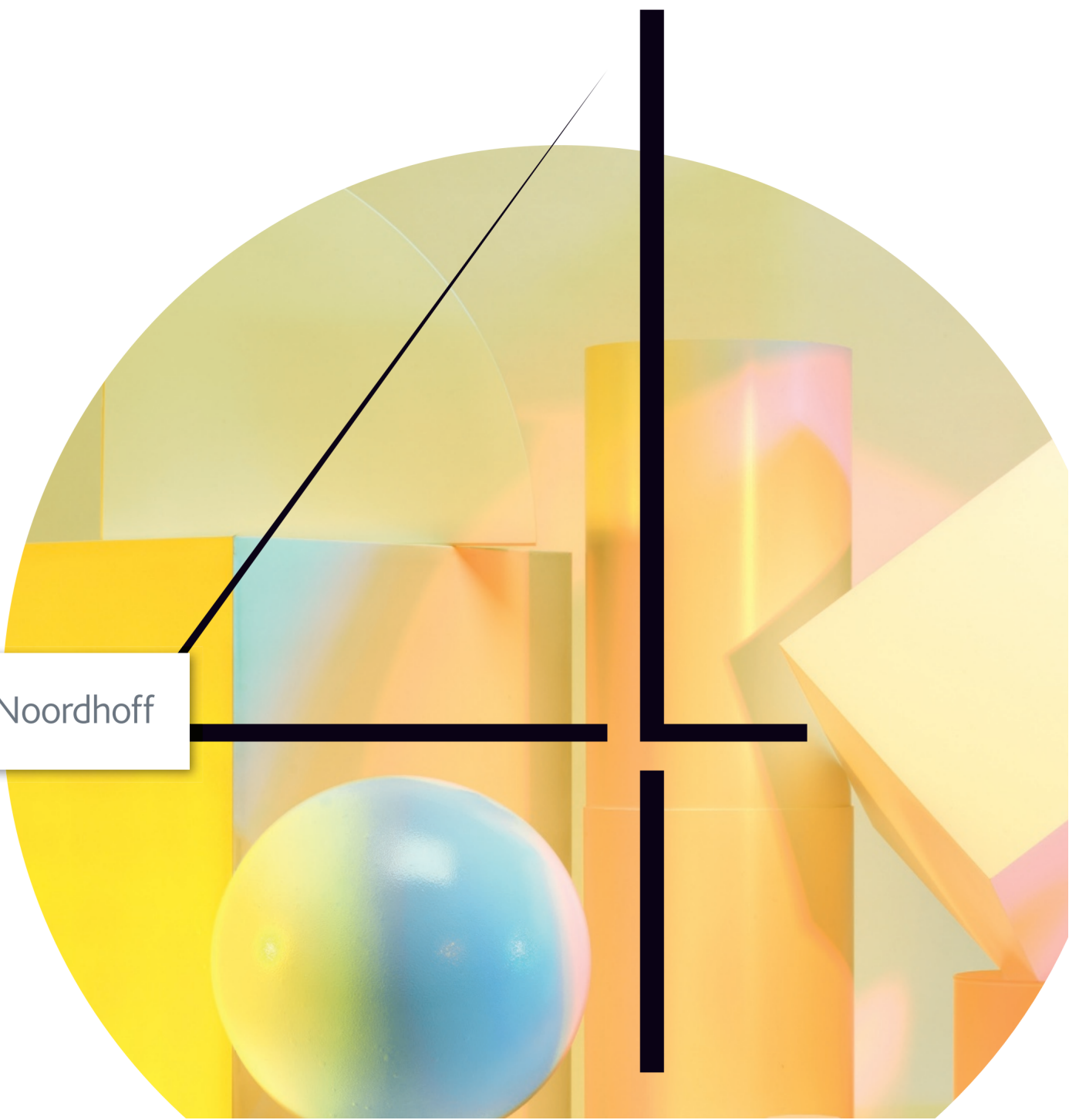


getal & ruimte

B



Noordhoff



Getal & Ruimte

Uitwerkingen havo B deel 2

Dertiende editie, 2025

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd

Inhoud

5	Functies en vergelijkingen	4
6	De afgeleide functie	33
7	Lijnen en cirkels	69
8	Goniometrische functies en vergelijkingen	106

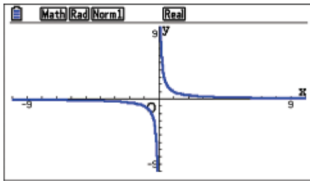
5 Functies en vergelijkingen

5.1 Gebroken functies

Bladzijde 8

1

a



- b** Als je x steeds groter kiest (bijvoorbeeld 100, 1000, ...), dan valt de grafiek van f op den duur vrijwel samen met de lijn $y = 0$ oftewel de x -as.
- c** Als je x steeds kleiner kiest (bijvoorbeeld -100, -1000, ...), dan valt de grafiek van f op den duur vrijwel samen met de lijn $y = 0$ oftewel de x -as.
- d** Als x positief is en x nadert steeds dichter tot 0, dan valt de grafiek van f op den duur vrijwel samen met de lijn $x = 0$ oftewel de y -as.
- e** Als x negatief is en x nadert steeds dichter tot 0, dan valt de grafiek van f op den duur vrijwel samen met de lijn $x = 0$ oftewel de y -as.
- f** $f(0) = \frac{1}{0}$

Bij $\frac{1}{0} = \dots$ hoort $\dots \cdot 0 = 1$.

Maar er is geen getal dat vermenigvuldigd met 0 de uitkomst 1 geeft.

Je kunt dus niet door 0 delen.

En dus kan $f(0)$ niet berekend worden.

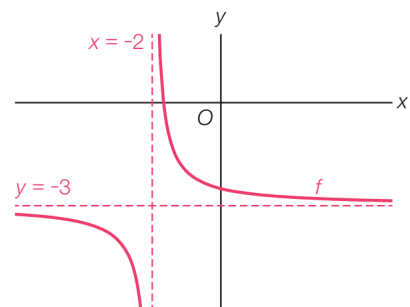
Bladzijde 10

2

a

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (-2, -3)} f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$$

- b** Zie de schets hiernaast.

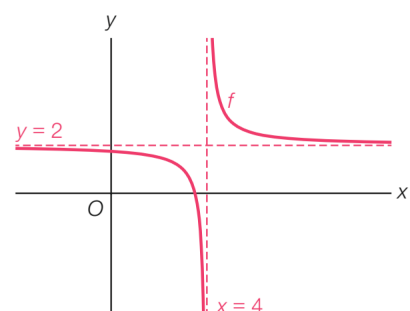


3

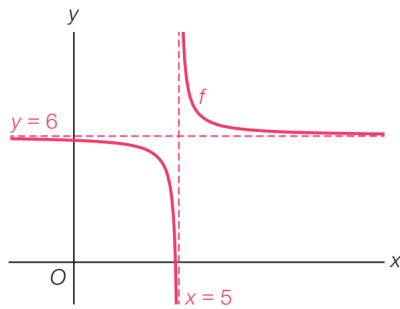
a

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (4, 2)} f(x) = \frac{1}{x-4} + 2$$

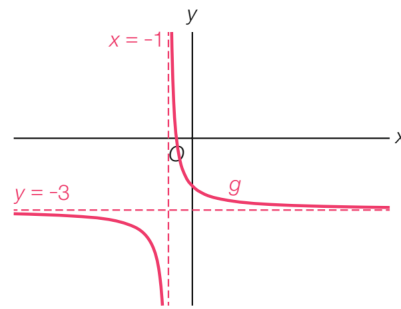
- b** Zie de schets hiernaast.



4 a $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (5, 6)} f(x) = \frac{1}{x-5} + 6$



b $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (-1, -3)} g(x) = \frac{1}{x+1} - 3$



5 $f(x) = \frac{1}{x+3} - 4 \xrightarrow{\text{translatie } (5, 9)} g(x) = \frac{1}{x-5+3} - 4 + 9 = \frac{1}{x-2} + 5$

6 a Bij een verhoudingstabel zijn de kruisproducten gelijk.

Kruislings vermenigvuldigen bij $\frac{x}{2} \mid \frac{x+4}{x}$ geeft $x^2 = 2(x+4)$
 $x^2 = 2x + 8$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$

b $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x+2)(x-4) = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$

Bladzijde 11

7 Bij het oplossen van de vergelijking van voorbeeld a wordt de regel

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ geeft $AD = BC$ gebruikt.

Bij het oplossen van de vergelijking van voorbeeld b wordt de regel

$\frac{A}{B} = C$ geeft $A = BC$ gebruikt.

8 a $\frac{x+3}{x-1} = \frac{10}{x}$
 $x(x+3) = 10(x-1)$
 $x^2 + 3x = 10x - 10$
 $x^2 - 7x + 10 = 0$
 $(x-2)(x-5) = 0$
 $x = 2 \vee x = 5$

b $\frac{x-1}{x} = 2$
 $x-1 = 2x$
 $-x = 1$
 $x = -1$

c $\frac{x+3}{x-1} = 1\frac{1}{2}$
 $x+3 = 1\frac{1}{2}(x-1)$
 $x+3 = 1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$
 $-\frac{1}{2}x = -4\frac{1}{2}$
 $x = 9$

d $\frac{2x+7}{x-2} = 0$

$2x+7 = 0$
 $2x = -7$
 $x = -3\frac{1}{2}$

e $\frac{2x-5}{4-x} = \frac{x+2}{3x-4}$
 $(2x-5)(3x-4) = (4-x)(x+2)$
 $6x^2 - 8x - 15x + 20 = 4x + 8 - x^2 - 2x$
 $7x^2 - 25x + 12 = 0$
 $D = (-25)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 12 = 289$, dus $\sqrt{D} = 17$
 $x = \frac{25 \pm 17}{14} = 3 \vee x = \frac{25 - 17}{14} = \frac{4}{7}$

f $\frac{3x-1}{2x+1} = x+5$
 $3x-1 = (2x+1)(x+5)$
 $3x-1 = 2x^2 + 10x + x + 5$
 $-2x^2 - 8x - 6 = 0$
 $x^2 + 4x + 3 = 0$
 $(x+1)(x+3) = 0$
 $x = -1 \vee x = -3$

9

a $\frac{2x+3}{x+1} = \frac{2x+2}{x-1}$
 $(2x+3)(x-1) = (x+1)(2x+2)$
 $2x^2 - 2x + 3x - 3 = 2x^2 + 2x + 2x + 2$
 $-3x = 5$
 $x = -1\frac{2}{3}$

b $\frac{3x^2-10}{x^2-2} + 3 = 5$
 $\frac{3x^2-10}{x^2-2} = 2$
 $3x^2 - 10 = 2(x^2 - 2)$
 $3x^2 - 10 = 2x^2 - 4$
 $x^2 = 6$
 $x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$

c $\frac{3x^2+6x}{x^2-8} = 0$
 $3x^2 + 6x = 0$
 $3x(x+2) = 0$
 $x = 0 \vee x = -2$

d $\frac{6x+2}{x-3} = 2x+6$
 $6x+2 = (x-3)(2x+6)$
 $6x+2 = 2x^2 + 6x - 6x - 18$
 $-2x^2 + 6x + 20 = 0$
 $x^2 - 3x - 10 = 0$
 $(x+2)(x-5) = 0$
 $x = -2 \vee x = 5$

e $\frac{3x+4}{x-1} = \frac{x+18}{x}$
 $x(3x+4) = (x-1)(x+18)$
 $3x^2 + 4x = x^2 + 18x - x - 18$
 $2x^2 - 13x + 18 = 0$
 $D = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 25$, dus $\sqrt{D} = 5$
 $x = \frac{13 \pm 5}{4} = 4\frac{1}{2} \vee x = \frac{13-5}{4} = 2$

f $\frac{x^2+2x-15}{x^2-3} = 0$
 $x^2 + 2x - 15 = 0$
 $(x-3)(x+5) = 0$
 $x = 3 \vee x = -5$

Bladzijde 12

10 $f(1) = -4$ geeft $\frac{a}{b-3} = -4$, dus $a = -4(b-3)$
 $a = -4b + 12$
 $f(3) = 4$ geeft $\frac{3a}{3b-3} = 4$, dus $3a = 4(3b-3)$
 $3a = 12b - 12$
 $a = 4b - 4$
 $a = -4b + 12$ en $a = 4b - 4$ geeft $-4b + 12 = 4b - 4$
 $-8b = -16$
 $b = 2$
 $b = 2$ geeft $a = 4 \cdot 2 - 4 = 4$

11 a $f(x) = \frac{1}{x-8} + 2 = \frac{1}{x-8} + \frac{2(x-8)}{x-8} = \frac{1+2x-16}{x-8} = \frac{2x-15}{x-8}$

b $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (8, 2)} y = \frac{1}{x-8} + 2$

De asymptoten zijn de lijnen $x = 8$ en $y = 2$, dus $S(8, 2)$ en $k: y = \frac{1}{4}x$.

k snijden met de grafiek van f geeft $\frac{2x-15}{x-8} = \frac{1}{4}x$

$$\frac{2x-15}{x-8} = \frac{x}{4}$$

$$x(x-8) = 4(2x-15)$$

$$x^2 - 8x = 8x - 60$$

$$x^2 - 16x + 60 = 0$$

$$(x-6)(x-10) = 0$$

$$x = 6 \vee x = 10$$

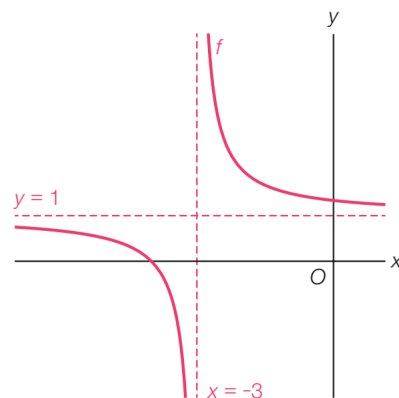
$x = 6$ geeft $y = \frac{1}{4} \cdot 6 = 1\frac{1}{2}$ en $x = 10$ geeft $y = \frac{1}{4} \cdot 10 = 2\frac{1}{2}$.

Dus $A(6, 1\frac{1}{2})$ en $B(10, 2\frac{1}{2})$.

C1

a $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (-3, 1)} f(x) = \frac{1}{x+3} + 1$

b Zie de schets hiernaast.



C2

a $\frac{2x^2 - 18}{x^2 + 5} = 0$

$$2x^2 - 18 = 0$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

b $\frac{x-1}{x+3} = \frac{x+8}{x}$

$$x(x-1) = (x+3)(x+8)$$

$$x^2 - x = x^2 + 8x + 3x + 24$$

$$-12x = 24$$

$$x = -2$$

c $\frac{x+2}{x-1} = 3x-2$

$$x+2 = (x-1)(3x-2)$$

$$x+2 = 3x^2 - 2x - 3x + 2$$

$$-3x^2 + 6x = 0$$

$$-3x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

5.2 Wortelfuncties

Bladzijde 13

12



$$x \geq 0 \text{ en } y \geq 0$$



$$x \geq -2 \text{ en } y \geq 3$$

c $y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (-2, 3)} y = \sqrt{x+2} + 3$

Bladzijde 14

13

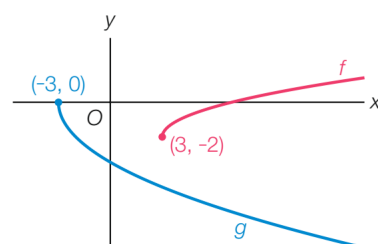
a $y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (3, -2)} f(x) = \sqrt{x-3} - 2$

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\times -2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (-3, 0)} g(x) = -2\sqrt{x+3}$$

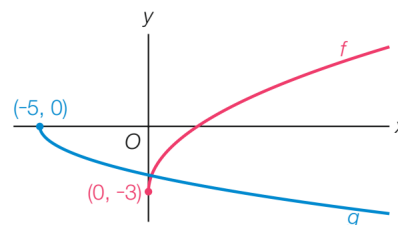
b Zie de schets hiernaast.

c $D_f = [3, \rightarrow)$ en $B_f = [-2, \rightarrow)$

$$D_g = [-3, \rightarrow) \text{ en } B_g = \langle \leftarrow, 0 \rangle$$



- 14 a** $y = \sqrt{x} \xrightarrow{\times 2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (0, -3)} f(x) = 2\sqrt{x} - 3$
 $y = \sqrt{x} \xrightarrow{\times -1 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -\sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (-5, 0)} g(x) = -\sqrt{x+5}$
b Zie de schets hiernaast.
c $D_f = [0, \rightarrow)$ en $B_f = [-3, \rightarrow)$
 $D_g = [-5, \rightarrow)$ en $B_g = \langle \leftarrow, 0]$



Bladzijde 15

- 15 a** randpunt $(-5, 3)$, $D_f = [-5, \rightarrow)$ en $B_f = [3, \rightarrow)$
b randpunt $(-3, -7)$, $D_g = [-3, \rightarrow)$ en $B_g = [-7, \rightarrow)$
c randpunt $(-1, 0)$, $D_h = [-1, \rightarrow)$ en $B_h = \langle \leftarrow, 0]$
d randpunt $(0, 1)$, $D_k = [0, \rightarrow)$ en $B_k = [1, \rightarrow)$
e randpunt $(1, -1)$, $D_l = [1, \rightarrow)$ en $B_l = \langle \leftarrow, -1]$
f randpunt $(0, -3)$, $D_m = [0, \rightarrow)$ en $B_m = [-3, \rightarrow)$

- 16 a** $f(x) = \sqrt{4x - 12} - 5 = \sqrt{4(x - 3)} - 5 = 2\sqrt{x - 3} - 5$
 $g(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\times 2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (3, -5)} f(x) = 2\sqrt{x - 3} - 5$
b $h(x) = \frac{5}{8 - 2x} + 3 = \frac{5}{-2(x - 4)} + 3 = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x - 4} + 3 = -2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 4} + 3$
 $k(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{\times -2\frac{1}{2} \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (4, 3)} h(x) = -2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 4} + 3$

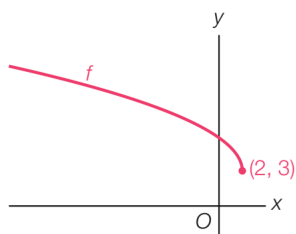
- 17 a** $2x - 6 = 0$
 $2x = 6$
 $x = 3$
 $f(3) = 5$, dus randpunt $(3, 5)$.
b Zie de plot van de grafiek van f hiernaast.
 $D_f = [3, \rightarrow)$ en $B_f = \langle \leftarrow, 5]$



Bladzijde 16

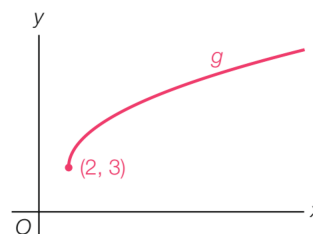
- 18 a** Bij a gaat het over x -waarden, dus bij a wordt er rekening gehouden met het domein.
b Bij b gaat het over functiewaarden oftewel y -waarden, dus bij b wordt er rekening gehouden met het bereik.

- 19 a** $8 - 4x = 0$
 $-4x = -8$
 $x = 2$
 $f(2) = 3$, dus randpunt $(2, 3)$.



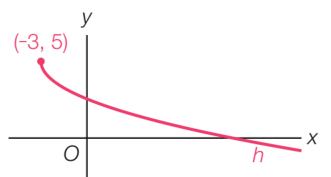
$$D_f = \langle \leftarrow, 2] \text{ en } B_f = [3, \rightarrow)$$

- b** $4x - 8 = 0$
 $4x = 8$
 $x = 2$
 $g(2) = 3$, dus randpunt $(2, 3)$.



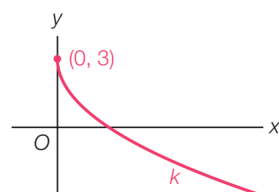
$$D_g = [2, \rightarrow) \text{ en } B_g = [3, \rightarrow)$$

- c** $2x + 6 = 0$
 $2x = -6$
 $x = -3$
 $h(-3) = 5$, dus randpunt $(-3, 5)$.



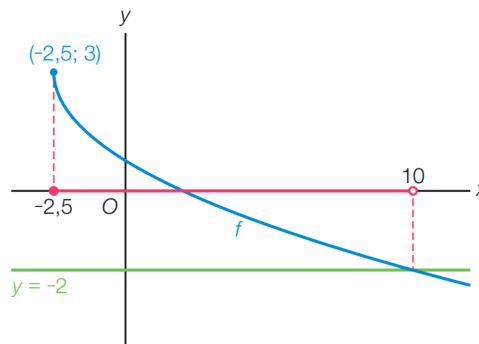
$D_h = [-3, \rightarrow)$ en $B_h = \langle \leftarrow, 5]$

- d** $x = 0$ en $k(0) = 3$, dus randpunt $(0, 3)$.

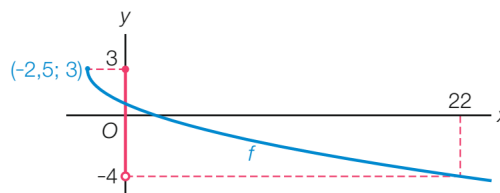


$D_k = [0, \rightarrow)$ en $B_k = \langle \leftarrow, 3]$

- 20 a** $2x + 5 = 0$
 $2x = -5$
 $x = -2,5$
 $f(-2,5) = 3$, dus randpunt $(-2,5; 3)$.
 Los op $3 - \sqrt{2x + 5} = -2$.
 Invoeren van de formules $y = 3 - \sqrt{2x + 5}$ en $y = -2$
 en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 10$.
 Zie de schets hiernaast.
 $f(x) > -2$ geeft $-2,5 \leq x < 10$

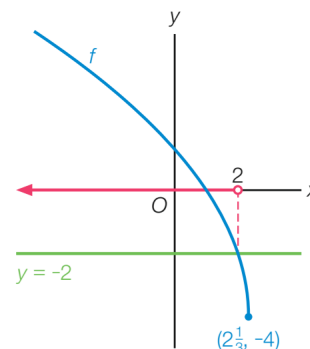


- b** $f(22) = -4$
 Zie de schets hiernaast.
 $x < 22$ geeft $-4 < f(x) \leq 3$

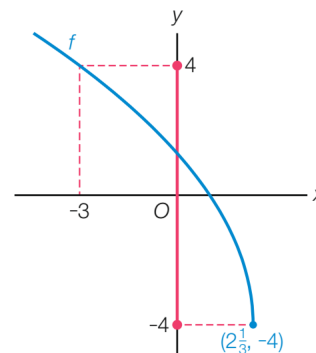


Bladzijde 17

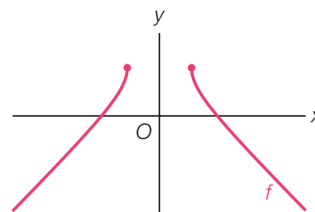
- 21 a** $7 - 3x = 0$
 $-3x = -7$
 $x = 2\frac{1}{3}$
 $f(2\frac{1}{3}) = -4$, dus randpunt $(2\frac{1}{3}, -4)$.
 Los op $2\sqrt{7 - 3x} - 4 = -2$
 Invoeren van de formules $y = 2\sqrt{7 - 3x} - 4$ en $y = -2$
 en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 2$.
 Zie de schets hiernaast.
 $f(x) > -2$ geeft $x < 2$



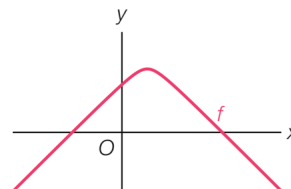
- b** $f(-3) = 4$
 Zie de schets hiernaast.
 $x \geq -3$ geeft $-4 \leq f(x) \leq 4$



- 22 a** $x^2 - 4 = 0$
 $x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$
 $f(2) = 3$ en $f(-2) = 3$, dus randpunten $(2, 3)$ en $(-2, 3)$.
- b** Zie de schets hiernaast.
 Het domein bestaat uit de intervallen $\langle \leftarrow, -2] \text{ en } [2, \rightarrow \rangle$.
 $B_f = \langle \leftarrow, 3]$



- 23 a** $x^2 - 4x + 5 = 0$
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$, dus de vergelijking heeft geen oplossing.
 $a = 1$, dus $a > 0$, dus voor elke x is $x^2 - 4x + 5 > 0$, dus de grafiek van f heeft geen randpunten.
- b** $D_f = \mathbb{R}$
 Invoeren van de formule $y = 6 - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ en gebruiken van de optie maximum geeft $y = 5$.
 Zie de schets hiernaast.
 $B_f = \langle \leftarrow, 5]$



- 24** $5 + ax = 0$
 $ax = -5$
 $x = -\frac{5}{a}$
 $f\left(-\frac{5}{a}\right) = 4$, dus randpunt $\left(-\frac{5}{a}, 4\right)$
 $y = 2x - 1$
- $$\left. \begin{aligned} 2 \cdot -\frac{5}{a} - 1 &= 4 \\ -\frac{10}{a} &= 5 \\ a &= -2 \end{aligned} \right\}$$

- 25 a** De wortel van 9 is gelijk aan 3, dus er moet gelden $2x - 5 = 9$
 $2x = 14$
 $x = 7$
- b** De wortel van een getal kan niet negatief zijn, dus $\sqrt{2x - 5} = -3$ heeft geen oplossing.

Bladzijde 18

- 26 a** Je krijgt dan de vergelijking $(x + \sqrt{x})^2 = 12^2$
 $x^2 + 2x\sqrt{x} + x = 144$
- b** $x = 1$ geeft $4\sqrt{2 \cdot 1 - 1} = 1 + 3$
 $4\sqrt{1} = 4$
 $4 \cdot 1 = 4$ en dit klopt, dus $x = 1$ voldoet.
 $x = 25$ geeft $4\sqrt{2 \cdot 25 - 1} = 25 + 3$
 $4\sqrt{49} = 28$
 $4 \cdot 7 = 28$ en dit klopt, dus $x = 25$ voldoet.
- c** $x = 3$ geeft $3 - \sqrt{3 + 1} = 5$
 $3 - \sqrt{4} = 5$
 $3 - 2 = 5$ en dit klopt niet, dus $x = 3$ voldoet niet.
 $x = 8$ geeft $8 - \sqrt{8 + 1} = 5$
 $8 - \sqrt{9} = 5$
 $8 - 3 = 5$ en dit klopt, dus $x = 8$ voldoet wel.

Bladzijde 19

- 27 a** $x = \sqrt{5x + 14}$
 kwadrateren geeft
 $x^2 = 5x + 14$
 $x^2 - 5x - 14 = 0$
 $(x + 2)(x - 7) = 0$
 $x = -2 \vee x = 7$
 $x = -2$ voldoet niet, dus $x = 7$.
- b** $3x = \sqrt{8x + 20}$
 kwadrateren geeft
 $9x^2 = 8x + 20$
 $9x^2 - 8x - 20 = 0$
 $D = (-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -20 = 784$, dus $\sqrt{D} = 28$
 $x = \frac{8 + 28}{18} = 2 \vee x = \frac{8 - 28}{18} = -1\frac{1}{9}$
 $x = -1\frac{1}{9}$ voldoet niet, dus $x = 2$.

c $5\sqrt{x} = x$
kwadrateren geeft
 $25x = x^2$
 $x^2 - 25x = 0$
 $x(x - 25) = 0$
 $x = 0 \vee x = 25$

28 a $4 - 3\sqrt{x} = 2$
 $3\sqrt{x} = 2$
kwadrateren geeft
 $9x = 4$
 $x = \frac{4}{9}$

b $5\sqrt{x} - 2x = 0$
 $5\sqrt{x} = 2x$
kwadrateren geeft
 $25x = 4x^2$
 $4x^2 - 25x = 0$
 $x(4x - 25) = 0$
 $x = 0 \vee 4x = 25$
 $x = 0 \vee x = 6\frac{1}{4}$

29 a $2x + \sqrt{x} = 10$
 $\sqrt{x} = 10 - 2x$
kwadrateren geeft
 $x = (10 - 2x)^2$
 $x = 100 - 40x + 4x^2$
 $4x^2 - 41x + 100 = 0$
 $D = (-41)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 100 = 81$, dus $\sqrt{D} = 9$
 $x = \frac{41 + 9}{8} = 6\frac{1}{4} \vee x = \frac{41 - 9}{8} = 4$
 $x = 6\frac{1}{4}$ voldoet niet, dus $x = 4$.

b $x + 2\sqrt{6 - 5x} = 6$
 $2\sqrt{6 - 5x} = 6 - x$
kwadrateren geeft
 $4(6 - 5x) = (6 - x)^2$
 $24 - 20x = 36 - 12x + x^2$
 $x^2 + 8x + 12 = 0$
 $(x + 2)(x + 6) = 0$
 $x = -2 \vee x = -6$

30 a $\frac{3}{\sqrt{2x+1}} - 1 = 0$
 $\frac{3}{\sqrt{2x+1}} = 1$
 $\sqrt{2x+1} = 3$
kwadrateren geeft
 $2x + 1 = 9$
 $2x = 8$
 $x = 4$

d $3x = \sqrt{18x + 72}$
kwadrateren geeft
 $9x^2 = 18x + 72$
 $9x^2 - 18x - 72 = 0$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x + 2)(x - 4) = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$
 $x = -2$ voldoet niet, dus $x = 4$.

c $2x - 5\sqrt{x} = 3$
 $2x - 3 = 5\sqrt{x}$
kwadrateren geeft
 $(2x - 3)^2 = 25x$
 $4x^2 - 12x + 9 = 25x$
 $4x^2 - 37x + 9 = 0$
 $D = (-37)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 1225$, dus $\sqrt{D} = 35$
 $x = \frac{37 + 35}{8} = 9 \vee x = \frac{37 - 35}{8} = \frac{1}{4}$
 $x = \frac{1}{4}$ voldoet niet, dus $x = 9$.

d $5 - 2\sqrt{x} = 3$
 $2\sqrt{x} = 2$
 $\sqrt{x} = 1$
 $x = 1$

c $10 - x\sqrt{x} = 2$
 $x\sqrt{x} = 8$
kwadrateren geeft
 $x^2 \cdot x = 64$
 $x^3 = 64$
 $x = 4$

d $-3 + \sqrt{7 + x} = \frac{1}{3}x - 4$
 $\sqrt{7 + x} = \frac{1}{3}x - 1$
kwadrateren geeft
 $7 + x = (\frac{1}{3}x - 1)^2$
 $7 + x = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$
 $\frac{1}{9}x^2 - 1\frac{2}{3}x - 6 = 0$
 $x^2 - 15x - 54 = 0$
 $(x + 3)(x - 18) = 0$
 $x = -3 \vee x = 18$
 $x = -3$ voldoet niet, dus $x = 18$.

b $\frac{3}{4\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2}$
 $4\sqrt{x+2} = 6$
 $\sqrt{x+2} = 1\frac{1}{2}$
kwadrateren geeft
 $x + 2 = 2\frac{1}{4}$
 $x = \frac{1}{4}$

c $\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 3\sqrt{x} - \frac{15}{x}$
 $\frac{16}{x} = 2\sqrt{x}$
 $2x\sqrt{x} = 16$
kwadrateren geeft
 $4x^2 \cdot x = 256$
 $4x^3 = 256$
 $x^3 = 64$
 $x = 4$

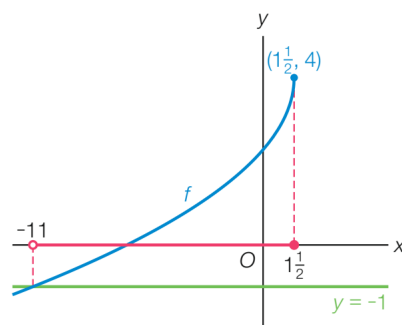
d $\frac{3x}{x-10} = 2\sqrt{x}$
kwadrateren geeft
 $\left(\frac{3x}{x-10}\right)^2 = (2\sqrt{x})^2$
 $\frac{9x^2}{x^2 - 20x + 100} = 4x$
 $4x(x^2 - 20x + 100) = 9x^2$
 $4x^3 - 80x^2 + 400x = 9x^2$
 $4x^3 - 89x^2 + 400x = 0$
 $x(4x^2 - 89x + 400) = 0$
 $x = 0 \vee 4x^2 - 89x + 400 = 0$
 $D = (-89)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 400 = 1521$, dus $\sqrt{D} = 39$
 $x = \frac{89 + 39}{8} = 16 \vee x = \frac{89 - 39}{8} = 6\frac{1}{4}$
 $x = 6\frac{1}{4}$ voldoet niet, dus $x = 0 \vee x = 16$.

31 a $\sqrt{2x-5} = \frac{1}{3}x$
kwadrateren geeft
 $2x - 5 = \frac{1}{9}x^2$
 $-\frac{1}{9}x^2 + 2x - 5 = 0$
 $x^2 - 18x + 45 = 0$
 $(x-3)(x-15) = 0$
 $x = 3 \vee x = 15$
 $x = 3$ geeft $y = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$, dus $A(3, 1)$.
 $x = 15$ geeft $y = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5$, dus $B(15, 5)$.

b $p = 0$ geeft de lijn $y = 0$.
Uit $y = 0$ volgt $f(x) = 0$ en dit geeft $2x - 5 = 0$ oftewel $x = 2\frac{1}{2}$.
Dus de lijn met $p = 0$ heeft alleen het punt $(2\frac{1}{2}, 0)$ gemeenschappelijk met de grafiek van f .

c $\sqrt{2x-5} = px$
kwadrateren geeft
 $2x - 5 = p^2x^2$
 $-p^2x^2 + 2x - 5 = 0$
 $D = 2^2 - 4 \cdot (-p^2) \cdot (-5) = 4 - 20p^2$
Raken, dus $D = 0$ en dit geeft $4 - 20p^2 = 0$
 $-20p^2 = -4$
 $p^2 = \frac{1}{5}$
 $p = \sqrt{\frac{1}{5}} \vee p = -\sqrt{\frac{1}{5}}$
 $p = -\sqrt{\frac{1}{5}}$ voldoet niet, dus $p = \sqrt{\frac{1}{5}}$.

32 $3 - 2x = 0$
 $-2x = -3$
 $x = 1\frac{1}{2}$
 $f(1\frac{1}{2}) = 4$, dus randpunt $(1\frac{1}{2}, 4)$.
 $f(x) = -1$ geeft $4 - \sqrt{3-2x} = -1$
 $\sqrt{3-2x} = 5$
kwadrateren geeft
 $3 - 2x = 25$
 $-2x = 22$
 $x = -11$
Zie de schets hiernaast.
 $f(x) > -1$ geeft $-11 < x \leq 1\frac{1}{2}$



33 $7 - 2x = 0$

$-2x = -7$

$x = 3\frac{1}{2}$

$f(3\frac{1}{2}) = 2$, dus randpunt $(3\frac{1}{2}, 2)$.

$f(x) = x$ geeft $2 + \sqrt{7 - 2x} = x$

$\sqrt{7 - 2x} = x - 2$

kwadrateren geeft

$7 - 2x = (x - 2)^2$

$7 - 2x = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

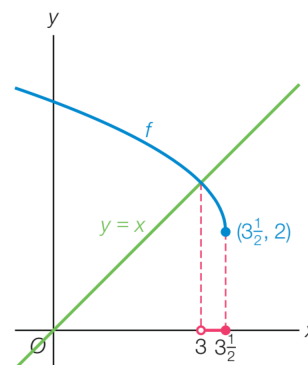
$(x + 1)(x - 3) = 0$

$x = -1 \vee x = 3$

$x = -1$ voldoet niet, dus $x = 3$.

Zie de schets hiernaast.

$f(x) < x$ geeft $3 < x \leq 3\frac{1}{2}$



34 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x-5}$

kwadrateren geeft

$x + 1 - 2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-3} + x - 3 = 4(x - 5)$

$2x - 2 - 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-3} = 4x - 20$

$-2x + 18 = 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-3}$

kwadrateren geeft

$(-2x + 18)^2 = 4(x + 1)(x - 3)$

$4x^2 - 72x + 324 = 4(x^2 - 3x + x - 3)$

$4x^2 - 72x + 324 = 4x^2 - 12x + 4x - 12$

$-64x = -336$

$x = 5\frac{1}{4}$

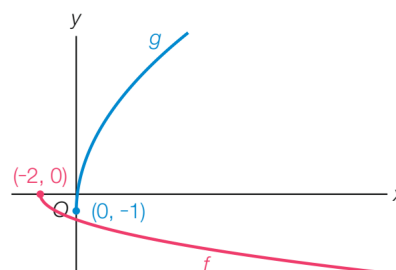
Bladzijde 20

C3 a $y = \sqrt{x} \xrightarrow{\times -1 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -\sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (-2, 0)} f(x) = -\sqrt{x+2}$

$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\times 4 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 4\sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (0, -1)} g(x) = 4\sqrt{x} - 1$

b Zie de schets hiernaast.

c $D_f = [-2, \rightarrow)$ en $B_f = \langle \leftarrow, 0]$
 $D_g = [0, \rightarrow)$ en $B_g = [-1, \rightarrow)$



C4 a $2x + 5 = 0$

$2x = -5$

$x = -2,5$

$f(-2,5) = 1$, dus randpunt $(-2,5; 1)$.

Los op $1 + \sqrt{2x+5} = 3$.

Invoeren van de formules $y = 1 + \sqrt{2x+5}$ en $y = 3$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = -0,5$.

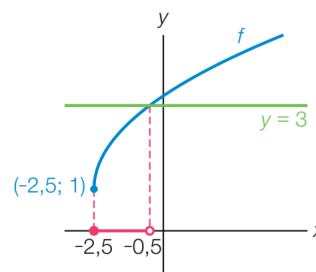
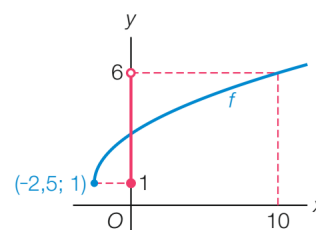
Zie de schets hiernaast.

$f(x) < 3$ geeft $-2,5 \leq x < -0,5$

b $f(10) = 6$

Zie de schets hiernaast.

$x < 10$ geeft $1 \leq f(x) < 6$



C5

a $x = 2\sqrt{x+3}$
 kwadrateren geeft
 $x^2 = 4(x+3)$
 $x^2 = 4x + 12$
 $x^2 - 4x - 12 = 0$
 $(x+2)(x-6) = 0$
 $x = -2 \vee x = 6$
 $x = -2$ voldoet niet, dus $x = 6$.

b $2x - \sqrt{x} = 21$
 $2x - 21 = \sqrt{x}$
 kwadrateren geeft
 $(2x - 21)^2 = x$
 $4x^2 - 84x + 441 = x$
 $4x^2 - 85x + 441 = 0$
 $D = (-85)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 441 = 169$, dus $\sqrt{D} = 13$
 $x = \frac{85 \pm 13}{8} = 12\frac{1}{4} \vee x = \frac{85 - 13}{8} = 9$
 $x = 9$ voldoet niet, dus $x = 12\frac{1}{4}$.

5.3 Machten met negatieve en gebroken exponenten

Bladzijde 21

V1 a $2x^3 \cdot 3x^2 = 6x^5$
b $(x^2y)^3 = x^6y^3$
c $-2x^4y^3 \cdot -3xy = 6x^5y^4$

d $(-4xy^4)^2 = 16x^2y^8$
e $(3x)^2 \cdot (2x^2)^3 = 9x^2 \cdot 8x^6 = 72x^8$
f $(3x^3)^2 + (-2x^2)^3 = 9x^6 + -8x^6 = x^6$

V2 a $\frac{12x^6}{4x^2} = 3x^4$
b $\frac{5x^{10}}{15x^5} = \frac{1}{3}x^5$
c $\frac{24x^4y^2}{6xy} = 4x^3y$

d $\frac{-15x^6y}{5x^2y} = -3x^4$
e $\frac{(2xy)^3}{(3xy)^2} = \frac{8x^3y^3}{9x^2y^2} = \frac{8}{9}xy$
f $\left(\frac{9x^4}{x}\right)^2 = (9x^3)^2 = 81x^6$

Bladzijde 22

35 a $\frac{a^5}{a^5} = a^0$
b $\left. \begin{array}{l} \frac{a^5}{a^5} = a^0 \\ \frac{a^5}{a^5} = 1 \end{array} \right\} a^0 = 1$
c $\frac{1}{a^5} = \frac{a^0}{a^5} = a^{-5}$

Bladzijde 23

36 a $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)} = 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

b $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25$
 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$
 $\left(1\frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{5}$

37 a $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$
b $x^4 \cdot \frac{1}{x^6} = x^4 \cdot x^{-6} = x^{-2}$
c $\frac{x^4}{\left(\frac{1}{x^4}\right)} = \frac{x^4}{x^{-4}} = x^8$
d $\frac{x^8}{x^0} = x^8$
e $(x^3)^{-2} = x^{-6}$

f $\frac{\left(\frac{1}{x^5}\right)}{x} = \frac{x^{-5}}{x^1} = x^{-6}$
g $\frac{x}{x^{12}} = x^{-11}$
h $\frac{1}{x^8} \cdot (x^3)^{-1} = x^{-8} \cdot x^{-3} = x^{-11}$
i $\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{-3}} = \frac{x^{-1}}{x^{-3}} = x^2$

38 a $\frac{1}{2}x^{-3} = \frac{1}{2x^3}$

b $(\frac{1}{2}x)^{-3} = (\frac{1}{2})^{-3} \cdot x^{-3} = 2^3 \cdot x^{-3} = 8 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{8}{x^3}$

c $3x^{-4}y^3 = \frac{3y^3}{x^4}$

d $(3x)^{-4}y^3 = \frac{y^3}{(3x)^4} = \frac{y^3}{81x^4}$

e $\frac{3}{5}x^{-1} = \frac{3}{5x}$

Bladzijde 24

39 Uit $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ en $(x^{\frac{1}{3}})^3 = x$ volgt $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Bladzijde 25

40 a $x \cdot \sqrt[3]{x} = x \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{1\frac{1}{3}}$

b $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$

c $x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2\frac{1}{2}}$

41 a $8\sqrt{2} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3\frac{1}{2}}$

b $\frac{1}{3}\sqrt{3} = 3^{-1} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

c $\frac{1}{100}\sqrt{10} = 10^{-2} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{-1\frac{1}{2}}$

42 a $5x^{3\frac{1}{3}} = 5x^3 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 5x^3 \cdot \sqrt[3]{x}$

b $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{4}}y = \frac{y}{2x^{\frac{1}{4}}} = \frac{y}{2 \cdot \sqrt[4]{x}}$

c $3x^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$

43 a $y = \frac{50x^{1,9}}{10x^{1,1}} = 5x^{0,8}$

b $y = \sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}}$

c $y = \frac{3}{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} = 3x^{-1} \cdot x^{\frac{3}{4}} = 3x^{-\frac{1}{4}}$

44 a $\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} = \frac{5}{6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}} = \frac{5}{6\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}}$

b $(2x^{-\frac{2}{7}})^3 = 2^3 \cdot (x^{-\frac{2}{7}})^3 = 8x^{-\frac{6}{7}} = \frac{8}{x^{\frac{6}{7}}} = \frac{8}{\sqrt[7]{x^6}}$

c $\frac{6y^{-2}}{3x^{-1\frac{1}{4}}} = \frac{2x^{1\frac{1}{4}}}{y^2} = \frac{2x \cdot x^{\frac{1}{4}}}{y^2} = \frac{2x \cdot \sqrt[4]{x}}{y^2}$

f $(\frac{3}{5}x)^{-1} = (\frac{3}{5})^{-1} \cdot x^{-1} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{3x}$

g $-4 \cdot 3x^{-2} = -\frac{12}{x^2}$

h $-4 \cdot (3x)^{-2} = -\frac{4}{(3x)^2} = -\frac{4}{9x^2}$

i $(-4 \cdot 3x)^{-2} = \frac{1}{(-12x)^2} = \frac{1}{144x^2}$

d $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = \sqrt[3]{x^{-2}} = x^{-\frac{2}{3}}$

e $\sqrt[3]{x^{12}} = x^{\frac{12}{3}} = x^4$

f $\frac{1}{x^4} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{-4} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{-3\frac{2}{3}}$

d $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}}$

e $\frac{1}{27} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3^2}} = 3^{-3} \cdot \sqrt[3]{3^{-2}} = 3^{-3} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} = 3^{-3\frac{2}{3}}$

f $\frac{100\sqrt{10}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{10^2 \cdot 10^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{3}}} = \frac{10^{2\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{3}}} = 10^{2\frac{1}{6}}$

d $\frac{2}{3}x^{-3} \cdot y^{\frac{1}{2}} = \frac{2y \cdot y^{\frac{1}{2}}}{3x^3} = \frac{2y\sqrt{y}}{3x^3}$

e $\frac{1}{5}x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{5x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{y}}{5\sqrt{x}}$

f $(5x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(5x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5x}}$

d $y = \frac{x}{\sqrt[5]{x}} = \frac{x}{x^{\frac{1}{5}}} = x^{\frac{4}{5}}$

e $y = \frac{5}{x\sqrt{x}} = \frac{5}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{x^{\frac{3}{2}}} = 5x^{-1\frac{1}{2}}$

f $y = 4x\sqrt{x^3} = 4x \cdot x^{\frac{3}{2}} = 4x^{2\frac{1}{2}}$

Bladzijde 26

- C6**
- a $\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{4}}$
- b $\sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{7}{6}} = x^{-1\frac{1}{6}}$
- c $\frac{x\sqrt{x}}{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{x \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{9}{4}}} = x^{-\frac{3}{4}}$
- C7**
- a $x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[5]{x^2}$
- b $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{4y^{\frac{1}{3}}} = \frac{x \cdot x^{\frac{1}{2}}}{4 \cdot \sqrt[3]{y}} = \frac{x\sqrt{x}}{4 \cdot \sqrt[3]{y}}$
- c $\frac{\frac{3}{7}x^{-2}y^{\frac{1}{4}}}{7x^2} = \frac{3y^{\frac{1}{4}}}{7x^2} = \frac{3y \cdot y^{\frac{1}{4}}}{7x^2} = \frac{3y \cdot \sqrt[4]{y}}{7x^2}$

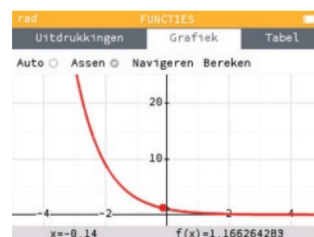
5.4 Exponentiële functies

Bladzijde 27

- 45**
- a Zie de plot hiernaast.
- b De grafiek van f is stijgend.
- c $f(-10) = 2^{-10} \approx 9,77 \cdot 10^{-4}$
 $f(-20) = 2^{-20} \approx 9,54 \cdot 10^{-7}$
 $f(-100) = 2^{-100} \approx 7,89 \cdot 10^{-31}$
- d $f(-500) = 2^{-500} = \frac{1}{2^{500}}$ en dit is groter dan 0.
- Het hangt van het merk en type GR af wat de GR als beeld van -500 geeft.
- e Voor elke x is $2^x > 0$, dus er is geen origineel te vinden waarvan het beeld 0 is.



- 46**
- a Zie de plot hiernaast.
De grafiek van g is dalend.
- b $g(500) = (\frac{1}{3})^{500} = \frac{1}{3^{500}}$ en dit is groter dan 0.
- c Voor elke x is $(\frac{1}{3})^x > 0$, dus er is geen origineel te vinden waarvan het beeld 0 is.



Bladzijde 28

- 47**
- a Zie de plot hiernaast.
- b De bijbehorende factor is 2.
- c Er is vermenigvuldigd met de factor $\frac{1}{4}$.
Zie de plot hiernaast.
- d Er is vermenigvuldigd met de factor $\frac{1}{a}$.



Bladzijde 30

48 $y = 0,7^x \xrightarrow{\times -1 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -0,7^x \xrightarrow{\times 5 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} y = -0,7^{0,2x}$
 $\xrightarrow{\text{translatie } (3, 150)} y = 150 - 0,7^{0,2(x-3)} = 150 - 0,7^{0,2x-0,6}$
 Dus je krijgt de grafiek van $y = 150 - 0,7^{0,2x-0,6}$.

49 a $y = 0,4^x \xrightarrow{\times -6 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -6 \cdot 0,4^x \xrightarrow{\text{translatie } (0, 5)} f(x) = 5 - 6 \cdot 0,4^x$
 $B_f = \langle \leftarrow, 5 \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 5$.

b $y = 2^x \xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 3 \cdot 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (0, 4)} y = 3 \cdot 2^x + 4 \xrightarrow{\times \frac{1}{3} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} g(x) = 3 \cdot 2^{3x} + 4$
 $B_g = \langle 4, \rightarrow \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 4$.

c $y = 0,8^x \xrightarrow{\text{translatie } (4, -10)} y = 0,8^{x-4} - 10 \xrightarrow{\times 2 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} h(x) = 0,8^{0,5x-4} - 10$
 $B_h = \langle -10, \rightarrow \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = -10$.

50 a $y = 0,8^x \xrightarrow{\times 2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 2 \cdot 0,8^x \xrightarrow{\text{translatie } (0, -7)} y = 2 \cdot 0,8^x - 7 \xrightarrow{\times \frac{1}{2} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} f(x) = 2 \cdot 0,8^{2x} - 7$
 $B_f = \langle -7, \rightarrow \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = -7$.

b $y = 0,3^x \xrightarrow{\times -1 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -0,3^x \xrightarrow{\text{translatie } (-2, 1000)} y = 1000 - 0,3^{x+2}$
 $\xrightarrow{\times 10 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} g(x) = 1000 - 0,3^{0,1x+2}$
 $B_g = \langle \leftarrow, 1000 \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 1000$.

c $h(x) = 1000(1 - 1,3^x) = 1000 - 1000 \cdot 1,3^x$
 $y = 1,3^x \xrightarrow{\times -1000 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -1000 \cdot 1,3^x \xrightarrow{\text{translatie } (0, 1000)} h(x) = 1000 - 1000 \cdot 1,3^x$
 $B_h = \langle \leftarrow, 1000 \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 1000$.

51 a $y = 0,7^x \xrightarrow{\times -1 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -0,7^x \xrightarrow{\text{translatie } (-1, 4)} y = 4 - 0,7^{x+1} \xrightarrow{\times -5 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} f(x) = 4 - 0,7^{-0,2x+1}$

b $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = \frac{3}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (-4, 0)} y = \frac{3}{x+4} \xrightarrow{\times \frac{1}{5} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} g(x) = \frac{3}{5x+4}$

c $y = \sqrt{x} \xrightarrow{\times 2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (5, -1)} y = -1 + 2\sqrt{x-5} \xrightarrow{\times \frac{1}{3} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} h(x) = -1 + 2\sqrt{3x-5}$

52 a $y = 3^x \xrightarrow{\times -1 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -3^x \xrightarrow{\text{translatie } (0, -1)} y = -3^x - 1$

b $y = 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (2, 5)} y = 3^{x-2} + 5 \xrightarrow{\times 6 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} y = 3^{\frac{1}{6}x-2} + 5$

c $y = 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (4, -5)} y = 3^{x-4} - 5 \xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 3(3^{x-4} - 5) = 3 \cdot 3^{x-4} - 15 (= 3^{x-3} - 15)$

d $y = 3^x \xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 3 \cdot 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (4, -5)} y = 3 \cdot 3^{x-4} - 5 (= 3^{x-3} - 5)$

53 a $y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (2, -3)} f(x) = 2^{x-2} - 3$

b $y = 0,5^x \xrightarrow{\times 4 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 4 \cdot 0,5^x \xrightarrow{\text{translatie } (3, -1)} g(x) = 4 \cdot 0,5^{x-3} - 1$

c $f(2) = -2$ en de asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = -3$.
 Dus voor $x \leq 2$ is $-3 < f(x) \leq -2$.

d $g(2) = 7$ en de asymptoot van de grafiek van g is de lijn $y = -1$.
 Dus voor $x \geq 2$ is $-1 < g(x) \leq 7$.

e Voor $-3 < p \leq -1$.

f Invoeren van de formules $y = 2^{x-2} - 3$ en $y = 4 \cdot 0,5^{x-3} - 1$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 4$.
 Dus $f(x) \geq g(x)$ geeft $x \geq 4$.

Bladzijde 31

54 a $8 \cdot 4^x = 2^3 \cdot (2^2)^x = 2^3 \cdot 2^{2x} = 2^{2x+3}$

b Bij de herleiding van $(2^2)^x$ tot 2^{2x} gebruik je de regel $(a^p)^q = a^{pq}$.
 Bij de herleiding van $2^3 \cdot 2^{2x}$ tot 2^{2x+3} gebruik je de regel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

55 a $y = 15 \cdot 2^{3x+2} = 15 \cdot 2^{3x} \cdot 2^2 = 15 \cdot (2^3)^x \cdot 4 = 60 \cdot 8^x$

Dus $y = 60 \cdot 8^x$.

b $y = 260 \cdot 4^{1\frac{1}{2}x-1} = 260 \cdot 4^{1\frac{1}{2}x} \cdot 4^{-1} = 260 \cdot (4^{1\frac{1}{2}})^x \cdot \frac{1}{4} = 65 \cdot 8^x$

Dus $y = 65 \cdot 8^x$.

c $y = 8 \cdot 4^{-2x-1} = 8 \cdot 4^{-2x} \cdot 4^{-1} = 8 \cdot (4^{-2})^x \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot (\frac{1}{16})^x$

Dus $y = 2 \cdot (\frac{1}{16})^x$.

56 a $y = 2^x \cdot 2^{2x-3} = 2^x \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-3} = 2^{3x} \cdot \frac{1}{8} = (2^3)^x \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot 8^x$

Dus $y = \frac{1}{8} \cdot 8^x$.

b $y = 63 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-2} = 63 \cdot 3^{\frac{1}{2}x} \cdot 3^{-2} = 63 \cdot (3^{\frac{1}{2}})^x \cdot \frac{1}{9} = 7 \cdot (\sqrt{3})^x$

Dus $y = 7 \cdot (\sqrt{3})^x$.

c $y = 50\,000 \cdot 100^{-x-2\frac{1}{2}} = 50\,000 \cdot 100^{-x} \cdot 100^{-2\frac{1}{2}} = 50\,000 \cdot (100^{-1})^x \cdot \frac{1}{100\,000} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{100})^x$

Dus $y = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{100})^x$.

57 a $y = 50 \cdot 2^{3x-1} = 50 \cdot 2^{3x} \cdot 2^{-1} = 50 \cdot (2^3)^x \cdot \frac{1}{2} = 25 \cdot 8^x$

Dus $y = 25 \cdot 8^x$.

b $y = 10x \cdot \sqrt[3]{x^2} = 10x \cdot x^{\frac{2}{3}} = 10x^{1\frac{2}{3}}$

Dus $y = 10x^{1\frac{2}{3}}$.

c $y = 162 \cdot 9^{\frac{1}{2}x-2} = 162 \cdot 9^{\frac{1}{2}x} \cdot 9^{-2} = 162 \cdot (9^{\frac{1}{2}})^x \cdot \frac{1}{81} = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{9}}\right)^x = 2 \cdot (\frac{1}{3})^x$

Dus $y = 2 \cdot (\frac{1}{3})^x$.

d $y = \frac{3\sqrt{x}}{x \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{x \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = 3x^{\frac{5}{6}}$

Dus $y = 3x^{\frac{5}{6}}$.

e $y = \frac{1}{4x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{4x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}x^{-2\frac{1}{2}}$

Dus $y = \frac{1}{4}x^{-2\frac{1}{2}}$.

f $y = \frac{64}{4^{\frac{1}{2}x+2}} = 64 \cdot 4^{-(\frac{1}{2}x+2)} = 64 \cdot 4^{-\frac{1}{2}x-2} = 64 \cdot 4^{-\frac{1}{2}x} \cdot 4^{-2} = 64 \cdot (4^{-\frac{1}{2}})^x \cdot \frac{1}{16} = 4 \cdot (\frac{1}{2})^x$

Dus $y = 4 \cdot (\frac{1}{2})^x$.

58 a $g(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^{x-3} - 2 = 3^{-1} \cdot 3^{x-3} - 2 = 3^{x-4} - 2$

$f(x) = 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (4, -2)} g(x) = 3^{x-4} - 2$

Dus $p = 4$ en $q = -2$.

b $h(x) = 2^{x-3} \xrightarrow{\text{translatie } (-5, 0)} k(x) = 2^{x+5-3} = 2^5 \cdot 2^{x-3} = 32 \cdot 2^{x-3}$

Dus door de grafiek van h met 32 te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as krijg je ook de grafiek van k .

Dus $a = 32$.

Bladzijde 32

59 $f(x) = 5 - 2^{\frac{1}{2}x+4} \xrightarrow{\text{translatie } (12, -8)} h(x) = 5 - 2^{\frac{1}{2}(x-12)+4} - 8 = -3 - 2^{\frac{1}{2}x-6+4}$

$= -3 - 2^{\frac{1}{2}x} \cdot 2^{-2} = -3 - (2^{\frac{1}{2}})^x \cdot \frac{1}{4} = -3 - \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{2})^x$

Dus $a = -3$, $b = -\frac{1}{4}$ en $g = \sqrt{2}$.

