

getal & ruimte

B



Noordhoff

Dit boek is van jou!

Naam

Klas

Getal & Ruimte

Leerboek
havo B deel 2

Dertiende editie, 2025

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek havo B deel 2

Samen met de delen 1 en 3 van havo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma havo wiskunde B, zoals dat met ingang van 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak havo wiskunde B is 360 uur. Elk van de delen 1, 2 en 3 bevat vier hoofdstukken, waarbij in het laatste hoofdstuk van deel 3 de examentraining aan bod komt.

De vier hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 25 uur en bevatten leerstof die in het Centraal Eindexamen wordt getoetst.

In de hoofdstukken komen de volgende subdomeinen aan bod.

Hoofdstuk 5 B1 en B2

Hoofdstuk 6 D3 en D4

Hoofdstuk 7 C2

Hoofdstuk 8 B4

Afhankelijk van de verdeling van de studielast over het vierde en vijfde leerjaar kan deel 2 geheel of gedeeltelijk in de tweede helft van het vierde leerjaar worden doorgenomen.

De digitale leeromgeving van Getal & Ruimte

Bij sommige gedeeltes van het boek kunnen opgaven ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback.

Tevens kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

In het docentenmateriaal staan studiewijzers die een indicatie geven van de hoeveelheid leerstof die per week kan worden doorgewerkt. Verder zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

zomer 2024

Legenda

V1 Voorkennisopgave

Een opgave over een onderwerp uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk.

O1 Oriënterende opgave

Een opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

2 Gewone opgave

Een opgave waarmee je oefent met wat er in de theorie aan bod is geweest.

R3 Reflectie-opgave

Een opgave waarmee je terugkijkt op een voorgaand probleem, of waarmee je op een andere manier naar voorgaande stof kijkt.

A4 Afsluitende opgave

Een opgave waarmee je oefent op het beoogde beheersingsniveau.

E5 Extra opgave

Een opgave die je extra uitdaagt.

□ Kennis- en vaardighedencheck

Je controleert of je de kennis en/of vaardigheid beheerst door de bijbehorende opgave te maken.

C1 Checkopgave

Een opgave waarmee je controleert of je de kennis en/of vaardigheid goed beheerst.

Route-aanduiding

1 Een opgave van de basisroute.



2 Een opgave van de middenroute.



3 Een opgave van de uitdagende route.



NB: De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder routeaanduiding

In de Kennis- en vaardigheidentest en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen routeaanduiding.

Inhoud

5	Functies en vergelijkingen	6	7	Lijnen en cirkels	88
5.1	Gebroken functies	8	7.1	Lijnen en hoeken	90
5.2	Wortelfuncties	13	7.2	Afstanden bij punten en lijnen	97
5.3	Machten met negatieve en gebroken exponenten	21	7.3	Cirkelvergelijkingen	105
5.4	Exponentiële functies	27	7.4	Afstanden en raaklijnen bij cirkels	112
5.5	Logaritmen	35		Kennis- en vaardighedentest	118
	Kennis- en vaardighedentest	42		Gemengde opgaven	120
	Gemengde opgaven	44			
6	De afgeleide functie	46	8	Goniometrische functies en vergelijkingen	122
6.1	Raaklijnen en toppen	48	8.1	De eenheidscirkel en radialen	124
6.2	De afgeleide van machtsfuncties	59	8.2	Formules van sinusoiden opstellen	134
6.3	De kettingregel	68	8.3	Sinusoiden tekenen	145
6.4	Toepassingen van de afgeleide	75	8.4	Goniometrische vergelijkingen	151
	Kennis- en vaardighedentest	84	8.5	Toepassingen van sinusoiden	159
	Gemengde opgaven	86		Kennis- en vaardighedentest	168
				Gemengde opgaven	170
				Antwoorden Kennis- en vaardighedentests	173
				Overzicht GR-modules	176
				Trefwoordenregister	177
				Verantwoording	179



5

Functies en vergelijkingen

Veel grutto's trekken in juli vanuit Nederland naar het zuiden. Sommige vliegen zonder te stoppen door naar West-Afrika, een tocht van 5000 km. Voordat de grutto's vertrekken, eten ze zich helemaal vol. Dat is nodig omdat ze tijdens een non-stop vlucht van 5000 km de helft van hun gewicht verliezen.

De vliegsnelheid v van een grutto is gegeven door de formule

$v = \sqrt{\frac{40G}{A}}$. Hierin is v in m/s, G het gewicht in kg en A de vleugeloppervlakte in m^2 .

Hoeveel uur doet een grutto van 300 gram en met een vleugeloppervlakte van 250 cm^2 over de non-stop vlucht?

Neem aan dat de gemiddelde snelheid het gemiddelde is van de snelheid aan het begin en aan het eind van de tocht.

5.1 Gebroken functies

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met transformaties van hyperbolen.
- Je kunt gebroken vergelijkingen algebraïsch oplossen.

01

□ ⊗ *

a Plot de grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$. Neem zowel x als y tussen -5 en 5 .

Vul in.

b Als je x steeds groter kiest (bijvoorbeeld $100, 1000, \dots$), dan valt

de grafiek van f op den duur vrijwel samen met de

c Als je x steeds kleiner kiest (bijvoorbeeld $-100, -1000, \dots$), dan

valt de grafiek van f op den duur vrijwel samen met de

d Als x positief is en x nadert steeds dichterbij 0 , dan valt de grafiek

van f op den duur vrijwel samen met de

e Als x negatief is en x nadert steeds dichterbij 0 , dan valt de grafiek

van f op den duur vrijwel samen met de

f Licht toe dat $f(0)$ niet berekend kan worden. Gebruik zo nodig de tekst hiernaast.

$$\frac{12}{3} = 4, \text{ want } 4 \cdot 3 = 12.$$

$$\frac{-18}{3} = -6, \text{ want } \dots$$

$$\frac{0}{6} = 0, \text{ want } \dots$$

$$\frac{3}{0} = \dots, \text{ want } \dots$$

Theorie A Asymptoten van hyperbolen

Functies als $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{5}{x+3}$ en $h(x) = 5 + \frac{x}{2x-1}$ zijn voorbeelden van **gebroken functies**. In een gebroken functie komt de variabele (ook) in de noemer van de breuk voor.

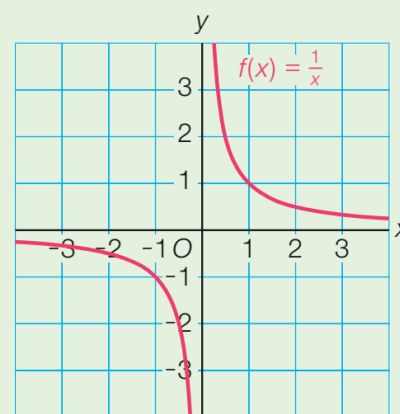
De eenvoudigste gebroken functie is de standaardfunctie $f(x) = \frac{1}{x}$.

De grafiek van deze functie is een standaardgrafiek en is een **hyperbool**.

Je mag een standaardgrafiek zonder toelichting tekenen en schetsen.

Omdat $f(0)$ niet kan, bestaat de grafiek uit twee losse delen. Deze delen heten de **takken van de hyperbool**.

Bij de grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$ spelen de x -as en de y -as een belangrijke rol. Neem je x heel groot of heel klein, bijvoorbeeld 1000 of -1000, dan ligt het bijbehorende punt van de grafiek heel dicht bij de x -as. De x -as (de lijn $y = 0$) is de **horizontale asymptoot** van de grafiek van f . In de figuur hiernaast zie je dat de y -as (de lijn $x = 0$) de **verticale asymptoot** van de grafiek is.



De grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$ heeft de x -as en de y -as als asymptoot.

Ook de grafiek van $y = \frac{1}{x+1} - 4$ heeft twee asymptoten. De formules van deze asymptoten vind je door te kijken hoe de grafiek uit die van $y = \frac{1}{x}$ ontstaat.

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (-1, -4)} y = \frac{1}{x+1} - 4$$

De asymptoten verschuiven met de grafiek mee, dus de asymptoten van de hyperbool $y = \frac{1}{x+1} - 4$ zijn de lijnen $x = -1$ en $y = -4$.

Voorbeeld

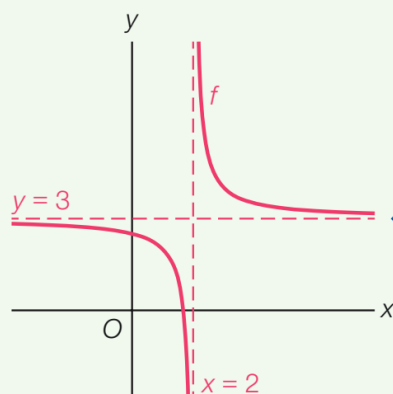
Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$.

- Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek?
- Schets de grafiek van f .

Uitwerking

a $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (2, 3)} f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

b



Teken de asymptoten als stippellijnen en zet de formules erbij.

2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$.

- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek?
b Schets de grafiek van f .

3 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x-4} + 2$.

- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek?
b Schets de grafiek van f .

A4 Vermeld hoe de grafiek van de functie ontstaat uit de standaardgrafiek en schets de grafiek.

a $f(x) = \frac{1}{x-5} + 6$

b $g(x) = \frac{1}{x+1} - 3$

A5 Hoe ontstaat de grafiek van $g(x) = \frac{1}{x-2} + 5$ uit die van $f(x) = \frac{1}{x+3} - 4$?

⊗*

O6 Bij de vergelijking $\frac{x}{2} = \frac{x+4}{x}$ hoort de verhoudingstabel

x	$x+4$
2	x

.

⊗*

- a** Licht toe dat uit deze verhoudingstabel de vergelijking $x^2 - 2x - 8 = 0$ volgt.
b Bereken x .

Theorie B Gebroken vergelijkingen

De vergelijking $\frac{x+2}{x+1} = \frac{6}{x+3}$ is een **gebroken vergelijking** omdat de variabele (ook) in de noemer van een breuk voorkomt. Je kunt deze vergelijking algebraïsch oplossen met kruislings vermenigvuldigen. Dat gaat als volgt.

$$\frac{x+2}{x+1} = \frac{6}{x+3}$$

kruislings vermenigvuldigen

$$(x+2)(x+3) = 6(x+1)$$

$$x^2 + 5x + 6 = 6x + 6$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 1$$

Ook $\frac{x+3}{2x-3} = 5$ is een gebroken vergelijking. Door het linker- en rechterlid te vermenigvuldigen met $2x-3$, krijg je $x+3 = 5(2x-3)$. Hieruit volgt $x = 2$.

$$\frac{\text{teller}}{\text{noemer}} \times \text{noemer} = \text{teller}$$

Bij de gebroken vergelijking $\frac{x+3}{x+1} = 0$ bedenk je dat een breuk nul is als de teller nul is.

Dus uit $\frac{x+3}{x+1} = 0$ volgt $x+3 = 0$, dus de oplossing is $x = -3$.

Een breuk is nul als de teller nul is en de noemer niet.

$$\frac{0}{1} = 0 \quad \frac{1}{0} \text{ kan niet}$$

$$\frac{0}{0} \text{ kan niet} \quad \frac{0}{10} = 0$$

REGELS VOOR HET ALGEBRAÏSCH OPLOSSEN VAN GEBROKEN VERGELIJKINGEN

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ geeft } AD = BC \quad \frac{A}{B} = C \text{ geeft } A = BC \quad \frac{A}{B} = 0 \text{ geeft } A = 0$$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{x}{x+4} = \frac{3}{x+2}$

b $\frac{2x}{x-1} = 3x+4$

Uitwerking

a $\frac{x}{x+4} = \frac{3}{x+2}$

$$x(x+2) = 3(x+4)$$

$$x^2 + 2x = 3x + 12$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x+3)(x-4) = 0$$

$$x = -3 \vee x = 4$$

b $\frac{2x}{x-1} = 3x+4$

$$2x = (x-1)(3x+4)$$

$$2x = 3x^2 + 4x - 3x - 4$$

$$-3x^2 + x + 4 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 = 49, \text{ dus } \sqrt{D} = 7$$

$$x = \frac{-1 \pm 7}{-6} = -1 \vee x = \frac{-1 - 7}{-6} = 1\frac{1}{3}$$

R7 Zie het voorbeeld.



Welke regel uit het rode kader boven het voorbeeld wordt gebruikt bij het oplossen van de vergelijking van voorbeeld a? En welke regel wordt gebruikt bij het oplossen van de vergelijking van voorbeeld b?

8 Bereken exact de oplossingen.



a $\frac{x+3}{x-1} = \frac{10}{x}$

c $\frac{x+3}{x-1} = 1\frac{1}{2}$

e $\frac{2x-5}{4-x} = \frac{x+2}{3x-4}$

b $\frac{x-1}{x} = 2$

d $\frac{2x+7}{x-2} = 0$

f $\frac{3x-1}{2x+1} = x+5$

A9 Bereken exact de oplossingen.



a $\frac{2x+3}{x+1} = \frac{2x+2}{x-1}$

c $\frac{3x^2+6x}{x^2-8} = 0$

e $\frac{3x+4}{x-1} = \frac{x+18}{x}$

b $\frac{3x^2-10}{x^2-2} + 3 = 5$

d $\frac{6x+2}{x-3} = 2x+6$

f $\frac{x^2+2x-15}{x^2-3} = 0$

A10 De grafiek van $f(x) = \frac{ax}{bx-3}$ gaat door de punten $A(1, -4)$ en $B(3, 4)$.

***** Bereken exact de waarden van a en b .

A11 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x-8} + 2$.

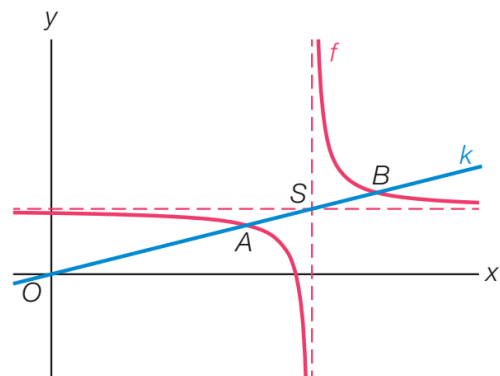
□ ⊗ * Het functievoorschrift van f is te schrijven als

$$f(x) = \frac{2x-15}{x-8}.$$

a Toon dit aan.

De asymptoten van de grafiek van f snijden elkaar in het punt S . De lijn k door O en S snijdt de grafiek van f in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.

b Bereken exact de coördinaten van A en B .



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met transformaties van hyperbolen.

☐ Ik kan gebroken vergelijkingen algebraïsch oplossen.

► **OPGAVE C1**
THEORIE A

► **OPGAVE C2**
THEORIE B

C1 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x+3} + 1$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek?

b Schets de grafiek van f .

C2 Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{2x^2-18}{x^2+5} = 0$

b $\frac{x-1}{x+3} = \frac{x+8}{x}$

c $\frac{x+2}{x-1} = 3x-2$

Antwoorden

C1 a translatie $(-3, 1)$

b *

C2 a $x = 3 \vee x = -3$

b $x = -2$

c $x = 0 \vee x = 2$

5.2 Wortelfuncties

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met transformaties van de grafiek van een wortelfunctie.
- Je kunt werken met het domein en het bereik van een wortelfunctie.
- Je kunt wortelvergelijkingen algebraïsch oplossen.

012

□ ⊗ *

- a Plot de grafiek van $y = \sqrt{x}$.
Welke waarden kan x aannemen? En welke waarden kan y aannemen?
- b Plot de grafiek van $y = \sqrt{x+2} + 3$.
Welke waarden kan x aannemen? En welke waarden kan y aannemen?
- c Hoe ontstaat de grafiek van $y = \sqrt{x+2} + 3$ uit die van $y = \sqrt{x}$?

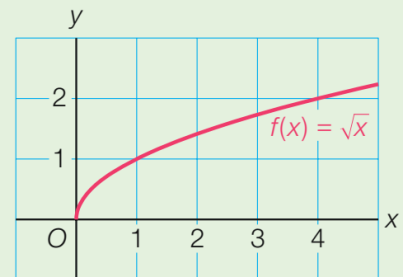
Theorie A Domein en bereik van wortelfuncties

De eenvoudigste **wortelfunctie** is de standaardfunctie $f(x) = \sqrt{x}$. De bijbehorende standaardgrafiek is een halve parabool die de y -as in het **randpunt** $O(0, 0)$ raakt. Je mag voor x alleen getallen groter dan of gelijk aan 0 nemen. We zeggen dat het **domein** van $f(x) = \sqrt{x}$ het interval $[0, \rightarrow)$ is. Notatie: $D_f = [0, \rightarrow)$.

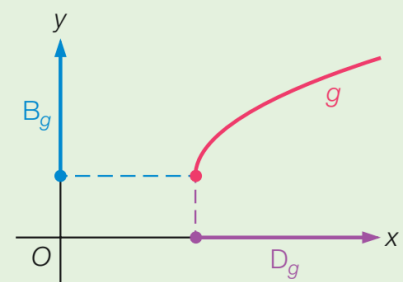
De functie $f(x) = \sqrt{x}$ kan alleen waarden groter dan of gelijk aan 0 aannemen. We zeggen dat het **bereik** van f het interval $[0, \rightarrow)$ is. Notatie: $B_f = [0, \rightarrow)$.

Het domein gaat dus over de waarden van x en het bereik over de waarden van y . Zie de figuur hiernaast.

Het domein van een functie bestaat uit alle originelen.
Het bereik van een functie bestaat uit alle beelden.



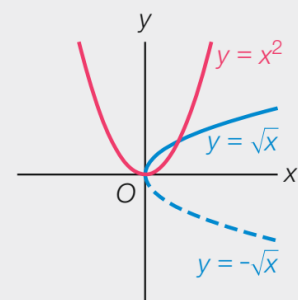
De grafiek van $y = \sqrt{x}$ is een standaardgrafiek.



Informatief Het verband tussen de grafieken van $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$

Je weet dat de grafiek van $y = x^2$ een parabool is die de x -as raakt in de oorsprong. Verwissel je x en y , dan krijg je de parabool $x = y^2$ die de y -as raakt in de oorsprong.

Uit $x = y^2$ volgt $y^2 = x$ en dit geeft $y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}$. Dus de grafiek van $y = \sqrt{x}$ is een halve parabool die de y -as raakt in de oorsprong.



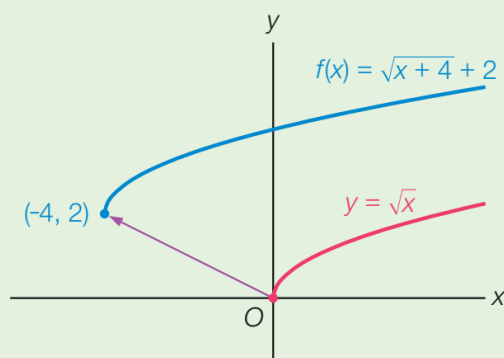
Door gebruik te maken van transformaties van de standaardgrafiek zijn grafieken met formules van de vorm $y = a + b\sqrt{x + c}$ te schetsen. Het effect van transformaties op randpunt, domein en bereik zie je hieronder.

Het ontstaan van de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{x + 4} + 2$ en $g(x) = -2\sqrt{x - 3}$ uit de standaardgrafiek.

$$y = \sqrt{x}$$

$$\downarrow \text{translatie } (-4, 2)$$

$$f(x) = \sqrt{x + 4} + 2$$



Van de grafiek van f is het randpunt $(-4, 2)$, $D_f = [-4, \rightarrow)$ en $B_f = [2, \rightarrow)$.

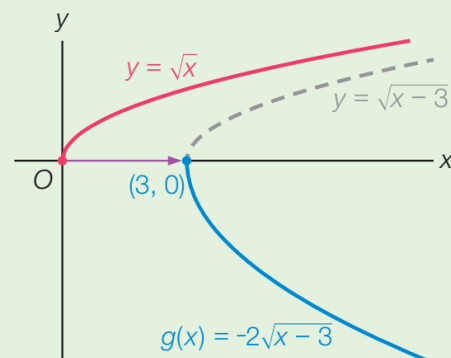
$$y = \sqrt{x}$$

$$\downarrow \text{translatie } (3, 0)$$

$$y = \sqrt{x - 3}$$

$$\downarrow \times -2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}$$

$$g(x) = -2\sqrt{x - 3}$$



Van de grafiek van g is het randpunt $(3, 0)$, $D_g = [3, \rightarrow)$ en $B_g = \langle \leftarrow, 0]$.

Afspraak

In een schets van de grafiek van een wortelfunctie vermeld je de coördinaten van het randpunt.

13 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x - 3} - 2$ en $g(x) = -2\sqrt{x + 3}$.



- Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit de standaardgrafiek?
- Schets de grafieken van f en g .
- Geef D_f , B_f , D_g en B_g .

14 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$ en $g(x) = -\sqrt{x + 5}$.



- Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit de standaardgrafiek?
- Schets de grafieken van f en g .
- Geef D_f , B_f , D_g en B_g .

A15 Geef van elk van de volgende functies de coördinaten van het randpunt van de grafiek. Geef ook het domein en het bereik.

- a** $f(x) = \sqrt{x+5} + 3$ **d** $k(x) = 3\sqrt{x} + 1$
b $g(x) = \sqrt{x+3} - 7$ **e** $l(x) = -\sqrt{x-1} - 1$
c $h(x) = -2\sqrt{x+1}$ **f** $m(x) = -3 + \sqrt{x}$

E16 **a** Hoe ontstaat de grafiek van $f(x) = \sqrt{4x-12} - 5$ uit die van $g(x) = \sqrt{x}$?

b Hoe ontstaat de grafiek van $h(x) = \frac{5}{8-2x} + 3$ uit die van $k(x) = \frac{1}{x}$?

$$\sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$$

O17 Gegeven is de functie $f(x) = 5 - \sqrt{2x-6}$.

- a** Welke vergelijking moet je oplossen om de x -coördinaat van het randpunt van de grafiek van f te vinden? Bereken de coördinaten van het randpunt.
b Plot de grafiek van f en geef het domein en het bereik van f .

Theorie B De grafiek van een wortelfunctie

In de vorige theorie heb je gezien hoe je met behulp van transformaties grafieken met formules van de vorm $y = a + b\sqrt{x+c}$ kunt schetsen. Vanaf nu mag je voor het schetsen van de grafiek van een wortelfunctie de GR gebruiken.

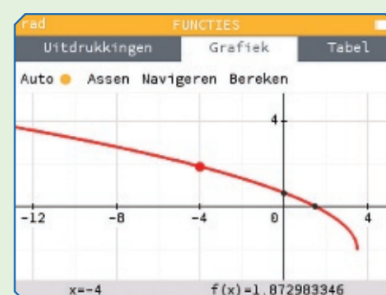
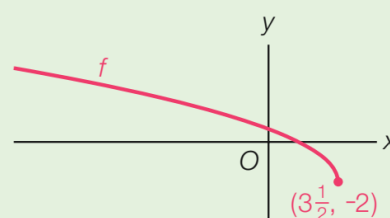
Hiernaast zie je een plot van de grafiek van de functie $f(x) = -2 + \sqrt{7-2x}$.

De coördinaten van het randpunt van de grafiek van f vind je door eerst de uitdrukking onder het wortelteken gelijk te stellen aan nul. Dit geeft $7-2x=0$

$$\begin{aligned} -2x &= -7 \\ x &= 3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$f(3\frac{1}{2}) = -2$, dus het randpunt is $(3\frac{1}{2}, -2)$.

Voor het bepalen van het domein en het bereik gebruik je een schets zoals hiernaast. Je krijgt $D_f = \langle \leftarrow, 3\frac{1}{2} \rangle$ en $B_f = [-2, \rightarrow)$.



In het voorbeeld op de volgende bladzijde zie je hoe het domein en het bereik een rol spelen bij vragen die bij wortelfuncties kunnen voorkomen.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - \sqrt{6 - 2x}$.

- a Bereken voor welke waarden van x geldt $f(x) > -2$.
- b Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x \geq -5$.

Aanpak

- a Om de ongelijkheid op te lossen, gebruik je een schets van de grafiek van f . Dus bereken eerst de coördinaten van het randpunt.

Uitwerking

a $6 - 2x = 0$

$-2x = -6$

$x = 3$

$f(3) = 1$, dus randpunt $(3, 1)$.

Los op $1 - \sqrt{6 - 2x} = -2$.

Invoeren van de formules $y = 1 - \sqrt{6 - 2x}$ en $y = -2$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = -1,5$.

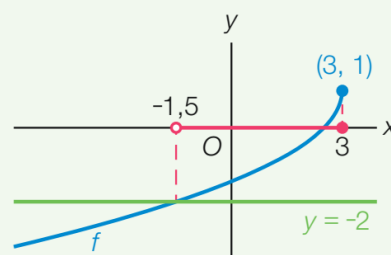
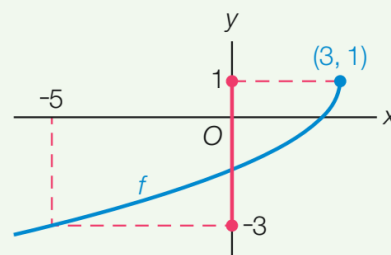
Zie de schets hiernaast.

$f(x) > -2$ geeft $-1,5 < x \leq 3$

b $f(-5) = -3$

Zie de schets hiernaast.

$x \geq -5$ geeft $-3 \leq f(x) \leq 1$



R18 Zie het voorbeeld.



- a Wordt er bij voorbeeld a rekening gehouden met het domein of met het bereik? Licht toe.
- b Wordt er bij voorbeeld b rekening gehouden met het domein of met het bereik? Licht toe.

19 Schets van elk van de volgende functies de grafiek en geef het domein en het bereik.



a $f(x) = 3 + \sqrt{8 - 4x}$

c $h(x) = 5 - \sqrt{2x + 6}$

b $g(x) = 3 + \sqrt{4x - 8}$

d $k(x) = -2\sqrt{x + 3}$

20 Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \sqrt{2x + 5}$.



- a Bereken voor welke waarden van x geldt $f(x) > -2$.
- b Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x < 22$.

A21 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{7-3x} - 4$.

- ⊗ *** **a** Bereken voor welke waarden van x geldt $f(x) > -2$.
b Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x \geq -3$.

A22 Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \sqrt{x^2 - 4}$.

- ⊗** De grafiek van f heeft twee randpunten.
a Bereken exact de coördinaten van de randpunten.
b Geef het domein en het bereik van f .

A23 Gegeven is de functie $f(x) = 6 - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

- *** De grafiek van f heeft geen randpunten.
a Toon dit aan.
b Geef het domein en bereken het bereik van f .

A24 Het randpunt van de grafiek van $f(x) = 4 - \sqrt{5+ax}$ ligt op de

- *** lijn $k: y = 2x - 1$.
Bereken exact de waarde van a .

O25 **a** Gegeven is de vergelijking $\sqrt{2x-5} = 3$.

- ⊗ *** Licht toe dat hieruit volgt $2x - 5 = 9$ en los deze vergelijking op.
b Gegeven is de vergelijking $\sqrt{2x-5} = -3$.
Licht toe dat deze vergelijking geen oplossing heeft.

Theorie C Wortelvergelijkingen

De vergelijking $\sqrt{2x-3} = 5$ is een voorbeeld van een **wortelvergelijking**.

Bij het algebraïsch oplossen van deze vergelijking kwadrateer je het linker- en het rechterlid. Zo verdwijnt het wortelteken. Je krijgt

$$\sqrt{2x-3} = 5 \quad \text{Kwadrateer het linker- en het rechterlid.}$$

$$2x - 3 = 25$$

$$2x = 28$$

$$x = 14$$

Bij de vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$ verdwijnt het wortelteken niet als je het linker- en rechterlid kwadrateert. Zorg er daarom voor dat in het linkerlid alleen $\sqrt{x}$ komt te staan. Dit noemen we het **isoleren** van de wortelvorm.

Je krijgt $\sqrt{x} = 12 - x$. Kwadrateren geeft vervolgens $x = (12 - x)^2$

$$x = 144 - 24x + x^2$$

$$x^2 - 25x + 144 = 0$$

$$(x - 9)(x - 16) = 0$$

$$x = 9 \vee x = 16$$

De getallen 9 en 16 zijn echter niet beide een oplossing van de oorspronkelijke vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$.
 Invullen van $x = 9$ in de vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$ geeft $9 + \sqrt{9} = 12$ en dit klopt.
 Invullen van $x = 16$ in de vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$ geeft $16 + \sqrt{16} = 12$ en dit klopt niet.
 Daarom is $x = 9$ de enige oplossing die **voldoet**.

Door bij een wortelvergelijking te kwadrateren, ontstaat er een nieuwe vergelijking. Oplossingen van deze nieuwe vergelijking voldoen mogelijk niet aan de oorspronkelijke vergelijking. Controleer daarom of de oplossingen van de nieuwe vergelijking voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking.

Het algebraïsch oplossen van wortelvergelijkingen gaat in drie stappen: isoleren, kwadrateren en controleren.

Werkschema: wortelvergelijkingen algebraïsch oplossen

- 1 **Isoleer** de wortelvorm, dus zet de wortelvorm apart.
- 2 **Kwadrateer** het linker- en rechterlid en los de verkregen vergelijking op.
- 3 **Controleer** of de oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking.

Vervang je in een vergelijking de variabele door een getal en klopt het, dan zeggen we dat het getal voldoet aan de vergelijking. Het getal is dus oplossing van de vergelijking.
 Vul je een getal in en klopt het niet, dan zeggen we dat het getal niet aan de vergelijking voldoet.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $4\sqrt{2x-1} = x+3$ **b** $x - \sqrt{x+1} = 5$

Uitwerking

<p>a $4\sqrt{2x-1} = x+3$ kwadrateren geeft $16(2x-1) = (x+3)^2$ $32x - 16 = x^2 + 6x + 9$ $x^2 - 26x + 25 = 0$ $(x-1)(x-25) = 0$ $x = 1 \vee x = 25$</p>	<p>b $x - \sqrt{x+1} = 5$ $x - 5 = \sqrt{x+1}$ kwadrateren geeft $(x-5)^2 = x+1$ $x^2 - 10x + 25 = x+1$ $x^2 - 11x + 24 = 0$ $(x-3)(x-8) = 0$ $x = 3 \vee x = 8$ $x = 3$ voldoet niet, dus $x = 8$.</p>
--	---

R26 Zie de theorie op de vorige bladzijde.



- a** Welke vergelijking krijg je als je bij het oplossen van $x + \sqrt{x} = 12$ direct gaat kwadrateren, dus zonder eerst de wortelvorm te isoleren?

Zie het voorbeeld hierboven.

- b** Controleer bij voorbeeld a dat $x = 1$ en $x = 25$ beide voldoen.
c Controleer bij voorbeeld b dat $x = 3$ niet voldoet en $x = 8$ wel.

27 Bereken exact de oplossingen.



a $x = \sqrt{5x + 14}$

c $5\sqrt{x} = x$

b $3x = \sqrt{8x + 20}$

d $3x = \sqrt{18x + 72}$

28 Bereken exact de oplossingen.



a $4 - 3\sqrt{x} = 2$

c $2x - 5\sqrt{x} = 3$

b $5\sqrt{x} - 2x = 0$

d $5 - 2\sqrt{x} = 3$

A29 Bereken exact de oplossingen.



a $2x + \sqrt{x} = 10$

c $10 - x\sqrt{x} = 2$

b $x + 2\sqrt{6 - 5x} = 6$

d $-3 + \sqrt{7 + x} = \frac{1}{3}x - 4$

A30 Bereken exact de oplossingen.



a $\frac{3}{\sqrt{2x+1}} - 1 = 0$

c $\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 3\sqrt{x} - \frac{15}{x}$

b $\frac{3}{4\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2}$

d $\frac{3x}{x-10} = 2\sqrt{x}$

A31 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x-5}$ en voor



elke waarde van p de lijn $y = px$.

In de figuur hiernaast zie je dat de lijn met $p = \frac{1}{3}$ de grafiek van f snijdt in de punten A en B , maar dat de lijn met $p = \frac{1}{2}$ geen punten met de grafiek van f gemeenschappelijk heeft.

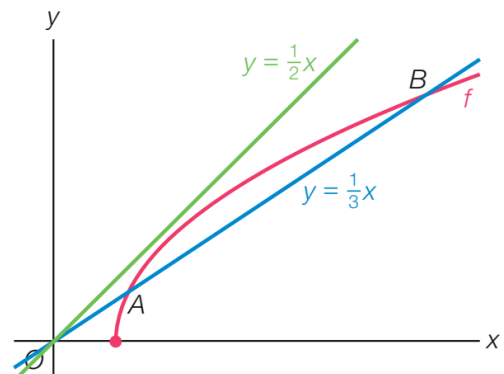
a Bereken exact de coördinaten van A en B .

De lijn met $p = 0$ heeft één punt met de grafiek van f gemeenschappelijk.

b Licht dit toe.

Er is nog een lijn van de vorm $y = px$ die één punt met de grafiek van f gemeenschappelijk heeft.

c Bereken exact voor welke waarde van p dat het geval is.



A32 Gegeven is de functie $f(x) = 4 - \sqrt{3-2x}$.



Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) > -1$.

A33 Gegeven is de functie $f(x) = 2 + \sqrt{7-2x}$.

*** *** Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) < x$.

E34 Los exact op $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x-5}$.



Omdat het invoeren van oplossingen alleen door kwadrateren kan plaatsvinden, kun je de gevonden x -waarden controleren bij de vergelijking die vlak boven het kwadrateren staat.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan werken met transformaties van de grafiek van een wortelfunctie.
- ☐ Ik kan werken met het domein en het bereik van een wortelfunctie.
- ☐ Ik kan wortelvergelijkingen algebraïsch oplossen.

► OPGAVE C3
THEORIE A
► OPGAVE C4
THEORIE B
► OPGAVE C5
THEORIE C

- C3** Gegeven zijn de functies $f(x) = -\sqrt{x+2}$ en $g(x) = 4\sqrt{x} - 1$.
- a** Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit de standaardgrafiek?
 - b** Schets de grafieken van f en g .
 - c** Geef D_f , B_f , D_g en B_g .

- C4** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \sqrt{2x+5}$.
- a** Bereken voor welke waarden van x geldt $f(x) < 3$.
 - b** Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x < 10$.

- C5** Bereken exact de oplossingen.
- a** $x = 2\sqrt{x+3}$
 - b** $2x - \sqrt{x} = 21$

Antwoorden

- C3 a** $\times -1$ t.o.v. de x -as en
translatie $(-2, 0)$
 $\times 4$ t.o.v. de x -as en dan
translatie $(0, -1)$
- b** *
- c** $D_f = [-2, \rightarrow)$, $B_f = \langle \leftarrow, 0]$,
 $D_g = [0, \rightarrow)$, $B_g = [-1, \rightarrow)$

- C4 a** $-2,5 \leq x < -0,5$
b $1 \leq f(x) < 6$
- C5 a** $x = 6$
b $x = 12\frac{1}{4}$

5.3 Machten met negatieve en gebroken exponenten

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met machten met negatieve en gebroken exponenten.

Voorkennis Machten herleiden

Bij machten gelden de volgende rekenregels.

Rekenregels voor machten

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	Bij het herleiden van een product van twee machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten bij elkaar op.
$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	Bij het herleiden van een quotiënt van twee machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af.
$(a^p)^q = a^{pq}$	Bij het herleiden van een macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten met elkaar.
$(ab)^p = a^p b^p$	Bij het herleiden van een macht van een product krijg je een product van machten.

Hieronder zie je enkele herleidingen waarbij deze regels zijn gebruikt.

$$(-3x^3)^4 = (-3)^4 \cdot (x^3)^4 = 81x^{12}$$

$$(-3x^2)^3 = (-3)^3 \cdot (x^2)^3 = -27x^6$$

$$(2x^3)^2 - (x^2)^3 = 2^2 \cdot (x^3)^2 - x^6 = 4x^6 - x^6 = 3x^6$$

$$\frac{12x^3y}{3xy} = 4x^2$$

$$x^5 \cdot x^2 + x^5 + x^2 = x^7 + x^5 + x^2$$

V1 Herleid.

a $2x^3 \cdot 3x^2$

b $(x^2y)^3$

c $-2x^4y^3 \cdot -3xy$

d $(-4xy^4)^2$

e $(3x)^2 \cdot (2x^2)^3$

f $(3x^3)^2 + (-2x^2)^3$

V2 Herleid.

a $\frac{12x^6}{4x^2}$

b $\frac{5x^{10}}{15x^5}$

c $\frac{24x^4y^2}{6xy}$

d $\frac{-15x^6y}{5x^2y}$

e $\frac{(2xy)^3}{(3xy)^2}$

f $\left(\frac{9x^4}{x}\right)^2$

O35 In deze opgave is $a \neq 0$.



a Vul in: $\frac{a^5}{a^5} = a^{\dots}$. Gebruik de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.

b Licht toe dat $a^0 = 1$.

c Vul in: $\frac{1}{a^5} = \frac{a^{\dots}}{a^5} = a^{\dots}$.

Theorie A Machten met negatieve exponenten

Uit de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ volgt $\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0$.

Je weet dat ook geldt $\frac{a^p}{a^p} = 1$ voor $a \neq 0$.

Hieruit volgt dat $a^0 = 1$ voor $a \neq 0$.

Uit $a^0 = 1$ en $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ volgt $\frac{1}{a^q} = \frac{a^0}{a^q} = a^{0-q} = a^{-q}$.

Voor $a \neq 0$ is $a^0 = 1$ en $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$.

In de opgaven mag je ervan uitgaan dat $a \neq 0$.

Dus $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ en $3x^{-5} = 3 \cdot \frac{1}{x^5} = \frac{3}{x^5}$.

Maar ook $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$ en $\frac{5}{x} = 5 \cdot \frac{1}{x} = 5x^{-1}$.

Voorbeeld

Schrijf als macht van x .

a $x^2 \cdot \frac{1}{x^8}$

b $\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}$

c $\frac{1}{x^{-5}} \cdot (x^3)^2$

Uitwerking

a $x^2 \cdot \frac{1}{x^8} = x^2 \cdot x^{-8} = x^{-6}$

b $\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \frac{x^{-2}}{x} = x^{-3}$

c $\frac{1}{x^{-5}} \cdot (x^3)^2 = x^5 \cdot x^6 = x^{11}$

Je schrijft $5x^{-3}y^2$ als volgt zonder negatieve exponenten.

$$5x^{-3}y^2 = 5 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot y^2 = \frac{5y^2}{x^3}$$

Je mag hierbij de tussenstap weglaten.

Zonder tussenstappen:

$$3x^{-2}y^6 = \frac{3y^6}{x^2}$$

$$\frac{3}{5}x^{-2}y^6 = \frac{3y^6}{5x^2}$$

Voorbeeld

Schrijf zonder negatieve exponenten.

a $2x^{-5}y^3$

c $\frac{3}{4}x^{-1}$

b $(2x)^{-5}y^3$

d $(\frac{3}{4}x)^{-1}$

Uitwerking

a $2x^{-5}y^3 = \frac{2y^3}{x^5}$

c $\frac{3}{4}x^{-1} = \frac{3}{4x}$

b $(2x)^{-5}y^3 = \frac{y^3}{(2x)^5} = \frac{y^3}{32x^5}$

d $(\frac{3}{4}x)^{-1} = (\frac{3}{4})^{-1} \cdot x^{-1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{3x}$

R36



a In de uitwerking van voorbeeld d zie je dat $(\frac{3}{4})^{-1} = \frac{4}{3}$.

Toon dit aan.

b Op dezelfde manier kun je in een keer opschrijven $(\frac{3}{4})^{-2} = (\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$.

Bereken op deze manier $(\frac{1}{5})^{-2}$, $(\frac{2}{3})^{-3}$ en $(1\frac{1}{4})^{-1}$.

37



Schrijf als macht van x .

a $\frac{1}{x^2}$

d $\frac{x^8}{x^0}$

g $\frac{x}{x^{12}}$

b $x^4 \cdot \frac{1}{x^6}$

e $(x^3)^{-2}$

h $\frac{1}{x^8} \cdot (x^3)^{-1}$

c $\frac{x^4}{(\frac{1}{x^4})}$

f $\frac{(\frac{1}{x^5})}{x}$

i $\frac{(\frac{1}{x})}{x^{-3}}$

38



Schrijf zonder negatieve exponenten.

a $\frac{1}{2}x^{-3}$

d $(3x)^{-4}y^3$

g $-4 \cdot 3x^{-2}$

b $(\frac{1}{2}x)^{-3}$

e $\frac{3}{5}x^{-1}$

h $-4 \cdot (3x)^{-2}$

c $3x^{-4}y^3$

f $(\frac{3}{5}x)^{-1}$

i $(-4 \cdot 3x)^{-2}$

Uit $(\sqrt{x})^2 = x$ en $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$ volgt $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Licht op dezelfde manier toe dat $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Theorie B Machten met gebroken exponenten

Met de regel $(a^p)^q = a^{pq}$ lichten we de betekenis van $x^{\frac{1}{5}}$ toe.

Je kiest daartoe $p = \frac{1}{5}$ en $q = 5$.

Je krijgt $(x^{\frac{1}{5}})^5 = x^1 = x$.
Je weet $(\sqrt[5]{x})^5 = x$. } Hieruit volgt dat $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$.

Algemeen is $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$. Verder is $a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} \text{ en } a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Een macht met een gebroken exponent kun je dus herleiden tot een (hogeremachts)wortel.

Zo is $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$ en $x^{-\frac{3}{7}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}$.

$$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} \text{ en } x^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{x^4}.$$

Maar ook $\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$ en

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}.$$

Voorbeeld

Schrijf als macht van x .

a $x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

b $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

c $\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}$

Uitwerking

a $x \cdot \sqrt[3]{x^2} = x \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{1\frac{2}{3}}$

b $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{1\frac{2}{3}}$

c $\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{12}}$

Voorbeeld

Schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten.

a $5xy^{-\frac{1}{3}}$

b $4x^{2\frac{1}{2}}$

c $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}$

Uitwerking

a $5xy^{-\frac{1}{3}} = \frac{5x}{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{5x}{\sqrt[3]{y}}$

b $4x^{2\frac{1}{2}} = 4x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 4x^2 \cdot \sqrt{x}$

c $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{4y^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{x}}{4 \cdot \sqrt[3]{y^2}}$

40 Schrijf als macht van x .



a $x \cdot \sqrt[3]{x}$

d $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$

b $\frac{1}{\sqrt{x}}$

e $\sqrt[3]{x^{12}}$

c $x^2 \cdot \sqrt{x}$

f $\frac{1}{x^4} \cdot \sqrt[3]{x}$

41 Je kunt $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ als macht van 2 schrijven: $\frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-1\frac{1}{2}}$.



Schrijf als macht van 2, 3 of 10.

a $8\sqrt{2}$

d $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

b $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

e $\frac{1}{27} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

c $\frac{1}{100}\sqrt{10}$

f $\frac{100\sqrt{10}}{\sqrt[3]{10}}$

42 Schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten.



a $5x^{3\frac{1}{3}}$

d $\frac{2}{3}x^{-3}y^{1\frac{1}{2}}$

b $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y$

e $\frac{1}{5}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$

c $3x^{-\frac{2}{3}}$

f $(5x)^{-\frac{1}{2}}$

A43 Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.



a $y = \frac{50x^{1,9}}{10x^{1,1}}$

d $y = \frac{x}{\sqrt[5]{x}}$

b $y = \sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[3]{x}$

e $y = \frac{5}{x\sqrt{x}}$

c $y = \frac{3}{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$

f $y = 4x\sqrt{x^3}$

A44 Schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten.



a $\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}$

b $(2x^{-\frac{2}{7}})^3$

c $\frac{6y^{-2}}{3x^{-1\frac{1}{4}}}$

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met machten met negatieve en gebroken exponenten.

► OPGAVE C6,C7
THEORIE A,B

C6 Schrijf als macht van x .

a $\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt{x}$

b $\sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

c $\frac{x\sqrt{x}}{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}}$

C7 Schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten.

a $x^{3\frac{2}{5}}$

b $\frac{1}{4}x^{1\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}}$

c $\frac{3}{7}x^{-2}y^{1\frac{1}{4}}$

Antwoorden

C6 a $x^{1\frac{1}{4}}$

b $x^{-1\frac{1}{6}}$

c $x^{-\frac{3}{4}}$

C7 a $x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}$

b $\frac{x\sqrt{x}}{4 \cdot \sqrt[3]{y}}$

c $\frac{3y \cdot \sqrt[4]{y}}{7x^2}$

5.4 Exponentiële functies

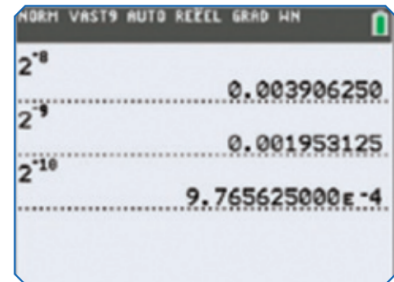
Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met transformaties van de grafiek van een exponentiële functie.
- Je kunt formules herleiden tot de vorm $y = b \cdot g^x$.
- Je kunt exponentiële vergelijkingen die te herleiden zijn tot de vorm $g^A = g^B$ algebraïsch oplossen.

O45 Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$.



- Plot de grafiek van f . Neem x tussen -5 en 5 en y tussen -5 en 25 .
- Is de grafiek van f stijgend of dalend?
- Bereken $f(-10)$, $f(-20)$ en $f(-100)$.
- Licht toe dat $f(-500)$ groter dan 0 is. Wat geeft de GR als beeld van -500 ?
- Is er bij de functie f een origineel te vinden waarvan het beeld 0 is? Licht toe.



$9,765625000E-4$ betekent
 $9,765625000 \cdot 10^{-4}$, oftewel
 $0,0009765625000$.

O46 Gegeven is de functie $g(x) = (\frac{1}{3})^x$.



- Is de grafiek van g stijgend of dalend?
- Licht toe dat $g(500)$ groter is dan 0 .
- Is er bij de functie g een origineel te vinden waarvan het beeld 0 is? Licht toe.

Theorie A De functie $f(x) = g^x$

Een functie van de vorm $f(x) = g^x$ met g constant en $g > 0$ is een **exponentiële functie**. Je ziet dat de variabele x in de exponent voorkomt. De grafiek van $f(x) = g^x$ is stijgend in het geval $g > 1$ en dalend in het geval $0 < g < 1$.

In opgave 45c heb je gezien dat voor hele kleine waarden van x de grafiek van $f(x) = 2^x$ vrijwel samenvalt met de x -as. De x -as is de horizontale asymptoot van de grafiek van f .

De functie $f(x) = 2^x$ kan elke waarde groter dan 0 aannemen.

Dus $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Omdat je bij de functie f voor x elk getal mag nemen, is het domein $\mathbb{R}$.

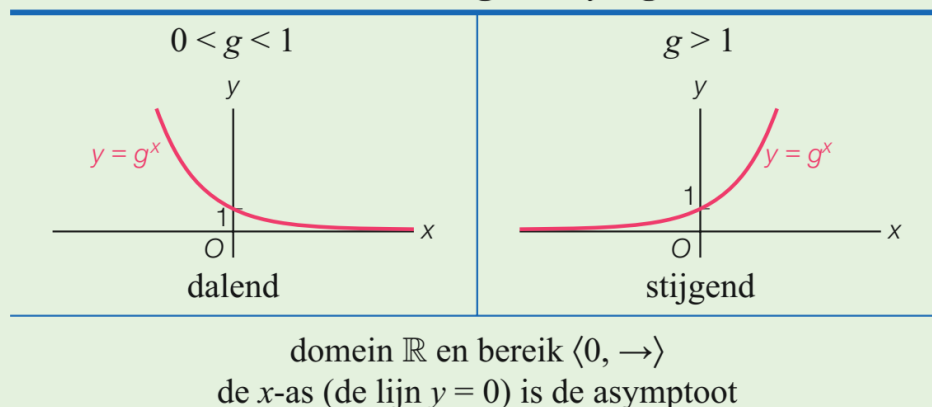
Notatie: $D_f = \mathbb{R}$.

Ook bij de functie $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ is het domein $\mathbb{R}$ en het bereik $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

Ook hier is de x -as de asymptoot, maar nu valt de grafiek voor hele grote waarden van x vrijwel samen met de x -as.

De functies $f(x) = g^x$ zijn standaardfuncties en de bijbehorende grafieken zijn standaardgrafieken.

De standaardgrafiek $y = g^x$



047



Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 2^{\frac{1}{3}x}$.

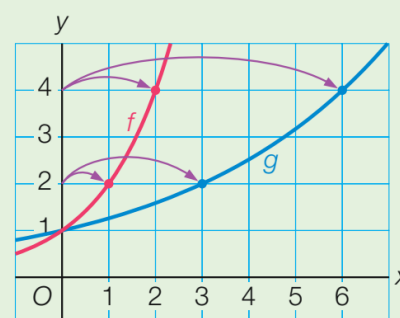
- Plot in één figuur de grafieken van f en g . Neem x tussen -3 en 7 en y tussen 0 en 10 .
- De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as.
Geef de bijbehorende factor.
- De grafiek van f wordt ten opzichte van de y -as vermenigvuldigd.
Zo ontstaat de grafiek van $h(x) = 2^{4x}$.
Met welke factor is vermenigvuldigd? Controleer je antwoord met de GR.
- De grafiek van f wordt ten opzichte van de y -as vermenigvuldigd.
Zo ontstaat de grafiek van $k(x) = 2^{ax}$.
Met welke factor is vermenigvuldigd?

Theorie B Transformaties bij exponentiële functies

Hiernaast zie je de grafieken van $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 2^{\frac{1}{3}x}$.
Vermenigvuldig je van een punt van de grafiek van f de x -coördinaat met 3 , dan krijg je een punt van de grafiek van g . De afstand tot de y -as wordt drie keer zo groot.
Door de grafiek van $f(x) = 2^x$ met 3 te **vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as**, ontstaat de grafiek van $g(x) = 2^{\frac{1}{3}x}$.

Bij de vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de y -as vervang je in de formule x door $\frac{1}{3}x$.

$$f(x) = 2^x \xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. } y\text{-as}} g(x) = 2^{\frac{1}{3}x}$$



In het schema hieronder staat een overzicht van de transformaties die je hebt geleerd, en het effect ervan op de standaardgrafiek $y = g^x$. Zoals je weet, maakt het uit in welke volgorde je de transformaties ‘vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as’ en ‘verticale translatie’ toepast. Dit geldt ook voor de transformaties ‘vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as’ en ‘horizontale translatie’.

Transformaties op de standaardgrafiek $y = g^x$

$y = g^x$ $\downarrow \times a \text{ t.o.v. de } x\text{-as}$ $y = a \cdot g^x$	Vermenigvuldig in de formule de functiewaarde met a .
$y = g^x$ $\downarrow \times b \text{ t.o.v. de } y\text{-as}$ $y = g^{\frac{1}{b}x}$	Vervang in de formule x door $\frac{1}{b} \cdot x$.
$y = g^x$ $\downarrow \text{translatie } (c, 0)$ $y = g^{x-c}$	Vervang in de formule x door $x - c$.
$y = g^x$ $\downarrow \text{translatie } (0, d)$ $y = g^x + d$	Tel in de formule d op bij de functiewaarde.

De grafiek van $y = g^x + d$ heeft als asymptoot de lijn $y = d$.

Voorbeeld

Geef aan hoe de grafiek van de functie $f(x) = 150 - 0,7^{0,2x-3}$ uit een standaardgrafiek ontstaat. Geef ook het bereik en de formule van de horizontale asymptoot.

Uitwerking

$$\begin{aligned}
 y = 0,7^x &\xrightarrow{\times -1 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -0,7^x \\
 &\xrightarrow{\text{translatie } (3, 150)} y = 150 - 0,7^{x-3} \\
 &\xrightarrow{\times 5 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} f(x) = 150 - 0,7^{0,2x-3}
 \end{aligned}$$

$B_f = \langle \leftarrow, 150 \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 150$.

$0,7^{0,2x-3}$ is groter dan 0 voor elke x , dus
 $150 - 0,7^{0,2x-3}$ is kleiner dan 150 voor elke x .

Het is handig om een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as als laatste toe te passen.

R48 In het voorbeeld staat ‘Het is handig om een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as als laatste toe te passen’.

□ ⊗ *

Wat krijg je als je op de standaardgrafiek $y = 0,7^x$, na de vermenigvuldiging met -1 ten opzichte van de x -as, eerst de vermenigvuldiging met 5 ten opzichte van de y -as en daarna de translatie $(3, 150)$ toepast?

49 Geef van de grafieken van de volgende functies aan hoe ze uit een standaardgrafiek ontstaan. Geef ook het bereik en de formule van de horizontale asymptoot.

□

a $f(x) = 5 - 6 \cdot 0,4^x$ **b** $g(x) = 3 \cdot 2^{3x} + 4$ **c** $h(x) = 0,8^{0,5x-4} - 10$

50 Geef van de grafieken van de volgende functies aan hoe ze uit een standaardgrafiek ontstaan. Geef ook het bereik en de formule van de horizontale asymptoot.

□ ⊗ *

a $f(x) = 2 \cdot 0,8^{2x} - 7$ **b** $g(x) = 1000 - 0,3^{0,1x+2}$ **c** $h(x) = 1000(1 - 1,3^x)$

51 Geef van de grafieken van de volgende functies aan hoe ze uit een standaardgrafiek ontstaan.

□ ⊗ *

a $f(x) = 4 - 0,7^{-0,2x+1}$ **b** $g(x) = \frac{3}{5x+4}$ **c** $h(x) = -1 + 2\sqrt{3x-5}$

52 Op de standaardgrafiek $y = 3^x$ worden transformaties toegepast.

□ ⊗ *

Stel telkens de formule op van de beeldgrafiek.

