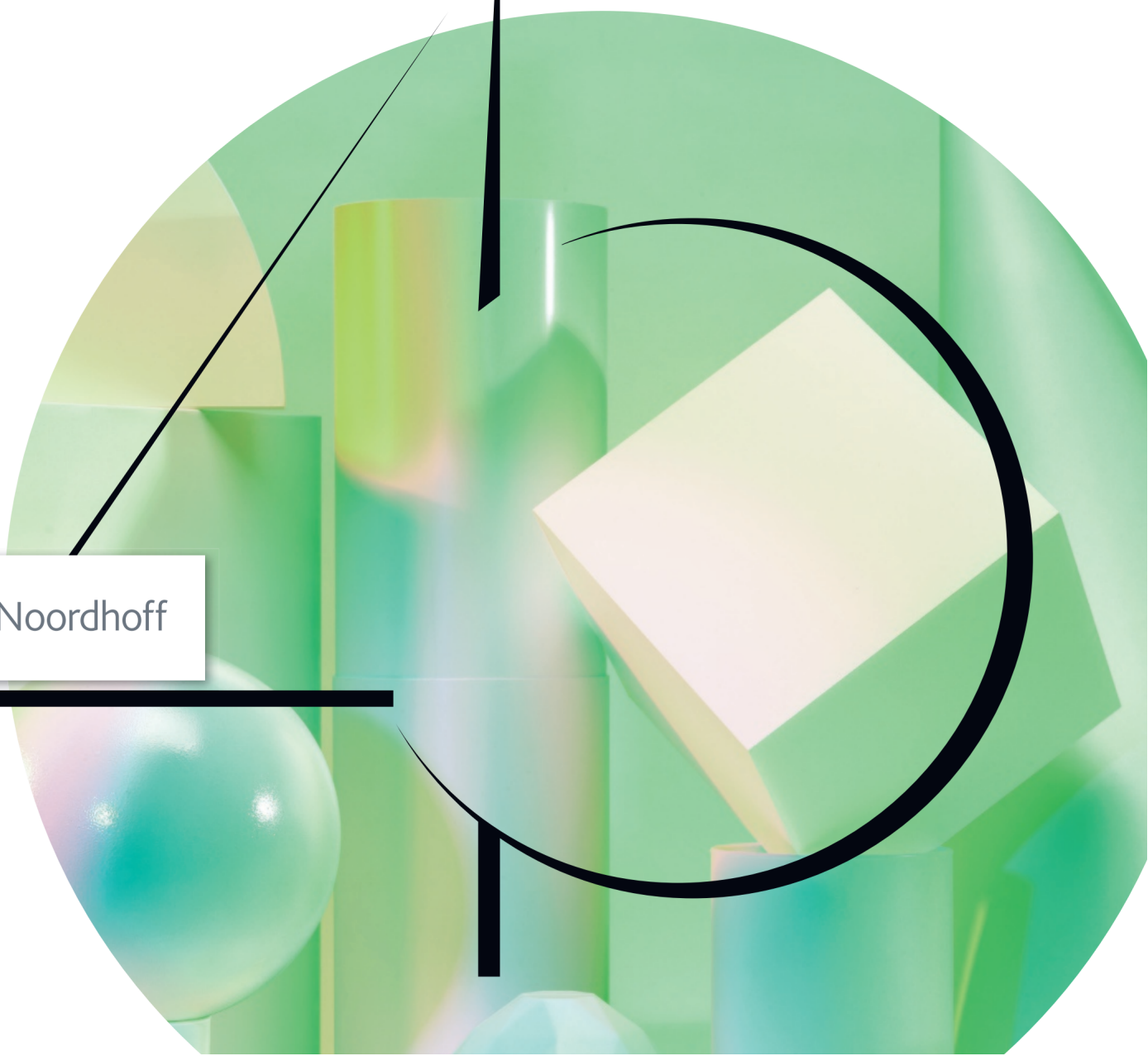


getal & ruimte

B



Noordhoff



Getal & Ruimte

Uitwerkingen havo B deel 3

Dertiende editie, 2026

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooyen
H. Rachyd
M. Daems

Inhoud

9	Exponentiële en logaritmische formules	4
10	Meetkundige berekeningen	29
11	Verbanden en functies	68
12	Examentraining	108

9 Exponentiële en logaritmische formules

9.1 Groeifactoren en groeipercentages

Bladzijde 8

- V1** **a** $N = 87 \cdot 1,05^t$
b $t = 4$ geeft $N = 87 \cdot 1,05^4 \approx 106$
c $t = 9$ geeft $N = 87 \cdot 1,05^4 = 134,9...$
 $t = 10$ geeft $N = 87 \cdot 1,05^4 = 141,7...$
De toename is $141,7... - 134,9... \approx 7$.

- V2** **a** $N = 725 \cdot 0,87^t$
b $t = 5$ geeft $N = 725 \cdot 0,87^5 \approx 361$
c $t = 7$ geeft $N = 725 \cdot 0,87^7 = 273,5...$
 $t = 8$ geeft $N = 725 \cdot 0,87^8 = 237,9...$
De afname is $273,5... - 237,9... \approx 36$.

Bladzijde 9

- 1** **a** Jaarlijkse toename van 5%, dus de vermenigvuldigingsfactor is 1,05.
Het bedrag op 1 januari 2026 is $1000 \cdot 1,05 = 1050$ euro.
Het bedrag op 1 januari 2030 is $1000 \cdot 1,05^5 \approx 1276,28$ euro.
b $g = 1,05$

Bladzijde 10

- 2** **a** $t = 5$ geeft $N = 250 \cdot 0,955^5 = 198,5...$
 $t = 12$ geeft $N = 250 \cdot 0,955^{12} = 143,8...$
 $198,5... - 143,8... = 54,7...$, dus de afname is 55 000.
b Los op $250 \cdot 0,955^t = 125$.
Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 15,05...$
Dus in 2015.

- 3** **a** De groeifactor per jaar is $g = 1,127$.
b De groeifactor per maand is $g = 0,932$.
c Het groeipercentage per maand is 73,5%.
d De afname per dag is 15,5%.
e Het groeipercentage per jaar is 142%.
f De groeifactor per dag is $g = 0,993$.

- 4** **a** $N = b \cdot g^t$ met $b = 400$ en $g = 1,12$ geeft $N = 400 \cdot 1,12^t$
b 2015 is van $t = 25$ tot $t = 26$.
 $t = 25$ geeft $N = 400 \cdot 1,12^{25} \approx 6800$
 $t = 26$ geeft $N = 400 \cdot 1,12^{26} \approx 7616$
De toename is $7616 - 6800 \approx 800$.
c Los op $400 \cdot 1,12^t = 30\,000$.
Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 38,09...$
Dus in 2028.

- 5** **a** $B = b \cdot g^t$ met $b = 78$ en $g = 1,023$ geeft $B = 78 \cdot 1,023^t$
b Los op $78 \cdot 1,023^t = 10\,000$.
Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 213,44...$
Dus na 214 dagen.
c $t = 237$ geeft $B = 78 \cdot 1,023^{237} \approx 17\,085$
Zonder maatregelen:
 $t = 500$ geeft $B = 78 \cdot 1,023^{500} \approx 6\,759\,452$
toename = $6\,759\,452 - 17\,085 = 6\,742\,367$
Met maatregelen:
 $t = 500$ geeft $B = 700 \sqrt{500 - 233} + 15\,685 \approx 27\,123$
toename = $27\,123 - 17\,085 = 10\,038$
Dus er zijn $6\,742\,367 - 10\,038 = 6\,732\,328$ besmettingsgevallen voorkomen.

Bladzijde 11

- 6 a** $V_z = b \cdot g^t$ met $b = 11\,200$ en $g = 1,3$ geeft $V_z = 11\,200 \cdot 1,3^t$
b De jaarlijkse toename is constant, dus de toename is lineair en dus is de formule van de vorm $V_w = at + b$.
 $a = 1100$ en $b = 6600$ geeft $V_w = 1100t + 6600$
c Gevraagd wordt op 1 januari van welk jaar voor het eerst geldt $V_z > 5V_w$.
 Los op $11\,200 \cdot 1,3^t = 5(1100t + 6600)$.
 Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 7,09\dots$
 Dus op 1 januari 2028.

- 7** N_{VS} is het aantal inwoners van de Verenigde Staten in miljoenen.
 N_{Rus} is het aantal inwoners van Rusland in miljoenen.
 t is de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2020.
 $N_{VS} = at + b$ met $a = 1,2$ en $b = 331,5$ geeft $N_{VS} = 1,2t + 331,5$
 $N_{Rus} = b \cdot g^t$ met $b = 144,1$ en $g = 0,997$ geeft $N_{Rus} = 144,1 \cdot 0,997^t$
 Los op $1,2t + 331,5 = 3 \cdot 144,1 \cdot 0,997^t$.
 Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 41,6\dots$
 Dus in 2061.

- 8** Stel op $t = 0$ zijn er b kikkers, dan zijn er dus $2b$ salamanders.
 aantal kikkers $= b \cdot 1,06^t$
 aantal salamanders $= 2b \cdot 0,94^t$
 aantal kikkers = aantal salamanders geeft $b \cdot 1,06^t = 2b \cdot 0,94^t$ oftewel $1,06^t = 2 \cdot 0,94^t$.
 Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 5,76\dots$
 Dus na 5,8 jaar.

9 a

tijd in jaren	0	1	2	3	4
hoeveelheid N	2	18	162	1458	13 122

- b** Per twee jaar wordt N met 81 vermenigvuldigd.
c Minder, want $4,5^2 = 20,25$ en dat is groter dan 9.

Bladzijde 13

- 10 a** $g_{\text{kwartier}} = 1,12$
 $g_{\text{uur}} = 1,12^4 \approx 1,574$
 De toename is 57,4% per uur.
b $g_{\text{kwartier}} = 1,12$
 $g_{5 \text{ minuten}} = 1,12^{\frac{1}{3}} \approx 1,038$
 De procentuele toename per vijf minuten is 3,8%.
c $g_{\text{kwartier}} = 1,12$
 $g_{5 \text{ uur}} = 1,12^{20} \approx 9,65$
 De toename is 865% per vijf uur.

- 11 a** $g_{\text{dag}} = 1,3$
 $g_{\text{week}} = 1,3^7 \approx 6,27$
 Het groeipercentage per week is 527%.
b $g_{\text{dag}} = 1,3$
 $g_{4 \text{ uur}} = 1,3^{\frac{1}{6}} \approx 1,045$
 Het groeipercentage per vier uur is 4,5%.

- 12 a** $g_{\text{dag}} = 0,84$
 $g_{\text{week}} = 0,84^7 \approx 0,295$
b $g_{\text{dag}} = 0,84$
 $g_{\text{uur}} = 0,84^{\frac{1}{24}} \approx 0,993$
 De hoeveelheid neemt met 0,7% per uur af.
c $g_{\text{dag}} = 0,84$
 $g_{\text{kwartier}} = 0,84^{\frac{1}{24 \cdot 4}} \approx 0,9982$
 De procentuele afname per kwartier is 0,18%.

- 13** a $g_{\text{uur}} = 0,805$
 $g_{\text{kwartier}} = 0,805^{\frac{1}{4}} \approx 0,947$
 De afname is 5,3% per kwartier.
- b $g_{\text{jaar}} = 1,086$
 $g_{25 \text{ jaar}} = 1,086^{25} \approx 7,87$
 De toename is 687% per 25 jaar.
- c $g_{\text{week}} = 2,8$
 $g_{\text{dag}} = 2,8^{\frac{1}{7}} \approx 1,158$

Bladzijde 14

- 14** a $g_{\text{dag}} = 1,05$
 $g_{\text{week}} = 1,05^7 \approx 1,407$
 Bij een toename van 5% per dag hoort een toename van ongeveer 40,7% per week.
- b Bij een groeifactor van 1,5 per dag hoort een groeifactor van $1,5^7 \approx 17,1$ per week.
- c $g_{\text{uur}} = 0,8$
 $g_{\text{kwartier}} = 0,8^{\frac{1}{4}} \approx 0,946$
 Bij een afname van 20% per uur hoort een afname van ongeveer 5,4% per kwartier.
- d Bij een groeifactor van 0,7 per uur hoort een groeifactor van $0,7^4 \approx 0,915$ per kwartier.

- 15** a $g_{5 \text{ jaar}} = 2$
 $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{5}} \approx 1,149$
 Het groeipcentage per jaar is 14,9%.
- b $g_{6 \text{ jaar}} = 7,3$
 $g_{\text{jaar}} = 7,3^{\frac{1}{6}} \approx 1,393$
 Het groeipcentage per jaar is 39,3%.
- c $g_{10 \text{ jaar}} = 0,78$
 $g_{\text{jaar}} = 0,78^{\frac{1}{10}} \approx 0,975$
 De afname per jaar is 2,5%.

- 16** a $g_{3 \text{ jaar}} = \frac{1000}{800} = 1,25$ geeft $g_{\text{jaar}} = 1,25^{\frac{1}{3}} = 1,0772\dots$
- b $t = 2$, $N = 800$ en $g = 1,0772\dots$ invullen bij $N = b \cdot g^t$ geeft $b \cdot 1,0772\dots^2 = 800$.
 $b = \frac{800}{1,0772\dots^2} \approx 690$
- c $N = 690 \cdot 1,077^t$

- 17** a $N = b \cdot g^t$
 $g_{6 \text{ maanden}} = \frac{4500}{1500} = 3$
 $g_{\text{maand}} = 3^{\frac{1}{6}} = 1,2009\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,2009\dots^t \\ t = 4 \text{ en } N = 1500 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,2009\dots^4 = 1500 \\ b = \frac{1500}{1,2009\dots^4} \approx 720 \end{array}$$

 Dus $N = 720 \cdot 1,201^t$.
- b $A = b \cdot g^t$
 $g_{9 \text{ jaar}} = \frac{7520}{8550} = 0,8795\dots$
 $g_{\text{jaar}} = 0,8795\dots^{\frac{1}{9}} = 0,9858\dots$

$$\left. \begin{array}{l} A = b \cdot 0,9858\dots^t \\ t = 6 \text{ en } A = 8550 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,9858\dots^6 = 8550 \\ b = \frac{8550}{0,9858\dots^6} \approx 9310 \end{array}$$

 Dus $A = 9310 \cdot 0,986^t$.
- c $M = b \cdot g^t$
 $g_{10 \text{ jaar}} = 3$ geeft $g_{\text{jaar}} = 3^{\frac{1}{10}} = 1,1161\dots$
 Dus $M = 75 \cdot 1,116^t$.

Bladzijde 15

18 a $g_{3 \text{ km}} = \frac{555}{800} = 0,69375$
 $g_{\text{km}} = 0,69375^{\frac{1}{3}} = 0,8852\dots$

$$\left. \begin{array}{l} P = b \cdot 0,8852\dots^h \\ h = 2 \text{ en } P = 800 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,8852\dots^2 = 800 \\ b = \frac{800}{0,8852\dots^2} \approx 1021 \end{array}$$

Dus $P = 1021 \cdot 0,885^h$.

b $h = 7,5$ geeft $P = 1021 \cdot 0,885^{7,5} \approx 408$
 Dus de luchtdruk op die hoogte is 408 hPa.

19 Voor de wereldproductie van plastic geldt $g_{39 \text{ jaar}} = \frac{250}{44} = 5,6818\dots$, dus $g_{\text{jaar}} = 5,6818\dots^{\frac{1}{39}} \approx 1,046$.

Dus de toename per jaar is 4,6%.

Voor de hoeveelheid microplastic in de lagen van de bodem geldt $g_{22 \text{ jaar}} = \frac{17}{6} = 2,8333\dots$, dus

$g_{\text{jaar}} = 2,8333\dots^{\frac{1}{22}} \approx 1,048$. Dus de toename per jaar is 4,8%.

Dus de hoeveelheid microplastic in de lagen van de bodem neemt ongeveer met hetzelfde percentage per jaar toe als de wereldwijde productie van plastic.

20 $A = b \cdot g^t$
 $g_{4 \text{ dagen}} = \frac{11}{31} = 0,3548\dots$
 $g_{\text{dag}} = 0,3548\dots^{\frac{1}{4}} = 0,7718\dots$

$$\left. \begin{array}{l} A = b \cdot 0,7718\dots^t \\ t = 3 \text{ en } A = 31 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,7718\dots^3 = 31 \\ b = \frac{31}{0,7718\dots^3} = 67,4\dots \end{array}$$

$60 \text{ uur} = \frac{60}{24} \text{ dag} = 2,5 \text{ dag}$

$t = 2,5$ geeft $A = 67,4\dots \cdot 0,7718\dots^{2,5} \approx 35$

Na 60 uur was de oppervlakte van de wond ongeveer 35 mm².

21 a $2 \cdot 17,32 = 34,64$, dus los op $17,32 \cdot 1,027^t = 34,64$.
 Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 26,01\dots$
 Na 26 jaar is het aantal verdubbeld ten opzichte van 1 januari 2022.
b $2 \cdot 12,53 = 25,06$, dus los op $12,53 \cdot 1,027^t = 25,06$.
 Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 26,01\dots$
 Dus 26 jaar na 1 januari 2010 is dit aantal verdubbeld.

Bladzijde 17

22 a $g_{\text{jaar}} = 1,131$, dus los op $1,131^T = 2$.
 Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $T = 5,630\dots$
 De verdubbelingstijd is 5 jaar en $0,630\dots \cdot 12 \approx 8$ maanden.
b Er geldt $g^{25} = 2$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{25} = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{25}} \approx 1,028$
 Het groeipcentage per jaar is 2,8%.
c $g_{\text{week}} = 0,915$, dus los op $0,915^T = \frac{1}{2}$.
 Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $T = 7,802\dots$
 De halveringstijd is 7 weken en $0,802\dots \cdot 7 \approx 6$ dagen.
d Er geldt $g^{28} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{28} = \frac{1}{2}$ geeft $g = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{28}} \approx 0,976$
 De afname is 2,4% per jaar.

e Er geldt $g^{10} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per uur.

$$g^{10} = \frac{1}{2} \text{ geeft } g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}} = 0,933\dots$$

Los op $0,933\dots^t = 0,1$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 33,219\dots$

Na 33 uur en $0,219\dots \cdot 60 \approx 13$ minuten is nog 10% van de hoeveelheid over.

23 a $g_{\text{jaar}} = 1,032$, dus los op $1,032^T = 2$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $T = 22,0\dots$

De verdubbelingstijd is 22 jaar.

b $g_{10 \text{ jaar}} = 0,986$, dus $g_{\text{jaar}} = 0,986^{\frac{1}{10}} = 0,998\dots$, dus los op $0,998\dots^T = \frac{1}{2}$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $T = 491,6\dots$

De halveringstijd is 492 jaar.

Alternatieve uitwerking

$$g_{10 \text{ jaar}} = 0,986, \text{ dus los op } 0,986\dots^T = \frac{1}{2}.$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $T = 49,16\dots$

De halveringstijd is $10 \cdot 49,16\dots \approx 492$ jaar.

24 a $g_{\text{dag}} = 0,917$, dus los op $0,917^T = \frac{1}{2}$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 7,99\dots$

De halveringstijd is 8 dagen.

b $g_{\text{dag}} = 0,917$, dus los op $0,917^t = 0,1$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 26,57\dots$

Na 27 dagen is nog 10% van de beginhoeveelheid over.

25 Volgens het Nederlandse onderzoek geldt $g^{12} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.

$$g^{12} = \frac{1}{2} \text{ geeft } g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}} = 0,943\dots$$

$$0,943\dots^{27} \approx 0,210$$

Dus een afname van 79,0% in 27 jaar.

Dat is redelijk in overeenstemming met het Duitse onderzoek.

26 a $1,46 \cdot 1,56 \cdot 1,53 \cdot 1,39 \cdot 1,64 \approx 7,9$

$$1,46 \cdot 1,56 \cdot 1,53 \cdot 1,39 \cdot 1,64 \cdot 1,32 \approx 10,5$$

Dus zes dagen na 22 januari was het aantal besmettingsgevallen voor het eerst meer dan tien keer zo groot als op 22 januari.

b Omdat de procentuele toename per dag niet constant is en er dus geen sprake is van exponentiële groei.

c Dan geldt $g^6 = 10$ met g de groeifactor per dag.

$$g^6 = 10 \text{ geeft } g = 10^{\frac{1}{6}} \approx 1,468$$

Het groeipcentage is 46,8% per dag.

d $g_{\text{dag}} = 1,467\dots$, dus los op $1,467\dots^T = 2$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $T = 1,806\dots$

De verdubbelingstijd is $1,806\dots \cdot 24 \approx 43$ uur.

Bladzijde 18

C1 a $N = b \cdot g^t$ met $b = 7500$ en $g = 0,948$ geeft $N = 7500 \cdot 0,948^t$

b Los op $7500 \cdot 0,948^t = 4000$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 11,7\dots$

Dus op 1 september 2022.

C2 a $g_{\text{kwartier}} = 1,032$

$$g_{\text{uur}} = 1,032^4 \approx 1,134$$

De toename is 13,4% per uur.

b $g_{\text{dag}} = 0,235$

$$g_{\text{uur}} = 1,032^{\frac{1}{24}} \approx 0,941$$

De afname is 5,9% per uur.

C3

$$N = b \cdot g^t$$

$$g_{7 \text{ jaar}} = \frac{788}{1726} = 0,4565\dots, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = 0,4565\dots^{\frac{1}{7}} = 0,8940\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,8940\dots^t \\ t = 5 \text{ en } N = 1726 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,8940\dots^5 = 1726 \\ b = \frac{1726}{0,8940\dots^5} \approx 3022 \end{array}$$

$$\text{Dus } N = 3022 \cdot 0,894^t.$$

C4

a $g_{\text{jaar}} = 1,153$, dus los op $1,153^T = 2$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $T = 4,868\dots$

De verdubbelingstijd is 4 jaar en $0,868\dots \cdot 12 \approx 10$ maanden.

b $g_{\text{dag}} = 0,327$, dus los op $0,327^T = \frac{1}{2}$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $T = 0,620\dots$

$$0,620\dots \text{ dagen} = 24 \cdot 0,620\dots = 14,882\dots \text{ uur}$$

De halveringstijd is 14 uur en $0,882\dots \cdot 60 \approx 53$ minuten.

c Er geldt $g^{10} = 2$ met g de groeifactor per jaar.

$$g^{10} = 2 \text{ geeft } g = 2^{\frac{1}{10}} \approx 1,072$$

Het groeipercentage is $7,2\%$ per jaar.

d Er geldt $g^6 = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per uur.

$$g^{24} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,0625, \text{ dus de groeifactor per dag is } 0,0625.$$

De hoeveelheid neemt per dag met $93,8\%$ af.

9.2 Werken met logaritmen

Bladzijde 19

V3

a ${}^3\log(81) = {}^3\log(3^4) = 4$

b ${}^5\log(5) = {}^5\log(5^1) = 1$

c ${}^5\log(1) = {}^5\log(5^0) = 0$

d ${}^2\log\left(\frac{1}{2}\right) = {}^2\log(2^{-1}) = -1$

e ${}^{\frac{1}{2}}\log(2) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right) = -1$

f ${}^3\log\left(\frac{1}{27}\right) = {}^3\log(3^{-3}) = -3$

g ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{8}\right) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = 3$

h ${}^6\log(6\sqrt{6}) = {}^6\log(6^1 \cdot 6^{\frac{1}{2}}) = {}^6\log(6^{\frac{3}{2}}) = 1\frac{1}{2}$

i ${}^3\log\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\right) = {}^3\log(3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^3\log(3^{-\frac{3}{2}}) = -1\frac{1}{2}$

27

a ${}^2\log(8) = 3$

b ${}^3\log(9) = 2$

c ${}^5\log\left(\frac{1}{5}\right) = -1$

Bladzijde 20

28

$$5 + 2^{3x} = 25$$

$$(2^3)^x = 20$$

$$8^x = 20$$

$$x = {}^8\log(20)$$

Bladzijde 21

29

a ${}^3\log(x-1) = 5$

$$x-1 = 3^5$$

$$x-1 = 243$$

$$x = 244$$

b $5 + {}^5\log(x+3) = 7$

$${}^5\log(x+3) = 2$$

$$x+3 = 5^2$$

$$x+3 = 25$$

$$x = 22$$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log(3x+4) = -2$

$$3x+4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$3x+4 = 4$$

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

d $4 - 2 \cdot {}^3\log(x) = 3$

$$2 \cdot {}^3\log(x) = 1$$

$${}^3\log(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

30 a $3^x - 5 = 7$
 $3^x = 12$
 $x = {}^3\log(12)$
b $2^{x-1} = 15$
 $x - 1 = {}^2\log(15)$
 $x = 1 + {}^2\log(15)$

c $1 + 2^x = 17$
 $2^x = 16$
 $x = 4$
d $4 + 3^{x+1} = 25$
 $3^{x+1} = 21$
 $x + 1 = {}^3\log(21)$
 $x = -1 + {}^3\log(21)$

e $11 - 3^{x+1} = 2$
 $3^{x+1} = 9$
 $3^{x+1} = 3^2$
 $x + 1 = 2$
 $x = 1$
f $7 + 4^{2x} = 12$
 $4^{2x} = 5$
 $2x = {}^4\log(5)$
 $x = \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(5)$

31 a $7 + 2^{x-3} = 10$
 $2^{x-3} = 3$
 $x - 3 = {}^2\log(3)$
 $x = 3 + {}^2\log(3)$
b $3 \cdot 5^{2x+1} = 75$
 $5^{2x+1} = 25$
 $5^{2x+1} = 5^2$
 $2x + 1 = 2$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$

c ${}^2\log(3x + 7) = 4$
 $3x + 7 = 2^4$
 $3x + 7 = 16$
 $3x = 9$
 $x = 3$
d $7 \cdot 5^{4-x} - 18 = 3$
 $7 \cdot 5^{4-x} = 21$
 $5^{4-x} = 3$
 $4 - x = {}^5\log(3)$
 $-x = -4 + {}^5\log(3)$
 $x = 4 - {}^5\log(3)$

e $2 + {}^3\log(5 - 4x) = 0$
 ${}^3\log(5 - 4x) = -2$
 $5 - 4x = 3^{-2}$
 $5 - 4x = \frac{1}{9}$
 $-4x = -4\frac{8}{9}$
 $x = 1\frac{2}{9}$
f $2^{3x+1} = 4^{2x}$
 $2^{3x+1} = (2^2)^{2x}$
 $2^{3x+1} = 2^{4x}$
 $3x + 1 = 4x$
 $-x = -1$
 $x = 1$

32 a $3 + 2^{0,4x} = 12$
 $2^{0,4x} = 9$
 $0,4x = {}^2\log(9)$
 $x = 2\frac{1}{2} \cdot {}^2\log(9)$
b ${}^3\log\left(\frac{5}{3x^2 - 2x}\right) = 0$
 $\frac{5}{3x^2 - 2x} = 1$
 $3x^2 - 2x = 5$
 $3x^2 - 2x - 5 = 0$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64$, dus $\sqrt{D} = 8$
 $x = \frac{2+8}{6} = 1\frac{2}{3} \vee x = \frac{2-8}{6} = -1$
c $5^{x+2} = (\sqrt{5})^{x^2-4}$
 $5^{x+2} = (5^{\frac{1}{2}})^{x^2-4}$
 $5^{x+2} = 5^{\frac{1}{2}x^2-2}$
 $x + 2 = \frac{1}{2}x^2 - 2$
 $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x+2)(x-4) = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$

d $2 \cdot 5^{x+1} = 33 - 5^{x+1}$
 $3 \cdot 5^{x+1} = 33$
 $5^{x+1} = 11$
 $x + 1 = {}^5\log(11)$
 $x = -1 + {}^5\log(11)$
e $\frac{1}{3} \cdot 3^x = 3^{2\sqrt{x}-1}$
 $3^{-1} \cdot 3^x = 3^{2\sqrt{x}-1}$
 $3^{x-1} = 3^{2\sqrt{x}-1}$
 $x - 1 = 2\sqrt{x} - 1$
 $x = 2\sqrt{x}$
 $x^2 = 4x$
 $x^2 - 4x = 0$
 $x(x - 4) = 0$
 $x = 0 \vee x = 4$
f ${}^2\log(x^2 - 6x + 12) - 5 = -3$
 ${}^2\log(x^2 - 6x + 12) = 2$
 $x^2 - 6x + 12 = 2^2$
 $x^2 - 6x + 8 = 0$
 $(x-2)(x-4) = 0$
 $x = 2 \vee x = 4$

33 a $3^{x+2} + 3^x = 90$
 $3^x \cdot 3^2 + 3^x = 90$
 $9 \cdot 3^x + 3^x = 90$
 $10 \cdot 3^x = 90$
 $3^x = 9$
 $3^x = 3^2$
 $x = 2$

b $2^{1+2x} = 4^x + 6$
 $2^1 \cdot 2^{2x} = (2^2)^x + 6$
 $2 \cdot 2^{2x} = 2^{2x} + 6$
 $2^{2x} = 6$
 $2x = {}^2\log(6)$
 $x = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(6)$

34 a $y = 3^{x-1}$
 $3^{x-1} = y$
 $x - 1 = {}^3\log(y)$
 $x = 1 + {}^3\log(y)$

b $y = {}^2\log(x - 5)$
 ${}^2\log(x - 5) = y$
 $x - 5 = 2^y$
 $x = 2^y + 5$

Bladzijde 22

35 De regel $g^A = B$ geeft $A = {}^g\log(B)$ bij $3^{2x-1} = y - 8$ geeft $2x - 1 = {}^3\log(y - 8)$.
 De regel ${}^g\log(B) = A$ geeft $B = g^A$ bij ${}^2\log(5t + 3) = N + 4$ geeft $5t + 3 = 2^{N+4}$.

36 a $y = 2^{3x-4}$
 $2^{3x-4} = y$
 $3x - 4 = {}^2\log(y)$
 $3x = 4 + {}^2\log(y)$
 $x = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(y)$
b $y = 8 + 3^{x-2}$
 $3^{x-2} = y - 8$
 $x - 2 = {}^3\log(y - 8)$
 $x = 2 + {}^3\log(y - 8)$

c $y = 2 \cdot 5^{0,1x}$
 $2 \cdot 5^{0,1x} = y$
 $5^{0,1x} = \frac{1}{2}y$
 $0,1x = {}^5\log(\frac{1}{2}y)$
 $x = 10 \cdot {}^5\log(\frac{1}{2}y)$
d $y = 20 + 5 \cdot 3^{0,4x}$
 $5 \cdot 3^{0,4x} = y - 20$
 $3^{0,4x} = \frac{1}{5}y - 4$
 $0,4x = {}^3\log(\frac{1}{5}y - 4)$
 $x = 2\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(\frac{1}{5}y - 4)$

37 a $y = {}^3\log(x) + 2$
 ${}^3\log(x) = y - 2$
 $x = 3^{y-2}$
b $y = \frac{1}{5} \cdot {}^2\log(3x)$
 ${}^2\log(3x) = 5y$
 $3x = 2^{5y}$
 $x = \frac{1}{3} \cdot 2^{5y}$

c $y = {}^5\log(2x + 1)$
 ${}^5\log(2x + 1) = y$
 $2x + 1 = 5^y$
 $2x = -1 + 5^y$
 $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 5^y$
d $y = 2 \cdot \frac{1}{2}\log(5 - 3x) - 1$
 $2 \cdot \frac{1}{2}\log(5 - 3x) = y + 1$
 $\frac{1}{2}\log(5 - 3x) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$
 $5 - 3x = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}}$
 $-3x = -5 + (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}}$
 $x = 1\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}}$

38 a $N = 10 \cdot 5^{3t-1}$
 $5^{3t-1} = \frac{1}{10}N$
 $3t - 1 = {}^5\log(\frac{1}{10}N)$
 $3t = 1 + {}^5\log(\frac{1}{10}N)$
 $t = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot {}^5\log(\frac{1}{10}N)$
b $N = {}^3\log(2t + 1) - 6$
 ${}^3\log(2t + 1) = N + 6$
 $2t + 1 = 3^{N+6}$
 $2t = -1 + 3^{N+6}$
 $t = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^{N+6}$

c $N = 100 + 2^{0,2t-1}$
 $2^{0,2t-1} = N - 100$
 $0,2t - 1 = {}^2\log(N - 100)$
 $0,2t = 1 + {}^2\log(N - 100)$
 $t = 5 + 5 \cdot {}^2\log(N - 100)$
d $N = 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\log(2(t + 3))$
 $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\log(2(t + 3)) = -N + 4$
 $\frac{1}{2}\log(2(t + 3)) = -\frac{1}{2}N + 6$
 $2(t + 3) = (\frac{1}{2})^{-1\frac{1}{2}N + 6}$
 $t + 3 = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^{-1\frac{1}{2}N + 6}$
 $t = -3 + (\frac{1}{2})^{-1\frac{1}{2}N + 7}$

39 a $A = 500 - 50 \cdot 1,75^{B-2,5}$
 $50 \cdot 1,75^{B-2,5} = -A + 500$
 $1,75^{B-2,5} = -\frac{1}{50}A + 10$
 $B - 2,5 = {}^{1,75}\log(-\frac{1}{50}A + 10)$
 $B = 2,5 + {}^{1,75}\log(-\frac{1}{50}A + 10)$

b $C = 20 + 0,4 \cdot {}^3\log(2 - 8S)$
 $0,4 \cdot {}^3\log(2 - 8S) = C - 20$
 ${}^3\log(2 - 8S) = 2\frac{1}{2}C - 50$
 $2 - 8S = 3^{2\frac{1}{2}C - 50}$
 $-8S = -2 + 3^{2\frac{1}{2}C - 50}$
 $S = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdot 3^{2\frac{1}{2}C - 50}$

c $N = 50 \cdot 2^{4t-1}$
 $N = 50 \cdot (4^{\frac{1}{2}})^{4t-1}$
 $N = 50 \cdot 4^{2t-\frac{1}{2}}$
 $4^{2t-\frac{1}{2}} = \frac{1}{50}N$
 $2t - \frac{1}{2} = {}^4\log(\frac{1}{50}N)$
 $2t = \frac{1}{2} + {}^4\log(\frac{1}{50}N)$
 $t = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(\frac{1}{50}N)$

d $y = 3 - {}^2\log(4x - 1)$
 ${}^2\log(4x - 1) = -y + 3$
 $4x - 1 = 2^{-y+3}$
 $4x = 1 + 2^{-y+3}$
 $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2^{-y+3}$
 $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2^{-y} \cdot 2^3$
 $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot (2^{-1})^y \cdot 8$
 $x = \frac{1}{4} + 2 \cdot (\frac{1}{2})^y$
Dus $a = \frac{1}{4}$, $b = 2$ en $g = \frac{1}{2}$.

40 a $A = {}^2\log(B + 5)$ geeft $B + 5 = 2^A$, dus $B = 2^A - 5$.
b $A = 3C - 12$ invullen bij $B = 2^A - 5$ geeft $B = 2^{3C-12} - 5$.

Bladzijde 23

41 a $A = {}^3\log(B - 1)$ geeft $B - 1 = 3^A$, dus $B = 3^A + 1$.
 $A = 2C + 6$ invullen bij $B = 3^A + 1$ geeft $B = 3^{2C+6} + 1$.
b $P = 2^Q + 3$ geeft $2^Q = P - 3$, dus $Q = {}^2\log(P - 3)$.
 $P = 5R - 4$ invullen bij $Q = {}^2\log(P - 3)$ geeft $Q = {}^2\log(5R - 4 - 3)$, dus $Q = {}^2\log(5R - 7)$.
c $N = {}^2\log(\frac{t}{t+5})$ geeft $\frac{t}{t+5} = 2^N$ oftewel $t = (t+5) \cdot 2^N$, dus $t = t \cdot 2^N + 5 \cdot 2^N$.
 $t - t \cdot 2^N = 5 \cdot 2^N$ geeft $t(1 - 2^N) = 5 \cdot 2^N$, dus $t = \frac{5 \cdot 2^N}{1 - 2^N}$.
 $N = 3p$ invullen bij $t = \frac{5 \cdot 2^N}{1 - 2^N}$ geeft $t = \frac{5 \cdot 2^{3p}}{1 - 2^{3p}}$.

42 a $N = 20 \cdot 3^t - 100$ geeft $20 \cdot 3^t = N + 100$, dus $3^t = 0,05N + 5$ en dit geeft $t = {}^3\log(0,05N + 5)$.
 $N = 50q + 250$ invullen bij $t = {}^3\log(0,05N + 5)$ geeft $t = {}^3\log(0,05(50q + 250) + 5)$
 $t = {}^3\log(2,5q + 12,5 + 5)$
 $t = {}^3\log(2,5q + 17,5)$

b $y = {}^3\log(\frac{x}{10-x})$ geeft $\frac{x}{10-x} = 3^y$ oftewel $x = (10-x) \cdot 3^y$, dus $x = 10 \cdot 3^y - x \cdot 3^y$.
 $x + x \cdot 3^y = 10 \cdot 3^y$ geeft $x(1 + 3^y) = 10 \cdot 3^y$, dus $x = \frac{10 \cdot 3^y}{1 + 3^y}$.
 $y = 5z - 20$ invullen bij $x = \frac{10 \cdot 3^y}{1 + 3^y}$ geeft $x = \frac{10 \cdot 3^{5z-20}}{1 + 3^{5z-20}}$.

43 a Los op $3^x = 8$.
Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x \approx 1,893$.
b $3^x = 8$ exact oplossen geeft $x = {}^3\log(8)$.
Dus ${}^3\log(8) \approx 1,893$.

- 44 a ${}^3\log(5) \approx 1,46$ d ${}^{\frac{1}{3}}\log(10) + \log(\frac{1}{3}) \approx -2,57$
 b ${}^{\frac{1}{7}}\log(18) \approx -1,49$ e $3 \cdot {}^2\log(7) \approx 8,42$
 c ${}^2\log(20) - {}^2\log(6) \approx 1,74$ f $\frac{5}{{}^4\log(12)} \approx 2,79$

Bladzijde 24

- 45 a $t = 30$ geeft $N = \log(30) + 150 \approx 151,48$
 b $a = 12$ geeft $P = 11,8 - \frac{120}{{}^5\log(12)} \approx -65,92$
 c $K = 5 \cdot 10^{16}$ geeft $0,25q - 30 = \log(5 \cdot 10^{16})$
 $0,25q - 30 = 16,698\dots$
 $0,25q = 46,698\dots$
 $q \approx 186,80$
 d $x = 12$ geeft ${}^2\log(y) = {}^3\log(12) - 1,5$
 ${}^2\log(y) = 0,761\dots$
 $y = 2^{0,761\dots} \approx 1,70$
 $y = 12$ geeft ${}^2\log(12) = {}^3\log(x) - 1,5$
 ${}^3\log(x) = {}^2\log(12) + 1,5$
 ${}^3\log(x) = 5,08\dots$
 $x = 3^{5,08\dots} \approx 266,77$
 e $L = 12,4$ en $M = 100$ geeft $\log(100) + 3 \cdot \log(T) + 11 = 12,4$
 $2 + 3 \cdot \log(T) + 11 = 12,4$
 $3 \cdot \log(T) = -0,6$
 $\log(T) = -0,2$
 $T = 10^{-0,2} \approx 0,63$

- 46 a $h = 29$ geeft $m = 37 \cdot \log(29) + 31 \approx 85$
 Hierbij hoort een mensenleeftijd van 85 jaar.
 b Los op $37 \cdot \log(h) + 31 = 7h$.
 Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $h = 9,62\dots$
 Dus vanaf $h = 10$.
 c $m = 37 \cdot \log(h) + 31$
 $37 \cdot \log(h) = m - 31$
 $\log(h) = \frac{1}{37}m - \frac{31}{37}$
 $h = 10^{\frac{1}{37}m - \frac{31}{37}}$
 $h \approx 10^{0,027m - 0,838}$
 Dus $h = 10^{0,027m - 0,838}$.
 d $m = 75$ geeft $h = 10^{0,027 \cdot 75 - 0,838} \approx 15,4$
 Dus een hondenleeftijd van 15 jaar.

Bladzijde 25

- 47 a $C = b \cdot g^t$ met $b = 316$ en $g = \left(\frac{413}{316}\right)^{\frac{1}{62}} = 1,004\dots$ geeft $C = 316 \cdot 1,004\dots^t$.
 $t = 82$ geeft $C = 316 \cdot 1,004\dots^{82} \approx 450$ en $F = 12,32 \cdot \log\left(\frac{450}{316}\right) \approx 1,89$.
 Dus in 2040 is de hoeveelheid CO_2 in de atmosfeer 450 ppm en is de bijbehorende stralingsforcering 1,89 watt per m^2 .
 b $F = 0,55$ geeft $12,32 \cdot \log\left(\frac{C}{316}\right) = 0,55$
 $\log\left(\frac{C}{316}\right) = 0,0446\dots$
 $\frac{C}{316} = 10^{0,0446\dots}$
 $C = 316 \cdot 10^{0,0446\dots} = 350,21\dots$
 Los op $316 \cdot 1,004\dots^t = 350,21\dots$
 $1,004\dots^t = 1,108\dots$
 $t = {}^{1,004\dots}\log(1,108\dots) \approx 23,8$
 Dus in 1982.

- 48 a** $\log(N) = 3$ geeft $N = 10^3 = 1000$.
Dus bij $t = 2$ hoort $N = 1000$.
- b** Je leest af: bij $t = 4$ hoort $\log(N) = 2$.
 $\log(N) = 2$ geeft $N = 10^2 = 100$.
Dus bij $t = 4$ hoort $N = 100$.
- c** Je leest af: bij $t = 3$ hoort $\log(N) = 2,5$.
 $\log(N) = 2,5$ geeft $N = 10^{2,5} \approx 316$.
Dus bij $t = 3$ hoort $N \approx 316$.

Bladzijde 26

- 49** De formule is $\log(N) = -\frac{2}{3}t + 4\frac{2}{3}$.
 $t = 3$ geeft $\log(N) = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 4\frac{2}{3}$
 $\log(N) = 2\frac{2}{3}$
 $N = 10^{2\frac{2}{3}} \approx 460$
 $N = 150$ geeft $-\frac{2}{3}t + 4\frac{2}{3} = \log(150)$
 $-\frac{2}{3}t = -4\frac{2}{3} + \log(150)$
 $-\frac{2}{3}t = -2,49\dots$
 $t \approx 3,7$

Bladzijde 27

- 50 a** Lees af: $P = 4$ geeft $\log(Q) \approx 2,5$, dus $Q \approx 10^{2,5} \approx 316$.
- b** $Q = 3000$ geeft $\log(Q) = \log(3000) \approx 3,5$
Lees af: $\log(Q) = 3,5$ geeft $P \approx 8,0$.
- c** De lijn gaat door de punten $(2, 2)$ en $(10, 4)$.
 $\log(Q) = m \cdot P + n$ met $m = \frac{\Delta \log(Q)}{\Delta P} = \frac{4 - 2}{10 - 2} = \frac{1}{4}$
 $\log(Q) = \frac{1}{4}P + n$
door $(10, 4)$ $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot 10 + n = 4 \\ 2\frac{1}{2} + n = 4 \\ n = 1\frac{1}{2} \end{array} \right\}$
Dus $m = \frac{1}{4}$ en $n = 1\frac{1}{2}$.

- 51 a** Bij 1990 hoort $T = 10^6$ en bij 2010 hoort $T = 10^9$.
20 jaar komt overeen met 240 maanden.
 $g_{240 \text{ maanden}} = \frac{10^9}{10^6} = 1000$ geeft $g_{\text{maand}} = 1000^{\frac{1}{240}} \approx 1,0292$
Dus in twee decimalen is dit groeipercentage 2,92%.
- b** $1,0292^T = 2$ geeft $T = {}^{1,0292}\log(2) \approx 24$
Dus in 24 maanden.
- c** Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1990.
 $\log(T) = at + b$
 $a = \frac{\Delta \log(T)}{\Delta t} = \frac{9 - 6}{20} = 0,15$
 $\log(T) = 0,15t + b$
 $t = 0$ en $\log(T) = 6$ $\left. \begin{array}{l} \log(T) = 0,15t + b \\ \log(T) = 0,15t + 6 \end{array} \right\}$
Bij 2025 hoort $t = 2025 - 1990 = 35$.
Dit geeft $\log(T) = 0,15 \cdot 35 + 6 = 11,25$, dus $T = 10^{11,25} \approx 1,8 \cdot 10^{11}$.
Dus een voorspelling van het aantal transistoren per microprocessor in 2025 is $1,8 \cdot 10^{11}$.

Bladzijde 28

- 52 a** Bij de zwaarste walvis in de figuur is $\log(E) \approx 6,1$.
Dit geeft $E = 10^{6,1} \approx 1\,258\,925$.
Dus de zwaarste walvis in de figuur krijgt per hap voedsel ongeveer 1 259 000 kJ energie binnen.
- b** $\log(G) = 5$ geeft $G = 10^5 = 100\,000$
 $\log(G) = 3,8$ geeft $G = 10^{3,8} \approx 6310$
Dus voor de baleinwalvissen is het verschil ongeveer 93 690 kg.
 $\log(G) = 4,3$ geeft $G = 10^{4,3} \approx 19\,950$
 $\log(G) = 1,6$ geeft $G = 10^{1,6} \approx 40$
Dus voor de tandwalvissen is het verschil ongeveer 19 910 kg.
Het grootste verschil in gewicht is dus bij de baleinwalvissen.
- c** $a = \frac{\Delta \log(E_B)}{\Delta \log(G_B)} = \frac{6,1 - 3,8}{5,0 - 3,8} = 1,916\dots$
 $\log(E_B) = 1,916\dots \cdot \log(G_B) + b$
door $(3,8; 3,8)$ $\left. \begin{array}{l} 1,916\dots \cdot 3,8 + b = 3,8 \\ 7,283\dots + b = 3,8 \\ b = -3,483\dots \end{array} \right\}$
Dus $a \approx 1,92$ en $b \approx -3,48$.
- d** Het lijnstuk door de punten $(2; 1,9)$ en $(4; 3,4)$.
 $\log(E_T) = a \cdot \log(G_T) + b$
 $a = \frac{\Delta \log(E_T)}{\Delta \log(G_T)} = \frac{3,4 - 1,9}{4 - 2} = 0,75$
 $\log(E_T) = 0,75 \cdot \log(G_T) + b$
door $(4; 3,4)$ $\left. \begin{array}{l} 0,75 \cdot 4 + b = 3,4 \\ 3 + b = 3,4 \\ b = 0,4 \end{array} \right\}$
Dus $\log(E_T) = 0,75 \cdot \log(G_T) + 0,4$.

- 53** De grafiek van E_T is afnemend stijgend.
De grafiek van E_B is toenemend stijgend.
Dus tandwalvissen hebben te maken met teruglopende opbrengsten per hap ten opzichte van hun lichaamsgewicht en baleinwalvissen halen steeds meer energie per hap binnen per kilogram lichaamsgewicht.

Bladzijde 29

- 54 a** Lees af: $M = 2$ geeft $\log(E) \approx 4,4$, dus $E \approx 10^{4,4} \approx 25\,000$.
- b** Lees af: $M = 3,6$ geeft $\log(E) \approx 6,8$, dus er kwam ongeveer $10^{6,8} \approx 6 \cdot 10^6$ kJ energie vrij.
- c** $E = 9,3 \cdot 10^{15}$ geeft $\log(E) = \log(9,3 \cdot 10^{15}) \approx 16,0$
Lees af: $\log(E) = 16,0$ geeft $M \approx 9,8$.
- d** $E = 330\,000$ geeft $\log(E) = \log(330\,000) \approx 5,5$
Lees af: $\log(E) = 5,5$ geeft $M \approx 2,8$.
Dit komt overeen met 2,8 op de schaal van Richter.
- e** Neem bijvoorbeeld $E = 10^{10}$ en $E = 10^6 \cdot 10^{10} = 10^{16}$.
 $E = 10^{10}$ geeft $\log(E) = \log(10^{10}) = 10$, aflezen geeft $M \approx 5,8$.
 $E = 10^{16}$ geeft $\log(E) = \log(10^{16}) = 16$, aflezen geeft $M \approx 9,8$.
Dus het klopt voor $E = 10^{10}$ en $E = 10^{16}$.
Zie de figuur. Als $\log(E)$ met 6 toeneemt, neemt M met 4 toe.
Dus Herman heeft gelijk.
- f** Uit het voorgaande volgt: als M met 2 toeneemt, dan neemt $\log(E)$ met 3 toe.
Dus de hoeveelheid energie die bij de tweede beving vrijkwam was $10^3 = 1000$ keer zo groot als bij de eerste beving.
- g** Door $(10; 5,8)$ en $(16; 9,8)$ geeft $p = \frac{\Delta M}{\Delta \log(E)} = \frac{9,8 - 5,8}{16 - 10} = 0,666\dots$
 $M = 0,666\dots \cdot \log(E) + q$
door $(10; 5,8)$ $\left. \begin{array}{l} 0,666\dots \cdot 10 + q = 5,8 \\ 6,66\dots + q = 5,8 \\ q \approx -0,87 \end{array} \right\}$
Dus $p \approx 0,67$ en $q \approx -0,87$.

55 a $B = 0,035 \cdot \left(\frac{H}{D}\right)^{0,79} \cdot D^{2,98}$

$$B = 0,035 \cdot (H \cdot D^{-1})^{0,79} \cdot D^{2,98}$$

$$B = 0,035 \cdot H^{0,79} \cdot D^{-0,79} \cdot D^{2,98}$$

$$B = 0,035 \cdot H^{0,79} \cdot D^{2,19}$$

b $H = 26,4$ en $D = 43,6$ geeft $B = 0,035 \cdot 26,4^{0,79} \cdot 43,6^{2,19} \approx 1810$

Het bovengrondse gewicht is ongeveer 1810 kg.

c $G = 150$ geeft $\log(G) \approx 2,2$

Lees af: bij $\log(G) \approx 2,2$ hoort $\log(D) \approx 1,6$, dus $D = 10^{1,6} \approx 40$.

De diameter op borsthoogte van de stam is ongeveer 40 cm.

d De lijn gaat door de punten $(1; 0,9)$ en $(2, 3)$.

$$\log(G) = a \cdot \log(D) + b$$

$$a = \frac{\Delta \log(G)}{\Delta \log(D)} = \frac{3 - 0,9}{2 - 1} = 2,1$$

$$\left. \begin{array}{l} \log(G) = 2,1 \cdot \log(D) + b \\ \text{door } (2, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2,1 \cdot 2 + b = 3 \\ 4,2 + b = 3 \\ b = -1,2 \end{array}$$

$$\text{Dus } \log(G) = 2,1 \cdot \log(D) - 1,2.$$

e $H = 14$ en $D = 17$ geeft $B = 0,035 \cdot 14^{0,79} \cdot 17^{2,19} = 139,3...$

$$D = 17 \text{ geeft } \log(G) = 2,1 \cdot \log(17) - 1,2 = 1,383...$$

$$\text{Dus } G = 10^{1,383...} = 24,2...$$

Zo'n tropische beuk bevat $0,33 \cdot (139,3... + 24,2...) = 53,9...$ kg koolstof.

Dat betekent dat er $3,67 \cdot 53,9... = 198,11...$ kg CO_2 uit de atmosfeer is gehaald.

Dus de toerist moet $\frac{2700}{198,11...} \approx 14$ tropische beuken laten planten.

Bladzijde 31

C5 a ${}^2\log(x-5) = 3$
 $x-5 = 2^3$
 $x-5 = 8$
 $x = 13$

b ${}^5\log(2x) + 1 = 0$
 ${}^5\log(2x) = -1$
 $2x = 5^{-1}$
 $2x = \frac{1}{5}$
 $x = \frac{1}{10}$

c $5 \cdot {}^3\log(2x+1) = 10$
 ${}^3\log(2x+1) = 2$
 $2x+1 = 3^2$
 $2x+1 = 9$
 $2x = 8$
 $x = 4$

C6 a $5^x + 2 = 11$
 $5^x = 9$
 $x = {}^5\log(9)$
b $3^{x+1} = 10$
 $x+1 = {}^3\log(10)$
 $x = -1 + {}^3\log(10)$

c $3^{x+1} = 9$
 $3^{x+1} = 3^2$
 $x+1 = 2$
 $x = 1$
d $7 + 2^{x-1} = 13$
 $2^{x-1} = 6$
 $x-1 = {}^2\log(6)$
 $x = 1 + {}^2\log(6)$

e $5 \cdot 2^{3x} = 50$
 $2^{3x} = 10$
 $3x = {}^2\log(10)$
 $x = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(10)$
f $41 - 6^{3x} = 5$
 $6^{3x} = 36$
 $6^{3x} = 6^2$
 $3x = 2$
 $x = \frac{2}{3}$

C7 a $y = 5 + 2^{x-3}$
 $2^{x-3} = y-5$
 $x-3 = {}^2\log(y-5)$
 $x = 3 + {}^2\log(y-5)$

b $N = -3 + {}^2\log(t-4)$
 ${}^2\log(t-4) = N+3$
 $t-4 = 2^{N+3}$
 $t = 4 + 2^{N+3}$

C8 $t = 43$ geeft $\log(N) = {}^3\log(43) - 1,7$

$$\log(N) = 1,723\dots$$

$$N = 10^{1,723\dots} \approx 52,9$$

$N = 85$ geeft ${}^3\log(t) - 1,7 = \log(85)$

$${}^3\log(t) = 1,7 + \log(85)$$

$${}^3\log(t) = 3,629\dots$$

$$t = 3^{3,629\dots} \approx 53,9$$

C9 **a** Lees af: $t = 10$ geeft $\log(M) = 2,5$, dus $M = 10^{2,5} \approx 316$.

b $M = 32$ geeft $\log(M) = \log(32) \approx 1,5$

Lees af: $\log(M) = 1,5$ geeft $t \approx 20$.

c Gebruik de punten $(5, 3)$ en $(25, 1)$

$$p = \frac{\Delta \log(M)}{\Delta t} = \frac{1 - 3}{25 - 5} = -\frac{1}{10}$$

$$\left. \begin{array}{l} \log(M) = -\frac{1}{10}p + q \\ \text{door } (5, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{10} \cdot 5 + q = 3 \\ -\frac{1}{2} + q = 3 \\ q = 3\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $p = -\frac{1}{10}$ en $q = 3\frac{1}{2}$.

9.3 Rekenregels voor logaritmen

Bladzijde 32

56 De beweringen II, III, V en VIII zijn waar.

Bladzijde 33

57 **a** $p \cdot {}^s\log(a) = {}^s\log(a^p)$ en ${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$

b Uit ${}^s\log(g^a) = a$ volgt $4 = \log(10^4) = \log(10\,000)$ en uit $p \cdot {}^s\log(a) = {}^s\log(a^p)$ volgt $3 \cdot \log(2) = \log(2^3)$.

c $y = {}^2\log(804x) = {}^2\log(4 \cdot 201x) = {}^2\log(4) + {}^2\log(201x) = 2 + {}^2\log(201x)$

58 **a** $\frac{1}{10^{0,30}} = 0,5011\dots$, dus $K = \log(0,501M^{3,25})$.

b ${}^2\log(96) = 6,5849\dots$, dus $N = 6,585 + 3 \cdot {}^2\log(x)$.

Bladzijde 34

59 **a** ${}^2\log(6) + {}^2\log(10) = {}^2\log(60)$

b ${}^3\log(30) - {}^3\log(6) = {}^3\log(5)$

c $2 \cdot {}^5\log(3) + {}^5\log(\frac{1}{2}) = {}^5\log(3^2) + {}^5\log(\frac{1}{2}) = {}^5\log(9) + {}^5\log(\frac{1}{2}) = {}^5\log(4\frac{1}{2})$

d $\log(50) - 2 \cdot \log(5) = \log(50) - \log(5^2) = \log(50) - \log(25) = \log(2)$

60 **a** $4 + {}^2\log(3) = {}^2\log(16) + {}^2\log(3) = {}^2\log(48)$

b $-2 + {}^3\log(72) = {}^3\log(\frac{1}{9}) + {}^3\log(72) = {}^3\log(8)$

c ${}^2\log(12) - {}^3\log(9) = {}^2\log(12) - 2 = {}^2\log(12) - {}^2\log(4) = {}^2\log(3)$

d $\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(16) + \frac{1}{2}\log(8) = {}^3\log(16^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\log((\frac{1}{2})^{-3}) = {}^3\log(4) - 3 = {}^3\log(4) - {}^3\log(27) = {}^3\log(\frac{4}{27})$

61 **a** $\frac{1}{2}\log(15) - 4 \cdot \frac{1}{2}\log(3) = \frac{1}{2}\log(15) - \frac{1}{2}\log(3^4) = \frac{1}{2}\log(15) - \frac{1}{2}\log(81) = \frac{1}{2}\log(\frac{15}{81}) = \frac{1}{2}\log(\frac{5}{27})$

b $-2 \cdot {}^4\log(6) + {}^4\log(12) = {}^4\log(6^{-2}) + {}^4\log(12) = {}^4\log(\frac{1}{36}) + {}^4\log(12) = {}^4\log(\frac{12}{36}) = {}^4\log(\frac{1}{3})$

c $3 - \frac{1}{2}\log(10) = \frac{1}{2}\log(\frac{1}{8}) - \frac{1}{2}\log(10) = \frac{1}{2}\log(\frac{1}{80})$

d $\log(500) - {}^5\log(125) = \log(500) - 3 = \log(500) - \log(1000) = \log(\frac{1}{2})$

- 62** a $y = \log(600x) = \log(100 \cdot 6x) = \log(100) + \log(6x) = 2 + \log(6x)$
 b $y = {}^2\log(24x) = {}^2\log(8 \cdot 3x) = {}^2\log(8) + {}^2\log(3x) = 3 + {}^2\log(3x)$
 c $y = 4 + {}^3\log(54x) = 4 + {}^3\log(27 \cdot 2x) = 4 + {}^3\log(27) + {}^3\log(2x) = 4 + 3 + {}^3\log(2x) = 7 + {}^3\log(2x)$

- 63** a $P = 1,4 \cdot {}^2\log(Q) + 3$
 $P = {}^2\log(Q^{1,4}) + {}^2\log(8)$
 $P = {}^2\log(8Q^{1,4})$
 b $N = {}^3\log(81x^2)$
 $N = {}^3\log(81) + {}^3\log(x^2)$
 $N = 4 + 2 \cdot {}^3\log(x)$
 c $V = 3,5 + {}^5\log(1,2a)$
 $V = 3,5 + \frac{\log(1,2a)}{\log(5)}$
 $V = 3,5 + \frac{1}{\log(5)} \cdot \log(1,2a)$
 $V \approx 3,5 + 1,43 \cdot \log(1,2a)$
 Dus $V = 3,5 + 1,43 \cdot \log(1,2a)$.

Bladzijde 35

- 64** a $N = 2,3 - 0,7 \cdot \log(Q)$
 $N = \log(10^{2,3}) - \log(Q^{0,7})$
 $N = \log\left(\frac{10^{2,3}}{Q^{0,7}}\right)$
 $N \approx \log(200Q^{-0,7})$
 Dus $N = \log(200Q^{-0,7})$.
 b $A = \log\left(\frac{150}{B^3}\right)$
 $A = \log(150) - \log(B^3)$
 $A \approx 2,18 - 3 \cdot \log(B)$
 Dus $A = 2,18 - 3 \cdot \log(B)$.
 c $T = {}^{1,4}\log(8,3t) - 2,7$
 $T = {}^{1,4}\log(8,3) + {}^{1,4}\log(t) - 2,7$
 $T = {}^{1,4}\log(8,3) - 2,7 + \frac{\log(t)}{\log(1,4)}$
 $T = {}^{1,4}\log(8,3) - 2,7 + \frac{1}{\log(1,4)} \cdot \log(t)$
 $T \approx 3,59 + 6,84 \cdot \log(t)$
 Dus $T = 3,59 + 6,84 \cdot \log(t)$.

- 65** a $y = {}^2\log(48x)$
 $y = {}^2\log(16 \cdot 3x)$
 $y = {}^2\log(16) + {}^2\log(3x)$
 $y = 4 + {}^2\log(3x)$
 b $N = \log(300p) - 1$
 $N = \log(100 \cdot 3p) - 1$
 $N = \log(100) + \log(3p) - 1$
 $N = 2 + \log(3p) - 1$
 $N = 1 + \log(3p)$
 c $R = 4 \cdot {}^3\log(54q)$
 $R = 4 \cdot {}^3\log(27 \cdot 2q)$
 $R = 4 \cdot ({}^3\log(27) + {}^3\log(2q))$
 $R = 4 \cdot (3 + {}^3\log(2q))$
 $R = 12 + 4 \cdot {}^3\log(2q)$
 d $P = {}^2\log(96s) + {}^2\log(48s)$
 $P = {}^2\log(32 \cdot 3s) + {}^2\log(16 \cdot 3s)$
 $P = {}^2\log(32) + {}^2\log(3s) + {}^2\log(16) + {}^2\log(3s)$
 $P = 5 + {}^2\log(3s) + 4 + {}^2\log(3s)$
 $P = 9 + 2 \cdot {}^2\log(3s)$

66 a $W = 4,5 + 2,6 \cdot {}^2\log(N) - {}^2\log(P)$
 $W = {}^2\log(2^{4,5}) + {}^2\log(N^{2,6}) - {}^2\log(P)$

$$W = {}^2\log\left(2^{4,5} \cdot \frac{N^{2,6}}{P}\right)$$

$$W \approx {}^2\log\left(22,63 \cdot \frac{N^{2,6}}{P}\right)$$

$$\text{Dus } W = {}^2\log\left(22,63 \cdot \frac{N^{2,6}}{P}\right).$$

b $G = 2 \cdot \log(T) - 1,2 \cdot \log(Q) + 3,2$
 $G = \log(T^2) + \log(Q^{-1,2}) + \log(10^{3,2})$
 $G = \log(10^{3,2} T^2 Q^{-1,2})$
 $G \approx \log(1585 T^2 Q^{-1,2})$
Dus $G = \log(1585 T^2 Q^{-1,2})$.

67 a $Q = 10^{0,4R}$ invullen bij $P = {}^2\log(Q)$ geeft $P = {}^2\log(10^{0,4R}) = 0,4R \cdot {}^2\log(10) = 0,4 \cdot {}^2\log(10) \cdot R$.
Dus $a = 0,4 \cdot {}^2\log(10) \approx 1,33$.

b $B = (\frac{1}{2})^C$ invullen bij $A = 5 \cdot {}^3\log(B)$ geeft $A = 5 \cdot {}^3\log((\frac{1}{2})^C) = 5C \cdot {}^3\log(\frac{1}{2}) = 5 \cdot {}^3\log(\frac{1}{2}) \cdot C$.
Dus $p = 5 \cdot {}^3\log(\frac{1}{2}) \approx -3,15$.

68 a $V = 5 \cdot {}^2\log(U)$ geeft ${}^2\log(U) = 0,2V$, dus $U = 2^{0,2V}$.
 $U = 2^{0,2V}$ invullen bij $W = 3 \cdot \log(U)$ geeft
 $W = 3 \cdot \log(2^{0,2V}) = 3 \cdot 0,2V \cdot \log(2) = 0,6 \cdot \log(2) \cdot V \approx 0,18V$.
Dus $W = 0,18V$.

b $x = 2 \cdot {}^5\log(z)$ geeft ${}^5\log(z) = 0,5x$, dus $z = 5^{0,5x}$.
 $z = 5^{0,5x}$ invullen bij $y = 3 \cdot {}^2\log(z)$ geeft
 $y = 3 \cdot {}^2\log(5^{0,5x}) = 3 \cdot 0,5x \cdot {}^2\log(5) = 1,5 \cdot {}^2\log(5) \cdot x \approx 3,48x$.
Dus $y = 3,48x$.

69 a $z = 50 \cdot (\frac{2}{3})^x$ invullen bij $y = 4 \cdot {}^5\log(z)$ geeft
 $y = 4 \cdot {}^5\log(50 \cdot (\frac{2}{3})^x) = 4 \cdot ({}^5\log(50) + {}^5\log((\frac{2}{3})^x)) = 4 \cdot {}^5\log(50) + 4 \cdot {}^5\log((\frac{2}{3})^x) = 4 \cdot {}^5\log(50) + 4 \cdot x \cdot {}^5\log(\frac{2}{3}) = 4 \cdot x \cdot {}^5\log(\frac{2}{3}) + 4 \cdot {}^5\log(50)$.
Dus $a = 4 \cdot {}^5\log(\frac{2}{3}) \approx -1,01$ en $b = 4 \cdot {}^5\log(50) \approx 9,72$.

b $R = 2,5 \cdot {}^2\log(A)$ geeft ${}^2\log(A) = 0,4R$, dus $A = 2^{0,4R}$.
 $A = 2^{0,4R}$ invullen bij $F = B \cdot {}^3\log(A)$ geeft $F = B \cdot {}^3\log(2^{0,4R}) = B \cdot 0,4R \cdot {}^3\log(2) = 0,4 \cdot {}^3\log(2) \cdot B \cdot R$.
Dus $c = 0,4 \cdot {}^3\log(2) \approx 0,25$.

Bladzijde 36

70 $\log(x) + \log(5) = 2$
 $\log(5x) = 2$
 $5x = 10^2$
 $5x = 100$
 $x = 20$

71 a ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$

b $x = 1$ geeft ${}^3\log(-1) = 1 - {}^3\log(-3)$, maar een logaritme van een getal kleiner dan of gelijk aan nul bestaat niet.
Dus $x = 1$ voldoet niet.

Bladzijde 37

72 a ${}^3\log(4x) + {}^3\log(5) = 2$
 ${}^3\log(20x) = 2$
 $20x = 9$
 $x = \frac{9}{20}$

b ${}^4\log(x) + {}^4\log(3) = {}^4\log(x+1)$
 ${}^4\log(3x) = {}^4\log(x+1)$
 $3x = x+1$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\text{c } {}^3\log(2x) &= 1 + {}^3\log(x-1) \\
{}^3\log(2x) &= {}^3\log(3) + {}^3\log(x-1) \\
{}^3\log(2x) &= {}^3\log(3(x-1)) \\
2x &= 3(x-1) \\
2x &= 3x-3 \\
-x &= -3 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d } {}^2\log(x+6) &= 4 - {}^2\log(x) \\
{}^2\log(x+6) + {}^2\log(x) &= 4 \\
{}^2\log(x(x+6)) &= 4 \\
x(x+6) &= 16 \\
x^2 + 6x - 16 &= 0 \\
(x-2)(x+8) &= 0 \\
x = 2 \vee x = -8 \\
x = -8 \text{ voldoet niet, dus } x = 2.
\end{aligned}$$

73 a $\log(4x-30) + \log(x) = 2$
 $\log(x(4x-30)) = 2$
 $x(4x-30) = 100$
 $4x^2 - 30x - 100 = 0$
 $2x^2 - 15x - 50 = 0$
 $D = (-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -50 = 625$, dus $\sqrt{D} = 25$
 $x = \frac{15+25}{4} = 10 \vee x = \frac{15-25}{4} = -2\frac{1}{2}$
 $x = -2\frac{1}{2}$ voldoet niet, dus $x = 10$.

b ${}^4\log(3x+4) = 3 - {}^4\log(x)$
 ${}^4\log(3x+4) + {}^4\log(x) = 3$
 ${}^4\log(x(3x+4)) = 3$
 $x(3x+4) = 64$
 $3x^2 + 4x - 64 = 0$
 $D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot -64 = 784$, dus $\sqrt{D} = 28$
 $x = \frac{-4+28}{6} = 4 \vee x = \frac{-4-28}{6} = -5\frac{1}{3}$
 $x = -5\frac{1}{3}$ voldoet niet, dus $x = 4$.

c $\frac{1}{2}\log(x-2) + 3 + \frac{1}{2}\log(x) = 0$
 $\frac{1}{2}\log(x(x-2)) = -3$
 $x(x-2) = 8$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x+2)(x-4) = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$
 $x = -2$ voldoet niet, dus $x = 4$.

d ${}^4\log(x) + {}^4\log(x-1) = {}^4\log(x+3)$
 ${}^4\log(x(x-1)) = {}^4\log(x+3)$
 $x(x-1) = x+3$
 $x^2 - x = x+3$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x+1)(x-3) = 0$
 $x = -1 \vee x = 3$
 $x = -1$ voldoet niet, dus $x = 3$.

74 a $3x+2 > 0$ geeft $x > -\frac{2}{3}$, dus $D_f = \langle -\frac{2}{3}, \rightarrow \rangle$.
 $f(x) = 0$ geeft ${}^2\log(3x+2) = 0$
 $3x+2 = 1$
 $3x = -1$
 $x = -\frac{1}{3}$
 $f(x) \leq 0$ geeft $-\frac{2}{3} < x \leq -\frac{1}{3}$.

b Het domein van g is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
 $f(x) = g(x)$ geeft ${}^2\log(3x+2) = 3 - {}^2\log(x)$
 ${}^2\log(3x+2) + {}^2\log(x) = 3$
 ${}^2\log(x(3x+2)) = 3$
 $3x^2 + 2x = 8$
 $3x^2 + 2x - 8 = 0$
 $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot -8 = 100$, dus $\sqrt{D} = 10$
 $x = \frac{-2+10}{6} = 1\frac{1}{3} \vee x = \frac{-2-10}{6} = -2$
 $x = -2$ voldoet niet, dus $x = 1\frac{1}{3}$.
 $f(x) \leq g(x)$ geeft $0 < x \leq 1\frac{1}{3}$.

c $f(4) = {}^2\log(14)$, dus $A(4, {}^2\log(14))$.
 $g(4) = 3 - {}^2\log(4) = 3 - 2 = 1$, dus $B(4, 1)$.
 $AB = {}^2\log(14) - 1 = {}^2\log(14) - {}^2\log(2) = {}^2\log(7)$

d $y_C = f(p) = {}^2\log(3p+2)$ en $y_D = g(p) = 3 - {}^2\log(p)$
 $y_C - y_D = 1$ geeft ${}^2\log(3p+2) - (3 - {}^2\log(p)) = 1$
 ${}^2\log(3p+2) - 3 + {}^2\log(p) = 1$
 ${}^2\log(p(3p+2)) = 4$
 $3p^2 + 2p = 16$
 $3p^2 + 2p - 16 = 0$
 $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot -16 = 196$, dus $\sqrt{D} = 14$
 $p = \frac{-2+14}{6} = 2 \vee p = \frac{-2-14}{6} = -2\frac{2}{3}$
 $p = -2\frac{2}{3}$ voldoet niet, dus $p = 2$.
Voor $p = 2$ is de lengte van het lijnstuk CD gelijk aan 1.

75 a $y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (-3, 0)} f(x) = 2^{x+3}$

b $y = 2^x \xrightarrow{\times 8 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} f(x) = 8 \cdot 2^x$

Er geldt $8 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 2^x = 2^{x+3}$.

Dus de grafiek van f ontstaat ook uit die van $y = 2^x$ door de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 8.

c $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\times \frac{1}{8} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} g(x) = {}^2\log(8x)$

d $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (0, 3)} g(x) = 3 + {}^2\log(x)$

Er geldt $3 + {}^2\log(x) = {}^2\log(8) + {}^2\log(x) = {}^2\log(8x)$.