60 a $h = 10$ geeft $d = 1,225 \cdot 0,88^{10} = 0,341\dots$

900 km/u = 250 m/s, dus $v = 250$.

Na een uur vliegen is $G = 0,03 \cdot 0,341\dots \cdot 250^2 \cdot 541 = 346\,067,9\dots$

Dus het startgewicht is $346\,067,9\dots + 0,8 \cdot 12\,000 \approx 355\,668$ kg.

b Na 10 uur is $G = 355\,667,9... - 10 \cdot 12\,000 \cdot 0,8 = 259\,667,9...$

Dit geeft $0,03d \cdot 250^2 \cdot 541 = 259\,667,9...$

$$d = \frac{259\,667,9...}{0,03 \cdot 250^2 \cdot 541} = 0,255...$$

$d = 0,255...$ geeft $1,225 \cdot 0,88^h = 0,255...$

Los op $1,225 \cdot 0,88^h = 0,255...$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $h \approx 12,2$.

Dus de vlieghoogte tien uur na de start is 12,2 km.

c $G = 355\,667,9... - 12\,000 \cdot 0,8 \cdot t = 355\,668 - 9600t$ met t in uren

Dit geeft $355\,667,9... - 9600t = 0,03 \cdot 1,225 \cdot 0,88^h \cdot 250^2 \cdot 541$

$$355\,667,9... - 9600t = 1\,242\,609,375 \cdot 0,88^h$$

$$0,88^h = -0,00772... \cdot t + 0,286...$$

Dus $g = 0,88$, $a \approx -0,0077$ en $b \approx 0,29$.

61 $4\sqrt{2} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2\frac{1}{2}}$

$$2^{x-1} = 4\sqrt{2}$$

$$2^{x-1} = 2^{2\frac{1}{2}}$$

$$x-1 = 2\frac{1}{2}$$

$$x = 3\frac{1}{2}$$

Bladzijde 33

62 a $2^{x-3} = \frac{1}{8}$

$$2^{x-3} = 2^{-3}$$

$$x-3 = -3$$

$$x = 0$$

b $5^x - 20 = 105$

$$5^x = 125$$

$$5^x = 5^3$$

$$x = 3$$

c $5 \cdot 2^x = 80$

$$2^x = 16$$

$$2^x = 2^4$$

$$x = 4$$

d $3^{2x+1} = 27\sqrt{3}$

$$3^{2x+1} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{2x+1} = 3^{3\frac{1}{2}}$$

$$2x+1 = 3\frac{1}{2}$$

$$2x = 2\frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{1}{4}$$

e $10 \cdot 3^x = 270$

$$3^x = 27$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

f $3 \cdot 8^{2-x} = 48$

$$8^{2-x} = 16$$

$$(2^3)^{2-x} = 2^4$$

$$2^{6-3x} = 2^4$$

$$6-3x = 4$$

$$-3x = -2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

63 a $3 \cdot 2^x + 4 = 28$

$$3 \cdot 2^x = 24$$

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3$$

b $5^{2x-6} = \frac{1}{25}$

$$5^{2x-6} = 5^{-2}$$

$$2x-6 = -2$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

c $3 \cdot 7^{3x+1} = 147$

$$7^{3x+1} = 49$$

$$7^{3x+1} = 7^2$$

$$3x+1 = 2$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

d $32^{x-2} = \frac{1}{16}$

$$(2^5)^{x-2} = 2^{-4}$$

$$2^{5x-10} = 2^{-4}$$

$$5x-10 = -4$$

$$5x = 6$$

$$x = 1\frac{1}{5}$$

e $5 \cdot 4^{x-1} = 2\frac{1}{2}$

$$4^{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$(2^2)^{x-1} = 2^{-1}$$

$$2^{2x-2} = 2^{-1}$$

$$2x-2 = -1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

f $8 \cdot 2^x = 4^{x+1}$

$$2^3 \cdot 2^x = (2^2)^{x+1}$$

$$2^{3+x} = 2^{2x+2}$$

$$3+x = 2x+2$$

$$-x = -1$$

$$x = 1$$

64 a $2^x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$$2^x = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^x = 2^{-1\frac{1}{2}}$$

$$x = -1\frac{1}{2}$$

b $\frac{1}{5}(2x+1) + 2 = \frac{1}{2}x + 3$

$$\frac{2}{5}x + \frac{1}{5} + 2 = \frac{1}{2}x + 3$$

$$4x + 2 + 20 = 5x + 30$$

$$-x = 8$$

$$x = -8$$

c $3x^3 + 17x^2 = 5x^2 + 36x$

$$3x^3 + 12x^2 - 36x = 0$$

$$3x(x^2 + 4x - 12) = 0$$

$$3x(x-2)(x+6) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2 \vee x = -6$$

d $2\sqrt{x+5} = x+2$

kwadrateren geeft

$$4(x+5) = (x+2)^2$$

$$4x + 20 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

$x = -4$ voldoet niet, dus $x = 4$.

$$\begin{aligned} \text{e } 5^{x+6} &= \left(\frac{1}{5}\right)^x \\ 5^{x+6} &= (5^{-1})^x \\ 5^{x+6} &= 5^{-x} \\ x+6 &= -x \\ 2x &= -6 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } \frac{3x+2}{2x+5} &= \frac{6-5x}{2x} \\ 2x(3x+2) &= (2x+5)(6-5x) \\ 6x^2+4x &= 12x-10x^2+30-25x \\ 16x^2+17x-30 &= 0 \\ D &= 17^2-4 \cdot 16 \cdot -30 = 2209, \text{ dus } \sqrt{D} = 47 \\ x &= \frac{-17+47}{32} = \frac{15}{16} \vee x = \frac{-17-47}{32} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{65 a } f(x) &= (\sqrt{2})^{x+4} = (2^{\frac{1}{2}})^{x+4} = 2^{\frac{1}{2}(x+4)} = 2^{\frac{1}{2}x+2} \\ y &= 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (-2, 0)} y = 2^{x+2} \xrightarrow{\times 2 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} f(x) = 2^{\frac{1}{2}x+2} \\ g(x) &= \left(\frac{1}{4}\right)^x = (2^{-2})^x = 2^{-2x} \\ y &= 2^x \xrightarrow{\times -\frac{1}{2} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} g(x) = 2^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } f(x) &= g(x) \text{ geeft } 2^{\frac{1}{2}x+2} = 2^{-2x} \\ \frac{1}{2}x+2 &= -2x \\ 2\frac{1}{2}x &= -2 \\ x &= -\frac{4}{5} \\ g\left(-\frac{4}{5}\right) &= 2^{-2 \cdot -\frac{4}{5}} = 2^{\frac{8}{5}} = 2 \cdot 2^{\frac{3}{5}} = 2 \cdot \sqrt[5]{2^3} = 2 \cdot \sqrt[5]{8} \\ \text{Dus } a &= 5 \text{ en } b = 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{66 } g(x) &= \frac{1}{3} \cdot 3^{x-3} - 2 \xrightarrow{\times -6 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -6\left(\frac{1}{3} \cdot 3^{x-3} - 2\right) = -2 \cdot 3^{x-3} + 12 \xrightarrow{\text{translatie } (0, -7)} h(x) = -2 \cdot 3^{x-3} + 5 \\ g(x) &= h(x) \text{ geeft } \frac{1}{3} \cdot 3^{x-3} - 2 = -2 \cdot 3^{x-3} + 5 \\ 2\frac{1}{3} \cdot 3^{x-3} &= 7 \\ 3^{x-3} &= 3 \\ x-3 &= 1 \\ x &= 4 \\ g(4) &= -1, \text{ dus } S(4, -1). \end{aligned}$$

Bladzijde 34

$$\begin{aligned} \text{67 a } B_f &= \langle 2, \rightarrow \rangle \\ \text{b } f(4) &= 4 \\ f(a) &= 66 \text{ geeft } 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{a-4} + 2 = 66 \\ 2 \cdot (2^{-1})^{a-4} &= 64 \\ 2^{-a+4} &= 32 \\ 2^{-a+4} &= 2^5 \\ -a+4 &= 5 \\ -a &= 1 \\ a &= -1 \\ \text{c } g(x) &= 0 \text{ geeft } \frac{1}{4} \cdot 2^{x-3} - 1 = 0 \\ \frac{1}{4} \cdot 2^{x-3} &= 1 \\ 2^{x-3} &= 4 \\ 2^{x-3} &= 2^2 \\ x-3 &= 2 \\ x &= 5, \text{ dus } A(5, 0). \\ f(5) &= 3, \text{ dus } B(5, 3). \\ g(x) &= 3 \text{ geeft } \frac{1}{4} \cdot 2^{x-3} - 1 = 3 \\ \frac{1}{4} \cdot 2^{x-3} &= 4 \\ 2^{x-3} &= 16 \\ 2^{x-3} &= 2^4 \\ x-3 &= 4 \\ x &= 7, \text{ dus } C(7, 3). \\ \text{Dus } BC &= 7 - 5 = 2. \end{aligned}$$

C8

$$a \quad y = 0,5^x \xrightarrow{\times -3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -3 \cdot 0,5^x \xrightarrow{\text{translatie } (0, 1)} f(x) = 1 - 3 \cdot 0,5^x$$

$B_f = \langle \leftarrow, 1 \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 1$.

$$b \quad y = 3^x \xrightarrow{\times 4 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 4 \cdot 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (0, -7)} y = 4 \cdot 3^x - 7 \xrightarrow{\times 5 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} g(x) = 4 \cdot 3^{0,2x} - 7$$

$B_g = \langle -7, \rightarrow \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = -7$.

C9

$$a \quad y = 5 \cdot 3^{2x+1} = 5 \cdot 3^{2x} \cdot 3 = 15 \cdot (3^2)^x = 15 \cdot 9^x$$

Dus $y = 15 \cdot 9^x$.

$$b \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 2^{3x+4} = (2^{-1})^x \cdot 2^{3x} \cdot 2^4 = 2^{-x} \cdot 2^{3x} \cdot 16 = 16 \cdot 2^{2x} = 16 \cdot (2^2)^x = 16 \cdot 4^x$$

Dus $y = 16 \cdot 4^x$.

$$c \quad y = \frac{1}{5^{2x-1}} = 5^{-(2x-1)} = 5^{1-2x} = 5 \cdot 5^{-2x} = 5 \cdot (5^{-2})^x = 5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^x$$

Dus $y = 5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^x$.

C10

$$a \quad \begin{aligned} 3^{x+2} &= 9\sqrt{3} \\ 3^{x+2} &= 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \\ 3^{x+2} &= 3^{2\frac{1}{2}} \\ x+2 &= 2\frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$b \quad \begin{aligned} 5 \cdot 2^{1-3x} &= 20 \\ 2^{1-3x} &= 4 \\ 2^{1-3x} &= 2^2 \\ 1-3x &= 2 \\ -3x &= 1 \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$c \quad \begin{aligned} 8 \cdot 4^x &= 2^{x-5} \\ 2^3 \cdot (2^2)^x &= 2^{x-5} \\ 2^3 \cdot 2^{2x} &= 2^{x-5} \\ 2^{2x+3} &= 2^{x-5} \\ 2x+3 &= x-5 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

5.5 Logaritmen

Bladzijde 35

68

$$a \quad 81 \times 2187 = 3^4 \times 3^7 = 3^{11} = 177\,147$$

$$b \quad 27 \times 729 = 3^3 \times 3^6 = 3^9 = 19\,683$$

$$9 \times 6561 = 3^2 \times 3^8 = 3^{10} = 59\,049$$

c, d *

$$e \quad 291 \times 1234 \approx 3^{5,16408} \times 3^{6,47910} = 3^{11,64318}$$

In de tabel zou de logaritme $5,16408 + 6,47910 = 11,64318$ moeten staan om de uitkomst te kunnen geven.

$3^{11,64318} \approx 359\,094$ en $291 \times 1234 = 359\,094$, dus de gevonden waarde klopt.

Bij de logaritme 11,64318 hoort dus, afgerond op gehele, het getal 359 094.

Bladzijde 36

69

$$a \quad {}^5\log(125) = {}^5\log(5^3) = 3$$

$$f \quad {}^2\log(0,5) = {}^2\log\left(\frac{1}{2}\right) = {}^2\log(2^{-1}) = -1$$

$$b \quad {}^{10}\log(0,1) = {}^{10}\log\left(\frac{1}{10}\right) = {}^{10}\log(10^{-1}) = -1$$

$$g \quad {}^4\log(0,25) = {}^4\log\left(\frac{1}{4}\right) = {}^4\log(4^{-1}) = -1$$

$$c \quad {}^2\log(4) = {}^2\log(2^2) = 2$$

$$h \quad {}^4\log(4) = {}^4\log(4^1) = 1$$

$$d \quad {}^7\log(49) = {}^7\log(7^2) = 2$$

$$i \quad {}^4\log(1) = {}^4\log(4^0) = 0$$

$$e \quad {}^2\log(\sqrt{2}) = {}^2\log(2^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$$

Bladzijde 37

70

$$a \quad {}^2\log(64\sqrt{2}) = {}^2\log(2^6 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = {}^2\log(2^{6\frac{1}{2}}) = 6\frac{1}{2}$$

$$b \quad {}^3\log\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\right) = {}^3\log(3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^3\log(3^{-\frac{3}{2}}) = -1\frac{1}{2}$$

$$c \quad {}^3\log(3^{21,5}) = 21,5$$

$$d \quad {}^5\log\left(\frac{1}{125}\right) = {}^5\log(5^{-3}) = -3$$

$$e \quad {}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{27}\right) = {}^{\frac{1}{3}}\log\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right) = 3$$

$$f \quad {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4}\right) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 2$$

$$g \quad {}^2\log\left(\frac{1}{32} \cdot \sqrt[3]{2}\right) = {}^2\log(2^{-5} \cdot 2^{\frac{1}{3}}) = {}^2\log(2^{-\frac{14}{3}}) = -4\frac{2}{3}$$

$$h \quad {}^5\log(1) = {}^5\log(5^0) = 0$$

$$i \quad {}^3\log(81 \cdot \sqrt[5]{27}) = {}^3\log(3^4 \cdot \sqrt[5]{3^3}) = {}^3\log(3^4 \cdot 3^{\frac{3}{5}}) = {}^3\log(3^{\frac{23}{5}}) = 4\frac{3}{5}$$

71

$$a \quad {}^3\log(9) = {}^3\log(3^2) = 2, \text{ dus } {}^3\log(x) = 2 \text{ geeft } x = 9.$$

$$b \quad {}^5\log\left(\frac{1}{25}\right) = {}^5\log(5^{-2}) = -2, \text{ dus } {}^5\log(x) = -2 \text{ geeft } x = \frac{1}{25}.$$

72 a $x = {}^5\log(0,2) = {}^5\log(\frac{1}{5}) = {}^5\log(5^{-1}) = -1$

b ${}^9\log(x) = \frac{1}{2}$
 $x = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

c ${}^x\log(1000) = 3$
 $x^3 = 1000$
 $x = 10$

73 a ${}^3\log(x+2) = 2$

$$x+2 = 3^2$$

$$x+2 = 9$$

$$x = 7$$

b $1 + \frac{1}{2}\log(x) = 4$

$$\frac{1}{2}\log(x) = 3$$

$$x = (\frac{1}{2})^3$$

$$x = \frac{1}{8}$$

c ${}^3\log(2x+1) = 4$

$$2x+1 = 3^4$$

$$2x+1 = 81$$

$$2x = 80$$

$$x = 40$$

d $5 + {}^4\log(x) = 3$

$${}^4\log(x) = -2$$

$$x = 4^{-2}$$

$$x = \frac{1}{16}$$

e $\frac{1}{2}\log(x-1) = 3$

$$x-1 = (\frac{1}{2})^3$$

$$x-1 = \frac{1}{8}$$

$$x = 1\frac{1}{8}$$

f ${}^2\log(x^2-4) = 5$

$$x^2-4 = 2^5$$

$$x^2-4 = 32$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6 \vee x = -6$$

74 a $4 \cdot {}^3\log(x) = 2$

$${}^3\log(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt{3}$$

b ${}^3\log(4x-1) = -2$

$$4x-1 = 3^{-2}$$

$$4x-1 = \frac{1}{9}$$

$$4x = 1\frac{1}{9}$$

$$x = \frac{5}{18}$$

c $3 + {}^2\log(x) = -1$

$${}^2\log(x) = -4$$

$$x = 2^{-4}$$

$$x = \frac{1}{16}$$

d ${}^5\log(3x+2) = 1$

$$3x+2 = 5$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

e ${}^3\log(0,4x-5) = 2$

$$0,4x-5 = 3^2$$

$$0,4x-5 = 9$$

$$0,4x = 14$$

$$x = 35$$

f $4 + 2 \cdot {}^2\log(x) = 7$

$$2 \cdot {}^2\log(x) = 3$$

$${}^2\log(x) = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 2^{1\frac{1}{2}}$$

$$x = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

$$x = 2\sqrt{2}$$

75 ${}^2\log({}^3\log(x)) = -1$

$${}^3\log(x) = 2^{-1}$$

$${}^3\log(x) = \frac{1}{2}$$

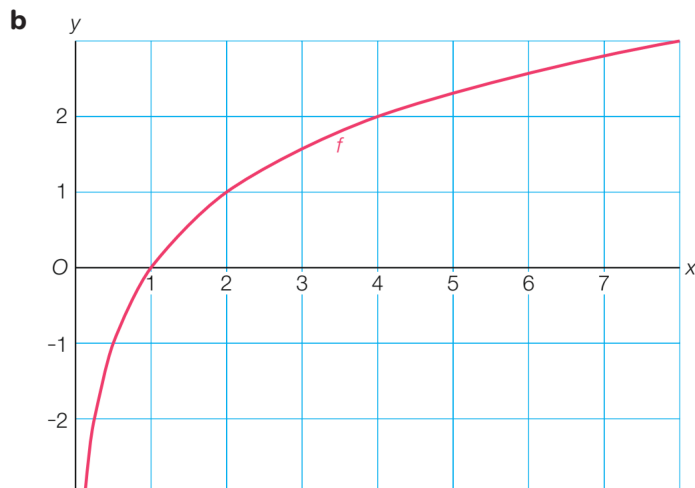
$$x = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt{3}$$

Bladzijde 38

76 a

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x) = {}^2\log(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3



c Bij ${}^2\log(x)$ moet gelden $x > 0$, dus $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

d $B_f = \mathbb{R}$

Bladzijde 39

77 $D_f = \langle -3, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$

Bladzijde 40

78 a $y = {}^3\log(x) \xrightarrow{\times 2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 2 \cdot {}^3\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (0, -4)} y = 2 \cdot {}^3\log(x) - 4$

b $y = {}^3\log(x) \xrightarrow{\times -1 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -{}^3\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (5, 0)} y = -{}^3\log(x - 5)$

c $y = {}^3\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (-3, 2)} y = {}^3\log(x + 3) + 2 \xrightarrow{\times \frac{1}{2} \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = \frac{1}{2}({}^3\log(x + 3) + 2) = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(x + 3) + 1$

d $y = {}^3\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (0, 5)} y = {}^3\log(x) + 5 \xrightarrow{\times \frac{1}{4} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} y = {}^3\log(4x) + 5$
 $\xrightarrow{\text{translatie } (-3, 0)} y = {}^3\log(4(x + 3)) + 5 = {}^3\log(4x + 12) + 5$

79 a $y = {}^3\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (-2, 3)} f(x) = {}^3\log(x + 2) + 3$

b $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (1, 0)} y = {}^2\log(x - 1) \xrightarrow{\times 5 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} g(x) = 5 \cdot {}^2\log(x - 1)$

c $y = {}^{\frac{1}{2}}\log(x) \xrightarrow{\times 4 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 4 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (0, -2)} y = 4 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(x) - 2$
 $\xrightarrow{\times \frac{1}{3} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} h(x) = 4 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(3x) - 2$

80 a $2x + 8 = 0$

$2x = -8$

$x = -4$

Dus de asymptoot is de lijn $x = -4$.

b $4x + 2 = 0$

$4x = -2$

$x = -\frac{1}{2}$

Dus de asymptoot is de lijn $x = -\frac{1}{2}$.

c $\frac{1}{2}x - 1 = 0$

$\frac{1}{2}x = 1$

$x = 2$

Dus de asymptoot is de lijn $x = 2$.

81 a $y = {}^3\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (5, 4)} y = {}^3\log(x - 5) + 4 \xrightarrow{\times \frac{1}{2} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} f(x) = {}^3\log(2x - 5) + 4$

b $2x - 5 = 0$

$2x = 5$

$x = 2,5$

Dus de asymptoot is de lijn $x = 2,5$.

c $f(x) = 7$ geeft ${}^3\log(2x - 5) + 4 = 7$

${}^3\log(2x - 5) = 3$

$2x - 5 = 3^3$

$2x - 5 = 27$

$2x = 32$

$x = 16$

$f(x) < 7$ geeft $2,5 < x < 16$

d $f(7) = {}^3\log(2 \cdot 7 - 5) + 4 = {}^3\log(9) + 4 = {}^3\log(3^2) + 4 = 2 + 4 = 6$

$x \leq 7$ geeft $f(x) \leq 6$

82 a $x - 1 = 0$

$x = 1$

Dus de asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = 1$.

$f(x) = 1\frac{1}{2}$ geeft ${}^4\log(x - 1) = 1\frac{1}{2}$

$x - 1 = 4^{1\frac{1}{2}}$

$x - 1 = 4\sqrt{4}$

$x - 1 = 8$

$x = 9$

$f(x) \leq 1\frac{1}{2}$ geeft $1 < x \leq 9$

b $x - 3 = 0$

$x = 3$

Dus de asymptoot van de grafiek van g is de lijn $x = 3$.

$g(x) = 1$ geeft $\frac{1}{4}\log(x - 3) + 2 = 1$

$\frac{1}{4}\log(x - 3) = -1$

$x - 3 = (\frac{1}{4})^{-1}$

$x - 3 = 4$

$x = 7$

$g(x) \geq 1$ geeft $3 < x \leq 7$

83 $f(39) = 2 \cdot \frac{1}{3}\log(2 \cdot 39 + 3) - 6 = 2 \cdot \frac{1}{3}\log(81) - 6 = 2 \cdot \frac{1}{3}\log((\frac{1}{3})^{-4}) - 6 = 2 \cdot -4 - 6 = -8 - 6 = -14$

$f(a) = -8$ geeft $2 \cdot \frac{1}{3}\log(2a + 3) - 6 = -8$

$2 \cdot \frac{1}{3}\log(2a + 3) = -2$

$\frac{1}{3}\log(2a + 3) = -1$

$2a + 3 = (\frac{1}{3})^{-1}$

$2a + 3 = 3$

$2a = 0$

$a = 0$

Bladzijde 41

C11 **a** ${}^2\log(16\sqrt{2}) = {}^2\log(2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = {}^2\log(2^{4\frac{1}{2}}) = 4\frac{1}{2}$

b ${}^3\log(\frac{1}{27}\sqrt{3}) = {}^3\log(3^{-3} \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^3\log(3^{-2\frac{1}{2}}) = -2\frac{1}{2}$

c ${}^5\log(\frac{1}{5}) = {}^5\log(5^{-1}) = -1$

d $\frac{1}{3}\log(\frac{1}{9}) = \frac{1}{3}\log((\frac{1}{3})^2) = 2$

e ${}^2\log(\frac{1}{8} \cdot \sqrt[5]{2}) = {}^2\log(2^{-3} \cdot 2^{\frac{1}{5}}) = {}^2\log(2^{-2\frac{4}{5}}) = -2\frac{4}{5}$

f ${}^{10}\log(1) = {}^{10}\log(10^0) = 0$

C12 **a** $2 + {}^4\log(x) = 1$

${}^4\log(x) = -1$

$x = 4^{-1}$

$x = \frac{1}{4}$

b ${}^3\log(2x - 5) = 2$

$2x - 5 = 3^2$

$2x - 5 = 9$

$2x = 14$

$x = 7$

c $\frac{1}{2}\log(x - 3) + 1 = 0$

$\frac{1}{2}\log(x - 3) = -1$

$x - 3 = (\frac{1}{2})^{-1}$

$x - 3 = 2$

$x = 5$

C13 **a** $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 3 \cdot {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (1, 0)} y = 3 \cdot {}^2\log(x - 1)$

$\xrightarrow{\times \frac{1}{2} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} f(x) = 3 \cdot {}^2\log(2x - 1)$

b $2x + 8 = 0$

$2x = -8$

$x = -4$

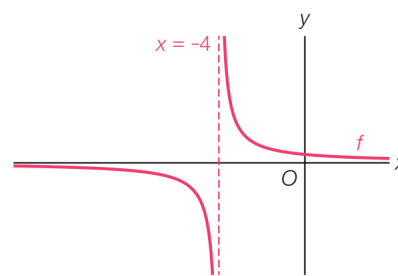
Dus de asymptoot is de lijn $x = -4$.

Bladzijde 42

1

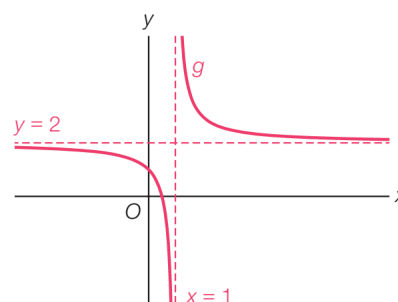
a $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (-4, 0)} f(x) = \frac{1}{x+4}$

Zie de schets hiernaast.



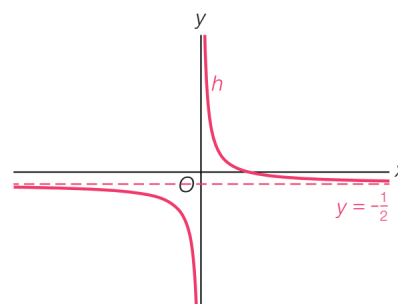
b $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (1, 2)} g(x) = \frac{1}{x-1} + 2$

Zie de schets hiernaast.



c $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (0, -\frac{1}{2})} h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

Zie de schets hiernaast.



2

a $\frac{x-5}{x-4} = \frac{8}{x+10}$

$(x-5)(x+10) = 8(x-4)$

$x^2 + 10x - 5x - 50 = 8x - 32$

$x^2 - 3x - 18 = 0$

$(x+3)(x-6) = 0$

$x = -3 \vee x = 6$

b $\frac{x-9}{x+3} = x-3$

$x-9 = (x+3)(x-3)$

$x-9 = x^2-9$

$-x^2 + x = 0$

$-x(x-1) = 0$

$x = 0 \vee x = 1$

c $\frac{2x^2-3}{x^2-2} = 3$

$2x^2-3 = 3(x^2-2)$

$2x^2-3 = 3x^2-6$

$-x^2 = -3$

$x^2 = 3$

$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

d $\frac{x^2-16x-36}{x^2-5} = 0$

$x^2-16x-36 = 0$

$(x+2)(x-18) = 0$

$x = -2 \vee x = 18$

3

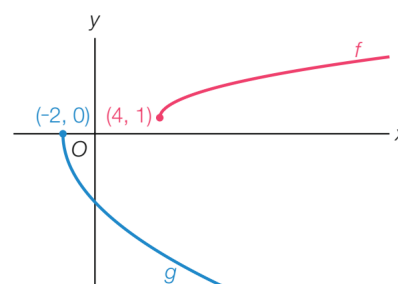
a $y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (4, 1)} f(x) = \sqrt{x-4} + 1$

$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\times -3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -3\sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (-2, 0)} g(x) = -3\sqrt{x+2}$

b Zie de figuur hiernaast.

c $D_f = [4, \rightarrow)$ en $B_f = [1, \rightarrow)$

$D_g = [-2, \rightarrow)$ en $B_g = \langle \leftarrow, 0 \rangle$



4 a $5 - 2x = 0$

$-2x = -5$

$x = 2,5$

$f(2,5) = -1$, dus randpunt $(-2,5; -1)$.

Los op $\sqrt{5 - 2x} - 1 = 3$.

Invoeren van de formules $y = \sqrt{5 - 2x} - 1$ en $y = 3$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = -5,5$.

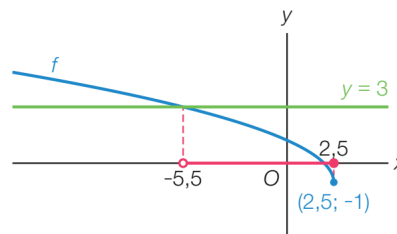
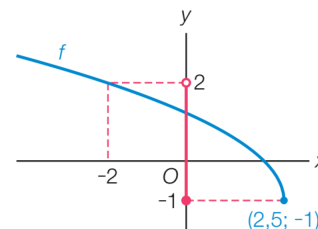
Zie de schets hiernaast.

$f(x) < 3$ geeft $-5,5 < x \leq 2,5$

b $f(-2) = 2$

Zie de schets hiernaast.

$x > -2$ geeft $-1 \leq f(x) < 2$



5 a $2x = \sqrt{2 - 7x}$

kwadrateren geeft

$4x^2 = 2 - 7x$

$4x^2 + 7x - 2 = 0$

$D = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot -2 = 81$, dus $\sqrt{D} = 9$

$x = \frac{-7 + 9}{8} = \frac{1}{4} \vee x = \frac{-7 - 9}{8} = -2$

$x = -2$ voldoet niet, dus $x = \frac{1}{4}$.

b $28 - x\sqrt{x} = 1$

$-x\sqrt{x} = -27$

kwadrateren geeft

$x^3 = 729$

$x = 9$

c $2x - \sqrt{x} = 6$

$2x - 6 = \sqrt{x}$

kwadrateren geeft

$(2x - 6)^2 = x$

$4x^2 - 24x + 36 = x$

$4x^2 - 25x + 36 = 0$

$D = (-25)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 49$, dus $\sqrt{D} = 7$

$x = \frac{25 + 7}{8} = 4 \vee x = \frac{25 - 7}{8} = 2\frac{1}{4}$

$x = 2\frac{1}{4}$ voldoet niet, dus $x = 4$.

d $x + 2\sqrt{7 - 3x} = 4$

$2\sqrt{7 - 3x} = 4 - x$

kwadrateren geeft

$4(7 - 3x) = (4 - x)^2$

$28 - 12x = 16 - 8x + x^2$

$x^2 + 4x - 12 = 0$

$(x - 2)(x + 6) = 0$

$x = 2 \vee x = -6$

6 a $x^{\frac{1}{3}} = x \cdot x^{\frac{2}{3}} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

b $\frac{2}{3}xy^{-\frac{1}{2}} = \frac{2x}{3y^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x}{3y \cdot y^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x}{3y\sqrt{y}}$

c $(5x^{\frac{1}{4}})^3 = 125x^{\frac{3}{4}} = \frac{125}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{125}{\sqrt[4]{x^3}}$

d $(\frac{2}{3}x)^{-1} = (\frac{2}{3})^{-1} \cdot x^{-1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{2x}$

e $(4x^{\frac{1}{3}})^{-2} = 4^{-2} \cdot x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{16} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

f $\frac{3}{5}x^{-2}y^{\frac{3}{4}} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{y^3}}{5x^2}$

7 a $y = x \cdot \sqrt[4]{x^3} = x \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{7}{4}}$

Dus $y = x^{\frac{7}{4}}$.

b $y = \frac{6}{2x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{x^{\frac{5}{2}}} = 3x^{-\frac{5}{2}}$

Dus $y = 3x^{-\frac{5}{2}}$.

c $y = \frac{10}{x} \cdot \sqrt[5]{x^3} = 10x^{-1} \cdot x^{\frac{3}{5}} = 10x^{-\frac{2}{5}}$

Dus $y = 10x^{-\frac{2}{5}}$.

- 8 a** $y = 2^x \xrightarrow{\times 0,3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 0,3 \cdot 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (1, -5)} f(x) = 0,3 \cdot 2^{x-1} - 5$
 $B_f = \langle -5, \rightarrow \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = -5$.
- b** $y = 0,7^x \xrightarrow{\text{translatie } (0, 2)} y = 2 + 0,7^x \xrightarrow{\times \frac{1}{3} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} g(x) = 2 + 0,7^{3x}$
 $B_g = \langle 2, \rightarrow \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 2$.
- c** $y = 3^x \xrightarrow{\times -5 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -5 \cdot 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (0, 4)} y = 4 - 5 \cdot 3^x \xrightarrow{\times 4 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} h(x) = 4 - 5 \cdot 3^{0,25x}$
 $B_h = \langle \leftarrow, 4 \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 4$.

- 9 a** $y = 108 \cdot 3^{4x-3} = 108 \cdot 3^{4x} \cdot 3^{-3} = 108 \cdot (3^4)^x \cdot \frac{1}{27} = 4 \cdot 81^x$
Dus $y = 4 \cdot 81^x$.
- b** $y = \frac{250}{5^{2x+3}} = 250 \cdot 5^{-2x-3} = 250 \cdot 5^{-2x} \cdot 5^{-3} = 250 \cdot (5^{-2})^x \cdot \frac{1}{125} = 2 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^x$
Dus $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^x$.
- c** $y = 32 \cdot 4^{2\frac{1}{2}x-2} = 32 \cdot 4^{2\frac{1}{2}x} \cdot 4^{-2} = 32 \cdot (4^{2\frac{1}{2}})^x \cdot \frac{1}{16} = 2 \cdot 32^x$
Dus $y = 2 \cdot 32^x$.

- 10 a** $5^{x-1} = 125$
 $5^{x-1} = 5^3$
 $x-1 = 3$
 $x = 4$
- b** $3^{2x-5} = \frac{1}{27}$
 $3^{2x-5} = 3^{-3}$
 $2x-5 = -3$
 $2x = 2$
 $x = 1$
- c** $2 \cdot 4^{2x-1} - 3 = 61$
 $2 \cdot 4^{2x-1} = 64$
 $4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{2x-1} = 4^3$
 $4^{2x-\frac{1}{2}} = 4^3$
 $2x - \frac{1}{2} = 3$
 $2x = 3\frac{1}{2}$
 $x = 1\frac{3}{4}$

- 11 a** ${}^2\log(\frac{1}{4}\sqrt{8}) = {}^2\log(2^{-2} \cdot (2^3)^{\frac{1}{2}}) = {}^2\log(2^{-2} \cdot 2^{\frac{3}{2}}) = {}^2\log(2^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}$
- b** ${}^3\log(27\sqrt{3}) = {}^3\log(3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^3\log(3^{3\frac{1}{2}}) = 3\frac{1}{2}$
- c** ${}^5\log(\frac{1}{125} \cdot \sqrt[3]{5}) = {}^5\log(5^{-3} \cdot 5^{\frac{1}{3}}) = {}^5\log(5^{-2\frac{2}{3}}) = -2\frac{2}{3}$

- 12 a** ${}^4\log(2x-3) = 2$
 $2x-3 = 4^2$
 $2x-3 = 16$
 $2x = 19$
 $x = 9\frac{1}{2}$
- b** ${}^{\frac{1}{2}}\log(x-3) = -4$
 $x-3 = (\frac{1}{2})^{-4}$
 $x-3 = 2^4$
 $x-3 = 16$
 $x = 19$
- c** $5 + 3 \cdot {}^2\log(x) = 20$
 $3 \cdot {}^2\log(x) = 15$
 ${}^2\log(x) = 5$
 $x = 2^5$
 $x = 32$

- 13 a** $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\times -\frac{1}{3} \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -\frac{1}{3} \cdot {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (-3, 0)} y = -\frac{1}{3} \cdot {}^2\log(x+3)$
- b** $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\times 4 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 4 \cdot {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (1, 0)} y = 4 \cdot {}^2\log(x-1)$
 $\xrightarrow{\times 2 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} f(x) = 4 \cdot {}^2\log(\frac{1}{2}x-1)$

- 14 a** $2x + 3 = 0$
 $2x = -3$
 $x = -1\frac{1}{2}$
Dus de asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = -1\frac{1}{2}$.
- b** $f(x) = 4$ geeft $2 + {}^3\log(2x+3) = 4$
 ${}^3\log(2x+3) = 2$
 $2x+3 = 3^2$
 $2x+3 = 9$
 $2x = 6$
 $x = 3$
 $f(x) \leq 4$ geeft $-1\frac{1}{2} < x \leq 3$
- c** $f(-1\frac{1}{3}) = 2 + {}^3\log(2 \cdot -1\frac{1}{3} + 3) = 2 + {}^3\log(\frac{1}{3}) = 2 + {}^3\log(3^{-1}) = 2 - 1 = 1$
 $x < -1\frac{1}{3}$ geeft $f(x) < 1$

Gemengde opgaven

Bladzijde 44

1 $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (3, 4)} f(x) = \frac{1}{x-3} + 4$
 k snijden met de grafiek van f geeft $\frac{1}{x-3} + 4 = 2x - 1$
 $\frac{1}{x-3} = 2x - 5$
 $(x-3)(2x-5) = 1$
 $2x^2 - 5x - 6x + 15 = 1$
 $2x^2 - 11x + 14 = 0$
 $D = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 14 = 9$, dus $\sqrt{D} = 3$
 $x = \frac{11 \pm 3}{4} = 3\frac{1}{2} \vee x = \frac{11-3}{4} = 2$

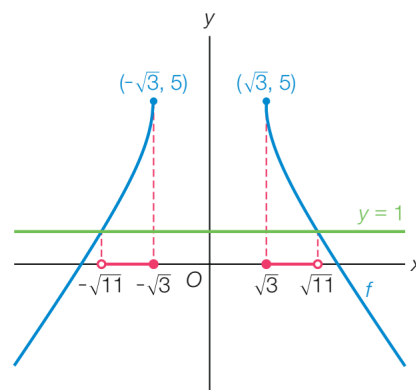
$x = 2$ geeft $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ en $x = 3\frac{1}{2}$ geeft $y = 2 \cdot 3\frac{1}{2} - 1 = 6$.
Dus de snijpunten zijn $(2, 3)$ en $(3\frac{1}{2}, 6)$.

2 a $2x^2 - 6 = 0$
 $2x^2 = 6$
 $x^2 = 3$
 $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$
 $f(\sqrt{3}) = 5$ en $f(-\sqrt{3}) = 5$, dus de randpunten zijn $(\sqrt{3}, 5)$ en $(-\sqrt{3}, 5)$.

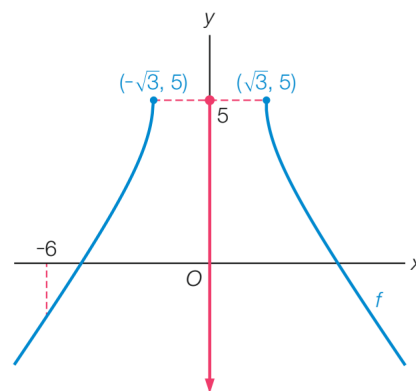
b $f(x) = 1$ geeft $5 - \sqrt{2x^2 - 6} = 1$
 $\sqrt{2x^2 - 6} = 4$
kwadrateren geeft
 $2x^2 - 6 = 16$
 $2x^2 = 22$
 $x^2 = 11$
 $x = \sqrt{11} \vee x = -\sqrt{11}$

Zie de schets hiernaast.

$f(x) > 1$ geeft $-\sqrt{11} < x \leq -\sqrt{3} \vee \sqrt{3} \leq x < \sqrt{11}$



c Zie de schets hiernaast.
 $x > -6$ geeft $f(x) \leq 5$



3 a $f(x) = 5$ geeft $\frac{1}{x-2} + 3 = 5$
 $\frac{1}{x-2} = 2$
 $2(x-2) = 1$
 $2x - 4 = 1$
 $2x = 5$
 $x = 2\frac{1}{2}$
Dus $AB = 9 - 2\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$.

$g(x) = 5$ geeft $8 - 3\sqrt{10-x} = 5$
 $3\sqrt{10-x} = 3$
 $\sqrt{10-x} = 1$
 $10-x = 1$
 $x = 9$

$$\text{b } y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (2, 3)} f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 2$, dus $C(2, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = ax - 1 \\ \text{door } C(2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2a - 1 = 0 \\ 2a = 1 \\ a = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} k: y = \frac{1}{2}x - 1 \text{ snijden met de grafiek van } g \text{ geeft } 8 - 3\sqrt{10-x} &= \frac{1}{2}x - 1 \\ -3\sqrt{10-x} &= \frac{1}{2}x - 9 \\ \text{kwadrateren geeft} \\ 9(10-x) &= \left(\frac{1}{2}x - 9\right)^2 \\ 90 - 9x &= \frac{1}{4}x^2 - 9x + 81 \\ -\frac{1}{4}x^2 &= -9 \\ x^2 &= 36 \\ x &= 6 \vee x = -6 \end{aligned}$$

$$x = 6 \text{ geeft } y = \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 2 \text{ en } x = -6 \text{ geeft } y = \frac{1}{2} \cdot -6 - 1 = -4.$$

Dus de snijpunten zijn $(-6, -4)$ en $(6, 2)$.

c De horizontale asymptoot is de lijn $y = 3$, dus $E(2, 3)$.

$10 - x = 0$ geeft $x = 10$, dus randpunt $(10, 8)$.

$$l: y = ax + b$$

$$a = \frac{8-3}{10-2} = \frac{5}{8}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{5}{8}x + b \\ \text{door } E(2, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{5}{8} \cdot 2 + b = 3 \\ 1\frac{1}{4} + b = 3 \\ b = 1\frac{3}{4} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = \frac{5}{8}x + 1\frac{3}{4}.$$

$$l \text{ snijden met de grafiek van } f \text{ geeft } \frac{1}{x-2} + 3 = \frac{5}{8}x + 1\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{5}{8}x - 1\frac{1}{4}$$

$$\frac{8}{x-2} = 5x - 10$$

$$(x-2)(5x-10) = 8$$

$$5x^2 - 10x - 10x + 20 = 8$$

$$5x^2 - 20x + 12 = 0$$

$$D = (-20)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12 = 160$$

$$x = \frac{20 + \sqrt{160}}{10} \vee x = \frac{20 - \sqrt{160}}{10}$$

$$\begin{aligned} x_Q - x_P &= \frac{20 + \sqrt{160}}{10} - \frac{20 - \sqrt{160}}{10} = \frac{20 + \sqrt{160} - (20 - \sqrt{160})}{10} = \frac{20 + \sqrt{160} - 20 + \sqrt{160}}{10} \\ &= \frac{2\sqrt{160}}{10} = \frac{1}{5}\sqrt{160} \end{aligned}$$

$$\text{d } f(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{x-2} + 3 = 0$$

$$\frac{1}{x-2} = -3$$

$$-3(x-2) = 1$$

$$-3x + 6 = 1$$

$$-3x = -5$$

$$x = 1\frac{2}{3}$$

In de figuur in het leerboek is te zien dat de grafiek van g de x -as rechts van de verticale asymptoot van de grafiek van f snijdt.

De verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = 2$.

Dus zowel $f(x) < 0$ als $g(x) < 0$ geeft $1\frac{2}{3} < x < 2$.

4

$$\text{a } \frac{2\sqrt{x}}{4 + \sqrt{x}} = \frac{2}{3}$$

$$6\sqrt{x} = 2(4 + \sqrt{x})$$

$$6\sqrt{x} = 8 + 2\sqrt{x}$$

$$4\sqrt{x} = 8$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

$$\text{b } {}^2\log(x^2 - 2) = 3$$

$$x^2 - 2 = 2^3$$

$$x^2 - 2 = 8$$

$$x^2 = 10$$

$$x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$$

$$\text{c } {}^3\log(8x + \sqrt{3}) = 2\frac{1}{2}$$

$$8x + \sqrt{3} = 3^{2\frac{1}{2}}$$

$$8x = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - \sqrt{3}$$

$$8x = 9\sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$8x = 8\sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3}$$

$$\text{d } 128 - 4 \cdot 3^{1+\sqrt{x}} = 20$$

$$4 \cdot 3^{1+\sqrt{x}} = 108$$

$$3^{1+\sqrt{x}} = 27$$

$$3^{1+\sqrt{x}} = 3^3$$

$$1 + \sqrt{x} = 3$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

$$\text{e } 3 \cdot 2^{x^2-2} + 12 = 60$$

$$3 \cdot 2^{x^2-2} = 48$$

$$2^{x^2-2} = 16$$

$$2^{x^2-2} = 2^4$$

$$x^2 - 2 = 4$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$$

$$\text{f } \frac{x^2 + 19x}{8 - x} = \frac{x + 10}{3}$$

$$3(x^2 + 19x) = (8 - x)(x + 10)$$

$$3x^2 + 57x = 8x + 80 - x^2 - 10x$$

$$4x^2 + 59x - 80 = 0$$

$$D = 59^2 - 4 \cdot 4 \cdot -80 = 4761, \text{ dus } \sqrt{D} = 69$$

$$x = \frac{-59 + 69}{8} = 1\frac{1}{4} \vee x = \frac{-59 - 69}{8} = -16$$

5

$$\text{a } 2x + 3q = 0$$

$$2x = -3q$$

$$x = -1\frac{1}{2}q$$

De verticale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $x = -1\frac{1}{2}q$.

Van de grafiek van f is $x_{\text{top}} = -\frac{-3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$.

Top van de grafiek van f op de asymptoot van de grafiek van g geeft $-1\frac{1}{2}q = \frac{3}{4}$

$$q = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b } f(x) = 0 \text{ geeft } 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25, \text{ dus } \sqrt{D} = 5$$

$$x = \frac{3+5}{4} = 2 \vee x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$g(2) = 0 \text{ geeft } {}^3\log(2 \cdot 2 + 3q) = 0$$

$$4 + 3q = 3^0$$

$$4 + 3q = 1$$

$$3q = -3$$

$$q = -1$$

Dus voor $q = -1$ en $q = \frac{2}{3}$.

$$g(-\frac{1}{2}) = 0 \text{ geeft } {}^3\log(2 \cdot -\frac{1}{2} + 3q) = 0$$

$$-1 + 3q = 3^0$$

$$-1 + 3q = 1$$

$$3q = 2$$

$$q = \frac{2}{3}$$

Bladzijde 45

6

$$\text{a } y = 2^x \xrightarrow{\times 0,4 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 0,4 \cdot 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (2, -4)} f(x) = 0,4 \cdot 2^{x-2} - 4$$

$$y = 3^x \xrightarrow{\times -0,2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -0,2 \cdot 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (-1, 5)} y = 5 - 0,2 \cdot 3^{x+1} \xrightarrow{\times 2 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}}$$

$$g(x) = 5 - 0,2 \cdot 3^{0,5x+1}$$

$$\text{b } f(x) = 2,4 \text{ geeft } 0,4 \cdot 2^{x-2} - 4 = 2,4$$

$$0,4 \cdot 2^{x-2} = 6,4$$

$$2^{x-2} = 16$$

$$2^{x-2} = 2^4$$

$$x - 2 = 4$$

$$x = 6$$

Dus $f(x) \geq 2,4$ geeft $x \geq 6$.

- c** Los op $f(p) - g(p) = 10$ oftewel $0,4 \cdot 2^{p-2} - 4 - (5 - 0,2 \cdot 3^{0,5p+1}) = 10$.
Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $p \approx 5,71$.
- d** De asymptoot van de grafiek van g is de lijn $y = 5$.
Dus voor $q \geq 5$ heeft de vergelijking $f(x) = q$ één oplossing en de vergelijking $g(x) = q$ geen oplossing.

7

- a** $2x + 6 = 0$ $4 - x = 0$
 $2x = -6$ $x = 4$
 $x = -3$, dus randpunt $(-3, -1)$. Dus $D_g = \langle \leftarrow, 4 \rangle$ en $B_g = \mathbb{R}$.
 Dus $D_f = [-3, \rightarrow)$ en $B_f = [-1, \rightarrow)$.
- b** $f(2) = -1 + \sqrt{2 \cdot 2 + 6} = -1 + \sqrt{10}$ en $g(2) = {}^2\log(4 - 2) = {}^2\log(2) = 1$
 Dus $AB = -1 + \sqrt{10} - 1 = \sqrt{10} - 2$.
- c** $f(x) = 0$ geeft $-1 + \sqrt{2x + 6} = 0$
 $\sqrt{2x + 6} = 1$
 $2x + 6 = 1$
 $2x = -5$
 $x = -2\frac{1}{2}$, dus $C(-2\frac{1}{2}, 0)$.
 $g(0) = {}^2\log(4) = {}^2\log(2^2) = 2$, dus $D(0, 2)$.
 $k: y = ax + 2$
 $a = \frac{2}{2\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$
 $k: y = \frac{4}{5}x + 2$ snijden met de grafiek van f geeft $-1 + \sqrt{2x + 6} = \frac{4}{5}x + 2$
 $\sqrt{2x + 6} = \frac{4}{5}x + 3$
 kwadrateren geeft
 $2x + 6 = (\frac{4}{5}x + 3)^2$
 $2x + 6 = \frac{16}{25}x^2 + 4\frac{4}{5}x + 9$
 $\frac{16}{25}x^2 + 2\frac{4}{5}x + 3 = 0$
 $16x^2 + 70x + 75 = 0$
 $D = 70^2 - 4 \cdot 16 \cdot 75 = 100$, dus $\sqrt{D} = 10$
 $x = \frac{-70 \pm 10}{32} = -1\frac{7}{8} \vee x = \frac{-70 - 10}{32} = -2\frac{1}{2}$
 $x = -1\frac{7}{8}$ geeft $y = \frac{4}{5} \cdot -1\frac{7}{8} + 2 = \frac{1}{2}$
 Dus $E(-1\frac{7}{8}, \frac{1}{2})$.

8

- a** $f(-1\frac{1}{2}) = {}^2\log(5 - 2 \cdot -1\frac{1}{2}) = {}^2\log(8) = {}^2\log(2^3) = 3$
 $g(-1\frac{1}{2}) = 3$ geeft $1 + 2^{-1\frac{1}{2}+p} = 3$
 $2^{-1\frac{1}{2}+p} = 2$
 $-1\frac{1}{2} + p = 1$
 $p = 2\frac{1}{2}$
- b** $5 - 2x = 0$
 $-2x = -5$
 $x = 2\frac{1}{2}$
 De verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = 2\frac{1}{2}$, dus $B(2\frac{1}{2}, 5)$.
 $g(2\frac{1}{2}) = 5$ geeft $1 + 2^{2\frac{1}{2}+p} = 5$
 $2^{2\frac{1}{2}+p} = 4$
 $2^{2\frac{1}{2}+p} = 2^2$
 $2\frac{1}{2} + p = 2$
 $p = -\frac{1}{2}$
- c** $f(x) = 0$ geeft ${}^2\log(5 - 2x) = 0$
 $5 - 2x = 2^0$
 $5 - 2x = 1$
 $2x = 4$
 $x = 2$
 $g(2) = 1 + 2^2 = 5$, dus de grafiek van g moet 5 naar beneden geschoven worden.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d} \quad & g(0) = 1 + 2^0 = 2 \\
 & f(x) = 2 \text{ geeft } {}^2\log(5 - 2x) = 2 \\
 & \quad 5 - 2x = 2^2 \\
 & \quad 5 - 2x = 4 \\
 & \quad -2x = -1 \\
 & \quad x = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Dus de grafiek van f moet $\frac{1}{2}$ naar links geschoven worden.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e} \quad & f(x) = {}^2\log(5 - 2x) \xrightarrow{\text{translatie } (-2, 3)} h(x) = 3 + {}^2\log(5 - 2(x + 2)) \\
 & \quad = 3 + {}^2\log(5 - 2x - 4) \\
 & \quad = 3 + {}^2\log(1 - 2x)
 \end{aligned}$$

$$h(0) = 3 + {}^2\log(1) = 3 + {}^2\log(2^0) = 3 + 0 = 3$$

$$g(x) = 3 \text{ geeft } 1 + 2^x = 3$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

Dus de grafiek van g moet 1 naar links geschoven worden.

6 De afgeleide functie

6.1 Raaklijnen en toppen

Bladzijde 48

- V1**
- a** $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6x - 1$ geeft $f'(x) = 2x^3 - 6x + 6$
 - b** $g(x) = (5x^2 - 2)^2 = 25x^4 - 20x^2 + 4$ geeft $g'(x) = 100x^3 - 40x$
 - c** $h(p) = -\frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{5}p^2 - 8$ geeft $h'(p) = -\frac{1}{2}p^2 + \frac{2}{5}p$
 - d** $k(q) = 10 - 5q^2 + 9q^3 - a^4$ geeft $k'(q) = -10q + 27q^2$

- V2**
- a** $f(x) = 1\frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 7x + 5$ geeft $f'(x) = 4x^2 - 12x + 7$
Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = 4x^2 - 12x + 7$.
 - b** $x = 1$ geeft helling $= 4 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 7 = -1$
 - c** helling $= 2$ geeft $4x^2 - 12x + 7 = 2$

$$4x^2 - 12x + 5 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 64, \text{ dus } \sqrt{D} = 8$$

$$x = \frac{12 + 8}{8} \vee x = \frac{12 - 8}{8}$$

$$x = 2\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$$

Bladzijde 49

- 1**
- a** $y_A = f(1) = 1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1 - 4 = -2$
 - b** $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 4$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$
Dus de formule van de hellinggrafiek van f is $y = 3x^2 - 2x + 2$.
 - c** $x = 1$ geeft helling $= 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 3$
 - d** De formule van k is van de vorm $y = ax + b$.
 a is gelijk aan de helling van de grafiek van f in A , dus $a = 3$.
 $A(1, -2)$ ligt op k en hiermee bereken je b .

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + b \\ \text{door } A(1, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 1 + b = -2 \\ 3 + b = -2 \\ b = -5 \end{array}$$
Dus $k: y = 3x - 5$.

Bladzijde 50

- 2**
- a** $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 4x$
 $y = ax + b$
 $a = f'(4) = 1\frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 = 8$
 $y = 8x + b$
 $f(4) = 2$, dus $A(4, 2)$

$$\left. \begin{array}{l} y = 8x + b \\ f(4) = 2, \text{ dus } A(4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 \cdot 4 + b = 2 \\ 32 + b = 2 \\ b = -30 \end{array}$$
Dus $k: y = 8x - 30$.
 - b** $y = ax + b$
 $a = f'(-1) = 1\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 4 \cdot -1 = 5\frac{1}{2}$
 $y = 5\frac{1}{2}x + b$
 $f(-1) = -\frac{1}{2}$, dus $B(-1, -\frac{1}{2})$

$$\left. \begin{array}{l} y = 5\frac{1}{2}x + b \\ f(-1) = -\frac{1}{2}, \text{ dus } B(-1, -\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5\frac{1}{2} \cdot -1 + b = -\frac{1}{2} \\ -5\frac{1}{2} + b = -\frac{1}{2} \\ b = 5 \end{array}$$
Dus $l: y = 5\frac{1}{2}x + 5$.

- 3**
- a** $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$
 $y = ax + b$
 $a = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = 7$
 $y = 7x + b$
 $\text{door } A(2, 1)$

$$\left. \begin{array}{l} y = 7x + b \\ \text{door } A(2, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7 \cdot 2 + b = 1 \\ 14 + b = 1 \\ b = -13 \end{array}$$
Dus $k: y = 7x - 13$.

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad & y = ax + b \\ & a = f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = -1 \\ & y = -x + b \\ & f(0) = -1, \text{ dus } B(0, -1) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} & y = ax + b \\ & a = f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = -1 \\ & y = -x + b \\ & f(0) = -1, \text{ dus } B(0, -1) \end{aligned}} \right\} l: y = -x - 1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{4} \quad \mathbf{a} \quad & g(x) = 0 \text{ geeft } 2x^2 - 6x = 0 \\ & 2x(x - 3) = 0 \\ & x = 0 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Dus $A(3, 0)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad & g(x) = 2x^2 - 6x \text{ geeft } g'(x) = 4x - 6 \\ & y = ax + b \\ & a = g'(3) = 4 \cdot 3 - 6 = 6 \\ & y = 6x + b \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} & y = ax + b \\ & a = g'(3) = 4 \cdot 3 - 6 = 6 \\ & y = 6x + b \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} & 6 \cdot 3 + b = 0 \\ & 18 + b = 0 \\ & b = -18 \end{aligned}$$

Dus $k: y = 6x - 18$.

$$\begin{aligned} \mathbf{5} \quad \mathbf{a} \quad & f(x) = 0 \text{ geeft } x^3 - 4x = 0 \\ & x(x^2 - 4) = 0 \\ & x = 0 \vee x^2 = 4 \\ & x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

Dus $A(-2, 0)$.

$$\begin{aligned} & f(x) = x^3 - 4x \text{ geeft } f'(x) = 3x^2 - 4 \\ & y = ax + b \\ & a = f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 \\ & y = 8x + b \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} & y = ax + b \\ & a = f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 \\ & y = 8x + b \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} & 8 \cdot (-2) + b = 0 \\ & -16 + b = 0 \\ & b = 16 \end{aligned}$$

Dus $k: y = 8x + 16$.

$x = 0$ geeft $y = 8 \cdot 0 + 16 = 16$, dus $y_B = 16$.

$\mathbf{b}$ De grafiek van f snijdt de positieve x -as in $D(2, 0)$ (zie vraag a).

$$\begin{aligned} & y = ax + b \\ & a = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 4 = -1 \\ & y = -x + b \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} & y = ax + b \\ & a = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 4 = -1 \\ & y = -x + b \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} & 1 + b = 3 \\ & b = 2 \end{aligned}$$

Dus $l: y = -x + 2$.

