

getal & ruimte

B



Noordhoff

Dit boek is van jou!

Naam

Klas

Getal & Ruimte

Leerboek
havo B deel 3

Dertiende editie, 2026

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooyen
H. Rachyd
M. Daems

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek havo B deel 3

Samen met de delen 1 en 2 van havo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma havo wiskunde B, zoals dat met ingang van 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak havo wiskunde B is 360 uur. Elk van de delen 1, 2 en 3 bevat vier hoofdstukken, waarbij in het laatste hoofdstuk van deel 3 de examentraining aan bod komt.

De eerste drie hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 25 uur en bevatten leerstof die in het Centraal Eindexamen wordt getoetst.

Daarmee komt de totale studielast van de eerste 11 hoofdstukken op ongeveer 275 uur. Zo blijft er tijd over voor de examentraining in hoofdstuk 12.

In de eerste drie hoofdstukken komen de volgende subdomeinen aan bod.

Hoofdstuk 9 B1 en B2

Hoofdstuk 10 C1 en C2

Hoofdstuk 11 B1, B2, B3 en D4

In hoofdstuk 12 Examentraining is de leerstof verdeeld in zeven onderwerpen die elk in een paragraaf aan de orde komen. Ook in deze editie begint elke paragraaf met een of twee opgaven waarin korte vragen staan die betrekking hebben op de leerstof in de paragraaf en die geënt zijn op examenvragen. In de theorie die daarop volgt, wordt elk onderwerp kort en bondig herhaald. Daarna volgen passende examenopgaven die gekozen zijn uit de examens van 2021 tot en met 2024.

De gemengde opgaven bij hoofdstuk 12 bestaan uit een flink aantal korte opgaven, die niet gesorteerd staan op onderwerp. Hierin komen alle basisvaardigheden die een leerling voor het examen nodig heeft aan de orde.

Het schoolexamen en het centraal examen

Het gehele programma van havo wiskunde B wordt centraal geëxamineerd.

Het schoolexamen dient in elk geval betrekking te hebben op de domeinen A (Vaardigheden) en D (Toegepaste analyse).

De digitale leeromgeving van Getal & Ruimte

Bij sommige gedeeltes van het boek kunnen opgaven ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Tevens kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

In het docentenmateriaal staan studiewijzers die een indicatie geven van de hoeveelheid leerstof die per week kan worden doorgenomen. Verder zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

voorjaar 2026

Legenda

V1 Voorkennisopgave

Een opgave over een onderwerp uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk.

O1 Oriënterende opgave

Een opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

2 Gewone opgave

Een opgave waarmee je oefent met wat er in de theorie aan bod is gekomen.

R3 Reflectie-opgave

Een opgave waarmee je terugkijkt op een voorgaand probleem, of waarmee je op een andere manier naar voorgaande stof kijkt.

A4 Afsluitende opgave

Een opgave waarmee je oefent op het beoogde beheersingsniveau.

E5 Extra opgave

Een opgave die je extra uitdaagt.

Kennis- en vaardighedencheck

Je controleert of je de kennis en/of vaardigheid beheerst door de bijbehorende opgave te maken.

C1 Checkopgave

Een opgave waarmee je controleert of je de kennis en/of vaardigheid goed beheerst.

Route-aanduiding

1 Een opgave van de basisroute.

2 Een opgave van de middenroute.

3 Een opgave van de uitdagende route.

NB: De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder routeaanduiding

In de Kennis- en vaardigheidentest en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen routeaanduiding.

Inhoud

9	Exponentiële en logaritmische formules	6	12	Examentraining	130
9.1	Groefactoren en groeipercentages	8	12.1	Vergelijkingen en ongelijkheden	132
9.2	Werken met logaritmen	19	12.2	Werken met formules	141
9.3	Rekenregels voor logaritmen	32	12.3	Differentiaalrekening	155
	Kennis- en vaardigheidentest	42	12.4	Exponenten en logaritmen	167
	Gemengde opgaven	44	12.5	Goniometrie	183
10	Meetkundige berekeningen	46	12.6	Meetkunde zonder coördinaten	198
10.1	Hoeken en lijnstukken	48	12.7	Meetkunde met coördinaten	208
10.2	Omtrek en oppervlakte	57		Gemengde opgaven	218
10.3	Cirkels en raaklijnen	65			
10.4	Cirkels en afstanden	72		Antwoorden Kennis- en vaardigheidentests	233
10.5	Functionies, cirkels en raaklijnen	76		Overzicht GR-modules	235
	Kennis- en vaardigheidentest	82		Examenwerkwoorden	236
	Gemengde opgaven	84		Trefwoordenregister	237
				Verantwoording	238
11	Verbanden en functies	86			
11.1	Evenredigheden	88			
11.2	Standaardgrafieken en transformaties	98			
11.3	Tweede- en derdegraadsfuncties	106			
11.4	Wortelfuncties	114			
11.5	Gebroken functies	118			
	Kennis- en vaardigheidentest	126			
	Gemengde opgaven	128			



9

Exponentiële en logaritmische formules

In veel landen wordt steeds minder energie verbruikt in verhouding tot het bruto binnenlands product (bbp). We zeggen dan dat de energie-intensiteit afneemt. Voor Nederland geldt $E = 1,677 \cdot 0,984^t$. Hierin is E de energie-intensiteit in megawattuur per 1000 dollar bbp en t de tijd in jaren en $t = 0$ in 1990. Uit deze formule volgt dat de energie-intensiteit van Nederland in 43 jaar halveert. In de VS neemt de energie-intensiteit af met 2,1% per jaar en in de Eurozone is de afname 1,2% per jaar. In de Eurozone duurt het dus langer voordat de energie-intensiteit is gehalveerd dan in de VS. Hoeveel jaren scheelt het?

9.1 Groeifactoren en groeipercentages

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij een procentuele verandering per tijdseenheid de formule voor exponentiële groei opstellen en hiermee werken.
- Je kunt groeifactoren en groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid.
- Je kunt bij exponentiële groei de formule opstellen als op twee tijdstippen de hoeveelheid is gegeven.
- Je kunt rekenen met verdubbelingstijd en halveringstijd.

Voorkennis Exponentiële groei

Bij exponentiële groei geldt het volgende.

- De hoeveelheid wordt per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Dit getal heet de groeifactor per tijdseenheid.
- De formule is van de vorm $N = b \cdot g^t$. Hierin is g de groeifactor per tijdseenheid en b de beginhoeveelheid (ook wel beginwaarde).
- De hoeveelheid neemt toe als $g > 1$ en af als $0 < g < 1$. Ook in dat laatste geval spreken we van exponentiële groei.

In de formule $N = 800 \cdot 1,3^t$ herken je

- de beginhoeveelheid is 800
- de groeifactor per tijdseenheid is 1,3.

Neemt een hoeveelheid N exponentieel af met groeifactor 0,92 per tijdseenheid en is de beginhoeveelheid 875, dan hoort hierbij de formule $N = 875 \cdot 0,92^t$.

V1 Een hoeveelheid N wordt elk jaar met 1,05 vermenigvuldigd.

Op $t = 0$, met t in jaren, is $N = 87$.

- a** Stel de formule op van N als functie van t .
- b** Bereken N voor $t = 4$.
- c** Met hoeveel neemt N in het tiende jaar toe?

Het tiende jaar loopt van $t = 9$ tot $t = 10$.

V2 Een hoeveelheid N wordt elk jaar met 0,87 vermenigvuldigd.

Op $t = 0$, met t in jaren, is $N = 725$.

- a** Stel de formule op van N als functie van t .
- b** Bereken N voor $t = 5$.
- c** Met hoeveel neemt N in het achtste jaar af?

- 01** Een bedrag B in euro's neemt elk jaar met 5% toe. Op 1 januari 2025 is het bedrag 1000 euro.
- a** Hoeveel is het bedrag op 1 januari 2026? En op 1 januari 2030?
- b** Bij B hoort een formule van de vorm $B = 1000 \cdot g^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2025. Welk getal is g ?

Theorie A Exponentiële groei en groeipercentages

In opgave 1 neemt het bedrag jaarlijks met 5% toe. Er is sprake van exponentiële groei met een **groeipercentage** van 5% per jaar. Bij een groeipercentage van 5% per jaar hoort een groeifactor van 1,05 per jaar.

Neemt een hoeveelheid per jaar met 8,7% toe, dan heb je te maken met exponentiële groei met groeifactor 1,087 per jaar. Weet je omgekeerd dat bij exponentiële groei een groeifactor per jaar van 1,238 hoort, dan heb je te maken met een procentuele toename van 23,8% per jaar.

Bij een jaarlijkse afname met 13,6% is de groeifactor 0,864 per jaar. Omgekeerd hoort bij een groeifactor van 0,982 per jaar een procentuele afname van 1,8% per jaar.

8,7% erbij geeft
 $100\% + 8,7\% = 108,7\%$,
 dus groeifactor 1,087.

Groeifactor 0,982,
 dus een afname van
 $100\% - 98,2\% = 1,8\%$.

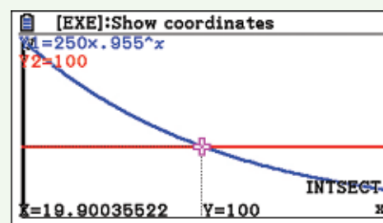
Voorbeeld

Er zijn steeds minder kieviten in Nederland. In maart 2000 waren er nog 250 000 broedparen kieviten in Nederland. Sindsdien is dat aantal jaarlijks met 4,5% afgenomen.

- a** Stel de formule op van het aantal broedparen kieviten N in Nederland. Neem N in duizendtallen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in maart 2000.
- b** In maart van welk jaar waren er voor het eerst minder dan 100 000 broedparen kieviten in Nederland?

Uitwerking

- a** $N = b \cdot g^t$ met $b = 250$ en $g = 0,955$ geeft
 $N = 250 \cdot 0,955^t$
- b** Los op $250 \cdot 0,955^t = 100$.
 Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 19,90\dots$
 Dus in maart 2020.



R2 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.



- a** Met hoeveel nam het aantal broedparen af in de periode maart 2005-maart 2012? Rond af op duizendtallen.
- b** In welk jaar was het aantal broedparen gehalveerd ten opzichte van het aantal in 2000?

3



- a** Een hoeveelheid neemt per jaar met 12,7% toe.
Geef de groeifactor per jaar.
- b** Een hoeveelheid neemt per maand met 6,8% af.
Geef de groeifactor per maand.
- c** Bij een exponentiële groei is de groeifactor 1,735 per maand.
Geef het groeipercentage per maand.
- d** Bij een exponentiële groei is de groeifactor 0,845 per dag.
Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per dag af?
- e** Bij een exponentiële groei is de groeifactor 2,42 per jaar.
Geef het groeipercentage per jaar.
- f** Een hoeveelheid neemt per dag met 0,7% af.
Geef de groeifactor per dag.

4



- De halsbandparkiet komt van oorsprong niet in Nederland voor. Begin 1990 waren er naar schatting 400 halsbandparkieten in het wild in Nederland en dit aantal is elk jaar met 12% toegenomen.
 N is het aantal in het wild voorkomende halsbandparkieten in Nederland.
- a** Stel de formule op van N . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ begin 1990.
 - b** Met hoeveel nam N toe in 2015? Rond af op honderdtallen.
 - c** In welk jaar zijn er naar verwachting voor het eerst meer dan 30 000 halsbandparkieten in het wild in Nederland?

5



- In 2014 brak in de Afrikaanse landen Guinee en Liberia ebola uit. Op 22 maart van dat jaar waren er 78 besmettingsgevallen. In de 237 dagen die volgden nam dit aantal toe met 2,3% per dag.
- a** Stel voor deze periode de formule op van het aantal besmettingsgevallen B . Neem de tijd t in dagen met $t = 0$ op 22 maart 2014.
 - b** Bereken hoeveel dagen na 22 maart er voor het eerst meer dan 10 000 mensen besmet waren.

Na 7 maanden nam de groei van het aantal besmettingsgevallen af doordat maatregelen waren genomen om het virus in te dammen.

Vanaf $t = 237$, met t in dagen en $t = 0$ op 22 maart 2014, geldt de formule $B = 700\sqrt{t - 237} + 15\,685$.

Neem aan dat het aantal besmettingsgevallen exponentieel was blijven groeien als er geen maatregelen zouden zijn getroffen.

- c** Bereken hoeveel besmettingsgevallen er 500 dagen na 22 maart zijn voorkomen door de maatregelen.

A6 De productie van zonne-energie in Nederland neemt toe. Op 1 januari 2020 was het totale vermogen zonne-energie in Nederland 11 200 megawatt (MW). Per jaar neemt dat met 30% toe.



- a** Stel de formule op van het vermogen zonne-energie V_z in Nederland. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2020 en V_z in MW.

Op 1 januari 2020 was het totale vermogen windenergie in Nederland 6600 MW. Dat vermogen neemt jaarlijks met 1100 MW toe.

Hieruit volgt dat de formule van het vermogen windenergie in Nederland van de vorm $V_w = at + b$ is, met t de tijd in jaren en V_w in MW.

- b** Licht dit toe, en stel de formule van V_w op. Neem $t = 0$ op 1 januari 2020.
c Bereken in welk jaar op 1 januari het totale vermogen aan zonne-energie voor het eerst meer dan vijf keer groot is als totale vermogen aan windenergie.

A7 Op 1 januari 2020 hadden de Verenigde Staten 331,5 miljoen inwoners.

⊗* Dit aantal neemt naar verwachting jaarlijks met 1,2 miljoen toe.

De bevolking van Rusland neemt juist af. Op 1 januari 2020 had Rusland 144,1 miljoen inwoners en dit aantal neemt naar verwachting jaarlijks met 0,3% af.

Bereken op basis van deze gegevens in welk jaar naar verwachting de Verenigde Staten drie keer zoveel inwoners hebben als Rusland.

E8 Op $t = 0$ zijn er in een vijver twee keer zoveel salamanders als kikkers.

***** Het aantal kikkers neemt per jaar met 6% toe en het aantal salamanders neemt per jaar met 6% af.

Bereken na hoeveel jaar er evenveel kikkers als salamanders in de vijver zijn. Rond af op één decimaal.

O9 Bij een exponentiële groei is de groeifactor per jaar gelijk aan 9.

⊠⊗* De beginwaarde is 2.

- a** Vul de tabel in.

tijd in jaren	0	1	2	3	4
hoeveelheid N	2	18	162		

- b** Met welk getal wordt N per twee jaar vermenigvuldigd?
c Wordt N per halfjaar met meer of minder dan 4,5 vermenigvuldigd? Licht toe.

Theorie B Groeipercents omzetten naar een andere tijdseenheid

Je kunt groeifactoren en groeipercents omzetten naar een andere tijdseenheid. We illustreren dit aan de hand van de onderstaande tabel, die bij een exponentiële groei hoort met beginhoeveelheid 100 en groeifactor 3 per uur. Dit laatste noteren we als $g_{\text{uur}} = 3$.

EXPONENTIËLE GROEI

t	0	1	2	3	4	5	6
N	100	$100 \cdot 3^1$ = 300	$100 \cdot 3^2$ = 900	$100 \cdot 3^3$ = 2700	$100 \cdot 3^4$ = 8100	$100 \cdot 3^5$ = 24 300	$100 \cdot 3^6$ = 72 900

- Je ziet
- per 2 uur is de groeifactor 3^2
 - per 3 uur is de groeifactor 3^3
 - per n uur is de groeifactor 3^n .

Deze regel geldt ook voor niet-gehele waarden van n .

Zo geldt dat per kwartier de groeifactor $3^{\frac{1}{4}} \approx 1,316$ is,

want $g_{\text{kwartier}} = 3^{\frac{1}{4}}$ geeft $g_{\text{uur}} = (3^{\frac{1}{4}})^4 = 3$.

Per 10 minuten is de groeifactor $3^{\frac{1}{6}} \approx 1,201$,

want $g_{10 \text{ minuten}} = 3^{\frac{1}{6}}$ geeft $g_{\text{uur}} = (3^{\frac{1}{6}})^6 = 3$.

NORM DRIJF AUTO REËEL RAD W/N	
$3^{1/4}$	1.316074013
$3^{1/6}$	1.200936955

Bij exponentiële groei met groeifactor g per tijdseenheid is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Heb je te maken met een exponentiële groei met een groeifactor van 0,6 per dag, dan is

- de groeifactor per week $0,6^7 \approx 0,028$
- de groeifactor per uur $0,6^{\frac{1}{24}} \approx 0,979$
- de groeifactor per acht uur $0,6^{\frac{1}{3}} \approx 0,843$.

Om te berekenen wat het groeipcentage per dag is bij een toename van 63% per week, bedenk je dat $g_{\text{week}} = 1,63$ geeft $g_{\text{dag}} = 1,63^{\frac{1}{7}} \approx 1,072$. Het groeipcentage per dag is dus 7,2%.

NORM DRIJF AUTO REËEL RAD W/N	
$.6^7$	0.0279936
$.6^{1/24}$	0.9789405133
$.6^{1/3}$	0.8434326653

Bij exponentiële groei gaat het omzetten van een groeipcentage naar een andere tijdseenheid via groeifactoren.

Voorbeeld

Een hoeveelheid neemt per zes uur met 18% af.

- a Hoeveel procent is de afname per dag?
- b Hoeveel procent is de afname per uur?

Uitwerking

- a $g_{6 \text{ uur}} = 0,82$
 $g_{\text{dag}} = 0,82^4 \approx 0,452$
De afname is 54,8% per dag.
- b $g_{6 \text{ uur}} = 0,82$
 $g_{\text{uur}} = 0,82^{\frac{1}{6}} \approx 0,967$
De afname is 3,3% per uur.

- 1 Eerst de groeifactor per 6 uur.
- 2 Dan de groeifactor per dag.
- 3 Ten slotte het groeipercentage per dag.

10 Een hoeveelheid neemt per kwartier met 12% toe.



- a Hoeveel procent is de toename per uur?
- b Hoeveel is de procentuele toename per vijf minuten?
- c Hoeveel procent is de toename per vijf uur? Rond af op gehelen.

Rond percentages af op één decimaal en rond groeifactoren af op drie decimalen, tenzij anders gevraagd.

11 Bij een exponentiële groei hoort een groeifactor van 1,3 per dag.



- a Bereken het groeipercentage per week. Rond af op gehelen.
- b Bereken het groeipercentage per vier uur.

12 Een hoeveelheid neemt per dag met 16% af.



- a Bereken de groeifactor per week.
- b Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per uur af?
- c Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per kwartier af?
Rond af op twee decimalen.

13 a Een hoeveelheid neemt per uur met 19,5% af.



- Hoeveel procent is de afname per kwartier?
- b Een hoeveelheid neemt per jaar met 8,6% toe.
Hoeveel procent is de toename per 25 jaar? Rond af op gehelen.
- c Een hoeveelheid neemt per week met 180% toe.
Bereken de groeifactor per dag.

R14 De volgende uitspraken zijn onjuist. Verbeter ze.

- ⊗ ***
- a** Bij een toename van 5% per dag hoort een toename van $7 \times 5\%$ per week.
 - b** Bij een groeifactor van 1,5 per dag hoort een groeifactor van $7 \times 1,5$ per week.
 - c** Bij een afname van 20% per uur hoort een afname van $\frac{1}{4} \times 20\%$ per kwartier.
 - d** Bij een groeifactor van 0,7 per uur hoort een groeifactor van $0,25 \times 0,7$ per kwartier.

A15 Ga bij de volgende vragen uit van exponentiële groei.

- ⊗ ***
- a** In 2020 werd in Nederland twee keer zoveel elektriciteit door windmolens op land geproduceerd als in 2015.
Bereken het groeipercentage per jaar.
 - b** Het aantal snellaadpunten voor elektrische auto's in Nederland is in de periode 2019-2025 met 630% toegenomen.
Bereken het groeipercentage per jaar.
 - c** Het aantal platenzaken in Nederland is in tien jaar tijd met 22% afgenomen.
Hoeveel procent is de afname per jaar?



16 Een hoeveelheid N groeit exponentieel.

- ⊗ ***
- Op $t = 2$ is $N = 800$ en op $t = 5$ is $N = 1000$ met t de tijd in jaren.
De formule is van de vorm $N = b \cdot g^t$ met t de tijd in jaren.
- a** Toon aan dat $g_{3 \text{ jaar}} = 1,25$ en dat $g = 1,0772\dots$
 - b** Licht toe dat geldt $b \cdot 1,0772\dots^2 = 800$ en bereken b . Rond af op tientallen.
 - c** Geef de formule van N met b in tientallen en g in drie decimalen.

17 **a** Een hoeveelheid N groeit exponentieel. Op $t = 4$ is $N = 1500$ en op $t = 10$ is $N = 4500$. Hierbij is t de tijd in maanden.

Stel de formule op van N . Rond de beginwaarde af op tientallen en de groeifactor op drie decimalen.

- b** Een hoeveelheid A neemt exponentieel af.
Op $t = 6$ is $A = 8550$ en op $t = 15$ is $A = 7520$.
Hierbij is t de tijd in jaren.
Stel de formule op van A .

- c** Een hoeveelheid M neemt exponentieel toe.
Op $t = 0$ is $M = 75$ en elke 10 jaar wordt M drie keer zo groot.
Stel de formule op van M . Neem t de tijd in jaren.

Geef de beginwaarde in dezelfde nauwkeurigheid als de gegevens en de groeifactor in drie decimalen, tenzij anders gevraagd.

A18

De luchtdruk neemt af als de hoogte toeneemt. Er is een exponentieel verband tussen de luchtdruk en de hoogte. De bijbehorende formule is van de vorm $P = b \cdot g^h$. Hierin is P de luchtdruk in hPa en h de hoogte in km. Op 2 km hoogte is de luchtdruk 800 hPa en op 5 km hoogte is de luchtdruk 555 hPa.

- a Stel de formule op van P .
- b Een expeditie heeft op een hoogte van 7500 meter een kamp opgeslagen op de Mount Everest. Bereken de luchtdruk op die hoogte.

A19

In de wereld wordt steeds meer plastic geproduceerd. De hoeveelheid jaarlijks geproduceerd plastic neemt al vanaf de jaren 70 van de vorige eeuw exponentieel toe. In 1970 werd 44 miljard kg geproduceerd en in 2009 was dat toegenomen tot 250 miljard kg.

Een deel van het plastic komt als afval in de oceanen terecht waar het mede onder invloed van de zon uiteenvalt in zeer kleine deeltjes, het zogenaamde microplastic.

Onderzoekers bestuderen hoeveel van dit microplastic neerdaalt op de bodem van de oceanen. In deze bodem kan men lagen onderscheiden. Elke laag hoort bij een jaar. In de bodem nabij de kust van Californië vond men in de laag die bij 1972 hoort 6 deeltjes microplastic per 100 cm^2 . In de laag van 1994 vond men 17 deeltjes per 100 cm^2 . Neem aan dat de toename exponentieel is.

Onderzoek of de hoeveelheid microplastic in de lagen van de bodem met hetzelfde percentage per jaar toeneemt als de wereldwijde productie van plastic.

A20

De oppervlakte van een wond neemt tijdens het genezen exponentieel af.

Na drie dagen is de oppervlakte van de wond 31 mm^2 en na een week 11 mm^2 .

Bereken de oppervlakte van de wond 60 uur nadat de wond is ontstaan.

O21

Het aantal inwoners van Senegal wordt gegeven door de formule

$N = 17,32 \cdot 1,027^t$. Hierin is N in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2022.

- a Na hoeveel jaar is het aantal inwoners verdubbeld ten opzichte van 1 januari 2022?
- b Op 1 januari 2010 had Senegal 12,53 miljoen inwoners. Hoeveel jaar na 1 januari 2010 is dit aantal verdubbeld? Ga uit van een groeipercantage van 2,7% per jaar.

Theorie C Verdubbelingstijd en halveringstijd

De groei van een bevolking wordt vaak gegeven met een groeipercentage. Met de **verdubbelingstijd** krijg je ook een indruk van de groei. Bij een groei van 3,5% per jaar bereken je de verdubbelingstijd T door de vergelijking $1,035^T = 2$ op te lossen. Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $T \approx 20,1$. Dus bij een groei van 3,5% per jaar is de verdubbelingstijd iets meer dan 20 jaar.

$$\begin{aligned} b \cdot g^T &= 2b \\ g^T &= 2 \end{aligned} \quad \text{): } b$$

Dus de verdubbelingstijd is onafhankelijk van b .

De verdubbelingstijd bij exponentiële groei is de tijd waarin de hoeveelheid verdubbelt.

Bij groeifactor g bereken je de verdubbelingstijd T door de vergelijking $g^T = 2$ op te lossen.

Bij exponentiële afname is het begrip **halveringstijd** van belang. De halveringstijd is de tijd waarin de hoeveelheid gehalveerd wordt. Bij groeifactor g bereken je de halveringstijd T door de vergelijking $g^T = \frac{1}{2}$ op te lossen.

De halveringstijd bij exponentiële groei is de tijd waarin de hoeveelheid halveert.

Bij groeifactor g bereken je de halveringstijd T door de vergelijking $g^T = \frac{1}{2}$ op te lossen.

Voorbeeld

- a** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 12% af.
Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.
- b** Van een hoeveelheid is de halveringstijd 15 jaar.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per jaar afneemt.

Uitwerking

- a** $g_{\text{jaar}} = 0,88$, dus los op $0,88^T = \frac{1}{2}$.
Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $T = 5,422...$
De halveringstijd is 5 jaar en $0,422... \cdot 12 \approx 5$ maanden.
- b** Er geldt $g^{15} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{15} = \frac{1}{2}$ geeft $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{15}} \approx 0,955$
De afname is 4,5% per jaar.

5,422... jaar =
 $5,422... \times 12$ maanden $\approx$
65 maanden is ook
goed.

22



- a Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 13,1% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- b Een hoeveelheid verdubbelt elke 25 jaar.
Bereken het groeipercentage per jaar.
- c Een hoeveelheid neemt wekelijks met 8,5% af.
Bereken de halveringstijd in dagen nauwkeurig.
- d De radioactieve stof strontium-90 heeft een halveringstijd van 28 jaar.
Bereken met hoeveel procent strontium-90 per jaar afneemt.
- e Een hoeveelheid halveert elke tien uur.
Na hoeveel uur en hoeveel minuten is nog 10% van de hoeveelheid over? Rond af op gehelen.

23



- a De bevolking van Oeganda neemt jaarlijks met 3,2% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.
- b De bevolking van Japan neemt elke tien jaar met 1,4% af.
Bereken de halveringstijd in jaren nauwkeurig.

24



- De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie.
De hoeveelheid jodium-131 neemt met 8,3% per dag af.
- a Bereken de halveringstijd.
- b Na hoeveel dagen is nog 10% van de beginhoeveelheid over?

A25



Volgens Nederlandse onderzoekers is het aantal loopkevers in een natuurgebied in Drenthe dramatisch afgenomen. De onderzoekers vonden een halveringstijd van 12 jaar.

Uit een onderzoek van Duitse ecologen blijkt dat in 27 jaar tijd 76% van de insecten uit het onderzochte gebied is verdwenen.

Onderzoek of deze twee resultaten met elkaar in overeenstemming zijn. Ga uit van een exponentiële afname.

A26



- Begin 2020 breidde het coronavirus zich razendsnel uit in China.
- In de tabel hiernaast staat de procentuele groei van het aantal besmettingsgevallen ten opzichte van de vorige dag. Uit de tabel blijkt dat zes dagen na 22 januari het aantal besmettingsgevallen voor het eerst meer dan tien keer zo groot was als op 22 januari.
- a Toon dit aan met een berekening.
- b Leg uit waarom je bij deze tabel geen verdubbelingstijd kunt berekenen.

Een vertienvoudiging in zes dagen is ook mogelijk als een hoeveelheid met een vast percentage per dag toeneemt.

- c Bereken op algebraïsche wijze dit groeipercentage.
- d Wat is bij dit groeipercentage de verdubbelingstijd?
Geef je antwoord in uren nauwkeurig.

datum	groei
23 jan	46%
24 jan	56%
25 jan	53%
26 jan	39%
27 jan	64%
28 jan	32%
29 jan	29%
30 jan	26%
31 jan	22%

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan bij een procentuele verandering per tijdseenheid de formule voor exponentiële groei opstellen en hiermee werken.
- ☐ Ik kan groeifactoren en groeipercents omzetten naar een andere tijdseenheid.
- ☐ Ik kan bij exponentiële groei de formule opstellen als op twee tijdstippen de hoeveelheid is gegeven.
- ☐ Ik kan rekenen met verdubbelingstijd en halveringstijd.

► OPGAVE C1
THEORIE A

► OPGAVE C2
THEORIE B

► OPGAVE C3
OPGAVE 16

► OPGAVE C4
THEORIE C

- C1** Een bioloog doet al jaren onderzoek naar het aantal kikkers in een waterrijk gebied. Op 1 september 2010 waren er 7500 kikkers in het gebied aanwezig. Jaarlijks neemt dat aantal met 5,2% af.
- a** Stel de formule op van het aantal kikkers N in het gebied. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 september 2010.
 - b** In welk jaar waren er op 1 september voor het eerst minder dan 4000 kikkers in het gebied aanwezig?

- C2**
- a** Een hoeveelheid neemt per kwartier met 3,2% toe. Hoeveel procent is de toename per uur?
 - b** Een hoeveelheid neemt per dag met 76,5% af. Hoeveel procent is de afname per uur?

- C3** Een hoeveelheid N neemt exponentieel af. Op $t = 5$ is $N = 1726$ en op $t = 12$ is $N = 788$. Hierbij is t de tijd in jaren. Stel de formule op van N .

- C4**
- a** Een hoeveelheid neemt jaarlijks 15,3% toe. Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
 - b** Een hoeveelheid neemt dagelijks met 67,3% af. Bereken de halveringstijd in minuten nauwkeurig.
 - c** Een hoeveelheid verdubbelt elke tien jaar. Bereken het groeipercents per jaar.
 - d** Een hoeveelheid halveert elke zes uur. Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per dag afneemt.

Antwoorden

- C1**
- a** $N = 7500 \cdot 0,948^t$
 - b** 2022
- C2**
- a** 13,4%
 - b** 5,9%

- C3** $N = 3022 \cdot 0,894^t$
- C4**
- a** 4 jaar en 10 maanden
 - b** 14 uur en 53 minuten
 - c** 7,2%
 - d** 93,8%

9.2 Werken met logaritmen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt logaritmische en exponentiële vergelijkingen algebraïsch oplossen.
- Je kunt variabelen vrijmaken bij logaritmische en exponentiële formules.
- Je kunt werken met logaritmische formules op de GR.
- Je kunt werken met assenstelsels waarbij assen logaritmen staan.

Voorkennis De logaritme

${}^2\log(32)$ is de exponent van een macht met grondtal 2 waarmee de macht gelijk is aan 32. Dus ${}^2\log(32) = 5$, want $32 = 2^5$.

Je schrijft ${}^2\log(32) = {}^2\log(2^5) = 5$.

Dit is een voorbeeld van de volgende regel.

$${}^g\log(g^a) = a$$

$$\text{Dus } {}^3\log(9) = {}^3\log(3^2) = 2$$

$${}^6\log\left(\frac{1}{6}\right) = {}^6\log(6^{-1}) = -1$$

$${}^5\log\left(\frac{1}{125}\right) = {}^5\log(5^{-3}) = -3$$

$${}^{\frac{1}{3}}\log(9) = {}^{\frac{1}{3}}\log\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right) = -2.$$

Merk op dat ${}^2\log(-32)$ niet bestaat, want er is geen macht met grondtal 2 waarvan de uitkomst -32 is.

${}^g\log(x)$ bestaat alleen voor $x > 0$ en $g > 0$ waarbij $g \neq 1$.

V3 Bereken exact.

a ${}^3\log(81)$

b ${}^5\log(5)$

c ${}^5\log(1)$

d ${}^2\log\left(\frac{1}{2}\right)$

e ${}^{\frac{1}{2}}\log(2)$

f ${}^3\log\left(\frac{1}{27}\right)$

g ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{8}\right)$

h ${}^6\log(6\sqrt{6})$

i ${}^3\log\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\right)$

O27 Vul in.



a ${}^2\log(\dots) = 3$

b ${}^3\log(\dots) = 2$

c ${}^5\log(\dots) = -1$

Theorie A De vergelijking $g^x = a$

De oplossing van de vergelijking ${}^3\log(x) = 4$ is $x = 3^4$.

Immers ${}^3\log(3^4) = 4$.

En zo is van ${}^6\log(x) = -2$ de oplossing $x = 6^{-2} = \frac{1}{36}$.

Uit ${}^g\log(B) = A$ volgt $B = g^A$.

Met deze regel kun je vergelijkingen zoals ${}^3\log(2x - 5) = 0$ oplossen.

Je krijgt $2x - 5 = 3^0$

$$2x - 5 = 1$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Omdat uit ${}^s\log(B) = A$ volgt $B = g^A$, volgt uit ${}^2\log(30) = x$ dat $30 = 2^x$ oftewel $2^x = 30$.

Omgekeerd volgt uit $2^x = 30$ dat $x = {}^2\log(30)$.

Daarmee is de vergelijking $2^x = 30$ exact opgelost.

Exact oplossen van $g^x = a$ met $a > 0$ geeft $x = {}^s\log(a)$.

De vergelijking $3^{x+1} = 90$ is van de vorm $3^A = 90$.

Dit geeft $A = {}^3\log(90)$ oftewel $x + 1 = {}^3\log(90)$, dus $x = -1 + {}^3\log(90)$.

In het algemeen krijg je $g^A = B$ geeft $A = {}^s\log(B)$.

Voorbeeld

Los exact op.

a ${}^2\log(3x) + 5 = 8$

b $5 + 2^{3x} = 25$

Uitwerking

a ${}^2\log(3x) + 5 = 8$

$${}^2\log(3x) = 3$$

$$3x = 2^3$$

$$3x = 8$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

b $5 + 2^{3x} = 25$

$$2^{3x} = 20$$

$$3x = {}^2\log(20)$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(20)$$

Bij sommige exponentiële vergelijkingen kun je toewerken naar de vorm $g^A = g^B$ en dit geeft $A = B$.

Bij $5 \cdot 3^{2x-1} = 135$ krijg je $3^{2x-1} = 27$

$$3^{2x-1} = 3^3$$

$$2x - 1 = 3$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

R28 Zie voorbeeld b hierboven.

***** Sara heeft de vergelijking op een andere manier opgelost.

Ze krijgt $x = {}^8\log(20)$.

Laat zien hoe Sara aan deze oplossing komt.

29 Los exact op.



a ${}^3\log(x-1) = 5$

b $5 + {}^5\log(x+3) = 7$

c $\frac{1}{2}\log(3x+4) = -2$

d $4 - 2 \cdot {}^3\log(x) = 3$

30 Los exact op.



a $3^x - 5 = 7$

b $2^{x-1} = 15$

c $1 + 2^x = 17$

d $4 + 3^{x+1} = 25$

e $11 - 3^{x+1} = 2$

f $7 + 4^{2x} = 12$

31 Los exact op.



a $7 + 2^{x-3} = 10$

b $3 \cdot 5^{2x+1} = 75$

c ${}^2\log(3x+7) = 4$

d $7 \cdot 5^{4-x} - 18 = 3$

e $2 + {}^3\log(5-4x) = 0$

f $2^{3x+1} = 4^{2x}$

$4^{2x} = (2^2)^{2x} = 2^{4x}$

A32 Los exact op.



a $3 + 2^{0,4x} = 12$

b ${}^3\log\left(\frac{5}{3x^2-2x}\right) = 0$

c $5^{x+2} = (\sqrt{5})^{x^2-4}$

d $2 \cdot 5^{x+1} = 33 - 5^{x+1}$

e $\frac{1}{3} \cdot 3^x = 3^{2\sqrt{x}-1}$

f ${}^2\log(x^2 - 6x + 12) - 5 = -3$

E33 Los exact op.



a $3^{x+2} + 3^x = 90$

b $2^{1+2x} = 4^x + 6$

O34



a Je kunt bij de formule $y = 3^{x-1}$ de variabele x vrijmaken.

Ga na dat je $x = 1 + {}^3\log(y)$ krijgt.

b Je kunt bij de formule $y = {}^2\log(x-5)$ de variabele x vrijmaken.

Ga na dat je $x = 2^y + 5$ krijgt.

Theorie B Variabelen vrijmaken bij exponentiële en logaritmische formules

Je kunt bij de formule $Q = 6 - 2^x$ de variabele x vrijmaken.

Je gebruikt daarbij de regel $g^A = B$ geeft $A = {}^g\log(B)$.

Je krijgt $Q = 6 - 2^x$

$$2^x = 6 - Q$$

$$x = {}^2\log(6 - Q)$$

$g^A = B$ geeft $A = {}^g\log(B)$

Je kunt bij de formule $P = 5 + {}^2\log(n)$ de variabele n vrijmaken.

Je gebruikt daarbij de regel ${}^g\log(B) = A$ geeft $B = g^A$.

Je krijgt $P = 5 + {}^2\log(n)$

$$5 + {}^2\log(n) = P$$

$${}^2\log(n) = P - 5$$

$$n = 2^{P-5}$$

Verwissel linker- en rechterlid.

${}^g\log(B) = A$ geeft $B = g^A$

Voorbeeld

- a** Druk x uit in y bij de formule $y = 8 + 3^{2x-1}$.
b Schrijf t als functie van N bij de formule $N = {}^2\log(5t + 3) - 4$.

Uitwerking

a $y = 8 + 3^{2x-1}$	b $N = {}^2\log(5t + 3) - 4$
$3^{2x-1} = y - 8$	${}^2\log(5t + 3) = N + 4$
$2x - 1 = {}^3\log(y - 8)$	$5t + 3 = 2^{N+4}$
$2x = 1 + {}^3\log(y - 8)$	$5t = -3 + 2^{N+4}$
$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(y - 8)$	$t = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot 2^{N+4}$

R35 Geef aan bij welke stappen in het voorbeeld de regels

$\square \odot *$ $g^A = B$ geeft $A = {}^g\log(B)$ en ${}^g\log(B) = A$ geeft $B = g^A$ zijn gebruikt.

36 Maak x vrij bij de volgende formules.

$\square \odot$ a $y = 2^{3x-4}$	c $y = 2 \cdot 5^{0,1x}$
b $y = 8 + 3^{x-2}$	d $y = 20 + 5 \cdot 3^{0,4x}$

37 Druk x uit in y bij de volgende formules.

$\square \odot$ a $y = {}^3\log(x) + 2$	c $y = {}^5\log(2x + 1)$
b $y = \frac{1}{5} \cdot {}^2\log(3x)$	d $y = 2 \cdot \frac{1}{2}\log(5 - 3x) - 1$

A38 Schrijf t als functie van N bij de volgende formules.

$\square \odot *$ a $N = 10 \cdot 5^{3t-1}$	c $N = 100 + 2^{0,2t-1}$
b $N = {}^3\log(2t + 1) - 6$	d $N = 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\log(2(t + 3))$

A39 **a** Maak B vrij bij de formule $A = 500 - 50 \cdot 1,75^{B-2,5}$.

***** **b** Druk S uit in C bij de formule $C = 20 + 0,4 \cdot {}^3\log(2 - 8S)$.

c Herleid de formule $N = 50 \cdot 2^{4t-1}$ tot de vorm $t = a + b \cdot {}^4\log(cN)$.

d De formule $y = 3 - {}^2\log(4x - 1)$ is om te werken tot de vorm $x = a + b \cdot g^y$.
Bereken a , b en g .

40 Gegeven zijn de formules $A = {}^2\log(B + 5)$ en $A = 3C - 12$.

$\square \odot *$ Om B uit te drukken in C , maak je eerst B vrij bij $A = {}^2\log(B + 5)$.
Vervolgens substitueer je $A = 3C - 12$ in de formule van B .

Het vrijmaken van B bij $A = {}^2\log(B + 5)$ geeft $B = 2^A - 5$.

a Laat dit zien.

b Druk B uit in C .

41



- a Gegeven zijn de formules $A = {}^3\log(B - 1)$ en $A = 2C + 6$.
Druk B uit in C .
- b Gegeven zijn de formules $P = 2^Q + 3$ en $P = 5R - 4$.
Druk Q uit in R .

- c Gegeven zijn de formules $N = {}^2\log\left(\frac{t}{t+5}\right)$ en $N = 3p$.

Toon aan dat geldt $t = \frac{5 \cdot 2^{3p}}{1 - 2^{3p}}$.

A42



- a Gegeven zijn de formules $N = 20 \cdot 3^t - 100$ en $N = 50q + 250$.
Druk t uit in q .

- b Gegeven zijn de formules $y = {}^3\log\left(\frac{x}{10-x}\right)$ en $y = 5z - 20$.

Druk x uit in z .

O43



- a Los de vergelijking $3^x = 8$ op met de optie snijpunt van de GR.
Rond af op drie decimalen.
- b Licht toe dat je in vraag a een benadering van ${}^3\log(8)$ hebt gevonden.

Theorie C Logaritmen met grondtal 10

Het is gebruikelijk om bij ${}^{10}\log$ het grondtal 10 niet te noteren.
Dus $\log(10\,000) = \log(10^4) = 4$ en $\log\left(\frac{1}{100}\right) = \log(10^{-2}) = -2$.

$${}^{10}\log(a) = \log(a)$$

De GR heeft een toets $\log$ (TI, NumWorks en Casio) of LOG (HP) waarbij grondtal 10 hoort. Hiermee kun je logaritmen met grondtal 10 berekenen. Zo krijg je bijvoorbeeld $\log(600) \approx 2,78$ en $\log(0,7) \approx -0,15$. Bij de TI en HP kun je met deze toets ook logaritmen met een ander grondtal berekenen. Voor het berekenen van ${}^3\log(8)$ tik je in $\log(8, 3)$. Bij de Casio gebruik je de optie $\logab$ uit het OPTN-CALC menu. Bij de NumWorks kies je uit de Toolbox de optie ${}^a\log(x)$. Je krijgt ${}^3\log(8) \approx 1,893$. Het op deze manier benaderen van logaritmen gaat een stuk sneller dan zoals je in opgave 43 hebt gedaan.

Tevens kun je zo formules met logaritmen op de GR invoeren.

De formule $y = {}^2\log(x - 3)$ voer je op de Casio in als $y_1 = \log_2(x - 3)$, op de HP als $\text{F1}(X) = \log(X - 3, 2)$, op de NumWorks als $f(x) = {}^2\log(x - 3)$ en op de TI als $y_1 = \log(x - 3, 2)$.

44



Bereken. Rond af op twee decimalen.

- | | |
|--------------------------------|--|
| a ${}^3\log(5)$ | d $\frac{1}{3}\log(10) + \log\left(\frac{1}{3}\right)$ |
| b $\frac{1}{7}\log(18)$ | e $3 \cdot {}^2\log(7)$ |
| c ${}^2\log(20) - {}^2\log(6)$ | f $\frac{5}{{}^4\log(12)}$ |

45 Rond in deze opgave zo nodig af op twee decimalen.



a Gegeven is de formule $N = \log(t) + 150$.

Bereken N voor $t = 30$.

b Gegeven is de formule $P = 11,8 - \frac{120}{{}^5\log(a)}$.

Bereken P voor $a = 12$.

c Gegeven is de formule $\log(K) = 0,25q - 30$.

Bereken q voor $K = 5 \cdot 10^{16}$.

d Gegeven is de formule ${}^2\log(y) = {}^3\log(x) - 1,5$.

Bereken y voor $x = 12$ en bereken x voor $y = 12$.

e Gegeven is de formule $L = \log(M) + 3 \cdot \log(T) + 11$.

Neem $L = 12,4$ en $M = 100$ en bereken T .

A46 Volgens een veelgebruikte vuistregel geldt dat de hondenleeftijd



keer zeven gelijk is aan de mensenleeftijd. Uit deze vuistregel volgt bijvoorbeeld dat een hondenleeftijd van 2 jaar vergelijkbaar is met een mensenleeftijd van 14 jaar. Uit onderzoek naar het DNA van honden en mensen blijkt dat deze regel niet klopt. Een betere benadering van de mensenleeftijd van een hond krijg je met de formule $m = 37 \cdot \log(h) + 31$ met $h > 0,5$. Hierin is h de hondenleeftijd en m de mensenleeftijd, beide in jaren.

a De oudste hond ooit was 29 jaar oud.

Bereken met de formule de mensenleeftijd die hierbij hoort.

b Bereken vanaf welke waarde van h de formule lagere mensenleeftijden geeft dan de vuistregel. Rond af op gehelen.

De formule $m = 37 \cdot \log(h) + 31$ kan worden geschreven als $h = 10^{0,027m - 0,838}$. Hierbij is afgerond op drie decimalen.

c Toon dit aan.

d Welke hondenleeftijd correspondeert volgens deze formule met een mensenleeftijd van 75 jaar? Rond af op gehelen.

A47

De aarde warmt op doordat zonnestrallen de planeet bereiken en koelt weer af doordat energie het heelal in wordt gestraald. Het verschil tussen beide wordt de stralingsforcering genoemd. Als er meer energie binnenkomt dan vertrekt, spreken we van positieve stralingsforcering. Een van de oorzaken van een grotere stralingsforcering is de toename van CO_2 in de atmosfeer. Het effect van CO_2 op de stralingsforcering kan worden benaderd met de formule

$$F = 12,32 \cdot \log\left(\frac{C}{C_0}\right).$$

Hierin is C_0 de hoeveelheid CO_2

in ppm (aantal deeltjes per miljoen) in de atmosfeer in een beginjaar, C de hoeveelheid CO_2 in de atmosfeer in een bepaald jaar na het beginjaar en F de verandering van de stralingsforcering in watt per m^2 ten opzichte van het beginjaar.

De hoeveelheid CO_2 in de atmosfeer neemt al jaren exponentieel toe. Bij de eerste meting in 1958 werden er 316 deeltjes CO_2 per miljoen aangetroffen in de atmosfeer, in 2020 waren dat er 413. Neem aan dat deze toename nog een tijdje doorgaat.

Met deze gegevens kan worden berekend dat de hoeveelheid CO_2 in de atmosfeer in het jaar 2040 ongeveer 450 ppm is en dat de bijbehorende stralingsforcering door CO_2 ongeveer 1,89 watt per m^2 is ten opzichte van 1958.

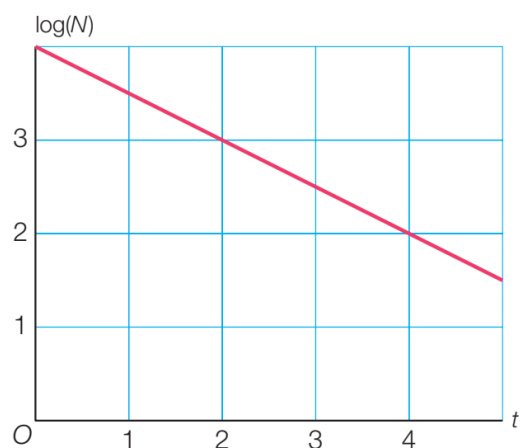
- Laat deze berekeningen zien.
- Bereken algebraïsch in welk jaar de verandering van de stralingsforcering 0,55 watt per m^2 was ten opzichte van 1958.

**O48**

In de figuur hiernaast is $\log(N)$ uitgezet tegen t .

Je leest af: bij $t = 2$ hoort $\log(N) = 3$.

- Licht toe dat bij $t = 2$ hoort $N = 1000$.
- Bereken N bij $t = 4$.
- Bereken N bij $t = 3$. Rond af op gehele.



Theorie D $\log(B)$ uitzetten tegen A

In de figuur hiernaast is $\log(B)$ uitgezet tegen A .

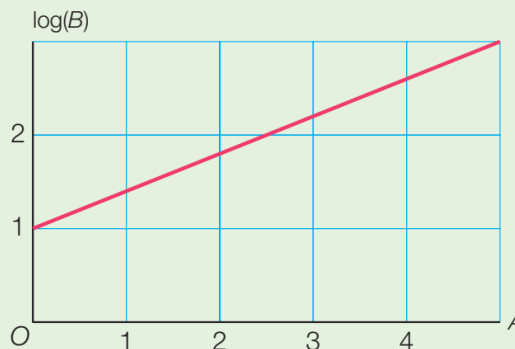
Je leest af: bij $A = 5$ hoort $\log(B) = 3$, dus $B = 1000$.

Bij $A = 3$ lees je af $\log(B) = 2,2$, dus bij $A = 3$ hoort $B = 10^{2,2} \approx 158$.

Weet je dat $B = 250$, dan is

$\log(B) = \log(250) \approx 2,4$ en hierbij lees je af dat $A \approx 3,5$.

Je kunt ook de formule van de getekende lijn opstellen. De lijn gaat door de punten $(0, 1)$ en $(5, 3)$, dus de formule van de lijn is $\log(B) = 0,4A + 1$.



Voorbeeld

In de figuur hiernaast is $\log(N)$ uitgezet tegen t .

- Bereken N bij $t = 3$. Rond af op tientallen.
- Bereken in één decimaal t bij $N = 150$.
- De formule van de lijn is van de vorm $\log(N) = pt + q$. Bereken exact p en q .

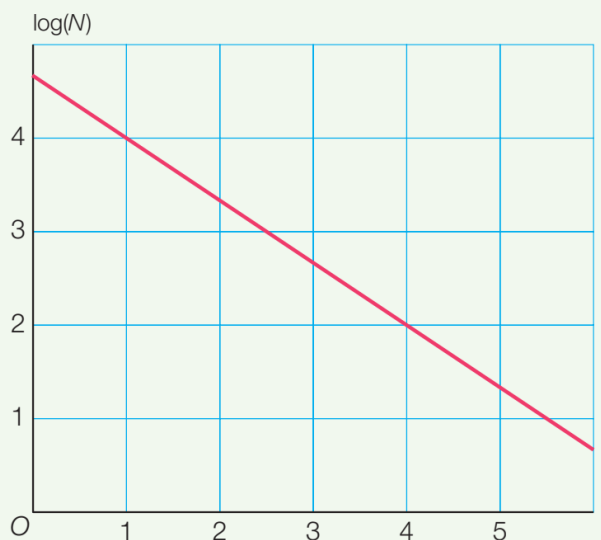
Uitwerking

- Lees af: $t = 3$ geeft $\log(N) \approx 2,7$, dus $N \approx 10^{2,7} \approx 500$.
- $N = 150$ geeft $\log(N) = \log(150) \approx 2,2$. Lees af: $\log(N) = 2,2$ geeft $t \approx 3,7$.
- Gebruik de punten $(1, 4)$ en $(4, 2)$.

$$\log(N) = pt + q \text{ met } p = \frac{\Delta \log(N)}{\Delta t} = \frac{2 - 4}{4 - 1} = -\frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \log(N) = -\frac{2}{3}t + q \\ \text{door } (1, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot 1 + q = 4 \\ -\frac{2}{3} + q = 4 \\ q = 4\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } p = -\frac{2}{3} \text{ en } q = 4\frac{2}{3}.$$



R49 Zie het voorbeeld.

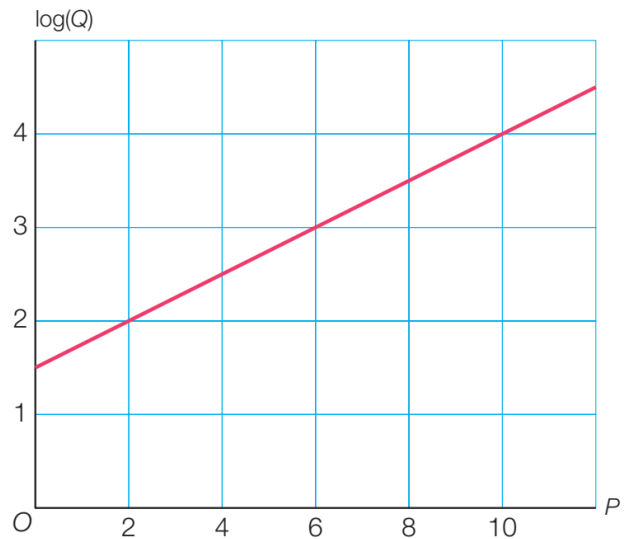
□ ⊗ * Beantwoord de onderdelen a en b met de formule van onderdeel c.

50



In de figuur hiernaast is $\log(Q)$ uitgezet tegen P .

- Bereken Q bij $P = 4$. Rond af op gehelen.
- Bereken P bij $Q = 3000$. Rond af op één decimaal.
- De formule van de lijn is van de vorm $\log(Q) = mP + n$. Bereken exact m en n .



51



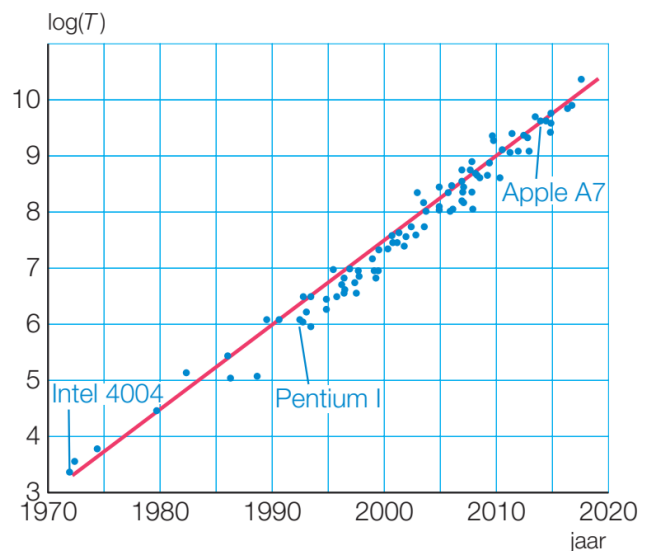
Elke computer gebruikt transistoren om berekeningen te doen. Hoe meer transistoren, hoe sneller de computer. In de begintijd van computers ging het om enkele honderden transistoren per computer. Tegenwoordig zijn dat er vele miljarden, die in zogenaamde microprocessors zijn verwerkt. In 1965 voorspelde de wetenschapper Gordon Moore dat het aantal transistoren per microprocessor exponentieel zou gaan toenemen. Deze voorspelling staat bekend als de wet van Moore. In de figuur hiernaast geeft de lijn de voorspelling van Moore weer en is een punt het aantal transistoren T op een microprocessor in een jaar t .

Aan de figuur is te zien dat de voorspelling van Moore ongeveer is uitgekomen.

Je leest af dat volgens de wet van Moore voor 1990 geldt dat $\log(T) = 6$ en dat twintig jaar later geldt dat $\log(T) = 9$.

Uit deze gegevens volgt dat het maandelijkse groeipercentage volgens Moore ongeveer 2,9% is.

- Bereken dit groeipercentage in twee decimalen.
- Bereken in hoeveel maanden het aantal transistoren per microprocessor volgens de wet van Moore verdubbelt. Rond af op gehelen.
- Gebruik een formule van de lijn in de figuur om een voorspelling te doen van het aantal transistoren per microprocessor in 2025. Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.



52

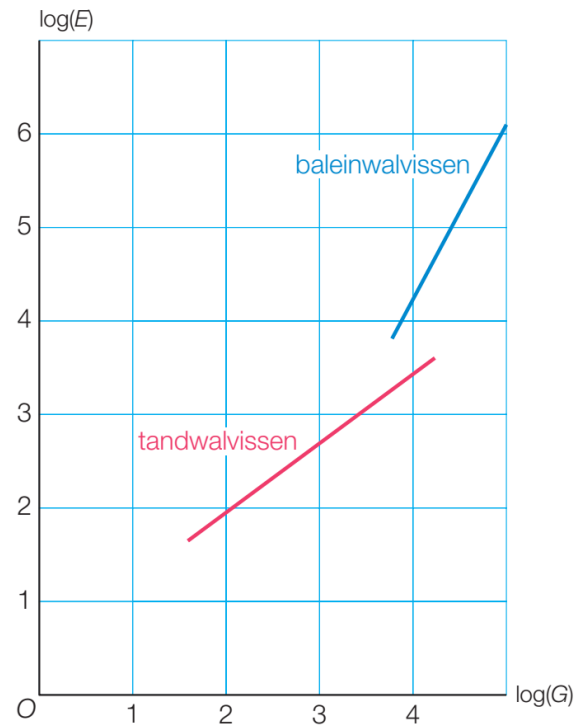


Walvissoorten worden ingedeeld in twee onderordes: tandwalvissen en baleinwalvissen. Tandwalvissen jagen op grote prooien, terwijl baleinwalvissen een soort filter in hun bovenkaak hebben waarmee ze plankton uit het water zeven. In de figuur hiernaast is voor beide onderordes $\log(E)$ uitgezet tegen $\log(G)$. Hierin is E de energie die per hap uit voedsel wordt gehaald in kilojoule en G het gewicht van de walvissen in kg. E_T en G_T horen bij de tandwalvissen en E_B en G_B horen bij de baleinwalvissen.

- Hoeveel energie per hap krijgt de zwaarste walvis binnen?
- Bereken voor welke onderorde het verschil tussen de lichtste en zwaarste walvis het grootst is.

Het lijnstuk dat hoort bij de baleinwalvissen heeft de eindpunten $(3,8; 3,8)$ en $(5,0; 6,1)$. Hierbij hoort een formule van de vorm $\log(E_B) = a \cdot \log(G_B) + b$.

- Bereken a en b . Rond af op twee decimalen.
- Stel voor tandwalvissen de formule op van $\log(E_T)$ als functie van G_T .



53



De formules van $\log(E_B)$ en $\log(E_T)$ zijn om te werken tot $E_T = 2,82 \cdot G_T^{0,74}$ en $E_B = 0,00033 \cdot G_B^{1,92}$.

Onderzoek hoe je aan de vorm van de grafieken van E_T en E_B kunt zien dat tandwalvissen te maken hebben met teruglopende opbrengsten per hap ten opzichte van hun lichaamsgewicht, terwijl baleinwalvissen juist steeds meer energie per hap binnenhalen per kilogram lichaamsgewicht.

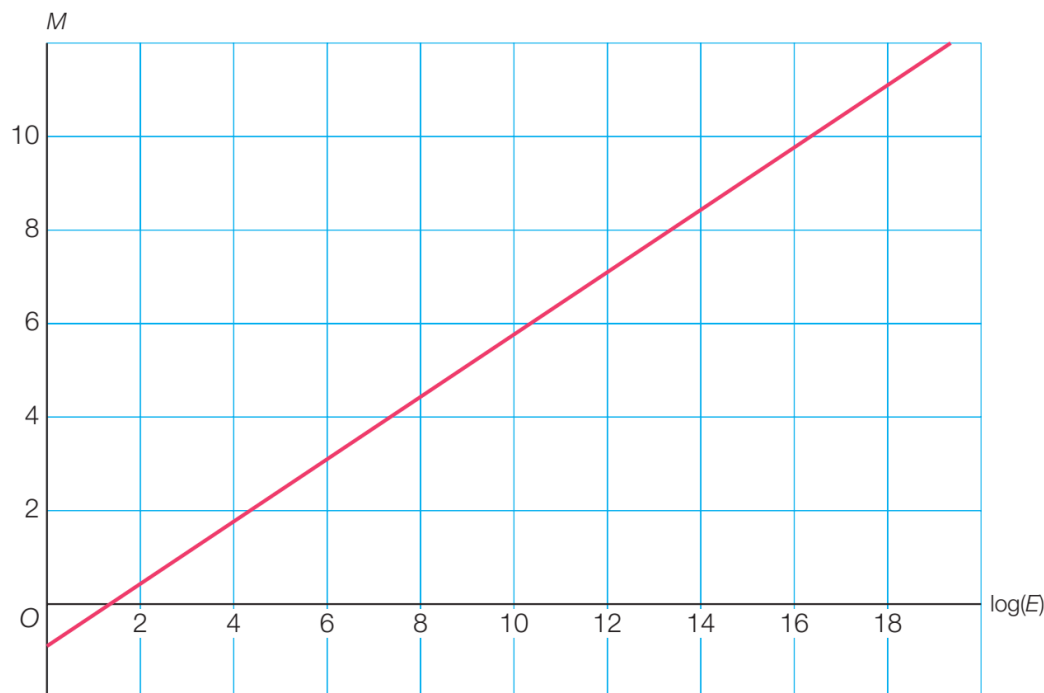
A54

De hoeveelheid energie die bij een aardbeving vrijkomt, wordt uitgedrukt in kJ. Men spreekt bijvoorbeeld over een aardschok waarbij $1,25 \cdot 10^{13}$ kJ energie vrijkomt.

Seismologen werken liever met eenheden op de schaal van Richter.

In de figuur zie je het verband tussen de vrijgekomen energie E in kJ en M , de sterkte op de schaal van Richter.

Merk op dat op de horizontale as $\log(E)$ is uitgezet.



- Bereken E bij $M = 2$.
- Op 16 augustus 2012 werd in de omgeving van het Groningse plaatsje Huizinge een aardbeving geregistreerd met een sterkte van 3,6 op de schaal van Richter.
Hoeveel energie kwam bij deze aardbeving vrij?
- De sterkste aardbeving die in de twintigste eeuw is gemeten, trof Chili in het jaar 1960. Bij deze aardbeving kwam $9,3 \cdot 10^{15}$ kJ energie vrij.
Welke sterkte op de schaal van Richter had deze beving?
- Pas vanaf een energiehoeveelheid van 330 000 kJ kan een mens een aardschok voelen.
Met welke sterkte op de schaal van Richter komt dit overeen?
- Herman beweert dat bij bevingen waarbij de hoeveelheden energie die vrijkomen een factor 1 000 000 schelen, de sterkten op de schaal van Richter 4 verschillen.
Onderzoek of Herman gelijk heeft.
- Alaska werd in 1965 door twee aardbevingen getroffen. De tweede scoorde op de schaal van Richter twee punten hoger dan de eerste.
Wat weet je van de hoeveelheid energie die bij de tweede beving vrijkwam in vergelijking met die van de eerste beving?
- De formule bij de lijn in de figuur is van de vorm $M = p \cdot \log(E) + q$.
Bereken p en q . Rond zo nodig af op twee decimalen.

Om de CO_2 -uitstoot van een vliegreis te compenseren, kun je bomen laten planten. De hoeveelheid CO_2 die een boom opneemt, hangt af van zijn gewicht.

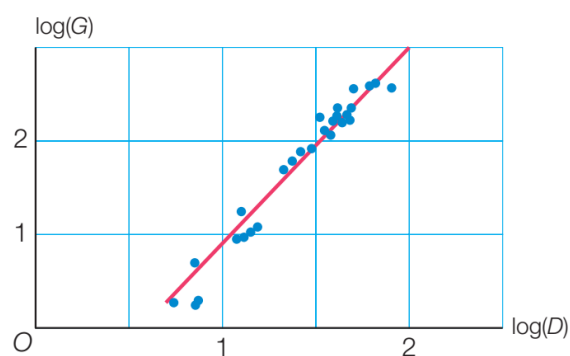
Het bovengrondse gewicht van een boom kan gevonden worden door de hoogte van de boom en de diameter van de stam op borsthoogte te meten. Door omgezaagde bomen van een tropische beukensoort te wegen,

hebben onderzoekers de formule $B = 0,035 \cdot \left(\frac{H}{D}\right)^{0,79} \cdot D^{2,98}$ opgesteld.

Hierin is B het bovengrondse gewicht van een boom in kg, H de hoogte in meters en D de diameter van de stam op borsthoogte in cm.

- Vereenvoudig deze formule tot de vorm $B = a \cdot H^b \cdot D^c$.
- Bereken het bovengrondse gewicht van een boom die 26,4 meter hoog is en op borsthoogte een diameter heeft van 43,6 cm.

Om het gewicht van het ondergrondse deel van een boom te bepalen, hebben onderzoekers een flink aantal boomstronken uitgegraven. Van deze boomstronken is het gewicht G in kg bepaald en was, voordat de bomen werden omgekapt, ook hun diameter D op borsthoogte gemeten. In de figuur hiernaast is $\log(G)$ uitgezet tegen $\log(D)$. Gebruik bij de volgende vragen de lijn in de figuur.



- Bereken de diameter op borsthoogte van de stam van een boom met een ondergronds gewicht van 150 kg.

Bij de lijn hoort de formule $\log(G) = 2,1 \cdot \log(D) - 1,2$.

- Toon dit aan.

Een vliegvakantie naar Bali levert een uitstoot van 2700 kg CO_2 per passagier op. Om deze uitstoot te compenseren, wil een toerist tropische beuken laten planten die 14 meter hoog worden en een diameter op borsthoogte van 17 cm krijgen. Neem aan dat het gewicht van een boom voor 33% uit koolstof bestaat en dat hiervoor 3,67 keer zoveel kg CO_2 uit de atmosfeer is gehaald.

- Onderzoek met de formule van vraag d hoeveel tropische beuken de toerist moet laten planten om zijn CO_2 -uitstoot te compenseren.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan logaritmische en exponentiële vergelijkingen algebraïsch oplossen.

► OPGAVE C5, C6
THEORIE A

☐ Ik kan variabelen vrijmaken bij logaritmische en exponentiële formules.

► OPGAVE C7
THEORIE B

☐ Ik kan werken met logaritmische formules op de GR.

► OPGAVE C8
THEORIE C

☐ Ik kan werken met assenstelsels waarbij langs assen logaritmen staan.

► OPGAVE C9
THEORIE D

C5 Los exact op.

a ${}^2\log(x - 5) = 3$

b ${}^5\log(2x) + 1 = 0$

c $5 \cdot {}^3\log(2x + 1) = 10$

C6 Los exact op.

a $5^x + 2 = 11$

c $3^{x+1} = 9$

e $5 \cdot 2^{3x} = 50$

b $3^{x+1} = 10$

d $7 + 2^{x-1} = 13$

f $41 - 6^{3x} = 5$

C7 **a** Maak x vrij bij $y = 5 + 2^{x-3}$.

b Druk t uit in N bij $N = -3 + {}^2\log(t - 4)$.

C8 Gegeven is de formule $\log(N) = {}^3\log(t) - 1,7$.

Bereken N voor $t = 43$ en bereken t voor $N = 85$.

Rond af op één decimaal.

C9 In de figuur hiernaast is $\log(M)$ uitgezet tegen t .

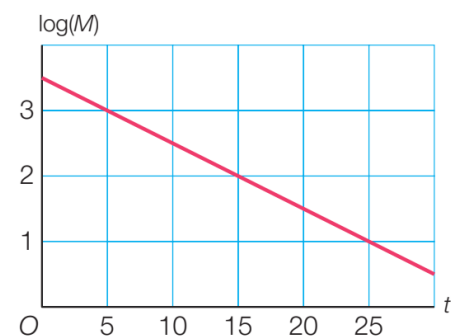
a Bereken M bij $t = 10$. Rond af op gehelen.

b Bereken t bij $M = 32$. Rond af op gehelen.

c De formule van de lijn is van de vorm

$\log(M) = pt + q$.

Bereken exact p en q .



Antwoorden

C5 **a** $x = 13$

b $x = \frac{1}{10}$

c $x = 4$

C6 **a** $x = {}^5\log(9)$

c $x = 1$

e $x = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(10)$

b $x = -1 + {}^3\log(10)$

d $x = 1 + {}^2\log(6)$

f $x = \frac{2}{3}$

C7 **a** $x = 3 + {}^2\log(y - 5)$

b $t = 4 + 2^{N+3}$

C8 $N \approx 52,9$ en $t \approx 53,9$

C9 **a** $M \approx 316$

b $t \approx 20$

c $p = -\frac{1}{10}$ en $q = 3\frac{1}{2}$

9.3 Rekenregels voor logaritmen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de rekenregels voor logaritmen gebruiken bij het herleiden van logaritmen.
- Je kunt de rekenregels voor logaritmen gebruiken bij het algebraïsch oplossen van logaritmische vergelijkingen.
- Je kunt de rekenregels voor exponenten en de rekenregels voor logaritmen gebruiken bij transformaties van grafieken.

O56



Onderzoek met de GR welke van de volgende beweringen waar zijn.

I $\log(8) \cdot \log(3) = \log(24)$

V $4 \cdot {}^3\log(5) = {}^3\log(5^4)$

II $\log(8) + \log(3) = \log(24)$

VI $4 \cdot {}^3\log(5) = ({}^3\log(5))^4$

III ${}^2\log(15) - {}^2\log(3) = {}^2\log(5)$

VII ${}^6\log(7) = \frac{\log(6)}{\log(7)}$

IV $\frac{{}^2\log(15)}{{}^2\log(3)} = {}^2\log(5)$

VIII ${}^6\log(7) = \frac{\log(7)}{\log(6)}$

Theorie A Rekenregels en herleiden

Je hebt geleerd dat uit ${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$.

Substitutie van $y = {}^g\log(x)$ in $x = g^y$ geeft $g^{{}^g\log(x)} = x$.

Deze laatste formule wordt in het informatief op bladzijde 34 gebruikt om de **rekenregels voor logaritmen** te bewijzen.

- ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$
- ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$
- ${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$

Deze rekenregels kun je gebruiken bij het herleiden van logaritmen.

Zo is

- ${}^3\log(5) + {}^3\log(10) = {}^3\log(5 \cdot 10) = {}^3\log(50)$
- $3 \cdot {}^2\log(6) - {}^2\log(9) = {}^2\log(6^3) - {}^2\log(9) = {}^2\log\left(\frac{216}{9}\right) = {}^2\log(24)$
- $4 - 3 \cdot \log(2) = \log(10\,000) - \log(2^3) = \log\left(\frac{10\,000}{8}\right) = \log(1250).$

De regel ${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(ab)$ gebruik je van rechts naar links om de formule $y = \log(500x)$ te herleiden tot de vorm $y = a + \log(bx)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel.

Dat gaat als volgt.

$$y = \log(500x) = \log(100 \cdot 5x) = \log(100) + \log(5x) = 2 + \log(5x)$$

$$\text{Dus } y = 2 + \log(5x).$$

En zo is

$$y = {}^2\log(800x) = {}^2\log(32 \cdot 25x) = {}^2\log(32) + {}^2\log(25x) = 5 + {}^2\log(25x).$$

Voorbeeld

- a** Herleid de formule $K = 3,25 \cdot \log(M) - 0,30$ tot de vorm $K = \log(aM^b)$. Rond a af op twee decimalen.
- b** Herleid de formule $N = {}^2\log(96x^3)$ tot de vorm $N = p + q \cdot {}^2\log(x)$. Rond p af op twee decimalen.

Uitwerking

- a** $K = 3,25 \cdot \log(M) - 0,30$
 $K = \log(M^{3,25}) - \log(10^{0,30})$
 $K = \log\left(\frac{M^{3,25}}{10^{0,30}}\right)$
 $K \approx \log(0,50M^{3,25})$
 Dus $K = \log(0,50M^{3,25})$.
- b** $N = {}^2\log(96x^3)$
 $N = {}^2\log(96) + {}^2\log(x^3)$
 $N \approx 6,58 + 3 \cdot {}^2\log(x)$
 Dus $N = 6,58 + 3 \cdot {}^2\log(x)$.

R57 Zie de theorie op de vorige bladzijde.

□ ⊗ * Onder de rekenregels voor logaritmen staan drie herleidingen van logaritmen met getallen.

- a** Welke van de rekenregels worden in de tweede herleiding gebruikt?
- b** Licht de stap $4 - 3 \cdot \log(2) = \log(10\,000) - \log(2^3)$ van de derde herleiding toe.

Zie de theorie bovenaan deze bladzijde.

- c** Herleid op dezelfde manier de formule $y = {}^2\log(804x)$ tot de vorm $y = a + {}^2\log(bx)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel.

R58 Zie het voorbeeld.

- ⊗ ***
- a** Herleid de formule $K = 3,25 \cdot \log(M) - 0,30$ tot de vorm $K = \log(aM^b)$ waarbij je a afrondt op drie decimalen.
 - b** Herleid de formule $N = {}^2\log(96x^3)$ tot de vorm $N = p + q \cdot {}^2\log(x)$ waarbij je p afrondt op drie decimalen.

Informatief Bewijzen van rekenregels voor logaritmen

- $g^{\text{glog}(a) + \text{glog}(b)} = g^{\text{glog}(a)} \cdot g^{\text{glog}(b)} = a \cdot b = ab = g^{\text{glog}(ab)}$
Dus $\text{glog}(a) + \text{glog}(b) = \text{glog}(ab)$.
- $g^{\text{glog}(a) - \text{glog}(b)} = \frac{g^{\text{glog}(a)}}{g^{\text{glog}(b)}} = \frac{a}{b} = g^{\text{glog}\left(\frac{a}{b}\right)}$
Dus $\text{glog}(a) - \text{glog}(b) = \text{glog}\left(\frac{a}{b}\right)$.
- $g^{p \cdot \text{glog}(a)} = (g^{\text{glog}(a)})^p = a^p = g^{\text{glog}(a^p)}$
Dus $p \cdot \text{glog}(a) = \text{glog}(a^p)$.
- $p^{\text{plog}(g)} \cdot \text{glog}(a) = (p^{\text{plog}(g)})^{\text{glog}(a)} = g^{\text{glog}(a)} = a = p^{\text{plog}(a)}$
Dus $\text{plog}(g) \cdot \text{glog}(a) = \text{plog}(a)$ oftewel $\text{glog}(a) = \frac{\text{plog}(a)}{\text{plog}(g)}$.

59 Herleid tot één logaritme.



- a** ${}^2\log(6) + {}^2\log(10)$ **c** $2 \cdot {}^5\log(3) + {}^5\log\left(\frac{1}{2}\right)$
b ${}^3\log(30) - {}^3\log(6)$ **d** $\log(50) - 2 \cdot \log(5)$

60 Herleid tot één logaritme.



- a** $4 + {}^2\log(3)$ **c** ${}^2\log(12) - {}^3\log(9)$
b $-2 + {}^3\log(72)$ **d** $\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(16) + \frac{1}{2}\log(8)$

61 Herleid tot één logaritme.



- a** $\frac{1}{2}\log(15) - 4 \cdot \frac{1}{2}\log(3)$ **c** $3 - \frac{1}{2}\log(10)$
b $-2 \cdot {}^4\log(6) + {}^4\log(12)$ **d** $\log(500) - {}^5\log(125)$

62 Herleid tot de vorm $y = a + \text{glog}(bx)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel.



- a** $y = \log(600x)$
b $y = {}^2\log(24x)$
c $y = 4 + {}^3\log(54x)$

63 **a** Herleid de formule $P = 1,4 \cdot {}^2\log(Q) + 3$ tot de vorm $P = {}^2\log(aQ^b)$.



- b** Herleid de formule $N = {}^3\log(81x^2)$ tot de vorm $N = p + q \cdot {}^3\log(x)$.
c Herleid de formule $V = 3,5 + {}^5\log(1,2a)$ tot de vorm $V = 3,5 + q \cdot \log(1,2a)$. Rond q af op twee decimalen.

A64 a Herleid de formule $N = 2,3 - 0,7 \cdot \log(Q)$ tot de vorm $N = \log(aQ^b)$.

□ ⊗ * Rond a af op gehelen.

b Herleid de formule $A = \log\left(\frac{150}{B^3}\right)$ tot de vorm $A = p + q \cdot \log(B)$.

Rond p af op twee decimalen.

c Herleid de formule $T = {}^{1,4}\log(8,3t) - 2,7$ tot de vorm $T = p + q \cdot \log(t)$.

Rond p en q af op twee decimalen.

A65 a Schrijf de formule $y = {}^2\log(48x)$ in de vorm $y = 4 + {}^2\log(ax)$.

□ ⊗ * b Schrijf de formule $N = \log(300p) - 1$ in de vorm $N = a + \log(3p)$.

c Schrijf de formule $R = 4 \cdot {}^3\log(54q)$ in de vorm $R = a + b \cdot {}^3\log(2q)$.

d Schrijf de formule $P = {}^2\log(96s) + {}^2\log(48s)$ in de vorm $P = a + b \cdot {}^2\log(3s)$.

A66 a Schrijf de formule $W = 4,5 + 2,6 \cdot {}^2\log(N) - {}^2\log(P)$ in de vorm

***** $W = {}^2\log\left(a \cdot \frac{N^b}{P}\right)$. Rond a af op twee decimalen.

b Schrijf de formule $G = 2 \cdot \log(T) - 1,2 \cdot \log(Q) + 3,2$ in de vorm $G = \log(aT^bQ^c)$. Rond a af op gehelen.

67 a Gegeven zijn de formules $P = {}^2\log(Q)$ en $Q = 10^{0,4R}$.

□ ⊗ De formule van P als functie van R is te schrijven in de vorm

$P = a \cdot R$.

Bereken a . Rond af op twee decimalen.

b Gegeven zijn de formules $A = 5 \cdot {}^3\log(B)$ en $B = \left(\frac{1}{2}\right)^C$.

Door A uit te drukken in C krijg je een formule van de vorm $A = p \cdot C$.

Bereken p . Rond af op twee decimalen.

68 a Gegeven zijn de formules $W = 3 \cdot \log(U)$ en $V = 5 \cdot {}^2\log(U)$.

□ ⊗ * Maak U vrij bij $V = 5 \cdot {}^2\log(U)$ en schrijf de formule van W vervolgens in de vorm $W = a \cdot V$. Rond a af op twee decimalen.

b Gegeven zijn de formules $y = 3 \cdot {}^2\log(z)$ en $x = 2 \cdot {}^5\log(z)$.

Stel de formule van y op van de vorm $y = ax$. Rond a af op twee decimalen.

A69 a Gegeven zijn de formules $y = 4 \cdot {}^5\log(z)$ en $z = 50 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

□ ⊗ * Er geldt $y = ax + b$.

Bereken a en b . Rond af op twee decimalen.

b Gegeven zijn de formules $F = B \cdot {}^3\log(A)$ en $R = 2,5 \cdot {}^2\log(A)$.

Er geldt $F = c \cdot B \cdot R$.

Bereken c . Rond af op twee decimalen.

Los de vergelijking $\log(x) + \log(5) = 2$ exact op door eerst het linkerlid te herleiden tot één logaritme.

Theorie B Rekenregels en vergelijkingen

In opgave 70 heb je de vergelijking $\log(x) + \log(5) = 2$ exact opgelost door het linkerlid tot één logaritme te herleiden en vervolgens te gebruiken dat ${}^s\log(B) = A$ geeft $B = g^A$.