Dus de grafiek van g ontstaat ook uit die van $y = {}^2\log(x)$ bij de translatie $(0, 3)$.

Bladzijde 39

76 a $y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (5, 0)} y = 2^{x-5}$

Er geldt $2^{x-5} = 2^x \cdot 2^{-5} = \frac{1}{32} \cdot 2^x$.

Dus de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met $\frac{1}{32}$.

b $y = 2^x \xrightarrow{\times \frac{1}{2} \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$

Er geldt $\frac{1}{2} \cdot 2^x = 2^{-1} \cdot 2^x = 2^{x-1}$.

Dus de translatie $(1, 0)$.

c $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\times \frac{1}{32} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} y = {}^2\log(32x)$

Er geldt ${}^2\log(32x) = {}^2\log(32) + {}^2\log(x) = 5 + {}^2\log(x)$.

Dus de translatie $(0, 5)$.

d $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (0, 4)} y = 4 + {}^2\log(x)$

Er geldt $4 + {}^2\log(x) = {}^2\log(16) + {}^2\log(x) = {}^2\log(16x)$.

Dus de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{16}$.

77 a $f(x) = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (-4, 0)} y = 2^{x+4} \xrightarrow{\times \frac{1}{4} \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{x+4}$

Er geldt $\frac{1}{4} \cdot 2^{x+4} = \frac{1}{4} \cdot 2^x \cdot 2^4 = \frac{1}{4} \cdot 2^x \cdot 16 = 4 \cdot 2^x$.

Dus $a = 4$.

b $h(x) = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (3, 0)} y = {}^2\log(x-3) \xrightarrow{\times \frac{1}{4} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} k(x) = {}^2\log(4x-3)$

Er geldt ${}^2\log(4x-3) = {}^2\log(4(x-\frac{3}{4})) = {}^2\log(4) + {}^2\log(x-\frac{3}{4}) = 2 + {}^2\log(x-\frac{3}{4})$.

Dus $p = 2$ en $q = -\frac{3}{4}$.

78 a $f(x) = {}^2\log(4x+12) + 1 = {}^2\log(4(x+3)) + 1$
 $= {}^2\log(4) + {}^2\log(x+3) + 1 = 2 + {}^2\log(x+3) + 1$
 $= {}^2\log(x+3) + 3$

Dus $g(x) = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (-3, 3)} f(x) = {}^2\log(x+3) + 3 = {}^2\log(4x+12) + 1$

Dus $a = -3$ en $b = 3$.

b $h(x) = 9 \cdot 3^x - 5 = 3^2 \cdot 3^x - 5 = 3^{x+2} - 5$

Dus $k(x) = 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (-2, -5)} h(x) = 3^{x+2} - 5 = 9 \cdot 3^x - 5$

Dus $c = -2$ en $d = -5$.

c $p(x) = \log\left(\frac{100}{x-3}\right) = \log(100) - \log(x-3) = 2 - \log(x-3)$

Dus $q(x) = \log(x) \xrightarrow{\times -1 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (3, 2)} p(x) = 2 - \log(x-3) = \log\left(\frac{100}{x-3}\right)$

Dus eerst $\times -1$ t.o.v. de x -as en dan de translatie $(3, 2)$.

Bladzijde 40

79 a $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} - 4$
 $= (2^{-1})^{3-x} - 4$
 $= 2^{-3+x} - 4$
 $= 2^{x-3} - 4$

$y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (3, -4)} f(x) = 2^{x-3} - 4$

$$\begin{aligned}
 \text{b } g(x) &= 1 + \frac{1}{2}\log(4x+6) \\
 &= 1 + \frac{1}{2}\log(4(x+1\frac{1}{2})) \\
 &= 1 + \frac{1}{2}\log(4) + \frac{1}{2}\log(x+1\frac{1}{2}) \\
 &= 1 - 2 + \frac{1}{2}\log(x+1\frac{1}{2}) \\
 &= -1 + \frac{1}{2}\log(x+1\frac{1}{2}) \\
 y &= \frac{1}{2}\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (-1\frac{1}{2}, -1)} y = -1 + \frac{1}{2}\log(x+1\frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } f(x) = 0 \text{ geeft } 2^{x-3} - 4 &= 0 \\
 2^{x-3} &= 4 \\
 2^{x-3} &= 2^2 \\
 x-3 &= 2 \\
 x &= 5, \text{ dus } x_A = 5. \\
 g(x) = 0 \text{ geeft } 1 + \frac{1}{2}\log(4x+6) &= 0 \\
 \frac{1}{2}\log(4x+6) &= -1 \\
 4x+6 &= 2 \\
 4x &= -4 \\
 x &= -1, \text{ dus } x_B = -1.
 \end{aligned}$$

Dus de afstand is 5 keer zo groot.

$$\text{d } 4x+6 > 0 \text{ geeft } 4x > -6 \text{ oftewel } x > -1,5, \text{ dus } D_g = \langle -1,5; \rightarrow \rangle.$$

Los op $(\frac{1}{2})^{3-x} - 4 = 1 + \frac{1}{2}\log(4x+6)$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x \approx -2,8$.

$$f(x) < g(x) \text{ geeft } -2,8 < x < -1,5$$

$$\text{e } g(-\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{2}\log(4) = 1 - 2 = -1, \text{ dus } P(-\frac{1}{2}, -1).$$

$$f(x) = -1 \text{ geeft } 2^{x-3} - 4 = -1$$

$$2^{x-3} = 3$$

$$x-3 = {}^2\log(3)$$

$$x = 3 + {}^2\log(3) = {}^2\log(8) + {}^2\log(3) = {}^2\log(24)$$

Dus $a = 24$.

$$\text{80 a } f(x) = (\frac{1}{5})^x \xrightarrow{\times a \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} g(x) = (\frac{1}{5})^{\frac{x}{a}}$$

$$g(3) = 25 \text{ geeft } (\frac{1}{5})^{\frac{3}{a}} = 25$$

$$(5^{-1})^{\frac{3}{a}} = 5^2$$

$$5^{-\frac{3}{a}} = 5^2$$

$$-\frac{3}{a} = 2$$

$$2a = -3$$

$$a = -1\frac{1}{2}$$

$$\text{b } h(x) = 0 \text{ geeft } {}^2\log(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 1$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

$$(0, 0) \xrightarrow{\text{translatie } (3, 0)} (3, 0), \text{ dus voor } a = 3.$$

$$(2, 0) \xrightarrow{\text{translatie } (1, 0)} (3, 0), \text{ dus voor } a = 1.$$

Bladzijde 41

$$\text{C10 a } 2 \cdot {}^3\log(5) + {}^3\log(2) = {}^3\log(5^2) + {}^3\log(2) = {}^3\log(25) + {}^3\log(2) = {}^3\log(50)$$

$$\text{b } {}^6\log(40) - 3 \cdot {}^6\log(2) = {}^6\log(40) - {}^6\log(2^3) = {}^6\log(40) - {}^6\log(8) = {}^6\log(5)$$

$$\text{c } 1 + 2 \cdot \log(3) = \log(10) + \log(3^2) = \log(10) + \log(9) = \log(90)$$

$$\text{d } {}^2\log(56) - {}^3\log(27) = {}^2\log(56) - 3 = {}^2\log(56) - {}^2\log(8) = {}^2\log(7)$$

$$\text{C11 a } y = 3 + {}^5\log(500x) = 3 + {}^5\log(125 \cdot 4x) = 3 + {}^5\log(125) + {}^5\log(4x) = 3 + 3 + {}^5\log(4x) = 6 + {}^5\log(4x)$$

$$\text{b } y = 8 - {}^3\log(810x) = 8 - {}^3\log(81 \cdot 10x) = 8 - ({}^3\log(81) + {}^3\log(10x)) = 8 - (4 + {}^3\log(10x)) = 4 - {}^3\log(10x)$$

C12

$$\begin{aligned} \text{a } {}^3\log(x-5) &= {}^3\log(4x) - 2 \\ {}^3\log(x-5) &= {}^3\log(4x) - {}^3\log(9) \\ {}^3\log(x-5) &= {}^3\log\left(\frac{4}{9}x\right) \\ x-5 &= \frac{4}{9}x \\ \frac{5}{9}x &= 5 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } {}^2\log(x-2) + {}^2\log(x) &= 3 \\ {}^2\log((x-2)x) &= 3 \\ {}^2\log(x^2-2x) &= 3 \\ x^2-2x &= 8 \\ x^2-2x-8 &= 0 \\ (x+2)(x-4) &= 0 \\ x &= -2 \vee x = 4 \\ x &= -2 \text{ voldoet niet, dus } x = 4. \end{aligned}$$

C13

$$\text{a } y = 3^x \xrightarrow{\times \frac{1}{9} \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = \frac{1}{9} \cdot 3^x = 3^{-2} \cdot 3^x = 3^{x-2}$$

Dus de translatie (2, 0) levert dezelfde beeldgrafiek op.

$$\text{b } y = {}^3\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (0, -3)} y = {}^3\log(x) - 3 = {}^3\log(x) - {}^3\log(27) = {}^3\log\left(\frac{1}{27}x\right)$$

Dus de vermenigvuldiging met 27 ten opzichte van de y-as levert dezelfde beeldgrafiek op.

Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 42

- 1 a** Op $t = 0$ is de concentratie $60 : 5 = 12$ mg per liter bloed.

$$C = b \cdot g^t \text{ met } b = 12 \text{ en } g = 0,847 \text{ geeft } C = 12 \cdot 0,847^t$$

- b** $t = 4$ geeft $C = 12 \cdot 0,847^4 = 6,17\dots$

$$\text{procentuele afname} = \frac{12 - 6,17\dots}{12} \times 100\% \approx 48,5\%$$

Alternatieve uitwerking

$$0,847^4 \approx 0,515 \text{ en hierbij hoort een procentuele afname van } 48,5\%.$$

- c** De concentratie is dan $20 : 5 = 4$ mg per liter.

$$\text{Los op } 12 \cdot 0,847^t = 4.$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 6,61\dots$

Dus na $6,61\dots \times 60 \approx 397$ minuten.

- 2 a** $g_{\text{dag}} = 1,1$

$$g_{\text{week}} = 1,1^7 \approx 1,949$$

Het groeipercentage per week is 94,9%.

- b** $g_{8 \text{ uur}} = 1,1^{\frac{1}{3}} \approx 1,032$

Het groeipercentage per 8 uur is 3,2%.

- c** $g_{\text{jaar}} = 0,64$

$$g_{\text{maand}} = 0,64^{\frac{1}{12}} \approx 0,963$$

De afname per maand is 3,7%.

- d** $g_{5 \text{ jaar}} = 0,64^5 \approx 0,107$

De afname per 5 jaar is 89,3%.

- 3 a** H is de hoeveelheid helium in cm^3 na t dagen.

$$g_{7 \text{ dagen}} = \frac{1500}{2500} = 0,6, \text{ dus } g_{\text{dag}} = 0,6^{\frac{1}{7}} = 0,9296\dots$$

$$\left. \begin{aligned} H &= b \cdot 0,9296\dots^t \\ t &= 3 \text{ en } H = 2500 \end{aligned} \right\} b \cdot 0,9296\dots^3 = 2500$$

$$b = \frac{2500}{0,9296\dots^3} \approx 3112$$

Dus de ballon werd gevuld met 3112 cm^3 helium.

- b** Los op $3112 \cdot 0,930^t = 500$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 25,0\dots$

Dus na 25 dagen.

- 4 a** $g_{\text{maand}} = 1,002$, dus los op $1,002^T = 2$.
Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $T = 346,92\dots$
De verdubbelingstijd is $346,92\dots : 12 \approx 29$ jaar.
- b** $g_{\text{week}} = 0,8$, dus los op $0,8^T = \frac{1}{2}$.
Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $T = 3,10\dots$
De halveringstijd is $3,10\dots \cdot 7 \approx 22$ dagen.

- 5 a** $4 \cdot 3^{2x+1} = 20$
 $3^{2x+1} = 5$
 $2x+1 = {}^3\log(5)$
 $2x = -1 + {}^3\log(5)$
 $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(5)$
- b** ${}^2\log(3x-5) + 3 = 7$
 ${}^2\log(3x-5) = 4$
 $3x-5 = 16$
 $3x = 21$
 $x = 7$
- c** $4^{x-1} = 2^{x+1}$
 $(2^2)^{x-1} = 2^{x+1}$
 $2^{2x-2} = 2^{x+1}$
 $2x-2 = x+1$
 $x = 3$
- d** ${}^3\log(8x+1) + 2 = 0$
 ${}^3\log(8x+1) = -2$
 $8x+1 = \frac{1}{9}$
 $8x = -\frac{8}{9}$
 $x = -\frac{1}{9}$

- 6 a** $N = 75 - 1,5^{0,4t+3}$
 $1,5^{0,4t+3} = 75 - N$
 $0,4t+3 = {}^{1,5}\log(75-N)$
 $0,4t = -3 + {}^{1,5}\log(75-N)$
 $t = -7,5 + 2,5 \cdot {}^{1,5}\log(75-N)$
- b** $B = {}^5\log(2A+10) - 3$
 ${}^5\log(2A+10) = B+3$
 $2A+10 = 5^{B+3}$
 $2A = -10 + 5^{B+3}$
 $A = -5 + \frac{1}{2} \cdot 5^{B+3}$

- 7 a** $t = 15$ geeft $l = 29 + 23 \cdot \log(15) = 56,0\dots$
 $t = 65$ geeft $l = 29 + 23 \cdot \log(65) = 70,6\dots$
De toename is $70,6\dots - 56,0\dots \approx 15$ jaar.
- b** $l = 29 + 23 \cdot \log(t)$
 $23 \cdot \log(t) = l - 29$
 $\log(t) = \frac{1}{23}l - \frac{29}{23}$
 $t = 10^{\frac{1}{23}l - \frac{29}{23}}$
 $t \approx 10^{0,0435l - 1,2609}$
Dus $t = 10^{0,0435l - 1,2609}$.
- c** $l = 76$ geeft $t = 10^{0,0435 \cdot 76 - 1,2609} \approx 111$
Dus in 2061.

Bladzijde 43

- 8 a** $m = 10$ geeft $\log(m) = \log(10) = 1$
Lees af: $\log(m) = 1$ geeft $\log(W) \approx 1,5$, dus $W = 10^{1,5}$.
Dit dier heeft $24 \cdot 10^{1,5} \approx 760$ mL drinkwater per dag nodig.
- b** $1 \text{ L} = 1000 \text{ mL}$
 $W = 1000$ geeft $\log(W) = \log(1000) = 3$
Lees af: $\log(W) = 3$ geeft $\log(m) = 2$, dus $m = 10^2 = 100$.
Dit dier is 100 kg.
- c** De lijn gaat door de punten $(1; 1,5)$ en $(3,5; 3,5)$.
 $\log(W) = p \cdot \log(m) + q$ met $p = \frac{\Delta \log(W)}{\Delta \log(m)} = \frac{3,5 - 1,5}{3,5 - 1} = \frac{2}{2,5} = 0,8$
 $\log(W) = 0,8 \cdot \log(m) + q$
door $(1; 1,5)$ $\left. \begin{array}{l} 0,8 \cdot 1 + q = 1,5 \\ 0,8 + q = 1,5 \\ q = 0,7 \end{array} \right\}$
Dus $p = 0,8$ en $q = 0,7$.

- 9** **a** ${}^3\log(5) + 2 \cdot {}^3\log(2) = {}^3\log(5) + {}^3\log(2^2) = {}^3\log(5) + {}^3\log(4) = {}^3\log(20)$
b $3 + {}^2\log(5) = {}^2\log(8) + {}^2\log(5) = {}^2\log(40)$
c ${}^3\log(27) + {}^5\log(2) = 3 + {}^5\log(2) = {}^5\log(125) + {}^5\log(2) = {}^5\log(250)$
d ${}^2\log(3) - \frac{1}{2}\log(16) = {}^2\log(3) - 4 = {}^2\log(3) + 4 = {}^2\log(3) + {}^2\log(16) = {}^2\log(48)$
- 10** **a** $y = {}^3\log(405x) = {}^3\log(81 \cdot 5x) = {}^3\log(81) + {}^3\log(5x) = 4 + {}^3\log(5x)$
b $y = -1 + {}^5\log(750x) = -1 + {}^5\log(125 \cdot 6x) = -1 + {}^5\log(125) + {}^5\log(6x) = -1 + 3 + {}^5\log(6x) = 2 + {}^5\log(6x)$
- 11** **a** $y = 7,4 - 1,3 \cdot {}^2\log(5,7x)$
 $y = {}^2\log(2^{7,4}) + {}^2\log((5,7x)^{-1,3})$
 $y = {}^2\log(2^{7,4} \cdot 5,7^{-1,3} \cdot x^{-1,3})$
 $y \approx {}^2\log(17,6 \cdot x^{-1,3})$
Dus $y = {}^2\log(17,6x^{-1,3})$.
- b** $N = 2 \cdot {}^3\log(18t^{-1,4})$
 $N = 2 \cdot ({}^3\log(18) + {}^3\log(t^{-1,4}))$
 $N = 2 \cdot ({}^3\log(18) - 1,4 \cdot {}^3\log(t))$
 $N = 2 \cdot {}^3\log(18) - 2,8 \cdot {}^3\log(t)$
 $N = 2 \cdot {}^3\log(18) - 2,8 \cdot \frac{\log(t)}{\log(3)}$
 $N = 2 \cdot {}^3\log(18) - \frac{2,8}{\log(3)} \cdot \log(t)$
 $N \approx 5,26 - 5,87 \cdot \log(t)$
Dus $N = 5,26 - 5,87 \cdot \log(t)$.
- 12** **a** $L = (\frac{1}{3})^M$ invullen bij $K = 2 \cdot {}^8\log(L)$ geeft $K = 2 \cdot {}^8\log((\frac{1}{3})^M) = 2 \cdot M \cdot {}^8\log(\frac{1}{3}) = 2 \cdot {}^8\log(\frac{1}{3}) \cdot M \approx -1,06 \cdot M$
Dus $K = -1,06M$.
b $G = 2 \cdot {}^3\log(E)$ geeft ${}^3\log(E) = 0,5G$, dus $E = 3^{0,5G}$.
 $E = 3^{0,5G}$ invullen bij $F = -{}^5\log(E)$ geeft
 $F = -{}^5\log(3^{0,5G}) = -0,5G \cdot {}^5\log(3) = -0,5 \cdot {}^5\log(3) \cdot G \approx -0,34 \cdot G$.
Dus $F = -0,34G$.
- 13** **a** ${}^3\log(2x) + 4 = {}^3\log(150x + 6)$
 ${}^3\log(2x) + {}^3\log(81) = {}^3\log(150x + 6)$
 ${}^3\log(162x) = {}^3\log(150x + 6)$
 $162x = 150x + 6$
 $12x = 6$
 $x = \frac{1}{2}$
- b** ${}^2\log(x) = 3 - {}^2\log(x + 2)$
 ${}^2\log(x) + {}^2\log(x + 2) = 3$
 ${}^2\log(x(x + 2)) = 3$
 $x(x + 2) = 8$
 $x^2 + 2x - 8 = 0$
 $(x - 2)(x + 4) = 0$
 $x = 2 \vee x = -4$
 $x = -4$ voldoet niet, dus $x = 2$.
- 14** **a** $y = {}^5\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (0, 2)} y = 2 + {}^5\log(x)$
Er geldt $2 + {}^5\log(x) = {}^5\log(25) + {}^5\log(x) = {}^5\log(25x)$.
Dus de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{25}$.
b $y = 10^x \xrightarrow{\times 1000 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 1000 \cdot 10^x$
Er geldt $1000 \cdot 10^x = 10^3 \cdot 10^x = 10^{x+3}$.
Dus de translatie $(-3, 0)$.

Gemengde opgaven

Bladzijde 44

- 1** **a** Los op $0,4^d = 0,5$, met d de diepte in meters.
 $d = {}^{0,4}\log(0,5) \approx 0,76$
Dus van rood licht is op 76 cm diepte nog 50% van de oorspronkelijke hoeveelheid licht zichtbaar.
Los op $0,9^d = 0,5$, met d de diepte in meters.
 $d = {}^{0,9}\log(0,5) \approx 6,58$
Dus van blauw licht is op 658 cm diepte nog 50% van de oorspronkelijke hoeveelheid licht zichtbaar.

- b** P_{rood} is het percentage rood licht, P_{blauw} is het percentage blauw licht en d is de diepte in meters.

$$P_{\text{rood}} = 100 \cdot 0,4^d \text{ en } P_{\text{blauw}} = 100 \cdot 0,9^d$$

$$\text{Los op } P_{\text{blauw}} = 10 \cdot P_{\text{rood}} \text{ oftewel } 100 \cdot 0,4^d = 1000 \cdot 0,9^d.$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $d \approx 2,84$.

Dus op een diepte van 284 cm.

- c** $0,4^d = 0,1$ geeft $d = {}^{0,4}\log(0,1) = 2,512\dots$

$$0,9^d = 0,1 \text{ geeft } d = {}^{0,9}\log(0,1) = 21,854\dots$$

De blauwe vis zwemt $\frac{21,854\dots}{2,512\dots} \approx 8,7$ keer zo diep als de rode vis.

- 2 a** $f(x) = 2$ geeft $2^{x-3} - 1 = 2$

$$2^{x-3} = 3$$

$$x - 3 = {}^2\log(3)$$

$$x = 3 + {}^2\log(3)$$

Dus $x_A = 3 + {}^2\log(3)$.

$$g(x) = 2 \text{ geeft } {}^3\log(3x + 12) = 2$$

$$3x + 12 = 9$$

$$3x = -3$$

$$x = -1$$

Dus $x_B = -1$.

$$AB = x_A - x_B = 3 + {}^2\log(3) - (-1) = 4 + {}^2\log(3)$$

- b** Los op $2^{x-3} - 1 = {}^3\log(3x + 12)$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$$x = -3,887\dots \text{ en } x = 5.$$

$$f(x) < g(x) \text{ geeft } -3,89 < x < 5$$

- c** $g(x) = {}^3\log(3x + 12) = {}^3\log(3(x + 4)) = {}^3\log(3) + {}^3\log(x + 4) = 1 + {}^3\log(x + 4)$

Dus de grafiek van g ontstaat uit die van $y = {}^3\log(x)$ door de translatie $(-4, 1)$.

- d** $f(0) = 2^{-3} - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$

$$C(0, 7), \text{ dus er moet gelden } a \cdot -\frac{7}{8} = 7$$

$$a = 7 \cdot -\frac{8}{7} = -8$$

- 3 a** $f(x) = 0$ geeft $2^{x^2-2x-1} - 4 = 0$

$$2^{x^2-2x-1} = 4$$

$$2^{x^2-2x-1} = 2^2$$

$$x^2 - 2x - 1 = 2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 3$$

Zie de schets hiernaast.

$$f(x) < 0 \text{ geeft } -1 < x < 3$$

- b** $f(x) = -3\frac{1}{2}$ geeft $2^{x^2-2x-1} - 4 = -3\frac{1}{2}$

$$2^{x^2-2x-1} = \frac{1}{2}$$

$$2^{x^2-2x-1} = 2^{-1}$$

$$x^2 - 2x - 1 = -1$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

$$(2, -3\frac{1}{2}) \xrightarrow{\text{verm. y-as, } a} (5, -3\frac{1}{2}) \text{ geeft } a \cdot 2 = 5, \text{ dus } a = 2\frac{1}{2}.$$

- c** Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie minimum geeft

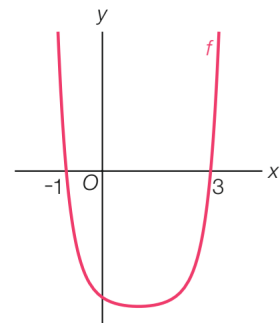
$$x = 1 \text{ en } y = -3\frac{3}{4}.$$

$$f(x) = 2^{x^2-2x-1} - 4 \xrightarrow{\text{translatie } (-1, 3\frac{3}{4})} y = 2^{(x+1)^2-2(x+1)-1} - 4 + 3\frac{3}{4}$$

$$y = 2^{x^2+2x+1-2x-2-1} - \frac{1}{4}$$

$$y = 2^{x^2-2} - \frac{1}{4}$$

Dus de formule van de beeldgrafiek is $y = 2^{x^2-2} - \frac{1}{4}$.



$$\begin{aligned} \text{d } g(x) &= \frac{1}{4} \cdot 2^{x^2} - 4 = 2^{-2} \cdot 2^{x^2} - 4 = 2^{x^2-2} - 4 \\ f(x) &= 2^{x^2-2x-1} - 4 \xrightarrow{\text{translatie } (-p, 0)} g(x) = 2^{(x+p)^2-2(x+p)-1} - 4 \\ &= 2^{x^2+2px+p^2-2x-2p-1} - 4 \\ &= 2^{x^2+(2p-2)x+p^2-2p-1} - 4 \end{aligned}$$

Er moet gelden $2p - 2 = 0$ en $p^2 - 2p - 1 = -2$.

Uit $2p - 2 = 0$ volgt $p = 1$.

$p = 1$ invullen bij $p^2 - 2p - 1 = -2$ geeft $-2 = -2$ klopt.

Dus $p = 1$.

Alternatieve uitwerking

$$f(x) = 2^{x^2-2x-1} - 4 = 2^{(x-1)^2-1-1} - 4 = 2^{(x-1)^2-2} - 4$$

$$g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{x^2} - 4 = 2^{-2} \cdot 2^{x^2} - 4 = 2^{x^2-2} - 4$$

$$f(x) = 2^{(x-1)^2-2} - 4 \xrightarrow{\text{translatie } (-1, 0)} g(x) = 2^{x^2-2} - 4$$

Dus $p = 1$.

Bladzijde 45

- 4 a** Lees af: $t = 60$ geeft $\log(Z) \approx 1,5$, dus $Z \approx 10^{1,5} \approx 32$.

Dus ongeveer 32 liter zuur.

- b** $\log(Z) = at + b$

$$a = \frac{\Delta \log(Z)}{\Delta t} = \frac{0 - 3}{120 - 0} = -\frac{1}{40}$$

$$\left. \begin{aligned} \log(Z) &= -\frac{1}{40}t + b \\ \text{door } (0, 3) \end{aligned} \right\} \log(Z) &= -\frac{1}{40}t + 3$$

$$\log(Z) = -\frac{1}{40}t + 3 \text{ geeft } Z = 10^{-\frac{1}{40}t + 3}$$

Invoeren van de formule van Z en gebruiken van de optie dy/dx geeft

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=120} = -0,0575 \dots$$

De gevraagde snelheid is $60 \cdot 0,0575 \dots \approx 3,5$ liter per minuut.

- c** $Z = 10^{-\frac{1}{40}t + 3}$

$$Z = 10^{-\frac{1}{40}t} \cdot 10^3$$

$$Z = 1000 \cdot 10^{-\frac{1}{40}t}$$

$$\text{Los op } 10^{-\frac{1}{40}t} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{40}t = \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$t = -40 \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) \approx 12,0$$

De halveringstijd is ongeveer 12 seconden.

- d** 0,1% van 2000 liter is 2 liter.

$$Z = 2 \text{ geeft } 1000 \cdot 10^{-\frac{1}{40}t} = 2$$

$$10^{-\frac{1}{40}t} = \frac{1}{500}$$

$$-\frac{1}{40}t = \log\left(\frac{1}{500}\right)$$

$$t = -40 \cdot \log\left(\frac{1}{500}\right) \approx 108$$

Dus na 108 seconden.

- 5 a** $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 3$$

De asymptoten van de grafiek van f zijn de lijnen $x = -1$ en $x = 3$.

$$y_A = g(-1) = 1 + {}^3\log(6)$$

$$y_B = g(3) = 1 + {}^3\log(10)$$

$$y_B - y_A = 1 + {}^3\log(10) - (1 + {}^3\log(6)) = {}^3\log(10) - {}^3\log(6) = {}^3\log\left(\frac{10}{6}\right) = {}^3\log\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\text{Dus } p = 1\frac{2}{3}.$$

b $f(x) = g(x)$ geeft ${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = 1 + {}^3\log(x + 7)$
 ${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = {}^3\log(3) + {}^3\log(x + 7)$
 ${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = {}^3\log(3(x + 7))$
 ${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = {}^3\log(3x + 21)$
 $x^2 - 2x - 3 = 3x + 21$
 $x^2 - 5x - 24 = 0$
 $(x + 3)(x - 8) = 0$
 $x = -3 \vee x = 8$

$f(x) \leq g(x)$ geeft $-3 \leq x < -1 \vee 3 < x \leq 8$

c $g(5) = 1 + {}^3\log(5 + 7) = 1 + {}^3\log(12)$
 $x \leq 5$ geeft $g(x) \leq 1 + {}^3\log(12)$

d $f(-4) = {}^3\log(16 + 8 - 3) = {}^3\log(21)$
 $g(-4) = 1 + {}^3\log(-4 + 7) = 1 + {}^3\log(3) = 1 + 1 = 2$
 $CD = {}^3\log(21) - 2 = {}^3\log(3 \cdot 7) - 2 = {}^3\log(3) + {}^3\log(7) - 2 = 1 + {}^3\log(7) - 2 = -1 + {}^3\log(7)$

e $f(x) = 3$ geeft ${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = 3$
 $x^2 - 2x - 3 = 27$
 $x^2 - 2x - 30 = 0$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -30 = 124$
 $x = \frac{2 + \sqrt{124}}{2} \vee x = \frac{2 - \sqrt{124}}{2}$
 $x = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{124} \vee x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{124}$

$EF = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{124} - (1 - \frac{1}{2}\sqrt{124}) = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}$

f Los op $1 + {}^3\log(x + 7) = \frac{1}{4}x + 2$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $G(-6,496...; 0,375...)$ en $H(5,068...; 3,267...)$.

$GH = \sqrt{(5,068... - -6,496...)^2 + (3,267... - 0,375...)^2} \approx 11,920$

10 Meetkundige berekeningen

10.1 Hoeken en lijnstukken

Bladzijde 48

V1 $\tan(\angle ACB) = \frac{11}{6}$ geeft $\angle ACB = 61,38\dots^\circ$

$$\tan(\angle BCD) = \frac{5}{6} \text{ geeft } \angle BCD = 39,80\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle ACD = 61,38\dots^\circ - 39,80\dots^\circ \approx 21,6^\circ.$$

V2 $\sin(25^\circ) = \frac{QR}{6}$ geeft $QR = 6 \sin(25^\circ) = 2,53\dots$

$$\cos(\angle QRS) = \frac{2,53\dots}{4} \text{ geeft } \angle QRS \approx 50,7^\circ$$

1 a $\cos(40^\circ) = \frac{AB}{10}$ geeft $AB = 10 \cos(40^\circ) \approx 7,660$

b $AB = AD + BD = BD + 1 + BD = 2BD + 1$

$$\begin{array}{l} \text{c } AB = 7,660\dots \\ AB = 2BD + 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} AB = 7,660\dots \\ AB = 2BD + 1 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 2BD + 1 = 7,660\dots \\ 2BD = 6,660\dots \\ BD \approx 3,33 \end{array}$$

Bladzijde 49

2 $\angle ACD \approx 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ - 21,9^\circ = 28,1^\circ$

3 In $\triangle ABC$ is $\cos(36^\circ) = \frac{AB}{10}$

$$AB = 10 \cos(36^\circ) = 8,090\dots$$

Stel $BD = x$, dan is $AD = x + 2$ en $AB = 2x + 2$.

$$2x + 2 = 8,090\dots$$

$$2x = 6,090\dots$$

$$x = 3,045\dots$$

$$\text{Dus } BD = 3,045\dots$$

In $\triangle ABC$ is $\sin(36^\circ) = \frac{BC}{10}$

$$BC = 10 \sin(36^\circ) = 5,877\dots$$

$$\text{In } \triangle BCD \text{ is } \tan(\angle BCD) = \frac{3,045\dots}{5,877\dots}$$

$$\angle BCD = 27,38\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle ACD = 180^\circ - 90^\circ - 36^\circ - 27,38\dots^\circ \approx 26,6^\circ.$$

Bladzijde 50

4 In $\triangle ABC$ is $\cos(48^\circ) = \frac{BC}{6}$

$$BC = 6 \cos(48^\circ) = 4,014\dots$$

Stel $BD = x$, dan is $CD = x + 2$ en $BC = 2x + 2$.

$$2x + 2 = 4,014\dots$$

$$2x = 2,014\dots$$

$$x = 1,007\dots$$

$$\text{Dus } BD = 1,007\dots$$

In $\triangle ABC$ is $\sin(48^\circ) = \frac{AB}{6}$

$$AB = 6 \sin(48^\circ) = 4,458\dots$$

$$\text{In } \triangle ABD \text{ is } \tan(\angle BAD) = \frac{1,007\dots}{4,458\dots}$$

$$\angle BAD = 12,73\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle CAD = 180^\circ - 90^\circ - 48^\circ - 12,73\dots^\circ \approx 29,3^\circ.$$

5 In $\triangle ADE$ is $\sin(50^\circ) = \frac{6}{AC}$

$$AC = \frac{6}{\sin(50^\circ)} = 7,832...$$

Stel $CD = x$, dan is $AD = x + 3$ en $AC = 2x + 3$.

$$2x + 3 = 7,832...$$

$$2x = 4,832...$$

$$x = 2,416...$$

$$\text{Dus } AD = 2,416... + 3 = 5,416...$$

$$\text{In } \triangle ADE \text{ is } \cos(50^\circ) = \frac{AE}{5,416...}$$

$$AE = 5,416... \cdot \cos(50^\circ) \approx 3,48$$

6 $\angle PAQ = 50^\circ : 2 = 25^\circ$

Stel $PQ = x$, dan is $PR = 2x$ en $AQ = 8 - 2x$.

$$\text{In } \triangle APQ \text{ is } \tan(25^\circ) = \frac{x}{8 - 2x}$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 1,930...$

$$\text{In } \triangle APQ \text{ is } \sin(25^\circ) = \frac{1,903...}{AP}$$

$$AP = \frac{1,903...}{\sin(25^\circ)} \approx 4,57$$

7 Zie de figuur hiernaast.

$$\angle PAM = 40^\circ : 2 = 20^\circ$$

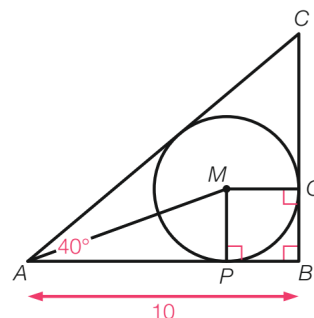
Stel $MP = x$, dan is $MQ = x$ (straal cirkel) en $AP = 10 - x$.

$$\text{In } \triangle AMP \text{ is } \tan(20^\circ) = \frac{x}{10 - x}$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 2,668...$

$$\text{In } \triangle AMP \text{ is } \sin(20^\circ) = \frac{2,668...}{AM}$$

$$AM = \frac{2,668...}{\sin(20^\circ)} \approx 7,80$$



Bladzijde 51

V3 De sinusregel geeft $\frac{7}{\sin(50^\circ)} = \frac{8}{\sin(\angle C)}$

$$\sin(\angle C) = \frac{8 \sin(50^\circ)}{7}$$

De GR geeft een hoek van $61,10...^\circ$.

Dus $\angle C = 180^\circ - 61,10...^\circ \approx 118,9^\circ$.

Bladzijde 52

V4 De cosinusregel geeft $QR^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos(20^\circ) = 7,754...$
 $QR \approx 2,78$

8 a De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $BD^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(20^\circ) = 4,6184...$

$$BD = 2,149...$$

b De sinusregel in $\triangle ABD$ geeft $\frac{2,149...}{\sin(20^\circ)} = \frac{5}{\sin(\angle B)}$

$$\sin(\angle B) = \frac{5 \sin(20^\circ)}{2,149...}$$

$$\angle B = 52,72...^\circ$$

c $\angle CAD = 180^\circ - \angle B - \angle C - \angle BAD = 180^\circ - 52,72...^\circ - 65^\circ - 20^\circ = 42,27...^\circ$

d De sinusregel in $\triangle ACD$ geeft $\frac{5}{\sin(65^\circ)} = \frac{CD}{\sin(42,27\dots^\circ)}$

$$CD = \frac{5 \sin(42,27\dots^\circ)}{\sin(65^\circ)} \approx 3,71$$

Bladzijde 53

9 a De sinusregel in $\triangle ABD$ geeft $\frac{10}{\sin(\angle ADB)} = \frac{8,57\dots}{\sin(58^\circ)}$

$$\sin(\angle ADB) = \frac{10 \sin(58^\circ)}{8,57\dots}$$

De GR geeft een hoek van $81,29\dots^\circ$.

Dus $\angle ADB = 81,29\dots^\circ$ of $\angle ADB = 180^\circ - 81,29\dots^\circ = 98,70\dots^\circ$.

Het probleem is dat je niet weet welke hoek de juiste is.

b In $\triangle ACD$ is $\angle D$ stomp.

Het is niet mogelijk om in een driehoek twee stompe hoeken te hebben, dus vervalt in dit geval de tweede mogelijkheid bij het berekenen van een hoek met de sinusregel.

10 a De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $10^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos(\angle ADB)$

$$100 = 117 - 108 \cos(\angle ADB)$$

$$108 \cos(\angle ADB) = 17$$

$$\cos(\angle ADB) = 0,15\dots$$

$$\angle ADB \approx 80,94^\circ$$

b $\angle BDC = 150^\circ - 80,94\dots^\circ = 69,05\dots^\circ$

De cosinusregel in $\triangle BDC$ geeft $BC^2 = 9^2 + 4^2 - 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot \cos(69,05\dots^\circ) = 71,26\dots$

$$BC \approx 8,4$$

Bladzijde 54

- 11 1 Teken diagonaal AC en bereken in driehoek ABC eerst AC en vervolgens $\angle BAC$.
 2 Gebruik $\angle BAD$ en $\angle BAC$ om $\angle CAD$ te berekenen.
 3 Bereken CD in driehoek ACD .
 4 Bereken $\angle ADC$ in driehoek ACD .

Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft

$$AC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos(72^\circ) = 135,50\dots$$

$$AC = 11,64\dots$$

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\frac{6}{\sin(\angle BAC)} = \frac{11,64\dots}{\sin(72^\circ)}$

$$\sin(\angle BAC) = \frac{6 \sin(72^\circ)}{11,64\dots}$$

$$\angle BAC = 29,35\dots^\circ$$

$$\angle CAD = 52^\circ - 29,35\dots^\circ = 22,64\dots^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft $CD^2 = 135,50\dots + 6^2 - 2 \cdot 11,64\dots \cdot 6 \cdot \cos(22,64\dots^\circ) = 42,58\dots$

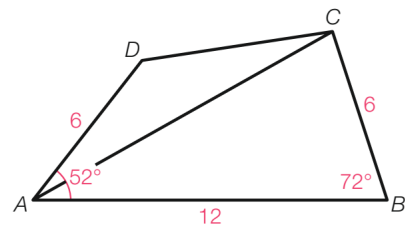
$$CD = 6,52\dots$$

De sinusregel in $\triangle ACD$ geeft $\frac{11,64\dots}{\sin(\angle ADC)} = \frac{6,52\dots}{\sin(22,64\dots^\circ)}$

$$\sin(\angle ADC) = \frac{11,64\dots \cdot \sin(22,64\dots^\circ)}{6,52\dots}$$

De GR geeft een hoek van $43,37\dots^\circ$.

$$\text{Dus } \angle ADC = 180^\circ - 43,37\dots^\circ \approx 136,6^\circ.$$



- 12** De stelling van Pythagoras in $\triangle EPQ$ geeft $PQ = \sqrt{15^2 + 28^2} = 31,7\dots$

In $\triangle EPQ$ is $\tan(\angle EQP) = \frac{15}{28}$

$$\angle EQP = 28,17\dots^\circ$$

$\angle KQZ = \angle EQP = 28,17\dots^\circ$ (overstaande hoeken)

De sinusregel in $\triangle KQZ$ geeft $\frac{28}{\sin(\angle Z)} = \frac{42}{\sin(28,17\dots^\circ)}$

$$\sin(\angle Z) = \frac{28 \sin(28,17\dots^\circ)}{42}$$

$$\angle Z = 18,34\dots^\circ$$

$$\angle K = 180^\circ - 28,17\dots^\circ - 18,34\dots^\circ = 133,47\dots^\circ$$

De sinusregel in $\triangle KQZ$ geeft $\frac{QZ}{\sin(133,47\dots^\circ)} = \frac{42}{\sin(28,17\dots^\circ)}$

$$QZ = \frac{42 \sin(133,47\dots^\circ)}{\sin(28,17\dots^\circ)} = 64,5\dots$$

De zadelhoogte voor deze fietser is $31,7\dots + 64,5\dots \approx 96$ cm.

- 13** Ga uit van $\alpha = 28^\circ$.

De sinusregel geeft $\frac{150}{\sin(28^\circ)} = \frac{60}{\sin(\angle A)}$

$$\sin(\angle A) = \frac{60 \sin(28^\circ)}{150}$$

$$\angle A = 10,82\dots^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 28^\circ - 10,82\dots^\circ = 141,17\dots^\circ$$

De sinusregel geeft $\frac{150}{\sin(28^\circ)} = \frac{AM}{\sin(141,17\dots^\circ)}$

$$AM = \frac{150 \sin(141,17\dots^\circ)}{\sin(28^\circ)} = 200,30\dots$$

In het geval $\alpha = 0^\circ$ is $AM = 150 + 60 = 210$ cm.

Dus voor $\alpha < 28^\circ$ neemt AM lengten aan van 200,3 cm tot en met 210 cm.

Alternatieve uitwerking

Ga uit van $\alpha = 28^\circ$.

De cosinusregel met $\alpha = 28^\circ$ geeft $150^2 = AM^2 + 60^2 - 2 \cdot AM \cdot 60 \cdot \cos(28^\circ)$
 $22\,500 = AM^2 + 3600 - AM \cdot 120 \cos(28^\circ)$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $AM = 200,30\dots$

In het geval $\alpha = 0^\circ$ is $AM = 150 + 60 = 210$ cm.

Dus voor $\alpha < 28^\circ$ neemt AM lengten aan van 200,3 cm tot en met 210 cm.

Bladzijde 55

- 14** Zie de figuur hiernaast.

De sinusregel in $\triangle HQR$ geeft $\frac{60}{\sin(80^\circ)} = \frac{40}{\sin(\angle QHR)}$

$$\sin(\angle QHR) = \frac{40 \sin(80^\circ)}{60}$$

$$\angle QHR = 41,03\dots^\circ$$

$$\angle HRQ = 180^\circ - 80^\circ - 41,03\dots^\circ = 58,96\dots^\circ$$

De sinusregel in $\triangle HQR$ geeft $\frac{QH}{\sin(58,96\dots^\circ)} = \frac{60}{\sin(80^\circ)}$

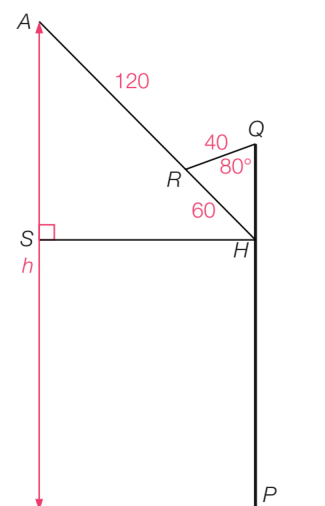
$$QH = \frac{60 \sin(58,96\dots^\circ)}{\sin(80^\circ)} = 52,2\dots$$

$$\angle HAS = \angle QHR = 41,03\dots^\circ \text{ (Z-hoeken)}$$

In $\triangle AHS$ is $\cos(41,03\dots^\circ) = \frac{AS}{180}$

$$AS = 180 \cos(41,03\dots^\circ) = 135,7\dots$$

$$h = PQ - QH + AS = 200 - 52,2\dots + 135,7\dots \approx 284 \text{ cm}$$



15 Zie de figuur hiernaast.

$$\text{In } \triangle ABC \text{ is } AC = \sqrt{2140^2 + 780^2} = 2277,7...$$

$$\text{en } \tan(\angle BAC) = \frac{780}{2140}, \text{ dus } \angle BAC = 20,02...^\circ.$$

De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft

$$1890^2 = 2277,7...^2 + 2575^2 - 2 \cdot 2277,7... \cdot 2575 \cdot \cos(\angle CAD)$$

$$11\,730\,248,5... \cdot \cos(\angle CAD) = 8\,246\,525$$

$$\cos(\angle CAD) = 0,70...$$

$$\angle CAD = 45,33...^\circ$$

$$\angle PAQ = 20,02...^\circ + 45,33...^\circ = 65,35...^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle APQ$ geeft

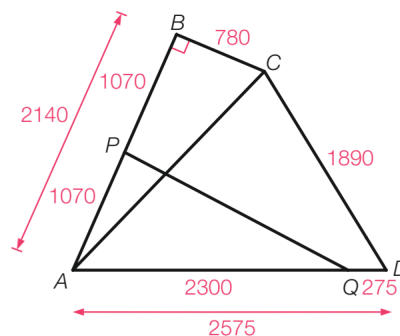
$$PQ^2 = 1070^2 + 2300^2 - 2 \cdot 1070 \cdot 2300 \cdot \cos(65,35...^\circ) = 4382\,591,8...$$

$$PQ = 2093,4...$$

De normale route is $2140 + 780 + 1890 = 4810$ meter.

De tussenroute is $1070 + 2093,4... + 275 = 3438,4...$ meter.

Via de route $APQD$ loopt Jan $4810 - 3438,4... \approx 1372$ meter minder dan via de route $ABCD$.



Bladzijde 56

C1 In $\triangle ABC$ is $\tan(35^\circ) = \frac{6}{AB}$

$$AB = \frac{6}{\tan(35^\circ)} = 8,568...$$

Stel $BD = x$, dan is $AD = x + 1\frac{1}{2}$ en $AB = 2x + 1\frac{1}{2}$.

$$2x + 1\frac{1}{2} = 8,568...$$

$$2x = 7,068...$$

$$x = 3,534...$$

$$\text{Dus } BD = 3,534...$$

$$\text{In } \triangle BCD \text{ is } \tan(\angle BCD) = \frac{3,534...}{6}$$

$$\angle BCD = 30,50...^\circ$$

$$\text{Dus } \angle ACD = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ - 30,50...^\circ \approx 24,5^\circ.$$

C2 De cosinusregel geeft $AB^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(58^\circ) = 26,56...$

$$AB = 5,15...$$

$$\text{De sinusregel geeft } \frac{5,15...}{\sin(58^\circ)} = \frac{6}{\sin(\angle A)}$$

$$\sin(\angle A) = \frac{6 \sin(58^\circ)}{5,15...}$$

$$\angle A \approx 80,8^\circ$$

10.2 Omtrek en oppervlakte

Bladzijde 57

V5 a Zie de figuur hiernaast.

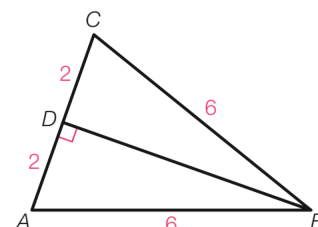
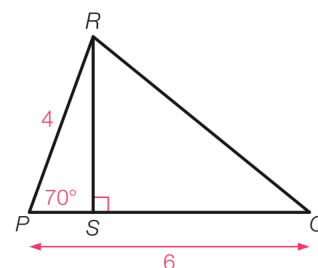
$$BD = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32}$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{32} \approx 11,31$$

b Zie de figuur hiernaast.

$$\sin(70^\circ) = \frac{RS}{4} \text{ geeft } RS = 4 \sin(70^\circ)$$

$$O(\triangle PQR) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \sin(70^\circ) \approx 11,28$$



- 16 a** De cosinusregel geeft $5^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos(\angle A)$
 $25 = 52 - 48 \cos(\angle A)$
 $48 \cos(\angle A) = 27$
 $\cos(\angle A) = \frac{27}{48}$
 $\angle A = 55,77\dots^\circ$

Zie de figuur hiernaast.

$$\sin(55,77\dots^\circ) = \frac{CD}{4} \text{ geeft } CD = 4 \sin(55,77\dots^\circ) = 3,307\dots$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3,307\dots \approx 9,92$$

- b** $\angle R = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ$

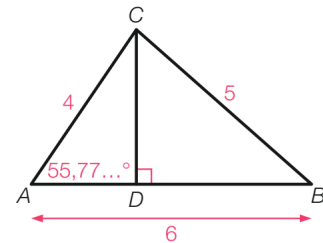
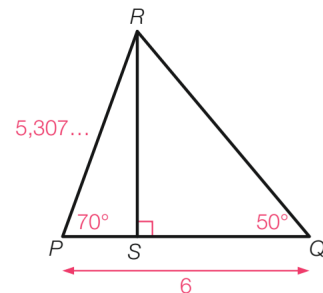
De sinusregel geeft $\frac{6}{\sin(60^\circ)} = \frac{PR}{\sin(50^\circ)}$

$$PR = \frac{6 \sin(50^\circ)}{\sin(60^\circ)} = 5,307\dots$$

Zie de figuur hiernaast.

$$\sin(70^\circ) = \frac{RS}{5,307\dots} \text{ geeft } RS = 5,307\dots \cdot \sin(70^\circ) = 4,987\dots$$

$$O(\triangle PQR) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4,987\dots \approx 14,96$$



Bladzijde 58

- 17** Los op $\frac{1}{\tan(x)} = \frac{3}{\tan(110^\circ - x)}$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $\angle ACD \approx 41,0^\circ$ en $CD \approx 1,1509$.

- 18** De cosinusregel geeft $BC^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(40^\circ) = 15,037\dots$
 $BC = 3,877\dots$

$$BM = \frac{1}{2} \cdot 3,877\dots = 1,938\dots$$

De oppervlakte van de halve cirkel is $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1,938\dots^2 \approx 5,91$.

Bladzijde 59

- 19** $\angle B = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{4}{\sin(40^\circ)} = \frac{BC}{\sin(60^\circ)}$

$$BC = \frac{4 \sin(60^\circ)}{\sin(40^\circ)} = 5,389\dots$$

De omtrek van het blauwe gebied is $5,389\dots + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5,389\dots \approx 13,85$.

- 20** Stel $\angle BAD = x$ met x in graden.

In $\triangle BAD$ is $\tan(x) = \frac{3}{AD}$, dus $AD = \frac{3}{\tan(x)}$.

Uit $\angle BAD = x$ volgt $\angle CAD = 50^\circ - x$.

In $\triangle CAD$ is $\tan(50^\circ - x) = \frac{2}{AD}$, dus $AD = \frac{2}{\tan(50^\circ - x)}$.

Los op $\frac{3}{\tan(x)} = \frac{2}{\tan(50^\circ - x)}$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $AD = 5,322\dots$

$$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot O(\triangle ABD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5,322\dots \approx 3,99$$

21 $\angle GFD = \angle EDF = 32^\circ$ (Z-hoeken)

Stel $DF = x$.

De cosinusregel in $\triangle DFG$ geeft $5^2 = 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos(32^\circ)$
 $25 = 9 + x^2 - 6x \cos(32^\circ)$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $DF = 7,284...$

Zie de figuur hiernaast.

In $\triangle DFH$ is $\cos(32^\circ) = \frac{DH}{7,284...}$

$$DH = 7,284... \cdot \cos(32^\circ) = 6,177...$$

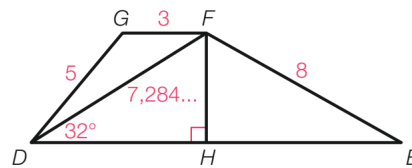
In $\triangle DFH$ is $\sin(32^\circ) = \frac{FH}{7,284...}$

$$FH = 7,284... \cdot \sin(32^\circ) = 3,860...$$

In $\triangle EFH$ is $EH = \sqrt{8^2 - 3,860...^2} = 7,007...$

$$DE = 6,177... + 7,007... = 13,184...$$

$$O(DEFG) = \frac{1}{2}(13,184... + 3) \cdot 3,860... \approx 31,24$$



22 De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $9^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos(\angle BAC)$

$$81 = 136 - 120 \cos(\angle BAC)$$

$$120 \cos(\angle BAC) = 55$$

$$\cos(\angle BAC) = \frac{55}{120}$$

$$\angle BAC = 62,72...^\circ$$

$$\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot 62,72...^\circ = 31,36...^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $6^2 = 10^2 + 9^2 - 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cos(\angle ABC)$

$$36 = 181 - 180 \cos(\angle ABC)$$

$$180 \cos(\angle ABC) = 145$$

$$\cos(\angle ABC) = \frac{145}{180}$$

$$\angle ABC = 36,33...^\circ$$

$$\angle ABM = \frac{1}{2} \cdot 36,33...^\circ = 18,16...^\circ$$

$$\angle AMB = 180^\circ - 31,36...^\circ - 18,16...^\circ = 130,47...^\circ$$

De sinusregel in $\triangle ABM$ geeft $\frac{AM}{\sin(18,16...^\circ)} = \frac{10}{\sin(130,47...^\circ)}$

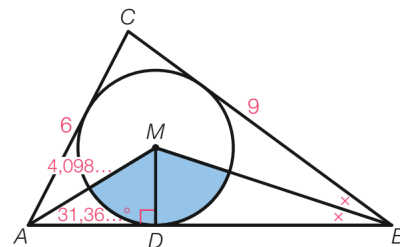
$$AM = \frac{10 \sin(18,16...^\circ)}{\sin(130,47...^\circ)} = 4,098...$$

Zie de figuur hiernaast.

In $\triangle ADM$ is $\sin(31,36...^\circ) = \frac{DM}{4,098...}$

$$DM = 4,098... \cdot \sin(31,36...^\circ) = 2,133...$$

De oppervlakte van de blauwe sector is $\frac{130,47...}{360} \cdot \pi \cdot 2,133...^2 \approx 5,18$.



Bladzijde 60

23 a omtrek $ABCD = 2 \cdot 16,5 + 2 \cdot (11 + 5,5 + 7,32 + 5,5 + 11) = 113,64$

$$EH + GH + FG = 4 \cdot 5,5 + 7,32 = 29,32$$

$$\cos(\frac{1}{2}\angle MSN) = \frac{16,5 - 11}{9,15} = \frac{5,5}{9,15} \text{ geeft } \frac{1}{2}\angle MSN = 53,05...^\circ, \text{ dus } \angle MSN = 2 \cdot 53,05...^\circ = 106,10...^\circ.$$

$$\text{De lengte van de boog } MN \text{ is } \frac{106,10...}{360} \cdot 2\pi \cdot 9,15 = 16,944...$$

Hij gaat $113,64 + 29,32 + 16,944... \approx 159,90$ meter kalken.

b De loodrechte projectie van P op AB is punt U .

$$\tan(\angle KPU) = \frac{3}{9} \text{ geeft } \angle KPU = 18,4...^\circ$$

$$\tan(\angle LPU) = \frac{10,32}{9} \text{ geeft } \angle LPU = 48,9...^\circ$$

De schothoek is $48,9...^\circ - 18,4...^\circ \approx 30^\circ$.

- c** In dat geval bevindt een speler zich midden voor het doel en is $KU = LU = 3,66$.

$$\tan(\angle KPU) = \frac{3,66}{9} \text{ geeft } \angle KPU = 22,1...^\circ$$

De grootst mogelijke schothoek is dan $2 \cdot 22,1...^\circ \approx 44^\circ$.

- d** Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel geeft $7,32^2 = 14,5^2 + 17^2 - 2 \cdot 14,5 \cdot 17 \cdot \cos(\angle P)$

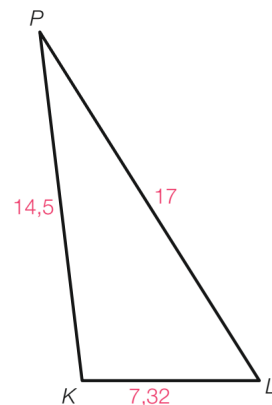
$$53,5824 = 499,25 - 493 \cos(\angle P)$$

$$493 \cos(\angle P) = 445,6676$$

$$\cos(\angle P) = 0,90...$$

$$\angle P = 25,3...^\circ$$

Dus de schothoek is dan 25° .



24 a $PQ = x_Q - x_P = 3 - (-2) = 5$
 $PS = y_S = f(-2) = 10 - (-2)^2 = 6$
 $QR = y_R = f(3) = 10 - 3^2 = 1$
 $O(PQRS) = \frac{1}{2}(6 + 1) \cdot 5 = 17\frac{1}{2}$

b $RS = \sqrt{5^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{50}$
 De omtrek van PQRS is $5 + 6 + 1 + \sqrt{50} \approx 19,07$.

Bladzijde 61

25 $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{6^2 + 18^2} = \sqrt{360}$
 De omtrek van $\triangle OAB$ is $6 + 18 + \sqrt{360} = 24 + \sqrt{360}$.

$$OQ = \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90}$$

$$PQ = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + y_Q^2} = \sqrt{(4 - 3)^2 + 9^2} = \sqrt{82}$$

De omtrek van $\triangle OPQ$ is $4 + \sqrt{90} + \sqrt{82}$.

$$\text{Dus } a = \frac{24 + \sqrt{360}}{4 + \sqrt{90} + \sqrt{82}} \approx 1,91.$$

Bladzijde 62

26 $f(x) = 0$ geeft $(x - 4)^2 = 0$ oftewel $x = 4$, dus $A(4, 0)$.

$$f(1) = (1 - 4)^2 = 9, \text{ dus } P(1, 9).$$

$$O(\triangle OAP) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 18$$

$$f(x) = (x - 4)^2 \text{ geeft } f'(x) = 2(x - 4) \cdot 1 = 2x - 8$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(1) = 2 \cdot 1 - 8 = -6$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -6x + b \\ \text{door } P(1, 9) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -6 \cdot 1 + b = 9 \\ b = 15 \end{array}$$

Dus $k: y = -6x + 15$.

k snijden met de assen geeft de punten $Q(2\frac{1}{2}, 0)$ en $R(0, 15)$,

$$\text{dus } O(\triangle OQR) = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 15 = 18\frac{3}{4}.$$

Dus er geldt niet $O(\triangle OAP) = O(\triangle OQR)$.

27 a Uit $f(x) = \frac{1}{4}x(x - 2)(x - 5) = 0$ volgt $A(2, 0)$ en $B(5, 0)$.

$$f(x) = \frac{1}{4}x(x - 2)(x - 5) = \frac{1}{4}x(x^2 - 7x + 10) = \frac{1}{4}x^3 - 1\frac{3}{4}x^2 + 2\frac{1}{2}x \text{ geeft } f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(1) = \frac{3}{4} - 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x + b \\ f(1) = 1, \text{ dus } P(1, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \cdot 1 + b = 1 \\ b = 1\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{4}.$$

$$x = 5 \text{ geeft } y = -\frac{1}{4} \cdot 5 + 1\frac{1}{4} = 0$$

Dus lijn k gaat door B .

- b** k snijdt de y -as in het punt $C(0, 1\frac{1}{4})$.

$$O(\triangle OBC) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1\frac{1}{4} = 3\frac{1}{8}$$

$$l: y = ax + b$$

$$a = f'(2) = \frac{3}{4} \cdot 2^2 - 3\frac{1}{2} \cdot 2 + 2\frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 0 \\ b = 3 \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = -1\frac{1}{2}x + 3 \text{ en } D(0, 3).$$

$$O(\triangle OAD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$$

Dus de oppervlakte van $\triangle OBC$ is het grootst.

- 28 a** $f(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 8 = 0$

$$-\frac{1}{2}x^2 = -8$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

Dus $A(-4, 0)$ en $B(4, 0)$.

$$f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 8 = 8, \text{ dus } T(0, 8).$$

$$f(3) = -\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 8 = 3\frac{1}{2}, \text{ dus } P(3, 3\frac{1}{2}).$$

$$O(\triangle ABP) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3\frac{1}{2} = 14$$

$$O(\triangle OPT) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$$

- b** $f(p) = -\frac{1}{2}p^2 + 8$, dus $P(p, -\frac{1}{2}p^2 + 8)$.

$$O(\triangle ABP) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (-\frac{1}{2}p^2 + 8) = -2p^2 + 32$$

- c** $O(\triangle OPT) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot p = 4p$

$$O(\triangle ABP) = O(\triangle OPT) \text{ geeft } -2p^2 + 32 = 4p$$

$$-2p^2 - 4p + 32 = 0$$

$$p^2 + 2p - 16 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -16 = 68$$

$$p = \frac{-2 + \sqrt{68}}{2} \vee p = \frac{-2 - \sqrt{68}}{2}$$

$$p = \frac{-2 - \sqrt{68}}{2} < 0, \text{ dus voldoet niet.}$$

$$\text{Dus } p = \frac{-2 + \sqrt{68}}{2} \approx 3,12.$$

Bladzijde 63

- 29 a** $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x + b \\ f(4) = 8, \text{ dus } P(4, 8) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 + b = 8 \\ b = 4 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = x + 4.$$

k snijden met de assen geeft $A(-4, 0)$ en $B(0, 4)$.

$$O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$$

$$O(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$$

$$\begin{aligned}
\text{b } k: y &= ax + b \\
a &= f'(p) = -\frac{1}{2}p + 3 \\
y &= (-\frac{1}{2}p + 3)x + b \\
f(p) &= -\frac{1}{4}p^2 + 3p, \text{ dus } P(p, -\frac{1}{4}p^2 + 3p) \left. \begin{aligned} &(-\frac{1}{2}p + 3)p + b = -\frac{1}{4}p^2 + 3p \\ &-\frac{1}{2}p^2 + 3p + b = -\frac{1}{4}p^2 + 3p \end{aligned} \right\} \\
& \qquad \qquad \qquad b = \frac{1}{4}p^2
\end{aligned}$$

Dus $k: y = (-\frac{1}{2}p + 3)x + \frac{1}{4}p^2$ en $B(0, \frac{1}{4}p^2)$.

$$\begin{aligned}
y = 0 \text{ geeft } (-\frac{1}{2}p + 3)x + \frac{1}{4}p^2 &= 0 \\
(-\frac{1}{2}p + 3)x &= -\frac{1}{4}p^2 \\
-4(-\frac{1}{2}p + 3)x &= -4 \cdot -\frac{1}{4}p^2 \\
(2p - 12)x &= p^2 \\
x &= \frac{p^2}{2p - 12}, \text{ dus } A\left(\frac{p^2}{2p - 12}, 0\right).
\end{aligned}$$

$$\text{c } O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{p^2}{2p - 12}\right) \cdot \frac{1}{4}p^2 = -\frac{p^4}{16p - 96}$$

$$O(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (-\frac{1}{4}p^2 + 3p) = -\frac{1}{8}p^3 + \frac{3}{2}p^2$$

$$\text{Los op } -\frac{p^4}{16p - 96} = -\frac{1}{8}p^3 + \frac{3}{2}p^2.$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $p \approx 4,58$.

30 Bij driehoek OAP hoort bij basis OA de hoogte y_p .

Bij driehoek OPQ hoort bij basis OQ de hoogte y_p .

Dus als geldt $O(\triangle OAP) = O(\triangle OPQ)$, dan moet gelden $OA = OQ$ oftewel $x_Q = -x_A$.

$$f(x) = 0 \text{ geeft } -x^2 + 6x = 0$$

$$x(-x + 6) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 6$$

Dus $A(6, 0)$.

$$f(p) = -p^2 + 6p, \text{ dus } P(p, -p^2 + 6p).$$

$$f(x) = -x^2 + 6x \text{ geeft } f'(x) = -2x + 6$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(p) = -2p + 6$$

$$\begin{aligned}
y &= (-2p + 6)x + b \\
\text{door } P(p, -p^2 + 6p) &\left. \begin{aligned} &(-2p + 6)p + b = -p^2 + 6p \\ &-2p^2 + 6p + b = -p^2 + 6p \end{aligned} \right\} \\
& \qquad \qquad \qquad b = p^2
\end{aligned}$$

$$\text{Dus } k: y = (-2p + 6)x + p^2.$$

$$y = 0 \text{ geeft } (-2p + 6)x + p^2 = 0$$

$$(-2p + 6)x = -p^2$$

$$x = \frac{-p^2}{-2p + 6} = \frac{p^2}{2p - 6}, \text{ dus } Q\left(\frac{p^2}{2p - 6}, 0\right).$$

$$\text{Los op } \frac{p^2}{2p - 6} = -6.$$

$$\text{Dit geeft } p^2 = -6(2p - 6)$$

$$p^2 = -12p + 36$$

$$p^2 + 12p - 36 = 0$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot -36 = 288, \text{ dus } \sqrt{D} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

$$p = \frac{-12 + 12\sqrt{2}}{2} \vee p = \frac{-12 - 12\sqrt{2}}{2}$$

$$p = -6 + 6\sqrt{2} \vee p = -6 - 6\sqrt{2}$$

$$p = -6 - 6\sqrt{2} \text{ voldoet niet, dus } p = -6 + 6\sqrt{2}.$$

C3 De sinusregel geeft $\frac{7}{\sin(56^\circ)} = \frac{6}{\sin(\angle C)}$
 $\sin(\angle C) = \frac{6 \sin(56^\circ)}{7}$

$$\angle C = 45,28\dots^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 56^\circ - 45,28\dots^\circ = 78,71\dots^\circ$$

De sinusregel geeft $\frac{7}{\sin(56^\circ)} = \frac{AC}{\sin(78,71\dots^\circ)}$

$$AC = \frac{7 \sin(78,71\dots^\circ)}{\sin(56^\circ)} = 8,280\dots$$

$$CM = \frac{1}{2} \cdot 8,280\dots = 4,140\dots$$

De oppervlakte van de blauwe sector is $\frac{45,28\dots}{360} \cdot \pi \cdot 4,140\dots^2 \approx 6,77$.

C4 a $f(x) = 0$ geeft $x^3 - 9x = 0$
 $x(x^2 - 9) = 0$
 $x = 0 \vee x^2 = 9$
 $x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3$

Dus $B(3, 0)$.

$$f(x) = x^3 - 9x \text{ geeft } f'(x) = 3x^2 - 9$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(-1\frac{1}{2}) = 3 \cdot (-1\frac{1}{2})^2 - 9 = -2\frac{1}{4}$$

$$y = -2\frac{1}{4}x + b$$

$$f(-1\frac{1}{2}) = 10\frac{1}{8}, \text{ dus } P(-1\frac{1}{2}, 10\frac{1}{8}) \left. \vphantom{\begin{matrix} y = -2\frac{1}{4}x + b \\ f(-1\frac{1}{2}) = 10\frac{1}{8} \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} -2\frac{1}{4} \cdot -1\frac{1}{2} + b = 10\frac{1}{8} \\ b = 6\frac{3}{4} \end{matrix}$$

$$\text{Dus } k: y = -2\frac{1}{4}x + 6\frac{3}{4}.$$

$$x = 3 \text{ geeft } y = -2\frac{1}{4} \cdot 3 + 6\frac{3}{4} = 0$$

Dus lijn k gaat door het punt B .

b $O(\triangle OBP) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10\frac{1}{8} = 15\frac{3}{16}$

c $OP = \sqrt{(0 - x_P)^2 + y_P^2} = \sqrt{(1\frac{1}{2})^2 + (10\frac{1}{8})^2} = 10,235\dots$

$$BP = \sqrt{(x_B - x_P)^2 + y_P^2} = \sqrt{(3 - 1\frac{1}{2})^2 + (10\frac{1}{8})^2} = 11,079\dots$$

De omtrek van driehoek OBP is $3 + 10,235\dots + 11,079\dots \approx 24,32$.

10.3 Cirkels en raaklijnen

V6 a $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 10 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 2y + 10 = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 + 10 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 7$
Dus de straal is $\sqrt{7}$ en het middelpunt is $(4, 1)$.

b $x^2 + y^2 + 6x - 5y + 13 = 0$
 $x^2 + 6x + y^2 - 5y + 13 = 0$
 $(x + 3)^2 - 9 + (y - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + 13 = 0$
 $(x + 3)^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{4}$
Dus de straal is $1\frac{1}{2}$ en het middelpunt is $(-3, 2\frac{1}{2})$.

c $x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$
 $x^2 - 9x + y^2 - 3y + 10 = 0$
 $(x - 4\frac{1}{2})^2 - 20\frac{1}{4} + (y - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 10 = 0$
 $(x - 4\frac{1}{2})^2 + (y - 1\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{2}$

Dus de straal is $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ en het middelpunt is $(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.

- V7** a $(x-6)^2 + (y-3)^2 = r^2$ } $r^2 = (0-6)^2 + (0-3)^2 = 45$
 door $O(0, 0)$
 $c_1: (x-6)^2 + (y-3)^2 = 45$
 $x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = 45$
 $x^2 + y^2 - 12x - 6y = 0$
- b $(x+3)^2 + (y-5)^2 = r^2$ } $r^2 = (0+3)^2 + (3-5)^2 = 13$
 door $(0, 3)$
 $c_2: (x+3)^2 + (y-5)^2 = 13$
 $x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 13$
 $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 21 = 0$
- c Middellijn AB met $A(2, 0)$ en $B(8, 0)$ geeft middelpunt $M_3(5, 0)$ en straal $r = 3$.
 $c_3: (x-5)^2 + y^2 = 9$
 $x^2 - 10x + 25 + y^2 = 9$
 $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$
- d Middellijn CD met $C(1, 2)$ en $D(7, 4)$ geeft middelpunt $M_4(4, 3)$ en straal
 $r = d(C, M) = \sqrt{(4-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$.
 $c_4: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 10$
 $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 10$
 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$

- V8** a k snijden met l geeft
 $\begin{cases} 2x - 5y = -7 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x - 15y = -21 \\ 5x + 15y = 10 \end{cases}$
 $\frac{11x = -11}{x = -1}$
 $x = -1$ invullen in $x + 3y = 2$ geeft $-1 + 3y = 2$
 $3y = 3$
 $y = 1$

Dus $A(-1, 1)$.

$$d(A, B) = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{29}$$

- b Lijn m door B loodrecht op l .
 $m: 3x - y = c$ } $c = 3 \cdot 4 - 3 = 9$
 door $B(4, 3)$
 $m: 3x - y = 9$ snijden met l geeft het punt C .
 $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 9x - 3y = 27 \end{cases}$
 $\frac{10x = 29}{x = 2\frac{9}{10}}$

$$x = 2\frac{9}{10} \text{ invullen in } x + 3y = 2 \text{ geeft } 2\frac{9}{10} + 3y = 2$$

$$3y = -\frac{9}{10}$$

$$y = -\frac{3}{10}$$

Dus $C(2\frac{9}{10}, -\frac{3}{10})$.

$$d(B, l) = d(B, C) = \sqrt{(2\frac{9}{10} - 4)^2 + (-\frac{3}{10} - 3)^2} = \sqrt{12\frac{1}{10}}$$

- 31** a Lijn l gaat door M met $l \perp k$.

$$l: x + 2y = c \text{ } \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } M(-2, 3) \end{array} \right\} c = -2 + 2 \cdot 3 = 4$$

Dus $l: x + 2y = 4$.

k en l snijden geeft het punt A .