$x = 2$ geeft $y = -2 + 2 = 0$, dus l gaat door D .

$$\begin{aligned} \mathbf{6} \quad & f(6) = -4 \text{ geeft } a \cdot 6^2 - 4 \cdot 6 + 2 = -4 \\ & 36a - 24 + 2 = -4 \\ & 36a = 18 \\ & a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$ en dit geeft $f'(x) = x - 4$.

$$\begin{aligned} & y = px + q \\ & p = f'(6) = 6 - 4 = 2 \\ & y = 2x + q \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} & y = px + q \\ & p = f'(6) = 6 - 4 = 2 \\ & y = 2x + q \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} & 2 \cdot 6 + q = -4 \\ & 12 + q = -4 \\ & q = -16 \end{aligned}$$

Dus $k: y = 2x - 16$.

$y = 0$ geeft $2x - 16 = 0$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

Dus $x_B = 8$.

Bladzijde 51

7 a $h(x) = -x^2 + 5x - 4$ geeft $h'(x) = -2x + 5$, dus $h'(x_A) = -2x_A + 5$.
b $-2x_A + 5 = 2$
 $-2x_A = -3$
 $x_A = 1\frac{1}{2}$
 $y_A = h(1\frac{1}{2}) = -(1\frac{1}{2})^2 + 5 \cdot 1\frac{1}{2} - 4 = 1\frac{1}{4}$

8 $y = ax + b$
 $a = 3$
 $y = 3x + b$
 door $A(-1, 17)$ $\left. \begin{array}{l} 3 \cdot -1 + b = 17 \\ -3 + b = 17 \\ b = 20 \end{array} \right\}$
 Dus $y = 3x + 20$.

Bladzijde 52

9 a $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ geeft $f'(x) = -2x + 2$
 $f'(x) = 4$ geeft $-2x + 2 = 4$
 $-2x = 2$
 $x = -1$
 $x_A = -1$ geeft $y_A = f(-1) = 0$, dus $A(-1, 0)$.
b De helling in het punt B van de grafiek van f is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in B . Deze raaklijn is evenwijdig met de lijn $k: y = -6x + 8$.
 Dus $f'(x_B) = rc_{\text{raaklijn}} = rc_k = -6$.
 $f'(x) = -6$ geeft $-2x + 2 = -6$
 $-2x = -8$
 $x = 4$
 $x_B = 4$ geeft $y_B = f(4) = -5$, dus $B(4, -5)$.

10 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x - 2$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$
 $f'(x) = 3$ geeft $\frac{1}{2}x^2 - 3 = 3$
 $\frac{1}{2}x^2 = 6$
 $x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$
 $x_A = -2$ geeft $y_A = f(-2) = 0$, dus $A(-2, 0)$.
 $x_B = 2$ geeft $y_B = f(2) = -4$, dus $B(2, -4)$.

11 a $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$ geeft $f'(x) = -x^2 + 2x$
 $y = ax + b$
 $a = f'(3) = -3^2 + 2 \cdot 3 = -3$
 $y = -3x + b$
 $f(3) = 1$, dus $A(3, 1)$ $\left. \begin{array}{l} -3 \cdot 3 + b = 1 \\ -9 + b = 1 \\ b = 10 \end{array} \right\}$
 Dus $l: y = -3x + 10$.
b $rc_m = rc_l = -3$
 $f'(x) = -3$ geeft $-x^2 + 2x = -3$
 $-x^2 + 2x + 3 = 0$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x+1)(x-3) = 0$
 $x = -1 \vee x = 3$
 $y = -3x + b$
 $f(-1) = 2\frac{1}{3}$, dus $B(-1, 2\frac{1}{3})$ $\left. \begin{array}{l} -3 \cdot -1 + b = 2\frac{1}{3} \\ 3 + b = 2\frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \end{array} \right\}$
 Dus $m: y = -3x - \frac{2}{3}$.
 $x = 0$ geeft $y = -3 \cdot 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$, dus $y_C = -\frac{2}{3}$.

12 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 5$ geeft $f'(x) = x^2 - 2x - 2$
 $f'(x) = 1$ geeft $x^2 - 2x - 2 = 1$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x+1)(x-3) = 0$
 $x = -1 \vee x = 3$

Raaklijn k in het punt met x -coördinaat -1 snijdt de y -as in B .

$$\left. \begin{array}{l} y = x + b \\ f(-1) = 5\frac{2}{3}, \text{ dus } (-1, 5\frac{2}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 + b = 5\frac{2}{3} \\ b = 6\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $k: y = x + 6\frac{2}{3}$ en $B(0, 6\frac{2}{3})$.

Raaklijn l in het punt met x -coördinaat 3 snijdt de y -as in C .

$$\left. \begin{array}{l} y = x + b \\ f(3) = -1, \text{ dus } (3, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 + b = -1 \\ b = -4 \end{array}$$

Dus $l: y = x - 4$ en $C(0, -4)$.

Dus de afstand tussen B en C is $6\frac{2}{3} - (-4) = 10\frac{2}{3}$.

b $f'(x) = -4$ geeft $x^2 - 2x - 2 = -4$
 $x^2 - 2x + 2 = 0$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$

$D < 0$, dus de vergelijking $f'(x) = -4$ heeft geen oplossing en dus heeft de grafiek van f geen raaklijn met richtingscoëfficiënt -4 .

c $f'(x) = -3$ geeft $x^2 - 2x - 2 = -3$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x-1)(x-1) = 0$
 $x = 1$

De vergelijking $f'(x) = -3$ heeft één oplossing en dus heeft de grafiek van f één raaklijn waarvan de richtingscoëfficiënt -3 is.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ f(1) = 2\frac{1}{3}, \text{ dus } (1, 2\frac{1}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 1 + b = 2\frac{1}{3} \\ -3 + b = 2\frac{1}{3} \\ b = 5\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $y = -3x + 5\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} y = 0 \text{ geeft } -3x + 5\frac{1}{3} &= 0 \\ -3x &= -5\frac{1}{3} \\ x &= 1\frac{7}{9} \end{aligned}$$

Dus $x_S = 1\frac{7}{9}$.

Bladzijde 53

13 $f(-2) = -6$ geeft $4a - 2b = -6$
 $-2b = -4a - 6$
 $b = 2a + 3$
 $f(x) = ax^2 + bx$ geeft $f'(x) = 2ax + b$
 $f'(-2) = 2$ geeft $-4a + b = 2$
 $b = 4a + 2$

Hieruit volgt $2a + 3 = 4a + 2$

$$\begin{aligned} -2a &= -1 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$a = \frac{1}{2}$ geeft $b = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 4$

14 $f(x) = x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$
 $f'(x) = 0$ geeft $3x^2 - 3x - 6 = 0$
 $x^2 - x - 2 = 0$
 $(x+1)(x-2) = 0$
 $x = -1 \vee x = 2$

$x_A = -1$ geeft $y_A = f(-1) = 6\frac{1}{2}$, dus $A(-1, 6\frac{1}{2})$.

$x_B = 2$ geeft $y_B = f(2) = -7$, dus $B(2, -7)$.

De formule van de raaklijn in A is $y = 6\frac{1}{2}$.

De formule van de raaklijn in B is $y = -7$.

Bladzijde 54

15 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 + 10x + 5$ geeft $f'(x) = x^2 + 7x + 10$
 $f'(x) = 0$ geeft $x^2 + 7x + 10 = 0$
 $(x+2)(x+5) = 0$
 $x = -2 \vee x = -5$

Je krijgt max. is $f(-5) = \frac{5}{6}$ en min. is $f(-2) = -3\frac{2}{3}$.

b $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + 3\frac{3}{4}x + 3$ geeft $g'(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + 3\frac{3}{4}$
 $g'(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + 3\frac{3}{4} = 0$
 $2x^2 + x - 15 = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -15 = 121$, dus $\sqrt{D} = 11$
 $x = \frac{-1 \pm 11}{4} = 2\frac{1}{2} \vee x = -3$

Je krijgt min. is $g(-3) = -4\frac{7}{8}$ en max. is $g(2\frac{1}{2}) = 8\frac{95}{96}$.

16 a $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 40$ geeft $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$
 $f'(x) = 0$ geeft $12x^3 - 12x^2 - 24x = 0$
 $12x(x^2 - x - 2) = 0$
 $12x(x+1)(x-2) = 0$
 $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$

$x_A = -1$ geeft $y_A = f(-1) = 35$, dus $A(-1, 35)$.

$x_B = 0$ geeft $y_B = f(0) = 40$, dus $B(0, 40)$.

$x_C = 2$ geeft $y_C = f(2) = 8$, dus $C(2, 8)$.

b $B_f = [8, \rightarrow)$

c Alle horizontale lijnen die liggen tussen $y = y_A$ en $y = y_B$ snijden de grafiek van f vier keer.

Dus de vergelijking $f(x) = p$ heeft vier oplossingen voor $35 < p < 40$.

d $y = ax + b$
 $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 40}{2 - 0} = -16$

$y = -16x + b$
 door $B(0, 40)$ } $k: y = -16x + 40$

k snijden met de grafiek van f geeft $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 40 = -16x + 40$.

Invoeren van de formules van f en k en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$x = -2$ en $y = 72$ en $x = 1,333\dots$ en $y = 18,666\dots$

Dus $D(-2, 72)$ en $E(1,33; 18,67)$.

e $f'(x) = -24$ geeft $12x^3 - 12x^2 - 24x = -24$

Invoeren van de formule van f' en de formule $y = -24$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft voor $0 < x < 2$ dat $x = 1$ en $x = 1,414\dots$

$f(1) = 27$ en $f(1,414\dots) = 16,686\dots$

Dus de punten zijn $(1, 27)$ en $(1,41; 16,69)$.

Bladzijde 55

17 a $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 4x + 3$ geeft $f'(x) = x^3 - 2x - 4$
 $f'(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 4 = 0$

b Uit de figuur in het leerboek blijkt dat er een laagste punt is met een horizontale raaklijn en omdat $f'(2) = 0$ is er dus een extreme waarde voor $x = 2$.

Bladzijde 56

18 a $f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 2 = 0$

De functie heeft geen extreme waarde voor $x = -1$, want de grafiek heeft geen top voor $x = -1$.

b $f(-1) = 4$, dus horizontale raaklijn $y = 4$.
 $f(\frac{1}{2}) = 2\frac{5}{16}$, dus horizontale raaklijn $y = 2\frac{5}{16}$.

- 19 a** $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - 7x$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{2}x^4 - 1\frac{1}{2}x^2 - 7$
 $f'(\sqrt{2}) = 2\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^4 - 1\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 - 7 = 0$
 $f'(\sqrt{2}) = 0$ en in de figuur in het leerboek is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{2}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{2}$.

- b** $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 3x$ geeft $g'(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$
 $g'(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 - 3 \cdot \sqrt{3} - 3 = 0$
 $g'(\sqrt{3}) = 0$ en in de figuur in het leerboek is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{3}$.
Dus g heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{3}$.

- 20 a** $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2 + x^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 6x$
 $f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 = -2$
 $f'(1) \neq 0$, dus f heeft geen extreme waarde voor $x = 1$.

- b** $f'(\sqrt{1\frac{1}{2}}) = 4 \cdot (\sqrt{1\frac{1}{2}})^3 - 6 \cdot \sqrt{1\frac{1}{2}} = 0$
 $f'(\sqrt{1\frac{1}{2}}) = 0$ en in de figuur in het leerboek is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

- c** $f(0) = -4$, $f(\sqrt{1\frac{1}{2}}) = -6\frac{1}{4}$ en $f(-\sqrt{1\frac{1}{2}}) = -6\frac{1}{4}$
Alle horizontale lijnen die liggen tussen $y = -6\frac{1}{4}$ en $y = -4$ snijden de grafiek van f vier keer.
Dus de vergelijking $f(x) = p$ heeft vier oplossingen voor $-6\frac{1}{4} < p < -4$.

- d** $y = ax + b$
 $a = f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot -1 = 2$
 $y = 2x + b$
 $f(-1) = -6$, dus $A(-1, -6)$ $\left. \begin{array}{l} 2 \cdot -1 + b = -6 \\ -2 + b = -6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = -4 \end{array}$

Dus $k: y = 2x - 4$.

$y = 0$ geeft $2x - 4 = 0$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Dus k snijdt de x -as in $(2, 0)$.

$$f(2) = (2^2 + 1)(2^2 - 4) = 0$$

Dus de grafiek van f snijdt de positieve x -as in $(2, 0)$.

Dus k snijdt de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek van f met de positieve x -as.

- e** $y = ax + b$
 $a = f'(1\frac{1}{2}) = 4 \cdot (1\frac{1}{2})^3 - 6 \cdot 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$
 $y = 4\frac{1}{2}x + b$
 $f(1\frac{1}{2}) = -5\frac{11}{16}$, dus $B(1\frac{1}{2}, -5\frac{11}{16})$ $\left. \begin{array}{l} 4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} + b = -5\frac{11}{16} \\ 6\frac{3}{4} + b = -5\frac{11}{16} \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = -12\frac{7}{16} \end{array}$

Dus de lijn met vergelijking $y = 4\frac{1}{2}x - 12\frac{7}{16}$ raakt de grafiek van f in het punt B met $x_B = 1\frac{1}{2}$.

Bladzijde 57

- 21 a** $f(x) = (\frac{1}{2}x^3 - 4)^2 - 10 = \frac{1}{4}x^6 - 4x^3 + 16 - 10 = \frac{1}{4}x^6 - 4x^3 + 6$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^5 - 12x^2$
 $f'(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^5 - 12 \cdot 0^2 = 0$, dus de grafiek heeft een horizontale raaklijn in A .
 $f(0) = 6$, dus de formule van de raaklijn in A is $y = 6$.

- b** $f'(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^5 - 12 \cdot 2^2 = 0$
 $f'(2) = 0$ en in de figuur in het leerboek is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = 2$.
Dus f heeft een extreme waarde voor $x = 2$.

- c** $f(2) = -10$
Uit de figuur in het leerboek volgt $B_f = [-10, \rightarrow)$.

d $y = ax + b$
 $a = f'(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^5 - 12 \cdot 1^2 = -10\frac{1}{2}$
 $y = -10\frac{1}{2}x + b$
 $f(1) = 2\frac{1}{4}$, dus $C(1, 2\frac{1}{4})$ $\left. \begin{array}{l} -10\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 2\frac{1}{4} \\ -10\frac{1}{2} + b = 2\frac{1}{4} \end{array} \right\}$
 $b = 12\frac{3}{4}$
Dus $k: y = -10\frac{1}{2}x + 12\frac{3}{4}$.
 $x_D = 2$ geeft $y_D = -10\frac{1}{2} \cdot 2 + 12\frac{3}{4} = -8\frac{1}{4}$
 $y_B = -10$, dus $y_D - y_B = -8\frac{1}{4} - (-10) = 1\frac{3}{4}$.

Bladzijde 58

C1 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 3$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
 $y = ax + b$
 $a = f'(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 = 4$
 $y = 4x + b$
 $f(2) = 3$, dus $A(2, 3)$ $\left. \begin{array}{l} 4 \cdot 2 + b = 3 \\ 8 + b = 3 \end{array} \right\}$
 $b = -5$

Dus $k: y = 4x - 5$.

C2 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 4$ geeft $f'(x) = x^2 - x - 1$
 $f'(x) = 1$ geeft $x^2 - x - 1 = 1$
 $x^2 - x - 2 = 0$
 $(x+1)(x-2) = 0$
 $x = -1 \vee x = 2$
 $x_A = -1$ geeft $y_A = f(-1) = 4\frac{1}{6}$, dus $A(-1, 4\frac{1}{6})$.
 $x_B = 2$ geeft $y_B = f(2) = 2\frac{2}{3}$, dus $B(2, 2\frac{2}{3})$.

C3 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$ geeft $f'(x) = x^2 - x - 6$
 $f'(x) = 0$ geeft $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x+2)(x-3) = 0$
 $x = -2 \vee x = 3$
Je krijgt max. is $f(-2) = 10\frac{1}{3}$ en min. is $f(3) = -10\frac{1}{2}$.

C4 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x - 5$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4$
 $f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 4 = 0$
 $f'(2) = 0$ en in de figuur in het leerboek is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = 2$.
Dus f heeft een extreme waarde voor $x = 2$.

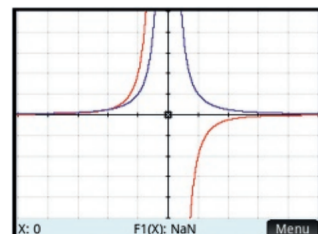
6.2 De afgeleide van machtsfuncties

Bladzijde 59

22 a Uit $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$ volgt $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, dus $g(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$.
b $g(x) = x^{-2}$ geeft $g'(x) = -2x^{-3}$
Uit $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$ volgt $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, dus $g'(x) = -2x^{-3} = -2 \cdot \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$.

c Zie de figuur hiernaast.
De grafieken van de numerieke afgeleide van g en van g' vallen precies over elkaar.

Er lijkt dus inderdaad te gelden dat $g(x) = \frac{1}{x^2}$ geeft $g'(x) = -\frac{2}{x^3}$.



Bladzijde 61

- 23 a** $f(x) = \frac{5}{x^3} = 5x^{-3}$ geeft $f'(x) = -15x^{-4} = -\frac{15}{x^4}$
b $g(x) = \frac{1}{5x^3} = \frac{1}{5}x^{-3}$ geeft $g'(x) = -\frac{3}{5}x^{-4} = -\frac{3}{5x^4}$
c $h(x) = 5x^2 - \frac{5}{x^2} = 5x^2 - 5x^{-2}$ geeft $h'(x) = 10x + 10x^{-3} = 10x + \frac{10}{x^3}$

- 24 a** $f(x) = \frac{x^4 - 5}{x^3} = x - 5x^{-3}$ geeft $f'(x) = 1 + 15x^{-4} = 1 + \frac{15}{x^4}$
b $g(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^3} = 2x^{-1} - 3x^{-3}$ geeft $g'(x) = -2x^{-2} + 9x^{-4} = -\frac{2}{x^2} + \frac{9}{x^4}$
c $h(x) = \frac{x+2}{3x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^{-1}$ geeft $h'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} = -\frac{2}{3x^2}$

- 25 a** $f(x) = \frac{2x-1}{3x^2} = \frac{2}{3}x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-2}$ geeft $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} + \frac{2}{3}x^{-3} = -\frac{2}{3x^2} + \frac{2}{3x^3}$
b $g(x) = 6 - \frac{x^2-1}{x} = 6 - x + x^{-1}$ geeft $g'(x) = -1 - x^{-2} = -1 - \frac{1}{x^2}$
c $h(x) = \frac{5}{2x^2} - \frac{2x^2}{5} = \frac{5}{2}x^{-2} - \frac{2}{5}x^2$ geeft $h'(x) = -5x^{-3} - \frac{4}{5}x = -\frac{5}{x^3} - \frac{4}{5}x$

- 26 a** $f(x) = 0$ geeft $3x + 3 = 0$
 $3x = -3$
 $x = -1$

Dus $A(-1, 0)$.

$$f(x) = \frac{3x+3}{x} = 3 + 3x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$$

$$y = ax + b$$

$$a = f'(-1) = -\frac{3}{(-1)^2} = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } A(-1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot -1 + b = 0 \\ 3 + b = 0 \\ b = -3 \end{array}$$

Dus $k: y = -3x - 3$ en $y_B = -3$.

- b** $f'(x) = -\frac{3}{4}$ geeft $-\frac{3}{x^2} = -\frac{3}{4}$
 $x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$

$f(2) = 4\frac{1}{2}$ en $f(-2) = 1\frac{1}{2}$, dus de raakpunten zijn $(2, 4\frac{1}{2})$ en $(-2, 1\frac{1}{2})$.

Bladzijde 62

- 27 a** $f(x) = \frac{x^2+4}{x} = x + 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$
 $y = ax + b$
 $a = f'(3) = 1 - \frac{4}{3^2} = \frac{5}{9}$
 $y = \frac{5}{9}x + b$
 $f(3) = 4\frac{1}{3}$, dus $A(3, 4\frac{1}{3})$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{9} \cdot 3 + b = 4\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} + b = 4\frac{1}{3} \\ b = 2\frac{2}{3} \end{array} \right.$

Dus $k: y = \frac{5}{9}x + 2\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} y = 0 \text{ geeft } \frac{5}{9}x + 2\frac{2}{3} &= 0 \\ \frac{5}{9}x &= -2\frac{2}{3} \\ x &= -4\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Dus $x_B = -4\frac{4}{5}$.

b $f'(x) = -3$ geeft $1 - \frac{4}{x^2} = -3$

$$\frac{4}{x^2} = 4$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

$f(1) = 5$ en $f(-1) = -5$, dus de raakpunten zijn $(1, 5)$ en $(-1, -5)$.

c $f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{4}{x^2} = 0$

$$\frac{4}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

Je krijgt max. is $f(-2) = -4$ en min. is $f(2) = 4$.

d $f'(x) = 2$ geeft $1 - \frac{4}{x^2} = 2$

$$-\frac{4}{x^2} = 1$$

$$x^2 = -4$$

geen oplossing

Dus de grafiek van f heeft geen raaklijn met richtingscoëfficiënt 2.

28 a $f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2} = \frac{1}{3}x^2 + 3x^{-2}$ geeft $f'(x) = \frac{2}{3}x - 6x^{-3} = \frac{2x}{3} - \frac{6}{x^3}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{2x}{3} - \frac{6}{x^3} = 0$$

$$\frac{2x}{3} = \frac{6}{x^3}$$

$$2x^4 = 18$$

$$x^4 = 9$$

$$x = \sqrt[4]{9} \vee x = -\sqrt[4]{9}$$

Je krijgt min. is $f(\sqrt[4]{9}) = 2$ en min. is $f(-\sqrt[4]{9}) = 2$.

Dus de vergelijking $\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2} = p$ heeft vier oplossingen voor $p > 2$.

b $f(x) = \frac{x^2}{a} + \frac{a}{x^2} = \frac{1}{a}x^2 + ax^{-2}$ geeft $f'(x) = \frac{2}{a}x - 2ax^{-3} = \frac{2x}{a} - \frac{2a}{x^3}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{2x}{a} - \frac{2a}{x^3} = 0$$

$$\frac{2x}{a} = \frac{2a}{x^3}$$

$$2x^4 = 2a^2$$

$$x^4 = a^2$$

$$x^2 = a \vee x^2 = -a$$

$$x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}$$

$$x_{\text{top}} = \sqrt{a} \text{ geeft } y_{\text{top}} = f(\sqrt{a}) = \frac{(\sqrt{a})^2}{a} + \frac{a}{(\sqrt{a})^2} = \frac{a}{a} + \frac{a}{a} = 1 + 1 = 2$$

$$x_{\text{top}} = -\sqrt{a} \text{ geeft } y_{\text{top}} = f(-\sqrt{a}) = \frac{(-\sqrt{a})^2}{a} + \frac{a}{(-\sqrt{a})^2} = \frac{a}{a} + \frac{a}{a} = 1 + 1 = 2$$

Dus voor elke waarde van a liggen de toppen van de grafiek van f op de lijn $y = 2$.

29 a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

b $x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2\frac{1}{2}}$

c $\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{-1\frac{1}{2}}$

d $x^3 \cdot \sqrt{x} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$

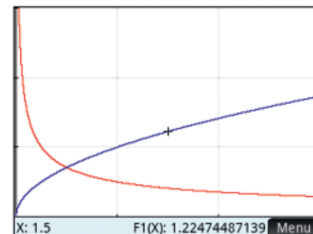
30 a $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ c $-1\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$
b $2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$ d $1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

31 a $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b Zie de figuur hiernaast.

De grafieken van de numerieke afgeleide van g en van g' vallen precies over elkaar.

Er lijkt dus inderdaad te gelden dat $g(x) = \sqrt{x}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.



Bladzijde 63

32 a $f(x) = x + \sqrt{x} = x + x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
b $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x} = x \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$ geeft $g'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$
c $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$
d $k(x) = (3 - \sqrt{x})^2 = 9 - 6\sqrt{x} + x = 9 - 6x^{\frac{1}{2}} + x$ geeft $k'(x) = -3x^{-\frac{1}{2}} + 1 = -\frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} + 1 = -\frac{3}{\sqrt{x}} + 1$

33 a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{2\frac{1}{4}}$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{4}x^{1\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4}x \cdot \sqrt[4]{x}$
b $g(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{x}} = \frac{4x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 4x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ geeft
 $g'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$
c $h(x) = (x+1)(1+\sqrt{x}) = x + x\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} = x + x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{\frac{1}{2}} = x + x^{\frac{3}{2}} + 1 + x^{\frac{1}{2}}$ geeft
 $h'(x) = 1 + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
d $k(x) = \frac{x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $k'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x\sqrt{x}}$

Bladzijde 64

34 a $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}}$ geeft $f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$
b $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$ geeft
 $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$
c $h(x) = \frac{x^2-2}{x\sqrt{x}} = \frac{x^2-2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2-2}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}$ geeft
 $h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$
d $k(x) = x^2(x\sqrt{x}-3) = x^3 \cdot \sqrt{x} - 3x^2 = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x^2 = x^{\frac{7}{2}} - 3x^2$ geeft
 $k'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} - 6x = 3\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6x = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x} - 6x$

35 a $f(x) = (x\sqrt{x} - 3)^2 = x^3 - 6x\sqrt{x} + 9 = x^3 - 6x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 9 = x^3 - 6x^{\frac{3}{2}} + 9$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 9x^{\frac{1}{2}} = 3x^2 - 9\sqrt{x}$

b $g(x) = \frac{2x-3}{x\sqrt{x}} = \frac{2x-3}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x-3}{x^{\frac{3}{2}}} = 2x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{3}{2}}$ geeft
 $g'(x) = -x^{-\frac{1}{2}} + 4\frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{9}{2x^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} + \frac{9}{2 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{9}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

c $h(x) = (x - \sqrt[3]{x})^2 = (x - x^{\frac{1}{3}})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}} + (x^{\frac{1}{3}})^2 = x^2 - 2x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$ geeft
 $h'(x) = 2x - 2 \cdot \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 2x - 2\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = 2x - 2\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$

d $k(x) = \frac{x^2+4}{\sqrt[4]{x}} = \frac{x^2+4}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}$ geeft
 $k'(x) = 1\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{1}{4}} = 1\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = 1\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{x \cdot \sqrt[4]{x}}$

36 $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} = 3x^{\frac{2}{3}}$ geeft $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

$k: y = ax + b$

$a = f'(\frac{1}{8}) = \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = 4$

$y = 4x + b$
 $f(\frac{1}{8}) = \frac{3}{4}$, dus $A(\frac{1}{8}, \frac{3}{4})$ $\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \frac{1}{8} + b = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} + b = \frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{array} \right.$

Dus $k: y = 4x + \frac{1}{4}$.

$l: y = ax + b$

$a = f'(8) = \frac{2}{\sqrt[3]{8}} = 1$

$y = x + b$
 $f(8) = 12$, dus $B(8, 12)$ $\left\{ \begin{array}{l} 8 + b = 12 \\ b = 4 \end{array} \right.$

Dus $l: y = x + 4$.

k snijden met l geeft $4x + \frac{1}{4} = x + 4$

$$3x = \frac{15}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

$x = 1\frac{1}{4}$ geeft $y = 1\frac{1}{4} + 4 = 5\frac{1}{4}$, dus $C(1\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4})$.

37 a $f(x) = x\sqrt{x} - 3x = x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x = x^{\frac{3}{2}} - 3x$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3$
 $f'(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$

$$1\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

Je krijgt min. is $f(4) = -4$.

Dus $B_f = [-4, \rightarrow)$.

b $f(x) = 0$ geeft $x\sqrt{x} - 3x = 0$
 $x(\sqrt{x} - 3) = 0$
 $x = 0 \vee \sqrt{x} = 3$
 $x = 0 \vee x = 9$

Dus $A(9, 0)$.

$y = ax + b$

$rc_l = rc_k$, dus $a = f'(0) = 1\frac{1}{2}\sqrt{0} - 3 = -3$.

$y = -3x + b$ $\left\{ \begin{array}{l} -3 \cdot 9 + b = 0 \\ -27 + b = 0 \\ b = 27 \end{array} \right.$

Dus $l: y = -3x + 27$ en $y_B = 27$.

c $f'(x) = 3$ geeft $1\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 3$

$$1\frac{1}{2}\sqrt{x} = 6$$

$$\sqrt{x} = 4$$

$$x = 16$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + b \\ f(16) = 16, \text{ dus } C(16, 16) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 16 + b = 16 \\ 48 + b = 16 \\ b = -32 \end{array}$$

Dus $m: y = 3x - 32$.

$y = 0$ geeft $3x - 32 = 0$

$$3x = 32$$

$$x = 10\frac{2}{3}$$

Dus $x_D = 10\frac{2}{3}$.

38 a $f(x) = \frac{x^2 + 12}{\sqrt{x}} = \frac{x^2 + 12}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{1\frac{1}{2}} + 12x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6x^{-1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{6}{x^{\frac{1}{2}}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{6}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{6}{x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{6}{x\sqrt{x}} = 0$$

$$1\frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{6}{x\sqrt{x}}$$

$$1\frac{1}{2}x^2 = 6$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

$x = -2$ voldoet niet, dus $x = 2$.

Je krijgt min. is $f(2) = \frac{16}{\sqrt{2}}$.

b $y = ax + b$

$$a = f'(4) = 1\frac{1}{2}\sqrt{4} - \frac{6}{4\sqrt{4}} = 2\frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2\frac{1}{4}x + b \\ f(4) = 14, \text{ dus } A(4, 14) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{4} \cdot 4 + b = 14 \\ 9 + b = 14 \\ b = 5 \end{array}$$

Dus $k: y = 2\frac{1}{4}x + 5$.

$y = 0$ geeft $2\frac{1}{4}x + 5 = 0$

$$2\frac{1}{4}x = -5$$

$$x = -2\frac{2}{9}$$

Dus $x_B = -2\frac{2}{9}$.

c $f(x) = 13$ geeft $\frac{x^2 + 12}{\sqrt{x}} = 13$

Invoeren van de formule van f en de formule $y = 13$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 1$ en $x = 3,519\dots$

Dus $C(1, 13)$.

$y = ax + b$

$rc_m = rc_b$, dus $a = f'(1) = 1\frac{1}{2}\sqrt{1} - \frac{6}{1\sqrt{1}} = -4\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -4\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (6, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4\frac{1}{2} \cdot 6 + b = 0 \\ -27 + b = 0 \\ b = 27 \end{array}$$

Dus $m: y = -4\frac{1}{2}x + 27$.

Invoeren van de formules van f en m en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$x = 0,214\dots$ en $y = 26,036\dots$ en $x = 3,227\dots$ en $y = 12,477\dots$

Dus de coördinaten zijn $(0,21; 26,04)$ en $(3,23; 12,48)$.

Bladzijde 65

39 a $s(t) = 10t\sqrt{t} = 10t \cdot t^{\frac{1}{2}} = 10t^{\frac{3}{2}}$ geeft $s'(t) = 15t^{\frac{1}{2}} = 15\sqrt{t}$
 $s'(8) = 15\sqrt{8} = 15 \cdot 2\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$
 Dus de snelheid na acht seconden is $30\sqrt{2}$ m/s.

b $108 \text{ km/u} = \frac{108}{3,6} \text{ m/s} = 30 \text{ m/s}$
 $s'(t) = 30$ geeft $15\sqrt{t} = 30$
 $\sqrt{t} = 2$
 $t = 4$

Dus na vier seconden is de snelheid 108 km/u.

c $s(9) = 10 \cdot 9 \cdot \sqrt{9} = 270$ en $s'(9) = 15 \cdot \sqrt{9} = 45$
 Dus in de eerste negen seconden legt de trein 270 meter af en in de volgende 51 seconden $51 \cdot 45 = 2295$ meter.
 Dus in de eerste minuut legt de trein $270 + 2295 = 2565$ meter af.

40 $f(x) = (2x - p\sqrt{x})^2 = 4x^2 - 4px\sqrt{x} + p^2x = 4x^2 - 4p \cdot x^{\frac{3}{2}} + p^2x$ geeft

$$f'(x) = 8x - 6p \cdot x^{\frac{1}{2}} + p^2 = 8x - 6p\sqrt{x} + p^2$$

$$f'(2\frac{1}{4}) = 0 \text{ geeft } 8 \cdot 2\frac{1}{4} - 6p\sqrt{2\frac{1}{4}} + p^2 = 0$$

$$18 - 6p \cdot 1\frac{1}{2} + p^2 = 0$$

$$p^2 - 9p + 18 = 0$$

$$(p-3)(p-6) = 0$$

$$p = 3 \vee p = 6$$

$p = 3$ geeft $f(x) = (2x - 3\sqrt{x})^2$

Zie de schets hiernaast.

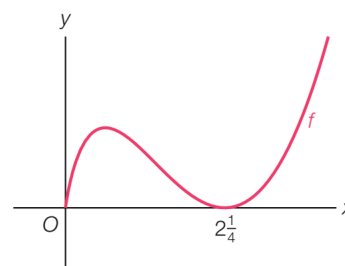
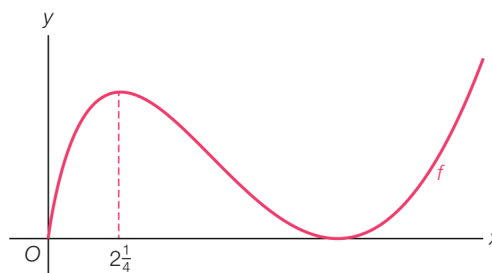
Voor $p = 3$ heeft f geen maximum voor $x = 2\frac{1}{4}$.

$p = 6$ geeft $f(x) = (2x - 6\sqrt{x})^2$

Zie de schets hiernaast.

Voor $p = 6$ heeft f een maximum voor $x = 2\frac{1}{4}$.

Je krijgt max. is $f(2\frac{1}{4}) = 20\frac{1}{4}$.



Bladzijde 66

C5 a $f(x) = \frac{2}{x^4} = 2x^{-4}$ geeft $f'(x) = -8x^{-5} = -\frac{8}{x^5}$

b $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + x^{-1}$ geeft $g'(x) = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

c $h(x) = \frac{x^2 + 9}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}x^{-1}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{9}{2}x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2x^2}$

$$h'(x) = -4 \text{ geeft } \frac{1}{2} - \frac{9}{2x^2} = -4$$

$$\frac{9}{2x^2} = 4\frac{1}{2}$$

$$9x^2 = 9$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

$h(1) = 5$ en $h(-1) = -5$, dus de raakpunten zijn $(1, 5)$ en $(-1, -5)$.

C6

a $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{x} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 3\frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x}$

b $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x}} = \frac{x^2 + 1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2 + 1}{x^{1\frac{1}{2}}}$ geeft

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

c $h(x) = 6x - 2x\sqrt{x} = 6x - 2x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 6x - 2x^{1\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = 6 - 3x^{\frac{1}{2}} = 6 - 3\sqrt{x}$
 $h'(x) = 0$ geeft $6 - 3\sqrt{x} = 0$

$$3\sqrt{x} = 6$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

Je krijgt max. is $h(4) = 8$.

6.3 De kettingregel

Bladzijde 68

41 a $g(x) = 3(4x - 1)^2 = 3(16x^2 - 8x + 1) = 48x^2 - 24x + 3$ geeft $g'(x) = 96x - 24$

b Fleur gebruikt de regel $f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$. Maar op de plaats van de x in deze regel staat in het functievoorschrift nu $(4x - 1)$. Ze mist daardoor in haar afgeleide de factor 4.

Bladzijde 69

42 a $f(x) = (4x + 3)^3$ geeft $f'(x) = 3(4x + 3)^2 \cdot 4 = 12(4x + 3)^2$

b $g(x) = (5x - 2)^{-3}$ geeft $g'(x) = -3(5x - 2)^{-4} \cdot 5 = -15(5x - 2)^{-4}$

c $h(x) = 6(\frac{1}{2}x - 4)^5$ geeft $h'(x) = 6 \cdot 5(\frac{1}{2}x - 4)^4 \cdot \frac{1}{2} = 15(\frac{1}{2}x - 4)^4$

d $k(x) = -3(\frac{1}{6}x + 5)^{-4}$ geeft $k'(x) = -3 \cdot -4(\frac{1}{6}x + 5)^{-5} \cdot \frac{1}{6} = 2(\frac{1}{6}x + 5)^{-5}$

43 a $f(x) = 3x^2 - (\frac{1}{4}x - 2)^3$ geeft $f'(x) = 6x - 3(\frac{1}{4}x - 2)^2 \cdot \frac{1}{4} = 6x - \frac{3}{4}(\frac{1}{4}x - 2)^2$

b $g(x) = \frac{5}{(3x - 1)^2} = 5(3x - 1)^{-2}$ geeft $g'(x) = 5 \cdot -2(3x - 1)^{-3} \cdot 3 = -\frac{30}{(3x - 1)^3}$

c $h(x) = \frac{2}{3}(4x - 3)^3 - \frac{1}{2}x^2$ geeft $h'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3(4x - 3)^2 \cdot 4 - x = 8(4x - 3)^2 - x$

d $k(x) = 5x - \frac{4}{3x + 2} = 5x - 4(3x + 2)^{-1}$ geeft $k'(x) = 5 - 4 \cdot -1(3x + 2)^{-2} \cdot 3 = 5 + \frac{12}{(3x + 2)^2}$

44 a $f(x) = (\frac{1}{2}x - 3)^3 - 1\frac{1}{2}x + 10$ geeft $f'(x) = 3(\frac{1}{2}x - 3)^2 \cdot \frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 3)^2 - 1\frac{1}{2}$

b $f'(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 3)^2 - 1\frac{1}{2} = 0$

$$1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 3)^2 = 1\frac{1}{2}$$

$$(\frac{1}{2}x - 3)^2 = 1$$

$$\frac{1}{2}x - 3 = 1 \vee \frac{1}{2}x - 3 = -1$$

c $f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{2}x - 3 = 1 \vee \frac{1}{2}x - 3 = -1$

$$\frac{1}{2}x = 4 \vee \frac{1}{2}x = 2$$

$$x = 8 \vee x = 4$$

Je krijgt max. is $f(4) = 3$ en min. is $f(8) = -1$.

Bladzijde 70

45 a $f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2$ geeft $f'(x) = 4(\frac{1}{4}x - 1)^3 \cdot \frac{1}{4} - 1 = (\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1$

$f'(x) = 0$ geeft $(\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = 0$

$$(\frac{1}{4}x - 1)^3 = 1$$

$$\frac{1}{4}x - 1 = 1$$

$$\frac{1}{4}x = 2$$

$$x = 8$$

Je krijgt min. is $f(8) = -5$, dus $B_f = [-5, \rightarrow)$.

b Uit vraag a volgt $A(8, -5)$.

$$f(0) = 3, \text{ dus } B(0, 3).$$

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5 - 3}{8 - 0} = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -x + b \\ \text{door } B(0, 3) \end{array} \right\} k: y = -x + 3$$

$$y = 0 \text{ geeft } -x + 3 = 0$$

$$x = 3$$

Dus $x_C = 3$.

c $f'(x) = -1$ geeft $(\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = -1$

$$(\frac{1}{4}x - 1)^3 = 0$$

$$\frac{1}{4}x - 1 = 0$$

$$\frac{1}{4}x = 1$$

$$x = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -x + b \\ f(4) = -2, \text{ dus raakpunt } (4, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 + b = -2 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $l: y = -x + 2$.

$$f'(x) = 7 \text{ geeft } (\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = 7$$

$$(\frac{1}{4}x - 1)^3 = 8$$

$$\frac{1}{4}x - 1 = 2$$

$$\frac{1}{4}x = 3$$

$$x = 12$$

$$\left. \begin{array}{l} p: y = 7x + b \\ f(12) = 6, \text{ dus raakpunt } (12, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7 \cdot 12 + b = 6 \\ 84 + b = 6 \\ b = -78 \end{array}$$

Dus $p: y = 7x - 78$.

l snijden met p geeft $-x + 2 = 7x - 78$

$$-8x = -80$$

$$x = 10$$

$x = 10$ geeft $y = -10 + 2 = -8$, dus $S(10, -8)$.

46 a $f(x) = 1\frac{1}{2}$ geeft $\frac{3}{2x-5} - \frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}$

$$\frac{3}{2x-5} = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

$$3 = (1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x)(2x-5)$$

$$3 = 3x - 7\frac{1}{2} + x^2 - 2\frac{1}{2}x$$

$$3 = x^2 + \frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 10\frac{1}{2} = 0$$

$$D = (\frac{1}{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot -10\frac{1}{2} = 42\frac{1}{4}, \text{ dus } \sqrt{D} = 6\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2}}{2} \vee x = \frac{-\frac{1}{2} - 6\frac{1}{2}}{2}$$

$$x = 3 \vee x = -3\frac{1}{2}$$

Dus de afstand tussen A en B is $3 - (-3\frac{1}{2}) = 6\frac{1}{2}$.

$$\text{b } f(x) = \frac{3}{2x-5} - \frac{1}{2}x = 3(2x-5)^{-1} - \frac{1}{2}x \text{ geeft } f'(x) = 3 \cdot -1(2x-5)^{-2} \cdot 2 - \frac{1}{2} = -\frac{6}{(2x-5)^2} - \frac{1}{2}$$

$$y = ax + b$$

$$a = f'(2) = -\frac{6}{(2 \cdot 2 - 5)^2} - \frac{1}{2} = -6\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -6\frac{1}{2}x + b \\ f(2) = -4, \text{ dus } C(2, -4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -6\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -4 \\ -13 + b = -4 \\ b = 9 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -6\frac{1}{2}x + 9.$$

$$y = 0 \text{ geeft } -6\frac{1}{2}x + 9 = 0$$

$$-6\frac{1}{2}x = -9$$

$$x = 1\frac{5}{13}$$

$$\text{Dus } x_D = 1\frac{5}{13}.$$

$$\text{c } f'(x) = -2 \text{ geeft } -\frac{6}{(2x-5)^2} - \frac{1}{2} = -2$$

$$-\frac{6}{(2x-5)^2} = -1\frac{1}{2}$$

$$1\frac{1}{2}(2x-5)^2 = 6$$

$$(2x-5)^2 = 4$$

$$2x-5 = 2 \vee 2x-5 = -2$$

$$2x = 7 \vee 2x = 3$$

$$x = 3\frac{1}{2} \vee x = 1\frac{1}{2}$$

$$f(1\frac{1}{2}) = -2\frac{1}{4} \text{ en } f(3\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}, \text{ dus de raakpunten zijn } (1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4}) \text{ en } (3\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}).$$

$$\text{d } f(x) = g(x) \text{ geeft } \frac{3}{2x-5} - \frac{1}{2}x = -2x$$

$$\frac{3}{2x-5} = -1\frac{1}{2}x$$

$$3 = -1\frac{1}{2}x(2x-5)$$

$$3 = -3x^2 + 7\frac{1}{2}x$$

$$3x^2 - 7\frac{1}{2}x + 3 = 0$$

$$D = (-7\frac{1}{2})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 20\frac{1}{4}, \text{ dus } \sqrt{D} = 4\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{7\frac{1}{2} \pm 4\frac{1}{2}}{6} \vee x = \frac{7\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}}{6}$$

$$x = 2 \vee x = \frac{1}{2}$$

Uit de figuur in het leerboek volgt $f(x) \geq g(x)$ voor $\frac{1}{2} \leq x \leq 2 \vee x > 2\frac{1}{2}$.

$$\text{47 } f(x) = (ax-2)^4 + \frac{1}{2}ax \text{ geeft } f'(x) = 4(ax-2)^3 \cdot a + \frac{1}{2}a = 4a(ax-2)^3 + \frac{1}{2}a$$

$$f'(3) = 0 \text{ geeft } 4a(3a-2)^3 + \frac{1}{2}a = 0$$

$$\frac{1}{2}a(8(3a-2)^3 + 1) = 0$$

$$\frac{1}{2}a = 0 \vee 8(3a-2)^3 + 1 = 0$$

$$a = 0 \vee 8(3a-2)^3 = -1$$

$$a = 0 \vee (3a-2)^3 = -\frac{1}{8}$$

$$a = 0 \vee 3a-2 = -\frac{1}{2}$$

$$a = 0 \vee 3a = 1\frac{1}{2}$$

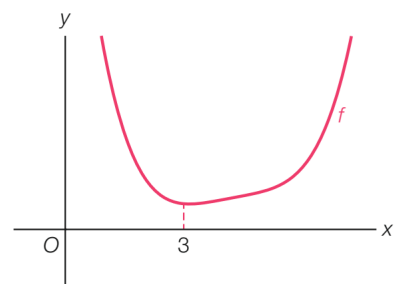
$$a = 0 \vee a = \frac{1}{2}$$

$a = 0$ geeft $f(x) = (-2)^4 + 0 = 16$ en deze functie heeft geen extreme waarde voor $x = 3$.

$$a = \frac{1}{2} \text{ geeft } f(x) = (\frac{1}{2}x-2)^4 + \frac{1}{4}x$$

Hiernaast zie je de grafiek van f voor $a = \frac{1}{2}$.

f heeft een extreme waarde voor $x = 3$ als $a = \frac{1}{2}$.



- 48 a** Invoeren van de formule van g en gebruiken van de optie dy/dx met $x = 5$ geeft de helling $\frac{3}{8}$.
Dus $f'(5) = \frac{3}{8}$.

b $f(x) = (3x + 1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(3x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2}(3x + 1)^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(5) = \frac{3}{2}(3 \cdot 5 + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot (16)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

c $f'(x) = \frac{3}{2}(3x + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(3x + 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}$

Bladzijde 71

49 a $f(x) = (2x - 5)^{\frac{1}{3}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{3}(2x - 5)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3}(2x - 5)^{-\frac{2}{3}}$

b $g(x) = 3x + \sqrt{2x + 1} = 3x + (2x + 1)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$g'(x) = 3 + \frac{1}{2}(2x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = 3 + \frac{1}{(2x + 1)^{\frac{1}{2}}} = 3 + \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$$

c $h(x) = (2x + 1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{2}(2x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$

d $k(x) = 3x^2 - \sqrt{2 - 5x} = 3x^2 - (2 - 5x)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$k'(x) = 6x - \frac{1}{2}(2 - 5x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -5 = 6x + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{(2 - 5x)^{\frac{1}{2}}} = 6x + \frac{5}{2\sqrt{2 - 5x}}$$

50 a $f(x) = 4(3x - 1)^{\frac{2}{5}}$ geeft $f'(x) = 4 \cdot \frac{2}{5}(3x - 1)^{-\frac{3}{5}} \cdot 3 = \frac{24}{5}(3x - 1)^{-\frac{3}{5}}$

b $g(x) = \frac{6}{\sqrt{2x - 5}} = \frac{6}{(2x - 5)^{\frac{1}{2}}} = 6(2x - 5)^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$g'(x) = 6 \cdot -\frac{1}{2}(2x - 5)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = -6 \cdot \frac{1}{(2x - 5)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-6}{(2x - 5)\sqrt{2x - 5}}$$

c $h(x) = 4(6x - 7)^{-\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = 4 \cdot -\frac{1}{2}(6x - 7)^{-\frac{3}{2}} \cdot 6 = -12(6x - 7)^{-\frac{3}{2}}$

d $k(x) = \sqrt{3x - 1} - \frac{1}{\sqrt{3x - 1}} = (3x - 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{(3x - 1)^{\frac{1}{2}}} = (3x - 1)^{\frac{1}{2}} - (3x - 1)^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$k'(x) = \frac{1}{2}(3x - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 + \frac{1}{2}(3x - 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(3x - 1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(3x - 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{3x - 1}} + \frac{3}{2(3x - 1)\sqrt{3x - 1}}$$

Bladzijde 72

51 a $f(x) = \frac{1}{2}x + 4 - \sqrt{3x + 4} = \frac{1}{2}x + 4 - (3x + 4)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(3x + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(3x + 4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3x + 4}}$$

$$y = ax + b$$

$$a = f'(0) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 0 + 4}} = -\frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x + b \\ f(0) = 2, \text{ dus } B(0, 2) \end{array} \right\} k: y = -\frac{1}{4}x + 2$$

$$y = 0 \text{ geeft } -\frac{1}{4}x + 2 = 0$$

$$-\frac{1}{4}x = -2$$

$$x = 8$$

Dus $x_S = 8$.

b $3x + 4 = 0$ geeft $3x = -4$

$$x = -1\frac{1}{3}$$

$$f(-1\frac{1}{3}) = 3\frac{1}{3}, \text{ dus } A(-1\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3}).$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3x+4}} = 0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$

$$2\sqrt{3x+4} = 6$$

$$\sqrt{3x+4} = 3$$

$$3x+4 = 9$$

$$3x = 5$$

$$x = 1\frac{2}{3}$$

$$f(1\frac{2}{3}) = 1\frac{5}{6}, \text{ dus } C(1\frac{2}{3}, 1\frac{5}{6}).$$

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1\frac{5}{6} - 3\frac{1}{3}}{1\frac{2}{3} - (-1\frac{1}{3})} = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } C(1\frac{2}{3}, 1\frac{5}{6}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{3} + b = 1\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} + b = 1\frac{5}{6} \\ b = 2\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{2}{3} \text{ en } y_T = 2\frac{2}{3}.$$

c $y = ax + b$

$$a = f'(15) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 15 + 4}} = \frac{2}{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{7}x + b \\ f(15) = 4\frac{1}{2}, \text{ dus } D(15, 4\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{7} \cdot 15 + b = 4\frac{1}{2} \\ 4\frac{2}{7} + b = 4\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{14} \end{array}$$

$b \neq 0$, dus m gaat niet door de oorsprong.

52 a $4x + 12 = 0$

$$4x = -12$$

$$x = -3$$

$$f(-3) = 1\frac{1}{2}, \text{ dus het randpunt is } (-3, 1\frac{1}{2}).$$

b $f(x) = \sqrt{4x+12} - \frac{1}{2}x = (4x+12)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x$ geeft

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4x+12)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 - \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{(4x+12)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{4x+12}} - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{2}{\sqrt{4x+12}} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{4x+12}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{4x+12} = 4$$

$$4x+12 = 16$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

Je krijgt max. is $f(1) = 3\frac{1}{2}$, dus $B_f = \langle \leftarrow, 3\frac{1}{2} \rangle$.

c $y = ax + b$

$$a = f'(6) = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 6 + 12}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{6}x + b \\ f(6) = 3, \text{ dus } A(6, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{6} \cdot 6 + b = 3 \\ -1 + b = 3 \\ b = 4 \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{6}x + 4$.

$y = 0$ geeft $-\frac{1}{6}x + 4 = 0$

$$-\frac{1}{6}x = -4$$

$$x = 24$$

Dus $B(24, 0)$.

$f(x) = 0$ geeft $\sqrt{4x + 12} - \frac{1}{2}x = 0$

$$\sqrt{4x + 12} = \frac{1}{2}x$$

kwadrateren geeft

$$4x + 12 = \frac{1}{4}x^2$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 16x - 48 = 0$$

$$D = (-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -48 = 448$$

$$x = \frac{16 + \sqrt{448}}{2} \vee x = \frac{16 - \sqrt{448}}{2}$$

$$x = 8 + \frac{1}{2}\sqrt{448} \vee x = 8 - \frac{1}{2}\sqrt{448}$$

$x = 8 - \frac{1}{2}\sqrt{448}$ voldoet niet, dus $x = 8 + \frac{1}{2}\sqrt{448}$.

Dus de afstand tussen B en het snijpunt van de grafiek van f met de x -as is

$$24 - (8 + \frac{1}{2}\sqrt{448}) = 16 - \frac{1}{2}\sqrt{448}.$$

d $f(x) = 3$ geeft $\sqrt{4x + 12} - \frac{1}{2}x = 3$

$$\sqrt{4x + 12} = \frac{1}{2}x + 3$$

kwadrateren geeft

$$4x + 12 = (\frac{1}{2}x + 3)^2$$

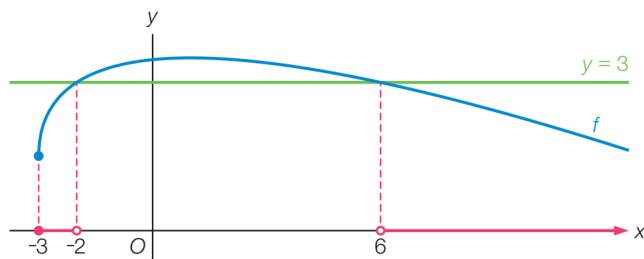
$$4x + 12 = \frac{1}{4}x^2 + 3x + 9$$

$$\frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x + 2)(x - 6) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 6$$



$f(x) < 3$ geeft $-3 \leq x \leq -2 \vee x > 6$

53 a $6x - 8 = 0$

$$6x = 8$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

$f(1\frac{1}{3}) = 5$, dus het randpunt is $(1\frac{1}{3}, 5)$.

$$\text{b } f(x) = \frac{3}{4}x + 4 - \sqrt{6x-8} = \frac{3}{4}x + 4 - (6x-8)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(6x-8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 = \frac{3}{4} - 3 \cdot \frac{1}{(6x-8)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{\sqrt{6x-8}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{3}{4} - \frac{3}{\sqrt{6x-8}} = 0$$

$$\frac{3}{\sqrt{6x-8}} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{6x-8} = 4$$

$$6x-8 = 16$$

$$6x = 24$$

$$x = 4$$

Je krijgt min. is $f(4) = 3$, dus $B_f = [3, \rightarrow)$.

$$\text{c } f'(x) = \frac{3}{8} \text{ geeft } \frac{3}{4} - \frac{3}{\sqrt{6x-8}} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{\sqrt{6x-8}} = \frac{3}{8}$$

$$\sqrt{6x-8} = 8$$

$$6x-8 = 64$$

$$6x = 72$$

$$x = 12$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{8}x + b \\ f(12) = 5, \text{ dus door } (12, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{8} \cdot 12 + b = 5 \\ 4\frac{1}{2} + b = 5 \\ b = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}.$$

$$y = 0 \text{ geeft } \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{3}{8}x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -1\frac{1}{3}$$

Dus $x_S = -1\frac{1}{3}$ en de afstand tussen S en de oorsprong is $1\frac{1}{3}$.

$$\text{d } f(x) = 3\frac{1}{2} \text{ geeft } \frac{3}{4}x + 4 - \sqrt{6x-8} = 3\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \sqrt{6x-8}$$

$$3x + 2 = 4\sqrt{6x-8}$$

$$\text{kwadrateren geeft}$$

$$(3x+2)^2 = 16(6x-8)$$

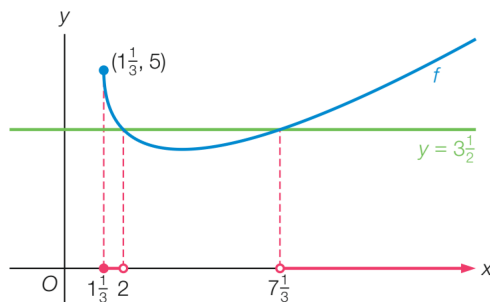
$$9x^2 + 12x + 4 = 96x - 128$$

$$9x^2 - 84x + 132 = 0$$

$$3x^2 - 28x + 44 = 0$$

$$D = (-28)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 44 = 256, \text{ dus } \sqrt{D} = 16$$

$$x = \frac{28 \pm 16}{6} = 7\frac{1}{3} \vee x = \frac{28 - 16}{6} = 2$$



$$f(x) > 3\frac{1}{2} \text{ geeft } 1\frac{1}{3} \leq x < 2 \vee x > 7\frac{1}{3}$$

54

a $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-6}} + \frac{3}{8}x = \frac{3}{(2x-6)^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{8}x = 3(2x-6)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}x$ geeft

$$f'(x) = 3 \cdot -\frac{1}{2}(2x-6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 + \frac{3}{8} = -3 \cdot \frac{1}{(2x-6)^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{8} = \frac{-3}{(2x-6)\sqrt{2x-6}} + \frac{3}{8}$$

$$f'(5) = \frac{-3}{(2 \cdot 5 - 6)\sqrt{2 \cdot 5 - 6}} + \frac{3}{8} = 0$$

$f'(5) = 0$ en in de figuur in het leerboek is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = 5$.