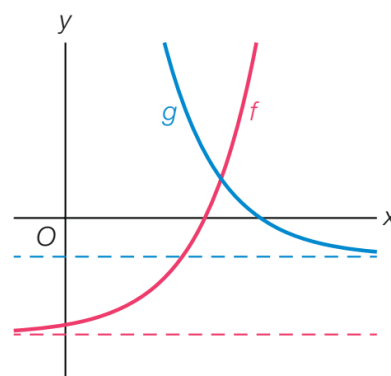
- a** Eerst spiegelen in de x -as, dan 1 omlaag verschuiven.
- b** Eerst de translatie $(2, 5)$ en dan de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met 6 .
- c** Eerst 5 omlaag en 4 naar rechts verschuiven, dan met 3 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.
- d** Eerst met 3 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as, dan de verschuiving 5 omlaag en 4 naar rechts.

A53 Hiernaast zie je de grafieken van de functies

□ ⊗ *

$f(x) = 2^{x-2} - 3$ en $g(x) = 4 \cdot 0,5^{x-3} - 1$.

- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- b** Hoe ontstaat de grafiek van g uit een standaardgrafiek?
- c** Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x \leq 2$.
- d** Bereken welke waarden $g(x)$ aanneemt voor $x \geq 2$.
- e** Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing en de vergelijking $g(x) = p$ geen oplossing?
- f** Bereken voor welke waarden van x geldt $f(x) \geq g(x)$.



54 a Toon aan dat $8 \cdot 4^x$ te herleiden is tot 2^{2x+3} .

b Welke rekenregels voor machten heb je bij vraag a gebruikt?

Theorie C Herleiden tot de vorm $y = b \cdot g^x$

In opgave 54 heb je bij het herleiden van $8 \cdot 4^x$ tot 2^{2x+3} de regels $(a^p)^q = a^{pq}$ en $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ gebruikt. Omgekeerd kun je 2^{2x+3} schrijven als $8 \cdot 4^x$. Je gebruikt dan de regels van links naar rechts, dus $a^{pq} = (a^p)^q$ en $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$. Zo krijg je $2^{2x+3} = 2^{2x} \cdot 2^3 = (2^2)^x \cdot 8 = 8 \cdot 4^x$. Op dezelfde manier kun je een formule als $y = 40 \cdot 3^{-2x+1}$ schrijven in de vorm $y = b \cdot g^x$. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Schrijf de formule $y = 40 \cdot 3^{-2x+1}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$.

Uitwerking

$$y = 40 \cdot 3^{-2x+1} = 40 \cdot 3^{-2x} \cdot 3^1 = 40 \cdot (3^{-2})^x \cdot 3 = 120 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x$$

$$\text{Dus } y = 120 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x.$$

55 Schrijf in de vorm $y = b \cdot g^x$.



a $y = 15 \cdot 2^{3x+2}$

b $y = 260 \cdot 4^{\frac{1}{2}x-1}$

c $y = 8 \cdot 4^{-2x-1}$

56 Schrijf in de vorm $y = b \cdot g^x$.



a $y = 2^x \cdot 2^{2x-3}$

b $y = 63 \cdot 3^{\frac{1}{3}x-2}$

c $y = 50\,000 \cdot 100^{-x-2\frac{1}{2}}$

A57 Schrijf in de vorm $y = ax^p$ of $y = b \cdot g^x$.



a $y = 50 \cdot 2^{3x-1}$

c $y = 162 \cdot 9^{-\frac{1}{2}x-2}$

e $y = \frac{1}{4x^2 \cdot \sqrt{x}}$

b $y = 10x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

d $y = \frac{3\sqrt{x}}{x \cdot \sqrt[3]{x}}$

f $y = \frac{64}{4^{\frac{1}{2}x+2}}$

58 a De grafiek van $g(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^{x-3} - 2$ kan ontstaan uit de grafiek van $f(x) = 3^x$ door de translatie (p, q) toe te passen.



Bereken p en q .

b Op de grafiek van $h(x) = 2^{x-3}$ wordt de translatie $(-5, 0)$ toegepast. Zo ontstaat de grafiek van de functie k . Je kunt de grafiek van k ook krijgen door de grafiek van h met a te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.

Bereken a .

A59 De grafiek van $f(x) = 5 - 2^{\frac{1}{2}x+4}$ wordt 8 naar beneden en 12 naar rechts geschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie h . De functie h kan geschreven worden in de vorm $h(x) = a + b \cdot g^x$. Bereken exact a , b en g .

A60 We bekijken een vlucht van een Boeing 747-400 van Amsterdam naar Tokio met een vliegafstand van 10 200 km. Tijdens de vlucht gebruiken de motoren 12 000 liter kerosine per uur. De dichtheid van kerosine is 0,8 kg per liter. De Boeing heeft een vleugeloppervlakte van 541 m^2 en een kruissnelheid van 900 km/u. Na een uur vliegt het toestel op een hoogte van 10 km. Met de formules $G = 0,03dv^2A$ en $d = 1,225 \cdot 0,88^h$ is te berekenen welk gewicht het toestel heeft na een uur vliegen. In deze formules is G het gewicht in kg, d de luchtdichtheid in kg/m^3 , v de kruissnelheid in m/s, A de vleugeloppervlakte in m^2 en h de hoogte in km. Uit de gegevens volgt dat het startgewicht van deze Boeing 355 668 kg is.



- a Toon dit aan met een berekening.
- b Bereken in km de vlieghoogte tien uur na de start. Rond af op één decimaal.
- c De hoogte h in km waarop de Boeing vliegt, is een functie van de vliegtijd t in uren. We bekijken de tijd vanaf $t = 0,5$ tot aan een half uur voor de landing. Met de gegevens is een formule op te stellen van de vorm $g^h = at + b$. Bereken g , a en b . Rond g en b af op twee en a op vier decimalen.

O61 Schrijf $4\sqrt{2}$ als macht van 2 en los de vergelijking $2^{x-1} = 4\sqrt{2}$ exact op.

Theorie D Exponentiële vergelijkingen

Bij het algebraïsch oplossen van **exponentiële vergelijkingen** zoals in opgave 61 werk je toe naar een vorm waarin het linker- en rechterlid als macht met hetzelfde grondtal g zijn geschreven. Daarna gebruik je de regel $g^A = g^B$ geeft $A = B$.

$g^A = g^B$ geeft $A = B$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $3^{x+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$

b $2 \cdot 3^{2x-1} = 18$

c $2 \cdot 9^{\frac{1}{2}x-3} = 6$

Uitwerking

a $3^{x+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$

$$3^{x+1} = 3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{x+1} = 3^{-1\frac{1}{2}}$$

$$x+1 = -1\frac{1}{2}$$

$$x = -2\frac{1}{2}$$

b $2 \cdot 3^{2x-1} = 18$

$$3^{2x-1} = 9$$

$$3^{2x-1} = 3^2$$

$$2x-1 = 2$$

$$2x = 3$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

c $2 \cdot 9^{\frac{1}{2}x-3} = 6$

$$9^{\frac{1}{2}x-3} = 3$$

$$(3^2)^{\frac{1}{2}x-3} = 3$$

$$3^{x-6} = 3$$

$$x-6 = 1$$

$$x = 7$$

62 Bereken exact de oplossingen.



a $2^{x-3} = \frac{1}{8}$

c $5 \cdot 2^x = 80$

e $10 \cdot 3^x = 270$

b $5^x - 20 = 105$

d $3^{2x+1} = 27\sqrt{3}$

f $3 \cdot 8^{2-x} = 48$

63 Bereken exact de oplossingen.



a $3 \cdot 2^x + 4 = 28$

c $3 \cdot 7^{3x+1} = 147$

e $5 \cdot 4^{x-1} = 2\frac{1}{2}$

b $5^{2x-6} = \frac{1}{25}$

d $32^{x-2} = \frac{1}{16}$

f $8 \cdot 2^x = 4^{x+1}$

64 Bereken exact de oplossingen.



a $2^x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

c $3x^3 + 17x^2 = 5x^2 + 36x$

e $5^{x+6} = (\frac{1}{5})^x$

b $\frac{1}{5}(2x+1) + 2 = \frac{1}{2}x + 3$

d $2\sqrt{x+5} = x+2$

f $\frac{3x+2}{2x+5} = \frac{6-5x}{2x}$

A65 Gegeven zijn de functies $f(x) = (\sqrt{2})^{x+4}$ en $g(x) = (\frac{1}{4})^x$.



a Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit de grafiek van $y = 2^x$?

b De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt S .

Voor de y -coördinaat van S geldt $y_S = 2 \cdot \sqrt[a]{b}$ met a en b gehele getallen.

Bereken exact de waarden van a en b .

A66 De grafiek van $g(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^{x-3} - 2$ wordt eerst met -6 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as en vervolgens 7 omlaag geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie h . De grafieken van g en h snijden elkaar in het punt S .



Bereken exact de coördinaten van S .

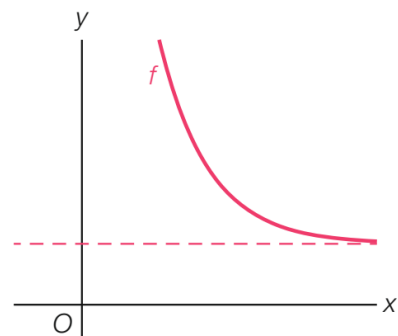
A67 Gegeven is de functie $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} + 2$.

⊗* Hiernaast zie je de grafiek van f .

a Geef het bereik van f .

b Voor $a \leq x \leq 4$ is $4 \leq f(x) \leq 66$.

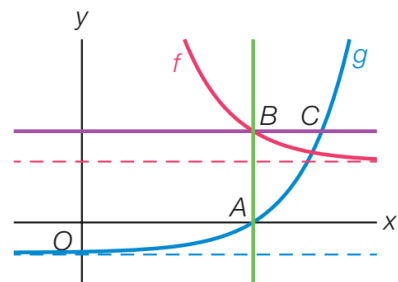
Bereken exact de waarde van a .



Verder is gegeven de functie $g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{x-3} - 1$.

De grafiek van g snijdt de x -as in het punt A . De verticale lijn door A snijdt de grafiek van f in het punt B . De horizontale lijn door B snijdt de grafiek van g in het punt C . Zie de figuur hiernaast.

c Bereken exact de lengte van BC .



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met transformaties van de grafiek van een exponentiële functie.

► **OPGAVE C8**
THEORIE A,B

☐ Ik kan formules herleiden tot de vorm $y = b \cdot g^x$.

► **OPGAVE C9**
THEORIE C

☐ Ik kan exponentiële vergelijkingen die te herleiden zijn tot de vorm $g^A = g^B$ algebraïsch oplossen.

► **OPGAVE C10**
THEORIE D

C8 Geef van de grafieken van de volgende functies aan hoe ze uit een standaardgrafiek ontstaan. Geef ook het bereik en de formule van de horizontale asymptoot.

a $f(x) = 1 - 3 \cdot 0,5^x$

b $g(x) = 4 \cdot 3^{0,2x} - 7$

C9 Schrijf in de vorm $y = b \cdot g^x$.

a $y = 5 \cdot 3^{2x+1}$

b $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 2^{3x+4}$

c $y = \frac{1}{5^{2x-1}}$

C10 Bereken exact de oplossingen.

a $3^{x+2} = 9\sqrt{3}$

b $5 \cdot 2^{1-3x} = 20$

c $8 \cdot 4^x = 2^{x-5}$

Antwoorden

C8 a $\times -3$ t.o.v. de x -as en dan de translatie $(0, 1)$

$B_f = \langle \leftarrow, 1 \rangle$ en asymptoot $y = 1$

b $\times 4$ t.o.v. de x -as, dan de translatie $(0, -7)$ en dan $\times 5$ t.o.v. de y -as

$B_g = \langle -7, \rightarrow \rangle$ en asymptoot $y = -7$

C9 a $y = 15 \cdot 9^x$

b $y = 16 \cdot 4^x$

c $y = 5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^x$

C10 a $x = \frac{1}{2}$

b $x = -\frac{1}{3}$

c $x = -8$

5.5 Logaritmen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met logaritmen.
- Je kunt logaritmische vergelijkingen algebraïsch oplossen.
- Je kunt werken met transformaties van de grafiek van een logaritmische functie.
- Je kunt de formule van de asymptoot van de grafiek van een logaritmische functie berekenen.

068



Het zonder rekenmachine berekenen van de uitkomst van een vermenigvuldiging zoals 81×2187 is veel werk. Door met de tabel hiernaast de vermenigvuldiging te schrijven als een product van machten met grondtal 3, kan met een eenvoudige optelling de uitkomst verkregen worden.

- Schrijf 81×2187 als product van machten met grondtal 3 en laat zien hoe je met een optelling en de tabel hiernaast de uitkomst kunt krijgen.
- Bereken op dezelfde manier met de tabel 27×729 en 9×6561 .
- Lees het geschiedeniskader hieronder.

x	3^x	x	3^x
1	3	7	2187
2	9	8	6561
3	27	9	19 683
4	81	10	59 049
5	243	11	177 147
6	729	12	531 441

Geschiedenis Logaritmen

Om grote vermenigvuldigingen en delingen te vereenvoudigen, kwam de Schotse landheer John Napier (1550-1617) op het idee om met exponenten te werken. Zo is bijvoorbeeld de vermenigvuldiging 32×256 om te zetten in de optelling van de exponenten 5 en 8, want $32 \times 256 = 2^5 \times 2^8 = 2^{5+8} = 2^{13}$. Vervolgens kijk je in een tabel met machten van 2 bij de exponent 13. Je vindt het getal 8192 en dit is dus de uitkomst van de vermenigvuldiging.



Om deze rekenmethode zinvol te kunnen toepassen, heeft Napier lange tabellen gemaakt van getallen met de bijbehorende exponenten van machten met een bepaald grondtal. Na jaren rekenwerk publiceerde hij in 1614 deze tabellen. In deze tabellen gebruikte hij het woord *logaritme* voor de exponent bij een bepaald grondtal.

Hiernaast zie je een tabel met logaritmen voor grondtal 3.

- Uit de tabel volgt dat $291 \approx 3^{5,16408}$ en $1234 \approx 3^{6,47910}$. Ga met de GR na dat dit klopt.
- Welke logaritme zou ook in de tabel moeten staan om de uitkomst van 291×1234 te kunnen geven? Ga met de GR na of deze logaritme klopt en geef het bijbehorende getal.

getal	logaritme
⋮	⋮
290	5,16095
291	5,16408
292	5,16720
⋮	⋮
1233	6,47836
1234	6,47910
1235	6,47983
⋮	⋮

Theorie A De logaritme

In opgave 68 worden getallen geschreven als macht van 3.

Zo is $81 = 3^4$, $291 \approx 3^{5,16408}$ en $1234 \approx 3^{6,47910}$.

We gaan daarbij uit van het grondtal 3 en zoeken hierbij de exponent zodat de uitkomst van de macht gelijk is aan 81, 291 of 1234.

Voor de exponent bij grondtal 3 en uitkomst 81 schrijven we ${}^3\log(81)$, dus ${}^3\log(81) = 4$.

En zo is ${}^3\log(291) \approx 5,16408$ en ${}^3\log(1234) \approx 6,47910$.

De notatie 'log' komt van **logaritme**.

In ${}^3\log(81)$ is 3 het **grondtal van de logaritme**.

${}^3\log(81)$ spreek je uit als 'de derde logaritme van 81' of kortweg '3 log 81'.

${}^3\log(81)$ is de exponent van een macht met grondtal 3 waarmee de macht gelijk is aan 81.

${}^g\log(x)$ is de exponent van een macht met grondtal g waarmee de macht gelijk is aan x . In ${}^g\log(x)$ heet g het grondtal van de logaritme.

Zoek je de uitkomst van ${}^3\log(\frac{1}{81})$, dan zoek je dus de exponent

bij het grondtal 3 zodat je $\frac{1}{81}$ krijgt. Daartoe bedenk je dat

$\frac{1}{81} = 3^{-4}$, dus ${}^3\log(\frac{1}{81}) = {}^3\log(3^{-4}) = -4$.

En zo is ${}^3\log(9\sqrt{3}) = {}^3\log(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^3\log(3^{2\frac{1}{2}}) = 2\frac{1}{2}$.

$${}^g\log(g^a) = a$$

Je ziet dat je logaritmen als ${}^2\log(8)$ en ${}^3\log(9\sqrt{3})$ exact kunt berekenen, omdat 8 een bekende macht van 2 is en $9\sqrt{3}$ een bekende macht van 3.

Voorbeeld

Bereken exact.

a ${}^2\log(\frac{1}{8}\sqrt{2})$

b ${}^5\log(0,04)$

Uitwerking

a ${}^2\log(\frac{1}{8}\sqrt{2}) = {}^2\log(2^{-3} \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = {}^2\log(2^{-2\frac{1}{2}}) = -2\frac{1}{2}$

b ${}^5\log(0,04) = {}^5\log(\frac{4}{100}) = {}^5\log(\frac{1}{25}) = {}^5\log(5^{-2}) = -2$

69

Bereken exact.

a ${}^5\log(125)$

b ${}^{10}\log(0,1)$

c ${}^2\log(4)$

d ${}^7\log(49)$

e ${}^2\log(\sqrt{2})$

f ${}^2\log(0,5)$

g ${}^4\log(0,25)$

h ${}^4\log(4)$

i ${}^4\log(1)$

70 Bereken exact.
 $\square \odot *$

a ${}^2\log(64\sqrt{2})$

b ${}^3\log(\frac{1}{9}\sqrt{3})$

c ${}^3\log(3^{21,5})$

d ${}^5\log(\frac{1}{125})$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log(\frac{1}{27})$

f ${}^{\frac{1}{2}}\log(\frac{1}{4})$

g ${}^2\log(\frac{1}{32} \cdot \sqrt[3]{2})$

h ${}^5\log(1)$

i ${}^3\log(81 \cdot \sqrt[5]{27})$

71 Licht toe.

$\square \odot *$ **a** ${}^3\log(x) = 2$ geeft $x = 9$

b ${}^5\log(x) = -2$ geeft $x = \frac{1}{25}$

Theorie B Logaritmische vergelijkingen

De **logaritmische vergelijking** ${}^2\log(x) = 5$ heeft als oplossing $x = 2^5$.

Immers ${}^2\log(2^5) = 5$.

En zo krijg je bij de vergelijking ${}^2\log(x + 3) = 5$ dat $x + 3 = 2^5$, dus $x = 2^5 - 3 = 29$.

Uit ${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$.

${}^2\log(x) = 5$ geeft $x = 2^5$

${}^g\log(x) = 5$ geeft $x = g^5$

${}^g\log(x) = y$ geeft $x = g^y$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a ${}^2\log(2x - 1) = 3$

b $1 + 2 \cdot {}^5\log(x) = 7$

Uitwerking

a ${}^2\log(2x - 1) = 3$

$2x - 1 = 2^3$

$2x - 1 = 8$

$2x = 9$

$x = 4\frac{1}{2}$

b $1 + 2 \cdot {}^5\log(x) = 7$

$2 \cdot {}^5\log(x) = 6$

${}^5\log(x) = 3$

$x = 5^3$

$x = 125$

R72 Bereken x .

$\square \odot *$ **a** $x = {}^5\log(0,2)$

b ${}^9\log(x) = \frac{1}{2}$

c ${}^x\log(1000) = 3$

73 Bereken exact de oplossingen.

$\square \odot$ **a** ${}^3\log(x + 2) = 2$

c ${}^3\log(2x + 1) = 4$

e ${}^{\frac{1}{2}}\log(x - 1) = 3$

b $1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 4$

d $5 + {}^4\log(x) = 3$

f ${}^2\log(x^2 - 4) = 5$

A74 Bereken exact de oplossingen.

$\square \odot *$ **a** $4 \cdot {}^3\log(x) = 2$

c $3 + {}^2\log(x) = -1$

e ${}^3\log(0,4x - 5) = 2$

b ${}^3\log(4x - 1) = -2$

d ${}^5\log(3x + 2) = 1$

f $4 + 2 \cdot {}^2\log(x) = 7$

E75 Bereken exact de oplossing van ${}^2\log({}^3\log(x)) = -1$.

076 Gegeven is de functie $f(x) = {}^2\log(x)$.

a Vul de tabel hieronder in.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x) = {}^2\log(x)$							

- b** Teken de grafiek van f .
c Licht toe dat $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.
d Geef het bereik van f .

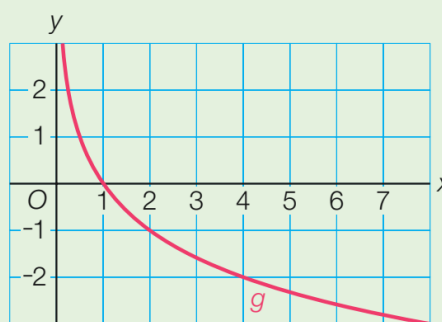
Theorie C Logaritmische functies

De functie $f(x) = {}^2\log(x)$ is een **logaritmische functie**. Bij deze functie is het grondtal 2. In opgave 76 heb je gezien dat je te maken hebt met een functie met domein $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en bereik $B_f = \mathbb{R}$. De grafiek is stijgend.

Bij de functie $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ is het grondtal $\frac{1}{2}$.

Hiernaast is de grafiek van g getekend. Daarbij is de volgende tabel gebruikt.

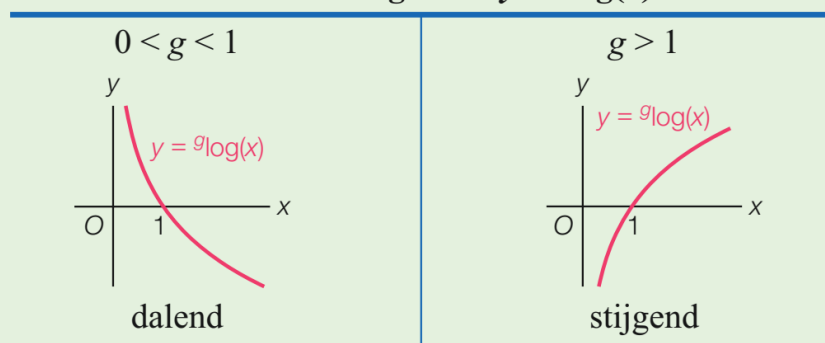
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3



De lijn $x = 0$ is de verticale asymptoot van de grafiek.

De grafieken van $f(x) = {}^g\log(x)$ zijn standaardgrafieken. Net als bij de functies $f(x) = g^x$ onderscheiden we twee situaties, namelijk $0 < g < 1$ en $g > 1$.

De standaardgrafiek $y = {}^g\log(x)$



domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ en bereik $\mathbb{R}$
 de y -as (de lijn $x = 0$) is de asymptoot

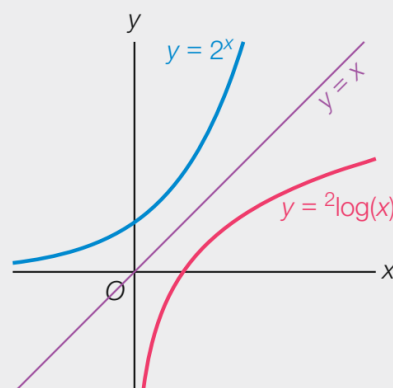
Informatief Het verband tussen de grafieken van $y = 2^x$ en $y = {}^2\log(x)$

In de figuur hiernaast zie je het verband tussen de grafieken van $y = 2^x$ en $y = {}^2\log(x)$. De grafieken zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

Dat is als volgt te verklaren.

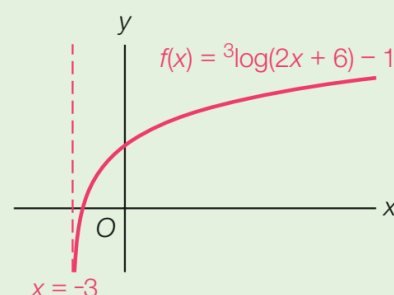
Spiegel je de grafiek van $y = {}^2\log(x)$ in de lijn $y = x$, dan is de formule van de beeldgrafiek $x = {}^2\log(y)$ oftewel ${}^2\log(y) = x$. Want bij spiegelen in de lijn $y = x$ verwissel je x en y .

Net zoals ${}^2\log(x) = 3$ geeft $x = 2^3$, krijg je bij ${}^2\log(y) = x$ dat $y = 2^x$. Dus de grafiek van $y = 2^x$ is het spiegelbeeld van de grafiek van $y = {}^2\log(x)$ bij spiegelen in de lijn $y = x$, en omgekeerd.



In het voorbeeld zie je hoe de grafiek van de functie $f(x) = {}^3\log(2x + 6) - 1$ via transformaties ontstaat uit de standaardgrafiek $y = {}^3\log(x)$.

Om de formule van de verticale asymptoot van de grafiek van $f(x) = {}^3\log(2x + 6) - 1$ te berekenen, los je de vergelijking $2x + 6 = 0$ op. Dit geeft $x = -3$, dus de lijn $x = -3$ is de verticale asymptoot van de grafiek van f .



De verticale asymptoot van de grafiek van de functie $f(x) = {}^s\log(ax + b)$ volgt uit $ax + b = 0$.

Voorbeeld

Geef aan hoe de grafiek van de functie $f(x) = {}^3\log(2x + 6) - 1$ ontstaat uit een standaardgrafiek.

Uitwerking

$$y = {}^3\log(x)$$

↓ translatie $(-6, -1)$

$$y = {}^3\log(x + 6) - 1$$

↓ $\times \frac{1}{2}$ t.o.v. de y -as

$$f(x) = {}^3\log(2x + 6) - 1$$

R77 Zie de theorie hierboven.

□ ⊗ * Geef het domein en het bereik van $f(x) = {}^3\log(2x + 6) - 1$.

78 Op de standaardgrafiek $y = {}^3\log(x)$ worden transformaties toegepast.

□ ⊙ * Stel telkens de formule op van de beeldgrafiek.

- a** Eerst met 2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as, dan de translatie $(0, -4)$.
- b** Eerst spiegelen in de x -as, dan de translatie $(5, 0)$.
- c** Eerst de translatie $(-3, 2)$, dan vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met $\frac{1}{2}$.
- d** Eerst 5 omhoog, dan vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{4}$ en ten slotte 3 naar links.

79 Geef van de grafieken van de volgende functies aan hoe ze uit een

□ ⊙ * standaardgrafiek ontstaan.

- a** $f(x) = {}^3\log(x+2) + 3$
- b** $g(x) = 5 \cdot {}^2\log(x-1)$
- c** $h(x) = 4 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(3x) - 2$

80 Bereken van elk van de volgende functies de formule van de verticale asymptoot van de grafiek.

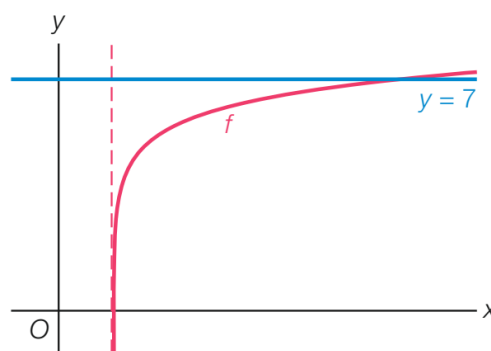
□ ⊙ *

- a** $f(x) = {}^3\log(2x+8) - 2$
- b** $g(x) = 5 \cdot {}^3\log(4x+2)$
- c** $h(x) = 3 \cdot {}^{\frac{1}{4}}\log(\frac{1}{2}x - 1)$

A81 Hiernaast zie je de grafiek van de functie

□ ⊙ * $f(x) = {}^3\log(2x-5) + 4$ en de lijn $y = 7$.

- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- b** Bereken de formule van de verticale asymptoot.
- c** Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) < 7$.
- d** Bereken exact welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x \leq 7$.

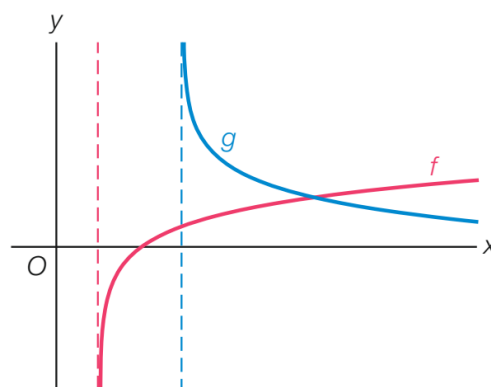


A82 Hiernaast zie je de grafieken van de functies

□ ⊙ * $f(x) = {}^4\log(x-1)$ en $g(x) = {}^{\frac{1}{4}}\log(x-3) + 2$.

Bereken exact voor welke waarden van x geldt

- a** $f(x) \leq 1\frac{1}{2}$
- b** $g(x) \geq 1$.



A83 Gegeven is de functie $f(x) = 2 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(2x+3) - 6$.

***** Voor $a \leq x \leq 39$ is $-14 \leq f(x) \leq -8$.

Bereken exact de waarde van a .

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met logaritmen.

☐ Ik kan logaritmische vergelijkingen algebraïsch oplossen.

☐ Ik kan werken met transformaties van de grafiek van een logaritmische functie.

☐ Ik kan de formule van de asymptoot van de grafiek van een logaritmische functie berekenen.

► OPGAVE C11
THEORIE A

► OPGAVE C12
THEORIE B

► OPGAVE C13A
THEORIE C

► OPGAVE C13B
THEORIE C

C11 Bereken exact.

a ${}^2\log(16\sqrt{2})$

c ${}^5\log(\frac{1}{5})$

e ${}^2\log(\frac{1}{8} \cdot \sqrt[5]{2})$

b ${}^3\log(\frac{1}{27}\sqrt{3})$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(\frac{1}{9})$

f ${}^{10}\log(1)$

C12 Bereken exact de oplossingen.

a $2 + {}^4\log(x) = 1$

b ${}^3\log(2x - 5) = 2$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log(x - 3) + 1 = 0$

C13 a Hoe ontstaat de grafiek van de functie $f(x) = 3 \cdot {}^2\log(2x - 1)$ uit een standaardgrafiek?

b Bereken de formule van de verticale asymptoot van de grafiek van de functie $g(x) = 4 + {}^{\frac{1}{2}}\log(2x + 8)$.

Antwoorden

C11 a $4\frac{1}{2}$

c -1

e $-2\frac{4}{5}$

b $-2\frac{1}{2}$

d 2

f 0

C12 a $x = \frac{1}{4}$

b $x = 7$

c $x = 5$

C13 a $\times 3$ t.o.v. de x -as, translatie $(1, 0)$ en dan $\times \frac{1}{2}$ t.o.v. de y -as

b $x = -4$

Kennis- en vaardigheidentest

5.1 Gebroken functies

- 1** Vermeld hoe de grafiek van de functie ontstaat uit een standaardgrafiek en schets de grafiek.

a $f(x) = \frac{1}{x+4}$

b $g(x) = \frac{1}{x-1} + 2$

c $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

- 2** Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{x-5}{x-4} = \frac{8}{x+10}$

c $\frac{2x^2-3}{x^2-2} = 3$

b $\frac{x-9}{x+3} = x-3$

d $\frac{x^2-16x-36}{x^2-5} = 0$

5.2 Wortelfuncties

- 3** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x-4} + 1$ en $g(x) = -3\sqrt{x+2}$.

a Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit een standaardgrafiek?

b Schets de grafieken van f en g .

c Geef D_f , B_f , D_g en B_g .

- 4** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{5-2x} - 1$.

a Bereken voor welke waarden van x geldt $f(x) < 3$.

b Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x > -2$.

- 5** Bereken exact de oplossingen.

a $2x = \sqrt{2-7x}$

c $2x - \sqrt{x} = 6$

b $28 - x\sqrt{x} = 1$

d $x + 2\sqrt{7-3x} = 4$

5.3 Machten met negatieve en gebroken exponenten

- 6** Schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten.

a $x^{\frac{2}{3}}$

c $(5x^{\frac{1}{4}})^3$

e $(4x^{\frac{1}{3}})^{-2}$

b $\frac{2}{3}xy^{-\frac{1}{2}}$

d $(\frac{2}{3}x)^{-1}$

f $\frac{3}{5}x^{-2}y^{\frac{3}{4}}$

- 7** Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.

a $y = x \cdot \sqrt[4]{x^3}$

b $y = \frac{6}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

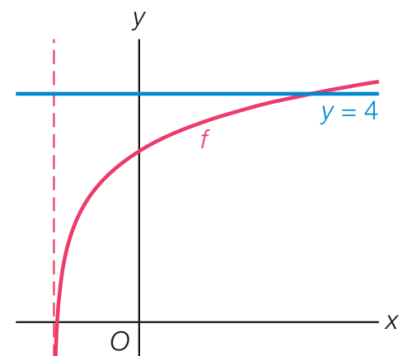
c $y = \frac{10}{x} \cdot \sqrt[5]{x^3}$

5.4 Exponentiële functies

- 8** Geef van de grafieken van de volgende functies aan hoe ze uit een standaardgrafiek ontstaan. Geef ook het bereik en de formule van de horizontale asymptoot.
- a** $f(x) = 0,3 \cdot 2^{x-1} - 5$ **b** $g(x) = 2 + 0,7^{3x}$ **c** $h(x) = 4 - 5 \cdot 3^{0,25x}$
- 9** Schrijf in de vorm $y = b \cdot g^x$.
- a** $y = 108 \cdot 3^{4x-3}$ **b** $y = \frac{250}{5^{2x+3}}$ **c** $y = 32 \cdot 4^{2\frac{1}{2}x-2}$
- 10** Bereken exact de oplossingen.
- a** $5^{x-1} = 125$ **b** $3^{2x-5} = \frac{1}{27}$ **c** $2 \cdot 4^{2x-1} - 3 = 61$

5.5 Logaritmen

- 11** Bereken exact.
- a** ${}^2\log(\frac{1}{4}\sqrt{8})$ **b** ${}^3\log(27\sqrt{3})$ **c** ${}^5\log(\frac{1}{125} \cdot \sqrt[3]{5})$
- 12** Bereken exact de oplossingen.
- a** ${}^4\log(2x-3) = 2$ **b** ${}^{\frac{1}{2}}\log(x-3) = -4$ **c** $5 + 3 \cdot {}^2\log(x) = 20$
- 13** **a** De standaardgrafiek $y = {}^2\log(x)$ wordt eerst vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met $-\frac{1}{3}$ en vervolgens 3 naar links geschoven. Stel de formule op van de beeldgrafiek.
b Hoe ontstaat de grafiek van de functie $f(x) = 4 \cdot {}^2\log(\frac{1}{2}x - 1)$ uit een standaardgrafiek?
- 14** Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = 2 + {}^3\log(2x+3)$ en de lijn $y = 4$.
- a** Bereken de formule van de verticale asymptoot van de grafiek van f .
b Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) \leq 4$.
c Bereken exact welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x < -1\frac{1}{3}$.



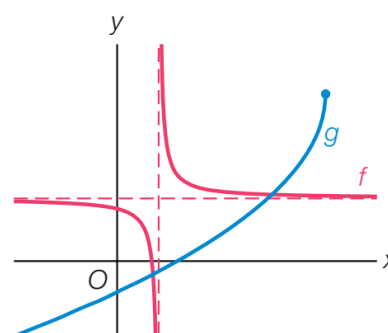
Gemengde opgaven

- 1** De grafiek van de functie f ontstaat uit die van $y = \frac{1}{x}$ na de translatie $(3, 4)$.
Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en de lijn $k: y = 2x - 1$.

- 2** Gegeven is de functie $f(x) = 5 - \sqrt{2x^2 - 6}$.
- a** Bereken exact de coördinaten van de randpunten van de grafiek van f .
 - b** Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) > 1$.
 - c** Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x > -6$.

- 3** In de figuur hiernaast zie je de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ en $g(x) = 8 - 3\sqrt{10-x}$.

- a** De lijn $y = 5$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .
Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB .
- b** De verticale asymptoot van de grafiek van f snijdt de x -as in het punt C . De lijn k gaat door C en snijdt de y -as in het punt $D(0, -1)$.
Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van k met de grafiek van g .
- c** De asymptoten van de grafiek van f snijden elkaar in het punt E .
De lijn l gaat door E en door het randpunt van de grafiek van g .
Lijn l snijdt de grafiek van f in de punten P en Q met $x_P < x_Q$.
Toon aan dat $x_Q - x_P = \frac{1}{5}\sqrt{160}$.
- d** Bereken exact voor welke waarden van x geldt dat zowel $f(x) < 0$ als $g(x) < 0$.

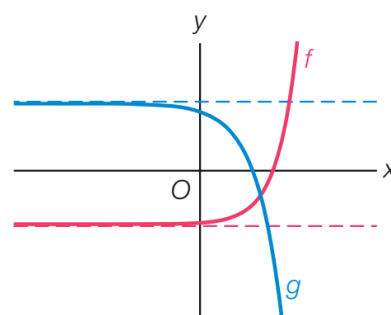


- 4** Bereken exact de oplossingen.

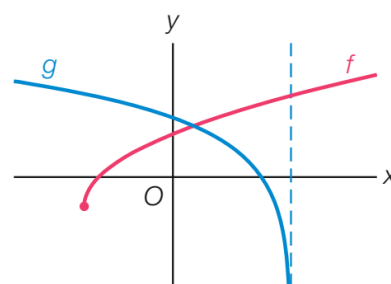
a $\frac{2\sqrt{x}}{4 + \sqrt{x}} = \frac{2}{3}$	c ${}^3\log(8x + \sqrt{3}) = 2\frac{1}{2}$	e $3 \cdot 2^{x^2-2} + 12 = 60$
b ${}^2\log(x^2 - 2) = 3$	d $128 - 4 \cdot 3^{1 + \sqrt{x}} = 20$	f $\frac{x^2 + 19x}{8 - x} = \frac{x + 10}{3}$

- 5** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ en $g(x) = {}^3\log(2x + 3q)$.
- a** Bereken exact voor welke waarde van q de top van de grafiek van f op de verticale asymptoot van de grafiek van g ligt.
 - b** Bereken exact voor welke waarden van q de grafieken van f en g elkaar snijden in een punt op de x -as.

- 6** Gegeven zijn de functies $f(x) = 0,4 \cdot 2^{x-2} - 4$ en $g(x) = 5 - 0,2 \cdot 3^{0,5x+1}$. Zie de figuur hiernaast.
- Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit een standaardgrafiek?
 - Los algebraïsch op $f(x) \geq 2,4$.
 - De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .
Bereken voor welke p de lengte van het lijnstuk AB gelijk is aan 10. Rond af op twee decimalen.
 - Voor welke q heeft de vergelijking $f(x) = q$ één oplossing en de vergelijking $g(x) = q$ geen oplossing?



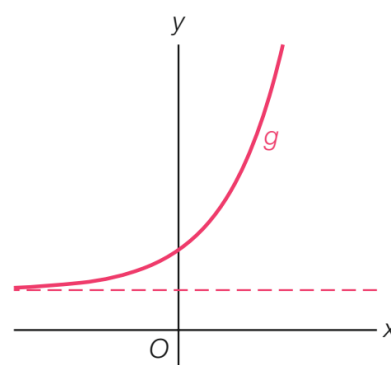
- 7** Gegeven zijn de functies $f(x) = -1 + \sqrt{2x+6}$ en $g(x) = {}^2\log(4-x)$. Zie de figuur hiernaast.
- Bereken van zowel f als g het domein en het bereik.
 - De lijn $x = 2$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .
Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB .
 - De grafiek van f snijdt de x -as in het punt C .
De grafiek van g snijdt de y -as in het punt D .
De lijn k door C en D snijdt de grafiek van f ook in het punt E .
Bereken exact de coördinaten van E .



- 8** Gegeven is de functie $f(x) = {}^2\log(5-2x)$ en voor elke p de functie $g(x) = 1 + 2^{x+p}$.
Bereken exact voor welke waarde van p
- de grafieken van f en g elkaar snijden in het punt A met $x_A = -1\frac{1}{2}$
 - de grafiek van g de verticale asymptoot van de grafiek van f snijdt in het punt B met $y_B = 5$.

Neem bij de volgende vragen aan dat $p = 0$, dus ga uit van de functie $g(x) = 1 + 2^x$. Zie de figuur hiernaast.

- Met hoeveel moet je de grafiek van g naar beneden schuiven zodat de grafieken van f en g hetzelfde snijpunt met de x -as hebben?
- Met hoeveel moet je de grafiek van f naar links schuiven zodat de grafieken van f en g hetzelfde snijpunt met de y -as hebben?
- De grafiek van f wordt 2 naar links en 3 omhoog geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie h .
Met hoeveel moet je de grafiek van g naar links schuiven zodat de grafieken van g en h hetzelfde snijpunt met de y -as hebben?





6

De afgeleide functie

In de figuur hieronder sluiten drie wegen een stuk bouwgrond in. Op dit stuk grond wil men een gebouw met een zo groot mogelijk rechthoekig grondvlak neerzetten. Je kunt nagaan dat voor $a = 30$ m de oppervlakte van het grondvlak gelijk is aan 2550 m^2 . Neem je $a = 40$ m, dan is de oppervlakte 3200 m^2 . Hoeveel meter moet a zijn zodat de oppervlakte van het grondvlak maximaal is?



6.1 Raaklijnen en toppen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt algebraïsch de formule opstellen van de raaklijn in een punt waarvan de x -coördinaat is gegeven.
- Je kunt algebraïsch de coördinaten van een raakpunt berekenen waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is gegeven.
- Je kunt extreme waarden berekenen met behulp van de afgeleide.
- Je kunt de afgeleide gebruiken om extreme waarden aan te tonen.

Voorkennis Hellinggrafiek en afgeleide functie

De hellingfunctie van een functie f geeft bij elke x de helling van de grafiek van f in dat punt. De grafiek van de hellingfunctie heet de hellinggrafiek.

Een ander woord voor hellingfunctie is afgeleide functie of afgeleide.

Het berekenen van de formule van de afgeleide heet differentiëren.

Hierbij gelden de volgende regels.

$$\begin{aligned}f(x) = a &\text{ geeft } f'(x) = 0 \\f(x) = ax &\text{ geeft } f'(x) = a \\f(x) = ax^n &\text{ geeft } f'(x) = a \cdot nx^{n-1}\end{aligned}$$

In het voorbeeld wordt verder de somregel van het differentiëren gebruikt. Dat betekent dat je term voor term de afgeleide neemt.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x + 8$

b $g(x) = (3x^2 - 1)^2$

Uitwerking

a $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x + 8$ geeft $f'(x) = 12x^2 - 14x + 5$

b $g(x) = (3x^2 - 1)^2 = 9x^4 - 6x^2 + 1$ geeft $g'(x) = 36x^3 - 12x$

V1 Differentieer.

a $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6x - 1$

c $h(p) = -\frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{5}p^2 - 8$

b $g(x) = (5x - 2)^2$

d $k(q) = 10 - 5q^2 + 9q^3 - a^4$

V2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 7x + 5$.

a Bereken de formule van de hellinggrafiek.

b Bereken exact de helling van de grafiek van f voor $x = 1$.

c Bereken exact voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 2.

01 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 4$.

□ ⊗ * De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$.

- a Bereken de y -coördinaat van A .
- b Bereken de formule van de hellinggrafiek van f .
- c Bereken exact de helling van de grafiek van f in het punt A .
- d Om de formule van k op te stellen, gebruik je de antwoorden van de vragen a en c.

Licht dit toe en stel de formule op van k .

Theorie A Formule van raaklijn met behulp van de afgeleide

Je weet dat de afgeleide f' voor elke x de helling in het bijbehorende punt van de grafiek van f geeft. Je kunt dus ook zeggen dat $f'(x)$ de richtingscoëfficiënt is van de raaklijn in het bijbehorende punt.

$f'(a)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $A(a, f(a))$.

Het punt A met $x_A = 3$ ligt op de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$. Zie de figuur hiernaast.

Je krijgt y_A door $f(3)$ te berekenen.

$$f(3) = -\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = 3\frac{1}{2}, \text{ dus } A(3, 3\frac{1}{2}).$$

Met $f'(3)$ krijg je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A .

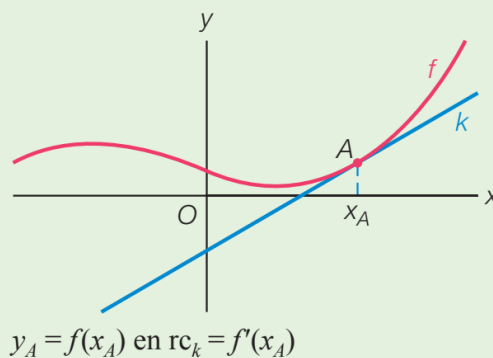
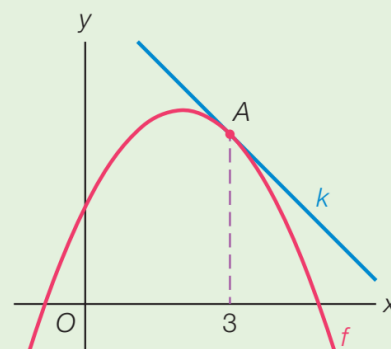
$$f'(x) = -x + 2, \text{ dus } f'(3) = -3 + 2 = -1.$$

Met deze gegevens is de formule van de raaklijn k in A op te stellen. Je krijgt

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -x + b \\ \text{door } A(3, 3\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 + b = 3\frac{1}{2} \\ b = 6\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -x + 6\frac{1}{2}.$$

Bij het algebraïsch opstellen van de formule van een raaklijn ga je te werk zoals in het voorbeeld op de volgende bladzijde. Je berekent dus de afgeleide en laat zien wanneer je $f(x)$ en wanneer je $f'(x)$ gebruikt.



Voorbeeld

Stel algebraïsch een vergelijking op van de lijn k die de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 5$ raakt in het punt A met $x_A = 2$.

Uitwerking

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 5 \text{ geeft } f'(x) = 2x^3 - 3x^2$$

$$y = ax + b$$

$$a = f'(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 4$$

$$y = 4x + b$$

$$f(2) = 5, \text{ dus } A(2, 5) \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 2 + b = 5 \\ 8 + b = 5 \end{array} \right.$$

$$b = -3$$

Dus $k: y = 4x - 3$.

2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2$.



a Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = 4$.

Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k in A .

b Stel algebraïsch een vergelijking op van de lijn l die de grafiek van f raakt in het punt B met $x_B = -1$.

3 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.



a Stel algebraïsch de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt $A(2, 1)$.

b De grafiek van f snijdt de y -as in het punt B .

Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn l in B .

4 Gegeven is de functie $g(x) = 2x^2 - 6x$. De grafiek van g snijdt de x -as



behalve in de oorsprong ook nog in het punt A .

a Bereken exact de coördinaten van A .

b Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k in A .

A5 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 4x$.



a De grafiek van f snijdt de negatieve x -as in het punt A .

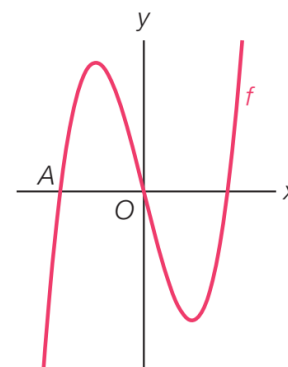
De lijn k raakt de grafiek van f in A en snijdt de y -as in het punt B .

Bereken exact de y -coördinaat van B .

b De lijn l raakt de grafiek van f in het punt C met $x_C = -1$.

De grafiek van f snijdt de positieve x -as in het punt D .

Toon aan dat l door D gaat.



A6 Gegeven is de functie $f(x) = ax^2 - 4x + 2$.



De lijn k die de grafiek van f raakt in het punt $A(6, -4)$ snijdt de x -as in het punt B .

Bereken exact de x -coördinaat van B .

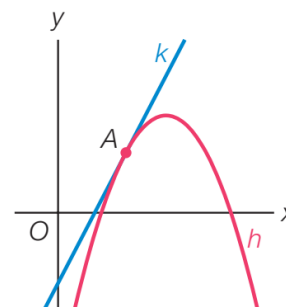
07 Hiernaast zie je de grafiek van de functie $h(x) = -x^2 + 5x - 4$.

□ ⊗ * De lijn k met $rc_k = 2$ raakt de grafiek van h in het punt A .

a Toon aan dat $h'(x_A) = -2x_A + 5$.

b Er geldt $rc_k = 2$, dus $h'(x_A) = 2$.

Bereken x_A en vervolgens y_A .



Theorie B Raaklijn met gegeven richtingscoëfficiënt

Hiernaast zie je van de functie $f(x) = x^2 - 3x + 1$ de grafiek en enkele lijnen met richtingscoëfficiënt 2.

Eén van die lijnen raakt de grafiek van f in het punt B .

Om de coördinaten van B te berekenen, gebruik je dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in B gelijk is aan 2, dus $f'(x_B) = 2$. Om x_B te berekenen, los je dus de vergelijking $f'(x) = 2$ op.

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 \text{ geeft } f'(x) = 2x - 3$$

$$f'(x) = 2 \text{ geeft } 2x - 3 = 2$$

$$2x = 5$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$x_B = 2\frac{1}{2} \text{ geeft } y_B = f(2\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}, \text{ dus } B(2\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}).$$



Eén van de lijnen met $rc = 2$ raakt de grafiek van f .

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 15$.

In de punten A en B van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 3.

Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de coördinaten van A en B .

Uitwerking

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 15 \text{ geeft } f'(x) = 3x^2 - 6x - 6$$

$$f'(x) = 3 \text{ geeft } 3x^2 - 6x - 6 = 3$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

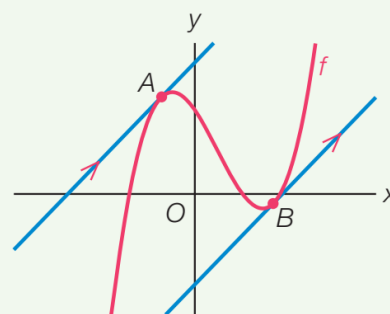
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 3$$

$$x_A = -1 \text{ geeft } y_A = f(-1) = 17, \text{ dus } A(-1, 17).$$

$$x_B = 3 \text{ geeft } y_B = f(3) = -3, \text{ dus } B(3, -3).$$



R8 Zie het voorbeeld.

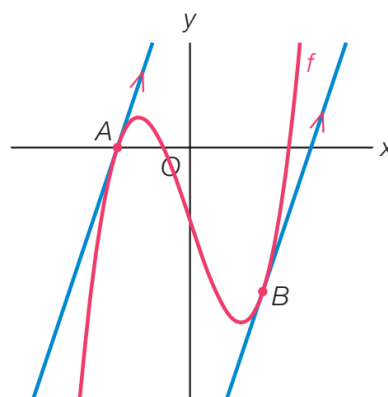
□ ⊗ * Stel de formule op van de raaklijn aan de grafiek van f in A .

9 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

- a** In het punt A van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 4. Bereken exact de coördinaten van A .
- b** Op de grafiek van f ligt het punt B waarin de raaklijn evenwijdig is met de lijn $k: y = -6x + 8$. Waarom is $f'(x_B) = -6$? Bereken exact de coördinaten van B .

10 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x - 2$.

- a** In de punten A en B van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 3. Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de coördinaten van A en B .



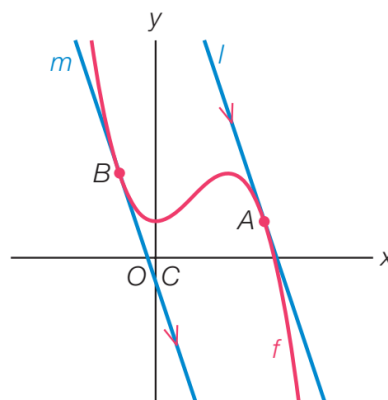
11 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de

functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$.

Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = 3$.

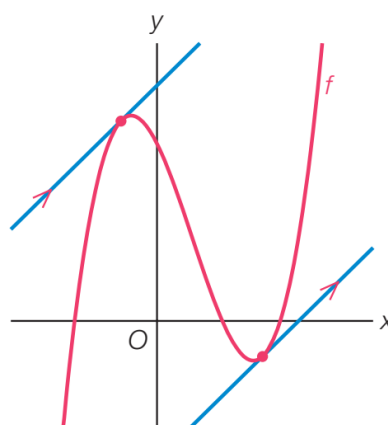
De lijn l raakt de grafiek in A .

- a** Stel algebraïsch de formule op van l .
- b** De lijn m is evenwijdig met l , raakt de grafiek van f in het punt B en snijdt de y -as in het punt C . Bereken exact de y -coördinaat van C .



A12 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 5$.

- a** De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt 1. Deze raaklijnen snijden de y -as in de punten B en C . Bereken exact de afstand tussen B en C .
- b** Toon aan dat de grafiek van f geen raaklijn heeft met richtingscoëfficiënt -4 .
- c** De grafiek van f heeft één raaklijn waarvan de richtingscoëfficiënt -3 is. Toon dit aan en bereken exact de x -coördinaat van het snijpunt S van deze raaklijn met de x -as.



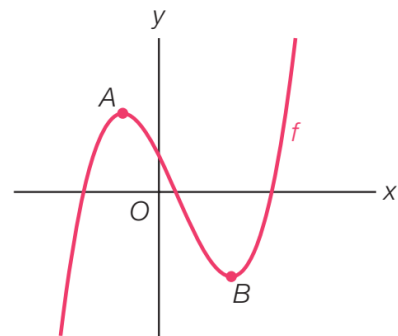
A13 Gegeven is de functie $f(x) = ax^2 + bx$.

