91^{24} = 0,06031...$.
- In 2014 was de totale fijnstofemissie in miljoenen gram $206\,400 \cdot 0,008 + 50\,400 \cdot 0,06031... = 4691,04...$.
- Dus de procentuele afname in de periode 1990-2014 is $\frac{18\,000 - 4691,04...}{18\,000} \cdot 100\% \approx 74\%$.

Bladzijde 239

- 74** E hoort bij rit 2, want dit is de enige rit waarvan in de tabel zichtbaar is dat het aantal nog te rijden km is toegenomen tijdens de rit.
A hoort bij rit 3, want dit is de enige rit waarvan in de tabel zichtbaar is dat er twee verschillende tijdstippen zijn met hetzelfde aantal nog te rijden km.
D hoort bij rit 1, want bij een gemiddelde snelheid van 90 km/uur duurt de rit $\frac{144}{90} = 1,6$ uur, oftewel 1 uur en 36 minuten. Dat is precies het verschil tussen 10:01 uur en 11:37 uur.
C hoort bij rit 5, want de eerste 72 km worden bij ritten 1 t/m 5 in respectievelijk 46, 50, 52, 47 en 49 minuten afgelegd, terwijl de tweede 72 km in respectievelijk 50, 66, 54, 47 en 44 minuten worden afgelegd.
B hoort bij rit 4, want de gemiddelde snelheid gedurende de eerste 9 minuten, oftewel $\frac{9}{60} = 0,15$ uur, van rit 4 is $\frac{144 - 124}{0,15} = 133,3\ldots$ km/uur.

Opmerking:

Omdat bij elke rit precies één zin hoort en bij elke zin precies één rit, mag je ook zinnen koppelen aan ritten door het uitsluiten van alternatieven. Je hoeft bij de laatste zin bijvoorbeeld geen toelichting te geven, behalve dat er nog maar één zin en één rit over is.

Bladzijde 240

- 75** Er geldt $\Delta T = 19 - 9 = 10$.

Als al het bestaande glas met folie beplakt zou worden geldt:

voor het enkel glas: $G = 10,65$ en $U = 2,5$ geeft $W = 2,5 \cdot 10,65 \cdot 10 = 266,25$.

voor het dubbelglas: $G = 24,85$ en $U = 1,6$ geeft $W = 1,6 \cdot 24,85 \cdot 10 = 397,6$.

Dus een warmteverlies van $266,25 + 397,6 = 663,85$ watt.

Peter zal eerst al het enkel glas door hoogrendementsglas vervangen en dan pas het dubbelglas.

Vervangen van het enkel glas geeft $W = 1,1 \cdot 10,65 \cdot 10 = 117,15$.

Het warmteverlies via het dubbelglas dat overblijft en het nieuwe hoogrendementsglas mag dan nog $663,85 - 117,15 = 546,7$ watt zijn.

Als Peter x m² dubbelglas vervangt, dan geldt voor het dubbelglas dat over blijft $W = 2,9 \cdot (24,85 - x) \cdot 10$ en voor het nieuwe hoogrendementsglas $W = 1,1 \cdot x \cdot 10$.

Er moet dus gelden op $2,9 \cdot (24,85 - x) \cdot 10 + 1,1 \cdot x \cdot 10 = 546,7$.

De optie oplossen bij $2,9 \cdot (24,85 - x) \cdot 10 + 1,1 \cdot x \cdot 10 = 546,7$ geeft $x = 9,663\ldots$

Dus Peter moet al het enkelglas en ongeveer 9,66 m² dubbelglas vervangen.

Bladzijde 241

- 76** Het gemiddelde aantal volwassen melkkoeien in 2005 was $\frac{99}{1,0375^{11}} \approx 66$ en hierbij hoort 66 GVE.

Dus het aantal GVE jongvee in 2005 was dus $84 - 66 = 18$.

In 2016 was het aantal GVE jongvee $126 - 99 = 27$.

Er was in de periode 2005-2016 dus een toename van $27 - 18 = 9$ GVE jongvee.

Stel dat er gemiddeld x stuks jongvee ($0,5x$ kalveren en $0,5x$ pinken) zijn bijgekomen in de periode 2005-2016. Dan is het aantal GVE dat hierbij hoort $0,5x \cdot 0,25 + 0,5x \cdot 0,5 = 0,375x$.

Los op $0,375x = 9$.

$$x = 24$$

Dus de stijging is 24 stuks jongvee.

Gemengde opgaven

Bladzijde 242

1 $P = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3\frac{1}{3}a} \cdot \sqrt{6b} = \sqrt{5 \cdot 3\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot a \cdot b} = \sqrt{100ab} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{ab} = 10\sqrt{ab}$

2 De winst in 2020 was $31,25 \cdot 1,085 \cdot 0,847 \approx 28,72$ miljoen euro.

3
$$\left. \begin{array}{l} G = 10m^2n - 2m \\ m = 2n - 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} G = 10(2n-1)^2 \cdot n - 2(2n-1) \\ G = 10n(2n-1)(2n-1) - 4n + 2 \\ G = 10n(4n^2 - 2n - 2n + 1) - 4n + 2 \\ G = 10n(4n^2 - 4n + 1) - 4n + 2 \\ G = 40n^3 - 40n^2 + 10n - 4n + 2 \\ G = 40n^3 - 40n^2 + 6n + 2 \end{array}$$

4 Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,28 \cdot 0,72}{n}} = 0,06$.

De optie oplossen bij $4 \cdot \sqrt{\frac{0,28 \cdot 0,72}{x}} = 0,06$ geeft $x = 896$.

Dus de minimale steekproefomvang is 896.

5 $\phi = \frac{83 \cdot 12 - 41 \cdot 106}{\sqrt{124 \cdot 189 \cdot 53 \cdot 118}} \approx -0,277$

$-0,4 \leq \phi < 0,2$, dus het verschil is middelmatig.

6 aantal beuken : aantal eiken = $1 : 3 = 2 : 6$
aantal eiken : aantal sparren = $2 : 5 = 6 : 15$
Dus aantal beuken : aantal sparren = $2 : 15$.

7 $6a - 5b = 18$
 $-5b = -6a + 18$
 $b = 1,2a - 3,6$

8 Bij $V = 120$ hoort $B = 172,98$ en bij $V = 148$ hoort $B = 202,66$.

$$B = aV + b \text{ met } a = \frac{\Delta B}{\Delta V} = \frac{202,66 - 172,98}{148 - 120} = 1,06$$

$$\left. \begin{array}{l} B = 1,06V + b \\ V = 120 \text{ en } B = 172,98 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,06 \cdot 120 + b = 172,98 \\ 127,2 + b = 172,98 \\ b = 45,78 \end{array}$$

Dus $B = 1,06V + 45,78$.

9 $\left. \begin{array}{l} N = 0,06t^{1,4} \\ t = 200p^{0,8} \end{array} \right\} N = 0,06(200p^{0,8})^{1,4} = 0,06 \cdot 200^{1,4} \cdot p^{0,8 \cdot 1,4} \approx 100 \cdot p^{1,12}$

Dus $N = 100p^{1,12}$.

10 49 minuten en 40 seconden is $\frac{49}{60} + \frac{40}{3600} = 0,827... \text{ uur}$

Dus zijn snelheid is $\frac{9,8}{0,827...} \approx 11,84 \text{ km/uur}$.

Bladzijde 243

11 $1,073^t = 2$.

De optie oplossen bij $1,073^x = 2$ geeft $x = 9,83...$

De verdubbelingstijd is 9 jaar en $0,83... \cdot 12 \approx 10$ maanden.

12 $2,4y = 3 - 0,6\sqrt{x-2}$
 $3 - 0,6\sqrt{x-2} = 2,4y$
 $-0,6\sqrt{x-2} = 2,4y - 3$
 $\sqrt{x-2} = -4y + 5$
 $x - 2 = (-4y + 5)^2$
 $x = (-4y + 5)^2 + 2 (= 16y^2 - 40y + 27)$

- 13 a** In 11 jaar $1165 - 840 = 325$ meer, dus per jaar $\frac{325}{11}$ meer.
 2010 is 7 jaar na 2003, dus in 2010 is het aantal $840 + 7 \cdot \frac{325}{11} \approx 1047$.
- b** In 6 jaar $1390 - 1165 = 225$ meer, dus per jaar $\frac{225}{6}$ meer.
 2025 is 5 jaar na 2020, dus in 2025 is het aantal $1390 + 5 \cdot \frac{225}{6} \approx 1578$.
- c** In 8 jaar $840 - 520 = 320$ meer, dus per jaar $\frac{3250}{8} = 40$ meer.
 760 is 240 meer dan 520, dus dat is $\frac{240}{40} = 6$ jaar na 1995.
 Dus in het jaar $1995 + 6 = 2001$.

14 $(2a - 1)^2 - 4(3a - 1) = (2a - 1)(2a - 1) - 12a + 4 = 4a^2 - 2a - 2a + 1 - 12a + 4 = 4a^2 - 16a + 5$

- 15 a** nominaal **b** ordinaal **c** nominaal

16 De toename is $\frac{145 - 115}{115} \cdot 100\% \approx 26,1\%$.

17 $y = -\frac{1}{3}x + b$
 Door $A(0, 9)$, dus $b = 9$.
 Dus $k: y = -\frac{1}{3}x + 9$.

18 $N = b \cdot g^t$ met $g = \left(\frac{77}{326}\right)^{\frac{1}{8}} = 0,8349\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,8349\dots^t \\ t = 3 \text{ en } N = 326 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,8349\dots^3 = 326 \\ b = \frac{326}{0,8349\dots^3} \approx 560 \end{array}$$

Dus $N = 560 \cdot 0,835^t$.

- 19 a** De modale klasse is $[76, 78\rangle$.
b De mediaan is het gemiddelde van het 75^e en 76^e getal, deze liggen beide in de klasse $[76, 78\rangle$.
 Dus de mediaan ligt in de klasse $[76, 78\rangle$.
c De standaardafwijking 3,0 cm hoort bij de tabel.
d De cumulatieve frequentie van de klasse $[74, 76\rangle$ is $5 + 13 + 16 = 34$,
 dus de relatieve cumulatieve frequentie is $\frac{34}{150} \cdot 100\% \approx 22,7\%$.

20 $g_{3 \text{ jaar}} = 2$, dus $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{3}} \approx 1,260$.
 Dus het groeipcentage per jaar is 26,0%.

Bladzijde 244

21 a $A = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{2\frac{1}{2}q} = \sqrt{2p \cdot 2\frac{1}{2}q} = \sqrt{5pq}$
b $B = \frac{\sqrt{30xy}}{\sqrt{2y}} = \sqrt{\frac{30xy}{2y}} = \sqrt{15x}$

22 a Als t toeneemt, dan neemt t^2 toe, dus dan neemt $t^2 + 1$ toe,
dus dan neemt $\frac{100}{t^2 + 1}$ af, dus dan neemt $50 + \frac{100}{t^2 + 1}$ ook af.
Dus de grafiek van N is dalend.

b Als x toeneemt, dan neemt $x + 10$ toe, dus dan neemt $\frac{57}{x + 10}$ af,
dus dan neemt $300 - \frac{57}{x + 10}$ toe.
Dus de grafiek van y is stijgend.

23 $N = \frac{562}{25 \cdot 1,3^t} = \frac{562}{25} \cdot 1,3^{-t} = 22,48 \cdot (1,3^{-1})^t \approx 22,48 \cdot 0,769^t$

De grafiek van N is afnemend dalend, want g tussen 0 en 1.



25 $x = \text{aantal kaartjes van 15 euro}$
 $y = \text{aantal kaartjes van 20 euro}$
 $x + y = 705$ $15x + 20y = 11\,500$
 $y = 705 - x$ $20y = -15x + 11\,500$
 $y = -0,75x + 575$

Dus $705 - x = -0,75x + 575$.
 De optie oplossen bij $705 - x = -0,75x + 575$ geeft $x = 520$.
 $x = 520$ geeft $y = 705 - 520 = 185$
 Dus er zijn 185 kaartjes van 20 euro verkocht.

26 $q = 10 - 4p$
 $4p = 10 - q$
 $p = 2,5 - 0,25q$ } $R = 2(2,5 - 0,25q) - 3q + 50$
 $R = 2p - 3q + 50$ } $R = 5 - 0,5q - 3q + 50$
 $R = -3,5q + 55$

27 Er geldt $p = 0,36$, dus het totale aantal leerlingen is $\frac{450}{0,36} = 1250$.
 De steekproefproportie $\hat{p}$ is $\frac{12}{25} = 0,48$.

28 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is
 $38\,500 \pm 2 \cdot \frac{14\,300}{\sqrt{80}} \approx 38\,500 \pm 3200$ (of $[35\,300, 41\,700]$).

29 $F = \frac{50m^{0,54}}{17n^{1,4}}$ } $F = \frac{50m^{0,54}}{17(12m^{0,6})^{1,4}} = \frac{50m^{0,54}}{17 \cdot 12^{1,4} \cdot (m^{0,6})^{1,4}} = \frac{50}{17 \cdot 12^{1,4}} \cdot \frac{m^{0,54}}{m^{0,84}} \approx 0,09m^{-0,3}$
 $n = 12m^{0,6}$ }
 Dus $F = 0,09m^{-0,3}$.

Bladzijde 245

30 a Als t toeneemt, dan neemt $0,91^t$ af, dus dan neemt $20 \cdot 0,91^t$ af,
 dus dan neemt $1 + 0,91^t$ ook af, dus $\frac{1500}{1 + 20 \cdot 0,91^t}$ neemt dan toe.
 Dus de grafiek van N is stijgend.

b Als t toeneemt, dan neemt $0,98^t$ af, dus dan neemt $1 - 0,98^t$ toe,
 dus ook $20(1 - 0,98^t)$ neemt dan toe, dus $10 + 20(1 - 0,98^t)$ neemt dan toe.
 Dus de grafiek van N is stijgend.

31 De optie oplossen bij $3(0,5x - 2) = 0,6x + 12$ geeft $x = 20$.

$x = 20$ geeft $y = 0,6 \cdot 20 + 12 = 24$

Dus het snijpunt is $(20, 24)$.

$$\left. \begin{array}{l} N = 0,15b - 0,05(2a - 3) \\ b = 0,8a + 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} N = 0,15(0,8a + 4) - 0,05(2a - 3) \\ N = 0,12a + 0,6 - 0,1a + 0,15 \\ N = 0,02a + 0,75 \end{array}$$

33 $(a^{-2})^4 \cdot a^5 = a^{-8} \cdot a^5 = a^{-3}$

34 Tussen en op de lijnen $x = 1$ en $x = 5$ en ook tussen en op de lijnen $2x - y = 2$ en $2x - y = 10$.

$2x - y = 2$

x	0	2
y	-2	2

$2x - y = 10$

x	5	7
y	0	4

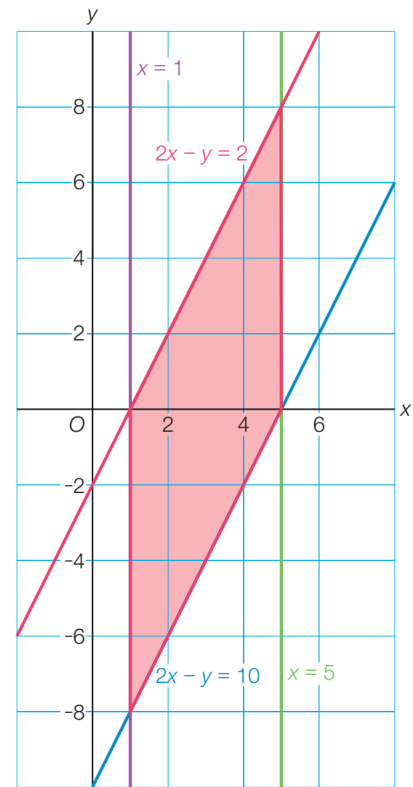
Zie de figuur hiernaast.

35 $\frac{750 - 820}{820} \cdot 100\% \approx -8,5\%$

Dus de afname is 8,5%.

36 Het totaal is $\frac{649}{0,0564} \approx 11\,507$.

37 De boxen overlappen elkaar.
Een mediaan van een boxplot ligt buiten de box van de andere boxplot.
Dus het verschil is middelmatig.



38 a $P = (4a - 1) \cdot \frac{2b}{4a - 1} = \frac{(4a - 1) \cdot 2b}{4a - 1} = 2b$

b $A = 5p \cdot \frac{3}{q} \cdot \frac{1 - q}{q} = \frac{5p \cdot 3 \cdot (1 - q)}{q \cdot q} = \frac{15p(1 - q)}{q^2} = \frac{15p - 15pq}{q^2}$

39 a continu **b** discreet **c** continu

Bladzijde 246

40 $F = \frac{2a^2 - 3a + 4}{2a} + 4a + 1\frac{1}{2} = \frac{2a^2}{2a} - \frac{3a}{2a} + \frac{4}{2a} + 4a + 1\frac{1}{2} = a - 1\frac{1}{2} + \frac{2}{a} + 4a + 1\frac{1}{2} = 5a + \frac{2}{a}$

41 $E = \frac{112 - 85}{\frac{1}{2}(38 + 24)} \approx 0,871$

$E > 0,8$, dus het verschil is groot.

42 $N = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{63 - 52}{12 - 8} = 2,75$

$$\left. \begin{array}{l} N = 2,75t + b \\ t = 8 \text{ en } N = 52 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2,75 \cdot 8 + b = 52 \\ 22 + b = 52 \\ b = 30 \end{array}$$

Dus $N = 2,75t + 30$.

43 De optie oplossen bij $6x - 33 = -4(x - 12) + 15$ geeft $x = 9,6$.

44
$$M = 200 \left(4 + \frac{74}{25 \cdot 0,95^t} \right) = 200 \cdot 4 + \frac{200 \cdot 74}{25 \cdot 0,95^t} = 800 + \frac{200 \cdot 74}{25} \cdot 0,95^{-t}$$
$$= 800 + 592 \cdot (0,95^{-1})^t \approx 800 + 592 \cdot 1,05^t$$
Dus $M = 800 + 592 \cdot 1,05^t$.

45 De optie oplossen bij $1\frac{1}{4}(6x - 1) = 2\frac{1}{2}x + 6$ geeft $x = 1,45$.
Dus $t = 1,45$.

46 $y = ax$
 $x = 12$ en $y = 69$ invullen geeft $a \cdot 12 = 69$
$$a = 5,75$$

Dus $y = 5,75x$.
 $x = 42$ geeft $y = 5,75 \cdot 42 = 241,5$

47 $N = b \cdot g^t$ met $g = \left(\frac{161}{101} \right)^{\frac{1}{8}} = 1,0600\dots$
$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,0600\dots^t \\ t = 4 \text{ en } N = 101 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,0600\dots^4 = 101 \\ b = \frac{101}{1,0600\dots^4} \approx 80 \end{array}$$

Dus $N = 80 \cdot 1,060^t$.

48 $A = 5x^{-1,15} \cdot \frac{3x^{4,25}}{x^2} = 5x^{-1,15} \cdot 3x^{2,25} = 15x^{1,1}$
Dus $a = 15$ en $b = 1,1$.

- 49 a** spreidingsbreedte $= 58 - 10 = 48$
interkwartielafstand $= 42 - 20 = 22$
Dat is $\frac{48}{22} \approx 2,2$ keer zo groot.
- b** 25% van 1060, dat is $0,25 \cdot 1060 = 265$ waarnemingsgetallen.
- c** Het kleinst mogelijke gemiddelde is $0,25 \cdot 10 + 0,25 \cdot 20 + 0,25 \cdot 24 + 0,25 \cdot 42 = 24$.
Het grootst mogelijke gemiddelde is $0,25 \cdot 20 + 0,25 \cdot 24 + 0,25 \cdot 42 + 0,25 \cdot 58 = 36$.
Dus dat klopt.
- d** De schatting van de standaardafwijking is 14, want het gemiddelde zal ongeveer 30 zijn en de gemiddelde afwijking hiervan is ongeveer 14.

Bladzijde 247

50 $A = 8 - \frac{12}{n}$
$$\frac{12}{n} = 8 - A$$
$$n = \frac{12}{8 - A}$$

51 $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{55 - 70}{20 - 8} = -1,25$
$$\left. \begin{array}{l} y = -1,25x + b \\ x = 8 \text{ en } y = 70 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,25 \cdot 8 + b = 70 \\ -10 + b = 70 \\ b = 80 \end{array}$$

Dus $l: y = -1,25x + 80$.

52 $30\,689 \text{ km}^2 = 30\,689 \cdot 10^6 \text{ m}^2$
De oppervlakte per inwoner is $\frac{30\,689 \cdot 10^6}{11,46 \cdot 10^6} \approx 2678 \text{ m}^2$.

53
$$\left. \begin{aligned} F &= 5p^2 - 2q^2 + 10 \\ q &= p - 3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F &= 5p^2 - 2(p-3)^2 + 10 \\ F &= 5p^2 - 2(p-3)(p-3) + 10 \\ F &= 5p^2 - 2(p^2 - 3p - 3p + 9) + 10 \\ F &= 5p^2 - 2p^2 + 6p + 6p - 18 + 10 \\ F &= 3p^2 + 12p - 8 \end{aligned}$$

- 54 a Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 ook heel groot en dan wordt ook $x^2 + 1$ heel groot, dus dan nadert $\frac{50}{x^2 + 1}$ tot 0, dus dan wordt $100 + \frac{50}{x^2 + 1} \approx 100$.
Dus de grenswaarde is 100.
- b Als t heel groot wordt, dan wordt $t + 2$ ook heel groot, dus dan nadert $\frac{30}{t + 2}$ tot 0, dus dan wordt $50 - \frac{30}{t + 2} \approx 50$.
Dus de grenswaarde is 50.

- 55 a Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $1200 \pm 2 \cdot \frac{85}{\sqrt{625}} = 1200 \pm 6,8$ (of $[1193,2 ; 1206,8]$).
- b Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $25,62 \pm 2 \cdot 1,45 = 25,62 \pm 2,9$ (of $[22,72 ; 28,52]$).

56 De oorspronkelijke hoeveelheid was $\frac{3015}{1,184} \approx 2546$.

- 57 a Als t heel groot wordt dan nadert $0,96^t$ tot 0, dus dan wordt $14 \cdot 0,96^t \approx 0$ en dan wordt $3 + 14 \cdot 0,96^t \approx 3$, en dan wordt $\frac{600}{3 + 14 \cdot 0,96^t} \approx \frac{600}{3} = 200$.
Dus het verzadigingsniveau is 200.
- b Als t heel groot wordt dan nadert $0,81^t$ tot 0, dus dan wordt $3 - 0,81^t \approx 3$ en dan wordt $450(3 - 0,81^t) \approx 450 \cdot 3 = 1350$.
Dus het verzadigingsniveau is 1350.

58
$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{x+y}{4x-y} \\ y &= 2x-1 \end{aligned} \right\} K = \frac{x+2x-1}{4x-(2x-1)} = \frac{3x-1}{4x-2x+1} = \frac{3x-1}{2x+1}$$

59

	stad		platteland		V_{cp}
	cum. freq.	cum. perc. (%)	cum. freq.	cum. perc. (%)	
1	16	2	112	17,5	15,5
2	72	9	240	37,5	28,5
3	184	23	560	87,5	64,5
4	304	38	608	95	57
5	800	100	640	100	0

← max V_{cp}

De max $V_{cp} = 64,5$.
Omdat max $V_{cp} > 40$ is het verschil is groot.

60
$$N = 3\sqrt{2a} \cdot \sqrt{5b} = 3 \cdot \sqrt{10ab} = 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{ab} \approx 9,49\sqrt{ab}$$

Dus $N = 9,49\sqrt{ab}$.

Bladzijde 248

61 Vier delen is 25 euro, dus één deel is $\frac{25}{4} = 6,25$ euro.

In totaal zijn er $2 + 3 + 7 = 12$ delen, dat is een bedrag van $12 \cdot 6,25 = 75$ euro.

- 62 a** Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$0,83 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,83 \cdot (1 - 0,83)}{280}} \approx 0,83 \pm 0,045 \text{ (of } [0,785 ; 0,875]).$$

b $\hat{p} = \frac{83}{112}$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $\frac{83}{112} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{83}{112}(1 - \frac{83}{112})}{52}} \approx 0,741 \pm 0,121 \text{ (of } [0,620 ; 0,863]).$

63 $0,942^t = 0,5$.

De optie oplossen bij $0,942^x = 0,5$ geeft $x = 11,60\dots$

Dus de halveringstijd is 11 jaar en $12 \cdot 0,60\dots \approx 7$ maanden.

64 $\frac{2x}{3y} = \frac{5}{7}$ geeft $3y \cdot 5 = 2x \cdot 7$
 $15y = 14x$
 $y = \frac{14}{15}x$

65 $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{14,80 - 20,60}{6 - 2} = -1,45$; $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{10,45 - 14,80}{9 - 6} = -1,45$ en $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{3,20 - 10,45}{14 - 9} = -1,45$

De toenamen per dag zijn gelijk, dus de tabel stemt overeen met lineaire groei.

$$\left. \begin{array}{l} N = -1,45t + b \\ t = 2 \text{ en } N = 20,60 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,45 \cdot 2 + b = 20,60 \\ -2,90 + b = 20,60 \\ b = 23,50 \end{array}$$

Dus $N = -1,45t + 23,50$.

66 a $q = 400$ geeft $W = -0,01 \cdot 400^2 + 7,5 \cdot 400 - 650 = 750$

Dus de winst is 75 000 euro, dat is $\frac{75\,000}{400} = 187,50$ euro per artikel.

b Voer in $y_1 = -0,01x^2 + 7,5x - 650$.

De optie maximum geeft $x = 375$ en $y = 756,25$.

De maximale jaarlijkse winst is 75 625 euro.

67 a $0,65 - 0,06 = 0,59$ en $0,65 + 0,06 = 0,71$, dus $[0,59; 0,71]$.

$$\sigma = \frac{0,06}{2} = 0,03$$

b $\bar{X} = \frac{1280 + 1340}{2} = 1310$ en $\frac{1340 - 1280}{2} = 30$, dus 1310 ± 30 .

$$S = \frac{30}{2} = 15$$

68 $67,13 \text{ km}^2 = 67,13 \cdot 10^8 \text{ dm}^2$ en $55 \text{ mm} = 55 \cdot 10^{-2} \text{ dm}$

Dus er viel die dag $67,13 \cdot 10^8 \cdot 55 \cdot 10^{-2} \approx 3,69 \cdot 10^9$ liter regen.

69 a $g_{8 \text{ uur}} = 0,891$, dus $g_{50 \text{ uur}} = 0,891^{\frac{50}{8}} \approx 0,486$.

De afname per 50 uur is 51,4%.

b 8 uur is 24 keer 20 minuten

$g_{8 \text{ uur}} = 0,891$, dus $g_{20 \text{ minuten}} = 0,891^{\frac{1}{24}} \approx 0,995$.

De afname per 20 minuten is 0,5%.

Bladzijde 249

70 $B = \frac{6x^2 - y^2}{y^2 + 1} \left\{ \begin{array}{l} B = \frac{6x^2 - (2x - 1)^2}{(2x - 1)^2 + 1} = \frac{6x^2 - (2x - 1)(2x - 1)}{(2x - 1)(2x - 1) + 1} = \frac{6x^2 - (4x^2 - 2x - 2x + 1)}{4x^2 - 2x - 2x + 1 + 1} \\ y = 2x - 1 \end{array} \right.$
 $B = \frac{6x^2 - 4x^2 + 2x + 2x - 1}{4x^2 - 4x + 2} = \frac{2x^2 + 4x - 1}{4x^2 - 4x + 2}$

71 $\hat{p} = \frac{78}{140}$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $\frac{78}{140} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{78}{140}(1 - \frac{78}{140})}{140}} \approx 0,557 \pm 0,084$ (of $[0,473 ; 0,641]$).

72 $N = 18 \cdot \frac{2x-3}{6} + 3x - 5 = \frac{18}{6} \cdot (2x-3) + 3x - 5 = 3 \cdot (2x-3) + 3x - 5 = 6x - 9 + 3x - 5 = 9x - 14$

Dus $N = 9x - 14$.

73 a Voer in $y_1 = \frac{90\,000x}{x^2 + 900}$.

De optie maximum geeft $x = 30$ en $y = 1500$.

Dus na 30 dagen. Er lagen toen 1500 patiënten op de ic.

b Voer in $y_2 = 1400$.

De optie snijpunt geeft $x = 20,6\dots$ en $x = 43,6\dots$

Dus gedurende 23 dagen.

74 Bij een prijs p in euro's en een aantal stuks per dag q geldt $q = \frac{a}{p}$.

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{a}{p} \\ p = 0,8 \text{ en } q = 135 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{0,8} = 135 \\ a = 108 \end{array}$$

Dus $q = \frac{108}{p}$.

$p = 1,10$ geeft $q = \frac{108}{1,10} \approx 98$

Bij een prijs van € 1,10 verkoopt hij 98 meloenen per dag.

Alternatieve uitwerking

Bij een prijs p in euro's en een aantal stuks per dag q geldt $p \cdot q = \text{constant}$.

$p = 0,8$ en $q = 135$ geeft $p \cdot q = 0,8 \cdot 135 = 108$.

$p = 1,10$ geeft $1,10 \cdot q = 108$, dus $q = \frac{108}{1,10} \approx 98$.

Bij een prijs van € 1,10 verkoopt hij 98 meloenen per dag.

75 5 jaar en 4 maanden is $5\frac{1}{3}$ jaar

$g_{5\frac{1}{3}\text{ jaar}} = 0,5$ geeft $g_{\text{jaar}} = 0,5^{\frac{1}{5\frac{1}{3}}} \approx 0,878$

De afname per jaar is 12,2%.

76 $K = \frac{24x}{x-4} \cdot (x+4) \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} \cdot \frac{x(x+4)}{x-4} = 3 \cdot \frac{x^2+4x}{x-4} = \frac{3x^2+12x}{x-4}$

77 $\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ x = 6 \text{ en } y = 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 6 + b = 9 \\ -2 + b = 9 \\ b = 11 \end{array}$

Dus $l: y = -\frac{1}{3}x + 11$.

78 Dat is $45\,486 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \approx 3,9 \cdot 10^9$ dollar per dag.

79 $N = \frac{200}{133 \cdot 0,6^t} = \frac{200}{133} \cdot 0,6^{-t} = \frac{200}{133} \cdot (0,6^{-1})^t \approx 1,504 \cdot 1,667^t$

Dus $N = 1,504 \cdot 1,667^t$.

Bladzijde 250

80 $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30-18}{10-2} = 1,5$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1,5x + b \\ x = 2 \text{ en } y = 18 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,5 \cdot 2 + b = 18 \\ 3 + b = 18 \\ b = 15 \end{array}$$

Dus $k: y = 1,5x + 15$.

- 81 a** $g_{\text{dag}} = 1,086$, dus $g_{\text{week}} = 1,086^7 \approx 1,782$.
De toename per week is 78,2%.
- b** $g_{\text{dag}} = 1,086$, dus $g_{10 \text{ uur}} = 1,086^{\frac{10}{24}} \approx 1,035$.
De toename per 10 uur is 3,5%.

82 $2x - 3y = 10$
 $-3y = -2x + 10$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x - 3\frac{1}{3} \\ T = 6xy - 20x + 15y \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = 6x(\frac{2}{3}x - 3\frac{1}{3}) - 20x + 15(\frac{2}{3}x - 3\frac{1}{3}) \\ T = 4x^2 - 20x - 20x + 10x - 50 \\ T = 4x^2 - 30x - 50 \end{array}$$

Dus $a = 4$, $b = -30$ en $c = -50$.

83 $\frac{6,5 \text{ km}}{14,6 \text{ km/uur}} = 0,445... \text{ uur} = 0,445... \cdot 60 \text{ minuten} = 26,71... \text{ minuten}$
Dus 26 minuten en $0,71... \cdot 60 \approx 43$ seconden.

84 a $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{20 - 5}{30 - 0} \approx 0,83$ en $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{53 - 20}{60 - 30} \approx 1,1$
De toenames per seconde zijn niet gelijk, dus geen lineair verband.

b $g_{30 \text{ seconden}} = \frac{20}{5} = 4$ en $g_{30 \text{ seconden}} = \frac{53}{20} = 2,65$

De groeifactoren zijn niet gelijk, dus geen exponentieel verband.

c $t = 30$ geeft $T = -0,00011 \cdot 30^3 + 0,02 \cdot 30^2 + 5 = 20,03 \approx 20$, dit klopt.
 $t = 100$ geeft $T = -0,00011 \cdot 100^3 + 0,02 \cdot 100^2 + 5 = 95$, dit klopt.

d Los op $-0,00011t^3 + 0,02t^2 + 5 = 85$.
Voer in $y_1 = -0,00011x^3 + 0,02x^2 + 5$ en $y_2 = 85$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 88$.
Dus na 88 seconden is de temperatuur 85°C .

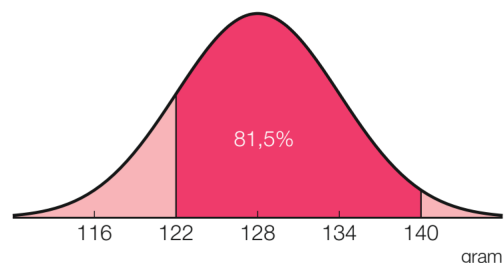
85 $A = at + b$ met $a = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{22 - 78}{28 - 12} = -3,5$

$$\left. \begin{array}{l} A = -3,5t + b \\ t = 12 \text{ en } A = 78 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3,5 \cdot 12 + b = 78 \\ -42 + b = 78 \\ b = 120 \end{array}$$

Dus $A = -3,5t + 120$.

86 $k + 2l = 40$
 $2l = -k + 40$
 $l = -0,5k + 20$
 $N = 2k - 3l + 50$ $\left\{ \begin{array}{l} N = 2k - 3(-0,5k + 20) + 50 \\ N = 2k + 1,5k - 60 + 50 \\ N = 3,5k - 10 \end{array} \right.$

87 Zie de figuur hiernaast.
 $34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%$
Dus $0,815 \cdot 6000 = 4890$ kiwi's.



88 a $5a^3 \cdot 4a^2 = 20a^5$

b $(-4a^3)^2 - 8a^5 - 10a^6 = 16a^6 - 8a^5 - 10a^6 = 6a^6 - 8a^5$

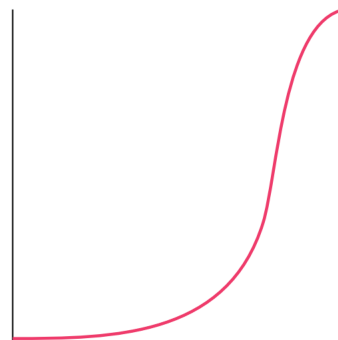
c $\frac{16x^2y^3}{24xy} = \frac{2}{3}xy^2$

Bladzijde 251

- 89** Voer in $y_1 = 2,56x + 30$ en $y_2 = 83 - 5(x - 10)$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 13,62$.
Uit de plot volgt dat $x > 13,62$.

- 90** Links scheef, dus ver rechts het punt met relatieve cumulatieve frequentie 50%. Zie de figuur hiernaast.

- 91** De verhouding klas 1 : klas 2 of 3 = 6 : 11.
De verhouding klas 1 : bovenbouw = 3 : 5 = 6 : 10.
Dus de verhouding klas 1 : klas 2 of 3 : bovenbouw = 6 : 11 : 10.
In totaal zijn er $6 + 11 + 10 = 27$ delen.
Eén deel is $\frac{1350}{27} = 50$ leerlingen.
In de bovenbouw zitten dus $10 \cdot 50 = 500$ leerlingen.



- 92** $\hat{p} = \frac{0,177 + 0,323}{2} = 0,25$
Dus er zijn $0,25 \cdot 140 = 35$ scooters opgevoerd.

- 93**
$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{4x}{x-1} \cdot (2y-3) \\ y &= 4x+5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= \frac{4x}{x-1} \cdot (2(4x+5)-3) \\ A &= \frac{4x}{x-1} \cdot (8x+10-3) \\ A &= \frac{4x}{x-1} \cdot (8x+7) \\ A &= \frac{4x(8x+7)}{x-1} \left(= \frac{32x^2+28x}{x-1} \right) \end{aligned}$$

- 94** **a** $A = 5x - \frac{4}{3x} = \frac{15x^2}{3x} - \frac{4}{3x} = \frac{15x^2-4}{3x}$
b $B = \frac{7}{2x} - \frac{5}{3x} = \frac{21}{6x} - \frac{10}{6x} = \frac{21-10}{6x} = \frac{11}{6x}$
c $D = 5a^2 - \frac{3}{a^2} = \frac{5a^4}{a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{5a^4-3}{a^2}$
d $E = \frac{2}{p} + 3p \cdot \frac{5q}{2p^2} = \frac{2}{p} + \frac{15pq}{2p^2} = \frac{2}{p} + \frac{15q}{2p} = \frac{4}{2p} + \frac{15q}{2p} = \frac{4+15q}{2p}$

- 95** **a** Bij $t = 2$ hoort $N = 20$ en bij $t = 8$ hoort $N = 500$.
 $N = b \cdot g^t$ met $g_{6 \text{ jaar}} = \frac{500}{20} = 25$, dus $g = 25^{\frac{1}{6}} = 1,7099...$
$$\left. \begin{aligned} N &= b \cdot 1,7099...^t \\ t = 2 \text{ en } N &= 20 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} b \cdot 1,7099...^2 &= 20 \\ b &= \frac{20}{1,7099...^2} \approx 7 \end{aligned}$$

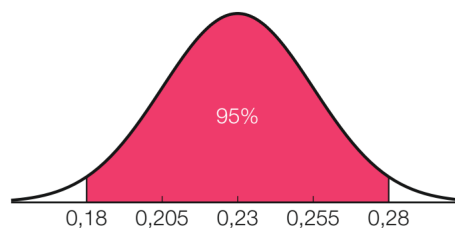
Dus $N = 7 \cdot 1,710^t$.

- b** Bij $t = 3$ hoort $N = 800$ en bij $t = 7$ hoort $N = 60$.
 $N = b \cdot g^t$ met $g_{4 \text{ jaar}} = \frac{60}{800} = 0,075$, dus $g = 0,075^{\frac{1}{4}} = 0,5233...$
$$\left. \begin{aligned} N &= b \cdot 0,5233...^t \\ t = 3 \text{ en } N &= 800 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} b \cdot 0,5233...^3 &= 800 \\ b &= \frac{800}{0,5233...^3} \approx 5580 \end{aligned}$$

Dus $N = 5580 \cdot 0,523^t$.

96 $\mu = p = 0,23$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,23 \cdot 0,77}{283}} \approx 0,025$

Zie de schets, dus bij $13,5\% + 34\% + 34\% + 13,5\% = 95\%$.



97 a Als n toeneemt, dan neemt $\frac{30\,000}{n}$ af, dus dan neemt $450 + \frac{30\,000}{n}$ ook af.

De grafiek van K is dus dalend.

De vaste kosten zullen per persoon in de praktijk ook afnemen als er meer personen met de cruise meegaan.

b Als n heel groot wordt dan nadert $\frac{30\,000}{n}$ tot 0, dus dan wordt $450 + \frac{30\,000}{n} \approx 450 + 0 = 450$.

Dus de grenswaarde is 450 euro.

Als er heel veel passagiers mee zouden kunnen, dan zouden dit de kosten per passagier zijn.

c Om 100 000 euro winst te maken, moet je per passagier $\frac{100\,000}{2500} = 40$ euro winst maken.

De kosten K per passagier bij 2500 passagiers zijn $450 + \frac{30\,000}{2500} = 462$ euro.

De prijs per passagier die ze moeten vragen is dus $462 + 40 = 502$ euro.

98 a Als x toeneemt, dan neemt $\frac{5}{x}$ af, dus dan neemt $20 - \frac{5}{x}$ toe.

Dus de grafiek is stijgend.

Als x heel groot wordt, nadert $\frac{5}{x}$ tot 0, dus dan wordt $20 - \frac{5}{x} \approx 20$.

Dus de grenswaarde is 20.

b Als x toeneemt, dan neemt $0,6^x$ af, dus dan neemt $12 \cdot 0,6^x$ ook af.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ ook toe.

Van $\frac{12 \cdot 0,6^x}{\sqrt{x}}$ neemt de teller dan af en de noemer toe, dus $\frac{12 \cdot 0,6^x}{\sqrt{x}}$ neemt dan af.

Dus de grafiek is dalend.

Als x heel groot wordt dan nadert $0,6^x$ tot 0. Dus dan wordt $12 \cdot 0,6^x \approx 0$.

Als x heel groot wordt dan wordt $\sqrt{x}$ ook heel groot.

Van $\frac{12 \cdot 0,6^x}{\sqrt{x}}$ nadert de teller dan tot 0 en wordt de noemer dan heel groot, dus dan wordt $\frac{12 \cdot 0,6^x}{\sqrt{x}} \approx 0$.

Dus de grenswaarde is 0.

c Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe en dan neemt $x^2 + 2$ ook toe,

dus dan neemt $\frac{80}{x^2 + 2}$ af en dan neemt $25 - \frac{80}{x^2 + 2}$ toe.

Dus de grafiek is stijgend.

Als x heel groot wordt dan wordt x^2 ook heel groot en ook $x^2 + 2$ wordt dan heel groot.

Dus dan nadert $\frac{80}{x^2 + 2}$ tot 0 en dan wordt $25 - \frac{80}{x^2 + 2} \approx 25$.

Dus de grenswaarde is 25.

99 a $g_{5 \text{ dagen}} = \frac{345}{446}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{345}{446}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 0,950$.

$g_{4 \text{ dagen}} = \frac{281}{345}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{281}{345}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0,950$.

$g_{3 \text{ dagen}} = \frac{241}{281}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{241}{281}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0,950$.

De groeifactoren per dag zijn bij benadering gelijk, dus de tabel is in overeenstemming met exponentiële groei.

b $N = b \cdot g^t$ met $g = 0,950$
 $N = b \cdot 0,950^t$
 $t = 3$ en $N = 446$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} N = b \cdot 0,950^t \\ t = 3 \text{ en } N = 446 \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} b \cdot 0,950^3 = 446 \\ b = \frac{446}{0,950^3} \approx 520 \end{matrix}$

Dus $N = 520 \cdot 0,950^t$.

100 $2 \text{ micrometer} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ meter}$

De diameter van het virusdeeltje is $\frac{2 \cdot 10^{-6}}{50} \text{ m} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ m}$.

101 $P = \frac{3}{4a - 1}$

$4a - 1 = \frac{3}{P}$

$4a = \frac{3}{P} + 1$

$a = \frac{3}{4P} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4P} + \frac{P}{4P} = \frac{3 + P}{4P}$

Dus $a = \frac{P + 3}{4P}$.

Bladzijde 253

102 a Als A omgekeerd evenredig is met B dan geldt $A \cdot B = \text{constant}$.

Je krijgt $40 \cdot 2 = 80$; $26,7 \cdot 3 = 80,1$; $17,8 \cdot 4 = 71,2$ en $7,9 \cdot 6 = 47,4$.

De producten zijn niet gelijk, dus A is niet omgekeerd evenredig met B .

b $A = \frac{90}{c^B}$
 $A = 40$ en $B = 2$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} A = \frac{90}{c^B} \\ A = 40 \text{ en } B = 2 \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} \frac{90}{c^2} = 40 \\ c^2 = \frac{90}{40} \\ c = \sqrt{\frac{90}{40}} = 1,5 \end{matrix}$

Dus $A = \frac{90}{1,5^B}$.

$B = 5$ geeft $A = \frac{90}{1,5^5} \approx 11,9$

103 $N_A = 25t + 1560$ en $N_B = 1450 \cdot 1,078^t$

Los op $N_B = 2 \cdot N_A$ oftewel $1450 \cdot 1,078^t = 2 \cdot (25t + 1560)$.

Voer in $y_1 = 1450 \cdot 1,078^x$ en $y_2 = 2 \cdot (25x + 1560)$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 12,7$.

Dus na 12,7 jaar.

104 Voer in $y_1 = \frac{350 - 2x}{6,13}$ en $y_2 = \frac{5x + 380}{8,27}$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 11,97$.

Uit de plot volgt dat $p > 11,97$.

Verantwoording

Beeld

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700
VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.



Wij maken bij Noordhoff sinds 2009 bewust keuzes om onze impact op het klimaat te verkleinen. We volgen de klimaatdoelen van het Klimaatakkoord van Parijs. Scan de QR-code voor meer informatie over ons duurzaamheidsbeleid.

Zo is dit product gemaakt van FSC®-gecertificeerd papier en ander gecontroleerd materiaal. Wij gebruiken plantaardige inkt en onze lijmen zijn op waterbasis en afbreekbaar. Hierdoor is dit product goed te recycleren na gebruik.



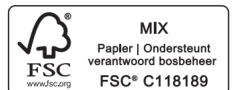
0 / 26

© 2026 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06491-4



Noordhoff



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-06491-4



9 789001 064914