Dus f heeft inderdaad een extreme waarde voor $x = 5$.

$$f(5) = 3\frac{3}{8}, \text{ dus } B_f = [3\frac{3}{8}, \rightarrow).$$

b $y = ax + b$

$$a = f'(3\frac{1}{2}) = \frac{-3}{(2 \cdot 3\frac{1}{2} - 6)\sqrt{2 \cdot 3\frac{1}{2} - 6}} + \frac{3}{8} = -2\frac{5}{8}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= -2\frac{5}{8}x + b \\ f(3\frac{1}{2}) &= 4\frac{5}{16}, \text{ dus } A(3\frac{1}{2}, 4\frac{5}{16}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -2\frac{5}{8} \cdot 3\frac{1}{2} + b &= 4\frac{5}{16} \\ -9\frac{3}{16} + b &= 4\frac{5}{16} \\ b &= 13\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } k: y = -2\frac{5}{8}x + 13\frac{1}{2}.$$

$$y = 0 \text{ geeft } -2\frac{5}{8}x + 13\frac{1}{2} = 0$$

$$-2\frac{5}{8}x = -13\frac{1}{2}$$

$$x = 5\frac{1}{7}$$

Dus de lijn k snijdt de x -as niet in het punt $(5, 0)$.

c $f(53) = \frac{3}{\sqrt{2 \cdot 53 - 6}} + \frac{3}{8} \cdot 53 = \frac{3}{\sqrt{100}} + 19\frac{7}{8} = \frac{3}{10} + 19\frac{7}{8} = 20\frac{7}{40}$, dus $y_B = 20\frac{7}{40}$.

$$x = 53 \text{ invullen in de formule van } l \text{ geeft } y = \frac{3}{8} \cdot 53 = 19\frac{7}{8}, \text{ dus } y_C = 19\frac{7}{8}.$$

$$\text{Dus de afstand tussen } B \text{ en } C \text{ is } 20\frac{7}{40} - 19\frac{7}{8} = \frac{3}{10}.$$

d Los op $\frac{3}{\sqrt{2p-6}} + \frac{3}{8}p - \frac{3}{8}p < \frac{1}{10}$.

$$\frac{3}{\sqrt{2p-6}} + \frac{3}{8}p - \frac{3}{8}p = \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2p-6}} = \frac{1}{10}$$

$$\sqrt{2p-6} = 30$$

$$2p - 6 = 900$$

$$2p = 906$$

$$p = 453$$

Dus voor $p > 453$ is de afstand tussen P en Q kleiner dan $\frac{1}{10}$.

55

$f(x) = ax + b + \sqrt{ax+b} = ax + b + (ax+b)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$f'(x) = a + \frac{1}{2}(ax+b)^{-\frac{1}{2}} \cdot a = a + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{\frac{1}{2}}} = a + \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } a + \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} = 0$$

$$a\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{ax+b}}\right) = 0$$

$$a = 0 \vee \frac{1}{2\sqrt{ax+b}} = -1$$

$$a = 0 \vee 2\sqrt{ax+b} = -1$$

$$a = 0 \vee \sqrt{ax+b} = -\frac{1}{2}$$

$a = 0$ geeft $f(x) = b + \sqrt{b}$ en dit is voor elke b een constante functie, dus f heeft geen extreme waarde in het geval $a = 0$.

$\sqrt{ax+b} = -\frac{1}{2}$ heeft geen oplossing, dus ook in dit geval heeft f geen extreme waarde.

Dus f heeft voor geen enkele a en b een extreme waarde.

Bladzijde 74

C7

a $f(x) = 10(\frac{1}{5}x - 3)^4$ geeft $f'(x) = 10 \cdot 4(\frac{1}{5}x - 3)^3 \cdot \frac{1}{5} = 8(\frac{1}{5}x - 3)^3$

b $g(x) = 3x^2 - \frac{6}{2x+1} = 3x^2 - 6(2x+1)^{-1}$ geeft $g'(x) = 6x - 6 \cdot -1(2x+1)^{-2} \cdot 2 = 6x + \frac{12}{(2x+1)^2}$

c $h(x) = \frac{2}{(\frac{1}{2}x - 3)^2} = 2(\frac{1}{2}x - 3)^{-2}$ geeft $h'(x) = 2 \cdot -2(\frac{1}{2}x - 3)^{-3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-2}{(\frac{1}{2}x - 3)^3}$

$$y = ax + b$$

$$a = h'(4) = \frac{-2}{(\frac{1}{2} \cdot 4 - 3)^3} = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ h(4) = 2, \text{ dus } A(4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 4 + b = 2 \\ 8 + b = 2 \\ b = -6 \end{array}$$

Dus $k: y = 2x - 6$.

$y = 0$ geeft $2x - 6 = 0$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Dus $x_B = 3$.

C8

a $f(x) = (5x - 3)^{\frac{3}{4}}$ geeft $f'(x) = \frac{3}{4}(5x - 3)^{-\frac{1}{4}} \cdot 5 = 3\frac{3}{4}(5x - 3)^{-\frac{1}{4}}$

b $g(x) = \sqrt{3x+18} = (3x+18)^{\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{2}(3x+18)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(3x+18)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+18}}$

c $h(x) = \frac{3}{4}x + 2 - \sqrt{3x-2} = \frac{3}{4}x + 2 - (3x-2)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$h'(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(3x-2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(3x-2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

$$h'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{3}{4} - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} = 0$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3x-2}} = \frac{3}{4}$$

$$2\sqrt{3x-2} = 4$$

$$\sqrt{3x-2} = 2$$

$$3x-2 = 4$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

Je krijgt min. is $h(2) = 1\frac{1}{2}$.

6.4 Toepassingen van de afgeleide

Bladzijde 75

56

a Ja, de lijnen k en l staan loodrecht op elkaar.

b $m: y = ax + b$

$l \perp k$ en $m \perp k$, dus $a = rc_m = rc_l = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 0 \\ -2 + b = 0 \end{array}$$

$$b = 2$$

Dus $m: y = -\frac{1}{2}x + 2$.

c $rc_p = \frac{1}{4}$, dus bij p ga je 4 naar rechts en 1 omhoog.

Dus bij n ga je 1 naar rechts en 4 omlaag.

$n: y = ax + b$ met $a = rc_n = -4$

$$\left. \begin{array}{l} y = -4x + b \\ \text{door } B(1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 \cdot 1 + b = 3 \\ -4 + b = 3 \end{array}$$

$$b = 7$$

Dus $n: y = -4x + 7$.

Bladzijde 76

- 57 a $k \perp l$ en $rc_l = 3$, dus $rc_k \cdot 3 = -1$ en dit geeft $rc_k = -\frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(6, 7) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 6 + b = 7 \\ -2 + b = 7 \\ b = 9 \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{3}x + 9$.

- b $m \perp n$ en $rc_n = \frac{1}{2}$, dus $rc_m \cdot \frac{1}{2} = -1$ en dit geeft $rc_m = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } B(-3, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot -3 + b = 4 \\ 6 + b = 4 \\ b = -2 \end{array}$$

Dus $m: y = -2x - 2$.

- c $p \perp q$ en $rc_q = -\frac{2}{7}$, dus $rc_p \cdot -\frac{2}{7} = -1$ en dit geeft $rc_p = 3\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } C(2, -5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -5 \\ 7 + b = -5 \\ b = -12 \end{array}$$

Dus $p: y = 3\frac{1}{2}x - 12$.

Bladzijde 77

- 58 $f(x) = \frac{6}{3x-10} + 4 = 6(3x-10)^{-1} + 4$ geeft $f'(x) = 6 \cdot -1(3x-10)^{-2} \cdot 3 = \frac{-18}{(3x-10)^2}$

$$rc_k = f'(4) = \frac{-18}{(3 \cdot 4 - 10)^2} = -4\frac{1}{2}$$

$l \perp k$, dus $rc_l \cdot -4\frac{1}{2} = -1$ en dit geeft $rc_l = \frac{2}{9}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{9}x + b \\ \text{door } A(4, 7) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{9} \cdot 4 + b = 7 \\ \frac{8}{9} + b = 7 \\ b = 6\frac{1}{9} \end{array}$$

Dus $l: y = \frac{2}{9}x + 6\frac{1}{9}$ en $B(0, 6\frac{1}{9})$.

- 59 k snijden met de grafiek van f geeft $\frac{x^2-4}{2x} = -\frac{1}{2}x$

$$x^2 - 4 = -x^2$$

$$2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{2x} = \frac{1}{2}x - 2x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2} + 2x^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}$$

$$rc_l = f'(-\sqrt{2}) = \frac{1}{2} + \frac{2}{(-\sqrt{2})^2} = 1\frac{1}{2} \text{ en } rc_m = f'(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} + \frac{2}{(\sqrt{2})^2} = 1\frac{1}{2}.$$

$rc_k \cdot rc_l = rc_k \cdot rc_m = -\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \neq -1$, dus k staat niet loodrecht op l en ook niet loodrecht op m .

- 60 a $f(x) = 4x - 2x\sqrt{x} = 4x - 2x^{1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 4 - 3x^{\frac{1}{2}} = 4 - 3\sqrt{x}$

$f'(x) = 0$ geeft $4 - 3\sqrt{x} = 0$

$$3\sqrt{x} = 4$$

$$\sqrt{x} = \frac{4}{3}$$

$$x = 1\frac{7}{9}$$

Je krijgt max. is $f(1\frac{7}{9}) = 2\frac{10}{27}$, dus $B_f = \langle \leftarrow, 2\frac{10}{27} \rangle$.

b $f(x) = 0$ geeft $4x - 2x\sqrt{x} = 0$
 $2x(2 - \sqrt{x}) = 0$
 $2x = 0 \vee \sqrt{x} = 2$
 $x = 0 \vee x = 4$
 $rc_k = f'(4) = 4 - 3\sqrt{4} = -2$
 $l \perp k$, dus $rc_l \cdot -2 = -1$ en dit geeft $rc_l = \frac{1}{2}$.
 $y = \frac{1}{2}x + b$
 door $A(4, 0)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 4 + b = 0 \\ 2 + b = 0 \end{array} \right.$
 $b = -2$
 Dus $l: y = \frac{1}{2}x - 2$ en $y_S = -2$.
c $n \perp m$ en $rc_m = 2$, dus $rc_n \cdot 2 = -1$ en dit geeft $rc_n = -\frac{1}{2}$.
 n raakt de grafiek van f in B , dus in B geldt $f'(x) = rc_n = -\frac{1}{2}$.
 Dit geeft $4 - 3\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$
 $-3\sqrt{x} = -4\frac{1}{2}$
 $\sqrt{x} = 1\frac{1}{2}$
 $x = 2\frac{1}{4}$
 $f(2\frac{1}{4}) = 2\frac{1}{4}$, dus $B(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4})$.

61 a $rc_p = f'(0) = 4 - 3\sqrt{0} = 4$
 $q \perp p$, dus $rc_q \cdot 4 = -1$ en dit geeft $rc_q = -\frac{1}{4}$.
 En omdat q door de oorsprong gaat, is $q: y = -\frac{1}{4}x$.
 q snijden met de grafiek van f geeft $4x - 2x\sqrt{x} = -\frac{1}{4}x$
 $4\frac{1}{4}x - 2x\sqrt{x} = 0$
 $x(4\frac{1}{4} - 2\sqrt{x}) = 0$
 $x = 0 \vee 2\sqrt{x} = 4\frac{1}{4}$
 $x = 0 \vee \sqrt{x} = 2\frac{1}{8}$
 $x = 0 \vee x = 4\frac{33}{64}$

Dus $x_T = 4\frac{33}{64}$.

- b** De lijn r heeft twee punten met de grafiek van f gemeenschappelijk als $a < f'(0)$.
 Dus de lijn r heeft twee punten met de grafiek van f gemeenschappelijk als $a < 4$.

Bladzijde 78

62 a $x_P = \frac{1}{2}$ geeft $PQ = y_Q = (\frac{1}{2})^2 - 8 \cdot \frac{1}{2} + 16 = \frac{1}{4} - 4 + 16 = 12\frac{1}{4}$ en $A = OP \cdot PQ = x_P \cdot y_Q = \frac{1}{2} \cdot 12\frac{1}{4} = 6\frac{1}{8}$.
b $x_P = 1$ geeft $y_Q = 1^2 - 8 \cdot 1 + 16 = 1 - 8 + 16 = 9$ en $A = x_P \cdot y_Q = 1 \cdot 9 = 9$.
c $x_P = 2$ geeft $y_Q = 2^2 - 8 \cdot 2 + 16 = 4 - 16 + 16 = 4$ en $A = x_P \cdot y_Q = 2 \cdot 4 = 8$.

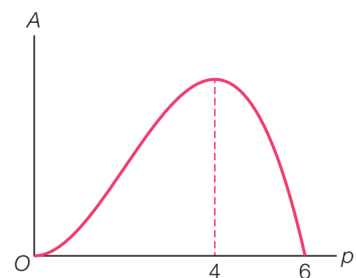
Bladzijde 79

63 a $A = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ$
 $OQ = x_Q = p$
 $PQ = y_P = -\frac{1}{2}p^2 + 3p$
 Dus $A = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (-\frac{1}{2}p^2 + 3p) = -\frac{1}{4}p^3 + \frac{3}{2}p^2$.
b $\frac{dA}{dp} = -\frac{3}{4}p^2 + 3p$
c $\frac{dA}{dp} = 0$ geeft $-\frac{3}{4}p^2 + 3p = 0$
 $-\frac{3}{4}p(p - 4) = 0$
 $p = 0 \vee p = 4$

Zie de schets hiernaast.

De oppervlakte van $\triangle OPQ$ is maximaal voor $p = 4$.

De maximale oppervlakte is $A_{\max} = -\frac{1}{4} \cdot 4^3 + \frac{3}{2} \cdot 4^2 = 8$.



64 $A = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ$

$$OQ = x_Q = p$$

$$PQ = y_P = 9 - p^2$$

$$\text{Dus } A = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (9 - p^2) = 4\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p^3.$$

$$\frac{dA}{dp} = 4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}p^2$$

$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } 4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}p^2 = 0$$

$$-1\frac{1}{2}p^2 = -4\frac{1}{2}$$

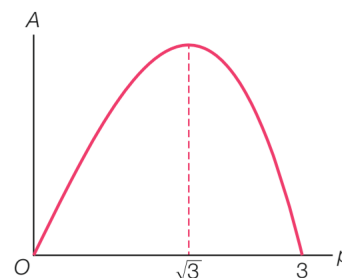
$$p^2 = 3$$

$$p = \sqrt{3} \vee p = -\sqrt{3}$$

Zie de schets hiernaast.

De oppervlakte van $\triangle OPQ$ is maximaal voor $p = \sqrt{3}$.

De maximale oppervlakte is $A_{\max} = 4\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$.



65 a $-x^2 + 6x = 0$

$$x(-x + 6) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 6$$

$$A = PQ \cdot PS$$

Wegens de symmetrie van de parabool geldt $PQ = 6 - 2OP = 6 - 2p$.

$$PS = y_S = -p^2 + 6p$$

$$\text{Dus } A = (6 - 2p)(-p^2 + 6p).$$

b $A = (6 - 2p)(-p^2 + 6p) = -6p^2 + 36p + 2p^3 - 12p^2 = 2p^3 - 18p^2 + 36p$ geeft $\frac{dA}{dp} = 6p^2 - 36p + 36$

c $\frac{dA}{dp} = 0$ geeft $6p^2 - 36p + 36 = 0$

$$p^2 - 6p + 6 = 0$$

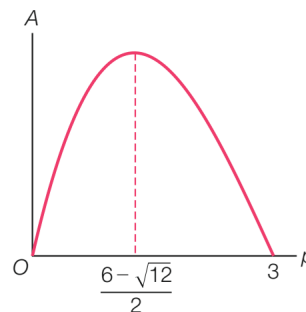
$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 12$$

$$p = \frac{6 + \sqrt{12}}{2} \vee p = \frac{6 - \sqrt{12}}{2}$$

$$\text{Omdat } 0 < p < 3 \text{ is de oplossing } p = \frac{6 - \sqrt{12}}{2}.$$

Zie de schets hiernaast.

De oppervlakte van rechthoek $PQRS$ is maximaal voor $p = \frac{6 - \sqrt{12}}{2} \approx 1,27$.



66 a $A = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot PR$

$$PQ = x_Q - x_P = 4 - p$$

$$PR = y_R = p^2 - 2p + 3$$

$$\text{Dus } A = \frac{1}{2}(4 - p)(p^2 - 2p + 3) = \frac{1}{2}(4p^2 - 8p + 12 - p^3 + 2p^2 - 3p)$$

$$= \frac{1}{2}(-p^3 + 6p^2 - 11p + 12) = -\frac{1}{2}p^3 + 3p^2 - 5\frac{1}{2}p + 6.$$

b $\frac{dA}{dp} = -1\frac{1}{2}p^2 + 6p - 5\frac{1}{2}$

$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } -1\frac{1}{2}p^2 + 6p - 5\frac{1}{2} = 0$$

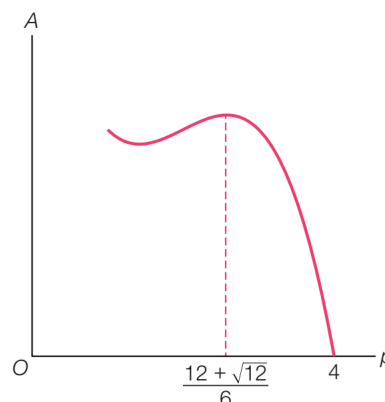
$$3p^2 - 12p + 11 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11 = 12$$

$$p = \frac{12 + \sqrt{12}}{6} \vee p = \frac{12 - \sqrt{12}}{6}$$

Zie de schets hiernaast.

Dus A is maximaal voor $p = \frac{12 + \sqrt{12}}{6}$ en $A_{\max} \approx 3,192$.



67 Invoeren van de formule van A en de waarde van $A_{\max}$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $p = 0,845\dots$. Dus voor $p \approx 0,85$ is de oppervlakte van $\triangle PQR$ net zo groot als de maximale oppervlakte die in opgave 66 is berekend.

$$68 \quad \left. \begin{aligned} f(1) &= \sqrt{1} = 1, \text{ dus } A(1, 1) \\ g(1) &= \frac{1}{5}, \text{ dus } B(1, \frac{1}{5}) \end{aligned} \right\} L = y_A - y_B = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\left. \begin{aligned} f(2\frac{1}{4}) &= \sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } A(2\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}) \\ g(2\frac{1}{4}) &= \frac{9}{20}, \text{ dus } B(2\frac{1}{4}, \frac{9}{20}) \end{aligned} \right\} L = y_A - y_B = 1\frac{1}{2} - \frac{9}{20} = 1\frac{1}{20}$$

$$\left. \begin{aligned} f(9) &= \sqrt{9} = 3, \text{ dus } A(9, 3) \\ g(9) &= \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}, \text{ dus } B(9, 1\frac{4}{5}) \end{aligned} \right\} L = y_A - y_B = 3 - 1\frac{4}{5} = 1\frac{1}{5}$$

Bladzijde 81

69 a Voor $x = p$ met $-2 < p < 4$ ligt de grafiek van g boven die van f , dus $L = y_B - y_A = g(p) - f(p) = \sqrt{6p+12} - (p+2) = \sqrt{6p+12} - p - 2$.

b $L = \sqrt{6p+12} - p - 2 = (6p+12)^{\frac{1}{2}} - p - 2$ geeft

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2} (6p+12)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 - 1 = 3 \cdot \frac{1}{(6p+12)^{\frac{1}{2}}} - 1 = \frac{3}{\sqrt{6p+12}} - 1$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{3}{\sqrt{6p+12}} - 1 = 0$$

$$\frac{3}{\sqrt{6p+12}} = 1$$

$$\sqrt{6p+12} = 3$$

$$6p+12 = 9$$

$$6p = -3$$

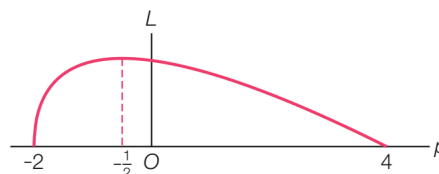
$$p = -\frac{1}{2}$$

Zie de schets hiernaast.

L is maximaal voor $p = -\frac{1}{2}$.

De maximale waarde van L is

$$L_{\max} = \sqrt{6 \cdot -\frac{1}{2} + 12} - -\frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}.$$



Bladzijde 82

70 a Voor $x = p$ met $x_A < p < x_B$ ligt de grafiek van g boven die van f , dus $L = y_D - y_C = g(p) - f(p) = -\frac{1}{2}p + 6 - (7 - \sqrt{3p+6}) = -\frac{1}{2}p + 6 - 7 + \sqrt{3p+6} = \sqrt{3p+6} - \frac{1}{2}p - 1$.

b $L = \sqrt{3p+6} - \frac{1}{2}p - 1 = (3p+6)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}p - 1$ geeft

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2} (3p+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(3p+6)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2\sqrt{3p+6}} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{3}{2\sqrt{3p+6}} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3p+6}} = \frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{3p+6} = 6$$

$$\sqrt{3p+6} = 3$$

$$3p+6 = 9$$

$$3p = 3$$

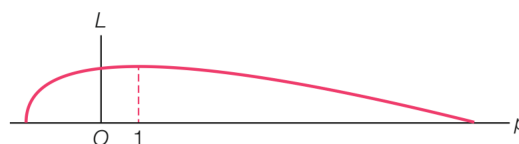
$$p = 1$$

Zie de schets hiernaast.

L is maximaal voor $p = 1$.

De maximale waarde van L is

$$L_{\max} = \sqrt{3 \cdot 1 + 6} - \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 = 1\frac{1}{2}.$$



71 Voor $x = p$ met $0 < p < x_B$ ligt de grafiek van g boven die van f , dus

$$L = CD = y_D - y_C = g(p) - f(p) = 4\sqrt{2p} - \frac{1}{4}p^2 = 4(2p)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}p^2 \text{ en dit geeft}$$

$$\frac{dL}{dp} = 4 \cdot \frac{1}{2}(2p)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 - \frac{1}{2}p = 4 \cdot \frac{1}{(2p)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}p = \frac{4}{\sqrt{2p}} - \frac{1}{2}p$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{4}{\sqrt{2p}} - \frac{1}{2}p = 0$$

$$\frac{4}{\sqrt{2p}} = \frac{p}{2}$$

$$p\sqrt{2p} = 8$$

kwadrateren geeft

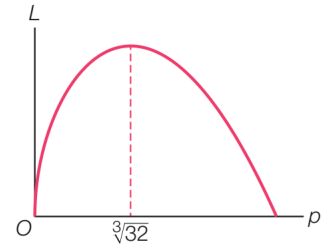
$$p^2 \cdot 2p = 64$$

$$p^3 = 32$$

$$p = \sqrt[3]{32}$$

Zie de schets hiernaast.

De lengte van lijnstuk CD is maximaal voor $p = \sqrt[3]{32}$.



72 Voor $x = p$ met $p \geq 0$ ligt de grafiek van g boven die van f , dus

$$L = AB = y_B - y_A = g(p) - f(p) = \frac{2}{3}p\sqrt{p} - (-p^2 + 6p - 8) = \frac{2}{3}p\sqrt{p} + p^2 - 6p + 8$$

$$= \frac{2}{3}p^{1\frac{1}{2}} + p^2 - 6p + 8.$$

$$\frac{dL}{dp} = p^{\frac{1}{2}} + 2p - 6 = \sqrt{p} + 2p - 6$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \sqrt{p} + 2p - 6 = 0$$

$$\sqrt{p} = -2p + 6$$

kwadrateren geeft

$$p = (-2p + 6)^2$$

$$p = 4p^2 - 24p + 36$$

$$4p^2 - 25p + 36 = 0$$

$$D = (-25)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 49, \text{ dus } \sqrt{D} = 7$$

$$p = \frac{25 + 7}{8} \vee p = \frac{25 - 7}{8}$$

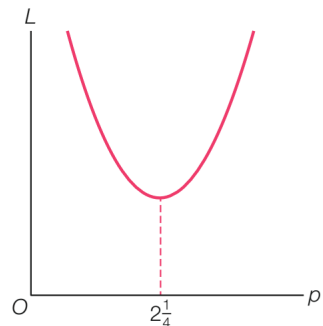
$$p = 4 \vee p = 2\frac{1}{4}$$

$p = 4$ voldoet niet, dus $p = 2\frac{1}{4}$.

Zie de schets hiernaast.

L is minimaal voor $p = 2\frac{1}{4}$.

De minimale lengte van lijnstuk AB is $\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} + (2\frac{1}{4})^2 - 6 \cdot 2\frac{1}{4} + 8 = 1\frac{13}{16}$.



73 Voor $x = p$ met $x_A < p < x_B$ ligt de grafiek van g boven die van f , dus

$$L = CD = y_D - y_C = g(p) - f(p) = 9 - p - \frac{8}{2p-1} = 9 - p - 8(2p-1)^{-1} \text{ en dit geeft}$$

$$\frac{dL}{dp} = -1 - 8 \cdot -1(2p-1)^{-2} \cdot 2 = -1 + \frac{16}{(2p-1)^2}$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } -1 + \frac{16}{(2p-1)^2} = 0$$

$$\frac{16}{(2p-1)^2} = 1$$

$$(2p-1)^2 = 16$$

$$2p-1 = 4 \vee 2p-1 = -4$$

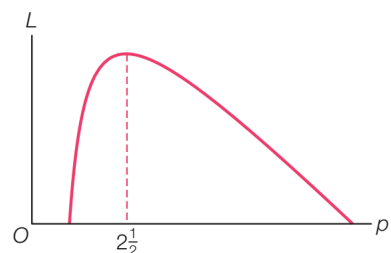
$$2p = 5 \vee 2p = -3$$

$$p = 2\frac{1}{2} \vee p = -1\frac{1}{2}$$

Zie de schets hiernaast.

L is maximaal voor $p = 2\frac{1}{2}$.

De maximale lengte van het lijnstuk CD is $9 - 2\frac{1}{2} - \frac{8}{2 \cdot 2\frac{1}{2} - 1} = 4\frac{1}{2}$.



Bladzijde 83

C9

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{x}$$

$$rc_k = f'(4) = \frac{3}{4}\sqrt{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l \cdot 1\frac{1}{2} = -1 \text{ en dit geeft } rc_l = -\frac{2}{3}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(4, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot 4 + b = 4 \\ -2\frac{2}{3} + b = 4 \\ b = 6\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{2}{3}x + 6\frac{2}{3}.$$

$$y = 0 \text{ geeft } -\frac{2}{3}x + 6\frac{2}{3} = 0$$

$$-\frac{2}{3}x = -6\frac{2}{3}$$

$$x = 10$$

$$\text{Dus } x_B = 10.$$

C10

$$A = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ$$

$$OQ = x_Q = p$$

$$PQ = y_P = -p^2 + 2p + 15$$

$$\text{Dus } A = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (-p^2 + 2p + 15) = -\frac{1}{2}p^3 + p^2 + 7\frac{1}{2}p.$$

$$\frac{dA}{dp} = -\frac{1}{2}p^2 + 2p + 7\frac{1}{2}$$

$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } -\frac{1}{2}p^2 + 2p + 7\frac{1}{2} = 0$$

$$3p^2 - 4p - 15 = 0$$

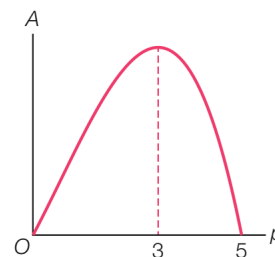
$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -15 = 196, \text{ dus } \sqrt{D} = 14$$

$$p = \frac{4 + 14}{6} \vee p = \frac{4 - 14}{6}$$

$$p = 3 \vee p = -1\frac{2}{3}$$

Zie de schets hiernaast.

Dus A is maximaal voor $p = 3$.



C11

Voor $x = p$ met $0 < p < x_A$ ligt de grafiek van f boven die van g , dus

$$L = BC = y_B - y_C = f(p) - g(p) = \sqrt{3p} - (p - 6) = (3p)^{\frac{1}{2}} - p + 6 \text{ en dit geeft}$$

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2}(3p)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 - 1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(3p)^{\frac{1}{2}}} - 1 = \frac{3}{2\sqrt{3p}} - 1$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{3}{2\sqrt{3p}} - 1 = 0$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3p}} = 1$$

$$2\sqrt{3p} = 3$$

$$\sqrt{3p} = 1\frac{1}{2}$$

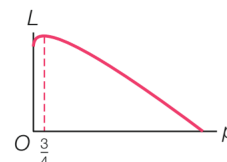
$$3p = 2\frac{1}{4}$$

$$p = \frac{3}{4}$$

Zie de schets hiernaast.

L is maximaal voor $p = \frac{3}{4}$.

De maximale lengte van het lijnstuk BC is $\sqrt{3 \cdot \frac{3}{4}} - (\frac{3}{4} - 6) = 6\frac{3}{4}$.



Bladzijde 84

1 a $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$
 $y = ax + b$

$$a = f'(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 + 4 = 4$$

$$y = 4x + b$$

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 9\frac{2}{3}, \text{ dus } A(2, 9\frac{2}{3}) \\ 4 \cdot 2 + b &= 9\frac{2}{3} \\ 8 + b &= 9\frac{2}{3} \\ b &= 1\frac{2}{3} \end{aligned} \right\}$$

Dus $k: y = 4x + 1\frac{2}{3}$ en $y_B = 1\frac{2}{3}$.

b $f'(x) = -8$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = -8$
 $-\frac{1}{2}x^2 + x + 12 = 0$

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$(x + 4)(x - 6) = 0$$

$$x = -4 \vee x = 6$$

$x_C = -4$ geeft $y_C = f(-4) = 3\frac{2}{3}$, dus $C(-4, 3\frac{2}{3})$.

$x_D = 6$ geeft $y_D = f(6) = 7$, dus $D(6, 7)$.

2 a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 6x$
 $f'(x) = 0$ geeft $3x^2 - 6x = 0$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

Je krijgt max. is $f(0) = 2$ en min. is $f(2) = -2$.

b $g(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 4$ geeft $g'(x) = 3x^2 - 18x + 15$
 $g'(x) = 0$ geeft $3x^2 - 18x + 15 = 0$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 5$$

Je krijgt max. is $g(1) = 11$ en min. is $g(5) = -21$.

3 a $f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 45x^2 - 30x + 5$ geeft $f'(x) = 36x^3 + 12x^2 - 90x - 30$

$$f'(1\frac{1}{2}) = 36 \cdot (1\frac{1}{2})^3 + 12 \cdot (1\frac{1}{2})^2 - 90 \cdot 1\frac{1}{2} - 30 = -16\frac{1}{2}$$

$$f'(1\frac{1}{2}) \neq 0, \text{ dus } f \text{ heeft geen extreme waarde voor } x = 1\frac{1}{2}.$$

b $f'(\sqrt{2\frac{1}{2}}) = 36 \cdot (\sqrt{2\frac{1}{2}})^3 + 12 \cdot (\sqrt{2\frac{1}{2}})^2 - 90 \cdot \sqrt{2\frac{1}{2}} - 30 = 0$

$$f'(\sqrt{2\frac{1}{2}}) = 0 \text{ en in de figuur in het leerboek is te zien dat de grafiek een top}$$

$$\text{heeft voor } x = \sqrt{2\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Dus } f \text{ heeft een extreme waarde voor } x = \sqrt{2\frac{1}{2}}.$$

4 a $f(x) = \frac{3}{x^4} = 3x^{-4}$ geeft $f'(x) = -12x^{-5} = -\frac{12}{x^5}$

b $g(x) = 4 - \frac{3x-2}{x^3} = 4 - (3x^{-2} - 2x^{-3}) = 4 - 3x^{-2} + 2x^{-3}$ geeft $g'(x) = 6x^{-3} - 6x^{-4} = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$

c $h(x) = \frac{8x^2-2x}{\sqrt{x}} = \frac{8x^2-2x}{x^{\frac{1}{2}}} = 8x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = 12x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 12\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 12\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

d $k(x) = \frac{6\sqrt{x}-x^2}{x} = \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{x} - x = 6x^{-\frac{1}{2}} - x$ geeft $k'(x) = -3x^{-\frac{3}{2}} - 1 = -\frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} - 1 = -\frac{3}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} - 1 = -\frac{3}{x\sqrt{x}} - 1$

e $l(x) = (x + 2\sqrt{x})^2 = x^2 + 4x\sqrt{x} + 4x = x^2 + 4x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 4x = x^2 + 4x^{\frac{3}{2}} + 4x$ geeft

$$l'(x) = 2x + 6x^{\frac{1}{2}} + 4 = 2x + 6\sqrt{x} + 4$$

f $m(x) = \frac{x^2+2x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2+2x}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{5}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}}$ geeft $m'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$

5

$$\mathbf{a} \quad f(x) = \frac{2x+4}{\sqrt{x}} = \frac{2x+4}{x^{\frac{1}{2}}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

$$x\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$$

$$x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x}(x-2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

$x = 0$ voldoet niet, dus $x = 2$.

Je krijgt min. is $f(2) = 4\sqrt{2}$, dus $B_f = [4\sqrt{2}, \rightarrow)$.

$$\mathbf{b} \quad y = ax + b$$

$$a = f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{2}{1\sqrt{1}} = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -x + b \\ f(1) = 6, \text{ dus } B(1, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 + b = 6 \\ b = 7 \end{array}$$

Dus $k: y = -x + 7$.

$y = 0$ geeft $-x + 7 = 0$

$$x = 7$$

Dus $x_B = 7$.

Bladzijde 85

6

$$\mathbf{a} \quad f(x) = (6x-1)^5 \text{ geeft } f'(x) = 5(6x-1)^4 \cdot 6 = 30(6x-1)^4$$

$$\mathbf{b} \quad g(x) = 6x^3 - \frac{5}{(2x-1)^4} = 6x^3 - 5(2x-1)^{-4} \text{ geeft } g'(x) = 18x^2 - 5 \cdot -4(2x-1)^{-5} \cdot 2 = 18x^2 + \frac{40}{(2x-1)^5}$$

$$\mathbf{c} \quad h(x) = 3x - \frac{5}{4x-3} = 3x - 5(4x-3)^{-1} \text{ geeft } h'(x) = 3 - 5 \cdot -1(4x-3)^{-2} \cdot 4 = 3 + \frac{20}{(4x-3)^2}$$

$$\mathbf{d} \quad k(x) = 5(3x-1)^{\frac{1}{3}} \text{ geeft } k'(x) = 5 \cdot \frac{1}{3}(3x-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 = 5(3x-1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\mathbf{e} \quad l(x) = \sqrt{3x-4} + x^2 = (3x-4)^{\frac{1}{2}} + x^2 \text{ geeft } l'(x) = \frac{1}{2}(3x-4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 + 2x = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(3x-4)^{\frac{1}{2}}} + 2x = \frac{3}{2\sqrt{3x-4}} + 2x$$

$$\mathbf{f} \quad m(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+7}} = \frac{3}{(2x+7)^{\frac{1}{2}}} = 3(2x+7)^{-\frac{1}{2}} \text{ geeft } m'(x) = 3 \cdot -\frac{1}{2}(2x+7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = -3 \cdot \frac{1}{(2x+7)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-3}{(2x+7)\sqrt{2x+7}}$$

7

$$\mathbf{a} \quad f(x) = (\frac{1}{3}x-2)^3 - 9x + 40 \text{ geeft } f'(x) = 3(\frac{1}{3}x-2)^2 \cdot \frac{1}{3} - 9 = (\frac{1}{3}x-2)^2 - 9$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } (\frac{1}{3}x-2)^2 - 9 = 0$$

$$(\frac{1}{3}x-2)^2 = 9$$

$$\frac{1}{3}x-2 = 3 \vee \frac{1}{3}x-2 = -3$$

$$\frac{1}{3}x = 5 \vee \frac{1}{3}x = -1$$

$$x = 15 \vee x = -3$$

Je krijgt max. is $f(-3) = 40$ en min. is $f(15) = -68$.

$$\begin{aligned}
 \text{b } f'(x) = 7 \text{ geeft } \left(\frac{1}{3}x - 2\right)^2 - 9 &= 7 \\
 \left(\frac{1}{3}x - 2\right)^2 &= 16 \\
 \frac{1}{3}x - 2 &= 4 \vee \frac{1}{3}x - 2 = -4 \\
 \frac{1}{3}x &= 6 \vee \frac{1}{3}x = -2 \\
 x &= 18 \vee x = -6 \\
 k: y &= 7x + b \\
 f(18) &= -58, \text{ dus } (18, -58) \left. \vphantom{\begin{aligned} k: y &= 7x + b \\ f(18) &= -58, \text{ dus } (18, -58) \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} 7 \cdot 18 + b &= -58 \\ 126 + b &= -58 \\ b &= -184 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Dus $k: y = 7x - 184$.

$$\begin{aligned}
 l: y &= 7x + b \\
 f(-6) &= 30, \text{ dus } (-6, 30) \left. \vphantom{\begin{aligned} l: y &= 7x + b \\ f(-6) &= 30, \text{ dus } (-6, 30) \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} 7 \cdot -6 + b &= 30 \\ -42 + b &= 30 \\ b &= 72 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Dus $l: y = 7x + 72$.

$$\begin{aligned}
 \text{8 a } f(x) &= \sqrt{3x+15} - \frac{1}{2}x = (3x+15)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x \text{ geeft} \\
 f'(x) &= \frac{1}{2}(3x+15)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(3x+15)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2\sqrt{3x+15}} - \frac{1}{2} \\
 f'(x) &= 0 \text{ geeft } \frac{3}{2\sqrt{3x+15}} - \frac{1}{2} = 0 \\
 \frac{3}{2\sqrt{3x+15}} &= \frac{1}{2} \\
 2\sqrt{3x+15} &= 6 \\
 \sqrt{3x+15} &= 3 \\
 3x+15 &= 9 \\
 3x &= -6 \\
 x &= -2
 \end{aligned}$$

Je krijgt max. is $f(-2) = 4$.

$$\begin{aligned}
 \text{b } y &= ax + b \\
 a &= f'(7) = \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 7 + 15}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \\
 y &= -\frac{1}{4}x + b \\
 f(7) &= 2\frac{1}{2}, \text{ dus } A(7, 2\frac{1}{2}) \left. \vphantom{\begin{aligned} y &= -\frac{1}{4}x + b \\ f(7) &= 2\frac{1}{2}, \text{ dus } A(7, 2\frac{1}{2}) \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} -\frac{1}{4} \cdot 7 + b &= 2\frac{1}{2} \\ -1\frac{3}{4} + b &= 2\frac{1}{2} \\ b &= 4\frac{1}{4} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}
 y &= 0 \text{ geeft } -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4} = 0 \\
 -\frac{1}{4}x &= -4\frac{1}{4} \\
 x &= 17
 \end{aligned}$$

Dus $x_B = 17$.

9 a $f(x) = 4x\sqrt{x} - x^2 = 4x^{1\frac{1}{2}} - x^2$ geeft $f'(x) = 6x^{\frac{1}{2}} - 2x = 6\sqrt{x} - 2x$
 $f'(x) = 0$ geeft $6\sqrt{x} - 2x = 0$
 $6\sqrt{x} = 2x$
kwadrateren geeft
 $36x = 4x^2$
 $36x - 4x^2 = 0$
 $4x(9 - x) = 0$
 $x = 0 \vee x = 9$

Je krijgt max. is $f(9) = 27$, dus $B_f = \langle \leftarrow, 27 \rangle$.

b $rc_k = f'(4) = 6\sqrt{4} - 2 \cdot 4 = 4$
 $l \perp k$, dus $rc_l \cdot 4 = -1$ en dit geeft $rc_l = -\frac{1}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x + b \\ \text{door } A(4, 16) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \cdot 4 + b = 16 \\ -1 + b = 16 \\ b = 17 \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{4}x + 17$.

$y = 0$ geeft $-\frac{1}{4}x + 17 = 0$

$$-\frac{1}{4}x = -17$$

$$x = 68$$

Dus $B(68, 0)$.

10 $A = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ$

$OQ = x_Q = p$

$PQ = y_P = 16 - p^2$

Dus $A = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (16 - p^2) = 8p - \frac{1}{2}p^3$.

$$\frac{dA}{dp} = 8 - \frac{3}{2}p^2$$

$\frac{dA}{dp} = 0$ geeft $8 - \frac{3}{2}p^2 = 0$

$$-\frac{3}{2}p^2 = -8$$

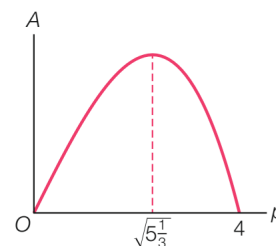
$$p^2 = 5\frac{1}{3}$$

$$p = \sqrt{5\frac{1}{3}} \vee p = -\sqrt{5\frac{1}{3}}$$

Zie de schets hiernaast.

De oppervlakte van $\triangle OPQ$ is maximaal voor $p = \sqrt{5\frac{1}{3}}$.

De maximale oppervlakte is $A_{\max} = 8 \cdot \sqrt{5\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5\frac{1}{3}})^3 \approx 12,32$.



11 Voor $x = p$ met $p > 0$ ligt de grafiek van f boven die van g , dus

$$L = AB = y_A - y_B = f(p) - g(p) = p^2 + 4 - p\sqrt{p} = p^2 + 4 - p^{1\frac{1}{2}}$$

en dit geeft $\frac{dL}{dp} = 2p - \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}} = 2p - \frac{1}{2}\sqrt{p}$

$\frac{dL}{dp} = 0$ geeft $2p - \frac{1}{2}\sqrt{p} = 0$

$$2p = \frac{1}{2}\sqrt{p}$$

$$4p = \sqrt{p}$$

kwadrateren geeft

$$16p^2 = 9p$$

$$16p^2 - 9p = 0$$

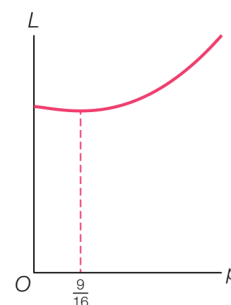
$$p(16p - 9) = 0$$

$$p = 0 \vee 16p = 9$$

$$p = 0 \vee p = \frac{9}{16}$$

Zie de schets hiernaast.

De lengte van lijnstuk AB is minimaal voor $p = \frac{9}{16}$.



Gemengde opgaven

Bladzijde 86

- 1 a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ geeft $f'(x) = x^2 - x - 2$
 $rc_k = f'(4) = 4^2 - 4 - 2 = 10$
 $l \perp k$, dus $rc_l \cdot 10 = -1$ en dit geeft $rc_l = -\frac{1}{10}$.
 $y = -\frac{1}{10}x + b$
 $f(4) = 6\frac{1}{3}$, dus $A(4, 6\frac{1}{3}) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{10} \cdot 4 + b = 6\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5} + b = 6\frac{1}{3} \end{array} \right.$
 $b = 6\frac{11}{15}$
Dus $l: y = -\frac{1}{10}x + 6\frac{11}{15}$ en $B(0, 6\frac{11}{15})$.
- b** $f'(x) = 0$ geeft $x^2 - x - 2 = 0$
 $(x+1)(x-2) = 0$
 $x = -1 \vee x = 2$
 $f(-1) = 2\frac{1}{6}$ en $f(2) = -2\frac{1}{3}$, dus de punten zijn $(-1, 2\frac{1}{6})$ en $(2, -2\frac{1}{3})$.
- c** $f'(x) = 4$ geeft $x^2 - x - 2 = 4$
 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x+2)(x-3) = 0$
 $x = -2 \vee x = 3$
 $x_C = -2$ geeft $y_C = f(-2) = \frac{1}{3}$, dus $C(-2, \frac{1}{3})$.
 $x_D = 3$ geeft $y_D = f(3) = -\frac{1}{2}$, dus $D(3, -\frac{1}{2})$.

- 2 a** $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x} = x - 3 + 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$
 $f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{4}{x^2} = 0$
 $\frac{4}{x^2} = 1$
 $x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$

Je krijgt max. is $f(-2) = -7$ en min. is $f(2) = 1$.

De vergelijking $f(x) = p$ heeft geen oplossing voor $-7 < p < 1$.

- b** $rc > 1$, dus $f'(x) > 1$
 $1 - \frac{4}{x^2} > 1$
 $-\frac{4}{x^2} > 0$

Omdat $-\frac{4}{x^2}$ voor elke x kleiner is dan 0 heeft de vergelijking $-\frac{4}{x^2} > 0$ geen oplossing.
Dus de grafiek van f heeft geen raaklijn met een richtingscoëfficiënt groter dan 1.

- 3 a** $f(x) = \sqrt{8x+12} - x^2 = (8x+12)^{\frac{1}{2}} - x^2$ geeft
 $f'(x) = \frac{1}{2}(8x+12)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8 - 2x = 4 \cdot \frac{1}{(8x+12)^{\frac{1}{2}}} - 2x = \frac{4}{\sqrt{8x+12}} - 2x$
 $f'(\frac{1}{2}) = \frac{4}{\sqrt{8 \cdot \frac{1}{2} + 12}} - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$

$f'(\frac{1}{2}) = 0$ en in de figuur in het leerboek is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \frac{1}{2}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \frac{1}{2}$.

- b** $rc_k = f'(3) = \frac{4}{\sqrt{24+12}} - 6 = -5\frac{1}{3}$
 $l \perp k$, dus $rc_l \cdot -5\frac{1}{3} = -1$ en dit geeft $rc_l = \frac{3}{16}$.
 $y = \frac{3}{16}x + b$
 $f(3) = -3$, dus $A(3, -3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{16} \cdot 3 + b = -3 \\ \frac{9}{16} + b = -3 \end{array} \right.$
 $b = -3\frac{9}{16}$
Dus $l: y = \frac{3}{16}x - 3\frac{9}{16}$ en $S(0, -3\frac{9}{16})$.

4 a $f(x) = \sqrt{6-2x} = (6-2x)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(6-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2 = -1 \cdot \frac{1}{(6-2x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{6-2x}}$

$rc_m = rc_k = -2$, dus $f'(x) = -2$ en dit geeft $-\frac{1}{\sqrt{6-2x}} = -2$

$$-2\sqrt{6-2x} = -1$$

$$\sqrt{6-2x} = \frac{1}{2}$$

$$6-2x = \frac{1}{4}$$

$$-2x = -5\frac{3}{4}$$

$$x = 2\frac{7}{8}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(2\frac{7}{8}) = \frac{1}{2}, \text{ dus } (2\frac{7}{8}, \frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 2\frac{7}{8} + b = \frac{1}{2} \\ -5\frac{3}{4} + b = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$b = 6\frac{1}{4}$$

Dus $m: y = -2x + 6\frac{1}{4}$.

$y = 0$ geeft $-2x + 6\frac{1}{4} = 0$

$$-2x = -6\frac{1}{4}$$

$$x = 3\frac{1}{8}$$

Dus $x_A = 3\frac{1}{8}$.

b Voor $x = p$ met $-5 < p < 3$ ligt de grafiek van f boven de lijn l , dus

$$L = BC = y_B - y_C = \sqrt{6-2p} - (-\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{2}) = (6-2p)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}p - 1\frac{1}{2} \text{ en dit geeft}$$

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2}(6-2p)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2 + \frac{1}{2} = -1 \cdot \frac{1}{(6-2p)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{6-2p}} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } -\frac{1}{\sqrt{6-2p}} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{6-2p}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{6-2p} = 2$$

$$6-2p = 4$$

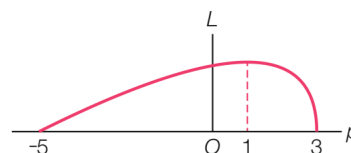
$$2p = 2$$

$$p = 1$$

Zie de schets hiernaast.

L is maximaal voor $p = 1$.

De maximale lengte van lijnstuk BC is $\sqrt{6-2 \cdot 1} + \frac{1}{2} \cdot 1 - 1\frac{1}{2} = 1$.



Bladzijde 87

5 a $f(x) = x^3 + 12x^2 + 45x + 47$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 24x + 45$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3x^2 + 24x + 45 = 0$$

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$(x+3)(x+5) = 0$$

$$x = -3 \vee x = -5$$

Je krijgt max. is $f(-5) = -3$ en min. is $f(-3) = -7$.

Dus de vergelijking $f(x) = p$ heeft één oplossing voor $p < -7 \vee p > -3$.

b Door op de grafiek van f de translatie $(0, 3)$ of de translatie $(0, 7)$ toe te passen, raakt de beeldgrafiek de x -as.

Dus $a = 47 + 3 = 50$ of $a = 47 + 7 = 54$.

6 a $f(x) = 4 + \frac{8}{(ax-2)^2} = 4 + 8(ax-2)^{-2}$ geeft $f'(x) = 8 \cdot -2(ax-2)^{-3} \cdot a = -\frac{16a}{(ax-2)^3}$

$$y = px + q$$

$$p = f'(0) = -\frac{16a}{(-2)^3} = 2a$$

$f(0) = 6$, dus $A(0, 6)$ en dit geeft $q = 6$.

Dus $k: y = 2ax + 6$.

b $4x + 16 = 0$

$$4x = -16$$

$$x = -4$$

Dus het randpunt is $(-4, 0)$.

$$2a \cdot -4 + 6 = 0$$

$$-8a + 6 = 0$$

$$-8a = -6$$

$$a = \frac{3}{4}$$

c $g(x) = \sqrt{4x + 16} = (4x + 16)^{\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{2}(4x + 16)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = 2 \cdot \frac{1}{(4x + 16)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{4x + 16}}$

$$rc_l = g'(0) = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 0 + 16}} = \frac{1}{2}$$

$$rc_k = rc_l \text{ geeft } 2a = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

7 a $f(x) = 0$ geeft $x^3 - x^2 - 2x = 0$

$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$$

$x = 0$ en $x = -1$ voldoen niet, dus $x_S = 2$.

b $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{\sqrt{x}} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{2\frac{1}{2}} - x^{1\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} - 1\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{3x}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}}$$

c $f'(x) = 0$ geeft $5x^2 - 3x - 2 = 0$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -2 = 49, \text{ dus } \sqrt{D} = 7$$

$$x = \frac{3 + 7}{10} = 1 \vee x = \frac{3 - 7}{10} = -\frac{2}{5}$$

$x = -\frac{2}{5}$ voldoet niet, dus $x = 1$.

Je krijgt min. is $f(1) = -2$, dus $B_f = [-2, \rightarrow)$.

d $A = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ$

$$OQ = x_Q = p$$

$$PQ = -y_P = -\frac{p^3 - p^2 - 2p}{\sqrt{p}}$$

$$\text{Dus } A = \frac{1}{2} \cdot p \cdot -\frac{p^3 - p^2 - 2p}{\sqrt{p}} = \frac{-\frac{1}{2}p^4 + \frac{1}{2}p^3 + p^2}{p^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}p^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{2}p^{\frac{5}{2}} + p^{\frac{3}{2}}$$

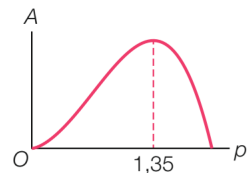
e $\frac{dA}{dp} = -1\frac{3}{4}p^{\frac{1}{2}} + 1\frac{1}{4}p^{\frac{1}{2}} + 1\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}$

Invoeren van de formule van $\frac{dA}{dp}$ en gebruiken van de optie nulpunt geeft

$$p = 0 \vee p = 1,349 \dots$$

Zie de schets hiernaast.

De oppervlakte van $\triangle OPQ$ is maximaal voor $p \approx 1,35$.



a $-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x+2)(x-4) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 4$$

Dus $P(-2, 0)$, $Q(4, 0)$ en $-2 < p < 4$.

$$A = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot RS$$

$$QR = OQ - OR = 4 - p$$

$$RS = y_S = -\frac{1}{2}p^2 + p + 4$$

$$\text{Dus } A = \frac{1}{2} \cdot (4 - p) \cdot \left(-\frac{1}{2}p^2 + p + 4\right) = \left(2 - \frac{1}{2}p\right)\left(-\frac{1}{2}p^2 + p + 4\right)$$

$$= -p^2 + 2p + 8 + \frac{1}{4}p^3 - \frac{1}{2}p^2 - 2p = \frac{1}{4}p^3 - 1\frac{1}{2}p^2 + 8.$$

b $A = \frac{1}{4}p^3 - 1\frac{1}{2}p^2 + 8$ geeft $\frac{dA}{dp} = \frac{3}{4}p^2 - 3p$

$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{3}{4}p^2 - 3p = 0$$

$$\frac{3}{4}p(p - 4) = 0$$

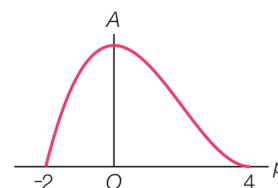
$$p = 0 \vee p = 4$$

$p = 4$ voldoet niet, dus $p = 0$.

Zie de schets hiernaast.

A is maximaal voor $p = 0$.

Dus de maximale oppervlakte van $\triangle QRS$ is 8.



7 Lijnen en cirkels

7.1 Lijnen en hoeken

Bladzijde 91

V1

a $A(2, p)$ op k , dus $2 \cdot 2 - 3 \cdot p = 10$

$$4 - 3p = 10$$

$$-3p = 6$$

$$p = -2$$

b $B(q, -3)$ op l , dus $q + 2 \cdot -3 = 12$

$$q - 6 = 12$$

$$q = 18$$

c $(x, y) = (r, 2r)$ is een oplossing, dus $2 \cdot r - 3 \cdot 2r = 10$

$$2r - 6r = 10$$

$$-4r = 10$$

$$r = -2\frac{1}{2}$$

d $2x - 3y = 10$

$$-3y = -2x + 10$$

$$y = \frac{2}{3}x - 3\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } rc_k = \frac{2}{3}.$$

e $x + 2y = 12$

$$2y = -x + 12$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 6$$

$$\text{Dus } rc_l = -\frac{1}{2}.$$

V2

$$\text{a } \begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 20x - 28y = 4 \\ 20x - 15y = 30 \end{cases} -$$

$$\frac{-13y = -26}{y = 2}$$

$y = 2$ invullen in $5x - 7y = 1$ geeft $5x - 7 \cdot 2 = 1$

$$5x - 14 = 1$$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

Dus $(x, y) = (3, 2)$.

$$\text{b } \begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 6x + 9y = 45 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases} +$$

$$\frac{16x = 40}{x = 2\frac{1}{2}}$$

$x = 2\frac{1}{2}$ invullen in $2x + 3y = 15$ geeft $2 \cdot 2\frac{1}{2} + 3y = 15$

$$5 + 3y = 15$$

$$3y = 10$$

$$y = 3\frac{1}{3}$$

Dus $(x, y) = (2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3})$.

V3

$$\text{a } \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 4y = 11 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 6x + 4y = 10 \\ x - 4y = 11 \end{cases} +$$

$$\frac{7x = 21}{x = 3}$$

$x = 3$ invullen in $3x + 2y = 5$ geeft $3 \cdot 3 + 2y = 5$

$$9 + 2y = 5$$

$$2y = -4$$

$$y = -2$$

Dus $P(3, -2)$.

$$\text{b } \begin{cases} 4x - 5y = 6 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 12x - 15y = 18 \\ 12x - 8y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -7y = 14 \\ y = -2 \end{array}$$

$$y = -2 \text{ invullen in } 4x - 5y = 6 \text{ geeft } 4x - 5 \cdot (-2) = 6$$

$$4x + 10 = 6$$

$$4x = -4$$

$$x = -1$$

Dus $Q(-1, -2)$.

Bladzijde 92

$$\text{1 a } \begin{array}{ll} x - 2y = 4 & x - 2y = 5 \\ -2y = -x + 4 & -2y = -x + 5 \\ y = \frac{1}{2}x - 2 & y = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} \\ \text{Dus } rc_k = \frac{1}{2}. & \text{Dus } rc_l = \frac{1}{2}. \end{array}$$

$rc_k = rc_l$, dus k en l zijn evenwijdig.

b De evenwijdige lijnen k en l hebben geen gemeenschappelijk punt, dus het stelsel $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ heeft geen oplossing.