***** De lijn $k: y = 2x - 2$ raakt de grafiek van f in het punt $A(-2, -6)$.
Bereken exact a en b .

O14 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$.

□ ⊗ * Op de grafiek van f liggen de punten A en B waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 0.
Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de coördinaten van A en B en geef van beide horizontale raaklijnen de formule.



Theorie C Extreme waarden algebraïsch berekenen

Je kunt met de GR de coördinaten van toppen van grafieken berekenen.

Je gebruikt dan de opties maximum en minimum.

Maar soms wordt gevraagd de coördinaten van toppen algebraïsch te berekenen. Je gebruikt dan dat de raaklijn in een top horizontaal is.

Dat betekent dat de afgeleide gelijk is aan nul. De x -coördinaten van de toppen bereken je dus door de vergelijking $f'(x) = 0$ op te lossen.

De extreme waarden zijn gelijk aan de y -coördinaten van de toppen.

Werkschema: algebraïsch berekenen van extreme waarden

- 1 Bereken $f'(x)$.
- 2 Los exact de vergelijking $f'(x) = 0$ op.
- 3 Kijk naar de grafiek van f of je met een maximum of een minimum te maken hebt.
- 4 Bereken de y -coördinaten van de toppen en noteer het antwoord in de vorm max. is $f(\dots) = \dots$ en min. is $f(\dots) = \dots$

Je kunt met de opties maximum en minimum op de GR controleren of je de extreme waarden goed hebt berekend.

Let op de vraagstelling. Staat er alleen 'Bereken', dan mag je de opties maximum en minimum op de GR gebruiken. Staat er 'Bereken exact', dan ga je algebraïsch te werk en rond je niet af.

Voorbeeld

Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2x + 4.$$

Bereken exact de extreme waarden van f .

Uitwerking

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2x + 4 \text{ geeft}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 2$$

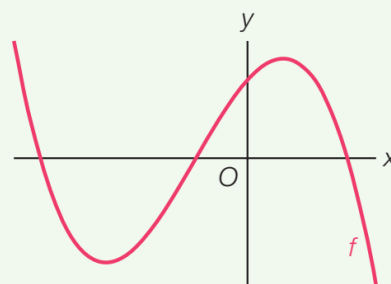
$$f'(x) = 0 \text{ geeft } -\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 2 = 0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x - 1)(x + 4) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -4$$

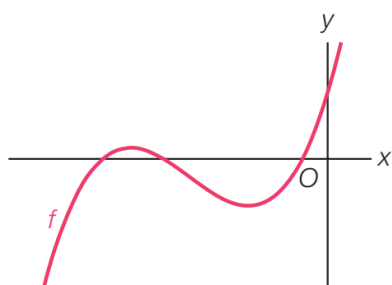
Je krijgt min. is $f(-4) = -5\frac{1}{3}$ en max. is $f(1) = 5\frac{1}{12}$.



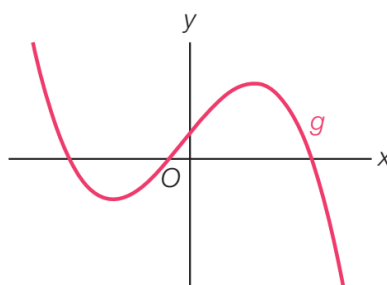
15 Bereken exact de extreme waarden.



a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 + 10x + 5$



b $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + 3\frac{3}{4}x + 3$



A16 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie



$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 40 \text{ met de toppen } A, B \text{ en } C.$$

a Bereken exact de coördinaten van A , B en C .

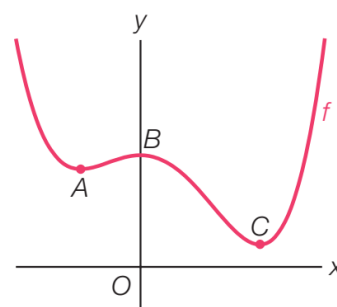
b Geef het bereik van f .

c Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $f(x) = p$ vier oplossingen?

d De lijn k gaat door de toppen B en C en snijdt de grafiek van f ook nog in de punten D en E .

Bereken de coördinaten van D en E . Rond zo nodig af op twee decimalen.

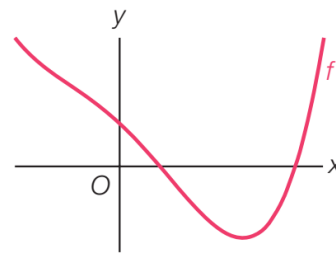
e Tussen de punten B en C liggen twee punten op de grafiek van f waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan -24 . Bereken de coördinaten van deze punten. Rond zo nodig af op twee decimalen.



○17 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 4x + 3$.

□ ⊗ * Hiernaast zie je de grafiek van f .

- a Toon aan dat $f'(2) = 0$.
- b Hoe volgt uit vraag a en de figuur dat de grafiek van f een extreme waarde heeft voor $x = 2$?



Theorie D Aantonen van extreme waarden

Bij het met de afgeleide aantonen dat de functie f een extreme waarde heeft voor $x = a$ gebruik je het volgende werkschema.

Werkschema: met de afgeleide aantonen dat de functie f een extreme waarde heeft voor $x = a$

- 1 Bereken $f'(x)$.
- 2 Laat met een berekening zien dat $f'(a) = 0$.
- 3 Laat zien dat de grafiek een top heeft voor $x = a$ door te verwijzen naar de grafiek van f .

In de opgaven wordt in plaats van 'Toon met de afgeleide aan' ook wel 'Bewijs' gebruikt.

Aantonen

Bij aantonen geef je een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Het geven van enkele getallenvoorbeelden is niet voldoende.

Bewijzen

Bij bewijzen geef je een redenering en/of **exacte** berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Het geven van enkele getallenvoorbeelden is niet voldoende.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x + 3$.

Hiernaast zie je de grafiek van f .

Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = \frac{1}{2}$.

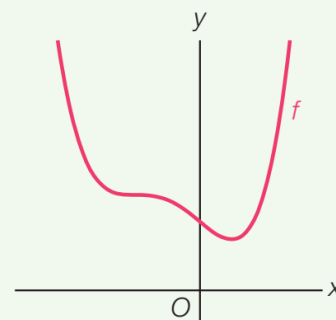
Uitwerking

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x + 3$ geeft $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 0$$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ en in de figuur is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \frac{1}{2}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \frac{1}{2}$.



R18 Gegeven is de functie $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x + 3$ van het voorbeeld.



a Toon aan dat $f'(-1) = 0$.

Heeft f een extreme waarde voor $x = -1$? Licht toe.

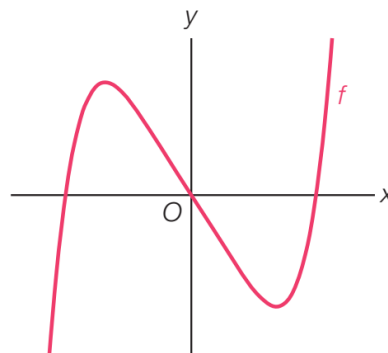
b De grafiek van f heeft twee horizontale raaklijnen.
Stel van deze lijnen een vergelijking op.

19 **a** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - 7x$.



Hiernaast zie je de grafiek van f .

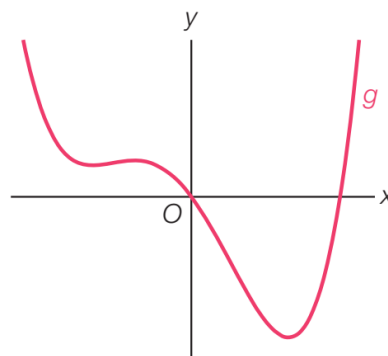
Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{2}$.



b Gegeven is de functie $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 3x$.

Hiernaast zie je de grafiek van g .

Toon met de afgeleide aan dat g een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{3}$.



20 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$. Zie de grafiek hiernaast.



a Toon met de afgeleide aan dat f geen extreme waarde heeft voor $x = 1$.

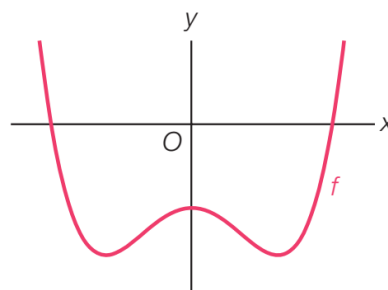
b Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

c Behalve voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$ heeft f ook extremen voor $x = 0$ en $x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$.

Bereken exact voor welke p de vergelijking $f(x) = p$ vier oplossingen heeft.

d De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -1$.
Bewijs dat k de grafiek van f snijdt in het snijpunt van de grafiek van f met de positieve x -as.

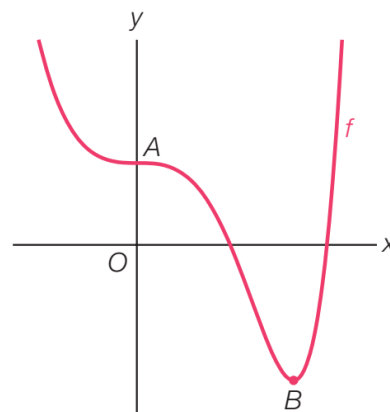
e Bewijs dat de lijn met vergelijking $y = 4\frac{1}{2}x - 12\frac{7}{16}$ de grafiek van f raakt in het punt B met $x_B = 1\frac{1}{2}$.



A21

Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{2}x^3 - 4)^2 - 10$. De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A en de top is het punt B . Zie de figuur hiernaast.

- Toon met de afgeleide aan dat de grafiek van f een horizontale raaklijn heeft in A en geef de formule van deze raaklijn.
- Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = 2$.
- Bereken het bereik van f .
- De lijn k raakt de grafiek van f in punt C met $x_C = 1$ en snijdt de lijn met vergelijking $x = 2$ in punt D . Bereken exact $y_D - y_B$.



Geschiedenis **Johannes Hudde**

Johannes Hudde was een veelzijdig man met grote belangstelling voor wiskunde, natuurkunde, techniek en sterrenkunde. Het grootste deel van zijn leven was hij burgemeester van Amsterdam.

Bekend is Huddes methode om toppen te bepalen van grafieken van functies met gehele machten van x , zoals bijvoorbeeld $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$. De door hem bedachte methode wordt de regel van Hudde genoemd. Hudde gebruikte hierbij onbewust de afgeleide van dit soort functies. Het toepassen van zijn regel op de functie $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ leidt tot het oplossen van de vergelijking $6x^2 - 6 = 0$, dus tot het oplossen van de vergelijking $f'(x) = 0$. De oplossingen $x = -1$ en $x = 1$ zijn de x -coördinaten van de toppen van de grafiek van f .



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan algebraïsch de formule opstellen van de raaklijn in een punt waarvan de x-coördinaat is gegeven.
- ☐ Ik kan algebraïsch de coördinaten van een raakpunt berekenen waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is gegeven.
- ☐ Ik kan extreme waarden berekenen met behulp van de afgeleide.
- ☐ Ik kan de afgeleide gebruiken om extreme waarden aan te tonen.

► OPGAVE C1
THEORIE A

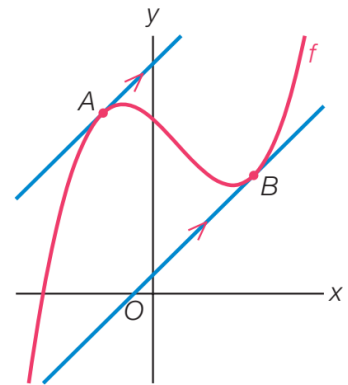
► OPGAVE C2
THEORIE B

► OPGAVE C3
THEORIE C

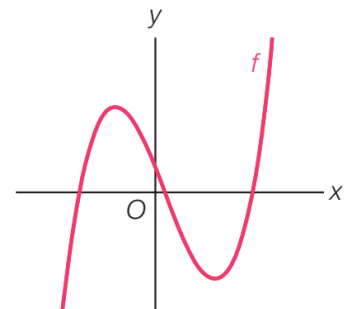
► OPGAVE C4
THEORIE D

C1 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 3$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.
Stel algebraïsch de formule op van k .

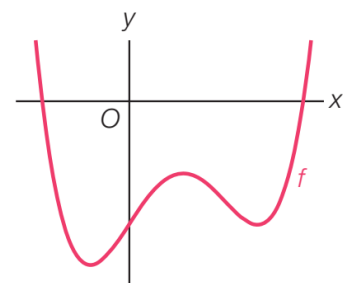
C2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 4$.
In de punten A en B van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 1.
Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact de coördinaten van A en B .



C3 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$.
Hiernaast zie je de grafiek van f .
Bereken exact de extreme waarden van f .



C4 Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x - 5$.
Hiernaast zie je de grafiek van f .
Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = 2$.



Antwoorden

C1 $k: y = 4x - 5$

C2 $A(-1, 4\frac{1}{6})$ en $B(2, 2\frac{2}{3})$

C3 max. is $f(-2) = 10\frac{1}{3}$ en min. is $f(3) = -10\frac{1}{2}$

C4 *

6.2 De afgeleide van machtsfuncties

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met de afgeleide van $f(x) = x^n$ waarbij n een negatief geheel getal is.
- Je kunt werken met de afgeleide van $f(x) = x^n$ waarbij n geen geheel getal is.

O22



Gegeven is de functie $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

Het functievoorschrift van g is te schrijven als $g(x) = x^{-2}$.

a Licht dit toe.

b Gebruik de regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ om de afgeleide van g te berekenen en licht toe dat de formule die je zo krijgt te schrijven is als

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3}.$$

c Controleer dat inderdaad geldt $g(x) = \frac{1}{x^2}$ geeft

$g'(x) = -\frac{2}{x^3}$ door de formule van g , van g' en van de numerieke afgeleide van g in te voeren in je GR en de grafieken te plotten. Neem zowel x als y tussen -5 en 5 . Wat is je conclusie?

Zie zo nodig nog eens in de module *Helling en hellinggrafiek* hoe je de numerieke afgeleide invoert.

Theorie A De afgeleide van $f(x) = x^n$ met $n = -1, -2, -3, \dots$

In opgave 22 heb je gezien dat de regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ ook geldt voor $n = -2$.

Op dezelfde manier kun je laten zien dat de regel ook geldt voor $n = -3$, dus dat geldt $h(x) = x^{-3}$ geeft $h'(x) = -3x^{-4}$.

De regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ geldt zelfs voor elk negatief geheel getal n .

Je kunt nu de afgeleide berekenen van bijvoorbeeld $f(x) = \frac{2}{x}$, want

$$f(x) = \frac{2}{x} = 2x^{-1} \text{ en dit geeft } f'(x) = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}.$$

Afspraak

Bij het differentiëren laat je in het antwoord alleen negatieve exponenten staan als de functie zelf met negatieve exponenten is gegeven.

Om de afgeleide van $g(x) = \frac{x^4 + 1}{2x^2}$ te berekenen, schrijf je eerst het functievoorschrift als $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^{-2}$. Dat doe je met behulp van **uitdelen** en gaat als volgt.

$$g(x) = \frac{x^4 + 1}{2x^2} = \frac{x^4}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^{-2}$$

Nu kun je de afgeleide berekenen. Je krijgt $g'(x) = x - x^{-3}$ en volgens de afspraak herleid je dit tot $g'(x) = x - \frac{1}{x^3}$.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = \frac{6}{x^3}$

b $g(x) = \frac{x^3 + 1}{3x^2}$

Uitwerking

a $f(x) = \frac{6}{x^3} = 6x^{-3}$ geeft $f'(x) = -18x^{-4} = -\frac{18}{x^4}$

b $g(x) = \frac{x^3 + 1}{3x^2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^{-2}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3}$

$$\frac{x^3 + 1}{3x^2} = \frac{x^3}{3x^2} + \frac{1}{3x^2}$$

Bij het exact berekenen van de extreme waarden van de functie $f(x) = \frac{x^2 + 16}{4x}$ krijg je te maken met een gebroken vergelijking.

$$f(x) = \frac{x^2 + 16}{4x} = \frac{1}{4}x + 4x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{4} - 4x^{-2} = \frac{1}{4} - \frac{4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{4} - \frac{4}{x^2} = 0$$

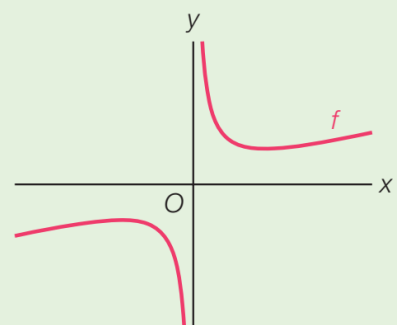
$$\frac{1}{4} = \frac{4}{x^2}$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

Je krijgt max. is $f(-4) = -2$ en min. is $f(4) = 2$.

Merk op dat het maximum kleiner is dan het minimum.



Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x}$.

De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt $1\frac{4}{5}$.

Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.

Aanpak

$rc_{\text{raaklijn}} = 1\frac{4}{5}$, dus los de vergelijking $f'(x) = 1\frac{4}{5}$ op.

Uitwerking

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x} = 2x + 5x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = 2 - 5x^{-2} = 2 - \frac{5}{x^2}$$

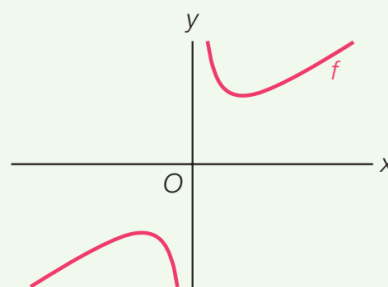
$$f'(x) = 1\frac{4}{5} \text{ geeft } 2 - \frac{5}{x^2} = 1\frac{4}{5}$$

$$\frac{5}{x^2} = \frac{1}{5}$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \vee x = -5$$

$f(5) = 11$ en $f(-5) = -11$, dus de raakpunten zijn $(5, 11)$ en $(-5, -11)$.



23 Differentieer.

□

a $f(x) = \frac{5}{x^3}$

b $g(x) = \frac{1}{5x^3}$

c $h(x) = 5x^2 - \frac{5}{x^2}$

24 Bereken de afgeleide.

□ ⊗ *

a $f(x) = \frac{x^4 - 5}{x^3}$

b $g(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^3}$

c $h(x) = \frac{x+2}{3x}$

A25 Bereken de afgeleide.

□ ⊗ *

a $f(x) = \frac{2x-1}{3x^2}$

b $g(x) = 6 - \frac{x^2-1}{x}$

c $h(x) = \frac{5}{2x^2} - \frac{2x^2}{5}$

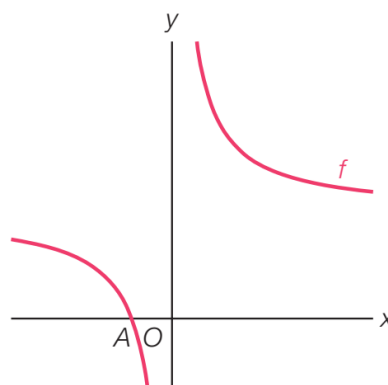
26 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x+3}{x}$.

□ ⊗ *

a De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A .
De lijn k raakt de grafiek van f in A en snijdt de y -as in het punt B .

Bereken exact de y -coördinaat van B .

b De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt $-\frac{3}{4}$.
Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.

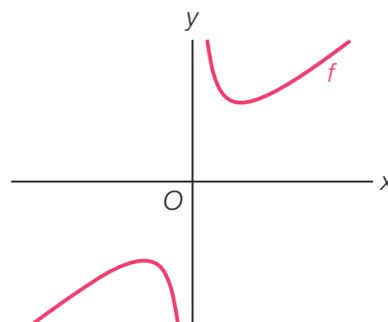


A27

□ ⊗ *

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$.

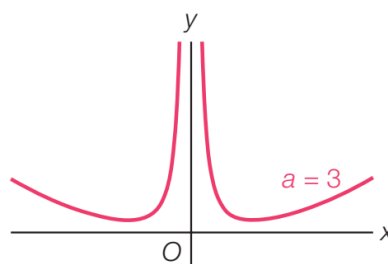
- a De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 3$ en snijdt de x -as in het punt B . Bereken exact de x -coördinaat van B .
- b De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -3 . Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.
- c Bereken exact de extreme waarden van f .
- d Bewijs dat de grafiek van f geen raaklijn heeft met richtingscoëfficiënt 2 .

**A28**

*

Voor $a > 0$ is gegeven de functie $f(x) = \frac{x^2}{a} + \frac{a}{x^2}$.

- Hiernaast zie je de grafiek van f voor $a = 3$.
- a Bereken exact voor welke waarden van p de vergelijking $\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2} = p$ vier oplossingen heeft.
- b Bewijs dat voor elke waarde van a de toppen van de grafiek van f op de lijn $y = 2$ liggen.

**O29**

□ ⊗ *

Schrijf als macht van x .

- a $\sqrt{x}$
- c $\frac{1}{x\sqrt{x}}$
- b $x^2 \cdot \sqrt{x}$
- d $x^3 \cdot \sqrt{x}$

O30

□ ⊗ *

Schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten.

- a $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
- c $-1\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}}$
- b $2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}}$
- d $1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}$

O31

□ ⊗ *

Fleur wil de afgeleide van $g(x) = \sqrt{x}$ berekenen. Ze krijgt $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ door de regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ en opgave 29a en 30a te gebruiken.

- a Onderzoek hoe dat gaat.
- b Controleer of inderdaad geldt dat $g(x) = \sqrt{x}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ door de formule van g , van g' en van de numerieke afgeleide van g in te voeren in je GR en de grafieken te plotten. Neem zowel x als y tussen 0 en 3. Wat is je conclusie?

Theorie B De afgeleide van $f(x) = x^n$ voor elke n van $\mathbb{R}$

De regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ geldt ook voor gebroken waarden van n . Hiervan heb je in opgave 31 een voorbeeld gezien. De regel geldt zelfs voor elk getal n van $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ voor elke n van $\mathbb{R}$.

Om $f(x) = x\sqrt{x}$ te differentiëren, schrijf je eerst $x\sqrt{x}$ als macht van x .

Je krijgt $f(x) = x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$ en dit geeft $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

Vervolgens schrijf je $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ zonder gebroken exponent, dus $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Afspraak

Bij het differentiëren laat je in het antwoord alleen gebroken exponenten staan als de functie zelf met gebroken exponenten is gegeven.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$ **b** $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}$ **c** $h(x) = (2x - \sqrt{x})^2$

Uitwerking

a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$

b $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2} = x^{-\frac{5}{3}}$ geeft $g'(x) = -\frac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{8}{3}}} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x^2 \cdot x^{\frac{2}{3}}} = -\frac{5}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

c $h(x) = (2x - \sqrt{x})^2 = 4x^2 - 4x\sqrt{x} + x = 4x^2 - 4x \cdot x^{\frac{1}{2}} + x = 4x^2 - 4x^{\frac{3}{2}} + x$
geeft $h'(x) = 8x - 6x^{\frac{1}{2}} + 1 = 8x - 6\sqrt{x} + 1$

32 Differentieer.



a $f(x) = x + \sqrt{x}$

c $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

b $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$

d $k(x) = (3 - \sqrt{x})^2$

33 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x}$

c $h(x) = (x+1)(1+\sqrt{x})$

b $g(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{x}}$

d $k(x) = \frac{x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$

34 Differentieer.



a $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

c $h(x) = \frac{x^2 - 2}{x\sqrt{x}}$

b $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

d $k(x) = x^2(x\sqrt{x} - 3)$

A35 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = (x\sqrt{x} - 3)^2$

c $h(x) = (x - \sqrt[3]{x})^2$

b $g(x) = \frac{2x - 3}{x\sqrt{x}}$

d $k(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt[4]{x}}$

36 Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

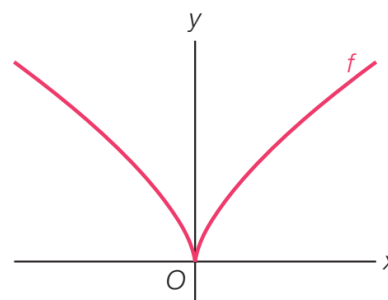


De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = \frac{1}{8}$.

De lijn l raakt de grafiek van f in het punt B met $x_B = 8$.

De lijnen k en l snijden elkaar in het punt C .

Bereken exact de coördinaten van C .



37 Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$.



a Bereken exact het bereik van f .

b De lijn k raakt de grafiek van f in de oorsprong.

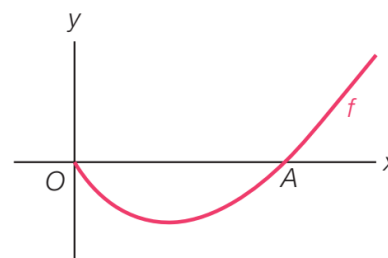
De grafiek van f snijdt de positieve x -as in het punt A .

De lijn l door A is evenwijdig met k en snijdt de y -as in het punt B .

Bereken exact de y -coördinaat van B .

c De lijn m met richtingscoëfficiënt 3 raakt de grafiek van f in het punt C en snijdt de x -as in het punt D .

Bereken exact de x -coördinaat van D .



A38 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 + 12}{\sqrt{x}}$. De y -as is



verticale asymptoot van de grafiek van f . Zie de figuur hiernaast.

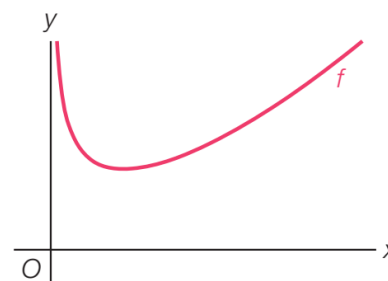
a Bereken exact de extreme waarde van f .

b De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 4$ en snijdt de x -as in het punt B .

Bereken exact de x -coördinaat van B .

c De lijn met vergelijking $y = 13$ snijdt de grafiek van f in de punten C en D , met $x_C < x_D$. De lijn l raakt de grafiek van f in C . Lijn m is evenwijdig met l en gaat door het punt $(6, 0)$. Lijn m snijdt de grafiek van f in twee punten.

Bereken de coördinaten van deze punten. Rond af op twee decimalen.



A39

Een magneetzweeftrein trekt op. Gedurende de eerste negen seconden is de afgelegde weg s in meters te benaderen door de functie $s(t) = 10t\sqrt{t}$ met t in seconden. Na negen seconden verandert de snelheid niet meer. Bereken exact

- a de snelheid na acht seconden
- b na hoeveel seconden de snelheid gelijk is aan 108 km/u
- c hoeveel meter de trein aflegt in de eerste minuut.

**E40**

Voor elke waarde van p is gegeven de functie $f(x) = (2x - p\sqrt{x})^2$. Bereken exact voor welke p de functie een maximum heeft voor $x = 2\frac{1}{4}$ en bereken dit maximum.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met de afgeleide van $f(x) = x^n$ waarbij n een negatief geheel getal is.

► OPGAVE C5
THEORIE A

☐ Ik kan werken met de afgeleide van $f(x) = x^n$ waarbij n geen geheel getal is.

► OPGAVE C6
THEORIE B

C5 a Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = \frac{2}{x^4}$.

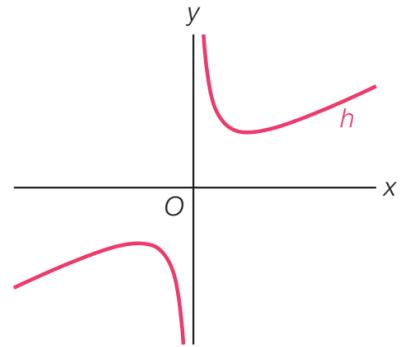
b Differentieer de functie $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

c Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$h(x) = \frac{x^2 + 9}{2x}.$$

De grafiek van h heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -4 .

Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.



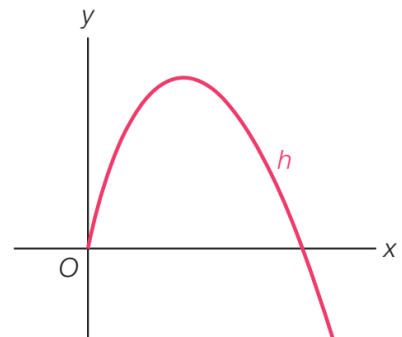
C6 a Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{x}$.

b Differentieer de functie $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x}}$.

c Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$h(x) = 6x - 2x\sqrt{x}.$$

Bereken exact het maximum van h .



Antwoorden

C5 a $f'(x) = -\frac{8}{x^5}$

b $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

c $(1, 5)$ en $(-1, -5)$

C6 a $f'(x) = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x}$

b $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

c max. is $h(4) = 8$

In de differentiaalrekening bestudeert men veranderingen van functies. Daarbij spelen begrippen als snelheid, helling van een grafiek en raaklijn aan een grafiek een grote rol.

De beroemde geleerden Isaac Newton (1642-1727) en Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) hebben onafhankelijk van elkaar de differentiaalrekening ontwikkeld.

Newton geldt als de grootste en invloedrijkste wetenschapper aller tijden. In zijn belangrijkste werk, de 'Principia Mathematica' uit 1687, zet hij de wiskundige beginselen van de natuurwetenschappen uiteen. Hij verklaart in dit boek hoe het zonnestelsel in elkaar zit en legt er de wetten van de zwaartekracht en de bewegingsleer (mechanica) in vast.

Newton werd geboren op 25 december 1642 in Lincolnshire in Engeland. Zijn vader stierf al voor zijn geboorte. Zijn moeder liet hem over aan de zorgen van zijn grootmoeder.

Al vroeg werd duidelijk dat hij voor het werk thuis op de boerderij ongeschikt was. Hij had er geen belangstelling voor en verdiepte zich geheel in lezen en knutselen.

Newton schreef in 1671 een verhandeling over raaklijnen, maar deze werd pas negen jaar na zijn dood gepubliceerd.

Leibniz wordt gezien als een van de meest invloedrijke figuren in de westerse cultuur. Behalve aan wiskunde leverde hij ook belangrijke bijdragen aan filosofie, fysica, geologie, rechten, geschiedenis en geneeskunde. Hij was actief als politicus en raadsheer aan het hof van Hannover bij hertog Johann Friedrich. Hij ontwierp nieuwe soorten rijtuigen en drainagesystemen voor de mijnen in de Harz. Ook bedacht hij een manier om fosfor te produceren en was hij de uitvinder van de eerste rekenmachine die in staat was op te tellen, af te trekken, te vermenigvuldigen en te delen. In 1684 publiceerde hij het eerste artikel over de differentiaalrekening. Veel van de huidige notaties in de wiskunde zijn van hem afkomstig.

De vraag wie de ontdekker is van de differentiaalrekening heeft heel wat twistgesprekken opgeleverd. Terwijl de Engelsen Newton als de ontdekker beschouwden, ging men er in Duitsland vanuit dat dit Leibniz was. Deze vete heeft zelfs bijna een oorlog veroorzaakt tussen Engeland en Duitsland.



Newton



Leibniz

6.3 De kettingregel

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met de afgeleide van $f(x) = (ax + b)^n$ met n geheel.
- Je kunt werken met de afgeleide van $f(x) = (ax + b)^n$ voor elke n van $\mathbb{R}$.

O41 Gegeven is de functie $g(x) = 3(4x - 1)^2$.

□ ⊗ * Er geldt $g'(x) = 96x - 24$.

- Toon dit aan door eerst de haakjes weg te werken.
- Fleur schrijft in één keer de afgeleide op en krijgt $g'(x) = 6(4x - 1)$.
Hoe komt Fleur hier aan en waarom klopt haar afgeleide niet?

Theorie A De afgeleide van $f(x) = (ax + b)^n$ met n geheel

In vraag a van opgave 41 heb je na het wegwerken van de haakjes in $3(4x - 1)^2$ met behulp van differentiëren berekend dat $g'(x) = 96x - 24$. Je kunt de afgeleide van g ook berekenen zonder de haakjes weg te werken. Daarbij moet je rekening houden met de factor 4 voor de x . Je krijgt $g(x) = 3(4x - 1)^2$ geeft $g'(x) = 6(4x - 1) \cdot 4$, en dit is gelijk aan $g'(x) = 96x - 24$.

En zo is de afgeleide van $h(x) = (5x - 1)^3$ gelijk aan $h'(x) = 3(5x - 1)^2 \cdot 5$.

Algemeen is de afgeleide van $f(x) = (ax + b)^n$ gelijk aan $f'(x) = n(ax + b)^{n-1} \cdot a$.

En de afgeleide van $f(x) = c \cdot (ax + b)^n$ is $f'(x) = c \cdot n(ax + b)^{n-1} \cdot a$.

Zo is de afgeleide van $k(x) = 7(2x - 3)^{-4}$ gelijk aan $k'(x) = 7 \cdot -4(2x - 3)^{-5} \cdot 2 = -56(2x - 3)^{-5}$.

Functies zoals $g(x) = 3(4x - 1)^2$, $h(x) = (5x - 1)^3$ en $k(x) = 7(2x - 3)^{-4}$ heten **samengestelde functies**.

Zo is de functie $g(x) = 3(4x - 1)^2$ samengesteld uit de functies $f(x) = 3x^2$ en $l(x) = 4x - 1$.

Er geldt $g(x) = f(l(x)) = f(4x - 1) = 3(4x - 1)^2$.

Let op of je bij het differentiëren met een samengestelde functie van de vorm $f(x) = c \cdot (ax + b)^n$ te maken hebt, want dan moet je ook nog vermenigvuldigen met a .

$$f(x) = 3x^2$$

Net als $f(10) = 3 \cdot 10^2$ is $f(4x - 1) = 3 \cdot (4x - 1)^2$.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = x^2 - (3x - 1)^4$

b $g(x) = 4x + \frac{10}{2x - 1}$

Let op! Vermenigvuldig met 3.

Uitwerking

a $f(x) = x^2 - (3x - 1)^4$ geeft $f'(x) = 2x - 4(3x - 1)^3 \cdot 3 = 2x - 12(3x - 1)^3$

b $g(x) = 4x + \frac{10}{2x - 1} = 4x + 10(2x - 1)^{-1}$ geeft

$$g'(x) = 4 + 10 \cdot -1(2x - 1)^{-2} \cdot 2 = 4 - \frac{20}{(2x - 1)^2}$$

Denk aan de afspraak op bladzijde 59.

42 Differentieer.



a $f(x) = (4x + 3)^3$

b $g(x) = (5x - 2)^{-3}$

c $h(x) = 6(\frac{1}{2}x - 4)^5$

d $k(x) = -3(\frac{1}{6}x + 5)^{-4}$

43 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = 3x^2 - (\frac{1}{4}x - 2)^3$

b $g(x) = \frac{5}{(3x - 1)^2}$

c $h(x) = \frac{2}{3}(4x - 3)^3 - \frac{1}{2}x^2$

d $k(x) = 5x - \frac{4}{3x + 2}$

44 Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{2}x - 3)^3 - 1\frac{1}{2}x + 10$.



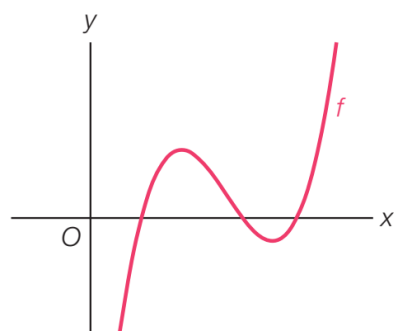
De afgeleide van f is gelijk aan $f'(x) = 1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 3)^2 - 1\frac{1}{2}$.

a Toon dit aan.

b Toon aan dat uit $f'(x) = 0$ volgt

$$\frac{1}{2}x - 3 = 1 \vee \frac{1}{2}x - 3 = -1.$$

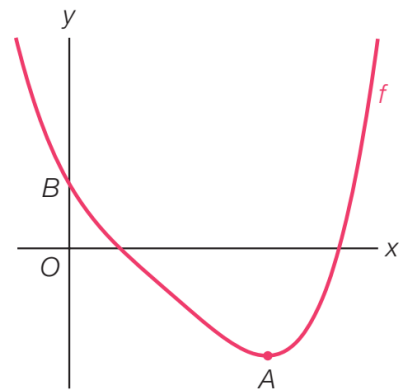
c Bereken exact de extreme waarden van f .



45 Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2$.

□ ⊗ * De grafiek van f heeft top A en snijdt de y -as in punt B . Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken exact het bereik van f .
- b** De lijn k gaat door A en B en snijdt de x -as in punt C . Bereken exact de x -coördinaat van C .
- c** De lijn l raakt de grafiek van f en is evenwijdig met de lijn m : $y = -x$. De lijn p raakt de grafiek van f en is evenwijdig met de lijn q : $y = 7x$. De lijnen l en p snijden elkaar in het punt S . Bereken exact de coördinaten van S .

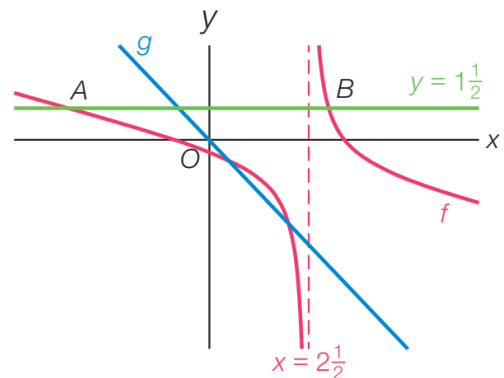


A46 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{3}{2x-5} - \frac{1}{2}x$

□ ⊗ * en $g(x) = -2x$. De lijn $x = 2\frac{1}{2}$ is de verticale asymptoot van de grafiek van f .

De lijn $y = 1\frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken exact de afstand tussen A en B .
- b** De lijn k raakt de grafiek van f in het punt C met $x_C = 2$ en snijdt de x -as in het punt D . Bereken exact de x -coördinaat van D .
- c** Er zijn twee lijnen die de grafiek van f raken en evenwijdig zijn met de grafiek van g . Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.
- d** Bereken exact voor welke waarden van x geldt dat $f(x) \geq g(x)$.



E47 Bereken exact voor welke waarde van a de functie $f(x) = (ax - 2)^4 + \frac{1}{2}ax$ een extreme waarde heeft voor $x = 3$.

○48 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{3x+1}$.

□ ⊗ * **a** Ga met de GR na dat geldt $f'(5) = \frac{3}{8}$.

De functie f is ook te schrijven als $f(x) = (3x+1)^{\frac{1}{2}}$.

b Laat zien dat je hiermee vindt $f'(x) = \frac{3}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}}$ en toon met een berekening aan dat $f'(5) = \frac{3}{8}$.

c Toon aan dat de afgeleide te schrijven is als $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.

Theorie B De afgeleide van $f(x) = (ax + b)^n$ voor elke n van $\mathbb{R}$

De regel $f(x) = c \cdot (ax + b)^n$ geeft $f'(x) = c \cdot n(ax + b)^{n-1} \cdot a$ geldt voor elke n van $\mathbb{R}$. Hiervan heb je in opgave 48 een voorbeeld gezien. Deze regel is een bijzonder geval van de **kettingregel**. Zie het informatief op bladzijde 73.

$$f(x) = c \cdot (ax + b)^n \text{ geeft } f'(x) = c \cdot n(ax + b)^{n-1} \cdot a \text{ voor elke } n \text{ van } \mathbb{R}.$$

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = 3(5x - 6)^{\frac{2}{3}}$

b $g(x) = x^2 - \sqrt{6x - 1}$

Uitwerking

a $f(x) = 3(5x - 6)^{\frac{2}{3}}$ geeft $f'(x) = 3 \cdot \frac{2}{3}(5x - 6)^{-\frac{1}{3}} \cdot 5 = 10(5x - 6)^{-\frac{1}{3}}$

b $g(x) = x^2 - \sqrt{6x - 1} = x^2 - (6x - 1)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$g'(x) = 2x - \frac{1}{2}(6x - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 = 2x - 3 \cdot \frac{1}{(6x - 1)^{\frac{1}{2}}} = 2x - \frac{3}{\sqrt{6x - 1}}$$

49 Differentieer.



a $f(x) = (2x - 5)^{\frac{1}{3}}$

b $g(x) = 3x + \sqrt{2x + 1}$

c $h(x) = (2x + 1)^{1\frac{1}{2}}$

d $k(x) = 3x^2 - \sqrt{2 - 5x}$

50 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = 4(3x - 1)^{\frac{2}{5}}$

b $g(x) = \frac{6}{\sqrt{2x - 5}}$

c $h(x) = 4(6x - 7)^{-1\frac{1}{2}}$

d $k(x) = \sqrt{3x - 1} - \frac{1}{\sqrt{3x - 1}}$

51



Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x + 4 - \sqrt{3x + 4}$.

Van de grafiek van f is A het randpunt, B het snijpunt met de y -as en C de top. Zie de figuur hiernaast.

- a** De lijn k raakt de grafiek van f in B en snijdt de x -as in het punt S .

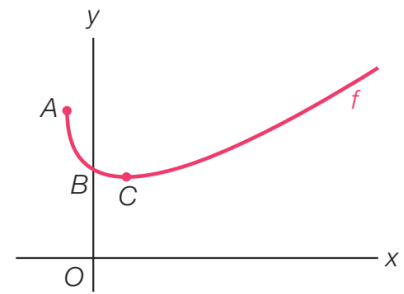
Bereken exact de x -coördinaat van S .

- b** De lijn l gaat door A en C en snijdt de y -as in het punt T .

Bereken exact de y -coördinaat van T .

- c** De lijn m raakt de grafiek van f in het punt D met $x_D = 15$.

Onderzoek op algebraïsche wijze of m door de oorsprong gaat.



52



Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{4x + 12} - \frac{1}{2}x$.

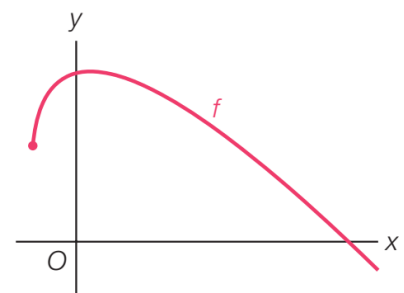
- a** Bereken van de grafiek van f de coördinaten van het randpunt.

- b** Bereken exact het maximum van f en geef het bereik van f .

- c** De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 6$ en snijdt de x -as in het punt B .

Bereken exact de afstand tussen B en het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.

- d** Bereken exact voor welke waarden van x geldt dat $f(x) < 3$.



A53



Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{4}x + 4 - \sqrt{6x - 8}$.

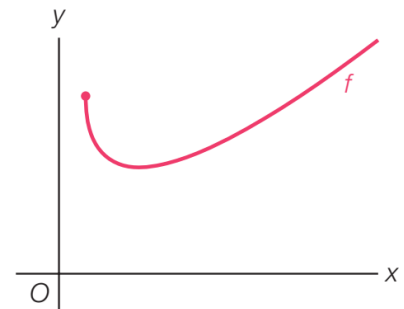
- a** Bereken van de grafiek van f de coördinaten van het randpunt.

- b** Bereken exact het bereik van f .

- c** De lijn k met richtingscoëfficiënt $\frac{3}{8}$ raakt de grafiek van f en snijdt de x -as in het punt S .

Bereken exact de afstand tussen S en de oorsprong.

- d** Bereken exact voor welke waarden van x geldt dat $f(x) > 3\frac{1}{2}$.



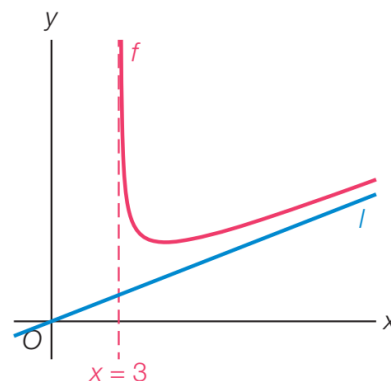
A54

⊙*

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-6}} + \frac{3}{8}x$. De lijn $x = 3$ is de verticale asymptoot van de grafiek van f . In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f en de lijn l : $y = \frac{3}{8}x$.

De functie f heeft een extreme waarde voor $x = 5$.

- Bewijs dat de functie f inderdaad een extreme waarde heeft voor $x = 5$ en bereken exact het bereik van f .
- Onderzoek op algebraïsche wijze of de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = 3\frac{1}{2}$ de x -as snijdt in het punt $(5, 0)$.
- De lijn $x = 53$ snijdt de grafiek van f in het punt B en de lijn l in het punt C .
Toon met een berekening aan dat de afstand tussen B en C gelijk is aan $\frac{3}{10}$.
- De lijn $x = p$ met $p > 5$ snijdt de grafiek van f in het punt P en de lijn l in het punt Q . Als je p steeds groter neemt, wordt de afstand tussen P en Q steeds kleiner.
Bereken exact voor welke waarden van p de afstand tussen P en Q kleiner is dan $\frac{1}{10}$.

**E55**

*

Gegeven is de functie $f(x) = ax + b + \sqrt{ax + b}$ met $x \neq -\frac{b}{a}$.

Bewijs dat f voor geen enkele a en b een extreme waarde heeft.

Informatief De kettingregel

De regel $f(x) = c \cdot (ax + b)^n$ geeft $f'(x) = c \cdot n(ax + b)^{n-1} \cdot a$ is een bijzonder geval van de kettingregel. De kettingregel zegt dat voor de samengestelde functie $f(x) = g(h(x))$ geldt $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

Bij de samengestelde functie $f(x) = (3x - 7)^5$ is $g(x) = x^5$ en $h(x) = 3x - 7$ en dit geeft volgens de kettingregel $f'(x) = 5(3x - 7)^4 \cdot 3 = 15(3x - 7)^4$.

Hiervan heb je in deze paragraaf al veel voorbeelden gezien.

Heb je te maken met de samengestelde functie $k(x) = (3x^2 - 7x)^5$, dan krijg je met de kettingregel $k'(x) = 5(3x^2 - 7x)^4 \cdot (6x - 7)$.

Bij $j(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ krijg je $j(x) = (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}$ geeft $j'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan werken met de afgeleide van $f(x) = (ax + b)^n$ met n geheel.
- ☐ Ik kan werken met de afgeleide van $f(x) = (ax + b)^n$ voor elke n van $\mathbb{R}$.

► OPGAVE C7
THEORIE A

► OPGAVE C8
THEORIE B

C7 a Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = 10(\frac{1}{5}x - 3)^4$.

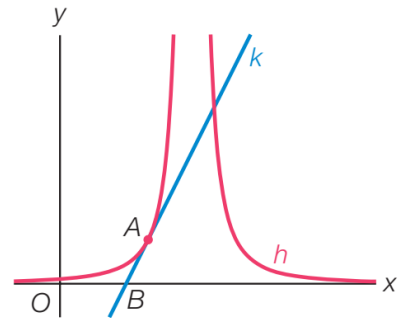
b Differentieer de functie $g(x) = 3x^2 - \frac{6}{2x+1}$.

c De lijn k raakt de grafiek van de functie

$$h(x) = \frac{2}{(\frac{1}{2}x - 3)^2} \text{ in het punt } A \text{ met } x_A = 4 \text{ en snijdt de}$$

x -as in het punt B . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de x -coördinaat van B .



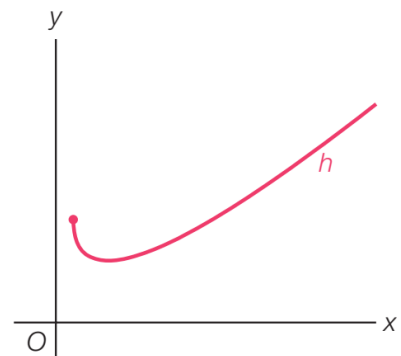
C8 a Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = (5x - 3)^{\frac{3}{4}}$.

b Differentieer de functie $g(x) = \sqrt{3x + 18}$.

c Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$h(x) = \frac{3}{4}x + 2 - \sqrt{3x - 2}.$$

Bereken exact het minimum van h .



Antwoorden

C7 a $f'(x) = 8(\frac{1}{5}x - 3)^3$

b $g'(x) = 6x + \frac{12}{(2x+1)^2}$

c $x_B = 3$

C8 a $f'(x) = 3\frac{3}{4}(5x - 3)^{-\frac{1}{4}}$

b $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+18}}$

c min. is $h(2) = 1\frac{1}{2}$

6.4 Toepassingen van de afgeleide

Kennis en vaardigheden

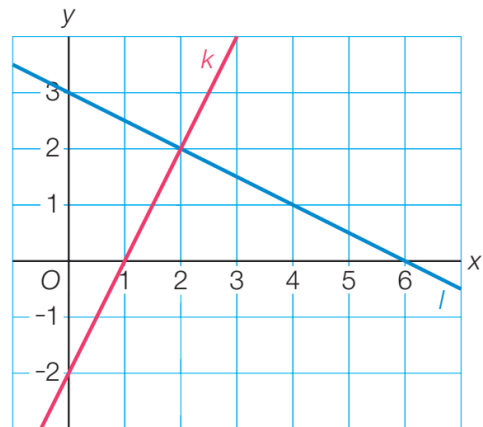
- Je kunt de formule opstellen van een lijn die door een gegeven punt gaat en loodrecht staat op een gegeven lijn.
- Je kunt de verschillende notaties voor de afgeleide gebruiken.
- Je kunt optimaliseringsproblemen over oppervlakten bij grafieken oplossen.
- Je kunt optimaliseringsproblemen over verticale afstanden bij grafieken oplossen.

O56



In de figuur hiernaast zijn de lijnen $k: y = 2x - 2$ en $l: y = -\frac{1}{2}x + 3$ getekend.

- a** Bram beweert dat de lijnen k en l loodrecht op elkaar staan. Ben je het daarmee eens?
- b** De lijn m gaat door het punt $A(4, 0)$ en staat loodrecht op k . Stel van m de formule op.
- c** Stel de formule op van de lijn n die door het punt $B(1, 3)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $p: y = \frac{1}{4}x + 5$.

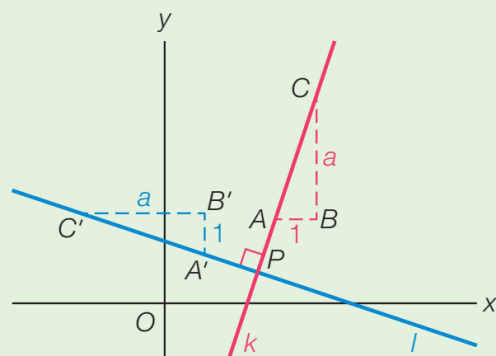


Theorie A Onderling loodrechte lijnen

In opgave 56 heb je gezien dat de lijnen k met $rc_k = 2$ en l met $rc_l = -\frac{1}{2}$ loodrecht op elkaar staan. Ook de lijnen p met $rc_p = \frac{1}{4}$ en n met $rc_n = -4$ staan loodrecht op elkaar.

In het algemeen staan de lijnen k en l met $rc_k = a$ en $rc_l = -\frac{1}{a}$ loodrecht op elkaar. In de figuur hiernaast wordt dit toegelicht.

Dus als $rc_k \cdot rc_l = -1$, dan staan de lijnen k en l loodrecht op elkaar. In het geval $rc_k \neq 0$ en $rc_l \neq 0$ geldt: als $k \perp l$, dan $rc_k \cdot rc_l = -1$.



Voor de lijnen k en l met $rc_k \neq 0$ en $rc_l \neq 0$ geldt: $rc_k \cdot rc_l = -1$ en $k \perp l$ komt op hetzelfde neer.

Om een vergelijking van lijn k op te stellen die door het punt $A(6, 5)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $l: y = 4x - 1$, ga je als volgt te werk.

$k \perp l$ en $rc_l = 4$, dus $rc_k \cdot 4 = -1$ en dit geeft $rc_k = -\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} k: y &= -\frac{1}{4}x + b \\ \text{door } A(6, 5) \quad &\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{4} \cdot 6 + b &= 5 \\ -1\frac{1}{2} + b &= 5 \\ b &= 6\frac{1}{2} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{4}x + 6\frac{1}{2}$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{5}{2x-8}$ en het punt

$A(6, 1\frac{1}{4})$ op de grafiek van f . De lijn k raakt de grafiek in A . De lijn l gaat door de oorsprong en staat loodrecht op k . Zie de figuur hiernaast.

Stel langs algebraïsche weg de formule van l op.

Uitwerking

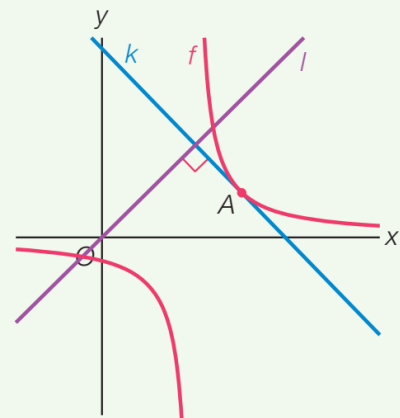
$$f(x) = \frac{5}{2x-8} = 5(2x-8)^{-1} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = 5 \cdot -1(2x-8)^{-2} \cdot 2 = \frac{-10}{(2x-8)^2}$$

$$rc_k = f'(6) = \frac{-10}{(2 \cdot 6 - 8)^2} = -\frac{5}{8}$$

$l \perp k$, dus $rc_l \cdot -\frac{5}{8} = -1$ en dit geeft $rc_l = \frac{8}{5}$.

Dus $rc_l = 1\frac{3}{5}$ en omdat l door de oorsprong gaat, is $l: y = 1\frac{3}{5}x$.



57 Stel een vergelijking op van de lijn



a k die door het punt $A(6, 7)$ gaat en loodrecht staat op de lijn

$$l: y = 3x - 2$$

b m die door het punt $B(-3, 4)$ gaat en loodrecht staat op de lijn

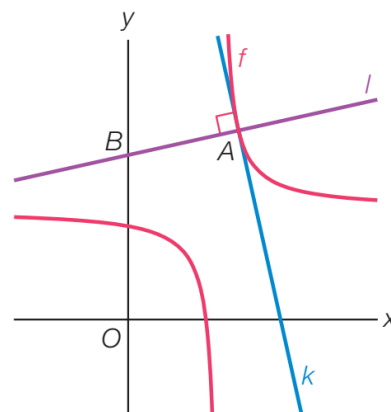
$$n: y = \frac{1}{2}x + 2$$

c p die door het punt $C(2, -5)$ gaat en loodrecht staat op de lijn

$$q: y = -\frac{2}{7}x + 3.$$

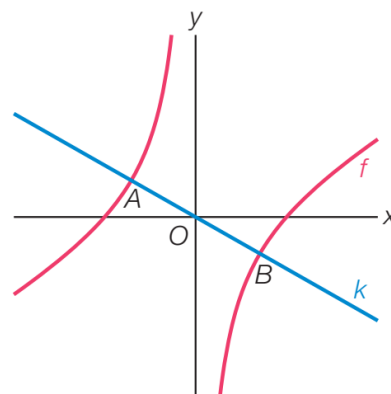
58
□ ⊙ *

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{6}{3x-10} + 4$ en het punt $A(4, 7)$ op de grafiek van f . De lijn k raakt de grafiek van f in A . De lijn l gaat door A , staat loodrecht op k en snijdt de y -as in het punt B . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de coördinaten van B .



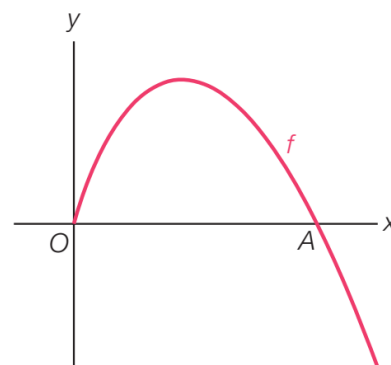
59
□ ⊙ *

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x}$ en de lijn $k: y = -\frac{1}{2}x$ die de grafiek van f snijdt in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast. De lijn l raakt de grafiek van f in A en de lijn m raakt de grafiek van f in B . Onderzoek op algebraïsche wijze of k loodrecht staat op l en of k loodrecht staat op m .



A60
□ ⊙ *

Gegeven is de functie $f(x) = 4x - 2x\sqrt{x}$. De grafiek van f snijdt de x -as behalve in de oorsprong ook nog in het punt A . Zie de figuur hiernaast. Het bereik van f is $\langle \leftarrow, 2\frac{10}{27} \rangle$.



- Bewijs dit.
- De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A . De lijn l gaat door A , staat loodrecht op k en snijdt de y -as in het punt S . Bereken exact de y -coördinaat van S .
- De lijn m met richtingscoëfficiënt 2 snijdt de grafiek van f in het punt B . De lijn n door B staat loodrecht op m en raakt de grafiek van f in B . Bereken exact de coördinaten van B .

A61
□ ⊙ *

- Gegeven is de functie f van opgave 60.
- De lijn p raakt de grafiek van f in de oorsprong. De lijn q gaat door de oorsprong, staat loodrecht op p en snijdt de grafiek van f in het punt T . Bereken exact de x -coördinaat van T .
 - Onderzoek voor welke waarden van a de lijn $r: y = ax$ twee punten gemeenschappelijk heeft met de grafiek van f .

062



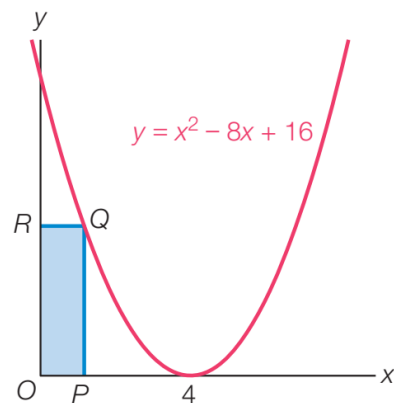
In de figuur hiernaast zie je de parabool $y = x^2 - 8x + 16$ en de rechthoek $OPQR$, waarbij P op de x -as ligt, Q op de parabool en R op de y -as. De oppervlakte A van $OPQR$ hangt af van de x -coördinaat p van P . Hierbij is $0 < p < 4$.

Neem je $p = \frac{1}{2}$, dan is $PQ = 12\frac{1}{4}$ en $A = 6\frac{1}{8}$.

a Toon dit aan.

b Neem $p = 1$ en bereken A .

c Neem $p = 2$ en bereken A .



Theorie B Optimaliseren van oppervlakten bij grafieken

In opgave 62 is de oppervlakte van de rechthoek $OPQR$ afhankelijk van p . Je kunt je afvragen voor welke waarde van p de oppervlakte maximaal is en hoeveel de maximale oppervlakte is. Het berekenen van de maximale oppervlakte is een voorbeeld van een **optimaliseringsprobleem**.

Bij een optimaliseringsprobleem hangt het van de vraagstelling af hoe je te werk moet gaan. Zie het schema hieronder.

Vraagstelling	Uitwerking
Bereken (zonder nadere toevoeging)	Je bent vrij in de manier van uitwerken. Een toelichting is vereist. Bij gebruik van de GR vermeld je de ingevoerde formules en de gebruikte opties. Zo nodig geef je het antwoord in het gevraagde aantal decimalen.
Bereken met de afgeleide Bereken met behulp van differentiëren	Je moet de formule van de afgeleide berekenen. Daarna mag je de vergelijking 'afgeleide = 0' wel grafisch-numeriek oplossen.
Bereken algebraïsch	Ga stap voor stap te werk zonder gebruik te maken van specifieke opties en de grafische mogelijkheden van de GR. Zo nodig geef je het antwoord in het gevraagde aantal decimalen.
Bereken exact	Ga algebraïsch te werk en rond niet af.

Bij het algebraïsch berekenen van een extreme waarde gebruiken we verschillende notaties voor de afgeleide. Zo noteren we in het voorbeeld

de afgeleide van $A = p^3 - 8p^2 + 16p$ als $\frac{dA}{dp} = 3p^2 - 16p + 16$.

Notaties voor de afgeleide van $y = f(x)$

$$f'(x) \quad y' \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{df(x)}{dx} \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

Voorbeeld

Gegeven is nogmaals de parabool $y = x^2 - 8x + 16$ van opgave 62 met de rechthoek $OPQR$.

Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte A van de rechthoek maximaal is en bereken de maximale oppervlakte.

Uitwerking

$$A = OP \cdot PQ$$

$$OP = x_P = p$$

$$PQ = y_Q = p^2 - 8p + 16$$

$$\text{Dus } A = p(p^2 - 8p + 16) = p^3 - 8p^2 + 16p.$$

$$\frac{dA}{dp} = 3p^2 - 16p + 16$$

$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } 3p^2 - 16p + 16 = 0$$

$$D = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 64, \text{ dus } \sqrt{D} = 8$$

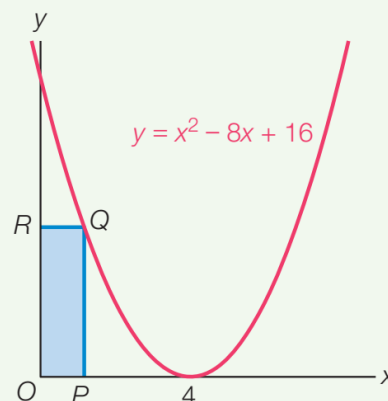
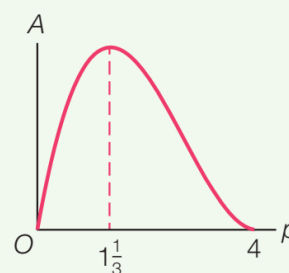
$$p = \frac{16 + 8}{6} = 4 \vee p = \frac{16 - 8}{6} = 1\frac{1}{3}$$

Zie de schets hiernaast.

A is maximaal voor $p = 1\frac{1}{3}$.

De maximale oppervlakte is

$$A_{\max} = (1\frac{1}{3})^3 - 8 \cdot (1\frac{1}{3})^2 + 16 \cdot 1\frac{1}{3} = 9\frac{13}{27}.$$



In de opgaven moet je soms de juistheid van een formule aantonen. Het is dan de bedoeling dat je de formule stap voor stap afleidt. De formule controleren met één of meer getallenvoorbeelden is dus niet voldoende.

63



In de figuur hiernaast is de parabool $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ getekend met daarop het punt P met $x_P = p$, waarbij $0 < p < 6$. Op de x -as ligt het punt $Q(p, 0)$.

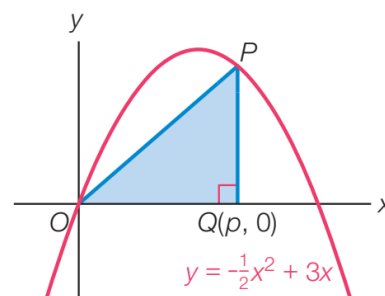
Voor de oppervlakte A van $\triangle OPQ$ geldt

$$A = -\frac{1}{4}p^3 + 1\frac{1}{2}p^2.$$

a Toon aan dat deze formule juist is.

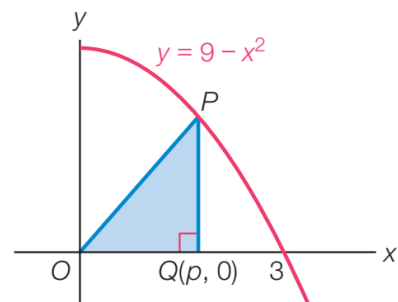
b Bereken $\frac{dA}{dp}$.

c Bereken exact de maximale oppervlakte van $\triangle OPQ$.



64 Gegeven is de parabool $y = 9 - x^2$.

□ ⊗ * Op de parabool ligt het punt P met $x_P = p$, waarbij $0 < p < 3$. Op de x -as ligt het punt $Q(p, 0)$. Bereken exact de maximale oppervlakte van $\triangle OPQ$.



65 In de figuur hiernaast is de parabool $y = -x^2 + 6x$ getekend met de rechthoek $PQRS$. De punten R en S liggen op de parabool en P is het punt $(p, 0)$ waarbij $0 < p < 3$.

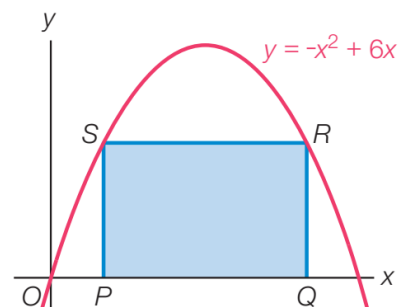
Voor de oppervlakte A van rechthoek $PQRS$ geldt $A = (6 - 2p)(-p^2 + 6p)$.

a Toon aan dat deze formule juist is.

Voor de afgeleide $\frac{dA}{dp}$ geldt $\frac{dA}{dp} = 6p^2 - 36p + 36$.

b Toon aan dat deze formule juist is.

c Bereken algebraïsch de waarde van p waarvoor de oppervlakte van de rechthoek maximaal is. Rond het eindantwoord af op twee decimalen.

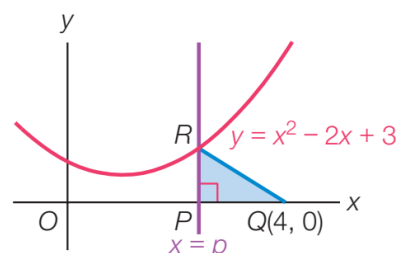


A66 De lijn $x = p$ met $1 \leq p < 4$ snijdt de x -as in het punt P en de parabool $y = x^2 - 2x + 3$ in het punt R . Verder is gegeven het punt $Q(4, 0)$. Zie de figuur hiernaast.

Voor de oppervlakte A van $\triangle PQR$ geldt $A = -\frac{1}{2}p^3 + 3p^2 - 5\frac{1}{2}p + 6$.

a Toon aan dat deze formule juist is.

b Bereken algebraïsch de maximale oppervlakte van $\triangle PQR$. Rond het eindantwoord af op drie decimalen.

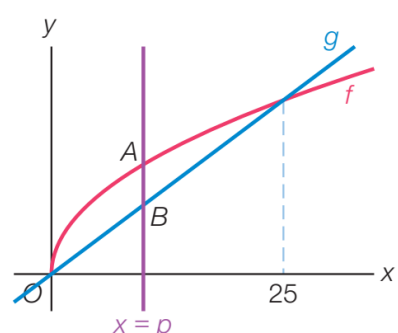


E67 Zie opgave 66.

⊗ * Bereken voor welke waarde van p tussen 0 en 1 de oppervlakte van $\triangle PQR$ net zo groot is als de maximale oppervlakte die je in opgave 66 hebt berekend. Rond af op twee decimalen.

O68 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{1}{5}x$.

□ ⊗ * De lijn $x = p$ met $0 < p < 25$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B . Zie de figuur hiernaast. De lengte van het lijnstuk AB noemen we L . Bereken L voor $p = 1$, $p = 2\frac{1}{4}$ en $p = 9$.



Theorie C Verticale afstanden bij grafieken

Omdat in opgave 68 voor $0 < x < 25$ de grafiek van f boven de grafiek van g ligt, is de lengte L van het lijnstuk AB gelijk aan

$$L = f(p) - g(p), \text{ dus } L = \sqrt{p} - \frac{1}{5}p.$$

Er is een waarde voor p met $0 < p < 25$ waarvoor L maximaal is.

Om deze waarde exact te berekenen, stel je de afgeleide $\frac{dL}{dp}$

gelijk aan nul. Je krijgt

$$L = \sqrt{p} - \frac{1}{5}p = p^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5}p \text{ geeft } \frac{dL}{dp} = \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2\sqrt{p}} - \frac{1}{5}$$

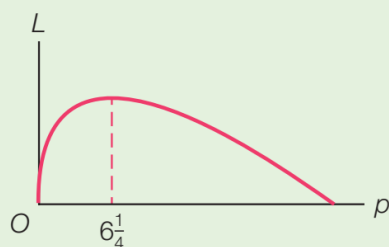
$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2\sqrt{p}} - \frac{1}{5} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{p}} = \frac{1}{5}$$

$$2\sqrt{p} = 5$$

$$\sqrt{p} = 2\frac{1}{2}$$

$$p = 6\frac{1}{4}$$



Uit de schets van L volgt dat L maximaal is voor $p = 6\frac{1}{4}$.

De maximale lengte is $L_{\max} = \sqrt{6\frac{1}{4}} - \frac{1}{5} \cdot 6\frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$.

69



Gegeven zijn de functies $f(x) = x + 2$ en $g(x) = \sqrt{6x + 12}$.

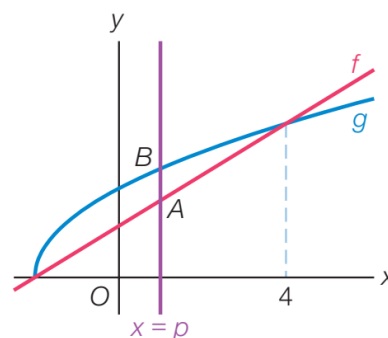
De lijn $x = p$ met $-2 < p < 4$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B . Zie de figuur hiernaast.

Voor de lengte L van het lijnstuk AB geldt

$$L = \sqrt{6p + 12} - p - 2.$$

a Toon aan dat deze formule juist is.

b Bereken exact de maximale waarde van L .

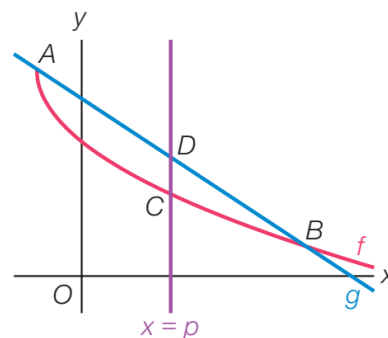


70 Gegeven zijn de functies $f(x) = 7 - \sqrt{3x + 6}$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x + 6$. De grafieken snijden elkaar in de punten A en B . De lijn $x = p$ met $x_A < p < x_B$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D . Zie de figuur hiernaast.

Voor de lengte L van het lijnstuk CD geldt $L = \sqrt{3p + 6} - \frac{1}{2}p - 1$.

a Toon aan dat deze formule juist is.

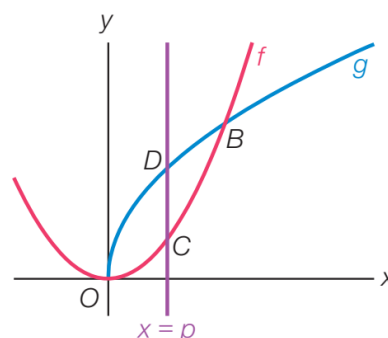
b Bereken exact de maximale waarde van L .



A71 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ en $g(x) = 4\sqrt{2x}$. De grafieken snijden elkaar in de punten O en B .

De lijn $x = p$ met $0 < p < x_B$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D . Zie de figuur hiernaast.

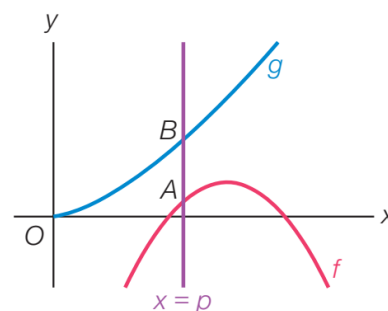
Bereken exact voor welke waarde van p de lengte van het lijnstuk CD maximaal is.



A72 Gegeven zijn de functies $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ en $g(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

De lijn $x = p$ met $p \geq 0$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B . Zie de figuur hiernaast.

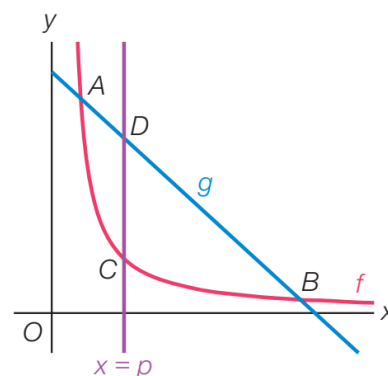
Bereken exact de minimale lengte van het lijnstuk AB .



A73 Met domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ zijn gegeven de functies $f(x) = \frac{8}{2x - 1}$ en $g(x) = 9 - x$.

De grafieken snijden elkaar in de punten A en B . De lijn $x = p$ met $x_A < p < x_B$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de maximale lengte van het lijnstuk CD .



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de formule opstellen van een lijn die door een gegeven punt gaat en loodrecht staat op een gegeven lijn.
- ☐ Ik kan de verschillende notaties voor de afgeleide gebruiken.
- ☐ Ik kan optimaliseringsproblemen over oppervlakten bij grafieken oplossen.
- ☐ Ik kan optimaliseringsproblemen over verticale afstanden bij grafieken oplossen.

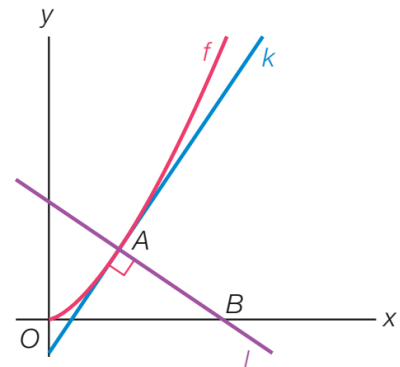
► OPGAVE C9
THEORIE A

► OPGAVE C10
THEORIE B

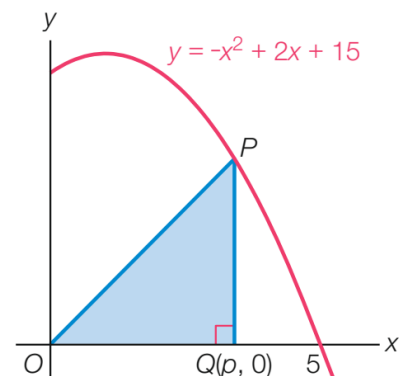
► OPGAVE C10
THEORIE B

► OPGAVE C11
THEORIE C

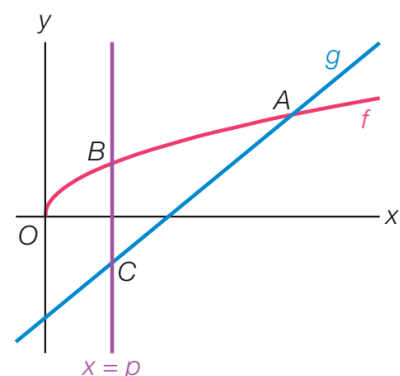
- C9** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$ en het punt $A(4, 4)$ op de grafiek van f . De lijn k raakt de grafiek van f in A . De lijn l gaat door A , staat loodrecht op k en snijdt de x -as in het punt B . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de x -coördinaat van B .



- C10** In de figuur hiernaast is voor $x > 0$ de parabool $y = -x^2 + 2x + 15$ getekend met daarop het punt P met $x_P = p$, waarbij $0 < p < 5$. Op de x -as ligt het punt $Q(p, 0)$. Bereken exact voor welke p de oppervlakte A van $\triangle OPQ$ maximaal is.



- C11** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{3x}$ en $g(x) = x - 6$. De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt A . De lijn $x = p$ met $0 < p < x_A$ snijdt de grafiek van f in het punt B en de grafiek van g in het punt C . Bereken exact de maximale lengte van het lijnstuk BC .



Antwoorden

C9 $x_B = 10$

C10 $p = 3$

C11 $6\frac{3}{4}$

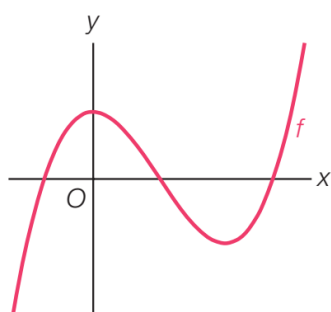
Kennis- en vaardigheidentest

6.1 Raaklijnen en toppen

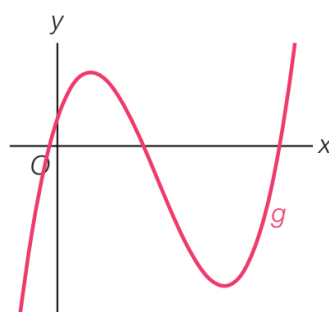
- 1** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$.
- a** De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$ en snijdt de y -as in het punt B .
Bereken exact de y -coördinaat van B .
- b** In de punten C en D van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan -8 .
Bereken exact de coördinaten van C en D .

- 2** Bereken exact de extreme waarden.

a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

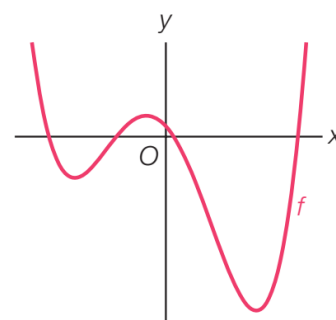


b $g(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 4$



- 3** Gegeven is de functie $f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 45x^2 - 30x + 5$.
Hiernaast zie je de grafiek van f .

- a** Toon met de afgeleide aan dat f geen extreme waarde heeft voor $x = 1\frac{1}{2}$.
- b** Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{2}\frac{1}{2}$.



6.2 De afgeleide van machtsfuncties

- 4** Differentieer.

a $f(x) = \frac{3}{x^4}$

c $h(x) = \frac{8x^2 - 2x}{\sqrt{x}}$

e $l(x) = (x + 2\sqrt{x})^2$

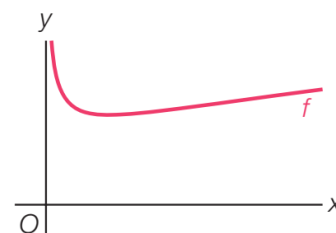
b $g(x) = 4 - \frac{3x-2}{x^3}$

d $k(x) = \frac{6\sqrt{x} - x^2}{x}$

f $m(x) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt[3]{x}}$

- 5** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x+4}{\sqrt{x}}$.

- a** Bereken exact het bereik van f .
- b** De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$ en snijdt de x -as in het punt B .
Bereken exact de x -coördinaat van B .



6.3 De kettingregel

6 Differentieer.

a $f(x) = (6x - 1)^5$

c $h(x) = 3x - \frac{5}{4x - 3}$

e $l(x) = \sqrt{3x - 4} + x^2$

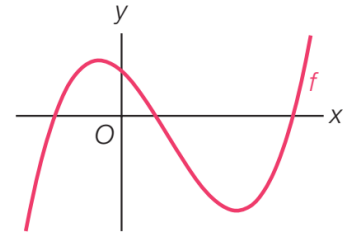
b $g(x) = 6x^3 - \frac{5}{(2x - 1)^4}$

d $k(x) = 5(3x - 1)^{\frac{1}{3}}$

f $m(x) = \frac{3}{\sqrt{2x + 7}}$

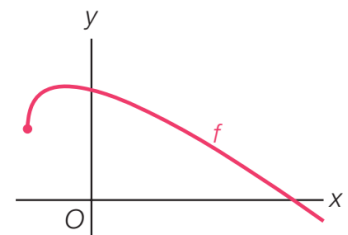
7 Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{3}x - 2)^3 - 9x + 40$.

- a** Bereken exact de extreme waarden van f .
b Stel langs algebraïsche weg vergelijkingen op van de lijnen k en l die de grafiek van f raken en evenwijdig zijn met de lijn $y = 7x - 2$.



8 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{3x + 15} - \frac{1}{2}x$.

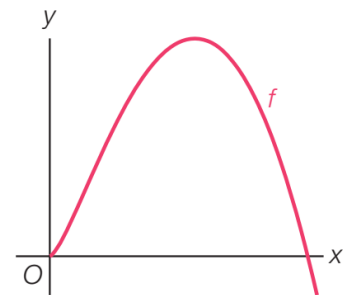
- a** Bereken exact het maximum van f .
b De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 7$ en snijdt de x -as in het punt B . Bereken exact de x -coördinaat van B .



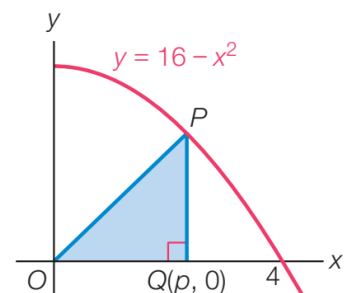
6.4 Toepassingen van de afgeleide

9 Gegeven is de functie $f(x) = 4x\sqrt{x} - x^2$.

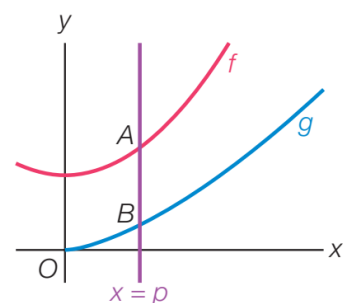
- a** Bereken exact het bereik van f .
b De lijn k raakt de grafiek van f in het punt $A(4, 16)$. De lijn l gaat door A , staat loodrecht op k en snijdt de x -as in het punt B . Bereken exact de coördinaten van B .



- 10** Gegeven is de parabool $y = 16 - x^2$.
 Op de parabool ligt het punt P met $x_P = p$, waarbij $0 < p < 4$.
 Op de x -as ligt het punt $Q(p, 0)$. Zie de figuur hiernaast.
 Bereken algebraïsch de maximale oppervlakte van $\triangle OPQ$.
 Rond het eindantwoord af op twee decimalen.



- 11** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + 4$ en $g(x) = x\sqrt{x}$.
 De lijn $x = p$ met $p > 0$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B . Zie de figuur hiernaast.
 Bereken exact voor welke waarde van p de lengte van het lijnstuk AB minimaal is.



Gemengde opgaven

1 Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$$

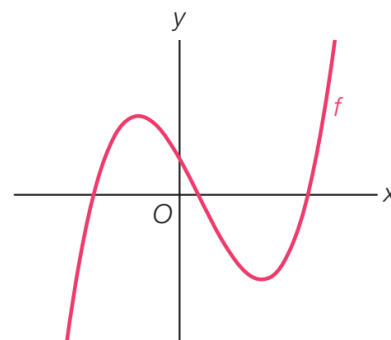
- a** De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 4$. De lijn l gaat door A , staat loodrecht op k , en snijdt de y -as in het punt B .

Bereken exact de coördinaten van B .

- b** Bereken exact de coördinaten van de punten van de grafiek waarin de raaklijn horizontaal is.

- c** De raaklijnen van de grafiek in de punten C en D zijn evenwijdig met de lijn $m: y = 4x + 10$.

Bereken exact de coördinaten van C en D .

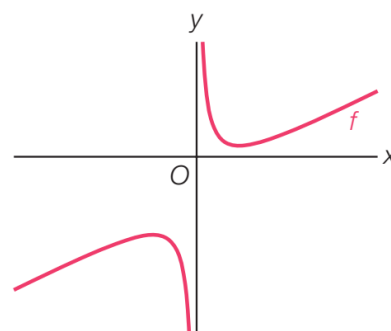


2 Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x}.$$

- a** Bereken exact voor welke waarden van p de vergelijking $f(x) = p$ geen oplossing heeft.

- b** Toon langs algebraïsche weg aan dat de grafiek van f geen raaklijn heeft met een richtingscoëfficiënt groter dan 1.



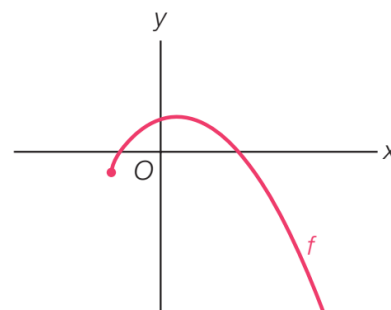
3 Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$f(x) = \sqrt{8x + 12} - x^2.$$

- a** Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = \frac{1}{2}$.

- b** De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 3$. De lijn l snijdt k loodrecht in A .

Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van l en de y -as.



4 Gegeven zijn de functie $f(x) = \sqrt{6 - 2x}$ en de lijnen

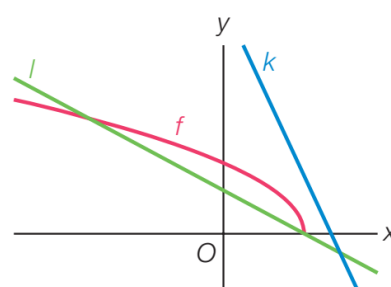
$$k: y = -2x + 8 \text{ en } l: y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}.$$

- a** Lijn m raakt de grafiek van f , is evenwijdig met k , en snijdt de x -as in het punt A .

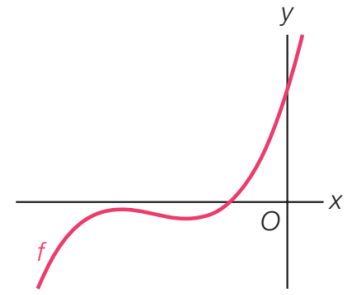
Bereken exact de x -coördinaat van A .

- b** De lijn $x = p$ met $-5 < p < 3$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de lijn l in het punt B .

Bereken exact de maximale lengte van het lijnstuk AB .



- 5** Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^3 + 12x^2 + 45x + 47$.
- a** Bereken exact voor welke waarden van p de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing heeft.
 - b** Voor welke waarden van a raakt de grafiek van de functie $g(x) = x^3 + 12x^2 + 45x + a$ de x -as?



- 6** Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 + \frac{8}{(ax-2)^2}$ en $g(x) = \sqrt{4x+16}$.

De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A en de grafiek van g snijdt de y -as in het punt B .

De lijn k die de grafiek van f in A raakt, heeft de vergelijking $y = 2ax + 6$.

- a** Bewijs dit.
- b** Bereken exact voor welke waarde van a de lijn k door het randpunt van de grafiek van g gaat.
- c** Bereken exact voor welke waarde van a de raaklijn l aan de grafiek van g in B evenwijdig is met k .

- 7** Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{\sqrt{x}}$.

- a** De grafiek van f snijdt de x -as in het punt S . Bereken exact de x -coördinaat van S .

Voor de afgeleide geldt $f'(x) = \frac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}}$.

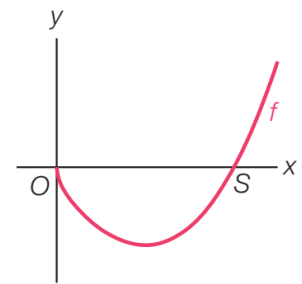
- b** Bewijs dit.
- c** Bereken exact het bereik van f .

Op de grafiek van f ligt het punt P met $x_P = p$, waarbij $0 < p < 2$.

Op de x -as ligt het punt $Q(p, 0)$. Voor de oppervlakte A van $\triangle OPQ$

geldt $A = -\frac{1}{2}p^{3\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}p^{2\frac{1}{2}} + p^{1\frac{1}{2}}$.

- d** Toon aan dat deze formule juist is.
- e** Bereken met behulp van de afgeleide voor welke waarde van p de oppervlakte van $\triangle OPQ$ maximaal is. Rond af op twee decimalen.

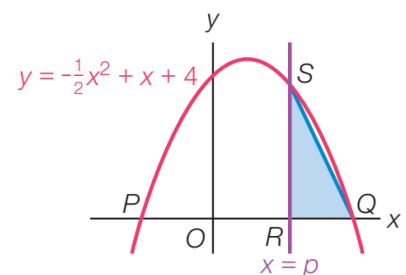


- 8** De parabool $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ snijdt de x -as in de punten P en Q . De lijn $x = p$ met $x_P < p < x_Q$ snijdt de x -as in het punt R en de parabool in het punt S . Zie de figuur hiernaast.

Voor de oppervlakte A van $\triangle QRS$ geldt

$$A = \frac{1}{4}p^3 - 1\frac{1}{2}p^2 + 8.$$

- a** Toon aan dat deze formule juist is.
- b** Bereken exact de maximale oppervlakte van $\triangle QRS$.





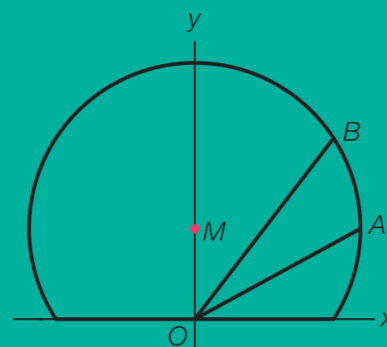
7

Lijnen en cirkels

De Avicii Arena in Stockholm is een bolvormige hal met een hoogte van 85 meter en een straal van 55 meter. In de hal worden regelmatig evenementen en sportwedstrijden gehouden. Op de foto zie je het interieur van de Arena zoals dat eruitziet bij een ijshockeywedstrijd.

In de figuur hiernaast is een doorsnede van de Arena in een assenstelsel getekend. O is het midden van het ijshockeyveld, M is het middelpunt van de bol en A en B zijn televisiecamera's die respectievelijk op 30 en 60 meter hoogte hangen. Camera B bevindt zich verder van de middenstip af dan camera A .

Hoeveel meter verder?



7.1 Lijnen en hoeken

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met de onderlinge ligging van twee lijnen.
- Je kunt de hoek tussen twee lijnen berekenen.

Voorkennis De vergelijking $ax + by = c$ en stelsels

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$. De bijbehorende grafiek is een lijn.

Hiernaast is de lijn k : $2x + 3y = 12$ getekend. De lijn gaat door de punten $(0, 4)$ en $(6, 0)$. We zeggen dat $(x, y) = (0, 4)$ en $(x, y) = (6, 0)$ oplossingen zijn van de vergelijking $2x + 3y = 12$.

Je kunt bij $2x + 3y = 12$ de variabele y vrijmaken.

Je krijgt $2x + 3y = 12$

$$3y = -2x + 12$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

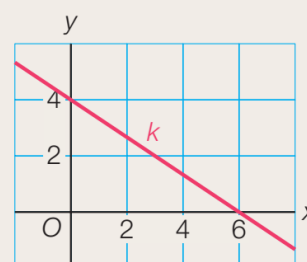
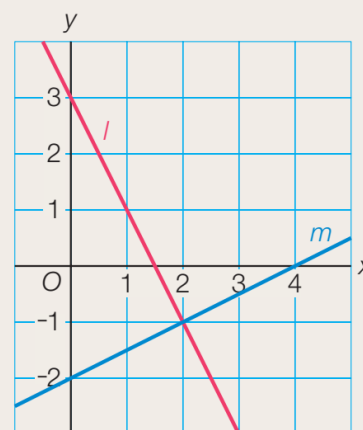
Hieruit volgt $rc_k = -\frac{2}{3}$.

Alle lijnen van de vorm $2x + 3y = c$ zijn evenwijdig, want al deze lijnen hebben richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{3}$.

Hiernaast zijn de lijnen l : $2x + y = 3$ en m : $x - 2y = 4$ getekend. Het punt $(2, -1)$ is het snijpunt van deze lijnen. Het getallenpaar $(x, y) = (2, -1)$ is zowel een oplossing van $2x + y = 3$ als van $x - 2y = 4$. We zeggen dat

$(x, y) = (2, -1)$ de oplossing is van het stelsel
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

Hoe je de coördinaten van het snijpunt van twee lijnen kunt berekenen door een stelsel op te lossen, zie je in voorbeeld d.



Voorbeeld

Gegeven is de lijn l : $2x - 5y = 12$.

- Bereken p als het punt $A(3, p)$ op l ligt.
- Bereken q als $(x, y) = (q, 4)$ een oplossing is van $2x - 5y = 12$.
- Bereken de richtingscoëfficiënt van l .
- Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van l en de lijn m : $3x + 2y = 37$.

Uitwerking

a $A(3, p)$ op l , dus $2 \cdot 3 - 5 \cdot p = 12$

$$6 - 5p = 12$$

$$-5p = 6$$

$$p = -1\frac{1}{5}$$

b $(x, y) = (q, 4)$ is een oplossing, dus $2 \cdot q - 5 \cdot 4 = 12$

$$2q - 20 = 12$$

$$2q = 32$$

$$q = 16$$

c $2x - 5y = 12$

$$-5y = -2x + 12$$

$$y = \frac{2}{5}x - 2\frac{2}{5}$$

$$\text{Dus } rc_l = \frac{2}{5}.$$

$$\mathbf{d} \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y = 12 \\ 3x + 2y = 37 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \Bigg| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 6x - 15y = 36 \\ 6x + 4y = 74 \end{array} \right. \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

$$-19y = -38$$

$$y = 2$$

$y = 2$ invullen in $2x - 5y = 12$ geeft $2x - 5 \cdot 2 = 12$

$$2x - 10 = 12$$

$$2x = 22$$

$$x = 11$$

Dus $S(11, 2)$.

V1 Gegeven zijn de lijnen k : $2x - 3y = 10$ en l : $x + 2y = 12$.

a Bereken p als het punt $A(2, p)$ op k ligt.

b Bereken q als het punt $B(q, -3)$ op l ligt.

c Bereken r als $(x, y) = (r, 2r)$ een oplossing is van $2x - 3y = 10$.

d Bereken de richtingscoëfficiënt van k .

e Bereken de richtingscoëfficiënt van l .

V2 Bereken exact de oplossing.

$$\mathbf{a} \left\{ \begin{array}{l} 5x - 7y = 1 \\ 4x - 3y = 6 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{b} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 15 \\ 10x - 9y = -5 \end{array} \right.$$

De oplossing van het stelsel uit voorbeeld d is $(x, y) = (11, 2)$.

V3 **a** De lijnen k : $3x + 2y = 5$ en l : $x - 4y = 11$ snijden elkaar in het punt P .

Bereken exact de coördinaten van P .

b De lijnen m : $4x - 5y = 6$ en n : $3x - 2y = 1$ snijden elkaar in het punt Q .

Bereken exact de coördinaten van Q .

01 Gegeven zijn de lijnen $k: x - 2y = 4$ en $l: x - 2y = 5$.

□ ⊗ * a Licht toe dat k en l evenwijdig zijn.

b Wat weet je van het aantal oplossingen van het stelsel $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$?

Theorie A Onderlinge ligging van lijnen

De lijnen $m: 3x - y = 8$ en $n: 3x - y = 6$ zijn evenwijdig, want beide vergelijkingen zijn van de vorm $3x - y = c$. De lijnen vallen niet samen en daarom heeft het stelsel $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$ geen oplossing.

$$\begin{array}{r} \text{Elimineren geeft } 3x - y = 8 \\ \quad 3x - y = 6 \\ \hline \quad \quad 0 = 2 \end{array}$$

Geen enkele (x, y) is oplossing.

De lijnen $p: x - 4y = 12$ en $q: y = \frac{1}{4}x - 3$ vallen samen en hebben dus alle punten gemeenschappelijk. Dat kun je inzien door de vergelijkingen in dezelfde vorm te zetten.

$$\begin{array}{ll} p: x - 4y = 12 & \text{of} & q: y = \frac{1}{4}x - 3 \\ -4y = -x + 12 & & -\frac{1}{4}x + y = -3 \\ y = \frac{1}{4}x - 3 & & x - 4y = 12 \end{array}$$

Omdat de vergelijkingen van p en q op hetzelfde neerkomen, vallen de lijnen samen en heeft het stelsel $\begin{cases} x - 4y = 12 \\ y = \frac{1}{4}x - 3 \end{cases}$ oneindig veel oplossingen.

$$\begin{array}{l} \text{Substitutie van } y = \frac{1}{4}x - 3 \\ \text{in } x - 4y = 12 \text{ geeft} \\ x - 4(\frac{1}{4}x - 3) = 12 \\ x - x + 12 = 12 \\ 0 = 0 \\ \text{Elke } (x, y) \text{ is oplossing.} \end{array}$$

Bij twee lijnen kunnen de volgende situaties voorkomen.

- De lijnen hebben een snijpunt. Het bijbehorende stelsel heeft één oplossing.
- De lijnen hebben geen punt gemeenschappelijk. Het bijbehorende stelsel heeft geen oplossing.
- De lijnen vallen samen. Het bijbehorende stelsel heeft oneindig veel oplossingen.

Om na te gaan voor welke p en q de lijnen $k: 2x + py = 5$ en $l: 4x + 3y = q$ geen punt gemeenschappelijk hebben, kun je als volgt te werk gaan.

De getallen die voor x staan zijn bekend. Zorg ervoor dat die gelijk worden.

$$\begin{array}{l} \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x + py = 5 \\ 4x + 3y = q \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2py = 10 \\ 4x + 3y = q \end{array} \right. \end{array}$$

De lijnen zijn evenwijdig als ze dezelfde richtingscoëfficiënt hebben, dus als $2p = 3$ oftewel $p = 1\frac{1}{2}$.

De lijnen hebben geen punt gemeenschappelijk als verder geldt $q \neq 10$.

Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt. Dus lijnen die samenvallen, zijn ook evenwijdig.

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $k: px - 2y = 6$ en $l: 2x + 3y = q$.

Bereken voor welke p en q de lijnen

- a samenvallen
- b een snijpunt hebben.

Aanpak

De getallen die voor y staan zijn bekend. Vermenigvuldig daarom elke vergelijking met een getal, zodat de getallen die voor y staan gelijk worden.

Uitwerking

$$\text{a } \begin{cases} px - 2y = 6 \\ 2x + 3y = q \end{cases} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} 3 \\ -2 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 3px - 6y = 18 \\ -4x - 6y = -2q \end{cases} \end{array}$$

Samenvallen, dus $3p = -4$ en $-2q = 18$

$$p = -1\frac{1}{3} \text{ en } q = -9$$

- b Een snijpunt, dus $3p \neq -4$ oftewel $p \neq -1\frac{1}{3}$.

Een snijpunt voor $p \neq -1\frac{1}{3}$ en q mag elk getal zijn.

R2 Zie het voorbeeld.



- a Voor welke p en q hebben de lijnen geen punt gemeenschappelijk?
- b Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de lijnen als $p = 3$ en $q = 17$.
- c Bereken p en q als de lijnen elkaar snijden in het punt $(3, 17)$.

R3 Zie het voorbeeld.



Je kunt ook berekenen voor welke p en q de lijnen samenvallen door de vergelijkingen van k en l eerst in de vorm $y = ax + b$ te schrijven. Laat zien hoe dat gaat.

4 Gegeven zijn de lijnen $m: px - 3y = 6$ en $n: 5x + y = q$.



Bereken voor welke p en q de lijnen

- a samenvallen
- b een snijpunt hebben
- c geen punt gemeenschappelijk hebben
- d elkaar snijden in het punt $(2, 4)$.

5 Gegeven zijn de lijnen $k: y = ax + 4$ en $l: 3x - 2y = c$.



- a Bereken voor welke a en c de lijnen elkaar snijden in het punt $(1, 6)$.
- b Bereken voor welke a en c de lijnen geen punt gemeenschappelijk hebben.
- c Neem $a = 2$ en bereken voor welke waarden van c de lijnen elkaar snijden in een punt dat boven de x -as ligt.

A6 Gegeven zijn de lijnen $p: ax - 5y = 10$ en $q: y = 2x + b$.



- a** Bereken voor welke a en b de lijnen een snijpunt hebben.
- b** Bereken voor welke a en b de lijnen elkaar snijden in het punt $(3, 4)$.
- c** Neem $a = 5$ en bereken voor welke waarden van b de lijnen een snijpunt hebben dat rechts van de lijn $x = 4$ ligt.

A7 Gegeven zijn de lijnen $k: ax + 8y = 12$ en $l: 2x + ay = pa$.

***** Bereken voor welke a en p de lijnen samenvallen.

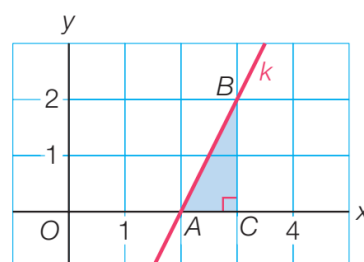
O8 In de figuur hiernaast zie je de lijn $k: y = 2x - 4$ en het punt $C(3, 0)$.



Het punt $A(2, 0)$ is het snijpunt van k met de x -as en het punt $B(3, 2)$ ligt op k .

Er geldt $\angle BAC = 63,43\dots^\circ$.

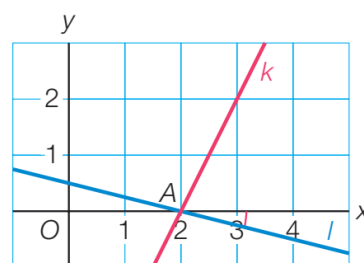
a Toon dit aan.



In de figuur hiernaast is ook de lijn $l: y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ getekend. De hoek tussen l en de x -as is met een boogje aangegeven. Deze hoek is $14,03\dots^\circ$.

b Toon dit aan.

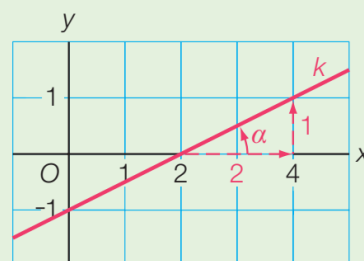
c Bereken de hoek tussen de lijnen k en l . Rond af op één decimaal.



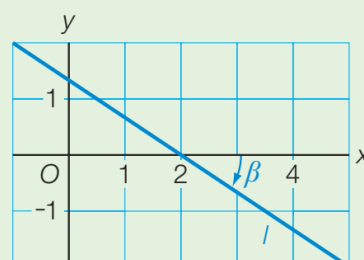
Theorie B De hoek tussen twee lijnen

In de figuur hiernaast is de lijn $k: y = \frac{1}{2}x - 1$ getekend. De **richtingshoek** van deze lijn is de hoek α waarover je de x -as moet draaien om de x -as te laten samenvallen met k . Je ziet dat $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ en dit geeft $\alpha = 26,56\dots^\circ$.

Voor de richtingshoek α van de lijn k geldt $\tan(\alpha) = rc_k$ en $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

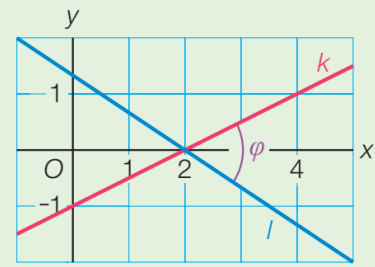


De richtingshoek van de lijn $l: y = -\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$ is in de figuur hiernaast aangegeven met β . Er geldt $\tan(\beta) = rc_l$, dus $\tan(\beta) = -\frac{2}{3}$ en dit geeft $\beta = -33,69\dots^\circ$. De richtingshoek van l is dus negatief.



In de figuur hiernaast zijn de lijnen k en l beide getekend. De **hoek tussen de lijnen** k en l is aangegeven met φ . Hier is $\varphi = \alpha - \beta = 26,56\dots^\circ - -33,69\dots^\circ \approx 60,3^\circ$.

Voor de hoek φ tussen twee lijnen nemen we altijd de hoek waarvoor geldt $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$.

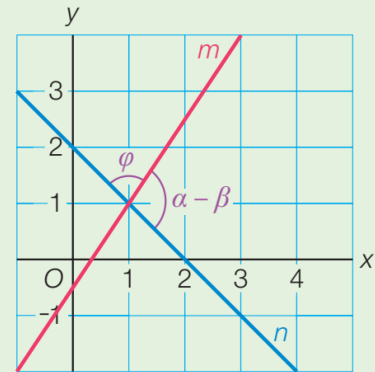


In de figuur hiernaast zijn de lijnen $m: y = 1\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ en $n: y = -x + 2$ getekend.

Voor de richtingshoek α van m geldt $\tan(\alpha) = 1\frac{1}{2}$, dus $\alpha = 56,30\dots^\circ$.

Voor de richtingshoek β van n geldt $\tan(\beta) = -1$, dus $\beta = -45^\circ$.

Omdat $\alpha - \beta = 56,30\dots^\circ - -45^\circ = 101,30\dots^\circ$ geldt voor de hoek φ tussen m en n dat $\varphi = 180^\circ - 101,30\dots^\circ \approx 78,7^\circ$.



Voor de hoek φ tussen twee lijnen met richtingshoeken α en β , waarbij $\alpha > \beta$, geldt

- $\varphi = \alpha - \beta$ als $\alpha - \beta \leq 90^\circ$
- $\varphi = 180^\circ - (\alpha - \beta)$ als $\alpha - \beta > 90^\circ$.

Voorbeeld

Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen $k: 5x - 4y = 6$ en $l: 5x + 3y = 2$.

Uitwerking

$$k: 5x - 4y = 6$$

$$-4y = -5x + 6$$

$$y = 1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 1\frac{1}{4} \text{ geeft } \alpha = 51,3\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 51,3\dots^\circ - -59,0\dots^\circ = 110,3\dots^\circ$$

De gevraagde hoek is $180^\circ - 110,3\dots^\circ \approx 70^\circ$.

$$l: 5x + 3y = 2$$

$$3y = -5x + 2$$

$$y = -1\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = -1\frac{2}{3} \text{ geeft } \beta = -59,0\dots^\circ$$

9 Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen.



a $k: y = 3x + 4$ en $l: y = 2x - 1$

b $m: y = 1\frac{1}{2}x + 2$ en $n: y = -\frac{1}{2}x + 3$

c $p: y = 3\frac{1}{2}x - 1$ en $q: y = -1\frac{1}{4}x + 5$

10 Bereken in graden de hoek tussen de lijnen. Rond af op één decimaal.



a $k: 3x - 2y = 5$ en $l: 4x - 3y = 6$

b $m: 4x + y = 1$ en $n: 3x + 4y = 2$

c $p: 5x + 3y = 4$ en $q: 6x - 5y = 1$

A11 **a** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen $k: y = \frac{2}{3}x + 4$ en $l: 8x - 5y = 3$.



b De lijn m gaat door de punten $(4, 0)$ en $(0, 5)$ en de lijn n gaat door de punten $(-2, 0)$ en $(0, 1)$.

Bereken in graden de hoek tussen m en n . Rond af op één decimaal.

c De lijn p gaat door de punten $(2, 1)$ en $(5, 6)$ en de lijn q gaat door de punten $(-3, 1)$ en $(2, -6)$.

Bereken in gehele graden de hoek tussen p en q .

A12 De lijnen $k: y = 2x - 3$ en l snijden elkaar onder een hoek van 20° .



Bereken de mogelijke richtingscoëfficiënten van l . Rond af op twee decimalen.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met de onderlinge ligging van twee lijnen.

► OPGAVE C1
THEORIE A

☐ Ik kan de hoek tussen twee lijnen berekenen.

► OPGAVE C2
THEORIE B

C1 Gegeven zijn de lijnen $k: y = 3x + b$ en $l: ax + 4y = 16$.

Bereken voor welke a en b de lijnen

a een snijpunt hebben

b samenvallen.

C2 **a** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen $k: y = 2x - 3$ en $l: y = -0,3x - 1$.

b Bereken in graden de hoek tussen de lijnen $m: 3x + 4y = 5$ en $n: y = -\frac{1}{3}x + 1$. Rond af op één decimaal.

c Bereken de hoek tussen de lijnen $p: 3x - y = 6$ en $q: x + 2y = 5$.
Geef je antwoord in graden en rond af op één decimaal.

Antwoorden

C1 **a** $a \neq -12$ en b elk getal

b $a = -12$ en $b = 4$

C2 **a** 80°

b $18,4^\circ$

c $81,9^\circ$

7.2 Afstanden bij punten en lijnen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met het midden van een lijnstuk en de afstand tussen twee punten.
- Je kunt een vergelijking opstellen van een lijn die door een gegeven punt gaat en loodrecht staat op een gegeven lijn.
- Je kunt de afstand van een punt tot een lijn berekenen.