Soms is het handiger om toe te werken naar de vorm ${}^s\log(A) = {}^s\log(B)$.

Je gebruikt dan:

${}^s\log(A) = {}^s\log(B)$ geeft $A = B$

Zo los je de vergelijking ${}^3\log(8x) - {}^3\log(2) = {}^3\log(x + 1)$ als volgt op.

$${}^3\log(8x) - {}^3\log(2) = {}^3\log(x + 1)$$

$${}^3\log\left(\frac{8x}{2}\right) = {}^3\log(x + 1)$$

$${}^3\log(4x) = {}^3\log(x + 1)$$

$${}^s\log(A) = {}^s\log(B) \text{ geeft } A = B$$

$$4x = x + 1$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Controleer bij het oplossen van logaritmische vergelijkingen of de gevonden waarden van x aan de oorspronkelijke vergelijking voldoen. Het is daarvoor voldoende om na te gaan of de logaritmen voor de gevonden waarden bestaan.

Voorbeeld

Los de vergelijking ${}^3\log(x - 2) = 1 - {}^3\log(x - 4)$ exact op.

Uitwerking

$${}^3\log(x - 2) = 1 - {}^3\log(x - 4)$$

$${}^3\log(x - 2) + {}^3\log(x - 4) = 1$$

$${}^3\log((x - 2)(x - 4)) = 1$$

$${}^3\log(x^2 - 6x + 8) = 1$$

$${}^s\log(B) = A \text{ geeft } B = g^A$$

$$x^2 - 6x + 8 = 3$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 5$$

$$x = 1 \text{ voldoet niet, dus } x = 5.$$

- a** Welke rekenregel voor logaritmen wordt in de theorie gebruikt bij het oplossen van de vergelijking ${}^3\log(8x) - {}^3\log(2) = {}^3\log(x + 1)$?
- b** Licht toe waarom in het voorbeeld $x = 1$ niet voldoet.

72 Los exact op.



- a ${}^3\log(4x) + {}^3\log(5) = 2$
- b ${}^4\log(x) + {}^4\log(3) = {}^4\log(x + 1)$
- c ${}^3\log(2x) = 1 + {}^3\log(x - 1)$
- d ${}^2\log(x + 6) = 4 - {}^2\log(x)$

A73 Los exact op.

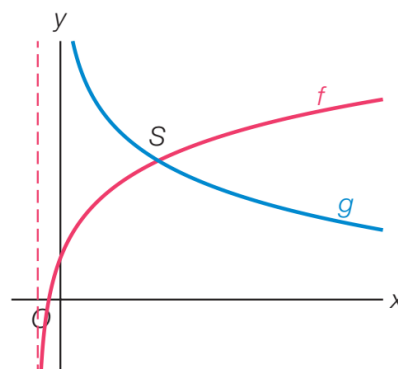


- a $\log(4x - 30) + \log(x) = 2$
- b ${}^4\log(3x + 4) = 3 - {}^4\log(x)$
- c $\frac{1}{2}\log(x - 2) + 3 + \frac{1}{2}\log(x) = 0$
- d ${}^4\log(x) + {}^4\log(x - 1) = {}^4\log(x + 3)$

A74 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^2\log(3x + 2)$ en $g(x) = 3 - {}^2\log(x)$. De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt S . Zie de figuur hiernaast.



- a Los exact op $f(x) \leq 0$.
- b Los exact op $f(x) \leq g(x)$.
- c De lijn $x = 4$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .
Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB . Schrijf het antwoord in de vorm ${}^2\log(b)$.
- d De lijn $x = p$ met $p > x_S$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D .
Bereken exact voor welke waarde van p de lengte van het lijnstuk CD gelijk is aan 1.



O75 Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x+3}$.



- a Bij welke translatie ontstaat de grafiek van f uit die van $y = 2^x$?
- b De grafiek van f ontstaat ook uit die van $y = 2^x$ door de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 8.
Licht dit toe.

Gegeven is de functie $g(x) = {}^2\log(8x)$.

- c Bij welke vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as ontstaat de grafiek van g uit die van $y = {}^2\log(x)$?
- d De grafiek van g ontstaat ook uit die van $y = {}^2\log(x)$ bij de translatie $(0, 3)$.
Licht dit toe.

Theorie C Rekenregels bij transformaties

De grafieken van de standaardfuncties $y = g^x$ en $y = {}^g\log(x)$ zijn standaardgrafieken. Je kent het effect van transformaties op deze standaardgrafieken. Zie het schema op de volgende bladzijde.

transformatie	grafiek	beeldgrafiek
$\times a$ t.o.v. de x -as	$y = g^x$	$y = a \cdot g^x$
	$y = {}^g\log(x)$	$y = a \cdot {}^g\log(x)$
$\times b$ t.o.v. de y -as	$y = g^x$	$y = g^{\frac{1}{b}x}$
	$y = {}^g\log(x)$	$y = {}^g\log(\frac{1}{b}x)$
translatie $(c, 0)$	$y = g^x$	$y = g^{x-c}$
	$y = {}^g\log(x)$	$y = {}^g\log(x-c)$
translatie $(0, d)$	$y = g^x$	$y = g^x + d$
	$y = {}^g\log(x)$	$y = {}^g\log(x) + d$

De translatie $(c, 0)$ is een horizontale verschuiving.
De translatie $(0, d)$ is een verticale verschuiving.

In opgave 75 heb je gezien dat bij de grafiek van $y = 2^x$ de transformaties ‘vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met 8’ en ‘translatie $(-3, 0)$ ’ op hetzelfde neerkomen.

Dit kun je inzien met de rekenregel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

Immers $8 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 2^x = 2^{x+3}$.

Ook zag je in opgave 75 dat bij de grafiek van $y = {}^2\log(x)$ de transformaties ‘translatie $(0, 3)$ ’ en ‘vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{8}$ ’ op hetzelfde neerkomen.

Dit kun je inzien met de rekenregel ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$.

Immers $3 + {}^2\log(x) = {}^2\log(8) + {}^2\log(x) = {}^2\log(8x)$.

Voorbeeld

- Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as levert bij de grafiek van $y = 3^x$ dezelfde beeldgrafiek op als de translatie $(-4, 0)$?
- Welke translatie levert bij de grafiek van $y = {}^3\log(x)$ dezelfde beeldgrafiek op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met 81?

Uitwerking

$$\text{a } y = 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (-4, 0)} y = 3^{x+4}$$

Er geldt $3^{x+4} = 3^x \cdot 3^4 = 81 \cdot 3^x$.

Dus de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 81.

$$\text{b } y = {}^3\log(x) \xrightarrow{\times 81 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} y = {}^3\log(\frac{1}{81}x)$$

Er geldt ${}^3\log(\frac{1}{81}x) = {}^3\log(\frac{1}{81}) + {}^3\log(x) = -4 + {}^3\log(x)$.

Dus de translatie $(0, -4)$.

76

- a Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as levert bij de grafiek van $y = 2^x$ dezelfde beeldgrafiek op als de translatie $(5, 0)$?
- b Welke translatie levert bij de grafiek van $y = 2^x$ dezelfde beeldgrafiek op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met $\frac{1}{2}$?
- c Welke translatie levert bij de grafiek van $y = {}^2\log(x)$ dezelfde beeldgrafiek op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{32}$?
- d Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as levert bij de grafiek van $y = {}^2\log(x)$ dezelfde beeldgrafiek op als de translatie $(0, 4)$?

77

- a De grafiek van de functie g ontstaat uit die van de functie $f(x) = 2^x$ bij de translatie $(-4, 0)$ gevolgd door de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met $\frac{1}{4}$. Het functievoorschrift van g is te schrijven in de vorm $g(x) = a \cdot 2^x$.
Bereken a .
- b De grafiek van de functie k ontstaat uit die van de functie $h(x) = {}^2\log(x)$ bij de translatie $(3, 0)$ gevolgd door de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{4}$. Het functievoorschrift van k is te schrijven in de vorm $k(x) = p + {}^2\log(x + q)$.
Bereken p en q .

78

- a De grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(4x + 12) + 1$ ontstaat uit die van de functie $g(x) = {}^2\log(x)$ door de translatie (a, b) .
Bereken a en b .
- b De grafiek van de functie $h(x) = 9 \cdot 3^x - 5$ ontstaat uit de grafiek van $k(x) = 3^x$ door de translatie (c, d) .
Bereken c en d .
- c De grafiek van de functie $p(x) = \log\left(\frac{100}{x-3}\right)$ ontstaat uit de grafiek van de functie $q(x) = \log(x)$ door een serie transformaties.
Geef zo'n serie transformaties en geef daarbij aan in welke volgorde ze worden toegepast.

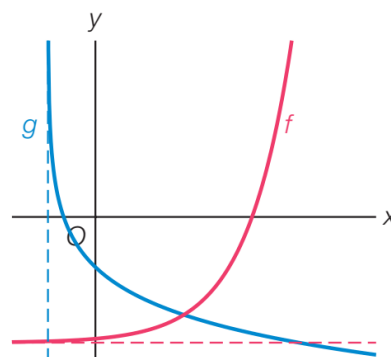
A79

Gegeven zijn de functies $f(x) = (\frac{1}{2})^{3-x} - 4$ en $g(x) = 1 + \frac{1}{2}\log(4x+6)$.

- a** Geef aan door welke translatie de grafiek van f uit die van $y = 2^x$ ontstaat.
- b** Geef aan door welke translatie de grafiek van g uit die van $y = \frac{1}{2}\log(x)$ ontstaat.

In de figuur hiernaast zie je de grafieken van f en g .

- c** De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A en de grafiek van g snijdt de x -as in het punt B .
De afstand van A tot de oorsprong is groter dan de afstand van B tot de oorsprong.
Bereken exact hoeveel keer zo groot.
- d** Los op $f(x) < g(x)$. Rond in het eindantwoord af op één decimaal.
- e** Op de grafiek van g ligt het punt P met $x_P = -\frac{1}{2}$.
De horizontale lijn door P snijdt de grafiek van f in het punt Q . De x -coördinaat van Q kan geschreven worden in de vorm $x = {}^2\log(a)$.
Bereken exact a .

**A80**

- a** De grafiek van de functie $f(x) = (\frac{1}{5})^x$ wordt met a vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie g .
De grafiek van g gaat door het punt $(3, 25)$.
Bereken exact de waarde van a .
- b** De grafiek van de functie $h(x) = {}^2\log(x^2 - 2x + 1)$ wordt over een afstand a naar rechts geschoven.
Bereken exact voor welke waarden van a de beeldgrafiek door het punt $P(3, 0)$ gaat.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de rekenregels voor logaritmen gebruiken bij het herleiden van logaritmen.
- ☐ Ik kan de rekenregels voor logaritmen gebruiken bij het algebraïsch oplossen van logaritmische vergelijkingen.
- ☐ Ik kan de rekenregels voor exponenten en de rekenregels voor logaritmen gebruiken bij transformaties van grafieken.

► OPGAVE C10, C11
THEORIE A

► OPGAVE C12
THEORIE B

► OPGAVE C13
THEORIE C

C10 Herleid tot één logaritme.

- a** $2 \cdot {}^3\log(5) + {}^3\log(2)$ **c** $1 + 2 \cdot \log(3)$
b ${}^6\log(40) - 3 \cdot {}^6\log(2)$ **d** ${}^2\log(56) - {}^3\log(27)$

C11 Herleid tot de vorm $y = a + {}^g\log(bx)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel.

- a** $y = 3 + {}^5\log(500x)$ **b** $y = 8 - {}^3\log(810x)$

C12 Los exact op.

- a** ${}^3\log(x - 5) = {}^3\log(4x) - 2$ **b** ${}^2\log(x - 2) + {}^2\log(x) = 3$

- C13** **a** Welke translatie levert bij de grafiek van $y = 3^x$ dezelfde beeldgrafiek op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met $\frac{1}{9}$?
b Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as levert bij de grafiek van $y = {}^3\log(x)$ dezelfde beeldgrafiek op als de translatie $(0, -3)$?

Antwoorden

- C10** **a** ${}^3\log(50)$ **c** $\log(90)$
 b ${}^6\log(5)$ **d** ${}^2\log(7)$
C11 **a** $y = 6 + {}^5\log(4x)$ **b** $y = 4 - {}^3\log(10x)$
C12 **a** $x = 9$ **b** $x = 4$
C13 **a** translatie $(2, 0)$
 b $\times 27$ t.o.v. de y -as

Kennis- en vaardighedentest

9.1 Groeifactoren en groeipercentages

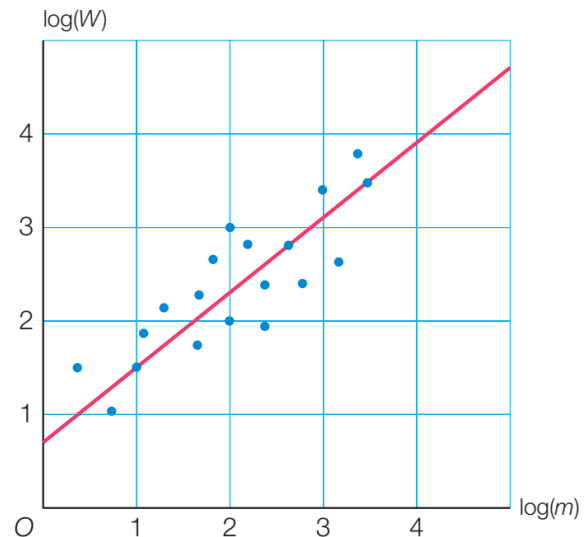
- 1** Astmapatiënten kunnen verlichting krijgen met het medicijn theofylline. Dit medicijn wordt door de lever afgebroken. Een astmapatiënt krijgt een injectie van 60 mg theofylline. De concentratie theofylline C in mg per liter bloed neemt met 15,3% per uur af. De astmapatiënt heeft 5 liter bloed.
- a** Stel de formule van C op. Neem hierin t de tijd in uren.
 - b** Met hoeveel procent is de concentratie afgenomen vier uur na de injectie?
 - c** Na hoeveel minuten is nog 20 mg theofylline in het bloed aanwezig?
- 2** Een hoeveelheid neemt per dag met 10% toe.
- a** Bereken het groeipercentage per week.
 - b** Bereken het groeipercentage per 8 uur.
- Een hoeveelheid neemt per jaar met 36% af.
- c** Hoeveel procent is de afname per maand?
 - d** Hoeveel procent is de afname per 5 jaar?
- 3** Een met helium gevulde ballon loopt langzaam leeg. Drie dagen na het vullen bevat de ballon nog 2500 cm^3 helium en tien dagen later is dat afgenomen tot 1500 cm^3 . Neem aan dat er sprake is van exponentiële afname.
- a** Met hoeveel cm^3 helium werd de ballon gevuld? Rond af op gehelen.
 - b** Hoeveel dagen na het vullen bevat de ballon nog 500 cm^3 helium?
- 4**
- a** Bereken de verdubbelingstijd in jaren bij een toename van 0,2% per maand.
 - b** Bereken de halveringstijd in dagen bij een afname van 20% per week.

9.2 Werken met logaritmen

- 5** Los exact op.
- a** $4 \cdot 3^{2x+1} = 20$
 - c** $4^{x-1} = 2^{x+1}$
 - b** ${}^2\log(3x-5) + 3 = 7$
 - d** ${}^3\log(8x+1) + 2 = 0$
- 6**
- a** Maak t vrij bij de formule $N = 75 - 1,5^{0,4t+3}$.
 - b** Druk A uit in B bij de formule $B = {}^5\log(2A+10) - 3$.
- 7** Onderzoekers hebben voor de levensverwachting bij de geboorte van wereldburgers het model $l = 29 + 23 \cdot \log(t)$ opgesteld. Hierin is l de levensverwachting in jaren en t de tijd in jaren met $t = 10$ in 1960 en $t \geq 10$.
- a** Met hoeveel jaar is de levensverwachting toegenomen in de periode 1965-2015? Rond af op gehelen.
 - b** Schrijf de formule in de vorm $t = 10^{a+b}$. Rond af op vier decimalen.
 - c** In welk jaar zal de levensverwachting voor het eerst 76 jaar zijn?

- 8** In de figuur hiernaast is $\log(W)$ uitgezet tegen $\log(m)$.
Elk punt representeert een zoogdier, m is de lichaamsmassa in kg van een dier, en W is de hoeveelheid drinkwater dat het dier nodig heeft in mL per uur.

- a** Bereken hoeveel mL drinkwater per dag het dier van 10 kg nodig heeft. Rond af op tientallen.
b Hoe zwaar is het dier dat per uur 1 liter water nodig heeft?
c In de figuur is een lijn getekend. De formule van deze lijn is van de vorm $\log(W) = p \cdot \log(m) + q$. Bereken exact p en q .



9.3 Rekenregels voor logaritmen

- 9** Herleid tot één logaritme.

- a** ${}^3\log(5) + 2 \cdot {}^3\log(2)$ **c** ${}^3\log(27) + {}^5\log(2)$
b $3 + {}^2\log(5)$ **d** ${}^2\log(3) - \frac{1}{2}\log(16)$

- 10** Herleid tot de vorm $y = a + {}^s\log(bx)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel.

- a** $y = {}^3\log(405x)$ **b** $y = -1 + {}^5\log(750x)$

- 11** **a** Herleid de formule $y = 7,4 - 1,3 \cdot {}^2\log(5,7x)$ tot de vorm $y = {}^2\log(ax^b)$. Rond af op één decimaal.

- b** Herleid de formule $N = 2 \cdot {}^3\log(18t^{-1,4})$ tot de vorm $N = p + q \cdot \log(t)$. Rond af op twee decimalen.

- 12** **a** Gegeven zijn de formules $K = 2 \cdot {}^8\log(L)$ en $L = (\frac{1}{3})^M$. Schrijf de formule van K in de vorm $K = p \cdot M$. Rond p af op twee decimalen.

- b** Gegeven zijn de formules $F = -{}^5\log(E)$ en $G = 2 \cdot {}^3\log(E)$. Schrijf de formule van F in de vorm $F = a \cdot G$. Rond a af op twee decimalen.

- 13** Los exact op.

- a** ${}^3\log(2x) + 4 = {}^3\log(150x + 6)$ **b** ${}^2\log(x) = 3 - {}^2\log(x + 2)$

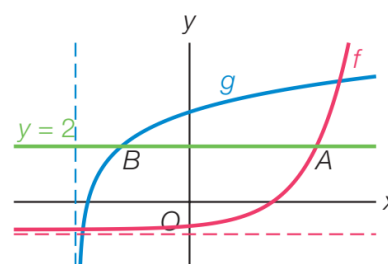
- 14** **a** Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as levert bij de grafiek van $y = {}^5\log(x)$ dezelfde beeldgrafiek op als de translatie $(0, 2)$?

- b** Welke translatie levert bij de grafiek van $y = 10^x$ dezelfde beeldgrafiek op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 1000?

Gemengde opgaven

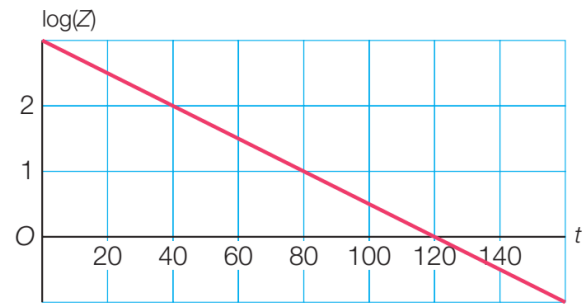
- 1** Wit licht is een mengsel van de kleuren van de regenboog. Gaat wit licht door water, dan worden de verschillende kleuren licht met verschillende percentages per meter geabsorbeerd waardoor het licht van kleur lijkt te veranderen. Van rood licht wordt per meter 60% geabsorbeerd en van blauw licht 10%.
- a** Bereken algebraïsch voor rood en voor blauw licht op welke diepte nog 50% van de oorspronkelijke hoeveelheid licht zichtbaar is. Rond af op gehele cm.
 - b** Bereken op welke diepte de hoeveelheid blauw licht tien keer zo groot is als de hoeveelheid rood licht. Neem aan dat de hoeveelheden boven water gelijk zijn en rond af op gehele cm.
 - c** De kleur van een vis is van dichtbij niet meer waarneembaar als de kleur voor meer dan 90% is geabsorbeerd.
Van een rode en een blauwe vis zijn van dichtbij de kleuren net niet meer waarneembaar.
Bereken algebraïsch hoeveel keer zo diep de blauwe vis zwemt als de rode vis. Rond af op één decimaal.

- 2** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x-3} - 1$ en $g(x) = {}^3\log(3x + 12)$. De lijn $y = 2$ snijdt de grafieken van f en g in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.
- a** Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB .
 - b** Los op $f(x) < g(x)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
 - c** Bereken door welke translatie de grafiek van g ontstaat uit de grafiek van $y = {}^3\log(x)$.
 - d** De grafiek van f wordt ten opzichte van de x -as met a vermenigvuldigd waarbij de beeldgrafiek door het punt $C(0, 7)$ gaat.
Bereken exact a .



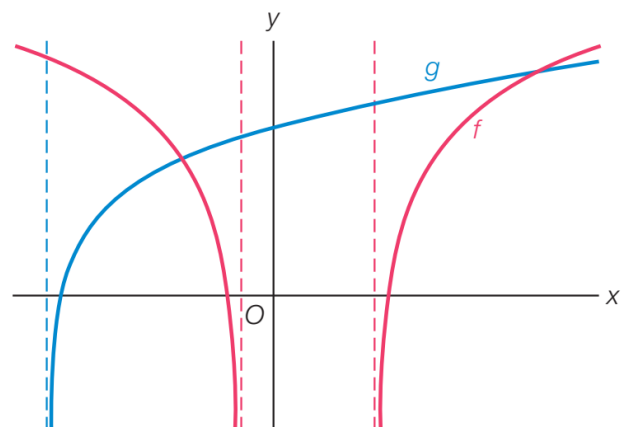
- 3** Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x^2 - 2x - 1} - 4$.
- a** Los exact op $f(x) < 0$.
 - b** De grafiek van f wordt ten opzichte van de y -as met a vermenigvuldigd waarbij de beeldgrafiek door het punt $A(5, -3\frac{1}{2})$ gaat.
Bereken exact a .
 - c** De grafiek van f wordt zo verschoven dat de beeldgrafiek de x -as raakt in de oorsprong.
Stel de formule op van de beeldgrafiek. Herleid de formule zo ver mogelijk.
 - d** De grafiek van f wordt p naar links verschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{x^2} - 4$.
Bereken exact p .

- 4** Een volledig gevulde opslagtank met een inhoud van 2000 liter bevat een oplossing die voor 50% uit water en voor 50% uit een zuur bestaat. Bovenin de tank stroomt schoon water de tank in. Met dezelfde snelheid wordt onderin de tank het mengsel afgetapt. Door dit proces wordt de tank geleidelijk schoongespoeld. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $\log(Z)$ als functie van t . Hierin is Z het aantal liter zuur in de tank op tijdstip t met t in seconden.



- Hoeveel liter zuur bevat de tank na 60 seconden?
- Stel de formule van Z op en bereken met welke snelheid de hoeveelheid zuur in de tank na 2 minuten afneemt. Geef het antwoord in liters per minuut en rond af op één decimaal.
- Bereken algebraïsch de halveringstijd van het aantal liter zuur in de tank. Geef je antwoord in gehele seconden.
- Bereken algebraïsch na hoeveel seconden de inhoud van de tank nog maar voor 0,1% uit zuur bestaat. Rond af op gehelen.

- 5** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(x^2 - 2x - 3)$ en $g(x) = 1 + {}^3\log(x + 7)$. Zie de figuur hiernaast.



- De grafiek van g snijdt de asymptoten van de grafiek van f in de punten A en B met $x_A < x_B$.
Er geldt $y_B - y_A = {}^3\log(p)$.
Bereken exact p .
- Los exact op $f(x) \leq g(x)$.
- Welke waarden neemt $g(x)$ aan voor $x \leq 5$? Geef een exact antwoord.
- De grafieken van f en g snijden van de lijn $x = -4$ het lijnstuk CD af. Bereken exact de lengte van CD . Schrijf het antwoord in de vorm $CD = a + {}^3\log(b)$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.
- De lijn $y = 3$ snijdt de grafiek van f in de punten E en F . Bereken exact de lengte van het lijnstuk EF . Schrijf het antwoord in de vorm $EF = r\sqrt{s}$ met s een zo klein mogelijk geheel getal.
- De lijn $y = \frac{1}{4}x + 2$ snijdt de grafiek van g in de punten G en H . Bereken in drie decimalen de lengte van het lijnstuk GH .



10

Meetkundige berekeningen

De Pico del Teide op Tenerife is de hoogste berg van de Canarische Eilanden en van heel Spanje.

Als je bij helder weer op de 3718 meter hoge berg staat, kun je heel ver kijken.

Maud staat op een stralende dag bovenop de Teide en vraagt zich af hoe groot de afstand tot de horizon is.

Bereken deze afstand. Gebruik dat de straal van de aarde 6378 km is.

10.1 Hoeken en lijnstukken

Kennis en vaardigheden

- Je kunt met de goniometrische verhoudingen hoeken en lijnstukken berekenen waarbij je een onbekende lengte x stelt.
- Je kunt met de sinusregel en de cosinusregel hoeken en lijnstukken berekenen.

Voorkennis Goniometrische verhoudingen

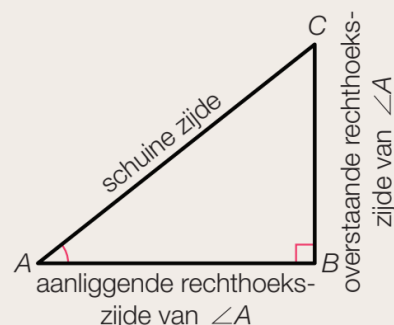
Voor het berekenen van hoeken en lijnstukken in rechthoekige driehoeken kun je de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens gebruiken.

In de rechthoekige driehoek ABC in de figuur hiernaast is

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{AB}{AC}$$

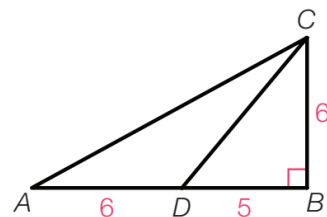
$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A} = \frac{BC}{AB}$$



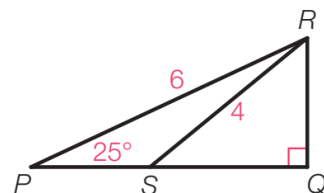
Afspraak

In dit hoofdstuk bereken je hoeken in graden. Rond daarbij het eindantwoord af op één decimaal, tenzij anders wordt gevraagd. Rond niet af in tussenstappen.

- V1** Zie de figuur hiernaast.
Bereken $\angle ACD$.



- V2** Zie de figuur hiernaast.
Bereken $\angle QRS$.

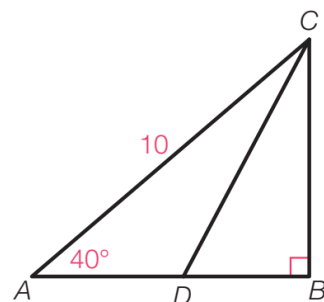


- O1** Zie de figuur hiernaast.
a Bereken AB . Rond af op drie decimalen.

Gegeven is dat $AD = BD + 1$.

- b** Licht toe dat uit dit gegeven volgt
 $AB = 2BD + 1$.

- c** Bereken BD in twee decimalen.

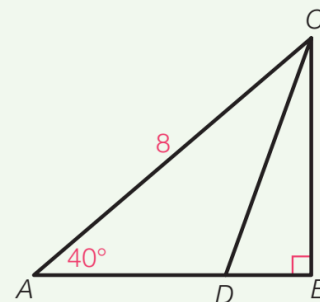


Theorie A Berekeningen met goniometrische verhoudingen

Je hebt geleerd hoe je bij meetkundige problemen lengten van lijnstukken kunt berekenen door een lengte gelijk aan x te stellen. Deze aanpak is ook mogelijk als je met goniometrie te maken hebt. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

In de figuur hiernaast ligt het punt D op de zijde AB waarbij $AD = BD + 2$.
Bereken $\angle BCD$.



Uitwerking

$$\text{In } \triangle ABC \text{ is } \cos(40^\circ) = \frac{AB}{8}$$

$$AB = 8 \cos(40^\circ) = 6,128...$$

Stel $BD = x$, dan is $AD = x + 2$ en $AB = 2x + 2$.

$$2x + 2 = 6,128...$$

$$2x = 4,128...$$

$$x = 2,064...$$

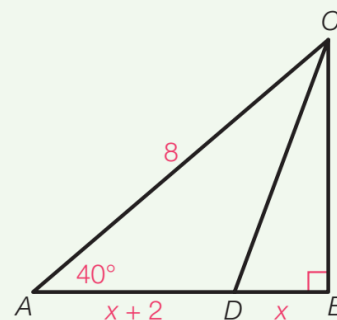
$$\text{Dus } BD = 2,064...$$

$$\text{In } \triangle ABC \text{ is } \sin(40^\circ) = \frac{BC}{8}$$

$$BC = 8 \sin(40^\circ) = 5,142...$$

$$\text{In } \triangle BCD \text{ is } \tan(\angle BCD) = \frac{2,064...}{5,142...}$$

$$\angle BCD \approx 21,9^\circ$$



GESCHIEDENIS	
$8\cos(40)$	6.128355545
Antw-2	4.128355545
Antw/2→R	2.064177773
$8\sin(40)$	5.142300877
$\tan^{-1}(R/\text{Antw})$	21.87108465

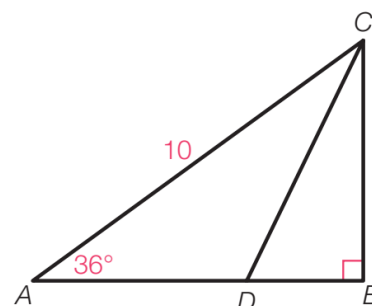
R2 Zie het voorbeeld.

Bereken $\angle ACD$.

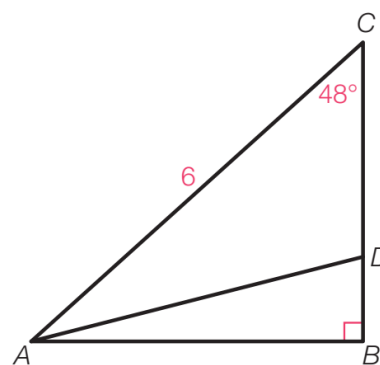
3 In de figuur hiernaast ligt het punt D op de zijde AB

waarbij $AD = BD + 2$.

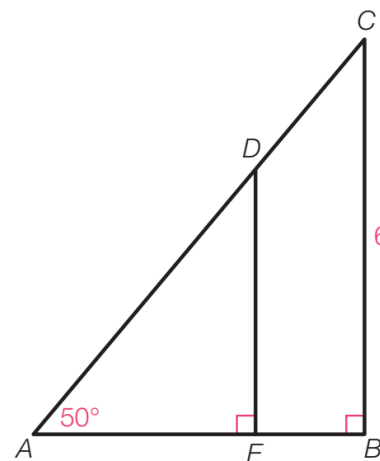
Bereken $\angle ACD$.



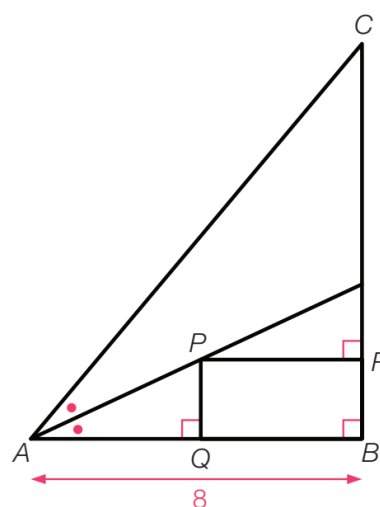
- 4** In de figuur hiernaast ligt het punt D op de zijde BC waarbij $CD = BD + 2$.
 Bereken $\angle CAD$.



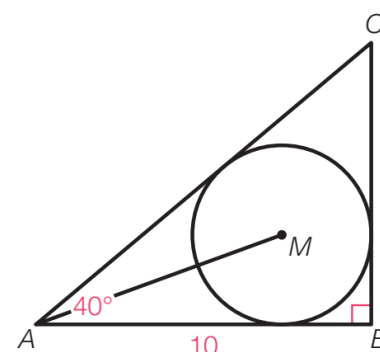
- A5** In de figuur hiernaast ligt het punt D op de zijde AC waarbij $AD = CD + 3$.
 Bereken AE . Rond af op twee decimalen.



- A6** Van $\triangle ABC$ is $AB = 8$ en $\angle BAC = 50^\circ$.
 Het punt P ligt op de bissectrice van $\angle A$ waarbij $PR = 2PQ$. Zie de figuur hiernaast.
 Bereken de lengte van het lijnstuk AP . Rond af op twee decimalen.



- A7** In de rechthoekige driehoek ABC met $AB = 10$ en $\angle A = 40^\circ$ is het punt M het middelpunt van de ingeschreven cirkel. Zie de figuur hiernaast.
 Bereken AM . Rond af op twee decimalen.



M is het snijpunt van de bissectrices van $\triangle ABC$.

Voorkennis De sinusregel en de cosinusregel

Voor het berekenen van hoeken en afstanden in driehoeken die niet rechthoekig zijn, kun je de sinusregel of de cosinusregel gebruiken.

In elke driehoek ABC geldt de sinusregel.

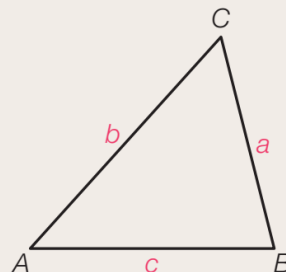
$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}$$

In elke driehoek ABC geldt de cosinusregel.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\angle A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\angle B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\angle C)$$



De sinusregel en de cosinusregel gelden ook in stomphoekige driehoeken.

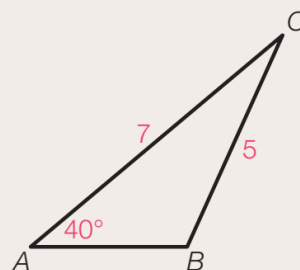
Om de sinusregel te kunnen gebruiken, moet in elk geval een zijde met de overstaande hoek zijn gegeven. Dit is bijvoorbeeld het geval als van driehoek ABC is gegeven dat $\angle A = 40^\circ$, $AC = 7$ en $BC = 5$.

De sinusregel $\frac{BC}{\sin(\angle A)} = \frac{AC}{\sin(\angle B)} = \frac{AB}{\sin(\angle C)}$ geeft dan

$$\frac{5}{\sin(40^\circ)} = \frac{7}{\sin(\angle B)}, \text{ dus } \sin(\angle B) = \frac{7 \sin(40^\circ)}{5}.$$

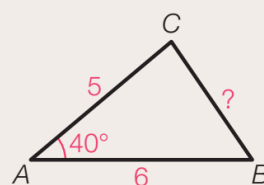
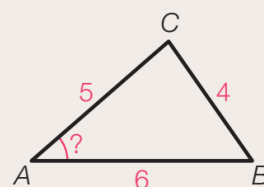
De GR geeft $\angle B \approx 64,1^\circ$. In de figuur zie je dat dit niet klopt, want hoek B is stomp.

Omdat geldt $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$ is $\angle B \approx 180^\circ - 64,1^\circ = 115,9^\circ$.

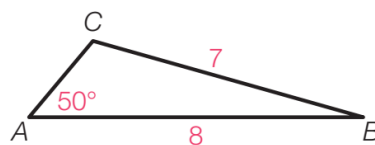


De cosinusregel gebruik je

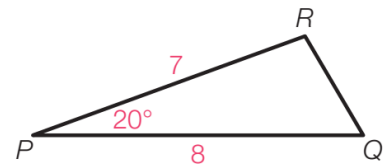
- voor het berekenen van een zijde van een driehoek als twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven
- voor het berekenen van een hoek van een driehoek als de drie zijden zijn gegeven.



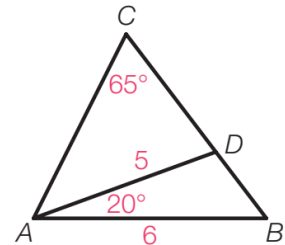
V3 Zie de figuur hiernaast.
Bereken $\angle C$.



- V4** Zie de figuur hiernaast.
Bereken QR . Rond af op twee decimalen.



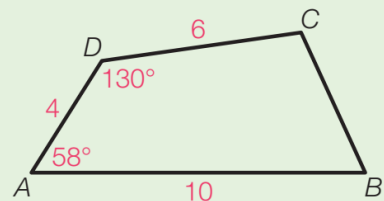
- O8** Zie de figuur hiernaast.
□ ⊗ * Gevraagd wordt de lengte van CD te berekenen.
a Toon met de cosinusregel aan dat $BD = 2,149...$
b Toon met de sinusregel aan dat $\angle B = 52,72...^\circ$.
c Licht toe dat $\angle CAD = 42,27...^\circ$.
d Bereken CD . Rond af op twee decimalen.



Theorie B De sinusregel en de cosinusregel vaker toepassen

In opgave 8 kreeg je te maken met een situatie waarbij de uitwerking uit verschillende stappen bestaat. Het is dan verstandig te bedenken in welke volgorde je deze gaat uitvoeren. We zeggen dan dat je een **stappenplan** gebruikt. Kijk tijdens je uitwerking regelmatig of je het gekozen plan nog volgt en met welke stap van het stappenplan je bezig bent.

Om BC in de figuur hiernaast te berekenen, heb je de sinusregel en/of de cosinusregel vaker nodig om tot het gevraagde antwoord te komen.



Je zou bijvoorbeeld het volgende kunnen bedenken.

- Door de diagonaal BD te tekenen, ontstaat driehoek ABD en van deze driehoek is genoeg bekend om hierin zowel BD als de ontbrekende hoeken te berekenen. Voor het berekenen van BD kun je de cosinusregel gebruiken, en voor het berekenen van de hoeken vervolgens de sinusregel of de cosinusregel.
- Door BD en $\angle ADB$ in driehoek ABD te berekenen en te gebruiken dat $\angle BDC = 130^\circ - \angle ADB$, is van driehoek BCD voldoende bekend om BC te berekenen met de cosinusregel.

Hieruit volgt dan het stappenplan:

- 1 Teken diagonaal BD en bereken in driehoek ABD eerst BD en vervolgens $\angle ADB$.
- 2 Gebruik $\angle BDC = 130^\circ - \angle ADB$ om $\angle BDC$ te berekenen.
- 3 Bereken BC in driehoek BCD .

Voorbeeld

Gegeven is de vierhoek $ABCD$ in de figuur hiernaast.
Bereken BC in twee decimalen.

Uitwerking

De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft

$$BD^2 = 10^2 + 4^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \cos(58^\circ) = 73,60\dots$$

$$BD = 8,57\dots$$

De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft

$$10^2 = 4^2 + 73,60\dots - 2 \cdot 4 \cdot 8,57\dots \cdot \cos(\angle ADB)$$

$$100 = 89,60\dots - 68,63\dots \cdot \cos(\angle ADB)$$

$$68,63\dots \cdot \cos(\angle ADB) = -10,39\dots$$

$$\cos(\angle ADB) = -0,15\dots$$

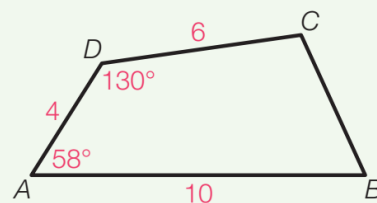
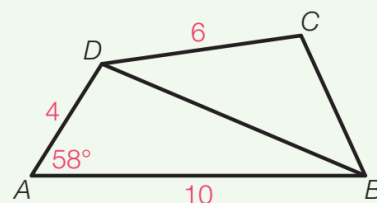
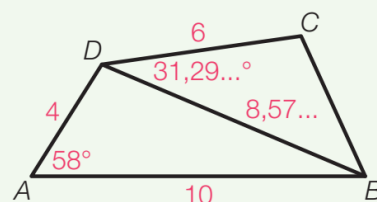
$$\angle ADB = 98,70\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle BDC = 130^\circ - 98,70\dots^\circ = 31,29\dots^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft

$$BC^2 = 73,60\dots + 6^2 - 2 \cdot 8,57\dots \cdot 6 \cdot \cos(31,29\dots^\circ) = 21,62\dots$$

$$BC \approx 4,65$$



R9 Zie het voorbeeld.



a In de tweede stap van de uitwerking van het voorbeeld wordt de cosinusregel in $\triangle ABD$ gebruikt om $\angle ADB$ te berekenen.

Je zou hier ook de sinusregel kunnen gebruiken.

Doe dit. Welk probleem ontstaat?

b Bert begint met het tekenen van de diagonaal AC en gebruikt achtereenvolgens de cosinusregel, de sinusregel en de cosinusregel om BC te berekenen.

Waarom is het in dit geval na het gebruik van de sinusregel wel duidelijk welke van de twee hoeken de juiste is?

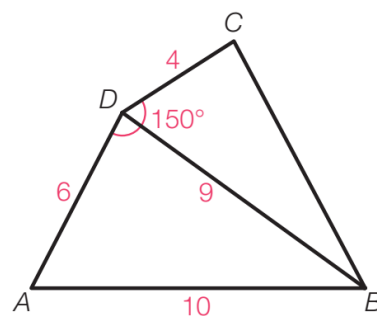
10 In de figuur hiernaast is $\angle ADC = 150^\circ$.



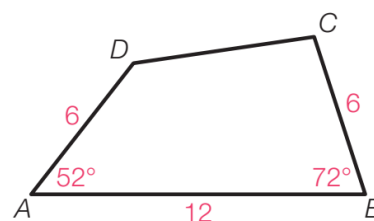
Afgerond op één decimaal is $\angle ADB \approx 80,9^\circ$.

a Bereken $\angle ADB$ in twee decimalen.

b Bereken BC . Rond af op één decimaal.

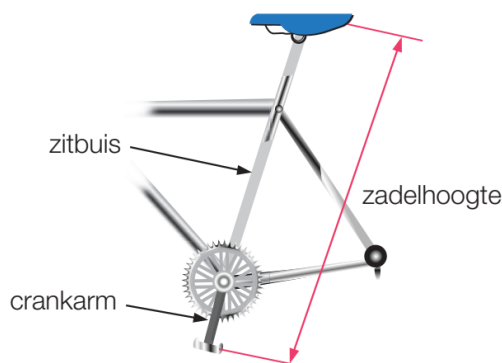


- 11** Gegeven is de vierhoek $ABCD$ in de figuur hiernaast.
 Om $\angle ADC$ te berekenen, kun je een stappenplan maken dat uit vier stappen bestaat.
 Hieronder is van elke stap het begin genoteerd.
 Vul de stappen verder in en bereken daarmee $\angle ADC$.

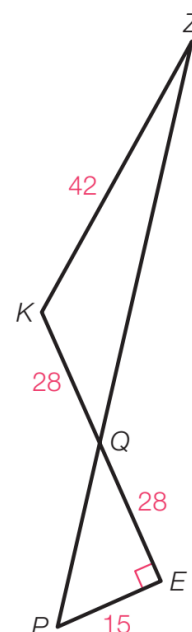


- 1 Teken diagonaal AC en bereken in driehoek
 eerst en vervolgens
- 2 Gebruik om te berekenen.
- 3 Bereken in driehoek ACD .
- 4 Bereken $\angle ADC$ in driehoek ACD .

- A12** Het instellen van de juiste zadelhoogte van een fiets is belangrijk.
 In de figuur hieronder is aangegeven wat er met de zadelhoogte wordt bedoeld.

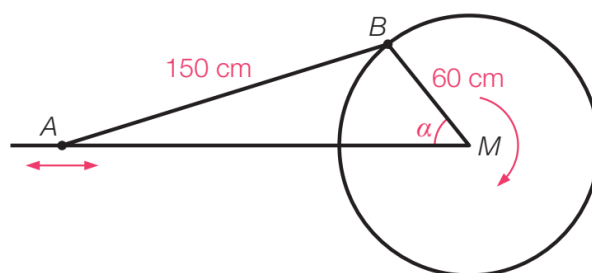


In de figuur hiernaast is de situatie weergegeven van een fietser met een lengte van het bovenbeen (afstand KZ) van 42 cm en een lengte van het onderbeen (afstand KE) van 56 cm. Verder is $\angle E = 90^\circ$, $EP = 15$ cm en snijdt de lijn PZ de lijn KE in het punt Q waarbij $KQ = EQ$.



Bereken in cm nauwkeurig de zadelhoogte voor deze fietser.

- A13** Hiernaast is het stangenmechanisme van een stoomtrein schematisch weergegeven.
 Het punt M is het midden van het wiel.
 Van de stang AB is het punt A vrij beweegbaar in horizontale richting en is het punt B scharnierend verbonden met een wiel. Daardoor verandert de afstand tussen A en M .



De lengte van AM hangt af van $\alpha = \angle AMB$.
 De lengte van de stang AB is 150 cm en de diameter van het wiel is 120 cm.
 Bereken in cm welke lengten AM aanneemt als $\alpha < 28^\circ$. Rond in het antwoord zo nodig af op één decimaal.



14 In de figuur hiernaast is een metalen geraamte van een droogmolen getekend. De waslijnen ontbreken. Getekend zijn:

- de verticale drager PQ met de huls H
- de even lange armen HA , HB , HC en HD
- de even lange staven QR , QS , QT en QU .

De punten R , S , T en U hebben dezelfde afstand tot H .

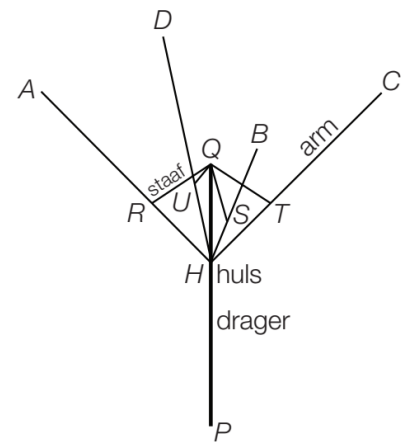
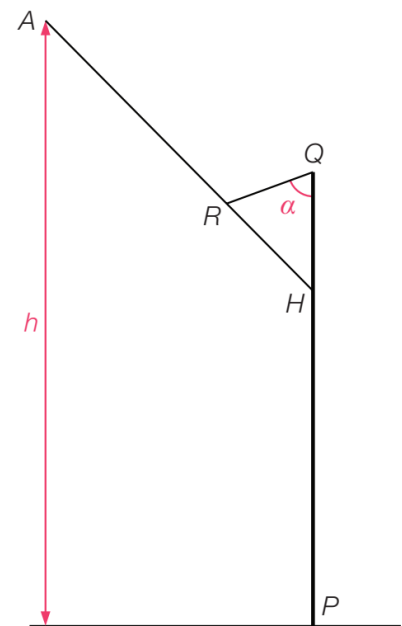
De ringvormige huls H kan schuiven om de drager en op elke hoogte worden vastgeschroefd. De hoogte van H ten opzichte van de grond is dus variabel. Alle overige verbindingen tussen twee onderdelen zijn zo gemaakt dat die onderdelen alleen maar ten opzichte van elkaar kunnen draaien.

Als de huls langs de drager wordt geschoven, verandert de stand van de armen. Daardoor verandert de hoogte van de vrije uiteinden A , B , C en D . Vat in deze opgave drager, armen en staven op als lijnstukken en vat de huls en de overige verbindingen op als punten.

Afmetingen in cm: $PQ = 200$, $QR = 40$, $AR = 120$ en $HR = 60$.

De hoek die de staaf QR maakt met de drager PQ noemen we α . De hoogte in cm van het vrije uiteinde A van de arm HA ten opzichte van de grond noemen we h . Zie de figuur hiernaast.

Bereken h in het geval $\alpha = 80^\circ$. Rond af op gehele cm.

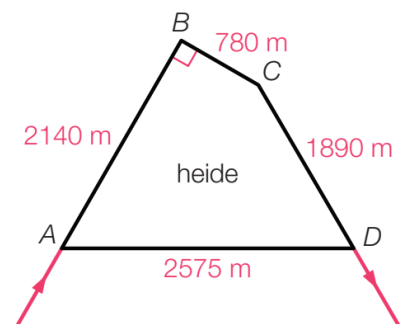


A15 Een gedeelte van de hardlooproute van Jan gaat over de heide. Zie de figuur hiernaast. Hij komt bij A op de heide en loopt dan in een rechte lijn naar de brandtoren B . Daar slaat hij rechtsaf en gaat via C naar D , waar hij de heide weer verlaat.

Soms loopt hij ook wel eens langs de rand van de heide rechtstreeks van A naar D . Dan loopt hij 2235 meter minder.

Hij kan ook nog een tussenroute nemen. Dan loopt hij in een rechte lijn van het punt P dat precies halverwege AB ligt, naar het punt Q dat zo op AD ligt dat $DQ = 275$ meter.

Bereken hoeveel meter Jan minder loopt via de route $APQD$ dan via de route $ABCD$.



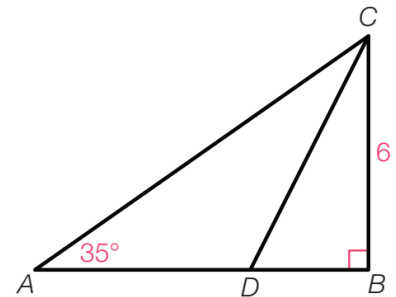
Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan met de goniometrische verhoudingen hoeken en lijnstukken berekenen waarbij ik een onbekende lengte x stel.
- ☐ Ik kan met de sinusregel en de cosinusregel hoeken en lijnstukken berekenen.

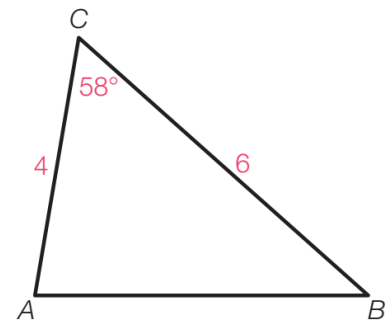
► OPGAVE C1
THEORIE A

► OPGAVE C2
THEORIE B

- C1** In de figuur hiernaast ligt het punt D op de zijde AB waarbij $AD = BD + 1\frac{1}{2}$.
Bereken $\angle ACD$.



- C2** Zie de figuur hiernaast.
Bereken $\angle A$.



Antwoorden

C1 $\angle ACD \approx 24,5^\circ$

C2 $\angle A \approx 80,8^\circ$

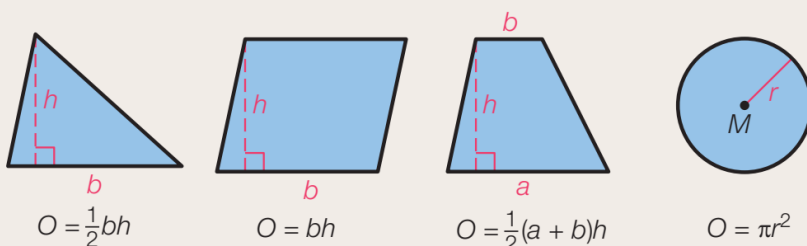
10.2 Omtrek en oppervlakte

Kennis en vaardigheden

- Je kunt omtrekken en oppervlakten berekenen van meetkundige figuren.
- Je kunt omtrekken en oppervlakten berekenen in situaties waarin je met grafieken van functies hebt te maken.

Voorkennis Oppervlakteformules

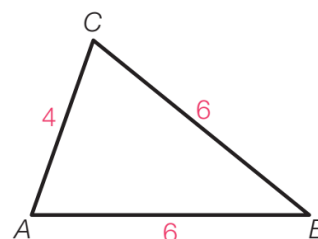
Hieronder worden de oppervlakteformules van de basisfiguren driehoek, parallellogram, trapezium en cirkel herhaald.



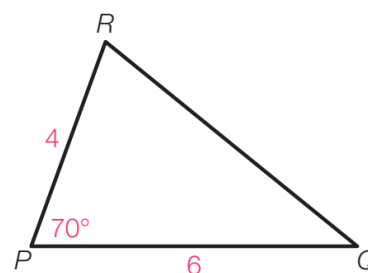
Verder ken je de formule voor de omtrek van een cirkel.

omtrek cirkel = $2\pi r$, met r de straal van de cirkel.

- V5** a Bereken de oppervlakte van de gelijkbenige driehoek ABC in de figuur hiernaast. Rond af op twee decimalen.



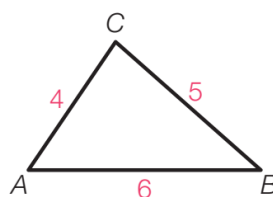
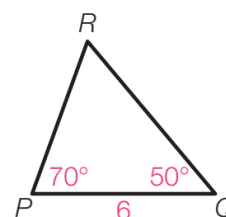
- b Bereken de oppervlakte van driehoek PQR in de figuur hiernaast. Rond af op twee decimalen.



O16



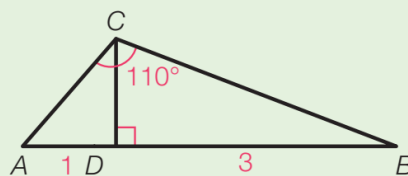
- a Bereken de oppervlakte van driehoek ABC in de figuur hiernaast. Bereken daartoe eerst $\angle A$. Rond het eindantwoord af op twee decimalen.
- b Bereken de oppervlakte van driehoek PQR in de figuur hiernaast. Bereken daartoe eerst de lengte van zijde PR . Rond het eindantwoord af op twee decimalen.



Theorie A Omtrek en oppervlakte van meetkundige figuren

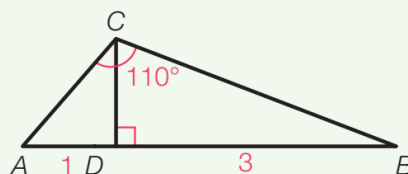
In het voorbeeld wordt van $\triangle ABC$ hiernaast de oppervlakte berekend. Daarbij is het volgende stappenplan gebruikt.

- 1 Stel $\angle ACD = x$ met x in graden en druk hiermee de lengte van CD uit in x .
- 2 Bedenk dat $\angle BCD = 110^\circ - x$ en druk hiermee de lengte van CD uit in x .
- 3 Stel een vergelijking op en los deze op. Je krijgt de lengte van CD .
- 4 Gebruik de lengte van CD om $O(\triangle ABC)$ te berekenen.



Voorbeeld

In $\triangle ABC$ hiernaast is $\angle ACB = 110^\circ$. Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$. Rond af op twee decimalen.



Uitwerking

Stel $\angle ACD = x$ met x in graden.

In $\triangle ACD$ is $\tan(x) = \frac{1}{CD}$, dus $CD = \frac{1}{\tan(x)}$.

Uit $\angle ACD = x$ volgt $\angle BCD = 110^\circ - x$.

In $\triangle BCD$ is $\tan(110^\circ - x) = \frac{3}{CD}$, dus $CD = \frac{3}{\tan(110^\circ - x)}$.

Los op $\frac{1}{\tan(x)} = \frac{3}{\tan(110^\circ - x)}$.

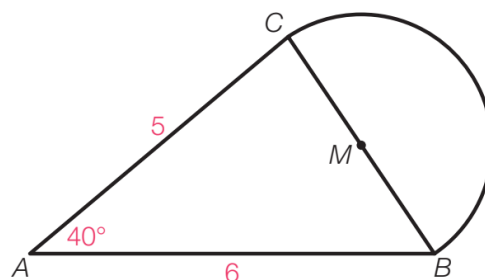
Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $CD = 1,150\dots$

$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,150\dots \approx 2,30$

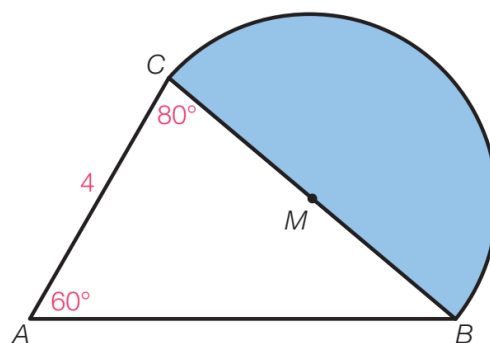
R17 Zie het voorbeeld.

□ ⊗ * Bereken $\angle ACD$ en CD . Geef $\angle ACD$ in één decimaal en CD in vier decimalen.

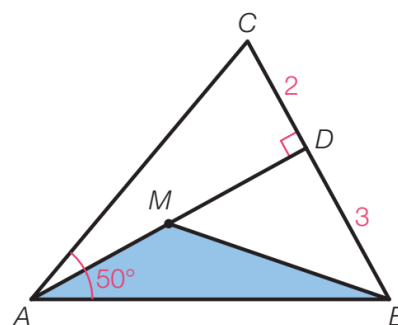
18 In de figuur hiernaast is M het middelpunt van de halve cirkel met middellijn zijde BC van $\triangle ABC$. Bereken de oppervlakte van de halve cirkel. Rond af op twee decimalen.



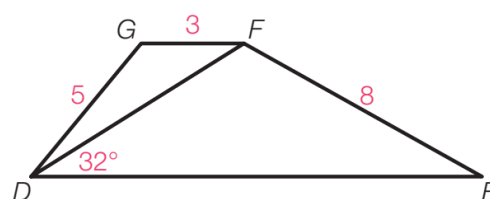
- 19** In de figuur hiernaast is M het middelpunt van de halve cirkel met middellijn zijde BC van $\triangle ABC$. Bereken de omtrek van het blauwe gebied. Rond af op twee decimalen.



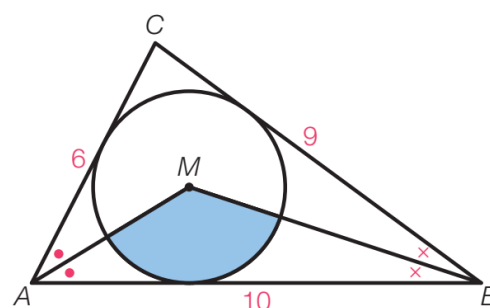
- 20** In driehoek ABC in de figuur hiernaast is $\angle A = 50^\circ$. Het punt M is het midden van de hoogtelijn AD . Bereken de oppervlakte van driehoek ABM . Rond af op twee decimalen.



- A21** Gegeven is het trapezium $DEFG$ in de figuur hiernaast met $EF = 8$, $FG = 3$ en $DG = 5$. Verder is $\angle EDF = 32^\circ$. Bereken de oppervlakte van $DEFG$. Rond af op twee decimalen.



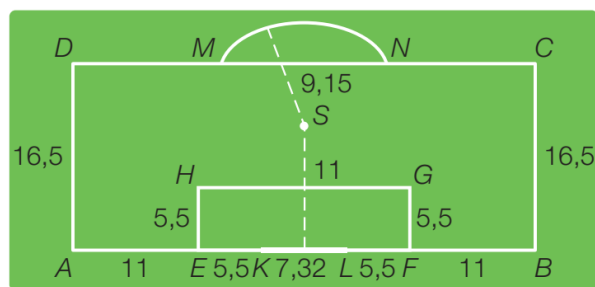
- A22** In de figuur hiernaast is het punt M het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC . Bereken de oppervlakte van de blauwe sector. Rond af op twee decimalen. Gebruik dat M het snijpunt van de bissectrices van de driehoek is.



A23



In de figuur hiernaast zie je een schematische tekening van het bovenaanzicht van een gedeelte van een voetbalveld. De afmetingen zijn in meters. Rechthoek $ABCD$ is het strafschopgebied. Punt S is de strafschopstip. Op het strafschopgebied bevindt zich een cirkelboog waarvan alle punten zich op een afstand van 9,15 meter van S bevinden. De eindpunten M en N van deze cirkelboog liggen op het lijnstuk CD . Rechthoek $EFGH$ is het doelgebied, K en L zijn de doelpalen en KL is de doellijn. De strafschopstip S bevindt zich op een afstand van 11 meter van het midden van de doellijn.



In deze opgave verwaarlozen we de dikte van de doelpalen, de lijndikte en de afmetingen van de strafschopstip en van de bal.

- a** De terreinknecht van een voetbalvereniging gaat alle niet-gestippelde lijnen van het gedeelte van het voetbalveld in de figuur hierboven kalken.

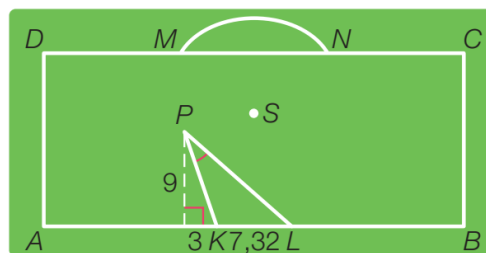
Bereken hoeveel meter hij gaat kalken. Rond af op twee decimalen.

Voor een speler die probeert te scoren, is zowel zijn afstand tot de achterlijn als zijn positie ten opzichte van het doel van belang.

In de figuur hiernaast bevindt speler P zich 9 meter van de achterlijn en 3 meter links van het doel. Hoek KPL noemen we de *schothoek*.

Bereken in graden nauwkeurig

- b** de schothoek in de figuur hiernaast
c de grootste mogelijke schothoek die een speler kan hebben als hij zich op 9 meter van de achterlijn bevindt
d de schothoek van een speler die zich op 14,5 meter van doelpaal K en op 17 meter van doelpaal L bevindt.



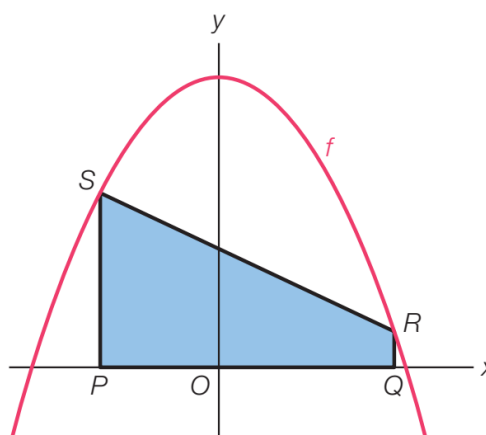
O24



In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = 10 - x^2$ met het trapezium $PQRS$. De punten P en Q liggen op de x -as en de punten R en S liggen op de grafiek van f . Er geldt $x_P = x_S = -2$ en $x_Q = x_R = 3$.

De oppervlakte van $PQRS$ is $17\frac{1}{2}$.

- a** Bewijs dit.
b Bereken de omtrek van $PQRS$. Rond af op twee decimalen.



Theorie B Omtrek en oppervlakte bij grafieken van functies

Om bij grafieken van functies omtrekken en oppervlakten te berekenen, gebruik je het functievoorschrift om lengten van lijnstukken te berekenen. Het kan ook voorkomen dat je de afgeleide nodig hebt, omdat je de formule van een raaklijn nodig hebt. Zie het voorbeeld.

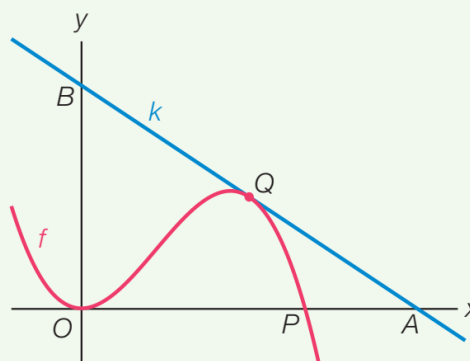
Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -x^3 + 4x^2$.

De grafiek van f raakt de x -as in de oorsprong en snijdt de x -as in het punt P . De lijn k raakt de grafiek van f in het punt Q met $x_Q = 3$ en snijdt de assen in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.

Er geldt $O(\triangle OAB) = c \cdot O(\triangle OPQ)$.

Bereken exact de waarde van c .



Uitwerking

$$f(x) = 0 \text{ geeft } -x^3 + 4x^2 = 0$$

$$x^2(-x + 4) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 4$$

Dus $P(4, 0)$.

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 \text{ geeft } f'(x) = -3x^2 + 8x$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(3) = -3 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = -3$$

$$y = -3x + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = 9, \text{ dus } Q(3, 9) \\ y = -3x + b \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 3 + b = 9 \\ b = 18 \end{array}$$

Dus $k: y = -3x + 18$.

k snijden met de assen geeft de punten $A(6, 0)$ en $B(0, 18)$,

$$\text{dus } O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 18 = 54.$$

$$\text{Uit } P(4, 0) \text{ en } Q(3, 9) \text{ volgt } O(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 18.$$

$$\text{Dus } c = \frac{54}{18} = 3.$$

25 Zie het voorbeeld.



De omtrek van driehoek OAB is a keer zo groot als de omtrek van driehoek OPQ .

Bereken a . Rond af op twee decimalen.

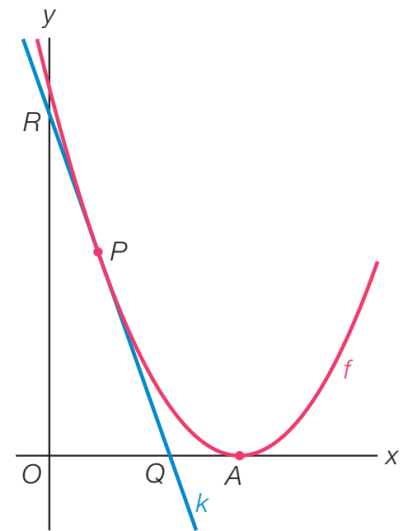
26 Gegeven is de functie $f(x) = (x - 4)^2$.



De grafiek van f raakt de x -as in het punt A .

De lijn k raakt de grafiek van f in het punt P met $x_P = 1$, snijdt de x -as in het punt Q en de y -as in het punt R . Zie de figuur hiernaast.

Onderzoek algebraïsch of geldt $O(\triangle OAP) = O(\triangle OQR)$.



27 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x(x-2)(x-5)$.



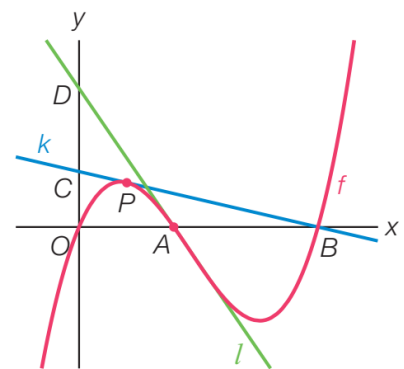
De grafiek van f snijdt de x -as in de oorsprong en in de punten A en B .

De lijn k raakt de grafiek van f in het punt P met $x_P = 1$ en snijdt de y -as in het punt C . De lijn l raakt de grafiek van f in A en snijdt de y -as in het punt D . Zie de figuur hiernaast.

De lijn k gaat door B .

a Bewijs dit.

b Onderzoek op algebraïsche wijze welke oppervlakte het grootst is: die van driehoek OBC of die van driehoek OAD .



28 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8$.



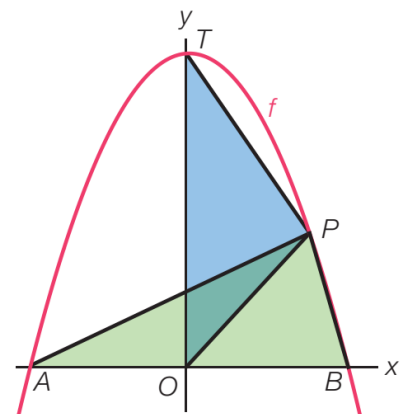
De top van de grafiek van f is het punt T en de grafiek snijdt de x -as in de punten A en B . Het punt P met $x_P = p$ en $0 < p < 4$ ligt op de grafiek van f . We bekijken in deze opgave de oppervlakten van de driehoeken ABP en OPT . Zie de figuur hiernaast.

a Neem $p = 3$ en bereken $O(\triangle ABP)$ en $O(\triangle OPT)$.

Er geldt $O(\triangle ABP) = -2p^2 + 32$.

b Bewijs dit.

c Bereken algebraïsch de waarde van p waarvoor geldt $O(\triangle ABP) = O(\triangle OPT)$. Rond af op twee decimalen.



A29

Op de grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$ ligt het punt P met $x_P = p$ en $0 < p < 6$. Het punt Q is de loodrechte projectie van P op de x -as. De lijn k raakt de grafiek van f in P , snijdt de x -as in het punt A en de y -as in het punt B . Zie de figuur hiernaast.

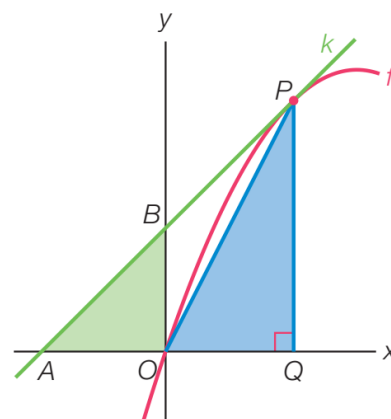
We bekijken in deze opgave de oppervlakten van de driehoeken OAB en OPQ .

- a** Neem $p = 4$ en bereken exact $O(\triangle OAB)$ en $O(\triangle OPQ)$.

Er geldt $A\left(\frac{p^2}{2p-12}, 0\right)$ en $B(0, \frac{1}{4}p^2)$.

- b** Bewijs dit.

- c** Bereken voor welke p geldt dat $O(\triangle OAB) = O(\triangle OPQ)$. Rond af op twee decimalen.

**A30**

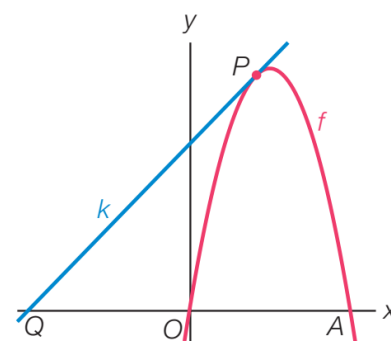
Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 6x$.

De grafiek van f snijdt de x -as in de oorsprong en in het punt A . De lijn k raakt de grafiek van f in het punt P met $x_P = p$ met $0 < p < 3$ en snijdt de x -as in het punt Q . Zie de figuur hiernaast.

Er is een waarde van p waarvoor geldt dat

$$O(\triangle OAP) = O(\triangle OPQ).$$

Licht toe dat hieruit volgt $x_Q = -x_A$ en bereken exact de waarde van p .



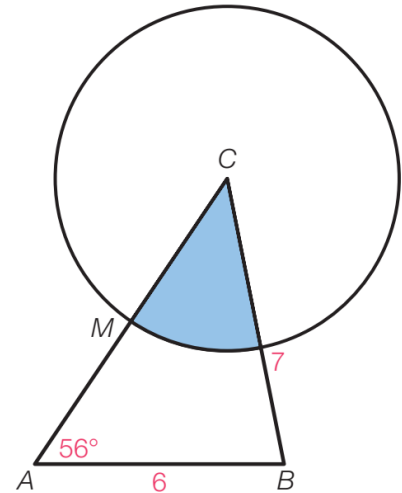
Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan omtrekken en oppervlakten berekenen van meetkundige figuren.
- ☐ Ik kan omtrekken en oppervlakten berekenen in situaties waarin je met grafieken van functies hebt te maken.

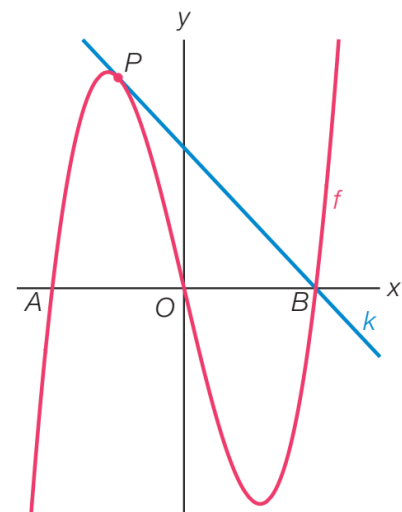
► **OPGAVE C3**
THEORIE A

► **OPGAVE C4**
THEORIE B

- C3** Van driehoek ABC is $AB = 6$, $BC = 7$ en $\angle A = 56^\circ$. Het punt M is het midden van AC . Het punt C is het middelpunt van de cirkel die door M gaat. Zie de figuur hiernaast.
- Bereken de oppervlakte van de blauwe sector. Rond af op twee decimalen.



- C4** De grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 9x$ snijdt de x -as van links naar rechts in de punten A , O en B . De lijn k raakt de grafiek van f in het punt P met $x_P = -1\frac{1}{2}$. Zie de figuur hiernaast.
- De lijn k gaat door het punt B .
- Bewijs dit.
 - Bereken exact de oppervlakte van driehoek OBP .
 - Bereken de omtrek van driehoek OBP . Rond af op twee decimalen.



Antwoorden

- C3** 6,77
- C4** **a** *
- b** $15\frac{3}{16}$
- c** 24,32

10.3 Cirkels en raaklijnen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt een vergelijking opstellen van een cirkel c als het middelpunt van c en de vergelijking van een lijn waaraan c raakt zijn gegeven.
- Je kunt de ligging van een lijn ten opzichte van een cirkel bepalen door de discriminant van een kwadratische vergelijking te gebruiken.

Voorkennis Cirkelvergelijkingen en afstanden

De cirkel c : $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$ is gegeven in de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$. Het middelpunt van de cirkel is $M(x_M, y_M)$ en de straal is r . Door de haakjes weg te werken is de cirkelvergelijking te schrijven in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Is een cirkel gegeven in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, dan kun je deze met kwadraatafsplitsen schrijven in de vorm

$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ waaruit de straal en de coördinaten van het middelpunt zijn af te lezen.

Bij de cirkel c : $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$ gaat dat als volgt.

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 8y + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 4)^2 - 16 + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$$

Dus het middelpunt is $M(2, -4)$ en de straal is $r = 4$.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= x^2 - 4x + 4 - 4 = (x - 2)^2 - 4 \\ y^2 + 8y &= y^2 + 8y + 16 - 16 = (y + 4)^2 - 16 \end{aligned}$$

De afstand tussen M en het punt $A(5, 1)$ is de lengte van het lijnstuk MA ,

$$\text{dus } d(M, A) = \sqrt{(5 - 2)^2 + (1 - (-4))^2} = \sqrt{34}.$$

Hierbij is de volgende regel gebruikt.

De afstand tussen de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ is

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Bovenaan de volgende bladzijde zie je hoe je de afstand van een punt tot een lijn berekent. Daarbij is het volgende werkschema gebruikt.

Werkschema: berekenen van de afstand van het punt A tot de lijn k

- 1 Stel een vergelijking op van de lijn l door A die loodrecht staat op k .
- 2 Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en l .
- 3 Gebruik $d(A, k) = d(A, B)$.

Bij het opstellen van een vergelijking van de lijn l die loodrecht staat op de lijn k is de volgende regel gebruikt.

De lijnen k : $ax + by = c$ en l : $bx - ay = d$ staan loodrecht op elkaar.

Om exact de afstand te berekenen van het punt $A(5, 6)$ tot de lijn $k: x - 3y = -3$, gebruik je de lijn l door A loodrecht op k . Deze lijn heeft de vergelijking $3x + y = 21$.
 Snijden van de lijnen k en l geeft het punt $B(6, 3)$.
 Nu is $d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{(6 - 5)^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{10}$.

V6 Bereken van de volgende cirkels de straal en de coördinaten van het middelpunt.

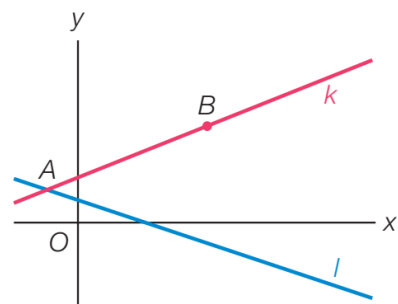
- a $c_1: x^2 + y^2 - 8x - 2y + 10 = 0$
- b $c_2: x^2 + y^2 + 6x - 5y + 13 = 0$
- c $c_3: x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$

V7 Stel een vergelijking op van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ van de cirkel

- a c_1 met middelpunt $M_1(6, 3)$ die door de oorsprong gaat
- b c_2 met middelpunt $M_2(-3, 5)$ die door het punt $(0, 3)$ gaat
- c c_3 waarvan het lijnstuk AB met $A(2, 0)$ en $B(8, 0)$ een middellijn is
- d c_4 waarvan het lijnstuk CD met $C(1, 2)$ en $D(7, 4)$ een middellijn is.

V8 Gegeven zijn de lijnen $k: 2x - 5y = -7$ en $l: x + 3y = 2$. De lijnen snijden elkaar in het punt A . Het punt $B(4, 3)$ ligt op k . Zie de figuur hiernaast.

- a Bereken exact $d(A, B)$.
- b Bereken exact $d(B, l)$.



O31 Gegeven zijn het punt $M(-2, 3)$ en de lijn $k: 2x - y = 3$.

- ⊗ *** a Bereken de afstand van M tot k .

De lijn k raakt de cirkel c met middelpunt M .

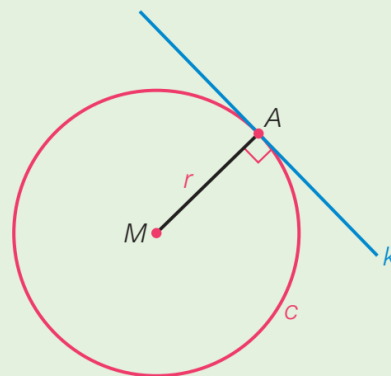
- b Licht toe dat je in vraag a de straal van c hebt berekend.
- c Stel een vergelijking van c op.

Theorie A Raaklijnproblemen bij cirkels

In de figuur op de volgende bladzijde zie je de cirkel c met middelpunt M en straal r en de lijn k die c raakt in A . Er geldt dat de lijn l door M en A loodrecht staat op k . Ook geldt dat $r = d(M, k) = d(M, A)$.

Deze eigenschappen gebruik je bij de volgende twee raaklijnproblemen bij cirkels.

- I Opstellen van een vergelijking van een raaklijn k aan een cirkel als het middelpunt van de cirkel en het raakpunt zijn gegeven.
 - II Opstellen van een vergelijking van een cirkel als van de cirkel het middelpunt is gegeven en van een raaklijn een vergelijking.
- Zie het voorbeeld.



De lijn k raakt de cirkel in het punt A .

Voorbeeld

- a Stel een vergelijking op van de lijn k die de cirkel c met middelpunt $M(4, 1)$ raakt in het punt $A(1, 2)$.
- b Stel een vergelijking op van de cirkel d met middelpunt $N(3, -2)$ die de lijn $l: x + 3y = 7$ raakt.