Bladzijde 93

2 a Geen punt gemeenschappelijk, dus $3p = -4$ oftewel $p = -1\frac{1}{3}$ en $2q \neq -18$ oftewel $q \neq -9$.

$$\text{b } p = 3 \text{ en } q = 17 \text{ geeft } \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 2x + 3y = 17 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ oftewel } \begin{cases} 6x - 4y = 12 \\ 6x + 9y = 51 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -13y = -39 \\ y = 3 \end{array}$$

$$y = 3 \text{ invullen in } 3x - 2y = 6 \text{ geeft } 3x - 2 \cdot 3 = 6$$

$$3x - 6 = 6$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

Dus het snijpunt is $(4, 3)$.

$$\text{c } (3, 17) \text{ op } k, \text{ dus } p \cdot 3 - 2 \cdot 17 = 6$$

$$3p - 34 = 6$$

$$3p = 40$$

$$p = 13\frac{1}{3}$$

$$(3, 17) \text{ op } l, \text{ dus } q = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 17 = 57$$

$$\text{Dus } p = 13\frac{1}{3} \text{ en } q = 57.$$

$$\text{3 } \begin{array}{ll} k: px - 2y = 6 & l: 2x + 3y = q \\ -2y = -px + 6 & 3y = -2x + q \\ y = \frac{1}{2}px - 3 & y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}q \end{array}$$

$$\text{Samenvallen, dus } \frac{1}{2}p = -\frac{2}{3} \text{ en } \frac{1}{3}q = -3$$

$$p = -1\frac{1}{3} \text{ en } q = -9$$

$$\text{4 a } \begin{cases} px - 3y = 6 \\ 5x + y = q \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} px - 3y = 6 \\ -15x - 3y = -3q \end{cases}$$

$$\text{Samenvallen, dus } p = -15 \text{ en } -3q = 6$$

$$p = -15 \text{ en } q = -2$$

b Een snijpunt voor $p \neq -15$ en q mag elk getal zijn.

c Geen punt gemeenschappelijk, dus $p = -15$ en $-3q \neq 6$
 $p = -15$ en $q \neq -2$

$$\text{d } (2, 4) \text{ op } m, \text{ dus } p \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 6$$

$$2p - 12 = 6$$

$$2p = 18$$

$$p = 9$$

$$(2, 4) \text{ op } n, \text{ dus } q = 5 \cdot 2 + 4 = 14$$

$$\text{Dus } p = 9 \text{ en } q = 14.$$

5 a (1, 6) op k , dus $a \cdot 1 + 4 = 6$

$$a = 2$$

(1, 6) op l , dus $c = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 6 = -9$

Dus $a = 2$ en $c = -9$.

b $k: y = ax + 4$

$$-ax + y = 4$$

$$2ax - 2y = -8$$

Geen punt gemeenschappelijk, dus $2a = 3$ en $c \neq -8$

$$a = 1\frac{1}{2} \text{ en } c \neq -8$$

c Substitutie van $y = 2x + 4$ in $3x - 2y = c$ geeft $3x - 2(2x + 4) = c$

$$3x - 4x - 8 = c$$

$$-x = c + 8$$

$$x = -c - 8$$

$x = -c - 8$ invullen in $y = 2x + 4$ geeft $y = 2(-c - 8) + 4$

$$y = -2c - 16 + 4$$

$$y = -2c - 12$$

Snijpunt boven de x -as geeft $y > 0$

$$-2c - 12 > 0$$

$$-2c > 12$$

$$c < -6$$

Bladzijde 94

6 a $q: y = 2x + b$

$$-2x + y = b$$

$$10x - 5y = -5b$$

Een snijpunt voor $a \neq 10$ en b mag elk getal zijn.

b (3, 4) op p , dus $3a - 5 \cdot 4 = 10$

$$3a - 20 = 10$$

$$3a = 30$$

$$a = 10$$

(3, 4) op q , dus $b = -2 \cdot 3 + 4 = -2$

Dus $a = 10$ en $b = -2$.

c Substitutie van $y = 2x + b$ in $5x - 5y = 10$ geeft $5x - 5(2x + b) = 10$

$$5x - 10x - 5b = 10$$

$$-5x = 5b + 10$$

$$x = -b - 2$$

Het snijpunt rechts van de lijn $x = 4$ geeft $-b - 2 > 4$

$$-b > 6$$

$$b < -6$$

7 $\begin{cases} ax + 8y = 12 \\ 2x + ay = pa \end{cases} \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ a \end{smallmatrix} \right|$ geeft $\begin{cases} 2ax + 16y = 24 \\ 2ax + a^2y = pa^2 \end{cases}$

Samenvallen, dus $a^2 = 16$ en $pa^2 = 24$.

$$a^2 = 16 \text{ geeft } a = 4 \vee a = -4$$

$$a^2 = 16 \text{ en } pa^2 = 24 \text{ geeft } 16p = 24$$

$$p = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } a = 4 \vee a = -4 \text{ en } p = 1\frac{1}{2}.$$

8 a $\tan(\angle BAC) = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{1} = 2$ geeft $\angle BAC = 63,43\dots^\circ$

b $rc_l = -\frac{1}{4}$, dus de richting van lijn l is 4 naar rechts en één omlaag.

Dus de tangens van de hoek tussen l en de x -as is $\frac{1}{4}$.

Dit geeft dat de hoek tussen l en de x -as gelijk is aan $14,03\dots^\circ$.

c De hoek tussen k en l is $63,43\dots^\circ + 14,03\dots^\circ \approx 77,5^\circ$.

Bladzijde 95

- 9 a** $k: y = 3x + 4$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 3$ geeft $\alpha = 71,5\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 71,5\dots^\circ - 63,4\dots^\circ = 8,1\dots^\circ$
 De gevraagde hoek is 8° .
- b** $m: y = 1\frac{1}{2}x + 2$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_m = 1\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 56,3\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 56,3\dots^\circ - 26,5\dots^\circ = 82,8\dots^\circ$
 De gevraagde hoek is 83° .
- c** $p: y = 3\frac{1}{2}x - 1$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_p = 3\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 74,0\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 74,0\dots^\circ - 51,3\dots^\circ = 125,3\dots^\circ$
 De gevraagde hoek is $180^\circ - 125,3\dots^\circ \approx 55^\circ$.

$$l: y = 2x - 1$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = 2 \text{ geeft } \beta = 63,4\dots^\circ$$

$$n: y = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_n = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = -26,5\dots^\circ$$

$$q: y = -1\frac{1}{4}x + 5$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_q = -1\frac{1}{4} \text{ geeft } \beta = -51,3\dots^\circ$$

Bladzijde 96

- 10 a** $k: 3x - 2y = 5$
 $-2y = -3x + 5$
 $y = 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 1\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 56,30\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 56,30\dots^\circ - 53,13\dots^\circ = 3,17\dots^\circ$
 De gevraagde hoek is $3,2^\circ$.
- b** $m: 4x + y = 1$
 $y = -4x + 1$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_m = -4$ geeft $\alpha = -75,96\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = -36,86\dots^\circ - -75,96\dots^\circ = 39,09\dots^\circ$
 De gevraagde hoek is $39,1^\circ$.
- c** $p: 5x + 3y = 4$
 $3y = -5x + 4$
 $y = -1\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_p = -1\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = -59,03\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = 50,19\dots^\circ - -59,03\dots^\circ = 109,23\dots^\circ$
 De gevraagde hoek is $180^\circ - 109,23\dots^\circ \approx 70,8^\circ$.

$$l: 4x - 3y = 6$$

$$-3y = -4x + 6$$

$$y = 1\frac{1}{3}x - 2$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = 1\frac{1}{3} \text{ geeft } \beta = 53,13\dots^\circ$$

$$n: 3x + 4y = 2$$

$$4y = -3x + 2$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_n = -\frac{3}{4} \text{ geeft } \beta = -36,86\dots^\circ$$

$$q: 6x - 5y = 1$$

$$-5y = -6x + 1$$

$$y = 1\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_q = 1\frac{1}{5} \text{ geeft } \beta = 50,19\dots^\circ$$

- 11 a** $k: y = \frac{2}{3}x + 4$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33,6\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = 57,9\dots^\circ - 33,6\dots^\circ = 24,3\dots^\circ$
 De gevraagde hoek is 24° .
- b** $\tan(\alpha) = \text{rc}_m = \frac{0-5}{4-0} = -1\frac{1}{4}$ geeft $\alpha = -51,34\dots^\circ$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_n = \frac{1-0}{0-2} = \frac{1}{2}$ geeft $\beta = 26,56\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = 26,56\dots^\circ - -51,34\dots^\circ = 77,90\dots^\circ$
 De gevraagde hoek is $77,9^\circ$.
- c** $\tan(\alpha) = \text{rc}_p = \frac{6-1}{5-2} = 1\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 59,0\dots^\circ$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_q = \frac{-6-1}{2-3} = -1\frac{2}{5}$ geeft $\beta = -54,4\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 59,0\dots^\circ - -54,4\dots^\circ = 113,4\dots^\circ$
 De gevraagde hoek is $180^\circ - 113,4\dots^\circ \approx 67^\circ$.

$$l: 8x - 5y = 3$$

$$-5y = -8x + 3$$

$$y = 1\frac{3}{5}x - \frac{3}{5}$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = 1\frac{3}{5} \text{ geeft } \beta = 57,9\dots^\circ$$

- 12** De richtingshoek van k is α en de richtingshoek van l is β .
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 2$ geeft $\alpha = 63,4\dots^\circ$
 $\beta = 63,4\dots^\circ + 20^\circ = 83,4\dots^\circ$ geeft $\text{rc}_l = \tan(83,4\dots^\circ) \approx 8,69$
 $\beta = 63,4\dots^\circ - 20^\circ = 43,4\dots^\circ$ geeft $\text{rc}_l = \tan(43,4\dots^\circ) \approx 0,95$
 Dus $\text{rc}_l \approx 0,95$ of $\text{rc}_l \approx 8,69$.

C1

a $k: y = 3x + b$
 $-3x + y = b$
 $-12x + 4y = 4b$

Een snijpunt voor $a \neq -12$ en b mag elk getal zijn.

b Samenvallen, dus $a = -12$ en $4b = 16$
 $a = -12$ en $b = 4$

C2

a $k: y = 2x - 3$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 2$ geeft $\alpha = 63,4\dots^\circ$
 $l: y = -0,3x - 1$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_l = -0,3$ geeft $\beta = -16,6\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 63,4\dots^\circ - -16,6\dots^\circ = 80,1\dots^\circ$
 De gevraagde hoek is 80° .

b $m: 3x + 4y = 5$
 $4y = -3x + 5$
 $y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{4}$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_m = -\frac{3}{4}$ geeft $\alpha = -36,86\dots^\circ$
 $n: y = -\frac{1}{3}x + 1$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_n = -\frac{1}{3}$ geeft $\beta = -18,43\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = -18,43\dots^\circ - -36,86\dots^\circ = 18,43\dots^\circ$
 De gevraagde hoek is $18,4^\circ$.

c $p: 3x - y = 6$
 $-y = -3x + 6$
 $y = 3x - 6$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_p = 3$ geeft $\alpha = 71,56\dots^\circ$
 $q: x + 2y = 5$
 $2y = -x + 5$
 $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_q = -\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -26,56\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 71,56\dots^\circ - -26,56\dots^\circ = 98,13\dots^\circ$
 De gevraagde hoek is $180^\circ - 98,13\dots^\circ \approx 81,9^\circ$.

$q: x + 2y = 5$
 $2y = -x + 5$
 $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_q = -\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -26,56\dots^\circ$

7.2 Afstanden bij punten en lijnen

Bladzijde 98

V4

a $\sqrt{12} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
 b $\sqrt{27} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
 c $\sqrt{40} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$

d $\sqrt{48} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
 e $\sqrt{63} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$
 f $\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

V5

a $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

b $\frac{\sqrt{88}}{\sqrt{11}} = \sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

c $\sqrt{3\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$

d $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

e $\sqrt{4\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

f $\sqrt{3\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{18}{5}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{10}$

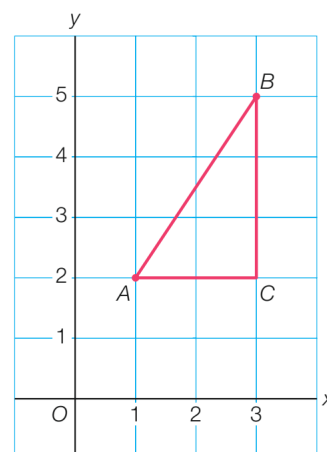
13

a Zie de figuur hiernaast.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

b $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$
 $M(\frac{1}{2}(1 + 3), \frac{1}{2}(2 + 5))$, dus $M(2, 3\frac{1}{2})$.

c $N(\frac{1}{2}(83 + 89), \frac{1}{2}(61 + 69))$, dus $N(86, 65)$.



14 a $x_M = -1$ geeft $\frac{1}{2}p + 2 = -1$

$$\frac{1}{2}p = -3$$

$$p = -6, \text{ dus } A(-6, 3).$$

$$y_M = \frac{1}{2} \text{ geeft } 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}q = -1$$

$$q = -2, \text{ dus } B(4, -2).$$

$$d(A, B) = \sqrt{(4 - (-6))^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

b $d(A, B) = 5\sqrt{2}$ geeft $\sqrt{5p^2 - 20p + 25} = 5\sqrt{2}$

$$5p^2 - 20p + 25 = 50$$

$$5p^2 - 20p - 25 = 0$$

$$p^2 - 4p - 5 = 0$$

$$(p + 1)(p - 5) = 0$$

$$p = -1 \vee p = 5$$

$$p = -1 \text{ geeft } q = -2, \text{ dus } A(-1, 3) \text{ en } B(4, -2).$$

$$p = 5 \text{ geeft } q = 10, \text{ dus } A(5, 3) \text{ en } B(4, 10).$$

15 a $A(0, 12)$ en $B(12, 7)$ geeft $d(A, B) = \sqrt{(12 - 0)^2 + (7 - 12)^2} = \sqrt{169} = 13$

b $A(0, -2)$ en $B(-2, 7)$ geeft $M(\frac{1}{2}(0 + (-2)), \frac{1}{2}(-2 + 7)) = M(-1, 2\frac{1}{2})$

c $A(0, 4)$ en $B(4, 7)$ geeft $M(\frac{1}{2}(0 + 4), \frac{1}{2}(4 + 7)) = M(2, 5\frac{1}{2})$

$$d(A, M) = \sqrt{(2 - 0)^2 + (5\frac{1}{2} - 4)^2} = \sqrt{6\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{2}$$

d $M(\frac{1}{2}(0 + p), \frac{1}{2}(p + 7)) = M(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2})$

e $d = \sqrt{(p - 0)^2 + (7 - p)^2}$

$$= \sqrt{p^2 + 49 - 14p + p^2}$$

$$= \sqrt{2p^2 - 14p + 49}$$

16 a $M(\frac{1}{2}(p + p + 2), \frac{1}{2}(3 + 2p)) = M(p + 1, 1\frac{1}{2} + p)$

b $d = \sqrt{(p + 2 - p)^2 + (2p - 3)^2}$

$$= \sqrt{4 + 4p^2 - 12p + 9}$$

$$= \sqrt{4p^2 - 12p + 13}$$

c $d = 5$ geeft $\sqrt{4p^2 - 12p + 13} = 5$

$$4p^2 - 12p + 13 = 25$$

$$4p^2 - 12p - 12 = 0$$

$$p^2 - 3p - 3 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 21$$

$$p = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \approx 3,79 \vee p = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \approx -0,79$$

Bladzijde 100

17

a $x_M = 10$ geeft $\frac{1}{2}(3 + p + 5) = 10$
 $\frac{1}{2}p + 4 = 10$
 $\frac{1}{2}p = 6$
 $p = 12$

$p = 12$ geeft $y_M = \frac{1}{2}(4 + 12 + 2) = 9$

b $M(\frac{1}{2}(3 + p + 5), \frac{1}{2}(4 + p + 2)) = M(\frac{1}{2}p + 4, \frac{1}{2}p + 3)$
 M op k geeft $2(\frac{1}{2}p + 4) - 3 = \frac{1}{2}p + 3$
 $p + 8 - 3 = \frac{1}{2}p + 3$
 $p + 5 = \frac{1}{2}p + 3$
 $\frac{1}{2}p = -2$
 $p = -4$

c $A(3, 4)$ en $B(11, 8)$ geeft $d(A, B) = \sqrt{(11 - 3)^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

d $d = \sqrt{(p + 5 - 3)^2 + (p + 2 - 4)^2}$
 $= \sqrt{(p + 2)^2 + (p - 2)^2}$
 $= \sqrt{p^2 + 4p + 4 + p^2 - 4p + 4}$
 $= \sqrt{2p^2 + 8}$
Dus $m = 2$ en $n = 8$.

18

a $m: 5x + 2y = 3$ $n: 2x - 5y = 12$
 $2y = -5x + 3$ $-5y = -2x + 12$
 $y = -2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$ $y = \frac{2}{5}x - 2\frac{2}{5}$
Er geldt $rc_m \cdot rc_n = -2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = -1$, dus $m \perp n$.

b $k: ax + by = c$ $l: bx - ay = d$
 $by = -ax + c$ $-ay = -bx + d$
 $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ $y = \frac{b}{a}x - \frac{d}{a}$
Er geldt $rc_k \cdot rc_l = -\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = -1$, dus $k \perp l$.

Bladzijde 101

19

In de theorie boven het rode kader gaat het over de breuken $-\frac{a}{b}$ en $\frac{b}{a}$, dus moet gelden $b \neq 0$ en $a \neq 0$.

In het rode kader mogen a en b wel gelijk zijn aan 0, want

- voor $b = 0$ is k een verticale lijn en l een horizontale lijn, dus staan k en l loodrecht op elkaar
- voor $a = 0$ is k een horizontale lijn en l een verticale lijn, dus staan k en l loodrecht op elkaar.

Dus in het rode kader zijn de voorwaarden $b \neq 0$ en $a \neq 0$ niet nodig.

20

a $k \perp l$, dus $k: 3x + 2y = c$ } $c = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14$
door $A(4, 1)$
Dus $k: 3x + 2y = 14$.

b $m \perp n$, dus $m: x + 2y = c$ } $c = -4 + 2 \cdot 3 = 2$
door $B(-4, 3)$
 $m: x + 2y = 2$
 $2y = -x + 2$
 $y = -\frac{1}{2}x + 1$

21 a $k \perp l$, dus $rc_k \cdot 3 = -1$ en dit geeft $rc_k = -\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} k: y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(-6, 5) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{3} \cdot -6 + b &= 5 \\ 2 + b &= 5 \\ b &= 3 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} k: y &= -\frac{1}{3}x + 3 \\ \frac{1}{3}x + y &= 3 \\ x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

b $m \perp n$, dus $m: 5x - 4y = c$ $\left\{ \begin{aligned} c &= 5 \cdot 3 - 4 \cdot -1 = 19 \end{aligned} \right.$
door $B(3, -1)$
Dus $m: 5x - 4y = 19$.

c $rc_p = \frac{-6-4}{2-3} = -2$

$p \perp q$, dus $-2 \cdot rc_q = -1$ en dit geeft $rc_q = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} q: y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } E(3, 7) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 3 + b &= 7 \\ \frac{1}{2} + b &= 7 \\ b &= 5\frac{1}{2} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} q: y &= \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x + y &= 5\frac{1}{2} \\ x - 2y &= -11 \end{aligned}$$

22 a $k \perp l$, dus $rc_k \cdot -\frac{3}{5} = -1$ en dit geeft $rc_k = \frac{5}{3}$.

$$\begin{aligned} k: y = \frac{5}{3}x + b \\ \text{door } A(6, 15) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{5}{3} \cdot 6 + b &= 15 \\ 10 + b &= 15 \\ b &= 5 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} k: y &= \frac{5}{3}x + 5 \\ -\frac{5}{3}x + y &= 5 \\ 5x - 3y &= -15 \end{aligned}$$

b $m \perp n$, dus $m: 7x + 6y = c$ $\left\{ \begin{aligned} c &= 7 \cdot 2 + 6 \cdot -2 = 2 \end{aligned} \right.$
door $B(2, -2)$
Dus $m: 7x + 6y = 2$.

c $rc_q = \frac{-1-5}{5-1} = -\frac{3}{2}$

$p \perp q$, dus $rc_p \cdot -\frac{3}{2} = -1$ en dit geeft $rc_p = \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} p: y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } C(-6, 4) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot -6 + b &= 4 \\ -4 + b &= 4 \\ b &= 8 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} p: y &= \frac{2}{3}x + 8 \\ -\frac{2}{3}x + y &= 8 \\ 2x - 3y &= -24 \end{aligned}$$

d $r \parallel s$, dus $rc_r = rc_s = \frac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} r: y = \frac{2}{5}x + b \\ \text{door } F(-2, 5) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{5} \cdot -2 + b &= 5 \\ -\frac{4}{5} + b &= 5 \\ b &= 5\frac{4}{5} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} r: y &= \frac{2}{5}x + 5\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5}x + y &= 5\frac{4}{5} \\ 2x - 5y &= -29 \end{aligned}$$

e $t \parallel v$, dus $t: 4x - 2y = c$ $\left\{ \begin{aligned} c &= 4 \cdot 1 - 2 \cdot -4 = 12 \end{aligned} \right.$
door $G(1, -4)$
Dus $t: 4x - 2y = 12$
 $2x - y = 6$

$$\begin{aligned}
 23 \quad & k: 3x + py = -5 \\
 & \text{door } A(-7, 4) \quad \left\{ \begin{aligned} 3 \cdot -7 + p \cdot 4 &= -5 \\ -21 + 4p &= -5 \\ 4p &= 16 \\ p &= 4 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dus $k: 3x + 4y = -5$.

$$\begin{aligned}
 l \perp k, \text{ dus } l: 4x - 3y = c \\
 \text{door } A(-7, 4) \quad \left\{ c = 4 \cdot -7 - 3 \cdot 4 = -40 \right.
 \end{aligned}$$

Dus $l: 4x - 3y = -40$.

l snijden met de x -as geeft $4x - 3 \cdot 0 = -40$

$$4x = -40$$

$$x = -10$$

Dus $B(-10, 0)$.

l snijden met de y -as geeft $4 \cdot 0 - 3y = -40$

$$-3y = -40$$

$$y = 13\frac{1}{3}$$

Dus $C(0, 13\frac{1}{3})$.

$$d(B, C) = \sqrt{(0 - (-10))^2 + (13\frac{1}{3} - 0)^2} = \sqrt{277\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{2500}{9}} = \frac{\sqrt{2500}}{\sqrt{9}} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

Bladzijde 102

$$\begin{aligned}
 24 \quad a \quad & rc_k = \frac{3p - 0}{0 - 2p} = \frac{3p}{-2p} = -\frac{3}{2} \\
 & rc_l = \frac{aq - 0}{0 - 3q} = \frac{aq}{-3q} = -\frac{a}{3} = -\frac{1}{3}a
 \end{aligned}$$

$$k \perp l, \text{ dus } -\frac{3}{2} \cdot -\frac{1}{3}a = -1$$

$$\frac{1}{2}a = -1$$

$$a = -2$$

$$b \quad rc_k = rc_l \text{ geeft } -\frac{3}{2} = -\frac{1}{3}a$$

$$a = 4\frac{1}{2}$$

$p = 3$, dus k door $(6, 0)$.

Geen punt gemeenschappelijk, dus $3q \neq 6$ oftewel $q \neq 2$.

Dus $a = 4\frac{1}{2}$ en $q \neq 2$.

c De richtingshoek van k is α en de richtingshoek van l is β .

$$\tan(\alpha) = rc_k = -\frac{3}{2} \text{ geeft } \alpha = -56,30\dots^\circ$$

$$\beta = -56,30\dots^\circ + 45^\circ = -11,30\dots^\circ \text{ of}$$

$$\beta = -56,30\dots^\circ - 45^\circ = -101,30\dots^\circ$$

$$\begin{aligned}
 rc_l = \tan(-11,30\dots^\circ) = -0,2 \\
 rc_l = -\frac{1}{3}a \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{3}a &= -0,2 \\ a &= 0,6 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 rc_l = \tan(-101,30\dots^\circ) = 5 \\
 rc_l = -\frac{1}{3}a \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{3}a &= 5 \\ a &= -15 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dus $a = 0,6$ of $a = -15$.

$$25 \quad a \quad k \perp l, \text{ dus } \frac{1}{2} \cdot rc_l = -1 \text{ en dit geeft } rc_l = -2.$$

$$\begin{aligned}
 l: y = -2x + b \\
 \text{door } A(1, 3) \quad \left\{ \begin{aligned} -2 \cdot 1 + b &= 3 \\ -2 + b &= 3 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$b = 5$$

Dus $l: y = -2x + 5$.

b k en l snijden geeft het punt B .

$$\frac{1}{2}x = -2x + 5$$

$$2\frac{1}{2}x = 5$$

$$x = 2$$

$x = 2$ invullen in $y = \frac{1}{2}x$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Dus $B(2, 1)$.

$$c \quad AB = \sqrt{(2 - 1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{5}$$

B is de loodrechte projectie van A op k , dus de afstand van A tot k is gelijk aan de afstand van A tot B .

- 26 a** De lijn l gaat door A met $l \perp k$, dus $\frac{1}{2} \cdot rc_l = -1$ en dit geeft $rc_l = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -2x + b \\ \text{door } A(3, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 3 + b = 0 \\ -6 + b = 0 \\ b = 6 \end{array}$$

Dus $l: y = -2x + 6$.

k en l snijden geeft het punt C .

$$\frac{1}{2}x + 1 = -2x + 6$$

$$2\frac{1}{2}x = 5$$

$$x = 2$$

$x = 2$ invullen in $y = \frac{1}{2}x + 1$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$, dus $C(2, 2)$.

$$d(A, k) = d(A, C) = \sqrt{(2-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$$

- b** De lijn n gaat door B met $n \perp m$.

$$\left. \begin{array}{l} n: x - 2y = c \\ \text{door } B(7, 0) \end{array} \right\} c = 7 - 2 \cdot 0 = 7$$

Dus $n: x - 2y = 7$.

m en n snijden geeft het punt D .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 7 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right\} \text{geeft} \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y = 4 \\ x - 2y = 7 \end{array} \right. +$$

$$\frac{5x}{5} = 11 \quad x = 2\frac{1}{5}$$

$x = 2\frac{1}{5}$ invullen in $2x + y = 2$ geeft $2 \cdot 2\frac{1}{5} + y = 2$

$$4\frac{2}{5} + y = 2$$

$$y = -2\frac{2}{5}, \text{ dus } D(2\frac{1}{5}, -2\frac{2}{5}).$$

$$d(B, m) = d(B, D) = \sqrt{(2\frac{1}{5} - 7)^2 + (-2\frac{2}{5} - 0)^2} = \sqrt{28\frac{4}{5}}$$

- c** De lijn q gaat door O met $q \perp p$, dus $-3 \cdot rc_q = -1$ en dit geeft $rc_q = \frac{1}{3}$.

q door O geeft $q: y = \frac{1}{3}x$.

p en q snijden geeft het punt E .

$$\frac{1}{3}x = -3x + 10$$

$$3\frac{1}{3}x = 10$$

$$x = 3$$

$x = 3$ invullen in $y = \frac{1}{3}x$ geeft $y = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$, dus $E(3, 1)$.

$$d(O, p) = d(O, E) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$$

27 $rc_k = \frac{3-1}{7-2} = \frac{2}{5}$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \frac{2}{5}x + b \\ \text{door } A(2, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{5} \cdot 2 + b = 1 \\ \frac{4}{5} + b = 1 \\ b = \frac{1}{5} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$.

De lijn l gaat door C met $l \perp k$, dus $\frac{2}{5} \cdot rc_l = -1$ en dit geeft $rc_l = -\frac{5}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{5}{2}x + b \\ \text{door } C(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{5}{2} \cdot 3\frac{1}{2} + b = \frac{9}{2} \\ -8\frac{3}{4} + b = 4\frac{1}{2} \\ b = 13\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $l: y = -2\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{4}$.

k en l snijden geeft het punt D .

$$\frac{2}{5}x + \frac{1}{5} = -2\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{4}$$

$$8x + 4 = -50x + 265$$

$$58x = 261$$

$$x = 4\frac{1}{2}$$

$x = 4\frac{1}{2}$ invullen in $y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$ geeft $y = \frac{2}{5} \cdot 4\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = 2$, dus $D(4\frac{1}{2}, 2)$.

$$d(C, k) = d(C, D) = \sqrt{(4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2})^2 + (2 - 4\frac{1}{2})^2} = \sqrt{7\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{29}$$

28 De lijn m gaat door A met $m \perp k$.

$$\left. \begin{array}{l} m: 3x - y = c \\ \text{door } A(1, 4) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 1 - 4 = -1$$

$$\text{Dus } m: 3x - y = -1.$$

k en m snijden geeft het punt B .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 3 \\ 3x - y = -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 3 \\ 9x - 3y = -3 \end{array} \right. +$$

$$\frac{10x}{x} = 0 \quad x = 0$$

$$x = 0 \text{ invullen in } x + 3y = 3 \text{ geeft } 3y = 3$$

$$y = 1, \text{ dus } B(0, 1).$$

$$d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{(0-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10}$$

De lijn n gaat door A met $n \perp l$.

$$\left. \begin{array}{l} n: x - y = d \\ \text{door } A(1, 4) \end{array} \right\} d = 1 - 4 = -3$$

$$\text{Dus } n: x - y = -3.$$

l en n snijden geeft het punt C .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 9 \\ x - y = -3 \end{array} \right. +$$

$$\frac{2x}{2x} = 6 \quad x = 3$$

$$x = 3 \text{ invullen in } x + y = 9 \text{ geeft } 3 + y = 9$$

$$y = 6, \text{ dus } C(3, 6).$$

$$d(A, l) = d(A, C) = \sqrt{(3-1)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{8}$$

Het punt A ligt dichterbij l dan bij k , want $\sqrt{8} < \sqrt{10}$.

Dus Frans heeft niet gelijk.

29 a $rc_k = \frac{4-0}{7-1} = \frac{2}{3}$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(1, 0) \end{array} \right\} \frac{2}{3} \cdot 1 + b = 0$$

$$\frac{2}{3} + b = 0$$

$$b = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}.$$

De lijn l gaat door C met $l \perp k$, dus $\frac{2}{3} \cdot rc_l = -1$ en dit geeft $rc_l = -\frac{3}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{3}{2}x + b \\ \text{door } C(3\frac{1}{2}, 6) \end{array} \right\} -\frac{3}{2} \cdot 3\frac{1}{2} + b = 6$$

$$-\frac{15}{4} + b = 6$$

$$b = 11\frac{1}{4}$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{3}{2}x + 11\frac{1}{4}.$$

k en l snijden geeft het punt D .

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = -\frac{3}{2}x + 11\frac{1}{4}$$

$$8x - 8 = -18x + 135$$

$$26x = 143$$

$$x = 5\frac{1}{2}$$

$$x = 5\frac{1}{2} \text{ invullen in } y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \text{ geeft } y = \frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = 3, \text{ dus } D(5\frac{1}{2}, 3).$$

$$d(C, k) = d(C, D) = \sqrt{(5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2})^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{13}$$

b $d(A, B) = \sqrt{(7-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$$

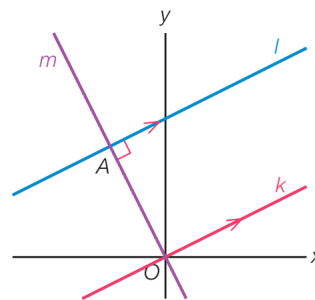
- 30 a** Zie de figuur hiernaast.
 $m \perp l$, dus $\frac{1}{2} \cdot rc_m = -1$ en dit geeft $rc_m = -2$.
 m door O geeft $m: y = -2x$.

- b** l en m snijden geeft $\frac{1}{2}x + 5 = -2x$
 $2\frac{1}{2}x = -5$
 $x = -2$

$x = -2$ invullen in $y = -2x$ geeft $y = -2 \cdot -2 = 4$.

Dus $A(-2, 4)$.

- c** $d(O, l) = d(O, A) = \sqrt{(-2-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 De lijnen k en l zijn evenwijdig, dus de afstand tussen k en l is gelijk aan de afstand van een punt van k tot l .



- 31** De lijn k gaat door O en $k \parallel l$, dus $d(k, l) = d(O, l)$.
 De lijn m gaat door O met $m \perp k$, dus $2 \cdot rc_m = -1$ en dit geeft $rc_m = -\frac{1}{2}$.

m door O geeft $m: y = -\frac{1}{2}x$.

l en m snijden geeft het punt A .

$$2x + 4 = -\frac{1}{2}x$$

$$2\frac{1}{2}x = -4$$

$$x = -1\frac{3}{5}$$

$x = -1\frac{3}{5}$ invullen in $y = -\frac{1}{2}x$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot -1\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$, dus $A(-1\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

$$d(k, l) = d(O, l) = d(O, A) = \sqrt{(-1\frac{3}{5}-0)^2 + (\frac{4}{5}-0)^2} \approx 1,79$$

- 32** $k \parallel l$, dus $d(k, l) = d(A, l)$ met $A(1, 0)$ een punt op k .

De lijn m gaat door A met $m \perp k$.

$$\left. \begin{array}{l} m: 3x + y = c \\ \text{door } A(1, 0) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 1 + 0 = 3$$

Dus $m: 3x + y = 3$.

l en m snijden geeft het punt B .

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y = 6 \\ 3x + y = 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x - 3y = 6 \\ 9x + 3y = 9 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 10x = 15 \\ x = 1\frac{1}{2} \end{array}$$

$x = 1\frac{1}{2}$ invullen in $x - 3y = 6$ geeft $1\frac{1}{2} - 3y = 6$
 $-3y = 4\frac{1}{2}$
 $y = -1\frac{1}{2}$, dus $B(1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$.

$$d(k, l) = d(A, l) = d(A, B) = \sqrt{(1\frac{1}{2}-1)^2 + (-1\frac{1}{2}-0)^2} = \sqrt{2\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

- C3 a** $A(2, 7)$ en $B(3, 3)$ geeft $d(A, B) = \sqrt{(3-2)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{17}$

- b** $y_M = 6$ geeft $\frac{1}{2}(7+p+2) = 6$

$$\frac{1}{2}p + 4\frac{1}{2} = 6$$

$$\frac{1}{2}p = 1\frac{1}{2}$$

$$p = 3$$

$A(6, 7)$ en $B(3, 5)$ geeft $d(A, B) = \sqrt{(3-6)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{13}$

- c** $d = \sqrt{(3-2p)^2 + (p+2-7)^2}$
 $= \sqrt{(3-2p)^2 + (p-5)^2}$
 $= \sqrt{9 - 12p + 4p^2 + p^2 - 10p + 25}$
 $= \sqrt{5p^2 - 22p + 34}$

- C4** a $k \perp l$, dus $k: 3x + 2y = c$ } $c = 3 \cdot -2 + 2 \cdot 5 = 4$
 door $A(-2, 5)$
 $k: 3x + 2y = 4$
 $2y = -3x + 4$
 $y = -1\frac{1}{2}x + 2$
- b $m \perp n$, dus $rc_m \cdot -3 = -1$ en dit geeft $rc_m = \frac{1}{3}$.
 $m: y = \frac{1}{3}x + b$ } $\frac{1}{3} \cdot 9 + b = -1$
 door $B(9, -1)$ } $3 + b = -1$
 $b = -4$
 $m: y = \frac{1}{3}x - 4$
 $-\frac{1}{3}x + y = -4$
 $x - 3y = 12$

- C5** De lijn l gaat door A met $l \perp k$.
 $l: 2x - y = c$ } $c = 2 \cdot 4 - -3 = 11$
 door $A(4, -3)$
 Dus $l: 2x - y = 11$.
 k en l snijden geeft het punt B .
 $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 11 \end{cases} \begin{array}{l} |1 \\ |2 \end{array}$ geeft $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x - 2y = 22 \end{cases} +$
 $\frac{5x}{5x} = 25$
 $x = 5$
 $x = 5$ invullen in $x + 2y = 3$ geeft $5 + 2y = 3$
 $2y = -2$
 $y = -1$, dus $B(5, -1)$.
 $d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{(5 - 4)^2 + (-1 - -3)^2} = \sqrt{5}$

7.3 Cirkelvergelijkingen

Bladzijde 105

- 33** a Dit volgt rechtstreeks uit de formule van de afstand tussen twee punten.
 b Als de afstand van $P(x, y)$ tot $M(1, 4)$ gelijk is aan 5, dan ligt P op de cirkel met middelpunt M en straal 5.
 c Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal 10 is $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10^2$ oftewel $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 100$.
 d Middelpunt $(-2, 3)$ en straal $\sqrt{16} = 4$.

Bladzijde 106

- 34** a $A(5, 3)$ op c geeft $(5 - 3)^2 + (3 - 4)^2 = r^2$, dus $r^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$.
 b *

Bladzijde 107

- 35** a $c_1: (x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$
 b $c_2: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ } $r^2 = (0 - 3)^2 + (0 - 4)^2 = 25$
 door $O(0, 0)$
 Dus $c_2: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.
 c $c_3: (x + 3)^2 + (y - 5)^2 = r^2$ } $r^2 = (-1 + 3)^2 + (2 - 5)^2 = 13$
 door $A(-1, 2)$
 Dus $c_3: (x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 13$.
- 36** a c raakt de y -as en $x_M = 3$, dus $r = 3$.
 Dus $c: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$.
 b d raakt de x -as en $y_N = 2$, dus $r = 2$.
 Dus $d: (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

37 c raakt de y -as en de straal is 10, dus $x_M = -10$.
 $x = -10$ en M op k geeft $y = -\frac{3}{5} \cdot -10 = 6$.
Dus $M(-10, 6)$ en c : $(x + 10)^2 + (y - 6)^2 = 100$.
 d raakt de x -as en de straal is 10, dus $y_N = -10$.
 $y = -10$ en N op k geeft $-\frac{3}{5}x = -10$

$$x = 16\frac{2}{3}$$

Dus $N(16\frac{2}{3}, -10)$ en d : $(x - 16\frac{2}{3})^2 + (y + 10)^2 = 100$.

38 **a** c_1 raakt de x -as en $y_A = 7$, dus $r = 7$.
Dus c_1 : $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 49$.
b Middelpunt B en c_2 door A , dus de straal is $d(A, B) = \sqrt{(9 - 3)^2 + (1 - 7)^2} = \sqrt{72}$.
Dus c_2 : $(x - 9)^2 + (y - 1)^2 = 72$.
c Middellijn AB , dus het middelpunt van de cirkel is het midden van het lijnstuk AB
oftewel $M_3(\frac{1}{2}(3 + 9), \frac{1}{2}(7 + 1)) = M_3(6, 4)$.
De straal is $d(A, M_3) = \sqrt{(6 - 3)^2 + (4 - 7)^2} = \sqrt{18}$.
Dus c_3 : $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 18$.
d c_4 en c_5 raken de y -as en de straal is 2, dus $x_M = 2$ of $x_M = -2$.
 $x = 2$ en M op k geeft $5 \cdot 2 + 2y = 12$

$$10 + 2y = 12$$

$$2y = 2$$

$$y = 1$$

Dus $M_4(2, 1)$ en c_4 : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.
 $x = -2$ en M op k geeft $5 \cdot -2 + 2y = 12$

$$-10 + 2y = 12$$

$$2y = 22$$

$$y = 11$$

Dus $M_5(-2, 11)$ en c_5 : $(x + 2)^2 + (y - 11)^2 = 4$.

39 c is de cirkel van de doorsnede met middelpunt M en straal 55.
 $y_M = 85 - 55 = 30$
Dus $M(0, 30)$ en c : $x^2 + (y - 30)^2 = 3025$.
 $y_A = 74$ en A op c geeft $x^2 + (74 - 30)^2 = 3025$

$$x^2 + 1936 = 3025$$

$$x^2 = 1089$$

$$x = 33 \vee x = -33$$

Dus $A(-33, 74)$.

d is de cirkel met middelpunt A en straal OA .

De straal is $d(O, A) = \sqrt{(-33 - 0)^2 + (74 - 0)^2} = \sqrt{6565}$.

Dus d : $(x + 33)^2 + (y - 74)^2 = 6565$.

$x_P = 33$ en P op d geeft $(33 + 33)^2 + (y - 74)^2 = 6565$

$$4356 + (y - 74)^2 = 6565$$

$$(y - 74)^2 = 2209$$

$$y - 74 = 47 \vee y - 74 = -47$$

$$y = 121 \vee y = 27$$

Dus $P(33, 27)$.

$x_Q = 41$ en Q op d geeft $(41 + 33)^2 + (y - 74)^2 = 6565$

$$5476 + (y - 74)^2 = 6565$$

$$(y - 74)^2 = 1089$$

$$y - 74 = 33 \vee y - 74 = -33$$

$$y = 107 \vee y = 41$$

Dus $Q(41, 41)$.

$d(P, Q) = \sqrt{(41 - 33)^2 + (41 - 27)^2} = \sqrt{260} \approx 16,1$

Dus de toeschouwers P en Q zitten 16,1 meter uit elkaar.

40

a Omdat de raaklijn k loodrecht staat op de straal van de cirkel c naar het raakpunt A , is de straal van c gelijk aan de afstand van het middelpunt M tot k , dus $r = d(M, A)$.

b $l \perp k$, dus $rc_l \cdot \frac{1}{2} = -1$ en dit geeft $rc_l = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -2x + b \\ \text{door } M(3, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 3 + b = 4 \\ -6 + b = 4 \\ b = 10 \end{array}$$

Dus $l: y = -2x + 10$.

Een raaklijn staat loodrecht op de straal naar het raakpunt, dus het snijpunt van k en l is het raakpunt A .

k en l snijden geeft $\frac{1}{2}x = -2x + 10$

$$2\frac{1}{2}x = 10$$

$$x = 4$$

$x = 4$ invullen in $y = \frac{1}{2}x$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

Dus $A(4, 2)$.

c $r = d(M, A) = \sqrt{(4-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}$

Dus $c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Alternatieve uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2 \\ \text{door } A(4, 2) \end{array} \right\} r^2 = (4-3)^2 + (2-4)^2 = 5$$

Dus $c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$.

41

a De lijn l gaat door M met $l \perp k$.

$l \perp k$, dus $rc_l \cdot 1 = -1$ en dit geeft $rc_l = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -x + b \\ \text{door } M(5, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -5 + b = 3 \\ b = 8 \end{array}$$

Dus $l: y = -x + 8$.

k en l snijden geeft het punt A .

$$x = -x + 8$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$x = 4$ invullen in $y = x$ geeft $y = 4$, dus $A(4, 4)$.

$$r = d(M, A) = \sqrt{(4-5)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$$

Dus $c: (x-5)^2 + (y-3)^2 = 2$.

b De lijn n gaat door N met $n \perp m$.

$n \perp m$, dus $rc_n \cdot -\frac{1}{2} = -1$ en dit geeft $rc_n = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} n: y = 2x + b \\ \text{door } N(-1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot -1 + b = 3 \\ -2 + b = 3 \\ b = 5 \end{array}$$

Dus $n: y = 2x + 5$.

m en n snijden geeft het punt B .

$$-\frac{1}{2}x = 2x + 5$$

$$-2\frac{1}{2}x = 5$$

$$x = -2$$

$x = -2$ invullen in $y = -\frac{1}{2}x$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot -2 = 1$, dus $B(-2, 1)$.

$$r = d(N, B) = \sqrt{(-2 - -1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{5}$$

Dus $d: (x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

- 42 a** De lijn l gaat door M_1 met $l \perp k$.

$$l: \begin{cases} 3x - 2y = c \\ \text{door } M_1(8, 3) \end{cases} \Rightarrow c = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 3 = 18$$

$$\text{Dus } l: 3x - 2y = 18.$$

k en l snijden geeft het punt S .

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 18 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 6y = 24 \\ 9x - 6y = 54 \end{cases} +$$

$$\frac{13x}{x} = \frac{78}{6}$$

$$x = 6 \text{ invullen in } 2x + 3y = 12 \text{ geeft } 2 \cdot 6 + 3y = 12$$

$$12 + 3y = 12$$

$$3y = 0$$

$$y = 0, \text{ dus } S(6, 0).$$

$$r = d(M_1, S) = \sqrt{(6-8)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Dus } c_1: (x-8)^2 + (y-3)^2 = 13.$$

- b** c_2 en c_3 raken de x -as en de straal is 8, dus $y_M = 8$ of $y_M = -8$.

$$y = 8 \text{ en } M \text{ op } k \text{ geeft } 2x + 3 \cdot 8 = 12$$

$$2x + 24 = 12$$

$$2x = -12$$

$$x = -6$$

$$\text{Dus } M_2(-6, 8) \text{ en } c_2: (x+6)^2 + (y-8)^2 = 64.$$

$$y = -8 \text{ en } M \text{ op } k \text{ geeft } 2x + 3 \cdot -8 = 12$$

$$2x - 24 = 12$$

$$2x = 36$$

$$x = 18$$

$$\text{Dus } M_3(18, -8) \text{ en } c_3: (x-18)^2 + (y+8)^2 = 64.$$

- c** k snijden met de x -as geeft $A(6, 0)$ en k snijden met de y -as geeft $B(0, 4)$.

$$M_4 \text{ is het midden van } AB, \text{ dus } M_4\left(\frac{1}{2}(6+0), \frac{1}{2}(0+4)\right) = M_4(3, 2).$$

$$r = d(M_4, A) = \sqrt{(6-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Dus } c_4: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 13.$$

- 43 a** De lijn l gaat door M met $l \perp k$.

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l \cdot 1\frac{1}{3} = -1 \text{ en dit geeft } rc_l = -\frac{3}{4}.$$

$$l: \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } M(4, 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4} \cdot 4 + b = 2 \\ -3 + b = 2 \end{cases}$$

$$b = 5$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{3}{4}x + 5.$$

k en l snijden geeft het punt A .

$$1\frac{1}{3}x = -\frac{3}{4}x + 5$$

$$2\frac{1}{12}x = 5$$

$$x = 2\frac{2}{5}$$

$$x = 2\frac{2}{5} \text{ invullen in } y = 1\frac{1}{3}x \text{ geeft } y = 1\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{5} = 3\frac{1}{5}, \text{ dus } A(2\frac{2}{5}, 3\frac{1}{5}).$$

$$r = d(M, A) = \sqrt{(2\frac{2}{5}-4)^2 + (3\frac{1}{5}-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$y_M = 2 \text{ en } r = 2, \text{ dus } c \text{ raakt de } x\text{-as.}$$

- b** Zie de figuur hiernaast.

De stelling van Pythagoras in $\triangle OBM$ geeft

$$OM = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle OAM$ geeft

$$OA = \sqrt{20 - 2^2} = \sqrt{16} = 4.$$

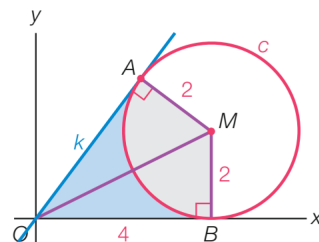
$$\text{Dus } O(\triangle OAM) = O(\triangle OBM).$$

$$\tan(\angle OMB) = \frac{4}{2} \text{ geeft } \angle OMB = 63,434\dots^\circ$$

$$\angle AMB = 2 \cdot \angle OMB = 2 \cdot 63,434\dots^\circ = 126,869\dots^\circ$$

$$O(\text{blauwe gebied}) = O(OBMA) - O(\text{grijze cirkelsector})$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{126,869\dots}{360} \cdot \pi \cdot 2^2 \approx 3,57$$



- 44 a** De lijn l gaat door M met $l \perp k$.

$$\left. \begin{array}{l} l: 2x + y = m \\ \text{door } M(-1, 2) \end{array} \right\} m = 2 \cdot -1 + 2 = 0$$

$$\text{Dus } l: 2x + y = 0.$$

k en l snijden geeft het punt B .

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 10 \\ 2x + y = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \Bigg| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 10 \\ 4x + 2y = 0 \end{array} \right. +$$

$$\frac{5x}{5} = 10 +$$

$$x = 2$$

$$x = 2 \text{ invullen in } 2x + y = 0 \text{ geeft } 2 \cdot 2 + y = 0$$

$$4 + y = 0$$

$$y = -4, \text{ dus } B(2, -4).$$

$$\text{De straal van } c \text{ is } d(M, B) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-4 - 2)^2} = \sqrt{45}, \text{ dus}$$

$$c: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 45.$$

k snijden met de x -as geeft $A(10, 0)$.

$$\text{De straal van } d \text{ is } d(A, B) = \sqrt{(2 - 10)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{80}, \text{ dus}$$

$$d: (x - 10)^2 + y^2 = 80.$$

- b** Het midden van AM is $C(\frac{1}{2}(10 + (-1)), \frac{1}{2}(0 + 2)) = C(4\frac{1}{2}, 1)$.

$$\text{De straal van } e \text{ is } d(C, A) = \sqrt{(10 - 4\frac{1}{2})^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{31\frac{1}{4}}.$$

$$d(C, B) = \sqrt{(2 - 4\frac{1}{2})^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{31\frac{1}{4}}$$

$$d(C, B) = d(C, A), \text{ dus } e \text{ gaat door } B.$$

45 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 16$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

$$\text{Dus } a = -4, b = 6 \text{ en } c = -3.$$

Bladzijde 109

46 De straal is $r = \sqrt{12\frac{1}{4}} = 3\frac{1}{2}$ en $M(-4, 1\frac{1}{2})$.

Bladzijde 110

47 a $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$

$$x^2 - 4x + y^2 + 10y - 6 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 5)^2 - 25 - 6 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 35$$

b $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 13 = 0$

$$x^2 + 8x + y^2 - 6y + 13 = 0$$

$$(x + 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 + 13 = 0$$

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 12$$

c $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$

$$x^2 + 3x + y^2 - y - 1 = 0$$

$$(x + 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$$

$$(x + 1\frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 3\frac{1}{2}$$

d $x^2 + y^2 - 5x + 5y + 10 = 0$

$$x^2 - 5x + y^2 + 5y + 10 = 0$$

$$(x - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y + 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + 10 = 0$$

$$(x - 2\frac{1}{2})^2 + (y + 2\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{2}$$

48 a $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

$$x^2 + 6x + y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 4 = 0$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

$$\text{Dus van } c_1 \text{ is de straal } 3 \text{ en het middelpunt } (-3, 2).$$

- b** $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 + 10y + 31 = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y + 5)^2 - 25 + 31 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 10$
Dus van c_2 is de straal $\sqrt{10}$ en het middelpunt $(4, -5)$.
- c** $x^2 + y^2 + 5x + 3y + 3 = 0$
 $x^2 + 5x + y^2 + 3y + 3 = 0$
 $(x + 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y + 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 3 = 0$
 $(x + 2\frac{1}{2})^2 + (y + 1\frac{1}{2})^2 = 5\frac{1}{2}$
Dus van c_3 is de straal $\sqrt{5\frac{1}{2}}$ en het middelpunt $(-2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$.
- d** $x^2 + y^2 - 7x + 8y = 0$
 $x^2 - 7x + y^2 + 8y = 0$
 $(x - 3\frac{1}{2})^2 - 12\frac{1}{4} + (y + 4)^2 - 16 = 0$
 $(x - 3\frac{1}{2})^2 + (y + 4)^2 = 28\frac{1}{4}$
Dus van c_4 is de straal $\sqrt{28\frac{1}{4}}$ en het middelpunt $(3\frac{1}{2}, -4)$.

- 49 a** $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$
 $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 15 = 0$
 $(x + 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 + 15 = 0$
 $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$
Dus $M(-3, 4)$ en $r = \sqrt{10}$.
- b** $d(A, M) = \sqrt{(-3 - -1)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{5}$
 A ligt binnen c , want $d(A, M) < r$.
- c** $d(B, M) = \sqrt{(-3 - -4)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{17}$
 B ligt buiten c , want $d(B, M) > r$.
- d** $d(C, M) = \sqrt{(-3 - -2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{10}$
 $d(C, M) = r$, dus C ligt op c .

- 50 a** $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 = 0$
 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
Dus $r_1 = 5$ en $M_1(3, 4)$.
- $d(A, M_1) = \sqrt{(3 - -1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{20}$
 $d(A, M_1) < r_1$, dus A ligt binnen c_1 .
- b** $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 4y + 2 = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y - 2)^2 - 4 + 2 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 18$
Dus $r_2 = \sqrt{18}$ en $M_2(4, 2)$.
- $d(O, M_2) = \sqrt{(4 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{20}$
 $d(O, M_2) > r_2$, dus O ligt buiten c_2 .
- c** $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 3 = 0$
 $(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 3 = 0$
 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$
Dus $r_3 = \sqrt{10}$ en $M_3(-2, 3)$.
- $d(B, M_3) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{10}$
 $d(B, M_3) = r_3$, dus B ligt op c_3 .

51

$\alpha \quad x^2 + y^2 + 16x - 6y + 60 = 0$
 $x^2 + 16x + y^2 - 6y + 60 = 0$
 $(x + 8)^2 - 64 + (y - 3)^2 - 9 + 60 = 0$
 $(x + 8)^2 + (y - 3)^2 = 13$
Dus $r_c = \sqrt{13}$ en $M(-8, 3)$.
De lijn l gaat door M met $l \perp k$.
 $\left. \begin{array}{l} l: 3x - 2y = c \\ \text{door } M(-8, 3) \end{array} \right\} c = 3 \cdot -8 - 2 \cdot 3 = -30$
Dus $l: 3x - 2y = -30$.

k en l snijden geeft het punt A .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 6 \\ 3x - 2y = -30 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x + 6y = 12 \\ 9x - 6y = -90 \end{array} \right. +$$

$$\frac{13x}{13} = -78 +$$

$$x = -6$$

$x = -6$ invullen in $2x + 3y = 6$ geeft $2 \cdot -6 + 3y = 6$

$$-12 + 3y = 6$$

$$3y = 18$$

$$y = 6$$

Dus $A(-6, 6)$.

$\beta \quad k$ snijden met de x -as geeft $B(3, 0)$ en k snijden met de y -as geeft $C(0, 2)$.

N is het midden van BC , dus $N(\frac{1}{2}(3+0), \frac{1}{2}(0+2)) = N(1\frac{1}{2}, 1)$.

$$r_d = d(B, N) = \sqrt{(1\frac{1}{2} - 3)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{3\frac{1}{4}}$$

$$d(O, N) = \sqrt{(1\frac{1}{2} - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{3\frac{1}{4}}$$

$d(O, N) = d(B, N)$, dus d gaat door O .

Bladzijde 111

52

$\alpha \quad x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$
 $(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 - 12 = 0$
 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$
Dus $r_1 = 5$ en $M_1(-2, 3)$.
 $d(P, M_1) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - p)^2} = \sqrt{9 + (p - 3)^2}$
 $d(P, M_1) = r_1$ geeft $\sqrt{9 + (3 - p)^2} = 5$
 $9 + (3 - p)^2 = 25$
 $(3 - p)^2 = 16$
 $3 - p = 4 \vee 3 - p = -4$
 $p = -1 \vee p = 7$

Zie de figuur hiernaast.

$$d(P, M_1) < 5 \text{ geeft } -1 < p < 7$$

$\beta \quad x^2 + y^2 - 8x - 2y + q = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 2y + q = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 + q = 0$
 $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 17 - q$

Dus $r_2 = \sqrt{17 - q}$ en $M_2(4, 1)$.

$$d(Q, M_2) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

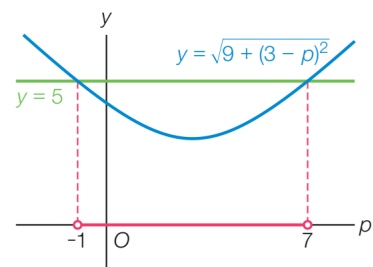
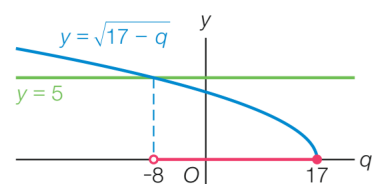
$$d(Q, M_2) = r_2 \text{ geeft } \sqrt{17 - q} = 5$$

$$17 - q = 25$$

$$q = -8$$

Zie de figuur hiernaast.

$$d(Q, M_2) > r_2 \text{ geeft } 5 > \sqrt{17 - q} \text{ oftewel } -8 < q \leq 17$$



53

$$x^2 + y^2 - 2x - 12y + 21 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 12y + 21 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y-6)^2 - 36 + 21 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-6)^2 = 16$$

Dus $M_1(1, 6)$ en $r_1 = 4$.

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(7-1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{52}$$

In $\triangle AM_1M_2$ geldt $(AM_1)^2 + (AM_2)^2 = 4^2 + 6^2 = 52$, dus $(AM_1)^2 + (AM_2)^2 = (M_1M_2)^2$.

Uit de omgekeerde stelling van Pythagoras volgt dat $\triangle AM_1M_2$ rechthoekig is met $\angle M_1AM_2 = 90^\circ$.

$$x^2 + y^2 - 14x - 4y + 17 = 0$$

$$x^2 - 14x + y^2 - 4y + 17 = 0$$

$$(x-7)^2 - 49 + (y-2)^2 - 4 + 17 = 0$$

$$(x-7)^2 + (y-2)^2 = 36$$

Dus $M_2(7, 2)$ en $r_2 = 6$.

C6

a $c_1: (x+1)^2 + (y-4)^2 = 64$

b c_2 raakt de y -as en $x_B = 7$, dus $r = 7$.

Dus $c_2: (x-7)^2 + (y-2)^2 = 49$.

c Middellijn AB , dus het middelpunt van c_3 is het midden van AB oftewel

$$M_3\left(\frac{1}{2}(-1+7), \frac{1}{2}(4+2)\right) = M_3(3, 3).$$

De straal is $d(A, M_3) = \sqrt{(3-(-1))^2 + (3-4)^2} = \sqrt{17}$.

Dus $c_3: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 17$.

d c_4 en c_5 raken de x -as en de straal is 3, dus $y_M = 3$ of $y_M = -3$.

$y = 3$ en M op k geeft $\frac{1}{2}x = 3$

$$x = 2$$

Dus $M_4(2, 3)$ en $c_4: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$.

$y = -3$ en M op k geeft $\frac{1}{2}x = -3$

$$x = -2$$

Dus $M_5(-2, -3)$ en $c_5: (x+2)^2 + (y+3)^2 = 9$.

C7

a $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$

$$x^2 + 10x + y^2 - 6y - 2 = 0$$

$$(x+5)^2 - 25 + (y-3)^2 - 9 - 2 = 0$$

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 = 36$$

Dus $r = 6$ en $M(-5, 3)$.

b $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 7 = 0$

$$x^2 - 2x + y^2 + 8y - 7 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+4)^2 - 16 - 7 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = 24$$

Dus $r_d = \sqrt{24}$ en $M_d(1, -4)$.

$$d(A, M_d) = \sqrt{(1-5)^2 + (-4-(-1))^2} = \sqrt{25} = 5$$

$d(A, M_d) > r_d$, dus A ligt buiten d .