Voorkennis Regels voor het herleiden van wortels

Voor het vermenigvuldigen en delen van wortels gelden de volgende regels.

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB} \text{ voor } A \geq 0 \text{ en } B \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \text{ voor } A \geq 0 \text{ en } B > 0$$

$$\text{Dus } \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10} \text{ en } \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}} = \sqrt{11}.$$

Omdat $\sqrt{8}$ het product is van een kwadraat en een positief geheel getal, kun je bij $\sqrt{8}$ een factor voor het wortelteken brengen. Dit geeft $\sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Breng altijd een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken. Dus $\sqrt{80} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ en niet $\sqrt{80} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{20} = 2\sqrt{20}$.

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}, \text{ dus ook } \sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}.$$

$\frac{4}{\sqrt{5}}$ is te herleiden tot een vorm zonder wortelteken in de noemer.

Je vermenigvuldigt daartoe de teller en de noemer met $\sqrt{5}$.

$$\text{Je krijgt } \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}\sqrt{5}.$$

Bij $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ kun je de breuk onder het wortelteken wegwerken.

$$\text{Je krijgt } \sqrt{12\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Hieronder zie je nog twee voorbeelden van herleidingen.

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{60} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$$

$$\sqrt{2\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}, \text{ dus ook } \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

V4 Breng een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken.

a $\sqrt{12}$

c $\sqrt{40}$

e $\sqrt{63}$

b $\sqrt{27}$

d $\sqrt{48}$

f $\sqrt{72}$

V5 Herleid.

a $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$

c $\sqrt{3\frac{1}{4}}$

e $\sqrt{4\frac{1}{2}}$

b $\frac{\sqrt{88}}{\sqrt{11}}$

d $\frac{2}{\sqrt{3}}$

f $\sqrt{3\frac{3}{5}}$

O13 Hiernaast is het lijnstuk AB met $A(1, 2)$ en $B(3, 5)$ getekend.

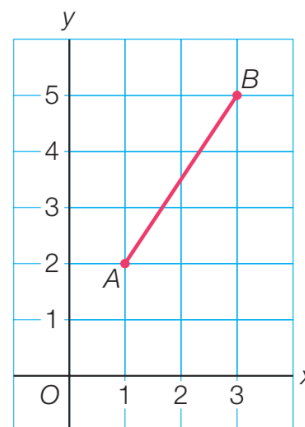


a Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB .

b Het punt M is het midden van het lijnstuk AB .

Hoe volgen de coördinaten van M uit de coördinaten van A en B ? Geef de coördinaten van M .

c Geef de coördinaten van het midden N van het lijnstuk CD met $C(83, 61)$ en $D(89, 69)$.



Theorie A De afstand tussen twee punten

De afstand tussen de punten A en B is de lengte van het lijnstuk AB .

Voor de lengte van het lijnstuk AB bestaat de notatie $d(A, B)$.

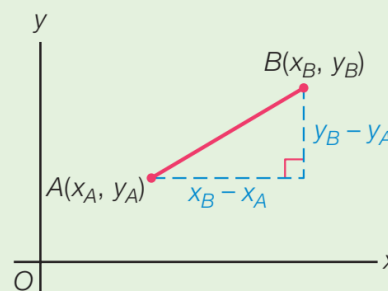
In deze notatie is de letter d van distance (afstand) gebruikt.

Hiernaast zijn de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ getekend. Met de stelling van Pythagoras in de getekende driehoek vind je $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, dus de afstand tussen de punten A en B is

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Om de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB te berekenen, neem je het gemiddelde van de x -coördinaten van A en B en het gemiddelde van de y -coördinaten van A en B .

Zo krijg je $M(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B))$.



Voor de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ geldt

- $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ is de afstand tussen A en B
- $M(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B))$ is het midden van het lijnstuk AB .

Voorbeeld

Gegeven zijn de punten $A(p, 3)$ en $B(4, q)$.

- a** Neem $p = 2$ en $q = 7$ en bereken exact de afstand tussen A en B .
Geef het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.
- b** Druk de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB uit in p en q .
- c** Neem $q = 2p$ en schrijf de afstand d tussen A en B in de vorm $d = \sqrt{ap^2 + bp + c}$.

Uitwerking

- a** $A(2, 3)$ en $B(4, 7)$ geeft

$$d(A, B) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

- b** $M(\frac{1}{2}(p + 4), \frac{1}{2}(3 + q)) = M(\frac{1}{2}p + 2, 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}q)$

- c** $A(p, 3)$ en $B(4, 2p)$ geeft $d = \sqrt{(4 - p)^2 + (2p - 3)^2}$
$$= \sqrt{16 - 8p + p^2 + 4p^2 - 12p + 9}$$
$$= \sqrt{5p^2 - 20p + 25}$$

R14 Zie het voorbeeld.



- a** Bereken exact de afstand tussen A en B als M het punt $(-1, \frac{1}{2})$ is.
Geef het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.
- b** Bereken exact de mogelijke coördinaten van A en B als $q = 2p$ en de afstand tussen A en B gelijk is aan $5\sqrt{2}$.

15 Gegeven zijn de punten $A(0, p)$ en $B(p, 7)$. Het punt M is het midden van het lijnstuk AB .



- a** Neem $p = 12$ en bereken exact de afstand tussen A en B .
- b** Neem $p = -2$ en bereken de coördinaten van M .
- c** Neem $p = 4$ en bereken exact de afstand tussen A en M .
- d** Druk de coördinaten van M uit in p .
- e** Schrijf de afstand d tussen A en B in de vorm $d = \sqrt{ap^2 + bp + c}$.

16 Gegeven zijn de punten $A(p, 3)$ en $B(p + 2, 2p)$.



- a** Druk de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB uit in p .

Voor de afstand d tussen A en B geldt $d = \sqrt{4p^2 - 12p + 13}$.

- b** Toon dit aan.
- c** Bereken algebraïsch voor welke p de afstand tussen A en B gelijk is aan 5. Rond het eindantwoord af op twee decimalen.

A17 Gegeven zijn de punten $A(3, 4)$ en $B(p + 5, p + 2)$. Het punt M is het midden van het lijnstuk AB .



- a Bereken y_M als $x_M = 10$.
- b Bereken p als M op de lijn $k: y = 2x - 3$ ligt.
- c Neem $p = 6$ en bereken exact de afstand tussen A en B . Geef het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.
- d De afstand d tussen A en B is te schrijven in de vorm $d = \sqrt{mp^2 + n}$. Bereken exact m en n .

O18 a Gegeven zijn de lijnen $m: 5x + 2y = 3$ en $n: 2x - 5y = 12$.



- Toon met een berekening aan dat m en n loodrecht op elkaar staan.
- b Gegeven zijn de lijnen $k: ax + by = c$ en $l: bx - ay = d$. Bewijs dat k en l loodrecht op elkaar staan.

Theorie B Onderling loodrechte lijnen

Je weet:

Voor de lijnen k en l met $rc_k \neq 0$ en $rc_l \neq 0$ geldt:
 $rc_k \cdot rc_l = -1$ en $k \perp l$ komt op hetzelfde neer.

Van de lijn $k: ax + by = c$ met $b \neq 0$ is $rc_k = -\frac{a}{b}$.

Van de lijn $l: bx - ay = d$ met $a \neq 0$ is $rc_l = \frac{b}{a}$.

Hieruit volgt $rc_k \cdot rc_l = -\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = -1$, dus $k \perp l$.

De lijnen $k: ax + by = c$ en $l: bx - ay = d$ staan loodrecht op elkaar.

Voorbeeld

De lijn k gaat door het punt $A(2, -5)$ en staat loodrecht op de lijn $l: 3x + 4y = 12$.

Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

Uitwerking

$k \perp l$, dus $k: 4x - 3y = c$
door $A(2, -5)$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} k \perp l \\ \text{door } A(2, -5) \end{matrix}} \right\} c = 4 \cdot 2 - 3 \cdot -5 = 23$

Dus $k: 4x - 3y = 23$.

- R19** Op de vorige bladzijde staan in de theorie boven het rode kader de voorwaarden $b \neq 0$ en $a \neq 0$. In het rode kader ontbreken deze voorwaarden. Waarom zijn deze voorwaarden wel nodig in de theorie boven het rode kader en niet nodig in het rode kader zelf?

$a = 0$ in $ax + by = c$
geeft $by = c$.
 $a = 0$ in $bx - ay = d$
geeft $bx = d$.

- 20** **a** De lijn k gaat door het punt $A(4, 1)$ en staat loodrecht op de lijn $l: 2x - 3y = 5$.
Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.
b De lijn m gaat door het punt $B(-4, 3)$ en staat loodrecht op de lijn $n: 2x - y = 6$.
Stel van m een vergelijking op van de vorm $y = ax + b$.

- 21** **a** De lijn k gaat door het punt $A(-6, 5)$ en staat loodrecht op de lijn $l: y = 3x - 5$.
Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.
b De lijn m gaat door het punt $B(3, -1)$ en staat loodrecht op de lijn $n: 4x + 5y = 6$.
Stel van m de formule op.
c De lijn p gaat door de punten $C(-3, 4)$ en $D(2, -6)$.
De lijn q gaat door het punt $E(3, 7)$ en staat loodrecht op p .
Stel van q een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

Neem in $ax + by = c$ voor a , b en c altijd gehele getallen en vereenvoudig zo ver mogelijk.

- A22** Stel een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$ van de lijn
a k die door het punt $A(6, 15)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $l: y = -\frac{3}{5}x + 1$
b m die door het punt $B(2, -2)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $n: 6x - 7y = 3$
c p die door het punt $C(-6, 4)$ gaat en loodrecht staat op de lijn q door de punten $D(1, 5)$ en $E(5, -1)$
d r die door het punt $F(-2, 5)$ gaat en evenwijdig is met de lijn $s: y = \frac{2}{5}x - 3$
e t die door het punt $G(1, -4)$ gaat en evenwijdig is met de lijn $v: 4x - 2y + 3 = 0$.

- A23** De lijn $k: 3x + py = -5$ snijdt de lijn l loodrecht in het punt $A(-7, 4)$.
De lijn l snijdt de x -as in het punt B en de y -as in het punt C .
Bewijs dat de afstand tussen B en C gelijk is aan $16\frac{2}{3}$.

A24 In deze opgave is $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

* De lijn k gaat door de punten $(2p, 0)$ en $(0, 3p)$.

De lijn l gaat door de punten $(3q, 0)$ en $(0, aq)$.

- a Bereken a als k en l loodrecht op elkaar staan.
- b Neem $p = 3$ en bereken voor welke a en q de lijnen k en l geen punt gemeenschappelijk hebben.
- c Bereken de mogelijke waarden van a als k en l elkaar snijden onder een hoek van 45° .

O25 In de figuur hiernaast zijn de lijn $k: y = \frac{1}{2}x$ en het punt $A(1, 3)$ getekend. In deze opgave ga je de afstand van A tot k berekenen.

De lijn l door A staat loodrecht op k .

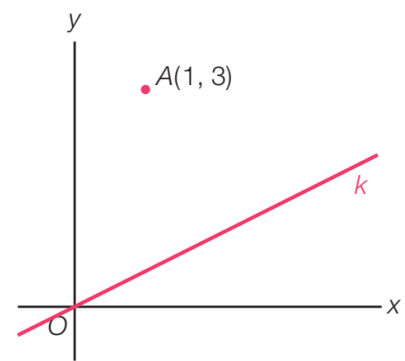
Een vergelijking van l is $l: y = -2x + 5$.

a Toon dit aan.

l snijdt k in het punt $B(2, 1)$.

b Toon dit aan.

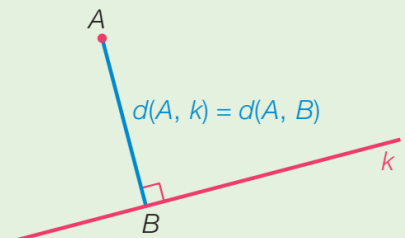
c Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB . Licht toe dat je hiermee de afstand van het punt A tot de lijn k hebt berekend.



Theorie C De afstand van een punt tot een lijn

Bij de afstand van een punt tot een lijn speelt het begrip **loodrechte projectie** een rol.

Hiernaast is B de loodrechte projectie van het punt A op de lijn k . De afstand van het punt A tot de lijn k is gelijk aan de afstand tussen de punten A en B , dus $d(A, k) = d(A, B)$.



De afstand van een punt A tot een lijn k is de afstand van A tot zijn loodrechte projectie B op k .

Gebruik voor het berekenen van de afstand van een punt tot een lijn het volgende werkschema.

Werkschema: berekenen van de afstand van een punt A tot een lijn k

- 1 Stel een vergelijking op van de lijn l door A die loodrecht staat op k .
- 2 Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en l .
- 3 Gebruik $d(A, k) = d(A, B)$.

Voorbeeld

Bereken exact de afstand van het punt $A(5, 5)$ tot de lijn $k: 3x + 2y = 12$.

Uitwerking

De lijn l gaat door A met $l \perp k$.

$$\left. \begin{array}{l} l: 2x - 3y = c \\ \text{door } A(5, 5) \end{array} \right\} c = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = -5$$

Dus $l: 2x - 3y = -5$.

k en l snijden geeft het punt B .

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 12 \\ 2x - 3y = -5 \end{array} \right. \begin{array}{l} |3| \\ |2| \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 9x + 6y = 36 \\ 4x - 6y = -10 \end{array} \right. +$$
$$\frac{13x}{x} = \frac{26}{2} \quad x = 2$$

$x = 2$ invullen in $3x + 2y = 12$ geeft $3 \cdot 2 + 2y = 12$

$$2y = 6$$

$$y = 3, \text{ dus } B(2, 3).$$

$$d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{13}$$

26 Bereken exact de afstand van



- a het punt $A(3, 0)$ tot de lijn $k: y = \frac{1}{2}x + 1$
- b het punt $B(7, 0)$ tot de lijn $m: 2x + y = 2$
- c de oorsprong tot de lijn $p: y = -3x + 10$.

27 De lijn k gaat door de punten $A(2, 1)$ en $B(7, 3)$.



Bereken exact de afstand van het punt $C(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ tot k . Geef het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.

28 Gegeven zijn de lijnen $k: x + 3y = 3$ en $l: x + y = 9$.



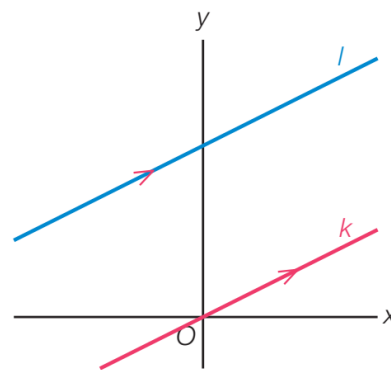
Frans beweert dat het punt $A(1, 4)$ dichterbij k ligt dan bij l . Onderzoek op algebraïsche wijze of Frans gelijk heeft.

A29 Gegeven is $\triangle ABC$ met de hoekpunten $A(1, 0)$, $B(7, 4)$ en $C(3\frac{1}{2}, 6)$.



- a Bereken exact de afstand van C tot de lijn k door A en B .
- b Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$.

- 30** In de figuur hiernaast zijn de evenwijdige lijnen $k: y = \frac{1}{2}x$ en $l: y = \frac{1}{2}x + 5$ getekend. In deze opgave ga je de afstand tussen k en l berekenen. De lijn m door O snijdt l loodrecht in het punt A .
- Teken m en geef de formule van m .
 - Bereken de coördinaten van A .
 - Bereken exact $d(O, l)$. Licht toe dat je hiermee $d(k, l)$ hebt berekend.



- A31** Bereken algebraïsch de afstand tussen de lijnen $k: y = 2x$ en $l: y = 2x + 4$. Rond het eindantwoord af op twee decimalen.

- A32** Bereken exact de afstand tussen de lijnen $k: x - 3y = 1$ en $l: x - 3y = 6$.
 * Geef het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met het midden van een lijnstuk en de afstand tussen twee punten.

► **OPGAVE C3**
THEORIE A

☐ Ik kan een vergelijking opstellen van een lijn die door een gegeven punt gaat en loodrecht staat op een gegeven lijn.

► **OPGAVE C4**
THEORIE B

☐ Ik kan de afstand van een punt tot een lijn berekenen.

► **OPGAVE C5**
THEORIE C

- C3** Gegeven zijn de punten $A(2p, 7)$ en $B(3, p + 2)$. Het punt M is het midden van het lijnstuk AB .

- Neem $p = 1$ en bereken exact de afstand tussen A en B .
- Bereken exact de afstand tussen A en B als $y_M = 6$.
- Schrijf de afstand d tussen A en B in de vorm $d = \sqrt{ap^2 + bp + c}$.

- C4**
 - De lijn k gaat door het punt $A(-2, 5)$ en staat loodrecht op de lijn $l: 2x - 3y = 8$. Stel van k een vergelijking op van de vorm $y = ax + b$.
 - De lijn m gaat door het punt $B(9, -1)$ en staat loodrecht op de lijn $n: y = -3x - 5$. Stel van m een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

- C5** Bereken exact de afstand van het punt $A(4, -3)$ tot de lijn $k: x + 2y = 3$.

Antwoorden

C3 a $\sqrt{17}$

b $\sqrt{13}$

c $d = \sqrt{5p^2 - 22p + 34}$

C4 a $y = -1\frac{1}{2}x + 2$

b $x - 3y = 12$

C5 $\sqrt{5}$

7.3 Cirkelvergelijkingen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt een vergelijking van een cirkel opstellen van de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.
- Je kunt met behulp van kwadraatafsplitsen de straal en de coördinaten van het middelpunt van een cirkel berekenen bij een cirkelvergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

O33

□ ⊗ *

Gegeven is het punt $M(1, 4)$ en het variabele punt $P(x, y)$.

Voor de afstand d tussen M en P geldt $d^2 = (x - 1)^2 + (y - 4)^2$.

a Licht dit toe.

Voor $d = 5$ krijg je de vergelijking $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

b Licht toe dat deze vergelijking hoort bij de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal $r = 5$.

c Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal 10.

d Geef van de cirkel met vergelijking $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ de coördinaten van het middelpunt en de lengte van de straal.

Theorie A De cirkelvergelijking $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

Voor een punt $P(x, y)$ op afstand r van $M(x_M, y_M)$ geldt

$d(P, M) = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}$ en $d(P, M) = r$, dus

$\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} = r$. Kwadrateren geeft $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

Hiermee is een vergelijking opgesteld van de cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r .

Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r is $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

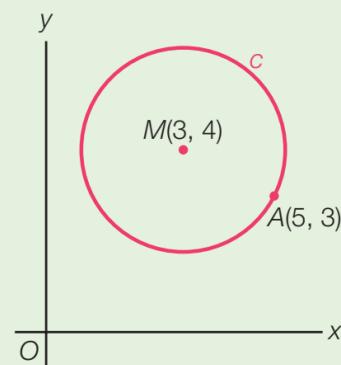
In de figuur hiernaast zie je de cirkel c met middelpunt $M(3, 4)$ die door het punt $A(5, 3)$ gaat.

Uit $M(3, 4)$ volgt dat de vergelijking van c van de vorm $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ is.

$A(5, 3)$ ligt op c , dus

$$r = d(A, M) = \sqrt{(3 - 5)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{5}.$$

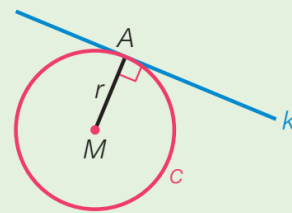
Dus c : $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$.



Raakt een lijn aan een cirkel, dan geldt het volgende:

- De lijn staat loodrecht op de straal van de cirkel naar het raakpunt.
- De afstand van het middelpunt van de cirkel tot het raakpunt is gelijk aan de straal van de cirkel.

Raakt de lijn k de cirkel c met middelpunt M en straal r in het punt A , dan geldt $MA \perp k$ en $d(M, A) = r$.



In het voorbeeld en de opgaven erna krijg je te maken met cirkels die de x -as of de y -as raken. Vanaf opgave 40 ga je vergelijkingen opstellen van cirkels waarvan het middelpunt en een vergelijking van een raaklijn aan de cirkel zijn gegeven.

Voorbeeld

De cirkels c en d hebben straal 3. De middelpunten M en N van c en d liggen op de lijn $k: y = \frac{1}{2}x - 2$. Verder raakt c de y -as en raakt d de x -as zoals in de figuur hiernaast.

Stel van c en van d een vergelijking op.

Uitwerking

c raakt de y -as en de straal is 3, dus $x_M = -3$.

$x = -3$ en M op k geeft $y = \frac{1}{2} \cdot -3 - 2 = -3\frac{1}{2}$.

Dus $M(-3, -3\frac{1}{2})$ en $c: (x + 3)^2 + (y + 3\frac{1}{2})^2 = 9$.

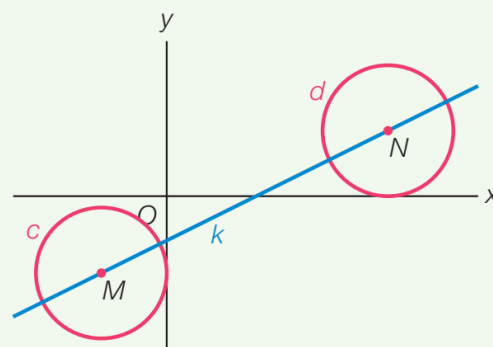
d raakt de x -as en de straal is 3, dus $y_N = 3$.

$y = 3$ en N op k geeft $\frac{1}{2}x - 2 = 3$

$$\frac{1}{2}x = 5$$

$$x = 10$$

Dus $N(10, 3)$ en $d: (x - 10)^2 + (y - 3)^2 = 9$.



R34



In de theorie op de vorige bladzijde werd bij het opstellen van de vergelijking van c de straal r berekend met $r = d(A, M)$.

Je kunt bij het opstellen van de vergelijking van c ook r^2 berekenen door de coördinaten van punt A in te vullen in $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$.

a Doe dat.

b Welke manier heeft je voorkeur? Licht toe.

35 Stel een vergelijking op van de cirkel

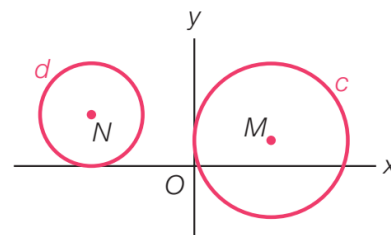
- a** c_1 met middelpunt $M_1(2, -5)$ en straal 3
b c_2 met middelpunt $M_2(3, 4)$ die door de oorsprong gaat
c c_3 met middelpunt $M_3(-3, 5)$ die door het punt $A(-1, 2)$ gaat.

36 De cirkel c met middelpunt $M(3, 1)$ raakt de y -as.

De cirkel d met middelpunt $N(-4, 2)$ raakt de x -as.

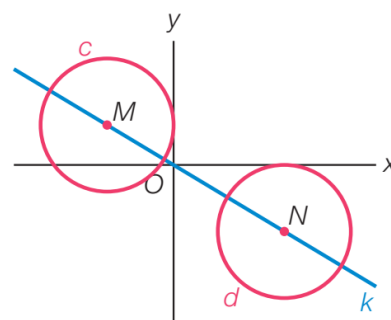
Zie de figuur hiernaast.

- a** Stel een vergelijking op van c .
b Stel een vergelijking op van d .



37 De cirkels c en d hebben straal 10, c raakt de y -as en

d raakt de x -as. De middelpunten M en N van c en d liggen op de lijn $k: y = -\frac{3}{5}x$ zoals in de figuur hiernaast. Stel van c en van d een vergelijking op.



A38 Gegeven zijn de punten $A(3, 7)$ en $B(9, 1)$.

Stel een vergelijking op van de

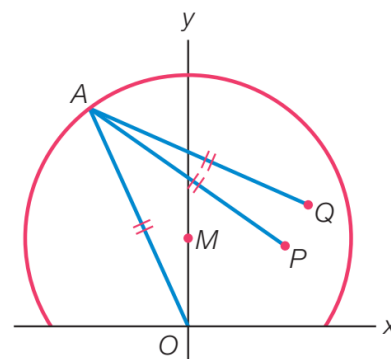
- a** cirkel c_1 met middelpunt A die de x -as raakt
b cirkel c_2 met middelpunt B die door A gaat
c cirkel c_3 met middellijn AB
d cirkels c_4 en c_5 , die straal 2 hebben, de y -as raken en waarvan de middelpunten op de lijn $k: 5x + 2y = 12$ liggen.

A39 De Avicii Arena in Stockholm is een bolvormige hal met een hoogte van 85 meter en een straal van 55 meter.

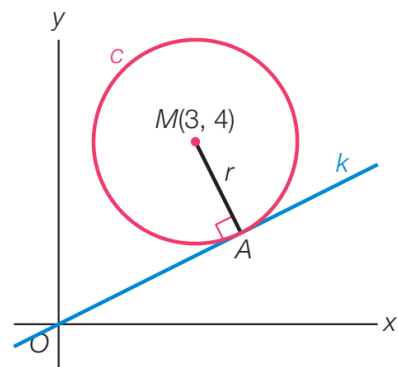
In de hal worden regelmatig ijshockeywedstrijden gespeeld.

In de figuur hiernaast is een doorsnede van de Arena in een assenstelsel getekend. O is het midden van het ijshockeyveld, M is het middelpunt van de bol en A is een televisiecamera die op een hoogte van 74 meter boven de grond hangt. P en Q zijn toeschouwers op de tribune met $x_P = 33$ en $x_Q = 41$. De camera hangt even ver van het midden O als van beide toeschouwers.

Bereken algebraïsch hoeveel meter de toeschouwers P en Q uit elkaar zitten. Rond af op één decimaal.



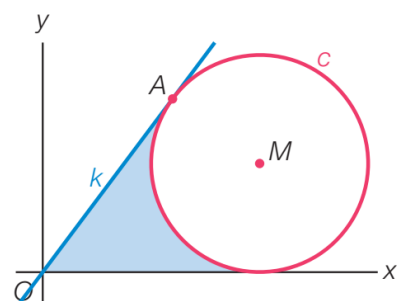
- 40** De cirkel c met middelpunt $M(3, 4)$ raakt de lijn $k: y = \frac{1}{2}x$ in het punt A . Zie de figuur hiernaast. In deze opgave ga je een vergelijking van c opstellen. Bij c hoort een vergelijking van de vorm $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ met $r = d(M, A)$.
- Licht toe dat $r = d(M, A)$.
 - Stel een vergelijking op van de lijn l door M die loodrecht staat op k , licht toe dat k en l elkaar snijden in A , en bereken de coördinaten van A .
 - Stel een vergelijking van c op.



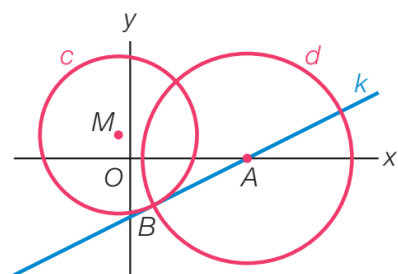
- 41**
- Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(5, 3)$ die de lijn $k: y = x$ raakt.
 - Stel een vergelijking op van de cirkel d met middelpunt $N(-1, 3)$ die de lijn $m: y = -\frac{1}{2}x$ raakt.

- A42** Gegeven is de lijn $k: 2x + 3y = 12$ die de x -as snijdt in het punt A en de y -as snijdt in het punt B . Stel een vergelijking op van de
- cirkel c_1 met middelpunt $M_1(8, 3)$ die k raakt
 - cirkels c_2 en c_3 waarvan de middelpunten op k liggen, die straal 8 hebben en die de x -as raken
 - cirkel c_4 met middellijn AB .

- A43** De cirkel c heeft middelpunt $M(4, 2)$. De lijn $k: y = \frac{1}{3}x$ raakt c in het punt A . Zie de figuur hiernaast. Cirkel c raakt ook de x -as.
- Bewijs dit.
 - Bereken de oppervlakte van het blauwe gebied. Rond af op twee decimalen.



- A44** De lijn $k: x - 2y = 10$ snijdt de x -as in het punt A . Cirkel c met middelpunt $M(-1, 2)$ raakt k in het punt B . Cirkel d met middelpunt A gaat door B . Zie de figuur hiernaast.
- Stel van zowel c als d een vergelijking op.
 - Van cirkel e is het lijnstuk AM een middellijn. Onderzoek algebraïsch of e door B gaat.



- O45** Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $(2, -3)$ en straal 4 is $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$. Deze vergelijking is te schrijven in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Bereken de waarden van a , b en c .

Theorie B Kwadraatafsplitsen

In opgave 45 heb je gezien dat de cirkelvergelijkingen $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ en $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ op hetzelfde neerkomen. Je kreeg de tweede vorm door bij de eerste vorm de haakjes weg te werken. Maar hoe krijg je de eerste vorm uit de tweede vorm? De eerste vorm heeft immers als voordeel dat je meteen de coördinaten van het middelpunt en de lengte van de straal kunt aflezen.

Bij het herleiden van de vergelijking $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ tot $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ gebruik je **kwadraatafsplitsen**.

Om bij $x^2 - 4x$ het kwadraat af te splitsen, vul je eerst $x^2 - 4x$ aan tot een kwadraat. Je krijgt $x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4$.

Bij $y^2 + 6y$ krijg je $y^2 + 6y = y^2 + 6y + 9 - 9 = (y+3)^2 - 9$.

Dus bij $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ krijg je

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 3 = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 - 3 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

Om in het voorbeeld hieronder het kwadraat af te splitsen bij $x^2 + 8x$, vul je eerst $x^2 + 8x$ aan tot $x^2 + 8x + 16$, want dit is $(x+4)^2$.

Merk op dat 4 de helft is van 8 en dat 16 het kwadraat is van 4.

Je krijgt $x^2 + 8x = x^2 + 8x + 16 - 16 = (x+4)^2 - 16$.

En omdat de helft van 3 gelijk is aan $1\frac{1}{2}$, krijg je

$$y^2 - 3y = y^2 - 3y + (1\frac{1}{2})^2 - (1\frac{1}{2})^2 = (y - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4}.$$

Voorbeeld

Schrijf de vergelijking van de cirkel $x^2 + y^2 + 8x - 3y + 6 = 0$ in de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = c$.

Uitwerking

$$x^2 + y^2 + 8x - 3y + 6 = 0$$

$$x^2 + 8x + y^2 - 3y + 6 = 0$$

$$(x+4)^2 - 16 + (y - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 6 = 0$$

$$(x+4)^2 + (y - 1\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{4}$$

$$x^2 + 8x = x^2 + 8x + 16 - 16 = (x+4)^2 - 16$$

$$y^2 - 3y = y^2 - 3y + 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} = (y - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4}$$

R46

Zie het voorbeeld.



Wat is de straal r van de cirkel? En wat zijn de coördinaten van het middelpunt M ?

47 Schrijf in de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = c$.

- a** $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$ **c** $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$
b $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 13 = 0$ **d** $x^2 + y^2 - 5x + 5y + 10 = 0$

48 Bereken van de cirkel de straal en de coördinaten van het middelpunt.

- a** $c_1: x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ **c** $c_3: x^2 + y^2 + 5x + 3y + 3 = 0$
b $c_2: x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$ **d** $c_4: x^2 + y^2 - 7x + 8y = 0$

49 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$ en de punten

a $A(-1, 5)$, $B(-4, 0)$ en $C(-2, 1)$.

Van c is het middelpunt $M(-3, 4)$ en de straal $r = \sqrt{10}$.

- a** Toon dit aan.
b Bereken exact $d(A, M)$. Lig A op, binnen of buiten c ? Licht toe.
c Bereken exact $d(B, M)$. Lig B op, binnen of buiten c ? Licht toe.
d Onderzoek op algebraïsche wijze of C op, binnen of buiten c ligt.

A50 Onderzoek op algebraïsche wijze of

- a** het punt $A(-1, 2)$ op, binnen of buiten de cirkel $c_1: x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ ligt
b de oorsprong op, binnen of buiten de cirkel $c_2: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0$ ligt
c het punt $B(1, 4)$ op, binnen of buiten de cirkel $c_3: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ ligt.

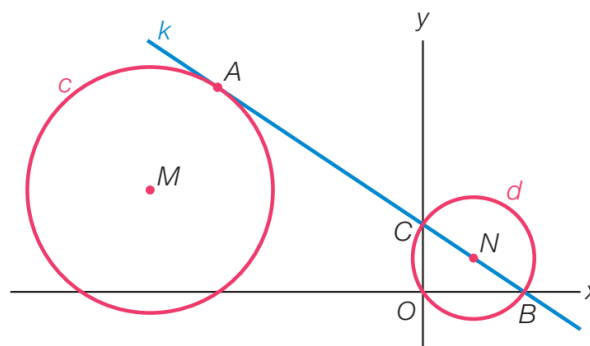
A51 Gegeven zijn de lijn $k: 2x + 3y = 6$ en de

a cirkel $c: x^2 + y^2 + 16x - 6y + 60 = 0$.

- a** Lijn k raakt c in het punt A .
 Bereken exact de coördinaten van A .

Lijn k snijdt de x -as in het punt B en de y -as in het punt C . Cirkel d is de cirkel met middellijn BC . Zie hiernaast.

- b** Bewijs dat d door O gaat.



Informatief Kwadraatafsplitsen en tweedegraadsvergelijkingen

Elke tweedegraadsvergelijking is op te lossen met kwadraatafsplitsen.

Je hebt dan de abc -formule niet nodig.

Bij het oplossen van $x^2 - 6x - 4 = 0$ met kwadraatafsplitsen krijg je

$$x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 - 4 = 0$$

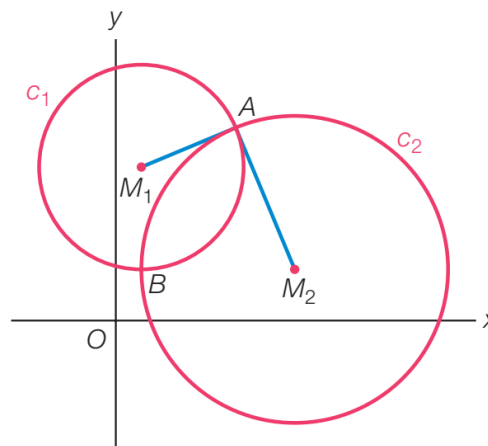
$$(x - 3)^2 = 13$$

$$x - 3 = \sqrt{13} \vee x - 3 = -\sqrt{13}$$

$$x = 3 + \sqrt{13} \vee x = 3 - \sqrt{13}$$

- A52** **a** Bereken exact voor welke p het punt $P(1, p)$ binnen de cirkel $c_1: x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ ligt.
b Bereken exact voor welke q het punt $Q(1, 5)$ buiten de cirkel $c_2: x^2 + y^2 - 8x - 2y + q = 0$ ligt.

- A53** De cirkels $c_1: x^2 + y^2 - 2x - 12y + 21 = 0$ met middelpunt M_1 en $c_2: x^2 + y^2 - 14x - 4y + 17 = 0$ met middelpunt M_2 snijden elkaar in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.
 Bewijs dat $\angle M_1AM_2 = 90^\circ$.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan een vergelijking van een cirkel opstellen van de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.
- ☐ Ik kan met behulp van kwadraatsplitsen de straal en de coördinaten van het middelpunt van een cirkel berekenen bij een cirkelvergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

► **OPGAVE C6**
THEORIE A

► **OPGAVE C7**
THEORIE B

- C6** Gegeven zijn de punten $A(-1, 4)$ en $B(7, 2)$.
 Stel een vergelijking op van de
a cirkel c_1 met middelpunt A en straal 8
b cirkel c_2 met middelpunt B die de y -as raakt
c cirkel c_3 met middellijn AB
d cirkels c_4 en c_5 , die straal 3 hebben, de x -as raken en waarvan de middelpunten op de lijn $k: y = 1\frac{1}{2}x$ liggen.

- C7** **a** Bereken van de cirkel $c: x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$ de straal r en de coördinaten van het middelpunt M .
b Onderzoek op algebraïsche wijze of het punt $A(5, -1)$ op, binnen of buiten de cirkel $d: x^2 + y^2 - 2x + 8y - 7 = 0$ ligt.

Antwoorden

- C6** **a** $c_1: (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 64$
b $c_2: (x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 49$
c $c_3: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 17$
d $c_4: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$
 $c_5: (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$

- C7** **a** $r = 6$ en $M(-5, 3)$
b A ligt buiten d

7.4 Afstanden en raaklijnen bij cirkels

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de afstand van een punt tot een cirkel berekenen.
- Je kunt de afstand van een lijn tot een cirkel berekenen.
- Je kunt een vergelijking opstellen van een raaklijn aan een cirkel door een gegeven punt op de cirkel.

54



Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$.

Van c is het middelpunt $M(5, 3)$ en de straal $r = 4$.

a Toon dit aan.

De punten $P(1, 6)$ en $Q(6, -2)$ liggen buiten c .

b Toon dit aan.

c Is de afstand van P tot c groter dan of kleiner dan de afstand van Q tot c ? Licht toe.

Theorie A De afstand van een punt tot een cirkel

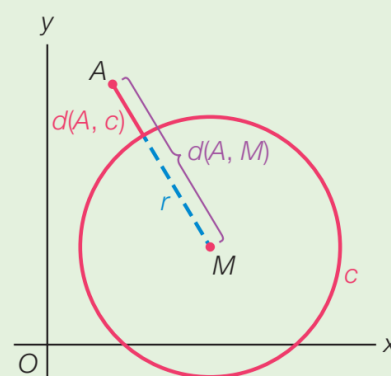
Hiernaast is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$ met middelpunt $M(5, 3)$ en straal 4 van opgave 54 getekend.

Verder zie je het punt $A(2, 8)$ dat buiten cirkel c ligt.

Om de afstand van het punt A tot de cirkel te berekenen, gebruik je dat de afstand van A tot c gelijk is aan de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen A en c .

Hiernaast zie je dat voor de afstand van A tot c geldt dat $d(A, c) = d(A, M) - r$.

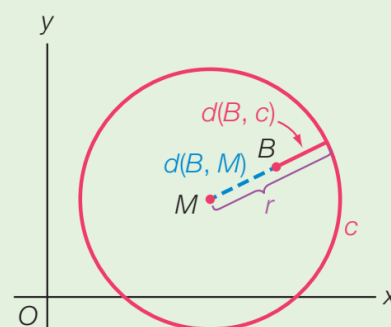
Omdat $r = 4$ en $d(A, M) = \sqrt{(5-2)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{34}$ is $d(A, c) = \sqrt{34} - 4$.



De afstand van een punt tot een cirkel is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen het punt en de cirkel.

Hiernaast zie je nogmaals de cirkel c met middelpunt $M(5, 3)$ en straal 4. Verder zie je het punt $B(7, 4)$ dat binnen cirkel c ligt. Je ziet dat voor de afstand van B tot c geldt dat $d(B, c) = r - d(B, M)$.

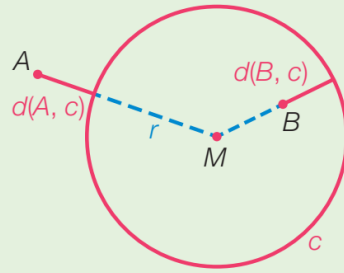
Omdat $r = 4$ en $d(B, M) = \sqrt{(5-7)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{5}$ is $d(B, c) = 4 - \sqrt{5}$.



DE AFSTAND VAN EEN PUNT TOT EEN CIRKEL

Voor punt A buiten c geldt:
 $d(A, c) = d(A, M) - r$

Voor punt B binnen c geldt:
 $d(B, c) = r - d(B, M)$



- 55** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ en de punten $A(2, 1)$, $B(-1, 5)$ en $C(9, 4)$.



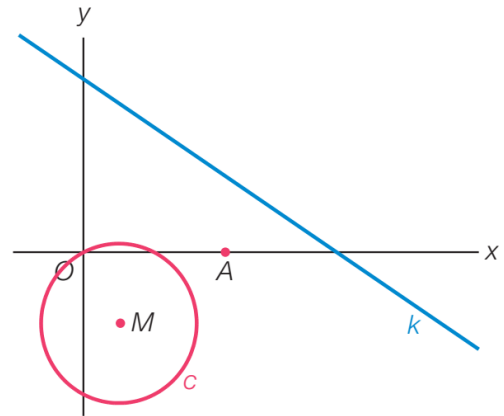
Bereken exact.

- $d(A, c)$
- $d(B, c)$
- $d(C, c)$

- A56** Hiernaast zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, de lijn $k: 4x + 6y = 29$ en het punt $A(4, 0)$ getekend.



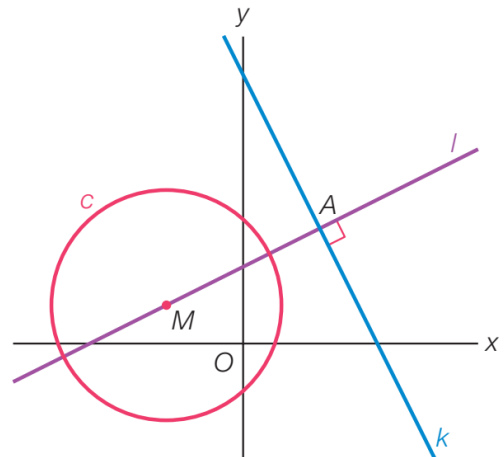
Toon op algebraïsche wijze aan dat A dicht bij c ligt dan bij k .



- 57** Gegeven zijn de lijn $k: 2x + y = 7$ en de cirkel $c: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ met middelpunt M en straal r . De lijn l door M snijdt k loodrecht in het punt A . Zie de figuur hiernaast.



- Bereken r en de coördinaten van M .
- Bereken de coördinaten van A .
- Bereken exact de afstand van de lijn k tot de cirkel c . Gebruik $d(k, c) = d(A, M) - r$.

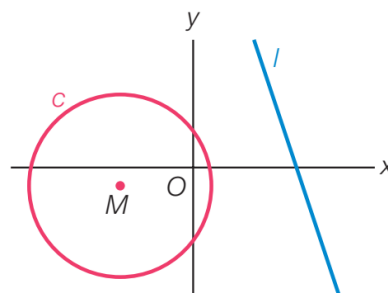


- A58** Gegeven zijn de lijn $k: x - 2y = -13$ en de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.



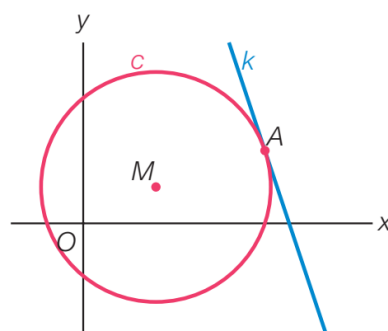
Bewijs dat de afstand van k tot c gelijk is aan $4(\sqrt{5} - 1)$.

- A59** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$ en de lijn $l: y = -3x + 17$. Zie de figuur hiernaast. Onderzoek op algebraïsche wijze of de afstand van l tot c groter dan, kleiner dan, of gelijk is aan de straal van c .



- E60** Het punt $P(p, p)$ met $p > 0$ ligt op afstand 5 van de cirkel $c: x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$. Bereken exact de waarde van p .

- O61** Gegeven zijn de cirkel $c: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ met middelpunt M en het punt $A(5, 2)$ op c . De lijn k raakt c in A . Zie de figuur hiernaast.
- Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn l door M en A .
 - Licht toe dat je nu ook de richtingscoëfficiënt van k kunt berekenen.
 - Stel een vergelijking op van k .



Theorie B Raaklijnen aan cirkels

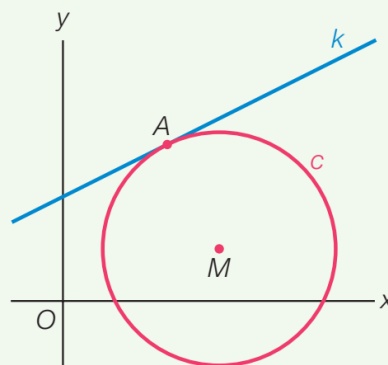
In opgave 61 heb je een vergelijking opgesteld van een raaklijn aan een cirkel in een gegeven raakpunt. Gebruik bij dit soort situaties het volgende werkschema.

Werkschema: opstellen van een vergelijking van een raaklijn k aan een cirkel c met middelpunt M in een gegeven punt A op c

- Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A .
- Gebruik $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, om de richtingscoëfficiënt rc_k van k te berekenen.
- Gebruik rc_k en de coördinaten van A om een vergelijking van k op te stellen.

Voorbeeld

Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$. De lijn k raakt c in het punt A met $x_A = 2$. Zie de figuur hiernaast. Stel van k een vergelijking op.



Uitwerking

$$\begin{aligned}x = 2 \text{ geeft } 2^2 + y^2 - 6 \cdot 2 - 2y + 5 &= 0 \\y^2 - 2y - 3 &= 0 \\(y + 1)(y - 3) &= 0 \\y &= -1 \vee y = 3\end{aligned}$$

Dus $A(2, 3)$.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 &= 0 \\x^2 - 6x + y^2 - 2y + 5 &= 0 \\(x - 3)^2 - 9 + (y - 1)^2 - 1 + 5 &= 0 \\(x - 3)^2 + (y - 1)^2 &= 5\end{aligned}$$

Dus c heeft middelpunt $M(3, 1)$.

Lijn m door M en A heeft $rc_m = \frac{3-1}{2-3} = -2$.

$k \perp m$, dus $rc_k \cdot -2 = -1$ en dit geeft $rc_k = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}k: y = \frac{1}{2}x + b \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 2 + b = 3 \\ 1 + b = 3 \\ b = 2 \end{array} \right. \\ \text{door } A(2, 3) & \end{aligned}$$

Dus $k: y = \frac{1}{2}x + 2$.

R62 Zie het voorbeeld met de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$.

□ ⊗ * Op c ligt het punt B met $x_B = 2$ en $y_B < 0$.

Een vergelijking van de lijn l die c raakt in B is $l: y = -\frac{1}{2}x$.

a Toon dit aan.

In de figuur hiernaast zijn c , de punten A en B en de raaklijnen k en l getekend.

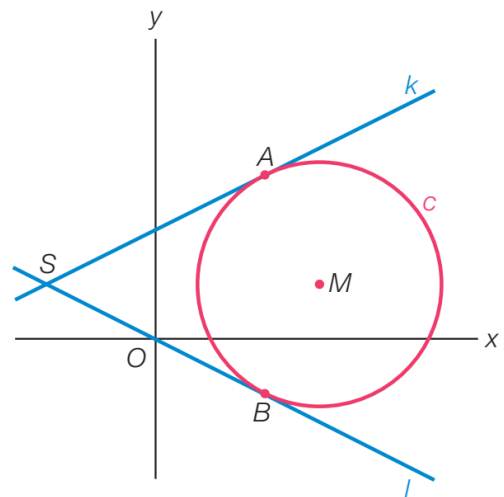
b Bereken in graden de hoek tussen k en l door gebruik te maken van de richtingshoeken van k en l . Rond af op één decimaal.

Het snijpunt van k en l is $S(-2, 1)$.

c Toon dit aan.

Door gebruik te maken van de lengte van het lijnstuk MS en de straal van de cirkel is $\angle MSA$ in $\triangle AMS$ te berekenen.

d Bereken op deze manier $\angle MSA$ en gebruik dit om de hoek tussen k en l te berekenen. Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.



63

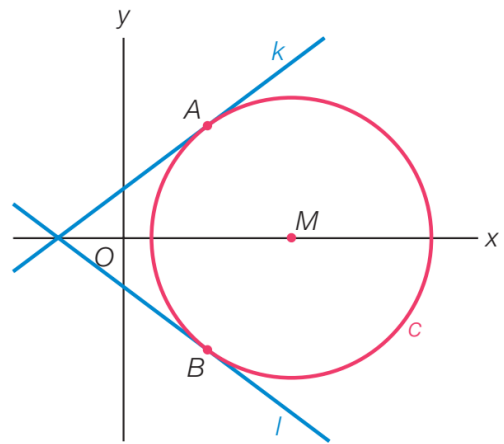


Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$.

De punten A en B met $x_A = x_B = 3$ liggen op c .

De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B . Zie de figuur hiernaast.

- Stel van k en van l een vergelijking op.
- Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen k en l .
- De lijnen m en n raken de cirkel en gaan door de oorsprong. Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen m en n .



64



Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 + 6x - 6y - 7 = 0$.

De cirkel snijdt de x -as in de punten A en B .

De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B .

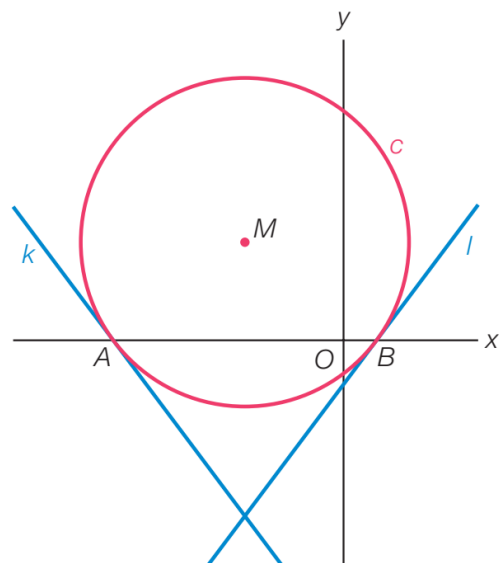
Zie de figuur hiernaast.

- Stel van k en van l een vergelijking op.

De cirkel snijdt de y -as in de punten C en D met $y_C < y_D$.

De lijn p raakt c in C en de lijn q raakt c in D .

- Stel van p en van q een vergelijking op.
- Onderzoek met een berekening of de hoek tussen k en l groter dan, kleiner dan, of gelijk is aan de hoek tussen p en q .



65



- Lijn k raakt de cirkel $c_1: x^2 + y^2 - 2x + 8y + 4 = 0$ in het punt $A(4, -2)$.

Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

- De lijn m raakt de cirkel c_2 met middelpunt $M_2(-3, 4)$ in het punt $B(3, 1)$.

Stel van zowel c_2 als van m een vergelijking op.

A66



Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$

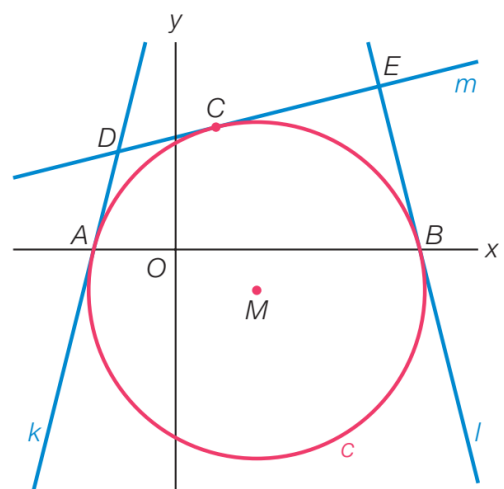
met middelpunt M .

De cirkel snijdt de x -as in de punten A en B .

Verder ligt het punt $C(1, 3)$ op c .

De lijn k raakt c in A , de lijn l raakt c in B en de lijn m raakt c in C . De lijnen k en m snijden elkaar in het punt D en de lijnen l en m snijden elkaar in het punt E . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen k en m .
- Bereken in graden nauwkeurig $\angle AMB$.
- Bereken exact de afstand van E tot c .



A67 Gegeven is de cirkel $c_1: x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$

***** met middelpunt M .

De lijn k raakt c_1 in het punt A met $x_A = -1$.

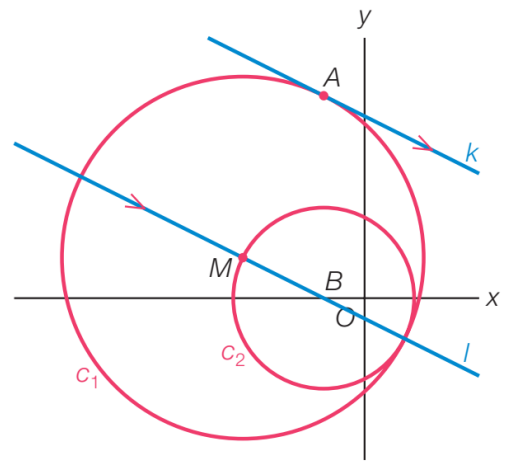
De lijn l gaat door M en is evenwijdig met k .

Het punt B is het snijpunt van l met de x -as.

De cirkel c_2 gaat door M en heeft middelpunt B .

Zie de figuur hiernaast.

Stel een vergelijking van c_2 op.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan de afstand van een punt tot een cirkel berekenen.

☐ Ik kan de afstand van een lijn tot een cirkel berekenen.

☐ Ik kan een vergelijking opstellen van een raaklijn aan een cirkel door een gegeven punt op de cirkel.

► OPGAVE C8ab
THEORIE A

► OPGAVE C8c
OPGAVE 57

► OPGAVE C9
THEORIE B

C8 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 12x + 8y + 3 = 0$,
de lijn $k: 3x + 4y = 52$ en de punten $A(1, 3)$ en $B(10, -7)$.

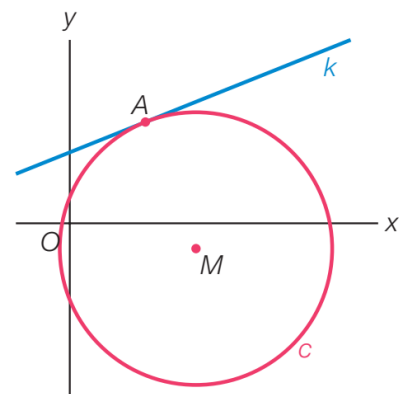
Bereken exact.

a $d(A, c)$

b $d(B, c)$

c $d(k, c)$

C9 De lijn k raakt de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x + 2y - 3 = 0$
in het punt A met $x_A = 3$. Zie de figuur hiernaast.
Stel een vergelijking op van k .