Uitwerking

- a Lijn m door M en A heeft $rc_m = \frac{1-2}{4-1} = -\frac{1}{3}$.
 $k \perp m$, dus $rc_k \cdot -\frac{1}{3} = 1$ en dit geeft $rc_k = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 3x + b \\ \text{door } A(1, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 1 + b = 2 \\ b = -1 \end{array}$$

Dus $k: y = 3x - 1$.

- b $d: (x-3)^2 + (y+2)^2 = r^2$ met $r = d(N, l)$

Lijn n gaat door N met $n \perp l$.

$$\left. \begin{array}{l} n: 3x - y = c \\ \text{door } N(3, -2) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 3 - (-2) = 11$$

Dus $n: 3x - y = 11$.

l en n snijden geeft het punt B .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 7 \\ 3x - y = 11 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 7 \\ 9x - 3y = 33 \end{array} \right. +$$

$$\frac{10x = 40}{x = 4}$$

$x = 4$ invullen in $3x - y = 11$ geeft $3 \cdot 4 - y = 11$

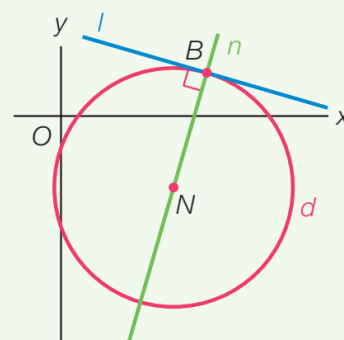
$$12 - y = 11$$

$$y = 1$$

Dus $B(4, 1)$.

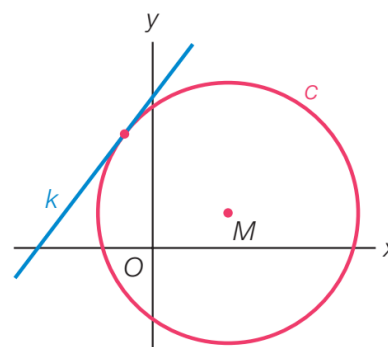
$$r = d(N, l) = d(N, B) = \sqrt{(4-3)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{10}$$

Dus $d: (x-3)^2 + (y+2)^2 = 10$.

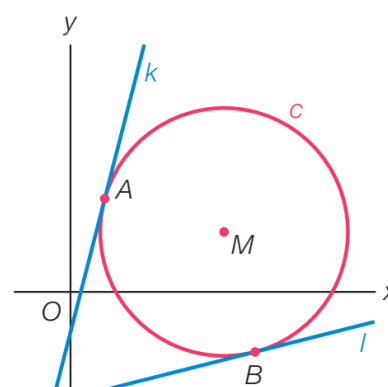


- 32** **a** Stel een vergelijking op de van de cirkel c_1 met middelpunt $M(2, 5)$ die de lijn $k: 2x + 3y = 6$ raakt.
b Stel een vergelijking op van de lijn l die de cirkel $c_2: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 29$ raakt in het punt $B(4, 1)$.

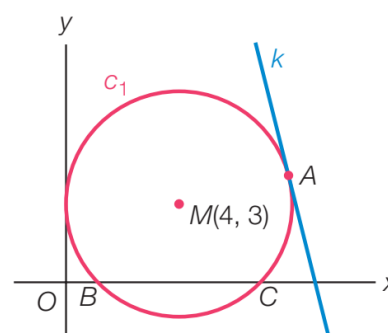
- 33** Cirkel c heeft middelpunt $M(2, 1)$ en raakt de lijn $k: 3x - 2y = -9$. Zie de figuur hiernaast.
 Stel een vergelijking op van c .



- 34** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 12 = 0$ en de punten $A(1, 3)$ en $B(6, -2)$ op c .
 De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B . Zie de figuur hiernaast.
a Stel van k en van l een vergelijking op.
b De lijn door A en M snijdt de x -as in het punt N .
 Stel een vergelijking op van de cirkel d met middelpunt N die de lijn $p: y = x$ raakt.



- A35** Het middelpunt van cirkel c_1 is $M(4, 3)$. Cirkel c_1 raakt de lijn $k: 4x + y = 36$ in het punt A en snijdt de x -as in de punten B en C . Zie de figuur hiernaast.
 Uit de gegevens volgt $B(4 - 2\sqrt{2}, 0)$ en $C(4 + 2\sqrt{2}, 0)$.
a Bewijs dit.
b Het lijnstuk BC is een middellijn van cirkel c_2 .
 Het punt D met $x_D = 2$ en $y_D > 0$ ligt op c_2 .
 De lijn l raakt c_2 in D .
 Bewijs dat l door de oorsprong gaat.



- A36** Stel een vergelijking op van de cirkel c waarvan het middelpunt op de lijn $k: x + y = 5$ ligt en die de lijn $l: 2x + y = 13$ raakt in het punt $A(5, 3)$.

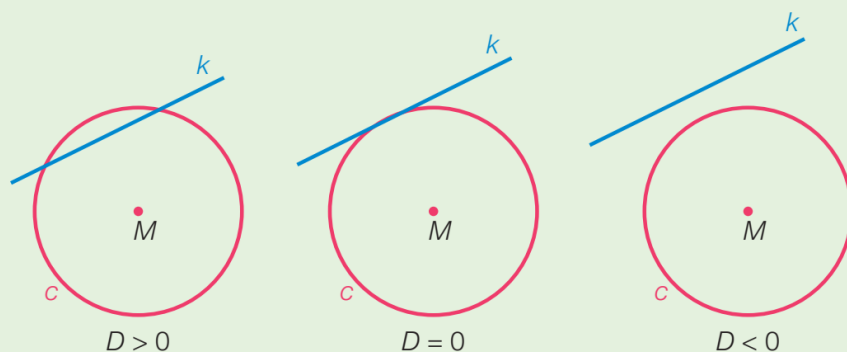
- O37** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 = 5$ en de lijn $l: y = -2x + 5$.
 Substitutie van $y = -2x + 5$ in $x^2 + y^2 = 5$ geeft de vergelijking $x^2 - 4x + 4 = 0$.
a Toon dit aan.
b Bereken van $x^2 - 4x + 4 = 0$ de discriminant. Hoe volgt hieruit dat l de cirkel raakt?

Theorie B De ligging van een lijn ten opzichte van een cirkel

Voor de ligging van een lijn ten opzichte van een cirkel zijn er drie mogelijkheden.

Krijg je na substitutie van $y = ax + b$ in een cirkelvergelijking een tweedegraadsvergelijking waarvan de discriminant

- groter is dan 0, dan zijn er twee snijpunten
- gelijk is aan 0, dan raakt de lijn de cirkel
- kleiner is dan 0, dan zijn er geen gemeenschappelijke punten.



Om te bewijzen dat de lijn $k: y = 2x - 3$ de cirkel

$c: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$ in twee punten snijdt, ga je als volgt te werk.

Substitutie van $y = 2x - 3$ in $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$ geeft

$$x^2 + (2x - 3)^2 - 4x + 2(2x - 3) = 20$$

$$x^2 + 4x^2 - 12x + 9 - 4x + 4x - 6 = 20$$

$$5x^2 - 12x - 17 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -17 = 484$$

$D > 0$, dus lijn k snijdt cirkel c in twee punten.

Om te onderzoeken wat de ligging is van de lijn $l: y = 2x + 5$ ten opzichte van de cirkel $d: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$, ga je als volgt te werk.

Substitueer $y = 2x + 5$ in $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$. Je krijgt

$$x^2 + (2x + 5)^2 - 2x - 4(2x + 5) = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + 20x + 25 - 2x - 8x - 20 = 0$$

$$5x^2 + 10x + 5 = 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = 0$$

Omdat $D = 0$, raakt lijn l cirkel d .

R38 Zie de theorie.



- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de lijn $k: y = 2x - 3$ en de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$.
- Bereken exact de coördinaten van het raakpunt van de lijn $l: y = 2x + 5$ en de cirkel $d: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

39 Bewijs dat



- a** de lijn k : $y = x - 4$ de cirkel c_1 : $x^2 + y^2 = 13$ snijdt in twee punten
- b** de lijn l : $y = -4x - 3$ de cirkel c_2 : $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 4$ raakt
- c** de lijn m : $2x - y = 1$ geen punten gemeenschappelijk heeft met de cirkel c_3 : $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$.

40 Onderzoek de ligging van



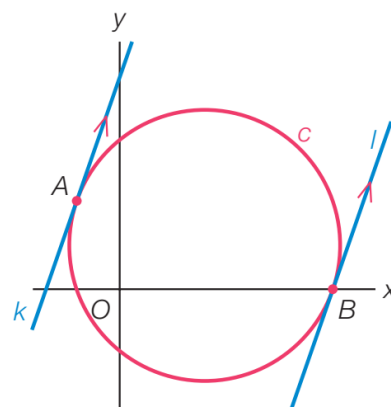
- a** de lijn k : $2x + y = 2$ ten opzichte van de cirkel c : $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10$
- b** de lijn l : $y = \frac{1}{2}x + 2$ ten opzichte van de cirkel d : $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

41 Gegeven is de cirkel c : $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$.



De lijnen k : $y = 3x + 5$ en l : $y = 3x - 15$ raken c .

- a** Bewijs dit.
- b** De raakpunten zijn A en B . Zie de figuur hiernaast. De lijn door de oorsprong en A snijdt de cirkel bovendien in het punt C . Bereken exact de coördinaten van C .

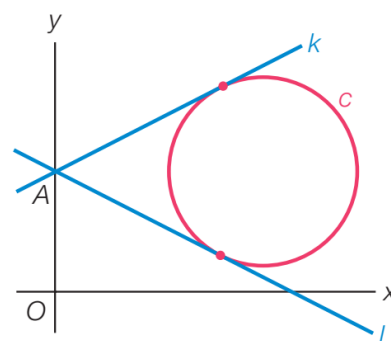


42 Gegeven is de cirkel c : $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 29 = 0$.



De lijnen k : $y = \frac{1}{2}x + 3$ en l : $y = -\frac{1}{2}x + 3$ gaan door het punt $A(0, 3)$ en raken c . Zie de figuur hiernaast.

- a** Bewijs dat k en l inderdaad de cirkel raken en bereken exact de coördinaten van de raakpunten.
- b** De lijn p gaat door A , heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{3}$ en snijdt de cirkel in de punten B en C . Stel een vergelijking op van de cirkel d waarvan het lijnstuk BC een middellijn is.

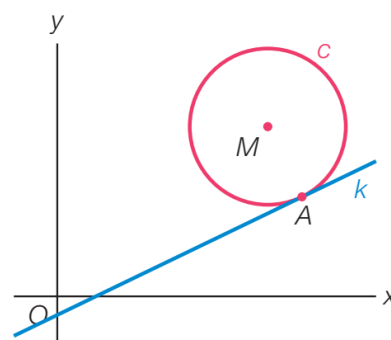
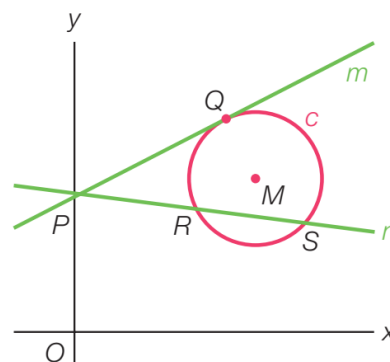


A43 Gegeven zijn de cirkel $c: (x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 5$ en de lijn $k: x - 2y = 1$ die c raakt in het punt A . Zie de figuur hiernaast.

- a** Bewijs dat k de cirkel inderdaad raakt en bereken exact de coördinaten van A .
- b** De lijn l door de oorsprong is evenwijdig met k en snijdt de cirkel in de punten B en C met $x_B < x_C$. Stel een vergelijking op van de cirkel d met middelpunt C die door het punt A gaat.

De lijn $m: x - 2y = -9$ raakt c in het punt Q en de lijn $n: x + 8y = 36$ snijdt c in de punten R en S . Zie de figuur hiernaast.

- c** De lijn QR snijdt de x -as in het punt T . Bereken exact de coördinaten van T .



E44 * Stel vergelijkingen op van de lijnen l_1 en l_2 die afstand 5 hebben tot de lijn $k: 3x + 4y = 10$.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan een vergelijking opstellen van een cirkel c als het middelpunt van c en de vergelijking van een lijn waaraan c raakt zijn gegeven.
- ☐ Ik kan de ligging van een lijn ten opzichte van een cirkel bepalen door de discriminant van een kwadratische vergelijking te gebruiken.

► **OPGAVE C5**
THEORIE A

► **OPGAVE C6**
THEORIE B

C5 Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(1, 3)$ die de lijn $k: 2x - 3y = 6$ raakt.

- C6** **a** Bewijs dat de lijn $k: x - 2y = -1$ de cirkel $c_1: x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$ in twee punten snijdt.
- b** Bewijs dat de lijn $l: y = -3x + 21$ de cirkel $c_2: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ raakt.
- c** Onderzoek de ligging van de lijn $m: y = x + 1$ ten opzichte van de cirkel $c_3: x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$.

Antwoorden

C5 $c: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 13$

C6 **a, b** *

c m heeft geen punten gemeenschappelijk met c_3

10.4 Cirkels en afstanden

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de afstand van een punt tot een cirkel berekenen.
- Je kunt de afstand van een lijn tot een cirkel berekenen.
- Je kunt de afstand tussen twee cirkels berekenen.

45 Gegeven is de cirkel $c: (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$ met middelpunt M en straal r .

- Licht toe dat het punt $A(2, 0)$ op c ligt.
- De afstand tussen de punten $B(-2, -3)$ en M is $d(B, M) = \sqrt{17}$.
Toon dit aan en licht toe dat hieruit volgt dat B buiten c ligt.
- Onderzoek met een berekening of het punt $C(1, -1)$ op, binnen of buiten c ligt.

Theorie A Afstand van punt tot cirkel en lijn tot cirkel

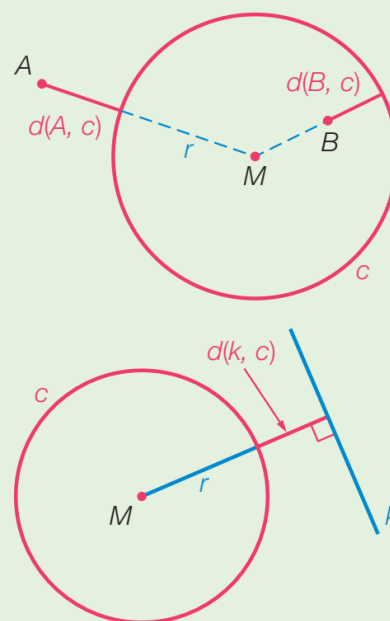
De afstand van een punt tot een cirkel is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen een punt en de cirkel.

Voor het berekenen van deze afstand is het van belang of het punt binnen of buiten de cirkel ligt.

Voor punt A buiten cirkel c geldt $d(A, c) = d(A, M) - r$.

Voor punt B binnen cirkel c geldt $d(B, c) = r - d(B, M)$.

In de figuur hiernaast zie je de lijn k en de cirkel c met middelpunt M en straal r . Voor de afstand van de lijn tot de cirkel geldt $d(k, c) = d(M, k) - r$.



46 Bereken exact de afstand

- van het punt $A(2, 0)$ tot de cirkel $c_1: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$
- van het punt $B(-5, 1)$ tot de cirkel $c_2: x^2 + y^2 - 2x - 8y = 23$.

47 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$, het punt $A(-6, 2)$ en de lijn $k: 4x - 3y = 8$.

Bereken exact.

- $d(A, c)$
- $d(k, c)$

A48 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$, het punt $A(0, -2)$ en de lijn $k: y = 3x + 7$.
□ ⊗ * Onderzoek op algebraïsche wijze of k dichterbij c ligt dan A bij c ligt.

O49 Van cirkel c is het middelpunt M en de straal 2 en van cirkel d is het middelpunt N en de straal 3. De afstand tussen M en N is 9.
□ ⊗ * Bereken de afstand tussen c en d .

Theorie B Afstand tussen twee cirkels

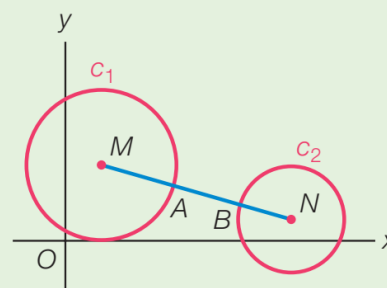
In de figuur hiernaast zie je cirkel c_1 met middelpunt $M(1, 2)$ en straal $r_1 = 2$ en cirkel c_2 met middelpunt $N(6, 1)$ en straal $r_2 = 1\frac{1}{2}$. Het lijnstuk MN snijdt c_1 in A en c_2 in B . De lengte van het lijnstuk AB is de afstand tussen c_1 en c_2 , dus $d(c_1, c_2) = d(A, B)$.

Er geldt $d(c_1, c_2) = d(M, N) - d(M, A) - d(N, B)$.

Omdat $d(M, N) = \sqrt{(6-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}$,

$d(M, A) = r_1 = 2$ en $d(N, B) = r_2 = 1\frac{1}{2}$ is

$d(c_1, c_2) = \sqrt{26} - 2 - 1\frac{1}{2} = \sqrt{26} - 3\frac{1}{2}$.



Voorbeeld

Op de lijn $k: x + 4y = 16$ ligt het punt M met $x_M = 2$ en het punt N met $x_N = 8$. De cirkels c met middelpunt M en d met middelpunt N raken de x -as.

Bereken algebraïsch de afstand tussen c en d .
 Rond het eindantwoord af op twee decimalen.

Uitwerking

M op k geeft $2 + 4y = 16$

$$4y = 14$$

$$y = 3\frac{1}{2}$$

Dus $M(2, 3\frac{1}{2})$ en $r_c = 3\frac{1}{2}$.

N op k geeft $8 + 4y = 16$

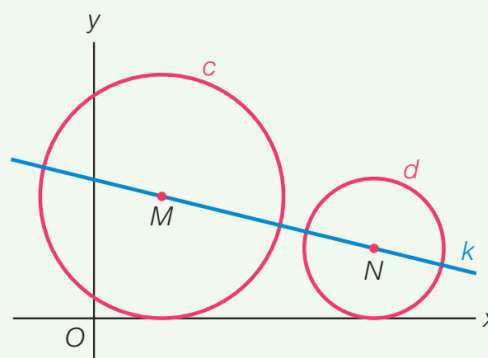
$$4y = 8$$

$$y = 2$$

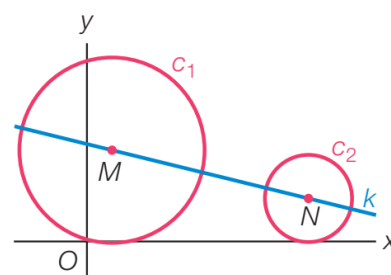
Dus $N(8, 2)$ en $r_d = 2$.

$$d(M, N) = \sqrt{(8-2)^2 + (2-3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{38\frac{1}{4}}$$

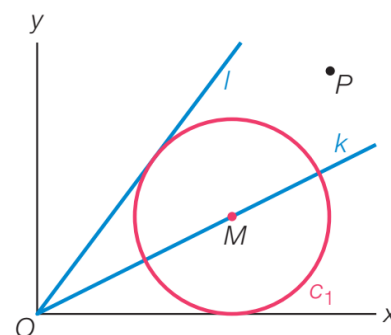
$$\text{Dus } d(c, d) = \sqrt{38\frac{1}{4}} - 3\frac{1}{2} - 2 \approx 0,68.$$



- 50** Op de lijn $k: x + 4y = 16$ ligt het punt M met $x_M = 1$ en het punt N met $x_N = 9$. De cirkels c_1 met middelpunt M en c_2 met middelpunt N raken de x -as. Bereken algebraïsch de afstand tussen c_1 en c_2 . Rond het eindantwoord af op drie decimalen.



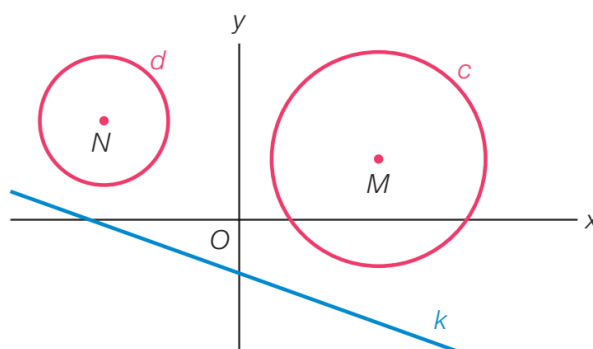
- 51** Gegeven zijn de lijnen $k: y = \frac{1}{2}x$ en $l: y = 1\frac{1}{3}x$. Het punt $M(4, 2)$ ligt op k . De cirkel c_1 heeft middelpunt M en raakt de x -as. Verder is gegeven het punt $P(6, 5)$. Zie de figuur hiernaast.
- Stel een vergelijking op van c_1 .
 - Toon aan dat c_1 lijn l raakt.
 - Onderzoek met een berekening welke van de volgende drie afstanden de kortste is.
 $d(P, k)$, $d(P, l)$ en $d(P, c_1)$



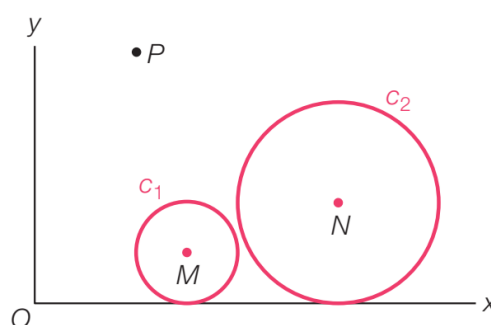
Verder is gegeven de cirkel $c_2: x^2 + y^2 + 2x - 14y + 25 = 0$ met middelpunt N .

- Onderzoek met een berekening of l raaklijn is van c_2 .
- Bereken exact $d(c_1, c_2)$.

- 52** Gegeven zijn de cirkels $c: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$, $d: (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$ en de lijn $k: x + 3y = -5$. Onderzoek langs algebraïsche weg welke van de afstanden $d(k, c)$, $d(k, d)$ of $d(c, d)$ het kleinst is en geef de exacte waarde van de kleinste van deze drie afstanden.

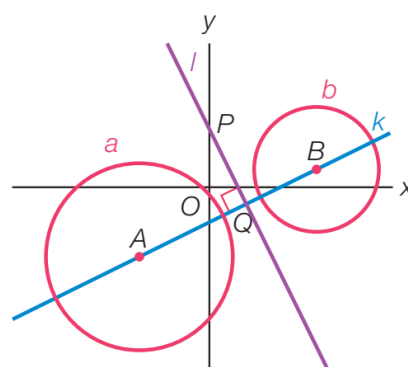


- A53** Gegeven zijn de cirkels $c_1: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ en $c_2: x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$ en het punt $P(2, 5)$. Zie de figuur hiernaast.
- Bereken exact $d(c_1, c_2)$.
- De lijn $l: 3x - 4y = 0$ raakt beide cirkels.
- Toon met een berekening aan dat dit klopt.
 - Stel een vergelijking op van de cirkel c_3 met middelpunt P die l raakt.



A54 Gegeven zijn de cirkels $a: (x + 8)^2 + (y + 8)^2 = 121$ en $b: (x - 12)^2 + (y - 2)^2 = 49$ met middelpunten A en B . Op de y -as ligt het punt $P(0, 6)$. De lijn l door P staat loodrecht op de lijn k door A en B . Het snijpunt is Q . Zie de figuur hiernaast.

a Bewijs dat $d(a, l) - d(b, l) = 2\sqrt{5} - 4$.

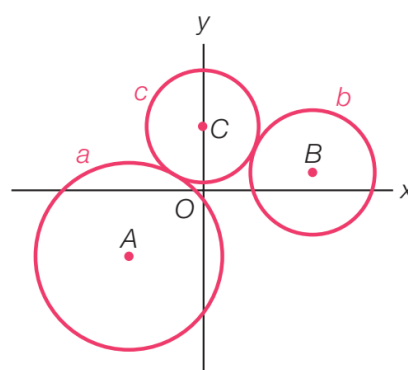


Van de cirkel c is gegeven dat het middelpunt $C(0, q)$ op de y -as ligt en dat c zowel a als b raakt. Zie de figuur hiernaast.

Uit het gegeven dat de cirkels a en c elkaar raken, volgt dat voor de straal r van c geldt $r = \sqrt{q^2 + 16q + 128} - 11$.

b Bewijs dit.

c Stel een vergelijking op van c .



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan de afstand van een punt tot een cirkel berekenen.

☐ Ik kan de afstand van een lijn tot een cirkel berekenen.

☐ Ik kan de afstand tussen twee cirkels berekenen.

► OPGAVE C7
THEORIE A

► OPGAVE C8
THEORIE A

► OPGAVE C9
THEORIE B

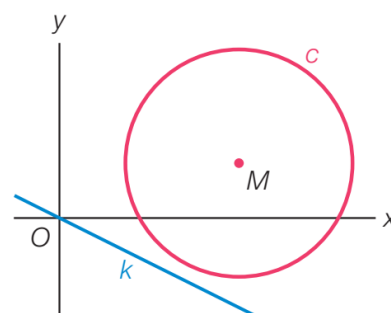
C7 Gegeven zijn de punten $A(-1, 3)$, $B(7, -3)$ en de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$.

a Bereken exact $d(A, c)$.

b Bereken exact $d(B, c)$.

C8 Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de afstand van de lijn $k: y = -\frac{1}{3}x$ tot de cirkel $c: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 7$.



C9 Bereken algebraïsch de afstand tussen de cirkels $c: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 17$ en $d: x^2 + (y + 3)^2 = 5$. Rond het eindantwoord af op twee decimalen.

Antwoorden

C7 a $d(A, c) = \sqrt{41} - 5$

b $d(B, c) = 5 - \sqrt{13}$

C8 $d(k, c) = \sqrt{10} - \sqrt{7}$

C9 $d(c, d) \approx 1,45$

10.5 Functies, cirkels en raaklijnen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de afstand tussen twee evenwijdige lijnen berekenen.
- Je kunt berekeningen maken in situaties waarbij de vergelijking van een cirkel en het functievoorschrift van een functie zijn gegeven.

55 Gegeven zijn de lijnen $k: 3x + 4y = 2$ en $l: 3x + 4y = 27$ en het punt $A(2, -1)$.



- Licht toe dat k en l evenwijdig zijn en dat het punt A op k ligt.
- Bereken exact de afstand van A tot l .
- Licht toe dat je in vraag b ook de afstand tussen k en l hebt gevonden.

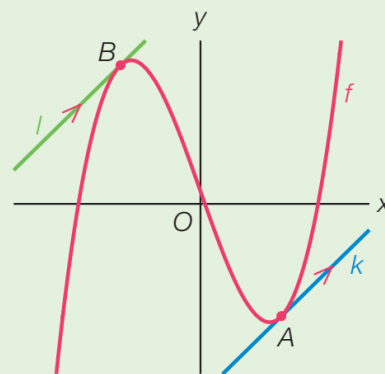
Theorie A Lijnen, functies en afstanden

De afstand tussen twee evenwijdige lijnen is gelijk aan de afstand van een punt op de ene lijn tot de andere lijn.

Dit kun je ook gebruiken om de afstand tussen twee lijnen te berekenen die evenwijdig zijn en raken aan de grafiek van een functie f .

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x + \frac{1}{3}$ met de evenwijdige raaklijnen k en l . De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$. Om exact de afstand tussen k en l te berekenen, kun je het volgende stappenplan gebruiken.

- Bereken de coördinaten van A en met de afgeleide de richtingscoëfficiënt van k .
- Bereken de coördinaten van B en stel een vergelijking op van l .
- Bereken de afstand van A tot l . Hiermee is de afstand tussen k en l gevonden.



56 Zie de theorie hierboven met de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x + \frac{1}{3}$



en het punt A met $x_A = 2$ op de grafiek van f .

Er geldt $A(2, -3)$ en $rc_k = 1$.

a Toon dit aan.

Er geldt $B(-2, 5\frac{2}{3})$ en $l: y = x + 5\frac{2}{3}$.

b Toon dit aan.

c Bereken exact de afstand tussen k en l .

57 Gegeven zijn de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ en de lijn $k: y = 2x$.



De lijn l is evenwijdig met k en raakt de grafiek van f in het punt A .

Bereken exact de afstand tussen k en l .

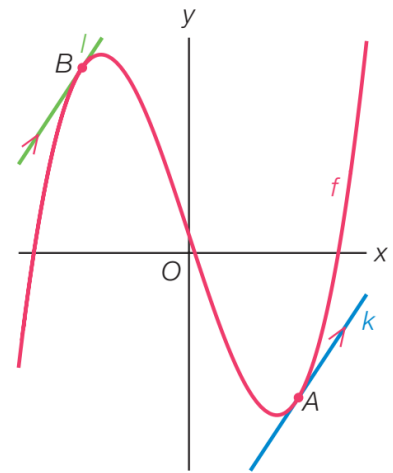
58



Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 3x + \frac{1}{2}$.

De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 3$. De lijn l is evenwijdig met k en raakt de grafiek van f in het punt B .

Bereken algebraïsch de afstand tussen k en l . Rond het eindantwoord af op twee decimalen.



A59

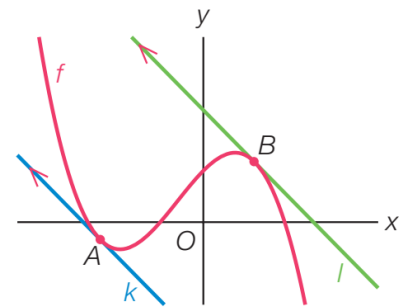


Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -2$. De lijn l is evenwijdig met k en raakt de grafiek van f in het punt B .

a Bereken exact $d(A, B)$.

b Bereken exact $d(k, l)$.



A60



Gegeven is de functie $f(x) = ax^3 - 2x + \frac{2}{3}$.

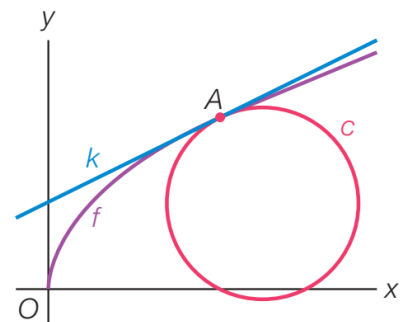
De evenwijdige lijnen k en l met richtingscoëfficiënt 2 raken de grafiek van f in de punten A en B . Hierbij is $x_A = 4$. Bereken algebraïsch de afstand tussen k en l . Rond het eindantwoord af op twee decimalen.

O61



Gegeven zijn de functie $f(x) = 2\sqrt{x}$, de cirkel $c: (x-5)^2 + (y-2)^2 = 5$ en de lijn $k: y = \frac{1}{2}x + 2$ die de grafiek van f raakt in het punt $A(4, 4)$. Zie de figuur hiernaast.

Bewijs dat k ook raaklijn is van c .



Theorie B Cirkels en functies

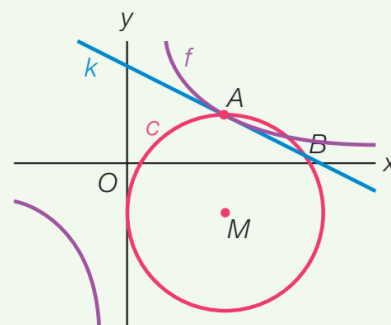
In opgave 61 is de lijn $k: y = \frac{1}{2}x + 2$ zowel raaklijn van de grafiek van de functie $f(x) = 2\sqrt{x}$ als van de cirkel $c: (x-5)^2 + (y-2)^2 = 5$.

In het voorbeeld en de opgaven krijg je ook te maken met situaties waarin zowel cirkels als grafieken van functies voorkomen. Dit zijn over het algemeen problemen waarbij de uitwerking uit verschillende stappen bestaat. Het is dan verstandig om een stappenplan te maken.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde staat in de aanpak een stappenplan dat bestaat uit drie stappen.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2}{x}$. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$. De cirkel c heeft middelpunt M met $x_M = x_A$ en $y_M < 0$, gaat door A en raakt de y -as. De lijn k snijdt c behalve in A ook in het punt B . Bereken exact de coördinaten van B .



Aanpak

- 1 Stel met behulp van de afgeleide van f een vergelijking op van k .
- 2 Stel een vergelijking op van c .
- 3 Bereken de coördinaten van B met behulp van de vergelijkingen van k en c .

Uitwerking

- 1 Stel met behulp van de afgeleide van f een vergelijking op van k .

$$f(x) = \frac{2}{x} = 2x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(2) = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ f(2) = 1, \text{ dus } A(2, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 1 \\ b = 2 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

- 2 Stel een vergelijking op van c .

Van c is de straal 2 en $y_M = y_A - r = 1 - 2 = -1$, dus

$$c: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4.$$

- 3 Bereken de coördinaten van B met behulp van de vergelijkingen van k en c .

Substitutie van $y = -\frac{1}{2}x + 2$ in $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ geeft

$$(x - 2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 - 4 = 0$$

$$1\frac{1}{4}x^2 - 7x + 9 = 0$$

$$5x^2 - 28x + 36 = 0$$

$$D = (-28)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 36 = 64, \text{ dus } \sqrt{D} = 8$$

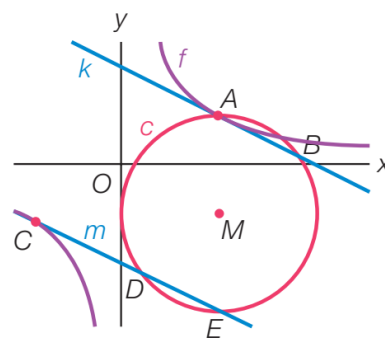
$$x = \frac{28 + 8}{10} = 3\frac{3}{5} \vee x = \frac{28 - 8}{10} = 2$$

$$x = 3\frac{3}{5} \text{ geeft } y = -\frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{5} + 2 = \frac{1}{5}, \text{ dus } B(3\frac{3}{5}, \frac{1}{5}).$$

62 Gegeven zijn de functie f , de lijn k en de cirkel c van het voorbeeld.

De lijn m met $rc_m = rc_k$ raakt de grafiek van f in het punt C en snijdt c in de punten D en E . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de coördinaten van D en E .

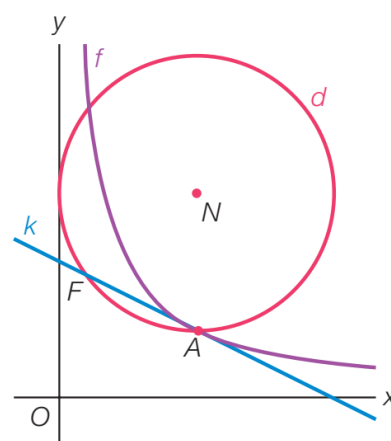


63 In de figuur hiernaast zie je nogmaals de grafiek van de functie f en de lijn k van het voorbeeld.

Verder is de cirkel d met middelpunt N met $x_N = x_A$ en $y_N > 0$ getekend.

De cirkel d gaat door A en raakt de y -as.

De lijn k snijdt d behalve in A ook in het punt F . Bereken exact de coördinaten van F .



64 Gegeven zijn de functie $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 6\frac{2}{3}x + 18$ en de lijn $k: y = -1\frac{1}{3}x + 7\frac{1}{3}$. Het punt A met $x_A = 4$ ligt op de grafiek van f .

De lijn k raakt de grafiek van f in A .

a Bewijs dit.

De cirkel c heeft middelpunt M met $x_M = 3$.

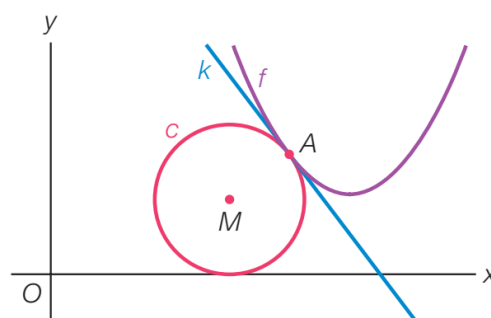
Gegeven is dat k en c elkaar raken in A . Zie de figuur hiernaast.

Om te bewijzen dat c de x -as raakt, bedenk je dat er moet gelden

- $d(M, x\text{-as}) = r$ waarbij r de straal van c is
- M ligt op de lijn l door A , loodrecht op k
- $r = d(M, A)$.

b Formuleer uit het bovenstaande een stappenplan dat bestaat uit drie stappen.

c Bewijs dat c de x -as raakt.



A65

Gegeven zijn de functie $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ en de lijn k met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{4}$ die de grafiek van f raakt in het punt A .

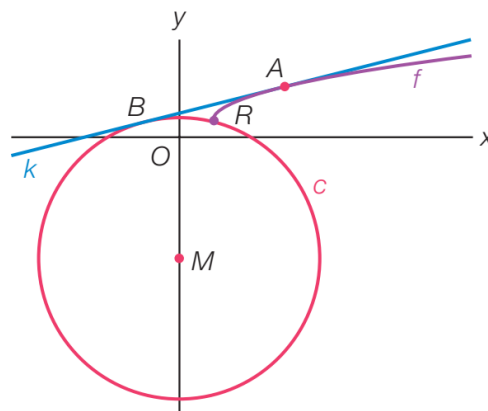
Verder is gegeven dat de cirkel c met middelpunt $M(0, -7)$ door het randpunt R van de grafiek van f gaat. Zie de figuur hiernaast. Het lijkt erop dat k de cirkel raakt.

Om te bewijzen dat k de cirkel c raakt, kun je een stappenplan van vier stappen gebruiken.

- Noteer deze vier stappen.
- Bewijs dat de lijn k de cirkel c raakt.

Het punt B is het raakpunt van k en c .

- Bewijs dat driehoek ABM een gelijkbenige rechthoekige driehoek is.

**A66**

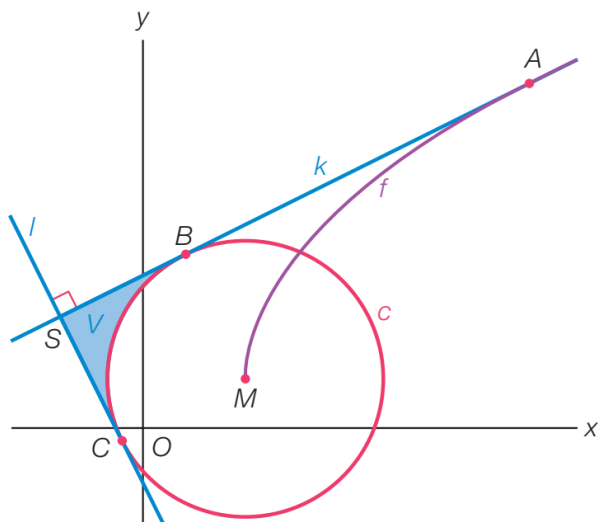
Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \sqrt{6x-12}$.

Het punt A met $y_A = 7$ ligt op de grafiek van f . De lijn k raakt de grafiek van f in A .

Het randpunt van de grafiek van f is het middelpunt van de cirkel c die de lijn k raakt in het punt B .

De lijn l snijdt k loodrecht in het punt S en raakt c in het punt C .

De lijnstukken BS en CS en de cirkelboog BC sluiten het gebied V in. Zie de figuur hieronder.



Bereken algebraïsch de oppervlakte van V . Rond het eindantwoord af op twee decimalen. Gebruik dat $MBSC$ een vierkant is.

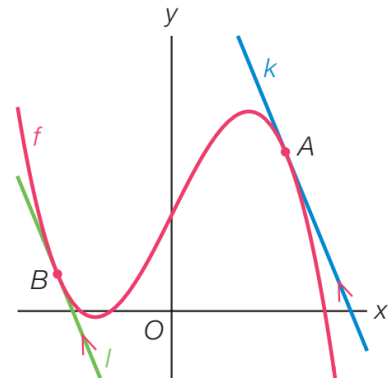
Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de afstand tussen twee evenwijdige lijnen berekenen.
- ☐ Ik kan berekeningen maken in situaties waarbij de vergelijking van een cirkel en het functievoorschrift van een functie zijn gegeven.

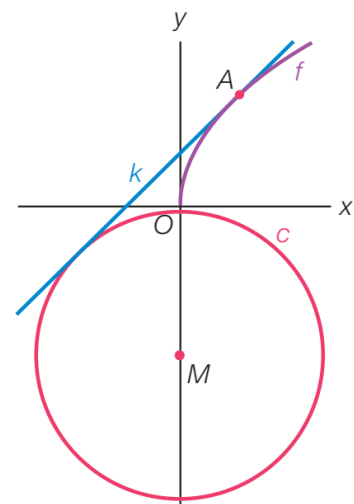
► OPGAVE C10
THEORIE A

► OPGAVE C11
THEORIE B

- C10** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x + 2\frac{1}{2}$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 3$.
De lijn l is evenwijdig met k en raakt de grafiek van f in het punt B .
Bereken algebraïsch de afstand tussen k en l . Rond het eindantwoord af op twee decimalen.



- C11** Gegeven zijn de functie $f(x) = 2\sqrt{x}$ en de cirkel $c: x^2 + (y + 3)^2 = 8$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt $A(1, 2)$.
Zie de figuur hiernaast.
Bewijs dat k ook c raakt.



Antwoorden

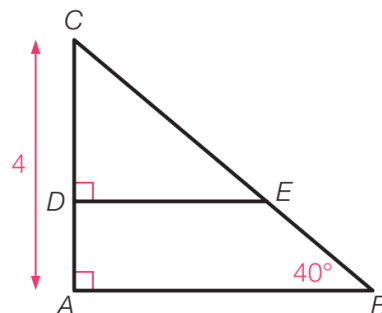
C10 $d(k, l) \approx 6,69$

C11 *

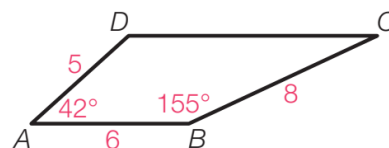
Kennis- en vaardighedentest

10.1 Hoeken en lijnstukken

- 1** In de figuur hiernaast ligt het punt E op de zijde BC waarbij $CE = BE + 2$.
Bereken DE . Rond af op twee decimalen.

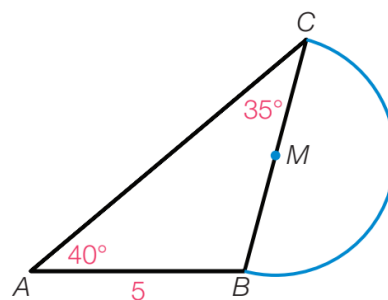


- 2** Gegeven is vierhoek $ABCD$ in figuur hiernaast.
Bereken CD in één decimaal.



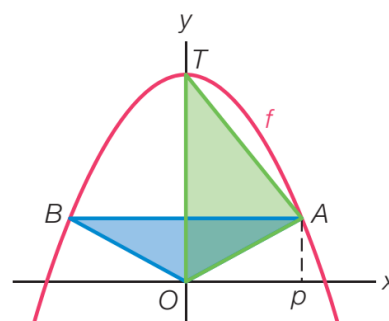
10.2 Omtrek en oppervlakte

- 3** In de figuur hiernaast is M het middelpunt van de halve cirkel met middellijn zijde BC van $\triangle ABC$.
Bereken de omtrek van de figuur. Rond af op twee decimalen.



- 4** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 9$. De top van de grafiek van f is punt T . De punten A en B liggen op de grafiek van f en hebben dezelfde y -coördinaat.
Stel $x_A = p$ met $0 < p < 3$.
Er geldt $O(\triangle OAB) = -p^3 + 9p$.

- a** Bewijs dit.
b Bereken exact de waarde van p waarvoor geldt $O(\triangle OAB) = O(\triangle OAT)$.



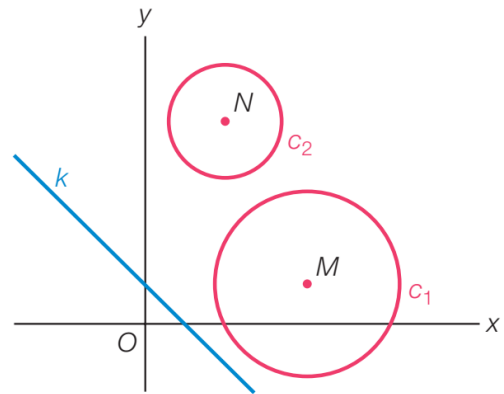
10.3 Cirkels en raaklijnen

- 5** **a** Stel een vergelijking op van de lijn k die de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$ raakt in het punt $A(5, 0)$.
b Stel een vergelijking op van de cirkel d met middelpunt $N(4, -3)$ die de lijn $l: 2x + y = 10$ raakt.
- 6** **a** Bewijs dat de lijn $k: y = 3x + 1$ de cirkel $c: (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 10$ raakt.
b Onderzoek de ligging van de lijn $l: x + y = 3$ ten opzichte van de cirkel $d: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$.

10.4 Cirkels en afstanden

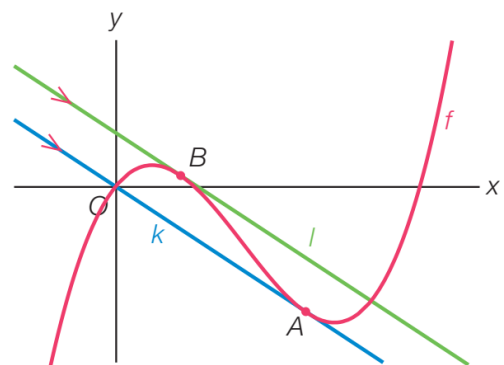
- 7** Gegeven zijn de cirkels $c_1: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$,
 $c_2: x^2 + y^2 - 2x + 8y = -10$ en de punten $A(2, 4)$ en $B(2, -2)$.
- Bereken exact $d(A, c_1)$.
 - Bereken exact $d(B, c_2)$.
 - Bereken algebraïsch $d(c_1, c_2)$ en rond het eindantwoord af op twee decimalen.

- 8** Gegeven zijn de cirkels
 $c_1: x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ en
 $c_2: x^2 + y^2 - 4x - 10y + 27 = 0$ met middelpunten M en N en de lijn $k: x + y = 1$. Zie de figuur hiernaast.
- Bereken exact $d(k, c_1)$.
 - Er geldt $d(k, c_2) - d(k, c_1) = \sqrt{p}$.
 Bereken exact de waarde van p .

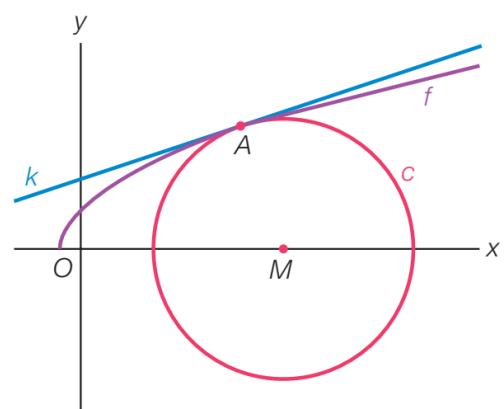


10.5 Functies, cirkels en raaklijnen

- 9** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2x$.
 De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 3$.
 De lijn l is evenwijdig met k en raakt de grafiek van f in het punt B . Zie de figuur hiernaast.
- Bereken exact $d(A, B)$.
 - Bereken exact $d(k, l)$.



- 10** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x+1}$. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 4$.
 De cirkel c raakt k in A . Het middelpunt M van c ligt op de x -as.
 Zie de figuur hiernaast.
 Stel een vergelijking op van c .

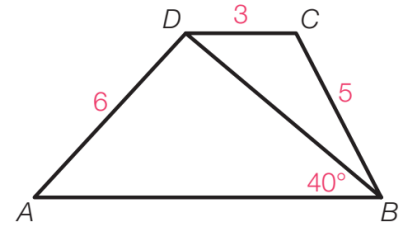


Gemengde opgaven

- 1** Gegeven is het trapezium $ABCD$ met $AD = 6$, $BC = 5$, $CD = 3$, $\angle ABD = 40^\circ$ en $AB \parallel CD$.

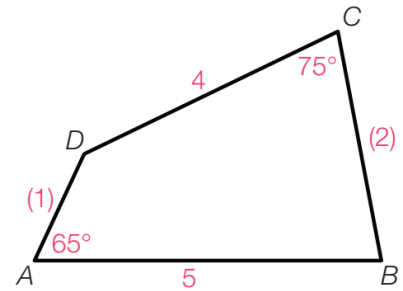
Afgerond op één decimaal is $BD = 6,9$.

- a** Bereken BD in twee decimalen.
b Bereken de oppervlakte van $ABCD$. Rond af op twee decimalen.



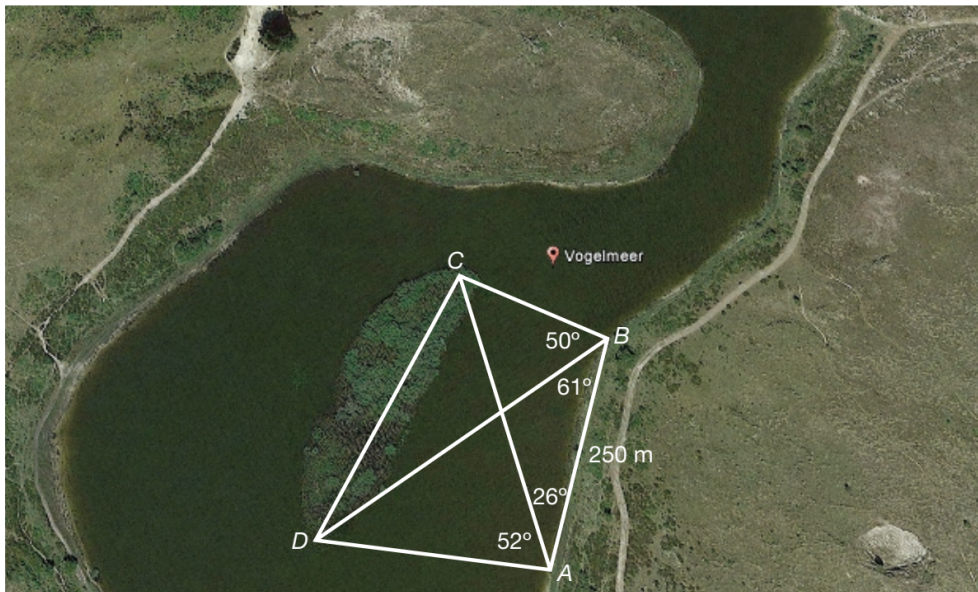
- 2** Van vierhoek $ABCD$ is gegeven $AB = 5$, $CD = 4$, $\angle A = 65^\circ$, $\angle C = 75^\circ$ en $BC = 2 \cdot AD$.

Bereken AD en BC . Rond af op twee decimalen.



- 3** Koen wil de lengte van het eiland in het Vogelmeer in de duinen van Schoorl bepalen. Hij heeft op de grond vier hoeken en een afstand bepaald. Verder gebruikt hij een luchtfoto. Zie hieronder.

Bereken in meters nauwkeurig de lengte CD van het eiland in het Vogelmeer.



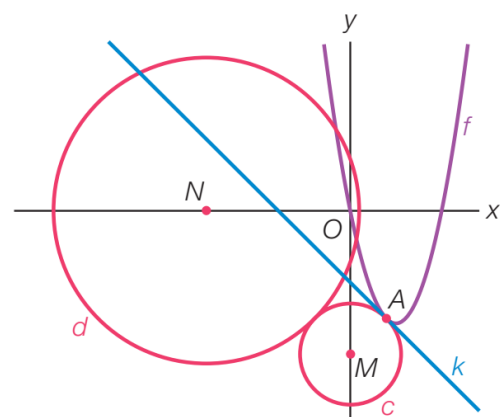
Vogelmeer

- 4** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x$. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$. De cirkel c heeft middelpunt M op de y -as en raakt k in A .

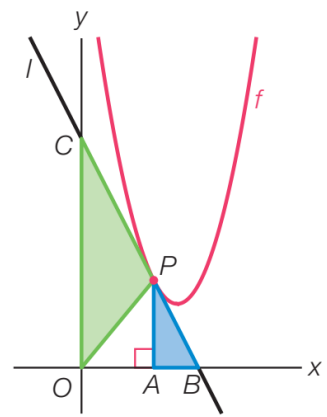
Het punt N ligt op de x -as waarbij $MN \parallel k$.

De cirkel d met middelpunt N raakt c .

Stel een vergelijking op van d .



- 5** Gegeven is de functie $f(x) = (x - 4)^2 + q$, met $q > 0$.
De lijn l raakt de grafiek van f in het punt P met $x_P = 3$,
snijdt de x -as in het punt B en de y -as in het punt C .
Verder is het punt A de loodrechte projectie van P op de
 x -as. Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact voor welke waarde van q geldt:
 $O(\triangle OPC) = 2 \cdot O(\triangle ABP)$.

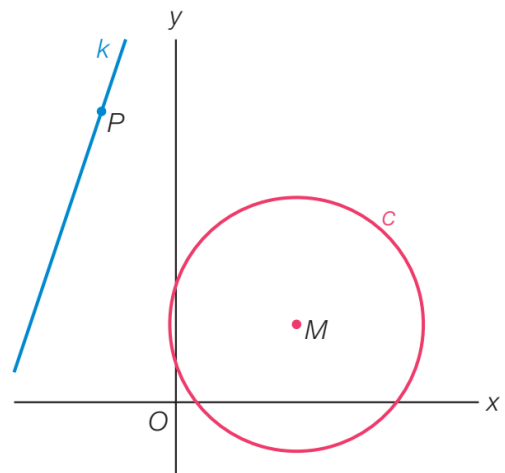


- 6** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$
met middelpunt M , de lijn $k: y = 3x + 13$ en het punt
 $P(-2, 7)$ op k . Zie de figuur naast de opgave.
De lijn l door M loodrecht op k snijdt c in de punten A en B .

- Stel vergelijkingen op van de lijnen m_1 en m_2
die c in A en B raken.
- Bereken exact $d(k, c)$. Schrijf het antwoord als
één wortel.
- De lijn k snijdt de y -as in het punt Q .
De lijn n gaat door Q en heeft
richtingscoëfficiënt $-1\frac{1}{2}$.
Onderzoek de ligging van n ten opzichte van c .

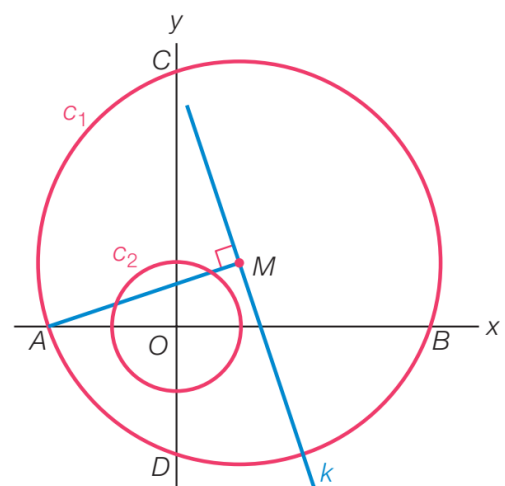
De lijn p raakt c in het punt $R(0, 1)$.

- Onderzoek of p door P gaat.
- Bereken $\angle(k, p)$ in gehele graden.

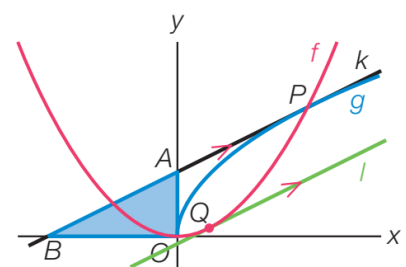


- 7** Gegeven zijn de cirkels $c_1: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$
en $c_2: x^2 + y^2 = 1$. M is het middelpunt van c .
De cirkel c snijdt de x -as in de punten A en B en de
 y -as in de punten C and D . De lijn k gaat door M en
staat loodrecht op AM . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken algebraïsch de afstand tussen de cirkels.
Rond af op twee decimalen.
- Bereken exact de oppervlakte van vierhoek
 $ADBC$.
- Onderzoek met een berekening of C op k ligt.



- 8** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ en $g(x) = 2\sqrt{x}$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in de oorsprong
en in het punt P .
De lijn k raakt de grafiek van g in P , snijdt de y -as in het
punt A en de x -as in het punt B . De lijn l is evenwijdig
met k en raakt de grafiek van f in het punt Q . Zie de
figuur hiernaast.



- Bereken exact de oppervlakte van driehoek OAB .
- Bereken algebraïsch $d(k, l)$. Rond af op twee decimalen.



11

Verbanden en functies

De gemiddelde afstand A van een planeet tot de zon in miljoenen kilometers is evenredig met een macht van de omwentelingstijd T rond de zon in dagen. Dat wil zeggen dat de formule van A van de vorm $A = aT^b$ is. Hierin zijn a en b constanten.

Voor Venus geldt $A = 108$ en $T = 225$. Hieruit volgt $a = \frac{108}{225^b}$.

Voor Saturnus geldt $A = 1427$ en $T = 10\,753$, en voor Uranus geldt $T = 30\,690$.

Wat is de gemiddelde afstand van Uranus tot de zon?

11.1 Evenredigheden

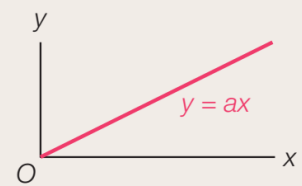
Kennis en vaardigheden

- Je kunt formules opstellen van de vorm $y = ax^p$ en van de vorm $y = \frac{a}{x^p}$.
- Je kunt bij formules van de vorm $y = ax^p$ de variabele x vrijmaken.
- Je kunt rekenen met formules van de vorm $y = ax^p$ en van de vorm $y = \frac{a}{x^p}$.

Voorkennis Evenredig en omgekeerd evenredig

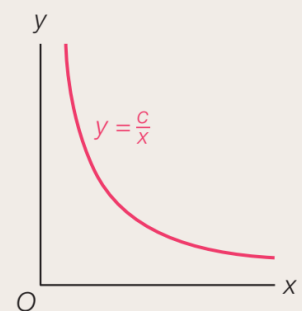
y is (recht) evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
- De bijbehorende tabel is een verhoudingstabel.
- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.



y is omgekeerd evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y door hetzelfde getal delen.
- Het product xy is constant, dus $xy = c$ oftewel $y = \frac{c}{x}$.
- De grafiek is (een deel van) een hyperbool.



In $y = ax$ en $y = \frac{c}{x}$ zijn a en c de evenredigheidsconstanten.

Voorbeeld

- a** Gegeven is dat N evenredig is met t . Bij $t = 12$ hoort $N = 99$.
Stel de formule van N op.
- b** Gegeven is dat N omgekeerd evenredig is met t . Bij $t = 12$ hoort $N = 99$.
Stel de formule van N op.

Uitwerking

a $N = at$ met $a = \frac{N}{t} = \frac{99}{12} = 8,25$

Dus $N = 8,25t$.

b $N = \frac{a}{t}$ met $a = Nt = 99 \cdot 12 = 1188$

Dus $N = \frac{1188}{t}$.

- V1** Gegeven is dat N evenredig is met t .
 Stel de formule van N op in het geval
a $t = 15$ geeft $N = 24$
b $t = 6$ geeft $N = 3,6$.

- V2** Gegeven is dat N omgekeerd evenredig is met t .
 Stel de formule van N op in het geval
a $t = 15$ geeft $N = 24$
b $t = 6$ geeft $N = 3,6$.

- V3** **a** Als je sneeuw in een cilinder laat smelten, is de uiteindelijke waterhoogte W evenredig met de oorspronkelijke sneeuwhoogte S . Bij een sneeuwhoogte van 50 cm krijg je na het smelten een waterhoogte van 5,6 cm.
 Hoe hoog komt het water als er 80 cm sneeuw in de cilinder zit?
b Onderzoek in de Stille Oceaan heeft uitgewezen dat de watertemperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ omgekeerd evenredig is met de diepte d in km. Dit verband blijkt te gelden voor diepten tussen 500 en 2000 meter.
 Op een diepte van 1250 meter is de watertemperatuur $3,2^{\circ}\text{C}$.
 Op welke diepte is de watertemperatuur $2,5^{\circ}\text{C}$?

O1 Gegeven is de tabel hiernaast.

- ⊗ *** **a** Toon aan dat N evenredig is met t en bereken de evenredigheidsconstante.
b Toon aan dat M omgekeerd evenredig is met t en stel de formule van M op.

t	2	5	8	10	15
N	7	17,5	28	35	52,5
M	150	60	37,5	30	20

Theorie A Evenredig en omgekeerd evenredig met een macht van x

Als grootte P evenredig is met grootte Q , dan bestaat er een getal a waarvoor $P = aQ$. En zo volgt uit y is evenredig met $x^{0,75}$ dat er een getal a bestaat waarvoor $y = ax^{0,75}$.

y is evenredig met x^p betekent dat er een getal a bestaat waarvoor $y = ax^p$.

Voor omgekeerd evenredig geldt een soortgelijke eigenschap.

y is omgekeerd evenredig met x^p betekent dat er een getal a bestaat waarvoor $y = \frac{a}{x^p}$.

Als gegeven is dat y evenredig is met $x^{1,73}$ en er geldt dat $x = 5$ geeft $y = 820$, dan kun je als volgt de formule van y opstellen.

Omdat y evenredig is met $x^{1,73}$ geldt $y = ax^{1,73}$.

Invullen van $x = 5$ en $y = 820$ geeft $a \cdot 5^{1,73} = 820$, dus $a = \frac{820}{5^{1,73}} \approx 50,7$.

Dus $y = 50,7x^{1,73}$.

Als gegeven is dat y omgekeerd evenredig is met x^3 en er geldt dat $x = 5$ geeft $y = 18$, dan kun je als volgt de formule van y opstellen.

Omdat y omgekeerd evenredig is met x^3 geldt $y = \frac{a}{x^3}$.

Invullen van $x = 5$ en $y = 18$ geeft $\frac{a}{5^3} = 18$, dus $a = 18 \cdot 5^3 = 2250$.

Dus $y = \frac{2250}{x^3}$.

Voorbeeld

N is evenredig met t^p . De evenredigheidsconstante is 20.

Voor $t = 3$ is $N = 50$.

Bereken p algebraïsch. Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} N = 20t^p \\ t = 3 \text{ en } N = 50 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 20 \cdot 3^p = 50 \\ 3^p = 2,5 \\ p = {}^3\log(2,5) \approx 0,83 \end{array}$$

$$g^x = a \text{ geeft } x = {}^g\log(a)$$

R2 Zie het voorbeeld.

   Bereken p in drie decimalen.

3 **a** y is evenredig met $x^{1,8}$. Voor $x = 6$ is $y = 12$.

   Stel de formule van y op. Rond de evenredigheidsconstante af op twee decimalen.

b P is omgekeerd evenredig met t^2 . Voor $t = 0,3$ is $P = 10$.
Stel de formule van P op.

c y is evenredig met x^p . De evenredigheidsconstante is 180.
Voor $x = 4$ is $y = 900$.

Stel de formule op van y . Rond p af op twee decimalen.

- 4** De snelheid waarmee het water van een waterval het oppervlak bereikt is evenredig met $x^{0,5}$. Hierbij is x de hoogte van de waterval in meters. De waterval Angel Falls in Venezuela is 950 meter hoog. Het water bereikt het oppervlak met een snelheid van 480 km/u. Het water van de Iguazu watervallen op de grens van Brazilië en Argentinië bereikt met een snelheid van 141 km/u het oppervlak. Bereken de hoogte van de Iguazu watervallen.



De Angel Falls in Venezuela.

- A5** Een vliegtuig ondervindt twee soorten weerstand.
- De luchtweerstand W_l in newton die evenredig is met het kwadraat van de snelheid v in m/s.
 - De inductieweerstand W_i in newton die omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de snelheid v in m/s.
- Een Boeing 747 ondervindt bij een snelheid van 720 km/u een luchtweerstand van 120 000 N en een inductieweerstand van 300 000 N.
- Stel van W_l en W_i de formule op.
 - Bereken bij welke snelheid in km/u de totale weerstand $W = W_l + W_i$ minimaal is, en onderzoek of in dat geval geldt $W_l = W_i$.

- 6** Gegeven is dat N evenredig is met een macht van t , dus dat geldt $N = at^p$. Bij $t = 2$ hoort $N = 1,82$ en bij $t = 5$ hoort $N = 19,7$.

Uit het bovenstaande volgt het stelsel vergelijkingen
$$\begin{cases} a \cdot 2^p = 1,82 \\ a \cdot 5^p = 19,7 \end{cases}$$

- Licht dit toe.

Door bij beide vergelijkingen a vrij te maken, krijg je $a = \frac{1,82}{2^p}$ en $a = \frac{19,7}{5^p}$.

- Welke vergelijking volgt hieruit?
- Gebruik de optie snijpunt van de GR om a en p te berekenen en schrijf de formule van N op. Rond af op één decimaal.

- 7** Gegeven is dat W omgekeerd evenredig is met een macht van q , dus dat geldt $W = \frac{a}{q^p}$. Bij $q = 2,0$ hoort $W = 0,30$ en bij $q = 3,8$ hoort $W = 0,06$.

- Welk stelsel vergelijkingen volgt uit het bovenstaande?
- Maak bij beide vergelijkingen van het stelsel a vrij. Welke vergelijking volgt hieruit?
- Bereken a en p door de vergelijking van vraag b op te lossen en schrijf de formule van W op. Rond af op twee decimalen.

A8 Bij apen is de hersenmassa H in gram evenredig met een macht van G , de lichaamsmassa in kg. Een gorilla van 250 kg heeft een hersenmassa van 485 gram en een chimpansee van 60 kg heeft een hersenmassa van 186 gram.

- a** Stel de formule van H op. Rond de evenredigheidsconstante af op gehele en de exponent van de macht van G op twee decimalen.
- b** Een baviaan heeft een hersenmassa van 86 gram. Bereken zijn lichaamsmassa in gehele kg.



A9 De benodigde hoeveelheid drinkwater W van een zoogdier hangt af van de lichaamsmassa m . Onderzoek heeft uitgewezen dat W evenredig is met een macht van m . Hierbij is W in mL per uur en m in kg. Een geit van 30 kg heeft per uur 90 mL water nodig en een varken van 70 kg heeft per uur 190 mL water nodig. Een gazelle heeft per dag 1,2 liter water nodig. Wat volgt hieruit voor de massa van de gazelle?

O10 De formule $y = 2,5x^{\frac{1}{3}}$ is te herleiden tot $x = 0,064y^3$. Zoek uit hoe dat gaat.

Theorie B Variabele vrijmaken bij $y = ax^p$

Om bij de formule $y = 10x^{0,8}$ de variabele x vrij te maken, verwissel je eerst beide leden zodat de term met x in het linkerlid komt. Vervolgens deel je beide leden door 10 en daarna gebruik je de regel:

$$A^p = B \text{ geeft } A = B^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned} A^p &= B \\ (A^p)^{\frac{1}{p}} &= B^{\frac{1}{p}} \\ A &= B^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Je krijgt $y = 10x^{0,8}$

$$10x^{0,8} = y$$

$$x^{0,8} = 0,1y$$

Gebruik $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$.

$$x = (0,1y)^{\frac{1}{0,8}} = 0,1^{\frac{1}{0,8}} \cdot y^{\frac{1}{0,8}} \approx 0,056 \cdot y^{1,25}$$

Dus de formule is $x = 0,056y^{1,25}$.

Voorbeeld

Schrijf de formule $k = 125m^{1,4}$ in de vorm $m = ak^b$.
Rond af op drie decimalen.

Uitwerking

$$k = 125m^{1,4}$$

$$125m^{1,4} = k$$

$$m^{1,4} = 0,008k$$

$$m = (0,008k)^{\frac{1}{1,4}} = 0,008^{\frac{1}{1,4}} \cdot k^{\frac{1}{1,4}} \approx 0,032 \cdot k^{0,714}$$

$$\text{Dus } m = 0,032k^{0,714}.$$

11 Maak telkens x vrij. Schrijf je antwoord in de vorm $x = ay^b$.



Rond a en b af op twee decimalen.

a $y = 5x^{2,6}$

b $y = 0,2x^{-1,4}$

c $y = 1,5x^{0,9}$

12 Rond a en b af op twee decimalen.



a Schrijf de formule $K = 16p^{1,18}$ in de vorm $p = aK^b$.

b Schrijf de formule $l = 0,2 \cdot (2F)^{-1,5}$ in de vorm $F = al^b$.

c Schrijf de formule $D = 15 \cdot (0,2y)^{1,75}$ in de vorm $y = aD^b$.

A13 Rond a en b af op twee decimalen.



a Schrijf de formule $h = \frac{10n^{-2,1}}{1,13}$ in de vorm $n = ah^b$.

b Schrijf de formule $s = 0,008(2t)^{5,12}$ in de vorm $t = as^b$.

c Schrijf de formule $x = 3,5y\sqrt{y}$ in de vorm $y = ax^b$.

A14 Maak x vrij. Schrijf je antwoord in de vorm $x = ay^b$.



Rond zo nodig a en b af op twee decimalen.

a $y = 15x \cdot \sqrt[3]{x}$

b $y = \frac{12}{x \cdot \sqrt[4]{x}}$

O15



Planken is een fitnessoefening waarbij je voornamelijk je buikspieren traint. Manon doet de oefening elke dag één keer. Ze heeft bijgehouden hoe lang ze de oefening kan volhouden. Zie de tabel.

Manon heeft bij de tabel de formule $t = 25n^{0,6}$ gemaakt.

a Onderzoek of deze formule past bij de tabel.

b Manon beweert dat de tijd die ze de oefening kan volhouden met ongeveer 50% toeneemt als n verdubbelt.

Klopt dit? Licht toe.

poging n	5	10	15	20
tijd t in seconden	65	100	130	150

Theorie C Berekeningen met evenredigheidsverbanden

In opgave 15 hoort bij de fitnessoefening van Manon de formule $t = 25n^{0,6}$. Hierin is t de tijd in seconden die ze de oefening bij de n^e poging kan volhouden. Met deze formule is te berekenen met welk percentage de tijd toeneemt als n verdubbelt.

Ook is te berekenen hoeveel keer zo groot n wordt als t verdubbelt. Hiertoe druk je eerst n uit in t . Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $t = 25n^{0,6}$. Hierin is t de tijd in seconden die Manon de plankoefening bij de n^e poging kan volhouden.

- a Bereken met welk percentage de tijd toeneemt als n verdubbelt.
- b Bereken in één decimaal hoeveel keer zo groot n wordt als t verdubbelt.

Aanpak

- a Neem in de formule $2n$ voor n en schrijf de formule in de vorm $t^* = a \cdot 25n^{0,6}$.
- b Druk n uit in t en neem $2t$ voor t .

Uitwerking

- a Neem in de formule $2n$ voor n .

Je krijgt $t^* = 25 \cdot (2n)^{0,6} = 25 \cdot 2^{0,6} \cdot n^{0,6} = 2^{0,6} \cdot 25n^{0,6} \approx 1,516 \cdot 25n^{0,6}$.

Dus $t^* \approx 1,516 \cdot t$.

Als n verdubbelt, neemt de tijd met ongeveer 51,6% toe.

- b $t = 25n^{0,6}$ geeft $25n^{0,6} = t$

$$n^{0,6} = 0,04t$$

$$n = (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}$$

Neem in deze formule $2t$ voor t .

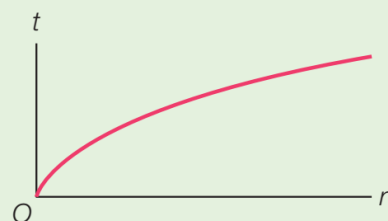
Je krijgt $n^* = (0,04 \cdot 2t)^{\frac{1}{0,6}} = 0,04^{\frac{1}{0,6}} \cdot 2^{\frac{1}{0,6}} \cdot t^{\frac{1}{0,6}} = 2^{\frac{1}{0,6}} \cdot (0,04t)^{\frac{1}{0,6}} \approx 3,2 \cdot (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}$.

Dus $n^* \approx 3,2 \cdot n$.

Als t verdubbelt, wordt n ongeveer 3,2 keer zo groot.

In de figuur hiernaast zie de grafiek van $t = 25n^{0,6}$ van het voorbeeld. Je ziet dat de grafiek afnemend stijgend is.

In het algemeen is de grafiek van $y = ax^p$ met $a > 0$ voor $x > 0$ afnemend stijgend als $0 < p < 1$ en toenemend stijgend als $p > 1$.



De grafiek van $y = ax^p$ met $a > 0$ is voor $x > 0$

- afnemend stijgend als $0 < p < 1$
- toenemend stijgend als $p > 1$.

R16 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.



- a** Leg uit hoe je de afnemende stijging van $t = 25n^{0,6}$ terugziet in het antwoord van vraag a.
- b** Schrijf de formule $n = (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}$ in de vorm $n = at^b$ waarbij je a en b afrondt op drie decimalen, en leg uit hoe je de toenemende stijging van de verkregen formule terugziet in het antwoord van vraag b.
- c** Met hoeveel procent neemt de tijd t toe als n verdrievoudigt?

17



- a** Voor de remweg van een auto geldt de formule $r = 0,016v^{1,75}$. Hierin is r de remweg in meters bij een snelheid van v km/u. Bereken hoeveel keer zo lang de remweg is als de snelheid verdubbelt. Rond af op één decimaal.
- b** Bij het maken van een bepaald type vliegtuig geldt voor het aantal metingen dat nodig is voor het produceren van één toestel de formule $M = 150000n^{-0,3}$. Hierin is M het aantal metingen dat nodig is voor het produceren van het n^e toestel. Bereken met hoeveel procent M afneemt als het aantal geproduceerde toestellen verdubbelt.

18



- Op de eilanden in het Caribisch gebied vonden biologen een verband tussen de oppervlakte van het eiland en het aantal soorten amfibieën en reptielen dat er voorkomt. Hierbij hoort de formule $N = 4,4A^{0,3}$ met N het aantal soorten op het eiland en A de oppervlakte van het eiland in km^2 . Op eiland P komen 25% meer soorten voor dan op eiland Q. Bereken hoeveel keer zo groot eiland P is als eiland Q. Rond af op één decimaal.

19



- In deze opgave gaan we uit van een eiken plank met een dikte van 2,5 cm die aan de uiteinden wordt ondersteund. Met de formule $d = 0,0005gl^4$ is te berekenen hoeveel zo'n plank doorbuigt als deze gelijkmatig belast wordt. In de formule is d de doorbuiging in mm, g het gewicht in kg per mm plank gerekend in de lengterichting en l de lengte van de plank in dm.
- a** Op een plank met een lengte van 2 meter liggen 20 stenen van elk 4 kg. Hoeveel mm is de doorbuiging?
- b** Op een plank met een lengte van 2,5 meter liggen zoveel stenen dat de doorbuiging 2,5 mm is. Hoeveel is het totale gewicht van de stenen?

Bij de vragen c, d en e is $g = 0,05$.

- c** Bereken de lengte van de plank die 2,2 mm doorbuigt. Rond af op gehele cm.
- d** Met hoeveel procent neemt de doorbuiging van een plank toe als de plank 20% langer zou zijn?
- e** Schrijf de formule $d = 2,5 \cdot 10^{-5}l^4$ in de vorm $l = a \cdot \sqrt[n]{d}$. Rond a af op gehele.

A20

Met de *formule van Marcenac en Aublet* kun je uit de afmetingen van een paard een schatting van het gewicht van het paard krijgen. Deze formule is van de vorm $G = aR^3$, waarin G het gewicht in kg is en R de rompomvang in meters.

- a** Van een paard is de rompomvang 1,2 keer zo groot als van een ander paard.

Hoeveel keer zo groot is het gewicht?

- b** Van een paard is het gewicht twee keer zo groot als van een ander paard.

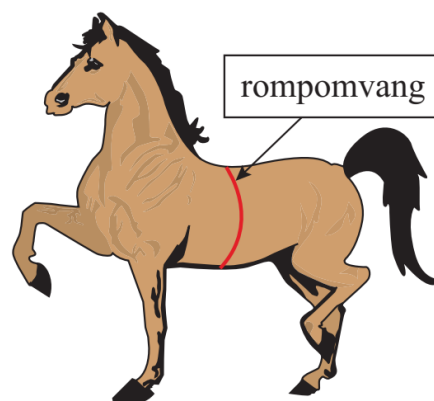
Hoeveel keer zo groot is de rompomvang? Rond af op twee decimalen.

Van een paard met een rompomvang van 2,03 meter is het gewicht 670 kg. Hieruit volgt dat a in gehelen gelijk is aan 80.

- c** Bereken a . Rond af op één decimaal.

- d** Bereken in gehele cm de rompomvang van een paard van 580 kg.

- e** Schrijf de formule $G = 80R^3$ in de vorm $R = bG^c$. Rond b af op drie decimalen.

**A21**

Bekend is dat de geluidssterkte L omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand d tot de geluidsbron. Hierin is L in W/m^2 en d in meters.

- a** Daniëlle krijgt bij een concert last van haar oren en gaat drie keer zover van de luidsprekers staan.

Welke invloed heeft dat op de geluidssterkte die zij waarneemt?

- b** Patrick staat op een afstand van 3 meter van een geluidsbron. Hij wil dat de geluidssterkte die hij waarneemt de helft minder wordt.

Op hoeveel meter van de geluidsbron moet hij gaan staan? Rond af op één decimaal.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan formules opstellen van de vorm $y = ax^p$ en van de vorm $y = \frac{a}{x^p}$.
- ☐ Ik kan bij formules van de vorm $y = ax^p$ de variabele x vrijmaken.
- ☐ Ik kan rekenen met formules van de vorm $y = ax^p$ en van de vorm $y = \frac{a}{x^p}$.

► OPGAVE C1
THEORIE A

► OPGAVE C2
THEORIE B

► OPGAVE C3
THEORIE C

- C1**
- a** y is evenredig met $x^{2,8}$. Bij $x = 3$ hoort $y = 117$.
Stel de formule van y op. Rond de evenredigheidsconstante af op één decimaal.
 - b** y is omgekeerd evenredig met $x^{1,5}$. Bij $x = 25$ hoort $y = 4$.
Stel de formule van y op.
 - c** y is evenredig met x^p . De evenredigheidsconstante is 53.
Voor $x = 3$ is $y = 88$.
Stel de formule op van y . Rond p af op twee decimalen.