7.4 Afstanden en raaklijnen bij cirkels

Bladzijde 112

54

a $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$

$$x^2 - 10x + y^2 - 6y + 18 = 0$$

$$(x-5)^2 - 25 + (y-3)^2 - 9 + 18 = 0$$

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$$

Dus $M(5, 3)$ en $r = 4$.

b $d(P, M) = \sqrt{(5-1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{25} = 5$

$d(P, M) > r$, dus P ligt buiten c .

$$d(Q, M) = \sqrt{(5-6)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{26}$$

$d(Q, M) > r$, dus Q ligt buiten c .

c $5 < \sqrt{26}$, dus P ligt dicht bij het middelpunt M van cirkel c dan Q .

Dus $d(P, c) < d(Q, c)$.

55

$$\mathbf{a} \quad x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 3 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$$

$$\text{Dus } M(3, 2) \text{ en } r = \sqrt{10}.$$

$$d(A, M) = \sqrt{(3-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$d(A, c) = r - d(A, M) = \sqrt{10} - \sqrt{2}$$

$$\mathbf{b} \quad d(B, M) = \sqrt{(3-(-1))^2 + (2-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$d(B, c) = d(B, M) - r = 5 - \sqrt{10}$$

$$\mathbf{c} \quad d(C, M) = \sqrt{(3-9)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$d(C, c) = d(C, M) - r = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$$

56

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

$$\text{Dus } M(1, -2) \text{ en } r = \sqrt{5}.$$

$$d(A, M) = \sqrt{(1-4)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$d(A, c) = d(A, M) - r = \sqrt{13} - \sqrt{5} = 1,369...$$

De lijn l gaat door M met $l \perp k$.

$$l: 6x - 4y = c \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } A(4, 0) \end{array} \right\} c = 6 \cdot 4 - 4 \cdot 0 = 24$$

$$\text{Dus } l: 6x - 4y = 24 \text{ oftewel } l: 3x - 2y = 12.$$

k en l snijden geeft het punt S .

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 6y = 29 \\ 3x - 2y = 12 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x + 6y = 29 \\ 9x - 6y = 36 \end{array} \right. +$$

$$\frac{13x}{} = 65$$

$$x = 5$$

$$x = 5 \text{ invullen in } 3x - 2y = 12 \text{ geeft } 3 \cdot 5 - 2y = 12$$

$$15 - 2y = 12$$

$$-2y = -3$$

$$y = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } S(5, 1\frac{1}{2}).$$

$$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(5-4)^2 + (1\frac{1}{2}-0)^2} = \sqrt{3\frac{1}{4}} = 1,802...$$

$$d(A, c) < d(A, k), \text{ dus } A \text{ ligt dicht bij } c \text{ dan bij } k.$$

57

$$\mathbf{a} \quad x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$$

$$x^2 + 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 4 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$\text{Dus } r = 3 \text{ en } M(-2, 1).$$

$\mathbf{b}$ De lijn l gaat door M met $l \perp k$.

$$l: x - 2y = c \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } M(-2, 1) \end{array} \right\} c = -2 - 2 \cdot 1 = -4$$

$$\text{Dus } l: x - 2y = -4.$$

k en l snijden geeft het punt A .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 7 \\ x - 2y = -4 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y = 14 \\ x - 2y = -4 \end{array} \right. +$$

$$\frac{5x}{} = 10$$

$$x = 2$$

$$x = 2 \text{ invullen in } 2x + y = 7 \text{ geeft } 2 \cdot 2 + y = 7$$

$$4 + y = 7$$

$$y = 3$$

$$\text{Dus } A(2, 3).$$

$$\mathbf{c} \quad d(A, M) = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Dus } d(k, c) = d(A, M) - r = 2\sqrt{5} - 3.$$

58

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 &= 0 \\
 x^2 - 6x + y^2 + 4y - 3 &= 0 \\
 (x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 - 3 &= 0 \\
 (x-3)^2 + (y+2)^2 &= 16 \\
 \text{Dus } r &= 4 \text{ en } M(3, -2).
 \end{aligned}$$

De lijn l gaat door M met $l \perp k$.

$$\left. \begin{array}{l} l: 2x + y = c \\ \text{door } M(3, -2) \end{array} \right\} c = 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

$$\text{Dus } l: 2x + y = 4.$$

k en l snijden geeft het punt A .

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y = -13 \\ 2x + y = 4 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = -13 \\ 4x + 2y = 8 \end{array} \right. +$$

$$\frac{5x}{5} = -5 \quad +$$

$$x = -1$$

$$\begin{aligned}
 x = -1 \text{ invullen in } x - 2y = -13 \text{ geeft } -1 - 2y &= -13 \\
 -2y &= -12 \\
 y &= 6, \text{ dus } A(-1, 6).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d(A, M) &= \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-2 - 6)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \\
 d(k, c) = d(A, M) - r &= 4\sqrt{5} - 4 = 4(\sqrt{5} - 1)
 \end{aligned}$$

Bladzijde 114

59

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 &= 0 \\
 x^2 + 8x + y^2 + 2y - 8 &= 0 \\
 (x+4)^2 - 16 + (y+1)^2 - 1 - 8 &= 0 \\
 (x+4)^2 + (y+1)^2 &= 25 \\
 \text{Dus } r &= 5 \text{ en } M(-4, -1).
 \end{aligned}$$

De lijn k gaat door M met $k \perp l$.

$$k \perp l, \text{ dus } rc_k \cdot -3 = -1 \text{ en dit geeft } rc_k = \frac{1}{3}.$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \frac{1}{3}x + b \\ \text{door } M(-4, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot -4 + b = -1 \\ -1\frac{1}{3} + b = -1 \\ b = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$

k en l snijden geeft het punt A .

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = -3x + 17$$

$$3\frac{1}{3}x = 16\frac{2}{3}$$

$$x = 5$$

$$x = 5 \text{ invullen in } y = -3x + 17 \text{ geeft } y = -3 \cdot 5 + 17 = 2, \text{ dus } A(5, 2).$$

$$\begin{aligned}
 d(A, M) &= \sqrt{(-4 - 5)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{90} \\
 d(l, c) = d(A, c) = d(A, M) - r &= \sqrt{90} - 5 = 4,486... \\
 \text{Dus } d(l, c) &< r.
 \end{aligned}$$

60 $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$
 $x^2 + 8x + y^2 + 4y - 5 = 0$
 $(x+4)^2 - 16 + (y+2)^2 - 4 - 5 = 0$
 $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 25$
Dus $M(-4, -2)$ en $r = 5$.

$$\begin{aligned} d(P, M) &= \sqrt{(-4-p)^2 + (-2-p)^2} \\ &= \sqrt{16 + 8p + p^2 + 4 + 4p + p^2} \\ &= \sqrt{2p^2 + 12p + 20} \end{aligned}$$

$$d(P, c) = d(P, M) - r = \sqrt{2p^2 + 12p + 20} - 5$$

$$d(P, c) = 5 \text{ geeft } \sqrt{2p^2 + 12p + 20} - 5 = 5$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2p^2 + 12p + 20} &= 10 \\ 2p^2 + 12p + 20 &= 100 \\ 2p^2 + 12p - 80 &= 0 \\ p^2 + 6p - 40 &= 0 \\ (p-4)(p+10) &= 0 \\ p &= 4 \vee p = -10 \end{aligned}$$

Dus $p = 4$.

- 61 a** De lijn l door $A(5, 2)$ en $M(2, 1)$ heeft $rc_l = \frac{2-1}{5-2} = \frac{1}{3}$.
b Omdat geldt dat $k \perp l$, kun je rc_k berekenen met $rc_k \cdot \frac{1}{3} = -1$.
c $k \perp l$, dus $rc_k \cdot \frac{1}{3} = -1$ en dit geeft $rc_k = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -3x + b \\ \text{door } A(5, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 5 + b = 2 \\ -15 + b = 2 \\ b = 17 \end{array}$$

Dus $k: y = -3x + 17$.

Bladzijde 115

- 62 a** $x_B = 2$ geeft $y_B = -1$, dus $B(2, -1)$.
Lijn n door M en B heeft $rc_n = \frac{-1-1}{2-3} = 2$.
 $l \perp n$, dus $rc_l \cdot 2 = -1$ en dit geeft $rc_l = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(2, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1 \\ -1 + b = -1 \\ b = 0 \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{2}x$.
b $\tan(\alpha) = rc_k = \frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 26,56\dots^\circ$
 $\tan(\beta) = rc_l = -\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -26,56\dots^\circ$
Dus de hoek tussen k en l is $26,56\dots^\circ - (-26,56\dots^\circ) \approx 53,1^\circ$.
c k en l snijden geeft $\frac{1}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}x$

$$\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -2 \text{ invullen in } y = -\frac{1}{2}x \text{ geeft } y = 1. \\ \text{Dus } S(-2, 1). \end{array}$$

d $MS = x_M - x_S = 3 - (-2) = 5$ en $AM = \sqrt{5}$.
In $\triangle AMS$ is $\sin(\angle MSA) = \frac{AM}{MS} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\angle MSA = 26,56\dots^\circ$$

Dus de hoek tussen k en l is $2 \cdot 26,56\dots^\circ \approx 53,1^\circ$.

63

a $x = 3$ geeft $3^2 + y^2 - 12 \cdot 3 + 11 = 0$

$$y^2 = 16$$

$$y = 4 \vee y = -4$$

Dus $A(3, 4)$ en $B(3, -4)$.

$$x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$x^2 - 12x + y^2 + 11 = 0$$

$$(x - 6)^2 - 36 + y^2 + 11 = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 25$$

Dus c heeft middelpunt $M(6, 0)$.

Lijn m door M en A heeft $rc_m = \frac{4-0}{3-6} = -\frac{4}{3}$.

$k \perp m$, dus $rc_k \cdot -\frac{4}{3} = -1$ en dit geeft $rc_k = \frac{3}{4}$.

$$k: y = \frac{3}{4}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 3 + b = 4 \\ \text{door } A(3, 4) \end{array} \right.$$

$$2\frac{1}{4} + b = 4$$

$$b = 1\frac{3}{4}$$

Dus $k: y = \frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$.

Lijn n door M en B heeft $rc_n = \frac{-4-0}{3-6} = \frac{4}{3}$.

$l \perp n$, dus $rc_l \cdot \frac{4}{3} = -1$ en dit geeft $rc_l = -\frac{3}{4}$.

$$l: y = -\frac{3}{4}x + b \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 3 + b = -4 \\ \text{door } B(3, -4) \end{array} \right.$$

$$-2\frac{1}{4} + b = -4$$

$$b = -1\frac{3}{4}$$

Dus $l: y = -\frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4}$.

b $\tan(\alpha) = rc_k = \frac{3}{4}$ geeft $\alpha = 36,8\dots^\circ$

$\tan(\beta) = rc_l = -\frac{3}{4}$ geeft $\beta = -36,8\dots^\circ$

Dus de hoek tussen k en l is $36,8\dots^\circ - (-36,8\dots^\circ) \approx 74^\circ$.

c Zie de figuur hiernaast.

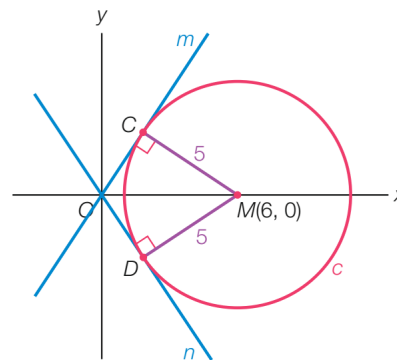
m en n raken de cirkel in de punten C en D .

De straal van c is $r = 5$, dus $CM = DM = 5$.

In $\triangle OMC$ is $\sin(\angle COM) = \frac{5}{6}$ en dit geeft $\angle COM = 56,4\dots^\circ$.

$$\angle COD = 2 \cdot \angle COM = 2 \cdot 56,4\dots^\circ = 112,8\dots^\circ$$

Dus de hoek tussen de lijnen m en n is $180^\circ - 112,8\dots^\circ \approx 67^\circ$.



64

a $y = 0$ geeft $x^2 + 6x - 7 = 0$

$$(x - 1)(x + 7) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -7$$

Dus $A(-7, 0)$ en $B(1, 0)$.

$$x^2 + y^2 + 6x - 6y - 7 = 0$$

$$x^2 + 6x + y^2 - 6y - 7 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 9 + (y - 3)^2 - 9 - 7 = 0$$

$$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

Dus c heeft middelpunt $M(-3, 3)$.

Lijn m door M en A heeft $rc_m = \frac{3-0}{-3-(-7)} = \frac{3}{4}$.

$k \perp m$, dus $rc_k \cdot \frac{3}{4} = -1$ en dit geeft $rc_k = -\frac{4}{3}$.

$$k: y = -\frac{4}{3}x + b \left\{ \begin{array}{l} -\frac{4}{3} \cdot (-7) + b = 0 \\ \text{door } A(-7, 0) \end{array} \right.$$

$$9\frac{1}{3} + b = 0$$

$$b = -9\frac{1}{3}$$

Dus $k: y = -\frac{4}{3}x - 9\frac{1}{3}$.

Lijn n door M en B heeft $rc_n = \frac{3-0}{-3-1} = -\frac{3}{4}$.

$l \perp n$, dus $rc_l \cdot -\frac{3}{4} = -1$ en dit geeft $rc_l = \frac{4}{3}$.

$$l: y = \frac{4}{3}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{3} \cdot 1 + b = 0 \\ \text{door } B(1, 0) \end{array} \right.$$

$$b = -1\frac{1}{3}$$

Dus $l: y = \frac{4}{3}x - 1\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{b } x = 0 \text{ geeft } y^2 - 6y - 7 &= 0 \\ (y + 1)(y - 7) &= 0 \\ y &= -1 \vee y = 7 \end{aligned}$$

Dus $C(0, -1)$ en $D(0, 7)$.

$$\text{Lijn } r \text{ door } M \text{ en } C \text{ heeft } rc_r = \frac{3 - -1}{-3 - 0} = -\frac{4}{3}.$$

$$p \perp r, \text{ dus } rc_p \cdot -\frac{4}{3} = -1 \text{ en dit geeft } rc_p = \frac{3}{4}.$$

$$\left. \begin{aligned} p: y &= \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } C(0, -1) \end{aligned} \right\} \text{ dus } p: y &= \frac{3}{4}x - 1$$

$$\text{Lijn } s \text{ door } M \text{ en } D \text{ heeft } rc_s = \frac{3 - 7}{-3 - 0} = \frac{4}{3}.$$

$$q \perp s, \text{ dus } rc_q \cdot \frac{4}{3} = -1 \text{ en dit geeft } rc_q = -\frac{3}{4}.$$

$$\left. \begin{aligned} q: y &= -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } D(0, 7) \end{aligned} \right\} \text{ dus } q: y &= -\frac{3}{4}x + 7$$

$$\text{c } \tan(\alpha_1) = rc_k = -\frac{1}{3} \text{ geeft } \alpha_1 = -53,1\dots^\circ$$

$$\tan(\beta_1) = rc_l = \frac{1}{3} \text{ geeft } \beta_1 = 53,1\dots^\circ$$

$$\beta_1 - \alpha_1 = 53,1\dots^\circ - (-53,1\dots^\circ) = 106,2\dots^\circ$$

$$\text{De hoek tussen } k \text{ en } l \text{ is } 180^\circ - 106,2\dots^\circ = 73,7\dots^\circ.$$

Dus de hoek tussen k en l is gelijk aan de hoek tussen p en q .

$$\tan(\alpha_2) = rc_p = \frac{3}{4} \text{ geeft } \alpha_2 = 36,8\dots^\circ$$

$$\tan(\beta_2) = rc_q = -\frac{3}{4} \text{ geeft } \beta_2 = -36,8\dots^\circ$$

$$\alpha_2 - \beta_2 = 36,8\dots^\circ - (-36,8\dots^\circ) = 73,7\dots^\circ$$

$$\text{De hoek tussen } p \text{ en } q \text{ is } 73,7\dots^\circ.$$

65 a $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 4 = 0$

$$x^2 - 2x + y^2 + 8y + 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 4)^2 - 16 + 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 13$$

Dus c_1 heeft middelpunt $M_1(1, -4)$.

$$\text{Lijn } l \text{ door } M_1 \text{ en } A \text{ heeft } rc_l = \frac{-2 - -4}{4 - 1} = \frac{2}{3}.$$

$$k \perp l, \text{ dus } rc_k \cdot \frac{2}{3} = -1 \text{ en dit geeft } rc_k = -\frac{3}{2}.$$

$$\left. \begin{aligned} k: y &= -\frac{3}{2}x + b \\ \text{door } A(4, -2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -\frac{3}{2} \cdot 4 + b &= -2 \\ -6 + b &= -2 \end{aligned}$$

$$b = 4$$

$$k: y = -1\frac{1}{2}x + 4$$

$$\frac{1}{2}x + y = 4$$

$$3x + 2y = 8$$

$$\text{b } r_2 = d(B, M_2) = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{45}$$

$$\text{Dus } c_2: (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 45.$$

$$\text{Lijn } n \text{ door } M_2 \text{ en } B \text{ heeft } rc_n = \frac{1 - 4}{3 - -3} = -\frac{1}{2}.$$

$$m \perp n, \text{ dus } rc_m \cdot -\frac{1}{2} = -1 \text{ en dit geeft } rc_m = 2.$$

$$\left. \begin{aligned} m: y &= 2x + b \\ \text{door } B(3, 1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2 \cdot 3 + b &= 1 \\ 6 + b &= 1 \end{aligned}$$

$$b = -5$$

$$\text{Dus } m: y = 2x - 5.$$

66 a $y = 0$ geeft $x^2 - 4x - 12 = 0$
 $(x + 2)(x - 6) = 0$
 $x = -2 \vee x = 6$

Dus $A(-2, 0)$ en $B(6, 0)$.

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y - 12 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 - 12 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 17$$

Dus $M(2, -1)$ en $r = \sqrt{17}$.

Lijn p door M en A heeft $rc_p = \frac{0 - -1}{-2 - 2} = -\frac{1}{4}$.

$k \perp p$, dus $rc_k \cdot -\frac{1}{4} = -1$ en dit geeft $rc_k = 4$.

Lijn q door M en C heeft $rc_q = \frac{3 - -1}{1 - 2} = -4$.

$m \perp q$, dus $rc_m \cdot -4 = -1$ en dit geeft $rc_m = \frac{1}{4}$.

$\tan(\alpha) = rc_k = 4$ geeft $\alpha = 75,9\dots^\circ$

$\tan(\beta) = rc_m = \frac{1}{4}$ geeft $\beta = 14,0\dots^\circ$

Dus de hoek tussen k en m is $75,9\dots^\circ - 14,0\dots^\circ \approx 62^\circ$.

b Zie de figuur hiernaast.

Het midden van AB is $F(2, 0)$.

In $\triangle AMF$ is $\tan(\angle AMF) = \frac{AF}{MF} = \frac{4}{1} = 4$

en dit geeft $\angle AMF = 75,96\dots^\circ$.

Dus $\angle AMB = 2 \cdot 75,96\dots^\circ \approx 152^\circ$.

c De straal van c is $r = \sqrt{17}$.

$m: y = \frac{1}{4}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} + b = 3 \\ \text{door } C(1, 3) \end{array} \right. \int \frac{1}{4} + b = 3$
 $b = 2\frac{3}{4}$

Dus $m: y = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$.

De lijn r door M en B heeft $rc_r = \frac{0 - -1}{6 - 2} = \frac{1}{4}$.

$l \perp r$, dus $rc_l \cdot \frac{1}{4} = -1$ en dit geeft $rc_l = -4$.

$l: y = -4x + b \left\{ \begin{array}{l} -4 \cdot 6 + b = 0 \\ \text{door } B(6, 0) \end{array} \right. \int -24 + b = 0$
 $b = 24$

Dus $l: y = -4x + 24$.

l en m snijden het punt E .

$$-4x + 24 = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$$

$$-4\frac{1}{4}x = -21\frac{1}{4}$$

$$x = 5$$

$x = 5$ invullen in $y = -4x + 24$ geeft $y = -4 \cdot 5 + 24 = 4$, dus $E(5, 4)$.

$$d(E, M) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{34}$$

$$d(E, c) = d(E, M) - r = \sqrt{34} - \sqrt{17}$$

Alternatieve uitwerking

$m: y = \frac{1}{4}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} + b = 3 \\ \text{door } C(1, 3) \end{array} \right. \int \frac{1}{4} + b = 3$
 $b = 2\frac{3}{4}$

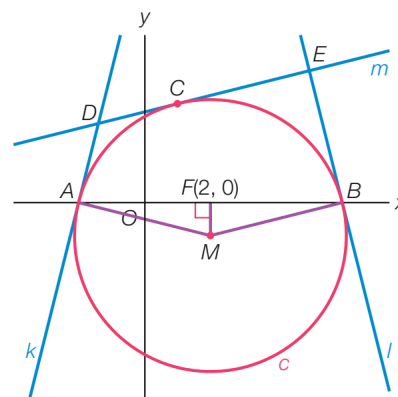
Dus $m: y = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$.

De lijn r door M en B heeft $rc_r = \frac{0 - -1}{6 - 2} = \frac{1}{4}$, dus $BM \parallel CE$.

Omdat $BE \perp BM$, $CE \perp CM$ en $BM = CM = r$ is $MBEC$ een vierkant.

De stelling van Pythagoras in $\triangle BEM$ geeft $EM = \sqrt{17 + 17} = \sqrt{34}$.

Dus $d(E, c) = d(E, M) - r = \sqrt{34} - \sqrt{17}$.



$$y^2 - 2y - 15 = 0$$

$$y = -3 \vee y = 5$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$$

$$(x+3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1$$

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$$

Dus $M(-3, 1)$ en $r_1 = \sqrt{20}$.

$k \perp m$, dus $\text{rc}_k \cdot 2 = -1$ en dit geeft $\text{rc}_k = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} l \parallel k, \text{ dus } l: y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } M(-3, 1) \end{array} \right\} -\frac{1}{2} \cdot -3 + b = 1$$

$$1\frac{1}{2} + b = 1$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

l snijden met de x -as geeft $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

$$-\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$$

$x = -1$, dus $B(-1, 0)$.

$$d(B, M) = \sqrt{(-3 - -1)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{5}$$

Dus $c_2: (x+1)^2 + y^2 = 5$.

C8

a $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 3 = 0$

$$x^2 - 12x + y^2 + 8y + 3 = 0$$

$$(x-6)^2 - 36 + (y+4)^2 - 16 + 3 = 0$$

$$(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 49$$

Dus $M(6, -4)$ en $r = 7$.

$$d(A, M) = \sqrt{(6 - 1)^2 + (-4 - 3)^2} = \sqrt{74}$$

$$d(A, c) = d(A, M) - r = \sqrt{74} - 7$$

b $d(B, M) = \sqrt{(6 - 10)^2 + (-4 - -7)^2} = \sqrt{25} = 5$

$$d(B, c) = r - d(B, M) = 7 - 5 = 2$$

c De lijn l gaat door M met $l \perp k$.

$$\left. \begin{array}{l} l: 4x - 3y = c \\ \text{door } M(6, -4) \end{array} \right\} c = 4 \cdot 6 - 3 \cdot -4 = 36$$

Dus $l: 4x - 3y = 36$.

k en l snijden geeft het punt S .

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y = 52 \\ 4x - 3y = 36 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \text{geeft} \left\{ \begin{array}{l} 9x + 12y = 156 \\ 16x - 12y = 144 \end{array} \right. +$$

$x = 12$

$x = 12$ invullen in $3x + 4y = 52$ geeft $3 \cdot 12 + 4y = 52$

$$36 + 4y = 52$$

$$4y = 16$$

$y = 4$, dus $S(12, 4)$.

$$d(S, M) = \sqrt{(6 - 12)^2 + (-4 - 4)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$d(k, c) = d(S, M) - r = 10 - 7 = 3$$

C9 $x = 3$ geeft $3^2 + y^2 - 10 \cdot 3 + 2y - 3 = 0$

$$y^2 + 2y - 24 = 0$$

$$(y - 4)(y + 6) = 0$$

$$y = 4 \vee y = -6$$

Dus $A(3, 4)$.

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y - 3 = 0$$

$$x^2 - 10x + y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$(x - 5)^2 - 25 + (y + 1)^2 - 1 - 3 = 0$$

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 29$$

Dus c heeft middelpunt $M(5, -1)$.

Lijn l door M en A heeft $rc_l = \frac{4 - (-1)}{3 - 5} = -\frac{5}{2}$.

$k \perp l$, dus $rc_k \cdot -\frac{5}{2} = -1$ en dit geeft $rc_k = \frac{2}{5}$.

$$k: y = \frac{2}{5}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{5} \cdot 3 + b = 4 \\ \text{door } A(3, 4) \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{5} + b = 4$$

$$b = 2\frac{4}{5}$$

Dus $k: y = \frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5}$.

Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 118

1 a $k: y = ax + 12$

$$-ax + y = 12$$

$$-5ax + 5y = 60$$

Een snijpunt voor $-5a \neq 4$ oftewel $a \neq -\frac{4}{5}$ en b mag elk getal zijn.

b Samenvallen, dus $a = -\frac{4}{5}$ en $b = 60$.

c $k: y = ax + 12 \quad \left\{ \begin{array}{l} a \cdot 2 + 12 = 8 \\ \text{door } (2, 8) \end{array} \right.$

$$2a = -4$$

$$a = -2$$

$l: 4x + 5y = b \quad \left\{ \begin{array}{l} b = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 8 = 48 \\ \text{door } (2, 8) \end{array} \right.$

Dus $a = -2$ en $b = 48$.

d Substitutie van $y = -x + 12$ in $4x + 5y = b$ geeft $4x + 5(-x + 12) = b$

$$4x - 5x + 60 = b$$

$$-x = b - 60$$

$$x = -b + 60$$

Het snijpunt rechts van de lijn $x = 4$, dus $x > 4$ geeft $-b + 60 > 4$

$$-b > -56$$

$$b < 56$$

2 a $\tan(\alpha) = rc_k = 4$ geeft $\alpha = 75,9...^\circ$

$$\tan(\beta) = rc_l = \frac{1}{2}$$
 geeft $\beta = 26,5...^\circ$

$$\alpha - \beta = 75,9...^\circ - 26,5...^\circ = 49,3...^\circ$$

De gevraagde hoek is 49° .

b $rc_m = \frac{-2 - 0}{0 - 3} = \frac{2}{3}$

$$\tan(\alpha) = rc_m = \frac{2}{3}$$
 geeft $\alpha = 33,69...^\circ$

$$\alpha - \beta = 33,69...^\circ - (-68,19...^\circ) = 101,88...^\circ$$

De gevraagde hoek is $180^\circ - 101,88...^\circ \approx 78,1^\circ$.

c $p: 2x + 3y = 6$

$$3y = -2x + 6$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$\tan(\alpha) = rc_p = -\frac{2}{3}$$
 geeft $\alpha = -33,69...^\circ$

$$\tan(\beta) = rc_q = -8$$
 geeft $\beta = -82,87...^\circ$

$$\alpha - \beta = -33,69...^\circ - (-82,87...^\circ) = 49,18...^\circ$$

De gevraagde hoek is $49,2^\circ$.

$$rc_n = \frac{5 - 0}{0 - 2} = -2\frac{1}{2}$$

$$\tan(\beta) = rc_n = -2\frac{1}{2}$$
 geeft $\beta = -68,19...^\circ$

3 a $A(8, 0)$ en $B(3, 5)$ geeft $d(A, B) = \sqrt{(3-8)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

b $M(\frac{1}{2}(2p+3), \frac{1}{2}(0+p+1)) = M(p+1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}p+\frac{1}{2})$

c $d(A, B) = \sqrt{(3-2p)^2 + (p+1-0)^2}$
 $= \sqrt{9-12p+4p^2+p^2+2p+1}$
 $= \sqrt{5p^2-10p+10}$

d $d(A, B) = 5$ geeft $\sqrt{5p^2-10p+10} = 5$
 $5p^2-10p+10 = 25$
 $5p^2-10p-15 = 0$
 $p^2-2p-3 = 0$
 $(p+1)(p-3) = 0$
 $p = -1 \vee p = 3$

4 a $k \perp l$, dus $k: 2x-3y=c$ } $c = 2 \cdot 2 - 3 \cdot -4 = 16$
 door $A(2, -4)$

$k: 2x-3y = 16$
 $-3y = -2x + 16$
 $y = \frac{2}{3}x - 5\frac{1}{3}$

b $m \perp n$, dus $rc_m \cdot -\frac{1}{3} = -1$ en dit geeft $rc_m = 3$.

$m: y = 3x + b$ } $3 \cdot 2 + b = 3$
 door $B(2, 3)$ } $6 + b = 3$
 $b = -3$

$m: y = 3x - 3$
 $-3x + y = -3$
 $3x - y = 3$

5 a De lijn l gaat door A met $l \perp k$.

$l: x+2y=c$ } $c = 6 + 2 \cdot -1 = 4$
 door $A(6, -1)$

Dus $l: x+2y=4$.

k en l snijden geeft het punt P .

$\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=4 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 4x-2y=6 \\ x+2y=4 \end{cases} +$
 $\frac{5x}{5} = 10$
 $x = 2$

$x = 2$ invullen in $2x-y=3$ geeft $2 \cdot 2 - y = 3$

$4 - y = 3$

$y = 1$, dus $P(2, 1)$.

$d(A, k) = d(A, P) = \sqrt{(2-6)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b De lijn m door C en D heeft $rc_m = \frac{1-3}{5-1} = -\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} m: y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } D(5, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 5 + b = 1 \\ -1\frac{2}{3} + b = 1 \end{array} \right. \\ b = 2\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dus $m: y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3}$.

De lijn n gaat door B met $n \perp m$.

$n \perp m$, dus $rc_n \cdot -\frac{1}{3} = -1$ en dit geeft $rc_n = 3$.

$$\begin{aligned} n: y = 3x + b \\ \text{door } B(3, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot 3 + b = 5 \\ 9 + b = 5 \end{array} \right. \\ b = -4 \end{aligned}$$

Dus $n: y = 3x - 4$.

m en n snijden geeft het punt Q .

$$-\frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3} = 3x - 4$$

$$-3\frac{1}{3}x = -6\frac{2}{3}$$

$$x = 2$$

$x = 2$ invullen in $y = 3x - 4$ geeft $y = 3 \cdot 2 - 4 = 2$, dus $Q(2, 2)$.

$$d(B, m) = d(B, Q) = \sqrt{(2-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{10}$$

Bladzijde 119

6 a Middelpunt A en c_1 door B , dus $r_1 = d(A, B) = \sqrt{(8-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{61}$

Dus $c_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 61$.

b c_2 raakt de y -as en $x_B = 8$, dus $r_2 = 8$.

Dus $c_2: (x-8)^2 + (y-2)^2 = 64$.

c Middellijn AB , dus het middelpunt van c_3 is het midden van het lijnstuk AB oftewel $M_3(\frac{1}{2}(2+8), \frac{1}{2}(-3+2)) = M_3(5, -\frac{1}{2})$.

De straal van c_3 is de helft van $d(A, B)$, dus $r_3 = \frac{1}{2}\sqrt{61}$.

Dit geeft $r_3^2 = \frac{1}{4} \cdot 61 = 15\frac{1}{4}$.

Dus $c_3: (x-5)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 15\frac{1}{4}$.

d c_4 en c_5 raken de y -as en de straal is 3, dus $x_M = 3$ of $x_M = -3$.

$x = 3$ en M op k geeft $y = 3 \cdot 3 - 6 = 3$.

Dus $M_4(3, 3)$ en $c_4: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$.

$x = -3$ en M op k geeft $y = 3 \cdot -3 - 6 = -15$.

Dus $M_5(-3, -15)$ en $c_5: (x+3)^2 + (y+15)^2 = 9$.

7 De lijn l gaat door M met $l \perp k$.

$l \perp k$, dus $rc_l \cdot 2 = -1$ en dit geeft $rc_l = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} l: y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } M(6, -1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 6 + b = -1 \\ -3 + b = -1 \end{array} \right. \\ b = 2 \end{aligned}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{2}x + 2$.

k en l snijden geeft het punt S .

$$2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$2\frac{1}{2}x = 5$$

$$x = 2$$

$x = 2$ invullen in $y = 2x - 3$ geeft $y = 2 \cdot 2 - 3 = 1$, dus $S(2, 1)$.

$$r = d(S, M) = \sqrt{(6-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{20}$$

Dus $c: (x-6)^2 + (y+1)^2 = 20$.

8 a $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 + 8y - 11 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + (y + 4)^2 - 16 - 11 = 0$
 $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$
Dus van c_1 is de straal 6 en het middelpunt $(3, -4)$.

b $x^2 + y^2 + 3x - 7y = 0$
 $x^2 + 3x + y^2 - 7y = 0$
 $(x + 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + (y - 3\frac{1}{2})^2 - 12\frac{1}{4} = 0$
 $(x + 1\frac{1}{2})^2 + (y - 3\frac{1}{2})^2 = 14\frac{1}{2}$
Dus van c_2 is de straal $\sqrt{14\frac{1}{2}}$ en het middelpunt $(-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.

9 $x^2 + y^2 - 18x + 10y + 6 = 0$
 $x^2 - 18x + y^2 + 10y + 6 = 0$
 $(x - 9)^2 - 81 + (y + 5)^2 - 25 + 6 = 0$
 $(x - 9)^2 + (y + 5)^2 = 100$
Dus $M(9, -5)$ en $r = 10$.

$d(A, M) = \sqrt{(9 - 3)^2 + (-5 - -4)^2} = \sqrt{37}$
 $d(A, M) < r$, dus A ligt binnen c .

$d(B, M) = \sqrt{(9 - 2)^2 + (-5 - 5)^2} = \sqrt{149}$
 $d(B, M) > r$, dus B ligt buiten c .

$d(C, M) = \sqrt{(9 - 15)^2 + (-5 - 3)^2} = \sqrt{100} = 10$
 $d(C, M) = r$, dus C ligt op c .

10 a $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$
 $(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 = 0$
 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$
Dus $M(2, -1)$ en $r = \sqrt{5}$.

$d(A, M) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
 $d(A, c) = d(A, M) - r = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

b $d(B, M) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (-1 - -2)^2} = \sqrt{2}$
 $d(B, c) = r - d(B, M) = \sqrt{5} - \sqrt{2}$

c De lijn l gaat door M met $l \perp k$.
 $\left. \begin{array}{l} l: x - 2y = c \\ \text{door } M(2, -1) \end{array} \right\} c = 2 - 2 \cdot -1 = 4$
Dus $l: x - 2y = 4$.

k en l snijden geeft het punt S .

$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 13 \\ x - 2y = 4 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right|$ geeft $\left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y = 26 \\ x - 2y = 4 \end{array} \right. +$
 $\frac{5x}{5} = 30$
 $x = 6$

$x = 6$ invullen in $2x + y = 13$ geeft $2 \cdot 6 + y = 13$
 $12 + y = 13$
 $y = 1$, dus $S(6, 1)$.

$d(S, M) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 $d(k, c) = d(S, M) - r = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$

11 a $x = 4$ geeft $4^2 + y^2 - 4 \cdot 4 + 2y - 8 = 0$

$$y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$(y - 2)(y + 4) = 0$$

$$y = 2 \vee y = -4$$

Dus $A(4, 2)$ en $B(4, -4)$.

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 - 8 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$$

Dus c heeft middelpunt $M(2, -1)$.

De lijn m door M en A heeft $rc_m = \frac{2 - -1}{4 - 2} = \frac{3}{2}$.

$k \perp m$, dus $rc_k \cdot \frac{3}{2} = -1$ en dit geeft $rc_k = -\frac{2}{3}$.

$k: y = -\frac{2}{3}x + b$ $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot 4 + b = 2 \\ -2\frac{2}{3} + b = 2 \end{array} \right.$

door $A(4, 2)$ $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot 4 + b = 2 \\ -2\frac{2}{3} + b = 2 \end{array} \right.$

$$b = 4\frac{2}{3}$$

Dus $k: y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{2}{3}$.

De lijn n door M en B heeft $rc_n = \frac{-4 - -1}{4 - 2} = -\frac{3}{2}$.

$l \perp n$, dus $rc_l \cdot -\frac{3}{2} = -1$ en dit geeft $rc_l = \frac{2}{3}$.

$l: y = \frac{2}{3}x + b$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot 4 + b = -4 \\ 2\frac{2}{3} + b = -4 \end{array} \right.$

door $B(4, -4)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot 4 + b = -4 \\ 2\frac{2}{3} + b = -4 \end{array} \right.$

$$b = -6\frac{2}{3}$$

Dus $l: y = \frac{2}{3}x - 6\frac{2}{3}$.

b $\tan(\alpha) = rc_k = -\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = -33,69\dots^\circ$

$\tan(\beta) = rc_l = \frac{2}{3}$ geeft $\beta = 33,69\dots^\circ$

Dus de hoek tussen k en l is $33,69\dots^\circ - (-33,69\dots^\circ) \approx 67,4^\circ$.

Gemengde opgaven

Bladzijde 120

1 a $l: y = bx + 2a$

$$-bx + y = 2a$$

$$-4bx + 4y = 8a$$

Samenvallen, dus $a = -4b$ en $8 = 8a$

$$b = -\frac{1}{4}a \text{ en } a = 1$$

$$b = -\frac{1}{4} \text{ en } a = 1$$

b $k: ax + 4y = 8$ $\left\{ \begin{array}{l} 4a + 4 \cdot -3 = 8 \\ 4a - 12 = 8 \end{array} \right.$

door $(4, -3)$ $\left\{ \begin{array}{l} 4a + 4 \cdot -3 = 8 \\ 4a - 12 = 8 \end{array} \right.$

$$4a = 20$$

$$a = 5$$

$l: y = bx + 10$ $\left\{ \begin{array}{l} 4b + 10 = -3 \\ 4b = -13 \end{array} \right.$

door $(4, -3)$ $\left\{ \begin{array}{l} 4b + 10 = -3 \\ 4b = -13 \end{array} \right.$

$$b = -3\frac{1}{4}$$

Dus $a = 5$ en $b = -3\frac{1}{4}$.

$$\text{c } \left. \begin{array}{l} k: ax + 4y = 8 \\ x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4y = 8 \\ y = 2 \end{array}$$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = bx + 2a \\ \text{door } (0, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 + 2a = 2 \\ a = 1 \end{array}$$

$$k: x + 4y = 8$$

$$4y = -x + 8$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 2$$

$$k \perp l, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1$$

$$-\frac{1}{4} \cdot b = -1$$

$$b = 4$$

Dus $a = 1$ en $b = 4$.

$$2 \text{ a } d(A, B) = \sqrt{(2-7)^2 + (4-9)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{b } \text{De lijn } k \text{ door } B \text{ en } C \text{ heeft } rc_k = \frac{1-4}{3-2} = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -3x + b \\ \text{door } B(2, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 2 + b = 4 \\ -6 + b = 4 \end{array}$$

$$b = 10$$

Dus $k: y = -3x + 10$.

De lijn l gaat door A met $l \perp k$.

$l \perp k$, dus $rc_l \cdot -3 = -1$ en dit geeft $rc_l = \frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = \frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(7, 9) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot 7 + b = 9 \\ 2\frac{1}{3} + b = 9 \\ b = 6\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $l: y = \frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$.

k en l snijden geeft het punt S .

$$-3x + 10 = \frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$$

$$-3\frac{1}{3}x = -3\frac{1}{3}$$

$$x = 1$$

$x = 1$ invullen in $y = -3x + 10$ geeft $y = -3 \cdot 1 + 10 = 7$, dus $S(1, 7)$.

$$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(1-7)^2 + (7-9)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{c } d(B, C) = \sqrt{(3-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10}$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = 10$$

$$\text{d } c \text{ raakt } k, \text{ dus } r = d(A, k) = \sqrt{40}.$$

$$c: (x-7)^2 + (x-9)^2 = 40$$

$$\text{e } AB = d(A, B) = \sqrt{50}$$

$$AC = d(A, C) = \sqrt{(3-7)^2 + (1-9)^2} = \sqrt{80}$$

$$BC = d(B, C) = \sqrt{10}$$

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $(\sqrt{80})^2 = (\sqrt{50})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos(\angle ABC)$

$$80 = 60 - 2\sqrt{500} \cos(\angle ABC)$$

$$2\sqrt{500} \cos(\angle ABC) = -20$$

$$\cos(\angle ABC) = -\frac{20}{2\sqrt{500}}$$

$$\angle ABC \approx 116,6^\circ$$

$$3 \text{ a } M(\frac{1}{2}(2p+3+2), \frac{1}{2}(0+p+6)) = M(p+2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}p+3)$$

c_1 raakt de x -as en de y -as, dus $x_M = y_M$ of $x_M = -y_M$.

Dit geeft $p + 2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}p + 3 \vee p + 2\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}p - 3$

$$\frac{1}{2}p = \frac{1}{2}$$

$$p = 1$$

$$\vee 1\frac{1}{2}p = -5\frac{1}{2}$$

$$\vee p = -3\frac{2}{3}$$

Dus $p = 1$.

b $d(A, B) = d(O, B)$ geeft $\sqrt{(2 - (2p + 3))^2 + (p + 6 - 0)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (p + 6 - 0)^2}$

$$\sqrt{(-1 - 2p)^2 + (p + 6)^2} = \sqrt{4 + (p + 6)^2}$$

Invoeren van de formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $p = -1\frac{1}{2}$ of $p = \frac{1}{2}$.

Dus $p = \frac{1}{2}$.

c $rc_{AB} = \frac{p + 6 - 0}{2 - (2p + 3)} = \frac{p + 6}{-2p - 1}$

$k \perp AB$ geeft $rc_k \cdot rc_{AB} = -1$

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{p + 6}{-2p - 1} = -1$$

$$\frac{9p + 54}{-20p - 10} = -1$$

$$9p + 54 = 20p + 10$$

$$-11p = -44$$

$$p = 4$$

d $OABC$ is een rechthoek $\left\{ \begin{array}{l} x_A = x_B \\ OA \text{ ligt op de } x\text{-as} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 2p + 3 = 2 \\ 2p = -1 \end{array} \right.$

$$p = -\frac{1}{2}$$

$p = -\frac{1}{2}$ geeft $B(2, 5\frac{1}{2})$, dus $C(0, 5\frac{1}{2})$.

4 a Zie de figuur hiernaast.

De stelling van Pythagoras in $\triangle MNQ$ geeft $QN = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

$$O(OPNM) = \frac{1}{2} (9 + 4) \cdot 12 = 78$$

b $OQ = s$, dus $MQ = r - s$

De stelling van Pythagoras in $\triangle MNQ$ geeft

$$QN = \sqrt{(r + s)^2 - (r - s)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + 2rs + s^2 - (r^2 - 2rs + s^2)}$$

$$= \sqrt{r^2 + 2rs + s^2 - r^2 + 2rs - s^2}$$

$$= \sqrt{4rs}$$

$$= 2\sqrt{rs}$$

$$O(OPNM) = \frac{1}{2} (r + s) \cdot 2\sqrt{rs} = (r + s)\sqrt{rs}$$

c De stelling van Pythagoras in $\triangle MNQ$ geeft $(r - s)^2 + 15^2 = 25^2$

$$(r - s)^2 = 625 - 225$$

$$(r - s)^2 = 400$$

$$r - s = 20$$

$MN = 25$ geeft $r + s = 25$

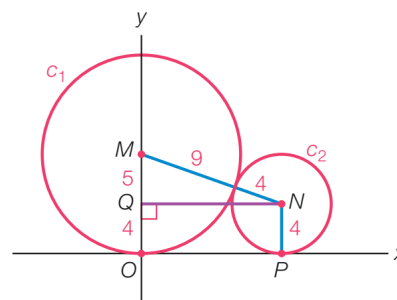
$$\left\{ \begin{array}{l} r + s = 25 \\ r - s = 20 \end{array} \right. +$$

$$2r = 45$$

$$r = 22\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} r = 22\frac{1}{2} \\ r + s = 25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 22\frac{1}{2} + s = 25 \\ s = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $r = 22\frac{1}{2}$ en $s = 2\frac{1}{2}$.



Bladzijde 121

5 a $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$

$$x^2 - 8x + y^2 - 2y + 4 = 0$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 + 4 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 13$$

Dus $M(4, 1)$ en $r = \sqrt{13}$.

$$d(O, M) = \sqrt{(4 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{17}$$

$d(O, M) > r$, dus O ligt buiten c .

- b** De lijn k gaat door O en $k \parallel l$, dus $d(k, l) = d(O, l)$.
 De lijn m gaat door O met $m \perp l$ geeft $m: 3x + 2y = 0$.
 l en m snijden geeft het punt P .

$$\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x - 6y = 26 \\ 9x + 6y = 0 \end{cases} +$$

$$\frac{13x}{13} = 26 +$$

$$x = 2$$

$$x = 2 \text{ invullen in } 2x - 3y = 13 \text{ geeft } 2 \cdot 2 - 3y = 13$$

$$4 - 3y = 13$$

$$-3y = 9$$

$$y = -3, \text{ dus } P(2, -3).$$

$$d(k, l) = d(O, l) = d(O, P) = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{13}$$

Dus $d(k, l) = r$.

- c** De lijn n gaat door A met $n \perp k$.
 $n: 3x + 2y = c$
 door $A(0, -5)$ } $c = 3 \cdot 0 + 2 \cdot -5 = -10$
 Dus $n: 3x + 2y = -10$.

k en n snijden geeft het punt Q .

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x + 2y = -10 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 9x + 6y = -30 \end{cases} +$$

$$\frac{13x}{13} = -30 +$$

$$x = -2\frac{4}{13}$$

$$x = -2\frac{4}{13} \text{ invullen in } 2x - 3y = 0 \text{ geeft } 2 \cdot -2\frac{4}{13} - 3y = 0$$

$$-4\frac{8}{13} - 3y = 0$$

$$-3y = 4\frac{8}{13}$$

$$y = -1\frac{7}{13}, \text{ dus } Q(-2\frac{4}{13}, -1\frac{7}{13}).$$

$$d(A, k) = d(A, Q) = \sqrt{(-2\frac{4}{13} - 0)^2 + (-1\frac{7}{13} - -5)^2} = \sqrt{\frac{900}{169} + \frac{2025}{169}} = \sqrt{\frac{225}{13}} = \sqrt{17\frac{4}{13}}$$

$$d(A, M) = \sqrt{(4-0)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$d(A, c) = d(A, M) - r = 2\sqrt{13} - \sqrt{13} = \sqrt{13}$$

$$\sqrt{13} < \sqrt{17\frac{4}{13}}, \text{ dus } d(A, c) < d(A, k).$$

Dus A ligt niet dichterbij k dan bij c .

- a** $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 4y + 15 = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y - 2)^2 - 4 + 15 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$
Dus $M(4, 2)$ en $r = \sqrt{5}$.
 $x = 2$ geeft $2^2 + y^2 - 8 \cdot 2 - 4y + 15 = 0$
 $y^2 - 4y + 3 = 0$
 $(y - 1)(y - 3) = 0$
 $y = 1 \vee y = 3$
Dus $A(2, 1)$.
 $y = 4$ geeft $x^2 + 4^2 - 8x - 4 \cdot 4 + 15 = 0$
 $x^2 - 8x + 15 = 0$
 $(x - 3)(x - 5) = 0$
 $x = 3 \vee x = 5$
Dus $B(5, 4)$.
Lijn m door M en A heeft $rc_m = \frac{1 - 2}{2 - 4} = \frac{1}{2}$.
 $k \perp m$, dus $rc_k \cdot \frac{1}{2} = -1$ en dit geeft $rc_k = -2$.
Lijn n door M en B heeft $rc_n = \frac{4 - 2}{5 - 4} = 2$.
 $l \perp n$, dus $rc_l \cdot 2 = -1$ en dit geeft $rc_l = -\frac{1}{2}$.
 $\tan(\alpha) = rc_k = -2$ geeft $\alpha = -63,43 \dots^\circ$
 $\tan(\beta) = rc_l = -\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -26,56 \dots^\circ$
De hoek tussen k en l is $-26,56 \dots^\circ - -63,43 \dots^\circ \approx 36,9^\circ$.

- b** $k: y = -2x + b$
door $A(2, 1)$ $\left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 2 + b = 1 \\ -4 + b = 1 \end{array} \right.$
 $b = 5$

Dus $k: y = -2x + 5$.

- $l: y = -\frac{1}{2}x + b$
door $B(5, 4)$ $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 5 + b = 4 \\ -2\frac{1}{2} + b = 4 \end{array} \right.$
 $b = 6\frac{1}{2}$

Dus $l: y = -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$.

k en l snijden geeft het punt R .

$$-2x + 5 = -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$$

$$-1\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}$$

$$x = -1$$

$x = -1$ invullen in $y = -2x + 5$ geeft $y = -2 \cdot -1 + 5 = 7$, dus $R(-1, 7)$.

$$d(R, M) = \sqrt{(-4 - 1)^2 + (2 - 7)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$d(R, c) = d(R, M) - r = 5\sqrt{2} - \sqrt{5}$$

- c** k snijden met de x -as geeft $-2x + 5 = 0$

$$-2x = -5$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

l snijden met de x -as geeft $-\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2} = 0$

$$-\frac{1}{2}x = -6\frac{1}{2}$$

$$x = 13$$

$$O(\triangle PQR) = \frac{1}{2} \cdot (13 - 2\frac{1}{2}) \cdot 7 = 36\frac{3}{4}$$

- a** c_1 gaat door A en B , dus het middelpunt M_1 ligt op de lijn $y = \frac{2 + 8}{2} = 5$.
 c_1 raakt de x -as in C , dus M_1 ligt op de lijn $x = 4$.
Hieruit volgt dat $M_1(4, 5)$ en $r_1 = 5$.
Dus $c_1: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$.
Het middelpunt M_2 van c_2 is $M_2(0, 5)$ en de straal is $8 - 5 = 3$.
Dus $c_2: x^2 + (y - 5)^2 = 9$.

b Zie de figuur hiernaast.

In $\triangle ODM_2$ is $\sin(\angle DOM_2) = \frac{3}{5}$ en dit geeft $\angle DOM_2 = 36,86\dots^\circ$.
Dus de gevraagde hoek is $2 \cdot 36,86\dots^\circ \approx 73,7^\circ$.

c c_3 raakt de y -as in $A(0, 2)$, dus $x_{M_3} = r$ en $y_{M_3} = 2$ oftewel $M_3(r, 2)$.
 c_3 gaat door $M_1(4, 5)$, dus $r = d(M_1, M_3)$

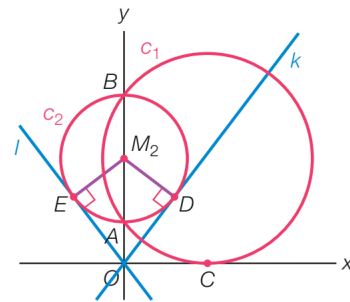
$$r = \sqrt{(r-4)^2 + (2-5)^2}$$

$$r^2 = r^2 - 8r + 16 + 9$$

$$8r = 25$$

$$r = 3\frac{1}{8}$$

$$\text{Dus } c_3: (x - 3\frac{1}{8})^2 + (y - 2)^2 = 9\frac{49}{64}.$$



8 a Het middelpunt van c is het midden M van lijnstuk AB , dus $M(\frac{1}{2}(3+15), \frac{1}{2}(0+16)) = M(9, 8)$.

S ligt even ver boven de lijn $y = 8$ door M als dat A eronder ligt, dus $S(3, 16)$.

$y_S = y_B$, dus $BS \parallel AR$.

Dus $ARBS$ is een trapezium.

b De lijn k door A en B heeft $rc_k = \frac{16-0}{15-2} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$.

$l \perp k$, dus $rc_l \cdot \frac{4}{3} = -1$ en dit geeft $rc_l = -\frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } S(3, 16) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 3 + b = 16 \\ -2\frac{1}{4} + b = 16 \end{array}$$

$$b = 18\frac{1}{4}$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{3}{4}x + 18\frac{1}{4}.$$

$$y = 0 \text{ geeft } -\frac{3}{4}x + 18\frac{1}{4} = 0$$

$$-\frac{3}{4}x = -18\frac{1}{4}$$

$$x = 24\frac{1}{3}$$

Dus $R(24\frac{1}{3}, 0)$.

c $AR = 24\frac{1}{3} - 3 = 21\frac{1}{3}$, $BS = 15 - 3 = 12$ en $AS = 16$.

$$O(ARBS) = \frac{1}{2} (21\frac{1}{3} + 12) \cdot 16 = 266\frac{2}{3}$$

d $k: y = \frac{4}{3}x + b$ door $A(3, 0)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{3} \cdot 3 + b = 0 \\ b = -4 \end{array} \right.$

Dus $k: y = \frac{4}{3}x - 4$.

k snijden met l geeft het punt T .

$$\frac{4}{3}x - 4 = -\frac{3}{4}x + 18\frac{1}{4}$$

$$16x - 48 = -9x + 219$$

$$x = 10\frac{17}{25}$$

$x = 10\frac{17}{25}$ invullen in $y = \frac{4}{3}x - 4$ geeft $y = \frac{4}{3} \cdot 10\frac{17}{25} - 4 = 10\frac{6}{25}$, dus $T(10\frac{17}{25}, 10\frac{6}{25})$.

$$d(A, l) = d(A, T) = \sqrt{(10\frac{17}{25} - 3)^2 + (10\frac{6}{25} - 0)^2} = \sqrt{163\frac{21}{25}} = 12\frac{4}{5}$$

8 Goniometrische functies en vergelijkingen

8.1 De eenheidscirkel en radialen

Bladzijde 124

- 1 a** $\sin(\alpha) = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{1} = PQ$, dus $PQ = \sin(65^\circ) \approx 0,91$.
 $\cos(\alpha) = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = OQ$, dus $OQ = \cos(65^\circ) \approx 0,42$.
- b** $P(0,42; 0,91)$
- c** $\angle POQ = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$
 $PQ \approx 0,91$, $OQ \approx 0,42$ en $P(-0,42; 0,91)$
- d** $\cos(115^\circ) \approx -0,42$ en $\sin(115^\circ) \approx 0,91$
 Er geldt $x_P = \cos(115^\circ)$ en $y_P = \sin(115^\circ)$.
- e** $\angle POQ = 245^\circ - 180^\circ = 65^\circ$ en $P(-0,42; -0,91)$
- f** De GR geeft $\cos(245^\circ) \approx -0,42$ en $\sin(245^\circ) \approx -0,91$ oftewel $x_P = \cos(245^\circ)$ en $y_P = \sin(245^\circ)$.

Bladzijde 126

- 2 a** $\sin(0^\circ) = 0$ **f** $\cos(270^\circ) = 0$ **k** $\sin(-540^\circ) = 0$
b $\cos(0^\circ) = 1$ **g** $\sin(360^\circ) = 0$ **l** $\cos(1080^\circ) = 1$
c $\sin(90^\circ) = 1$ **h** $\cos(360^\circ) = 1$ **m** $\sin(1980^\circ) = 0$
d $\cos(90^\circ) = 0$ **i** $\sin(450^\circ) = 1$ **n** $\cos(-180^\circ) = -1$
e $\sin(270^\circ) = -1$ **j** $\cos(-90^\circ) = 0$ **o** $\sin(990^\circ) = -1$

- 3** $P(\cos(110^\circ), \sin(110^\circ)) \approx P(-0,34; 0,94)$
 $Q(\cos(200^\circ), \sin(200^\circ)) \approx Q(-0,94; -0,34)$
 $R(\cos(-102^\circ), \sin(-102^\circ)) \approx R(-0,21; -0,98)$
 $S(\cos(-50^\circ), \sin(-50^\circ)) \approx S(0,64; -0,77)$

- 4** De draaiingshoek die bij B hoort, is $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Dus $B(\cos(72^\circ), \sin(72^\circ)) \approx B(0,31; 0,95)$.
 De draaiingshoek die bij C hoort, is $2 \cdot 72^\circ = 144^\circ$. Dus $C(\cos(144^\circ), \sin(144^\circ)) \approx C(-0,81; 0,59)$.
 De draaiingshoek die bij D hoort, is $3 \cdot 72^\circ = 216^\circ$. Dus $D(\cos(216^\circ), \sin(216^\circ)) \approx D(-0,81; -0,59)$.
 De draaiingshoek die bij E hoort, is $4 \cdot 72^\circ = 288^\circ$. Dus $E(\cos(288^\circ), \sin(288^\circ)) \approx E(0,31; -0,95)$.