Antwoorden

C8 a $d(A, c) = \sqrt{74} - 7$

b $d(B, c) = 2$

c $d(k, c) = 3$

C9 $k: y = \frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5}$

Kennis- en vaardighedentest

7.1 Lijnen en hoeken

- 1** Gegeven zijn de lijnen $k: y = ax + 12$ en $l: 4x + 5y = b$.
Bereken voor welke a en b de lijnen
- a** een snijpunt hebben
 - b** samenvallen
 - c** elkaar snijden in het punt $(2, 8)$.
- Neem $a = -1$.
- d** Bereken voor welke waarden van b de lijnen een snijpunt hebben dat rechts van de lijn $x = 4$ ligt.
- 2**
- a** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen $k: y = 4x + 2$ en $l: y = \frac{1}{2}x + 6$.
 - b** De lijn m gaat door de punten $(3, 0)$ en $(0, -2)$ en de lijn n gaat door de punten $(2, 0)$ en $(0, 5)$.
Bereken in graden de hoek tussen m en n . Rond af op één decimaal.
 - c** Bereken de hoek tussen de lijnen $p: 2x + 3y = 6$ en $q: y = -8x - 6$.
Geef je antwoord in graden en rond af op één decimaal.

7.2 Afstanden bij punten en lijnen

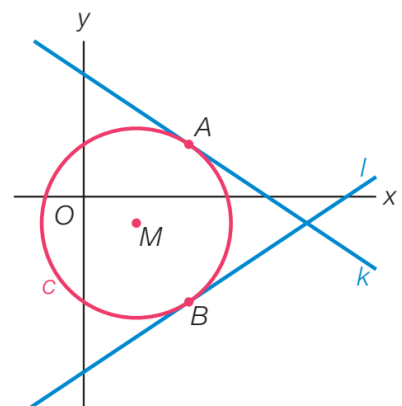
- 3** Gegeven zijn de punten $A(2p, 0)$ en $B(3, p + 1)$.
- a** Neem $p = 4$ en bereken exact de afstand tussen A en B . Geef het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.
 - b** Druk de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB uit in p .
- Voor de afstand tussen A en B geldt $d(A, B) = \sqrt{5p^2 - 10p + 10}$.
- c** Toon dit aan.
 - d** Bereken exact voor welke p de afstand tussen A en B gelijk is aan 5.
- 4**
- a** De lijn k gaat door het punt $A(2, -4)$ en staat loodrecht op de lijn $l: 3x + 2y = 6$.
Stel van k een vergelijking op van de vorm $y = ax + b$.
 - b** De lijn m gaat door het punt $B(2, 3)$ en staat loodrecht op de lijn $n: y = -\frac{1}{3}x + 5$.
Stel van m een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.
- 5**
- a** Bereken exact de afstand van het punt $A(6, -1)$ tot de lijn $k: 2x - y = 3$. Geef het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.
 - b** Bereken exact de afstand van het punt $B(3, 5)$ tot de lijn m door de punten $C(-1, 3)$ en $D(5, 1)$.

7.3 Cirkelvergelijkingen

- 6** Gegeven zijn de punten $A(2, -3)$ en $B(8, 2)$.
Stel een vergelijking op van de
- a** cirkel c_1 met middelpunt A die door B gaat
 - b** cirkel c_2 met middelpunt B die de y -as raakt
 - c** cirkel c_3 met middellijn AB
 - d** cirkels c_4 en c_5 die straal 3 hebben, de y -as raken en waarvan de middelpunten op de lijn $k: y = 3x - 6$ liggen.
- 7** Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(6, -1)$ die de lijn $k: y = 2x - 3$ raakt.
- 8** Bereken van de cirkel de straal en de coördinaten van het middelpunt.
- a** $c_1: x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$
 - b** $c_2: x^2 + y^2 + 3x - 7y = 0$
- 9** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 18x + 10y + 6 = 0$ en de punten $A(3, -4)$, $B(2, 5)$ en $C(15, 3)$.
Onderzoek op algebraïsche wijze voor elk van de punten of het op, binnen of buiten de cirkel ligt.

7.4 Afstanden en raaklijnen bij cirkels

- 10** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$, de lijn $k: 2x + y = 13$ en de punten $A(5, 5)$ en $B(1, -2)$.
Bereken exact
- a** $d(A, c)$
 - b** $d(B, c)$
 - c** $d(k, c)$.
- 11** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$.
De punten A en B met $x_A = x_B = 4$ liggen op c .
De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B .
Zie de figuur hiernaast.
- a** Stel van k en van l een vergelijking op.
 - b** Bereken in graden de hoek tussen k en l .
Rond af op één decimaal.



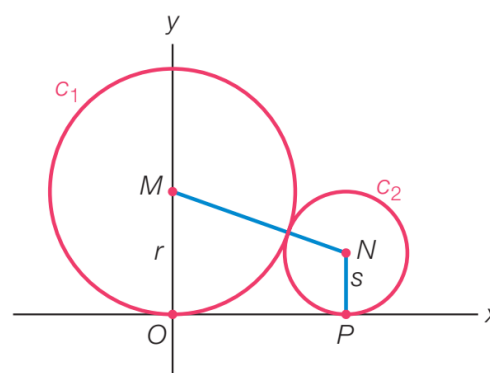
Gemengde opgaven

- 1** Gegeven zijn de lijnen $k: ax + 4y = 8$ en $l: y = bx + 2a$.
Bereken voor welke a en b
 - a** k en l samenvallen
 - b** k en l elkaar snijden in het punt $(4, -3)$
 - c** k en l elkaar loodrecht snijden in een punt op de y -as.

- 2** Gegeven zijn de punten $A(7, 9)$, $B(2, 4)$ en $C(3, 1)$ en de lijn k door B en C .
 - a** Bereken exact $d(A, B)$. Geef het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.
 - b** Bereken exact $d(A, k)$. Geef het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.
 - c** Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.
 - d** Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt A , die k raakt.
 - e** Bereken in graden $\angle ABC$. Rond af op één decimaal.

- 3** Voor $p > -1\frac{1}{2}$ zijn gegeven de punten $A(2p + 3, 0)$ en $B(2, p + 6)$.
Het midden van lijnstuk AB is het punt M .
 - a** Bereken exact voor welke waarde van p de cirkel c_1 met middelpunt M beide assen raakt.
 - b** Het punt A ligt op de cirkel c_2 met middelpunt B die door de oorsprong gaat.
Bereken p .
 - c** Bereken exact voor welke waarde van p de lijn AB loodrecht op de lijn $k: y = \frac{9}{10}x + 1$ staat.
 - d** Bereken exact de coördinaten van het punt C als geldt dat vierhoek $OABC$ een rechthoek is.

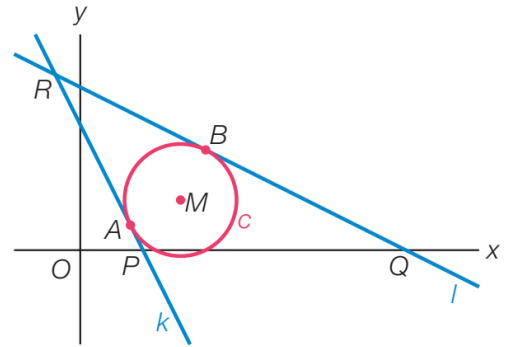
- 4** In de figuur hiernaast zijn de cirkels c_1 en c_2 getekend. Het middelpunt M van c_1 ligt op de y -as en de straal van c_1 is r . Het middelpunt van c_2 is N en de straal van c_2 is s , met $s < r$.
De cirkels raken de x -as in de punten O en P .
De cirkels raken elkaar, dus $d(M, N) = r + s$.
 - a** Neem $r = 9$ en $s = 4$ en bereken exact de oppervlakte van vierhoek $OPNM$.
 - b** Toon op algebraïsche wijze aan dat de oppervlakte van vierhoek $OPNM$ gelijk is aan $(r + s)\sqrt{rs}$.
 - c** Bereken exact voor welke r en s geldt dat $MN = 25$ en $OP = 15$.



- 5** Gegeven zijn de lijnen $k: 2x - 3y = 0$ en $l: 2x - 3y = 13$ en de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$.
- Onderzoek op algebraïsche wijze of het punt $O(0, 0)$ binnen of buiten de cirkel ligt.
 - Bewijs dat de afstand tussen k en l gelijk is aan de straal van de cirkel.
 - Onderzoek op algebraïsche wijze of het punt $A(0, -5)$ dichterbij k ligt dan bij c .

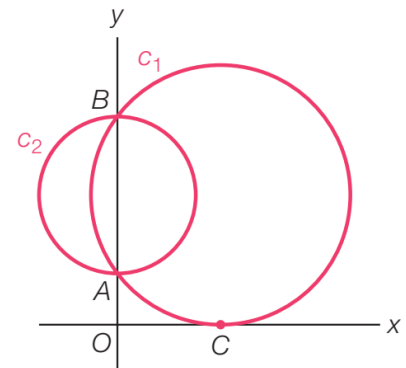
- 6** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$ met middelpunt M .

De lijn k raakt c in het punt A met $x_A = 2$ en snijdt de x -as in het punt P . De lijn l raakt c in het punt B met $y_B = 4$ en snijdt de x -as in het punt Q . De lijnen k en l snijden elkaar in het punt R . Zie de figuur hiernaast.



- Bereken in graden $\angle(k, l)$. Rond af op één decimaal.
- Bereken exact $d(R, c)$.
- Bereken exact de oppervlakte van $\triangle PQR$.

- 7** Gegeven zijn de punten $A(0, 2)$, $B(0, 8)$ en $C(4, 0)$. De cirkel c_1 gaat door A en B en raakt de x -as in C . De cirkel c_2 heeft middellijn AB . Zie de figuur hiernaast.

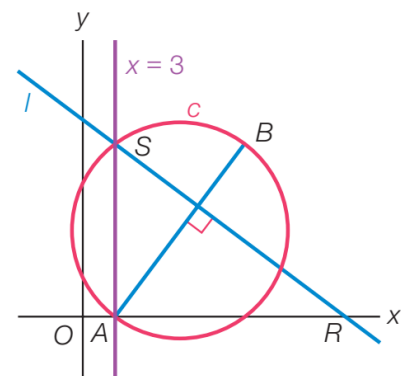


- Stel van zowel c_1 als van c_2 een vergelijking op.

Er zijn twee raaklijnen aan c_2 die door $O(0, 0)$ gaan.

- Bereken in graden de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken. Rond af op één decimaal.
- De cirkel c_3 raakt de y -as in A en gaat door het middelpunt van c_1 . Stel een vergelijking op van c_3 .

- 8** Gegeven zijn de punten $A(3, 0)$ en $B(15, 16)$. Lijnstuk AB is middellijn van de cirkel c . De lijn $x = 3$ snijdt c in de punten A en S . De lijn l gaat door S , staat loodrecht op AB en snijdt de x -as in het punt R . Zie de figuur hiernaast.



- Onderzoek langs algebraïsche weg of vierhoek $ARBS$ een trapezium is.
- Bereken exact de coördinaten van R .
- Bereken exact de oppervlakte van vierhoek $ARBS$.
- Bereken algebraïsch $d(A, l)$.



8

Goniometrische functies en vergelijkingen

De getijdenbeweging (het getij) is een periodiek verschijnsel. De fase van het stijgen van het water heet vloed of opkomend tij, die van het dalen heet eb of afgaand tij. De maximale waterhoogte heet hoogwater of hoogtij, de minimale hoogte heet laagwater of laagtij.

In Harlingen is het op twee achtereenvolgende dagen om 05:10 uur, 17:44 uur, 06:09 uur en 18:49 uur hoogwater en om 12:34 uur, 00:56 uur en 13:40 uur laagwater.

Hoeveel minuten duurt in Harlingen vloed korter dan eb? Welke invloed heeft dit op de hoeveelheid zand en slib in de Waddenzee?

8.1 De eenheidscirkel en radialen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt met de sinus en de cosinus de coördinaten berekenen van een punt op de eenheidscirkel waarvan de draaiingshoek gegeven is.
- Je kunt de draaiingshoek berekenen van een punt op de eenheidscirkel waarvan de x-coördinaat of de y-coördinaat gegeven is.
- Je kunt hoeken omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd.

O1
□ ⊗ *

Rond in deze opgave de lengten van lijnstukken en de coördinaten van punten af op twee decimalen.

In de figuur hiernaast is de cirkel getekend met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1. Het punt P draait tegen de wijzers van de klok in over de cirkel en begint daarbij in het punt $(1, 0)$. De hoek waarover gedraaid is, geven we aan met de Griekse letter α . In de figuur is $\alpha = 65^\circ$.

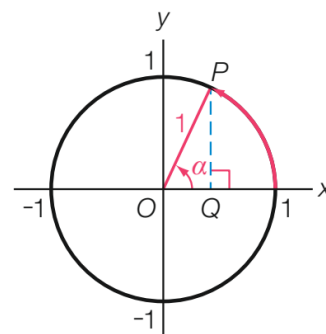
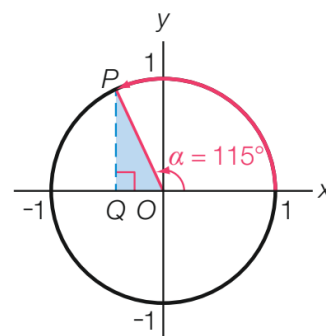
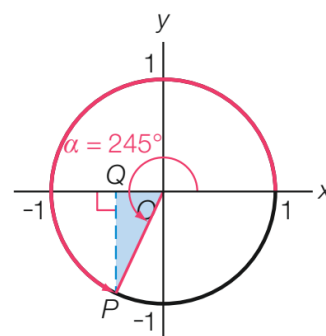
- Bereken PQ en OQ .
- Geef de coördinaten van P .

In de figuur hiernaast zie je de situatie met $\alpha = 115^\circ$.

- Hoeveel graden is $\angle POQ$? Geef PQ , OQ en de coördinaten van P .
- Bereken $\cos(115^\circ)$ en $\sin(115^\circ)$ met de GR. Wat valt je op?

In de figuur hiernaast zie je de situatie met $\alpha = 245^\circ$.

- Geef $\angle POQ$ en de coördinaten van P .
- Ga na dat je de coördinaten van P op je GR kunt krijgen door $\cos(245^\circ)$ en $\sin(245^\circ)$ te berekenen.



Theorie A Sinus en cosinus in de eenheidscirkel

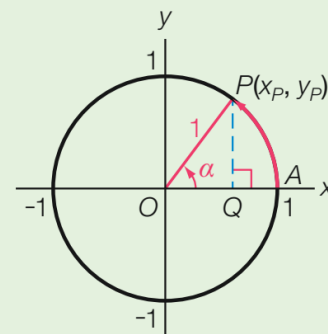
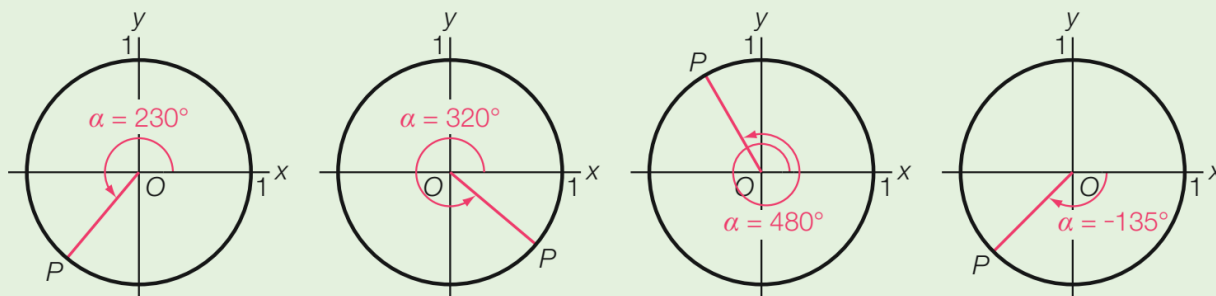
De cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1 heet de **eenheidscirkel**.

Het punt P beweegt over de eenheidscirkel en begint in het punt $A(1, 0)$. Zie de figuur hiernaast. Hierdoor ontstaat $\angle AOP$ die we de **draaiingshoek** van P noemen. We geven deze hoek aan met α . Het eerste been van een draaiingshoek is altijd de positieve x -as, het tweede been gaat door het punt P . In de figuur is de draaiingshoek α scherp. Voor deze scherpe

hoek weet je dat geldt $\sin(\alpha) = \frac{PQ}{OP} = \frac{y_P}{1} = y_P$

en $\cos(\alpha) = \frac{OQ}{OP} = \frac{x_P}{1} = x_P$.

De draaiingshoek α kan allerlei waarden aannemen. Hieronder zie je enkele voorbeelden. Je ziet dat α ook kleiner dan 0° of groter dan 360° kan zijn.

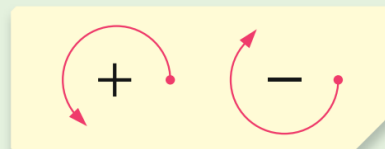


Draaiingshoeken kunnen zowel positief als negatief zijn.

Afspraak

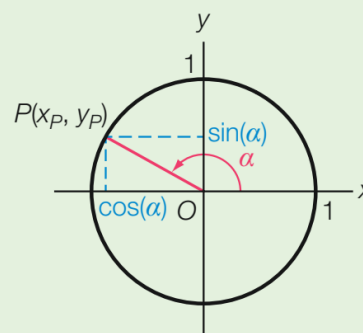
Draait P

- tegen de wijzers van de klok in, dan is α positief
- met de wijzers van de klok mee, dan is α negatief.



Ook voor niet-scherpe draaiingshoeken van punt P geldt per definitie dat $\sin(\alpha) = y_P$ en $\cos(\alpha) = x_P$.

Snijdt het tweede been van de draaiingshoek α de eenheidscirkel in het punt $P(x_P, y_P)$, dan is $\sin(\alpha) = y_P$ en $\cos(\alpha) = x_P$.



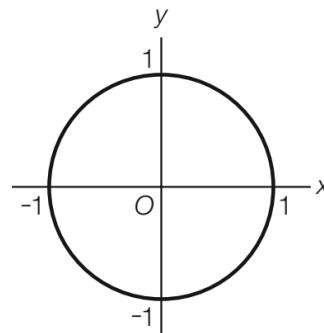
Van sommige draaiingshoeken zoals 180° en -90° kun je de sinus en de cosinus uit de eenheidscirkel aflezen. Zo hoort bij $\alpha = 180^\circ$ het punt $P(-1, 0)$, dus $\sin(180^\circ) = 0$ en $\cos(180^\circ) = -1$.

Maar bij de meeste draaiingshoeken moet je de GR gebruiken. Je krijgt dan benaderingen. Zo is $\sin(215^\circ) \approx -0,57$. Ga dit na.

2 Lees uit de eenheidscirkel af.



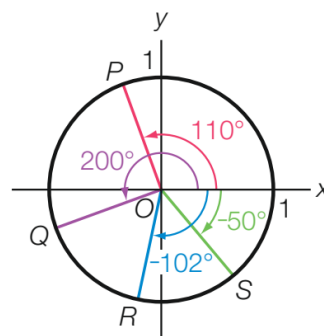
- | | | |
|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| a $\sin(0^\circ)$ | f $\cos(270^\circ)$ | k $\sin(-540^\circ)$ |
| b $\cos(0^\circ)$ | g $\sin(360^\circ)$ | l $\cos(1080^\circ)$ |
| c $\sin(90^\circ)$ | h $\cos(360^\circ)$ | m $\sin(1980^\circ)$ |
| d $\cos(90^\circ)$ | i $\sin(450^\circ)$ | n $\cos(-180^\circ)$ |
| e $\sin(270^\circ)$ | j $\cos(-90^\circ)$ | o $\sin(990^\circ)$ |



3 In de figuur hiernaast liggen de punten P , Q , R en S op de eenheidscirkel.



Bereken de coördinaten van P , Q , R en S . Rond af op twee decimalen.

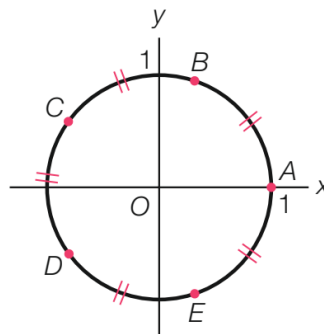


A4 In de figuur hiernaast verdelen de punten A , B , C , D en E de eenheidscirkel in vijf cirkelbogen van gelijke lengte.



Het punt A is het punt $(1, 0)$.

Bereken de coördinaten van B , C , D en E . Rond af op twee decimalen.

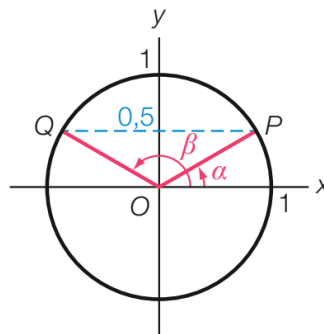


O5 Op de eenheidscirkel in de figuur hiernaast liggen de punten P en Q met $y_P = y_Q = 0,5$.



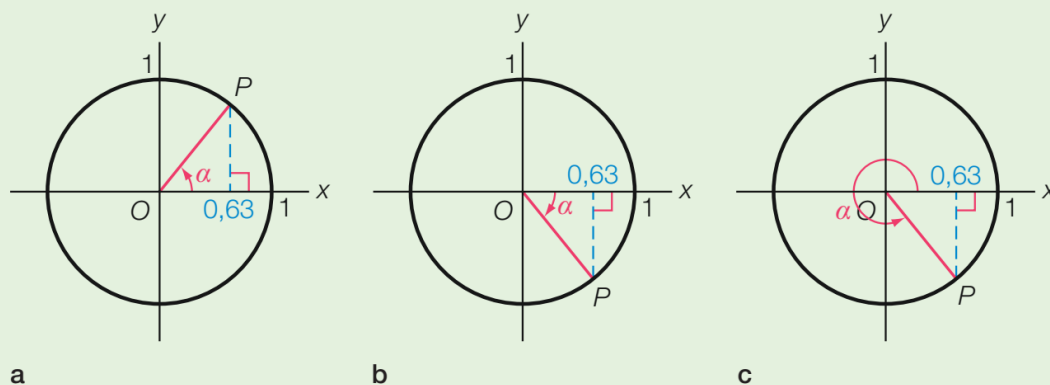
Voor draaiingshoek α van P geldt $\alpha = 30^\circ$.

Hoe groot is draaiingshoek β van Q ?



Theorie B Hoek berekenen bij gegeven x_P of y_P

In de figuur hieronder zie je drie situaties met een punt P op de eenheidscirkel waarvoor geldt dat $x_P = 0,63$. Er geldt dus steeds dat $\cos(\alpha) = 0,63$.



De draaiingshoek α in figuur a kun je direct met de GR berekenen.

Je krijgt $\alpha \approx 51^\circ$.

De draaiingshoek α in figuur b krijg je niet direct met de GR.

Je gebruikt symmetrie om zelf te bedenken dat $\alpha \approx -51^\circ$.

De draaiingshoek α in figuur c is $\alpha \approx 360^\circ - 51^\circ = 309^\circ$.

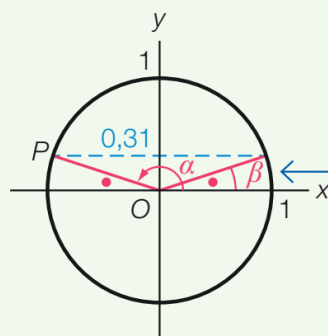
Voorbeeld

In de figuur hiernaast is $y_P = 0,31$.

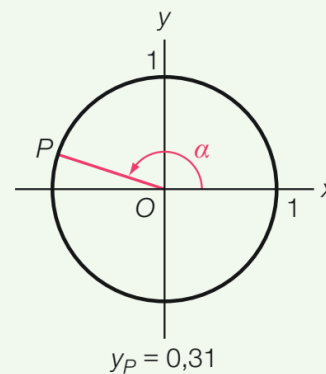
Bereken α in graden. Rond af op één decimaal.

Aanpak

Gebruik de symmetrie in de figuur hieronder.



De GR geeft $\beta = 18,05...^\circ$.



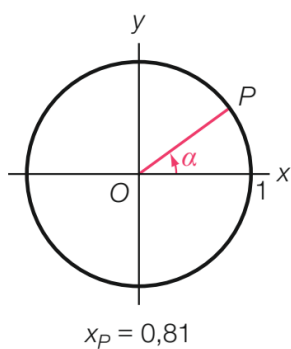
Uitwerking

$y_P = 0,31$, dus $\sin(\alpha) = 0,31$.

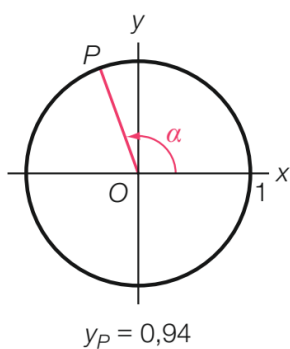
De GR geeft $18,05...^\circ$.

Dus $\alpha = 180^\circ - 18,05...^\circ \approx 161,9^\circ$.

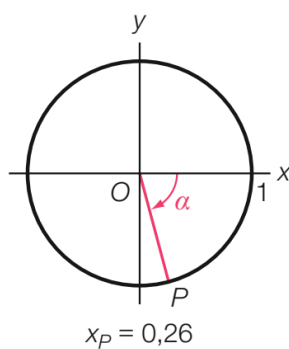
- 6** Zie de eenheidscirkels hieronder.
 Bereken α in graden. Rond af op één decimaal.



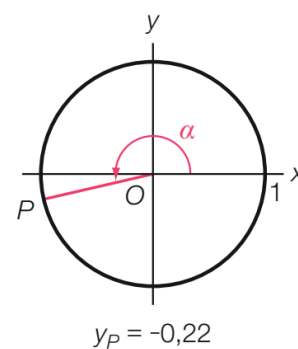
a



b

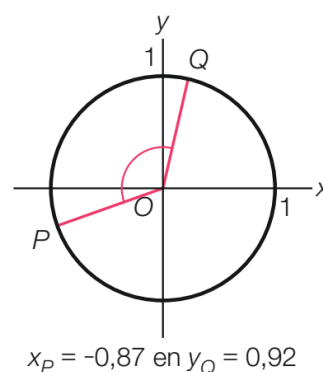


c



d

- A7** In de figuur hiernaast is $x_P = -0,87$ en $y_Q = 0,92$.
 Bereken $\angle POQ$ in graden. Rond af op één decimaal.



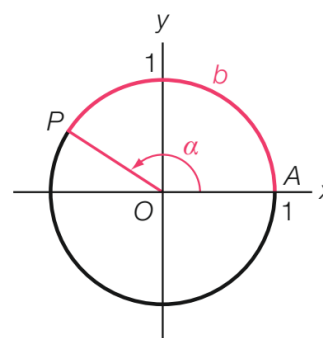
- 08** a Licht toe dat de omtrek van de eenheidscirkel gelijk is aan 2π .

Het punt P begint in A en doorloopt de eenheidscirkel.
 De draaiingshoek α is positief.

De lengte van de cirkelboog b hangt af van α .

- b Licht toe dat bij $\alpha = 180^\circ$ de lengte van de door P doorlopen cirkelboog gelijk is aan π .

- c Bereken α als geldt $b = 1$. Rond af op één decimaal.



Theorie C De hoekeenheid radiaal

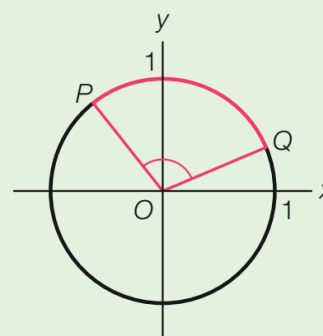
Voor de punten P en Q op een cirkel met middelpunt M heet $\angle PMQ$ een **middelpuntshoek**.

We definiëren met behulp van de eenheidscirkel de hoekmaat **radiaal**.

Voor de punten P en Q op de eenheidscirkel is de middelpuntshoek POQ in radialen gelijk aan de lengte van de bijbehorende cirkelboog PQ .

Kortweg: hoek = booglengte.

De radiaal is dus zo gedefinieerd, dat bij een **booglengte** van 1 op de eenheidscirkel een middelpuntshoek van 1 radiaal hoort.

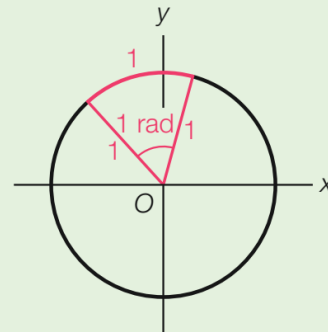


De hoekmaat radiaal wordt afgekort tot rad.

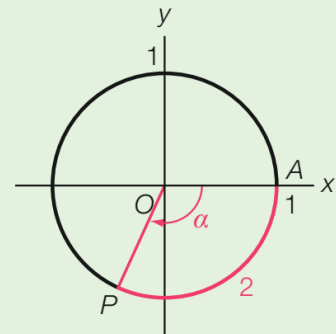
Bij een booglengte van 2 op de eenheidscirkel hoort een middelpuntshoek van 2 rad.

En bij een booglengte van π op de eenheidscirkel hoort een middelpuntshoek van π rad.

De middelpuntshoek in de eenheidscirkel die hoort bij een cirkelboog met lengte 1 is een hoek van 1 radiaal.



In de figuur hiernaast is α negatief. De booglengte is 2. Hierbij hoort een draaiingshoek $\alpha = -2$ rad.



Voorbeeld

Het punt P begint in $(1, 0)$ en doorloopt de eenheidscirkel.

De draaiingshoek is positief en de afgelegde afstand over de cirkel is 2.

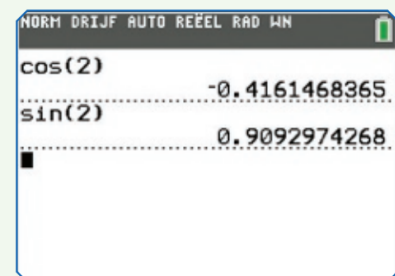
Bereken de coördinaten van P . Rond af op twee decimalen.

Aanpak

De door P afgelegde afstand is 2, dus $\alpha = 2$ rad.

Stel de hoekeenheid van je GR in op radialen.

Casio	Set up ► Angle ► Rad
HP	Settings ► Hoekmaat ► Radialen
NumWorks	Instellingen ► Hoekmaat ► Radialen
TI	Mode ► Radialen



Uitwerking

$$x_P = \cos(2 \text{ rad}) \approx -0,42 \text{ en } y_P = \sin(2 \text{ rad}) \approx 0,91$$

Dus $P(-0,42; 0,91)$.

9 Rond in deze opgave af op twee decimalen.



Het punt P begint in $(1, 0)$ en doorloopt de eenheidscirkel.

De draaiingshoek is positief.

Bereken de coördinaten van P bij een afgelegde afstand van

a 5

b 6

c 20

10 Het punt P begint in $(1, 0)$ en doorloopt de eenheidscirkel.



De draaiingshoek is positief.

Geef de coördinaten van P bij een afgelegde afstand van

a $\frac{1}{2}\pi$

b π

c $1\frac{1}{2}\pi$

Geschiedenis **Hoekeenheden**

Bij de graad als hoekeenheid is uitgegaan van een verdeling van een cirkel in 360 stukken. Men vermoedt dat deze verdeling afkomstig is uit de astronomie.

In de Soemerische periode (ongeveer 2100 v.Chr.) verdeelden astronomen een jaar in 12 maanden van elk 30 dagen ($12 \times 30 = 360$).

De Soemeriërs waren woonachtig in het huidige Irak. Ze waren al bedreven in het rekenen, waarbij ze een zestigtallig stelsel hadden ontwikkeld. Dit getallenstelsel verschilt in principe niet veel van het tientallig stelsel dat we tegenwoordig gebruiken. Er zijn duizenden teksten uit deze periode gevonden met verslagen over de levering van vee en graan, vergezeld van bijbehorende berekeningen in het zestigtallig stelsel.

De hoekeenheid radiaal werd in 1873 door James Thomson gedefinieerd.

Thomson was wiskundeprofessor aan het Queens College in Belfast.

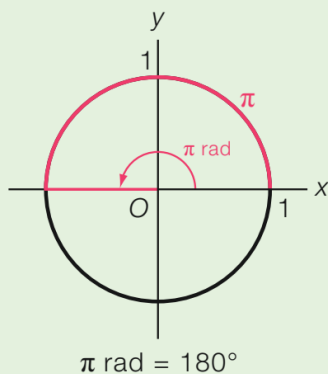
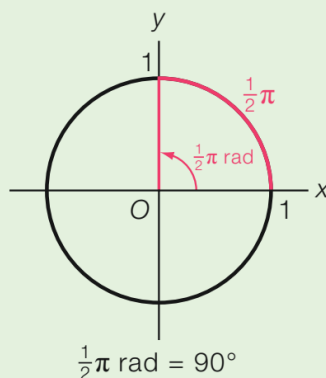
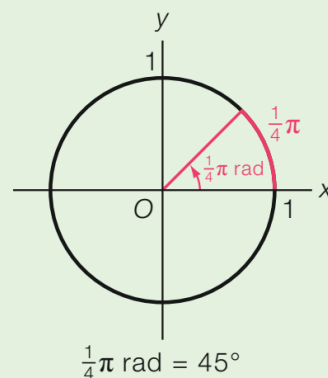
Theorie D Radiaal en graad

De omtrek van een cirkel met straal r is $2\pi r$. De straal van de eenheidscirkel is 1, dus de hele eenheidscirkel heeft booglengte $2\pi \cdot 1 = 2\pi$.

Bij deze booglengte hoort dus een draaiingshoek van 2π rad.

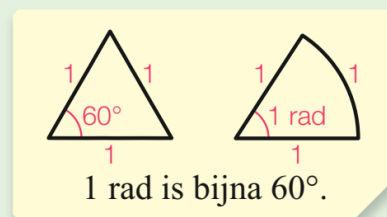
Hieruit volgt dat 2π rad $= 360^\circ$, dus π rad $= 180^\circ$.

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$



In de tabel hieronder staat het verband tussen radialen en graden. Daarbij is onderscheid gemaakt tussen exacte en afgeronde waarden.

	exact	afgerond
1 rad	$\frac{180^\circ}{\pi}$	57,3°
1°	$\frac{1}{180}\pi$ rad	0,017 rad



Let op het verschil tussen $\frac{1}{3}$ rad en $\frac{1}{3}\pi$ rad.

$$\frac{1}{3} \text{ rad} = \frac{1}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 19,1^\circ \text{ en } \frac{1}{3}\pi \text{ rad} = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ.$$

Radialen en graden in elkaar omrekenen

radialen naar graden	graden naar radialen (benaderd)	graden naar radialen (exact)
$\frac{2}{3}\pi \text{ rad} = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ$	$107^\circ = \frac{107}{180}\pi \text{ rad} \approx 1,87 \text{ rad}$	$20^\circ = \frac{20}{180}\pi \text{ rad} = \frac{1}{9}\pi \text{ rad}$
$\frac{3}{4} \text{ rad} = \frac{3}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 43,0^\circ$	$26^\circ = \frac{26}{180}\pi \text{ rad} \approx 0,45 \text{ rad}$	$75^\circ = \frac{75}{180}\pi \text{ rad} = \frac{5}{12}\pi \text{ rad}$

11 Druk uit in graden. Rond zo nodig af op één decimaal.



a $\frac{1}{6}\pi$ rad

c 2π rad

e $1\frac{1}{4}\pi$ rad

g $2\frac{1}{3}\pi$ rad

b $\frac{1}{4}\pi$ rad

d 2 rad

f $1\frac{1}{4}$ rad

h $2\frac{1}{3}$ rad

12 Druk uit in radialen. Geef een exact antwoord.



a 360°

c 45°

e 90°

g 300°

b 30°

d 60°

f 135°

h 210°

13 Druk uit in radialen. Rond af op twee decimalen.



a 10°

b $57,3^\circ$

c 1030°

d 90°

Afspraak

In het vervolg laten we bij een hoek in radialen de eenheid rad weg.

Dus $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ betekent $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ rad.

14 Bereken. Rond af op twee decimalen.



a $\cos(\frac{5}{8}\pi)$

c $\sin(\frac{4}{5}\pi)$

e $\cos(7,6\pi)$

b $\cos(\frac{5}{8})$

d $\sin(\frac{4}{5})$

f $\cos(7,6)$

15 Bereken α met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Rond af op twee decimalen.



a $\sin(\alpha) = 0,92$

c $\sin(\alpha) = \frac{5}{12}$

e $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{5}$

b $\cos(\alpha) = 0,85$

d $\cos(\alpha) = \frac{3}{17}$

f $\cos(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

A16 **a** Er zijn twee punten P op de eenheidscirkel met $y_P = 0,35$.



Bereken de bijhorende draaiingshoeken tussen 0 en 2π .

Rond af op twee decimalen.

b Er zijn twee punten Q op de eenheidscirkel met $x_Q = -0,35$.

Bereken de bijbehorende draaiingshoeken tussen 0 en 2π .

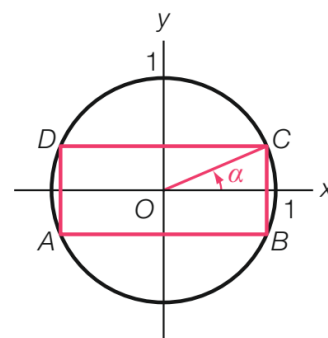
Rond af op twee decimalen.

E17 Van de rechthoek $ABCD$ in de figuur hiernaast is AB

***** evenwijdig met de x -as.

De draaiingshoek α neemt toe van 0,2 naar 0,4. Daardoor neemt de oppervlakte van de rechthoek toe.

Bereken met hoeveel procent de oppervlakte toeneemt.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan met de sinus en de cosinus de coördinaten berekenen van een punt op de eenheidscirkel waarvan de draaiingshoek gegeven is.

► **OPGAVE C1**
THEORIE A

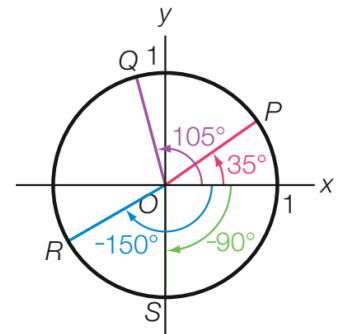
☐ Ik kan de draaiingshoek berekenen van een punt op de eenheidscirkel waarvan de x-coördinaat of de y-coördinaat gegeven is.

► **OPGAVE C2**
THEORIE B

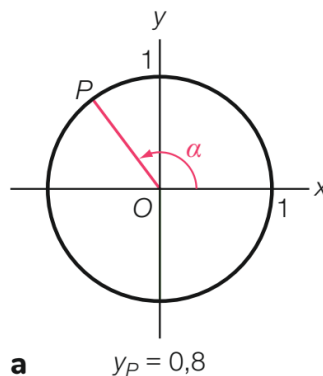
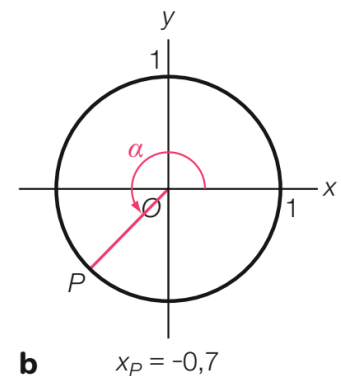
☐ Ik kan hoeken omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd.

► **OPGAVE C3**
THEORIE C,D

- C1** In de figuur hiernaast liggen de punten P , Q , R en S op de eenheidscirkel. De draaiingshoeken zijn achtereenvolgens 35° , 105° , -150° en -90° . Bereken de coördinaten van P , Q , R en S . Rond zo nodig af op twee decimalen.



- C2** Zie de eenheidscirkels hiernaast. Bereken α in graden. Rond af op één decimaal.



- C3**
- a** Druk de hoeken van $\frac{2}{3}\pi$ rad, $2\frac{1}{2}$ rad en $1\frac{3}{4}\pi$ rad uit in graden. Rond zo nodig af op één decimaal.
 - b** Druk de hoeken van 120° , 150° en 20° uit in radialen. Geef exacte antwoorden.
 - c** Druk de hoeken van 15° , 400° en 99° uit in radialen. Rond af op twee decimalen.

Antwoorden

C1 $P(0,82; 0,57)$
 $Q(-0,26; 0,97)$
 $R(-0,87; -0,5)$
 $S(0, -1)$

C2 **a** $126,9^\circ$
b $225,6^\circ$

C3 **a** 72° , $143,2^\circ$ en 315°
b $\frac{2}{3}\pi$ rad, $\frac{5}{6}\pi$ rad en $\frac{1}{9}\pi$ rad
c $0,26$ rad, $6,98$ rad en $1,73$ rad

8.2 Formules van sinusoiden opstellen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt op de grafieken van de standaardfuncties $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ transformaties toepassen en het effect hiervan op de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt bepalen.
- Je kunt formules van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ opstellen door de kenmerken van sinusoiden te gebruiken.
- Je kunt bij een grafiek waarvan de formule bekend is en waarbij is gegeven dat de formule te schrijven is in de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$ of $y = a + b \cos(c(x - d))$ de GR gebruiken om de kenmerken op te sporen.

018



Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$.

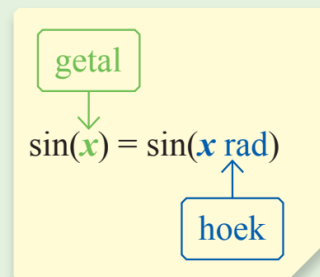
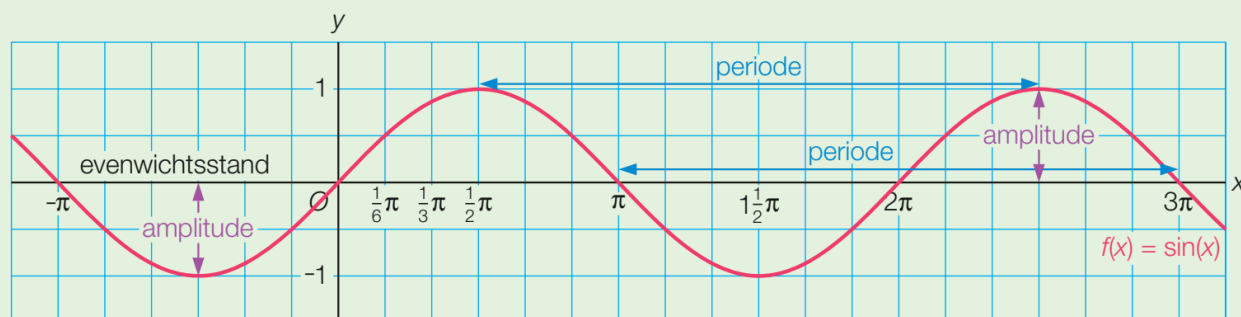
- Schets de grafiek van f door deze eerst te plotten. Neem y tussen -2 en 2 . Zorg voor de instelling op radialen.
- Zet in je schets de exacte coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x -as en de exacte coördinaten van de toppen.

Theorie A De grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$

Het sinusbegrip wordt niet alleen bij hoeken, maar ook bij getallen gebruikt. De sinus van het getal 2 is de sinus van een hoek van 2 radialen. Je kunt op deze manier praten over de functie $f(x) = \sin(x)$, die bij elk getal de sinus van dat getal geeft.

Hieronder is de grafiek van de **goniometrische functie** $f(x) = \sin(x)$ getekend. Hierbij is op de horizontale as een stapgrootte van $\frac{1}{6}\pi$ gebruikt.

De grafiek is periodiek met **periode** 2π . De **evenwichtsstand** is 0 en de **amplitude** is 1. De nulpunten zijn ..., $-\pi$, 0, π , 2π , 3π , ...



Op de x -as is 1 cm rechts van de oorsprong $\frac{1}{3}\pi$ gezet. Merk op dat $\frac{1}{3}\pi \approx 1,047 \approx 1$.

19 Gegeven is de functie $g(x) = \cos(x)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$.



- a Plot de grafiek. Neem y tussen -2 en 2 .
- b Teken de grafiek van g . Gebruik de schaalverdeling van de figuur op de vorige bladzijde.
- c Geef de exacte coördinaten van de vijf toppen.
- d Wat zijn de nulpunten van g ? Geef exacte antwoorden.

$$\cos(x) = \cos(x \text{ rad})$$

20 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$, beide met domein $[0, 3\pi]$.



- a Teken de grafieken van f en g in één figuur. Gebruik de schaalverdeling van de figuur op de vorige bladzijde.
- b De grafieken van f en g snijden elkaar in drie punten. Licht toe dat de x -coördinaat van één van die snijpunten $\frac{1}{4}\pi$ is en geef de exacte waarden van de x -coördinaten van de andere twee snijpunten.

21 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.



- a Hoe ontstaat de grafiek van $g(x) = 2 + \sin(x)$ uit de grafiek van f ? Wat is de evenwichtsstand van de grafiek van g ?
- b Hoe ontstaat de grafiek van $h(x) = \sin(x - 3)$ uit de grafiek van f ?
- c Hoe ontstaat de grafiek van $k(x) = 4 \sin(x)$ uit de grafiek van f ? Wat is de amplitude van de grafiek van k ?
- d Hoe ontstaat de grafiek van $l(x) = \sin(5x)$ uit de grafiek van f ? Wat is de periode van de grafiek van l ?

Theorie B Transformaties bij grafieken van goniometrische functies

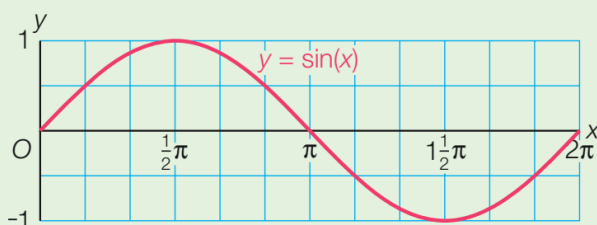
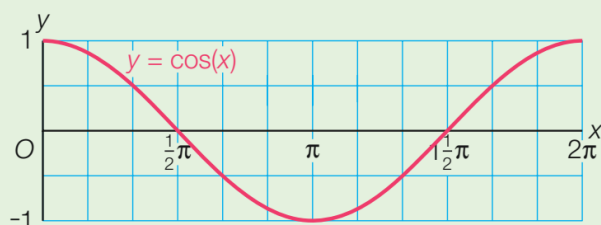
De functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ zijn standaardfuncties.

De bijbehorende grafieken mag je zonder toelichting tekenen.

Bij beide grafieken hoort evenwichtsstand 0 , amplitude 1 en periode 2π .

Een punt waar de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ stijgend door de evenwichtsstand gaat, noemen we een **beginpunt** van de grafiek van f .

Een hoogste punt van de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ noemen we een beginpunt van de grafiek van g .



Van de standaardgrafieken $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ is één periode getekend.

Op deze standaardgrafieken kun je de vier bekende transformaties toepassen. Zie de volgende bladzijde.

Effect van transformaties op de standaardgrafiek $y = \sin(x)$

transformatie	beeldgrafiek	kenmerk
translatie $(0, a)$	$y = a + \sin(x)$	evenwichtsstand a
$\times b$ t.o.v. de x -as	$y = b \sin(x)$	amplitude b ($b > 0$)
$\times \frac{1}{c}$ t.o.v. de y -as	$y = \sin(cx)$	periode $\frac{2\pi}{c}$ ($c > 0$)
translatie $(d, 0)$	$y = \sin(x - d)$	beginpunt $(d, 0)$

Pas je meerdere transformaties na elkaar toe, let dan op de volgorde.

$y = \sin(x)$ $\downarrow \times 3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}$ $y = 3 \sin(x)$ $\downarrow \text{translatie } (0, 2)$ $y = 2 + 3 \sin(x)$	$y = \sin(x)$ $\downarrow \text{translatie } (0, 2)$ $y = 2 + \sin(x)$ $\downarrow \times 3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}$ $y = 3(2 + \sin(x)) = 6 + 3 \sin(x)$
---	--

Ook bij de combinatie van een horizontale translatie en een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as is de volgorde van belang.

$y = \sin(x)$ $\downarrow \text{translatie } (\frac{1}{3}\pi, 0)$ $y = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$ $\downarrow \times 2 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}$ $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi)$	$y = \sin(x)$ $\downarrow \times 2 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}$ $y = \sin(\frac{1}{2}x)$ $\downarrow \text{translatie } (\frac{1}{3}\pi, 0)$ $y = \sin(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}\pi)) = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi)$
---	---

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2} + 3 \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$.

Geef aan hoe de grafiek van f uit een standaardgrafiek is ontstaan en geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

Uitwerking

$y = \sin(x)$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{2} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}}$	$y = \sin(2x)$	De periode halveert.
$\xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}}$	$y = 3 \sin(2x)$	De amplitude wordt 3.
$\xrightarrow{\text{translatie } (\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})}$	$y = \frac{1}{2} + 3 \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$	Het beginpunt wordt $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$.

De evenwichtsstand is $\frac{1}{2}$, de amplitude is 3, de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$ en een beginpunt is $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$.

R22 Zie het voorbeeld met de functie $f(x) = \frac{1}{2} + 3 \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$.



a Uit welke transformaties volgt dat $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$ een beginpunt van de grafiek is?

Volgens José hoort bij de grafiek van $g(x) = \frac{1}{2} + 3 \cos(2(x - \frac{1}{3}\pi))$ dezelfde evenwichtsstand, dezelfde amplitude en dezelfde periode als bij de grafiek van f .

b Ben je het met José eens?

c Een beginpunt van de grafiek van g is het punt $(\frac{1}{3}\pi, 3\frac{1}{2})$.

Uit welke transformaties van de standaardgrafiek $y = \cos(x)$ volgt dit?

23 Geef aan hoe de grafiek van de functie uit een standaardgrafiek is



ontstaan en geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

a $f(x) = 4 + 2 \sin(\frac{1}{2}(x + \frac{3}{4}\pi))$

b $g(x) = -1 + 7 \cos(5(x - \frac{1}{6}\pi))$

24 Geef van de grafiek van de functie de evenwichtsstand, de amplitude, de



periode en de coördinaten van een beginpunt. Je hoeft de transformaties niet op te schrijven.

a $f(x) = 5 + 1,2 \cos(x - \frac{1}{6}\pi)$

c $h(x) = 0,29 \cos(3(x + 1,4))$

b $g(x) = 0,4 + \sin(\frac{1}{5}(x + \frac{1}{3}\pi))$

d $k(x) = -0,8 + 2 \sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$

25 **a** De grafiek van de functie f ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door eerst de translatie $(\frac{1}{4}\pi, 4)$ en dan de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 3 toe te passen.



Stel het functievoorschrift van f op.

b De grafiek van de functie g ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 3 en dan de translatie $(\frac{1}{4}\pi, 4)$ toe te passen.

Stel het functievoorschrift van g op.

A26 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2} + \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$ met domein $[0, 3\pi]$.



a Geef van de grafiek van f de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

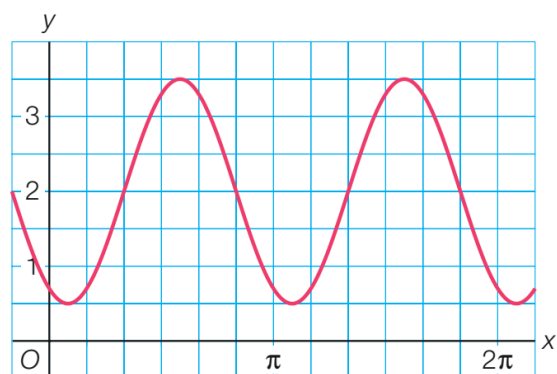
b Geef de exacte coördinaten van de punten waar de grafiek van f de lijn van de evenwichtsstand snijdt.

c Geef de exacte coördinaten van de drie toppen van de grafiek van f .

d De grafiek van f snijdt de x -as achtereenvolgens in de punten A , B en C . Geef de exacte afstand tussen de punten A en C .

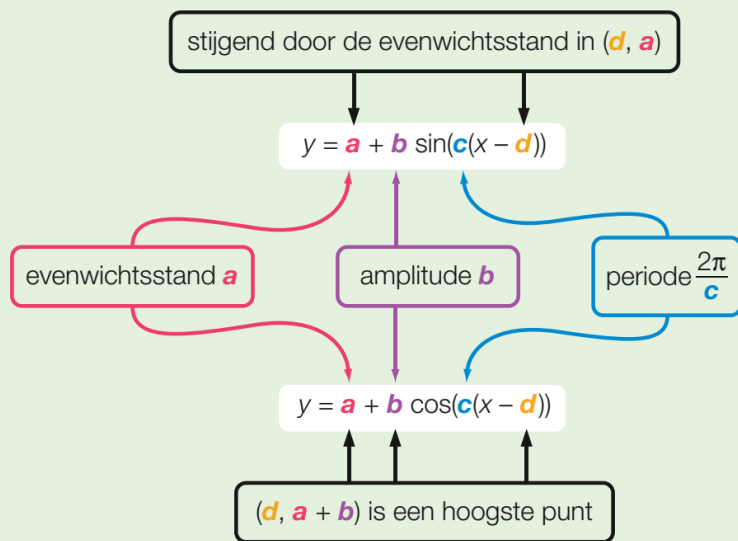
- A27** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 + 4 \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$ en $g(x) = -2 + 4 \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$.
***** Je kunt een translatie (m, n) op de grafiek van f toepassen, zodat het beeld van de grafiek van f samenvalt met de grafiek van g .
 Bereken mogelijke waarden van m en n .