- C2**
- Schrijf in de vorm $x = ay^b$. Rond af op drie decimalen.
- a** $y = 80x^{1,57}$
 - b** $y = 3,7x^{-1,36}$

- C3**
- Gegeven is de formule $y = 0,64x^{2,3}$.
- a** Bereken hoeveel keer zo groot y wordt als je x drie keer zo groot neemt. Rond af op één decimaal.
 - b** Bereken met hoeveel procent x verandert als y verdubbelt.

Antwoorden

- C1**
- a** $y = 5,4x^{2,8}$
 - b** $y = \frac{500}{x^{1,5}}$
 - c** $y = 53x^{0,46}$
- C2**
- a** $x = 0,061y^{0,637}$
 - b** $x = 2,617y^{-0,735}$
- C3**
- a** 12,5 keer
 - b** toename 35,2%

11.2 Standaardgrafieken en transformaties

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met transformaties van grafieken van standaardfuncties.
- Je kunt functievoorschriften opstellen van som-, verschil- en kettingfuncties.

O22



- a** Hoe ontstaat de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ uit de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$?
- b** Hoe ontstaat de grafiek van $y = \sqrt{x-3}$ uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$?
- c** Hoe ontstaat de grafiek van $y = \frac{2}{x}$ uit de grafiek van $y = \frac{1}{x}$?
- d** Hoe ontstaat de grafiek van $y = 2^{\frac{1}{3}x}$ uit de grafiek van $y = 2^x$?

Theorie A Overzicht standaardfuncties

Je kent de volgende standaardfuncties.

- Machtsfuncties $f(x) = ax^n$
- Wortelfunctie $f(x) = \sqrt{x}$
- Gebroken functie $f(x) = \frac{1}{x}$
- Exponentiële functies $f(x) = g^x$
- Logaritmische functies $f(x) = {}^g\log(x)$
- Goniometrische functies $f(x) = \sin(x)$ en $f(x) = \cos(x)$

Op de volgende bladzijde zie je een overzicht van deze standaardfuncties met hun eigenschappen.

Zoals je weet mag je de grafiek van een standaardfunctie tekenen of schetsen zonder nadere toelichting.

Op een standaardgrafiek kun je de volgende transformaties toepassen.

Het effect van transformaties op een standaardgrafiek

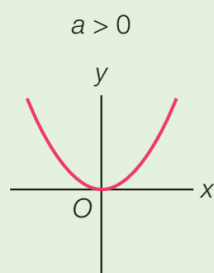
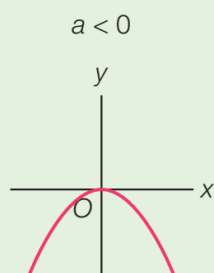
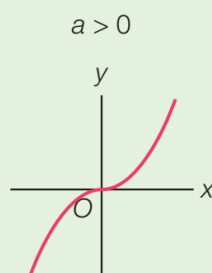
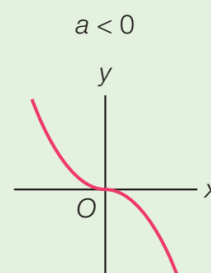
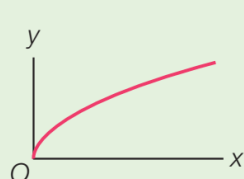
Vermenigvuldiging t.o.v. de x -as met a	Vermenigvuldig in de formule de functiewaarde met a .
Vermenigvuldiging t.o.v. de y -as met b	Vervang in de formule x door $\frac{1}{b}x$.
Translatie $(c, 0)$	Vervang in de formule x door $x - c$.
Translatie $(0, d)$	Tel in de formule d op bij de functiewaarde.

Standaardfuncties

Machtsfuncties $f(x) = ax^n$ met $n > 1$ en n geheel

Voor n is even is de grafiek (lijn)symmetrisch.

Voor n is oneven is de grafiek puntsymmetrisch.

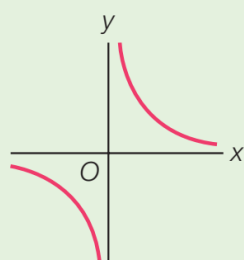


Wortelfunctie $f(x) = \sqrt{x}$

liggende halve parabool

domein = $[0, \rightarrow)$

bereik = $[0, \rightarrow)$



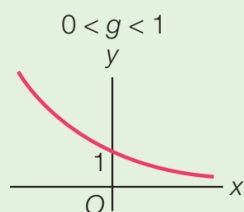
Gebroken functie $f(x) = \frac{1}{x}$

hyperbool

verticale asymptoot $x = 0$

horizontale asymptoot $y = 0$

Exponentiële functies $f(x) = g^x$



$0 < g < 1$

grafiek is dalend

domein = $\mathbb{R}$

bereik = $\langle 0, \rightarrow)$

hor. asymptoot $y = 0$

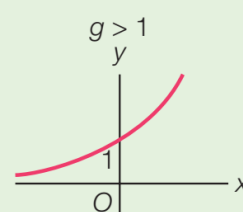
$g > 1$

grafiek is stijgend

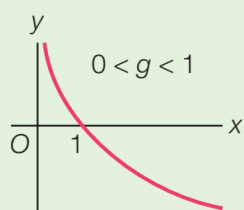
domein = $\mathbb{R}$

bereik = $\langle 0, \rightarrow)$

hor. asymptoot $y = 0$



Logaritmische functies $f(x) = {}^g\log(x)$



$0 < g < 1$

grafiek is dalend

domein = $\langle 0, \rightarrow)$

bereik = $\mathbb{R}$

vert. asymptoot $x = 0$

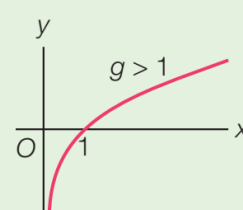
$g > 1$

grafiek is stijgend

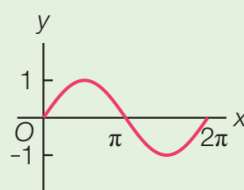
domein = $\langle 0, \rightarrow)$

bereik = $\mathbb{R}$

vert. asymptoot $x = 0$



Goniometrische functies



$f(x) = \sin(x)$

ev. stand 0

amplitude 1

periode 2π

beginpunt $(0, 0)$

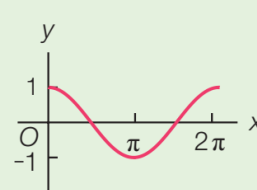
$f(x) = \cos(x)$

ev. stand 0

amplitude 1

periode 2π

beginpunt $(0, 1)$



R23 Zie het schema met standaardfuncties op de vorige bladzijde.

□ ⊗ * Vul in. Kies steeds uit *toenemend stijgend*, *afnemend stijgend*, *toenemend dalend* en *afnemend dalend*.

- a** Voor $x < 0$ is de grafiek van $f(x) = ax^n$ met $a > 0$, $n > 1$ en n even
- b** Voor $x > 0$ is de grafiek van $f(x) = ax^n$ met $a > 0$ en $n > 1$
- c** Voor $x > 0$ is de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$
- d** Voor $x < 0$ is de grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$
- e** Voor $x > 0$ is de grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$
- f** Voor $0 < g < 1$ is de grafiek van $f(x) = g^x$
- g** Voor $g > 1$ is de grafiek van $f(x) = g^x$
- h** Voor $0 < g < 1$ is de grafiek van $f(x) = {}^g\log(x)$
- i** Voor $g > 1$ is de grafiek van $f(x) = {}^g\log(x)$

24 **a** Op de grafiek van $y = 0,3x^4$ wordt eerst de translatie $(-5, 6)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 3.

□

Stel van de beeldgrafiek de formule op en geef de coördinaten van de top.

- b** Op de grafiek van $y = 0,3x^4$ wordt eerst de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 3 toegepast en vervolgens de translatie $(-5, 6)$.
Stel van de beeldgrafiek de formule op en geef de coördinaten van de top.

25 Gegeven is de functie $f(x) = 0,01(3x - 8)^4 - 5$.

⊗ *

- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van de functie $g(x) = 0,01x^4$?
- b** De grafiek van f wordt a naar rechts geschoven en b omhoog. Zo ontstaat de grafiek van de functie h . De top van de grafiek van h is het punt $(4, 0)$.
Bereken exact de waarden van a en b .

26 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3} - 1$.

□

- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- b** Bereken het domein en geef het bereik van f .
- c** De grafiek van f wordt 3 naar rechts en 5 omhoog geschoven.
Zo ontstaat de grafiek van de functie g .
Geef het functievoorschrift van g .
- d** De grafiek van f wordt 1 naar links en b omlaag geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie h . De grafiek van h gaat door het punt $(1, 0)$.
Bereken b .

27 Gegeven is de functie $f(x) = 3\sqrt{2x-1} + 2$.



- a Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- b Bereken het domein en geef het bereik van f .
- c De grafiek van f wordt b naar links en 11 naar beneden geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . De grafiek van g gaat door de oorsprong. Bereken exact de waarde van b .

28 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2}{x-3} + 4$.



- a Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- b Geef de formules van de asymptoten van de grafiek van f .
- c De grafiek van de functie $g(x) = \frac{4}{2x-1}$ ontstaat uit de grafiek van f door een of meer transformaties na elkaar toe te passen. Geef aan welke transformatie(s) dit kunnen zijn en in welke volgorde ze moeten worden toegepast.

29 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2x}$ en $g(x) = \frac{3}{x-5} + 2$.



- a De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door enkele transformaties na elkaar toe te passen. Geef aan welke transformaties dit kunnen zijn en in welke volgorde ze moeten worden toegepast.
- b De grafiek van de functie h ontstaat uit de grafiek van f door enkele transformaties na elkaar toe te passen. De asymptoten van de grafiek van h zijn de lijnen $x = 2$ en $y = 4$ en de grafiek van h gaat door het punt $A(3, 9)$. Geef de transformaties en ook de volgorde waarin ze moeten worden toegepast.

30 Gegeven is de functie $f(x) = 4 \cdot 3^{x-1} - 6$.



- a Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- b Geef de formule van de asymptoot van de grafiek van f en geef het bereik van f .
- c De grafiek van f wordt eerst 3 naar links geschoven en daarna met $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = 4(3^{x+1} - \frac{1}{2})$. Toon dit op algebraïsche wijze aan.

$$\begin{aligned}a^p \cdot a^q &= a^{p+q} \\ \frac{a^p}{a^q} &= a^{p-q} \\ (a^p)^q &= a^{pq} \\ (ab)^p &= a^p b^p\end{aligned}$$

31 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}\log(x+3) - 2$.



- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- b** Geef de formule van de asymptoot van de grafiek van f en geef het domein van f .
- c** De grafiek van f wordt a omhoog geschoven en met b vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . De grafiek van g gaat door het punt $A(2\frac{3}{4}, -2)$ en de asymptoot van de grafiek van g is de lijn $x = 3$.
Bereken exact a en b .
- d** De grafiek van f wordt eerst c naar rechts geschoven en daarna met d vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie $h(x) = \frac{1}{2}\log(x)$.
Bereken exact de waarden van c en d .

$${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(ab)$$

$${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^s\log(a) = {}^s\log(a^p)$$

$${}^s\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(s)}$$

32 Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 3\sin(2x - \frac{1}{2}\pi)$.



De grafiek van de functie g is een sinusoidale waarvan de periode een derde is van de periode van de grafiek van f , de amplitude de helft is van de amplitude van de grafiek van f en een beginpunt $\frac{1}{6}\pi$ rechts en 2 boven een beginpunt van de grafiek van f ligt.
Stel een functievoorschrift op van g in de vorm $g(x) = a + b\sin(cx - d)$.

033 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 4x$ en $g(x) = 2x - 1$.



Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van de functie

- a** $s(x) = f(x) + g(x)$
- b** $v(x) = f(x) - g(x)$
- c** $k(x) = f(g(x))$.

Theorie B Som-, verschil- en kettingfuncties

Bij de functies $f(x) = x^2 + 6x$ en $g(x) = 4 - x$ kun je de functievoorschriften opstellen van de **somfunctie** $s(x) = f(x) + g(x)$, de **verschilfunctie** $v(x) = f(x) - g(x)$ en de **kettingfunctie** $k(x) = f(g(x))$.

Je krijgt

$$s(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 6x + 4 - x = x^2 + 5x + 4$$

$$v(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 6x - (4 - x) = x^2 + 6x - 4 + x = x^2 + 7x - 4$$

$$k(x) = f(g(x)) = (4 - x)^2 + 6(4 - x) = 16 - 8x + x^2 + 24 - 6x = x^2 - 14x + 40.$$

De somfunctie van de functies $f(x) = \frac{2}{x-1}$ en $g(x) = \frac{5x}{x+2}$ is

$s(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{5x}{x+2}$. Je kunt het functievoorschrift van s herleiden tot één breuk. De nieuwe noemer wordt $(x-1)(x+2)$. Je krijgt

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{2}{x-1} + \frac{5x}{x+2} = \frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{5x(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{2(x+2) + 5x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2x+4+5x^2-5x}{(x-1)(x+2)} = \frac{5x^2-3x+4}{(x-1)(x+2)}. \end{aligned}$$

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}$$

Het herleiden van het functievoorschrift van de verschilfunctie

$v(x) = m(x) - n(x)$ met $m(x) = \frac{2}{x}$ en $n(x) = \frac{x-1}{x+1}$ gaat als volgt.

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{2}{x} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x(x-1)}{x(x+1)} = \frac{2(x+1) - x(x-1)}{x(x+1)} \\ &= \frac{2x+2-x^2+x}{x(x+1)} = \frac{-x^2+3x+2}{x(x+1)} \end{aligned}$$

De kettingfunctie $k(x) = m(n(x))$ is $k(x) = \frac{2}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2(x+1)}{x-1} = \frac{2x+2}{x-1}$.

Vermenigvuldig teller en noemer met $x+1$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x+3}$, $g(x) = 2^{x-1}$ en $h(x) = {}^2\log(x)$.

- Schrijf het functievoorschrift van de functie $s(x) = f(x) + g(x)$ in de vorm $s(x) = a \cdot 2^x$.
- Schrijf het functievoorschrift van de functie $m(x) = 3 \cdot f(x) - 16 \cdot g(x)$ in de vorm $m(x) = 2^{x+b}$.
- Bewijs dat de functie $k(x) = f(h(x))$ te schrijven is als $k(x) = 8x$ met $x > 0$.

Uitwerking

- $s(x) = f(x) + g(x) = 2^{x+3} + 2^{x-1} = 2^x \cdot 2^3 + 2^x \cdot 2^{-1} = 8 \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x = 8\frac{1}{2} \cdot 2^x$
- $m(x) = 3 \cdot f(x) - 16 \cdot g(x) = 3 \cdot 8 \cdot 2^x - 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^x = 24 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x = 16 \cdot 2^x = 2^4 \cdot 2^x = 2^{x+4}$
- $f(x) = 2^{x+3} = 8 \cdot 2^x$ en het domein van h is $x > 0$, dus $k(x) = f(h(x)) = 8 \cdot 2^{2\log(x)} = 8 \cdot x = 8x$ met $x > 0$.

34 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.



- a** Schrijf het functievoorschrift van de functie $n(x) = f(x) + 6 \cdot g(x)$ in de vorm $n(x) = a \cdot 2^x$.
- b** Schrijf het functievoorschrift van de functie $p(x) = f(x) - 12 \cdot g(x)$ in de vorm $p(x) = 2^{x+b}$.
- c** Bewijs dat $l(x) = g(h(x))$ te schrijven is als $l(x) = \frac{1}{2}x$ met $x > 0$.

35 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$, $g(x) = \frac{a}{x}$, $s(x) = f(x) + g(x)$,



- $v(x) = f(x) - g(x)$ en $k(x) = f(g(x))$.
Bereken algebraïsch voor welke waarde van a
- a** de grafiek van s door het punt $(1, 1\frac{1}{2})$ gaat
- b** $v(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+x}$ het functievoorschrift van v is
- c** de grafiek van k door het punt $(4, -2)$ gaat.

A36 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(6x)$, $g(x) = {}^3\log(4,5x)$,



- $h(x) = 3^{x+1}$, $s(x) = f(x) + g(x)$, $v(x) = f(x) - g(x)$ en $k(x) = f(h(x))$.
- a** Het functievoorschrift van s is te schrijven in de vorm $s(x) = a + b \cdot {}^3\log(x)$.
Bereken a en b .
- b** Het functievoorschrift van v is te schrijven in de vorm $v(x) = c + {}^3\log(d)$.
Bereken c en d .
- c** Het functievoorschrift van k is te schrijven in de vorm $k(x) = x + p$ met $x > 0$.
Bereken p . Rond af op twee decimalen.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan werken met transformaties van grafieken van standaardfuncties.
- ☐ Ik kan functievoorschriften opstellen van som-, verschil- en kettingfuncties.

► OPGAVE C4
THEORIE A

► OPGAVE C5
THEORIE B

C4 Geef aan hoe de grafiek van de functie kan ontstaan uit een standaardgrafiek.

- a** $f(x) = 0,3(2x + 7)^4 - 2$
- b** $g(x) = 6 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$
- c** $h(x) = {}^2\log\left(\frac{1}{3}x + 4\right)$

C5 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ en $g(x) = \frac{2}{x+1}$.

- a** De somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$ is te herleiden tot de vorm

$$s(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)(x+1)}.$$

Bereken a , b en c .

- b** De verschilfunctie $v(x) = f(x) - g(x)$ is te herleiden tot de vorm

$$v(x) = \frac{mx^2 + nx + p}{(x-1)(x+1)}.$$

Bereken m , n en p .

- c** De kettingfunctie $k(x) = f(g(x))$ is te herleiden tot de vorm

$$k(x) = \frac{qx + r}{sx + 1}.$$

Bereken q , r en s .

Antwoorden

- C4** **a** eerst $\times 0,3$ t.o.v. de x -as, dan de translatie $(-7, -2)$ en dan $\times \frac{1}{2}$ t.o.v. de y -as
- b** eerst $\times 5$ t.o.v. de x -as en dan de translatie $(-1, 6)$
- c** eerst de translatie $(-4, 0)$ en dan $\times 3$ t.o.v. de y -as
- C5** **a** $a = 1$, $b = 5$ en $c = 0$
- b** $m = 1$, $n = 1$ en $p = 4$
- c** $q = 2$, $r = 4$ en $s = -1$

11.3 Tweede- en derdegraadsfuncties

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met tweedegraadsfuncties.
- Je kunt vergelijkingen van de vorm $A \cdot B = 0$, $A^2 = B^2$, $A \cdot B = A \cdot C$ en $A \cdot B = A$ algebraïsch oplossen.
- Je kunt werken met derdegraadsfuncties.

037

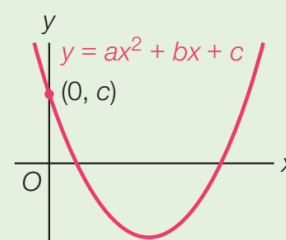


Gegeven zijn de functies $f(x) = (x - 3)^2 + 4$ en $g(x) = 2(x - 1)(x - 3)$.

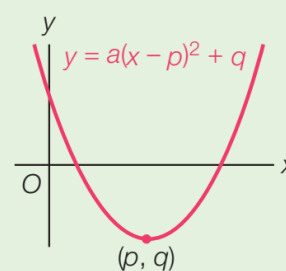
- Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek $y = x^2$? Wat volgt hieruit voor de coördinaten van de top van de grafiek van f ?
- Schrijf het functievoorschrift van f in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Waarom kun je uit deze vorm direct de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de y -as aflezen?
- Hoe volgen de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as direct uit het functievoorschrift van g ?
- Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van g .

Theorie A Tweedegraadsfuncties

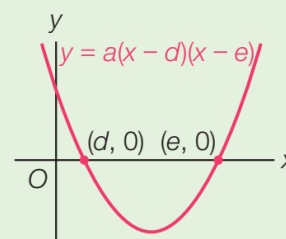
De algemene formule van een **tweedegraadsfunctie** oftewel kwadratische functie is $y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$. Uit deze formule kun je direct de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de y -as aflezen. Dit snijpunt is $(0, c)$. Ook kun je met de formule $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$ de x -coördinaat van de top van de grafiek berekenen.



De formule van een kwadratische functie is ook te schrijven in de vorm $y = a(x - p)^2 + q$. Uit deze vorm lees je direct de coördinaten van de top af. De top is het punt (p, q) .



De formule is ook te schrijven in de vorm $y = a(x - d)(x - e)$. Uit deze vorm lees je direct de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x -as af. Deze snijpunten zijn $(d, 0)$ en $(e, 0)$. Ook kun je met de formule $x_{\text{top}} = \frac{d + e}{2}$ de x -coördinaat van de top van de grafiek berekenen.



In het voorbeeld hieronder wordt de hoek tussen twee lijnen gevraagd. Je gebruikt daarbij dat voor de richtingshoek α van lijn k geldt $\tan(\alpha) = rc_k$ met $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$, en dat de hoek tussen twee lijnen nooit groter is dan 90° .

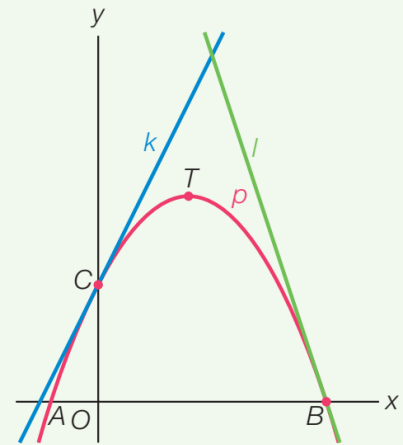
Voorbeeld

De parabool p snijdt de x -as in de punten $A(-2, 0)$ en $B(10, 0)$ en de y -as in het punt C . De y -coördinaat van de top T van p is 9. De lijn k raakt p in C en de lijn l raakt p in B . Zie de figuur hiernaast.

Bereken op algebraïsche wijze de hoek tussen k en l .

Aanpak

- 1 Stel de formule van p op.
- 2 Bereken de afgeleide van de formule van p .
- 3 Bereken de richtingshoeken van k en l .
- 4 Bereken de hoek tussen k en l .



Uitwerking

p door $A(-2, 0)$ en $B(10, 0)$, dus $p: y = a(x + 2)(x - 10)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{-2 + 10}{2} = 4, \text{ dus } T(4, 9).$$

$$\begin{aligned} T \text{ op } p \text{ geeft } a(4 + 2)(4 - 10) &= 9 \\ -36a &= 9 \\ a &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } p: y = -\frac{1}{4}(x + 2)(x - 10) = -\frac{1}{4}(x^2 - 8x - 20) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5.$$

Differentiëren geeft $y' = -\frac{1}{2}x + 2$.

$$\tan(\alpha) = rc_k = y'(0) = 2 \text{ geeft } \alpha = 63,43\dots^\circ$$

$$\tan(\beta) = rc_l = y'(10) = -3 \text{ geeft } \beta = -71,56\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 63,43\dots^\circ - (-71,56\dots^\circ) = 135^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(k, l) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

R38 In de theorie op de vorige bladzijde zijn drie vormen van kwadratische formules genoemd.



Welke vorm is in het voorbeeld gebruikt en waarom is voor deze vorm gekozen?

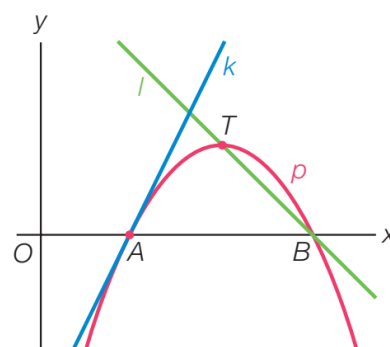
39 Zie het voorbeeld.



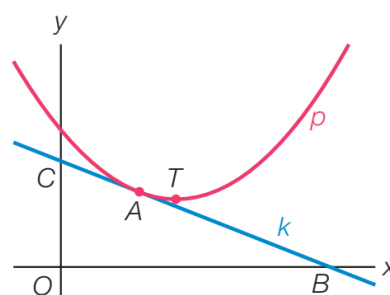
- a Bereken de hoek die k met de y -as maakt. Rond af op één decimaal.
- b Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van k en l .
- c Bewijs dat de lijn m die door C gaat en loodrecht op k staat, door B gaat.

40 De parabool p snijdt de x -as in de punten $A(3, 0)$ en $B(9, 0)$ en de y -as in het punt $C(0, -9)$. De lijn k raakt p in A en de lijn l gaat door B en de top T van p . Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken in graden de hoek tussen k en l . Rond af op één decimaal.
b De lijn m snijdt k loodrecht in A en snijdt de y -as in het punt S .
 Bereken exact de y -coördinaat van S .

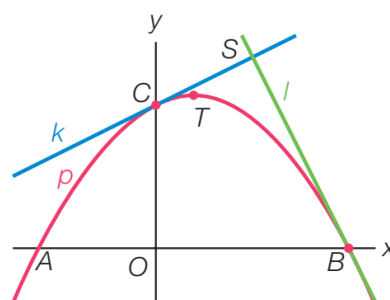


41 Van de parabool p is de top $T(3, 1\frac{4}{5})$. Het punt $A(2, 2)$ ligt op p . De lijn k raakt p in A en snijdt de assen in de punten B en C . Zie de figuur hiernaast.
 Bereken exact de oppervlakte van driehoek OBC .



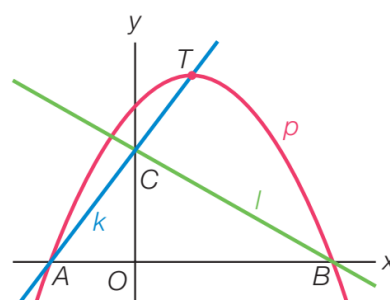
A42 De parabool p snijdt de x -as in de punten $A(-3, 0)$ en $B(5, 0)$ en de y -as in het punt C . De y -coördinaat van de top T van p is 4. De lijn k raakt p in C en de lijn l raakt p in B . De lijnen k en l snijden elkaar in het punt S . Zie de figuur hiernaast.

- a** Bewijs dat k en l loodrecht op elkaar staan.
b Bereken exact de coördinaten van S .



A43 De top van de parabool p is $T(2, 10)$ en p snijdt de x -as in de punten $A(-3, 0)$ en B . De lijn k door A en T snijdt de y -as in het punt C . De lijn l gaat door B en C . Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken in graden de hoek tussen k en l . Rond af op één decimaal.
b De lijn m is evenwijdig met k en raakt de parabool in het punt D .
 Bereken exact de coördinaten van D .



O44 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ en $g(x) = 2(\frac{1}{3}x - 1)^3$.

- a** Hoe ontstaat de grafiek van g uit de grafiek van f ?
b De lijn k raakt de grafiek van f in het punt $A(2, 2)$.
 Stel langs algebraïsche weg de formule op van k .
c De lijn l raakt de grafiek van g in het punt $B(6, 2)$.
 Stel langs algebraïsche weg een vergelijking op van l .

Theorie B Derdegraadsfuncties

De algemene formule van een **derdegraadsfunctie** is $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ met $a \neq 0$.

De grafiek van een derdegraadsfunctie kan de x -as drie keer snijden en heeft maximaal twee toppen.

De x -coördinaten van de toppen van de grafiek van de derdegraadsfunctie $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$ bereken je op algebraïsche wijze door de vergelijking $f'(x) = 0$ op te lossen.

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 3 \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$$

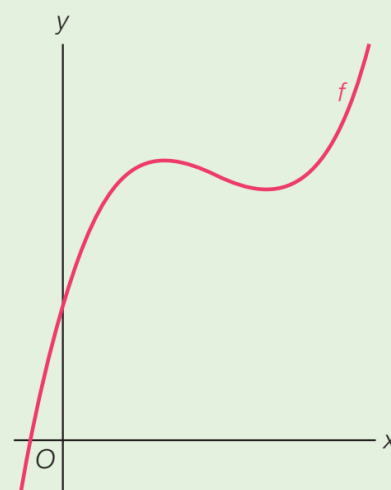
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 4$$

$$f(2) = 6\frac{1}{3} \text{ en } f(4) = 5\frac{2}{3}$$

Dus de toppen zijn $(2, 6\frac{1}{3})$ en $(4, 5\frac{2}{3})$.



In het voorbeeld op de volgende bladzijde wordt de vergelijking $\frac{1}{6}(x - 4)(x^2 + 5x + 4) = -x - 4$ algebraïsch opgelost. Daartoe wordt de vergelijking geschreven als $\frac{1}{6}(x - 4)(x + 1)(x + 4) = -(x + 4)$.

Deze vergelijking heeft de vorm $A \cdot B = A \cdot C$, waarbij $A = x + 4$, $B = \frac{1}{6}(x - 4)(x + 1)$ en $C = -1$.

Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0 \vee B = C$. Zie hiernaast.

Je krijgt dus $x + 4 = 0 \vee \frac{1}{6}(x - 4)(x + 1) = -1$.

De regel $A \cdot B = A \cdot C$ geeft $A = 0 \vee B = C$ kun je dus gebruiken bij het algebraïsch oplossen van vergelijkingen. Zie ook hieronder.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A \cdot C \\ A \cdot B - A \cdot C &= 0 \\ A(B - C) &= 0 \\ A = 0 \vee B &= C \end{aligned}$$

Regels voor het algebraïsch oplossen van vergelijkingen

- $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$
- $A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$
- $A \cdot B = A \cdot C$ geeft $A = 0 \vee B = C$
- $A \cdot B = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{6}(x-4)(x^2 + 5x + 4)$.

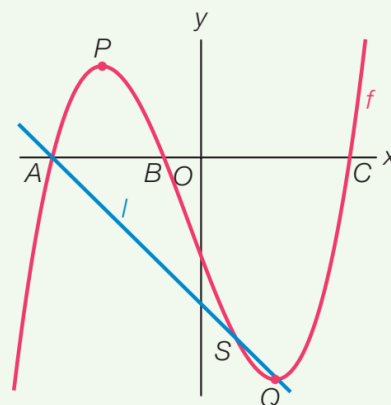
De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A , B en C .

De punten P en Q zijn de toppen van de grafiek van f .

De lijn l door A en Q snijdt de grafiek van f in het punt S .

Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de coördinaten van S .



Uitwerking

$$f(x) = 0 \text{ geef } \frac{1}{6}(x-4)(x^2 + 5x + 4) = 0$$

$$\frac{1}{6}(x-4)(x+1)(x+4) = 0$$

$$x = 4 \vee x = -1 \vee x = -4$$

Dus $A(-4, 0)$.

$$f(x) = \frac{1}{6}(x-4)(x^2 + 5x + 4) = \frac{1}{6}(x^3 + 5x^2 + 4x - 4x^2 - 20x - 16)$$

$$= \frac{1}{6}(x^3 + x^2 - 16x - 16) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{6}(3x^2 + 2x - 16)$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{6}(3x^2 + 2x - 16) = 0$$

$$3x^2 + 2x - 16 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot -16 = 196, \text{ dus } \sqrt{D} = 14$$

$$x = \frac{-2 + 14}{6} = 2 \vee x = \frac{-2 - 14}{6} = -2\frac{2}{3}$$

$$f(2) = \frac{1}{6}(2-4)(2^2 + 5 \cdot 2 + 4) = -6, \text{ dus } Q(2, -6).$$

$$l: y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6 - 0}{2 - (-4)} = -1$$

$$y = -x + b \text{ door } A(-4, 0) \text{ geeft } b = 4, \text{ dus } l: y = -x - 4.$$

$$l \text{ snijden met de grafiek van } f \text{ geeft } \frac{1}{6}(x-4)(x^2 + 5x + 4) = -x - 4$$

$$\frac{1}{6}(x-4)(x+1)(x+4) = -(x+4)$$

$$x+4 = 0 \vee \frac{1}{6}(x-4)(x+1) = -1$$

$$x = -4 \vee (x-4)(x+1) = -6$$

$$x^2 - 3x - 4 = -6$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 2$$

$$x = 1 \text{ geeft } y = -1 - 4 = -5, \text{ dus } S(1, -5).$$

R45 Zie de theorie op bladzijde 109.



- a** Laat zien hoe de regel $A \cdot B = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$ volgt uit de regel $A \cdot B = A \cdot C$ geeft $A = 0 \vee B = C$.
- b** In de theorie staat dat de grafiek van een derdegraadsfunctie de x -as drie keer kan snijden.
Onderzoek of er nog meer mogelijkheden zijn en licht elk van de mogelijkheden toe met een schets.
- c** In de theorie staat dat de grafiek van een derdegraadsfunctie maximaal twee toppen heeft.
Onderzoek welke mogelijkheden er nog meer zijn en licht elk van de mogelijkheden toe met een schets.

46 Los exact op. Bedenk telkens eerst welke regel voor het algebraïsch



oplossen van vergelijkingen uit het rode kader op bladzijde 109 je nodig hebt.

- a** $(4x - 1)^2 = (3x - 2)^2$
b $(x - 4)(x^2 - 25) = 0$
c $(3x - 5)^2 = 4x^2$
d $2x(x - 2) = 6(x - 2)$
e $(3x - 2)^3 = 3x - 2$
f $x^3(x - 3) = 8(x - 3)$

47 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.



Het snijpunt van de grafiek van f met de y -as noemen we T .
De lijn m is de lijn door de punten T en C . Lijn m snijdt de grafiek van f links van de y -as in het punt U .
Bereken exact de coördinaten van U .

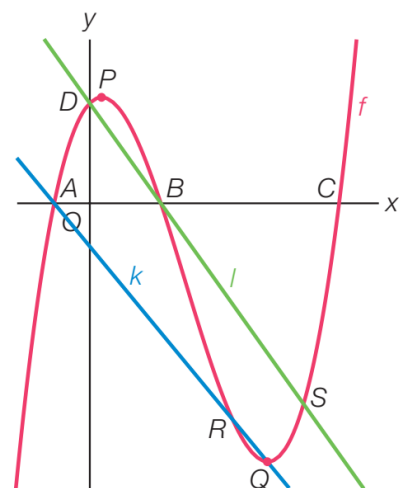
48 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 6x - 7)(x - 2)$.



De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A , B en C en de y -as in het punt D . De punten P en Q zijn de toppen van de grafiek van f .

De lijn k door A en Q snijdt de grafiek van f in het punt R .
De lijn l door B en D snijdt de grafiek van f in het punt S .
Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken exact de coördinaten van R .
b Bereken exact de coördinaten van S .



A49 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 4x$.

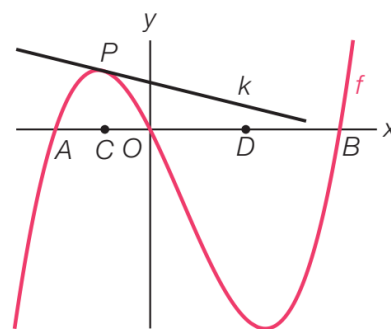


De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A , O en B . Het punt C is het midden van het lijnstuk AO en het punt D is het midden van het lijnstuk OB .

De lijn k met richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ raakt de grafiek van f in het punt P . Zie de figuur hiernaast.

- Bewijs dat $x_P = x_C$ en dat k door B gaat.
- De lijn l raakt de grafiek van f in het punt Q met $x_Q = x_D$.

Onderzoek op algebraïsche wijze of l door A gaat.



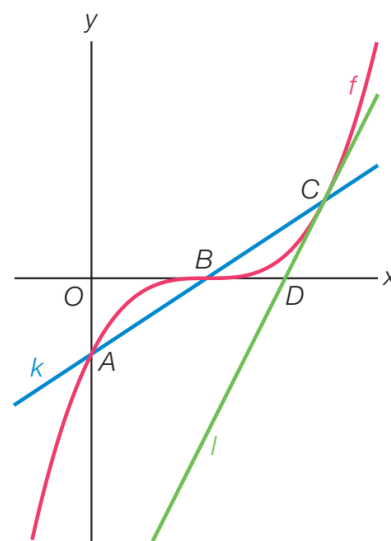
A50 Gegeven is de functie $f(x) = 4(\frac{1}{3}x - 1)^3$.



- Hoe ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $y = x^3$?

De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A en de x -as in het punt B . De lijn k gaat door A en B en snijdt de grafiek van f ook nog in het punt C . De lijn l raakt de grafiek van f in C en snijdt de x -as in het punt D . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact de x -coördinaat van D .



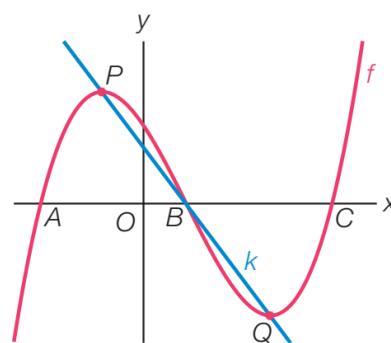
A51 Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{3}x - 1)^3 - 4x + 12$.



De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A , B en C . De punten P en Q zijn de toppen van de grafiek van f . De lijn k is de lijn door P en Q .

Zie de figuur hiernaast.

Bewijs dat k door B gaat.



E52 In de theorie staat dat de grafiek van een derdegraadsfunctie de x -as



drie keer kan snijden. Dat betekent dat een derdegraadsvergelijking drie oplossingen kan hebben. Het is ook mogelijk dat een derdegraadsvergelijking twee oplossingen heeft, of één oplossing.

Gegeven is de vergelijking $x^3 + px^2 + 9x = 0$.

Onderzoek algebraïsch voor welke waarden van p deze vergelijking

- één oplossing heeft
- twee oplossingen heeft
- drie oplossingen heeft.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met tweedegraadsfuncties.

☐ Ik kan vergelijkingen van de vorm $A \cdot B = 0$, $A^2 = B^2$, $A \cdot B = A \cdot C$ en $A \cdot B = A$ algebraïsch oplossen.

☐ Ik kan werken met derdegraadsfuncties.

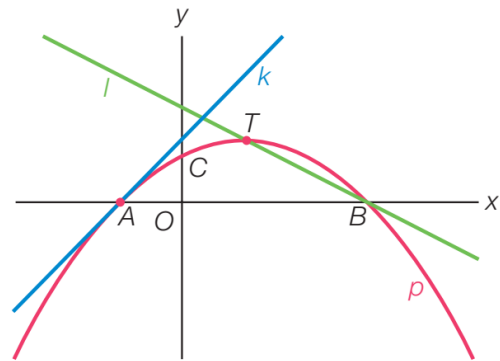
► OPGAVE C6
THEORIE A

► OPGAVE C7
THEORIE B

► OPGAVE C8
THEORIE B

C6 De parabool p met top $T(1, 1)$ snijdt de x -as in de punten A en B en de y -as in het punt $C(0, \frac{3}{4})$. De lijn k raakt p in A en de lijn l gaat door B en T . Zie de figuur hiernaast.

Bereken in graden de hoek tussen k en l . Rond af op één decimaal.



C7 Bereken exact de oplossingen.

a $(x + 2)(x^2 - 1) = 0$

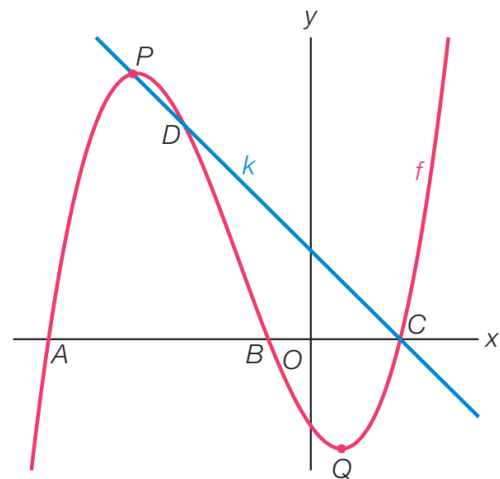
b $(2x + 1)^2 = (x - 2)^2$

c $x^2(x - 5) = 9(x - 5)$

d $x^2(x - 5) = x - 5$

C8 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}(x + 6)(x^2 - x - 2)$. De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A , B en C . De punten P en Q zijn de toppen van de grafiek van f . De lijn k door P en C snijdt de grafiek van f in het punt D . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de coördinaten van D .



Antwoorden

C6 $\angle(k, l) \approx 71,6^\circ$

C7 a $x = -2 \vee x = 1 \vee x = -1$

b $x = -3 \vee x = \frac{1}{3}$

c $x = 5 \vee x = 3 \vee x = -3$

d $x = 5 \vee x = 1 \vee x = -1$

C8 $D(-3, 10)$

11.4 Wortelfuncties

Kennis en vaardigheden

- Je kunt het domein en het bereik van een wortelfunctie bepalen.
- Je kunt bij formules van de vorm $y = a + b\sqrt{cx + d}$ de variabele x vrijmaken.
- Je kunt werken met de afgeleide van functies van de vorm $f(x) = a + b\sqrt{cx + d}$.

O53

□ ⊗ *

Gegeven is de functie $f(x) = -3 + 2\sqrt{4x - 5}$.

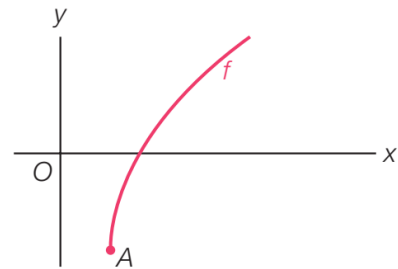
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f .

Het punt A is het randpunt van de grafiek.

De coördinaten van A zijn $(1\frac{1}{4}, -3)$.

a Licht dit toe.

b Geef het domein en het bereik van f .



Theorie A Functies van de vorm $f(x) = a + b\sqrt{cx + d}$

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = 4 - 2\sqrt{3x - 6}$. De grafiek heeft een randpunt.

Om de coördinaten hiervan te berekenen, los je de vergelijking $3x - 6 = 0$ op. Dit geeft $3x = 6$, dus $x = 2$.

$f(2) = 4 - 2 \cdot 0 = 4$, dus het randpunt is $(2, 4)$.

Uit de coördinaten van het randpunt en de schets volgt

$D_f = [2, \rightarrow)$ en $B_f = \langle \leftarrow, 4 \rangle$.

Je kunt bij de formule $y = 4 - 2\sqrt{3x - 6}$ de variabele x vrijmaken en de formule herleiden tot de vorm

$x = ay^2 + by + c$. Dat gaat als volgt.

$$y = 4 - 2\sqrt{3x - 6}$$

Zet de term met x apart (isoleren).

$$2\sqrt{3x - 6} = 4 - y$$

Deel beide leden door 2.

$$\sqrt{3x - 6} = 2 - \frac{1}{2}y$$

Kwadrateer beide leden.

$$3x - 6 = (2 - \frac{1}{2}y)^2$$

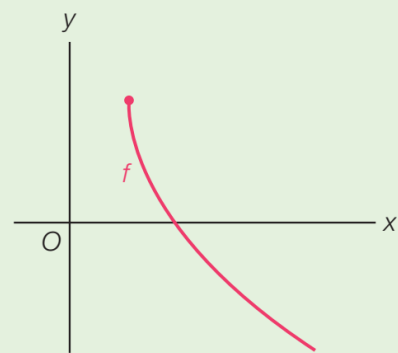
$$3x - 6 = 4 - 2y + \frac{1}{4}y^2$$

$$3x = \frac{1}{4}y^2 - 2y + 10$$

$$x = \frac{1}{12}y^2 - \frac{2}{3}y + 3\frac{1}{3}$$

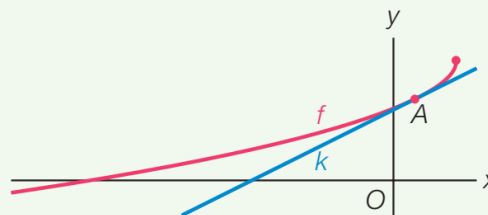
Uit $2\sqrt{3x - 6} = 4 - y$ hierboven volgt dat $4 - y \geq 0$ oftewel $y \leq 4$.

Deze voorwaarde hoeft je niet te vermelden.



Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{6 - 4x}$.
Op de grafiek van f ligt het punt A met $y_A = 2$.
De lijn k raakt de grafiek van f in A en snijdt de x -as in het punt B . Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact de coördinaten van B .



Uitwerking

$$f(x) = 2 \text{ geeft } 3 - \frac{1}{2}\sqrt{6 - 4x} = 2$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{6 - 4x} = 1$$

$$\sqrt{6 - 4x} = 2$$

$$6 - 4x = 4$$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{1}{2}, \text{ dus } A\left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

$$f(x) = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{6 - 4x} = 3 - \frac{1}{2}(6 - 4x)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{4}(6 - 4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -4 = \frac{1}{(6 - 4x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6 - 4x}}$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{6 - 2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A\left(\frac{1}{2}, 2\right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + b = 2 \\ b = 1\frac{3}{4} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{2}x + 1\frac{3}{4}.$$

$$k \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } \frac{1}{2}x + 1\frac{3}{4} = 0$$

$$\frac{1}{2}x = -1\frac{3}{4}$$

$$x = -3\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } B\left(-3\frac{1}{2}, 0\right).$$

R54 Zie de theorie op de vorige bladzijde met de functie

□ ⊗ * $f(x) = 4 - 2\sqrt{3x - 6}$.

a Bereken $f(5)$ en gebruik de figuur om te bepalen welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x < 5$.

b Los exact op $f(x) = 0$.

Voor welke waarden van x geldt $f(x) > 0$?

55 Zie het voorbeeld hierboven.

□ ⊗ * De lijn l is evenwijdig met k en gaat door het randpunt van de grafiek van f .

Bewijs dat l de grafiek van f snijdt in het punt $\left(-2\frac{1}{2}, 1\right)$.

56 Schrijf de formule in de vorm $x = ay^2 + by + c$.

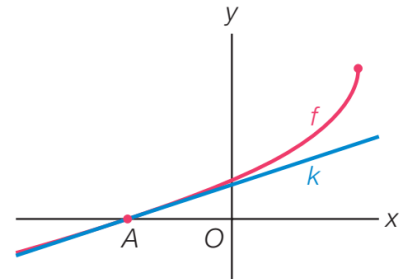
- a** $y = 4 + 2\sqrt{x-5}$
b $y = 3 - \sqrt{2x+4}$
c $y = 5 - \frac{1}{3}\sqrt{x-2}$

57 Gegeven is de functie $f(x) = 6 - 2\sqrt{5-x}$.

a Bepaal het domein en het bereik van f .

De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A . De lijn k raakt de grafiek van f in A . Zie de figuur hiernaast.

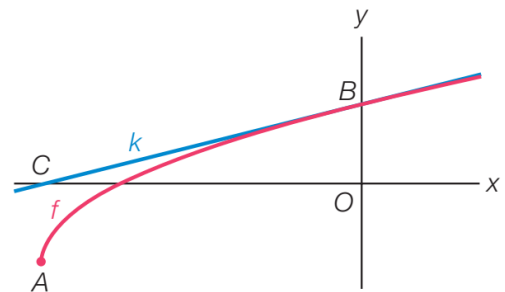
- b** Stel langs algebraïsche weg de formule op van k .
c De lijn l met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$ raakt de grafiek van f in het punt B .
 Stel langs algebraïsche weg de formule op van l .



58 Gegeven is de functie $f(x) = -1 + \sqrt{\frac{1}{2}x + 4}$.

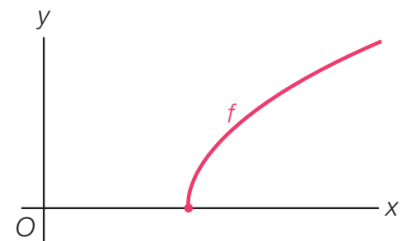
a De grafiek van f heeft randpunt A en snijdt de y -as in het punt B . De lijn k raakt de grafiek van f in B en snijdt de x -as in het punt C . Zie de figuur hiernaast.

Onderzoek op algebraïsche wijze of C recht boven A ligt.



59 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{x-4}$. Hiernaast zie je de grafiek van f .

- a** De lijn $k: y = x + b$ raakt de grafiek van f .
 Bereken exact b .
b De lijn $l: y = ax$ raakt de grafiek van f in het punt A .
 Bereken exact de coördinaten van A .

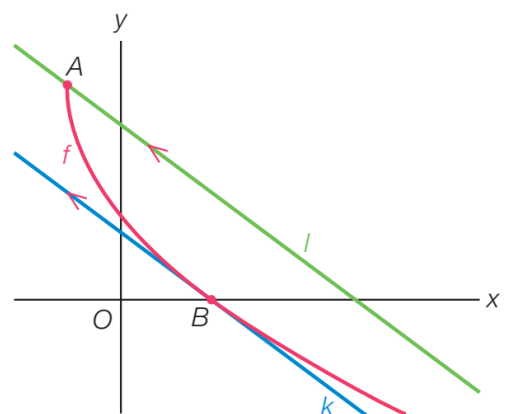


A60 Gegeven is de functie $f(x) = 6 - \frac{1}{2}\sqrt{4x+6}$.

a De grafiek van f heeft randpunt A en snijdt de x -as in het punt B . De lijn k raakt de grafiek van f in B . De lijn k wordt c omhoog geschoven. Hierdoor ontstaat de lijn l die door A gaat. Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken exact de waarde van c .
b Vul in: *groter dan*, *kleiner dan* of *gelijk aan*.

De afstand tussen k en l is
 de waarde van c .

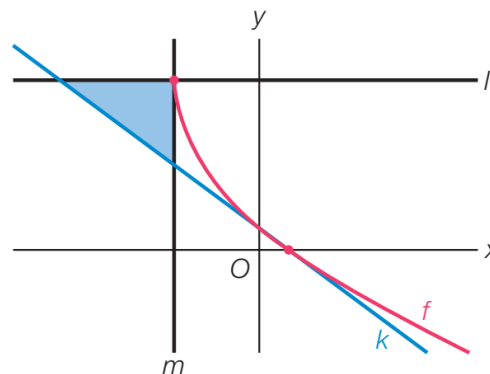


A61 De functie f heeft een functievoorschrift van de vorm

□ ⊗ * $f(x) = a + b\sqrt{2x + c}$.

a Bereken exact de waarden van a , b en c in het geval $A(2\frac{1}{2}, 2)$ het randpunt van de grafiek van f is en de grafiek ook door het punt $B(3, -1)$ gaat.

b Neem $a = 3$, $b = -1\frac{1}{2}$ en $c = 3$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek met de x -as. De lijn l is de horizontale lijn door het randpunt van de grafiek van f en de lijn m is de verticale lijn door het randpunt. Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de oppervlakte van de driehoek die ingesloten wordt door k , l en m .



E62 **a** Bewijs dat de grafiek van de functie $f(x) = 1 + \sqrt{-x^2 + 8x + 9}$ een halve cirkel is.

b Onderzoek of de grafieken van de functies $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ en $h(x) = \sqrt{-x^2 - 6x + 8}$ halve cirkels zijn.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan het domein en het bereik van een wortelfunctie bepalen.

☐ Ik kan bij formules van de vorm $y = a + b\sqrt{cx + d}$ de variabele x vrijmaken.

☐ Ik kan werken met de afgeleide van functies van de vorm $f(x) = a + b\sqrt{cx + d}$.

► OPGAVE C9a
THEORIE A

► OPGAVE C9b
THEORIE A

► OPGAVE C9c
THEORIE A

C9 Gegeven is de functie $f(x) = 5 - 3\sqrt{4 - 2x}$.

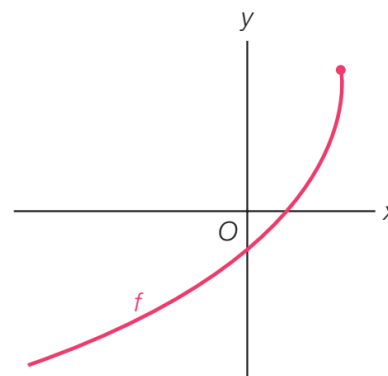
Hiernaast zie je de grafiek van f .

a Bepaal het domein en het bereik van f .

b Schrijf de formule $y = 5 - 3\sqrt{4 - 2x}$ in de vorm $x = ay^2 + by + c$.

c De lijn k met richtingscoëfficiënt $\frac{3}{4}$ raakt de grafiek van f .

Stel op algebraïsche wijze de formule op van k .



Antwoorden

C9 a $D_f = \langle \leftarrow, 2 \rangle$ en $B_f = \langle \leftarrow, 5 \rangle$

b $x = -\frac{1}{18}y^2 + \frac{5}{9}y + \frac{11}{18}$

c $k: y = \frac{3}{4}x - 2\frac{1}{2}$

11.5 Gebroken functies

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de formules van de asymptoten van de grafiek van een gebroken functie bepalen.
- Je kunt bij gebroken lineaire formules variabelen vrijmaken.
- Je kunt werken met de afgeleide van een gebroken functie.

63



Gegeven is de functie $f(x) = 4 + \frac{1}{x-2}$.

- Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek $y = \frac{1}{x}$?
- Geef van de grafiek van f de formules van de asymptoten en schets de grafiek van f .
- Toon aan dat het functievoorschrift te schrijven is als $f(x) = \frac{4x-7}{x-2}$.

Theorie A Functies van de vorm $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

De algemene vorm van een **gebroken lineaire functie** is $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ met

$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ en $c \neq 0$. Men kan aantonen dat de grafiek van elke gebroken lineaire

functie door transformaties kan ontstaan uit de standaardgrafiek $y = \frac{1}{x}$.

Dus de grafiek van een gebroken lineaire functie is een hyperbool en heeft een verticale en een horizontale asymptoot.

Bij de grafiek van de functie $f(x) = \frac{15x+4}{3x-6}$ vind je de asymptoten als volgt.

De verticale asymptoot krijg je door de noemer gelijk aan nul te stellen.

Dit geeft $3x-6=0$ oftewel $3x=6$. Dus de lijn $x=2$ is de verticale asymptoot.

De horizontale asymptoot krijg je door te bedenken dat voor hele grote x de 4 in de teller te verwaarlozen is ten opzichte van de $15x$. En in de noemer is de -6 te verwaarlozen ten opzichte van de $3x$.

Dus voor grote x is $f(x) \approx \frac{15x}{3x} = 5$. ←

Hieruit volgt dat de horizontale asymptoot de lijn $y=5$ is.

Ook voor sterk negatieve x
krijg je $f(x) \approx \frac{15x}{3x}$.

Asymptoten vinden bij grafieken van gebroken functies

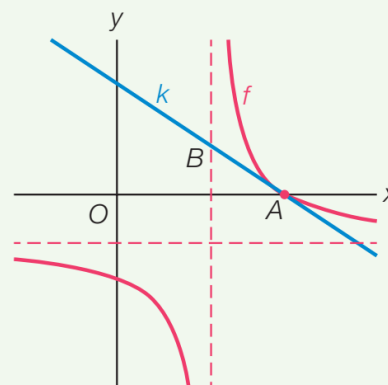
Verticale asymptoot Stel de noemer gelijk aan 0.

Horizontale asymptoot Beredeneer wat de functiewaarde wordt voor grote x .

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{2x-4} - 1$.

- a Stel de formules op van de asymptoten van de grafiek van f .
- b De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A .
De lijn k raakt de grafiek van f in A en snijdt de verticale asymptoot in het punt B .
Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact de coördinaten van B .



Uitwerking

- a noemer = 0 geeft $2x - 4 = 0$, dus $x = 2$.
De verticale asymptoot is de lijn $x = 2$.
Voor grote x is $\frac{3}{2x-4} \approx 0$, dus $f(x) \approx 0 - 1 = -1$.
De horizontale asymptoot is de lijn $y = -1$.

- b $f(x) = 0$ geeft $\frac{3}{2x-4} - 1 = 0$
$$\frac{3}{2x-4} = 1$$
$$2x - 4 = 3$$
$$2x = 7$$
$$x = 3\frac{1}{2}, \text{ dus } A(3\frac{1}{2}, 0).$$

$$f(x) = \frac{3}{2x-4} - 1 = 3(2x-4)^{-1} - 1 \text{ geeft } f'(x) = -3(2x-4)^{-2} \cdot 2 = \frac{-6}{(2x-4)^2}$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'(3\frac{1}{2}) = \frac{-6}{(7-4)^2} = -\frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(3\frac{1}{2}, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{2} + b = 0 \\ b = 2\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{1}{3}.$$

$$k \text{ snijden met de lijn } x = 2 \text{ geeft } y = -\frac{2}{3} \cdot 2 + 2\frac{1}{3} = 1.$$

$$\text{Dus } B(2, 1).$$

Je kunt bij de gebroken lineaire formule $y = \frac{4x+3}{2x-3}$ de variabele x vrijmaken.

Hoe dat gaat zie je op de volgende bladzijde.

$$y = \frac{4x + 3}{2x - 3}$$

$$y(2x - 3) = 4x + 3$$

$$2xy - 3y = 4x + 3$$

$$2xy - 4x = 3y + 3$$

$$x(2y - 4) = 3y + 3$$

$$x = \frac{3y + 3}{2y - 4}$$

Vermenigvuldig beide leden met $2x - 3$.

Werk de haakjes weg.

Breng de termen met x naar links, de rest naar rechts.

Breng x buiten haakjes.

Deel beide leden door $2y - 4$.

64 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.



De lijn l is evenwijdig met k en raakt de grafiek van f in het punt C .
Stel op algebraïsche wijze de formule op van l .

65 Stel de formules op van de asymptoten van de grafiek van de functie.



a $f(x) = \frac{3x}{4 - x}$

b $g(x) = \frac{2x - 3}{2x + 5}$

c $h(x) = 2 - \frac{x + 3}{4x - 1}$

66 Maak x vrij bij de formule.



a $y = \frac{3x}{4 - x}$

b $y = \frac{2x - 3}{2x + 5}$

c $y = 2 - \frac{x + 3}{4x - 1}$

67 Maak x vrij bij de formule.



a $\log(y) = \frac{x}{x + 3}$

b $2^y = 3 + \frac{1}{5 - x}$

c $\sin(y) = \frac{2\pi}{2x + 1}$

68 Bij het testen van een thermoskan meet men de temperatuur van de vloeistof in de kan gedurende enkele uren. De temperatuur blijkt te benaderen door de formule $T = \frac{80t + 240}{4t + 3}$. Hierin is t de tijd in uren en T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$. Hiernaast zie je de grafiek van T .



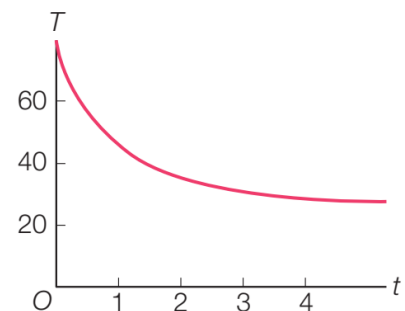
a De grafiek van T heeft een horizontale asymptoot.

Welke lijn is dat? Wat is de praktische betekenis van deze lijn?

b Druk t uit in T en bereken na hoeveel minuten de temperatuur 25°C is.

c Toon aan dat de formule $T = 20 + \frac{180}{4t + 3}$ op hetzelfde neerkomt als

$T = \frac{80t + 240}{4t + 3}$, bereken algebraïsch $T'(3)$ en geef de betekenis hiervan.



69

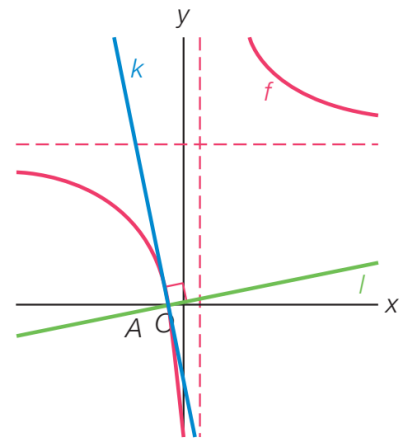


Gegeven is de functie $f(x) = \frac{10}{2x-1} + 5$.

De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A . De lijn k raakt de grafiek van f in A . De lijn l gaat door A en staat loodrecht op k . Zie de figuur hiernaast.

De lijn l snijdt de grafiek van f behalve in A ook in het punt B .

Bereken exact de coördinaten van B .



A70



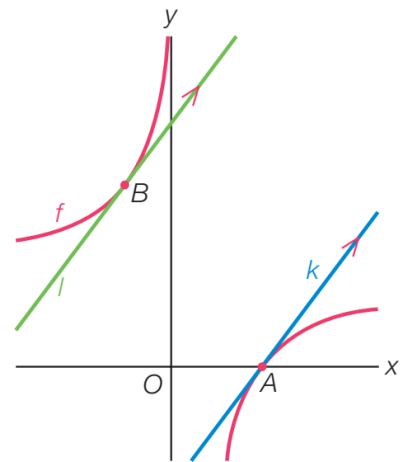
Gegeven is de functie $f(x) = 2 - \frac{6}{2x-1}$.

a Stel de formules op van de asymptoten van de grafiek van f .

b Druk x uit in y bij de formule $y = 2 - \frac{6}{2x-1}$.

c De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A . De lijn k raakt de grafiek van f in A . De lijn l is evenwijdig met k en raakt de grafiek van f in het punt B . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de afstand tussen A en B .



A71



Gegeven is de functie $f(x) = \frac{6}{\sqrt{2x+1}} - 3$. De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A en de y -as in het punt B . De grafiek van de functie $g(x) = ax^2 + bx + c$ gaat door A en raakt de grafiek van f in het punt B . Zie de figuur hiernaast.

Uit de coördinaten van B volgt de waarde van c .

a Bereken exact de waarde van c .

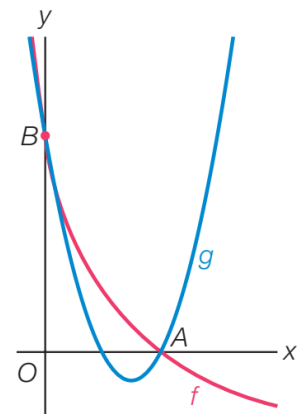
Dat de grafieken van f en g elkaar raken in B betekent dat de helling van de grafiek van f in B gelijk is aan de helling van de grafiek van g in B .

Hiermee kun je de waarde van b berekenen.

b Bereken exact de waarde van b .

Met de coördinaten van A kun je vervolgens de waarde van a berekenen.

c Bereken exact de waarde van a .



A72



Zie opgave 71.

De grafiek van de functie $h(x) = px^2 + qx + r$ gaat door B en raakt de grafiek van f in het punt A .

Stel het functievoorschrift van h op.

073



Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 18}{2x}$.

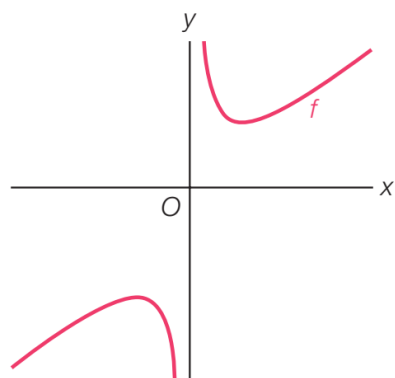
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f .
Het functievoorschrift van f is te schrijven als

$$f(x) = x - \frac{3}{2} + \frac{9}{x}.$$

a Toon dit aan.

De afgeleide van f is $f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$.

b Toon dit aan en bereken exact de extreme waarden van f .



Theorie B Gebroken functies met extremen

Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 8}{4x}.$$

De functie heeft twee extremen.

Je ziet dat het maximum kleiner is dan het minimum.

Om de extremen te berekenen ga je eerst uitdelen.

$$\begin{aligned} \text{Je krijgt } f(x) &= \frac{2x^2 + 3x + 8}{4x} = \frac{2x^2}{4x} + \frac{3x}{4x} + \frac{8}{4x} \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{2}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + 2x^{-1} \end{aligned}$$

Je kunt nu de afgeleide berekenen.

$$\text{Dit geeft } f'(x) = \frac{1}{2} - 2x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}.$$

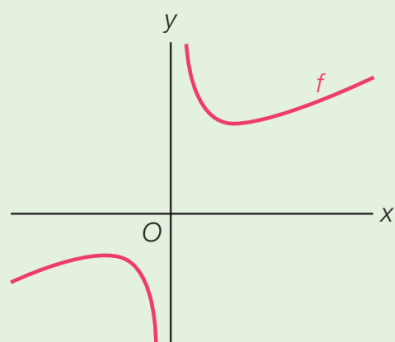
$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{x^2}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

Dus max. is $f(-2) = -1\frac{1}{4}$ en min. is $f(2) = 2\frac{3}{4}$.



74



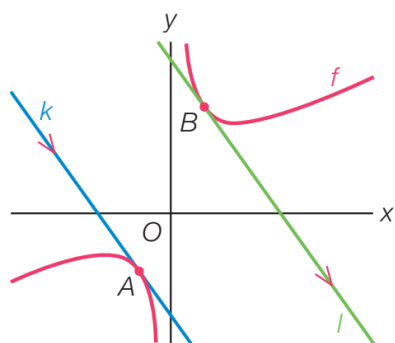
Zie de theorie.

a De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt $-1\frac{1}{2}$. De raakpunten zijn A en B .
Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de coördinaten van A en B .

b De lijn $y = \frac{1}{2}x$ snijdt de grafiek van f in één punt.
Bereken exact de coördinaten van dit punt.

c Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ de grafiek van f snijdt.



75

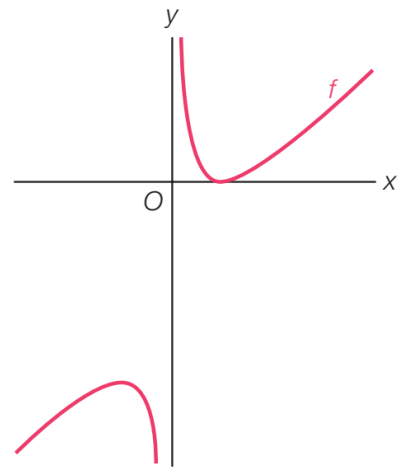


Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$.

Zie de grafiek van f in de figuur hiernaast.

De coördinaten van de toppen van de grafiek zijn $(-2, -8)$ en $(2, 0)$.

- Bewijs dit.
- De lijn k gaat door de toppen van de grafiek van f . Bereken exact de afstand van de oorsprong tot k .
- De lijn $y = x$ snijdt de grafiek van f in het punt A . De lijn l raakt de grafiek in A . Bereken exact de coördinaten van het snijpunt B van l met de x -as.
- De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt $\frac{3}{4}$. Bereken exact de coördinaten van de bijbehorende raakpunten.
- Gegeven is de functie $g(x) = x - 4$ met domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$. De grafiek van g snijdt de grafiek van f niet, maar komt voor steeds grotere waarden van x steeds dichterbij de grafiek van f . Er zijn waarden van x waarvoor $f(x) - g(x) < \frac{1}{10}$. Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) - g(x) < \frac{1}{10}$.



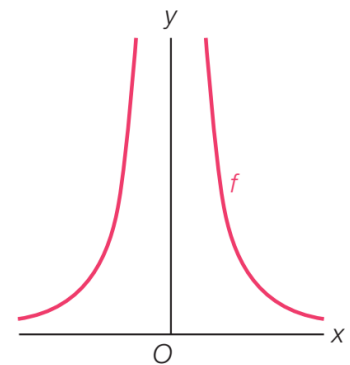
76



Gegeven is de functie $f(x) = \frac{25}{2x^2}$. De grafiek van f is

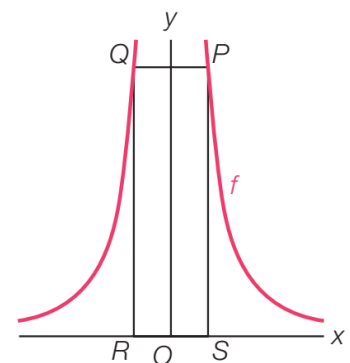
symmetrisch in de y -as. Zie de figuur hiernaast.

- De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B . De afstand tussen A en B is 3. Bereken exact de waarde van p .
- De lijn k raakt de grafiek van f in het punt C met $x_C = 2$. Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van k met de y -as.
- De lijn l met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{5}$ raakt de grafiek van f . Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van l met de x -as.



Op de grafiek van f ligt een willekeurig punt P met $x_P > 0$. Je kunt nu een rechthoek $PQRS$ tekenen met P en Q op de grafiek van f en R en S op de x -as. De omtrek van de rechthoek hangt af van de positie van P op de grafiek van f .

- In de figuur hiernaast is de rechthoek getekend waarvan de lengte van een verticale zijde 8 is. Bereken exact de omtrek van deze rechthoek.
- Je kunt P zo op de grafiek van f kiezen, dat de omtrek van de rechthoek minimaal is. Bereken algebraïsch voor deze situatie de coördinaten van P en rond af op twee decimalen.



77


Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2}{3 \sin(x) + 4}$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$.

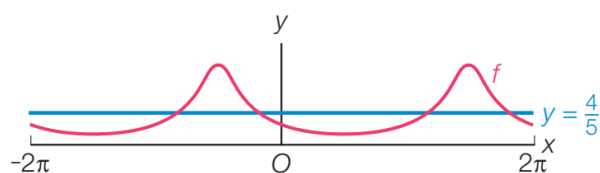
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f en de lijn $y = \frac{4}{5}$.

a Los exact op $f(x) > \frac{4}{5}$.

Het minimum van f treedt op voor de waarden van x waarbij de noemer $3 \sin(x) + 4$ maximaal is.

b Bereken exact voor welke waarden van x de functie minimaal is en geef dit minimum.

c Bereken exact voor welke waarden van x de functie maximaal is en geef dit maximum.



A78


Op het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ is gegeven de functie

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x}.$$

De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A en B en heeft top T . Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de oppervlakte van driehoek ABT .

Op de grafiek van f ligt het punt $P(p, f(p))$ met $x_A < p < x_B$. Het punt Q is de loodrechte projectie van P op de x -as. Zie de figuur hiernaast.

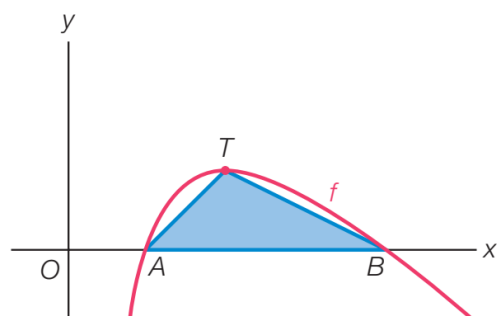
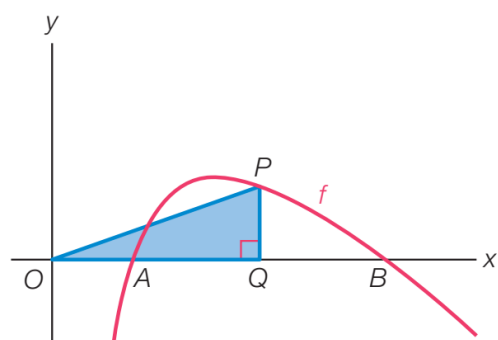
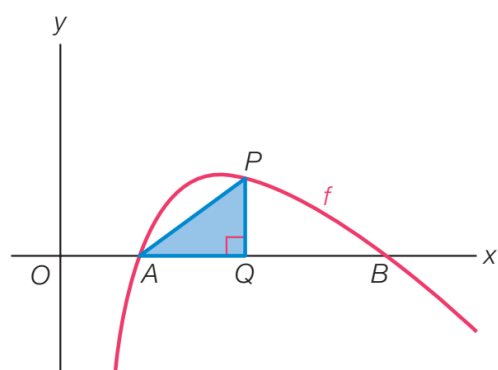
De oppervlakte van driehoek OPQ hangt af van de positie van P op de grafiek van f .

b Bereken exact de oppervlakte van driehoek OPQ in het geval punt P samenvalt met de top T .

c Bereken exact de coördinaten van P in het geval de oppervlakte van driehoek OPQ maximaal is.

Ook de oppervlakte van driehoek APQ hangt af van de positie van P op de grafiek van f .

d Bereken met behulp van differentiëren voor welke p de oppervlakte van driehoek APQ maximaal is. Rond af op drie decimalen.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de formules van de asymptoten van de grafiek van een gebroken functie bepalen.
- ☐ Ik kan bij gebroken lineaire formules variabelen vrijmaken.
- ☐ Ik kan werken met de afgeleide van gebroken functies.

► OPGAVE C10
THEORIE A

► OPGAVE C11
THEORIE A

► OPGAVE C12,C13
THEORIE A,B

C10 Stel de formules op van de asymptoten van de grafiek van de functie.

a $f(x) = \frac{4x-1}{3-2x}$ **b** $g(x) = 3 - \frac{x}{3x-2}$

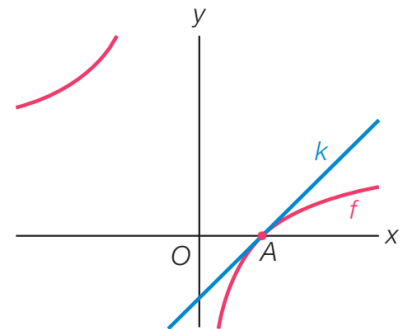
C11 Maak x vrij bij de formule.

a $y = \frac{4x-1}{3-2x}$ **b** $y = 3 - \frac{x}{3x-2}$

C12 Gegeven is de functie $f(x) = 2 - \frac{8}{2x+1}$.

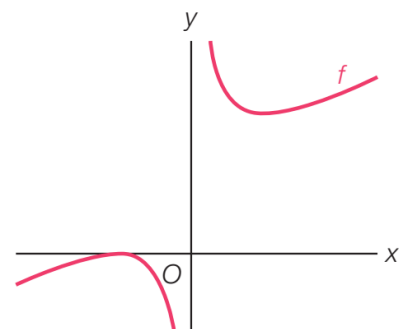
De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A .
De lijn k raakt de grafiek van f in A . Zie de figuur hiernaast.

Stel op algebraïsche wijze de formule op van k .



C13 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{2x}$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f .
Bereken exact de extreme waarden van f .



Antwoorden

C10 a vert. as. $x = 1\frac{1}{2}$

hor. as. $y = -2$

b vert. as. $x = \frac{2}{3}$

hor. as. $y = 2\frac{2}{3}$

C11 a $x = \frac{3y+1}{2y+4}$

b $x = \frac{2y-6}{3y-8}$

C12 k: $y = x - 1\frac{1}{2}$

C13 max. is $f(-3) = 0$ en min. is $f(3) = 6$

Kennis- en vaardighedentest

11.1 Evenredigheden

- 1** **a** A is evenredig met $p^{0,55}$. Voor $p = 10$ is $A = 20$.
Stel de formule op van A . Rond af op twee decimalen.
- b** B is omgekeerd evenredig met r^3 . Voor $r = 6$ is $B = 0,5$.
Stel de formule op van B .
- 2** Onderzoekers hebben van een kerkorgel de lengte en de diameter van een aantal pijpen gemeten. De diameter D in mm is evenredig met een macht van de lengte L , met L in mm. Bij een pijp met lengte 150 mm hoort een diameter van 15 mm en bij een lengte van 870 mm hoort een diameter van 64 mm.
- a** Stel de formule op van D . Rond in de formule af op drie decimalen.
- b** Van een andere orgelpijp is de diameter 37 mm.
Bereken de bijbehorende lengte van de pijp. Rond af op hele millimeters.
- 3** Maak x vrij. Schrijf je antwoord in de vorm $x = ay^b$.
Rond zo nodig a en b af op twee decimalen.
- a** $y = 21x^2 \cdot \sqrt{x}$
- b** $y = \frac{7}{3x \cdot \sqrt[3]{x}}$
- 4** Gegeven is de formule $N = 3t^{2,1}$.
- a** Bereken hoeveel keer zo groot N wordt als t verdubbelt. Rond af op één decimaal.
- b** Bereken met welk percentage t toeneemt als N verdubbelt.

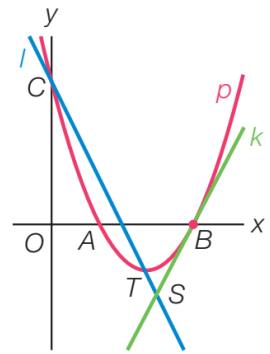
11.2 Standaardgrafieken en transformaties

- 5** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 2 \sin(3x - \pi)$.
- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek $y = \sin(x)$?
- De grafiek van de functie g is een sinusoiden waarvan de periode twee keer zo groot is als de periode van de grafiek van f , de amplitude de helft is van die van de grafiek van f en een beginpunt $\frac{1}{2}\pi$ rechts en 5 onder een beginpunt van de grafiek van f ligt.
- b** Stel een functievoorschrift op van g in de vorm $g(x) = a + b \sin(cx - d)$.
- 6** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^{x+2}$, $g(x) = 3^{x-1}$ en $h(x) = {}^3\log(x) - 2$.
- a** Schrijf het functievoorschrift van de functie $s(x) = f(x) + g(x)$ in de vorm $s(x) = a \cdot 3^x$.
- b** Schrijf het functievoorschrift van de functie $v(x) = 4 \cdot f(x) - 27 \cdot g(x)$ in de vorm $v(x) = 3^{x+b}$.
- c** Bewijs dat $k(x) = h(f(x))$ te schrijven is als $k(x) = x$.

11.3 Tweede- en derdegraadsfuncties

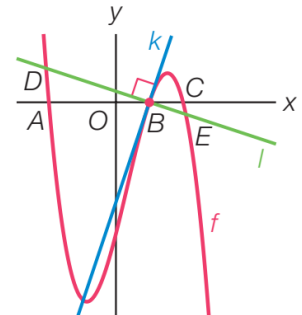
- 7** De parabool p snijdt de x -as in de punten $A(1, 0)$, en $B(3, 0)$ en de y -as in het punt $C(0, 3)$. De lijn k raakt p in B en de lijn l gaat door C en de top T van p . De lijnen k en l snijden elkaar het punt in S . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact de coördinaten van S .
- Bereken in graden de hoek tussen k en l . Rond af op één decimaal.



- 8** Gegeven is de functie $f(x) = -(x^2 - 4)(x - 1)$. De grafiek van f snijdt de x -as van links naar rechts in de punten A , B en C . De lijn k raakt de grafiek in B . De lijn l snijdt k loodrecht in B en snijdt de grafiek van f ook nog in de punten D en E . Zie de figuur hiernaast.

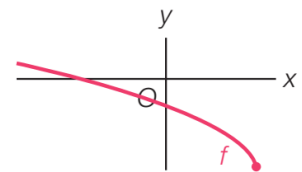
Bereken algebraïsch het verschil tussen de x -coördinaten van D en E . Rond het eindantwoord af op twee decimalen.



11.4 Wortelfuncties

- 9** Gegeven is de functie $f(x) = -1 + \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2x}$. Zie de figuur hiernaast.

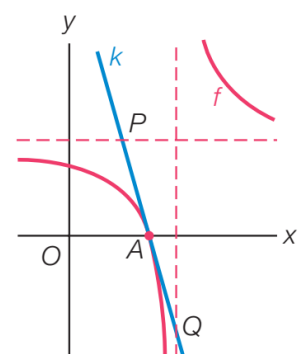
- Bereken de coördinaten van het randpunt van de grafiek van f en geef het domein en het bereik van f .
- Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k die de grafiek raakt in het punt A met $y_A = -\frac{2}{3}$.
- Schrijf de formule $y = -1 + \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2x}$ in de vorm $x = ay^2 + by + c$.



11.5 Gebroken functies

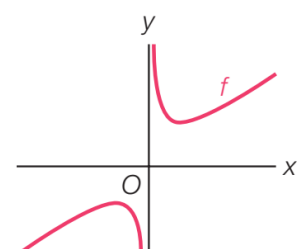
- 10** De grafiek van de functie $f(x) = 3\frac{1}{2} + \frac{7}{2x - 8}$ snijdt de x -as in het punt A . De lijn k raakt de grafiek in A en snijdt de asymptoten in de punten P en Q . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact de coördinaten van P en Q .
- Maak x vrij bij de formule $y = 3\frac{1}{2} + \frac{7}{2x - 8}$.



- 11** Zie de grafiek van de functie $f(x) = \frac{2x^2 + x + 18}{2x}$ hiernaast.

- De lijn k gaat door de toppen van de grafiek. Bewijs dat $d(O, k) = \frac{1}{10}\sqrt{5}$.
- De grafiek heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -5 . Bereken exact de x -coördinaten van de bijbehorende raakpunten.



Gemengde opgaven

- 1** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2(x-2)$.

De afgeleide van f is $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 2x + 2$.

- a Toon dit aan.
- b Bewijs dat een top van de grafiek van f op de x -as ligt.

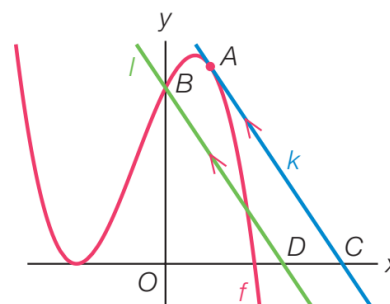
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$.

- c De lijn l is evenwijdig met k en gaat door het snijpunt B van de grafiek van f met de y -as. De lijnen k en l snijden de x -as in de punten C en D . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact het verschil tussen de x -coördinaten van C en D .

- d De lijn m is evenwijdig met k , gaat door het snijpunt E van de grafiek van f met de positieve x -as en snijdt de grafiek ook nog in de punten P en Q .

Bereken exact de x -coördinaten van P en Q .



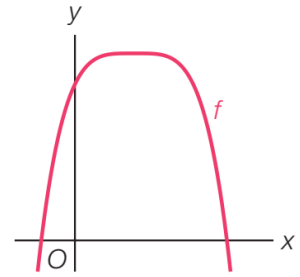
- 2** Het verband tussen de hartslag en het gewicht van dieren kan worden beschreven met de formule $H = \frac{280}{G^{0,25}}$. Hierin is H de hartslag in slagen per minuut en G het gewicht in kilogram. Rond in deze opgave af op gehelen, tenzij anders vermeld.

- a Bereken de hartslag die je op basis van de formule zou verwachten bij een hamster die 120 gram weegt. Geef het antwoord in slagen per seconde.
- b Onderzoekers hebben in 2019 voor het eerst de hartslag van een walvis nauwkeurig gemeten door sensoren te plaatsen. De onderzochte walvis was 70 000 kg en had een hartslag van 13 slagen per minuut. Bereken het verschil tussen deze meting en de hartslag die je zou verwachten op basis van de formule.
- c Een haas is twee keer zo zwaar als een konijn. Bereken hoeveel keer zo hoog de hartslag van het konijn is als die van de haas. Rond af op twee decimalen.



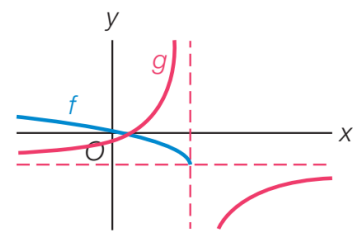
- d Schrijf de formule van H in de vorm $G = \frac{a}{H^b}$. Geef a in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.
- e Een dier heeft een drie keer zo hoge hartslag als een ander dier. Bereken de verhouding van de gewichten van deze dieren.

- 3** Gegeven is de functie $f(x) = -(2x - 1)^4 + 6$.
- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $y = x^4$?
 - b** Los de vergelijking $f(x) = -10$ algebraïsch op.
 - c** De parabool p heeft dezelfde top als de grafiek van f , gaat door het punt $(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ en snijdt de x -as in de punten P en Q . Bereken exact de afstand tussen P en Q .
 - d** De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$, snijdt de x -as in het punt B en de y -as in het punt C . Bereken exact de oppervlakte van driehoek OBC .
 - e** De grafiek van f wordt a naar rechts geschoven en b naar beneden. Zo ontstaat de grafiek van de functie h . De top van de grafiek van h is het punt $(3, 0)$. Bereken exact de waarden van a en b .

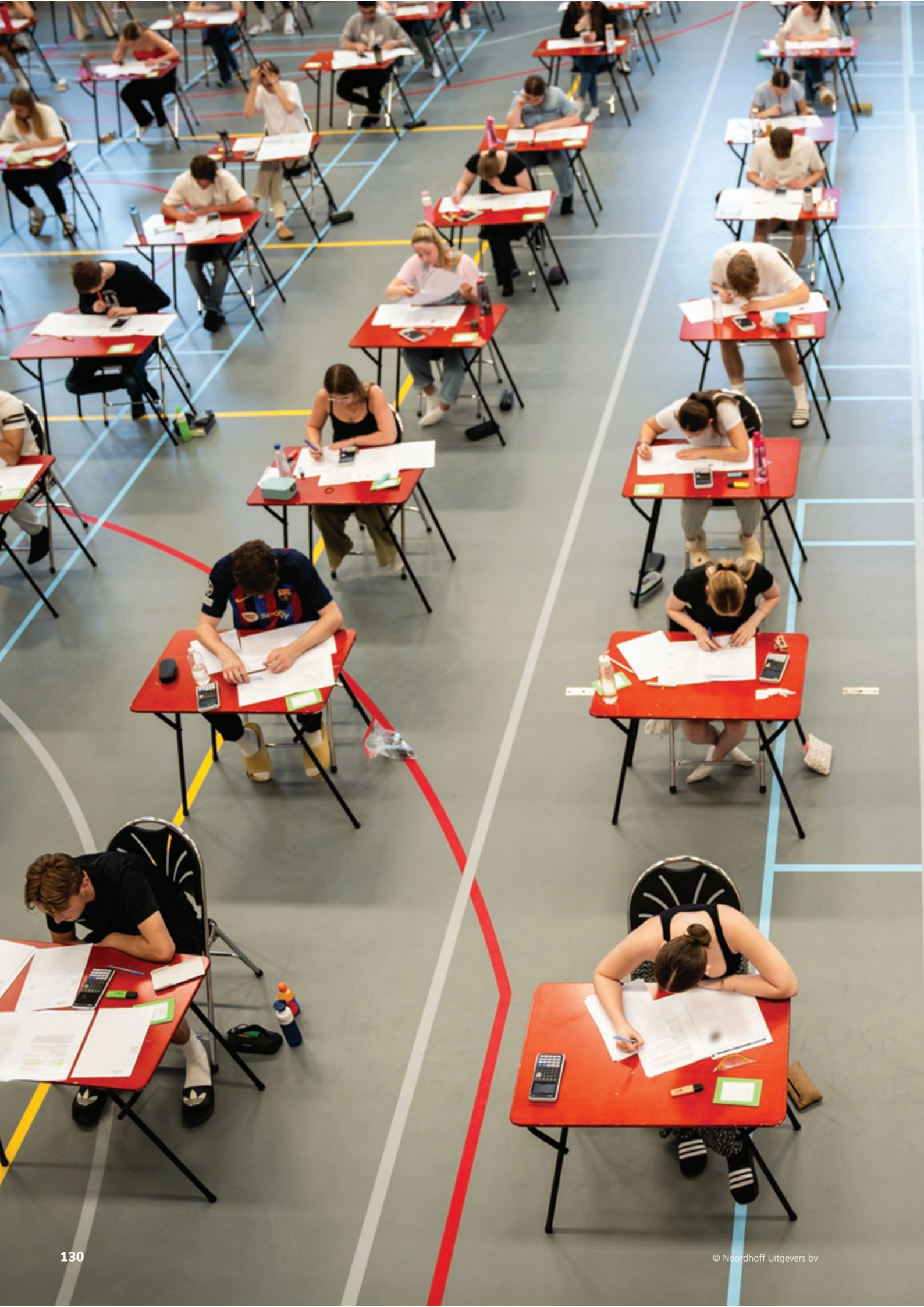


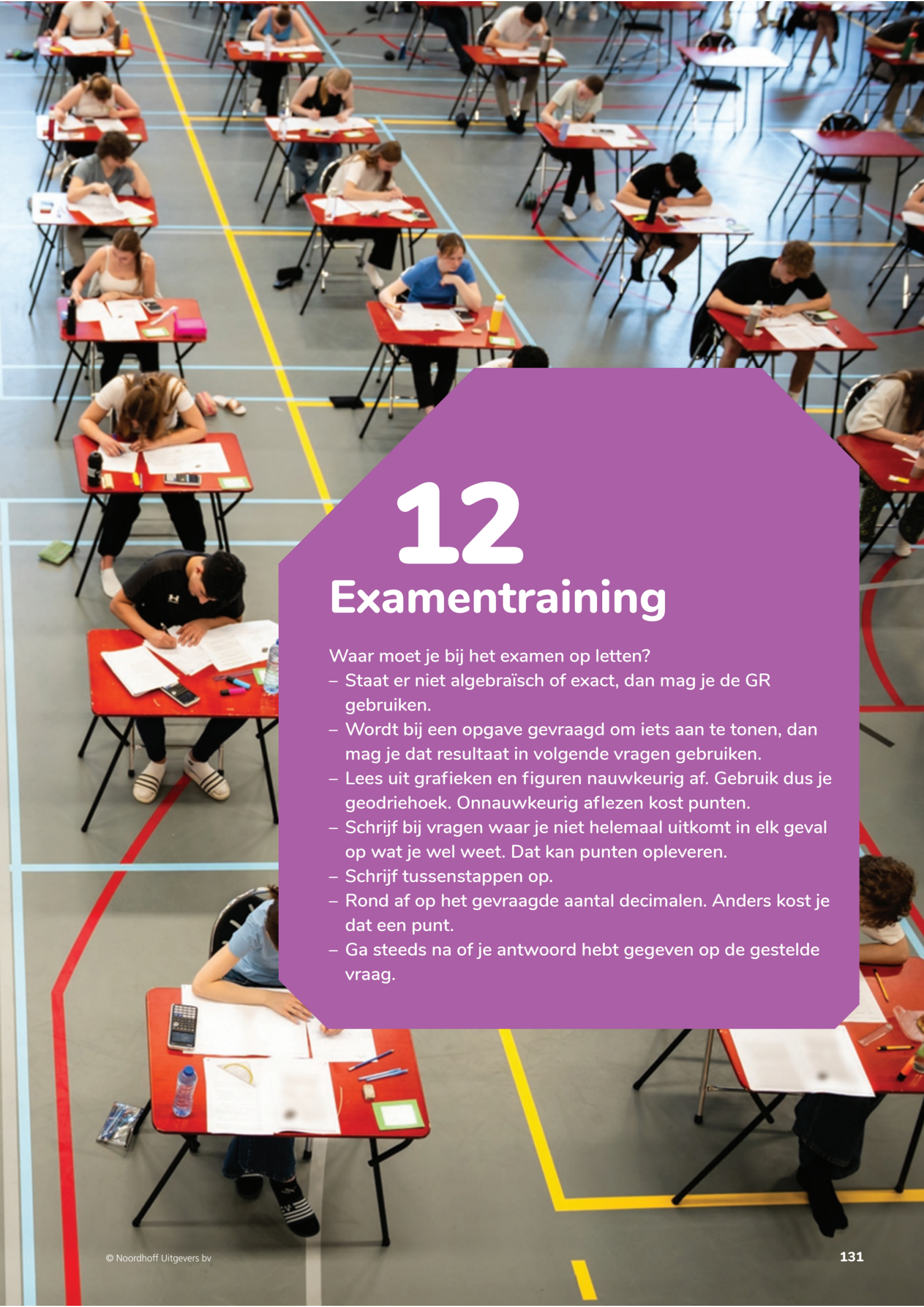
- 4** Gegeven zijn de functies $f(x) = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2x}$ en $g(x) = \frac{2x - 1}{5 - 2x}$. Zie de figuur hiernaast.

- a** Bewijs dat het randpunt van de grafiek van f samenvalt met het snijpunt van de asymptoten van de grafiek van g .
- b** Toon op algebraïsche wijze aan dat de grafieken van f en g elkaar snijden in een punt op de x -as.
- c** Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x > -10$.
- d** De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $y_A = -\frac{1}{2}$. Stel langs algebraïsche weg de formule op van k .
- e** De lijn $y = x + 1$ snijdt de grafiek van g in de punten B en C . Bereken exact de lengte van het lijnstuk BC .
- f** Schrijf de formule $y = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2x}$ in de vorm $x = ay^2 + by + c$.
- g** Druk x uit in y bij de formule $y = \frac{2x - 1}{5 - 2x}$.



- 5** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2x - 6}{x + 2} - x + 3$, $g(x) = x - 5$ en $h(x) = \frac{a}{x}$.
- a** Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
 - b** De functie k is gegeven door $k(x) = f(g(x))$. Schrijf het functievoorschrift van k als één breuk.
 - c** Gegeven is de verschilfunctie $v(x) = f(x) - g(x)$. Schrijf het functievoorschrift van v als één breuk.
 - d** De functie l is gegeven door $l(x) = f(h(x))$. Bereken exact voor welke waarden van a de grafiek van l door het punt $(\frac{1}{2}, -4)$ gaat.



A high-angle photograph of a large gymnasium where many students are seated at red folding tables, taking an exam. The floor is marked with yellow and blue lines. The students are focused on their papers, some using calculators. A large purple hexagonal graphic is overlaid on the right side of the image, containing the chapter title and a list of exam tips.

12

Examentraining

Waar moet je bij het examen op letten?

- Staat er niet algebraïsch of exact, dan mag je de GR gebruiken.
- Wordt bij een opgave gevraagd om iets aan te tonen, dan mag je dat resultaat in volgende vragen gebruiken.
- Lees uit grafieken en figuren nauwkeurig af. Gebruik dus je geodriehoek. Onnauwkeurig aflezen kost punten.
- Schrijf bij vragen waar je niet helemaal uitkomt in elk geval op wat je wel weet. Dat kan punten opleveren.
- Schrijf tussenstappen op.
- Rond af op het gevraagde aantal decimalen. Anders kost je dat een punt.
- Ga steeds na of je antwoord hebt gegeven op de gestelde vraag.

12.1 Vergelijkingen en ongelijkheden

1 a Los de vergelijking $\frac{3}{4}(\frac{1}{3}x - 2)^3 + \frac{3}{4} = 21$ exact op.

b De grafieken van de functies $f(x) = \frac{7x}{2x-1}$ en $g(x) = 2\sqrt{x}$ hebben

twee punten gemeenschappelijk, de oorsprong en het punt A .

Bereken exact de coördinaten van A .

c Voor $x > 0$ zijn gegeven de functies $f(x) = \sqrt{x^3}$ en $g(x) = \sqrt{x^3 - \frac{10}{x}}$.

Hiernaast zie je de grafieken van f en g .

Leg uit, zonder getallenvoorbeeld of gebruik van de grafische rekenmachine, waarom voor grote waarden van x de grafieken van f en g dicht bij elkaar liggen, en bereken voor welke waarden van x het verschil tussen $f(x)$ en $h(x)$ minder is dan 0,01. Rond af op twee decimalen.

d Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en $g(x) = \sqrt{3x+4}$.

De lijn $y = 5$ snijdt de grafieken van f en g van links naar rechts in de punten A , B en C . Zie de figuur hiernaast.

De afstand AC is groter dan de afstand BC .

Bereken exact hoeveel keer zo groot.

e Afgerond op gehele is de oplossing van de vergelijking $2,15 \cdot 10^4(2x^3 - 3x^2 + 5x - 6) = 7,55 \cdot 10^5$ gelijk aan 3.

Bereken de oplossing in twee decimalen.

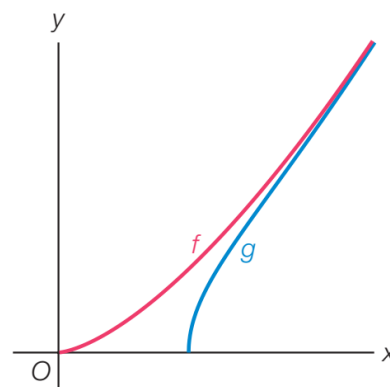
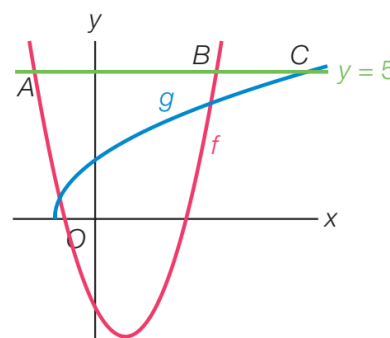
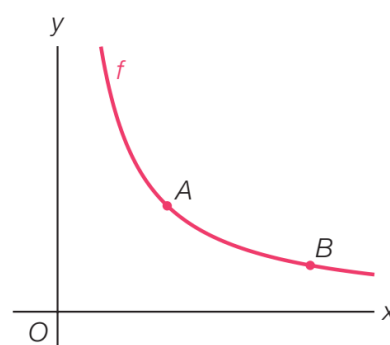
f Voor $x > 0$ is gegeven de functie $f(x) = \frac{1}{x}$.

Op de grafiek van f liggen de punten $A(1, 1)$ en

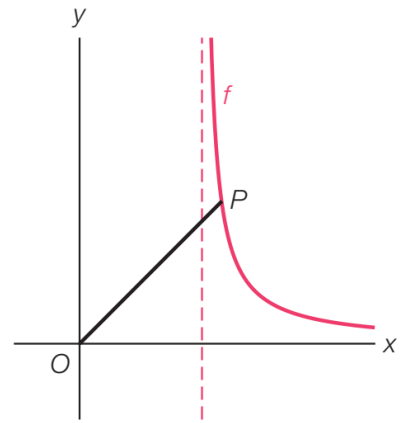
$B(b, \frac{1}{b})$ met $b > 1$, zodanig dat $OA = AB$. Zie de figuur hiernaast.

Licht toe dat $AB = \sqrt{(b-1)^2 + (\frac{1}{b}-1)^2}$ en bereken b .

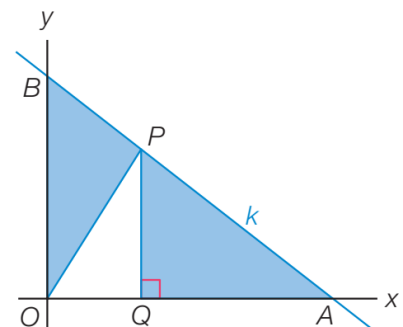
Rond af op twee decimalen.



- g** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4}{3x-5}$ met domein $\langle 1\frac{2}{3}, \rightarrow \rangle$.
 Het punt P met $x_P = p$ is een willekeurig punt op de grafiek van f . Zie de figuur hiernaast.
 Bereken de minimale lengte van het lijnstuk OP .
 Rond af op twee decimalen.



- h** De lijn $k: y = -\frac{4}{5}x + 4$ snijdt de x -as in het punt A en de y -as in het punt B . Het punt P met $x_P = p$ en $0 < p < 5$ ligt op k . Het punt Q is de loodrechte projectie van P op de x -as. We bekijken in deze opgave de oppervlakten van de driehoeken OBP en APQ . Zie de figuur hiernaast.
 Toon aan dat van driehoek APQ de oppervlakte $\frac{2}{5}p^2 - 4p + 10$ is, en bereken exact voor welke p de oppervlakten van de beide driehoeken gelijk zijn.



Typen vergelijkingen

De volgende typen vergelijkingen moet je algebraïsch kunnen oplossen.

- lineaire vergelijkingen
- kwadratische vergelijkingen
- sommige hogeregraadsvergelijkingen
- wortelvergelijkingen
- gebroken vergelijkingen

Verder ook nog

- exponentiële vergelijkingen
- logaritmische vergelijkingen
- goniometrische vergelijkingen.

Deze laatste drie typen komen in volgende paragrafen aan de orde.

Lineaire vergelijkingen

- 1 Werk haakjes en breuken weg.
- 2 Herleid beide leden.
- 3 Zorg ervoor dat in het linkerlid alleen een term met x overblijft en in het rechterlid alleen een getal.
- 4 Deel beide leden door het getal dat voor x staat.

Met het algebraïsch oplossen van een vergelijking wordt bedoeld dat je al schrijvende stap voor stap naar de oplossing toewerkt.

Bij het exact oplossen van een vergelijking ga je algebraïsch te werk en rond je niet af.

Kwadratische vergelijkingen

$ax^2 + bx = 0$ Breng x buiten haakjes.

$ax^2 + c = 0$ Herleid tot de vorm $x^2 = \text{getal}$.

$ax^2 + bx + c = 0$ en het linkerlid is te ontbinden.
Ontbind het linkerlid.

$ax^2 + bx + c = 0$ en het linkerlid is niet te ontbinden.
Gebruik de abc -formule

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ met } D = b^2 - 4ac.$$

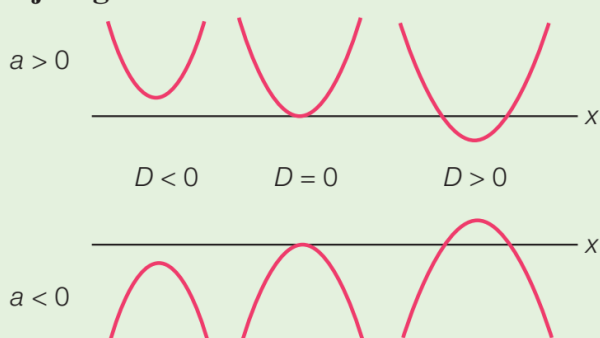
Aantal oplossingen van kwadratische vergelijkingen

Aan de discriminant $D = b^2 - 4ac$ is te zien hoeveel oplossingen de kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft.

voor $D < 0$ zijn er geen oplossingen

voor $D = 0$ is er één oplossing

voor $D > 0$ zijn er twee oplossingen



De vergelijking $x^2 + px + 3 = 0$ bevat de parameter p . Van deze vergelijking is $D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = p^2 - 12$. De vergelijking heeft twee oplossingen als $p^2 - 12 > 0$ oftewel $p^2 > 12$, dus als $p < -\sqrt{12} \vee p > \sqrt{12}$.

Parameter betekent hulpvariabele.

Van de vergelijking $x^2 + px - 2p^2 = 0$ kun je de oplossingen uitdrukken in p . Je krijgt $(x - p)(x + 2p) = 0$ en dit geeft $x = p \vee x = -2p$.

Algemene vormen van vergelijkingen

$A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$

$A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$

$A \cdot B = A \cdot C$ geeft $A = 0 \vee B = C$

$A \cdot B = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$

Bij $(2x - 3)(x^2 - 4) = 0$ gebruik je $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

Dus $2x - 3 = 0 \vee x^2 - 4 = 0$

$$2x = 3 \vee x^2 = 4$$

$$x = 1\frac{1}{2} \vee x = 2 \vee x = -2$$

Bij $(2x - 3)^2 = (x - 4)^2$ gebruik je $A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$.

Dus $2x - 3 = x - 4 \vee 2x - 3 = -x + 4$

$$x = -1 \vee 3x = 7$$

$$x = -1 \vee x = 2\frac{1}{3}$$

Bij $(2x - 3)^2 = (2x - 3)(x - 4)$ gebruik je $A \cdot B = A \cdot C$ geeft $A = 0 \vee B = C$.

Dus $2x - 3 = 0 \vee 2x - 3 = x - 4$

$$2x = 3 \vee x = -1$$

$$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -1$$

Bij $(2x - 3)(x - 4) = 2x - 3$ gebruik je $A \cdot B = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$.

Dus $2x - 3 = 0 \vee x - 4 = 1$

$$2x = 3 \vee x = 5$$

$$x = 1\frac{1}{2} \vee x = 5$$

Hogeregraadsvergelijkingen

$x^n = p$ met n geheel en $n > 1$

n oneven $x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p}$

n even en $p > 0$ $x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p} \vee x = -\sqrt[n]{p}$

n even en $p < 0$ $x^n = p$ heeft geen oplossing

Bij $x^3 - x^2 - 2x = 0$ breng je x buiten haakjes.

Bij $x^4 - x^2 - 2 = 0$ gebruik je de substitutie $x^2 = u$.

Wortelvergelijkingen

1 Isoleer de wortelvorm, dus zet de wortelvorm apart.

2 Kwadrateer het linker- en rechterlid en los de verkregen vergelijking op.

3 Controleer of de oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking.

Gebroken vergelijkingen

• $\frac{A}{B} = 0$ geeft $A = 0$

• $\frac{A}{B} = C$ geeft $A = BC$

• $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ geeft $AD = BC$

Stelsels vergelijkingen

Voor het oplossen van stelsels van twee lineaire vergelijkingen met twee variabelen ken je twee methoden.

Elimineren door optellen of aftrekken

$$\text{Het stelsel } \begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ x - 3y = 14 \end{cases} \begin{array}{l} |1| \\ |3| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ 3x - 9y = 42 \end{cases}$$

$$4y = -24$$
$$y = -6$$

Invullen van $y = -6$ in $x - 3y = 14$ geeft $x + 18 = 14$, dus $x = -4$.

De oplossing is $(x, y) = (-4, -6)$.

Elimineren door substitutie

Bij het stelsel $\begin{cases} x = -3y + 2 \\ 2x - y = 11 \end{cases}$ vervang je in de onderste vergelijking x door $-3y + 2$.

Dat geeft $2(-3y + 2) - y = 11$

$$-6y + 4 - y = 11$$

$$-7y = 7$$

$$y = -1$$

Invullen van $y = -1$ in $x = -3y + 2$ geeft $x = 5$.

De oplossing is $(x, y) = (5, -1)$.

Ongelijkheden

Bij het oplossen van ongelijkheden lees je het antwoord af uit een schets. Op het examen is de schets meestal gegeven.

Bij $f(x) < g(x)$ kijk je voor welke waarden van x de grafiek van f onder die van g ligt.

Bij $f(x) > g(x)$ kijk je voor welke waarden van x de grafiek van f boven die van g ligt.

Grafisch-numerieke methoden

Aan de vraagstelling is te zien of je een vergelijking algebraïsch op moet lossen of dat je anders te werk mag gaan. Staat er niet 'algebraïsch' of 'exact', dan mag je de speciale opties van de GR gebruiken om een vergelijking op te lossen.

Bij het grafisch-numeriek oplossen van een vergelijking ga je als volgt te werk.

- 1 Noteer de vergelijking die opgelost moet worden.
- 2 Noteer dat je de bijbehorende formules invoert en welke optie je gebruikt.
- 3 Geef alle oplossingen in het gevraagde aantal decimalen of rond zelf verstandig af.

Ook de coördinaten van toppen van grafieken mag je soms grafisch-numeriek (dus zonder de afgeleide te gebruiken) berekenen. Je gebruikt dan de opties maximum en minimum.

Weet je de y -coördinaten van de toppen van een grafiek, dan kun je het bereik van de functie aflezen uit de grafiek.

Het bereik van een functie bestaat uit alle beelden.

Het domein van een functie bestaat uit alle originelen.

De examenwerkwoorden onderzoeken, aantonen en bewijzen

Er zijn afspraken gemaakt over de betekenis van enkele woorden die in het Centraal Eindexamen wiskunde worden gebruikt. Hiervan is een lijst gemaakt, zie bladzijde 236 van dit boek. Deze lijst heet Examenwerkwoorden. Het is van belang dat je de precieze betekenis van deze woorden kent.

Hieronder staan de woorden *Onderzoeken of*, *Aantonen dat*, *laten zien dat* en *Bewijzen (dat)* toegelicht.

Onderzoeken of

Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.

Staat er niet algebraïsch of exact, dan mag de GR gebruikt worden.

Aantonen dat, laten zien dat

Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.

Bewijzen (dat)

Het geven van een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden voldoet niet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.

Bij de examenopgaven hierna is telkens als een examenwerkwoord voor het eerst wordt genoemd, verwezen naar de lijst met examenwerkwoorden achterin het boek. Je kunt daar dus lezen welke aanpak van je wordt gevraagd.

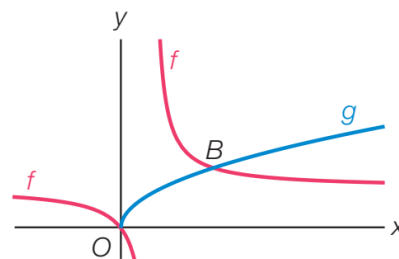
2 2021-I

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \frac{4x}{4x-3}$ en de

functie g wordt gegeven door $g(x) = \sqrt{x}$.

De grafieken van f en g hebben twee punten gemeenschappelijk, O en B . Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de x -coördinaat van B .



Bereken exact is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 236.

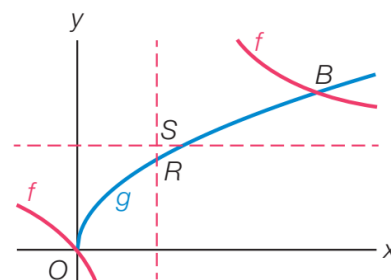
De grafiek van f heeft een horizontale en een verticale asymptoot.

Het punt S is het snijpunt van deze twee asymptoten.

De grafiek van g snijdt de verticale asymptoot van f in het punt R .

Zie de figuur hiernaast, waarin de asymptoten van f gestippeld zijn.

b Bereken exact de afstand tussen R en S .



3 2021-I

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

De lijn m is de verticale lijn met vergelijking $x = p$, met $p > 0$.

We kijken naar het gebied dat aan de bovenkant wordt begrensd door de grafiek van f , aan de onderkant door de x -as, aan de linkerkant door de y -as en aan de rechterkant door lijn m .

In de figuren hiernaast is dit gebied blauw gemaakt: in de linker figuur voor de situatie $p = 1$, in de rechter figuur voor de situatie $p = 2$.

De oppervlakte van dit blauwe gebied noemen we A .

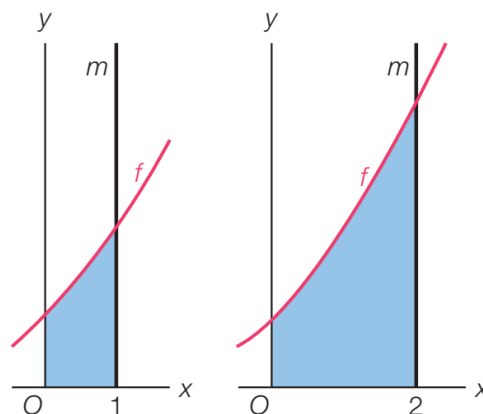
De waarde van A hangt dus af van de keuze van p .

Een formule voor A is $A = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}p + 1)^3 - \frac{2}{3}$.

Zo is bijvoorbeeld $A = 4\frac{2}{3}$ als $p = 2$ en dus is de oppervlakte van het blauwe gebied in de rechter figuur gelijk aan $4\frac{2}{3}$.

Voor een bepaalde waarde van p is de oppervlakte van het blauwe gebied gelijk aan 42.

Bereken exact deze waarde van p .

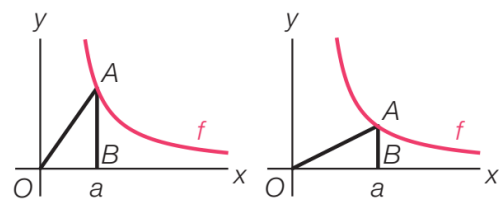


4 2022-I

Op het domein $\langle \frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$ is de functie f gegeven door $f(x) = \frac{1}{2x-1}$.

Het punt A met x -coördinaat a is een willekeurig punt op de grafiek van f . Het punt B ligt op de x -as en heeft ook x -coördinaat a . Bij elke waarde van a hoort een driehoek OAB . Zie de figuren hiernaast voor twee mogelijkheden.

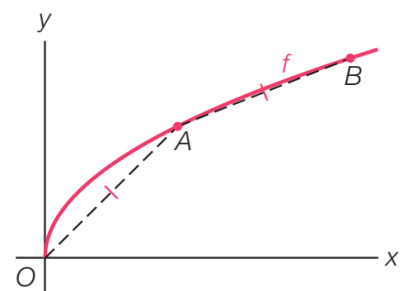
Bereken de minimale lengte van lijnstuk OA .
Geef je eindantwoord in één decimaal.



5 2022-III

De punten $A(1, 1)$ en $B(b, \sqrt{b})$ met $b > 0$ liggen op de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ zodanig, dat $OA = AB$. Zie de figuur hiernaast.

Bereken b . Geef je eindantwoord in twee decimalen.



6 2023-II

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 16 - x^2$.

De grafiek van f snijdt de positieve x -as in het punt A en de y -as in het punt B . Het punt P ligt op de grafiek van f tussen de punten A en B en heeft x -coördinaat p .

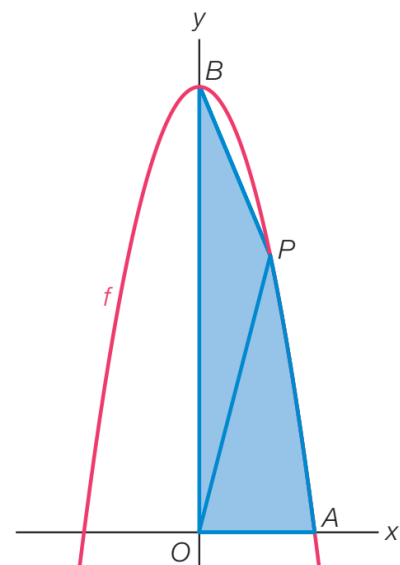
In de figuur hiernaast zijn de grafiek van f en de blauwe driehoeken OAP en OPB weergegeven.

De oppervlakte van de beide driehoeken kan worden uitgedrukt in p .

De oppervlakte van driehoek OAP is $2(16 - p^2)$.

a Toon aan dat die oppervlakte $2(16 - p^2)$ is.

Aantonen dat is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 236.



De oppervlakte van driehoek OPB uitgedrukt in p is gelijk aan $8p$. Punt P is zo gekozen dat geldt: de twee driehoeken hebben gelijke oppervlaktes.

b Bereken exact de oppervlakte van één zo'n driehoek.

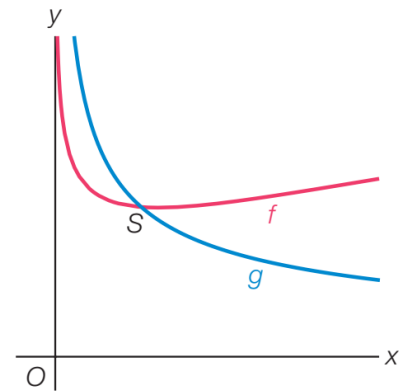
7 2024-I

De functies f en g worden gegeven door $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}}$ en $g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$.

S is het snijpunt van de grafieken van f en g . Zie de figuur hiernaast.

In de figuur lijkt het alsof de functie f een minimum heeft in het snijpunt S .

- a** Onderzoek of in het snijpunt S de functie f inderdaad een minimum heeft.

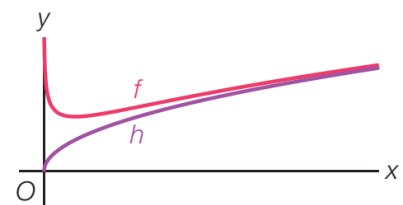


Onderzoeken of is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 236.

Verder wordt de functie h gegeven door $h(x) = \sqrt{x}$.

In de figuur hiernaast zijn de grafieken van f en h weergegeven. Voor steeds grotere waarden van x liggen de grafieken van f en h steeds dicht bij elkaar.

- b** Leg uit, zonder getallenvoorbeeld of gebruik van de grafische rekenmachine, waarom voor grote waarden van x de grafieken van f en h dicht bij elkaar liggen.
- c** Bereken voor welke waarden van x het verschil tussen $f(x)$ en $h(x)$ minder is dan 0,01. Geef je eindantwoord in drie decimalen.



Uitleggen is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 236.

8 2024-II

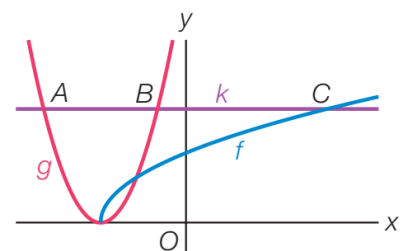
De functies f en g worden gegeven door $f(x) = \sqrt{2x + 6}$ en $g(x) = x^2 + 6x + 9$.

De grafiek van f heeft een randpunt en de grafiek van g heeft een top.

- a** Onderzoek op exacte wijze of deze top hetzelfde punt is als dat randpunt.

De lijn k met vergelijking $y = 4$ snijdt de grafiek van g in de punten A en B , waarbij B rechts ligt van A . De lijn k snijdt de grafiek van f in het punt C . Zie de figuur hiernaast.

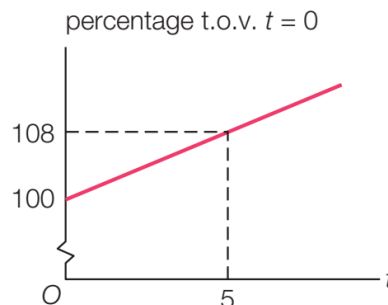
- b** Bereken exact de afstand BC .



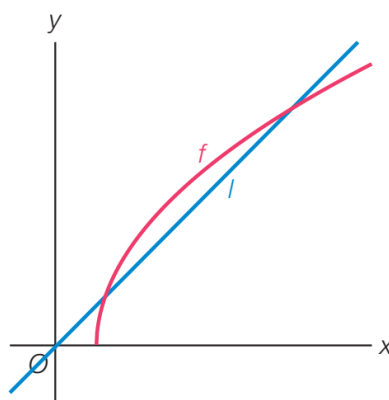
12.2 Werken met formules

- 9 a** Er bestaat een lineair verband tussen A en B .
Voor $B = 0,12$ is $A = 140$ en voor $B = 0,76$ is $A = 300$.
Bereken A voor $B = 0,54$.

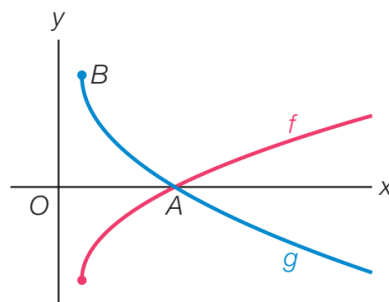
- b** De rechte lijn in de figuur hiernaast geeft de toename weer van een aantal A als functie van de tijd t . Op de verticale as staat het percentage van het aantal ten opzichte van het aantal op $t = 0$.
Op $t = 5$ is dit percentage 108% en is $A = 783$.
Stel de formule op van A als functie van t en bereken hiermee het aantal op $t = 9$. Rond het eindantwoord af op gehele.



- c** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x - 6$ en $g(x) = (x^2 + \frac{4}{5}x - 3\frac{3}{5})(x - 3)$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B .
De lijn k door A en B snijdt de x -as in het punt C .
Bereken exact de x -coördinaat van C .
- d** De grafiek van de functie $f(x) = 2 + \sqrt{4x + 1}$ ontstaat uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$ door enkele transformaties na elkaar toe te passen.
Geef aan welke transformaties dat kunnen zijn en in welke volgorde ze moeten worden toegepast.
- e** In de figuur hiernaast zie je dat de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{6x - 9}$ de lijn $l: y = x$ in twee punten snijdt.
Door l ten opzichte van de x -as met een factor p met $p > 0$ te vermenigvuldigen, ontstaat de lijn k die één punt met de grafiek van f gemeenschappelijk heeft.
Bereken exact deze waarde van p .

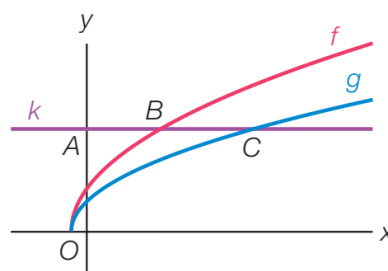


- f** Gegeven is de functie $f(x) = -2 + \sqrt{2x - 1}$.
De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A .
De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door deze met een negatieve factor a te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as. Het randpunt van de grafiek van g is het punt B . Zie de figuur hiernaast.
De lengte van het lijnstuk AB is 4.
Bereken exact de waarde van a .



- 10 a** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{3x+1}$ en de lijn $k: y = 2$. De lijn k snijdt de y -as in het punt A en de grafiek van f in het punt B .

De grafiek van de functie g ontstaat uit de grafiek van f door deze met een factor a te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as. Op de lijn k en op de grafiek van g ligt het punt C zó, dat $BC = 4 \cdot AB$. Zie de figuur hiernaast.



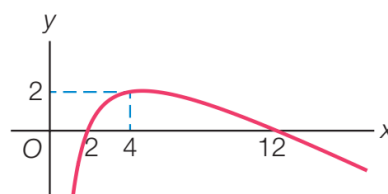
Bereken exact de waarde van a .

- b** Gegeven is de functie $f(x) = x^3 + 9x^2 + 3x - 45$. Door de grafiek van f drie naar rechts te verschuiven, ontstaat de grafiek van de functie g . Een formule voor g is $g(x) = x^3 - 24x$. Bewijs dat dit een formule is voor g .

- c** Voor $x > 0$ is gegeven de formule $y = a\left(x + b + \frac{c}{x}\right)$.

De bijbehorende grafiek gaat door de punten $(2, 0)$, $(12, 0)$ en $(4, 2)$. Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de waarden van a , b en c .



- d** Gegeven is de formule $A = 0,058 \cdot B^{0,28}$. Bereken hoeveel procent A toeneemt als B drie keer zo groot wordt. Rond af op gehelen.
- e** Gegeven is de formule $P = a \cdot Q^b$. Voor $Q = 10$ is $P = 142$ en voor $Q = 75$ is $P = 430$. Bereken P voor $Q = 45$. Rond af op gehelen.

- f** Gegeven is de formule $x = \frac{\frac{4}{9}a^2 + b^2}{4b}$.

Neem $x = 2\frac{1}{2}$ en herleid de formule tot de vorm $a = p \cdot \sqrt{q \cdot b - b^2}$. Geef de exacte waarden van p en q .

- g** Gegeven is de formule $p = 9,5\sqrt{1,17q} + 18,5$. Schrijf de formule in de vorm $q = a \cdot (b \cdot p - c)^2$. Rond a , b en c af op drie decimalen.

Formule van lijn

Bij het opstellen van de formule van de lijn door de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ ga je als volgt te werk.

- 1 Ga uit van $y = ax + b$ en bereken $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- 2 Bereken b door de coördinaten van A of B te gebruiken.

Formules van parabool

- $y = a(x - p)^2 + q$ top (p, q)
- $y = a(x - d)(x - e)$ snijpunten x -as $(d, 0)$ en $(e, 0)$
- $y = ax^2 + bx + c$ $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$ en snijpunt y -as $(0, c)$

Transformaties

Je kent de volgende transformaties.

- Vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met a .
Vermenigvuldig in de formule de functiewaarde met a .
- Vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met b .
Vervang in de formule x door $\frac{1}{b} \cdot x$.
- Translatie $(c, 0)$.
Vervang in de formule x door $x - c$.
- Translatie $(0, d)$.
Tel in de formule d op bij de functiewaarde.

De grafiek van een gebroken lineaire functie $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

heeft twee asymptoten.

- Verticale asymptoot. Stel de noemer gelijk aan 0.
- Horizontale asymptoot. Beredeneer wat de functiewaarde wordt voor grote x .

Formules combineren

Je kunt de formules $A = 2t^2 + 5$ en $t = 3p - 1$ combineren tot de vorm $A = ap^2 + bp + c$.

Je krijgt $A = 2(3p - 1)^2 + 5 = 2(9p^2 - 6p + 1) + 5 = 18p^2 - 12p + 7$.

Ook de formules $N = 20\sqrt{9 - \frac{p}{12}}$ en $p = 60 - 8t$ zijn te combineren.

Je krijgt $N = 20\sqrt{9 - \frac{60 - 8t}{12}} = 20\sqrt{9 - 5 + \frac{2}{3}t} = 20\sqrt{\frac{2}{3}t + 4}$.

Formules omwerken

Bij het omwerken van formules kun je met de volgende situaties te maken krijgen.

- Een gebroken formule omwerken tot een andere gebroken formule.

Bijvoorbeeld $A = \frac{2B}{B-1}$ omwerken tot $B = \frac{A}{A-2}$.

- Vrijmaken van variabelen bij wortelformules.

Bijvoorbeeld $y = \sqrt{2x-1}$ omwerken tot $x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$.

- Vrijmaken van variabelen bij formules met machten.

Bijvoorbeeld $P = 50(2 + 0,3q)^{1,25}$ omwerken tot $q = -6,67 + 0,15P^{0,8}$.

Evenredig en omgekeerd evenredig

y is (recht) evenredig met x betekent dat er een getal a bestaat waarvoor $y = ax$. Het getal a heet de evenredigheidsconstante.

De tabel die bij een evenredigheidsverband hoort, is een verhoudingstabel.

y is evenredig met x^p betekent dat er een getal a bestaat waarvoor $y = ax^p$.

Als gegeven is

- M is evenredig is met een macht van N
- bij $N = 15$ hoort $M = 4,3$
- bij $N = 40$ hoort $M = 217,6$,

dan kun je de formule van M opstellen door uit te gaan van $M = aN^p$.

Invullen van $N = 15$ en $M = 4,3$ geeft $a \cdot 15^p = 4,3$, dus $a = \frac{4,3}{15^p}$.

Invullen van $N = 40$ en $M = 217,6$ geeft $a \cdot 40^p = 217,6$, dus $a = \frac{217,6}{40^p}$.

Om a en p te berekenen, los je de vergelijking $\frac{4,3}{15^p} = \frac{217,6}{40^p}$ op.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $p \approx 4$ en $a \approx 8,5 \cdot 10^{-5}$.

Dus de formule is $M = 8,5 \cdot 10^{-5} \cdot N^4$.

y is omgekeerd evenredig met x betekent dat er een getal a bestaat

waarvoor $y = \frac{a}{x}$. Hierin is a de evenredigheidsconstante. Dit kun je ook schrijven als $xy = a$.

De grafiek van $y = \frac{a}{x}$ is een hyperbool.

y is omgekeerd evenredig met x^p betekent dat er een getal a bestaat

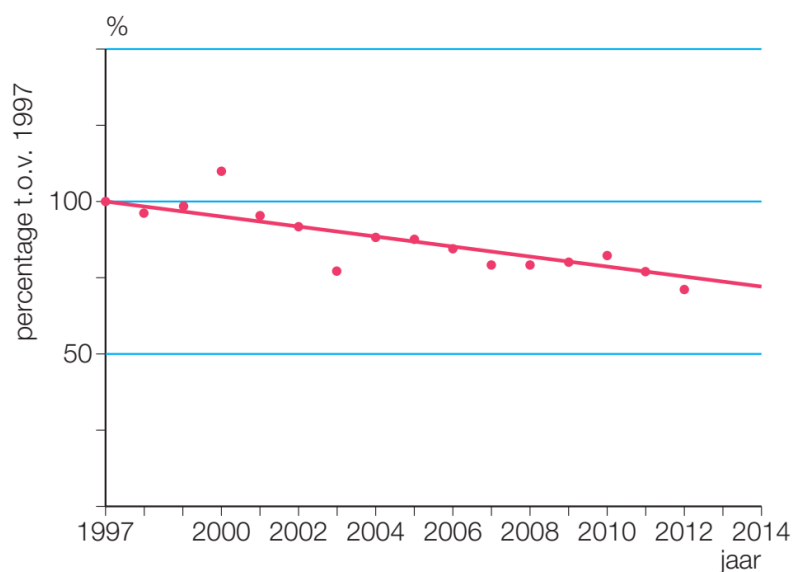
waarvoor $y = \frac{a}{x^p}$.

11 2021-II

Gegeven is de formule $W = 0,043 \cdot N^{\frac{5}{6}}$. Hierin is N het aantal inwoners in een stedelijk gebied en W de lengte van het wegennet in mijlen in dat gebied. We vergelijken twee stedelijke gebieden met elkaar: gebied A en gebied B. Voor gebied B geldt dat het twee keer zoveel inwoners heeft als gebied A. Bereken met behulp van de formule hoeveel procent de lengte van het wegennet van gebied B groter is dan de lengte van het wegennet van gebied A. Geef je eindantwoord in hele procenten.

12 2021-II

Er bestaat een zogenaamde rode lijst van diersoorten in Nederland die met uitsterven bedreigd worden. Daarom worden deze diersoorten ook wel *rodelijstsoorten* genoemd.



In de figuur hierboven is de ontwikkeling van de rodelijstsoorten in de periode 1997-2012 te zien. Hierbij zijn de aantallen aangegeven als percentage ten opzichte van het aantal in 1997.

In deze figuur is ook een rechte lijn getekend die de ontwikkeling van het aantal rodelijstsoorten benadert. Volgens deze benadering neemt het aantal rodelijstsoorten vanaf 1997 lineair af.

In 2004 was het werkelijke aantal rodelijstsoorten 694.

Met behulp van de lineaire afname volgens de getekende rechte lijn werd in 2013 een voorspelling gedaan voor het aantal rodelijstsoorten in 2020.

Het daadwerkelijke aantal rodelijstsoorten in 2020 bleek 551 te zijn. Dit aantal is duidelijk hoger dan het aantal volgens de voorspelling.

Bereken hoeveel het daadwerkelijke aantal rodelijstsoorten in 2020 verschilt met de voorspelling volgens de rechte lijn. Gebruik hiervoor de figuur.

13 2021-III

De functies f en g worden gegeven door $f(x) = x^3 - x^2 - 7x - 29$ en $g(x) = (x^2 + x - 2)(x - 3)$.

De grafieken van f en g snijden elkaar in twee punten.

Dit zijn de punten A en B .

De lijn door A en B snijdt de y -as in het punt S .

Het snijpunt van de grafiek van g met de y -as is het punt T .

Bewijs dat S en T dezelfde y -coördinaat hebben.

Bewijzen (dat) is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 236.

14 2021-III

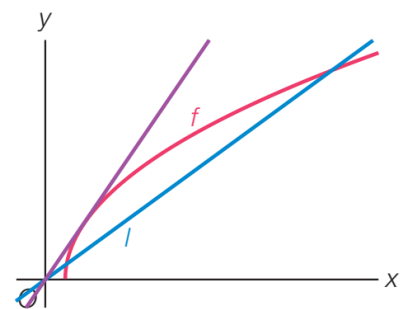
De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2\sqrt{3x - 4}$.

De lijn l heeft vergelijking $y = \frac{3}{4}x$.

Lijn l heeft twee punten gemeenschappelijk met de grafiek van f .

Door lijn l te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met factor p ontstaat een nieuwe lijn. Er is één waarde van p met $p > 0$ waarvoor die nieuwe lijn precies één punt gemeenschappelijk heeft met de grafiek van f . Deze situatie is weergegeven in de figuur hiernaast.

Bereken exact deze waarde van p .

**15 2022-I**

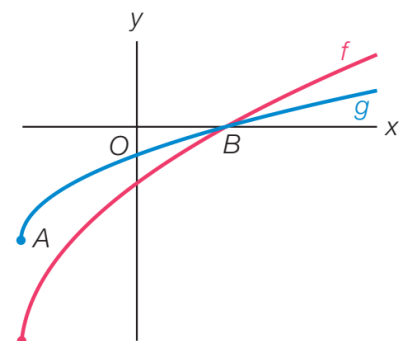
De functie f is gegeven door $f(x) = -8 + 2\sqrt{3x + 9}$.

De grafiek van de functie g ontstaat uit de grafiek van f door middel van een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met een positieve factor a .

Het punt A is het randpunt van de grafiek van g en B is het snijpunt van de grafieken van f en g met de x -as. Zie de figuur hiernaast.

De lengte van het lijnstuk AB is $6\frac{2}{3}$.

Bereken exact de waarde van a .



16 2022-I

Een crank is het verbindingsstuk tussen de trapas van de fiets en het pedaal. Zie de figuur hiernaast.

Cranks bestaan in verschillende lengtes. Een fietser met lange benen heeft baat bij een langere crank. Zo wordt aan iemand met een binnenbeenlengte van 75 cm een cranklengte van 166 mm geadviseerd. Aan iemand met een binnenbeenlengte van 97 cm wordt een cranklengte van 180 mm geadviseerd.

Er is een verband tussen de binnenbeenlengte B in cm en de geadviseerde cranklengte L in mm. Dit verband is te benaderen met een formule van de vorm $l = a \cdot B^n$. Met de bovenstaande gegevens bij binnenbeenlengtes 75 cm en 97 cm zijn de waarden van a en n te bepalen.

Bereken volgens deze formule de geadviseerde cranklengte in mm bij een binnenbeenlengte van 86 cm. Geef je eindantwoord in hele mm.



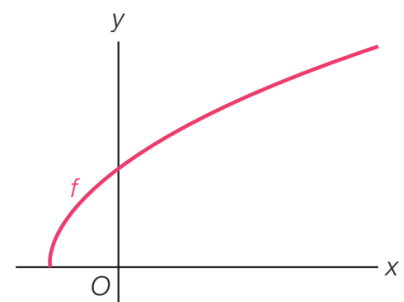
17 2022-II

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \sqrt{3x + 4}$.

In de figuur hiernaast is de grafiek van f weergegeven.

De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$ door een horizontale translatie en een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as.

Geef aan welke translatie en vermenigvuldiging dit zijn en in welke volgorde ze moeten worden toegepast.



(Aan)geven is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 236.

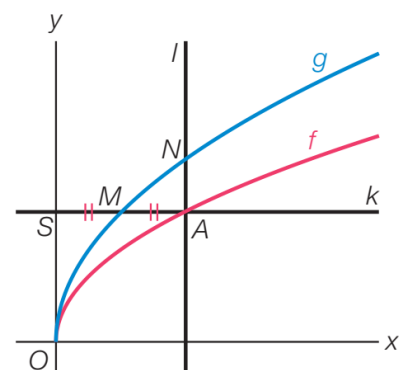
18 2022-III

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{x}$. Het punt $A(1, 1)$ ligt op de grafiek van f . Lijn k is de horizontale lijn door A . Deze lijn snijdt de y -as in het punt S .

We bekijken nu een functie g met de volgende kenmerken:

- de grafiek van g gaat door het midden M van lijnstuk AS ;
- de grafiek van g kan uit de grafiek van f ontstaan door middel van een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as;
- de grafiek van g kan ook uit de grafiek van f ontstaan door middel van een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as.

Lijn l is de verticale lijn door A . Deze lijn snijdt de grafiek van g in het punt N . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de y -coördinaat van N .



De Air Quality Index (*AQI*) is een waarde die overheden gebruiken om aan te geven hoe vervuild de lucht is: hoe hoger de *AQI*, des te sterker is de luchtvervuiling. De *AQI* wordt berekend uit de ozonconcentratie C in ppm. De ppm is een veelgebruikte eenheid voor concentratie.

Men heeft de mogelijke waarden van de *AQI* in categorieën opgedeeld.

In de tabel is voor elke categorie luchtkwaliteit te zien welke waarden van C en de *AQI* daarbij horen. Zo is de laagste waarde van de *AQI* in de categorie ‘gemiddeld’ gelijk aan 50 en dat is het geval als $C = 0,065$.

categorie luchtkwaliteit	C (ppm)	<i>AQI</i>
goed	0 – 0,065	0 – 50
gemiddeld	0,065 – 0,085	50 – 100
ongezond voor kinderen en ouderen	0,085 – 0,105	100 – 150
ongezond	0,105 – 0,125	150 – 200
erg ongezond	0,125 – 0,375	200 – 300

Binnen elke afzonderlijke categorie is er een stijgend lineair verband tussen de *AQI* en C .

Op een bepaalde plek wordt een ozonconcentratie gemeten van 0,20 ppm.

a Bereken de bijbehorende *AQI*. Geef je eindantwoord als geheel getal.

In plaats van de concentratie in ppm te geven, kan deze ook in milligram per kubieke meter (mg/m^3) gegeven worden. Als de temperatuur bekend is, kan de concentratie van ppm naar mg/m^3 omgerekend worden.

Daarvoor geldt de formule $C_{\text{mg}/\text{m}^3} = \frac{584,976 \cdot C_{\text{ppm}}}{273,15 + T}$ met T de temperatuur in graden Celsius.

Op een zeker moment in 2015 werd in Amsterdam een ozonconcentratie van $0,0612 \text{ mg}/\text{m}^3$ gemeten. De temperatuur was op dat moment 20 graden Celsius.

b Bepaal de categorie luchtkwaliteit op dat moment.

Als de temperatuur constant 25 graden blijft, dan is het verband tussen C_{ppm} en mg/m^3 C recht evenredig.

c Bereken de evenredigheidsconstante als C_{ppm} wordt uitgedrukt in C_{mg/m^3} bij een temperatuur van 25 graden Celsius. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Bepalen is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 236.

20 2022-III

Op de foto is een boogbrug te zien. De vorm van de onderrand van de boog van de brug wordt benaderd met behulp van een wiskundig model.



In de figuur hiernaast is de onderrand van de boog schematisch weergegeven.

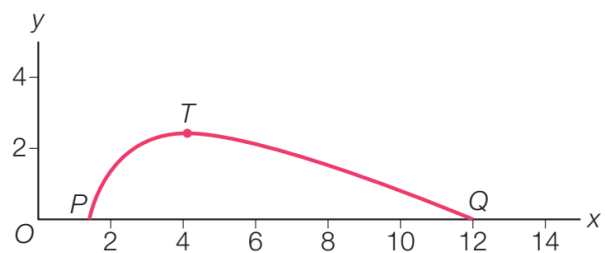
In deze figuur is x de lengte in meters van het wegdek gemeten vanaf het meest linkse punt van de brug en y de hoogte in meters van de onderrand van de boog ten opzichte van het wegdek. We nemen aan dat de onderrand van de boog begint en eindigt op het wegdek.

De onderrand van de boog begint bij $x = 1,4$ in punt P en eindigt bij $x = 12,0$ in punt Q . Het hoogste punt is T bij $x = 4,1$ en $y = 2,4$.

De boog kan benaderd worden met een formule van de vorm

$$y = a \left(x + b + \frac{c}{x} \right).$$

Bereken algebraïsch de waarden van a , b en c . Geef je eindantwoord zo nodig in twee decimalen.



Bereken algebraïsch is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 236.

21 2023-II

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x - 88$.

Door de grafiek van f twee naar rechts te verschuiven ontstaat de grafiek van de functie g .

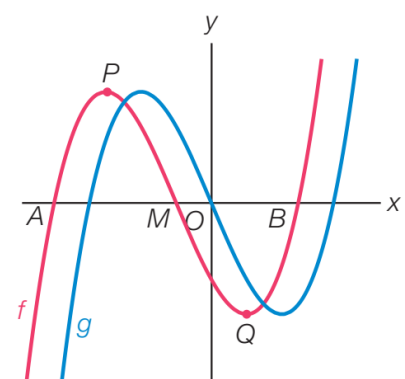
Een formule voor g is $g(x) = x^3 - 48x$.

a Bewijs dat dit een formule is voor g .

In de figuur hiernaast zijn de grafieken van f en g weergegeven. De grafiek van f snijdt de x -as in het punt $M(-2, 0)$ en in de punten A en B . Door de verschuiving komt M in de oorsprong, dus een snijpunt van de grafiek van g met de x -as is de oorsprong.

De coördinaten van A en B zijn moeilijk te berekenen. Met behulp van de functie g zijn de coördinaten van deze snijpunten wel te berekenen.

b Bereken exact de x -coördinaten van A en B .



22 2023-I

Transition is een kunstwerk dat langs de autoweg N34 bij Eext in Drenthe staat. Het is een gekromde buis die gedeeltelijk ingegraven is in de grond. Zie de foto.



In de figuur onder de foto is een model weergegeven van een van de uiteindes van de buis: een cirkel met middelpunt M en straal r . Punt D is het hoogste punt van de buis. De *doorgang* van de buis is het deel van de cirkel boven lijnstuk AB . De *basis* van de doorgang is lijnstuk AB . De lengte van de basis is b . Punt C is het midden van AB . De afstand tussen C en D is de hoogte h van de doorgang. Lijnstuk CD staat loodrecht op AB . Er geldt dus $CM = h - r$.

Er is een formule waarmee je de straal r kunt berekenen bij de gegeven basis en hoogte,

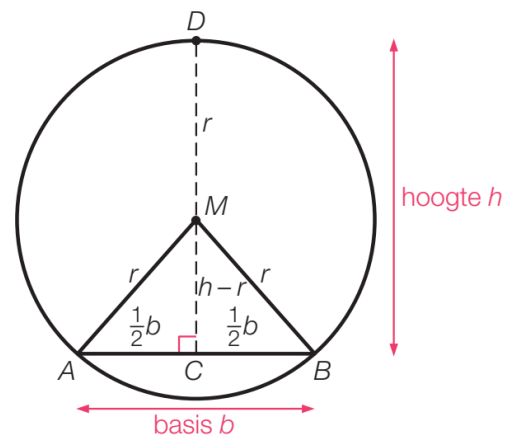
$$\text{namelijk } r = \frac{\frac{1}{4}b^2 + h^2}{2h}. \quad (\text{formule 1})$$

Hierin is r de straal, b de lengte van de basis AB en h de hoogte CD .

Er geldt $h \geq r$.

Met behulp van driehoek ACM kun je bewijzen dat formule 1 juist is.

- a** Bewijs dat formule 1 juist is. Je kunt hierbij de figuur gebruiken.



In het kunstwerk *Transition* is de straal r gelijk aan 1,63 m.

Voor het ingraven van de buis was het handig om te weten hoe lang de basis b moest zijn. Deze lengte hangt af van de gewenste hoogte h .

Je kunt formule 1 herleiden tot een formule waarin b wordt uitgedrukt in h .

Voor $r = 1,63$ is formule 1 te schrijven in de vorm $b = p \cdot \sqrt{q \cdot h - h^2}$.

(formule 2) Hierin zijn p en q constanten.

- b** Herleid formule 1 tot de vorm van formule 2.

Herleiden (van een formule) is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 236.

23 2023-I

De tienkamp is een sportwedstrijd waarbij atleten gedurende twee dagen tien atletiekonderdelen moeten afleggen.

Twee onderdelen van de tienkamp zijn hoogspringen en 1500 m hardlopen.

Met formules worden de resultaten van de onderdelen omgezet in punten.

Vervolgens worden alle punten die de atleet op de onderdelen heeft behaald, opgeteld. De atleet met de meeste punten wint de tienkamp.

Per onderdeel is ooit bepaald wat de ondergrens is om punten te scoren. Bij het hoogspringen was die ondergrens een hoogte van 75 cm. Daarom krijgt de atleet 0 punten als hij 75 cm of lager springt. Bij sprongen met een hoogte boven 75 cm behaalt de atleet wél punten. Bij een sprong met een hoogte van 220 cm krijgt hij 1000 punten. Bij het hoogspringen gebruikte men tot het jaar 1920 voor sprongen vanaf 75 cm een lineaire formule van de vorm $P = a \cdot (H - b)$. Hierin is P het aantal punten en H de gesprongen hoogte in centimeters ($H \geq 75$) en zijn a en b constanten.

- a** Bereken de waarden van a en b . Geef niet-gehele waarden in je eindantwoord in één decimaal.

Een lineaire formule werd niet eerlijk gevonden, omdat bijvoorbeeld een verbetering van 75 cm naar 76 cm makkelijker te behalen is dan een verbetering van 160 cm naar 161 cm, terwijl dat toch evenveel extra punten oplevert. Daarom wilde men een andere formule, waarbij een verbetering van bijvoorbeeld 1 cm, méér extra punten oplevert naarmate er hoger wordt gesprongen.

De formule die tegenwoordig voor het hoogspringen gehanteerd wordt, is $P = 0,8465 \cdot (H - 75)^{1,42}$.

Hierin is P weer het aantal punten en H de gesprongen hoogte in centimeters ($H \geq 75$).

Het aantal punten dat je extra verdient door 1 cm hoger te springen, wordt steeds groter.

- b** Leg dit uit met behulp van de formule, zonder getallen in te vullen of een schets/tekening te maken.

De punten die bij de tienkamp-onderdelen worden behaald, worden eerst met de bijbehorende formule berekend en daarna naar beneden afgerond op een geheel getal. Dus als de uitkomst van de formule bijvoorbeeld 982,73 is, dan krijgt de atleet 982 punten.

Bij het onderdeel 1500 m hardlopen wordt de formule $Q = 0,03768 \cdot (480 - t)^{1,85}$ gebruikt.

Hierin is Q het aantal punten en t de gelopen tijd in seconden. Deze tijd wordt altijd gemeten in honderdsten van seconden nauwkeurig.

Op 1 juli 2019 was tot dan toe de beste prestatie bij het onderdeel hoogspringen een sprong met hoogte 228 cm.

Er worden verschillende tijden gelopen op de 1500 m hardlopen waarmee je méér punten behaalt dan met een sprong van 228 cm hoog.

- c** Bereken de *langzaamste* tijd waarmee je méér punten behaalt dan met een sprong van 228 cm hoog. Geef je eindantwoord in minuten en seconden, met het aantal seconden in twee decimalen.

Bij het zwemmen van de borstcrawl is er een verband tussen de handkracht waarmee de handen van de zwemmer tegen het water duwen en de zwemsnelheid. Zie de foto en de figuur hiernaast. Het verband tussen de handkracht F en de zwemsnelheid v kan worden benaderd door de formule $F = 500 \cdot A \cdot C \cdot v^2$.

Hierin geldt:

- F is de handkracht in newton (N);
- v is de zwemsnelheid in meters per seconde (m/s);
- A is de oppervlakte van het vooraanzicht van de zwemmer in m^2 gedurende een zwemslag, A wordt frontaal oppervlak genoemd;
- C is een positieve constante die afhankelijk is van de zwemtechniek van de zwemmer.

Tijdens een zwemwedstrijd over 100 m zwemt Ian een persoonlijk record. Tijdens elke zwemslag is zijn handkracht 105 N en zijn frontaal oppervlak is $0,2 \text{ m}^2$. Zijn waarde van C is 0,35.

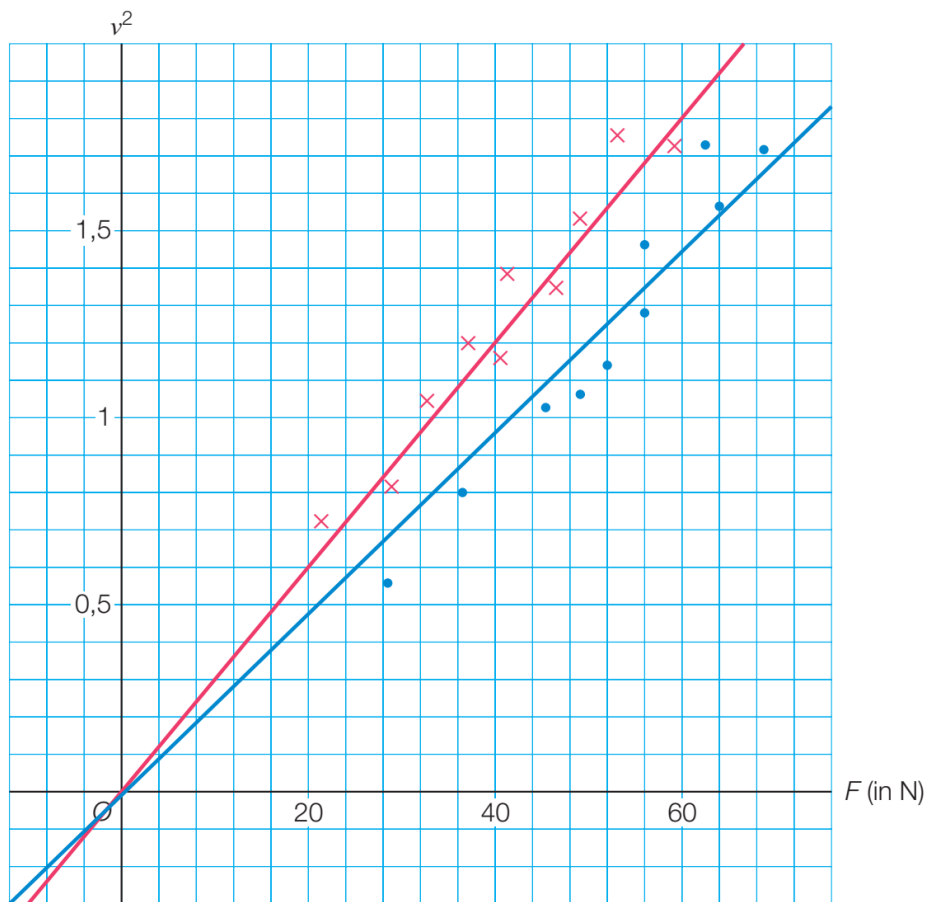
Samy wil bij een toekomstige zwemwedstrijd over 100 m 0,5 seconden sneller zwemmen dan de snelste tijd van Ian. Om dit te bereiken, gaat hij extra op handkracht trainen. Het frontaal oppervlak van Samy is $0,21 \text{ m}^2$. Zijn waarde van C is 0,33. In dit model nemen we aan dat Samy's waarden voor A en C gelijk blijven. Verder nemen we aan dat beide zwemmers met constante snelheid zwemmen.

- a** Bereken de handkracht die Samy nodig heeft om 0,5 seconden sneller te zwemmen dan de snelste tijd van Ian. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Van twee zwemmers is 10 keer de handkracht gemeten bij verschillende snelheden. De techniek van de ene zwemmer is beter dan die van de andere zwemmer. Het frontaal oppervlak tijdens een zwemslag is voor beide zwemmers $0,2 \text{ m}^2$.

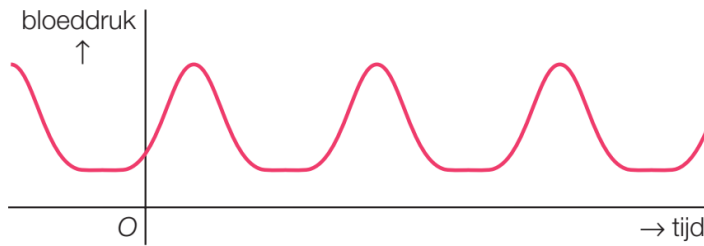


In de figuur hieronder zijn de meetresultaten weergegeven in een assenstelsel, waarbij v^2 is uitgezet tegen F . Voor beide zwemmers is een lijn getekend die de meetresultaten benadert. Bij elke lijn hoort een andere constante waarde van C , passend bij de zwemtechniek van de zwemmer.



- b** Bereken met behulp van deze figuur de waarde van C van de zwemmer met de betere techniek. Geef hierbij aan welke lijn je hebt gebruikt en licht deze keuze toe. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

De bloeddruk van een gezonde volwassen man die geen grote inspanning levert, verloopt zoals in de figuur hieronder is aangegeven.



Een formule om de *gemiddelde bloeddruk* te benaderen, is:

$$P_{\text{gem}} = P_{\text{min}} + 0,33(P_{\text{max}} - P_{\text{min}}) \quad (1)$$

Hierin zijn P_{gem} , P_{min} en P_{max} achtereenvolgens de gemiddelde, de minimale en de maximale bloeddruk in mmHg. Er geldt: $P_{\text{max}} > P_{\text{min}}$.

Uit formule (1) is af te leiden dat P_{gem} bestaat uit een percentage van P_{min} en een percentage van P_{max} . Het percentage van P_{min} is groter dan het percentage van P_{max} .

a Bereken hoeveel keer zo groot. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Het is bekend dat bij een hogere hartslag de gemiddelde bloeddruk stijgt. Formule (1) houdt hier geen rekening mee.

Wetenschappers van de Rosalind Franklin University of Medicine and Science in Chicago hebben een formule opgesteld waarin de invloed van de hartslag wel meegenomen is:

$$P_{\text{gem}} = P_{\text{min}} + (0,33 + 0,0012 \cdot H)(P_{\text{max}} - P_{\text{min}}) \quad (2)$$

Hierin is H de hartslag, uitgedrukt in het aantal slagen per minuut.

P_{min} en P_{max} zijn weer de minimale en de maximale bloeddruk in rust in mmHg en P_{gem} is nu de gemiddelde bloeddruk in mmHg bij hartslag H .

Ook hier geldt: $P_{\text{max}} > P_{\text{min}}$.

Een gezonde volwassen man heeft in rust een minimale bloeddruk van 80 mmHg en een maximale bloeddruk van 120 mmHg. Tijdens het hardlopen heeft hij een gemiddelde bloeddruk van 100 mmHg.

b Bereken bij welke hartslag volgens formule (2) de gemiddelde bloeddruk 100 mmHg is. Geef je eindantwoord in gehele slagen per minuut.

12.3 Differentiaalrekening

26

- a** Gegeven is de functie $f(x) = x + \frac{4}{2x-1}$.

Bereken exact de helling van de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.

- b** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+3}}$.

Bereken exact de helling van de grafiek van f in het punt A met $x_A = \frac{1}{4}$.

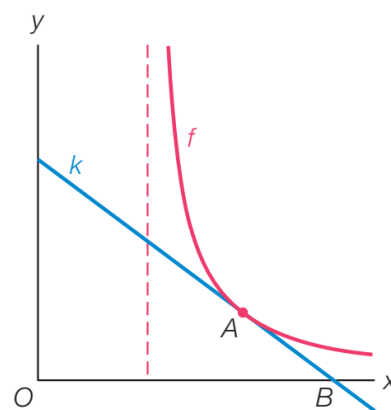
- c** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5x-3}$.

In het punt A van de grafiek van f is de helling gelijk is aan $\frac{5}{12}$.

Bereken exact de coördinaten van A .

- d** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4}{3x-5}$ met domein $\langle 1\frac{2}{3}, \rightarrow \rangle$. De lijn k met richtingscoëfficiënt $-\frac{3}{4}$ raakt de grafiek van f in het punt A en snijdt de x -as in het punt B . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de x -coördinaat van B .



- e** Gegeven is de functie $f(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}$.

Op de grafiek van f ligt het punt A waarvoor geldt

$$f'(x) = \frac{3}{4} \text{ en het punt } B \text{ waarvoor geldt } y_B = 4\frac{1}{2}.$$

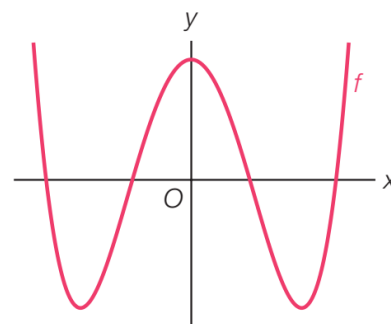
De grafiek van de functie g is een parabool die door het punt B gaat en waarvan de top het punt A is.

Het functievoorschrift van g kan geschreven worden in de vorm $g(x) = a(x-p)^2 + q$.

Bereken exact de waarden van a , p en q .

- f** In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^4 - 7x^2 + 7$.

Bereken exact het minimum van f .

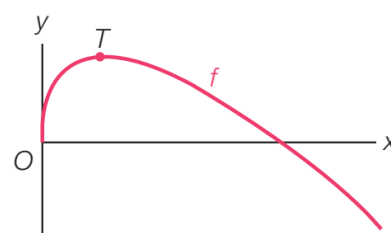


- g** Gegeven is de functie $f(x) = 8\sqrt{x} - 3x$.

De top van de grafiek van f is het punt T .

Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de coördinaten van T .



- 27 a** Gegeven is de formule $A = 2 - q^3 + q^2 + 5q$ met $q > 0$.

Bewijs dat A maximaal is voor $q = 1\frac{2}{3}$.

- b** Op de grafiek van de functie $f(x) = 8\sqrt{x} - 3x$ ligt het punt P met $x_P = p$ en $y_P > 0$. Het punt Q is de loodrechte projectie van P op de x -as. Zie de figuur hiernaast.

De oppervlakte van driehoek OPQ hangt af van de positie van P op de grafiek van f .

Bereken exact de maximale oppervlakte van driehoek OPQ .

- c** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3$ met domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

Op de grafiek van f ligt het punt P met $x_P = p$.

Zie de figuur hiernaast.

De lijn door de oorsprong en P heeft richtingscoëfficiënt a .

Druk a uit in p en bereken exact de maximale waarde van a .

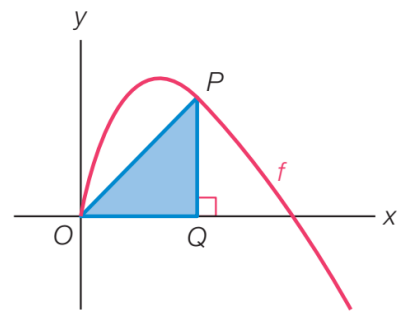
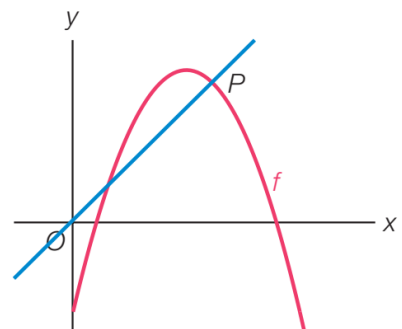
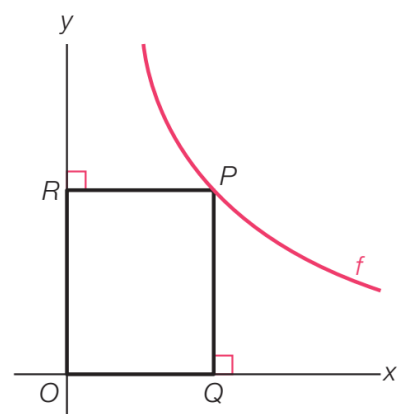
- d** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{8}{x^4}$ met $x > 0$.