- 5** $\beta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

Bladzijde 128

- 6 a** $x_P = 0,81$, dus $\cos(\alpha) = 0,81$.
 De GR geeft $35,90\dots^\circ$.
 Dus $\alpha \approx 35,9^\circ$.
- b** $y_P = 0,94$, dus $\sin(\alpha) = 0,94$.
 De GR geeft $70,05\dots^\circ$.
 Dus $\alpha = 180^\circ - 70,05\dots^\circ \approx 109,9^\circ$.
- c** $x_P = 0,26$, dus $\cos(\alpha) = 0,26$.
 De GR geeft $74,92\dots^\circ$.
 Dus $\alpha \approx -74,9^\circ$.
- d** $y_P = -0,22$, dus $\sin(\alpha) = -0,22$.
 De GR geeft $-12,70\dots^\circ$.
 Dus $\alpha = 180^\circ + 12,70\dots^\circ \approx 192,7^\circ$.
- 7** $x_P = -0,87$, dus $\cos(\alpha_P) = -0,87$.
 De GR geeft $150,45\dots^\circ$, dus $\alpha_P = 360^\circ - 150,45\dots^\circ = 209,54\dots^\circ$.
 $y_Q = 0,92$, dus $\sin(\alpha_Q) = 0,92$.
 De GR geeft $66,92\dots^\circ$, dus $\alpha_Q = 66,92\dots^\circ$.
 $\angle POQ = \alpha_P - \alpha_Q = 209,54\dots^\circ - 66,92\dots^\circ \approx 142,6^\circ$

- 8 a** omtrek cirkel $= 2\pi r$
 In de eenheidscirkel is $r = 1$, dus omtrek eenheidscirkel $= 2\pi \cdot 1 = 2\pi$.
b Bij $\alpha = 180^\circ$ hoort een halve cirkelboog, dus de lengte van de door P doorlopen cirkelboog is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$.
c $\alpha = \frac{1}{\pi} \cdot 180^\circ \approx 57,3^\circ$

Bladzijde 130

- 9 a** $x_P = \cos(5 \text{ rad}) \approx 0,28$ en $y_P = \sin(5 \text{ rad}) \approx -0,96$
 Dus $P(0,28; -0,96)$.
b $x_P = \cos(6 \text{ rad}) \approx 0,96$ en $y_P = \sin(6 \text{ rad}) \approx -0,28$
 Dus $P(0,96; -0,28)$.
c $x_P = \cos(20 \text{ rad}) \approx 0,41$ en $y_P = \sin(20 \text{ rad}) \approx 0,91$
 Dus $P(0,41; 0,91)$.

- 10 a** afstand $= \frac{1}{2}\pi$ geeft $P(0, 1)$
b afstand $= \pi$ geeft $P(-1, 0)$
c afstand $= 1\frac{1}{2}\pi$ geeft $P(0, -1)$

Bladzijde 131

- 11 a** $\frac{1}{6}\pi \text{ rad} = \frac{1}{6} \cdot 180^\circ = 30^\circ$ **e** $1\frac{1}{4}\pi \text{ rad} = 1\frac{1}{4} \cdot 180^\circ = 225^\circ$
b $\frac{1}{4}\pi \text{ rad} = \frac{1}{4} \cdot 180^\circ = 45^\circ$ **f** $1\frac{1}{4} \text{ rad} = 1\frac{1}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 71,6^\circ$
c $2\pi \text{ rad} = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$ **g** $2\frac{1}{3}\pi \text{ rad} = 2\frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 420^\circ$
d $2 \text{ rad} = 2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 114,6^\circ$ **h** $2\frac{1}{3} \text{ rad} = 2\frac{1}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 133,7^\circ$

- 12 a** $360^\circ = \frac{360}{180}\pi \text{ rad} = 2\pi \text{ rad}$ **e** $90^\circ = \frac{90}{180}\pi \text{ rad} = \frac{1}{2}\pi \text{ rad}$
b $30^\circ = \frac{30}{180}\pi \text{ rad} = \frac{1}{6}\pi \text{ rad}$ **f** $135^\circ = \frac{135}{180}\pi \text{ rad} = \frac{3}{4}\pi \text{ rad}$
c $45^\circ = \frac{45}{180}\pi \text{ rad} = \frac{1}{4}\pi \text{ rad}$ **g** $300^\circ = \frac{300}{180}\pi \text{ rad} = 1\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$
d $60^\circ = \frac{60}{180}\pi \text{ rad} = \frac{1}{3}\pi \text{ rad}$ **h** $210^\circ = \frac{210}{180}\pi \text{ rad} = 1\frac{1}{6}\pi \text{ rad}$

- 13 a** $10^\circ = \frac{10}{180}\pi \text{ rad} \approx 0,17 \text{ rad}$ **c** $1030^\circ = \frac{1030}{180}\pi \text{ rad} \approx 17,98 \text{ rad}$
b $57,3^\circ = \frac{57,3}{180}\pi \text{ rad} \approx 1,00 \text{ rad}$ **d** $90^\circ = \frac{90}{180}\pi \text{ rad} \approx 1,57 \text{ rad}$

- 14 a** $\cos(\frac{5}{8}\pi) \approx -0,38$ **c** $\sin(\frac{4}{5}\pi) \approx 0,59$ **e** $\cos(7,6\pi) \approx 0,31$
b $\cos(\frac{5}{8}) \approx 0,81$ **d** $\sin(\frac{4}{5}) \approx 0,72$ **f** $\cos(7,6) \approx 0,25$

Bladzijde 132

- 15 a** $\sin(\alpha) = 0,92$ geeft $\alpha \approx 1,17$ **c** $\sin(\alpha) = \frac{5}{12}$ geeft $\alpha \approx 0,43$ **e** $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ geeft $\alpha \approx 0,84$
b $\cos(\alpha) = 0,85$ geeft $\alpha \approx 0,55$ **d** $\cos(\alpha) = \frac{3}{17}$ geeft $\alpha \approx 1,39$ **f** $\cos(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ geeft $\alpha \approx 1,21$

- 16 a** $y_P = 0,35$, dus $\sin(\alpha) = 0,35$.
 De GR geeft $0,357\dots$, dus de bijhorende draaiingshoeken zijn $0,36$ en $\pi - 0,357\dots \approx 2,78$.
b $x_Q = -0,35$, dus $\cos(\alpha) = -0,35$.
 De GR geeft $1,928\dots$ dus de bijhorende draaiingshoeken zijn $1,93$ en $2\pi - 1,928\dots \approx 4,35$.

- 17** $AB = 2\cos(\alpha)$ en $BC = 2\sin(\alpha)$, dus $O(ABCD) = 2\cos(\alpha) \cdot 2\sin(\alpha) = 4\cos(\alpha)\sin(\alpha)$.
 $\alpha = 0,2$ geeft $O(ABCD) = 4\cos(0,2)\sin(0,2) = 0,778\dots$
 $\alpha = 0,4$ geeft $O(ABCD) = 4\cos(0,4)\sin(0,4) = 1,434\dots$

De oppervlakte van de rechthoek neemt toe met $\frac{1,434\dots - 0,778\dots}{0,778\dots} \cdot 100\% \approx 84,2\%$.

Bladzijde 133

C1 $P(\cos(35^\circ), \sin(35^\circ)) \approx P(0,82; 0,57)$
 $Q(\cos(105^\circ), \sin(105^\circ)) \approx Q(-0,26; 0,97)$
 $R(\cos(-150^\circ), \sin(-150^\circ)) \approx R(-0,87; -0,5)$
 $S(\cos(-90^\circ), \sin(-90^\circ)) = S(0, -1)$

C2 **a** $y_p = 0,8$, dus $\sin(\alpha) = 0,8$.
 De GR geeft $53,13\dots^\circ$.
 Dus $\alpha = 180^\circ - 53,13\dots^\circ \approx 126,9^\circ$.

b $x_p = -0,7$, dus $\cos(\alpha) = -0,7$.
 De GR geeft $134,42\dots^\circ$.
 Dus $\alpha = 360^\circ - 134,42\dots^\circ \approx 225,6^\circ$.

C3 **a** $\frac{2}{3}\pi \text{ rad} = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 72^\circ$
 $2\frac{1}{2} \text{ rad} = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 143,2^\circ$
 $1\frac{3}{4}\pi \text{ rad} = 1\frac{3}{4} \cdot 180^\circ = 315^\circ$

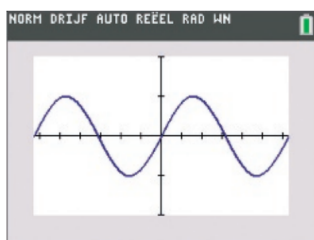
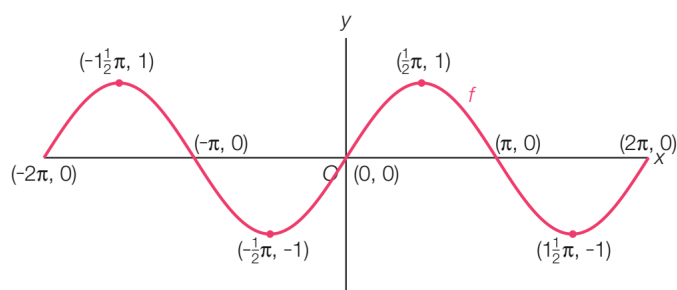
b $120^\circ = \frac{120}{180}\pi \text{ rad} = \frac{2}{3}\pi \text{ rad}$
 $150^\circ = \frac{150}{180}\pi \text{ rad} = \frac{5}{6}\pi \text{ rad}$
 $20^\circ = \frac{20}{180}\pi \text{ rad} = \frac{1}{9}\pi \text{ rad}$

c $15^\circ = \frac{15}{180}\pi \text{ rad} \approx 0,26 \text{ rad}$
 $400^\circ = \frac{400}{180}\pi \text{ rad} \approx 6,98 \text{ rad}$
 $99^\circ = \frac{99}{180}\pi \text{ rad} \approx 1,73 \text{ rad}$

8.2 Formules van sinusoiden opstellen

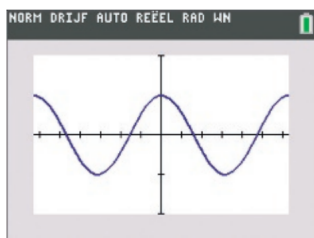
Bladzijde 134

18 **a, b**

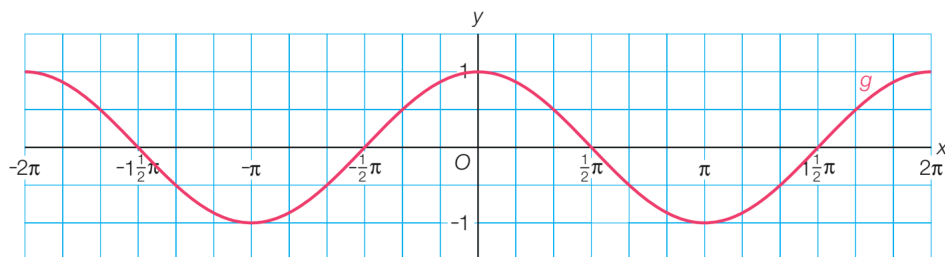


Bladzijde 135

19 **a**



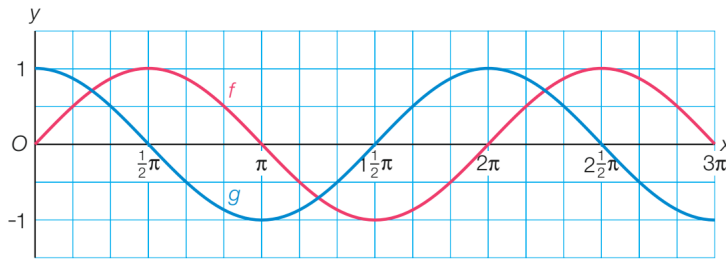
b



c De toppen zijn $(-2\pi, 1)$, $(-\pi, -1)$, $(0, 1)$, $(\pi, -1)$ en $(2\pi, 1)$.

d De nulpunten zijn $-1\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ en $1\frac{1}{2}\pi$.

20 a



- b Bij de draaiingshoek $\frac{1}{4}\pi$ geldt voor het bijbehorende punt P op de eenheidscirkel dat $x_P = y_P$ oftewel $\cos(\alpha) = \sin(\alpha)$.
De x -coördinaten van de andere twee snijpunten zijn $1\frac{1}{4}\pi$ en $2\frac{1}{4}\pi$.

- 21 a $f(x) = \sin(x)$
↓ translatie $(0, 2)$
 $g(x) = 2 + \sin(x)$
evenwichtsstand = 2

- b $f(x) = \sin(x)$
↓ translatie $(3, 0)$
 $h(x) = \sin(x - 3)$

- c $f(x) = \sin(x)$
↓ $\times 4$ t.o.v. de x -as
 $k(x) = 4 \sin(x)$
amplitude = 4

- d $f(x) = \sin(x)$
↓ $\times \frac{1}{5}$ t.o.v. de y -as
 $l(x) = \sin(5x)$
periode = $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$

Bladzijde 137

- 22 a Uit de translatie $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$.
b Ja, ik ben het met José eens.
c Uit de vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de x -as gevolgd door de translatie $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$.

- 23 a $y = \sin(x)$
↓ $\times 2$ t.o.v. de x -as
 $y = 2 \sin(x)$
↓ $\times 2$ t.o.v. de y -as
 $y = 2 \sin(\frac{1}{2}x)$
↓ translatie $(-\frac{3}{4}\pi, 4)$
 $f(x) = 4 + 2 \sin(\frac{1}{2}(x + \frac{3}{4}\pi))$
De evenwichtsstand is 4, de amplitude is 2,
de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ en een beginpunt is $(-\frac{3}{4}\pi, 4)$.

- b $y = \cos(x)$
↓ $\times 7$ t.o.v. de x -as
 $y = 7 \cos(x)$
↓ $\times \frac{1}{5}$ t.o.v. de y -as
 $y = 7 \cos(5x)$
↓ translatie $(\frac{1}{6}\pi, -1)$
 $g(x) = -1 + 7 \cos(5(x - \frac{1}{6}\pi))$
De evenwichtsstand is -1, de amplitude is 7,
de periode is $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$ en een beginpunt is $(\frac{1}{6}\pi, 6)$.

- 24 a De evenwichtsstand is 5, de amplitude is 1,2, de periode is 2π en een beginpunt is $(\frac{1}{6}\pi, 6,2)$.
b De evenwichtsstand is 0,4, de amplitude is 1, de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{5}} = 10\pi$ en een beginpunt is $(-\frac{1}{3}\pi, 0,4)$.
c De evenwichtsstand is 0, de amplitude is 0,29, de periode is $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ en een beginpunt is $(-1,4; 0,29)$.
d De evenwichtsstand is -0,8, de amplitude is 2, de periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ en een beginpunt is $(\frac{1}{2}, -0,8)$.

- 25 a $y = \cos(x)$
↓ translatie $(\frac{1}{4}\pi, 4)$
 $y = 4 + \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$
↓ $\times 3$ t.o.v. de x -as
 $y = 3(4 + \cos(x - \frac{1}{4}\pi))$
oftewel $y = 12 + 3 \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$
Dus $f(x) = 12 + 3 \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$.

- b $y = \cos(x)$
↓ $\times 3$ t.o.v. de x -as
 $y = 3 \cos(x)$
↓ translatie $(\frac{1}{4}\pi, 4)$
 $y = 4 + 3 \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$
Dus $g(x) = 4 + 3 \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$.

- 26 a De evenwichtsstand is $-\frac{1}{2}$, de amplitude is 1, de periode is 2π en een beginpunt is $(\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2})$.
b De grafiek van f snijdt de lijn van de evenwichtsstand in de punten $(\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2})$, $(1\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2})$ en $(2\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2})$.
c De toppen van de grafiek van f zijn $(\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2})$, $(1\frac{3}{4}\pi, -1\frac{1}{2})$ en $(2\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2})$.
d De afstand tussen A en C is gelijk aan de periode, dus $AC = 2\pi$.

Bladzijde 138

- 27** $f(x) = 3 + 4 \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$
 $\downarrow$ translatie $(-\frac{3}{4}\pi, -5)$
 $y = -5 + 3 + 4 \sin(x + \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi)$
 oftewel $y = -2 + 4 \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$
 Dus $m = -\frac{3}{4}\pi$ en $n = -5$ zijn mogelijke waarden van m en n .

- 28** **a** De evenwichtsstand is 2, de amplitude is $1\frac{1}{2}$ en de periode is π .
b $a = 2$, $b = 1\frac{1}{2}$ en $d = \frac{1}{3}\pi$
 Uit periode $= \frac{2\pi}{c}$ volgt $c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Bladzijde 139

- 29** 1 Door de afstand af te lezen tussen twee opeenvolgende laagste punten.
 2 Door de afstand af te lezen tussen twee opeenvolgende punten waarin de sinusoid stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Bladzijde 140

- 30** **a** $a = \frac{4\frac{1}{2} + -1\frac{1}{2}}{2} = 1\frac{1}{2}$ en $b = 4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 3$
 De periode is π , dus $c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{2}\pi$, dus $d = \frac{1}{2}\pi$.
 Dus $y = 1\frac{1}{2} + 3 \sin(2(x - \frac{1}{2}\pi))$.
b Een hoogste punt is $(\frac{3}{4}\pi, 4\frac{1}{2})$, dus $y = 1\frac{1}{2} + 3 \cos(2(x - \frac{3}{4}\pi))$.

- 31** **a** $a = \frac{1\frac{1}{2} + -3\frac{1}{2}}{2} = -1$ en $b = 1\frac{1}{2} - -1 = 2\frac{1}{2}$
 De periode is 2, dus $c = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 1\frac{1}{2}$, dus $d = 1\frac{1}{2}$.
 Dus $y = -1 + 2\frac{1}{2} \sin(\pi(x - 1\frac{1}{2}))$.
b Een hoogste punt is $(0, 1\frac{1}{2})$, dus $y = -1 + 2\frac{1}{2} \cos(\pi x)$.

- 32** **a** $a = \frac{3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = 2$ en $b = 3\frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}$
 halve periode $= \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$ geeft periode $= \pi$, dus $c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{\frac{1}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi$, dus $d = \frac{1}{2}\pi$.
 Dus $y = 2 + 1\frac{1}{2} \sin(2(x - \frac{1}{2}\pi))$.
b Een hoogste punt is $(\frac{3}{4}\pi, 3\frac{1}{2})$, dus $y = 2 + 1\frac{1}{2} \cos(2(x - \frac{3}{4}\pi))$.

- 33** **a** $a = \frac{4 + -2}{2} = 1$ en $b = 4 - 1 = 3$
 halve periode $= 2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$ geeft periode $= 3$, dus $c = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1\frac{1}{4} + 2\frac{3}{4}}{2} = 2$, dus $d = 2$.
 Dus $y = 1 + 3 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - 2))$.
b Een hoogste punt is $(2\frac{3}{4}, 4)$, dus $y = 1 + 3 \cos(\frac{2}{3}\pi(x - 2\frac{3}{4}))$.

- 34** **a** $a = \frac{175 + 25}{2} = 100$ en $b = 175 - 100 = 75$
 halve periode $= 9 - 4 = 5$ geeft periode $= 10$, dus $c = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 4$, dus $d = 4$.
 Dus $N = 100 + 75 \sin(\frac{1}{5}\pi(t - 4))$.
b Er is een hoogste punt bij $t = \frac{4 + 9}{2} = 6\frac{1}{2}$.
 Dus $N = 100 + 75 \cos(\frac{1}{5}\pi(t - 6\frac{1}{2}))$.

Bladzijde 141

35

a $y = a + b \cos(c(x - d))$
 $a = 12 - 4 = 8$ en $b = 4$

De periode is $18 - 3 = 15$, dus $c = \frac{2\pi}{15} = \frac{2}{15}\pi$.

Het punt $(3, 12)$ is een hoogste punt, dus $d = 3$.
Dus $y = 8 + 4 \cos(\frac{2}{15}\pi(x - 3))$.

b $y = a + b \cos(c(x - d))$
 $a = 650$ en $b = 812 - 650 = 162$

De periode is 48, dus $c = \frac{2\pi}{48} = \frac{1}{24}\pi$.

Het punt $(16, 812)$ is een hoogste punt, dus $d = 16$.
Dus $y = 650 + 162 \cos(\frac{1}{24}\pi(x - 16))$.

c $y = a + b \cos(c(x - d))$
 $a = \frac{250 + 110}{2} = 180$ en $b = 250 - 180 = 70$

halve periode = $26 - 2 = 24$ geeft periode = 48, dus $c = \frac{2\pi}{48} = \frac{1}{24}\pi$.

Het punt $(2, 250)$ is een hoogste punt, dus $d = 2$.
Dus $y = 180 + 70 \cos(\frac{1}{24}\pi(x - 2))$.

36

a Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie maximum geeft $x = 2,0943\dots$ en $y = 1,7320\dots$, dus $A(2,094; 1,732)$
de optie minimum geeft $x = 5,2359\dots$ en $y = -1,7320\dots$, dus $B(5,236; -1,732)$.

b evenwichtsstand = $\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1,7320\dots + (-1,7320\dots)}{2} = 0$

amplitude = $1,7320\dots - 0 \approx 1,732$

c periode = $2(x_B - x_A) = 2(5,2359\dots - 2,0943\dots) = 6,283\dots$
 $2\pi = 6,283\dots$, en omdat de periode van zowel $y = \sin(x)$ als $y = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$ gelijk is aan 2π mag je aannemen dat de periode van de grafiek van $f(x) = \sin(x) + \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$ ook gelijk is aan 2π .

d Gebruiken van de optie nulpunt geeft $x = 0,5235\dots$, dus $x_C \approx 0,524$.

e $y = a + b \sin(c(x - d))$
 $a = 0$ en $b \approx 1,732$
periode = 2π , dus $c = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x \approx 0,524$, dus $d \approx 0,524$.

Dus $y = 1,732 \sin(x - 0,524)$ is een formule die bij de grafiek van f hoort.
 $A(2,094; 1,732)$ is een hoogste punt, dus $y = 1,732 \cos(x - 2,094)$.

Bladzijde 142

37

a Het punt $(2,16; 2,61)$ is een hoogste punt, dus $d \approx 2,16$.
Dus $y = -1 + 3,61 \cos(x - 2,16)$.

b Invoeren van $y = 2 + 3 \sin(x) - (-3 + 2 \sin(x - \frac{1}{2}\pi))$ en gebruiken van de optie maximum geeft $x = 0,982\dots$ en $y = 8,605\dots$ en de optie minimum geeft $x = 4,124\dots$ en $y = 1,394\dots$

$a = \frac{8,605\dots + 1,394\dots}{2} = 5$

$b = 8,605\dots - 5 \approx 3,61$

halve periode = $4,124\dots - 0,982\dots = 3,141\dots$ geeft periode = $2 \cdot 3,141\dots = 6,283\dots$,

dus $c = \frac{2\pi}{6,283\dots} = 1$.

Invoeren van de formule $y = 5$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 5,695\dots$, dus $d \approx 5,70$.

Dus $y = 5 + 3,61 \sin(x - 5,70)$.

- 38** Invoeren van $y = 3 \cos^2(2x - 1,5) + 1$ en gebruiken van de optie maximum geeft $x = 0,75$ en $y = 4$ en de optie minimum geeft $x = 1,535\dots$ en $y = 1$.

$$a = \frac{4+1}{2} = 2,5$$

$$b = 4 - 2,5 = 1,5$$

halve periode = $1,535\dots - 0,75 = 0,785\dots$ geeft periode = $2 \cdot 0,785\dots = 1,570\dots$,

$$\text{dus } c = \frac{2\pi}{1,570\dots} = 4.$$

Het punt $(0,75; 4)$ is een hoogste punt, dus $d = 0,75$.

Dus $y = 2,5 + 1,5 \cos(4(x - 0,75))$.

- 39 a** Invoeren van $y = 2 \cos(x) - 3 + \cos(x - \frac{1}{4}\pi) - 2$ en gebruiken van de optie maximum geeft $x = 0,255\dots$ en $y = -2,202\dots$ en de optie minimum geeft $x = 3,397\dots$ en $y = -7,797\dots$

$$a = \frac{-2,202\dots + -7,797\dots}{2} = -5$$

$$b = -2,202\dots - -5 \approx 2,80$$

halve periode = $3,397\dots - 0,255\dots = 3,141\dots$ geeft periode = $2 \cdot 3,141\dots = 6,283\dots$,

$$\text{dus } c = \frac{2\pi}{6,283\dots} = 1.$$

Het punt $(0,255\dots, -2,202\dots)$ is een hoogste punt, dus $d \approx 0,26$.

Dus $y = -5 + 2,80 \cos(x - 0,26)$.

- b** Invoeren van $y = 2 \cos(x) - 3 - (\cos(x - \frac{1}{4}\pi) - 2)$ en gebruiken van de optie maximum geeft $x = 5,782\dots$ en $y = 0,473\dots$ en de optie minimum geeft $x = 2,641\dots$ en $y = -2,473\dots$

$$a = \frac{0,473\dots + -2,473\dots}{2} = -1$$

$$b = 0,473\dots - -1 \approx 1,47$$

halve periode = $5,782\dots - 2,641\dots = 3,141\dots$ geeft periode = $2 \cdot 3,141\dots = 6,283\dots$,

$$\text{dus } c = \frac{2\pi}{6,283\dots} = 1.$$

Invoeren van de formule $y = -1$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$x = 4,211\dots$, dus $d \approx 4,21$.

Dus $y = -1 + 1,47 \sin(x - 4,21)$.

- 40 a** Invoeren van $y = \sin^2(x) + \cos(2x - 1)$ en gebruiken van de optie nulpunt geeft $x = 1,8645\dots$, $x = 2,7999\dots$, $x = 5,0061\dots$ en $x = 5,9415\dots$

$f(x) \leq 0$ geeft $1,865 \leq x \leq 2,800 \vee 5,006 \leq x \leq 5,942$

- b** Gebruiken van de optie maximum geeft $x = 0,7614\dots$ en $y = 1,3424\dots$ en de optie minimum geeft $x = 2,3322\dots$ en $y = -0,3424\dots$

$$a = \frac{1,3424\dots + -0,3424\dots}{2} = 0,5$$

$$b = 1,3424\dots - 0,5 \approx 0,842$$

halve periode = $2,3322\dots - 0,7614\dots = 1,5707\dots$ geeft periode = $2 \cdot 1,5707\dots = 3,1415\dots$,

$$\text{dus } c = \frac{2\pi}{3,1415\dots} = 2.$$

Invoeren van de formule $y = 0,5$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$x = 3,1176\dots$, dus $d \approx 3,118$.

Dus $y = 0,5 + 0,842 \sin(2(x - 3,118))$.

- c** Het punt $(0,761; 1,342)$ is een hoogste punt, dus $y = 0,5 + 0,842 \cos(2(x - 0,761))$.

- 41 a** Invoeren van $y = 8 \cos^2(\frac{1}{5}\pi(x - 1\frac{1}{4})) - 2$ en gebruiken van de optie maximum geeft $x = 1,25$ en $y = 6$, de optie minimum geeft $x = 3,75$ en $y = -2$ en de optie nulpunt geeft $x = 2,9166\dots$.
Dus $A(1,25; 6)$, $B(3,75; -2)$ en $C(2,9166\dots; 0)$.

$$k: y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 - 6}{3,75 - 1,25} = -3,2$$

$$y = -3,2x + b \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } A(1,25; 6) \\ \text{door } B(3,75; -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3,2 \cdot 1,25 + b = 6 \\ -4 + b = 6 \\ b = 10 \end{array}$$

$$k: y = -3,2x + 10 \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } -3,2x + 10 = 0 \\ -3,2x = -10 \\ x = 3,125$$

Dus $D(3,125; 0)$.

$$d(C, D) = x_D - x_C = 3,125 - 2,9166\dots \approx 0,208$$

b $a = \frac{6 + -2}{2} = 2$ en $b = 6 - 2 = 4$

halve periode = $3,75 - 1,25 = 2,5$ geeft periode = 5, dus $c = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.

Het punt $(1,25; 6)$ is een hoogste punt, dus $d = 1,25$.

$$\text{Dus } y = 2 + 4 \cos(\frac{2}{5}\pi(x - 1,25)).$$

Bladzijde 144

- C4 a** De evenwichtsstand is 6, de amplitude is 7, de periode is $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$ en een beginpunt is $(2, 6)$.

- b** De evenwichtsstand is 2,5, de amplitude is 0,6, de periode is $\frac{2\pi}{0,4} = 5\pi$ en een beginpunt is $(\frac{1}{4}\pi; 3,1)$.

C5 a $a = \frac{4 + -2}{2} = 1$ en $b = 4 - 1 = 3$

halve periode = $3\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 2\frac{1}{2}$ geeft periode = 5, dus $c = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4}}{2} = 2$, dus $d = 2$.

$$\text{Dus } y = 1 + 3 \sin(\frac{2}{5}\pi(x - 2)).$$

- b** Een hoogste punt is $(3\frac{1}{4}, 4)$, dus $y = 1 + 3 \cos(\frac{2}{5}\pi(x - 3\frac{1}{4}))$.

- C6** Invoeren van $y = 4 \cos^2(x - \frac{1}{6}\pi) - 1$ en gebruiken van de optie maximum geeft $x = 0,523\dots$ en $y = 3$ en de optie minimum geeft $x = 2,094\dots$ en $y = -1$.

$$a = \frac{3 + -1}{2} = 1 \text{ en } b = 3 - 1 = 2$$

halve periode = $2,094\dots - 0,523\dots = 1,570\dots$ geeft periode = $2 \cdot 1,570\dots = 3,141\dots$,

$$\text{dus } c = \frac{2\pi}{3,141\dots} = 2.$$

Invoeren van de formule $y = 1$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 2,879\dots$, dus $d \approx 2,88$.

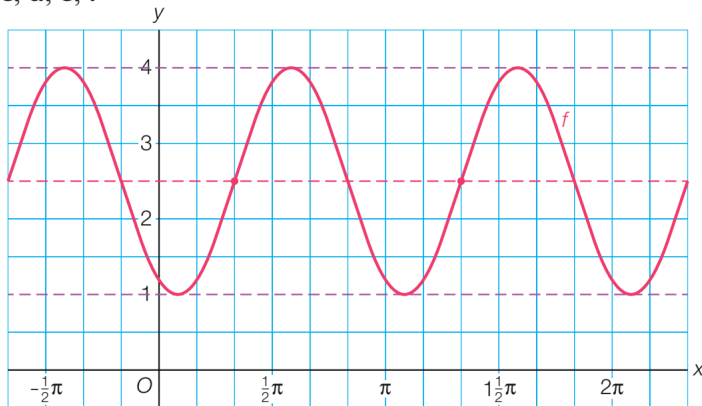
$$\text{Dus } y = 1 + 2 \sin(2(x - 2,88)).$$

8.3 Sinusoïden tekenen

Bladzijde 145

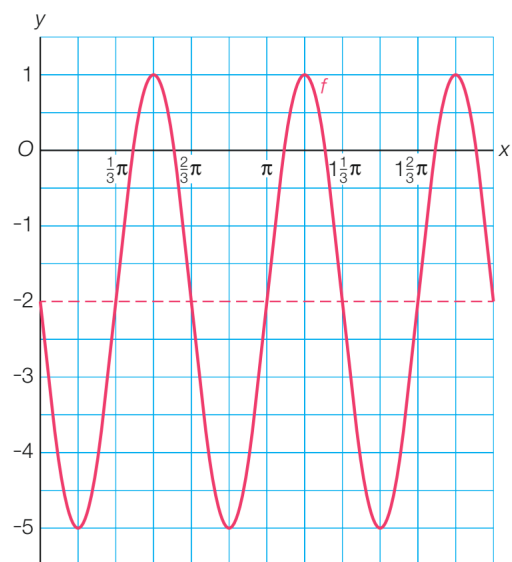
- 42 a** De evenwichtsstand is $2\frac{1}{2}$, de amplitude is $1\frac{1}{2}$, de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$ en een beginpunt is $(\frac{1}{3}\pi, 2\frac{1}{2})$.

b, c, d, e, f

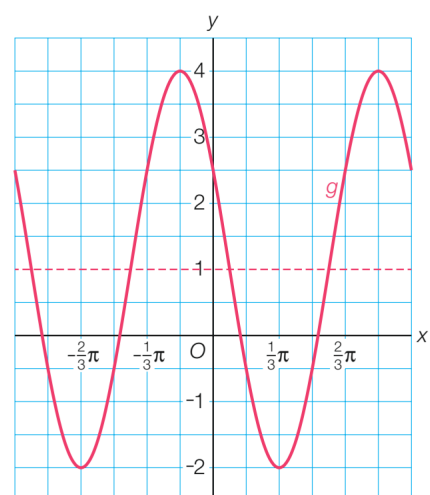


Bladzijde 147

- 43 a** $f(x) = -2 + 3 \sin(3x - \pi) = -2 + 3 \sin(3(x - \frac{1}{3}\pi))$
 evenwichtsstand -2
 amplitude 3
 periode $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$
 stijgend door de evenwichtsstand in $(\frac{1}{3}\pi, -2)$.
 Zie de figuur hiernaast.



- b** $g(x) = 1 + 3 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 1 + 3 \cos(2(x + \frac{1}{6}\pi))$
 evenwichtsstand 1
 amplitude 3
 periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
 $(-\frac{1}{6}\pi, 4)$ is een hoogste punt.
 Zie de figuur hiernaast.



44 $f(x) = 1 + 2 \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi) = 1 + 2 \sin(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}\pi))$

Van de grafiek van f is de evenwichtsstand 1, de amplitude 2, de periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ en een beginpunt $(\frac{1}{3}\pi, 1)$.

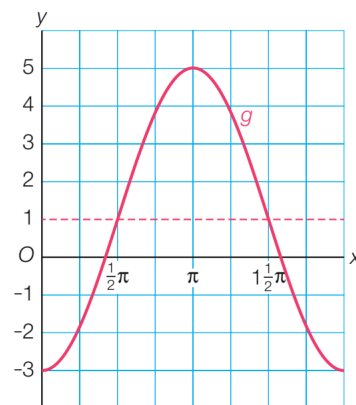
De evenwichtsstand van de grafiek van g is gelijk aan die van de grafiek van f , dus $a = 1$.

De amplitude van de grafiek van g is twee keer zo groot als die van de grafiek van f , dus $b = 2 \cdot 2 = 4$.

De periode van de grafiek van g is de helft van die van de grafiek van f , dus periode $= \frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi$ en $c = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

De grafiek van g gaat bij $x = \frac{1}{2}\pi$ stijgend door de evenwichtsstand, dus de grafiek van g heeft een hoogste punt bij $x = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \pi$, dus $d = \pi$. Dus $g(x) = 1 + 4 \cos(x - \pi)$.

Zie de figuur hiernaast.



45 a $A = 40 + 25 \sin(\pi(t - 1\frac{1}{2}))$

evenwichtsstand 40

amplitude 25

periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

stijgend door de evenwichtsstand in $(1\frac{1}{2}, 40)$

Zie de figuur hiernaast.

b Invoeren van $y = 40 + 25 \sin(\pi(x - 1\frac{1}{2}))$ en $y = 30$ en

gebruiken van de optie snijpunt geeft

$x = 0,630\dots, x = 1,369\dots, x = 2,630\dots, x = 3,369\dots,$

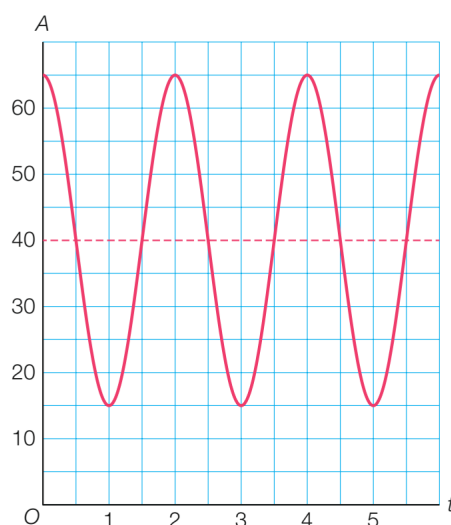
$x = 4,630\dots$ en $x = 5,369\dots$

$A < 30$ geeft $0,63 < t < 1,37 \vee 2,63 < t < 3,37 \vee 4,63 < t < 5,37$

c De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 1\frac{1}{2}$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1\frac{1}{2}} = 78,53\dots$$

Dus de grootste helling van de grafiek is 78,5.



46 a $N = 1\frac{1}{2} \cos(\frac{2}{3}\pi(t - \frac{1}{2})) + 3\frac{1}{2}$

evenwichtsstand $3\frac{1}{2}$

amplitude $1\frac{1}{2}$

periode $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$

$(\frac{1}{2}, 5)$ is een hoogste punt.

Zie de figuur hiernaast.

b Invoeren van in

$y = 1\frac{1}{2} \cos(\frac{2}{3}\pi(x - \frac{1}{2})) + 3\frac{1}{2}$ en $y = 4$ en

gebruiken van de optie snijpunt geeft

$x = 1,087\dots, x = 2,912\dots, x = 4,087\dots,$

$x = 5,912\dots, x = 7,087\dots$ en $x = 8,912\dots$

$N > 4$ geeft $0 \leq t < 1,09 \vee 2,91 < t < 4,09$

$\vee 5,91 < t < 7,09 \vee 8,91 < t \leq 10$

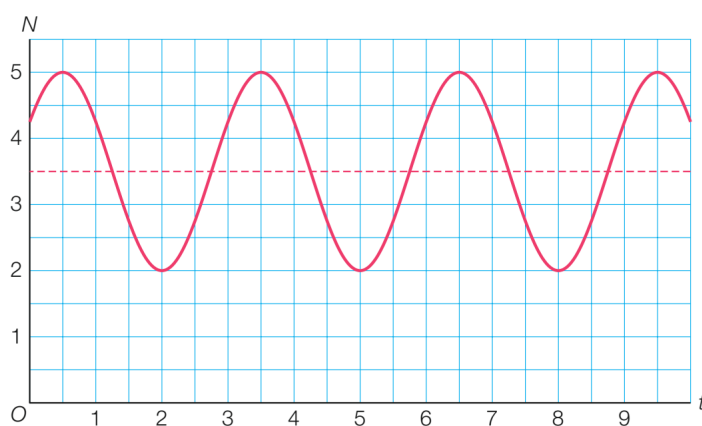
c $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = 2,720\dots$

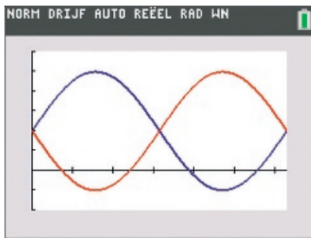
Dus de gevraagde helling is 2,72.

d De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 2,75$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=2,75} = 3,141\dots$$

Dus de grootste helling van de grafiek is 3,14.



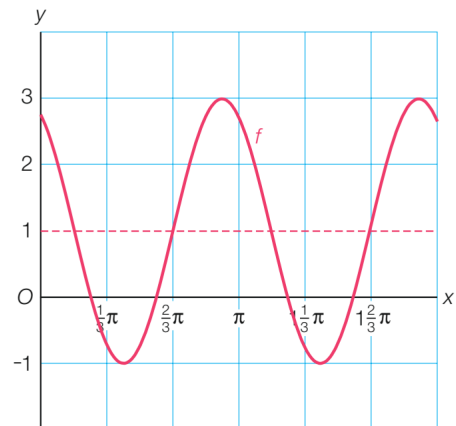


- b** Van de grafiek van f is de amplitude 3 en van de grafiek van g is de amplitude 3.
c De grafiek van f gaat in het punt $(0, 2)$ stijgend door de evenwichtsstand. De grafiek van g gaat in het punt $(0, 2)$ dalend door de evenwichtsstand.

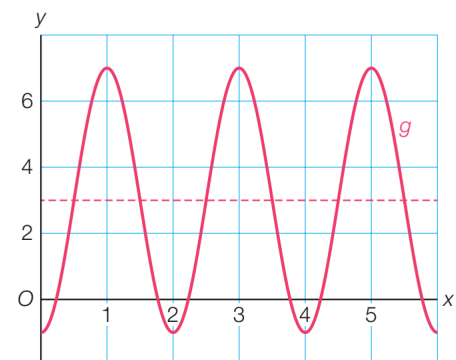
Bladzijde 149

48

- a** $f(x) = 1 - 2 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1 - 2 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$
 evenwichtsstand 1
 amplitude 2
 periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
 $-2 < 0$, dus grafiek dalend door de evenwichtsstand in $(\frac{1}{6}\pi, 1)$.
 Zie de figuur hiernaast.

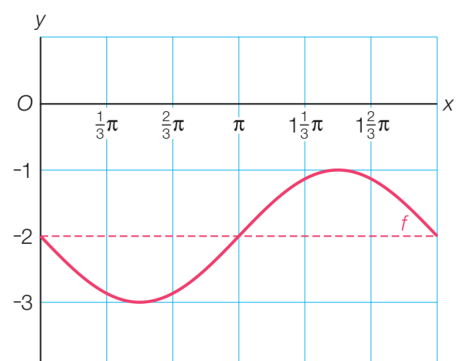


- b** $g(x) = 3 - 4 \cos(\pi x)$
 evenwichtsstand 3
 amplitude 4
 periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
 $-4 < 0$, dus $(0, -1)$ is een laagste punt.
 Zie de figuur hiernaast.



49

- a** $f(x) = -2 - \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$
 evenwichtsstand -2
 amplitude 1
 periode 2π
 $-1 < 0$, dus $(\frac{1}{2}\pi, -3)$ is een laagste punt.
 Zie de figuur hiernaast.



- b** Van het hoogste punt is $x = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 1\frac{1}{2}\pi$
en $y = -2 + 1 = -1$.

$$k: y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - -3}{1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$y = \frac{2}{\pi}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\pi + b = -3 \\ 1 + b = -3 \\ b = -4 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{2}{\pi}x - 4.$$

$$y = 0 \text{ geeft } \frac{2}{\pi}x - 4 = 0$$

$$\frac{2}{\pi}x = 4$$

$$x = 2\pi$$

$$\text{Dus } x_S = 2\pi.$$

50 a $f(x) = 5 - 3 \sin(\frac{1}{4}\pi x)$

evenwichtsstand 5

amplitude 3

$$\text{periode } \frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$$

$-3 < 0$, dus grafiek dalend door de evenwichtsstand in $(0, 5)$.

Zie de figuur hiernaast.

- b** Van het laagste punt is
 $x = 0 + \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$ en $y = 5 - 3 = 2$.

Van het hoogste punt is

$$x = 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 6 \text{ en } y = 5 + 3 = 8.$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 2}{6 - 2} = 1\frac{1}{2}$$

$$y = 1\frac{1}{2}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 2 \\ 3 + b = 2 \\ b = -1 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = 1\frac{1}{2}x - 1.$$

$$y = 0 \text{ geeft } 1\frac{1}{2}x - 1 = 0$$

$$1\frac{1}{2}x = 1$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$\text{Dus } x_S = \frac{2}{3}.$$

- c** Invoeren van $y = 5 - 3 \sin(\frac{1}{4}\pi x)$ en $y = 6,5$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 4,666\dots$ en $x = 7,333\dots$

Dus de afstand tussen A en B is $7,333\dots - 4,666\dots \approx 2,67$.



51 $y = 2 - 3 \sin(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi) = 2 - 3 \sin(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{3}\pi))$

evenwichtsstand 2

amplitude 3

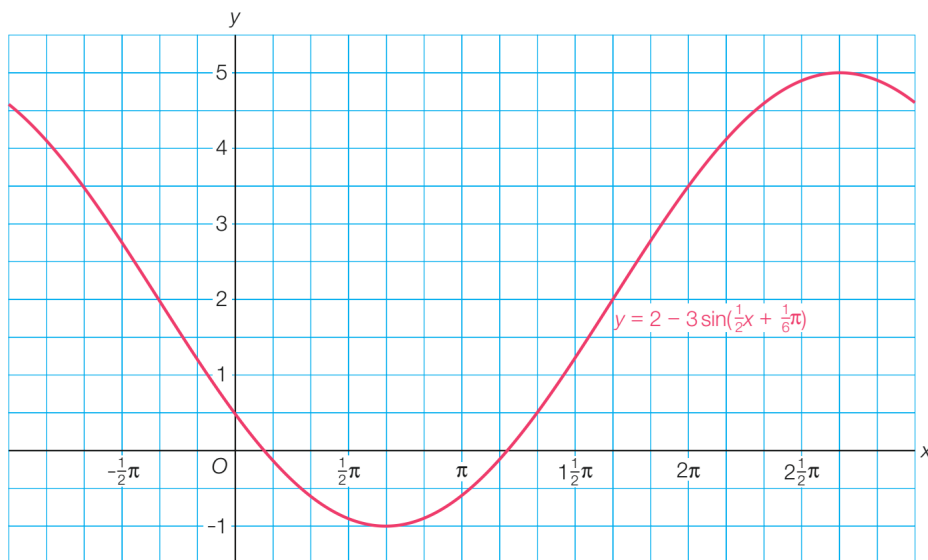
periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

$-3 < 0$, dus de grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand bij $x = -\frac{1}{3}\pi$.

Tussen het laagste en het hoogste punt zitten horizontaal 12 roosterhokjes, dus $\frac{1}{2}$ periode = 2π komt overeen met 12 roosterhokjes, dus horizontaal komt 1 roosterhokje overeen met $\frac{1}{6}\pi$.

Tussen het laagste en het hoogste punt zitten verticaal 12 roosterhokjes, dus $2 \cdot \text{amplitude} = 6$ komt overeen met 12 roosterhokjes, dus verticaal komt 1 roosterhokje overeen met $\frac{1}{2}$.

Het laagste punt is $(-\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4} \cdot 4\pi, 2 - 3) = (\frac{2}{3}\pi, -1)$. Teken de verticale as 4 roosterhokjes links van het laagste punt en teken de horizontale as 2 roosterhokjes boven het laagste punt. Je krijgt de figuur hieronder.



C7 a $f(x) = -1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} \sin(2x - 1\frac{1}{2}\pi) = -1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} \sin(2(x - \frac{3}{4}\pi))$

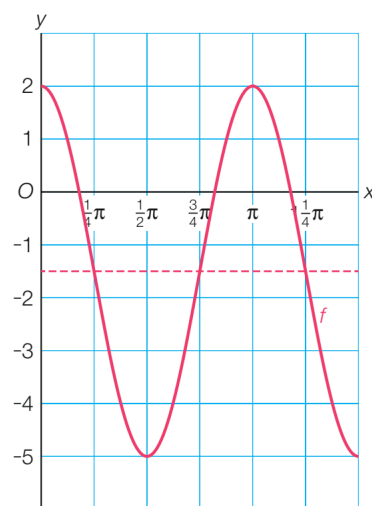
evenwichtsstand $-1\frac{1}{2}$

amplitude $3\frac{1}{2}$

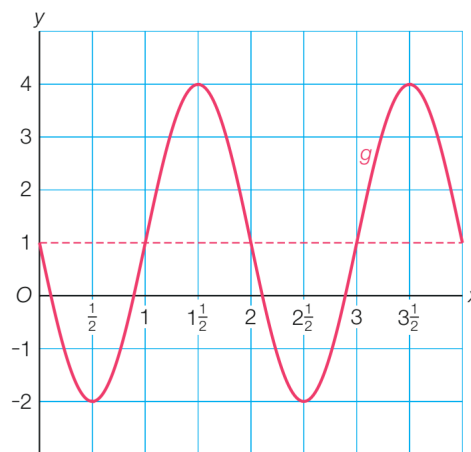
periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$

stijgend door de evenwichtsstand in $(\frac{3}{4}\pi, -1\frac{1}{2})$

Zie de figuur hiernaast.



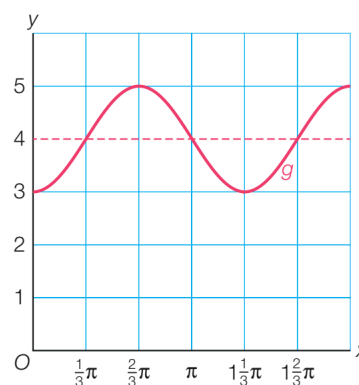
- b** $g(x) = 1 + 3 \cos(\pi(x + \frac{1}{2}))$
 evenwichtsstand 1
 amplitude 3
 periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
 $(-\frac{1}{2} + 2, 4) = (1\frac{1}{2}, 4)$ is een hoogste punt
 Zie de figuur hiernaast.



- C8 a** $f(x) = 2 - 1\frac{1}{2} \sin(\frac{1}{3}\pi x)$
 evenwichtsstand 2
 amplitude $1\frac{1}{2}$
 periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$
 $-1 < 0$, dus grafiek dalend door de evenwichtsstand in $(0, 2)$.
 Zie de figuur hiernaast.



- b** $g(x) = 4 - \cos(\frac{1}{2}x - 2\pi) = 4 - \cos(\frac{1}{2}(x - \frac{4}{3}\pi))$
 evenwichtsstand 4
 amplitude 1
 periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
 $-1 < 0$, dus $(\frac{4}{3}\pi, 3)$ is een laagste punt.
 Zie de figuur hiernaast.



8.4 Goniometrische vergelijkingen

Bladzijde 151

- 52 a** De hoogtelijn CD verdeelt AB in twee gelijke stukken.
 Dus $AD = BD = 1$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.
- b** In $\triangle ACD$ geldt $\sin(\angle A) = \frac{CD}{AC}$ oftewel $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en
 $\cos(\angle A) = \frac{AD}{AC}$ oftewel $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$.
- c** In $\triangle ACD$ geldt $\sin(\angle C) = \frac{AD}{AC}$ oftewel $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$ en
 $\cos(\angle C) = \frac{CD}{AC}$ oftewel $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
- d** De stelling van Pythagoras geeft $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.
 $\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC}$ geeft $\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $\cos(\angle A) = \frac{AB}{AC}$ geeft $\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Bladzijde 152

53 a $\sin(\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $\cos(1\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $\sin(1\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\cos(1\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}$

e $\cos(1\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$

f $\sin(-\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

54 a $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $\alpha = \frac{1}{3}\pi \vee \alpha = \frac{2}{3}\pi$

b $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = \frac{2}{3}\pi \vee \alpha = 1\frac{1}{3}\pi$

c $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $\alpha = 1\frac{1}{4}\pi \vee \alpha = 1\frac{3}{4}\pi$

d $\cos(\alpha) = 0$ geeft $\alpha = \frac{1}{2}\pi \vee \alpha = 1\frac{1}{2}\pi$

e $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $\alpha = \frac{1}{6}\pi \vee \alpha = 1\frac{5}{6}\pi$

f $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $\alpha = \frac{1}{4}\pi \vee \alpha = 1\frac{3}{4}\pi$

55 Bij (0, 1) horen de draaiingshoeken ..., $-3\frac{1}{2}\pi, -1\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi, 4\frac{1}{2}\pi, \dots$

Bij (0, -1) horen de draaiingshoeken ..., $-4\frac{1}{2}\pi, -2\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, 3\frac{1}{2}\pi, \dots$

Bladzijde 154

56 a $\sin(3x) = 1$

$3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$

b $\sin(2x) = 0$

$2x = k \cdot \pi$

$x = k \cdot \frac{1}{2}\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = 2\pi$

c $\sin^2(x) = 1$

$\sin(x) = 1 \vee \sin(x) = -1$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$

d $\sin(\frac{3}{4}x) = -1$

$\frac{3}{4}x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 2\pi + k \cdot 2\frac{2}{3}\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 2\pi$

e $\sin(3x - \frac{1}{2}\pi) = 0$

$3x - \frac{1}{2}\pi = k \cdot \pi$

$3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$

f $\sin(\pi x) = -1$

$\pi x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 1\frac{1}{2} + k \cdot 2$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{2} \vee x = 3\frac{1}{2} \vee x = 5\frac{1}{2}$

57 a $\cos(3x) = 0$

$3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$

b $\cos(4x) = 1$

$4x = k \cdot 2\pi$

$x = k \cdot \frac{1}{2}\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = 2\pi$

c $\cos^2(2x) = 1$

$\cos(2x) = 1 \vee \cos(2x) = -1$

$2x = k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi + k \cdot 2\pi$

$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$

- d** $\cos(\frac{2}{3}x) = -1$
 $\frac{2}{3}x = \pi + k \cdot 2\pi$
 $x = 2\frac{1}{2}\pi + k \cdot 5\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft geen oplossing
- e** $\cos(2x - \frac{1}{6}\pi) = 0$
 $2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
 $2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$
- f** $\cos(2\pi x) = -1$
 $2\pi x = \pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{2} + k \cdot 1$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2} \vee x = 1\frac{1}{2} \vee x = 2\frac{1}{2} \vee x = 3\frac{1}{2} \vee x = 4\frac{1}{2} \vee x = 5\frac{1}{2}$

Bladzijde 155

58

- a** $3 \sin(2x + \frac{1}{6}\pi) = 0$
 $\sin(2x + \frac{1}{6}\pi) = 0$
 $2x + \frac{1}{6}\pi = k \cdot \pi$
 $2x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$
 $x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
 x in $[-\pi, \pi]$ geeft $x = -\frac{7}{12}\pi \vee x = -\frac{1}{12}\pi \vee x = \frac{5}{12}\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi$
- b** $2 \cos(3x - \frac{1}{4}\pi) = 0$
 $\cos(3x - \frac{1}{4}\pi) = 0$
 $3x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
 $3x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$
 x in $[-\pi, \pi]$ geeft $x = -\frac{3}{4}\pi \vee x = -\frac{5}{12}\pi \vee x = -\frac{1}{12}\pi \vee x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{7}{12}\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi$
- c** $\sin(\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}\pi) = -1$
 $\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $\frac{3}{5}x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = 1\frac{17}{18}\pi + k \cdot 3\frac{1}{3}\pi$
 x in $[-\pi, \pi]$ geeft geen oplossing
- d** $\cos(1\frac{1}{2}x - \pi) = -1$
 $1\frac{1}{2}x - \pi = \pi + k \cdot 2\pi$
 $1\frac{1}{2}x = 2\pi + k \cdot 2\pi$
 $1\frac{1}{2}x = k \cdot 2\pi$
 $x = k \cdot 1\frac{1}{3}\pi$
 x in $[-\pi, \pi]$ geeft $x = 0$
- e** $\sin^2(2x) = 1$
 $\sin(2x) = 1 \vee \sin(2x) = -1$
 $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$
 x in $[-\pi, \pi]$ geeft $x = -\frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{1}{4}\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi$
- f** $\cos^2(\frac{1}{2}x) = 1$
 $\cos(\frac{1}{2}x) = 1 \vee \cos(\frac{1}{2}x) = -1$
 $\frac{1}{2}x = k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \pi + k \cdot 2\pi$
 $x = k \cdot 4\pi \vee x = 2\pi + k \cdot 4\pi$
 x in $[-\pi, \pi]$ geeft $x = 0$
- g** $\sin(\frac{1}{2}\pi x) = 0$
 $\frac{1}{2}\pi x = k \cdot \pi$
 $x = k \cdot 2$
 x in $[-\pi, \pi]$ geeft $x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$

$$\begin{aligned}
\text{h } \cos\left(\frac{1}{2}\pi x + \pi\right) &= 0 \\
\frac{1}{2}\pi x + \pi &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \\
\frac{1}{2}\pi x &= -\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \\
x &= -\frac{1}{3} + k \cdot \frac{2}{3} \\
x \text{ in } [-\pi, \pi] \text{ geeft} \\
x &= -3 \vee x = -2\frac{1}{3} \vee x = -1\frac{2}{3} \vee x = -1 \vee x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{3} \vee x = 1 \vee x = 1\frac{2}{3} \vee x = 2\frac{1}{3} \vee x = 3
\end{aligned}$$

59 a $2 \sin(x) \cdot \cos(2x) = 0$
 $\sin(x) = 0 \vee \cos(2x) = 0$
 $x = k \cdot \pi \vee 2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
 $x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
 $x \text{ in } [0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = 1\frac{3}{4}\pi$
De nulpunten zijn $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi, 1\frac{1}{4}\pi, 1\frac{3}{4}\pi$ en 2π .

b $\text{rc}_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - -2}{1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{\pi}$

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{4}{\pi}x + b \\ \text{door } A\left(\frac{1}{2}\pi, -2\right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\pi + b &= -2 \\ 2 + b &= -2 \\ b &= -4 \end{aligned}$$

Dus $AB: y = \frac{4}{\pi}x - 4$.

$y = 0$ geeft $\frac{4}{\pi}x - 4 = 0$
 $\frac{4}{\pi}x = 4$
 $x = \pi$

Dus de lijn door A en B snijdt de x -as in $(\pi, 0)$, en dat is ook een van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.

c $f\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2 \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, dus C ligt op de grafiek van f .
 $f\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = 2 \sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right) \cdot \cos\left(2\frac{1}{3}\pi\right) = 2 \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, dus D ligt op de grafiek van f .

d $\text{rc}_{CD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi} = -\frac{1}{\pi}$

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{1}{\pi}x + b \\ \text{door } C\left(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{6}\pi + b &= \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} + b &= \frac{1}{2} \\ b &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dus $CD: y = -\frac{1}{\pi}x + \frac{2}{3}$.

$y = 0$ geeft $-\frac{1}{\pi}x + \frac{2}{3} = 0$
 $-\frac{1}{\pi}x = -\frac{2}{3}$
 $x = \frac{2}{3}\pi$

Dus de lijn door C en D snijdt de x -as in $(\frac{2}{3}\pi, 0)$, en dat is geen snijpunt van de grafiek van f met de x -as.

60 a $f\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin^2\left(\frac{1}{6}\pi\right) - \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$f\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = \sin^2\left(1\frac{5}{6}\pi\right) - \sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Dus de punten met x -coördinaten $\frac{1}{6}\pi$ en $1\frac{5}{6}\pi$ liggen op de lijn $y = -\frac{1}{4}$.

Dus de lijn $y = -\frac{1}{4}$ snijdt de grafiek van f in $A\left(\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{4}\right)$ en $B\left(1\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{4}\right)$.

- b** $f(x) = 0$ geeft $\sin^2(x) - \sin(x) = 0$
 $\sin(x)(\sin(x) - 1) = 0$
 $\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = 1$
 $x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi$
Dus de nulpunten van f zijn $0, \frac{1}{2}\pi, \pi$ en 2π .
- c** $f'(1\frac{1}{2}\pi) = 2 \sin(1\frac{1}{2}\pi) \cos(1\frac{1}{2}\pi) - \cos(1\frac{1}{2}\pi) = 2 \cdot -1 \cdot 0 - 0 = 0$ en in de figuur in het leerboek zie je dat de grafiek van f een hoogste punt heeft bij $x = 1\frac{1}{2}\pi$.
Dus T is een top van de grafiek van f .
- d** $AB = x_B - x_A = 1\frac{5}{6}\pi - 1\frac{1}{6}\pi = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$
 $y_T = f(1\frac{1}{2}\pi) = \sin^2(1\frac{1}{2}\pi) - \sin(1\frac{1}{2}\pi) = (-1)^2 - -1 = 1 + 1 = 2$
De hoogte van $\triangle ABT$ is $2 - \frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$.
 $O(\triangle ABT) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\pi \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{5}{12}\pi$
Dus de oppervlakte van $\triangle ABT$ is $\frac{5}{12}$ deel van het gekleurde vlakdeel.
- e** $f'(x) = 0$ geeft $2 \sin(x) \cos(x) - \cos(x) = 0$
 $\cos(x)(2 \sin(x) - 1) = 0$
 $\cos(x) = 0 \vee \sin(x) = \frac{1}{2}$
 $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee \sin(x) = \frac{1}{2}$
Dus je krijgt $x = \frac{1}{2}\pi, x = 1\frac{1}{2}\pi$ en $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
 $f(\frac{1}{2}\pi) = \sin^2(\frac{1}{2}\pi) - \sin(\frac{1}{2}\pi) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, dus bij $x = \frac{1}{2}\pi$ hoort de top die op de x -as ligt.
Verder is $x_T = 1\frac{1}{2}\pi$, dus voor de twee laagste punten geldt $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
 $\sin(x) = \frac{1}{2}$ en $f(x) = \sin^2(x) - \sin(x)$ geeft $y = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.
Dus de y -coördinaat van deze laagste punten is $-\frac{1}{4}$.

Bladzijde 156

- 61 a** $x = \frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, dus $x = \frac{1}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
- b** $x = \frac{1}{6}\pi$ is een oplossing (zie vraag a). Als je de draaiingshoek met 2π vergroot, kom je weer in hetzelfde punt van de eenheidscirkel terecht. Dus $x = 2\frac{1}{6}\pi$ en $x = 4\frac{1}{6}\pi$ zijn ook oplossingen.
- c** $x = \frac{5}{6}\pi$ geeft $\sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, dus $x = \frac{5}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
- d** $x = \frac{5}{6}\pi$ is een oplossing (zie vraag c). Als je de draaiingshoek met 2π vergroot of verkleint, kom je weer in hetzelfde punt van de eenheidscirkel terecht. Dus $x = 2\frac{5}{6}\pi$ en $x = -1\frac{1}{6}\pi$ zijn ook oplossingen.

Bladzijde 157

- 62 a** $2 \sin(\frac{1}{2}x) = 1$
 $\sin(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$
- b** $2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 1$
 $\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$
 $x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = k \cdot 2\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 0 \vee x = 2\pi$
- c** $2 \sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{3}$
 $\sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $2x - \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = 1\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{19}{24}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{24}\pi + k \cdot \pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{19}{24}\pi \vee x = 1\frac{19}{24}\pi \vee x = \frac{23}{24}\pi \vee x = 1\frac{23}{24}\pi$

d $2 \cos(3x - \pi) = -1$
 $\cos(3x - \pi) = -\frac{1}{2}$
 $3x - \pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x - \pi = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
 $x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{5}{9}\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi \vee x = \frac{11}{9}\pi \vee x = \frac{7}{9}\pi \vee x = \frac{13}{9}\pi$

63 a $2 \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \sqrt{2}$
 $\sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{24}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{11}{24}\pi + k \cdot \pi$
 $x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{5}{24}\pi \vee x = \frac{11}{24}\pi \vee x = \frac{17}{24}\pi \vee x = \frac{23}{24}\pi$

b $2 \cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = \sqrt{3}$
 $\cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $3x - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x - \frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $3x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
 $x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{2}{9}\pi \vee x = \frac{8}{9}\pi \vee x = \frac{14}{9}\pi \vee x = \frac{10}{9}\pi \vee x = \frac{16}{9}\pi \vee x = \frac{22}{9}\pi$

c $\sin(\frac{2}{3}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{2}{3}x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{7}{8}\pi + k \cdot 3\pi \vee x = -\frac{3}{8}\pi + k \cdot 3\pi$
 $x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{7}{8}\pi$

d $\cos(\frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $\frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 4\pi \vee x = -\frac{5}{3}\pi + k \cdot 4\pi$
 $x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{5}{3}\pi$

64 a $4 \sin(x - \frac{1}{3}\pi) \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 0$
 $\sin(x - \frac{1}{3}\pi) = 0 \vee \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 0$
 $x - \frac{1}{3}\pi = k \cdot \pi \vee x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$
 $x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi$
De nulpunten zijn $\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$ en $\frac{4}{3}\pi$.

b $f(x) = a + b \sin(c(x - d))$
Invullen van $y = 4 \sin(x - \frac{1}{3}\pi) \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$ en gebruiken van de optie minimum geeft $x = 0,261\dots$ en $y = -2$ en de optie maximum geeft $x = 1,832\dots$ en $y = 2$.

$$a = \frac{2 + (-2)}{2} = 0 \text{ en } b = 2 - 0 = 2$$

halve periode = $1,832\dots - 0,261\dots = 1,570\dots$ geeft periode = $2 \cdot 1,570\dots = 3,141\dots$,

dus $c = \frac{2\pi}{3,141\dots} = 2$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{3}\pi$, dus $d = \frac{1}{3}\pi$.

Dit geeft $f(x) = 2 \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$ oftewel $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$.

c $f(x) = 1$ geeft $2 \sin(2x - \frac{2}{3}\pi) = 1$
 $\sin(2x - \frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}$
 $2x - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi$
 $x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{5}{12}\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi \vee x = \frac{17}{12}\pi \vee x = \frac{23}{12}\pi$

C9 $\cos(1\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sin(-\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

C10 a $\sin(1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\pi) = -1$

$$1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$1\frac{1}{2}x = 2\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$$

b $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 0$

$$2x + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{12}\pi \vee x = \frac{7}{12}\pi \vee x = 1\frac{1}{12}\pi \vee x = 1\frac{7}{12}\pi$$

C11 a $2\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = \sqrt{3}$

$$\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{4}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{7}{12}\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi$$

b $\cos(2x + \frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$2x + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \frac{1}{2}\pi = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

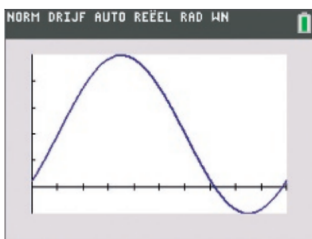
$$2x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{5}{8}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{8}\pi \vee x = 1\frac{1}{8}\pi \vee x = \frac{3}{8}\pi \vee x = 1\frac{3}{8}\pi$$

8.5 Toepassingen van sinusoiden

- 65 a** Invoeren van $y = 2 + 3\sin(\frac{1}{5}\pi(x-1))$ en gebruiken van de optie maximum geeft $x = 3,5$ en $y = 5$, dus het hoogste punt is $(3,5; 5)$.



b $\sin(\frac{1}{5}\pi(x-1)) = 1$

$$\frac{1}{5}\pi(x-1) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x-1 = 2\frac{1}{2} + k \cdot 10$$

$$x = 3\frac{1}{2} + k \cdot 10$$

$$x \text{ in } [0, 10] \text{ geeft } x = 3\frac{1}{2}$$

Dus je krijgt zo hetzelfde punt als bij vraag a.

- c** evenwichtsstand = 2, amplitude = 3 en periode = $\frac{2\pi}{\frac{1}{5}\pi} = 10$

De grafiek van $y = a + b\sin(c(x-d))$ gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = d$.

Dus de grafiek van $y = 2 + 3\sin(\frac{1}{5}\pi(x-1))$ gaat stijgend door de evenwichtsstand voor $x = 1$.

De coördinaten van het hoogste punt krijg je hiermee als volgt:

$$x = 1 + \frac{1}{4} \cdot 10 = 3\frac{1}{2} \text{ en } y = 2 + 3 = 5.$$

d manier 1

Het laagste punt krijg je als de sinus gelijk is aan -1 . Dat betekent dat

$$\sin\left(\frac{1}{5}\pi(x-1)\right) = -1.$$

De y -coördinaat van het laagste punt is dus $y = 2 + 3 \cdot -1 = -1$.

$$\sin\left(\frac{1}{5}\pi(x-1)\right) = -1$$

$$\frac{1}{5}\pi(x-1) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x-1 = 7\frac{1}{2} + k \cdot 10$$

$$x = 8\frac{1}{2} + k \cdot 10$$

$$x \text{ in } [0, 10] \text{ geeft } x = 8\frac{1}{2}$$

Dus het laagste punt is $(8\frac{1}{2}, -1)$.

manier 2

Van het laagste punt is $x = 1 + \frac{3}{4} \cdot 10 = 8\frac{1}{2}$ en $y = \text{evenwichtsstand} - \text{amplitude} = 2 - 3 = -1$.

Dus het laagste punt is $(8\frac{1}{2}, -1)$.

Gebruiken van de optie minimum geeft $x = 8,5$ en $y = -1$, dus het klopt.

e $x = 1,8$ geeft $y \approx 3,45$

f Los op $2 + 3 \sin\left(\frac{1}{5}\pi(x-1)\right) = 3,6$.

Invoeren van $y = 3,6$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x \approx 1,90$ en $x \approx 5,10$.

g $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5} = 0,582\dots$

Dus afgerond op twee decimalen is deze helling gelijk aan $0,58$.

h $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 1,884\dots$

Dus in twee decimalen is de maximale helling gelijk aan $1,88$.

Bladzijde 160

66 $\sin\left(\frac{1}{4}\pi(x-1,5)\right) = 1$

$$\frac{1}{4}\pi(x-1,5) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x-1,5 = 2 + k \cdot 8$$

$$x = 3,5 + k \cdot 8$$

$$x \text{ in } [0, 10] \text{ geeft } x = 3,5$$

Dus van het hoogste punt is $x = 3,5$ en $y_{\max} = 3 + 2 \cdot 1 = 5$.

$$\sin\left(\frac{1}{4}\pi(x-1,5)\right) = -1$$

$$\frac{1}{4}\pi(x-1,5) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x-1,5 = 6 + k \cdot 8$$

$$x = 7,5 + k \cdot 8$$

$$x \text{ in } [0, 10] \text{ geeft } x = 7,5$$

Dus van het laagste punt is $x = 7,5$ en $y_{\min} = 3 - 2 \cdot 1 = 1$.

Bladzijde 161

67 a $y_{\max} = 5 + 2 = 7$

$$\text{periode} = \frac{2\pi}{\frac{2}{5}\pi} = 5$$

$$y \text{ is maximaal voor } x = 0,8 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 2,05.$$

b $y_{\min} = 5 - 2 = 3$

$$y \text{ is minimaal voor } x = 0,8 + \frac{3}{4} \cdot 5 = 4,55.$$

c $x = 4,62$ geeft $y = 5 + 2 \sin\left(\frac{2}{5}\pi(4,62 - 0,8)\right) \approx 3,01$

d Los op $5 + 2 \sin\left(\frac{2}{5}\pi(x-0,8)\right) = 6$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x \approx 1,22$ en $x \approx 2,88$.

e $x = 0$ geeft $y = 5 + 2 \sin\left(\frac{2}{5}\pi(0 - 0,8)\right) \approx 3,31$

f De helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} \approx -1,60$.

g De maximale helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0,8} \approx 2,51$.

68 a $N_{\max} = 30,8 + 6,3 = 37,1$
 N is maximaal voor $t = 5,1$.

b $N_{\min} = 30,8 - 6,3 = 24,5$

periode $= \frac{2\pi}{\frac{2}{15}\pi} = 15$

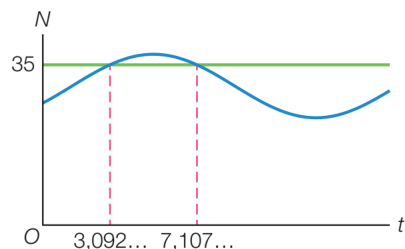
N is minimaal voor $t = 5,1 + \frac{1}{2} \cdot 15 = 12,6$.

c $t = 7,2$ geeft $N = 30,8 + 6,3 \cos(\frac{2}{15}\pi(7,2 - 5,1)) \approx 34,82$

d Los op $30,8 + 6,3 \cos(\frac{2}{15}\pi(t - 5,1)) = 35$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$t = 3,092\dots$ en $t = 7,107\dots$



$N > 35$ geeft $3,09 < t < 7,11$

e De helling is $\left[\frac{dN}{dt}\right]_{t=10} \approx -2,34$.

f De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 5,1 - \frac{1}{4} \cdot 15 = 1,35$.

De maximale helling is $\left[\frac{dN}{dt}\right]_{t=1,35} \approx 2,64$.

69 a $f(x) = 0$ geeft $2 + 4 \sin(\frac{1}{2}\pi(x - \frac{2}{5})) = 0$

$$4 \sin(\frac{1}{2}\pi(x - \frac{2}{5})) = -2$$

$$\sin(\frac{1}{2}\pi(x - \frac{2}{5})) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\pi(x - \frac{2}{5}) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi(x - \frac{2}{5}) = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x - \frac{2}{5} = \frac{2}{3} + k \cdot 4 \vee x - \frac{2}{5} = -\frac{1}{3} + k \cdot 4$$

$$x = \frac{2}{3} + k \cdot 4 \vee x = -\frac{1}{3} + k \cdot 4$$

$$x \text{ in } [0, 4] \text{ geeft } x = \frac{2}{3} \vee x = \frac{1}{3}$$

Dus de afstand tussen A en B is $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

b $x_T = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{2}$ en $y_T = 2 + 4 = 6$, dus $T(\frac{1}{2}, 6)$.

$\tan(\alpha) = \frac{6}{\frac{1}{2}}$ geeft $\alpha = 76,8\dots^\circ$

De gevraagde hoek is 77° .

c Van de grafiek van f is de evenwichtsstand 2, de amplitude 4, de periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$ en een beginpunt $(\frac{2}{5}, 2)$.

De periode van de grafiek van g is de helft van de periode van de grafiek van f ,

dus periode $= 2$ en $c = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

De amplitude van de grafiek van g is de helft van de amplitude van de grafiek van f , dus $b = 2$.

Een hoogste punt van de grafiek van g valt samen met het hoogste punt van

de grafiek van f , dus $d = \frac{2}{5}$ en $a = 2 + 4 - 2 = 4$.

Dus $g(x) = 4 + 2 \cos(\pi(x - \frac{2}{5}))$.

d De grafiek van g gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{10}$.

Dus $g(x) = 4 + 2 \sin(\pi(x - \frac{1}{10}))$.

70 $f(x) = 0$ geeft $4 \sin(\frac{1}{3}\pi x) - 2 = 0$

$$4 \sin(\frac{1}{3}\pi x) = 2$$

$$\sin(\frac{1}{3}\pi x) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{3}\pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2} + k \cdot 6 \vee x = 2\frac{1}{2} + k \cdot 6$$

$$x \text{ in } [0, 3] \text{ geeft } x = \frac{1}{2} \vee x = 2\frac{1}{2}$$

Dus de snijpunten met de x -as zijn $(\frac{1}{2}, 0)$ en $(2\frac{1}{2}, 0)$.

Hieruit volgt $p: y = a(x - \frac{1}{2})(x - 2\frac{1}{2})$.

Van het hoogste punt is $x = \frac{\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}}{2} = 1\frac{1}{2}$ en $y = 4 - 2 = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = a(x - \frac{1}{2})(x - 2\frac{1}{2}) \\ \text{door } (1\frac{1}{2}, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 1 \cdot -1 = 2 \\ -a = 2 \\ a = -2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } p: y &= -2(x - \frac{1}{2})(x - 2\frac{1}{2}) \\ &= -2(x^2 - 2\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4}) \\ &= -2(x^2 - 3x + 1\frac{1}{4}) \\ &= -2x^2 + 6x - 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bladzijde 162

71 a $f(x) = 0$ geeft $1 + 2 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - \frac{1}{4})) = 0$

$$2 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - \frac{1}{4})) = -1$$

$$\sin(\frac{2}{3}\pi(x - \frac{1}{4})) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}\pi(x - \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{2}{3}\pi(x - \frac{1}{4}) = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + k \cdot 3 \vee x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + k \cdot 3$$

$$x = 2 + k \cdot 3 \vee x = k \cdot 3$$

$$x \text{ in } [0, 3] \text{ geeft } x = 2 \vee x = 0 \vee x = 3$$

Dus $A(2, 0)$.

$$x_C = \frac{0+2}{2} = 1 \text{ en } y_C = 1 + 2 = 3, \text{ dus } C(1, 3).$$

$$x_D = \frac{2+3}{2} = 2\frac{1}{2} \text{ en } y_D = 1 - 2 = -1, \text{ dus } D(2\frac{1}{2}, -1).$$

b p_1 door $O(0, 0)$ en $A(2, 0)$ geeft $p_1: y = ax(x - 2)$.

$$p_1 \text{ door } C(1, 3) \text{ geeft } a \cdot 1(1 - 2) = 3$$

$$a \cdot 1 \cdot -1 = 3$$

$$-a = 3$$

$$a = -3$$

$$\text{Dus } p_1: y = -3x(x - 2)$$

$$= -3x^2 + 6x$$

$$p_2 \text{ door } A(2, 0) \text{ en } B(3, 0) \text{ geeft } p_2: y = a(x - 2)(x - 3).$$

$$p_2 \text{ door } D(2\frac{1}{2}, -1) \text{ geeft } a(2\frac{1}{2} - 2)(2\frac{1}{2} - 3) = -1$$

$$a \cdot \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} = -1$$

$$-\frac{1}{4}a = -1$$

$$a = 4$$

$$\text{Dus } p_2: y = 4(x - 2)(x - 3)$$

$$= 4(x^2 - 3x - 2x + 6)$$

$$= 4(x^2 - 5x + 6)$$

$$= 4x^2 - 20x + 24$$

c $y = -3x^2 + 6x$ geeft $y' = -6x + 6$

De helling van p_1 in A is $-6 \cdot 2 + 6 = -6$.

$$y = 4x^2 - 20x + 24 \text{ geeft } y' = 8x - 20$$

De helling van p_2 in A is $8 \cdot 2 - 20 = -4$

In A zijn de hellingen van de parabolen niet gelijk, dus de aansluiting verloopt niet zonder knik.

- d** Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie dy/dx met $x = 2$ geeft de helling $-3,62\dots$
 $\tan(\alpha) = rc_k = -3,62\dots$ geeft $\alpha = -74,58\dots^\circ$
 $\tan(\beta) = rc_l = -6$ geeft $\beta = -80,53\dots^\circ$
 $\tan(\gamma) = rc_m = -4$ geeft $\gamma = -75,96\dots^\circ$
 $\angle(k, l) = -74,58\dots^\circ - (-80,53\dots^\circ) = 5,94\dots^\circ$
 $\angle(k, m) = -74,58\dots^\circ - (-75,96\dots^\circ) = 1,37\dots^\circ$
Dus $\angle(k, l) > \angle(k, m)$.

72 a $a = \text{evenwichtsstand} = \frac{10+4}{2} = 7$

$b = \text{amplitude} = 10 - 7 = 3$

b halve periode $= 5 - 1 = 4$ geeft periode $= 8$, dus $c = \frac{2\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi$.

- c** De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand een kwart periode nadat een laagste punt is bereikt, dus bij $x = 5 + \frac{1}{4} \cdot 8 = 7$. Dus een mogelijke waarde van d is 7.

Plotten van de grafiek van $y = 7 + 3 \sin(\frac{1}{4}\pi(x - 7))$ en gebruiken van de opties maximum en minimum geeft inderdaad een sinusöide waarvan $(1, 10)$ en $(5, 4)$ twee opeenvolgende toppen zijn.

Bladzijde 163

- 73 a** 1 maart heeft dagnummer 60 en 18 mei heeft dagnummer 138.

$n = 60$ geeft $T = 17 + 8 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(60 - 110)\right) \approx 10,9$, dus op 1 maart is de gemiddelde dagtemperatuur $10,9^\circ\text{C}$.

$n = 138$ geeft $T = 17 + 8 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(138 - 110)\right) \approx 20,7$, dus op 18 mei is de gemiddelde dagtemperatuur $20,7^\circ\text{C}$.

b Los op $17 + 8 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(n - 110)\right) = 12$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $n = 70,7\dots$ en $n = 331,7\dots$

Bij $n = 71$ hoort 12 maart en bij $n = 332$ hoort 28 november.

Dus in de periode 12 maart - 28 november is de gemiddelde dagtemperatuur meer dan 12°C .

c $\left[\frac{dT}{dn}\right]_{n=110} = 0,137\dots^\circ\text{C/dag}$

De grootste snelheid is $7 \cdot 0,137\dots \approx 0,96^\circ\text{C/week}$.

74 a $a = \frac{16+8}{2} = 12$

$b = 16 - 12 = 4$

$c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$

$d = -1 + \frac{1}{4} \cdot 12 = 2$

b $l > 15$

Los op $12 + 4 \sin(\frac{1}{6}\pi(t - 2)) = 15$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 3,619\dots$ en $t = 6,380\dots$

$6,380\dots - 3,619\dots = 2,760\dots$ maanden is $2,760\dots \cdot 30 \approx 83$ dagen.

Dus gedurende 83 dagen is de daglengte meer dan 15 uur.

- c** Bij 21 maart hoort $t = 2$ en bij 21 februari hoort $t = 1$.

$\left[\frac{dl}{dt}\right]_{t=2} = 2,09\dots$ en $\left[\frac{dl}{dt}\right]_{t=1} = 1,81\dots$

Dus op 21 maart neemt de daglengte sneller toe dan op 21 februari.

- d** Bij 1 april hoort $t = 2\frac{11}{30}$.

$\left[\frac{dl}{dt}\right]_{t=2\frac{11}{30}} = 2,055\dots$ uur/maand

De snelheid is $2,055\dots \cdot 3600 : 30 \approx 247$ seconden/dag.

Bladzijde 164

- 75 a** De evenwichtsstand is 7 meter.
De amplitude is 3 meter.
De minimale hoogte is $7 - 3 = 4$ meter en de maximale hoogte is $7 + 3 = 10$ meter.

b Los op $3 \sin\left(\frac{\pi}{30}x\right) + 7 = 8$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 3,245\dots$ en $x = 86,754\dots$

De lengte van het gebouw is $86,754\dots - 3,245\dots \approx 83,5$ meter.

c $h = a + b \sin(c(x - d))$

$$a = \frac{8 + 4}{2} = 6 \text{ en } b = 8 - 6 = 2$$

$$\frac{3}{4} \cdot \text{periode} = 48 \text{ geeft periode} = \frac{4}{3} \cdot 48 = 64, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{64} = \frac{1}{32}\pi.$$

Kies de oorsprong zo, dat $d = 0$.

Dit geeft $h = 6 + 2 \sin\left(\frac{1}{32}\pi x\right)$.

Bladzijde 165

76 $h = a + b \cos(c(x - d))$

$$a = \frac{12 + 4}{2} = 8$$

$$\frac{3}{4} \cdot \text{periode} = 50 \text{ geeft periode} = \frac{4}{3} \cdot 50 = 66\frac{2}{3}, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{66\frac{2}{3}} = 0,03\pi.$$

De periode van het dak van de sporthal is 64 meter, dus het dak van de sporthal heeft een laagste punt bij $x = 0 - \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 0 - \frac{1}{4} \cdot 64 = -16$.

amplitude = $12 - 8 = 4$, dus $b = -4$.

Dus $h = 8 - 4 \cos(0,03\pi(x + 16))$.

77 a $y = a + b \sin(c(x - d))$

$$a = \frac{0,70 + 0}{2} = 0,35 \text{ en } b = 0,70 - 0,35 = 0,35$$

$$\text{periode} = 10 \text{ meter, dus } c = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi.$$

De grafiek gaat een kwart periode na het laagste punt stijgend door de evenwichtsstand.

Dat is bij $x = 2,5$.

Zo krijg je $y = 0,35 + 0,35 \sin\left(\frac{1}{5}\pi(x - 2,5)\right)$.

b $\tan(\alpha) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2,5} = 0,219\dots$ geeft $\alpha = 12,40\dots^\circ$

Dus de maximale hellingshoek is $12,4^\circ$.

c De periode is 14 meter, dus $c = \frac{2\pi}{14} = \frac{1}{7}\pi$.

De grafiek gaat een kwart periode na het laagste punt stijgend door de evenwichtsstand.

Dus bij $x = 3,5$.

Dit geeft $y = 0,35 + 0,35 \sin\left(\frac{1}{7}\pi(x - 3,5)\right)$.

$$\tan(\alpha) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3,5} = 0,157\dots \text{ geeft } \alpha = 8,92\dots^\circ$$

De maximale hellingshoek is $8,9^\circ$.

Dus bij dit wegdek is de maximale hellingshoek groter dan 8° .

Bladzijde 166

- 78 a** Invoeren van de formule van h en gebruiken van de optie maximum geeft $x = 2,47\dots$ en $x = 14,97\dots$
de optie minimum geeft $x = 10,02\dots$

$10,02\dots - 2,47\dots = 7,54\dots$, dus eb duurt 7 uur en $0,54\dots \cdot 60 \approx 32$ minuten.

$14,97\dots - 10,02\dots = 4,95\dots$, dus vloed duurt 4 uur en $0,95\dots \cdot 60 \approx 58$ minuten.

- b** Neem $b = 0,15$ en $b = 0,14$, en bereken steeds eb op dezelfde manier als bij vraag a.
 $b = 0,15$ geeft eb $\approx 7:18$ uur
 $b = 0,14$ geeft eb $\approx 7:14$ uur
Dus $b = 0,14$ voldoet het beste.

c $c = \frac{1,50 + -0,9}{2} = 0,3$

Met de opties maximum en minimum op de GR vind je dat de amplitude van de grafiek van $h = \sin(\frac{2}{12,5}\pi t) + 0,14 \sin(\frac{2}{6,25}\pi t)$ gelijk is aan 1,036... meter.

De amplitude van de getijdenbeweging is $1,5 - 0,3 = 1,2$ meter.

Dus $a = \frac{1,2}{1,036...} \approx 1,16$.

Zo krijg je $W = 1,16(\sin(\frac{2}{12,5}\pi t) + 0,14 \sin(\frac{2}{6,25}\pi t)) + 0,3$.

Invoeren van de formule van W en gebruiken van

de optie maximum geeft $x = 2,63...$ en $y = 1,501...$

de optie minimum geeft $x = 9,86...$ en $y = -0,901...$

Dus de gevonden formule klopt.

Bladzijde 167

C12 **a** $N_{\max} = \text{evenwichtsstand} + \text{amplitude} = 18 + 5 = 23$

periode $= \frac{2\pi}{\frac{4}{15}\pi} = 7\frac{1}{2}$

N is maximaal voor $t = 4 + \frac{1}{4} \cdot 7\frac{1}{2} = 5\frac{7}{8}$.

b $N_{\min} = \text{evenwichtsstand} - \text{amplitude} = 18 - 5 = 13$

N is minimaal voor $t = 4 - \frac{1}{4} \cdot 7\frac{1}{2} = 2\frac{1}{8}$.

c $t = 4,5$ geeft $N = 18 + 5 \sin(\frac{4}{15}\pi(4,5 - 4)) \approx 20,03$

d Los op $18 + 5 \sin(\frac{4}{15}\pi(t - 4)) = 15$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t \approx 1,02$ en $t \approx 3,23$.

e De helling is $\left[\frac{dN}{dt}\right]_{t=5} \approx 2,80$.

f De maximale helling is $\left[\frac{dN}{dt}\right]_{t=4} \approx 4,19$.

C13 **a** $a = \frac{20,0 + 4,5}{2} = 12,25$

$b = 20,0 - 12,25 = 7,75$

$c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$

Bij halverwege februari hoort $t = 1,5$. Een kwart periode later gaat de grafiek van T stijgend door de evenwichtsstand. Hieruit volgt dat $d = 1,5 + \frac{1}{4} \cdot 12 = 4,5$.

b $T > 18$

Los op $12,25 + 7,75 \sin(\frac{1}{6}\pi(t - 4,5)) = 18$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$t = 6,096...$ en $t = 8,903...$

$8,903... - 6,096... = 2,806...$ maanden is $2,806... \cdot 30 \approx 84$ dagen.

Dus gedurende 84 dagen is de temperatuur van het zeewater hoger dan 18°C .

Kennis- en vaardighedentest

Bladzijde 168

1 $A(\cos(40^\circ), \sin(40^\circ)) \approx A(0,77; 0,64)$

De draaiingshoek die bij het punt B hoort, is $40^\circ + 120^\circ = 160^\circ$.

Dus $B(\cos(160^\circ), \sin(160^\circ)) \approx B(-0,94; 0,34)$.

De draaiingshoek die bij het punt C hoort, is $40^\circ + 240^\circ = 280^\circ$.

Dus $C(\cos(280^\circ), \sin(280^\circ)) \approx C(0,17; -0,98)$.

2 a $\frac{3}{4}\pi \text{ rad} = \frac{3}{4} \cdot 180^\circ = 135^\circ$ d $26\pi \text{ rad} = 26 \cdot 180^\circ = 4680^\circ$
b $\frac{1}{5}\pi \text{ rad} = \frac{1}{5} \cdot 180^\circ = 36^\circ$ e $\frac{2}{3}\pi \text{ rad} = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ$
c $0,6 \text{ rad} = 0,6 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 34,4^\circ$ f $\frac{2}{3} \text{ rad} = \frac{2}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 38,2^\circ$

3 a $270^\circ = \frac{270}{180}\pi \text{ rad} = 1\frac{1}{2}\pi \text{ rad}$ d $330^\circ = \frac{330}{180}\pi \text{ rad} = 1\frac{5}{6}\pi \text{ rad}$
b $-60^\circ = \frac{-60}{180}\pi \text{ rad} = -\frac{1}{3}\pi \text{ rad}$ e $40^\circ = \frac{40}{180}\pi \text{ rad} = \frac{2}{9}\pi \text{ rad}$
c $150^\circ = \frac{150}{180}\pi \text{ rad} = \frac{5}{6}\pi \text{ rad}$ f $-70^\circ = \frac{-70}{180}\pi \text{ rad} = -\frac{7}{18}\pi \text{ rad}$

4 $x_P = -0,4$, dus $\cos(\alpha_P) = -0,4$.
De GR geeft 1,982...
Dus $\alpha_P = 1,982... \text{ rad}$.
 $y_Q = 0,9$, dus $\sin(\alpha_Q) = 0,9$.
De GR geeft 1,119...
Dus $\alpha_Q = 1,119... \text{ rad}$.
 $\angle POQ = \alpha_P - \alpha_Q = 1,982... - 1,119... \approx 0,86 \text{ rad}$

5 a De evenwichtsstand is -2 , de amplitude is 3 , de periode is 2π en een beginpunt is $(\frac{1}{3}\pi, -2)$.
b De evenwichtsstand is 3 , de amplitude is 4 , de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$ en een beginpunt is $(\frac{1}{4}, 7)$.

6 a De evenwichtsstand is -1 , de amplitude is 2 , de periode is 2π en een beginpunt is $(\frac{1}{3}\pi, 1)$.
b De grafiek van f snijdt de lijn van de evenwichtsstand in de punten $(-\frac{1}{6}\pi, -1)$, $(\frac{5}{6}\pi, -1)$, $(1\frac{5}{6}\pi, -1)$ en $(2\frac{5}{6}\pi, -1)$.
c De vier toppen van de grafiek van f zijn $(-\frac{2}{3}\pi, -3)$, $(\frac{1}{3}\pi, 1)$, $(1\frac{1}{3}\pi, -3)$ en $(2\frac{1}{3}\pi, 1)$.
d De periode van de grafiek van f is 2π , dus de afstand tussen O en Q is 2π .

7 a $a = \frac{10 + -30}{2} = -10$ en $b = 10 - -10 = 20$
halve periode $= 17\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 15$ geeft periode $= 30$, dus $c = \frac{2\pi}{30} = \frac{1}{15}\pi$.
Stijgend door de evenwichtsstand bij $2\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 30 = 10$, dus $d = 10$.
Dus $y = -10 + 20 \sin(\frac{1}{15}\pi(x - 10))$.
b Een hoogste punt is $(17\frac{1}{2}, 10)$, dus $y = -10 + 20 \cos(\frac{1}{15}\pi(x - 17\frac{1}{2}))$.

Bladzijde 169

8 a Invoeren van $y = 3 - 2 \sin(x) + 3 + 2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$ en gebruiken van de optie minimum geeft $x = 2,8797...$ en $y = 4,9647...$ en de optie maximum geeft $x = 6,0213...$ en $y = 7,0352...$
 $a = \frac{7,0352... + 4,9647...}{2} = 6$
 $b = 7,0352... - 6 \approx 1,035$
halve periode $= 6,0213... - 2,8797... = 3,1415...$ geeft periode $= 2 \cdot 3,1415... = 6,2831...$,
dus $c = \frac{2\pi}{6,2831...} = 1$.
Invoeren van de formule $y = 6$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 4,4505...$, dus $d \approx 4,451$.
Dus $y = 6 + 1,035 \sin(x - 4,451)$.

- b** Invoeren van $y = 3 - 2 \sin(x) - (3 + 2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi))$ en gebruiken van de optie minimum geeft $x = 1,3089\dots$ en $y = -3,8637\dots$
de optie maximum geeft $x = 4,4505\dots$ en $y = 3,8637\dots$

$$a = \frac{3,8637\dots + -3,8637\dots}{2} = 0$$

$$b = 3,8637\dots - 0 \approx 3,864$$

$$\text{halve periode} = 4,4505\dots - 1,3089\dots = 3,1415\dots \text{ geeft periode} = 2 \cdot 3,1415\dots = 6,2831\dots,$$

$$\text{dus } c = \frac{2\pi}{6,2831\dots} = 1.$$

$$\text{Een hoogste punt bij } x = 4,4505\dots, \text{ dus } d \approx 4,451.$$

$$\text{Dus } y = 3,864 \cos(x - 4,451).$$

9 a $A = 4 + 2 \sin(\pi(t - 1))$

evenwichtsstand 4

amplitude 2

$$\text{periode } \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

stijgend door de evenwichtsstand in (1, 4)

Zie de figuur hiernaast.

b Los op $4 + 2 \sin(\pi(t - 1)) = 5$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = -2,833\dots$,

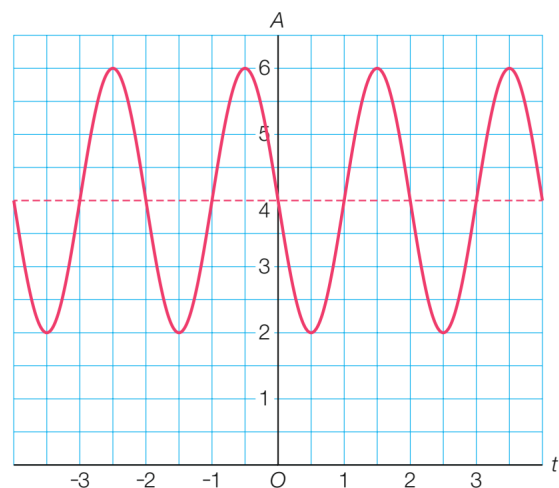
$$t = -2,166\dots, t = -0,833\dots, t = -0,166\dots,$$

$$t = 1,166\dots, t = 1,833\dots, t = 3,166\dots \text{ en } t = 3,833\dots$$

$$A \geq 5 \text{ geeft } -2,83 \leq t \leq -2,17 \vee -0,83 \leq t \leq -0,17 \vee$$

$$1,17 \leq t \leq 1,83 \vee 3,17 \leq t \leq 3,83$$

c De grootste helling is $\left[\frac{dA}{dt}\right]_{t=1} \approx 6,28$.



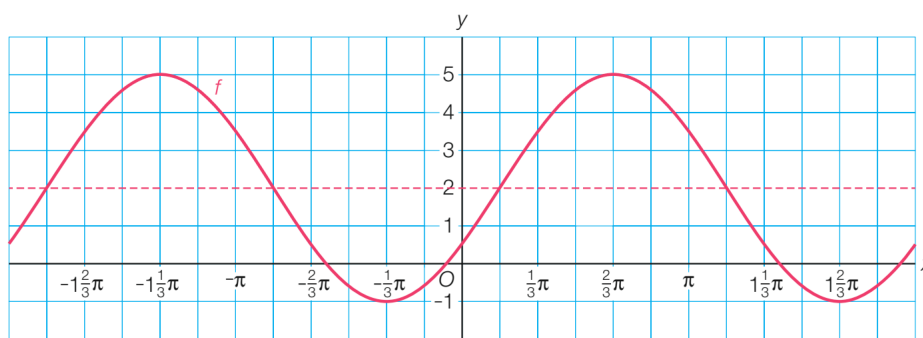
10 $f(x) = 2 - 3 \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$

evenwichtsstand 2

amplitude 3

periode 2π

$-3 < 0$, dus $(-\frac{1}{3}\pi, -1)$ is een laagste punt.



11 a $\cos(\frac{1}{2}x) = -1$

$$\frac{1}{2}x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \frac{4}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 2\pi$$

b $\sin^2(2x) = 1$

$$\sin(2x) = 1 \vee \sin(2x) = -1$$

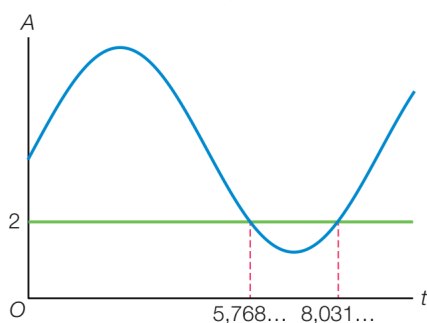
$$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{5}{4}\pi \vee x = \frac{7}{4}\pi$$

- 12 a** $4 \sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = 2\sqrt{2}$
 $\sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $2x + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{7}{8}\pi \vee x = 1\frac{7}{8}\pi \vee x = \frac{1}{8}\pi \vee x = 1\frac{1}{8}\pi$
- b** $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $x - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi$

- 13 a** $A_{\max} = 3,9 + 2,7 = 6,6$ voor $t = 2,4$.
periode $= \frac{2\pi}{\frac{2}{9}\pi} = 9$
 $A_{\min} = 3,9 - 2,7 = 1,2$ voor $t = 2,4 + \frac{1}{2} \cdot 9 = 6,9$.
- b** Los op $3,9 + 2,7 \cos(\frac{2}{9}\pi(t - 2,4)) = 2$.
Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 5,768\dots$ en $t = 8,031\dots$

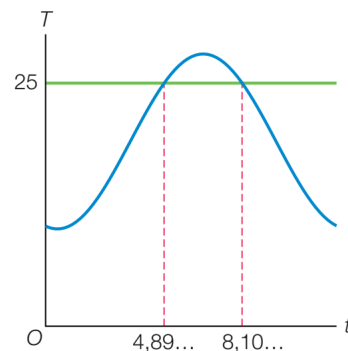


- $A < 2$ geeft $5,77 < t < 8,03$
- c** De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 2,4 - \frac{1}{4} \cdot 9 = 0,15$.
De maximale helling is $\left[\frac{dA}{dt} \right]_{t=0,15} \approx 1,885$.

- 14 a** $T = a + b \sin(c(t - d))$
 $a = \frac{28 + 10}{2} = 19$
 $b = 28 - 19 = 9$
De periode is 12 maanden, dus $c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.
Stijgend door de evenwichtsstand 3 maanden na 15 januari, dus $d = 3\frac{1}{2}$.

- b** $T > 25$
Los op $19 + 9 \sin(\frac{1}{6}\pi(t - 3\frac{1}{2})) = 25$.
Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 4,89\dots$ en $t = 8,10\dots$.
Zie de figuur hiernaast.
 $8,10\dots - 4,89\dots = 3,21\dots$ maanden is $3,21\dots \cdot 30 \approx 96$ dagen.
Dus gedurende 96 dagen is de temperatuur volgens het model hoger dan 25°C .

- c** $\left[\frac{dT}{dt} \right]_{t=3,5} = 4,71\dots ^\circ\text{C/maand}$.
De gevraagde maximale snelheid is $\frac{4,71\dots}{30} \approx 0,157 ^\circ\text{C/dag}$.

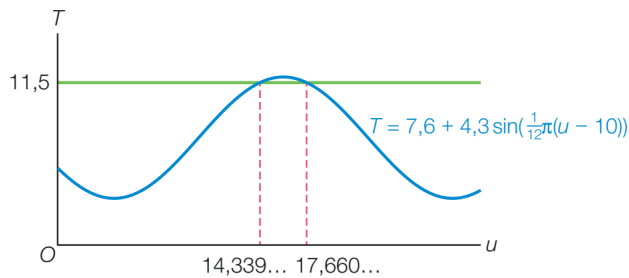


Gemengde opgaven

Bladzijde 170

- 1 a** $a = \frac{3\frac{1}{2} + -1\frac{1}{2}}{2} = 1$ en $b = 3\frac{1}{2} - 1 = 2\frac{1}{2}$
 halve periode $= \frac{4}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$ geeft periode $= \frac{4}{3}\pi$, dus $c = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{3}{2}$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$, dus $d = \frac{1}{3}\pi$.
 Dus $y = 1 + 2\frac{1}{2}\sin(\frac{3}{2}(x - \frac{1}{3}\pi))$.
- b** $a = 20$ en $b = 40 - 20 = 20$
 kwart periode $= 4 - 1 = 3$ geeft periode $= 12$, dus $c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 4 - \frac{1}{2} \cdot 12 = -2$, dus $d = -2$.
 Dus $N = 20 + 20\sin(\frac{1}{6}\pi(t + 2))$.

- 2 a** $T = a + b\sin(c(u - d))$
 $a = \frac{21,0 + 12,2}{2} = 16,6$ en $b = 21,0 - 16,6 = 4,4$
 De periode is 24 uur, dus $c = \frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $u = 15 - \frac{1}{4} \cdot 24 = 9$, dus $d = 9$.
 Dus $T = 16,6 + 4,4\sin(\frac{1}{12}\pi(u - 9))$.
- b** $T > 11,5$
 Los op $7,6 + 4,3\sin(\frac{1}{12}\pi(u - 10)) = 11,5$.
 Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 14,339\dots$ en $x = 17,660\dots$



- $17,660\dots - 14,339\dots = 3,321\dots$
 Dus gedurende $3,321\dots \cdot 60 \approx 199$ minuten.
- c** $\left[\frac{dT}{du}\right]_{u=10} = 1,125\dots$
 Dus de maximale stijging is ongeveer $1,1^\circ\text{C/uur}$.

Bladzijde 171

- 3 a** Van de grafiek van g is de evenwichtsstand 0, de amplitude 1 en de periode 2π .
 Verder gaat de grafiek van g stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{2}\pi$.
 Dus $g(x) = \cos(x)$ is ook te schrijven als $g(x) = \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$.
 $y = \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$
 $\downarrow$ translatie $(-\frac{5}{6}\pi, 0)$
 $y = \sin(x + \frac{5}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$
 $\downarrow \times -2$ t.o.v. de x -as
 $y = -2\sin(x + \frac{1}{3}\pi)$
 Dus de grafiek van f kan ontstaan uit de grafiek van g door hierop de verschuiving $\frac{5}{6}\pi$ naar links en de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met -2 toe te passen.

b $f(x) = 0$ geeft $-2 \sin(x + \frac{1}{3}\pi) = 0$
 $\sin(x + \frac{1}{3}\pi) = 0$
 $x + \frac{1}{3}\pi = k \cdot \pi$
 $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi$

Dus $A(\frac{2}{3}\pi, 0)$ en $B(\frac{4}{3}\pi, 0)$.

$$x_T = \frac{\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi, \text{ dus } T(\frac{2}{3}\pi, 2).$$

$p: y = a(x - p)^2 + q$ met top $T(\frac{2}{3}\pi, 2)$ geeft $y = a(x - \frac{2}{3}\pi)^2 + 2$.

p door $A(\frac{2}{3}\pi, 0)$ geeft $a(\frac{2}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi)^2 + 2 = 0$

$$a(-\frac{1}{3}\pi)^2 = -2$$

$$a \cdot \frac{1}{9}\pi^2 = -2$$

$$a = -\frac{18}{\pi^2}$$

Dus $p: y = -\frac{18}{\pi^2}(x - \frac{2}{3}\pi)^2 + 2$.

$$x_S = 0 \text{ geeft } y_S = -\frac{18}{\pi^2}(0 - \frac{2}{3}\pi)^2 + 2 = -\frac{18}{\pi^2} \cdot \frac{4\pi^2}{9} + 2 = -10\frac{8}{9} + 2 = -8\frac{8}{9}$$

- c** Invoeren van $y = -2 \sin(x + \frac{1}{3}\pi) + \cos(x)$ en gebruiken van de optie minimum geeft $x = 0,938\dots$ en $y = -1,239\dots$ en de optie maximum geeft $x = 4,080\dots$ en $y = 1,239\dots$. Hieruit volgt dat de amplitude $1,239\dots$ is, dus $a \approx 1,24$. De grafiek van s gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 4,080\dots - \frac{1}{4} \cdot 2\pi = 2,509\dots$, dus $b \approx 2,51$.

4 a $f(x) = 2 + 3 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$

evenwichtsstand 2

amplitude 3

periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$

$3 > 0$, dus stijgend door de evenwichtsstand in $(\frac{1}{6}\pi, 2)$.

$$g(x) = -1 + 4 \cos(x + \frac{1}{6}\pi)$$

evenwichtsstand -1

amplitude 4

periode 2π

$4 > 0$, dus $(-\frac{1}{6}\pi + 2\pi, 3) = (1\frac{5}{6}\pi, 3)$ is een hoogste punt.

Zie de figuur hiernaast.

- b** $p = 2$, $q = 3$ en $r = 2$.

De grafiek van f heeft een hoogste punt voor

$$x = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{12}\pi.$$

Dus $y = 2 + 3 \cos(2(x - \frac{5}{12}\pi))$.

- c** De maximale helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=\frac{1}{6}\pi} = 6$.

- d** $f(x) = \frac{1}{2}$ geeft $2 + 3 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi)) = \frac{1}{2}$

$$3 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi)) = -\frac{3}{2}$$

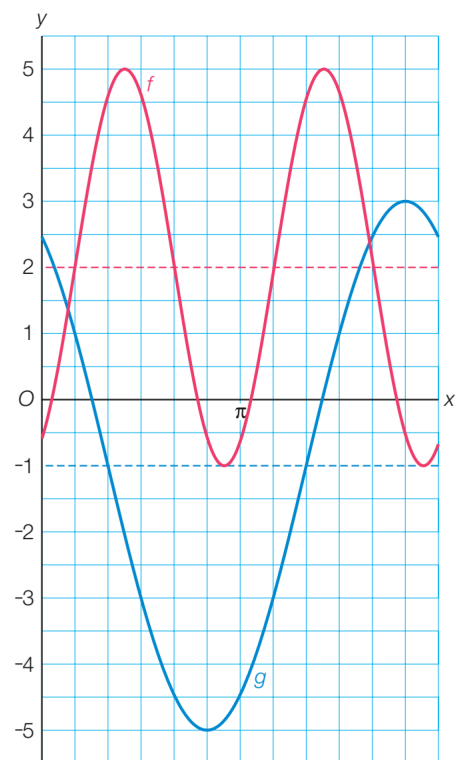
$$\sin(2(x - \frac{1}{6}\pi)) = -\frac{1}{2}$$

$$2(x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2(x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x - \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{5}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{5}{4}\pi \vee x = \frac{7}{4}\pi \vee x = \frac{9}{4}\pi$$



$$\begin{aligned}
\text{e } g(x) = 1 \text{ geeft } -1 + 4\cos(x + \frac{1}{6}\pi) &= 1 \\
4\cos(x + \frac{1}{6}\pi) &= 2 \\
\cos(x + \frac{1}{6}\pi) &= \frac{1}{2} \\
x + \frac{1}{6}\pi &= \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \\
x &= \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\
x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x &= \frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi
\end{aligned}$$

Zie de figuur van vraag a.

$$g(x) < 1 \text{ geeft } \frac{1}{6}\pi < x < 1\frac{1}{2}\pi$$

$$\begin{aligned}
\text{f } y_A &= s(\frac{1}{3}\pi) = f(\frac{1}{3}\pi) + g(\frac{1}{3}\pi) = 2 + 3\sin(2(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi)) + -1 + 4\cos(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{6}\pi) \\
&= 2 + 3\sin(2 \cdot \frac{1}{6}\pi) - 1 + 4\cos(\frac{1}{2}\pi) \\
&= 2 + 3\sin(\frac{1}{3}\pi) - 1 + 4 \cdot 0 \\
&= 2 + 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 \\
&= 1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_B &= s(\pi) = f(\pi) + g(\pi) = 2 + 3\sin(2(\pi - \frac{1}{6}\pi)) + -1 + 4\cos(\pi + \frac{1}{6}\pi) \\
&= 2 + 3\sin(2 \cdot \frac{5}{6}\pi) - 1 + 4\cos(1\frac{1}{6}\pi) \\
&= 2 + 3\sin(1\frac{2}{3}\pi) - 1 + 4\cos(1\frac{1}{6}\pi) \\
&= 2 + 3 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 + 4 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\
&= 2 - 1\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{3} \\
&= 1 - 3\frac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\text{Dus } y_A - y_B = 1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{3} - (1 - 3\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 + 3\frac{1}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

Bladzijde 172

$$\begin{aligned}
5 \text{ a } f(x) = 0 \text{ geeft } 1 + 2\sin(\frac{1}{2}\pi(x - \frac{1}{2})) &= 0 \\
2\sin(\frac{1}{2}\pi(x - \frac{1}{2})) &= -1 \\
\sin(\frac{1}{2}\pi(x - \frac{1}{2})) &= -\frac{1}{2} \\
\frac{1}{2}\pi(x - \frac{1}{2}) &= 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi(x - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \\
x - \frac{1}{2} &= 2\frac{1}{3} + k \cdot 4 \vee x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} + k \cdot 4 \\
x &= 2\frac{5}{6} + k \cdot 4 \vee x = \frac{1}{6} + k \cdot 4 \\
x \text{ in } [0, 5] \text{ geeft } x &= 2\frac{5}{6} \vee x = \frac{1}{6} \vee x = 4\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Dus $B(2\frac{5}{6}, 0)$.

$$\begin{aligned}
f \text{ is maximaal } 1 + 2 \cdot 1 = 3 \text{ als } \sin(\frac{1}{2}\pi(x - \frac{1}{2})) &= 1 \\
\frac{1}{2}\pi(x - \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\
x - \frac{1}{2} &= 1 + k \cdot 4 \\
x &= 1\frac{1}{2} + k \cdot 4 \\
x \text{ in } [0, 5] \text{ geeft } x &= 1\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Dus $D(1\frac{1}{2}, 3)$.

$$\begin{aligned}
f \text{ is minimaal } 1 - 2 \cdot 1 = -1 \text{ als } \sin(\frac{1}{2}\pi(x - \frac{1}{2})) &= -1 \\
\frac{1}{2}\pi(x - \frac{1}{2}) &= 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\
x - \frac{1}{2} &= 3 + k \cdot 4 \\
x &= 3\frac{1}{2} + k \cdot 4 \\
x \text{ in } [0, 5] \text{ geeft } x &= 3\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Dus $E(3\frac{1}{2}, -1)$.

$$k: y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 3}{3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}} = -2$$

$$\left. \begin{aligned} y &= -2x + b \\ \text{door } D(1\frac{1}{2}, 3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -2 \cdot 1\frac{1}{2} + b &= 3 \\ -3 + b &= 3 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k: y &= -2x + 6 \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } -2x + 6 = 0 \\
-2x &= -6 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

Dus $F(3, 0)$.

$$d(B, F) = x_F - x_B = 3 - 2\frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

b $g(x) = 0$ geeft $3 \cos(\frac{1}{2}\pi(x + \frac{1}{3})) = 0$

$$\cos(\frac{1}{2}\pi(x + \frac{1}{3})) = 0$$

$$\frac{1}{2}\pi(x + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x + \frac{1}{3} = 1 + k \cdot 2$$

$$x = \frac{2}{3} + k \cdot 2$$

$$x \text{ in } [0, 5] \text{ geeft } x = \frac{2}{3} \vee x = 2\frac{2}{3} \vee x = 4\frac{2}{3}$$

Dus $x_H = 2\frac{2}{3}$.

De x -coördinaat van het midden van HF is $\frac{2\frac{2}{3} + 3}{2} = 2\frac{5}{6}$ en dat is ook de

x -coördinaat van B .

Dus B is het midden van lijnstuk HF .

- c** Invullen van $y = 1 + 2 \sin(\frac{1}{2}\pi(x - \frac{1}{2})) + 3 \cos(\frac{1}{2}\pi(x + \frac{1}{3}))$ en gebruiken van de optie minimum geeft $x = 1,953\dots$ en $y = -0,186\dots$ en de optie maximum geeft $x = 3,953\dots$ en $y = 2,186\dots$

$$a = \frac{2,186\dots + -0,186\dots}{2} = 1$$

$$b = 2,186\dots - 1 \approx 1,19$$

$$\text{halve periode} = 3,953\dots - 1,953\dots = 2 \text{ geeft periode} = 4, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi.$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 3,953\dots - \frac{1}{4} \cdot 4 = 2,953\dots$, dus $d \approx 2,95$.

- d** Een hoogste punt van de grafiek van h is ook een hoogste punt van de grafiek van s , dus voor een hoogste punt van de grafiek van h geldt $y = 2,186\dots$ (zie vraag c).

De grafiek van h raakt de x -as, dus voor een laagste punt van de grafiek van h geldt $y = 0$.

$$a = \frac{2,186\dots}{2} = 1,093\dots \approx 1,09$$

$$b = 1,093\dots - 0 \approx 1,09$$

De periode van de grafiek van h is de helft van de periode van de grafiek van s , dus $c = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi = \pi$.

$(3,953\dots; 2,186\dots)$ is een hoogste punt, dus $d \approx 3,95$.

6 a $f(x) = 0$ geeft $\sin(\pi(x - 1)) \cdot \cos(\pi(x - \frac{1}{4})) = 0$

$$\sin(\pi(x - 1)) = 0 \vee \cos(\pi(x - \frac{1}{4})) = 0$$

$$\pi(x - 1) = k \cdot \pi \vee \pi(x - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x - 1 = k \cdot 1 \vee x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + k \cdot 1$$

$$x = 1 + k \cdot 1 \vee x = \frac{3}{4} + k \cdot 1$$

$$x \text{ in } [0, 3] \text{ geeft } x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = \frac{3}{4} \vee x = 1\frac{3}{4} \vee x = 2\frac{3}{4}$$

Dus de nulpunten van f zijn $0, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{3}{4}, 2, 2\frac{3}{4}$ en 3 .

b $y_B = f(1\frac{1}{4}) = \sin(\pi(1\frac{1}{4} - 1)) \cdot \cos(\pi(1\frac{1}{4} - \frac{1}{4})) = \sin(\frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c $y_A = f(\frac{7}{8}) = \sin(\pi(\frac{7}{8} - 1)) \cdot \cos(\pi(\frac{7}{8} - \frac{1}{4})) = 0,146\dots$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = \frac{0,146\dots}{\frac{7}{8}} \text{ geeft } \alpha = 9,50\dots^\circ$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1\frac{1}{4}} \text{ geeft } \beta = -29,49\dots^\circ$$

De hoek tussen k en l is $9,50\dots^\circ - -29,49\dots^\circ \approx 39,0^\circ$.

- d** Invullen van de formule van f en gebruiken van de optie minimum geeft

$$x = 0,375 \text{ en } y = -0,853\dots$$

$$a = \frac{0,146\dots + -0,853\dots}{2} = -0,353\dots \approx -0,35$$

$$b = 0,146\dots - -0,353\dots = 0,5$$

$$\text{halve periode} = \frac{7}{8} - 0,375 = 0,5 \text{ geeft periode} = 1, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{1} = 2\pi.$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 0,375 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 0,625$, dus $d = 0,625$.

Verantwoording

Beeld

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlelen.

0 / 25



© 2025 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06493-8