- O28** Bij de grafiek in de figuur hiernaast hoort een formule van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$.
□ ⊗ *
a Lees de evenwichtsstand, de amplitude en de periode af.
b Geef mogelijke waarden van a , b en d en licht toe dat $c = 2$.



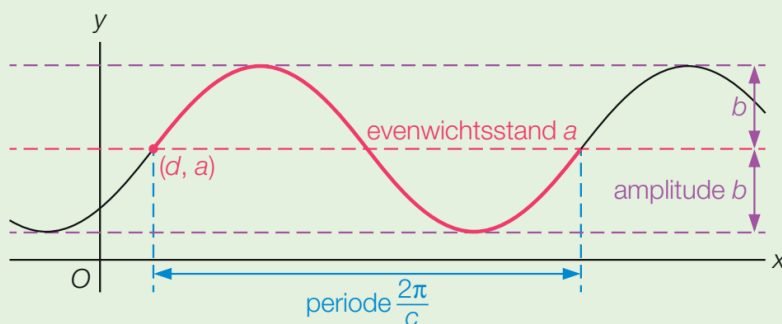
Theorie C Een formule van een sinusöide opstellen

De grafieken van $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ heten **sinusoïden**. Om bij een sinusöide een formule op te stellen, gebruik je het schema hieronder. In het schema is $b > 0$ en $c > 0$.



De vier kenmerken van de grafiek van $y = a + b \sin(c(x - d))$ met $b > 0$ en $c > 0$

- evenwichtsstand a
- amplitude b
- periode $\frac{2\pi}{c}$
- stijgend door de evenwichtsstand in het punt (d, a)



Voorbeeld

In de figuur hiernaast is een sinusoïde getekend.

Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$.

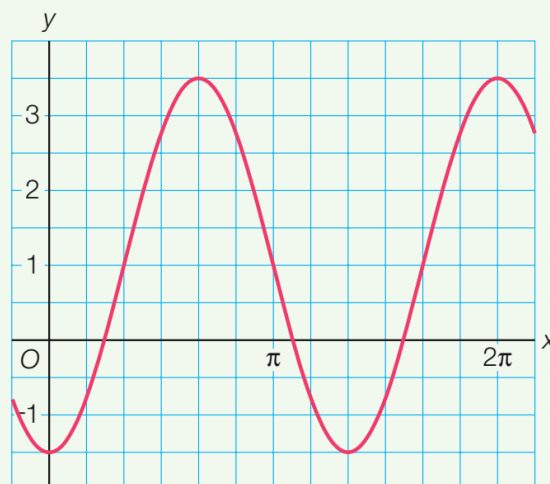
Uitwerking

$$a = \frac{3\frac{1}{2} + -1\frac{1}{2}}{2} = 1 \text{ en } b = 3\frac{1}{2} - 1 = 2\frac{1}{2}$$

De periode is $1\frac{1}{3}\pi$, dus $c = \frac{2\pi}{1\frac{1}{3}\pi} = 1\frac{1}{2}$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{3}\pi$, dus $d = \frac{1}{3}\pi$.

Dus $y = 1 + 2\frac{1}{2} \sin(1\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}\pi))$.

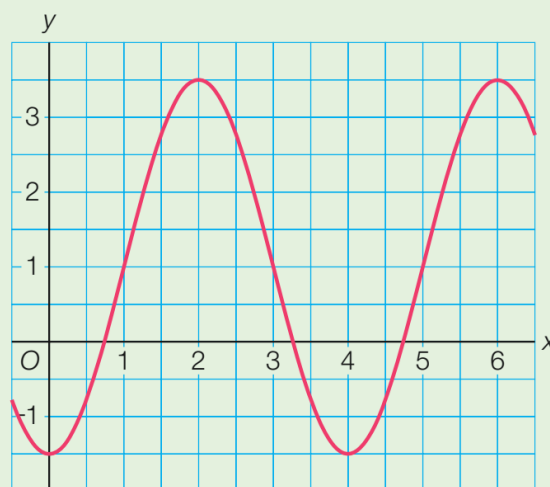


Bij de sinusoïde van het voorbeeld is ook een formule van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$ op te stellen. Je neemt dan een hoogste punt als beginpunt. Een hoogste punt is $(\frac{2}{3}\pi, 3\frac{1}{2})$, dus $d = \frac{2}{3}\pi$ en de formule is $y = 1 + 2\frac{1}{2} \cos(1\frac{1}{2}(x - \frac{2}{3}\pi))$.

In de figuur hiernaast zie je een sinusoïde zoals in het voorbeeld, maar nu staan bij de horizontale as de getallen 1, 2, 3, ...

De periode is 4, dus $c = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

Je krijgt $y = 1 + 2\frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2}\pi(x - 1))$ en ook $y = 1 + 2\frac{1}{2} \cos(\frac{1}{2}\pi(x - 2))$.



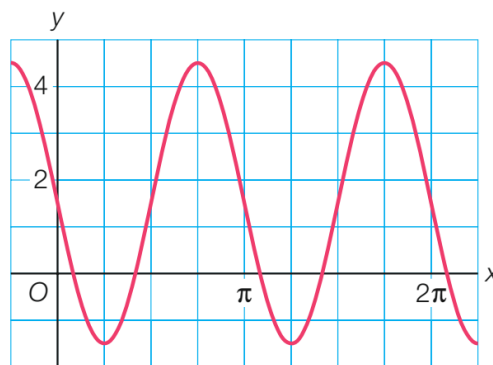
R29 Zie het voorbeeld.



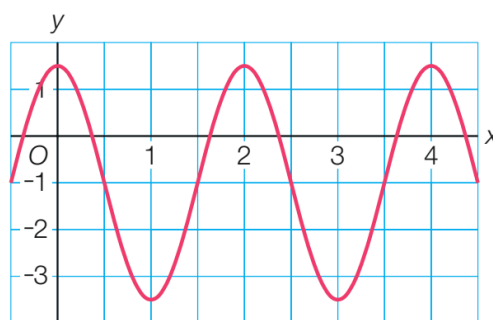
Een manier om de periode te bepalen, is door de afstand tussen twee opeenvolgende hoogste punten af te lezen.

Geef nog twee manieren om met behulp van de figuur de periode te bepalen.

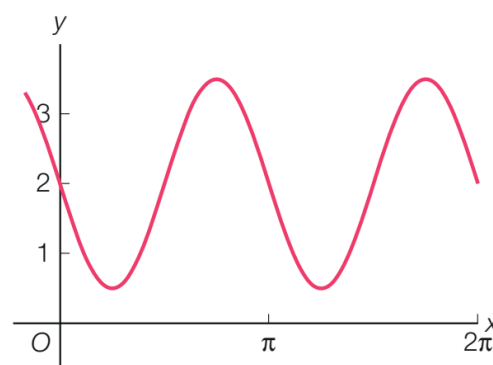
- 30** In de figuur hiernaast is een sinusoïde getekend.
 Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
a $y = a + b \sin(c(x - d))$
b $y = a + b \cos(c(x - d))$.



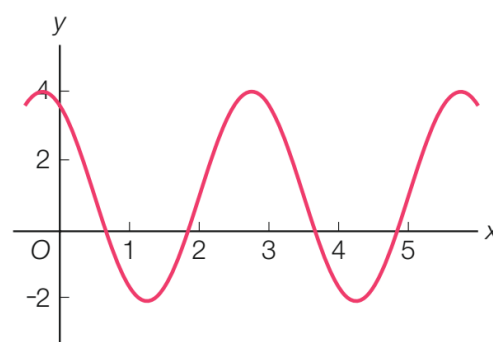
- 31** In de figuur hiernaast is een sinusoïde getekend.
 Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
a $y = a + b \sin(c(x - d))$
b $y = a + b \cos(c(x - d))$.



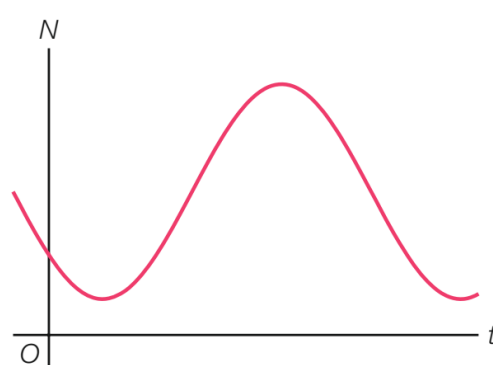
- 32** Bij de sinusoïde in de figuur hiernaast zijn twee opeenvolgende toppen $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ en $(\frac{3}{4}\pi, 3\frac{1}{2})$.
 Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
a $y = a + b \sin(c(x - d))$
b $y = a + b \cos(c(x - d))$.



- 33** Bij de sinusoïde in de figuur hiernaast zijn twee opeenvolgende toppen $(1\frac{1}{4}, -2)$ en $(2\frac{3}{4}, 4)$.
 Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
a $y = a + b \sin(c(x - d))$
b $y = a + b \cos(c(x - d))$.



- A34** Bij de sinusoïde in de figuur hiernaast geldt voor de toppen dat $N = 25$ of $N = 175$. De grafiek gaat door de evenwichtsstand bij achtereenvolgens $t = 4$ en $t = 9$.
 Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
a $N = a + b \sin(c(t - d))$
b $N = a + b \cos(c(t - d))$.

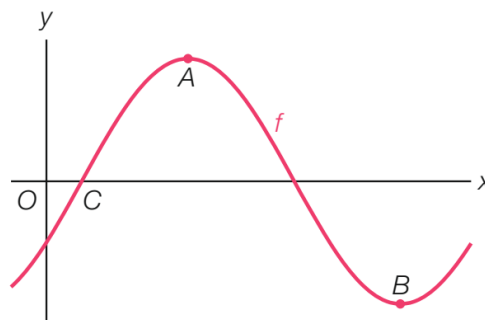


A35

- a** Van een sinusoid zijn de punten $(3, 12)$ en $(18, 12)$ twee opeenvolgende hoogste punten, die op afstand 4 van de evenwichtsstand liggen.
Stel een formule op van deze sinusoid.
- b** Van een sinusoid is de evenwichtsstand 650 en de periode 48.
Het punt $(16, 812)$ is een top.
Stel een formule op van deze sinusoid.
- c** Van een sinusoid zijn de punten $(2, 250)$ en $(26, 110)$ twee opeenvolgende toppen.
Stel een formule op van deze sinusoid.

O36

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x) + \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$.
De grafiek van f is een sinusoid. Zie de figuur hiernaast. De punten A en B zijn toppen van de grafiek. Het punt C is een snijpunt van de grafiek met de x -as.



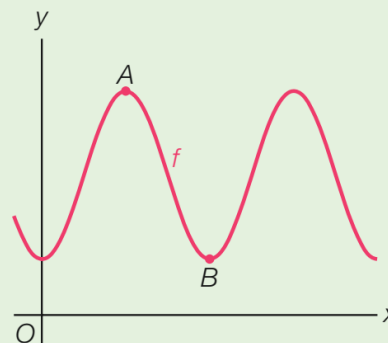
- a** Bereken de coördinaten van A en B . Rond af op drie decimalen.
- b** Licht toe dat uit vraag a volgt dat de evenwichtsstand van de sinusoid gelijk is aan 0 en dat de amplitude ongeveer 1,732 is.
- c** Uit vraag a volgt ook de periode van de grafiek.
Bereken deze periode door in de tussenstappen niet af te ronden.
Waarom mag je aannemen dat de periode gelijk is aan 2π ?
- d** Bereken de x -coördinaat van C . Rond af op drie decimalen.

Uit het bovenstaande volgt dat $y = 1,732 \sin(x - 0,524)$ een formule is die bij de grafiek van f hoort.

- e** Licht dit toe en geef een formule bij de grafiek van f van de vorm $y = b \cos(x - d)$.

Theorie D Kenmerken opsporen met de GR

Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = 3(\sin(x))^2 + 1$. We noteren dit ook als $f(x) = 3 \sin^2(x) + 1$. De grafiek van f is een sinusoid. Door de formule van f in te voeren op de GR en de kenmerken ervan op te sporen met enkele opties van de GR, kun je een formule van f opstellen van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$. Met de optie maximum krijg je de coördinaten van de top A en met de optie minimum krijg je de coördinaten van de top B .



Je vindt $A(1,57...; 4)$ en $B(3,14...; 1)$. Hieruit volgt:

evenwichtsstand $= \frac{4+1}{2} = 2,5$ en amplitude $= 4 - 2,5 = 1,5$.

De halve periode is $3,14... - 1,57... = 1,57...$, dus

de periode is $2 \cdot 1,57... = 3,14...$ en $c = \frac{2\pi}{3,14...} = 2$.

Door vervolgens de formule van de evenwichtsstand in te voeren en de optie snijpunt te gebruiken, vind je dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat in het punt $(0,79; 2,5)$.

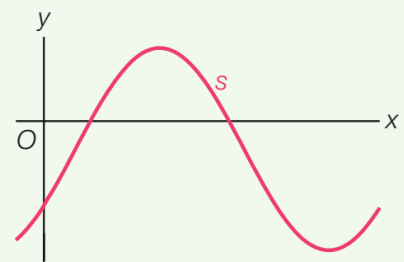
Een formule bij de sinusoïde in de figuur is dus $y = 2,5 + 1,5 \sin(2(x - 0,79))$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + 3 \sin(x)$ en $g(x) = -3 + 2 \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$. De grafiek van s is een sinusoïde.

Stel bij de grafiek van s een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.



Uitwerking

Invoeren van de formule van s en gebruiken van de optie maximum geeft $x = 2,158...$ en $y = 2,605...$ en de optie minimum geeft $x = 5,300...$ en $y = -4,605...$

$$a = \frac{2,605... + (-4,605...)}{2} = -1$$

$$b = 2,605... - (-1) \approx 3,61$$

halve periode $= 5,300... - 2,158... = 3,141...$ geeft

$$\text{periode} = 2 \cdot 3,141... = 6,283..., \text{ dus } c = \frac{2\pi}{6,283...} = 1.$$

Invoeren van de formule $y = -1$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 0,588...$, dus $d \approx 0,59$.

Dus $y = -1 + 3,61 \sin(x - 0,59)$.

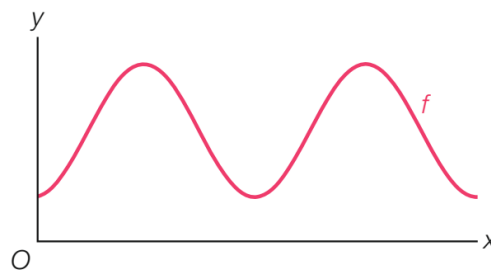
37 Zie het voorbeeld.



a Stel bij de grafiek van s een formule op van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

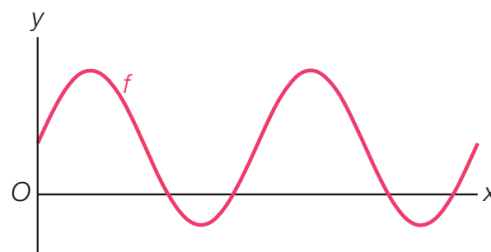
b De grafiek van de verschilfunctie $v(x) = f(x) - g(x)$ is een sinusoïde. Stel bij de grafiek van v een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- 38** In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = 3 \cos^2(2x - 1,5) + 1$ met domein $[0, \pi]$. De grafiek van f is een sinusoïde. Stel bij de grafiek van f een formule op van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$.



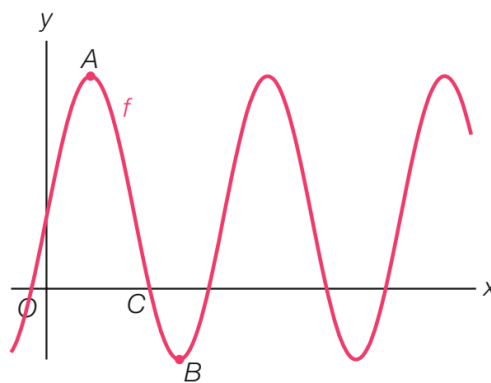
- 39** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 \cos(x) - 3$ en $g(x) = \cos(x - \frac{1}{4}\pi) - 2$. De somfunctie is $s(x) = f(x) + g(x)$ en de verschilfunctie is $v(x) = f(x) - g(x)$. De grafieken van s en v zijn beide sinusoiden.
- Stel bij de grafiek van s een formule op van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
 - Stel bij de grafiek van v een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- A40** Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x) + \cos(2x - 1)$ met domein $[0, 2\pi]$. De grafiek van f is een sinusoïde. Zie de figuur hiernaast.



- Los op $f(x) \leq 0$. Rond af op drie decimalen.
- Stel bij de grafiek van f een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op drie decimalen.
- Stel bij de grafiek van f een formule op van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$. Rond zo nodig af op drie decimalen.

- A41** In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = 8 \cos^2(\frac{1}{5}\pi(x - 1\frac{1}{4})) - 2$. De punten A en B zijn toppen en het punt C is een snijpunt met de x -as.



- De lijn k door A en B snijdt de x -as in het punt D . Bereken de afstand tussen C en D . Rond af op drie decimalen.
- De grafiek van f is een sinusoïde. Stel bij de grafiek van f een formule op van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan op de grafieken van de standaardfuncties $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ transformaties toepassen en het effect hiervan op de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt bepalen.

► OPGAVE C4
THEORIE A,B

☐ Ik kan formules van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ opstellen door de kenmerken van sinusoiden te gebruiken.

► OPGAVE C5
THEORIE C

☐ Ik kan bij een grafiek waarvan de formule bekend is en waarbij is gegeven dat de formule te schrijven is in de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$ of $y = a + b \cos(c(x - d))$ de GR gebruiken om de kenmerken op te sporen.

► OPGAVE C6
THEORIE D

C4 Geef van de grafiek van de functie de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

a $f(x) = 6 + 7 \sin(4(x - 2))$

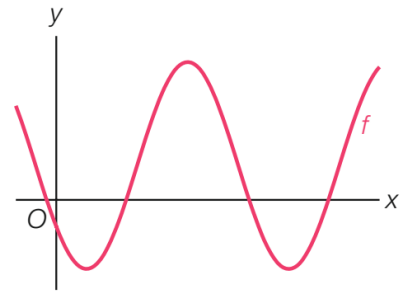
b $g(x) = 2,5 + 0,6 \cos(0,4(x - \frac{1}{4}\pi))$

C5 Bij de sinusoiden in de figuur hiernaast zijn twee opeenvolgende toppen $(\frac{3}{4}, -2)$ en $(3\frac{1}{4}, 4)$.

Stel bij deze sinusoiden een formule op van de vorm

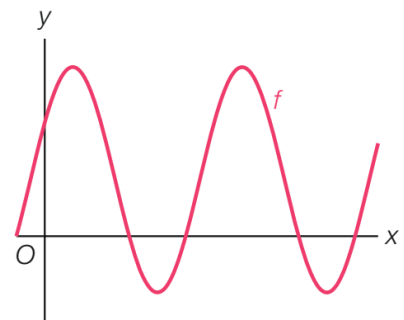
a $y = a + b \sin(c(x - d))$

b $y = a + b \cos(c(x - d))$.



C6 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = 4 \cos^2(x - \frac{1}{6}\pi) - 1$. De grafiek van f is een sinusoiden.

Stel bij de grafiek van f een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.



Antwoorden

C4 a evenwichtsstand 6, amplitude 7, periode $\frac{1}{2}\pi$ en beginpunt (2, 6)

b evenwichtsstand 2,5, amplitude 0,6, periode 5π en beginpunt $(\frac{1}{4}\pi; 3,1)$

C5 a $y = 1 + 3 \sin(\frac{2}{5}\pi(x - 2))$

b $y = 1 + 3 \cos(\frac{2}{5}\pi(x - 3\frac{1}{4}))$

C6 $y = 1 + 2 \sin(2(x - 2,88))$

8.3 Sinusoïden tekenen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de sinusoïden $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ tekenen door de kenmerken hiervan te gebruiken.
- Je kunt bij het tekenen van de sinusoïden $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ onderscheid maken tussen de situaties met $b > 0$ en $b < 0$.

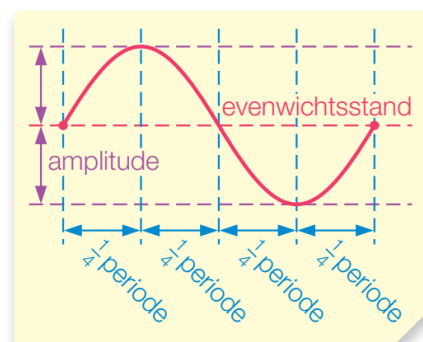
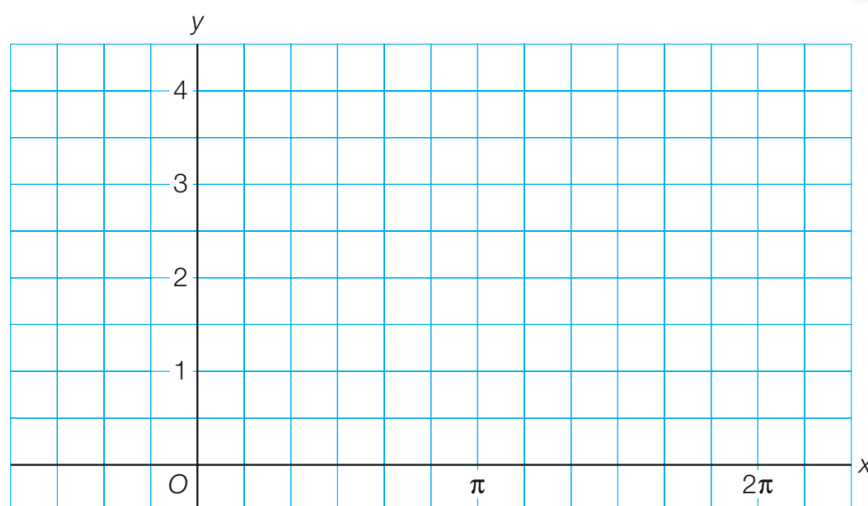
042 Gegeven is de functie $f(x) = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$.

□ ⊗ * Om de grafiek van f te tekenen, gebruik je de vier kenmerken van sinusoïden.

a Geef de vier kenmerken van de grafiek van f .

Zie de figuur hieronder.

- b** Teken in de figuur de lijn van de evenwichtsstand.
- c** Gebruik de evenwichtsstand en de amplitude om de horizontale lijnen te tekenen waarop de toppen van de grafiek van f liggen.
- d** Teken het beginpunt van vraag a en het punt dat één periode verder ligt.
- e** Teken één periode van de grafiek. Gebruik de schets hiernaast.
- f** Maak de grafiek af door links en rechts nog een periode van de grafiek te tekenen.



Theorie A Sinusoïden tekenen

Bij het tekenen van een sinusoïde gebruik je de vier kenmerken, dus de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt. Daarbij ga je stap voor stap te werk. Zie het voorbeeld op de volgende bladzijde.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Teken de grafiek van f .

Aanpak

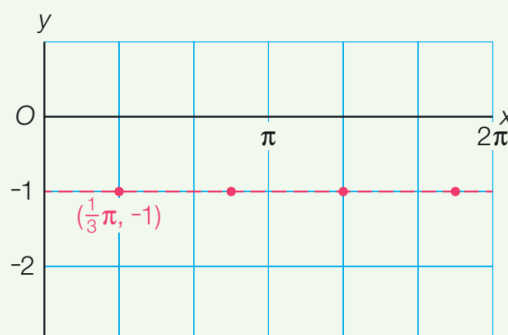
- 1 Schrijf het functievoorschrift in de vorm $f(x) = a + b \sin(c(x - d))$ en vermeld de vier kenmerken.

$$f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$$

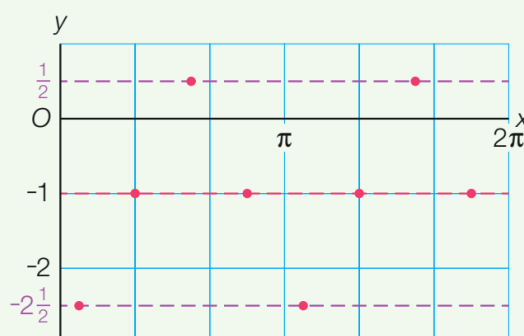
evenwichtsstand -1 amplitude $1\frac{1}{2}$ periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$

stijgend door de evenwichtsstand in $(\frac{1}{3}\pi, -1)$

- 2 Teken de evenwichtsstand en daarop het punt $(\frac{1}{3}\pi, -1)$ en de andere snijpunten met de evenwichtsstand. Omdat de periode π is, liggen deze punten op afstand $\frac{1}{2}\pi$ van elkaar.



- 3 Teken de hoogste en laagste punten van de grafiek. Omdat de amplitude $1\frac{1}{2}$ is, liggen deze punten $1\frac{1}{2}$ boven of $1\frac{1}{2}$ onder de evenwichtsstand. De punten liggen telkens midden tussen twee snijpunten met de evenwichtsstand.



- 4 Teken de grafiek op het gegeven domein. Gebruik de periodiciteit.

Uitwerking

$$f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$$

evenwichtsstand -1

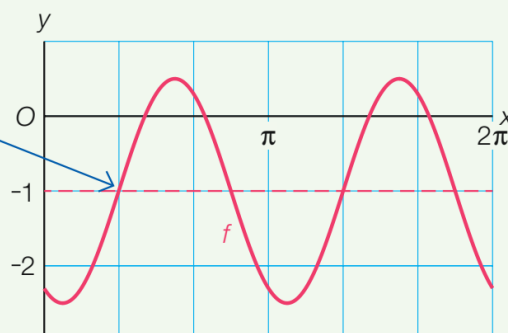
amplitude $1\frac{1}{2}$

periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$

stijgend door de evenwichtsstand in $(\frac{1}{3}\pi, -1)$

Zie de figuur hiernaast.

stijgend door $(\frac{1}{3}\pi, -1)$



- 43**    **a** Teken de grafiek van $f(x) = -2 + 3 \sin(3x - \pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
b Teken de grafiek van $g(x) = 1 + 3 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[-\pi, \pi]$.

Controleer de grafiek met de GR.

- A44**    Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 2 \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi)$.
 Vergeleken met de grafiek van f geldt voor de grafiek van de functie $g(x) = a + b \cos(c(x - d))$:

- de evenwichtsstand is gelijk
- de amplitude is twee keer zo groot
- de periode is de helft.

De grafiek van g gaat bij $x = \frac{1}{2}\pi$ stijgend door de evenwichtsstand.
 Geef mogelijke waarden van a , b , c en d en teken de grafiek van g met domein $[0, 2\pi]$.

- 45**    Gegeven is de formule $A = 40 + 25 \sin(\pi(t - \frac{1}{2}))$ met domein $[0, 6]$.

- a** Teken de grafiek van A .
b Los op $A < 30$. Rond af op twee decimalen.
c Bereken de grootste helling van de grafiek. Rond af op één decimaal.

De grafiek van een sinusïde is het steilst in de snijpunten van de grafiek met de lijn van de evenwichtsstand.

- A46**    Gegeven is de formule $N = 1\frac{1}{2} \cos(\frac{2}{3}\pi(t - \frac{1}{2})) + 3\frac{1}{2}$ met domein $[0, 10]$.

- a** Teken de grafiek van N .
b Los op $N > 4$. Rond af op twee decimalen.
c Bereken de helling van de grafiek in het snijpunt met de verticale as. Rond af op twee decimalen.
d Bereken de grootste helling van de grafiek. Rond af op twee decimalen.

De helling bereken je op de GR met

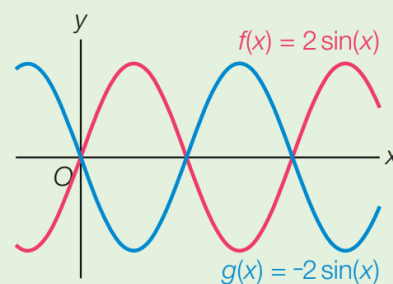
- dy/dx (TI)
- d/dx (Casio)
- Hellingsgetal (NumWorks)
- optie helling (HP)

- O47**    Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + 3 \sin(x)$ en $g(x) = 2 - 3 \sin(x)$.

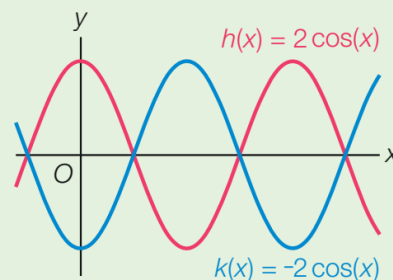
- a** Plot de grafieken. Neem x tussen 0 en 2π .
b De amplitude is een positief getal.
 Geef de amplitude van de grafiek van f en van de grafiek van g .
c Vul *stijgend* of *dalend* in.
 De grafiek van f gaat in het punt $(0, 2)$
 door de evenwichtsstand.
 De grafiek van g gaat in het punt $(0, 2)$
 door de evenwichtsstand.

Theorie B De amplitude van een sinusoid

De grafiek van $f(x) = 2 \sin(x)$ heeft amplitude 2 en gaat in het punt $(0, 0)$ stijgend door de evenwichtsstand. Spiegel je de grafiek van f in de x -as, dan krijg je de grafiek van $g(x) = -2 \sin(x)$. Ook de grafiek van g heeft amplitude 2, maar deze grafiek gaat in het punt $(0, 0)$ dalend door de evenwichtsstand. Zie de figuur hiernaast.



De grafiek van $h(x) = 2 \cos(x)$ heeft amplitude 2 en heeft voor $x = 0$ een hoogste punt. Spiegel je de grafiek van h in de x -as, dan krijg je de grafiek van $k(x) = -2 \cos(x)$. Ook de grafiek van k heeft amplitude 2, maar deze grafiek heeft voor $x = 0$ een laagste punt. Zie de figuur hiernaast.



Sinusoiden met $b > 0$ en $b < 0$

	$y = a + b \sin(c(x - d))$	$y = a + b \cos(c(x - d))$
$b > 0$	<p>stijgend door de evenwichtsstand in het punt (d, a)</p>	<p>$(d, a + b)$ is een hoogste punt</p>
$b < 0$	<p>dalend door de evenwichtsstand in het punt (d, a)</p>	<p>$(d, a + b)$ is een laagste punt</p>

In het voorbeeld op de volgende bladzijde krijg je te maken met de functie $f(x) = 1 - 3 \sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$. Hierin is $b = -3$, dus $b < 0$. De amplitude van de grafiek van f is gelijk aan 3.

Algemeen geldt voor de sinusoiden $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$:

- als $b > 0$, dan amplitude = b
- als $b < 0$, dan amplitude = $-b$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3 \sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Teken de grafiek van f .

Uitwerking

$$f(x) = 1 - 3 \sin(2x - \frac{2}{3}\pi) = 1 - 3 \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$$

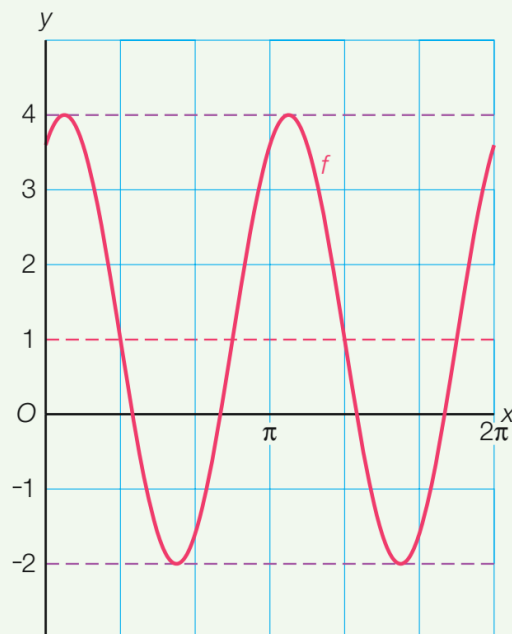
evenwichtsstand 1

amplitude 3

$$\text{periode } \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$-3 < 0$, dus grafiek dalend door de evenwichtsstand in $(\frac{1}{3}\pi, 1)$.

Zie de figuur hiernaast.



48 a Teken de grafiek van $f(x) = 1 - 2 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.

b Teken de grafiek van $g(x) = 3 - 4 \cos(\pi x)$ met domein $[0, 6]$.

49 Gegeven is de functie $f(x) = -2 - \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.

a Teken de grafiek van f .

b De lijn k gaat door de twee toppen van de grafiek van f en snijdt de x -as in het punt S .

Bereken exact de x -coördinaat van S .

A50 Gegeven is de functie $f(x) = 5 - 3 \sin(\frac{1}{4}\pi x)$ met domein $[0, 8]$.

a Teken de grafiek van f .

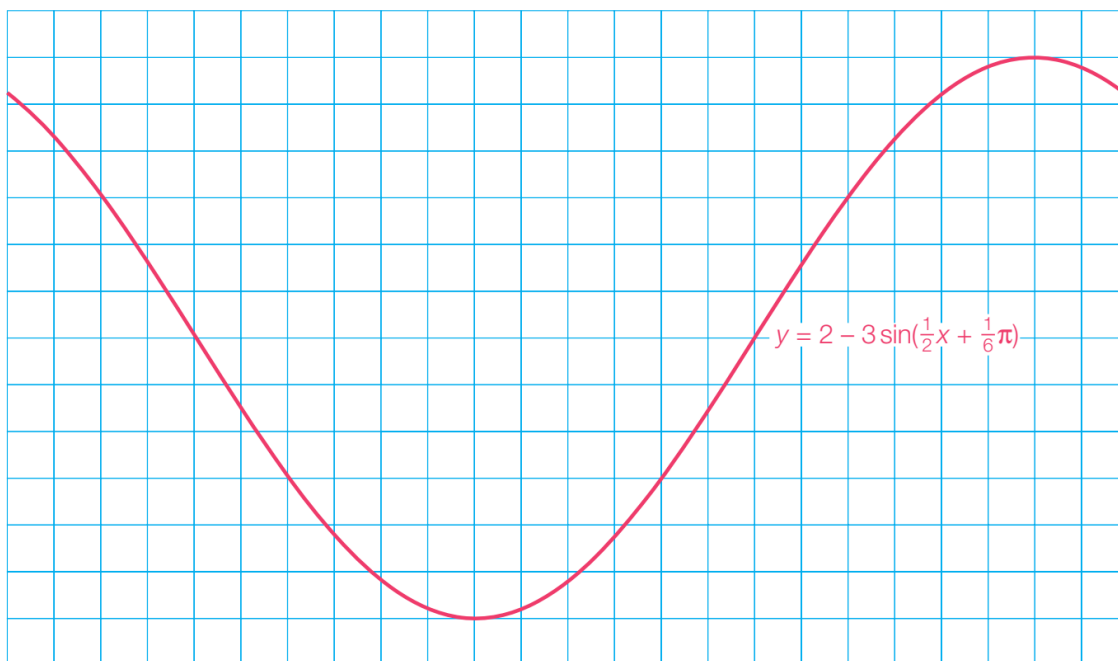
b De lijn k gaat door de twee toppen van de grafiek van f en snijdt de x -as in het punt S .

Bereken exact de x -coördinaat van S .

c De lijn $y = 6,5$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B .

Bereken de afstand tussen A en B . Rond af op twee decimalen.

- E51** Hieronder is de sinusöide $y = 2 - 3 \sin(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi)$ met domein $[-\pi, 3\pi]$ op een rooster, maar zonder assenstelsel getekend. Teken het assenstelsel op de juiste plaats. Licht je werkwijze toe.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de sinusöiden $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ tekenen door de kenmerken hiervan te gebruiken.
- ☐ Ik kan bij het tekenen van de sinusöiden $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ onderscheid maken tussen de situaties met $b > 0$ en $b < 0$.

► **OPGAVE C7**
THEORIE A

► **OPGAVE C8**
THEORIE B

- C7** **a** Teken de grafiek van $f(x) = -1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} \sin(2x - 1\frac{1}{2}\pi)$ met domein $[0, 1\frac{1}{2}\pi]$.
b Teken de grafiek van $g(x) = 1 + 3 \cos(\pi(x + \frac{1}{2}))$ met domein $[0, 4]$.

- C8** **a** Teken de grafiek van $f(x) = 2 - 1\frac{1}{2} \sin(\frac{1}{3}\pi x)$ met domein $[0, 7]$.
b Teken de grafiek van $g(x) = 4 - \cos(1\frac{1}{2}x - 2\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.

Antwoorden

- C7 a, b ***
C8 a, b *

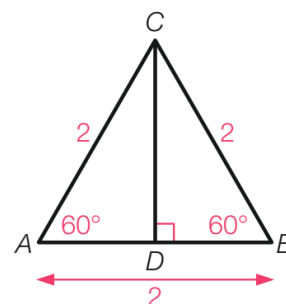
8.4 Goniometrische vergelijkingen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de exacte-waardencirkel gebruiken om de exacte waarden te geven van de sinus en de cosinus van hoeken die een veelvoud zijn van $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{1}{4}\pi$.
- Je kunt vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ exact oplossen.
- Je kunt vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ exact oplossen.

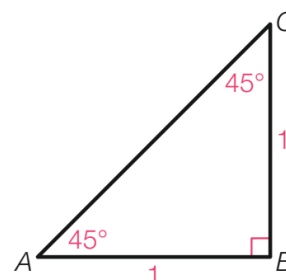
O52  Gegeven is de gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 2 en hoogtelijn CD . Zie de figuur hiernaast.

- Licht toe dat $AD = 1$ en $CD = \sqrt{3}$.
- Toon aan dat $\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$.
- Bereken exact $\sin(30^\circ)$ en $\cos(30^\circ)$.



Hiernaast is de rechthoekige driehoek ABC getekend met $AB = BC = 1$.

- Toon aan dat $AC = \sqrt{2}$ en $\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.



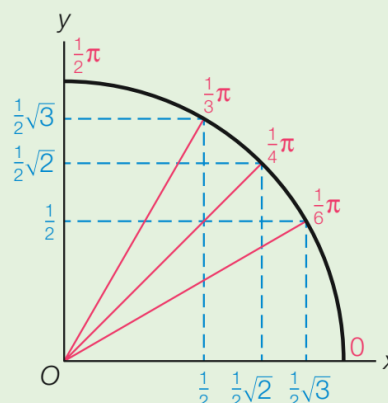
Theorie A De exacte-waardencirkel

Uit opgave 52 volgt de tabel hiernaast. Deze tabel breiden we uit met hoeken van 0° en 90° . Verder gebruiken we radialen in plaats van graden. Zo krijg je de tabel hieronder.

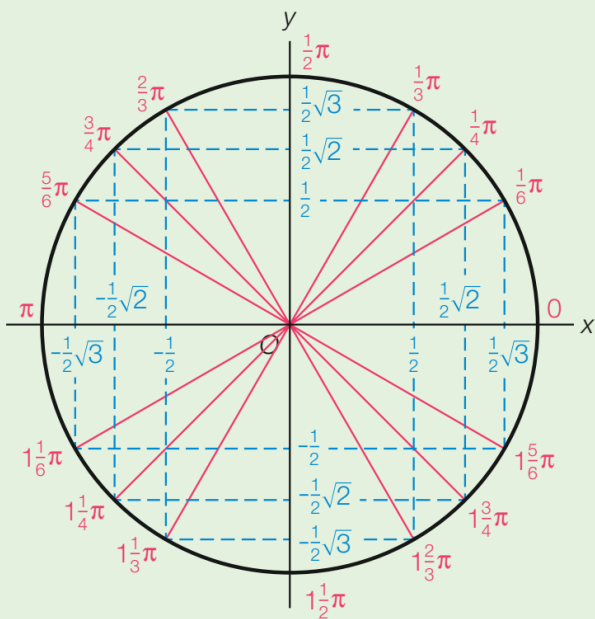
hoek	30°	45°	60°
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cosinus	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$

hoek	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

In de kwart eenheidscirkel hiernaast zijn de sinus en de cosinus van de hoeken uit de tabel verwerkt. Zorg dat je deze kwart eenheidscirkel kunt reproduceren.



Door de kwart eenheidscirkel te spiegelen in de y -as en de x -as krijg je de **exacte-waardencirkel**. Zie de figuur hieronder.



Je leest bijvoorbeeld af dat $\cos(\frac{5}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\sin(-\frac{3}{4}\pi) = \sin(1\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

53 Geef de exacte waarde.



- a** $\sin(\frac{3}{4}\pi)$
- b** $\cos(1\frac{1}{6}\pi)$
- c** $\sin(1\frac{1}{3}\pi)$
- d** $\cos(1\frac{2}{3}\pi)$
- e** $\cos(1\frac{1}{3}\pi)$
- f** $\sin(-\frac{1}{4}\pi)$

54 Geef de exacte waarden van α met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.



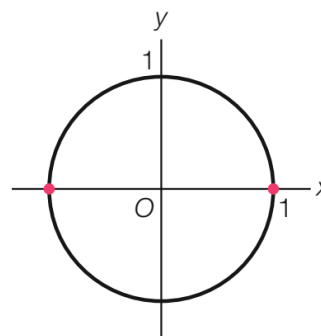
- a** $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **d** $\cos(\alpha) = 0$
b $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ **e** $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
c $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **f** $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

O55 De eenheidscirkel snijdt de x -as in de punten $(1, 0)$ en $(-1, 0)$.

□ ● *

Bij deze punten horen de draaiingshoeken $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ en ook $-\pi, -2\pi, -3\pi, \dots$

Welke draaiingshoeken horen bij het snijpunt $(0, 1)$ van de eenheidscirkel met de y -as? En welke horen bij het snijpunt $(0, -1)$ van de eenheidscirkel met de y -as?

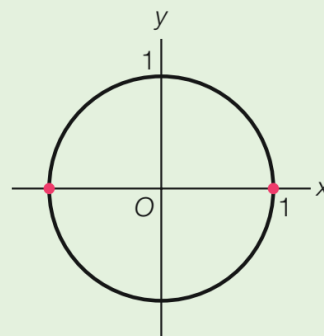


Theorie B $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$

Bij de snijpunten van de eenheidscirkel met de x -as horen de draaiingshoeken $\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

Dit noteren we kort als $k \cdot \pi$, waarbij k een geheel getal is.

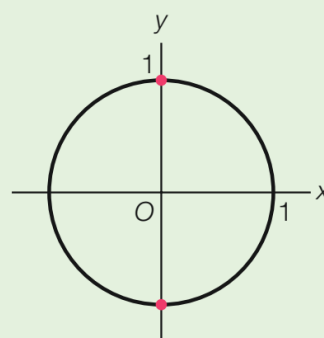
De getallen $k \cdot \pi$ zijn alle oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = 0$, want de sinus van een hoek is de y -coördinaat van het bijbehorende punt op de eenheidscirkel en de punten $(-1, 0)$ en $(1, 0)$ zijn alle punten op de eenheidscirkel met y -coördinaat 0.



k is in dit hoofdstuk een geheel getal.

Bij de snijpunten van de eenheidscirkel met de y -as horen de draaiingshoeken $\dots, -2\frac{1}{2}\pi, -1\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi, \dots$

Dit noteren we kort als $\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$. Hiermee heb je alle oplossingen van de vergelijking $\cos(x) = 0$, want de cosinus van een hoek is de x -coördinaat van het bijbehorende punt op de eenheidscirkel en de punten $(0, 1)$ en $(0, -1)$ zijn alle punten op de eenheidscirkel met x -coördinaat 0.



Bij de vergelijking $\sin(x) = 1$ hoort het punt op de eenheidscirkel met y -coördinaat 1, dus het punt $(0, 1)$.

Dus de vergelijking $\sin(x) = 1$ heeft als oplossing $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Bij het punt $(0, 1)$ horen de draaiingshoeken $\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi, 4\frac{1}{2}\pi, \dots$ en ook $-1\frac{1}{2}\pi, -3\frac{1}{2}\pi, -5\frac{1}{2}\pi, \dots$

De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ los je op met behulp van de eenheidscirkel.

$\sin(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$

$\cos(A) = 0$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$\sin(A) = 1$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = 1$ geeft $A = k \cdot 2\pi$

$\sin(A) = -1$ geeft $A = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = -1$ geeft $A = \pi + k \cdot 2\pi$

Voor A kun je elke uitdrukking invullen.

Bij de vergelijking $\sin(4x - \frac{1}{3}\pi) = 0$ is $A = 4x - \frac{1}{3}\pi$.

Je krijgt $4x - \frac{1}{3}\pi = k \cdot \pi$, dus $4x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$ oftewel $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$.

In het voorbeeld is de opdracht om de oplossingen van de vergelijkingen exact te berekenen in $[0, 2\pi]$. Dat wil zeggen dat elke afzonderlijke oplossing in dit interval moet worden berekend.

In voorbeeld a krijg je na gebruik van de regel $\sin(A) = 1$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ dat $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$.

Dit geeft voor $k = \dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ x &= \frac{5}{12}\pi + -1 \cdot \pi = -\frac{7}{12}\pi && \text{niet in } [0, 2\pi] \\ x &= \frac{5}{12}\pi + 0 \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi && \text{wel in } [0, 2\pi] \\ x &= \frac{5}{12}\pi + 1 \cdot \pi = 1\frac{5}{12}\pi && \text{wel in } [0, 2\pi] \\ x &= \frac{5}{12}\pi + 2 \cdot \pi = 2\frac{5}{12}\pi && \text{niet in } [0, 2\pi] \\ & \vdots \end{aligned}$$

Dus de oplossingen in $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{5}{12}\pi$ en $x = 1\frac{5}{12}\pi$.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1$

b $\cos^2(\frac{1}{2}\pi x) = 1$

Deel alle termen door 2,
dus $k \cdot 2\pi$ wordt $k \cdot \pi$.

Deel alle termen door $\frac{1}{2}\pi$,
dus $k \cdot 2\pi$ wordt $k \cdot 4$.

Uitwerking

a $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{5}{12}\pi \vee x = 1\frac{5}{12}\pi$$

b $\cos^2(\frac{1}{2}\pi x) = 1$

$$\cos(\frac{1}{2}\pi x) = 1 \vee \cos(\frac{1}{2}\pi x) = -1$$

$$\frac{1}{2}\pi x = k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot 4 \vee x = 2 + k \cdot 4$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft}$$

$$x = 0 \vee x = 4 \vee x = 2 \vee x = 6$$

56 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $\sin(3x) = 1$

c $\sin^2(x) = 1$

e $\sin(3x - \frac{1}{2}\pi) = 0$

b $\sin(2x) = 0$

d $\sin(\frac{3}{4}x) = -1$

f $\sin(\pi x) = -1$

57 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $\cos(3x) = 0$

c $\cos^2(2x) = 1$

e $\cos(2x - \frac{1}{6}\pi) = 0$

b $\cos(4x) = 1$

d $\cos(\frac{2}{5}x) = -1$

f $\cos(2\pi x) = -1$

A58 Bereken exact de oplossingen in $[-\pi, \pi]$.

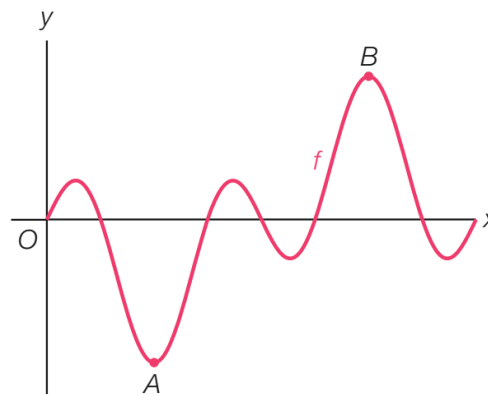


- a** $3 \sin(2x + \frac{1}{6}\pi) = 0$ **e** $\sin^2(2x) = 1$
b $2 \cos(3x - \frac{1}{4}\pi) = 0$ **f** $\cos^2(\frac{1}{2}x) = 1$
c $\sin(\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}\pi) = -1$ **g** $\sin(\frac{1}{2}\pi x) = 0$
d $\cos(1\frac{1}{2}x - \pi) = -1$ **h** $\cos(1\frac{1}{2}\pi x + \pi) = 0$

A59 Gegeven is de functie $f(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(2x)$ met domein $[0, 2\pi]$. Hiernaast zie je de grafiek van f met de toppen $A(\frac{1}{2}\pi, -2)$ en $B(1\frac{1}{2}\pi, 2)$.



- a** Bereken exact de nulpunten van f .
b Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn door A en B door een snijpunt van de grafiek van f met de x -as gaat.



Op de grafiek van f liggen de punten $C(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2})$ en $D(1\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{2})$.

- c** Toon dit aan.
d Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn door C en D door een snijpunt van de grafiek van f met de x -as gaat.

A60 Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x) - \sin(x)$ met domein $[0, 2\pi]$.



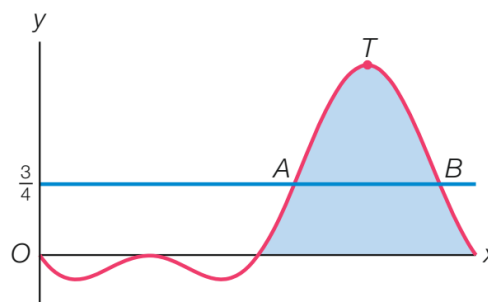
De lijn $y = \frac{3}{4}$ snijdt de grafiek van f in de punten $A(1\frac{1}{6}\pi, \frac{3}{4})$ en $B(1\frac{5}{6}\pi, \frac{3}{4})$.

- a** Toon dit aan.
b Bereken exact de nulpunten van f .

Hiernaast zie je de grafiek van f met de lijn $y = \frac{3}{4}$ en de punten A en B . Verder is het punt T met $x_T = 1\frac{1}{2}\pi$ een top van de grafiek van f .

De oppervlakte van het gekleurde vlakdeel is π . Verder geldt dat $f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) - \cos(x)$.

- c** Bewijs dat T een top van de grafiek van f is.
d Bereken exact welk gedeelte de oppervlakte van $\triangle ABT$ is van het gekleurde vlakdeel.
e De grafiek van f heeft twee laagste punten. Bereken exact de y -coördinaat van deze punten door de afgeleide van f te gebruiken.



061 Gegeven is de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$.



- a Licht toe dat $x = \frac{1}{6}\pi$ een oplossing is.
- b Waarom is $x = 2\frac{1}{6}\pi$ een oplossing? En waarom $x = 4\frac{1}{6}\pi$?
- c Licht toe dat $x = \frac{5}{6}\pi$ een oplossing is.
- d Waarom is $x = 2\frac{5}{6}\pi$ een oplossing? En waarom $x = -1\frac{1}{6}\pi$?

Theorie C $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

In opgave 61 heb je gezien dat bij de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$ de oplossingen $\dots, \frac{1}{6}\pi, 2\frac{1}{6}\pi, 4\frac{1}{6}\pi, \dots$ en $\dots, -1\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, 2\frac{5}{6}\pi, \dots$ horen.

Omdat $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ krijg je $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Omdat ook $\sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ krijg je ook $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

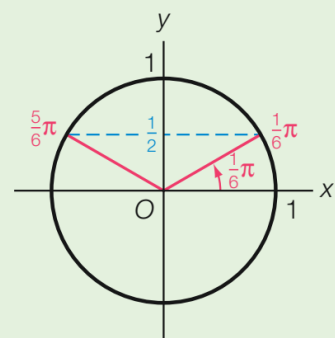
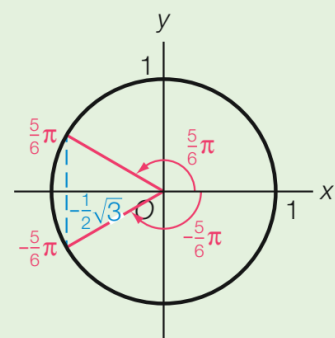
De oplossingen $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{5}{6}\pi$ zijn gevonden met de exacte-waardencirkel.

Merk op dat $\frac{5}{6}\pi = \pi - \frac{1}{6}\pi$.

Bij het vinden van de oplossingen van de vergelijking

$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ gebruik je de figuur hiernaast. Je krijgt

$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.



De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ los je op door uit de exacte-waardencirkel één oplossing B af te lezen.

Daarna gebruik je

$\sin(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $2 \sin(3x) = \sqrt{3}$ **b** $2 \cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\sqrt{2}$

Uitwerking

a $2 \sin(3x) = \sqrt{3}$

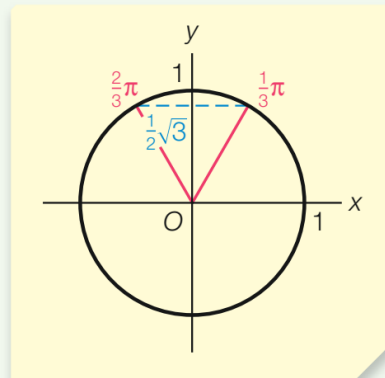
$$\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft

$$x = \frac{1}{9}\pi \vee x = \frac{7}{9}\pi \vee x = \frac{14}{9}\pi \vee x = \frac{20}{9}\pi \vee x = \frac{8}{9}\pi \vee x = \frac{5}{9}\pi$$



b $2 \cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\sqrt{2}$

$$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

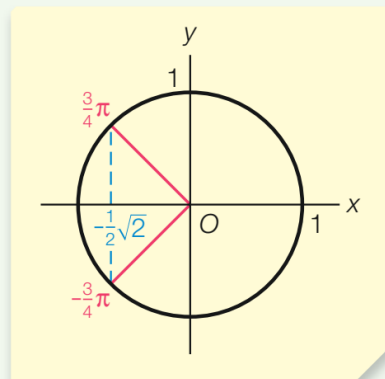
$$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{13}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{13}{24}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{5}{24}\pi + k \cdot \pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft

$$x = \frac{13}{24}\pi \vee x = 1\frac{13}{24}\pi \vee x = \frac{19}{24}\pi \vee x = 1\frac{19}{24}\pi$$



62 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.



a $2 \sin(\frac{1}{2}x) = 1$

c $2 \sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{3}$

b $2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 1$

d $2 \cos(3x - \pi) = -1$

A63 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.



a $2 \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \sqrt{2}$

c $\sin(\frac{2}{3}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $2 \cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = \sqrt{3}$

d $\cos(\frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

A64 Gegeven is de functie $f(x) = 4 \sin(x - \frac{1}{3}\pi) \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$



met domein $[0, 2\pi]$. Hiernaast is de grafiek van f getekend. De grafiek is een sinusoïde.

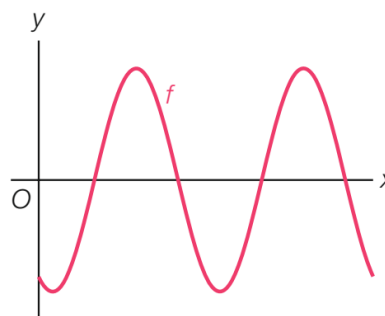
a Bereken exact de nulpunten van f .

Het functievoorschrift kan ook geschreven worden als

$$f(x) = 2 \sin(2x - \frac{2}{3}\pi).$$

b Toon dit aan.

c Bereken exact de oplossingen van de vergelijking $f(x) = 1$.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan de exacte-waardencirkel gebruiken om de exacte waarden te geven van de sinus en de cosinus van hoeken die een veelvoud zijn van $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{1}{4}\pi$.

► OPGAVE C9
THEORIE A

☐ Ik kan vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ exact oplossen.

► OPGAVE C10
THEORIE B

☐ Ik kan vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ exact oplossen.

► OPGAVE C11
THEORIE C

C9 Geef de exacte waarde van $\cos(1\frac{1}{4}\pi)$ en van $\sin(-\frac{2}{3}\pi)$.

C10 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $\sin(1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\pi) = -1$

b $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 0$

C11 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $2\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = \sqrt{3}$

b $\cos(2x + \frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Antwoorden

C9 $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

C10 a $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$

b $x = \frac{1}{12}\pi \vee x = \frac{7}{12}\pi \vee x = 1\frac{1}{12}\pi \vee x = 1\frac{7}{12}\pi$

C11 a $x = \frac{7}{12}\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi$

b $x = \frac{1}{8}\pi \vee x = \frac{3}{8}\pi \vee x = 1\frac{1}{8}\pi \vee x = 1\frac{3}{8}\pi$

8.5 Toepassingen van sinusoiden

Kennis en vaardigheden

- Je kunt allerlei berekeningen maken met formules van sinusoiden.
- Je kunt in een gegeven probleemsituatie voor een periodiek verschijnsel een formule opstellen, daarmee berekeningen maken en de resultaten interpreteren.

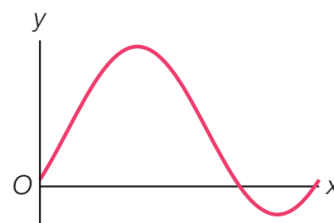
O65



Gegeven is de formule $y = 2 + 3 \sin(\frac{1}{5}\pi(x - 1))$ met $0 \leq x \leq 10$.

- a** Plot de grafiek en bereken de coördinaten van het hoogste punt van de grafiek door de optie maximum te gebruiken.

Er zijn twee manieren om op algebraïsch wijze de coördinaten van het hoogste punt te berekenen.



Manier I

Bedenk dat je het hoogste punt krijgt als de sinus gelijk is aan 1. Dat betekent dat $\sin(\frac{1}{5}\pi(x - 1)) = 1$. De y-coördinaat van het hoogste punt is dus $y = 2 + 3 \cdot 1$.

- b** Los de vergelijking $\sin(\frac{1}{5}\pi(x - 1)) = 1$ exact op. Krijg je zo hetzelfde punt als bij vraag a?

Manier II

Bedenk dat het maximum van y gelijk is aan de evenwichtsstand plus de amplitude. Bedenk verder dat y maximaal is, een kwart periode nadat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Daarvoor is het dus nodig dat je weet wat de periode is en voor welke x de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

- c** Geef de evenwichtsstand en de amplitude, licht toe dat de periode 10 is en dat de grafiek voor $x = 1$ stijgend door de evenwichtsstand gaat, en bereken hiermee de coördinaten van het hoogste punt van de grafiek.

Er zijn ook twee manieren om op algebraïsche wijze de coördinaten van het laagste punt van de grafiek van $y = 2 + 3 \sin(\frac{1}{5}\pi(x - 1))$ met $0 \leq x \leq 10$ te berekenen.

- d** Doe dat en controleer je antwoorden met de optie minimum op de GR.
e Bereken y voor $x = 1,8$. Rond af op twee decimalen.
f Voor welke x is $y = 3,6$? Rond af op twee decimalen.
g Voor $x = 3$ is de helling van de grafiek gelijk aan 0,6. Daarbij is afgerond op één decimaal.
Bereken deze helling, waarbij je afrondt op twee decimalen.
h De maximale helling van de grafiek is gelijk aan 1,9. Daarbij is afgerond op één decimaal.
Bereken de maximale helling in twee decimalen.

Theorie A Berekeningen met de sinus en de cosinus

Bij een formule als $y = 3 + 2 \sin(\frac{1}{4}\pi(x - 1,5))$ met $0 \leq x \leq 10$ moet je de volgende vragen kunnen beantwoorden.

1 Bereken op algebraïsch wijze $y_{\max}$ en de bijbehorende x .

$$y_{\max} = \text{evenwichtsstand} + \text{amplitude} = 3 + 2 = 5$$

$$\text{De periode is } \frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8.$$

Een kwart periode nadat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, is y maximaal. Dus y is maximaal voor $x = 1,5 + \frac{1}{4} \cdot 8 = 3,5$.

2 Bereken op algebraïsche wijze $y_{\min}$ en de bijbehorende x .

$$y_{\min} = \text{evenwichtsstand} - \text{amplitude} = 3 - 2 = 1$$

Driekwart periode nadat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, is y minimaal. Dus y is minimaal voor $x = 1,5 + \frac{3}{4} \cdot 8 = 7,5$.

3 Bereken y voor $x = 4,7$.

$$x = 4,7 \text{ geeft } y = 3 + 2 \sin(\frac{1}{4}\pi(4,7 - 1,5)) \approx 4,18$$

4 Voor welke x is $y = 4,6$?

$$\text{Los op } 3 + 2 \sin(\frac{1}{4}\pi(x - 1,5)) = 4,6.$$

Voer de bijbehorende formules in en gebruik de optie snijpunt. Je krijgt $x \approx 2,68$ en $x \approx 4,32$.

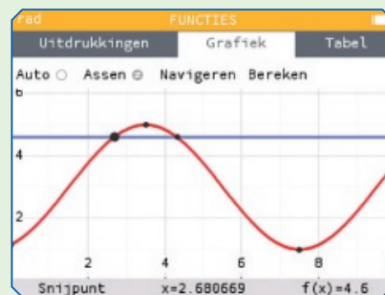
5 Bereken de helling van de grafiek voor $x = 5$.

$$\text{De helling is } \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=5} \approx -1,45.$$

6 Bereken de maximale helling van de grafiek.

De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Dat is bij $x = 1,5$.

$$\text{De maximale helling is } \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1,5} \approx 1,57.$$



R66



In opgave 65 zijn er twee manieren besproken om op algebraïsche wijze een hoogste of een laagste punt van een sinusoid te vinden.

In de theorie hierboven is één van die manieren gebruikt.

Gebruik de andere manier om bij de formule $y = 3 + 2 \sin(\frac{1}{4}\pi(x - 1,5))$ met $0 \leq x \leq 10$ van de theorie hierboven $y_{\max}$ en de bijbehorende x en ook $y_{\min}$ en de bijbehorende x te berekenen.

67 Gegeven is de formule $y = 5 + 2 \sin(\frac{2}{5}\pi(x - 0,8))$ met $0 \leq x \leq 5$.

□ ⊗ * Rond in deze opgave zo nodig af op twee decimalen.

- Bereken op algebraïsche wijze $y_{\max}$ en de bijbehorende x .
- Bereken op algebraïsche wijze $y_{\min}$ en de bijbehorende x .
- Bereken y voor $x = 4,62$.
- Voor welke x is $y = 6$?
- Bereken de y -coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de y -as.
- Bereken de helling van de grafiek voor $x = 4$.
- Bereken de maximale helling van de grafiek.

A68 Gegeven is de formule $N = 30,8 + 6,3 \cos(\frac{2}{15}\pi(t - 5,1))$ met $0 \leq t \leq 15$.

□ ⊗ * Rond in deze opgave zo nodig af op twee decimalen.

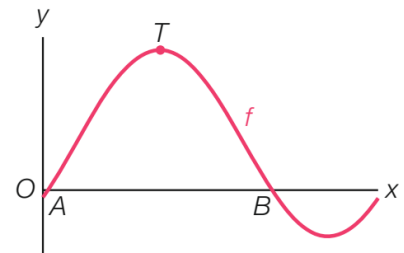
- Bereken op algebraïsche wijze $N_{\max}$ en de bijbehorende t .
- Bereken op algebraïsche wijze $N_{\min}$ en de bijbehorende t .
- Bereken N voor $t = 7,2$.
- Bereken voor welke t de waarde van N groter is dan 35.
- Bereken de helling van de grafiek voor $t = 10$.
- Bereken de maximale helling van de grafiek.

69 Op domein $[0, 4]$ is de functie f gegeven door

□ ⊗ * $f(x) = 2 + 4 \sin(\frac{1}{2}\pi(x - \frac{2}{5}))$. De grafiek van f snijdt

de x -as in de punten A en B , en T is het hoogste punt. Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact de afstand tussen A en B .
- Bereken de hoek die de lijn door de oorsprong en T maakt met de x -as. Geef het antwoord in gehele graden.



Op hetzelfde domein is de functie g gegeven. De grafiek van g is een sinusoid met de volgende eigenschappen:

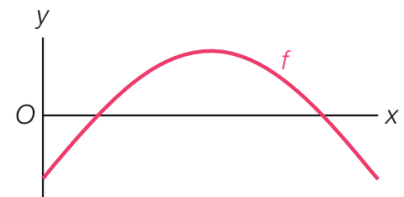
- De periode is de helft van de periode van de grafiek van f .
 - De amplitude is de helft van de amplitude van de grafiek van f .
 - Een hoogste punt valt samen met het hoogste punt van de grafiek van f .
- Stel op algebraïsche wijze van de grafiek van g een formule op van de vorm $g(x) = a + b \cos(c(x - d))$. Geef exacte waarden van a , b , c en d .
 - Stel op algebraïsche wijze van de grafiek van g een formule op van de vorm $g(x) = a + b \sin(c(x - d))$. Geef exacte waarden van a , b , c en d .

70 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie

□ ⊗ * $f(x) = 4 \sin(\frac{1}{3}\pi x) - 2$ met domein $[0, 3]$.

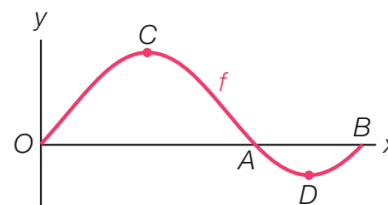
De parabool p heeft dezelfde snijpunten met de x -as als de grafiek van f . Verder valt de top van p samen met het hoogste punt van de grafiek van f .

Stel op algebraïsch wijze de formule op van p in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.



A71 Op domein $[0, 3]$ is de functie f gegeven door

□ ⊗ * $f(x) = 1 + 2 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - \frac{1}{4}))$. De grafiek van f snijdt de x -as in de oorsprong en in de punten A en $B(3, 0)$. De punten C en D zijn de toppen van de grafiek van f . Zie de figuur hiernaast.



a Bereken exact de coördinaten van A , C en D .

De parabool p_1 heeft top C en snijdt de x -as in de oorsprong en in A .

De parabool p_2 heeft top D en snijdt de x -as in A en B .

b Stel op algebraïsche wijze van zowel p_1 als van p_2 een formule op.

De parabolen p_1 en p_2 sluiten op elkaar aan in A . We vragen ons af of deze aansluiting zonder knik verloopt. Dat zou het geval zijn als in A de hellingen van de parabolen gelijk zijn.

c Bewijs dat de aansluiting tussen de parabolen niet zonder knik verloopt.

d De lijn k raakt de grafiek van f in A , de lijn l raakt p_1 in A en de lijn m raakt p_2 in A .

Onderzoek of $\angle(k, l) < \angle(k, m)$ of $\angle(k, l) > \angle(k, m)$.

O72 Van de sinusöide $y = a + b \sin(c(x - d))$ met $b > 0$ zijn de punten $(1, 10)$ en $(5, 4)$ twee opeenvolgende toppen.

□ ⊗ *

a Licht toe dat hieruit volgt dat $a = 7$ en $b = 3$.

b Licht toe dat $c = \frac{1}{4}\pi$.

Je hebt nu $y = 7 + 3 \sin(\frac{1}{4}\pi(x - d))$.

c Geef een mogelijke waarde van d en controleer of de punten $(1, 10)$ en $(5, 4)$ inderdaad twee opeenvolgende toppen zijn door de sinusöide te plotten.

Theorie B Sinusoïden gebruiken

De gemiddelde dagtemperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ in Napels kan worden benaderd door het model $T = a + b \sin(c(n - d))$. Hierin is n het dagnummer met $n = 1$ op 1 januari.

Gegeven is dat T maximaal is op 20 juli en dat $T_{\max} = 25^{\circ}\text{C}$. Verder is T minimaal op 19 januari en $T_{\min} = 9^{\circ}\text{C}$.

Uit deze gegevens volgt dat $a = \frac{25 + 9}{2} = 17$ en $b = 25 - 17 = 8$.

Omdat de periode 365 dagen is, is $c = \frac{2\pi}{365}$.

De grafiek van T gaat $\frac{1}{4}$ periode voor 20 juli ($n = 201$) stijgend door de evenwichtsstand. Dat is dus $\frac{1}{4} \cdot 365 \approx 91$ dagen voor $n = 201$, dus $d = 201 - 91 = 110$.

Zo krijg je de formule $T = 17 + 8 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(n - 110)\right)$.



Uitzicht over de Golf van Napels met op de achtergrond de vulkaan Vesuvius.

73



Zie de theorie op de vorige bladzijde met de formule

$$T = 17 + 8 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(n - 110)\right)$$

van de gemiddelde

dagtemperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ in Napels.

In de tabel hiernaast is voor een niet-schrikkeljaar bij elke datum het bijbehorende dagnummer te vinden.

- Bereken de gemiddelde dagtemperatuur op 1 maart en op 18 mei. Rond af op één decimaal.
- Gedurende welke periode is de gemiddelde dagtemperatuur meer dan 12°C ?
- Bereken de grootste snelheid waarmee de gemiddelde dagtemperatuur stijgt. Geef het antwoord in graden Celsius per week en rond af op twee decimalen.

maand	dagnummer
januari	1- 31
februari	32- 59
maart	60- 90
april	91-120
mei	121-151
juni	152-181
juli	182-212
augustus	213-243
september	244-273
oktober	274-304
november	305-334
december	335-365

A74



De daglengte, dat is de tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang, varieert in Nederland tussen 8 uur op 21 december en 16 uur op 21 juni.

Deze daglengte kan worden beschreven met het model

$$l = a + b \sin(c(t - d))$$

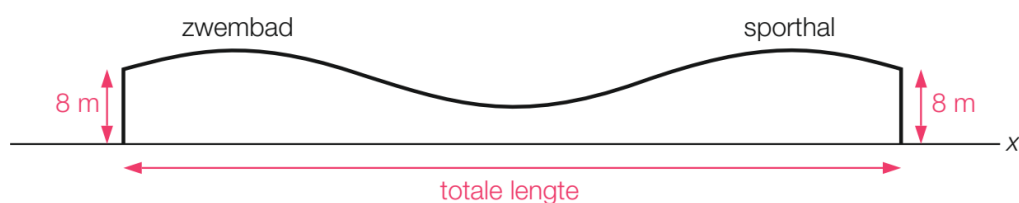
met l in uren en t in maanden met $t = 0$ op 21 januari.

- Bereken a , b , c en d .
- Bereken gedurende hoeveel dagen in het jaar de daglengte meer is dan 15 uur. Ga er bij deze vraag vanuit dat elke maand 30 dagen heeft.
- Toon met berekeningen aan dat de daglengte op 21 maart sneller toeneemt dan op 21 februari.
- Bereken in gehele seconden per dag de snelheid waarmee de daglengte toeneemt op 1 april.

Op de foto zie je een zwembad met sporthal, samen onder één golvend dak. Het golvende dak bereikt boven het zwembad dezelfde hoogte als boven de sporthal. In de bovenste figuur hieronder is een schematisch vooraanzicht getekend. In dit vooraanzicht heeft de rand van het dak de vorm van een sinusoïde met als formule $h = 3 \sin\left(\frac{\pi}{30}x\right) + 7$.

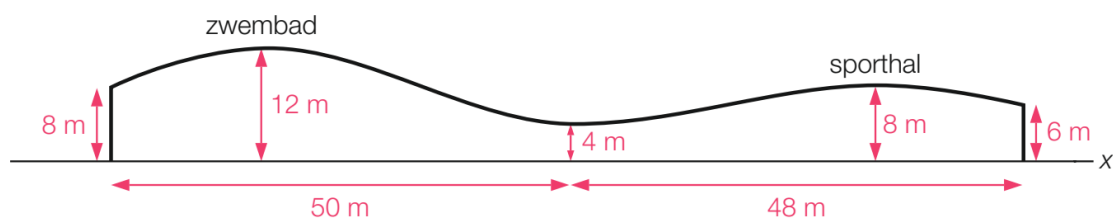


De hoogte h en de lengte x zijn allebei in meters. De lengte x wordt van links naar rechts over de grond gemeten langs de voorkant van het gebouw, vanaf een punt O dat links van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw ligt. Aan beide uiteinden van het gebouw is het dak 8 meter hoog.



- Bereken exact de minimale en de maximale hoogte van het dak.
- Bereken in meters de totale lengte van het gebouw. Rond af op één decimaal.

Voordat het zwembad met sporthal werd gebouwd, heeft een architect een ontwerp gemaakt van het gebouw. In het eerste ontwerp dat de architect had gemaakt, was het dak boven het zwembad hoger dan het dak boven de sporthal. Ook de lengte van de voorkant van het gebouw in dit eerste ontwerp was anders dan die van het uiteindelijke gebouw. In de figuur hieronder staan de afmetingen van het gebouw volgens het eerste ontwerp.



Het gedeelte van het dak dat boven het zwembad ligt, heeft in het vooraanzicht de vorm van een sinusoïde. Dit geldt ook voor het gedeelte van het dak boven de sporthal. De twee sinusoiden gaan vloeiend in elkaar over op de grens tussen zwembad en sporthal op een hoogte van 4 meter. Op die grens is de hoogte van het dak minimaal. Boven de sporthal heeft het dak een maximale hoogte van 8 meter.

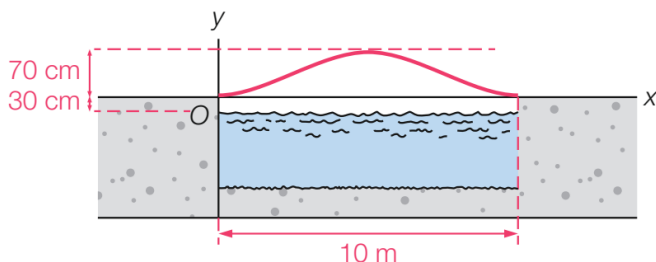
Met behulp van deze gegevens kun je een formule opstellen die hoort bij het vooraanzicht van het gedeelte van het dak boven de sporthal volgens het eerste ontwerp.

- Stel deze formule op. Je mag zelf de oorsprong kiezen. Licht je werkwijze toe.

76 Zie opgave 75c op de vorige bladzijde.

***** Stel de formule op die hoort bij het gedeelte van het dak boven het zwembad volgens het eerste ontwerp. Neem hetzelfde assenstelsel (dus ook dezelfde oorsprong) als je bij opgave 75c hebt genomen. Licht je werkwijze toe.

A77 Men wil een voetgangersbrug ontwerpen over een gracht met een breedte van 10 meter. Zie de figuur hieronder.



Er is een assenstelsel aangebracht waarbij de oorsprong aan het begin van de brug is genomen en de x -as samenvalt met de kade.

Het wegdek van de brug kan worden beschreven door een formule van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$.

Het hoogste punt van het wegdek zit 1 meter boven het wateroppervlak en het water staat 30 cm onder de kade.

Voor het wegdek van een brug zoals in de figuur hierboven geldt

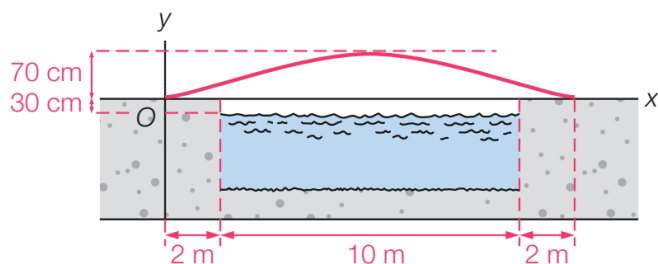
$$y = 0,35 + 0,35 \sin\left(\frac{1}{5}\pi(x - 2,5)\right) \text{ met } x \text{ en } y \text{ in meters.}$$

a Licht deze formule toe.

b Toon aan dat de maximale hellingshoek van het wegdek $12,4^\circ$ is.

De hellingshoek van het wegdek mag maximaal 8° zijn.

Om dit te bereiken, maakt men het wegdek zoals in de figuur hieronder.



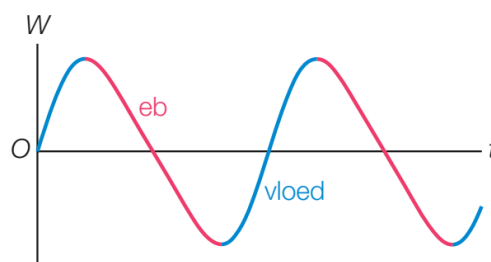
Het hoogste punt van het wegdek blijft hierbij 1 meter boven het wateroppervlak in het midden van de gracht.

c Onderzoek of bij dit wegdek de hellingshoek maximaal 8° is.

E78 Bij getijdenbewegingen duurt vloed (de periode van het stijgen van het water) korter dan eb (de periode van het dalen van het water). Zie de figuur hiernaast.

*

In deze opgave ga je een formule opstellen die dit verschijnsel beschrijft. Het zal duidelijk zijn dat een gewone sinusoïde niet voldoet.



Als we uitgaan van een periode van 12 uur en 30 minuten, dan is een algemene formule die wel een juiste beschrijving geeft van de vorm

$W = a(\sin(\frac{2}{12,5}\pi t) + b \sin(\frac{2}{6,25}\pi t)) + c$. Hierin is W de waterhoogte in meters ten opzichte van NAP en t de tijd in uren met $t = 0$ het tijdstip dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

De letters a , b en c zijn constanten die afhangen van de getijdenbeweging die je wilt beschrijven.

Je gaat a , b en c opsporen bij een getijdenbeweging die aan de volgende voorwaarden voldoet.

I Hoogwater is 150 cm boven NAP en laagwater is 90 cm onder NAP.

II De duur van vloed is 5 uur en 15 minuten en de duur van eb is 7 uur en 15 minuten.

We beginnen met de formule $h = \sin(\frac{2}{12,5}\pi t) + b \sin(\frac{2}{6,25}\pi t)$.

In deze formule wordt nog geen rekening gehouden met voorwaarde I.

Wel kun je aan voorwaarde II voldoen door de juiste waarde van b te kiezen.

Begin met het kiezen van $b = 0,20$.

a Laat zien dat bij de formule $h = \sin(\frac{2}{12,5}\pi t) + 0,20 \sin(\frac{2}{6,25}\pi t)$ de duur van eb 7 uur en 32 minuten is en de duur van vloed 4 uur en 58 minuten.

Zowel $b = 0,14$ als $b = 0,15$ voldoen beter dan $b = 0,20$.

b Laat met een berekening zien dat $b = 0,14$ het beste voldoet.

In de volgende vraag gaan we uit van de formule

$W = a(\sin(\frac{2}{12,5}\pi t) + 0,14 \sin(\frac{2}{6,25}\pi t)) + c$.

c Bereken de waarden van a en c zo, dat ook aan voorwaarde I is voldaan. Geef a in twee decimalen.

Controleer de gevonden formule door met de GR het maximum en het minimum te berekenen.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan allerlei berekeningen maken met formules van sinusoiden.
- ☐ Ik kan in een gegeven probleemsituatie voor een periodiek verschijnsel een formule opstellen, daarmee berekeningen maken en de resultaten interpreteren.

► OPGAVE C12
THEORIE A

► OPGAVE C13
THEORIE B

C12 Gegeven is de formule $N = 18 + 5 \sin(\frac{4}{15}\pi(t - 4))$ met $0 \leq t \leq 8$.

Rond in deze opgave zo nodig af op twee decimalen.

- a** Bereken op algebraïsche wijze $N_{\max}$ en de bijbehorende t .
- b** Bereken op algebraïsche wijze $N_{\min}$ en de bijbehorende t .
- c** Bereken N voor $t = 4,5$.
- d** Voor welke t is $N = 15$?
- e** Bereken de helling van de grafiek voor $t = 3$.
- f** Bereken de maximale helling van de grafiek.

C13 De temperatuur van het zeewater langs de Nederlandse kust is te beschrijven met een model van de vorm $T = a + b \sin(c(t - d))$ met T in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari. De laagste temperatuur van het zeewater is $4,5^{\circ}\text{C}$ halverwege februari. De hoogste temperatuur van het zeewater is $20,0^{\circ}\text{C}$ halverwege augustus.

- a** Bereken a , b , c en d . Geef exacte waarden.
- b** Bereken met de gevonden formule hoeveel dagen per jaar de temperatuur van het zeewater hoger is dan 18°C . Ga er bij deze vraag vanuit dat elke maand 30 dagen heeft.

Antwoorden

C12 a $N_{\max} = 23$ voor $t = 5\frac{7}{8}$

b $N_{\min} = 13$ voor $t = 2\frac{1}{8}$

c $N \approx 20,03$

d $t \approx 1,02$ en $t \approx 3,23$

e 2,80

f 4,19

C13 a $a = 12,25$, $b = 7,75$,

$c = \frac{1}{6}\pi$ en $d = 4,5$

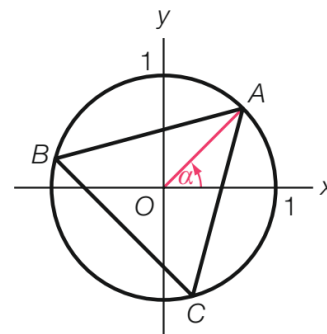
b 84 dagen

Kennis- en vaardighedentest

8.1 De eenheidscirkel en radialen

- 1** De hoekpunten van de gelijkzijdige driehoek ABC liggen op de eenheidscirkel. De draaiingshoek α is 40° . Zie de figuur hiernaast.

Bereken de coördinaten van de punten A , B en C . Rond af op twee decimalen.



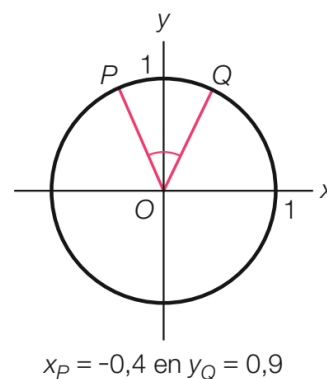
- 2** Druk uit in graden. Rond zo nodig af op één decimaal.

- | | | |
|-------------------------------|----------------------|-------------------------------|
| a $\frac{3}{4}\pi$ rad | c $0,6$ rad | e $\frac{2}{3}\pi$ rad |
| b $\frac{1}{5}\pi$ rad | d 26π rad | f $\frac{2}{3}$ rad |

- 3** Druk uit in radialen. Geef een exact antwoord.

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| a 270° | c 150° | e 40° |
| b -60° | d 330° | f -70° |

- 4** In de figuur hiernaast is $x_P = -0,4$ en $y_Q = 0,9$. Bereken $\angle POQ$ in radialen. Rond af op twee decimalen.



8.2 Formules van sinusoiden opstellen

- 5** Geef van de grafiek van de functie de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

- a** $f(x) = -2 + 3 \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$
b $g(x) = 3 + 4 \cos(2(x - \frac{1}{4}))$

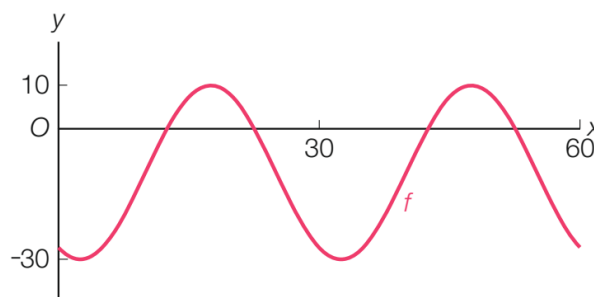
- 6** Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[-\pi, 3\pi]$.

- a** Geef van de grafiek van f de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.
b Geef de exacte coördinaten van de punten waar de grafiek van f de lijn van de evenwichtsstand snijdt.
c Geef de exacte coördinaten van de vier toppen van de grafiek van f .
d De grafiek van f snijdt de x -as van links naar rechts in de punten O , P , Q en R .
 Geef de exacte afstand tussen O en Q .

- 7** Bij de sinusoiden in de figuur hiernaast zijn twee opeenvolgende toppen $(2\frac{1}{2}, -30)$ en $(17\frac{1}{2}, 10)$.

Stel bij de sinusoiden een formule op van de vorm

- a** $y = a + b \sin(c(x - d))$
b $y = a + b \cos(c(x - d))$.



- 8** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 - 2 \sin(x)$ en $g(x) = 3 + 2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$. De grafieken van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$ en de verschilfunctie $v(x) = f(x) - g(x)$ zijn sinusoiden.

- a** Stel een formule op bij de grafiek van s van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op drie decimalen.
- b** Stel een formule op bij de grafiek van v van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$. Rond zo nodig af op drie decimalen.

8.3 Sinusoiden tekenen

- 9** Gegeven is de formule $A = 4 + 2 \sin(\pi(t - 1))$ met domein $[-4, 4]$.

- a** Teken de grafiek van A .
- b** Los op $A \geq 5$. Rond af op twee decimalen.
- c** Bereken de grootste helling van de grafiek. Rond af op twee decimalen.

- 10** Teken de grafiek van $f(x) = 2 - 3 \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$.

8.4 Goniometrische vergelijkingen

- 11** Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

- a** $\cos(\frac{1}{2}x) = -1$
- b** $\sin^2(2x) = 1$

- 12** Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

- a** $4 \sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = 2\sqrt{2}$
- b** $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

8.5 Toepassingen van sinusoiden

- 13** Gegeven is de formule $A = 3,9 + 2,7 \cos(\frac{2}{9}\pi(t - 2,4))$ met $0 \leq t \leq 10$.

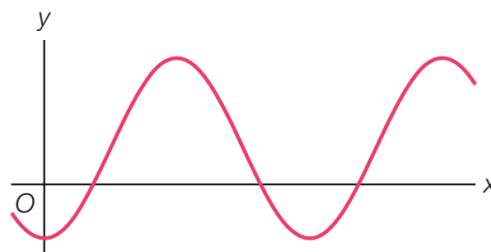
- a** Bereken algebraïsch $A_{\max}$ en $A_{\min}$ en de bijbehorende t -waarden.
- b** Los op $A < 2$. Rond af op twee decimalen.
- c** Bereken de maximale helling van de grafiek. Rond af op drie decimalen.

- 14** De temperatuur van het zeewater langs de Griekse kust is te beschrijven met het model $T = a + b \sin(c(t - d))$ met T in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari. De laagste temperatuur is 10°C op 15 januari en de hoogste temperatuur is 28°C .

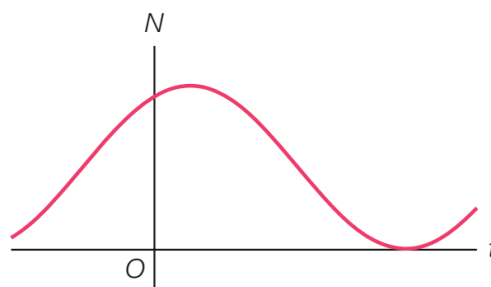
- a** Bereken a , b , c en d .
- b** Gedurende hoeveel dagen per jaar is de temperatuur volgens het model hoger dan 25°C ? Ga er bij deze vraag vanuit dat elke maand 30 dagen heeft.
- c** Bereken de maximale snelheid waarmee de watertemperatuur stijgt. Geef het antwoord in $^{\circ}\text{C}$ per dag en rond af op drie decimalen.

Gemengde opgaven

- 1 a** Bij de sinusoiden hiernaast zijn twee opeenvolgende toppen $(\frac{2}{3}\pi, 3\frac{1}{2})$ en $(\frac{4}{3}\pi, -1\frac{1}{2})$. Stel bij de sinusoiden een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$.



- b** De sinusoiden hiernaast heeft top $(1, 40)$ en gaat voor $t = 4$ dalend door de evenwichtsstand $N = 20$. Stel bij de sinusoiden een formule op van de vorm $N = a + b \sin(c(t - d))$.



- 2** Het verloop van de temperatuur kan gedurende een etmaal nogal grillig zijn. In vereenvoudigde vorm is het temperatuurverloop gedurende een etmaal redelijk te benaderen door een sinusoiden met een periode van 24 uur. Het KNMI hanteert voor De Bilt voor de dagen in de maand juni de volgende waarden: de maximumtemperatuur is $21,0^\circ\text{C}$, deze wordt bereikt om 3 uur 's middags; de minimumtemperatuur is $12,2^\circ\text{C}$.



T is de temperatuur in graden Celsius op een dag in juni en u het aantal uren na middernacht.

- a** Stel een formule op van T als functie van u .

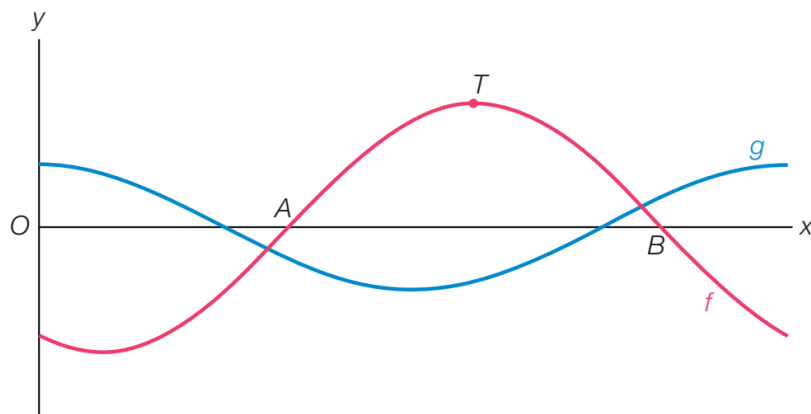
Voor een dag in april geldt bij benadering de formule

$T = 7,6 + 4,3 \sin(\frac{1}{12}\pi(u - 10))$. Hierin is T de temperatuur in $^\circ\text{C}$ en u het aantal uren na middernacht.

- b** Bereken hoe lang het volgens deze formule op een dag in april warmer is dan $11,5^\circ\text{C}$. Rond af op een geheel aantal minuten.
- c** Op een bepaald moment op de dag is de temperatuurstijging maximaal. Hoe groot is volgens bovenstaande formule de maximale stijging van de temperatuur in april? Geef je antwoord in $^\circ\text{C}$ per uur. Rond af op één decimaal.

- 3** Gegeven zijn de functies $f(x) = -2 \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ en $g(x) = \cos(x)$.
- a** De grafiek van f kan ontstaan uit de grafiek van g door hierop een verschuiving en een vermenigvuldiging toe te passen. Onderzoek welke verschuiving en vermenigvuldiging dit kunnen zijn.

In de figuur hieronder zijn de grafieken van f en g getekend op het domein $[0, 2\pi]$. De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A en B en het hoogste punt van de grafiek is het punt T .

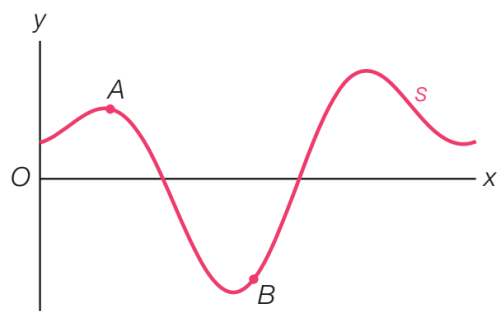


- b** De parabool p snijdt de x -as in A en B , heeft top T en snijdt de y -as in het punt S . Bereken exact de y -coördinaat van S .
- c** De grafiek van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$ is een sinusoid. Het functievoorschrift van s is te schrijven in de vorm $s(x) = a \cdot \sin(x - b)$. Bereken mogelijke waarden van a en b . Rond af op twee decimalen.

- 4** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + 3 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$ en $g(x) = -1 + 4 \cos(x + \frac{1}{6}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
- a** Teken de grafieken van f en g in één figuur.
- b** Stel bij de grafiek van f een formule op van de vorm $y = p + q \cos(r(x - s))$.
- c** Bereken de maximale helling van de grafiek van f .
- d** Los exact op $f(x) = \frac{1}{2}$.
- e** Los exact op $g(x) < 1$.

Hiernaast zie je de grafiek van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$ met domein $[0, 2\pi]$. De punten A met $x_A = \frac{1}{3}\pi$ en B met $x_B = \pi$ liggen op de grafiek van s .

- f** Bereken exact $y_A - y_B$.



- 5** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 2 \sin(\frac{1}{2}\pi(x - \frac{1}{2}))$ met domein $[0, 5]$. De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A , B en C en de toppen zijn de punten D en E . De lijn k gaat door D en E en snijdt de x -as in het punt F . Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de afstand tussen B en F .

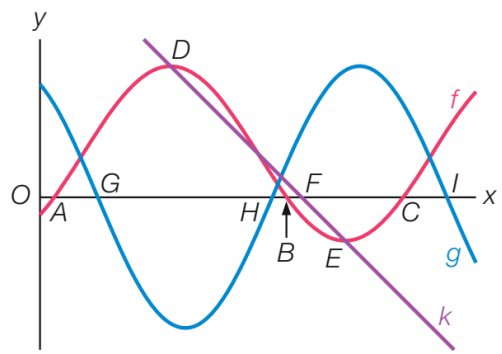
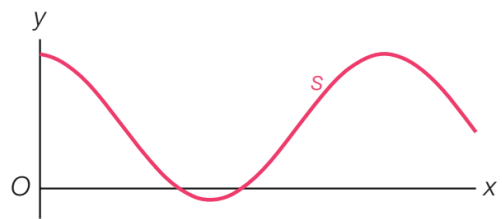
Verder is op domein $[0, 5]$ gegeven de functie $g(x) = 3 \cos(\frac{1}{2}\pi(x + \frac{1}{3}))$.

De grafiek van g snijdt de x -as in de punten G , H en I . Zie de bovenste figuur hiernaast.

b Bewijs dat B het midden is van het lijnstuk HF .

Hiernaast zie je de grafiek van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$. De grafiek van s is een sinusoïde en is te beschrijven met een formule van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$.

c Bereken mogelijke waarden van a , b , c en d . Rond b en d af op twee decimalen.



Voor de functie h geldt het volgende:

- De grafiek van h is te beschrijven met een formule van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$.
 - De periode van de grafiek van h is de helft van de periode van de grafiek van s .
 - Een hoogste punt van de grafiek van h is ook een hoogste punt van de grafiek van s .
 - De grafiek van h raakt de x -as.
- d** Bereken mogelijke waarden van a , b , c en d . Rond a , b en d af op twee decimalen.

- 6** Op domein $[0, 3]$ is de functie f gegeven door $f(x) = \sin(\pi(x - 1)) \cdot \cos(\pi(x - \frac{1}{4}))$. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de nulpunten van f .

Het punt A met $x_A = \frac{7}{8}$ is een top van de grafiek en het punt B met $x_B = 1\frac{1}{4}$ ligt op de grafiek.

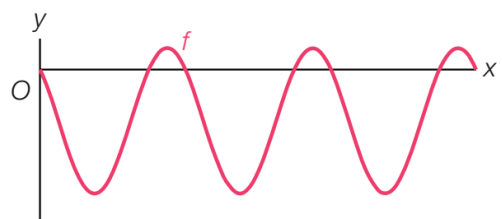
b Bereken exact de y -coördinaat van B .

c De lijn k gaat door O en A en de lijn l gaat door O en B .

Bereken de hoek tussen k en l . Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.

d De grafiek van f is een sinusoïde.

Bereken mogelijke waarden van a , b , c en d zodat $y = a + b \sin(c(x - d))$ een formule is van deze sinusoïde. Rond a af op twee decimalen. Licht je werkwijze toe.



Antwoorden Kennis- en vaardigheidentests

Hoofdstuk 5

1 a translatie $(-4, 0)$

b translatie $(1, 2)$

c translatie $(0, -\frac{1}{2})$

2 a $x = -3 \vee x = 6$

b $x = 0 \vee x = 1$

c $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

d $x = -2 \vee x = 18$

3 a translatie $(4, 1)$

$\times -3$ t.o.v. de x -as en dan
translatie $(-2, 0)$

b *

c $D_f = [4, \rightarrow\rangle, B_f = [1, \rightarrow\rangle$

$D_g = [-2, \rightarrow\rangle, B_g = \langle \leftarrow, 0]$

4 a $-5,5 < x \leq 2,5$

b $-1 \leq f(x) < 2$

5 a $x = \frac{1}{4}$ c $x = 4$

b $x = 9$ d $x = 2 \vee x = -6$

6 a $x \cdot \sqrt[3]{x^2}$ d $\frac{3}{2x}$

b $\frac{2x}{3y\sqrt{y}}$ e $\frac{1}{16} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

c $\frac{125}{\sqrt[4]{x^3}}$ f $\frac{3 \cdot \sqrt[4]{y^3}}{5x^2}$

7 a $y = x^{\frac{1}{4}}$

b $y = 3x^{-2\frac{1}{2}}$

c $y = 10x^{-\frac{2}{5}}$

8 a $\times 0,3$ t.o.v. de x -as en dan
translatie $(1, -5)$

$B_f = \langle -5, \rightarrow \rangle$

asymptoot $y = -5$

b translatie $(0, 2)$ en

$\times \frac{1}{3}$ t.o.v. de y -as

$B_g = \langle 2, \rightarrow \rangle$

asymptoot $y = 2$

c $\times -5$ t.o.v. de x -as, dan

translatie $(0, 4)$ en dan

$\times 4$ t.o.v. de y -as

$B_h = \langle \leftarrow, 4 \rangle$

asymptoot $y = 4$

9 a $y = 4 \cdot 81^x$

b $y = 2 \cdot (\frac{1}{25})^x$

c $y = 2 \cdot 32^x$

10 a $x = 4$ b $x = 1$ c $x = 1\frac{3}{4}$

11 a $-\frac{1}{2}$ b $3\frac{1}{2}$ c $-2\frac{2}{3}$

12 a $x = 9\frac{1}{2}$ b $x = 19$ c $x = 32$

13 a $y = -\frac{1}{3} \cdot {}^2\log(x+3)$

b $\times 4$ t.o.v. de x -as en translatie $(1, 0)$
en dan $\times 2$ t.o.v. de y -as

14 a $x = -1\frac{1}{2}$

b $-1,5 < x \leq 3$

c $f(x) < 1$

Hoofdstuk 6

1 a $y_B = 1\frac{2}{3}$

b $C(-4, 3\frac{2}{3})$ en $D(6, 7)$

2 max. is $f(0) = 2$

min. is $f(2) = -2$

max. is $g(1) = 11$

min. is $g(5) = -21$

3 a, b *

4 a $f'(x) = -\frac{12}{x^5}$

b $g'(x) = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$

c $h'(x) = 12\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

d $k'(x) = -\frac{3}{x\sqrt{x}} - 1$

e $l'(x) = 2x + 6\sqrt{x} + 4$

f $m'(x) = 1\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$

5 a $B_f = [4\sqrt{2}, \rightarrow)$

b $x_B = 7$

6 a $f'(x) = 30(6x - 1)^4$

b $g'(x) = 18x^2 + \frac{40}{(2x - 1)^5}$

c $h'(x) = 3 + \frac{20}{(4x - 3)^2}$

d $k'(x) = 20(3x - 1)^{\frac{1}{3}}$

e $l'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 4}} + 2x$

f $m'(x) = \frac{-2}{(2x + 7)\sqrt{2x + 7}}$

7 a max. is $f(-3) = 40$

min. is $f(15) = -68$

b $k: y = 7x - 184$

$l: y = 7x + 72$

8 a max. is $f(-2) = 4$

b $x_B = 17$

9 a $B_f = \langle \leftarrow, 27] \rangle$

b $B(68, 0)$

10 12,32

11 $p = \frac{9}{16}$

Hoofdstuk 7

1 a $a \neq -\frac{4}{5}$ en b mag elk getal zijn

b $a = -\frac{4}{5}$ en $b = 60$

c $a = -2$ en $b = 48$

d $b < 56$

2 a 49° b $78,1^\circ$ c $49,2^\circ$

3 a $5\sqrt{2}$

b $M(p + 1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}p + \frac{1}{2})$

c *

d $p = -1 \vee p = 3$

4 a $k: y = \frac{2}{3}x - 5\frac{1}{3}$

b $m: 3x - y = 3$

5 a $2\sqrt{5}$

b $\sqrt{10}$

6 a $c_1: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 61$

b $c_2: (x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 64$

c $c_3: (x - 5)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 15\frac{1}{4}$

d $c: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

$c: (x - 3)^2 + (y - 15)^2 = 9$

7 $c: (x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 20$

8 a straal 6 en middelpunt $(3, -4)$

b straal $\sqrt{14\frac{1}{2}}$ en middelpunt $(-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$

9 A ligt binnen c

B ligt buiten c

C ligt op c

10 a $2\sqrt{5}$

b $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

c $\sqrt{5}$

11 a $k: y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{2}{3}$

$l: y = \frac{2}{3}x - 6\frac{2}{3}$

b $67,4^\circ$

Hoofdstuk 8

- 1** $A(0,77; 0,64)$
 $B(-0,94; 0,34)$
 $C(0,17; -0,98)$

- 2** **a** 135° **d** 4680°
b 36° **e** 120°
c $34,4^\circ$ **f** $38,2^\circ$

- 3** **a** $1\frac{1}{2}\pi$ rad **d** $1\frac{5}{6}\pi$ rad
b $-\frac{1}{3}\pi$ rad **e** $\frac{2}{9}\pi$ rad
c $\frac{5}{6}\pi$ rad **f** $-\frac{7}{18}\pi$ rad

- 4** $\angle POQ \approx 0,86$

- 5** **a** evenwichtsstand -2
amplitude 3
periode 2π
beginpunt $(\frac{1}{3}\pi, -2)$
b evenwichtsstand 3
amplitude 4
periode π
beginpunt $(\frac{1}{4}, 7)$

- 6** **a** evenwichtsstand -1
amplitude 2
periode 2π
beginpunt $(\frac{1}{3}\pi, 1)$
b $(-\frac{1}{6}\pi, -1), (\frac{5}{6}\pi, -1),$
 $(1\frac{5}{6}\pi, -1)$ en $(2\frac{5}{6}\pi, -1)$
c $(-\frac{2}{3}\pi, -3), (\frac{1}{3}\pi, 1),$
 $(1\frac{1}{3}\pi, -3)$ en $(2\frac{1}{3}\pi, 1)$
d 2π

- 7** **a** $y = -10 + 20 \sin(\frac{1}{15}\pi(x - 10))$
b $y = -10 + 20 \cos(\frac{1}{15}\pi(x - 17\frac{1}{2}))$

- 8** **a** $y = 6 + 1,035 \sin(x - 4,451)$
b $y = 3,864 \cos(x - 4,451)$

- 9** **a** *
b $-2,83 \leq t \leq -2,17 \vee$
 $-0,83 \leq t \leq -0,17 \vee$
 $1,17 \leq t \leq 1,83 \vee$
 $3,17 \leq t \leq 3,83$
c $6,28$

- 10** *

- 11** **a** $x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 2\pi$
b $x = \frac{1}{4}\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi \vee$
 $x = \frac{3}{4}\pi \vee x = 1\frac{3}{4}\pi$

- 12** **a** $x = \frac{7}{8}\pi \vee x = 1\frac{7}{8}\pi \vee$
 $x = \frac{1}{8}\pi \vee x = 1\frac{1}{8}\pi$
b $x = \pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi$

- 13** **a** $A_{\max} = 6,6$ voor $t = 2,4$
 $A_{\min} = 1,2$ voor $t = 6,9$
b $5,77 < t < 8,03$
c $1,885$

- 14** **a** $a = 19, b = 9, c = \frac{1}{6}\pi$ en $d = 3\frac{1}{2}$
b gedurende 96 dagen
c $0,157^\circ\text{C/dag}$

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen
- de toets ans, en fouten verbeteren
- breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen
- decimaal getal omzetten in een breuk

havo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 16

Formules, grafieken en tabellen

- formules invoeren en grafieken plotten
- functiewaarden berekenen op het grafiekenschermb en op het basisscherm
- tabellen maken en de tabelinstelling veranderen

havo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 40

Toppen en snijpunten

- toppen en snijpunten van grafieken
- berekenen van nulpunten

havo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 43

Helling en hellinggrafiek

- de richtingscoëfficiënt van een raaklijn
- hellinggrafiek plotten

havo B deel 1
hoofdstuk 2
bladzijde 83

Het gebruik van Ans en lettergeheugens

- de toets Ans
- het gebruik van lettergeheugens

havo B deel 1
hoofdstuk 3
bladzijde 104

Allerlei

- specifieke mogelijkheden van het merk/type GR
-

Trefwoordenregister

A

aantonen 55
afgeleide van
– $f(x) = x^n$ 59, 63
– $f(x) = (ax + b)^n$ 68, 71
afstand
– tussen twee punten 98
– van punt tot cirkel 112
– van punt tot lijn 102
amplitude 134, 148
asymptoot
horizontale – 9
verticale – 9

B

beeld 13
beginpunt 135
bereik 13
bewijzen 55
booglengte 128

C

cirkelvergelijking 105

D

differentiaalrekening 67
domein 13
draaiingshoek 125

E

eenheidscirkel 125
evenwichtsstand 134
exacte-waardencirkel 152
exponentiële
– functie 27
– vergelijking 32
extreme waarde
aantonen van – 55
– algebraïsch berekenen 53

F

formule opstellen van
– een raaklijn aan een cirkel 114
– een raaklijn met de afgeleide 49
– een sinusoïde 138
functie
exponentiële – 27
gebroken – 8
goniometrische – 134
logaritmische – 38
samengestelde – 68
wortel – 13

G

gebroken
– functie 8
– vergelijking 10
goniometrische
functie 134
transformaties van
een – 135
grondtal van de
logaritme 36

H

hoek tussen twee lijnen 95
hoekeenheden 130
horizontale asymptoot 9
Hudde, Johannes 57
hyperbool 8
takken van de – 8

I

isoleren 17

K

kenmerken van een
sinusoïde 138
– opsporen met de
GR 141

kettingregel 71, 73

kruislings
vermenigvuldigen 10
kwadraatafsplitsen 109
tweedegraadsvergelijking
oplossen met – 110

L

Leibniz, Gottfried
Wilhelm 67
logaritme 35, 36
grondtal van de – 36
logaritmische
– functie 38
– vergelijking 37
loodrechte
– lijnen 75, 100
– projectie 102

M

machten met
– gebroken
exponenten 24
– negatieve
exponenten 22
middelpuntshoek 128
midden van een lijnstuk 98

N

Napier, John 35
Newton, Isaac 67
notaties voor de
afgeleide 78

O

onderling loodrechte
lijnen 75, 100
onderlinge ligging van
lijnen 92
optimaliserings-
probleem 78
origineel 13

P

periode 134

R

raaklijn aan cirkel 114

rad 129

radiaal 128

randpunt 13

richtingshoek 94

S

samengestelde functie 68

sinusoïde 138

formule opstellen van
een – 138

kenmerken van een

– 138

– tekenen 145

T

takken van de hyperbool 8

U

uitdelen 60

V

vergelijking

exponentiële – 32

gebroken – 10

logaritmische – 37

wortel – 17

vermenigvuldigen ten

opzichte van de y -as 28

verticale asymptoot 9

voldoet 18

vraagstelling bij

vraagstukken 78

W

wortel

– functie 13

– vergelijking 17

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Oscar Casander, Arnhem

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Foto's

Shutterstock: p. 6-7, 32, 46-47, 122-123, 163

Imageselect: p. 35, 67 b, 107

Rijksmuseum: p. 57, 67 o

Depositphotos: p. 65

DPA picture alliance archive / Alamy Stock Photo: p 88-89

Paula van der Post Fotografie, Heerhugowaard: p. 164

ANP / Ramon van Flymen: 170

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

0 / 25



© 2025 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06456-3

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten