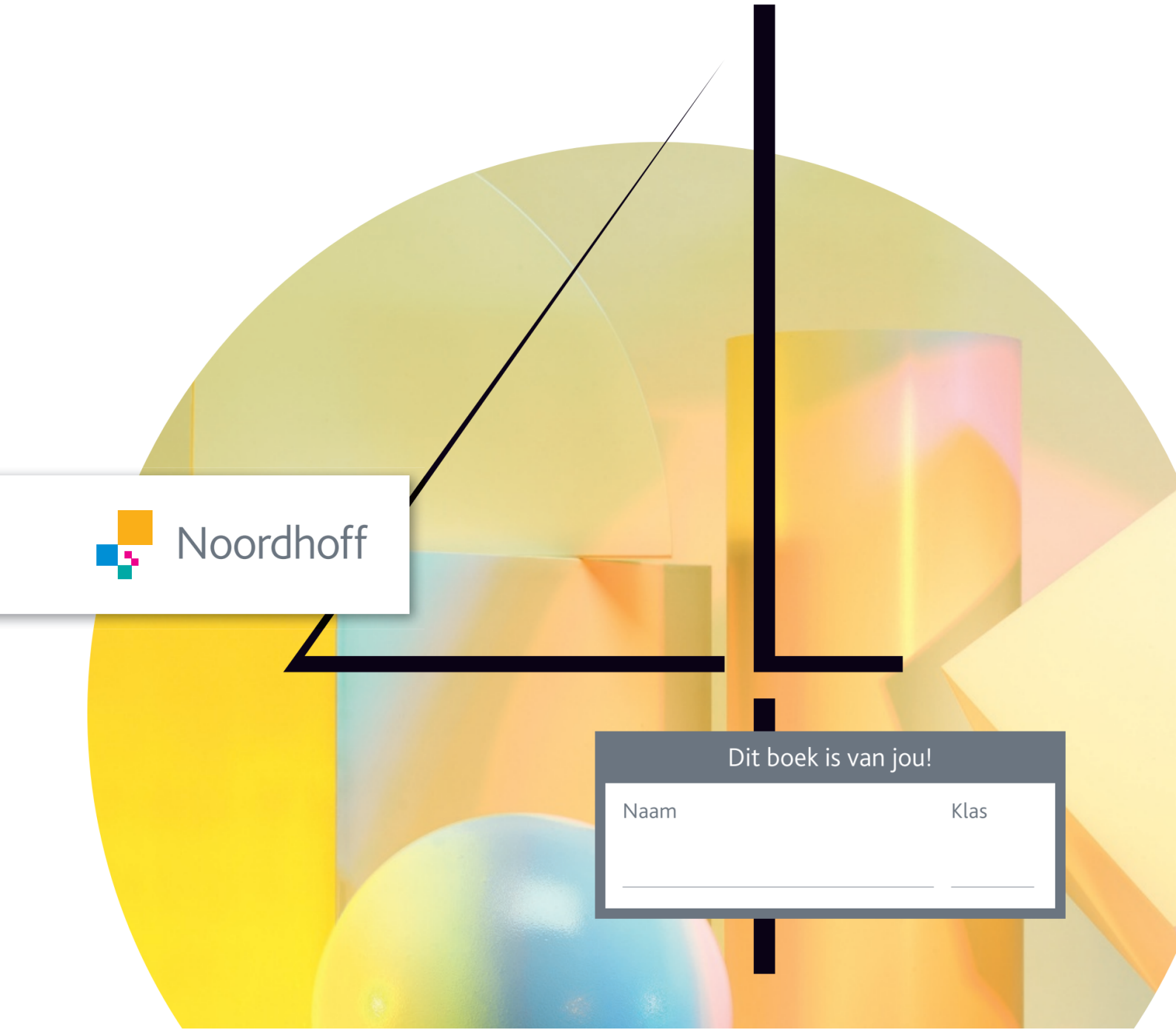
4
vwo

Wiskunde A/C | FLEX-boek Deel 1 | Editie 13

getal &ruimte A/C



Noordhoff

Dit boek is van jou!

Naam _____ Klas _____

Getal & Ruimte

Leerboek
vwo A/C deel 1

Dertiende editie, 2025

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek vwo A/C deel 1
De examenprogramma's wiskunde A en C van het vwo overlappen elkaar gedeeltelijk. Vandaar dat gekozen is voor gemeenschappelijke delen 1 en 2 voor vwo A/C. Het voordeel is dat de leerlingen in de vierde klas wiskunde A en wiskunde C samen kunnen volgen.
Na de delen 1 en 2 volgen voor wiskunde A de boeken vwo A deel 3 en deel 4 en voor wiskunde C de boeken vwo C deel 3 en deel 4.
De genoemde boeken bevatten de leerstof van de programma's vwo wiskunde A en vwo wiskunde C, zoals die met ingang van 2015 zijn vastgesteld. De totale studielast is voor wiskunde A 520 uur en voor wiskunde C 480 uur.
De vier hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 25 uur.
In de hoofdstukken komen de volgende (sub)domeinen aan bod.

Hoofdstuk 1	Formules en grafieken	C
Hoofdstuk 2	De statistische cyclus	E1, E2 en E3
Hoofdstuk 3	Rekenen en herleiden	B1
Hoofdstuk 4	Combinatoriek	B2

De subdomeinen van hoofdstuk 2 worden alleen in het schoolexamen getoetst. Zie voor verdere details de handleiding.

De actief lerende leerling
In deze 13e editie tweede fase zijn er nieuwe elementen in de leerboeken opgenomen die het actieve leerproces van de leerlingen ondersteunen en stimuleren.
Elke paragraaf begint met een opsomming van de kennis en vaardigheden die aan bod komen. Hiermee wordt enerzijds een vervolg gegeven aan de onderbouwboeken, waarin er aan het begin van elke paragraaf een opsomming van de leerdoelen staat. Anderzijds vindt aansluiting plaats bij de parate kennis en vaardigheden uit de syllabus.
Met de Kennis- en vaardighedencheck (KVC) aan het eind van een paragraaf kunnen leerlingen controleren of ze de kennis en vaardigheden van de paragraaf beheersen. Met de Kennis- en vaardighedentest (KVT) aan het eind van het hoofdstuk kunnen leerlingen controleren of ze de kennis en vaardigheden van het hoofdstuk beheersen. De antwoorden van de KVC's staan direct onder de opgaven en de antwoorden van de KVT's zijn achter in het boek te vinden. De leerling krijgt zo de mogelijkheid om snel te controleren of de kennis en vaardigheden worden beheerst.
De productieve vaardigheden uit de syllabus komen vooral aan bod in de afsluitende opgaven en in de Gemengde opgaven. Het is belangrijk dat leerlingen beseffen dat deze opgaven het beoogde eindniveau hebben. Daarom zijn de Gemengde opgaven in deze editie direct achter de KVT geplaatst.

© Noordhoff Uitgevers bv

Een andere vernieuwing in deze editie is het regelmatig terug laten keren van onderwerpen uit eerdere hoofdstukken of paragrafen middels gespreid en gevarieerd oefenen. Uit onderzoek blijkt dat leerlingen daarmee beter leren onderscheiden en herkennen wanneer zij welke aanpak kunnen gebruiken en dat daarmee de stof beter beklijft. Zie voor verdere details de handleiding.

Naast de nieuwe elementen heeft de Voorkennis een andere plek gekregen. Voorkennis is nu te vinden aan het begin van een (sub)paragraaf waar het activeren ervan wenselijk is.

Drie leerroutes
Net als in de 12e editie wordt er in deze editie gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Door te werken met deze routes maken leerlingen niet alle aangeboden opgaven. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen ongeveer in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen.
In de basisroute ligt veel nadruk op het inslijpen van basisvaardigheden.
In de middenroute worden enkele gewone opgaven overgeslagen en in plaats hiervan maken de leerlingen opgaven die dieper op de stof ingaan.
De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder gewone opgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.
De docent kan bepalen in welke route een leerling start, of het aan de leerling zelf overlaten. In geval van twijfel is het verstandig de leerling in de middenroute te laten beginnen. Het is van belang om regelmatig te monitoren of de gekozen route de juiste is.

De digitale leeromgeving van Getal & Ruimte
Bij sommige gedeeltes van het boek kunnen opgaven ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Tevens kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.
In het docentenmateriaal staan studiewijzers die een indicatie geven van de hoeveelheid leerstof die per week kan worden doorgewerkt. Verder zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

Voorjaar 2024

© Noordhoff Uitgevers bv

Legenda

V1 **Voorkennisopgave**
Een opgave over een onderwerp uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk.

O1 **Oriënterende opgave**
Een opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

2 **Gewone opgave**
Een opgave waarmee je oefent met wat er in de theorie aan bod is geweest.

R3 **Reflectie-opgave**
Een opgave waarmee je terugkijkt op een voorgaand probleem, of waarmee je op een andere manier naar voorgaande stof kijkt.

A4 **Afsluitende opgave**
Een opgave waarmee je oefent op het beoogde beheersingsniveau.

E5 **Extra opgave**
Een opgave die je extra uitdaagt.

☐ **Kennis- en vaardighedencheck**
Je controleert of je de kennis en/of vaardigheid beheerst door de bijbehorende opgave te maken.

C1 **Checkopgave**
Een opgave waarmee je controleert of je de kennis en/of vaardigheid goed beheerst.

Route-aanduiding

1 Een opgave van de basisroute.

2 Een opgave van de middenroute.

3 Een opgave van de uitdagende route.

NB: De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 **Opgaven zonder routeaanduiding**
In de Kennis- en vaardighedentest en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen routeaanduiding.

[▶GR] Verwijzing naar een module over het gebruik van de grafische rekenmachine. Zie ook het overzicht van de modules achterin dit boek.

[▶WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad achterin dit boek.

© Noordhoff Uitgevers bv

Inhoud

1 Formules en grafieken *6*

1.1 Lineaire formules *8*
1.2 Een lijn door twee gegeven punten *17*
1.3 Interpoleren, extrapoleren en evenredigheid *23*
1.4 Wiskundige modellen *33*
Kennis- en vaardighedentest *42*
Gemengde opgaven *44*

2 De statistische cyclus *48*

2.1 De onderzoeksvraag *50*
2.2 Data verzamelen *55*
2.3 Data analyseren *62*
2.4 Kwartielen en spreiding *72*
2.5 Statistische verdelingen *81*
2.6 Conclusies trekken *96*
Kennis- en vaardighedentest *106*
Gemengde opgaven *108*

3 Rekenen en herleiden *114*

3.1 Breuken en verhoudingen *116*
3.2 Herleiden van formules *126*
3.3 Procentberekeningen en de wetenschappelijke notatie *132*
3.4 Rekenen met eenheden *140*
Kennis- en vaardighedentest *152*
Gemengde opgaven *154*

4 Combinatoriek *158*

4.1 Regels voor telproblemen *160*
4.2 Permutaties en combinaties *169*
4.3 Rijtjes en roosters *179*
4.4 Allerlei telproblemen *187*
Kennis- en vaardighedentest *192*
Gemengde opgaven *194*

Werkbladen *198*
Antwoorden Kennis- en vaardighedentests *201*
Overzicht GR-modules *203*
Trefwoordenregister *204*
Verantwoording *206*

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

1 Formules en grafieken

In 2016 had Spanje 46,5 miljoen inwoners. In 2023 was dat aantal toegenomen tot 47,3 miljoen. In 2013 had Italië 60,2 miljoen inwoners. In 2023 was dat afgenomen tot 58,7 miljoen.
In welk jaar zal Spanje voor het eerst meer inwoners dan Italië hebben, als de gemiddelde jaarlijkse toe- en afnames hetzelfde blijven?

© Noordhoff Uitgevers bv

1.1 Lineaire formules

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij een lineaire formule de grafiek tekenen.
- Je kunt de formule van een lijn opstellen als de richtingscoëfficiënt en het snijpunt met de verticale as gegeven zijn.
- Je kunt de formule van een lijn opstellen bij een gegeven punt en richtingscoëfficiënt.
- Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een lijn met de assen berekenen.
- Je kunt de coördinaten van het snijpunt van twee lijnen berekenen.

Voorkennis Lineaire vergelijkingen oplossen

Een voorbeeld van een lineaire vergelijking is $2(x-1)-x=3x+4$.
Hierin heet $2(x-1)-x$ het linkerlid en $3x+4$ het rechterlid.
Je lost een vergelijking op door hem stap voor stap eenvoudiger te maken.
Daarbij gebruik je de balansmethode. Zie het volgende werkschema.

Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

1 Werk zo nodig haakjes en breuken weg.
2 Herleid beide leden.
3 Zorg ervoor dat in het linkerlid alleen een term met x overblijft en in het rechterlid alleen een getal.
4 Deel beide leden door het getal dat voor x staat.

Zo gaat het oplossen van de vergelijking $2(x-1)-x=3x+4$ als volgt.

$2(x-1)-x=3x+4$	Werk de haakjes weg.
$2x-2-x=3x+4$	Herleid beide leden.
$x-2=3x+4$	Links en rechts $3x$ aftrekken en 2 optellen.
$-2x=6$	Deel beide leden door -2.
$x=-3$	

V1 In welke stap bij het oplossen van de vergelijking $2x-\frac{1}{5}=\frac{2}{3}x+3$ zit een fout?

$2x-\frac{1}{5}=\frac{2}{3}x+3$
$30x-3=10x+3$) stap 1
$20x=6$) stap 2
$x=\frac{3}{10}$) stap 3

A stap 1 **B** stap 2 **C** stap 3 **D** geen fout

V2 In de vergelijking $\frac{2}{3}(x-4)=\frac{1}{5}(2x+5)$ staan zowel haakjes als breuken.
Je kunt eerst de haakjes wegwerken en dan de breuken, maar het kan ook andersom.
Werk beide manieren uit. Krijg je beide keren de oplossing $x=13\frac{3}{4}$?

© Noordhoff Uitgevers bv

V3 Los op.

a $5x - 2 = 3x + 6$

b $4 - 5(x - 1) = 3(2x + 1)$

c $3x - 0{,}8 = 2{,}4x + 1{,}6$

d $10 - 3(x + 1) = 5x - (2x - 1)$

e $1{,}6(2x - 1) = 1{,}4x - 2$

f $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{2}x + 2$

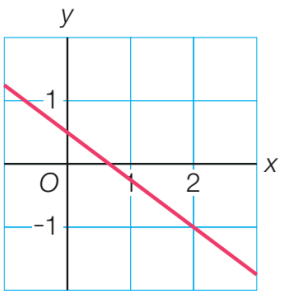
g $\frac{4}{5}x - 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}x - 3$

h $\frac{2}{7}(4x - 1) = \frac{3}{4}(1 - 5x)$

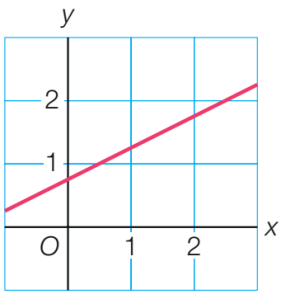
O1

Gegeven zijn vier lineaire formules en de bijbehorende grafieken.
Zoek bij elke formule de juiste grafiek.

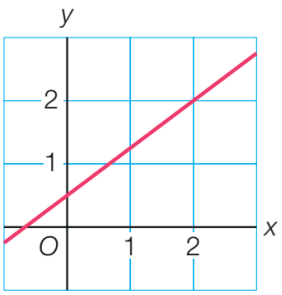
I $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ II $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ III $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ IV $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$



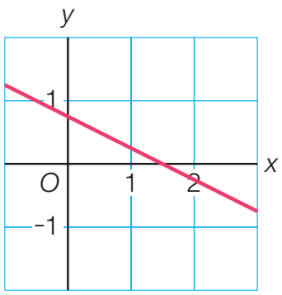
A



B



C



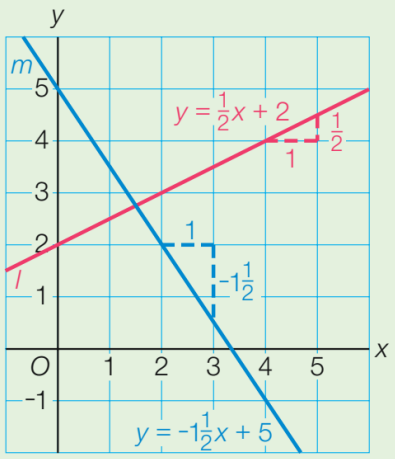
D

Theorie A Richtingscoëfficiënt

De grafiek van de **lineaire formule** $y = \frac{1}{2}x + 2$ is de lijn waarvoor geldt

- het snijpunt met de y-as is $(0, 2)$
- ga je 1 naar rechts, dan ga je $\frac{1}{2}$ omhoog.

Het getal $\frac{1}{2}$ in de formule $y = \frac{1}{2}x + 2$ heet de **richtingscoëfficiënt** van de lijn. We noteren de richtingscoëfficiënt van lijn l is $\frac{1}{2}$ als $\text{rc}_l = \frac{1}{2}$.



Van de lijn m: $y = -1\frac{1}{2}x + 5$ is de richtingscoëfficiënt gelijk aan $-1\frac{1}{2}$. Dus $\text{rc}_m = -1\frac{1}{2}$. Dit betekent:

ga je 1 naar rechts, dan ga je $-1\frac{1}{2}$ omhoog.
Dat is hetzelfde als 1 naar rechts en $1\frac{1}{2}$ omlaag
en ook hetzelfde als 2 naar rechts en 3 omlaag.

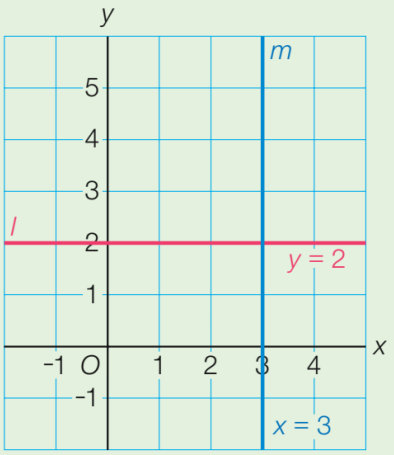
Van de lijn $y = ax + b$ is de richtingscoëfficiënt a.
$\text{rc} = a$ betekent: 1 naar rechts en a omhoog.
De lijn $y = ax + b$ snijdt de y-as in het punt $(0, b)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

De lijnen p: $y = 3x - 5$ en q: $y = 3x + 7$ hebben dezelfde richtingscoëfficiënt. Daarom zijn de lijnen p en q evenwijdig.

Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.

Van de lijn l in de figuur hiernaast is $rc_l = 0$. Immers, ga je 1 naar rechts, dan ga je 0 omhoog. Dus de formule van l is $y = 0x + 2$. Hiervoor schrijven we kortweg $y = 2$.
Op de lijn $y = 2$ liggen alle punten met y-coördinaat 2.



Op de verticale lijn m in de figuur hiernaast liggen alle punten met de x-coördinaat 3. Daarom zeggen we dat de lijn m de formule $x = 3$ heeft. Een verticale lijn heeft geen richtingscoëfficiënt.

De lijn $y = 5$ is de horizontale lijn door het punt (0, 5).
Alle punten op deze lijn hebben y-coördinaat 5.
De lijn $x = 6$ is de verticale lijn door het punt (6, 0).
Alle punten op deze lijn hebben x-coördinaat 6.

Voorbeeld

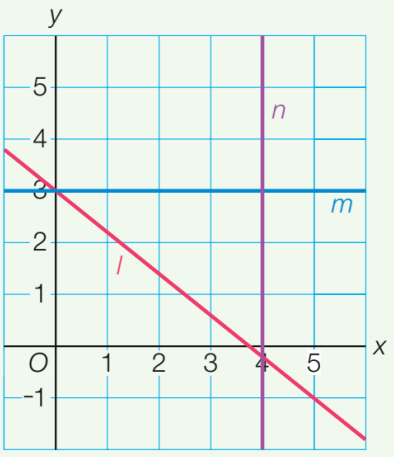
Teken in één figuur de lijnen l: $y = -0{,}8x + 3$, m: $y = 3$ en n: $x = 4$.

Aanpak
Maak bij l een tabel met twee 'mooie' punten. Verder is m de horizontale lijn door (0, 3) en n de verticale lijn door (4, 0).

Uitwerking

x	0	5
$y = -0{,}8x + 3$	3	−1

Zie de figuur.



2 Gegeven zijn de lijnen k: $y = -3x + 2$, m: $y = \frac{1}{2}x - 1$, p: $y = 2$ en q: $y = 2x$.
a Teken deze lijnen in één figuur.
b Schrijf van elke lijn de richtingscoëfficiënt op. Noteer $rc_k =$ ....., enzovoort.

© Noordhoff Uitgevers bv

3

Gegeven zijn de lijnen p: $y = 6 - 2{,}5x$ en q: $y = 1{,}2x - 3$.

a Teken p en q in één figuur.

b De lijn p snijdt de y-as in het punt A. De lijn k gaat door A en is evenwijdig met de lijn q.
Teken k en stel de formule van k op.

c De lijn l gaat door de oorsprong $O(0, 0)$ en is evenwijdig met de lijn p.
Stel de formule van l op.

d De lijn q snijdt de y-as in het punt B.
Stel de formule op van de horizontale lijn m die door het punt B gaat.

A4

Gegeven zijn de lijnen k: $y = 0{,}6x - 3$ en l: $y = -1{,}5x + 4$ en m met $rc_m = 2{,}5$ die door het punt $(0, -6)$ gaat.

a Teken k, l en m in één figuur.

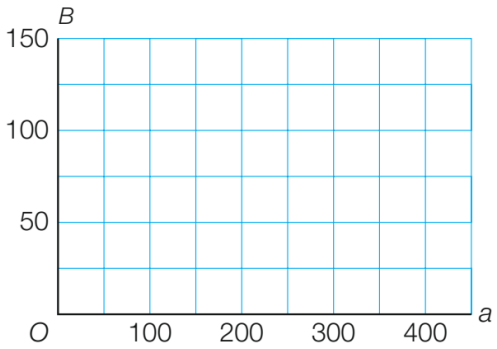
b Teken de lijn n die door de oorsprong gaat en evenwijdig is met k.
Wat is de formule van n?

c De lijn k snijdt de x-as in het punt A. De lijn p gaat door A en is evenwijdig met de y-as.
Stel van p de formule op.

d De lijn l snijdt de y-as in het punt B.
De lijn q gaat door B en is evenwijdig met de x-as.
Stel van q de formule op.

5

Bij autoverhuurbedrijf Rent-a-car kun je voor één dag een bestelauto huren. Met de formule $B = 0{,}15a + 80$ kun je berekenen hoeveel euro je moet betalen als je a km rijdt.



a Hoeveel euro moet je betalen bij een afstand van 50 km?

b Bij de grafiek hoort een assenstelsel zoals in de figuur hiernaast.
Hoe zie je aan de formule dat de a-as de horizontale as is?

c Teken de grafiek. Waarom mag je niet links van de B-as tekenen?

d In de formule staan twee getallen. Welke informatie geeft 0,15 over het verhuurtarief? En welke informatie geeft 80?

Autoverhuurbedrijf Cheap rekent een vast bedrag van 90 euro en een bedrag van 11 cent per km.

e Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat je bij Cheap betaalt als je a km rijdt en teken de grafiek van B in de figuur van vraag c.

f Welk bedrijf is het voordeligst bij een rit van 150 km? Hoeveel scheelt het?

© Noordhoff Uitgevers bv

6 ⏍ ⊙ ∗

a In een cilindervormig vat staat het water 80 cm hoog. Na opening van een kraan stroomt het vat met constante snelheid leeg. Per minuut daalt de waterhoogte met 5 cm.
Stel de formule op van de waterhoogte h in cm t minuten na het openen van de kraan.

b Aan het wateroppervlak heerst een druk van 1015 hPa. Onder water neemt per 10 meter de druk met 1000 hPa toe.
Stel de formule op van de druk P in hPa op een waterdiepte van d meter.

c Op 1 januari 2022 was er 540 miljoen ha tropisch regenwoud in het Amazonegebied. Door met name houtkap neemt de oppervlakte hiervan dagelijks met 2500 ha af.
Stel de formule op van de oppervlakte A aan tropisch regenwoud in het Amazonegebied t jaar na 1 januari 2022. Neem A in miljoenen ha en rond in het antwoord af op één decimaal.

7 ∗

Jannie moet 40 opgaven als huiswerk maken. Om haar te stimuleren, belooft haar moeder 50 cent voor elke opgave die ze goed doet. Maar voor elke fout gemaakte opgave gaat er 1 euro af. Ze maakt alle opgaven.

a Bereken hoeveel euro Jannie krijgt als ze 32 opgaven goed maakt.

b Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat Jannie krijgt als ze x opgaven goed maakt.

c Jannie krijgt uiteindelijk 2 euro van haar moeder.
Hoeveel opgaven had Jannie goed?

8 ⏍ ⊙ ∗

Gegeven is de lijn m: $y = 1\frac{1}{2}x + 9$.

a Hoe kun je narekenen dat het punt $A(12, 27)$ op m ligt?

b Welke van de punten $B(-20, -21)$, $C(-8, 3)$ en $D(82, 132)$ liggen op m?

Verder is gegeven de lijn n: $y = -\frac{1}{2}x + 4$. Het snijpunt van de lijnen m en n is het punt S. Om de coördinaten van S te berekenen, los je de vergelijking $1\frac{1}{2}x + 9 = -\frac{1}{2}x + 4$ op.

c Licht dit toe en bereken de coördinaten van S.

Theorie B Snijpunten van lijnen

Als je weet dat het punt $P(3, 5)$ op de lijn l: $y = 2x + b$ ligt, dan kun je b berekenen. Je vult daartoe $x = 3$ en $y = 5$ in de formule van de lijn in.
Je krijgt $5 = 2 \cdot 3 + b$. Dit geeft $b = -1$.
Zo krijg je de formule l: $y = 2x - 1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Om de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen l: $y = 2x - 1$ en m: $y = -\frac{1}{3}x + 4$ te berekenen, los je de vergelijking $2x - 1 = -\frac{1}{3}x + 4$ op.

Je krijgt $2x - 1 = -\frac{1}{3}x + 4$ $\quad \times 3$

$6x - 3 = -x + 12$

$7x = 15$

$x = 2\frac{1}{7}$

$x_S = 2\frac{1}{7}$ geeft $y_S = 2 \cdot 2\frac{1}{7} - 1 = 3\frac{2}{7}$, dus $S(2\frac{1}{7}, 3\frac{2}{7})$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen k: $y = -\frac{2}{3}x + 6$ en l: $y = \frac{1}{2}x - 1$. Verder is gegeven de lijn m door het punt $A(18, 6)$ die evenwijdig is met l.

a Stel de formule van m op en bereken de coördinaten van het snijpunt B van m met de x-as.

b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

Uitwerking

a m: $y = ax + b$ met $a = \text{rc}_l = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + b$ door $A(18, 6)$: $\frac{1}{2} \cdot 18 + b = 6$

$9 + b = 6$

$b = -3$

Dus m: $y = \frac{1}{2}x - 3$.

$y = 0$ geeft $\frac{1}{2}x - 3 = 0$

$\frac{1}{2}x = 3$

$x = 6$

Dus $B(6, 0)$.

Snijpunt met x-as, dus $y = 0$.

b k snijden met l geeft

$-\frac{2}{3}x + 6 = \frac{1}{2}x - 1$ $\quad \times 6$

$-4x + 36 = 3x - 6$

$-7x = -42$

$x = 6$

$x_S = 6$ geeft $y_S = -\frac{2}{3} \cdot 6 + 6 = 2$, dus $S(6, 2)$.

R9 Zie vraag b van het voorbeeld.

Om de y-coördinaat van S te berekenen, is $x = 6$ ingevuld in de formule van k.

Had je hiervoor ook de formule van l mogen gebruiken? Licht toe.

© Noordhoff Uitgevers bv

10 ⏍ ⊙
a De lijn l gaat door het punt $A(-2, 3)$ en $\text{rc}_l = -1\frac{1}{2}$.
Stel de formule van l op.
b De lijn k gaat door het punt $B(-5, 21)$ en is evenwijdig met de lijn m: $y = 4x - 6$. Stel de formule van k op.

11 ⏍ ⊙ ✱
De lijn p gaat door het punt $C(-18, 30)$ en is evenwijdig met de lijn q: $y = -\frac{1}{3}x$.
a Stel de formule van p op.
b Bereken de coördinaten van de punten waarin p de x-as en de y-as snijdt.

12 ✱
Gegeven zijn de punten $A(0, 1)$ en $B(0, 10)$.

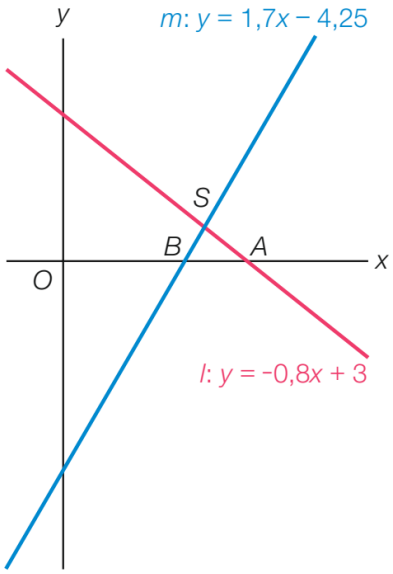
Lijn k gaat door A en $\text{rc}_k = \frac{1}{3}$.

Lijn l gaat door A en $\text{rc}_l = 1\frac{1}{2}$.

Lijn m gaat door B en $\text{rc}_m = -1\frac{1}{3}$.

Lijn m snijdt k in het punt C en l in het punt D.
Onderzoek hoeveel roosterpunten er binnen driehoek ACD liggen.

13 ⏍
Gegeven zijn de lijnen l: $y = -0{,}8x + 3$ en m: $y = 1{,}7x - 4{,}25$. Zie de figuur hiernaast.
a Bereken de coördinaten van het snijpunt S.
b De lijn l snijdt de x-as in het punt A.
Bereken de coördinaten van A.
c De lijn m snijdt de x-as in het punt B.
Bereken de coördinaten van B.



14 ⏍ ⊙
Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen
a l: $y = 2(x - 3)$ en m: $y = 5 - 3x$
b p: $y = \frac{2}{3}x + 11$ en q: $y = -1\frac{1}{2}x - 15$
c r: $y = -2\frac{1}{2}x + 5$ en s: $y = 25$.

A15 ⏍ ⊙ ✱
De lijn p gaat door het punt $A(18, -27)$ en is evenwijdig met de lijn n: $y = -2{,}5x + 35$.
a Stel de formule van p op.
b De lijn n snijdt de x-as in het punt P en de y-as in het punt Q.
Bereken de coördinaten van P en Q.
c Op n ligt het punt R met x-coördinaat $x_R = -20$.
Bereken de y-coördinaat y_R.
d Op n ligt het punt S met y-coördinaat $y_S = 45$.
Bereken de x-coördinaat x_S.
e Op n ligt het punt T waarvan de x-coördinaat gelijk is aan de y-coördinaat.
Bereken de coördinaten van T.

© Noordhoff Uitgevers bv

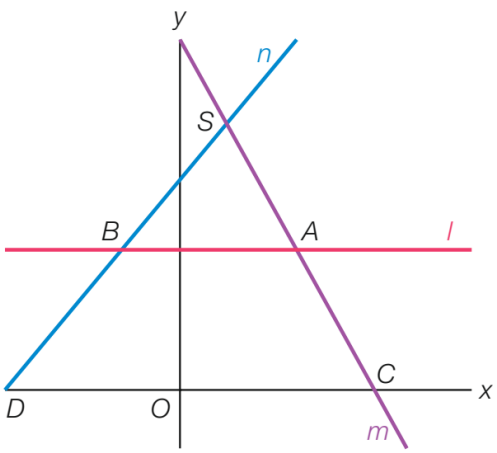
A16

Hiernaast zie je de lijnen l: $y = 2{,}4$, m: $y = -1{,}8x + 6$ en n: $y = 1{,}2x + 3{,}6$.

a Bereken de coördinaten van het snijpunt S van m en n.

b De lijn l snijdt m en n in de punten A en B. Bereken de lengte van het lijnstuk AB.

c De lijn m snijdt de x-as in het punt C en n snijdt de x-as in het punt D. Bereken de lengte van het lijnstuk CD.

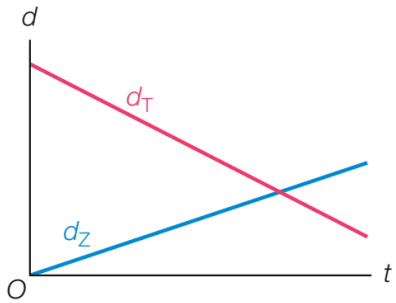


A17

Baarzen kunnen leven in water waarvan de temperatuur maximaal 25 °C is. Bovendien hebben ze minstens 2 mg zuurstof per liter water nodig.
We bekijken in deze opgave baarzen die leven in een meer waarvan de diepte 4 meter is.
Aan het begin van een lange hete zomer is op 1 juli de temperatuur van het water alleen aan de oppervlakte 25 °C.

Gedurende de zomer komt de diepte waarop de temperatuur 25 °C is elke drie dagen 10 cm lager te liggen.
Op 1 juli is overal in het meer voldoende zuurstof aanwezig. Vanaf dat moment ontwikkelt zich door rotting van organismen op de bodem een steeds dikkere laag met te weinig zuurstof. Deze laag neemt vanaf 1 juli elke dag met 5 cm toe.
In deze opgave is d_T de diepte waarop de temperatuur 25 °C is en d_Z de diepte waarboven er voldoende zuurstof voor de baarzen is. Neem t in dagen met $t = 0$ op 1 juli en de diepte d in meter. Aan het wateroppervlak is dus $d = 0$ en op de bodem van het meer is $d = 4$.
In de figuur hiernaast zie je de grafieken van d_T en d_Z.
Bereken vanaf welke datum de baarzen niet meer in het meer kunnen leven.

$t = 0$ is op 1 juli
$t = 30$ is op 31 juli
$t = 31$ is op 1 augustus
$t = 61$ is op 31 augustus



© Noordhoff Uitgevers bv

Met de kennis- en vaardighedencheck kun je controleren of je de kennis en vaardigheden van de paragraaf kent en beheerst. Achter elke kennis of vaardigheid wordt verwezen naar de bijbehorende checkopgave en theorie. Maak de checkopgave en controleer je antwoord. De antwoorden staan onder de opgaven. Heb je het antwoord niet goed of twijfel je hoe je de uitwerking moet noteren, bekijk dan het uitwerkingenboek en bestudeer zo nodig nogmaals de aangegeven theorie.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan bij een lineaire formule de grafiek tekenen.	▶ OPGAVE C1 THEORIE A
☐ Ik kan de formule van een lijn opstellen als de richtingscoëfficiënt en het snijpunt met de verticale as gegeven zijn.	▶ OPGAVE C2 THEORIE A
☐ Ik kan de formule van een lijn opstellen bij een gegeven punt en richtingscoëfficiënt.	▶ OPGAVE C3 THEORIE B
☐ Ik kan de coördinaten van de snijpunten van een lijn met de assen berekenen.	▶ OPGAVE C4 THEORIE B
☐ Ik kan de coördinaten van het snijpunt van twee lijnen berekenen.	▶ OPGAVE C5 THEORIE B

C1 Teken de lijn l: $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

C2 Geef de formule van lijn k met richtingscoëfficiënt 0,5 die door het punt $A(0, -5)$ gaat.

C3 De lijn q gaat door het punt (2, 3) en is evenwijdig met de lijn p: $y = 4x - 6$.
Stel de formule van q op.

C4 Gegeven is de formule m: $y = 3{,}5x + 7$.
Bereken de coördinaten van de punten waarin m de x-as en de y-as snijdt.

C5 Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen m: $y = 3{,}5x + 7$ en n: $y = -1{,}5x + 22$.

Antwoorden

C1 ∗
C2 k: $y = 0{,}5x - 5$
C3 q: $y = 4x - 5$
C4 $(-2, 0)$ en $(0, 7)$
C5 $S(3; 17{,}5)$

∗ geeft aan dat een antwoord hier niet is opgenomen. Het gaat dan om antwoorden zoals tabellen, figuren, redeneringen en toelichtingen. Zie voor ontbrekende antwoorden het antwoorden- of uitwerkingenboek.

© Noordhoff Uitgevers bv

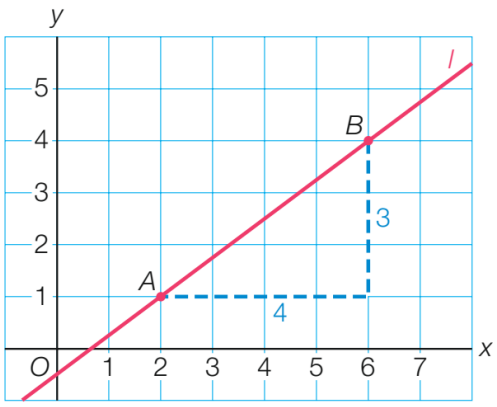
1.2 Een lijn door twee gegeven punten

Kennis en vaardigheden

- Je kunt een formule opstellen van een lijn bij twee gegeven punten.
- Je kunt een lineaire formule opstellen bij een praktische situatie.

O18

De lijn l gaat door de punten $A(2, 1)$ en $B(6, 4)$. Zie de figuur hiernaast.



a Vul in. Voor de lijn l geldt:
ga je 4 naar rechts, dan ga je 3 omhoog, dus
ga je 1 naar rechts, dan ga je ..... omhoog.
Dus $rc_l =$ .....

b De x-coördinaat van A is 2. We noteren $x_A = 2$.
En zo is $x_B = 6$. Er geldt dus $x_B - x_A = 6 - 2 = 4$.
Hoeveel is $y_B - y_A$?

c Hoe kun je met $x_B - x_A$ en $y_B - y_A$ de richtingscoëfficiënt van l berekenen?

Theorie A Richtingscoëfficiënt berekenen

Bij de opgaven die hierna komen, heb je regelmatig je rekenmachine nodig. We gaan ervan uit dat je beschikt over een grafische rekenmachine (GR). Modules met uitleg over de GR vind je in de digitale leeromgeving van Getal & Ruimte.

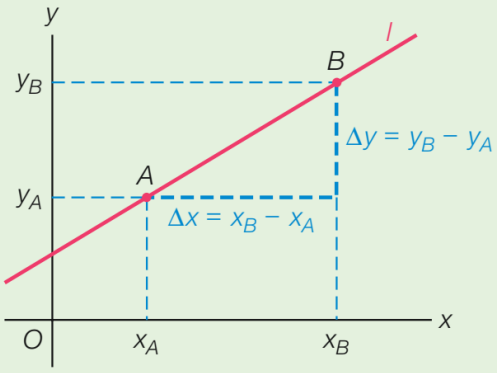
[▶ GR] Neem de module **Berekeningen op het basisscherm** door.

Voor de lijn l in de figuur hiernaast geldt:
ga je $x_B - x_A$ naar rechts, dan ga je $y_B - y_A$ omhoog,
dus ga je 1 naar rechts, dan ga je $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ omhoog.

Je ziet dat

$$rc_l = \frac{\text{verschil van de } y\text{-coördinaten}}{\text{bijbehorende verschil van de } x\text{-coördinaten}}.$$

Voor het verschil van de twee y-coördinaten schrijven we Δy en voor het bijbehorende verschil van de x-coördinaten Δx.



Van de lijn $y = ax + b$ door de punten A en B is de richtingscoëfficiënt $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Δ is de Griekse hoofdletter D, de eerste letter van differentie (= verschil). Spreek Δ uit als delta.

© Noordhoff Uitgevers bv

In het voorbeeld wordt gevraagd om een **vergelijking van de lijn** l door de punten A en B op te stellen. De begrippen *formule van een lijn* en *vergelijking van een lijn* gebruiken we door elkaar.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de lijn l door de punten $A(2, -1)$ en $B(6, 5)$.

Uitwerking

$y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - -1}{6 - 2} = 1\frac{1}{2}$

$y = 1\frac{1}{2}x + b$ door $A(2, -1)$:

$1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1$

$3 + b = -1$

$b = -4$

Dus l: $y = 1\frac{1}{2}x - 4$.

R19 Zie het voorbeeld.

a Lotte neemt $\Delta y = -1 - 5$.
Welke Δx hoort daarbij? Krijgt ze ook $\text{rc}_l = 1\frac{1}{2}$?

b Lars gebruikt de coördinaten van het punt B om b te berekenen in $y = 1\frac{1}{2}x + b$.
Welke berekening hoort daarbij?

20 Stel de formule op van de lijn

a l door $A(-1, 1)$ en $B(1, 4)$

b m door $C(-3, 5)$ en $D(2, 0)$

c n door $E(5, 3)$ en $F(-7, 3)$

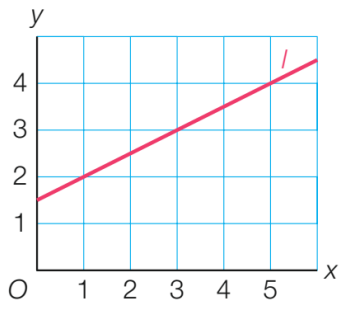
d p door $G(1, -3)$ en $H(5, 5)$.

21 Stel de formule op van de lijn

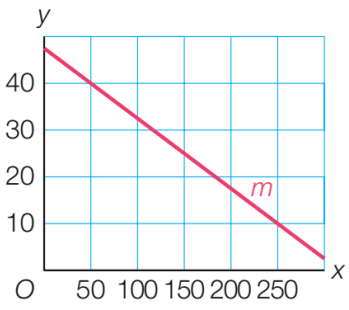
a l door $P(180, 360)$ en $Q(160, 250)$

b m door $R(15, 73)$ en $S(45, 58)$.

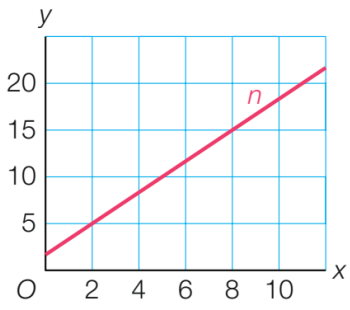
22 Stel van elke lijn in de figuur hieronder de formule op. Lees eerst de coördinaten van twee 'mooie' punten af.



a



b



c

© Noordhoff Uitgevers bv

A23 ⊡ ⊙ ∗

Stel een vergelijking op van de lijn

a m door de punten $A(-23, -125)$ en $B(17, 155)$

b p door de oorsprong die evenwijdig is met de lijn door de punten $C(18, -27)$ en $D(12, -30)$

c q door het punt $E(-8, 14)$ die evenwijdig is met de lijn door de punten $O(0, 0)$ en $F(-12, 4)$.

A24 ⊡ ⊙ ∗

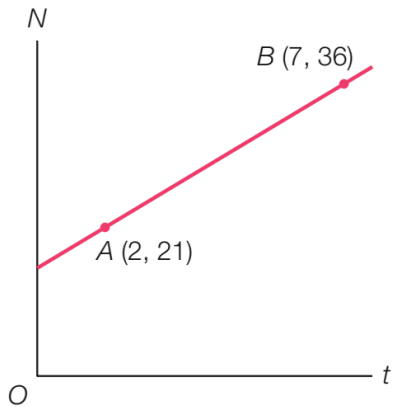
De lijn k gaat door de punten $A(2, 22)$ en $B(12, 7)$ en de lijn l gaat door de punten $C(4, 3)$ en $D(20, 43)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

25 ∗

De lijn k gaat door de punten $A(p, 2p)$ en $B(3p, 3p)$.
Bereken de coördinaten van de snijpunten van k met de assen.

O26 ⊡ ⊙ ∗

Stel een vergelijking op van de lijn in de figuur hieronder.

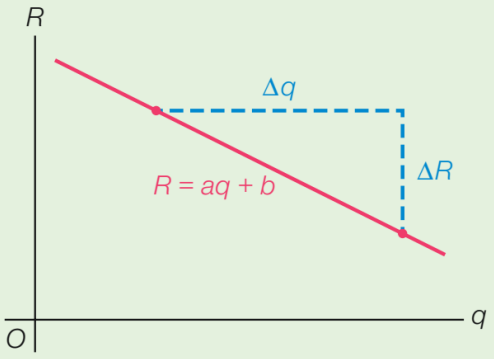


Theorie B Lineaire formules opstellen bij praktische situaties

Bij praktische situaties gebruik je vaak andere letters dan x en y, maar het opstellen van lineaire formules gaat op dezelfde manier.
Is R een **lineaire functie** van q, dan is

$R = aq + b$ met $a = \frac{\Delta R}{\Delta q}$.

Je kunt ook zeggen dat R is **uitgedrukt in** q.
Er is een **lineair verband** tussen R en q.



En als T een lineaire functie is van t, dan is

$T = at + b$ met $a = \frac{\Delta T}{\Delta t}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Een marktkoopman verkoopt T-shirts. De ervaring leert dat bij een prijs van 5 euro er per week 90 T-shirts verkocht worden. Bij een prijs van 8 euro is de weekverkoop nog maar 30 stuks. Er bestaat een lineair verband tussen de prijs p in euro's van een T-shirt en de weekverkoop q. Druk q uit in p.

Uitwerking

$q = ap + b$ met $a = \dfrac{\Delta q}{\Delta p}$

Bij $p = 5$ hoort $q = 90$.
Bij $p = 8$ hoort $q = 30$.
$\Big\}\ a = \dfrac{\Delta q}{\Delta p} = \dfrac{30 - 90}{8 - 5} = -20$

$q = -20p + b$
$p = 5$ en $q = 90$
$\Big\}\ -20 \cdot 5 + b = 90$
$-100 + b = 90$
$b = 190$

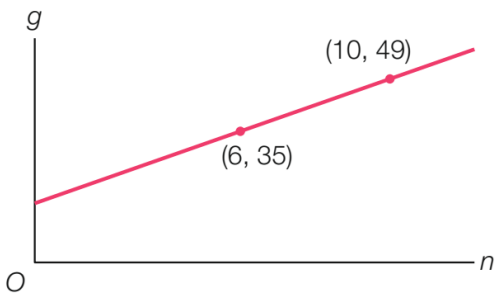
Dus $q = -20p + 190$.

27

a Tussen K en m bestaat een lineair verband.
Voor $m = 5$ is $K = 10$ en voor $m = 12$ is $K = 115$.
Schrijf K als functie van m.

b F is een lineaire functie van R.
Voor $R = 15$ is $F = 300$ en voor $R = 42$ is $F = 138$.
Stel de formule op van F.

c Stel een vergelijking op van de lijn in de figuur hiernaast.



28

Tijdens een vlucht van een Airbus A320 is er na 250 km vliegen 11 ton kerosine in de brandstoftanks aanwezig, 1200 km verder is dat nog 7,4 ton. Er bestaat een lineair verband tussen de aanwezige hoeveelheid kerosine k in ton en de vluchtafstand V in km.

a Druk k uit in V.

Als veiligheidsmaatregel worden de piloten gewaarschuwd als er in de tanks nog maar 1,5 ton kerosine zit.

b Hoeveel km na de start gaat het alarm af? Rond af op honderdtallen.
Hoeveel km kan er dan nog gevlogen worden?

© Noordhoff Uitgevers bv

29 ⏍⊙∗

Tussen F en n bestaat een lineair verband. Bij $n = 150$ hoort $F = 7{,}75$ en bij $n = 425$ hoort $F = 2{,}25$.

a Druk F uit in n.

b Om n uit de drukken in F kun je op twee manieren te werk gaan:
1 Gebruik het antwoord van vraag a.
2 Begin als volgt: $n = aF + b$ met $a = \frac{\Delta n}{\Delta F}$.
Werk beide manieren uit.

c Bereken F voor $n = 250$ en bereken n voor $F = 4{,}25$.

A30 ⏍⊙∗

De volwassen Nederlander wordt gemiddeld steeds langer en zwaarder. In 1992 had de Nederlandse man een gemiddelde lengte van 179,0 cm en een gemiddeld gewicht van 78,7 kg. In 2022 was dat 181,1 cm en 85,6 kg.
De Nederlandse vrouw woog in 2022 gemiddeld 72,0 kg. Dat was 2,5 kg meer dan in 2002. In 2022 was de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw 167,7 cm. Dat was 0,6 cm meer dan in 1998.
Neem in deze opgave aan dat er lineaire verbanden bestaan tussen de tijd t in jaren en het gewicht in kg, en tussen t en de lengte in cm. Neem bovendien aan dat deze lineaire verbanden ook de komende jaren gelden.
Neem $t = 0$ in het jaar 1990.

a Stel de formules op waarbij
het gemiddelde gewicht G_m van de Nederlandse man,
het gemiddelde gewicht G_v van de Nederlandse vrouw,
de gemiddelde lengte L_m van de Nederlandse man en
de gemiddelde lengte L_v van de Nederlandse vrouw
worden uitgedrukt in t.

Mannen zijn gemiddeld zwaarder dan vrouwen. In 2022 was het verschil 13,6 kg.

b Bereken in welk jaar dit verschil volgens de formule 15,7 kg zal zijn. Wat is dan het gemiddelde gewicht van de Nederlandse man?

c Bereken de gemiddelde lengte van de Nederlandse man in het jaar dat de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw 168 cm is.

A31 ∗

Zie opgave 30.
Een bekende maat om na te gaan of er sprake is van gezond gewicht of overgewicht is de Body Mass Index (BMI). De BMI bereken je met de formule $\text{BMI} = \frac{\text{gewicht}}{\text{lengte}^2}$. Hierin is het gewicht in kg en de lengte in meter.
Bij een BMI van 18,5 tot 25 is sprake van normaal gewicht, bij 25 tot 27 is er licht overgewicht en bij 27 tot 30 is er matig overgewicht.
Bram beweert dat tussen 1990 en 2020 de BMI van de Nederlandse man meer gestegen is dan de BMI van de Nederlandse vrouw.
Onderzoek of Bram gelijk heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan een formule opstellen van een lijn bij twee gegeven punten.

☐ Ik kan een lineaire formule opstellen bij een praktische situatie.

▶ OPGAVE C6
THEORIE A
▶ OPGAVE C7
THEORIE B

C6 Stel een formule op van de lijn l door de punten $A(2, -2)$ en $B(6, 0)$.

C7 Een auto remt, waardoor de snelheid lineair afneemt. Na 2 seconden is de snelheid 90 km/uur en na 5 seconden is de snelheid 45 km/uur. Druk de snelheid v in km/uur uit in de tijd t in seconden, met $t = 0$ op het moment dat de auto begint met remmen.

Antwoorden

C6 $y = \frac{1}{2}x - 3$

C7 $v = -15t + 120$

© Noordhoff Uitgevers bv

1.3 Interpoleren, extrapoleren en evenredigheid

Kennis en vaardigheden

- Je kunt lineair interpoleren en lineair extrapoleren.
- Je kunt een recht evenredig verband en een omgekeerd evenredig verband herkennen.
- Je kunt de formule opstellen bij een recht evenredig verband.
- Je kunt de formule opstellen bij een omgekeerd evenredig verband.

O32

In de tabel staat informatie over het aantal sportclubs in Nederland.

SPORTCLUBS IN NEDERLAND

jaar	2000	2009	2015	2021
aantal	26 620	28 700	28 210	25 450

a Tymon is benieuwd hoeveel sportclubs er in 2012 waren. Hij bedenkt: '2012 is precies tussen 2009 en 2015, dus in 2012 waren er 28 455 sportclubs.' Laat zien hoe Tymon aan dat aantal komt. Welke aanname heeft hij gedaan?

In de periode 2015-2021 nam het aantal sportclubs sterk af.

b Hoeveel was de totale afname in die periode?

c Hoeveel was dan de gemiddelde afname per jaar?

Als je aanneemt dat in de periode 2015-2021 het aantal sportclubs ieder jaar met hetzelfde aantal afnam, dan kun je met je antwoord van vraag c het aantal sportclubs in 2019 schatten.

d Bereken met behulp van deze aanname het aantal sportclubs in 2019.

e Als je ervan uitgaat dat de jaarlijkse afname na 2021 hetzelfde blijft als in de periode 2015-2021, dan kun je ook het aantal sportclubs in 2025 schatten.
Bereken met behulp van deze aanname het aantal sportclubs in 2025.

Theorie A Interpoleren en extrapoleren

Bij een tabel met waarnemingsresultaten kun je tussenliggende waarden schatten. Dat heet **interpoleren**. Bij **extrapoleren** geef je een schatting van een waarde die buiten de serie waarnemingen ligt.

Interpoleren: schatten van een tussenliggende waarde.
Extrapoleren: schatten van een waarde die buiten de gegevens ligt.

Ga je hierbij uit van een lineair verband, dan heet dat **lineair interpoleren** of **lineair extrapoleren**.

© Noordhoff Uitgevers bv

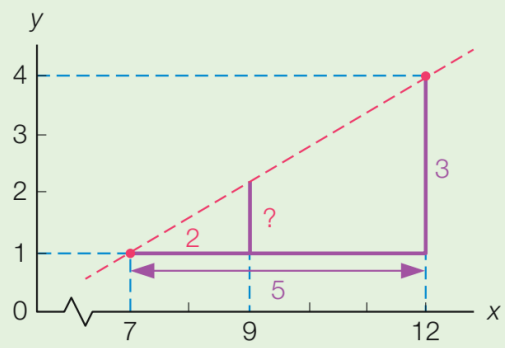
Zie de tabel hiernaast. Om met lineair interpoleren y te schatten bij $x = 9$ ga je als volgt te werk.
Als x toeneemt van 7 naar 12, dan neemt y toe van 1 naar 4.
Dus bij $\Delta x = 5$ hoort $\Delta y = 3$.

Hieruit volgt dat bij $\Delta x = 1$ hoort $\Delta y = \frac{3}{5} = 0{,}6$,

dus bij $\Delta x = 2$ hoort $\Delta y = 2 \cdot 0{,}6$.
De schatting van y bij $x = 9$ is
$y = 1 + 2 \cdot 0{,}6 = 2{,}2$.

x	7		12
y	1		4

+5 boven de tabel, +3 onder de tabel



Voorbeeld

Gegeven is de volgende tabel.

jaar	2000	2007	2011	2016	2025
aantal	670	508	281	220	193

a Bereken het aantal in 2014 met lineair interpoleren. Rond af op gehelen.
b Bereken het aantal in 2032 met lineair extrapoleren. Rond af op gehelen.

Aanpak

a 2014 ligt tussen 2011 en 2016, dus gebruik het gedeelte van de tabel dat hiernaast staat.

jaar	2011	2016
aantal	281	220

+5 boven de tabel, −61 onder de tabel

b Gebruik de laatste ontwikkeling om het aantal te schatten in 2032, dus gebruik het gedeelte van de tabel dat hiernaast staat.

jaar	2016	2025
aantal	220	193

+9 boven de tabel, −27 onder de tabel

Uitwerking

a In 5 jaar 61 minder, dus in 1 jaar $\frac{61}{5}$ minder.

2014 is 3 jaar na 2011, dus in 2014 is het aantal $281 - 3 \cdot \frac{61}{5} \approx 244$.

b In 9 jaar 27 minder, dus in 1 jaar $\frac{27}{9} = 3$ minder.

2032 is 7 jaar na 2025, dus in 2032 is het aantal $193 - 7 \cdot 3 = 172$.

© Noordhoff Uitgevers bv

R33 Zie het voorbeeld.

Jos berekent het aantal in 2014 door de formule op te stellen van een lijn. Hij krijgt de lijn $N = -12{,}2t + 281$.

a Licht deze formule toe en gebruik deze formule om het aantal in 2014 te berekenen.

b Stel de formule op van de lijn waarmee je het aantal in 2032 kunt schatten.

34 Gegeven is de tabel hiernaast. Rond in deze opgave af op twee decimalen.

x	31	46	78	90	103
y	0,7	2,5	6,0	8,4	9,8

Bereken y met lineair interpoleren of lineair extrapoleren bij

a $x = 48$

b $x = 97$

c $x = 123$.

35 Gegeven is de tabel hiernaast. Rond in deze opgave af op één decimaal.

t	3,62	4,83	6,12	9,81
N	6,7	11,3	18,7	27,1

a Bereken N met lineair interpoleren bij $t = 3{,}91$.

b Bereken N met lineair extrapoleren bij $t = 15{,}60$.

c Bereken t met lineair interpoleren bij $N = 21{,}9$.

36 Van een persoon is gedurende een groot aantal jaren zowel de lichaamslengte als het gewicht bijgehouden. Zie de tabel.

LENGTE EN GEWICHT

lengte L in cm	60	80	100	120	140	160	180
gewicht G in kg	6	11	16	22	32	50	65

a Bereken met lineair interpoleren het gewicht bij een lengte van 155 cm.

b Bereken met lineair interpoleren de lengte bij een gewicht van 25 kg.

c Bereken met lineair extrapoleren het gewicht bij een lengte van 186 cm.

37 Op een winterse dag was de temperatuur om 7:00 uur −4,5 °C. Vier uur later, dus om 11:00 uur, was de temperatuur gestegen tot 2,3 °C.

a Bereken met lineair interpoleren de temperatuur om 9:30 uur.

b Bereken met lineair extrapoleren de temperatuur om 14:00 uur.

c Waarom is lineair extrapoleren niet toegestaan als je de temperatuur om 20:00 uur wilt schatten?

© Noordhoff Uitgevers bv

A38 ⚀ ⊙ ∗

In de tabel staat informatie over het aantal meldingen van hepatitis A en tuberculose (tbc) in Nederland.

AANTAL MELDINGEN HEPATITIS A EN TUBERCULOSE IN NEDERLAND

jaar	1970	1990	2000	2022
hepatitis A	3789	771	658	85
tuberculose	2570	1369	1443	635

a Bereken met lineair interpoleren het aantal meldingen van hepatitis A in 2010.

b Bereken met lineair interpoleren het aantal meldingen van tbc in 2015.

c Het aantal meldingen van tbc vertoont een dalende trend, maar soms neemt het aantal meldingen toch nog toe ten opzichte van het jaar ervoor. Neem eens aan dat je alleen over de gegevens van 1970 en 2022 zou beschikken.
In welk jaar zouden er dan volgens lineair extrapoleren geen meldingen meer zijn van tbc in Nederland?

A39 ∗

Het aantal Nederlanders van 100 jaar en ouder (honderdjarigen) neemt voortdurend toe. Daarnaast neemt het aantal honderdjarige mannen ten opzichte van het aantal honderdjarige vrouwen ook toe.
Zie de tabel. Je ziet dat in 2017 één van de zeven honderdjarigen man is.
Bereken met lineair extrapoleren in welk jaar één van de vijf honderdjarigen man is.

AANDEEL MANNEN VAN HONDERDJARIGEN OP 1 JANUARI

jaar	aandeel mannen
2017	1 van de 7
2023	3 van de 19

O40 ⚀ ⊙ ∗

Gegeven is de verhoudingstabel hiernaast.

a Noem een bijzonderheid van een verhoudingstabel.

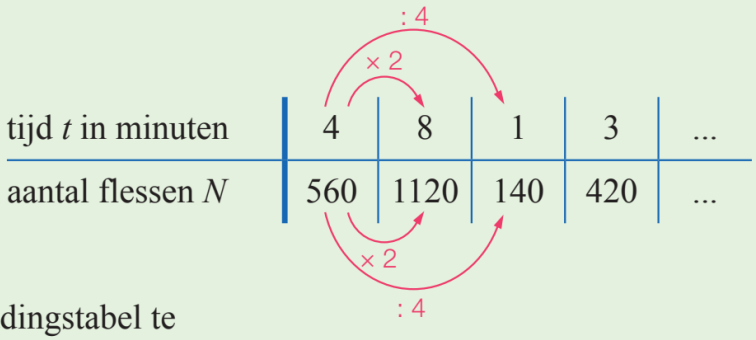
b Teken de grafiek bij deze verhoudingstabel.
Welke bijzonderheid heeft de grafiek?

c Welke formule hoort bij de grafiek?

x	1	3	5	8	10
y	0,4	1,2	2	3,2	4

Theorie B Recht evenredig

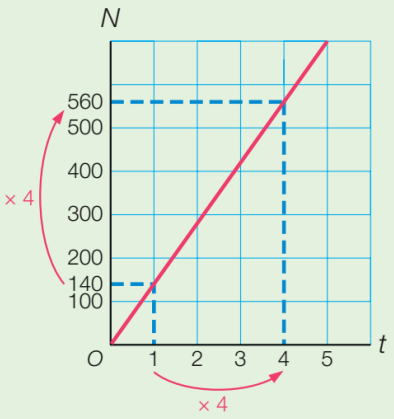
Een machine levert 560 flessen af in vier minuten.
Bij deze situatie past de verhoudingstabel van hiernaast.



Je kunt zien dat je met een verhoudingstabel te maken hebt, omdat de verhouding van t en N steeds gelijk is:
$\frac{560}{4} = 140$, $\frac{1120}{8} = 140$, enzovoort.

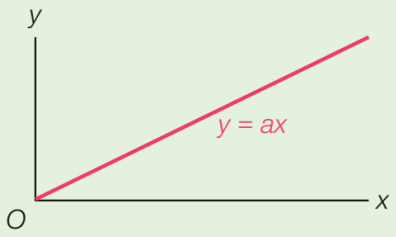
© Noordhoff Uitgevers bv

De grafiek die bij deze verhoudingstabel hoort, zie je in de figuur hiernaast.
De grafiek is een rechte lijn door het punt $O(0, 0)$ met richtingscoëfficiënt 140. De formule is $N = 140t$.
Vermenigvuldig je in de verhoudingstabel de tijd t met een getal k, dan moet je N ook met k vermenigvuldigen.



We zeggen dat N **evenredig** is met t. In plaats van
N is evenredig met t
zeggen we ook
N is **recht evenredig** met t.
Bij evenredige grootheden hoort een verhoudingstabel.

y is (recht) evenredig met x
- **Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen.**
- **De bijbehorende tabel is een verhoudingstabel.**
- **De formule heeft de vorm $y = ax$.**
- **De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.**



Voorbeeld

a Gegeven is dat y evenredig is met x. Voor $x = 8$ is $y = 12$.
Bereken y voor $x = 30$.
b Gegeven is dat N evenredig is met t. Bij $t = 12$ hoort $N = 99$.
Stel de formule van N op.

Uitwerking

a

8	30
12	y

, dus $y = \frac{12 \cdot 30}{8} = 45$.

Verhoudingstabel, dus gelijke kruisproducten.
$8 \cdot y = 12 \cdot 30$

b $N = at$
$t = 12$ en $N = 99$

$a \cdot 12 = 99$
$12a = 99$
$a = 8{,}25$

Dus $N = 8{,}25t$.

41
Gegeven is dat y evenredig is met x.
a Voor $x = 15$ is $y = 23$.
Bereken y voor $x = 60$.
b Voor $x = 6$ is $y = 3{,}6$.
Bereken x voor $y = 30{,}6$.
c Voor $x = 128$ is $y = 56$. Bereken y voor $x = 520$.

© Noordhoff Uitgevers bv

A42

De bewoners van appartementencomplex ‘Zuiderwal’ hebben te maken met gemeenschappelijke servicekosten. De afspraak is deze kosten evenredig te verdelen op basis van de vloeroppervlakte.
De familie De Jager heeft een appartement met een vloeroppervlakte van 84 m^2. Ze betalen jaarlijks 1890 euro aan servicekosten.

a Stel de formule op van de jaarlijkse servicekosten K in euro’s bij een vloeroppervlakte van A m^2.

b De familie Prieshof betaalt per jaar 2700 euro aan servicekosten. Hoeveel is de vloeroppervlakte van hun appartement?

c De familie Verbeek heeft een vloeroppervlakte van 75 m^2, dat is 1,2% van de totale vloeroppervlakte van het complex. Bereken de jaarlijkse servicekosten van het gehele appartementencomplex.

43

Op 1 januari 1995 had Nederland 15,4 miljoen inwoners. Op 1 januari 2023 was het aantal inwoners gestegen naar 17,8 miljoen. Er waren in Nederland op 1 januari 2023 in totaal 8,3 miljoen huishoudens. Ga ervan uit dat het aantal inwoners per huishouden na 2023 constant blijft. Er is dan een evenredig verband tussen het aantal huishoudens H in miljoenen en het aantal inwoners n in miljoenen.

a Druk H uit in n. Rond af op drie decimalen.

b Bereken met lineair extrapoleren in welk jaar er voor het eerst meer dan 10 miljoen huishoudens in Nederland zullen zijn.

O44

Op diverse wegen in Nederland vinden trajectcontroles plaats. Op een bepaald traject registreert een camera aan het begin van het traject het kenteken van een auto die passeert. Aan het einde van het traject wordt het kenteken van de auto opnieuw geregistreerd. De gemiddelde snelheid wordt berekend door de totale lengte van het traject te delen door het tijdsverschil tussen de twee registraties.

a Een auto rijdt over twee verschillende trajecten, beide keren met dezelfde constante snelheid.
Wat gebeurt er met het tijdsverschil als het tweede traject 1,5 keer zo lang is als het eerste traject?

b Een auto rijdt twee keer over hetzelfde traject.
Wat gebeurt er met het tijdsverschil als de gemiddelde snelheid de tweede keer 1,2 keer zo groot is als de eerste keer?

c In welk van de bovenstaande situaties is er sprake van een evenredig verband?

© Noordhoff Uitgevers bv

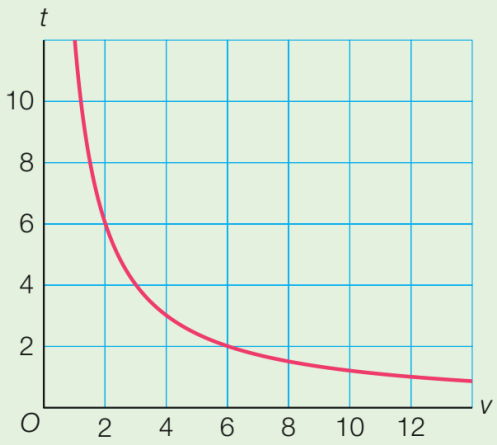
Theorie C Omgekeerd evenredig

Een wandelaar legt een route van 12 kilometer af. Bij een snelheid van 3 kilometer per uur zal de wandelaar 4 uur over de route doen. Bij een snelheid van 6 kilometer per uur zal de wandelaar 2 uur over de route doen.

v in km/uur	2	3	4	5	6
t in uren	6	4	3	2,4	2
$v \cdot t$	12	12	12	12	12

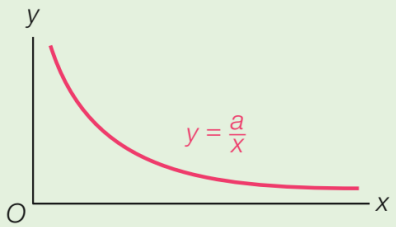
Er geldt in dit geval: als de snelheid wordt vermenigvuldigd met twee, dan wordt de tijd gedeeld door twee.
We zeggen dat de tijd t **omgekeerd evenredig** is met de snelheid v.

In de figuur hiernaast is de grafiek getekend bij de tabel. De grafiek is een (deel van een) **hyperbool**. Tussen t en v bestaat het **hyperbolische verband** $v \cdot t = 12$.



Je kunt dit verband ook schrijven met de formule $t = \frac{12}{v}$ of met de formule $v = \frac{12}{t}$.

y is omgekeerd evenredig met x
- **Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y door hetzelfde getal delen.**
- **Het product xy is constant, dus $xy = a$, oftewel $y = \frac{a}{x}$.**
- **De grafiek is een hyperbool.**



Voorbeeld

In een volkstuinencomplex is een vast aantal vierkante meters beschikbaar voor volkstuintjes. Het aantal volkstuintjes n is omgekeerd evenredig met de oppervlakte A per volkstuintje in m^2. Als er gekozen wordt voor 220 volkstuintjes, dan is de oppervlakte van ieder volkstuintje 35 m^2.
Stel de formule op van n.

Uitwerking

$n = \frac{a}{A}$
$A = 35$ en $n = 220$ $\Big\}$ $\frac{a}{35} = 220$
$a = 35 \cdot 220 = 7700$

Dus $n = \frac{7700}{A}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

R45 ⏍⊙∗

Zie het voorbeeld.

a Wat is de totale oppervlakte van het volkstuintjescomplex?

b Druk A uit in n.

46 ⏍⊙

Onderzoek in de Stille Oceaan heeft uitgewezen dat de watertemperatuur T in °C omgekeerd evenredig is met de diepte d in km. Dit verband blijkt alleen te gelden voor diepten groter dan 500 meter. Op een diepte van 2500 meter is de watertemperatuur 1,6 °C.

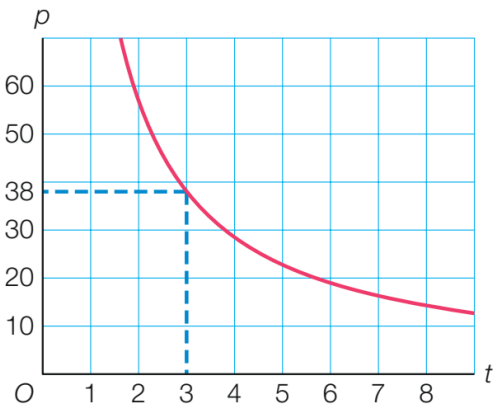
a Stel de formule op van de temperatuur T op een diepte van d km.

b Hoeveel is de watertemperatuur op 4835 meter diepte?

c Op welke diepte is de watertemperatuur 1,4 °C?

47 ⏍⊙

Enkele jaren geleden vond een olieramp plaats met de Keystone pijpleiding in Kansas (Verenigde Staten), waarbij veel olie in de omgeving terecht kwam. Natuurlijke processen zorgen voor een afbraak van de olie.
Onderzoek heeft uitgewezen dat het percentage nog aanwezige olie p omgekeerd evenredig is met de verstreken tijd t in jaren. Hierbij is $t > 1{,}5$.
In de grafiek hiernaast vind je verdere informatie.



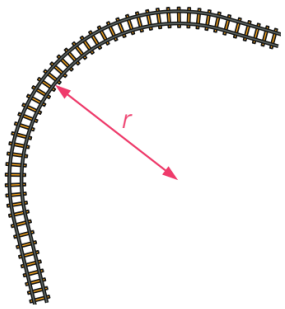
a Stel de formule op van p.

b Hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid olie is na 5,5 jaar nog aanwezig?

c Hoe lang duurt het tot 95% van de olie is verdwenen?

A48 ⏍⊙∗

Bij de aanleg van spoorwegen moet in een bocht *verkanting* worden toegepast: de buitenste rail ligt iets hoger dan de binnenste rail. Hiermee wordt voorkomen dat de trein uit de bocht vliegt.
Het hoogteverschil h is omgekeerd evenredig met de straal r van de bocht. Bij een straal van 750 meter is het hoogteverschil 120 mm.



a Stel de formule op van het hoogteverschil h. Neem h in mm en r in meter.

b Hoeveel mm is het hoogteverschil bij een straal van 500 meter?

c In Nederland mag het hoogteverschil niet meer dan 15 cm zijn. Welke straal hoort bij een hoogteverschil van 15 cm?

Bij elke snelheid hoort een andere formule van h.
Op het traject Keulen - Frankfurt geldt een hoogteverschil van maximaal 170 mm. Met dit hoogteverschil kan de ICE met een snelheid van 300 km/uur een bocht met een straal van 3320 meter nemen.

d Stel voor deze snelheid de formule van h op.

© Noordhoff Uitgevers bv

A49

Je ziet hiernaast drie tabellen. Eén van de tabellen hoort bij een recht evenredig verband, één hoort bij een omgekeerd evenredig verband en één bij een lineair verband waarvan de grafiek niet door de oorsprong gaat.
Stel bij elk van deze tabellen de formule op.

I

t	5	25	50	125
R	430	86	43	17,2

II

p	12	18	27	45
q	96	138	201	327

III

r	35	80	115	210
N	13,3	30,4	43,7	79,8

A50

a Voor elektriciteit betaal je bij de energieleverancier Zuivere Energie een vast bedrag per kWh. De familie Damman heeft in een jaar een verbruik van 3050 kWh en moet daarvoor 1098 euro betalen.
Stel de formule op van de kosten K in euro's als functie van het verbruik n in kWh.

b Tim is een groot bestand aan het downloaden. Bij een downloadsnelheid van 11 mbps is de totale benodigde tijd voor de download 43 minuten.
Druk de benodigde downloadtijd T in minuten uit in de downloadsnelheid d in mbps.

A51

Kweker Jansma is gespecialiseerd in het kweken van rozen met het predicaat Toproos. Jansma verkoopt deze rozen elke vrijdag op de veiling. Daar worden dan ook door andere kwekers rozen met het predicaat Toproos aangeboden.
Het bedrag dat Jansma op een vrijdag met zijn Toprozen ontvangt, is bij een vaste prijs evenredig met het aantal rozen dat hij verkoopt. Maar de prijs is echter afhankelijk van hoeveel rozen de andere kwekers aanbieden. Het blijkt dat de prijs omgekeerd evenredig is met het totaal aantal rozen dat de andere kwekers op de veiling aanbieden plus het aantal rozen dat Jansma aanbiedt.
In deze opgave is B het bedrag in euro's dat Jansma op een vrijdag voor zijn Toprozen ontvangt, a het aantal rozen dat hij op een vrijdag verkoopt en T het aantal rozen van de andere kwekers.
Op een vrijdag biedt Jansma 750 Toprozen aan en de andere kwekers 5000. Die vrijdag brengen zijn rozen per stuk 60 cent op.
Hieruit volgt dat geldt $B = \frac{3450a}{T+a}$.

a Laat zien hoe je aan deze formule kunt komen.

b Neem aan dat Jansma op de genoemde vrijdag niet 750 rozen op de veiling had aangeboden, maar 1000. De andere kwekers bieden nog steeds 5000 rozen aan. Hoeveel ontvangt Jansma dan per roos?

c Toon aan dat het volgens de formule niet mogelijk is dat Jansma 50 cent per roos ontvangt als de andere kwekers op een vrijdag 8000 rozen aanbieden.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan lineair interpoleren en lineair extrapoleren. ▶ OPGAVE C8 THEORIE A
- ☐ Ik kan een recht evenredig verband en een omgekeerd evenredig verband herkennen. ▶ OPGAVE C9 THEORIE B,C
- ☐ Ik kan de formule opstellen bij een recht evenredig verband. ▶ OPGAVE C10 THEORIE B
- ☐ Ik kan de formule opstellen bij een omgekeerd evenredig verband. ▶ OPGAVE C11 THEORIE C

C8 Gegeven is de tabel hiernaast. Rond in deze opgave af op duizendtallen.

jaar	1930	1971	1998	2023
aantal woningen × 1000	1824	3873	6425	8125

a Bereken met lineair interpoleren het aantal woningen in 1990.
b Bereken met lineair extrapoleren het aantal woningen in 2026.

C9 Zie de tabellen.

I

x	2	5	8	12
y	40	10	4	6

II

x	3	5	9	15
y	60	36	20	12

III

x	2	5	11	16
y	15	37,5	82,5	120

IV

x	3	8	11	16
y	19	39	51	71

a Bij welke tabel is er sprake van een (recht) evenredig verband?
b Bij welke tabel is er sprake van een omgekeerd evenredig verband?

C10 Het bedrag B in euro's dat Sabine verdient bij de supermarkt is evenredig met het aantal uur t dat ze werkt. Voor 4 uur werken krijgt ze 27 euro. Stel de formule op van B.

C11 De bereidingstijd van groente in een magnetron is omgekeerd evenredig met het ingestelde vermogen. Bij een vermogen van 800 watt is de bereidingstijd precies 4 minuten.
Druk de bereidingstijd T in minuten uit in het vermogen V in watt.

Antwoorden

C8 **a** 5669 duizend **b** 8329 duizend
C9 **a** III **b** II
C10 $B = 6{,}75t$
C11 $T = \frac{3200}{V}$

© Noordhoff Uitgevers bv

1.4 Wiskundige modellen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt grafieken plotten en tabellen maken op de GR.
- Je kunt bijzondere punten van grafieken berekenen met de GR.
- Je kunt nagaan of en wanneer een wiskundig model past bij een praktische situatie.

O52

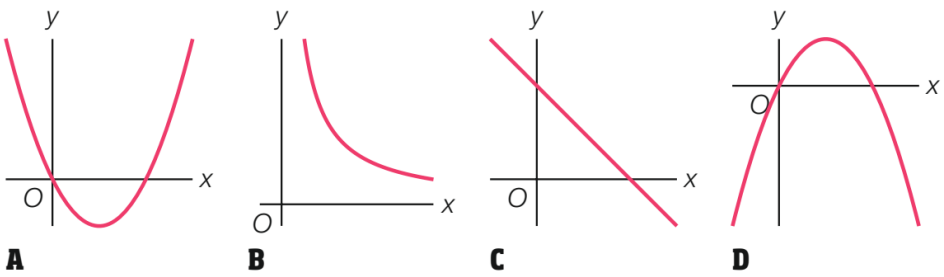
Gegeven zijn vier formules en de bijbehorende grafieken.
Zoek bij elke formule de juiste grafiek.

I $y = 2 - x$

II $y = \frac{2}{x}$

III $y = x^2 - 2x$

IV $y = 2x - x^2$



Theorie A Grafieken op de grafische rekenmachine

Formules als $y = -2x^2 + 8x + 3$ en $s = 6t^2 - t^3$ zijn voorbeelden van niet-lineaire formules. Je kunt de grafieken van zulke formules op het scherm van de GR laten tekenen. We zeggen dan dat we de grafieken **plotten**.

[▶ GR] Voordat je verder gaat, neem je de module **Formules en grafieken** van de handleiding GR door. In deze module leer je hoe je een formule op de GR invoert, de grafiek plot, een tabel maakt en allerlei bijzonderheden van grafieken te weten komt.

Bij het plotten van grafieken is het van belang na te denken welke waarden van x en y op de assen kunnen voorkomen. Het scherm met deze waarden van x en y noemen we het **venster** van de GR. Bij het kiezen van een geschikt venster kunnen de volgende vuistregels van pas komen.

Vuistregels voor het vinden van een geschikt venster

- De kleinste en de grootste waarde van x volgen vaak uit de gegevens of de context.
- Als je geschikte waarden hebt gevonden voor x, dan gebruik je om geschikte waarden voor y te vinden:
  - op de TI de optie Zoomfit
  - op de Casio de optie Auto
  - op de NumWorks indien nodig bij de y-as de instelling Auto
  - op de HP de optie Automatisch schalen of het aanraakscherm.

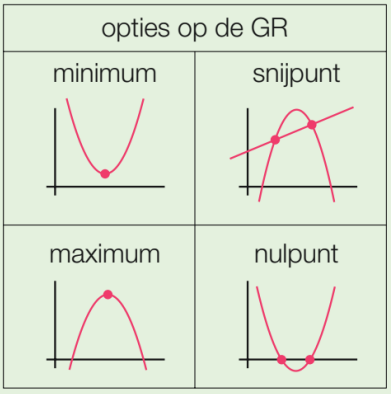
Kies de y-waarden zo, dat de grafieken goed op het scherm komen.

© Noordhoff Uitgevers bv

We maken onderscheid tussen het plotten, het schetsen en het tekenen van een grafiek.

Plot de grafiek	**Schets de grafiek**	**Teken de grafiek**
Laat de GR de grafiek op het scherm tekenen. Kies het venster zo, dat alle bijzonderheden van de grafiek op het scherm te zien zijn.	Maak in je schrift een schets van de grafiek. Het gaat alleen om de vorm van de grafiek en de ligging ten opzichte van de assen. Gebruik eventueel de GR.	Teken in je schrift nauwkeurig de grafiek en zet getallen bij de assen. Maak eerst een tabel. Gebruik daarbij de GR.

Bij berekeningen die je met de GR maakt, hoort een toelichting. Zo vermeld je de formules die je invoert en de gebruikte opties.
In het schema hiernaast zie je een aantal veelgebruikte opties van de grafische rekenmachine.



Afspraak
Bij gebruik van de GR
- noteer je welke formules je invoert
- noteer je welke opties je gebruikt.

Maak je berekeningen bij een formule die bij een praktische situatie hoort, let er dan op dat je de gestelde vraag beantwoordt. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

De temperatuur van het zeewater voor de Nederlandse kust wordt beschreven door de formule $T = -0{,}093t^3 + 1{,}39t^2 - 3{,}28t + 4{,}7$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari en $0 \leq t \leq 12$.

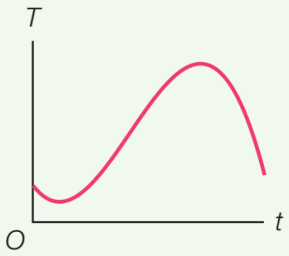
Met $0 \leq t \leq 12$ wordt bedoeld: t is minstens 0 en hoogstens 12.

a Schets de grafiek van T.
b Bereken in één decimaal nauwkeurig de temperatuur op 1 juli.
c In welke maand is de temperatuur van het zeewater minimaal? Wat is de minimale temperatuur?
d De temperatuur van het zeewater is 14 °C. In welke maanden is dat het geval?
e In welke maanden van de tweede helft van het jaar nam de temperatuur van het zeewater met meer dan 3 °C af?

© Noordhoff Uitgevers bv

Uitwerking

a Voer in $y_1 = -0{,}093x^3 + 1{,}39x^2 - 3{,}28x + 4{,}7$.



$0 \leq t \leq 12$, dus neem in het venster x tussen 0 en 12.

b Bij 1 juli hoort $t = 6$.
$t = 6$ geeft $T \approx 15{,}0$ °C

$t = 0$ op 1 januari
$t = 1$ op 1 februari
$t = 2$ op 1 maart

c De optie minimum geeft $x \approx 1{,}4$ en $y \approx 2{,}6$.
Dus in februari. De minimale temperatuur is 2,6 °C.

d Voer in $y_2 = 14$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 5{,}7$ en $x \approx 10{,}8$.
Dus in de maanden juni en november.

e Uit de tabel volgt
$t = 9$ geeft $T = 19{,}973$
$t = 10$ geeft $T = 17{,}9$ (-2,1)
$t = 11$ geeft $T = 13{,}027$ (-4,9)
$t = 12$ geeft $T = 4{,}796$ (-8,2)
De afnames zijn 2,1 °C; 4,9 °C en 8,2 °C.
Dus in november en december.

53 Zie het voorbeeld.

a In welke maand is de temperatuur van het zeewater maximaal? Wat is de maximale temperatuur?

b Hoeveel dagen ongeveer is de temperatuur boven 19 °C?

54 De bedrijfseconoom van een supermarktketen heeft een formule opgesteld die beschrijft hoeveel klanten er op elk tijdstip op een vrijdag in één van de vestigingen aanwezig zijn. Deze formule is $N = -0{,}15t^4 + 3{,}35t^3 - 24t^2 + 65t$. Hierin is N het aantal klanten t uur na het openingstijdstip van 8:00 uur.

a Om de grafiek te plotten, kies je eerst een geschikt venster. Welke waarden van x kies je hierbij? Licht toe en schets de grafiek van N.

b Hoe laat is het volgens de formule het drukst in de supermarkt? Hoeveel klanten zijn er dan?

c Hoe laat verlaten de laatste klanten de supermarkt?

d Hoe laat zijn er evenveel klanten in de supermarkt als om kwart over drie?

© Noordhoff Uitgevers bv

A55

Een jongerenblad start een reclamecampagne om de losse verkoop te verhogen. De campagne zal enkele maanden duren.
De uitgever van het blad hanteert voor het jaar na de start van de reclamecampagne de formule $A = 9 + \frac{5}{(0{,}05t - 2)^2 + 1}$. Hierin is A het aantal wekelijks verkochte exemplaren in duizendtallen en t de tijd in weken met $t = 0$ op het moment dat de campagne begint.

a Schets de grafiek van A.

b Hoeveel weken na de start van de campagne is de verkoop het grootst? Hoeveel is de verkoop dan?

c Gedurende hoeveel weken is de wekelijkse verkoop meer dan 13 500 exemplaren?

A56

Het aantal bezoekers van een internetsite waarop allerlei goederen te koop worden aangeboden, is voor een doordeweekse dag te benaderen door de formule $N = 0{,}02t^5 - 1{,}225t^4 + 22{,}5t^3 - 84t^2 - 646t + 5000$.
Hierin is N het aantal bezoekers en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0:00 uur.

a Schets de grafiek van N.

b Hoeveel bezoekers zijn er 's middags om half een?

c Hoe laat is het aantal bezoekers het grootst? Hoeveel bezoekers zijn er dan?

d Er zijn 6000 bezoekers.
Hoe laat kan het zijn?

A57

In een gebied groeien twee verwante plantensoorten A en B. Door een veranderd natuurbeheer van het gebied komen er vanaf 2020 steeds meer exemplaren van soort A en juist steeds minder van soort B. Per hectare worden de aantallen van soort A gegeven door de formule $N_A = 20 \cdot 1{,}18^t$ en de aantallen van soort B door $N_B = 600 \cdot 0{,}92^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2020.

a Schets de grafieken van N_A en N_B voor de jaren 2020-2040 in één figuur.

b In welk jaar komen er voor het eerst meer dan 20 planten van soort A per ha bij?

c In welke maand van welk jaar zijn er per ha evenveel planten van soort A als van soort B? Hoeveel planten van soort A en soort B zijn er dan samen per ha?

d Het totaal aantal planten van soort A en soort B samen bereikt een minimum.
Bereken dit minimum.

© Noordhoff Uitgevers bv

O58

Een bungeejumper springt van een plateau. Bij deze sprong is op enkele tijdstippen de afstand van de bungeejumper tot het plateau gemeten. Zie de tabel hiernaast. Hierin is t de tijd in seconden en A de afstand tot het plateau in meter.

t	0	1	2	3	4	5
A	0	5	16	27	32	25

a Teken de punten van de tabel in een assenstelsel en teken door deze punten een vloeiende kromme.

Peter heeft bij de sprong de formule $A = -3{,}5t^2 + 21t$ opgesteld.

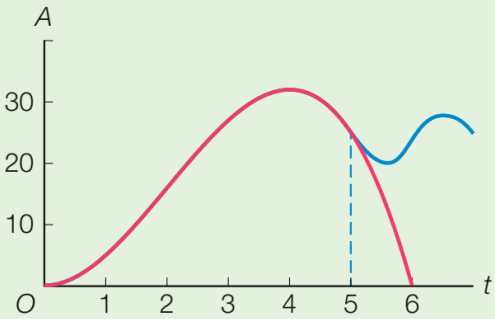
b Teken de grafiek van deze formule in de figuur van vraag a. Vind je dat deze formule goed past bij de sprong?

Tisca heeft bij de sprong de formule $A = 6t^2 - t^3$ opgesteld.

c Laat zien dat de punten van de tabel passen bij deze formule.

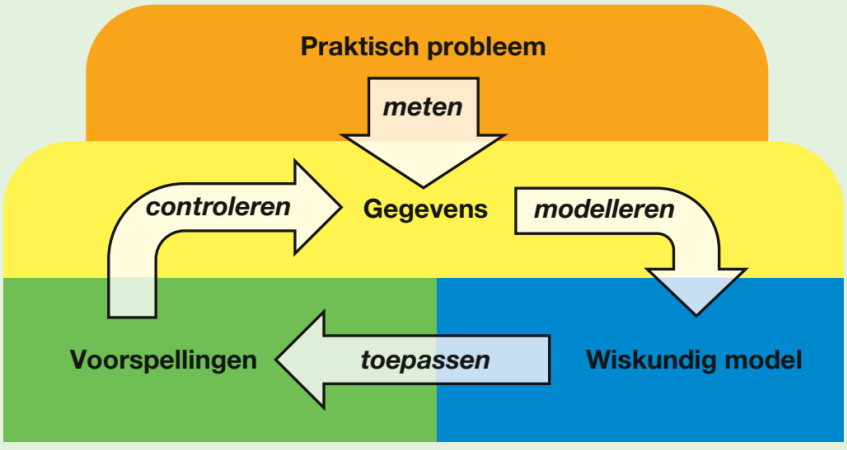
Theorie B Modelvorming

In opgave 58 past de formule $A = 6t^2 - t^3$ goed bij de tabel. Realiseer je echter dat de formule slechts een benadering is van de werkelijkheid. Zo geldt de formule niet voor $t > 5$, want voor bijvoorbeeld $t = 6$ zou de afstand van de bungeejumper tot het plateau 0 meter zijn en dat kan natuurlijk niet.
Je werkt met een **wiskundig model**.



De rode grafiek hoort bij de formule $A = 6t^2 - t^3$.

Je zou het model kunnen aanpassen zodat ook voor waarden van t groter dan 5 de sprong wordt beschreven. Het proces van opstellen van een wiskundig model en aanpassen hiervan heet **modelvorming**. Zie het schema hiernaast.



© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

De meeste medicijnen zijn beperkt houdbaar. Meestal loopt de werkzaamheid terug. Bij het medicijn Parmal wordt de werkzaamheid W uitgedrukt in een getal tussen 0 en 100. Bij de aankoop is de werkzaamheid 100 en bij een bewaartemperatuur van 20 °C is na 5 dagen de werkzaamheid nog 92.
Neem aan dat er een lineair verband is tussen W en de tijd t in dagen.

a Stel de formule op van W.

Sinds kort is Parmal verbeterd waardoor het langer werkzaam is. Bij het nieuwe Parmal2 gaat men uit van een model van de vorm $W = 100 - b\sqrt{t}$.
Ook in dit model is W de werkzaamheid na t dagen bij een bewaartemperatuur van 20 °C. Het blijkt dat na 9 dagen de werkzaamheid van Parmal2 is afgenomen tot 76.

b Bereken b.

Uitwerking

a $W = at + 100$
$t = 5$ en $W = 92$

$$\begin{aligned} 5a + 100 &= 92 \\ 5a &= -8 \\ a &= -1{,}6 \end{aligned}$$

De formule is $W = -1{,}6t + 100$.

b $t = 9$ en $W = 76$ invullen in $W = 100 - b\sqrt{t}$ geeft

$$\begin{aligned} 100 - b\sqrt{9} &= 76 \\ -3b &= -24 \\ b &= 8 \end{aligned}$$

59 Zie het voorbeeld met de formules $W = -1{,}6t + 100$ en $W = 100 - 8\sqrt{t}$.

a Na hoeveel dagen is de werkzaamheid van beide medicijnen even groot? Hoeveel is de werkzaamheid dan?

Er wordt afgeraden het medicijn nog te gebruiken als de werkzaamheid minder is dan 25. We zeggen dat de houdbaarheid dan is verstreken.

b Na hoeveel dagen is de houdbaarheid van Parmal verstreken? En na hoeveel dagen van Parmal2?

Door Parmal2 in de koelkast te bewaren is het medicijn langer houdbaar. Bij bewaren in de koelkast is 9 dagen na de aanschaf de werkzaamheid nog 82.

c Neem aan dat bij bewaren in de koelkast van Parmal2 een model van de vorm $W = 100 - c\sqrt{t}$ hoort. Bereken c.

Het blijkt dat bij bewaren in de koelkast van Parmal2 de werkzaamheid na 32 dagen nog 70 is.

d Laat met een berekening zien dat het model van vraag c hiermee niet in overeenstemming is.

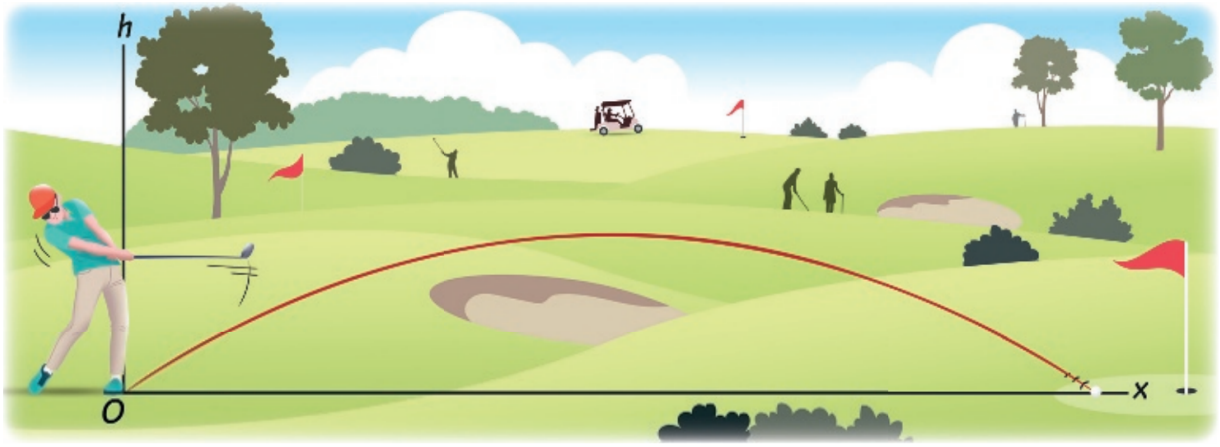
e Ga uit van een model van de vorm $W = 100 - dt^{0{,}4}$ en gebruik $t = 32$ en $W = 70$ om d te berekenen. Klopt de gevonden formule ook met het gegeven dat $W = 82$ hoort bij $t = 9$?

© Noordhoff Uitgevers bv

60

Bij het bestuderen van de baan van een golfbal heeft men de tabel hiernaast opgesteld. Hierin zijn x en h in meter. Zie ook de figuur hieronder.

x	0	10	25	50	60
h	0	3,5	7,0	7,5	6,0



Omdat men aanneemt dat de baan de vorm van een parabool heeft, gaat men uit van het model $h = ax^2 + bx$. Door de gegevens te gebruiken bij $x = 10$ en $x = 60$ kan men berekenen dat $a = -0{,}005$ en $b = 0{,}4$.

a Toon aan dat de formule $h = -0{,}005x^2 + 0{,}4x$ klopt met de gegevens bij $x = 10$ en $x = 60$.

b Hoe hoog komt de bal maximaal volgens dit model?

c Hoeveel meter vanaf de afslag komt de bal volgens dit model weer op de grond?

d De formule komt met één van de meetwaarden in de tabel niet overeen. Bij welke waarde van x is dat? Hoeveel cm wijkt de hoogte die de formule geeft af van de gemeten waarde?

61

Een experiment met bacteriën in een laboratorium begint op 1 september om 0:00 uur met 200 miljoen bacteriën. Uit metingen blijkt dat het aantal bacteriën op 1 september met 7 miljoen afneemt en op 6 september toeneemt van 285 miljoen tot 368 miljoen.
De laborant neemt op grond van deze metingen aan dat het aantal bacteriën wordt gegeven door een model van de vorm $N = at^3 + bt + 200$. Hierin is N het aantal in miljoenen en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 september om 0:00 uur.

a Toon aan dat $a = 1$ en $b = -8$ een formule oplevert die overeenkomt met alle gegeven meetwaarden.

b Op welke datum neemt volgens deze formule het aantal bacteriën voor het eerst met meer dan 200 miljoen toe?

c Maak een schets van de grafiek bij de formule waaruit blijkt dat er een tijdstip is waarop het aantal bacteriën minimaal is en bereken het minimale aantal bacteriën.

© Noordhoff Uitgevers bv

A62

Een thermosfles wordt getest door deze te vullen met kokendheet water.
Daarna wordt op verschillende tijdstippen de temperatuur van het water in de fles gemeten.
Zie de tabel, waarin T de temperatuur in °C is na t minuten.

t	0	9	19	31	46	65
T	100	90	80	70	60	50

a Licht toe dat bij de tabel geen lineair verband hoort.

De onderzoeker gaat uit van een model van de vorm $T = a \cdot b^t + c$.
Omdat de omgevingstemperatuur 20 °C is, neemt hij $c = 20$.

b Licht toe dat uit $t = 0$ en $T = 100$ volgt dat $a = 80$. Gebruik dat $b^0 = 1$.

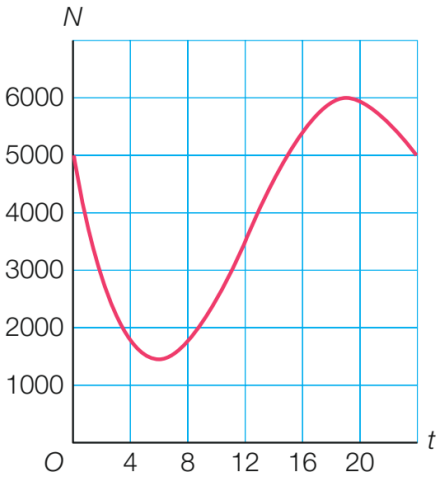
c Gebruik de formule $T = 80 \cdot b^t + 20$ en het gegeven dat na 65 minuten de temperatuur 50 °C is om b te berekenen. Rond af op drie decimalen.

d Onderzoek of de bij vraag c gevonden formule past bij de andere gegevens van de tabel.

e Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van het water in de thermosfles gedaald is tot 40 °C.

A63

In de figuur hiernaast is het aantal bezoekers van een internetsite op een doordeweekse dag uitgezet tegen de tijd in uren met $t = 0$ om 0:00 uur. Om zes uur 's morgens is het aantal bezoekers met 1450 minimaal en om zeven uur 's avonds is het aantal bezoekers met 6000 maximaal. Verder is om 12 uur het aantal bezoekers 3500. Door daarnaast gebruik te maken van het gegeven dat om 0 uur en om 24 uur het aantal bezoekers 5000 is, is het model $N = -3{,}35t^3 + 132t^2 - 1240t + 5000$ opgesteld.



a Onderzoek of deze formule goed past bij de gegevens. Bij welk van de genoemde tijdstippen vind je de grootste afwijking? Hoeveel wijkt in dat geval de formule af van het gegeven?

Een andere wiskundige komt met het model $N = 0{,}0577t^4 - 6{,}17t^3 + 174t^2 - 1430t + 5000$ voor het aantal bezoekers van de site.

b Onderzoek op welk van de genoemde tijdstippen dit model een betere benadering geeft van de werkelijkheid dan het eerste model. En op welke tijdstippen geeft dit model een slechtere benadering?

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan grafieken plotten en tabellen maken op de GR.

▶ OPGAVE C12ab
THEORIE A

☐ Ik kan bijzondere punten van grafieken berekenen met de GR.

▶ OPGAVE C12cd
THEORIE A

☐ Ik kan nagaan of en wanneer een wiskundig model past bij een praktische situatie.

▶ OPGAVE C13
THEORIE B

C12 Een stad wordt getroffen door een griepepidemie. Daarbij wordt de formule $N = 60t^2 - 2t^3$ opgesteld. Hierin is N het aantal personen dat griep heeft en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 november.

a Schets de grafiek van N.

b Op welke dag is het aantal personen met griep voor het eerst met meer dan 500 toegenomen ten opzichte van de dag ervoor?

c Bereken op welke dag het aantal personen met griep maximaal is. Hoeveel personen zijn dan ziek?

d Op hoeveel dagen zijn er minstens 4000 personen met griep?

C13 Een bedrijf hanteert een model van de vorm $W = -20q^2 + bq - 500$ om de winst W in euro's te berekenen bij een dagverkoop q. Bij een dagverkoop van 10 stuks is de winst 2300 euro.
Bereken b.

Antwoorden

C12 **a** ∗

b 8 november

c 21 november
8000 personen

d 18

C13 $b = 480$

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedentest

1.1 Lineaire formules

1 Teken in één figuur de lijnen k: $y = -2x + 3$, l: $y = \frac{1}{3}x - 2$, m: $y = -1\frac{1}{2}$ en n: $x = 2\frac{1}{2}$.

2
a De lijn k gaat door het punt $A(9, 3)$ en is evenwijdig met de lijn l: $y = -\frac{1}{2}x + 4$.
Stel de formule op van k.
b Stel de formule op van de lijn m door het punt $B(-1, 6)$ met $rc_m = 0$.
c Bereken de coördinaten van het snijpunt C van de lijn n: $y = 8x + 5$ met de x-as.

3 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen p: $y = \frac{1}{6}x + 3$ en q: $y = 2\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$.

1.2 Een lijn door twee gegeven punten

4 De lijn k gaat door de punten $A(-5, 2)$ en $B(3, -2)$ en de lijn l gaat door de punten $P(40, 60)$ en $Q(65, 135)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

5 Het aantal toeschouwers A bij voetbalclub ATC hangt af van de entreeprijs p in euro's. Bij een prijs van € 7,50 komen er 800 toeschouwers, maar dat aantal zakt tot 665 bij een prijs van € 9,75.
a Schrijf A als functie van p. Ga uit van een lineair verband.
b Bereken het aantal toeschouwers bij een prijs van € 11,25.
c Bij welke entreeprijs komen er meer dan 1000 toeschouwers?

1.3 Interpoleren, extrapoleren en evenredigheid

6 Zie de tabel.

INVOER EN UITVOER VAN ELEKTRICITEIT IN NL IN MILJOENEN KWH

jaar	2005	2008	2012	2017	2021
invoer	23 693	24 966	32 155	22 444	20 885
uitvoer	5 398	9 116	15 046	18 944	20 632

a Bereken met lineair interpoleren de uitvoer van elektriciteit in 2011.
b Bereken met lineair interpoleren de invoer van elektriciteit in 2015.
c Bereken met lineair extrapoleren het verschil tussen de invoer en uitvoer van elektriciteit in 2024.

© Noordhoff Uitgevers bv

7 Voor een auto die met een constante snelheid rijdt, is het benzineverbruik evenredig met de afgelegde afstand. In deze opgave gaat het over een auto die met een constante snelheid van 100 km/uur rijdt. Na 45 km blijkt de auto 3,6 liter benzine verbruikt te hebben.

a Stel de formule op van het benzineverbruik B in liter bij een afgelegde afstand van d km.

b Bereken hoeveel kilometer de auto kan afleggen met 6 liter benzine.

8 Een band wil via crowdfunding de opname en productie van een album financieren. Er wordt besloten om hierbij te werken met een vast bedrag per donateur. Bij een vast bedrag van 25 euro zijn er 480 donateurs nodig.

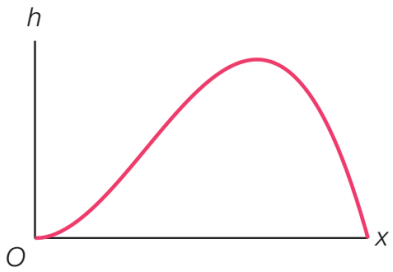
a Leg uit dat er een omgekeerd evenredig verband bestaat tussen het aantal donateurs en het bedrag per donateur.

b Stel de formule op van het aantal donateurs A en het bedrag per donateur p.

c De band denkt niet meer dan 180 donateurs te kunnen vinden. Welk bedrag moet minimaal per donateur gevraagd worden?

1.4 Wiskundige modellen

9 Jan heeft een drone. Hij laat de drone opstijgen en wat verderop weer landen. Bij een van de vluchten van de drone hoort de formule $h = 0{,}03x^2 - 0{,}0003x^3$. Zie de figuur hiernaast. In de formule zijn x en h in meter.



a Hoeveel meter verderop komt de drone weer op de grond?

b Wat is de maximale hoogte van de drone? Rond af op dm.

c Voor welke waarden van x is de hoogte meer dan 40 meter? Rond af op één decimaal.

10 Collin springt van 10 meter hoogte van een duiktoren in het water. Hij springt rechtop en landt met zijn voeten na 1,85 seconden in het water. Bij het opstellen van een formule voor de hoogte van zijn voeten tijdens de sprong gaat men uit van het model $H = at^2 + bt + c$. Hierin is H de hoogte in meter ten opzichte van het wateroppervlak en t de tijd in seconden na het begin van de sprong.

a Toon aan dat de formule $H = -4{,}43t^2 + 2{,}78t + 10$ klopt met de genoemde gegevens.

b Schets de grafiek bij de formule.

c Na hoeveel seconden is hij op het hoogste punt? Hoe hoog is hij dan boven het wateroppervlak? Rond af op gehele cm.

© Noordhoff Uitgevers bv

Gemengde opgaven

1 Gegeven zijn de lijnen k: $y = -0{,}5x + 16$ en l: $y = 2x - 9$.

a De lijn m gaat door het punt $A(-4, 3)$ en is evenwijdig met k.
Stel de formule van m op.

b De lijn k snijdt de x-as in het punt B. De lijn n gaat door B en is evenwijdig met de lijn l.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van n met de y-as.

c Bereken de coördinaten van het snijpunt C van k en l.

d Op de lijn l ligt het punt D met y-coördinaat $y_D = -24$.
Bereken de x-coördinaat x_D.

2 De lijn k met richtingscoëfficiënt -2 gaat door het punt $A(1, -4)$.
De lijn l gaat door de punten $B(-5, -1)$ en $C(1, 5)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

3 Antropologen kunnen de lichaamslengte van een mens schatten aan de hand van de lengte van een bot dat ze bij opgravingen vinden. Daarbij gebruiken ze onder andere de humerus, dat is het bot dat van de elleboog naar de schouder loopt.
Tussen de lichaamslengte L in cm en de lengte van de humerus x in cm bestaat een lineair verband.
Bij mannen geldt $L = 2{,}89x + 70{,}6$ met x tussen 10 en 40. Bij vrouwen geldt $L = 2{,}75x + 71{,}5$ met x tussen 10 en 40.

a Bij opgravingen vindt men een humerus met een lengte van 31 cm. Men neemt aan dat deze humerus van een man afkomstig is.
Hoe lang was deze man? En als deze humerus van een vrouw was geweest, hoe lang zou deze vrouw dan zijn geweest? Rond af op gehele cm.

b Hoeveel cm is de humerus van een man met een lichaamslengte van 180 cm? En van een vrouw van dezelfde lichaamslengte? Rond af op één decimaal.

c Wat is de kleinste en wat is de grootste lichaamslengte van een vrouw die je met deze formule kunt berekenen?

d Hebben de grafieken die bij deze formules horen een snijpunt? Licht je antwoord toe.

e Bij welke lengte van de humerus is er volgens de formules een verschil van 4 cm in lichaamslengte tussen mannen en vrouwen?

© Noordhoff Uitgevers bv

4 De gemiddelde jaartemperatuur T is in Nederland in de periode 1970-2020 vrijwel lineair gestegen. Was de gemiddelde jaartemperatuur in 1970 nog 9,3 ºC, in 2020 was dat toegenomen tot 11,0 ºC. Neem in deze opgave aan dat deze temperatuurstijging de komende tijd doorzet.

a Stel de formule op van de gemiddelde jaartemperatuur T. Neem t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1970.

b In welk jaar zal de gemiddelde jaartemperatuur naar verwachting voor het eerst hoger zijn dan 12 ºC?

Tot 1970 was er ook sprake van een lineaire stijging. Neem aan dat deze stijging vele eeuwen heeft geduurd.
De gemiddelde jaartemperatuur in 1920 was 9,0 ºC.

c Tot en met welk jaar zou de gemiddelde jaartemperatuur minder dan 8 ºC zijn geweest?

5 Op een racefiets bepaal je de versnelling waarin je fietst met behulp van voortandwielen (bij de trapas) en achtertandwielen (bij de as van het achterwiel).
Als je het achtertandwiel hetzelfde laat, dan is de afstand die je aflegt per omwenteling van je pedalen evenredig met het aantal tanden van het voortandwiel. Als je het voortandwiel hetzelfde laat, dan is de afstand die je aflegt per omwenteling van je pedalen omgekeerd evenredig met het aantal tanden van het achtertandwiel. Bij een voortandwiel met 52 tanden en een achtertandwiel met 20 tanden leg je per omwenteling 5,46 meter af.

a Bereken de afstand die je aflegt per omwenteling, wanneer je een voortandwiel met 39 tanden en een achtertandwiel met 20 tanden gebruikt.

b Bereken de afstand die je aflegt per omwenteling, wanneer je een voortandwiel met 52 tanden en een achtertandwiel met 14 tanden gebruikt.

Lowie fietst met een voortandwiel met 50 tanden en een achtertandwiel met 20 tanden.

c Toon aan dat zijn snelheid bij 100 omwentelingen per minuut gelijk is aan 31,5 km/uur.

d Stel een formule op van zijn snelheid v in km/uur bij w omwentelingen per minuut.

e Druk zijn snelheid v in km/uur uit in het aantal tanden van het achtertandwiel n. Ga ervan uit dat hij 100 omwentelingen per minuut maakt en zijn voortandwiel 50 tanden heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

6 De hoeveelheid huishoudelijk afval per inwoner nam in Nederland in de periode 1970-2000 voortdurend toe, maar daarna nam de hoeveelheid af. Zie de tabel.

HUISHOUDELIJK AFVAL IN AANTAL KG PER INWONER PER JAAR

jaar	1970	1988	1995	2000	2004	2012	2022
aantal kg	281	395	482	566	561	518	461

a Bereken met lineair interpoleren de hoeveelheid huishoudelijk afval per inwoner in 1992.
b Bereken met lineair extrapoleren de hoeveelheid huishoudelijk afval per inwoner in 2025.
c Gebruik de gegevens van 2004 en 2022 om een schatting te maken in welk jaar de hoeveelheid huishoudelijk afval per persoon voor het eerst weer minder dan 300 kg zal zijn.

7 Als je muziek van een online streamingdienst op je telefoon wilt luisteren zonder dat je een internetverbinding hebt, dan kun je de muziek op je telefoon downloaden. Een probleem daarbij is dat de originele muziekbestanden erg groot zijn. Je kunt ervoor kiezen om de bestanden in een kleiner formaat op te slaan, maar dan gaat wel de kwaliteit achteruit. De grootte en kwaliteit zijn afhankelijk van de bitrate. Hoe hoger de bitrate, des te hoger de kwaliteit is. De bitrate wordt gegeven in kb/s. De bestandsgrootte van een nummer is evenredig met de bitrate.
Een bepaald nummer heeft een bestandsgrootte van 6,4 MB als het wordt opgeslagen met een bitrate van 320 kb/s.
a Bereken de bestandsgrootte in MB als dit nummer wordt opgeslagen met een bitrate van 128 kb/s.
b Druk de bestandsgrootte M van dit bestand uit in de bitrate B, met M in MB en B in kb/s.

Sinds de opkomst van streaming van muziek zitten de inkomsten van de muziekindustrie in de lift. Zie de tabel.

INKOMSTEN UIT STREAMING IN NEDERLAND

jaar	2012	2015	2017	2022
inkomsten in miljoenen euro's	17,8	61,3	108,6	223,9

c Bereken met lineair interpoleren de inkomsten uit streaming van muziek in Nederland in 2014.
d Bereken met lineair extrapoleren de inkomsten uit streaming van muziek in Nederland in 2025. Rond af op miljoenen euro's.

© Noordhoff Uitgevers bv

8 Een fabrikant van fietsen gebruikt het model $W = -45x^3 + 2500x^2 - 275\,000$ om de jaarlijkse winst W in euro's te berekenen, met x de reclamekosten per jaar in tienduizenden euro's. Per jaar geeft de fabrikant niet meer dan 500 000 euro aan reclame uit.
Rond in deze opgave bedragen af op duizenden euro's.

a Schets de grafiek van W.

b Wat weet je van de reclamekosten als de jaarlijkse winst meer dan 600 000 euro is?

c Hoeveel is de maximale jaarlijkse winst volgens dit model?

d Met hoeveel procent neemt de jaarlijkse winst toe als de fabrikant de reclamekosten van 230 000 euro verdubbelt?

e De fabrikant maakte in een jaar evenveel winst als dat hij uitgaf aan reclame. Hoeveel was de winst in dat jaar?

9 Op 16 augustus 2009 liep Usain Bolt in Berlijn tijdens de WK atletiek een wereldrecord op de 100 meter sprint. Hij legde de 100 meter af in een tijd van 9,58 seconden.
Wetenschappers hebben onderzoek gedaan naar zijn snelheid gedurende de race. Daarbij vonden ze dat hij na 5 meter al 25 km/uur liep. Hij bereikte een maximumsnelheid van ongeveer 44 km/uur.

Een wiskundige stelt het model $v_1 = 0{,}00012s^3 - 0{,}02655s^2 + 1{,}88929s$ op bij deze race. Hierin is s de afgelegde afstand in meter en v_1 de snelheid in km/uur.

a Ga na bij welke van de genoemde gegevens de afwijking van de snelheid in het model ten opzichte van de werkelijkheid het grootst is.

b Schets de grafiek van v_1.

c Gedurende hoeveel meter lag de snelheid volgens dit model boven de 40 km/uur? Rond af op gehelen.

In een poging het model te verbeteren, komt een andere wiskundige met het model $v_2 = 5\sqrt{5s} - 0{,}71s$.

d Schets de grafiek van v_2 in de figuur van vraag b.

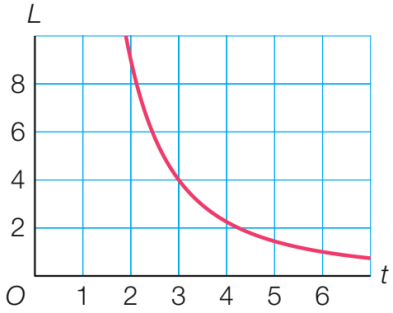
e Welk model is realistischer? Licht je antwoord toe.

10 Gegeven is de grafiek hiernaast.

a Laat met berekeningen zien dat L niet omgekeerd evenredig is met t.

Bij de grafiek hoort een verband van de vorm $L = \frac{36}{t^b}$.

b Bereken b.



© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

2 De statistische cyclus

Mariska heeft voor wiskunde drie cijfers gehaald die één keer meetellen en drie cijfers die twee keer meetellen. Zie de tabel.

CIJFERS MARISKA

cijfer	4,3	4,8	5,2	6,8	4,8	5,4
weging	1	1	1	2	2	2

Mariska mag één toets herkansen. Als ze de laatste toets herkanst, welk cijfer moet ze dan halen om afgerond een 5 te staan?

Als ze in plaats daarvan een andere toets herkanst, kan ze dan nog afgerond een 7 komen te staan?

© Noordhoff Uitgevers bv

2.1 De onderzoeksvraag

Kennis en vaardigheden

- Je kunt in een onderzoek de vier fasen van de statistische cyclus herkennen.
- Je kunt een onderzoeksvraag kritisch beoordelen.
- Je kunt de populatie bepalen bij een onderzoeksvraag.
- Je kunt een steekproef kritisch beoordelen en de begrippen representatief en aselect gebruiken.

O1

Daan en Emma doen een onderzoek. Hieronder staan zes activiteiten die ze hebben uitgevoerd bij hun onderzoek.
Welke volgorde is logisch?

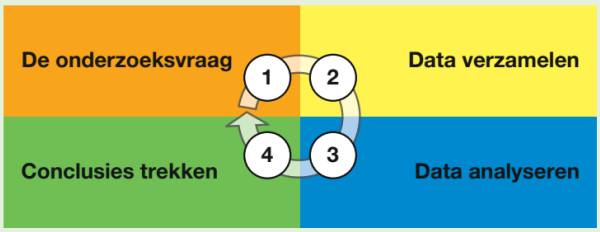
1 Het afvragen of de onderzoeksvraag is beantwoord en zo nodig nieuwe vragen opstellen.
2 Het interpreteren van alle verzamelde informatie om te kijken of de onderzoeksvraag hiermee beantwoord kan worden.
3 Een overzicht maken van alle aspecten die bij het onderwerp komen kijken, om zo tot de onderzoeksvraag te komen.
4 Het beantwoorden van de onderzoeksvraag op basis van de uitkomsten van de verzamelde enquêtes en gevonden informatie.
5 Vaststellen welke kenmerken onderzocht moeten worden om de onderzoeksvraag te kunnen beantwoorden.
6 Het afnemen van enquêtes en opzoeken van informatie over het onderwerp.

Theorie A Fasen in de statistische cyclus

Bij een statistisch onderzoek probeert men op basis van verzamelde gegevens antwoord te vinden op een vraag.
De **statistiek** houdt zich bezig met methoden en technieken voor het verzamelen, verwerken, analyseren en presenteren van gegevens. De verzamelde gegevens worden **data** genoemd.

Deze data staan centraal in de **statistische cyclus**: het proces van opstellen van een onderzoeksvraag, verzamelen en analyseren van data en hieruit conclusies trekken. Het woord cyclus wijst erop dat het doorlopen van deze stappen vaak nieuwe (vervolg)vragen oplevert die verder onderzocht kunnen worden.

In de eerste fase van de statistische cyclus wordt de **onderzoeksvraag** geformuleerd. Er is een goed geformuleerde onderzoeksvraag nodig om het onderzoek gedegen uit te voeren en uiteindelijk een duidelijke conclusie te kunnen formuleren.



© Noordhoff Uitgevers bv

2 Geef bij elk van de stappen uit opgave 1 aan op welke plek ze het best in de statistische cyclus passen.

3 Lees de onderstaande tekst over kijkonderzoek.

Artikel **Kijkonderzoek**

Voor veel Nederlanders is televisiekijken een belangrijke tijdsbesteding. Per dag kijken we in Nederland per persoon ongeveer 3 uur televisie. De kijkcijfers zijn voor televisiemakers en zenders een graadmeter voor succes. Onderzoeksbureau GfK voert kijkcijferonderzoek uit voor de Stichting KijkOnderzoek (SKO). Het kijkonderzoek laat zien hoeveel mensen er kijken naar zenders en programma's. Met behulp van deze gegevens kunnen inhoud en tijdstip van programma's afgestemd worden op wat de kijker belangrijk vindt. Het succes van een programma telt bovendien mee bij het bepalen van het tarief voor een reclamespot in de omliggende reclameblokken.

Hieronder staan vier fragmenten uit het kijkonderzoek.
Geef voor elk van de fragmenten aan bij welke fase in de statistische cyclus dit het best past.

A
Nadat de metergegevens van alle panelhuishoudens naar GfK zijn gestuurd, wordt vastgesteld naar welke zenders is gekeken. Dit gebeurt door middel van Enhanced Audio Matching; bij deze techniek wordt gebruikgemaakt van het matchen van audio samples.

B
SKO stelt dagelijks de standaardresultaten kijkdichtheid, marktaandeel en de absolute aantallen kijkers ter beschikking. Deze informatie komt op de website en is bedoeld voor het algemene publiek. De resultaten die SKO op de website publiceert, zijn onder voorwaarden te gebruiken en de bronvermelding is verplicht.

C
Op basis van de achtergrondkenmerken van de panelleden zijn verschillende vragen te onderzoeken: hoeveel 13 t/m 19-jarigen kijken naar een bepaald programma, hoeveel autobezitters hebben de commercial voor een nieuwe personenwagen gezien, kijken alleen sportliefhebbers naar sportprogramma's? Het is belangrijk de vragen scherp te formuleren en af te bakenen voor er tot verder onderzoek wordt overgegaan.

D
Elk huishouden dat meedoet aan het kijkonderzoek krijgt op alle televisietoestellen in huis een 'kijkmeter'. De kijkmeter kan automatisch registreren dat een toestel aanstaat en slaat deze informatie op.
De kijkmeter legt vast wat er in het televisietoestel gebeurt, maar kan niet 'zien' wat zich in de kamer afspeelt en wie er naar de televisie kijken. Daarom moeten alle personen van 3 jaar en ouder die kijken zich aanmelden.

bron: SKO

4 Voor kijkonderzoek wordt niet van elke Nederlander het kijkgedrag onderzocht.

a Noem een mogelijke reden hiervoor.

Over de groep Nederlanders in het onderzoek schrijft SKO het volgende.
'Het is voldoende om een representatieve groep te onderzoeken. Representatief wil zeggen dat de groep net zo is opgebouwd als de bevolking, met een overeenkomstig percentage jongeren, vrouwen, hoger opgeleiden, enzovoort.'

b Waarom denk je dat SKO wil dat de te onderzoeken groep representatief is?

© Noordhoff Uitgevers bv

5

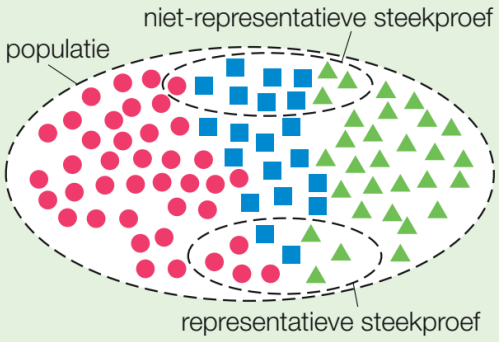
Hieronder staan enkele ideeën voor onderzoeksvragen voor een profielwerkstuk. Met elke vraag is iets mis.
Verbind elk van de vragen met een bijpassend kritiekpunt.

I	Waarom zijn eigenaren van benzineauto's minder milieubewust dan eigenaren van elektrische auto's?	A	De vraag is te omvangrijk en moet worden afgebakend.
II	Beïnvloedt alcoholconsumptie voor het rijden de rijvaardigheid?	B	De vraag bevat vage woorden die eerst gedefinieerd moeten worden.
III	Wat is het effect van social media?	C	De vraag is niet specifiek genoeg.
IV	Hebben goede leerlingen een betere band met docenten?	D	De vraag gaat uit van een (foute) veronderstelling.
V	Hoe kunnen we het klimaatprobleem oplossen?	E	De vraag is niet nieuw, het antwoord is algemeen bekend.

Theorie B Een steekproef nemen

Een statistisch onderzoek hoeft zich niet te richten op individuele mensen, maar kan ook betrekking hebben op bijvoorbeeld huishoudens of scholen. Soms gaat een onderzoek over producten, zoals lampen of pakken melk. De totale groep waarop een onderzoek zich richt heet de **populatie**.

Het onderzoeken van de hele populatie lukt in veel gevallen niet, bijvoorbeeld omdat het teveel werk is. Het deel van de populatie dat je daadwerkelijk onderzoekt heet de **steekproef**.
Je wilt met de conclusie van een onderzoek iets over de populatie zeggen. Daarom is het belangrijk dat de steekproef een goede afspiegeling is van de populatie, oftewel dat de steekproef **representatief** is.



Een steekproef is representatief als zij een goede afspiegeling is van de populatie.

Om de kans op een representatieve steekproef te vergroten, streven onderzoekers ernaar dat elk element van de populatie een even grote kans heeft om in de steekproef te komen, oftewel dat de steekproef **aselect** is.

Een steekproef is aselect als elk element van de populatie een even grote kans heeft om in de steekproef voor te komen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Naast het nemen van een aselecte steekproef moet de onderzoeker ook goed nadenken over de grootte van de steekproef. Daarbij is het bijvoorbeeld belangrijk hoe groot de populatie is en hoe zeldzaam het te onderzoeken kenmerk is. Als een aselecte steekproef voldoende groot is, dan zal deze over het algemeen een representatieve steekproef opleveren.

6 Omschrijf bij de volgende onderzoeksvragen een populatie.

a Welke vervolgopleidingen kiezen de leerlingen van je school?

b In welk weekblad staan de meeste illustraties?

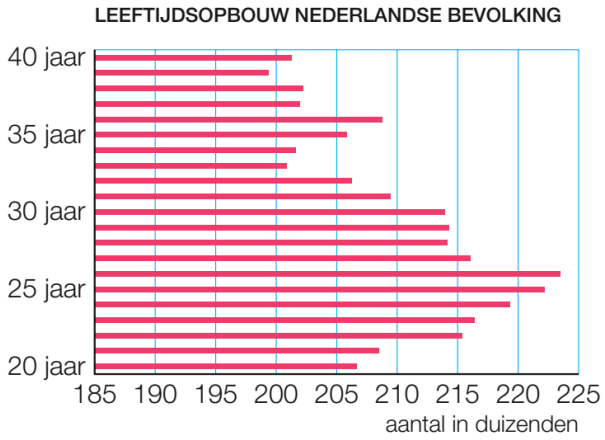
c Welk percentage van de inwoners van Appelscha is daar ook geboren?

d Hoe effectief is een nieuw geneesmiddel tegen hooikoorts?

A7

a Er wordt een onderzoek gedaan naar de fruitconsumptie van Nederlanders van 20 tot en met 40 jaar door van elke leeftijd evenveel personen te ondervragen.
Leg uit waarom deze steekproef niet aselect is. Gebruik de figuur hiernaast.

b Bij een onderzoek worden 100 mensen ondervraagd.
Kun je hier te maken hebben met een steekproef die voldoende groot is?
Licht toe.



8 Leg uit waarom de volgende steekproeven waarschijnlijk niet representatief zijn en geef aan hoe deze verbeterd kunnen worden.

a Een onderzoeksbureau wil de mening weten van de Nederlander over klimaatverandering. Op een zaterdagmiddag wordt op een druk kruispunt in de stad een groot aantal voorbijgangers ondervraagd.

b Bij een onderzoek naar het percentage Nederlanders met de zeer zeldzame aandoening dextrocardie, waarbij het hart rechts in het lichaam zit in plaats van links, worden aselect 100 Nederlanders onderzocht.

c Bij een onderzoek naar eenzaamheid onder kinderen wordt een aselecte steekproef genomen onder middelbare scholieren.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan in een onderzoek de vier fasen van de statistische cyclus herkennen.
- ☐ Ik kan een onderzoeksvraag kritisch beoordelen.
- ☐ Ik kan de populatie bepalen bij een onderzoeksvraag.
- ☐ Ik kan een steekproef kritisch beoordelen en de begrippen representatief en aselect gebruiken.

▶ OPGAVE C1 THEORIE A
▶ OPGAVE C2a THEORIE A
▶ OPGAVE C2b THEORIE B
▶ OPGAVE C2c THEORIE B

C1 Hieronder staat een aantal stappen van een onderzoek. Zet ze in de juiste volgorde en geef bij elke stap aan bij welke fase van de statistische cyclus deze hoort.

A Bij de behandeling krijgt een deel van de patiënten met ernstige vermoeidheidsklachten alleen psychologische begeleiding en een deel wordt ook begeleid door een fysiotherapeut. Patiënten vullen zowel voor als na de behandeling een vragenlijst in.

B De psychologen vragen zich af of het inzetten van een fysiotherapeut ook bij andere ziektebeelden van nut kan zijn. Ze doen een onderzoeksvoorstel voor het inzetten van de fysiotherapeut bij het behandelen van patiënten met chronische pijnklachten.

C Aan de hand van de antwoorden op de vragenlijst wordt door de psychologen bepaald wat de effectiviteit van de behandeling is.

D Het blijkt dat patiënten die zijn begeleid door een fysiotherapeut sneller herstellen dan patiënten die alleen psychologische begeleiding hebben gehad.

E Psychologen van een specialistische praktijk overwegen de inzet van een fysiotherapeut bij de behandeling van patiënten met ernstige vermoeidheidsklachten. Ze vermoeden dat patiënten dan sneller herstellen.

C2 Voor een onderzoek is de volgende onderzoeksvraag opgesteld.
Halen luie scholieren gemiddeld lagere cijfers voor economie?
Om deze vraag te beantwoorden, worden willekeurig 300 scholieren ondervraagd die onvoldoende staan voor economie.

a Wat is er mis met deze onderzoeksvraag?
b Omschrijf de populatie.
c Waarom is deze steekproef niet aselect?

Antwoorden

C1 E (de onderzoeksvraag), A (data verzamelen), C (data analyseren), D (conclusies trekken) en B (de onderzoeksvraag)

C2 **a** De onderzoeksvraag bevat een vaag woord: lui.
b Alle scholieren die het vak economie volgen.
c Leerlingen met een voldoende hebben geen kans om in de steekproef te komen.

© Noordhoff Uitgevers bv

2.2 Data verzamelen

Kennis en vaardigheden

- Je kent de begrippen (statistische) variabele, waarde en dataset.
- Je kunt in een gegeven situatie de variabelen benoemen.
- Je kunt van een variabele bepalen of deze kwalitatief of kwantitatief is.
- Je kunt van een kwalitatieve variabele bepalen of het meetniveau nominaal of ordinaal is.
- Je kunt van een kwantitatieve variabele bepalen of deze discreet of continu is.

O9

Leerlingen van een school hebben de enquête hiernaast ingevuld.

a Van welke enquêtevragen heb je de antwoorden nodig om de volgende onderzoeksvraag te beantwoorden?
'Verschillen de leerlingen uit de eerste klas met de leerlingen uit de vierde klas in de mate van tevredenheid over hun rooster?'

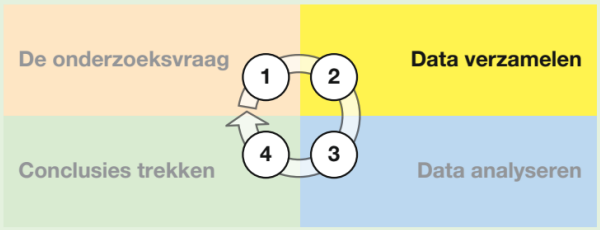
b Welke van de volgende twee gemiddelden kun je met de antwoorden van de enquête berekenen en welke niet? Licht toe.
- De gemiddelde afstand tot school.
- Het gemiddelde aantal tussenuren per week.

c De antwoorden op enquêtevraag 6 zijn getallen. Sari berekent hiervan het gemiddelde. Geef commentaar.

Enquête
1. Ik zit in leerjaar ☐ 1 | ☐ 2 | ☐ 3 | ☑ 4 | ☐ 5 | ☐ 6
2. Ik ben 15 jaar oud.
3. Mijn woonplaats is Lochem.
4. Ik woon 3,4 km van school.
5. Op hoeveel schooldagen was je afgelopen periode ziek? 0
6. Mijn kluisnummer is 341.
7. Hoe tevreden ben je met je rooster? ☑ ☐ ☐ ☐ ☐ ontevreden tevreden
8. Hoeveel tussenuren heb je per week? ☐ 0 – 2 | ☐ 3 – 5 | ☑ 6 – 8 | ☐ meer dan 8
DANK VOOR HET INVULLEN

Theorie A Statistische variabelen en data

In deze paragraaf richten we ons op fase 2 van de statistische cyclus: data verzamelen.
Om antwoord te vinden op de onderzoeksvraag moeten er bij een statistisch onderzoek gegevens worden verzameld.



Er zijn verschillende manieren om aan gegevens te komen. Voor veel onderzoeken kan gebruik worden gemaakt van reeds verzamelde gegevens. Een bekende bron voor gegevens over Nederland is het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS).
Voor sommige onderzoeken zullen de juiste gegevens niet beschikbaar zijn. De onderzoeker zal dan gegevens moeten verzamelen, bijvoorbeeld door middel van een enquête of experiment.

© Noordhoff Uitgevers bv

In de enquête van opgave 9 wordt naar meerdere kenmerken gevraagd. Bij statistiek heten de kenmerken die je onderzoekt **variabelen**, omdat ze verschillende **waarden** kunnen aannemen (ze zijn variabel).
In het overzicht hieronder zie je de antwoorden van enkele leerlingen op de enquête van opgave 9. Zo'n verzameling van gegevens noemt men een **dataset**. Je ziet bijvoorbeeld dat bij de variabele woonplaats de waarden Ruurlo en Laren voorkomen.

data = gegevens
set = verzameling

ID	leerjaar	leeftijd	woonplaats	afstand	dagen ziek	kluisnummer	tevredenheid	tussenuren
0001	6	18	Ruurlo	12,1	4	82	4	0 - 2
0002	5	16	Laren	6,6	0	368	5	0 - 2
0003	4	16	Borculo	11,5	0	245	2	3 - 5
0004	2	13	Laren	6,9	1	219	1	6 - 8
0005	3	15	Barchem	5,9	0	271	5	3 - 5
0006	4	16	Borculo	12,3	0	19	2	6 - 8
0007	2	14	Laren	6,1	2	250	4	3 - 5
0008	5	17	Lochem	0,5	1	316	1	meer dan 8
0009	1	12	Haarlo	14,2	0	117	1	meer dan 8
0010	4	15	Lochem	3,4	0	341	1	6 - 8
0011	2	13	Borculo	10,9	0	187	5	3 - 5
0012	1	12	Ruurlo	10,8	0	203	3	6 - 8
0013	4	15	Lochem	3,6	3	365	3	3 - 5

In de statistiek maken we onderscheid tussen **kwantitatieve variabelen** en **kwalitatieve variabelen**.

Kwantitatieve variabelen betreffen een hoeveelheid, zoals bijvoorbeeld reisafstand en het aantal ziektedagen.

Een ander woord voor hoeveelheid is *kwantiteit*.

Kwalitatieve variabelen betreffen een eigenschap die geen hoeveelheid is, zoals bijvoorbeeld woonplaats. Een kwalitatieve variabele is vaak niet uitgedrukt in een getal. Is dit toch het geval, dan heeft het verschil tussen twee opeenvolgende getallen geen eenduidige betekenis. Denk bijvoorbeeld aan de rugnummers van voetballers.

© Noordhoff Uitgevers bv

10 Zie de enquête van opgave 9 en het deel van de bijbehorende dataset in theorie A.

a De ingevulde enquête in opgave 9 is van Joris. Hij komt ook voor in de dataset.
Welke identificatiecode (ID) heeft hij in de dataset?

b De variabele 'ID' hoort niet bij een vraag uit de enquête.
Waarom is deze variabele toegevoegd, denk je?

c Is de variabele 'ID' kwalitatief of kwantitatief? Licht toe.

d Geef van de variabelen 'leeftijd' en 'tevredenheid' aan of deze kwalitatief of kwantitatief zijn.

11 Zie de tabel.

TOP 5 BEST BETAALDE SPORTERS 2023

rang	naam	sport	inkomen ($)
1	Christiano Ronaldo	voetbal	124 miljoen
2	Lionel Messi	voetbal	118 miljoen
3	Kylian Mbappé	voetbal	109 miljoen
4	LeBron James	basketbal	109 miljoen
5	Saúl Álvarez	boksen	100 miljoen

a Welke variabelen komen voor in de tabel?

b Van welke van deze variabelen zijn de waarden getallen?

c Van welke variabele zijn de getallen hoeveelheden?

d Geef van elk van de vier variabelen aan of ze kwalitatief of kwantitatief zijn.

A12 Bij een medisch onderzoek worden vaak veel factoren onderzocht. Hiernaast zie je een deel van een ingevulde vragenlijst. Welke variabelen zijn kwantitatief en welke kwalitatief?

A13 Bij een enquête over het aantal koppen koffie dat Nederlanders per dag drinken, kun je kiezen uit:
0 koppen 1 kop 2 koppen 3 koppen 4 of meer koppen.

a Is in deze enquête de variabele 'aantal koppen koffie' kwalitatief of kwantitatief?

b De onderzoeker kan op basis van de verzamelde gegevens niet berekenen hoeveel koppen koffie Nederlanders gemiddeld drinken per dag.
Wat had de onderzoeker anders moeten doen om het gemiddelde wel te kunnen berekenen?

© Noordhoff Uitgevers bv

O14

Een enquête voor autobezitters bevat de volgende vragen.

I Hoe vaak maakt u gebruik van de auto? Kies uit

☐ nooit ☐ soms ☐ regelmatig ☐ vaak

II Wat voor type auto rijdt u? Kies uit

☐ benzine ☐ diesel ☐ hybride ☐ elektrisch ☐ anders

a Is de variabele 'autogebruik' kwalitatief of kwantitatief? En de variabele 'type auto'?

b Bij welke vraag is er duidelijk sprake van een logische volgorde van de antwoordmogelijkheden? Licht toe.

Theorie B Meetniveau van een kwalitatieve variabele

Bij kwalitatieve variabelen is het van belang hoe ze zijn gemeten.
Als de waarden een logische volgorde (ordening) hebben, is de variabele gemeten op **ordinaal** niveau. Dat is het geval bij de variabele autogebruik in opgave 14.
Als de volgorde niet van belang is, zoals bij de variabele type auto, is er gemeten op **nominaal** niveau.
De **meetniveaus** nominaal en ordinaal horen bij een kwalitatieve variabele.
Een variabele die op nominaal niveau is gemeten, is een **nominale variabele**.
Een variabele die op ordinaal niveau is gemeten, is een **ordinale variabele**.

Nominaal is afgeleid van het Latijnse woord *nomen*, dat naam betekent.

MEETNIVEAUS KWALITATIEVE VARIABELE

meetniveau	omschrijving
nominaal	De verschillende categorieën worden *benoemd*, maar er is geen duidelijke volgorde in de waarden van de variabele.
ordinaal	Er is een logische *ordening* in de waarden van de variabele.

15

De afdeling Onderzoek en Statistiek van de gemeente Amsterdam doet sinds 1999 jaarlijks onderzoek naar Amsterdammers: De Burgermonitor. In de tabel staan enkele variabelen en de bijbehorende waarden.
Geef van elke variabele het meetniveau.

leeftijdsgroep	16 t/m 29	30 t/m 54	55-plus
onderwijsniveau (hoogst afgerond)	basisschool, vmbo, mbo 1	havo, vwo, mbo 2/3/4	hbo, wo
migratieachtergrond	wel		geen
huishouden	alleenstaand		meer personen

© Noordhoff Uitgevers bv

A16

Er wordt onderzoek gedaan naar de vakantiebestemming van Nederlanders in de herfstvakantie.
Bedenk in de context van dit onderzoek

a een kwantitatieve variabele

b een nominale variabele en een ordinale variabele en bedenk voor beide variabelen drie mogelijke waarden.

O17

Op een school is in elk lokaal het aantal leerlingen geteld en de temperatuur in graden Celsius gemeten.

a Is de variabele 'aantal leerlingen' kwalitatief of kwantitatief? En de variabele 'temperatuur in graden Celsius'?

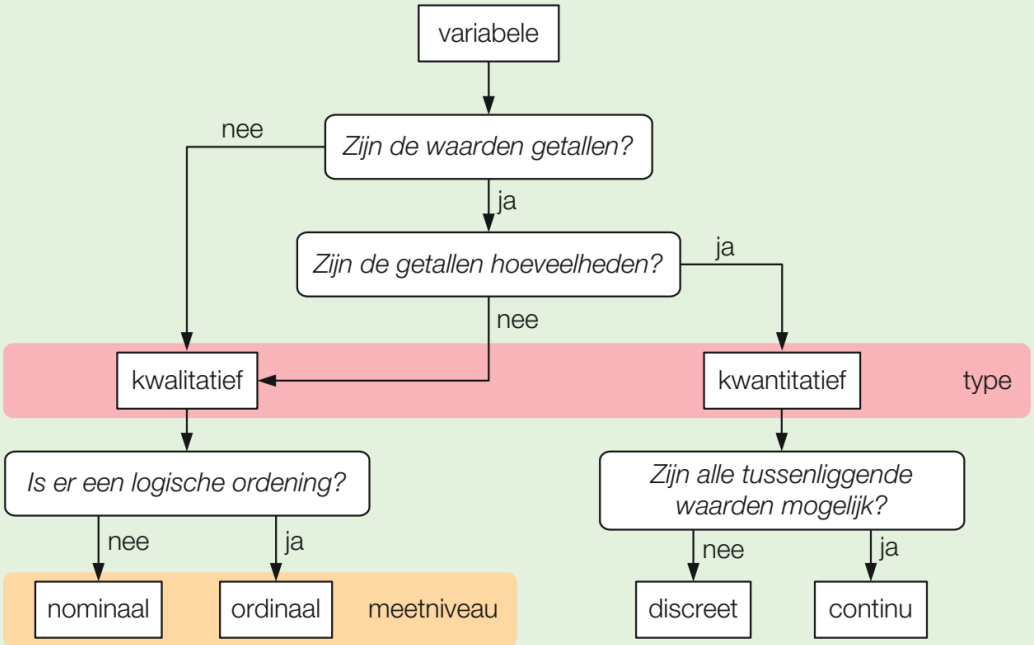
b Een van de waarden is 26,2.
Bij welke variabele hoort deze waarde? Licht toe.

Theorie C Discrete en continue variabelen

In opgave 17 heb je gezien dat bij de variabele 'aantal leerlingen' alleen gehele waarden mogelijk zijn. Een kwantitatieve variabele waarbij bepaalde tussenliggende waarden niet mogelijk zijn, is een **discrete variabele**.

Een kwantitatieve variabele waarbij alle tussenliggende waarden mogelijk zijn, is een **continue variabele**. In opgave 17 kan de thermometer misschien niet alle tussenliggende waarden weergeven, maar in principe zou je de temperatuur nauwkeuriger kunnen meten. De variabele 'temperatuur in graden Celsius' is dus een continue variabele.

Bij het indelen van variabelen kun je het volgende schema gebruiken.



© Noordhoff Uitgevers bv

18 Geef in elk van de volgende situaties aan over welke twee variabelen het gaat en welke variabele discreet en welke variabele continu is. Licht je antwoorden toe.

a Een bewoner van een flat ziet op een display op welke verdieping de lift zich bevindt en een liftmonteur bepaalt de hoogte van de lift boven de grond.

b Een medewerker van een schoenenwinkel meet van elke klant de voetlengte in cm en bepaalt vervolgens de schoenmaat.

19 Een appelkweker verzamelt de volgende informatie.

I Het aantal appels per boom.
II De soort van elke boom.
III Het gewicht van elke appel.
IV De kwaliteitsklasse (1, 2 of 3) van elke appel.

Geef van elke kwalitatieve variabele het meetniveau. Bepaal van elke kwantitatieve variabele of deze discreet of continu is.

Informatief **De meetniveaus interval en ratio**

Je hebt gezien dat er bij kwalitatieve variabelen een onderscheid wordt gemaakt tussen de meetniveaus nominaal en ordinaal. Ook voor kwantitatieve variabelen onderscheiden we twee meetniveaus, namelijk interval en ratio. Bij het meetniveau ratio is er sprake van een betekenisvol nulpunt, waardoor je met verhoudingen kunt rekenen. Zo is 60 km wel twee keer zo ver als 30 km, maar was de aarde in het jaar 2000 niet twee keer zo oud als in het jaar 1000. De variabele afstand heeft een betekenisvol nulpunt en hoort dus bij het meetniveau ratio. De variabele jaartal heeft geen betekenisvol nulpunt en hoort dus bij het meetniveau interval.

OVERZICHT MEETNIVEAUS

nominaal	**ordinaal**	**interval**	**ratio**
naamgeving	naamgeving	naamgeving	naamgeving
	ordening	ordening	ordening
		gelijke verschillen	gelijke verschillen
			natuurlijk nulpunt

20 Lees het informatief hierboven.
Er wordt onderzoek gedaan naar de vakantiebestemming van Nederlanders in de herfstvakantie.
Bedenk in de context van dit onderzoek een variabele bij elk van de vier meetniveaus.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik ken de begrippen (statistische) variabele, waarde en dataset. ▶ OPGAVE C3a THEORIE A
- ☐ Ik kan in een gegeven situatie de variabelen benoemen. ▶ OPGAVE C3a THEORIE A
- ☐ Ik kan van een variabele bepalen of deze kwalitatief of kwantitatief is. ▶ OPGAVE C3b THEORIE A
- ☐ Ik kan van een kwalitatieve variabele bepalen of het meetniveau nominaal of ordinaal is. ▶ OPGAVE C3c THEORIE B
- ☐ Ik kan van een kwantitatieve variabele bepalen of deze discreet of continu is. ▶ OPGAVE C3d THEORIE C

C3 Bij een onderzoek onder slechtzienden is voor elke deelnemer een kaart ingevuld. Zie hiernaast.

a Van elke deelnemer worden de gegevens in een dataset verwerkt. Geef een mogelijke naam voor de variabelen in de dataset. Geef van elke variabele een mogelijke waarde.

b Welke variabelen zijn kwalitatief en welke kwantitatief?

c Geef van elke kwalitatieve variabele het meetniveau.

d Bepaal van elke kwantitatieve variabele of deze discreet of continu is.

Antwoorden

C3 **a** reden slechtziendheid, mogelijke waarde: ziekte
mate van beperkt voelen, mogelijke waarde: zelden
dagelijks km lopen, mogelijke waarde: 8,6
aantal begeleiders, mogelijke waarde: 2

b kwalitatief: mate van beperkt voelen, reden slechtziendheid
kwantitatief: dagelijks km lopen, aantal begeleiders

c reden slechtziendheid: nominaal
mate van beperkt voelen: ordinaal

d dagelijks km lopen: continu
aantal begeleiders: discreet

© Noordhoff Uitgevers bv

2.3 Data analyseren

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met de centrummaten gemiddelde, modus en mediaan.
- Je kunt rekenen met absolute en relatieve frequenties.
- Je kunt werken met een klassenindeling.
- Je kunt werken met histogrammen en frequentiepolygonen.

Voorkennis Centrummaten

Je kunt gebruikmaken van het gemiddelde om aan te geven waar het centrum van de gegevens zich bevindt. Het gemiddelde is daarom een voorbeeld van een centrummaat. Andere centrummaten zijn de mediaan en de modus.

Centrummaten

gemiddelde	$\text{gemiddelde} = \dfrac{\text{som van de waarnemingsgetallen}}{\text{aantal waarnemingsgetallen}}$
mediaan	Als de waarnemingsgetallen in volgorde van grootte staan, dan is • bij een oneven aantal getallen de mediaan het middelste getal • bij een even aantal getallen de mediaan het gemiddelde van de middelste twee getallen.
modus	De modus is het waarnemingsgetal met de grootste frequentie. Zijn er twee of meer waarnemingsgetallen met de grootste frequentie, dan bestaat de modus niet.

Voorbeeld

Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus van
8 5 3 6 3 4 8 3.

Uitwerking

$$\text{gemiddelde} = \frac{8+5+3+6+3+4+8+3}{8} = 5$$

3 3 3 **4** **5** 6 8 8 ← In volgorde van grootte.

middelste twee

$$\text{mediaan} = \frac{4+5}{2} = 4{,}5 \text{ en modus} = 3$$

V1 Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus van

a 12 9 9 5 13 7 8

b 18 21 25 18 24 17.

© Noordhoff Uitgevers bv

V2 Bij een groepsproject zijn de 18 leerlingen in groepjes van vier of vijf ingedeeld. In de tabel hiernaast zie je dat twee van de vijf leerlingen in groep 3 het cijfer 6 hebben.

a Welke groep heeft het hoogste gemiddelde cijfer?
b Wat is de modus van alle cijfers samen?
c Bij welke groep is de mediaan het laagst?

CIJFERS GROEPSPROJECT

groep 1	5	4	6	4	5
groep 2	6	7	7	8	
groep 3	9	6	8	7	6
groep 4	5	6	7	5	

Voorkennis **Frequentietabel en centrummaten**

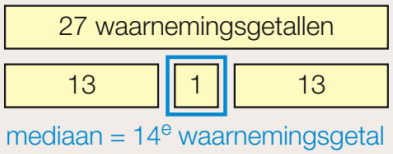
In de frequentietabel hiernaast zie je de behaalde cijfers bij een toets Frans. Je ziet dat het waarnemingsgetal 8 frequentie 3 heeft. Dat betekent dat drie leerlingen een 8 hebben gehaald.

CIJFERS TOETS FRANS

cijfer	4	5	6	7	8	9
frequentie	2	6	6	8	3	2

De totale frequentie is $2 + 6 + 6 + 8 + 3 + 2 = 27$.
Er zijn dus 27 leerlingen die de toets hebben gemaakt.
De som van de waarnemingsgetallen krijg je als volgt.
$2 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 8 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9 = 172$
Dus het gemiddelde cijfer is $\frac{172}{27} \approx 6{,}4$.

Er zijn 27 waarnemingsgetallen, dus de mediaan is het 14^e waarnemingsgetal. Zie het schema hiernaast.
De eerste $2 + 6 = 8$ waarnemingsgetallen zijn allemaal 4 of 5. De volgende 6 waarnemingsgetallen zijn allemaal 6. Je hebt dan $8 + 6 = 14$ waarnemingsgetallen gehad.
Het 14^e waarnemingsgetal is een 6, dus de mediaan van de cijfers is 6.
De modus is het waarnemingsgetal met de grootste frequentie.
Dus de modus van de cijfers is 7.



V3 Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus bij de frequentietabel.

HUISWERKOPGAVEN PER WEEK

aantal	11	12	13	14	15	16
frequentie	4	3	5	6	1	5

V4 Bij restaurant Sapori is een weekend lang van elke reservering bijgehouden voor hoeveel personen er werd gereserveerd. Zie de tabel hiernaast.

RESERVERINGEN SAPORI

aantal personen	1	2	3	4	5	6	10
frequentie	6	22	8	8	4	3	5

a Hoeveel reserveringen waren er dit weekend?
b Voor hoeveel gasten werd er in totaal gereserveerd?
c Bereken het gemiddelde, de modus en de mediaan. Rond zo nodig af op één decimaal.

© Noordhoff Uitgevers bv

21

Van zes personen is hun favoriete kleur en hun lengte in een dataset verwerkt. Zie hiernaast.

favoriete kleur	lengte in cm
blauw	119
blauw	116
rood	104
geel	185
blauw	112
groen	110

a Waarom lukt het niet om bij de variabele 'favoriete kleur' het gemiddelde of de mediaan van de waarden te berekenen?

b Wat is de modus bij 'favoriete kleur'?

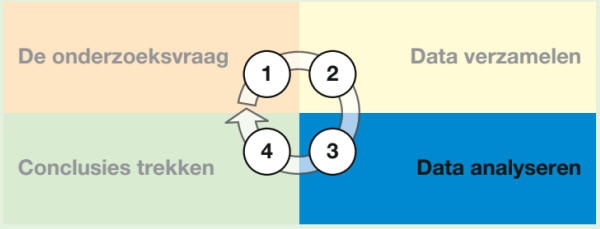
c José wil de modus van de waarden van de variabele 'lengte in cm' weten. Geef commentaar.

d Bereken de gemiddelde lengte in cm.

e Waarom geeft het gemiddelde geen goede indruk van de lengte van deze zes personen? Is dat ook het geval als de persoon die geel als favoriete kleur heeft niet in de dataset zou zitten?

Theorie A Het analyseren van data

In deze paragraaf richten we ons op fase 3 van de statistische cyclus: data analyseren. Het is meestal niet mogelijk om direct conclusies te verbinden aan de gegevens in een dataset. Daarvoor moet de data eerst geanalyseerd worden. Bijvoorbeeld door centrummaten te berekenen, tabellen te maken of diagrammen te tekenen.



Verschillende situaties vragen om verschillende centrummaten. Bij kwalitatieve variabelen kun je de modus gebruiken. Bij kwantitatieve variabelen heb je de keuze uit alle centrummaten.
In opgave 21 heb je gezien dat het gemiddelde niet altijd een juiste indruk geeft van het centrum van de waarnemingsgetallen. Het gemiddelde is bijvoorbeeld gevoelig voor uitschieters. Een **uitschieter** (of **uitbijter**) is een waarnemingsgetal dat erg afwijkt van de andere waarnemingsgetallen.

VOOR- EN NADELEN BIJ DRIE CENTRUMMATEN

	voordeel	nadeel
gemiddelde	gebruikt alle waarnemingsgetallen	gevoelig voor uitschieters
mediaan	ongevoelig voor uitschieters	alleen de waarde van de middelste waarneming(en) is van belang
modus	kan bij elk type variabele	een kleine verandering kan een hele andere modus opleveren

© Noordhoff Uitgevers bv

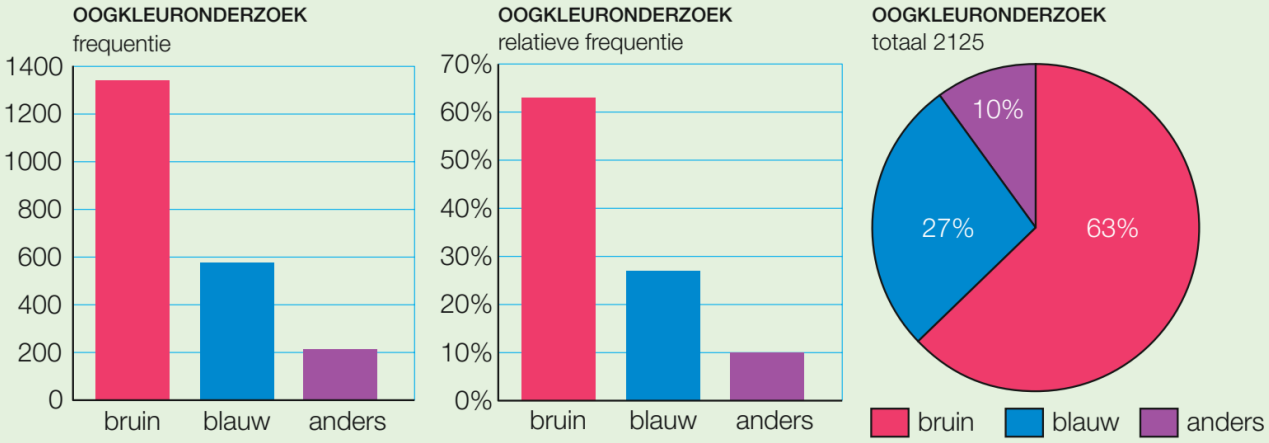
Data van een onderzoek wordt meestal gepresenteerd in diagrammen en tabellen. Daarom wordt een diagram of tabel ook wel een **presentatie** (of **representatie**) van de data genoemd. Welke presentatie de voorkeur heeft, hangt af van de data en wat de onderzoeker wil laten zien.

Bij een onderzoek naar oogkleur in de VS zijn 2125 personen onderzocht. In de tabel hiernaast is van elke waarde van de variabele oogkleur zowel de **absolute frequentie** als de **relatieve frequentie** opgenomen.
Zo is de relatieve frequentie van oogkleur bruin gelijk aan $\frac{1339}{2125} \cdot 100\% \approx 63\%$.

OOGKLEURONDERZOEK VS

oogkleur	bruin	blauw	anders
absolute frequentie	1339	574	212
relatieve frequentie	63%	27%	10%

De variabele oogkleur is kwalitatief. Veelgebruikte diagrammen bij een kwalitatieve variabele zijn staaf- en cirkeldiagrammen. Zie hieronder.



22

Welke centrummaat is het meest geschikt om de volgende waarnemingen te karakteriseren? Licht toe.

a Op een verjaardagsfeestje hebben de aanwezigen de volgende leeftijden:
17, 20, 22, 17, 19, 21 en 68 jaar.

b Van tien leerlingen is de haarkleur:
blond, rood, bruin, bruin, zwart, bruin, bruin, blond, bruin en blond.

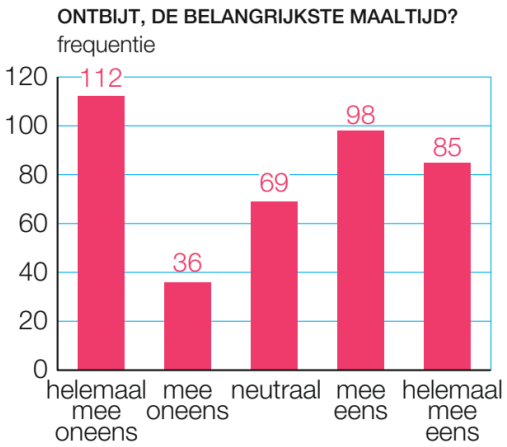
c Een verkoper verkoopt op de zes werkdagen van een week de volgende aantallen fietsen:
8, 7, 4, 5, 8 en 6.

d Bij een natuurkundeproef meten tien leerlingen het volume van dezelfde glazen bol. De metingen leveren op:
48, 48, 48, 48, 53, 48, 48, 48, 48 en 48 cm^3.

© Noordhoff Uitgevers bv

23 ⊙ ✱

Bij een enquête is gevraagd in hoeverre men het eens is met stelling ‘het ontbijt is de belangrijkste maaltijd van de dag’. Zie de figuur hiernaast.



a Van welk meetniveau is hier sprake?
b Wat is de modus?
c Bereken de relatieve frequentie bij ‘helemaal mee oneens’ en bij ‘mee oneens’.
d Hoeveel procent van de mensen heeft positief (‘helemaal mee eens’ of ‘mee eens’) geantwoord?
e Licht toe of de modus hier een goed beeld geeft van de mate waarin men het eens was met de stelling.

24 ⊙ ✱

In klas 4VB is nauwgezet het aantal telaatkomers per dag geregistreerd.

TELAATKOMERS IN 4VB

aantal	0	1	2	3	4	5	32
frequentie	1	5	5	3	3	2	1

a Hoeveel dagen is er geregistreerd?
b Bereken het gemiddelde.
c Bereken op hoeveel procent van de dagen er 4 leerlingen per dag te laat zijn gekomen.
d Wanneer de afdelingscoördinator het gemiddelde ziet, is hij erg ontstemd. Hij vindt het gemiddelde aantal telaatkomers onaanvaardbaar hoog. Door het gebruiken van een andere centrummaat weet de klas de afdelingscoördinator milder te stemmen. Hoe doet de klas dat?

A25 ⊙ ✱

Aan een groep leerlingen is gevraagd op hoeveel dagen ze de afgelopen week gesnoept hebben. De eerste 30 resultaten zie je hiernaast.

aantal dagen	
0	||
1	||||
2	𝍸 |
3	𝍸
4	||||
5	||||
6	|||
7	||

a Met welke variabele heb je hier te maken? Is deze variabele kwalitatief of kwantitatief?
b Zet de centrummaten bij de eerste 30 resultaten op volgorde van klein naar groot.
c Aan het einde van het onderzoek zijn er 40 leerlingen ondervraagd. Het gemiddelde is nu 3,5 geworden en de modus is gelijk gebleven. Geef een mogelijke frequentietabel bij deze situatie.

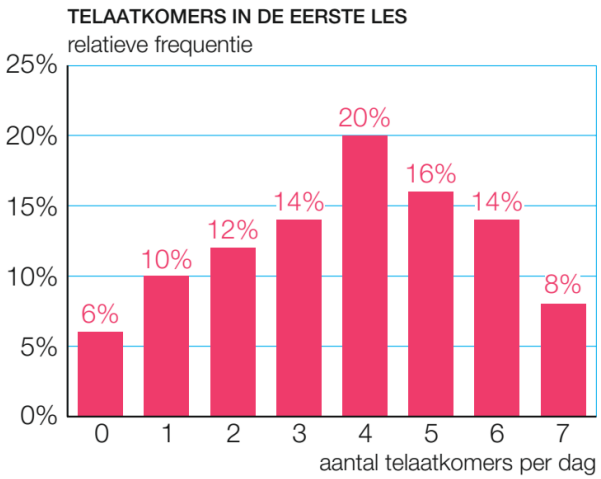
26 ✱

Jori heeft vijf keer een bordspel gespeeld. Zijn scores waren achtereenvolgens 51, 57, 51, 51 en 55.
De maximale score bij dit spel is 60 en de minimale score 50.
Hoe vaak moet hij het spel nog minstens spelen om
a een gemiddelde score van 55 te krijgen
b de modus van zijn scores groter dan het gemiddelde te laten worden
c de mediaan van zijn scores groter dan het gemiddelde te laten worden?

© Noordhoff Uitgevers bv

A27

De verzuimbeheerder op het Montessori College heeft een aantal dagen bijgehouden hoeveel leerlingen te laat in hun eerste les kwamen. Alle data van haar onderzoek is verwerkt in het diagram hiernaast.



a Je ziet dat bij twee telaatkomers per dag het percentage 12 hoort. Omschrijf wat die 12% betekent.

b Bereken het gemiddeld aantal leerlingen dat te laat kwam in de eerste les.

De verzuimbeheerder schrok ervan dat tijdens de onderzoeksperiode er op 33 dagen meer dan vijf leerlingen te laat in hun eerste les waren.

c Hoeveel dagen duurde het onderzoek?

d Bereken hoe vaak de verzuimbeheerder genoteerd heeft dat een leerling te laat in de eerste les kwam.

O28

Pim heeft een webwinkel. Hij heeft een tijdje bijgehouden hoeveel bestellingen hij per week kreeg. De aantallen staan hieronder.

70	35	79	67	63	51	37
69	23	27	38	73	36	54
46	42	33	21	48	45	32
52	76	47	59	49	40	50

Waarom is het niet zinvol hierbij een frequentietabel te maken?

Theorie B Klassenindeling

In opgave 28 komt elk waarnemingsgetal maar één keer voor. Het heeft dan geen zin een frequentietabel te maken, want alleen de frequentie 1 komt voor. Om een beter inzicht te krijgen in de aantallen bestellingen kun je ze indelen in groepen. Deze groepen heten **klassen**.
Omdat het kleinste aantal bestellingen 21 is en het grootste aantal bestellingen 79, is een verstandige **klassenindeling** [20, 30⟩, [30, 40⟩, [40, 50⟩, [50, 60⟩, [60, 70⟩ en [70, 80⟩.
Bij deze klassenindeling krijg je de tabel hiernaast.

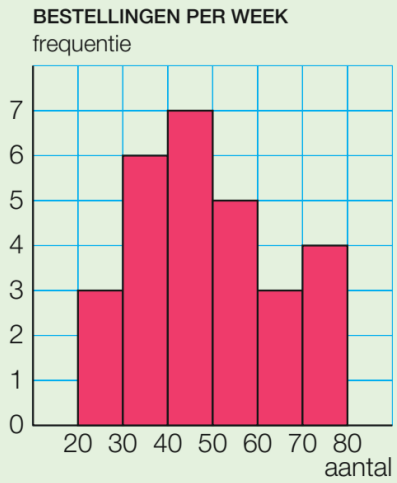
BESTELLINGEN PER WEEK

aantal	frequentie
[20, 30⟩	3
[30, 40⟩	6
[40, 50⟩	7
[50, 60⟩	5
[60, 70⟩	3
[70, 80⟩	4

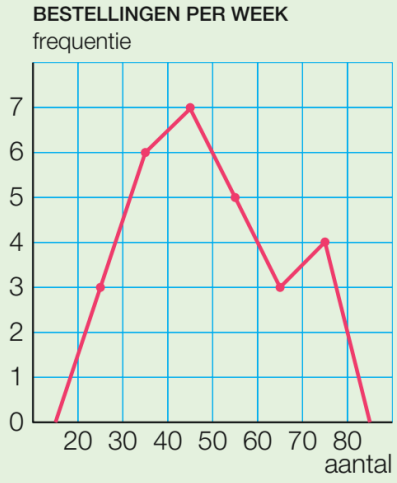
Met [geef je bij de klasse [20, 30⟩ aan dat 20 wel tot de klasse behoort en met ⟩ dat 30 niet tot de klasse behoort.
Bij deze klasse heten 20 en 30 de **klassengrenzen**.
Bij deze klasse is de **klassenbreedte** $30 - 20 = 10$.
Het **klassenmidden** is $\frac{20 + 30}{2} = 25$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Hiernaast is het **histogram** getekend bij de frequentietabel. Een histogram heeft op de horizontale as een kwantitatieve variabele met een klassenindeling en op de verticale as de frequentie. In een histogram staan de staven tegen elkaar aan.



Bij een klassenindeling kun je ook een lijndiagram tekenen. Je zet dan stippen boven de klassenmiddens. Het begin- en eindpunt liggen op de horizontale as. Zo'n lijndiagram heet een **frequentiepolygoon**. Zie de figuur rechtsonder.



Bij het maken van een klassenindeling gaan de meetwaarden verloren. Je ziet immers alleen nog het aantal meetwaarden per klasse. Daarom kun je aan de hand van een klassenindeling niet meer berekenen wat het gemiddelde was. Bij een klassenindeling kun je wel een schatting geven van het gemiddelde door te rekenen met de klassenmiddens.

In plaats van de modus spreken we bij een klassenindeling van de **modale klasse**, dat is de klasse met de grootste frequentie.
Ook de mediaan is bij een klassenindeling niet meer te berekenen. Je kunt vaak wel berekenen in welke klasse de mediaan ligt.

Voorbeeld

Van een aantal leerlingen is het gewicht vastgesteld. Zie de frequentietabel hiernaast.

a Bereken met klassenmiddens een schatting van het gemiddelde gewicht.
b In welke klasse ligt de mediaan?
c Geef de modale klasse.

GEWICHT LEERLINGEN IN KG

gewicht	frequentie
[50, 55⟩	4
[55, 60⟩	7
[60, 65⟩	12
[65, 70⟩	14
[70, 75⟩	5
[75, 80⟩	8

Uitwerking

a totale frequentie = 4 + 7 + 12 + 14 + 5 + 8 = 50

$$\text{gemiddelde} = \frac{4 \cdot 52{,}5 + 7 \cdot 57{,}5 + \ldots + 8 \cdot 77{,}5}{50} = 65{,}8 \text{ kg}$$

b De mediaan is het gemiddelde van het 25e en 26e getal, dit ligt in de klasse [65, 70⟩.

In de eerste drie klassen zitten 4 + 7 + 12 = 23 getallen.

c De modale klasse is [65, 70⟩.

© Noordhoff Uitgevers bv

R29 ⊙∗

Zie het voorbeeld.
Bij het maken van de klassenindeling zijn de meetwaarden verloren gegaan. Uit de meetwaarden bleek dat de leerlingen samen 3192 kg wogen. Hoeveel procent wijkt het werkelijke gemiddelde af van de schatting met de klassenmiddens?

30 ⊙∗

Van een aantal levensmiddelen in een supermarkt is de prijs genoteerd. Zie de frequentietabel hiernaast.

a Heb je hier te maken met een continue of een discrete variabele? Licht toe.
b Een zak snoep kost € 3,00. In welke klasse valt dit?
c Bereken met klassenmiddens een schatting van de gemiddelde prijs.
d In welke klasse ligt de mediaan?
e Geef de modale klasse.

PRIJS LEVENSMIDDELEN

prijs in centen	frequentie
⟨0, 100]	26
⟨100, 200]	17
⟨200, 300]	21
⟨300, 400]	8
⟨400, 500]	13
⟨500, 600]	2

31 ⊙∗

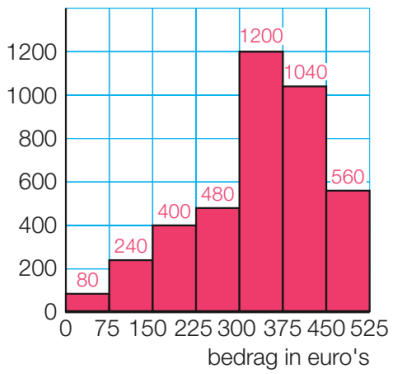
Van de eerste 4000 bestellingen bij een webwinkel zijn de bedragen per bestelling verwerkt in het histogram hiernaast. De eerste klasse is de klasse ⟨0, 75].

a Onderzoek of de mediaan in de modale klasse ligt.

Door te rekenen met de klassengrenzen kun je berekenen dat het gemiddelde bedrag per bestelling groter is dan € 297, maar niet meer is dan € 372.

b Toon dit met berekeningen aan.

BEDRAG PER BESTELLING



32 ⊙∗

Aan de docenten van het Noorderveld College is gevraagd hoe oud ze zijn. Zie de frequentietabel hiernaast.

a Een docent Frans zegt dat de gemiddelde leeftijd van de docenten 40 jaar is.
Onderzoek of dit kan kloppen.
b Kan de mediaan 47 jaar zijn? Licht toe.
c De conciërge beweert dat de modus van de leeftijden 36 is.
Waarom kan dit niet kloppen?

DOCENTEN N.C.

leeftijd	frequentie
[25, 35⟩	18
[35, 45⟩	3
[45, 55⟩	40
[55, 65⟩	9
[65, 75⟩	2

33 ⊙∗

Hiernaast staat het *steel-bladdiagram* bij het aantal werknemers per winkel in een winkelcentrum. Van het aantal 32 op de onderste regel is 3 de steel (het aantal tientallen) en 2 het blad (het aantal eenheden).

a Geef de modus.

AANTAL WERKNEMERS

tientallen	eenheden
0	3 4 4 4 6 6 7 7 8 8 8 9 9
1	2 4 6 6 8 8 8 8 9
2	0 2 3 5 8
3	2 3 4

Een steel-bladdiagram kun je opvatten als een bijzondere klassenindeling.

b Wat zijn de klassen van het gegeven steel-bladdiagram?
c In welke klasse ligt de mediaan?

© Noordhoff Uitgevers bv

A34

Aan een groep ouderparen is gevraagd op welke leeftijd van de man en de vrouw het eerste kind geboren is. Zie het *dubbel steel-bladdiagram* hiernaast.

LEEFTIJD OUDERS BIJ GEBOORTE EERSTE KIND

man		vrouw
9	1	8 9 9 9
6 5 5 3 3	2	0 0 2 3
6 4 4 3 0	3	5 5
8 4 3	4	0 1 2 2 3 3
1 0	5	
eenheden	tientallen	eenheden

a Hoeveel ouderparen zijn ondervraagd?

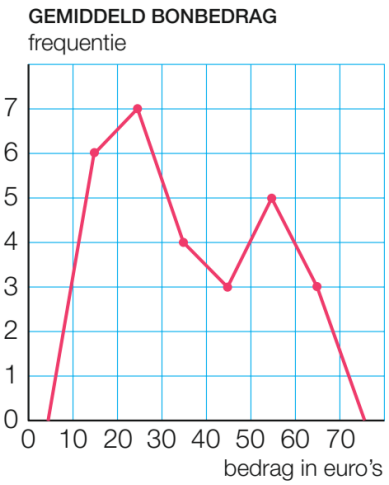
b Hoeveel mannen van deze groep waren 33 jaar bij de geboorte van het eerste kind? En hoeveel vrouwen waren 35 jaar?

c Hoeveel mannen waren jonger dan 30 jaar? En hoeveel vrouwen?

d Luuk maakt een klassenindeling van de mannen en vrouwen samen. Hij neemt als eerste klasse [18, 24⟩. Hoeveel personen komen er in de klasse [30, 36⟩? En hoeveel in de hoogste klasse?

A35

Op een koopzondag zijn van de winkels in een winkelstraat de gemiddelde bonbedragen (de gemiddelde besteding per kopende klant) verwerkt in de frequentiepolygoon. De eerste klasse is [10, 20⟩.



a Kun je berekenen hoeveel betalende klanten er waren?

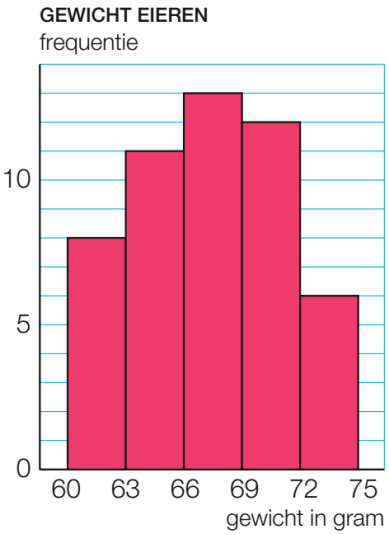
b Bereken de relatieve frequentie van de klasse [50, 60⟩ en geef de praktische betekenis hiervan.

c In welke klasse ligt de mediaan?

d Bereken met klassenmiddens een schatting van het gemiddelde. Rond af op gehelen.

A36

Van 50 eieren is het gewicht vastgesteld. De resultaten zijn verwerkt in de figuur hiernaast met als eerste klasse [60, 63⟩.



a Met welke variabele heb je hier te maken? Is deze variabele kwalitatief of kwantitatief?

b Geef de modale klasse.

c Matthijs beweert dat het totale gewicht van de eieren tussen 3291 en 3441 gram ligt.
Toon aan dat hij gelijk heeft.

d Onderzoek of het mogelijk is dat het gemiddelde en de mediaan in verschillende klassen liggen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan werken met de centrummaten gemiddelde, modus en mediaan. ▶ **OPGAVE C4a, C5 EN C6bc THEORIE A**
- ☐ Ik kan rekenen met absolute en relatieve frequenties. ▶ **OPGAVE C4b THEORIE A**
- ☐ Ik kan werken met een klassenindeling. ▶ **OPGAVE C5 EN C6 THEORIE B**
- ☐ Ik kan werken met histogrammen en frequentiepolygonen. ▶ **OPGAVE C6 THEORIE B**

C4 Bij een vlindertelling is op verschillende routes het aantal vlinders geteld. De resultaten zijn verwerkt in de tabel hiernaast.

VLINDERS PER ROUTE

aantal	0	1	2	3	4	5	18
frequentie	3	4	7	6	4	2	1

a Van het gemiddelde, de modus en de mediaan is er één minder geschikt als centrummaat bij deze gegevens.
Welke is dat en waarom?

b Bereken de relatieve frequentie bij drie vlinders per route.

C5 Zie de klassenindeling hiernaast.

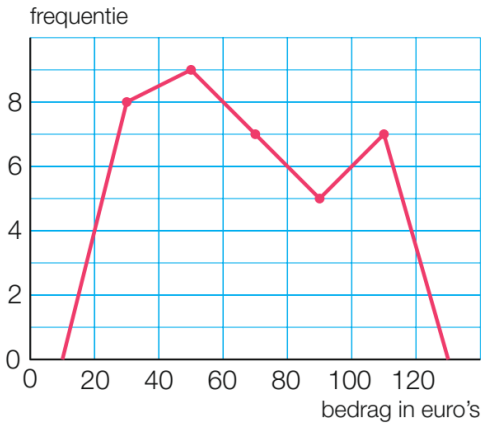
gewicht in kg	frequentie
[40, 50⟩	33
[50, 60⟩	29
[60, 70⟩	19
[70, 80⟩	6
[80, 90⟩	23

a Bereken met klassenmiddens een schatting van het gemiddelde gewicht. Rond af op gehele kg.

b Geef de modale klasse.

c Volgens Jelle is het gemiddelde gewicht 55 kg. Kan hij gelijk hebben? Licht toe.

C6 Zie de frequentiepolygoon hiernaast.
De eerste klasse is de klasse [20, 40⟩.



a Hoeveel bedragen zijn in de figuur verwerkt?

b In welke klasse ligt de mediaan?

c Onderzoek of het gemiddelde in de modale klasse kan liggen.

Antwoorden

C4 **a** gemiddelde, vanwege de uitschieter
b 22,2%

C5 **a** 61 kg
b [40, 50⟩
c Nee, het kleinst mogelijke gemiddelde is 56,09... kg.

C6 **a** 36 bedragen
b [60, 80⟩
c dat kan

© Noordhoff Uitgevers bv

2.4 Kwartielen en spreiding

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met (relatieve) cumulatieve frequentiepolygonen.
- Je kunt werken met de spreidingsmaten spreidingsbreedte en interkwartielafstand.
- Je kunt werken met gegevens in een boxplot.
- Je kunt een boxplot tekenen bij een (relatieve) cumulatieve frequentiepolygoon.

O37

Bij de receptie van een hotel wordt een tijdje bijgehouden hoelang elk gesprek duurt. Zie de klassenindeling hiernaast.

a Hoeveel gesprekken duurden 4 minuten of korter?

b Hoeveel procent van de gesprekken duurde 4 minuten of korter?

GESPREKSDUUR RECEPTIE

tijd in minuten	frequentie
⟨0, 1]	18
⟨1, 2]	23
⟨2, 3]	14
⟨3, 4]	8
⟨4, 5]	15

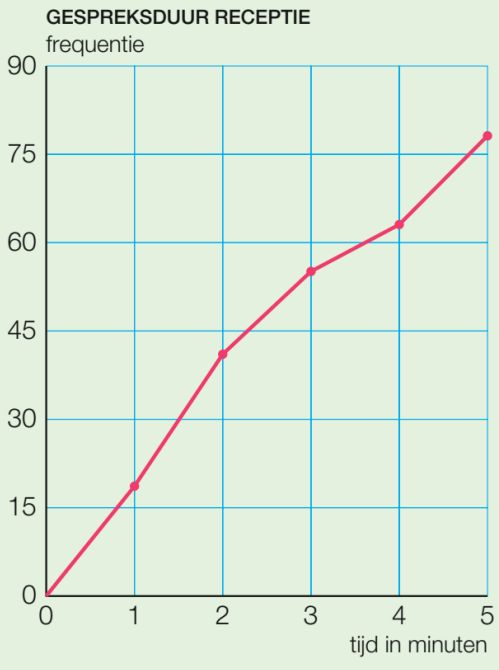
Theorie A Cumulatieve frequentie

Tel je bij de frequentie van een waarnemingsgetal alle voorgaande frequenties op, dan krijg je de **cumulatieve frequentie**. Bij de gegevens van opgave 37 zijn hiernaast de cumulatieve frequenties berekend.
Je kunt in de tabel aflezen dat er 63 gesprekken waren die 4 minuten of korter duurden. Ook zie je dat er in totaal van 78 gesprekken de duur is bijgehouden.

GESPREKSDUUR RECEPTIE

tijd in minuten	frequentie	cumulatieve frequentie
⟨0, 1]	18	18
⟨1, 2]	23	41 (+23)
⟨2, 3]	14	55 (+14)
⟨3, 4]	8	63 (+8)
⟨4, 5]	15	78 (+15)

Hiernaast is de **cumulatieve frequentiepolygoon** getekend. De cumulatieve frequenties zijn telkens uitgezet boven de rechtergrens van elke klasse. Het beginpunt ligt op de horizontale as.
Druk je de cumulatieve frequentie uit in procenten van de totale frequentie, dan noemen we dit de **relatieve cumulatieve frequentie**.
De relatieve cumulatieve frequentie van 4 is $\frac{63}{78} \cdot 100\% \approx 80{,}8\%$. Dus 80,8% van de gesprekken duurde 4 minuten of korter.



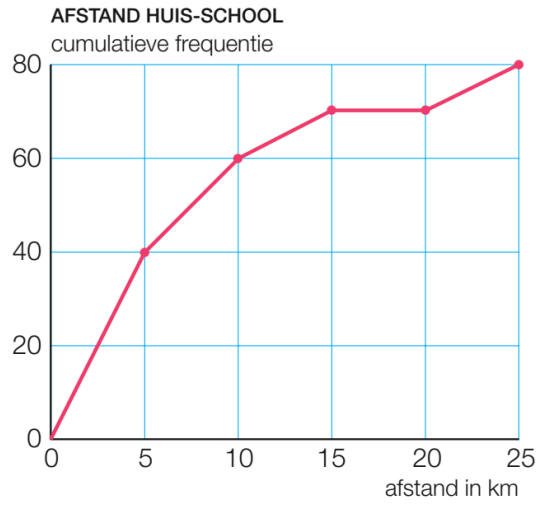
© Noordhoff Uitgevers bv

De mediaan verdeelt een serie waarnemingsgetallen in twee helften, de relatieve cumulatieve frequentie van de mediaan is dus 50%.
Een frequentiepolygoon bij relatieve cumulatieve frequenties heet een **relatieve cumulatieve frequentiepolygoon**.

38

Van een groep studenten is de afstand huis-school genoteerd. Zie de cumulatieve frequentiepolygoon in de figuur hiernaast, waarbij de eerste klasse [0, 5⟩ is.

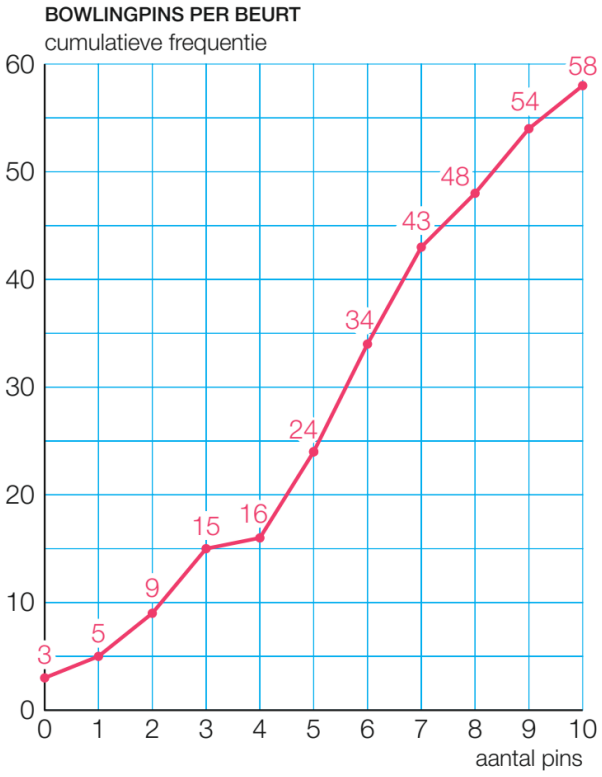
a Hoeveel studenten zijn bij het onderzoek betrokken?
b Hoeveel studenten wonen minder dan 10 km van school?
c Hoeveel studenten wonen minstens 20 km van school?
d Teken een histogram met absolute frequenties bij de figuur.



39

Caroline gaat een avondje bowlen met vrienden. Elke keer als iemand aan de beurt is, worden er maximaal 10 pins omgegooid. Caroline heeft bij elke beurt genoteerd hoeveel pins er zijn omgegooid en de resultaten verwerkt in de figuur hiernaast.

a Is de variabele 'aantal pins' discreet of continu? Licht toe.
b Heb je hier te maken met een klassenindeling?
c Hoeveel beurten zijn er geweest?
d Hoe vaak zijn er meer dan 6 pins omgegooid?
e Wat is de relatieve frequentie van 10 pins omgooien?
f Geef de modus.



© Noordhoff Uitgevers bv

40

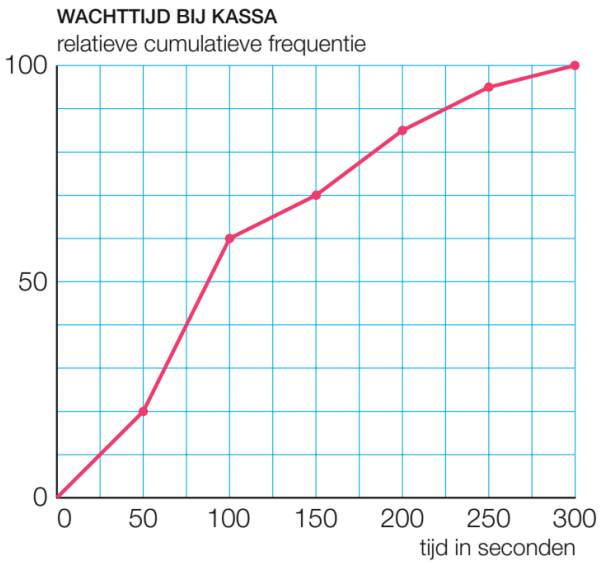
In een supermarkt is bijgehouden hoeveel seconden een klant in de rij bij de kassa staat tot hij aan de beurt is. De wachttijden van 300 klanten zijn verwerkt in de relatieve cumulatieve frequentiepolygoon in de figuur hiernaast, waarbij de eerste klasse [0, 50⟩ is.

a Hoeveel procent van de klanten stond minder dan 100 seconden in de rij? Hoeveel klanten zijn dat?

b Hoeveel klanten moesten minstens 2,5 minuut wachten?

c Hoeveel klanten moesten minstens 100, maar minder dan 200 seconden wachten?

d Geef de modale klasse.



A41

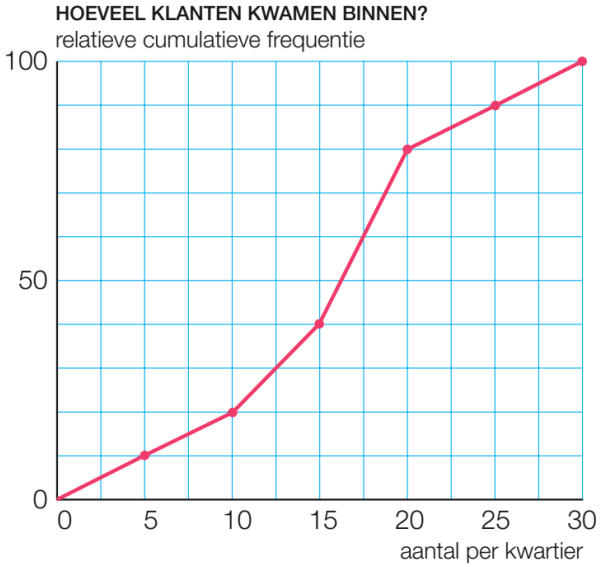
In een winkel is op een dag van 10:00 tot 20:00 uur genoteerd hoeveel klanten er per kwartier de winkel binnenkwamen. Zie de figuur hiernaast, waarbij de eerste klasse [0, 5⟩ is.

a Hoeveel kwartieren kwamen minder dan 20 klanten binnen?

b Hoeveel kwartieren kwamen minstens 15 klanten binnen?

c Hoeveel kwartieren kwamen minstens 10, maar minder dan 25 klanten de winkel binnen?

d In welke klasse ligt de mediaan?



© Noordhoff Uitgevers bv

Voorkennis Kwartielen

De mediaan verdeelt een serie waarnemingsgetallen in twee helften. Van elk van deze helften kun je vervolgens weer de mediaan bepalen. De mediaan van de eerste helft heet het eerste kwartiel. Notatie: Q_1. De mediaan van de tweede helft heet het derde kwartiel. Notatie: Q_3.

De Q komt van het Engelse woord *quartile*, dat kwartiel betekent.

Q_1 en Q_3 berekenen van 5, 7, 3, 11, 7, 5, 8, 9 en 6

Zet de getallen in volgorde van grootte.	3 5 5 6 **7** 7 8 9 11 mediaan
Splits de serie getallen in twee even grote groepen en geef van beide groepen de mediaan. • Bij een oneven aantal waarnemingsgetallen laat je de mediaan weg om twee even grote groepen te krijgen. Zie hiernaast. • Bij een even aantal waarnemingsgetallen hoef je niets weg te laten om twee even grote groepen te krijgen.	*eerste helft* 3 **5 5** 6 → $Q_1 = 5$ *tweede helft* 7 **8 9** 11 → $Q_3 = \frac{8+9}{2} = 8{,}5$

Het kleinste waarnemingsgetal (Q_0), de mediaan (Q_2) en het grootste waarnemingsgetal (Q_4) zijn ook kwartielen. De kwartielen verdelen een serie waarnemingsgetallen in vier groepen die elk bestaan uit (ongeveer) een kwart van de waarnemingsgetallen. De vijf kwartielen worden samen de *vijfgetallensamenvatting* genoemd.

De vijfgetallensamenvatting
- kleinste getal (Q_0)
- eerste kwartiel (Q_1)
- mediaan (Q_2)
- derde kwartiel (Q_3)
- grootste getal (Q_4)

V5 Bereken de vijfgetallensamenvatting van de volgende getallen.

a 26 54 32 70 62 67 38 51 62 58

b 8,3 1,7 2,6 1,9 3,2 7,9 6,3

O42 Hieronder zie je van drie leerlingen de proefwerkcijfers voor Engels.

PROEFWERKCIJFERS ENGELS

leerling	cijfers	gemiddelde	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Aafke	6,1 6,5 6,7 7,0 7,1 7,2 7,7	6,9	6,1	6,5	7,0	7,2	7,7
Ben	4,5 4,8 5,1 7,0 8,6 8,8 9,5	6,9	4,5	4,8	7,0	8,8	9,5
Chris	4,5 6,3 6,5 7,0 7,1 7,4 9,5	6,9	4,5	6,3	7,0	7,4	9,5

a Waarom geven het gemiddelde en de mediaan geen goede indruk van het verschil in cijfers van deze leerlingen?

b Bij wie liggen de cijfers het dichtst bij de mediaan?

c Bij wie liggen de cijfers het verst van de mediaan?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie B Spreiding en boxplot

In opgave 42 heb je gezien dat series waarnemingsgetallen onderling flink kunnen verschillen, zelfs als het gemiddelde en de mediaan gelijk zijn. De cijfers van Aafke verschillen onderling maar weinig. We zeggen dat de **spreiding** bij de cijfers van Aafke klein is.
Bij Ben en Chris is de spreiding groter dan bij Aafke. Dit wordt duidelijk door de **spreidingsbreedte** te berekenen. De spreidingsbreedte is het verschil tussen het grootste en het kleinste getal.

spreidingsbreedte = grootste getal (Q_4) − kleinste getal (Q_0)

De spreidingsbreedte bij Aafke is 7,7 − 6,1 = 1,6.
Bij Ben en Chris is dat 9,5 − 4,5 = 5,0.

Ook bij Ben en Chris is de spreiding anders. Door het berekenen van de **interkwartielafstand** (ook wel kwartielafstand) wordt dit duidelijk. De interkwartielafstand is het verschil tussen het derde en het eerste kwartiel.

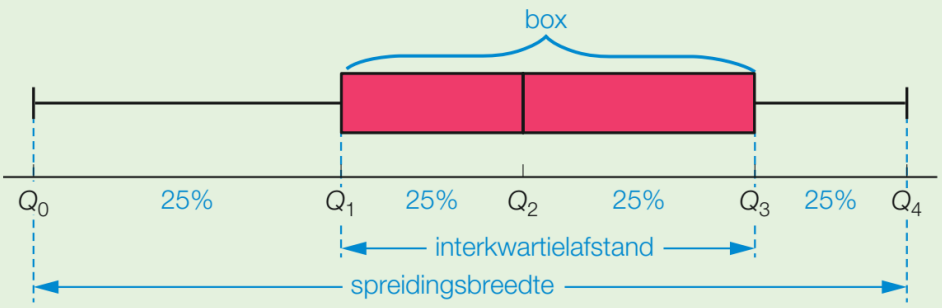
interkwartielafstand = derde kwartiel (Q_3) − eerste kwartiel (Q_1)

Bij Aafke is de interkwartielafstand 7,2 − 6,5 = 0,7, bij Ben is dat 8,8 − 4,8 = 4,0 en bij Chris is de interkwartielafstand 7,4 − 6,3 = 1,1.

De spreidingsbreedte en de interkwartielafstand zijn voorbeelden van **spreidingsmaten**.

Een spreidingsmaat drukt de spreiding van de data uit in een getal.

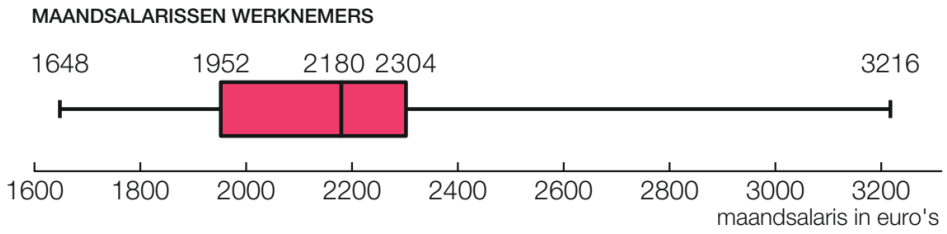
De kwartielen kunnen visueel weergeven worden in een **boxplot**. Zie hieronder.



Een boxplot begint bij het kleinste waarnemingsgetal en eindigt bij het grootste waarnemingsgetal. De breedte van een boxplot komt dus overeen met de spreidingsbreedte. De **box** van een boxplot is het middelste gedeelte tussen het eerste en het derde kwartiel. De breedte van de box komt dus overeen met de interkwartielafstand. Een boxplot bestaat uit vier delen, die elk (ongeveer) 25% van de waarnemingsgetallen bevatten.

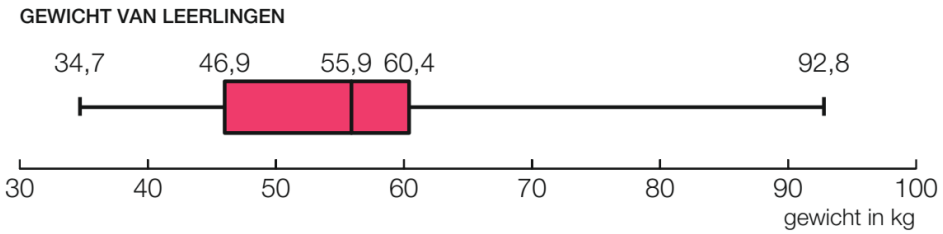
© Noordhoff Uitgevers bv

43 Van de 250 werknemers van een ICT-bedrijf is het maandsalaris in een boxplot verwerkt. Zie de figuur hieronder.



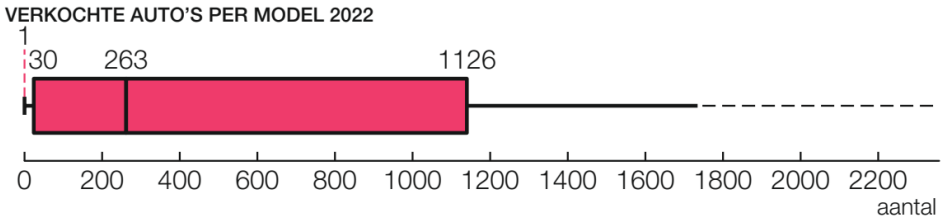
a Bereken de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.
b Hoeveel werknemers hebben een maandsalaris tussen 1952 en 2304 euro?
c Wat weet je van de maandsalarissen van de 25% werknemers met de hoogste maandsalarissen?

44 Van een grote scholengemeenschap zijn de gewichten van alle 2184 leerlingen genoteerd. Zie de boxplot hieronder.



Een leerling trekt uit bovenstaande gegevens de volgende conclusies. Geef bij elke conclusie aan of deze juist is of onjuist. Licht toe.
a Er zijn meer leerlingen die een gewicht hebben tussen 60,4 en 92,8 kg dan tussen 55,9 en 60,4 kg.
b Er zijn meer dan 550 leerlingen die lichter zijn dan 46,9 kg.
c Er vallen minder leerlingen binnen dan buiten de box.
d Meer dan driekwart van de leerlingen is lichter dan het gemiddelde van het kleinste en grootste gewicht.

A45 Met 9669 auto's was de Peugeot 208 in het jaar 2022 het meest verkochte automodel in Nederland. In dat jaar werden van 345 verschillende automodellen auto's verkocht. Zie de boxplot hieronder.



a Van hoeveel modellen werden er meer dan 1126 stuks verkocht?
b Bereken de spreidingsbreedte en de kwartielafstand.
c Wat weet je van het aantal verkochte auto's per model van de 25% minst verkochte modellen?
d Waarom geeft bij deze data de mediaan een beter beeld van het centrum dan het gemiddelde?

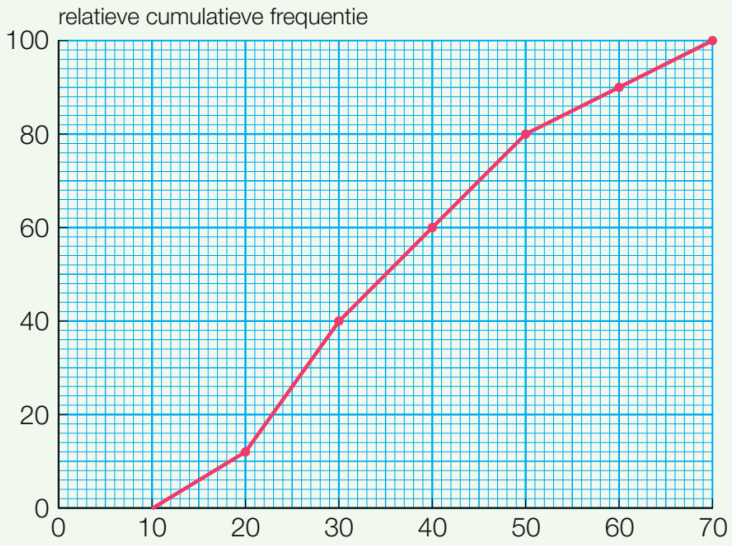
© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie C Boxplot bij een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon

Bij het maken van een klassenindeling gaan meetwaarden verloren. Maak je op basis van een klassenindeling een boxplot, dan gaan er weer gegevens verloren. Toch kan dat nuttig zijn, bijvoorbeeld om een beter beeld te krijgen van de spreiding.
In het voorbeeld zie je hoe je een boxplot maakt bij een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon.

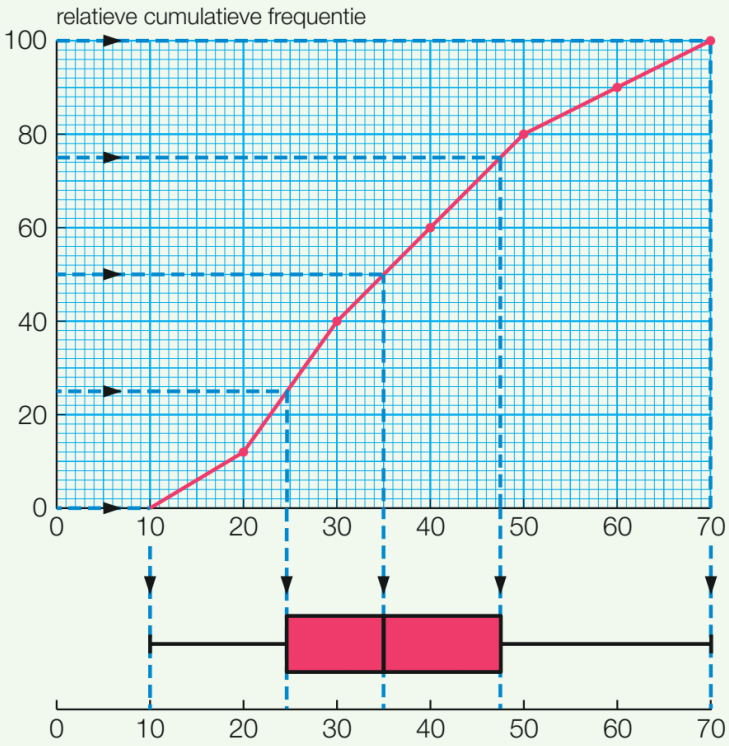
Voorbeeld

Zie de relatieve cumulatieve frequentiepolygoon hiernaast, waarbij de eerste klasse [10, 20⟩ is.
Teken bij de figuur de boxplot.



Aanpak
Bepaal de vijf getallen die voor de boxplot nodig zijn, door te kijken welke waarden bij de cumulatieve percentages 0, 25, 50, 75 en 100 horen.

Uitwerking



Laat zien hoe je te werk gaat bij het bepalen van de waarden uit een diagram. Hiernaast is dat gedaan met stippellijnen.

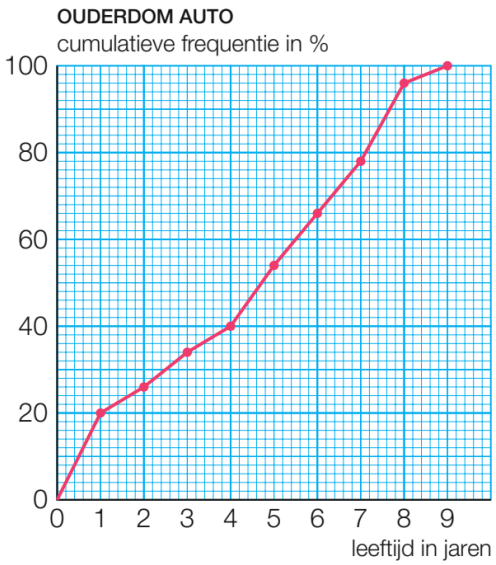
© Noordhoff Uitgevers bv

R46 In de boxplot van het voorbeeld is de mediaan bij 35 getekend.
Zou het kunnen dat de mediaan van de oorspronkelijke data 38 is?

47 [▶ WERKBLAD] Tijdens een autoshow wordt een groot aantal tweedehands auto's aangeboden. De figuur hiernaast geeft informatie over de ouderdom van de aangeboden auto's, waarbij de eerste klasse [0, 1⟩ is.

a Teken bij de figuur de boxplot.

b Onderzoek of een kwart van de auto's in de autoshow ouder dan 6 jaar en 2 maanden kan zijn.

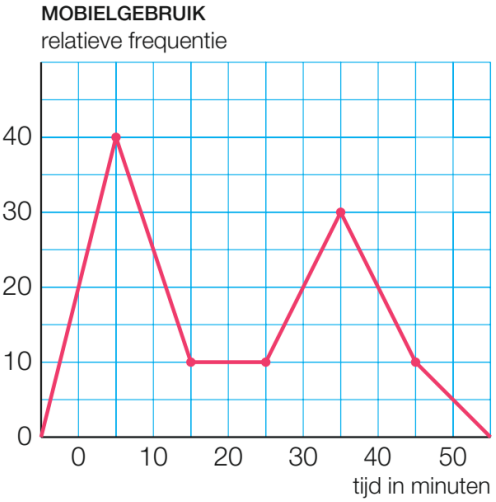


48 Op een dag is van een aantal leerlingen bijgehouden hoeveel minuten ze tijdens de pauzes hun mobiel gebruikten.
De resultaten zijn verwerkt in de relatieve frequentiepolygoon in de figuur hiernaast, waarbij de eerste klasse [0, 10⟩ is.

a Teken bij de figuur de boxplot.

b Welke interkwartielafstand volgt uit de boxplot?

c Onderzoek of de werkelijke interkwartielafstand 38 minuten kan zijn.



A49 [▶ WERKBLAD] Pietro Pallina bezit twee stukken land met walnotenbomen. Op perceel I staan 200 bomen, op perceel II staan 160 bomen.
De opbrengst per boom in kg is verwerkt in de figuur hiernaast, waarbij de eerste klasse [40, 50⟩ is.

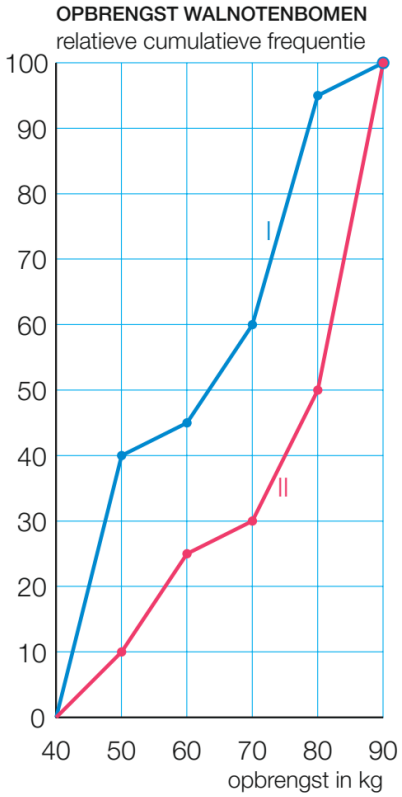
a Bereken het totale aantal bomen met een opbrengst van minstens 70 kg.

b Hoeveel procent van de bomen heeft een opbrengst van minder dan 60 kg?

c Teken bij de figuur de boxplots.

d Op een van de percelen was de gemiddelde opbrengst per boom het grootst.
Bij welk perceel is dat? Licht toe.

e Zou het kunnen dat de medianen bij de oorspronkelijke data voor beide percelen gelijk zijn?



© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

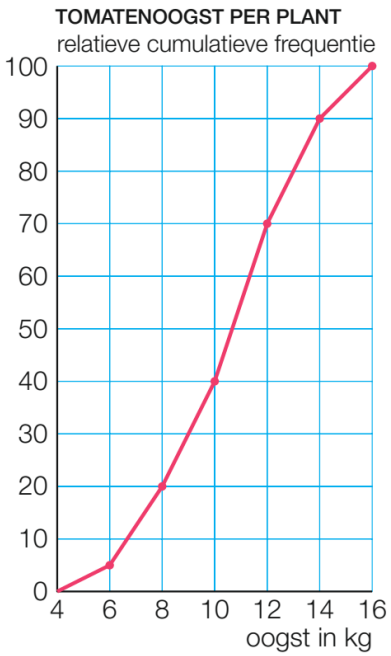
☐ Ik kan werken met (relatieve) cumulatieve frequentiepolygonen. ▶ OPGAVE C7abc THEORIE A

☐ Ik kan werken met de spreidingsmaten spreidingsbreedte en interkwartielafstand. ▶ OPGAVE C8a THEORIE B

☐ Ik kan werken met gegevens in een boxplot. ▶ OPGAVE C8 THEORIE B

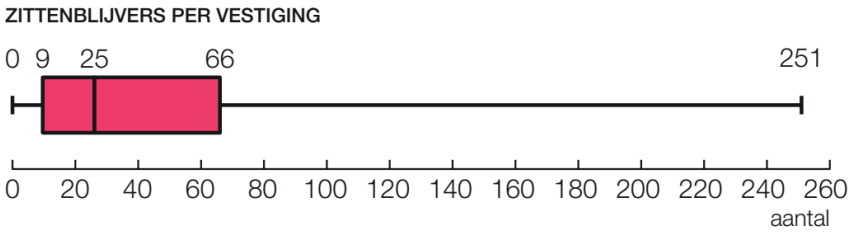
☐ Ik kan een boxplot tekenen bij een (relatieve) cumulatieve frequentiepolygoon. ▶ OPGAVE C7d THEORIE C

C7 [▶ WERKBLAD] Een tomatenkweker heeft van elk van zijn 280 tomatenplanten de opbrengst in kg bijgehouden. De gegevens zijn verwerkt in de figuur hiernaast. De eerste klasse is [4, 6⟩ kg.



a Hoeveel procent van de planten brachten minstens 10 kg tomaten op?
b Hoeveel planten brachten minstens 8 maar minder dan 12 kg tomaten op?
c Geef de modale klasse.
d Teken bij de figuur de boxplot.

C8 Er wordt jaarlijks bijgehouden hoeveel zittenblijvers er op elke schoolvestiging in Nederland zijn. De gegevens van 1304 vestigingen in 2022 zijn in de onderstaande boxplot verwerkt.



a Bereken de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.
b Hoeveel vestigingen hadden meer dan 25 zittenblijvers?
c Waarom geeft bij deze data de mediaan een beter beeld van het centrum dan het gemiddelde?
d Verbeter de volgende bewering. Er zijn meer vestigingen met meer dan 66 zittenblijvers dan vestigingen met minder dan 9 zittenblijvers.

Antwoorden

C7 **a** 60% **b** 140 **c** [10, 12⟩ **d** ∗

C8 **a** 251 en 57 **b** 652 **c** ∗
d Er zijn evenveel vestigingen met meer dan 66 zittenblijvers als vestigingen met minder dan 9 zittenblijvers.

© Noordhoff Uitgevers bv

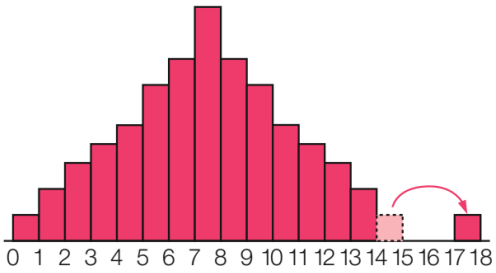
2.5 Statistische verdelingen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met de volgende standaardverdelingen: symmetrisch, linksscheef, rechtsscheef, meertoppig en uniform.
- Je kunt een (cumulatieve) verdelingskromme schetsen.
- Je kunt werken met de standaardafwijking.
- Je kunt de vuistregels bij de normale verdeling toepassen.

O50

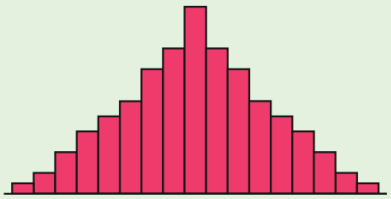
In de figuur hiernaast zie je een histogram waarbij het laatste staafje naar rechts wordt verplaatst. Welk effect heeft deze verandering op het gemiddelde en op de mediaan? Kies uit: neemt toe, blijft gelijk of neemt af. Licht je antwoorden toe.



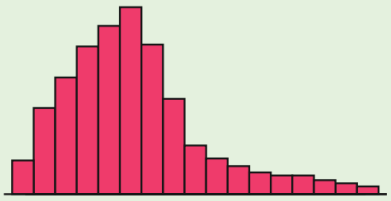
Theorie A Standaardverdelingen

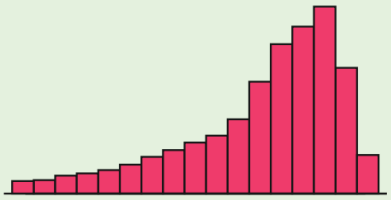
In een histogram is de verdeling van de data goed te zien. We onderscheiden een aantal **standaardverdelingen**.

Bij een **symmetrische verdeling** zijn het gemiddelde en de mediaan gelijk.
Als een symmetrische verdeling één top heeft, liggen het gemiddelde en de mediaan in de modale klasse.

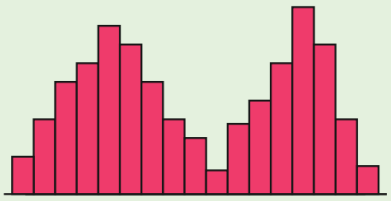


Bij een **scheve verdeling** is de data aan één kant meer verspreid. Dit deel heet ook wel de **staart** van de verdeling. Bij een **rechts-scheve verdeling** ligt de staart rechts en bij een **links-scheve verdeling** links. In het algemeen ligt het gemiddelde meer richting de staart van de verdeling dan de mediaan.
De mediaan geeft hierdoor een beter beeld van het centrum van de verdeling dan het gemiddelde.

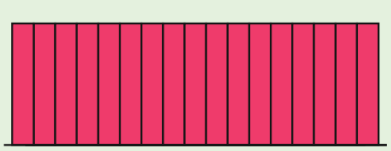




Bij een **meertoppige verdeling** zijn meerdere toppen binnen de data te onderscheiden. De spreiding is relatief groot.



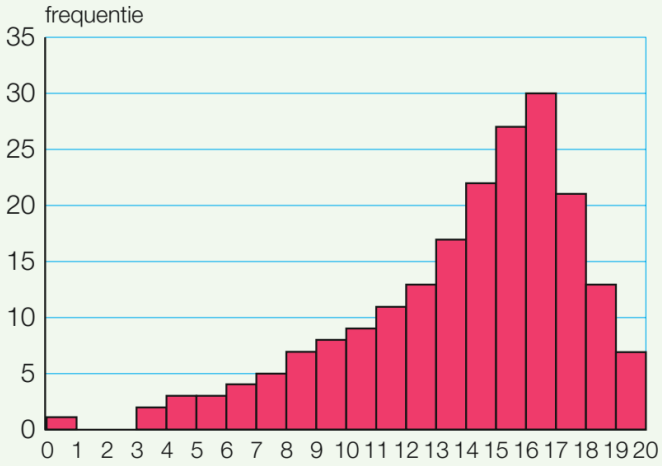
Bij een **uniforme verdeling** heeft elke klasse (vrijwel) dezelfde frequentie.

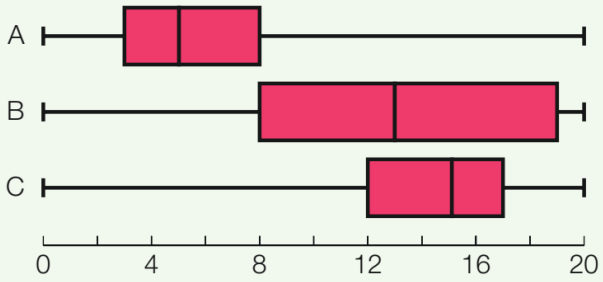


© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Zie het histogram hieronder. Eén van de boxplots hoort bij dit histogram. Onderzoek welke boxplot dat is.





Uitwerking

Boxplot A kan niet kloppen, omdat in het histogram tussen 8 en 20 meer dan 25% van de data ligt.
Boxplot B kan niet kloppen, omdat in het histogram tussen 19 en 20 minder dan 25% van de data ligt.
Dus boxplot C hoort bij het histogram.

51

Van enkele sportclubs is de verdeling van de leeftijden van de leden onderzocht. Zie de klassenindeling. Geef bij elke club aan welke standaardverdeling er het best bij past.

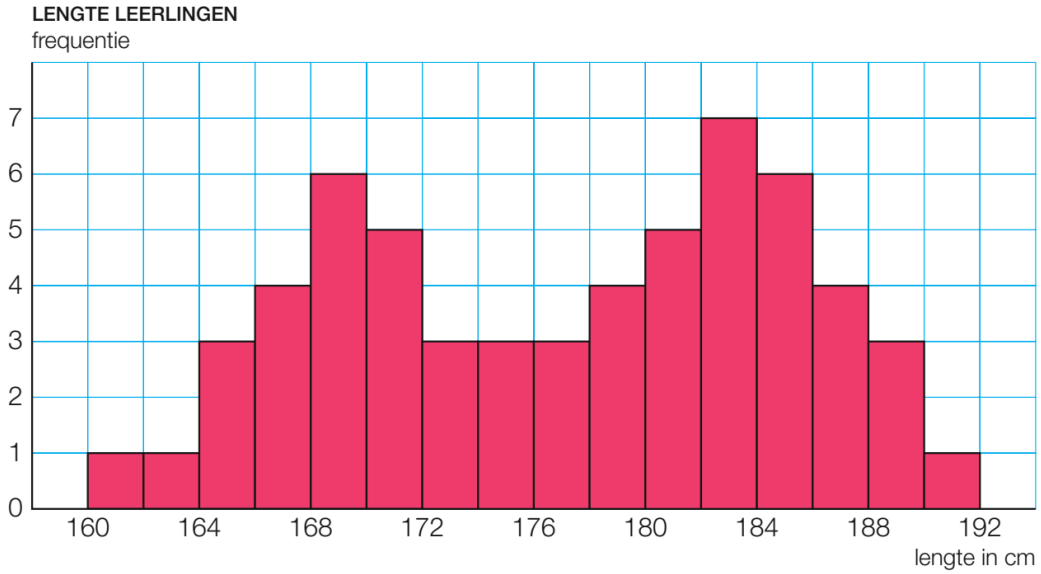
LEEFTIJDSVERDELING LEDEN SPORTCLUBS

leeftijd	club A	club B	club C	club D
[0, 10⟩	24	10	39	1
[10, 20⟩	47	11	72	12
[20, 30⟩	31	11	43	26
[30, 40⟩	10	10	25	46
[40, 50⟩	4	11	52	24
[50, 60⟩	2	10	61	10
[60, 70⟩	1	11	41	2

© Noordhoff Uitgevers bv

52

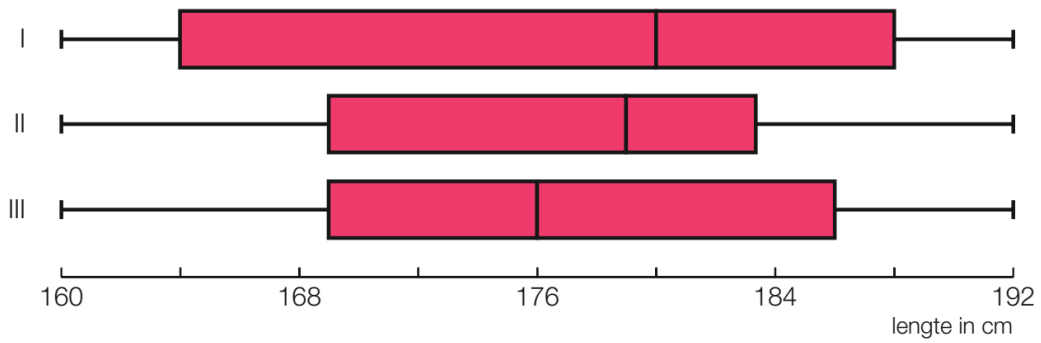
Zie de figuur hieronder met de verdeling van de lengten van 59 leerlingen. De eerste klasse is [160, 162⟩.



a Er zijn twee toppen in het histogram.
Waarom verwacht je twee toppen bij de verdeling van de lengten van leerlingen?

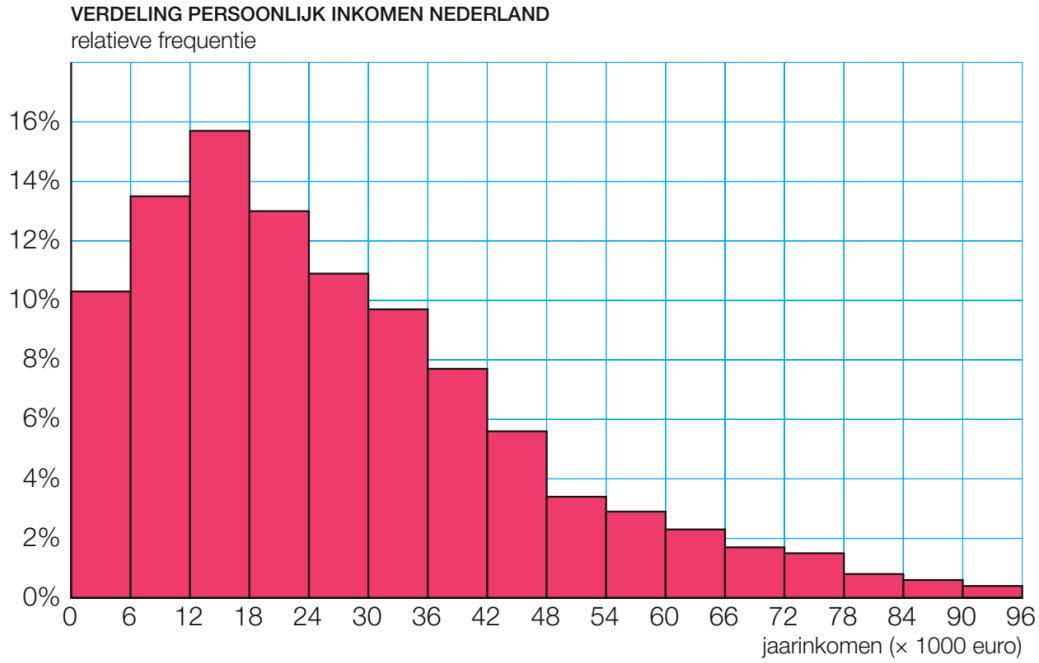
b Geef de modale klasse.

c In de figuur hieronder zie je drie boxplots.
Welke van de drie past het beste bij de bovenstaande figuur? Licht toe.



© Noordhoff Uitgevers bv

A53 In de figuur hieronder zie je een gedeelte van de verdeling van het persoonlijk inkomen in Nederland.

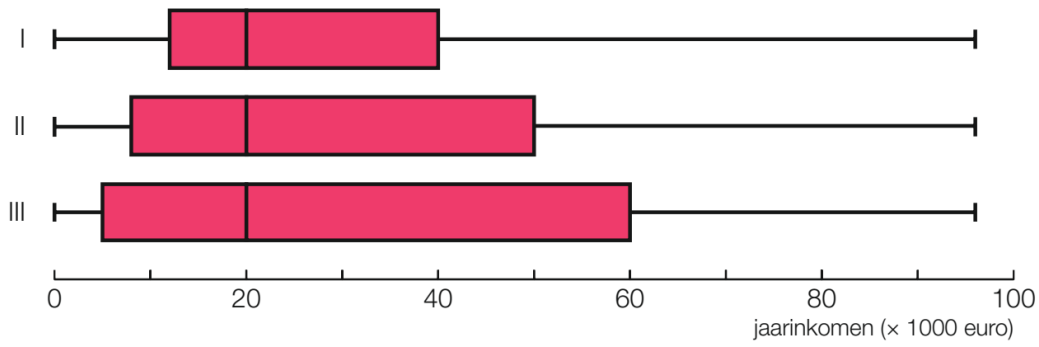


a In de krant staat dat het doorsnee inkomen ongeveer 26 700 euro is. Onderzoek met behulp van de figuur of dit de mediaan of het gemiddelde is.

b Een journalist wil met het gemiddelde of de mediaan een beeld geven van wat in Nederland een gangbaar inkomen is.
Welke van de twee centrummaten geeft een beter beeld? Licht toe.

c Als alle staven in het histogram even hoog zouden zijn, dan is er sprake van een uniforme verdeling.
Heeft iedereen dan hetzelfde inkomen?

d In de figuur hieronder zie je drie boxplots.
Welke van de drie past het best bij het histogram? Licht toe.

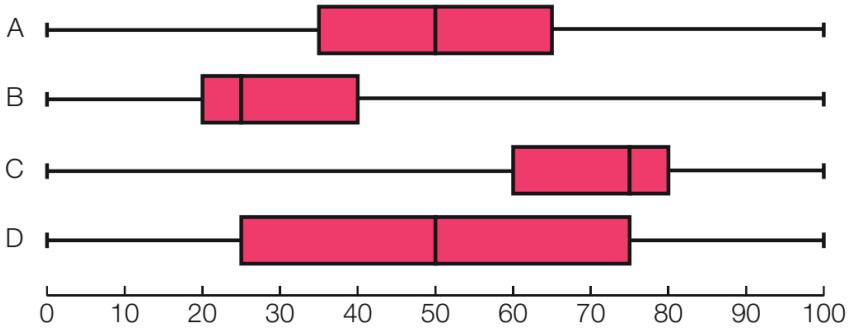


© Noordhoff Uitgevers bv

A54

In de figuur hieronder zijn vier boxplots getekend. Deze horen bij de verdelingen I, II, III en IV.
Welk boxplot hoort bij elk van deze verdelingen?

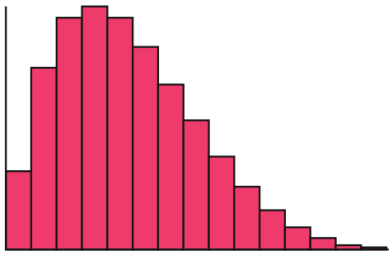
I De verdeling is uniform.
II De verdeling is symmetrisch met één top.
III De verdeling is rechts-scheef.
IV De verdeling is links-scheef.



O55

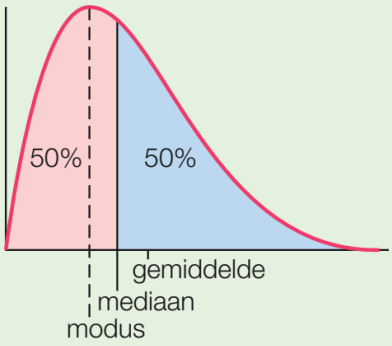
Zie het histogram.
Welke uitspraak is juist?

A De mediaan ligt in de modale klasse.
B De mediaan ligt links van de modale klasse.
C De mediaan ligt rechts van de modale klasse.

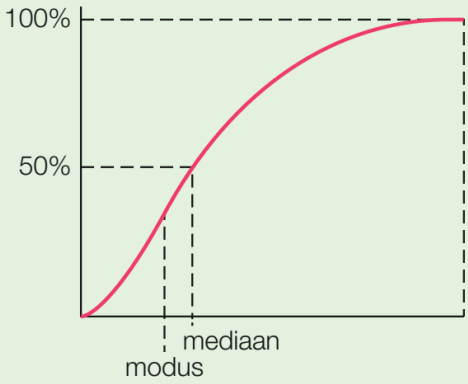


Theorie B Verdelingskrommen

Het histogram in opgave 55 geeft een goed beeld van de frequentieverdeling. Je kunt ook een globale grafiek van de verdeling schetsen, zie de figuur hiernaast. Zo'n grafiek heet een **verdelingskromme**.
Bij een verdelingskromme ligt de modus bij de top.
De mediaan verdeelt de oppervlakte onder de kromme in twee gebieden met gelijke oppervlakte. Bij een rechts-scheve verdeling is het gemiddelde groter dan de mediaan. Bij een symmetrische verdeling zijn het gemiddelde en de mediaan gelijk.



Hiernaast is ook de **cumulatieve verdelingskromme** getekend.
Is een verdelingskromme gegeven, dan kun je daarbij een schets maken van de cumulatieve verdelingskromme en andersom.
De cumulatieve verdelingskromme is het steilst bij de modus.



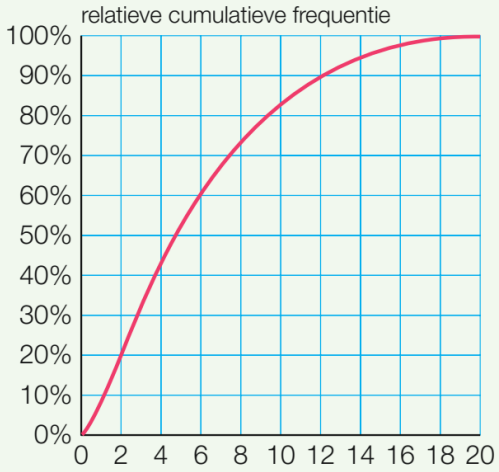
© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme in de figuur hiernaast.

a Licht toe dat je te maken hebt met een rechts-scheve verdeling met een top bij 2.

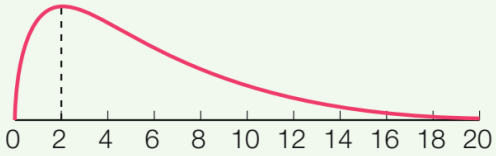
b Schets de bijbehorende verdelingskromme. Neem de horizontale as van 0 tot 20 met stapgrootte 2.



Uitwerking

a In het begin is de kromme erg steil, dus zijn daar veel waarnemingsgetallen. Op het eind is de kromme minder steil, dus daar zijn weinig waarnemingsgetallen. Dus het is een rechts-scheve verdeling. De kromme is het steilst bij 2, dus de verdelingskromme heeft een top bij 2.

b



56 ⏍⊙∗

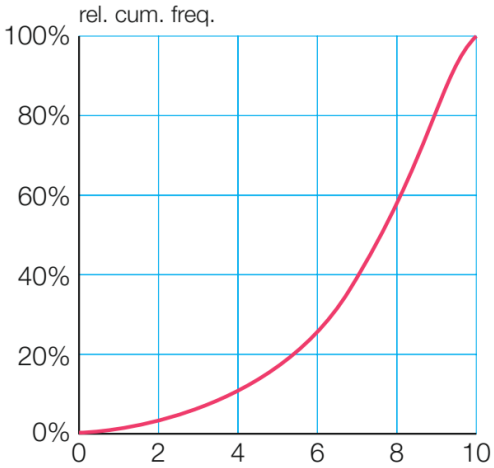
Zie het voorbeeld.

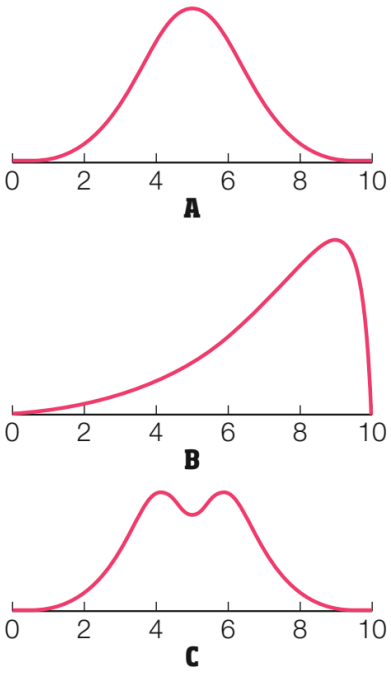
a Geef een schatting van de mediaan met behulp van de relatieve cumulatieve verdelingskromme. Hoe ligt hier het gemiddelde ten opzichte van de mediaan?

b Licht toe dat bij het steilste stuk van de relatieve cumulatieve verdelingskromme de modus hoort.

57 ⏍⊙∗

Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme in de figuur hieronder.
Welke van de verdelingskrommen hoort hierbij?
Licht toe.





© Noordhoff Uitgevers bv

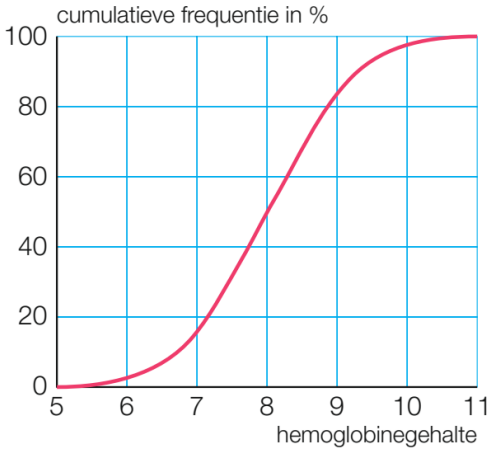
58

Bij een medisch onderzoek is het hemoglobinegehalte van een grote groep Nederlandse mannen gemeten. Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme hiernaast.

a Met welke standaardverdeling heb je te maken? Licht toe.

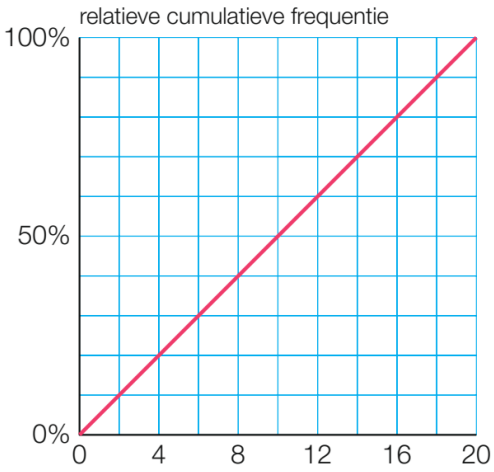
b Schets de bijbehorende verdelingskromme. Neem de horizontale as van 5 tot 11 met stapgrootte 1.

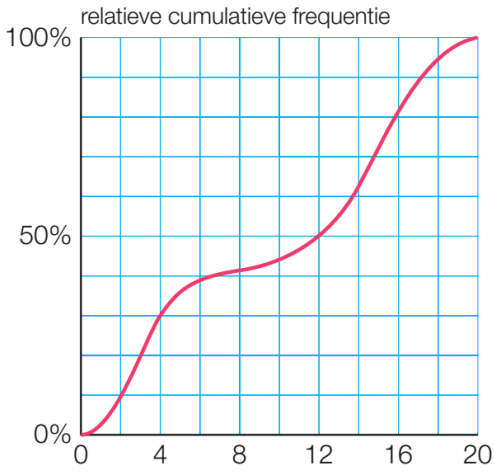
c Schat het gemiddeld hemoglobinegehalte van de onderzochte groep.



59

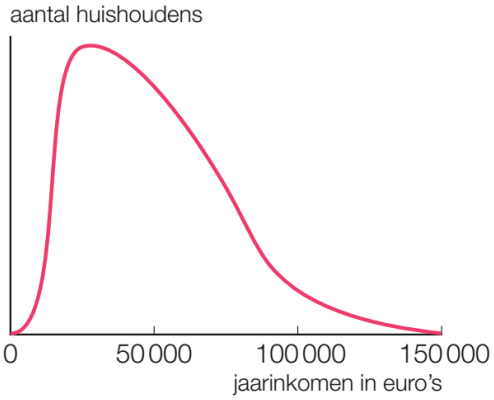
Zie de relatieve cumulatieve verdelingskrommen hieronder. Met welke standaardverdelingen heb je te maken? Licht toe.





60

De verdelingskromme in de figuur geeft informatie over de verdeling van de jaarinkomens van huishoudens van een groot aantal gemeentes.



a Zet op volgorde van klein naar groot: mediaan, modus en gemiddelde. Licht toe.

b Schets de relatieve cumulatieve verdelingskromme. Neem de horizontale as van 0 tot 150 000 met stapgrootte 50 000.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie C De standaardafwijking

Bij het berekenen van de centrummaat gemiddelde gebruik je van elk waarnemingsgetal de waarde. Een spreidingsmaat die dit ook doet is de **standaardafwijking** (soms ook **standaarddeviatie** genoemd). Verander je een waarnemingsgetal, dan zal dit dus effect hebben op het gemiddelde en de standaardafwijking. Bij de centrummaat gemiddelde wordt vaak de standaardafwijking als spreidingsmaat gebruikt.

Je hoeft de standaardafwijking niet met de hand te kunnen uitrekenen. Wil je toch weten hoe dat gaat? Zie het informatief op bladzijde 90. Het is wel belangrijk dat je weet hoe de standaardafwijking ongeveer werkt, zodat je deze spreidingsmaat verstandig kunt gebruiken.

- De standaardafwijking is een spreidingsmaat, dus een grotere standaardafwijking gaat samen met méér spreiding.
- Bij symmetrische verdelingen met één top geeft de standaardafwijking een beeld van hoe ver metingen gemiddeld afwijken van het gemiddelde.
- Grote afwijkingen (bijvoorbeeld uitschieters) hebben een relatief groot effect op de standaardafwijking.

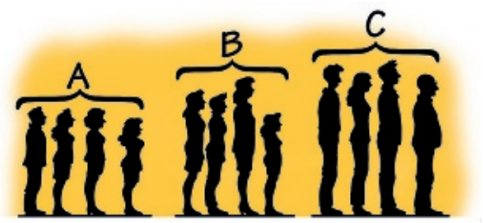
VOOR- EN NADELEN BIJ DRIE SPREIDINGSMATEN

	voordeel	nadeel
standaardafwijking	gebruikt de waarden van alle waarnemingsgetallen	gevoelig voor uitschieters
interkwartielafstand	ongevoelig voor uitschieters	gebruikt alleen Q_1 en Q_3
spreidingsbreedte	eenvoudig te bepalen	gebruikt alleen Q_0 en Q_4 extreem gevoelig voor uitschieters

61

a Bij welke van de groepen hiernaast is de standaardafwijking van de lengte het grootst? Licht toe.

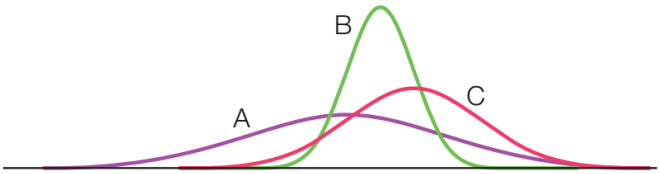
b Roel wil met een spreidingsmaat demonstreren hoe stabiel zijn cijfers zijn. Er is echter één uitzonderlijk slecht cijfer.
Welke spreidingsmaat raad je aan? Licht toe.



© Noordhoff Uitgevers bv

62

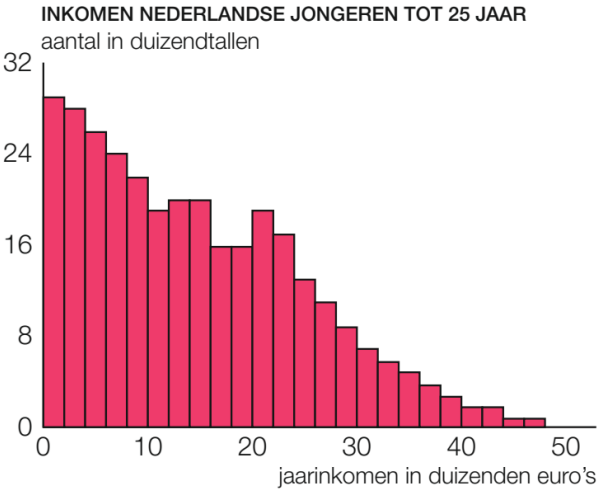
In de figuur staan drie symmetrische verdelingen.



De bijbehorende standaardafwijkingen zijn gelijk aan 0,5; 1 en 1,5.
Geef bij elke verdeling de standaardafwijking.

A63

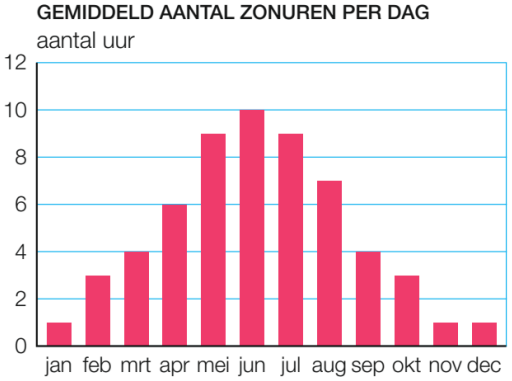
In het histogram zie je de inkomensverdeling van Nederlandse jongeren tot 25 jaar.



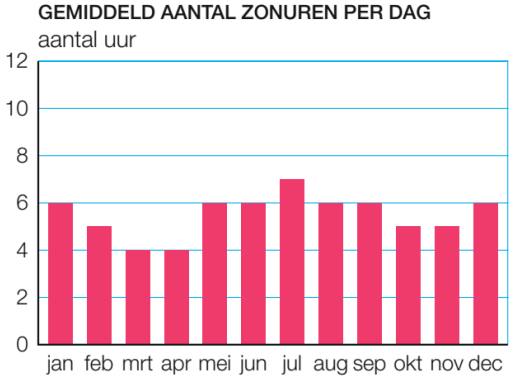
Welke centrum- en spreidingsmaat kun je gebruiken om aan te geven dat een grote groep jongeren een laag inkomen heeft, maar dat er onderling wel grote verschillen zijn? Licht toe.

A64

In onderstaande figuren kun je voor iedere maand het gemiddeld aantal zonuren per dag in de steden Helsinki en Quito aflezen. De standaardafwijking bij Helsinki is groter dan bij Quito.
Welke van de twee figuren hoort bij Quito? Licht toe.



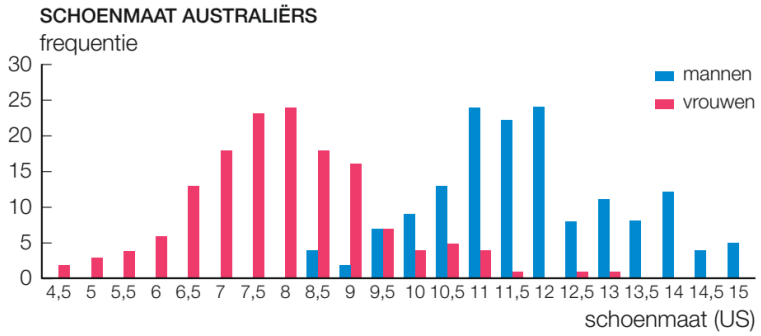
A



B

© Noordhoff Uitgevers bv

A65 Bij een onderzoek naar voetafwijkingen is de schoenmaat van mannen en vrouwen uit Australië onderzocht. Zie de frequentieverdelingen in de figuur.



In de figuur heb je te maken met een kwantitatieve en een kwalitatieve variabele.

a Benoem de kwantitatieve variabele en licht toe of deze discreet of continu is.

b Benoem de kwalitatieve variabele en licht toe wat het meetniveau is.

c Op welke populatie is dit onderzoek gericht?

d Vul de tabel in. Gebruik de getallen 1,5 1,5 2,4 8,0 9,9 11,8.

	gemiddelde	standaardafwijking
mannen	...	...
vrouwen	...	...
totaal	...	...

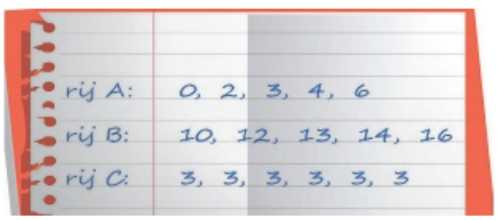
Informatief **Standaardafwijking**

De standaardafwijking met de hand berekenen is een hele klus en daarom wordt dat bijna altijd elektronisch gedaan. Het kan natuurlijk wel inzicht geven als je een keer ziet hoe je de standaardafwijking met de hand berekent. Hieronder zie je het stappenplan voor het berekenen van de standaardafwijking bij een aantal waarnemingsgetallen.

1 Bereken het gemiddelde van de waarnemingsgetallen.
2 Bereken voor elk waarnemingsgetal het verschil met het gemiddelde.
3 Tel de kwadraten van al deze verschillen bij elkaar op.
4 Deel de uitkomst door het aantal waarnemingsgetallen.
5 Neem de wortel van de uitkomst van stap 4. Dit getal is de standaardafwijking van de waarnemingsgetallen.

E66 Lees het bovenstaande informatief.

In de figuur zie je de rijen A, B en C.



a Bereken de standaardafwijking van rij A.

b Hoe kun je, zonder de standaardafwijking te berekenen, zien dat de standaardafwijkingen van rij A en rij B gelijk zijn?

c Geef de standaardafwijking van rij C. Licht toe.

© Noordhoff Uitgevers bv

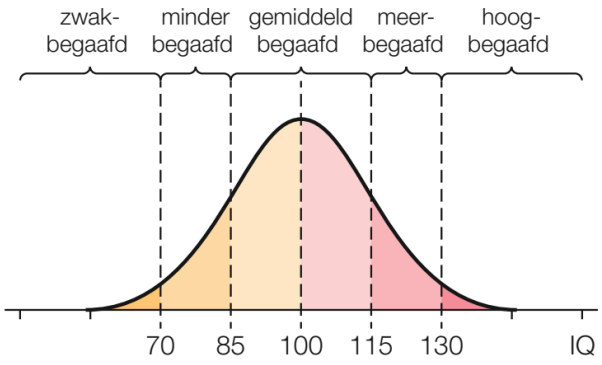
O67

Het intelligentiequotiënt (IQ) is een maat voor intelligentie. Het IQ heeft een symmetrische verdeling zoals in de figuur hiernaast. Van de 18 miljoen Nederlanders zijn er 12,3 miljoen gemiddeld begaafd en ongeveer 0,45 miljoen zijn hoogbegaafd.

a Welk percentage Nederlanders is gemiddeld begaafd?

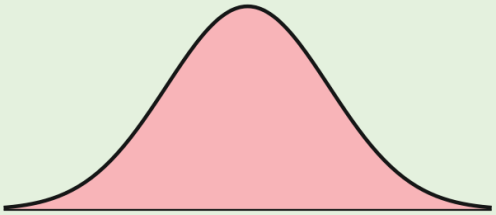
b Welk percentage Nederlanders is minder begaafd?

c Hoeveel procent van de Nederlands heeft een IQ tussen 70 en 130?

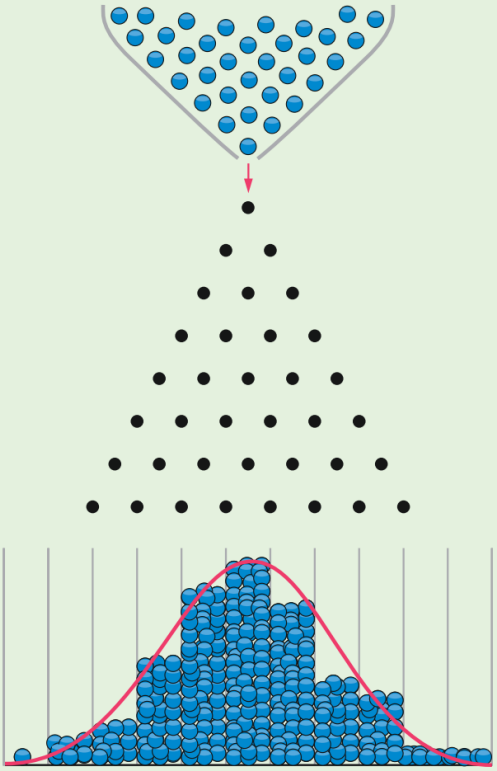


Theorie D De normale verdeling

In de figuur hiernaast is de verdelingskromme bij een bijzondere symmetrische verdeling getekend. Deze klokvormige kromme heet de **normaalkromme** en hoort bij de **normale verdeling.**



In veel situaties waarbij afwijkingen van het gemiddelde willekeurig optreden, is het resultaat een normale verdeling. Dit verrassende resultaat kun je demonstreren met het *bord van Galton*, waarbij een groot aantal balletjes op onderliggende pinnetjes valt en steeds willekeurig naar links of rechts stuitert. Elk balletje neemt een onvoorspelbare route, maar het resultaat van alle balletjes samen is toch steeds goed te voorspellen met de normale verdeling.



Normale verdelingen komen veel voor in het dagelijks leven. De normale verdeling past bijvoorbeeld goed bij de verdeling van

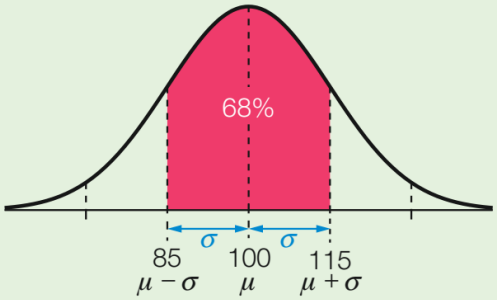
- de lengte van Nederlandse 20-jarige mannen
- het aantal branduren van een bepaald type lamp
- de gewichten van kilopakken koffie.

© Noordhoff Uitgevers bv

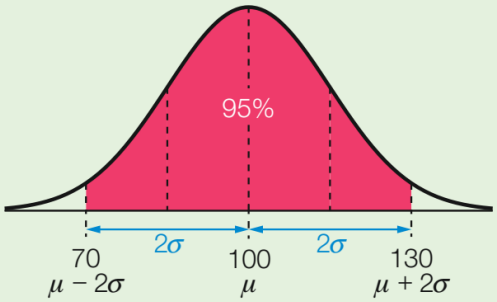
Bij de normale verdeling wordt het gemiddelde aangegeven met de Griekse letter μ. Spreek μ uit als mu.
Voor de standaardafwijking gebruiken we de Griekse letter σ. Spreek σ uit als sigma.

gemiddelde μ
standaardafwijking σ

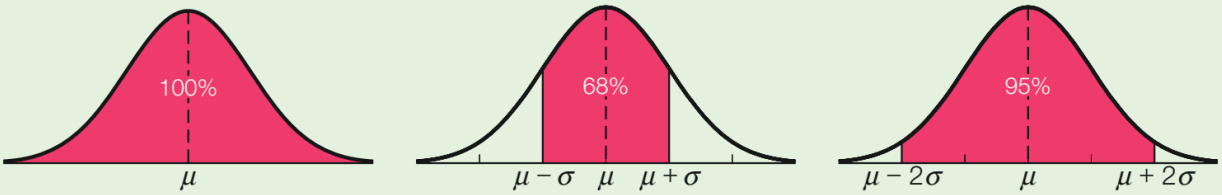
De scores van de IQ test in opgave 67 zijn normaal verdeeld met $\mu = 100$ en $\sigma = 15$.
Je hebt in deze opgave berekend dat ongeveer 68% van de scores tussen 85 en 115, dus tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ ligt.



Ook heb je gezien dat 95% van de scores tussen 70 en 130, dus tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ ligt.

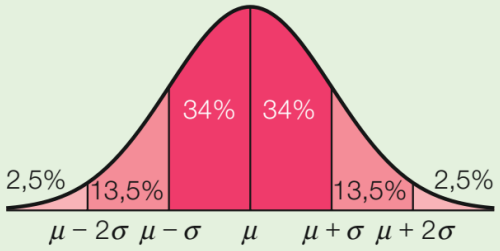


De totale oppervlakte onder de kromme is 100%.
Bij de normale verdeling ligt ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen minder dan σ van μ af. En ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt minder dan 2σ van μ af.



Uit de symmetrie van de normaalkromme volgen de percentages in de verschillende gebieden in de figuur hieronder. Onthoud deze percentages.

Vuistregels bij de normale verdeling
- **ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$**
- **ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$**



Bij berekeningen met de vuistregels laten we het woord ‘ongeveer’ weg.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Van 600 baby's is gegeven dat het geboortegewicht normaal verdeeld is. Het gemiddelde $\mu = 3500$ gram en de standaardafwijking $\sigma = 450$ gram. Gebruik in dit voorbeeld de vuistregels bij de normale verdeling.

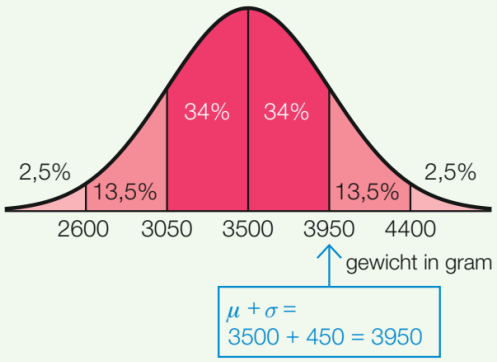
a Van hoeveel procent van de baby's is het geboortegewicht meer dan 4400 gram?

b Hoeveel baby's hebben een geboortegewicht tussen 2600 gram en 3950 gram?

c Van hoeveel baby's wijkt het geboortegewicht meer dan 900 gram van het gemiddelde af?

Aanpak

Schets een normaalkromme en zet getallen bij de horizontale as.



Uitwerking

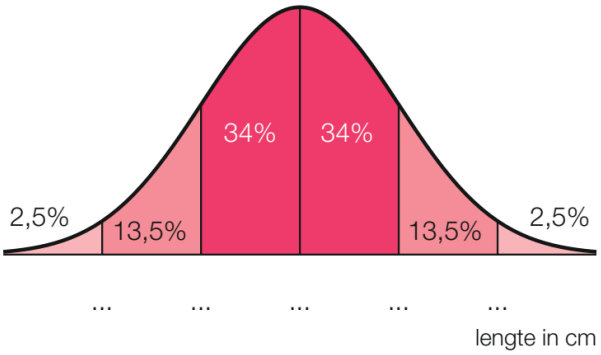
a Zie de schets. Dus 2,5% van de baby's.

b 13,5% + 34% + 34% = 81,5%, dus $0{,}815 \cdot 600 = 489$ baby's.

c 900 gram is 2σ, dus van 2,5% + 2,5% = 5% en dat zijn $0{,}05 \cdot 600 = 30$ baby's.

68 ⏍⊙∗

Van een groep volwassen vrouwen is de lengte normaal verdeeld met $\mu = 170$ cm en $\sigma = 5$ cm.



a Zet in de figuur hierboven onder de horizontale as de juiste getallen.

Hoeveel procent van de vrouwen heeft volgens de vuistregels bij de normale verdeling een lengte van

b tussen 165 en 180 cm

c minder dan 160 cm

d meer dan 175 cm

e tussen 160 en 170 cm?

© Noordhoff Uitgevers bv

A69

Van 5000 appels is het gewicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 180 gram en een standaardafwijking van 11 gram. Gebruik in deze opgave de vuistregels bij de normale verdeling.

a Hoeveel appels wegen tussen 158 en 191 gram?

b Hoeveel appels zijn lichter dan 191 gram?

c Wat weet je van de gewichten van de zwaarste 125 appels?

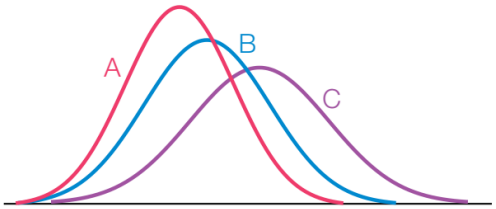
d Van hoeveel appels wijkt het gewicht meer dan 11 gram van het gemiddelde af?

Appels met een gewicht van minder dan 158 gram worden verkocht als kinderappels.

e Hoeveel appels uit deze partij kunnen worden verkocht als kinderappel?

A70

Bij drie grote groepen mannen wordt van elke man de reactietijd gemeten.
De eerste groep bestaat uit 18-jarigen, de tweede uit 30-jarigen en de derde uit 60-jarigen.
Jongere mannen zullen over het algemeen sneller reageren dan oudere mannen.



reactietijd in milliseconden

a Welke kromme hoort bij de 18-jarigen?
En welke bij de 60-jarigen? Licht je antwoord toe.

b De groep 18-jarigen heeft een gemiddelde reactietijd van 420 ms. Zowel bij de 18-jarigen als de 30-jarigen heeft 2,5% een reactietijd kleiner dan 280 ms, maar de standaardafwijking van de 30-jarigen is 10% groter dan die van de 18-jarigen.
Bereken de gemiddelde reactietijd van 30-jarige mannen.

Informatief **De normale verdeling**

Veel beroemde geleerden hebben zich beziggehouden met de normale verdeling. Omstreeks 1730 gebruikte de Fransman Abraham de Moivre (1667-1754) als eerste de normale verdeling. Hij ontdekte dat vele kleine toevalligheden in de natuur merkwaardig genoeg tot mooie regelmatige verdelingen kunnen leiden. Ook de veelzijdige geleerde Gauss (1777-1855) werd gefascineerd door de normaalkromme en hij slaagde erin de formule op te stellen bij de kromme. Vandaar dat ook de naam Gauss-kromme gebruikt wordt.
De Belg Adolphe Quetelet (1796-1874) ontdekte dat normaalkrommen goed gebruikt kunnen worden om menselijke kenmerken zoals lichaamslengte en voetlengte te beschrijven.

Carl Friedrich Gauss

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

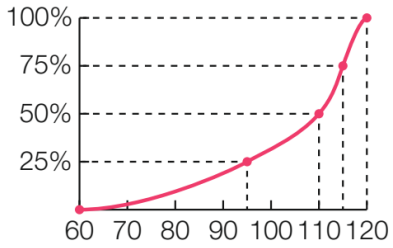
- ☐ Ik kan werken met de volgende standaardverdelingen: symmetrisch, linksscheef, rechtsscheef, meertoppig en uniform.
  ▶ OPGAVE C9ab THEORIE A
- ☐ Ik kan een (cumulatieve) verdelingskromme schetsen.
  ▶ OPGAVE C9c THEORIE B
- ☐ Ik kan werken met de standaardafwijking.
  ▶ OPGAVE C10d THEORIE C
- ☐ Ik kan de vuistregels bij de normale verdeling toepassen.
  ▶ OPGAVE C10abc THEORIE D

C9 Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme.

a Met welke standaardverdeling heb je hier te maken?

b Is het gemiddelde groter of kleiner dan de mediaan? Licht toe.

c Schets de bijbehorende verdelingskromme. Neem de horizontale as van 60 tot 120 met stapgrootte 10.



C10 Van een partij van 1600 tennisballen is het gewicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 58,2 gram en een standaardafwijking van 0,6 gram.

a Hoeveel procent van de tennisballen is zwaarder dan 57 gram?

b Wat weet je van de 256 lichtste tennisballen?

Bij officiële wedstrijden moet een tennisbal tussen 56 en 59,4 gram wegen.

c Hoeveel tennisballen uit deze partij zijn te zwaar?

d Als de standaardafwijking hoger dan 0,6 zou zijn, zijn er dan meer of minder tennisballen die te zwaar zijn? Licht toe.

Antwoorden

C9 **a** links-scheve verdeling

b kleiner *

c *

C10 **a** 97,5%

b die zijn lichter dan 57,6 gram

c 40 tennisballen

d meer *

© Noordhoff Uitgevers bv

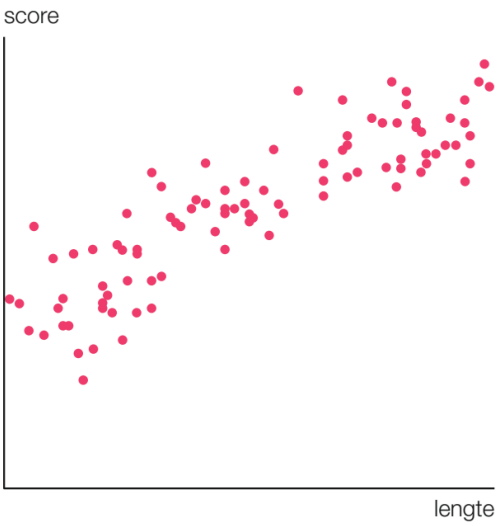
2.6 Conclusies trekken

Kennis en vaardigheden

- Je kunt een gevonden statistische samenhang kritisch beoordelen.
- Je kunt een betrouwbaarheidsinterval bepalen voor de populatieproportie.
- Je kunt een betrouwbaarheidsinterval bepalen voor het populatiegemiddelde.

O71

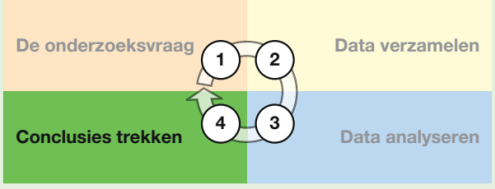
Op een middelbare school is een groot onderzoek gedaan onder de leerlingen van de klassen 1, 3 en 5 van de vwo-afdeling. Van elke leerling uit deze klassen zijn gegevens over onder andere de lengte, het gewicht, de eetgewoonte en de mate van discipline in een database gezet. Nadat deze gegevens zijn verzameld, heeft elke leerling dezelfde algemene kennistoets gemaakt.
Het bestuur van de school wil met deze gegevens onder andere onderzoeken waardoor leerlingen goed presteren op de kennistoets. Daartoe zijn in de database allerlei verbanden onderzocht. In de figuur is de score op de toets uitgezet tegen de lengte. Elk punt in het diagram stelt een leerling voor.



a Licht toe hoe je in de figuur kunt zien dat er een samenhang is tussen de lengte en de score.
b Wat denk je, is een grotere lengte een oorzaak van een hogere score op de toets? Licht toe.

Theorie A Samenhang en causaliteit

In deze paragraaf richten we ons op fase 4 van de statistische cyclus: conclusies trekken.



Als er na statistisch onderzoek een samenhang tussen twee variabelen wordt gevonden, kun je daar niet meteen conclusies uit trekken.

© Noordhoff Uitgevers bv

Zo kan er bijvoorbeeld sprake zijn van toeval. Dit kan gebeuren als de steekproef te klein is of als er heel veel verbanden tegelijkertijd worden onderzocht.

Daarnaast wijst een samenhang niet altijd op een oorzaak. In opgave 71 kon je bijvoorbeeld met gezond verstand bedenken dat de lengte van een scholier geen oorzaak is van hoge scores op een algemene kennistoets. Als blijkt dat het aantal jaren onderwijs wél de oorzaak is van hoge scores, dan is er sprake van een **oorzakelijk verband** tussen het aantal jaren onderwijs en de scores. In plaats van oorzakelijk verband spreken we ook wel van een **causaal verband** of causaliteit.

Bij het onderzoek uit opgave 71 is ook onderzocht of er een verband bestaat tussen gezond eten en scores op de toets. Ook hieruit komt een samenhang naar voren. Om te weten te komen of deze samenhang causaal is, moet worden onderzocht of aan de volgende twee voorwaarden is voldaan.

Voorwaarden voor een causaal verband bij een samenhang
1. De oorzaak moet voorafgaan aan het gevolg.
2. Er mogen geen andere variabelen zijn die de samenhang verklaren.

In het geval van de samenhang tussen gezond eten en scores is aan de eerste voorwaarde voldaan: de toets is gemaakt nadat is geconstateerd hoe gezond de leerling eet.
Om te onderzoeken of aan de tweede voorwaarde is voldaan, moet je allereerst variabelen bedenken die het verband tussen gezond eten en scores zouden kunnen verklaren. De discipline van leerlingen is zo'n mogelijke variabele. Leerlingen met meer discipline eten mogelijk gezonder en scoren wellicht hoger op de kennistoets (doordat ze beter hun best doen op school). Als uit nader onderzoek blijkt dat de variabele discipline de samenhang tussen gezond eten en scores inderdaad verklaart, dan heet dat de **gemeenschappelijke factor**. Er is dan geen sprake van een causaal verband tussen gezond eten en scores, omdat niet aan de tweede voorwaarde is voldaan.

72 ⊙ ✱

In de volgende gevallen is er wel sprake van een samenhang, maar niet van een causaal verband.
Geef steeds een gemeenschappelijke factor die de samenhang verklaart.

a Hoe meer brandweerlieden een brand bestrijden, hoe meer schade de brand aanricht.

b Hoe meer ijsjes er in een week worden verkocht, hoe meer verdrinkingsgevallen er in die week zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

73

Een gymleraar wil aantonen dat gewichtheffen een oorzaak is van grotere bovenarmen. Hij laat daarom de jongens tijdens de gymles gewichtheffen. De meisjes volgen het gewone gymlesprogramma. Na drie maanden stelt hij vast dat de jongens een grotere omvang van de bovenarmen hebben dan de meisjes.

a Kun je op basis van de gekozen onderzoeksopzet concluderen dat gewichtheffen een oorzaak is van grotere bovenarmen? Licht toe.

Naar aanleiding van kritiek op zijn eerste onderzoeksopzet vraagt de gymleraar welke leerlingen uit zijn klassen willen gewichtheffen. Deze leerlingen gaan drie maanden gewichtheffen, de rest van de leerlingen volgt de gewone gymles. De leerlingen die meededen met gewichtheffen blijken na afloop grotere bovenarmen te hebben dan de rest van de leerlingen.

b Kun je nu wel concluderen dat gewichtheffen een oorzaak is van grotere bovenarmen? Licht toe.

A74

Wiskundedocent mevrouw Vos volgt nauwgezet het boek in haar vwo 5-klas bij wiskunde A. Naast het gewone huiswerk geeft ze elke les een aantal opgaven op uit een vorig hoofdstuk.
Ze constateert dat de leerlingen die vaker deze opgaven maken, hogere cijfers halen op toetsen. Ze vraagt zich af of er een oorzakelijk verband is tussen het maken van deze opgaven en de cijfers op toetsen.

a Licht toe waarom inzet een gemeenschappelijke factor kan zijn bij de samenhang tussen het maken van de genoemde opgaven en de cijfers op toetsen.

Wetenschappers in de VS hebben in 2019 onderzocht of het voortdurend afwisselen van onderwerp bij het maken van wiskundeopgaven betere resultaten oplevert bij toetsen.
Hiervoor werden 800 scholieren aselect in twee groepen ingedeeld. Bij groep 1 gingen de opgaven per les over hetzelfde onderwerp. Bij groep 2 werden naast de opgaven over het behandelde onderwerp ook opgaven aangeboden over andere onderwerpen. Na vier maanden werd in beide groepen dezelfde onverwachte toets afgenomen. Het gemiddelde in groep 1 was een 4,4 en in groep 2 een 6,5.

b Leg uit waarom je verwacht dat leerlingen met een grote inzet ongeveer gelijk verdeeld zijn over de twee groepen. Verwacht je dat inzet het verschil tussen de groepen verklaart? Licht toe.

c Licht toe dat het door de opzet van het onderzoek onwaarschijnlijk is dat een andere gemeenschappelijke factor het verschil tussen de cijfers van de groepen verklaart.

d Is aan de eerste voorwaarde voor een causaal verband bij een samenhang voldaan? Licht toe.

e Leg uit of je op basis van de beschreven onderzoeksopzet kunt zeggen dat het maken van opgaven over afwisselende onderwerpen een oorzaak is van het halen van hoge cijfers voor wiskunde.

© Noordhoff Uitgevers bv

O75

In Nederland is 14% van het aantal personenauto's blauw. Het deel van het aantal personenauto's met een blauwe kleur is 0,14. Dit heet de populatieproportie.
Janna telt op een parkeerplaats, waar 225 auto's geparkeerd staan, het aantal blauwe auto's. Ze telt 36 blauwe auto's.
Het deel van het aantal personenauto's met een blauwe kleur in de steekproef heet de steekproefproportie.

a Geef deze steekproefproportie.

b Leg uit dat de bij vraag a berekende steekproefproportie niet in tegenspraak hoeft te zijn met de populatieproportie van 0,14.

Theorie B Betrouwbaarheidsinterval voor een proportie

In opgave 75 had je te maken met de **populatieproportie** en de **steekproefproportie**.

Een proportie is het deel van het totaal dat een bepaald kenmerk heeft. Proportie en percentage worden vaak door elkaar gebruikt. Zo is een proportie van 0,12 hetzelfde als een percentage van 12%.

Een proportie is een getal tussen 0 en 1.

De populatieproportie p van een kenmerk in de populatie is

$$p = \frac{\text{aantal elementen met het kenmerk in de populatie}}{\text{totaal aantal elementen in de populatie}}.$$

De steekproefproportie $\hat{p}$ van een kenmerk in de steekproef is

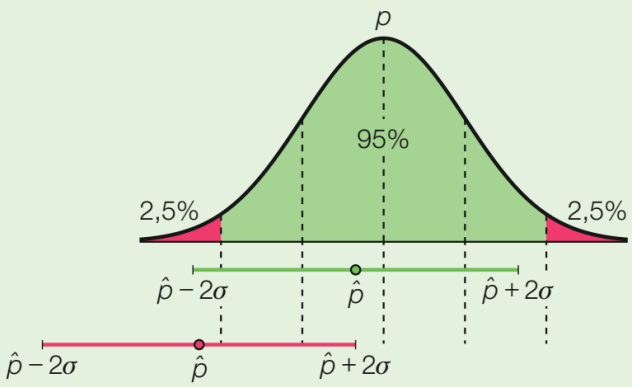
$$\hat{p} = \frac{\text{aantal elementen met het kenmerk in de steekproef}}{\text{totaal aantal elementen in de steekproef}}.$$

Vaak is de populatieproportie onbekend en geef je hiervan een schatting met een steekproefproportie. Niet elke steekproef zal dezelfde steekproefproportie opleveren. Bovendien zijn niet alle mogelijke steekproefproporties even waarschijnlijk.
De verdeling die aangeeft hoe waarschijnlijk de verschillende steekproefproporties zijn, heet de **verdeling van de steekproefproportie**. Bij een voldoende grote steekproefomvang komt de verdeling van de steekproefproportie bij benadering overeen met de normale verdeling.
Voor de verdeling van de steekproefproportie gebruik je het volgende.

Bij populatieproportie p en steekproefomvang n is de steekproefproportie normaal verdeeld met gemiddelde p en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

In de figuur hiernaast is de verdeling van de steekproefproportie te zien.
Er zijn twee mogelijke steekproefproporties gegeven met daarbij het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ getekend als een lijnstuk.
Bij het groene lijnstuk valt de populatieproportie p binnen dit interval.
Bij het rode lijnstuk valt de populatieproportie p buiten dit interval.



In 95% van de steekproeven zal de populatieproportie p binnen het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ vallen. Daarom wordt dit het **95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie** genoemd.
Als je dit interval wilt berekenen, dan gebruik je $\hat{p}$ in plaats van p in de berekening van σ, omdat p onbekend is.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$. Hierin is $\hat{p}$ de steekproefproportie en

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ met n de steekproefomvang.

Met het 95%-betrouwbaarheidsinterval wordt aangegeven dat je met 95% betrouwbaarheid weet dat de populatieproportie p in je interval ligt.

Voorbeeld

Twee dagen voor de verkiezingen voor de Tweede Kamer wordt aan 1200 stemgerechtigde Nederlanders gevraagd of ze van plan zijn te gaan stemmen.
Van deze 1200 zeggen 756 inderdaad te gaan stemmen.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie stemgerechtigde Nederlanders die van plan zijn te gaan stemmen.

Uitwerking

$\hat{p} = \dfrac{756}{1200} = 0{,}63$ en $\sigma = \sqrt{\dfrac{0{,}63 \cdot 0{,}37}{1200}} = 0{,}0139...$

$\hat{p} - 2\sigma = 0{,}63 - 2 \cdot 0{,}0139... \approx 0{,}602$ en

$\hat{p} + 2\sigma = 0{,}63 + 2 \cdot 0{,}0139... \approx 0{,}658$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,602; 0,658].

Rond proporties in een betrouwbaarheidsinterval af op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

© Noordhoff Uitgevers bv

R76 Zie het voorbeeld.
Een steekproefproportie van 0,63 komt overeen met 63%.
Wat is het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage stemgerechtigde Nederlanders die van plan zijn te gaan stemmen?

77 Zie het voorbeeld.
Bij een andere peiling worden 600 stemgerechtigde Nederlanders ondervraagd. Hiervan zijn er 378 van plan te gaan stemmen.

a Toon aan dat de steekproefproportie ook nu gelijk is aan 0,63 en bereken de standaardafwijking. Rond af op drie decimalen.

b Bereken het hierbij behorende 95%-betrouwbaarheidsinterval.

c Vergelijk het 95%-betrouwbaarheidsinterval van vraag b met dat van het voorbeeld. Welke conclusie trek je?

78 Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie bij

a $\hat{p} = 0{,}5$ en $n = 100$

b $\hat{p} = 0{,}46$ en $n = 250$

c $\hat{p} = \frac{4}{7}$ en $n = 98$

d een steekproef van 700 personen waarbij 36% het onderzochte kenmerk had.

79 Een bioloog onderzoekt de verhouding tussen mannetjes en vrouwtjes van de bruine kikker in bergmeren van de Pyreneeën. Van de 150 onderzochte kikkers blijken er maar liefst 117 een mannetje te zijn.

a Bereken de steekproefproportie van de mannetjeskikkers.

b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie mannetjeskikkers.

A80 Bij een onderzoek naar het roken van sigaretten worden 1000 volwassenen ondervraagd. Hiervan blijken er 143 te roken.

a Is de variabele ‘rookt sigaretten’ kwalitatief of kwantitatief? Licht toe.

b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie volwassen Nederlanders die roken.

Bij het onderzoek waren 480 mannen en 520 vrouwen betrokken. Van de mannen rookten er 78.

c Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage volwassen Nederlandse mannen die roken. Doe dat ook voor de vrouwen.

© Noordhoff Uitgevers bv

A81 ∗

Bij de presidentsverkiezingen in een land moet gekozen worden tussen de kandidaten A en B. In een peiling die voorafgaat aan de verkiezingen zeggen 935 mensen te gaan stemmen. Hiervan zeggen 487 op kandidaat A te gaan stemmen, de anderen kiezen voor kandidaat B.
Onderzoek of je met een betrouwbaarheid van 95% kunt zeggen dat kandidaat A de verkiezingen zal gaan winnen.

O82 ⏍⊙∗

Het gemiddelde geboortegewicht van Nederlandse jongens is normaal verdeeld met een gemiddelde van 3750 gram. De bijbehorende standaardafwijking is 480 gram.

a In 2023 zijn in Nederland 84 272 jongens geboren.
Hoeveel van deze jongens waren naar verwachting zwaarder dan 4710 gram? Rond af op tientallen.

b In 2023 zijn in Oost-Nederland 18 051 jongens geboren.
Wat weet je van de gewichten van ongeveer 12 275 van deze jongens waarvan het gewicht het minst afwijkt van het gemiddelde gewicht?

Theorie C Betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde

Wanneer je uit een populatie een steekproef neemt bij een variabele die normaal verdeeld is, dan hoort bij de mogelijke steekproefgemiddelden ook een normale verdeling. De verdeling van het steekproefgemiddelde heeft hetzelfde gemiddelde als de hele populatie, maar een kleinere standaardafwijking. Hoe groter de steekproef, hoe kleiner de standaardafwijking wordt.
Voor de verdeling van het steekproefgemiddelde geldt het volgende.

Bij een steekproef van n objecten uit een normale verdeling met gemiddelde μ en standaardafwijking σ is het steekproefgemiddelde normaal verdeeld met gemiddelde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Net zoals voor de populatieproportie kun je ook voor het populatiegemiddelde bij een normale verdeling een 95%-betrouwbaarheidsinterval bepalen. Omdat ook de standaardafwijking σ over het algemeen onbekend is, maak je gebruik van de steekproefstandaardafwijking S.
Je krijgt het 95%-betrouwbaarheidsinterval als volgt.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is $\left[\overline{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$. Hierin is $\overline{X}$ het steekproefgemiddelde, S de steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.

© Noordhoff Uitgevers bv

In het voorbeeld is niet vermeld dat het om een normale verdeling en een representatieve steekproef gaat. In de opgaven over betrouwbaarheidsintervallen mag je aannemen dat aan deze voorwaarden is voldaan.

Voorbeeld

Bij een onderzoek onder 715 Nederlandse jongeren naar hun smartphonegebruik blijkt de gemiddelde dagelijkse gebruiksduur 3,5 uur te zijn. De bijbehorende standaardafwijking is 1 uur en 10 minuten.

a Bereken in minuten nauwkeurig het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde gebruiksduur onder jongeren.

b Welke informatie geeft dit interval in deze context?

Uitwerking

a $\overline{X} = 3{,}5 \cdot 60 = 210$ minuten, $S = 70$ minuten en $n = 715$

$$\left[210 - 2 \cdot \frac{70}{\sqrt{715}}, 210 + 2 \cdot \frac{70}{\sqrt{715}}\right] \approx [205, 215]$$

b De gemiddelde dagelijkse gebruiksduur van de smartphone van Nederlandse jongeren ligt met 95% zekerheid tussen 205 en 215 minuten.

83

Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde bij

a $\overline{X} = 100$, $S = 24$ en $n = 144$

b $\overline{X} = 80{,}5$; $S = 15{,}5$ en $n = 100$

c $\overline{X} = 12{,}5$ en $\frac{S}{\sqrt{n}} = 0{,}65$.

84

Bij een steekproef van 65 basisschoolleerlingen met zwemdiploma A is de gemiddelde leeftijd waarop zij het diploma hebben gehaald 6 jaar en 9 maanden. De standaardafwijking is 10 maanden.
Bereken in tienden van maanden nauwkeurig het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde leeftijd waarop basisschoolleerlingen het zwemdiploma A halen. Welke informatie geeft dat in deze context?

© Noordhoff Uitgevers bv

A85 ⊙ ✱

Mevrouw Hendriks geeft een examentraining om haar leerlingen goed voor te bereiden op het eindexamen. Ze geeft ook een afsluitende toets met opgaven waarvan zij weet dat er landelijk gemiddeld 50 punten voor worden behaald. Ze gaat er vanuit dat haar examenklassen vóór de examentraining representatief zijn voor de populatie examenleerlingen in Nederland.
Na de examentraining maakt haar klas 6VA1 de afsluitende toets. De resultaten staan in de tabel hiernaast.

RESULTATEN 6VA1

n	25
$\overline{X}$	52
S	6

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze tabel.

Mevrouw Hendriks hoopt met de resultaten te kunnen zeggen dat leerlingen na haar examentraining met 95% zekerheid boven het landelijk gemiddelde scoren.

b Licht toe dat ze dit niet kan zeggen op basis van het 95%-betrouwbaarheidsinterval van vraag a.

A86 ✱

Behalve 95%-betrouwbaarheidsintervallen zijn er ook 90%- en 99%-betrouwbaarheidsintervallen. Deze hebben dezelfde vorm als een 95%-betrouwbaarheidsinterval, dus $\left[\overline{X} - a \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + a \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$. Bij een 90%-betrouwbaarheidsinterval is a kleiner dan 2 en bij een 99%-betrouwbaarheidsinterval is a groter dan 2.

a Verklaar dit.

In opgave 85a vond je het 95%-betrouwbaarheidsinterval [49,6; 54,4]. Bij deze vraag hoort het 99%-betrouwbaarheidsinterval [48,9; 55,1]. Hieruit volgt dat voor een 99%-betrouwbaarheidsinterval geldt dat $a \approx 2{,}6$.

b Laat dit met een berekening zien.

c Bij een 90%-betrouwbaarheidsinterval geldt $a \approx 1{,}6$.
Hoeveel keer zo breed is een 99%-betrouwbaarheidsinterval als een 90%-betrouwbaarheidsinterval? Rond af op één decimaal.

d Bedenk een situatie waarbij de voorkeur uitgaat naar een 99%-betrouwbaarheidsinterval.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan een gevonden statistische samenhang kritisch beoordelen.
- ☐ Ik kan een betrouwbaarheidsinterval bepalen voor de populatieproportie.
- ☐ Ik kan een betrouwbaarheidsinterval bepalen voor het populatiegemiddelde.

- ▶ OPGAVE C12 THEORIE A
- ▶ OPGAVE C13 THEORIE B
- ▶ OPGAVE C14 THEORIE C

C12 In de volgende gevallen is er sprake van een samenhang, maar is de genoemde conclusie niet juist. Leg uit aan welke voorwaarde voor een causaal verband niet wordt voldaan.

a In de nieuwbouwwijk van een grote stad is het gezonder leven dan in het oude centrum, want uit onderzoek blijkt dat het sterftecijfer er aanzienlijk lager ligt.

b Doordat de windmolens op zee niet draaien, is het aan de kust al een aantal dagen nagenoeg windstil.

C13 Er wordt een onderzoek gedaan naar vrijwilligerswerk door volwassen Nederlanders. Er nemen 795 mensen deel aan het onderzoek. Van hen doen er 326 vrijwilligerswerk.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie volwassen Nederlanders die vrijwilligerswerk doen.

C14 Bij een onderzoek naar de gezondheid van chihuahua's wordt van 210 chihuahua's het gewicht bepaald. Hierbij wordt een gemiddeld gewicht van 2280 gram gevonden met een standaardafwijking van 340 gram.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde gewicht van chihuahua's. Rond af op gehele grammen.

Antwoorden

C12 *

C13 [0,375; 0,445]

C14 [2233, 2327]

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedentest

2.1 De onderzoeksvraag

1 Welke vier fasen onderscheiden we in de statistische cyclus?

2 Om de onderzoeksvraag ‘Presteren middelbare scholieren slechter bij de coopertest na het eten van ongezonde voeding?’ te beantwoorden, worden aselect 200 leerlingen uit voorexamenklassen onderzocht.

a Omschrijf de populatie.

b Waarom is deze steekproef niet aselect?

2.2 Data verzamelen

3 Hiernaast zie je van een patiënt enkele van de verzamelde gegevens bij een slaaponderzoek. Geef van elke kwalitatieve variabele het meetniveau en bepaal van elke kwantitatieve variabele of deze discreet of continu is.

2.3 Data analyseren

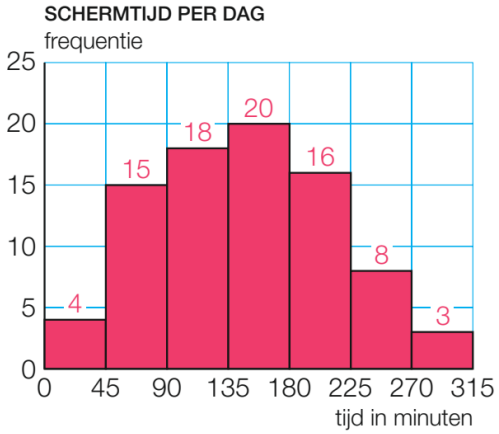
4 In het histogram zie je informatie over de schermtijd van Renée per dag. De schermtijd is het aantal minuten dat je op je telefoon kijkt. De eerste klasse is [0, 45⟩.

a Bereken van hoeveel dagen de schermtijden per dag verwerkt zijn in het histogram.

b Onderzoek of de mediaan in de modale klasse ligt.

c Bereken op hoeveel procent van de dagen de schermtijd van Renée minder dan 3 uur was.

d Kan de gemiddelde schermtijd meer dan 3 uur per dag geweest zijn? Licht toe.

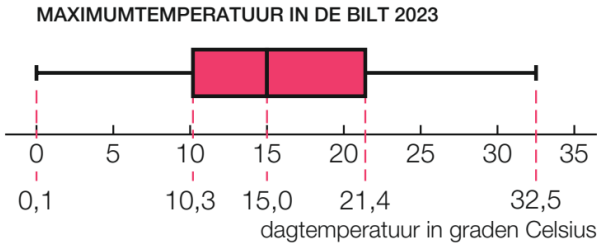


2.4 Kwartielen en spreiding

5 In het jaar 2023 is elke dag de maximumtemperatuur in De Bilt genoteerd. Zie de boxplot.

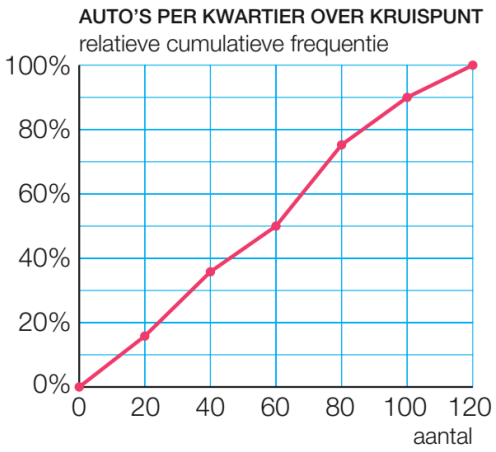
a Hoeveel dagen is in 2023 de maximumtemperatuur meer dan 21,4 °C geweest?

b Volgens Lars is de spreidingsbreedte meer dan drie keer zo groot als de interkwartielafstand. Onderzoek of Lars gelijk heeft.



© Noordhoff Uitgevers bv

6 Op een kruispunt is gedurende 35 uren geteld hoeveel auto's per kwartier het kruispunt passeerden. Zie de figuur hiernaast, waarbij de eerste klasse [0, 20⟩ is.



a Hoeveel kwartieren passeerden er minder dan 40 auto's het kruispunt?

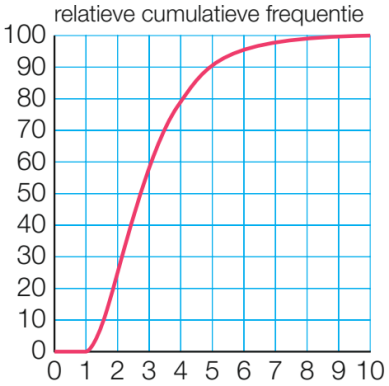
b Bereken de absolute frequentie van de klasse [80, 100⟩.

c Teken bij de figuur de boxplot.

d Jasper beweert dat tijdens de telling meer dan 9400 auto's het kruispunt passeerden. Kan dat kloppen? Licht toe met een berekening.

2.5 Statistische verdelingen

7 Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme.



a Met welke standaardverdeling heb je te maken?

b Zet op volgorde van klein naar groot: mediaan, modus en gemiddelde. Licht toe.

c Schets de bijbehorende verdelingskromme. Neem de horizontale as van 0 tot 10 met stapgrootte 1.

8 Van 4000 bananen is gegeven dat het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 138 gram en een standaardafwijking van 19 gram.
Hoeveel van deze bananen hebben volgens de vuistregels bij de normale verdeling een gewicht

a van meer dan 157 gram

b dat minder dan 38 gram afwijkt van het gemiddelde?

2.6 Conclusies trekken

9 Er is een onderzoek gedaan naar de financiële situatie van studenten. Mara ontdekt dat studenten die een bijbaan hebben relatief vaak last hebben van betalingsachterstanden. Haar conclusie is dat je dus beter niet kunt werken naast je studie.

a Geef commentaar op haar conclusie.

Van de 500 ondervraagde studenten hadden er 80 een betalingsachterstand.

b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie studenten met een betalingsachterstand.

De gemiddelde betalingsachterstand van deze 80 studenten is 350 euro. De standaardafwijking is 108 euro.

c Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde betalingsachterstand van studenten met een betalingsachterstand. Rond af op gehele euro's.

© Noordhoff Uitgevers bv

Gemengde opgaven

1 Gedurende de maanden juli en augustus is het aantal uren zonneschijn per dag in De Bilt bijgehouden. Zie de twee cumulatieve frequentiepolygonen in de figuur, waarbij de eerste klasse [0, 1⟩ is.

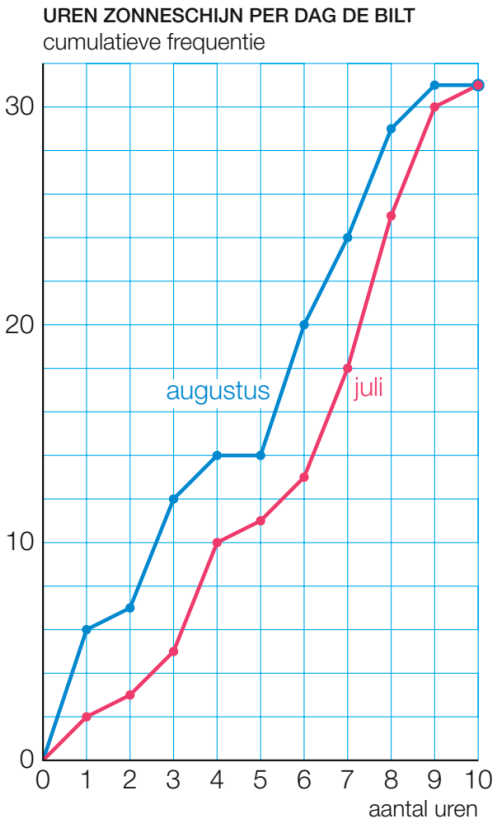
a Is de variabele 'aantal uren zonneschijn per dag' discreet of continu? Licht toe.

b Hoeveel dagen waren er in
- juli met minder dan 6 uur zon
- augustus met minstens 6 uur zon
- juli met minstens 4 uur, maar minder dan 8 uur zon?

c Welke maand was het zonnigst? Licht toe.

In juli scheen de zon gemiddeld 5,7 uur per dag.

d Geef een schatting van het totaal aantal uren zonneschijn in juli en augustus samen. Kies uit 315 uur, 355 uur en 395 uur. Licht toe.

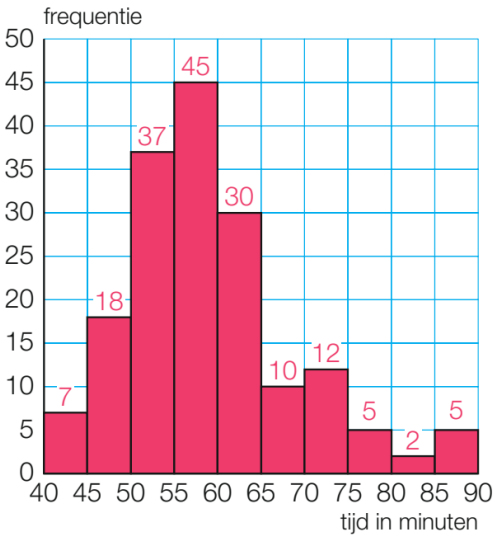


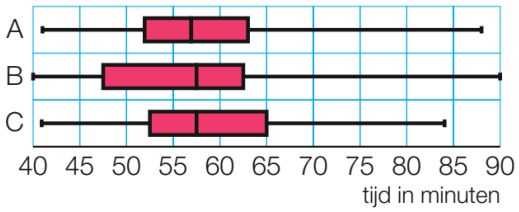
2 In 2023 deden er 171 mannen mee aan de 11 kilometer Bedriegertjesloop in Rozendaal. In de figuur hiernaast zijn de gelopen tijden van deze deelnemers in een histogram weergegeven. De eerste klasse is [40, 45⟩.

a Onderzoek of de mediaan in de modale klasse valt.

b Bereken of de gemiddelde looptijd 62 minuten geweest kan zijn.

c Hieronder zie je drie boxplots.
Welke past het best bij de gelopen tijden? Licht toe.





d Stel dat de zeven snelste en zeven langzaamste deelnemers niet mee hadden gedaan.
Zou de standaardafwijking hierdoor groter worden, kleiner worden of gelijk blijven? Licht toe.

© Noordhoff Uitgevers bv

3 Van twee benzinestations is bijgehouden hoeveel klanten er per uur hebben getankt. Het onderzoek duurde vijf dagen, telkens van 8:00 tot 20:00 uur. De resultaten zie je in de figuur. De eerste klasse is [20, 30⟩.

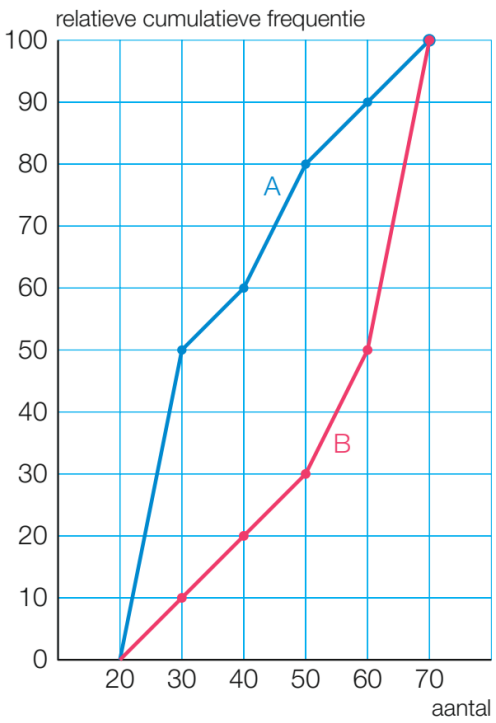
a Hoeveel uren tankten bij A minder dan 30 klanten?

b Hoeveel uren tankten bij B minstens 40 klanten?

c Een van de onderzoekers beweert dat op twee van de vijf dagen bij benzinestation B steeds minder dan 50 klanten per uur tankten. Waarom kan dit niet kloppen?

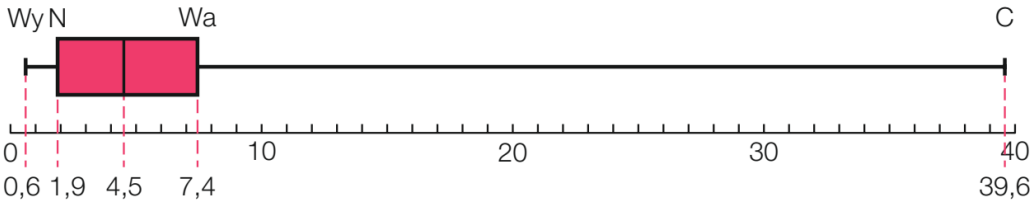
d Teken een boxplot bij de polygoon van B.

KLANTEN BENZINESTATION PER UUR



4 In 2019 hadden de 50 staten van de VS samen 326 miljoen inwoners.
De verdeling van het aantal inwoners per staat is verwerkt in de boxplot.

BEVOLKING VAN DE 50 STATEN VAN DE VS IN MILJOENEN



Wy = Wyoming; N = Nebraska; Wa = Washington en C = Californië

a Bereken de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.

b Hoeveel staten hebben minstens zoveel inwoners als Nebraska?

c Waarom staat er boven de mediaan geen Amerikaanse staat?

5 Een fabrikant levert tennisballen waarvan de stuithoogte normaal verdeeld is met een gemiddelde van 143 cm en een standaardafwijking van 2 cm. De stuithoogte van een tennisbal wordt bepaald door deze vanaf een hoogte van 2,54 m los te laten boven een betonnen ondergrond. Volgens de norm van de ITF (Internationale Tennisfederatie) zijn ballen met een stuithoogte tussen 135 en 147 cm geschikt om in wedstrijden te gebruiken. Ga in deze opgave uit van de vuistregels bij de normale verdeling.
Voor een toernooi wordt een partij van 1800 ballen aangeschaft.

a Hoeveel van deze ballen hebben naar verwachting een stuithoogte van meer dan 147 cm?

b Wat weet je van de 288 ballen met de kleinste stuithoogte?

In wedstrijden worden meestal gasgevulde tennisballen gebruikt. Deze verliezen echter snel hun stuithoogte. Van een partij van 160 gebruikte tennisballen is de stuithoogte normaal verdeeld met een gemiddelde van 139 cm en een standaardafwijking van 4 cm.

c Hoeveel van deze tennisballen zijn volgens de regels van de ITF niet meer geschikt om in een wedstrijd te gebruiken?

© Noordhoff Uitgevers bv

6 Twee taxichauffeurs, de ene uit Amsterdam en de andere uit Zutphen, hebben gedurende een aantal maanden de tijdsduur van elke taxirit bijgehouden. In de tabel zie je hoe de duur van de ritten van beide chauffeurs verdeeld is. Je ziet bijvoorbeeld dat van de chauffeur uit Zutphen 22 procent van de ritten tussen 20 en 25 minuten duurde.

In de tabel heb je te maken met een kwantitatieve en een kwalitatieve variabele.

ritduur in minuten	Amsterdam	Zutphen
[0, 5⟩	1%	2%
[5, 10⟩	5%	14%
[10, 15⟩	12%	19%
[15, 20⟩	18%	29%
[20, 25⟩	23%	22%
[25, 30⟩	30%	11%
vanaf 30	11%	3%

a Benoem de kwantitatieve variabele en licht toe of deze discreet of continu is.

b Benoem de kwalitatieve variabele en licht toe wat het meetniveau is.

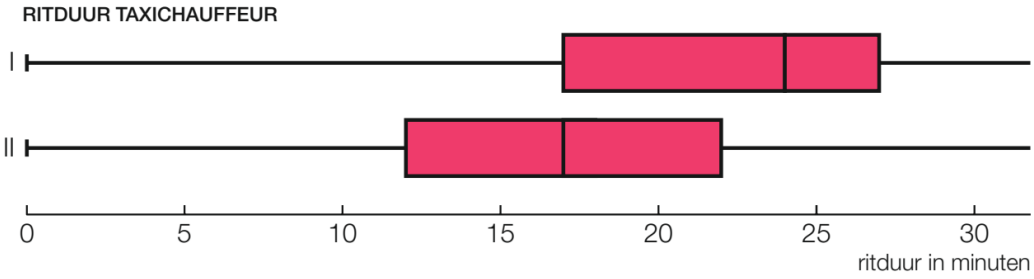
c Met welke standaardverdelingen heb je hier te maken? Kies uit: links-scheef, rechts-scheef, symmetrisch of meertoppig.

d Geef een mogelijke praktische verklaring voor het verschil in de verdelingen van de ritduur van beide chauffeurs.

e Volgens Margot kun je in de tabel zien dat de chauffeur uit Amsterdam veel meer minuten in de taxi heeft gereden dan de chauffeur uit Zutphen.
Ben je het met haar eens? Licht toe.

f Voor beide steden geldt dat je met behulp van de tabel geen goede schatting kunt maken van de gemiddelde ritduur.
Waarom is dat zo?

g In de boxplots hieronder zijn de gegevens van de chauffeurs verwerkt tot twee (gedeelten van) boxplots.
Welke hoort bij de chauffeur uit Amsterdam? Licht toe.

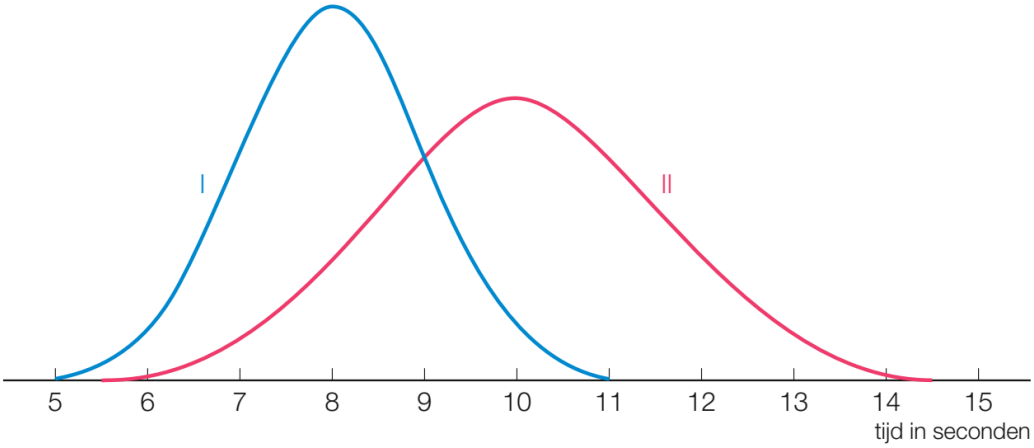


h Schets in één figuur van beide chauffeurs de relatieve cumulatieve verdelingskromme. Neem de horizontale as van 0 tot 30.

© Noordhoff Uitgevers bv

7 Sportstapelen (Engels: *sport stacking*, ook bekend als *cup stacking* of *speed stacking*) is een sport waarbij zo snel mogelijk plastic bekers gestapeld moeten worden in bepaalde formaties.

Beoefenaars van de sport plaatsen plastic bekers op elkaar in bepaalde formaties en in vooraf bepaalde volgordes. Je speelt dit spel tegen een andere speler of tegen de klok. Vaak worden piramiden van drie, zes of tien bekers gemaakt.
Deskundigen zeggen dat deze sport de tweehandigheid, concentratie en oog-handcoördinatie bevordert.
Twee even grote groepen sportstapelaars hebben tegen de klok gespeeld. De resultaten zijn weergegeven in de verdelingskrommen hieronder.
Neem aan dat de tijden van beide groepen normaal verdeeld zijn.
Van de meer ervaren groep is de standaardafwijking 1 seconde en van de minder ervaren groep is deze 1,5 seconden.



a Geef twee redenen waarom kromme I bij de meer ervaren sportstapelaars hoort.
b Welk percentage van de meer ervaren groep behaalde tijden onder de 6 seconden?
c Hoeveel procent van de minder ervaren groep was sneller dan de 2,5% langzaamste stapelaars uit de meer ervaren groep?
d Door de twee groepen samen te nemen ontstaat een verdelingskromme voor de tijden van de sportstapelaars als geheel. Welke soort verdeling past het beste bij die verdelingskromme? Kies uit links-scheef, rechts-scheef, symmetrisch of tweetoppig. Licht toe met een schets.

© Noordhoff Uitgevers bv

8 In Nijmegen wil het RSC (Radboud Sportcentrum) een onderzoek doen naar hoe sportief Nijmeegse studenten zijn. Hieronder staan enkele mogelijke onderzoeksvragen.

I Waarom zijn studenten in Nijmegen minder sportief dan studenten in andere steden?

II Doen studenten in Nijmegen veel aan sport?

III Halen studenten die op woensdagen sporten gemiddeld hogere cijfers bij hun tentamens?

a Geef bij elke vraag een punt van kritiek.

De volgende drie methoden voor het nemen van een steekproef worden overwogen.

1 Op de website van het RSC wordt een poll geplaatst. Een poll is een korte lijst van stellingen met meerkeuzeantwoorden.

2 Men kiest tien willekeurige studentnummers en benadert de studenten die bij deze nummers horen.

3 De dames van de hockeyclub nemen interviews af bij jongeren op straat in de stad Nijmegen.

b Leg bij iedere methode uit waarom deze waarschijnlijk geen representatieve steekproef oplevert.

Uit een groot onderzoek in een andere studentenstad is gebleken dat studenten die vaak sporten meer studiepunten halen in het eerste jaar dan studenten die niet vaak sporten.

c Mag je hieruit concluderen dat sporten leidt tot betere studieprestaties? Licht toe.

9 In de tabel zie je enige informatie over de provincies Drenthe, Gelderland en Noord-Holland.

provincie	netnummer hoofdstad	bevolkingsdichtheid (inwoners per km^2)	aantal ziekenhuizen	waardering leefomgeving
Drenthe	0592	185	4	***
Gelderland	026	409	10	****
Noord-Holland	023	1039	15	***

De variabelen die in deze tabel voorkomen zijn provincie, netnummer hoofdstad, bevolkingsdichtheid, aantal ziekenhuizen en waardering leefomgeving.

a Geef bij elke kwalitatieve variabele het meetniveau.

b Welke van deze variabelen zijn discreet?

Voor het vaststellen van de waardering van de leefomgeving zijn 1025 inwoners van Drenthe ondervraagd. Zij konden kiezen op een schaal van 1 tot en met 5 sterren. Zie de tabel hiernaast.

sterren	aantal
*	71
**	204
***	548
****	168
*****	34

c Welke centrummaat kan gebruikt worden bij het verwerken van deze gegevens?

d Bereken de steekproefproportie van de inwoners van Drenthe die de leefomgeving waarderen met minstens drie sterren.

© Noordhoff Uitgevers bv

10 Een voetbalblad heeft onderzoek gedaan naar de blessuretijd die scheidsrechters toekennen in de eredivisie.
Op basis van gegevens van 31 wedstrijden van scheidsrechter Kuiper is berekend dat hij gemiddeld 4 minuten en 13 seconden bijtelde. De bijbehorende standaardafwijking was 1 minuut en 23 seconden.
Bereken voor scheidsrechter Kuiper het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde blessuretijd. Rond af op gehele seconden.

11 Kees en Frits doen voor het vak statistiek een onderzoek met als onderzoeksvraag 'Welk deel van de M&M's is rood?'. Voor hun onderzoek openen ze een doos met daarin een aantal zakjes M&M's en tellen van elke kleur het aantal M&M's. In de tabel hieronder staat het resultaat.

kleur	blauw	bruin	groen	oranje	rood	geel	totaal
aantal	487	398	489	530	371	375	2650

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie rode M&M's. Rond af op vier decimalen.
b Volgens Kees is de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie oranje M&M's ongeveer 15% groter dan van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rode M&M's. Onderzoek of Kees gelijk heeft.

12 Eén van de onderstaande relatieve cumulatieve frequentiepolygonen past bij de boxplot.
Welke is dat? Licht toe.

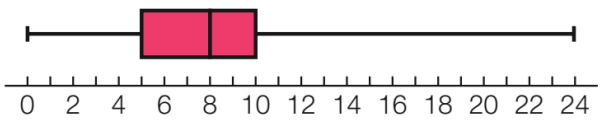


DIAGRAM 1

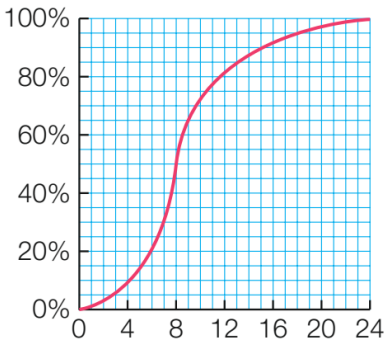


DIAGRAM 2

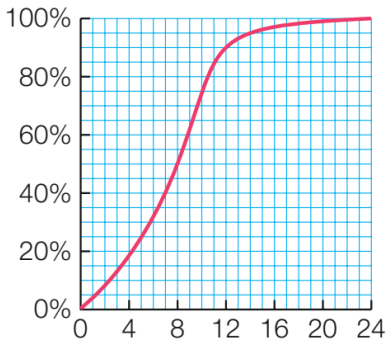
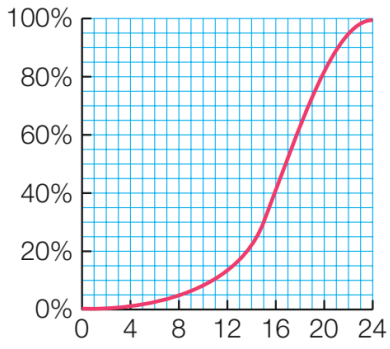


DIAGRAM 3



© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

3 Rekenen en herleiden

In 2022 deed in Nederland 21 procent van de 176 duizend examenleerlingen vwo-examen. Daarvan had 3 van de 5 leerlingen voor wiskunde A gekozen. Bij de vwo-leerlingen met wiskunde A waren er 9 meisjes voor elke 7 jongens.

Hoeveel meisjes deden vwo-examen wiskunde A? Rond af op duizendtallen.

© Noordhoff Uitgevers bv

3.1 Breuken en verhoudingen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt vermenigvuldigen met breuken.
- Je kunt delen door breuken.
- Je kunt optellen en aftrekken met breuken.
- Je kunt rekenen met verhoudingen.

Voorkennis Breuken vermenigvuldigen en delen

Bij het *vermenigvuldigen* van twee of meer breuken worden zowel de tellers als de noemers met elkaar vermenigvuldigd.

$$\text{breuk} = \frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$$

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

Zo is $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$. Vereenvoudig de breuk.

Vermenigvuldig je een geheel getal met een breuk, dan kun je van het gehele getal een breuk maken. Bijvoorbeeld $3 \cdot \frac{2}{11} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{11}$ of kortweg $3 \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{11}$. Je vermenigvuldigt alleen de teller met het getal.

Vermenigvuldig je een breuk met zijn noemer, dan krijg je als uitkomst de teller. Zo is $3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$ of kortweg $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$.

Bij $6 \cdot 1\frac{1}{4}$ schrijf je $1\frac{1}{4}$ eerst als de breuk $\frac{5}{4}$, dus

$6 \cdot 1\frac{1}{4} = 6 \cdot \frac{5}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$. Haal de helen eruit.

Bij het *delen* door een breuk kun je vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Zo is $\frac{1}{5} : \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{10}$.

Afspraak

- Vereenvoudig breuken zo ver mogelijk.
- Haal zo mogelijk de helen uit een breuk.

© Noordhoff Uitgevers bv

V1 Bereken zonder rekenmachine.

a $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{11}$

b $7 \cdot \frac{2}{19}$

c $8 \cdot \frac{3}{8}$

d $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3}$

e $\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$

f $\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{3}$

g $\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot 4$

h $6 : \frac{1}{6}$

i $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$

O1 Welke antwoord is juist als je $p \cdot \frac{1}{r} : \frac{1}{q}$ herleidt tot één breuk?

A $\frac{pq}{r}$

B $\frac{p}{qr}$

C pqr

D $\frac{pr}{q}$

Theorie A Vermenigvuldigen en delen van breuken

Bij het *vermenigvuldigen* van breuken gebruik je de volgende regels.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD} \text{ en } A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C} = \frac{A}{C} \cdot B = A \cdot B \cdot \frac{1}{C} \text{ en } B \cdot \frac{A}{B} = A$$

De rekenregels voor breuken gelden ook bij het vermenigvuldigen van breuken waarin letters voorkomen.
Dus $\frac{3}{a} \cdot \frac{5}{b} = \frac{15}{ab}$, $\frac{2a}{5} \cdot \frac{3b}{7} = \frac{6ab}{35} = \frac{6}{35}ab$, $5 \cdot \frac{2a}{b} = \frac{10a}{b}$ en $a \cdot \frac{3b}{a} = 3b$.

Bij het *delen* door een breuk kun je vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk. Je gebruikt dus de volgende regel.

$$A : \frac{B}{C} = A \cdot \frac{C}{B}$$

Zo is $\frac{2a}{3b} : \frac{5}{b} = \frac{2a}{3b} \cdot \frac{b}{5} = \frac{2ab}{15b} = \frac{2}{15}a$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Herleid.

a $(a-1)\cdot\dfrac{2b+1}{a-1}$

b $\dfrac{2}{a}:\dfrac{a}{a-1}$

c $2\cdot\dfrac{5}{a}\cdot\dfrac{8-a}{3}$

Uitwerking

a $(a-1)\cdot\dfrac{2b+1}{a-1}=2b+1$

b $\dfrac{2}{a}:\dfrac{a}{a-1}=\dfrac{2}{a}\cdot\dfrac{a-1}{a}=\dfrac{2(a-1)}{a^2}=\dfrac{2a-2}{a^2}$

c $2\cdot\dfrac{5}{a}\cdot\dfrac{8-a}{3}=\dfrac{2\cdot5\cdot(8-a)}{3a}=\dfrac{10(8-a)}{3a}=\dfrac{80-10a}{3a}$

haakjes wegwerken
$a(b+c)=ab+ac$
$(a+b)c=ac+bc$

2 Herleid.

a $p\cdot\dfrac{2p+1}{p}$

b $\dfrac{4}{a}:\dfrac{a}{3-a}$

c $\dfrac{5}{q}\cdot\dfrac{3-q}{3q}$

d $7\cdot\dfrac{2a}{b}\cdot\dfrac{a-1}{3b}$

e $\dfrac{2+a}{b}\cdot\dfrac{3a}{b-1}$

f $3\cdot\dfrac{2}{p}\cdot\dfrac{1-p}{p}$

A3 Herleid.

a $\dfrac{4x+1}{2x}\cdot 2x$

b $\dfrac{5}{p+1}:\dfrac{q}{8-q}$

c $\dfrac{4}{a}\cdot\dfrac{2}{b}\cdot\dfrac{3a-1}{a}$

d $\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{a-1}{4}\cdot\dfrac{5}{a+1}$

e $3a:\dfrac{3a+1}{2a-1}$

f $6a\cdot\dfrac{4a-1}{6a}$

4 Bereken $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{1001}\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorkennis Breuken optellen en aftrekken

Breuken met gelijke noemers heten gelijknamig. Gelijknamige breuken kun je direct *optellen* en *aftrekken*.

Dus $\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ en $\frac{7}{15}-\frac{2}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

Bij het optellen van $\frac{4}{9}$ en $\frac{2}{11}$ maak je de breuken eerst gelijknamig. Je krijgt $\frac{4}{9}+\frac{2}{11}=\frac{44}{99}+\frac{18}{99}=\frac{62}{99}$.

De nieuwe noemer wordt $9 \cdot 11$.

Je mag in een breuk de teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
$\frac{4}{9}=\frac{4 \cdot 11}{9 \cdot 11}=\frac{44}{99}$

Bij het aftrekken van $\frac{4}{9}$ en $\frac{2}{15}$ kun je als nieuwe noemer $9 \cdot 15$ nemen. Omdat 9 en 15 de gemeenschappelijke factor 3 hebben, is het echter eenvoudiger om als nieuwe noemer $\frac{9 \cdot 15}{3}=45$ te nemen.

Dus $\frac{4}{9}-\frac{2}{15}=\frac{20}{45}-\frac{6}{45}=\frac{14}{45}$.

$5 \cdot 9 = 45$ $\quad$ $3 \cdot 15 = 45$

V2 Bereken zonder rekenmachine.

a $\frac{2}{15}+\frac{1}{5}$ $\quad$ **b** $\frac{4}{7}-\frac{1}{14}$ $\quad$ **c** $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ $\quad$ **d** $1\frac{1}{3}+2\frac{3}{4}$ $\quad$ **e** $\frac{1}{14} \cdot \left(\frac{5}{13}+\frac{1}{3}\right)$ $\quad$ **f** $\frac{2}{3} \cdot \left(5\frac{1}{4}-4\frac{1}{3}\right)$

O5 Kies hieronder steeds welk antwoord overeenkomt met de gegeven uitdrukking.

a	$\frac{5}{a}+\frac{4}{a}$	kies uit	I	$\frac{9}{2a}$	II	$\frac{9}{a}$	III $\frac{9}{a^2}$
b	$\frac{5}{ab}+\frac{6}{a^2b}$	kies uit	I	$\frac{11}{a^2b}$	II	$\frac{11}{a^3b^2}$	III $\frac{5a+6}{a^2b}$
c	$3p-\frac{2}{p}$	kies uit	I	p	II	$\frac{1}{p}$	III $\frac{3p^2-2}{p}$
d	$\frac{4}{3x}-\frac{5}{4x}$	kies uit	I	$\frac{1}{12x}$	II	$\frac{1}{x}$	III $\frac{1}{12x^2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie B Optellen en aftrekken van breuken

Gelijknamige breuken kun je direct optellen en aftrekken. Je gebruikt de volgende regels.

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B} \text{ en } \frac{A}{B}-\frac{C}{B}=\frac{A-C}{B}$$

Bij het optellen van breuken die niet gelijknamig zijn, gebruik je de volgende regels.

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD} \text{ en } \frac{A}{B}+C=\frac{A+BC}{B}$$

Zo is $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=\frac{2b}{ab}+\frac{3a}{ab}=\frac{3a+2b}{ab}$ en $\frac{2}{3a}+5=\frac{2}{3a}+\frac{5}{1}=\frac{2}{3a}+\frac{15a}{3a}=\frac{2+15a}{3a}$.

De nieuwe noemer wordt ab.

Bij het gelijknamig maken kies je de nieuwe noemer zo eenvoudig mogelijk. Zo is $\frac{2}{3a}+\frac{3}{a}=\frac{2}{3a}+\frac{9}{3a}=\frac{11}{3a}$.

Neem als nieuwe noemer $3a$.

Voorbeeld

Herleid tot één breuk.

a $\frac{5}{2x}+\frac{7}{3x}$ **b** $\frac{1}{a^2b}-\frac{1}{ab^2}$ **c** $3x-\frac{5}{x^2}$

Uitwerking

a $\frac{5}{2x}+\frac{7}{3x}=\frac{15}{6x}+\frac{14}{6x}=\frac{29}{6x}$

b $\frac{1}{a^2b}-\frac{1}{ab^2}=\frac{b}{a^2b^2}-\frac{a}{a^2b^2}=\frac{b-a}{a^2b^2}$

c $3x-\frac{5}{x^2}=\frac{3x^3}{x^2}-\frac{5}{x^2}=\frac{3x^3-5}{x^2}$

$3x=\frac{3x}{1}=\frac{3x^3}{x^2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

We herinneren je aan de volgende afspraak.

Afspraak
Vereenvoudig breuken zo ver mogelijk.
Haal zo mogelijk de helen uit een breuk.

Dus $\frac{2ab}{3ac} = \frac{2b}{3c}$, $\frac{2ab}{3a} = \frac{2b}{3} = \frac{2}{3}b$ en $\frac{15pq}{4q} = \frac{15p}{4} = 3\frac{3}{4}p$.

Deel teller en noemer door de gemeenschappelijke factor a.

6 Herleid tot één breuk.

a $\frac{6}{a} + \frac{3}{a}$ **b** $\frac{5}{2b} - \frac{3}{2b}$ **c** $\frac{1}{2x} + \frac{2}{x}$ **d** $\frac{3}{2a} - \frac{2}{3a}$ **e** $\frac{1}{ab} - \frac{1}{b}$ **f** $\frac{a}{b} - \frac{1}{a}$ **g** $2 + \frac{1}{x}$ **h** $3a - \frac{2}{a}$ **i** $5a - \frac{6}{a^2}$

7 Herleid.

a $\frac{3a}{6b}$ **b** $\frac{10pq}{5q}$ **c** $\frac{4ab^2}{5ab}$ **d** $\frac{20p^2q^2}{3p^2}$ **e** $\frac{6x^2y}{2x} + \frac{10x^3y^2}{5x^2y}$ **f** $\frac{24a^2b^2}{4a} - \frac{(3ab)^3}{a^2b}$

A8 Herleid tot één breuk.

a $\frac{1}{p} + 2p \cdot \frac{3q}{5p^2}$ **b** $\frac{a}{3} : \frac{2c}{b} - \frac{a}{c}$ **c** $\frac{xy}{2x^2} \cdot (y+1) - \frac{3}{x}$ **d** $\frac{p}{2q} + \frac{p}{q} : \frac{2p^2}{3q}$ **e** $(2a+1) \cdot \frac{5a}{2a+1} + \frac{1}{a}$ **f** $\frac{1}{p} \cdot \frac{2}{q} \cdot \frac{pq}{q+1} - \frac{p}{q+1}$

A9 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.

a $A = \frac{2}{x-3} - \frac{4}{3x}$ **b** $B = 5 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}$ **c** $C = \frac{6}{a} \cdot \frac{5}{a+b} : \frac{4}{a+b}$

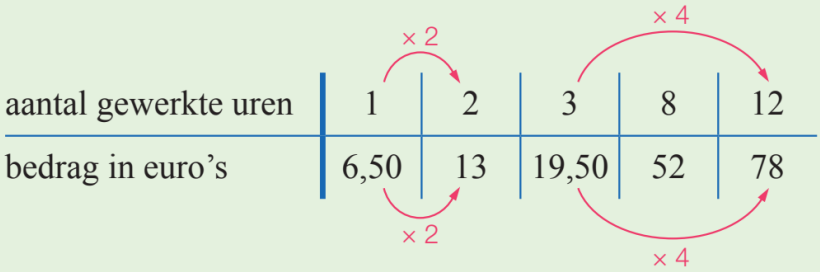
O10 Anna, Bram en Eva doen mee aan een estafetteloop van in totaal 24 km.
Ze spreken af dat ze de afstand zullen verdelen in de verhouding 1 : 2 : 3 waarbij Anna de kortste afstand loopt en Eva de langste.
Welke afstanden lopen Anna, Bram en Eva achtereenvolgens?

A 3, 6 en 9 km
B 4, 6 en 14 km
C 4, 8 en 12 km

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie C Verhoudingen

Jesse verdient met zijn bijbaantje € 6,50 per uur. Hierbij hoort de volgende **verhoudingstabel**.



We zeggen dat de **verhouding** tussen het aantal gewerkte uren en het bedrag in euro's steeds hetzelfde is.
De verhouding 2 : 13 spreek je uit als *twee staat tot dertien*.
Door 8 : 52 en 12 : 78 te vereenvoudigen, zie je dat deze verhoudingen gelijk zijn aan 2 : 13.

Vereenvoudig een verhouding zo ver mogelijk.

In een verhoudingstabel hebben de getallen die onder elkaar staan telkens dezelfde verhouding.

Om een bedrag van 225 euro te verdelen in de verhouding 2 : 3, maak je eerst 2 + 3 = 5 gelijke delen. Eén deel is $\frac{1}{5} \cdot 225 = 45$ euro, dus de bedragen zijn $2 \cdot 45 = 90$ euro en $3 \cdot 45 = 135$ euro.
Ook 2 : 5 : 8 is een verhouding.
Om een bedrag van 360 euro in deze verhouding te verdelen, maak je eerst 2 + 5 + 8 = 15 gelijke delen. Eén deel is $\frac{1}{15} \cdot 360 = 24$ euro, dus de bedragen zijn $2 \cdot 24 = 48$ euro, $5 \cdot 24 = 120$ euro en $8 \cdot 24 = 192$ euro.
De bedragen zijn ook in één keer als volgt te berekenen, namelijk $\frac{2}{15} \cdot 360 = 48$ euro, $\frac{5}{15} \cdot 360 = 120$ euro en $\frac{8}{15} \cdot 360 = 192$ euro.

Voorbeeld

Op een school komen de leerlingen uit de plaatsen A, B en C in de verhouding 8 : 7 : 5. Er zijn 68 leerlingen meer uit B dan uit C.
Hoeveel leerlingen komen uit plaats A?

Aanpak
Bedenk dat B zeven delen en C vijf delen heeft, dus B heeft twee delen meer dan C.

Uitwerking
Twee delen zijn 68 leerlingen, dus één deel is 34 leerlingen.
Het aantal leerlingen uit A is $8 \cdot 34 = 272$.

© Noordhoff Uitgevers bv

11

Bij een estafetteloop hebben Ada, Nyra en Sevim de afstand verdeeld in de verhouding 4 : 5 : 7 waarbij Ada de kortste afstand loopt en Sevim de langste. Sevim loopt 4,5 km meer dan Ada.
Hoeveel km loopt Nyra in deze estafetteloop?

12

a In Qatar wonen 38 vrouwen per 100 mannen. Qatar heeft een populatie van 2,72 miljoen inwoners.
Hoeveel vrouwen wonen er in Qatar?

b In China zijn er 11 mannen per 10 vrouwen. Het totale aantal inwoners is 1,43 miljard.
Hoeveel mannen telt China meer dan vrouwen?

13 ∗

Twee even grote flessen zijn geheel gevuld met een mengsel van water en sap. De verhouding van water en sap in de eerste fles is 2 : 1 en in de tweede fles 4 : 1. Beide flessen worden leeggegoten in dezelfde karaf.
Wat wordt de verhouding van water en sap in de karaf?

14

Tabel I hieronder is een verhoudingstabel.

a Bereken a en b.

b Druk y uit in x.

TABEL I

x	12	18	b
y	32	a	80

In een verhoudingstabel zijn de kruisproducten gelijk.

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

TABEL II

x	10	18	r
y	15	p	$r + 10$
z	25	q	s

15 ∗

Tabel II hierboven is een verhoudingstabel bij de verhouding $x : y : z$.

a Bereken p, q, r en s.

b Druk z uit in y.

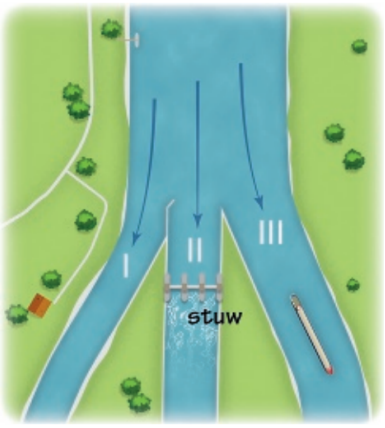
A16 ∗

a In een dorp is de verhouding van het aantal volwassen mannen tot het aantal volwassen vrouwen gelijk aan 2 : 3. De verhouding van het aantal volwassen vrouwen tot het aantal kinderen is gelijk aan 6 : 1.
Wat is de verhouding van het aantal volwassenen (mannen en vrouwen) tot het aantal kinderen?

b Olivia, Ina en Nathalie hebben 770 noten geraapt. Ze verdelen ze in de verhouding van hun leeftijden. Voor iedere 3 noten die Olivia krijgt, krijgt Ina er 4. Voor iedere 7 noten die Nathalie krijgt, krijgt Ina er 6.
Hoeveel noten krijgt de jongste?

© Noordhoff Uitgevers bv

A17



Een rivier splitst zich in drie takken. Zie de figuur.
Bij een aanvoer van minder dan 2400 m^3/s verhouden de afvoeren in de takken I, II en III zich als 3 : 4 : 5.

a Bereken de afvoeren in I, II en III als er 2340 m^3/s wordt aangevoerd.

De afvoer in tak II mag niet meer zijn dan 800 m^3/s. Als deze afvoer meer dreigt te worden, dan zorgt de stuw in II ervoor dat de afvoer daar 800 m^3/s is. De afvoeren in I en III verhouden zich dan als 3 : 5.

b Bereken de afvoeren in I, II en III als er 3000 m^3/s wordt aangevoerd.

c Bereken de aanvoer als via tak III de afvoer 1500 m^3/s is.

A18

In een vijver zwemmen 100 karpers. Twee vijfde van de karpers is geel, de rest is rood. Bij de gele karpers is de verhouding tussen vrouwtjes en mannetjes 3 : 1. In totaal zijn er evenveel vrouwtjeskarpers als mannetjeskarpers.
Wat is de verhouding tussen rode en gele karpers bij de mannetjes?

A19

Autospuiterij Vermalen is gespecialiseerd in het opknappen van oldtimers. Onderdeel daarvan is het aanbrengen van een laklaag met verharder en thinner.
De verhouding van lak, verharder en thinner is 10 : 5 : 2. Zo ontstaat een lakmengsel dat goed te spuiten is en bovendien snel verhardt.
Om een bepaalde kleur lakmengsel te krijgen, kan Vermalen eerst meerdere kleuren lak met elkaar mengen. Tot slot worden de verharder en thinner toegevoegd.

a Een klant wil een speciale kleur groen voor zijn Cadillac Eldorado. Deze kleur groen krijg je door blauwe en gele lak te mengen in de verhouding 3 : 2.
Bereken hoeveel liter gele lak Vermalen moet gebruiken om 8,5 liter lakmengsel te krijgen.

b Voor het overspuiten van een Porsche 914 is 6,8 liter lakmengsel nodig. De kleur lak krijgt Vermalen door rood, groen en geel te mengen in de verhouding 5 : 1 : 2. Vermalen heeft nog slechts één blik met 2,5 liter rode lak in de zaak.
Onderzoek of Vermalen meer rode lak moet kopen.

c Vermalen heeft 5,1 liter lakmengsel nodig voor een Volkswagen Beetle Convertible uit 1978. Voor een bijzonder eindresultaat wil hij voor deze klus een lakmengsel met 25% minder thinner gebruiken dan normaal. Vermalen berekent dat hij dus 0,45 liter thinner nodig heeft.
Laat met een berekening zien dat dit klopt en bereken hoeveel liter verharder hij nodig heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

A20 *

Zie opgave 19.
Vermalen heeft een emmer met 2 liter paarse lak gemaakt door rode en blauwe lak te mengen in de verhouding 3 : 5. Hij heeft ook een emmer met 3 liter groene lak gemaakt door blauwe en gele lak te mengen in de verhouding 3 : 1. De klant besluit op het laatste moment dat hij zijn Citroën ID20 Break Familiale toch in één kleur wil, namelijk met rood, blauw en geel in de verhouding 3 : 7 : 2. Vermalen besluit de boel te redden door de twee emmers bij elkaar te gooien en rode en gele lak toe te voegen.
Bereken hoeveel rode en hoeveel gele lak Vermalen moet toevoegen om de verhouding juist te krijgen.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan vermenigvuldigen met breuken.
- ☐ Ik kan delen door breuken.
- ☐ Ik kan optellen en aftrekken met breuken.
- ☐ Ik kan rekenen met verhoudingen.

- OPGAVE C1a THEORIE A
- OPGAVE C1b THEORIE A
- OPGAVE C2 THEORIE B
- OPGAVE C3 THEORIE C

C1 Herleid.

a $3 \cdot \frac{b}{5a} \cdot \frac{2a-4}{b}$

b $6a : \frac{a}{7-b}$

C2 Herleid tot één breuk.

a $5 + \frac{3}{2x}$

b $\frac{5}{3x} - \frac{3}{2x}$

C3 Anna, Bilal en Caro verdelen een bedrag in de verhouding 4 : 7 : 9.
Bilal krijgt 45 euro meer dan Anna.
Hoeveel euro krijgt Caro?

Antwoorden

C1 **a** $\frac{6a-12}{5a}$ **b** $42-6b$

C2 **a** $\frac{10x+3}{2x}$ **b** $\frac{1}{6x}$

C3 135 euro

© Noordhoff Uitgevers bv

3.2 Herleiden van formules

Kennis en vaardigheden

- Je kunt haakjes wegwerken en uitdrukkingen herleiden.
- Je kunt de grafiek tekenen van een lineaire vergelijking met twee variabelen.
- Je kunt een variabele vrijmaken bij een lineaire vergelijking met twee variabelen.

O21

a Bij $6 - (x + 3)$ kun je de haakjes wegwerken en herleiden.
Welk antwoord is juist?

I $3 - x$ III $-6x - 18$
II $9 - x$ IV $-6x + 18$

b Bij $(x - 4)^2$ kun je de haakjes wegwerken en herleiden.
Welk antwoord is juist?

I $x^2 - 16$ III $x^2 - 8x + 16$
II $x^2 + 16$ IV $x^2 - 4x + 16$

Theorie A Haakjes wegwerken

Voor het wegwerken van haakjes ken je de volgende regels.
$a(b + c) = ab + ac$
$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b)\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

De laatste drie regels staan bekend onder de naam **merkwaardige producten**. Met behulp van de merkwaardige producten kun je in één keer opschrijven
$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ $-6x$ is het dubbelproduct van x en -3, dus $2 \cdot x \cdot -3$.
en
$(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$.

Voorbeeld

Werk de haakjes weg en herleid.
a $6(x - 4)^2 - 50(2x - 1)$
b $(2a - 1)^2 + 4(a - 1)$
c $15 - 2x(3x - 1)^2$

Uitwerking
a $6(x - 4)^2 - 50(2x - 1) = 6(x^2 - 8x + 16) - 100x + 50$
$= 6x^2 - 48x + 96 - 100x + 50 = 6x^2 - 148x + 146$
b $(2a - 1)^2 + 4(a - 1) = 4a^2 - 4a + 1 + 4a - 4 = 4a^2 - 3$
c $15 - 2x(3x - 1)^2 = 15 - 2x(9x^2 - 6x + 1) = 15 - 18x^3 + 12x^2 - 2x$
$= -18x^3 + 12x^2 - 2x + 15$

© Noordhoff Uitgevers bv

22 Werk de haakjes weg en herleid.

a $3(x-5)^2-10(x+1)$

b $(4a-1)^2+4(2a+1)$

c $20x-(x-10)^2$

d $(6-2a)(3a+1)-3a(a-4)$

23 **a** Werk bij $(2x-3)^2-(4x-1)(3x+1)$ de haakjes weg en herleid.

b Toon aan dat $(6-a)(2a-1)+3a(a-2)$ te herleiden is tot a^2+7a-6.

c De formule $A=0{,}15\cdot\frac{x}{0{,}375}\cdot(x-2)$ is te herleiden tot de vorm $A=ax^2+bx$.
Bereken a en b.

Aantonen dat
Het geven van een redenering of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.
Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

A24 **a** Toon aan dat $(3-2x)^2-4(x-2)^2$ te herleiden is tot $4x-7$.

b De formule $B=0{,}018\cdot\frac{p}{0{,}072}\cdot(2q-5)$ is te herleiden tot de vorm $B=apq+bp$.
Bereken a en b.

c De formule $C=1{,}8\cdot\frac{x+4}{2}:\frac{3}{x-1}$ is te herleiden tot de vorm $C=ax^2+bx+c$.
Bereken a en b en c.

25 Gegeven zijn twee getallen a en b. Er geldt $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$.

a Toon dit aan.

De som van twee getallen is 26 en hun product is 144.

b Gebruik $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$ om het verschil tussen de twee getallen te berekenen.

© Noordhoff Uitgevers bv

A26

Bij de productie van bureaulampen gebruikt de fabrikant voor de opbrengst per dag de formule $R = (-0{,}05q + 20)q$. Hierin is q de dagproductie en R de dagopbrengst in euro's. De prijs van een bureaulamp in euro's wordt gegeven door de formule $p = -0{,}05q + 20$. De fabrikant heeft ook met kosten te maken. De kosten per dag in euro's worden gegeven door de formule $K = 2q + 500$. In deze formules ligt q tussen 0 en 400.

a Bereken de opbrengst per dag bij een productie van 150 bureaulampen. Wat zijn dan de kosten voor de fabrikant en hoeveel kost dan een bureaulamp?

De opbrengst min de kosten geeft de winst, dus de formule van de dagelijkse winst W in euro's is $W = R - K$.

b Schrijf de formule van W in de vorm $W = aq^2 + bq + c$.

c Met hoeveel procent neemt de winst toe als de dagproductie toeneemt van 160 naar 175 stuks?

d Bij welke dagopbrengst is de winst maximaal? Hoeveel is dan de winst? Wat kost dan een bureaulamp?

O27

De familie de Jong, bestaande uit twee volwassenen en drie kinderen, koopt toegangskaarten voor de vakantiebeurs. Voor kinderen geldt een speciaal tarief. De vijf toegangskaarten kosten samen 36 euro.

a Stel dat een kaartje voor een volwassene 15 euro heeft gekost. Wat kostte dan een kaartje voor een kind?

b Noem nog enkele mogelijkheden voor de prijs van een toegangskaart van een kind en van een volwassene.

c Stel dat een kaartje voor een volwassene x euro kost en voor een kind y euro.
Vul in: tussen x en y bestaat het verband ..... x + ... $y = 36$.

Theorie B Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

In opgave 27 heb je het verband $2x + 3y = 36$ opgesteld. Dit verband is te schrijven in de vorm $y = ax + b$.
Dat gaat als volgt.

$2x + 3y = 36$ Links en rechts $2x$ aftrekken.
$3y = -2x + 36$ Deel alle termen door 3.
$y = -\frac{2}{3}x + 12$

Hiermee is y uitgedrukt in x. We zeggen ook dat y is **vrijgemaakt** of dat **y als functie van x is geschreven**.
Je ziet dat er een lineair verband bestaat tussen x en y. De grafiek van $2x + 3y = 36$ is dus een rechte lijn.
Het verband $2x + 3y = 36$ is een voorbeeld van een **lineaire vergelijking met twee variabelen**. Andere lineaire vergelijkingen met twee variabelen zijn $3x - 2y = 12$ en $5p - 2q = 20$.

© Noordhoff Uitgevers bv

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$. De grafiek is een rechte lijn.

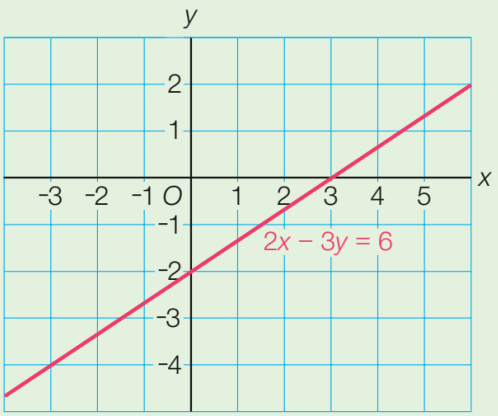
Ook $y = x + 8$ is een lineaire vergelijking met de variabelen x en y. Immers $y = x + 8$ is te schrijven als $-x + y = 8$.

Om de grafiek van $2x - 3y = 6$ te tekenen, is het niet nodig om y vrij te maken. Het is voldoende om de coördinaten van twee punten te berekenen.
$x = 0$ geeft $-3y = 6$, dus $y = -2$.
$y = 0$ geeft $2x = 6$, dus $x = 3$.

Zo krijg je de tabel

x	0	3
y	-2	0

De lijn zie je in de figuur hiernaast.



Voorbeeld

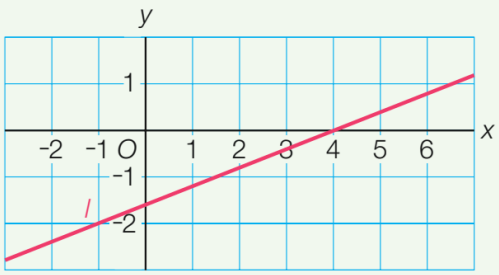
Gegeven is de lijn l: $2x - 5y = 8$.

a Teken l.
b Bereken rc_l.
c Het punt $A(28, a)$ ligt op l.
Bereken a.

Uitwerking

a

x	-1	4
y	-2	0



b $2x - 5y = 8$ Maak y vrij.
$-5y = -2x + 8$
$y = \frac{2}{5}x - 1\frac{3}{5}$

Dus $rc_l = \frac{2}{5}$.

c $A(28, a)$ op l: $2x - 5y = 8$ geeft $2 \cdot 28 - 5a = 8$
$56 - 5a = 8$
$-5a = -48$
$a = 9\frac{3}{5}$

© Noordhoff Uitgevers bv

R28 Je hebt in theorie B gezien dat de grafiek van $ax + by = c$ een lijn is.

a Wat voor bijzondere lijn krijg je als $a = 0$ en $b \neq 0$?

b Wat voor bijzondere lijn krijg je als $a \neq 0$ en $b = 0$?

29 Gegeven is de lijn l: $x + 2y = 4$.

a Teken l.

b Bereken rc_l.

c Onderzoek of het punt $(20, -8)$ op de lijn l ligt.

30 Gegeven is de lijn l: $4x - 3y = 24$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de assen en teken l.

b Onderzoek welke van de punten $A(8, 3)$, $B(18, 16)$ en $C(-30, -48)$ op l liggen.

c Het punt $D(16, p)$ ligt op l.
Bereken p.

d Het punt $E(q, 48)$ ligt op l.
Bereken q.

31 Gegeven zijn de lijnen l: $3x - 4y = 7$ en m: $3x - 4y = -8$.

a Bereken rc_l en rc_m.

b Waarom zijn alle lijnen van de vorm $3x - 4y = c$ evenwijdig?

c Voor welke waarde van c ligt het punt $A(5, 1)$ op de lijn $3x - 4y = c$?

d De lijn k gaat door het punt $B(3, -1)$ en is evenwijdig met l.
Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

A32 Gegeven is de lijn m: $3x - 8y = 36$.

a Teken m.

b Bereken rc_m.

c Lijn m snijdt de y-as in het punt A.
Bereken de coördinaten van A.

d Het punt $B(-10, p)$ ligt op m.
Bereken p.

e Het punt $C(q, 9)$ ligt op m.
Bereken q.

f De lijn n gaat door het punt $D(5, 1)$ en is evenwijdig met de lijn m.
Stel van n een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

33

a Maak y vrij bij $15x + 12y = 2520$.

b Druk p uit in q bij $3p - 2q = 16\frac{1}{2}$.

c Maak b vrij bij $5a - 2b = 16$.

d Gegeven is $2(x - 3) + 5y = 14$.
Maak y vrij.

e Gegeven is $2(x - 3) + 5y = 14$.
Druk x uit in y.

© Noordhoff Uitgevers bv

A34 ⊙ ∗

a Gegeven is $3(x-6)+\frac{1}{4}(2y+5)=20$.
Schrijf de formule in de vorm $y=ax+b$.

b Gegeven is $2(T+8)+3(2A+8)=120$.
Maak T vrij.

c Gegeven is $3(\frac{2}{3}L-9)+4K=6(2-L)$.
Druk L uit in K.

d Gegeven is $\frac{1}{3}(p-6)+4(q-7)=59$.
Schrijf p als functie van q.

35 ∗

René koopt voor precies 10 euro aan fruit. Hij koopt een aantal appels van 40 cent per stuk, drie maal zoveel peren van 50 cent per stuk en met het geld dat hij nog over heeft bananen van 80 cent per stuk.
Hoeveel stuks fruit koopt René?

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan haakjes wegwerken en uitdrukkingen herleiden. ▶ OPGAVE C4 THEORIE A
- ☐ Ik kan de grafiek tekenen van een lineaire vergelijking met twee variabelen. ▶ OPGAVE C5 THEORIE A
- ☐ Ik kan een variabele vrijmaken bij een lineaire vergelijking met twee variabelen. ▶ OPGAVE C6 THEORIE B

C4 Werk de haakjes weg en herleid.

a $2(3x-1)-4(2y-5)$

b $(2x-3)(4x-1)$

c $5x^2-(2x+1)^2$

C5 Gegeven is de lijn k: $3x-4y=12$.

a Teken k.

b Bereken rc_k.

c De lijn l gaat door het punt $Q(5,-2)$ en is evenwijdig met k.
Stel van l een vergelijking op van de vorm $ax+by=c$.

C6

a Maak y vrij bij $2x-3y=6$.

b Druk p uit in q bij $5p+2q=10$.

Antwoorden

C4 **a** $6x-8y+18$ **b** $8x^2-14x+3$ **c** x^2-4x-1

C5 **a** ∗ **b** $\frac{3}{4}$ **c** l: $3x-4y=23$

C6 **a** $y=\frac{2}{3}x-2$ **b** $p=-\frac{2}{5}q+2$

© Noordhoff Uitgevers bv

3.3 Procentberekeningen en de wetenschappelijke notatie

Kennis en vaardigheden

- Je kunt procentberekeningen uitvoeren.
- Je kunt berekeningen uitvoeren waarin de wetenschappelijke notatie wordt gebruikt.

○36

Tussen 2000 en 2023 is het aantal inwoners van de gemeente Amsterdam toegenomen van 731 duizend naar 918 duizend. In dezelfde periode is het aantal inwoners van de gemeente Utrecht gegroeid van 234 naar 368 duizend.
Volgens Maud is in deze periode het aantal inwoners van Amsterdam meer toegenomen dan dat van Utrecht.
Volgens Pepijn is in deze periode het aantal inwoners van Utrecht juist het meest toegenomen.
Licht doe dat beide beweringen te verdedigen zijn.

Theorie A Procentberekeningen

Bij het vergelijken van gegevens krijg je vaak te maken met vragen als
- In welke periode is de toename het grootst?
- Wat is het sterkst toegenomen?

Je onderscheidt hierbij **absolute** en **relatieve veranderingen**.
Bij veranderingen in aantallen gaat het om absolute veranderingen.
Bij veranderingen in procenten gaat het om relatieve veranderingen.

Hieronder staat een aantal soorten vragen die je kunt tegenkomen bij procentberekeningen.

1 Hoeveel procent is 23 van 78?

23 van 78 is $\frac{23}{78} \cdot 100\% \approx 29{,}5\%$.

2 Hoeveel is 11,8% van 580?

11,8% van 580 is $0{,}118 \cdot 580 = 68{,}44$.

3 Een hoeveelheid van 290 is 58% van het totaal. Hoeveel is het totaal?

$0{,}58 \times \text{totaal} = 290$, dus $\text{totaal} = \frac{290}{0{,}58} = 500$.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 Een hoeveelheid neemt toe van 35 tot 47.
Hoeveel procent is de toename?
De procentuele toename is
$\frac{47-35}{35} \cdot 100\% \approx 34{,}3\%$.

De procentuele verandering is
$\frac{\text{nieuw} - \text{oud}}{\text{oud}} \times 100\%$.

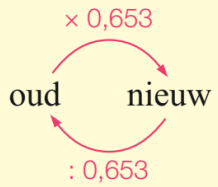
5 Een hoeveelheid van 1800 neemt met 11% af.
Hoeveel is de nieuwe hoeveelheid?
nieuw $= 0{,}89 \times$ oud, dus nieuw $= 0{,}89 \cdot 1800 = 1602$.

6 Een hoeveelheid neemt met 12% toe tot 1456.
Hoeveel was de oorspronkelijke hoeveelheid?
$1{,}12 \times \text{oud} = 1456$, dus oud $= \frac{1456}{1{,}12} = 1300$.

Voorbeeld

Het aantal geldautomaten in Nederland nam in de periode 2017-2022 met 34,7% af tot 5100.
Bereken het aantal geldautomaten in Nederland in 2017.

Aanpak
$100\% - 34{,}7\% = 65{,}3\%$
$0{,}653 \times \text{oud} = \text{nieuw}$, dus oud $= \frac{\text{nieuw}}{0{,}653}$



Uitwerking
Het aantal is $\frac{5100}{0{,}653} \approx 7800$.

Je ziet dat het aantal geldautomaten in het voorbeeld is gegeven in honderdtallen. Daarom is ook het antwoord in honderdtallen gegeven. Bij veel opdrachten is vermeld hoe nauwkeurig je het antwoord moet geven. Staat er geen informatie over de vereiste nauwkeurigheid, dan houd je je bij procentberekeningen aan de volgende vuistregels.

Vuistregels voor afronden
- Geef nieuw en oud in dezelfde nauwkeurigheid.
- Rond percentages af op één decimaal.

Let wel, dit zijn slechts vuistregels die je niet klakkeloos moet toepassen. Ga altijd na of de nauwkeurigheid van je antwoord past bij het gegeven probleem.

© Noordhoff Uitgevers bv

37

a Hoeveel is 0,3% van 8700?
b Een hoeveelheid van 3,2 miljoen neemt met 8,7% af.
Hoeveel krijg je?
c Een hoeveelheid neemt toe van 160 tot 180.
Hoeveel procent is de toename?
d Een hoeveelheid neemt met 7,9% toe tot 1280.
Hoeveel was de oorspronkelijke hoeveelheid?
e Hoeveel procent is 57 van 121?
f Een hoeveelheid van 8,3 miljoen is 12,6% van het totaal.
Hoeveel is het totaal?
g Een hoeveelheid van 12 580 neemt met 2,3% toe.
Hoeveel is de nieuwe hoeveelheid?

38

a Een koffiezetapparaat wordt met 25% korting verkocht voor 81 euro.
Wat was de oorspronkelijke prijs?
b Inclusief 21% BTW kost een fiets 552 euro.
Hoeveel kost de fiets zonder BTW?
c In 2023 was de gemiddelde CO_2-uitstoot van nieuwe personenauto's 90 gram CO_2 per km. Dat was 23% minder dan in 2021.
Wat was de gemiddelde CO_2-uitstoot van personenauto's in 2021?

39

Zie de tabel over het aantal elektrische personenauto's op 1 januari in Nederland.
a Bij welk type is de relatieve toename het grootst?
b Hoeveel procent van het totale aantal elektrische personenauto's was in 2019 een waterstofauto?
c Het totale aantal personenauto's in Nederland was 8,9 miljoen in 2023.
Hoeveel procent van de personenauto's was elektrisch?
d In 2019 was slechts 1,67% van de personenauto's elektrisch.
Bereken het totale aantal personenauto's in 2019.
e In 2023 was het aantal plug-in hybride auto's 35,8% meer dan in 2022.
Hoeveel plug-in hybride personenauto's waren er in 2022?

ELEKTRISCHE PERSONENAUTO'S IN NEDERLAND

type	2019	2023
batterij	43 510	328 295
waterstof	54	596
plug-in hybride	94 642	186 947
totaal	138 206	515 838

© Noordhoff Uitgevers bv

40

Zie de tabel over het aantal vwo-leerlingen per profiel.

a Met hoeveel procent is het aantal leerlingen met een NT-profiel in deze periode afgenomen?

b Het aantal leerlingen met een NG-profiel is in deze periode met 4,6% toegenomen. Hoeveel leerlingen hadden in 2022 een NG-profiel?

c Het aantal leerlingen met een EM-profiel nam in deze periode met 3,6% toe. Hoeveel leerlingen hadden dit profiel in 2017?

d Het aantal leerlingen met een CM-profiel nam met 900 toe. Dat is een toename van 9,4%. Hoeveel CM-leerlingen waren er in 2022?

LEERLINGEN VWO 4, 5 EN 6 PER PROFIEL

type	2017	2022
NT	26 900	21 800
NG	30 600	
EM		33 600
CM		

A41

De volgende vragen gaan over de gemeenteraadsverkiezingen in de stad Utrecht in 2022. In totaal brachten 157 425 mensen hun stem uit. Rond in deze opgave aantallen af op honderdtallen.

a De VVD behaalde 9,4% procent van de stemmen. Hoeveel stemmen zijn dat?

b De Partij voor de Dieren haalde drie zetels. Vergeleken met de gemeenteraadsverkiezingen in 2018 haalden ze 21,7% meer stemmen. In 2018 stemden er 8317 mensen op de Partij voor de Dieren. Hoeveel mensen stemden in 2022 op de Partij voor de Dieren?

c Ook de PvdA boekte winst. Er stemden 12 460 mensen op deze partij. Dat is 27,0% procent meer dan in 2018. Hoeveel mensen stemden in 2018 op de PvdA?

d Er stemden 11 117 mensen op het CDA. Hoeveel procent van de stemmen kreeg het CDA?

e D66 leverde stemmen in. In 2018 stemden nog 32 735 mensen op deze partij. In 2022 waren dat er 7107 minder. Met hoeveel procent is het aantal D66-stemmen afgenomen in 2022 vergeleken met 2018?

f Het opkomstpercentage in Utrecht was 56,3%. Hoeveel stemgerechtigden telde Utrecht in 2022?

g GroenLinks werd de grootste partij. Vergeleken met de gemeenteraadsverkiezingen in 2018 haalden ze echter 19,7% minder stemmen. In 2018 stemden er 32 735 mensen op GroenLinks. Hoeveel mensen stemden in 2022 op GroenLinks?

h Vergeleken met 2018 stemden er 417 minder mensen op de ChristenUnie. Dat komt neer op een afname van 6,5%. Hoeveel mensen stemden in 2022 op de ChristenUnie?

© Noordhoff Uitgevers bv

A42 ▯⊙∗

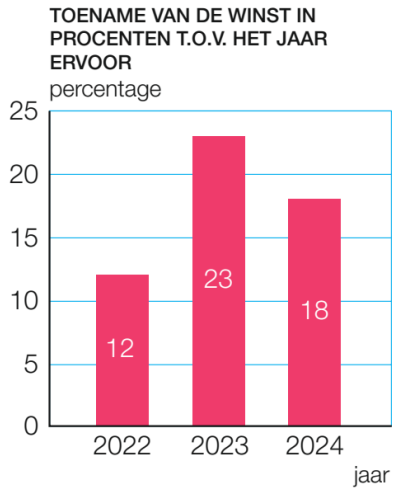
In 2022 waren er in een stad 240 geboorten.
In 2023 waren dat er 324.
Neem aan dat de procentuele toename elk jaar hetzelfde is.

a Hoeveel geboorten waren er in 2024?

b Hoeveel geboorten waren er in 2021?

A43 ▯⊙∗

Een firma maakte in 2021 een winst van 8 miljoen euro.
In het staafdiagram in de figuur hiernaast zie je de winstontwikkeling in de daaropvolgende jaren.
Met hoeveel procent is de winst toegenomen in de periode 2021-2024?



R44 ▯⊙∗

Bij procentberekeningen is een fout snel gemaakt. Voor de hand liggende conclusies blijken vaak niet te kloppen.
Wat is er mis bij de volgende uitspraken?

a In 2023 was de winst van een bedrijf 15% meer dan in 2022 en in 2024 was de winst zelfs 25% meer dan in 2023.
Dus de winst in 2024 was 40% meer dan in 2022.

b Een bedrag eerst met 15% verhogen en daarna het verkregen bedrag met 15% verlagen levert het oorspronkelijke bedrag op.

c Van de jongens heeft 40% een onvoldoende en van de meisjes 20%.
Dus 30% van de klas heeft een onvoldoende.

45 ∗

a Tijdens de drie zomermaanden is een hotel voor 88% bezet, de andere maanden voor slechts 40%.
Voor hoeveel procent is het hotel het hele jaar gemiddeld bezet?

b In een vat zit 30 liter meer als het voor 30% leeg is dan wanneer het voor 30% vol is.
Hoeveel liter zit er in het vat als het vol is?

c Een dorstige kameel bestaat voor 84% van zijn gewicht uit water. Nadat hij zijn dorst heeft gelest, weegt hij 800 kg en bestaat voor 85% uit water.
Hoeveel woog hij voordat hij begon te drinken?

46 ∗

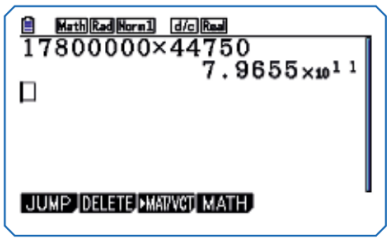
a Een hoeveelheid H neemt 10 jaar achter elkaar met 2,5% toe.
Voor de hoeveelheid H_{nieuw} na 10 jaar geldt $H_{\text{nieuw}} = a \cdot H$.
Bereken a. Rond af op twee decimalen.

b Bij een groei van 6% per jaar duurt het t jaar totdat een hoeveelheid H is verdubbeld.
Bereken t in jaren nauwkeurig.

© Noordhoff Uitgevers bv

47

Eind 2022 was de gemiddelde hypotheekschuld van de 17,8 miljoen Nederlanders 44 750 euro per persoon. Dat betekent dat de totale hypotheekschuld ongeveer 797 miljard euro was. Zie de berekening op het GR-scherm hiernaast.
Licht toe dat de uitkomst inderdaad ongeveer overeenkomt met 797 miljard.



Theorie B De wetenschappelijke notatie

Bij berekeningen met een hele grote of kleine uitkomst geeft de GR het antwoord in de **wetenschappelijke notatie**. Hiervan heb je in opgave 47 een voorbeeld gezien.
Geeft de GR bij de berekening van 80^6 als antwoord 2.62144E11, dan betekent dit $2{,}62144 \cdot 10^{11}$. Om dit antwoord in de gewone notatie te schrijven, verschuif je de komma 11 plaatsen naar rechts.
Dus $80^6 = 262\,144\,000\,000$, oftewel 262,144 miljard.

Je kunt ook schrijven $2{,}62144 \cdot 10^{11} = 262{,}144 \cdot 10^{9}$

exponent 2 lager

komma 2 plaatsen naar rechts

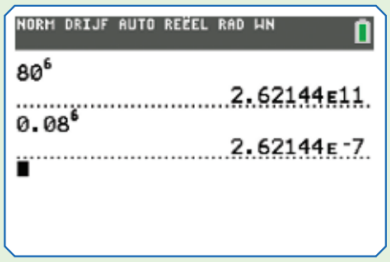
oftewel ruim 262 miljard.

$10^3 = 1000$ duizend
$10^6 = 1\,000\,000$ miljoen
$10^9 = 1\,000\,000\,000$ miljard

Geeft de GR bij de berekening van $0{,}08^6$ als antwoord 2.62144E−7, dan betekent dit $2{,}62144 \cdot 10^{-7}$.
Schrijf je dit getal in de gewone notatie, dan krijg je

0,000 000 262 144.

komma 7 plaatsen naar links



Merk op dat 0,000 000 262 144 met 7 nullen begint.
En zo is $0{,}000032 = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$.

5 nullen, dus 10^{-5}

In de wetenschappelijke notatie staat een getal in de vorm $a \cdot 10^b$. Hierin is a een getal tussen 1 en 10.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Bereken en schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie.

a $2 \cdot 10^{15} \times 3{,}25 \cdot 10^{-3}$

b 165 miljoen $\times\ 2 \cdot 10^{8}$

c $\dfrac{\text{1,8 duizend}}{\text{75 miljard}}$

Uitwerking

a $2 \cdot 10^{15} \times 3{,}25 \cdot 10^{-3} = 6{,}5 \cdot 10^{12}$

b $165 \text{ miljoen} \times 2 \cdot 10^{8} = 165 \cdot 10^{6} \times 2 \cdot 10^{8}$
$= 3{,}3 \cdot 10^{16}$

c $\dfrac{\text{1,8 duizend}}{\text{75 miljard}} = \dfrac{1{,}8 \cdot 10^{3}}{75 \cdot 10^{9}} = 2{,}4 \cdot 10^{-8}$

Invoeren van een getal in de wetenschappelijke notatie:
- op de TI met EE
- op de Casio met EXP of $\times 10^{x}$
- op de HP met EEX
- op de NumWorks met $\times 10^{x}$.

48 🖩 ⊙ ✱

Bereken. Schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie.

a 12,5 miljoen $\times$ 460 000

b $0{,}018 \times 5 \cdot 10^{-6}$

c $\dfrac{\text{1,5 duizend}}{\text{3 miljard}}$

d $0{,}8^{12} \cdot 2{,}5^{20}$

A49 🖩 ⊙ ✱

Schrijf de antwoorden in de wetenschappelijke notatie. Rond zo nodig af op één decimaal.

a De gemiddelde massa van een lichaamscel bij mensen is $1{,}25 \cdot 10^{-12}$ kg. Uit hoeveel cellen bestaat een mens van 75 kilogram?

b Van een medicijn is direct na toediening 5 mg in het bloed aanwezig. De hoeveelheid medicijn neemt per uur met 40% af. Dat betekent dat er na twee uur nog $5 \cdot 0{,}6^{2} = 1{,}8$ mg van het medicijn in het bloed aanwezig is. Hoeveel mg is er na 24 uur nog in het bloed aanwezig?

A50 🖩 ⊙ ✱

a De 8,3 miljoen Nederlandse huishoudens hebben een gemiddeld spaartegoed van 54 000 euro.
Bereken het totale spaartegoed van alle Nederlandse huishoudens.
Geef je antwoord in gehele miljarden.

b Bij de oudejaarstrekking van de Staatsloterij worden 7 miljoen loten verkocht. Op tien loten valt een prijs van 100 000 euro.
Hoeveel procent van de loten is dat? Schrijf je antwoord in de gewone notatie en rond af op vijf decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan procentberekeningen uitvoeren.

☐ Ik kan berekeningen uitvoeren waarin de wetenschappelijke notatie wordt gebruikt.

▶ OPGAVE C7 THEORIE A
▶ OPGAVE C8 THEORIE B

C7
a Hoeveel procent is 18 van 50?
b Hoeveel is 5,8% van 50?
c Een hoeveelheid van 117 is 32,5% van het totaal.
Hoeveel is het totaal?
d Een hoeveelheid neemt af van 80 naar 60.
Hoeveel procent is de afname?
e Een hoeveelheid van 60 neemt toe met 18%.
Hoeveel is de nieuwe hoeveelheid?
f Een hoeveelheid neemt af met 18%. De nieuwe hoeveelheid is 60.
Hoeveel was de oorspronkelijke hoeveelheid?

C8
a Voor de kust van Nederland is een kunstmatige zandbank aangelegd met behulp van 21,5 miljoen m^3 zand. Naar schatting bestaat een m^3 zand uit 8 miljard zandkorrels.
Uit hoeveel zandkorrels bestaat de zandbank?
b Hoeveel miljoen is $6{,}85 \cdot 10^8$?

Antwoorden

C7 **a** 36%
b 2,9
c 360
d 25%
e 70,8
f 73,2

C8 **a** $1{,}72 \cdot 10^{17}$
b 685 miljoen

© Noordhoff Uitgevers bv

3.4 Rekenen met eenheden

Kennis en vaardigheden

- Je kunt rekenen met lengte-, oppervlakte- en inhoudsmaten.
- Je kunt rekenen met tijd, afstand en snelheid.
- Je kunt in formules eenheden omzetten.
- Je kunt samengestelde eenheden omrekenen.

O51

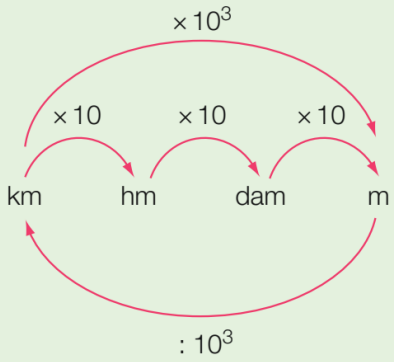
Je weet dat 1 hectometer gelijk is aan 100 meter.
Een vierkante hectometer is een oppervlakte van 1 hm bij 1 hm.
Dit wordt ook wel een hectare genoemd.
Het weiland van boer Aart is 300 bij 420 meter.
Hoeveel hectare is dat?

A 12,6 **B** 1260 **C** 126 000

Theorie A Lengte, oppervlakte en inhoud

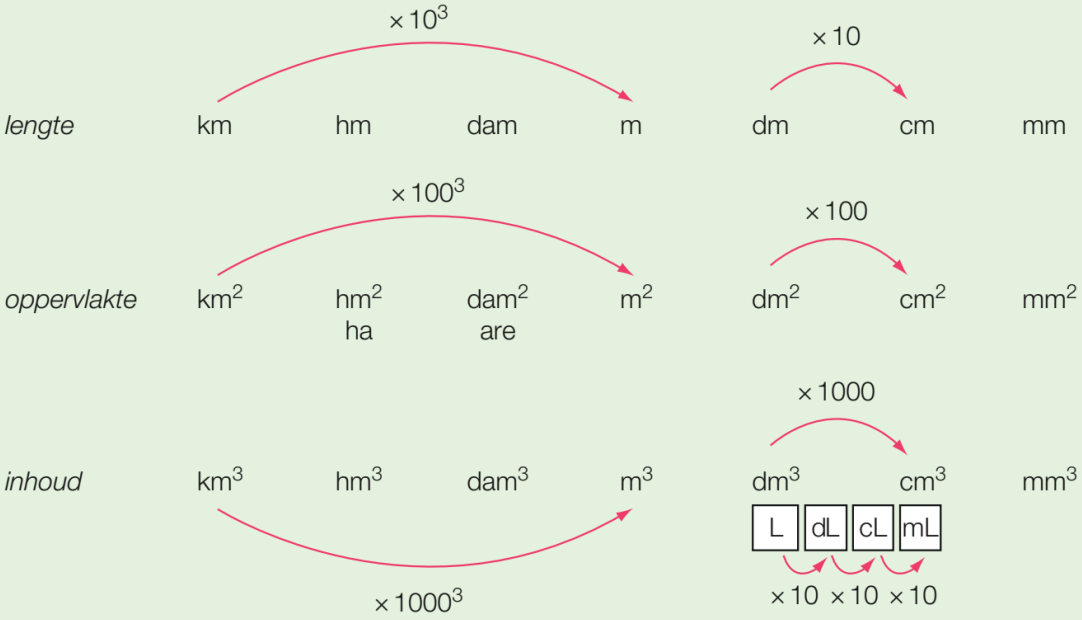
Je weet dat 1 km = 10 hm en 1 hm = 100 meter.
Dit kun je zien in het schema hiernaast.
Merk op dat 1 km = 1000 meter = 10^3 meter en dus ook

$$1 \text{ meter} = \frac{1}{1000} \text{ km} = \frac{1}{10^3} \text{ km}.$$



Hoe je oppervlaktematen en inhoudsmaten omrekent, zie je in het schema hieronder. Bij het omrekenen van km^2 naar m^2 gebruik je $1 \text{ km}^2 = 100 \cdot 100 \cdot 100 \text{ m}^2 = 100^3 \text{ m}^2$

en dus ook $1 \text{ m}^2 = \frac{1}{100^3} \text{ km}^2$.



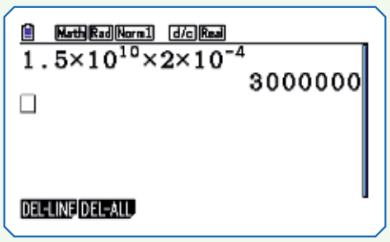
© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Bij een aanvaring met een olietanker komt een flinke hoeveelheid olie in zee terecht. Er vormt zich over een oppervlakte van 150 km^2 een laag olie met een dikte van 0,02 mm.
Bereken hoeveel liter olie in zee is gestroomd.

Aanpak
Omdat 1 liter = 1 dm^3 reken je km^2 om naar dm^2 en mm naar dm.

Uitwerking
150 km^2 = 150 · 100^4 dm^2 = 1,5 · 10^{10} dm^2 en
0,02 mm = $\frac{0{,}02}{10^2}$ dm = 2 · 10^{-4} dm
Dus 1,5 · 10^{10} · 2 · 10^{-4} = 3 000 000 dm^3 = 3 miljoen liter.



Bij opgaven kan op verschillende manieren worden aangegeven in welke eenheid en/of nauwkeurigheid het antwoord gegeven moet worden.
Stel dat wordt gevraagd om een lengte en het resultaat van de berekening is 0,382 meter. Hieronder zie je drie verschillende vragen met voorbeelden van juiste antwoorden.

- Bereken de lengte in centimeters. — 38,2 cm of 38 cm
- Bereken de lengte in gehele centimeters. — alleen 38 cm is juist
- Bereken de lengte in centimeters nauwkeurig. — 38 cm of 3,8 dm of 0,38 m

De 8 geeft het aantal cm weer.

R52

Zie het voorbeeld.

a Licht toe dat 150 km^2 = 150 · 100^4 dm^2 en dat 0,02 mm = $\frac{0{,}02}{10^2}$ dm.

In de theorie staat dat 1 km^2 = 100 · 100 · 100 m^2 = 100^3 m^2.
Jos zegt: omdat 1 km = 1000 m is 1 km^2 = 1000^2 m^2.

b Reken na dat 100^3 hetzelfde is als 1000^2.

c Licht de aanpak van Jos toe.

d Bereken op de manier van Jos hoeveel m^2 overeenkomt met 5 km^2.

53

Vul in.

a 52 hm = ... m

b 3,4 · 10^7 mm = ... km

c 4,3 km^2 = ... m^2

d 6,1 · 10^{10} cm^2 = ... ha

e 1,45 · 10^{-8} km^3 = ... m^3

f 5045 L = ... m^3

g 0,06 dL = ... mL

h 7,5 · 10^5 mm^3 = ... L

© Noordhoff Uitgevers bv

54

a Ronald heeft 50 m^2 hout geverfd en had precies genoeg aan 4 liter verf. Bereken in mm nauwkeurig in welke dikte Ronald de verf heeft aangebracht.

b De kraan in de keuken van Kees en Sandra lekt. Er lekt elke twee seconden één druppel water uit de kraan. Volgens Kees is dat geen probleem, want in een jaar tijd lekt er dan nog geen 8 liter water weg. Onderzoek met een berekening of Kees gelijk heeft. Gebruik dat een druppel een inhoud heeft van 0,05 mL.

A55

De hoeveelheid neerslag wordt meestal gegeven in mm. De gemiddelde jaarlijkse neerslag in De Bilt is ongeveer 880 mm. Dat betekent dat er in een jaar op één vierkante meter in totaal 880 liter neerslag valt.

a Licht dit toe met een berekening.

De gemiddelde jaarlijkse neerslagduur in De Bilt is ongeveer 624 uur. Tijdens een wolkbreuk in De Bilt valt er in 20 minuten 24 mm neerslag. De neerslagintensiteit (het aantal mm neerslag per uur) tijdens de wolkbreuk was veel groter dan de gemiddelde neerslagintensiteit gedurende een jaar.

b Bereken hoeveel keer groter.

c Bereken hoeveel m^3 neerslag er tijdens de wolkbreuk viel op een voetbalveld van 102 bij 65 meter in De Bilt.

In de maand juli valt er gemiddeld 81 mm neerslag in De Bilt. Neem aan dat dit gemiddelde voor heel Nederland geldt.

d Bereken in gehele m^3 hoeveel neerslag er gemiddeld per Nederlander in de maand juli valt in heel Nederland. Gebruik dat de oppervlakte van Nederland (inclusief binnenwater) 41 500 km^2 is en dat Nederland 18,0 miljoen inwoners heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

A56 ∗

De hoeveelheid water op aarde wordt geschat op 1385 miljoen kubieke kilometer (km³). Bijna al dit water is zout en bevindt zich in de zeeën en oceanen.
Slechts een klein deel van het water is zoet. Daarvan is het grootste deel aanwezig in de vorm van ijs, voornamelijk in de ijskappen op de polen en in gletsjers.
De rest van het zoet water zit in meren en rivieren, is grondwater of is als waterdamp in de lucht aanwezig.
De waterkringloop is een gesloten systeem waarbij geen water verloren gaat. Dit betekent dat de totale hoeveelheid water, in welke verschijningsvorm dan ook, constant is.
De ijskappen en gletsjers bevatten 2,1% van al het water op aarde.
Dat is 68,7% van de totale hoeveelheid zoet water.

a Hoeveel km³ zoet water is er op aarde? Hoeveel m³ is dat per aardbewoner? Gebruik dat er 8,1 miljard mensen op aarde zijn.

Jaarlijks verdampt vanuit de oceanen en zeeën 502 800 km³ water en vanaf land (inclusief meren, rivieren, ijskappen en gletsjers) 74 200 km³.
De jaarlijkse hoeveelheid neerslag op de oceanen en zeeën is 458 000 km³.

b Bereken hoeveel procent van het zoet water jaarlijks als neerslag op land valt. Ga ervan uit dat de totale jaarlijkse verdamping gelijk is aan de totale jaarlijkse neerslag. Rond af op twee decimalen.

O57 ⊙ ∗

Stijn heeft de Bruggenloop Nijmegen gelopen. Hij legde het parcours van 7 km af in 27 minuten en 45 seconden. Om zijn gemiddelde snelheid te berekenen, deel je de afstand door de tijd.
Wat is de gemiddelde snelheid van Stijn in km per uur?

A 15,1 **B** 15,3 **C** 25,5

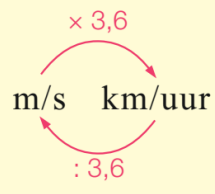
Theorie B Tijd, afstand en snelheid

Snelheden worden in het dagelijks leven meestal gegeven in km per uur (km/uur). Bij wandelen heb je een snelheid van ongeveer 5 km/uur. Een topatleet loopt de marathon met een snelheid van ongeveer 20 km/uur en op snelwegen mag je overdag met de auto 100 km/uur.

$$\text{snelheid} = \frac{\text{afstand}}{\text{tijd}}$$
$$\text{afstand} = \text{snelheid} \times \text{tijd}$$
$$\text{tijd} = \frac{\text{afstand}}{\text{snelheid}}$$

Soms is het nodig om een snelheid om te rekenen van meter per seconde (m/s) naar km/uur of omgekeerd.
Omdat 1 uur = 60 · 60 = 3600 seconden krijg je
1 m/s = 3600 m/uur = 3,6 km/uur.
Dus 1 m/s = 3,6 km/uur.

Omgekeerd is 1 km/uur = $\frac{1}{3{,}6}$ m/s.



© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Johan gaat hardlopen en loopt 10 km in 42 minuten en 22 seconden.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in km/uur. Rond af op drie decimalen.

Uitwerking
42 minuten en 22 seconden is $42 \cdot 60 + 22 = 2542$ seconden.
De gemiddelde snelheid is $\frac{10\,000}{2542}$ m/s $= \frac{10\,000}{2542} \cdot 3{,}6$ km/uur $\approx 14{,}162$ km/uur.

Ook bij vragen die over tijd (en snelheid) gaan, kan op verschillende manieren worden aangegeven in welke eenheid en/of nauwkeurigheid het antwoord gegeven moet worden.
Stel dat wordt gevraagd om een tijdsduur in seconden nauwkeurig en het resultaat is 102,3 seconden. Zowel 1 minuut en 42 seconden als 102 seconden zijn dan juist.

R58

Zie het voorbeeld.
Ajla heeft een andere aanpak. Ze gebruikt
42 minuten en 22 seconden is $\frac{42}{60} + \frac{22}{3600}$ uur.
Bereken hiermee de gemiddelde snelheid in km/uur.

59

a Het wereldrecord 100 meter sprint voor vrouwen staat op naam van Florence Griffith-Joyner met een tijd van 10,49 seconden.
Bereken haar gemiddelde snelheid in km/uur en rond af op drie decimalen.

b Op 23 juli 2023 liep de Nederlandse atlete Sifan Hassan de 5000 meter in 14.13,42. Dat betekent 14 minuten en 13,42 seconden.
Hoeveel km/uur was haar gemiddelde snelheid? Rond af op drie decimalen.

c De marathon is een hardloopwedstrijd over 42,195 km. Kelvin Kiptum uit Kenia liep op 8 oktober 2023 de marathon van Chicago in 2:00.35, dus in 2 uur en 35 seconden.
Wat was zijn gemiddelde snelheid? Geef het antwoord in km/uur en rond af op drie decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

60

Jori loopt een paar keer per week hard. Hij heeft een korte route van 6,0 km en een lange route van 16,8 km.

a Zijn record op de korte route is precies 25 minuten.
Met welke gemiddelde snelheid in km/uur heeft hij die keer gelopen?

b Bij zijn record op de lange route was zijn gemiddelde snelheid 14 km/uur.
Bereken zijn recordtijd in minuten nauwkeurig.

c Het hardloophorloge van Jori geeft telkens na een km de km-tijd en de gemiddelde snelheid over deze km.
Welke km-tijd moet Jori gemiddeld aanhouden als hij zijn korte route in 26 minuten wil lopen?

d Ter voorbereiding op een marathon doet Jori een duurloop. Hij loopt 1 uur en 50 minuten met een gemiddelde snelheid van 12,6 km/uur.
Welke afstand heeft Jori gelopen? Geef je antwoord in km nauwkeurig.

61

Vleermuizen gebruiken ultrageluid als radar. Met hun snuit produceren ze hoogfrequente pieptonen. Uit het teruggekaatste geluid maken ze op wat er zich in hun omgeving bevindt.
Hoeveel seconden zit er tussen het produceren van een pieptoon en het opvangen daarvan, als een voorwerp op een afstand van 200 cm van de vleermuis het geluid weerkaatst? Rond af op drie decimalen. Gebruik dat het geluid een snelheid heeft van 1235 km/uur.

62

De snelheid van het licht is 300 000 km/s. De afstand die het licht in een jaar aflegt heet een lichtjaar.

a Hoeveel seconden doet het licht erover om 1 km af te leggen?
Schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.

b Bereken hoeveel km een lichtjaar is. Schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op twee decimalen.

c De afstand tussen de aarde en de maan is ongeveer 1,3 lichtseconden.
Hoeveel km is dat?

d De onbemande ruimtesonde Voyager 2 werd op 20 augustus 1977 gelanceerd. De sonde raast door de ruimte met een snelheid van 56 500 km/uur.
Hoeveel lichtjaar heeft Voyager 2 nu afgelegd?
Rond het antwoord af op drie decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

63 ⏍ ⊙ ∗

Tussen de plaatsen A en B ligt een snelweg met een lengte van 100 km. Kees rijdt van A naar B en terug. Op de heenreis is zijn gemiddelde snelheid 80 km/uur en op de terugreis 120 km/uur.
Toon aan dat gemiddelde snelheid over heen- en terugreis samen 96 km/uur is.

64 ∗

a Isabella doet aan hardlopen. Ze loopt van een punt A naar een punt B, en meteen daarna terug naar A. Omdat ze erg vermoeid raakt, is haar gemiddelde snelheid op de terugweg de helft van de snelheid op de heenweg. Stel de snelheid op de terugweg is v km per uur en de afstand tussen A en B is d km.
Druk de gemiddelde snelheid over de heen- en terugweg samen uit in v.

b Ties is ook een hardloper, en hij rent heen en weer tussen twee punten C en D. Op de heenweg loopt hij met een snelheid van 14 km/uur en op de terugweg met een snelheid van 12 km/uur. Hij doet 1 uur en 5 minuten over de totale afstand.
Hoeveel km is de afstand tussen C en D?

○65 ⏍ ⊙ ∗

Verhuurbedrijf Van 't Schip berekent de kosten K in euro's voor de daghuur van een boot met de formule $K = 2x + 500$. Hierbij is x de afgelegde afstand in nautische mijlen.
Je kunt de kosten K ook uitdrukken in d, waarbij d de afgelegde afstand in kilometers is. Er geldt dat 1 nautische mijl = 1,852 km.
Meneer Schuit huurt een dag een boot en legt daarmee 20 kilometer af.
Afgerond op één decimaal is 20 km gelijk aan 10,8 nautische mijl.

a Licht dit toe met een berekening en bereken de kosten voor meneer Schuit.

Er geldt $x \approx 0{,}54d$.

b Licht dit toe.

Met $x = 0{,}54d$ wordt de formule $K = 1{,}08d + 500$.

c Licht dit doe en gebruik deze formule om te berekenen hoeveel de kosten zijn bij een afgelegde afstand van 20 km. Klopt dit met je antwoord op vraag a?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie C Eenheden omzetten

In de formule $N = 0{,}01w^2 + 2w + 10$ is w de tijd in weken. Deze formule zet je als volgt om naar een formule waarbij N is uitgedrukt in de tijd d in dagen.
In één week zitten 7 dagen, dus bij $w = 1$ hoort $d = 7$. Dat betekent dat $w = \frac{1}{7}d$ en dat je in de formule w kunt vervangen door $\frac{1}{7}d$.
Zo krijg je
$N = 0{,}01 \cdot (\frac{1}{7}d)^2 + 2 \cdot \frac{1}{7}d + 10 = 0{,}0002040...d^2 + 0{,}28571...d + 10$.
Afronden geeft de formule $N = 0{,}000204d^2 + 0{,}2857d + 10$.

In het voorbeeld hieronder wordt een zogeheten samengestelde eenheid omgerekend: een eenheid die is samengesteld uit meer dan één eenheid, zoals een snelheid in km/uur of m/s.

Voorbeeld

In veel landen, waaronder Nederland, wordt het benzineverbruik van personenauto's vaak uitgedrukt in liter per 100 km. In landen die het Brits-Amerikaanse maatsysteem gebruiken, zoals de Verenigde Staten, wordt het benzineverbruik uitgedrukt in mijl per gallon.
Een auto met een dieselmotor heeft volgens de fabrikant een verbruik van 5,0 liter per 100 km.
Bereken het verbruik in mijl per gallon. Gebruik 1 mijl = 1,6 km en 1 gallon = 3,8 liter.

Uitwerking
5,0 liter per 100 km = 100 km per 5,0 liter

$$100 \text{ km} = \frac{100}{1{,}6} = 62{,}5 \text{ mijl}$$

$$5{,}0 \text{ liter} = \frac{5{,}0}{3{,}8} = 1{,}31... \text{ gallon}$$

$$\text{Dus } \frac{62{,}5}{1{,}31...} = 47{,}5 \text{ mijl per gallon.}$$

R66 Zie het voorbeeld.
In de eerste stap van de uitwerking staat een omkering.
Waarom is deze omkering nodig?

© Noordhoff Uitgevers bv

67

a In de formule $N = 0{,}1d^2 + 0{,}5d + 10$ is d de tijd in dagen.
Zet de formule om naar de vorm $N = at^2 + bt + c$ met t de tijd in uren.

b In de formule $L = 0{,}04t^2 - t + 31$ is t de tijd in dagen en L de lengte in inch.
Zet de formule om naar de vorm $l = aw^2 + bw + c$ met w de tijd in weken en l de lengte in cm. Rond in het antwoord af op twee decimalen en gebruik dat 1 inch = 2,54 cm.

c Een schip legt in 8 uur 110 zeemijlen af.
Bereken de gemiddelde snelheid in km/uur. Rond af op één decimaal.
Gebruik dat 1 zeemijl = 1852 meter.

d Het Arches National Park in Utah (VS) heeft een oppervlakte van 120 vierkante mijlen.
Hoeveel km^2 is dat? Rond af op gehelen. Gebruik dat 1 mijl = 1,6 km.

e Uit Amerikaans onderzoek blijkt dat een tuinslak een snelheid van 0,875 yard/minuut kan bereiken.
Hoeveel km per uur is dat? Rond af op drie decimalen. Gebruik dat 1 yard = 0,9144 meter.

68

In de Verenigde Staten gebruikt men de eenheid kubieke feet (ft^3) om de hoeveelheid gebruikt drinkwater aan te geven.
Met de formule $K = 0{,}025x + 45$ bereken je de kosten in dollars bij het gebruik van x ft^3 drinkwater.
De kosten K zijn ook uit te drukken in y, waarbij y het aantal gebruikte m^3 drinkwater is. Hierbij gebruik je dat 1 foot = 30,48 cm.
Er geldt dat $x \approx 35{,}3y$.

a Toon dit aan.

b Zet de formule $K = 0{,}025x + 45$ om naar de vorm $K = ay + b$. Rond in het antwoord zo nodig af op vier decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

A69

Bij een onderzoek naar de toestand van het Great Barrier Reef voor de noordoostkust van Australië is een model opgesteld van de temperatuur van het zeewater voor de kust.
Het model is $F = 0{,}252m^2 - 3{,}06m + 84{,}2$.
Hierin is F de temperatuur van het zeewater in graden Fahrenheit (°F) en m de tijd in maanden met $m = 0$ op 1 januari en $0 \leq m \leq 12$.
Voor het omrekenen van graden Fahrenheit naar graden Celsius (°C) gebruik je de formule $C = \frac{F - 32}{1{,}8}$. Hierin is C de temperatuur in °C en F de temperatuur in °F.
Uit de formule $C = \frac{F - 32}{1{,}8}$ volgt $F = 1{,}8C + 32$.

a Toon dit aan.

b Tussen 1 februari en 1 april neemt de temperatuur in °C van het zeewater af.
Bereken met hoeveel procent.

c Bereken hoeveel °F de minimale temperatuur van het zeewater is.
Geef ook de minimale temperatuur in °C. Rond af op één decimaal.

De formule $F = 0{,}252m^2 - 3{,}06m + 84{,}2$ is om te zetten naar de formule $C = 0{,}14m^2 - 1{,}7m + 29$. Hierin is C de temperatuur van het zeewater in °C.

d Toon dit aan.

De formule $C = 0{,}14m^2 - 1{,}7m + 29$ is om te zetten naar de formule $C = 0{,}0075w^2 - 0{,}39w + 29$. Hierin is w de tijd in weken met $w = 0$ op 1 januari.

e Toon dit aan. Gebruik 1 maand $= \frac{52}{12}$ weken.

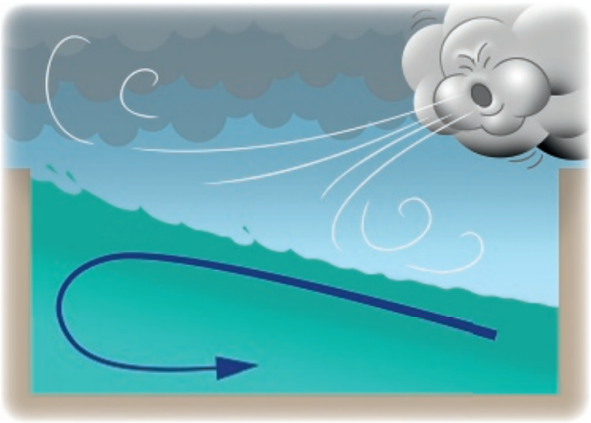
De formule $C = 0{,}0075w^2 - 0{,}39w + 29$ is om te zetten naar een formule van de vorm $C = ad^2 + bd + 29$. Hierin is d de tijd in dagen met $d = 0$ op 1 januari.

f Bereken a en b. Geef a en b in de wetenschappelijke notatie en rond af op twee decimalen.

g Bereken voor welke d de temperatuur van het zeewater minimaal is.
Rond af op gehelen.

© Noordhoff Uitgevers bv

A70 ⊙∗



Bij een orkaan kan er door stormvloed enorme schade aan de kust ontstaan.
Om een idee te krijgen hoe hoog het water kan worden opgestuwd, heeft men het model hiernaast gemaakt. Je ziet een langwerpige bak, die gedeeltelijk met water is gevuld. Er wordt lucht geblazen over het wateroppervlak en daarna wordt er gewacht tot het water stopt met klotsen. Er gebeuren dan twee dingen: het water circuleert en het stuwt met de wind mee op. Op grond van experimenten met zo'n bak heeft men een formule opgesteld van de toename van de hoogte van het water. Deze formule is $h = 0{,}00035 \cdot \frac{v^2 l}{d}$. Hierin is h de toename van de hoogte in voet, v de windsnelheid in mijl per uur, l de lengte in mijl waarover de wind over het wateroppervlak blaast en d de gemiddelde waterdiepte in voet.
Gebruik in deze opgave dat 1 mijl = 1,6 km en 1 voet = 30,5 cm.

a Welke bezwaren zijn er tegen het model van de bak in te brengen, als je de resultaten wilt gebruiken om voorspellingen te doen over de stormvloed bij een orkaan?

b Bij een orkaan met een windsnelheid van 90 mijl per uur, blaast de wind over een lengte van 80 mijl over kustwater dat een gemiddelde diepte heeft van 25 voet.
Bereken de toename van de hoogte van het water aan de kust. Rond af op gehele dm.

c Bij een orkaan met een windsnelheid van 160 km per uur, blaast de wind over een lengte van 120 km over kustwater dat een gemiddelde diepte heeft van 10 meter.
Reken deze gegevens om naar achtereenvolgens mijl per uur, mijl en voet. Bereken hiermee hoeveel de toename van de hoogte van het water aan de kust is. Geef het antwoord in meter en rond af op één decimaal.

d De gegeven formule is om te zetten naar een formule van de vorm $H = c \cdot \frac{V^2 L}{D}$ met H in meter, V in km per uur, L in km en D in meter.
Bereken voor deze formule de constante c. Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan rekenen met lengte-, oppervlakte- en inhoudsmaten. → OPGAVE C9, THEORIE A
- ☐ Ik kan rekenen met snelheid, afstand en tijd. → OPGAVE C10, THEORIE B
- ☐ Ik kan in formules eenheden omzetten. → OPGAVE C11a, THEORIE C
- ☐ Ik kan samengestelde eenheden omrekenen. → OPGAVE C11b, THEORIE C

C9 Rutger bedekt een deel van zijn tuin met een laag boomschors. Hij legt een laag met dikte van 7 cm over een oppervlakte van 40 m^2. De boomschors wordt verkocht in zakken van 480 liter.
Hoeveel zakken heeft hij nodig?

C10 Op 14 april 2024 liep Abdi Nageeye een Nederlands record op de marathon, een afstand van 42,195 km. Zijn eindtijd was 2 uur, 4 minuten en 45 seconden.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in km/uur. Rond af op drie decimalen.

C11
a In de formule $A = 0{,}05t^2 + 4t + 3$ is t de tijd in uren.
Zet deze formule om in een formule waarbij A uitgedrukt wordt in de tijd d in dagen.
b Op de plek waar de Rijn ons land binnenkomt, is de waterdoorvoer gemiddeld 2200 m^3/s.
Hoeveel km^3 is de waterdoorvoer in een jaar? Rond af op gehelen.

Antwoorden

C9 6
C10 20,294 km/uur
C11 **a** $A = 28{,}8d^2 + 96d + 3$ **b** 69

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedentest

3.1 Breuken en verhoudingen

1 Herleid.

a $5 \cdot \frac{3a}{b} \cdot \frac{a-2}{2b}$ **b** $\frac{3x}{4} \cdot \frac{2-y}{x}$ **c** $4p : \frac{4p+1}{2p+1}$

2 Herleid tot één breuk.

a $\frac{4}{3p} - \frac{2}{5p}$ **b** $\frac{1}{x} + x \cdot \frac{5y}{4x^2}$ **c** $\frac{ab}{2a^2} \cdot (b+1) - (a+1) \cdot \frac{3}{a(a+1)}$

3 In een zakje Mexicaanse mix zitten drie soorten zoutjes, namelijk nootjes, ringetjes en driehoekjes in een gewichtsverhouding van 8 : 7 : 4.

a Bereken hoeveel gram van elke soort in de zak zit als het totale gewicht 285 gram is.

b Bereken hoeveel gram driehoekjes in de zak zit als deze in totaal 180 gram nootjes en ringetjes bevat.

3.2 Herleiden van formules

4 **a** Werk bij $(3x-2)^2 - (2x+1)(3x-1)$ de haakjes weg en herleid.

b De formule $L = 0{,}032 \cdot \frac{p}{0{,}0128} \cdot (2+6q)$ is te herleiden tot de vorm $L = apq + bp$.
Bereken a en b.

5 **a** Teken de lijn l: $3x + 4y = 18$.

b Maak y vrij bij de vergelijking $4x - 3y = 15$.

c Druk x uit in y bij de vergelijking $6(2x-1) + 9y = 24$.

d Schrijf P als functie van Q bij de formule $5(\frac{2}{5}P - 6) + 3Q = 4(3-P)$.

3.3 Procentberekeningen en de wetenschappelijke notatie

6 Schrijf de antwoorden in de wetenschappelijke notatie. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a Op een bepaald moment bevindt de maan zich op 384 duizend kilometer van de aarde. De zon staat op dat moment 400 keer zo ver van de aarde.
Hoeveel meter is de afstand tussen de zon en de aarde?

b Van een bacteriesoort is de lengte een miljoenste deel van de lengte van een volwassen mens.
Geef een schatting van de lengte van deze bacterie in mm.

© Noordhoff Uitgevers bv

7 De volgende vragen gaan over een Wereldwinkel.

a In januari was de omzet 3950 euro. In februari daalde de omzet met 38% ten opzichte van januari.
Bereken de omzet in februari.

b Ten opzichte van maart is in april de omzet met 12% toegenomen tot 3250 euro.
Hoeveel was de omzet in maart?

c De omzet steeg in augustus met 14% ten opzichte van juli. Ook in september en oktober steeg de omzet ten opzichte van de maand ervoor. De percentages waren achtereenvolgens 6% en 12%.
Hoeveel procent was de omzet in oktober hoger dan in juli?

d Gemiddeld gaat 45% van de bezoekers van de winkel over tot een aankoop. In november werd 216 keer een aankoop gedaan.
Hoeveel bezoekers kwamen die maand in de winkel?

3.4 Rekenen met eenheden

8 Hans vult zijn bad met 160 liter water. Het bad is balkvormig met een lengte van 1,35 m en een breedte van 52 cm.
Bereken hoe hoog het water komt. Geef je antwoord in gehele cm.

9 Kim gaat hardlopen en loopt een rondje van 5,1 km.

a Ze doet er 42 minuten en 53 seconden over.
Bereken haar snelheid in km/uur. Rond af op één decimaal.

b De beste vriendin van Kim loopt met 11 km/uur hetzelfde rondje.
Hoelang doet ze er over? Geef het antwoord in minuten nauwkeurig.

10 Annelieke meet regelmatig de lengte van haar baby Suze, om te controleren of ze goed groeit. Het eerste half jaar kan haar lengte beschreven worden door de formule $l = -0{,}00002d^2 + 0{,}138d + 50{,}9$. Hierin is l de lengte in centimeter en d de tijd in dagen.

a Zet deze formule om naar een formule waarbij de lengte L in meter is en de tijd w in weken.

Op vakantie in Engeland wil Annelieke flesvoeding geven. Op de verpakking leest ze dat aan elke fluid ounce water (fl.oz.) een schepje melkpoeder moet worden toegevoegd.

b Hoeveel schepjes moet Annelieke aan 250 mL water toevoegen? Rond af op gehelen. Gebruik dat 1 fl.oz. = 28,41 mL.

© Noordhoff Uitgevers bv

Gemengde opgaven

1 **a** Toon aan dat de formule $D = 100 + \frac{400b}{a + 20b}$ herleid kan worden tot $D = \frac{100a + 2400b}{a + 20b}$.

b Toon aan dat de formule $A = \frac{6x^2 + 15}{3x^2} + \frac{x^3 + 4x}{2x^3}$ herleid kan worden tot $A = 2\frac{1}{2} + \frac{7}{x^2}$.

2 **a** Schrijf $\frac{2a + 3}{3} - \frac{(a - 2)^2}{2a - 3}$ als één breuk en werk de haakjes weg.

b Herleid $(b + 4) \cdot \frac{b - 4}{2b} : \frac{b + 4}{b} - 2(4b + 1)$.

3 Eveline doet inkopen voor een schoolkamp en wil 120 blikjes frisdrank kopen. Ze kan kiezen uit een grootverpakking van 24 blikjes of een kleinverpakking van 6 blikjes. Stel dat ze x grootverpakkingen en y kleinverpakkingen koopt. Tussen x en y bestaat het verband $24x + 6y = 120$.

a Teken de lijn die bij dit verband hoort.

b Maak x vrij bij $24x + 6y = 120$.

De grootverpakking kost € 15 en de kleinverpakking is toevallig in de aanbieding, waardoor deze maar € 2,50 kost. Alleen maar kleinverpakkingen kopen zou dus het goedkoopst zijn, maar daar is helaas maar een beperkte voorraad van. Eveline koopt daarom 12 kleinverpakkingen en verder grootverpakkingen. Ze geeft nu meer geld uit dan als ze alleen maar kleinverpakkingen had gekocht.

c Bereken hoeveel meer.

4 Bij grote etappekoersen in het wielrennen worden vaak enkele tijdschema's voor een etappe gemaakt. Er is een langzaam schema, een snel schema en een schema daartussenin. Tijdens de koers houdt men in de gaten op welk schema gereden wordt.
Bij een etappe in de Tour de France wordt gestart om 12:15 uur. Het langzame schema geeft aan dat bij een gemiddelde snelheid van 42 km/uur de finish om 17:30 uur is. In werkelijkheid blijkt de finish al 35 minuten eerder te zijn. De gemiddelde snelheid waarmee in deze etappe is gereden, is dus groter dan de gemiddelde snelheid van het langzame schema. Hoeveel procent groter?

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Mede door het succes van het Nederlands dameselftal is het aantal vrouwelijke leden van de Koninklijke Nederlandse Voetbalbond (KNVB) toegenomen. Zie de tabel hieronder.

LEDENAANTALLEN KNVB

seizoen	’16/’17	’22/’23
aantal leden	1 213 444	1 212 697
waarvan vrouwen/meisjes	154 048	172 259

a Johan beweert dat het aandeel vrouwelijke voetballers tussen het seizoen ’16/’17 en het seizoen ’22/’23 met slechts 1,5% is toegenomen. Lieke zegt dat er sprake is van een flinke groei van 11,8%.
Laat met berekeningen zien hoe zij op deze percentages zijn gekomen. Met wie ben je het eens? Licht toe.

b In het seizoen 2021/2022 was de verhouding tussen het aantal mannelijke en vrouwelijke leden bij benadering 6 : 1. Het totaal aantal leden was ongeveer 1 192 100.
Bereken hiermee het aantal mannelijke en vrouwelijke leden van de KNVB in dat seizoen.

c In de eerste drie seizoenen van de genoemde periode bedroeg de groei van het aantal vrouwelijke leden in vergelijking met het seizoen ervoor achtereenvolgens 2,8%, 1,6% en 0,9%.
Hoeveel procent was de groei in deze drie seizoenen samen?

6 In de medaillespiegel van de Olympische Spelen is van alle landen bijgehouden hoeveel gouden, zilveren en bronzen medailles ze hebben gewonnen.
Tot en met de Zomerspelen van 2020 in Tokio zijn er 18 876 medailles uitgereikt waarvan 6 187 gouden.

a Nederland heeft 2,26% van deze gouden medailles gewonnen.
Hoeveel gouden medailles zijn dat?

b Noorwegen heeft 2,797% van alle tot dan toe uitgereikte medailles gewonnen, waarvan gouden, zilveren en bronzen medailles in de verhouding 12 : 11 : 10.
Hoeveel bronzen medailles won Noorwegen?

c Oostenrijk is een echt wintersportland. Het haalde 232 medailles op de Olympische Winterspelen, dat is 71,2% van alle door het land tot dan toe behaalde olympische medailles.
Hoeveel medailles haalde Oostenrijk in totaal op de Olympische Spelen?

© Noordhoff Uitgevers bv

7 In 2023 deden in totaal 176 520 leerlingen examen op vwo, havo en vmbo. Zie de tabel hiernaast.
Het valt Vlad op dat de verhouding van de leerlingen vwo : havo : vmbo ongeveer 2 : 3 : 5 is.

EXAMENLEERLINGEN 2023

vwo	38 313
havo	49 991
vmbo	88 216
totaal	176 520

a Bereken de aantallen voor vwo, havo en vmbo in het geval de verhouding precies 2 : 3 : 5 zou zijn. Ga uit van het totaal.

b Bereken het totale aantal leerlingen in het geval de verhouding precies 2 : 3 : 5 zou zijn en het aantal op de havo 49 991 is.

De laatste jaren zijn de volgende trends waar te nemen. Enerzijds loopt het totale aantal leerlingen terug, anderzijds loopt het aantal leerlingen op het vmbo verhoudingsgewijs terug.
Ga uit van een verhouding die precies 2 : 3 : 5 is.
Neem aan dat op een gegeven moment het totale aantal leerlingen met 10% is teruggelopen en dat alleen het aantal vmbo-leerlingen is verminderd.
De nieuwe verhouding wordt daardoor 2 : 3 : p.

c Bereken p.

8 De wereldbevolking is het totaal aantal mensen op aarde. In 2023 was de wereldbevolking 8078 miljoen mensen.

a Schrijf dit aantal in de wetenschappelijke notatie.

Men verwacht dat er in 2050 in Europa 704 miljoen mensen zijn en dat dit 7,27% van de wereldbevolking in dat jaar zal zijn.

b Hoeveel zal volgens deze verwachting de procentuele toename van de wereldbevolking in de periode 2023-2050 zijn?

Sommige gebieden zijn dichtbevolkt, andere juist dunbevolkt. De bevolkingsdichtheid van een gebied is $d = \frac{N}{A}$. Hierbij is N het aantal mensen in het gebied en A de oppervlakte van het gebied in km^2.

c In 2023 woonden in India 1,43 miljard mensen op 3,29 miljoen km^2. Bereken de bevolkingsdichtheid van India in dat jaar. Rond af op tientallen.

De zuidelijke helft van een land heeft drie keer zoveel inwoners als de noordelijke helft.

d Neem aan dat de noordelijke helft een bevolkingsdichtheid van 100 mensen per km^2 heeft.
Bereken de bevolkingsdichtheid van het hele land.

e Neem aan dat in de noordelijke helft van dit land x mensen wonen en dat de oppervlakte van dit deel y km^2 is.
Druk de bevolkingsdichtheid van het hele land uit in x en y.

© Noordhoff Uitgevers bv

9 **a** Door een UTP-kabel voor internetverkeer gaat een signaal met een snelheid die ongeveer tweederde van de lichtsnelheid is. De familie Collée heeft een UTP-kabel van de huisaansluiting naar de computer op zolder. Deze kabel is 10 meter lang.
Hoeveel seconden doet het signaal erover om van de huisaansluiting naar de computer te komen? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie. Gebruik dat de lichtsnelheid 300 000 km/s is.

b Door een regenbui is het water in een opblaasbaar zwembadje 12 mm gestegen. De afmetingen van het rechthoekige zwembadje zijn 269 bij 175 cm.
Hoeveel regendruppels zijn er in het zwembadje gevallen? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie. Gebruik dat een regendruppel 0,03 mL is.

10 Als het in de winter door de wind bijzonder koud aanvoelt, vermeldt men behalve de werkelijke temperatuur vaak ook de gevoelstemperatuur. Voor de berekening van deze temperatuur kan bijvoorbeeld de formule $F = 0{,}0044w^2 - 0{,}93w + 34{,}5$ worden gebruikt. Hierin is F de gevoelstemperatuur in graden Fahrenheit en w de windsnelheid in mijl per uur. Deze formule is geldig voor temperaturen rond het vriespunt.

Gebruik in deze opgave dat 1 mijl = 1,6 km en dat geldt $C = \frac{F - 32}{1{,}8}$,

waarin C de temperatuur in graden Celsius is.

a Bereken de gevoelstemperatuur bij een windsnelheid van 10 mijl per uur. Geef het antwoord zowel in graden Fahrenheit als graden Celsius.

b Bereken de gevoelstemperatuur bij een windsnelheid van 40 km/uur. Geef het antwoord in graden Celsius.

c Bereken in graden Celsius de gevoelstemperatuur bij een windsnelheid van 15 m/s. Rond af op één decimaal.

Het KNMI gebruikte tot 2009 deze formule in de vorm $C = av^2 + bv + c$, met C de gevoelstemperatuur in graden Celsius en v de windsnelheid in meter per seconde.

d Bereken a, b en c. Rond af op achtereenvolgens vier decimalen, twee decimalen en één decimaal.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

4 Combinatoriek

Meneer Holland heeft bordstiften in de kleuren rood, blauw, groen, zwart en paars. Hij kiest drie stiften van verschillende kleur, waarmee hij de uitwerking van een opgave op het bord wil schrijven. Hij wil de kleuren blauw en paars niet allebei gebruiken, omdat de kleuren te veel op elkaar lijken. Onderzoek hoeveel drietallen kleuren mogelijk zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

4.1 Regels voor telproblemen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt een telprobleem overzichtelijk weergeven met behulp van een rooster of systematisch noteren.
- Je kunt de vermenigvuldigingsregel en de somregel gebruiken.
- Je kunt het aantal mogelijkheden berekenen in situaties met of zonder herhaling.

O1

Bente gooit met een rode en een blauwe dobbelsteen.
In het rooster hiernaast staat een begin van een overzicht van de mogelijke resultaten.

a Vul het overzicht verder in.

b Hoeveel mogelijkheden zijn er om minstens 9 ogen te gooien?

Je kunt het aantal mogelijkheden om minstens 9 ogen te gooien ook vinden door alle mogelijkheden op te schrijven.

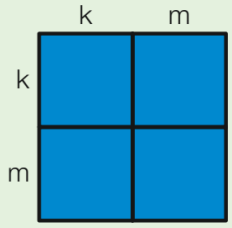
c Doe dat.

SOM VAN DE OGEN

blauwe dobbelsteen \ rode dobbelsteen	1	2	3	4	5	6
6	7					
5	6					
4	5					
3	4	5				
2	3	4				
1	2	3				

Theorie A Telproblemen overzichtelijk weergeven

In opgave 1 heb je gezien dat je bij het oplossen van een telprobleem een rooster kunt gebruiken of alle mogelijkheden op kunt schrijven.
Gebruik bij het opschrijven van alle mogelijkheden altijd een logische volgorde, zodat je geen mogelijkheid vergeet. Dit heet **systematisch noteren**.



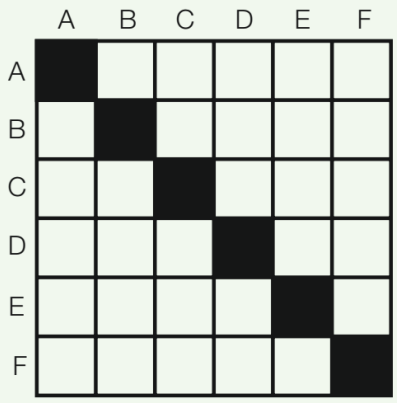
Het aantal mogelijkheden bij het gooien met twee geldstukken is uit het rooster hiernaast af te lezen. Dit aantal is 4.

Door systematisch noteren zie je dat er 6 manieren zijn om bij een worp met drie dobbelstenen in totaal 5 ogen te gooien.

113	131	311
221	212	122

Voorbeeld

Zes voetbalteams spelen een hele competitie.
In een hele competitie speelt elk team één keer thuis en één keer uit tegen elk ander team.
Hoeveel wedstrijden zijn er in totaal?



Aanpak
Maak een rooster zoals hiernaast.

Uitwerking
Er zijn $6 \cdot 5 = 30$ wedstrijden.

© Noordhoff Uitgevers bv

R2

a Zie het voorbeeld. Sebastiaan wil het probleem oplossen door alle wedstrijden systematisch te noteren.
Wat is het nadeel van de methode van Sebastiaan?

b Merle wil weten op hoeveel manieren je bij een worp met drie dobbelstenen in totaal zes ogen kunt gooien. Merle wil hierbij een rooster gebruiken.
Welk probleem ondervindt Merle bij het maken van dat rooster?

3

a De basketbalteams van de klassen 4v1, 4v2, 4h1, 4h2 en 4h3 spelen een halve competitie.
Hoeveel wedstrijden zijn er in totaal?

b Hoeveel wedstrijden zijn er in een halve competitie met tien teams?

In een halve competitie speelt ieder team één keer tegen elk ander team.

4

Aan een voetbalkampioenschap doen 40 teams mee. De teams worden ingedeeld in acht groepen van vijf teams die een hele competitie spelen. De groepswinnaars spelen daarna volgens het afvalsysteem met uit- en thuiswedstrijden om het kampioenschap.

a Hoeveel wedstrijden worden in totaal gespeeld?

b Hoeveel wedstrijden heeft de kampioen gespeeld?

5

Jona gaat een hardloopschema maken. Hij wil iedere week drie dagen hardlopen, telkens op dezelfde dagen. Hij wil nooit twee dagen achter elkaar hardlopen.
Hoeveel verschillende schema's kan Jona maken?

6

In deze opgave kijken we naar positieve gehele getallen van drie cijfers waarvan het middelste cijfer het gemiddelde is van de andere twee. Een voorbeeld van zo'n getal is 741.
Hoeveel van die getallen zijn er?

7

Een gewone dobbelsteen wordt ook wel een zesvlaksdobbelsteen genoemd.
Jai gooit met een viervlaksdobbelsteen en een achtvlaksdobbelsteen. Zie de groene en de blauwe dobbelsteen in de figuur hiernaast.
Hoeveel mogelijkheden zijn er

a om in totaal 8 ogen te gooien

b om minder dan 8 ogen te gooien

c waarbij het product van de ogen 8 is?

A8

a Hoeveel mogelijkheden zijn er om met twee viervlaksdobbelstenen in totaal een even aantal te gooien?

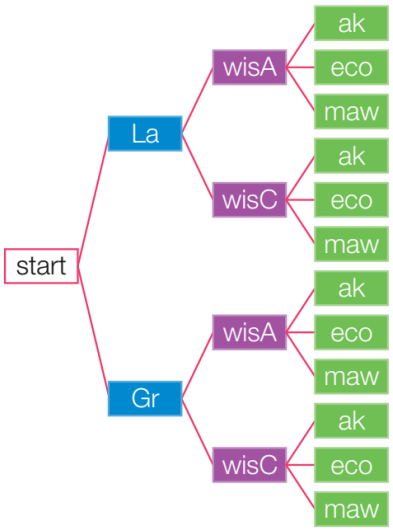
b Hoeveel mogelijkheden zijn er om met drie achtvlaksdobbelstenen in totaal 6 te gooien?

c Hoeveel mogelijkheden zijn er om met drie gewone dobbelstenen in totaal minstens 16 ogen te gooien?

© Noordhoff Uitgevers bv

9

Yuri gaat naar 4 gymnasium. Een deel van zijn vakkenpakket ligt al vast, maar hij moet nog een drietal vakken kiezen. Allereerst moet hij kiezen tussen de vakken Latijn en Grieks. Verder kiest hij wiskunde A of wiskunde C. Ten slotte kiest hij nog één van de vakken aardrijkskunde, economie en maatschappijwetenschappen. In het boomdiagram hiernaast zijn alle 12 mogelijke keuzes weergegeven.



a Hoe kun je dit aantal berekenen?

b Hoeveel mogelijkheden zijn er over als Yuri kiest voor wiskunde A?

In plaats van het boomdiagram, kun je ook onderstaand wegendiagram gebruiken. Ook hiermee kun je berekenen dat er in totaal $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ keuzemogelijkheden zijn voor Yuri.

c Hoe kun je met het wegendiagram het aantal mogelijkheden berekenen als Yuri Latijn kiest?

d Yuri wil op advies van de school economie niet kiezen als hij heeft gekozen voor wiskunde C.
Hoeveel mogelijkheden blijven er dan nog over voor Yuri?

Theorie B De vermenigvuldigingsregel en de somregel

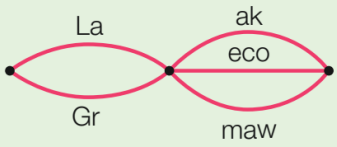
In opgave 9 heb je gezien dat je de keuzemogelijkheden van Yuri kan weergeven in een **boomdiagram** of **wegendiagram**. Voor het berekenen van het totaal aantal mogelijkheden gebruik je de **vermenigvuldigingsregel**.
Yuri kiest een eerste vak *en* een tweede vak *en* een derde vak. Zo bereken je dat er in totaal $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ mogelijkheden zijn.

De vermenigvuldigingsregel
Een gecombineerde handeling die bestaat uit
handeling I die op p manieren kan worden uitgevoerd
***en* handeling II die op q manieren kan worden uitgevoerd**
***en* handeling III die op r manieren kan worden uitgevoerd**
kan op $p \times q \times r$ manieren worden uitgevoerd.

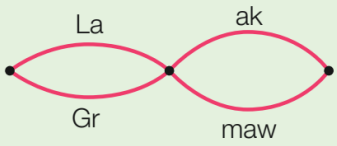
© Noordhoff Uitgevers bv

Wanneer Yuri economie alleen kiest in combinatie met wiskunde A, dan horen hierbij twee wegendiagrammen. Zie de figuur hieronder.

Met wiskunde A:



Met wiskunde C:



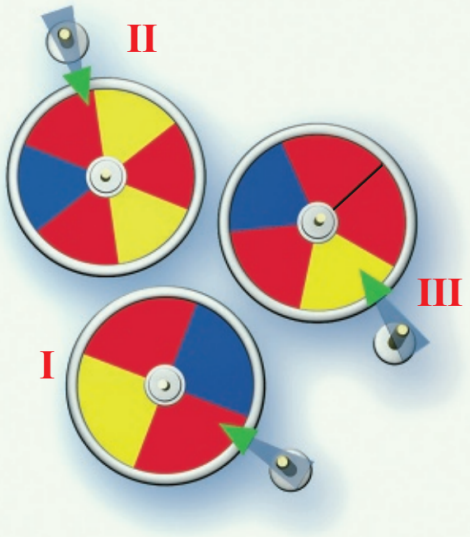
Yuri kiest voor wiskunde A *of* voor wiskunde C. In het eerste geval zijn er $2 \cdot 3$ mogelijkheden, in het tweede geval $2 \cdot 2$ mogelijkheden. In totaal zijn er dus $2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 10$ mogelijkheden. Je hebt naast de vermenigvuldigingsregel ook de **somregel** gebruikt.

Optellen of vermenigvuldigen?
Kan handeling I op p manieren en handeling II op q manieren, dan kan
- **handeling I *en* handeling II op $p \times q$ manieren**
- **handeling I *of* handeling II op $p + q$ manieren.**

Bij 'of' hoort optellen. Soms kun je het woordje 'of' er eerst bij denken, zoals bij vraag b in het voorbeeld hieronder.

Voorbeeld

Robert laat de schijven hiernaast elk één keer draaien.
Hoeveel uitkomsten zijn er met
a drie keer rood
b drie gelijke kleuren
c twee keer geel en één keer blauw?



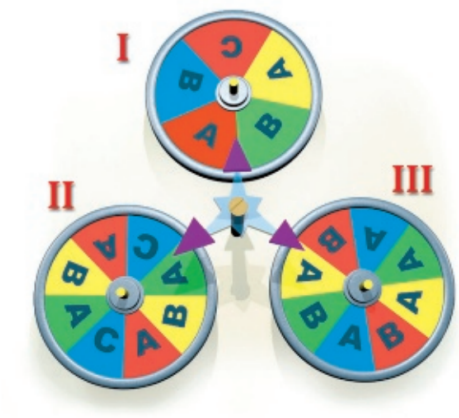
Uitwerking
a rrr
aantal = $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$
b rrr *of* bbb *of* ggg
aantal = $2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 21$
c ggb *of* gbg *of* bgg
aantal = $1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 5$

© Noordhoff Uitgevers bv

10

Muriël laat de schijven hiernaast elk één keer draaien.
Hoeveel uitkomsten zijn er

a met drie keer een A
b met drie keer dezelfde letter
c met twee keer een A en één keer een C
d zonder B
e met twee keer groen en één keer rood?



11

Op een boekenplank staan 11 Engelse, 8 Duitse en 5 Franse boeken.

a Loubna leest van deze boeken eerst een Engels, dan een Duits en ten slotte een Frans boek.
Hoeveel mogelijke drietallen zijn er?
b Hoeveel mogelijke tweetallen zijn er voor Loubna als ze twee boeken leest: eerst een Engels boek en daarna een Frans of een Duits boek?

A12

Een docent stelt een toets samen uit een bestand met oude toetsopgaven. De docent let niet op de volgorde van de opgaven. Het aantal beschikbare opgaven per paragraaf zie je in de tabel.
Hoeveel toetsen kan de docent samenstellen uit dit bestand als

TOETSOPGAVEN

paragraaf	1	2	3	4
aantal	3	2	4	3

a ze uit elke paragraaf één opgave voor de toets kiest
b ze één opgave uit paragraaf 1 of 2 kiest en één opgave uit elk van de andere paragrafen?

De docent maakt een extra opgave voor het toetsbestand en kan nu 108 verschillende toetsen samenstellen met uit elke paragraaf een opgave.
c Onderzoek bij welke paragraaf ze de extra opgave heeft gemaakt.

A13

Silke koopt een nieuwe iPhone op de website van de fabrikant. Ze moet een aantal keuzes maken. Zie de tabel hiernaast. Nadat ze een model, kleur en opslagruimte heeft gekozen, wordt nog gevraagd of ze een oude telefoon wil inruilen en ten slotte of ze een extra verzekering wil afsluiten. Pas als Silke ook die keuzes heeft gemaakt, verschijnt er een prijs in beeld.

	mogelijkheden
model	15 of 15 Plus
kleur	blauw, roze, geel, groen, zwart
opslagruimte	128, 256 of 512 GB

a Hoeveel keuzemogelijkheden heeft Silke in totaal?
b Silke weet alleen zeker dat ze een blauwe iPhone wil kopen en dat ze geen telefoon wil inruilen. Verder heeft ze nog geen beslissingen genomen.
Hoeveel procent van de keuzemogelijkheden valt voor Silke af?

Angelina wil ook een nieuwe iPhone kopen. Ze overweegt alleen om een verzekering af te sluiten wanneer ze een iPhone 15 Plus koopt, of wanneer ze een iPhone 15 koopt met 512 GB opslagruimte. Ze ruilt geen oude telefoon in.
c Bereken hoeveel keuzemogelijkheden Angelina heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

O14

De firma Nelovo voorziet zijn artikelen van een code bestaande uit twee letters. Gekozen wordt uit de letters A, B, C en D.
Hoeveel codes zijn mogelijk? Onderscheid de volgende situaties.

- De tweede letter is een andere dan de eerste letter.
- De letters mogen gelijk zijn.

Theorie C Met en zonder herhaling

Het aantal rondwandelingen van A via B terug naar A in de figuur hiernaast is $5 \cdot 5 = 25$.
Je gaat er dan vanuit dat je terug dezelfde weg mag kiezen als heen.
Wil je terug niet dezelfde weg nemen als heen, dan is het aantal $5 \cdot 4 = 20$.
Het is bij telproblemen belangrijk je af te vragen of **herhalingen** zijn toegestaan.

Zonder herhaling

Een bestuur van acht personen kiest uit zijn midden eerst de voorzitter, dan de secretaris en ten slotte de penningmeester.
Het aantal manieren om deze functies te verdelen, bereken je als volgt.

aantal = 8 × 7 × 6 = 336

- 8: eerst de voorzitter: keuze uit 8 personen
- 7: dan de secretaris: keuze uit 7 personen
- 6: ten slotte de penningmeester: keuze uit 6 personen

Met herhaling

In een volleybalteam met acht spelers wordt in de maanden maart, april en mei een speler van de maand gekozen. Dit mag steeds dezelfde speler zijn.
Het aantal manieren om de spelers van de maand te kiezen, bereken je als volgt.

aantal = 8 × 8 × 8 = 512

- 8: 8 spelers voor de eerste maand
- 8: 8 spelers voor de tweede maand
- 8: 8 spelers voor de derde maand

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Een bedrijf codeert zijn artikelen met getallen van vijf cijfers.
Alleen de cijfers 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8 worden gebruikt.
Hoeveel van die getallen zijn er in het geval

a elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
b elk cijfer vaker gebruikt mag worden en het getal groter dan 50 000 moet zijn
c elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 65 000 moet zijn?

Aanpak

c Is het eerste cijfer 5 of lager, dan maken de volgende cijfers niets uit.
Is het eerste cijfer 6, dan moet het tweede cijfer lager dan 5 zijn.

Uitwerking

a aantal = $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ Voor de eerste plaats 7 mogelijkheden, dan nog 6 voor de tweede plaats, …

b Het eerste cijfer is 5, 6, 7 of 8.
aantal = $4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 9604$ Herhalingen zijn toegestaan.

c Het eerste cijfer is 2, 3, 4 of 5 *of*
het eerste cijfer is 6 en het tweede is 2, 3 of 4.
aantal = $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1620$

15

In deze opgave gaat het om getallen van vier cijfers, waarin alleen maar de cijfers 3, 4, 5, 6, 7 en 8 voorkomen.
Hoeveel van die getallen zijn er in het geval

a elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
b elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 6000 moet zijn
c elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal groter moet zijn dan 6500?

16

Bij een uitwisseling maakt een groep van acht Nederlandse en tien Franse leerlingen een wandeling door Lille. Eén leerling maakt foto's, één leerling maakt een verslag en één leerling bepaalt de route.
Op hoeveel manieren zijn drie leerlingen aan te wijzen als

a een Franse leerling de route bepaalt en het verder niet uitmaakt
b een Franse leerling de route bepaalt en Nederlandse leerlingen de foto's en het verslag maken
c de foto's en het verslag niet allebei door Franse leerlingen en niet allebei door Nederlandse leerlingen worden gemaakt?

© Noordhoff Uitgevers bv

17 ⏍⊙∗

De IATA (International Air Transport Association) gebruikt een drieletter-code om een vliegveld aan te geven. Zo hoort AMS bij Schiphol en PAP bij Port-au-Prince (Haïti).

a Hoeveel van die codes zijn in totaal mogelijk?
b Hoeveel codes zijn mogelijk waarbij geen twee gelijke letters naast elkaar staan?
c Hoeveel codes zijn mogelijk die met een L beginnen?

R18 ⏍⊙∗

Een bedrijf voorziet zijn artikelen van een lettercode. Bij het coderen gebruikt men de letters a, b, c, d en e.
Bedenk een vraag waarop het antwoord luidt
a er zijn 5^4 codes mogelijk
b er zijn $5 \cdot 4 \cdot 3$ codes mogelijk
c er zijn $5 \cdot 4 \cdot 5^3$ codes mogelijk
d er zijn $5 \cdot 4 \cdot 4$ codes mogelijk.

A19 ⏍⊙∗

Veel landen hebben een vlag met drie verticale banen. In deze opgave beperken we ons tot de kleuren zwart, wit, blauw, rood, groen, geel en oranje.

a Hoeveel vlaggen met drie verticale banen zijn te vormen als alle kleuren verschillen?
b Hoeveel vlaggen met drie verticale banen zijn met deze kleuren te vormen als twee aan elkaar grenzende banen verschillende kleuren hebben?

De vlag van Denemarken bestaat uit een kruis met vier vlakken.
c Op hoeveel manieren is dit patroon te kleuren als het kruis een andere kleur heeft dan elk van de vier vlakken, waarbij de vier vlakken van kleur mogen verschillen?

A20 ⏍⊙∗

In de tabel staat informatie over de leerlingen van een vierde klas. Uit deze groep worden twee leerlingen gekozen voor de leerlingenraad. De als eerste gekozen leerling vertegenwoordigt de klas en de als tweede gekozen leerling is reserve.
Hoeveel tweetallen zijn mogelijk als

	jongen	meisje	
15 jaar	8	11	19
16 jaar	4	1	5
17 jaar	2	5	7
	14	17	31

a de eerste leerling een jongen is en de tweede leerling een meisje van 17 jaar
b één van de twee 16 jaar moet zijn
c er een jongen en een meisje bij zijn
d de leerlingen even oud zijn
e de eerste leerling ouder moet zijn dan de tweede?

21 ∗

Rosalin schrijft getallen van tien cijfers op die alleen bestaan uit de cijfers 1, 2 en 3. Ook wil zij dat cijfers die naast elkaar staan precies 1 verschillen.
Hoeveel getallen kan Rosalin maximaal opschrijven?

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan een telprobleem overzichtelijk weergeven met behulp van een rooster of systematisch noteren. ▶ OPGAVE C1 THEORIE A
- ☐ Ik kan de vermenigvuldigingsregel en de somregel gebruiken. ▶ OPGAVE C2 THEORIE B
- ☐ Ik kan het aantal mogelijkheden berekenen in situaties met of zonder herhaling. ▶ OPGAVE C3 THEORIE C

C1 **a** Nyima gooit met een gewone dobbelsteen en een viervlaksdobbelsteen. Hoeveel mogelijkheden zijn er om een aantal ogen te gooien dat deelbaar is door 3?

b Zoë gooit met drie viervlaksdobbelstenen. Hoeveel mogelijkheden zijn er om in totaal minstens 10 ogen te gooien?

C2 Een schoenfabrikant laat je zelf schoenen samenstellen. Je kunt kiezen uit 3 standaardmodellen en 2 premiummodellen. Bij het standaardmodel kun je voor de veters en de kleuraccenten op de schoen beide kiezen uit 5 kleuren, maar is het logo op de schoen altijd zwart. Bij de premiummodellen heb je voor veters en kleuraccenten beide 6 keuzes en is het logo goud- of zilverkleurig. Bereken hoeveel verschillende schoenen je zo kunt samenstellen.

C3 In een bedrijf krijgt elk artikel een code. Bij het coderen gebruikt men de letters o, p, q, r, s en t. Een voorbeeld van een drielettercode is spp.

a Hoeveel drielettercodes zijn mogelijk als elke letter maar één keer gebruikt mag worden?

b Hoeveel drielettercodes zijn mogelijk als elke letter vaker gebruikt mag worden?

c Hoeveel vierlettercodes zijn mogelijk waarbij niet twee dezelfde letters naast elkaar staan?

Antwoorden

C1 **a** 8
b 10

C2 219

C3 **a** 120
b 216
c 750

© Noordhoff Uitgevers bv

4.2 Permutaties en combinaties

Kennis en vaardigheden

- Je kunt herkennen of je met permutaties of combinaties te maken hebt en je kunt het bijbehorende aantal mogelijkheden berekenen.
- Je kunt de vermenigvuldigings- en somregel gebruiken in situaties waar je met combinaties te maken hebt.

O22

Een groep van tien vrienden heeft een vriendenweekend. Eén van hen reserveert de verblijfplaats, één regelt het vervoer en een derde doet de inkopen.

a Op hoeveel manieren kunnen deze drie taken verdeeld worden?

b Op hoeveel manieren kunnen tien verschillende taken over deze tien vrienden verdeeld worden?

Theorie A Permutaties

Aan een sprintwedstrijd doen acht lopers mee. We noemen ze A, B, C, D, E, F, G en H. We vragen ons af op hoeveel manieren de gouden, de zilveren en de bronzen medaille bij deze lopers terecht kunnen komen. Het antwoord volgt uit de vermenigvuldigingsregel. Dat aantal is $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Eén van de rangschikkingen is BEA. Een ander woord voor rangschikking is **permutatie**. Dus het aantal permutaties van 3 uit 8 is $8 \cdot 7 \cdot 6$. Bij een permutatie kunnen geen herhalingen optreden. Bij veel telproblemen in de vorige paragraaf ging het om het berekenen van aantallen permutaties.

Het aantal permutaties van 4 uit 10, oftewel het aantal rangschikkingen van vier dingen die je uit tien dingen kiest, is $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

Permutatie komt van het Latijnse woord *permutare*, dat verwisselen of omwisselen betekent.

Het aantal permutaties van 6 uit 8 is
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$
en het aantal permutaties van 8 uit 8 is
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
De notatie voor dit laatste product is 8!.
Spreek uit: 8 **faculteit**. Dus het aantal permutaties van acht dingen is 8!.

Het aantal permutaties van n dingen, dus het aantal rangschikkingen van n dingen, is $n!$.
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

De Franse wiskundige Christian Kramp gebruikte omstreeks 1800 voor het eerst de notatie $n!$ voor $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

De GR heeft opties waarmee je faculteiten en het aantal permutaties kunt berekenen.

- TI ! en nPr vind je via f2.
- Casio ! en nPr vind je in het OPTN-PROB-menu.
- NumWorks Faculteit en Permutatie vind je in de toolbox bij Kansrekenen-Combinatoriek.
- HP Factorieel en Permutatie vind je bij Kans in het werksetmenu (Mem B) Wisk.

Voorbeeld

Een reclameblok bestaat uit 9 items: 2 over zakelijke producten, 3 over huishoudelijke artikelen en 4 over voedingsmiddelen.

a Op hoeveel manieren kunnen deze items worden gerangschikt?

b Op hoeveel manieren kunnen deze items worden gerangschikt als de drie items over huishoudelijke artikelen direct na elkaar komen?

Aanpak

a Je hebt te maken met een permutatie van 9 uit 9, dus gebruik een faculteit.

b Vat de 3 items over huishoudelijke artikelen *eerst* als één item op. Er zijn dan 7 items. Bedenk dat je vervolgens de 3 items over huishoudelijke artikelen ook nog onderling kunt rangschikken.

Uitwerking

a aantal = $9! = 362\,880$

b aantal = $7! \cdot 3! = 30\,240$

23

a Van de favoriete artiest van Otje staan twaalf nummers op een streamingdienst. Ze stelt een top vijf samen.
Op hoeveel manieren kan dat?

b In een kamer staan acht stoelen op een rij. Vijf personen komen de kamer binnen. Elke persoon neemt plaats op een stoel.
Op hoeveel manieren kan dat?

c Een fotograaf heeft 14 foto's gemaakt van het zeehondencentrum in Pieterburen. In een brochure van tien pagina's wordt op elke pagina één foto afgedrukt.
Op hoeveel manieren kunnen de foto's geplaatst worden?

© Noordhoff Uitgevers bv

24 ⏍⊙∗

Sasha heeft vijf verschillende wiskundeboeken en drie verschillende scheikundeboeken. Ze zet ze naast elkaar op een lege boekenplank.

a Op hoeveel manieren kan ze de acht boeken rangschikken?

b Op hoeveel manieren kan ze de boeken rangschikken als de wiskundeboeken naast elkaar moeten staan?

c Op hoeveel manieren kan ze de boeken rangschikken als zowel de wiskunde- als de scheikundeboeken naast elkaar moeten staan?

25 ⏍⊙∗

Thijmen is zijn vijfcijferige toegangscode van Magister vergeten, maar hij weet nog wel dat alle cijfers verschillend zijn.

a Hoeveel toegangscodes zijn mogelijk?

b Hij herinnert zich na een tijdje dat de cijfers 2, 5, 7, 8 en 9 in zijn code voorkomen.
Hoeveel toegangscodes zijn er met deze cijfers?

26 ⏍⊙∗

Een saxofoonkwartet bereidt een concert voor dat zal bestaan uit vier klassieke stukken, drie jazznummers en twee popnummers.
Op hoeveel manieren kunnen zij deze werken ten gehore brengen als zij

a met een klassiek stuk beginnen en met een jazznummer eindigen

b de jazznummers direct achter elkaar willen spelen

c steeds een klassiek stuk willen afwisselen met een ander nummer

d de stukken van elk genre direct achter elkaar willen spelen?

A27 ⏍⊙∗

De selectie van het eerste team van korfbalvereniging Olympia ‘22 bestaat uit zes heren en zes dames.
De trainer wijst een aanvoerder en een reserve-aanvoerder aan.

a Op hoeveel manieren kan dit?

Aan het begin van de competitie wordt een foto van de selectie gemaakt.
De fotograaf zet de twaalf spelers op een rij.

b Hoeveel rijen zijn mogelijk?

c Hoeveel rijen zijn mogelijk waarbij de heren naast elkaar staan?

28 ∗

Er moet een trein gemaakt worden door achter een locomotief vijf wagons (A, B, C, D en E) te plaatsen. Wagon A moet dichter bij de locomotief komen dan wagon B.
Op hoeveel manieren kan deze trein gemaakt worden?

R29 ⏍⊙∗

Een bedrijf gebruikt codes met de letters a, b, c, d, e en f.
Bedenk een vraag waarbij er

a 6! codes zijn

b $6 \cdot 5 \cdot 4$ codes zijn

c 6^4 codes zijn

d $5! \cdot 2!$ codes zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

O30

a Hoeveel permutaties van 2 uit 4 zijn er?

Een klas kiest een afvaardiging van twee leerlingen voor het schoolparlement. Vier leerlingen van de klas tonen belangstelling, namelijk Anne, Bas, Chris en Daphne.
De permutaties Anne - Daphne en Daphne - Anne leggen dezelfde afvaardiging vast.

b Hoeveel afvaardigingen kan de klas leveren?

Theorie B Combinaties

Voor het organiseren van een feest bieden zich vijf leerlingen A, B, C, D en E aan. De leraar wijst uit deze vijf leerlingen er drie aan die het organisatiecomité gaan vormen. Hoeveel comités zijn er samen te stellen?
Een eerste gedachte zou de volgende kunnen zijn. Voor het eerste lid heb je vijf mogelijkheden, voor het tweede lid vier en voor het derde lid zijn er nog drie mogelijkheden. Toch is het antwoord $5 \cdot 4 \cdot 3$ niet juist.
Je moet er namelijk rekening mee houden, dat het comité ABD hetzelfde is als de comités ADB, BDA, BAD, DAB en DBA. De volgorde waarin de leerlingen gekozen zijn, doet er bij een comité immers niet toe. Deze $3! = 6$ gelijke comités tellen maar voor één. Steeds zijn er $3!$ gelijke comités, dus je moet $5 \cdot 4 \cdot 3$ door $3!$ delen.

Het aantal comités is $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$.

Is bij het kiezen van 3 dingen uit 5 dingen de volgorde *niet* van belang, dan spreken we van het aantal **combinaties** van 3 uit 5.
Bij het aantal comités van 3 uit 5 gaat het om combinaties en niet om permutaties. Het aantal combinaties van 3 uit 5 wordt genoteerd als $\binom{5}{3}$.
Spreek uit: vijf boven drie.

Het aantal combinaties van k uit n, oftewel het aantal manieren om k dingen te kiezen uit n dingen zonder op de volgorde te letten, is $\binom{n}{k}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Op de GR vind je de optie voor combinaties in hetzelfde menu als de optie voor permutaties.
Op de TI en Casio worden combinaties weergegeven met nCr.

Ga na dat $\binom{5}{3} = 10$.

Voorbeeld

Frauke heeft tien boeken in de kast staan die ze al heeft gelezen. Ze besluit er drie weg te geven.
Hoeveel mogelijkheden zijn er

a als ze drie vrienden elk één boek geeft
b als ze één vriendin drie boeken geeft?

Aanpak

Er moeten drie boeken uit tien boeken gekozen worden. Dus je hebt te maken met permutaties of combinaties. Ga per situatie na of de volgorde van belang is.

Uitwerking

a aantal $= 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ ← De volgorde is van belang, dus permutaties.

b aantal $= \binom{10}{3} = 120$ ← De volgorde is niet van belang, dus combinaties.

31

a Uit een klas worden zes leerlingen gekozen om boodschappen te doen voor het schoolfeest.
b Bij een verloting zijn drie prijzen te winnen: een fiets, een grafische rekenmachine en een taart.
c In een klas worden vijf identieke bioscoopbonnen verloot.
d Uit de top tien van vorige week stel je een eigen top drie samen.
e Van alle docenten van een school komen vijf docenten op een schoolfeest.

R32

In een klas met 25 leerlingen worden vijf kaartjes verloot voor een concert.

a Op hoeveel manieren kan dat?

Liv berekent het antwoord van vraag a met $\binom{25}{20}$, want zij denkt dat je net zo goed kunt berekenen op hoeveel manieren 20 leerlingen geen kaartje krijgen.

b Onderzoek of dit klopt.

c Onderzoek met enkele getallenvoorbeelden of geldt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

33

Jan gaat op vakantie. Hij heeft 15 paar schoenen, waarvan hij er vier mee wil nemen op vakantie.

a Hoeveel keuzemogelijkheden heeft Jan?

b Jan heeft twee paar winterschoenen, die hij niet geschikt vindt om mee te nemen. Bovendien wil hij zijn hardloopschoenen zeker meenemen. Met hoeveel neemt het aantal keuzemogelijkheden daardoor af ten opzichte van het aantal van vraag a?

34

Op het Simon Stevin Lyceum heeft de sciencevleugel 12 lokalen die allemaal naast elkaar liggen.

a Drie lokalen krijgen een nieuw type bord.
Op hoeveel manieren kunnen deze lokalen gekozen worden?

b Op hoeveel manieren kunnen 12 klassen over deze lokalen worden verdeeld?

c Op hoeveel manieren kunnen zes docenten over deze lokalen worden verdeeld?

d Tijdens een vijfde uur zijn er 4 natuurkundelessen, 3 scheikundelessen en 5 biologielessen.
Hoeveel verdelingen van deze lessen over de lokalen zijn mogelijk als de docenten met hetzelfde vak naast elkaar willen zitten?

35

De vier kleurpotloden hiernaast kunnen op verschillende volgorden naast elkaar worden gelegd. Sebas kan door zijn kleurenblindheid het verschil tussen groen en rood niet zien.
Hoeveel verschillende volgorden kan Sebas zien?

36

Bij de finale van de Welsh Open, een snookerwedstrijd, gaat het om 'best of 17'. Dat wil zeggen dat wie het eerst 9 frames heeft gewonnen de finale wint. Milkins en Murphy spelen de finale van de Welsh Open.
Hoeveel mogelijkheden zijn er

a voor Murphy om in 14 frames te winnen

b waarbij de finale 17 frames duurt

c voor Milkins om in hoogstens 13 frames te winnen?

R37

a Hoeveel is $\binom{17}{0}$, $\binom{17}{1}$, $\binom{17}{16}$ en $\binom{17}{17}$?

b Beredeneer hoe je zonder de GR aan de antwoorden van vraag a kunt komen.

c Geef $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ en $\binom{n}{n}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

A38 Uit een klas van 28 leerlingen wordt een basketbalteam van acht spelers samengesteld.

a Hoeveel teams zijn mogelijk?

b Op hoeveel manieren kunnen de acht spelers op een rij gaan staan?

c Bij basketbal staan per team vijf spelers in het veld.
Op hoeveel manieren kunnen de vijf startende spelers gekozen worden uit de acht?

d Bij basketbal zijn er vijf posities in het veld, zoals center en point-guard.
Op hoeveel manieren kunnen deze gevuld worden met de acht spelers?

O39 Isa moet voor haar examendossier vijf Engelse en vier Duitse boeken lezen. De Engelse boeken kiest ze uit een lijst van 60 boeken en de Duitse uit een lijst van 40 boeken.
Op hoeveel manieren kan Isa

a de vijf Engelse boeken kiezen

b de vier Duitse boeken kiezen

c de vijf Engelse én de vier Duitse boeken kiezen?

Theorie B Aantallen combinaties vermenigvuldigen en optellen

In het voorbeeld gebruik je de vermenigvuldigingsregel en de somregel, dit keer in een situatie waarin je met combinaties te maken hebt.

Voorbeeld

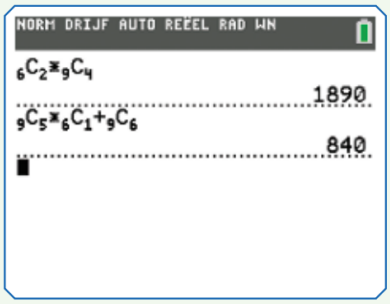
Op een school bestaat de feestcommissie uit zes jongens en negen meisjes. Na elk feest maken zes leden van de feestcommissie de zaal schoon. Hoeveel schoonmaakploegen zijn mogelijk met

a twee jongens **b** minstens vijf meisjes?

Aanpak

a De volgorde is niet van belang, dus het gaat om combinaties.
In een schoonmaakploeg met twee jongens zitten ook vier meisjes.
Kies dus twee van de zes jongens *en* vier van de negen meisjes.
Gebruik de vermenigvuldigingsregel.

b Minstens vijf meisjes wil zeggen: vijf meisjes en één jongen *of* zes meisjes. Gebruik de somregel.



Uitwerking

a $\text{aantal} = \binom{6}{2} \cdot \binom{9}{4} = 1890$

b $\text{aantal} = \binom{9}{5} \cdot \binom{6}{1} + \binom{9}{6} = 840$

© Noordhoff Uitgevers bv

40

Zie het voorbeeld.
Hoeveel schoonmaakploegen zijn er met

a drie jongens
b alleen maar jongens
c hoogstens één meisje
d meer dan vier jongens?

41

Levi heeft twaalf vrienden. Met vijf van deze vrienden gaat hij naar de bioscoop.

a Hoeveel vijftallen zijn mogelijk?
b Van de vrienden van Levi zijn de broers Quincy en Jasper onafscheidelijk. Daarom zal Levi nooit uitsluitend één van de broers uitnodigen.
Hoeveel vijftallen zijn nu mogelijk?
c Van zijn vrienden hebben Thiago en Don ruzie.
Op hoeveel manieren kan Levi vijf vrienden kiezen als hij Thiago en Don niet samen wil uitnodigen?

42 *

Bij poker wordt een spel met 52 kaarten gebruikt. Er zijn vier soorten kaarten: klaveren, schoppen, harten en ruiten. Van elke soort zijn er 13 kaarten, namelijk 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A.
Bij poker draait het om een set van vijf kaarten. Een voorbeeld daarvan is full house, dat is een drietal van dezelfde getallen of letters en ook nog een tweetal.
Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er voor full house?

A43 *

In de tabel zie je de verdeling naar leeftijd van een vierde klas.
Er wordt een klankbordgroep van vier leerlingen gekozen.
Hoeveel groepen zijn mogelijk

a met twee 15-jarigen en twee 18-jarigen
b met twee 15-jarigen en één 18-jarige
c met drie of vier 17-jarigen
d met allemaal leerlingen van dezelfde leeftijd?

leeftijd	aantal
15	6
16	14
17	5
18	3

Uit deze groep van 28 leerlingen worden er twee gekozen die het klassenuitje gaan voorbereiden. De eerste leerling organiseert de activiteit en de tweede leerling regelt het vervoer.
Hoeveel tweetallen zijn mogelijk als

e één van de twee 17 jaar is
f ze beide even oud zijn?

© Noordhoff Uitgevers bv

A44

Restaurant Tapas serveert allerlei kleine gerechten om te delen.
Hieronder zie je welke gerechten dat zijn.

vlees	vis	vegetarisch
serranoham	ansjovis	geitenkaas met honing
kippenpootjes	knoflookgarnalen	gegrilde groene asperges
ossenhaaspuntjes	calamares	champignons in knoflook
albondigas	wraps met zalm	spinazie-kaaskroketjes
spareribs	zeebaarsfilet	aardappeltortilla
chorizo	garnalenkroketjes	roergebakken groente
		patatas bravas
		brood met aïoli
		gemengde salade

Er zijn dus zes vleesgerechten om uit te kiezen, zes visgerechten en negen vegetarische gerechten.

a Op hoeveel manieren kun je acht verschillende gerechten kiezen?

b Kim en Nikkie willen zeven verschillende gerechten bestellen, waarbij in ieder geval patatas bravas en garnalenkroketjes.
Op hoeveel manieren kan dat?

c Peter en Sarah eten geen vlees, maar soms wel vis. Ze willen minstens zes vegetarische gerechten.
Hoeveel manieren zijn er voor hen om in totaal acht verschillende gerechten te kiezen?

d Kees en Matthijs houden erg van vlees en gaan twee vleesgerechten dubbel kiezen. Daarnaast kiezen ze nog vier verschillende vegetarische gerechten en twee verschillende visgerechten.
Op hoeveel manieren kan dat?

Het restaurant heeft vier keuzes voor een dessert.

e Op hoeveel manieren kun je een menu samenstellen van vier verschillende gerechten en daarna al dan niet een dessert?

Je kunt de gerechten van het restaurant ook thuis laten bezorgen, door online te bestellen. Op de website staat de top vijf van de meest gekozen tapas.

f Hoeveel mogelijkheden zijn er om een top vijf te maken?

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan herkennen of ik met permutaties of combinaties te maken heb en ik kan het bijbehorende aantal mogelijkheden berekenen.

▶ OPGAVE C4
THEORIE A,B

☐ Ik kan de vermenigvuldigings- en somregel gebruiken in situaties waar je met combinaties te maken hebt.

▶ OPGAVE C5
THEORIE C

C4 Een klas 5 vwo wiskunde C bestaat uit negen leerlingen.

a Drie leerlingen zijn hun geodriehoek vergeten.
Hoeveel drietallen zijn mogelijk?

b Meneer Klunder deelt een rode, een blauwe, een zwarte en een groene bordstift uit aan vier verschillende leerlingen.
Hoeveel viertallen zijn mogelijk?

c Op hoeveel manieren kan meneer Klunder de leerlingen verdelen over de 15 beschikbare tafeltjes?

C5 In een klas van 29 leerlingen zitten 13 jongens en 16 meisjes. Uit deze klas wordt een klankbordgroep van vijf leerlingen gekozen.

a Hoeveel groepen bestaan uit alleen maar jongens of alleen maar meisjes?

b Hoeveel groepen zijn er met minstens vier meisjes?

Antwoorden

C4 **a** 84
b 3024
c 1 816 214 400

C5 **a** 5655
b 28 028

© Noordhoff Uitgevers bv

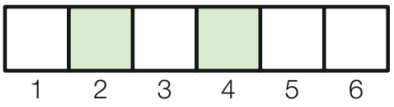
4.3 Rijtjes en roosters

Kennis en vaardigheden

- Je kunt herkennen of een telprobleem is om te zetten in een rijtje A's en B's en in zo'n geval het bijbehorende aantal mogelijkheden berekenen.
- Je kunt herkennen of een telprobleem is om te zetten in een rijtje met meer dan twee letters en in zo'n geval het bijbehorende aantal mogelijkheden berekenen.

O45

Een bedrijf voorziet zijn artikelen van een code door in een rijtje van zes vierkantjes er twee groen te maken. Het maken van een code komt dus neer op het kiezen van twee van de zes vierkantjes.



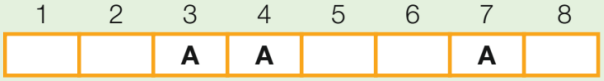
a Gaat het hierbij om combinaties of om permutaties? Licht toe.

b Hoeveel codes kan het bedrijf maken?

Theorie A Rijtjes bestaande uit A's en B's

Een voorbeeld van een rijtje met drie A's en vijf B's is ABBBAABB. Het totale aantal rijtjes bestaande uit drie A's en vijf B's vind je als volgt.

Kies drie van de acht hokjes om een A in te zetten. Dat kan op $\binom{8}{3}$ manieren. Omdat de volgorde waarin je de drie hokjes kiest niet van belang is, heb je te maken met een combinatie.



Heb je de drie A's geplaatst, dan komen de vijf B's in de resterende vijf hokjes. Dat kan maar op 1 manier.

Dus er zijn $\binom{8}{3} \cdot 1 = \binom{8}{3} = 56$ rijtjes met drie A's en vijf B's.

Het aantal rijtjes bestaande uit drie A's en vijf B's is $\binom{8}{3}$.

Je had ook eerst in vijf van de acht hokjes een B kunnen zetten en daarna drie A's in de resterende drie hokjes.

Dat kan op $\binom{8}{5} = 56$ manieren.

Het aantal rijtjes bestaande uit drie A's en vijf B's is dus $\binom{8}{3}$ en ook $\binom{8}{5}$.

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

Het totale aantal rijtjes van acht hokjes met in elk hokje een A of een B is gelijk aan $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}=256$.

$\binom{8}{0}$: 0 A's en 8 B's

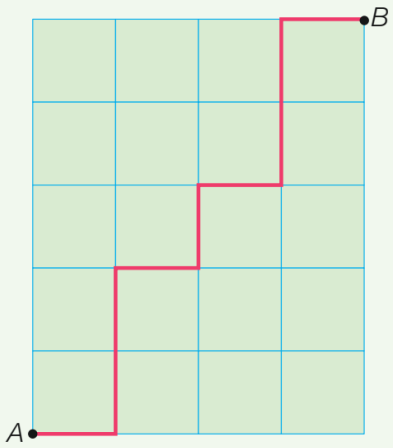
Maar het totale aantal van 256 manieren om acht hokjes met A's en B's te vullen, is ook als volgt te vinden.
Er zijn twee manieren om het eerste hokje te vullen *en* er zijn twee manieren om het volgende hokje te vullen, enzovoort.
In totaal zijn er $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^8 = 256$ manieren.

Het totale aantal rijtjes van acht hokjes met in elk hokje een A of een B is 2^8.

In het voorbeeld hieronder zie je een telprobleem dat wordt omgezet in een rijtje met de letters O en N.

Voorbeeld

We kijken in het rooster hiernaast naar routes van *A* naar *B* zonder omwegen. Een mogelijke route is weergegeven in het rood.
Hoeveel routes zijn er in totaal mogelijk?



Aanpak
Voor een stap naar boven noteren we N (van Noord) en voor een stap naar rechts een O (van Oost). We geven de rode route aan met ONNONONNO. Elke mogelijke route heeft 5 keer een N en 4 keer een O.

Uitwerking
aantal $= \binom{9}{5} = 126$

R46

Zie het voorbeeld. Ewout berekent het aantal mogelijke routes met $\binom{9}{5} \cdot \binom{4}{4}$.

Waarom vermenigvuldigt hij met $\binom{4}{4}$? Licht zonder berekening toe dat Ewout hetzelfde antwoord vindt.

© Noordhoff Uitgevers bv

47

David gooit tien keer met een geldstuk. Telkens noteert hij K (kop) of M (munt). Een mogelijke serie is KKMMKMMMKK.
Hoeveel series zijn er

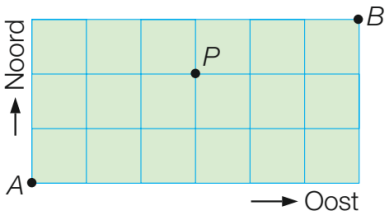
a met acht keer kop
b met vijf keer kop
c in totaal mogelijk
d die met KK beginnen?

48

Van sommige steden bestaat de plattegrond uit een rechthoekig stratenplan. Op de foto zie je een stukje van zo'n plattegrond in Barcelona.
Bereken het aantal routes van A naar B zonder omwegen.

49

Zie het rooster in de figuur hiernaast. We vragen ons af hoeveel routes er zijn van A via P naar B zonder omwegen.



a Hoeveel routes zijn er van A naar P zonder omwegen?
b Hoeveel routes zijn er van P naar B zonder omwegen?
c Hoeveel routes zijn er van A via P naar B zonder omwegen?

50

Elsbeth gooit met vijf dobbelstenen. Ze vraagt zich af hoeveel mogelijkheden er zijn om in totaal 28 ogen te gooien. Ze bedenkt dat 66655 één van de mogelijkheden is. Door systematisch de mogelijkheden te noteren, ziet ze dat 'drie zessen en twee vijven' 10 keer voorkomt. Zie hiernaast.

66655
66565
66556
65665
65656
65566
56665
56656
56566
55666

a Hoe kun je dit aantal berekenen met combinaties?

Elsbeth bedenkt dat je met 'vier zessen en een vier' ook aan 28 ogen komt.

b Hoeveel mogelijkheden zijn er om 'vier zessen en een vier' te gooien?
c Hoeveel mogelijkheden zijn er om met vijf dobbelstenen in totaal 28 ogen te gooien?

51

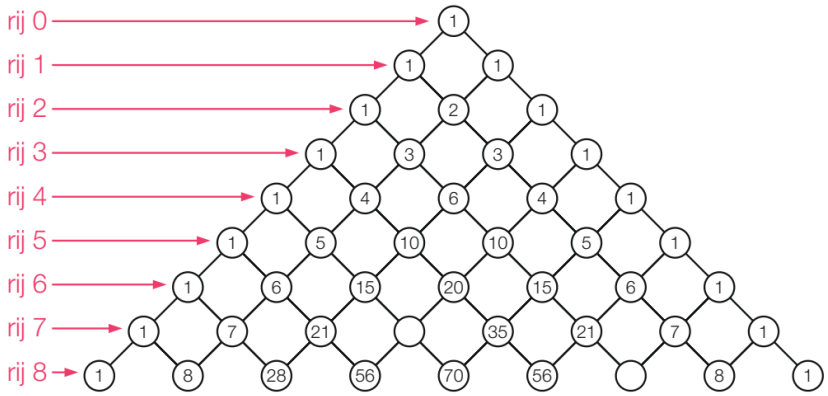
Voor een theorie-examen moeten 20 tweekeuzevragen worden beantwoord op een formulier.

a Hoeveel mogelijkheden zijn er om het formulier in te vullen?
b Hoeveel mogelijkheden zijn er met 15 juiste antwoorden?
c Een kandidaat slaagt als hij minstens 80% van de vragen juist beantwoordt.
Op hoeveel manieren kun je het formulier invullen om te slagen?
Hoeveel procent is dat van het totale aantal manieren om het formulier in te vullen?

© Noordhoff Uitgevers bv

52 ⊙ ✱

In de figuur hiernaast zie je een gedeelte van de **driehoek van Pascal**. Elk getal in de driehoek van Pascal geeft het aantal kortste routes om vanuit de top op die plaats te komen.



a Hoe kun je met combinaties het getal 20 in rij 6 berekenen?

b Bereken op dezelfde manier het ontbrekende getal in rij 7.

Frank redeneert als volgt: op de plaats van het ontbrekende getal in rij 7 kun je alleen komen via de twee plaatsen die er schuin boven staan. Dus er zijn 15 + 20 = 35 mogelijke routes.

c Bereken op deze manier het ontbrekende getal in rij 8. Controleer je antwoord met behulp van een combinatie.

Rij 12 bestaat uit de getallen $\binom{12}{0}, \binom{12}{1}, \binom{12}{2}, \ldots, \binom{12}{12}$.

d Bereken de som van de getallen in de 12^e rij.

R53 ⊙ ✱

Kees en Frits maken rijtjes bestaande uit drie A's en vijf B's.

Kees zegt: Er zijn $\binom{8}{3}$ rijtjes.

Frits redeneert als volgt.

- Ik moet een rangschikking maken van 8 letters, dus ik heb 8! mogelijkheden.
- Maar er zijn 3 gelijke A's bij, dus ik moet delen door 3! en er zijn 5 gelijke B's bij, dus ik moet delen door 5!.

Het totale aantal rijtjes is dus $\frac{8!}{3! \cdot 5!}$.

a Controleer dat $\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \binom{8}{3} = \binom{8}{5}$.

Op bladzijde 172 heb je gezien dat $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \binom{5}{3}$. En zo is $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \binom{8}{3}$.

Vermenigvuldig je teller en noemer van $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$ met 5!, dan krijg je $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3! \cdot 5!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!}$. Hiermee is aangetoond dat $\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \binom{8}{3}$.

b Gebruik net als Frits faculteiten om de opgaven 47a en 47b te maken.

© Noordhoff Uitgevers bv

54

a Bij een voetbalwedstrijd is de eindstand 2-4. Een mogelijk scoreverloop is 1-0, 1-1, 1-2, 2-2, 2-3, 2-4.
Geef dit scoreverloop in een rooster aan als route van (0, 0) naar (2, 4).

b Hoeveel scoreverlopen zijn mogelijk met eindstand 2-4?

c Hoeveel scoreverlopen zijn mogelijk met ruststand 3-1 en eindstand 5-4?

A55

Een bedrijf codeert zijn artikelen met de letters A en B.
Een code van vijf letters is bijvoorbeeld BAABA.

a Hoeveel codes van zeven letters zijn er met minstens vijf A's?

b Hoeveel codes van zes letters zijn er die meer A's dan B's bevatten?

c Hoeveel codes van negen letters zijn er in totaal?

A56

a Hoeveel scoreverlopen zijn mogelijk bij een voetbalwedstrijd met eindstand 6-3?

b Hoeveel scoreverlopen zijn mogelijk bij een voetbalwedstrijd waarin vier keer gescoord wordt?

A57

Hoeveel mogelijkheden zijn er om

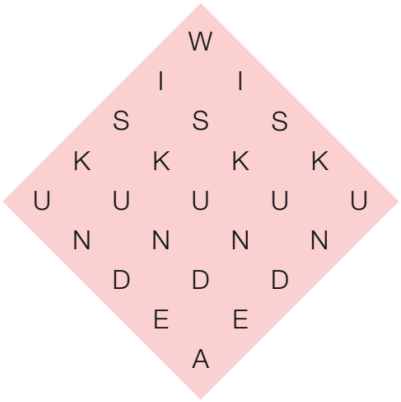
a met vier dobbelstenen in totaal 6 ogen te gooien

b met zes dobbelstenen in totaal 34 ogen te gooien?

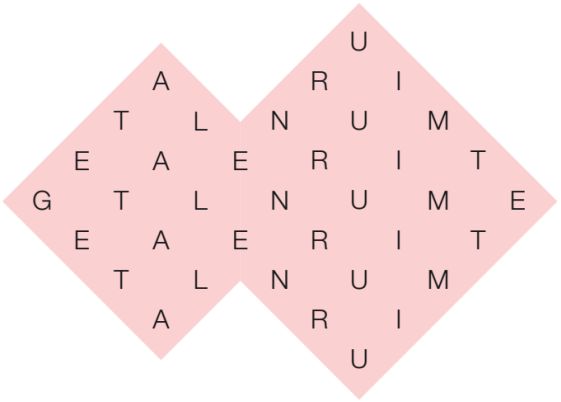
A58

a Op hoeveel manieren kun je in figuur a WISKUNDE A lezen?

b Op hoeveel manieren kun je in figuur b GETAL EN RUIMTE lezen?



a

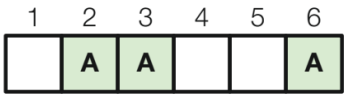


b

© Noordhoff Uitgevers bv

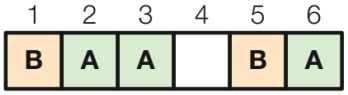
O59

In de figuur hiernaast zie je een manier om in zes hokjes drie A's te plaatsen.



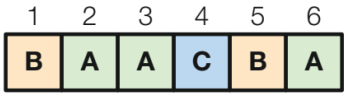
a Op hoeveel manieren kan dat in totaal?

Nu worden er van de resterende hokjes twee gekozen waarin een B wordt geplaatst. Hiernaast zie je daarvan een voorbeeld.



b Licht toe dat er $\binom{3}{2}$ manieren zijn om dit te doen.

Er kan nu nog op één manier een C geplaatst worden.



c Gebruik dit om het aantal rijtjes bestaande uit drie A's, twee B's en een C te berekenen.

Om het aantal rijtjes te berekenen, kun je ook eerst kijken naar het aantal manieren om C in een hokje te zetten, daarna de twee B's en ten slotte de drie A's.

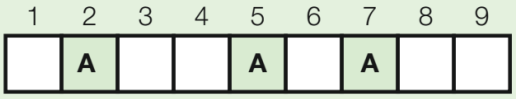
d Laat zien dat de berekening die daarbij hoort dezelfde uitkomst geeft.

Theorie B Rijtjes met meer dan twee letters

Het totale aantal rijtjes bestaande uit drie A's, vier B's en twee C's vind je als volgt.

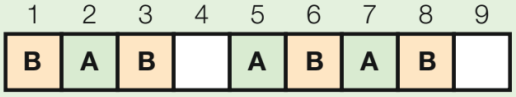
- Zet in drie van de negen hokjes een A.

  Dat kan op $\binom{9}{3}$ manieren.

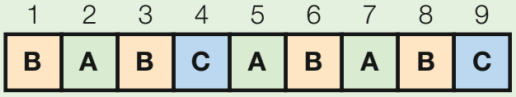


- Zet vervolgens in vier van de resterende zes hokjes een B.

  Dat kan op $\binom{6}{4}$ manieren.



- Zet ten slotte twee C's in de resterende twee hokjes. Dat kan maar op 1 manier.



Dus er zijn $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{4} \cdot 1 = \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{4} = 1260$ rijtjes met drie A's, vier B's en twee C's.

Het maakt niet uit met welke letter je begint bij het vullen van de hokjes. Zet je eerst de vier B's, vervolgens de twee C's en ten slotte de drie A's, dan krijg je $\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2}$ mogelijke rijtjes. Ook dit aantal is 1260.

Het totale aantal rijtjes van negen letters, waarbij alleen maar A's, B's en C's worden gebruikt, is $3^9 = 19\,683$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Bereken het aantal getallen
a van zes cijfers die bestaan uit drie tweeën, twee vieren en een vijf
b van acht cijfers die bestaan uit twee enen, vier tweeën, een drie en een vier.

Uitwerking

a aantal $= \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 60$

b aantal $= \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{1} = 840$

R60 ⊙∗

Het aantal rijtjes bestaande uit drie A's, vier B's en vijf C's is $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5}$, maar ook $\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}$.
Licht dit toe.

61 ⊙∗

a Hoeveel rijtjes zijn mogelijk met acht A's, vier B's en twee C's?
b Hoeveel rijtjes zijn mogelijk met drie P's, vijf Q's, één R en vier T's?
c Bereken het aantal rangschikkingen van de letters van het woord MISSISSIPPI.
d Hoeveel mogelijkheden zijn er om met vijf dobbelstenen twee zessen, twee vijven en een vier te gooien?
e Hoeveel mogelijkheden zijn er om met twaalf dobbelstenen elk ogenaantal even vaak te gooien?

A62 ⊙∗

a Vroeger gaven schepen signalen door met behulp van vlaggen. Neem aan dat een signaal uit 10 vlaggen bestaat en dat er 4 rode, 3 blauwe en 3 witte vlaggen zijn.
Hoeveel signalen zijn er te geven?
b Een telefoonnummer begint met 06 en bestaat verder uit 3 vieren, 4 vijven en 1 negen.
Hoeveel van die telefoonnummers zijn mogelijk?

A63 ⊙∗

Bij een kwaliteitscontrole in een fabriek controleert een medewerker de kwaliteit van de geproduceerde artikelen. Een artikel wordt goedgekeurd, moet worden bijgewerkt of wordt afgekeurd. In de computer wordt een lijst bijgehouden, waarop per artikel staat wat de uitslag van de controle is. Hiernaast zie je een voorbeeld van het begin van zo'n lijst.

1	goedgekeurd
2	bijwerken
3	goedgekeurd
…	…

De medewerker controleert op een dag de kwaliteit van twintig artikelen. Hiervan worden er veertien goedgekeurd en twee afgekeurd.
Bereken hoeveel verschillende lijsten er in dat geval mogelijk zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

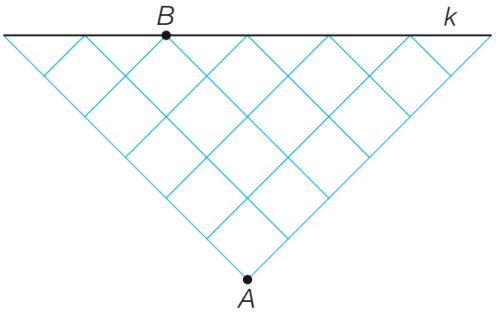
☐ Ik kan herkennen of een telprobleem is om te zetten in een rijtje A's en B's en in zo'n geval het bijbehorende aantal mogelijkheden berekenen.

▶ OPGAVE C6
THEORIE A

☐ Ik kan herkennen of een telprobleem is om te zetten in een rijtje met meer dan twee letters en in zo'n geval het bijbehorende aantal mogelijkheden berekenen.

▶ OPGAVE C7
THEORIE B

C6 Zie het rooster hieronder.



a Hoeveel routes zijn er van A naar B zonder omwegen?
b Hoeveel routes zijn er van A naar de lijn k zonder omwegen?

C7
a Hoeveel rijtjes zijn er met vier A's, drie B's en zes C's?
b Hoeveel getallen van acht cijfers zijn er met drie vieren, twee vijven en drie achten?

Antwoorden

C6 **a** 15
b 64
C7 **a** 60 060
b 560

© Noordhoff Uitgevers bv

4.4 Allerlei telprobleemen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij een telprobleem een juiste aanpak kiezen.

O64

a André heeft zes boeken gekocht. Hij wil er hiervan drie aan zijn vriendin cadeau doen.
Hoeveel drietallen zijn mogelijk?

b Dagmar heeft zes boeken gekocht. Zij heeft drie vrienden en aan elk van hen wil ze er één cadeau doen.
Op hoeveel manieren kan dat?

c Drie vrienden hebben zes dezelfde boeken gelezen. De leraar Nederlands vraagt aan elk van hen welk boek ze het leukst vonden.
Hoeveel antwoorden zijn mogelijk?

Theorie A Herhalingen, permutaties en combinaties

Bij telproblemen zie je niet altijd direct welke aanpak nodig is. Soms herken je het probleem van een eerdere opgave. Zo niet, verdiep je dan in het probleem, bijvoorbeeld door een mogelijkheid uit te schrijven. De volgende vragen kunnen je daarna verder helpen.

- Kun je systematisch noteren of een rooster gebruiken?
- Kun je de somregel gebruiken (kun je 'of' erbij denken)?
- Kun je de vermenigvuldigingsregel gebruiken (kun je 'en' erbij denken)?
- Zijn herhalingen toegestaan?
- Is de volgorde van kiezen van belang? Heb je dus te maken met permutaties of combinaties?

In de volgende opgaven komen allerlei soorten telproblemen door elkaar voor.

R65

Van zeven dingen worden er drie gekozen. Zie het schema hiernaast. Eén van de vier situaties is niet in dit hoofdstuk aan de orde geweest.

		volgorde van belang	
		wel	niet
herhalingen toegestaan	wel		
	niet		

a Welke situatie is dat?

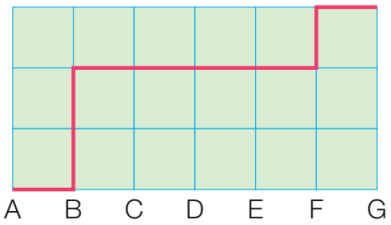
b Bereken voor de andere drie situaties het aantal mogelijkheden.

c Bedenk bij elk van de situaties van vraag b een goede vraag.

© Noordhoff Uitgevers bv

E66 ∗

In deze opgave behandelen we de situatie van opgave 65 die nog niet in dit hoofdstuk aan de orde is geweest.
Nico heeft drie briefjes van vijf euro die hij gaat verdelen over zeven personen. Een persoon kan ook meerdere briefjes krijgen.
De mogelijkheden van het verdelen van de briefjes kun je visualiseren met een rooster. In de figuur hiernaast zie je een voorbeeld waarbij persoon B twee briefjes heeft gekregen en persoon F één briefje.



a Hoeveel mogelijkheden zijn er om de drie briefjes te verdelen?

Het verdelen van de briefjes in deze opgave is een voorbeeld van een *herhalingscombinatie*. In dit geval een herhalingscombinatie van 3 uit 7.

b Hoeveel mogelijkheden zijn er voor een herhalingscombinatie van k uit n?

67

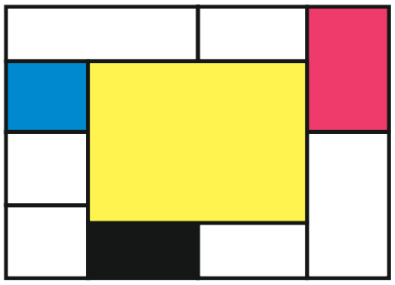
Jarno koopt een nieuwe auto. Hij heeft het type en de kleur al gekozen, maar hij moet van tien opties nog zeggen of hij ze wel of niet neemt.

a Op hoeveel manieren kan hij kiezen?

b Op hoeveel manieren kan hij kiezen als hij maximaal drie opties wil?

68

Tijdens een ckv-les kleuren de leerlingen de vlakverdeling hiernaast. Van de tien rechthoeken moeten er vier gekleurd worden met rood, geel, blauw en zwart. Elke kleur moet één keer gebruikt worden. De andere rechthoeken blijven wit. Zo ontstaat een Mondriaan-compositie.
Hoeveel composities zijn mogelijk?



69

In de figuur hieronder zie je een gedeelte van de plattegrond van een badplaats.

Op hoeveel manieren kun je zonder omwegen

a van S naar T lopen

b van S naar U lopen

c van S naar het strand lopen

d van S via Y naar het strand lopen?

© Noordhoff Uitgevers bv

70

Mark heeft in zijn voorraadkast vier blikjes cola (C), vijf blikjes energiedrank (E) en drie blikjes sinas (S). Mark gaat een dagje weg en neemt drie van deze blikjes mee. Hij kan bijvoorbeeld een blikje cola en twee blikjes sinas meenemen. Notatie CSS.
Noteer op dezelfde manier alle overige mogelijkheden om drie blikjes mee te nemen.

71

In deze opgave gaat het om 'woorden' die je kunt maken met de letters van het woord OPGAVE. Ook niet-bestaande woorden als PGAVOE doen mee.
Bij de vragen a en b mag je elke letter maar één keer gebruiken.
Bereken het aantal mogelijke woorden

a met zes letters
b met minimaal twee en maximaal vier letters.

Bij de vragen c en d mag je de letters meer dan één keer gebruiken.
Bereken het aantal mogelijke woorden

c met tien letters
d met minimaal twee en maximaal vier letters.

72

Voor een vrijgekomen kamer in een studentenflat hebben zich drie jongens en vier meisjes gemeld. Drie studeren psychologie, twee economie, één wiskunde en één Frans.
De studenten worden uitgenodigd voor een gesprek. Voor elk van hen is een kwartier gereserveerd. De eerste student komt om 20:00 uur, de tweede om 20:15 uur, enzovoort.
Hoeveel volgordes zijn er voor de gesprekken als

a eerst de vier meisjes aan de beurt zijn
b de jongens en meisjes om en om een gesprek hebben
c eerst de student Frans aan de beurt is
d de twee studenten economie het laatst aan de beurt zijn
e de eerste student dezelfde studie volgt als de laatste
f de eerste student niet van hetzelfde geslacht is als de volgende twee?

73

Een bedrijf met zes kantoren neemt twaalf nieuwe medewerkers aan.

a Ieder kantoor krijgt twee nieuwe medewerkers.
Op hoeveel manieren kan dat?
b Op hoeveel manieren kunnen deze medewerkers verdeeld worden over de zes kantoren? Het kan dus voorkomen dat de twaalf nieuwe werknemers op één kantoor komen.

© Noordhoff Uitgevers bv

74 Valentijn neemt altijd een reep als tussendoortje mee naar school. Hij heeft nu nog 6 repen in de smaak cashew & blauwe bes, 8 repen met pecan, 4 in de smaak cacao & sinaasappel en 3 in de smaak amandel & abrikoos.
De komende maand moet hij 21 dagen naar school.
Op hoeveel manieren kan hij de repen over de dagen verdelen? Ga ervan uit dat repen in dezelfde smaak volledig uitwisselbaar zijn.

75 Else heeft van haar personal trainer een trainingsschema gekregen voor in de sportschool. Ze moet twee vloeroefeningen doen, drie oefeningen met losse gewichten, vier oefeningen op apparaten en een half uur cardio.

a In hoeveel verschillende volgordes kan ze de oefeningen doen als ze vrij kan kiezen?
b Hoeveel volgordes zijn er mogelijk als ze de oefeningen met losse gewichten meteen na elkaar wil doen?
c Hoeveel volgordes zijn er mogelijk als ze begint met cardio en daarna de oefeningen per soort na elkaar doet?

76 Winkelier Gerritzen heeft zijn etalage versierd met feestverlichting. Deze verlichting bestaat uit 19 lampjes die onafhankelijk van elkaar groen licht, rood licht of geen licht geven.
Een mogelijke situatie is: de lampjes 2, 5, 7, 9, 10, 12 en 18 branden groen, de lampjes 3, 8, 13, 16 en 19 branden rood en de overige lampjes zijn uit.

a Hoeveel situaties zijn er in totaal mogelijk?

In hoeveel situaties branden
b er vijf lampjes rood en de rest groen
c er zes lampjes rood en zes lampjes groen
d alle lampjes waarbij er minder dan drie rood zijn
e in elk geval het eerste, het middelste en het laatste lampje
f er vijf lampjes niet?

© Noordhoff Uitgevers bv

77

Tien schoonmakers van het bedrijf Very Clean maken een bedrijfspand schoon.
Drie van hen krijgen de beschikking over een sleutel.

a Hoeveel drietallen zijn mogelijk?

Het gebouw heeft twee verdiepingen. Op beide verdiepingen gaan evenveel schoonmakers aan de slag.

b Op hoeveel manieren kunnen de tien schoonmakers over de twee verdiepingen worden verdeeld?

Very Clean wil gaan werken met teams van vijf personen.

c Op hoeveel manieren kunnen er twee teams van vijf personen worden gevormd uit de tien schoonmakers?

78

Op het startscherm van de smartphone van Zoë is in een 4 × 4 rooster plaats voor 16 icoontjes van apps. Zoë gebruikt niet alle 16 plaatsen. Zij heeft de 12 icoontjes van haar meest gebruikte apps op het homescreen gerangschikt.

a Op hoeveel manieren kan dit?

b Op hoeveel manieren kan dit als ze de linker kolom leeg laat?

c Op hoeveel manieren kan dit als ze in elke rij één plaats leeg laat?

Zoë wil de 4 icoontjes van haar socialmedia-apps op één rij naast elkaar. Verder maakt het haar niet uit.

d Hoeveel mogelijkheden zijn er?

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedentest

4.1 Regels voor telproblemen

1 Victor gooit met twee dobbelstenen.
Hoeveel mogelijkheden zijn er
a om in totaal acht ogen te gooien
b om meer dan acht ogen te gooien
c waarbij het product van de ogen minder dan tien is?

2 Hoeveel mogelijkheden zijn er om met drie dobbelstenen in totaal
a minder dan zes ogen te gooien
b precies zes ogen te gooien?

3 In deze opgave gaat het om getallen van vijf cijfers, waarin alleen maar de cijfers 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8 voorkomen.
Hoeveel van die getallen zijn er in het geval dat
a elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
b elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 50 000 moet zijn
c elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden
d elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal groter dan 54 000 moet zijn?

4.2 Permutaties en combinaties

4 In een fietsenrek is plaats voor acht fietsen. Drie jongens en vijf meisjes zetten hun fiets in het rek.
a Op hoeveel manieren kan dat?
b Op hoeveel manieren kan dat als de jongens hun fietsen naast elkaar zetten?
c Op hoeveel manieren kan dat als aan de buitenkant de fietsen van twee meisjes staan?
d De meisjes plaatsen hun fietsen als eerste in het rek.
Op hoeveel manieren kunnen de meisjes hun fiets neerzetten?

5 Op een kinderdagverblijf zitten in een groep zes peuters, vijf dreumesen en drie baby's.
Leidster Monique gaat met vier kinderen wandelen.
Hoeveel viertallen zijn mogelijk
a met twee peuters, één dreumes en één baby
b met meer dan twee dreumesen
c zonder baby's?

© Noordhoff Uitgevers bv

4.3 Rijtjes en roosters

6 Jan gooit elf keer met een geldstuk.

a Hoeveel mogelijkheden zijn er om zes keer kop te gooien?

b Hoeveel mogelijkheden zijn er om meer dan zeven keer kop te gooien?

c Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

7 Tim en Stijn spelen tafelvoetbal. Het spel is voorbij als er tien doelpunten gemaakt zijn.

a Hoeveel scoreverlopen zijn er in totaal mogelijk?

b Hoeveel scoreverlopen eindigen in een gelijke stand?

c Tim scoort de eerst drie doelpunten, maar Stijn weet toch te winnen. Hoeveel scoreverlopen zijn er voor deze wedstrijd mogelijk?

8 François Morellet was een Franse kunstenaar die zich onder andere heeft laten inspireren door de werken van Piet Mondriaan. Een van zijn kunstwerken heet *40% bleu, 40% rouge, 10% vert et 10% orange* en hangt in het Stedelijk Museum Amsterdam. Dit schilderij bestaat uit 56 bij 56 even grote vierkantjes. De vierkantjes zijn willekeurig gekleurd, waarbij 40% van de vierkantjes blauw is geschilderd, 40% rood, 10% groen en 10% oranje.

In deze opgave kijken we naar een veel kleinere, rechthoekige variant van dit werk dat bestaat uit 6 bij 5 vierkantjes. Verder worden dezelfde kleuren en verhoudingen gebruikt als in het origineel.
Bereken hoeveel verschillende schilderijen je in dit geval kunt maken.

4.4 Allerlei telproblemen

9 Op station Holten stappen 14 personen in een trein met drie treinstellen. Op hoeveel verschillende manieren kunnen zij zich verdelen over de treinstellen?

10 In deze opgave gaat het om de letters van het woord MAATSTAVEN.

a Hoeveel rangschikkingen kun je met deze letters maken?

In de rest van deze opgave gaat het om ‘woorden’ die je kunt maken met de letters M, A, T, S, V, E en N. Ook niet bestaande woorden als VMATSE doen mee.
Bereken het aantal mogelijke woorden

b van vijf verschillende letters

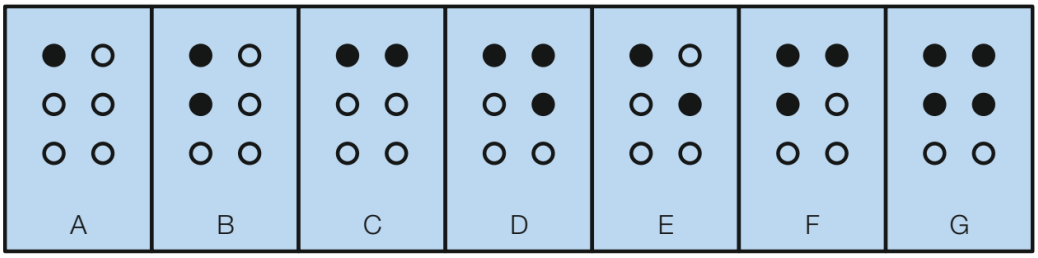
c van twee of drie verschillende letters

d met minimaal twee en maximaal vier letters waarbij elke letter vaker mag worden gekozen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Gemengde opgaven

1 In het brailleschrift worden de tekens gevormd door zes stippen die al dan niet voelbaar gemaakt zijn. Hieronder zie je enige letters in brailleschrift. Een zwarte stip is voelbaar, een open rondje niet.



a Hoeveel tekens zijn mogelijk als er twee stippen voelbaar zijn?
b Hoeveel tekens zijn in totaal mogelijk? Het teken met geen enkele zwarte stip doet hierbij niet mee.

2 Een gemeenteraad bestaat uit negen leden. Er zijn drie CDA-leden, drie D66-leden, twee VVD-leden en één lid van de partij Gemeentebelangen. Er moet een commissie van drie leden worden samengesteld.
a Hoeveel commissies zijn mogelijk met twee CDA-leden?
b Hoeveel commissies zijn in totaal mogelijk?
c Hoeveel commissies zijn mogelijk waarin geen leden van dezelfde partij zitten?

De commissaris van de Koning bezoekt de gemeente. Bij de ontvangst staan de negen raadsleden naast elkaar bij de ingang van het stadhuis om de commissaris de hand te schudden.
Op hoeveel manieren kunnen de raadsleden naast elkaar staan als
d de CDA-leden naast elkaar moeten staan
e van elke partij de leden naast elkaar moeten staan?

3 Van de letters van het woord WISKUNDE ga je codes van vijf letters vormen.
Op hoeveel manieren kan dit als
a elke letter maar één keer in een code mag voorkomen
b elke letter meer dan één keer mag voorkomen
c de codes met een W beginnen en op een N eindigen en elke letter maar één keer mag voorkomen?

© Noordhoff Uitgevers bv

4 In de figuur hiernaast zie je het kunstwerk Acceptatie nr. 2 van kunstenaar Willy Alferink. De sculptuur bestaat uit vijf gestapelde bollen die van onder naar boven in diameter afnemen. Twee van deze bollen zijn geschilderd in roodtinten, twee in blauwtinten en één in groentinten.

a De bovenste bol bestaat uit 20 uniek gevormde vlakken die in vijf verschillende blauwtinten zijn geschilderd, namelijk vier vlakken voor elke blauwtint. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de vijf blauwtinten over de bovenste bol worden verdeeld?

Bron: www.willyalferink.nl

Willy Alferink heeft ervoor gekozen om de onderste bol in roodtinten te schilderen, de bol daarboven in blauwtinten, enzovoort. Hij had ook voor een andere volgorde van de kleuren kunnen kiezen.

b Hoeveel verschillende volgorden zijn er in totaal?

c Hoeveel verschillende volgorden zijn er als twee ballen boven elkaar niet dezelfde kleur mogen hebben?

5 In deze opgave gaat het over getallen waarbij de cijfers worden gekozen uit 1, 2, 3, 4, 5 en 6.
Hoeveel getallen van acht cijfers zijn er waarbij

a drie keer een 1, drie keer een 2 en twee keer een 3 voorkomt

b vier cijfers elk twee keer voorkomen

c elk van de cijfers 1, 2, 3, 4, 5 en 6 minstens één keer voorkomt?

En hoeveel getallen van vier cijfers zijn er waarbij

d elk cijfer maar één keer mag voorkomen en het getal kleiner dan 3500 is

e elk cijfer meer dan een keer mag voorkomen en het getal groter dan 3500 is?

6 Het alarmsysteem van de familie Schiereck kan worden aan- en uitgezet middels een pincode van vijf cijfers. Elk cijfer mag vaker gebruikt worden. Aan de slijtage van de knoppen op het cijferpaneel van het alarmsysteem is duidelijk te zien dat de knoppen voor de cijfers 4, 7 en 8 het meest gebruikt worden. Ga ervan uit dat de vijfcijferige pincode is opgebouwd uit deze drie cijfers.
Hoeveel mogelijke pincodes zijn er dan?

© Noordhoff Uitgevers bv

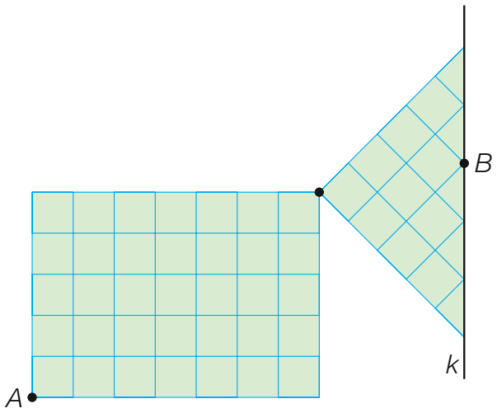
7 Zie het rooster hiernaast.
Hoeveel kortste routes zijn er

a van A naar B

b van A naar de lijn k

c van A naar B en terug

d van A naar de lijn k en terug?



8 Elk jaar vinden in Noord-Amerika de World Series plaats tussen de twee beste baseballteams. De twee teams spelen net zo lang tegen elkaar totdat één van de teams vier wedstrijden gewonnen heeft. Bij baseball is een gelijkspel niet mogelijk.

a Hoeveel mogelijkheden zijn er om in precies vijf wedstrijden een winnaar te hebben? En hoeveel om in precies zes wedstrijden een winnaar te hebben?

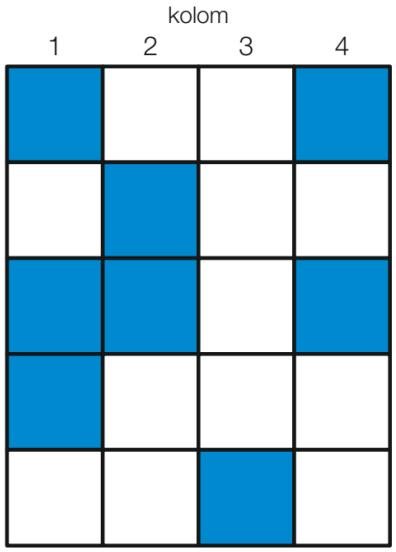
b Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

9 Een distributiecentrum gebruikt een code met blauwe en witte vakjes in een rechthoek van 4 bij 5. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken het aantal codes met zes blauwe vakjes.

b Hoeveel verschillende codes zijn er in totaal te maken?

c Hoeveel codes zijn er mogelijk met in de eerste kolom één blauw vakje, in de tweede kolom twee blauwe vakjes, in de derde kolom drie blauwe vakjes en in de vierde kolom vier blauwe vakjes?



Het distributiecentrum wil het aantal codes uitbreiden door in de rechthoek van 4 bij 5 behalve blauwe en witte vakjes ook zwarte vakjes te gebruiken.

d Hoeveel keer zoveel codes kan het distributiecentrum zo maken?

e Hoeveel codes zijn er nu mogelijk met in de eerste kolom twee zwarte vakjes?

© Noordhoff Uitgevers bv

10 Voor het spel ‘Wie is de mol?’ wordt door zes kandidaten een opdracht uitgevoerd. Hiervoor moeten twee duo’s in de stad Sevilla foto’s maken. Het ene duo maakt foto’s van drie kerken en het tweede duo van drie musea. Verder is er een kandidaat die de fotoduo’s aanwijzingen geeft, zodat deze weten waar de te fotograferen gebouwen staan. De zesde kandidaat moet na afloop van de opdracht de zes foto’s op volgorde van bouwjaar van de gefotografeerde gebouwen leggen.

a Op hoeveel manieren kunnen de kandidaten worden verdeeld over de verschillende taken?

De kandidaat die de foto’s op volgorde moet leggen, heeft geen idee van de bouwjaren van de gebouwen op de foto’s. Wel denkt hij te kunnen zien dat de kerken in ieder geval allemaal ouder zijn dan de musea. Hij besluit op basis hiervan een gok te wagen.

b Hoeveel volgordes zijn dan mogelijk?

De kandidaat krijgt te horen dat het klopt dat de kerken allemaal ouder zijn dan de musea, maar dat geen enkele foto op de goede plek ligt. Hij mag nog een poging wagen.

c Hoeveel volgordes blijven dan nog over?

Gedurende de dag heeft een van de kandidaten, ‘de mol’, geprobeerd om de opdracht te saboteren.
De dag wordt afgesloten met een individuele test. Ter afsluiting van deze test wordt aan alle kandidaten gevraagd wie zij denken dat de mol is.
De mol krijgt na de test een lijstje te zien met daarop, op alfabetische volgorde, de namen van de andere vijf kandidaten en daarachter de door hen genoemde mol. Slechts twee van de kandidaten hebben de juiste mol genoemd.

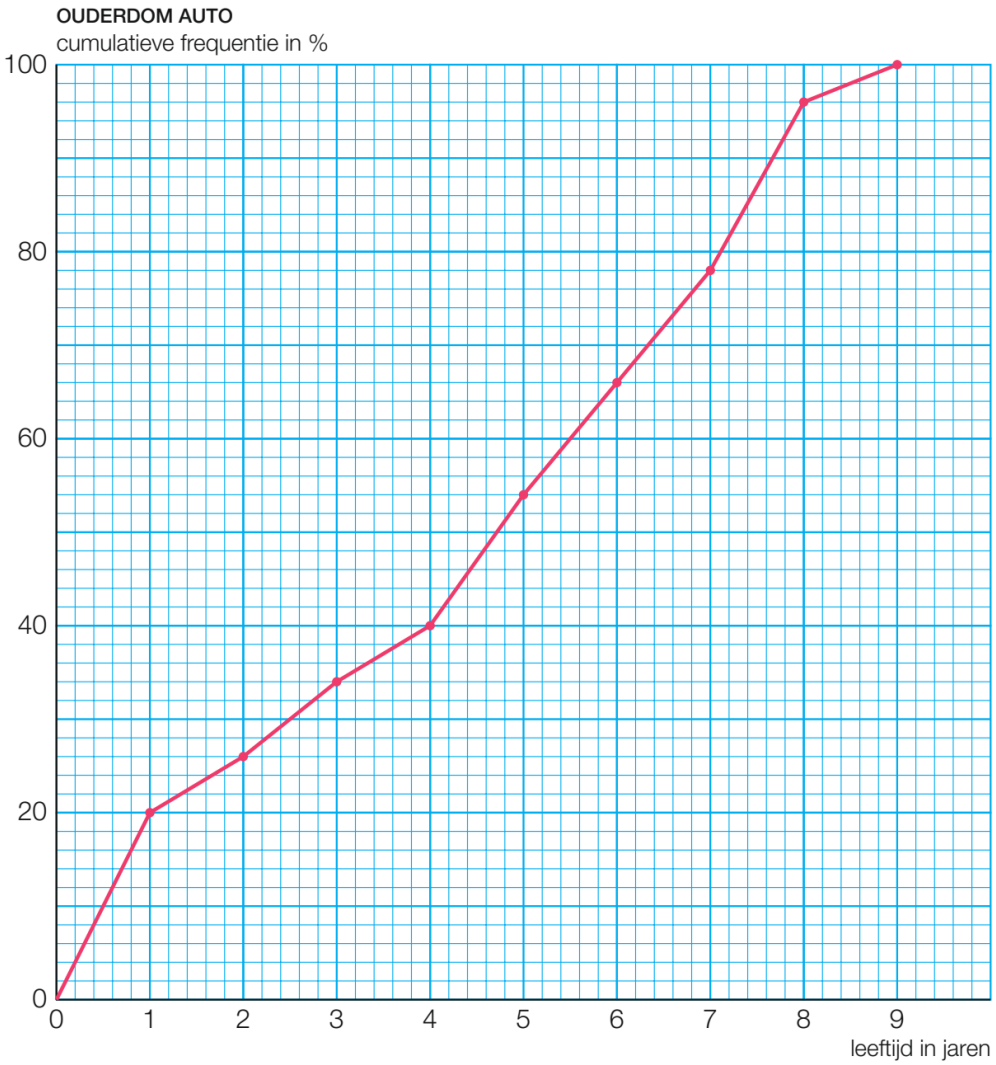
d Hoeveel verschillende lijstjes kan de mol te zien krijgen?

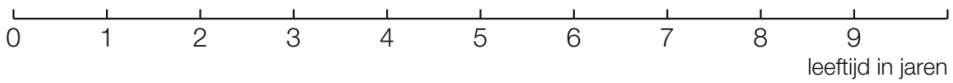
© Noordhoff Uitgevers bv

Werkbladen

47

blz 79

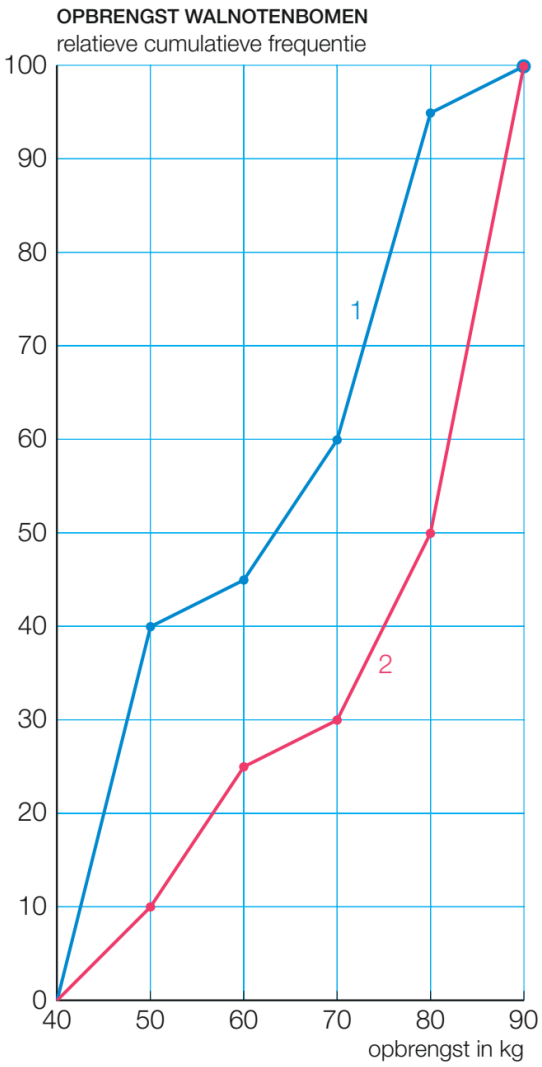


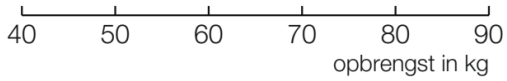


© Noordhoff Uitgevers bv

49

blz 79



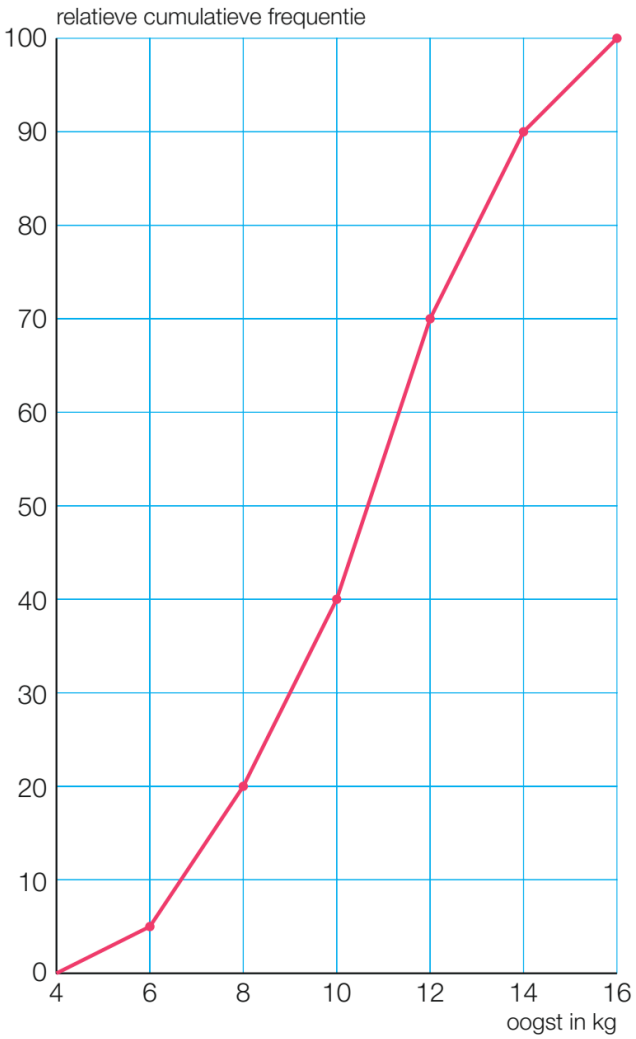


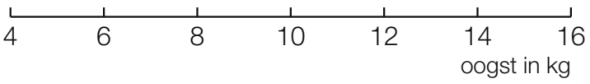
© Noordhoff Uitgevers bv

C8

blz 80

TOMATENOOGST PER PLANT





© Noordhoff Uitgevers bv

Antwoorden Kennis- en vaardighedentests

Hoofdstuk 1

1 *

2 **a** $k: y = -\frac{1}{2}x + 7\frac{1}{2}$
b $m: y = 6$
c $C(-\frac{5}{8}, 0)$

3 $(2, 3\frac{1}{3})$

4 $S(17, -9)$

5 **a** $A = -60p + 1250$
b 575
c onder € 4,17

6 **a** 13 564 miljoen kWh
b 26 328 miljoen kWh
c 2182 miljoen kWh

7 **a** $B = 0{,}08d$
b 75

8 **a** *
b $A = \frac{12\,000}{p}$
c 66,67 euro

9 **a** 100
b 44,4 m
c tussen $x \approx 53{,}6$ en $x \approx 78{,}2$

10 **a** *
b *
c 0,31 sec 10,44 m

Hoofdstuk 2

1 de onderzoeksvraag
data verzamelen
data analyseren
conclusies trekken

2 **a** middelbare scholieren
b *

3 slaapligging: nominaal
aantal ademstops: discreet
lengte ademstop(s): continu
moe overdag: ordinaal

4 **a** 84
b ja *
c 67,9%
d nee *

5 **a** 91
b nee *

6 **a** 49
b 21
c *
d nee *

7 **a** rechts-scheef
b modus, mediaan en gemiddelde *
c *

8 **a** 640
b 3800

9 **a** *
b [0,127; 0,193]
c [326, 374]

Hoofdstuk 3

1 **a** $\frac{15a^2 - 30a}{2b^2}$
b $1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}y$
c $\frac{8p^2 + 4p}{4p + 1}$

© Noordhoff Uitgevers bv

2 **a** $\frac{14}{15p}$

b $\frac{4+5y}{4x}$

c $\frac{b^2+b-6}{2a}$

3 **a** 120 gram nootjes, 105 gram ringetjes en 60 gram driehoekjes

b 48

4 **a** $3x^2-13x+5$

b $a=15$ en $b=5$

5 **a** *

b $y=1\frac{1}{3}x-5$

c $x=-\frac{3}{4}y+2\frac{1}{2}$

d $P=-\frac{1}{2}Q+7$

6 **a** $1{,}54\cdot10^{11}$

b $1{,}75\cdot10^{-3}$

7 **a** 2449 euro

b 2902 euro

c 35,3%

d 480

8 23

9 **a** 7,1

b 28 min

10 **a** $L=-0{,}0000098w^2+0{,}00966w+0{,}509$

b 9

Hoofdstuk 4

1 **a** 5

b 10

c 17

2 **a** 10

b 10

3 **a** 2520

b 1080

c 16 807

d 8918

4 **a** 40 320

b 4320

c 14 400

d 6720

5 **a** 225

b 95

c 330

6 **a** 462

b 232

c 2048

7 **a** 1024

b 252

c 8

8 $3{,}2\cdot10^{13}$

9 4 782 969

10 **a** 302 400

b 2520

c 252

d 2793

© Noordhoff Uitgevers bv

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm • Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen. • De toets Ans, en fouten verbeteren. • Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen. • Decimaal getal omzetten in een breuk.	vwo A/C deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 17
Formules en grafieken • Formules invoeren en grafieken plotten. • Tabellen maken en de tabelinstelling veranderen. • De opties snijpunt, nulpunt, maximum en minimum.	vwo A/C deel hoofdstuk 1 bladzijde 33
Allerlei • Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR.	

© Noordhoff Uitgevers bv

Trefwoordenregister

A

aantonen dat *127*
absolute frequentie *65*
absolute
  veranderingen *132*
afstand *143*
als functie van
  schrijven *128*
aselect *52*

B

betrouwbaarheidsinterval
  100, 102
95%-
  betrouwbaarheidsinterval
  100, 102
95%-
  betrouwbaarheidsinterval
  voor de
  populatieproportie *100*
95%-
  betrouwbaarheidsinterval
  voor het
  populatiegemiddelde *102*
boomdiagram *162*
box *76*
boxplot *76*
breuken
  – aftrekken *119, 120*
  – delen *116, 117*
  – optellen *119, 120*
  – vermenigvuldigen
  116, 117

C

causaal verband *97*
centrummaten *62*
combinatie *172*
continue variabele *59*
cumulatieve frequentie *72*
cumulatieve
  frequentiepolygoon *72*
cumulatieve
  verdelingskromme *85*

D

data *50*
dataset *56*
derde kwartiel *75*
discrete variabele *59*
driehoek van Pascal *182*

E

eenheden omzetten *147*
eerste kwartiel *75*
evenredig *27*
  omgekeerd – *29*
  recht – *27*
evenwijdige lijnen *10*
extrapoleren *23*
  lineair – *23*

F

faculteit *169*
frequentie
  absolute – *65*
  cumulatieve *72*
  relatieve *65*
  relatieve cumulatieve *72*
frequentiepolygoon *68*,
  cumulatieve – *72*
  relatieve cumulatieve – *73*
functie
  lineaire – *19*

G

gemeenschappelijke
  factor *97*
gemiddelde *62*, *64*
grafische
  rekenmachine *17, 33*
grootste getal *75*

H

haakjes wegwerken *126*
herhalingen *165*
histogram *68*
horizontale lijn *10*
hyperbolisch verband 29
hyperbool 29

I

inhoud *140*
inhoudsmaat *140*
interkwartielafstand *76*, *88*
interpoleren *23*
  lineair – *23*

K

klasse *67*
klassenbreedte *67*
klassengrens *67*
klassenindeling *67*
klassenmidden *67*
kleinste getal *75*
kwalitatieve
  variabelen *56*
kwantitatieve
  variabelen *56*
kwartiel *75*
  derde – *75*
  eerste – *75*
kwartielafstand *76*

L

lengte *140*
lijnen *9*
  evenwijdige – *10*
  horizontale – *10*
  snijpunten van – *12*
  verticale – *10*
lineair extrapoleren *23*
lineair interpoleren *23*
lineair verband *19*
lineaire formule *9*
lineaire functie *19*
lineaire vergelijking met
  twee variabelen *128*
links-scheve verdeling *81*

© Noordhoff Uitgevers bv

M

mediaan *62*, *64*, *75*, *88*
meertoppige verdeling *81*
meetniveau *58*
merkwaardige
producten *126*
met herhaling *165*
modale klasse *68*
modelvorming *37*
modus *62*, *64*

N

nominaal *58*
nominale variabele *58*
normaalkromme *91*
normale verdeling *91*

O

omgekeerd evenredig *29*
omzetten van eenheden *147*
onderzoeksvraag *50*
oorzakelijk verband *97*
oppervlakte *140*
oppervlaktemaat *140*
ordinaal *58*
ordinale variabele *58*

P

permutatie *169*
plotten *33*
populatie *52*
populatieproportie *99*
presentatie *65*
procentberekeningen *132*

R

rangschikking *169*
recht evenredig *27*
rechts-scheve verdeling *81*
relatieve cumulatieve
frequentie *72*
relatieve cumulatieve
frequentiepolygoon *73*
relatieve frequentie *65*
relatieve
veranderingen *132*
representatie *65*
representatief *52*
richtingscoëfficiënt *9*, *17*
rijtje bestaande uit A's en
B's *179*
rijtje met meer dan twee
letters *184*

S

samenhang *97*
scheve verdeling *81*
schrijven als functie
van *128*
snelheid *143*
snijpunten van lijnen *12*
somregel *163*
spreiding *76*
spreidingsbreedte *76*, *88*
spreidingsmaat *76*
staart *81*
standaardafwijking *88*
standaarddeviatie *88*
standaardverdeling *81*
statistiek *50*
statistische cyclus *50*
steekproef *52*
steekproefproportie *99*
symmetrische
verdeling *81*
systematisch
noteren *160*

T

telproblemen *160*
tijd *143*

U

uitbijter *64*
uitdrukken in *19*
uitschieter *64*
uniforme verdeling *81*

V

variabele *56*
continue – *59*
discrete – *59*
nominale – *58*
ordinale – *58*
kwalitatieve – *56*
kwantitatieve – *56*
venster *33*
veranderingen,
absolute – *132*
relatieve – *132*
verband
causaal – *97*
lineair – *19*
oorzakelijk – *97*
verdeling van de
steekproefproportie *99*
verdeling
links-scheve – *81*
meertoppige – *81*
normale – *91*
rechts-scheve – *81*
scheve – *81*
symmetrische – *81*
uniforme – *81*
verdelingskromme *85*
cumulatieve – *85*
vergelijking van de lijn *18*
verhouding *122*
verhoudingstabel *122*
vermenigvuldigingsregel
162
verticale lijn *10*
vrijmaken *128*
vuistregels bij de normale
verdeling *92*

W

waarden *56*
wegendiagram *162*
wetenschappelijke
notatie *137*
wiskundig model *37*

Z

zonder herhaling *165*

© Noordhoff Uitgevers bv

Verantwoording

Beeld
Illustraties: Oscar Casander, Arnhem
Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam
Cartografie: Van Oort redactie en kartografie, Almere

Foto's
Imageselect: p. 6-7
iStockphoto: p. 12, 37, 43, 48-49, 82, 124, 134, 135, 143, 148, 170, 181
Shutterstock: p. 15, 20, 30, 40, 47, 103, 113, 149, 155 o, 166, 167 b, 171, 177, 190, 197
Roland Meijerink, Rotterdam: p. 25, 153
ANP / Venema Media: p. 28
ANP / Marco Okhuizen: p. 31
eyevine/Hollandse Hoogte: p. 44
Jan van Haren, Utrecht: p. 45
Getty Images: p. 94, 111, 174 b
ANP / Robin van Lonkhuijsen: p. 114-115
Noordhoff: 137 (b, o), 141, 175
ANP / Hans van Rhoon: p. 137 m
ANP / Eugene Winthagen: p. 142
ANP / Imago Sportfotodienst: p. 144
ANP / Associated Press / NASA: p. 145
Grada Masselink: p. 146
ANP / Marcel van Hoorn: p. 155 b
ANP / Frans Lemmens: p. 157
iStockphoto / Beelbewerking: B en U: p. 158-159
ANP / Jeroen Putmans / VI images: p. 183
ANP / Patricia Rehe: p. 189
Nature in Stock / Hemis / Rieger Bertrand: p. 193
Mark Haneveld, Lochem: p. 195
ANP / Associated Press / Elise Amendola: p. 196

Colofon
Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlenen.

0 / 25

MIX
Papier | Ondersteunt verantwoord bosbeheer
FSC® C118189
FSC www.fsc.org

© 2025 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06461-7

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten

+

Actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten

Noordhoff

MIX
Papier | Ondersteunt verantwoord bosbeheer
FSC® C118189
www.fsc.org

www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-06461-7
9 789001 064617