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\frac{5x = 10}{x = 2}$$

$$x = 2 \text{ invullen in } 2x - y = 3 \text{ geeft } 2 \cdot 2 - y = 3$$

$$4 - y = 3$$

$$y = 1$$

Dus $A(2, 1)$.

$$d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{20}$$

- b** k raakt c , dus $d(M, k) = r$ met r de straal van c .
Dus in vraag a heb je de straal van c berekend.
- c** $c: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 20$

Bladzijde 68

- 32 a** $c_1: (x-2)^2 + (y-5)^2 = r^2$ met $r = d(M, k)$
Lijn m gaat door M met $m \perp k$.
 $m: 3x - 2y = c$
door $M(2, 5)$ $\left\{ \begin{array}{l} c = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = -4 \end{array} \right.$
Dus $m: 3x - 2y = -4$.
 k en m snijden geeft het punt A .
 $\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 6 \\ 3x - 2y = -4 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right|$ geeft $\left\{ \begin{array}{l} 4x + 6y = 12 \\ 9x - 6y = -12 \end{array} \right. +$
 $13x = 0$
 $x = 0$
 $x = 0$ invullen in $2x + 3y = 6$ geeft $3y = 6$
 $y = 2$
Dus $A(0, 2)$.
 $r = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(0-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{13}$
Dus $c_1: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 13$.
- b** c_2 is de cirkel met middelpunt $N(-1, 3)$ en straal $\sqrt{29}$.
Lijn n door N en B heeft $rc_n = \frac{3-1}{-1-4} = -\frac{2}{5}$.
 $l \perp n$, dus $rc_l \cdot -\frac{2}{5} = -1$ en dit geeft $rc_l = 2\frac{1}{2}$.
 $l: y = 2\frac{1}{2}x + b$
door $B(4, 1)$ $\left\{ \begin{array}{l} 2\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 1 \\ 10 + b = 1 \end{array} \right.$
 $b = -9$
Dus $l: y = 2\frac{1}{2}x - 9$.

- 33 c:** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = r^2$ met $r = d(M, k)$
Lijn l gaat door M met $l \perp k$.
 $l: 2x + 3y = c$
door $M(2, 1)$ $\left\{ \begin{array}{l} c = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \end{array} \right.$
Dus $l: 2x + 3y = 7$.
 k en l snijden geeft het punt A .
 $\left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = -9 \\ 2x + 3y = 7 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right|$ geeft $\left\{ \begin{array}{l} 9x - 6y = -27 \\ 4x + 6y = 14 \end{array} \right. +$
 $13x = -13$
 $x = -1$
 $x = -1$ invullen in $2x + 3y = 7$ geeft $2 \cdot -1 + 3y = 7$
 $3y = 9$
 $y = 3$
Dus $A(-1, 3)$.
 $r = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$
Dus $c: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$.

- 34 a** $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 12 = 0$
 $x^2 - 10x + y^2 - 4y + 12 = 0$
 $(x-5)^2 - 25 + (y-2)^2 - 4 + 12 = 0$
 $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 17$
Dus $M(5, 2)$.
Lijn m door M en A heeft $rc_m = \frac{2-3}{5-1} = -\frac{1}{4}$.
 $k \perp m$, dus $rc_k \cdot -\frac{1}{4} = -1$ en dit geeft $rc_k = 4$.
 $k: y = 4x + b$
door $A(1, 3)$ $\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 1 + b = 3 \\ b = -1 \end{array} \right.$
Dus $k: y = 4x - 1$.

Lijn n door M en B heeft $rc_n = \frac{2 - -2}{5 - 6} = -4$.

$l \perp n$, dus $rc_l \cdot -4 = -1$ en dit geeft $rc_l = \frac{1}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = \frac{1}{4}x + b \\ \text{door } B(6, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot 6 + b = -2 \\ \frac{1}{2} + b = -2 \\ b = -3\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $l: y = \frac{1}{4}x - 3\frac{1}{2}$.

b Lijn m door M en A heeft $rc_m = -\frac{1}{4}$ (zie a).

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -\frac{1}{4}x + b \\ \text{door } M(5, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \cdot 5 + b = 2 \\ -1\frac{1}{4} + b = 2 \\ b = 3\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $m: y = -\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{4}$.

$y = 0$ geeft $-\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{4} = 0$

$$-\frac{1}{4}x = -3\frac{1}{4}$$

$$x = 13$$

Dus $N(13, 0)$.

$d: (x - 13)^2 + y^2 = r^2$ met $r = d(N, p)$

Lijn q gaat door N met $q \perp p$.

$$\left. \begin{array}{l} q: y = -x + b \\ \text{door } N(13, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -13 + b = 0 \\ b = 13 \end{array}$$

Dus $q: y = -x + 13$.

p en q snijden geeft het punt S .

$$x = -x + 13$$

$$2x = 13$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 6\frac{1}{2} \\ y = x \end{array} \right\} y = 6\frac{1}{2}$$

Dus $S(6\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$.

$$r = d(N, p) = d(N, S) = \sqrt{(6\frac{1}{2} - 13)^2 + (6\frac{1}{2} - 0)^2} = \sqrt{84\frac{1}{2}}$$

Dus $d: (x - 13)^2 + y^2 = 84\frac{1}{2}$.

35 a $c_1: (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = r_1^2$ met $r_1 = d(M, A)$

Lijn m gaat door M met $m \perp k$.

$$\left. \begin{array}{l} m: x - 4y = c \\ \text{door } M(4, 3) \end{array} \right\} c = 4 - 4 \cdot 3 = -8$$

Dus $m: x - 4y = -8$.

k en m snijden geeft het punt A .

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + y = 36 \\ x - 4y = -8 \end{array} \right| \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 16x + 4y = 144 \\ x - 4y = -8 \end{array} \right. + \frac{17x = 136}{x = 8}$$

$x = 8$ invullen in $4x + y = 36$ geeft $4 \cdot 8 + y = 36$

$$32 + y = 36$$

$$y = 4$$

Dus $A(8, 4)$.

$$r_1 = d(M, A) = \sqrt{(8 - 4)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{17}$$

Dus $c_1: (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 17$.

c_1 snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $(x - 4)^2 + (-3)^2 = 17$

$$(x - 4)^2 + 9 = 17$$

$$(x - 4)^2 = 8$$

$$x - 4 = \sqrt{8} \vee x - 4 = -\sqrt{8}$$

$$x - 4 = 2\sqrt{2} \vee x - 4 = -2\sqrt{2}$$

$$x = 4 + 2\sqrt{2} \vee x = 4 - 2\sqrt{2}$$

Dus $B(4 - 2\sqrt{2}, 0)$ en $C(4 + 2\sqrt{2}, 0)$.

b Het middelpunt N van c_2 is $N(\frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2}), 0) = N(4, 0)$.

De straal r_2 van c_2 is $x_N - x_B = 4 - (4 - 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Dus $c_2: (x - 4)^2 + y^2 = 8$.

$x = 2$ geeft $(2 - 4)^2 + y^2 = 8$

$$4 + y^2 = 8$$

$$y^2 = 4$$

$$y = 2 \vee y = -2$$

Dus $D(2, 2)$.

De lijn n door D en N heeft $rc_n = \frac{0 - 2}{4 - 2} = -1$.

$l \perp n$, dus $rc_l \cdot -1 = -1$ en dit geeft $rc_l = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = x + b \\ \text{door } D(2, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 + b = 2 \\ b = 0 \end{array}$$

Dus $l: y = x$, dus l gaat door de oorsprong.

36 Lijn m gaat door A met $m \perp l$.

$$\left. \begin{array}{l} m: x - 2y = c \\ \text{door } A(5, 3) \end{array} \right\} c = 5 - 2 \cdot 3 = -1$$

Dus $m: x - 2y = -1$.

k en m snijden geeft het punt M .

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{array} \right. \\ \hline 3y = 6 \\ y = 2 \end{array}$$

$y = 2$ invullen in $x + y = 5$ geeft $x = 3$, dus $M(3, 2)$.

$$c: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = r^2$$

$$r = d(M, A) = \sqrt{(5 - 3)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{5}$$

Dus $c: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

37 a Substitutie van $y = -2x + 5$ in $x^2 + y^2 = 5$ geeft $x^2 + (-2x + 5)^2 = 5$

$$x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 5$$

$$5x^2 - 20x + 20 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

b $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

De vergelijking die na de substitutie is ontstaan, heeft één oplossing.

Dus de lijn l en de cirkel c hebben één punt gemeenschappelijk.

Dus l raakt c .

Bladzijde 69

38 a $D = 484$, dus $\sqrt{D} = 22$.

$$\text{Dit geeft } x = \frac{12 + 22}{10} = 3\frac{2}{5} \vee x = \frac{12 - 22}{10} = -1.$$

$$x = 3\frac{2}{5} \text{ geeft } y = 2 \cdot 3\frac{2}{5} - 3 = 3\frac{4}{5} \text{ en } x = -1 \text{ geeft } y = 2 \cdot -1 - 3 = -5.$$

Dus de snijpunten zijn $(3\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5})$ en $(-1, -5)$.

b $D = 0$, dus $x = -\frac{10}{2 \cdot 5} = -1$.

$$x = -1 \text{ geeft } y = 2 \cdot -1 + 5 = 3$$

Dus het raakpunt is $(-1, 3)$.

Bladzijde 70

39 a Substitutie van $y = x - 4$ in $x^2 + y^2 = 13$ geeft

$$x^2 + (x - 4)^2 = 13$$

$$x^2 + x^2 - 8x + 16 = 13$$

$$2x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 40$$

$D > 0$, dus k snijdt c_1 in twee punten.

- b** Substitutie van $y = -4x - 3$ in $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 4$ geeft
 $x^2 + (-4x - 3)^2 - 6x - 4(-4x - 3) = 4$
 $x^2 + 16x^2 + 24x + 9 - 6x + 16x + 12 = 4$
 $17x^2 + 34x + 17 = 0$
 $x^2 + 2x + 1 = 0$
 $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$
 $D = 0$, dus l raakt c_2 .
- c** $m: 2x - y = 1$ oftewel $m: y = 2x - 1$
 Substitutie van $y = 2x - 1$ in $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$ geeft
 $x^2 + (2x - 1)^2 + 6x - 4(2x - 1) = 0$
 $x^2 + 4x^2 - 4x + 1 + 6x - 8x + 4 = 0$
 $5x^2 - 6x + 5 = 0$
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = -64$
 $D < 0$, dus m heeft geen punten gemeenschappelijk met c_3 .

- 40 a** $k: 2x + y = 2$ oftewel $k: y = -2x + 2$
 Substitutie van $y = -2x + 2$ in $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10$ geeft
 $(x - 4)^2 + (-2x + 1)^2 = 10$
 $x^2 - 8x + 16 + 4x^2 - 4x + 1 = 10$
 $5x^2 - 12x + 7 = 0$
 $D = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 7 = 4$
 $D > 0$, dus k snijdt c in twee punten.
- b** Substitutie van $y = \frac{1}{2}x + 2$ in $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ geeft
 $x^2 + (\frac{1}{2}x + 2)^2 - 4x - 2(\frac{1}{2}x + 2) + 4 = 0$
 $x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4 - 4x - x - 4 + 4 = 0$
 $1\frac{1}{4}x^2 - 3x + 4 = 0$
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 4 = -11$
 $D < 0$, dus l heeft geen gemeenschappelijke punten met d .

- 41 a** Substitutie van $y = 3x + 5$ in $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ geeft
 $x^2 + (3x + 5)^2 - 4x - 2(3x + 5) - 5 = 0$
 $x^2 + 9x^2 + 30x + 25 - 4x - 6x - 10 - 5 = 0$
 $10x^2 + 20x + 10 = 0$
 $x^2 + 2x + 1 = 0$
 $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$
 $D = 0$, dus k raakt c .
 Substitutie van $y = 3x - 15$ in $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ geeft
 $x^2 + (3x - 15)^2 - 4x - 2(3x - 15) - 5 = 0$
 $x^2 + 9x^2 - 90x + 225 - 4x - 6x + 30 - 5 = 0$
 $10x^2 - 100x + 250 = 0$
 $x^2 - 10x + 25 = 0$
 $D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$
 $D = 0$, dus l raakt c .
- b** $x = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$ geeft $y = 3 \cdot -1 + 5 = 2$, dus $A(-1, 2)$.
 Van de lijn door O en A is de formule $y = -2x$.
 Substitutie van $y = -2x$ in $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ geeft
 $x^2 + (-2x)^2 - 4x - 2 \cdot -2x - 5 = 0$
 $x^2 + 4x^2 - 4x + 4x - 5 = 0$
 $5x^2 = 5$
 $x^2 = 1$
 $x = 1 \vee x = -1$
 $x = 1$ geeft $y = -2 \cdot 1 = -2$, dus $C(1, -2)$.

42 a Substitutie van $y = \frac{1}{2}x + 3$ in $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 29 = 0$ geeft

$$x^2 + (\frac{1}{2}x + 3)^2 - 10x - 6(\frac{1}{2}x + 3) + 29 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 - 10x - 3x - 18 + 29 = 0$$

$$1\frac{1}{4}x^2 - 10x + 20 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 20 = 0$$

$D = 0$, dus k raakt c .

$$x = \frac{10}{2 \cdot 1\frac{1}{4}} = 4 \text{ geeft } y = \frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = 5, \text{ dus raakpunt } (4, 5).$$

Substitutie van $y = -\frac{1}{2}x + 3$ in $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 29 = 0$ geeft

$$x^2 + (-\frac{1}{2}x + 3)^2 - 10x - 6(-\frac{1}{2}x + 3) + 29 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 - 10x + 3x - 18 + 29 = 0$$

$$1\frac{1}{4}x^2 - 10x + 20 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 20 = 0$$

$D = 0$, dus l raakt c .

$$x = \frac{10}{2 \cdot 1\frac{1}{4}} = 4 \text{ geeft } y = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = 1, \text{ dus raakpunt } (4, 1).$$

b Van de lijn p is de formule $p: y = -\frac{1}{3}x + 3$.

Substitutie van $y = -\frac{1}{3}x + 3$ in $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 29 = 0$ geeft

$$x^2 + (-\frac{1}{3}x + 3)^2 - 10x - 6(-\frac{1}{3}x + 3) + 29 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{9}x^2 - 2x + 9 - 10x + 2x - 18 + 29 = 0$$

$$1\frac{1}{9}x^2 - 10x + 20 = 0$$

$$10x^2 - 90x + 180 = 0$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$(x - 3)(x - 6) = 0$$

$$x = 3 \vee x = 6$$

$$x = 3 \text{ geeft } y = -\frac{1}{3} \cdot 3 + 3 = 2 \text{ en } x = 6 \text{ geeft } y = -\frac{1}{3} \cdot 6 + 3 = 1, \text{ dus } B(3, 2) \text{ en } C(6, 1).$$

Het punt $M(\frac{1}{2}(3 + 6), \frac{1}{2}(2 + 1)) = M(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$ is het midden van lijnstuk BC en dus het middelpunt van d .

$$d: (x - 4\frac{1}{2})^2 + (y - 1\frac{1}{2})^2 = r^2 \text{ met } r = d(M, B) = \sqrt{(3 - 4\frac{1}{2})^2 + (2 - 1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{2\frac{1}{2}}$$

$$\text{Dus } d: (x - 4\frac{1}{2})^2 + (y - 1\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{2}.$$

Bladzijde 71

43 a $k: x - 2y = 1$ oftewel $k: x = 2y + 1$

Substitutie van $x = 2y + 1$ in $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 5$ geeft

$$(2y - 5)^2 + (y - 5)^2 = 5$$

$$4y^2 - 20y + 25 + y^2 - 10y + 25 = 5$$

$$5y^2 - 30y + 45 = 0$$

$$y^2 - 6y + 9 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

$D = 0$, dus k raakt c .

$$y = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3 \text{ geeft } x = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

Dus $A(7, 3)$.

b $l \parallel k$ en l door $O(0, 0)$ geeft $l: x - 2y = 0$ oftewel $l: x = 2y$.

Substitutie van $x = 2y$ in $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 5$ geeft

$$(2y - 6)^2 + (y - 5)^2 = 5$$

$$4y^2 - 24y + 36 + y^2 - 10y + 25 = 5$$

$$5y^2 - 34y + 56 = 0$$

$$D = (-34)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 56 = 36, \text{ dus } \sqrt{D} = 6$$

$$y = \frac{34 \pm 6}{10} = 4 \vee y = \frac{34 - 6}{10} = 2\frac{4}{5}$$

$$y = 4 \text{ geeft } x = 8, \text{ dus } C(8, 4).$$

$$d: (x - 8)^2 + (y - 4)^2 = r^2 \left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} r^2 = (7 - 8)^2 + (3 - 4)^2 = 2$$

door $A(7, 3)$

$$\text{Dus } d: (x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 2.$$

c $m: x - 2y = -9$ oftewel $m: x = 2y - 9$
 Substitutie van $x = 2y - 9$ in $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 5$ geeft
 $(2y - 15)^2 + (y - 5)^2 = 5$
 $4y^2 - 60y + 225 + y^2 - 10y + 25 = 5$
 $5y^2 - 70y + 245 = 0$
 $y^2 - 14y + 49 = 0$
 $(y - 7)^2 = 0$
 $y = 7$
 $y = 7$ geeft $x = 2 \cdot 7 - 9 = 5$
 Dus $Q(5, 7)$.
 $n: x + 8y = 36$ oftewel $n: x = -8y + 36$
 Substitutie van $x = -8y + 36$ in $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 5$ geeft
 $(-8y + 30)^2 + (y - 5)^2 = 5$
 $64y^2 - 480y + 900 + y^2 - 10y + 25 = 5$
 $65y^2 - 490y + 920 = 0$
 $D = (-490)^2 - 4 \cdot 65 \cdot 920 = 900$, dus $\sqrt{D} = 30$
 $y = \frac{490 \pm 30}{130} = 4 \vee y = \frac{490 - 30}{130} = 3\frac{7}{13}$
 $y = 4$ geeft $x = -8 \cdot 4 + 36 = 4$
 Dus $R(4, 4)$.
 $QR: y = ax + b$ met $a = \frac{7 - 4}{5 - 4} = 3$

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + b \\ \text{door } Q(5, 7) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 5 + b = 7 \\ 15 + b = 7 \\ b = -8 \end{array}$$

 Dus $QR: y = 3x - 8$.
 $y = 0$ geeft $3x - 8 = 0$
 $3x = 8$
 $x = 2\frac{2}{3}$
 Dus $T(2\frac{2}{3}, 0)$.

44 Het punt $A(2, 1)$ ligt op k .

Lijn m gaat door A met $m \perp k$.

$$\left. \begin{array}{l} m: 4x - 3y = c \\ \text{door } A(2, 1) \end{array} \right\} c = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 5$$

Dus $m: 4x - 3y = 5$ oftewel $m: y = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}$.

De cirkel c met middelpunt A en straal 5 heeft vergelijking $c: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

c snijden met m .

$$\begin{aligned} \text{Substitutie van } y = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3} \text{ in } (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \text{ geeft } (x - 2)^2 + (1\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3})^2 &= 25 \\ x^2 - 4x + 4 + 1\frac{7}{9}x^2 - 7\frac{1}{9}x + 7\frac{1}{9} &= 25 \\ 2\frac{7}{9}x^2 - 11\frac{1}{9}x - 13\frac{8}{9} &= 0 \\ 25x^2 - 100x - 125 &= 0 \\ x^2 - 4x - 5 &= 0 \\ (x + 1)(x - 5) &= 0 \\ x = -1 \vee x = 5 \end{aligned}$$

$x = -1$ geeft $y = 1\frac{1}{3} \cdot -1 - 1\frac{2}{3} = -3$ en $x = 5$ geeft $y = 1\frac{1}{3} \cdot 5 - 1\frac{2}{3} = 5$

$$\left. \begin{array}{l} l_1: 3x + 4y = c \\ \text{door } (-1, -3) \end{array} \right\} c = 3 \cdot -1 + 4 \cdot -3 = -15$$

Dus $l_1: 3x + 4y = -15$.

$$\left. \begin{array}{l} l_2: 3x + 4y = c \\ \text{door } (5, 5) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 35$$

Dus $l_2: 3x + 4y = 35$.

C5 $c: (x-1)^2 + (y-3)^2 = r^2$ met $r = d(M, k)$

Lijn l gaat door M met $l \perp k$.

$$\left. \begin{array}{l} l: 3x + 2y = c \\ \text{door } M(1, 3) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 9$$

Dus $l: 3x + 2y = 9$.

k en l snijden geeft het punt A .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 6 \\ 3x + 2y = 9 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x - 6y = 12 \\ 9x + 6y = 27 \end{array} \right. +$$

$$\frac{13x = 39}{x = 3}$$

$x = 3$ invullen in $2x - 3y = 6$ geeft $2 \cdot 3 - 3y = 6$

$$6 - 3y = 6$$

$$y = 0$$

Dus $A(3, 0)$.

$$r = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(3-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{13}$$

Dus $c: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 13$.

C6 **a** $k: x - 2y = -1$ oftewel $k: x = 2y - 1$

Substitutie van $x = 2y - 1$ in $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$ geeft

$$(2y - 1)^2 + y^2 - 6(2y - 1) + 4 = 0$$

$$4y^2 - 4y + 1 + y^2 - 12y + 6 + 4 = 0$$

$$5y^2 - 16y + 11 = 0$$

$$D = (-16)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 11 = 36$$

$D > 0$, dus k snijdt c_1 in twee punten.

b Substitutie van $y = -3x + 21$ in $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ geeft

$$x^2 + (-3x + 21)^2 - 6x - 4(-3x + 21) + 3 = 0$$

$$x^2 + 9x^2 - 126x + 441 - 6x + 12x - 84 + 3 = 0$$

$$10x^2 - 120x + 360 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0$$

$D = 0$, dus l raakt c_2 .

c Substitutie van $y = x + 1$ in $x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$ geeft

$$x^2 + (x + 1)^2 - 8x + 6 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 8x + 6 = 0$$

$$2x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -20$$

$D < 0$, dus m heeft geen punten gemeenschappelijk met c_3 .

10.4 Cirkels en afstanden

Bladzijde 72

45 **a** $x = 2$ en $y = 0$ invullen geeft $(2-2)^2 + (0+4)^2 = 16$

$$0^2 + 4^2 = 16$$

$$0 + 16 = 16 \text{ klopt}$$

Dus A ligt op c .

b $M(2, -4)$ en $r = 4$

$$d(B, M) = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-4-(-3))^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

$d(B, M) > r$, dus B ligt buiten c .

c $d(C, M) = \sqrt{(2-1)^2 + (-4-(-1))^2} = \sqrt{10}$

$d(C, M) < r$, dus C ligt binnen c .

46 a $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 6 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + (y - 1)^2 - 1 + 6 = 0$
 $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$
 $M_1(3, 1)$ en $r_1 = 2$
 $d(A, M_1) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2}$
Dus $d(A, c_1) = 2 - \sqrt{2}$.

b $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 23$
 $x^2 - 2x + y^2 - 8y = 23$
 $(x - 1)^2 - 1 + (y - 4)^2 - 16 = 23$
 $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 40$
 $M_2(1, 4)$ en $r_2 = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
 $d(B, M_2) = \sqrt{(1 - -5)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
Dus $d(B, c_2) = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{10}$.

47 a $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 7 = 0$
 $(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 - 7 = 0$
 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 20$
 $M(-2, 3)$ en $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 $d(A, M) = \sqrt{(-2 - -6)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{17}$
Dus $d(A, c) = 2\sqrt{5} - \sqrt{17}$.

b Lijn l gaat door M met $l \perp k$.
 $l: 3x + 4y = c$
door $M(-2, 3)$ } $c = 3 \cdot -2 + 4 \cdot 3 = 6$
Dus $l: 3x + 4y = 6$.
 k en l snijden geeft het punt B .
 $\begin{cases} 4x - 3y = 8 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases} \begin{matrix} |4| \\ |3| \end{matrix}$ geeft $\begin{cases} 16x - 12y = 32 \\ 9x + 12y = 18 \end{cases} +$
 $25x = 50$
 $x = 2$
 $x = 2$ invullen in $4x - 3y = 8$ geeft $4 \cdot 2 - 3y = 8$
 $8 - 3y = 8$
 $y = 0$

Dus $B(2, 0)$.
 $d(B, M) = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 - 0)^2} = 5$
Dus $d(k, c) = 5 - 2\sqrt{5}$.

Bladzijde 73

48 $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$
 $x^2 - 10x + y^2 - 4y + 19 = 0$
 $(x - 5)^2 - 25 + (y - 2)^2 - 4 + 19 = 0$
 $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 10$
 $M(5, 2)$ en $r = \sqrt{10}$

$d(A, M) = \sqrt{(5 - 0)^2 + (2 - -2)^2} = \sqrt{41}$

Lijn l gaat door M met $l \perp k$.

$l: y = -\frac{1}{3}x + b$
door $M(5, 2)$ } $-\frac{1}{3} \cdot 5 + b = 2$
 $-\frac{5}{3} + b = 2$
 $b = 3\frac{2}{3}$

Dus $l: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$.

k en l snijden geeft het punt B .

$3x + 7 = -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$

$3\frac{1}{3}x = -3\frac{1}{3}$

$x = -1$
 $y = 3x + 7$ } $y = 3 \cdot -1 + 7 = 4$, dus $B(-1, 4)$.

$d(B, M) = \sqrt{(5 - -1)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{40}$

$d(B, M) < d(A, M)$, dus k ligt dichterbij c dan A bij c ligt.

49 $d(c, d) = d(M, N) - r_c - r_d = 9 - 2 - 3 = 4$

Bladzijde 74

50 M op k geeft $1 + 4y = 16$

$$4y = 15$$

$$y = 3\frac{3}{4}$$

Dus $M(1, 3\frac{3}{4})$ en $r_1 = 3\frac{3}{4}$.

N op k geeft $9 + 4y = 16$

$$4y = 7$$

$$y = 1\frac{3}{4}$$

Dus $N(9, 1\frac{3}{4})$ en $r_2 = 1\frac{3}{4}$.

$$d(M, N) = \sqrt{(9-1)^2 + (1\frac{3}{4} - 3\frac{3}{4})^2} = \sqrt{68}$$

Dus $d(c_1, c_2) = \sqrt{68} - 3\frac{3}{4} - 1\frac{3}{4} \approx 2,746$.

51 a c_1 raakt de x -as en het middelpunt is $M(4, 2)$, dus de straal van c_1 is 2.

$$c_1: (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$$

b Substitutie van $y = 1\frac{1}{3}x$ in $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$ geeft $(x-4)^2 + (1\frac{1}{3}x-2)^2 = 4$

$$x^2 - 8x + 16 + 1\frac{7}{9}x^2 - 5\frac{1}{3}x + 4 = 4$$

$$2\frac{7}{9}x^2 - 13\frac{1}{3}x + 16 = 0$$

$$25x^2 - 120x + 144 = 0$$

$$D = (-120)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 144 = 0$$

$D = 0$, dus c_1 raakt l .

c Lijn m door P met $m \perp k$.

$$\frac{1}{2} \cdot rc_m = -1 \text{ geeft } rc_m = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -2x + b \\ \text{door } P(6, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 6 + b = 5 \\ -12 + b = 5 \end{array}$$

$$b = 17$$

Dus $m: y = -2x + 17$.

k en m snijden geeft het punt A .

$$\frac{1}{2}x = -2x + 17$$

$$2\frac{1}{2}x = 17$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 6\frac{4}{5} \\ y = \frac{1}{2}x \end{array} \right\} y = \frac{1}{2} \cdot 6\frac{4}{5} = 3\frac{2}{5}, \text{ dus } B(6\frac{4}{5}, 3\frac{2}{5}).$$

$$d(P, k) = d(P, B) = \sqrt{(6\frac{4}{5} - 6)^2 + (3\frac{2}{5} - 5)^2} = 1,78...$$

Lijn n gaat door P met $n \perp l$.

$$1\frac{1}{3} \cdot rc_n = -1 \text{ geeft } rc_n = -\frac{3}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} n: y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } P(6, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 6 + b = 5 \\ -4\frac{1}{2} + b = 5 \end{array}$$

$$b = 9\frac{1}{2}$$

Dus $n: y = -\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}$.

l en n snijden geeft het punt B .

$$1\frac{1}{3}x = -\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}$$

$$16x = -9x + 114$$

$$25x = 114$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 4\frac{14}{25} \\ y = 1\frac{1}{3}x \end{array} \right\} y = 1\frac{1}{3} \cdot 4\frac{14}{25} = 6\frac{2}{25}, \text{ dus } C(4\frac{14}{25}, 6\frac{2}{25}).$$

$$d(P, l) = d(P, C) = \sqrt{(4\frac{14}{25} - 6)^2 + (6\frac{2}{25} - 5)^2} = 1,8$$

$$d(P, M) = \sqrt{(4 - 6)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{13}$$

$$d(P, c_1) = \sqrt{13} - 2 = 1,60...$$

Dus de afstand $d(P, c_1)$ is de kortste.

d Substitutie van $y = \frac{1}{3}x$ in $x^2 + y^2 + 2x - 14y + 25 = 0$ geeft $x^2 + (\frac{1}{3}x)^2 + 2x - 14 \cdot \frac{1}{3}x + 25 = 0$

$$x^2 + \frac{1}{9}x^2 + 2x - 18\frac{2}{3}x + 25 = 0$$

$$2\frac{7}{9}x^2 - 16\frac{2}{3}x + 25 = 0$$

$$25x^2 - 150x + 225 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

$D = 0$, dus l is raaklijn van c_2 .

e $x^2 + y^2 + 2x - 14y + 25 = 0$

$$x^2 + 2x + y^2 - 14y + 25 = 0$$

$$(x+1)^2 - 1 + (y-7)^2 - 49 + 25 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-7)^2 = 25$$

Dus $N(-1, 7)$ en $r_2 = 5$.

$$d(M, N) = \sqrt{(-1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$d(c_1, c_2) = 5\sqrt{2} - 2 - 5 = 5\sqrt{2} - 7$$

52 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$

$$x^2 - 8x + y^2 - 4y + 10 = 0$$

$$(x-4)^2 - 16 + (y-2)^2 - 4 + 10 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$$

Dus $M(4, 2)$ en $r_c = \sqrt{10}$.

Lijn l gaat door M met $l \perp k$.

$$l: 3x - y = c \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } M(4, 2) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 4 - 2 = 10$$

Dus $l: 3x - y = 10$.

k en l snijden geeft het punt S .

$$\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 3x - y = 10 \end{cases} \begin{array}{l} |1| \\ |3| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} x + 3y = -5 \\ 9x - 3y = 30 \end{cases} +$$

$$10x = 25$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$x = 2\frac{1}{2}$ invullen in $x + 3y = -5$ geeft $2\frac{1}{2} + 3y = -5$

$$3y = -7\frac{1}{2}$$

$$y = -2\frac{1}{2}$$

Dus $S(2\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2})$.

$$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(2\frac{1}{2} - 4)^2 + (-2\frac{1}{2} - 2)^2} = \sqrt{22\frac{1}{2}}$$

$$d(k, c) = \sqrt{22\frac{1}{2}} - \sqrt{10} = 1,58...$$

$d: (x+4)^2 + (y-3)^2 = 5$, dus $N(-4, 3)$ en $r_d = \sqrt{5}$.

Lijn m gaat door N met $m \perp k$.

$$m: 3x - y = c \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } N(-4, 3) \end{array} \right\} c = 3 \cdot -4 - 3 = -15$$

Dus $m: 3x - y = -15$.

k en m snijden geeft het punt T .

$$\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 3x - y = -15 \end{cases} \begin{array}{l} |1| \\ |3| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} x + 3y = -5 \\ 9x - 3y = -45 \end{cases} +$$

$$10x = -50$$

$$x = -5$$

$x = -5$ invullen in $x + 3y = -5$ geeft $-5 + 3y = -5$

$$3y = 0$$

$$y = 0$$

Dus $T(-5, 0)$.

$$d(N, k) = d(N, T) = \sqrt{(-5 - -4)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{10}$$

$$d(k, d) = \sqrt{10} - \sqrt{5} = 0,92...$$

$$d(M, N) = \sqrt{(-4 - 4)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{65}$$

$$d(c, d) = \sqrt{65} - \sqrt{10} - \sqrt{5} = 2,66...$$

Dus de afstand $d(k, d)$ is het kleinst van de drie.

De exacte waarde van deze afstand is $\sqrt{10} - \sqrt{5}$.

a $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0$
 $(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 9 = 0$
 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$
 Dus $M(3, 1)$ en $r_1 = 1$.

$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$
 $x^2 - 12x + y^2 - 4y + 36 = 0$
 $(x-6)^2 - 36 + (y-2)^2 - 4 + 36 = 0$
 $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$
 Dus $N(6, 2)$ en $r_2 = 2$.

$d(M, N) = \sqrt{(6-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$
 Dus $d(c_1, c_2) = \sqrt{10} - 1 - 2 = \sqrt{10} - 3$.

b $l: 3x - 4y = 0$ oftewel $l: y = \frac{3}{4}x$
 Substitutie van $y = \frac{3}{4}x$ in $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ geeft $x^2 + (\frac{3}{4}x)^2 - 6x - 2 \cdot \frac{3}{4}x + 9 = 0$
 $x^2 + \frac{9}{16}x^2 - 6x - 1\frac{1}{2}x + 9 = 0$
 $1\frac{9}{16}x^2 - 7\frac{1}{2}x + 9 = 0$
 $25x^2 - 120x + 144 = 0$
 $D = (-120)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 144 = 0$

$D = 0$, dus l raakt c_1 .

Substitutie van $y = \frac{3}{4}x$ in $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$ geeft $x^2 + (\frac{3}{4}x)^2 - 12x - 4 \cdot \frac{3}{4}x + 36 = 0$
 $x^2 + \frac{9}{16}x^2 - 12x - 3x + 36 = 0$
 $1\frac{9}{16}x^2 - 15x + 36 = 0$
 $25x^2 - 240x + 576 = 0$
 $D = (-240)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 576 = 0$

$D = 0$, dus l raakt c_2 .

c Lijn m door P met $m \perp l$.
 $\frac{3}{4} \cdot rc_m = -1$ geeft $rc_m = -1\frac{1}{3}$
 $m: y = -1\frac{1}{3}x + b$
 door $P(2, 5)$ $\left\{ \begin{array}{l} -1\frac{1}{3} \cdot 2 + b = 5 \\ -2\frac{2}{3} + b = 5 \end{array} \right.$
 $b = 7\frac{2}{3}$

Dus $m: y = -1\frac{1}{3}x + 7\frac{2}{3}$.
 l en m snijden geeft het punt Q .

$\frac{3}{4}x = -1\frac{1}{3}x + 7\frac{2}{3}$
 $9x = -16x + 92$
 $25x = 92$
 $x = 3\frac{17}{25}$
 $y = \frac{3}{4}x$ $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{3}{4} \cdot 3\frac{17}{25} = 2\frac{19}{25}, \text{ dus } Q(3\frac{17}{25}, 2\frac{19}{25}). \end{array} \right.$

$r_3 = d(P, Q) = \sqrt{(3\frac{17}{25} - 2)^2 + (2\frac{19}{25} - 5)^2} = 2\frac{4}{5}$

Dus $c_3: (x-2)^2 + (y-5)^2 = (2\frac{4}{5})^2$ oftewel $c_3: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 7\frac{21}{25}$.

54 a $A(-8, -8)$ en $B(12, 2)$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = \frac{2 - (-8)}{12 - (-8)} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(12, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 12 + b = 2 \\ 6 + b = 2 \\ b = -4 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{2}x - 4.$$

$$l \text{ loodrecht op } k \text{ geeft } l: y = -2x + b.$$

$$l \text{ door } P(0, 6) \text{ geeft } l: y = -2x + 6.$$

$$k \text{ en } l \text{ snijden geeft } \frac{1}{2}x - 4 = -2x + 6$$

$$2\frac{1}{2}x = 10$$

$$x = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -2x + 6 \end{array} \right\} y = -2 \cdot 4 + 6 = -2, \text{ dus } Q(4, -2).$$

$$d(a, l) = d(A, Q) - r_a = \sqrt{(4 - (-8))^2 + (-2 - (-8))^2} - 11 = \sqrt{180} - 11 = 6\sqrt{5} - 11$$

$$d(b, l) = d(B, Q) - r_b = \sqrt{(4 - 12)^2 + (-2 - 2)^2} - 7 = \sqrt{80} - 7 = 4\sqrt{5} - 7$$

$$\text{Dus } d(a, l) - d(b, l) = 6\sqrt{5} - 11 - (4\sqrt{5} - 7) = 2\sqrt{5} - 4.$$

$$\mathbf{b} \quad d(A, C) = \sqrt{(0 - (-8))^2 + (q - (-8))^2} = \sqrt{8^2 + (q + 8)^2} = \sqrt{64 + q^2 + 16q + 64} = \sqrt{q^2 + 16q + 128}$$

$$r = d(A, C) - r_a = \sqrt{q^2 + 16q + 128} - 11$$

$$\mathbf{c} \quad d(B, C) = \sqrt{(0 - 12)^2 + (q - 2)^2} = \sqrt{144 + q^2 - 4q + 4} = \sqrt{q^2 - 4q + 148}$$

$$r = d(B, C) - r_b = \sqrt{q^2 - 4q + 148} - 7$$

$$\text{Los op } \sqrt{q^2 + 16q + 128} - 11 = \sqrt{q^2 - 4q + 148} - 7.$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $q = 7$ en $r = 6$.

$$\text{Dus } c: x^2 + (y - 7)^2 = 36.$$

$$\mathbf{C7} \quad \mathbf{a} \quad x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$$

$$x^2 - 8x + y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y + 1)^2 - 1 - 8 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

$$M(4, -1) \text{ en } r = 5$$

$$d(A, M) = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{41}$$

$$\text{Dus } d(A, c) = \sqrt{41} - 5.$$

$$\mathbf{b} \quad d(B, M) = \sqrt{(4 - 7)^2 + (-1 - (-3))^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Dus } d(B, c) = 5 - \sqrt{13}.$$

$$\mathbf{C8} \quad \text{Van } c \text{ is het middelpunt } M(4, 2) \text{ en de straal } r = \sqrt{7}.$$

Lijn l gaat door M met $l \perp k$.

$$-\frac{1}{3} \cdot rc_l = -1 \text{ geeft } rc_l = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = 3x + b \\ \text{door } M(4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 4 + b = 2 \\ 12 + b = 2 \\ b = -10 \end{array}$$

$$b = -10$$

$$\text{Dus } l: y = 3x - 10.$$

k en l snijden geeft het punt A .

$$-\frac{1}{3}x = 3x - 10$$

$$-3\frac{1}{3}x = -10$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -\frac{1}{3}x \end{array} \right\} y = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1, \text{ dus } A(3, -1).$$

$$d(A, M) = \sqrt{(4 - 3)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Dus } d(k, c) = \sqrt{10} - \sqrt{7}.$$

- C9** Van c is het middelpunt $M(6, 2)$ en de straal $r_c = \sqrt{17}$.
 Van d is het middelpunt $N(0, -3)$ en de straal $r_d = \sqrt{5}$.
 $d(M, N) = \sqrt{(0-6)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{61}$
 Dus $d(c, d) = \sqrt{61} - \sqrt{17} - \sqrt{5} \approx 1,45$.

10.5 Functies, cirkels en raaklijnen

Bladzijde 76

- 55 a** De vergelijkingen van k en l zijn beide van de vorm $3x + 4y = c$, dus k en l zijn evenwijdig.
 $x = 2$ en $y = -1$ invullen in de vergelijking van k geeft $3 \cdot 2 + 4 \cdot -1 = 2$ klopt, dus A ligt op k .
- b** Lijn m gaat door A met $m \perp l$.
 $m: 4x - 3y = c \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } A(2, -1) \end{array} \right\} c = 4 \cdot 2 - 3 \cdot -1 = 11$
 Dus $m: 4x - 3y = 11$.
 l en m snijden geef het punt B .
 $\begin{cases} 3x + 4y = 27 & |4| \\ 4x - 3y = 11 & |3| \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} 12x + 16y = 108 \\ 12x - 9y = 33 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ 25y = 75 \\ y = 3 \end{array}$
 $y = 3$ invullen in $3x + 4y = 27$ geeft $3x + 4 \cdot 3 = 27$
 $3x + 12 = 27$
 $3x = 15$
 $x = 5$
 Dus $B(5, 3)$.
 $d(A, l) = d(A, B) = \sqrt{(5-2)^2 + (3-(-1))^2} = 5$
- c** Voor alle punten van k geldt dat hun afstand tot l hetzelfde is.
 Dus weet je van één punt van k de afstand tot l , dan heb je hiermee ook de afstand tussen k en l gevonden.

- 56 a** $f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 + \frac{1}{3} = -3$, dus $A(2, -3)$.
 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x + \frac{1}{3}$ geeft $f'(x) = x^2 - 3$
 $rc_k = f'(2) = 2^2 - 3 = 1$
- b** $f'(x) = 1$ geeft $x^2 - 3 = 1$
 $x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$
 $f(-2) = \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - 3 \cdot -2 + \frac{1}{3} = 3\frac{2}{3}$, dus $B(-2, 3\frac{2}{3})$.
 $\begin{cases} l: y = x + b \\ \text{door } B(-2, 3\frac{2}{3}) \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 + b = 3\frac{2}{3} \\ b = 5\frac{2}{3} \end{array}$
 Dus $l: y = x + 5\frac{2}{3}$.
- c** Lijn m gaat door A met $m \perp l$.
 $1 \cdot rc_m = -1$ geeft $rc_m = -1$
 $\begin{cases} m: y = -x + b \\ \text{door } A(2, -3) \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 + b = -3 \\ b = -1 \end{array}$
 Dus $m: y = -x - 1$.
 l en m snijden geeft het punt S .
 $x + 5\frac{2}{3} = -x - 1$
 $2x = -6\frac{2}{3}$
 $x = -3\frac{1}{3}$
 $\begin{cases} y = x + 5\frac{2}{3} \\ y = -x - 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} y = 3\frac{1}{3} - 1 = 2\frac{1}{3}$, dus $S(-3\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3})$.
 $d(k, l) = d(A, l) = d(A, S) = \sqrt{(-3\frac{1}{3}-2)^2 + (2\frac{1}{3}-(-3))^2} = \sqrt{(-5\frac{1}{3})^2 + (5\frac{1}{3})^2} = 5\frac{1}{3}\sqrt{2}$

57 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ geeft $f'(x) = x - 2$

$f'(x) = 2$ geeft $x - 2 = 2$

$x = 4$

$f(4) = 0$, dus $A(4, 0)$.

$l: y = 2x + b$
 door $A(4, 0)$ $\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 4 + b = 0 \\ b = -8 \end{array} \right.$

Dus $l: y = 2x - 8$.

$O(0, 0)$ ligt op k .

Lijn m gaat door O met $m \perp l$.

$2 \cdot \text{rc}_m = -1$ geeft $\text{rc}_m = -\frac{1}{2}$, dus $m: y = -\frac{1}{2}x$.

l en m snijden geeft het punt B .

$2x - 8 = -\frac{1}{2}x$

$2\frac{1}{2}x = 8$

$x = 3\frac{1}{5}$
 $y = -\frac{1}{2}x$ $\left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{5} = -1\frac{3}{5}, \text{ dus } B(3\frac{1}{5}, -1\frac{3}{5}). \end{array} \right.$

$d(k, l) = d(O, l) = d(O, B) = \sqrt{(3\frac{1}{5})^2 + (-1\frac{3}{5})^2} = \sqrt{12\frac{4}{5}}$

Bladzijde 77

58 $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 3x + \frac{1}{2}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$

$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 3x + \frac{1}{2}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$

$\text{rc}_k = f'(3) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 = 1\frac{1}{2}$

$f'(x) = 1\frac{1}{2}$ geeft $\frac{1}{2}x^2 - 3 = 1\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x^2 = 4\frac{1}{2}$

$x^2 = 9$

$x = 3 \vee x = -3$

$l: y = 1\frac{1}{2}x + b$
 $f(-3) = 5$, dus $B(-3, 5)$ $\left\{ \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot -3 + b = 5 \\ -4\frac{1}{2} + b = 5 \\ b = 9\frac{1}{2} \end{array} \right.$

Dus $l: y = 1\frac{1}{2}x + 9\frac{1}{2}$.

Lijn m gaat door A met $m \perp l$.

$1\frac{1}{2} \cdot \text{rc}_m = -1$ geeft $\text{rc}_m = -\frac{2}{3}$

$m: y = -\frac{2}{3}x + b$
 door $A(3, -4)$ $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot 3 + b = -4 \\ -2 + b = -4 \\ b = -2 \end{array} \right.$

Dus $m: y = -\frac{2}{3}x - 2$.

l en m snijden geeft het punt S .

$1\frac{1}{2}x + 9\frac{1}{2} = -\frac{2}{3}x - 2$

$9x + 57 = -4x - 12$

$13x = -69$

$x = -5\frac{4}{13}$
 $y = 1\frac{1}{2}x + 9\frac{1}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2} \cdot -5\frac{4}{13} + 9\frac{1}{2} = 1\frac{7}{13}, \text{ dus } S(-5\frac{4}{13}, 1\frac{7}{13}). \end{array} \right.$

$d(k, l) = d(A, l) = d(A, S) = \sqrt{(-5\frac{4}{13} - 3)^2 + (1\frac{7}{13} - 4)^2} \approx 9,98$

59 a $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ geeft $f'(x) = -x^2 - x + 1$

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ geeft $f'(x) = -x^2 - x + 1$

$\text{rc}_k = f'(-2) = -4 + 2 + 1 = -1$

$f'(x) = -1$ geeft $-x^2 - x + 1 = -1$

$-x^2 - x + 2 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x - 1)(x + 2) = 0$

$x = 1 \vee x = -2$

$f(1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 + 1 = 1\frac{1}{6}$, dus $B(1, 1\frac{1}{6})$.

$d(A, B) = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (1\frac{1}{6} - (-\frac{1}{3}))^2} = \sqrt{11\frac{1}{4}}$

$$\text{b } \left. \begin{array}{l} k: y = -x + b \\ \text{door } A(-2, -\frac{1}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 + b = -\frac{1}{3} \\ b = -2\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -x - 2\frac{1}{3}.$$

Lijn m gaat door B met $m \perp k$.

$$\left. \begin{array}{l} m: y = x + b \\ \text{door } B(1, 1\frac{1}{6}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 + b = 1\frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\text{Dus } m: y = x + \frac{1}{6}.$$

k en m snijden geeft het punt S .

$$x + \frac{1}{6} = -x - 2\frac{1}{3}$$

$$2x = -2\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -1\frac{1}{4} \\ y = x + \frac{1}{6} \end{array} \right\} y = -1\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = -1\frac{1}{12}, \text{ dus } S(-1\frac{1}{4}, -1\frac{1}{12}).$$

$$d(k, l) = d(B, k) = d(B, S) = \sqrt{(-1\frac{1}{4} - 1)^2 + (-1\frac{1}{12} - 1\frac{1}{6})^2} = \sqrt{(-2\frac{1}{4})^2 + (-2\frac{1}{4})^2} = 2\frac{1}{4}\sqrt{2}$$

60 $f(x) = ax^3 - 2x + \frac{2}{3}$ geeft $f'(x) = 3ax^2 - 2$

$$f'(4) = 2 \text{ geeft } 3a \cdot 4^2 - 2 = 2$$

$$48a = 4$$

$$a = \frac{1}{12}$$

$$\text{Dus } f(x) = \frac{1}{12}x^3 - 2x + \frac{2}{3} \text{ en } f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2.$$

$$f'(x) = 2 \text{ geeft } \frac{1}{4}x^2 - 2 = 2$$

$$\frac{1}{4}x^2 = 4$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = 2x + b \\ f(-4) = 3\frac{1}{3}, \text{ dus } B(-4, 3\frac{1}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot -4 + b = 3\frac{1}{3} \\ -8 + b = 3\frac{1}{3} \\ b = 11\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = 2x + 11\frac{1}{3}.$$

Lijn m gaat door A met $m \perp l$.

$$2 \cdot \text{rc}_m = -1 \text{ geeft } \text{rc}_m = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -\frac{1}{2}x + b \\ f(4) = -2, \text{ dus } A(4, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 4 + b = -2 \\ -2 + b = -2 \\ b = 0 \end{array}$$

$$\text{Dus } m: y = -\frac{1}{2}x.$$

l en m snijden geeft het punt S .

$$2x + 11\frac{1}{3} = -\frac{1}{2}x$$

$$12x + 68 = -3x$$

$$15x = -68$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -4\frac{8}{15} \\ y = -\frac{1}{2}x \end{array} \right\} y = -\frac{1}{2} \cdot -4\frac{8}{15} = 2\frac{4}{15}, \text{ dus } S(-4\frac{8}{15}, 2\frac{4}{15}).$$

$$d(k, l) = d(A, l) = d(A, S) = \sqrt{(-4\frac{8}{15} - 4)^2 + (2\frac{4}{15} - -2)^2} \approx 9,54$$

- 61** Substitutie van $y = \frac{1}{2}x + 2$ in $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 5$ geeft
 $(x - 5)^2 + (\frac{1}{2}x)^2 = 5$
 $x^2 - 10x + 25 + \frac{1}{4}x^2 = 5$
 $1\frac{1}{4}x^2 - 10x + 20 = 0$
 $x^2 - 8x + 16 = 0$
 $D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$
 $D = 0$, dus k is ook raaklijn van c .

Bladzijde 79

- 62** $f'(x) = -\frac{1}{2}$ geeft $-\frac{2}{x^2} = -\frac{1}{2}$
 $x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$
 $m: y = -\frac{1}{2}x + b$
 $f(-2) = -1$, dus $C(-2, -1)$ $\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot -2 + b = -1 \\ 1 + b = -1 \\ b = -2 \end{array} \right\}$
Dus $m: y = -\frac{1}{2}x - 2$.
Substitutie van $y = -\frac{1}{2}x - 2$ in $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ geeft
 $(x - 2)^2 + (-\frac{1}{2}x - 1)^2 = 4$
 $x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{4}x^2 + x + 1 - 4 = 0$
 $1\frac{1}{4}x^2 - 3x + 1 = 0$
 $5x^2 - 12x + 4 = 0$
 $D = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 64$, dus $\sqrt{D} = 8$
 $x = \frac{12 + 8}{10} = 2 \vee x = \frac{12 - 8}{10} = \frac{2}{5}$
 $x = 2$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = -3$ en $x = \frac{2}{5}$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 2 = -2\frac{1}{5}$.
Dus $D(\frac{2}{5}, -2\frac{1}{5})$ en $E(2, -3)$.

- 63** Van d is de straal 2 en $y_N = y_A + r = 1 + 2 = 3$, dus $d: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.
Substitutie van $y = -\frac{1}{2}x + 2$ in $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ geeft
 $(x - 2)^2 + (-\frac{1}{2}x - 1)^2 = 4$
 $x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{4}x^2 + x + 1 - 4 = 0$
 $1\frac{1}{4}x^2 - 3x + 1 = 0$
 $5x^2 - 12x + 4 = 0$
 $D = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 64$, dus $\sqrt{D} = 8$
 $x = \frac{12 + 8}{10} = 2 \vee x = \frac{12 - 8}{10} = \frac{2}{5}$
 $x = \frac{2}{5}$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + 2 = 1\frac{4}{5}$
Dus $F(\frac{2}{5}, 1\frac{4}{5})$.

- 64 a** $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 6\frac{2}{3}x + 18$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{3}x - 6\frac{2}{3}$
 $k: y = ax + b$
 $a = f'(4) = 1\frac{1}{3} \cdot 4 - 6\frac{2}{3} = -1\frac{1}{3}$
 $y = -1\frac{1}{3}x + b$
 $f(4) = 2$, dus $A(4, 2)$ $\left. \begin{array}{l} -1\frac{1}{3} \cdot 4 + b = 2 \\ -5\frac{1}{3} + b = 2 \\ b = 7\frac{1}{3} \end{array} \right\}$
Dus $k: y = -1\frac{1}{3}x + 7\frac{1}{3}$.

- b** 1 Stel de formule op van de lijn l door A loodrecht op k .
2 Bereken met behulp van de formule van l de y -coördinaat van M .
3 Bereken de afstand tussen M en A .

- c** Lijn l door A met $l \perp k$.
 $-1\frac{1}{3} \cdot rc_l = -1$ geeft $rc_l = \frac{3}{4}$
 $l: y = \frac{3}{4}x + b$
 door $A(4, 2)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 4 + b = 2 \\ 3 + b = 2 \end{array} \right.$
 $b = -1$
 Dus $l: y = \frac{3}{4}x - 1$.
 M ligt op l .
 $x = 3$ geeft $y = \frac{3}{4} \cdot 3 - 1 = 1\frac{1}{4}$, dus $M(3, 1\frac{1}{4})$.
 $r = d(M, A) = \sqrt{(4-3)^2 + (2-1\frac{1}{4})^2} = 1\frac{1}{4}$
 Er geldt $y_M = r$, dus c raakt de x -as.

Bladzijde 80

- 65 a** 1 Stel met behulp van de afgeleide van f de formule op van k .
 2 Stel met behulp van de coördinaten van M en R een vergelijking op van c .
 3 Substitueer de formule van k in de vergelijking van c .
 4 Toon aan dat de discriminant gelijk is aan nul.

b $f(x) = 1 + \sqrt{x-2} = 1 + (x-2)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \text{ geeft } \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{1}{4}$$

$$2\sqrt{x-2} = 4$$

$$\sqrt{x-2} = 2$$

$$x-2 = 4$$

$$x = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \frac{1}{4}x + b \\ f(6) = 3, \text{ dus } A(6, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot 6 + b = 3 \\ 1\frac{1}{2} + b = 3 \\ b = 1\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} M(0, -7) \text{ geeft } x^2 + (y+7)^2 = r^2 \\ \text{door } R(2, 1) \end{array} \right\} r^2 = 2^2 + 8^2 = 68$$

$$\text{Dus } c: x^2 + (y+7)^2 = 68.$$

$$\text{Substitutie van } y = \frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2} \text{ in } x^2 + (y+7)^2 = 68 \text{ geeft}$$

$$x^2 + (\frac{1}{4}x + 8\frac{1}{2})^2 = 68$$

$$x^2 + \frac{1}{16}x^2 + 4\frac{1}{4}x + 72\frac{1}{4} - 68 = 0$$

$$1\frac{1}{16}x^2 + 4\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

$$D = 0, \text{ dus } k \text{ raakt } c.$$

c $x = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$ geeft $y = \frac{1}{4} \cdot -2 + 1\frac{1}{2} = 1$, dus $B(-2, 1)$.

$$k \text{ raakt } c, \text{ dus } \angle ABM = 90^\circ.$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-2-6)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{68}$$

$$d(M, B) = r = \sqrt{68}$$

Dus driehoek ABM is een gelijkbenige rechthoekige driehoek.

66 $f(x) = 7$ geeft $1 + \sqrt{6x - 12} = 7$

$$\sqrt{6x - 12} = 6$$

$$6x - 12 = 36$$

$$6x = 48$$

$$x = 8$$

Dus $A(8, 7)$.

$$f(x) = 1 + \sqrt{6x - 12} = 1 + (6x - 12)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}(6x - 12)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 = \frac{3}{(6x - 12)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{6x - 12}}$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(8) = \frac{3}{\sqrt{6 \cdot 8 - 12}} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(8, 7) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 8 + b = 7 \\ 4 + b = 7 \\ b = 3 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{2}x + 3.$$

$6x - 12 = 0$ geeft $x = 2$, dus randpunt $M(2, 1)$.

Lijn m gaat door M met $m \perp k$.

$$\frac{1}{2} \cdot \text{rc}_m = -1 \text{ geeft } \text{rc}_m = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -2x + b \\ \text{door } M(2, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 2 + b = 1 \\ b = 5 \end{array}$$

$$\text{Dus } m: y = -2x + 5.$$

$$k \text{ en } m \text{ snijden geeft } \frac{1}{2}x + 3 = -2x + 5$$

$$2\frac{1}{2}x = 2$$

$$x = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{4}{5} \text{ geeft } y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + 3 = 3\frac{2}{5}, \text{ dus } B(\frac{4}{5}, 3\frac{2}{5}).$$

$$r = d(M, B) = \sqrt{(\frac{4}{5} - 2)^2 + (3\frac{2}{5} - 1)^2} = \sqrt{7\frac{1}{5}}$$

$$\text{Dus } c: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 7\frac{1}{5}.$$

$MBSC$ is een vierkant met $BS = CS = r = \sqrt{7\frac{1}{5}}$, dus $O(MBSC) = 7\frac{1}{5}$.

De oppervlakte van het deel van de cirkel dat wordt ingesloten door de lijnstukken BM en CM en de cirkelboog BC is $\frac{1}{4}\pi \cdot 7\frac{1}{5} = 1\frac{4}{5}\pi$.

$$\text{Dus } O(V) = 7\frac{1}{5} - 1\frac{4}{5}\pi \approx 1,55.$$

Bladzijde 81

C10 $f(3) = -\frac{1}{6} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 + 2\frac{1}{2} = 4$, dus $A(3, 4)$.

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x + 2\frac{1}{2} \text{ geeft } f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$$

$$\text{rc}_k = f'(3) = -\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 2 = -2\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -2\frac{1}{2} \text{ geeft } -\frac{1}{2}x^2 + 2 = -2\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}x^2 = -4\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -2\frac{1}{2}x + b \\ f(-3) = 1, \text{ dus } B(-3, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2\frac{1}{2} \cdot -3 + b = 1 \\ 7\frac{1}{2} + b = 1 \\ b = -6\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = -2\frac{1}{2}x - 6\frac{1}{2}.$$

Lijn m gaat door A met $m \perp l$.

$$-2\frac{1}{2} \cdot \text{rc}_m = -1 \text{ geeft } \text{rc}_m = \frac{2}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = \frac{2}{5}x + b \\ \text{door } A(3, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{5} \cdot 3 + b = 4 \\ 1\frac{1}{5} + b = 4 \\ b = 2\frac{4}{5} \end{array}$$

$$\text{Dus } m: y = \frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5}.$$

l en m snijden geeft het punt S .

$$-2\frac{1}{2}x - 6\frac{1}{2} = \frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5}$$

$$-25x - 65 = 4x + 28$$

$$-29x = 93$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -3\frac{6}{29} \\ y = -2\frac{1}{2}x - 6\frac{1}{2} \end{array} \right\} y = -2\frac{1}{2} \cdot -3\frac{6}{29} - 6\frac{1}{2} = 1\frac{15}{29}, \text{ dus } S(-3\frac{6}{29}, 1\frac{15}{29}).$$

$$d(k, l) = d(A, l) = d(A, S) = \sqrt{(-3\frac{6}{29} - 3)^2 + (1\frac{15}{29} - 4)^2} \approx 6,69$$

C11 $f(x) = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(1) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x + b \\ \text{door } A(1, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 + b = 2 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $k: y = x + 1$.

Substitutie van $y = x + 1$ in $x^2 + (y + 3)^2 = 8$ geeft $x^2 + (x + 4)^2 = 8$

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + 8x + 16 &= 8 \\ 2x^2 + 8x + 8 &= 0 \\ x^2 + 4x + 4 &= 0 \\ D &= 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

$D = 0$, dus k raakt c .

Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 82

1 In $\triangle ABC$ is $\sin(40^\circ) = \frac{4}{BC}$

$$BC = \frac{4}{\sin(40^\circ)} = 6,222...$$

Stel $BE = x$, dan is $CE = x + 2$ en $BC = 2x + 2$.

$$2x + 2 = 6,222...$$

$$2x = 4,222...$$

$$x = 2,111...$$

Dus $CE = 4,111...$

$\angle DEC = \angle ABC = 40^\circ$ (F-hoeken)

In $\triangle DEC$ is $\cos(40^\circ) = \frac{DE}{4,111...}$

$$DE = 4,111... \cdot \cos(40^\circ) \approx 3,15$$

2 Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft

$$BD^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(42^\circ) = 16,41...$$

$$BD = 4,05...$$

De sinusregel in $\triangle ABD$ geeft $\frac{4,05...}{\sin(42^\circ)} = \frac{5}{\sin(\angle ABD)}$

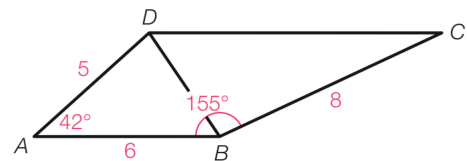
$$\sin(\angle ABD) = \frac{5 \sin(42^\circ)}{4,05...}$$

$$\angle ABD = 55,67...^\circ$$

$$\angle CBD = 155^\circ - 55,67...^\circ = 99,32...^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft $CD^2 = 8^2 + 16,41... - 2 \cdot 8 \cdot 4,05... \cdot \cos(99,32...^\circ) = 90,91...$

$$CD \approx 9,5$$



3 $\angle B = 180^\circ - 40^\circ - 35^\circ = 105^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{AC}{\sin(105^\circ)} = \frac{5}{\sin(35^\circ)}$

$$AC = \frac{5 \sin(105^\circ)}{\sin(35^\circ)} = 8,420...$$

De sinusregel geeft $\frac{BC}{\sin(40^\circ)} = \frac{5}{\sin(35^\circ)}$

$$BC = \frac{5 \sin(40^\circ)}{\sin(35^\circ)} = 5,603...$$

De lengte van de cirkelboog is $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5,603... = 8,801...$

De omtrek van de figuur is $5 + 8,420... + 8,801... \approx 22,22$.

4 a $x_A = p$ geeft $y_A = f(p) = -p^2 + 9$

$$O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot (-p^2 + 9) = -p^3 + 9p$$

b $f(0) = 9$, dus $T(0, 9)$.

$$O(\triangle OAT) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot p = 4\frac{1}{2}p$$

$$O(\triangle OAB) = O(\triangle OAT) \text{ geeft } -p^3 + 9p = 4\frac{1}{2}p$$

$$-p^3 + 4\frac{1}{2}p = 0$$

$$-p(p^2 - 4\frac{1}{2}) = 0$$

$$p = 0 \vee p^2 = 4\frac{1}{2}$$

$$p = 0 \vee p = \sqrt{4\frac{1}{2}} \vee p = -\sqrt{4\frac{1}{2}}$$

$$0 < p < 3 \text{ geeft } p = \sqrt{4\frac{1}{2}}$$

5 a $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$

$$x^2 - 8x + y^2 - 6y + 15 = 0$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 + 15 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 10$$

$$M(4, 3) \text{ en } r = \sqrt{10}$$

$$\text{Lijn } m \text{ door } M \text{ en } A \text{ heeft } rc_m = \frac{3 - 0}{4 - 5} = -3.$$

$$m \perp k, \text{ dus } rc_k \cdot -3 = -1 \text{ en dit geeft } rc_k = \frac{1}{3}.$$

$$k: y = \frac{1}{3}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot 5 + b = 0 \\ b = -1\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}.$$

b $d: (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ met $r = d(N, l)$

Lijn n gaat door N met $n \perp l$.

$$n: x - 2y = c \left\{ \begin{array}{l} c = 4 - 2 \cdot -3 = 10 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } n: x - 2y = 10.$$

l en n snijden geeft het punt B .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 10 \\ x - 2y = 10 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y = 20 \\ x - 2y = 10 \end{array} \right. +$$

$$\frac{5x = 30}{x = 6}$$

$$x = 6 \text{ invullen in } x - 2y = 10 \text{ geeft } 6 - 2y = 10$$

$$2y = -4$$

$$y = -2$$

Dus $B(6, -2)$.

$$r = d(N, l) = d(N, B) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (-2 - -3)^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{Dus } d: (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5.$$

- 6 a** Substitutie van $y = 3x + 1$ in $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 10$ geeft

$$(x - 4)^2 + (3x - 2)^2 = 10$$

$$x^2 - 8x + 16 + 9x^2 - 12x + 4 = 10$$

$$10x^2 - 20x + 10 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$D = 0, \text{ dus } k \text{ raakt } c.$$

- b** $l: x + y = 3$ oftewel $l: y = -x + 3$

Substitutie van $y = -x + 3$ in $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ geeft

$$x^2 + (-x + 3)^2 - 4x + 6(-x + 3) + 4 = 0$$

$$x^2 + x^2 - 6x + 9 - 4x - 6x + 18 + 4 = 0$$

$$2x^2 - 16x + 31 = 0$$

$$D = (-16)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 31 = 8$$

$D > 0$, dus l heeft twee punten gemeenschappelijk met d .

Bladzijde 83

- 7 a** $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 4 = 0$$

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 4 = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

$$\text{Dus } M_1(-2, 3) \text{ en } r_1 = 3.$$

$$d(A, M_1) = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{17}$$

$$\text{Dus } d(A, c_1) = \sqrt{17} - 3.$$

- b** $x^2 + y^2 - 2x + 8y = -10$

$$x^2 - 2x + y^2 + 8y = -10$$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 4)^2 - 16 = -10$$

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 7$$

$$\text{Dus } M_2(1, -4) \text{ en } r_2 = \sqrt{7}.$$

$$d(B, M_2) = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-4 - -2)^2} = \sqrt{5}$$

$$d(B, c_2) = \sqrt{7} - \sqrt{5}$$

- c** $M_1(-2, 3)$ en $M_2(1, -4)$, dus $d(M_1, M_2) = \sqrt{(1 - -2)^2 + (-4 - 3)^2} = \sqrt{58}$

$$r_1 = 3 \text{ en } r_2 = \sqrt{7}$$

$$\text{Dus } d(c_1, c_2) = \sqrt{58} - 3 - \sqrt{7} \approx 1,97.$$

- 8 a** $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$

$$x^2 - 8x + y^2 - 2y + 12 = 0$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 + 12 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

$$\text{Dus } M(4, 1) \text{ en } r_1 = \sqrt{5}.$$

Lijn l gaat door M met $l \perp k$.

$$\left. \begin{array}{l} l: x - y = c \\ \text{door } M(4, 1) \end{array} \right\} c = 4 - 1 = 3$$

$$\text{Dus } l: x - y = 3.$$

k en l snijden geeft het punt A .

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} +$$

$$\frac{2x}{2} = 4$$

$$x = 2$$

$x = 2$ invullen in $x + y = 1$ geeft $2 + y = 1$, dus $y = -1$.

Dus $A(2, -1)$.

$$d(A, M) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - -1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$d(k, c_1) = d(A, M) - r_1 = 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$$

b $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 27 = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 - 10y + 27 = 0$
 $(x - 2)^2 - 4 + (y - 5)^2 - 25 + 27 = 0$
 $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 2$
Dus $N(2, 5)$ en $r_2 = \sqrt{2}$.
Lijn m gaat door N met $m \perp k$.

$$\left. \begin{array}{l} m: x - y = c \\ \text{door } N(2, 5) \end{array} \right\} c = 2 - 5 = -3$$

Dus $m: x - y = -3$.
 k en m snijden geeft het punt B .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = -3 \end{array} \right. \rightarrow \frac{2x}{2} = -2 \rightarrow x = -1$$

 $x = -1$ invullen in $x + y = 1$ geeft $-1 + y = 1$, dus $y = 2$.
Dus $B(-1, 2)$.
 $d(B, N) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{18}$
 $d(k, c_2) = d(B, N) - r_2 = \sqrt{18} - \sqrt{2}$
 $d(k, c_2) - d(k, c_1) = \sqrt{18} - \sqrt{2} - (2\sqrt{2} - \sqrt{5}) = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{5}$
Dus $p = 5$.

9 a $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = -3$, dus $A(3, -3)$.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2x$ geeft $f'(x) = x^2 - 4x + 2$

$rc_k = f'(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 2 = -1$

$f'(x) = -1$ geeft $x^2 - 4x + 2 = -1$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 1)(x - 3) = 0$

$x = 1 \vee x = 3$

$f(1) = \frac{1}{3}$, dus $B(1, \frac{1}{3})$.

$d(A, B) = \sqrt{(1 - 3)^2 + (\frac{1}{3} - (-3))^2} = \sqrt{15\frac{1}{9}}$

b $k: y = -x + b$
door $A(3, -3)$ $\left\{ \begin{array}{l} -3 + b = -3 \\ b = 0 \end{array} \right.$

Dus $k: y = -x$.

Lijn m gaat door B met $m \perp k$.

$-1 \cdot rc_m = -1$ geeft $rc_m = 1$

$m: y = x + b$
door $B(1, \frac{1}{3})$ $\left\{ \begin{array}{l} 1 + b = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \end{array} \right.$

Dus $m: y = x - \frac{2}{3}$.

k snijden met m geeft het punt S .

$x - \frac{2}{3} = -x$

$2x = \frac{2}{3}$

$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = -x \end{array} \right. \rightarrow y = -\frac{1}{3}$, dus $S(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

$d(k, l) = d(B, k) = d(B, S) = \sqrt{(\frac{1}{3} - 1)^2 + (-\frac{1}{3} - \frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{8}{9}}$

10 $f(x) = \sqrt{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$$rc_k = f'(4) = \frac{1}{\sqrt{8+1}} = \frac{1}{3}$$

Lijn l door A en M staat loodrecht op k .

$$\frac{1}{3} \cdot rc_l = -1 \text{ geeft } rc_l = -3$$

$$l: y = -3x + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f(4) = 3, \text{ dus } A(4, 3) \\ -3 \cdot 4 + b = 3 \\ -12 + b = 3 \\ b = 15 \end{array} \right\}$$

$$\text{Dus } l: y = -3x + 15.$$

$$y = 0 \text{ geeft } -3x + 15 = 0$$

$$-3x = -15$$

$$x = 5$$

$$\text{Dus } M(5, 0).$$

$$r_c = d(A, M) = \sqrt{(5-4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Dus } c: (x-5)^2 + y^2 = 10.$$

Gemengde opgaven

Bladzijde 84

- 1 a** $\angle CDB = \angle ABD = 40^\circ$ (Z-hoeken)

$$\text{De sinusregel in } \triangle BCD \text{ geeft } \frac{3}{\sin(\angle CBD)} = \frac{5}{\sin(40^\circ)}$$

$$\sin(\angle CBD) = \frac{3 \sin(40^\circ)}{5}$$

$$\angle CBD = 22,68...^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 40^\circ - 22,68...^\circ = 117,31...^\circ$$

$$\text{De sinusregel in } \triangle BCD \text{ geeft } \frac{BD}{\sin(117,31...^\circ)} = \frac{5}{\sin(40^\circ)}$$

$$BD = \frac{5 \sin(117,31...^\circ)}{\sin(40^\circ)} \approx 6,91$$

b De sinusregel in $\triangle ABD$ geeft $\frac{6,91...}{\sin(\angle A)} = \frac{6}{\sin(40^\circ)}$

$$\sin(\angle A) = \frac{6,91... \cdot \sin(40^\circ)}{6}$$

$$\angle A = 47,76...^\circ$$

Zie de figuur hiernaast.

$$\text{In } \triangle BDE \text{ is } \sin(40^\circ) = \frac{DE}{6,911...}$$

$$DE = 6,911... \cdot \sin(40^\circ) = 4,442...$$

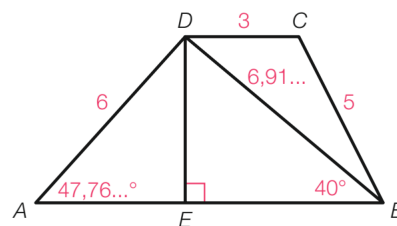
$$\cos(40^\circ) = \frac{BE}{6,911...}$$

$$BE = 6,911... \cdot \cos(40^\circ) = 5,294...$$

$$\text{In } \triangle ADE \text{ is } \cos(47,76...^\circ) = \frac{AE}{6}$$

$$AE = 6 \cos(47,76...^\circ) = 4,032...$$

$$O(ABCD) = \frac{1}{2}(4,032... + 5,294... + 3) \cdot 4,442... \approx 27,38$$



- 2** Stel $AD = x$, dan is $BC = 2x$.

Zie de figuur hiernaast.

$$\text{De cosinusregel in } \triangle ABD \text{ geeft } BD^2 = 5^2 + x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x \cdot \cos(65^\circ)$$

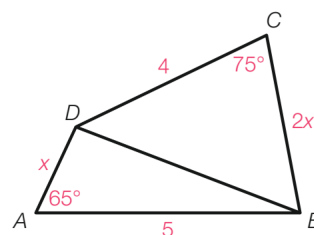
$$\text{oftewel } BD^2 = 25 + x^2 - 10x \cos(65^\circ).$$

$$\text{De cosinusregel in } \triangle BCD \text{ geeft } BD^2 = 4^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2x \cdot \cos(75^\circ)$$

$$\text{oftewel } BD^2 = 16 + 4x^2 - 16x \cos(75^\circ).$$

$$\text{Los op } 25 + x^2 - 10x \cos(65^\circ) = 16 + 4x^2 - 16x \cos(75^\circ).$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $AD = 1,717... \approx 1,72$, dus $BC \approx 3,44$.



3 $\angle ADB = 180^\circ - 52^\circ - 26^\circ - 61^\circ = 41^\circ$

De sinusregel in $\triangle ABD$ geeft $\frac{250}{\sin(41^\circ)} = \frac{BD}{\sin(52^\circ + 26^\circ)}$

$$BD = \frac{250 \sin(78^\circ)}{\sin(41^\circ)} = 372,7...$$

$$\angle ACB = 180^\circ - 26^\circ - 61^\circ - 50^\circ = 43^\circ$$

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\frac{250}{\sin(43^\circ)} = \frac{BC}{\sin(26^\circ)}$

$$BC = \frac{250 \sin(26^\circ)}{\sin(43^\circ)} = 160,6...$$

De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft

$$CD^2 = 160,6...^2 + 372,7...^2 - 2 \cdot 160,6... \cdot 372,7 \cdot \cos(50^\circ) = 87\,753,4...$$

$$CD = 296,2...$$

Dus de lengte CD van het eiland is ongeveer 296 meter.

4 $f(x) = x^2 - 5x$ geeft $f'(x) = 2x - 5$

$$rc_k = f'(2) = 2 \cdot 2 - 5 = -1$$

De lijn l door A en M staat loodrecht op k , dus $rc_l = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = x + b \\ f(2) = -6, \text{ dus } A(2, -6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 + b = -6 \\ b = -8 \end{array}$$

Dus $l: y = x - 8$ en $M(0, -8)$.

$$r_c = d(M, A) = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-6 - (-8))^2} = \sqrt{8}$$

$MN \parallel k$ en MN door $M(0, -8)$ geeft $MN: y = -x - 8$.

$y = 0$ geeft $-x - 8 = 0$, dus $x = -8$ en $N(-8, 0)$.

$$d(M, N) = \sqrt{(-8 - 0)^2 + (0 - (-8))^2} = \sqrt{128}$$

$$r_d = d(M, N) - r_c = \sqrt{128} - \sqrt{8} \text{ geeft } r_d^2 = (\sqrt{128} - \sqrt{8})^2 = 72$$

Dus $d: (x + 8)^2 + y^2 = 72$.

Bladzijde 85

5 $f(x) = (x - 4)^2 + q$ geeft $f'(x) = 2(x - 4) \cdot 1 = 2x - 8$

$$l: y = ax + b$$

$$a = f'(3) = 2 \cdot 3 - 8 = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(3) = q + 1, \text{ dus } P(3, q + 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 3 + b = q + 1 \\ b = q + 7 \end{array}$$

Dus $l: y = -2x + q + 7$.

l snijden met de assen geeft de punten $B(\frac{1}{2}q + 3\frac{1}{2}, 0)$ en $C(0, q + 7)$.

$$O(\triangle OPC) = \frac{1}{2} \cdot (q + 7) \cdot 3 = 1\frac{1}{2}q + 10\frac{1}{2}$$

$$O(\triangle ABP) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}q + 3\frac{1}{2} - 3) \cdot (q + 1) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}q + \frac{1}{2})(q + 1)$$

$$O(\triangle OPC) = 2 \cdot O(\triangle ABP) \text{ geeft } 1\frac{1}{2}q + 10\frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{2}q + \frac{1}{2})(q + 1)$$

$$1\frac{1}{2}q + 10\frac{1}{2} = (\frac{1}{2}q + \frac{1}{2})(q + 1)$$

$$1\frac{1}{2}q + 10\frac{1}{2} = \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}q + 10 = 0$$

$$q^2 - q - 20 = 0$$

$$(q + 4)(q - 5) = 0$$

$$q = -4 \vee q = 5$$

$q > 0$ geeft $q = 5$

a $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 3 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$$

Dus $M(3, 2)$ en $r_c = \sqrt{10}$.

$l \perp k$, dus $rc_l \cdot 3 = -1$ en dit geeft $rc_l = -\frac{1}{3}$.

$$l: y = -\frac{1}{3}x + b \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } M(3, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 3 + b = 2 \\ b = 3 \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{3}x + 3$.

Substitutie van $y = -\frac{1}{3}x + 3$ in $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ geeft

$$x^2 + (-\frac{1}{3}x + 3)^2 - 6x - 4(-\frac{1}{3}x + 3) + 3 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{9}x^2 - 2x + 9 - 6x + \frac{4}{3}x - 12 + 3 = 0$$

$$1\frac{1}{9}x^2 - 6\frac{2}{3}x = 0$$

$$10x^2 - 60x = 0$$

$$10x(x-6) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 6$$

$x = 0$ geeft $y = 3$, dus $A(0, 3)$.

$x = 6$ geeft $y = 1$, dus $B(6, 1)$.

m_1 en m_2 staan loodrecht op l en zijn dus evenwijdig met k .

$$m_1: y = 3x + b \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } A(0, 3) \end{array} \right\} b = 3$$

Dus $m_1: y = 3x + 3$.

$$m_2: y = 3x + b \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } B(6, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 6 + b = 1 \\ b = -17 \end{array}$$

Dus $m_2: y = 3x - 17$.

b k en l snijden geeft het punt S .

$$3x + 13 = -\frac{1}{3}x + 3$$

$$3\frac{1}{3}x = -10$$

$$x = -3$$

$$y = 3x + 13 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} y = 3 \cdot -3 + 13 = 4, \text{ dus } S(-3, 4).$$

$$d(S, M) = \sqrt{(3 - (-3))^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$d(k, c) = d(S, c) = d(S, M) - r_c = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$$

c k snijden met de y -as geeft $Q(0, 13)$.

Lijn n met $rc_k = -\frac{1}{2}$ door Q geeft $n: y = -\frac{1}{2}x + 13$.

Substitutie van $y = -\frac{1}{2}x + 13$ in $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ geeft

$$x^2 + (-\frac{1}{2}x + 13)^2 - 6x - 4(-\frac{1}{2}x + 13) + 3 = 0$$

$$x^2 + 2\frac{1}{4}x^2 - 39x + 169 - 6x + 6x - 52 + 3 = 0$$

$$3\frac{1}{4}x^2 - 39x + 120 = 0$$

$$D = (-39)^2 - 4 \cdot 3\frac{1}{4} \cdot 120 = -39$$

$D < 0$, dus n heeft geen punten gemeenschappelijk met c .

d Lijn q door M en R heeft $rc_q = \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$.

$p \perp q$, dus $rc_p \cdot \frac{1}{3} = -1$ en dit geeft $rc_p = -3$.

$$p: y = -3x + b \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } R(0, 1) \end{array} \right\} b = 1$$

Dus $p: y = -3x + 1$.

$x = -2$ geeft $y = -3 \cdot -2 + 1 = 7$, dus lijn p gaat door punt P .

e $\tan(\alpha) = rc_k = 3$ geeft $\alpha = 71,5\dots^\circ$

$\tan(\beta) = rc_l = -3$ geeft $\beta = -71,5\dots^\circ$

$\alpha - \beta = 71,5\dots^\circ - (-71,5\dots^\circ) = 143,1\dots^\circ$

Dus $\angle(k, p) = 180^\circ - 143,1\dots^\circ \approx 37^\circ$.

7

$$\begin{aligned} \text{a } x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 &= 0 \\ x^2 - 2x + y^2 - 2y - 8 &= 0 \\ (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 - 8 &= 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 &= 10 \\ \text{Dus } M(1, 1) \text{ en } r_1 &= \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Van c_2 is het middelpunt O en de straal 1.

$$d(c_1, c_2) = r_1 - r_2 - d(O, M) = \sqrt{10} - 1 - \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} \approx 0,75$$

$$\begin{aligned} \text{b } y = 0 \text{ geeft } x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ (x+2)(x-4) &= 0 \\ x = -2 \vee x &= 4 \end{aligned}$$

Dus $A(-2, 0)$ en $B(4, 0)$.

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ geeft } y^2 - 2y - 8 &= 0 \\ (y+2)(y-4) &= 0 \\ y = -2 \vee y &= 4 \end{aligned}$$

Dus $C(0, 4)$ en $D(0, -2)$.

Dus $AB = 6$, $OD = 2$ en $OC = 4$.

$$O(ADBC) = O(\triangle ABD) + O(\triangle ABC)$$

$$\text{Dus } O(ADBC) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 18.$$

$$\text{c } rc_{AM} = \frac{1-0}{1-2} = \frac{1}{3}$$

$k \perp AM$, dus $rc_k \cdot \frac{1}{3} = -1$ en dit geeft $rc_k = -3$.

$$\left. \begin{aligned} k: y &= -3x + b \\ \text{door } M(1, 1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -3 \cdot 1 + b &= 1 \\ b &= 4 \end{aligned}$$

Dus $k: y = -3x + 4$.

k snijdt de y -as in het punt $(0, 4)$.

Dat is het punt C , dus C ligt op k .

8

$$\begin{aligned} \text{a } f(x) = g(x) \text{ geeft } \frac{1}{4}x^2 &= 2\sqrt{x} \\ x^2 &= 8\sqrt{x} \\ \text{kwadrateren geeft} \\ x^4 &= 64x \\ x^4 - 64x &= 0 \\ x(x^3 - 64) &= 0 \\ x = 0 \vee x^3 &= 64 \\ x = 0 \vee x &= 4 \end{aligned}$$

$f(4) = 4$, dus $P(4, 4)$.

$$g(x) = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } g'(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = g'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } P(4, 4) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 4 + b &= 4 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Dus $k: y = \frac{1}{2}x + 2$.

k snijdt de assen in de punten $A(0, 2)$ en $B(-4, 0)$.

$$\text{Dus } O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4.$$

b $l: y = ax + b$ en $l \parallel k$, dus $a = \text{rc}_l = \text{rc}_k = \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \text{ geeft } \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{4}, \text{ dus } Q(1, \frac{1}{4}).$$

Lijn m gaat door Q met $m \perp k$.

$$\frac{1}{2} \cdot \text{rc}_m = -1 \text{ geeft } \text{rc}_m = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -2x + b \\ \text{door } Q(1, \frac{1}{4}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + b = \frac{1}{4} \\ b = 2\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\text{Dus } m: y = -2x + 2\frac{1}{4}.$$

k en m snijden geeft het punt R .

$$\frac{1}{2}x + 2 = -2x + 2\frac{1}{4}$$

$$2\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{10} \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{array} \right\} y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + 2 = 2\frac{1}{20}, \text{ dus } R(\frac{1}{10}, 2\frac{1}{20}).$$

$$d(k, l) = d(Q, k) = d(Q, R) = \sqrt{(\frac{1}{10} - 1)^2 + (2\frac{1}{20} - \frac{1}{4})^2} \approx 2,01$$

11 Verbanden en functies

11.1 Evenredigheden

Bladzijde 89

V1 a $N = at$ met $a = \frac{N}{t} = \frac{24}{15} = 1,6$

Dus $N = 1,6t$.

b $a = \frac{N}{t} = \frac{3,6}{6} = 0,6$, dus $N = 0,6t$.

V2 a $N = \frac{a}{t}$ met $a = Nt = 24 \cdot 15 = 360$

Dus $N = \frac{360}{t}$.

b $a = Nt = 3,6 \cdot 6 = 21,6$, dus $N = \frac{21,6}{t}$.

V3 a $W = aS$ met $a = \frac{W}{S} = \frac{5,6}{50} = 0,112$

Dus $W = 0,112S$.

$S = 80$ geeft $W = 0,112 \cdot 80 = 8,96$

Dus ongeveer 9 cm.

b $T = \frac{a}{d}$ met $a = Td = 3,2 \cdot 1,25 = 4$

Dus $T = \frac{4}{d}$.

$T = 2,5$ geeft $\frac{4}{d} = 2,5$, dus $d = \frac{4}{2,5} = 1,6$.

Op een diepte van 1600 meter.

1 a $\frac{7}{2} = 3,5$; $\frac{17,5}{5} = 3,5$; $\frac{28}{8} = 3,5$; $\frac{35}{10} = 3,5$ en $\frac{52,5}{15} = 3,5$

Dus N is evenredig met t .

De evenredigheidsconstante is 3,5.

b $2 \cdot 150 = 300$; $5 \cdot 60 = 300$; $8 \cdot 37,5 = 300$; $10 \cdot 30 = 300$ en $15 \cdot 20 = 300$

Dus M is omgekeerd evenredig met t .

De formule van M is $M = \frac{300}{t}$.

Bladzijde 90

2 $p = {}^3\log(2,5) \approx 0,834$

3 a $y = ax^{1,8}$
 $x = 6$ en $y = 12$ $\left\{ \begin{array}{l} a \cdot 6^{1,8} = 12 \\ a = \frac{12}{6^{1,8}} \approx 0,48 \end{array} \right.$

De formule is $y = 0,48x^{1,8}$.

b $P = \frac{a}{t^2}$
 $t = 0,3$ en $P = 10$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{0,3^2} = 10 \\ a = 10 \cdot 0,3^2 = 0,9 \end{array} \right.$

De formule is $P = \frac{0,9}{t^2}$.

c $y = 180x^p$
 $x = 4$ en $y = 900$ $\left\{ \begin{array}{l} 180 \cdot 4^p = 900 \\ 4^p = 5 \\ p = {}^4\log(5) \approx 1,16 \end{array} \right.$

De formule is $y = 180x^{1,16}$.

Bladzijde 91

$$4 \quad \left. \begin{array}{l} v = ax^{0,5} \\ x = 950 \text{ en } v = 480 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 950^{0,5} = 480 \\ a = \frac{480}{950^{0,5}} = 15,57... \end{array}$$

Dus $v = 15,57... \cdot x^{0,5}$.

Los op $15,57... \cdot x^{0,5} = 141$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 81,97...$

Dus de Iguazu watervallen zijn 82 meter hoog.

$$5 \quad a \quad \begin{array}{l} 720 \text{ km/u is } \frac{720}{3,6} = 200 \text{ m/s.} \\ W_1 = av^2 \\ v = 200 \text{ en } W_1 = 120\,000 \end{array} \left\} \begin{array}{l} a \cdot 200^2 = 120\,000 \\ a = \frac{120\,000}{200^2} = 3 \end{array}$$

Dus $W_1 = 3v^2$.

$$\left. \begin{array}{l} W_i = \frac{b}{v^2} \\ v = 200 \text{ en } W_i = 300\,000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{b}{200^2} = 300\,000 \\ b = 300\,000 \cdot 200^2 = 1,2 \cdot 10^{10} \end{array}$$

Dus $W_i = \frac{1,2 \cdot 10^{10}}{v^2}$.

$$b \quad W = W_1 + W_i = 3v^2 + \frac{1,2 \cdot 10^{10}}{v^2}$$

Invoeren van de formule van W en gebruiken van de optie minimum geeft $v = 251,48...$ en $W \approx 379\,473$.

Dus bij een snelheid van $3,6 \cdot 251,48... \approx 905$ km/u is de totale weerstand minimaal.

$v = 251,48...$ geeft $W_1 = 3 \cdot 251,48...^2 \approx 189\,737$ N

$v = 251,48...$ geeft $W_i = \frac{1,2 \cdot 10^{10}}{251,48...^2} \approx 189\,737$ N

Dus bij minimale totale weerstand geldt $W_1 = W_i$.

$$6 \quad a \quad \begin{array}{l} \text{Invullen van } t = 2 \text{ en } N = 1,82 \text{ geeft } a \cdot 2^p = 1,82. \\ \text{Invullen van } t = 5 \text{ en } N = 19,7 \text{ geeft } a \cdot 5^p = 19,7. \end{array}$$

$$b \quad \text{De vergelijking } \frac{1,82}{2^p} = \frac{19,7}{5^p}.$$

$$c \quad \text{De GR geeft } p \approx 2,6 \text{ en } a \approx 0,3.$$

Dus de formule is $N = 0,3t^{2,6}$.

$$7 \quad a \quad \text{Invullen van } q = 2,0 \text{ en } W = 0,30 \text{ geeft } \frac{a}{2,0^p} = 0,30.$$

$$\text{Invullen van } q = 3,8 \text{ en } W = 0,06 \text{ geeft } \frac{a}{3,8^p} = 0,06.$$

$$\text{Zo krijg je het stelsel } \begin{cases} \frac{a}{2,0^p} = 0,30 \\ \frac{a}{3,8^p} = 0,06 \end{cases}$$

$$b \quad \text{Uit } \frac{a}{2,0^p} = 0,30 \text{ volgt } a = 0,30 \cdot 2,0^p \text{ en uit } \frac{a}{3,8^p} = 0,06 \text{ volgt } a = 0,06 \cdot 3,8^p.$$

Hieruit volgt de vergelijking $0,30 \cdot 2,0^p = 0,06 \cdot 3,8^p$.

$$c \quad \text{Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft } p \approx 2,51 \text{ en } a \approx 1,71.$$

Dus de formule is $W = \frac{1,71}{q^{2,51}}$.

Bladzijde 92

- 8 a** H is evenredig met een macht van G , dus $H = aG^p$.

Invullen van $G = 150$ en $H = 485$ geeft $a \cdot 250^p = 485$ oftewel $a = \frac{485}{250^p}$.

Invullen van $G = 60$ en $H = 186$ geeft $a \cdot 60^p = 186$ oftewel $a = \frac{186}{60^p}$.

$$\text{Los op } \frac{485}{250^p} = \frac{186}{60^p}.$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$p \approx 0,67$ en $a \approx 12$, dus de formule is $H = 12G^{0,67}$.

- b** Los op $12G^{0,67} = 86$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $G = 18,9...$

De lichaamsmassa is 19 kg.

- 9** W is evenredig met een macht van m , dus $W = am^p$.

Invullen van $m = 30$ en $W = 90$ geeft $a \cdot 30^p = 90$ oftewel $a = \frac{90}{30^p}$.

Invullen van $m = 70$ en $W = 190$ geeft $a \cdot 70^p = 190$ oftewel $a = \frac{190}{70^p}$.

$$\text{Los op } \frac{90}{30^p} = \frac{190}{70^p}.$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$p = 0,881...$ en $a = 4,483...$, dus de formule is $W = 4,483... \cdot m^{0,881...}$.

1,2 liter per dag is $\frac{1200}{24} = 50$ mL per uur.

Los op $4,483... \cdot m^{0,881...} = 50$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $m = 15,40...$

De massa van de gazelle is ongeveer 15,4 kg.

- 10** $y = 2,5x^{\frac{1}{3}}$

$$2,5x^{\frac{1}{3}} = y$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 0,4y$$

$$(x^{\frac{1}{3}})^3 = (0,4y)^3$$

$$x = 0,4^3 \cdot y^3$$

$$x = 0,064y^3$$

Bladzijde 93

- 11 a** $y = 5x^{2,6}$

$$5x^{2,6} = y$$

$$x^{2,6} = 0,2y$$

$$x = (0,2y)^{\frac{1}{2,6}} = 0,2^{\frac{1}{2,6}} \cdot y^{\frac{1}{2,6}} \approx 0,54 \cdot y^{0,38}$$

$$\text{Dus } x = 0,54y^{0,38}.$$

- b** $y = 0,2x^{-1,4}$

$$0,2x^{-1,4} = y$$

$$x^{-1,4} = 5y$$

$$x = (5y)^{-\frac{1}{1,4}} = 5^{-\frac{1}{1,4}} \cdot y^{-\frac{1}{1,4}} \approx 0,32 \cdot y^{-0,71}$$

$$\text{Dus } x = 0,32y^{-0,71}.$$

- c** $y = 1,5x^{0,9}$

$$1,5x^{0,9} = y$$

$$x^{0,9} = \frac{1}{1,5}y$$

$$x = \left(\frac{1}{1,5}y\right)^{\frac{1}{0,9}} = \left(\frac{1}{1,5}\right)^{\frac{1}{0,9}} \cdot y^{\frac{1}{0,9}} \approx 0,64 \cdot y^{1,11}$$

$$\text{Dus } x = 0,64y^{1,11}.$$

12 a $K = 16p^{1,18}$
 $16p^{1,18} = K$
 $p^{1,18} = \frac{1}{16}K$
 $p = \left(\frac{1}{16}K\right)^{\frac{1}{1,18}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{1,18}} \cdot K^{\frac{1}{1,18}} \approx 0,10 \cdot K^{0,85}$
Dus $p = 0,10K^{0,85}$.

b $l = 0,2 \cdot (2F)^{-1,5}$
 $0,2 \cdot (2F)^{-1,5} = l$
 $(2F)^{-1,5} = 5l$
 $2F = (5l)^{-\frac{1}{1,5}}$
 $F = \frac{1}{2} \cdot (5l)^{-\frac{1}{1,5}} = \frac{1}{2} \cdot 5^{-\frac{1}{1,5}} \cdot l^{-\frac{1}{1,5}} \approx 0,17 \cdot l^{-0,67}$
Dus $F = 0,17l^{-0,67}$.

c $D = 15 \cdot (0,2y)^{1,75}$
 $15 \cdot (0,2y)^{1,75} = D$
 $(0,2y)^{1,75} = \frac{1}{15}D$
 $0,2y = \left(\frac{1}{15}D\right)^{\frac{1}{1,75}}$
 $y = 5 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{1}{1,75}} \cdot D^{\frac{1}{1,75}} \approx 1,06 \cdot D^{0,57}$
Dus $y = 1,06D^{0,57}$.

13 a $h = \frac{10n^{-2,1}}{1,13}$
 $10n^{-2,1} = 1,13h$
 $n^{-2,1} = 0,113h$
 $n = (0,113h)^{-\frac{1}{2,1}} = 0,113^{-\frac{1}{2,1}} \cdot h^{-\frac{1}{2,1}} \approx 2,82 \cdot h^{-0,48}$
Dus $n = 2,82h^{-0,48}$.

b $s = 0,008(2t)^{5,12}$
 $0,008(2t)^{5,12} = s$
 $(2t)^{5,12} = 125s$
 $2t = (125s)^{\frac{1}{5,12}}$
 $t = \frac{1}{2} \cdot 125^{\frac{1}{5,12}} \cdot s^{\frac{1}{5,12}} \approx 1,28 \cdot s^{0,20}$
Dus $t = 1,28s^{0,20}$.

c $x = 3,5y\sqrt{y}$
 $3,5y\sqrt{y} = x$
 $y^{1,5} = \frac{1}{3,5}x$
 $y = \left(\frac{1}{3,5}x\right)^{\frac{1}{1,5}} = \left(\frac{1}{3,5}\right)^{\frac{1}{1,5}} \cdot x^{\frac{1}{1,5}} \approx 0,43 \cdot x^{0,67}$
Dus $y = 0,43x^{0,67}$.

14 a $y = 15x \cdot \sqrt[3]{x}$
 $15x \cdot \sqrt[3]{x} = y$
 $15x^{1\frac{1}{3}} = y$
 $x^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{15}y$
 $x = \left(\frac{1}{15}y\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}} \approx 0,13 \cdot y^{0,75}$
Dus $x = 0,13y^{0,75}$.

b $y = \frac{12}{x \cdot \sqrt[4]{x}}$
 $x \cdot \sqrt[4]{x} \cdot y = 12$
 $x \cdot \sqrt[4]{x} = \frac{12}{y}$
 $x^{\frac{5}{4}} = 12y^{-1}$
 $x = (12y^{-1})^{\frac{4}{5}} = 12^{\frac{4}{5}} \cdot y^{-\frac{4}{5}} \approx 7,30 \cdot y^{-0,8}$
Dus $x = 7,30y^{-0,8}$.

- 15 a** De formule $t = 25n^{0,6}$ geeft (t afgerond op gehele):

n	5	10	15	20
t	66	100	127	151

Dus de formule past bij de tabel.

- b** n verdubbelen van $n = 5$ naar $n = 10$ geeft een toename van de tijd van 65 naar 100 seconden.

Dat is een procentuele toename van $\frac{100 - 65}{65} \times 100\% \approx 54\%$.

n verdubbelen van $n = 10$ naar $n = 20$ geeft een toename van de tijd van 100 naar 150 seconden.

Dat is een procentuele toename van 50%.

Dus dit klopt.

Bladzijde 95

- 16 a** Bij een verdubbeling van n neemt t met 51,6% toe, dat is minder dan een toename van 100% die je zou verwachten bij constante stijging.

b $n = (0,04t)^{\frac{1}{0,6}} = 0,04^{\frac{1}{0,6}} \cdot t^{\frac{1}{0,6}} \approx 0,005t^{1,667}$

Bij een verdubbeling van t wordt n ongeveer 3,2 keer zo groot, dat is meer dan 2 keer zo groot als wat je zou verwachten bij constante stijging.

- c** Neem in de formule $3n$ voor n .

Je krijgt $t^* = 25 \cdot (3n)^{0,6} = 25 \cdot 3^{0,6} \cdot n^{0,6} = 3^{0,6} \cdot 25n^{0,6} \approx 1,933 \cdot 25n^{0,6}$.

Dus $t^* \approx 1,933 \cdot t$.

Als n verdrievoudigt, neemt de tijd met ongeveer 93,3% toe.

- 17 a** Neem in de formule $2v$ voor v .

Je krijgt $r^* = 0,016 \cdot (2v)^{1,75} = 0,016 \cdot 2^{1,75} \cdot v^{1,75} = 2^{1,75} \cdot 0,016v^{1,75} \approx 3,4 \cdot 0,016v^{1,75}$.

Dus $r^* \approx 3,4 \cdot r$.

Dus de remweg is ongeveer 3,4 keer zo lang.

- b** Neem in de formule $2n$ voor n .

Je krijgt $M^* = 150\,000 \cdot (2n)^{-0,3} = 150\,000 \cdot 2^{-0,3} \cdot n^{-0,3} = 2^{-0,3} \cdot 150\,000n^{-0,3} \approx 0,812 \cdot 150\,000n^{-0,3}$

Dus $M^* \approx 0,812 \cdot M$.

Dus M neemt met ongeveer 18,8% af.

18 $N = 4,4A^{0,3}$

$4,4A^{0,3} = N$

$A^{0,3} = \frac{1}{4,4}N$

$A = (\frac{1}{4,4}N)^{\frac{1}{0,3}}$

Neem in deze formule $1,25N$ voor N .

Je krijgt $A^* = (\frac{1}{4,4} \cdot 1,25N)^{\frac{1}{0,3}} = 1,25^{\frac{1}{0,3}} \cdot (\frac{1}{4,4}N)^{\frac{1}{0,3}} \approx 2,1 \cdot (\frac{1}{4,4}N)^{\frac{1}{0,3}}$.

Dus $A^* \approx 2,1 \cdot A$.

Dus eiland P is ongeveer 2,1 keer zo groot als eiland Q.

- 19 a** 2 meter = 20 dm, dus $l = 20$.

$20 \cdot 4 = 80$ kg, dus $g = \frac{80}{2000} = 0,04$.

$d = 0,0005 \cdot 0,04 \cdot 20^4 = 3,2$

De doorbuiging is 3,2 mm.

- b** $0,0005g \cdot 25^4 = 2,5$

$195,3125g = 2,5$

$g = 0,0128$

Het totale gewicht van de stenen is $0,0128 \cdot 2500 = 32$ kg.

- c** $g = 0,05$ geeft $d = 0,0005 \cdot 0,05 \cdot l^4 = 2,5 \cdot 10^{-5} l^4$

$2,5 \cdot 10^{-5} l^4 = 2,2$

$l^4 = 88\,000$

$l = \sqrt[4]{88\,000} \approx 17,2$

De lengte is ongeveer 172 cm.

- d** Neem $1,2l$ voor l in $d = 2,5 \cdot 10^{-5} l^4$.
 Je krijgt $d^* = 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot (1,2l)^4 = 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 1,2^4 \cdot l^4 = 1,2^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-5} l^4 \approx 2,07 \cdot 2,5 \cdot 10^{-5} l^4$.
 Dus $d^* \approx 2,07 \cdot d$.
 Dus de doorbuiging neemt toe met ongeveer 107%.
- e** $d = 2,5 \cdot 10^{-5} l^4$
 $2,5 \cdot 10^{-5} l^4 = d$
 $l^4 = 40\,000d$
 $l = \sqrt[4]{40\,000d}$
 $l = \sqrt[4]{40\,000} \cdot \sqrt[4]{d}$
 $l \approx 14 \cdot \sqrt[4]{d}$
 Dus $l = 14 \cdot \sqrt[4]{d}$.

Bladzijde 96

- 20 a** Neem in de formule $1,2R$ voor R .
 Je krijgt $G^* = a \cdot (1,2R)^3 = a \cdot 1,2^3 \cdot R^3 = 1,2^3 \cdot aR^3 = 1,728 \cdot aR^3$.
 Dus $G^* = 1,728 \cdot G$.
 Dus het gewicht is 1,728 keer zo groot.
- b** $G = aR^3$
 $aR^3 = G$
 $R^3 = \frac{1}{a}G$
 $R = (\frac{1}{a}G)^{\frac{1}{3}}$
 Neem in deze formule $2G$ voor G .
 Je krijgt $R^* = (\frac{1}{a} \cdot 2G)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot (\frac{1}{a}G)^{\frac{1}{3}} \approx 1,26 \cdot (\frac{1}{a}G)^{\frac{1}{3}}$.
 Dus $R^* \approx 1,26 \cdot R$.
 Dus de rompomvang is 1,26 keer zo groot.
- c** $G = aR^3$
 $R = 2,03$ en $G = 670$ $\left. \begin{array}{l} a \cdot 2,03^3 = 670 \\ a = \frac{670}{2,03^3} \approx 80,1 \end{array} \right\}$
- d** $80R^3 = 580$
 $R^3 = 7,25$
 $R = \sqrt[3]{7,25} \approx 1,94$
 Dus de rompomvang is 194 cm.
 (Met $G = 80,1R^3$ krijg je een rompomvang van 193 cm.)
- e** $G = 80R^3$
 $R^3 = \frac{1}{80}G$
 $R = (\frac{1}{80}G)^{\frac{1}{3}} = (\frac{1}{80})^{\frac{1}{3}} \cdot G^{\frac{1}{3}} \approx 0,232 \cdot G^{\frac{1}{3}}$
 Dus $R = 0,232G^{\frac{1}{3}}$.

- 21 a** $L = \frac{a}{d^2}$
 Neem in de formule $3d$ voor d .
 Je krijgt $L^* = \frac{a}{(3d)^2} = \frac{a}{9d^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{a}{d^2}$.
 Dus $L^* = \frac{1}{9} \cdot L$.
 Dus de geluidsstrekte wordt 9 keer zo klein.
- b** $L = \frac{a}{d^2}$
 $d^2 = \frac{a}{L}$
 $d = \sqrt{\frac{a}{L}}$
 Neem in deze formule $\frac{1}{2}L$ voor L .
 Je krijgt $d^* = \sqrt{\frac{a}{\frac{1}{2}L}} = \sqrt{\frac{2a}{L}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{L}}$.
 Dus $d^* = \sqrt{2} \cdot d$.
 Dus op een afstand van $\sqrt{2} \cdot 3 \approx 4,2$ meter.

Bladzijde 97

C1

$$\text{a } \left. \begin{array}{l} y = ax^{2,8} \\ x = 3 \text{ en } y = 117 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 3^{2,8} = 117 \\ a = \frac{117}{3^{2,8}} \approx 5,4 \end{array}$$

$$\text{Dus } y = 5,4x^{2,8}.$$

$$\text{b } \left. \begin{array}{l} y = \frac{a}{x^{1,5}} \\ x = 25 \text{ en } y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{25^{1,5}} = 4 \\ a = 4 \cdot 25^{1,5} = 500 \end{array}$$

$$\text{Dus } y = \frac{500}{x^{1,5}}.$$

$$\text{c } \left. \begin{array}{l} y = 53x^p \\ x = 3 \text{ en } y = 88 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 53 \cdot 3^p = 88 \\ 3^p = \frac{88}{53} \\ p = {}^3\log\left(\frac{88}{53}\right) \approx 0,46 \end{array}$$

$$\text{Dus } y = 53x^{0,46}.$$

C2

$$\text{a } \begin{array}{l} y = 80x^{1,57} \\ 80x^{1,57} = y \\ x^{1,57} = 0,0125y \\ x = (0,0125y)^{\frac{1}{1,57}} = 0,0125^{\frac{1}{1,57}} \cdot y^{\frac{1}{1,57}} \approx 0,061 \cdot y^{0,637} \\ \text{Dus } x = 0,061y^{0,637}. \end{array}$$

$$\text{b } \begin{array}{l} y = 3,7x^{-1,36} \\ 3,7x^{-1,36} = y \\ x^{-1,36} = \frac{1}{3,7}y \\ x = \left(\frac{1}{3,7}y\right)^{-\frac{1}{1,36}} = \left(\frac{1}{3,7}\right)^{-\frac{1}{1,36}} \cdot y^{-\frac{1}{1,36}} \approx 2,617 \cdot y^{-0,735} \\ \text{Dus } x = 2,617y^{-0,735}. \end{array}$$

C3

$$\text{a } \begin{array}{l} \text{Neem in de formule } 3x \text{ voor } x. \\ \text{Je krijgt } y^* = 0,64 \cdot (3x)^{2,3} = 0,64 \cdot 3^{2,3} \cdot x^{2,3} = 3^{2,3} \cdot 0,64x^{2,3} \approx 12,5 \cdot 0,64x^{2,3}. \\ \text{Dus } y^* \approx 12,5 \cdot y. \end{array}$$

Als je x drie keer zo groot neemt, wordt y ongeveer 12,5 keer zo groot.

$$\text{b } \begin{array}{l} y = 0,64x^{2,3} \\ 0,64x^{2,3} = y \\ x^{2,3} = 1,5625y \\ x = (1,5625y)^{\frac{1}{2,3}} \\ \text{Neem in deze formule } 2y \text{ voor } y. \\ \text{Je krijgt } x^* = (1,5625 \cdot 2y)^{\frac{1}{2,3}} = 2^{\frac{1}{2,3}} \cdot (1,5625y)^{\frac{1}{2,3}} \approx 1,352 \cdot (1,5625y)^{\frac{1}{2,3}}. \\ \text{Dus } x^* \approx 1,352 \cdot x. \end{array}$$

Als y verdubbelt, neemt x met 35,2% toe.

11.2 Standaardgrafieken en transformaties

Bladzijde 98

22

$$\text{a } y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{translatie } (0, 3)} y = \frac{1}{2}x^2 + 3$$

$$\text{b } y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (3, 0)} y = \sqrt{x - 3}$$

$$\text{c } y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\times 2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = \frac{2}{x}$$

$$\text{d } y = 2^x \xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} y = 2^{\frac{1}{3}x}$$

Bladzijde 100

- 23**
- a** afnemend dalend
 - b** toenemend stijgend
 - c** afnemend stijgend
 - d** toenemend dalend
 - e** afnemend dalend
 - f** afnemend dalend
 - g** toenemend stijgend
 - h** afnemend dalend
 - i** afnemend stijgend

- 24**
- a** $y = 0,3x^4 \xrightarrow{\text{translatie } (-5, 6)} y = 0,3(x+5)^4 + 6 \xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 3(0,3(x+5)^4 + 6)$
 oftewel $y = 0,9(x+5)^4 + 18$
 De top is $(-5, 18)$.
- b** $y = 0,3x^4 \xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 3 \cdot 0,3x^4 = 0,9x^4 \xrightarrow{\text{translatie } (-5, 6)} y = 0,9(x+5)^4 + 6$
 De top is $(-5, 6)$.

- 25**
- a** $g(x) = 0,01x^4 \xrightarrow{\text{translatie } (8, -5)} y = 0,01(x-8)^4 - 5 \xrightarrow{\times \frac{1}{3} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} f(x) = 0,01(3x-8)^4 - 5$
- b** De top van de grafiek van f is $(2\frac{2}{3}, -5)$.
 $(2\frac{2}{3}, -5) \xrightarrow{\text{translatie } (a, b)} (2\frac{2}{3} + a, -5 + b) = (4, 0)$
 Dus $a = 1\frac{1}{3}$ en $b = 5$.

- 26**
- a** $y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (-3, -1)} y = \sqrt{x+3} - 1 \xrightarrow{\times 2 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x+3} - 1$
- b** $\frac{1}{2}x + 3 \geq 0$ geeft $\frac{1}{2}x \geq -3$ oftewel $x \geq -6$, dus $D_f = [-6, \rightarrow)$.
 $B_f = [-1, \rightarrow)$
- c** $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x+3} - 1 \xrightarrow{\text{translatie } (3, 5)} g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(x-3)+3} - 1 + 5$ oftewel $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}} + 4$
- d** $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x+3} - 1 \xrightarrow{\text{translatie } (-1, -b)} h(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(x+1)+3} - 1 - b$ oftewel $h(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}} - b - 1$
 $h(1) = 0$ geeft $\sqrt{4-b-1} = 0$
 $2-b-1 = 0$
 $b = 1$

Bladzijde 101

- 27**
- a** $y = \sqrt{x} \xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 3\sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (1, 2)} y = 3\sqrt{x-1} + 2$
 $y = 3\sqrt{x-1} + 2 \xrightarrow{\times \frac{1}{2} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} f(x) = 3\sqrt{2x-1} + 2$
- b** $2x - 1 \geq 0$ geeft $2x \geq 1$ oftewel $x \geq \frac{1}{2}$, dus $D_f = [\frac{1}{2}, \rightarrow)$.
 $B_f = [2, \rightarrow)$
- c** $f(x) = 3\sqrt{2x-1} + 2 \xrightarrow{\text{translatie } (-b, -11)} g(x) = 3\sqrt{2(x+b)-1} + 2 - 11$ oftewel $g(x) = 3\sqrt{2x+2b-1} - 9$
 $g(0) = 0$ geeft $3\sqrt{2b-1} - 9 = 0$
 $3\sqrt{2b-1} = 9$
 $\sqrt{2b-1} = 3$
 $2b-1 = 9$
 $2b = 10$
 $b = 5$

28

a $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\times 2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = \frac{2}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (3, 4)} f(x) = \frac{2}{x-3} + 4$

b verticale asymptoot $x = 3$
horizontale asymptoot $y = 4$

c $f(x) = \frac{2}{x-3} + 4 \xrightarrow{\text{translatie } (-2, -4)} y = \frac{2}{x+2-3} + 4 - 4$ oftewel $y = \frac{2}{x-1}$

$$y = \frac{2}{x-1} \xrightarrow{\times 2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = \frac{4}{x-1} \xrightarrow{\times \frac{1}{2} \text{ t.o.v. de de } y\text{-as}} g(x) = \frac{4}{2x-1}$$

Alternatieve uitwerking

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + 4 = \frac{4}{2x-6} + 4 \xrightarrow{\text{translatie } (-2\frac{1}{2}, -4)} y = \frac{4}{2(x+2\frac{1}{2})-6} = \frac{4}{2x-1} = g(x)$$

29

a $f(x) = \frac{1}{2x} \xrightarrow{\times 6 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 6 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{3}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (5, 2)} g(x) = \frac{3}{x-5} + 2$

b De asymptoten zijn $x = 2$ en $y = 4$, dus $h(x) = \frac{a}{x-2} + 4$.

$$h(3) = 9 \text{ geeft } \frac{a}{3-2} + 4 = 9$$

$$a = 5$$

$$\text{Dus } h(x) = \frac{5}{x-2} + 4.$$

$$f(x) = \frac{1}{2x} \xrightarrow{\times 10 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 10 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{5}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (2, 4)} h(x) = \frac{5}{x-2} + 4$$

30

a $y = 3^x \xrightarrow{\times 4 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 4 \cdot 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (1, -6)} f(x) = 4 \cdot 3^{x-1} - 6$

b horizontale asymptoot $y = -6$
 $B_f = \langle -6, \rightarrow \rangle$

c $f(x) = 4 \cdot 3^{x-1} - 6 \xrightarrow{\text{translatie } (-3, 0)} y = 4 \cdot 3^{x+2} - 6 \xrightarrow{\times \frac{1}{3} \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} g(x) = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3^{x+2} - 2$

$$g(x) = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3^{x+2} - 2$$

$$g(x) = 3^{-1} \cdot 4 \cdot 3^{x+2} - 2$$

$$g(x) = 4 \cdot 3^{x+1} - 2$$

$$g(x) = 4(3^{x+1} - \frac{1}{2})$$

Bladzijde 102

31

a $y = \frac{1}{2} \log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (-3, -2)} f(x) = \frac{1}{2} \log(x+3) - 2$

b verticale asymptoot $x = -3$
 $D_f = \langle -3, \rightarrow \rangle$

c $f(x) = \frac{1}{2} \log(x+3) - 2 \xrightarrow{\text{translatie } (0, a)} y = \frac{1}{2} \log(x+3) - 2 + a$

$$y = \frac{1}{2} \log(x+3) - 2 + a \xrightarrow{\times b \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} g(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{x}{b} + 3\right) + a - 2$$

$$x = 3 \text{ is asymptoot geeft } \frac{3}{b} + 3 = 0$$

$$\frac{3}{b} = -3$$

$$b = -1$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \log(-x+3) + a - 2$$

$$g(2\frac{3}{4}) = -2 \text{ geeft } \frac{1}{2} \log(-2\frac{3}{4}+3) + a - 2 = -2$$

$$\frac{1}{2} \log(\frac{1}{4}) + a = 0$$

$$2 + a = 0$$

$$a = -2$$

$$\begin{aligned} \text{d } f(x) &= \frac{1}{2} \log(x+3) - 2 \xrightarrow{\text{translatie } (c, 0)} y = \frac{1}{2} \log(x-c+3) - 2 \\ y &= \frac{1}{2} \log(x-c+3) - 2 \xrightarrow{\times d \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} h(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{d}x - c + 3\right) - 2 \\ h(x) &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{d}x - c + 3\right) - 2 = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{d}x - c + 3\right) + \frac{1}{2} \log(4) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{4}{d}x - 4c + 12\right) \end{aligned}$$

Dit moet gelijk zijn aan $h(x) = \frac{1}{2} \log(x)$, dus $-4c + 12 = 0$ en $\frac{4}{d} = 1$
 $c = 3$ en $d = 4$

Alternatieve uitwerking

Door achterstevoren te werken, krijg je

$$h(x) = \frac{1}{2} \log(x) \xrightarrow{\times \frac{1}{d} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} y = \frac{1}{2} \log(dx) \xrightarrow{\text{translatie } (-c, 0)} f(x) = \frac{1}{2} \log(d(x+c)) = \frac{1}{2} \log(x+c) + \frac{1}{2} \log(d)$$

Dit moet gelijk zijn aan $f(x) = \frac{1}{2} \log(x+3) - 2$, dus $c = 3$ en $\frac{1}{2} \log(d) = -2$
 $c = 3$ en $d = 4$

32 $f(x) = 1 + 3 \sin(2x - \frac{1}{2}\pi) = 1 + 3 \sin(2(x - \frac{1}{4}\pi))$

Voor de grafiek van f geldt:

evenwichtsstand 1

amplitude 3

periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$

beginpunt $(\frac{1}{4}\pi, 1)$

Dus voor de grafiek van g geldt:

evenwichtsstand $1 + 2 = 3$

amplitude $\frac{1}{2} \cdot 3 = 1\frac{1}{2}$

periode $\frac{1}{3}\pi$

beginpunt $(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi, 1 + 2) = (\frac{5}{12}\pi, 3)$

Dit geeft $g(x) = 3 + 1\frac{1}{2} \sin(6(x - \frac{5}{12}\pi))$ oftewel $g(x) = 3 + 1\frac{1}{2} \sin(6x - 2\frac{1}{2}\pi)$.

33 a $s(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 4x + 2x - 1 = x^2 - 2x - 1$

$$x_{\text{top}} = -\frac{-2}{2} = 1 \text{ en } y_{\text{top}} = s(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 1 = -2$$

De top is $(1, -2)$.

b $v(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 4x - (2x - 1) = x^2 - 4x - 2x + 1 = x^2 - 6x + 1$

$$x_{\text{top}} = -\frac{-6}{2} = 3 \text{ en } y_{\text{top}} = v(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 1 = -8$$

De top is $(3, -8)$.

c $k(x) = f(g(x)) = (2x - 1)^2 - 4(2x - 1) = 4x^2 - 4x + 1 - 8x + 4 = 4x^2 - 12x + 5$

$$x_{\text{top}} = -\frac{-12}{8} = 1\frac{1}{2} \text{ en } y_{\text{top}} = k(1\frac{1}{2}) = 4 \cdot (1\frac{1}{2})^2 - 12 \cdot 1\frac{1}{2} + 5 = -4$$

De top is $(1\frac{1}{2}, -4)$.

Bladzijde 104

34 a $n(x) = f(x) + 6 \cdot g(x) = 2^{x+3} + 6 \cdot 2^{x-1} = 8 \cdot 2^x + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^x = 8 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x = 11 \cdot 2^x$

b $p(x) = f(x) - 12 \cdot g(x) = 2^{x+3} - 12 \cdot 2^{x-1} = 8 \cdot 2^x - 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^x = 8 \cdot 2^x - 6 \cdot 2^x = 2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$

c $l(x) = g(h(x)) = 2^{2\log(x)-1} = 2^{2\log(x)} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}x \text{ met } x > 0$

35

$$\text{a } s(1) = f(1) + g(1) = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } \frac{2-3}{1+1} + \frac{a}{1} = 1\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} + a = 1\frac{1}{2}$$

$$a = 2$$

$$\text{b } v(x) = f(x) - g(x) = \frac{2x-3}{x+1} - \frac{a}{x} = \frac{x(2x-3) - a(x+1)}{x(x+1)} = \frac{2x^2 - 3x - ax - a}{x^2 + x} = \frac{2x^2 - (a+3)x - a}{x^2 + x}$$

Dit moet gelijk zijn aan $v(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + x}$, dus $a + 3 = 0$ en $-a = 3$ en hieruit volgt $a = -3$.

$$\text{c } k(x) = f(g(x)) = \frac{2 \cdot \frac{a}{x} - 3}{\frac{a}{x} + 1} = \frac{2a - 3x}{a + x}$$

$$k(4) = -2 \text{ geeft } \frac{2a - 12}{a + 4} = -2$$

$$2a - 12 = -2a - 8$$

$$4a = 4$$

$$a = 1$$

36

$$\text{a } s(x) = f(x) + g(x) = {}^3\log(6x) + {}^3\log(4,5x) = {}^3\log(6x \cdot 4,5x) = {}^3\log(27x^2)$$

$$= {}^3\log(27) + {}^3\log(x^2) = 3 + 2 \cdot {}^3\log(x)$$

Dus $a = 3$ en $b = 2$.

$$\text{b } v(x) = f(x) - g(x) = {}^3\log(6x) - {}^3\log(4,5x) = {}^3\log\left(\frac{6x}{4,5x}\right) = {}^3\log\left(\frac{4}{3}\right) = {}^3\log(4) - {}^3\log(3)$$

$$= {}^3\log(4) - 1 = -1 + {}^3\log(4)$$

Dus $c = -1$ en $d = 4$.

$$\text{c } k(x) = f(h(x)) = {}^3\log(6 \cdot 3^{x+1}) = {}^3\log(6 \cdot 3^x \cdot 3) = {}^3\log(3^x \cdot 18) = {}^3\log(3^x) + {}^3\log(18) = x + {}^3\log(18)$$

Dus $p = {}^3\log(18) \approx 2,63$.

Bladzijde 105

C4

$$\text{a } y = x^4 \xrightarrow{\times 0,3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 0,3x^4 \xrightarrow{\text{translatie } (-7, -2)} y = 0,3(x+7)^4 - 2$$

$$y = 0,3(x+7)^4 - 2 \xrightarrow{\times \frac{1}{2} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} f(x) = 0,3(2x+7)^4 - 2$$

$$\text{b } y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \xrightarrow{\times 5 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \xrightarrow{\text{translatie } (-1, 6)} g(x) = 6 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$$

$$\text{c } y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (-4, 0)} y = {}^2\log(x+4) \xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} h(x) = {}^2\log\left(\frac{1}{3}x+4\right)$$

C5

$$\text{a } s(x) = f(x) + g(x) = \frac{x+2}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + 3x + 2 + 2x - 2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + 5x}{(x-1)(x+1)}$$

Dus $a = 1$, $b = 5$ en $c = 0$.

$$\text{b } v(x) = f(x) - g(x) = \frac{x+2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + 3x + 2 - 2x + 2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + 4}{(x-1)(x+1)}$$

Dus $m = 1$, $n = 1$ en $p = 4$.

$$\text{c } k(x) = f(g(x)) = \frac{\frac{2}{x+1} + 2}{\frac{2}{x+1} - 1} = \frac{2 + 2(x+1)}{2 - (x+1)} = \frac{2 + 2x + 2}{2 - x - 1} = \frac{2x + 4}{-x + 1}$$

Dus $q = 2$, $r = 4$ en $s = -1$.

11.3 Tweede- en derdegraadsfuncties

Bladzijde 106

- 37 a** $y = x^2 \xrightarrow{\text{translatie } (3, 4)} f(x) = (x - 3)^2 + 4$
Hieruit volgt dat de top het punt (3, 4) is.
- b** $f(x) = (x - 3)^2 + 4 = x^2 - 6x + 9 + 4 = x^2 - 6x + 13$
Omdat $f(0) = 13$ zijn de coördinaten van het snijpunt met de y -as (0, 13) direct af te lezen.
- c** $g(x) = 0$ geeft $2(x - 1)(x - 3) = 0$ oftewel $x = 1 \vee x = 3$.
Dus de snijpunten (1, 0) en (3, 0) met de x -as zijn direct uit het functievoorschrift van g af te lezen.
- d** $x_{\text{top}} = \frac{1+3}{2} = 2$ en $y_{\text{top}} = g(2) = 2(2 - 1)(2 - 3) = -2$
Dus de top is (2, -2).

Bladzijde 107

- 38** In het voorbeeld is de vorm $y = a(x - d)(x - e)$ gebruikt omdat de snijpunten met de x -as bekend zijn.

- 39 a** Uit $\alpha = 63,43\dots^\circ$ volgt $\angle(k, y\text{-as}) = 90^\circ - 63,43\dots^\circ \approx 26,6^\circ$.

- b** $k: y = 2x + b$

$x = 0$ geeft punt $C(0, 5)$, dus $b = 5$ en $k: y = 2x + 5$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -3x + b \\ \text{door } B(10, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 10 + b = 0 \\ -30 + b = 0 \\ b = 30 \end{array}$$

Dus $l: y = -3x + 30$.

k snijden met l geeft $2x + 5 = -3x + 30$

$$5x = 25$$

$$x = 5$$

$x = 5$ geeft $y = 2 \cdot 5 + 5 = 15$, dus $S(5, 15)$.

- c** $m \perp k$, dus $\text{rc}_m = -\frac{1}{2}$.

$m: y = -\frac{1}{2}x + b$ door $C(0, 5)$ geeft $m: y = -\frac{1}{2}x + 5$.

m snijden met de x -as geeft $-\frac{1}{2}x + 5 = 0$, dus $x = 10$.

Dus m gaat door $B(10, 0)$.

Bladzijde 108

- 40 a** p door $A(3, 0)$ en $B(9, 0)$, dus $p: y = a(x - 3)(x - 9)$.
 p door $C(0, -9)$, dus $a \cdot -3 \cdot -9 = -9$ en dit geeft $a = -\frac{1}{3}$.
Dus $p: y = -\frac{1}{3}(x - 3)(x - 9) = -\frac{1}{3}(x^2 - 12x + 27) = -\frac{1}{3}x^2 + 4x - 9$.

$$x_{\text{top}} = \frac{3+9}{2} = 6 \text{ geeft } y_{\text{top}} = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot -3 = 3, \text{ dus } T(6, 3).$$

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + 4x - 9 \text{ geeft } y' = -\frac{2}{3}x + 4$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = y'(3) = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 4 = 2 \text{ geeft } \alpha = 63,43\dots^\circ$$

$$\text{rc}_l = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-3}{9-6} = -1$$

$$\tan(\beta) = -1 \text{ geeft } \beta = -45^\circ$$

$$\alpha - \beta = 63,43\dots^\circ - (-45^\circ) = 108,43\dots^\circ$$

Dus $\angle(k, l) = 180^\circ - 108,43\dots^\circ \approx 71,6^\circ$.

- b** $m \perp k$, dus $\text{rc}_m = -\frac{1}{2}$.

$m: y = -\frac{1}{2}x + b$ door $A(3, 0)$ geeft $-\frac{1}{2} \cdot 3 + b = 0$, dus $b = \frac{3}{2}$.

$m: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ snijden met de y -as geeft $y_S = \frac{3}{2}$.

41 De top van p is $T(3, 1\frac{4}{5})$, dus $p: y = a(x - 3)^2 + 1\frac{4}{5}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = a(x - 3)^2 + 1\frac{4}{5} \\ \text{door } A(2, 2) \end{array} \right\} a(2 - 3)^2 + 1\frac{4}{5} = 2$$

$$a = \frac{1}{5}$$

$$\text{Dus } p: y = \frac{1}{5}(x - 3)^2 + 1\frac{4}{5} = \frac{1}{5}(x^2 - 6x + 9) + 1\frac{4}{5} = \frac{1}{5}x^2 - 1\frac{1}{5}x + 3\frac{3}{5}.$$

$$\text{Differentiëren geeft } y' = \frac{2}{5}x - 1\frac{1}{5}.$$

$$\text{rc}_k = y'(2) = \frac{4}{5} - 1\frac{1}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{2}{5}x + b \\ \text{door } A(2, 2) \end{array} \right\} -\frac{2}{5} \cdot 2 + b = 2$$

$$b = 2\frac{4}{5}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5}.$$

$$x = 0 \text{ geeft } y = 2\frac{4}{5}$$

$$y = 0 \text{ geeft } -\frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5} = 0$$

$$-\frac{2}{5}x = -2\frac{4}{5}$$

$$x = 7$$

$$O(\triangle OBC) = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2\frac{4}{5} = 9\frac{4}{5}$$

42 a p door $A(-3, 0)$ en $B(5, 0)$, dus $p: y = a(x + 3)(x - 5)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{-3 + 5}{2} = 1 \text{ en } y_{\text{top}} = 4, \text{ dus } T(1, 4).$$

$$T \text{ op } p \text{ geeft } a \cdot 4 \cdot -4 = 4 \text{ en dit geeft } a = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Dus } p: y = -\frac{1}{4}(x + 3)(x - 5) = -\frac{1}{4}(x^2 - 2x - 15) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 3\frac{3}{4}.$$

$$\text{Differentiëren geeft } y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\text{rc}_k = y'(0) = \frac{1}{2} \text{ en } \text{rc}_l = y'(5) = -\frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} = -2$$

$$\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = \frac{1}{2} \cdot -2 = -1, \text{ dus } k \perp l.$$

b $C(0, 3\frac{3}{4})$, dus $k: y = \frac{1}{2}x + 3\frac{3}{4}$.

$$l: y = -2x + b \text{ door } B(5, 0) \text{ geeft } b = 10, \text{ dus } l: y = -2x + 10.$$

$$k \text{ snijden met } l \text{ geeft } \frac{1}{2}x + 3\frac{3}{4} = -2x + 10$$

$$2\frac{1}{2}x = 6\frac{1}{4}$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ geeft } y = -2 \cdot 2\frac{1}{2} + 10 = 5, \text{ dus } S(2\frac{1}{2}, 5).$$

43 a De top van p is $T(2, 10)$, dus $p: y = a(x - 2)^2 + 10$.

$$A(-3, 0) \text{ op } p \text{ geeft } a \cdot (-5)^2 + 10 = 0$$

$$25a = -10$$

$$a = -\frac{2}{5}$$

$$\text{Dus } p: y = -\frac{2}{5}(x - 2)^2 + 10.$$

$$k: y = ax + b \text{ door } A(-3, 0) \text{ en } T(2, 10) \text{ geeft } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10 - 0}{2 - -3} = 2.$$

$$k: y = 2x + b \text{ door } A(-3, 0) \text{ geeft } b = 6, \text{ dus } k: y = 2x + 6 \text{ en } C(0, 6).$$

$$p \text{ door } A(-3, 0) \text{ en } T(2, 10), \text{ dus } B(7, 0).$$

$$l \text{ door } C(0, 6) \text{ en } B(7, 0), \text{ dus } \text{rc}_l = -\frac{6}{7}.$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 2 \text{ geeft } \alpha = 63,43\dots^\circ$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = -\frac{6}{7} \text{ geeft } \beta = -40,60\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 63,43\dots^\circ - -40,60\dots^\circ = 104,03\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(k, l) = 180^\circ - 104,03\dots^\circ \approx 76,0^\circ.$$

b $y = -\frac{2}{5}(x-2)^2 + 10$ geeft $y' = -\frac{4}{5}(x-2) \cdot 1 = -\frac{4}{5}x + \frac{8}{5}$
 $m \parallel k$, dus $rc_m = rc_k = 2$.

Los op $-\frac{4}{5}x + \frac{8}{5} = 2$

$$-\frac{4}{5}x = \frac{2}{5}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$x = -\frac{1}{2}$ geeft $y = -\frac{2}{5} \cdot (-2\frac{1}{2})^2 + 10 = 7\frac{1}{2}$, dus $D(-\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$.

44 a $f(x) = \frac{1}{4}x^3 \xrightarrow{\text{translatie } (1, 0)} y = \frac{1}{4}(x-1)^3 \xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} y = \frac{1}{4}(\frac{1}{3}x - 1)^3$
 $y = \frac{1}{4}(\frac{1}{3}x - 1)^3 \xrightarrow{\times 8 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} g(x) = 2(\frac{1}{3}x - 1)^3$

b $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ geeft $f'(x) = \frac{3}{4}x^2$
 $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = 3$
 $y = 3x + b$
 door $A(2, 2)$ $\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + b = 2 \\ b = -4 \end{array} \right.$

Dus $k: y = 3x - 4$.

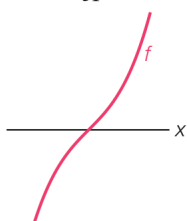
c $g(x) = 2(\frac{1}{3}x - 1)^3$ geeft $g'(x) = 6(\frac{1}{3}x - 1)^2 \cdot \frac{1}{3} = 2(\frac{1}{3}x - 1)^2$
 $l: y = ax + b$ met $a = g'(6) = 2(2 - 1)^2 = 2$
 $y = 2x + b$
 door $B(6, 2)$ $\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 6 + b = 2 \\ b = -10 \end{array} \right.$

Dus $l: y = 2x - 10$.

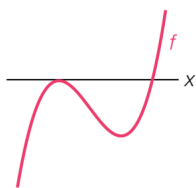
Bladzijde 111

45 a $A \cdot B = A \cdot C$ geeft $A = 0 \vee B = C$
 Met $C = 1$ krijg je $A \cdot B = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$.

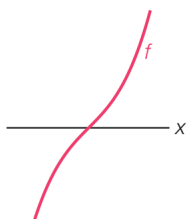
b één snijpunt



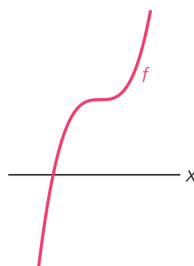
één raakpunt en één snijpunt



c geen top



geen top maar wel een punt met horizontale raaklijn



46 a $(4x - 1)^2 = (3x - 2)^2$
 $4x - 1 = 3x - 2 \vee 4x - 1 = -(3x - 2)$
 $x = -1 \vee 4x - 1 = -3x + 2$
 $x = -1 \vee 7x = 3$
 $x = -1 \vee x = \frac{3}{7}$

b $(x - 4)(x^2 - 25) = 0$
 $x - 4 = 0 \vee x^2 - 25 = 0$
 $x = 4 \vee x^2 = 25$
 $x = 4 \vee x = 5 \vee x = -5$

c $(3x - 5)^2 = 4x^2$
 $3x - 5 = 2x \vee 3x - 5 = -2x$
 $x = 5 \vee 5x = 5$
 $x = 5 \vee x = 1$

d $2x(x - 2) = 6(x - 2)$
 $x - 2 = 0 \vee 2x = 6$
 $x = 2 \vee x = 3$

e $(3x - 2)^3 = 3x - 2$
 $(3x - 2)(3x - 2)^2 = (3x - 2) \cdot 1$
 $3x - 2 = 0 \vee (3x - 2)^2 = 1$
 $3x - 2 = 0 \vee 3x - 2 = 1 \vee 3x - 2 = -1$
 $x = \frac{2}{3} \vee 3x = 3 \vee 3x = 1$
 $x = \frac{2}{3} \vee x = 1 \vee x = \frac{1}{3}$

f $x^3(x - 3) = 8(x - 3)$
 $x - 3 = 0 \vee x^3 = 8$
 $x = 3 \vee x = 2$

47 $f(0) = \frac{1}{6} \cdot -4 \cdot 4 = -2\frac{2}{3}$, dus $T(0, -2\frac{2}{3})$.
 M door T en $C(4, 0)$

$m: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - (-2\frac{2}{3})}{4 - 0} = \frac{2}{3}$, dus $m: y = \frac{2}{3}x - 2\frac{2}{3}$ oftewel $m: y = \frac{2}{3}(x - 4)$.

m snijden met de grafiek van f geeft $\frac{1}{6}(x - 4)(x^2 + 5x + 4) = \frac{2}{3}(x - 4)$

$$x - 4 = 0 \vee \frac{1}{6}(x^2 + 5x + 4) = \frac{2}{3}$$

$$x = 4 \vee x^2 + 5x + 4 = 4$$

$$x^2 + 5x = 0$$

$$x(x + 5) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -5, \text{ dus } x_U = -5.$$

$x = -5$ geeft $y = \frac{2}{3} \cdot -9 = -6$, dus $U(-5, -6)$.

48 a $f(x) = 0$ geeft $(x^2 - 6x - 7)(x - 2) = 0$
 $x^2 - 6x - 7 = 0 \vee x - 2 = 0$
 $(x + 1)(x - 7) = 0 \vee x = 2$
 $x = -1 \vee x = 7 \vee x = 2$

Dus $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$ en $C(7, 0)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 6x - 7)(x - 2) \\ &= x^3 - 2x^2 - 6x^2 + 12x - 7x + 14 \\ &= x^3 - 8x^2 + 5x + 14 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 5$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3x^2 - 16x + 5 = 0$$

$$D = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 196, \text{ dus } \sqrt{D} = 14$$

$$x = \frac{16 \pm 14}{6} = 5 \vee x = \frac{16 - 14}{6} = \frac{1}{3}$$

$f(5) = (5^2 - 6 \cdot 5 - 7)(5 - 2) = -36$, dus $Q(5, -36)$.

$$k: y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-36 - 0}{5 - -1} = -6$$

$k: y = -6x + b$ door $A(-1, 0)$ geeft $b = -6$, dus $k: y = -6x - 6$.

k snijden met de grafiek van f geeft $(x^2 - 6x - 7)(x - 2) = -6x - 6$

$$(x + 1)(x - 7)(x - 2) = -6(x + 1)$$

$$x + 1 = 0 \vee (x - 7)(x - 2) = -6$$

$$x = -1 \vee x^2 - 9x + 14 = -6$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$(x - 4)(x - 5) = 0$$

$$x = 4 \vee x = 5$$

$x = 4$ geeft $y = -6 \cdot 4 - 6 = -30$, dus $R(4, -30)$.

b $f(0) = -7 \cdot -2 = 14$, dus $D(0, 14)$.

$$l: y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14 - 0}{0 - 2} = -7$$

Dus $l: y = -7x + 14$.

$$\begin{aligned} l \text{ snijden met de grafiek van } f \text{ geeft } (x^2 - 6x - 7)(x - 2) &= -7x + 14 \\ (x + 1)(x - 7)(x - 2) &= -7(x - 2) \\ x - 2 &= 0 \vee (x + 1)(x - 7) = -7 \\ x = 2 \vee x^2 - 6x - 7 &= -7 \\ x^2 - 6x &= 0 \\ x(x - 6) &= 0 \\ x = 0 \vee x &= 6 \end{aligned}$$

$x = 6$ geeft $y = -7 \cdot 6 + 14 = -28$, dus $S(6, -28)$.

Bladzijde 112

49 a $f(x) = 0$ geeft $\frac{1}{2}x^3 - x^2 - 4x = 0$

$$\frac{1}{2}x(x^2 - 2x - 8) = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x + 2)(x - 4) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 4$$

Dus $A(-2, 0)$ en $B(4, 0)$.

$$x_C = \frac{-2 + 0}{2} = -1$$

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 2x - 4$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \text{ geeft } 1\frac{1}{2}x^2 - 2x - 4 = -\frac{1}{2}$$

$$1\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3\frac{1}{2} = 0$$

$$3x^2 - 4x - 7 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -7 = 100, \text{ dus } \sqrt{D} = 10$$

$$x = \frac{4 + 10}{6} = 2\frac{2}{3} \vee x = \frac{4 - 10}{6} = -1$$

Dus $x_P = -1$ en dus is $x_P = x_C$.

$$k: y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$f(-1) = 2\frac{1}{2}, \text{ dus } P(-1, 2\frac{1}{2}) \left. \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot -1 + b = 2\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + b = 2\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{array} \right\}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{2}x + 2$.

k snijden met de x -as geeft $-\frac{1}{2}x + 2 = 0$, dus $x = 4$.

Dus k gaat door B .

Alternatieve uitwerking

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 2x - 4$$

$$f'(x_C) = f'(-1) = 1\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot -1 - 4 = -\frac{1}{2}$$

Omdat $f'(x_P) = -\frac{1}{2}$ is $x_P = x_C$.

$$k: y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$f(-1) = 2\frac{1}{2}, \text{ dus } P(-1, 2\frac{1}{2}) \left. \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot -1 + b = 2\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + b = 2\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{array} \right\}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{2}x + 2$.

k snijden met de x -as geeft $-\frac{1}{2}x + 2 = 0$, dus $x = 4$.

Dus k gaat door B .

$$\text{b } x_Q = x_D = \frac{0+4}{2} = 2$$

$$l: y = ax + b \text{ met } a = f'(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 4 = -2$$

$$l: y = -2x + b$$

$$f(2) = -8, \text{ dus } Q(2, -8) \left. \begin{array}{l} -2 \cdot 2 + b = -8 \\ -4 + b = -8 \\ b = -4 \end{array} \right\}$$

$$\text{Dus } l: y = -2x - 4.$$

$$l \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } -2x + 4 = 0, \text{ dus } x = -2.$$

$$\text{Dus } l \text{ gaat door } A.$$

$$\text{50 a } y = x^3 \xrightarrow{\text{translatie } (1, 0)} y = (x-1)^3 \xrightarrow{\times 4 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 4(x-1)^3 \xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} f(x) = 4\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^3$$

$$\text{b } f(0) = 4 \cdot (-1)^3 = -4, \text{ dus } A(0, -4).$$

$$f(x) = 0 \text{ geeft } 4\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^3 = 0$$

$$\frac{1}{3}x - 1 = 0$$

$$x = 3, \text{ dus } B(3, 0).$$

$$k \text{ door } A(0, -4) \text{ en } B(3, 0), \text{ dus } rc_k = \frac{1}{3} \text{ en } k: y = \frac{1}{3}x - 4.$$

$$\text{Los op } 4\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^3 = \frac{1}{3}x - 4$$

$$4\left(\frac{1}{3}x - 1\right)\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2 = 4\left(\frac{1}{3}x - 1\right)$$

$$\frac{1}{3}x - 1 = 0 \vee \left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{3}x - 1 = 0 \vee \frac{1}{3}x - 1 = 1 \vee \frac{1}{3}x - 1 = -1$$

$$\frac{1}{3}x = 1 \vee \frac{1}{3}x = 2 \vee \frac{1}{3}x = 0$$

$$x = 3 \vee x = 6 \vee x = 0, \text{ dus } x_C = 6.$$

$$f'(x) = 4 \cdot 3 \left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = 4\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2$$

$$l: y = ax + b \text{ met } a = f'(6) = 4 \cdot 1^2 = 4$$

$$l: y = 4x + b \left. \begin{array}{l} 4 \cdot 6 + b = 4 \\ 24 + b = 4 \\ b = -20 \end{array} \right\}$$

$$\text{Dus } l: y = 4x - 20.$$

$$l \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } 4x - 20 = 0, \text{ dus } x = 4.$$

$$\text{Dus } x_D = 5.$$

$$\text{51 } f(x) = 0 \text{ geeft } \left(\frac{1}{3}x - 1\right)^3 - 4x + 12 = 0$$

$$\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^3 = 4x - 12$$

$$\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^3 = 12\left(\frac{1}{3}x - 1\right)$$

$$\frac{1}{3}x - 1 = 0 \vee \left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2 = 12$$

$$\frac{1}{3}x = 1 \vee \frac{1}{3}x - 1 = \sqrt{12} \vee \frac{1}{3}x - 1 = -\sqrt{12}$$

$$x = 3 \vee \frac{1}{3}x = 1 + \sqrt{12} \vee \frac{1}{3}x = 1 - \sqrt{12}$$

$$x = 3 \vee x = 3 + 3\sqrt{12} \vee x = 3 - 3\sqrt{12}$$

$$\text{Dus } B(3, 0).$$

$$f'(x) = 3\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2 \cdot \frac{1}{3} - 4 = \left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2 - 4$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2 = 4$$

$$\frac{1}{3}x - 1 = 2 \vee \frac{1}{3}x - 1 = -2$$

$$\frac{1}{3}x = 3 \vee \frac{1}{3}x = -1$$

$$x = 9 \vee x = -3$$

$$f(-3) = 16, \text{ dus } P(-3, 16).$$

$$f(9) = -16, \text{ dus } Q(9, -16).$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-16 - 16}{9 - -3} = -2\frac{2}{3}$$

$$k: y = -2\frac{2}{3}x + b \left\{ \begin{array}{l} -2\frac{2}{3} \cdot -3 + b = 16 \\ 8 + b = 16 \\ b = 8 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = -2\frac{2}{3}x + 8.$$

$$k \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } -2\frac{2}{3}x + 8 = 0$$

$$-2\frac{2}{3}x = -8$$

$$x = 3$$

Dus k gaat door B .

52 a $x^3 + px^2 + 9x = 0$

$$x(x^2 + px + 9) = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 + px + 9 = 0$$

$$\text{Van } x^2 + px + 9 = 0 \text{ is } D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = p^2 - 36.$$

één oplossing als $D < 0$

$$p^2 - 36 < 0$$

$$p^2 < 36$$

$$-6 < p < 6$$

b twee oplossingen als $D = 0$

$$p = 6 \vee p = -6$$

c drie oplossingen als $D > 0$

$$p < -6 \vee p > 6$$

Bladzijde 113

C6 De top van p is $T(1, 1)$, dus $p: y = a(x - 1)^2 + 1$.

$$p \text{ door } C(0, \frac{3}{4}), \text{ dus } a \cdot (-1)^2 + 1 = \frac{3}{4}$$

$$a + 1 = \frac{3}{4}$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Dus } p: y = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 + 1.$$

$$p \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } -\frac{1}{4}(x - 1)^2 + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 4$$

$$x - 1 = 2 \vee x - 1 = -2$$

$$x = 3 \vee x = -1$$

Dus $A(-1, 0)$ en $B(3, 0)$.

$$y = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 + 1 \text{ geeft } y' = -\frac{1}{2}(x - 1) \cdot 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = y'(-1) = 1 \text{ geeft } \alpha = 45^\circ$$

$$\text{rc}_l = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 1}{3 - 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = -26,56\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 45^\circ - -26,56\dots^\circ = 71,56\dots^\circ$$

Dus $\angle(k, l) \approx 71,6^\circ$.

C7 a $(x + 2)(x^2 - 1) = 0$

$$x + 2 = 0 \vee x^2 - 1 = 0$$

$$x = -2 \vee x^2 = 1$$

$$x = -2 \vee x = 1 \vee x = -1$$

b $(2x + 1)^2 = (x - 2)^2$

$$2x + 1 = x - 2 \vee 2x + 1 = -(x - 2)$$

$$x = -3 \vee 2x + 1 = -x + 2$$

$$x = -3 \vee 3x = 1$$

$$x = -3 \vee x = \frac{1}{3}$$

c $x^2(x - 5) = 9(x - 5)$

$$x - 5 = 0 \vee x^2 = 9$$

$$x = 5 \vee x = 3 \vee x = -3$$

d $x^2(x - 5) = (x - 5)$

$$x - 5 = 0 \vee x^2 = 1$$

$$x = 5 \vee x = 1 \vee x = -1$$

C8

$$f(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{3}(x+6)(x^2-x-2) = 0$$

$$x+6 = 0 \vee x^2-x-2 = 0$$

$$x = -6 \vee (x+1)(x-2) = 0$$

$$x = -6 \vee x = -1 \vee x = 2$$

Dus $C(2, 0)$.

$$f(x) = \frac{1}{3}(x+6)(x^2-x-2)$$

$$= \frac{1}{3}(x^3 - x^2 - 2x + 6x^2 - 6x - 12)$$

$$= \frac{1}{3}(x^3 + 5x^2 - 8x - 12)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 + 10x - 8)$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3x^2 + 10x - 8 = 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot -8 = 196, \text{ dus } \sqrt{D} = 14$$

$$x = \frac{-10 \pm 14}{6} = \frac{2}{3} \vee x = \frac{-10 - 14}{6} = -4$$

Dus $x_P = -4$.

$$f(-4) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 18 = 12, \text{ dus } P(-4, 12).$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 12}{2 - -4} = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } C(2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 2 + b = 0 \\ b = 4 \end{array}$$

Dus $k: y = -2x + 4$.

$$k \text{ snijden met de grafiek van } f \text{ geeft } \frac{1}{3}(x+6)(x^2-x-2) = -2x+4$$

$$\frac{1}{3}(x+6)(x+1)(x-2) = -2(x-2)$$

$$x-2 = 0 \vee \frac{1}{3}(x+6)(x+1) = -2$$

$$x = 2 \vee x^2 + 7x + 6 = -6$$

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$(x+3)(x+4) = 0$$

$$x = -3 \vee x = -4$$

Dus $x_D = -3$.

$$f(-3) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 10 = 10, \text{ dus } D(-3, 10).$$

11.4 Wortelfuncties

Bladzijde 114

53 a $4x - 5 = 0$

$$4x = 5$$

$$x = 1\frac{1}{4}$$

$$f(1\frac{1}{4}) = -3 + 2 \cdot 0 = -3, \text{ dus } A(1\frac{1}{4}, -3).$$

b $D_f = [1\frac{1}{4}, \rightarrow)$ en $B_f = [-3, \rightarrow)$

Bladzijde 115

54 a $f(5) = 4 - 2\sqrt{9} = -2$

$$x < 5 \text{ geeft } -2 < f(x) \leq 4$$

b $f(x) = 0 \text{ geeft } 4 - 2\sqrt{3x-6} = 0$

$$2\sqrt{3x-6} = 4$$

$$\sqrt{3x-6} = 2$$

$$3x - 6 = 4$$

$$3x = 10$$

$$x = 3\frac{1}{3}$$

$$f(x) > 0 \text{ geeft } 2 \leq x < 3\frac{1}{3}$$

55 Los op $6 - 4x = 0$

$$4x = 6$$

$$x = 1\frac{1}{2}, \text{ dus het randpunt is } (1\frac{1}{2}, 3).$$

$$l \parallel k, \text{ dus } rc_l = rc_k = \frac{1}{2}.$$

$$l: y = \frac{1}{2}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} + b = 3 \\ \frac{3}{4} + b = 3 \\ b = 2\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } l: y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}.$$

$$x = -2\frac{1}{2} \text{ invullen geeft } y = \frac{1}{2} \cdot -2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = 1, \text{ dus het punt } (-2\frac{1}{2}, 1) \text{ ligt op } l.$$

$$f(-2\frac{1}{2}) = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{6 - 4 \cdot -2\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{16} = 3 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 1, \text{ dus het punt } (-2\frac{1}{2}, 1) \text{ ligt op de grafiek van } f.$$

$$\text{Dus } l \text{ snijdt de grafiek van } f \text{ in het punt } (-2\frac{1}{2}, 1).$$

Bladzijde 116**56 a** $y = 4 + 2\sqrt{x-5}$

$$2\sqrt{x-5} = y - 4$$

$$\sqrt{x-5} = \frac{1}{2}y - 2$$

$$x - 5 = (\frac{1}{2}y - 2)^2$$

$$x - 5 = \frac{1}{4}y^2 - 2y + 4$$

$$x = \frac{1}{4}y^2 - 2y + 9$$

b $y = 3 - \sqrt{2x+4}$

$$\sqrt{2x+4} = 3 - y$$

$$2x + 4 = (3 - y)^2$$

$$2x + 4 = 9 - 6y + y^2$$

$$2x = y^2 - 6y + 5$$

$$x = \frac{1}{2}y^2 - 3y + 2\frac{1}{2}$$

c $y = 5 - \frac{1}{3}\sqrt{x-2}$

$$\frac{1}{3}\sqrt{x-2} = 5 - y$$

$$\sqrt{x-2} = 15 - 3y$$

$$x - 2 = (15 - 3y)^2$$

$$x - 2 = 225 - 90y + 9y^2$$

$$x = 9y^2 - 90y + 227$$

57 a $5 - x = 0$ geeft $x = 5$

$$\text{Dus het randpunt is } (5, 6).$$

$$D_f = \langle \leftarrow, 5 \rangle \text{ en } B_f = \langle \leftarrow, 6 \rangle$$

b $f(x) = 0$ geeft $6 - 2\sqrt{5-x} = 0$

$$2\sqrt{5-x} = 6$$

$$\sqrt{5-x} = 3$$

$$5 - x = 9$$

$$x = -4, \text{ dus } A(-4, 0).$$

$$f(x) = 6 - 2\sqrt{5-x} = 6 - 2(5-x)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = -(5-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -1 = \frac{1}{(5-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5-x}}$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'(-4) = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot -4 + b = 0 \\ b = 1\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } f'(x) = \text{rc}_l \text{ geeft } \frac{1}{\sqrt{5-x}} &= \frac{1}{2} \\
 \sqrt{5-x} &= 2 \\
 5-x &= 4 \\
 x &= 1 \\
 \left. \begin{aligned} l: y &= \frac{1}{2}x + b \\ f(1) &= 2, \text{ dus } B(1, 2) \end{aligned} \right\} \frac{1}{2} \cdot 1 + b &= 2 \\
 b &= 1\frac{1}{2} \\
 \text{Dus } l: y &= \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 58 \quad \frac{1}{2}x + 4 &= 0 \\
 \frac{1}{2}x &= -4
 \end{aligned}$$

$x = -8$, dus het randpunt is $A(-8, -1)$.

$f(0) = -1 + \sqrt{4} = 1$, dus $B(0, 1)$.

$$f(x) = -1 + \sqrt{\frac{1}{2}x + 4} = -1 + \left(\frac{1}{2}x + 4\right)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x + 4\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4\left(\frac{1}{2}x + 4\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}x + 4}}$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'(0) = \frac{1}{4\sqrt{4}} = \frac{1}{8}$$

$$y = \frac{1}{8}x + b \text{ door } B(0, 1), \text{ dus } k: y = \frac{1}{8}x + 1.$$

$$k \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } \frac{1}{8}x + 1 = 0$$

$$\frac{1}{8}x = -1$$

$$x = -8, \text{ dus } C(-8, 0).$$

$x_C = x_A = -8$, dus C ligt recht boven A .

$$59 \quad \text{a } f(x) = 2\sqrt{x-4} = 2(x-4)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = (x-4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{(x-4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) = \text{rc}_k \text{ geeft } \frac{1}{\sqrt{x-4}} &= 1 \\
 \sqrt{x-4} &= 1 \\
 x-4 &= 1 \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} k: y &= x + b \\ f(5) &= 2, \text{ dus door } (5, 2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 5 + b &= 2 \\ b &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } f(x) &= ax \text{ geeft } 2\sqrt{x-4} = ax \\
 4(x-4) &= a^2x^2 \\
 4x-16 &= a^2x^2 \\
 a^2x^2 - 4x + 16 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Voor raken geldt } D = 0, \text{ dus } (-4)^2 - 4 \cdot a^2 \cdot 16 = 0$$

$$16 - 64a^2 = 0$$

$$64a^2 = 16$$

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$$a^2 = \frac{1}{4} \text{ geeft } \frac{1}{4}x^2 - 4x + 16 = 0$$

$$x^2 - 16x + 64 = 0$$

$$(x-8)^2 = 0$$

$$x = 8$$

$$f(8) = 2\sqrt{4} = 4, \text{ dus } A(8, 4).$$

60 a $4x + 6 = 0$

$$4x = -6$$

$x = -1\frac{1}{2}$, dus het randpunt is $A(-1\frac{1}{2}, 6)$.

$$f(x) = 0 \text{ geeft } 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{4x+6} = 0$$

$$1\frac{1}{2}\sqrt{4x+6} = 6$$

$$\sqrt{4x+6} = 4$$

$$4x + 6 = 16$$

$$4x = 10$$

$$x = 2\frac{1}{2}, \text{ dus } B(2\frac{1}{2}, 0).$$

$$f(x) = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{4x+6} = 6 - 1\frac{1}{2}(4x+6)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = -\frac{3}{4}(4x+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{-3}{(4x+6)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-3}{\sqrt{4x+6}}$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'(2\frac{1}{2}) = \frac{-3}{\sqrt{16}} = -\frac{3}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } B(2\frac{1}{2}, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{2} + b = 0 \\ b = 1\frac{7}{8} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{7}{8}.$$

$$x = -1\frac{1}{2} \text{ geeft } y = -\frac{3}{4} \cdot -1\frac{1}{2} + 1\frac{7}{8} = 3, \text{ dus } (-1\frac{1}{2}, 3) \text{ op } k.$$

$$c = y_A - 3 = 6 - 3 = 3$$

b De afstand tussen k en l is kleiner dan de waarde van c .

Bladzijde 117

61 a $f(x) = a + b\sqrt{2x+c}$ geeft randpunt $(-\frac{1}{2}c, a)$

Dus $a = 2$ en $-\frac{1}{2}c = 2\frac{1}{2}$ oftewel $c = -5$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2 + b\sqrt{2x-5} \\ \text{door } B(3, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 + b\sqrt{6-5} = -1 \\ b = -3 \end{array}$$

b $f(x) = 3 - 1\frac{1}{2}\sqrt{2x+3}$

$$f(x) = 0 \text{ geeft } 3 - 1\frac{1}{2}\sqrt{2x+3} = 0$$

$$1\frac{1}{2}\sqrt{2x+3} = 3$$

$$\sqrt{2x+3} = 2$$

$$2x + 3 = 4$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Dus het snijpunt met de x -as is $(\frac{1}{2}, 0)$.

$$f(x) = 3 - 1\frac{1}{2}\sqrt{2x+3} = 3 - 1\frac{1}{2}(2x+3)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = -\frac{3}{4}(2x+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{-3}{2(2x+3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-3}{2\sqrt{2x+3}}$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'(\frac{1}{2}) = \frac{-3}{2\sqrt{4}} = -\frac{3}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } (\frac{1}{2}, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + b = 0 \\ b = \frac{3}{8} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{8}.$$

Het randpunt is $(-1\frac{1}{2}, 3)$.

$$\begin{aligned} k \text{ en } l: y = 3 \text{ snijden geeft } -\frac{3}{4}x + \frac{3}{8} &= 3 \\ -6x + 3 &= 24 \\ -6x &= 21 \\ x &= -3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$k \text{ en } m: x = -1\frac{1}{2} \text{ snijden geeft } y = -\frac{3}{4} \cdot -1\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = 1\frac{1}{2}.$$

$$\text{De oppervlakte is } \frac{1}{2} \cdot (-1\frac{1}{2} - -3\frac{1}{2}) \cdot (3 - 1\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

62 a $y = 1 + \sqrt{-x^2 + 8x + 9}$

$$y - 1 = \sqrt{-x^2 + 8x + 9}$$

kwadrateren geeft

$$(y - 1)^2 = -x^2 + 8x + 9$$

$$(y - 1)^2 + x^2 - 8x = 9$$

$$(y - 1)^2 + (x - 4)^2 - 16 = 9$$

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

$$y - 1 \geq 0$$

} De grafiek van $f(x) = 1 + \sqrt{-x^2 + 8x + 9}$ is een halve cirkel.

b $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

kwadrateren geeft

$$y^2 = x^2 - 6x + 8$$

$$y^2 = (x - 3)^2 - 9 + 8$$

$$(x - 3)^2 - y^2 = 1$$

Dus de grafiek van $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ is geen halve cirkel.

$$y = \sqrt{-x^2 - 6x + 8}$$

kwadrateren geeft

$$y^2 = -x^2 - 6x + 8$$

$$x^2 + 6x + y^2 = 8$$

$$(x + 3)^2 - 9 + y^2 = 8$$

$$(x + 3)^2 + y^2 = 17$$

$$y \geq 0$$

} De grafiek van $h(x) = \sqrt{-x^2 - 6x + 8}$ is een halve cirkel.

C9 a $4 - 2x = 0$

$$2x = 4$$

$x = 2$, dus het randpunt is $(2, 5)$.

$$D_f = \langle \leftarrow, 2] \text{ en } B_f = \langle \leftarrow, 5]$$

b $y = 5 - 3\sqrt{4 - 2x}$

$$3\sqrt{4 - 2x} = 5 - y$$

$$9(4 - 2x) = (5 - y)^2$$

$$36 - 18x = 25 - 10y + y^2$$

$$-18x = y^2 - 10y - 11$$

$$x = -\frac{1}{18}y^2 + \frac{5}{9}y + \frac{11}{18}$$

c $f(x) = 5 - 3\sqrt{4 - 2x} = 5 - 3(4 - 2x)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = -1\frac{1}{2}(4 - 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2 = \frac{3}{(4 - 2x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{4 - 2x}}$

$$f'(x) = \text{rc}_k \text{ geeft } \frac{3}{\sqrt{4 - 2x}} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{4 - 2x} = 4$$

$$4 - 2x = 16$$

$$-2x = 12$$

$$x = -6$$

$$k: y = \frac{3}{4}x + b$$

$$f(-6) = -7, \text{ dus } (-6, -7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot -6 + b = -7 \\ -4\frac{1}{2} + b = -7 \end{array} \right.$$

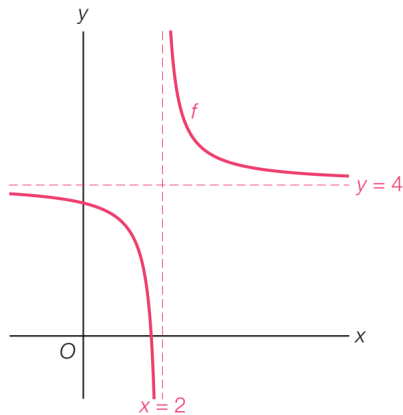
$$b = -2\frac{1}{2}$$

Dus $k: y = \frac{3}{4}x - 2\frac{1}{2}$.

11.5 Gebroken functies

Bladzijde 118

- 63 a** De grafiek van $f(x) = 4 + \frac{1}{x-2}$ ontstaat uit de standaardgrafiek $y = \frac{1}{x}$ door de translatie $(2, 4)$.
- b** horizontale asymptoot $y = 4$
verticale asymptoot $x = 2$



c
$$f(x) = 4 + \frac{1}{x-2} = \frac{4(x-2)}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{4x-8+1}{x-2} = \frac{4x-7}{x-2}$$

Bladzijde 120

64 $f'(x) = \text{rc}_l$ geeft $\frac{-6}{(2x-4)^2} = -\frac{2}{3}$
 $-2(2x-4)^2 = -18$
 $(2x-4)^2 = 9$
 $2x-4 = 3 \vee 2x-4 = -3$
 $2x = 7 \vee 2x = 1$
 $x = 3\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$, dus $x_C = \frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{2}{3}x + b \\ f(\frac{1}{2}) = -2, \text{ dus } C(\frac{1}{2}, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + b = -2 \\ b = -1\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$.

- 65 a** noemer = 0 geeft $4 - x = 0$, dus $x = 4$.
De verticale asymptoot is de lijn $x = 4$.
Voor grote x is $f(x) \approx \frac{3x}{-x} = -3$.
De horizontale asymptoot is de lijn $y = -3$.
- b** noemer = 0 geeft $2x + 5 = 0$, dus $x = -2\frac{1}{2}$.
De verticale asymptoot is de lijn $x = -2\frac{1}{2}$.
Voor grote x is $g(x) \approx \frac{2x}{2x} = 1$.
De horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.
- c** noemer = 0 geeft $4x - 1 = 0$, dus $x = \frac{1}{4}$.
De verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{1}{4}$.
Voor grote x is $h(x) \approx 2 - \frac{x}{4x} = 2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$.
De horizontale asymptoot is de lijn $y = 1\frac{3}{4}$.

66 a $y = \frac{3x}{4-x}$

$$\begin{aligned} y(4-x) &= 3x \\ 4y - xy &= 3x \\ xy + 3x &= 4y \\ x(y+3) &= 4y \\ x &= \frac{4y}{y+3} \end{aligned}$$

b $y = \frac{2x-3}{2x+5}$

$$\begin{aligned} y(2x+5) &= 2x-3 \\ 2xy+5y &= 2x-3 \\ 2xy-2x &= -5y-3 \\ x(2y-2) &= -5y-3 \\ x &= \frac{-5y-3}{2y-2} \end{aligned}$$

c $y = 2 - \frac{x+3}{4x-1}$

$$\begin{aligned} y(4x-1) &= 2(4x-1) - (x+3) \\ 4xy - y &= 8x - 2 - x - 3 \\ 4xy - 7x &= y - 5 \\ x(4y-7) &= y-5 \\ x &= \frac{y-5}{4y-7} \end{aligned}$$

67 a $\log(y) = \frac{x}{x+3}$

$$\begin{aligned} \log(y) \cdot (x+3) &= x \\ x \cdot \log(y) + 3 \cdot \log(y) &= x \\ x \cdot \log(y) - x &= -3 \cdot \log(y) \\ x(\log(y) - 1) &= -3 \cdot \log(y) \\ x &= \frac{-3 \cdot \log(y)}{\log(y) - 1} \end{aligned}$$

b $2^y = 3 + \frac{1}{5-x}$

$$\begin{aligned} 2^y(5-x) &= 3(5-x) + 1 \\ 5 \cdot 2^y - x \cdot 2^y &= 15 - 3x + 1 \\ 3x - x \cdot 2^y &= 16 - 5 \cdot 2^y \\ x(3 - 2^y) &= 16 - 5 \cdot 2^y \\ x &= \frac{16 - 5 \cdot 2^y}{3 - 2^y} \end{aligned}$$

c $\sin(y) = \frac{2\pi}{2x+1}$

$$\begin{aligned} \sin(y) \cdot (2x+1) &= 2\pi \\ 2x \sin(y) + \sin(y) &= 2\pi \\ 2x \sin(y) &= 2\pi - \sin(y) \\ x &= \frac{2\pi - \sin(y)}{2 \sin(y)} \end{aligned}$$

68 a Voor grote t is $T \approx \frac{80t}{4t} = 20$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $T = 20$.

Op den duur daalt de temperatuur tot vrijwel 20°C .

b $T = \frac{80t+240}{4t+3}$

$$T(4t+3) = 80t+240$$

$$4tT + 3T = 80t + 240$$

$$4tT - 80t = 240 - 3T$$

$$t(4T - 80) = 240 - 3T$$

$$t = \frac{240 - 3T}{4T - 80}$$

$$T = 25 \text{ geeft } t = \frac{240 - 75}{100 - 80} = 8,25$$

Dus na $8,25 \cdot 60 = 495$ minuten.

c $T = 20 + \frac{180}{4t+3} = \frac{20(4t+3)}{4t+3} + \frac{180}{4t+3} = \frac{80t+60+180}{4t+3} = \frac{80t+240}{4t+3}$

$$T = 20 + 180(4t+3)^{-1} \text{ geeft } T' = -180(4t+3)^{-2} \cdot 4 = \frac{-720}{(4t+3)^2}$$

$$T'(3) = \frac{-720}{(12+3)^2} = -3,2$$

Betekenis: na 3 uur neemt de temperatuur met $3,2^\circ\text{C}$ per uur af.

Bladzijde 121

69 $f(x) = 0$ geeft $\frac{10}{2x-1} + 5 = 0$

$$\frac{10}{2x-1} = -5$$

$$2x-1 = -2$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Dus $A(-\frac{1}{2}, 0)$.

$$f(x) = \frac{10}{2x-1} + 5 = 10(2x-1)^{-1} + 5 \text{ geeft } f'(x) = -10(2x-1)^{-2} \cdot 2 = \frac{-20}{(2x-1)^2}$$

$$rc_k = f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-20}{(-1-1)^2} = -5$$

$$l \perp k \text{ geeft } rc_l = \frac{1}{5}$$

$$l: y = \frac{1}{5}x + b \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } A(-\frac{1}{2}, 0) \end{array} \right\} \frac{1}{5} \cdot -\frac{1}{2} + b = 0$$

$$b = \frac{1}{10}$$

$$\text{Dus } l: y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{10}.$$

$$l \text{ snijden met de grafiek van } f \text{ geeft } \frac{1}{5}x + \frac{1}{10} = \frac{10}{2x-1} + 5$$

$$2x + 1 = \frac{100}{2x-1} + 50$$

$$(2x+1)(2x-1) = 100 + 50(2x-1)$$

$$4x^2 - 1 = 100 + 100x - 50$$

$$4x^2 - 100x - 51 = 0$$

$$D = (-100)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -51 = 10816, \text{ dus } \sqrt{D} = 104$$

$$x = \frac{100 + 104}{8} = 25\frac{1}{2} \vee x = \frac{100 - 104}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$x = 25\frac{1}{2} \text{ geeft } y = \frac{1}{5} \cdot 25\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 5\frac{1}{5}, \text{ dus } B(25\frac{1}{5}, 5\frac{1}{5}).$$

70 a noemer = 0 geeft $2x - 1 = 0$, dus $x = \frac{1}{2}$.

De verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{1}{2}$.

Voor grote x is $\frac{6}{2x-1} \approx 0$, dus $f(x) \approx 2 - 0 = 2$.

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.

b $y = 2 - \frac{6}{2x-1}$

$$y(2x-1) = 2(2x-1) - 6$$

$$2xy - y = 4x - 2 - 6$$

$$2xy - 4x = y - 8$$

$$x(2y-4) = y-8$$

$$x = \frac{y-8}{2y-4}$$

c $f(x) = 0$ geeft $2 - \frac{6}{2x-1} = 0$

$$\frac{6}{2x-1} = 2$$

$$2x-1 = 3$$

$$2x = 4$$

$$x = 2, \text{ dus } A(2, 0).$$

$$f(x) = 2 - \frac{6}{2x-1} = 2 - 6(2x-1)^{-1} \text{ geeft } f'(x) = 6(2x-1)^{-2} \cdot 2 = \frac{12}{(2x-1)^2}$$

$$rc_l = rc_k = f'(2) = \frac{12}{(4-1)^2} = 1\frac{1}{3}$$

$$f'(x) = rc_l \text{ geeft } \frac{12}{(2x-1)^2} = \frac{4}{3}$$

$$4(2x-1)^2 = 36$$

$$(2x-1)^2 = 9$$

$$2x-1 = 3 \vee 2x-1 = -3$$

$$2x = 4 \vee 2x = -2$$

$$x = 2 \vee x = -1, \text{ dus } x_B = -1.$$

$$f(-1) = 2 - \frac{6}{-3} = 4, \text{ dus } B(-1, 4).$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-0)^2} = 5$$

71 a $f(x) = 0$ geeft $\frac{6}{\sqrt{2x+1}} - 3 = 0$
 $\frac{6}{\sqrt{2x+1}} = 3$
 $\sqrt{2x+1} = 2$
 $2x+1 = 4$
 $2x = 3$
 $x = 1\frac{1}{2}$, dus $A(1\frac{1}{2}, 0)$.

$f(0) = \frac{6}{\sqrt{1}} - 3 = 3$, dus $B(0, 3)$.
 $g(0) = 3$ en $g(0) = c$, dus $c = 3$.

b $f(x) = \frac{6}{\sqrt{2x+1}} - 3 = 6(2x+1)^{-\frac{1}{2}} - 3$ geeft $f'(x) = -3(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{-6}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-6}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

helling in B is $f'(0) = \frac{-6}{1 \cdot \sqrt{1}} = -6$

$g(x) = ax^2 + bx + 3$ geeft $g'(x) = 2ax + b$

$g'(0) = 0 + b = b$

$f'(0) = g'(0)$ geeft $b = -6$

c $g(x) = ax^2 - 6x + 3$

$g(1\frac{1}{2}) = 0$ geeft $a \cdot (1\frac{1}{2})^2 - 6 \cdot 1\frac{1}{2} + 3 = 0$

$2\frac{1}{4}a = 6$

$a = 2\frac{2}{3}$

72 Grafiek van h door $B(0, 3)$, dus $r = 3$.

Grafiek van h door $A(1\frac{1}{2}, 0)$ geeft $2\frac{1}{4}p + 1\frac{1}{2}q + 3 = 0$.

helling in A is $f'(1\frac{1}{2}) = \frac{-6}{4\sqrt{4}} = -\frac{3}{4}$

$h(x) = px^2 + qx + 3$ geeft $h'(x) = 2px + q$

$h'(1\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$ geeft $3p + q = -\frac{3}{4}$

$\begin{cases} 2\frac{1}{4}p + 1\frac{1}{2}q = -3 \\ 3p + q = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 4\frac{1}{2}p + 3q = -6 \\ 9p + 3q = -2\frac{1}{4} \end{cases}$

$-4\frac{1}{2}p = -3\frac{3}{4}$

$p = \frac{5}{6}$

$p = \frac{5}{6}$ geeft $3 \cdot \frac{5}{6} + q = -\frac{3}{4}$

$2\frac{1}{2} + q = -\frac{3}{4}$

$q = -3\frac{1}{4}$

Dus $h(x) = \frac{5}{6}x^2 - 3\frac{1}{4}x + 3$.

Bladzijde 122

73 a $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 18}{2x} = \frac{2x^2}{2x} - \frac{3x}{2x} + \frac{18}{2x} = x - \frac{3}{2} + \frac{9}{x}$

b $f(x) = x - \frac{3}{2} + 9x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 9x^{-2} = 1 - \frac{9}{x^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{9}{x^2} = 0$

$\frac{9}{x^2} = 1$

$x^2 = 9$

$x = 3 \vee x = -3$

max. is $f(-3) = -7\frac{1}{2}$ en min. is $f(3) = 4\frac{1}{2}$

74 a $f'(x) = -1\frac{1}{2}$ geeft $\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = -1\frac{1}{2}$

$$\frac{2}{x^2} = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

$$f(1) = 3\frac{1}{4} \text{ en } f(-1) = -1\frac{3}{4}$$

Dus de raakpunten zijn $A(-1, -1\frac{3}{4})$ en $B(1, 3\frac{1}{4})$.

b $\frac{2x^2 + 3x + 8}{4x} = \frac{1}{2}x$ geeft $2x^2 + 3x + 8 = 2x^2$
 $3x = -8$
 $x = -2\frac{2}{3}$

$$x = -2\frac{2}{3} \text{ geeft } y = \frac{1}{2} \cdot -2\frac{2}{3} = -1\frac{1}{3}, \text{ dus het punt is } (-2\frac{2}{3}, -1\frac{1}{3}).$$

c $\frac{2x^2 + 3x + 8}{4x} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ geeft $2x^2 + 3x + 8 = 2x^2 + 3x$
 $8 = 0$

geen oplossing

Dus de lijn $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ snijdt de grafiek van f niet.

Bladzijde 123

75 a $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = x - 4 + \frac{4}{x} = x - 4 + 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 1 - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\frac{4}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

$$f(2) = 0, \text{ dus top } (2, 0).$$

$$f(-2) = -8, \text{ dus top } (-2, -8).$$

b $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - -8}{2 - -2} = 2$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } (2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + b = 0 \\ b = -4 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 2x - 4.$$

De lijn m door O loodrecht op k heeft vergelijking $y = -\frac{1}{2}x$.

$$m \text{ snijden met } k \text{ geeft } -\frac{1}{2}x = 2x - 4$$

$$-2\frac{1}{2}x = -4$$

$$x = 1\frac{3}{5}$$

$$x = 1\frac{3}{5} \text{ geeft } y = -\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{5} = -\frac{4}{5}, \text{ dus het snijpunt is } S(1\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}).$$

$$d(O, k) = d(O, S) = \sqrt{(1\frac{3}{5})^2 + (-\frac{4}{5})^2} = \sqrt{3\frac{1}{5}}$$

c $f(x) = x$ geeft $\frac{x^2 - 4x + 4}{x} = x$
 $x^2 - 4x + 4 = x^2$
 $-4x = -4$
 $x = 1$

$$\text{Dus } A(1, 1).$$

$$l: y = ax + b \text{ met } a = f'(1) = 1 - \frac{4}{1^2} = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } A(1, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 1 + b = 1 \\ b = 4 \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = -3x + 4.$$

$$y = 0 \text{ geeft } -3x + 4 = 0$$

$$-3x = -4$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } B(1\frac{1}{3}, 0).$$

d $f'(x) = \frac{3}{4}$ geeft $1 - \frac{4}{x^2} = \frac{3}{4}$

$$\frac{4}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

$f(4) = 1$, dus raakpunt $(4, 1)$.

$f(-4) = -9$, dus raakpunt $(-4, -9)$.

e $f(x) - g(x) < \frac{1}{10}$

$$x - 4 + \frac{4}{x} - (x - 4) < \frac{1}{10}$$

$$\frac{4}{x} < \frac{1}{40}$$

$$x > 40$$

76 a $p = f(1\frac{1}{2}) = \frac{25}{2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9}$

b $f(x) = \frac{25}{2x^2} = 12\frac{1}{2}x^{-2}$ geeft $f'(x) = -25x^{-3} = -\frac{25}{x^3}$

$k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = -\frac{25}{8}$

$$\left. \begin{array}{l} y = -3\frac{1}{8}x + b \\ f(2) = 3\frac{1}{8}, \text{ dus } C(2, 3\frac{1}{8}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3\frac{1}{8} \cdot 2 + b = 3\frac{1}{8} \\ b = 9\frac{3}{8} \end{array}$$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, 9\frac{3}{8})$.

c $f'(x) = \frac{1}{5}$ geeft $-\frac{25}{x^3} = \frac{1}{5}$
 $x^3 = -125$
 $x = -5$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = \frac{1}{5}x + b \\ f(-5) = \frac{1}{2}, \text{ dus door } (-5, \frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{5} \cdot -5 + b = \frac{1}{2} \\ b = 1\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $l: y = \frac{1}{5}x + 1\frac{1}{2}$.

$y = 0$ geeft $\frac{1}{5}x + 1\frac{1}{2} = 0$

$$\frac{1}{5}x = -1\frac{1}{2}$$

$$x = -7\frac{1}{2}$$

Dus het snijpunt met de x -as is $(-7\frac{1}{2}, 0)$.

d $f(x) = 8$ geeft $\frac{25}{2x^2} = 8$

$$16x^2 = 25$$

$$x^2 = \frac{25}{16}$$

$$x = \frac{5}{4} \vee x = -\frac{5}{4}, \text{ dus } x_P = \frac{5}{4}.$$

$$\text{omtrek} = 2 \cdot \frac{5}{4} + 2 \cdot 8 = 18\frac{1}{2}$$

e $P\left(p, \frac{25}{2p^2}\right)$ op de grafiek van f .

$$\text{omtrek } O = 2p + 2 \cdot \frac{25}{2p^2} = 2p + 25p^{-2}$$

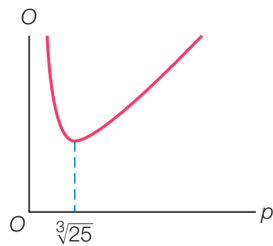
$$\frac{dO}{dp} = 2 - 50p^{-3} = 2 - \frac{50}{p^3}$$

$$\frac{dO}{dp} = 0 \text{ geeft } 2 - \frac{50}{p^3} = 0$$

$$2 = \frac{50}{p^3}$$

$$p^3 = 25$$

$$p = \sqrt[3]{25}$$



De omtrek is minimaal voor $p = \sqrt[3]{25} \approx 2,92$.

$f(\sqrt[3]{25}) \approx 1,46$, dus $P(2,92; 1,46)$.

Bladzijde 124

77

a $f(x) = \frac{4}{5}$ geeft $\frac{2}{3 \sin(x) + 4} = \frac{4}{5}$

$$12 \sin(x) + 16 = 10$$

$$12 \sin(x) = -6$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [-2\pi, 2\pi] \text{ geeft } x = -\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi \vee x = -\frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi$$

$$f(x) > \frac{4}{5} \text{ geeft } -\frac{5}{6}\pi < x < -\frac{1}{6}\pi \vee 1\frac{1}{6}\pi < x < 1\frac{5}{6}\pi$$

b $\sin(x)$ is maximaal 1 voor $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$, dus

$$3 \sin(x) + 4 \text{ is maximaal } 7 \text{ voor } x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi.$$

$$\text{Dus } f(x) \text{ is minimaal } \frac{2}{7} \text{ voor } x = -1\frac{1}{2}\pi \text{ en } x = \frac{1}{2}\pi.$$

c $\sin(x)$ is minimaal -1 voor $x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$, dus

$$3 \sin(x) + 4 \text{ is minimaal } 1 \text{ voor } x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi.$$

$$\text{Dus } f(x) \text{ is maximaal } 2 \text{ voor } x = -\frac{1}{2}\pi \text{ en } x = 1\frac{1}{2}\pi.$$

78

a $f(x) = 0$ geeft $-x^2 + 10x - 16 = 0$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x - 2)(x - 8) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 8, \text{ dus } A(2, 0) \text{ en } B(8, 0).$$

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x} = -x + 10 - 16x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = -1 + 16x^{-2} = -1 + \frac{16}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } -1 + \frac{16}{x^2} = 0$$

$$\frac{16}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4, \text{ dus } x_T = 4.$$

$$f(4) = \frac{-16 + 40 - 16}{4} = 2, \text{ dus } T(4, 2).$$

$$O(\triangle ABT) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot y_T = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6$$

b $P(4, 2)$, dus $OQ = 4$ en $O(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$.

c $O = \frac{1}{2} \cdot p \cdot \frac{-p^2 + 10p - 16}{p} = -\frac{1}{2}p^2 + 5p - 8$ geeft $\frac{dO}{dp} = -p + 5$

$\frac{dO}{dp} = 0$ geeft $-p + 5 = 0$, dus $p = 5$.

$f(5) = \frac{-25 + 50 - 16}{5} = 1\frac{4}{5}$, dus $P(5, 1\frac{4}{5})$.

d $AQ = p - 2$, dus $O(\triangle APQ) = \frac{1}{2} \cdot (p - 2) \cdot \frac{-p^2 + 10p - 16}{p}$

$(p - 2)(-p^2 + 10p - 16) = -p^3 + 10p^2 - 16p + 2p^2 - 20p + 32 = -p^3 + 12p^2 - 36p + 32$

$O = \frac{-p^3 + 12p^2 - 36p + 32}{2p} = -\frac{1}{2}p^2 + 6p - 18 + 16p^{-1}$ geeft $\frac{dO}{dp} = -p + 6 - 16p^{-2} = -p + 6 - \frac{16}{p^2}$

$\frac{dO}{dp} = 0$ geeft $-p + 6 - \frac{16}{p^2} = 0$

Invoeren van de formule en gebruiken van de optie nulpunt geeft $p = 5,4641\dots$

Dus voor $p \approx 5,464$ is de oppervlakte van driehoek APQ maximaal.

Bladzijde 125

C10 a noemer = 0 geeft $3 - 2x = 0$, dus $x = 1\frac{1}{2}$.

De verticale asymptoot is de lijn $x = 1\frac{1}{2}$.

Voor grote x is $f(x) \approx \frac{4x}{-2x} = -2$.

De horizontale asymptoot is de lijn $y = -2$.

b noemer = 0 geeft $3x - 2 = 0$, dus $x = \frac{2}{3}$.

De verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{2}{3}$.

Voor grote x is $\frac{x}{3x - 2} \approx \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$, dus $g(x) \approx 3 - \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$.

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2\frac{2}{3}$.

C11 a $y = \frac{4x - 1}{3 - 2x}$
 $y(3 - 2x) = 4x - 1$
 $3y - 2xy = 4x - 1$
 $-2xy - 4x = -3y - 1$
 $x(-2y - 4) = -3y - 1$
 $x = \frac{-3y - 1}{-2y - 4}$ oftewel $x = \frac{3y + 1}{2y + 4}$

b $y = 3 - \frac{x}{3x - 2}$
 $y(3x - 2) = 3(3x - 2) - x$
 $3xy - 2y = 9x - 6 - x$
 $3xy - 8x = 2y - 6$
 $x(3y - 8) = 2y - 6$
 $x = \frac{2y - 6}{3y - 8}$

C12 $f(x) = 0$ geeft $2 - \frac{8}{2x+1} = 0$

$$\frac{8}{2x+1} = 2$$

$$2x+1 = 4$$

$$2x = 3$$

$$x = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } A(1\frac{1}{2}, 0).$$

$$f(x) = 2 - \frac{8}{2x+1} = 2 - 8(2x+1)^{-1} \text{ geeft } f'(x) = 8(2x+1)^{-2} \cdot 2 = \frac{16}{(2x+1)^2}$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'(1\frac{1}{2}) = \frac{16}{(3+1)^2} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x + b \\ \text{door } A(1\frac{1}{2}, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} + b = 0 \\ b = -1\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = x - 1\frac{1}{2}.$$

C13 $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{2x} = \frac{1}{2}x + 3 + 4\frac{1}{2}x^{-1}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2x^2}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2} - \frac{9}{2x^2} = 0$$

$$\frac{9}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

$$\text{max. is } f(-3) = 0 \text{ en min. is } f(3) = 6$$

Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 126

1 a $\left. \begin{array}{l} A = ap^{0,55} \\ p = 10 \text{ en } A = 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 10^{0,55} = 20 \\ a = \frac{20}{10^{0,55}} \approx 5,64 \end{array}$

$$\text{De formule is } A = 5,64p^{0,55}.$$

b $\left. \begin{array}{l} B = \frac{a}{r^3} \\ r = 6 \text{ en } B = 0,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{6^3} = 0,5 \\ a = 0,5 \cdot 6^3 = 108 \end{array}$

$$\text{De formule is } B = \frac{108}{r^3}.$$

2 a D is evenredig met een macht van L , dus $D = aL^p$.

$$\text{Invullen van } D = 15 \text{ en } L = 150 \text{ geeft } a \cdot 150^p = 15 \text{ oftewel } a = \frac{15}{150^p}.$$

$$\text{Invullen van } D = 64 \text{ en } L = 870 \text{ geeft } a \cdot 870^p = 64 \text{ oftewel } a = \frac{64}{870^p}.$$

$$\text{Los op } \frac{15}{150^p} = \frac{64}{870^p}.$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$$p = 0,8253... \text{ en } a = 0,2399...$$

$$\text{Dus de formule is } D = 0,240L^{0,825}.$$

b $D = 37$ geeft $0,240L^{0,825} = 37$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $L = 448,8...$

De bijbehorende lengte is 449 mm.

3 a $y = 21x^2 \cdot \sqrt{x}$
 $21x^2 \cdot \sqrt{x} = y$
 $21x^{2\frac{1}{2}} = y$
 $x^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{21}y$
 $x = (\frac{1}{21}y)^{\frac{2}{5}} = (\frac{1}{21})^{\frac{2}{5}} \cdot y^{\frac{2}{5}} \approx 0,30 \cdot y^{0,4}$
Dus $x = 0,30y^{0,4}$.

b $y = \frac{7}{3x \cdot \sqrt[3]{x}}$
 $x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot y = \frac{7}{3}$
 $x \cdot \sqrt[3]{x} = \frac{7}{3y}$
 $x^{\frac{4}{3}} = \frac{7}{3}y^{-1}$
 $x = (\frac{7}{3}y^{-1})^{\frac{3}{4}} = (\frac{7}{3})^{\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{3}{4}} \approx 1,89 \cdot y^{-0,75}$
Dus $x = 1,89y^{-0,75}$.

4 a Neem in de formule $2t$ voor t .
Je krijgt $N^* = 3 \cdot (2t)^{2,1} = 2^{2,1} \cdot 3t^{2,1} \approx 4,3 \cdot 3t^{2,1}$.
Dus $N^* \approx 4,3 \cdot N$.

b $N = 3t^{2,1}$
 $3t^{2,1} = N$
 $t^{2,1} = \frac{1}{3}N$
 $t = (\frac{1}{3}N)^{\frac{1}{2,1}}$
Neem in deze formule $2N$ voor N .
Je krijgt $t^* = (\frac{1}{3} \cdot 2N)^{\frac{1}{2,1}} = 2^{\frac{1}{2,1}} \cdot (\frac{1}{3}N)^{\frac{1}{2,1}} \approx 1,391 \cdot (\frac{1}{3}N)^{\frac{1}{2,1}}$.
Dus $t^* \approx 1,391 \cdot t$.
Dus t neemt met 39,1% toe als N verdubbelt.

5 a $y = \sin(x) \xrightarrow{\text{translatie } (\pi, 0)} y = \sin(x - \pi) \xrightarrow{\times \frac{1}{3} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} y = \sin(3x - \pi)$
 $y = \sin(3x - \pi) \xrightarrow{\times 2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = 2 \sin(3x - \pi) \xrightarrow{\text{translatie } (0, 1)} f(x) = 1 + 2 \sin(3x - \pi)$

b $f(x) = 1 + 2 \sin(3x - \pi) = 1 + 2 \sin(3(x - \frac{1}{3}\pi))$

Voor de grafiek van f geldt:

evenwichtsstand 1

amplitude 2

periode $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

beginpunt $(\frac{1}{3}\pi, 1)$

Dus voor de grafiek van g geldt:

amplitude $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

periode $2 \cdot \frac{2}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi$

beginpunt $(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi, 1 - 5) = (\frac{5}{6}\pi, -4)$

evenwichtsstand -4

Dit geeft $g(x) = -4 + \sin\left(\frac{2\pi}{1\frac{1}{3}\pi}(x - \frac{5}{6}\pi)\right)$ oftewel $g(x) = -4 + \sin(1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{4}\pi)$.

6 a $s(x) = f(x) + g(x) = 3^{x+2} + 3^{x-1} = 3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^{-1} = 9 \cdot 3^x + \frac{1}{3} \cdot 3^x = 9\frac{1}{3} \cdot 3^x$

b $v(x) = 4 \cdot f(x) - 27 \cdot g(x) = 4 \cdot 3^{x+2} - 27 \cdot 3^{x-1} = 4 \cdot 3^x \cdot 3^2 - 27 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = 36 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^x$
 $= 27 \cdot 3^x = 3^3 \cdot 3^x = 3^{x+3}$

c $k(x) = h(f(x)) = {}^3\log(3^{x+2}) - 2 = x + 2 - 2 = x$

- 7 a** p door $A(1, 0)$ en $B(3, 0)$, dus $p: y = a(x - 1)(x - 3)$.
 p door $C(0, 3)$, dus $a(0 - 1)(0 - 3) = 3$
 $3a = 3$
 $a = 1$

$$\text{Dus } p: y = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3.$$

$$y = x^2 - 4x + 3 \text{ geeft } y' = 2x - 4$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } B(3, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3 + b = 0 \\ b = -6 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 2x - 6$$

$$x_{\text{top}} = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ geeft } y_{\text{top}} = f(2) = -1, \text{ dus top } T(2, -1).$$

$$l: y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 3}{2 - 0} = -2$$

$$l: y = -2x + b \text{ door } C(0, 3), \text{ dus } l: y = -2x + 3.$$

$$k \text{ snijden met } l \text{ geeft } 2x - 6 = -2x + 3$$

$$-4x = -9$$

$$x = 2\frac{1}{4}$$

$$x = 2\frac{1}{4} \text{ geeft } y = 2 \cdot 2\frac{1}{4} - 6 = -1\frac{1}{2}, \text{ dus } S(2\frac{1}{4}, -1\frac{1}{2}).$$

- b** $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 2$ geeft $\alpha = 63,43\dots^\circ$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_l = -2$ geeft $\beta = -63,43\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 63,434\dots^\circ - (-63,43\dots^\circ) = 126,86\dots^\circ$
Dus $\angle(k, l) = 180^\circ - 126,86\dots^\circ \approx 53,1^\circ$.

- 8** $f(x) = 0$ geeft $-(x^2 - 4)(x - 1) = 0$
 $-(x + 2)(x - 2)(x - 1) = 0$
 $x = -2 \vee x = 2 \vee x = 1$

$$\text{Dus } B(1, 0).$$

$$f(x) = -(x^2 - 4)(x - 1) = -(x^3 - x^2 - 4x + 4) = -x^3 + x^2 + 4x - 4 \text{ geeft } f'(x) = -3x^2 + 2x + 4$$

$$f'(1) = -3 + 2 + 4 = 3, \text{ dus } \text{rc}_l = \frac{1}{3}.$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } B(1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 1 + b = 0 \\ b = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$

$$l \text{ snijden met de grafiek van } f \text{ geeft } -(x^2 - 4)(x - 1) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$-(x^2 - 4)(x - 1) = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$x - 1 = 0 \vee -(x^2 - 4) = -\frac{1}{3}$$

$$x = 1 \vee x^2 - 4 = \frac{1}{3}$$

$$x = 1 \vee x^2 = 4\frac{1}{3}$$

$$x = 1 \vee x = \sqrt{4\frac{1}{3}} \vee x = -\sqrt{4\frac{1}{3}}$$

$$\text{Dus } x_D = -\sqrt{4\frac{1}{3}}, x_E = \sqrt{4\frac{1}{3}} \text{ en } x_E - x_D = 2\sqrt{4\frac{1}{3}} \approx 4,16.$$

- 9 a** $5 - 2x = 0$ geeft $x = 2\frac{1}{2}$
Dus het randpunt is $(2\frac{1}{2}, -1)$.
 $D_f = \langle \leftarrow, 2\frac{1}{2} \rangle$ en $B_f = [-1, \rightarrow)$

b $f(x) = -1 + \frac{1}{3}\sqrt{5-2x} = -1 + \frac{1}{3}(5-2x)^{\frac{1}{2}}$ geeft
 $f'(x) = \frac{1}{6}(5-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(5-2x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{3\sqrt{5-2x}}$
 $y_A = -\frac{2}{3}$ geeft $-1 + \frac{1}{3}\sqrt{5-2x} = -\frac{2}{3}$
 $\frac{1}{3}\sqrt{5-2x} = \frac{1}{3}$
 $\sqrt{5-2x} = 1$
 $5-2x = 1$
 $2x = 4$
 $x = 2$, dus $A(2, -\frac{2}{3})$.

$k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = -\frac{1}{3\sqrt{5-4}} = -\frac{1}{3}$

$y = -\frac{1}{3}x + b$
 door $A(2, -\frac{2}{3})$ $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 2 + b = -\frac{2}{3} \\ b = 0 \end{array} \right.$

Dus $k: y = -\frac{1}{3}x$.

c $y = -1 + \frac{1}{3}\sqrt{5-2x}$
 $\frac{1}{3}\sqrt{5-2x} = y + 1$
 $\sqrt{5-2x} = 3y + 3$
 $5-2x = (3y+3)^2$
 $5-2x = 9y^2 + 18y + 9$
 $-2x = 9y^2 + 18y + 4$
 $x = -4\frac{1}{2}y^2 - 9y - 2$

10 a $f(x) = 0$ geeft $3\frac{1}{2} + \frac{7}{2x-8} = 0$

$\frac{7}{2x-8} = -\frac{7}{2}$
 $2x-8 = -2$
 $2x = 6$
 $x = 3$, dus $A(3, 0)$.

$f(x) = 3\frac{1}{2} + \frac{7}{2x-8} = 3\frac{1}{2} + 7(2x-8)^{-1}$ geeft $f'(x) = -7(2x-8)^{-2} \cdot 2 = -\frac{14}{(2x-8)^2}$

$k: y = ax + b$ met $a = f'(3) = -\frac{14}{(6-8)^2} = -3\frac{1}{2}$

$y = -3\frac{1}{2}x + b$
 door $A(3, 0)$ $\left\{ \begin{array}{l} -3\frac{1}{2} \cdot 3 + b = 0 \\ b = 10\frac{1}{2} \end{array} \right.$

Dus $k: y = -3\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{2}$.

noemer = 0 geeft $2x-8 = 0$, dus $x = 4$.

De verticale asymptoot is de lijn $x = 4$.

Voor grote x is $\frac{7}{2x-8} \approx 0$, dus $f(x) \approx 3\frac{1}{2} + 0 = 3\frac{1}{2}$.

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 3\frac{1}{2}$.

$y = 3\frac{1}{2}$ geeft $-3\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$
 $-3\frac{1}{2}x = -7$

$x = 2$, dus $P(2, 3\frac{1}{2})$.

$x = 4$ geeft $y = -3\frac{1}{2} \cdot 4 + 10\frac{1}{2} = -3\frac{1}{2}$, dus $Q(4, -3\frac{1}{2})$.

b $y = 3\frac{1}{2} + \frac{7}{2x-8}$
 $y(2x-8) = 3\frac{1}{2}(2x-8) + 7$
 $2xy - 8y = 7x - 28 + 7$
 $2xy - 7x = 8y - 21$
 $x(2y-7) = 8y-21$
 $x = \frac{8y-21}{2y-7}$

11 a $f(x) = \frac{2x^2 + x + 18}{2x} = x + \frac{1}{2} + \frac{9}{x} = x + \frac{1}{2} + 9x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 9x^{-2} = 1 - \frac{9}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 1 - \frac{9}{x^2} = 0$$

$$\frac{9}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

$$f(-3) = -5\frac{1}{2} \text{ en } f(3) = 6\frac{1}{2}, \text{ dus de toppen zijn } (-3, -5\frac{1}{2}) \text{ en } (3, 6\frac{1}{2}).$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = \frac{6\frac{1}{2} - (-5\frac{1}{2})}{3 - (-3)} = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } (3, 6\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3 + b = 6\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 2x + \frac{1}{2}.$$

De lijn l door O loodrecht op k heeft vergelijking $l: y = -\frac{1}{2}x$.

Het snijpunt van k en l is het punt S .

$$2x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x$$

$$2\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

$$x = -\frac{1}{5} \text{ geeft } y = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{5} = \frac{1}{10}, \text{ dus } S(-\frac{1}{5}, \frac{1}{10}).$$

$$d(O, k) = d(O, S) = \sqrt{(-\frac{1}{5})^2 + (\frac{1}{10})^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{4}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{5}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{5}$$

b $f'(x) = -5$ geeft $1 - \frac{9}{x^2} = -5$

$$-\frac{9}{x^2} = -6$$

$$x^2 = 1\frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$$

Dus de x -coördinaten van de raakpunten zijn $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$ en $x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$.

Gemengde opgaven

Bladzijde 128

1 a $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2(x-2) = -\frac{1}{2}(x^2+4x+4)(x-2) = -\frac{1}{2}(x^3+2x^2-4x-8) = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 2x + 4$
geeft $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 2x + 2$

b $f'(x) = 0$ geeft $-\frac{3}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot -\frac{3}{2} \cdot 2 = 16, \text{ dus } \sqrt{D} = 4$$

$$x = \frac{2+4}{-3} = -2 \vee x = \frac{2-4}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$f(-2) = -\frac{1}{2}(-2+2)^2(-2-2) = -\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot -4 = 0, \text{ dus een top ligt op de } x\text{-as.}$$

c $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = -1\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ f(1) = 4\frac{1}{2}, \text{ dus } A(1, 4\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 4\frac{1}{2} \\ b = 6 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -1\frac{1}{2}x + 6.$$

$$y = 0 \text{ geeft } -1\frac{1}{2}x + 6 = 0$$

$$-1\frac{1}{2}x = -6$$

$$x = 4$$

Dus $C(4, 0)$.

$$l: y = ax + b \text{ met } a = \text{rc}_k = -1\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ f(0) = 4, \text{ dus } B(0, 4) \end{array} \right\} l: y = -1\frac{1}{2}x + 4$$

$$y = 0 \text{ geeft } -1\frac{1}{2}x + 4 = 0$$

$$-1\frac{1}{2}x = -4$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

$$\text{Dus } D(2\frac{2}{3}, 0).$$

$$x_C - x_D = 4 - 2\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{d } f(x) = 0 \text{ geeft } -\frac{1}{2}(x+2)^2(x-2) &= 0 \\ x+2 &= 0 \vee x-2 = 0 \\ x &= -2 \vee x = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } E(2, 0).$$

$$m: y = ax + b \text{ met } a = \text{rc}_k = -1\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } E(2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 0 \\ b = 3 \end{array}$$

$$\text{Dus } m: y = -1\frac{1}{2}x + 3.$$

m snijden met de grafiek van f geeft

$$-\frac{1}{2}(x+2)^2(x-2) = -1\frac{1}{2}x + 3$$

$$-\frac{1}{2}(x+2)^2(x-2) = -1\frac{1}{2}(x-2)$$

$$x-2 = 0 \vee -\frac{1}{2}(x+2)^2 = -1\frac{1}{2}$$

$$x = 2 \vee (x+2)^2 = 3$$

$$(x+2)^2 = 3$$

$$x+2 = \sqrt{3} \vee x+2 = -\sqrt{3}$$

$$x = -2 + \sqrt{3} \vee x = -2 - \sqrt{3}$$

$$\text{Dus } x_P = -2 + \sqrt{3} \text{ en } x_Q = -2 - \sqrt{3}.$$

2 a 120 gram = 0,12 kg

$$G = 0,12 \text{ geeft } H = \frac{280}{0,12^{0,25}} = 475,7...$$

$$\text{Dus } \frac{475,7...}{60} \approx 8 \text{ slagen per seconde.}$$

b $G = 70\,000$ geeft $H = \frac{280}{70\,000^{0,25}} \approx 17$

Dus een verschil van 4 slagen per minuut.

c Neem in de formule $2G$ voor G .

$$\text{Je krijgt } H^* = \frac{280}{(2G)^{0,25}} = \frac{280}{2^{0,25} \cdot G^{0,25}} = \frac{1}{2^{0,25}} \cdot \frac{280}{G^{0,25}} \approx 0,84 \cdot \frac{280}{G^{0,25}}.$$

$$\text{Dus } H^* \approx 0,84 \cdot H.$$

Dus ongeveer 0,84 keer zo hoog.

d $H = \frac{280}{G^{0,25}}$

$$G^{0,25} = \frac{280}{H}$$

$$G = \left(\frac{280}{H}\right)^4$$

$$G \approx \frac{6,1 \cdot 10^9}{H^4}$$

$$\text{Dus } G = \frac{6,1 \cdot 10^9}{H^4}.$$

e Neem $3H$ voor H in de formule van vraag d.

$$\text{Je krijgt } G^* = \frac{6,1 \cdot 10^9}{(3H)^4} = \frac{6,1 \cdot 10^9}{3^4 \cdot H^4} = \frac{1}{3^4} \cdot \frac{6,1 \cdot 10^9}{H^4} = \frac{1}{81} \cdot \frac{6,1 \cdot 10^9}{H^4}.$$

$$\text{Dus } G^* = \frac{1}{81} \cdot G.$$

Dus de verhouding van de gewichten is $1 : 81$.

Bladzijde 129

3

a $y = x^4 \xrightarrow{\text{translatie } (1, -6)} y = (x - 1)^4 - 6 \xrightarrow{\times \frac{1}{2} \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} y = (2x - 1)^4 - 6$
 $y = (2x - 1)^4 - 6 \xrightarrow{\times -1 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} f(x) = -(2x - 1)^4 + 6$

b $f(x) = -10$ geeft $-(2x - 1)^4 + 6 = -10$
 $-(2x - 1)^4 = -16$
 $(2x - 1)^4 = 16$
 $2x - 1 = 2 \vee 2x - 1 = -2$
 $2x = 3 \vee 2x = -1$
 $x = 1\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

c De top van de grafiek van f is $(\frac{1}{2}, 6)$, dus $p: y = a(x - \frac{1}{2})^2 + 6$.

$$p \text{ door } (3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}), \text{ dus } a(3\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 + 6 = 4\frac{1}{2}$$

$$9a = -1\frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{6}$$

$$\text{Dus } p: y = -\frac{1}{6}(x - \frac{1}{2})^2 + 6.$$

$$p \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } -\frac{1}{6}(x - \frac{1}{2})^2 + 6 = 0$$

$$-\frac{1}{6}(x - \frac{1}{2})^2 = -6$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = 36$$

$$x - \frac{1}{2} = 6 \vee x - \frac{1}{2} = -6$$

$$x = 6\frac{1}{2} \vee x = -5\frac{1}{2}$$

$$d(P, Q) = 6\frac{1}{2} - (-5\frac{1}{2}) = 12$$

d $f(x) = -(2x - 1)^4 + 6$ geeft $f'(x) = -4(2x - 1)^3 \cdot 2 = -8(2x - 1)^3$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'(1) = -8$$

$$y = -8x + b$$

$$f(1) = 5, \text{ dus } A(1, 5) \left. \begin{array}{l} -8 \cdot 1 + b = 5 \\ b = 13 \end{array} \right\}$$

$$\text{Dus } k: y = -8x + 13 \text{ en } C(0, 13)$$

$$k \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } -8x + 13 = 0$$

$$-8x = -13$$

$$x = 1\frac{5}{8}$$

$$\text{Dus } B(1\frac{5}{8}, 0)$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{5}{8} \cdot 13 = 10\frac{9}{16}$$

e De top van de grafiek van f is $(\frac{1}{2}, 6)$.

De top van de grafiek van h is $(3, 0)$.

Dat is het gevolg van een translatie $2\frac{1}{2}$ naar rechts en 6 omlaag.

Dus $a = 2\frac{1}{2}$ en $b = 6$.

4 a $5 - 2x = 0$ geeft $x = 2\frac{1}{2}$, dus het randpunt is $(2\frac{1}{2}, -1)$.

noemer = 0 geeft $5 - 2x = 0$ oftewel $x = 2\frac{1}{2}$, dus de verticale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $x = 2\frac{1}{2}$.

Voor grote x is $f(x) \approx \frac{2x}{-2x} = -1$, dus de horizontale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $y = -1$.

Het snijpunt van de asymptoten is $(2\frac{1}{2}, -1)$.

Dus het randpunt van de grafiek van f valt samen met het snijpunt van de asymptoten van de grafiek van g .

b $f(x) = 0$ geeft $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{5-2x} = 0$

$$\frac{1}{2}\sqrt{5-2x} = 1$$

$$\sqrt{5-2x} = 2$$

$$5-2x = 4$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$g(x) = 0$ geeft $2x - 1 = 0$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

De grafieken snijden de x -as in het punt $(\frac{1}{2}, 0)$, dus de grafieken snijden elkaar in een punt op de x -as.

c $f(-10) = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5-2 \cdot -10} = 1\frac{1}{2}$

$x > -10$ en $B_f = [-1, \rightarrow)$ geeft $-1 \leq f(x) < 1\frac{1}{2}$

d $f(x) = -\frac{1}{2}$ geeft $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{5-2x} = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{5-2x} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{5-2x} = 1$$

$$5-2x = 1$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Dus $A(2, -\frac{1}{2})$.

$$f(x) = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5-2x} = -1 + \frac{1}{2}(5-2x)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{4}(5-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2 = \frac{-1}{2(5-2x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{5-2x}}$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'(2) = -\frac{1}{2\sqrt{5-2 \cdot 2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, -\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

e $g(x) = x + 1$ geeft $\frac{2x-1}{5-2x} = x + 1$

$$2x-1 = (x+1)(5-2x)$$

$$2x-1 = 5x-2x^2+5-2x$$

$$2x^2-x-6=0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -6 = 49, \text{ dus } \sqrt{D} = 7$$

$$x = \frac{1+7}{4} = 2 \vee x = \frac{1-7}{4} = -1\frac{1}{2}$$

$$g(-1\frac{1}{2}) = -1\frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}, \text{ dus } B(-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

$$g(2) = 2 + 1 = 3, \text{ dus } C(2, 3).$$

$$BC = \sqrt{(2 - -1\frac{1}{2})^2 + (3 - -\frac{1}{2})^2} = \sqrt{24\frac{1}{2}}$$

f $y = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5-2x}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{5-2x} = y + 1$$

$$\sqrt{5-2x} = 2y + 2$$

$$5-2x = (2y+2)^2$$

$$5-2x = 4y^2 + 8y + 4$$

$$-2x = 4y^2 + 8y - 1$$

$$x = -2y^2 - 4y + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g } y &= \frac{2x-1}{5-2x} \\
 y(5-2x) &= 2x-1 \\
 5y-2xy &= 2x-1 \\
 -2xy-2x &= -1-5y \\
 2xy+2x &= 5y+1 \\
 x(2y+2) &= 5y+1 \\
 x &= \frac{5y+1}{2y+2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{5 a } f(x) = 0 \text{ geeft } \frac{2x-6}{x+2} - x + 3 &= 0 \\
 \frac{2x-6}{x+2} &= x-3 \\
 2x-6 &= (x+2)(x-3) \\
 2x-6 &= x^2-x-6 \\
 -x^2+3x &= 0 \\
 -x(x-3) &= 0 \\
 x &= 0 \vee x = 3
 \end{aligned}$$

Dus de snijpunten zijn (0, 0) en (3, 0).

$$\begin{aligned}
 \text{b } k(x) = f(g(x)) &= \frac{2(x-5)-6}{x-5+2} - (x-5) + 3 \\
 &= \frac{2x-10-6}{x-3} - x + 8 \\
 &= \frac{2x-16+(-x+8)(x-3)}{x-3} \\
 &= \frac{2x-16-x^2+3x+8x-24}{x-3} \\
 &= \frac{-x^2+13x-40}{x-3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } v(x) = f(x) - g(x) &= \frac{2x-6}{x+2} - x + 3 - (x-5) \\
 &= \frac{2x-6}{x+2} - 2x + 8 \\
 &= \frac{2x-6+(-2x+8)(x+2)}{x+2} \\
 &= \frac{2x-6-2x^2-4x+8x+16}{x+2} \\
 &= \frac{-2x^2+6x+10}{x+2}
 \end{aligned}$$

$$\text{d } l(x) = f(h(x)) = \frac{2 \cdot \frac{a}{x} - 6}{\frac{a}{x} + 2} - \frac{a}{x} + 3 = \frac{2a-6x}{a+2x} - \frac{a}{x} + 3$$

$$\begin{aligned}
 l\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \text{ geeft } \frac{2a-6 \cdot \frac{1}{2}}{a+2 \cdot \frac{1}{2}} - \frac{a}{\frac{1}{2}} + 3 &= -4 \\
 \frac{2a-3}{a+1} - 2a &= -7 \\
 2a-3-2a(a+1) &= -7(a+1) \\
 2a-3-2a^2-2a &= -7a-7 \\
 -2a^2+7a+4 &= 0 \\
 D = 7^2 - 4 \cdot -2 \cdot 4 &= 81, \text{ dus } \sqrt{D} = 9 \\
 a = \frac{-7 \pm 9}{-4} &= -\frac{1}{2} \vee a = \frac{-7-9}{-4} = 4
 \end{aligned}$$

12 Examentraining

12.1 Vergelijkingen en ongelijkheden

Bladzijde 132

1 a $\frac{3}{4}(\frac{1}{3}x - 2)^3 + \frac{3}{4} = 21$
 $(\frac{1}{3}x - 2)^3 + 1 = 28$
 $(\frac{1}{3}x - 2)^3 = 27$
 $\frac{1}{3}x - 2 = 3$
 $\frac{1}{3}x = 5$
 $x = 15$

b $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{7x}{2x-1} = 2\sqrt{x}$
 $7x = (2x-1) \cdot 2\sqrt{x}$
 $49x^2 = (2x-1)^2 \cdot 4x$
 $x = 0 \vee 49x = 4(4x^2 - 4x + 1)$
 $49x = 16x^2 - 16x + 4$
 $16x^2 - 65x + 4 = 0$
 $D = (-65)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 4 = 3969$, dus $\sqrt{D} = 63$
 $x = \frac{65 + 63}{32} = 4 \vee x = \frac{65 - 63}{32} = \frac{1}{16}$
 vold. niet

$g(4) = 4$, dus $A(4, 4)$.

c Voor grote waarden van x is $\frac{10}{x} \approx 0$.

Dus dan zal $\sqrt{x^3 - \frac{10}{x}}$ naderen tot $\sqrt{x^3}$ en liggen de grafieken van f en g dicht bij elkaar.

Los op $f(x) - g(x) = 0,01$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 12,0118...$

Dus voor $x \geq 12,02$.

d $f(x) = 5$ geeft $x^2 - 2x - 3 = 5$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x+2)(x-4) = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$

Dus $x_A = -2$ en $x_B = 4$.

$g(x) = 5$ geeft $\sqrt{3x+4} = 5$
 $3x+4 = 25$
 $3x = 21$
 $x = 7$

Dus $x_C = 7$.

$AC = 7 - (-2) = 9$ en $BC = 7 - 4 = 3$.

Dus de afstand AC is 3 keer zo groot als de afstand BC .

e Los op
 $2,15 \cdot 10^4(2x^3 - 3x^2 + 5x - 6) = 7,55 \cdot 10^5$ oftewel $2x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = 35,116...$
 Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 2,978...$
 Dus in twee decimalen is de oplossing 2,98.

f $A(1, 1)$ en $B(b, \frac{1}{b})$ geeft $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(b-1)^2 + (\frac{1}{b}-1)^2}$

$OA = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

Los op $\sqrt{(b-1)^2 + (\frac{1}{b}-1)^2} = \sqrt{2}$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $b = 0,435...$ en $b = 2,296...$
 $b = 0,435...$ voldoet niet, dus $b \approx 2,30$.

Bladzijde 133

g $P\left(p, \frac{4}{3p-5}\right)$ geeft $OP = \sqrt{p^2 + \left(\frac{4}{3p-5}\right)^2}$

Invoeren van de formule en gebruiken van de optie minimum geeft $p = 2,553\dots$ en $OP = 2,963\dots$

Dus de minimale lengte van OP is 2,96 voor $p \approx 2,55$.

h $y = 0$ geeft $-\frac{4}{5}x + 4 = 0$

$$-\frac{4}{5}x = -4$$

$$x = 5, \text{ dus } A(5, 0).$$

$$x = 0 \text{ geeft } y = 4, \text{ dus } B(0, 4).$$

$$OQ = p, \text{ dus } AQ = 5 - p.$$

$$x_P = p \text{ geeft } y_P = -\frac{4}{5}p + 4, \text{ dus } P(p, -\frac{4}{5}p + 4).$$

$$O(\triangle APQ) = \frac{1}{2} \cdot AQ \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot (5 - p) \cdot (-\frac{4}{5}p + 4) = \frac{1}{2}(-4p + 20 + \frac{4}{5}p^2 - 4p)$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{4}{5}p^2 - 8p + 20) = \frac{2}{5}p^2 - 4p + 10$$

$$O(\triangle OBP) = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot x_P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot p = 2p$$

$$O(\triangle APQ) = O(\triangle OBP) \text{ geeft } \frac{2}{5}p^2 - 4p + 10 = 2p$$

$$\frac{2}{5}p^2 - 6p + 10 = 0$$

$$p^2 - 15p + 25 = 0$$

$$D = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 125$$

$$p = \frac{15 + \sqrt{125}}{2} \vee p = \frac{15 - \sqrt{125}}{2}$$

$$p = \frac{15 + \sqrt{125}}{2} \text{ voldoet niet, dus } p = \frac{15 - \sqrt{125}}{2} = 7\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{125}.$$

Bladzijde 138

2 a $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{4x}{4x-3} = \sqrt{x}$

$$\frac{16x^2}{(4x-3)^2} = x$$

$$x(4x-3)^2 = 16x^2$$

$$x = 0 \vee (4x-3)^2 = 16x$$

$$x = 0 \text{ geeft het punt } O, \text{ dus } (4x-3)^2 = 16x$$

$$16x^2 - 24x + 9 = 16x$$

$$16x^2 - 40x + 9 = 0$$

$$D = (-40)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9 = 1024, \text{ dus } \sqrt{D} = 32$$

$$x = \frac{40 + 32}{32} = 2\frac{1}{4} \vee x = \frac{40 - 32}{32} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ voldoet niet, dus } x_B = 2\frac{1}{4}.$$

b Voor grote x is $f(x) \approx \frac{4x}{4x} = 1$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

$$\text{Dus } y_S = 1.$$

$$\text{noemer} = 0 \text{ oftewel } 4x - 3 = 0 \text{ geeft de verticale asymptoot } x = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Dus } x_R = \frac{3}{4}.$$

$$y_R = g\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$d(R, S) = y_S - y_R = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

3 $A = 42$ geeft $\frac{2}{3}(\frac{1}{2}p + 1)^3 - \frac{2}{3} = 42$
 $(\frac{1}{2}p + 1)^3 - 1 = 63$
 $(\frac{1}{2}p + 1)^3 = 64$
 $\frac{1}{2}p + 1 = 4$
 $\frac{1}{2}p = 3$
 $p = 6$

Bladzijde 139

4 $A\left(a, \frac{1}{2a-1}\right)$ geeft $OA = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2a-1}\right)^2}$

Invoeren van de formule en gebruiken van de optie minimum geeft $a = 1,10\dots$ en $OA = 1,37\dots$
Dus de minimale lengte van het lijnstuk OA is 1,4.

5 $OA = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$ en $AB = \sqrt{(b-1)^2 + (\sqrt{b}-1)^2}$

Los op $\sqrt{(b-1)^2 + (\sqrt{b}-1)^2} = \sqrt{2}$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $b = 2,314\dots$
Dus $b \approx 2,31$.

6 a $f(x) = 0$ geeft $16 - x^2 = 0$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

Dus $A(4, 0)$.

$$\text{opp}(\triangle OAP) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (16 - p^2) = 2(16 - p^2)$$

b $\text{opp}(\triangle OAP) = \text{opp}(\triangle OPB)$ geeft $2(16 - p^2) = 8p$

$$16 - p^2 = 4p$$

$$p^2 + 4p - 16 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot -16 = 80$$

$$p = \frac{-4 + \sqrt{80}}{2} \vee p = \frac{-4 - \sqrt{80}}{2}$$

$$p = \frac{-4 - \sqrt{80}}{2} \text{ voldoet niet, dus } p = \frac{-4 + \sqrt{80}}{2}.$$

$$p = \frac{-4 + \sqrt{80}}{2} \text{ geeft } \text{opp}(\triangle OPB) = 8p = -16 + 4\sqrt{80}.$$

De gevraagde oppervlakte van één zo'n driehoek is dus $-16 + 4\sqrt{80}$.

Bladzijde 140

7 a Los op $\sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}} = \sqrt{\frac{1}{x}}$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 0,524\dots$
en $y = 1,380\dots$

De optie minimum bij f geeft $x = 0,629\dots$ en $y = 1,374\dots$

Dus f heeft geen minimum in S .

b Voor grote waarden van x is $\sqrt{\frac{1}{x}} \approx 0$.

Dus dan zal $\sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}}$ naderen tot $\sqrt{x}$ en liggen de grafieken van f en h dicht bij elkaar.

c Los op $\sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}} - \sqrt{x} = 0,01$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 49,9646\dots$

Dus voor $x \geq 49,965$.

- 8 a** $2x + 6 = 0$ geeft $x = -3$, dus randpunt $(-3, 0)$.

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = -3 \text{ geeft } y_{\text{top}} = g(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot -3 + 9 = 0, \text{ dus top } (-3, 0).$$

Dus ja, deze top is hetzelfde punt als dat randpunt.

$$\begin{aligned} \text{b } f(x) = 4 \text{ geeft } \sqrt{2x+6} &= 4 \\ 2x+6 &= 16 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Dus $x_C = 5$.

$$\begin{aligned} g(x) = 4 \text{ geeft } x^2 + 6x + 9 &= 4 \\ x^2 + 6x + 5 &= 0 \\ (x+1)(x+5) &= 0 \\ x &= -1 \vee x = -5 \end{aligned}$$

Dus $x_B = -1$.

$$BC = 5 - (-1) = 6$$

12.2 Werken met formules

Bladzijde 141

$$\begin{aligned} \text{9 a } A &= aB + b \text{ met } a = \frac{300 - 140}{0,76 - 0,12} = 250 \\ \left. \begin{aligned} A &= 250B + b \\ B &= 0,12 \text{ en } A = 140 \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} 250 \cdot 0,12 + b &= 140 \\ 30 + b &= 140 \\ b &= 110 \end{aligned} \end{aligned}$$

Dus $A = 250B + 110$.

$$B = 0,54 \text{ geeft } A = 250 \cdot 0,54 + 110 = 245$$

$$\begin{aligned} \text{b } \text{Op } t = 0 \text{ is } A &= \frac{783}{1,08} = 725. \\ A &= at + 725 \text{ met } a = \frac{783 - 725}{5} = 11,6 \end{aligned}$$

Dus $A = 11,6t + 725$.

$$t = 9 \text{ geeft } A = 11,6 \cdot 9 + 725 \approx 829$$

$$\begin{aligned} \text{c } f(x) = g(x) \text{ geeft } x^3 + 2x^2 - 6x - 6 &= (x^2 + \frac{4}{5}x - 3\frac{3}{5})(x - 3) \\ x^3 + 2x^2 - 6x - 6 &= x^3 - 3x^2 + \frac{4}{5}x^2 - 2\frac{2}{5}x - 3\frac{3}{5}x + 10\frac{4}{5} \\ 4\frac{1}{5}x^2 &= 16\frac{4}{5} \\ x^2 &= 4 \\ x &= 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

$f(2) = -2$ en $f(-2) = 6$, dus $A(2, -2)$ en $B(-2, 6)$.

$$k: y = ax + b \text{ met } a = \frac{-2 - 6}{2 - (-2)} = -2$$

$$\left. \begin{aligned} y &= -2x + b \\ \text{door } A(2, -2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -2 \cdot 2 + b &= -2 \\ -4 + b &= -2 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Dus $k: y = -2x + 2$.

$$\begin{aligned} k \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } -2x + 2 &= 0 \\ -2x &= -2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Dus $x_C = 1$.

$$\begin{aligned} \text{d } y &= \sqrt{x} \\ \downarrow \text{translatie } (-1, 2) \\ y &= 2 + \sqrt{x+1} \\ \downarrow \times \frac{1}{4} \text{ t.o.v. de } y\text{-as} \\ f(x) &= 2 + \sqrt{4x+1} \end{aligned}$$

$$\text{e } y = x \xrightarrow{\times p \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = px$$

$$f(x) = px \text{ geeft } 1\frac{1}{2}\sqrt{6x-9} = px$$

$$2\frac{1}{4}(6x-9) = p^2x^2$$

$$p^2x^2 - 13\frac{1}{2}x + 20\frac{1}{4} = 0$$

$$D = (-13\frac{1}{2})^2 - 4 \cdot p^2 \cdot 20\frac{1}{4} = 182\frac{1}{4} - 81p^2$$

$$D = 0 \text{ geeft } 81p^2 = 182\frac{1}{4}$$

$$p^2 = 2\frac{1}{4}$$

$$p = 1\frac{1}{2} \vee p = -1\frac{1}{2}$$

$$p > 0, \text{ dus } p = 1\frac{1}{2}.$$

f De grafiek van f heeft randpunt $(\frac{1}{2}, -2)$, dus het randpunt van de grafiek van g is $B(\frac{1}{2}, -2a)$.

$$f(x) = 0 \text{ geeft } \sqrt{2x-1} = 2$$

$$2x-1 = 4$$

$$2x = 5$$

$$x = 2\frac{1}{2}, \text{ dus } A(2\frac{1}{2}, 0).$$

$$AB = \sqrt{(2\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 + (0 - (-2a))^2} = \sqrt{4 + 4a^2}$$

$$AB = 4 \text{ geeft } \sqrt{4 + 4a^2} = 4$$

$$4 + 4a^2 = 16$$

$$4a^2 = 12$$

$$a^2 = 3$$

$$a = \sqrt{3} \vee a = -\sqrt{3}$$

$$a = \sqrt{3} \text{ voldoet niet, dus } a = -\sqrt{3}.$$

Bladzijde 142

10

a $f(x) = 2$ geeft $\sqrt{3x+1} = 2$

$$3x+1 = 4$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Dus $B(1, 2)$ en $AB = 1$.

Dus $BC = 4 \cdot AB = 4 \cdot 1 = 4$ en $AC = 1 + 4 = 5$ en $C(5, 2)$.

$$f(5) = \sqrt{3 \cdot 5 + 1} = 4$$

$$(5, 4) \xrightarrow{\times a \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} C(5, 4a)$$

$$C(5, 2), \text{ dus } 4a = 2 \text{ en dit geeft } a = \frac{1}{2}.$$

b $f(x) = x^3 + 9x^2 + 3x - 45$

↓ 3 naar rechts

$$g(x) = (x-3)^3 + 9(x-3)^2 + 3(x-3) - 45$$

$$= (x-3)(x^2 - 6x + 9) + 9(x^2 - 6x + 9) + 3x - 9 - 45$$

$$= x^3 - 6x^2 + 9x - 3x^2 + 18x - 27 + 9x^2 - 54x + 81 + 3x - 54$$

$$= x^3 - 24x$$

c door $(2, 0)$ geeft $a\left(2 + b + \frac{c}{2}\right) = 0$ oftewel $2 + b + \frac{1}{2}c = 0 \dots (1)$

door $(12, 0)$ geeft $a\left(12 + b + \frac{c}{12}\right) = 0$ oftewel $12 + b + \frac{1}{12}c = 0 \dots (2)$

door $(4, 2)$ geeft $a\left(4 + b + \frac{c}{4}\right) = 2$ oftewel $a(4 + b + \frac{1}{4}c) = 2 \dots (3)$

$$\begin{cases} 2 + b + \frac{1}{2}c = 0 \\ 12 + b + \frac{1}{12}c = 0 \end{cases}$$

$$\underline{-10 + \frac{5}{12}c = 0}$$

$$\frac{5}{12}c = 10$$

$$c = 24$$

$$c = 24 \text{ invullen in } 2 + b + \frac{1}{2}c = 0 \text{ geeft } 2 + b + 12 = 0$$

$$b = -14$$

$$b = -14 \text{ en } c = 24 \text{ invullen in } a(4 + b + \frac{1}{4}c) = 2 \text{ geeft } a(4 - 14 + 6) = 2$$

$$-4a = 2$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } a = -\frac{1}{2}, b = -14 \text{ en } c = 24.$$

d Neem in de formule $3B$ voor B .

Je krijgt $A^* = 0,058 \cdot (3B)^{0,28} = 0,058 \cdot 3^{0,28} \cdot B^{0,28} = 3^{0,28} \cdot 0,058 \cdot B^{0,28} \approx 1,36 \cdot 0,058 \cdot B^{0,28}$.

Dus $A^* \approx 1,36 \cdot A$.

Dus A neemt 36% toe.

e $Q = 10$ en $P = 142$ geeft $a \cdot 10^b = 142$, dus $a = \frac{142}{10^b}$.

$Q = 75$ en $P = 430$ geeft $a \cdot 75^b = 430$, dus $a = \frac{430}{75^b}$.

Los op $\frac{142}{10^b} = \frac{430}{75^b}$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$a = 40,03\dots$ en $b = 0,549\dots$

$P = 40,03\dots \cdot Q^{0,549\dots}$ met $Q = 45$ geeft $P \approx 325$.

f $x = 2\frac{1}{2}$ geeft $\frac{\frac{4}{9}a^2 + b^2}{4b} = \frac{5}{2}$

$$\frac{8}{9}a^2 + 2b^2 = 20b$$

$$\frac{8}{9}a^2 = 20b - 2b^2$$

$$a^2 = 22\frac{1}{2}b - 2\frac{1}{4}b^2$$

$$a^2 = 2\frac{1}{4}(10b - b^2)$$

$$a = 1\frac{1}{2} \cdot \sqrt{10 \cdot b - b^2}$$

Dus $p = 1\frac{1}{2}$ en $q = 10$.

g $p = 9,5\sqrt{1,17q} + 18,5$

$$\sqrt{1,17q} = \frac{p}{9,5} - \frac{18,5}{9,5}$$

$$1,17q \approx (0,105p - 1,947)^2$$

$$q \approx 0,855(0,105p - 1,947)^2$$

$$\text{Dus } q = 0,855(0,105p - 1,947)^2$$

Bladzijde 145

11 Neem in de formule $2N$ voor N .

Je krijgt $W^* = 0,043 \cdot (2N)^{\frac{5}{6}} = 0,043 \cdot 2^{\frac{5}{6}} \cdot N^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{6}} \cdot 0,043 \cdot N^{\frac{5}{6}} \approx 1,78 \cdot 0,043 \cdot N^{\frac{5}{6}}$.

Dus $W^* \approx 1,78 \cdot W$.

Dus de lengte van het wegennet van gebied B is ongeveer 78% groter dan de lengte van het wegennet van gebied A.

12 Lees af: bij 2004 hoort het percentage 89.

Dus bij 1997 hoort $A = \frac{694}{0,89} \approx 780$.

Bij de lijn hoort de formule $A = at + 780$ met $a = \frac{694 - 780}{2004 - 1997} = -12,28\dots$

Dus $A = -12,28\dots t + 780$.

$t = 23$ geeft $A = -12,28\dots \cdot 23 + 780 \approx 497$

Het verschil is $551 - 497 = 54$.

Bladzijde 146

- 13** $f(x) = g(x)$ geeft $x^3 - x^2 - 7x - 29 = (x^2 + x - 2)(x - 3)$
 $x^3 - x^2 - 7x - 29 = x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6$
 $x^2 - 2x - 35 = 0$
 $(x + 5)(x - 7) = 0$
 $x = -5 \vee x = 7$
 $f(-5) = -144$ en $f(7) = 216$, dus $A(-5, -144)$ en $B(7, 216)$.
 $AB: y = ax + b$ met $a = \frac{216 - (-144)}{7 - (-5)} = 30$
 $y = 30x + b$
 door $A(-5, -144)$ $\left. \begin{array}{l} y = 30x + b \\ 30 \cdot -5 + b = -144 \\ -150 + b = -144 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = 6 \end{array}$
 Dus $AB: y = 30x + 6$ en $S(0, 6)$.
 $g(0) = -2 \cdot -3 = 6$, dus $T(0, 6)$.
 Dus $y_S = y_T = 6$.

- 14** $y = \frac{3}{4}x \xrightarrow{\times p \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = \frac{3}{4}px$
 $f(x) = \frac{3}{4}px$ geeft $2\sqrt{3x - 4} = \frac{3}{4}px$
 $4(3x - 4) = \frac{9}{16}p^2x^2$
 $\frac{9}{16}p^2x^2 - 12x + 16 = 0$
 $D = (-12)^2 - 4 \cdot \frac{9}{16}p^2 \cdot 16 = 144 - 36p^2$
 $D = 0$ geeft $36p^2 = 144$
 $p^2 = 4$
 $p = 2 \vee p = -2$
 $p = -2$ voldoet niet, dus $p = 2$.

- 15** Het randpunt van de grafiek van f is $(-3, -8)$.
 Dus het randpunt van de grafiek van g is $A(-3, -8a)$.
 $f(x) = 0$ geeft $-8 + 2\sqrt{3x + 9} = 0$
 $\sqrt{3x + 9} = 4$
 $3x + 9 = 16$
 $3x = 7$
 $x = 2\frac{1}{3}$
 Dus $B(2\frac{1}{3}, 0)$.
 $AB = 6\frac{2}{3}$
 $AB = \sqrt{(2\frac{1}{3} - (-3))^2 + (0 - (-8a))^2} = \sqrt{28\frac{4}{9} + 64a^2}$
 $AB = 6\frac{2}{3}$ geeft $\sqrt{28\frac{4}{9} + 64a^2} = 6\frac{2}{3}$
 $28\frac{4}{9} + 64a^2 = 44\frac{4}{9}$
 $64a^2 = 16$
 $a^2 = \frac{1}{4}$
 $a = \frac{1}{2} \vee a = -\frac{1}{2}$
 $a = -\frac{1}{2}$ voldoet niet, dus $a = \frac{1}{2}$.

Bladzijde 147

- 16** $B = 75$ en $L = 166$ geeft $a \cdot 75^n = 166$, dus $a = \frac{166}{75^n}$.
 $B = 97$ en $L = 180$ geeft $a \cdot 97^n = 180$, dus $a = \frac{180}{97^n}$.
 Los op $\frac{166}{75^n} = \frac{180}{97^n}$.
 Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft
 $n = 0,314\dots$ en $a = 42,6\dots$
 $L = 42,6\dots \cdot B^{0,314\dots}$ met $B = 86$ geeft $L \approx 173$, dus de gevraagde cranklengte is 173 mm.

17 $y = \sqrt{x}$
 $\downarrow$ translatie $(-4, 0)$
 $y = \sqrt{x+4}$
 $\downarrow \times \frac{1}{3}$ t.o.v. de y -as
 $y = \sqrt{3x+4}$

Eerst de translatie 4 naar links, daarna de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{3}$.

18 $S(0, 1)$ en $A(1, 1)$ geeft $M(\frac{1}{2}, 1)$
 $f(x) = \sqrt{x}$
 $\downarrow \times a$ t.o.v. de x -as
 $g(x) = a\sqrt{x}$
 $g(\frac{1}{2}) = 1$ geeft $a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 1$, dus $a = \sqrt{2}$.
Dus $g(x) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$ en $y_N = g(1) = \sqrt{2}$.

Bladzijde 148

19 a $AQI = aC + b$ met $a = \frac{300 - 200}{0,375 - 0,125} = 400$

$$\left. \begin{array}{l} AQI = 400C + b \\ C = 0,125 \text{ en } AQI = 200 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 400 \cdot 0,125 + b = 200 \\ 50 + b = 200 \\ b = 150 \end{array}$$

Dus $AQI = 400C + 150$.
 $C = 0,20$ geeft $AQI = 400 \cdot 0,2 + 150 = 230$

b Los op $\frac{584,976 \cdot C_{\text{ppm}}}{273,15 + 20} = 0,0612$.
 $584,976 \cdot C_{\text{ppm}} = 17,94078$
 $C_{\text{ppm}} = 0,0306...$

Dus de luchtkwaliteit was 'goed'.

c $T = 25$ geeft $C_{\text{mg/m}^3} = \frac{584,976 \cdot C_{\text{ppm}}}{273,15 + 25}$
 $C_{\text{ppm}} = \frac{298,15}{584,976} \cdot C_{\text{mg/m}^3}$
De evenredigheidsconstante is $\frac{298,15}{584,976} \approx 0,51$.

Bladzijde 149

20 $x = 1,4$ en $y = 0$ geeft $a\left(1,4 + b + \frac{c}{1,4}\right) = 0$, dus $b = -1,4 - \frac{c}{1,4}$.
 $x = 12,0$ en $y = 0$ geeft $a\left(12 + b + \frac{c}{12}\right) = 0$, dus $b = -12 - \frac{c}{12}$.

Dit geeft $1,4 + \frac{c}{1,4} = 12 + \frac{c}{12}$
 $0,630... \cdot c = 10,6$

$c = 16,8$
 $c = 16,8$ geeft $b = -1,4 - \frac{16,8}{1,4} = -13,4$

$x = 4,1$ en $y = 2,4$ invullen in $y = a\left(x - 13,4 + \frac{16,8}{x}\right)$ geeft $a\left(4,1 - 13,4 + \frac{16,8}{4,1}\right) = 2,4$
 $-5,202... \cdot a = 2,4$
 $a = -0,461...$

Dus $a \approx -0,46$, $b = -13,4$ en $c = 16,8$.

- 21 a** $f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x - 88$
 $\downarrow$ translatie (2, 0)
 $g(x) = (x-2)^3 + 6(x-2)^2 - 36(x-2) - 88$
 $= (x-2)(x^2 - 4x + 4) + 6(x^2 - 4x + 4) - 36x + 72 - 88$
 $= x^3 - 4x^2 + 4x - 2x^2 + 8x - 8 + 6x^2 - 24x + 24 - 36x - 16$
 $= x^3 - 48x$
- b** $g(x) = 0$ geeft $x^3 - 48x = 0$
 $x(x^2 - 48) = 0$
 $x = 0 \vee x^2 = 48$
 $x = 0 \vee x = \sqrt{48} \vee x = -\sqrt{48}$
Dus $x_A = -2 - \sqrt{48}$ en $x_B = -2 + \sqrt{48}$.

Bladzijde 150

- 22 a** De stelling van Pythagoras in driehoek ACM geeft $(\frac{1}{2}b)^2 + (h-r)^2 = r^2$
 $\frac{1}{4}b^2 + h^2 - 2hr + r^2 = r^2$
 $\frac{1}{4}b^2 + h^2 = 2hr$
 $r = \frac{\frac{1}{4}b^2 + h^2}{2h}$

Dus formule 1 is juist.

- b** $\frac{1}{4}b^2 + h^2 = 2hr$
 $\frac{1}{4}b^2 = 2hr - h^2$
 $b^2 = 4(2hr - h^2)$
 $b = 2\sqrt{2hr - h^2}$
 $r = 1,63$ geeft $b = 2 \cdot \sqrt{3,26 \cdot h - h^2}$

Bladzijde 151

- 23 a** $H = 75$ en $P = 0$ geeft $a(75 - b) = 0$, dus $b = 75$.

$$\left. \begin{array}{l} P = a(H - 75) \\ H = 220 \text{ en } P = 1000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a(220 - 75) = 1000 \\ 145a = 1000 \\ a \approx 6,9 \end{array}$$
- b** De exponent in de formule van P is groter dan 1.
 P is dus een toenemend stijgende functie, dus het aantal punten dat je extra verdient door 1 cm hoger te springen, wordt steeds groter.
- c** $H = 228$ geeft $P = 0,8465 \cdot (228 - 75)^{1,42} = 1071,24\dots$, dus 1071 punten.
Los op $0,03768 \cdot (480 - t)^{1,85} = 1072$.
Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 224,369\dots$
Dus 224,36 seconden oftewel 3 minuten en 44,36 seconden.

Bladzijde 152

- 24 a** Ian $500 \cdot 0,2 \cdot 0,35 \cdot v^2 = 105$
 $v^2 = 3$
 $v = \sqrt{3} \text{ m/s}$
 $\text{tijd} = \frac{100}{\sqrt{3}} = 57,735\dots \text{ seconden}$
- Samy $\text{tijd} = 57,735\dots - 0,5 = 57,235 \text{ seconden},$
dus $v = \frac{100}{57,235\dots} = 1,747\dots \text{ m/s}$
 $F = 500 \cdot 0,21 \cdot 0,33 \cdot 1,747\dots^2 \approx 106$
Dus de gevraagde handkracht is 106 N.

Bladzijde 153

- b** Bij de rode lijn geeft een bepaalde handkracht een hogere snelheid dan bij de blauwe lijn, dus de rode lijn hoort bij de zwemmer met de betere techniek.
- Aflezend van een punt op de rode lijn, bijvoorbeeld (60; 1,8) geeft $C = \frac{60}{500 \cdot 0,2 \cdot 1,8} \approx 0,33$
voor de zwemmer met de betere techniek.

25

a $P_{\text{gem}} = P_{\text{min}} + 0,33(P_{\text{max}} - P_{\text{min}}) = P_{\text{min}} + 0,33P_{\text{max}} - 0,33P_{\text{min}} = 0,67P_{\text{min}} + 0,33P_{\text{max}}$
 Dus $\frac{0,67}{0,33} \approx 2$ keer zo groot.

b $P_{\text{min}} = 80$, $P_{\text{max}} = 120$ en $P_{\text{gem}} = 100$ invullen in formule (2) geeft
 $80 + (0,33 + 0,0012H)(120 - 80) = 100$
 $40(0,33 + 0,0012H) = 20$
 $0,33 + 0,0012H = 0,5$
 $0,0012H = 0,17$
 $H \approx 142$
 Dus bij een hartslag van 142 slagen per minuut.

12.3 Differentiaalrekening

26

a $f(x) = x + \frac{4}{2x-1} = x + 4(2x-1)^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4(2x-1)^{-2} \cdot 2 = 1 - \frac{8}{(2x-1)^2}$

helling $= f'(2) = 1 - \frac{8}{(2 \cdot 2 - 1)^2} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

b $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+3}} = 2(4x+3)^{-\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = -(4x+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{-4}{(4x+3)\sqrt{4x+3}}$

helling $= f'(\frac{1}{4}) = \frac{-4}{4 \cdot \sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$

c $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5x-3} = \frac{1}{2}(5x-3)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{4}(5x-3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5 = \frac{5}{4\sqrt{5x-3}}$

$f'(x) = \frac{5}{12}$ geeft $\frac{5}{4\sqrt{5x-3}} = \frac{5}{12}$

$4\sqrt{5x-3} = 12$

$\sqrt{5x-3} = 3$

$5x-3 = 9$

$5x = 12$

$x = 2\frac{2}{5}$

$f(2\frac{2}{5}) = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1\frac{1}{2}$, dus $A(2\frac{2}{5}, 1\frac{1}{2})$.

d $f(x) = \frac{4}{3x-5} = 4(3x-5)^{-1}$ geeft $f'(x) = -4(3x-5)^{-2} \cdot 3 = \frac{-12}{(3x-5)^2}$

$f'(x) = -\frac{3}{4}$ geeft $\frac{-12}{(3x-5)^2} = -\frac{3}{4}$

$-3(3x-5)^2 = -48$

$(3x-5)^2 = 16$

$3x-5 = 4 \vee 3x-5 = -4$

$3x = 9 \vee 3x = 1$

$x = 3 \vee x = \frac{1}{3}$

Dus $x_A = 3$ en $A(3, f(3)) = A(3, 1)$.

$k: y = -\frac{3}{4}x + b$
 door $A(3, 1)$ $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 3 + b = 1 \\ -2\frac{1}{4} + b = 1 \end{array} \right.$
 $b = 3\frac{1}{4}$

Dus $k: y = -\frac{3}{4}x + 3\frac{1}{4}$.

$y = 0$ geeft $\frac{3}{4}x = 3\frac{1}{4}$

$x = 4\frac{1}{3}$

Dus $x_B = 4\frac{1}{3}$.

$$\text{e } f(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{2x-1} = 1\frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{3}{4}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{3}{2\sqrt{2x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4} \text{ geeft } \frac{3}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{3}{4}$$

$$2\sqrt{2x-1} = 4$$

$$\sqrt{2x-1} = 2$$

$$2x-1 = 4$$

$$2x = 5$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$f(2\frac{1}{2}) = 1\frac{1}{2}\sqrt{4} = 3, \text{ dus } A(2\frac{1}{2}, 3).$$

$$f(x) = 4\frac{1}{2} \text{ geeft } 1\frac{1}{2}\sqrt{2x-1} = 4\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2x-1} = 3$$

$$2x-1 = 9$$

$$2x = 10$$

$$x = 5, \text{ dus } B(5, 4\frac{1}{2}).$$

$$A(2\frac{1}{2}, 3) \text{ is de top geeft } g(x) = a(x - 2\frac{1}{2})^2 + 3.$$

$$g(5) = 4\frac{1}{2} \text{ geeft } a(5 - 2\frac{1}{2})^2 + 3 = 4\frac{1}{2}$$

$$6\frac{1}{4}a = 1\frac{1}{2}$$

$$a = \frac{6}{25}$$

$$\text{Dus } g(x) = \frac{6}{25}(x - 2\frac{1}{2})^2 + 3.$$

$$\text{Dus } a = \frac{6}{25}, p = 2\frac{1}{2} \text{ en } q = 3.$$

$$\text{f } f(x) = x^4 - 7x^2 + 7 \text{ geeft } f'(x) = 4x^3 - 14x$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 4x^3 - 14x = 0$$

$$2x(2x^2 - 7) = 0$$

$$2x = 0 \vee 2x^2 = 7$$

$$x = 0 \vee x^2 = \frac{7}{2}$$

$$\text{Het minimum van } f \text{ is } (\frac{7}{2})^2 - 7 \cdot \frac{7}{2} + 7 = -5\frac{1}{4}.$$

$$\text{g } f(x) = 8\sqrt{x} - 3x = 8x^{\frac{1}{2}} - 3x \text{ geeft } f'(x) = 4x^{-\frac{1}{2}} - 3 = \frac{4}{\sqrt{x}} - 3$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{4}{\sqrt{x}} - 3 = 0$$

$$\frac{4}{\sqrt{x}} = 3$$

$$\sqrt{x} = \frac{4}{3}$$

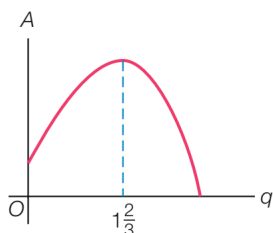
$$x = \frac{16}{9}$$

$$f(\frac{16}{9}) = 8 \cdot \frac{4}{3} - 3 \cdot \frac{16}{9} = 5\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } T(1\frac{7}{9}, 5\frac{1}{3}).$$

a $A = 2 - q^3 + q^2 + 5q$ geeft $\frac{dA}{dq} = -3q^2 + 2q + 5$

$$\left[\frac{dA}{dq} \right]_{q=1\frac{2}{3}} = -3 \cdot (1\frac{2}{3})^2 + 2 \cdot 1\frac{2}{3} + 5 = 0$$



Dus A is maximaal voor $q = 1\frac{2}{3}$.

b $P(p, 8\sqrt{p} - 3p)$

$$A = O(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (8\sqrt{p} - 3p) = 4p\sqrt{p} - 1\frac{1}{2}p^2 = 4p^{1\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}p^2$$

$$\frac{dA}{dp} = 6p^{\frac{1}{2}} - 3p = 6\sqrt{p} - 3p$$

$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } 6\sqrt{p} - 3p = 0$$

$$6\sqrt{p} = 3p$$

$$36p = 9p^2$$

$$p = 0 \vee 36 = 9p$$

$$p = 0 \vee p = 4$$

$p = 0$ voldoet niet, dus $p = 4$.

$$p = 4 \text{ geeft } A = 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{4} - 1\frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$$

Dus de maximale oppervlakte van driehoek OPQ is 8.

c $a = \frac{f(p)}{p} = \frac{-\frac{1}{2}p^2 + 4p - 3}{p} = -\frac{1}{2}p + 4 - 3p^{-1}$

$$\frac{da}{dp} = -\frac{1}{2} + 3p^{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{p^2}$$

$$\frac{da}{dp} = 0 \text{ geeft } -\frac{1}{2} + \frac{3}{p^2} = 0$$

$$\frac{3}{p^2} = \frac{1}{2}$$

$$p^2 = 6$$

$$p = \sqrt{6} \vee p = -\sqrt{6}$$

$p = -\sqrt{6}$ voldoet niet, dus $p = \sqrt{6}$.

$$\text{De maximale waarde van } a \text{ is } -\frac{1}{2}\sqrt{6} + 4 - \frac{3}{\sqrt{6}} = 4 - \sqrt{6}.$$

d $P\left(p, \frac{8}{p^4}\right)$ geeft $L = \text{omtrek} = 2p + 2 \cdot \frac{8}{p^4} = 2p + \frac{16}{p^4} = 2p + 16p^{-4}$

$$\frac{dL}{dp} = 2 - 64p^{-5} = 2 - \frac{64}{p^5}$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } 2 - \frac{64}{p^5} = 0$$

$$2 = \frac{64}{p^5}$$

$$p^5 = 32$$

$$p = 2$$

$$p = 2 \text{ geeft } P(2, \frac{1}{2})$$

e $y = 3(0,2x - 4)^2$ geeft $y' = 6(0,2x - 4) \cdot 0,2 = 0,24x - 4,8$
 y is stijgend als $y' > 0$
 $0,24x - 4,8 > 0$
 $0,24x > 4,8$
 $x > 20$

Voor $x > 20$ is y' een stijgende lijn boven de x -as, dus y is toenemend stijgend.

Bladzijde 159

28 a $f(0) = -1$, dus $B(0, -1)$.

$$f(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{\sqrt{3x+1}} - 2 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{3x+1}} = 2$$

$$\sqrt{3x+1} = \frac{1}{2}$$

$$3x+1 = \frac{1}{4}$$

$$3x = -\frac{3}{4}$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Dus $A(-\frac{1}{4}, 0)$.

$$d(A, B) = \sqrt{(0 - (-\frac{1}{4}))^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{1\frac{1}{16}}$$

b $f(0,81) = -1,46...$
 $-2 \cdot 0,81^2 + 3 \cdot 0,81 + p = -1,46...$
 $p = -2,57...$
Dus $p \approx -2,6$.

c $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} - 2 = (3x+1)^{-\frac{1}{2}} - 2$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{-3}{2(3x+1)\sqrt{3x+1}}$

$$g(x) = -2x^2 + 3x + p \text{ geeft } g'(x) = -4x + 3$$

$$\text{Los op } f'(x) = g'(x) \text{ oftewel } \frac{-3}{2(3x+1)\sqrt{3x+1}} = -4x + 3.$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 0,8091...$

Dus $x_C \approx 0,809$.

Bladzijde 160

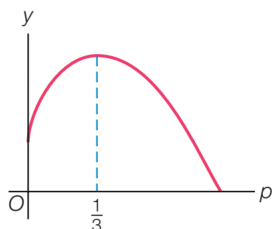
29 a Los op $\frac{1}{4} \cdot 5116 \cdot 10^3 \cdot \left(1 - \left(\frac{w}{10}\right)^3 - \left(\frac{w}{10}\right)^2 + \left(\frac{w}{10}\right)\right) = 1,21 \cdot 10^6$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $w = 6,54...$

Dus de snelheid achter de windmolen is 6,5 m/s.

b $y = 1 - p^3 - p^2 + p$ geeft $\frac{dy}{dp} = -3p^2 - 2p + 1$

$$\left[\frac{dy}{dp}\right]_{p=\frac{1}{3}} = -3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 0$$



Dus deze maximale waarde voor E wordt inderdaad bereikt voor $p = \frac{1}{3}$.

Bladzijde 161

$$\text{c } E_{\max} = \frac{1}{4} \cdot c \cdot v^3 \cdot (1 - (\frac{1}{3})^3 - (\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3}) = \frac{8}{27} \cdot c \cdot v^3$$

$$\frac{E_{\max}}{E_{\text{wind}}} \cdot 100\% = \frac{\frac{8}{27} \cdot c \cdot v^3}{\frac{1}{2} \cdot c \cdot v^3} \cdot 100\% = \frac{16}{27} \cdot 100\% = 59,2\ldots\%$$

Dus het maximale percentage is 59%.

30 a $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x + 1$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2}x + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}x = -1$$

$$x = -2$$

$$f(-2) = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 - 2 + 1 = 0$$

Dus de top van de parabool ligt op de x -as.

b $rc_l = f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{4}$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{4}x + b \\ \text{door } R(\frac{1}{2}, 1\frac{9}{16}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + b = 1\frac{9}{16} \\ \frac{5}{8} + b = 1\frac{9}{16} \\ b = \frac{15}{16} \end{array}$$

Dus $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$ is inderdaad een vergelijking van l .

c $x = 0$ geeft $y = \frac{15}{16}$, dus $OK = \frac{15}{16}$.

$$x = 1 \text{ geeft } y = 1\frac{1}{4} + \frac{15}{16} = \frac{35}{16}, \text{ dus } SM = \frac{35}{16}.$$

$$O(OSMK) = \frac{1}{2}(OK + SM) \cdot OS = \frac{1}{2} \cdot (\frac{15}{16} + \frac{35}{16}) \cdot 1 = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$$

Bladzijde 162

31 $f(x) = 1 + \frac{3}{4x-3} = 1 + 3(4x-3)^{-1}$ geeft $f'(x) = -3(4x-3)^{-2} \cdot 4 = \frac{-12}{(4x-3)^2}$

$$f'(0) = \frac{-12}{(0-3)^2} = \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3}$$

Dus de helling in O is $-1\frac{1}{3}$.

32 $D = \frac{N}{W}$ en $W = 0,043 \cdot N^{\frac{5}{6}}$ geeft $D = \frac{N}{0,043 \cdot N^{\frac{5}{6}}}$

$$D = \frac{N}{0,043 \cdot N^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{0,043} \cdot N^{\frac{1}{6}} \text{ geeft } \frac{dD}{dN} = \frac{1}{0,043} \cdot \frac{1}{6} \cdot N^{-\frac{5}{6}}$$

$\frac{dD}{dN}$ is altijd groter dan 0, dus de grafiek van D als functie van N is inderdaad stijgend.

33 $f(x) = 2\sqrt{3x-4} = 2(3x-4)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = (3x-4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{3x-4}}$

$$f'(x) = \frac{3}{4} \text{ geeft } \frac{3}{\sqrt{3x-4}} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{3x-4} = 4$$

$$3x-4 = 16$$

$$3x = 20$$

$$x = \frac{20}{3}$$

$$f(\frac{20}{3}) = 2\sqrt{20-4} = 8 \text{ en van het punt op } l \text{ met } x\text{-coördinaat } \frac{20}{3} \text{ is } y = \frac{3}{4} \cdot \frac{20}{3} = 5.$$

$$\text{Dus } c = 8 - 5 = 3.$$

34 $f(x) = \sqrt{2x+6} = (2x+6)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(2x+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$

$$rc_l = f'(15) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 15 + 6}} = \frac{1}{6}$$

$m: 6x + y = -27$ oftewel $m: y = -6x - 27$, dus $rc_m = -6$.

$rc_l \cdot rc_m = \frac{1}{6} \cdot -6 = -1$, dus l en m staan loodrecht op elkaar.

Bladzijde 163

35 a $f(x) = 3\sqrt{x} - 2x + 1 = 3x^{\frac{1}{2}} - 2x + 1$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2 = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2 = 0$$

$$\frac{3}{2\sqrt{x}} = 2$$

$$4\sqrt{x} = 3$$

$$\sqrt{x} = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{9}{16}$$

$$f\left(\frac{9}{16}\right) = 3 \cdot \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{9}{16} + 1 = 2\frac{1}{8}$$

Dus $T\left(\frac{9}{16}, 2\frac{1}{8}\right)$.

b $O(\triangle OAP) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AP = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (3\sqrt{x} - 2x + 1)$

Invoeren van de formule van de oppervlakte en gebruiken van de optie maximum geeft dat de maximale oppervlakte ongeveer 1,285 is.

36 $f(0) = -8 + 2\sqrt{9} = -2$, dus $A(0, -2)$.

$$f(x) = -8 + 2\sqrt{3x+9} = -8 + 2(3x+9)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = (3x+9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{3x+9}}$$

$$l: y = ax + b \text{ met } a = f'(0) = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

$$l: y = x + b \quad \left. \vphantom{l: y = x + b} \right\} b = -2$$

door $A(0, -2)$

$l: y = x - 2$ snijden met de x -as geeft $B(2, 0)$.

$OA = 2$ en $OB = 2$, dus $OA = OB$.

37 $f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x - 88$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 12x - 36$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3x^2 + 12x - 36 = 0$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$(x-2)(x+6) = 0$$

$$x = 2 \vee x = -6$$

$f(-6) = 128$ en $f(2) = -128$, dus $P(-6, 128)$ en $Q(2, -128)$.

Het midden van PQ is $\left(\frac{1}{2}(-6+2), \frac{1}{2}(128-128)\right) = (-2, 0)$.

Dus $M(-2, 0)$ ligt midden tussen P en Q .

Bladzijde 164

38 $a = \frac{f(p)}{p} = \frac{3 - \frac{1}{p^2} - p}{p} = \frac{3}{p} - \frac{1}{p^3} - 1 = 3p^{-1} - p^{-3} - 1$

$$\frac{da}{dp} = -3p^{-2} + 3p^{-4} = \frac{-3p^2 + 3}{p^4}$$

$$\frac{da}{dp} = 0 \text{ geeft } -3p^2 + 3 = 0$$

$$-3p^2 = -3$$

$$p^2 = 1$$

$$p = 1 \vee p = -1$$

$p = -1$ voldoet niet, dus $p = 1$.

39 a $3x - 5 \geq 0$

$$3x \geq 5$$

$$x \geq \frac{5}{3}$$

$$\text{Dus } D_f = [1\frac{2}{3}, \rightarrow).$$

b $f(x) = 2\sqrt{3x-5} = 2(3x-5)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = (3x-5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{3x-5}}$

$$f'(x) = \frac{3}{4} \text{ geeft } \frac{3}{\sqrt{3x-5}} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{3x-5} = 4$$

$$3x-5 = 16$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

$$f(7) = 2\sqrt{21-5} = 8, \text{ dus } A(7, 8).$$

$$\text{Top } A(7, 8) \text{ geeft } g(x) = a(x-7)^2 + 8.$$

$$f(10) = 2\sqrt{3 \cdot 10 - 5} = 10, \text{ dus } B(10, 10).$$

$$g(10) = 10 \text{ geeft } a(10-7)^2 + 8 = 10$$

$$9a = 2$$

$$a = \frac{2}{9}$$

$$\text{Dus } a = \frac{2}{9}, p = 7 \text{ en } q = 8.$$

40 $f(x) = \frac{1}{2x-1} = (2x-1)^{-1}$ geeft $f'(x) = -(2x-1)^{-2} \cdot 2 = \frac{-2}{(2x-1)^2}$

$$f'(x) = -2 \text{ geeft } \frac{-2}{(2x-1)^2} = -2$$

$$(2x-1)^2 = 1$$

$$2x-1 = 1 \vee 2x-1 = -1$$

$$2x = 2 \vee 2x = 0$$

$$x = 1 \vee x = 0$$

$$x = 0 \text{ voldoet niet, dus } x = 1.$$

$$l: y = -2x + b$$

$$f(1) = 1, \text{ dus } (1, 1) \left. \begin{array}{l} -2 + b = 1 \\ b = 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{Dus } l: y = -2x + 3 \text{ en het snijpunt van } l \text{ met de } y\text{-as is } (0, 3).$$

Bladzijde 165

41 Voor de omtrek M van de rechthoek met hoekpunten O en $(x, f(x))$ geldt $M = 2x + 2 \cdot f(x)$.

$$M = 2x + 2 \cdot \frac{3}{x^3} = 2x + 6x^{-3}$$

$$\frac{dM}{dx} = 2 - 18x^{-4} = 2 - \frac{18}{x^4}$$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \text{ geeft } \frac{18}{x^4} = 2$$

$$x^4 = 9$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

$$x = -\sqrt{3} \text{ voldoet niet, dus } x = \sqrt{3}.$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3}{(\sqrt{3})^3} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ dus } P\left(\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

42 a $f(x) = 0$ geeft $-2 + \sqrt{8+x} = 0$
 $\sqrt{8+x} = 2$
 $8+x = 4$
 $x = -4$

Dus $A(-4, 0)$.

$$f(x) = -2 + \sqrt{8+x} = -2 + (8+x)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}(8+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{8+x}}$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'(-4) = \frac{1}{2\sqrt{8-4}} = \frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + b \\ \text{door } A(-4, 0) \end{array} \right\} \frac{1}{4} \cdot -4 + b = 0$$

$$b = 1$$

Dus $k: y = \frac{1}{4}x + 1$.

b $8+x = 0$ geeft $x = -8$ en $f(-8) = -2$, dus $B(-8, -2)$.

$$rc_l = \frac{0 - -2}{0 - -8} = \frac{1}{4}$$

$rc_k = rc_l$, dus k en l zijn evenwijdig.

43 $a' = 0,96 \cdot 2 \cdot (0,12d - 2,95) \cdot 0,12 = 0,027648 \cdot d - 0,67968$

8,5 weken is 59,5 dagen.

$$d = 59,5 \text{ geeft } a' = 0,027648 \cdot 59,5 - 0,67968 = 0,965376 > 0$$

Voor $d > 59,5$ is a' een stijgende lijn boven de d -as en daarom is de afstand toenemend stijgend.

Bladzijde 166

44 $OB = 3 \cdot OA$ geeft $rc_{AB} = -3$

$$f(x) = 16 - x^2 \text{ geeft } f'(x) = -2x$$

$$f'(x) = -3 \text{ oftewel } -2x = -3 \text{ geeft } x = 1\frac{1}{2}.$$

Dus $x_P = 1\frac{1}{2}$.

45 a $f(x) = 2(\frac{1}{3}x - 1)^3 - \frac{1}{2}x + 3$ geeft

$$f'(x) = 6(\frac{1}{3}x - 1)^2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 2(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1) - \frac{1}{2} = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 - \frac{1}{2} = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$$

b $f'(x) = 0$ geeft $\frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{2} = 0$

$$x^2 - 6x + 6\frac{3}{4} = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6\frac{3}{4} = 9, \text{ dus } \sqrt{D} = 3$$

$$x = \frac{6 \pm 3}{2} = 4\frac{1}{2} \vee x = \frac{6 - 3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$f(1\frac{1}{2}) = 2, \text{ dus } A(1\frac{1}{2}, 2).$$

$$g(1\frac{1}{2}) = 2 \text{ geeft } (1\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{10} \cdot 1\frac{1}{2} + c = 2$$

$$\frac{9}{4} - \frac{9}{20} + c = 2$$

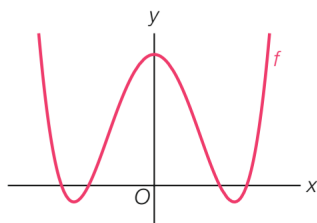
$$c = \frac{1}{5}$$

46 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 6x$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 4x^3 - 6x = 0$$

$$4x(x^2 - \frac{3}{2}) = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 = \frac{3}{2}$$



Het minimum van f is $(\frac{3}{2})^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$.

47 Het midden van het lijnstuk AO is $C(-3, 0)$.

$$f(-3) = 11\frac{1}{4}, \text{ dus } P(-3, 11\frac{1}{4}).$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x(x-2)(x+6) = \frac{1}{4}x(x^2 + 4x - 12) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 - 3x \text{ geeft } f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x - 3$$

$$f'(-3) = \frac{3}{4} \cdot (-3)^2 + 2 \cdot -3 - 3 = -2\frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -2\frac{1}{4}x + b \\ \text{door } P(-3, 11\frac{1}{4}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2\frac{1}{4} \cdot -3 + b = 11\frac{1}{4} \\ 6\frac{3}{4} + b = 11\frac{1}{4} \end{array}$$

$$b = 4\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -2\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{2} = 0 \\ -2\frac{1}{4}x = -4\frac{1}{2} \\ x = 2 \end{array}$$

Dus de raaklijn gaat door B .

12.4 Exponenten en logaritmen

Bladzijde 167

48 a $g_{30 \text{ jaar}} = \frac{52}{28}$ geeft $g_{10 \text{ jaar}} = \left(\frac{52}{28}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,2291\dots$

De toename per 10 jaar is 22,9%.

b $N = b \cdot g^t$ met $b = 650$ en $g = 0,73$ geeft $N = 650 \cdot 0,73^t$.

Los op $650 \cdot 0,73^t = 1$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 20,58\dots$

Dus in 2030.

c $H = b \cdot g^t$ met $b = 50$ en $g = 0,988$ geeft $H = 50 \cdot 0,988^t$.

$t = 10$ geeft $H = 50 \cdot 0,988^{10} = 44,31\dots$

Het verschil is $44,31\dots - 42,5 \approx 1,8$.

d Los op $1,075^T = 2$.

Dit geeft $T = {}^{1,075}\log(2) = 9,584\dots$

De verdubbelingstijd is 9 weken en $0,584\dots \cdot 7 \approx 4$ dagen.

e $\frac{1}{4}(2^{-\frac{1}{3}x} + 25) = 20$

$$2^{-\frac{1}{3}x} + 25 = 80$$

$$2^{-\frac{1}{3}x} = 55$$

$$-\frac{1}{3}x = {}^2\log(55)$$

$$x = -3 \cdot {}^2\log(55)$$

f $3^{\frac{1}{4}x+7} = 9^x$

$$3^{\frac{1}{4}x+7} = 3^{2x}$$

$$\frac{1}{4}x + 7 = 2x$$

$$1\frac{3}{4}x = 7$$

$$x = 4$$

g $y = \frac{1}{4}(2^{\frac{1}{3}x} + 20) = 2^{-2}(2^{\frac{1}{3}x} + 20) = 2^{\frac{1}{3}x-2} + 5 = 2^{\frac{1}{3}(x-6)} + 5 = (\sqrt[3]{2})^{x-6} + 5$

Dus $y = (\sqrt[3]{2})^{x-6} + 5$.

h ${}^4\log\left(\frac{4}{4x^2 + 15x}\right) = 0$

$$\frac{4}{4x^2 + 15x} = 1$$

$$4x^2 + 15x = 4$$

$$4x^2 + 15x - 4 = 0$$

$$D = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot -4 = 289, \text{ dus } \sqrt{D} = 17$$

$$x = \frac{-15 \pm 17}{8} = \frac{1}{4} \vee x = \frac{-15 - 17}{8} = -4$$

i ${}^2\log(4x-5) - {}^2\log(7-2x) = 3$

$${}^2\log\left(\frac{4x-5}{7-2x}\right) = 3$$

$$\frac{4x-5}{7-2x} = 8$$

$$4x-5 = 8(7-2x)$$

$$4x-5 = 56-16x$$

$$20x = 61$$

$$x = 3\frac{1}{20}$$

j $\log(2x) = 2 - \log(x+2)$

$$\log(2x) + \log(x+2) = 2$$

$$\log(2x(x+2)) = 2$$

$$2x(x+2) = 100$$

$$2x^2 + 4x - 100 = 0$$

$$x^2 + 2x - 50 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -50 = 204, \text{ dus } \sqrt{D} = \sqrt{204}$$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{204}}{2} \vee x = \frac{-2 - \sqrt{204}}{2}$$

$$x = \frac{-2 - \sqrt{204}}{2} \text{ voldoet niet, dus } x = \frac{-2 + \sqrt{204}}{2}.$$

k $f(x) = 0$ geeft $1 + {}^3\log(x+3) = 0$

$${}^3\log(x+3) = -1$$

$$x+3 = \frac{1}{3}$$

$$x = -2\frac{2}{3}, \text{ dus } A(-2\frac{2}{3}, 0).$$

$$f(0) = 1 + {}^3\log(3) = 1 + 1 = 2, \text{ dus } B(0, 2).$$

$$\text{Top } B(0, 2), \text{ dus } g(x) = ax^2 + 2.$$

$$g(-2\frac{2}{3}) = 0 \text{ geeft } a \cdot (-2\frac{2}{3})^2 + 2 = 0$$

$$\frac{64}{9}a = -2$$

$$a = -\frac{9}{32}$$

$$\text{Dus } g(x) = -\frac{9}{32}x^2 + 2.$$

l $y = {}^4\log\left(\frac{4}{4x^2+15x}\right) = {}^4\log(4) - {}^4\log(4x^2+15x) = 1 - {}^4\log(x(4x+15))$

$$= 1 - ({}^4\log(x) + {}^4\log(4x+15)) = 1 - {}^4\log(x) - {}^4\log(4x+15)$$

$$\text{Dus } a = 1, p = 4 \text{ en } q = 15.$$

m $A = 5 \cdot {}^3\log(B)$ geeft ${}^3\log(B) = 0,2A$, dus $B = 3^{0,2A}$.

$$B = 3^{0,2A} \text{ invullen in } P = Q \cdot {}^2\log(B) \text{ geeft}$$

$$P = Q \cdot {}^2\log(3^{0,2A}) = Q \cdot 0,2A \cdot {}^2\log(3) = 0,2 \cdot {}^2\log(3) \cdot A \cdot Q \approx 0,317 \cdot A \cdot Q.$$

n $A = \log\left(\frac{2B}{20-B}\right)$ geeft $\frac{2B}{20-B} = 10^A$, dus $2B = 10^A(20-B)$

$$2B = 20 \cdot 10^A - B \cdot 10^A$$

$$2B + B \cdot 10^A = 20 \cdot 10^A$$

$$B(2 + 10^A) = 20 \cdot 10^A$$

$$B = \frac{20 \cdot 10^A}{2 + 10^A}$$

$$A = 3t + 1 \text{ invullen in } B = \frac{20 \cdot 10^A}{2 + 10^A} \text{ geeft } B = \frac{20 \cdot 10^{3t+1}}{2 + 10^{3t+1}}.$$

Bladzijde 168

49 a $A = 5$ geeft $\log(A) = \log(5) \approx 0,70$

$$\text{Bij } \log(A) = 0,70 \text{ hoort } \log(B) = 0,06.$$

$$\log(B) = 0,06 \text{ geeft } B = 10^{0,06} \approx 1,15$$

- b** $\log(N) = at + 2$
 bij $t = 0$ hoort $\log(N) = 2$
 bij $t = 5$ hoort $\log(N) = -2$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{bij } t = 0 \text{ hoort } \log(N) = 2 \\ \text{bij } t = 5 \text{ hoort } \log(N) = -2 \end{matrix}} \right\} a = \frac{-2 - 2}{5 - 0} = -0,8$
 Dus $\log(N) = -0,8t + 2$.
 $t = 1,5$ geeft $\log(N) = -0,8 \cdot 1,5 + 2 = 0,8$, dus $N = 10^{0,8} = 6,309...$
 $t = 3$ geeft $\log(N) = -0,8 \cdot 3 + 2 = -0,4$, dus $N = 10^{-0,4} = 0,398...$
 $\frac{0,398... - 6,309...}{6,309...} \times 100\% \approx -93,7\%$, dus de afname is 93,7%.

Bladzijde 172

- 50 a** $g_{5 \text{ jaar}} = \frac{6,9}{1} = 6,9$
 2021 is 3 jaar na 2018, dus in 2021 is het aantal $6,9 \cdot 6,9^{\frac{3}{5}} \approx 22$ miljard.
b Voor de prijs geldt $P = b \cdot g^t$ met $b = 222$ en $g = 0,68$, dus $P = 222 \cdot 0,68^t$.
 Los op $222 \cdot 0,68^t = 0,001$.
 Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 31,9...$
 Dus in 2023.

Bladzijde 173

- c** Lees af: bij 2004 hoort $\log(p) = 0$, dus $p = 10^0 = 1$.
 Dus in 2004 kostte de harde schijf 250 dollar.
 Lees af: bij 2013 hoort $\log(p) = -1,6$, dus $p = 10^{-1,6} = 0,025...$
 Dus in 2013 kostte de harde schijf $2000 \cdot 0,025... \approx 50,24$ dollar.
 Dat is 199,76 dollar goedkoper dan in 2004 en dat is $\frac{199,76}{250} \times 100\% \approx 80\%$.

- 51 a** $g_{40 \text{ jaar}} = \frac{46}{22}$, dus $g_{10 \text{ jaar}} = \left(\frac{46}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = 1,2024...$
 Het percentage is 20,2%.
b Los op $1,20^T = 2$.
 Dit geeft $T = {}^{1,20}\log(2) = 3,801...$
 Dus na 39 jaar.

Bladzijde 174

- 52 a** In 2005 is volgens het model de gemiddelde snelheid $19,5 \cdot 0,992^{12} = 17,70...$ km per uur.
 Dit geeft een tijd van $\frac{21,0975}{17,70...} = 1,191...$ uur oftewel 1 uur, 11 minuten en 29 seconden.
 Dus hij heeft $11 - 10 = 1$ minuut en $29 - 4 = 25$ seconden, dus 85 seconden sneller gelopen dan model 1 voorspelt.
b De prestatie van Meijwes was $0,9920 \cdot 4130 \approx 4097$.
 $g_{13 \text{ jaar}} = \frac{0,9039}{0,9920}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{0,9039}{0,9920}\right)^{\frac{1}{13}} = 0,9928...$
 De prestatie van Laros was $0,9920 \cdot 0,9928...^{11} \cdot 4279 \approx 3924$.
 Dus Laros heeft de beste prestatie geleverd.

Bladzijde 175

- 53 a** 1 miljoen inwoners, dus $N = 10^6$ en dit geeft $\log(N) = 6$.
 Lees af: bij $\log(N) = 6$ hoort $\log(W) = 3,6$.
 Dus $W = 10^{3,6} \approx 3981$, dus de gevraagde lengte is 4000 mijl.
b $N = 10^5$ en $W = 650$ geeft $\log(650) = a \cdot 5 + b$ oftewel $b = \log(650) - 5a$.
 $N = 10^7$ en $W = 31000$ geeft $\log(31000) = a \cdot 7 + b$ oftewel $b = \log(31000) - 7a$.
 Los op $\log(650) - 5a = \log(31000) - 7a$.
 $2a = \log(31000) - \log(650)$
 $a = 0,839...$
 $a = 0,839...$ geeft $b = \log(650) - 5 \cdot 0,839... = -1,383...$
 Dus $a \approx 0,84$ en $b \approx -1,38$.

54 a Verticale asymptoot als geldt $2x^2 + 3x = 0$
 $x(2x + 3) = 0$
 $x = 0 \vee 2x = -3$
 $x = 0 \vee x = -1\frac{1}{2}$

Dus $x_S = -1\frac{1}{2}$.

b $f(x) = 0$ geeft ${}^4\log\left(\frac{2}{2x^2 + 3x}\right) = 0$
 $\frac{2}{2x^2 + 3x} = 1$
 $2x^2 + 3x = 2$
 $2x^2 + 3x - 2 = 0$
 $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$, dus $\sqrt{D} = 5$
 $x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \vee x = \frac{-3 - 5}{4} = -2$

Dus $A(-2, 0)$ en $B(\frac{1}{2}, 0)$.

c $f(x) = {}^4\log\left(\frac{2}{2x^2 + 3x}\right) = {}^4\log(2) - {}^4\log(2x^2 + 3x) = {}^4\log(4^{\frac{1}{2}}) - {}^4\log(x(2x + 3))$
 $= \frac{1}{2} - ({}^4\log(x) + {}^4\log(2x + 3)) = \frac{1}{2} - {}^4\log(x) - {}^4\log(2x + 3)$

55 a $f(x) = g(x)$ geeft $\log(2x - 4) = \log(6 - x)$
 $2x - 4 = 6 - x$
 $3x = 10$
 $x = 3\frac{1}{3}$, dus $x_S = 3\frac{1}{3}$.

$2x - 4 = 0$ geeft $x = 2$, dus de verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = 2$.

$6 - x = 0$ geeft $x = 6$, dus de verticale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $x = 6$.

De afstanden van S tot de asymptoten zijn $3\frac{1}{3} - 2 = 1\frac{1}{3}$ en $6 - 3\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$, dus $\frac{2\frac{2}{3}}{1\frac{1}{3}} = 2$ keer zo groot.

b $PQ = f(a) - g(a) = 1$ geeft $\log(2a - 4) - \log(6 - a) = 1$
 $\log\left(\frac{2a - 4}{6 - a}\right) = 1$
 $\frac{2a - 4}{6 - a} = 10$
 $2a - 4 = 60 - 10a$
 $12a = 64$
 $a = 5\frac{1}{3}$

56 $f(x) = g(x)$ geeft $2^x = (\sqrt{2})^{x^2 - x}$
 $2^x = (2^{\frac{1}{2}})^{x^2 - x}$
 $2^x = 2^{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x}$
 $x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$
 $\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}x = 0$
 $x(\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}) = 0$
 $x = 0 \vee \frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}$
 $x = 0 \vee x = 3$

$f(0) = 2^0 = 1$ en $f(3) = 2^3 = 8$, dus de coördinaten van de snijpunten zijn $(0, 1)$ en $(3, 8)$.

57 a Als R groter wordt, dan wordt $100 - R$ kleiner.

Dus de breuk $\frac{R}{100 - R}$ wordt dan groter.

Dus $\log\left(\frac{R}{100 - R}\right)$ wordt dan groter, dus K neemt dan toe.

b Lees af $K = -0,5$, dus los op $\log\left(\frac{R}{100-R}\right) = -0,5$

$$\begin{aligned}\frac{R}{100-R} &= 10^{-0,5} \\ R &= 10^{-0,5}(100-R) \\ R &= 10^{-0,5} \cdot 10^2 - 10^{-0,5} \cdot R \\ R + 10^{-0,5} \cdot R &= 10^{1,5} \\ R(1 + 10^{-0,5}) &= 10^{1,5} \\ R &= \frac{10^{1,5}}{1 + 10^{-0,5}} = 24,0\ldots\end{aligned}$$

Dus het rendement is 24%.

c $R = 70$ geeft $K = \log\left(\frac{70}{100-70}\right) = 0,3679\ldots$

Los op $0,00667t - 2 = 0,3679\ldots$

$$0,00667t = 2,3679\ldots$$

$$t = 355,0\ldots$$

Dus in 2055.

d $\log\left(\frac{R}{100-R}\right) = K$ geeft $\frac{R}{100-R} = 10^K$

$$\begin{aligned}R &= 10^K(100-R) \\ R &= 100 \cdot 10^K - 10^K \cdot R \\ R + 10^K \cdot R &= 10^2 \cdot 10^K \\ R(1 + 10^K) &= 10^{K+2} \\ R &= \frac{10^{K+2}}{1 + 10^K}\end{aligned}$$

$$K = 0,00667t - 2 \text{ invullen geeft } R = \frac{10^{0,00667t}}{1 + 10^{0,00667t-2}}.$$

Bladzijde 178

58 a $S = 40$ geeft $10 \cdot {}^{10}\log(R) = 40$
 ${}^{10}\log(R) = 4$
 $R = 10^4$

$B = 20 \cdot 10^6$ en $R = 10^4$ geeft $C = 20 \cdot 10^6 \cdot {}^2\log(1 + 10^4) \approx 266 \cdot 10^6$ bps

b $B = 1000$ in formule 1 geeft $C = 1000 \cdot {}^2\log(1 + R)$.

$B = 1000$ in formule 3 geeft $C = 1440R$.

Los op $1440R - 1000 \cdot {}^2\log(1 + R) = 10 \cdot {}^2\log(1 + R)$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $R \approx 0,024$.

Bladzijde 179

c $S = 10 \cdot {}^{10}\log(R)$ geeft ${}^{10}\log(R) = 0,1S$, dus $R = 10^{0,1S}$.

$R = 10^{0,1S}$ invullen in $C = B \cdot {}^2\log(R)$ geeft

$C = B \cdot {}^2\log(10^{0,1S}) = B \cdot 0,1S \cdot {}^2\log(10) = 0,1 \cdot {}^2\log(10) \cdot B \cdot S$.

$0,1 \cdot {}^2\log(10) \approx 0,322$, dus de formule is $C = 0,322 \cdot B \cdot S$.

59 a $f(x) = 0$ geeft $3 + {}^2\log(x + 4) = 0$
 ${}^2\log(x + 4) = -3$

$$x + 4 = \frac{1}{8}$$

$$x = -3\frac{7}{8}, \text{ dus } x_A = -3\frac{7}{8}.$$

b $f(x) = 3 + {}^2\log(x + 4) = {}^2\log(8) + {}^2\log(x + 4) = {}^2\log(8(x + 4)) = {}^2\log(8x + 32)$

Dus $a = 8$ en $b = 32$.

c $x + 4 = 0$ geeft $x = -4$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -4$ en $T(-4, 0)$.

$f(0) = 3 + {}^2\log(4) = 3 + 2 = 5$, dus $S(0, 5)$.

Top $T(-4, 0)$, dus $g(x) = a(x + 4)^2$.

$g(0) = 5$ geeft $a \cdot 4^2 = 5$, dus $a = \frac{5}{16}$.

Dus $g(x) = \frac{5}{16}(x + 4)^2$.

60 a $f(a) = 16$ geeft $\frac{1}{9}(3^{-\frac{1}{2}a} + 27) = 16$

$$3^{-\frac{1}{2}a} + 27 = 144$$

$$3^{-\frac{1}{2}a} = 117$$

$$-\frac{1}{2}a = {}^3\log(117)$$

$$a = -2 \cdot {}^3\log(117)$$

b $f(x) = \frac{1}{9} \cdot (3^{-\frac{1}{2}x} + 27) = \frac{1}{9} \cdot 3^{-\frac{1}{2}x} + 3 = 3^{-2} \cdot 3^{-\frac{1}{2}x} + 3 = 3^{-\frac{1}{2}x-2} + 3 = (3^{-\frac{1}{2}})^{x+4} + 3$

Omdat $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ is het functievoorschrift $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x+4} + 3$.

Bladzijde 180

61 a $g_{40 \text{ minuten}} = \frac{24,2}{4,5}$ geeft $g_{\text{minuut}} = \left(\frac{24,2}{4,5}\right)^{\frac{1}{40}} \approx 1,04295$

b Los op $4,5 \cdot 1,043^t = 13,5$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t \approx 26$.

De eerste helft duurt $5 + 26 = 31$ minuten en de tweede helft duurt $60 - 31 = 29$ minuten, dus het verschil is 2 minuten.

c $t = 25$ geeft $P = 4,5 \cdot 1,043^{25} = 12,89\dots$

Los op $\frac{4 \cdot 12,89\dots \cdot 100}{5 \cdot V} = 30$

$$150V = 5156,7\dots$$

$$V = 34,3\dots$$

Dus 34 liter.

Bladzijde 181

62 a $f(x) = 2 \cdot 2^{x-3} - 4 = 2^1 \cdot 2^{x-3} - 4 = 2^{x-2} - 4$

Dus $y = 2^x$

↓ translatie (2, -4)

$$f(x) = 2^{x-2} - 4$$

b $f(x) = 10$ geeft $2 \cdot 2^{x-3} - 4 = 10$

$$2 \cdot 2^{x-3} = 14$$

$$2^{x-3} = 7$$

$$x - 3 = {}^2\log(7)$$

$$x = 3 + {}^2\log(7)$$

c $f(x) = g(x)$ geeft $2 \cdot 2^{x-3} - 4 = -2^{x-3} + 2$

$$3 \cdot 2^{x-3} = 6$$

$$2^{x-3} = 2$$

$$x - 3 = 1$$

$$x = 4$$

$$f(4) = 2 \cdot 2^1 - 4 = 0, \text{ dus } S(4, 0).$$

63 a $f(x) = g(x)$ geeft $2^{x+3} = 2^3 + 2\sqrt{x}$

$$x + 3 = 3 + 2\sqrt{x}$$

$$x = 2\sqrt{x}$$

$$x^2 = 4x$$

$$x = 0 \vee x = 4$$

Dus $x_B = 4$.

b $f(0) = 2^3 = 8$, dus $A(0, 8)$.

$$f(x) = 2^{x+3}$$

↓ $\times -\frac{1}{5}$ t.o.v. de x -as

$$h(x) = -\frac{1}{5} \cdot 2^{x+3}$$

↓ translatie (0, 8)

$$k(x) = -\frac{1}{5} \cdot 2^{x+3} + 8$$

c $x = -3 + {}^2\log(40) = {}^2\log(\frac{1}{8}) + {}^2\log(40) = {}^2\log(\frac{1}{8} \cdot 40) = {}^2\log(5)$

Dus $p = 5$.

64 a $f(x) = g(x)$ geeft $\log(x) = 2 - \log(x + 10)$
 $\log(x) + \log(x + 10) = 2$
 $\log(x(x + 10)) = 2$
 $x(x + 10) = 100$
 $x^2 + 10x - 100 = 0$
 $D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot -100 = 500$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{500}$
 $x = \frac{-10 + \sqrt{500}}{2} \vee x = \frac{-10 - \sqrt{500}}{2}$
 $x = \frac{-10 - \sqrt{500}}{2}$ voldoet niet, dus $x = \frac{-10 + \sqrt{500}}{2}$.
 $f(x) < g(x)$ geeft $0 < x < \frac{-10 + \sqrt{500}}{2}$

b $f(x) = \log(x)$
 $\downarrow \times -1$ t.o.v. de x -as
 $y = -\log(x)$
 $\downarrow$ translatie $(-10, 2)$
 $g(x) = 2 - \log(x + 10)$
c $g(0) = 2 - \log(10) = 2 - 1 = 1$, dus $B(0, 1)$.
 $g(x) = 0$ geeft $2 - \log(x + 10) = 0$
 $\log(x + 10) = 2$
 $x + 10 = 100$
 $x = 90$, dus $C(90, 0)$.

$l: y = ax + 1$ met $a = \frac{0 - 1}{90 - 0} = -\frac{1}{90}$ geeft $l: y = -\frac{1}{90}x + 1$.

Los op $\log(x) = -\frac{1}{90}x + 1$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft het snijpunt $D(8,12; 0,91)$.

d Neem bijvoorbeeld $x_S = 2$ en $x_T = 14$.

De helling in S is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 0,217...$

De helling in T is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=14} = 0,031...$

$\frac{\text{helling in } T}{\text{helling in } S} = \frac{0,031...}{0,217...} \approx 0,14$

12.5 Goniometrie

65 a $N = a + b \sin(c(t - d))$
 $a = \frac{5 + 1}{2} = 3$ en $b = 5 - 3 = 2$

De periode is 6, dus $c = \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 2$, dus $d = 2$.

Dus $N = 3 + 2 \sin(\frac{1}{3}\pi(t - 2))$.

- b** Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie maximum geeft $x = 1,2764\dots$ en $y = 4,9743\dots$ en de optie minimum geeft $x = 2,8472\dots$ en $y = -2,9743\dots$

$$a = \frac{4,9743\dots + (-2,9743\dots)}{2} = 1$$

$$b = 4,9743\dots - 1 \approx 3,974$$

$$\text{halve periode} = 2,8472\dots - 1,2764\dots = 1,5707\dots \text{ geeft periode} = 2 \cdot 1,5707\dots = 3,1415\dots,$$

$$\text{dus } c = \frac{2\pi}{3,1415\dots} = 2.$$

$$\text{Invoeren van de formule } y = 1 \text{ en gebruiken van de optie snijpunt geeft } x = 0,4910\dots,$$

$$\text{dus } d \approx 0,491.$$

- c** $g(x) = a + b \cdot \cos(c(x - d))$

$$\text{De periode is 3, dus } c = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

De amplitude van de grafiek van f is 2, dus de amplitude van de grafiek van g is 8, dus $b = 8$.

Het hoogste punt van de grafiek van f heeft y -coördinaat 5, dus het hoogste punt van de grafiek van g heeft y -coördinaat 5. Uit evenwichtsstand = hoogste stand – amplitude volgt voor de grafiek van g dat evenwichtsstand = $5 - 8 = -3$, dus $a = -3$.

De grafiek van f gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{3}$ en de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

Dus de x -coördinaat van het hoogste punt van de grafiek van f is $x = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{5}{6}$ en dus is de x -coördinaat van het hoogste punt van de grafiek van g gelijk aan $\frac{5}{6}$, dus $d = \frac{5}{6}$.

- d** $y_P = \text{evenwichtsstand} - \text{amplitude} = 1 - 2 = -1$

$$\text{Hoogste punt bij } x = \frac{1}{4}\pi \text{ en periode} = 2\pi, \text{ dus } x_P = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 1\frac{1}{4}\pi.$$

$$\text{Dus } P(1\frac{1}{4}\pi, -1).$$

- e** $f(x) = 0$ geeft $1 + 2 \cos(x - \frac{1}{4}\pi) = 0$

$$2 \cos(x - \frac{1}{4}\pi) = -1$$

$$\cos(x - \frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$x - \frac{1}{4}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{4}\pi = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 3\pi] \text{ geeft } x = \frac{11}{12}\pi \vee x = 2\frac{11}{12}\pi \vee x = 1\frac{7}{12}\pi, \text{ dus } x_A = \frac{11}{12}\pi, x_B = 1\frac{7}{12}\pi \text{ en } x_C = 2\frac{11}{12}\pi.$$

$$AB = \frac{19}{12}\pi - \frac{11}{12}\pi = \frac{4}{3}\pi \text{ en } BC = \frac{35}{12}\pi - \frac{19}{12}\pi = \frac{8}{3}\pi, \text{ dus } BC = 2 \cdot AB \text{ en dus } a = 2.$$

Bladzijde 184

- 66 a** $f(x) = 0$ geeft $\sin(\frac{1}{3}\pi(x - 4)) = 0$

$$\frac{1}{3}\pi(x - 4) = k \cdot \pi$$

$$x - 4 = k \cdot 3$$

$$x = 4 + k \cdot 3$$

$$k = -1 \text{ geeft } x = 1, \text{ dus } A(1, 0).$$

$$\text{De evenwichtsstand is 0 en de periode is } \frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6, \text{ dus } x_B = 1 + \frac{3}{4} \cdot 6 = 5\frac{1}{2} \text{ en } B(5\frac{1}{2}, 1).$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = \frac{1 - 0}{5\frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{9} \text{ geeft } \alpha \approx 12,5^\circ$$

- b** $f(x) = 1$ geeft $2 \sin(1\frac{1}{2}\pi x) = 1$

$$\sin(1\frac{1}{2}\pi x) = \frac{1}{2}$$

$$1\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 1\frac{1}{2}\pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{9} + k \cdot \frac{4}{3} \vee x = \frac{5}{9} + k \cdot \frac{4}{3}$$

$$\text{Dus } A(\frac{5}{9}, 1).$$

$$\text{Het beginpunt is } (0, 0) \text{ en de periode is } \frac{2\pi}{1\frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{3}, \text{ dus } x_B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \text{ en } B(\frac{1}{3}, 2).$$

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \text{ geeft } \alpha = 60,94\dots^\circ$$

$$\tan(\beta) = \frac{2}{1\frac{1}{3}} = \frac{6}{5} \text{ geeft } \beta = 50,19\dots^\circ$$

$$\angle AOB = 60,94\dots^\circ - 50,19\dots^\circ \approx 10,8^\circ$$

c noemer = 0 geeft $3 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi)) = 0$

$$\sin(2(x - \frac{1}{6}\pi)) = 0$$

$$2(x - \frac{1}{6}\pi) = k \cdot \pi$$

$$x - \frac{1}{6}\pi = k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ geeft } x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$.

d Invoeren van de formule van f en de numerieke afgeleide van f en gebruiken van de optie maximum bij de numerieke afgeleide met x tussen 10,7 en 14,7 geeft $x \approx 12,63$ en maximale helling $\approx 13,63$.

Bladzijde 188

67 a Een beginpunt is $(0, 0)$ en de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$, dus $x_A = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$, $A(4, 0)$ en $x_B = \frac{1}{4} \cdot 8 = 10$.

De evenwichtsstand is 0 en de amplitude is 3, dus $B(10, 3)$.

$$\tan(\alpha) = \frac{3-0}{10-4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha \approx 27^\circ$$

b $d = \frac{1\frac{1}{2} + -1}{2} = \frac{1}{4}$ en $a = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$

$$f(x) = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } 3 \sin(\frac{1}{4}\pi x) = 1\frac{1}{2}$$

$$\sin(\frac{1}{4}\pi x) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{4}\pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2}{3} + k \cdot 8 \vee x = \frac{10}{3} + k \cdot 8$$

$$\text{Dit geeft } x_K = \frac{2}{3} \text{ en } x_L = \frac{10}{3} + 8 = 11\frac{1}{3}.$$

$$\text{Dus de periode van } g \text{ is } 11\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ en dit geeft } b = \frac{2\pi}{10\frac{2}{3}} = \frac{3}{16}\pi.$$

$$\text{Voor de eerste top geldt } x = \frac{2}{3}, \text{ dus } c = \frac{2}{3}.$$

68 a $y_P = \text{evenwichtsstand} - \text{amplitude} = -1 - 2 = -3$

De periode is 2π en de grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{2}{3}\pi$,

$$\text{dus } x_P = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{1}{6}\pi.$$

$$\text{Dus } P(\frac{1}{6}\pi, -3).$$

b $f(x) = 0$ geeft $-1 + 2 \sin(x - \frac{2}{3}\pi) = 0$

$$2 \sin(x - \frac{2}{3}\pi) = 1$$

$$\sin(x - \frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}$$

$$x - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 3\pi] \text{ geeft } x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 2\frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi, \text{ dus } x_A = \frac{5}{6}\pi, x_B = 1\frac{1}{2}\pi \text{ en } x_C = 2\frac{5}{6}\pi.$$

$$AB = 1\frac{1}{2}\pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi \text{ en } BC = 2\frac{5}{6}\pi - 1\frac{1}{2}\pi = 1\frac{1}{3}\pi, \text{ dus } a = \frac{BC}{AB} = \frac{1\frac{1}{3}\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 2.$$

Bladzijde 189

69 a $r(t) = a + b \sin(c(t-d))$

$$a = \frac{5000 + 1000}{2} = 3000 \text{ en } b = 5000 - 3000 = 2000$$

$$\text{De periode is 10 jaar, dus } c = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi.$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 1$, dus $d = 1$.

$$\text{Dit geeft } r(t) = 3000 + 2000 \sin(\frac{1}{5}\pi(t-1)).$$

b De groeisnelheid is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, dus bij $t = 3$.

Invoeren van de formule van p en gebruiken van de optie dy/dx voor $t = 3$ geeft 2670,3..., dus de gevraagde groeisnelheid is 2700 prooidieren per jaar.

c Los op $4800 + 3400 \sin(\frac{1}{4}\pi(t-3)) = 4300$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t = 2,812...$ en $t = 7,187...$
 $r(2,812...) \approx 1214$ en $r(7,187...) \approx 3786$, dus de getallen 1200 en 3800 moeten op de puntjes staan.

Bladzijde 190

- 70 a** Voor elke waarde van a moet dan gelden $f(1) = 0$.
 $f(1) = a \cdot 1^2 - a = a - a = 0$, dus het klopt.
- b** De grafiek van g heeft beginpunt $(0, 0)$, amplitude 1 en periode $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$.
 Dus $x_T = 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 1\frac{1}{4}$ en dus $T(1\frac{1}{4}, 1)$.
 $f(1\frac{1}{4}) = 1$ geeft $a \cdot (1\frac{1}{4})^2 - a = 1$
 $\frac{25}{16}a - a = 1$
 $\frac{9}{16}a = 1$
 $a = 1\frac{7}{16}$

- 71 a** Van zowel de grafiek van f als van de grafiek van g is de evenwichtsstand 1, de amplitude 3, de periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$ en de x -coördinaat van een beginpunt 0.
 $x_P = 0 + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi$, dus $P(\frac{1}{4}\pi, 4)$.
 $x_R = 0 + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$, dus $R(\frac{1}{2}\pi, -2)$.
 $PR = \sqrt{(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi)^2 + (-2 - 4)^2} \approx 6,05$
- b** Invoeren van de formule van h en gebruiken van de optie maximum geeft $x = 0,392...$ en $y = 6,242...$ en de optie minimum geeft $x = 1,963...$ en $y = -2,242...$
 $p = \frac{6,242... + (-2,242...)}{2} = 2$
 $q = 6,242... - 2 \approx 4,24$
 halve periode $= 1,963... - 0,392... = 1,57...$ geeft periode $= 2 \cdot 1,57... = 3,14...$, dus $r = \frac{2\pi}{3,14...} = 2$.
 Bij $x = 0,392...$ is een hoogste punt, dus $s \approx 0,39$.

Bladzijde 191

- 72 a** $f(x) = \sqrt{3}$ geeft $2 \cos(3x) = \sqrt{3}$
 $\cos(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = -\frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
 Dus $A(\frac{1}{18}\pi, \sqrt{3})$ en $rc_k = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{18}\pi} = \frac{18\sqrt{3}}{\pi}$.
- b** $\tan(\alpha) = rc_k = \frac{18\sqrt{3}}{\pi}$ geeft $\alpha = 84,2...^\circ$
 De periode van de grafiek van f is $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ en de eerste top is $(0, 2)$, dus $T(\frac{2}{3}\pi, 2)$.
 $\tan(\beta) = rc_l = \frac{2}{\frac{2}{3}\pi} = \frac{3}{\pi}$ geeft $\beta = 43,6...^\circ$
 $\angle AOT = 84,2...^\circ - 43,6...^\circ \approx 41^\circ$

73 a noemer = 0 geeft $4 \cos(2(x - \frac{1}{3}\pi)) = 0$

$$\cos(2(x - \frac{1}{3}\pi)) = 0$$

$$2(x - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ geeft } x = \frac{7}{12}\pi \vee x = \frac{1}{12}\pi$$

Dus de verticale asymptoten zijn de lijnen $x = \frac{1}{12}\pi$ en $x = \frac{7}{12}\pi$.

b Los op $\frac{1}{4 \cos(2(x - \frac{1}{3}\pi))} = \frac{2}{3}$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 1,64...$

De optie dy/dx met $x = 1,64...$ geeft $rc_f \approx 3,3$.

Bladzijde 192

74 a $p = \frac{2700 + 2200}{2} = 2450$ en $q = 2700 - 2450 = 250$

De periode is 5 seconden, dus $r = \frac{2\pi}{5} \approx 1,26$.

b De amplitude is 1200 mL, dus per periode wordt 2400 mL oftewel 2,4 liter lucht ingeademd.

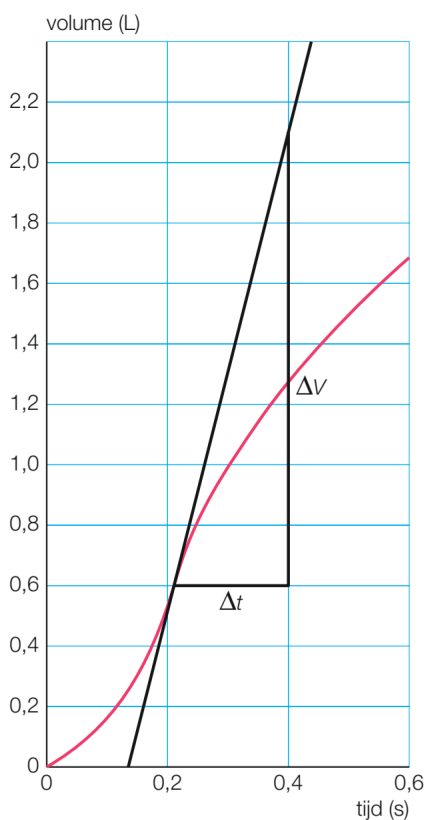
De periode is $\frac{2\pi}{4,19} = 1,499...$ seconden.

Dus per minuut $\frac{60}{1,499...} \approx 40$ keer inademen.

Dus per minuut wordt $40 \cdot 2,4 = 96$ liter lucht ingeademd.

c Op $t = 0,21$ gaat de grafiek over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend, dus de snelheid is maximaal op $t = 0,21$.

Teken de raaklijn in het punt met $t = 0,21$.



De snelheid is $\frac{2,1 - 0,6}{0,4 - 0,21} = 7,89...$ liter per seconde.

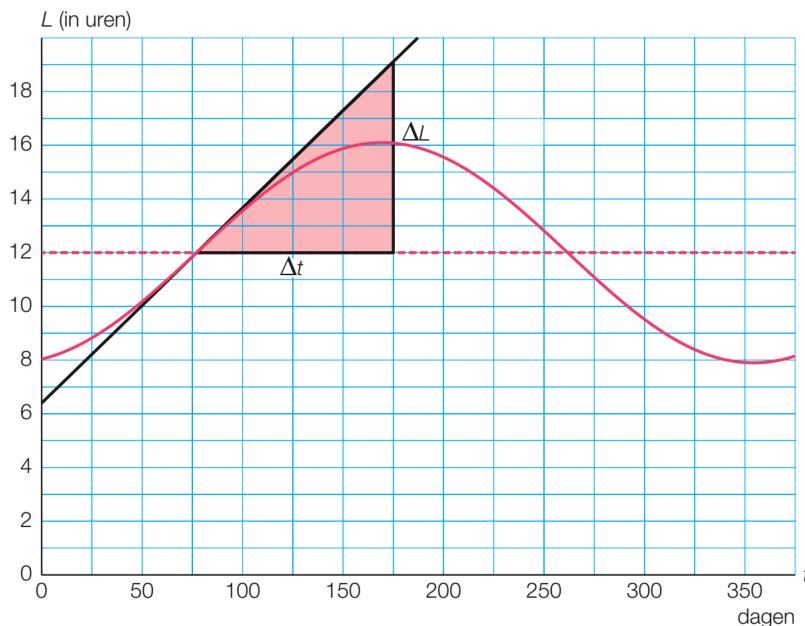
Dus de PEF is $60 \cdot 7,89... = 474$ liter per minuut.

Bladzijde 193

75 a $a = \frac{2\pi}{365} \approx 0,017$ en $b = 168 - \frac{1}{4} \cdot 365 \approx 77$

b Zie de figuur hieronder.

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 77$, dus de helling van de grafiek is maximaal bij $t = 77$.



$$\text{helling} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{19 - 12}{175 - 77} = 0,071... \text{ uur per dag}$$

Dus de gevraagde maximale helling is $0,071... \cdot 60 \approx 4$ minuten per dag.

Bladzijde 194

76 a De periode van de grafiek van h is $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Het eerste minimum van h rechts van de y -as wordt bereikt bij $x = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Dus het 14^e minimum van h wordt bereikt bij $x = \frac{1}{2} + 3 = 3\frac{1}{2}$.

Dus $x_B = 3\frac{1}{2}$ en dat is niet gelijk aan x_A .

b $f(0) = 3 \cdot 1,12^0 + 5 \sin(2\pi \cdot \frac{1}{4}) = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 8$

Los op $3 \cdot 1,12^x + 5 \sin(2\pi(x + \frac{1}{4})) = 8$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x \approx 12,57$.

Bladzijde 195

c Invoeren van de formule van f en van de numerieke afgeleide van f .

Zoek het laatste negatieve minimum van de numerieke afgeleide van f , dus gebruik de optie minimum bij de numerieke afgeleide met $38 \leq x \leq 40$.

Dit geeft $x = 39,24...$, dus $x_P \approx 39,2$.

77 a $f(\frac{1}{3}) = 3 + 3 \sin(\frac{1}{6}\pi) = 3 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$, dus $A(\frac{1}{3}, 4\frac{1}{2})$.

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$ en een beginpunt is $(0, 3)$, dus $x_T = 0 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ en $T(1, 6)$.

Ga uit van $y = a(x - p)^2 + q$.

$T(1, 6)$ is de top, dus $y = a(x - 1)^2 + 6$.

Door $A(\frac{1}{3}, 4\frac{1}{2})$, dus $a \cdot (-\frac{2}{3})^2 + 6 = 4\frac{1}{2}$

$$\frac{4}{9}a = -1\frac{1}{2}$$

$$a = -3\frac{3}{8}$$

$$\text{Dus } y = -3\frac{3}{8}(x - 1)^2 + 6 = -3\frac{3}{8}(x^2 - 2x + 1) + 6 = -3\frac{3}{8}x^2 + 6\frac{3}{4}x - 3\frac{3}{8} + 6 = -3\frac{3}{8}x^2 + 6\frac{3}{4}x + 2\frac{5}{8}.$$

b De helling van het lijnstuk SA is $4\frac{1}{2}$.

$$y = -3\frac{3}{8}x^2 + 6\frac{3}{4}x + 2\frac{5}{8} \text{ geeft } y' = -6\frac{3}{4}x + 6\frac{3}{4}$$

$$\text{De helling van de parabool in } A \text{ is } y'(\frac{1}{3}) = -6\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + 6\frac{3}{4} = 4\frac{1}{2}.$$

Er is dus geen knik in A .

78 a Bij de zomertijd is de evenwichtsstand $\frac{8,00 + 5,62}{2} = 6,81$.

Dus $p = 6,81 - 1 = 5,81$.

$q = 8,00 - 6,81 = 1,19$

$r = 341 - \frac{3}{4} \cdot 365 = 67,25$

Bladzijde 197

b Bereken het maximum van $V(t) = N(t) - P(t)$.

Invoeren van de formule van V en gebruiken van de optie maximum geeft $t = 172,39\dots$

$V(172) = 16,7749\dots$, dus de gevraagde tijd is 16 uur en $0,7749\dots \cdot 60 \approx 46$ minuten.

12.6 Meetkunde zonder coördinaten

Bladzijde 198

79 a $\angle B = 180^\circ - 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$ en $\angle C = 36^\circ + 58^\circ = 94^\circ$

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\frac{AC}{\sin(32^\circ)} = \frac{20}{\sin(94^\circ)}$

$$AC = \frac{20 \sin(32^\circ)}{\sin(94^\circ)} \approx 10,62$$

b In $\triangle ABD$ is $\angle A = 180^\circ - 90^\circ - (\alpha + 35^\circ) = 55^\circ - \alpha$

De sinusregel in ABC geeft $\frac{BC}{\sin(55^\circ - \alpha)} = \frac{10}{\sin(35^\circ)}$

$$BC = \frac{10 \sin(55^\circ - \alpha)}{\sin(35^\circ)} = \frac{10}{\sin(35^\circ)} \cdot \sin(55^\circ - \alpha) \approx 17,43 \cdot \sin(55^\circ - \alpha)$$

c De stelling van Pythagoras in $\triangle ABD$ geeft $BD^2 = 30^2 + 8^2 = 964$.

De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft $964 = 15^2 + 18^2 - 2 \cdot 15 \cdot 18 \cdot \cos(\angle BCD)$

$$540 \cos(\angle BCD) = -415$$

$$\cos(\angle BCD) = \frac{-415}{540}$$

$$\angle BCD \approx 140,2^\circ$$

d De cosinusregel geeft $90^2 = 37^2 + 112^2 - 2 \cdot 37 \cdot 112 \cdot \cos(\angle A)$

$$8288 \cos(\angle A) = 5813$$

$$\cos(\angle A) = \frac{5813}{8288}$$

$$\angle A = 45,46\dots^\circ$$

Zie de figuur hiernaast.

In $\triangle ADC$ is $\sin(45,46\dots^\circ) = \frac{CD}{37}$, dus $CD = 37 \sin(45,46\dots^\circ)$.

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 112 \cdot 37 \sin(45,46\dots^\circ) \approx 1477$$

e De cosinusregel geeft $BC^2 = 65^2 + 75^2 - 2 \cdot 65 \cdot 75 \cdot \cos(50^\circ)$

$$BC^2 = 3582,82\dots$$

$$BC = 59,85\dots$$

De sinusregel geeft $\frac{75}{\sin(\angle B)} = \frac{59,85\dots}{\sin(50^\circ)}$

$$\sin(\angle B) = \frac{75 \sin(50^\circ)}{59,85\dots}$$

$$\angle B \approx 73,7^\circ$$

f $\angle BAC = 180^\circ - 55^\circ - 80^\circ = 45^\circ$

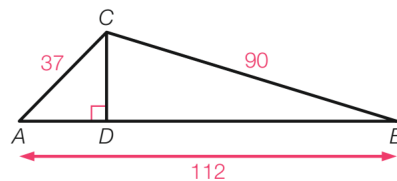
De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\frac{AB}{\sin(80^\circ)} = \frac{60}{\sin(45^\circ)}$

$$AB = \frac{60 \sin(80^\circ)}{\sin(45^\circ)} = 83,56\dots$$

De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $BD^2 = 83,56\dots^2 + 50^2 - 2 \cdot 83,56\dots \cdot 50 \cdot \cos(105^\circ)$

$$BD^2 = 11\,645,68\dots$$

$$BD \approx 108$$



g De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $10^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(\alpha)$

$$70 \cos(\alpha) = -26$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-26}{70}$$

$$\alpha = 111,80\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle ACB = \frac{2}{3} \cdot 111,80\dots^\circ = 74,53\dots^\circ$$

$$\text{De sinusregel in } \triangle ABC \text{ geeft } \frac{9}{\sin(\angle BAC)} = \frac{10}{\sin(74,53\dots^\circ)}$$

$$\sin(\angle BAC) = \frac{9 \sin(74,53\dots^\circ)}{10}$$

$$\angle BAC = 60,15\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle ABC = 180^\circ - 74,53\dots^\circ - 60,15\dots^\circ = 45,30\dots^\circ$$

$$\text{De sinusregel in } \triangle ABC \text{ geeft } \frac{AC}{\sin(45,30\dots^\circ)} = \frac{10}{\sin(74,53\dots^\circ)}$$

$$AC = \frac{10 \sin(45,30\dots^\circ)}{\sin(74,53\dots^\circ)} \approx 7,38$$

Bladzijde 200

80 a De cosinusregel in $\triangle H_1K_1V$ geeft $H_1V^2 = 48^2 + 42^2 - 2 \cdot 48 \cdot 42 \cdot \cos(60^\circ) = 2052$.

Dus de afstand tussen de heup en de voet op moment 1 is $\sqrt{2052}$ cm.

b In $\triangle A_1VH_1$ is $\angle A_1 = 90^\circ$, $A_1H_1 = 15$ en $H_1V = 45,3$, dus $A_1V = \sqrt{45,3^2 - 15^2} = 42,74\dots$

Dus $A_3V = 45 + 42,74\dots = 87,74\dots$

In $\triangle A_3VH_3$ is $\angle A_3 = 90^\circ$, $A_3H_3 = 15$ en $A_3V = 87,74\dots$, dus $H_3V^2 = 87,74\dots^2 + 15^2 = 7924,09\dots$

De cosinusregel in $\triangle H_3VK_3$ geeft $7924,09\dots = 48^2 + 42^2 - 2 \cdot 48 \cdot 42 \cdot \cos(\angle H_3K_3V)$

$$4032 \cos(\angle H_3K_3V) = -3856,09\dots$$

$$\cos(\angle H_3K_3V) = -0,95\dots$$

$$\angle H_3K_3V \approx 163^\circ$$

Bladzijde 201

81 a $\tan(25^\circ) = \frac{r}{300}$, dus $r = 300 \tan(25^\circ)$.

$$\text{opp} = \pi r^2 = \pi \cdot (300 \tan(25^\circ))^2 = 61\,480,5\dots$$

Dus $61\,481 \text{ cm}^2$.

b $\angle QSV = 50^\circ + \alpha$, dus $\angle SQV = 180^\circ - 90^\circ - \angle QSV = 90^\circ - (50^\circ + \alpha) = 40^\circ - \alpha$.

$$\text{De sinusregel geeft } \frac{SP}{\sin(40^\circ - \alpha)} = \frac{500}{\sin(50^\circ)}$$

$$SP = \frac{500 \sin(40^\circ - \alpha)}{\sin(50^\circ)} = \frac{500}{\sin(50^\circ)} \cdot \sin(40^\circ - \alpha) \approx 653 \cdot \sin(40^\circ - \alpha)$$

c Los op $653 \cdot \sin(40^\circ - \alpha) = \frac{300}{\cos(\alpha)}$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $\alpha \approx 12^\circ$.

De lichtspot moet $25^\circ + 12^\circ = 37^\circ$ naar rechts gedraaid worden.

Bladzijde 203

82 a De cosinusregel in $\triangle PQR$ geeft $12^2 = 5,5^2 + 9^2 - 2 \cdot 5,5 \cdot 9 \cdot \cos(\angle PRQ)$

$$99 \cos(\angle PRQ) = -32,75$$

$$\cos(\angle PRQ) = -0,33\dots$$

$$\angle PRQ = 109,31\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle SRQ = 180^\circ - 109,31\dots^\circ = 70,68\dots^\circ \approx 70,7^\circ.$$

b $\cos(70,68\dots^\circ) = \frac{SR}{9}$, dus $SR = 9 \cos(70,68\dots^\circ) = 2,97\dots$

Dus SR wordt $2,97\dots + 2,5 = 5,47\dots$

en PS wordt $5,47\dots + 5,5 = 10,97\dots$

In $\triangle SRQ$ is $\angle S = 90^\circ$, $SR = 5,47\dots$ en $QR = 9$, dus $QS^2 = 9^2 - 5,47\dots^2 = 50,99\dots$

In $\triangle PQS$ is $\angle S = 90^\circ$, $QS^2 = 50,99\dots$ en $PS = 10,97\dots$, dus $PQ = \sqrt{50,99\dots + 10,97\dots^2} \approx 13,1$ meter.

- 83** De cosinusregel in $\triangle ABF$ geeft $BF^2 = 425^2 + 542^2 - 2 \cdot 425 \cdot 542 \cdot \cos(58^\circ)$

$$BF^2 = 230\,255,19\dots$$

$$BF = 479,84\dots$$

$$\begin{aligned} \text{De sinusregel in } \triangle ABF \text{ geeft } \frac{542}{\sin(\angle ABF)} &= \frac{479,84\dots}{\sin(58^\circ)} \\ \sin(\angle ABF) &= \frac{542 \sin(58^\circ)}{479,84\dots} \end{aligned}$$

$$\angle ABF = 73,3\dots^\circ$$

Het verschil is $73,3\dots^\circ - 71^\circ \approx 2^\circ$.

Bladzijde 204

- 84** $\angle HiNL = 180^\circ - 90,9^\circ - 49,3^\circ = 39,8^\circ$ en $\angle HuNH_i = 39,8^\circ + 47,7^\circ = 87,5^\circ$

$$\begin{aligned} \text{De sinusregel in } \triangle NH_iL \text{ geeft } \frac{NH_i}{\sin(90,9^\circ)} &= \frac{5060}{\sin(39,8^\circ)} \\ NH_i &= \frac{5060 \sin(90,9^\circ)}{\sin(39,8^\circ)} = 7903,9\dots \end{aligned}$$

De cosinusregel in $\triangle NH_iHu$ geeft $HuH_i^2 = 4810^2 + 7903,9\dots^2 - 2 \cdot 4810 \cdot 7903,9\dots \cdot \cos(87,5^\circ)$

$$HuH_i^2 = 82\,291\,417,9\dots$$

$$HuH_i = 9071,4\dots$$

De gevraagde afstand is 9070 m.

- 85** De cosinusregel geeft $101^2 = 92^2 + 145^2 - 2 \cdot 92 \cdot 145 \cdot \cos(\angle A)$

$$26\,680 \cos(\angle A) = 19\,288$$

$$\cos(\angle A) = 0,72\dots$$

$$\angle A = 43,70\dots^\circ$$

De hoogte bij de zijde AC is BD .

$$\sin(\angle A) = \frac{BD}{AB} \text{ oftewel } \sin(43,70\dots^\circ) = \frac{BD}{92} \text{ geeft } BD = 92 \sin(43,70\dots^\circ) = 63,56\dots$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 145 \cdot 63,56\dots \approx 4608 \text{ m}^2$$

Bladzijde 205

- 86 a** $G = O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot r + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot r + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot r = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r$
 $AB + BC + AC = P$, dus $G = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r$.

- b** De cosinusregel geeft $13^2 = 14^2 + 15^2 - 2 \cdot 14 \cdot 15 \cdot \cos(\angle A)$

$$420 \cos(\angle A) = 252$$

$$\cos(\angle A) = \frac{252}{420}$$

$$\angle A = 53,13\dots^\circ$$

De hoogte bij de zijde AB is CD .

$$\sin(\angle A) = \frac{CD}{AC} \text{ oftewel } \sin(53,13\dots^\circ) = \frac{CD}{15} \text{ geeft } CD = 15 \sin(53,13\dots^\circ) = 12.$$

$$\text{Dus } O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 = 84.$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r \text{ met } P = 14 + 13 + 15 = 42 \text{ geeft } G = \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot r = 21r.$$

$$\text{Dus } 21r = 84$$

$$r = 4$$

87 $\triangle BCQ$ is gelijkbenig, dus er geldt $\sin(\frac{1}{2}\angle BQC) = \frac{\frac{1}{2}BC}{BQ}$

$$\sin(\alpha) = \frac{6}{7}$$

$$\alpha = 58,99\dots^\circ$$

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\frac{10}{\sin(\angle BCA)} = \frac{12}{\sin(58,99\dots^\circ)}$

$$\sin(\angle BCA) = \frac{10 \sin(58,99\dots^\circ)}{12}$$

$$\angle BCA = 45,58\dots^\circ$$

Dus $\angle ABC = 180^\circ - 58,99\dots^\circ - 45,58\dots^\circ = 75,41\dots^\circ$

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\frac{AC}{\sin(75,41\dots^\circ)} = \frac{12}{\sin(58,99\dots^\circ)}$

$$AC = \frac{12 \sin(75,41\dots^\circ)}{\sin(58,99\dots^\circ)} \approx 13,55$$

Bladzijde 206

88 $AE = \sqrt{0,30^2 + 0,25^2} = \sqrt{0,1525}$

In $\triangle EBD$ is $BE = \sqrt{1,80^2 + 0,25^2} = \sqrt{3,3025}$ en $\tan(\angle DEB) = \frac{0,25}{1,80}$, dus $\angle DEB = 7,90\dots^\circ$

De cosinusregel in $\triangle ABE$ geeft $1,60^2 = 0,1525 + 3,3025 - 2 \cdot \sqrt{0,1525} \cdot \sqrt{3,3025} \cdot \cos(\angle BEA)$

$$1,419\dots \cdot \cos(\angle BEA) = 0,895$$

$$\cos(\angle BEA) = 0,63\dots$$

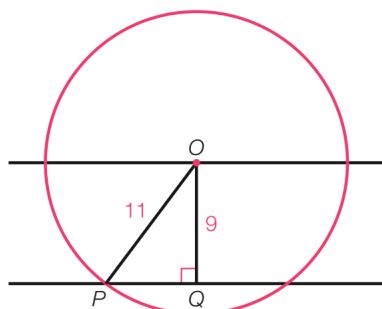
$$\angle BEA = 50,90\dots^\circ$$

$$\angle AED = 7,90\dots^\circ + 50,90\dots^\circ = 58,81\dots^\circ$$

Dus $58,81\dots^\circ - 39,8^\circ \approx 19^\circ$ gekanteld ten opzichte van de beginsituatie.

Bladzijde 207

89 a



In $\triangle OPQ$ is $PQ = \sqrt{11^2 - 9^2} = 6,3\dots$

Dus $SP = 20 - 6,3\dots = 13,6\dots$

Dus na 14 km varen.

b $\angle BAT = 180^\circ - 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$ en $\angle ABT = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$

$$\angle ATB = 52^\circ + 65^\circ = 117^\circ$$

De sinusregel in $\triangle ABT$ geeft $\frac{AT}{\sin(25^\circ)} = \frac{14}{\sin(117^\circ)}$

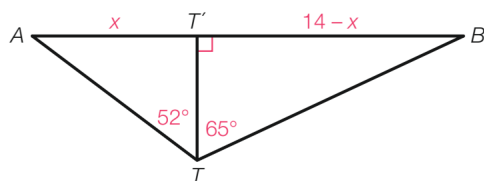
$$AT = \frac{14 \sin(25^\circ)}{\sin(117^\circ)} = 6,64\dots$$

De afstand van het schip tot de kustlijn is TT' .

$$\sin(\angle BAT) = \frac{TT'}{AT} \text{ oftewel } \sin(38^\circ) = \frac{TT'}{6,64\dots} \text{ geeft } TT' = 6,64\dots \cdot \sin(38^\circ) = 4,08\dots$$

De gevraagde afstand is 4,1 km.

Alternatieve uitwerking



$$\tan(52^\circ) = \frac{x}{TT'}, \text{ dus } TT' = \frac{x}{\tan(52^\circ)}.$$

$$\tan(65^\circ) = \frac{14-x}{TT'}, \text{ dus } TT' = \frac{14-x}{\tan(65^\circ)}.$$

$$\text{Los op } \frac{x}{\tan(52^\circ)} = \frac{14-x}{\tan(65^\circ)}.$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $TT' = 4,08\dots$

De gevraagde afstand is 4,1 km.

12.7 Meetkunde met coördinaten

Bladzijde 208

90

- a** $f(x) = 0$ geeft $\frac{1}{5}(x^2 - 2)(x^2 - 5) = 0$
 $x^2 - 2 = 0 \vee x^2 - 5 = 0$
 $x^2 = 2 \vee x^2 = 5$
 $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$
Dus $x_A = -\sqrt{5}$ en $x_C = \sqrt{2}$.
 $f(0) = \frac{1}{5} \cdot -2 \cdot -5 = 2$, dus $T(0, 2)$.
 $\tan(\angle ATO) = \frac{OA}{OT} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ geeft $\angle ATO = 48,18\dots^\circ$
 $\tan(\angle CTO) = \frac{OC}{OT} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ geeft $\angle CTO = 35,26\dots^\circ$
 $\angle ATC = 48,18\dots^\circ + 35,26\dots^\circ \approx 83,5^\circ$
- b** $f(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{3}{4}x + 7\frac{1}{2} = 0$
 $2x^2 - 7x - 30 = 0$
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -30 = 289$, dus $\sqrt{D} = 17$
 $x = \frac{7+17}{4} = 6 \vee x = \frac{7-17}{4} = -2\frac{1}{2}$
Dus $A(-2\frac{1}{2}, 0)$.
 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{3}{4}x + 7\frac{1}{2}$ geeft $f'(x) = -x + 1\frac{3}{4}$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = f'(-2\frac{1}{2}) = 4\frac{1}{4}$ geeft $\alpha = 76,75\dots^\circ$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_l = f'(0) = 1\frac{3}{4}$ geeft $\beta = 60,25\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 76,75\dots^\circ - 60,25\dots^\circ \approx 16,5^\circ$
Dus $\angle(k, l) \approx 16,5^\circ$ en dat is niet kleiner dan 15° .
- c** Lijn n door O en loodrecht l geeft $n: 5x + 2y = 0$.
 n snijden met l geeft het snijpunt S .
 $\begin{cases} 5x + 2y = 0 \\ 2x - 5y = -20 \end{cases} \begin{vmatrix} 5 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 25x + 10y = 0 \\ 4x - 10y = -40 \end{cases} +$
 $\frac{29x = -40}{x = -\frac{40}{29}}$
 $x = -\frac{40}{29}$ geeft $5 \cdot -\frac{40}{29} + 2y = 0$
 $2y = \frac{200}{29}$
 $y = \frac{100}{29}$, dus $S(-\frac{40}{29}, \frac{100}{29})$.
 $d(k, l) = d(O, l) = d(O, S) = \sqrt{(-\frac{40}{29})^2 + (\frac{100}{29})^2} = 3,713\dots$
 $d(P, l) = d(k, l) - 1 = 3,713\dots - 1 \approx 2,71$

- d** $c: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$
 $c: x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$
 $c: (x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 + 4 = 0$
 $c: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
Dus $M(2, 1)$.
 $k: 3x + 2y = c$ door $M(2, 1)$, dus $c = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$.
 $k: 3x + 2y = 8$ snijden met de y -as geeft $2y = 8$, dus $y = 4$ en $N(0, 4)$.
 $r_d = d(M, N) = \sqrt{(0-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}$
Dus $d: x^2 + (y-4)^2 = 13$.
- e** k snijden met de x -as geeft $2x = 6$, dus $x = 3$ en $A(3, 0)$.
 k snijden met de y -as geeft $3y = 6$, dus $y = 2$ en $B(0, 2)$.
 $M(1\frac{1}{2}, 1)$ is het midden van AB .
 $r = d(A, M) = \sqrt{(1\frac{1}{2} - 3)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{3\frac{1}{4}}$
Dus $c: (x - 1\frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = 3\frac{1}{4}$.
 $x = 0$ en $y = 0$ invullen geeft $(-1\frac{1}{2})^2 + (-1)^2 = 3\frac{1}{4}$.
Dit klopt, dus c gaat door de oorsprong.
- f** k snijden met de x -as geeft $\frac{1}{2}x - 1 = 0$
 $\frac{1}{2}x = 1$
 $x = 2$, dus $A(2, 0)$.

Lijn n door A en loodrecht k .

$$\left. \begin{array}{l} n: y = -2x + b \\ \text{door } A(2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 2 + b = 0 \\ b = 4 \end{array}$$

Dus $n: y = -2x + 4$.

n snijden met l geeft het snijpunt S .

$$-2x + 4 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$-2\frac{1}{2}x = -2$$

$$x = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{4}{5} \text{ geeft } y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + 2 = 2\frac{2}{5}, \text{ dus } S(\frac{4}{5}, 2\frac{2}{5}).$$

Het punt M is het midden van het lijnstuk AS , dus $M(\frac{1}{2}(4 + \frac{4}{5}), \frac{1}{2}(0 + 2\frac{2}{5})) = M(1\frac{2}{5}, 1\frac{1}{5})$.

Bladzijde 209

91 a $f(x) = 0$ geeft $-2 + \sqrt{2x+8} = 0$

$$\sqrt{2x+8} = 2$$

$$2x + 8 = 4$$

$$2x = -4$$

$$x = -2, \text{ dus } A(-2, 0).$$

$$f(x) = -2 + \sqrt{2x+8} = -2 + (2x+8)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}(2x+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+8}}$$

$$rc_k = f'(-2) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}, \text{ dus } rc_l = -2.$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -2x + b \\ \text{door } A(-2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot -2 + b = 0 \\ b = -4 \end{array}$$

Dus $l: y = -2x - 4$ en $M(0, -4)$.

$$c: x^2 + (y+4)^2 = r^2 \text{ door } A(-2, 0) \text{ geeft } r^2 = (-2)^2 + 4^2 = 20.$$

$$\text{Dus } c: x^2 + (y+4)^2 = 20.$$

$2x + 8 = 0$ geeft $x = -4$, dus het randpunt van de grafiek van f is het punt $(-4, -2)$.

$x = -4$ en $y = -2$ invullen in $x^2 + (y+4)^2 = 20$ geeft $(-4)^2 + 2^2 = 20$ en dit klopt.

Dus c gaat door het randpunt van de grafiek van f .

$$\text{b } f(x) = \sqrt{2x+6} = (2x+6)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}(2x+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$$

$$rc_l = rc_k, \text{ dus los op } f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2x+6}} &= \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x+6} &= 2 \\ 2x+6 &= 4 \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} l: y &= \frac{1}{2}x + b \\ f(-1) &= 2, \text{ dus door } (-1, 2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot -1 + b &= 2 \\ -\frac{1}{2} + b &= 2 \\ b &= 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } l: y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}.$$

Lijn n door O en n loodrecht l geeft $n: y = -2x$.

n snijden met l geeft het snijpunt S .

$$-2x = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$$

$$-2\frac{1}{2}x = 2\frac{1}{2}$$

$$x = -1, \text{ dus } S(-1, 2).$$

$$d(k, l) = d(O, l) = d(O, S) = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{c } f(x) = 0 \text{ geeft } -x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x+2)(x-4) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 4$$

Dus $A(-2, 0)$ en $B(4, 0)$.

$$x_T = -\frac{2}{-2} = 1 \text{ en } f(1) = 9, \text{ dus } T(1, 9).$$

$$c: (x-1)^2 + (y-9)^2 = r^2 \text{ door } A(-2, 0) \text{ geeft } r^2 = (-3)^2 + (-9)^2 = 90.$$

$$\text{Dus } c: (x-1)^2 + (y-9)^2 = 90.$$

$$c \text{ snijden met de } y\text{-as, dus } x = 0 \text{ geeft } (-1)^2 + (y-9)^2 = 90$$

$$(y-9)^2 = 89$$

$$y-9 = \sqrt{89} \vee y-9 = -\sqrt{89}$$

$$y = 9 + \sqrt{89} \vee y = 9 - \sqrt{89}$$

Dus de gevraagde y -coördinaten zijn $y = 9 + \sqrt{89}$ en $y = 9 - \sqrt{89}$.

$$\text{d } \text{Substitutie van } y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3} \text{ in } x^2 + y^2 = 13 \text{ geeft } x^2 + \left(-\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3}\right)^2 = 13$$

$$x^2 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{52}{9}x + \frac{169}{9} = 13$$

$$\frac{13}{9}x^2 - \frac{52}{9}x + \frac{52}{9} = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

$D = 0$, dus k raakt c .

$$\text{e } c: (x - \sqrt{13})^2 + y^2 = 4$$

$$\text{Substitutie van } y = \frac{2}{3}x \text{ in } (x - \sqrt{13})^2 + y^2 = 4 \text{ geeft } (x - \sqrt{13})^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 = 4$$

$$x^2 - 2x\sqrt{13} + 13 + \frac{4}{9}x^2 = 4$$

$$\frac{13}{9}x^2 - 2x\sqrt{13} + 9 = 0$$

$$D = (-2\sqrt{13})^2 - 4 \cdot \frac{13}{9} \cdot 9 = 52 - 52 = 0$$

$D = 0$, dus k raakt c .

f De straal r_d van d is $d(N, k)$.

Lijn l door N en loodrecht k .

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -2x + b \\ \text{door } N(4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 4 + b = 0 \\ b = 8 \end{array}$$

Dus $l: y = -2x + 8$.

l snijden met k geeft het snijpunt S .

$$-2x + 8 = \frac{1}{2}x$$

$$-2\frac{1}{2}x = -8$$

$$x = 3\frac{1}{5}$$

$x = 3\frac{1}{5}$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{5} = 1\frac{3}{5}$, dus $S(3\frac{1}{5}, 1\frac{3}{5})$.

$$r_d = d(N, k) = d(N, S) = \sqrt{(3\frac{1}{5} - 4)^2 + (1\frac{3}{5} - 0)^2} = \sqrt{3\frac{1}{5}}$$

$$d(M, N) = \sqrt{(4 - 0)^2 + (0 - 3)^2} = 5$$

$$d(c, d) = d(M, N) - r_c - r_d = 5 - 1 - \sqrt{3\frac{1}{5}} = 4 - \sqrt{3\frac{1}{5}}$$

Bladzijde 211

92 a Substitutie van $y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ in $x^2 - 4x + y^2 - 6y = -8$ geeft $x^2 - 4x + (\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2})^2 - 6(\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}) = -8$

$$x^2 - 4x + \frac{1}{4}x^2 + 4\frac{1}{2}x + 20\frac{1}{4} - 3x - 27 = -8$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$D = 0$, dus k raakt c_1 .

b $c_1: x^2 - 4x + y^2 - 6y = -8$

$$c_1: (x - 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 = -8$$

$$c_1: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$$

Dus $M(2, 3)$.

$l \perp k$ en $rc_k = \frac{1}{2}$, dus $rc_l = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -2x + b \\ \text{door } M(2, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 2 + b = 3 \\ -4 + b = 3 \\ b = 7 \end{array}$$

$$b = 7$$

Dus $l: y = -2x + 7$ en $S(0, 7)$.

$$c_2: x^2 + (y - 7)^2 = r^2 \text{ door } M(2, 3) \text{ geeft } r^2 = 2^2 + (-4)^2 = 20.$$

Dus $c_2: x^2 + (y - 7)^2 = 20$.

Bladzijde 212

93 Lijn n door O en loodrecht k geeft $n: y = -4x$.

n snijden met k geeft het snijpunt S .

$$-4x = \frac{1}{4}x + 1$$

$$-4\frac{1}{4}x = 1$$

$$x = -\frac{4}{17}$$

$x = -\frac{4}{17}$ geeft $y = -4 \cdot -\frac{4}{17} = \frac{16}{17}$, dus $S(-\frac{4}{17}, \frac{16}{17})$.

$$d(k, l) = d(O, k) = d(O, S) = \sqrt{(-\frac{4}{17})^2 + (\frac{16}{17})^2} = \sqrt{\frac{16}{17}}$$

94 $f(x) = \sqrt{3x + 4} = (3x + 4)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(3x + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 4}}$

$$rc_k = f'(0) = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$$

$l \perp k$, dus $rc_l = -\frac{4}{3}$

$l: y = -\frac{4}{3}x + 2$ snijden met de x -as geeft $-\frac{4}{3}x + 2 = 0$

$$-\frac{4}{3}x = -2$$

$$x = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } M(1\frac{1}{2}, 0).$$

Cirkel c heeft straal r met $r = d(M, A) = \sqrt{(0 - 1\frac{1}{2})^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{6\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{2}$.

Dus $x_P = 1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = -1$ en $x_Q = 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 4$.

95 a $f(x) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{9}x - \frac{20}{9}$ geeft $f'(x) = \frac{8}{9}x - \frac{16}{9}$

$$rc_k = f'(0) = -\frac{16}{9}$$

$$\tan(\alpha) = rc_k = -\frac{16}{9} \text{ geeft } \alpha = -60,6\dots^\circ$$

De hoek tussen k en de y -as is $90^\circ - 60,6\dots^\circ = 29,3\dots^\circ$ en dat is kleiner dan 30° .

b $f(x) = 0$ geeft $\frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{9}x - \frac{20}{9} = 0$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x+1)(x-5) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 5$$

Dus $A(-1, 0)$ en $B(5, 0)$.

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{8}{9}x = \frac{16}{9}$$

$$x = 2$$

$$f(2) = \frac{4}{9} \cdot 2^2 - \frac{16}{9} \cdot 2 - \frac{20}{9} = -4, \text{ dus } T(2, -4).$$

$$c: (x-2)^2 + (y+4)^2 = r^2 \text{ door } A(-1, 0) \text{ geeft } r^2 = (-3)^2 + 4^2 = 25.$$

$$\text{Dus } c: (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25.$$

$$c \text{ snijden met de } y\text{-as, dus } x = 0 \text{ geeft } (-2)^2 + (y+4)^2 = 25$$

$$(y+4)^2 = 21$$

$$y+4 = \sqrt{21} \vee y+4 = -\sqrt{21}$$

$$y = -4 + \sqrt{21} \vee y = -4 - \sqrt{21}$$

Dus de gevraagde y -coördinaten zijn $y = -4 + \sqrt{21}$ en $y = -4 - \sqrt{21}$.

Bladzijde 213

96 a Van c_1 is $M_1(0, 3)$ en $r_1 = 3$, dus $y_C = y_D = 6$.

$$\text{De straal van } c_2 \text{ is } r_2 = 2, \text{ dus } y_{M_2} = 6 - 2 = 4.$$

Zie de figuur hiernaast.

$$M_1M_2 = r_1 + r_2 = 3 + 2 = 5 \text{ en } M_2P = 4 - 3 = 1.$$

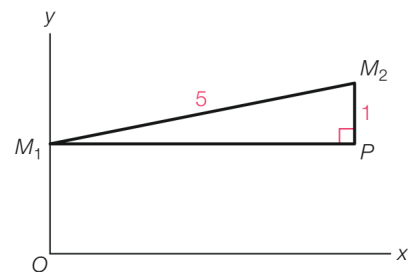
$$\text{Dus } M_1P = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24}.$$

$$\text{Dus } x_{M_2} = \sqrt{24} \text{ en dus } M_2(\sqrt{24}, 4).$$

b $\sin(\alpha) = \frac{M_2N}{M_2M_3}$

$$M_2N = r_2 - r = 2 - r \text{ en } M_2M_3 = r_2 + r = 2 + r = r + 2$$

$$\text{Dus } \sin(\alpha) = \frac{2-r}{r+2}.$$



Bladzijde 214

97 a $rc_{OP} = \frac{0-4}{0-3} = \frac{4}{3}$

Lijn l loodrecht OP , dus $rc_l = -\frac{3}{4}$.

$$l: y = -\frac{3}{4}x + b \quad \left. \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot -3 + b = -4 \\ \text{door } P(-3, -4) \end{array} \right\}$$

$$2\frac{1}{4} + b = -4$$

$$b = -6\frac{1}{4}$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{3}{4}x - 6\frac{1}{4}.$$

b c snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $x^2 = 25$ en dit geeft $x = 5 \vee x = -5$.

Dus $A(-5, 0)$ en $B(5, 0)$.

$$l \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } -\frac{3}{4}x - 6\frac{1}{4} = 0$$

$$-\frac{3}{4}x = 6\frac{1}{4}$$

$$x = -8\frac{1}{3}, \text{ dus } S(-8\frac{1}{3}, 0).$$

$$\text{Dus } AS = 3\frac{1}{3} \text{ en } BS = 13\frac{1}{3} \text{ en } AS \cdot BS = \frac{10}{3} \cdot \frac{40}{3} = \frac{400}{9}.$$

$$PS^2 = (-3 - (-8\frac{1}{3}))^2 + (-4 - 0)^2 = \frac{400}{9}$$

$$\text{Dus } AS \cdot BS = PS^2.$$

c Er geldt $PS^2 = AS \cdot BS = 7 \cdot 3 = 21$.

$$\text{In } \triangle MPS \text{ is } \angle P = 90^\circ, MP = 3 \text{ en } PS^2 = 21, \text{ dus } MS = \sqrt{3^2 + 21} = \sqrt{30}.$$

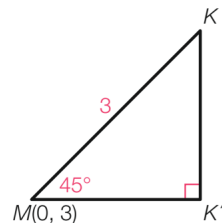
$$\text{Dus } d(S, d) = MS - r_d = \sqrt{30} - 3.$$

98 Zie de figuur hiernaast.

$$\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \text{ dus } \frac{KK'}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ en } \frac{MK'}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$KK' = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ en } MK' = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{Dus } K(1\frac{1}{2}\sqrt{2}, 3 + 1\frac{1}{2}\sqrt{2}).$$



Bladzijde 215

99 a Substitutie van $y = 2x + 2$ in $x^2 + y^2 = 6x + 6y - 13$ geeft $x^2 + (2x + 2)^2 = 6x + 6(2x + 2) - 13$
 $x^2 + 4x^2 + 8x + 4 = 6x + 12x + 12 - 13$
 $5x^2 - 10x + 5 = 0$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x - 1)^2 = 0$
 $x = 1$

$x = 1$ geeft $y = 2 \cdot 1 + 2 = 4$, dus $A(1, 4)$.

b l snijden met de x -as geeft $2x + 2 = 0$, dus $x = -1$ en $S(-1, 0)$.

l snijden met de y -as geeft $y = 2$, dus $T(0, 2)$.

Het middelpunt van d is $(-\frac{1}{2}, 1)$, dus $d: (x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = r^2$.

d door $S(-1, 0)$ geeft $r^2 = (-\frac{1}{2})^2 + (-1)^2 = 1\frac{1}{4}$.

Dus $d: (x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = 1\frac{1}{4}$.

$x = 0$ en $y = 0$ invullen geeft $(0 + \frac{1}{2})^2 + (0 - 1)^2 = 1\frac{1}{4}$ en dit klopt, dus d gaat door O .

100 a Substitutie van $y = 2x$ in $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 49$ geeft $(x + 6)^2 + (2x - 1)^2 = 49$
 $x^2 + 12x + 36 + 4x^2 - 4x + 1 = 49$
 $5x^2 + 8x - 12 = 0$
 $D = 8^2 - 4 \cdot 5 \cdot -12 = 304$
 $x_B = \frac{-8 + \sqrt{304}}{10} \approx 0,94$

b $M(-6, 1)$ en $r_c = 7$

$y_M - r_c = 1 - 7 = -6$, dus $m: y = -6$.

l snijden met m geeft $2x = -6$, dus $x_C = -3$.

Dit geeft $x_N = -3 + 8 = 5$ en $N(5, -6)$.

$d(M, N) = \sqrt{(5 - (-6))^2 + (-6 - 1)^2} = \sqrt{170}$

$d(c, d) = d(M, N) - r_c - r_d = \sqrt{170} - 7 - 3 = \sqrt{170} - 10$

Bladzijde 216

101 a $f(x) = \frac{-6}{2x-3} + 2 = -6(2x-3)^{-1} + 2$ geeft $f'(x) = 6(2x-3)^{-2} \cdot 2 = \frac{12}{(2x-3)^2}$

$rc_l = f'(3) = \frac{12}{(6-3)^2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ en $rc_m = f'(0) = \frac{12}{(0-3)^2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

b Van de lijn n door A loodrecht l is $rc_n = -\frac{3}{4}$.

$n: y = -\frac{3}{4}x + b$
 door $A(3, 0)$ $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 3 + b = 0 \\ b = \frac{9}{4} \end{array} \right.$

Dus $n: y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

$m: y = \frac{4}{3}x + b$ door $B(0, 4)$, dus $m: y = \frac{4}{3}x + 4$.

n snijden met m geeft het snijpunt S .

$-\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} = \frac{4}{3}x + 4$

$-9x + 27 = 16x + 48$

$-25x = 21$

$x = -\frac{21}{25}$

$x = -\frac{21}{25}$ geeft $y = \frac{4}{3} \cdot -\frac{21}{25} + 4 = \frac{72}{25}$, dus $S(-\frac{21}{25}, \frac{72}{25})$.

M_1 is het midden van het lijnstuk AS , dus $M_1(\frac{1}{2}(3 + -\frac{21}{25}), \frac{1}{2}(0 + \frac{72}{25})) = M_1(\frac{27}{25}, \frac{36}{25})$.

c $c_2: x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$

$c_2: x^2 - 3x + y^2 - 4y = 0$

$c_2: (x - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + (y - 2)^2 - 4 = 0$

$c_2: (x - 1\frac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 = 6\frac{1}{4}$

Dus $M_2(1\frac{1}{2}, 2)$ is het middelpunt van c_2 .

$x = 1\frac{1}{2}$ en $y = 2$ invullen in $y = \frac{4}{3}x$ geeft $2 = \frac{4}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$ en dit klopt, dus M_2 ligt ook op k .

102 a $c: (x - \sqrt{5})^2 + y^2 = 1$

Substitutie van $y = \frac{1}{2}x$ in $(x - \sqrt{5})^2 + y^2 = 1$ geeft $(x - \sqrt{5})^2 + (\frac{1}{2}x)^2 = 1$

$$x^2 - 2x\sqrt{5} + 5 + \frac{1}{4}x^2 = 1$$

$$1\frac{1}{4}x^2 - 2x\sqrt{5} + 4 = 0$$

$$D = (-2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 4 = 20 - 20 = 0$$

$D = 0$, dus l raakt c .

b $O(\text{cirkel}) = \pi \cdot 1^2 = \pi$

$x_M = \sqrt{5}$ en $r = 1$, dus $n: x = \sqrt{5} + 1$.

n snijden met l geeft $y_B = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, dus $AB = \sqrt{5} + 1$.

$$O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(O, n) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} + 1) = \frac{1}{2}(5 + 2\sqrt{5} + 1) = 3 + \sqrt{5}$$

$3 + \sqrt{5} < 2\pi$, dus de oppervlakte van driehoek OAB is niet meer dan twee keer zo groot als de oppervlakte van cirkel c .

Bladzijde 217

103 Het punt $A(0, 1)$ ligt op k .

Lijn n door A en loodrecht l geeft $n: y = -2x + 1$.

n snijden met l geeft het snijpunt S .

$$-2x + 1 = \frac{1}{2}x$$

$$-2\frac{1}{2}x = -1$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$$x = \frac{2}{5} \text{ geeft } y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}, \text{ dus } S(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}).$$

$$d(k, l) = d(A, l) = d(A, S) = \sqrt{(\frac{2}{5} - 0)^2 + (\frac{1}{5} - 1)^2} = 0,894...$$

$$\text{Dus } d(k, P) = 0,894... + 3 \approx 3,89.$$

104 $f(x) = 0$ geeft $(x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$

$$x^2 - 1 = 0 \vee x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 1 \vee x^2 = 2$$

$$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

Dus $x_A = -\sqrt{2}$ en $x_C = 1$.

$$f(0) = -1 \cdot -2 = 2, \text{ dus } T(0, 2).$$

$$\tan(\angle ATO) = \frac{OA}{OT} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ geeft } \angle ATO = 35,26...^\circ$$

$$\tan(\angle CTO) = \frac{OC}{OT} = \frac{1}{2} \text{ geeft } \angle CTO = 26,56...^\circ$$

$$\angle ATC = 35,26...^\circ + 26,56...^\circ \approx 61,8^\circ$$

105 $M_1(\frac{1}{2}(0 + 3), \frac{1}{2}(1 + 8)) = M_1(1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$, dus ook $M_2(1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$.

$$AB = \sqrt{(3 - 0)^2 + (8 - 1)^2} = \sqrt{58}, \text{ dus } r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{58}.$$

$$O(c_2) = 3 \cdot O(c_1), \text{ dus } r_2 = \sqrt{3} \cdot r_1.$$

$$\text{Dus } r_2 = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{58} = \frac{1}{2}\sqrt{174} \text{ en } r_2^2 = 43\frac{1}{2}.$$

$$\text{Dus } c_2: (x - 1\frac{1}{2})^2 + (y - 4\frac{1}{2})^2 = 43\frac{1}{2}.$$

Gemengde opgaven

Bladzijde 218

$$\begin{aligned} 1 \quad & \left. \begin{aligned} y &= ax + 3 \\ \text{door } A(4, 9) \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} 4a + 3 &= 9 \\ 4a &= 6 \\ a &= 1\frac{1}{2} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad & \begin{aligned} 3x + 2 &\leq 11 \\ 3x &\leq 9 \\ x &\leq 3 \end{aligned} & \begin{aligned} \frac{1}{2}x - 3 &< 1\frac{1}{2}x + 4 \\ -x &< 7 \\ x &> -7 \end{aligned} \\ & \text{Dus } \langle -7, 3 \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad & \text{Uit } \triangle BFE \sim \triangle AFD \text{ volgt } \frac{BF}{AF} \Big| \frac{BE}{AD} \text{ oftewel } \frac{10}{16} \Big| \frac{BE}{6}. \\ & \text{Dus } BE = \frac{6 \cdot 10}{16} = 3\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

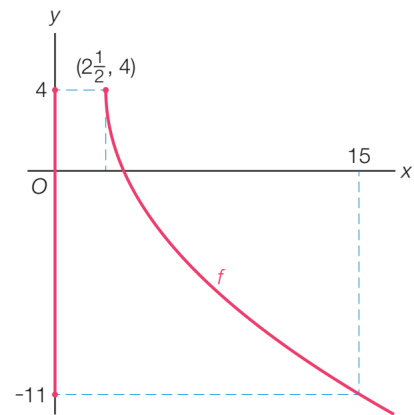
$$\begin{aligned} 4 \quad & x^3 + 10x = 7x^2 \\ & x^3 - 7x^2 + 10x = 0 \\ & x(x^2 - 7x + 10) = 0 \\ & x(x - 2)(x - 5) = 0 \\ & x = 0 \vee x = 2 \vee x = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad & 2x - 5 = 0 \\ & 2x = 5 \\ & x = 2\frac{1}{2} \\ & \text{Dus het randpunt is } (2\frac{1}{2}, 4) \text{ en } B_f = \langle \leftarrow, 4 \rangle. \\ & f(15) = 4 - 3\sqrt{30 - 5} = 4 - 3\sqrt{25} = 4 - 15 = -11 \\ & \text{Zie de figuur hiernaast.} \\ & x \leq 15 \text{ geeft } -11 \leq f(x) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad & \frac{1}{2}x + 5 = 0 \\ & \frac{1}{2}x = -5 \\ & x = -10 \\ & \text{De verticale asymptoot is de lijn } x = -10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad & (2x - 1)^2 = 10x + 1 \\ & 4x^2 - 4x + 1 = 10x + 1 \\ & 4x^2 - 14x = 0 \\ & 2x(2x - 7) = 0 \\ & 2x = 0 \vee 2x = 7 \\ & x = 0 \vee x = 3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \quad & -\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0 \text{ oftewel } -\frac{1}{2}x(x - 6) = 0 \text{ geeft } x = 0 \vee x = 6 \\ & PQ = 6 - 2p \text{ en } PS = y_S = -\frac{1}{2}p^2 + 3p \\ & A = PQ \cdot PS = (6 - 2p)(-\frac{1}{2}p^2 + 3p) = -3p^2 + 18p + p^3 - 6p^2 = p^3 - 9p^2 + 18p \\ & \text{Dit geeft } \frac{dA}{dp} = 3p^2 - 18p + 18. \\ & \frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } 3p^2 - 18p + 18 = 0 \\ & \quad p^2 - 6p + 6 = 0 \\ & \quad D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 12, \text{ dus } \sqrt{D} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ & \quad p = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3} \vee p = 3 - \sqrt{3} \\ & 0 < p < 3, \text{ dus } p = 3 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$



9 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 3$ geeft $\alpha = 71,56\dots^\circ$
 $l: 4x - 3y = 5$
 $-3y = -4x + 5$
 $y = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_l = 1\frac{1}{3}$ geeft $\beta = 53,13\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 71,56\dots^\circ - 53,13\dots^\circ = 18,43\dots^\circ$
Dus $\angle(k, l) \approx 18,4^\circ$.

10 $a = \frac{60 + 110}{2} = 85$
 $b = 110 - 85 = 25$
 $\frac{1}{2}$ periode = $15 - 5 = 10$, dus periode = 20 en $c = \frac{2\pi}{20} = \frac{1}{10}\pi$.
Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 10$, dus $d = 10$.
Dus $N = 85 + 25 \sin(\frac{1}{10}\pi(t - 10))$.
 $t = 7$ geeft $N \approx 64,77$
De helling van de grafiek is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
Dat is bij $t = 10$.
Voer de formule van N in en gebruik de optie dy/dx .
 $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=10} \approx 7,85$, dus de maximale helling is ongeveer 7,85.

11 $N = 9$ geeft ${}^5\log(9) = {}^2\log(t) + 3,7$
 ${}^2\log(t) = {}^5\log(9) - 3,7$
 ${}^2\log(t) = -2,334\dots$
 $t = 2^{-2,334\dots} = 0,198\dots$
 $t \approx 0,20$

Bladzijde 219

12 Lijn m door M en A heeft $\text{rc}_m = \frac{-5 - 3}{9 - 5} = -2$.
 $k \perp m$, dus $\text{rc}_k \cdot -2 = 1$ en dit geeft $\text{rc}_k = \frac{1}{2}$.
 $k: y = \frac{1}{2}x + b$
door $A(9, -5)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 9 + b = -5 \\ 4\frac{1}{2} + b = -5 \\ b = -9\frac{1}{2} \end{array} \right.$
Dus $k: y = \frac{1}{2}x - 9\frac{1}{2}$.

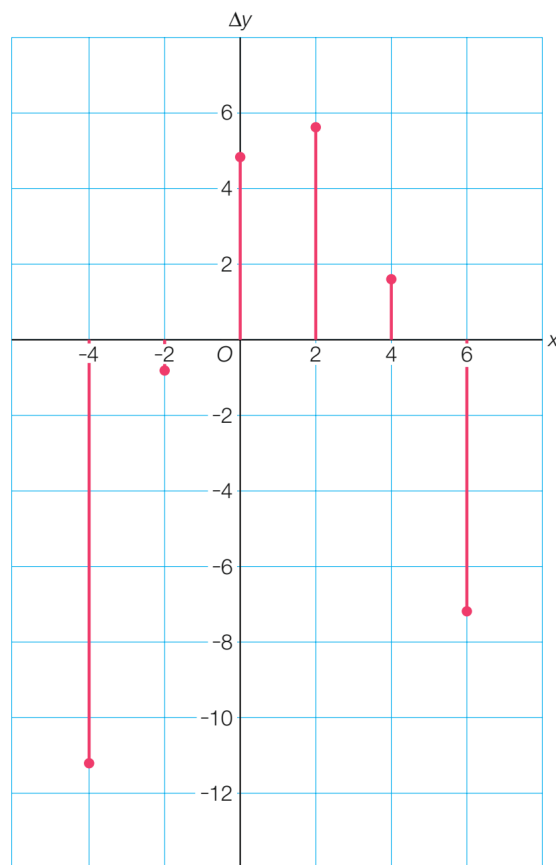
13 $y = \sqrt{x}$
 $\downarrow \times 5$ t.o.v. de x -as
 $y = 5\sqrt{x}$
 $\downarrow$ translatie $(-4, -5)$
 $y = 5\sqrt{x + 4} - 5$
 $\downarrow \times 2$ t.o.v. de y -as
 $f(x) = 5\sqrt{\frac{1}{2}x + 4} - 5$

14 $k \parallel l$, dus $a = -\frac{1}{2}$.
 $y = -\frac{1}{2}x + b$
door $P(-2, 5)$ $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot -2 + b = 5 \\ 1 + b = 5 \\ b = 4 \end{array} \right.$

15

x	y	Δy
-6	5,2	-
-4	-6	-11,2
-2	-6,8	-0,8
0	-2	4,8
2	3,6	5,6
4	5,2	1,6
6	-2	-7,2

Zie de figuur hiernaast.



16 $\angle R = 180^\circ - 62^\circ - 48^\circ = 70^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{PQ}{\sin(70^\circ)} = \frac{8,4}{\sin(48^\circ)}$

$$PQ = \frac{8,4 \sin(70^\circ)}{\sin(48^\circ)} \approx 10,6$$

17 $x^4 + 5 = 6x^2$

$$x^4 - 6x^2 + 5 = 0$$

Stel $x^2 = u$.

$$u^2 - 6u + 5 = 0$$

$$(u - 1)(u - 5) = 0$$

$$u = 1 \vee u = 5$$

$$x^2 = 1 \vee x^2 = 5$$

$$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$

18 $5\sqrt{x} - x = 6$

$$5\sqrt{x} = x + 6$$

kwadrateren geeft

$$25x = x^2 + 12x + 36$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$(x - 4)(x - 9) = 0$$

$$x = 4 \vee x = 9$$

19 $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 2x^3 + x$ geeft $f'(x) = \frac{4}{5}x^3 - 6x^2 + 1$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'(-1) = -\frac{4}{5} - 6 + 1 = -5\frac{4}{5}$$

$$y = -5\frac{4}{5}x + b$$

$$f(-1) = 1\frac{1}{5}, \text{ dus } A(-1, 1\frac{1}{5}) \left\{ \begin{array}{l} -5\frac{4}{5} \cdot -1 + b = 1\frac{1}{5} \\ 5\frac{4}{5} + b = 1\frac{1}{5} \\ b = -4\frac{3}{5} \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = -5\frac{4}{5}x - 4\frac{3}{5}.$$

- 20** De lengte van het lijnstuk AB is L .

$$L = \sqrt{2p+7} - \left(\frac{2}{3}p + \frac{7}{3}\right) = (2p+7)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}p - \frac{7}{3} \text{ geeft}$$

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2}(2p+7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{(2p+7)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{2p+7}} - \frac{2}{3}$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{1}{\sqrt{2p+7}} - \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2p+7}} = \frac{2}{3}$$

$$2\sqrt{2p+7} = 3$$

$$\sqrt{2p+7} = 1\frac{1}{2}$$

$$2p+7 = 2\frac{1}{4}$$

$$2p = -4\frac{3}{4}$$

$$p = -2\frac{3}{8}$$

- 21** $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 8 = 0$

$$x^2 - 6x + y^2 + 8y - 8 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 - 8 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 33$$

Het middelpunt is $M(3, -4)$ en de straal is $r = \sqrt{33}$.

$$d(A, M) = \sqrt{(3-3)^2 + (-4-2)^2} = 6$$

$d(A, M) > r$, dus A ligt buiten c .

Bladzijde 220

- 22** $a = \frac{15+9}{2} = 12$

$$b = 15 - 12 = 3$$

$$c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$$

$$d = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3$$

- 23** $P = 2,3 \cdot \log(Q) - 0,43$

$$P = \log(Q^{2,3}) + \log(10^{-0,43})$$

$$P = \log(10^{-0,43} \cdot Q^{2,3})$$

$$P = \log(0,371... \cdot Q^{2,3})$$

$$\text{Dus } P = \log(0,37Q^{2,3}).$$

- 24** Het punt $A(0, 4)$ ligt op k .

De lijn m door A loodrecht op k heeft vergelijking $m: y = \frac{1}{3}x + 4$.

m snijden met l geeft het punt B .

$$\frac{1}{3}x + 4 = -3x - 6$$

$$3\frac{1}{3}x = -10$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -3 \\ y = \frac{1}{3}x + 4 \end{array} \right\} y = \frac{1}{3} \cdot -3 + 4 = 3$$

Dus $B(-3, 3)$.

$$d(k, l) = d(A, B) = \sqrt{(-3-0)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{10}$$

25 $f(x) = {}^2\log(x-2) + 3 \xrightarrow{\times a \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} y = {}^2\log\left(\frac{1}{a} \cdot x - 2\right) + 3 \xrightarrow{b \text{ omhoog}} y = {}^2\log\left(\frac{1}{a} \cdot x - 2\right) + 3 + b$

$x = 4$ is asymptoot geeft $\frac{1}{a} \cdot 4 - 2 = 0$

$$\frac{4}{a} = 2$$

$$a = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} y = {}^2\log\left(\frac{1}{2}x - 2\right) + 3 + b \\ \text{door } A(12, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} {}^2\log\left(\frac{1}{2} \cdot 12 - 2\right) + 3 + b = 2 \\ {}^2\log(4) + 3 + b = 2 \\ 2 + 3 + b = 2 \\ b = -3 \end{array}$$

26 $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{13 - 3}{6 - 1} = 2$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } A(1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 1 + b = 3 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $k: y = 2x + 1$.

$l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3 - 1}{6 - 4} = -2$

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } C(4, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 4 + b = 1 \\ b = 9 \end{array}$$

Dus $l: y = -2x + 9$.

k snijden met l geeft $2x + 1 = -2x + 9$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2x + 1 \end{array} \right\} y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

Dus $S(2, 5)$.

27 Op $[3, 5]$ is de toename $2 \cdot 4 = 8$.

Op $[3, 10]$ is de toename $7 \cdot -2 = -14$.

Op $[5, 10]$ is de toename $-14 - 8 = -22$.

Het differentiequotiënt op $[5, 10]$ is $\frac{-22}{5} = -4,4$.

28 $\angle F = 180^\circ - 100^\circ - 35^\circ = 45^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{DE}{\sin(45^\circ)} = \frac{10,2}{\sin(100^\circ)}$

$$DE = \frac{10,2 \sin(45^\circ)}{\sin(100^\circ)} = 7,32...$$

en $\frac{DF}{\sin(35^\circ)} = \frac{10,2}{\sin(100^\circ)}$

$$DF = \frac{10,2 \sin(35^\circ)}{\sin(100^\circ)} = 5,94...$$

De omtrek van driehoek DEF is $7,32... + 10,2 + 5,94... \approx 23,5$

29 $\frac{1}{8}(4x - 5)^2 = 2$

$$(4x - 5)^2 = 16$$

$$4x - 5 = 4 \vee 4x - 5 = -4$$

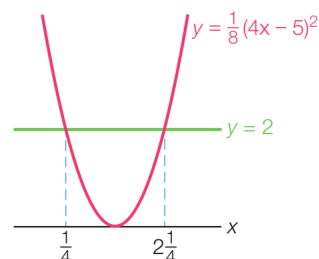
$$4x = 9 \vee 4x = 1$$

$$x = 2\frac{1}{4} \vee x = \frac{1}{4}$$

Zie de figuur hiernaast.

$$\frac{1}{8}(4x - 5)^2 < 2 \text{ geeft } \frac{1}{4} < x < 2\frac{1}{4}$$

30 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x \xrightarrow{\text{translatie } (-2, -3)} f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$



31 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ geeft $f'(x) = x^2 - x$
 $f'(x) = 6$ geeft $x^2 - x = 6$
 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x+2)(x-3) = 0$
 $x = -2 \vee x = 3$
 $f(-2) = -2\frac{2}{3}$ en $f(3) = 6\frac{1}{2}$
Dus $A(-2, -2\frac{2}{3})$ en $B(3, 6\frac{1}{2})$.

32 $\begin{cases} 2x + ay = 8 \\ x - 2y = b \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2x + ay = 8 \\ 2x - 4y = 2b \end{cases}$
Samenvallen, dus $a = -4$ en $2b = 8$, dus $b = 4$.

Bladzijde 221

33 $y_p = 0,95$, dus $\sin(\alpha_p) = 0,95$.
De GR geeft $1,253\dots$
Uit de figuur in het leerboek volgt $\alpha_p = \pi - 1,253\dots = 1,888\dots$
 $x_Q = -0,47$, dus $\cos(\alpha_Q) = -0,47$.
De GR geeft $2,060\dots$
Uit de figuur in het leerboek volgt $\alpha_Q = 2\pi - 2,06\dots = 4,223\dots$
 $\angle POQ = \alpha_Q - \alpha_p = 4,223\dots - 1,888\dots \approx 2,33$

34 $g_{\text{jaar}} = 1,25$ geeft $g_{\text{kwartaal}} = 1,25^{\frac{1}{4}} \approx 1,057$
Dus de hoeveelheid neemt per kwartaal met 5,7% toe.

35 $N = 5 + \frac{1}{2}\log(16x^3) = 5 + \frac{1}{2}\log(16) + \frac{1}{2}\log(x^3) = 5 - 4 + 3 \cdot \frac{1}{2}\log(x) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}\log(x)$

36 $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$
 $x^2 + 2x + y^2 + 6y = 0$
 $(x+1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 = 0$
 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 10$
Dus $M(-1, -3)$.
De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .
 $\left. \begin{array}{l} l: 2x - 3y = a \\ \text{door } M(-1, -3) \end{array} \right\} a = 2 \cdot -1 - 3 \cdot -3 = 7$
Dus $l: 2x - 3y = 7$.
 k snijden met l geeft het punt S .
 $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 9x + 6y = 12 \\ 4x - 6y = 14 \end{cases} +$
 $13x = 26$
 $x = 2$
 $x = 2$ invullen in $3x + 2y = 4$ geeft $3 \cdot 2 + 2y = 4$
 $6 + 2y = 4$
 $2y = -2$
 $y = -1$
Dus $S(2, -1)$.
 $d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(2 - -1)^2 + (-1 - -3)^2} = \sqrt{13}$

37 $h(x) = g(f(x)) = \frac{a}{(3^{x-2})^2}$
 $h(3) = 1$ geeft $\frac{a}{(3^{3-2})^2} = 1$
 $\frac{a}{3^2} = 1$
 $\frac{a}{9} = 1$
 $a = 9$

38 $6x - 4y = 5$
 $-4y = -6x + 5$
 $y = 1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{4}$

39 Op $[-2, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{5,2 - (-6,8)}{6} = \frac{12}{6} = 2$.

40 De cosinusregel geeft $6^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(\angle A)$
 $36 = 25 - 24 \cos(\angle A)$
 $24 \cos(\angle A) = -11$
 $\cos(\angle A) = -\frac{11}{24}$
 $\angle A \approx 117,3^\circ$

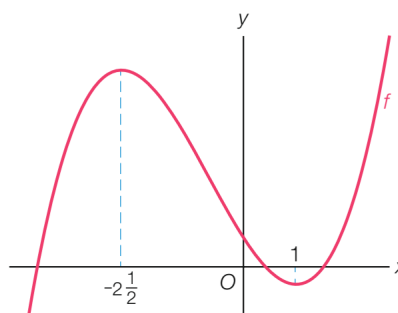
41 Invoeren van de formule en gebruiken van de optie nulpunt geeft de nulpunten $-2,98$, $0,95$ en $3,53$.

42 Het bereik van f is $B_f = \langle -5, \rightarrow \rangle$ en de grafiek van f is dalend.
 $f(1) = (\frac{1}{2})^{1-3} - 5 = -1$
 $x \geq 1$ geeft $-5 < f(x) \leq -1$

43 $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 30x + 10$ geeft $f'(x) = 12x^2 + 18x - 30$
 $f'(x) = 0$ geeft $12x^2 + 18x - 30 = 0$
 $2x^2 + 3x - 5 = 0$
 $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49$, dus $\sqrt{D} = 7$
 $x = \frac{-3 \pm 7}{4} = 1 \vee x = \frac{-3 - 7}{4} = -2\frac{1}{2}$

Zie de figuur hiernaast.

max. is $f(-2\frac{1}{2}) = 78\frac{3}{4}$ en min. is $f(1) = -7$.



44 $k: 2x + y = 3$
 $y = -2x + 3$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = -2$ geeft $\alpha = -63,43\dots^\circ$
 $l: 3x - 2y = 5$
 $-2y = -3x + 5$
 $y = 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_l = 1\frac{1}{2}$ geeft $\beta = 56,30\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = 56,30\dots^\circ - (-63,43\dots^\circ) = 119,74\dots^\circ$
Dus $\angle(k, l) = 180^\circ - 119,74\dots^\circ \approx 60,3^\circ$.

45 $f(x) = 0,4 + 2,3 \sin(4x + 2,4) = 0,4 + 2,3 \sin(4(x + 0,6))$
evenwichtsstand = $0,4$
amplitude = $2,3$
periode = $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$
Een beginpunt is $(-0,6; 0,4)$.

Bladzijde 222

46 $g_{\text{week}} = 0,72$ geeft $g_{\text{dag}} = 0,72^{\frac{1}{7}} \approx 0,954$
Dus de afname per dag is $4,6\%$.

47 $H = 3,2 \cdot {}^2\log(Q)$ geeft ${}^2\log(Q) = \frac{H}{3,2}$, dus $Q = 2^{\frac{H}{3,2}}$.
 $G = A \cdot \log(Q) = A \cdot \log(2^{\frac{H}{3,2}}) = A \cdot \frac{H}{3,2} \cdot \log(2)$
Dus $c = \frac{\log(2)}{3,2} \approx 0,094$.

48 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 8 = 0$
 $(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 + 8 = 0$
 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$

Dus het middelpunt is $M(2, -3)$.

$$rc_{AM} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3 - (-1)}{2 - 1} = -2$$

$k \perp AM$, dus $rc_k \cdot rc_{AM} = -1$, dus $rc_k = \frac{1}{2}$.

$\tan(\alpha) = rc_k = \frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 25,56...^\circ$

$$rc_{BM} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4 - (-3)}{4 - 2} = -\frac{1}{2}$$

$l \perp BM$, dus $rc_l \cdot rc_{BM} = -1$, dus $rc_l = 2$.

$\tan(\beta) = rc_l = 2$ geeft $\beta = 63,43...^\circ$

$\beta - \alpha = 63,43...^\circ - 25,56...^\circ = 36,86...^\circ$

Dus $\angle(k, l) \approx 36,9^\circ$.

49
$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{2}{x+3} - \frac{x-1}{2x+1} = \frac{2(2x+1) - (x-1)(x+3)}{(x+3)(2x+1)} = \frac{4x+2 - (x^2+3x-x-3)}{(x+3)(2x+1)}$$

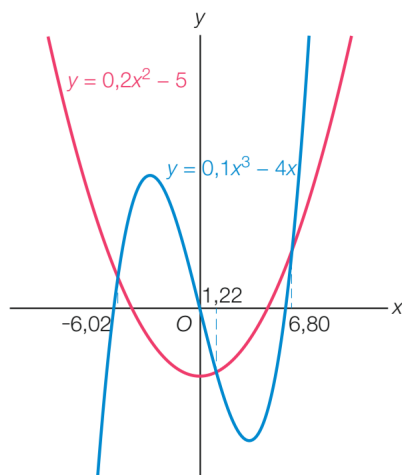
$$= \frac{4x+2-x^2-3x+x+3}{(x+3)(2x+1)} = \frac{-x^2+2x+5}{(x+3)(2x+1)}$$

50
$$\left. \begin{array}{l} l: 2x - 3y = 27 \\ \text{door } A(3, p) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3 - 3 \cdot p = 27 \\ 6 - 3p = 27 \\ -3p = 21 \\ p = -7 \end{array}$$

51 De helling van de lijn AB is $\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{5,2 - (-4,8)}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$.

52 De cosinusregel geeft $BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(115^\circ) = 35,142...$
 $BC \approx 5,93$

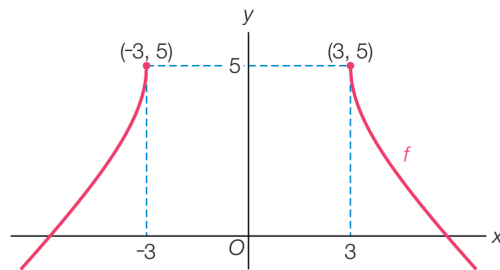
53 Los op $0,1x^3 - 4x = 0,2x^2 - 5$.
 Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft
 $x \approx -6,02 \vee x \approx 1,22 \vee x \approx 6,80$.



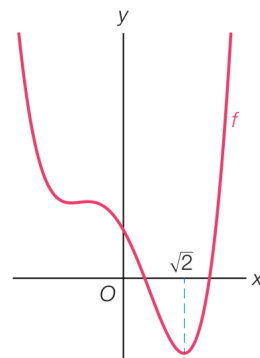
$0,1x^3 - 4x < 0,2x^2 - 5$ geeft $x < -6,02 \vee 1,22 < x < 6,80$

$$\begin{aligned}
 54 \quad & x^2 - 9 = 0 \\
 & x^2 = 9 \\
 & x = 3 \vee x = -3 \\
 & f(-3) = 5 - \sqrt{(-3)^2 - 9} = 5 - 0 = 5 \\
 & f(3) = 5 - \sqrt{3^2 - 9} = 5 - 0 = 5
 \end{aligned}$$

Dus de randpunten van de grafiek van f zijn $(-3, 5)$ en $(3, 5)$.
Zie de figuur hiernaast.
Het domein bestaat uit de intervallen $\langle \leftarrow, -3 \rangle$ en $[3, \rightarrow)$ en het bereik is $\langle \leftarrow, 5 \rangle$.



$$\begin{aligned}
 55 \quad & f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 1 \text{ geeft } f'(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2 \\
 & f'(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} - 2 = 0 \\
 & \text{Zie de figuur hiernaast.} \\
 & \text{Dus } f \text{ heeft een extreme waarde voor } x = \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 56 \quad & rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 0}{0 - -3} = \frac{2}{3} \\
 & \tan(\alpha) = rc_k = \frac{2}{3} \text{ geeft } \alpha = 33,69...^\circ \\
 & rc_l = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - -2}{4 - 1} = \frac{7}{3} \\
 & \tan(\beta) = rc_l = \frac{7}{3} \text{ geeft } \beta = 66,80...^\circ \\
 & \beta - \alpha = 66,80...^\circ - 33,69...^\circ = 33,11...^\circ \\
 & \text{Dus } \angle(k, l) \approx 33,1^\circ.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 57 \quad & y = \sin(x) \\
 & \downarrow \text{translatie } (\frac{1}{3}\pi, 2) \\
 & y = \sin(x - \frac{1}{3}\pi) + 2 \\
 & \downarrow \times 1\frac{1}{2} \text{ t.o.v. de } x\text{-as} \\
 & f(x) = 1\frac{1}{2}\sin(x - \frac{1}{3}\pi) + 3
 \end{aligned}$$

Bladzijde 223

$$\begin{aligned}
 58 \quad & g_{\text{jaar}} = 1,075 \\
 & 1,075^T = 2 \text{ geeft } T = {}^{1,075}\log(2) = 9,584... \\
 & \text{De verdubbelingstijd is 9 jaar en } 0,584... \cdot 12 \approx 7 \text{ maanden.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 59 \quad & \log(25x) = 2 + \log(x - 1) \\
 & \log(25x) = \log(100) + \log(x - 1) \\
 & \log(25x) = \log(100(x - 1)) \\
 & 25x = 100(x - 1) \\
 & 25x = 100x - 100 \\
 & -75x = -100 \\
 & x = 1\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 60 \quad & \text{Substitutie van } y = x \text{ in } x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0 \text{ geeft } x^2 + x^2 + 4x - 6x + 3 = 0 \\
 & 2x^2 - 2x + 3 = 0 \\
 & D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20
 \end{aligned}$$

$D < 0$, dus geen oplossingen.
Dus k heeft geen punten gemeenschappelijk met c .

$$\begin{aligned}
 61 \quad & \left. \begin{array}{l} y = a(x-p)^2 + q \\ \text{top } T(4, 6) \\ y = a(x-4)^2 + 6 \\ \text{door } A(8, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = a(x-4)^2 + 6 \\ a(8-4)^2 + 6 = 3 \\ 16a = -3 \\ a = -\frac{3}{16} \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } p: y = -\frac{3}{16}(x-4)^2 + 6.$$

$$y = -\frac{3}{16}(x-4)^2 + 6 \text{ geeft } y' = -\frac{3}{8}(x-4)$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = y'(8) = -\frac{3}{8}(8-4) = -1\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(8, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot 8 + b = 3 \\ -12 + b = 3 \\ b = 15 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } k: y = -1\frac{1}{2}x + 15.$$

$$y = 0 \text{ geeft } -1\frac{1}{2}x + 15 = 0$$

$$\begin{aligned}
 -1\frac{1}{2}x &= -15 \\
 x &= 10
 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } x_B = 10.$$

$$62 \quad \begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 5x + 2y = 18 \end{cases} \begin{array}{l} |2| \\ |3| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 4x - 6y = 22 \\ 15x + 6y = 54 \end{cases} +$$

$$\begin{aligned}
 19x &= 76 \\
 x &= 4
 \end{aligned}$$

$$x = 4 \text{ invullen in } 2x - 3y = 11 \text{ geeft } 2 \cdot 4 - 3y = 11$$

$$8 - 3y = 11$$

$$-3y = -3$$

$$y = 1$$

$$\text{Dus de oplossing is } (x, y) = (4, -1).$$

$$63 \quad \frac{s(5,01) - s(5)}{0,01} = 8,885...$$

De gevraagde snelheid is 8,89 m/s.

$$64 \quad M \text{ is het midden van } BC, \text{ dus } BM = CM = 5.$$

Dus ook $AM = 5$ (straal cirkel).

Zie de figuur hiernaast met N het midden van AB ,

$$\text{dus } AN = BN = 4 \text{ en } MN = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

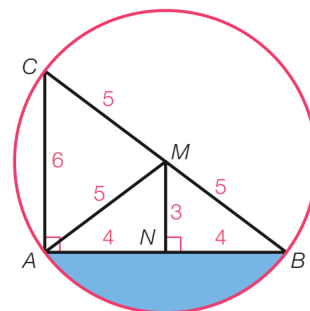
$$\tan(\angle AMN) = \frac{4}{3} \text{ geeft } \angle AMN = 53,13...^\circ$$

$$\angle AMB = 2 \cdot 53,13...^\circ = 106,26...^\circ$$

$$O(\text{sector } AMB) = \frac{106,26...}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 = 23,182...$$

$$O(\triangle AMB) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$$

$$O(\text{gebied}) = 23,182... - 12 \approx 11,18$$



$$65 \quad \text{Invoeren van de formule en gebruiken van de optie maximum geeft } x \approx 0,26 \text{ en } y \approx 6,52.$$

De optie minimum geeft $x \approx 5,07$ en $y \approx -49,04$.

Dus max. is $f(0,26) \approx 6,52$ en min. is $f(5,07) \approx -49,04$.

$$66 \quad 5 \cdot 2^{3x-2} = 80$$

$$2^{3x-2} = 16$$

$$2^{3x-2} = 2^4$$

$$3x - 2 = 4$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

67 $f(x) = x^2 - \frac{2x^2 - 1}{x} = x^2 - 2x + \frac{1}{x} = x^2 - 2x + x^{-1}$ geeft $f'(x) = 2x - 2 - x^{-2} = 2x - 2 - \frac{1}{x^2}$

68 $d(P, Q) = \sqrt{(q-2)^2 + (2q-3)^2} = \sqrt{q^2 - 4q + 4 + 4q^2 - 12q + 9} = \sqrt{5q^2 - 16q + 13}$
 Invullen van de formule en gebruiken van de optie minimum geeft $q = 1,6$ en $d(P, Q) \approx 0,45$.
 Dus de minimale afstand tussen P en Q is ongeveer 0,45.

Bladzijde 224

69 $y = \cos(x)$
 $\downarrow \times \frac{1}{2}$ t.o.v. de y -as
 $y = \cos(2x)$
 $\downarrow$ translatie $(\frac{1}{6}\pi, -3)$
 $f(x) = \cos(2(x - \frac{1}{6}\pi)) - 3$ oftewel $f(x) = \cos(2x - \frac{1}{3}\pi) - 3$

70 $g_{\text{jaar}} = 0,947$
 $0,947^T = \frac{1}{2}$ geeft $T = {}^{0,947}\log(\frac{1}{2}) = 12,728\dots$
 De halveringstijd is 12 jaar en $0,728\dots \cdot 12 \approx 9$ maanden.

71 $f(x) = {}^2\log(x)$
 $\downarrow$ translatie $(4, 0)$
 $y = {}^2\log(x - 4)$
 $\downarrow \times 2$ t.o.v. de y -as
 $g(x) = {}^2\log(\frac{1}{2}x - 4) = {}^2\log(\frac{1}{2}(x - 8)) = {}^2\log(\frac{1}{2}) + {}^2\log(x - 8) = -1 + {}^2\log(x - 8)$
 Dus $a = -1$ en $b = 8$.

72 $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$
 $(x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 = 0$
 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$
 Dus van c is het middelpunt $M(-2, 1)$ en de straal $r_c = \sqrt{5}$.
 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 6y + 15 = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 + 15 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 10$
 Dus van d is het middelpunt $N(4, 3)$ en de straal $r_d = \sqrt{10}$.
 $d(M, N) = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
 $d(c, d) = 2\sqrt{10} - \sqrt{5} - \sqrt{10} = \sqrt{10} - \sqrt{5}$

73 p door $A(-2, 0)$ en $B(10, 0)$, dus $p: y = a(x + 2)(x - 10)$.
 $y = a(x + 2)(x - 10)$
 door $C(0, -5)$ $\left. \begin{array}{l} a(0 + 2)(0 - 10) = -5 \\ -20a = -5 \\ a = \frac{1}{4} \end{array} \right\}$

Dus $y = \frac{1}{4}(x + 2)(x - 10) = \frac{1}{4}(x^2 - 8x - 20) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 5$ en dit geeft $y' = \frac{1}{2}x - 2$.
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = y'(0) = -2$ geeft $\alpha = -61,43\dots^\circ$

$x_T = \frac{-2 + 10}{2} = 4$ geeft $y_T = f(4) = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot -6 = -9$, dus $T(4, -9)$.

$\tan(\beta) = \text{rc}_l = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - -9}{10 - 4} = 1\frac{1}{2}$ geeft $\beta = 56,30\dots^\circ$

$\beta - \alpha = 56,30\dots^\circ - -61,43\dots^\circ = 119,74\dots^\circ$

Dus $\angle(k, l) = 180^\circ - 119,74\dots^\circ \approx 60,3^\circ$.

74 $A = at + b$ met $a = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{200 - 100}{15 - 5} = 10$
 $\left. \begin{array}{l} A = 10t + b \\ t = 5 \text{ en } A = 100 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 10 \cdot 5 + b = 100 \\ b = 50 \end{array}$
 Dus $A = 10t + 50$.

75 Invullen van de formule van f en gebruiken van de optie $\frac{dy}{dx}$ geeft $rc_k = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=4} = 8$.

76 $\angle C = 180^\circ - 75^\circ - 35^\circ = 70^\circ$
Zie de figuur hiernaast.

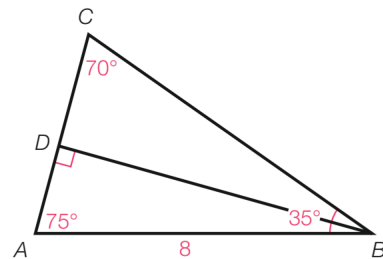
$$\text{In } \triangle ABD \text{ is } \sin(75^\circ) = \frac{BD}{8}$$

$$BD = 8 \sin(75^\circ) = 7,72\dots$$

$$\text{De sinusregel in } \triangle ABC \text{ geeft } \frac{AC}{\sin(35^\circ)} = \frac{8}{\sin(70^\circ)}$$

$$AC = \frac{8 \sin(35^\circ)}{\sin(70^\circ)} = 4,88\dots$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 4,88\dots \cdot 7,72\dots \approx 18,87$$



77 $t = 1$ en $h = 40$ geeft $a + b = 40$
 $t = 6$ en $h = 0$ geeft $216a + 36b = 0$ oftewel $6a + b = 0$, dus $b = -6a$.
Substitutie van $b = -6a$ in $a + b = 40$ geeft $a - 6a = 40$
 $-5a = 40$
 $a = -8$

$a = -8$ geeft $b = -6 \cdot -8 = 48$
Dus $a = -8$ en $b = 48$.

78 $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{2x} = 1\frac{1}{2}x + \frac{2}{x} = 1\frac{1}{2}x + 2x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2} - 2x^{-2} = 1\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'(1) = 1\frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ f(1) = 3\frac{1}{2}, \text{ dus } A(1, 3\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} + b = 3\frac{1}{2} \\ b = 4 \end{array}$$

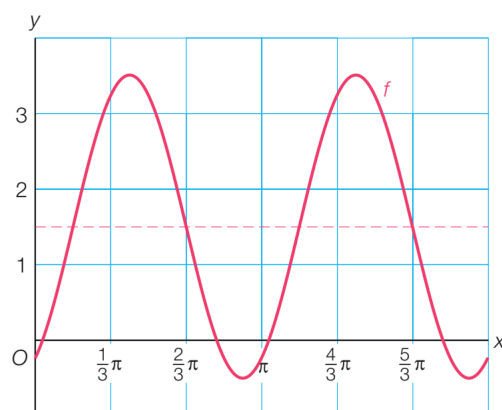
$$\text{Dus } k: y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

Bladzijde 225

79 $f(x) = (\frac{1}{3})^{x+2}$
 $\downarrow$ translatie $(3, 0)$
 $g(x) = (\frac{1}{3})^{x-3+2} = (\frac{1}{3})^{x+2-3} = (\frac{1}{3})^{x+2} \cdot (\frac{1}{3})^{-3} = 27 \cdot (\frac{1}{3})^{x+2}$
Dus $a = 27$.

80 $k \perp l$, dus $k: 3x - 4y = c$
door $A(-1, 3)$ $\left\} \begin{array}{l} c = 3 \cdot -1 - 4 \cdot 3 = -15 \\ \text{Dus } k: 3x - 4y = -15. \end{array} \right.$

81 $f(x) = 1\frac{1}{2} + 2 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1\frac{1}{2} + 2 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$
evenwichtsstand $1\frac{1}{2}$
amplitude 2
periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
beginpunt $(\frac{1}{6}\pi, 1\frac{1}{2})$
Zie de figuur hiernaast.



82 $g_{103 \text{ jaar}} = \frac{1}{2}$ geeft $g_{\text{jaar}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{103}} \approx 0,9933$.
Dus de hoeveelheid neemt per jaar met ongeveer 0,67% af.

83

$$f(x) = 3^x$$

↓ translatie (4, -18)

$$y = 3^{x-4} - 18$$

↓ $\times 27$ t.o.v. de x -as

$$y = 27(3^{x-4} - 18)$$

↓ $\times 2$ t.o.v. de y -as

$$g(x) = 27(3^{\frac{1}{2}x-4} - 18)$$

$$g(x) = 27(3^{\frac{1}{2}x-4} - 18) = 27 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-4} - 486 = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-4} - 486 = 3^{-1} \cdot 3^{\frac{1}{2}x} - 486 = \frac{1}{3} \cdot (3^{\frac{1}{2}})^x - 486$$

$$\text{Dus } g = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, p = \frac{1}{3} \text{ en } q = -486.$$

84

$$\begin{aligned} c: (x+2)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ x+2y = 6 \text{ oftewel } x = 6-2y \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} (-2y+8)^2 + (y-5)^2 &= 25 \\ 4y^2 - 32y + 64 + y^2 - 10y + 25 - 25 &= 0 \\ 5y^2 - 42y + 64 &= 0 \\ D = (-42)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 64 &= 484, \text{ dus } \sqrt{D} = 22 \\ y = \frac{42 \pm 22}{10} &= 6\frac{2}{5} \vee y = \frac{42-22}{10} = 2 \end{aligned} \right.$$

$$y = 6\frac{2}{5} \text{ geeft } x = 6 - 2 \cdot 6\frac{2}{5} = -6\frac{4}{5} \text{ en } y = 2 \text{ geeft } x = 6 - 2 \cdot 2 = 2$$

Dus de snijpunten zijn $(-6\frac{4}{5}, 6\frac{2}{5})$ en $(2, 2)$.

85

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 12x - 5y = 3 \end{cases} \left| \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 10x + 5y = 30 \\ 12x - 5y = 3 \end{cases} +$$

$$\frac{22x = 33}{22x = 33}$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{1}{2} \text{ invullen in } 2x + y = 6 \text{ geeft } 2 \cdot 1\frac{1}{2} + y = 6$$

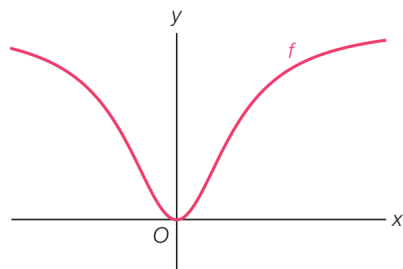
$$3 + y = 6$$

$$y = 3$$

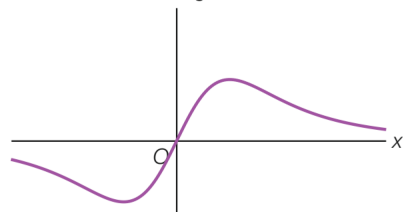
Dus $S(1\frac{1}{2}, 3)$.

86

Invoeren van de formule van f en van de numerieke afgeleide van f .



helling



87

De lijn door E en F snijdt AD in het punt M . Dit geeft $AM = 3$.

Stel $AE = x$, dan is $EF = 2x$ en $EM = \frac{1}{2}(10 - 2x) = 5 - x$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle AEM$ geeft $AM^2 + EM^2 = AE^2$

$$3^2 + (5 - x)^2 = x^2$$

$$9 + 25 - 10x + x^2 = x^2$$

$$-10x = -34$$

$$x = 3,4$$

Dus $EF = 2x = 6,8$.

88 $\frac{1}{2}\log(2x-1) + 3 = 0$
 $\frac{1}{2}\log(2x-1) = -3$
 $2x-1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
 $2x-1 = 8$
 $2x = 9$
 $x = 4\frac{1}{2}$

Bladzijde 226

89 $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)^5 + 16$
 $\downarrow$ translatie $(6, -10)$
 $g(x) = \frac{1}{3}(x-6+2)^5 + 16 - 10$ oftewel $g(x) = \frac{1}{3}(x-4)^5 + 6$

90 $f(x) = (2x+1)(\sqrt{x}-1) = 2x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x} - 1 = 2x^{1\frac{1}{2}} - 2x + x^{\frac{1}{2}} - 1$ geeft
 $f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - 2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} - 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} - 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

91 De lijn l staat loodrecht op k en gaat door A .

$$\left. \begin{array}{l} l: 2x - y = c \\ \text{door } A(4, 5) \end{array} \right\} c = 2 \cdot 4 - 5 = 3$$

Dus $l: 2x - y = 3$.

k snijden met l geeft het snijpunt S .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right. \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 4x - 2y = 6 \end{array} \right. +$$

$$\frac{5x = 10}{x = 2}$$

$x = 2$ invullen in $x + 2y = 4$ geeft $2 + 2y = 4$

$$2y = 2$$

$$y = 1$$

Dus $S(2, 1)$.

$$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(2-4)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

92 $W = 20 + 15 \cos(\pi(t - \frac{3}{4}))$

evenwichtsstand 20

amplitude 15

periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

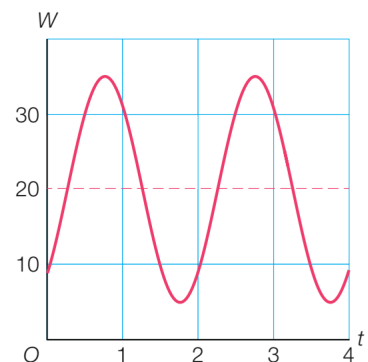
beginpunt $(\frac{3}{4}, 35)$ is een hoogste punt

Zie de figuur hiernaast.

Los op $20 + 15 \cos(\pi(t - \frac{3}{4})) = 30$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $t \approx 0,48$, $t \approx 1,02$, $t \approx 2,48$ en $t \approx 3,02$.

$W > 30$ geeft $0,48 < t < 1,02 \vee 2,48 < t < 3,02$



93 $N = b \cdot g^t$

$g_{6 \text{ maanden}} = \frac{2324}{3102}$, dus $g_{\text{maand}} = \left(\frac{2324}{3102}\right)^{\frac{1}{6}} = 0,9530\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,9530\dots^t \\ t = 3 \text{ en } N = 3102 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,9530\dots^3 = 3102 \\ b \approx 3584 \end{array}$$

Dus $N = 3584 \cdot 0,953^t$.

- 94** De lijn gaat door de punten (1, 3) en (5, 2).

$$\log(N) = pM + q \text{ met } p = \frac{\Delta \log(N)}{\Delta M} = \frac{2-3}{5-1} = -\frac{1}{4}$$

$$\log(N) = -\frac{1}{4}M + q \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } (1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \cdot 1 + q = 3 \\ q = 3\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\text{Dus } \log(N) = -\frac{1}{4}M + 3\frac{1}{4}.$$

$$M = -4 \text{ geeft } \log(N) = -\frac{1}{4} \cdot -4 + 3\frac{1}{4}$$

$$\log(N) = 4\frac{1}{4}$$

$$N = 10^{4\frac{1}{4}} \approx 17783$$

- 95** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$ geeft $f'(x) = x^2 - 3x + 1$

$$\text{rc}_k = f'(0) = 1, \text{ dus } k: y = x.$$

$$f'(x) = 1 \text{ geeft } x^2 - 3x + 1 = 1$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

$$f(3) = -1\frac{1}{2}, \text{ dus } A(3, -1\frac{1}{2}).$$

$$\text{Lijn } m \text{ door } A \text{ loodrecht op } k, \text{ dus } \text{rc}_m = -1.$$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -x + b \\ \text{door } A(3, -1\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 + b = -1\frac{1}{2} \\ b = 1\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{Dus } m: y = -x + 1\frac{1}{2}.$$

$$m \text{ snijden met } k \text{ geeft het snijpunt } S.$$

$$x = -x + 1\frac{1}{2}$$

$$2x = 1\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$\text{Dus } S(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}).$$

$$d(k, l) = d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(\frac{3}{4} - 3)^2 + (\frac{3}{4} - -1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{(2\frac{1}{4})^2 + (2\frac{1}{4})^2} = 2\frac{1}{4}\sqrt{2}$$

- 96** Substitutie van $y = 4x + 11$ in $5x + 6y = 18$ geeft $5x + 6(4x + 11) = 18$

$$5x + 24x + 66 = 18$$

$$29x = -48$$

$$x = -1\frac{19}{29}$$

$$x = -1\frac{19}{29} \text{ geeft } y = 4 \cdot -1\frac{19}{29} + 11 = 4\frac{11}{29}$$

$$\text{Dus de oplossing is } (x, y) = (-1\frac{19}{29}, 4\frac{11}{29}).$$

- 97** Invoeren van de formule van f , de numerieke afgeleide van f en de formule $y = 1$ en gebruiken van de optie snijpunt bij de grafiek van de numerieke afgeleide en de lijn $y = 1$ geeft $x \approx 0,528$ en $x \approx 4,455$.

- 98** Door (2, 0) en (5, 0), dus $y = a(x - 2)(x - 5)$.

$$\text{Door } (6, -3), \text{ dus } a(6 - 2)(6 - 5) = -3$$

$$a \cdot 4 \cdot 1 = -3$$

$$a = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Dus } y = -\frac{3}{4}(x - 2)(x - 5).$$

$$x = 0 \text{ geeft } y = -\frac{3}{4} \cdot -2 \cdot -5 = -7\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus het snijpunt met de } y\text{-as is } (0, -7\frac{1}{2}).$$

Bladzijde 227

- 99** $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^4 + 2$

$$\downarrow \times 4 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}$$

$$y = -2(x + 1)^4 + 8$$

$$\downarrow \text{translatie } (2, -5)$$

$$g(x) = -2(x - 2 + 1)^4 + 8 - 5 \text{ oftewel } g(x) = -2(x - 1)^4 + 3$$

$$\text{max. is } g(1) = 3$$

100 $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 9}{x} = x + 5 + \frac{9}{x} = x + 5 + 9x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 9x^{-2} = 1 - \frac{9}{x^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{9}{x^2} = 0$

$$\frac{9}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

$$f(3) = \frac{9 + 15 + 9}{3} = 11 \text{ en } f(-3) = \frac{9 - 15 + 9}{-3} = -1$$

Dus de toppen zijn $(-3, -1)$ en $(3, 11)$.

$$rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11 - (-1)}{3 - (-3)} = \frac{12}{6} = 2$$

$$k: y = 2x + b \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 3 + b = 11 \\ b = 5 \end{array} \right.$$

Dus $k: y = 2x + 5$.

101 $4x - 3 = 0$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{3}{4}$.

$$4 - {}^3\log(4x - 3) = 2 \text{ geeft } {}^3\log(4x - 3) = 2$$

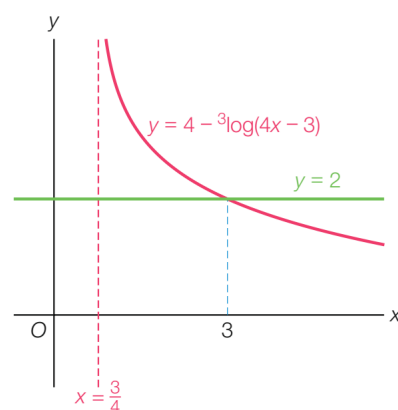
$$4x - 3 = 9$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

Zie de figuur hiernaast.

$$4 - {}^3\log(4x - 3) \geq 2 \text{ geeft } \frac{3}{4} < x \leq 3$$



102 $f(x) = 4x\sqrt{x} - 9x = 4x^{1\frac{1}{2}} - 9x$ geeft $f'(x) = 6x^{\frac{1}{2}} - 9 = 6\sqrt{x} - 9$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 6\sqrt{x} - 9 = 0$$

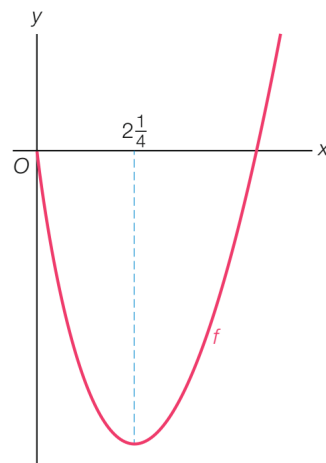
$$6\sqrt{x} = 9$$

$$\sqrt{x} = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{4}$$

Zie de figuur hiernaast.

$$\text{min. is } f(2\frac{1}{4}) = 4 \cdot 2\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} - 9 \cdot 2\frac{1}{4} = -6\frac{3}{4}$$



103 c met middelpunt $M(4, -2)$ raakt de x -as, dus $r = 2$.

$$\text{Dus } c: (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

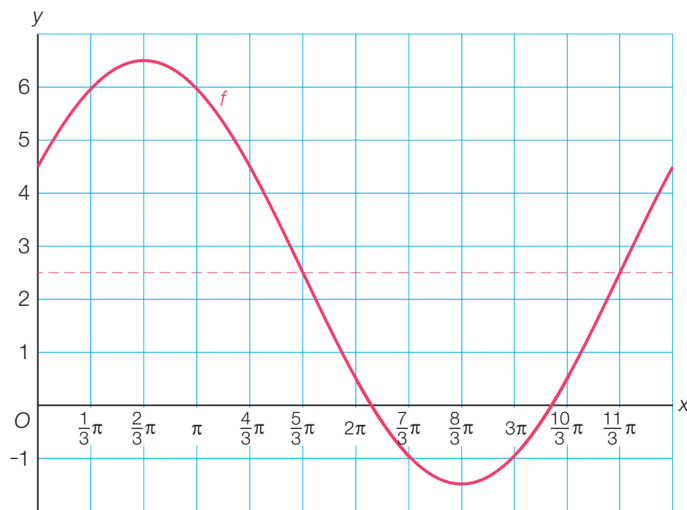
104 $f(x) = 2\frac{1}{2} - 4\cos(\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{3}\pi) = 2\frac{1}{2} - 4\cos(\frac{1}{2}(x - 2\frac{2}{3}\pi))$

evenwichtsstand $2\frac{1}{2}$

amplitude 4

periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

beginpunt $(2\frac{2}{3}\pi, -1\frac{1}{2})$ is laagste punt



105 $5 - {}^2\log(5x + 2) = 0$

${}^2\log(5x + 2) = 5$

$5x + 2 = 2^5$

$5x = 30$

$x = 6$

106 Stel $CD = x$, dan is $BD = x + 3$ en $BC = 2x + 3$.

$\tan(38^\circ) = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{2x + 3}$

$2x + 3 = \frac{5}{\tan(38^\circ)} = 6,399\dots$

$2x = 3,399\dots$

$x = 1,699\dots$

$\tan(\angle BAD) = \frac{BD}{AB} = \frac{1,699\dots + 3}{5} = \frac{4,699\dots}{5}$

$\angle BAD \approx 43,2^\circ$

107 Substitutie van $y = x$ in $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$ geeft $x^2 + x^2 - 8x - 6x + 12 = 0$

$2x^2 - 14x + 12 = 0$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$(x - 1)(x - 6) = 0$

$x = 1 \vee x = 6$

Dus $A(1, 1)$ en $B(6, 6)$.

108 $10x^2 + 1 = 7x$

$10x^2 - 7x + 1 = 0$

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 1 = 9$, dus $\sqrt{D} = 3$

$x = \frac{7 \pm 3}{20} = \frac{1}{2} \vee x = \frac{7 - 3}{20} = \frac{1}{5}$

109 $f(x) = 2x^3 - (2x^2 + 1)(x - 2) = 2x^3 - (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = 4x^2 - x + 2$ geeft $f'(x) = 8x - 1$

$f'(x) = -3$ geeft $8x - 1 = -3$

$8x = -2$

$x = -\frac{1}{4}$

110 De top is $(4, 3)$, dus $y = a(x - 4)^2 + 3$.

Door $(2, -3)$ geeft $a(2 - 4)^2 + 3 = -3$

$$4a = -6$$

$$a = -1\frac{1}{2}$$

$$y = -1\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 3 = -1\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16) + 3 = -1\frac{1}{2}x^2 + 12x - 24 + 3 = -1\frac{1}{2}x^2 + 12x - 21$$

Dus de formule is $y = -1\frac{1}{2}x^2 + 12x - 21$.

Bladzijde 228

111 $\frac{a^3}{a^5} \cdot (a^4)^n = a^{-2} \cdot a^{4n} = a^{4n-2}$

112 $y = 4 - \frac{3}{2x-1}$

$$y(2x-1) = 4(2x-1) - 3$$

$$2xy - y = 8x - 4 - 3$$

$$2xy - 8x = y - 7$$

$$x(2y - 8) = y - 7$$

$$x = \frac{y-7}{2y-8}$$

113 $f(x) = \frac{1}{x+4} + 2$

↓ translatie $(9, 6)$

$$g(x) = \frac{1}{x-9+5} + 2 + 6 = \frac{1}{x-5} + 8$$

114 $f(x) = 5x^2 - (2x + 3)^4$ geeft $f'(x) = 10x - 4(2x + 3)^3 \cdot 2 = 10x - 8(2x + 3)^3$

115 $c: (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = r^2$ met $r = d(M, k)$

De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} l: 2x - y = c \\ \text{door } M(3, -2) \end{array} \right\} c = 2 \cdot 3 + 2 = 8$$

Dus $l: 2x - y = 8$.

k en l snijden geeft het punt S .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 4x - 2y = 16 \end{array} \right. +$$
$$\frac{5x = 20}{x = 4}$$

$x = 4$ invullen in $x + 2y = 4$ geeft $4 + 2y = 4$, dus $y = 0$.

Dus $S(4, 0)$.

$$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(4 - 3)^2 + (0 - -2)^2} = \sqrt{5}$$

Dus $c: (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

116 $a = \frac{5 + -1}{2} = 2$

$$b = 5 - 2 = 3$$

$$\text{periode} = 1\frac{1}{3}\pi, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{1\frac{1}{3}\pi} = 1\frac{1}{2}$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{3}\pi$, dus $d = \frac{1}{3}\pi$.

Dit geeft $y = 2 + 3\sin(1\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}\pi))$.

117 $2^{5x-4} = 16^{x+1}$

$$2^{5x-4} = (2^4)^{x+1}$$

$$2^{5x-4} = 2^{4x+4}$$

$$5x - 4 = 4x + 4$$

$$x = 8$$

118 y is omgekeerd evenredig met $x\sqrt{x}$, dus $y = \frac{a}{x\sqrt{x}}$ oftewel $a = y \cdot x\sqrt{x}$.

$x = 2$ en $y = 6$ geeft $a = 6 \cdot 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

Dus $y = \frac{12\sqrt{2}}{x\sqrt{x}}$.

$x = 8$ geeft $y = \frac{12\sqrt{2}}{8\sqrt{8}} = \frac{12\sqrt{2}}{8 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$

Bladzijde 229

119 Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft

$$AC^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos(65^\circ) = 65,666\dots$$

$$AC = 8,103\dots$$

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\frac{8,103\dots}{\sin(65^\circ)} = \frac{7}{\sin(\angle BAC)}$

$$\sin(\angle BAC) = \frac{7 \sin(65^\circ)}{8,103\dots}$$

De GR geeft $51,52\dots^\circ$, dus $\angle BAC = 51,52\dots^\circ$.

$$\angle CAD = 75^\circ - 51,52\dots^\circ = 23,47\dots^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft $CD^2 = 4^2 + 65,666\dots - 2 \cdot 4 \cdot 8,103\dots \cdot \cos(23,47\dots^\circ) = 22,203\dots$

$$CD = 4,712\dots$$

De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos(\angle D)$

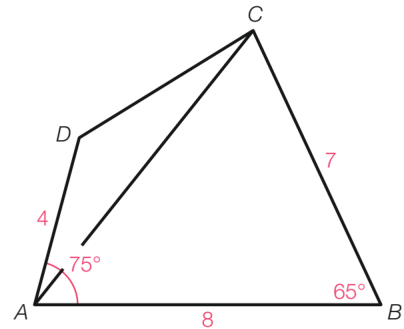
$$65,666\dots = 4^2 + 22,203\dots - 2 \cdot 4 \cdot 4,712\dots \cdot \cos(\angle D)$$

$$37,696\dots \cdot \cos(\angle D) = -27,462\dots$$

$$\cos(\angle D) = \frac{-27,462\dots}{37,696\dots}$$

$$\angle D \approx 136,8^\circ$$

Dus $CD \approx 4,7$ en $\angle D \approx 136,8^\circ$.



120 $\frac{1}{2}(2x - 5)^2 + 3 = 5$

$$\frac{1}{2}(2x - 5)^2 = 2$$

$$(2x - 5)^2 = 4$$

$$2x - 5 = 2 \vee 2x - 5 = -2$$

$$2x = 7 \vee 2x = 3$$

$$x = 3\frac{1}{2} \vee x = 1\frac{1}{2}$$

121 $f(x) = ax^2 + 6x + a$ geeft $f'(x) = 2ax + 6$

$$f'(3) = 4 \text{ geeft } 2a \cdot 3 + 6 = 4$$

$$6a = -2$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

122 Top $(4, 4)$, dus $y = a(x - 4)^2 + 4$.

$$y = ax^2 + bx, \text{ dus door } O(0, 0).$$

Door $(0, 0)$ geeft $a(0 - 4)^2 + 4 = 0$

$$16a = -4$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}(x - 4)^2 + 4 = -\frac{1}{4}(x^2 - 8x + 16) + 4 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 + 4 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$$

Dus $a = -\frac{1}{4}$ en $b = 2$.

123 $\frac{2}{5}a^{-2} \cdot (b^{-3})^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot b^{-6} = \frac{2}{5a^2b^6}$

124 $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3} = 0$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 3$$

125 $f(x) = \sqrt{2x+6} = (2x+6)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(2x+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{(2x+6)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \text{ geeft } \frac{1}{\sqrt{2x+6}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2x+6} = 2$$

$$2x+6 = 4$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

$$f(-1) = \sqrt{-2+6} = 2, \text{ dus } A(-1, 2).$$

$$A(-1, 2) \text{ op } k \text{ geeft } \frac{1}{2} \cdot -1 + b = 2$$

$$-\frac{1}{2} + b = 2$$

$$b = 2\frac{1}{2}$$

126 $f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{1}{(3x-1)^2} = 4x^{-2} - (3x-1)^{-2}$ geeft $f'(x) = -8x^{-3} + 2(3x-1)^{-3} \cdot 3 = -\frac{8}{x^3} + \frac{6}{(3x-1)^3}$

127 $x^2 + y^2 + 3x - 4y - 37 = 0$

$$x^2 + 3x + y^2 - 4y - 37 = 0$$

$$(x + 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + (y - 2)^2 - 4 - 37 = 0$$

$$(x + 1\frac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 = 43\frac{1}{4}$$

$$\text{Dus middelpunt } M(-1\frac{1}{2}, 2) \text{ en straal } r = \sqrt{43\frac{1}{4}}.$$

$$d(A, M) = \sqrt{(-1\frac{1}{2} - 5)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{43\frac{1}{4}}$$

$$d(A, M) = r, \text{ dus } A \text{ ligt op } c.$$

128 $y = a + b \sin(c(x - d))$

$$a = \frac{160 + 90}{2} = 125$$

$$b = 160 - 125 = 35$$

$$\frac{1}{2} \text{ periode} = 15 - 3 = 12 \text{ geeft periode} = 24, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi.$$

$$\text{De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij } x = 3 - \frac{1}{4} \cdot 24 = -3, \text{ dus } d = -3.$$

$$\text{Dit geeft de formule } y = 125 + 35 \sin(\frac{1}{12}\pi(x + 3)).$$

129 $A = {}^2\log(B - 5)$ geeft $B - 5 = 2^A$, dus $B = 5 + 2^A$.

$$\text{Invullen van } A = 2C + 4 \text{ geeft } B = 5 + 2^{2C+4}.$$

$$A = 2C + 4 \text{ geeft } 2C = A - 4, \text{ dus } C = \frac{1}{2}A - 2.$$

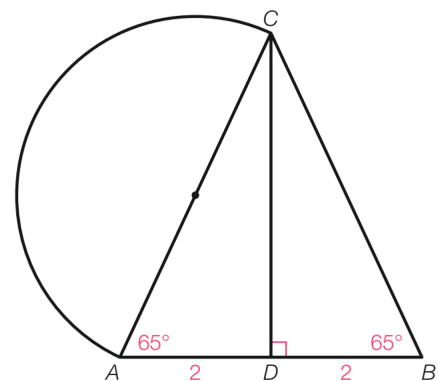
$$\text{Invullen van } A = {}^2\log(B - 5) \text{ geeft } C = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(B - 5) - 2.$$

130 Zie de figuur hiernaast.

$$\text{In } \triangle ACD \text{ is } \cos(65^\circ) = \frac{2}{AC}, \text{ dus } AC = \frac{2}{\cos(65^\circ)} = 4,73...$$

$$\frac{1}{2}AC = 2,36...$$

$$O(\text{halve cirkel}) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2,36...^2 \approx 8,8$$



Bladzijde 230

131 $p = 10q^{1,36}$

$$10q^{1,36} = p$$

$$q^{1,36} = 0,1p$$

$$q = (0,1p)^{\frac{1}{1,36}} = 0,1^{\frac{1}{1,36}} \cdot p^{\frac{1}{1,36}} \approx 0,18 \cdot p^{0,74}$$

$$\text{Dus } q = 0,18p^{0,74}.$$

132 $f(x) = 0$ geeft $-3x^2 + 5x - 2 = 0$
 $D = 5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-2) = 1$, dus $\sqrt{D} = 1$
 $x = \frac{-5 \pm 1}{-6} = \frac{2}{3} \vee x = \frac{-5 - 1}{-6} = 1$
Dus de nulpunten zijn $\frac{2}{3}$ en 1.

133 $f(0) = 1 \cdot (-3) = -3$, dus $B(0, -3)$.
 $k: y = ax - 3$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3 - 0}{0 - (-1)} = -3$

Dus $k: y = -3x - 3$.

k snijden met de grafiek van f geeft $(x+1)(x^2 - 2x - 3) = -3x - 3$
 $(x+1)(x^2 - 2x - 3) = -3(x+1)$
 $x+1 = 0 \vee x^2 - 2x - 3 = -3$
 $x = -1 \vee x^2 - 2x = 0$
 $x = -1 \vee x(x-2) = 0$
 $x = -1 \vee x = 0 \vee x = 2$

$x = 2$ geeft $y = -3 \cdot 2 - 3 = -9$, dus $C(2, -9)$.

134 Zie de figuur hiernaast.

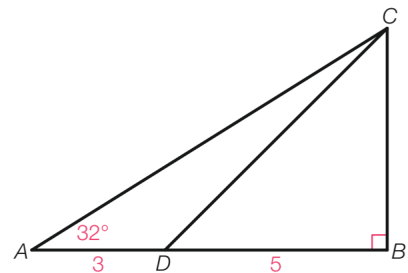
In $\triangle ABC$ is $\tan(32^\circ) = \frac{BC}{8}$

$$BC = 8 \tan(32^\circ) = 4,99\dots$$

In $\triangle BCD$ is $\tan(\angle BCD) = \frac{5}{4,99\dots}$

$$\angle BCD = 45,00\dots^\circ$$

$$\angle ACD = 180^\circ - 90^\circ - 32^\circ - 45,00\dots^\circ \approx 13,0^\circ$$



135 $y = ax^2 + 1\frac{1}{2}x + 3$
door $(2, 9)$ $\left\{ \begin{array}{l} 4a + 3 + 3 = 9 \\ 4a = 3 \\ a = \frac{3}{4} \end{array} \right.$

Dus $y = \frac{3}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x + 3$.

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{3}{4}} = -1 \text{ geeft } y_{\text{top}} = \frac{3}{4} \cdot (-1)^2 + 1\frac{1}{2} \cdot (-1) + 3 = 2\frac{1}{4}$$

Dus de top is $(-1, 2\frac{1}{4})$.

136 $\frac{1}{4}a^{-\frac{2}{3}} \cdot (b^{-5})^6 \cdot c^{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} \cdot b^{-30} \cdot c \cdot c^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \frac{1}{b^{30}} \cdot c\sqrt{c} = \frac{c\sqrt{c}}{4b^{30} \cdot \sqrt[3]{a^2}}$

137 $\frac{2x-3}{x-4} = x-6$
 $2x-3 = (x-4)(x-6)$
 $2x-3 = x^2 - 10x + 24$
 $-x^2 + 12x - 27 = 0$
 $x^2 - 12x + 27 = 0$
 $(x-3)(x-9) = 0$
 $x = 3 \vee x = 9$

138 $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1} = (2x-1)^{\frac{1}{2}} + (2x+1)^{\frac{1}{2}}$ geeft
 $f'(x) = \frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 + \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

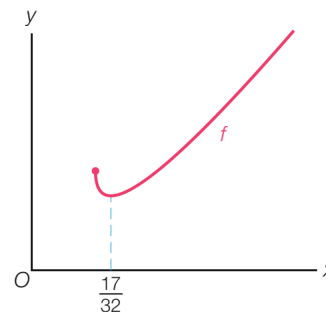
139 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$
 $x^2 - 2x + y^2 + 2y - 3 = 0$
 $(x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 - 3 = 0$
 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$
Dus middelpunt $M(1, -1)$ en straal $r = \sqrt{5}$.
 $d(A, M) = \sqrt{(1-4)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
 $d(A, c) = d(A, M) - r = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

140 Invoeren van de formule van s en gebruiken van de optie maximum geeft $x = 1,904\dots$ en $y = 7,478\dots$
en de optie minimum geeft $x = 5,045\dots$ en $y = -5,478\dots$
 $a = \frac{7,478\dots + (-5,478\dots)}{2} = 1$
 $b = 7,478\dots - 1 \approx 6,48$
halve periode $= 5,045\dots - 1,904\dots = 3,141\dots$ geeft periode $= 2 \cdot 3,141\dots = 6,283\dots$,
dus $c = \frac{2\pi}{6,283\dots} = 1$.
Invoeren van de formule $y = 1$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 0,333\dots$, dus $d \approx 0,33$.
Dus $y = 1 + 6,48 \sin(x - 0,33)$.

141 $P = 3^Q + 1$ en $P = 4R + 2$ geeft $3^Q + 1 = 4R + 2$ $3^Q + 1 = 4R + 2$
 $3^Q = 4R + 1$ $4R = 3^Q - 1$
 $Q = {}^3\log(4R + 1)$ $R = \frac{1}{4} \cdot 3^Q - \frac{1}{4}$

142 $f(x) = 4x - \sqrt{2x-1} = 4x - (2x-1)^{\frac{1}{2}}$ geeft
 $f'(x) = 4 - \frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = 4 - \frac{1}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}} = 4 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$
 $f'(x) = 0$ geeft $4 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = 0$
 $\frac{1}{\sqrt{2x-1}} = 4$
 $\sqrt{2x-1} = \frac{1}{4}$
 $2x-1 = \frac{1}{16}$
 $2x = \frac{17}{16}$
 $x = \frac{17}{32}$

Zie de figuur hiernaast.
min. is $f(\frac{17}{32}) = 1\frac{7}{8}$, dus $B_f = [1\frac{7}{8}, \rightarrow)$.



143 Neem in de formule $2x$ voor x .
Je krijgt $y^* = 0,025 \cdot (2x)^{3,41} = 0,025 \cdot 2^{3,41} \cdot x^{3,41} = 2^{3,41} \cdot 0,025x^{3,41} \approx 10,6 \cdot 0,025x^{3,41}$.
Dus $y^* \approx 10,6 \cdot y$.
Dus als x verdubbelt, dan wordt y ongeveer 10,6 keer zo groot.

Bladzijde 231

144 $f(x) = 0$ geeft $(\frac{1}{2}x - 1)^3 - 1 = 0$
 $(\frac{1}{2}x - 1)^3 = 1$
 $\frac{1}{2}x - 1 = 1$
 $\frac{1}{2}x = 2$
 $x = 4$
Dus $A(4, 0)$.
 $f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)^3 - 1$ geeft $f'(x) = 3(\frac{1}{2}x - 1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 1)^2$
 $k: y = ax + b$ met $a = f'(4) = 1\frac{1}{2}$
 $y = 1\frac{1}{2}x + b$ } $1\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 0$
door $A(4, 0)$ } $b = -6$
Dus $k: y = 1\frac{1}{2}x - 6$.

De lijn l gaat door B en staat loodrecht op k .

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l = -\frac{2}{3}.$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } B(-1, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot -1 + b = -1 \\ b = -1\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}.$$

k snijden met l geeft het snijpunt S .

$$1\frac{1}{2}x - 6 = -\frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$$

$$2\frac{1}{6}x = 4\frac{1}{3}$$

$$x = 2$$

$$x = 2 \text{ geeft } y = 1\frac{1}{2} \cdot 2 - 6 = -3, \text{ dus } S(2, -3).$$

$$d(k, B) = d(S, B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-(-3))^2} = \sqrt{13}$$

145 Zie de figuur hiernaast.

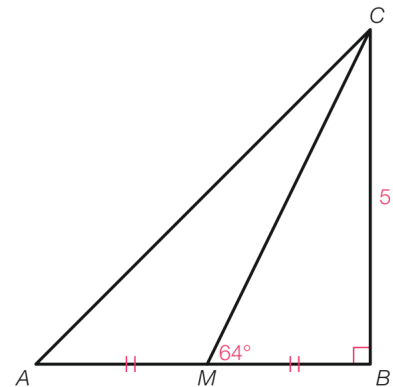
$$\text{In } \triangle BCM \text{ is } \tan(64^\circ) = \frac{5}{BM}$$

$$BM = \frac{5}{\tan(64^\circ)} = 2,438\dots$$

$$AB = 2 \cdot 2,438\dots = 4,877\dots$$

$$\text{In } \triangle ABC \text{ is } \tan(\angle A) = \frac{5}{4,877\dots}$$

$$\angle A \approx 45,7^\circ$$



146 $3x^4 - 5 = 16$

$$3x^4 = 21$$

$$x^4 = 7$$

$$x = \sqrt[4]{7} \vee x = -\sqrt[4]{7}$$

147 $y = \frac{1}{4} \cdot (3x)^{-2} \cdot \frac{8}{x^{-5}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(3x)^2} \cdot 8x^5 = \frac{8x^5}{4 \cdot 9x^2} = \frac{2}{9}x^3$

$$\text{Dus } y = \frac{2}{9}x^3.$$

148 $\frac{x^2 - 4}{x + 5} + 1\frac{1}{2} = 4$

$$\frac{x^2 - 4}{x + 5} = \frac{5}{2}$$

$$2(x^2 - 4) = 5(x + 5)$$

$$2x^2 - 8 = 5x + 25$$

$$2x^2 - 5x - 33 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -33 = 289, \text{ dus } \sqrt{D} = 17$$

$$x = \frac{5 + 17}{4} = 5\frac{1}{2} \vee x = \frac{5 - 17}{4} = -3$$

149 $f(x) = \frac{4}{x+1} - 2 = 4(x+1)^{-1} - 2$ geeft $f'(x) = -4(x+1)^{-2} = -\frac{4}{(x+1)^2}$

$$rc_k = f'(3) = -\frac{1}{4}$$

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l = 4.$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = 4x + b \\ \text{door } A(3, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 3 + b = -1 \\ b = -13 \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = 4x - 13.$$

$$y = 0 \text{ geeft } 4x - 13 = 0$$

$$4x = 13$$

$$x = 3\frac{1}{4}$$

$$\text{Dus } B(3\frac{1}{4}, 0).$$

150

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y - 2 = 0$$

$$x^2 + 6x + y^2 + 10y - 2 = 0$$

$$(x+3)^2 - 9 + (y+5)^2 - 25 - 2 = 0$$

$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 36$$

Dus middelpunt $M(-3, -5)$ en straal $r = 6$.

Van de lijn l door M loodrecht op k is $rc_l = \frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = \frac{1}{3}x + b \\ \text{door } M(-3, -5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot -3 + b = -5 \\ -1 + b = -5 \\ b = -4 \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = \frac{1}{3}x - 4.$$

k en l snijden geeft het snijpunt S .

$$\frac{1}{3}x - 4 = -3x + 16$$

$$3\frac{1}{3}x = 20$$

$$x = 6$$

$$x = 6 \text{ geeft } y = -3 \cdot 6 + 16 = -2, \text{ dus } S(6, -2).$$

$$d(S, M) = \sqrt{(-3-6)^2 + (-5-(-2))^2} = \sqrt{90}$$

$$d(k, c) = d(S, c) = d(S, M) - r = \sqrt{90} - 6 = 3\sqrt{10} - 6 = 3(\sqrt{10} - 2)$$

151

$$\sin(3x - \frac{1}{4}\pi) = 1$$

$$3x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$3x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi \vee x = 1\frac{7}{12}\pi$$

152

$$y = \frac{1}{4} \cdot {}^3\log(2x-3)$$

$$\frac{1}{4} \cdot {}^3\log(2x-3) = y$$

$${}^3\log(2x-3) = 4y$$

$$2x-3 = 3^{4y}$$

$$2x = 3^{4y} + 3$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 3^{4y} + 1\frac{1}{2}$$

153

Zie de figuur hiernaast.

$$f(x) = 9 \text{ geeft } -\frac{1}{3}x^2 + 4x = 9$$

$$x^2 - 12x + 27 = 0$$

$$(x-3)(x-9) = 0$$

$$x = 3 \vee x = 9$$

Dus $P(3, 9)$.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 4x \text{ geeft } f'(x) = -\frac{2}{3}x + 4$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'(3) = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 4 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } P(3, 9) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3 + b = 9 \\ b = 3 \end{array}$$

Dus $k: y = 2x + 3$.

$$y = 0 \text{ geeft } 2x + 3 = 0$$

$$2x = -3$$

$$x = -1\frac{1}{2}$$

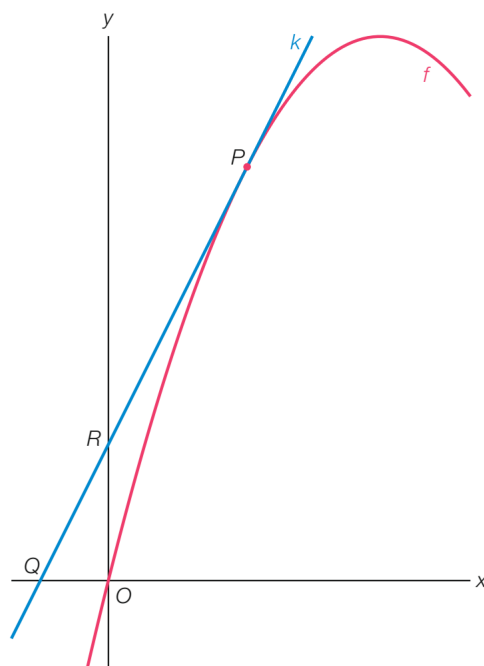
Dus $Q(-1\frac{1}{2}, 0)$.

$$x = 0 \text{ geeft } y = 3, \text{ dus } R(0, 3).$$

$$O(\triangle OPR) = \frac{1}{2} \cdot OR \cdot x_P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4\frac{1}{2}$$

$$O(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} \cdot OR \cdot OQ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$$

$$\text{Dus } c = \frac{O(\triangle OPR)}{O(\triangle OPQ)} = \frac{4\frac{1}{2}}{2\frac{1}{4}} = 2.$$



154 $y = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - 3x}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4 - 3x} = 2 - y$$

$$\sqrt{4 - 3x} = 4 - 2y$$

kwadrateren geeft

$$4 - 3x = (4 - 2y)^2$$

$$4 - 3x = 16 - 16y + 4y^2$$

$$-3x = 4y^2 - 16y + 12$$

$$x = -1\frac{1}{3}y^2 + 5\frac{1}{3}y - 4$$

155 N is evenredig met een macht van F , dus $N = aF^b$.

$$F = 7 \text{ en } N = 46,3 \text{ geeft } a \cdot 7^b = 46,3 \text{ oftewel } a = \frac{46,3}{7^b}.$$

$$F = 15 \text{ en } N = 145,2 \text{ geeft } a \cdot 15^b = 145,2 \text{ oftewel } a = \frac{145,2}{15^b}.$$

$$\text{Los op } \frac{46,3}{7^b} = \frac{145,2}{15^b}.$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$$b = 1,49... \text{ en } a = 2,50...$$

$$\text{Dus de formule is } N = 2,5F^{1,5}.$$

Bladzijde 232

156 $x^2 + 5x + p = 0$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 25 - 4p$$

Twee oplossingen als $D > 0$, dus als $25 - 4p > 0$

$$-4p > -25$$

$$p < 6\frac{1}{4}$$

157 $f(x) = 0,2x^2 - 2x + 1$

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{0,4} = 5 \text{ geeft } y_{\text{top}} = f(5) = 0,2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 + 1 = -4$$

$$g(5) = -0,3 \cdot 5^2 + 0,5 \cdot 5 + 1 = -4$$

Dus de top van de grafiek van f ligt op de grafiek van g .

158 Stel de zijde van het vierkant is x .

$$\text{Uit } \triangle AFD \sim \triangle BFE \text{ volgt } \frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BE} \text{ oftewel } \frac{x+12}{12} = \frac{x}{4}.$$

$$\text{Dus } 4(x+12) = 12x$$

$$4x + 48 = 12x$$

$$-8x = -48$$

$$x = 6$$

Dus de oppervlakte van $ABCD$ is $6^2 = 36$.

159 $4(5x - 2)^3 = 500$

$$(5x - 2)^3 = 125$$

$$5x - 2 = 5$$

$$5x = 7$$

$$x = 1\frac{2}{5}$$

160 $2x - 3 \geq 0$

$$2x \geq 3$$

$$x \geq 1\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } D_f = [1\frac{1}{2}, \rightarrow).$$

$$\text{Het randpunt is } (1\frac{1}{2}, 6) \text{ en } B_f = \langle \leftarrow, 6].$$

161 $y = 1\frac{1}{3} \cdot 9^{-2x+1\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \cdot 9^{-2x} \cdot 9^{1\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \cdot (9^{-2})^x \cdot (3^2)^{1\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \cdot (\frac{1}{81})^x \cdot 3^3 = 36 \cdot (\frac{1}{81})^x$
Dus $y = 36 \cdot (\frac{1}{81})^x$.

162 $y = 0,025x^{3,41}$ geeft $x^{3,41} = 40y$
 $x = (40y)^{\frac{1}{3,41}}$

Neem in deze formule $2y$ voor y .

Je krijgt $x^* = (40 \cdot 2y)^{\frac{1}{3,41}} = 2^{\frac{1}{3,41}} \cdot (40 \cdot y)^{\frac{1}{3,41}} \approx 1,225 \cdot (40y)^{\frac{1}{3,41}}$

Dus $x^* \approx 1,225 \cdot x$.

Dus x neemt met ongeveer 22,5% toe.

163 $y = 0$ geeft $x^2 - 6x - 7 = 0$
 $(x+1)(x-7) = 0$
 $x = -1 \vee x = 7$

Dus $A(-1, 0)$ en $B(7, 0)$.

$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 7 = 0$

$x^2 - 6x + y^2 + 8y - 7 = 0$

$(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 - 7 = 0$

$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 32$

Dus middelpunt $M(3, -4)$.

Lijn m door M en A heeft $rc_m = \frac{0 - -4}{-1 - 3} = -1$.

$k \perp m$, dus $rc_k \cdot -1 = -1$ en dit geeft $rc_k = 1$.

$k: y = x + b$
door $A(-1, 0)$ $\left. \begin{array}{l} -1 + b = 0 \\ b = 1 \end{array} \right\}$

Dus $k: y = x + 1$ en $P(0, 1)$.

Lijn n door M en B heeft $rc_n = \frac{0 - -4}{7 - 3} = 1$.

$l \perp n$, dus $rc_l \cdot 1 = -1$ en dit geeft $rc_l = -1$.

$l: y = -x + b$
door $A(7, 0)$ $\left. \begin{array}{l} -7 + b = 0 \\ b = 7 \end{array} \right\}$

Dus $l: y = -x + 7$ en $Q(0, 7)$.

$P(0, 1)$ en $Q(0, 7)$ geeft $PQ = 7 - 1 = 6$.

164 $\sin(\frac{3}{4}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $\frac{3}{4}x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{3}{4}x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = 1\frac{7}{9}\pi + k \cdot 2\frac{2}{3}\pi \vee x = -\frac{4}{9}\pi + k \cdot 2\frac{2}{3}\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{7}{9}\pi$

165 $N = 3 \cdot 5^{2t-6}$
 $3 \cdot 5^{2t-6} = N$
 $5^{2t-6} = \frac{1}{3}N$
 $2t - 6 = {}^5\log(\frac{1}{3}N)$
 $2t = 6 + {}^5\log(\frac{1}{3}N)$
 $t = 3 + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(\frac{1}{3}N)$

- 166** $c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$ met $r = d(M, k)$
De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} l: 2x - y = c \\ \text{door } M(3, 4) \end{array} \right\} c = 2 \cdot 3 - 4 = 2$$

Dus $l: 2x - y = 2$.

k en l snijden geeft het snijpunt S .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 6 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right. \begin{array}{l} |1| \\ |2| \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 6 \\ 4x - 2y = 4 \end{array} \right. +$$

$$\frac{5x = 10}{x = 2}$$

$$x = 2 \text{ invullen in } x + 2y = 6 \text{ geeft } 2 + 2y = 6$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

Dus $S(2, 2)$.

$$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(2-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}$$

Dus $c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$.

- 167** $2x + 8 = 0$ oftewel $2x = -8$ geeft $x = -4$, dus randpunt $(-4, 6)$.

$$f(x) = 0 \text{ geeft } 6 - 3\sqrt{2x+8} = 0$$

$$3\sqrt{2x+8} = 6$$

$$\sqrt{2x+8} = 2$$

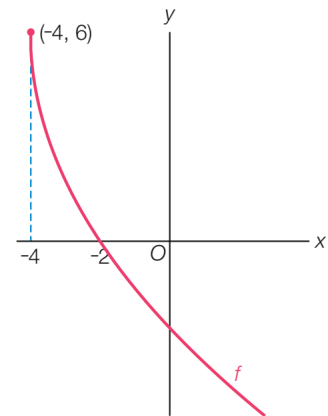
$$2x + 8 = 4$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

Zie de figuur hiernaast.

$$f(x) > 0 \text{ geeft } -4 \leq x < -2$$



- 168** $x^2 + px - 6p^2 = 0$
 $(x - 2p)(x + 3p) = 0$
 $x = 2p \vee x = -3p$

- 169** $f(x) = 0$ geeft $1 - \frac{2}{2x-3} = 0$

$$\frac{2}{2x-3} = 1$$

$$2x - 3 = 2$$

$$2x = 5$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

Dus $A(2\frac{1}{2}, 0)$.

$$f(x) = 1 - \frac{2}{2x-3} = 1 - 2(2x-3)^{-1} \text{ geeft } f'(x) = 2(2x-3)^{-2} \cdot 2 = \frac{4}{(2x-3)^2}$$

$$rc_k = f'(2\frac{1}{2}) = \frac{4}{(5-3)^2} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = x + b \\ \text{door } A(2\frac{1}{2}, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{2} + b = 0 \\ b = -2\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = x - 2\frac{1}{2}$.

Verantwoording

Beeld

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700
VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlelen.



Wij maken bij Noordhoff sinds 2009 bewust keuzes om onze impact op het klimaat te verkleinen. We volgen de klimaatdoelen van het Klimaatakkoord van Parijs. Scan de QR-code voor meer informatie over ons duurzaamheidsbeleid.

Zo is dit product gemaakt van FSC®-gecertificeerd papier en ander gecontroleerd materiaal. Wij gebruiken plantaardige inkt en onze lijmen zijn op waterbasis en afbreekbaar. Hierdoor is dit product goed te recyclen na gebruik.



0 / 26

© 2026 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06494-5

