

getal & ruimte

B



Noordhoff

Dit boek is van jou!

Naam

Klas

Getal & Ruimte

Leerboek
havo B deel 1

Dertiende editie, 2025

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek havo B deel 1

Samen met de delen 2 en 3 van havo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma havo wiskunde B, zoals dat met ingang van 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak havo wiskunde B is 360 uur. Elk van de delen 1, 2 en 3 bevat vier hoofdstukken.

De vier hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 25 uur.

In de hoofdstukken komen de volgende subdomeinen aan bod.

Hoofdstuk 1 B1 en B2

Hoofdstuk 2 D1, D2 en D3

Hoofdstuk 3 C1

Hoofdstuk 4 B1 en B2

De actief lerende leerling

In deze 13^e editie tweede fase zijn er nieuwe elementen in de leerboeken opgenomen die het actieve leren van de leerlingen ondersteunen en stimuleren.

Elke paragraaf begint met een opsomming van de kennis en vaardigheden die aan bod komen. Hiermee wordt enerzijds een vervolg gegeven aan de onderbouwboeken, waarin er aan het begin van elke paragraaf een opsomming van de leerdoelen staat. Anderzijds sluit dit aan bij de parate kennis en vaardigheden uit de syllabus.

Met de Kennis- en vaardighedencheck (KVC) aan het eind van een paragraaf kunnen leerlingen controleren of ze de kennis en vaardigheden van de paragraaf beheersen. Met de Kennis- en vaardighedentest (KVT) aan het eind van het hoofdstuk kunnen leerlingen controleren of ze de kennis en vaardigheden van het hoofdstuk beheersen. De antwoorden van de KVC's staan direct onder de opgaven, de antwoorden van de KVT's zijn achter in het boek te vinden. De leerling krijgt zo de mogelijkheid om snel te controleren of de kennis en vaardigheden worden beheerst.

De productieve vaardigheden uit de syllabus komen vooral aan bod in de afsluitende opgaven en in de Gemengde opgaven. Het is belangrijk dat leerlingen beseffen dat deze opgaven het beoogde eindniveau hebben. Daarom zijn de Gemengde opgaven in deze editie direct achter de KVT geplaatst.

Een andere vernieuwing in deze editie is het regelmatig terug laten keren van onderwerpen uit eerdere hoofdstukken of paragrafen, ook wel bekend als gespreid en gevarieerd oefenen. Uit onderzoek blijkt dat leerlingen daarmee beter leren onderscheiden en herkennen wanneer zij welke aanpak kunnen gebruiken en dat daarmee de stof beter beklijft. Zie voor verdere details de handleiding.

Naast de nieuwe elementen heeft de Voorkennis een andere plek gekregen. Voorkennis is nu te vinden aan het begin van een (sub)paragraaf waar het activeren ervan wenselijk is.

Drie leerroutes

Net als in de 12^e editie wordt er in deze editie gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Door te werken met deze routes maken leerlingen niet alle aangeboden opgaven. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen ongeveer in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen. In de basisroute ligt veel nadruk op het inslijpen van basisvaardigheden. In de middenroute worden enkele gewone opgaven overgeslagen en in plaats hiervan maken de leerlingen opgaven die dieper op de stof ingaan. De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder gewone opgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken. De docent kan bepalen in welke route een leerling start, of het aan de leerling zelf overlaten. In geval van twijfel is het verstandig de leerling in de middenroute te laten beginnen. Het is van belang om regelmatig te monitoren of de gekozen route de juiste is.

De digitale leeromgeving van Getal & Ruimte

Bij sommige gedeeltes van het boek kunnen opgaven ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Tevens kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

In het docentenmateriaal staan studiewijzers die een indicatie geven van de hoeveelheid leerstof die per week kan worden doorgewerkt. Verder zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

voorjaar 2024

Legenda

V1 Voorkennisopgave

Een opgave over een onderwerp uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk.

O1 Oriënterende opgave

Een opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

2 Gewone opgave

Een opgave waarmee je oefent met wat er in de theorie aan bod is geweest.

R3 Reflectie-opgave

Een opgave waarmee je terugkijkt op een voorgaand probleem, of waarmee je op een andere manier naar voorgaande stof kijkt.

A4 Afsluitende opgave

Een opgave waarmee je oefent op het beoogde beheersingsniveau.

E5 Extra opgave

Een opgave die je extra uitdaagt.

□ Kennis- en vaardighedencheck

Je controleert of je de kennis en/of vaardigheid beheerst door de bijbehorende opgave te maken.

C1 Checkopgave

Een opgave waarmee je controleert of je de kennis en/of vaardigheid goed beheerst.

Routeaanduiding

1



Een opgave van de basisroute.

2



Een opgave van de middenroute.

3



Een opgave van de uitdagende route.

NB: De symbolen van de routeaanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1

Opgaven zonder routeaanduiding

In de Kennis- en vaardigheidentest en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen routeaanduiding.

[► GR](#) Verwijzing naar een module over het gebruik van de grafische rekenmachine. Zie ook het overzicht van de modules achter in dit boek.

[► WERKBLAD](#) Verwijzing naar een werkblad achter in dit boek.

Inhoud

1	Lineaire en kwadratische vormen	6	3	Meetkunde	100
1.1	Lineaire verbanden	8	3.1	Goniometrische verhoudingen	102
1.2	Een lijn door twee gegeven punten	16	3.2	De sinusregel	107
1.3	De vergelijking $ax + by = c$	21	3.3	De cosinusregel	114
1.4	Stelsels vergelijkingen	27	3.4	Vergelijkingen in de meetkunde	118
1.5	Kwadratische verbanden	35	3.5	Lengte, omtrek en oppervlakte	128
	Kennis- en vaardigheidentest	46		Kennis- en vaardigheidentest	132
	Gemengde opgaven	48		Gemengde opgaven	134
2	Veranderingen	50	4	Werken met formules	136
2.1	Toenamedigrammen	52	4.1	De formules $y = a(x - p)^2 + q$ en $y = a(x - d)(x - e)$	138
2.2	Differentiequotiënt en snelheid	63	4.2	De formule $y = ax^2 + bx + c$	145
2.3	Raaklijnen en hellinggrafieken	73	4.3	Machtsformules	149
2.4	Differentiëren	89	4.4	Hogeregraadsvergelijkingen	156
	Kennis- en vaardigheidentest	95	4.5	Extreme waarden en wiskundige modellen	165
	Gemengde opgaven	97		Kennis- en vaardigheidentest	172
				Gemengde opgaven	174
				Werkbladen	176
				Antwoorden Kennis- en vaardigheidentests	181
				Overzicht GR-modules	183
				Trefwoordenregister	184
				Verantwoording	186





1

Lineaire en kwadratische vormen

Bij een sponsorloop konden de leerlingen uit klas 4hd kiezen uit het lopen van 3 of 5 kilometer.
De 30 leerlingen hebben in totaal 126 kilometer gelopen.
Hoeveel leerlingen hebben 5 kilometer gelopen?

1.1 Lineaire verbanden

Kennis en vaardigheden

- Je kent de eigenschappen van een lineair verband.
- Je kunt de formule van een lijn opstellen bij een tekst.
- Je kunt de formule van een lijn opstellen bij een gegeven grafiek.
- Je kunt de formule van een lijn opstellen bij een gegeven punt en richtingscoëfficiënt.

Voorkennis Lineaire vergelijkingen oplossen

Gebruik bij het oplossen van lineaire vergelijkingen het volgende werkschema.

Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

- 1 Werk de haakjes en de breuken weg.
- 2 Herleid beide leden.
- 3 Zorg ervoor dat in het linkerlid alleen een term met x overblijft en in het rechterlid alleen een getal.
- 4 Deel beide leden door het getal dat voor x staat.

Zo gaat het oplossen van de vergelijking $2(x - 1) - x = 3x + 4$ als volgt.

$$2(x - 1) - x = 3x + 4 \quad \text{Werk de haakjes weg.}$$

$$2x - 2 - x = 3x + 4 \quad \text{Herleid beide leden.}$$

$$x - 2 = 3x + 4 \quad \text{Links en rechts } 3x \text{ aftrekken en } 2 \text{ optellen.}$$

$$-2x = 6 \quad \text{Deel beide leden door } -2.$$

$$x = -3$$

V1 In welke stap bij het oplossen van de vergelijking $2x - \frac{1}{5} = \frac{2}{3}x + 3$ zit een fout?

$$2x - \frac{1}{5} = \frac{2}{3}x + 3$$

$$30x - 1 = 10x + 45 \quad \text{stap 1}$$

$$20x = 46 \quad \text{stap 2}$$

$$x = 2\frac{3}{10} \quad \text{stap 3}$$

A stap 1

B stap 2

C stap 3

D geen fout

V2 In de vergelijking $\frac{2}{3}(x - 4) = \frac{1}{5}(2x + 5)$ staan zowel haakjes als breuken. Je kunt de vergelijking oplossen door eerst de haakjes weg te werken en dan de breuken, maar het kan ook andersom. Geef een uitwerking volgens beide manieren. Krijg je inderdaad beide keren de oplossing $x = 13\frac{3}{4}$?

V3 Los op.

a $5x - 2 = 3x + 6$

b $4 - 5(x - 1) = 3(2x + 1)$

c $3x - 0,8 = 2,4x + 1,6$

d $10 - 3(x + 1) = 5x - (2x - 1)$

e $\frac{3}{5}(2x - 1) = 1\frac{2}{5}x - 2$

f $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{2}x + 2$

g $\frac{4}{5}x - 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}x - 3$

h $\frac{2}{7}(4x - 1) = \frac{3}{4}(1 - 5x)$

O1 De lijn k in de figuur hiernaast snijdt de x -as in het punt $A(-2, 0)$ en de y -as in het punt $B(0, 1)$.

☐ ⊗ *

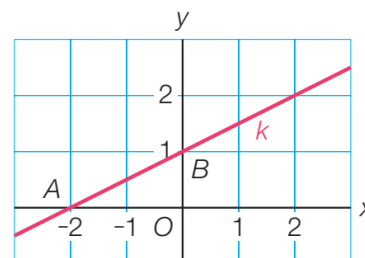
Welke formule hoort bij deze lijn?

A $y = -2x + 1$

C $y = \frac{1}{2}x + 1$

B $y = x - 2$

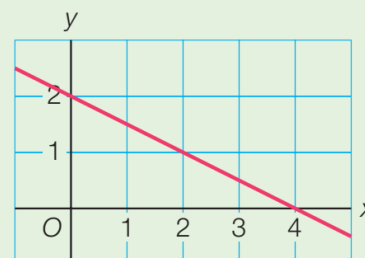
D $y = \frac{1}{2}x + 2$



Theorie A Lineair verband en richtingscoëfficiënt

In de figuur hiernaast is de grafiek van de lineaire formule $y = -\frac{1}{2}x + 2$ getekend. We zeggen dat er een lineair verband is tussen x en y . De bijbehorende grafiek is een lijn.

Andere voorbeelden van lineaire formules zijn $h = 5t + 20$, $A = 18 - 3p$, $y = 2 + 0,7x$ en $p = -20q$.



Bij een formule van de vorm $y = ax + b$ is y een lineaire functie van x .

Voor de bijbehorende lijn geldt:

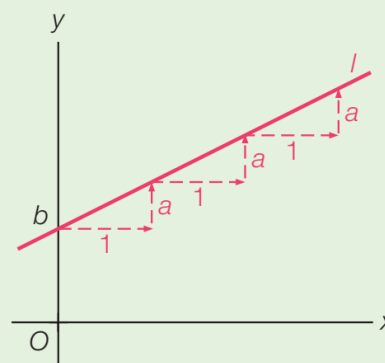
- het snijpunt met de y -as is $(0, b)$
- ga je 1 naar rechts, dan ga je a omhoog.

Het getal a heet de richtingscoëfficiënt van de lijn.

In plaats van richtingscoëfficiënt zeggen we ook wel helling.

Heeft lijn l richtingscoëfficiënt 3, dan noteren we dit als $rc_l = 3$.

**Van de lijn $y = ax + b$ is de richtingscoëfficiënt a .
rc = a betekent: 1 naar rechts en a omhoog.**

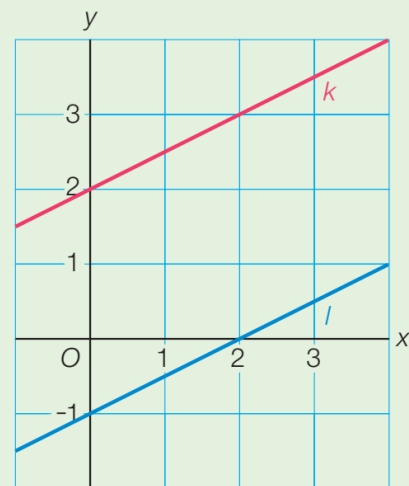


rc = a betekent:
1 naar rechts en a omhoog.

rc = -2 betekent: 1 naar rechts en -2 omhoog, en dat is hetzelfde als 1 naar rechts en 2 omlaag. Bij rc = 0 hoort een horizontale lijn.

In de figuur hiernaast zijn de evenwijdige lijnen $k: y = \frac{1}{2}x + 2$ en $l: y = \frac{1}{2}x - 1$ getekend. Deze lijnen hebben beide $rc = \frac{1}{2}$.

Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.



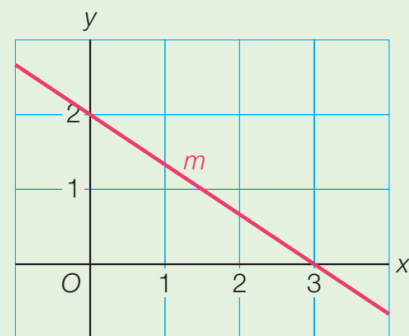
Om een lijn te tekenen, maak je een tabel met de coördinaten van twee punten.

Bij de lijn $m: y = -\frac{2}{3}x + 2$ krijg je

x	0	3
y	2	0

← $x = 0$ geeft $y = 2$
 $x = 3$ geeft $y = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 2 = 0$

Dus de lijn gaat door de punten $(0, 2)$ en $(3, 0)$.
 Zie de figuur hiernaast.



2 Gegeven zijn de lijnen $k: y = -3x + 2$, $l: y = \frac{1}{2}x - 1$ en $m: y = 2x$.



- Teken deze lijnen in één figuur.
- Geef van elk van deze lijnen de richtingscoëfficiënt.
 Begin met $rc_k = \dots$
- Om de coördinaten van het snijpunt A van k en l te berekenen, los je de vergelijking $-3x + 2 = \frac{1}{2}x - 1$ op.
 Licht dit toe en bereken de coördinaten van A .
- Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en m en de coördinaten van het snijpunt C van l en m .

3 Voor elke waarde van b is de grafiek van $y = 2x + b$ een lijn.



- Voor $b = -3$ krijg je de lijn $y = 2x - 3$.
 Teken deze lijn.
- Voor welke b krijg je een lijn door de oorsprong?
- Om te berekenen voor welke b de lijn door het punt $(3, 5)$ gaat, los je de vergelijking $2 \cdot 3 + b = 5$ op.
 Licht deze vergelijking toe en bereken b .
- Voor welke b snijdt de lijn de x -as in het punt $(-3, 0)$?

- 4** Voor elke waarde van a is de grafiek van $y = ax - 6$ een lijn.
 □ ⊗ * **a** Voor welke a is de lijn evenwijdig met de lijn $y = 3x - 1$?
b Voor welke a snijdt de lijn de x -as in het punt $(3, 0)$?
c Is er een waarde van a waarvoor de lijn door de oorsprong gaat? Licht toe.
d Voor welke a en b snijden de lijnen $y = ax - 6$ en $y = 4x + b$ elkaar in het punt $(2, -1)$?

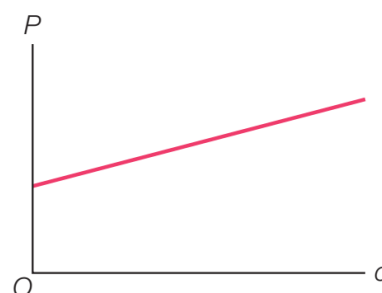
- A5** Gegeven zijn de lijnen $k: y = -\frac{1}{2}x - 2$, $l: y = ax + 1$ en $m: y = \frac{1}{2}x + b$.
 □ ⊗ * **a** Voor welke a zijn k en l evenwijdig?
b Voor welke b gaat m door het punt $A(2, -3)$?
c Voor welke a hebben k en l hetzelfde snijpunt met de x -as?
d Voor welke a en b snijden l en m elkaar in het punt $B(4, -4)$?

- A6** Gegeven zijn de lijnen $k: y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$, $l: y = -\frac{2}{3}x + 8\frac{1}{2}$ en $m: y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$.
 ⊗ * Het snijpunt van k en l is A en het snijpunt van l en m is B .
 Bereken het verschil tussen de y -coördinaten van A en B .

- 07** Hoe dieper je onder water komt, hoe hoger de druk wordt. Onder water neemt de druk per 10 meter met 1000 hPa toe. Neem aan dat de druk aan het wateroppervlak 1020 hPa is.

- ⊗ * **a** Bereken de druk op een diepte van 2 meter en op een diepte van 14 meter.
b Welke formule geeft het verband tussen de druk P in hPa en de diepte d in meters?

- A** $P = 1000d + 1020$ **C** $P = 100d + 1020$
B $P = 1020 - 100d$ **D** $P = 0,01d + 1020$

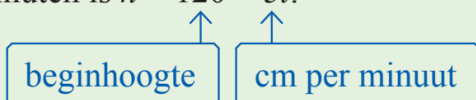


Theorie B De formule van een lijn opstellen

Bij het opstellen van een lineaire formule kunnen de volgende situaties voorkomen.

1 De formule volgt uit de tekst.

Een cilindervormige bak met water stroomt met constante snelheid leeg. Op $t = 0$ is de waterhoogte 120 cm en per minuut daalt het water 5 cm. De formule van de hoogte h in cm als functie van de tijd t in minuten is $h = 120 - 5t$.



2 Van een lijn zijn het snijpunt met de verticale as en de richtingscoëfficiënt uit de figuur te halen.

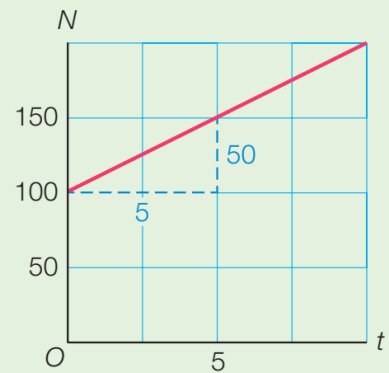
Zie de figuur hiernaast.

Ga uit van $N = at + b$.

Het snijpunt met de N -as is $(0, 100)$, dus $b = 100$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{50}{5} = 10$$

Dus $N = 10t + 100$.



3 Van een lijn zijn een punt en de richtingscoëfficiënt gegeven.

De lijn k gaat door het punt $(12, 7)$ en heeft $rc_k = \frac{1}{3}$.

Ga uit van $y = ax + b$.

$$a = rc_k = \frac{1}{3}, \text{ dus } y = \frac{1}{3}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot 12 + b = 7 \\ 4 + b = 7 \\ b = 3 \end{array} \right.$$

Dus k : $y = \frac{1}{3}x + 3$.

$(12, 7)$ op de lijn $y = \frac{1}{3}x + b$
geeft de vergelijking
 $\frac{1}{3} \cdot 12 + b = 7$.

4 Van een lijn zijn twee punten gegeven.

De aanpak bij deze situatie leer je in de volgende paragraaf.

8



- a** Op een dag is er om 8 uur al 0,7 cm neerslag gevallen. Op dat moment begint het opnieuw te regenen, waarbij er 0,5 mm neerslag per minuut valt.

Stel de formule op van de hoeveelheid neerslag N in mm als functie van de tijd t in minuten met $t = 0$ om 8 uur.

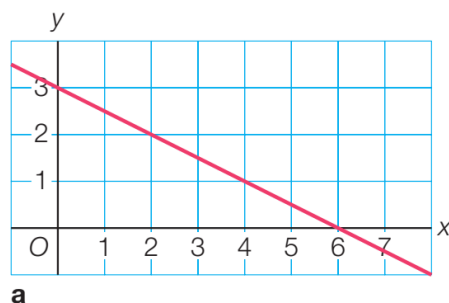
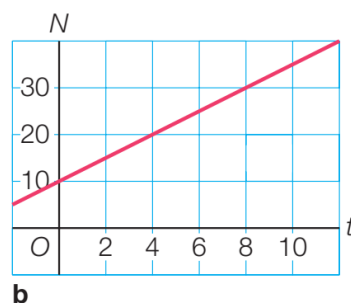
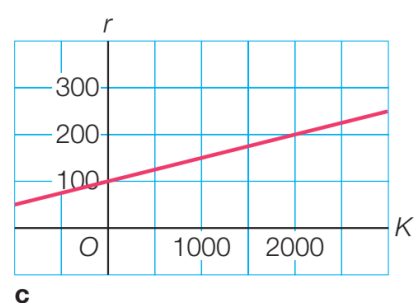
- b** Op 1 juli staat het water in een vijver 140 cm hoog. Vervolgens verdampt er tijdens een warme periode per dag een laagje van 2 mm water uit de vijver.

Stel de formule op van de hoogte H in cm van het water in de vijver als functie van de tijd t in dagen met $t = 0$ op 1 juli.

9



Stel van elk van de volgende lijnen de formule op.



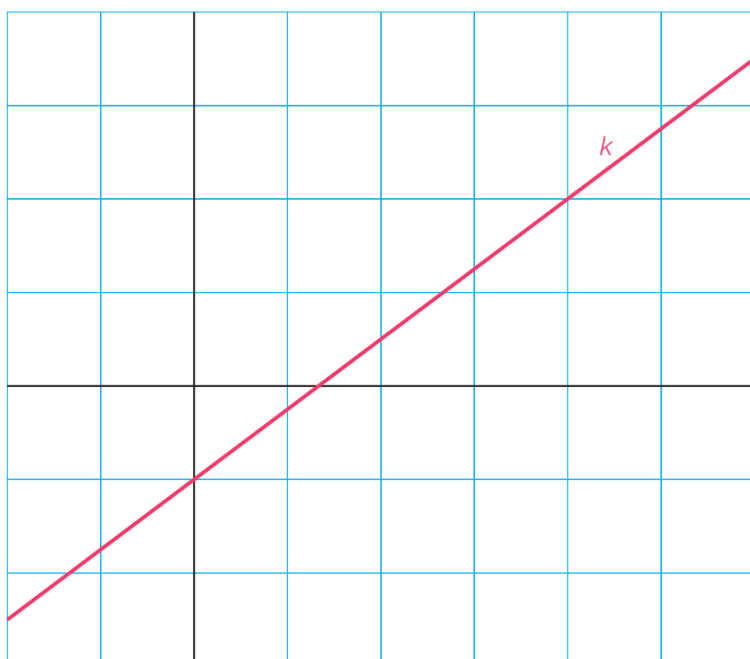
- 10** **a** De lijn k gaat door het punt $A(-5, 21)$ en heeft helling 4.
 Stel de formule op van k .
b De lijn m met $rc_m = -\frac{1}{2}$ gaat door het punt $B(-18, 30)$.
 Bereken de coördinaten van de snijpunten van m met de x -as en de y -as.

- 11** De lijn k gaat door het punt $P(1, 4)$ en heeft helling $-\frac{3}{4}$.
 De lijn l met $rc_l = \frac{1}{4}$ gaat door het punt $Q(3, 0)$.
 Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l .

- 12** De lijn $k: y = ax + b$ gaat door het punt $Q(18, -10)$ en is
 evenwijdig met de lijn $l: y = -2x - 16$.
 Bereken a en b .

- 13** De lijn k met $rc_k = 2$ gaat door het punt $A(-3, 2)$.
 * De lijn l gaat door het punt $B(8, -1)$ en er geldt $rc_k \cdot rc_l = -1$.
 De lijn m met $rc_m = -rc_k$ gaat door het snijpunt S van k en l .
 Onderzoek of m door de oorsprong gaat.

- 14** Hieronder is de lijn k getekend in een assenstelsel waarin de
 * letters en de getallen bij de assen ontbreken. De formule van k
 is $P = 12,5t - 250$.
 Zet de juiste letters en getallen bij de assen.



A15

Een cilindervormige bak met een hoogte van 80 cm wordt gevuld met water. Het water stroomt met een constante snelheid uit de kraan.

Op $t = 0$ is de waterhoogte 5 cm en per minuut stijgt het water 3 cm.

a Stel de formule op van de hoogte h van het water in cm, t minuten nadat de kraan is opengezet.

b Na hoeveel minuten stroomt de bak over?

Nadat de bak vol is, laat men de bak met een constante snelheid weer leegstromen.

Zie de figuur hiernaast.

c Stel de formule op van h .

d Het leegstromen wordt gestopt als het water in de bak 20 cm hoog staat. Vanaf dat moment wordt de bak weer gevuld met een constante stroom water waardoor het water per minuut 2 cm stijgt.

Stel de formule op die bij het vullen hoort.

Neem de tijd t in minuten met $t = 0$ op het moment dat de bak vol was en het leegstromen begon.

**A16**

Het water in een recreatieplas heeft op 1 mei een temperatuur van 8°C .

Daarna warmt het water elke week op met $1,4^{\circ}\text{C}$.

a Stel de formule op van de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ van het water in de recreatieplas als functie van de tijd t in dagen. Neem $t = 0$ op 1 mei.

Op 15 juli is de temperatuur van het water 23°C en dat blijft zo tot 1 september. Vanaf 1 september neemt de temperatuur af met $2,4^{\circ}\text{C}$ per maand.

b Stel de formule op van de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ van het water t dagen na 1 september, en bereken hiermee hoeveel dagen na 1 september de temperatuur weer 8°C is. Neem aan dat elke maand 30 dagen telt.



Met de kennis- en vaardighedencheck kun je controleren of je de kennis en vaardigheden van de paragraaf kent en beheerst. Achter elke kennis of vaardigheid wordt verwezen naar de bijbehorende checkopgave en theorie.

Maak de checkopgave en controleer je antwoord. De antwoorden staan onder de opgaven. Heb je het antwoord niet goed of twijfel je hoe je de uitwerking moet noteren, bekijk dan het uitwerkingenboek en bestudeer zo nodig nogmaals de aangegeven theorie.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik ken de eigenschappen van een lineair verband.
- ☐ Ik kan de formule van een lijn opstellen bij een tekst.
- ☐ Ik kan de formule van een lijn opstellen bij een gegeven grafiek.
- ☐ Ik kan de formule van een lijn opstellen bij een gegeven punt en richtingscoëfficiënt.

► **OPGAVE C1**
THEORIE A

► **OPGAVE C2a**
THEORIE B

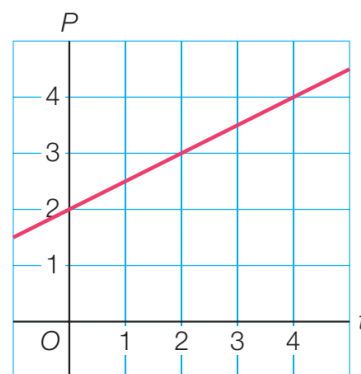
► **OPGAVE C2b**
THEORIE B

► **OPGAVE C2c**
THEORIE B

C1 Gegeven zijn de lijnen k : $y = ax + 2$, l : $y = -2x + 3$ en m : $y = 4x + b$.

- a** Voor welke a zijn k en l evenwijdig?
- b** Voor welke b hebben k en m hetzelfde snijpunt met de y -as?
- c** Neem $b = -9$ en bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen l en m .

- C2** **a** Een plant groeit in de maand mei 3 cm per dag. Op 1 mei is de plant 14 cm hoog. Stel de formule op van de hoogte H van de plant als functie van de tijd t . Neem H in cm en t in dagen met $t = 0$ op 1 mei.
- b** Stel de formule op van de lijn in de figuur hiernaast.
- c** De lijn l met $rc_l = -\frac{1}{3}$ gaat door het punt $A(12, 5)$. Stel de formule op van l .



Antwoorden

- C1** **a** $a = -2$
b $b = 2$
c $S(2, -1)$

- C2** **a** $H = 3t + 14$
b $P = \frac{1}{2}t + 2$
c $l: y = -\frac{1}{3}x + 9$

1.2 Een lijn door twee gegeven punten

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de formule van een lijn opstellen bij twee gegeven punten.
- Je kunt de formule van een lineair verband opstellen bij een praktische situatie.

O17 Gegeven zijn de punten $A(3, 4)$ en $B(5, 7)$.

□ ⊗ * De x -coördinaat van A is 3. We noteren $x_A = 3$.

De y -coördinaat van A is 4. We noteren $y_A = 4$.

a Hoe noteer je dat de x -coördinaat van B gelijk is aan 5?

En hoe dat de y -coördinaat van B gelijk is aan 7?

b Bereken $x_B - x_A$ en $y_B - y_A$.

O18 De lijn l gaat door de punten $A(2, 1)$ en $B(6, 4)$.

□ ⊗ * Zie de figuur hiernaast.

a Vul in.

Voor de lijn l geldt:

ga je 4 naar rechts, dan ga je 3 omhoog, dus

ga je 1 naar rechts, dan ga je omhoog.

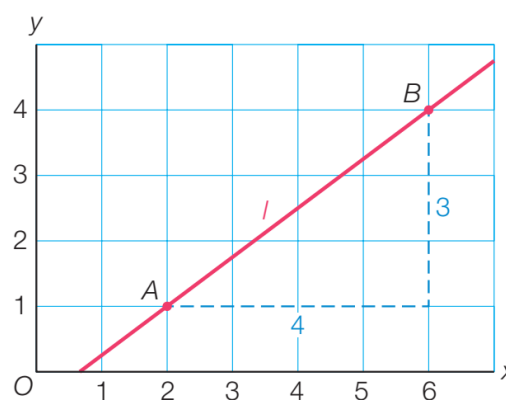
Dus $rc_l = \dots\dots\dots$

b Er geldt dat $x_B - x_A = 6 - 2 = 4$.

Vul in.

$y_B - y_A = \dots\dots\dots$

c Hoe kun je met $x_B - x_A$ en $y_B - y_A$ de richtingscoëfficiënt van l berekenen?



Theorie A De formule van een lijn door twee gegeven punten

Bij de opgaven die hierna komen, heb je regelmatig je rekenmachine nodig. We gaan ervan uit dat je over een grafische rekenmachine (GR) beschikt. Je kunt hiermee leren werken door af en toe een module uit de handleiding GR door te nemen. Deze handleiding vind je in de digitale leeromgeving van Getal & Ruimte.

[►GR] Neem de module **Berekeningen op het basisscherm** door.

Zijn van een lijn twee punten gegeven, dan is de richtingscoëfficiënt te berekenen. Daarbij gebruiken we de notatie x_A voor de x -coördinaat van A en y_A voor de y -coördinaat van A . Evenzo gebruiken we x_B en y_B .

Voor de lijn l in de figuur hiernaast geldt:
 ga je $x_B - x_A$ naar rechts, dan ga je $y_B - y_A$ omhoog,
 dus ga je 1 naar rechts, dan ga je $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ omhoog.

$$\text{Dus } rc_l = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Voor $y_B - y_A$ schrijven we Δy , dus $\Delta y = y_B - y_A$.

Voor $x_B - x_A$ schrijven we Δx , dus $\Delta x = x_B - x_A$.

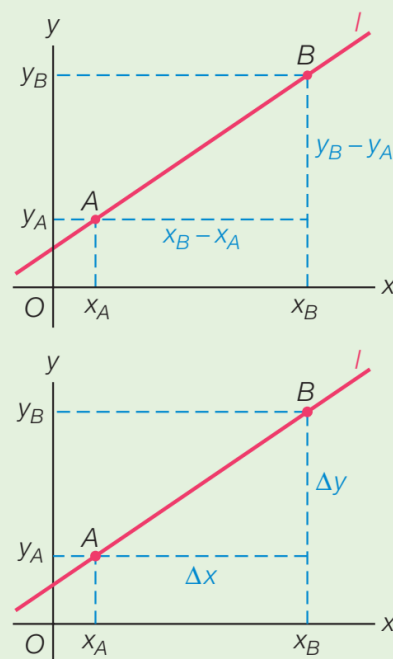
Δ is de Griekse hoofdletter D. Je spreekt Δ uit als *delta*.

D is de eerste letter van *differentie*, dat verschil betekent.

Van de lijn $y = ax + b$ door de punten A en B

is de richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

In het voorbeeld wordt gevraagd om een **vergelijking van de lijn l** door de punten P en Q op te stellen. De begrippen *formule van een lijn* en *vergelijking van een lijn* gebruiken we door elkaar.



Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de lijn l door de punten $P(2, -1)$ en $Q(6, 5)$.

Uitwerking

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-1)}{6 - 2} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$y = 1\frac{1}{2}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1 \\ 3 + b = -1 \\ b = -4 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } l: y = 1\frac{1}{2}x - 4.$$

R19



a In het voorbeeld is $\Delta y = y_Q - y_P$ genomen.

Wat krijg je als je $\Delta y = y_P - y_Q$ neemt?

Welke Δx hoort daarbij? Krijg je zo ook $rc_l = 1\frac{1}{2}$?

b In het voorbeeld is het punt $P(2, -1)$ gebruikt om b te berekenen.

Krijg je ook $b = -4$ als je het punt $Q(6, 5)$ gebruikt?

20 Stel een vergelijking op van de lijn

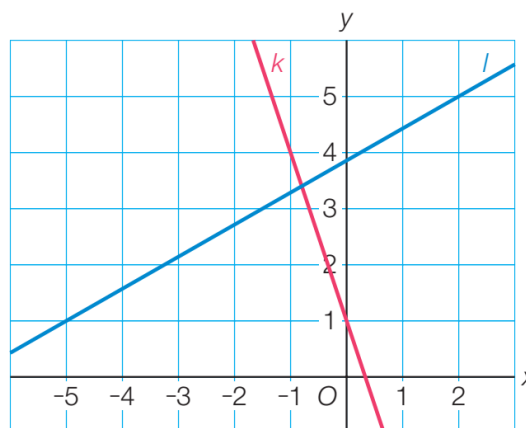


- a** k door de punten $A(1, -3)$ en $B(5, 5)$
- b** l door de punten $C(5, 3)$ en $D(-7, 3)$
- c** m door de punten $E(180, 360)$ en $F(160, 250)$
- d** n door de punten $G(15, 73)$ en $H(45, 58)$.

21 Zie de figuur hiernaast met de lijnen k en l .



Stel van elk van deze lijnen de formule op.



A22 De lijn k gaat door de punten $A(8, 8)$ en $B(20, 11)$ en de



lijn l gaat door de punten $C(2, 14)$ en $D(50, -10)$.

Bereken de coördinaten van het snijpunt E van deze lijnen.

A23 De lijn k gaat door de punten $A(a, a)$, $B(2a, \frac{1}{2}a)$ en $C(6, 0)$.



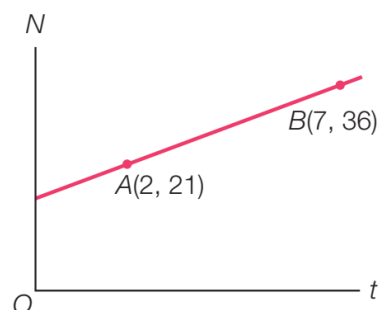
Bereken a .

O24 De lijn in de figuur hiernaast gaat door de punten



$A(2, 21)$ en $B(7, 36)$. De vergelijking van deze lijn heeft de vorm $N = at + b$.

Bereken a en b .



Theorie B Lineaire formules opstellen bij praktische situaties

Bij praktische situaties worden vaak andere letters dan x en y gebruikt, maar het daarbij opstellen van lineaire formules gaat op dezelfde manier.

Is r een lineaire functie van s , dan is $r = as + b$ met $a = \frac{\Delta r}{\Delta s}$.

Is K een lineaire functie van m , dan is $K = am + b$ met $a = \frac{\Delta K}{\Delta m}$.

Bij de formule $K = am + b$ is K een functie van m . Je kunt ook zeggen dat K is **uitgedrukt in** m .

Voorbeeld

Een auto begint te remmen, waarbij de snelheid lineair afneemt.

Na 2 seconden is de snelheid 90 km/u en na 5 seconden is de snelheid 45 km/u.

Druk de snelheid v in km/u uit in de tijd t in seconden, met $t = 0$ op het moment dat de auto begint met remmen.

Uitwerking

$$v = at + b$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{bij } t = 2 \text{ hoort } v = 90 \\ \text{bij } t = 5 \text{ hoort } v = 45 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{45 - 90}{5 - 2} = -15$$

$$\left. \begin{array}{l} v = -15t + b \\ t = 2 \text{ en } v = 90 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -15 \cdot 2 + b = 90 \\ -30 + b = 90 \\ b = 120 \end{array}$$

Dus $v = -15t + 120$.

$$\text{Bij } v = at + b \text{ hoort } a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

25



a K is een lineaire functie van m .

Voor $m = 5$ is $K = 10$ en voor $m = 12$ is $K = 115$.

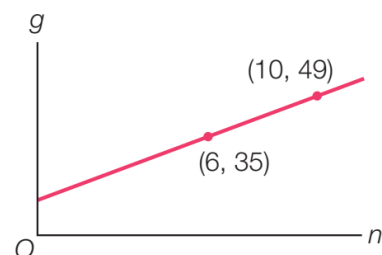
Druk K uit in m .

b F is een lineaire functie van R .

Voor $R = 15$ is $F = 300$ en voor $R = 42$ is $F = 138$.

Schrijf F als functie van R .

c Stel een vergelijking op van de lijn hiernaast.



26



Een trein rijdt met een constante snelheid.

Om 13:12 uur is de trein 18,2 km van station Houten verwijderd en om 13:17 uur is deze afstand nog 7,2 km.

a Hoe ver is de trein om 13:19 uur van station Houten verwijderd?

b De trein stopt niet in Houten, maar rijdt met onverminderde snelheid langs het station.

Bereken hoe laat dit gebeurt. Rond af op tientallen seconden.

A27



Tijdens een pandemie is het aantal toegediende doses vaccin per

100 inwoners tussen 1 januari en 1 juli van een jaar lineair toegenomen.

Op 31 januari waren er 15 doses per 100 inwoners toegediend en op 1 mei waren dat er 75.

a Stel de formule op van het aantal toegediende doses per 100 inwoners N als functie van de tijd t in dagen, met $t = 1$ op 1 januari. Gebruik dat bij 1 mei $t = 121$ hoort.

b Op welke dag is het aantal doses per 100 inwoners gelijk aan 85?

A28 Hieronder staan gegevens over de lengte en het gewicht van volwassen Nederlandse mannen en vrouwen. Gebruik deze gegevens om formules op te stellen en de vraag te beantwoorden.

*

De volwassen Nederlander wordt gemiddeld steeds langer en zwaarder. In 1986 had de Nederlandse man een gemiddelde lengte van 177,5 cm en een gemiddeld gewicht van 77,6 kg. In 2016 was dat 181,1 cm en 84,5 kg.

De Nederlandse vrouw woog in 2020 gemiddeld 72,0 kg. Dat was 4,5 kg meer dan in 1995. In 2020 was de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw 167,5 cm. Dat was 1,3 cm meer dan in 1994.

Neem aan dat er lineaire verbanden bestaan tussen de tijd t in jaren en het gewicht in kg, en tussen t en de lengte in cm. Neem bovendien aan dat deze lineaire verbanden ook de komende jaren gelden. Neem $t = 0$ in het jaar 1980.

Een bekende maat om na te gaan of er sprake is van een gezond gewicht of van overgewicht is de Body Mass Index (BMI). De BMI bereken je met de formule $BMI = \frac{\text{gewicht}}{\text{lengte}^2}$. Hierin is het gewicht in kg en de lengte in meters.

Bij een BMI van 18,5 tot 25 is sprake van een gezond gewicht, bij 25 tot 27 is er licht overgewicht en bij 27 tot 30 is er matig overgewicht.

Bram beweert dat tussen 1990 en 2020 de BMI van de Nederlandse man meer gestegen is dan de BMI van de Nederlandse vrouw. Onderzoek of Bram gelijk heeft.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan de formule van een lijn opstellen bij twee gegeven punten.

☐ Ik kan de formule van een lineair verband opstellen bij een praktische situatie.

► OPGAVE C3
THEORIE A

► OPGAVE C4
THEORIE B

C3 Stel de formule op van de lijn k door de punten $A(-6, -4)$ en $B(3, 8)$.

C4 Tijdens een vlucht van een Airbus A320 is er na 250 km vliegen 11 ton kerosine in de brandstoftanks aanwezig, 1200 km verder is dat nog 7,4 ton. Er bestaat een lineair verband tussen de aanwezige hoeveelheid kerosine k in ton en de vluchtafstand V in km. Stel de formule op van k als functie van V .

Antwoorden

C3 $k: y = 1\frac{1}{3}x + 4$

C4 $k = -0,003V + 11,75$

1.3 De vergelijking $ax + by = c$

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij een tekst een lineaire vergelijking met twee variabelen opstellen.
- Je kunt bewerkingen uitvoeren met lineaire vergelijkingen met twee variabelen.

O29

□ ⊗ *

Een aannemer wil op een stuk grond van 10 000 m² twee typen huizen neerzetten. Voor een huis van type A is 500 m² grond nodig. Voor een huis van type B is dat 200 m². Neem aan dat de aannemer x huizen van type A neerzet en y huizen van type B.

Welk verband hoort hierbij?

A $500x + 200y = 10\,000$

C $700xy = 10\,000$

B $200x + 500y = 10\,000$

D $2,5xy = 10\,000$

O30

□ ⊗ *

Je kunt het verband $3x + 2y = 18$ schrijven in de vorm $y = \dots$

Welke formule krijg je?

A $y = 3x + 9$

C $y = -1\frac{1}{2}x + 9$

B $y = -\frac{2}{3}x + 9$

D $y = -3x + 9$

O31

□ ⊗ *

Als je $x = 4$ en $y = 3$ invult in het verband $6x - 5y = 9$, dan klopt de vergelijking.

a Ga dit na.

b Onderzoek of de vergelijking klopt als je invult

- $x = -1$ en $y = -3$
- $x = 9$ en $y = 9$
- $x = -5$ en $y = -8$

Theorie A Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

Bij een schouwburgvoorstelling zijn de entreprijzen € 12 en € 15. De totale opbrengst van de kaartverkoop bedraagt € 2520. Stel x is het aantal verkochte kaartjes van € 12 en y is het aantal verkochte kaartjes van € 15, dan bestaat tussen x en y het verband $12x + 15y = 2520$.

Je kunt bij dit verband y uitdrukken in x . Je werkt dan toe naar de vorm $y = ax + b$. Je krijgt $12x + 15y = 2520$

$$15y = -12x + 2520$$

$$y = -0,8x + 168$$

Je ziet dat er een lineair verband tussen x en y bestaat. De grafiek van $12x + 15y = 2520$ is dus een lijn.

De vergelijking $12x + 15y = 2520$ is een voorbeeld van een

lineaire vergelijking met twee variabelen.

Andere voorbeelden van lineaire vergelijkingen met twee variabelen zijn $x + 7y = 60$, $3x - 2y = 5$ en $3p - 2q = 16\frac{1}{2}$.

**De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$.
De bijbehorende grafiek is een lijn.**

Voor $a = 2$, $b = -3$ en $c = 12$ krijg je $2x - 3y = 12$.

Bij deze vergelijking kun je y uitdrukken in x .

We zeggen ook wel: je kunt y **vrijmaken**.

Dit gaat als volgt.

$$2x - 3y = 12$$

$$-3y = -2x + 12$$

$$y = \frac{2}{3}x - 4$$

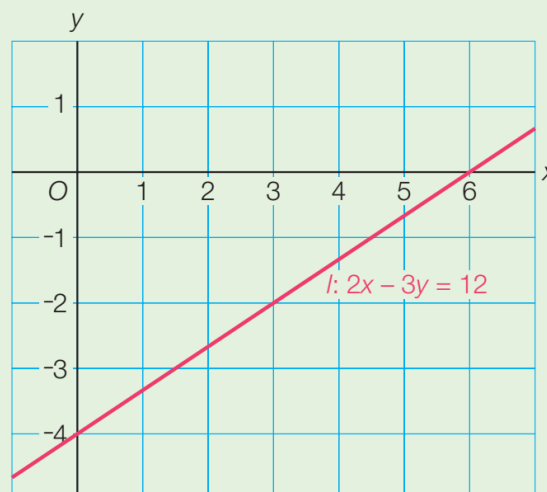
Uit deze formule kun je direct de richtingscoëfficiënt $\frac{2}{3}$ en de coördinaten $(0, -4)$ van het snijpunt met de y -as aflezen.

Om de lijn l : $2x - 3y = 12$ te tekenen, is het niet nodig om y vrij te maken, want ook bij de vorm $2x - 3y = 12$ kun je een tabel maken met de coördinaten van twee punten.

x	0	6
y	-4	0

$x = 0$ geeft $-3y = 12$, dus $y = -4$.
 $y = 0$ geeft $2x = 12$, dus $x = 6$.

Dus de lijn l gaat door de punten $(0, -4)$ en $(6, 0)$. Zie de figuur hiernaast.



Het punt $(9, 2)$ ligt op l , want invullen geeft $2 \cdot 9 - 3 \cdot 2 = 12$ en dit klopt. We zeggen dat $(x, y) = (9, 2)$ een *oplossing* is van de vergelijking $2x - 3y = 12$.

Zo is ook $(x, y) = (7\frac{1}{2}, 1)$ een oplossing, want $2 \cdot 7\frac{1}{2} - 3 \cdot 1 = 12$ klopt.

De oplossingen van $2x - 3y = 12$ zijn de getallenparen (x, y) die aan de vergelijking **voldoen**.

Voorbeeld

Gegeven is de lijn l : $3x - 5y = 10$.

- a Voor welke p ligt het punt $A(4, p)$ op l ?
- b Voor welke q is $(x, y) = (q, 6)$ een oplossing van $3x - 5y = 10$?
- c Bereken de richtingscoëfficiënt van l .

Uitwerking

- a $A(4, p)$ op l , dus $3 \cdot 4 - 5 \cdot p = 10$

$$12 - 5p = 10$$

$$-5p = -2$$

$$p = \frac{2}{5}$$

- b $(x, y) = (q, 6)$ is een oplossing, dus $3 \cdot q - 5 \cdot 6 = 10$

$$3q - 30 = 10$$

$$3q = 40$$

$$q = 13\frac{1}{3}$$

- c $3x - 5y = 10$

$$-5y = -3x + 10$$

$$y = \frac{3}{5}x - 2$$

$$\text{Dus } rc_l = \frac{3}{5}.$$

32



- a Jan koopt bij een tuincentrum twaalf coniferen en vier appelboompjes. Hij moet hiervoor €242,40 betalen.

Stel dat één conifeer x euro kost en één appelboompje y euro.

Welk verband tussen x en y volgt hieruit?

- b Voor een concert zijn kaartjes te koop van 10 en 15 euro. De totale opbrengst van de kaartverkoop is 4300 euro.

Stel bij deze gegevens een lineaire vergelijking op met de variabelen x en y .



33



- a Maak y vrij bij $15x + 12y = 2520$.

- b Druk p uit in q bij $3p - 2q = 16\frac{1}{2}$.

- c Maak b vrij bij $5a - 2b = 16$.

34 Gegeven zijn de lijnen $l: 3x - y = 6$, $m: x + y = 1$, $n: x - y = 0$ en $p: x + 2y = 4$.

- a Teken l , m , n en p in één figuur.
- b Bereken van elk van deze lijnen de richtingscoëfficiënt.

35 Gegeven is de lijn $l: 4x - 3y = 24$.

- a Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de x -as en met de y -as en teken l .
- b Onderzoek welke van de punten $A(8, 3)$, $B(18, 16)$ en $C(-30, -48)$ op l liggen.
- c Het getallenpaar $(16, p)$ voldoet aan de vergelijking $4x - 3y = 24$. Bereken p .
- d Voor welke q is $(x, y) = (q, 48)$ een oplossing van $4x - 3y = 24$?

A36 a Bij een kraam op de rommelmarkt kosten de stripboeken 40 cent en 90 cent. Kees koopt voor € 10,80 stripboeken bij deze kraam. Stel bij deze gegevens een lineaire vergelijking op met de variabelen x en y .

- b Maak b vrij bij $6a + 5b = 20$.
- c Voor welke p is $(x, y) = (3, p)$ een oplossing van de vergelijking $px - 5y = 12$?
- d Voor welke a zijn de lijnen $k: 2x - 3y = 12$ en $l: ax + 4y = 8$ evenwijdig?



A37 a De lijn k gaat door de punten $A(3, 2)$ en $B(5, 6)$. Stel een vergelijking op van k van de vorm $y = ax + b$.

- b De lijn l gaat door de punten $C(2, -1)$ en $D(-4, 3)$. Stel een vergelijking op van l van de vorm $ax + by = c$ met a , b en c gehele getallen.
- c De lijn $m: 3x + py = 6$ gaat door het punt $E(4, 3)$. Stel een vergelijking op van m van de vorm $y = ax + b$.

38 Gegeven zijn de lijnen $l: 3x - 4y = 7$ en $m: 3x - 4y = -8$.

- a Bereken rc_l en rc_m .
- b Waarom zijn alle lijnen van de vorm $3x - 4y = c$ evenwijdig?
- c Voor welke waarde van c ligt het punt $A(5, 1)$ op de lijn $3x - 4y = c$?
- d De lijn k gaat door het punt $B(3, -1)$ en is evenwijdig met l . Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

$A(5, 1)$ op $3x - 4y = c$,
dus $c = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1$.

- A39**  **a** De lijn k gaat door het punt $A(5, 8)$ en is evenwijdig met de lijn $l: 2x + y = 8$.

Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

- b** De lijn m gaat door het punt $B(4, -2)$ en is evenwijdig met de lijn $n: 5x + 3y = 39$.

Stel van m een vergelijking op van de vorm $y = ax + b$.

- A40**  ***** De lijn k gaat door het punt $A(-3, 4)$ en is evenwijdig met de lijn n door de punten $B(-4, 2)$ en $C(2, 0)$.

Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$ met a , b en c gehele getallen.

- A41**  De lijn k gaat door het punt $A(-1, 3)$ en is evenwijdig met de lijn l door de punten $B(p, 3p)$ en $C(7p, -p)$ met $p \neq 0$.

Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$ met a , b en c gehele getallen.

- E42** Gegeven is de lijn $k: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

-  ***** De lijn k snijdt de x -as in het punt $(a, 0)$ en de y -as in het punt $(0, b)$.

- a** Licht dit toe.

Uit het bovenstaande volgt dat $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ een vergelijking is van de lijn die de x -as snijdt in het punt $(2, 0)$ en de y -as in het punt $(0, 3)$.

- b** Licht dit toe en schrijf de vergelijking $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ in de vorm

$ax + by = c$ met a , b en c gehele getallen.

- c** De lijn l snijdt de assen in de punten $(-4, 0)$ en $(0, 5)$.

Stel van l een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$ met a , b en c gehele getallen.

- d** De lijn m gaat door de punten $(0, 6)$ en $(3, 0)$.

Stel van m een vergelijking op van de vorm $y = ax + b$.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan bij een tekst een lineaire vergelijking met twee variabelen opstellen.
- ☐ Ik kan bewerkingen uitvoeren met lineaire vergelijkingen met twee variabelen.

► OPGAVE C5
THEORIE A

► OPGAVE C6
THEORIE A

C5 Op een stuk land van 4000 m^2 wil men appelbomen en perenbomen planten. Voor een appelboom is $1,25 \text{ m}^2$ nodig en voor een perenboom $0,9 \text{ m}^2$.
Stel bij deze gegevens een lineaire vergelijking op met de variabelen x en y .

- C6** Gegeven is de lijn k : $2x - 9y = 18$.
- a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van k met de x -as en de y -as en teken k .
 - b** Maak x vrij bij $2x - 9y = 18$.
 - c** Voor welke p is $(x, y) = (p, -3)$ een oplossing van $2x - 9y = 18$?
 - d** Het getallenpaar $(3, q)$ voldoet aan de vergelijking $2x - 9y = 18$. Bereken q .
 - e** De lijn l gaat door het punt $A(5, 6)$ en is evenwijdig met k . Stel van l een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

Antwoorden

C5 $1,25x + 0,9y = 4000$

C6 a $(9, 0)$ en $(0, -2)$

b $x = 4\frac{1}{2}y + 9$

c $p = -4\frac{1}{2}$

d $q = -1\frac{1}{3}$

e l : $2x - 9y = -44$

* geeft aan dat een antwoord hier niet is opgenomen. Het gaat dan om antwoorden zoals tabellen, figuren, redeneringen en toelichtingen.

1.4 Stelsels vergelijkingen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt een stelsel oplossen door eliminatie.
- Je kunt een praktisch probleem oplossen met behulp van een stelsel.
- Je kunt de coördinaten van het snijpunt van twee lijnen berekenen met behulp van een stelsel.
- Je kunt een stelsel oplossen door substitutie.

O43



Je kunt de vergelijkingen $5x + y = 6$ en $3x + y = 1$ van elkaar aftrekken.

Welke vergelijking krijg je?

A $2x = 7$

B $2x = 5$

C $2x + 2y = 7$

D $2x + 2y = 5$

Theorie A Stelsels vergelijkingen oplossen door elimineren

In de figuur hiernaast zie je de lijnen l : $3x + y = 15$ en m : $x + y = 7$. Het punt $(4, 3)$ is het snijpunt van deze lijnen. Daarom is $(x, y) = (4, 3)$ zowel oplossing van $3x + y = 15$ als van $x + y = 7$. We zeggen dat

$(x, y) = (4, 3)$ de oplossing is van het stelsel

$$\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Omdat je in het stelsel hierboven met twee lineaire vergelijkingen te maken hebt, noemen we dit een **stelsel van twee lineaire vergelijkingen**.

Niet altijd is de oplossing van een stelsel uit een figuur af te lezen. Je kunt de oplossing dan berekenen door de vergelijkingen bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken.

Bij het stelsel $\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x + y = 7 \end{cases}$ begin je met de vergelijkingen van elkaar af te trekken, want dan valt de y weg. Dat gaat als volgt.

$$\begin{array}{r} 3x + y = 15 \\ x + y = 7 \\ \hline 2x = 8 \\ x = 4 \end{array}$$

We zeggen dat y geëlimineerd is. **Elimineren** betekent wegwerken.

Door vervolgens $x = 4$ in een van de vergelijkingen in te vullen, bereken je y . Invullen in de tweede vergelijking geeft $4 + y = 7$, dus $y = 3$.

Ga na dat $x = 4$ invullen in de eerste vergelijking ook $y = 3$ geeft.

En zo krijg je met deze berekening ook $(x, y) = (4, 3)$.



Bij het oplossen van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen bereken je de coördinaten van het snijpunt van de twee lijnen.

Dat je de vergelijkingen $3x + y = 15$ en $x + y = 7$ van elkaar af mag trekken, wordt verduidelijkt in de figuur hiernaast.

Bij het stelsel $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ -2x - 5y = 11 \end{cases}$ begin je met het optellen van de vergelijkingen, want dan wordt x geëlimineerd. Je krijgt

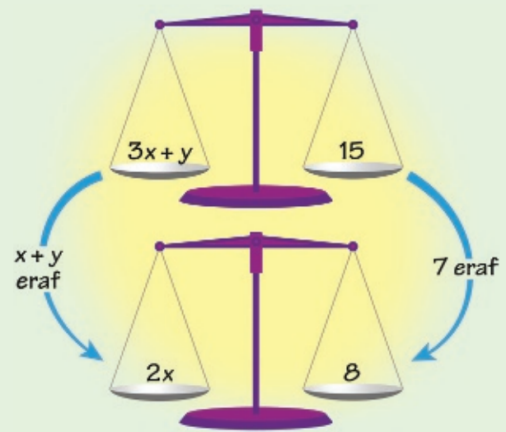
$$\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ -2x - 5y = 11 \end{cases} \quad \begin{array}{r} + \\ \hline -2y = 4 \end{array} \quad \leftarrow \quad \boxed{3y + -5y = -2y}$$

$$y = -2$$

Invullen van $y = -2$ in de eerste vergelijking geeft $2x + 3 \cdot -2 = -7$ en dit geeft $x = -\frac{1}{2}$.

Dus $(x, y) = (-\frac{1}{2}, -2)$ is de oplossing van het stelsel.

In het voorbeeld hieronder zie je hoe je het oplossen van een stelsel opschrijft.



Weer in evenwicht, want links en rechts is hetzelfde eraf gehaald, immers $x + y = 7$.

Schrijf bij de oplossing eerst x en dan y op.

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$ op.

Uitwerking

$$\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ \hline -2y = -8 \end{array} \quad \leftarrow \quad \boxed{-3y - (-5y) = -3y + 5y = 2y}$$

$$y = -4$$

$y = -4$ invullen in $2x - 3y = -5$ geeft $2x - 3 \cdot -4 = -5$

$$2x + 12 = -5$$

$$2x = -17$$

$$x = -8\frac{1}{2}$$

De oplossing is $(x, y) = (-8\frac{1}{2}, -4)$.

R44

- a** Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 15 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

Hoe kun je hier een van de variabelen elimineren: door de vergelijkingen van elkaar af te trekken of door de vergelijkingen bij elkaar op te tellen? Licht toe.

- b** Gegeven is het stelsel $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$

Hoe kun je hier een van de variabelen elimineren: door de vergelijkingen van elkaar af te trekken of door de vergelijkingen bij elkaar op te tellen? Licht toe.

45

Los op.

a $\begin{cases} 5x - 4y = -8 \\ -x + 4y = -12 \end{cases}$

b $\begin{cases} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$

c $\begin{cases} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$

46

Leen heeft in zijn spaarpot uitsluitend munten van 1 en 2 euro.

Met 50 munten heeft hij een bedrag van 87 euro.

Stel het aantal munten van 1 euro is x en het aantal munten van 2 euro is y .

- a** Welke vergelijking volgt uit het gegeven dat Leen 50 munten heeft?
Welke vergelijking volgt uit het gegeven dat het bedrag 87 euro is?
- b** Bereken hoeveel munten van 1 euro Leen heeft door een stelsel op te lossen.

47

Gegeven zijn de lijnen k : $x + 3y = 7$ en l : $3x + 3y = -7$.

Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l door een stelsel op te lossen.

48*****

- a** Los het stelsel $\begin{cases} 3x - y = -5 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}$ op.

- b** Cato verkoopt op een braderie flesjes water en blikjes fris. Een flesje water kost € 1 en een blikje fris € 2. Ze verkoopt in totaal 138 drankjes, met een totale opbrengst van € 233.
Bereken hoeveel flesjes water Cato verkocht heeft door een stelsel op te lossen.

- c** Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen k : $4x - 2y = 6$ en l : $2x + 2y = 3$ door een stelsel op te lossen.

49

De lijn m gaat door de punten $A(0, 25)$ en $B(12, 7)$ en

de lijn n gaat door de punten $C(4, 3)$ en $D(20, 43)$.

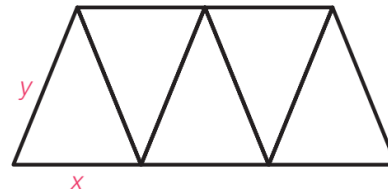
Bereken de coördinaten van het snijpunt T van m en n .

A50 Bij een voetbalcompetitie krijgt een team 3 punten voor een gewonnen wedstrijd en 1 punt voor een gelijkspel. Aan het einde van het seizoen heeft het beste team twee van de 34 wedstrijden verloren en in totaal 82 punten behaald.

Bereken hoeveel wedstrijden dit team heeft gelijkgespeeld.

A51 De figuur hiernaast is opgebouwd uit vijf gelijkbenige driehoeken. De omtrek van één zo'n driehoek is 14 en de omtrek van de figuur is 30.

Bereken de lengtes van de zijden van de gelijkbenige driehoeken.



A52 a Los het stelsel $\begin{cases} a + b = 12 \\ a + c = 13 \\ b + c = 15 \end{cases}$ op.

b De oplossing van het stelsel $\begin{cases} px + qy = 6 \\ px - 2qy = 12 \end{cases}$ is $(x, y) = (3, 4)$.

Bereken p en q .

O53 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

a Tel de vergelijkingen van het stelsel bij elkaar op.

Is nu een van de variabelen geëlimineerd?

b Trek de vergelijkingen van het stelsel van elkaar af.

Is nu een van de variabelen geëlimineerd?

Je kunt de variabele y elimineren door eerst de tweede vergelijking met 2 te vermenigvuldigen. Je krijgt dan de vergelijking $6x - 2y = 2$.

c Los hiermee het stelsel op.

Theorie B Elimineren door optellen en aftrekken

Bij het stelsel $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$ valt zowel bij optellen als bij aftrekken geen van de variabelen weg. Maar als je de eerste vergelijking met 2 vermenigvuldigt en de tweede vergelijking met 3, dan staat in beide vergelijkingen $6x$. En dan wordt bij aftrekken de variabele x wel geëlimineerd. Je krijgt

$$\begin{array}{l|l} \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \hline \text{geeft} & \begin{cases} 6x - 8y = 14 \\ 6x + 9y = 48 \end{cases} \\ & \hline & -17y = -34 \end{array}$$

Tussen de verticale strepen staan de getallen waarmee vermenigvuldigd is.

Je kunt bij dit stelsel ook y elimineren. Daartoe vermenigvuldig je de eerste vergelijking met 3 en de tweede met 4. Dan krijg je

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \begin{array}{l} | 3 \\ | 4 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 9x - 12y = 21 \\ 8x + 12y = 64 \end{cases} +$$

$$17x = 85$$

Ga bij het oplossen van een stelsel eerst na welke variabele je het beste kunt elimineren. Doe het zo, dat je zo weinig mogelijk rekenwerk krijgt.

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ op.

Het is niet nodig met 2 en 8 te vermenigvuldigen.
Je kunt volstaan met een vermenigvuldiging met 1 en 4.

Uitwerking

$$\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \begin{array}{l} | 1 \\ | 4 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 12x - 8y = 16 \end{cases} +$$

$$14x = 21$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{1}{2} \text{ invullen in } 2x + 8y = 5 \text{ geeft } 2 \cdot 1\frac{1}{2} + 8y = 5$$

$$3 + 8y = 5$$

$$8y = 2$$

$$y = \frac{1}{4}$$

De oplossing is $(x, y) = (1\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

54 Los op.



a $\begin{cases} 2x + 7y = 29 \\ 4x + 5y = 13 \end{cases}$

b $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - y = 19 \end{cases}$

c $\begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$

55 Gegeven zijn de lijnen $k: 2x + 3y = 15$ en $l: x - 2y = 1$.



a Teken de lijnen k en l in één figuur.

b Welk stelsel moet je oplossen om de coördinaten van het snijpunt S van k en l te berekenen? Bereken de coördinaten van S .

56 Een groenteman verkoopt appels en peren. De appels kosten € 1,40 per kg en de peren € 1,70 per kg. Op een zaterdag verkoopt hij in totaal 295 kg appels en peren. De opbrengst is € 452.



Hoeveel kg appels heeft hij die dag verkocht?



57*****

- a Los het stelsel $\begin{cases} 4x - y = 13 \\ 2x + 3y = -11 \end{cases}$ op.
- b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen $k: 3x - 2y = 7$ en $l: 5x - 4y = 10$.
- c Een bedrijf verhuurt personenauto's en busjes. Het huren van een personenauto kost €43 per dag, een busje kost €68 per dag. Op een dag zijn er veertig voertuigen verhuurd, met een totale opbrengst van €2420. Er zijn die dag meer busjes verhuurd dan personenauto's. Hoeveel meer?

A58**□ ⊗ ***

- a Los het stelsel $\begin{cases} 2x + 5y = 26 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ op.
- b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen $k: 3x - 2y = -12$ en $l: x + 4y = 38$.
- c Een aannemer wil op een stuk grond van 8800 m² twee typen huizen neerzetten. Voor een huis van type A is 325 m² grond nodig. Voor een huis van type B is dat 175 m². De aannemer wil in totaal veertig huizen op het stuk grond bouwen. Hoeveel huizen van type A en hoeveel van type B gaat de aannemer bouwen?

A59*****

Je hebt een rechthoekig stuk papier. Als je hem in de breedte doormidden knipt krijg je twee rechthoeken, elk met een omtrek van 44 cm. Als je hem in de lengte doormidden knipt krijg je twee rechthoeken, elk met een omtrek van 58 cm. Wat is de omtrek van het oorspronkelijke stuk papier?

A60*****

Om van A naar B te komen, moet je via C.

Kim gaat met de auto van A naar B. Tussen A en C rijdt ze met een gemiddelde snelheid van 60 km/u en tussen C en B rijdt ze met een gemiddelde snelheid van 80 km/u. Ze doet over deze rit 44 minuten. Wouter gaat op de fiets van A naar B. Zijn gemiddelde snelheid tussen A en C is 16 km/u en zijn gemiddelde snelheid tussen C en B is 24 km/u. Hij doet over deze rit 2 uur en 35 minuten. Bereken de afstand tussen A en B.

O61**□ ⊗ ***

Maud gaat het snijpunt berekenen van de lijnen $k: 4x - 3y = 6$ en $l: y = 2x - 4$. Daartoe lost ze het stelsel $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$ op. Dat doet ze door in $4x - 3y = 6$ de variabele y te vervangen door $2x - 4$. Welke vergelijking krijgt ze?

- A $4x - 2x - 4 = 6$ C $4x - 6x - 12 = 6$
 B $4x - 2x + 4 = 6$ D $4x - 6x + 12 = 6$

Theorie C Elimineren door substitutie

Je kunt het stelsel $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ y = 4x - 10 \end{cases}$ oplossen met behulp van elimineren

door optellen en aftrekken. Maar het kan ook anders.

Omdat $y = 4x - 10$ kun je in de vergelijking $2x + 3y = 12$ de variabele y vervangen door $4x - 10$. Je krijgt $2x + 3(4x - 10) = 12$ en hiermee is x te berekenen. Dit geeft $x = 3$.

In plaats van

vervang y door $4x - 10$ in de vergelijking $2x + 3y = 12$

zeggen we ook wel

substitueer $y = 4x - 10$ in de vergelijking $2x + 3y = 12$.

Substitueren betekent *vervangen door*.

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$ op.

Uitwerking

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

Substitueren van $x = 2y + 1$ in $3x - y = 7$ geeft $3(2y + 1) - y = 7$

$$6y + 3 - y = 7$$

$$5y = 4$$

$$y = \frac{4}{5}$$

$$y = \frac{4}{5} \text{ geeft } x = 2 \cdot \frac{4}{5} + 1 = 2\frac{3}{5}$$

De oplossing is $(x, y) = (2\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

62

Los op.



a $\begin{cases} 2x + 2y = 9 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$

b $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ 3x + 6y = 8 \end{cases}$

c $\begin{cases} x = 5y - 3 \\ 3x + 4y = 29 \end{cases}$

63

Los op.



a $\begin{cases} 7x + 5y = 56 \\ x = 1\frac{1}{2}y + 8 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x - 5y = -19 \\ 5x + 4y = 35 \end{cases}$

c $\begin{cases} 0,8x + 0,2y = 1 \\ 0,3x - 0,3y = 1,5 \end{cases}$

A64



Op de verjaardag van Marjan is de gemiddelde leeftijd van de 15 aanwezige jongens en meisjes 16,4 jaar. De jongens zijn gemiddeld 15,6 jaar en de meisjes gemiddeld 16,8 jaar. Hoeveel jongens zijn er op de verjaardag?

- A65** Het stelsel $\begin{cases} y = ax + b \\ bx + ay = -22 \end{cases}$ heeft de oplossing $(x, y) = (5, 4)$.
* Bereken a en b .

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan een stelsel oplossen door eliminatie.

► OPGAVE C7
THEORIE A,B

☐ Ik kan een praktisch probleem oplossen met behulp van een stelsel.

► OPGAVE C8
OPGAVE 45

☐ Ik kan de coördinaten van het snijpunt van twee lijnen berekenen met behulp van een stelsel.

► OPGAVE C9
OPGAVE 46

☐ Ik kan een stelsel oplossen door substitutie.

► OPGAVE C10
THEORIE C

C7 Los op.

a $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ 5x + 5y = 18 \end{cases}$

b $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

C8 Op een stuk land van 4000 m² wil men appelbomen en perenbomen planten. Voor een appelboom is 1,25 m² nodig en voor een perenboom 0,9 m². In totaal wil men 3725 bomen planten.
Hoeveel appelbomen en hoeveel perenbomen gaat men planten?

C9 Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen $k: 4x + 3y = 7$ en $l: 3x + 2y = 4$.

C10 Los het stelsel $\begin{cases} 3x - 7y = 4 \\ y = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$ op.

Antwoorden

C7 a $(x, y) = (3, \frac{3}{5})$

b $(x, y) = (4, 1)$

C8 1850 appelbomen en 1875 perenbomen

C9 $S(-2, 5)$

C10 $(x, y) = (6, 2)$

1.5 Kwadratische verbanden

Kennis en vaardigheden

- Je kunt verschillende typen kwadratische vergelijkingen algebraïsch oplossen.
- Je kunt op de grafische rekenmachine formules invoeren, grafieken plotten en tabellen maken.
- Je kunt met de grafische rekenmachine nulpunten van functies, coördinaten van toppen van grafieken en coördinaten van snijpunten van grafieken berekenen.
- Je weet welke aanpak je moet kiezen bij de opdracht 'bereken', 'bereken algebraïsch' of 'bereken exact'.

V4 Gegeven is de vergelijking $x^2 + 7x - 8 = 0$. Deze vergelijking is op te lossen met behulp van ontbinden in factoren.

Welke ontbinding is juist?

- A** $(x + 1)(x - 8) = 0$ **C** $(x - 1)(x - 8) = 0$
B $(x - 1)(x + 8) = 0$ **D** $(x - 1)(x - 7) = 0$

Voorkennis Oplossen met ontbinden in factoren

Sommige kwadratische vergelijkingen kun je oplossen met behulp van ontbinden in factoren.

Om $x^2 + 9x + 14$ te ontbinden in factoren gebruik je de product-som-methode. Je zoekt twee getallen met product **14** en som **9**. Hierbij kun je de tabel van 14 gebruiken. Zie hiernaast.

Je krijgt $x^2 + 9x + 14 = (x + 2)(x + 7)$.

Om $x^2 + 2x - 8$ te ontbinden in factoren zoek je twee getallen met product **-8** en som **2**.

Je krijgt $x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$. Zie de tabel van -8 hiernaast.

Bij het oplossen van de vergelijking $x^2 + 2x - 8 = 0$ gebruik je na het ontbinden in factoren de volgende regel.

$AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$

Bij $3x^2 - 3x - 6 = 0$ deel je eerst het linker- en het rechterlid door 3. Daarna kun je ontbinden in factoren.

$$3x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x + 1 = 0 \vee x - 2 = 0 \quad \leftarrow \text{Je mag deze stap voortaan weglaten.}$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

Bij $3x^2 - 5x = 0$ ontbind je in factoren door de gemeenschappelijke factor x buiten haakjes te brengen.

product 14		som
1	14	15
2	7	9

product -8		som
1	-8	-7
-1	8	7
2	-4	-2
-2	4	2

$\vee$ betekent of.

Om de regel ' $AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$ ' te kunnen toepassen, moet het rechterlid nul zijn. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Los op.

a $5x^2 = 12x$

b $-x^2 + 3x = 6x - 4$

Uitwerking

a $5x^2 = 12x$

$$5x^2 - 12x = 0$$

$$x(5x - 12) = 0$$

$$x = 0 \vee 5x = 12$$

$$x = 0 \vee x = 2\frac{2}{5}$$

b $-x^2 + 3x = 6x - 4$

$$-x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \times -1$$

$$(x - 1)(x + 4) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -4$$

V5 Los op.

a $x^2 - 7x - 18 = 0$

b $x^2 + 5x = 6$

c $x^2 = 5x$

d $x^2 + x = 3x + 15$

e $4x^2 = 8x$

f $x^2 = x + 2$

V6 Los op.

a $3x^2 - 12x = 36$

b $-x^2 = 13x - 48$

c $(3x - 1)(x + 2) = 0$

d $7x^2 + 8x = x + 84$

e $x(x - 2) = 48$

f $(x - 1)(x - 2) = 12$

O66 De kwadratische vergelijkingen hieronder zijn te verdelen in vier verschillende typen. Elk type kan op een andere manier opgelost worden. Van elk type zijn er twee.



Zoek de vergelijkingen van hetzelfde type bij elkaar.

1 $4x^2 = 9x$

2 $4x^2 - 15x = 5x - 24$

3 $3x^2 - 10x = 8x + 15$

4 $3x^2 = 8 - x^2$

5 $x^2 + 8x = 9$

6 $4x^2 = 9$

7 $x^2 + 8x = 9x$

8 $x^2 + 9x = 8$

Theorie A Typen kwadratische vergelijkingen

De algemene vorm van een kwadratische vergelijking, oftewel een **tweedegraadsvergelijking**, is $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$.

Bij het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen kun je gebruikmaken van het schema op de volgende bladzijde.

In het schema wordt onderscheid gemaakt tussen vergelijkingen met twee en met drie termen. Bij tweedegraadsvergelijkingen met drie termen gebruik je soms de **abc-formule**.

Bij de **abc-formule** is aan de **discriminant** D te zien hoeveel oplossingen er zijn:

- Voor $D > 0$ zijn er twee oplossingen.
- Voor $D = 0$ is er één oplossing.
- Voor $D < 0$ is er geen oplossing.

De abc-formule

$ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ geeft

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

met $D = b^2 - 4ac$.

Het oplossen van kwadratische vergelijkingen

twee termen

$ax^2 + bx = 0$

Aanpak: breng x buiten haakjes.

- $5x^2 - 7x = 0$
 $x(5x - 7) = 0$
 $x = 0 \vee 5x = 7$
 $x = 0 \vee x = 1\frac{2}{5}$
- $3x = x^2$
 $3x - x^2 = 0$
 $x(3 - x) = 0$
 $x = 0 \vee x = 3$

$ax^2 + c = 0$

Aanpak: herleid tot de vorm $x^2 = \text{getal}$.

- $3x^2 - 30 = 0$
 $3x^2 = 30$
 $x^2 = 10$
 $x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$
- $4x^2 + 40 = 0$
 $4x^2 = -40$
 $x^2 = -10$
geen oplossing

drie termen

$ax^2 + bx + c = 0$

en het linkerlid is te ontbinden.

Aanpak: gebruik de product-som-methode.

- $x^2 - 6x - 7 = 0$
 $(x + 1)(x - 7) = 0$
 $x = -1 \vee x = 7$
- $2x^2 = 2x + 12$
 $2x^2 - 2x - 12 = 0$
 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x + 2)(x - 3) = 0$
 $x = -2 \vee x = 3$

$ax^2 + bx + c = 0$

en het linkerlid is niet te ontbinden.

Aanpak: gebruik de **abc-formule**.

- $2x^2 - 5x - 7 = 0$
 $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -7 = 81$, dus $\sqrt{D} = 9$
 $x = \frac{5 + 9}{4} = 3\frac{1}{2} \vee x = \frac{5 - 9}{4} = -1$
- $x^2 + 7x + 2 = 0$
 $D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 41$
 $x = \frac{-7 + \sqrt{41}}{2} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{41}}{2}$

Het stap voor stap oplossen van een vergelijking, zoals in het schema hierboven is gedaan, heet **algebraïsch oplossen**. Bij de opdracht *los algebraïsch op* kan gevraagd worden om de oplossingen te benaderen. De opdracht **bereken exact de oplossingen** betekent dat je langs algebraïsche weg de oplossingen berekent en deze niet benadert.

Je laat dus oplossingen als $x = \sqrt{3}$, $x = \frac{1}{7}$ en $x = \frac{2 - \sqrt{7}}{6}$ staan.

Oplossingen als $x = \frac{18}{12}$ en $x = \frac{2 - \sqrt{36}}{4}$ vereenvoudig je.

Dus $x = \frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$ en $x = \frac{2 - \sqrt{36}}{4} = \frac{2 - 6}{4} = -1$.

De vergelijking $(x + 3)^2 = 16$ is op te lossen zonder eerst de haakjes weg te werken. Zie voorbeeld a.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $(x + 3)^2 = 16$

b $3x^2 + 3 = 6x$

c $4x^2 = 6x - 2$

d $x^2 = 2x + 9$

Uitwerking

a $(x + 3)^2 = 16$

$$x + 3 = 4 \vee x + 3 = -4$$

$$x = 1 \vee x = -7$$

c $4x^2 = 6x - 2$

$$4x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1, \text{ dus } \sqrt{D} = 1$$

$$x = \frac{3 + 1}{4} = 1 \vee x = \frac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2}$$

b $3x^2 + 3 = 6x$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)(x - 1) = 0$$

$$x = 1$$

d $x^2 = 2x + 9$

$$x^2 - 2x - 9 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -9 = 40$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{40}}{2} \vee x = \frac{2 - \sqrt{40}}{2}$$

67 Bereken exact de oplossingen.



a $3x^2 - 6x = 24$

b $3x^2 - 6x = -3(x - 6)$

c $2x^2 - 3x = 2$

d $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$

e $x^2 - 3x = 5(x - 3)$

f $2x^2 - 5x = 3x$

Gebruik de *abc*-formule alleen als het niet anders kan.

68 Bereken exact de oplossingen.



a $(x - 4)^2 = 25$

b $(x - 4)^2 = 2x$

c $x^2 + 4 = 4x$

d $x(x - 1) = 12$

e $2x^2 = 5x$

f $x^2 + 4 = 1$

69 Los algebraïsch op.



a $6 - x^2 = -2$

b $2x^2 = 9x + 5$

c $3(x + 2)^2 + 5 = 80$

d $\frac{1}{2}(x - 3)^2 - 3 = 5$

e $-(2x - 1)^2 + 5 = 1$

f $8 - 3(4x - 5)^2 = 5$

A70 Bereken exact de oplossingen.



a $(x + 2)(x + 3) = 10x + 2$

b $(x + 2)^2 + 21 = 12$

c $(x + 2)(4 - x) = x^2 + \frac{1}{2}$

d $(2x - 3)(3x - 2) + 25x = 0$

e $(2x - 3)^2 - 11 = 25$

f $(x + 2)(3x - 2) = 16$

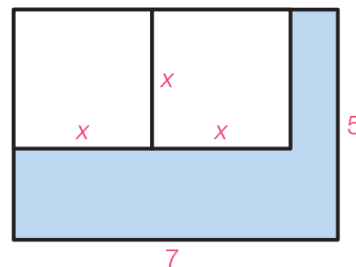
g $2x^2 - (x + 2)(x - 3) = 6x$

h $x^2 + 13 = (x + 3)(4 - 3x)$

- A71** **a** In de rechthoek in de figuur hiernaast zijn twee gelijke vierkanten getekend. De oppervlakte van het blauwe gedeelte is 17.

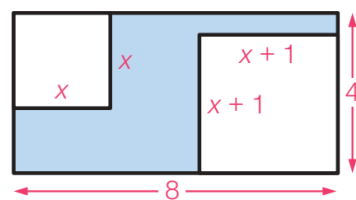


Bereken exact de zijde van een vierkant.



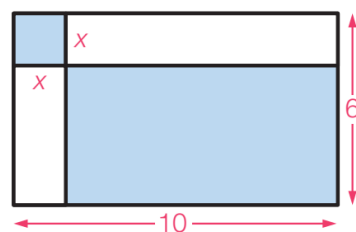
- b** In de rechthoek in de figuur hiernaast zijn twee vierkanten getekend. De zijde van het grootste vierkant is 1 meer dan de zijde van het kleinste vierkant. De oppervlakte van het blauwe gedeelte is 19.

Bereken exact de zijde van het kleinste vierkant.



- c** In de rechthoek in de figuur hiernaast zijn één vierkant en drie rechthoeken getekend. De oppervlakte van het blauwe gedeelte is $40\frac{1}{2}$.

Bereken exact de zijde van het vierkant.



Informatief Een bewijs van de abc-formule

Je weet dat $x^2 = 10$ geeft $x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$.

Evenzo geldt $(2x - 3)^2 = 10$ geeft $2x - 3 = \sqrt{10} \vee 2x - 3 = -\sqrt{10}$.

En $(2ax + b)^2 = D$ geeft $2ax + b = \sqrt{D} \vee 2ax + b = -\sqrt{D}$.

Om de *abc*-formule te bewijzen, herleiden we de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ tot de vorm $(2ax + b)^2 = D$. Dat gaat als volgt.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = D$$

$$2ax + b = \sqrt{D} \vee 2ax + b = -\sqrt{D}$$

$$2ax = -b + \sqrt{D} \vee 2ax = -b - \sqrt{D}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Vermenigvuldig alle termen met $4a$.

Breng $4ac$ naar het rechterlid.

Tel bij beide leden b^2 op.

Bedenk dat $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$.

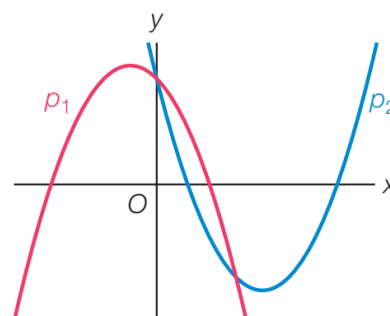
Vervang $b^2 - 4ac$ door D .

Neem aan dat $D \geq 0$.

Breng b naar het rechterlid.

Deel beide leden door $2a$.

Gegeven zijn de formules I: $y = x^2 - 4x + 2$ en II: $y = -x^2 - x + 2$. In de figuur hiernaast zijn de bijbehorende parabolen geschetst. Zoek bij elke parabool de juiste formule.



Theorie B Parabolen

De formule $y = 3x^2 - 4x - 5$ is een voorbeeld van een kwadratische formule. Er is een kwadratisch verband tussen x en y . Je kunt deze formule noteren met het **functievoorschrift** $f(x) = 3x^2 - 4x - 5$.

Bij deze functie is $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot -2 - 5 = 15$. De **functiewaarde** van -2 is 15 . Je kunt ook zeggen dat bij het **origineel** -2 het **beeld** 15 hoort.

De grafiek van $f(x) = 3x^2 - 4x - 5$ is een parabool. Omdat het getal voor x^2 groter is dan nul, is de grafiek een dalparabool. Er zijn ook bergparabolen. Zo is de grafiek van de functie $g(x) = -2x^2 + x + 4$ een bergparabool, want voor x^2 staat -2 en -2 is kleiner dan nul.

Een functie van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een kwadratische functie. De grafiek is een parabool. Voor $a > 0$ is de grafiek een dalparabool. Voor $a < 0$ is de grafiek een bergparabool.

Om een parabool te tekenen, maak je eerst een tabel. Zo'n tabel krijg je snel met de GR. Nadat je de formule op de GR hebt ingevoerd, kun je ook de grafiek **plotten**.

► GR Hoe je op de GR formules invoert, grafieken plot en tabellen krijgt, leer je in de module **Formules, grafieken en tabellen**. Neem eerst deze module door.

We maken onderscheid tussen het plotten, het schetsen en het tekenen van een grafiek. Zie het schema hieronder.

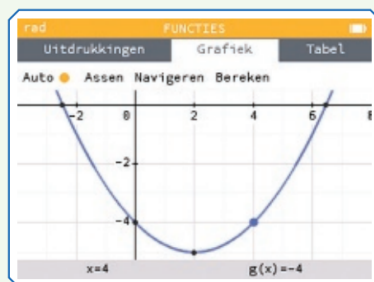
Plot de grafiek	Schets de grafiek	Teken de grafiek
Laat de grafiek op het scherm van de GR tekenen. Kies het venster zo, dat alle bijzonderheden van de grafiek op het scherm te zien zijn.	Maak in je schrift een schets van de grafiek. Het gaat niet om precieze punten, maar alleen om de vorm van de grafiek en de ligging ten opzichte van de assen. Gebruik zo nodig de GR.	Teken in je schrift nauwkeurig de grafiek en zet getallen bij de assen. Maak eerst een tabel. Gebruik daarbij de GR.

Voorbeeld

- a** Teken de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$.
b Schets de grafiek van $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 4$.

Aanpak

- a** Voer de formule in en maak een tabel. Zie het GR-scherm hier linksonder.
b Voer de formule in en plot de grafiek. Zorg ervoor dat de snijpunten met de assen op het scherm te zien zijn. Zie het GR-scherm hier rechtsonder.

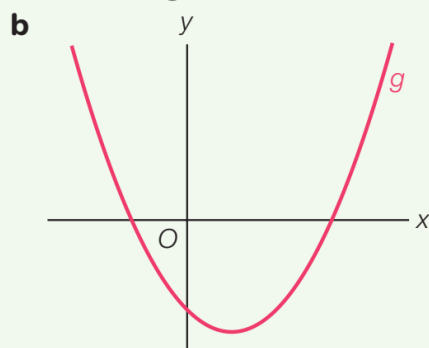
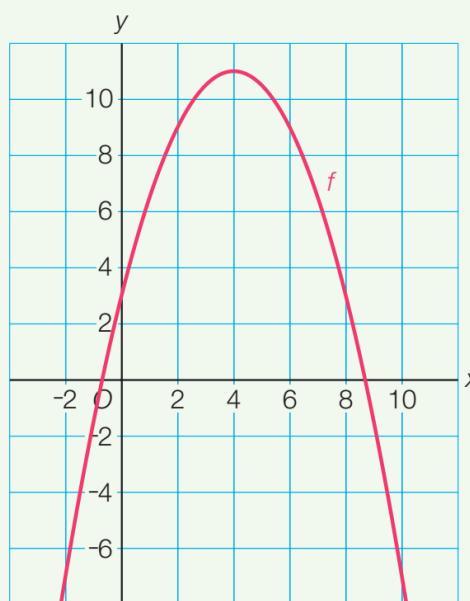


Uitwerking

a

x	-2	0	2	4	6	8	10
f(x)	-7	3	9	11	9	3	-7

Zie de figuur hiernaast.



73



- a** Teken de grafieken van $f(x) = -x^2 + 5x + 4$ en $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$ in één figuur.
b Schets de grafieken van $h(x) = -x^2 - 5x + 2$ en $k(x) = 0,5x^2 - 4x + 10$ in één figuur.

Let op het verschil tussen tekenen en schetsen.

74



- Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$.
a Bereken het beeld van het origineel -7.
b Bereken de functiewaarde van 5.
c Bereken algebraïsch de originelen van het beeld 4.

Staat er niet 'algebraïsch' of 'exact', dan mag je de GR gebruiken.

A75 Gegeven is de functie f met functievoorschrift $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$.



- a Schets de grafiek van f .
- b Bereken het beeld van het origineel 3.
- c Bereken algebraïsch de originelen van het beeld $4\frac{1}{2}$.
- d Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as en de y -as.

A76 a Teken de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$.

***** b Schets de grafieken van $g(x) = -x^2 + 5x + 1$ en $h(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 4$ in één figuur.

c Gegeven is de functie $k(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + 2$.
Bereken het beeld van het origineel -4 en bereken algebraïsch de originelen van het beeld 10.

d Gegeven is de functie $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 12$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van p met de x -as en de y -as.

O77 Gegeven is de functie f met functievoorschrift $f(x) = -x^2 + 5x + 2$.

□ ⊗ * a Vul de tabel in.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$								

- b Uit de tabel volgt dat de x -coördinaat van de top van de grafiek van f gelijk aan $2\frac{1}{2}$ is.
Licht dit toe en bereken de y -coördinaat van de top.

Theorie C Top, nulpunt en snijpunt

De coördinaten van de top van een parabool volgen niet altijd zo eenvoudig uit een tabel zoals in opgave 77. Gelukkig heeft de GR een optie waarmee de coördinaten van een top eenvoudig zijn te berekenen.

Ook de coördinaten van de snijpunten van een grafiek met een horizontale lijn zijn snel met de GR te berekenen. Zoals je weet zijn de x -coördinaten van snijpunten van grafieken oplossingen van een vergelijking.
Een bijzondere situatie heb je bij de oplossingen van de vergelijking $f(x) = 0$. Deze oplossingen geven de x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as. Uit de oplossingen van de vergelijking $f(x) = 0$ volgen de **nulpunten** van f .

In de derde klas heb je geleerd dat voor de x -coördinaat van de top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ geldt

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}.$$

In deze paragraaf hoef je deze formule niet te gebruiken.
Je vindt de coördinaten van de top van een parabool met de optie minimum of maximum van de GR.

Een nulpunt van een functie f is een x -waarde waarvoor geldt $f(x) = 0$.

Een nulpunt is geen punt maar een getal.

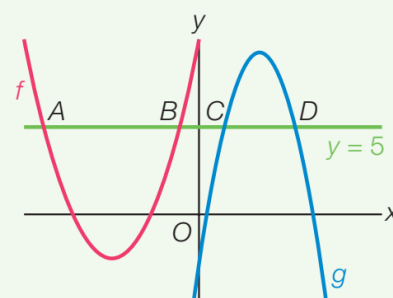
[►GR] Hoe je met de GR nulpunten, coördinaten van toppen van grafieken en coördinaten van snijpunten van grafieken berekent, leer je in de module **Toppen en snijpunten**. Neem eerst deze module door.

Bij berekeningen die je met de GR maakt, hoort een toelichting. Zo noteer je dat je de formule invoert en welke optie je gebruikt. Vervolgens geef je antwoord op de vraag.

Voorbeeld

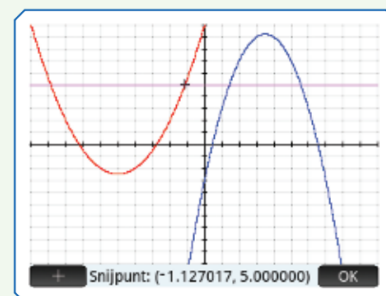
Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 10$ en $g(x) = -x^2 + 7x - 3$. De lijn $y = 5$ snijdt de grafieken van f en g van links naar rechts in de punten A , B , C en D . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f en van de top van de grafiek van g .
- Bereken de nulpunten van f . Rond af op twee decimalen.
- Bereken de lengte van het lijnstuk BC . Rond af op twee decimalen.



Uitwerking

- Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie minimum geeft $x = -5$ en $y = -2,5$.
Dus de top van de grafiek van f is $(-5; -2,5)$.
Invoeren van de formule van g en gebruiken van de optie maximum geeft $x = 3,5$ en $y = 9,25$.
Dus de top van de grafiek van g is $(3,5; 9,25)$.
- Gebruiken van de optie nulpunt bij de formule van f geeft $x = -7,236\dots$ en $x = -2,763\dots$.
Dus de nulpunten van f zijn $-7,24$ en $-2,76$.
- Los op $f(x) = 5$ en $g(x) = 5$.
Invoeren van de formule $y = 5$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x_B = -1,127\dots$ en $x_C = 1,438\dots$.
Dus $BC = 1,438\dots - (-1,127\dots) \approx 2,57$.



78 Zie het voorbeeld.



- Bereken de nulpunten van g . Rond af op twee decimalen.
- Bereken de lengte van het lijnstuk AD . Rond af op twee decimalen.
- De horizontale lijn door de top van de grafiek van f snijdt de grafiek van g in de punten E en F .
Bereken de lengte van het lijnstuk EF . Rond af op twee decimalen.

79



Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ en $h(x) = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{3}{8}$.

- Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f .
- Bereken algebraïsch het nulpunt van g .
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g . Rond af op twee decimalen.
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van g en h .

A80



Gegeven is de functie $f(x) = -0,4x^2 + 2,4x + 6$.

- Schets de grafiek van f .
- Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f .
- Bereken de nulpunten van f . Rond af op twee decimalen.
- De horizontale lijn $y = n$ met n een geheel getal snijdt de grafiek van f in de punten A en B .
Onderzoek wat de kleinste waarde van n is waarvoor de lengte van het lijnstuk AB kleiner is dan 5.

A81

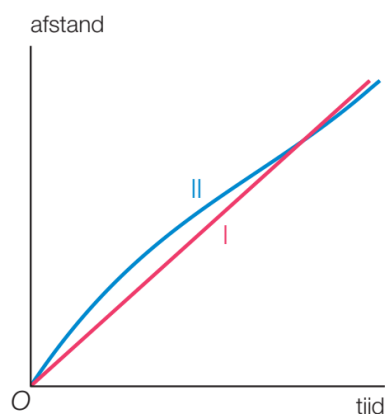


Emma en Luuk fietsen hetzelfde traject van 50 km van A naar B. Ze beginnen op hetzelfde moment. Emma fietst met een constante snelheid van 18 km per uur, terwijl Luuk met wisselende snelheden fietst. In de figuur hiernaast zie je de grafieken die bij de fietstochten horen. De fietstochten zijn ook te beschrijven met formules. Bij de fietstocht van Emma hoort de formule $s = 18t$ en bij de fietstocht van Luuk hoort de formule $s = 2t^3 - 10t^2 + 30t$. Hierin is s de afstand in km die in t uur wordt afgelegd.

- Onderzoek met de formules wie na twee en een half uur voor ligt, Emma of Luuk.
- Onderzoek met de formules wie van de twee het eerst in B is.
- Bereken na hoeveel minuten Emma Luuk inhaalt.

Bij de snelheid van Luuk hoort de formule $v = 6t^2 - 20t + 30$. Hierin is v de snelheid in km per uur.

- Bereken na hoeveel minuten Emma en Luuk even snel rijden. Rond af op gehelen.



Op de GR voer je formules altijd in met de variabele x .

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan verschillende typen kwadratische vergelijkingen algebraïsch oplossen. ▶ **OPGAVE C11 THEORIE A**
- ☐ Ik kan op de grafische rekenmachine formules invoeren, grafieken plotten en tabellen maken. ▶ **OPGAVE C12 THEORIE B**
- ☐ Ik kan met de grafische rekenmachine nulpunten van functies, coördinaten van toppen van grafieken en coördinaten van snijpunten van grafieken berekenen. ▶ **OPGAVE C13 THEORIE C**
- ☐ Ik weet welke aanpak ik moet kiezen bij de opdracht 'bereken', 'bereken algebraïsch' of 'bereken exact'. ▶ **OPGAVE C14 THEORIE A,C**

C11 Bereken exact de oplossingen.

- a** $6x^2 = 7x$ **d** $x^2 - 1 = 3x$
b $4x^2 + 35 = 24x$ **e** $(2x - 1)(4x - 1) = 3$
c $(3x + 2)(3x - 4) = 0$ **f** $(5x + 1)^2 = 49$

- C12** **a** Teken de grafiek van $f(x) = -x^2 + 7x - 4$.
b Schets de grafiek van $g(x) = 0,3x^2 + x + 2$.

- C13** Gegeven zijn de functies $f(x) = 0,25x^2 + 2x + 1$ en $g(x) = -0,3x^2 + 1,5x + 5$.
a Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f en van de top van de grafiek van g .
b Bereken de nulpunten van f . Rond af op twee decimalen.
c Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g . Rond af op twee decimalen.

- C14** Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2}$ en $g(x) = 1\frac{1}{5}x - 2$.
a Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f .
b Bereken exact het nulpunt van g .
c Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g . Rond af op twee decimalen.
d Bereken algebraïsch de nulpunten van f .

Antwoorden

- C11 a** $x = 0 \vee x = 1\frac{1}{6}$
b $x = 3\frac{1}{2} \vee x = 2\frac{1}{2}$
c $x = -\frac{2}{3} \vee x = 1\frac{1}{3}$
d $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$
e $x = 1 \vee x = -\frac{1}{4}$
f $x = 1\frac{1}{5} \vee x = -1\frac{3}{5}$

C12 a, b *

- C13 a** $(-4, -3)$ en $(2,5; 6,875)$
b $-7,46$ en $-0,54$
c $(-3,19; -2,84)$ en $(2,28; 6,86)$
C14 a $(1,5; 5,0625)$
b $1\frac{2}{3}$
c $(-6,08; -9,29)$ en $(4,28; 3,13)$
d -3 en 6

Kennis- en vaardighedentest

1.1 Lineaire verbanden

- 1** Gegeven zijn de lijnen $k: y = ax + 4$, $l: y = -1\frac{1}{2}x + b$ en $m: y = 3x - 6$.
- a** Voor welke a zijn k en l evenwijdig?
 - b** Voor welke b hebben k en l hetzelfde snijpunt met de y -as?
 - c** Voor welke a en b snijden k en l elkaar in het punt $A(2, 6)$?
 - d** Voor welke a hebben k en m hetzelfde snijpunt met de x -as?
- 2** Een vliegtuig zet op $t = 0$ de landing in en daalt vanaf dat moment met 10 meter per seconde. De beginhoogte is 10 km.
Stel de formule op van de hoogte h in meters als functie van de tijd t in seconden.
- 3** De lijn k gaat door het punt $A(1, 2)$ en $rc_k = -\frac{1}{3}$.
De lijn l gaat door het punt $B(3, 2)$ en $rc_l = 2$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l .
- 4** De lijn $k: y = ax + b$ gaat door het punt $A(1, -2)$ en is evenwijdig met de lijn $l: y = 4x - 3$.
Bereken a en b .

1.2 Een lijn door twee gegeven punten

- 5** **a** Stel een vergelijking op van de lijn k door de punten $A(10, 15)$ en $B(12, 1)$.
b De lijn l gaat door de punten $C(3, 5)$ en $D(8, 25)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van l met de x -as.
- 6** Tussen p en q bestaat een lineair verband. Bij $q = 5$ hoort $p = 25$ en bij $q = 8$ hoort $p = 19$.
Druk p uit in q .
- 7** De gemiddelde jaartemperatuur T is in Nederland in de periode 1970–2020 vrijwel lineair gestegen. Was de gemiddelde jaartemperatuur in 1970 nog $9,3^\circ\text{C}$, in 2020 was dat toegenomen tot $11,0^\circ\text{C}$. Neem in deze opgave aan dat deze temperatuurstijging de komende tijd doorzet.
- a** Stel de formule op van de gemiddelde jaartemperatuur T in $^\circ\text{C}$ als functie van de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1970.
 - b** In welk jaar zal de gemiddelde jaartemperatuur naar verwachting voor het eerst hoger zijn dan 12°C ?

1.3 De vergelijking $ax + by = c$

- 8** **a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn l : $2x - 3y = -8$ met de x -as en de y -as en teken l .
b Bereken voor welke p het getallenpaar $(5, p)$ voldoet aan de vergelijking $3x - 2y = 9$.
c Voor welke q is $(x, y) = (q, 12)$ een oplossing van $2x + 3y = 40$?
- 9** Gegeven is de lijn k : $3x - 4y = 12$.
a Bereken rc_k .
b De lijn m gaat door het punt $A(3, -4)$ en is evenwijdig met k .
Stel van m een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

1.4 Stelsels vergelijkingen

- 10** Los op.
a $\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 3x + 2y = -10 \\ y = 1\frac{1}{2}x + 7 \end{cases}$
- 11** Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen k : $3x + 2y = 10$ en l : $4x - 3y = 2$.
- 12** Jan van Vlieland verhuurt fietsen: gewone en e-bikes. Het huren van een gewone fiets kost €11 per dag, een e-bike kost €23 per dag. Op een dag zijn er 85 fietsen verhuurd, met een totale opbrengst van €1583. Bereken hoeveel e-bikes er die dag verhuurd zijn.



1.5 Kwadratische verbanden

- 13** Bereken exact de oplossingen.
a $(3x + 2)^2 = 25$ **d** $(4x - 3)(5x - 3) = 0$
b $x(x - 2) = 24$ **e** $(x - 1)(x - 3) = 3 - (x^2 - 4x)$
c $8x^2 + 1 = 6x$ **f** $x^2 + 3 = 5x$
- 14** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 4$ en $g(x) = -3x^2 + 2x - 2$.
a Schets de grafieken van f en g in één figuur en bereken de coördinaten van de toppen. Rond zo nodig af op twee decimalen.
b Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g . Rond af op twee decimalen.
c Bereken algebraïsch de nulpunten van f . Rond af op twee decimalen.
d De horizontale lijn door de top van de grafiek van f snijdt de grafiek van g in de punten A en B .
Bereken de lengte van het lijnstuk AB . Rond af op twee decimalen.
e Voor welke waarden van a snijdt de lijn $y = a$ de grafieken van f en g in vier verschillende punten?

Gemengde opgaven

- 1** **a** De lijn k gaat door het punt $A(-1, 6)$ en is evenwijdig met de lijn $l: y = -2x + 3$.
Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.
- b** De lijn m gaat door het punt $B(4, -5)$ en is evenwijdig met de lijn $n: 3x + 2y = 8$.
Stel van m een vergelijking op van de vorm $y = ax + b$.
- c** De lijn p gaat door de punten $C(2, -3)$ en $D(5, 6)$.
Lijn p snijdt de x -as in het punt P en de y -as in het punt Q .
Bereken de coördinaten van P en Q .
- 2** De lijn k gaat door het punt $A(4, 8)$ en is evenwijdig met de lijn $l: x + 3y = 2$. De lijn m gaat door de punten $B(2, 8)$ en $C(6, 6)$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt S van k en m .
- 3** De lijn k met richtingscoëfficiënt -2 gaat door het punt $A(1, -4)$.
De lijn l gaat door de punten $B(-5, -1)$ en $C(1, 5)$.
Het snijpunt van k en l is het punt $S(-2, 2)$.
- a** Toon dit aan.
- b** De lijn $m: 4x + by = 2$ gaat door S .
Bereken de richtingscoëfficiënt van m .
- 4** Gegeven zijn de lijnen $k: y = \frac{1}{2}x + a + 1$, $l: y = -1\frac{1}{2}x + b$ en $m: y = 3ax - 6a^2$.
- a** Voor welke a en b snijden k en l elkaar in het punt $A(12, -6)$?
- b** Bereken de coördinaten van het snijpunt van m met de y -as in het geval l en m evenwijdig zijn.
- c** Onderzoek of er een waarde van a bestaat waarvoor k en m elkaar snijden in een punt op de y -as.
- d** Voor welke $a \neq 0$ snijden k en m elkaar in een punt op de x -as?
- 5** Gegeven zijn de lijnen $k: px + 5y = 10$ en $l: 3x + py = -12$.
- a** Neem $p = -4$ en onderzoek welke lijn in dat geval de grootste helling heeft.
- b** Voor welke p ligt het punt $A(-3, p)$ op k ?
- c** Voor welke p snijden de lijnen elkaar in een punt op de y -as?
- d** Onderzoek of er een waarde van p is waarvoor de lijnen elkaar snijden in
- het punt $P(1, 3)$
 - het punt $Q(-7, 5)$
 - het punt $R(6, -5)$

- 6** Los het stelsel $\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$ algebraïsch op.

- 7** Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$ en $g(x) = 2x^2 - 4x$.
- Schets de grafieken van f en g in één figuur.
 - Bereken exact de nulpunten van f .
 - Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as.
 - Bereken algebraïsch de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g . Rond af op twee decimalen.
 - Onderzoek met een berekening of de top van de grafiek van f op de grafiek van g ligt.
 - De horizontale lijn $y = 4$ snijdt de grafieken van f en g van links naar rechts in de punten A , B , C en D .
Onderzoek of de lijnstukken AB en CD even lang zijn.
 - De lijn k gaat door de toppen van de grafieken van f en g .
Bereken de x -coördinaat van het snijpunt van k met de x -as. Rond af op twee decimalen.

- 8** Harm en Marc rijden op hun racefiets van Noord-Holland naar Friesland over de 30 km lange Afsluitdijk. Harm vertrekt om 8:00 uur en rijdt met een constante snelheid van 30 km/u. Marc vertrekt vijf minuten na Harm en rijdt met een constante snelheid van 33 km/u. Voor Harm geldt de formule $s = \frac{1}{2}t$. Hierin is s de afstand in km en t de tijd in minuten met $t = 0$ om 8:00 uur.
- Licht de formule $s = \frac{1}{2}t$ toe.
 - Bereken algebraïsch hoe laat Harm door Marc wordt ingehaald.
 - Gerrit vertrekt om 8:00 uur op zijn pedelec uit Friesland richting Noord-Holland over de Afsluitdijk. Gerrit rijdt 42 km/u.
Hoe laat ontmoeten Harm en Gerrit elkaar?

- 9** In deze opgave stellen a en b getallen voor.
In de volgende rij getallen zit een regelmaat.
 $a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, \dots$
Het zevende getal van de rij is 34 en het achtste getal 55.
Bereken a en b .

- 10** Een kanoër peddelt eerst 1600 meter stroomopwaarts. Daar doet hij 20 minuten over. Daarna peddelt hij 10 minuten met de stroom mee terug. In deze 10 minuten legt hij 1500 meter af. Om op het startpunt terug te komen, laat hij zich de laatste 100 meter met de stroom meedrijven zonder te peddelen.
Neem x de snelheid in km/u van de kanoër als er geen stroming is en y de snelheid van de stroming in km/u en gebruik een stelsel om te berekenen hoeveel seconden hij over de laatste 100 meter doet.

$$\text{afstand} = \text{snelheid} \times \text{tijd}$$



2

Veranderingen

Een jachtluipaard besluipt een gazelle. Als ze 150 meter van de gazelle is verwijderd, begint ze naar de gazelle te rennen. Na drie seconden is de topsnelheid van 100 km/u bereikt. In deze drie seconden heeft ze 70 meter afgelegd. Het jachtluipaard kan de topsnelheid nog 30 seconden volhouden.

Zodra het jachtluipaard begint te rennen, slaat de gazelle op de vlucht. De gazelle bereikt vrijwel meteen haar topsnelheid van 80 km/u en kan dit een hele tijd volhouden.

Krijgt het jachtluipaard de gazelle te pakken?

2.1 Toenamediagrammen

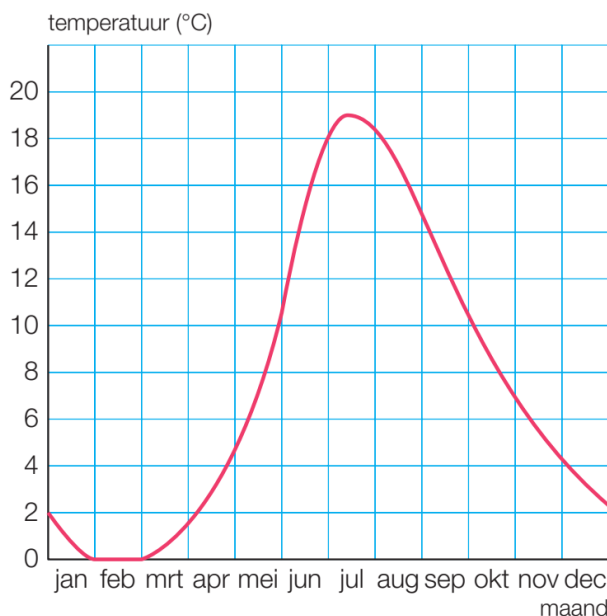
Kennis en vaardigheden

- Je kent het begrip interval en de intervalnotaties.
- Je kunt in een grafiek de verschillende soorten van stijgen en dalen herkennen en de bijbehorende intervallen noteren.
- Je kunt bij een grafiek, tabel of formule een toenamediagram tekenen.
- Je kunt bij een toenamediagram een mogelijke grafiek schetsen.

01
□ ⊗ *

Hiernaast zie je de grafiek van de temperatuur van het oppervlaktewater bij Helsinki in Finland.

- In welke maanden stijgt de temperatuur van het oppervlaktewater bij Helsinki?
- In mei verloopt de stijging anders dan in juni.
Omschrijf dit verschil.
- Vanaf halverwege juli heb je te maken met twee verschillende soorten daling.
Licht toe.

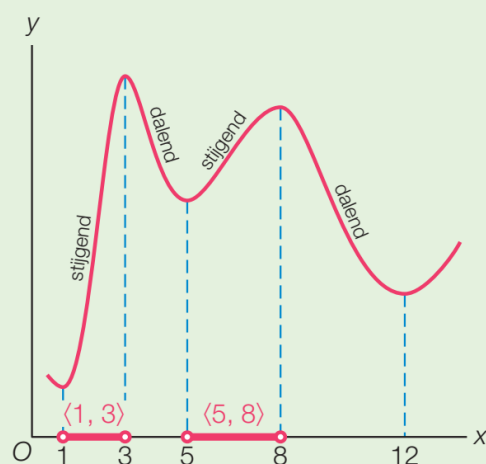


Theorie A Intervallen en soorten van stijgen en dalen

Laat je in de figuur hiernaast x toenemen van 1 tot 3, dan ga je langs de grafiek omhoog. De grafiek is **stijgend** voor x tussen 1 en 3. In plaats hiervan zeggen we ook: de grafiek is stijgend op het **interval** $\langle 1, 3 \rangle$. Een interval is een deel van de getallenlijn. Tot het **open interval** $\langle 1, 3 \rangle$ behoren alle getallen die tussen 1 en 3 liggen. De grenzen 1 en 3 behoren niet tot het interval. Op de getallenlijn in de figuur hiernaast is dat met open rondjes aangegeven.

De grafiek is ook stijgend op het interval $\langle 5, 8 \rangle$. Verder is de grafiek **dalend** op de intervallen $\langle 3, 5 \rangle$ en $\langle 8, 12 \rangle$.

Behalve open intervallen zijn er ook gesloten intervallen.



Bij een **gesloten interval**

horen de grenzen er wel bij.

In de figuur hiernaast zie je het

gesloten interval $[2, 4]$. Met

dichte rondjes is aangegeven dat de grenzen erbij horen.

Ook zie je de intervallen $\langle -2, 1 \rangle$ en $[6, 7)$.

Het interval $\langle -2, 1 \rangle$ spreek je uit als het links open rechts gesloten interval min twee één.

Je kunt het interval $\langle -2, 1 \rangle$ noteren met x . Je krijgt $-2 < x \leq 1$.

Dit spreek je uit als min twee kleiner dan x kleiner dan of gelijk aan 1.

En zo noteer je het interval $[2, 4]$ als $2 \leq x \leq 4$.



Voorbeeld

a Noteer het interval $[-5, 7)$ met x .

b Noteer het interval $6 < x < 10$ met haken.

Uitwerking

a $-5 \leq x < 7$

b $\langle 6, 10 \rangle$

De grafiek hiernaast is stijgend voor elke x kleiner dan 5.

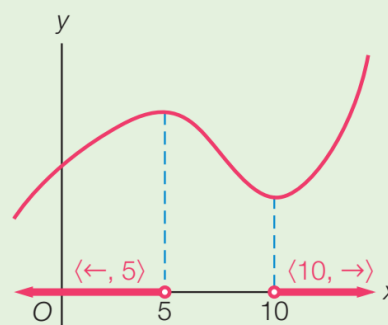
We zeggen dat de grafiek stijgend is op het interval

$\langle \leftarrow, 5 \rangle$. We noemen $\langle \leftarrow, 5 \rangle$ het open interval min oneindig vijf.

De grafiek is ook stijgend op $\langle 10, \rightarrow \rangle$.

De complete getallenverzameling $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$ heet de verzameling van de **reële getallen**.

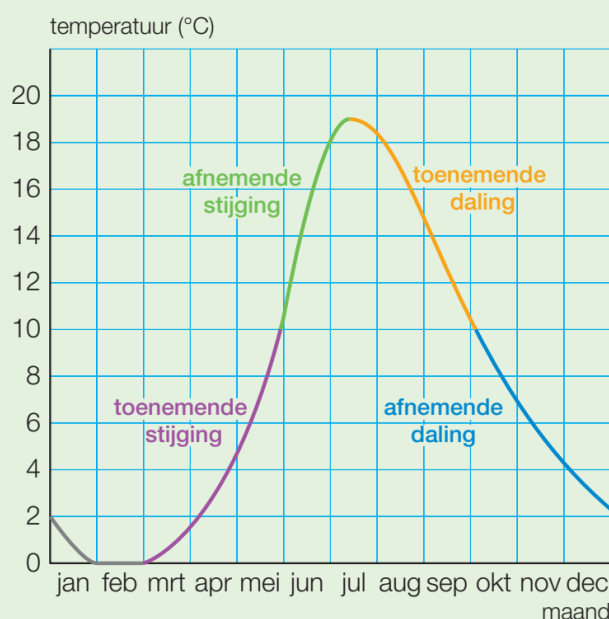
In plaats van $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$ noteren we $\mathbb{R}$.



Hiernaast zie je nogmaals de grafiek van de temperatuur van het oppervlaktewater bij Helsinki van opgave 1.

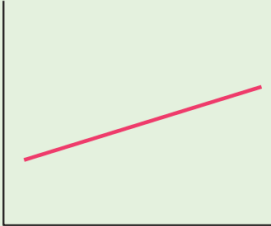
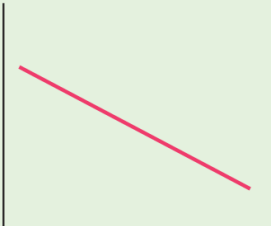
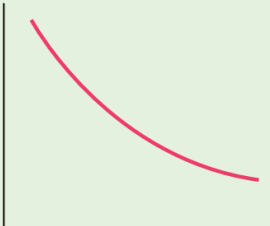
In de maanden maart, april en mei is er sprake van **toenemende stijging** en in de maand juni en de eerste helft van juli is er sprake van **afnemende stijging**.

In de tweede helft van juli en de maanden augustus en september is er sprake van **toenemende daling** en in de maanden oktober, november en december is er sprake van **afnemende daling**.



In het schema hieronder staan de zes soorten van stijgen en dalen.

Soorten van stijgen en dalen

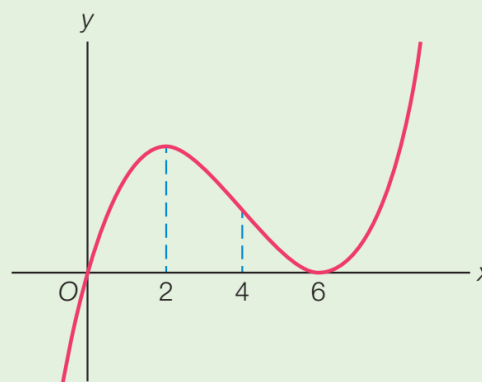
		
constante stijging	toenemende stijging	afnemende stijging
		
constante daling	toenemende daling	afnemende daling

Afspraak

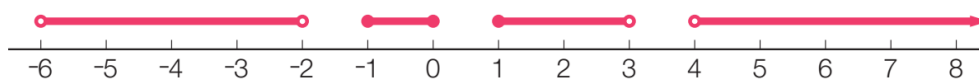
Op de vraag op welke intervallen een grafiek stijgend/dalend is, noem je de grootst mogelijke intervallen. Gebruik hierbij de notatie met haken.

In de figuur hiernaast kun je de volgende soorten van stijgen en dalen herkennen.

- afnemend stijgend op $\langle \leftarrow, 2 \rangle$
- toenemend dalend op $\langle 2, 4 \rangle$
- afnemend dalend op $\langle 4, 6 \rangle$
- toenemend stijgend op $\langle 6, \rightarrow \rangle$

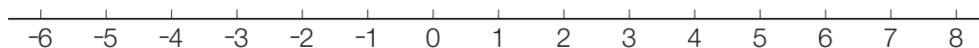


2 Noteer de volgende intervallen met haken.



3 Teken de volgende intervallen boven de getallenlijn hieronder.

- a** $[-5, -4]$ **b** $\langle -1, 2 \rangle$ **c** $[3, 5]$ **d** $\langle 7, \rightarrow \rangle$



4 Noteer de volgende intervallen met x .



- a** $\langle -2, 7 \rangle$ **c** $[5, 15]$
b $[6, 10]$ **d** $\langle \leftarrow; 4, 5 \rangle$

5 Noteer de volgende intervallen met haken.



- a** $-8 \leq x < 3$ **c** $5,1 \leq x \leq 7,3$
b $4 < x \leq 4\frac{1}{2}$ **d** $x \leq 2$

A6 **a** Teken de intervallen $[-4, -1]$, $\langle 1, 3 \rangle$ en $\langle 5, \rightarrow \rangle$ boven een getallenlijn.



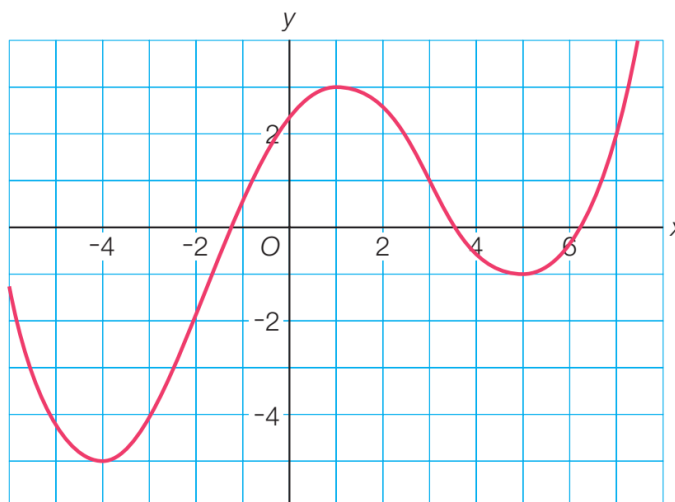
- b** Noteer de intervallen $\langle -2, 5 \rangle$, $[3, 7]$ en $\langle \leftarrow; 1, 23 \rangle$ met x .
c Noteer de intervallen $10 \leq x < 15$ en $x \geq 3\frac{1}{2}$ met haken.

E7 **a** Alle getallen die zowel oplossing zijn van de ongelijkheid $2x - 3 < 6$ als van de ongelijkheid $5 - 3x < 9$ zijn te noteren met een interval. Geef dit interval.



- b** Noteer de oplossing van de ongelijkheid $x^2 < 9$ als een interval.
c De oplossing van de ongelijkheid $x^2 \geq 16$ is te noteren met twee losse intervallen. Geef deze intervallen.

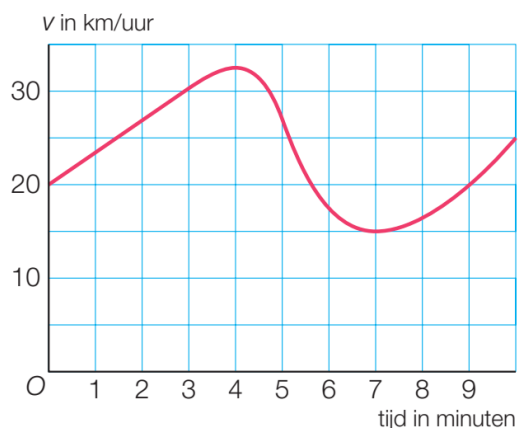
8 Welke soorten van stijgen en dalen kun je in de figuur hiernaast herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.



A9 De grafiek hiernaast gaat over de snelheid van een fietser tijdens een tocht door een glooiend landschap.



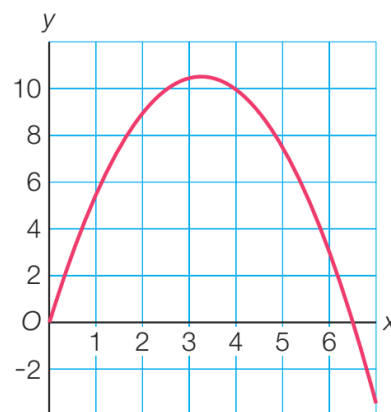
- a** Welke soorten van stijgen en dalen kun je in de figuur herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.
b Na hoeveel minuten heeft de fietser waarschijnlijk te maken met de steilste helling? Licht toe.



10 In de figuur hiernaast is op het interval $[0, 7]$ de grafiek van $y = -x^2 + 6\frac{1}{2}x$ getekend. Hierbij hoort de volgende tabel.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	5,5	9	10,5	10	7,5	3	-3,5

- Wat is de toename van y op het interval $[0, 1]$?
En op het interval $[1, 2]$?
- Op het interval $[4, 5]$ is er een afname van y .
Hoe groot is deze afname?
- Bereken de verandering van y op het interval $[2, 7]$.



Theorie B Van grafiek naar toenamediagram

Het aantal radioluisteraars op een doordeweekse dag neemt in de loop van de ochtend tot 10:00 uur toe. Zie de figuur hiernaast. Hierin is N het aantal luisteraars in duizendtallen en t de tijd in uren met $t = 0$ om 6:00 uur.

Van $t = 0$ tot $t = 1$ is de toename $\Delta N = 15 - 5 = 10$.
Dus op het interval $[0, 1]$ is $\Delta N = 10$.

Van $t = 1$ tot $t = 2$ is de toename $\Delta N = 30 - 15 = 15$.
Dus op $[1, 2]$ is $\Delta N = 15$.

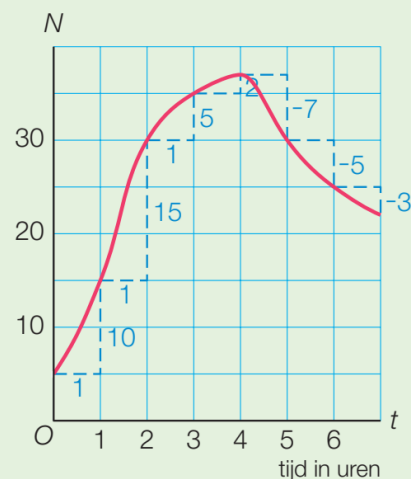
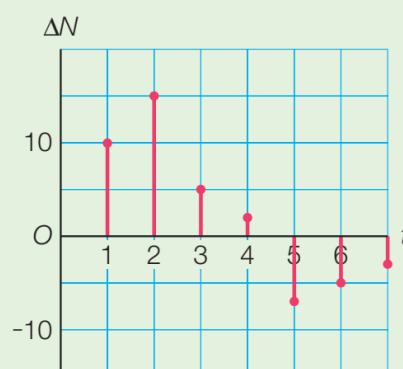
Op het interval $[4, 5]$ is er een afname van 7.
Dus op $[4, 5]$ is $\Delta N = -7$.

In de tabel hieronder staat bij elk interval met $\Delta t = 1$ de bijbehorende ΔN .

interval	$[0, 1]$	$[1, 2]$	$[2, 3]$	$[3, 4]$	$[4, 5]$	$[5, 6]$	$[6, 7]$
ΔN	10	15	5	2	-7	-5	-3

In de figuur hiernaast is bij de tabel een nieuw soort diagram getekend. Eerst is boven de rechtergrens van elk interval de bijbehorende ΔN uitgezet. Vervolgens zijn de punten door verticale lijnstukken met de t -as verbonden.

De figuur hiernaast heet een **toenamediagram**.
Bij dit toenamediagram is de **stapgrootte** $\Delta t = 1$.



Bij een toenamediagram

- staan de verticale lijnstukken bij de rechtergrens van het interval
- staat bij een toename het verticale lijnstuk boven de horizontale as
- staat bij een afname het verticale lijnstuk onder de horizontale as.

In het volgende voorbeeld zie je hoe je bij een gegeven grafiek het toenamediagram tekent. Je maakt eerst een tabel met toenamen. Let erop dat je in het toenamediagram bij de verticale as Δy zet.

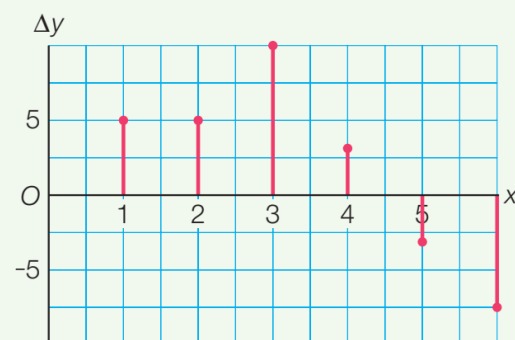
Voorbeeld

Zie de figuur hiernaast.
Teken het toenamediagram op het interval $[0, 6]$.
Neem stapgrootte $\Delta x = 1$.

Uitwerking

interval	Δy
$[0, 1]$	5
$[1, 2]$	5
$[2, 3]$	10
$[3, 4]$	3
$[4, 5]$	-3
$[5, 6]$	$-7\frac{1}{2}$

Zie de figuur hiernaast.



R11 Zie het voorbeeld.



a In het toenamediagram zijn de verticale lijnstukken bij $x = 1$ en $x = 2$ even lang.

Rob zegt: 'Hieraan kun je zien dat de grafiek tussen $x = 0$ en $x = 2$ een rechte lijn is.'

Lisette zegt: 'Omdat de grafiek tussen $x = 0$ en $x = 2$ een rechte lijn is, zijn de verticale lijnstukken bij $x = 1$ en $x = 2$ even lang.'

Slechts één van de twee heeft gelijk.

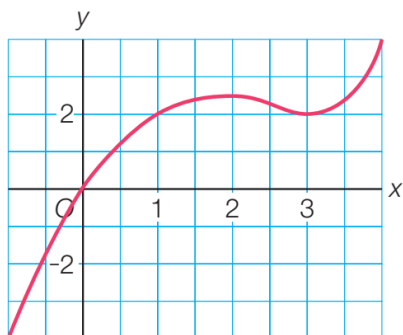
Wie? Licht toe.

b Teken het toenamediagram op het interval $[2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}]$. Neem stapgrootte $\Delta x = \frac{1}{2}$.

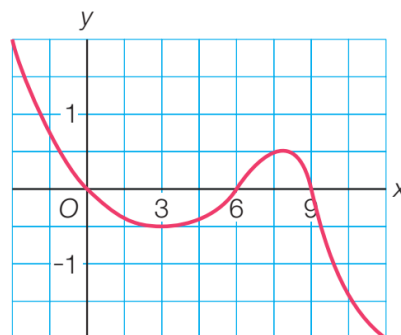
c De gegeven grafiek is tussen $x = 2\frac{1}{2}$ en $x = 5\frac{1}{2}$ lijnsymmetrisch. Hoe zie je dit terug in het toenamediagram van vraag b?

12
□ ⊗ *

- a** Teken op het interval $[-1, 4]$ het toenamediagram dat hoort bij de figuur hieronder. Neem stapgrootte $\Delta x = 1$.

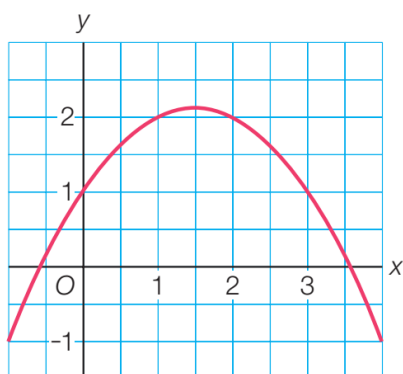


- b** Teken op het interval $[-3, 12]$ het toenamediagram dat hoort bij de figuur hieronder. Neem stapgrootte $\Delta x = 3$.



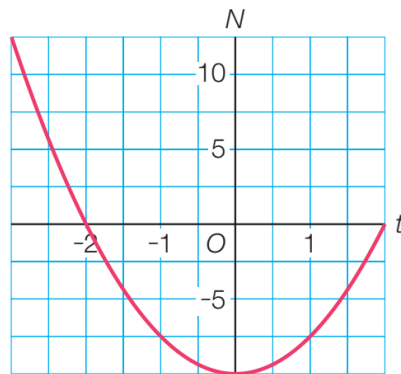
13
□ ⊗ *

- a** Teken op het interval $[-1, 4]$ het toenamediagram dat hoort bij de figuur hieronder. Neem stapgrootte $\Delta x = 1$.



bergparabool

- b** Teken op het interval $[-3, 1]$ het toenamediagram dat hoort bij de figuur hieronder. Neem stapgrootte $\Delta t = 1$.



dalparabool

- c** De toenamedigrammen die je bij a en b getekend hebt, vertonen een bijzonderheid. Welke?

R14
□ ⊗ *

- a** Wat kun je zeggen van een toenamediagram dat hoort bij een parabool?
b Onderzoek wat je kunt zeggen van een toenamediagram dat hoort bij een lijn.



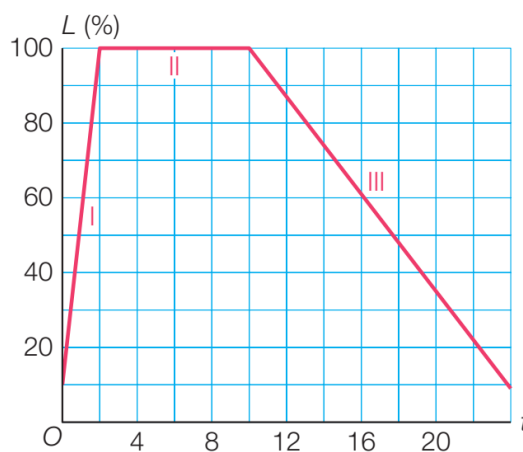
A15



In de figuur hiernaast is de grafiek van het batterijniveau gedurende een etmaal van de smartphone van Tessa getekend. Daarbij is t de tijd in uren met $t = 0$ om 9 uur 's avonds en L het laadniveau in procenten.

Je ziet dat tussen 9 uur 's avonds en 11 uur 's avonds de batterij wordt opgeladen van 10% naar 100% en dat het batterijniveau de volgende avond om 9 uur 9% is. De drie gedeelten van de grafiek zijn aangegeven met I, II en III.

- Stel van de gedeelten I, II en III een formule op waarbij je L uitdrukt in t . Geef van elke formule het bijbehorende interval.
- Gebruik de formules om te berekenen hoe laat in de middag het batterijniveau is afgenomen tot 50%. Geef het antwoord in minuten nauwkeurig.
- Teken bij de grafiek het toenamediagram. Neem stapgrootte 4 uur.



16



Gegeven is de volgende tabel.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	12	7	1	3	-2	-2	1

Teken het bijbehorende toenamediagram met $\Delta x = 1$.

17



Een voorwerp wordt van een hoge toren naar beneden gegooid. Tijdens de val wordt de hoogte h van het voorwerp boven de grond gegeven door de formule $h = -5t^2 - 4t + 145$. Hierin is h in meters en t de tijd in seconden.

- Vul de tabel hiernaast verder in. Gebruik de GR.
- Teken het toenamediagram van h op het interval $[0, 5]$ met stapgrootte $\Delta t = 1$.

t	h	Δh
0	145	-
1	136	-9
2		
3		
4		
5		

18



Gegeven is de formule $y = x^2 - 4x$.

Teken het toenamediagram op het interval $[-2, 4]$ met stapgrootte $\Delta x = 1$. Maak daartoe een tabel met x en y en bereken telkens Δy .

19



a Gegeven is de formule $y = -x^2 + 3x + 4$.

Teken het toenamediagram op het interval $[-3, 7]$ met stapgrootte $\Delta x = 2$.

b Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 1$.

Teken het toenamediagram op het interval $[-2, 5]$ met stapgrootte $\Delta x = 1$.

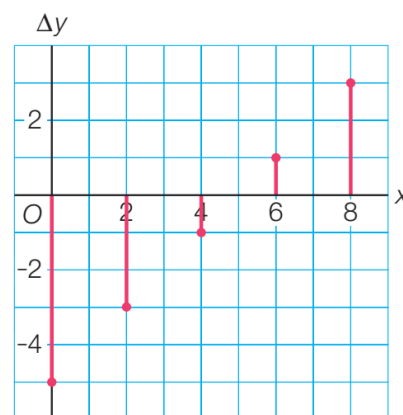
A20 Het toenamediagram hiernaast hoort bij een formule van de vorm $y = \frac{1}{4}x^2 + bx$.

a Welke soorten van stijgen en dalen kun je in de figuur herkennen?

Door gebruik te maken van het toenamediagram kun je berekenen dat $b = -2$.

b Laat deze berekening zien.

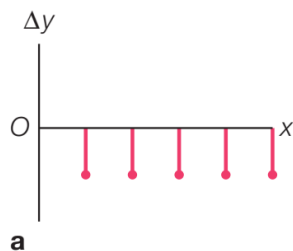
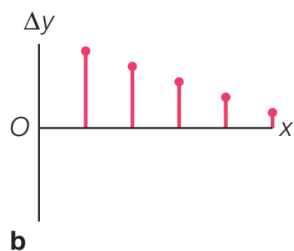
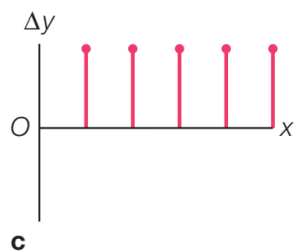
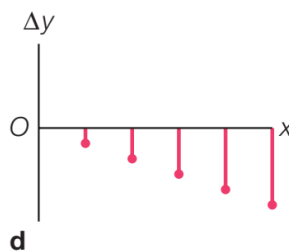
c Teken het toenamediagram bij de formule op het interval $[0, 6]$ met stapgrootte $\Delta x = 1$.



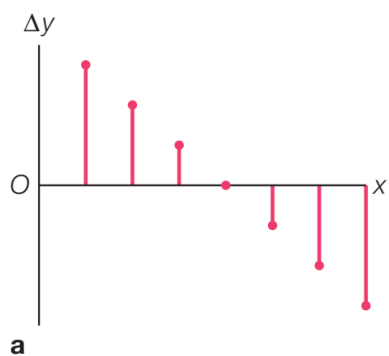
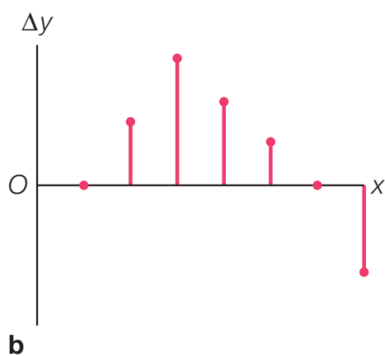
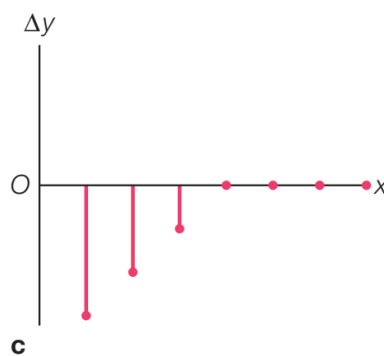
21 In een toenamediagram van een grafiek kun je de verschillende soorten van stijgen en dalen herkennen.

Zoek bij de toenamediagrammen hieronder de juiste soort van stijgen of dalen. Kies uit:

- toenemend stijgend
- afnemend stijgend
- constant stijgend
- toenemend dalend
- afnemend dalend
- constant dalend



22 Schets bij elk van de volgende toenamediagrammen een mogelijke grafiek.

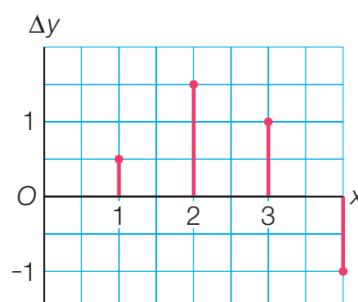


R23 Bij een gegeven toenamediagram kun je meerdere globale grafieken tekenen.

Teken bij het toenamediagram hiernaast

a twee grafieken die meerdere gemeenschappelijke punten hebben

b twee grafieken die geen gemeenschappelijke punten hebben.



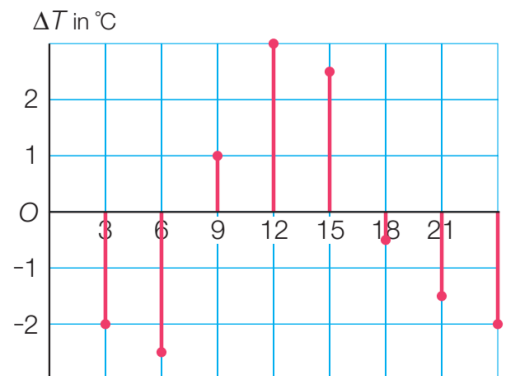
R24 Schets een toenamediagram bij een grafiek die

- a** een hoogste punt heeft
b een laagste punt heeft
c een lijn is
d afnemend dalend is.

A25 Hiernaast zie je een toenamediagram bij het temperatuurverloop op een dag.

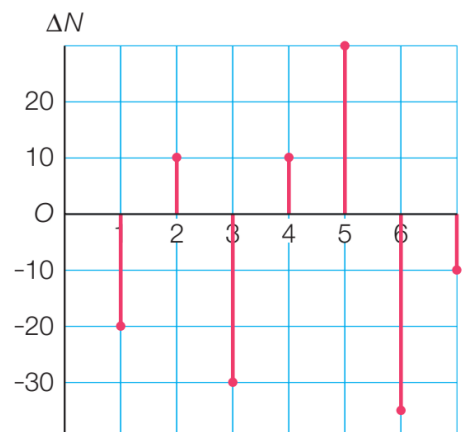
Om 12:00 uur was de temperatuur 20°C .

- a** Mieke beweert dat de temperatuur aan het eind van de dag lager is dan aan het begin. Onderzoek of Mieke gelijk heeft.
b Bereken de temperatuur om 0:00 uur.
c Teken een mogelijke grafiek van het temperatuurverloop.



E26 Op een zonnige dag houdt Daan bij hoeveel mensen er op een groot terras zitten. Zie het toenamediagram hiernaast. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 15:00 uur en N het aantal mensen op het terras.

Onderzoek hoeveel mensen er om 15:00 uur minstens op het terras hebben gezeten.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik ken het begrip interval en de intervalnotaties.
- ☐ Ik kan in een grafiek de verschillende soorten van stijgen en dalen herkennen en de bijbehorende intervallen noteren.
- ☐ Ik kan bij een grafiek, tabel of formule een toenamediagram tekenen.
- ☐ Ik kan bij een toenamediagram een mogelijke grafiek schetsen.

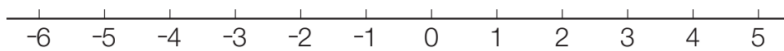
► OPGAVE C1
THEORIE A

► OPGAVE C2
THEORIE A

► OPGAVE C3
THEORIE B

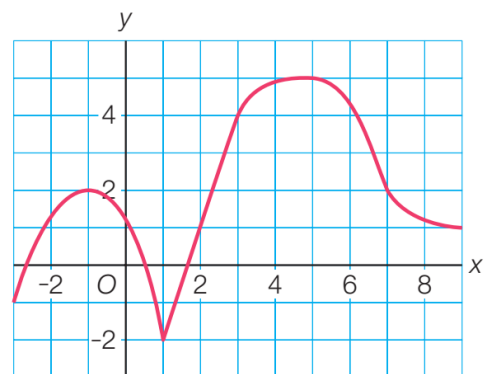
► OPGAVE C4
OPGAVE 22,24

- C1 a** Teken de intervallen $\langle -5, -2]$, $\langle -1, 1 \rangle$ en $\langle 2, \rightarrow \rangle$ boven de getallenlijn hieronder.



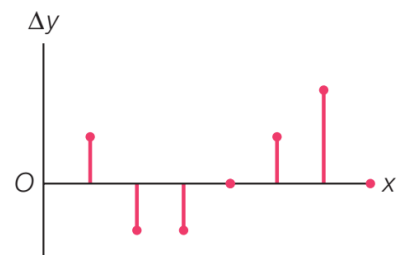
- b** Noteer de intervallen $\langle -2, 1 \rangle$, $\langle \leftarrow, 0 \rangle$ en $[2,5; 5 \rangle$ met x .
c Noteer de intervallen $-2,75 < x \leq 0$ en $x \geq -7,25$ met haken.

- C2** Welke verschillende soorten van stijgen en dalen kun je in de figuur hiernaast herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.



- C3** Teken op het interval $[-3, 9]$ het toenamediagram dat hoort bij de figuur hiernaast. Neem stapgrootte $\Delta x = 2$.

- C4** Schets bij het toenamediagram hiernaast een mogelijke grafiek.



Antwoorden



b $-2 < x < 1$, $x < 0$ en $2,5 \leq x < 5$

c $\langle -2,75; 0]$ en $[-7,25; \rightarrow \rangle$

- C2** afnemend stijgend op $\langle \leftarrow, -1 \rangle$, toenemend dalend op $\langle -1, 1 \rangle$, constant stijgend op $\langle 1, 3 \rangle$, afnemend stijgend op $\langle 3, 5 \rangle$, toenemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$, afnemend dalend op $\langle 7, \rightarrow \rangle$

C3, C4 *

2.2 Differentiequotiënt en snelheid

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij een grafiek een gemiddelde verandering op een tijdsinterval berekenen.
- Je kunt bij een grafiek een differentiequotiënt berekenen.
- Je kunt bij een functievoorschrift een differentiequotiënt berekenen.
- Je kunt bij een tijd-afstandformule met een differentiequotiënt de snelheid op een tijdstip benaderen.

O27



In de tabel hieronder zie je de afgelegde afstand van een motorcoureur op verschillende tijdstippen. Hierin is s de afstand in meters en t de tijd in seconden.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s	0	5	15	30	55	85	125	165	185	195	200

In de figuur hiernaast zie je de bijbehorende grafiek.

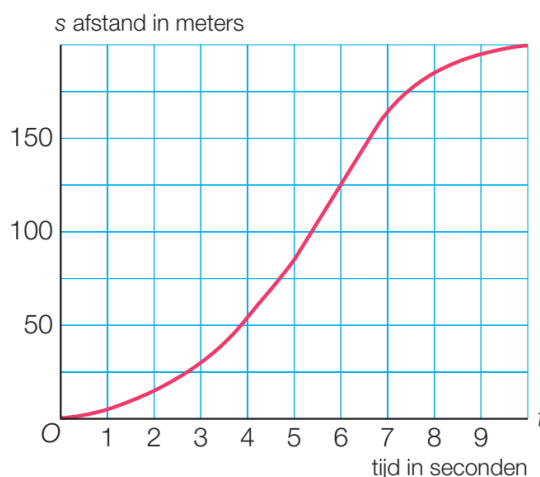
In de eerste vijf seconden legt de coureur een afstand af van 85 meter. De gemiddelde

snelheid in deze vijf seconden is $\frac{85}{5} = 17$ m/s.

Op het tijdsinterval $[5, 10]$ is de afgelegde afstand $200 - 85 = 115$ meter, dus de

gemiddelde snelheid op $[5, 10]$ is $\frac{115}{5} = 23$ m/s.

- Bereken de gemiddelde snelheid op het interval $[0, 3]$ en op het interval $[3, 7]$.
- Bereken de gemiddelde snelheid in de zesde seconde.
- Hoeveel m/s is de gemiddelde snelheid in de zevende seconde? Hoeveel km/u is dat?
- Ibrahim beweert dat de gemiddelde snelheid op het interval $[5, 7]$ gelijk is aan de snelheid die de coureur op de snelheidsmeter op $t = 6$ kan aflezen.
Ben je het met Ibrahim eens? Licht toe.
- In de derde seconde is de gemiddelde snelheid 15 m/s, dat is 54 km/u.
Wat denk je, wijst de snelheidsmeter van de motor gedurende de derde seconde steeds 54 km/u aan? Licht toe.



De zesde seconde is van $t = 5$ tot $t = 6$.



Theorie A Gemiddelde verandering

Bij tal van verschijnselen heb je te maken met verandering. Sommige veranderingen gaan langzaam, zoals het temperatuurverloop van het zeewater gedurende een jaar. Andere veranderingen gaan veel sneller, bijvoorbeeld de verandering van de temperatuur van theewater dat zojuist is opgezet. Bij allerlei veranderingen speelt de snelheid waarmee ze plaatsvinden een belangrijke rol.

Er zijn twee manieren om over snelheid te praten:

- gemiddelde snelheid over een periode
- snelheid op één moment.

Bij *snelheid op één moment* kun je bijvoorbeeld denken aan de snelheid die je kunt aflezen op de snelheidsmeter van een auto of een scooter.

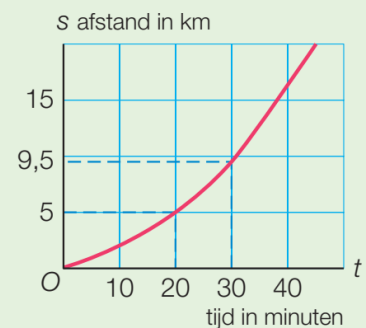
We gaan ons eerst bezighouden met *gemiddelde snelheid*.

Hiernaast is een **tijd-afstandgrafiek** getekend.

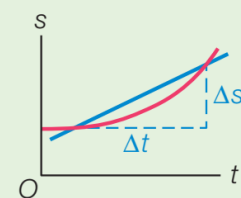
Op het interval $[20, 30]$ is de afgelegde afstand $\Delta s = 9,5 - 5 = 4,5$ km, dus de gemiddelde snelheid

op het interval $[20, 30]$ is $\frac{4,5}{10} = 0,45$ km/min.

Je ziet dat je de gemiddelde snelheid op een interval krijgt door $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ te berekenen.



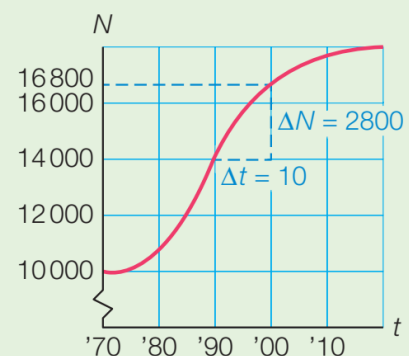
De gemiddelde snelheid bij een tijd-afstandgrafiek is $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.



In de figuur hiernaast is het aantal inwoners van een plaats uitgezet tegen de tijd. Je ziet dat tussen 1990 en 2000 het aantal inwoners is toegenomen van 14 000 tot 16 800. De gemiddelde verandering in deze periode is

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{2800}{10} = 280 \text{ inwoners per jaar.}$$

$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ is de gemiddelde verandering van N per tijdseenheid.



Afspraak

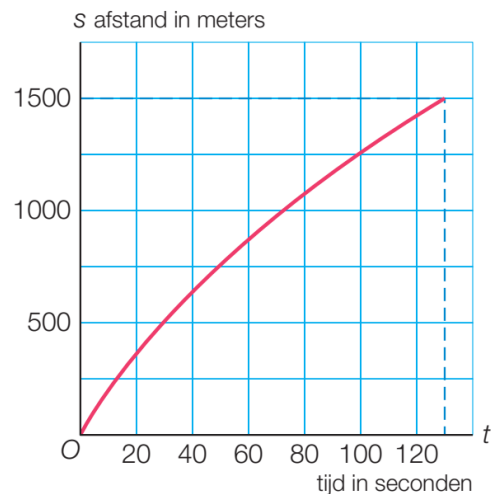
Vermeld bij gemiddelde snelheden en gemiddelde veranderingen de eenheid.

28



Esmee doet mee aan een schaatswedstrijd op de langebaan en schaatst de 1500 meter. In de figuur hiernaast zie je hoe haar race is verlopen.

- Bereken de gemiddelde snelheid van Esmee in km/u gedurende de eerste minuut. Doe dat ook voor de laatste halve minuut van de race.
- Hoe kun je in de figuur zien dat Esmee steeds langzamer ging?



29

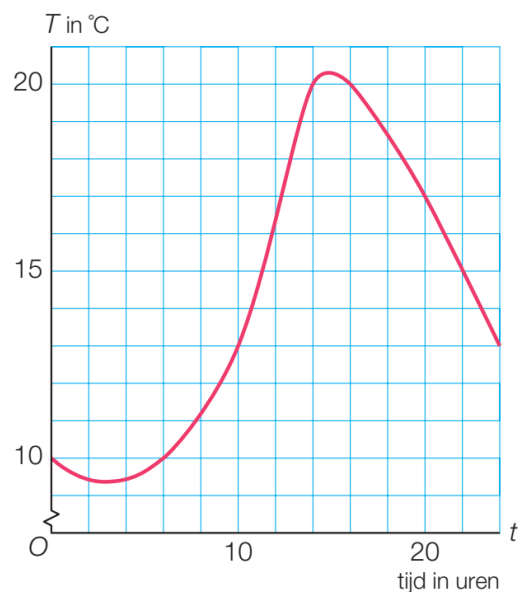


De figuur hiernaast gaat over het verloop van de temperatuur op een dag in mei.

- Bereken de gemiddelde temperatuurverandering $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op het interval $[6, 10]$ en op het interval $[9, 14]$.
- Licht toe dat op het interval $[16, 20]$ geldt dat $\Delta T = -3$ en bereken $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op $[16, 20]$.

Wat betekent het dat deze gemiddelde verandering negatief is?

- Teken de horizontale lijn $T = 20$. Hoe volgt hieruit dat op het interval $[14, 16]$ de gemiddelde verandering 0°C per uur is?
- Geef nog twee intervallen waarop de gemiddelde verandering 0°C per uur is.
- Teken een lijn met richtingscoëfficiënt 0,4 door het punt $(10, 13)$. Hoe kun je hieraan zien dat de gemiddelde verandering op het interval $[10, 20]$ gelijk is aan $0,4^\circ\text{C}$ per uur?
- Op het interval $[0, p]$ is de gemiddelde verandering $0,3^\circ\text{C}$ per uur. Geef een mogelijke waarde van p .

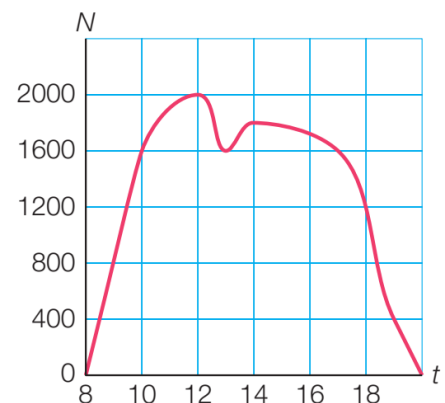


A30



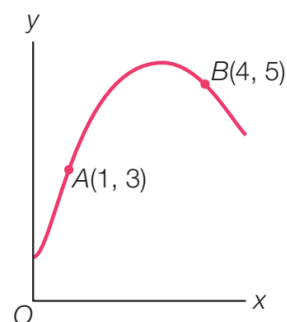
In de figuur hiernaast is het aantal auto's N op een parkeerterrein bij een dierentuin uitgezet tegen de tijd t in uren. Het betreft een zaterdag in mei.

- Bereken $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ op de intervallen $[9, 13]$ en $[12, 17]$.
- Geef een interval waarop de gemiddelde toename 100 auto's per uur is.
- Geef een interval waarop de gemiddelde afname 200 auto's per uur is.



Zie de grafiek in de figuur hiernaast met daarop de punten $A(1, 3)$ en $B(4, 5)$.

- Bereken de helling van de lijn door A en B .
- Volgens Emma is de helling van de lijn AB gelijk aan de gemiddelde verandering op het interval $[1, 4]$.
Ben je het met Emma eens? Licht toe.



Theorie B Differentiequotiënt bij een grafiek

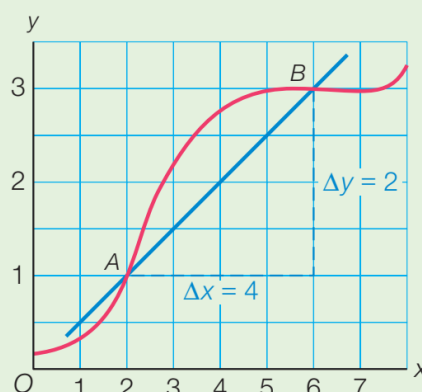
Zie de figuur hiernaast.

Op $[2, 6]$ is $\Delta x = 6 - 2 = 4$ en $\Delta y = 3 - 1 = 2$.

De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{4} = 0,5$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ heet het **differentiequotiënt** van y op $[2, 6]$.

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op $[2, 6]$ is de richtingscoëfficiënt van de lijn AB hiernaast.

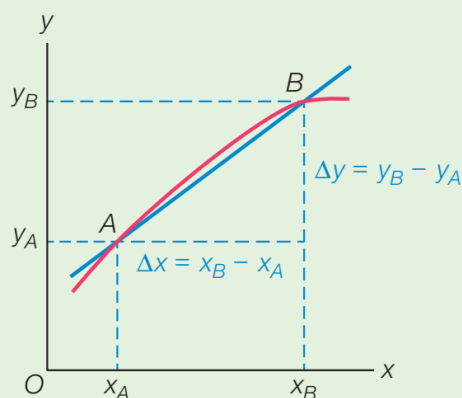


Het woord differentiequotiënt kun je als volgt begrijpen:

- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is een deling, dus een *quotiënt*.
- Onder en boven de breukstreep staan verschillen en een ander woord voor verschil is *differentie*.

Het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$ is

- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (ook wel de helling) van de lijn AB
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



Voorbeeld

Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken de gemiddelde verandering van y op $[-2, 2]$.
- b** Bereken het differentiequotiënt van y op $[2, 4]$.
- c** Voor welke p is het differentiequotiënt van y op $[1, p]$ gelijk aan $\frac{1}{3}$?

Aanpak

- c** Het differentiequotiënt op $[1, p]$ is $\frac{1}{3}$, dus teken door het punt van de grafiek met x -coördinaat 1 de lijn met helling $\frac{1}{3}$.

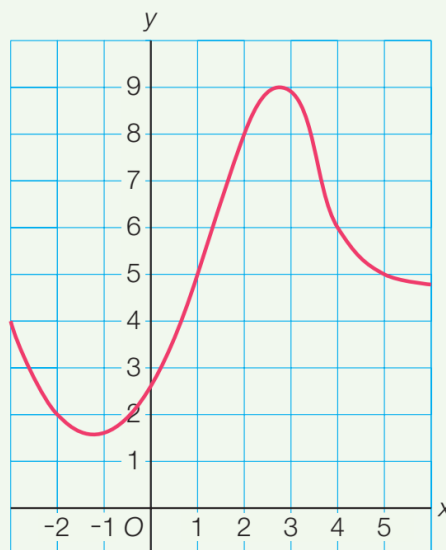
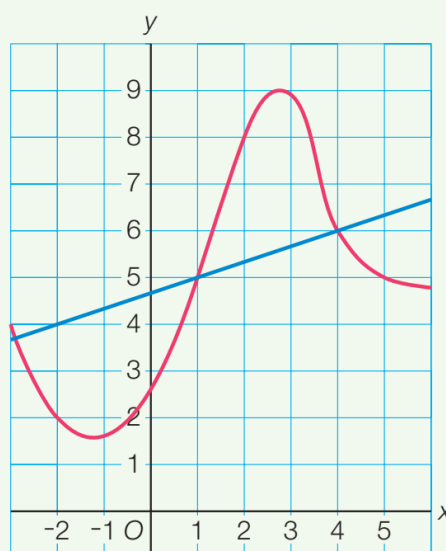
Uitwerking

- a** De gemiddelde verandering op $[-2, 2]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 2}{2 - (-2)} = \frac{6}{4} = 1,5.$$

- b** Op $[2, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 8}{4 - 2} = \frac{-2}{2} = -1.$

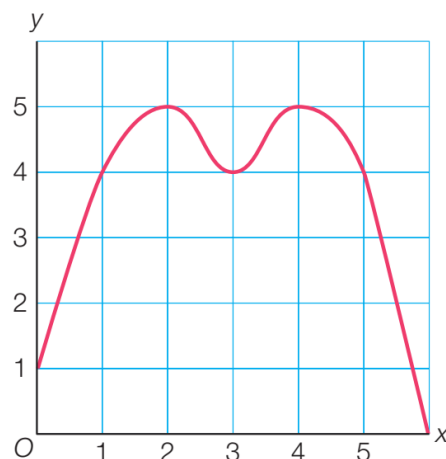
- c** Zie de figuur hiernaast.
Dus voor $p = 4$.



32 Zie de figuur hiernaast.

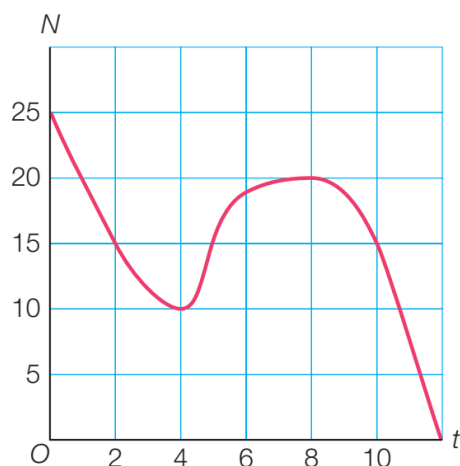


- a** Bereken de gemiddelde verandering van y op $[0, 4]$.
- b** Bereken het differentiequotiënt van y op $[2, 6]$.
- c** Voor welke p is het differentiequotiënt van y op $[0, p]$ gelijk aan 0,6?
- d** Licht toe dat er drie waarden van q zijn waarvoor het differentiequotiënt van y op $[1, q]$ gelijk is aan $\frac{1}{4}$.



A33 Zie de figuur hiernaast.

- ⊗ ***
- Bereken de gemiddelde verandering van N op $[2, 8]$.
 - Bereken het differentiequotiënt van N op $[4, 12]$.
 - Hoeveel waarden van p zijn er waarvoor het differentiequotiënt van N op $[2, p]$ gelijk is aan 0,5? Licht toe.
 - Voor welke q is het differentiequotiënt van N op $[0, q]$ gelijk aan -1 ?



E34 Van een grafiek is het volgende bekend:

- ***
- de grafiek gaat door het punt $(0, 2)$
 - op $[0, 2]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{4}$
 - op $[0, 5]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{5}$
 - op $[1, 3]$ is het differentiequotiënt $1\frac{1}{2}$
 - op $[1, 5]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{2}$.
- Teken een mogelijke grafiek.
 - Bereken het differentiequotiënt op $[3, 5]$.
 - Is het mogelijk dat het differentiequotiënt op $[1, 4]$ gelijk is aan $1\frac{1}{2}$? Licht toe.

O35 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

- ⊗ ***
- Bereken $f(1)$ en $f(5)$ en gebruik dit om het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[1, 5]$ te berekenen.
 - Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[0, 4]$.

Theorie C Differentiequotiënt bij een functievoorschrift

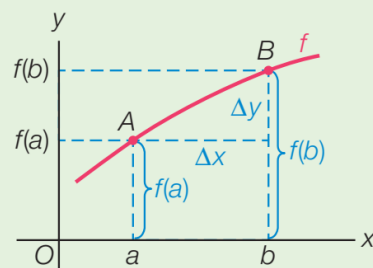
Weet je van een functie het voorschrift, dan kun je daarmee differentiequotiënten berekenen. Je hebt de grafiek dan niet nodig.

Zo is bij de functie $f(x) = x^2$ het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-3, 1]$

$$\text{gelijk aan } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{1^2 - (-3)^2}{4} = \frac{-8}{4} = -2.$$

Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[a, b]$ is gelijk aan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

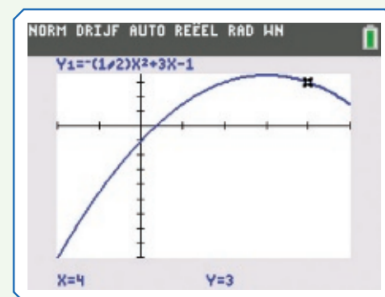


Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$.
Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-1, 4]$.

Uitwerking

$$\text{Op } [-1, 4] \text{ is } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{3 - (-4\frac{1}{2})}{5} = \frac{7\frac{1}{2}}{5} = 1\frac{1}{2}.$$



36 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x + 5$.

- a Schets de grafiek van f .
- b Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op $[1, 3]$.
- c Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-2, 4]$.
- d Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -3$ en $x_B = 1$.
Bereken de helling van de lijn AB .

A37 Gegeven is de functie $f(x) = 0,4x^4 - 2x^3 + x^2 + 6x - 5$.

- a Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op $[-1, 1]$.
- b Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-2, 2]$.
- c Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = 0$ en $x_B = 3$.
Bereken de helling van de lijn AB .
- d De lijn $y = 2x$ snijdt de grafiek van f in de punten C en D .
Wat weet je van de helling van de lijn CD ?
- e De parabool $y = -x^2 - 0,8x + 11,8$ snijdt de grafiek van f in de punten E en F .
Bereken de helling van de lijn EF .

A38 Voor elke a is gegeven de functie $f(x) = ax^2 + 4x - 3$.

- * Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[1, 4]$ is gelijk aan 2.
Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[0, 1]$.

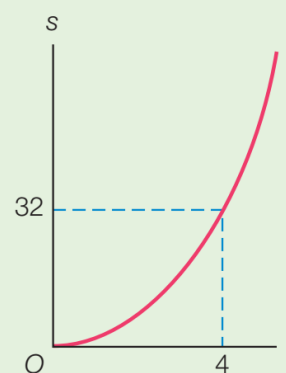
O39 Voor een optrekkende motor is de afgelegde afstand s gegeven door de formule $s = t^3 + t$. Hierin is s in meters en t de tijd in seconden.

- a Bereken in m/s de gemiddelde snelheid op $[2, 3]$.
- b Bereken de gemiddelde snelheden op de intervallen $[2; 2,5]$, $[2; 2,1]$, $[2; 2,01]$ en $[2; 2,001]$.
- c In vraag b is de gemiddelde snelheid berekend op een steeds kleiner interval $[2; 2 + \Delta t]$. Achtereenvolgens was Δt gelijk aan 0,5, 0,1, 0,01 en 0,001.
Welk vermoeden krijg je over de gemiddelde snelheid als je Δt nog kleiner kiest? Controleer je vermoeden voor $\Delta t = 0,0001$.
- d Welke snelheid denk je dat de motor heeft op $t = 2$?

Theorie D Snelheid op één moment

De tijd-afstandgrafiek hiernaast hoort bij de formule $s = \frac{1}{2}t^3$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.

Je hebt al heel wat keren gemiddelde snelheden berekend op een gegeven tijdsinterval. Maar hoe kom je aan de snelheid op één moment, bijvoorbeeld op $t = 4$? Om deze vraag te kunnen beantwoorden, bekijken we de gemiddelde snelheid op steeds kleiner wordende intervallen $[4, 5]$, $[4; 4,5]$, $[4; 4,1]$, $[4; 4,01]$, ... Zo krijgen we een steeds betere benadering van de snelheid op $t = 4$.



De gemiddelde snelheid $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ op het interval

- $[4, 5]$ is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 5^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{5 - 4} = \frac{62,5 - 32}{1} = 30,5 \text{ m/s}$
- $[4; 4,5]$ is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4,5^3 - 32}{0,5} = 27,125 \text{ m/s}$
- $[4; 4,1]$ is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4,1^3 - 32}{0,1} = 24,605 \text{ m/s}$
- $[4; 4,01]$ is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4,01^3 - 32}{0,01} \approx 24,060 \text{ m/s}$

De gemiddelde snelheid op $[4; 4,01]$ geeft een goede benadering van de snelheid op $t = 4$.

Je krijgt het vermoeden dat de snelheid op $t = 4$ gelijk is aan 24 m/s.

Dit vermoeden wordt bevestigd als je $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ berekent op een nog kleiner interval, bijvoorbeeld op $[4; 4,001]$.

Je krijgt $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4,001^3 - 32}{0,001} \approx 24,006 \text{ m/s}$.

Om de snelheid op $t = 2$ te krijgen, neem je een klein interval $[2, 2 + \Delta t]$, bijvoorbeeld $[2; 2,001]$. De gemiddelde snelheid op dit interval geeft een goede benadering van de snelheid op $t = 2$.

Je krijgt $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2,001^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^3}{0,001} \approx 6 \text{ m/s}$.

Bij een tijd-afstandformule benader je de snelheid op het tijdstip $t = a$ met het differentiequotient op $[a, a + \Delta t]$ met bijvoorbeeld $\Delta t = 0,01$ of $\Delta t = 0,001$.

Voorbeeld

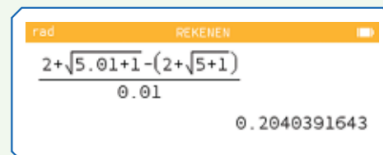
Gegeven is de formule $s = 2 + \sqrt{t+1}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.

Benader in m/s de snelheid op $t = 5$. Neem $\Delta t = 0,01$ en rond af op twee decimalen.

Uitwerking

$$\text{Op } [5; 5,01] \text{ is } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2 + \sqrt{5,01+1} - (2 + \sqrt{5+1})}{0,01} \\ = 0,204\dots$$

De snelheid op $t = 5$ is bij benadering 0,20 m/s.



rad REKENEN
$$\frac{2 + \sqrt{5.01+1} - (2 + \sqrt{5+1})}{0.01}$$

0.2040391643

40 Gegeven is de formule $s = 8 - \frac{5}{t+2}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.

Benader in m/s de snelheid op $t = 1$ en op $t = 2$. Neem $\Delta t = 0,01$ en rond af op twee decimalen.

41 Gegeven is de formule $s = 10\sqrt{4t+1} - 10$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.

Neem in deze opgave $\Delta t = 0,01$ en rond af op twee decimalen.

a Benader in m/s de snelheid op $t = 2$ en op $t = 20$.

b Onderzoek of de snelheid op $t = 11$ gelijk is aan het gemiddelde van de snelheden op $t = 2$ en $t = 20$.

A42 De oppervlakte van het kroos in de vijver van de familie Damen groeit volgens de formule $A = 1,20 \cdot 1,15^t$. Hierin is A de oppervlakte in m^2 en t de tijd in dagen.

Benader de snelheid in m^2/dag waarmee de oppervlakte van het kroos toeneemt op $t = 3$.

Neem $\Delta t = 0,001$ en rond af op twee decimalen.



A43 Gegeven zijn de formules $M = \frac{10 \cdot 2^t}{2^t + 1}$ en $N = \frac{10}{2^t + 1}$. Hierin zijn M en N hoeveelheden en is t de tijd in dagen.

Onderzoek met enkele getallenvoorbeelden of de snelheid waarmee M op een willekeurig moment van een dag toeneemt, gelijk is aan de snelheid waarmee N op hetzelfde moment afneemt.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan bij een grafiek een gemiddelde verandering op een tijdsinterval berekenen.
- ☐ Ik kan bij een grafiek een differentiequotiënt berekenen.
- ☐ Ik kan bij een functievoorschrift een differentiequotiënt berekenen.
- ☐ Ik kan bij een tijd-afstandformule met een differentiequotiënt de snelheid op een tijdstip benaderen.

► OPGAVE C5
THEORIE A

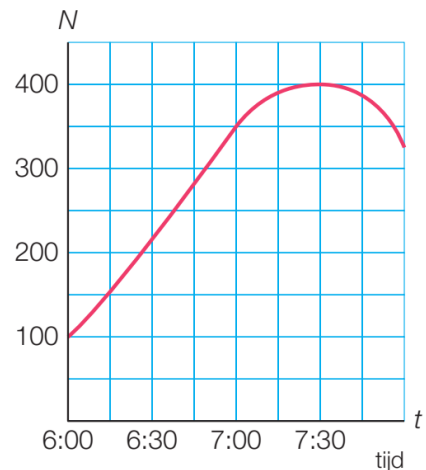
► OPGAVE C6
THEORIE B

► OPGAVE C7
THEORIE C

► OPGAVE C8
THEORIE D

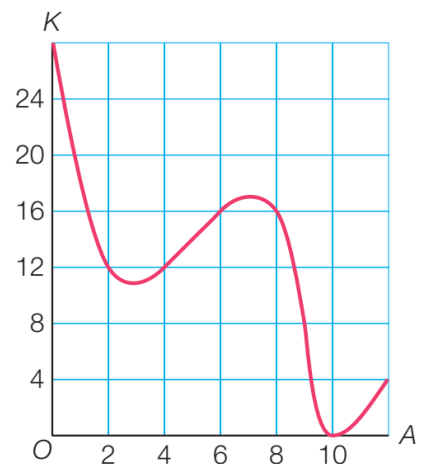
C5 Op een gedeelte van een weg waar de snelheid wordt gecontroleerd middels een trajectcontrole, is bijgehouden hoeveel auto's zich op een maandagmorgen tussen 6 en 8 uur op het traject bevinden. De resultaten zie je in de figuur hiernaast.

Bereken $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ op het interval [6:00; 7:30].



C6 Zie de figuur hiernaast.

- a Bereken het differentiequotiënt van K op $[4, 8]$.
- b Bereken de gemiddelde verandering van K op $[2, 10]$.
- c Hoeveel waarden van p zijn er waarvoor het differentiequotiënt van K op $[0, p]$ gelijk is aan -2 ? Licht toe.



C7 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 5$.

- a Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[0, 3]$.
- b Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op $[-3, 1]$.
- c Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -4$ en $x_B = 4$.

Bereken de helling van de lijn AB .

C8 Gegeven is de formule $s = 0,4t^2$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.

Benader in m/s de snelheid op $t = 3$ en op $t = 5$. Neem $\Delta t = 0,01$ en rond af op twee decimalen.

Antwoorden

C5 200 auto's per uur

C6 a 1
b $-1\frac{1}{2}$
c drie

C7 a -2

b 16

c 17

C8 2,40 m/s en 4,00 m/s

2.3 Raaklijnen en hellinggrafieken

Kennis en vaardigheden

- Je kunt in een punt van een grafiek de helling bepalen met behulp van een raaklijn.
- Je kunt de hellinggrafiek schetsen als de grafiek van een functie gegeven is.
- Je kunt een mogelijke grafiek van een functie schetsen als de hellinggrafiek gegeven is.
- Je kunt bij een functievoorschrift de helling in een punt van de grafiek berekenen met de GR.
- Je kunt bij een functievoorschrift de hellinggrafiek plotten en hiermee berekeningen uitvoeren.

044

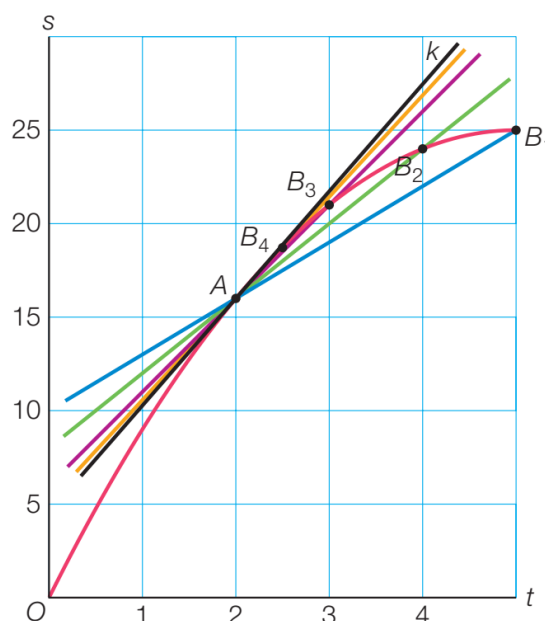


Gegeven is de formule $s = -t^2 + 10t$ met t op $[0, 5]$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.

- a Bereken in m/s de gemiddelde snelheid op achtereenvolgens $[2, 5]$, $[2, 4]$, $[2, 3]$ en $[2, 2,5]$.

Hiernaast is de bijbehorende grafiek getekend. Ook zijn de lijnen AB_1 , AB_2 , AB_3 en AB_4 getekend met $A(2, 16)$, $B_1(5, 25)$, $B_2(4, 24)$, $B_3(3, 21)$ en $B_4(2,5; 18,75)$.

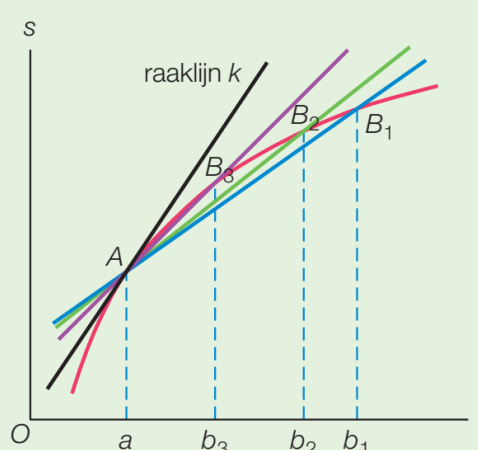
- b Bij welke van deze lijnen komt de richtingscoëfficiënt het dichtst in de buurt van de richtingscoëfficiënt van de lijn k die de grafiek raakt in A ?



Theorie A Snelheid en richtingscoëfficiënt

Hiernaast zie je een tijd-afstandgrafiek. Door de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$.

De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de richtingscoëfficiënten van de lijnen AB_1 , AB_2 , AB_3 , ... Hoe dichterbij A komt te liggen, des te meer zal de lijn AB lijken op de lijn k die de grafiek in A raakt. De lijn k is de **raaklijn** aan de grafiek in A . De snelheid op $t = a$ is dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in A .



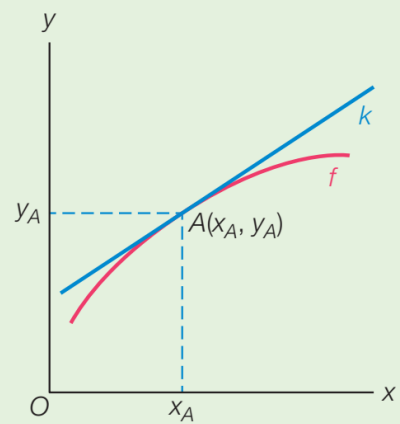
In een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in het bijbehorende punt.

Hiernaast is de raaklijn k aan de grafiek van f in het punt $A(x_A, y_A)$ getekend.

Op dezelfde manier als bij een tijd-afstandgrafiek is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = x_A$.

In plaats van: de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A

zeggen we ook: de **helling van de grafiek** in A .



De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A is

- de helling van de grafiek in A
- de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.

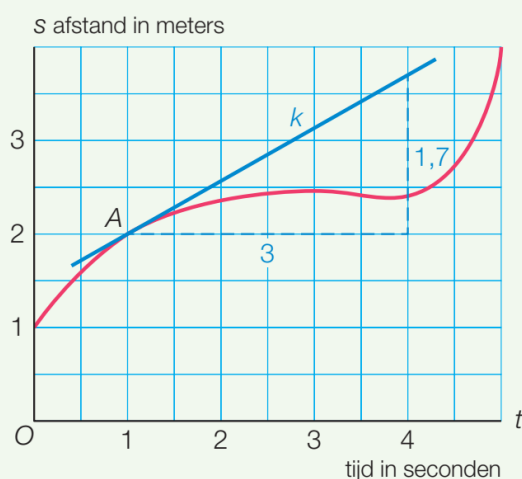
Voorbeeld

Bepaal met behulp van de figuur hiernaast de snelheid op $t = 1$. Geef het antwoord in m/s en rond af op één decimaal.

Aanpak

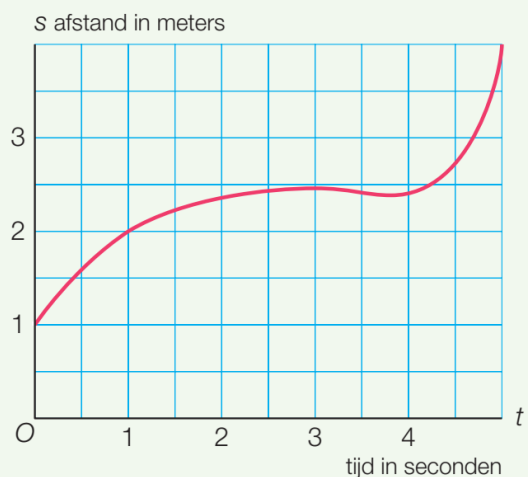
Teken de raaklijn k in het punt met $t = 1$, lees een geschikte Δt en Δs af en bereken rc_k .

Uitwerking



$$rc_k = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,7}{3} = 0,566\dots$$

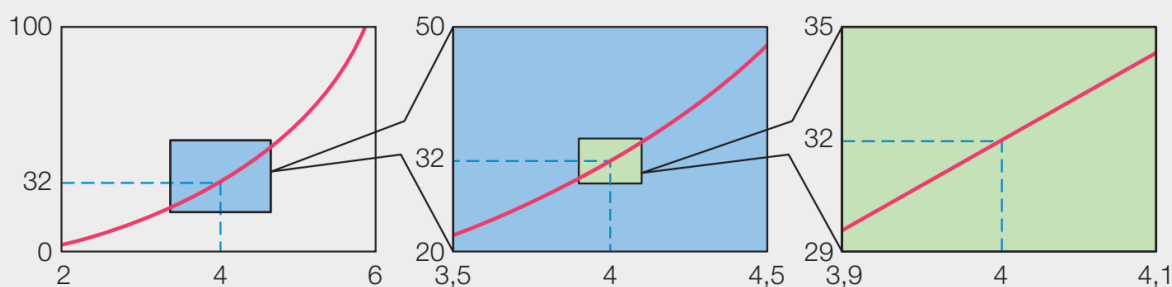
De snelheid op $t = 1$ is ongeveer 0,6 m/s.



Voor Δs neem je het verschil van de s -coördinaten van twee punten op de raaklijn en dus niet op de grafiek. Je moet immers de rc van de raaklijn hebben.

Informatief Inzoomen op de grafiek

In de figuren hieronder is ingezoomd op de grafiek van $f(t) = \frac{1}{2}t^3$.



Hoe meer je inzoomt, hoe meer de grafiek op een rechte lijn gaat lijken.

De helling van deze lijn geeft de snelheid op $t = 4$.

Zoom je in op de grafiek bij $t = 3$, dan geeft de helling de snelheid op $t = 3$.

45 Hieronder zie je een tijd-afstandgrafiek.



a In het punt A is de raaklijn aan de grafiek getekend.

Bepaal met behulp van de figuur de snelheid op $t = 7$.

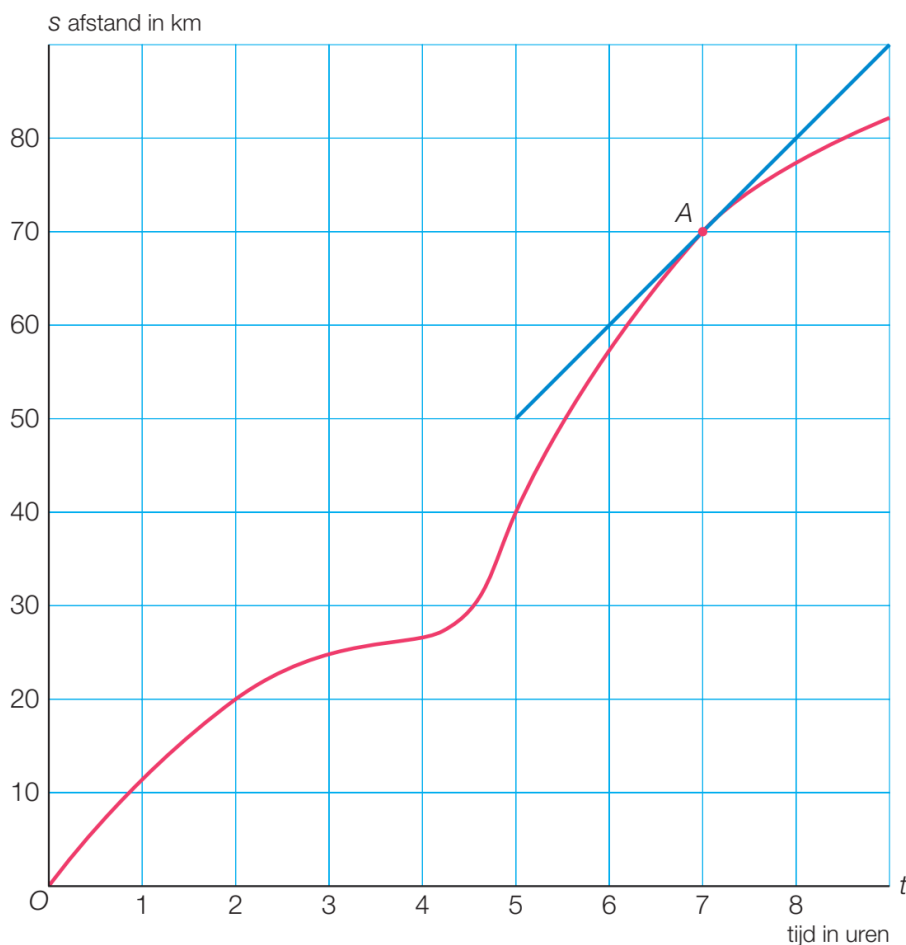
b Bepaal met behulp van de figuur de snelheid op $t = 2$.

Geef het antwoord in km/u en rond af op één decimaal.

c Neemt de snelheid gedurende de eerste vier uur toe of af?

Hoe zie je dat aan de grafiek?

d Voor welke t schat je dat de snelheid minimaal is? Licht toe.

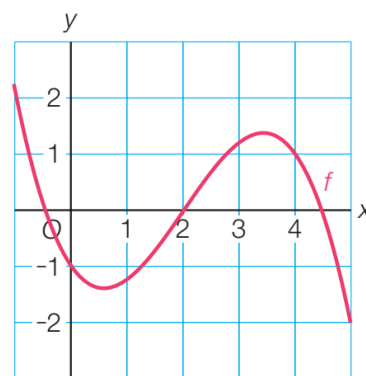


A46

►WERKBLAD Hiernaast zie je de grafiek van de functie f .



- a Bepaal met behulp van de figuur de snelheid waarmee y verandert voor $x = 0$ en voor $x = 1$. Rond zo nodig af op één decimaal.
- b Op de grafiek van f ligt het punt A waarin de helling maximaal is. Stel de formule op van de raaklijn k in A . Rond zo nodig af op één decimaal.



O47

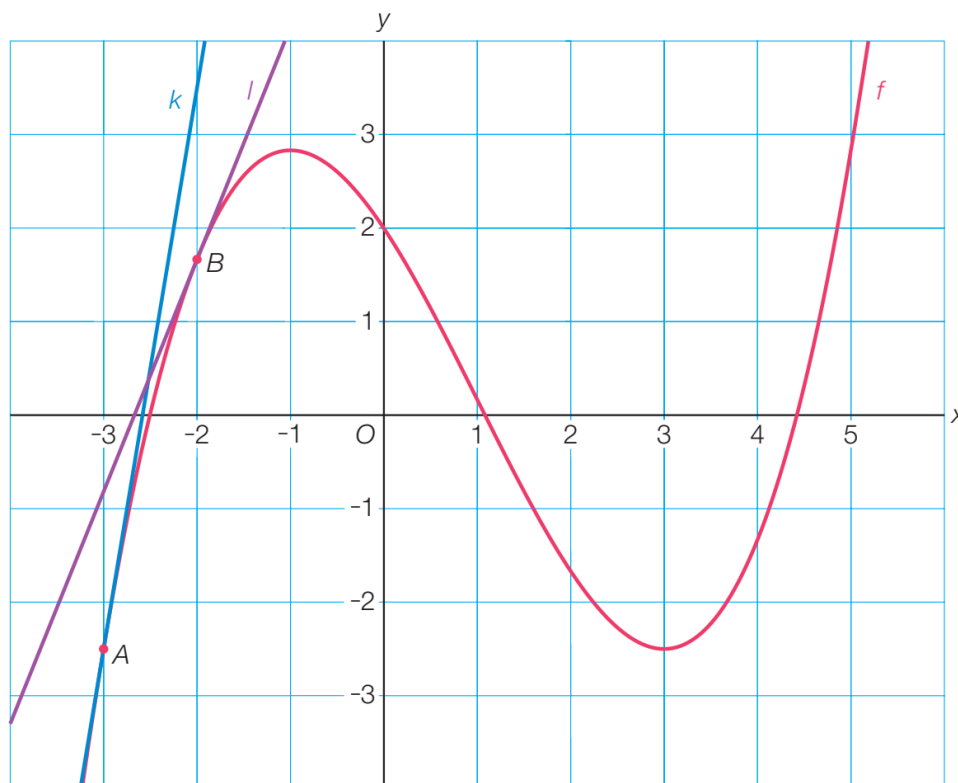


In de figuur hieronder zie je de grafiek van de functie f . Op de grafiek liggen de punten A en B met $x_A = -3$ en $x_B = -2$. In A en B zijn de raaklijnen k en l aan de grafiek getekend. Je kunt nagaan dat $rc_k = 6$ en $rc_l = 2,5$.

- a Vul de tabel verder in.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
helling	6	2,5						

- b Teken in een nieuwe figuur de punten die uit de tabel volgen en teken door deze punten een vloeiende kromme.
- c De in vraag b getekende kromme snijdt de x -as in twee punten. Bij welke bijzondere punten van de grafiek van f horen deze snijpunten?
- d Tussen de twee toppen van de grafiek van f is de grafiek van f dalend. Hoe zie je dit terug in de getekende kromme van vraag b?



Theorie B Hellinggrafieken schetsen

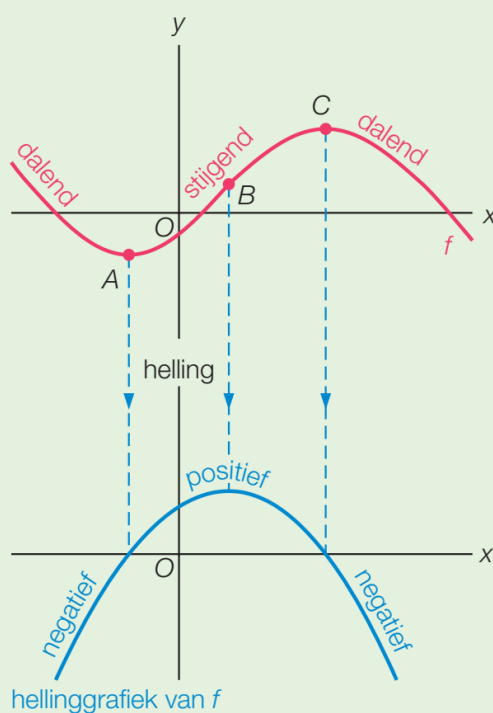
Bij een gegeven grafiek van een functie f kun je bij elke x de helling van de grafiek in het bijbehorende punt vinden. Zo ontstaat de **hellinggrafiek** van f .

Uit een gegeven grafiek van f kun je bijzonderheden van de hellinggrafiek afleiden.

- Bij een *dalend* deel van de grafiek van f is de helling in elk punt van dat deel *negatief*, dus de hellinggrafiek ligt dan onder de x -as.
- In een *top* van de grafiek van f is de helling *nul*, dus de hellinggrafiek snijdt dan de x -as.
- Bij een *stijgend* deel van de grafiek van f is de helling in elk punt van dat deel *positief*, dus de hellinggrafiek ligt dan boven de x -as.

Bekijk in de figuur hiernaast hoe de hellinggrafiek samenhangt met de grafiek van f .

Je ziet dat de toppen A en C de snijpunten opleveren van de hellinggrafiek met de x -as. Tussen A en C stijgt de grafiek van f , dus daar ligt de hellinggrafiek boven de x -as. In het punt B is de helling maximaal. Dit geeft het hoogste punt van de hellinggrafiek.



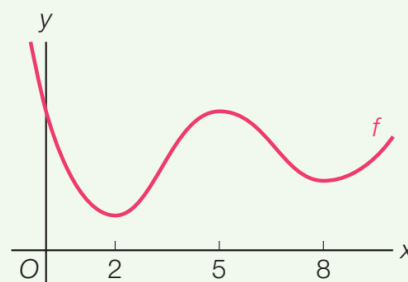
De hellinggrafiek van f hangt samen met de grafiek van f .

Het verband tussen de grafiek van f en de hellinggrafiek van f .

- | | | |
|---------------------------------|-----------|----------------------------------|
| • Grafiek van f is stijgend | hoort bij | hellinggrafiek boven de x -as |
| • Grafiek van f is dalend | hoort bij | hellinggrafiek onder de x -as |
| • Grafiek van f heeft een top | hoort bij | hellinggrafiek snijdt de x -as |

Voorbeeld

Zie de figuur hiernaast met de grafiek van de functie f .
Schets de hellinggrafiek van f .

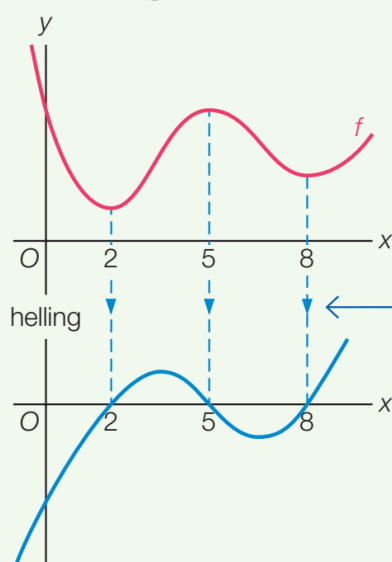


Aanpak

	grafiek van f	hellinggrafiek van f
$\langle \leftarrow, 2 \rangle$	dalend	onder de x -as
$x = 2$	top	snijdt de x -as
$\langle 2, 5 \rangle$	stijgend	boven de x -as
$x = 5$	top	snijdt de x -as
$\langle 5, 8 \rangle$	dalend	onder de x -as
$x = 8$	top	snijdt de x -as
$\langle 8, \rightarrow \rangle$	stijgend	boven de x -as

Teken eerst de punten waar de hellinggrafiek de x -as snijdt.

Uitwerking



Met stippellijnen geef je de
samenhang tussen de grafieken aan.

R48 Zie het voorbeeld.



a Op $\langle 2, 5 \rangle$ gaat de grafiek van f over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

Hoe zie je dit terug in de hellinggrafiek van f ?

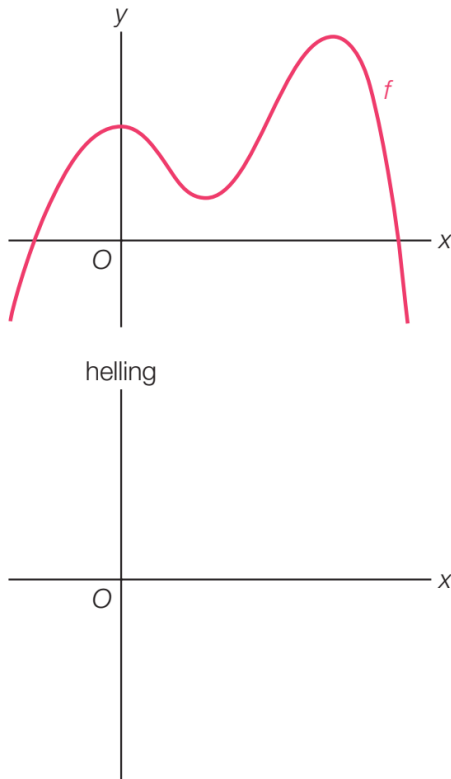
b Op $\langle 5, 8 \rangle$ heeft de hellinggrafiek van f een laagste punt.

Hoe zie je dit terug in de grafiek van f ?

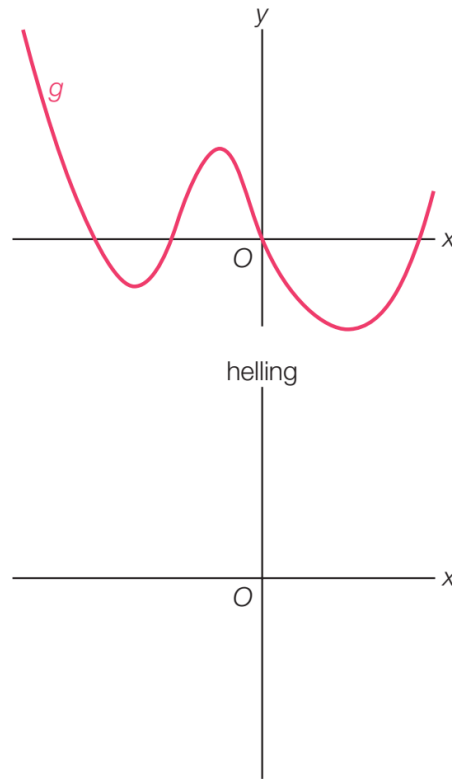
49 Hieronder zie je grafieken van de functies f en g .



a Schets onder de grafiek van f de hellinggrafiek van f .



b Schets onder de grafiek van g de hellinggrafiek van g .

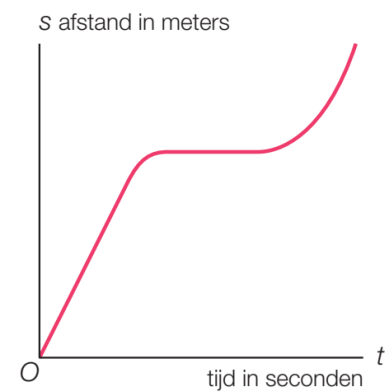
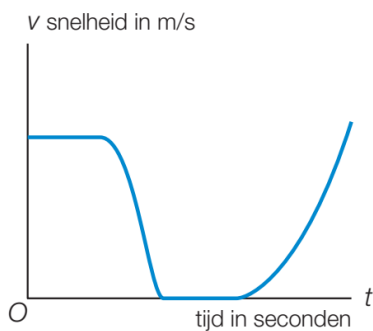
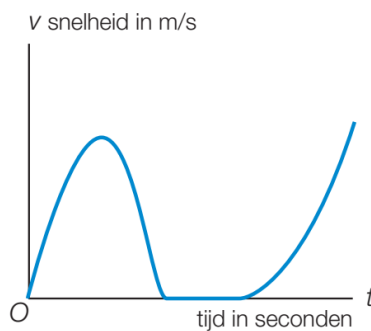
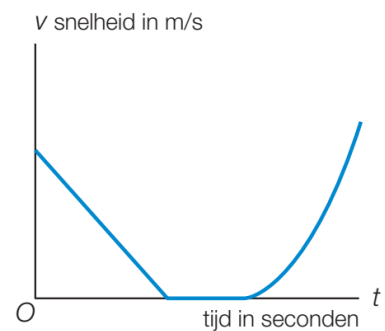


50 De hellinggrafiek van een tijd-afstandgrafiek is een tijd-snelheidgrafiek.



a Licht dit toe.

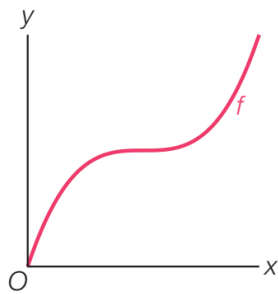
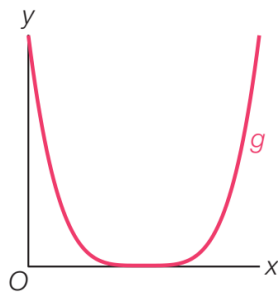
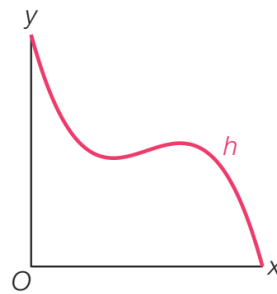
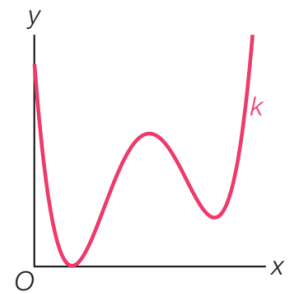
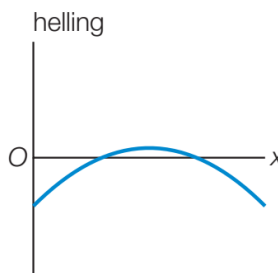
b Welke van de drie tijd-snelheidgrafieken hieronder hoort bij de tijd-afstandgrafiek hiernaast? Licht toe.



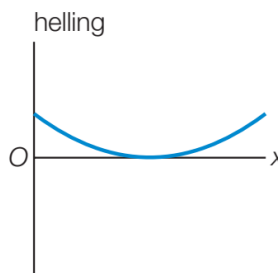
51



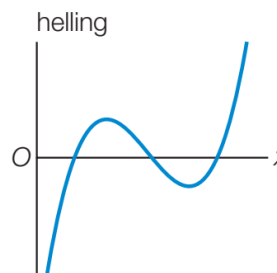
Hieronder zijn van de functies f , g , h en k de grafieken geschetst. De bijbehorende hellinggrafieken staan eronder in een andere volgorde. Zoek bij elk van de functies f , g , h en k de juiste hellinggrafiek.



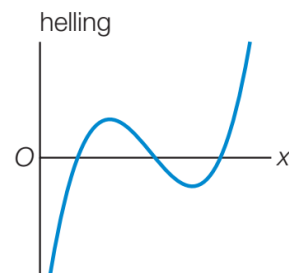
hellinggrafiek A



hellinggrafiek B



hellinggrafiek C



hellinggrafiek D

52

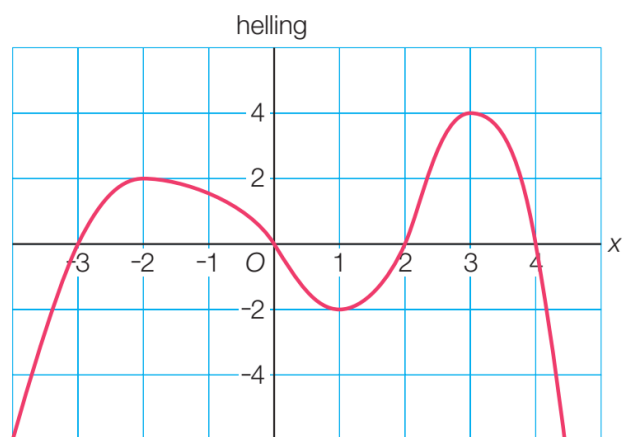
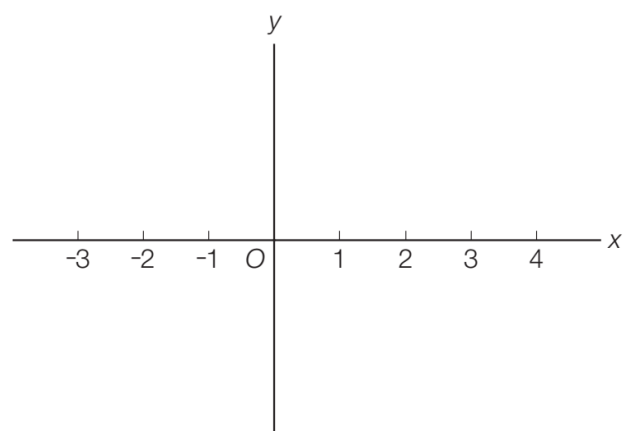


Hiernaast is de hellinggrafiek van een functie f gegeven.

- a** Voor $x < -3$ ligt de hellinggrafiek onder de x -as.

Licht toe dat hieruit volgt dat de grafiek van f dalend is op $\langle \leftarrow, -3 \rangle$.

- b** Waarom heeft de grafiek van f een top bij $x = -3$? Is dat een hoogste of een laagste punt?
- c** Is de grafiek van f stijgend of dalend op $\langle -3, 0 \rangle$?
- d** Heeft de grafiek van f een hoogste of een laagste punt bij $x = 0$?
- e** Schets in de figuur hiernaast een mogelijke grafiek van f .

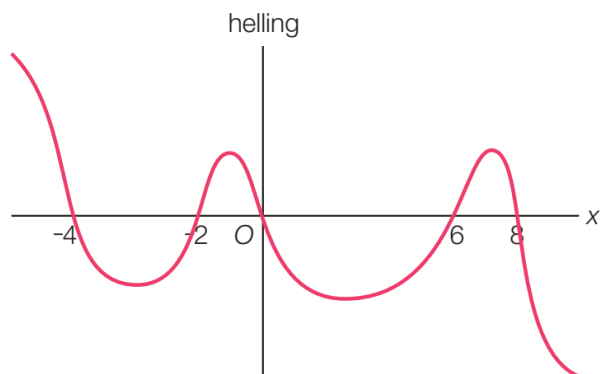


53 Hieronder is de hellinggrafiek van een functie f gegeven.



De grafiek van f heeft vijf toppen.

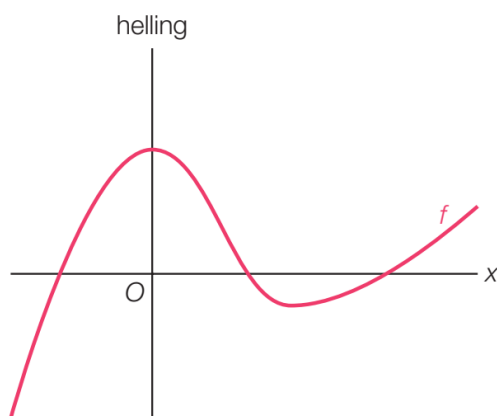
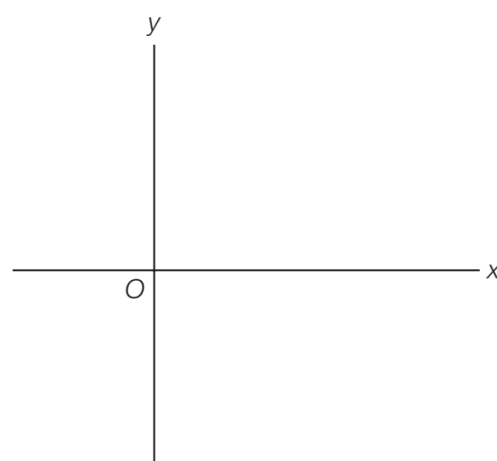
Hoeveel van deze toppen zijn hoogste punten? Licht toe.



54 a Hieronder zie je de hellinggrafiek van een functie f .

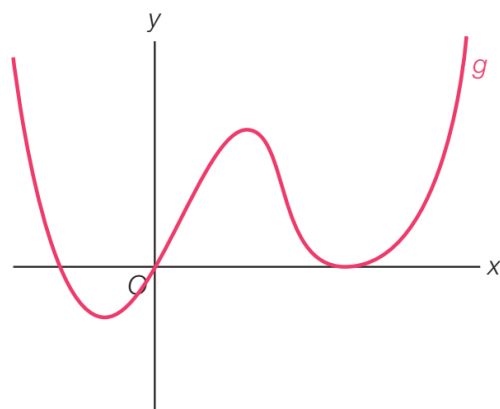
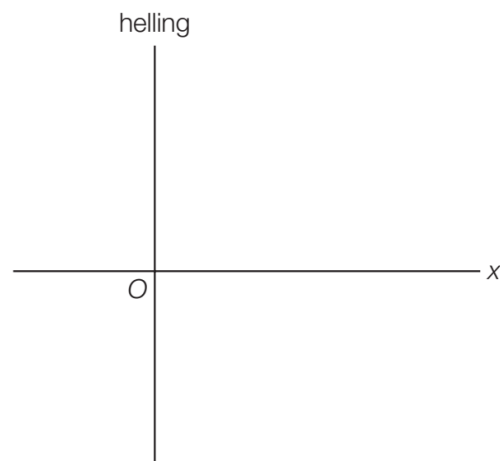


Schets onder de hellinggrafiek een mogelijke grafiek van f .



b Hieronder zie je de grafiek van een functie g .

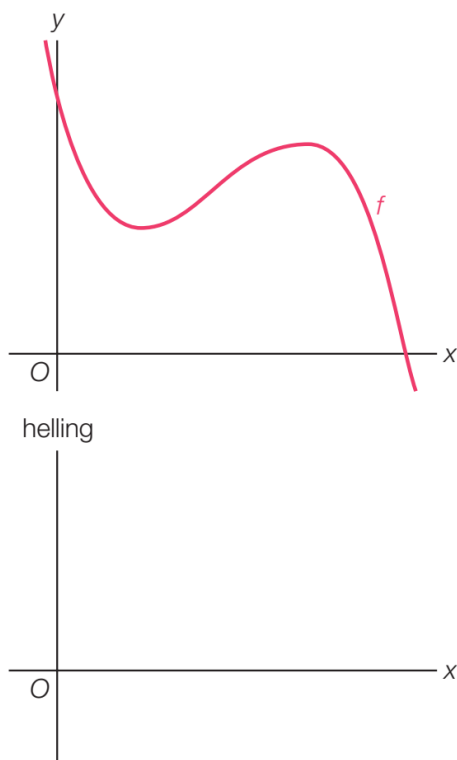
Schets onder de grafiek van g de hellinggrafiek van g .



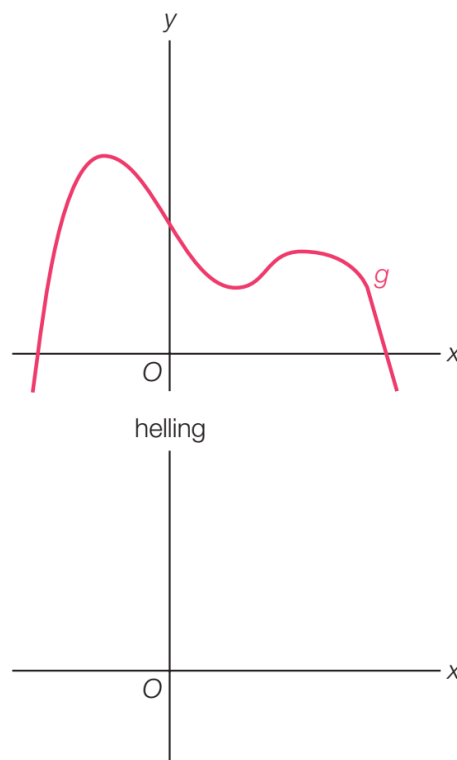
A55 Hieronder zie je grafieken van de functies f en g .



a Schets onder de grafiek van f de hellinggrafiek van f .

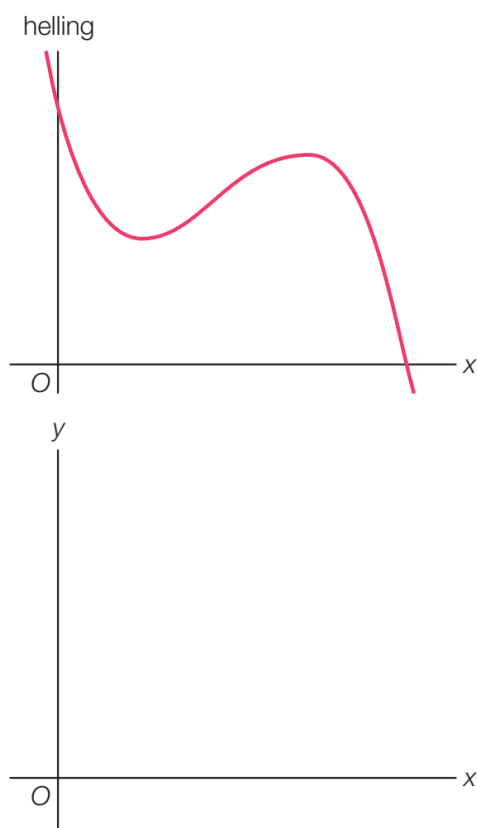


b Schets onder de grafiek van g de hellinggrafiek van g .

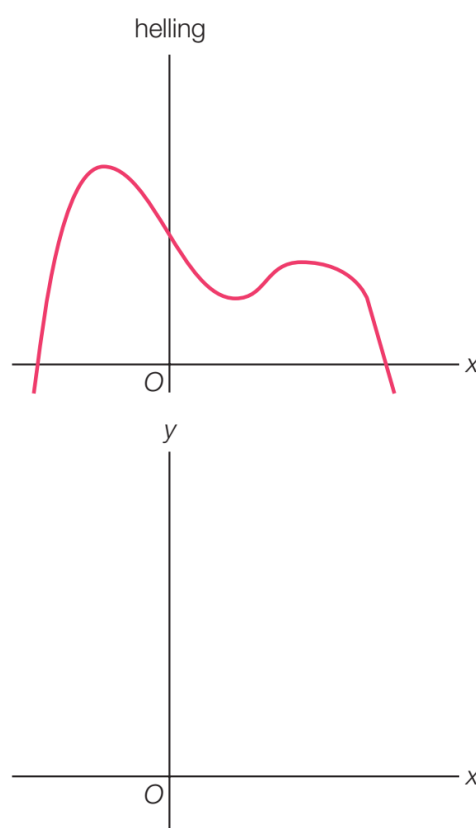


Hieronder zie je dezelfde grafieken, maar nu zijn dit de hellinggrafieken van de functies h en k .

c Schets onder de hellinggrafiek van h een mogelijke grafiek van h .



d Schets onder de hellinggrafiek van k een mogelijke grafiek van k .

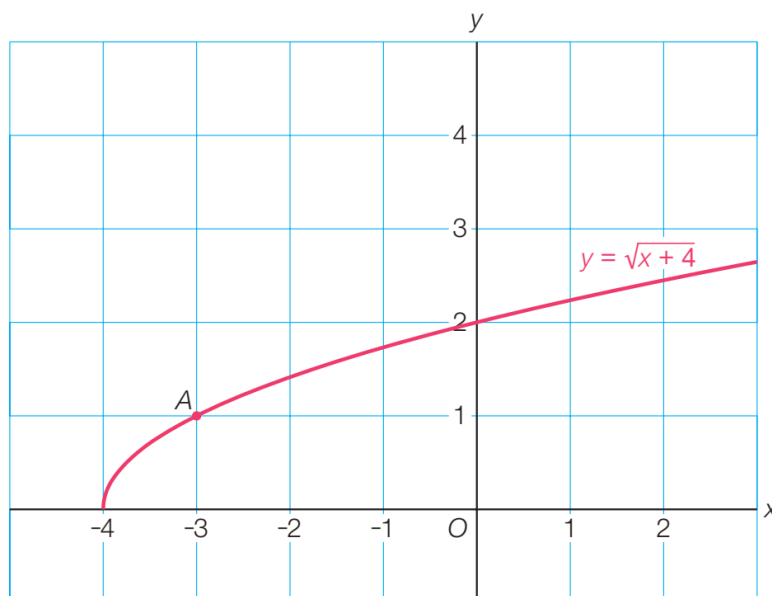


56



Hiernaast zie je de grafiek van $y = \sqrt{x+4}$ en het punt $A(-3, 1)$ op de grafiek.

- Bereken het differentiequotient van y op $[-3; -2,99]$. Rond af op één decimaal.
- Teken de raaklijn k in A en geef rc_k .
- Vergelijk het antwoord van vraag a met rc_k . Wat valt je op?



Theorie C Hellinggrafieken plotten

Je weet dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k in het punt $A(x_A, y_A)$ aan de grafiek van een functie f de snelheid is waarmee $f(x)$ verandert voor $x = x_A$.

Voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A bestaat de

notatie $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=x_A}$.

Spreek uit: $d y d x$ voor x is $x a$.

De grafische rekenmachine heeft een optie om bij een ingevoerde formule de helling voor een willekeurige x te berekenen.

Casio	optie d/dx
HP	optie Helling
NumWorks	optie Hellingsgetal
TI	optie dy/dx

Deze optie noteren we in het vervolg als de optie dy/dx .

Ook heeft de grafische rekenmachine een optie om bij een ingevoerde formule de hellinggrafiek te plotten. Je krijgt dan de grafiek van de **numerieke afgeleide**. Met de grafiek van de numerieke afgeleide kun je dan allerlei berekeningen uitvoeren, net als met de grafiek van een gewone formule die je hebt ingevoerd. Zo kun je bijvoorbeeld berekenen voor welke x de grafiek van f een bepaalde helling heeft en voor welke x de grafiek van f het sterkst stijgt.

►GR Neem de module **Helling en hellinggrafiek** door.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 0,1x^3 - 0,3x^2 - 3x + 2$.

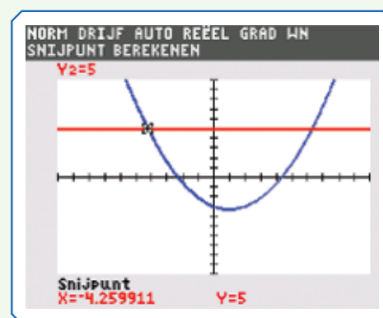
- a Bereken de helling van de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.
- b Bereken voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 5.
Rond af op twee decimalen.

Aanpak

- b Zorg ervoor dat alleen de hellinggrafiek en de lijn $y = 5$ zichtbaar zijn op het scherm van de GR. Dus zet de formule van f uit.

Uitwerking

- a Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie dy/dx met $x = 2$ geeft de helling -3 .
- b Invoeren van de numerieke afgeleide van f en de formule $y = 5$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x \approx -4,26$ en $x \approx 6,26$. Dus voor $x \approx -4,26$ en voor $x \approx 6,26$ is de helling van de grafiek gelijk aan 5.



R57 Zie het voorbeeld.



- a Hoe kun je met de grafiek van de numerieke afgeleide het antwoord van vraag a vinden?
- b De hellinggrafiek heeft een top.
Bereken de coördinaten van het punt op de grafiek van f dat hierbij hoort en licht toe dat de grafiek van f in dit punt het sterkst daalt.

58 Gegeven is de functie $f(x) = -0,1x^3 + x^2 - 2x + 5$.



- a Bereken de helling van de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.
- b Bereken voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -3 .
Rond af op twee decimalen.

Informatief Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filosoof, natuur- en wiskundige, historicus, rechtsgeleerde en diplomaat, was een van de grootste denkers van zijn tijd. Veel notaties in de wiskunde die men nu nog gebruikt, zoals $\frac{dy}{dx}$, zijn afkomstig van Leibniz.



59



- a Gegeven is de functie $f(x) = 0,1x^4 - 0,3x^3 - 4,5x^2 + 9x + 5$.

Bereken voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 10. Rond af op twee decimalen.

- b Gegeven is de functie $g(x) = \frac{5x^2 - 38}{x^2 + 4}$.

Bereken voor welke x de helling van de grafiek van g gelijk is aan 3. Rond af op drie decimalen.

60



Gegeven is de formule $s = -0,2t^3 + 3t^2$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden met t op $[0, 8]$.

- Hoeveel meter wordt er in deze acht seconden afgelegd?
- De helling van de grafiek van s op $t = 4$ geeft de snelheid op $t = 4$. Bereken deze snelheid in m/s.
- Met hoeveel m/s neemt de snelheid af op $[5, 7]$?
- Bereken voor welke t de snelheid gelijk is aan 12 m/s. Rond af op één decimaal.

A61



Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \frac{5x^2}{x^2 + 1}$.

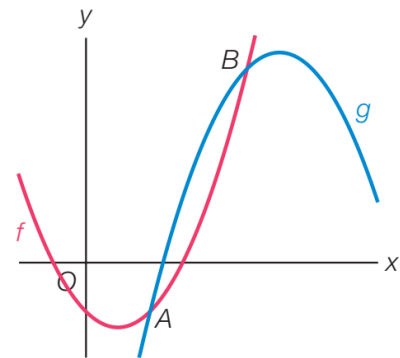
- Bereken de helling van de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.
- Bereken voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 1. Rond af op twee decimalen.
- De hellinggrafiek heeft twee toppen. Bereken de coördinaten van deze toppen. Rond af op drie decimalen.
- Bereken de coördinaten van het punt op de grafiek van f waarin de grafiek van f het sterkst stijgt. Rond af op twee decimalen.

A62



De grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1\frac{1}{2}$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 11\frac{1}{2}$ snijden elkaar in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.

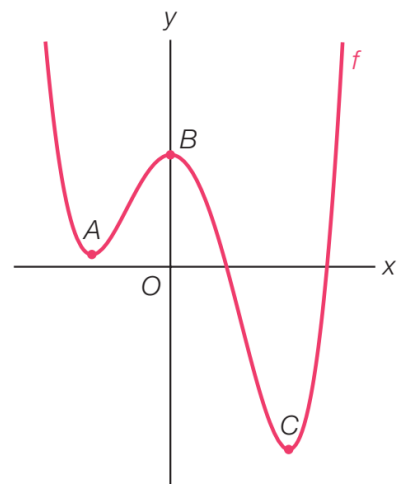
- De lijn k raakt de grafiek van f in A . Bereken de richtingscoëfficiënt van k .
- Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn l door A en B .
- De lijn m raakt de grafiek van g in B . Bereken de richtingscoëfficiënt van m .
- De toppen van de grafieken zijn C en D . Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn n door C en D .
- De grafiek van f snijdt de x -as rechts van de oorsprong in het punt E . Bereken de coördinaten van het punt P op de grafiek van g waarin de helling van de grafiek van g gelijk is aan de helling van de grafiek van f in E .



A63 Zie hiernaast de grafiek van de functie

□ ⊙ * $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6$ met de toppen A , B en C .

- a** Bereken de coördinaten van de toppen. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- b** Tussen de toppen A en B is er een punt waarin de grafiek van f het sterkst stijgt. Bereken de coördinaten van dit punt. Rond af op twee decimalen.
- c** Tussen de toppen B en C is er een punt waarin de grafiek van f het sterkst daalt. Bereken de coördinaten van dit punt. Rond af op twee decimalen.



A64 Bij sommige operaties in het onderlichaam krijgt de patiënt als

□ ⊙ * verdoving een zogenaamde ruggenprik (spinale anesthesie). Er wordt dan een verdovend middel in het ruggenmergvocht gespoten.

Het is van belang een zodanige hoeveelheid van het verdovend middel in te spuiten, dat de verdoving lang genoeg werkt.

In deze opgave gebruiken we voor de hoeveelheid verdovend middel in het lichaam de formule $H = \frac{600t}{4^t}$. Hierin is H in mg en t de tijd in uren na inspuiten met $0 \leq t \leq 2$.

- a** Bereken met welke snelheid de hoeveelheid verdovend middel afneemt op $t = 1$. Rond in het antwoord af op één decimaal.
- b** Vanaf $t = 2$ is de snelheid waarmee de hoeveelheid verdovend middel afneemt constant. Bereken voor welke waarde van t het verdovend middel uit het lichaam is verdwenen. Rond af op één decimaal.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan in een punt van een grafiek de helling bepalen met behulp van een raaklijn.
- ☐ Ik kan de hellinggrafiek schetsen als de grafiek van een functie gegeven is.
- ☐ Ik kan een mogelijke grafiek van een functie schetsen als de hellinggrafiek gegeven is.
- ☐ Ik kan bij een functievoorschrift de helling in een punt van de grafiek berekenen met de GR.
- ☐ Ik kan bij een functievoorschrift de hellinggrafiek plotten en hiermee berekeningen uitvoeren.

► OPGAVE C9
THEORIE A

► OPGAVE C10a
THEORIE B

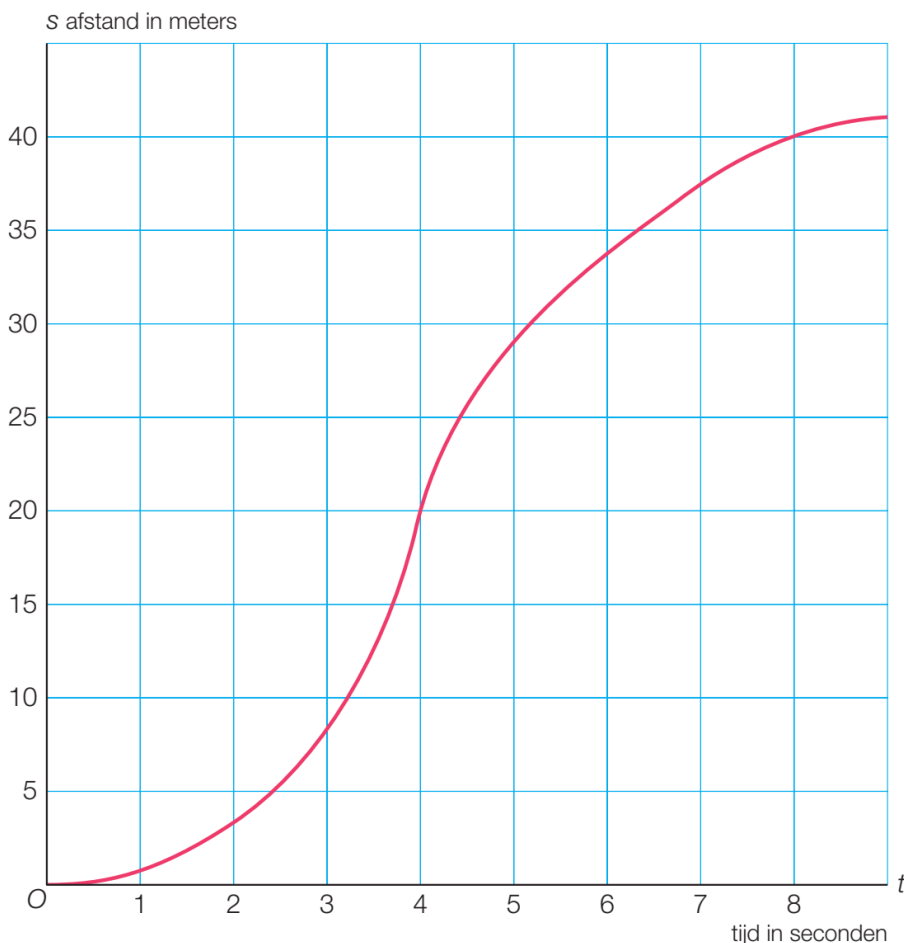
► OPGAVE C10b
OPGAVE 52

► OPGAVE C11a
THEORIE C

► OPGAVE C11bc
THEORIE C

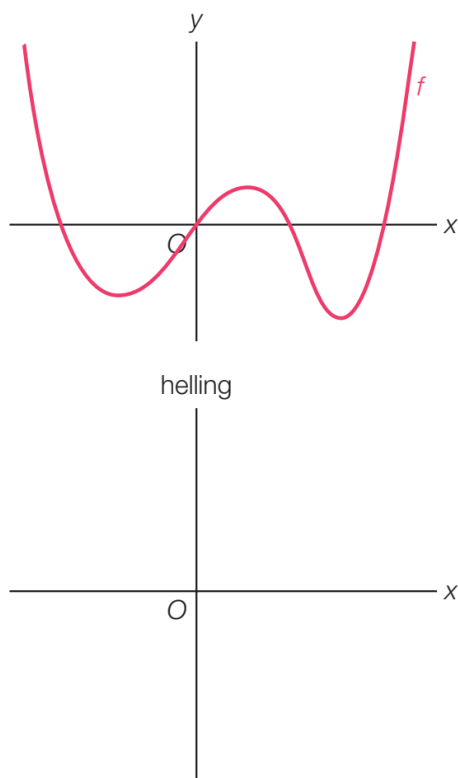
C9 Hieronder zie je een tijd-afstandgrafiek.

- a** Bepaal met behulp van de figuur de snelheid in m/s op $t = 2$ en op $t = 7$. Rond af op één decimaal.
- b** Voor welke t schat je dat de snelheid maximaal is? Licht toe.

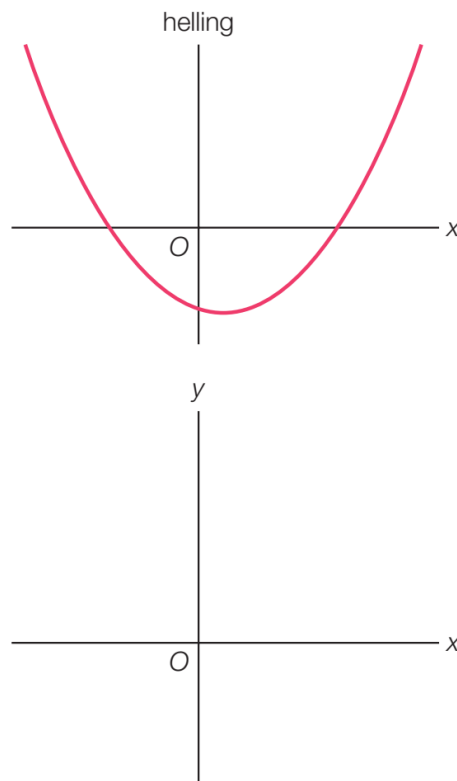


C10 Hieronder zie je de grafiek van de functie f en de hellinggrafiek van een functie g .

a Schets onder de grafiek van f de hellinggrafiek van f .



b Schets onder de hellinggrafiek van g een mogelijke grafiek van g .



C11 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{-4x + 3}{x^2 + 1}$.

- a** Bereken de helling van de grafiek van f in het punt A met $x_A = -2$. Rond af op twee decimalen.
- b** Bereken voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -1 . Rond af op twee decimalen.
- c** Bereken de coördinaten van het punt op de grafiek van f waarin de grafiek het sterkst stijgt. Rond af op twee decimalen.

Antwoorden

C9 a 3,3 m/s en 3,8 m/s

b $t = 4$

Daar is sprake van de sterkste stijging.

C10 *

C11 a 0,96

b $x \approx -0,36$ en $x \approx 1,17$

c $(-1,10; 3,35)$

2.4 Differentiëren

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de volgende regels gebruiken voor het berekenen van de afgeleide.
 $f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$
 $f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$
 $f(x) = ax^2$ geeft $f'(x) = a \cdot 2x$
- Je kunt de regel $f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ gebruiken voor het berekenen van de afgeleide.

Voorkennis Merkwaardige producten

Bij het herleiden van $(a + b)(a - b)$ gebeurt iets merkwaardigs. Er blijven *twee termen* over: $(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$.

Bij het herleiden van $(a + b)^2$ en $(a - b)^2$ houd je *drie termen* over.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Omdat ab het product is van a en b heet $2ab$ het dubbelproduct van a en b .

De producten $(a + b)(a - b)$, $(a + b)^2$ en $(a - b)^2$ staan bekend als de merkwaardige producten.

De regels voor merkwaardige producten

- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^2$ is
 a^2 **plus dubbelproduct** plus b^2 .
 $(a - b)^2$ is
 a^2 **min dubbelproduct** plus b^2 .

Met deze regels schrijf je in één keer op:

$$(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$$

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

Het dubbelproduct van x en 5 is $2 \cdot x \cdot 5 = 10x$.

Voorbeeld

Herleid.

a $(c - 5)(c + 5)$

b $(x - 10)^2$

c $(3x + 4)^2$

d $2(p - 3)^2$

Uitwerking

a $(c - 5)(c + 5) = c^2 - 25$

b $(x - 10)^2 = x^2 - 20x + 100$

c $(3x + 4)^2 = 9x^2 + 24x + 16$

d $2(p - 3)^2 = 2(p^2 - 6p + 9)$
 $= 2p^2 - 12p + 18$

Van de vorm $(a + b)(a - b)$, dus je krijgt een tweeterm.

Het dubbelproduct van x en 10 is $2 \cdot x \cdot 10 = 20x$.

$(3x)^2 = 9x^2$ en $2 \cdot 3x \cdot 4 = 24x$.

Eerst machtsverheffen, daarna vermenigvuldigen.

V1 Herleid.

a $(x - 5)^2$
b $(x + 3)^2$

c $(x + 4)(x - 4)$
d $(2x + 5)^2$

e $(5 - 4y)^2$
f $(2p - 7)(2p + 7)$

V2 Herleid.

a $2(x - 4)^2$
b $-3(x + 8)^2$

c $-(x - 1)^2$
d $5(a - 3)(a + 3)$

e $-2(t + 12)(t - 12)$
f $5(2x + 1)^2$

O65 Gegeven is de functie $f(x) = 1,5x^2$.



- a** Schets in één figuur de grafiek van f en de hellinggrafiek van f .
b De hellinggrafiek is een lijn.

Geef de formule van deze lijn. Controleer de formule door deze op de GR bij y_3 in te voeren en in een tabel y_2 en y_3 met elkaar te vergelijken.

O66 Gegeven is de functie $g(x) = 3x$.



- De hellinggrafiek van g is een horizontale lijn.
a Geef hiervoor een verklaring.
b Welke formule heeft die lijn?

O67 Gegeven is de functie $h(x) = -4$.



- De hellinggrafiek van h is een horizontale lijn.
Welke formule heeft die lijn?

Theorie A De afgeleide functie

Bij de grafiek van een functie f hoort een hellinggrafiek. En zo hoort bij een functie f een **hellingfunctie**. In plaats van hellingfunctie wordt meestal de naam **afgeleide functie**, kortweg **afgeleide** gebruikt. De afgeleide van f wordt genoteerd als f' . Spreek uit f accent.

Het is prettig als je van een functie f direct de formule van de afgeleide f' kunt opschrijven.

In opgave 65 heb je gezien: van $f(x) = 1,5x^2$ is de afgeleide $f'(x) = 3x$.
Dit is een voorbeeld van de regel: van $f(x) = ax^2$ is de afgeleide $f'(x) = a \cdot 2x$.
In opgave 66 heb je gezien: van $g(x) = 3x$ is de afgeleide $g'(x) = 3$.
Dit is een voorbeeld van de regel: van $f(x) = ax$ is de afgeleide $f'(x) = a$.
In opgave 67 heb je gezien: van $h(x) = -4$ is de afgeleide $h'(x) = 0$.
Dit is een voorbeeld van de regel: van $f(x) = a$ is de afgeleide $f'(x) = 0$.

Regels voor de afgeleide

$f(x) = a$	geeft	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	geeft	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2$	geeft	$f'(x) = a \cdot 2x$

Het berekenen van de formule van de afgeleide heet **differentiëren**.

Om $f(x) = 5x^2 - 8x + 3$ te differentiëren, neem je term voor term de afgeleide.

Dus $f(x) = 5x^2 - 8x + 3$ geeft $f'(x) = 5 \cdot 2x - 8 + 0 = 10x - 8$.

Het term voor term de afgeleide nemen, is een voorbeeld van de

somregel van het differentiëren.

Om $f(x) = (3x - 2)(5x + 3)$ te differentiëren, werk je eerst de haakjes weg.

Dus $f(x) = (3x - 2)(5x + 3) = 15x^2 + 9x - 10x - 6 = 15x^2 - x - 6$.

Dit geeft $f'(x) = 30x - 1$.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = -4x^2 - 3x + 17$

b $g(t) = (5t - 7)^2$

Uitwerking

a $f(x) = -4x^2 - 3x + 17$ geeft $f'(x) = -8x - 3$

b $g(t) = (5t - 7)^2 = 25t^2 - 70t + 49$ geeft $g'(t) = 50t - 70$

68 Differentieer.



a $f(x) = 5x^2 - 7x + 5$

c $h(x) = 0,02x^2 + 1,7x$

b $g(x) = -2\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$

d $k(x) = 7x + 10$

69 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = -12x^2 + 30x$

c $h(t) = 100 - (t^2 - 6t)$

b $g(x) = (2x - 7)(8 + x)$

d $k(q) = -0,01q^2 + 20q$

A70 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = 3x - 2(x^2 + 1)$

c $g(x) = 3(2x - 3)^2$

b $P(q) = 0,05q^2 - 200q$

d $h(a) = 50 - (\frac{1}{2}a - 4)^2$

A71 Differentieer.



a $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x)$

c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(x - 1) + 8$

b $g(x) = (3x + 6)^2$

d $k(x) = -3(x - 1)(x + 1) - 8(x - 7)$

72 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$.



De formule van de hellinggrafiek is $y = \frac{1}{2}x - 2$.

a Licht dit toe.

b Bereken met de formule van de hellinggrafiek de helling voor $x = 6$.

c Bereken exact voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -1 .

A73 Gegeven is de functie $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$.



- a Bereken algebraïsch de helling voor $x = -3$.
- b Bereken exact voor welke x de grafiek van f helling 5 heeft.

A74 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}(2x + 3)(2x - 5)$.

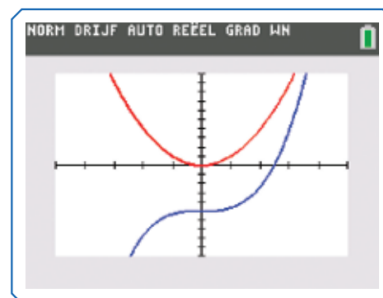


De grafiek van f snijdt de x -as rechts van de y -as in het punt A . Bereken exact de helling van de grafiek van f in A .

O75 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$.



- a Plot in één figuur de grafiek van f en de hellinggrafiek van f . Neem x tussen -5 en 5 en y tussen -10 en 10 . Je krijgt de figuur hiernaast.
- b Zo te zien is de grafiek van f' een parabool. Hierbij hoort een formule van de vorm $f'(x) = ax^2$. Welk getal is a ?
Voer de formule van f' in bij y_3 en controleer of je de juiste formule voor f' hebt bedacht.



De grafiek van $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$ en van zijn afgeleide.

Theorie B De afgeleide van $f(x) = ax^n$

In opgave 75 heb je met behulp van de numerieke afgeleide kunnen nagaan dat $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$ geeft $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$.

Algemeen geldt:

$$f(x) = ax^3 \text{ geeft } f'(x) = a \cdot 3x^2$$

Zo geldt ook:

$$f(x) = ax^4 \text{ geeft } f'(x) = a \cdot 4x^3$$

$$f(x) = ax^5 \text{ geeft } f'(x) = a \cdot 5x^4$$

$$f(x) = ax^n \text{ geeft } f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$$

In het voorbeeld op de volgende bladzijde moet bij onderdeel c de afgeleide van $h(x) = 3px^5 - 5x + p$ worden berekend. Hierbij is p een constante. Daarom is de afgeleide van $3px^5$ gelijk aan $3p \cdot 5x^4 = 15px^4$ en is de afgeleide van p gelijk aan 0.

Met de numerieke afgeleide kun je de grafiek van de afgeleide plotten zonder de formule ervan op te stellen.

oude exponent ervoor

$$f(x) = 4x^3 \text{ geeft } f'(x) = 4 \cdot 3x^2$$

nieuwe exponent 1 minder

$$h(x) = 3px^5 - 5x + p$$

oude exponent ervoor, nieuwe exponent 1 minder

$$h'(x) = 3p \cdot 5x^4 - 5$$

p is een constante, dus afgeleide is 0

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 10x^7 - 6x^4 - 3$

b $g(t) = -3t^5 + 3t^2 + 4$

c $h(x) = 3px^5 - 5x + p$

Met differentiëren krijg je de formule van de afgeleide.

Uitwerking

a $f(x) = 10x^7 - 6x^4 - 3$ geeft $f'(x) = 70x^6 - 24x^3$

b $g(t) = -3t^5 + 3t^2 + 4$ geeft $g'(t) = -15t^4 + 6t$

c $h(x) = 3px^5 - 5x + p$ geeft $h'(x) = 15px^4 - 5$

76 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = -2x^7 - 3x^5 + 3,4$

b $k(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3$

c $g(x) = 7(3x - 2)(x^2 + 2x)$

d $h(x) = 3px^8 - px^4$

e $L(x) = x^3 + a$

f $K(t) = at^4 - 2at^3 + a^2$

77 Differentieer.



a $f(x) = (4x^2 - 9)(4x^2 + 9)$

b $g(x) = 4x(x^2 - 4)(x^2 - 9)$

c $h(x) = (2x^3 - 4)^2$

d $k(x) = (3x^2 - 1)^2 - p(3x^2 - 1)$

78 Bereken exact de oplossingen.



a $x^2 - 5x = 0$

b $x^2 - 5x = 14$

c $x^2 - 5 = 14$

d $x^2 - 5x = 14x$

e $(2x - 1)(3x + 6) = 0$

f $(2x - 1)(3x + 6) = 9x$

g $3x(2x - 1) = 6$

h $3x(2x - 1) = 9x - 6$

79 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 5$.



a Bereken de formule van de hellinggrafiek.

b Bereken met de formule van de hellinggrafiek de helling voor $x = 4$.

c Bereken exact voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -1 .

A80 Gegeven is de functie $f(x) = 2x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1)$.



a Bereken exact de helling voor $x = -1$.

b Bereken exact voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan $2\frac{1}{2}$.

A81 Gegeven is de formule $s = -0,02t^3 + 1,25t^2$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden met t op $[0, 40]$.



a Bereken algebraïsch de snelheid v op $t = 10$. Geef het antwoord in gehele km/u.

b Bereken exact op welke tijdstippen de snelheid 24 m/s is.

A82 De helling van de grafiek van $f(x) = ax^4 - 3x^2 + 2ax$ in het punt P met $x_P = 2$ is gelijk aan 5.
 Bereken a .

A83 De helling van de grafiek van $f(x) = ax^3 - 2x^2 + 4$ in het punt $A(1, p)$ is gelijk aan 8.
 Bereken a en p .

E84 De regel $f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ is een voorbeeld van de algemene regel $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$, waarbij c een constante is.

Gegeven is dat van de functie $h(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ de afgeleide is $h'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.

Bereken de afgeleide van de functie $k(x) = \frac{4x-2}{3x+3}$.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan de volgende regels gebruiken voor het berekenen van de afgeleide.

$$f(x) = a \quad \text{geeft} \quad f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax \quad \text{geeft} \quad f'(x) = a$$

$$f(x) = ax^2 \quad \text{geeft} \quad f'(x) = a \cdot 2x$$

► **OPGAVE C12**
THEORIE A

☐ Ik kan de regel $f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ gebruiken voor het berekenen van de afgeleide.

► **OPGAVE C13**
THEORIE B

C12 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

b $g(x) = 0,02x^2 + 1,7x$

c $h(x) = 4x - 2(x - 3)^2$

d $N(t) = 0,01t^2 + (0,2t + 1)^2$

C13 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$

b $g(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$

c $h(x) = 3(2x^3 + 1)^2$

d $P(n) = an^5 - 2n^3 + 6n + a^2$

Antwoorden

C12 a $f'(x) = 10x - 3$

b $g'(x) = 0,04x + 1,7$

c $h'(x) = -4x + 16$

d $N'(t) = 0,1t + 0,4$

C13 a $f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2$

b $g'(t) = -t^2 + 13t$

c $h'(x) = 72x^5 + 36x^2$

d $P'(n) = 5an^4 - 6n^2 + 6$

Kennis- en vaardigheidentest

2.1 Toenamediagrammen

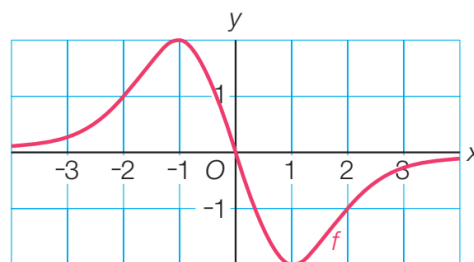
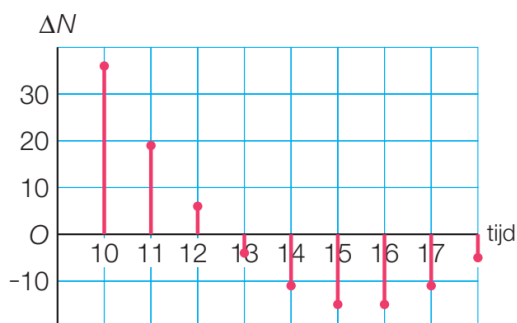
1 Welke soorten van stijgen en dalen kun je in de figuur hiernaast herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.

2 Teken op het interval $[-3, 3]$ het toenamediagram dat hoort bij de figuur hiernaast. Neem $\Delta x = 1$.

3 Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2$. Teken het toenamediagram op het interval $[-4, 2]$ met $\Delta x = 1$.

4 **WERKBLAD** Hiernaast zie je een toenamediagram bij het aantal bezoekers van een strandterras op een mooie zomerdag. Het terras is geopend van 9 tot 18 uur.

- Hoeveel bezoekers waren er om 14 uur?
- Teken een mogelijke grafiek van het aantal bezoekers.



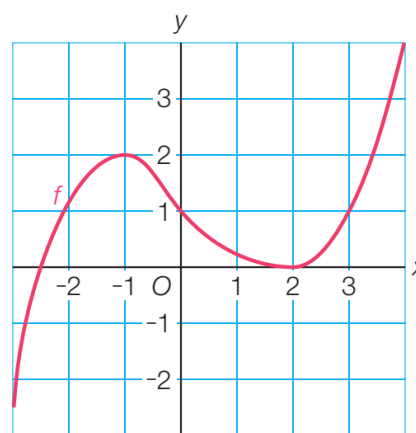
2.2 Differentiequotiënt en snelheid

5 Zie de figuur hiernaast.

- Bereken de gemiddelde verandering van y op $[0, 4]$ en op $[-1, 2]$.
- Geef een interval waarop het differentiequotiënt van y gelijk is aan $-\frac{1}{2}$.

6 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 8x + 14$. Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[3, 9]$.

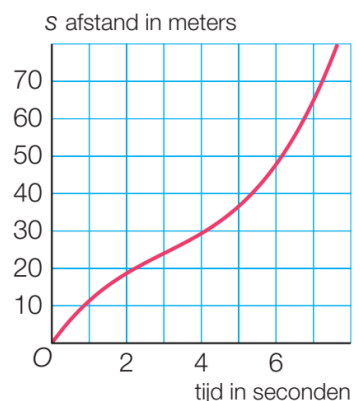
7 Gegeven is de formule $s = \frac{200t^2}{0,1t^3 + 100}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden. Benader in m/s de snelheid op $t = 5$. Neem $\Delta t = 0,01$ en rond af op één decimaal.



2.3 Raaklijnen en hellinggrafieken

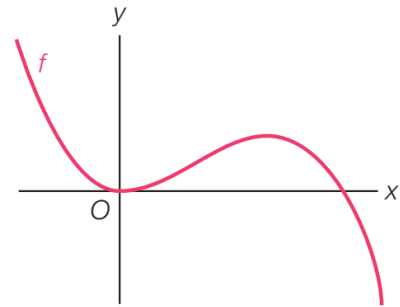
8 **WERKBLAD** Zie de tijd-afstandgrafiek hiernaast.

- Bepaal met behulp van de figuur de snelheid op $t = 1$ en op $t = 6$. Rond af op gehele m/s.
- Voor welke t schat je dat de snelheid minimaal is? Hoe groot is deze minimale snelheid in gehele m/s?



9 ▶ **WERKBLAD** Zie de grafiek van de functie f hiernaast.

- a** Schets de hellinggrafiek van f .
- b** De grafiek van f is ook de hellinggrafiek van een functie g .
Schets een mogelijke grafiek van g .



10 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^3 - 20x^2 + 110x}$.

- a** Bereken de helling van de grafiek van f in het punt A met $x_A = 15$.
Rond af op twee decimalen.
- b** Bereken voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 3.
Rond af op twee decimalen.
- c** Bereken de coördinaten van het punt op de grafiek van f waarin de grafiek van f het sterkst daalt. Rond af op één decimaal.

11 De concentratie C van een medicijn in het bloed van een patiënt wordt gegeven door de formule $C = \frac{100}{t^2 + 2}$. Hierin is C in mg per liter en t de tijd in uren na toedienen met $0 \leq t \leq 4$.

Vanaf $t = 4$ blijft de snelheid waarmee de concentratie afneemt constant. Bereken voor welke t het medicijn uit het lichaam is verdwenen. Rond af op twee decimalen.

2.4 Differentiëren

12 Differentieer.

- a** $f(x) = (3 - x)(5 + 2x)$
- b** $g(x) = (3x + 1)^2$
- c** $h(q) = 3q - 2(q^2 - 4q)$
- d** $k(x) = ax^2 + bx + c$

13 Bereken de afgeleide.

- a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7$
- b** $g(p) = 4p^3 + \frac{1}{6}p^2 - 11p + 20$
- c** $h(x) = x(2x - 1)^2$
- d** $v(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + at + b$

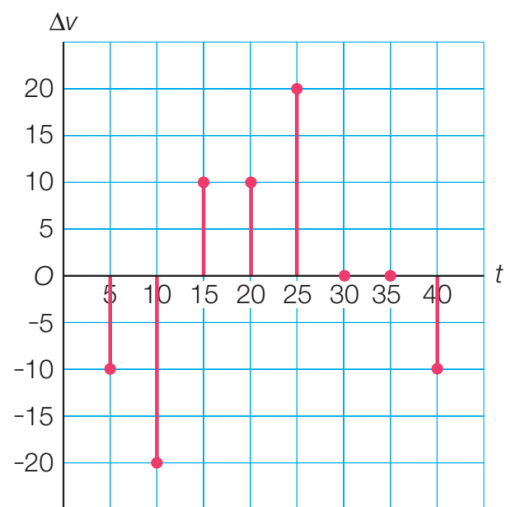
14 Gegeven is de functie $f(x) = 0,4x^3 - 0,6x^2 - 2x - 1$.

- a** Bereken exact de helling voor $x = 2$.
- b** Bereken exact voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 22.

Gemengde opgaven

- 1** Hiernaast zie je een toenamediagram bij de snelheid in km/u van een mountainbiker tijdens een klim gevolgd door een steile afdaling. Hierin is t de tijd in seconden. Op $t = 10$, dat is nog tijdens de klim, viel de mountainbiker in het zand naast het parcours.

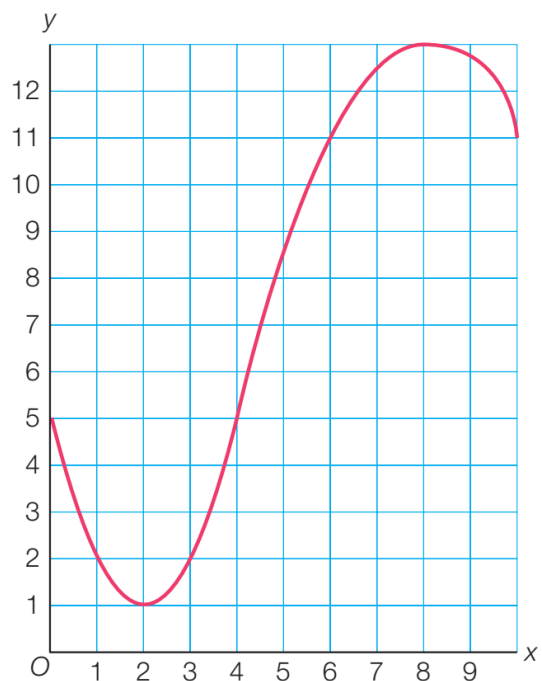
- Wat weet je van de snelheid waarmee hij op $t = 0$ aan de klim begon?
- Teken een mogelijke grafiek bij de snelheid van de mountainbiker.
- De mountainbiker beweert dat hij tijdens de hele afdaling sneller dan 40 km/u ging. Onderzoek of hij gelijk kan hebben.
- Teken een mogelijk toenamediagram op $[0, 20]$ met $\Delta t = 2\frac{1}{2}$.



- 2** De figuur hiernaast staat ook op een

[▶WERKBLAD](#).

- Welke soorten van stijgen en dalen kun je herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.
- Geef een interval $[p, 10]$ waarop de gemiddelde verandering van y gelijk is aan 1.
- Geef het kleinste interval $[a, b]$ met a en b gehele getallen waarop het differentiequotiënt van y gelijk is aan 0.
- In de punten A en B van de grafiek is de helling gelijk aan 2. Geef de coördinaten van A en B .
- Onderzoek of er een punt op de grafiek ligt waarin de helling gelijk is aan 6.



- 3** Een motorboot vaart weg. Gedurende de eerste acht seconden wordt de afgelegde afstand gegeven door de formule $s = 2t\sqrt{t+1}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.

- Bereken de snelheid op $t = 3$.

Na acht seconden verandert de snelheid niet meer.

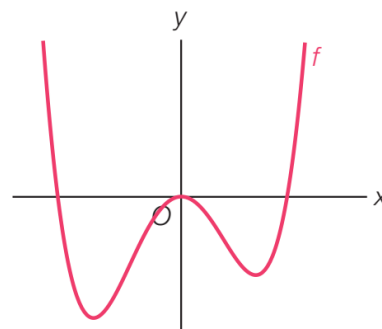
- Bereken na hoeveel seconden de boot 126 meter heeft afgelegd.
- Schets de grafiek van de snelheid v voor de eerste 20 seconden.

4 ► **WERKBLAD** Hiernaast zie je de grafiek van de functie f .

- a Schets de hellinggrafiek van f .
- b De grafiek van f is de hellinggrafiek van de functie g .
Schets een mogelijke grafiek van g .

Het functievoorschrift van f is $f(x) = 0,1x^2(2x + 7)(x - 3)$.

- c Bereken algebraïsch de helling van de grafiek van f in het punt A met $x_A = -1$.
- d Bereken voor welke waarden van x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 1. Rond af op twee decimalen.

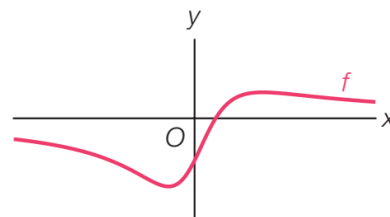


5 ► **WERKBLAD** Hiernaast zie je de grafiek van de functie f .

- a Schets de hellinggrafiek van f .
- b De grafiek van f is de hellinggrafiek van de functie g .
Schets een mogelijke grafiek van g .

Het functievoorschrift van f is $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$.

- c Bereken voor welke x de helling van de grafiek gelijk is aan $-0,5$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- d Het functievoorschrift van de afgeleide van f is van de vorm $f'(x) = \frac{ax^2 - ax - a}{(x^2 + 1)^2}$. De helling van de grafiek van f in het punt P met $x_P = 3$ is gelijk aan $-0,1$.
Bereken exact de waarde van a .



6 Het punt $P(-4, p)$ ligt op de grafiek van de functie $f(x) = ax^2 + 3ax - 5$. Bereken p algebraïsch als geldt dat de helling van de grafiek in P gelijk is aan 5.

7 Voor elke p en q is gegeven de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + qx$.

- a De helling van de grafiek van f in zowel het punt A met $x_A = 1$ als in het punt B met $x_B = 3$ is gelijk aan 2.
Bereken exact p en q .
- b Gegeven is bovendien de functie $g(x) = 2\frac{1}{2}x^2 - 5x$.
De grafieken van f en g hebben het punt C met $x_C = 6$ gemeenschappelijk. Bovendien is in het punt C de helling van de grafiek van f gelijk aan de helling van de grafiek van g .
Bereken exact p en q .

8 Van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is

- op $[0, 4]$ het differentiequotiënt gelijk aan 2;
- op $[2, 3]$ het differentiequotiënt gelijk aan 4.

Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[1, 5]$.

- 9** Een jachtluipaard besluipt een gazelle. Als ze 150 meter van de gazelle is verwijderd, begint ze naar de gazelle te rennen.

De formule die bij de afgelegde afstand van het jachtluipaard hoort vanaf het moment dat ze begint te rennen, is $s_j = -0,03t^3 + 1,8t^2$.

Hierin is s in meters en t de tijd in seconden met t in $[0, 35]$.

Op het moment dat het jachtluipaard begint te rennen, start ook de gazelle met rennen. Voor de gazelle geldt de formule $s_g = 22t$.

Ook hierin is s in meters en t de tijd in seconden.

- a** Stel van de snelheden v_j en v_g de formule op en schets in één figuur de bijbehorende grafieken.
- b** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van v_j en v_g . Rond zo nodig af op twee decimalen. Welke informatie volgt hieruit?



Je kunt erachter komen of het jachtluipaard de gazelle te pakken krijgt door het oplossen van de vergelijking $s_j = s_g + 150$.

- c** Licht deze vergelijking toe.
- d** Onderzoek of het jachtluipaard de gazelle te pakken krijgt.
- e** Bereken de maximale snelheid van het jachtluipaard. Geef het antwoord in gehele km/u.

- 10** Voor het alcoholpromillage in het bloed van een proefpersoon heeft een onderzoeker de formule $P = 0,025t^3 - 0,08t^2 + 0,64t$ opgesteld. Hierin is t de tijd in kwartieren na het innemen van de alcohol en P het alcoholpromillage in het bloed van de proefpersoon. De formule geldt voor de eerste vier uren.

- a** Schets de grafiek van P .
- b** Na hoeveel minuten is het alcoholpromillage maximaal?
- c** Bereken $\left[\frac{dP}{dt}\right]_{t=7}$. Wat is de betekenis van dit getal?
- d** Het is verboden met een alcoholpromillage van meer dan 0,5 een auto te besturen.
Na hoeveel kwartier mag de proefpersoon weer autorijden? Met welke snelheid neemt het alcoholpromillage dan af?

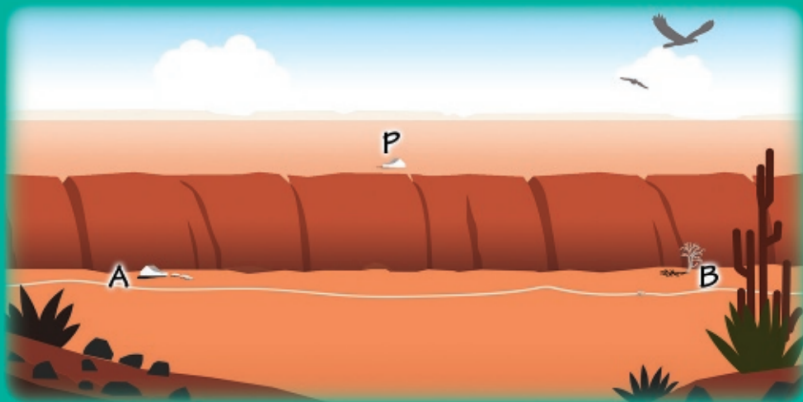


3

Meetkunde

Josie staat aan de rand van de Grand Canyon en ziet aan de overkant het uitkijkplatform P. Om te weten te komen hoe ver het platform van haar vandaan is, gaat ze als volgt te werk. Ze loopt langs de rand van de kloof van A naar B en meet op dat $AB = 420$ meter. Daarna meet ze op dat $\angle BAP = 88^\circ$ en $\angle ABP = 81^\circ$. Ze tekent $\triangle ABP$, berekent $\angle APB$ en tekent de hoogtelijn AD. Hiermee berekent ze de afstand tot het uitzichtplatform.

Hoe doet Josie dat?

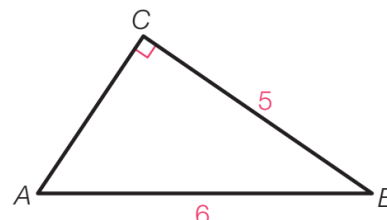


3.1 Goniometrische verhoudingen

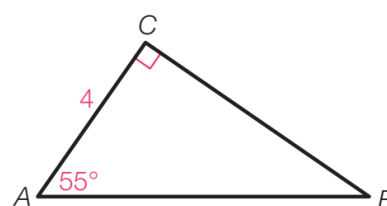
Kennis en vaardigheden

- Je kunt hoeken en lijnstukken berekenen met sinus, cosinus en tangens.

V1 Zie de rechthoekige driehoek ABC hiernaast.
Gebruik je de sinus, de cosinus, de tangens of de stelling van Pythagoras om $\angle A$ te berekenen?

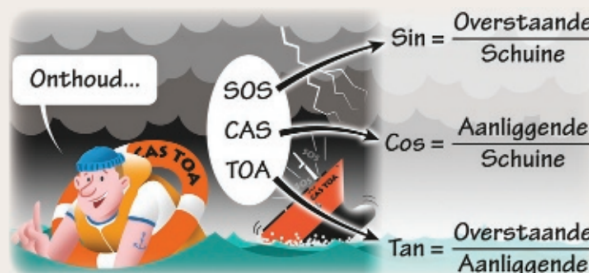


V2 Zie de rechthoekige driehoek ABC hiernaast.
Gebruik je de sinus, de cosinus, de tangens of de stelling van Pythagoras om AB te berekenen?



Voorkennis Hoeken en lijnstukken berekenen

Bij hoekberekeningen in rechthoekige driehoeken gebruik je de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens.

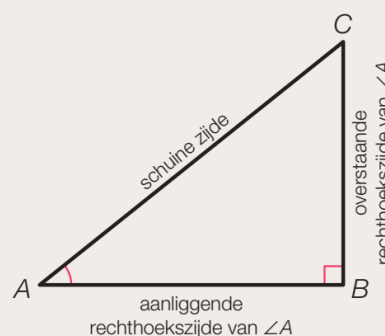


Sinus, cosinus en tangens

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A} = \frac{BC}{AB}$$



De schuine zijde zit altijd tegenover de rechte hoek.

Om de GR te kunnen gebruiken bij hoekberekeningen stel je deze in op graden. Dit gaat als volgt.

Casio	Set up ► Angle ► Deg
HP	Settings ► Hoekmaat ► Graden
NumWorks	Instellingen ► Hoekmaat ► Graden
TI	Mode ► Graden

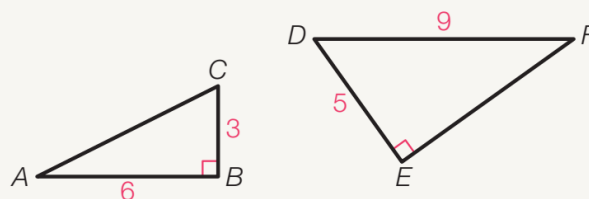
Voorbeeld

Zie de driehoeken hiernaast.

Bereken $\angle A$ en $\angle D$.

Aanpak

Ga eerst na of je sinus, cosinus of tangens nodig hebt.

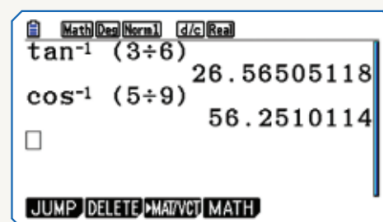


Rond bij het berekenen van een hoek af op één decimaal.

Uitwerking

$$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{6} \text{ geeft } \angle A \approx 26,6^\circ$$

$$\cos(\angle D) = \frac{DE}{DF} = \frac{5}{9} \text{ geeft } \angle D \approx 56,3^\circ$$

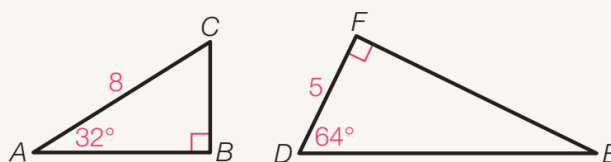


Bij het berekenen van lijnstukken met behulp van sinus, cosinus of tangens, kun je gebruikmaken van een verhoudingstabel.

Voorbeeld

Zie de driehoeken hiernaast.

Bereken BC en DE . Rond af op één decimaal.



Aanpak

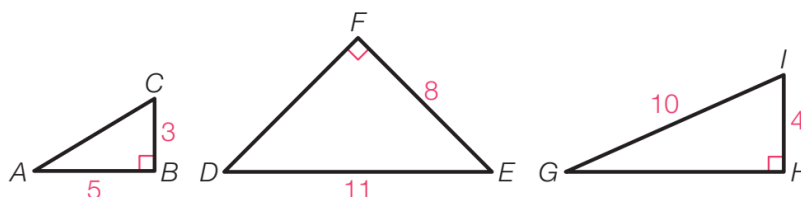
Ga eerst na of je sinus, cosinus of tangens nodig hebt.

Uitwerking

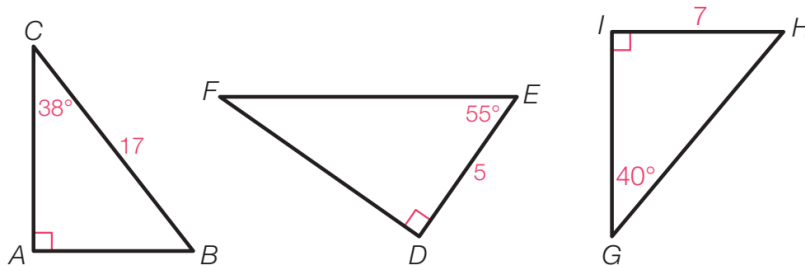
$$\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC} \text{ geeft } \frac{\sin(32^\circ)}{1} \mid \frac{BC}{8}, \text{ dus } BC = 8 \sin(32^\circ) \approx 4,2.$$

$$\cos(\angle D) = \frac{DF}{DE} \text{ geeft } \frac{\cos(64^\circ)}{1} \mid \frac{5}{DE}, \text{ dus } DE = \frac{5}{\cos(64^\circ)} \approx 11,4.$$

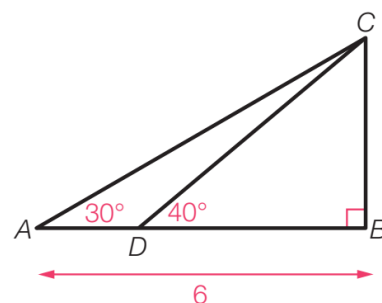
V3 Zie de driehoeken hiernaast.
Bereken $\angle A$, $\angle D$ en $\angle I$.



- V4** Zie de driehoeken hiernaast.
Bereken AC , DF en GH .
Rond af op één decimaal.



- O1** Van de rechthoekige driehoek ABC hiernaast is $AB = 6$ en $\angle BAC = 30^\circ$. Op AB ligt het punt D met $\angle BDC = 40^\circ$. We vragen ons af wat de lengte van BD is. Om BD met een goniometrische verhouding te berekenen in $\triangle BCD$ heb je BC of CD nodig.
- Licht toe dat je BC kunt berekenen in $\triangle ABC$ en bereken BC . Rond af op drie decimalen.
 - Welke goniometrische verhouding gebruik je vervolgens in $\triangle BCD$ om BD te berekenen?
 - Bereken BD . Rond af op twee decimalen.



Theorie A Goniometrische berekeningen

Met de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens zijn hoeken en lijnstukken te berekenen. Gebruik je bij berekeningen met de GR tussenresultaten, rond dan de tussenresultaten niet af maar gebruik Ans en lettergeheugens van de GR.

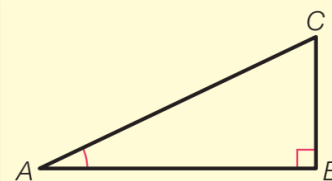
GR Neem de module **Het gebruik van Ans en lettergeheugens** door.

Tot nu toe heb je bij het berekenen van lijnstukken met behulp van goniometrische verhoudingen gebruikgemaakt van verhoudingstabellen. Vanaf nu doen we dat op een snellere manier. Daarbij gebruiken we de regels hieronder.

- Zoals uit $2 = \frac{6}{3}$ volgt $6 = 2 \cdot 3$
volgt uit $a = \frac{b}{c}$ dat $b = ac$.
- Zoals uit $2 = \frac{6}{3}$ volgt $3 = \frac{6}{2}$
volgt uit $a = \frac{b}{c}$ dat $c = \frac{b}{a}$.

Dus $\sin(40^\circ) = \frac{AB}{6}$ geeft $AB = 6 \sin(40^\circ)$

en $\cos(35^\circ) = \frac{5}{BC}$ geeft $BC = \frac{5}{\cos(35^\circ)}$.



$$\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB}$$

$$a = \frac{b}{c}$$

Vermenigvuldig beide leden met c .

$$ac = b$$

Deel beide leden door a .

$$c = \frac{b}{a}$$

In het voorbeeld worden hoeken berekend. Voor het eindantwoord houden we ons aan de volgende afspraak.

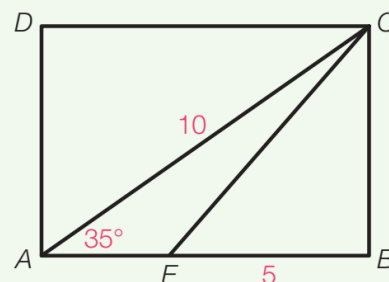
Afspraak

Rond bij het berekenen van een hoek af op één decimaal.

Voorbeeld

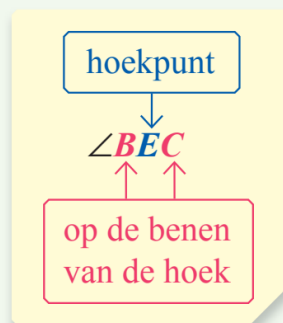
In de figuur hiernaast is $ABCD$ een rechthoek.

- a Bereken $\angle BEC$.
- b Bereken $\angle ACE$.



Aanpak

- a Om $\angle BEC$ te berekenen heb je van $\triangle BCE$ nog een zijde nodig. Gebruik daarvoor dat BC een rechthoekszijde is van $\triangle ABC$.
- b $\angle ACE$ is geen hoek in een rechthoekige driehoek. Gebruik daarom dat de som van de hoeken in $\triangle ACE$ gelijk is aan 180° . Om $\angle AEC$ te berekenen, gebruik je dat $\angle AEC + \angle BEC = 180^\circ$ (gestrekte hoek).



Uitwerking

a In $\triangle ABC$ is $\sin(35^\circ) = \frac{BC}{10}$

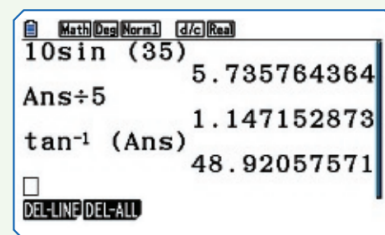
$$BC = 10 \sin(35^\circ) = 5,73\dots$$

In $\triangle BEC$ is $\tan(\angle BEC) = \frac{BC}{BE} = \frac{5,73\dots}{5}$

$$\angle BEC \approx 48,9^\circ$$

b $\angle AEC = 180^\circ - \angle BEC = 180^\circ - 48,92\dots^\circ = 131,07\dots^\circ$

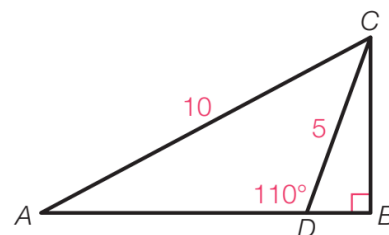
In $\triangle AEC$ is $\angle ACE = 180^\circ - \angle EAC - \angle AEC$
 $= 180^\circ - 35^\circ - 131,07\dots^\circ \approx 13,9^\circ$



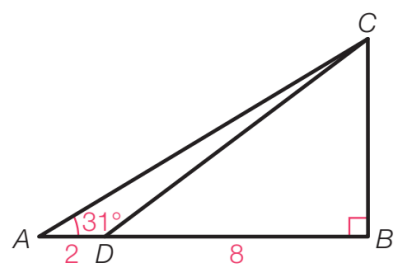
2 Gegeven is de figuur hiernaast.



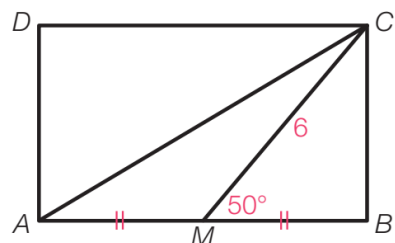
- a Bereken $\angle A$.
- b Bereken $\angle ACD$.



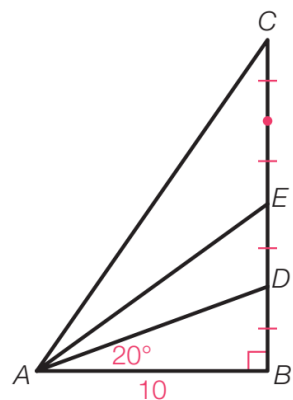
- 3** Gegeven is de figuur hiernaast.
 □ ⊗ * Bereken $\angle ACD$.



- A4** In de figuur hiernaast is $ABCD$ een rechthoek.
 □ ⊗ * Bereken $\angle BAC$ en $\angle ACM$.



- A5** Gegeven is $\triangle ABC$ hiernaast.
 □ ⊗ * De punten D en E liggen op BC , waarbij E het midden van BC is en D het midden van BE . Verder is $\angle BAD = 20^\circ$.
 Bereken $\angle CAE$.

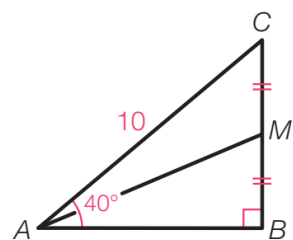


Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan hoeken en lijnstukken berekenen met sinus, cosinus en tangens.

► **OPGAVE C1**
THEORIE A

- C1** Gegeven is de figuur hiernaast.
 Bereken $\angle BAM$.



Antwoord

C1 $22,8^\circ$

3.2 De sinusregel

Kennis en vaardigheden

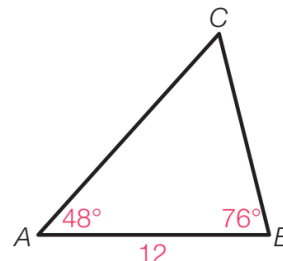
- Je kunt met de sinusregel hoeken en lijnstukken berekenen.

06 Gegeven is $\triangle ABC$ hiernaast.

Om AC te berekenen, kun je gebruikmaken van de hoogtelijn AD , dat is de lijn door A loodrecht op BC .

a Bereken $\angle C$.

b Bereken AC . Rond af op twee decimalen.



Theorie A De sinusregel in scherphoekige driehoeken

In opgave 6 heb je in $\triangle ABC$ de lengte van zijde AC berekend. Dit deed je door een hoogtelijn te tekenen en dan gebruik te maken van de twee rechthoekige driehoeken die ontstaan. Deze manier was nodig omdat $\triangle ABC$ niet gelijkbenig of rechthoekig is. De berekening wordt een stuk eenvoudiger door gebruik te maken van de **sinusregel**.

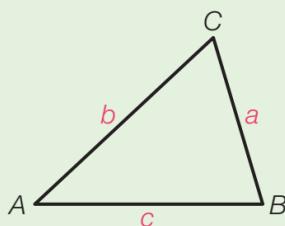
De sinusregel geldt in elke driehoek.

In opgave 9 **bewijs** je de sinusregel voor scherphoekige driehoeken.

Zie de sinusregel hieronder. De zijde tegenover hoek A is met de letter a aangegeven, de zijde tegenover hoek B met b en de zijde tegenover hoek C met c .

In elke $\triangle ABC$ geldt de sinusregel

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}$$



Bewijzen

Bij bewijzen geef je een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde krijg je te maken met de

vergelijking $\frac{BC}{\sin(48^\circ)} = \frac{12}{\sin(56^\circ)}$. Hieruit volgt $BC = \frac{12 \sin(48^\circ)}{\sin(56^\circ)}$,

want de vergelijking $\frac{BC}{\sin(48^\circ)} = \frac{12}{\sin(56^\circ)}$ komt op hetzelfde neer

als de verhoudingstabel $\frac{BC}{\sin(48^\circ)} \mid \frac{12}{\sin(56^\circ)}$.

Voorbeeld

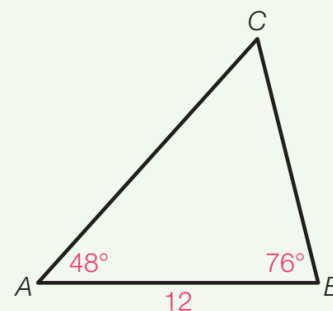
Gegeven is $\triangle ABC$ hiernaast.
Bereken BC . Rond af op één decimaal.

Uitwerking

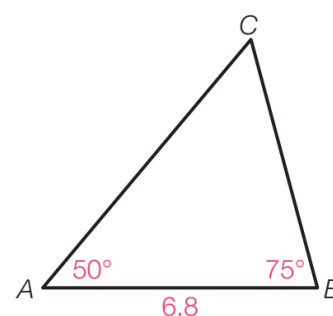
$$\angle C = 180^\circ - 48^\circ - 76^\circ = 56^\circ$$

De sinusregel geeft $\frac{BC}{\sin(48^\circ)} = \frac{12}{\sin(56^\circ)}$

$$BC = \frac{12 \sin(48^\circ)}{\sin(56^\circ)} \approx 10,8$$



- 7** Gegeven is $\triangle ABC$ hiernaast.
Bereken AC en BC . Rond af op één decimaal.



- 8** Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ en $AC = 6$.
Bereken de omtrek van de driehoek. Rond af op twee decimalen.

- 9** In deze opgave ga je de sinusregel bewijzen voor scherphoekige driehoeken.

Zie hiernaast $\triangle ABC$ met hierin de hoogtelijn CD .

- a Licht toe dat $CD = b \sin(\angle A)$.
- b Licht toe dat $CD = a \sin(\angle B)$.
- c Licht toe dat uit de vragen a en b volgt

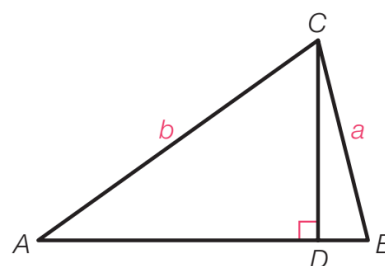
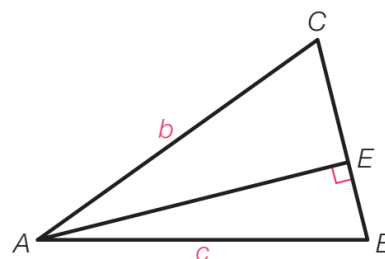
$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)}$$

Zie hiernaast nogmaals $\triangle ABC$ met hierin de hoogtelijn AE .

- d Licht toe dat $AE = c \sin(\angle B)$.
- e Licht toe dat $AE = b \sin(\angle C)$.
- f Licht toe dat uit de vragen d en e volgt

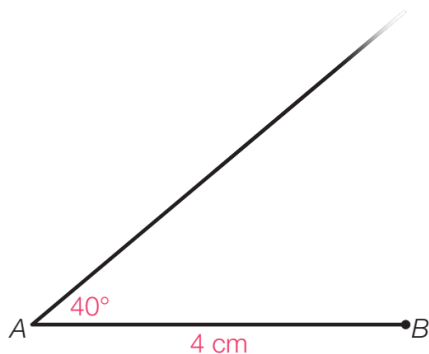
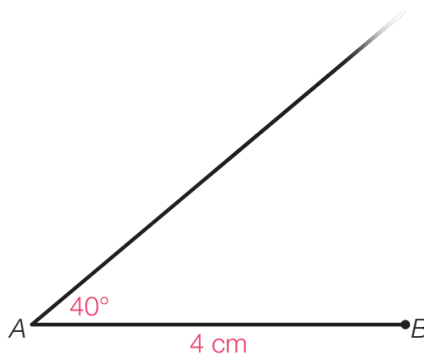
$$\frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}$$

- g Hoe volgt uit de vragen c en f de sinusregel?



10 Hieronder is twee keer een gedeelte van een $\triangle ABC$ getekend met $AB = 4$ cm en $\angle A = 40^\circ$. Er zijn twee driehoeken mogelijk met $BC = 3$ cm.

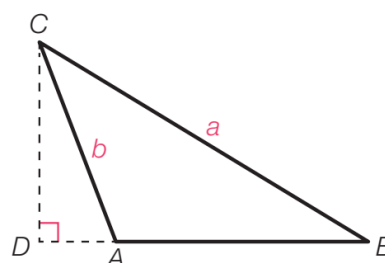
- Teken deze twee driehoeken. Gebruik een passer.
- Gebruik de sinusregel om aan te tonen dat $\sin(\angle C) = 0,857\dots$
Welke $\angle C$ vind je hiermee met de GR?



11 Hiernaast is de stomphoekige driehoek ABC getekend.

- Licht toe dat $CD = b \sin(180^\circ - \angle BAC)$.
- Licht toe dat $CD = a \sin(\angle B)$.
- Licht toe dat uit de vragen a en b volgt

$$\frac{a}{\sin(180^\circ - \angle BAC)} = \frac{b}{\sin(\angle B)}$$



Theorie B De sinusregel in stomphoekige driehoeken

In opgave 11 heb je gezien dat $\frac{a}{\sin(180^\circ - \angle BAC)} = \frac{b}{\sin(\angle B)}$.

In hoofdstuk 8 leer je dat $\sin(180^\circ - \angle BAC) = \sin(\angle BAC)$.

Hiermee krijg je in de stomphoekige driehoek ABC dat $\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)}$.

En omdat in $\triangle ABC$ ook geldt dat $\frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}$, geldt de sinusregel ook in stomphoekige driehoeken.

$$\sin(180^\circ - \angle A) = \sin(\angle A)$$

Dus bijvoorbeeld $\sin(170^\circ) = \sin(10^\circ)$ en $\sin(95^\circ) = \sin(85^\circ)$. Op het GR-scherm hiernaast zie je dat de GR rekent volgens deze regel.

Zoek je omgekeerd de hoek α waarvoor geldt $\sin(\alpha) = 0,1736\dots$ dan geeft de GR de scherpe hoek, dus $\alpha = 10^\circ$.

NORM DRIJF AUTO REEL GRAD MIN	
sin(170)	0.1736481777
sin(10)	0.1736481777
sin(95)	0.9961946981
sin(85)	0.9961946981

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ hiernaast met $\angle C > 90^\circ$.
Bereken $\angle C$.

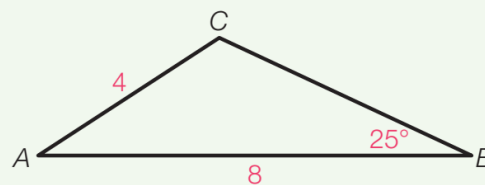
Uitwerking

De sinusregel geeft $\frac{4}{\sin(25^\circ)} = \frac{8}{\sin(\angle C)}$

$$\sin(\angle C) = \frac{8 \sin(25^\circ)}{4} = 0,845\dots$$

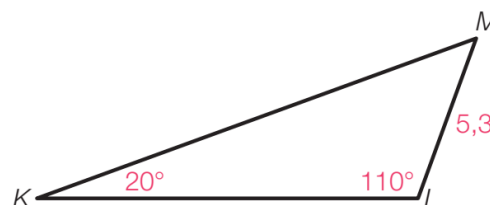
De GR geeft een hoek van $57,69\dots^\circ$.

Dus $\angle C = 180^\circ - 57,69\dots^\circ \approx 122,3^\circ$.



12 Gegeven is $\triangle KLM$ hiernaast.

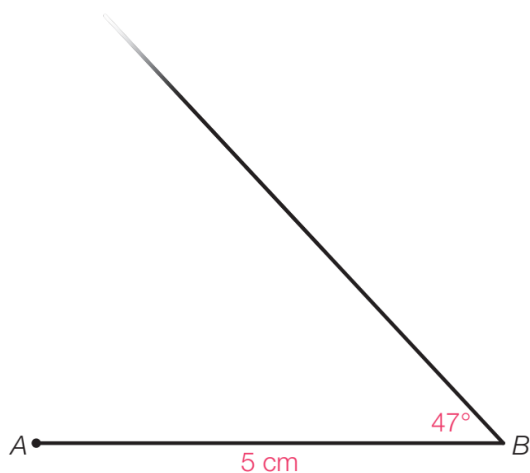
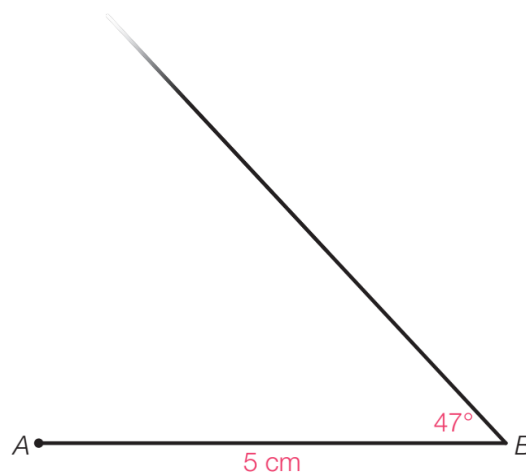
Bereken KL en KM . Rond af op één decimaal.



13 Hieronder is twee keer een gedeelte van een $\triangle ABC$ getekend met $AB = 5$ cm en $\angle B = 47^\circ$. Er zijn twee driehoeken mogelijk met $AC = 4$ cm.

*

- a Teken deze twee driehoeken. Gebruik een passer.
- b Bereken voor $\triangle ABC$ met de scherpe hoek C de hoeken A en C en de zijde BC . Rond af op één decimaal.
- c Bereken voor $\triangle ABC$ met de stompe hoek C de hoeken A en C en de zijde BC . Rond af op één decimaal.



14 Van $\triangle ABC$ is $\angle B = 46^\circ$, $BC = 10$ en $AC = 8$.



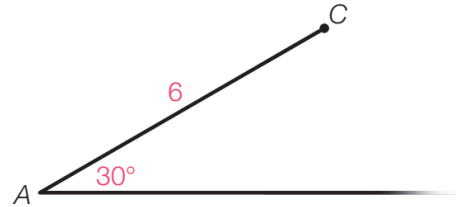
- Bereken beide mogelijkheden voor $\angle A$.
- Bereken beide mogelijkheden voor AB . Rond af op één decimaal.
- Judith wil een driehoek tekenen met $\angle B = 46^\circ$, $BC = 10$ en $AC = 7$.
Laat met een tekening zien dat dit niet mogelijk is.

15 Bij de gegevens $\angle A = 30^\circ$ en $AC = 6$ hangt het van de lengte van BC af hoeveel driehoeken er mogelijk zijn.



Wat weet je van de lengte van BC als

- er geen driehoek ABC mogelijk is
- er één driehoek ABC mogelijk is
- er twee driehoeken ABC mogelijk zijn?

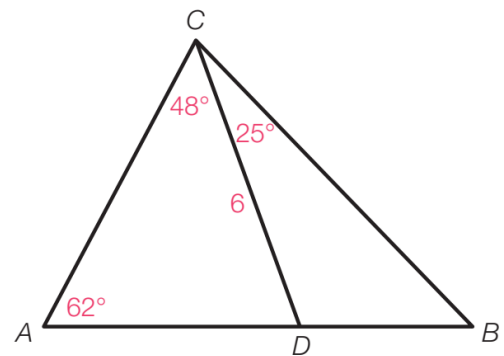


A16 Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 52^\circ$, $AC = 8$ en $BC = 7$.



Er zijn twee driehoeken ABC mogelijk bij deze gegevens. We noemen ze $\triangle AB_1C$ en $\triangle AB_2C$.
Bereken B_1B_2 . Rond af op twee decimalen.

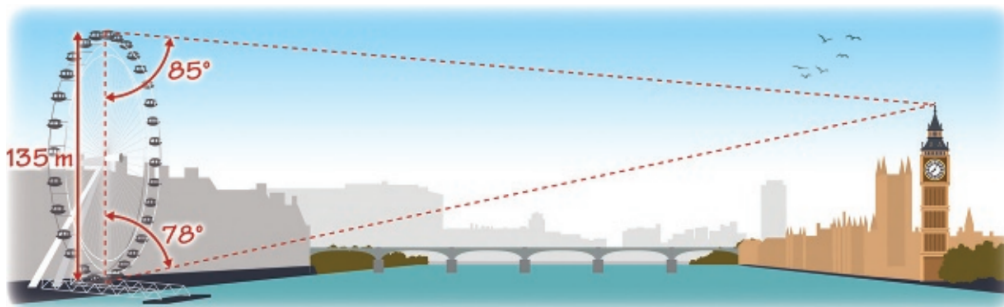
A17 Bereken de omtrek van $\triangle ABC$ hiernaast. Rond af op één decimaal.



A18 Bram zit in het Millennium Wheel in Londen. Hij vraagt zich af hoe hoog de Big Ben is, die hij aan de overkant van de rivier de Theems ziet. Vanuit het Millennium Wheel heeft hij daartoe twee hoeken gemeten. Zie de figuur hieronder.



- Bereken hoeveel meter Bram van de top van de Big Ben is verwijderd als hij in het reuzenrad stapt. Rond af op gehelen.
- Bereken de hoogte van de Big Ben. Rond af op gehele meters.



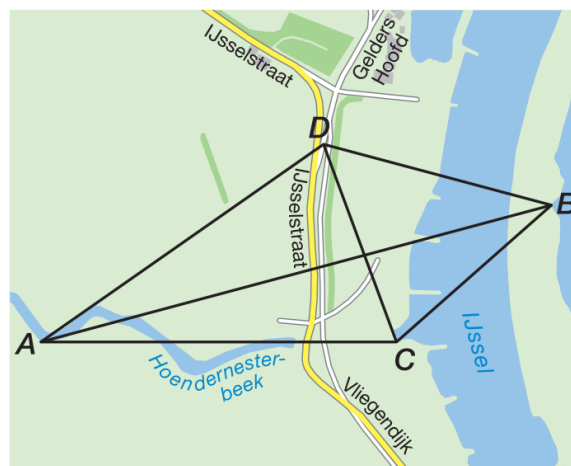
A19



In de figuur hiernaast zie je een landschap waarin een landmeter de afstand tussen de punten A en B wil opmeten. Omdat, vanuit A gezien, B aan de overkant van het water ligt, kan hij de afstand AB niet rechtstreeks opmeten. Wel kan hij de afstand tussen de gemarkeerde punten C en D opmeten. Er geldt $CD = 250$ meter. Ook kan hij een aantal hoeken opmeten.

Hij vindt $\angle CAB = 15^\circ$, $\angle DAB = 20^\circ$, $\angle ACD = 70^\circ$ en $\angle ADB = 130^\circ$.

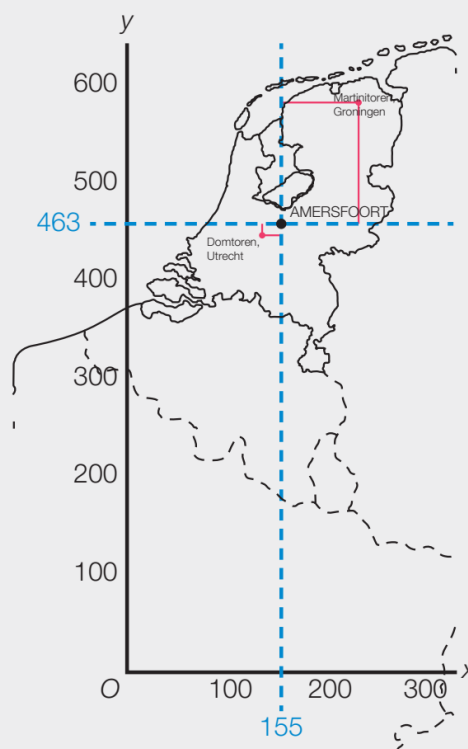
Bereken de afstand tussen A en B . Rond af op gehele dm.



Informatief Rijksdriehoeksmeting

Het coördinatensysteem van de Rijksdriehoeksmeting is vastgelegd met een netwerk van ongeveer 5600 RD-punten verspreid over Nederland. De locatie van een RD-punt wordt gemarkeerd door bijvoorbeeld een kerktoeren, een bronzen bout die is ingemetseld in de muur van een gebouw, een ingegraven betonnen zuil of een grondanker. Ook bestaan er 'actieve' RD-punten die satellietsignalen ontvangen en doorzenden, de GNSS-referentiestationen.

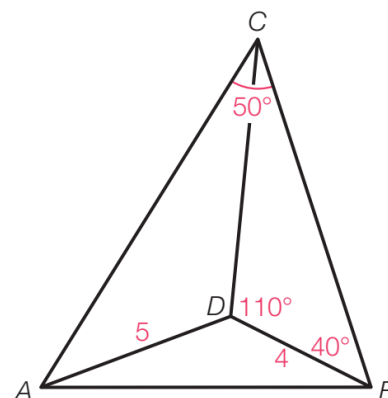
Van de RD-punten zijn de x - en y -coördinaat bekend. De x en y geven de afstand aan tot twee loodrecht op elkaar staande assen. Eén loopt van zuid naar noord (de y -as), de ander van west naar oost (de x -as). Vroeger sneden de assen elkaar in Amersfoort, maar om praktische redenen zijn ze zo verschoven dat in Nederland (op land) alle coördinaten positief zijn en de x altijd kleiner is dan de y . Bron: Kadaster



A20



Gegeven is de figuur hiernaast met $AD = 5$, $BD = 4$, $\angle CBD = 40^\circ$, $\angle BDC = 110^\circ$ en $\angle ACB = 50^\circ$. Bereken AC . Rond af op twee decimalen.



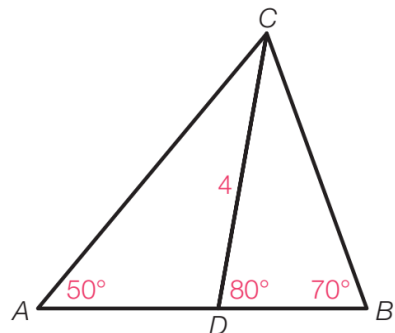
Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan met de sinusregel hoeken en lijnstukken berekenen.

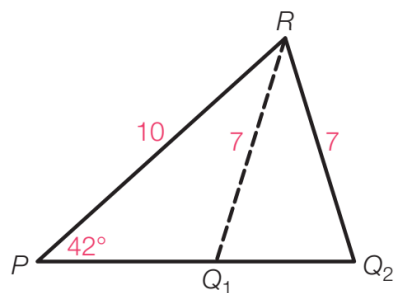
► OPGAVE C2
THEORIE A,B

C2

- a Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken AB . Rond af op twee decimalen.



- b Gegeven is $\triangle PQR$ met $\angle P = 42^\circ$, $PR = 10$ en $QR = 7$.
Bij deze gegevens zijn er twee driehoeken mogelijk:
 $\triangle PQ_1R$ en $\triangle PQ_2R$. Zie de figuur hiernaast.
Bereken $\angle PRQ_1$.



Antwoorden

- C2 a 4,74
b $30,9^\circ$

3.3 De cosinusregel

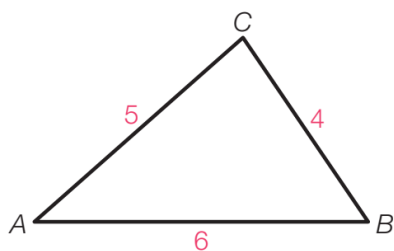
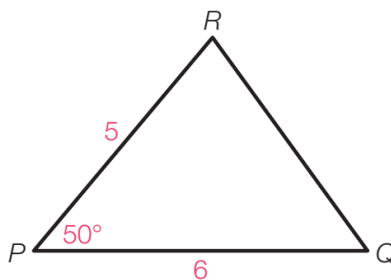
Kennis en vaardigheden

- Je kunt met de cosinusregel hoeken en lijnstukken berekenen.
- Je weet in welke situatie je de sinusregel kunt gebruiken en in welke situatie de cosinusregel.

O21 Zie $\triangle ABC$ en $\triangle PQR$ hieronder.



- a** Waarom kun je $\angle A$ niet met de sinusregel berekenen?
b Waarom kun je QR niet met de sinusregel berekenen?



Theorie A De cosinusregel

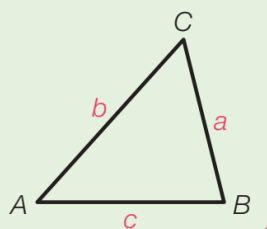
In opgave 21 kun je niets beginnen met de sinusregel. Maar gelukkig bestaat er ook nog de **cosinusregel**.

In elke $\triangle ABC$ geldt de cosinusregel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\angle A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\angle B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\angle C)$$



Je ziet dat er drie versies van de cosinusregel zijn. In opgave 23 ga je de eerste versie van de cosinusregel bewijzen voor scherphoekige driehoeken. Het bewijs van de andere versies gaat net zo.

In opgave 24 geef je het bewijs voor stomphoekige driehoeken.

Je gebruikt daarbij dat $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

In hoofdstuk 8 wordt deze regel toegelicht.

Omdat de cosinus van een scherpe hoek positief is, volgt uit deze regel dat de cosinus van een stompe hoek negatief is.

In tegenstelling tot bij de sinus geeft de GR bij de cosinus altijd de hoek die je zoekt. Zo krijg je bij $\cos(\alpha) = -0,6$ dat $\alpha \approx 126,9^\circ$.

In de situatie dat van een driehoek drie zijden bekend zijn, gebruik je de cosinusregel om een hoek te berekenen. Zie het voorbeeld op de volgende bladzijde.

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 6$, $AC = 5$ en $BC = 10$.
Bereken $\angle A$.

Uitwerking

Zie de figuur hiernaast.

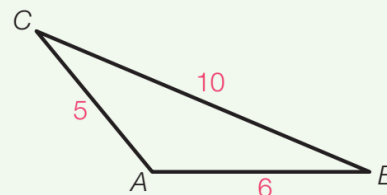
De cosinusregel geeft $10^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(\angle A)$

$$100 = 61 - 60 \cos(\angle A)$$

$$60 \cos(\angle A) = -39$$

$$\cos(\angle A) = -\frac{39}{60}$$

$$\angle A \approx 130,5^\circ$$



In de situatie dat van een driehoek twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven, gebruik je de cosinusregel om de derde zijde te berekenen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Van $\triangle PQR$ is $PQ = 6$, $PR = 5$ en $\angle P = 50^\circ$.
Bereken QR . Rond af op twee decimalen.

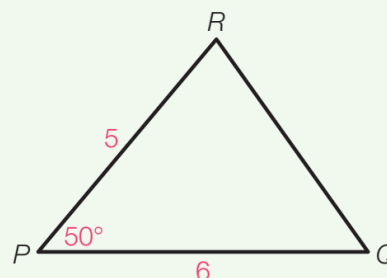
Uitwerking

Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel geeft $QR^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(50^\circ)$

$$QR^2 = 22,43\dots$$

$$QR \approx 4,74$$



22



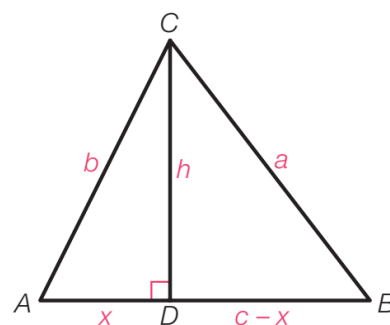
- a Van $\triangle ABC$ is $AC = 4$, $BC = 6$ en $\angle C = 60^\circ$.
Bereken AB . Rond af op twee decimalen.
- b Van $\triangle DEF$ is $DE = 7$, $DF = 6$ en $EF = 5$.
Bereken de hoeken van $\triangle DEF$.
- c Van $\triangle GHI$ is $GH = 4$, $HI = 3$ en $\angle H = 150^\circ$.
Bereken GI . Rond af op twee decimalen.
- d Gegeven is $\triangle PQR$ met $PQ = 5$, $QR = 4$ en $PR = 7$.
Bereken de hoeken van $\triangle PQR$.

23 In deze opgave ga je de cosinusregel bewijzen voor scherphoekige driehoeken.

□ ⊗ *

In de figuur hiernaast is $AD = x$ gesteld, dus $BD = c - x$.

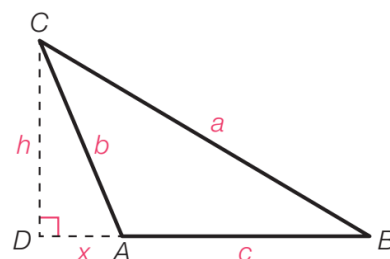
- Licht toe dat $x^2 + h^2 = b^2$.
- Licht toe dat $a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$.
- Licht toe dat uit de vragen a en b volgt $a^2 = c^2 + b^2 - 2cx$.
- Licht toe dat $x = b \cos(\angle A)$.
- Licht toe dat uit de vragen c en d volgt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\angle A)$.



24 Hiernaast is de stomphoekige driehoek ABC getekend.

□ ⊗ *

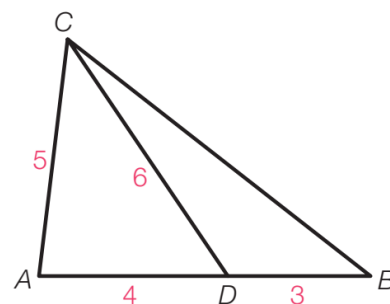
- Licht toe dat $x^2 + h^2 = b^2$ en $a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2$.
- Licht toe dat uit vraag a volgt $a^2 = c^2 + b^2 + 2cx$.
- Licht toe dat $x = b \cos(180^\circ - \angle A)$.
- Bewijs dat de cosinusregel ook geldt voor stomphoekige driehoeken. Gebruik dat $\cos(180^\circ - \angle A) = -\cos(\angle A)$.



A25 Gegeven is de figuur hiernaast.

□ ⊗ *

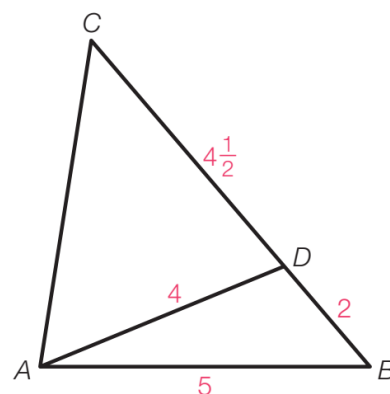
Bereken BC . Rond af op één decimaal.



A26 Gegeven is de figuur hiernaast.

⊗ *

Bereken exact AC .

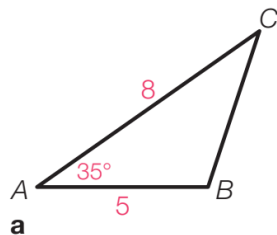
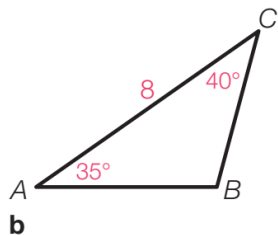
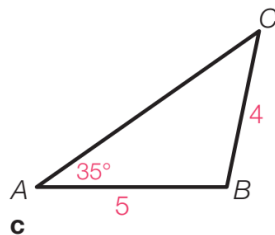
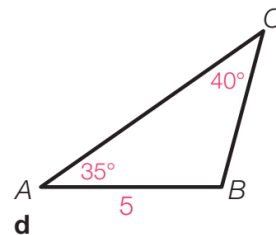


R27 a Wat moet van een driehoek bekend zijn om met de sinusregel

□ ⊗ *

- een zijde te berekenen
 - een hoek te berekenen?
- b Er zijn twee gevallen bij gegevens van een driehoek waarbij je de cosinusregel kunt gebruiken.
Welke twee gevallen zijn dat en wat kun je in elk van deze gevallen berekenen?

28 Bereken van de figuren hieronder in één decimaal de onbekende zijden.



A29 Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 10$, $AC = 7$ en $BC = 8$.

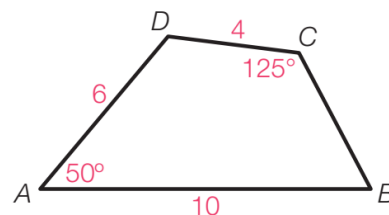


Bereken de hoogte die bij zijde AB hoort. Rond af op één decimaal.

A30 Gegeven is vierhoek $ABCD$ hiernaast.



Bereken BC . Rond af op één decimaal.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan met de cosinusregel hoeken en lijnstukken berekenen.

☐ Ik weet in welke situatie ik de sinusregel kan gebruiken en in welke situatie de cosinusregel.

► **OPGAVE C3**
THEORIE A

► **OPGAVE C4**
OPGAVE 27

C3 a Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 115^\circ$, $AB = 3$ en $AC = 2$.
Bereken BC . Rond af op twee decimalen.

b Van $\triangle ABC$ is $AB = 3$, $AC = 2$ en $BC = 4$.
Bereken $\angle A$.

C4 a Van $\triangle ABC$ is $AB = 8$, $AC = 6$ en $\angle A = 140^\circ$.
Bereken BC . Rond af op één decimaal.

b Van $\triangle ABC$ is $AC = 6$, $BC = 13$, $\angle A > 90^\circ$ en $\angle B = 25^\circ$.
Bereken $\angle C$.

c Van $\triangle ABC$ is $AB = 8$, $AC = 6$ en $BC = 13$.
Bereken $\angle A$.

Antwoorden

C3 a 4,25
b $104,5^\circ$

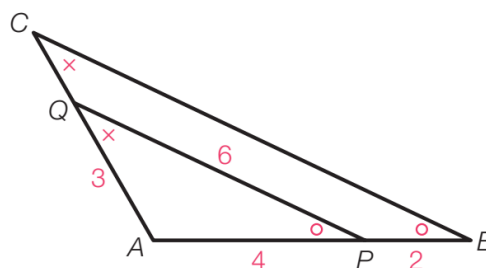
C4 a 13,2
b $41,3^\circ$
c $136,0^\circ$

3.4 Vergelijkingen in de meetkunde

Kennis en vaardigheden

- Je kunt met de stelling van Pythagoras en met gelijkvormigheid lijnstukken berekenen.
- Je kunt met gelijkvormigheid een lijnstuk berekenen door een lijnstuk x te stellen.
- Je kunt met de stelling van Pythagoras een lijnstuk berekenen door een lijnstuk x te stellen.

V5 In de figuur hiernaast is $\triangle ABC$ een vergroting van $\triangle APQ$. Bereken AC en BC .



Voorkennis Gelijkvormige driehoeken

Bij het vergroten van een figuur hebben origineel en beeld dezelfde vorm. Zo is in de figuur hierboven $\triangle ABC$ gelijkvormig met $\triangle APQ$. Notatie: $\triangle ABC \sim \triangle APQ$.

Bij gelijkvormige driehoeken zijn de overeenkomstige hoeken gelijk en kun je met de zijden een verhoudingstabel maken. Hierin staan de overeenkomstige zijden onder elkaar.

$$\triangle ABC \sim \triangle APQ$$

$$\begin{aligned}\angle A &= \angle A \\ \angle B &= \angle P \\ \angle C &= \angle Q\end{aligned}$$

Uit $\triangle ABC \sim \triangle APQ$ volgt dus de verhoudingstabel $\frac{AB}{AP} \mid \frac{BC}{PQ} \mid \frac{AC}{AQ}$.

Om gelijkvormigheid van driehoeken aan te tonen, heb je twee paar gelijke hoeken nodig.

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee paar gelijke hoeken hebben.

Gebruik bij het zoeken naar gelijke hoeken de volgende eigenschappen.

overstaande hoeken	Z-hoeken	F-hoeken
Bij snijdende lijnen zijn overstaande hoeken gelijk.	Bij evenwijdige lijnen horen gelijke Z-hoeken.	Bij evenwijdige lijnen horen gelijke F-hoeken.

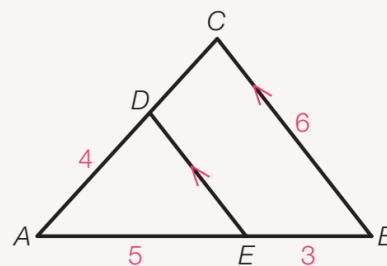
Na het aantonen van gelijkvormigheid kun je met de daaruit volgende verhoudingstabel onbekende zijden berekenen. Zie het voorbeeld op de volgende bladzijde.

Voorbeeld

Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken AC en DE .

Aanpak

- 1 Zoek twee paar gelijke hoeken en toon hiermee gelijkvormigheid aan.
- 2 Schrijf de gelijkvormige driehoeken op. Let op de volgorde van de letters.
- 3 Schrijf de verhoudingstabel op die uit de gelijkvormigheid volgt en vul deze in.
- 4 Bereken de gevraagde lijnstukken.



Schrijf erbij waarom hoeken gelijk zijn.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} \angle CAB = \angle DAE \\ \angle ABC = \angle AED \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle AED$$

AB	BC	AC
AE	DE	AD

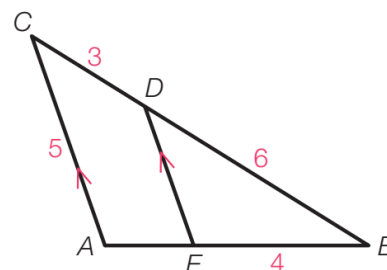
 geeft

8	6	AC
5	DE	4

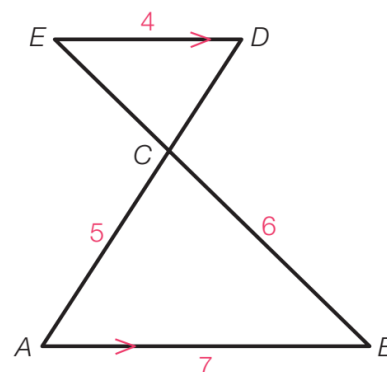
$$AC = \frac{8 \cdot 4}{5} = 6\frac{2}{5} \text{ en } DE = \frac{5 \cdot 6}{8} = 3\frac{3}{4}$$

$\triangle ABC \sim \triangle AED$, dus
 onder **AB** hoort **AE**,
 onder **BC** hoort **DE** en
 onder **AC** hoort **AD**.

- V6** Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken AB en DE .



- V7** Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken CD en CE .



Theorie A Berekeningen met gelijkvormigheid

In de opgaven hiervoor was het nodig eerst gelijkvormigheid aan te tonen bij het berekenen van lijnstukken. In het vervolg mag je gelijkvormigheid gebruiken zonder het eerst aan te tonen.

Afspraak

Je mag gelijkvormige driehoeken gebruiken zonder de gelijkvormigheid eerst aan te tonen.

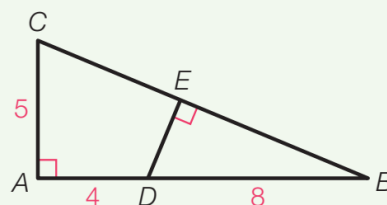
Zo mag je in het voorbeeld direct opschrijven dat $\triangle ABC \sim \triangle EBD$. Vervolgens kun je met de daaruit volgende verhoudingstabel zijden berekenen. Wel is het soms nodig eerst nog een onbekende zijde te berekenen met de stelling van Pythagoras. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken DE en CE .

Aanpak

Bereken eerst BC met de stelling van Pythagoras.



Uitwerking

$$\triangle ABC \sim \triangle EBD$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $BC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

AB	BC	AC
BE	BD	DE

 geeft

12	13	5
BE	8	DE

$$DE = \frac{5 \cdot 8}{13} = 3\frac{1}{13}$$

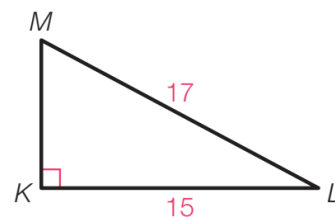
$$BE = \frac{12 \cdot 8}{13} = 7\frac{5}{13}, \text{ dus } CE = 13 - 7\frac{5}{13} = 5\frac{8}{13}.$$

R31 Zie het voorbeeld.

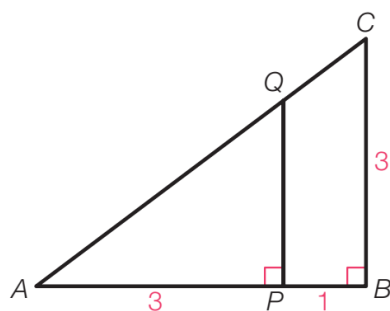
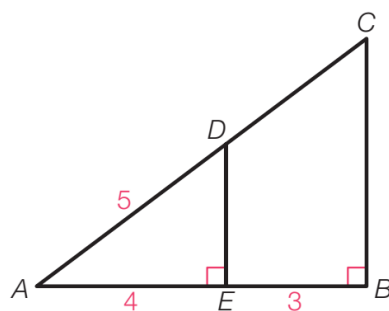


a Licht toe dat $\triangle ABC \sim \triangle EBD$.

b Bij het berekenen van BC met de stelling van Pythagoras is de berekening kort genoteerd als $BC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$. Bereken op dezelfde korte manier KM in de figuur hiernaast.

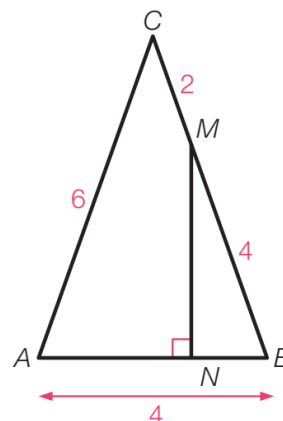


- 32** Gegeven is de figuur hier linksonder.
Bereken PQ en CQ .

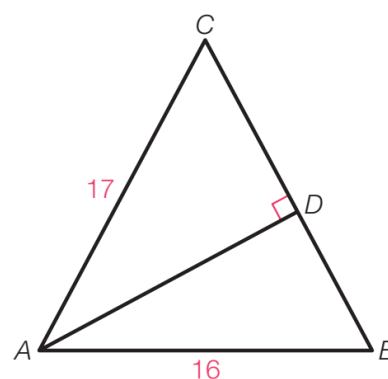


- 33** Gegeven is de figuur hier rechtsboven.
Bereken BC en CD .

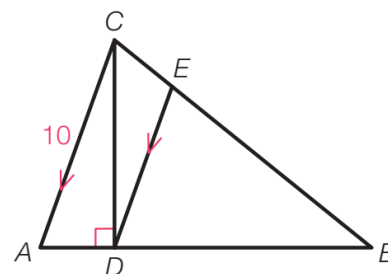
- 34** Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC hiernaast.
Bereken MN en AN . Rond af op twee decimalen.
Gebruik als hulplijn de hoogtelijn door C .



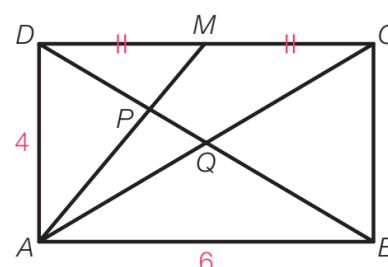
- A35** In de figuur hiernaast is driehoek ABC gelijkbenig met $AC = BC = 17$.
Bereken AD en BD . Rond af op één decimaal.



- A36** In de figuur hiernaast is driehoek ABC gelijkbenig met $AB = BC = 15$.
Bereken DE .



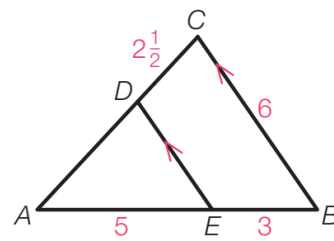
- A37** In de figuur hiernaast is $ABCD$ een rechthoek.
Bereken PQ . Rond af op twee decimalen.



O38 Zie de figuur hiernaast met de gelijkvormige driehoeken ABC en AED .

Uit $\triangle ABC \sim \triangle AED$ volgt de verhoudingstabel $\frac{AB}{AE} \mid \frac{AC}{AD}$.

Waarom lukt het niet AD te berekenen met $AD = \frac{AC \cdot AE}{AB}$?



Theorie B Vergelijkingen bij gelijkvormigheid

In opgave 38 lukte het niet om AD te berekenen met $AD = \frac{AC \cdot AE}{AB}$.

Door de lengte van AD gelijk te stellen aan x en AC uit te drukken in x , lukt het wel om AD te berekenen.

Stel $AD = x$, dan is $AC = x + 2\frac{1}{2}$. Dit geeft de verhoudingstabel

$\frac{8}{5} \mid \frac{x + 2\frac{1}{2}}{x}$ en hieruit volgt $8x = 5(x + 2\frac{1}{2})$. De oplossing van deze

vergelijking is $x = 4\frac{1}{6}$, dus $AD = 4\frac{1}{6}$.

Voorbeeld

Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken AD .

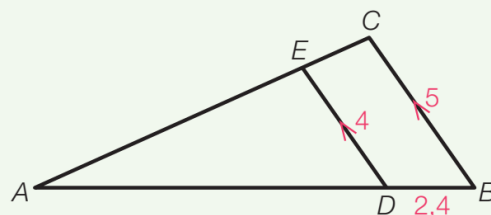
Uitwerking

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ geeft $\frac{AD}{AB} \mid \frac{DE}{BC}$

Stel $AD = x$, dan is $AB = x + 2,4$.

$\frac{x}{x + 2,4} \mid \frac{4}{5}$ geeft $5x = 4(x + 2,4)$
 $5x = 4x + 9,6$
 $x = 9,6$

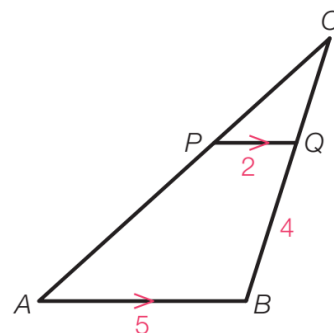
Dus $AD = 9,6$.



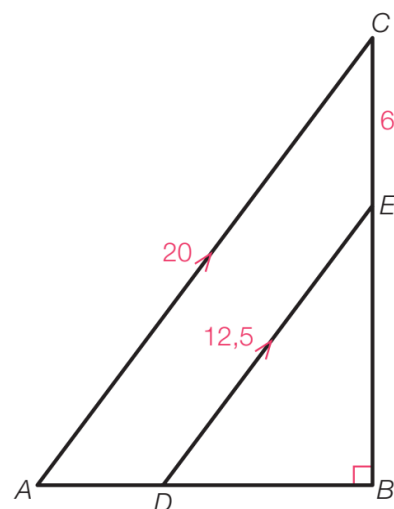
R39 Zie het voorbeeld.

Gegeven is dat $CE = 2,2$.
Bereken AE .

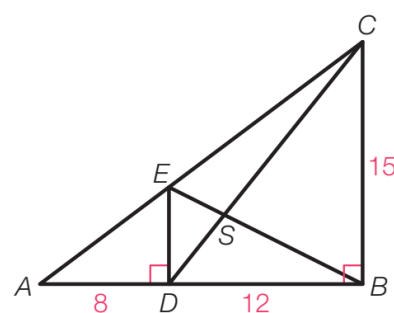
40 Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken CQ .



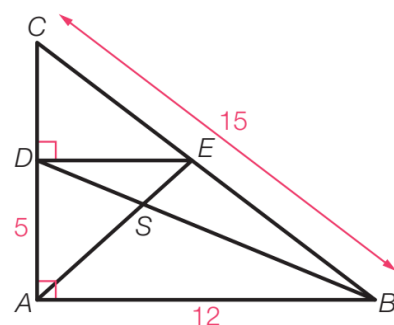
- 41** Gegeven is de figuur hiernaast.
 □ ⊙ * Bereken AD .



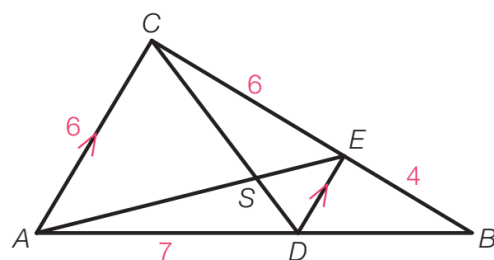
- 42** Gegeven is de figuur hiernaast.
 □ ⊙ * **a** Bereken AE .
b Bereken DS . Rond af op twee decimalen.



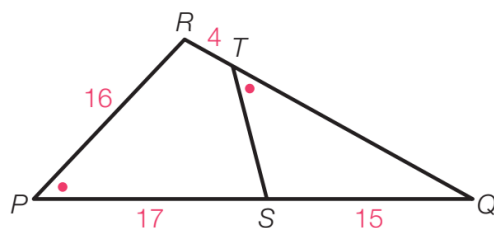
- A43** Gegeven is de figuur hiernaast.
 □ ⊙ * Bereken BS .



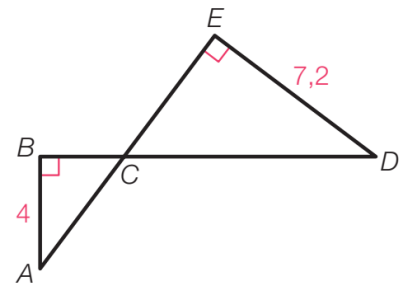
- A44** Gegeven is de figuur hiernaast.
 ⊙ * **a** Onderzoek met een berekening of $\angle ACB = 90^\circ$.
b Welk gedeelte is AS van AE ?



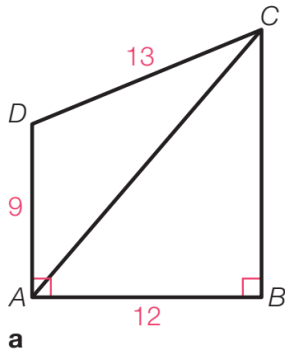
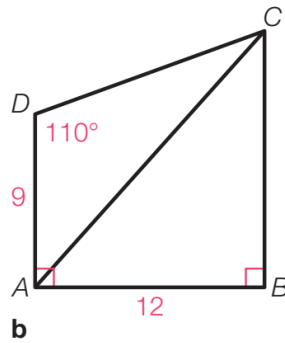
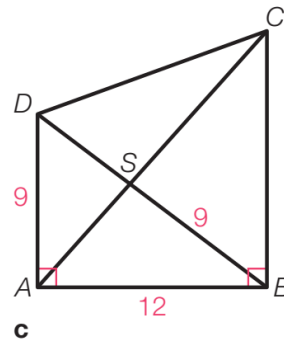
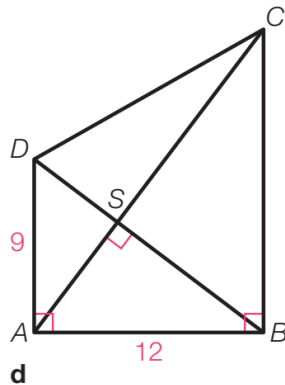
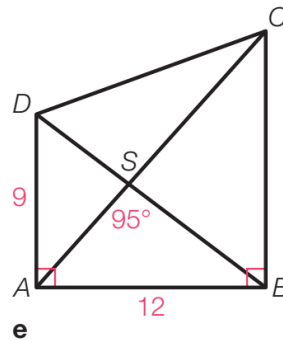
- A45** Gegeven is de figuur hiernaast.
 ⊙ * Bereken ST .



- E46** Gegeven is de figuur hiernaast met $AE = 10,4$
 * en $BD = 12$.
 Bereken BC op algebraïsche wijze.



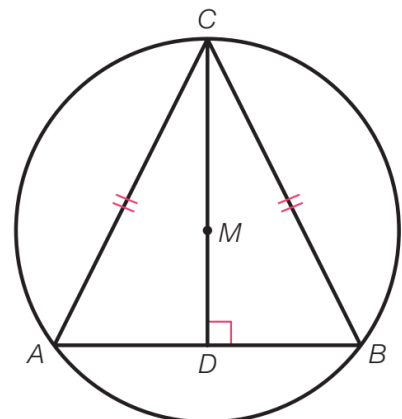
- A47** Bereken in de figuren hieronder telkens AC .
 □ ⊙ * Rond zo nodig af op één decimaal.



- 48** In de figuur hiernaast is de gelijkbenige driehoek ABC
 □ ⊙ * met $AC = BC$ getekend, waarvan de hoogte CD gelijk
 is aan AB . Verder is de omgeschreven cirkel van deze
 driehoek getekend. Het middelpunt van deze cirkel is M
 en de straal is 6.

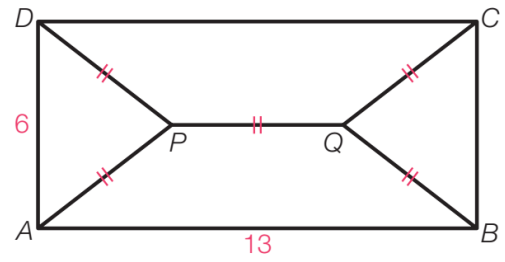
We vragen ons af wat de lengte van AB is.

- a** Stel $DM = x$ en licht toe dat hieruit volgt dat
 $AD = \frac{1}{2}x + 3$.
b Gebruik de stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ en toon
 aan dat je de vergelijking $1\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$ krijgt.
c Los de vergelijking van vraag b op en bereken de
 lengte van AB .



De hoogte CD is gelijk aan AB .

- A51** In de figuur hiernaast is $ABCD$ een rechthoek.
 Bereken exact de lengte van AP .



- A52** In sommige gebouwen zijn boven een raam of een deur bakstenen gemetseld in de vorm van een cirkelboog. Om deze bakstenen tijdens de bouw op de juiste wijze te kunnen plaatsen, wordt gebruikgemaakt van een houten mal, een zogenoemde metselboog.
 Bereken exact de lengte van AP .



Van de metselboog hierboven is de breedte 90 cm, de hoogte 18 cm en is de bovenrand een deel van een cirkel. Om een timmerman de metselboog te laten maken, is de straal van deze cirkel nodig. Bereken algebraïsch deze straal. Rond af op gehele cm.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan met de stelling van Pythagoras en met gelijkvormigheid lijnstukken berekenen.

► OPGAVE C5
THEORIE A

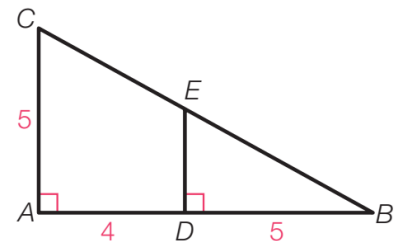
☐ Ik kan met gelijkvormigheid een lijnstuk berekenen door een lijnstuk x te stellen.

► OPGAVE C6
THEORIE B

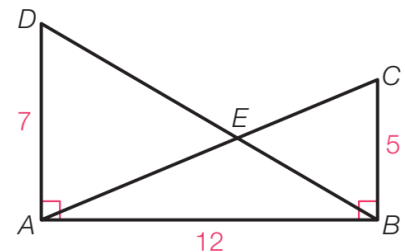
☐ Ik kan met de stelling van Pythagoras een lijnstuk berekenen door een lijnstuk x te stellen.

► OPGAVE C7
THEORIE C

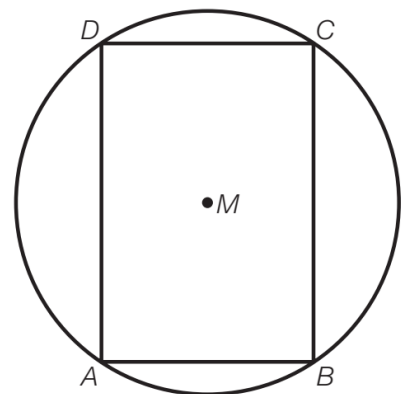
C5 Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken CE . Rond af op twee decimalen.



C6 Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken exact AE .



C7 In de figuur hiernaast is rechthoek $ABCD$ met $AD = 1\frac{1}{2}AB$ getekend. De omgeschreven cirkel van de rechthoek heeft straal $6\frac{1}{2}$. Bereken exact AB .



Antwoorden

C5 4,58

C6 $7\frac{7}{12}$

C7 $2\sqrt{13}$

3.5 Lengte, omtrek en oppervlakte

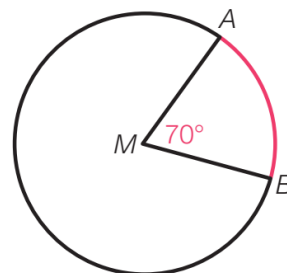
Kennis en vaardigheden

- Je kunt de formules voor de oppervlakte van een driehoek, parallellogram, trapezium en cirkel gebruiken.
- Je kunt de formules voor de omtrek van een cirkel gebruiken.

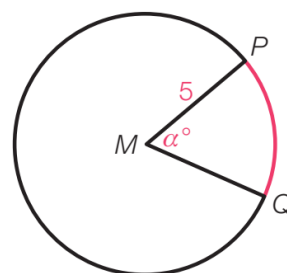
053



- a** Hiernaast is een cirkel met middelpunt M getekend. De punten A en B liggen op de cirkel en $\angle AMB = 70^\circ$. Welk deel van de cirkel is de rode boog AB ?



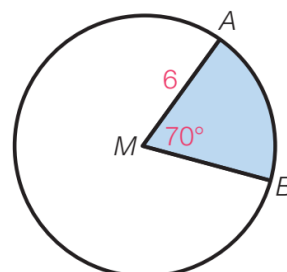
- b** Hiernaast is de cirkel met middelpunt M en straal 5 getekend. De punten P en Q liggen op de cirkel en $\angle PMQ = \alpha^\circ$. Druk de lengte van de rode boog PQ uit in α . Gebruik dat omtrek cirkel $= 2\pi r$.



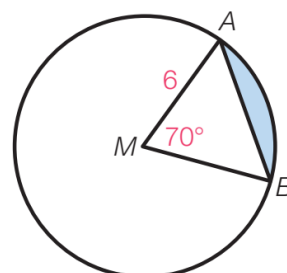
054



- a** Hiernaast is de cirkel met middelpunt M en straal 6 getekend. De punten A en B liggen op de cirkel en $\angle AMB = 70^\circ$. De *cirkelsector* AMB is met blauw aangegeven. Bereken exact de oppervlakte van deze sector. Gebruik dat oppervlakte cirkel $= \pi r^2$.

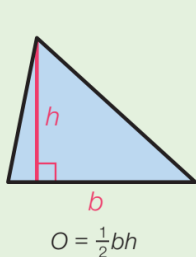
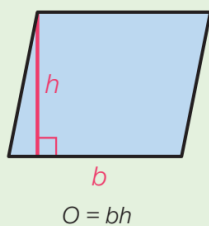
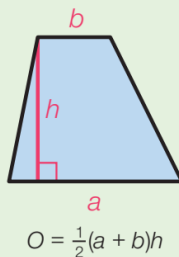
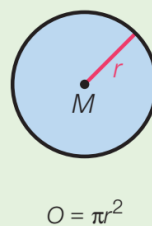


- b** Hiernaast is de cirkel met middelpunt M en straal 6 getekend. De punten A en B liggen op de cirkel en $\angle AMB = 70^\circ$. Een *cirkelsegment* is blauw gekleurd. Bereken de oppervlakte van dit segment. Rond af op twee decimalen.



Theorie A Omtrek en oppervlakte

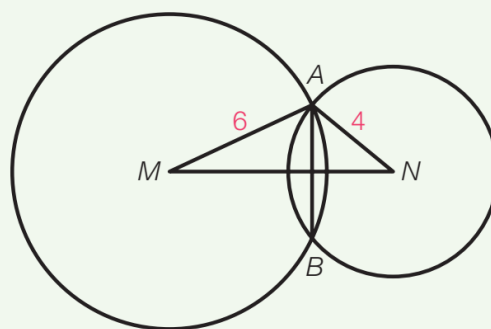
We herhalen de formules voor de oppervlakte van de basisfiguren driehoek, parallellogram, trapezium en cirkel.



omtrek cirkel = $2\pi r$

Voorbeeld

In de figuur hiernaast snijdt de cirkel met middelpunt M en straal 6 de cirkel met middelpunt N en straal 4 in de punten A en B . De lengte van het lijnstuk AB is 5. Bereken van de cirkel met middelpunt M de lengte van de kortste cirkelboog tussen A en B . Rond af op drie decimalen. Gebruik dat MN het lijnstuk AB in het midden loodrecht snijdt.



Uitwerking

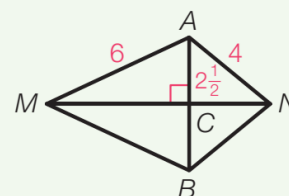
Zie de figuur hiernaast met C het midden van AB .

In $\triangle AMC$ is $\sin(\angle AMC) = \frac{2\frac{1}{2}}{6}$

$\angle AMC = 24,62\dots^\circ$

$\angle AMB = 2 \cdot 24,62\dots^\circ = 49,24\dots^\circ$

kortste cirkelboog AB is $\frac{49,24\dots}{360} \cdot 2\pi \cdot 6 \approx 5,157$



R55 Zie het voorbeeld.



Je kunt $\angle AMB$ ook berekenen met de cosinusregel in $\triangle ABM$. Doe dit.

56 Zie het voorbeeld.

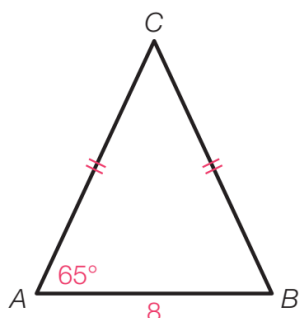
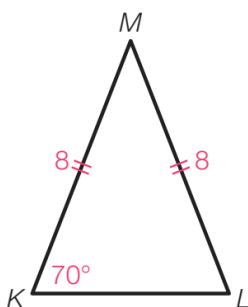
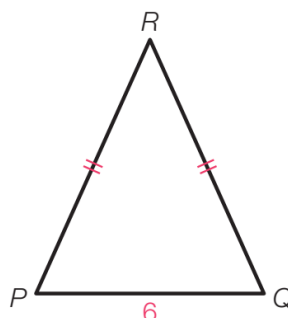


- Bereken van de cirkel met middelpunt N de lengte van de kortste cirkelboog tussen A en B . Rond af op drie decimalen.
- Bereken de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de kortste cirkelbogen AB . Rond af op twee decimalen.

57 Zie de driehoeken hieronder.



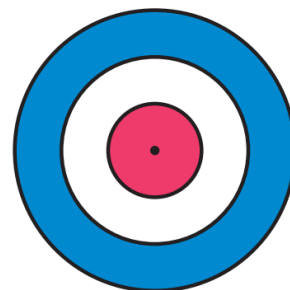
- a** Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$. Rond af op twee decimalen.
- b** Bereken de oppervlakte van $\triangle KLM$. Rond af op twee decimalen.
- c** De oppervlakte van $\triangle PQR$ is 20.
Bereken de hoeken van de driehoek. Rond af op één decimaal.



58 In de figuur hiernaast zie je drie concentrische cirkels. Van de witte ring en van de blauwe ring is de breedte gelijk aan de straal van de rode cirkel.



Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de blauwe ring als de oppervlakte van de rode cirkel?



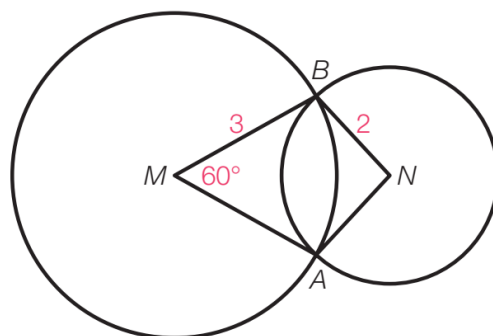
Concentrische cirkels zijn cirkels met hetzelfde middelpunt.

59 Gegeven zijn de cirkel met middelpunt M en straal 3 en de cirkel met middelpunt N en straal 2 in de figuur hiernaast. De cirkels snijden elkaar in de punten A en B waarbij $\angle AMB = 60^\circ$.



We bekijken de kortste cirkelbogen tussen A en B . De cirkelboog van de cirkel met middelpunt N is langer dan de cirkelboog van de cirkel met middelpunt M .

Bereken het verschil in lengte. Rond af op vier decimalen.



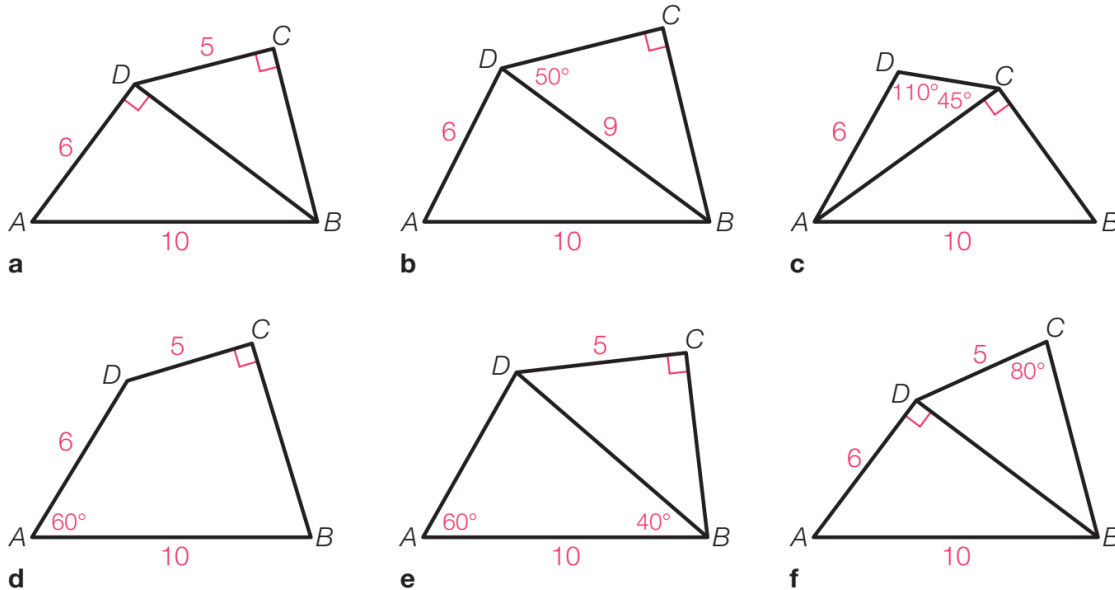
60 Van $\triangle ABC$ is $AB = 5$, $\angle A = 25^\circ$ en $\angle B = 125^\circ$.



Bereken de oppervlakte van de driehoek. Rond af op twee decimalen.

A61 Bereken in de figuren hieronder telkens de omtrek van $ABCD$.

□ ⊙ * Rond af op twee decimalen.



A62 Van parallellogram $ABCD$ is $AB = 10$. De lengte van diagonaal AC is 14 en de lengte van diagonaal BD is 9. Bereken de oppervlakte van $ABCD$. Rond af op één decimaal.

Kennis- en vaardighedencheck

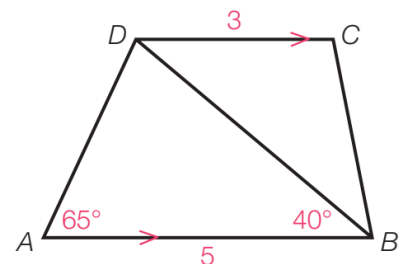
☐ Ik kan de formules voor de oppervlakte van een driehoek, parallellogram, trapezium en cirkel gebruiken.

► **OPGAVE C8**
THEORIE A

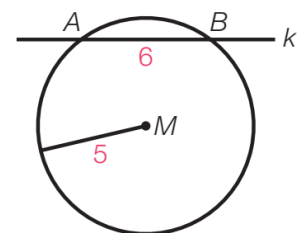
☐ Ik kan de formules voor de omtrek van een cirkel gebruiken.

► **OPGAVE C9**
THEORIE A

C8 In de figuur hiernaast is $ABCD$ een trapezium. Bereken de oppervlakte van het trapezium. Rond af op twee decimalen.



C9 De lijn k snijdt de cirkel met middelpunt M en straal 5 in de punten A en B waarbij $AB = 6$. Bereken de lengte van de kortste cirkelboog AB . Rond af op drie decimalen.



Antwoorden

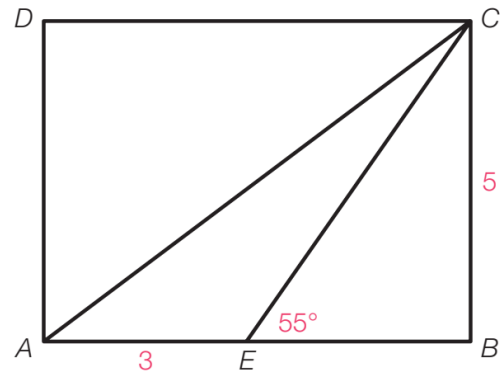
C8 12,06

C9 6,435

Kennis- en vaardighedentest

3.1 Goniometrische verhoudingen

- 1 In de figuur hiernaast is $ABCD$ een rechthoek. Bereken $\angle BAC$ en $\angle ACE$.

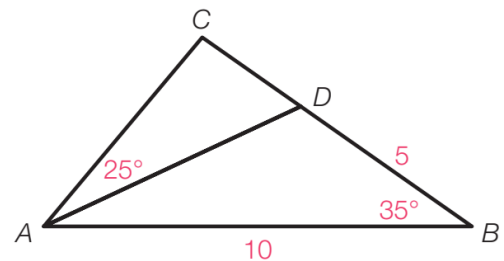


3.2 De sinusregel

- 2 Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 55^\circ$ en $BC = 6$. Bereken de omtrek van $\triangle ABC$. Rond af op twee decimalen.
- 3 Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 50^\circ$, $AB = 10$ en $BC = 9$. Er zijn twee driehoeken ABC mogelijk bij deze gegevens. Bereken voor beide driehoeken zijde AC . Rond af op één decimaal.

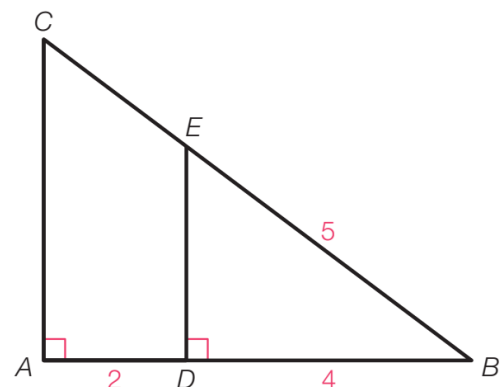
3.3 De cosinusregel

- 4 Van $\triangle PQR$ is $PQ = 4$, $PR = 5$ en $QR = 6$. Punt M is het midden van QR . Bereken PM . Rond af op twee decimalen.
- 5 Gegeven is de figuur hiernaast. Bereken $\angle C$.

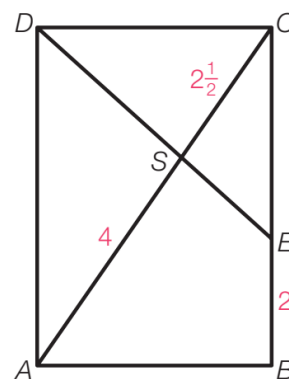


3.4 Vergelijkingen in de meetkunde

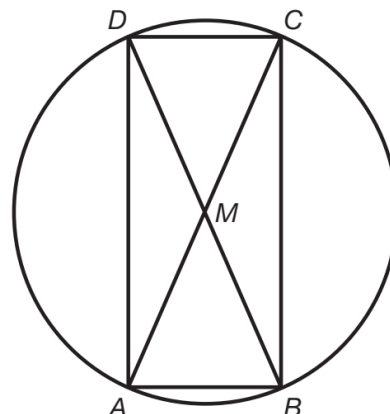
- 6 Gegeven is de figuur hiernaast. Bereken AC en CE .



- 7 In de figuur hiernaast is $ABCD$ een rechthoek. Bereken CE .

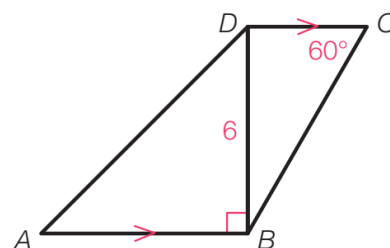


- 8 Hiernaast is rechthoek $ABCD$ met zijn omgeschreven cirkel getekend. Er geldt dat $AC = 2\frac{1}{2}AB$ en de oppervlakte van $ABCD$ is $\sqrt{21}$. Bereken exact de straal van de cirkel.

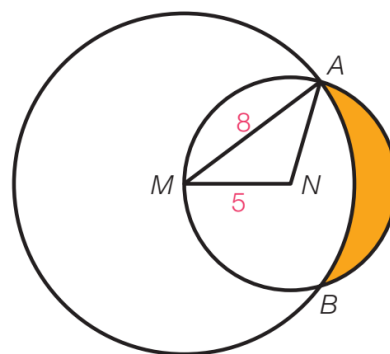


3.5 Lengte, omtrek en oppervlakte

- 9 De oppervlakte van trapezium $ABCD$ hiernaast is 30. Bereken de lengte van AB . Rond af op twee decimalen.

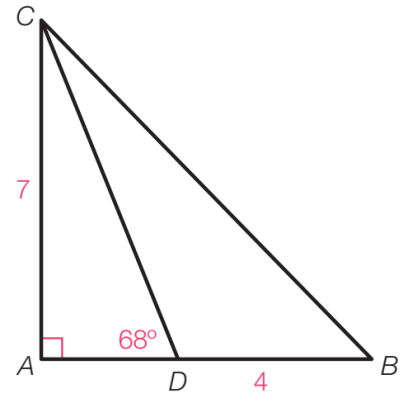


- 10 De cirkel met middelpunt M en straal 8 snijdt de cirkel met middelpunt N en straal 5 in de punten A en B . Hierbij ligt M op de cirkel met middelpunt N . Zie de figuur hiernaast. Bereken de omtrek van het gebied dat wordt ingesloten door de kortste cirkelbogen AB . Rond af op twee decimalen.

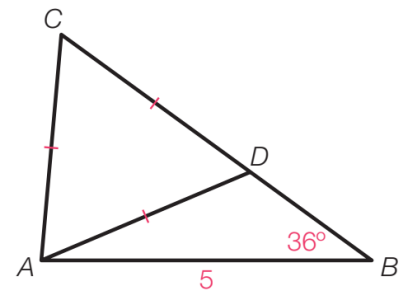


Gemengde opgaven

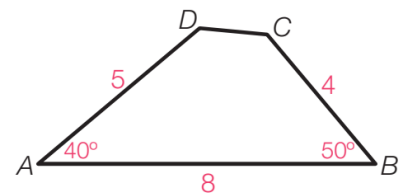
- 1** Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken $\angle BCD$.



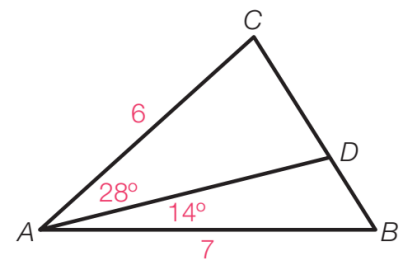
- 2** In de figuur hiernaast is $\triangle ACD$ gelijkzijdig.
Bereken AC en BD . Rond af op één decimaal.



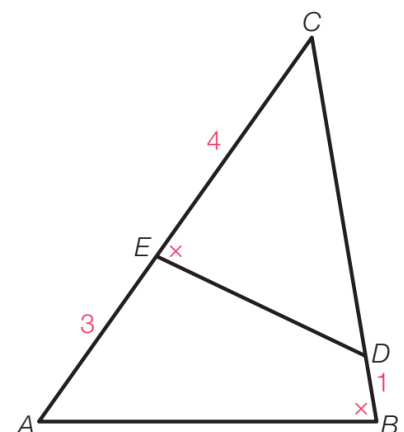
- 3** Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken AC en CD . Rond af op één decimaal.



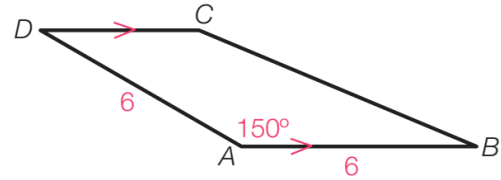
- 4** Zie de figuur hiernaast.
Uit de gegevens volgt dat $\angle C \approx 80^\circ$. Hierbij is afgerond op gehelen.
a Bereken $\angle C$, waarbij je afrondt op één decimaal.
b Bereken AD . Rond af op één decimaal.



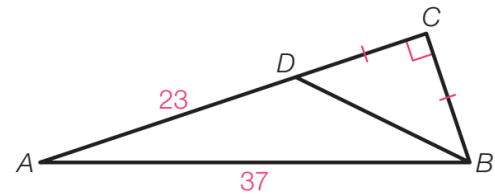
- 5** Gegeven is de figuur hiernaast met $\angle CED = \angle B$.
Bereken CD . Rond af op één decimaal.



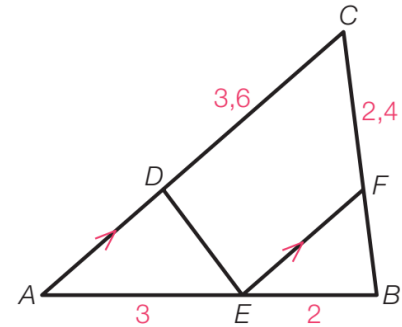
- 6** a Van $\triangle ABC$ is $AB = 9$, $\angle A = 27^\circ$ en $\angle B = 81^\circ$.
Bereken de omtrek van de driehoek. Rond af op één decimaal.
- b Van $\triangle ABC$ is $AB = 5$, $BC = 6$ en $AC = 7$.
Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$. Rond af op twee decimalen.
- c Van $\triangle DEF$ is $\angle D = 105^\circ$ en $EF = 2DE$.
Bereken $\angle F$.
- d Het trapezium $ABCD$ hiernaast heeft oppervlakte 15.
Bereken de lengte van diagonaal AC .
Rond af op één decimaal.



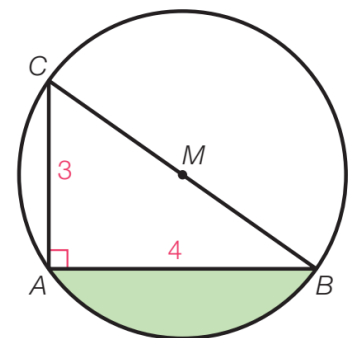
- 7** In de figuur hiernaast is $BC = CD$.
Bereken exact BD .



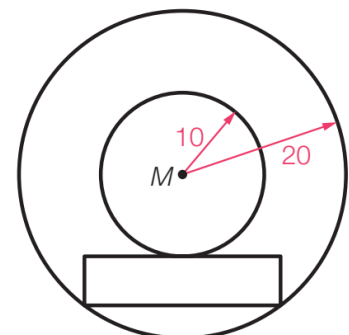
- 8** Gegeven is de figuur hiernaast met $AD = EF$ en $AC \parallel EF$.
Bereken de omtrek van vierhoek $BCDE$. Rond af op twee decimalen.



- 9** In de figuur hiernaast is M het middelpunt van de cirkel die door A , B en C gaat.
- a Bereken de omtrek van het groene segment. Rond af op één decimaal.
- b Bereken de oppervlakte van het groene segment. Rond af op twee decimalen.



- 10** Gegeven zijn de concentrische cirkels in de figuur hiernaast met middelpunt M en stralen van 10 en 20. In het gebied tussen de cirkels past precies een rechthoek waarvan de lengte 4 keer de breedte is. Hoeveel procent van het gebied tussen de cirkels neemt de rechthoek in beslag?







4

Werken met formules

De hoogte van een vuurpijl kan worden beschreven met een formule van de vorm $h = at^3 + bt^2$. Hierin is h de hoogte in meters en t de tijd in seconden.

Op $t = 2$ is de hoogte 22 meter en twee seconden later is de hoogte van de pijl 56 meter.

Welke hoogte bereikt de vuurpijl maximaal?

4.1 De formules $y = a(x - p)^2 + q$ en $y = a(x - d)(x - e)$

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met de formule $y = a(x - p)^2 + q$.
- Je kunt werken met de formule $y = a(x - d)(x - e)$.

V1 Wat is de formule van de beeldgrafiek bij een verschuiving van de grafiek van $y = 3x^2$ met

- a** 5 omhoog **b** 5 omlaag **c** 5 naar rechts **d** 5 naar links?

Kies uit

- A** $y = 3x^2 - 5$ **B** $y = 3(x + 5)^2$ **C** $y = 3x^2 + 5$ **D** $y = 3(x - 5)^2$

Voorkennis Verticaal en horizontaal verschuiven

Door de grafiek van $y = 0,4x^2$

- **4 omhoog** te schuiven, krijg je de grafiek van $y = 0,4x^2 + 4$
- **3 omlaag** te schuiven, krijg je de grafiek van $y = 0,4x^2 - 3$
- **2 naar rechts** te schuiven, krijg je de grafiek van $y = 0,4(x - 2)^2$
- **5 naar links** te schuiven, krijg je de grafiek van $y = 0,4(x + 5)^2$.

Voorbeeld

- a** De grafiek van $y = 3x^2 - 6$ wordt 4 naar links geschoven.
Stel de formule op van de beeldgrafiek.
- b** De grafiek van $y = -1,5x^2 + 4$ wordt 2 naar rechts en 6 omlaag geschoven.
Stel de formule op van de beeldgrafiek.

Uitwerking

a $y = 3x^2 - 6 \xrightarrow{4 \text{ naar links}} y = 3(x + 4)^2 - 6$

b $y = -1,5x^2 + 4 \xrightarrow{2 \text{ naar rechts, 6 omlaag}} y = -1,5(x - 2)^2 + 4 - 6$
Dus $y = -1,5(x - 2)^2 - 2$.

- V2** **a** De grafiek van $y = 0,25x^2 + 3$ wordt 5 naar links geschoven.
Stel de formule op van de beeldgrafiek.
- b** De grafiek van $y = -1,2x^2 - 4$ wordt 3 naar rechts en 5 omhoog geschoven.
Stel de formule op van de beeldgrafiek.

V3 De grafiek van $y = -1,2x^2 + 5$ wordt telkens verschoven. Stel de formule op van de beeldgrafiek die ontstaat na een verschuiving van

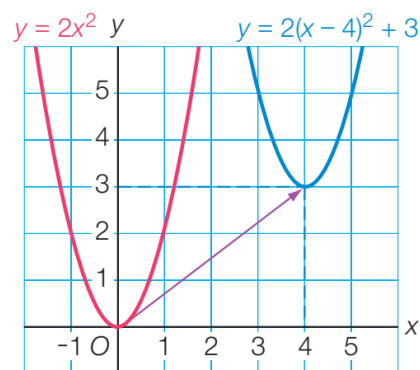
- a 4 omhoog
- b 3 naar rechts
- c 2 naar links en 3 omlaag
- d 1 naar rechts en 5 omlaag.

- V4**
- a Hoe moet je de grafiek van $y = 2x^2$ verschuiven om de grafiek van $y = 2(x - 3)^2 + 4$ te krijgen?
 - b Hoe moet je de grafiek van $y = -x^2 + 1$ verschuiven om de grafiek van $y = -(x + 2)^2$ te krijgen?
 - c Hoe moet je de grafiek van $y = -0,7(x - 4)^2 + 5$ verschuiven om de grafiek van $y = -0,7(x + 1)^2 - 3$ te krijgen?

O1 De top van de parabool $y = 2x^2$ is $O(0, 0)$.

□ ⊗ * Door deze parabool 4 naar rechts en 3 omhoog te schuiven, krijg je de parabool $y = 2(x - 4)^2 + 3$. Zie de figuur hiernaast.

- a Wat is de top van deze parabool?
- b Schrijf de coördinaten op van de top van de parabool $y = 4(x + 5)^2 - 3$.



O2 Een parabool heeft top $(3, 2)$ en gaat door het punt $(1, -4)$.

□ ⊗ * Welke formule hoort bij deze parabool?

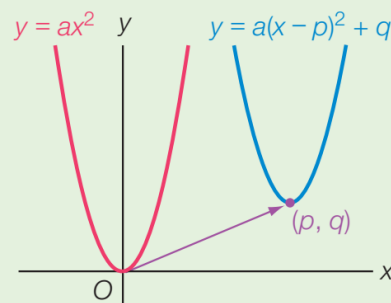
- A $y = -1\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$
- B $y = 1\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$
- C $y = -1\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$
- D $y = 1\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$

Theorie A De formule $y = a(x - p)^2 + q$

De top van de parabool $y = ax^2$ is het punt $(0, 0)$. Verschuif je deze parabool p naar rechts en q omhoog, dan krijg je de parabool $y = a(x - p)^2 + q$ met als top het punt (p, q) .

De top van de parabool $y = a(x - p)^2 + q$ is het punt (p, q) .

Dit gebruik je om de formule op te stellen van een parabool waarvan de coördinaten van de top bekend zijn.



Zo stel je van de parabool met top (4, 5) die door het punt (1, 23) gaat als volgt een formule op.

De top is (4, 5), dus $y = a(x - 4)^2 + 5$.

Door (1, 23), dus $a(1 - 4)^2 + 5 = 23$ ← $x = 1$ en $y = 23$ invullen in de formule.

$$a(-3)^2 + 5 = 23$$

$$9a + 5 = 23$$

$$9a = 18$$

$$a = 2$$

Dus de formule is $y = 2(x - 4)^2 + 5$.

De formule $y = 2(x - 4)^2 + 5$ is te schrijven in de vorm $y = ax^2 + bx + c$ door de haakjes weg te werken.

Je krijgt $y = 2(x - 4)^2 + 5$

$$= 2(x^2 - 8x + 16) + 5$$

$$= 2x^2 - 16x + 32 + 5$$

$$= 2x^2 - 16x + 37$$

Dus $y = 2x^2 - 16x + 37$.

Voorbeeld

Stel een formule op van de parabool hiernaast.

Aanpak

Lees de coördinaten van de top af. Hiermee krijg je p en q bij de formule $y = a(x - p)^2 + q$. Lees daarna de coördinaten van nog een punt op de parabool af en bereken a .

Uitwerking

Top (2, -5), dus $y = a(x - 2)^2 - 5$.

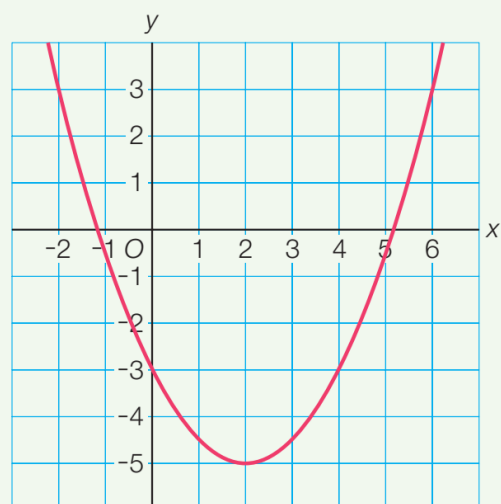
Door (0, -3), dus $a(0 - 2)^2 - 5 = -3$

$$4a - 5 = -3$$

$$4a = 2$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Dus $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 5$.



R3 Zie het voorbeeld.



a Voor de berekening van a kun je ook een ander punt dan (-0, 3) gebruiken.

Bereken a met het punt (4, -3).

b Wat gaat er mis als je voor de berekening van a het punt (2, -5) gebruikt?

4 Een parabool heeft top (2, 6) en gaat door het punt (4, 4).



a Stel de formule op in de vorm $y = a(x - p)^2 + q$.

b Schrijf de formule in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

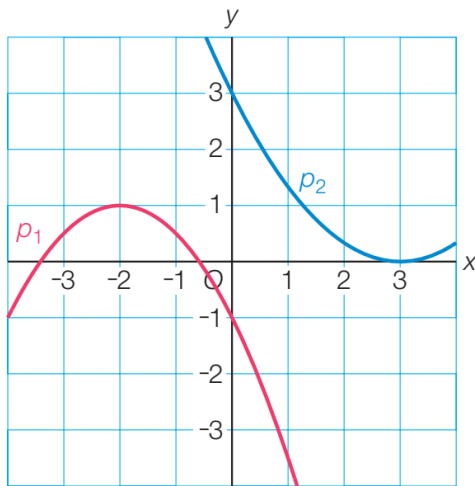
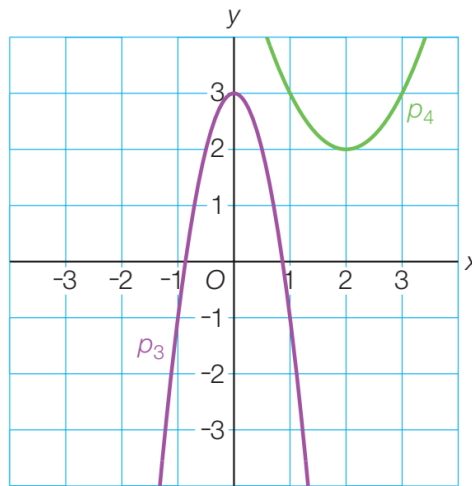
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

5 Stel van de parabolen p_1 en p_2 hieronder de formule op in



de vorm $y = ax^2 + bx + c$.



6 Stel van de parabolen p_3 en p_4 hierboven de formule op in de



vorm $y = ax^2 + bx + c$.

A7 Een parabool heeft top (-3, 4) en snijdt de y -as in het punt (0, -5).



Stel de formule op van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

A8 Onderzoek of het punt (10, -17) op de parabool ligt die door de punten (0, 3), $(2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$ en (5, 3) gaat.

9 Los algebraïsch op.



a $(x + 3)^2 = 16$

c $3(x + 5)^2 = 75$

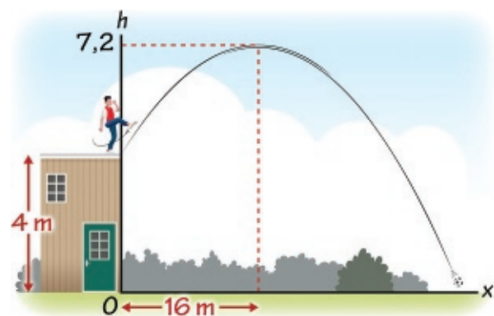
b $(2x - 1)^2 = 9$

d $0,15(x - 2)^2 - 5,4 = 0$

A10 Xavi trapt een bal van een 4 meter hoog schuurtje. De bal volgt de baan van een parabool en bereikt een maximale hoogte van 7,2 meter op een afstand van 16 meter van het schuurtje. Zie de figuur hiernaast.



Bereken algebraïsch hoeveel meter van het schuurtje de bal op de grond komt.



11 Van de parabool $y = ax^2 + bx$ is de top het punt (10, 6).



Ga uit van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$.

a Geef p en q .

b Licht toe dat uit de vorm $y = ax^2 + bx$ volgt dat de parabool door de oorsprong gaat en gebruik dit om a te berekenen.

c Bereken b .

- A12** Een vuurpijl wordt vanaf de grond weggeschoten. Na 3,6 seconden wordt de maximale hoogte van 64,8 meter bereikt. De hoogte van de vuurpijl is te beschrijven met een formule van de vorm $h = at^2 + bt$. Hierin is h de hoogte in meters en t de tijd in seconden. Bereken a en b .

- A13** Hakim trapt een bal weg. De baan van de bal is een parabool. Zie de figuur hieronder. De bal bereikt een hoogte van 9 meter en komt 30 meter verder weer op de grond terecht. De baan van de bal kan worden beschreven met een formule van de vorm $h = ax^2 + bx$. Hierin zijn x en h in meters. Bereken a en b .



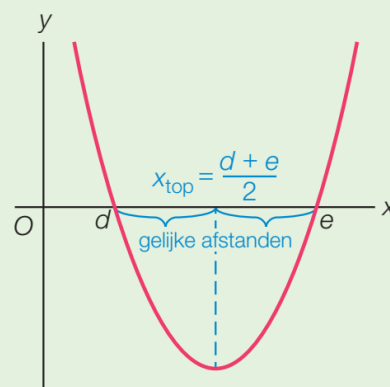
- O14** Gegeven is de parabool $y = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 4)$. Uit deze formule kun je de snijpunten van de parabool met de x -as aflezen.
- Licht dit toe en geef de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as.
 - Uit de x -coördinaten van de snijpunten met de x -as volgt de x -coördinaat van de top van de parabool. Licht dit toe en bereken x_{top} .

Theorie B De formule $y = a(x - d)(x - e)$

De formule van de parabool $y = -2(x + 3)(x - 5)$ is geschreven in de vorm $y = a(x - d)(x - e)$. Bij deze vorm zijn de coördinaten van de snijpunten met de x -as direct af te lezen.

Bij $y = a(x - d)(x - e)$ zijn de snijpunten met de x -as $(d, 0)$ en $(e, 0)$. Hieruit volgt dat $x_{\text{top}} = \frac{d + e}{2}$.

De parabool $y = a(x - d)(x - e)$ snijdt de x -as in de punten $(d, 0)$ en $(e, 0)$. Verder is $x_{\text{top}} = \frac{d + e}{2}$.



Voorbeeld

Een parabool snijdt de x -as in de punten $(-2, 0)$ en $(4, 0)$ en gaat door het punt $(6, 12)$.

Bereken algebraïsch de coördinaten van de top en van het snijpunt met de y -as.

Uitwerking

Door $(-2, 0)$ en $(4, 0)$, dus $y = a(x + 2)(x - 4)$.

Door $(6, 12)$, dus $a(6 + 2)(6 - 4) = 12$

$$a \cdot 8 \cdot 2 = 12$$

$$16a = 12$$

$$a = \frac{3}{4}$$

Dus $y = \frac{3}{4}(x + 2)(x - 4)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \text{ en } y_{\text{top}} = \frac{3}{4}(1 + 2)(1 - 4) = -6\frac{3}{4}$$

Dus top $(1, -6\frac{3}{4})$.

$$x = 0 \text{ geeft } y = \frac{3}{4}(0 + 2)(0 - 4) = -6$$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, -6)$.

- 15** Bereken algebraïsch van de volgende parabolen de coördinaten van de snijpunten met de assen en de coördinaten van de top.

a $y = 2(x + 4)(x - 6)$

b $y = -\frac{1}{2}(x - 1)(x - 5)$

c $y = -\frac{1}{4}x(x - 8)$

d $y = \frac{1}{50}(x + 2)(x + 10)$

- 16** Een parabool gaat door de punten $(-4, 0)$, $(8, 0)$ en $(6, -5)$.

a Bereken algebraïsch de coördinaten van de top en van het snijpunt met de y -as.

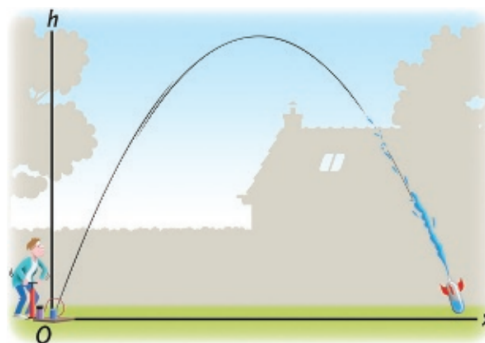
b Schrijf de formule van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

- 17** Boyan lanceert een zelfgemaakte waterraket.

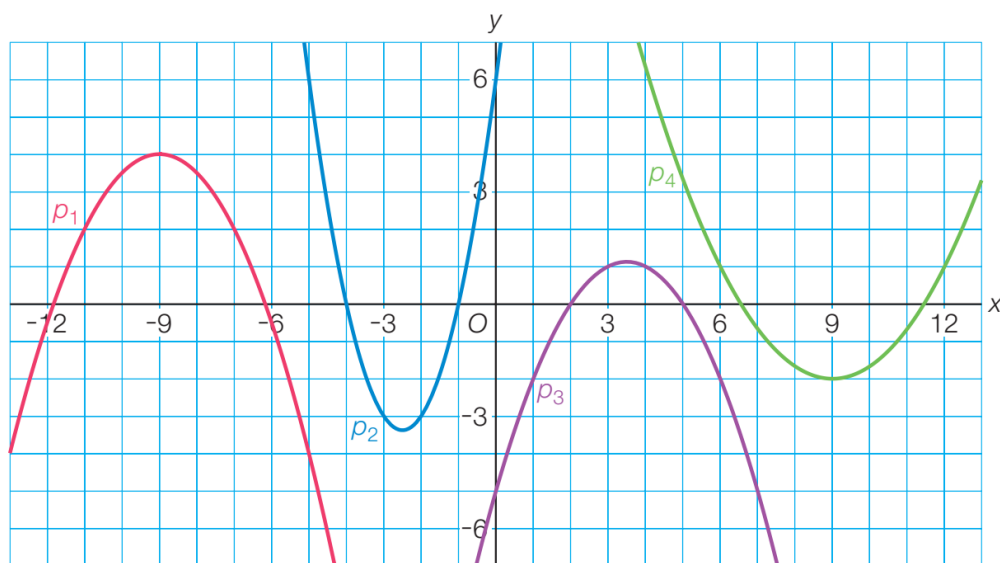
a Zie de figuur hiernaast. Bij de baan hoort de formule $h = -0,02x(x - 50)$ met x en h in meters.

a Hoe hoog komt de waterraket?

b Schrijf de formule van h in de vorm $h = ax^2 + bx + c$.



- A18** Stel van de parabolen p_1, p_2, p_3 en p_4 hieronder de formule op in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.



- A19** Gegeven is de parabool $y = 2(x - 2)^2 - 32$.
- a** Schrijf de formule van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.
- b** Schrijf de formule van de parabool in de vorm $y = a(x - d)(x - e)$.
- c** Hierboven staan drie vormen waarin de formule van de parabool is geschreven.
Geef van elk van de drie vormen een voordeel.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met de formule $y = a(x - p)^2 + q$.

☐ Ik kan werken met de formule $y = a(x - d)(x - e)$.

► OPGAVE C1
THEORIE A

► OPGAVE C2
THEORIE B

- C1** **a** Een parabool heeft top $(-2, 5)$ en gaat door het punt $(2, 1)$.
Stel de formule op van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.
- b** Jan slaat een golfbal weg. De golfbal komt 25,6 meter hoog. Deze hoogte wordt na 3,2 seconden bereikt. De hoogte van de bal kan worden beschreven met een formule van de vorm $h = at^2 + bt$.
Hierin is h de hoogte in meters en t de tijd in seconden.
Bereken a en b . Rond af op één decimaal.

- C2** Een parabool gaat door de punten $(-3, 0)$, $(6, 0)$ en $(1, 5)$.
- a** Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool en van het snijpunt van de parabool met de y -as.
- b** Schrijf de formule van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

Antwoorden

C1 **a** $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 4$
b $a = -2,5$ en $b = 16$

C2 **a** $(1\frac{1}{2}, 5\frac{1}{16})$ en $(0, 4\frac{1}{2})$
b $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2}$

4.2 De formule $y = ax^2 + bx + c$

Kennis en vaardigheden

- Je kent de formule voor de x -coördinaat van de top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$.
- Je kunt werken met de formule $y = ax^2 + bx + c$.

O20 Gegeven zijn de parabolen $p_1: y = 2x^2 - 12x$ en $p_2: y = 2x^2 - 12x + 13$.

□ ⊗ * De parabool p_1 snijdt de x -as in de punten $(0, 0)$ en $(6, 0)$.

- Licht dit toe met een berekening.
- Licht toe dat x_{top} van p_1 gelijk is aan 3 en bereken van p_1 de y -coördinaat van de top.
- Beredeneer dat p_1 en p_2 dezelfde x_{top} hebben en bereken van p_2 de y -coördinaat van de top.

O21 Gegeven zijn de parabolen $p_1: y = ax^2 + bx$ en $p_2: y = ax^2 + bx + c$.

□ ⊗ * De parabool p_1 snijdt de x -as in de punten $(0, 0)$ en $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

- Licht dit toe met een berekening.

Uit het bovenstaande volgt dat x_{top} van p_1 gelijk is aan $-\frac{b}{2a}$.

- Licht dit toe.
- Beredeneer dat p_1 en p_2 dezelfde x_{top} hebben, dus dat ook voor p_2 geldt $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$.

Theorie A De top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$

In opgave 21 heb je aangetoond dat voor de top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ geldt $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$.

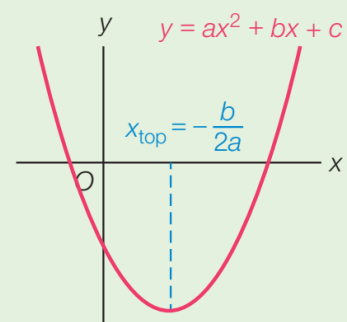
Voor de top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ geldt

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}.$$

Bij de parabool $y = 3x^2 - 12x + 7$ is $a = 3$ en $b = -12$, dus

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 3} = 2 \text{ en } y_{\text{top}} = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 7 = -5.$$

Dus de top is het punt $(2, -5)$.



Voorbeeld

De parabool $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + 5$ gaat door het punt (6, 11).
Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.

Uitwerking

$$\begin{aligned}\text{Door (6, 11), dus } -\frac{1}{2} \cdot 6^2 + b \cdot 6 + 5 &= 11 \\ -18 + 6b + 5 &= 11 \\ 6b &= 24 \\ b &= 4\end{aligned}$$

$$\text{Dus } y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 5.$$

$$x_{\text{top}} = -\frac{4}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = 4 \text{ geeft } y_{\text{top}} = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 5 = 13$$

Dus top (4, 13).

22 De parabool $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + c$ snijdt de x -as in het punt (2, 0).

- a** Bereken c .
b Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.
c Bereken algebraïsch de coördinaten van het andere snijpunt van de parabool met de x -as.

23 De parabool $y = ax^2 + 11x - 12$ gaat door het punt (1, -3).

- a** Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.
b Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as.

24 De parabool $y = ax^2 + \frac{1}{2}x + 2$ gaat door het punt (6, -4).

- a** Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.
b Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as.

25 **a** Een parabool gaat door de punten (2, 0), (3, 1) en (6, 0).

a Stel de formule op van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

b Een parabool heeft top (2, $2\frac{1}{2}$) en gaat door het punt (4, $-7\frac{1}{2}$).

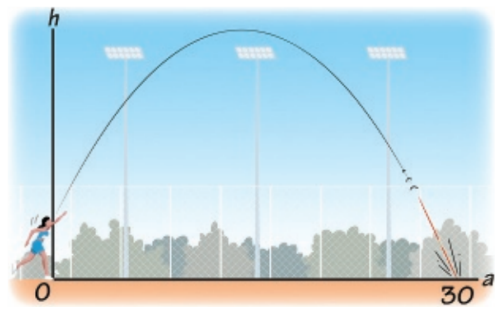
Stel de formule op van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

c De parabool $y = ax^2 - 2x + 6$ gaat door het punt (-5, 21).

Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.

A26 Lisa doet aan speerwerpen. Bij een van haar worpen hoort een formule van de vorm $h = -0,04a^2 + pa + 1,5$. Hierin zijn a en h in meters. De speer komt 30 meter ver. Zie de figuur hiernaast.

Bereken algebraïsch hoe hoog de speer komt.
Rond af op gehele cm.



A27 a Van de parabool $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + c$ is $y_{\text{top}} = -9$.

Bereken c .

b Van de parabool $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx - 8$ is $y_{\text{top}} = 17$.

Bereken x_{top} .

A28 a Van de parabool $y = -\frac{1}{5}x^2 + bx - 8$ is $y_{\text{top}} = 12$.

Bereken x_{top} .

b Er zijn twee parabolen met de formule $y = -x^2 + px - 2p + 3$ waarvan de top op de x -as ligt.

Bereken algebraïsch van deze parabolen de coördinaten van de top en van het snijpunt met de y -as.

29 Los op.

a
$$\begin{cases} 7x - 3y = -3 \\ -3x + 3y = -9 \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} 3x + 2y = -13 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ x + 4y = -12 \end{cases}$$

d
$$\begin{cases} y = -5x + 12 \\ 3x + 7y = 52 \end{cases}$$

30 De punten $(-1, 8)$ en $(3, 4)$ liggen op de parabool $y = ax^2 + bx + 4$.

Uit 'het punt $(-1, 8)$ ligt op de parabool' volgt $a - b + 4 = 8$ oftewel $a - b = 4$.

a Licht dit toe.

b Uit 'het punt $(3, 4)$ ligt op de parabool' volgt $3a + b = 0$.
Licht dit toe.

c Los het stelsel $\begin{cases} a - b = 4 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$ op en bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.

A31 a De parabool $y = ax^2 + 4x + c$ gaat door de punten $(2, 11)$ en $(8, 5)$.

Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.

b De parabool $y = ax^2 - 1\frac{1}{2}x + c$ gaat door de punten $(-2, -3)$ en $(5, 7\frac{1}{2})$.

Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as.

A32

- a** De parabool $y = ax^2 + bx + 1$ gaat door de punten $(-1, 9)$ en $(5, 21)$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.
- b** De top van de parabool $y = ax^2 + bx + 3\frac{1}{2}$ is $(3, 8)$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as.
- c** De parabool $y = ax^2 + bx - 3$ gaat door de punten $(-1, 0)$ en $(6, 0)$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik ken de formule voor de x -coördinaat van de top van de parabool
 $y = ax^2 + bx + c$.

► **OPGAVE C3**
THEORIE A

☐ Ik kan werken met de formule $y = ax^2 + bx + c$.

► **OPGAVE C4**
THEORIE A

C3 Bij welke van de volgende formules kun je met de formule $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$

de x -coördinaat van een top berekenen?

A $y = -0,01x^2 + 20x + 50$

B $y = 2x^3 + 6x - 3$

C $y = -x(x^2 + 4x - 5)$

D $y = (3 + \sqrt{2})^2 \cdot x + 2x - 1$

E $y = 50 - (x - 1)^2$

- C4** **a** De parabool $y = ax^2 + 2x + 1$ gaat door het punt $(2, 4)$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.
- b** De parabool $y = ax^2 - 5x + c$ gaat door de punten $(-1, 10)$ en $(7, 30)$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.

Antwoorden

C3 A en E

C4 **a** $(4, 5)$
b $(2, -1\frac{1}{4})$

4.3 Machtsformules

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met de formule $y = a(x - p)^n + q$.
- Je kunt werken met transformaties van de grafiek van een machtsfunctie.

O33 Gegeven zijn de formules $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^6$ en $y = x^9$.

- ⊗ ***
- Plot de grafieken van deze formules. Neem x tussen $-1,5$ en $1,5$ en y tussen -2 en 2 .
 - Er zijn twee punten die op elk van de grafieken liggen. Schrijf de coördinaten van die punten op.
 - Van welke van de grafieken ligt geen enkel punt onder de x -as?

O34 De grafiek van $y = x^3$ wordt 2 naar links en 5 omhoog geschoven.

□ ⊗ * Wat is de formule van de beeldgrafiek die zo ontstaat?

- A** $y = (x + 2)^3 + 5$ **C** $y = (x - 2)^3 + 5$
B $y = (x + 2)^3 - 5$ **D** $y = (x - 2)^3 - 5$

Theorie A De grafiek van een machtsfunctie

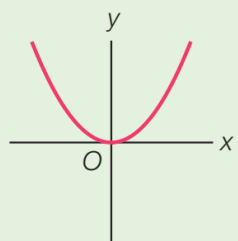
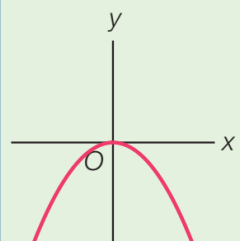
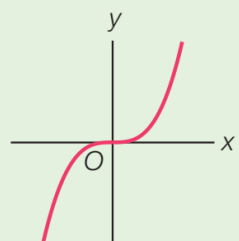
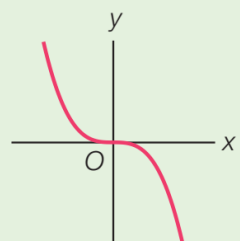
Een formule van de vorm $y = ax^n$ is een **machtsformule**.

De bijbehorende functies $f(x) = ax^n$ zijn **machtsfuncties**.

In het schema hieronder zie je hoe de grafiek van $f(x) = ax^n$ eruitziet voor gehele waarden van n met $n > 1$.

Bij even waarden van n is de grafiek lijnsymmetrisch met de y -as als symmetrieas. Bij oneven waarden van n is de grafiek puntsymmetrisch met de oorsprong als **punt van symmetrie**.

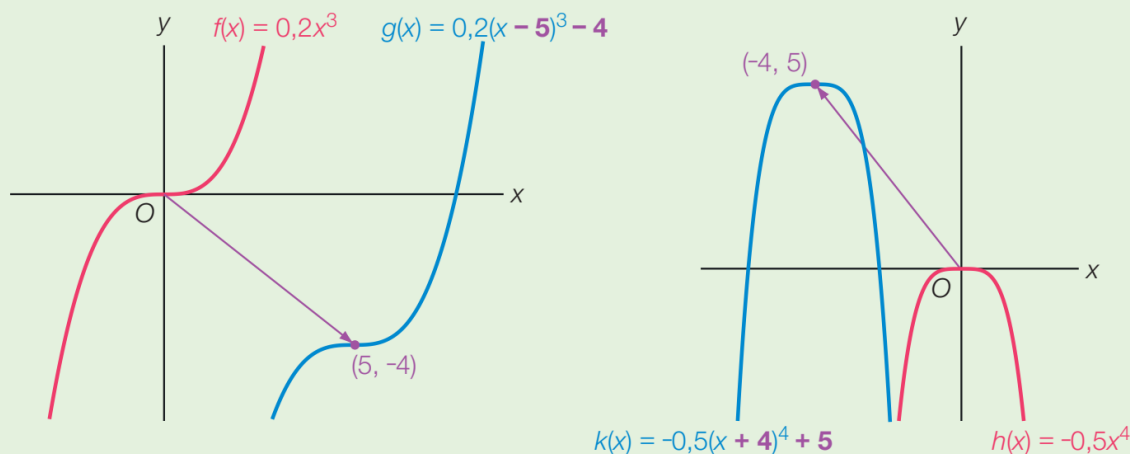
De grafiek van de functie $f(x) = ax^n$

n even		n oneven	
$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
			

De functies $f(x) = ax^n$ zijn **standaardfuncties** en de bijbehorende grafieken zijn **standaardgrafieken**. Je mag standaardgrafieken zonder toelichting tekenen en schetsen.

Een grafiek kun je verschuiven. Zo ontstaat een beeldgrafiek. Een ander woord voor verschuiving is **translatie**. In plaats van ‘de verschuiving 1 naar links en 4 omlaag’ zeggen we ‘de translatie $(-1, -4)$ ’. Bij de translatie $(-1, -4)$ vervang je in het functievoorschrift x door $x + 1$ en trek je 4 af van de functiewaarde.

De grafiek van $g(x) = 0,2(x - 5)^3 - 4$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = 0,2x^3$ door de translatie $(5, -4)$. Zie de figuur hier linksonder. Bij de grafiek van g zijn de coördinaten van het punt van symmetrie genoteerd.



De grafiek van $k(x) = -0,5(x + 4)^4 + 5$ ontstaat uit de grafiek van $h(x) = -0,5x^4$ door de translatie $(-4, 5)$. Zie de figuur hier rechtsboven. Bij de grafiek van k zijn de coördinaten van de top genoteerd.

Algemeen geldt: bij de translatie (p, q) vervang je in de formule x door $x - p$ en tel je q bij de functiewaarde op.

grafiek		beeldgrafiek
$y = ax^n$	$\xrightarrow{\text{translatie } (p, q)}$	$y = a(x - p)^n + q$

Dus

$$y = 5x^3$$

↓ translatie (4, 7)

$$y = 5(x - 4)^3 + 7$$

$$y = -6x^4$$

↓ translatie (-3, 8)

$$y = -6(x + 3)^4 + 8$$

$$y = -x^6$$

↓ translatie (-5, 0)

$$y = -(x + 5)^6$$

Bij de translatie **(8, 6)** van de grafiek van $y = 3(x + 7)^5 - 2$ krijg je $y = 3(x - \mathbf{8} + 7)^5 - 2 + \mathbf{6}$, dus $y = 3(x - 1)^5 + 4$.

Voorbeeld

Schets van de volgende formules de grafiek.

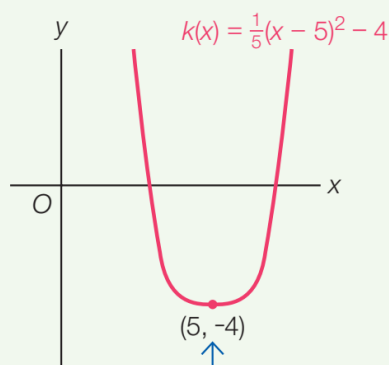
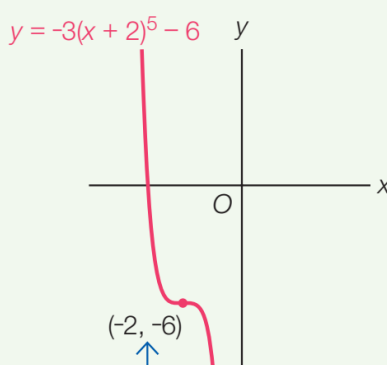
a $y = \frac{1}{5}(x - 5)^4 - 4$

b $y = -3(x + 2)^5 - 6$

Uitwerking

a $y = \frac{1}{5}x^4$
↓ translatie (5, -4)
 $y = \frac{1}{5}(x - 5)^4 - 4$

b $y = -3x^5$
↓ translatie (-2, -6)
 $y = -3(x + 2)^5 - 6$



Vermeld in de schets de coördinaten van de top of van het punt van symmetrie.

35 Door welke translatie ontstaat de grafiek van de formule uit een standaardgrafiek?

a $y = \frac{1}{2}(x + 2)^4 + 18$

b $y = 6(x - 8)^3 + 12$

c $y = -(x - 3)^8 - 10$

36 Schets van de volgende formules de grafiek.

a $y = -\frac{1}{3}(x - 2)^4$

b $y = 12 - (x + 3)^5$

c $y = 3(x^4 - 2) + 5$

37 **a** Op de grafiek van $y = 3x^7 - 5$ wordt de translatie (2, 9) toegepast. Stel de formule op van de beeldgrafiek.

b Op de grafiek van $y = 5(x - 2)^4 - 2$ wordt de translatie (-5, 4) toegepast. Stel de formule op van de beeldgrafiek.

38 **a** De grafiek van $g(x) = -0,5(x + 2)^4 - 7$ is door een translatie ontstaan uit de grafiek van $f(x) = -0,5(x + 2)^4 + 4$. Geef deze translatie.

b De grafiek van $k(x) = 5(x - 4)^9 + 3$ is door een translatie ontstaan uit de grafiek van $h(x) = 5(x + 3)^9 + 9$. Geef deze translatie.

A39 Gegeven zijn de functies $f(x) = 0,2(x + 6)^3 + 6$, $g(x) = 0,2(x + 2)^3 + 4$ en $h(x) = 0,2(x + p)^3 + 1$. De punten van symmetrie van de grafieken van deze functies liggen op één lijn. Bereken p .

A40 Gegeven zijn de functies $f(x) = 0,5x^3$ en $g(x) = 0,5(x - 3)^3 + 5$. De helling van de grafiek van f in het punt A met $x_A = 6$ is 54.

- Toon dit aan.
- Licht toe dat hieruit volgt dat de helling van de grafiek van g in het punt B met $x_B = 9$ ook gelijk is aan 54.
- Er zijn twee punten op de grafiek van g waarin de helling gelijk is aan 6. Bereken de coördinaten van deze punten.

O41 Gegeven zijn de functies $f(x) = 0,5x^3$ en $g(x) = 1,5x^3$.

- Vul de tabel hiernaast verder in.
- Teken de grafieken van f en g in één figuur.
- Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van f ?

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					
$g(x)$					

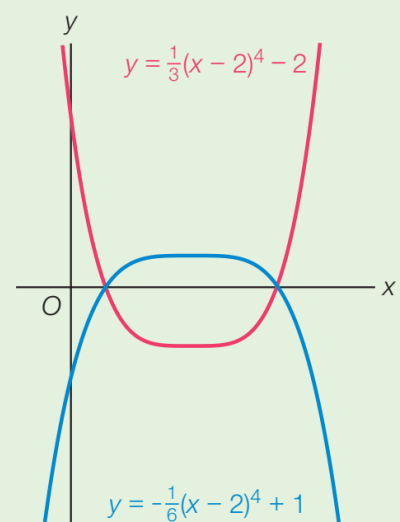
Theorie B Vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as

In opgave 41 heb je de grafieken getekend van de functies $f(x) = 0,5x^3$ en $g(x) = 1,5x^3$. Je hebt daarbij gezien dat $g(-2) = 3 \cdot f(-2)$, $g(-1) = 3 \cdot f(-1)$, enzovoort. Vermenigvuldig je van een punt van de grafiek van f de y -coördinaat met 3, dan krijg je dus een punt van de grafiek van g . Door de grafiek van $f(x) = 0,5x^3$ met 3 te **vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as**, ontstaat de grafiek van $g(x) = 1,5x^3$.

Bij de vermenigvuldiging met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x -as heeft de grafiek van $y = \frac{1}{3}(x - 2)^4 - 2$ als beeld de grafiek van $y = -\frac{1}{2}(\frac{1}{3}(x - 2)^4 - 2)$, dus van $y = -\frac{1}{6}(x - 2)^4 + 1$. Zie de figuur hiernaast.

Bij de vermenigvuldiging met -2 ten opzichte van de x -as heeft de grafiek van $y = -4x^3 + 1$ als beeld de grafiek van $y = -2(-4x^3 + 1)$, dus van $y = 8x^3 - 2$.

Notatie: $y = -4x^3 + 1$
 $\downarrow \times -2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}$
 $y = 8x^3 - 2$



grafiek	beeldgrafiek
$y = x^n$	$\xrightarrow{\times a \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = ax^n$

Translaties en vermenigvuldigingen zijn voorbeelden van **transformaties**. De volgorde waarin je transformaties toepast, kan van belang zijn. Kijk maar.

$$\begin{aligned}
 y &= x^3 \\
 &\downarrow \times 4 \text{ t.o.v. de } x\text{-as} \\
 y &= 4x^3 \\
 &\downarrow \text{translatie } (2, 5) \\
 y &= 4(x-2)^3 + 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= x^3 \\
 &\downarrow \text{translatie } (2, 5) \\
 y &= (x-2)^3 + 5 \\
 &\downarrow \times 4 \text{ t.o.v. de } x\text{-as} \\
 y &= 4((x-2)^3 + 5) = 4(x-2)^3 + 20
 \end{aligned}$$

Voorbeeld

Op de grafiek van $y = 0,4x^4$ wordt eerst de translatie $(2, -3)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -2 ten opzichte van de x -as.

- Stel de formule op van de beeldgrafiek.
- Geef de coördinaten van de top van de beeldgrafiek.

Uitwerking

$$\begin{aligned}
 \text{a } y &= 0,4x^6 \\
 &\downarrow \text{translatie } (2, -3) \\
 y &= 0,4(x-2)^6 - 3 \\
 &\downarrow \times -2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as} \\
 y &= -2(0,4(x-2)^6 - 3) = -0,8(x-2)^6 + 6
 \end{aligned}$$

- De top is het punt $(2, 6)$.

42 Op de grafiek van $y = -2x^3$ wordt eerst de translatie $(-3, -5)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -3 ten opzichte van de x -as.

- Stel de formule op van de beeldgrafiek.
- Geef de coördinaten van het punt van symmetrie van de beeldgrafiek.

43 **a** Op de grafiek van $y = 0,3x^4$ wordt eerst de translatie $(-5, 6)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -4 ten opzichte van de x -as. Stel van de beeldgrafiek de formule op en geef de coördinaten van de top.

- Op de grafiek van $y = 0,3x^4$ wordt eerst de vermenigvuldiging met -4 ten opzichte van de x -as toegepast en vervolgens de translatie $(-5, 6)$. Stel van de beeldgrafiek de formule op en geef de coördinaten van de top.

A44

- a** Op de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^5 + 7$ wordt eerst de translatie $(1, 2)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -1 ten opzichte van de x -as.

Bereken de coördinaten van het punt van symmetrie van de beeldgrafiek.

- b** De grafiek van $g(x) = -2\frac{1}{2}(x+4)^6 - 1$ wordt eerst vermenigvuldigd met -4 ten opzichte van de x -as en vervolgens wordt de translatie $(-5, -4)$ toegepast. Zo ontstaat de grafiek van de functie h .

Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van h .

A45

Gegeven zijn de functies $f(x) = -8(x+3)^7 + 4$ en $g(x) = 4(x-2)^7 + 11$.

- a** Door de grafiek van f te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en vervolgens een translatie toe te passen, ontstaat de grafiek van g . Geef deze transformaties.
- b** Door de grafiek van f te verschuiven en vervolgens te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as, ontstaat de grafiek van g . Geef deze transformaties.

A46

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x-1)^4 + 5$.

De grafiek van de functie g ontstaat uit de grafiek van f door eerst de vermenigvuldiging met -3 ten opzichte van de x -as uit te voeren en daarna de translatie $(a, 21)$ toe te passen.

De toppen van de grafieken van f en g liggen op de parabool $y = 3x^2 + bx + 6$.

Bereken a en b algebraïsch.

E47

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 6$.

Op de grafiek van f wordt eerst de translatie (p, q) toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met a ten opzichte van de x -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . De grafiek van g gaat door het punt $A(1, 310)$ en heeft $T(5, -10)$ als top.

Bereken a, p en q .

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met de formule $y = a(x - p)^n + q$.

☐ Ik kan werken met transformaties van de grafiek van een machtsfunctie.

► OPGAVE C5
THEORIE A

► OPGAVE C6
THEORIE B

C5

- a** Door welke translatie ontstaat de grafiek van $y = 0,5(x + 2)^3 - 9$ uit een standaardgrafiek?
- b** Op de grafiek van $y = 3x^4 + 5$ wordt de translatie $(6, -7)$ toegepast. Stel de formule op van de beeldgrafiek.
- c** Schets de grafiek van $y = 2(x + 3)^3 - 5$.
- d** Schets de grafiek van $y = -0,5(x - 2)^4 + 4$.

C6

- a** Op de grafiek van $f(x) = 0,2(x + 1)^9 - 3$ wordt eerst de translatie $(-3, 2)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -10 ten opzichte van de x -as. Bereken de coördinaten van het punt van symmetrie van de beeldgrafiek.
- b** De grafiek van $f(x) = 0,2(x + 1)^9 - 3$ wordt eerst vermenigvuldigd met -10 ten opzichte van de x -as. Vervolgens wordt de translatie $(-3, 2)$ toegepast. Bereken de coördinaten van het punt van symmetrie van de beeldgrafiek.

Antwoorden

C5 a de translatie $(-2, -9)$
b $y = 3(x - 6)^4 - 2$
c, d *

C6 a $(-4, 10)$
b $(-4, 32)$

4.4 Hogeregraadsvergelijkingen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de vergelijking $x^n = p$ voor gehele waarden van n met $n > 1$ algebraïsch oplossen.
- Je kunt hogeregraadsvergelijkingen oplossen met ontbinden in factoren.
- Je kunt hogeregraadsvergelijkingen grafisch-numeriek oplossen.
- Je weet wanneer je algebraïsch moet oplossen en wanneer het grafisch-numeriek mag.
- Je kunt ongelijkheden oplossen.

048



a Schets in één figuur de grafiek van $y = x^4$ en de lijnen $y = 8$ en $y = -8$.

b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = 8$? Licht toe.

c Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = -8$? Licht toe.

049



a Schets in één figuur de grafiek van $y = x^5$ en de lijnen $y = 8$ en $y = -8$.

b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^5 = 8$? Licht toe.

c Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^5 = -8$? Licht toe.

Theorie A Hogeremachtswortels

Worteltrekken heeft te maken met kwadrateren. Zo zijn van de vergelijking $x^2 = 5$ de oplossingen $x = \sqrt{5}$ en $x = -\sqrt{5}$. Omdat kwadrateren hetzelfde is als tot de tweede macht verheffen, heet $\sqrt{5}$ ook wel de **tweedemachtswortel** van 5.

Er zijn ook **hogeremachtswortels** zoals derdemachtswortels en vierdemachtswortels.

Een zevendemachtswortel heeft te maken met 'tot de zevende macht verheffen'.

De vergelijking $x^7 = 80$ heeft één oplossing, die we noteren als $x = \sqrt[7]{80}$. Dus $(\sqrt[7]{80})^7 = 80$. De oplossing

van $x^7 = -80$ is $x = \sqrt[7]{-80}$. Dus $(\sqrt[7]{-80})^7 = -80$.

Je kunt een benadering van de oplossing van de vergelijking $x^7 = 80$ vinden door de grafieken van $y = x^7$ en $y = 80$ te plotten en met de optie snijpunt de coördinaten van het snijpunt te berekenen.

Je vindt $x \approx 1,87$.

Maar het gebruik van een hogeremachtswortel op de GR is handiger:

Casio

Gebruik de toets $\sqrt[n]{}$.

HP

Gebruik de toets $\sqrt[n]{}$.

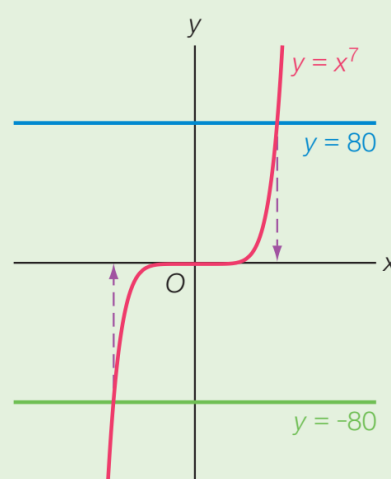
NumWorks

Gebruik de optie $\sqrt[n]{}$ uit de Toolbox.

TI

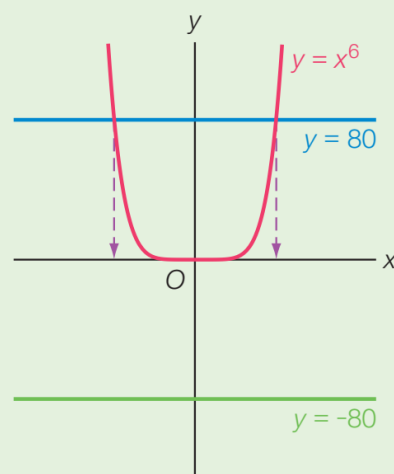
Gebruik de optie $\sqrt[n]{}$ uit het FUNC-menu.

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$
$$(-\sqrt{5})^2 = 5$$



$x^7 = 80$ heeft één oplossing, en ook $x^7 = -80$ heeft één oplossing.

Je begrijpt dat $x = \sqrt[6]{80}$ een oplossing is van de vergelijking $x^6 = 80$. In de figuur hiernaast zie je dat ook $x = -\sqrt[6]{80}$ een oplossing is. De oplossingen van $x^6 = 80$ zijn dus $x = \sqrt[6]{80}$ en $x = -\sqrt[6]{80}$. De vergelijking $x^6 = -80$ heeft geen oplossing, omdat x^6 niet negatief kan zijn.



$x^6 = 80$ heeft twee oplossingen, maar $x^6 = -80$ heeft geen oplossing.

Voor $\sqrt[n]{p}$ schrijven we $\sqrt[n]{p}$.

De oplossingen van $x^n = p$ voor gehele waarden van n met $n > 1$

n oneven	$x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p}$
n even en $p > 0$	$x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p} \vee x = -\sqrt[n]{p}$
n even en $p < 0$	$x^n = p$ heeft geen oplossing

Voorbeeld

- a** Bereken exact de oplossingen van $5x^4 + 8 = 43$.
b Los $\frac{1}{4}x^5 + 7 = 1$ algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

- a** $5x^4 + 8 = 43$
 $5x^4 = 35$
 $x^4 = 7$
 $x = \sqrt[4]{7} \vee x = -\sqrt[4]{7}$
- b** $\frac{1}{4}x^5 + 7 = 1$
 $\frac{1}{4}x^5 = -6$
 $x^5 = -24$
 $x = \sqrt[5]{-24}$
 $x \approx -1,89$

50 Bereken exact de oplossingen.



- a** $x^6 = 20$ **d** $3x^7 + 25 = 4$
b $5x^3 = 100$ **e** $\frac{1}{2}x^6 + 12 = 9$
c $x^2 + 7 = 18$ **f** $0,3x^8 + 5 = 11$

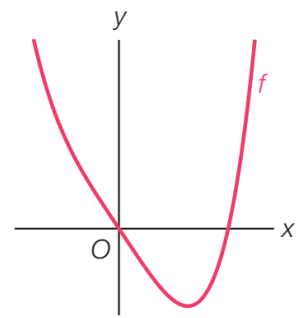
51 Los algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.



- a** $3x^5 + 10 = 16$ **d** $3x^4 + 10 = 4$
b $2x^5 + 9 = 1$ **e** $\frac{1}{3}x^6 + 2 = 6$
c $3x^4 - 5 = 10$ **f** $-\frac{1}{2}x^6 + 6 = 2$

A52 Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 15x$.

- ⊗ *** **a** Bereken met de afgeleide de helling van de grafiek voor $x = \sqrt[3]{6}$.
b Bereken algebraïsch voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 1.



O53 De oplossing van de vergelijking $x^5 = 243$ is $x = 3$, want $3^5 = 243$. Om de exacte oplossingen van dit soort vergelijkingen direct te kunnen opschrijven, is de tabel hiernaast van belang. Je ziet dat in de kolom waar x^5 boven staat, 243 al is ingevuld.

Vul de tabel verder in en leer hem uit het hoofd, zodat je de getallen voortaan herkent als macht.

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1					
2					
3				243	
4					
5					
6					

Theorie B Hogeremachtswortels herleiden

De oplossing van de vergelijking $x^3 = 8$ is $x = \sqrt[3]{8}$. Maar omdat $2^3 = 8$ schrijf je $x = 2$.

En zo heeft de vergelijking $x^4 = 81$ als oplossingen $x = 3$ en $x = -3$, omdat $3^4 = 81$ en ook $(-3)^4 = 81$. Je laat een antwoord als $x = \sqrt[4]{81}$ niet staan.

Bij dit soort vergelijkingen gebruik je dus de tabel die je in opgave 53 hebt ingevuld.

Bij het algebraïsch oplossen van de vergelijking $2(3x - 1)^4 = 32$ ga je net zo te werk als bij het oplossen van $2x^4 = 32$. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Los algebraïsch op.

a $\frac{1}{3}x^5 + 83 = 2$

b $2(3x - 1)^4 = 32$

Uitwerking

a $\frac{1}{3}x^5 + 83 = 2$

$\frac{1}{3}x^5 = -81$

$x^5 = -243$

$x = -3$

b $2(3x - 1)^4 = 32$

$(3x - 1)^4 = 16$

$3x - 1 = 2 \vee 3x - 1 = -2$

$3x = 3 \vee 3x = -1$

$x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$

54 Los algebraïsch op.



a $\frac{1}{2}x^3 - 8 = 100$

d $3(2x - 1)^2 = 147$

b $\frac{1}{9}x^6 - 1 = 80$

e $2(x + 2)^3 + 150 = 22$

c $82 - \frac{1}{3}x^5 = 1$

f $(4x + 1)^4 - 25 = 56$

A55 Los exact op.



a $5x^3 + 2 = -38$

d $0,5x^4 - 77 = 51$

b $7x^4 + 13 = 8$

e $(2x + 1)^3 + 80 = 16$

c $2 - \frac{1}{3}x^5 = 6$

f $3(x - 2)^4 - 2 = 13$

A56 Op de grafiek van $y = -\frac{1}{4}(x + 2)^3 + 5$ wordt de translatie $(p, 0)$ toegepast. De beeldgrafiek die zo ontstaat, gaat door het punt $(-10, 21)$. Stel de formule op van de beeldgrafiek.



O57 Gegeven is de vergelijking $x^3 - x^2 - 6x = 0$.



Het linkerlid van de vergelijking is te ontbinden in $x(x + 2)(x - 3)$.

a Toon dit aan.

b Geef de oplossingen van de vergelijking $x^3 - x^2 - 6x = 0$.

O58 Gegeven is de vergelijking $x^4 - x^2 - 6 = 0$.



Stel $x^2 = u$, dan krijg je $u^2 - u - 6 = 0$.

a Licht dit toe.

De vergelijking $u^2 - u - 6 = 0$ heeft de oplossingen $u = -2$ en $u = 3$.

b Toon dit aan.

c Licht toe dat de vergelijking $x^4 - x^2 - 6 = 0$ de oplossingen $x = \sqrt{3}$ en $x = -\sqrt{3}$ heeft.

Theorie C Hogeregraadsvergelijkingen en ontbinden in factoren

De derdegraadsvergelijking $x^3 - x^2 - 2x = 0$ is algebraïsch op te lossen door x buiten de haakjes te brengen. Je krijgt

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$$

Ook de vergelijking $x^4 - x^2 - 2 = 0$ is algebraïsch op te lossen.

Je gebruikt de substitutie $x^2 = u$. Je krijgt

$$u^2 - u - 2 = 0$$

$$\leftarrow x^2 = u, \text{ dus } x^4 = (x^2)^2 = u^2.$$

$$(u + 1)(u - 2) = 0$$

$$u = -1 \vee u = 2$$

$$x^2 = -1 \vee x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \leftarrow \text{Bedenk dat } x^2 = -1 \text{ geen oplossing heeft.}$$

Voorbeeld

Los algebraïsch op.

a $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

b $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Uitwerking

a $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x(x-1)(x-2) = 0$

$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$

b $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Stel $x^2 = u$.

$u^2 - 3u + 2 = 0$

$(u-1)(u-2) = 0$

$u = 1 \vee u = 2$

$x^2 = 1 \vee x^2 = 2$

$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

59 Los algebraïsch op.



a $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b $x^3 - 5x^2 = 6x$

d $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

60 Bereken exact de oplossingen.



a $x^3 = 4x^2 + 12x$

c $x^4 + 16 = 10x^2$

b $x^3 + x^2 = 12x$

d $x^4 + x^2 = 12$

A61 Los algebraïsch op.



a $x^3 + 25x = 10x^2$

c $x^4 - 16x^3 = 36x^2$

b $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

d $x^3 + 6x^2 = 16x$

A62 Zie de grafiek van de functie $f(x) = 0,01x^5 - 0,25x^3$ hiernaast.



De grafiek snijdt de x -as behalve in de oorsprong ook in de punten A en B .

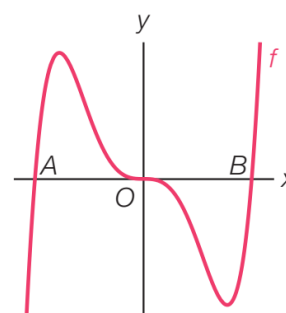
Bereken exact

a de coördinaten van A en B

b de helling van de grafiek voor $x = 3$

c voor welke x de helling van de grafiek gelijk is aan 0

d voor welke x de helling van de grafiek gelijk is aan 0,8.



E63 Van een rechthoek is de lengte van een diagonaal 15 en de oppervlakte 90. Om de lengtes van de zijden te berekenen,



kun je de lengte van de rechthoek x stellen en de breedte y . Zo kun je een vierdegraadsvergelijking krijgen.

Stel deze vierdegraadsvergelijking op en bereken exact de lengte van de rechthoek.

064 Gegeven is de vergelijking $x^4 = x^3 + 1$.



- a** Waarom lukt het niet om deze vergelijking algebraïsch op te lossen?
- b** Plot de grafieken van $f(x) = x^4$ en $g(x) = x^3 + 1$.
- c** Hoe volgt uit vraag b dat de vergelijking $x^4 = x^3 + 1$ twee oplossingen heeft?

Theorie D Vergelijkingen grafisch-numeriek oplossen

De oplossingen van de vergelijking $x^4 - x - 2 = x^3 + 1$ zijn de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken van $f(x) = x^4 - x - 2$ en $g(x) = x^3 + 1$. Het oplossen van deze vergelijking met behulp van de grafieken van f en g op de GR heet **grafisch-numeriek oplossen**. Daarbij gebruik je de optie snijpunt.

Om de vergelijking $f(x) = 0$ grafisch-numeriek op te lossen, voer je de formule in en gebruik je de optie nulpunt.

Voorbeeld

Los op. Rond af op drie decimalen.

- a** $0,2x^3 - 2x + 2 = 0$
- b** $x^3 - 8x = 5 - x^2$

Uitwerking

- a** Invoeren van de formule $y = 0,2x^3 - 2x + 2$ en gebruiken van de optie nulpunt geeft $x \approx -3,577 \vee x \approx 1,153 \vee x \approx 2,424$.
- b** Invoeren van de formules $y = x^3 - 8x$ en $y = 5 - x^2$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x \approx -3,074 \vee x \approx -0,607 \vee x \approx 2,680$.

Noteer de formule die je invoert.
Noteer de optie.
Geef de oplossingen.

65 Los op. Rond zo nodig af op drie decimalen.



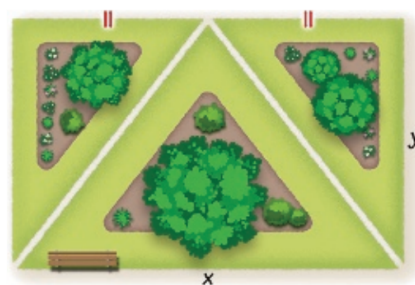
- a** $x^3 - 5x - 2 = 0$
- b** $x^3 - 3 = 0,5x^2 - 2x$

A66 **a** Los op $0,3x^4 - 6x + 5 = 3x^2$. Rond af op drie decimalen.



- b** Bereken algebraïsch de nulpunten van de functie $f(x) = 0,1x^3 - 0,5x^2 - 5x$.
- c** Los op $5 - 2x^6 = 3x^3 - x^5$. Rond af op drie decimalen.
- d** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van de functies $f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 5$ en $g(x) = x^2 + 1$.

- E67** In de figuur hiernaast zie je een tuin van x bij y meter met twee paden. De tuin heeft een oppervlakte van 96 m^2 en de totale lengte van de paden is 20 meter. Stel bij deze situatie een vergelijking op waarmee je de afmetingen van de tuin kunt berekenen, los de vergelijking exact op en geef de mogelijke afmetingen van de tuin.



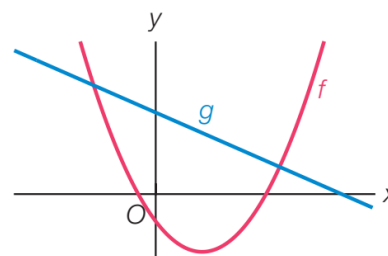
- O68** In de figuur hiernaast zie je de grafieken van de functies $f(x) = x^2 - 3x - 2$ en $g(x) = -x + 6$.

a Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch op.

Om de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ op te lossen, kijk je voor welke waarden van x de grafiek van f onder die van g ligt.

b Los op $f(x) < g(x)$.

c Los op $f(x) > g(x)$.



Theorie E Ongelijkheden oplossen

De ongelijkheid $x^3 > x^2 + 2x$ los je op door het linkerlid $f(x)$ te stellen en het rechterlid $g(x)$, dus $f(x) = x^3$ en $g(x) = x^2 + 2x$. Nadat je de vergelijking $f(x) = g(x)$ hebt opgelost en de grafieken van f en g hebt geschetst, lees je uit de figuur af waar de grafiek van f boven de grafiek van g ligt. In het geval je algebraïsch te werk moet gaan, krijg je $f(x) = g(x)$ geeft $x^3 = x^2 + 2x$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

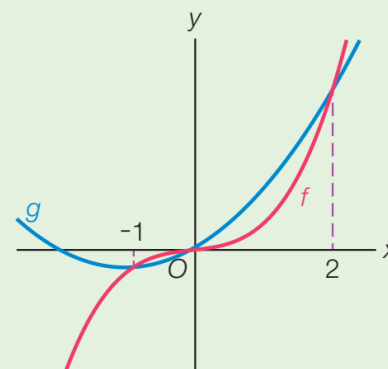
$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$$

Uit de schets van de grafieken van f en g volgt

$x^3 > x^2 + 2x$ geeft $-1 < x < 0 \vee x > 2$.



Bij het oplossen van een ongelijkheid lees je het antwoord af uit een schets.

Bij $f(x) < g(x)$ kijk je voor welke waarden van x de grafiek van f onder die van g ligt.

Bij $f(x) > g(x)$ kijk je voor welke waarden van x de grafiek van f boven die van g ligt.

Gebruik bij het oplossen van ongelijkheden het volgende werkschema.

Werkschema: de ongelijkheden $f(x) < g(x)$ en $f(x) > g(x)$ oplossen

- 1 Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ op.
- 2 Schets de grafieken van f en g .
- 3 Lees uit de schets de oplossing af.

In het geval je niet algebraïsch of exact te werk hoeft te gaan, mag je de vergelijking $f(x) = g(x)$ grafisch-numeriek oplossen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Los op $x^3 - 2x^2 < 3x - 4$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

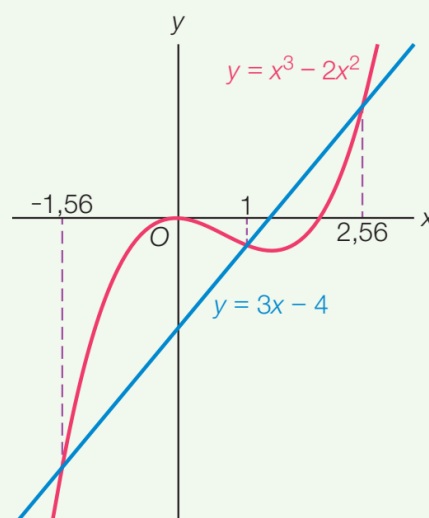
Uitwerking

Los op $x^3 - 2x^2 = 3x - 4$.

Invoeren van de formules $y = x^3 - 2x^2$ en $y = 3x - 4$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = -1,561\dots$, $x = 1$ en $x = 2,561\dots$

Zie de schets hiernaast.

$x^3 - 2x^2 < 3x - 4$ geeft $x < -1,56 \vee 1 < x < 2,56$



69 Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $x^3 - 4x^2 < 2x - 12$ **b** $x^4 - 5x > x^2 + 5$

70 Los algebraïsch op.

a $3x - x^2 < x - 3$ **b** $0,5x^3 - 3x > x^2 + x$

A71 De snelheid van een auto wordt gegeven door de formule

a $v = 0,022t^3 - 0,94t^2 + 10t$. Hierin is v in m/s en t de tijd in seconden met $0 \leq t \leq 20$.

Bereken gedurende hoeveel seconden de snelheid groter is dan 90 km/u. Rond af op één decimaal.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de vergelijking $x^n = p$ voor gehele waarden van n met $n > 1$ algebraïsch oplossen. ▶ **OPGAVE C7**
THEORIE A,B
- ☐ Ik kan hogeregraadsvergelijkingen oplossen met ontbinden in factoren. ▶ **OPGAVE C8**
THEORIE C
- ☐ Ik kan hogeregraadsvergelijkingen grafisch-numeriek oplossen. ▶ **OPGAVE C9**
THEORIE D
- ☐ Ik weet wanneer ik algebraïsch moet oplossen en wanneer het grafisch-numeriek mag. ▶ **OPGAVE C9**
THEORIE D
- ☐ Ik kan ongelijkheden oplossen. ▶ **OPGAVE C10**
THEORIE E

- C7** **a** Los exact op $5x^9 + 100 = 55$.
b Los algebraïsch op $0,7x^6 - 20 = 8$. Rond af op twee decimalen.
c Bereken exact de oplossingen van $2 + \frac{1}{2}(4 - 3x)^4 = 10$.

- C8** Los algebraïsch op.
a $x^3 = x^2 + 20x$
b $x^4 + 30 = 13x^2$

- C9** **a** Los op $4x - x^3 = x^2 - 2$. Rond af op twee decimalen.
b Los algebraïsch op $x^4 = 2x^3 + 24x^2$.
c Los op $0,5x^5 + 2x^4 - 10x = 0$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- C10** Los op $3x - 0,5x^3 < 2x - x^2 + 1$. Rond af op twee decimalen.

Antwoorden

- C7** **a** $x = \sqrt[9]{-9}$
b $x \approx 1,85 \vee x \approx -1,85$
c $x = \frac{2}{3} \vee x = 2$
- C8** **a** $x = 0 \vee x = -4 \vee x = 5$
b $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$
- C9** **a** $x \approx -2,34 \vee x \approx -0,47 \vee x \approx 1,81$
b $x = 0 \vee x = -4 \vee x = 6$
c $x \approx -4,26 \vee x = 0 \vee x \approx 1,53$
- C10** $-1,17 < x < 0,69 \vee x > 2,48$

4.5 Extreme waarden en wiskundige modellen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt met de GR extreme waarden berekenen.
- Je kunt werken met wiskundige modellen.

O72 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 1\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 20x - 10$.



- a** Schets de grafiek. Neem x tussen -5 en 8 en y tussen -50 en 100 .
b De grafiek heeft drie toppen. De x -coördinaten van de toppen zijn -2 , 2 en 5 .

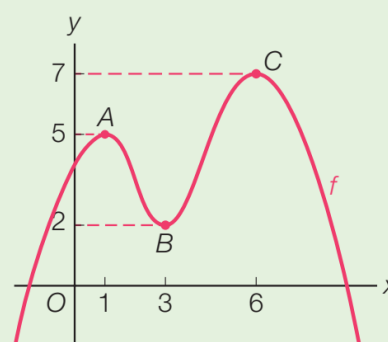
Bereken de bijbehorende y -coördinaten en zet de coördinaten bij de toppen. Rond af op twee decimalen.

Theorie A Extreme waarden berekenen met de GR

In de figuur hiernaast zijn de punten A , B en C toppen van de grafiek van de functie f . Bij zowel top A als top C hoort een **maximum** van de functie f . Zo is het maximum bij A gelijk aan 5 en is het maximum bij C gelijk aan 7 .

Bij top B is er sprake van een **minimum** van 2 .
Maxima en minima heten **uiterste waarden** of **extreme waarden**. Ze worden kortweg **extremen** genoemd.

Als er naar extreme waarden wordt gevraagd, geef je ook aan of het een maximum of een minimum is en voor welke waarde van x de extreme waarde bereikt wordt. Zo noteer je van de functie f in de figuur dat max. is $f(1) = 5$, min. is $f(3) = 2$ en max. is $f(6) = 7$.



Weet je van een functie de formule, dan kun je met de GR de coördinaten van toppen berekenen.

Werkschema: extreme waarden van een functie f berekenen met de GR

- 1 Voer de formule in.
- 2 Gebruik de opties maximum en/of minimum bij het berekenen van de extreme waarden.
- 3 Noteer de extreme waarden in de vorm min. is $f(\dots) = \dots$ of max. is $f(\dots) = \dots$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 1\frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{8}x^2 + 9x - 10$.

De functie heeft drie extreme waarden.

Bereken de extreme waarden. Rond af op twee decimalen.

Je kunt $1\frac{1}{3}$ invoeren als $\frac{4}{3}$ en $1\frac{1}{8}$ als $\frac{9}{8}$.

Uitwerking

Voer de formule in.

De optie minimum geeft $x = -1,5$ en $y \approx -20,27$.

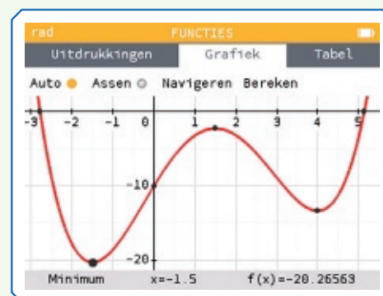
De optie maximum geeft $x = 1,5$ en $y \approx -2,27$.

De optie minimum geeft $x = 4$ en $y \approx -13,33$.

min. is $f(-1,5) \approx -20,27$

max. is $f(1,5) \approx -2,27$

min. is $f(4) \approx -13,33$



73

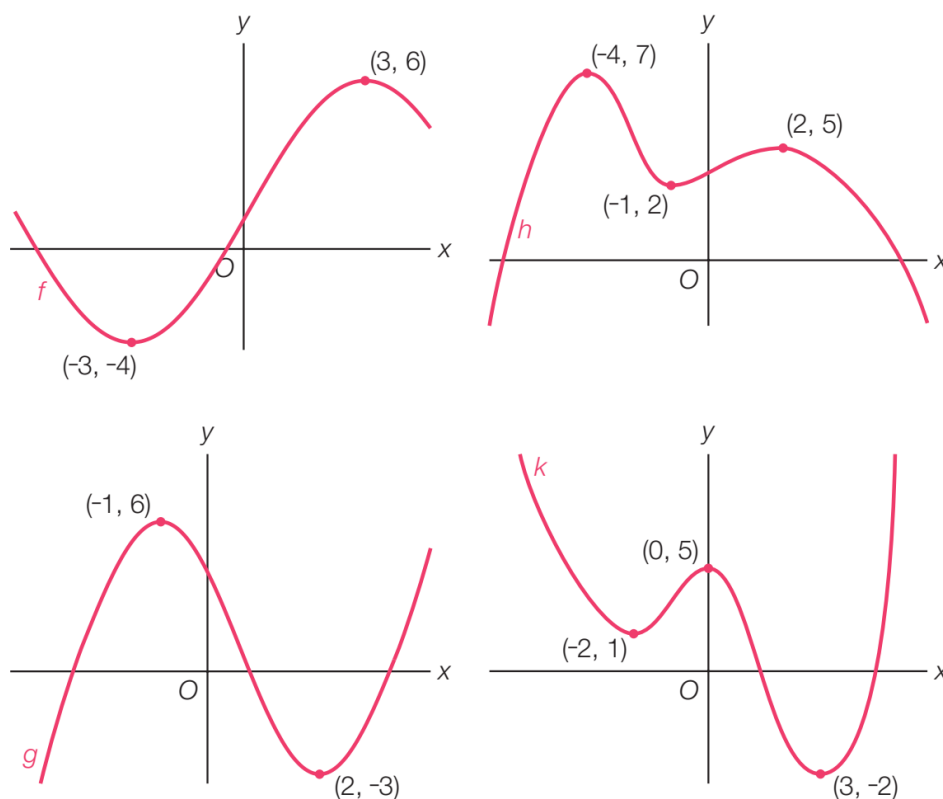
Hieronder zijn de grafieken van de functies f , g , h en k getekend.



De coördinaten van de toppen staan in de figuur.

Geef van deze functies de extreme waarden. Begin als volgt:

min. is $f(-3) = -4$.



74

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 40x + 28$.



De functie heeft twee extreme waarden.

a Plot de grafiek. Neem x tussen -10 en 10 en y tussen -100 en 100 .

b Bereken de extreme waarden. Rond af op twee decimalen.

- 75** De functie $f(x) = -x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 36x + 25$ heeft twee extreme waarden.
 a Bereken die extreme waarden.
 b De lijn k gaat door de twee toppen van de grafiek.
 Stel een vergelijking op van k .

- A76** De functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2\frac{1}{4}x^2 + 5x + p$ heeft een maximum van $6\frac{1}{2}$ voor $x = 1$ en heeft verder nog twee minima.
 Bereken deze minima. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- A77** De functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + bx + c$ heeft twee extreme waarden.
 Het punt $C(-3, -5)$ ligt op de grafiek van f en de helling in C is 12.
 De lijn k gaat door de toppen A en B van de grafiek van f .
 Stel een vergelijking op van k .

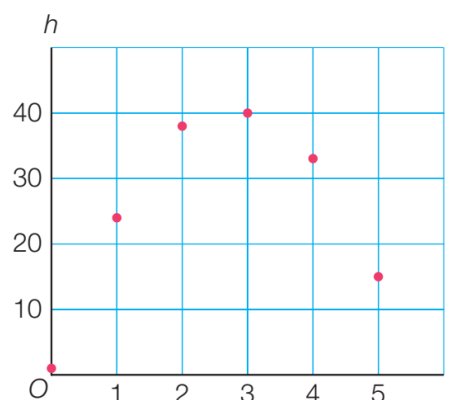
- O78** Bij een experiment wordt een tennisbal weggeslagen. Op verschillende tijden wordt de hoogte van de bal gemeten. Zie de tabel met de tijd t in seconden en h de hoogte van de bal in meters.

In de figuur hiernaast zijn de punten van de tabel in een assenstelsel getekend.

Op grond van deze grafiek gaat men uit van een formule van de vorm $h = at^2 + bt + 1$.

- a Gebruik de gegevens van $t = 1$ en $t = 3$ om aan te tonen dat geldt $a + b = 23$ en $3a + b = 13$.
 b Los het stelsel $\begin{cases} a + b = 23 \\ 3a + b = 13 \end{cases}$ op.
 c Gebruik de gevonden waarden van a en b om de hoogte op $t = 5$ te berekenen. Klopt dit met de tabel?

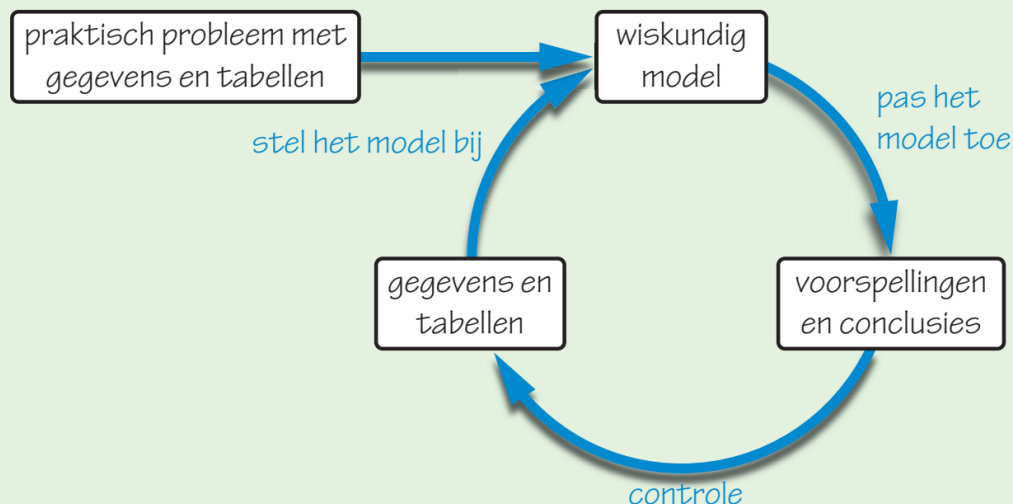
t	0	1	2	3	4	5
h	1	24	38	40	33	15



Theorie B Wiskundig model

In opgave 78 heb je een formule opgesteld bij de hoogte van een tennisbal. Zo kreeg je een **wiskundig model** van de hoogte als functie van de tijd. De opgestelde formule blijkt niet helemaal te kloppen met alle punten van de tabel. Dat kan liggen aan meetfouten. Als er een structurele afwijking is, dan kun je proberen het model bij te stellen, zodat de formule beter past bij de meetwaarden. Daarna kun je de nieuw opgestelde formule weer vergelijken met de punten van de tabel. Dit proces kun je zo nodig nog enkele keren herhalen. Zie het schema 'modelvorming' op de volgende bladzijde.

SCHEMA MODELVORMING



Bij het werken met wiskundige modellen moet je voortdurend rekening houden met de verschillende elementen uit dit schema modelvorming.

Voorbeeld

Bij het afschieten van een vuurpijl heeft men de hoogte gemeten als functie van de tijd. Zie de tabel hiernaast met t de tijd in seconden en h de hoogte in meters.

t	0	1	2	3	4	5	6
h	0	5	15	26	30	25	0

De onderzoekers gaan uit van een formule van de vorm $h = at^3 + bt^2$. Gebruik de gegevens van $t = 1$ en $t = 5$ om a en b te berekenen.

Uitwerking

$$t = 1 \text{ en } h = 5 \text{ geeft } a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 = 5$$

$$a + b = 5$$

$$t = 5 \text{ en } h = 25 \text{ geeft } a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 = 25$$

$$125a + 25b = 25$$

$$5a + b = 1$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 5a + b = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ -4a = 4 \end{array}$$

$$a = -1$$

$a = -1$ invullen in $a + b = 5$ geeft $-1 + b = 5$, dus $b = 6$.

R79 Zie het voorbeeld.



Wat is volgens de gevonden formule de maximale hoogte die de vuurpijl bereikt? Klopt dit met de tabel? Licht toe.

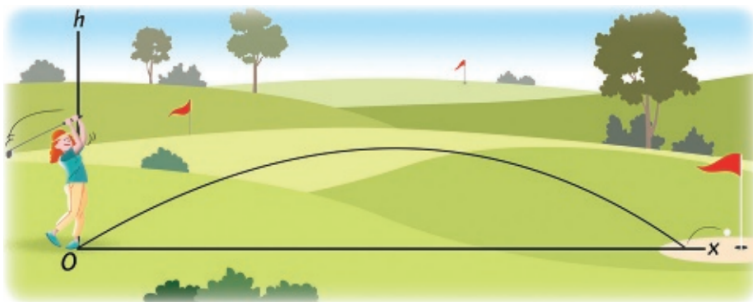
R80 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

□ ⊙ * In deze opgave gaan we uit van de gegevens van $t = 2$ en $t = 4$ van de tabel en een formule van de vorm $h = at^3 + bt^2$.

- Welke formule van h vind je als je de gegevens van $t = 2$ en $t = 4$ gebruikt?
- Welke maximale hoogte vind je met deze formule? Na hoeveel seconden komt de vuurpijl volgens deze formule weer op de grond?
- Welke formule hoort volgens jou het beste bij de tabel, die van het voorbeeld of die van vraag a?

81 Bij het bestuderen van de baan van een golfbal heeft men de tabel hiernaast opgesteld. Hierin zijn x en h in meters. Zie ook de figuur hieronder.

x	0	10	25	50	60
h	0	3,5	7,0	7,5	6,0



Omdat men aanneemt dat de baan een parabool is, gaat men uit van het model $h = ax^2 + bx$.

- Bereken a en b door uit te gaan van de gegevens bij $x = 10$ en $x = 60$.
- Hoe hoog komt de bal maximaal volgens de gevonden formule?
- Hoeveel meter vanaf de afslag komt de bal volgens de gevonden formule weer op de grond?
- De formule komt niet overeen met één van de meetwaarden van de tabel.

Voor welke waarde van x is dat? Hoeveel procent wijkt de hoogte die de formule geeft af van de gemeten waarde?

82 Bij het opstellen van een formule van de hoogte waarop een vuurpijl zich bevindt, gaat men uit van het model $h = at^3 + bt^2$. Hierin is h de hoogte in meters en t de tijd in seconden. De pijl wordt afgeschoten op $t = 0$ en komt op $t = 8$ weer op de grond. Op $t = 5$ is de pijl op een hoogte van 75 meter.

- Bereken met deze gegevens de waarden van a en b .
- Schets de grafiek bij de gevonden formule.
- Na hoeveel seconden is de pijl op het hoogste punt? Op welke hoogte is de pijl dan?
- Metingen geven aan dat, afgerond op één decimaal, de pijl gedurende 3,7 seconden hoger is dan 50 meter. Onderzoek of dit overeen komt met de gevonden formule.

A83

In een laboratorium begint op 1 september om 0:00 uur een experiment met 200 miljoen bacteriën. Uit metingen blijkt dat het aantal bacteriën op 1 september met 7 miljoen afneemt en op 6 september toeneemt van 285 miljoen tot 368 miljoen.

De laborant neemt op grond van deze metingen aan dat het aantal bacteriën wordt gegeven door een model van de vorm $N = at^3 + bt + 200$. Hierin is N het aantal in miljoenen en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 september om 0:00 uur.

- Toon aan dat er waarden van a en b zijn waarmee de formule overeenkomt met alle gegeven meetwaarden.
- Op welke datum neemt volgens de gevonden formule het aantal bacteriën voor het eerst met meer dan 200 miljoen toe?
- Maak een schets van de grafiek bij de formule waaruit blijkt dat er een tijdstip is waarop het aantal bacteriën minimaal is en bereken het minimale aantal bacteriën.

A84

Een thermosfles wordt getest door deze te vullen met kokend water.

Daarna wordt op verschillende tijdstippen de temperatuur van het water in de fles gemeten. Zie de tabel hieronder, waarin T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ is na t minuten.

t	0	9	19	31	46	65
T	100	90	80	70	60	50

- Licht toe dat bij de tabel geen lineair verband hoort.

De onderzoeker gaat uit van een model van de vorm $T = a \cdot b^t + c$.

Omdat de omgevingstemperatuur 20°C is, neemt hij $c = 20$.

- Licht toe dat uit $t = 0$ en $T = 100$ volgt dat $a = 80$. Gebruik dat $b^0 = 1$.

Uit het gegeven dat na 65 minuten de temperatuur 50°C is, volgt dat $T = 80 \cdot 0,99^t + 20$. Hierin is b afgerond op twee decimalen.

- Stel de formule van T op waarbij b is afgerond op drie decimalen.
- Onderzoek of de bij c gevonden formule past bij de andere gegevens van de tabel.
- Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van het water in de thermosfles gedaald is tot 40°C .



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan met de GR extreme waarden berekenen.

☐ Ik kan werken met wiskundige modellen.

► OPGAVE C11
THEORIE A

► OPGAVE C12
THEORIE B

- C11** De functie $f(x) = -0,3x^4 + 0,4x^3 + 15x^2 - 30x - 50$ heeft drie extreme waarden.
Bereken die extreme waarden.

- C12** Bij het wegtrappen van een voetbal is de hoogte van de bal op een aantal tijdstippen gemeten. Zie de tabel hieronder, waarin t de tijd in seconden is en h de hoogte in meters.

t	0	1	2	3	4
h	0	19	28	27	16

Bij de tabel hoort een formule van de vorm $h = at^2 + bt$.

- a** Bereken a en b .
b Uit verdere metingen blijkt dat de maximale hoogte van de bal 29,3 meter is.
Komt dit overeen met de gevonden formule?

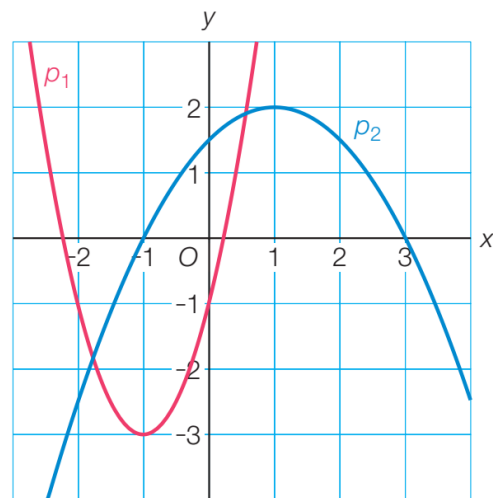
Antwoorden

- C11** max. is $f(-5) = 237,5$
min. is $f(1) = -64,9$
max. is $f(5) = 37,5$
C12 a $a = -5$ en $b = 24$
b nee

Kennis- en vaardighedentest

4.1 De formules $y = a(x - p)^2 + q$ en $y = a(x - d)(x - e)$

- 1** Stel van de parabolen p_1 en p_2 in de figuur hiernaast de formule op in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.



- 2** Een vuurpijl wordt verticaal omhoog geschoten. De hoogte van de pijl is te beschrijven met een formule van de vorm $h = at^2 + bt$. Hierin is h de hoogte in meters en t de tijd in seconden. De maximale hoogte van 39,2 meter wordt na 2,8 seconden bereikt. Bereken a en b .
- 3** Een parabool snijdt de x -as in de punten $(-3, 0)$ en $(5, 0)$ en gaat door het punt $(-1, 3)$.
- a** Bereken algebraïsch de coördinaten van de top en van het snijpunt met de y -as.
 - b** Schrijf de formule van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

4.2 De formule $y = ax^2 + bx + c$

- 4** De parabool $y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + 2$ gaat door het punt $(2, 8)$. Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.
- 5** Van de parabool $y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + c$ is $y_{\text{top}} = -\frac{3}{4}$.
- a** Bereken c .
 - b** Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as.
- 6** De parabool $y = ax^2 + 6x + c$ gaat door de punten $(-1, -3\frac{1}{2})$ en $(3, 8\frac{1}{2})$. Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.

4.3 Machtsformules

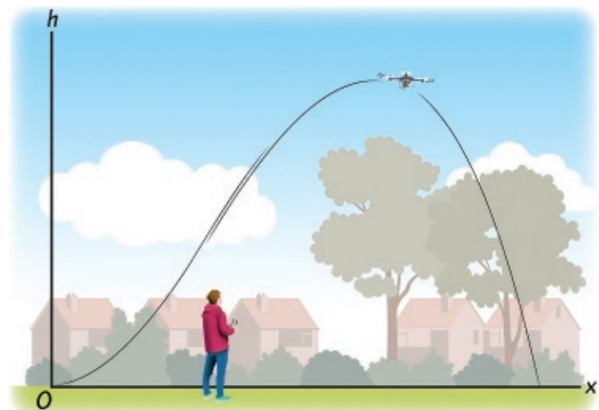
- 7** De grafiek van $f(x) = -0,5(x - 2)^5 + 3$ wordt eerst vermenigvuldigd met -2 ten opzichte van de x -as, vervolgens wordt de translatie $(-3, 6)$ toegepast.
Bereken de coördinaten van het punt van symmetrie van de beeldgrafiek.
- 8** Gegeven is de functie $f(x) = 0,7(x + 1)^4 + 3$.
De grafiek van g ontstaat uit die van f door eerst de translatie $(-4, -10)$ toe te passen en vervolgens de vermenigvuldiging met k ten opzichte van de x -as.
De toppen van de grafieken van f en g liggen op de lijn $y = ax - 5$.
Stel het functievoorschrift van g op.

4.4 Hogeregraadsvergelijkingen

- 9** Los exact op.
- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| a $3x^3 + 5 = 20$ | d $8x^5 + 22 = 6$ |
| b $0,25x^6 - 7 = 9$ | e $(2x + 9)^5 = -243$ |
| c $5x^6 + 20 = 35$ | f $10 - 4(x - 1)^7 = 22$ |
- 10** Bereken exact de oplossingen.
- | |
|-------------------------------|
| a $x^3 - 6x^2 = 7x$ |
| b $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ |
| c $x^4 + 10x^2 = 24$ |
- 11** **a** Los op $x^4 - 3x^2 - x + 2 = 0$. Rond af op twee decimalen.
b Los algebraïsch op $x^3 - 4x^2 > 5x$.
c Los op $x^3 - 2x < -x^2 + 1$. Rond af op twee decimalen.

4.5 Extreme waarden en wiskundige modellen

- 12** De functie $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2\frac{1}{3}x^2 + 5\frac{1}{2}x + p$ heeft een maximum van 0 voor $x = 1$ en heeft verder nog twee minima.
Bereken deze minima. Rond af op twee decimalen.
- 13** Marc heeft een drone. Bij een van de vluchten laat Marc de drone opstijgen en 100 meter verder weer landen. Bij deze vlucht hoort een formule van de vorm $h = ax^2 + bx^3$. Zie de figuur hiernaast.
In de formule zijn x en h in meters.
Voor $x = 10$ is $h = 2,7$ en voor $x = 100$ is $h = 0$.
Bereken de maximale hoogte van de drone. Rond af op gehele meters.



Gemengde opgaven

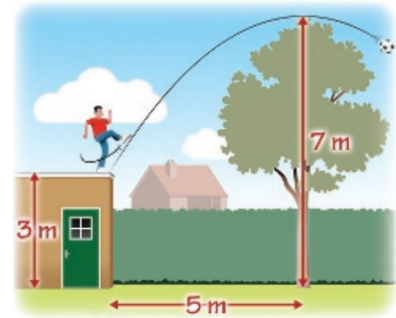
- 1**
- a** Een parabool met top $(5, 8)$ snijdt de x -as in het punt $(9, 0)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y -as.
 - b** Een parabool snijdt de x -as in de punten $(5, 0)$ en $(9, 0)$ en gaat door het punt $(3, -6)$.
Stel de formule op van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.
 - c** Een parabool gaat door de punten $(-4, 2)$, $(1, 12)$ en $(2, 2)$.
Bereken de coördinaten van de top van de parabool.
 - d** Een parabool snijdt de x -as in het punt $(4, 0)$ en de y -as in het punt $(0, 6)$. Verder gaat de parabool ook nog door het punt $(6, 1)$.
Stel de formule op van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

- 2**
- a** Los de vergelijking $4(2x - 5)^3 = 108$ algebraïsch op.
 - b** Los de vergelijking $x^3 - 5x = x^2 + 2$ op. Rond af op twee decimalen.
 - c** Bereken exact de nulpunten van de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x$.
 - d** Los de ongelijkheid $x(x^2 + 4x - 1) < x + 6$ op. Rond af op twee decimalen.
 - e** Bereken exact de oplossingen van $(1 - 4x)^4 = 81$.
 - f** Los de vergelijking $(x^2 + 1)(x - 3) = 5x - 3$ algebraïsch op.
 - g** Los de ongelijkheid $(x^2 + 4)(4 - x^2) < 6x^2$ algebraïsch op.
 - h** Bereken exact de oplossingen van $x^4 + 14 = 9x^2$.

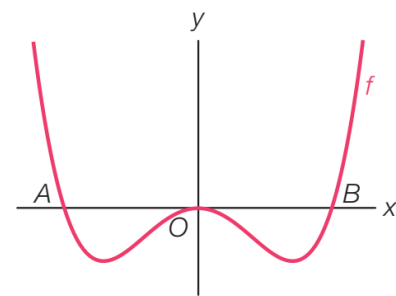
- 3** Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^4 - 4$ en $g(x) = \frac{1}{3}(x + 1)^5 + 3$.
- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
 - b** De lijn k gaat door de top van de grafiek van f en door het punt van symmetrie van de grafiek van g .
Stel de formule op van k .
 - c** De grafiek van f wordt eerst vermenigvuldigd met -4 ten opzichte van de x -as en vervolgens wordt de translatie $(4, -8)$ toegepast.
Bereken de coördinaten van de top van de beeldgrafiek.
 - d** De grafiek van g wordt eerst vermenigvuldigd met -3 ten opzichte van de x -as en vervolgens wordt de translatie (a, b) toegepast. Het punt van symmetrie van de beeldgrafiek is het punt $(4, 6)$.
Bereken a en b .
 - e** De grafiek van g wordt met p vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as. De beeldgrafiek snijdt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.
Bereken exact de waarde van p .
 - f** De grafiek van g wordt q naar rechts verschoven. De beeldgrafiek gaat door de top van de grafiek van f .
Bereken exact de waarde van q .

- 4** Parabool p kan worden beschreven door de formules $y = a(x - d)(x - 3)$, $y = a(x - 1)^2 + q$ en $y = ax^2 + 2\frac{1}{2}x + c$. Stel de formule op van p in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

- 5** Timo trapt een bal van het dak van een schuur. De bal beschrijft een paraboolbaan en gaat in het hoogste punt juist over een boom die 5 meter van de schuur staat. De boom is 7 meter hoog en de schuur is 3 meter hoog. Bereken op welke afstand van de schuur de bal op de grond komt. Geef je antwoord in dm nauwkeurig.



- 6** Zie de grafiek van de functie $f(x) = 0,05x^4 - 0,5x^2$ hiernaast. De grafiek raakt de x -as in de oorsprong en snijdt de x -as in de punten A en B .
- Bereken exact de afstand tussen A en B .
 - De parabool $y = 4,8 - x^2$ snijdt de grafiek van f in de punten C en D . Bereken exact de coördinaten van C en D .
 - Bereken de coördinaten van het punt van de grafiek van f waarin de helling gelijk is aan $-8,8$.
 - De parabool $y = -0,8x^2$ snijdt de hellinggrafiek van f in de oorsprong en in de punten E en F . Bereken exact de coördinaten van E en F .



- 7** In Delft staat de grootste golfmachine ter wereld. Onderdeel van deze machine is een grote betonnen goot. In deze goot worden golven opgewekt waarmee dijken en andere zeeweringen kunnen worden getest. In de figuur hiernaast zie je een doorsnede van een golf. Om bij deze golf een formule op te stellen, gaan de onderzoekers uit van het model $h = ax^3 + bx^2$. Hierin zijn h en x in meters. Om a en b te berekenen, kun je gebruiken dat de grafiek door de roosterpunten $(6, 4)$ en $(12, 0)$ gaat.



- Bereken a en b .
- Bereken in cm nauwkeurig de maximale hoogte van de golf.

Metingen geven aan dat bij het passeren van de golf het water gedurende 0,7 seconden hoger staat dan 4 meter en dat de voortplantingssnelheid van de golf gelijk is aan 5,00 m/s.

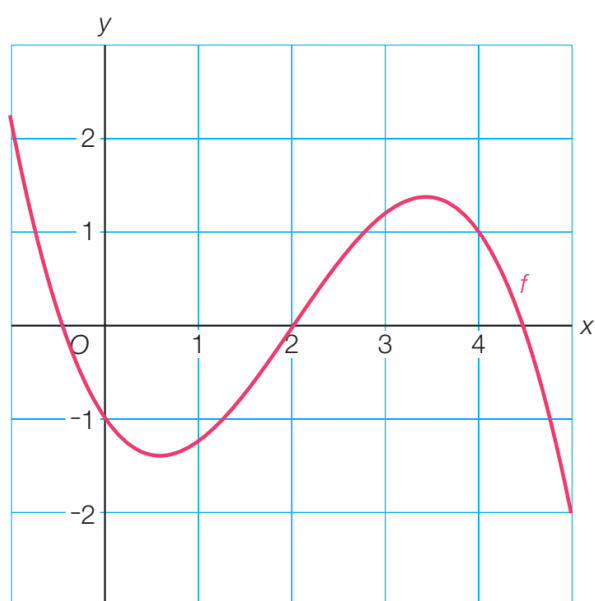
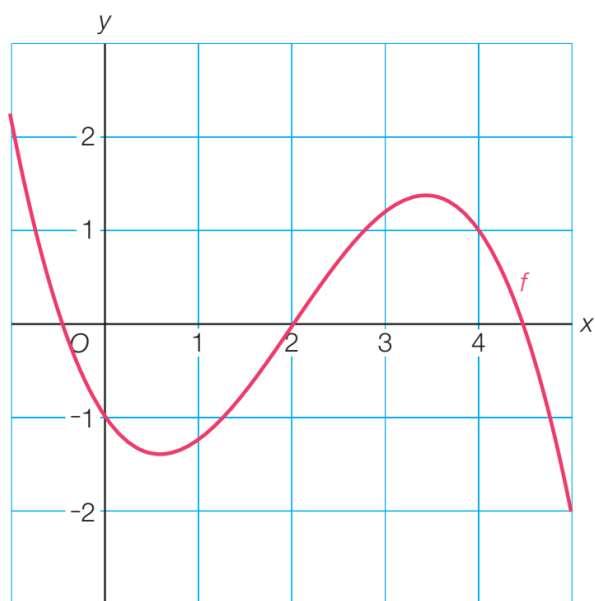
Uit het gegeven dat het water gedurende 0,7 seconden hoger staat dan 4 meter kun je met het gevonden model de voortplantingssnelheid van de golf berekenen.

- Bereken deze snelheid in m/s en rond af op twee decimalen. Hoeveel procent wijkt deze snelheid af van de gemeten snelheid?

Werkbladen

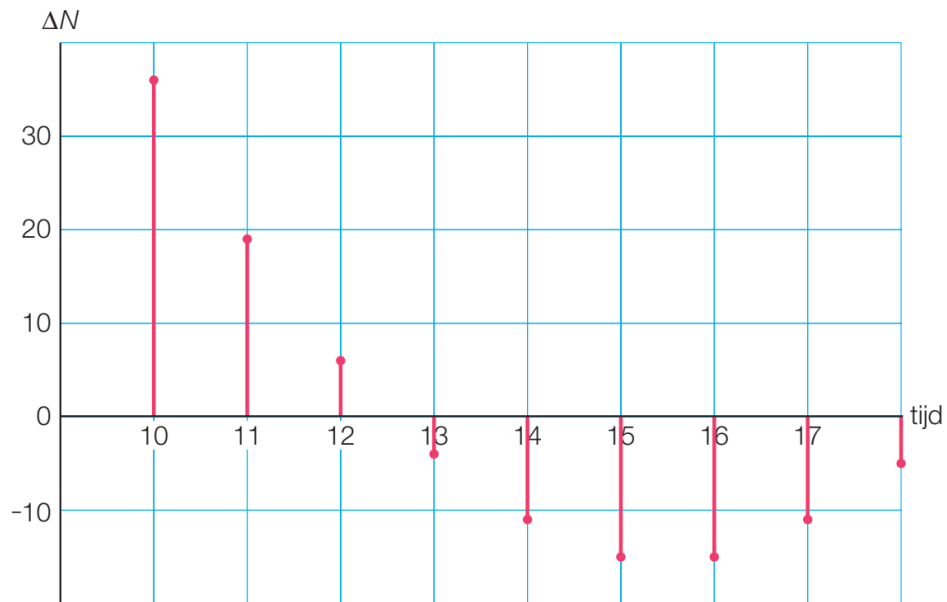
46

blz 76



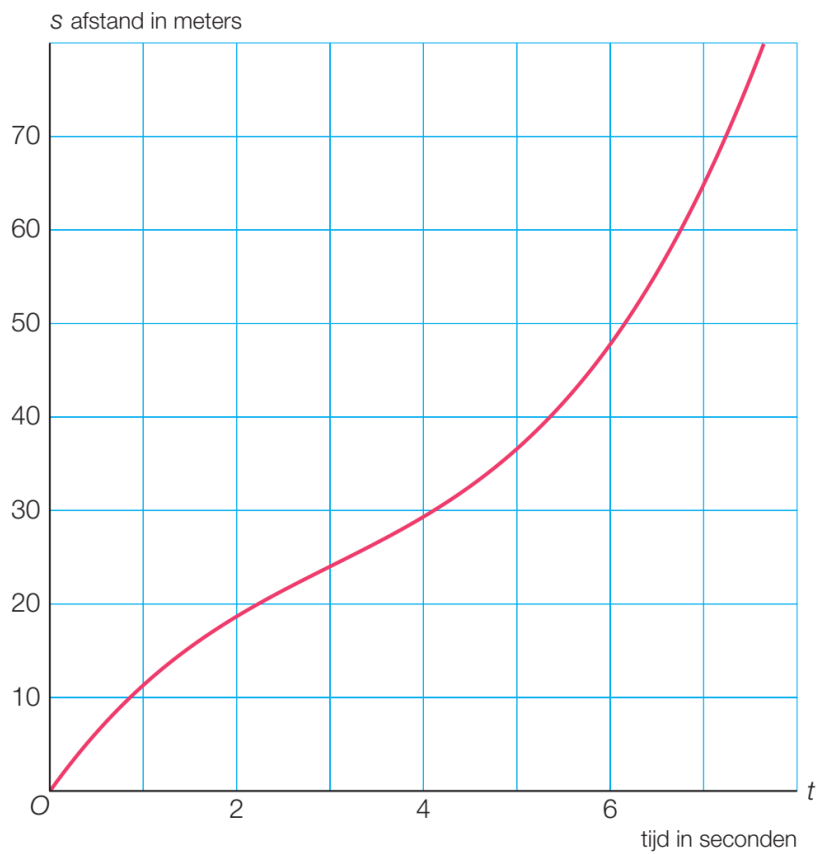
4

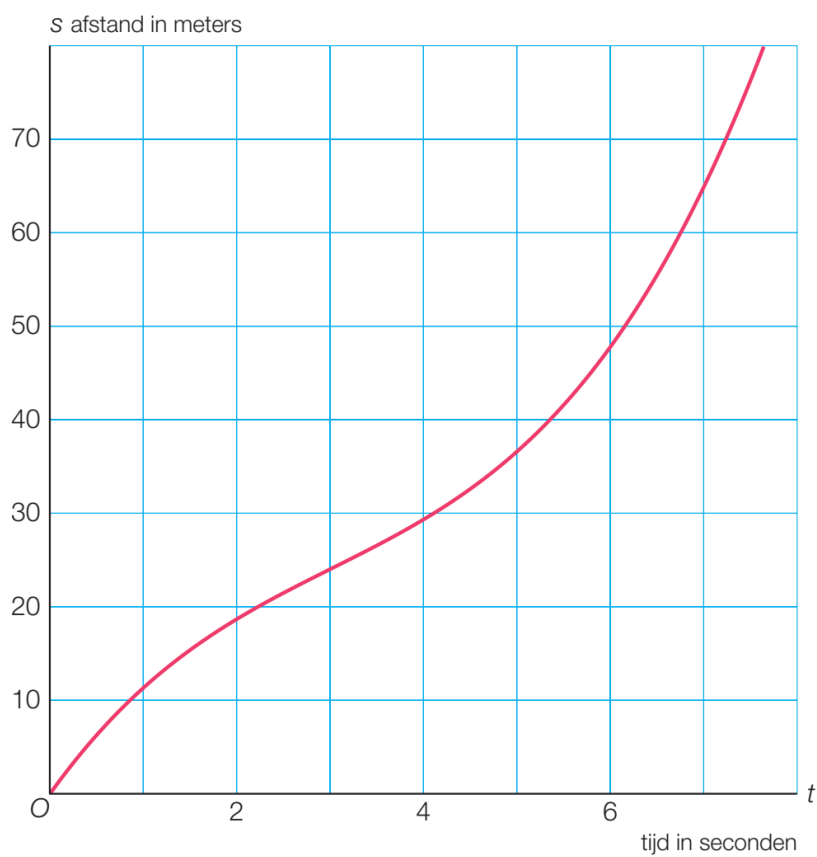
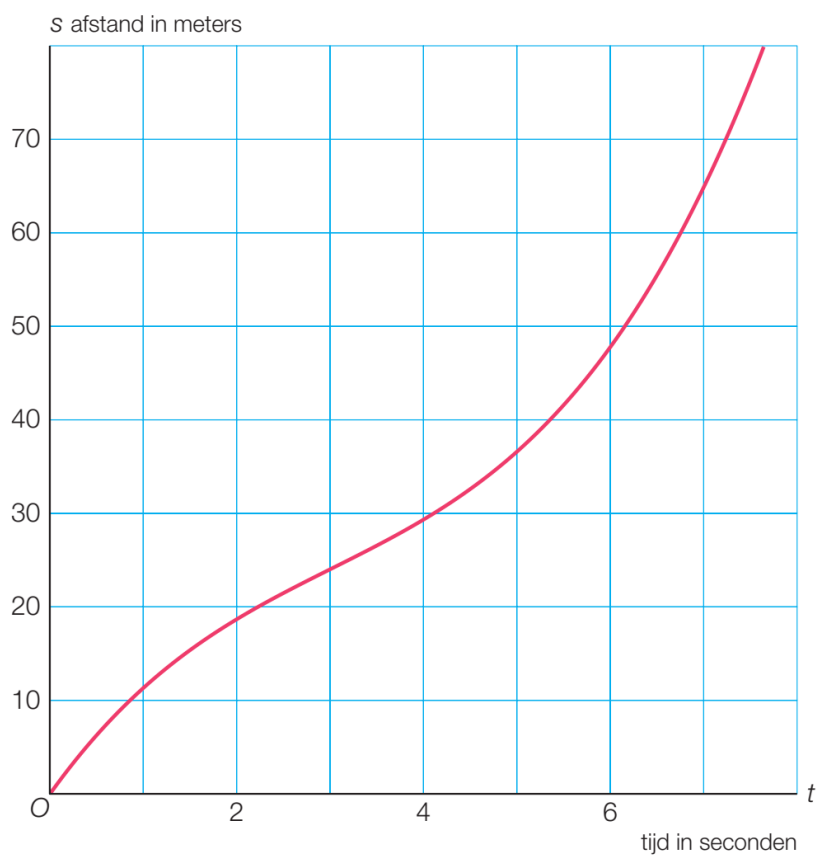
blz 95



8

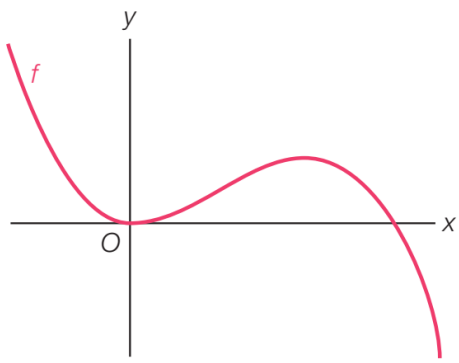
blz 95



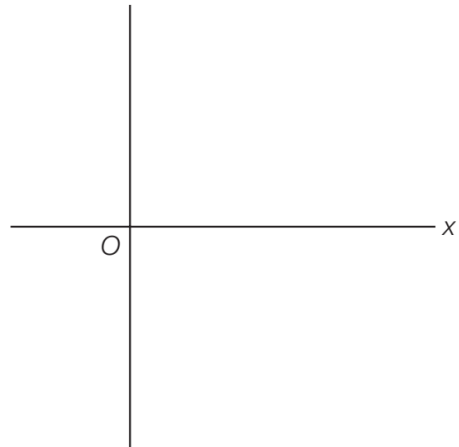


9

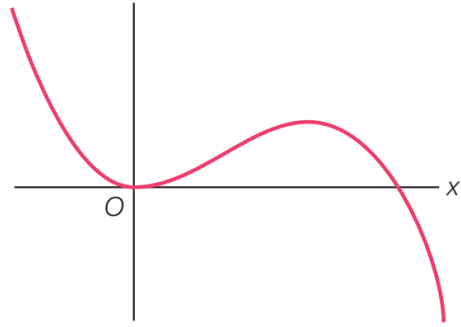
blz 96



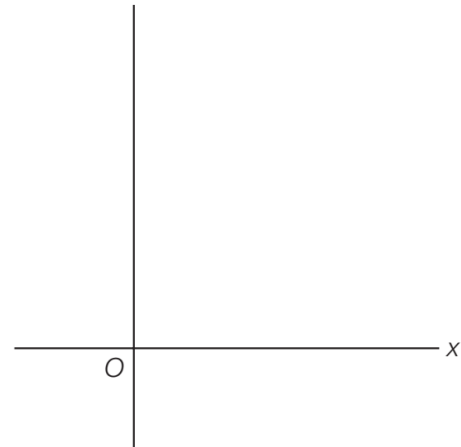
helling



helling

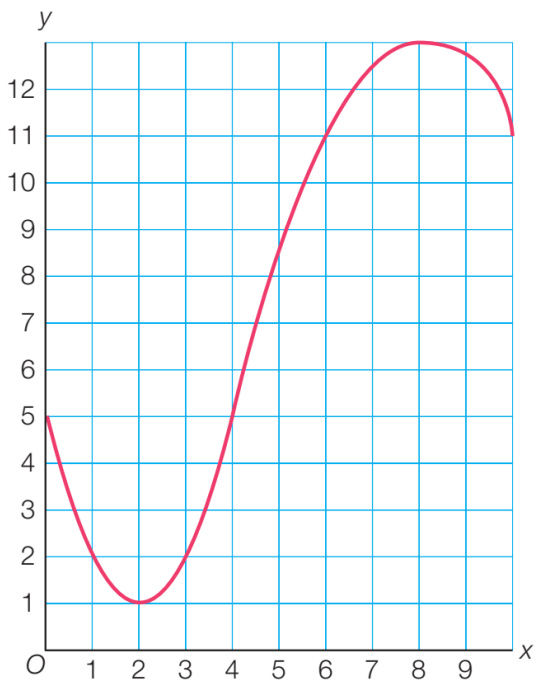


y



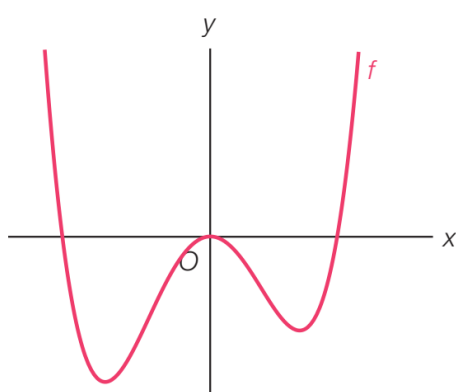
2

blz 97

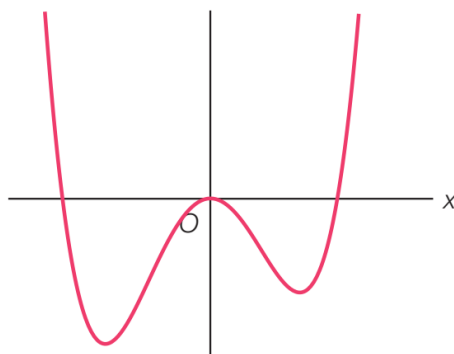


4

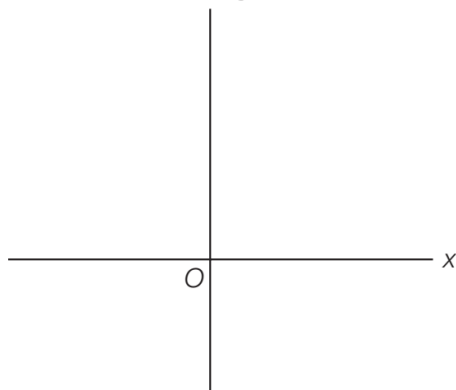
blz 98



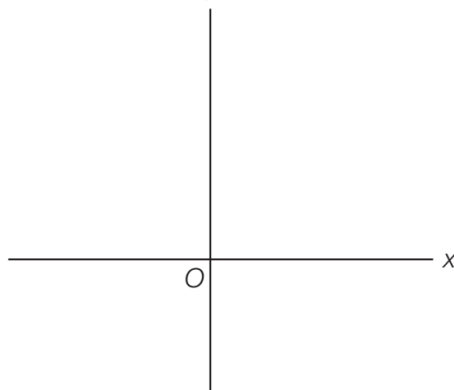
helling



helling

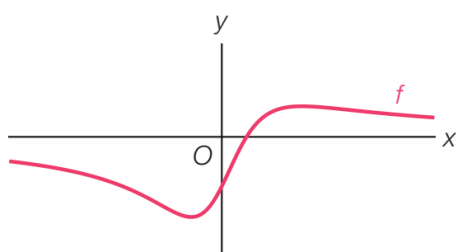


y

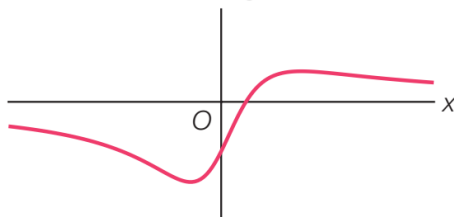


5

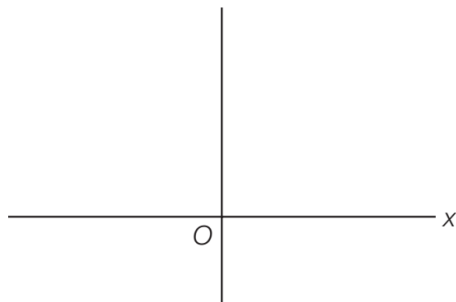
blz 98



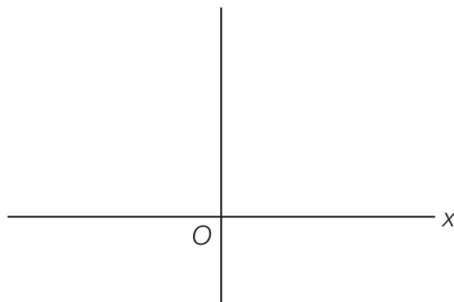
helling



helling



y



Antwoorden Kennis- en vaardigheidentests

Hoofdstuk 1

- 1** a $a = -1\frac{1}{2}$ c $a = 1$ en $b = 9$
b $b = 4$ d $a = -2$

2 $h = 10\,000 - 10t$

3 $S(2\frac{5}{7}, 1\frac{3}{7})$

4 $a = 4$ en $b = -6$

5 a $k: y = -7x + 85$
b $(1\frac{3}{4}, 0)$

6 $p = -2q + 35$

7 a $T = 0,034t + 9,3$
b 2049

8 a x-as: $(-4, 0)$
y-as: $(0, 2\frac{2}{3})$
*
b $p = 3$
c $q = 2$

9 a $rc_k = \frac{3}{4}$
b $m: 3x - 4y = 25$

10 a $(x, y) = (2, 1)$
b $(x, y) = (-4, 1)$

11 $S(2, 2)$

12 54 e-bikes

13 a $x = 1 \vee x = -2\frac{1}{3}$
b $x = -4 \vee x = 6$
c $x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{4}$
d $x = \frac{3}{4} \vee x = \frac{3}{5}$
e $x = 0 \vee x = 4$
f $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$

14 a *
(2, -6) en (0,33; -1,67)
b (-0,38; -3,18) en (1,52; -5,88)
c -1,46 en 5,46
d $AB \approx 2,40$
e $-6 < a < -5,88 \vee$
 $-5,88 < a < -3,18 \vee$
 $-3,18 < a < -1,67$

Hoofdstuk 2

1 toenemend stijgend op $\langle \leftarrow, -2 \rangle$ en $\langle 1, 2 \rangle$
afnemend stijgend op $\langle -2, -1 \rangle$ en $\langle 2, \rightarrow \rangle$
toenemend dalend op $\langle -1, 0 \rangle$
afnemend dalend op $\langle 0, 1 \rangle$

2 *

3 *

4 a 46 bezoekers
b *

5 a $\frac{3}{4}$ en $-\frac{2}{3}$
b $[0, 2]$

6 4

7 14,8 m/s

8 a 9 m/s en 14 m/s
b $t = 3$
5 m/s

9 a, b *

10 a 4,04
b $x \approx 1,29$ en $x \approx 12,86$
c (7,0; 11,5)

11 $t = 6,25$

- 12** a $f'(x) = -4x + 1$
 b $g'(x) = 18x + 6$
 c $h'(q) = -4q + 11$
 d $k'(x) = 2ax + b$

- 13** a $f'(x) = x^2 - 6x$
 b $g'(p) = 12p^2 + \frac{1}{3}p - 11$
 c $h'(x) = 12x^2 - 8x + 1$
 d $v'(t) = t^2 + 4t + a$

- 14** a 0,4
 b $x = -4 \vee x = 5$

Hoofdstuk 3

1 $\angle BAC \approx 37,6^\circ$ en $\angle ACE \approx 17,4^\circ$

2 22,95

3 $AC \approx 11,2$
 $AC \approx 1,7$

4 $PM \approx 3,39$

5 $\angle C \approx 94,1^\circ$

6 $AC = 4\frac{1}{2}$ en $CE = 2\frac{1}{2}$

7 $CE = 3\frac{1}{3}$

8 $1\frac{1}{4}\sqrt{2}$

9 $AB \approx 6,54$

10 23,17

Hoofdstuk 4

1 $p_1: y = 2x^2 + 4x - 1$
 $p_2: y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}$

2 $a = -5$ en $b = 28$

3 a $(1, 4)$ en $(0, 3\frac{3}{4})$
 b $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3\frac{3}{4}$

4 $(3, 8\frac{3}{4})$

5 a $c = 6$
 b $(3, 0)$ en $(6, 0)$

6 $(2, 10)$

7 $(-1, 0)$

8 $g(x) = -3,5(x + 5)^4 + 35$

9 a $x = \sqrt[3]{5}$ d $x = \sqrt[5]{-2}$
 b $x = 2 \vee x = -2$ e $x = -3$
 c $x = \sqrt[6]{3} \vee x = -\sqrt[6]{3}$ f $x = \sqrt[7]{-3} + 1$

10 a $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 7$
 b $x = 1 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = -2$
 c $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

11 a $x \approx 0,72 \vee x \approx 1,70$
 b $-1 < x < 0 \vee x > 5$
 c $x < -1,80 \vee -0,45 < x < 1,25$

12 min. is $f(-2,31) \approx -17,08$
 min. is $f(3,56) \approx -8,61$

13 44 m

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen
- de toets Ans, en fouten verbeteren
- breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen
- decimaal getal omzetten in een breuk

havo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 16

Formules, grafieken en tabellen

- formules invoeren en grafieken plotten
- functiewaarden berekenen op het grafiekenscherm en op het basisscherm
- tabellen maken en de tabelinstelling veranderen

havo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 40

Toppen en snijpunten

- toppen en snijpunten van grafieken
- berekenen van nulpunten

havo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 43

Helling en hellinggrafiek

- de richtingscoëfficiënt van een raaklijn
- hellinggrafiek plotten

havo B deel 1
hoofdstuk 2
bladzijde 83

Het gebruik van Ans en lettergeheugens

- de toets Ans
- het gebruik van lettergeheugens

havo B deel 1
hoofdstuk 3
bladzijde 104

Allerlei

- specifieke mogelijkheden van het merk/type GR
-

Trefwoordenregister

A

abc-formule 37
afgeleide 90
– van $f(x) = ax^n$ 92
– functie 90
 numerieke – 83
afnemende daling 53
afnemende stijging 53
algebraïsch oplossen 37

B

beeld 40
bereken exact de
 oplossingen 37
bergparabool 40
bewijs 107
– van de *abc*-formule 39

C

cirkelsector 128
cirkelsegment 128
constante daling 54
constante stijging 54
cosinusregel 114

D

dalend 52
daling
 afnemende – 53
 constante – 54
 toenemende – 53
dalparabool 40
differentie 17, 66
differentiequotiënt 66
– bij een
 functievoorschrift 68
– bij een grafiek 66
differentiëren 91
discriminant 37
dubbelproduct 89

E

eliminieren 27
– door optellen en
 aftrekken 30
– door substitutie 33
evenwijdige lijnen 10
exact de oplossingen
 berekenen 37
extreem 165
extreme waarde 165

F

formule van een lijn
– opstellen 11
– door twee gegeven
 punten 16
functievoorschrift 40
functiewaarde 40

G

gelijkvormigheid 118, 120
 vergelijkingen bij – 122
gemiddelde snelheid 64
gemiddelde
 verandering 64
gesloten interval 53
getallenpaar 22
goniometrische
 verhoudingen 102, 104
grafiek
– plotten 40
– schetsen 40
– tekenen 40
– van een
 machtsfunctie 149
grafisch-numeriek
 oplossen 161

H

helling van een
– grafiek 74
– lijn 9

hellingfunctie 90
hellinggrafiek 77
– plotten 83
hogeregraadsvergelijking
 159
hogeremachtswortel 156
– herleiden 158
horizontaal
 verschuiven 138

I

interval 52
 gesloten – 53
 open – 52

K

kwadratische
 vergelijking 36

L

langs algebraïsche weg 37
Leibniz, Gottfried
 Wilhelm 84
lengte x stellen 122
lineair verband 9
lineaire
– formule 9
– functie 9
– vergelijking met twee
 variabelen 21

M

machtsformule 149
machtsfunctie 149
maximum 165
merkwaardige
 producten 89
minimum 165
modelvorming 168

N

nulpunt 42
 numerieke afgeleide 83

O

ongelijkheden
 oplossen 162
 ontbinden in factoren 35
 open interval 52
 origineel 40

P

parabool 40
 plotten van de grafiek 40
 product-som-methode 35
 punt van symmetrie 149

R

raaklijn 73
 reële getallen 53
 regels voor de
 afgeleide 90, 92
 richtingscoëfficiënt 9
 Rijksdriehoeksmeting 112

S

schetsen van de grafiek 40
 sinusregel 107
 – in stomphoekige
 driehoeken 109

snelheid op één
 moment 64, 70
 somregel van het
 differentiëren 91
 standaardfunctie 149
 standaardgrafiek 149
 stapgrootte 56
 stelsel van twee lineaire
 vergelijkingen 27
 stijgend 52
 stijging
 afnemende – 53
 constante – 54
 toenemende – 53
 substitueren 33

T

tekenen van de grafiek 40
 tijd-afstandgrafiek 64
 toenamediaqram 56
 toenemende daling 53
 toenemende stijging 53
 top van de parabool 42
 – $y = ax^2 + bx + c$ 145
 – $y = a(x - d)(x - e)$ 142
 – $y = a(x - p)^2 + q$ 139
 transformatie 153
 translatie 150
 tweedegraadsvergelijking
 36
 tweedemachtswortel 156

U

uitdrukken in 18
 uiterste waarde 165

V

vergelijking van een
 lijn 17
 vermenigvuldigen ten
 opzichte van de x -as 152
 verschuiven 138
 horizontaal – 138
 verticaal – 138
 voldoen 22
 vrijmaken 22

W

wiskundig model 167

Y

$y = ax^2 + bx + c$ 145
 $y = a(x - d)(x - e)$ 142
 $y = a(x - p)^2 + q$ 139

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Oscar Casander, Arnhem

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Cartografie: Van Oort redactie en kartografie, Almere

Foto's

iStockphoto: p. 6-7

Shutterstock: p. 14, 23, 24, 50-51, 61, 63, 100-101, 136-137

Nationale Beeldbank: p. 31

Fietsverhuur Jan van Vlieland: p. 47

Getty Images: p. 84, 99

ANP / Ton Toemen Fotografie: p. 86

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch
ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer
13, 9700 VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleenen.

0 / 24



© 2024 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06455-6

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten



Noordhoff



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-06455-6