Het punt P met $x_P = p$ is een willekeurig punt op de grafiek van f .

P is een hoekpunt van de rechthoek $OQPR$ waarbij Q op de x -as ligt en R op de y -as. Zie de figuur hiernaast.

Stel een formule op van de omtrek van $OQPR$ en bereken daarmee exact de coördinaten van het punt P , zó dat de omtrek van de rechthoek minimaal is.

- e** Voor $x > 20$ is gegeven de formule $y = 3(0,2x - 4)^2$.
Toon met de afgeleide aan dat y toenemend stijgend is.



Toenamedigrammen

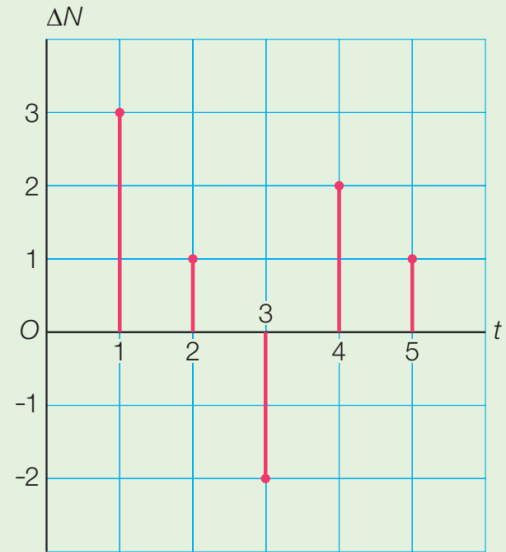
In een toenamediagram worden de veranderingen met staafjes aangegeven.

Weet je dat op $t = 0$ geldt dat $N = 4$, dan kun je met het toenamediagram in de figuur hiernaast de waarde van N berekenen op $t = 5$.

Je krijgt $N = 4 + 3 + 1 - 2 + 2 + 1 = 9$.

Weet je dat $N = 15$ op $t = 4$, dan is N op $t = 0$ te berekenen.

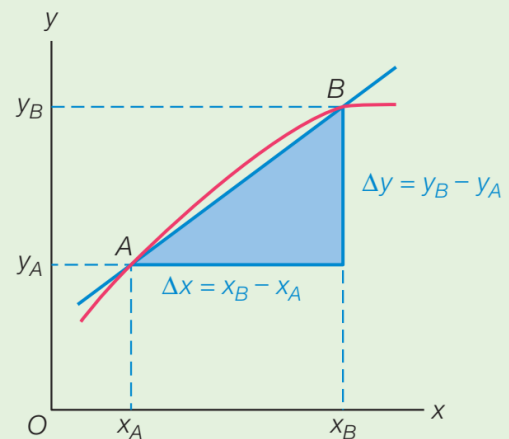
Je krijgt $N = 15 - 2 + 2 - 1 - 3 = 11$.



Het differentiequotiënt

Het differentiequotiënt van y op het interval $[x_A, x_B]$ is

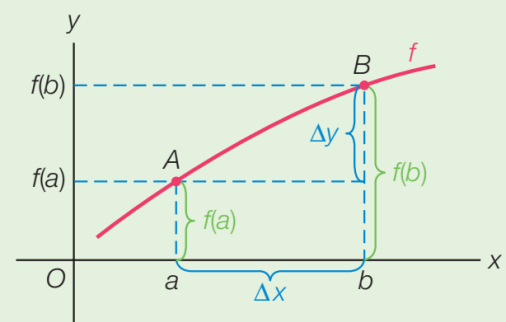
- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (helling) van de lijn AB
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



Het differentiequotiënt van $f(x)$ op het interval

$[a, b]$ is gelijk aan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Neem je het interval $[a, b]$ heel klein, bijvoorbeeld $[a, a + \Delta x]$ met $\Delta x = 0,01$ of $\Delta x = 0,001$, dan geeft het differentiequotiënt een benadering van de helling van de grafiek in het punt A met $x_A = a$.



Bij een tijd-afstandformule benader je de snelheid op het tijdstip $t = a$ met het differentiequotiënt op het interval $[a, a + \Delta t]$ met bijvoorbeeld $\Delta t = 0,01$ of $\Delta t = 0,001$.

Differentiëren, hellingen en raaklijnen

Je kent de volgende regels voor het differentiëren.

$$f(x) = a \text{ geeft } f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax \text{ geeft } f'(x) = a$$

$$f(x) = x^n \text{ geeft } f'(x) = nx^{n-1} \text{ voor elke } n \text{ van } \mathbb{R}.$$

$$f(x) = c \cdot (ax + b)^n \text{ geeft } f'(x) = c \cdot n(ax + b)^{n-1} \cdot a \text{ voor elke } n \text{ van } \mathbb{R}.$$

De afgeleide van de functie f voor $x = x_A$, dus $f'(x_A)$, is

- de helling van de grafiek in A
- de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$
- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A .

Als de lijn k de grafiek van de functie f in het punt A raakt, dan gebruik je $rc_k = f'(x_A)$ bij het algebraïsch opstellen van de formule van k .

Als de lijn l met richtingscoëfficiënt a de grafiek van de functie f raakt, dan kun je de coördinaten van het raakpunt berekenen door de vergelijking $f'(x) = a$ op te lossen.

In de figuur hiernaast is de grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 10$ getekend. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt $A(4, 6)$. De lijn l staat loodrecht op k en raakt de grafiek van f in het punt B . Om de coördinaten van B te berekenen, gebruik je dat $rc_k \cdot rc_l = -1$.

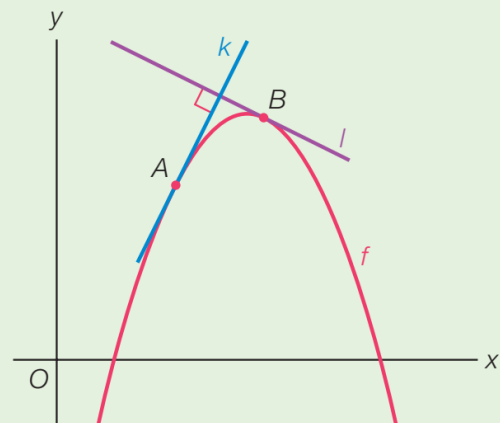
$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 10 \text{ geeft } f'(x) = -x + 6, \text{ dus } rc_k = f'(4) = 2.$$

$$k \perp l, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1 \text{ en dit geeft } rc_l = -\frac{1}{2}.$$

Oplossen van de vergelijking $f'(x) = -\frac{1}{2}$ geeft

$$-x + 6 = -\frac{1}{2}, \text{ dus } x = 6\frac{1}{2}.$$

Het punt B is $B(6\frac{1}{2}, 7\frac{7}{8})$.



Extreme waarden en optimaliseren

Bij het algebraïsch berekenen van extreme waarden bereken je de afgeleide en los je de vergelijking 'afgeleide = 0' algebraïsch op.

Beoordeel aan de hand van een schets van de grafiek of je met een minimum of een maximum hebt te maken. Op het examen is de grafiek vaak gegeven. Als dit niet het geval is, maak je zelf een schets. Gebruik daarbij de GR.

Bij optimaliseringsproblemen gaat het om het vinden van een maximum of een minimum, soms in praktische situaties.

In de figuur hiernaast zijn de lijn $k: y = \frac{1}{2}x + 4$ en de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{3x}$ getekend. De lijn $x = p$ snijdt k in het punt A en de grafiek van f in het punt B .

De lengte L van het lijnstuk AB uitgedrukt in p is $L = \frac{1}{2}p + 4 - \sqrt{3p}$.

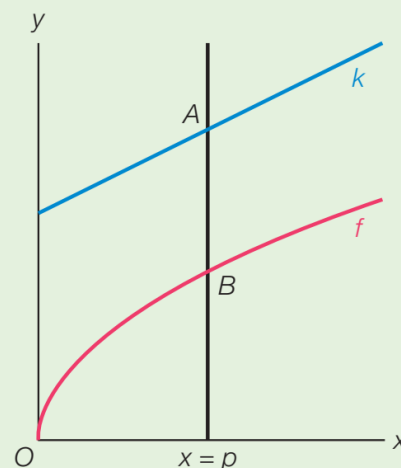
Om langs algebraïsche weg de minimale lengte van L te berekenen, stel je de afgeleide $\frac{dL}{dp}$ gelijk aan nul.

Je krijgt $L = \frac{1}{2}p + 4 - \sqrt{3p} = \frac{1}{2}p + 4 - (3p)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(3p)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3p}}.$$

Oplossen van de vergelijking $\frac{dL}{dp} = 0$ geeft $p = 3$.

De minimale lengte is $L(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 + 4 - \sqrt{3 \cdot 3} = 2\frac{1}{2}$.

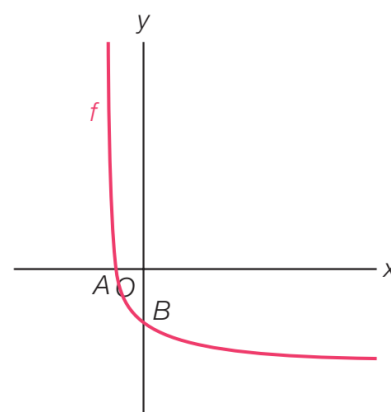


28 2021-II

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} - 2$.

De grafiek van f snijdt de x -as in punt A en de y -as in punt B . Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de afstand tussen A en B .



De functie g is gegeven door $g(x) = -2x^2 + 3x + p$.

De grafieken van f en g raken elkaar in het punt C . Zie de figuur hiernaast.

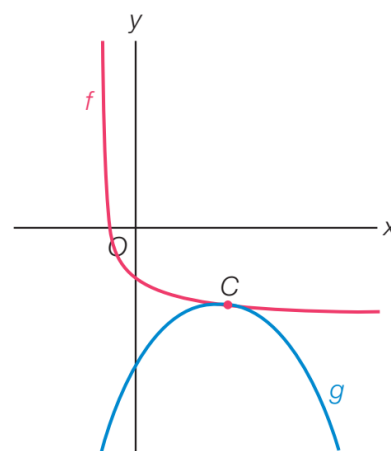
De x -coördinaat van C noemen we x_C en er geldt $x_C \approx 0,81$.

b Bereken p . Geef je eindantwoord in één decimaal.

Dat de grafieken van f en g elkaar raken in punt C betekent dat de helling van beide grafieken in dat punt gelijk is.

De x -coördinaat van C is hierboven in twee decimalen benaderd.

c Bereken met behulp van differentiëren de waarde van x_C nauwkeuriger. Geef je eindantwoord in drie decimalen.



Een windmolen kan de bewegingsenergie van de wind omzetten in elektrische energie. De hoeveelheid elektrische energie die een windmolen produceert, is afhankelijk van de windsnelheid. Hoe harder het waait, hoe meer elektrische energie een windmolen kan produceren. Omdat er energie uit de wind gehaald is en omgezet is in elektrische energie, is de bewegingsenergie van de wind achter een windmolen kleiner dan ervoor. Dus is de windsnelheid achter de windmolen ook kleiner dan de windsnelheid vóór de windmolen.

De energie in joule (J) die een windmolen per seconde produceert, wordt gegeven door de formule

$$E = \frac{1}{4} \cdot c \cdot v^3 \cdot \left(1 - \left(\frac{w}{v} \right)^3 - \left(\frac{w}{v} \right)^2 + \left(\frac{w}{v} \right) \right). \text{ (formule 1)}$$

Hierin is

- E de energie die de molen per seconde produceert in J;
- c een (positieve) constante die hoort bij de windmolen, deze constante is onder andere afhankelijk van de grootte en vorm van de wieken;
- v de snelheid van de wind vóór de windmolen in m/s;
- w de snelheid van de wind achter de windmolen in m/s.

Bij een wind met een snelheid van 10 m/s vóór de windmolen produceert de windmolen Amstelvogel in Ouderkerk aan de Amstel elke seconde 1,21 miljoen J. De waarde van c die hoort bij deze windmolen is 5116.

- a** Bereken de snelheid van de wind achter de windmolen in m/s. Geef je eindantwoord in één decimaal.

We gaan nu weer kijken naar windmolens in het algemeen. Een windmolen kan niet alle energie uit de wind halen, want dan zou de lucht achter de windmolen stilstaan. Het blijkt dat de maximale hoeveelheid energie die een windmolen uit de wind kan halen alleen afhangt van de verhouding tussen de windsnelheden vóór en achter de molen, dus de verhouding tussen v en w .

Stel $p = \frac{w}{v}$, dan kan formule 1 geschreven worden als

$$E = \frac{1}{4} \cdot c \cdot v^3 \cdot (1 - p^3 - p^2 + p). \text{ (formule 2)}$$

Bij een constante waarde van v is E maximaal als $1 - p^3 - p^2 + p$ maximaal is.

Voor elke constante c en v wordt de maximale waarde voor E bereikt bij $p = \frac{1}{3}$.

- b** Bewijs dat deze maximale waarde voor E inderdaad bereikt wordt bij $p = \frac{1}{3}$.



Amstelvogel

De maximale waarde voor E noemen we $E_{\max}$.

De energie van wind met een snelheid v die per seconde wordt opgevangen door een windmolen waarvan c de constante is, wordt gegeven door $E_{\text{wind}} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v^3$.

Het maximale percentage van de energie die een windmolen uit de wind kan halen is $\frac{E_{\max}}{E_{\text{wind}}} \cdot 100\%$.

c Bereken dit percentage. Geef je eindantwoord in hele procenten.

30 2021-I

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

De grafiek van f is een parabool.

a Bewijs dat de top van de parabool op de x -as ligt.

De lijn m is de verticale lijn met vergelijking $x = 1$.

We kijken naar het gebied dat aan de bovenkant wordt begrensd door de grafiek van f , aan de onderkant door de x -as, aan de linkerkant door de y -as en aan de rechterkant door lijn m .

In de figuur hiernaast is dit gebied blauw gemaakt.

Om een benadering van de oppervlakte van het blauwe gebied te vinden gaan we als volgt te werk.

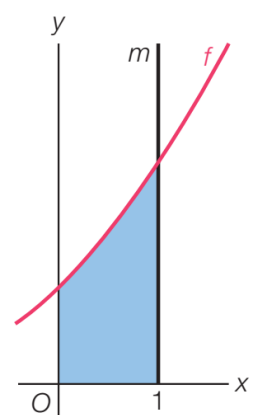
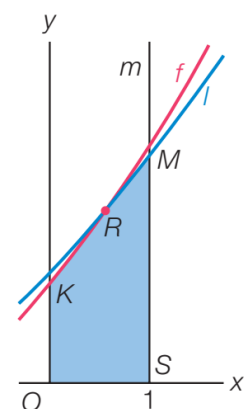
- De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $R(\frac{1}{2}, 1\frac{9}{16})$.
- K is het snijpunt van lijn l met de y -as.
- M is het snijpunt van lijn l en lijn m .
- S is het punt met coördinaten $(1, 0)$.
- De oppervlakte van vierhoek $OSMK$ is de benadering.

Zie de figuur hiernaast, waarin de oppervlakte van vierhoek $OSMK$ blauw is gemaakt.

Een vergelijking van l is $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$.

b Bewijs dat $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$ inderdaad een vergelijking van l is.

c Bereken exact de oppervlakte van vierhoek $OSMK$.

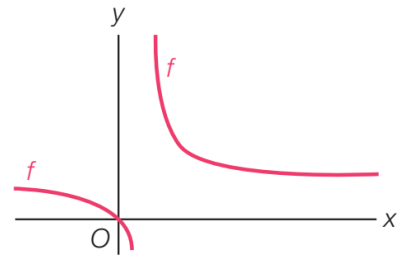


31 2021-I

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 1 + \frac{3}{4x-3}$.

De grafiek van f gaat door de oorsprong O . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de helling van de grafiek van f in O .

**32 2021-II**

De verhouding tussen het aantal inwoners N in een stedelijk gebied en de lengte van het wegennet in mijlen W in dat gebied is de verkeersdruk D .

Dus $D = \frac{N}{W}$.

Voor W geldt de formule $W = 0,043 \cdot N^{\frac{5}{6}}$.

In de praktijk geldt: als in een stedelijk gebied het aantal inwoners toeneemt, neemt de verkeersdruk ook toe (ondanks de toename van de lengte van het wegennet).

Voor D moet dus gelden dat de grafiek van D als functie van N stijgend is. Dit kan in drie stappen worden onderzocht:

- 1 Gebruik de formules $D = \frac{N}{W}$ en $W = 0,043 \cdot N^{\frac{5}{6}}$ om D uit te drukken in N .
- 2 Bepaal de afgeleide $\frac{dD}{dN}$ van de bij stap 1 gevonden formule.
- 3 Onderzoek of deze afgeleide voor alle waarden van N groter is dan 0. Onderzoek met dit stappenschema of de grafiek van D als functie van N inderdaad stijgend is.

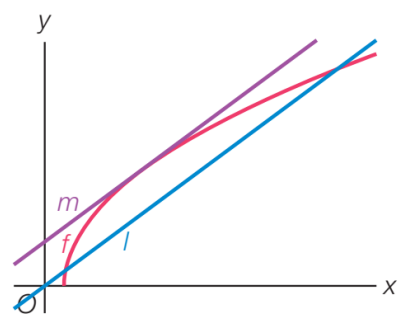
33 2021-III

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2\sqrt{3x-4}$.

De lijn l heeft de vergelijking $y = \frac{3}{4}x$.

Lijn l wordt c eenheden omhoog geschoven. Hierdoor ontstaat de lijn m die een raaklijn is aan de grafiek van f . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact met behulp van differentiëren de waarde van c .

**34 2024-II**

De functies f en g worden gegeven door $f(x) = \sqrt{2x+6}$ en $g(x) = x^2 + 6x + 9$.

De lijn l raakt de grafiek van f in het punt met x -coördinaat 15.

De lijn m met vergelijking $6x + y = -27$ raakt de grafiek van g .

Bewijs dat l en m loodrecht op elkaar staan.

35 2021-I

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 3\sqrt{x} - 2x + 1$. Het punt T is de top van de grafiek van f . Zie figuur 1.

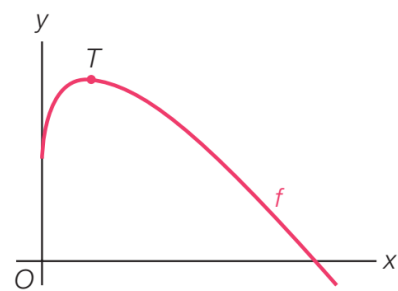
a Bereken exact de coördinaten van T .

Op het deel van de grafiek van f dat boven de x -as ligt, wordt een punt P gekozen.

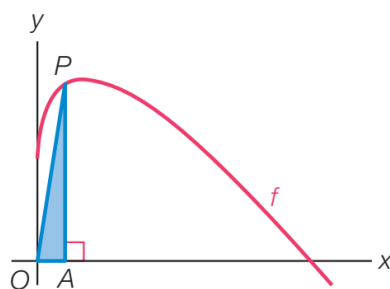
Het punt A ligt op de x -as en heeft dezelfde x -coördinaat als P .

In figuur 2 en figuur 3 is de situatie voor twee posities van P geschetst.

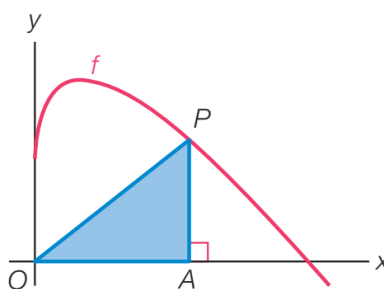
In figuur 3 is de oppervlakte van driehoek OAP groter dan in figuur 2.



figuur 1



figuur 2



figuur 3

Er is een positie van P op de grafiek van f zo dat de oppervlakte van driehoek OAP maximaal is.

Deze positie van P kun je vinden door de oppervlakte van driehoek OAP in x uit te drukken, waarbij x de lengte van zijde OA is.

b Bereken de maximale oppervlakte van driehoek OAP . Geef je eindantwoord in drie decimalen.

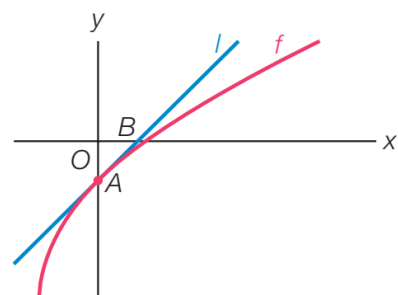
36 2022-I

De functie f is gegeven door $f(x) = -8 + 2\sqrt{3x + 9}$.

De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A . De lijn l raakt de grafiek van f in A . De lijn l snijdt de x -as in het punt B . Zie de figuur hiernaast.

Er geldt $OA = OB$.

Bewijs dit.



37 2023-II

De functie f wordt gegeven door

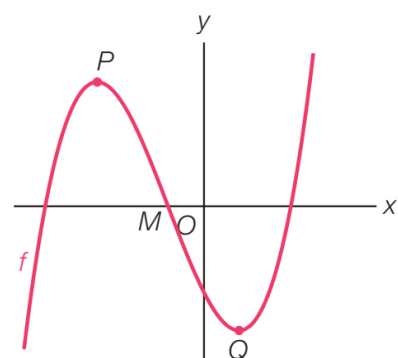
$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x - 88.$$

De punten P en Q zijn de toppen van de grafiek van f .

Het middelste snijpunt van de grafiek van f met de x -as is het punt $M(-2, 0)$. Zie de figuur hiernaast.

Punt M ligt midden tussen P en Q .

Bewijs dit.



38 2021-III

Op het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ wordt de functie f

$$\text{gegeven door } f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - x.$$

Het punt P ligt op de grafiek van f .

De x -coördinaat van P is p .

De y -coördinaat van P is dus $f(p)$.

De lijn l gaat door de oorsprong O en door P .

De richtingscoëfficiënt van l noemen we a .

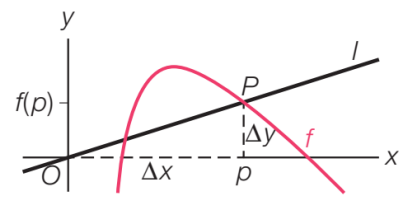
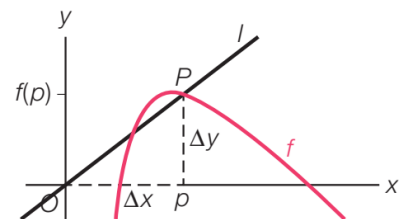
$$\text{Er geldt } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(p)}{p}.$$

In de figuren hiernaast is lijn l voor twee posities van P getekend. In de onderste figuur is a groter dan in de bovenste figuur.

Er is een waarde van p waarvoor a maximaal is.

Deze waarde van p kun je berekenen door eerst a uit te drukken in p .

Bereken exact de waarde van p waarvoor a maximaal is.



39 2023-I

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2\sqrt{3x - 5}$.

a Bereken op exacte wijze het domein van f .

De functie g wordt gegeven door $g(x) = a(x - p)^2 + q$.

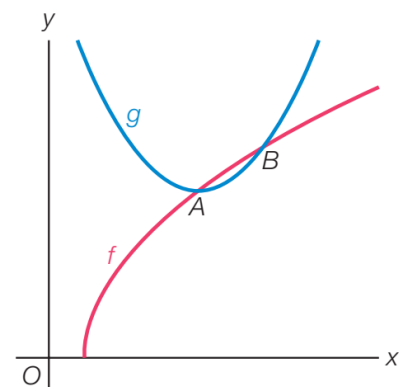
Hierin zijn a , p en q constanten.

De grafiek van g is een parabool.

Het punt A ligt op de grafiek van f en in dit punt A geldt $f'(x) = \frac{3}{4}$. Daarnaast is punt A ook de top van de grafiek van g .

Het punt B ligt op beide grafieken en heeft x -coördinaat 10. Zie de figuur hiernaast.

b Bereken exact de waarden van a , p en q .



40 2022-I

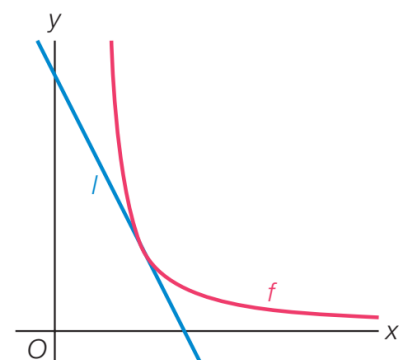
Op het domein $\langle \frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$ is de functie f gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{2x - 1}.$$

De lijn l met richtingscoëfficiënt -2 raakt de grafiek van f .

Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van l met de y -as.

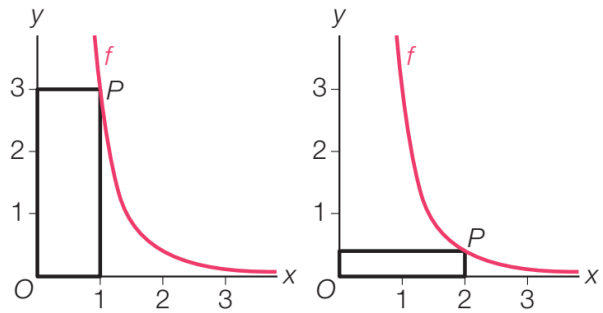


41 2022-II

De functie f wordt gegeven door

$$f(x) = \frac{3}{x^3} \text{ met } x > 0.$$

Punt P is een willekeurig punt op de grafiek van f . Bij zo'n punt P kun je een rechthoek tekenen met horizontale en verticale zijden en hoekpunten P en O . In de linker figuur is de rechthoek getekend als P het punt $(1, 3)$ is en in de rechter figuur is de rechthoek getekend als P het punt $(2, \frac{3}{8})$ is. De omtrek van de rechthoek in de linker figuur is groter dan de omtrek van de rechthoek in de rechter figuur. De omtrek is dus afhankelijk van de keuze van P . Je kunt P zó op de grafiek van f kiezen, dat de omtrek van de bijbehorende rechthoek minimaal is. Geef een formule voor de omtrek en bereken daarmee exact de coördinaten van het punt P , zó dat de omtrek van de bijbehorende rechthoek minimaal is.



42 2022-II

De functie f wordt gegeven door $f(x) = -2 + \sqrt{8+x}$.

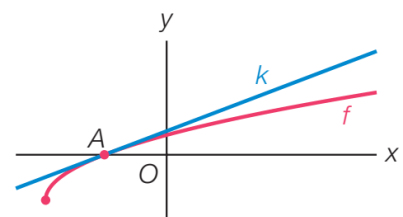
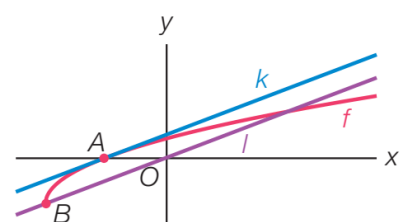
Het punt A is het snijpunt van de grafiek van f met de x -as. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A . Zie de figuur hiernaast.

Een vergelijking van k is $y = \frac{1}{4}x + 1$.

a Bewijs dit.

Het punt B is het randpunt van de grafiek van f . Lijn l is de lijn door B en de oorsprong O . Zie de figuur hiernaast. Lijnen k en l zijn evenwijdig.

b Bewijs dit.



43 2023-II

Een zwangerschapsecho is een afbeelding van een ongeboren baby. Op de echo kan de afstand a van de bovenkant van het hoofdje tot de onderkant van de billen worden gemeten.

Bij een zwangerschapsduur van 8,5 tot 13 weken is de afstand bij de ongeboren baby te bepalen volgens de formule $a = 0,96 \cdot (0,12d - 2,95)^2$. Hierbij is d in dagen en a in mm.

Toon met behulp van de afgeleide aan dat de afstand toenemend stijgend is.

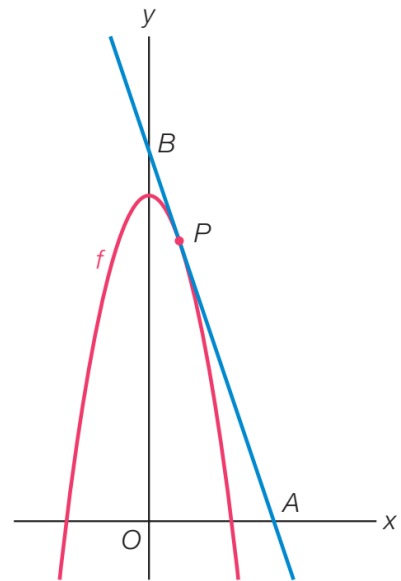


44 2023-II

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 16 - x^2$. Het punt P ligt op de grafiek van f . De raaklijn aan de grafiek van f in P snijdt de positieve x -as in het punt A en de y -as in het punt B . Zie de figuur hiernaast.

Punt P is zo gekozen dat geldt $OB = 3 \cdot OA$.

Bereken exact de x -coördinaat van P .



45 2024-I

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2(\frac{1}{3}x - 1)^3 - \frac{1}{2}x + 3$.

De afgeleide van f is $f'(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 1\frac{1}{2}$.

a Bewijs dat inderdaad geldt $f'(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 1\frac{1}{2}$.

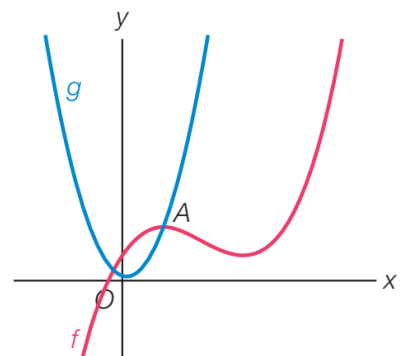
Het punt A is de linker top van de grafiek van f . Zie de figuur hiernaast.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = x^2 - \frac{3}{10}x + c$.

Hierin is c een constante.

De grafiek van g gaat door het punt A .

b Bereken exact de waarde van c .



46 2024-I

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

Bereken exact het minimum van f .

47 2024-II

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \frac{1}{4}x(x - 2)(x + 6)$.

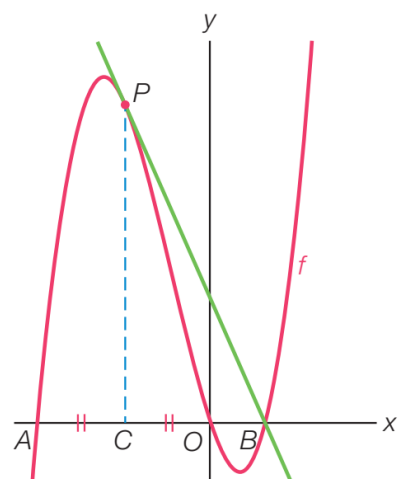
De grafiek van f snijdt de x -as in de punten $A(-6, 0)$,

$O(0, 0)$ en $B(2, 0)$. Het punt C is het midden van lijnstuk

AO . Het punt P ligt recht boven C op de grafiek van f . Zie de figuur hiernaast.

De raaklijn aan de grafiek van f in P gaat door B .

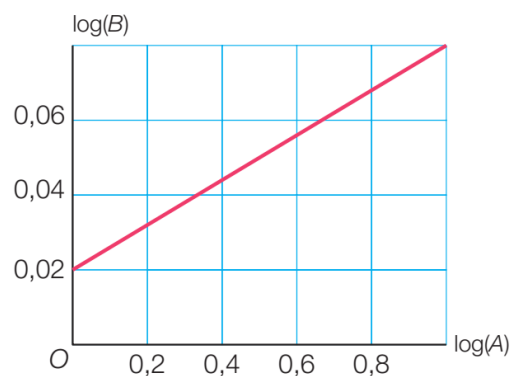
Bewijs dit.



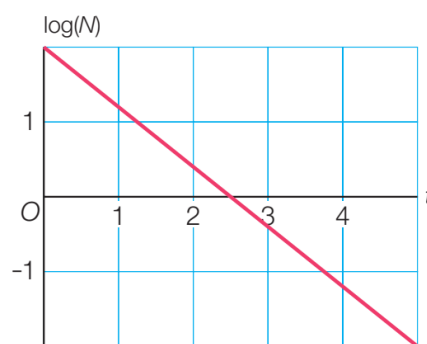
12.4 Exponenten en logaritmen

- 48 a** Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. In 30 jaar is de hoeveelheid toegenomen van 28 tot 52.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per 10 jaar toeneemt.
- b** Een hoeveelheid neemt per jaar met 27% af. Op 1 januari 2010 was de hoeveelheid 650.
Bereken in welk jaar de hoeveelheid voor het eerst minder dan 1 zal zijn.
- c** Een hoeveelheid H neemt jaarlijks met een vast percentage af.
Op $t = 0$ is $H = 50$.
Men neemt eerst aan dat de jaarlijkse afname 1,2% is.
Na tien jaar blijkt $H = 42,5$ te zijn. Deze hoeveelheid verschilt met de hoeveelheid die volgt uit de eerste aanname.
Bereken dit verschil. Rond af op één decimaal.
- d** Een hoeveelheid groeit exponentieel met 7,5% per week.
Bereken de verdubbelingstijd in dagen nauwkeurig.
- e** Los exact op $\frac{1}{4}(2^{-\frac{1}{3}x} + 25) = 20$.
- f** Los de vergelijking $3^{\frac{1}{4}x+7} = 9^x$ exact op.
- g** Bewijs dat de formule $y = \frac{1}{4}(2^{\frac{1}{3}x} + 20)$ te herleiden is tot $y = (\sqrt[3]{2})^{x-6} + 5$.
- h** Los exact op ${}^4\log\left(\frac{4}{4x^2 + 15x}\right) = 0$.
- i** Los exact op ${}^2\log(4x - 5) - {}^2\log(7 - 2x) = 3$.
- j** Los exact op $\log(2x) = 2 - \log(x + 2)$.
- k** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + {}^3\log(x + 3)$.
De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A en de y -as in het punt B .
De grafiek van de functie g is een parabool die door A gaat en B als top heeft.
Stel op exacte wijze een functievoorschrift van g op.
- l** De formule $y = {}^4\log\left(\frac{4}{4x^2 + 15x}\right)$ is te schrijven in de vorm $y = a - {}^4\log(x) - {}^4\log(px + q)$.
Toon dit aan en geef de waarden van a , p en q .
- m** Gegeven zijn de formules $A = 5 \cdot {}^3\log(B)$ en $P = Q \cdot {}^2\log(B)$.
Schrijf de formule van P in de vorm $P = c \cdot A \cdot Q$. Rond c af op drie decimalen.
- n** Gegeven zijn de formules $A = \log\left(\frac{2B}{20 - B}\right)$ en $A = 3t + 1$.
Gebruik deze formules om B uit te drukken in t .

- 49 a** In de figuur hiernaast is $\log(B)$ uitgezet tegen $\log(A)$.
Gebruik deze figuur om B te berekenen bij $A = 5$. Rond af op twee decimalen.



- b** Zie de figuur hiernaast.
Bereken met hoeveel procent N afneemt tussen $t = 1,5$ en $t = 3$.



Groepercentages en groeifactoren

Een hoeveelheid neemt exponentieel toe met 6,5% per jaar.

De bijbehorende groeifactor is 1,065 per jaar.

Omgekeerd hoort bij een groeifactor van 1,126 per jaar een groeipercentage van 12,6% per jaar.

Groeipercentages omzetten naar andere tijdseenheden gaat via groeifactoren.

Weet je dat bij een exponentiële groei een afname in 7 jaar van 25% hoort, dan is $g_{7\text{jaar}} = 0,75$ en dit geeft $g_{\text{jaar}} = 0,75^{\frac{1}{7}} \approx 0,960$. Dus de afname per jaar is 4,0%.

Verdubbelingstijden en halveringstijden

De verdubbelingstijd is de tijd waarin een hoeveelheid verdubbelt bij exponentiële groei. Bij een groeifactor g bereken je de verdubbelingstijd T door de vergelijking $g^T = 2$ op te lossen.

Om bij een exponentiële groei met 6,5% per jaar de verdubbelingstijd T te berekenen, los je op $1,065^T = 2$. Je krijgt $T \approx 11,0$, dus de verdubbelingstijd is 11 jaar.

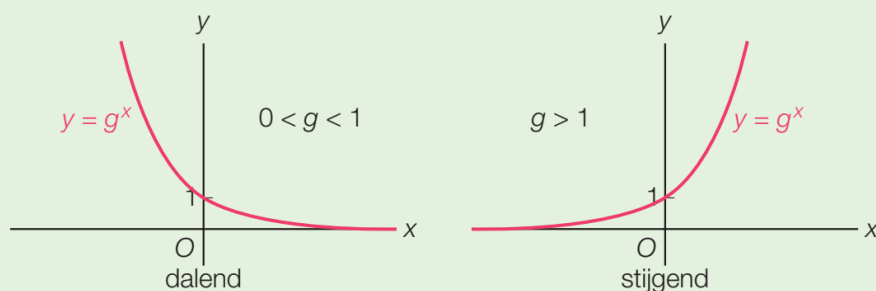
Om het groeipercentage per jaar te berekenen dat hoort bij een verdubbelingstijd van 15 jaar, los je de vergelijking $g^{15} = 2$ op. Je krijgt $g = 2^{\frac{1}{15}} \approx 1,047$, dus het percentage is 4,7%.

Bij halveringstijden heb je te maken met de vergelijking $g^T = \frac{1}{2}$.
Om bij een exponentiële afname met 3,5% per jaar de halveringstijd te berekenen, los je op $0,965^T = \frac{1}{2}$. Je krijgt $T \approx 19,5$, dus de halveringstijd is 19,5 jaar.

Bij een exponentiële afname met een halveringstijd van 12 jaar bereken je als volgt het afnamepercentage per jaar. Los de vergelijking $g^{12} = \frac{1}{2}$ op. Je krijgt $g = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{12}} \approx 0,944$, dus het percentage is 5,6%.

Exponentiële functies

Bij de standaardgrafiek $y = g^x$ onderscheiden we $0 < g < 1$ en $g > 1$.
De horizontale asymptoot van de grafiek van $f(x) = g^x$ is de lijn $y = 0$.



Algebraïsch oplossen van exponentiële vergelijkingen

$g^A = B$ geeft $A = {}^g\log(B)$	Herleid tot $g^A = g^B$
$2^{3x-1} = 15$	$2^{x-3} = 8 \cdot 4^x$
$3x - 1 = {}^2\log(15)$	$2^{x-3} = 2^3 \cdot 2^{2x}$
$3x = 1 + {}^2\log(15)$	$2^{x-3} = 2^{3+2x}$
$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(15)$	$x - 3 = 3 + 2x$
	$-x = 6$
	$x = -6$

Bij de vergelijking $10^{-0,3x} = 0,8$ krijg je $-0,3x = \log(0,8)$,
dus $x = \frac{\log(0,8)}{-0,3} \approx 0,323$.

Logaritmische functies

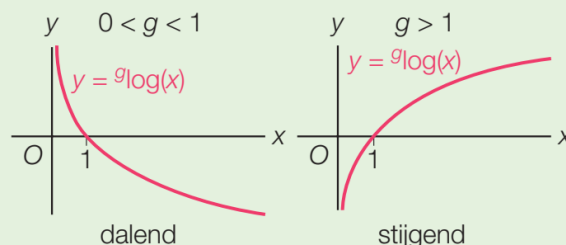
Bij de standaardgrafiek $y = {}^g\log(x)$ onderscheiden we $0 < g < 1$ en $g > 1$. Zie de figuur hiernaast.

Het domein van de functie

$f(x) = {}^g\log(ax + b)$ volgt uit $ax + b > 0$.

De verticale asymptoot van de grafiek van

$f(x) = {}^g\log(ax + b)$ volgt uit $ax + b = 0$.



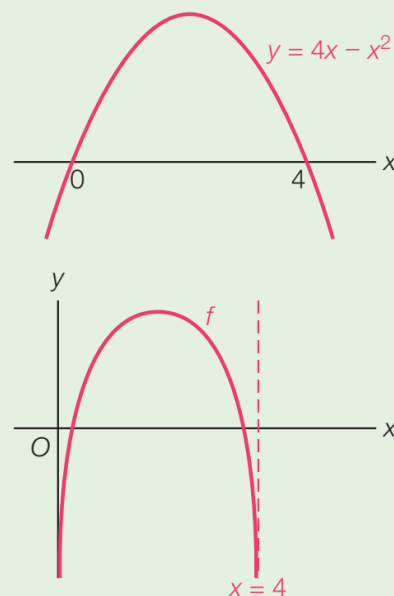
Om het domein van de functie $f(x) = {}^2\log(4x - x^2)$ te berekenen, los je de ongelijkheid $4x - x^2 > 0$ op.

Uit $4x - x^2 = 0$ volgt $x = 0 \vee x = 4$.

Uit de figuur hiernaast volgt $4x - x^2 > 0$ geeft $0 < x < 4$, dus het domein van f is $D_f = \langle 0, 4 \rangle$.

Zie de grafiek van $f(x) = {}^2\log(4x - x^2)$ in de figuur hiernaast.

De verticale asymptoten van de grafiek van f zijn de lijnen $x = 0$ en $x = 4$.



Logaritmische vergelijkingen

Bij het oplossen van de logaritmische vergelijking ${}^3\log(x + 2) = -2$ gebruik je ${}^g\log(B) = A$ geeft $B = g^A$.

$${}^3\log(x + 2) = -2$$

$$x + 2 = 3^{-2}$$

$$x = \frac{1}{9} - 2 = -1\frac{8}{9}$$

Bij de vergelijking $\log(5x - 2) = 0$ krijg je $5x - 2 = 10^0$ oftewel $5x - 2 = 1$ en dit geeft $x = \frac{3}{5}$.

Bij de vergelijking ${}^2\log(4x - x^2) = 0$ krijg je ${}^2\log(4x - x^2) = 0$

$$4x - x^2 = 1$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12, \text{ dus } \sqrt{D} = \sqrt{12}$$

$$x = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} \vee x = \frac{4 - \sqrt{12}}{2}$$

Rekenregels voor logaritmen

De rekenregels voor logaritmen zijn

- ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$
- ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$
- ${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$

Deze regels gebruik je bij het oplossen van vergelijkingen en het herleiden van formules.

Los op ${}^3\log(x+2) = 2 \cdot {}^3\log(x) + 1$.

Uitwerking

$${}^3\log(x+2) = 2 \cdot {}^3\log(x) + 1$$

$${}^3\log(x+2) = {}^3\log(x^2) + {}^3\log(3)$$

$${}^3\log(x+2) = {}^3\log(3x^2)$$

$$x+2 = 3x^2$$

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -2 = 25, \text{ dus } \sqrt{D} = 5$$

$$x = \frac{1+5}{6} = 1 \vee x = \frac{1-5}{6} = -\frac{2}{3}$$

$x = -\frac{2}{3}$ voldoet niet, dus $x = 1$.

Herleid $N = 2 \cdot \log(x-1) - \log(x)$.

Uitwerking

$$N = 2 \cdot \log(x-1) - \log(x)$$

$$N = \log((x-1)^2) - \log(x)$$

$$N = \log(x^2 - 2x + 1) - \log(x)$$

$$N = \log\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x}\right)$$

$$N = \log\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)$$

Variabelen vrijmaken bij exponentiële en logaritmische formules

Hieronder zie je hoe je bij de formule $A = 25 + 2^{0,1B+3}$ de variabele B vrijmaakt en bij de formule $P = 8 - 2 \cdot \log(5Q - 3)$ de variabele Q .

Daarbij worden de regels $g^A = B$ geeft $A = {}^g\log(B)$ en

${}^g\log(B) = A$ geeft $B = g^A$ gebruikt.

$$A = 25 + 2^{0,1B+3}$$

$$2^{0,1B+3} = A - 25$$

$$0,1B + 3 = {}^2\log(A - 25)$$

$$0,1B = -3 + {}^2\log(A - 25)$$

$$B = -30 + 10 \cdot {}^2\log(A - 25)$$

$$P = 8 - 2 \cdot \log(5Q - 3)$$

$$2 \cdot \log(5Q - 3) = 8 - P$$

$$\log(5Q - 3) = 4 - 0,5P$$

$$5Q - 3 = 10^{4-0,5P}$$

$$5Q = 3 + 10^{4-0,5P}$$

$$Q = 0,6 + 0,2 \cdot 10^{4-0,5P}$$

Je kunt N uitdrukken in M bij de formules $M = 4 \cdot \log(t)$ en

$N = 7 \cdot {}^2\log(t)$ en de formule herleiden tot de vorm $N = a \cdot M$.

Daartoe maak je eerst t vrij bij $M = 4 \cdot \log(t)$. Daarna substitueer je de verkregen formule van t in de formule van N .

Je krijgt hierbij te maken met de rekenregels voor logaritmen.

t vrijmaken bij $M = 4 \cdot \log(t)$ geeft $\log(t) = 0,25M$, dus $t = 10^{0,25M}$.

$t = 10^{0,25M}$ substitueren in $N = 7 \cdot {}^2\log(t)$ geeft $N = 7 \cdot {}^2\log(10^{0,25M})$

$$N = 7 \cdot 0,25M \cdot {}^2\log(10)$$

$$N = 5,813... \cdot M$$

Dus de formule van N uitgedrukt in M is $N = 5,81M$.

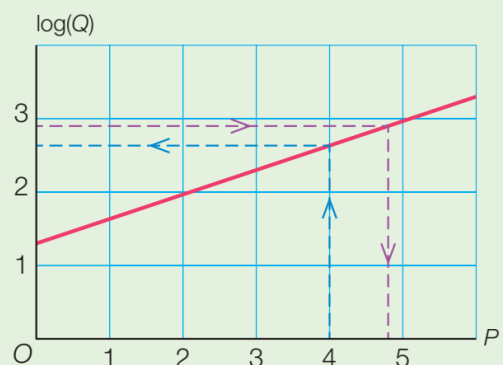
$\log(Q)$ uitzetten tegen P

In de figuur hiernaast is $\log(Q)$ uitgezet tegen P .

Aflezen geeft

- voor $P = 4$ is $\log(Q) \approx 2,7$
dus $Q \approx 10^{2,7} \approx 500$
- voor $Q = 800$ is $\log(Q) \approx 2,9$
en dit geeft $P \approx 4,7$.

De formule van de lijn is $\log(Q) = \frac{1}{3}P + 1\frac{1}{3}$.



In een smartphone zit een processor. Zo'n processor bestaat meestal uit veel uiterst kleine transistors. Het aantal transistors in een processor is in de loop van de jaren enorm toegenomen.

Een producent van smartphones bracht in september 2013 een telefoon op de markt met een processor die 1 miljard transistors bevatte. Diezelfde producent heeft elk opvolgend jaar, steeds in september, een nieuwe telefoon uitgebracht.

In 2018 bracht deze producent een telefoon uit met een processor die 6,9 miljard transistors bevatte. Neem aan dat het aantal transistors in een processor in de tussentijd exponentieel groeide en dat deze groei zich in de jaren daarna voortzette. Je kunt dan voor de telefoon die de producent in 2021 uitbrengt, berekenen hoe groot het aantal transistors is dat de processor van die telefoon zal bevatten.

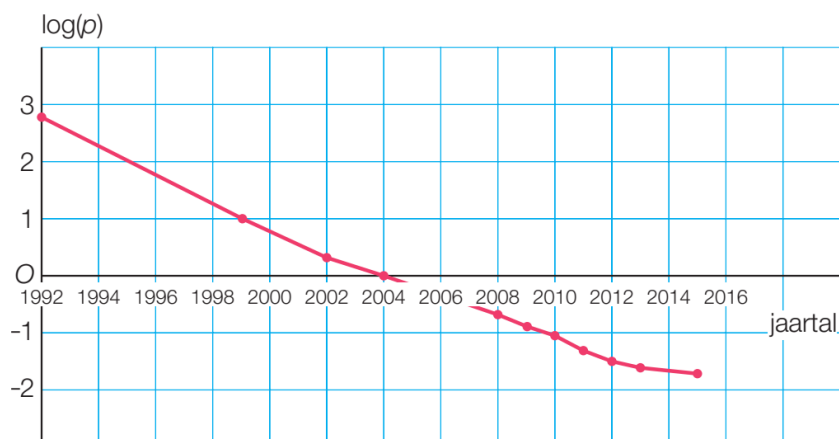
a Bereken dit aantal in miljarden. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Op 1 januari 1992 was de prijs per miljoen transistors 222 dollar. Vanaf dat moment nam de prijs per miljoen transistors af met 32% per jaar. Er komt een moment dat de prijs per miljoen transistors voor het eerst minder is dan 0,1 dollarcent, dus minder dan 0,001 dollar.

b Bereken in welk jaar dat het geval is.

Als je een computerbestand opslaat, dan komt zo'n bestand bijvoorbeeld op een harde schijf (harddisk) terecht. De *opslagcapaciteit* van een harde schijf is het aantal GB (gigabyte) dat op die schijf kan worden opgeslagen. Op basis van de opslagcapaciteit van een harde schijf en de prijs van de schijf kun je berekenen wat de prijs per GB is.

Deze prijs per GB is in de afgelopen jaren enorm gedaald. In de figuur hieronder is deze prijsdaling te zien. Op de verticale as is $\log(p)$ uitgezet. Hierin is p de prijs per GB in dollars.



In het jaar 2004 was het heel gebruikelijk om te werken met een harde schijf van 250 GB. In 2013 waren harde schijven van 2 TB (terabyte) gebruikelijk. Er geldt: 1 TB = 1000 GB.

Met deze gegevens kun je berekenen hoeveel procent goedkoper een harde schijf van 2 TB uit 2013 was dan een harde schijf van 250 GB uit 2004.

c Bereken dit percentage. Geef je eindantwoord als geheel getal.

51 2021-II

De bruine rat, de Japanse oester en de Amerikaanse vogelkers zijn voorbeelden van dier- en plantensoorten die oorspronkelijk niet in Nederland voorkwamen, maar die bewust of onbewust door de mens in Nederland zijn ingevoerd. Zulke soorten worden *exoten* genoemd.

In de figuur hiernaast is voor de periode 1910-2000 eens per tien jaar, telkens op 1 januari van het aangegeven jaar, het aantal exoten in Nederland weergegeven. In deze figuur is ook een grafiek weergegeven die de ontwikkeling van deze aantallen benadert.

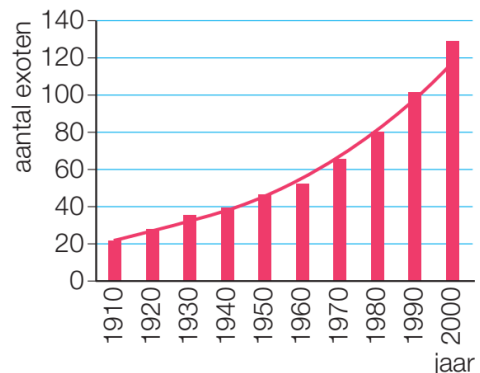
Uit de figuur valt af te lezen dat het aantal exoten in Nederland in de periode van 1 januari 1910 tot 1 januari 1950 van 22 tot 46 is toegenomen.

Neem aan dat het aantal exoten sinds 1 januari 1910 exponentieel is gegroeid. Dan volgt uit de gegevens voor de periode 1910-1950 dat dit aantal elke tien jaar met ongeveer 20% is toegenomen.

a Bereken met behulp van de gegevens van 1910 en 1950 dit percentage nauwkeuriger. Geef je eindantwoord in één decimaal.

We gaan bij de volgende vraag uit van een toename van 20% per tien jaar.

b Bereken na hoeveel jaar het aantal exoten volgens de bovenstaande exponentiële groei voor het eerst verdubbeld is. Geef je eindantwoord in hele jaren.



Gemiddeld leveren langeafstandslopers de beste prestaties op een leeftijd van ongeveer 30 jaar. Daarna nemen de prestaties met de jaren af. Er bestaan meerdere modellen om de prestaties van langeafstandslopers van verschillende leeftijden met elkaar te vergelijken. In deze opgave komen twee van zulke modellen aan bod.

Model 1

Dit model gaat ervan uit dat tussen 35 en 55 jaar de gemiddelde *snelheid* van langeafstandslopers bij wedstrijden met 0,8% per levensjaar afneemt. De halve marathon is een hardloopwedstrijd over een afstand van 21,0975 km. De Nederlandse hardloper Aart Stigter heeft meerdere keren aan de halve marathon van Egmond deelgenomen.

In 1993 liep hij op 36-jarige leeftijd deze halve marathon met een gemiddelde snelheid van 19,5 km per uur. Precies 12 jaar later, in 2005, liep hij dezelfde halve marathon in een tijd van 1 uur, 10 minuten en 4 seconden.

Uitgaande van zijn gemiddelde snelheid in 1993 en een afname van die gemiddelde snelheid met 0,8% per levensjaar, heeft Aart Stigter in 2005 sneller gelopen dan model 1 voorspelt.

- a** Bereken hoeveel seconden sneller. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Model 2

Dit model maakt gebruik van correctiegetallen voor de *tijd*.

De World Master Athletics-bond (WMA) heeft tabellen uitgegeven met correctiegetallen om prestaties van hardlopers van verschillende leeftijden met elkaar te kunnen vergelijken. Met deze correctiegetallen kun je de tijd van elke hardloper omrekenen naar een tijd die hoort bij een 30-jarige met een gelijkwaardige prestatie.

In de tabel zie je de correctiegetallen voor 36-jarigen en 49-jarigen op de halve marathon. Door de tijd van een 36-jarige hardloper met 0,9920 te vermenigvuldigen krijg je de tijd die hoort bij een 30-jarige hardloper met een gelijkwaardige prestatie.

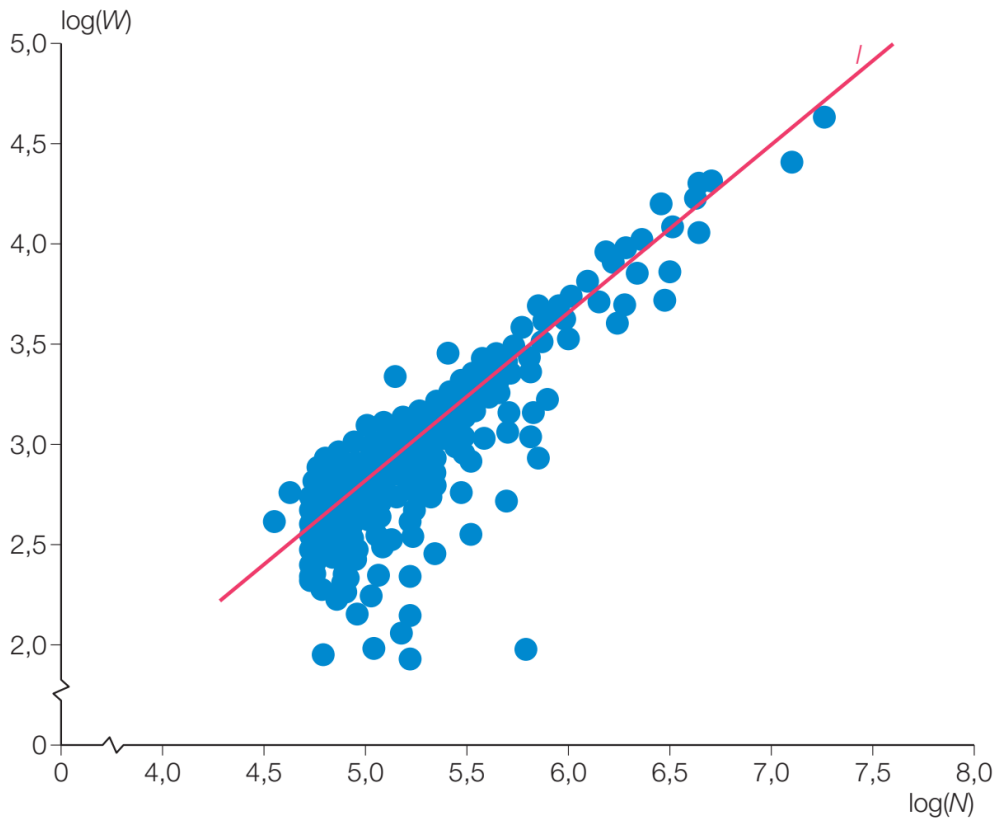
Neem aan dat de correctiegetallen voor de leeftijden tussen 36 en 49 jaar bij benadering exponentieel afnemen met de leeftijd.

leeftijd	correctiegetal t.o.v. 30-jarige
36	0,9920
49	0,9039

Bij de NK halve marathon 2019 was de 47-jarige Marcel Laros met een tijd van 4279 seconden de snelste in de categorie 45-49 jaar. Bij diezelfde halve marathon was de 36-jarige Wynfrith Meijwes de snelste in de categorie 35-39 met een tijd van 4130 seconden.

- b** Onderzoek op algebraïsche wijze welke van deze twee hardlopers de beste prestatie heeft geleverd volgens model 2.

De Amerikaan Bettencourt heeft onderzoek gedaan naar een mogelijk verband tussen het aantal inwoners N en de lengte van het wegennet W in mijlen in een stedelijk gebied. Om van een aantal stedelijke gebieden de gegevens in één figuur duidelijk te kunnen weergeven is van elk gebied $\log(W)$ uitgezet tegen $\log(N)$. Het resultaat is de puntenwolk in de figuur.



Bettencourt heeft een verband tussen $\log(W)$ en $\log(N)$ opgesteld. In de figuur is de lijn l getekend die dit verband weergeeft.

- a** Bepaal met behulp van lijn l de lengte van het wegennet in een gebied met 1 miljoen inwoners. Geef je eindantwoord in honderden mijlen.

Een formule voor l is van de vorm $\log(W) = a \cdot \log(N) + b$.

Uit de figuur volgt dat een gebied met 100 000 inwoners een wegennet heeft van ongeveer 650 mijl en een gebied met 10 000 000 inwoners een wegennet heeft van ongeveer 31 000 mijl.

- b** Bereken a en b met behulp van deze gegevens. Geef de getallen in je eindantwoord in twee decimalen.

54 2021-II

De functie f is gegeven door

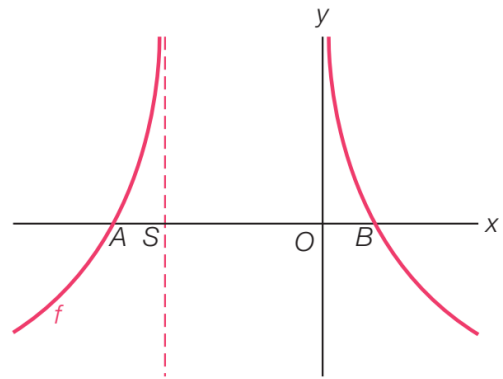
$$f(x) = {}^4\log\left(\frac{2}{2x^2 + 3x}\right).$$

De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A en B . De asymptoten van de grafiek van f snijden de x -as in S en O . Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken exact de x -coördinaat van S .
- b** Bereken exact de coördinaten van A en B .

Op het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ is de functie ook te schrijven als $f(x) = \frac{1}{2} - {}^4\log(x) - {}^4\log(2x + 3)$.

- c** Toon dit aan.



55 2021-III

De functies f en g worden gegeven door

$$f(x) = \log(2x - 4) \text{ en } g(x) = \log(6 - x).$$

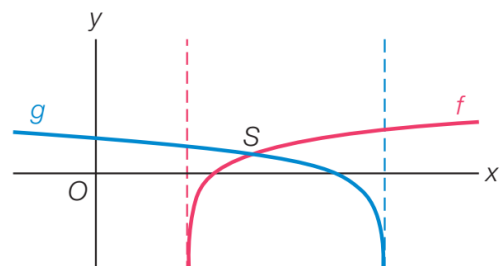
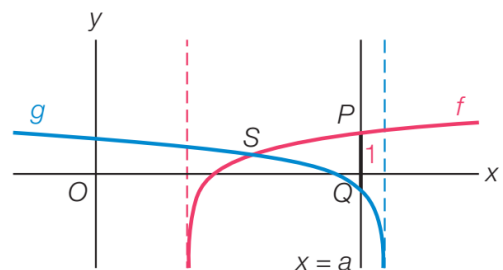
Beide grafieken hebben een verticale asymptoot. Het punt S is het snijpunt van de grafieken van f en g . Zie de figuur hiernaast.

De afstand van S tot de asymptoot van de grafiek van g is groter dan de afstand van S tot de asymptoot van de grafiek van f .

- a** Bereken exact hoeveel keer zo groot.

De lijn met vergelijking $x = a$ ligt rechts van S en snijdt de grafieken van f en g in de punten P en Q . De waarde van a is zo gekozen dat de lengte van lijnstuk PQ gelijk is aan 1. Zie de figuur hiernaast.

- b** Bereken exact de waarde van a .



56 2024-II

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2^x$.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = (\sqrt{2})^{x^2 - x}$.

Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .

In een warmtemotor, bijvoorbeeld de motor van een auto, wordt de totale hoeveelheid energie die in brandstof aanwezig is nooit helemaal omgezet in bewegingsenergie. Het *rendement* van een warmtemotor is het percentage van de totale hoeveelheid energie dat wel wordt omgezet in bewegingsenergie.

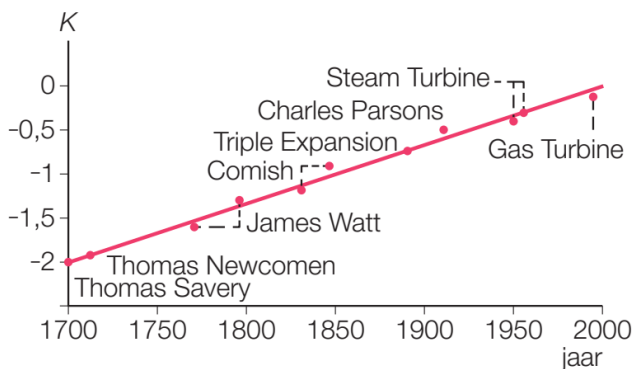
Door technische vooruitgang neemt het rendement van warmtemotoren toe. Men gaat ervan uit dat deze ontwikkeling zich de komende jaren blijft voortzetten.

Om deze groei van het rendement in de tijd te onderzoeken, gebruikten de Amerikaan Ausubel en de Italiaan Marchetti de formule

$$K = \log\left(\frac{R}{100 - R}\right). \text{ Hierin is } R \text{ het rendement in procenten.}$$

- a** Leg met behulp van deze formule uit dat een toename van R zorgt voor een toename van K .

In de figuur hieronder, afkomstig uit een artikel van Ausubel en Marchetti, is voor verschillende warmtemotoren (vaak aangeduid met de naam van de uitvinder) K uitgezet tegen het jaartal waarin deze uitgevonden zijn.



In de figuur is te zien dat de warmtemotor die Charles Parsons aan het begin van de twintigste eeuw ontwikkelde een – voor die tijd – zeer hoog rendement had.

- b** Bepaal met behulp van de figuur het rendement van deze warmtemotor in procenten. Geef je eindantwoord als geheel getal.

In de figuur is een lijn weergegeven die de ontwikkeling van het rendement van warmtemotoren benadert. Bij deze lijn hoort de formule $K = 0,00667t - 2$. Hierin is t het aantal jaren na 1700.

Men gaat ervan uit dat in de toekomst een rendement van 70% haalbaar is.

- c** Bereken in welk jaar dit rendement voor het eerst behaald zal worden.

Met behulp van de twee gegeven formules van K , kan R uitgedrukt worden in t .

- d** Druk R uit in t .

Data kan via verschillende kanalen verstuurd worden, bijvoorbeeld via een kabel of draadloos.

Bij het versturen van data is het belangrijk dat deze foutloos verstuurd wordt. Data kan foutloos verstuurd worden als de zogeheten *kanaalcapaciteit* groot genoeg is.

De kanaalcapaciteit is de maximale hoeveelheid data die per seconde over een kanaal overgedragen kan worden.

Een formule waarmee de kanaalcapaciteit bepaald kan worden, is $C = B \cdot \log_2(1 + R)$. (formule 1)

Hierin is

- C de kanaalcapaciteit in bits per seconde (bps);
- B de bandbreedte in hertz (Hz);
- R de signaal-ruisverhouding.

Deze signaal-ruisverhouding is de verhouding tussen de sterkte van het gewenste signaal en de sterkte van de aanwezige ruis.

Met de formule $S = 10 \cdot \log_{10}(R)$ (formule 2) kan R omgerekend worden naar decibel (dB).

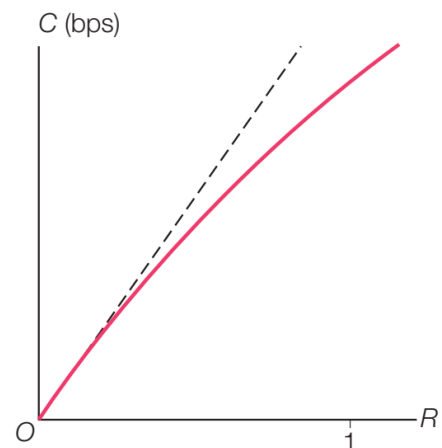
In 2016 had een goed werkende draadloos-internetverbinding vaak een bandbreedte van $20 \cdot 10^6$ Hz en een waarde van S van 40 dB.

- a** Bereken met behulp van de bovenstaande formules de kanaalcapaciteit van deze verbinding. Geef je eindantwoord in miljoenen bps.

Als de ruis (veel) sterker is dan het signaal, dan is R (erg) klein. Voor zulke kleine waarden van R werkt men in de praktijk met een benadering voor C , namelijk $C = 1,44 \cdot B \cdot R$. (formule 3)

In de figuur hiernaast zijn voor $B = 1000$ de grafieken van formules 1 en 3 weergegeven, waarbij de grafiek van formule 3 gestippeld is. In de figuur hiernaast is te zien dat voor groter wordende R de benadering steeds slechter wordt. Men vindt deze benadering acceptabel als het verschil tussen de waarde van C volgens formule 3 en de waarde van C volgens formule 1 maximaal 1% is van de waarde van C volgens formule 1.

- b** Bereken in het geval dat $B = 1000$ tot welke waarde van R dit het geval is. Rond de door jou gevonden waarde van R af op drie decimalen.



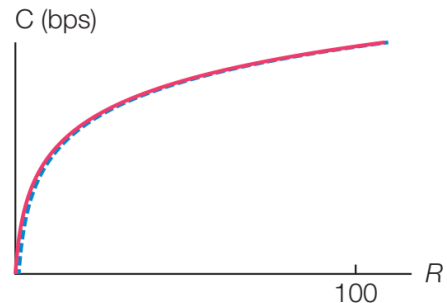
Ook als het signaal veel sterker is dan de ruis, dat wil zeggen voor grote waarden van R , wordt er in de praktijk vaak met een benadering voor C gewerkt.

Voor grote waarden van R geldt $1 + R \approx R$. In dat geval kan formule 1 benaderd worden door $C = B \cdot {}^2\log(R)$. (formule 4)

In de figuur hiernaast zijn voor een bepaalde waarde van B de grafieken van de formules 1 en 4 weergegeven, waarbij de grafiek van formule 4 gestippeld is.

Met behulp van formules 2 en 4 kan voor grote waarden van R de formule $C = 0,332 \cdot B \cdot S$ opgesteld worden. Het getal 0,332 in deze formule is een afgerond getal.

c Toon de juistheid van deze formule aan.



59 2022-II

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 3 + {}^2\log(x + 4)$.

De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A .

a Bereken exact de x -coördinaat van A .

Het functievoorschrift $f(x) = 3 + {}^2\log(x + 4)$ is te herschrijven in de vorm $f(x) = {}^2\log(ax + b)$.

b Bereken exact de waarden van a en b .

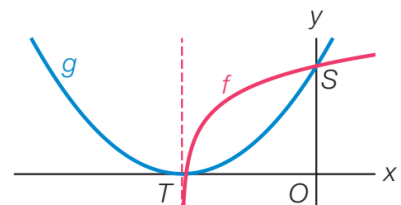
De grafiek van f snijdt de y -as in het punt S .

De grafiek van f heeft een verticale asymptoot. Deze asymptoot snijdt de x -as in het punt T .

De functie g is een kwadratische functie. De grafiek is dus een parabool.

Punt T is de top van de parabool. De parabool gaat bovendien door S . Zie de figuur hiernaast.

c Stel op exacte wijze een functievoorschrift van g op.



60 2022-III

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{9} \cdot (3^{-\frac{1}{2}x} + 27)$. Zie de figuur hiernaast. Op het domein $[a, -4]$ is het bereik van f gelijk aan $[4, 16]$.

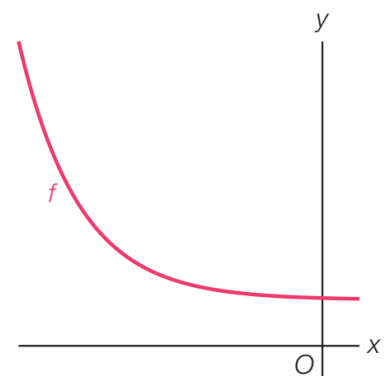
Er geldt, afgerond op twee decimalen, dat $a \approx -8,67$.

a Bereken a exact.

Een ander functievoorschrift voor f is

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x+4} + 3.$$

b Bewijs dit.



Er zijn vele soorten bier, die allemaal anders smaken. De smaak van bier wordt deels bepaald door de mate van bitterheid. Deze bitterheid wordt voornamelijk bepaald door het ingrediënt hop, dat tijdens het brouwen wordt toegevoegd. Hop bevat alfavuren die tijdens het koken worden omgezet in iso-alfavuren. Deze iso-alfavuren bepalen hoe bitter het bier is. Hoe langer het bier gekookt wordt, hoe meer alfavuren omgezet worden in iso-alfavuren. Zo is na 5 minuten koken 4,5% van de alfavuren omgezet en na 45 minuten koken 24,2%.

Voor kooktijden tussen 5 en 45 minuten is er bij benadering een exponentieel verband tussen de kooktijd t in minuten en het percentage alfavuren P dat is omgezet. Uit de gegevens volgt dat $P = 4,5 \cdot 1,043^t$. Hierbij staat $t = 0$ voor het moment dat het bier 5 minuten heeft gekookt. De groeifactor per minuut bij dit exponentiële verband is afgerond op drie decimalen gelijk aan 1,043.

a Bereken deze groeifactor per minuut in vijf decimalen.

Na 45 minuten koken geldt het exponentiële verband $P = 4,5 \cdot 1,043^t$ niet meer. Het percentage alfavuren dat is omgezet neemt vanaf dat moment langzamer toe dan daarvoor. Na 60 minuten koken is meestal het maximumpercentage omgezette alfavuren bereikt. Bij een amateurbrouwer is dit maximumpercentage 27%.

De tijd die nodig is om de eerste helft, dus 13,5% alfavuren, om te zetten is niet gelijk aan de tijdsduur die nodig is om dit percentage daarna nog te verhogen tot 27%.

b Bereken hoeveel minuten verschil er tussen deze twee tijdsduren is. Geef je eindantwoord als geheel getal.

De Europese bitterheidseenheid (EBU, European Bittering Units) is een maat om de bitterheid van bier aan te geven. Voor een bepaalde biersoort kan de bitterheid berekend worden met de formule $B = \frac{4 \cdot P \cdot M}{5 \cdot V}$.

Hierin is:

- B de bitterheid in EBU;
- P het percentage alfavuren dat is omgezet;
- M de massa aan hop in grammen;
- V de hoeveelheid bier die gebrouwen wordt in liters.

Volgens het recept moet de hop in deze biersoort 30 minuten gekookt worden. Een amateurbrouwer wil graag een bitterheid van 30 EBU hebben voor zijn bier en gebruikt hiervoor 100 gram hop.

c Bereken algebraïsch hoeveel liter bier hiermee kan worden gebrouwen. Geef je eindantwoord als geheel getal.

62 2023-I

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2 \cdot 2^{x-3} - 4$.

Het is mogelijk de grafiek van f door middel van transformaties te laten ontstaan uit de grafiek die hoort bij de formule $y = 2^x$. Dit kan op verschillende manieren. Er is een manier die alleen gebruikmaakt van translaties, dus *zonder* vermenigvuldigingen ten opzichte van x -as of y -as.

- a** Bewijs dat er zo'n manier is. In je antwoord moeten de translaties worden genoemd.

Op de grafiek van f ligt een punt met y -coördinaat 10.

- b** Bereken exact de x -coördinaat van dit punt.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = -2^{x-3} + 2$.

Het punt S is het snijpunt van de grafieken van f en g .

- c** Bereken exact de coördinaten van S .

63 2024-I

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2^{x+3}$ en de functie g wordt gegeven door $g(x) = 2^{3+2\sqrt{x}}$.

In de figuur hiernaast zijn de grafieken van f en g weergegeven.

De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B . Punt A ligt op de y -as.

- a** Bereken exact de x -coördinaat van B .

De grafiek van f wordt ten opzichte van de x -as met $-\frac{1}{5}$ vermenigvuldigd.

Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie h .

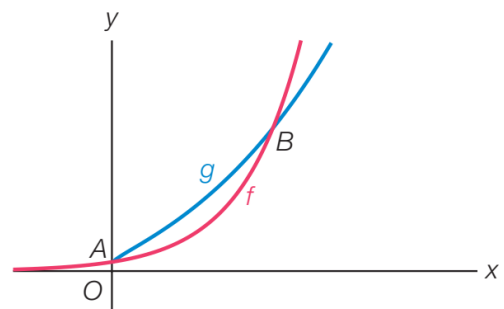
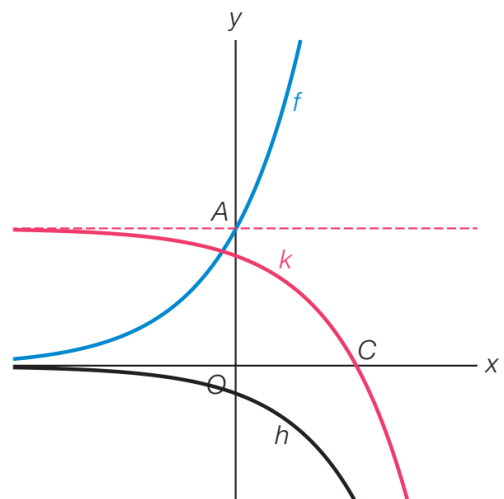
Vervolgens wordt de grafiek van h omhoog geschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie k . De horizontale asymptoot van de grafiek van k gaat door A , het snijpunt van de grafiek van f en de y -as. Zie de figuur hiernaast.

- b** Stel een functievoorschrift op van k .

De grafiek van k snijdt de x -as in het punt C met x -coördinaat $x = -3 + {}^2\log(40)$.

Deze x -coördinaat kan ook geschreven worden in de vorm $x = {}^2\log(p)$ met p een geheel getal.

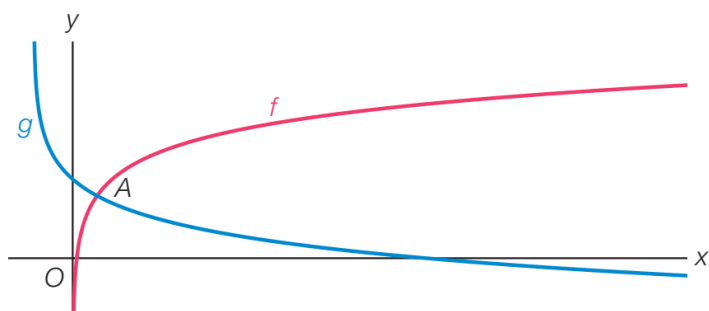
- c** Bereken exact de waarde van p .



Voor $x > 0$ wordt de functie f gegeven door $f(x) = \log(x)$.

Voor $x > -10$ wordt de functie g gegeven door $g(x) = 2 - \log(x + 10)$.

De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt A . Zie de figuur hieronder.

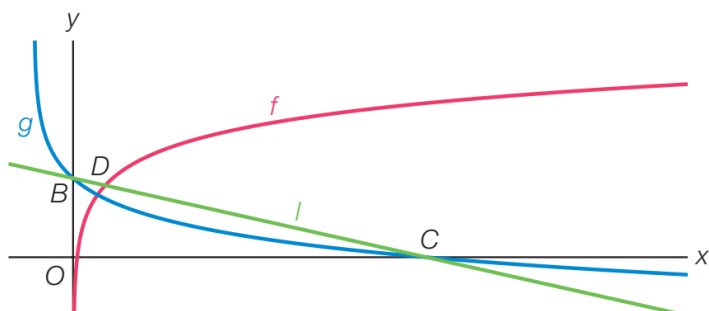


- a** Bereken exact de oplossing van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$.

De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door een serie transformaties. Hiervoor zijn verschillende mogelijkheden.

- b** Geef één zo'n serie transformaties en geef daarbij aan in welke volgorde ze worden toegepast.

De grafiek van g snijdt de y -as in het punt B en snijdt de x -as in het punt C . De lijn l gaat door B en C . Lijn l snijdt de grafiek van f in het punt D . Zie de figuur hieronder.



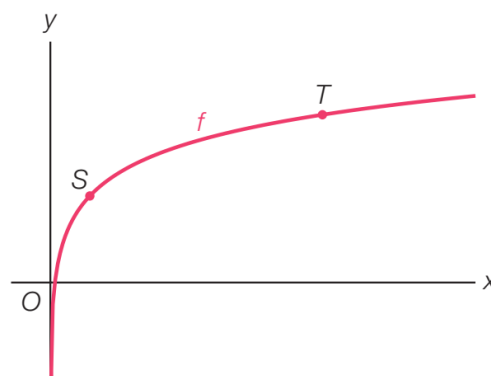
- c** Bereken de coördinaten van D . Geef de coördinaten in je eindantwoord in twee decimalen.

Op de grafiek van f wordt een willekeurig punt S gekozen. Punt T , met een x -coördinaat die 7 keer zo groot is als de x -coördinaat van S , ligt ook op de grafiek van f . In de figuur hiernaast is de grafiek van f weergegeven met een mogelijke positie van S en van T .

In S en T kan met behulp van de grafische rekenmachine de helling worden bepaald.

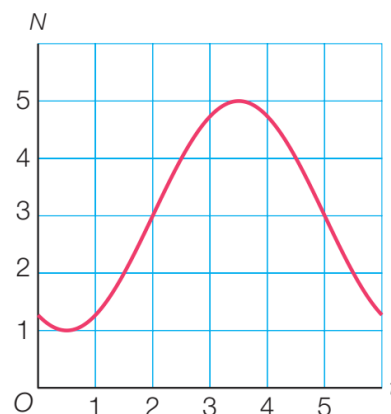
Voor elke keuze van S is de uitkomst van de breuk $\frac{\text{helling in } T}{\text{helling in } S}$ hetzelfde.

- d** Bereken deze uitkomst. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

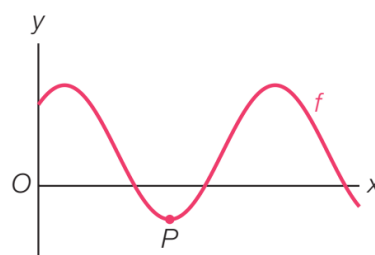


12.5 Goniometrie

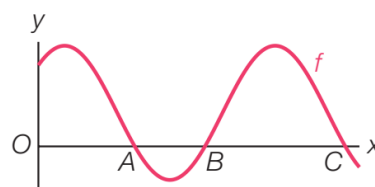
- 65 a** Stel een formule op van de sinusoïde in de figuur hiernaast.



- b** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 3 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) - \cos(2x + \frac{1}{4}\pi)$.
De grafiek van f is een sinusoïde, dus f heeft een functievoorschrift van de vorm $f(x) = a + b \sin(c(x - d))$.
Bereken mogelijke waarden van a , b , c en d . Rond zo nodig af op drie decimalen.
- c** Op het domein $[0, 2]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 3 + 2 \sin(\pi(x - \frac{1}{3}))$.
Een functie g heeft een functievoorschrift van de vorm $g(x) = a + b \cdot \cos(c(x - d))$.
Voor de functie g geldt:
- de periode is 3
 - een hoogste punt van de grafiek van g valt samen met het hoogste punt van de grafiek van f
 - de amplitude van de grafiek van g is vier keer zo groot als de amplitude van de grafiek van f .
- Bereken mogelijke exacte waarden van a , b , c en d .
- d** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 2 \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$ met domein $[0, 3\pi]$.
Het punt P is een top van de grafiek van f . Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact de coördinaten van P .



- e** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 2 \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$ met domein $[0, 3\pi]$.
De punten A , B en C zijn snijpunten van de grafiek van f met de x -as. Zie de figuur hiernaast.
Het lijnstuk BC is a keer zo lang als het lijnstuk AB .
Bereken exact de waarde van a .



66 a Gegeven is de functie $f(x) = \sin(\frac{1}{3}\pi(x - 4))$.

Het punt A in de figuur hiernaast is een snijpunt van de grafiek van f met de x -as en het punt B is een top van de grafiek van f . De lijn k gaat door A en B en maakt een hoek α met de x -as.

Bereken algebraïsch α . Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.

b Op het domein $[0, 2]$ is gegeven de functie $f(x) = 2 \sin(1\frac{1}{2}\pi x)$.

Het punt A is een snijpunt van de grafiek van f en de lijn $y = 1$.

Het punt B is een top van de grafiek van f .

De lijn k gaat door O en A . De lijn l gaat door O en B . Zie de figuur hiernaast.

Bereken algebraïsch $\angle AOB$. Geef je antwoord in graden en rond af op één decimaal.

c Voor $0 \leq x \leq \pi$ is de functie f gegeven door

$$f(x) = \frac{2}{3 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))}.$$

De grafiek van f heeft twee asymptoten. Zie de figuur hiernaast.

Stel op exacte wijze voor beide asymptoten een vergelijking op.

d Voor $x \geq 0$ is gegeven de functie

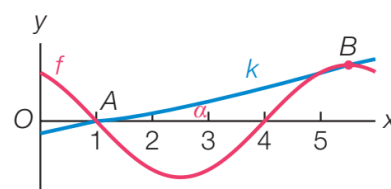
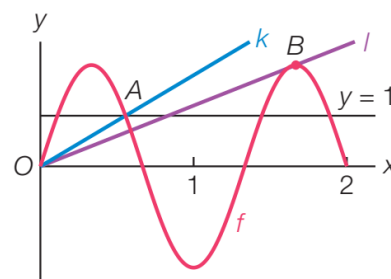
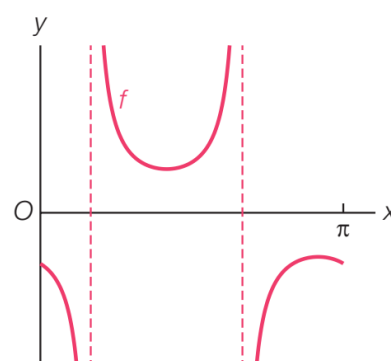
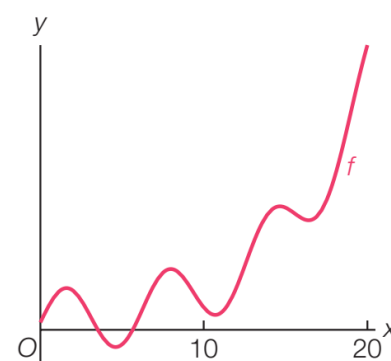
$$f(x) = 2 \cdot 1,2^x + 10 \sin(x).$$

Hiernaast zie je de grafiek van f voor x tussen 0 en 20.

Er is een minimum voor $x \approx 10,7$ en er is een

maximum voor $x \approx 14,7$.

Bereken voor welke x tussen 10,7 en 14,7 de helling maximaal is en bereken deze maximale helling. Licht je werkwijze toe. Rond af op twee decimalen.



Kenmerken van sinusoiden

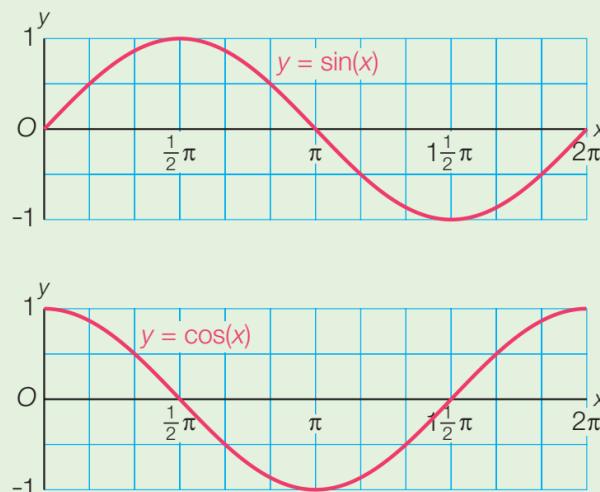
Van de standaardgrafieken

$y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ zijn de kenmerken:

- evenwichtsstand 0
- amplitude 1
- periode 2π
- beginpunt bij sinus $(0, 0)$
beginpunt bij cosinus $(0, 1)$.

De sinusoiden $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ ontstaan via transformaties uit de standaardgrafieken.

We nemen steeds $c > 0$.



De sinusoiden $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$

	$b > 0$	$b < 0$
sin	stijgend door de evenwichtsstand in het punt (d, a)	dalend door de evenwichtsstand in het punt (d, a)
cos	$(d, a + b)$ is een hoogste punt	$(d, a + b)$ is een laagste punt

Uit de formule $y = 4 + 3 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$ volgt:

- evenwichtsstand 4
- amplitude 3
- periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- beginpunt $(\frac{1}{6}\pi, 4)$.

Sinusoiden tekenen

Je moet een sinusoiden kunnen tekenen

I als de formule is gegeven

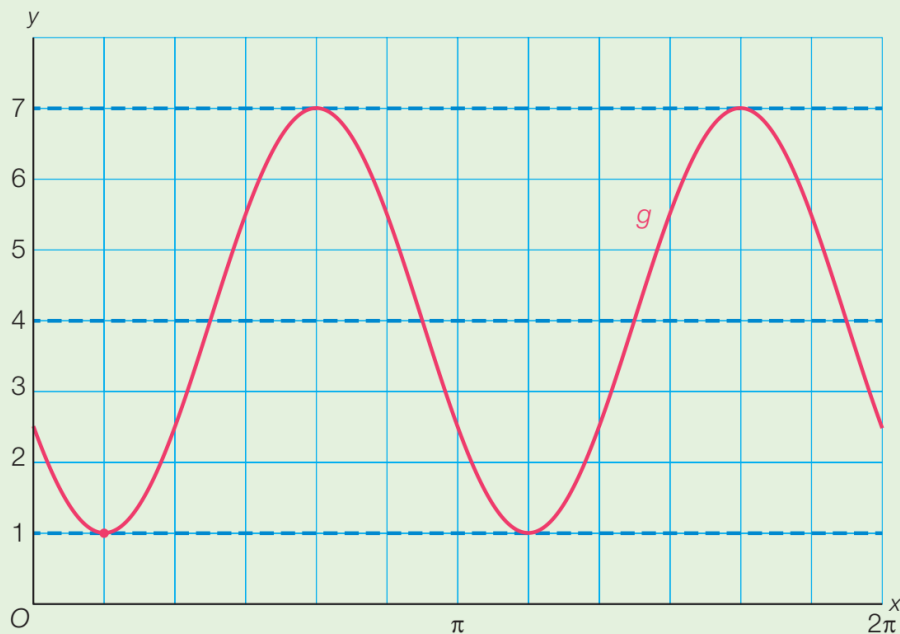
II op grond van een omschrijving in woorden.

Daarbij gebruik je de vier kenmerken van een sinusoiden.

Om de grafiek te tekenen van de functie $g(x) = 4 - 3 \cos(2x - \frac{1}{3}\pi)$ herleid je het functievoorschrift tot $g(x) = 4 - 3 \cos(2(x - \frac{1}{6}\pi))$ en noteer je de vier kenmerken:

- evenwichtsstand 4
- amplitude 3
- periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- beginpunt $(\frac{1}{6}\pi, 1)$ is een laagste punt.

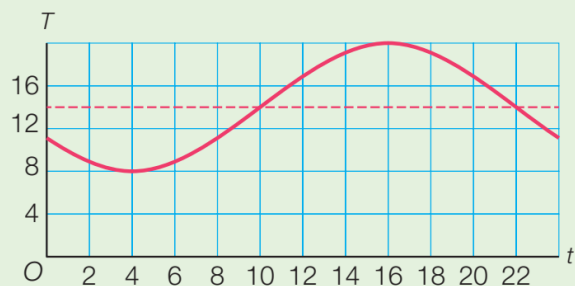
Daarna teken je de grafiek.



Is gegeven dat het temperatuurverloop op een dag wordt beschreven door een sinusoid, dat om 4 uur 's middags de maximale temperatuur van 20°C wordt bereikt en dat de minimale temperatuur 8°C is, dan bedenk je het volgende om de grafiek te tekenen.

- de periode is 24 uur
- de evenwichtsstand is $\frac{20 + 8}{2} = 14^\circ\text{C}$
- het minimum wordt bereikt op $t = 16 - \frac{1}{2} \cdot \text{periode} = 16 - 12 = 4$
- de grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand op $t = 16 - \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 16 - 6 = 10$
- de grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand op $t = 16 + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 16 + 6 = 22$

Zo krijg je de grafiek hiernaast.



Formule opstellen bij sinusöide

Je moet in de volgende gevallen de formule van een sinusöide kunnen opstellen.

- I de grafiek is gegeven
- II er is een omschrijving in woorden gegeven
- III de grafiek is te plotten op de GR

Daarbij gebruik je de vier kenmerken van een sinusöide.

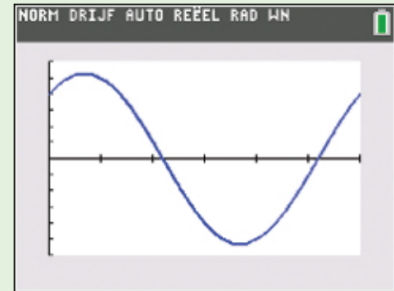
Is gegeven dat het functievoorschrift van de functie $f(x) = 2 \cos(x) + 4 \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$ te schrijven is in de vorm $f(x) = a \cos(x + b)$, dan bereken je als volgt mogelijke waarden van a en b in twee decimalen.

- 1 Voer de formule in op de GR en plot de grafiek. Kies geschikte waarden voor x en y . Zie de figuur hiernaast.
- 2 Gebruik de optie maximum. Je krijgt $x \approx 0,71$ en $y \approx 5,29$.

Dus $a \approx 5,29$ en $b \approx -0,71$.

Kies je $a < 0$ dan gebruik je de optie minimum. Je krijgt $f(x) = -5,29 \cos(x - 3,86)$.

Een mogelijk functievoorschrift van de vorm $f(x) = a \sin(x + b)$ is $f(x) = 5,29 \sin(x - 5,43)$.



De grafiek van f met x tussen 0 en 2π en y tussen -6 en 6 .

Goniometrische vergelijkingen exact oplossen

De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ los je op met behulp van de eenheidscirkel.

$\sin(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$

$\sin(A) = 1$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\sin(A) = -1$ geeft $A = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = 0$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$\cos(A) = 1$ geeft $A = k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = -1$ geeft $A = \pi + k \cdot 2\pi$

De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met

$C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ los je

op door uit de exacte-waardencirkel één oplossing B af te lezen.

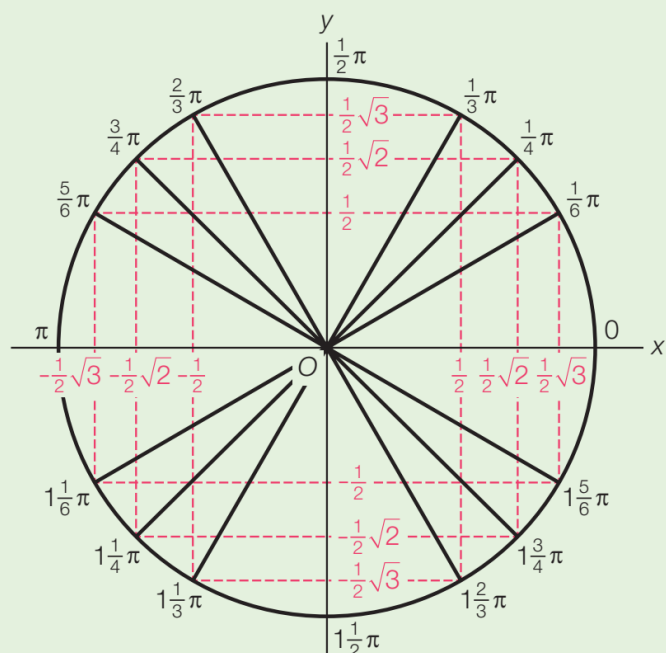
Daarna gebruik je

$\sin(A) = C$ geeft

$A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = C$ geeft

$A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$.



67 2021-I

De functie f wordt gegeven door

$$f(x) = 3 \sin\left(\frac{1}{4}\pi x\right).$$

Het punt A is het eerste snijpunt van de grafiek van f met de positieve x -as. Het punt B is de derde top rechts van de y -as.

De lijn k gaat door A en B . In de figuur hiernaast is de hoek α aangegeven die lijn k met de x -as maakt.

a Bereken algebraïsch hoe groot hoek α is.

Geef je eindantwoord in gehele graden.

In de figuur hiernaast is de grafiek van f getekend en ook de lijn met vergelijking $y = 1\frac{1}{2}$. Deze lijn heeft oneindig veel snijpunten met de grafiek van f . Het eerste snijpunt rechts van de y -as is K , het vierde is L .

In deze figuur is met een stippellijn nog een sinusoïde weergegeven.

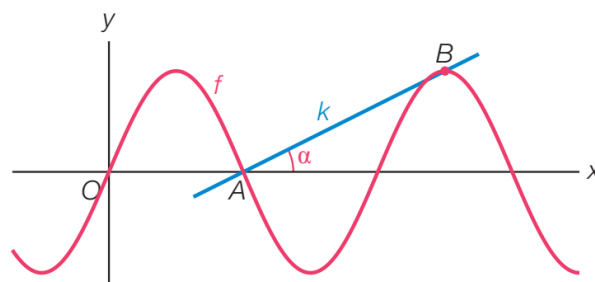
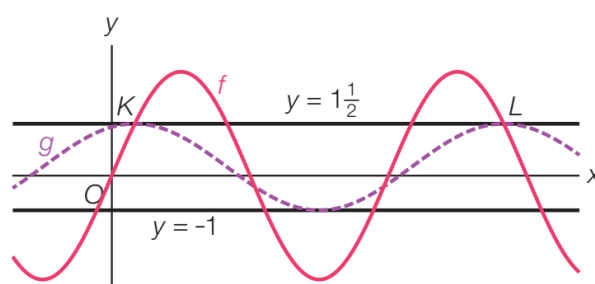
Voor deze sinusoïde geldt:

- De eerste top rechts van de y -as valt samen met K .
- De derde top rechts van de y -as valt samen met L .
- De sinusoïde raakt de lijn met vergelijking $y = -1$.

De functie g die bij de gestippelde grafiek hoort, heeft een functievoorschrift van de vorm $g(x) = a \cdot \cos(b(x - c)) + d$.

Hierin zijn a , b , c en d getallen.

b Bereken exact voor elk van deze vier getallen een mogelijke waarde.



68 2021-II

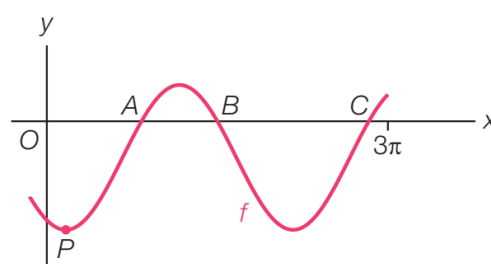
Op het domein $[0, 3\pi]$ is de functie f gegeven door $f(x) = -1 + 2 \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$.

Op het gegeven domein is het punt P de eerste top rechts van de y -as van de grafiek van f . Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de coördinaten van P .

De punten A , B en C zijn de drie snijpunten van de grafiek van f met de x -as. Lijnstuk BC is a keer zo lang als lijnstuk AB .

b Bereken exact de waarde van a .

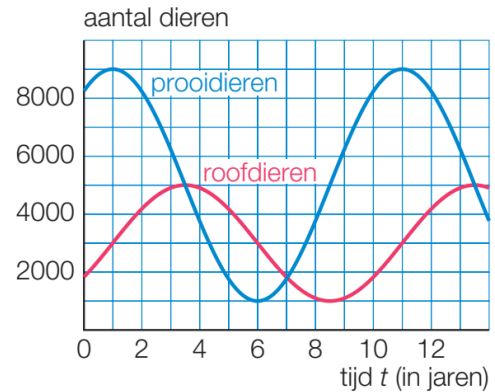


Er bestaan wiskundige modellen die het verband aangeven tussen aantallen prooidieren en roofdieren. Deze modellen worden *prooi-roofdiermodellen* genoemd.

Als er in een gebied veel prooidieren zijn, dan zal na verloop van tijd het aantal roofdieren in dat gebied sterk toenemen, omdat die zich voldoende kunnen voeden met de prooidieren.

Door die toename van het aantal roofdieren zal het aantal prooidieren teruglopen. Hierdoor kunnen de roofdieren minder voedsel vinden en zullen zij in aantal afnemen. Als gevolg daarvan zal het aantal prooidieren weer toenemen. En daarmee begint deze cyclus weer opnieuw. In de figuur hiernaast wordt een model van zo'n cyclus weergegeven.

De grafieken van het aantal roofdieren en het aantal prooidieren zijn in dit model sinusoiden.



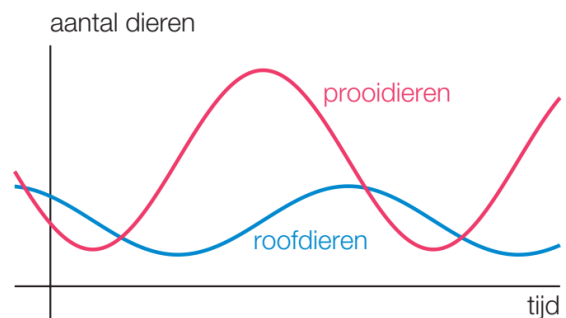
- a** Stel op algebraïsche wijze een functievoorschrift voor r op waarmee je het aantal roofdieren r in de figuur kunt berekenen als functie van de tijd t in jaren.

In de rest van deze opgave gaan we uit van een ander prooi-roofdiermodel:

$$p(t) = 4800 + 3400 \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi(t - 3)\right)$$

$$r(t) = 2500 + 1300 \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi(t + 1)\right)$$

Hierin is p het aantal prooidieren, r het aantal roofdieren en t de tijd in jaren. In de figuur hiernaast zijn de grafieken van p en r geschetst.



In elke periode is er één moment waarop de groeisnelheid van het aantal prooidieren maximaal is. In het bijbehorende punt op de grafiek is de helling dus maximaal.

- b** Bereken deze maximale groeisnelheid. Geef je eindantwoord in gehele honderdtallen prooidieren per jaar.

Iemand zegt: 'Op de momenten dat er 4300 prooidieren zijn, zijn er roofdieren of roofdieren.'

- c** Bereken welke twee getallen op de plaats van de puntjes moeten staan, zodat de uitspraak juist is. Geef deze getallen in gehele honderdtallen.

70 2022-I

Op domein $[0, \infty)$ is gegeven de functie $f(x) = ax^2 - a$ met $a > 0$.

In de figuur hiernaast is in één assenstelsel voor een aantal waarden van a de grafiek van f getekend.

De grafiek van f gaat voor elke waarde van a door het punt $(1, 0)$.

a Bewijs dit.

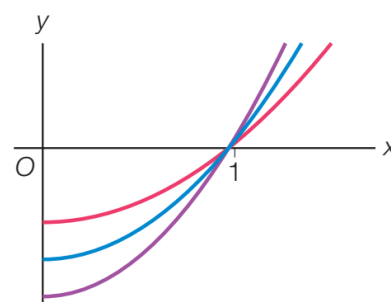
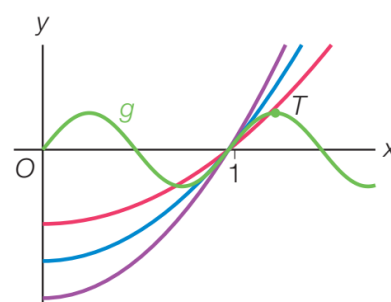
Op hetzelfde domein is de functie g gegeven door $g(x) = \sin(2\pi x)$.

In de figuur hiernaast is de grafiek van g aan de vorige figuur toegevoegd.

Het punt T is de eerste top van de grafiek van g met x -coördinaat groter dan 1.

Er is een waarde van a waarvoor de grafiek van f door T gaat.

b Bereken exact deze waarde van a .



71 2022-II

De functies f en g worden gegeven door $f(x) = 1 + 3 \sin(2x)$ en $g(x) = 1 + 3 \cos(2x)$.

Het punt P is de eerste top van de grafiek van f rechts van de y -as en het punt R is de eerste top van de grafiek van g rechts van de y -as.

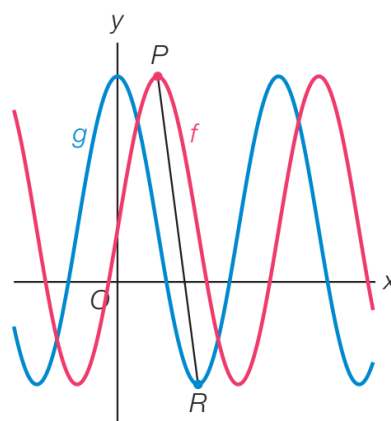
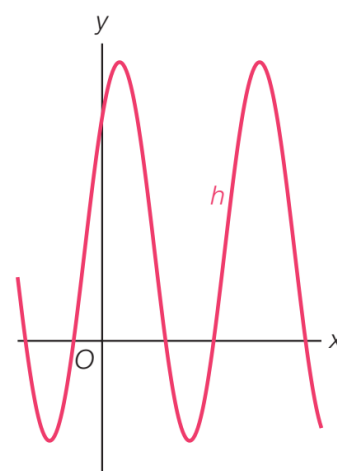
Zie de figuur hiernaast, waarin ook het lijnstuk PR getekend is.

a Bereken algebraïsch de lengte van lijnstuk PR .
Geef je eindantwoord in twee decimalen.

De grafiek van de somfunctie $h(x) = f(x) + g(x)$ blijkt ook een sinusoïde te zijn. Zie de figuur hiernaast.

Het functievoorschrift van h is te schrijven als $h(x) = p + q \cdot \cos(r(x - s))$.

b Bereken mogelijke waarden van p , q , r en s . Geef je eindantwoorden, indien nodig, in twee decimalen.



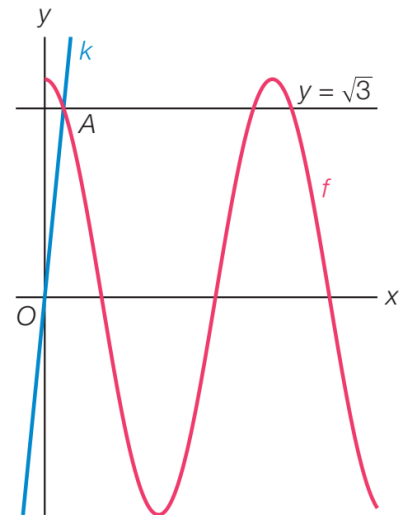
72 2022-III

Op het domein $[0, 3]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2 \cos(3x)$. Het punt A is het meest links gelegen snijpunt van de grafiek van f en de lijn met vergelijking $y = \sqrt{3}$.

De lijn k gaat door O en A . Zie de figuur hiernaast.

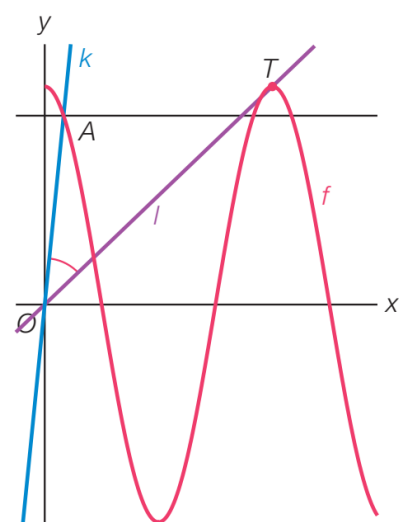
De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{18\sqrt{3}}{\pi}$.

a Bewijs dit.



Het punt T is de meest rechts gelegen top van de grafiek van f . Lijn l gaat door O en T . Zie de figuur hiernaast.

b Bereken algebraïsch $\angle AOT$ in graden. Geef je eindantwoord als geheel getal.



73 2023-I

Voor $0 \leq x \leq \pi$ wordt de functie f gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{4 \cos(2(x - \frac{1}{3}\pi))}.$$

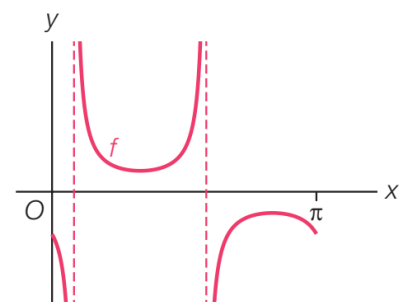
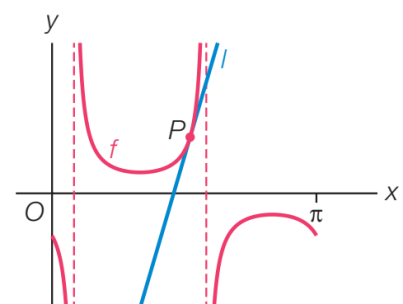
In de figuur hiernaast is de grafiek van f weergegeven.

De grafiek van f heeft twee verticale asymptoten.

a Stel op exacte wijze voor beide asymptoten een vergelijking op.

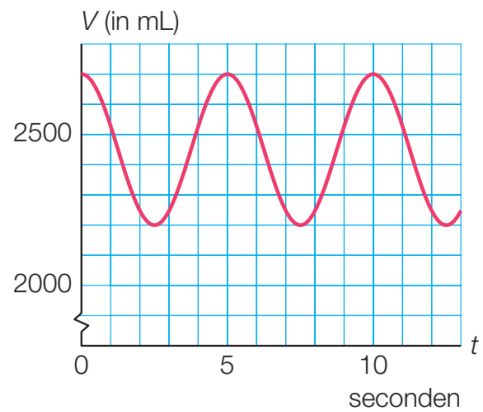
Op de grafiek van f liggen twee punten met y -coördinaat $\frac{2}{3}$. Het rechter punt is P . Lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in P . Zie de figuur hiernaast. De richtingscoëfficiënt van l kan met de grafische rekenmachine worden benaderd.

b Bereken de richtingscoëfficiënt van l . Geef je eindantwoord in één decimaal.



In deze opgave bekijken we het *longvolume*. Dit is de hoeveelheid lucht in de longen van de mens. In de figuur hiernaast is voor een bepaalde persoon in rust weergegeven hoe dit longvolume V afhangt van de tijd. Hierbij is V in mL en t de tijd in seconden. Deze grafiek is te beschrijven met een formule van de vorm $V = p + q \cdot \cos(rt)$.

- a** Bereken de waarden van p , q en r . Geef niet-gehele waarden in je eindantwoord in twee decimalen.



Als een persoon zich inspant, zal hij sneller gaan ademen. Ook ademt hij elke keer méér lucht in dan wanneer hij in rust is.

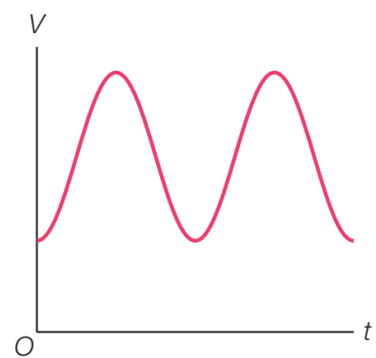
Voor iemand die zich inspant, geldt $V = 2500 + 1200 \cdot \sin(4,19(t - 0,37))$.

Hierin is V het longvolume in mL en t de tijd in seconden. In de figuur hiernaast is een schets van de bijbehorende grafiek te zien.

De hoeveelheid lucht die deze persoon elke keer inademt, is gelijk aan het verschil tussen het maximum en het minimum van V .

Gedurende één minuut ademt deze persoon meerdere keren in. In totaal ademt hij dan bijna 100 liter lucht in.

- b** Bereken hoeveel liter lucht deze persoon per minuut inademt. Geef je eindantwoord als geheel getal.

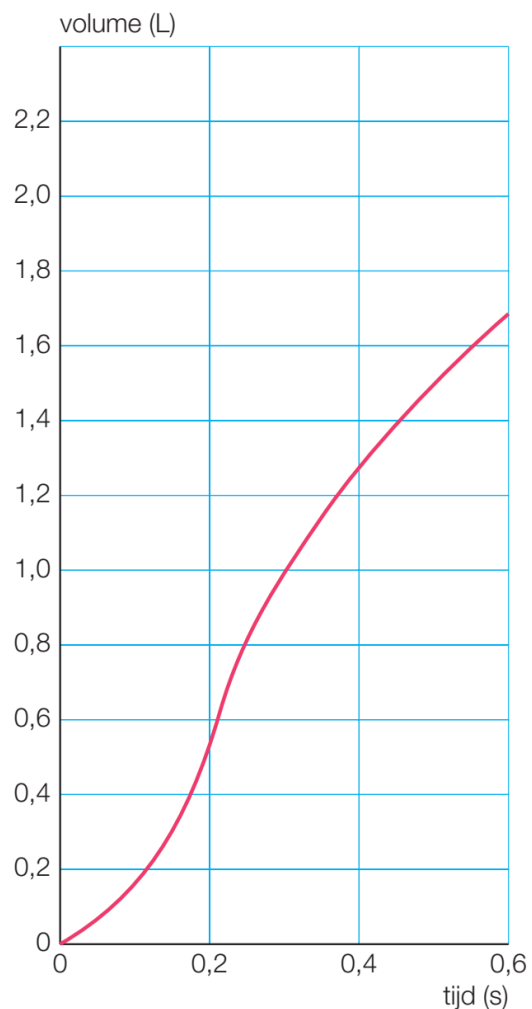


Een test om na te gaan hoe goed iemands longen werken is de zogeheten spirometrietest. De persoon moet tijdens deze test krachtig in een apparaat blazen.

Benny moet zo'n test ondergaan. Het resultaat is te zien in de figuur hiernaast. Op de verticale as staat het volume uitgeademde lucht in liters en op de horizontale as de tijd in seconden.

Er is een moment waarop de snelheid waarmee de persoon uitblaast maximaal is. Deze maximale snelheid, in liters per minuut, wordt de *PEF* (peak expiratory flow) genoemd.

- c** Bepaal met behulp van de figuur hiernaast de PEF van Benny in liters per minuut. Geef je eindantwoord als geheel getal.



75 2022-II

De daglengte is het aantal uren tussen zonsopgang en zonsondergang. De daglengte verandert in de loop van het jaar en varieert ook per plaats op aarde.

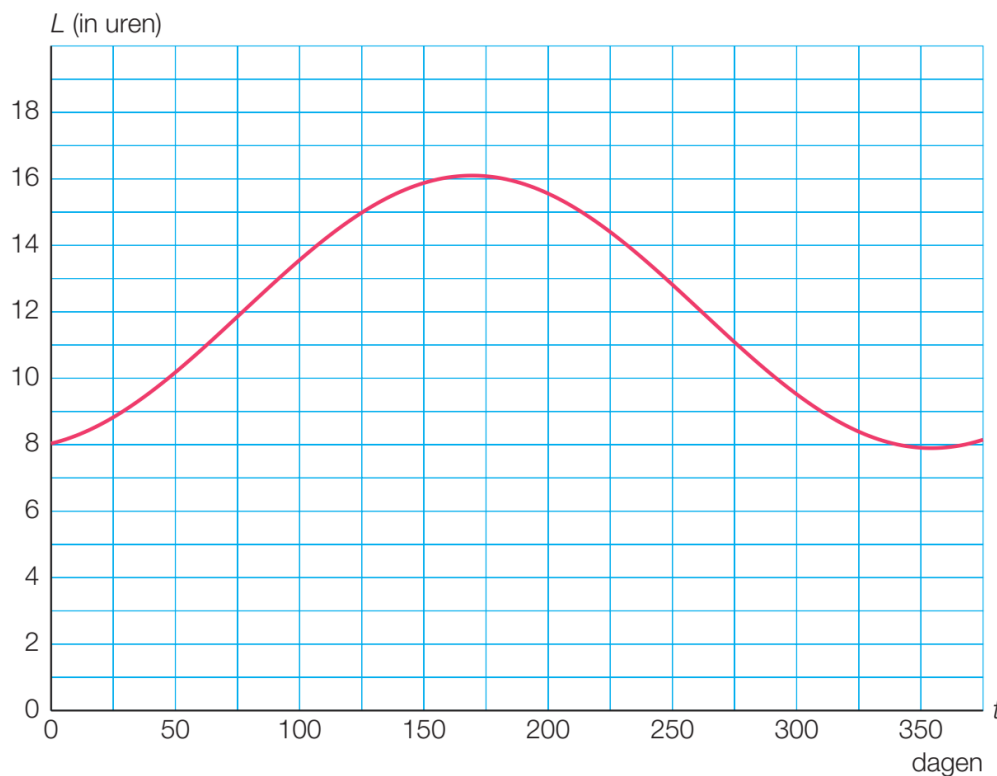
Gedurende een jaar is voor elke dag in Luxemburg de daglengte bepaald.

Bij deze waarnemingen is een zo goed mogelijk passend model opgesteld en vervolgens is daarbij de grafiek getekend. Zie de figuur.

Hierbij is de daglengte L in Luxemburg in uren gegeven als functie van de tijd t in dagen met $t = 0$ op 1 januari.

Het functievoorschrift dat bij dit model hoort, ziet er als volgt uit:

$$L(t) = 12 + 4,1 \cdot \sin(a(t - b)).$$



De periode van het model is 365 dagen en de langste dag is op $t = 168$.

- a** Bepaal de waarden van a en b . Geef de waarde van a in drie decimalen en de waarde van b als geheel getal.

De toename van de daglengte volgens het model is het grootst als de helling van de grafiek van L maximaal is. Met behulp van de figuur hierboven kun je de maximale helling bepalen.

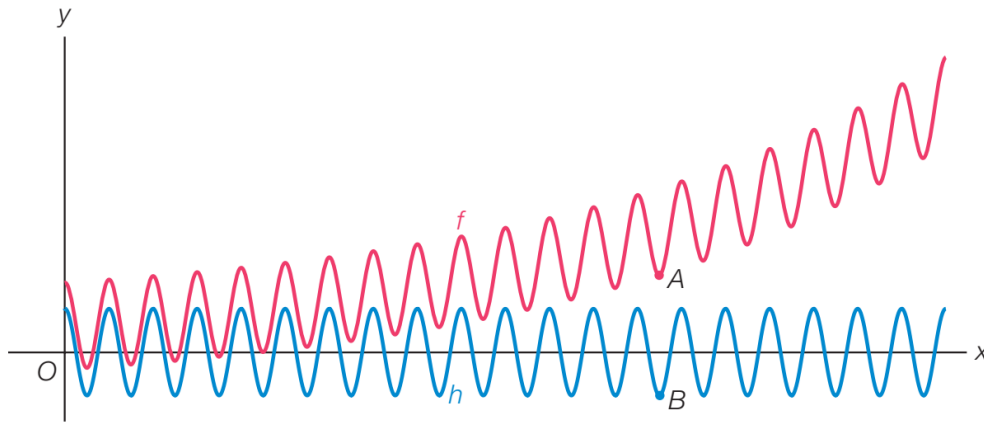
- b** Bepaal met behulp van de figuur de maximale helling van de grafiek van L . Geef je eindantwoord in hele minuten per dag.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 3 \cdot 1,12^x + 5 \sin(2\pi(x + \frac{1}{4}))$.

De functie f is de som van de exponentiële functie g , gegeven door $g(x) = 3 \cdot 1,12^x$, en de periodieke functie h , gegeven door

$$h(x) = 5 \sin(2\pi(x + \frac{1}{4})).$$

In de figuur hieronder zijn voor $x \geq 0$ de grafieken van f en h weergegeven met daarop de punten A en B .



De functie h heeft maxima en minima. Hierdoor heeft de functie f ook maxima en minima.

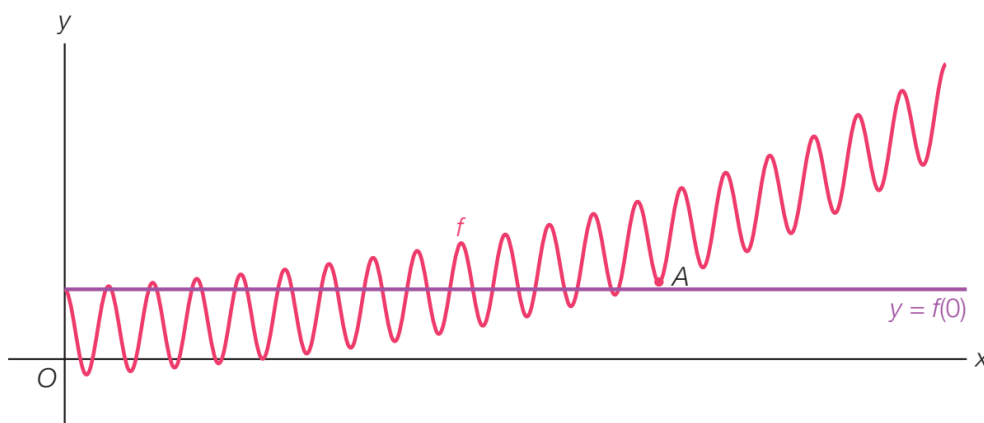
Geteld vanaf de y -as wordt in punt A het 14^e minimum van f bereikt en in punt B het 14^e minimum van h .

De x -coördinaat van A is afgerond op drie decimalen 13,492.

Het lijkt alsof de x -coördinaten van A en B gelijk zijn.

a Onderzoek op algebraïsche wijze of dit zo is.

Het snijpunt van de grafiek van f met de y -as is $(0, f(0))$ en dus is de vergelijking van de horizontale lijn door dit punt $y = f(0)$. Voor $x > 0$ zal de grafiek van f de lijn met vergelijking $y = f(0)$ op meerdere plaatsen snijden. Zie de figuur hieronder.



Vanaf een bepaalde waarde van x snijden de grafiek van f en de lijn elkaar niet meer. Het snijpunt met de grootste x -coördinaat bevindt zich links van punt A .

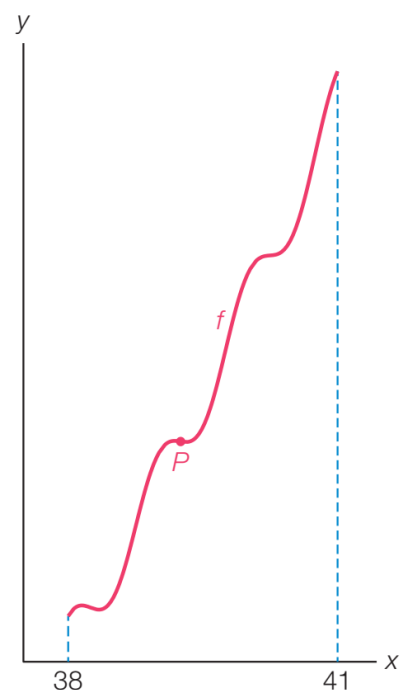
b Bereken de x -coördinaat van dit snijpunt. Geef je antwoord in twee decimalen.

In eerste instantie is de grafiek van f afwisselend dalend en stijgend. Vanaf een bepaalde waarde van x is de grafiek van f alleen nog maar stijgend. De laatste twee dalingen vinden in het interval $[38, 40]$ plaats.

Tijdens elke daling van hoogste naar laagste punt is er een punt op de grafiek van f waar de grafiek het sterkst daalt. In zo'n punt is de helling op dat dalende stuk dus minimaal.

Op het laatste dalende stuk is dat in het punt P . Zie de figuur hiernaast.

- c** Bereken de x -coördinaat van P . Licht je werkwijze toe. Geef je antwoord in één decimaal.



77 2023-II

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 3 + 3 \sin(\frac{1}{2}\pi x)$.

In de figuur is een deel van de grafiek van f weergegeven.

De grafiek van deze functie gaan we in twee delen benaderen, namelijk met een deel van een parabool en met een lijnstuk. Het punt A met x -coördinaat $\frac{1}{3}$ ligt op de grafiek van f . Het punt B met dezelfde y -coördinaat als A ligt ook op de grafiek van f . Het punt T is de top van de grafiek van f . Zie de figuur hiernaast.

Het deel van de sinusoïde tussen de punten A en B is te benaderen door de parabool die door de punten A , T en B gaat. Een vergelijking van deze parabool is

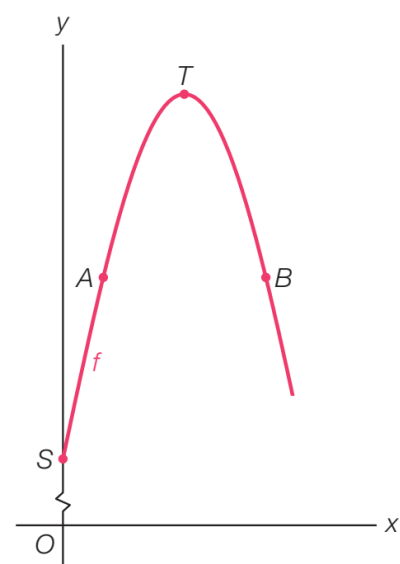
$$y = -3\frac{3}{8}x^2 + 6\frac{3}{4}x + 2\frac{5}{8}.$$

- a** Bewijs dit.

De grafiek van f snijdt de y -as in het punt S . Het deel van de sinusoïde tussen de punten S en A is te benaderen door een lijnstuk met vergelijking $y = 4\frac{1}{2}x + 3$. Dit lijnstuk gaat door de punten S en A .

De benadering van de sinusoïde tussen de punten S en B bestaat nu uit twee delen: het lijnstuk SA en het deel van de parabool door A , T en B . Als er in punt A geen knik is, noemen we dit een goede benadering. Dat houdt in dat in A de helling van het lijnstuk SA gelijk is aan de helling van de parabool.

- b** Onderzoek op exacte wijze of er wel of geen knik is in het punt A .

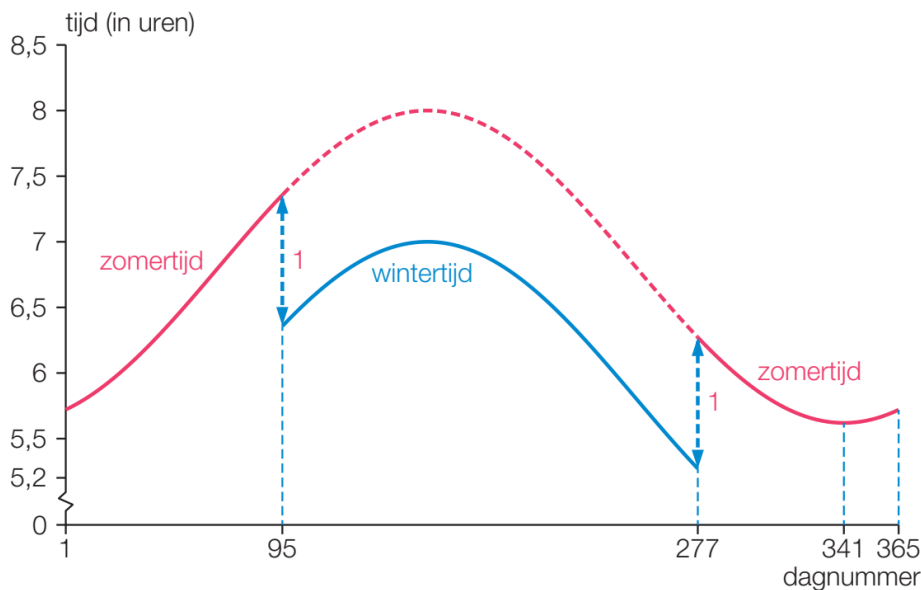


Voor elke dag van het jaar is te bepalen hoe laat de zon opkomt en hoe laat de zon ondergaat.

Op elke dag van het jaar 2015 is volgens de lokale *zomertijd* bepaald hoe laat de zon in de Australische stad Sydney opkomt⁽¹⁾. De 365 meetpunten zijn in een assenstelsel getekend. Ze liggen bij benadering op een sinusoïde. In de figuur hieronder is deze sinusoïde getekend; een deel daarvan is gestippeld.

Onder het gestippelde deel is de grafiek getekend volgens de tijdstippen van zonsopkomst volgens de *wintertijd*. De zonsopkomst volgens de wintertijd is 1 uur eerder dan volgens de zomertijd.

Zonsopkomst in Sydney



Het laagste punt van de grafiek van de *zomertijd* is (341; 5,62).

Dit betekent dus dat de zon op dagnummer 341 volgens de zomertijd het vroegst opkomt. Dat is op tijdstip 5,62 (dus 5 uur en 37 min). Het hoogste punt van het gestippelde deel van de grafiek van de zomertijd bevindt zich op hoogte 8,00.

De grafiek van de *wintertijd* is te benaderen met een formule van de vorm $S(t) = p + q \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - r)\right)$, met $95 \leq t \leq 277$.

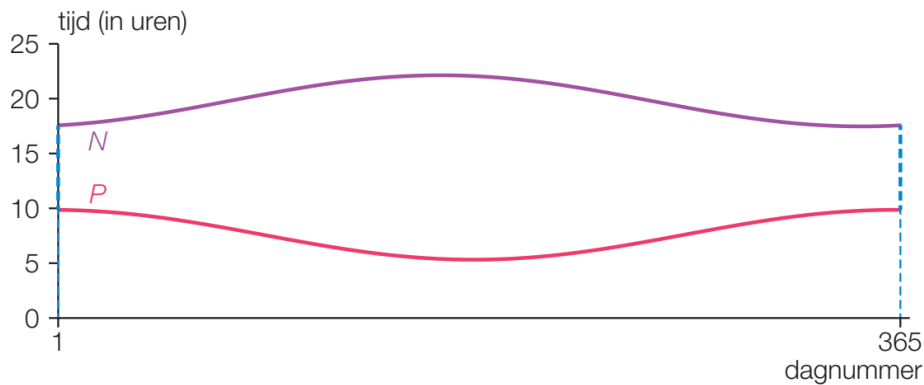
Hierin is S het tijdstip van zonsopkomst en t het dagnummer met $t = 1$ op 1 januari.

Door gebruik te maken van de grafiek van de *zomertijd* kunnen mogelijke waarden voor p , q en r worden berekend.

- a** Bereken mogelijke waarden voor p , q en r van $S(t)$. Geef je eindantwoorden in twee decimalen.

Voor een plaats in Nederland zijn op dezelfde manier als voor Sydney volgens de lokale zomertijd de tijdstippen van zonsopkomst bepaald. Ook zijn de tijdstippen van zonsondergang volgens de zomertijd bepaald. De grafieken waarop de meetpunten liggen, zijn in de figuur hieronder weergegeven.

Zonsopkomst en zonsondergang in Nederland



Bij de grafiek van de zonsopkomst hoort de formule

$$P(t) = 7,57 + 2,27 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 270,9)\right), \text{ met } 1 \leq t \leq 365$$

en bij de grafiek van de zonsondergang hoort de formule

$$N(t) = 19,78 + 2,33 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 74,07)\right), \text{ met } 1 \leq t \leq 365.$$

Hierin is P het tijdstip van zonsopkomst en N het tijdstip van zonsondergang. Opnieuw is t het dagnummer met $t = 1$ op 1 januari. Voor t kunnen dus alleen gehele waarden worden ingevuld.

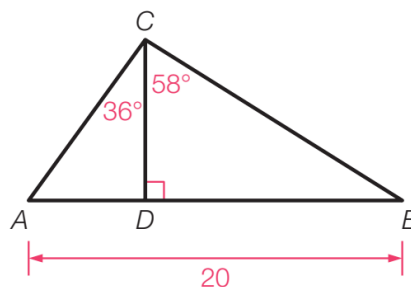
Voor elke dag kan de tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang worden bepaald. De langste dag is de dag waarop deze tijd zo groot mogelijk is.

- b** Bereken de tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang op de langste dag. Geef je eindantwoord in een geheel aantal uren en minuten.

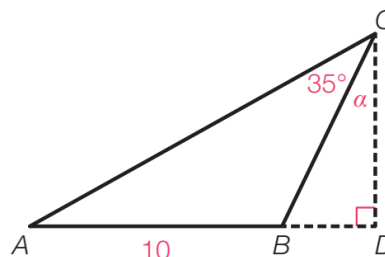
Noot (1) In Sydney is het zomer als het in Nederland winter is. De periode waarin de zomertijd wordt gebruikt, is daarom in Sydney anders dan in Nederland.

12.6 Meetkunde zonder coördinaten

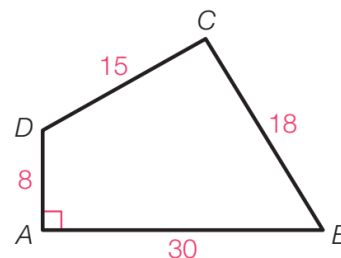
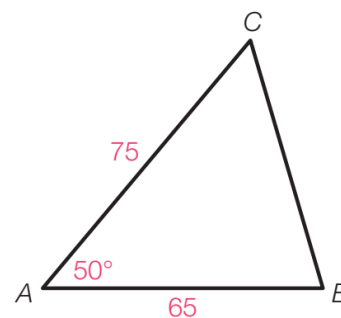
- 79 a** Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken AC . Rond af op twee decimalen.



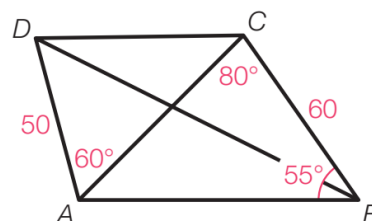
- b** Zie de figuur hiernaast met driehoek ABC . Het punt D is de loodrechte projectie van C op de lijn AB en $\angle BCD = \alpha$.
Toon aan dat $BC \approx 17,43 \cdot \sin(55^\circ - \alpha)$.



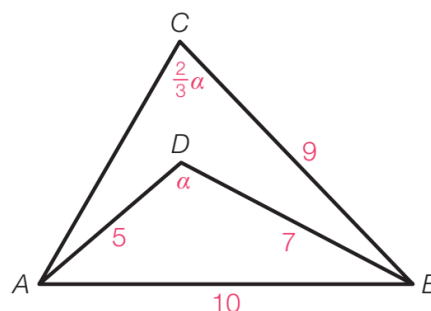
- c** Zie de figuur hiernaast.
Bereken $\angle BCD$. Geef je antwoord in graden en rond af op één decimaal.
- d** Gegeven is driehoek ABC met $AB = 112$, $AC = 37$ en $BC = 90$.
Bereken de oppervlakte van de driehoek. Rond af op gehelen.
- e** Zie de figuur hiernaast.
Bereken $\angle B$ in graden. Rond af op één decimaal.



- f** In de vierhoek $ABCD$ in de figuur hiernaast is $AD = 50$, $BC = 60$, $\angle ABC = 55^\circ$, $\angle ACB = 80^\circ$ en $\angle CAD = 60^\circ$.
Bereken BD . Rond af op gehelen.



- g** Van de driehoeken ABC en ABD in de figuur hiernaast is gegeven: $AB = 10$, $BC = 9$, $AD = 5$ en $BD = 7$. Verder is $\angle ADB = \alpha$ en $\angle ACB = \frac{2}{3}\alpha$.
Bereken AC . Rond af op twee decimalen.



Goniometrie, Pythagoras en oppervlakte

In rechthoekige driehoeken zijn hoeken en zijden te berekenen met goniometrie en met de stelling van Pythagoras.

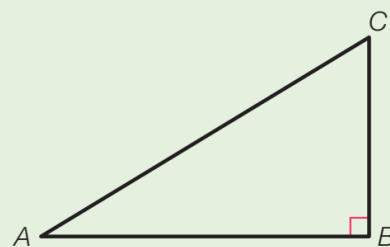
In de figuur hiernaast geldt

$$\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{AB}{AC}$$

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$



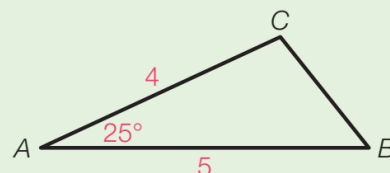
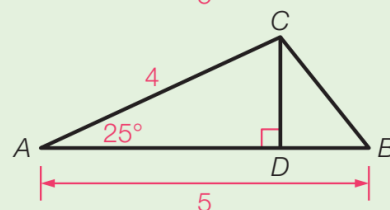
Om de oppervlakte van $\triangle ABC$ in de figuur hiernaast te berekenen gebruik je $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD$. Hierin is CD de hoogte die hoort bij de basis AB .

Zie de figuur hiernaast.

In de rechthoekige driehoek ACD is

$$\sin(25^\circ) = \frac{CD}{AC}, \text{ dus } CD = AC \sin(25^\circ).$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \sin(25^\circ) \approx 4,23$$



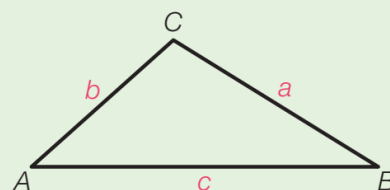
De sinusregel en de cosinusregel

In elke driehoek ABC geldt de sinusregel.

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}$$

Om de sinusregel te kunnen gebruiken, moet in elk geval een zijde met een overstaande hoek zijn gegeven.

In het geval één hoek en twee zijden zijn gegeven, kan het zijn dat er twee driehoeken mogelijk zijn.



In elke driehoek ABC geldt de cosinusregel.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\angle A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\angle B)$$

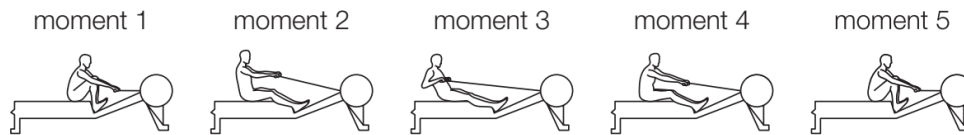
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\angle C)$$

De cosinusregel gebruik je

I voor het berekenen van een zijde van een driehoek als twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven

II voor het berekenen van een hoek van een driehoek als de drie zijden zijn gegeven.

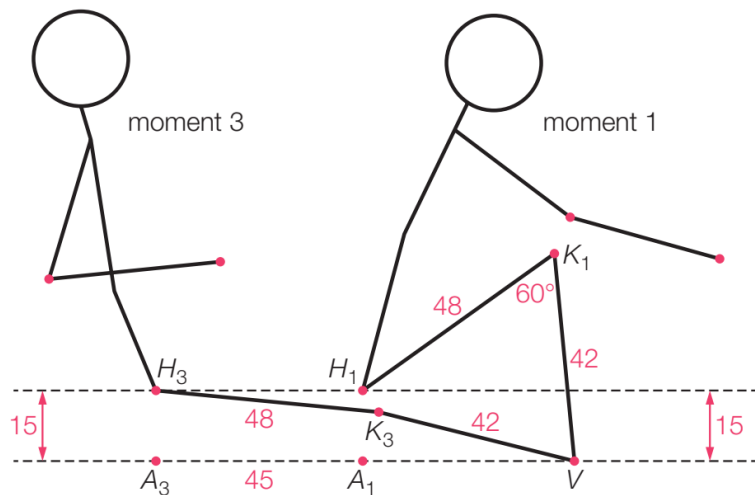
In sportscholen vind je apparaten waarmee je een roeibeweging simuleert. Zo'n apparaat wordt een roei-ergometer genoemd. Zie de foto hiernaast. In de figuur hieronder zie je een serie zijaanzichten van de beweging van een roeier op een roei-ergometer.



Doordat het voetenbord vast zit, blijven de voeten vast op één punt. Wanneer de roeier de benen strekt en weer buigt, beweegt het zitje horizontaal van voor naar achter en weer terug. De roeibeweging begint op moment 1, waarna de roeier zijn benen strekt (momenten 2 en 3). Daarna worden de benen weer gebogen (momenten 4 en 5).

In de figuur hiernaast zie je een model van een roeier op de momenten 1 en 3. Het punt V is de voet, K is de knie en H is de heup (die in dit model samenvalt met het zitje). In dit model geldt:

- De lengte van het bovenbeen is 48 cm.
- De lengte van het onderbeen is 42 cm.
- Het hoogteverschil tussen heup en voet is 15 cm.
- Tussen de momenten 1 en 3 schuift het zitje 45 cm naar achteren.
- De hoek tussen bovenbeen en onderbeen op moment 1 is 60° .
- A is het punt recht onder de heup, op dezelfde hoogte als de voet.
- Met A_1 wordt de positie van A op moment 1 bedoeld, enzovoorts.



Op moment 1 is de afstand tussen de heup en de voet (H_1V) ongeveer 45,3 cm. Deze afstand kan exact berekend worden.

a Bereken exact de afstand in cm tussen de heup en de voet op moment 1.

Ga bij het volgende onderdeel uit van $H_1V = 45,3$.

Op moment 3 is het been bijna gestrekt, dus hoek H_3K_3V is bijna 180° . Om deze hoek te berekenen, is het handig om gebruik te maken van de driehoeken A_1VH_1 en A_3VH_3 .

b Bereken hoek H_3K_3V . Geef je eindantwoord in gehele graden.

Een lichtspot geeft een bundel licht. Zie de foto.

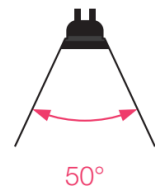
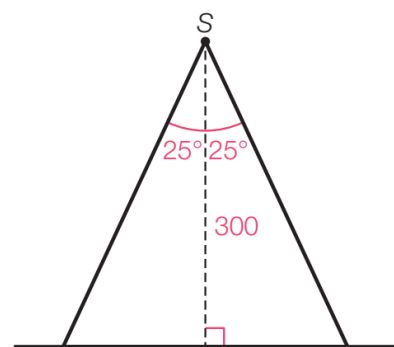
Voor de lichtbundel van een bepaalde lichtspot geldt dat in een zijaanzicht de buitenste lichtstralen een hoek van 50° met elkaar maken. Zie de figuur onder de foto.

Deze lichtspot hangt 300 cm boven een vloer. Als de lichtbundel recht naar beneden wordt gericht, ontstaat op de vloer een cirkelvormige lichtvlek.

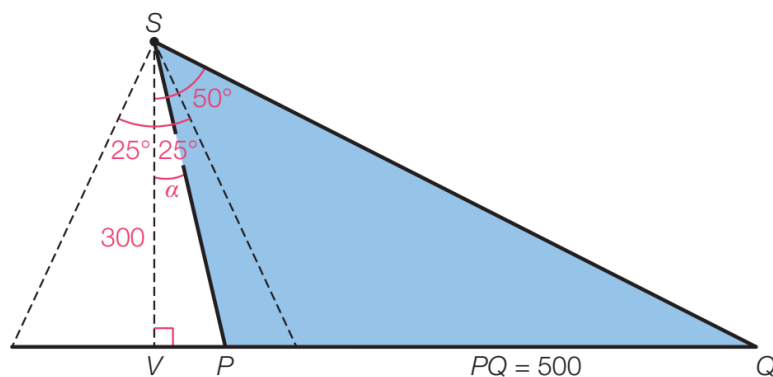
In figuur 1 is een zijaanzicht van deze situatie schematisch weergegeven. Hierin is S de lichtspot.

- a** Bereken de oppervlakte van de cirkelvormige lichtvlek. Geef je eindantwoord in gehele cm^2 .

De lichtspot kan gedraaid worden, zodat de lichtbundel ook op andere delen van de vloer gericht kan worden. Hierbij blijft in een zijaanzicht de hoek tussen de buitenste lichtstralen 50° . Het is mogelijk om de lichtspot zo ver naar rechts te draaien dat er een 500 centimeter lange lichtvlek op de vloer ontstaat. Een zijaanzicht van deze situatie is in figuur 2 schematisch weergegeven.



figuur 1



figuur 2

In deze figuur is PQ de lengte van de lichtvlek. V is het punt op de vloer recht onder S en $\alpha = \angle VSP$. Er geldt dus $\angle PSQ = 50^\circ$.

$\angle SQV$ is uit te drukken in α . Met behulp van de sinusregel in driehoek PSQ kan SP ook uitgedrukt worden in α .

Er geldt $SP \approx 653 \cdot \sin(40^\circ - \alpha)$.

- b** Toon dit aan.

In driehoek VSP geldt $SP = \frac{300}{\cos(\alpha)}$.

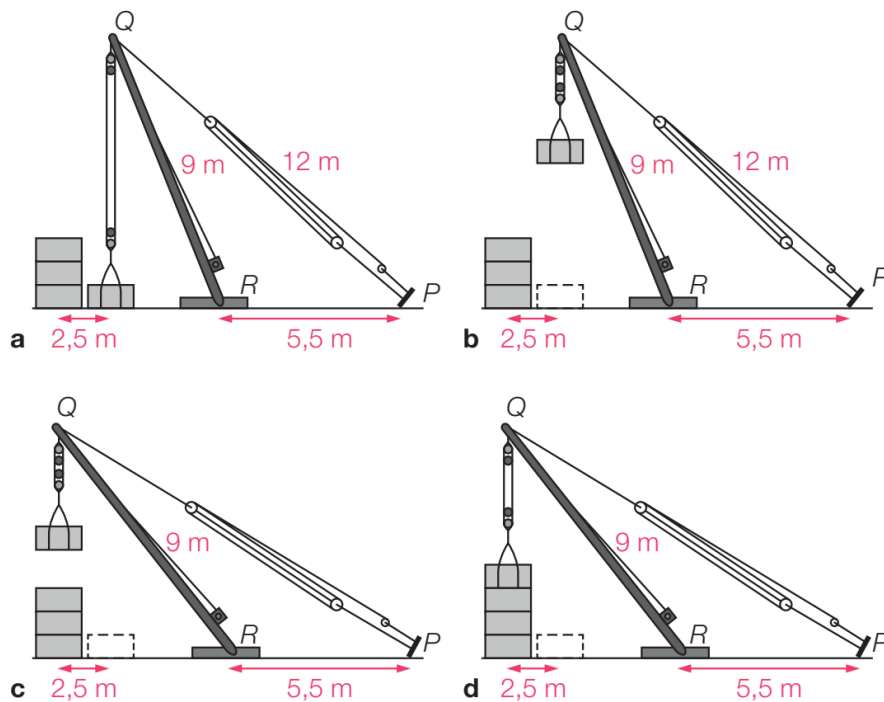
Met behulp van deze twee formules van SP is hoek α te berekenen.

- c** Bereken hoeveel graden de lichtspot vanuit de situatie in figuur 1 naar rechts gedraaid moet worden om de situatie van figuur 2 te krijgen.

Geef je eindantwoord in gehele graden.

In de zesde eeuw voor Christus vonden de Grieken de bouwkraan uit, waarmee je zware voorwerpen kunt optakelen.

In de figuren a tot en met d zie je dat een blok wordt opgetakeld en 2,5 meter verderop op een stapel blokken wordt neergelaten.



De kraan bestaat uit

- een paal RQ van 9 meter, die kan scharnieren om R ;
- een kabel PQ met een lengte die aangepast kan worden;
- een kabel recht omlaag vanuit Q met een lengte die aangepast kan worden.

Verder geldt

- de afstand tussen P en R is 5,5 meter;
- het te verplaatsen blok hangt aan de kabel ergens onder Q .

De verplaatsing gaat als volgt:

- Het blok in figuur a takelt men omhoog door de kabel onder Q korter te maken. Hierdoor ontstaat de situatie van figuur b.
- Vervolgens maakt men kabel PQ langer, waardoor paal RQ linksom scharniert en het blok naar links beweegt. Zo ontstaat de situatie van figuur c.
- Ten slotte laat men het blok recht omlaag zakken door de kabel onder Q weer langer te maken. Zo ontstaat de situatie van figuur d.

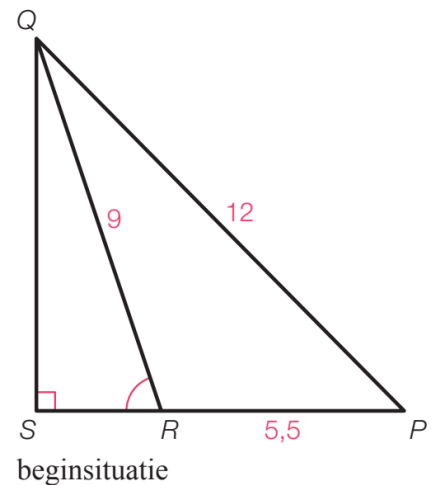
In de figuur hiernaast zie je de situatie van de figuren a en b schematisch weergegeven. Het punt op de grond recht onder punt Q , noemen we S . Ergens op lijnstuk QS bevindt zich het midden van het blok.

Als de bouwkraan zich in de situatie van de figuren a en b bevindt, is de lengte van PQ gelijk aan 12 meter. $\angle SRQ$ is dan afgerond 71 graden. Deze hoek kan nauwkeuriger berekend worden.

- a** Bereken algebraïsch $\angle SRQ$ in graden. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Zoals in de figuren a tot en met d is te zien, moet het blok 2,5 meter naar links worden verplaatst. Kabel PQ moet dus zo veel langer worden dat de afstand tussen R en S met 2,5 meter toeneemt.

- b** Bereken algebraïsch de lengte van kabel PQ in de situatie van de figuren c en d. Geef je eindantwoord in meters in één decimaal.



83 2022-I

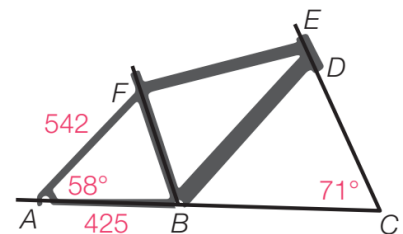
Het comfort en het rijgedrag van een fiets worden in belangrijke mate bepaald door de framegeometrie. Naast de lengte van de verschillende buizen waaruit een frame bestaat, gaat het bij de framegeometrie ook om de hoeken waaronder de verschillende buizen staan.

In de figuur hiernaast zie je een fiets en een tekening van het frame.



De bijbehorende maten zijn:

- de liggende achtersvork: $AB = 425$ mm;
- de staande achtersvork: $AF = 542$ mm;
- de hoek die de liggende en de staande achtersvork met elkaar maken: $\angle BAF = 58^\circ$;
- de hoek die het verlengde van de stuurbuis DE met het verlengde van AB maakt: $\angle BCE = 71^\circ$.



De zitbuis BF en de stuurbuis DE zijn bijna evenwijdig. Als ze evenwijdig zouden zijn dan zou de hoek die BF met de lijn door AB maakt even groot moeten zijn als $\angle BCE$. Deze hoeken verschillen echter.

Bereken dit verschil. Geef je eindantwoord in hele graden.

84 2022-II

In 1723 heeft landmeter M. Walraven onderstaande kaart van het Gooi gemaakt. De hoekpunten van de driehoeken op de kaart zijn vaak de kerktorens van de dorpen. Met behulp van een hoekmeetinstrument heeft Walraven enkele hoeken zeer nauwkeurig opgemeten. Verder zijn twee hemelsbrede afstanden bepaald. Met het netwerk van driehoeken op de kaart kunnen zo de afstanden tussen de kerktorens berekend worden.

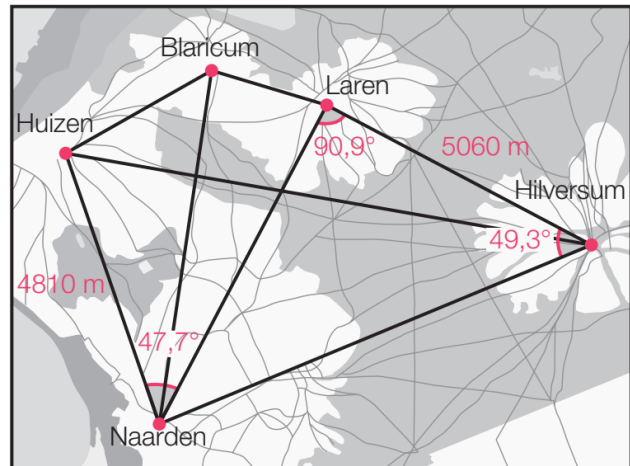
In 1723 zijn de volgende metingen gedaan:

- De afstand tussen (de kerktorens van) Laren en Hilversum is 5060 meter.
- De afstand tussen (de kerktorens van) Naarden en Huizen is 4810 meter.
- De hoek tussen Laren-Hilversum en Laren-Naarden is $90,9^\circ$.
- De hoek tussen Hilversum-Laren en Hilversum-Naarden is $49,3^\circ$.
- De hoek tussen Naarden-Huizen en Naarden-Laren is $47,7^\circ$.

Zie de figuur hiernaast.

Bereken de afstand tussen (de kerktorens van) Huizen en Hilversum.

Geef je eindantwoord in tientallen meters nauwkeurig.

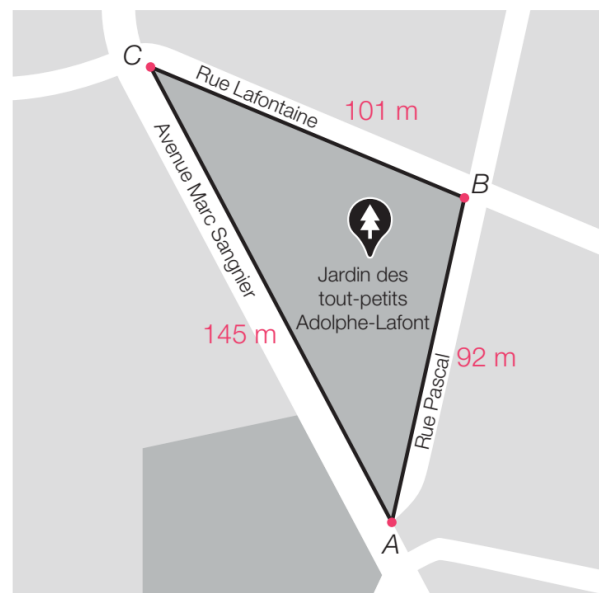


85 2024-I

In de Franse stad Lyon ligt een parkje met de naam ‘Jardin des tout-petits Adolphe-Lafont’. De vorm is nagenoeg driehoekig. We benaderen de vorm van dit parkje met een driehoek ABC . Zie de figuur hiernaast. Er geldt:

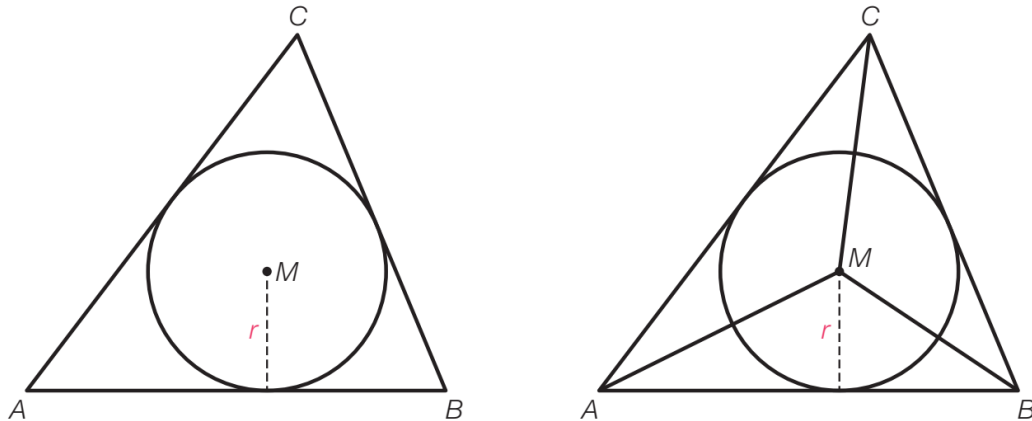
- Zijde AB , langs de Rue Pascal, is 92 m lang.
- Zijde BC , langs de Rue Lafontaine, is 101 m lang.
- Zijde AC , langs de Avenue Marc Sangnier, is 145 m lang.

Bereken algebraïsch de oppervlakte van dit parkje in m^2 . Geef je eindantwoord als geheel getal.



86 2022-III

De ingeschreven cirkel van een driehoek ABC is de cirkel die raakt aan alle zijden van de driehoek. Het punt M is het middelpunt van deze cirkel en r is de straal van deze cirkel. Zie de linker figuur hieronder.



Elke driehoek ABC kan met behulp van punt M in drie aparte driehoeken AMB , BMC en AMC worden verdeeld. Zie de rechter figuur hierboven.

Wanneer we de zijden AB , BC en AC als basis kiezen voor respectievelijk de driehoeken AMB , BMC en AMC , dan is r de bijbehorende hoogte van elk van deze driehoeken. Voor elke driehoek ABC kan de oppervlakte G daarom worden uitgedrukt in de omtrek P van de driehoek en de straal r van de ingeschreven cirkel van de driehoek.

Er geldt $G = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r$.

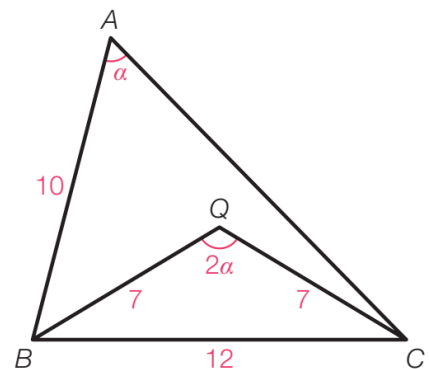
a Bewijs dit.

We bekijken nu een driehoek ABC met zijden $AB = 14$, $BC = 13$ en $AC = 15$.

b Bereken de straal van de ingeschreven cirkel van deze driehoek. Geef je eindantwoord als geheel getal.

87 2023-I

Gegeven zijn de driehoeken ABC en BCQ met $AB = 10$, $BC = 12$, $BQ = CQ = 7$ en $\angle BAC = \alpha$. Bovendien is gegeven $\angle BQC = 2\alpha$. Zie de figuur hiernaast. Bereken AC . Geef je eindantwoord in twee decimalen.



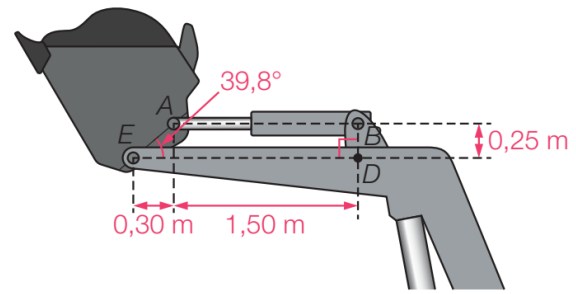
Een shovel is een machine om zand mee te verplaatsen. In de bak van een shovel zit zand. Om het zand te storten, wordt de bak gekanteld.

In de figuur hiernaast staat de beginsituatie. In deze beginsituatie zijn de bovenrand van de bak en de armen AB en ED horizontaal.

Punt B ligt loodrecht boven punt D .

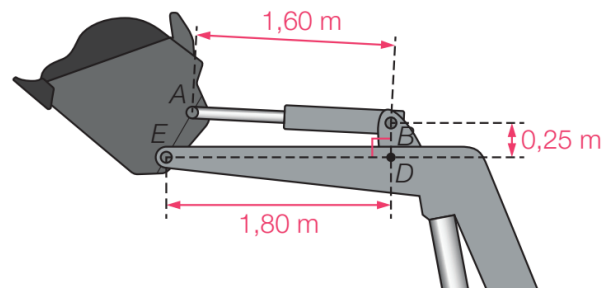
Verder geldt in de beginsituatie:

- $AB = 1,50$ m, $ED = 1,80$ m en $BD = 0,25$ m;
- A bevindt zich $0,30$ m rechts van E en $0,25$ m boven E ;
- $\angle AED = 39,8^\circ$.

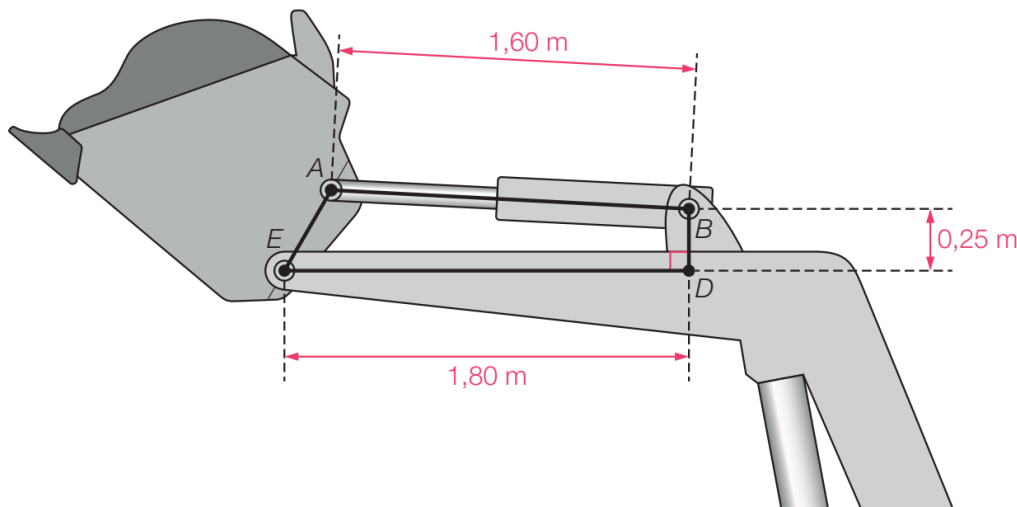


beginsituatie

In de figuur hiernaast staat de situatie als de bak enigszins gekanteld is. Bij het kantelen blijven de punten B , D en E op hun plek. Door de buis bij A uit te schuiven, wordt AB 10 centimeter langer gemaakt. De afstand AE verandert niet. Hierdoor draait punt A om punt E heen. Arm AB loopt dan niet meer horizontaal en $\angle AED$ wordt groter.



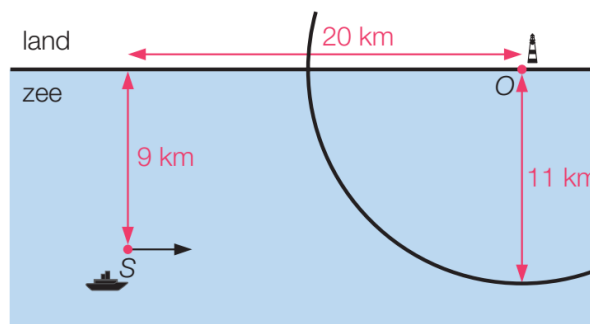
enigszins gekanteld



Hierboven is vierhoek $AEDB$ weergegeven in de enigszins gekantelde situatie.

Bereken hoeveel graden de bak in deze situatie gekanteld is ten opzichte van de beginsituatie. Geef je eindantwoord in hele graden.

In de figuur hiernaast is een rechte kustlijn weergegeven die van west naar oost loopt. Op deze kustlijn staat in punt O een vuurtoren. In punt S bevindt zich een schip op 9 km van de kustlijn. Het schip vaart evenwijdig aan de kustlijn. De horizontale afstand tussen O en S is 20 km. Het licht van de vuurtoren is zichtbaar binnen een straal van 11 km rondom de vuurtoren.



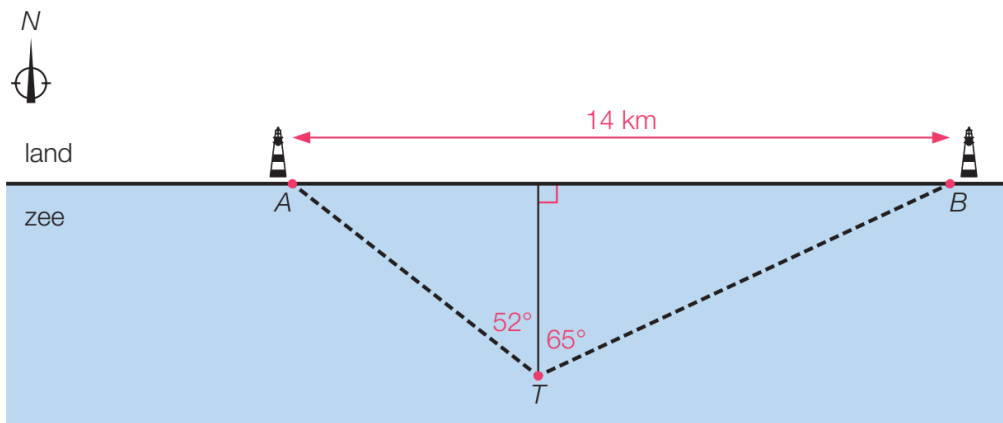
In positie S is het licht van de vuurtoren nog niet zichtbaar voor de kapitein van het schip.

- a** Bereken na hoeveel kilometer varen het licht van de vuurtoren zichtbaar wordt. Geef je eindantwoord als geheel getal.

In een andere situatie staan twee vuurtorens A en B met een onderlinge afstand van 14 km op een rechte kustlijn. De kustlijn loopt van west naar oost.

De afstand van een schip tot de kustlijn wordt tegenwoordig met moderne navigatieapparatuur bepaald. Er is ook een methode zonder deze apparatuur, die in het verleden werd gehanteerd. Hierbij wordt het licht van de twee vuurtorens gebruikt. Vanaf het schip worden de hoeken gemeten waaronder het licht van de vuurtorens ten opzichte van de noordrichting N wordt gezien.

Vanaf een schip op positie T is deze hoek voor vuurtoren A 52° en voor vuurtoren B 65° . Zie de figuur hieronder.



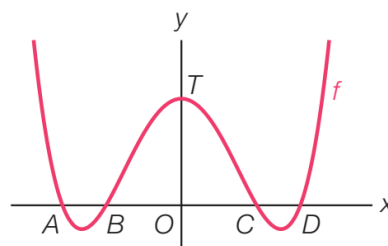
Op basis van de twee gemeten hoeken en de onderlinge afstand van de vuurtorens, kan de afstand van het schip tot de kustlijn worden berekend.

- b** Bereken deze afstand in km. Geef je eindantwoord in één decimaal.

12.7 Meetkunde met coördinaten

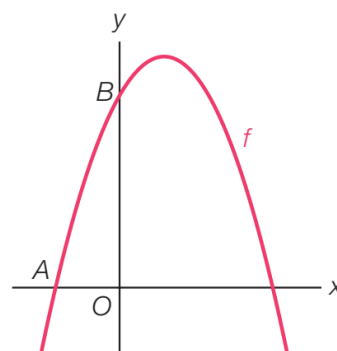
- 90 a** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{5}(x^2 - 2)(x^2 - 5)$.

De grafiek van f snijdt de x -as achtereenvolgens in de punten A , B , C en D . Het punt T is het snijpunt van de grafiek van f met de y -as. Zie de figuur hiernaast. Bereken algebraïsch $\angle ATC$. Geef het antwoord in graden in één decimaal.

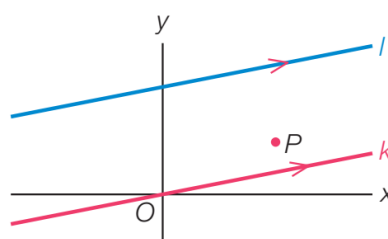


- b** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{3}{4}x + 7\frac{1}{2}$.

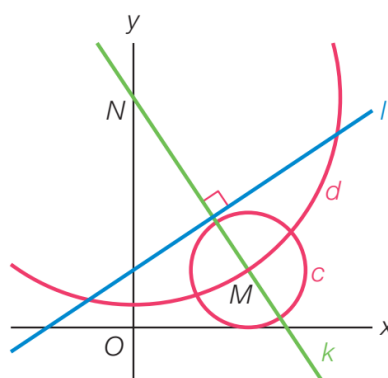
De grafiek van f snijdt de negatieve x -as in het punt A en y -as in het punt B . Zie de figuur hiernaast. De lijn k raakt de grafiek van f in A en de lijn l raakt de grafiek van f in B . Onderzoek op algebraïsche wijze of de hoek tussen k en l kleiner is dan 15° .



- c** Gegeven zijn de evenwijdige lijnen $k: 2x - 5y = 0$ en $l: 2x - 5y = -20$. Het punt P ligt tussen de lijnen en de afstand tussen P en k is 1. Zie de figuur hiernaast. Bereken algebraïsch de afstand tussen P en l . Geef het eindantwoord in twee decimalen.

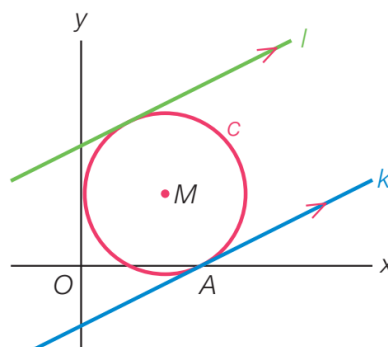


- d** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ met middelpunt M . De lijn k gaat door M , staat loodrecht op de lijn $l: 2x - 3y = -3$ en snijdt de y -as in het punt N . De cirkel d heeft middelpunt N en gaat door M . Stel op exacte wijze een vergelijking op van d .

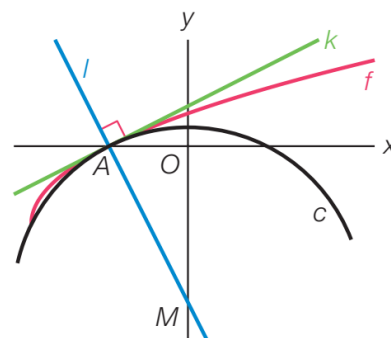
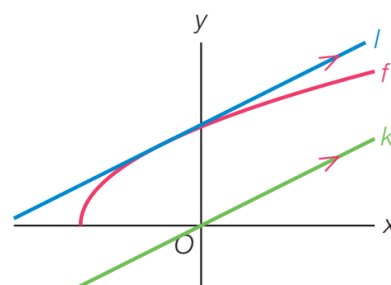
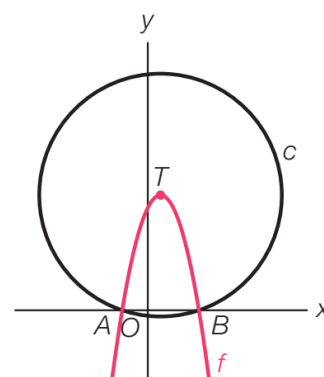


- e** De lijn $k: 2x + 3y = 6$ snijdt de x -as in het punt A en de y -as in het punt B . Het lijnstuk AB is een middellijn van de cirkel c . Bewijs dat c door de oorsprong gaat.

- f** Gegeven zijn de evenwijdige lijnen $k: y = \frac{1}{2}x - 1$ en $l: y = \frac{1}{2}x + 2$. Het snijpunt van k met de x -as is A . De cirkel c raakt k in A en raakt bovendien l . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de coördinaten van het middelpunt M van c .



- a** Gegeven is de functie $f(x) = -2 + \sqrt{2x + 8}$.
 De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A .
 De lijn k raakt de grafiek van f in A .
 De lijn l snijdt k loodrecht in A en snijdt de y -as in het punt M . De cirkel c heeft middelpunt M en raakt k in A . Zie de figuur hiernaast.
 Bewijs dat c door het randpunt van de grafiek van f gaat.
- b** Gegeven zijn de functie $f(x) = \sqrt{2x + 6}$ en de lijn $k: y = \frac{1}{2}x$.
 De lijn l is evenwijdig met k en raakt de grafiek van f .
 Zie de figuur hiernaast.
 Bereken exact de afstand tussen k en l .
- c** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.
 De top van de grafiek van f is het punt T en de grafiek snijdt de x -as in de punten A en B . De cirkel c heeft middelpunt T en gaat door A en B . Zie de figuur hiernaast.
 Bereken exact de y -coördinaten van de snijpunten van c met de y -as.
- d** Bewijs dat de lijn $k: y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3}$ de cirkel $c: x^2 + y^2 = 13$ raakt.
- e** Gegeven zijn de cirkel c met middelpunt $M(\sqrt{13}, 0)$ en straal 2 en de lijn k met vergelijking $y = \frac{2}{3}x$.
 Bewijs dat k de cirkel c raakt.
- f** De cirkel c heeft middelpunt $M(0, 3)$ en straal 1.
 De cirkel d heeft middelpunt $N(4, 0)$ en raakt de lijn $k: y = \frac{1}{2}x$.
 Bereken exact de afstand tussen de twee cirkels.



De hoek tussen twee lijnen

De hoek tussen twee lijnen waarvan de vergelijkingen zijn gegeven, bereken je met behulp van richtingshoeken.

Voor de richtingshoek α van de lijn k geldt $\tan(\alpha) = r_{c_k}$ en $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

Voor de hoek φ tussen twee lijnen met richtingshoeken α en β , waarbij $\alpha > \beta$, geldt

$$\varphi = \alpha - \beta \text{ als } \alpha - \beta \leq 90^\circ$$

$$\varphi = 180^\circ - (\alpha - \beta) \text{ als } \alpha - \beta > 90^\circ.$$

Als voor de lijnen k en l geldt $rc_k \cdot rc_l = -1$, dan staan de lijnen loodrecht op elkaar.

De lijn k : $ax + by = c$ is te schrijven in de vorm $by = -ax + c$ oftewel

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}, \text{ dus } rc_k = -\frac{a}{b}.$$

De lijn l : $bx - ay = d$ is te schrijven in de vorm $-ay = -bx + d$ oftewel

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{d}{a}, \text{ dus } rc_l = \frac{b}{a}.$$

Omdat $rc_k \cdot rc_l = -\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = -1$ geldt dat de lijnen k : $ax + by = c$ en

l : $bx - ay = d$ loodrecht op elkaar staan.

Afstand van punt tot lijn

Voor het berekenen van de afstand van punt A tot lijn k ga je als volgt te werk.

- 1 Stel een vergelijking op van de lijn l door A die loodrecht staat op k .
- 2 Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en l .
- 3 Gebruik $d(A, k) = d(A, B)$.

Voor het berekenen van de afstand tussen de twee punten $A(x_A, y_A)$ en

$B(x_B, y_B)$ gebruik je $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Afstanden bij cirkels

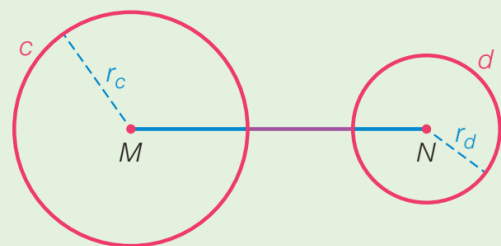
Voor de afstand van een punt A tot een cirkel c met middelpunt M en straal r geldt

$d(A, c) = r - d(M, A)$ als A binnen c ligt

$d(A, c) = d(M, A) - r$ als A buiten c ligt.

Voor de afstand tussen cirkel c met middelpunt M en straal r_c en cirkel d met middelpunt N en straal r_d in de figuur hiernaast geldt

$d(c, d) = d(M, N) - r_c - r_d$.



Cirkelvergelijkingen

De vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r is $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

Door de haakjes weg te werken is de cirkelvergelijking te schrijven in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Is een cirkel gegeven in deze laatste vorm, dan is deze met kwadraatafsplitsen te schrijven in de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ en hieruit zijn de straal en de coördinaten van het middelpunt af te lezen.

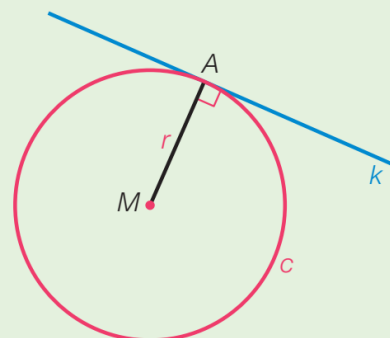
Cirkels en raaklijnen

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt. Dus in de figuur hiernaast staat de lijn k loodrecht op de lijn door M en A .

Ook is $d(M, A) = r$, waarbij r de straal van de cirkel is.

Deze eigenschappen gebruik je bij het oplossen van de volgende raaklijnproblemen.

- I Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven is
 - een cirkel
 - een punt op de cirkel waar k de cirkel raakt.
- II Stel een vergelijking op van de cirkel c als gegeven is
 - het middelpunt van c
 - een lijn waaraan c raakt.



De lijn k raakt de cirkel c in het punt A .

Bij het opstellen van een vergelijking van een raaklijn k aan een cirkel c met middelpunt M in een gegeven punt A op c (raaklijnprobleem I) ga je als volgt te werk.

- 1 Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A .
- 2 Gebruik $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, om de richtingscoëfficiënt rc_k van k te berekenen.
- 3 Gebruik rc_k en de coördinaten van A om een vergelijking van k op te stellen.

92 2021-I

De cirkel c_1 wordt gegeven door $x^2 - 4x + y^2 - 6y = -8$.

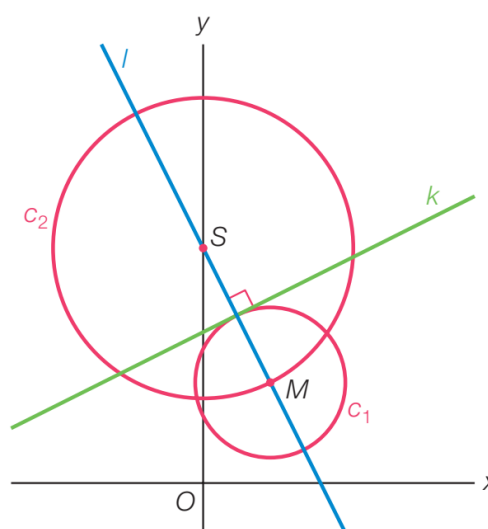
De lijn k wordt gegeven door $y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$.

Lijn k raakt cirkel c_1 .

a Bewijs dit.

Het punt M is het middelpunt van c_1 . De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k . Het punt S is het snijpunt van l met de y -as. De cirkel c_2 is de cirkel door M met middelpunt S . Zie de figuur.

b Stel op exacte wijze een vergelijking op van c_2 .



93 2022-II

De functie f wordt gegeven door

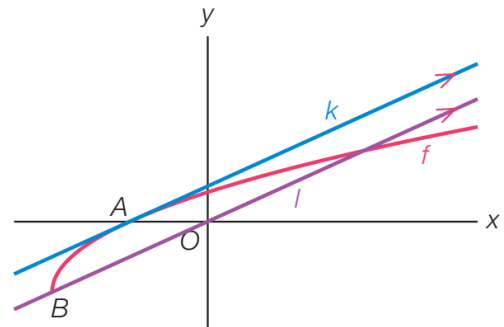
$$f(x) = -2 + \sqrt{8+x}.$$

De lijn $k: y = \frac{1}{4}x + 1$ raakt de grafiek van f in het punt $A(-4, 0)$.

De lijn l gaat door het randpunt B van de grafiek van f en de oorsprong.

De lijnen k en l zijn evenwijdig, zie de figuur.

Bereken exact de afstand tussen k en l .



94 2022-II

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{3x+4}$.

De grafiek van f snijdt de y -as in het punt $A(0, 2)$.

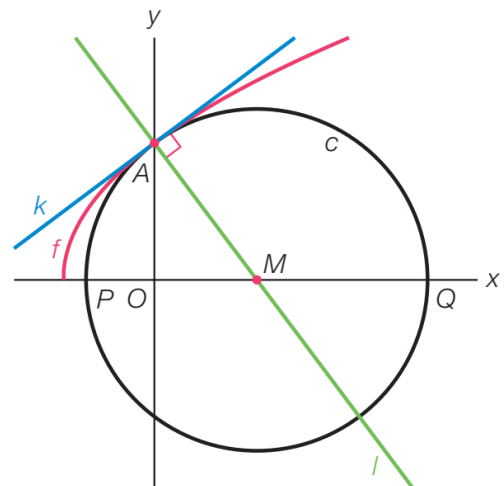
De lijn k is de raaklijn aan de grafiek van f in A .

De lijn l snijdt lijn k loodrecht in A . Het punt M is het snijpunt van l met de x -as.

De cirkel c heeft punt M als middelpunt en raakt de grafiek van f in punt A . Lijn k is dus ook de raaklijn in A aan c .

De punten P en Q zijn de snijpunten van cirkel c met de x -as. Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de x -coördinaten van P en Q .



95 2024-I

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{9}x - \frac{20}{9}$.

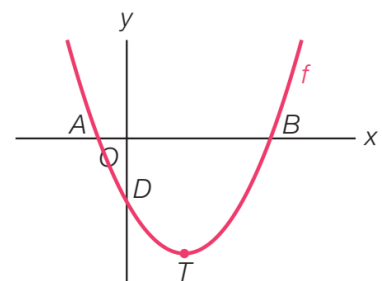
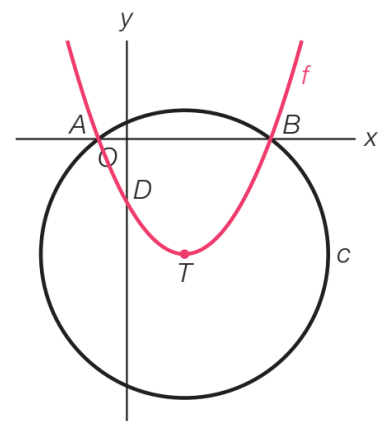
De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A en B en de y -as in punt D . Het punt T is de top van de grafiek van f . Zie de figuur hiernaast.

- a** De raaklijn aan de grafiek van f in punt D maakt een scherpe hoek met de y -as.

Onderzoek op algebraïsche wijze of deze hoek kleiner is dan 30° .

- b** De cirkel c snijdt de x -as in de punten A en B en heeft middelpunt T . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de y -coördinaten van de snijpunten van c met de y -as.



Cirkel c_1 met middelpunt M_1 wordt gegeven door $x^2 + (y - 3)^2 = 9$.

Cirkel c_2 met straal 2 en middelpunt M_2 raakt c_1 .

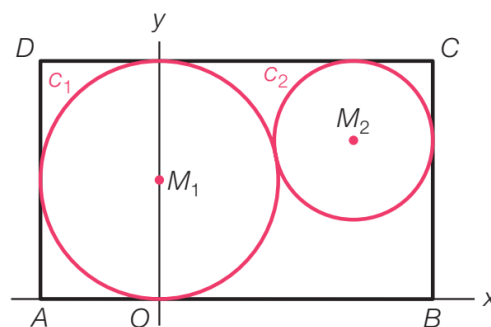
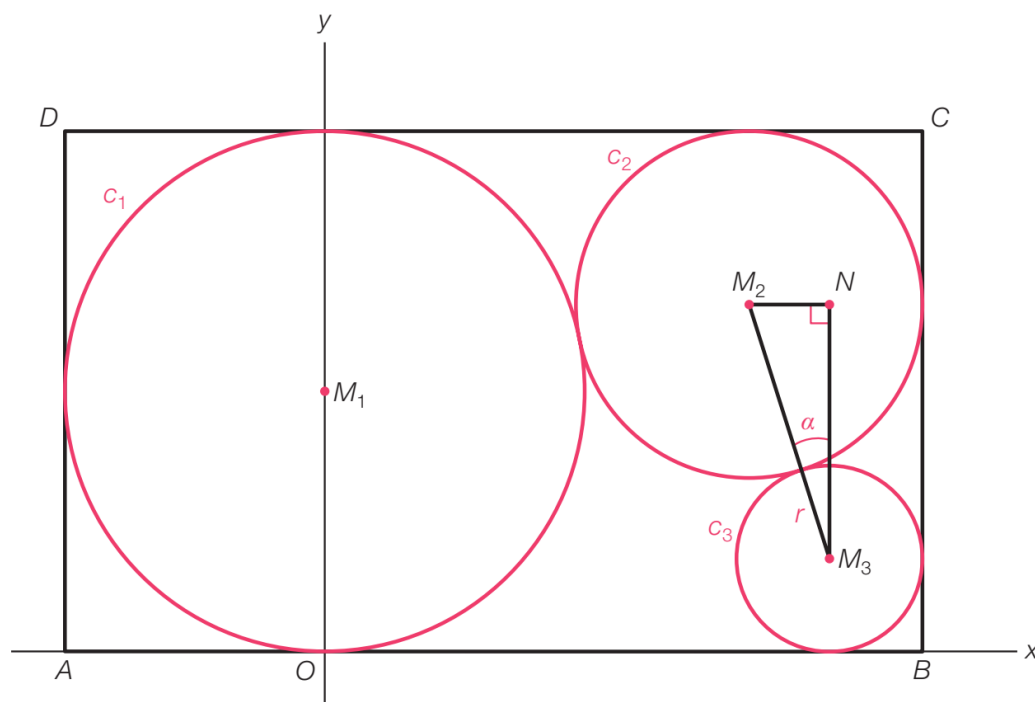
De twee cirkels worden omsloten door een rechthoek $ABCD$ zodanig dat:

- de hoekpunten A en B op de x -as liggen;
- de lengte van zijde AD gelijk is aan de diameter van c_1 ;
- c_1 de zijden AB , CD en AD raakt;
- c_2 de zijden BC en CD raakt.

Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de coördinaten van M_2 .

Verder is gegeven cirkel c_3 met middelpunt M_3 . Deze cirkel raakt c_2 en de zijden AB en BC . Zie de figuur hieronder.



In deze figuur is ook driehoek M_2M_3N aangegeven, waarbij punt N dezelfde x -coördinaat heeft als M_3 en dezelfde y -coördinaat als M_2 . In driehoek M_2M_3N is $\alpha = \angle M_2M_3N$ en is hoek N een rechte hoek.

Er geldt $\sin(\alpha) = \frac{2-r}{r+2}$. Hierin is r de straal van c_3 .

b Bewijs de juistheid van deze formule.

97 2021-III

De cirkel c heeft vergelijking $x^2 + y^2 = 25$.

Het middelpunt van c is O .

Het punt $P(-3, -4)$ ligt op c . De lijn l is de raaklijn aan de cirkel in P .

Lijn l snijdt de x -as in het punt S . Cirkel c snijdt de x -as in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.

Een vergelijking van l is $y = -\frac{3}{4}x - 6\frac{1}{4}$.

- a** Bewijs dat $y = -\frac{3}{4}x - 6\frac{1}{4}$ inderdaad een vergelijking van l is.

Er geldt $AS \cdot BS = PS^2$.

- b** Bewijs dat voor de situatie van de figuur hier rechtsboven inderdaad geldt $AS \cdot BS = PS^2$.

De gelijkheid $AS \cdot BS = PS^2$ geldt algemener, namelijk voor elke situatie waarin geldt:

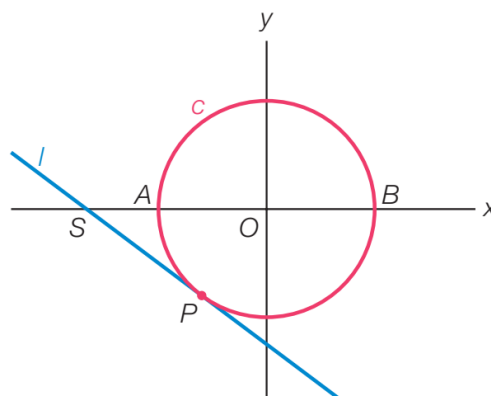
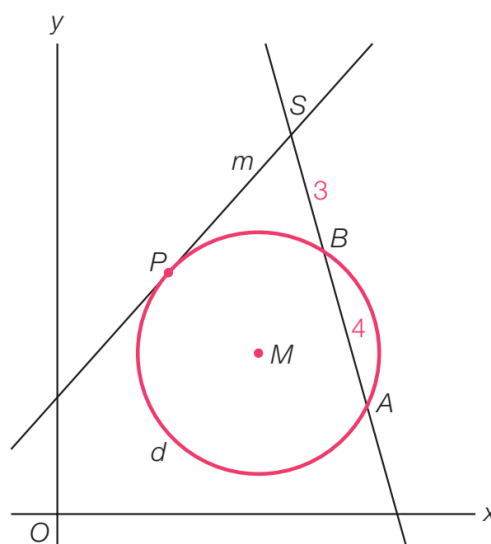
- A , B en P zijn drie willekeurige punten op een cirkel;
- het punt S is het snijpunt van de lijn door A en B met de raaklijn aan de cirkel in P .

In de figuur hiernaast is de cirkel d met middelpunt $M(5, 4)$ en straal 3 weergegeven.

De punten A , B en P zijn drie punten op de cirkel.

De lijn m is de raaklijn aan de cirkel in P . Het punt S is het snijpunt van lijn m en de lijn door A en B . Verder is gegeven dat $AB = 4$ en $BS = 3$.

- c** Bereken exact de afstand tussen punt S en cirkel d .



98 2022-II

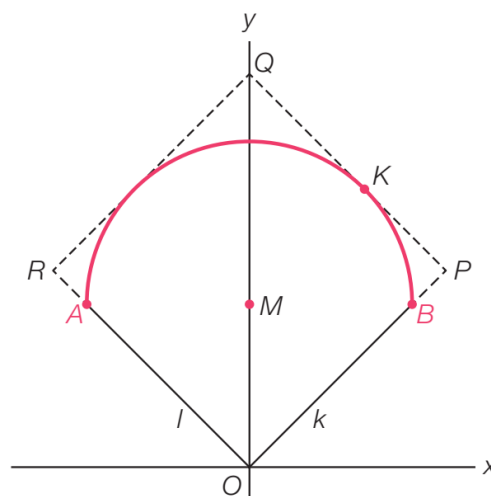
Het punt $A(-3, 3)$ ligt op lijn l met vergelijking $y = -x$ en het punt $B(3, 3)$ ligt op lijn k met vergelijking $y = x$.

Door de punten A en B gaat een halve cirkel met diameter AB en middelpunt M .

Voor vierkant $OPQR$ geldt:

- R ligt op l en P ligt op k .
 - Zijde PQ raakt de halve cirkel in het punt K .
- Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de coördinaten van K .

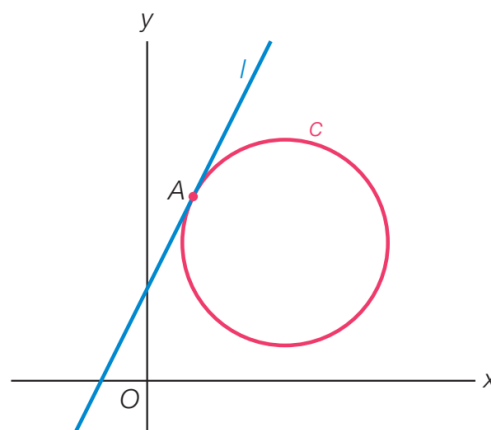


99 2022-I

De cirkel c is gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 = 6x + 6y - 13$.

De lijn l met vergelijking $y = 2x + 2$ raakt de cirkel in het punt A . Zie de figuur hiernaast.

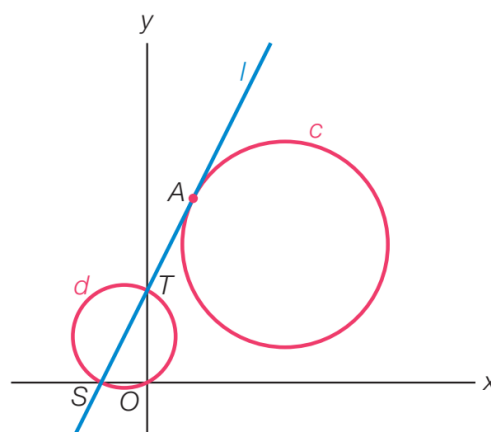
a Bereken exact de coördinaten van A .



l snijdt de x -as in het punt S en de y -as in het punt T .

Cirkel d is de cirkel met middellijn ST . Zie de figuur hiernaast.

b Bewijs dat d door O gaat.



100 2023-I

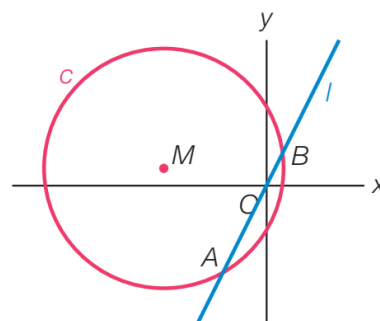
De cirkel c met middelpunt M is gegeven door $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 49$.

Ook is gegeven de lijn l met vergelijking $y = 2x$.

De cirkel en de lijn snijden elkaar in de punten A en B . Punt A ligt onder de x -as, punt B ligt boven de x -as. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken algebraïsch de x -coördinaat van B .

Geef je eindantwoord in twee decimalen.



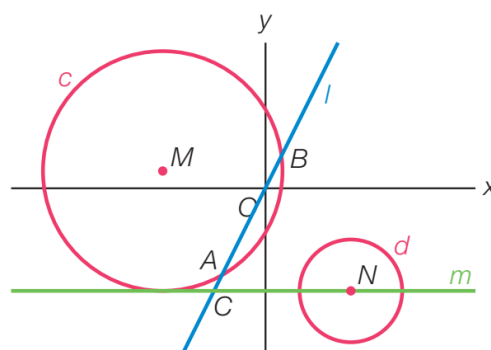
De lijn m is de horizontale raaklijn aan de onderkant van c .

Het punt C is het snijpunt van m en l . Het punt N ligt op m op een afstand 8 rechts van C .

De cirkel d heeft N als middelpunt en straal 3.

Zie de figuur hiernaast.

b Bereken exact de afstand tussen de twee cirkels.



101 2022-III

De functie f is gegeven door

$$f(x) = \frac{-6}{2x-3} + 2.$$

Lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $A(3, 0)$ en lijn m is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $B(0, 4)$. Zie de figuur hiernaast.

De twee raaklijnen hebben allebei richtingscoëfficiënt $\frac{4}{3}$.

a Toon dit met behulp van differentiëren aan.

Cirkel c_1 raakt l in A . Bovendien raakt c_1 aan m .

Punt M_1 is het middelpunt van c_1 . Zie de figuur hiernaast.

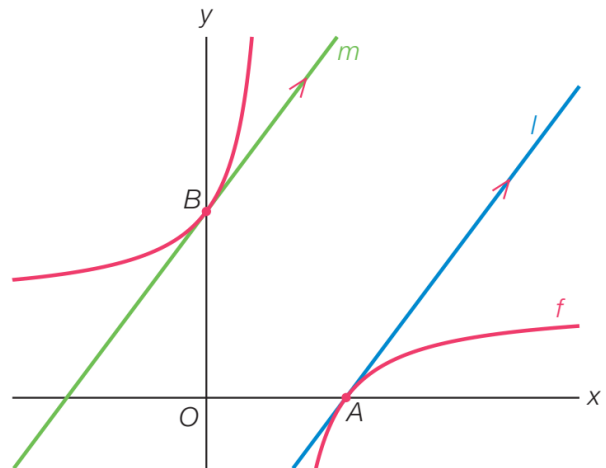
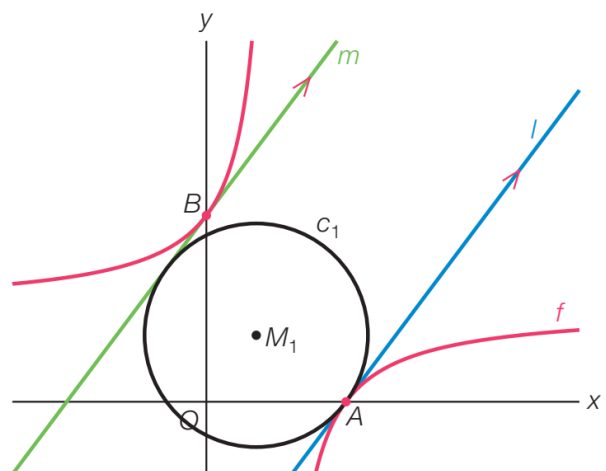
De coördinaten van M_1 zijn $(\frac{27}{25}, \frac{36}{25})$.

b Bewijs dit.

M_1 ligt op de lijn k met vergelijking $y = \frac{4}{3}x$.

Cirkel c_2 is gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$.

c Bewijs dat het middelpunt van c_2 ook op k ligt.



102 2023-II

De lijn l is gegeven door de vergelijking $y = \frac{1}{2}x$ en de lijn m door de vergelijking $y = -\frac{1}{2}x$.

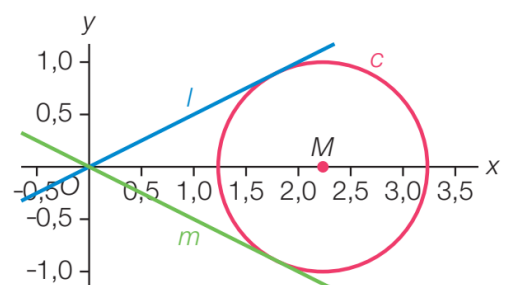
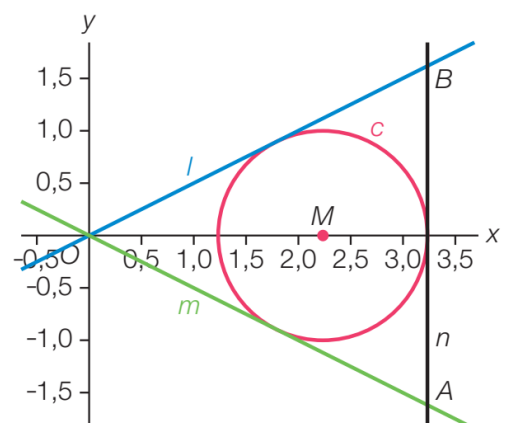
Verder is gegeven de cirkel c met middelpunt $M(\sqrt{5}, 0)$ en straal 1.

Lijn l raakt cirkel c . Zie de figuur hiernaast.

a Bewijs dat lijn l cirkel c raakt.

De verticale lijn n raakt cirkel c aan de rechterkant. Lijn n snijdt lijn m in punt A en lijn l in punt B . Samen met de oorsprong O vormen de punten A en B de driehoek OAB . Cirkel c past precies in deze driehoek. Zie de figuur hiernaast.

b Onderzoek op algebraïsche wijze of de oppervlakte van driehoek OAB meer dan twee keer zo groot is als de oppervlakte van cirkel c .

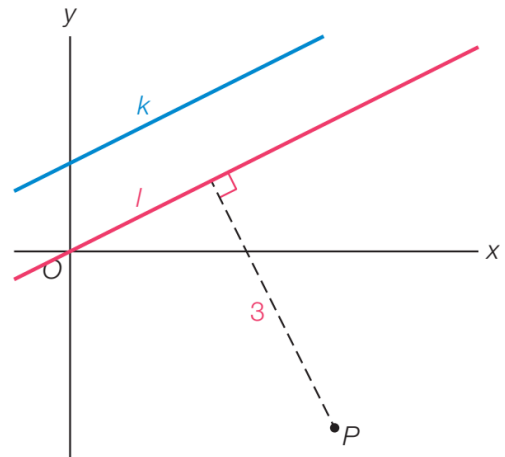


103 2023-II

De lijn l wordt gegeven door de vergelijking $y = \frac{1}{2}x$. De lijn k ontstaat door l één recht omhoog te schuiven. Het punt P bevindt zich onder l .

De afstand tussen l en P is 3. Zie de figuur hiernaast.

Bereken algebraïsch de afstand tussen k en P . Geef je eindantwoord in twee decimalen.

**104 2024-I**

De functie f is gegeven door

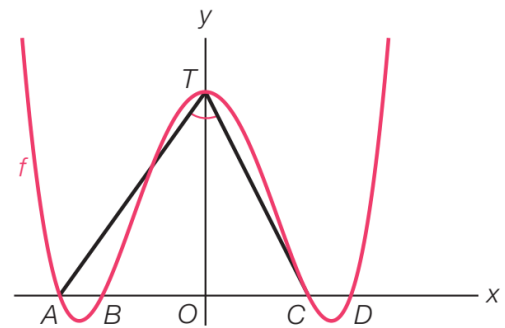
$$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2).$$

De grafiek van f snijdt de x -as achtereenvolgens in de punten A , B , C en D . Het punt T is het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.

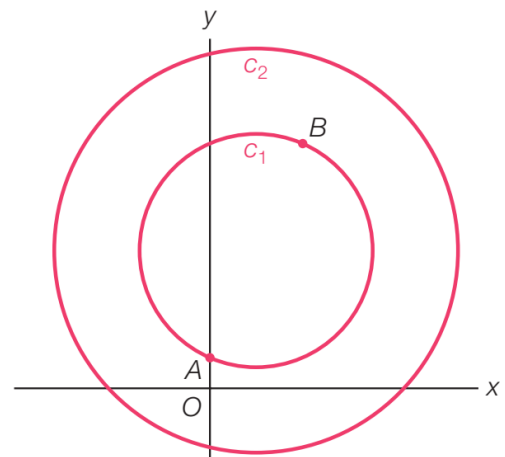
Zie de figuur hiernaast.

In de figuur is $\angle ATC$ aangegeven.

Bereken algebraïsch deze hoek. Geef je eindantwoord in graden in één decimaal.

**105 2024-II**

In de figuur hiernaast zie je de punten $A(0, 1)$ en $B(3, 8)$ en de cirkels c_1 en c_2 . Lijnstuk AB is een middellijn van c_1 . Cirkel c_2 heeft hetzelfde middelpunt als c_1 . De oppervlakte van c_2 is drie keer zo groot als de oppervlakte van c_1 . Stel op exacte wijze een vergelijking op van cirkel c_2 .

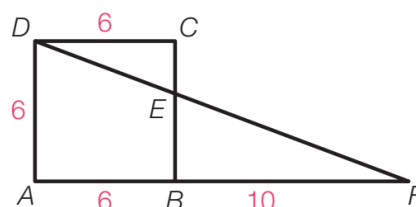


Gemengde opgaven

1 Bereken voor welke a de lijn $k: y = ax + 3$ door het punt $A(4, 9)$ gaat.

2 Noteer met een interval alle getallen die zowel oplossing zijn van $3x + 2 \leq 11$ als van $\frac{1}{2}x - 3 < 1\frac{1}{2}x + 4$.

3 Vierkant $ABCD$ heeft zijden met lengte 6. Het punt F ligt op het verlengde van de zijde AB zo, dat $BF = 10$. De lijn DF snijdt de zijde BC in het punt E . Zie de figuur hiernaast. Bereken BE .



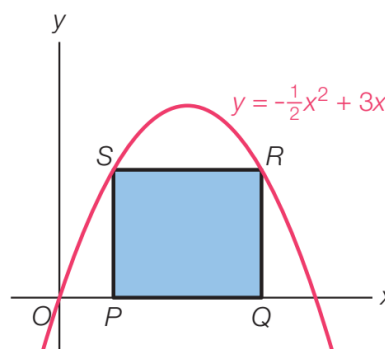
4 Los algebraïsch op $x^3 + 10x = 7x^2$.

5 Bereken welke waarden de functie $f(x) = 4 - 3\sqrt{2x - 5}$ aanneemt voor $x \leq 15$.

6 Bereken de formule van de verticale asymptoot van de grafiek van de functie $f(x) = 2 + {}^3\log(\frac{1}{2}x + 5)$.

7 Bereken exact de oplossingen van $(2x - 1)^2 = 10x + 1$.

8 In de figuur hiernaast is de parabool $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ getekend met de rechthoek $PQRS$, waarbij P en Q op de x -as liggen en R en S op de parabool. Neem $x_P = p$ met $0 < p < 3$. Voor de oppervlakte A van de rechthoek geldt de formule $A = p^3 - 9p^2 + 18p$. Toon aan dat deze formule juist is en bereken exact voor welke p de oppervlakte van de rechthoek maximaal is.



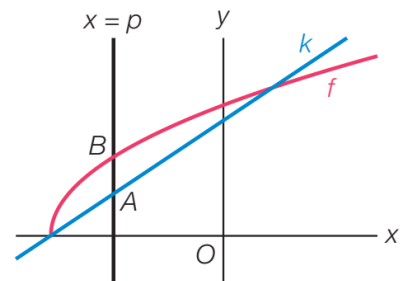
9 Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen $k: y = 3x - 4$ en $l: 4x - 3y = 5$.

10 Van een sinusöide is de formule van de vorm $N = a + b \sin(c(t - d))$. Twee opeenvolgende toppen van de sinusöide zijn $(5, 60)$ en $(15, 110)$. Bereken de waarde van N bij $t = 7$ en de maximale helling van de grafiek. Rond af op twee decimalen.

11 Gegeven is de formule ${}^5\log(N) = {}^2\log(t) + 3,7$. Bereken t voor $N = 9$. Rond af op twee decimalen.

- 12** Stel een vergelijking op van de lijn k die de cirkel c met middelpunt $M(5, 3)$ raakt in het punt $A(9, -5)$.
- 13** Hoe ontstaat de grafiek van de functie $f(x) = 5\sqrt{\frac{1}{2}x + 4} - 5$ uit een standaardgrafiek?
- 14** De lijn $k: y = ax + b$ gaat door het punt $P(-2, 5)$ en is evenwijdig met de lijn $l: y = -\frac{1}{2}x - 1$.
Bereken a en b .
- 15** Gegeven is de formule $y = -0,1x^3 + 0,1x^2 + 3x - 2$.
Teken het toenamediagram op $[-6, 6]$ met $\Delta x = 2$.
- 16** Van driehoek PQR is $\angle P = 62^\circ$, $\angle Q = 48^\circ$ en $PR = 8,4$.
Bereken PQ in één decimaal.
- 17** Los algebraïsch op $x^4 + 5 = 6x^2$.
- 18** Los algebraïsch op $5\sqrt{x} - x = 6$.
- 19** Stel langs algebraïsche weg een vergelijking op van de lijn k die de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 2x^3 + x$ raakt in het punt A met $x_A = -1$.

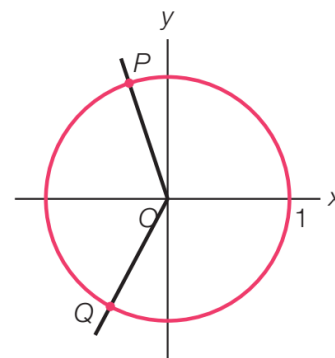
- 20** De lijn $k: y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ en de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{2x + 7}$ hebben twee punten gemeenschappelijk. Zie de figuur hiernaast.
De verticale lijn met vergelijking $x = p$ snijdt k in het punt A en de grafiek van f in het punt B . De y -coördinaat van B is groter dan de y -coördinaat van A . Er is een waarde van p waarvoor de afstand tussen A en B maximaal is.
Bereken met behulp van differentiëren deze waarde van p .



- 21** Onderzoek met een berekening of het punt $A(3, 2)$ op, binnen of buiten de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x + 8y - 8 = 0$ ligt.

- 22** De daglengte, dat is de tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang, varieert in Zuid-Frankrijk tussen 9 uur op 21 december en 15 uur op 21 juni. Deze daglengte kan worden beschreven met het model $L = a + b \sin(c(t - d))$. Hierin is L in uren en t in maanden met $t = 0$ op 21 december.
Bereken mogelijke waarden voor a , b , c en d .
- 23** Herleid de formule $P = 2,3 \cdot \log(Q) - 0,43$ tot de vorm $P = \log(aQ^b)$. Rond a af op twee decimalen.
- 24** Bereken exact de afstand tussen de lijnen $k: y = -3x + 4$ en $l: y = -3x - 6$.
- 25** De grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(x - 2) + 3$ wordt met a vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as en vervolgens b omhoog geschoven. De beeldgrafiek heeft de lijn $x = 4$ als asymptoot en gaat door het punt $A(12, 2)$.
Bereken exact a en b .
- 26** De lijn k gaat door de punten $A(1, 3)$ en $B(6, 13)$ en de lijn l gaat door de punten $C(4, 1)$ en $D(6, -3)$.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van k en l .
- 27** Van een grafiek is bekend dat het differentiequotiënt op $[3, 5]$ gelijk is aan 4 en het differentiequotiënt op $[3, 10]$ gelijk is aan -2 .
Bereken het differentiequotiënt op $[5, 10]$.
- 28** Van driehoek DEF is $\angle D = 100^\circ$, $\angle E = 35^\circ$ en $EF = 10,2$.
Bereken in één decimaal de omtrek van driehoek DEF .
- 29** Los algebraïsch op $\frac{1}{8}(4x - 5)^2 < 2$.
- 30** Hoe ontstaat de grafiek van de functie $f(x) = (\frac{1}{4})^{x+2} - 3$ uit een standaardgrafiek?
- 31** In de punten A en B van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 6.
Bereken exact de coördinaten van A en B .
- 32** Bereken voor welke a en b de lijnen $k: 2x + ay = 8$ en $l: x - 2y = b$ samenvallen.

- 33** In de figuur hiernaast is $y_P = 0,95$ en $x_Q = -0,47$.
Bereken $\angle POQ$ in radialen. Rond af op twee decimalen.



- 34** Een hoeveelheid neemt per jaar met 25% toe.
Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per kwartaal toe?
- 35** Herleid de formule $N = 5 + \frac{1}{2}\log(16x^3)$ tot de vorm $N = p + q \cdot \frac{1}{2}\log(x)$.
- 36** Bereken exact de afstand van het middelpunt M van de cirkel $c: x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$ tot de lijn $k: 3x + 2y = 4$.
- 37** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \frac{a}{x^2}$ en $h(x) = g(f(x))$.
De grafiek van h gaat door het punt $A(3, 1)$.
Bereken exact de waarde van a .
- 38** Maak y vrij bij $6x - 4y = 5$.
- 39** Gegeven is de functie $f(x) = -0,1x^3 + 0,1x^2 + 3x - 2$.
Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-2, 4]$.
- 40** Van driehoek ABC is $AB = 4$, $AC = 3$ en $BC = 6$.
Bereken $\angle A$.
- 41** Bereken van de functie $f(x) = -0,2x^3 + 0,3x^2 + 2x - 2$ de nulpunten in twee decimalen.
- 42** Welke waarden neemt de functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 5$ aan voor $x \geq 1$?
- 43** Bereken exact de extreme waarden van de functie $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 30x + 10$.
- 44** Bereken in graden in één decimaal de hoek tussen de lijnen $k: 2x + y = 3$ en $l: 3x - 2y = 5$.
- 45** Geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt van de grafiek van de functie $f(x) = 0,4 + 2,3 \sin(4x + 2,4)$.

- 46** Een hoeveelheid neemt per week met 28% af.
Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per dag af?
- 47** Gegeven zijn de formules en $G = A \cdot \log(Q)$ en $H = 3,2 \cdot {}^2\log(Q)$.
Er geldt $G = c \cdot A \cdot H$.
Bereken c . Rond af op drie decimalen.
- 48** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ en de punten $A(1, -1)$ en $B(4, -4)$ op c . De lijn k raakt c in het punt A en de lijn l raakt c in het punt B .
Bereken in graden de hoek tussen k en l . Rond af op één decimaal.
- 49** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2}{x+3}$, $g(x) = \frac{x-1}{2x+1}$ en $h(x) = f(x) - g(x)$.
Herleid het functievoorschrift van h tot één breuk.
- 50** Bereken voor welke p het punt $A(3, p)$ op de lijn $l: 2x - 3y = 27$ ligt.
- 51** Gegeven is de functie $f(x) = -0,1x^3 + 0,1x^2 + 3x - 2$.
Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -1$ en $x_B = 3$.
Bereken de helling van de lijn AB .
- 52** Van driehoek ABC is $\angle A = 115^\circ$, $AB = 4$ en $AC = 3$.
Bereken BC in twee decimalen.
- 53** Los op $0,1x^3 - 4x < 0,2x^2 - 5$. Rond af op twee decimalen.
- 54** Gegeven is de functie $f(x) = 5 - \sqrt{x^2 - 9}$.
Bereken exact de coördinaten van de twee randpunten van de grafiek van f en geef het domein en het bereik van f .
- 55** Toon met de afgeleide aan dat de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 1$ een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{2}$.
- 56** De lijn k gaat door de punten $A(-3, 0)$ en $B(0, 2)$ en de lijn l gaat door de punten $C(1, -2)$ en $D(4, 5)$.
Bereken in graden in één decimaal de hoek tussen k en l .
- 57** De grafiek van de functie f ontstaat uit die van $y = \sin(x)$ door eerst de translatie $(\frac{1}{3}\pi, 2)$ en dan de vermenigvuldiging met $1\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x -as toe te passen.
Stel het functievoorschrift van f op.

58 Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 7,5% toe.

Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.

59 Los de vergelijking $\log(25x) = 2 + \log(x - 1)$ algebraïsch op.

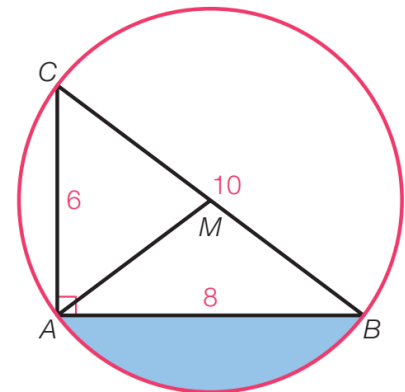
60 Bewijs dat de lijn $k: y = x$ geen punten gemeenschappelijk heeft met de cirkel $c: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$.

61 De parabool p heeft top $T(4, 6)$ en gaat door het punt $A(8, 3)$.
De lijn k raakt p in A en snijdt de x -as in het punt B .
Bereken exact de x -coördinaat van B .

62 Los het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 5x + 2y = 18 \end{cases}$ algebraïsch op.

63 Gegeven is de formule $s = \frac{100t^2}{t^2 + 50}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.
Benader met een differentiequotiënt de snelheid in m/s op $t = 5$.
Neem $\Delta t = 0,01$ en rond af op twee decimalen.

64 Van de rechthoekige driehoek ABC met $AB = 8$, $AC = 6$ en $BC = 10$ is het midden M van de zijde BC het middelpunt van de cirkel die door A , B en C gaat. Zie de figuur hiernaast.
Bereken de oppervlakte van het kleinste gebied dat wordt ingesloten door AB en de cirkel. Rond af op twee decimalen.



65 De functie $f(x) = x^3 - 8x^2 + 4x + 6$ heeft twee extreme waarden.
Bereken die extreme waarden. Rond af op twee decimalen.

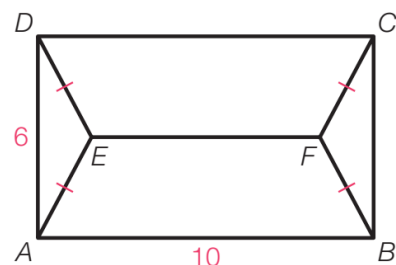
66 Los algebraïsch op $5 \cdot 2^{3x-2} = 80$.

67 Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = x^2 - \frac{2x^2 - 1}{x}$.

68 Gegeven zijn de punten $P(2, 3)$ en $Q(q, 2q)$.
Druk de afstand tussen P en Q uit in q en bereken de minimale afstand tussen P en Q . Rond af op twee decimalen.

- 69** De grafiek van de functie f ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door eerst de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{2}$ en dan de translatie $(\frac{1}{6}\pi, -3)$ toe te passen.
Stel het functievoorschrift van f op.
- 70** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 5,3% af.
Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.
- 71** De grafiek van de functie g ontstaat uit die van de functie $f(x) = {}^2\log(x)$ bij de translatie $(4, 0)$, gevolgd door de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met 2.
De functie g is te schrijven in de vorm $g(x) = a + {}^2\log(x - b)$.
Bereken a en b .
- 72** Gegeven zijn de cirkels $c: x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ en $d: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$.
Bereken exact de afstand tussen c en d .
- 73** De parabool p snijdt de x -as in de punten $A(-2, 0)$ en $B(10, 0)$ en de y -as in het punt $C(0, -5)$. De lijn k raakt p in C en de lijn l gaat door B en de top T van p .
Bereken in graden de hoek tussen k en l . Rond af op één decimaal.
- 74** A is een lineaire functie van t .
Voor $t = 5$ is $A = 100$ en voor $t = 15$ is $A = 200$.
Druk A uit in t .
- 75** De lijn k raakt de grafiek van de functie $f(x) = \frac{100x^2}{x^2 + 4}$ in het punt A met $x_A = 4$.
Bereken de richtingscoëfficiënt van k .
- 76** Van driehoek ABC is $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 35^\circ$ en $AB = 8$.
Bereken in twee decimalen de oppervlakte van de driehoek.
- 77** Een vuurwerkpijl wordt afgeschoten op $t = 0$ en valt op $t = 6$ weer op de grond. Op $t = 1$ is de pijl 40 meter hoog. De formule van de hoogte van de pijl is van de vorm $h = at^3 + bt^2$.
Bereken a en b .
- 78** Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k die de grafiek van de functie $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{2x}$ raakt in het punt A met $x_A = 1$.

- 79** Op de grafiek van de functie $f(x) = (\frac{1}{3})^{x+2}$ wordt de translatie $(3, 0)$ toegepast. Zo ontstaat de grafiek van de functie g .
De grafiek van de functie g ontstaat ook door de grafiek van f ten opzichte van de x -as te vermenigvuldigen met a .
Bereken a .
- 80** Stel een vergelijking op van de lijn k door het punt $A(-1, 3)$ die loodrecht staat op de lijn $l: 4x + 3y = 20$.
- 81** Gegeven is de functie $f(x) = 1\frac{1}{2} + 2 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Teken de grafiek van f .
- 82** De halveringstijd van het isotoop polonium-209 is 103 jaar.
Bereken in twee decimalen met hoeveel procent de hoeveelheid polonium-209 per jaar afneemt.
- 83** De grafiek van de functie $f(x) = 3^x$ wordt eerst 4 naar rechts en 18 naar beneden verschoven, vervolgens ten opzichte van de x -as met 27 vermenigvuldigd en ten slotte ten opzichte van de y -as met 2 vermenigvuldigd. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . Het functievoorschrift van g is te schrijven in de vorm $g(x) = p \cdot g^x + q$.
Bereken g , p en q .
- 84** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de cirkel c met middelpunt $M(-2, 5)$ en straal 5 en de lijn $l: x + 2y = 6$.
- 85** Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen $k: 2x + y = 6$ en $l: 12x - 5y = 3$.
- 86** Schets in twee aparte figuren onder elkaar de grafiek van de functie $f(x) = \frac{10x^2}{x^2 + 10}$ en de hellinggrafiek van f .
- 87** In de rechthoek in de figuur hiernaast is $AE = BF = CF = DE$ en $EF = 2 \cdot AE$.
Bereken EF algebraïsch.
- 88** Los algebraïsch op $\frac{1}{2} \log(2x - 1) + 3 = 0$.



89 De grafiek van de functie $g(x) = \frac{1}{3}(x - 4)^5 + 6$ is ontstaan uit de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}(x + 2)^5 + 16$ door een translatie uit te voeren. Geef deze translatie.

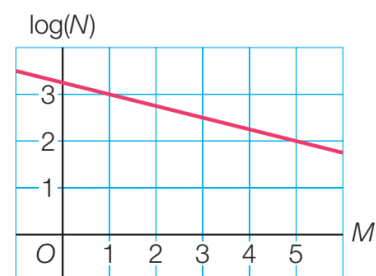
90 Differentieer de functie $f(x) = (2x + 1)(\sqrt{x} - 1)$.

91 Bereken exact de afstand van het punt $A(4, 5)$ tot de lijn $k: x + 2y = 4$. Schrijf het antwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.

92 Gegeven is de formule $W = 20 + 15 \cos(\pi(t - \frac{3}{4}))$ met domein $[0, 4]$. Teken de grafiek van W en los op $W > 30$. Rond af op twee decimalen.

93 Een hoeveelheid N neemt exponentieel af. Op $t = 3$ is $N = 3102$ en op $t = 9$ is $N = 2324$. Hierbij is t de tijd in maanden. Stel de formule op van N . Rond de beginwaarde af op gehele en de groeifactor op drie decimalen.

94 In de figuur hiernaast is $\log(N)$ uitgezet tegen M . De formule van de lijn is van de vorm $\log(N) = pM + q$. Bereken exact p en q , en bereken N in gehele voor $M = -4$.



95 De lijn k raakt de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$ in de oorsprong. De lijn l is evenwijdig met k en raakt de grafiek van f in het punt A . Bereken exact $d(k, l)$. Schrijf het antwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.

96 Los het stelsel $\begin{cases} 5x + 6y = 18 \\ y = 4x + 11 \end{cases}$ algebraïsch op.

97 Bereken voor welke x de helling van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{10x^2}{x^2 + 10}$ gelijk is aan 1. Rond af op drie decimalen.

98 Een parabool snijdt de x -as in de punten $(2, 0)$ en $(5, 0)$ en gaat door het punt $(6, -3)$. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y -as.

99 De grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^4 + 2$ wordt eerst vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met 4, vervolgens wordt de translatie $(2, -5)$ toegepast. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . Bereken de extreme waarde van g .

100 De grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 9}{x}$ heeft de toppen A en B . Stel op algebraïsche wijze de formule op van de lijn k door A en B .

101 Los exact op $4 - {}^3\log(4x - 3) \geq 2$.

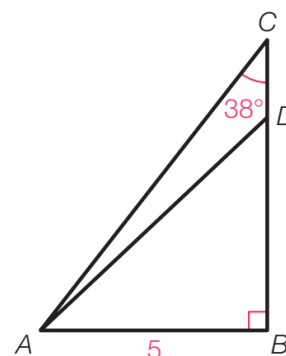
102 Bereken exact het minimum van de functie $f(x) = 4x\sqrt{x} - 9x$.

103 Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(4, -2)$ die de x -as raakt.

104 Teken de grafiek van de functie $f(x) = 2\frac{1}{2} - 4\cos(\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{3}\pi)$ met domein $[0, 4\pi]$.

105 Los de vergelijking $5 - {}^2\log(5x + 2) = 0$ exact op.

106 In de figuur hiernaast ligt het punt D op de zijde BC waarbij $BD = CD + 3$. Bereken $\angle BAD$.



107 De lijn $y = x$ snijdt de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$ in de punten A en B . Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B .

108 Bereken exact de oplossingen van $10x^2 + 1 = 7x$.

109 Bereken exact voor welke x de helling van de grafiek van de functie $f(x) = 2x^3 - (2x^2 + 1)(x - 2)$ gelijk is aan -3 .

110 Een parabool heeft top $(4, 3)$ en gaat door het punt $(2, -3)$. Stel de formule op van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

111 Schrijf $\frac{a^3}{a^5} \cdot (a^4)^n$ als macht van a .

112 Gegeven is de formule $y = 4 - \frac{3}{2x-1}$.

Druk x uit in y .

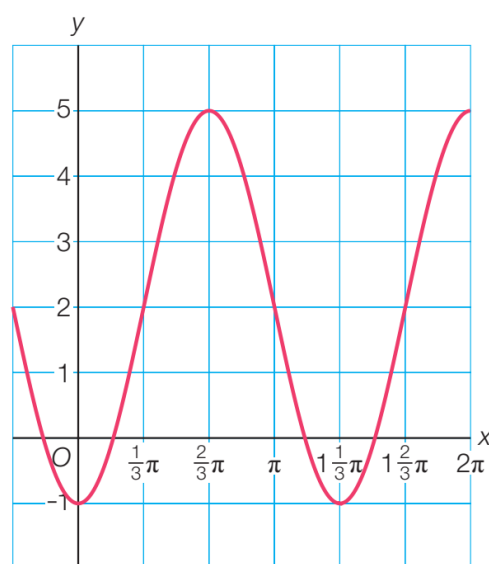
113 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{x+4} + 2$ en $g(x) = \frac{1}{x-5} + 8$.

Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van f ?

114 Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = 5x^2 - (2x+3)^4$.

115 Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(3, -2)$ die de lijn $k: x + 2y = 4$ raakt.

116 In de figuur hiernaast is een sinusoïde getekend. Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x-d))$ met $b > 0$.



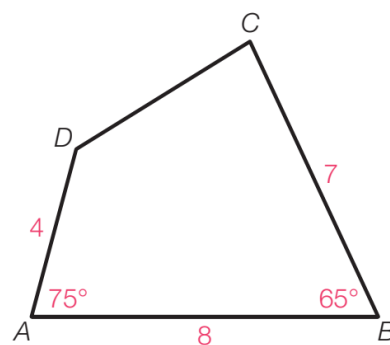
117 Los de vergelijking $2^{5x-4} = 16^{x+1}$ exact op.

118 Gegeven is dat y omgekeerd evenredig is met $x\sqrt{x}$.

Voor $x = 2$ is $y = 6$.

Bereken exact y voor $x = 8$.

- 119** Gegeven is de vierhoek in de figuur hiernaast. Bereken CD en $\angle D$. Rond af op één decimaal.



120 Los exact op $\frac{1}{2}(2x - 5)^2 + 3 = 5$.

- 121** De helling van de grafiek van de functie $f(x) = ax^2 + 6x + a$ in het punt A met $x_A = 3$ is gelijk aan 4. Bereken a .

- 122** Van de parabool $y = ax^2 + bx$ is de top $(4, 4)$. Bereken a en b .

- 123** Schrijf $\frac{2}{5}a^{-2} \cdot (b^{-3})^2$ zonder negatieve exponenten.

124 Los algebraïsch op $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3} = 0$.

- 125** De lijn $k: y = \frac{1}{2}x + b$ raakt de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{2x + 6}$ in het punt A . Bereken b exact.

126 Differentieer de functie $f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{1}{(3x - 1)^2}$.

- 127** Onderzoek met een berekening of het punt $A(5, 1)$ op, binnen of buiten de cirkel $c: x^2 + y^2 + 3x - 4y + 37 = 0$ ligt.

- 128** Van een sinusöide zijn de punten $(3, 160)$ en $(15, 90)$ twee opeenvolgende toppen. Stel een formule op van deze sinusöide.

- 129** Gegeven zijn de formules $A = {}^2\log(B - 5)$ en $A = 2C + 4$. Druk B uit in C en druk C uit in B .

- 130** Van de gelijkbenige driehoek ABC is $\angle A = \angle B = 65^\circ$ en $AB = 4$. Op de zijde AC wordt een halve cirkel getekend waarvan AC een middellijn is. Bereken de oppervlakte van deze halve cirkel. Rond af op één decimaal.

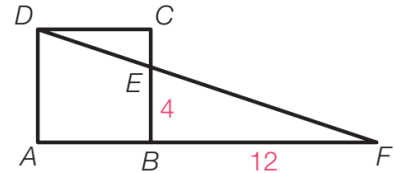
- 131** Schrijf de formule $p = 10q^{1,36}$ in de vorm $q = ap^b$. Rond af op twee decimalen.
- 132** Bereken exact de nulpunten van de functie $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$.
- 133** De grafiek van de functie $f(x) = (x + 1)(x^2 - 2x - 3)$ raakt de x -as in het punt $A(-1, 0)$ en snijdt de y -as in het punt B . De lijn k door A en B snijdt de grafiek van f ook nog in het punt C .
Bereken exact de coördinaten van C .
- 134** Van driehoek ABC is $AB = 8$, $\angle A = 32^\circ$ en $\angle B = 90^\circ$.
Het punt D ligt op de zijde AB waarbij $AD = 3$.
Bereken $\angle ACD$.
- 135** De parabool $y = ax^2 + 1\frac{1}{2}x + 3$ gaat door het punt $(2, 9)$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.
- 136** Schrijf $\frac{1}{4}a^{-\frac{2}{3}} \cdot (b^{-5})^6 \cdot c^{1\frac{1}{2}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.
- 137** Bereken exact de oplossingen van $\frac{2x-3}{x-4} = x-6$.
- 138** Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1}$.
- 139** Bereken exact de afstand van het punt $A(4, 5)$ tot de cirkel $c: x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$. Herleid je antwoord.
- 140** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 + 4\sin(x)$ en $g(x) = -2 + 3\sin(x - \frac{1}{4}\pi)$.
De grafiek van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$ is een sinusoid.
Stel bij de grafiek van s een formule op van de vorm $y = a + b\sin(c(x-d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- 141** Gegeven zijn de formules $P = 3Q + 1$ en $P = 4R + 2$.
Druk Q uit in R en druk R uit in Q .
- 142** Bereken exact het bereik van de functie $f(x) = 4x - \sqrt{2x-1}$.
- 143** Gegeven is de formule $y = 0,025x^{3,41}$.
Bereken hoeveel keer zo groot y wordt als x verdubbelt.
Rond af op één decimaal.

- 144** Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)^3 - 1$. De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A . De lijn k raakt de grafiek in A . Bereken exact de afstand van k tot het punt $B(-1, -1)$.
- 145** Van driehoek ABC is $BC = 5$ en $\angle B = 90^\circ$. Het punt M is het midden van de zijde AB en $\angle BMC = 64^\circ$. Bereken $\angle A$.
- 146** Bereken exact de oplossingen van $3x^4 - 5 = 16$.
- 147** Schrijf de formule $y = \frac{1}{4} \cdot (3x)^{-2} \cdot \frac{8}{x^{-5}}$ in de vorm $y = ax^p$.
- 148** Los exact op $\frac{x^2 - 4}{x + 5} + 1\frac{1}{2} = 4$.
- 149** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4}{x + 1} - 2$ en het punt $A(3, -1)$ op de grafiek van f . De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A . De lijn l gaat door A , staat loodrecht op k en snijdt de x -as in het punt B . Bereken exact de coördinaten van B .
- 150** De afstand van de lijn $k: y = -3x + 16$ tot de cirkel $c: x^2 + y^2 + 6x + 10y - 2 = 0$ is gelijk aan $3(\sqrt{10} - 2)$. Bewijs dit.
- 151** Bereken algebraïsch de oplossingen in $[0, 2\pi]$ van $\sin(3x - \frac{1}{4}\pi) = 1$.
- 152** Druk x uit in y bij de formule $y = \frac{1}{4} \cdot {}^3\log(2x - 3)$.
- 153** Op de grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 4x$ ligt het punt P met $y_P = 9$ en $x_P < 6$. De lijn k die de grafiek van f raakt in P snijdt de x -as in het punt Q en de y -as in het punt R . Er geldt $O(\triangle OPR) = c \cdot O(\triangle OPQ)$. Bereken exact c .
- 154** Schrijf de formule $y = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - 3x}$ in de vorm $x = ay^2 + by + c$.
- 155** Gegeven is dat N evenredig is met een macht van F . Bij $F = 7$ hoort $N = 46,3$ en bij $F = 15$ hoort $N = 145,2$. Stel de formule van N op. Rond af op één decimaal.

156 Bereken exact voor welke p de vergelijking $x^2 + 5x + p = 0$ twee oplossingen heeft.

157 Onderzoek op algebraïsche wijze of de top van de grafiek van de functie $f(x) = 0,2x^2 - 2x + 1$ op de grafiek van de functie $g(x) = -0,3x^2 + 0,5x + 1$ ligt.

158 In de figuur hiernaast is $ABCD$ een vierkant. Het punt F ligt op het verlengde van de zijde AB zo, dat $BF = 12$. De lijn DF snijdt de zijde BC in het punt E met $BE = 4$. Bereken de oppervlakte van $ABCD$.



159 Los algebraïsch op $4(5x - 2)^3 = 500$.

160 Bereken van de functie $f(x) = 6 - \sqrt{2x - 3}$ het domein, het bereik en de coördinaten van het randpunt van de grafiek.

161 Schrijf de formule $y = 1\frac{1}{3} \cdot 9^{-2x + 1\frac{1}{2}}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$.

162 Gegeven is de formule $y = 0,025x^{3,41}$. Bereken met welk percentage x toeneemt als y verdubbelt.

163 De cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x + 8y - 7 = 0$ snijdt de x -as in de punten A en B met $x_A < x_B$. De lijn k raakt c in A en snijdt de y -as in het punt P . De lijn l raakt c in B en snijdt de y -as in het punt Q . Bereken exact de lengte van het lijnstuk PQ .

164 Bereken algebraïsch de oplossingen in $[0, 2\pi]$ van $\sin(\frac{3}{4}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

165 Maak t vrij bij de formule $N = 3 \cdot 5^{2t - 6}$.

166 Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(3, 4)$ die de lijn $k: x + 2y = 6$ raakt.

167 Gegeven is de functie $f(x) = 6 - 3\sqrt{2x + 8}$. Bereken exact voor welk waarden van x geldt $f(x) > 0$.

168 Druk de oplossingen x van de vergelijking $x^2 + px - 6p^2 = 0$ uit in p .

169 De grafiek van de functie $f(x) = 1 - \frac{2}{2x - 3}$ snijdt de x -as in het punt A . De lijn k raakt de grafiek van f in A . Stel de formule op van k .

Antwoorden Kennis- en vaardigheidentests

Hoofdstuk 9

- 1** a $C = 12 \cdot 0,847^t$
b 48,5%
c 397 minuten

- 2** a 94,9%
b 3,2%
c 3,7%
d 89,3%

- 3** a 3112 cm³
b 25 dagen

- 4** a 29 jaar
b 22 dagen

- 5** a $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(5)$
b $x = 7$
c $x = 3$
d $x = -\frac{1}{9}$

- 6** a $t = -7,5 + 2,5 \cdot {}^{1,5}\log(75 - N)$
b $A = -5 + \frac{1}{2} \cdot 5^{B+3}$

- 7** a 15 jaar
b $t = 10^{0,0435t - 1,2609}$
c 2061

- 8** a 760 mL
b 100 kg
c $p = 0,8$ en $q = 0,7$

- 9** a ${}^3\log(20)$
b ${}^2\log(40)$
c ${}^5\log(250)$
d ${}^2\log(48)$

- 10** a $y = 4 + {}^3\log(5x)$
b $y = 2 + {}^5\log(6x)$

- 11** a $y = {}^2\log(17,6x^{-1,3})$
b $N = 5,26 - 5,87 \cdot \log(t)$

- 12** a $K = -1,06M$
b $F = -0,34G$

- 13** a $x = \frac{1}{2}$
b $x = 2$

- 14** a $\times \frac{1}{25}$ t.o.v. de y-as
b translatie $(-3, 0)$

Hoofdstuk 10

- 1** $DE \approx 3,15$

- 2** $CD \approx 9,5$

- 3** omtrek $\approx 22,22$

- 4** a *
b $p = \sqrt{4\frac{1}{2}}$

- 5** a $k: y = \frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}$
b $d: (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$

- 6** a *
b l heeft twee punten gemeenschappelijk met d

- 7** a $d(A, c_1) = \sqrt{17} - 3$
b $d(B, c_2) = \sqrt{7} - \sqrt{5}$
c $d(c_1, c_2) \approx 1,97$

- 8** a $d(k, c_1) = 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$
b $p = 5$

- 9** a $d(A, B) = \sqrt{15\frac{1}{9}}$
b $d(k, l) = \sqrt{\frac{8}{9}}$

- 10** c: $(x - 5)^2 + y^2 = 10$

Hoofdstuk 11

1 a $A = 5,64p^{0,55}$

b $B = \frac{108}{r^3}$

2 a $D = 0,240T^{0,825}$

b 449 mm

3 a $x = 0,30y^{0,4}$

b $x = 1,89y^{-0,75}$

4 a 4,3 keer

b 39,1%

5 a translatie $(\pi, 0)$,
 $\times \frac{1}{3}$ t.o.v. de y -as,
 $\times 2$ t.o.v. de x -as,
translatie $(0, 1)$

b $g(x) = -4 + \sin(1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{4}\pi)$

6 a $s(x) = 9\frac{1}{3} \cdot 3^x$

b $v(x) = 3^{x+3}$

c *

7 a $S(2\frac{1}{4}, -1\frac{1}{2})$

b $\angle(k, l) \approx 53,1^\circ$

8 $x_E - x_D \approx 4,16$

9 a randpunt $(2\frac{1}{2}, -1)$

$D_f = \langle \leftarrow, 2\frac{1}{2} \rangle$

$B_f = [-1, \rightarrow)$

b $k: y = -\frac{1}{3}x$

c $x = -4\frac{1}{2}y^2 - 9y - 2$

10 a $P(2, 3\frac{1}{2})$ en $Q(4, -3\frac{1}{2})$

b $x = \frac{8y - 21}{2y - 7}$

11 a *

b $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$ en $x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen
- de toets Ans, en fouten verbeteren
- breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen
- decimaal getal omzetten in een breuk

havo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 16

Formules, grafieken en tabellen

- formules invoeren en grafieken plotten
- functiewaarden berekenen op het grafiekenschermb en op het basisscherm
- tabellen maken en de tabelinstelling veranderen

havo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 40

Toppen en snijpunten

- toppen en snijpunten van grafieken
- berekenen van nulpunten

havo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 43

Helling en hellinggrafiek

- de richtingscoëfficiënt van een raaklijn
- hellinggrafiek plotten

havo B deel 1
hoofdstuk 2
bladzijde 83

Het gebruik van Ans en lettergeheugens

- de toets Ans
- het gebruik van lettergeheugens

havo B deel 1
hoofdstuk 3
bladzijde 104

Allerlei

- specifieke mogelijkheden van het merk/type GR
-

Trefwoordenregister

A

afstand tussen cirkels 73
afstand tussen evenwijdige lijnen 76
afstand van lijn tot cirkel 72
afstand van punt tot cirkel 72
afstand van punt tot lijn 65
asymptoten bij grafieken van gebroken functies 118

B

bewijzen van rekenregels voor logaritmen 34

C

cosinusregel 51

D

derdegraadsfunctie 109

E

evenredig 88
evenredig met een macht van x 89

G

gebroken lineaire functie 118
goniometrische verhoudingen 18
groeipercentage 9
– omzetten naar een andere tijdseenheid 12

H

halveringstijd 16
hoek tussen lijnen 107

K

kettingfunctie 102

L

loodrechte lijnen 65

O

omgekeerd evenredig 88
omgekeerd evenredig met een macht van x 89
oppervlakteformules 57

R

regels voor het algebraïsch oplossen van vergelijkingen 109
rekenregels bij transformaties 37
rekenregels voor logaritmen 32

S

sinusregel 51
somfunctie 102
standaardfuncties 98, 99
stappenplan bij goniometrische berekeningen 52

T

tweedegraadsfunctie 106

V

verdubbelingstijd 16
verschilfunctie 102

W

wortelfuncties 114

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Oscar Casander, Arnhem

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Foto's

Getty Images Creative: p. 6-7, 11, 14, 46-47

Shutterstock: p. 25, 28, 86-87, 91, 92, 152, 165, 172, 200, 201

Imageselect / Alamy Stock Photo: p. 54

Google Earth: p. 84

ANP / EPA / WWF / Charles Littnam: p. 128

ANP / Lina Selg: p. 130-131

Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling, 2022: p. 149

Joep van Ruiten, Emmen: p. 150

De Windvogel: p. 160

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleunen.



Wij maken bij Noordhoff sinds 2009 bewust keuzes om onze impact op het klimaat te verkleinen. We volgen de klimaatdoelen van het Klimaatakkoord van Parijs. Scan de QR-code voor meer informatie over ons duurzaamheidsbeleid.

Zo is dit product gemaakt van FSC®-gecertificeerd papier en ander gecontroleerd materiaal. Wij gebruiken plantaardige inkt en onze lijmen zijn op waterbasis en afbreekbaar. Hierdoor is dit product goed te recyclen na gebruik.



0 / 26

© 2026 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06457-0

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten