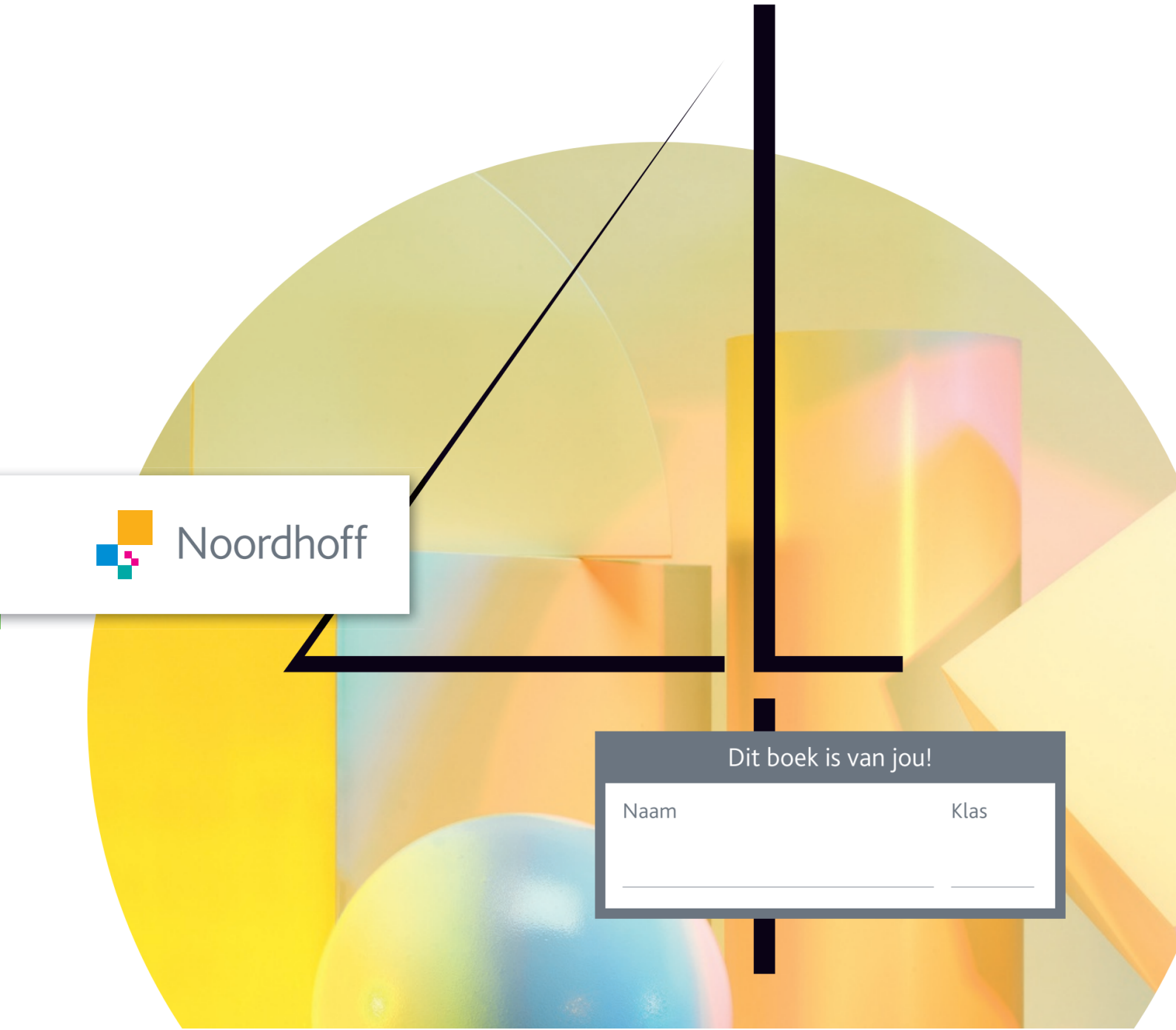
4
vwo

Wiskunde A/C | FLEX-boek Deel 2 | Editie 13

getal &ruimte A/C



Noordhoff

Dit boek is van jou!

Naam _____ Klas _____

Getal & Ruimte

Leerboek
vwo A/C deel 2

Dertiende editie, 2025

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek vwo A/C deel 2
De examenprogramma's wiskunde A en C van het vwo overlappen elkaar gedeeltelijk. Vandaar dat gekozen is voor gemeenschappelijke delen 1 en 2 voor vwo A/C.
Na de delen 1 en 2 volgen voor wiskunde A de boeken vwo A deel 3 en deel 4. Voor wiskunde C volgen de boeken vwo C deel 3 en deel 4.
De genoemde boeken bevatten de leerstof van de programma's vwo wiskunde A en vwo wiskunde C, zoals die met ingang van 2015 zijn vastgesteld.
De totale studielast is voor wiskunde A 520 uur en voor wiskunde C 480 uur. De vier hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 25 uur.

In de hoofdstukken komen de volgende (sub)domeinen aan bod.

Hoofdstuk 5	Machtsverbanden	C1 en C2
Hoofdstuk 6	Kansrekening	E4
Hoofdstuk 7	Statistiek met de computer	E7
Hoofdstuk K	Lineair programmeren	F

De domeinen Statistiek en kansrekening en Keuzeonderwerpen worden alleen in het schoolexamen getoetst. Voor dit boek betreft dat de hoofdstukken 6, 7 en K. Zie voor verdere details de handleiding.

De transformaties die in paragraaf 5.1 worden behandeld, zijn geen onderdeel van de leerstof van wiskunde C. Leerlingen die wiskunde C volgen, kunnen dus eventueel deze paragraaf overslaan.
Indien mogelijk gebruikt men bij hoofdstuk 7 het computerprogramma Microsoft Excel. Als dit niet beschikbaar is, kan bijvoorbeeld Google Spreadsheets worden gebruikt. In dat geval dient men erop bedacht te zijn dat wellicht niet alle opdrachten gemaakt kunnen worden. Zie hiervoor de informatie in de digitale leeromgeving.
In hoofdstuk K wordt een keuzeonderwerp aangeboden. Het is uiteraard toegestaan zelf een ander keuzeonderwerp te kiezen. Het is zelfs mogelijk in een klas meerdere keuzeonderwerpen aan te bieden, eventueel rekening houdend met de belangstelling van de individuele leerling. In de laatste paragraaf van het hier aangeboden keuzeonderwerp maakt de leerling gebruik van een computerprogramma. Daarbij wordt uitgegaan van Excel, maar in de digitale leeromgeving staat een handleiding voor gebruik van het programma Spreadsheets.

© Noordhoff Uitgevers bv

De digitale leeromgeving van Getal & Ruimte
Bij sommige gedeeltes van het boek kunnen opgaven ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.
In het docentenmateriaal staan studiewijzers die een indicatie geven van de hoeveelheid leerstof die per week kan worden doorgewerkt. Verder zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij de hoofdstukken 5, 6 en K een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

Zomer 2024

© Noordhoff Uitgevers bv

Legenda

V1 **Voorkennisopgave**
Een opgave over een onderwerp uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk.

O1 **Oriënterende opgave**
Een opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

2 **Gewone opgave**
Een opgave waarmee je oefent met wat er in de theorie aan bod is geweest.

R3 **Reflectie-opgave**
Een opgave waarmee je terugkijkt op een voorgaand probleem, of waarmee je op een andere manier naar voorgaande stof kijkt.

A4 **Afsluitende opgave**
Een opgave waarmee je oefent op het beoogde beheersingsniveau.

E5 **Extra opgave**
Een opgave die je extra uitdaagt.

☐ **Kennis- en vaardighedencheck**
Je controleert of je de kennis en/of vaardigheid beheerst door de bijbehorende opgave te maken.

C1 **Checkopgave**
Een opgave waarmee je controleert of je de kennis en/of vaardigheid goed beheerst.

Route-aanduiding

1 Een opgave van de basisroute.

2 Een opgave van de middenroute.

3 Een opgave van de uitdagende route.

NB: De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 **Opgaven zonder routeaanduiding**
In de Kennis- en vaardighedentest en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen routeaanduiding.

[▶GR] Verwijzing naar een module over het gebruik van de grafische rekenmachine. Zie ook het overzicht van de modules achterin dit boek.

[▶ICT] Verwijzing naar een module over het gebruik van Excel/Spreadsheets. Zie ook het overzicht van de modules achterin dit boek.

© Noordhoff Uitgevers bv

Inhoud

5 Machtsverbanden *6*

5.1 Grafieken veranderen *8*
5.2 Rekenen met machten *17*
5.3 Formules herleiden en variabelen vrijmaken *26*
5.4 Formules met machten en wortels *35*
Kennis- en vaardighedentest *42*
Gemengde opgaven *44*

6 Kansrekening *48*

6.1 Kansen *50*
6.2 Empirische kansen *57*
6.3 Regels voor kansrekening *67*
6.4 Het vaasmodel *79*
6.5 Allerlei kansproblemen *88*
Kennis- en vaardighedentest *94*
Gemengde opgaven *96*

7 Statistiek met de computer *100*

7.1 Werken met een spreadsheet *102*
7.2 Werken met datasets *111*
7.3 Draaitabellen en draaigrafieken *117*

K Keuzeonderwerp Lineair programmeren *124*

K.1 Stelsels van lineaire vergelijkingen *126*
K.2 Ongelijkheden met twee variabelen *134*
K.3 Lineaire programmeringsproblemen *138*
K.4 De hoekpuntmethode *148*
K.5 Lineair programmeren met Excel *157*
Kennis- en vaardighedentest *166*

Antwoorden Kennis- en vaardighedentests *168*
Overzicht GR-modules *170*
Overzicht Excel/Spreadsheets-modules *171*
Trefwoordenregister *172*
Verantwoording *174*

© Noordhoff Uitgevers bv

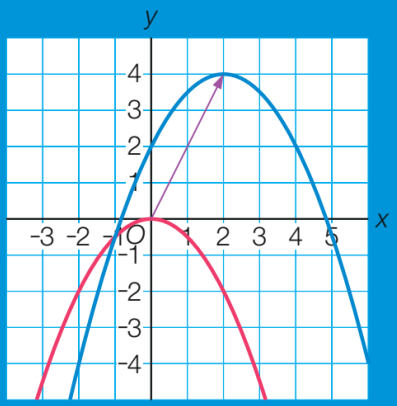
© Noordhoff Uitgevers bv

5
Machtsverbanden

De grafiek van $y = -0{,}5x^2$ wordt eerst twee naar rechts verschoven en vervolgens vier omhoog. Zie de figuur hieronder.

Wat is de formule die bij de grafiek hoort die zo is ontstaan?

A $y = -0{,}5(x + 2)^2 + 4$
B $y = -0{,}5(x - 4)^2 + 2$
C $y = -0{,}5(x - 2)^2 + 4$
D $y = -0{,}5(x + 4)^2 + 2$



© Noordhoff Uitgevers bv

5.1 Grafieken veranderen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de formule opstellen van een grafiek die is ontstaan na verschuiving van een grafiek bij een machtsverband.
- Je kunt de grafiek schetsen van een formule van de vorm $y = a(x - p)^n + q$ en daarbij de coördinaten van de top of het punt van symmetrie geven.
- Je kunt de formule opstellen van een grafiek die is ontstaan na verticaal herschalen van een grafiek bij een machtsverband.

O1

Gegeven zijn de formules $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$, $y_3 = x^6$ en $y_4 = x^9$.

a Plot de grafieken van y_1, y_2, y_3 en y_4.
Neem x tussen $-1{,}5$ en $1{,}5$ en y tussen -2 en 2.

b Er zijn twee punten die op elk van deze grafieken liggen.
Schrijf de coördinaten van die punten op.

c Van welke grafieken ligt geen enkel punt onder de x-as?

O2

Gegeven zijn de formules $y_1 = 2x^3$ en $y_2 = 2x^3 + 5$.

a Bereken y_1 en y_2 voor $x = 1$, $x = 2$ en $x = 3$.
Hoe volgen de uitkomsten van y_2 uit die van y_1?

b Plot de grafieken van y_1 en y_2.
Neem x tussen -2 en 2 en y tussen -10 en 10.
Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van y_1?

O3

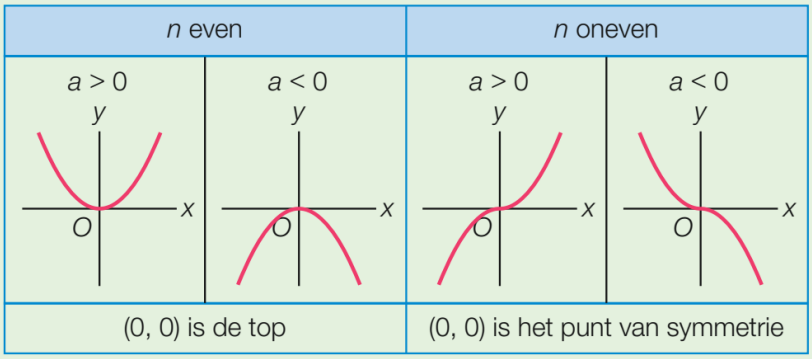
Gegeven zijn de formules $y_1 = 2x^3$ en $y_2 = 2(x - 2)^3$.

a Bereken y_1 voor $x = 3$ en y_2 voor $x = 5$.
Licht toe waarom de uitkomsten hetzelfde zijn.

b Welke x moet je invullen in de formule $y_3 = 2(x - 5)^3$ om dezelfde uitkomst als bij vraag a te krijgen?

Theorie A Verschuivingen

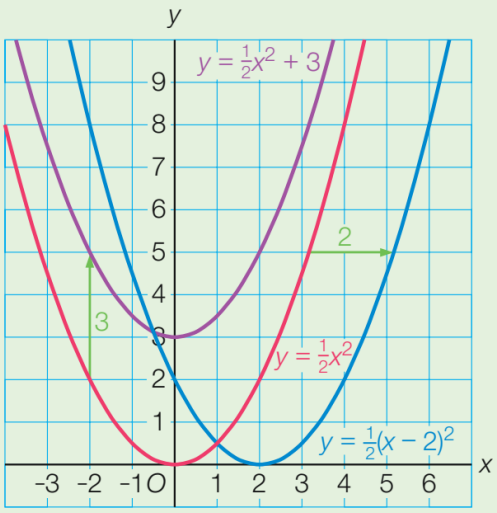
Een formule van de vorm $y = ax^n$ hoort bij een **machtsverband**. In het schema hiernaast zie je hoe de grafiek eruitziet voor $n > 1$ en n geheel.
Voor n is even heeft de grafiek een top en voor n is oneven heeft de grafiek een **punt van symmetrie**.



© Noordhoff Uitgevers bv

De formules van de vorm $y = ax^n$ zijn **standaardformules** en de bijbehorende grafieken zijn **standaardgrafieken**.
Je mag standaardgrafieken zonder toelichting schetsen.

Een standaardgrafiek kun je verschuiven. Zo ontstaat een **beeldgrafiek**.
Bij de verschuiving 3 omhoog is de beeldgrafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ de parabool met formule $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.
Bij de verschuiving 2 naar rechts heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ als beeldgrafiek de parabool $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$.
Bij de verschuiving 3 naar links heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ als beeldgrafiek de parabool $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$.
De verschuiving 3 naar rechts en 5 omhoog noteren we als verschuiving (3, 5).



Afspraak
De verschuiving p naar rechts en q omhoog noteren we als verschuiving (p, q).

2 naar rechts:
vervang x door $x - 2$

3 naar links:
vervang x door $x + 3$

Zo is
$y = -2x^3 \xrightarrow{\text{verschuiving } (5, 0)} y = -2(x - 5)^3$
$y = -2x^3 \xrightarrow{\text{verschuiving } (-6, 0)} y = -2(x + 6)^3$
$y = -2x^3 \xrightarrow{\text{verschuiving } (-6, -5)} y = -2(x + 6)^3 - 5$

Bij de verschuiving $(-6, -5)$
- verschuif je 6 naar links en 5 omlaag
- vervang je x door $x - -6$, dus door $x + 6$, en tel je er -5 bij op.

In het algemeen geldt:

grafiek		**beeldgrafiek**
$y = ax^n$	$\xrightarrow{\text{verschuiving } (p, q)}$	$y = a(x - p)^n + q$

Pas je op de grafiek van $y = 3(x - 1)^2 + 5$ de verschuiving (8, 6) toe, dan krijg je

$y = 3(x - 1)^2 + 5 \xrightarrow{\text{verschuiving } (8, 6)} y = 3(x - 8 - 1)^2 + 5 + 6$, dus
$y = 3(x - 9)^2 + 11$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

a Stel de formule op van de beeldgrafiek van $y = -6x^4$ bij de verschuiving $(-3, 8)$.
b Stel de formule op van de beeldgrafiek van $y = -(x - 2)^2 - 4$ bij de verschuiving $(-5, 0)$.

Uitwerking
a $y = -6x^4$
$\downarrow$ verschuiving $(-3, 8)$
$y = -6(x + 3)^4 + 8$
b $y = -(x - 2)^2 - 4$
$\downarrow$ verschuiving $(-5, 0)$
$y = -(x + 5 - 2)^2 - 4 = -(x + 3)^2 - 4$

4

a Schrijf de formule op van de beeldgrafiek van de parabool $y = -5x^2$ bij de verschuiving $(2, 5)$, bij de verschuiving $(-3, 6)$ en bij de verschuiving $(7, 0)$.
b Schrijf de formule op van de beeldgrafiek van de grafiek van $y = 4x^5$ bij de verschuiving $(-5, 7)$ en bij de verschuiving $(0, -10)$.

5

Stel de formule op van de beeldgrafiek bij de verschuiving $(4, 6)$.
a $y = 5x^2 + 1$
b $y = -x^4 + 2$
c $y = (x - 6)^3$
d $y = 3(x - 5)^6 + 8$
e $y = -2(x + 4)^5 + 6$
f $y = -2(x - 4)^2 - 6$

A6

Hieronder is telkens een formule en een verschuiving gegeven.
Stel de formule op van de beeldgrafiek.
a $y = 5x^6$ en verschuiving $(8, -3)$
b $y = -x^4$ en verschuiving $(7, -8)$
c $y = -3x^4 + 6$ en verschuiving $(-4, 0)$
d $y = x^5 + 6$ en verschuiving $(-8, -3)$
e $y = 2(x - 3)^2$ en verschuiving $(5, 0)$
f $y = -5(x - 1)^3 + 8$ en verschuiving $(2, -7)$

A7

De grafiek van $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 - 5$ wordt 2 naar rechts en q omhoog verschoven. Zo ontstaat de grafiek van $y = -\frac{1}{2}x^2 - x$.
Bereken q.

© Noordhoff Uitgevers bv

O8

Gegeven is de formule $y = 2x^2$.

a Geef de coördinaten van de top van de grafiek van y.

De grafiek van $y = 2x^2$ wordt 4 naar links en 1 omhoog geschoven.

b Geef de coördinaten van de top van de beeldgrafiek.

c Geef de formule van de beeldgrafiek. Hoe kun je de coördinaten van de top van de beeldgrafiek uit de formule aflezen?

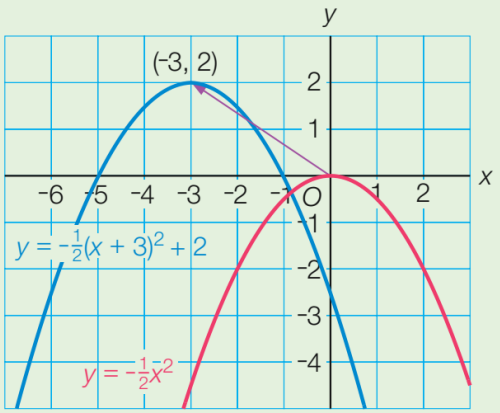
Theorie B Toppen en punten van symmetrie

De grafiek van $y = a(x - p)^n + q$ heeft een top (voor n is even) of een punt van symmetrie (voor n is oneven). Om hiervan de coördinaten te vinden, bedenk je dat de grafiek van $y = a(x - p)^n + q$ is ontstaan door een verschuiving (p, q) van de standaardgrafiek $y = ax^n$.

Zo vind je de coördinaten van de top van $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$ als volgt.

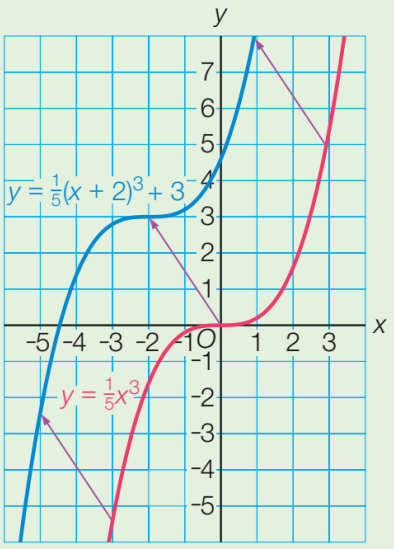
$y = -\frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{verschuiving } (-3, 2)} y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$

bergparabool met top $O(0, 0)$ — bergparabool met top $(-3, 2)$



De grafiek van $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$ is een bergparabool met top $(-3, 2)$.
Omdat 2 de grootste y-waarde is, zeggen we dat het **maximum** van y gelijk is aan 2.
En zo is de grafiek van $y = \frac{1}{4}(x + 5)^2 - 3$ een dalparabool met top $(-5, -3)$.
Omdat -3 de kleinste y-waarde is, zeggen we dat het **minimum** van y gelijk is aan -3.

De grafiek van $y = \frac{1}{5}(x + 2)^3 + 3$ ontstaat uit die van $y = \frac{1}{5}x^3$ bij de verschuiving $(-2, 3)$.
Het punt van symmetrie van $y = \frac{1}{5}(x + 2)^3 + 3$ is $(-2, 3)$.



© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Schets de grafieken van de volgende formules en vermeld in je schets de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

a $y = \frac{1}{5}(x-5)^2 - 4$

b $y = -3(x+2)^5 - 6$

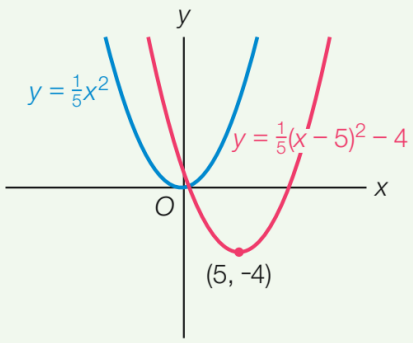
Aanpak

a $y = \frac{1}{5}x^2$
↓ verschuiving $(5, -4)$
$y = \frac{1}{5}(x-5)^2 - 4$

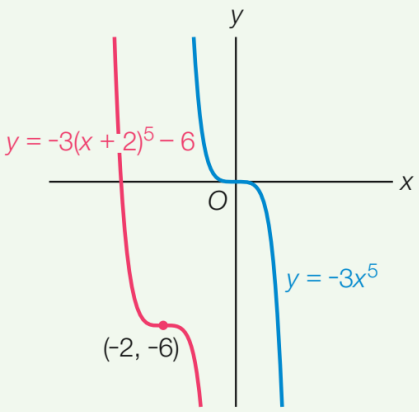
b $y = -3x^5$
↓ verschuiving $(-2, -6)$
$y = -3(x+2)^5 - 6$

Uitwerking

a



b



9

Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld in je schets de coördinaten van de top.

a $y = 0{,}18(x-3)^2 - 4$

b $y = -2(x+2)^2 - 3$

c $y = \frac{1}{2}(x+2)^4 + 18$

d $y = -(x-3)^8 - 10$

10

Zie de formules bij opgave 9.
Geef bij elke formule aan of je met een minimum of maximum te maken hebt en geef dit minimum of maximum.

11

Geef van de grafieken van de volgende formules de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

a $y = -3(x-5)^2 + 8$

b $y = 5x^2 + 7$

c $y = \frac{2}{5}(x+8)^2$

d $y = 6(x-8)^3 + 12$

e $y = -\frac{1}{2}(x-100)^4$

f $y = -0{,}4(x+0{,}15)^6 - 0{,}3$

A12

Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld in je schets de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

a $y = \frac{1}{2}(x-3)^3 - 2$

b $y = -\frac{1}{3}(x+1)^2 - 4$

c $y = -0{,}2(x+2)^5 + 1$

d $y = 2(x-5)^4 - 3$

© Noordhoff Uitgevers bv

A13 ⊙ ✱

Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld in je schets de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

a $N = 3(t^4 - 2) + 5$ **c** $K = 8(q + 6)^5 - 12$

b $M = -5(p + 3)^6 + 2$ **d** $S = -8(t - 1)^3$

A14 ⊙ ✱

Bij de formule van $A = a(t - 2)^4 + b$ is het maximum gelijk aan 10. De grafiek van A gaat door het punt (4, 2).
Bereken a en b.

A15 ✱

De grafiek van $y = x^2 - 10x + 26$ is ontstaan uit de grafiek van $y = x^2 - 2x + 4$ bij een verschuiving.
Onderzoek welke verschuiving.

O16 ⊙ ✱

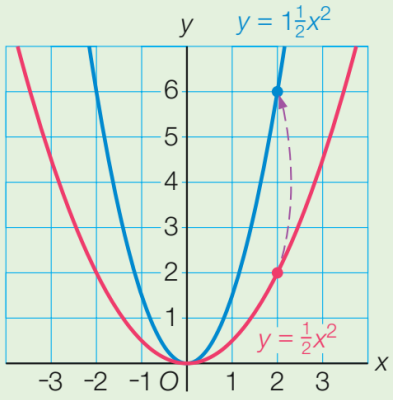
a Bereken $y = (x - 2)^4$ voor $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.

b Bereken $y = 3(x - 2)^4$ voor $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.

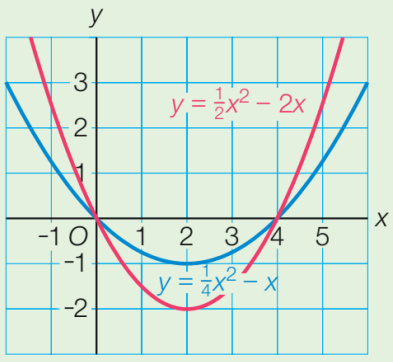
c Wat is het verband tussen de uitkomsten bij de vragen a en b?

Theorie C Verticaal herschalen

In de figuur hiernaast is de grafiek van $y = 1\frac{1}{2}x^2$ ontstaan uit de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ door elke y-waarde met 3 te vermenigvuldigen. Zo ligt het punt (2, 2) op de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ en het beeldpunt (2, 6) op de grafiek van $y = 1\frac{1}{2}x^2$. Je ziet dat de y-coördinaat 3 keer zo groot is geworden.
Er is hier sprake van **herschaling in verticale richting** met factor 3. De grafiek is als het ware uitgerekt in verticale richting.



Bij herschaling in verticale richting met factor $\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ als beeldfiguur de grafiek van $y = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 - 2x)$, dus van $y = \frac{1}{4}x^2 - x$. Zie de figuur hiernaast.



Je ziet dat de beeldgrafiek hier ontstaat door de oorspronkelijke grafiek in te drukken in plaats van uit te rekken. Dit gebeurt als de factor waarmee herschaald wordt tussen 0 en 1 ligt.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Op de grafiek van $y = \frac{1}{4}x^2$ wordt eerst de verschuiving $(2, -3)$ toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor 2. Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van de top.

Uitwerking

$y = \frac{1}{4}x^2$

$\downarrow$ verschuiving $(2, -3)$

$y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 3$

$\downarrow$ vert. herschaling factor 2

$y = 2(\frac{1}{4}(x - 2)^2 - 3) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 6$

De formule van de beeldgrafiek is $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 6$.

De top is $(2, -6)$.

R17

a Welke herschaling in verticale richting komt op hetzelfde neer als spiegeling in de x-as?

b Stel de formule op van de beeldgrafiek van $y = 3(x - 1)^2 - 6$ bij spiegeling in de x-as.

18

a Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}(x + 1)^3$. De grafiek van y wordt herschaald in verticale richting met factor 5. Stel de formule op van de beeldgrafiek.

b Gegeven is de formule $y = 0{,}6(x - 2)^6 - 4$. De grafiek van y wordt herschaald in verticale richting met factor $\frac{1}{4}$. Stel de formule op van de beeldgrafiek.

19

a De grafiek van y_2 ontstaat uit de grafiek van $y_1 = 0{,}3x^2$ bij de verschuiving $(-5, 6)$. Verder geldt $y_3 = 3 \cdot y_2$. Stel de formule op van y_3 en geef de top van de bijbehorende grafiek.

b Gegeven zijn de formules $y_1 = 0{,}5x^4$ en $y_2 = -4 \cdot y_1$. De grafiek van y_3 ontstaat uit de grafiek van y_2 bij de verschuiving $(-3, 5)$. Stel de formule op van y_3 en geef de top van de bijbehorende grafiek.

c De grafiek van y_2 ontstaat uit de grafiek van $y_1 = -3x^5 + 4$ bij de verschuiving $(2, -7)$. Verder geldt $y_3 = 6 \cdot y_2$. Stel de formule op van y_3 en geef de coördinaten van het punt van symmetrie van de bijbehorende grafiek.

© Noordhoff Uitgevers bv

A20 ⏍ ⊙ ∗

a Op de grafiek van $y = -0{,}12x^2$ wordt eerst de verschuiving (4, 5) toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor 4.
Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van de top.

b Op de grafiek van $y = 3(x - 4)^2 - 8$ wordt eerst de verschuiving $(-5, 2)$ toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor -4.
Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van de top.

c De grafiek van $y = -1\frac{1}{2}(x + 3)^3 + 8$ wordt eerst herschaald in verticale richting met factor 2. Vervolgens wordt de verschuiving (8, 20) toegepast.
Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van het punt van symmetrie.

A21 ∗

Gegeven zijn de formules $y_1 = 0{,}1x^3$, $y_2 = 4 \cdot y_1$ en $y_3 = \frac{1}{5} \cdot y_2$.
De grafiek van y_4 ontstaat uit de grafiek van y_3 door de verschuiving $(6, p)$.
De grafiek van y_4 gaat door de oorsprong.
Bereken p.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan de formule opstellen van een grafiek die is ontstaan na verschuiving van een grafiek bij een machtsverband.
▶ OPGAVE C1 THEORIE A

☐ Ik kan de grafiek schetsen van een formule van de vorm $y = a(x - p)^n + q$ en daarbij de coördinaten van de top of het punt van symmetrie geven.
▶ OPGAVE C2 THEORIE B

☐ Ik kan de formule opstellen van een grafiek die is ontstaan na verticaal herschalen van een grafiek bij een machtsverband.
▶ OPGAVE C3 THEORIE C

C1 **a** Stel de formule op van de beeldgrafiek van $y = -\frac{1}{2}x^2$ bij de verschuiving $(-3, 2)$.
b Stel de formule op van de beeldgrafiek van $y = \frac{1}{3}(x - 2)^3 - 3$ bij de verschuiving $(-5, -4)$.

C2 Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld in je schets de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.
a $y = \frac{2}{3}(x - 3)^3 - 7$
b $N = -(t + 1)^4 - 3$

C3 Op de grafiek van $y = 0{,}23x^4$ wordt eerst de verschuiving $(5, -6)$ toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor 3. Stel de formule op van de beeldgrafiek.

Antwoorden

C1 **a** $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$
b $y = \frac{1}{3}(x + 3)^3 - 7$

C2 **a** ∗ punt van symmetrie $(3, -7)$
b ∗ top $(-1, -3)$

C3 $y = 0{,}69(x - 5)^4 - 18$

© Noordhoff Uitgevers bv

5.2 Rekenen met machten

Kennis en vaardigheden

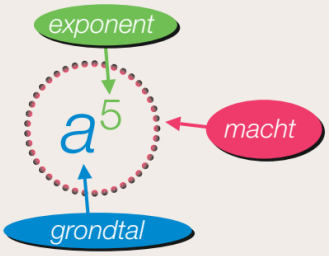
- Je kunt de rekenregels voor machten gebruiken bij het herleiden van formules.
- Je kent de betekenis van een negatieve exponent en je kunt daarmee formules herleiden.
- Je kent de betekenis van een gebroken exponent en je kunt daarmee formules herleiden.

Voorkennis Rekenregels voor machten

a^5 is een macht van a.

In de macht a^5 is a het grondtal en 5 de exponent.

a^5 is een korte schrijfwijze voor $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, dus voor het product van vijf factoren a.



Rekenen met machten gaat als volgt.

$a^2 \cdot a^5 = \underbrace{a \cdot a}_{\text{2 factoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{5 factoren}} = a^7$	Bij het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten bij elkaar op.
$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^3$	Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af.
$(a^2)^5 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{\text{5 factoren } a^2} = a^{10}$	Bij de macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten met elkaar.
$(ab)^4 = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab}_{\text{4 factoren } ab} = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a^4b^4$	Bij de macht van een product krijg je een product van machten.

Zo krijg je de volgende rekenregels voor machten.

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ $\quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ $\quad (a^p)^q = a^{pq}$ $\quad (ab)^p = a^p b^p$

Hieronder zie je hoe je de rekenregels gebruikt bij het herleiden.

$(-3a^3)^4 = (-3)^4 \cdot (a^3)^4 = 81a^{12}$
$(-3a^2)^3 = (-3)^3 \cdot (a^2)^3 = -27a^6$
$(2a^3)^2 - (a^2)^3 = 4a^6 - a^6 = 3a^6$
$a^3 \cdot a^2 + a^3 + a^2 = a^5 + a^3 + a^2$
$\frac{3a^3b}{12ab} = \frac{1}{4}a^2$

$(-3)^4 = 81$ en $-3^4 = -81$
$(-3)^3 = -27$ en $-3^3 = -27$

$a^3 \cdot a^2 = a^5$
$a^3 + a^2$ kan niet korter

© Noordhoff Uitgevers bv

V1 Herleid.

a $2p^3 \cdot 3p^2$

b $-2p^4q^3 \cdot -3pq$

c $(p^2q)^3$

d $(-5x^2y^3)^2$

V2 Herleid.

a $\dfrac{5x^{10}}{15x^5}$

b $\dfrac{24a^4b^2}{6ab}$

c $\dfrac{-15p^6q}{5p^2q}$

d $\dfrac{(2ab)^3}{(3ab)^2}$

V3 Herleid.

a $(3a)^2 \cdot (2a^2)^3$

b $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (-a)^2$

c $\left(\dfrac{9a^4}{a}\right)^2$

d $(-2ab)^3 \cdot b$

e $12a^4b \cdot \frac{1}{4}ab - 8ab$

f $(5a^4)^2 + (-a^2)^4$

O22 De formule $A = (3xy)^2 - \dfrac{6x^3y^4}{2xy^2}$ is te herleiden tot $A = 6x^2y^2$.

Laat zien hoe dat gaat.

Theorie A Formules met machten herleiden

Je kent de volgende rekenregels voor machten.

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ $\qquad \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ $\qquad (a^p)^q = a^{pq}$ $\qquad (ab)^p = a^p b^p$

Deze rekenregels kun je gebruiken om formules met machten te herleiden.

Voorbeeld

a Herleid de formule $P = (2a^3)^2 - (a^2)^3 + a^3 \cdot a^2$.

b Herleid de formule $Q = \dfrac{12x^3y}{3xy} + \dfrac{(4xy)^2}{2y^2}$.

Uitwerking

a $P = (2a^3)^2 - (a^2)^3 + a^3 \cdot a^2 = 4a^6 - a^6 + a^5 = 3a^6 + a^5$

Let op: $3a^6 + a^5$ kan niet korter.

b $Q = \dfrac{12x^3y}{3xy} + \dfrac{(4xy)^2}{2y^2} = 4x^2 + \dfrac{16x^2y^2}{2y^2} = 4x^2 + 8x^2 = 12x^2$

© Noordhoff Uitgevers bv

R23 Geef aan welke rekenregels voor machten worden gebruikt bij het herleiden van de twee formules van het voorbeeld.

24 Herleid de volgende formules.

a $A = (4x^3)^2 - 3x^5 \cdot 2x$

b $B = \dfrac{15a^3b}{5ab} - \left(1\tfrac{1}{2}a\right)^2$

c $C = 3p^2q \cdot 4pq - \dfrac{(6p^2q^2)^2}{9pq^2}$

A25 Herleid de volgende formules.

a $P = 6a^2 \cdot 4a^3 - 5a^4 \cdot 3a - (2a^2)^3$

b $Q = \dfrac{28x^6}{7x} - \dfrac{(3x^2y)^3}{2xy^3}$

c $R = (3p^2q)^2 - \dfrac{2p^5q^3}{pq} + (2p^2)^2 - (3q)^2$

26 Gegeven is het getal $2^{a+6} \cdot 3^4 \cdot 5^a$ met a positief en geheel. Dit getal eindigt op een aantal nullen.
Wat is het laatste cijfer vóór al deze nullen?

O27 In de tabel hiernaast kun je zowel in de exponenten als in de getallen rechts van het = -teken een regelmaat herkennen.

a Hoe volgt uit deze regelmaat dat $2^0 = 1$ en $2^{-2} = \frac{1}{4}$?

b Vul in: $2^{-3} = \dfrac{1}{2^{\ldots\ldots}}$ en $2^{-4} = \dfrac{1}{2^{\ldots\ldots}}$.

Met een vergelijkbare tabel kun je inzien dat $3^0 = 1$ en $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

c Vul in: $x^{-1} = \dfrac{1}{\ldots\ldots}$ en $x^{-3} = \dfrac{1}{\ldots\ldots}$.

$2^5 = 32$
$2^4 = 16$
$2^3 = 8$
$2^2 = 4$
$2^1 = \ldots\ldots$
$2^0 = \ldots\ldots$
$2^{-1} = \ldots\ldots$
$2^{-2} = \ldots\ldots$
$2^{-3} = \ldots\ldots$

Theorie B Machten met negatieve exponenten

In opgave 27 komen de machten 2^0, x^{-1} en x^{-3} voor.

Om de betekenis van x^0 te begrijpen, kijken we naar $\dfrac{x^2}{x^2}$.

Bedenk dat $\dfrac{x^2}{x^2} = 1$.

Gebruik je de regel $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, dan krijg je $\dfrac{x^2}{x^2} = x^{2-2} = x^0$.

De afspraak is dat $x^0 = 1$.

$x^0 = 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

Om de betekenis van x^{-3} te begrijpen, kijken we naar $\frac{x^2}{x^5}$.

Je weet $\frac{x^2}{x^5} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^3}$.

Gebruik je de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, dan krijg je $\frac{x^2}{x^5} = x^{2-5} = x^{-3}$.

De afspraak is dat $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$. En zo is $x^{-6} = \frac{1}{x^6}$ en $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

$\frac{1}{x} = x^{-1}$

$\frac{1}{5} = 5^{-1}$

Voor $a \neq 0$ is $a^0 = 1$ en $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

Met de regels voor machten kun je $\frac{a^4}{a^7}$ schrijven als macht van a.

Je berekent dan de exponent die bij het grondtal a hoort.

Je krijgt $\frac{a^4}{a^7} = a^{4-7} = a^{-3}$.

Voorbeeld

Schrijf als macht van a.

a $a^2 \cdot \frac{1}{a^8}$

b $\frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)}{a}$

c $\frac{1}{a^p} \cdot (a^3)^2$

d $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a^{-n}}$

Uitwerking

a $a^2 \cdot \frac{1}{a^8} = a^2 \cdot a^{-8} = a^{-6}$

b $\frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)}{a} = \frac{a^{-2}}{a^1} = a^{-3}$

c $\frac{1}{a^p} \cdot (a^3)^2 = a^{-p} \cdot a^6 = a^{-p+6}$

d $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a^{-n}} = \frac{a^{-5}}{a^{-n}} = a^{-5--n} = a^{-5+n}$

Je schrijft $5a^{-3}b^2$ als volgt zonder negatieve exponenten.

$5a^{-3}b^2 = 5 \cdot \frac{1}{a^3} \cdot b^2 = \frac{5b^2}{a^3}$

Je ziet dat dit antwoord als één breuk geschreven is. Doe dit ook bij vergelijkbare opgaven.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Schrijf zonder negatieve exponenten.

a $8a^{-5}b^3$

b $\frac{2}{5}a^{-2}b$

c $\left(\frac{3}{4}a^3b^{-2}\right)^{-2}$

Uitwerking

Deze tussenstap mag je weglaten.

a $8a^{-5}b^3 = 8 \cdot \frac{1}{a^5} \cdot b^3 = \frac{8b^3}{a^5}$

b $\frac{2}{5}a^{-2}b = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot b = \frac{2b}{5a^2}$

c $\left(\frac{3}{4}a^3b^{-2}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot (a^3)^{-2} \cdot (b^{-2})^{-2} = \frac{16}{9} \cdot a^{-6} \cdot b^4 = \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{a^6} \cdot b^4 = \frac{16b^4}{9a^6}$

28 Schrijf als macht van a.

a $(a^3)^{-2}$

b $\frac{1}{a^2}$

c $\frac{a^8}{a^0}$

d $\frac{a}{a^{12}}$

e $a^4 \cdot \frac{1}{a^6}$

f $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a}$

g $\frac{a^n}{\left(\frac{1}{a^4}\right)}$

h $\frac{\left(\frac{1}{a^n}\right)}{a^{-3}}$

i $\frac{1}{a^8} \cdot (a^3)^n$

29 Schrijf zonder negatieve exponenten.

a $\frac{1}{3}a^{-3}$

b $\frac{3}{5}a^{-4}$

c $6a^{-5}b^3$

d $\frac{1}{6}a^{-2}b^4$

e $(5a^{-4}b^2)^{-1}$

f $\left(\frac{1}{2}a\right)^{-3}$

g $-4 \cdot (3a)^{-2}$

h $(3a)^{-2}b^{-3}$

i $\left(\frac{3}{8}a^{-1}b\right)^{-2}$

30

a Toon aan dat de formule $y = 2^{x+4}$ te herleiden is tot $y = 16 \cdot 2^x$.

b Herleid de formule $y = 2^{x-2}$ tot de vorm $y = a \cdot 2^x$.

c Herleid de formule $y = 3^{4-2x}$ tot de vorm $y = a \cdot b^x$.

A31

a Schrijf $\frac{a^4 \cdot a^6}{\left(\frac{1}{a}\right)}$ als macht van a.

b Schrijf $\left(\frac{2}{3}a^{-4}b^3\right)^{-3}$ zonder negatieve exponenten.

c Toon aan dat $4a^{-2}b + \frac{3}{a^2b^{-1}}$ gelijk is aan $\frac{7b}{a^2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

A32 Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^n$.

a $y = 5(2x^3)^2 \cdot \frac{3}{x^4}$

b $y = \frac{1}{3}(3x^2)^3 \cdot \frac{2}{x^{10}}$

c $y = \frac{162}{(3x^2)^4}$

d $y = \left(\frac{4}{5}x\right)^{-2} \cdot \frac{4}{x}$

Voorkennis Hogeremachtswortels

Worteltrekken heeft te maken met kwadrateren. Zo heeft de vergelijking $x^2 = 5$ de oplossingen $x = \sqrt{5}$ en $x = -\sqrt{5}$. Dus $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ en $\left(-\sqrt{5}\right)^2 = 5$.
Omdat kwadrateren hetzelfde is als tot de tweede macht verheffen, heet $\sqrt{5}$ ook wel de *tweedemachtswortel* van 5.

$\sqrt{a}$ is een korte schrijfwijze voor $\sqrt[2]{a}$.

Er zijn ook hogeremachtswortels, zoals *derdemachtswortels, vierdemachtswortels*, enzovoort.
Een derdemachtswortel heeft te maken met een derde macht. Een vierdemachtswortel met een vierde macht, enzovoort.
Zo heeft de vergelijking $x^3 = 50$ als oplossing $x = \sqrt[3]{50}$. Dus $\left(\sqrt[3]{50}\right)^3 = 50$.

Soms komt een hogeremachtswortel mooi uit. Zo is $\sqrt[3]{125} = 5$, want $5^3 = 125$. Voor het benaderen van $\sqrt[3]{50}$ gebruik je de grafische rekenmachine. Je vindt dat $\sqrt[3]{50} \approx 3{,}68$.

V4 Bereken zonder rekenmachine.

a $\sqrt{81}$

b $\sqrt[4]{16}$

c $\sqrt[3]{1000}$

d $\sqrt[4]{81}$

V5 Bereken en rond af op twee decimalen.

a $\sqrt[3]{15}$

b $\sqrt[7]{125}$

O33

a Bereken $\left(\sqrt{9}\right)^2$ en $\left(\sqrt{3}\right)^2$.

b Vul in $\left(\sqrt{x}\right)^2 =$ .....

c Herleid $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2$ met behulp van de rekenregels voor machten.

d Uit de antwoorden op vraag b en c volgt dat $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.
Licht dit toe.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie C Machten met gebroken exponenten

De rekenregels voor machten van bladzijde 18 gelden ook voor machten met gebroken exponenten.

In opgave 33 heb je gezien dat $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

We lichten de betekenis van $x^{\frac{1}{3}}$ toe met behulp van de regel $(a^p)^q = a^{pq}$.

Je kiest daartoe $p = \frac{1}{3}$ en $q = 3$.

Je krijgt $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x^{\frac{1}{3} \cdot 3} = x^1 = x$.
Je weet $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$.
} De afspraak is dat $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Algemeen geldt:

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

Machten met een gebroken exponent kun je dus herleiden tot een hogeremachtswortel.

Zo is $a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a}$, $a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ en $a^{\frac{2}{3}} = a^{2 \cdot \frac{1}{3}} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$.

Bijzondere machten

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

$a^0 = 1$

Voorbeeld

Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

a $4a^{-\frac{1}{3}}$

b $4a^{2\frac{1}{2}}$

c $\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{4}}$

Uitwerking

a $4a^{-\frac{1}{3}} = \frac{4}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{4}{\sqrt[3]{a}}$

b $4a^{2\frac{1}{2}} = 4a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 4a^2 \cdot \sqrt{a}$

c $\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{4}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{4b^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{a}}{4 \cdot \sqrt[4]{b}}$

Omgekeerd kun je een vorm met hogeremachtswortels herleiden tot een vorm met een gebroken exponent. Zie voorbeeld a en b op de volgende bladzijde.

Je mag de rekenregels voor machten ook toepassen als de exponent een decimaal getal is. Zie voorbeeld c.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Schrijf als macht van x.

a $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$ **b** $x \cdot \sqrt[3]{x^2}$ **c** $\dfrac{x^{1{,}25}}{x^{2{,}20}}$

Uitwerking

a $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{1\frac{2}{3}}$

b $x \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^1 \cdot (x^2)^{\frac{1}{3}} = x^1 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{1\frac{2}{3}}$

c $\dfrac{x^{1{,}25}}{x^{2{,}20}} = x^{-0{,}95}$

$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$

34 ⊡ ⊙

Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

a $5a^{3\frac{1}{2}}$ **b** $3a^{-\frac{1}{3}}$ **c** $\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{4}}b$ **d** $\frac{1}{5}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ **e** $\frac{2}{3}a^{-3}b^{1\frac{1}{2}}$ **f** $(5a)^{-\frac{1}{2}}$

35 ⊡ ⊙

Schrijf als macht van a.

a $\dfrac{1}{a}$ **b** $\dfrac{1}{a^3}$ **c** $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ **d** $\sqrt[3]{a^{12}}$ **e** $a \cdot \sqrt[3]{a}$ **f** $a^2 \cdot \sqrt{a}$ **g** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}$ **h** $\dfrac{1}{a^4} \cdot \sqrt[3]{a}$ **i** $\dfrac{a^3}{\sqrt[3]{a}}$

36 ⊡ ⊙ ∗

Je kunt $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ als macht van 2 schrijven: $\frac{1}{4}\sqrt{2} = \dfrac{1}{2^2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-1\frac{1}{2}}$.

Schrijf als macht van 2, 3 of 10.

a $8\sqrt{2}$ **b** $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ **c** $\frac{1}{100}\sqrt{10}$ **d** $\dfrac{8}{\sqrt{2}}$ **e** $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$ **f** $\dfrac{10}{\sqrt[3]{0{,}1}}$

R37 ⊡ ⊙ ∗

a Licht toe dat $x^{0{,}25} = \sqrt[4]{x}$.

b Bereken zonder rekenmachine $25^{0{,}5}$ en $4^{1{,}5}$.

A38 ⊡ ⊙ ∗

Schrijf de volgende formules zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

a $N = 5p^{\frac{1}{2}} \cdot q^{-\frac{1}{3}}$

b $R = 100a^{-4} \cdot b^{2\frac{1}{2}}$

c $P = 9^{1\frac{1}{2}}x^{-1\frac{1}{2}} \cdot y^{1\frac{1}{3}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

A39 Schrijf als macht van x.

a $\dfrac{x^6}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

b $\dfrac{x}{\sqrt[5]{x}}$

c $x^4 \cdot \sqrt{x}$

d $\dfrac{x^{0{,}13}}{x^{0{,}57}}$

e $x \cdot \sqrt[7]{x^3}$

f $x^2 \cdot \dfrac{x^{0{,}6}}{x^{3{,}1}}$

A40 Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.

a $y = 5x\sqrt{x^3}$

b $y = \dfrac{5}{x^3} \cdot 2\sqrt{x}$

c $y = \dfrac{5}{x\sqrt{x}}$

d $y = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3}$

e $y = 5x^{-0{,}2} \cdot x^{1{,}3}$

f $y = \dfrac{50x^{1{,}9}}{10x^{1{,}1}}$

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de rekenregels voor machten gebruiken bij het herleiden van formules. ▶ OPGAVE C4 THEORIE A
- ☐ Ik ken de betekenis van een negatieve exponent en ik kan daarmee formules herleiden. ▶ OPGAVE C5 THEORIE B
- ☐ Ik ken de betekenis van een gebroken exponent en ik kan daarmee formules herleiden. ▶ OPGAVE C6 THEORIE C

C4 Herleid de formule $B = \dfrac{12p^4q}{-3p^2q} + \left(2\tfrac{1}{2}p\right)^2$.

C5 **a** Schrijf $\frac{5}{6}a^{-3}b^2$ zonder negatieve exponenten.

b Herleid de formule $y = \dfrac{144x^3}{(2x)^5}$ tot de vorm $y = ax^n$.

c Schrijf de formule $y = 3^{x-4}$ in de vorm $y = a \cdot 3^x$.

C6 **a** Schrijf $\dfrac{x^5}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}$ als macht van x.

b Schrijf de formule $K = \dfrac{10y^{1\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ zonder gebroken exponenten.

Antwoorden

C4 $B = 2\frac{1}{4}p^2$

C5 **a** $\dfrac{5b^2}{6a^3}$ **b** $y = 4\frac{1}{2}x^{-2}$ **c** $y = \frac{1}{81} \cdot 3^x$

C6 **a** $x^{1\frac{3}{4}}$ **b** $K = \dfrac{10y\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

5.3 Formules herleiden en variabelen vrijmaken

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de rekenregel $\sqrt[n]{A \cdot B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$ gebruiken om formules met wortels te herleiden.
- Je kunt variabelen vrijmaken bij wortelformules.
- Je kunt variabelen vrijmaken bij machtsformules.
- Je kunt variabelen vrijmaken bij gebroken formules.

O41

a De formule $y = \sqrt{16x}$ is te schrijven in de vorm $y = a\sqrt{x}$.
Welk getal is a?

b De formule $y = \sqrt[3]{27x}$ is te schrijven in de vorm $y = b \cdot \sqrt[3]{x}$.
Welk getal is b?

Theorie A Wortelformules herleiden

Met de regel $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$ is de formule $y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{xy}$ te schrijven als $y = \sqrt{2xy}$.
Omgekeerd is de formule $y = \sqrt{9x}$ te schrijven als $y = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x}$ oftewel als $y = 3\sqrt{x}$. Je gebruikt dan dat $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.
Op dezelfde manier geldt de regel $\sqrt[n]{A \cdot B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$.

$$\sqrt[n]{A \cdot B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$$

Voorbeeld

a Schrijf de formule $A = \sqrt[3]{-343xy}$ in de vorm $A = c \cdot \sqrt[3]{xy}$.

b Schrijf de formule $B = 2 \cdot \sqrt[4]{50p} + \sqrt[4]{60p}$ in de vorm $B = c \cdot \sqrt[4]{p}$.
Rond c af op twee decimalen.

Uitwerking

a $A = \sqrt[3]{-343xy} = \sqrt[3]{-343} \cdot \sqrt[3]{xy} = -7 \cdot \sqrt[3]{xy}$
Dus $A = -7 \cdot \sqrt[3]{xy}$.

b $B = 2 \cdot \sqrt[4]{50p} + \sqrt[4]{60p}$
$B = 2 \cdot \sqrt[4]{50} \cdot \sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{60} \cdot \sqrt[4]{p}$
$B \approx 8{,}10 \cdot \sqrt[4]{p}$ ← $2 \cdot \sqrt[4]{50} + \sqrt[4]{60} \approx 8{,}10$
Dus $B = 8{,}10 \cdot \sqrt[4]{p}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

R42 Zie het voorbeeld.

a In voorbeeld a is gebruikt dat $\sqrt[3]{-343} = -7$.
Controleer dit door $\sqrt[3]{-343}$ met de rekenmachine te berekenen.
Controleer dit ook door $(-7)^3$ te berekenen.

b In voorbeeld b is gebruikt dat $2 \cdot \sqrt[4]{50} + \sqrt[4]{60} \approx 8{,}10$.
Bereken dit getal in drie decimalen.

43 Schrijf de formule in de vorm $A = c \cdot \sqrt[n]{xy}$.

a $A = \sqrt[3]{125xy}$

b $A = \sqrt[4]{256xy}$

c $A = \sqrt[5]{-32xy}$

d $A = 8\sqrt{25xy} - 3\sqrt{49xy}$

44 Herleid de formule tot de vorm $B = c \cdot \sqrt[5]{a}$. Rond c af op twee decimalen.

a $B = 6 \cdot \sqrt[5]{10a}$

b $B = \dfrac{\sqrt[5]{a}}{7}$

c $B = 2 \cdot \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{-20a}$

d $B = \dfrac{\sqrt[5]{50a}}{\sqrt[5]{2}}$

A45

a Herleid de formule $K = 2 \cdot \sqrt[3]{8pq} - \sqrt[3]{pq}$ tot de vorm $K = c \cdot \sqrt[3]{pq}$.

b Herleid de formule $F = 2 \cdot \sqrt[4]{9xy} - \sqrt[4]{3x} \cdot \sqrt[4]{6y}$ tot de vorm $F = c \cdot \sqrt[4]{xy}$.
Rond c af op twee decimalen.

c Herleid de formule $N = 4 \cdot \sqrt[5]{243t} + 2 \cdot \sqrt[5]{1024t}$ tot de vorm $N = c \cdot \sqrt[5]{t}$.

A46

a Herleid de formule $y = (200x)^{\frac{1}{3}}$ tot de vorm $y = c \cdot \sqrt[3]{x}$. Rond c af op twee decimalen.

b Herleid de formule $A = 5 \cdot (81p)^{\frac{1}{4}} - (625p)^{\frac{1}{4}}$ tot de vorm $A = c \cdot \sqrt[4]{p}$.

c Schrijf de formule $K = 10x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{1\frac{1}{4}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

d Herleid de formule $y = -3 \cdot \dfrac{2}{x^3} \cdot \sqrt{9x^3}$ tot de vorm $y = a \cdot x^p$.

A47 De grafiek van $N = \sqrt[5]{0{,}6x^2}$ is ontstaan door de grafiek van $N = \sqrt[5]{x^2}$ verticaal te herschalen.
Met welke factor is er herschaald? Rond af op twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

O48 De formule $y = \sqrt{x}$ hoort bij een machtsverband.

a Licht dit toe.

Op de grafiek van de formule $y = \sqrt{x}$ wordt een verschuiving toegepast.

De formule van de beeldgrafiek is $y = \sqrt{x-4}$.

b Welke verschuiving is toegepast?

De formule $y = \sqrt{x-4}$ is te herleiden tot $x = y^2 + 4$.

c Zoek uit hoe dat gaat.

Theorie B Variabelen vrijmaken bij wortelformules

Om bij de formule $y = \sqrt{x+2}$ de variabele x vrij te maken, verwissel je eerst het linkerlid en het rechterlid. Daarna kwadrateer je beide leden. Je gebruikt dan de regel $\sqrt{A} = B$ geeft $A = B^2$.

Je krijgt

$y = \sqrt{x+2}$

$\sqrt{x+2} = y$

$x + 2 = y^2$

$x = y^2 - 2$

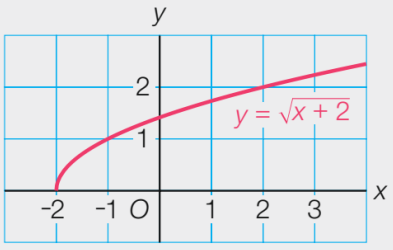
Informatief Wortelformules kwadrateren

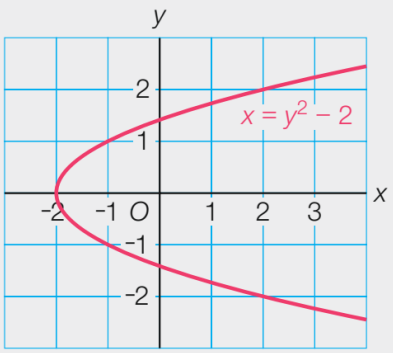
Bij de formule $y = \sqrt{x+2}$ hoort de grafiek hiernaast. Na het vrijmaken van x is de formule $x = y^2 - 2$ ontstaan. Om de bijbehorende grafiek te tekenen, kun je de volgende tabel maken.

y	-2	-1	0	1	2
x	2	-1	-2	-1	2

Je krijgt de grafiek hiernaast. Je ziet dat dit niet dezelfde grafiek is als die van $y = \sqrt{x+2}$. Door het kwadrateren is de onderste helft van de grafiek van $x = y^2 - 2$ erbij gekomen. Eigenlijk zou je bij de formule $x = y^2 - 2$ moeten vermelden dat $y \geq 0$.

Je hoeft bij het vrijmaken van variabelen bij wortelformules hier geen rekening mee te houden.





In voorbeeld b wordt de regel $\sqrt[n]{A} = B$ geeft $A = B^n$ gebruikt om bij een formule met een hogeremachtswortel de variabele vrij te maken.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

a Maak p vrij bij $Q = 5\sqrt{p-3}$.
b Maak x vrij bij de formule $y = 0{,}5 \cdot \sqrt[5]{x} + 6$.

Uitwerking

a

$Q = 5\sqrt{p-3}$	Maak p vrij, dus verwissel linker- en rechterlid.
$5\sqrt{p-3} = Q$	Deel beide leden door 5.
$\sqrt{p-3} = \frac{1}{5}Q$	Kwadrateer beide leden.
$p - 3 = \left(\frac{1}{5}Q\right)^2$	$\left(\frac{1}{5}Q\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot Q^2 = \frac{1}{25}Q^2$
$p = \frac{1}{25}Q^2 + 3$	

b

$y = 0{,}5 \cdot \sqrt[5]{x} + 6$	Maak x vrij, dus verwissel linker- en rechterlid.
$0{,}5 \cdot \sqrt[5]{x} + 6 = y$	Trek links en rechts 6 af.
$0{,}5 \cdot \sqrt[5]{x} = y - 6$	Vermenigvuldig beide leden met 2.
$\sqrt[5]{x} = 2y - 12$	Beide leden tot de macht 5.
$x = (2y - 12)^5$	

R49 Bij voorbeeld a zijn in de laatste stap de haakjes weggewerkt.
Waarom is dit bij voorbeeld b niet gedaan?

50 Maak t vrij.

a $N = 4\sqrt{t-2}$
b $B = 0{,}2 \cdot \sqrt[3]{t-3}$
c $L = 2 \cdot \sqrt[4]{t-5}$
d $A = 0{,}4 \cdot \sqrt[3]{t} + 2$

51 Zie het voorbeeld.

a De grafiek van $Q = 5\sqrt{p-3}$ is ontstaan door de grafiek van $Q = \sqrt{p}$ eerst te verschuiven en vervolgens te herschalen in verticale richting.
Geef aan welke verschuiving is toegepast en met welke factor er is herschaald.

b De grafiek van $y = 0{,}5 \cdot \sqrt[5]{x} + 6$ is ontstaan door de grafiek van $y = \sqrt[5]{x}$ eerst te herschalen in verticale richting en vervolgens te verschuiven.
Geef aan met welke factor er is herschaald en welke verschuiving is toegepast.

© Noordhoff Uitgevers bv

A52

a Je kunt de formule $z = 6\sqrt{8 + \frac{1}{4}y}$ schrijven in de vorm $y = az^2 + b$.
Bereken a en b.

b Maak A vrij bij de formule $L = \frac{1}{6} \cdot \sqrt[3]{A} - 7$.

c Schrijf de formule $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt[5]{3x}$ in de vorm $x = ay^n$.

O53

a De formule $y = 2{,}5x^{\frac{1}{3}}$ is te herleiden tot $x = 0{,}064y^3$.
Zoek uit hoe dat gaat.

b De formule $y = 125x^3$ is te herleiden tot $x = 0{,}2 \cdot \sqrt[3]{y}$.
Zoek uit hoe dat gaat.

Theorie C Variabelen vrijmaken bij machtsformules

Om bij de formule $y = 5(x - 4)^3$ de variabele x vrij te maken, verwissel je eerst beide leden en deel je beide leden door 5. Je krijgt

$y = 5(x - 4)^3$

$5(x - 4)^3 = y$

$(x - 4)^3 = \frac{1}{5}y$ Gebruik de regel $A^n = B$ geeft $A = \sqrt[n]{B}$.

$x - 4 = \sqrt[3]{\frac{1}{5}y}$

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{5}y} + 4$

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{y} + 4$

$x \approx 0{,}58 \cdot \sqrt[3]{y} + 4$

Dus de formule wordt $x = 0{,}58 \cdot \sqrt[3]{y} + 4$.

Om de formule $y = 10x^{0{,}8}$ in de vorm $x = ay^b$ te schrijven, verwissel je eerst beide leden en deel je beide leden door 10. Je krijgt

$y = 10x^{0{,}8}$

$10x^{0{,}8} = y$

$x^{0{,}8} = 0{,}1y$ Gebruik de regel $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$.

$x = (0{,}1y)^{\frac{1}{0{,}8}}$

$x = 0{,}1^{\frac{1}{0{,}8}} \cdot y^{\frac{1}{0{,}8}}$

$x \approx 0{,}056y^{1{,}25}$

Dus de formule wordt $x = 0{,}056y^{1{,}25}$.

Hierboven is de regel $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$ gebruikt. Je kunt als volgt inzien dat deze regel juist is.

$A^p = B$ geeft $(A^p)^{\frac{1}{p}} = B^{\frac{1}{p}}$. Omdat $(A^p)^{\frac{1}{p}}$ gelijk is aan A, geldt dat $A = B^{\frac{1}{p}}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

a Maak t vrij bij $H = 9(t-2)^2$ met $t \geq 2$.
b Schrijf de formule $L = 16(3A)^{-1,3}$ in de vorm $A = bL^c$. Rond b en c af op twee decimalen.

Uitwerking

a

$H = 9(t-2)^2$	Maak t vrij, dus verwissel linker- en rechterlid.
$9(t-2)^2 = H$	Deel beide leden door 9.
$(t-2)^2 = \frac{1}{9}H$	Neem links en rechts de wortel.
$t-2 = \sqrt{\frac{1}{9}H}$	$\sqrt{\frac{1}{9}H} = \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{H} = \frac{1}{3}\sqrt{H}$
$t-2 = \frac{1}{3}\sqrt{H}$	Links en rechts 2 optellen.
$t = 2 + \frac{1}{3}\sqrt{H}$	

$t-2 = -\sqrt{\frac{1}{9}H}$ kan niet, want $t \geq 2$.

b

$L = 16(3A)^{-1,3}$	A vrijmaken, dus verwissel linker- en rechterlid.
$16(3A)^{-1,3} = L$	Deel beide leden door 16.
$(3A)^{-1,3} = \frac{1}{16}L$	Gebruik de regel $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$.
$3A = \left(\frac{1}{16}L\right)^{\frac{1}{-1,3}}$	$\left(\frac{1}{16}L\right)^{\frac{1}{-1,3}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{-1,3}} \cdot L^{\frac{1}{-1,3}}$
$A = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{-1,3}} \cdot L^{\frac{1}{-1,3}}$	
$A \approx 2{,}81L^{-0,77}$	

Dus $A = 2{,}81L^{-0,77}$.

54 **a** Maak t vrij bij $A = 8(t-2)^3$.
b Maak t vrij bij $P = 0{,}125(t+5)^3$.
c Herleid de formule $L = 5(t-3)^2$ met $t \geq 3$ tot de vorm $t = a + b\sqrt{L}$. Rond a en b zo nodig af op twee decimalen.

55 Maak telkens x vrij. Schrijf je antwoord in de vorm $x = ay^b$. Rond a en b zo nodig af op twee decimalen.
a $y = 3x^{2,6}$ **b** $y = 0{,}2 \cdot 2x^{-1,4}$ **c** $y = 15(0{,}2x)^{1,6}$

A56 **a** Schrijf $y = 5x^{-0,4}$ in de vorm $x = ay^b$. Rond a af op twee decimalen.
b Maak t vrij bij de formule $P = 3 \cdot \sqrt[3]{t} + 6$.
c Je kunt de formule $p = -2\sqrt{\frac{1}{2}q - 3}$ schrijven in de vorm $q = ap^2 + b$. Bereken a en b.
d Schrijf $T = 0{,}125(x+4)^3$ in de vorm $x = a \cdot \sqrt[3]{T} - b$. Bereken a en b.

O57 Bij de formule $y = \frac{10}{x-3}$ kun je x vrijmaken. Je krijgt $x = 3 + \frac{10}{y}$.
Zoek uit hoe dat gaat.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie D Variabelen vrijmaken bij gebroken formules

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = BC$ en uit $\frac{A}{C} = B$ volgt $A = BC$.

Dus de vergelijkingen $\frac{A}{B} = C$ en $\frac{A}{C} = B$ komen op hetzelfde neer,

oftewel de vergelijkingen $C = \frac{A}{B}$ en $B = \frac{A}{C}$ komen op hetzelfde neer.

Uit $C = \frac{A}{B}$ volgt $B = \frac{A}{C}$. Deze regel heet de wisseleigenschap.

De regel dat je in de formule $C = \frac{A}{B}$ de variabelen C en B mag verwisselen, gebruik je om variabelen vrij te maken bij gebroken formules.

- Uit $K = \frac{18}{q-3}$ volgt $q - 3 = \frac{18}{K}$, oftewel $q = 3 + \frac{18}{K}$.
- $K = 5 + \frac{18}{q}$ geeft $K - 5 = \frac{18}{q}$, dus $q = \frac{18}{K-5}$.

Om q vrij te maken bij $K = \frac{2q-1}{q+3}$ kun je de wisseleigenschap niet gebruiken.

Je gebruikt dat $\frac{A}{B} = C$ geeft $A = BC$. Verwissel daartoe eerst het linker- en rechterlid.

$K = \frac{2q-1}{q+3}$ geeft $\frac{2q-1}{q+3} = K$

$2q - 1 = K(q + 3)$

$2q - 1 = Kq + 3K$ Maak q vrij, dus alle termen met q in het linkerlid.

$2q - Kq = 3K + 1$ Breng q buiten haakjes.

$q(2 - K) = 3K + 1$ Deel links en rechts door $2 - K$.

$q = \frac{3K+1}{2-K}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Maak L vrij.

a $A = 8 + \frac{160}{L-1}$ **b** $K = \frac{L-1}{L+1}$

Uitwerking

a $A = 8 + \frac{160}{L-1}$

$A - 8 = \frac{160}{L-1}$

$L - 1 = \frac{160}{A-8}$

$L = 1 + \frac{160}{A-8}$

b $K = \frac{L-1}{L+1}$

$\frac{L-1}{L+1} = K$

$L - 1 = K(L+1)$

$L - 1 = KL + K$

$L - KL = K + 1$

$L(1-K) = K + 1$

$L = \frac{K+1}{1-K}$

58 Maak q vrij.

a $K = \frac{8}{q-1}$ **c** $K = 5 + \frac{8}{q}$ **e** $K = \frac{q+3}{2q-1}$

b $P = \frac{7}{3q-2}$ **d** $P = 18 - \frac{5}{q-2}$ **f** $A = \frac{q}{q+4}$

A59

a Druk a uit in T als gegeven is dat $T = \frac{a}{a-6}$.

b Maak q vrij bij $L = 320 - \frac{18}{q-1}$.

c Druk y uit in x bij de formule $\frac{3x}{x+y} = 5 - x$.

60 De formule $y = \frac{1}{x}$ hoort bij een machtsverband.

a Licht dit toe.

b De grafiek van $y = \frac{4}{x-3}$ ontstaat uit de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ door een verschuiving en een herschaling in verticale richting.
Geef deze verschuiving en herschaling.

c De formule $y = \frac{x+1}{x-3}$ kan geschreven worden als $y = 1 + \frac{4}{x-3}$.

Controleer dit door $1 + \frac{4}{x-3}$ als één breuk te schrijven.

d Hoe ontstaat de grafiek van $y = \frac{x+1}{x-3}$ uit de grafiek van $y = \frac{1}{x}$?

e Licht toe dat de formule $y = \frac{x+1}{x-3}$ te maken heeft met een machtsverband.

© Noordhoff Uitgevers bv

A61

a Op de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ wordt eerst de verschuiving (2, −3) toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor 1,5. Maak x vrij bij de formule van de beeldgrafiek.

b Op de grafiek van $L = 24 - \frac{4}{n+1}$ wordt eerst de herschaling in verticale richting met factor $\frac{1}{2}$ toegepast en vervolgens de verschuiving (3, −8). Maak n vrij bij de formule van de beeldgrafiek.

A62

a Herleid $P = 3 \cdot \sqrt[5]{8t} - \sqrt[5]{t} + 2 \cdot \sqrt[5]{3t}$ tot de vorm $P = a \cdot \sqrt[5]{t}$ en rond af op twee decimalen.

b Maak l vrij bij de formule $T = 3 \cdot \sqrt[3]{2l+1}$.

c Schrijf de formule $W = 9(a-2)^2$ met $a \geq 2$ in de vorm $a = p + q\sqrt{W}$.

d Schrijf de formule $R = 2{,}5(3q)^{2{,}1}$ in de vorm $q = aR^b$. Rond af op drie decimalen.

e Maak x vrij bij de formule $K = \frac{2x-1}{3-x}$.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de rekenregel $\sqrt[n]{A \cdot B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$ gebruiken om formules met wortels te herleiden. ▶ OPGAVE C7a THEORIE A
- ☐ Ik kan variabelen vrijmaken bij wortelformules. ▶ OPGAVE C7b THEORIE B
- ☐ Ik kan variabelen vrijmaken bij machtsformules. ▶ OPGAVE C8 THEORIE C
- ☐ Ik kan variabelen vrijmaken bij gebroken formules. ▶ OPGAVE C9 THEORIE D

C7

a Herleid $B = 10 \cdot \sqrt[3]{20p} - 5 \cdot \sqrt[3]{10p}$ tot de vorm $B = a \cdot \sqrt[3]{p}$. Rond af op twee decimalen.

b Maak p vrij bij $D = \frac{1}{12}\sqrt{p+10}$.

C8

a Schrijf de formule $E = 2\frac{1}{4}(q-6)^2$ met $q \geq 6$ in de vorm $q = a\sqrt{E} + b$.

b Schrijf $F = 25(2t)^{1{,}6}$ in de vorm $t = aF^b$. Rond af op drie decimalen.

C9 Maak x vrij.

a $G = \frac{2}{x-3} + 4$ **b** $H = \frac{2x}{x+3}$

Antwoorden

C7 **a** $B = 16{,}37 \cdot \sqrt[3]{p}$ **b** $p = 144D^2 - 10$

C8 **a** $q = \frac{2}{3}\sqrt{E} + 6$ **b** $t = 0{,}067F^{0{,}625}$

C9 **a** $x = \frac{2}{G-4} + 3$ **b** $x = \frac{3H}{2-H}$

© Noordhoff Uitgevers bv

5.4 Formules met machten en wortels

Kennis en vaardigheden

- Je kunt formules opstellen bij machtsverbanden.
- Je kunt bij machtsverbanden nagaan wat voor effect het vermenigvuldigen van de ene variabele heeft op de andere variabele.
- Je kunt machtsformules gebruiken in opgaven met praktische situaties.

O63

a Tussen x en y bestaat het verband $y = ax^3$. Voor $x = 2$ is $y = 48$.
Bereken a.

b Tussen x en y bestaat het verband $y = 10x^p$. Voor $x = 4$ is $y = 80$.
Bereken p. Gebruik je GR.

Theorie A Formules opstellen bij machtsverbanden

Bij een formule van de vorm $y = ax^n$ heb je te maken met een machtsverband tussen x en y.
In opgave 63 heb je bij gegeven x en y de **coëfficiënt** a berekend in de formule $y = ax^3$.
Bij de formule $y = 5x^n$ is de exponent n te berekenen bij gegeven x en bijbehorende y. Voor $x = 2$ en $y = 80$ krijg je $5 \cdot 2^n = 80$. Oftewel $2^n = 16$ en dit geeft $n = 4$. Dus de formule is $y = 5x^4$.

Voorbeeld

a Gegeven is de formule $y = ax^{1,73}$. Voor $x = 5$ is $y = 820$.
Stel de formule op van y. Rond a af op één decimaal.

b Gegeven is de formule $N = 20t^p$. Voor $t = 3$ is $N = 50$.
Bereken p. Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

a $\left.\begin{matrix} y = ax^{1,73} \\ x = 5 \text{ en } y = 820 \end{matrix}\right\} a \cdot 5^{1,73} = 820$, dus $a = \dfrac{820}{5^{1,73}} \approx 50{,}7$

Dus $y = 50{,}7x^{1,73}$.

b $\left.\begin{matrix} N = 20t^p \\ t = 3 \text{ en } N = 50 \end{matrix}\right\} 20 \cdot 3^p = 50$

Voer in $y_1 = 20 \cdot 3^x$ en $y_2 = 50$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 0{,}83$, dus $p \approx 0{,}83$.

64

a Gegeven is de formule $y = ax^{-1,81}$. Voor $x = 12$ is $y = 16$.
Stel de formule op van y. Rond a af op gehelen.

b Gegeven is de formule $y = 180x^p$. Voor $x = 4$ is $y = 900$.
Stel de formule op van y. Rond p af op twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

A65

Voor $x = 8$ en $y = 600$ is gegeven de formule $y = ax^b$.

a Neem $b = 2{,}15$ en bereken a. Rond af op twee decimalen.

b Neem $a = 50$ en bereken b. Rond af op twee decimalen.

A66 ✱

Gegeven is de formule $A = ap^{1{,}83}$. Voor $p = 18$ is $A = 350$.

a Bereken A voor $p = 25$. Rond af op gehelen.

b Schrijf de formule in de vorm $p = b \cdot A^c$. Rond b en c af op drie decimalen.

A67 ✱

Gegeven is de formule $y = ax^p$. Bij de deze formule hoort de tabel hiernaast.
Stel de formule op van y. Rond zo nodig af op twee decimalen.

x	1	2
y	5,18	13,86

O68 ✱

Planken is een fitnessoefening waarbij je voornamelijk je buikspieren traint. Manon doet de oefening regelmatig. Ze heeft bijgehouden hoe lang ze de oefening kan volhouden. Zie de tabel.

poging n	5	10	15	20
tijd t in seconden	65	100	130	150

Je ziet dat ze het bij haar 20^e poging al twee en een halve minuut kan volhouden. Manon heeft bij de tabel de formule $t = 25n^{0{,}6}$ gemaakt.

a Onderzoek of deze formule past bij de tabel.

b Manon beweert dat de tijd die ze de oefening kan volhouden met 50% toeneemt als het aantal pogingen verdubbelt.
Onderzoek of dat klopt.

Theorie B Machtsformules gebruiken

In de praktijk komen allerlei machtsformules voor. Zo heeft Manon bij haar fitnessoefening te maken met de formule $t = 25n^{0{,}6}$. Hierin is t de tijd in seconden dat ze de n^e oefening kan volhouden. Met deze formule is bijvoorbeeld te berekenen met welk percentage de tijd toeneemt als n verdubbelt. Neem in de formule $2n$ voor n. Je krijgt
$t = 25 \cdot (2n)^{0{,}6} = 25 \cdot 2^{0{,}6} \cdot n^{0{,}6} = 2^{0{,}6} \cdot 25n^{0{,}6} \approx 1{,}516 \cdot 25n^{0{,}6}$.
Dus de tijd dat ze de oefening kan volhouden neemt met ongeveer 52% toe als het aantal pogingen verdubbelt.

Om te berekenen hoeveel keer zo groot n wordt als t verdubbelt, druk je eerst n uit in t. Dus $25n^{0{,}6} = t$ geeft $n^{0{,}6} = 0{,}04t$ en hieruit volgt
$n = (0{,}04t)^{\frac{1}{0{,}6}}$.
Neem in deze formule $2t$ voor t.
Je krijgt $n = (0{,}04 \cdot 2t)^{\frac{1}{0{,}6}} = 2^{\frac{1}{0{,}6}} \cdot (0{,}04t)^{\frac{1}{0{,}6}} \approx 3{,}2 \cdot (0{,}04t)^{\frac{1}{0{,}6}}$.
Dus voor een verdubbeling van de tijd dat ze de oefening kan volhouden, moet het aantal pogingen ongeveer 3,2 keer zo groot worden.

© Noordhoff Uitgevers bv

69 Zie de theorie.

a Met hoeveel procent neemt de tijd t toe als Manon het aantal pogingen verdrievoudigt? Rond af op gehelen.

b Met welke factor moet Manon het aantal pogingen groter maken om de tijd dat ze de oefening kan volhouden met 40% te laten toenemen? Rond af op twee decimalen.

70

a Voor de remweg van een auto geldt de formule $r = 0{,}016v^{1{,}75}$. Hierin is r de remweg in meter bij een snelheid van v km/uur.
Bereken hoeveel keer zo lang de remweg is als de snelheid verdubbelt. Rond af op één decimaal.

b Bij het maken van een bepaald type vliegtuig geldt voor het aantal mensuren dat nodig is voor het produceren van één toestel de formule $M = 150\,000n^{-0{,}3}$. Hierin is M het aantal mensuren dat nodig is voor het produceren van het n^{e} toestel.
Bereken met hoeveel procent M afneemt als het aantal geproduceerde toestellen verdubbelt.

c Op de eilanden in het Caribisch gebied vonden biologen een verband tussen de oppervlakte van het eiland en het aantal soorten amfibieën en reptielen dat er voorkomt. Hierbij hoort de formule $N = 4{,}4A^{0{,}3}$ met N het aantal soorten op het eiland en A de oppervlakte van het eiland in km^2.
Op eiland P komen 25% meer soorten voor dan op eiland Q.
Bereken hoeveel keer zo groot eiland P is als eiland Q.

71 In deze opgave gaan we uit van een eiken plank met een dikte van 2,5 cm. Met de formule $d = 0{,}0005gl^4$ is te berekenen hoeveel zo'n plank doorbuigt als deze gelijkmatig belast wordt. In de formule is d de doorbuiging in mm, g het gewicht in kg per mm plank gerekend in de lengterichting en l de lengte van de plank in dm.

a Op een plank met een lengte van 2 meter liggen 20 stenen van elk 4 kg.
Hoeveel mm is de doorbuiging?

b Op een plank met een lengte van 2,5 meter liggen zoveel stenen dat de doorbuiging 2,5 mm is.
Hoeveel is het totale gewicht van de stenen?

Gebruik in het vervolg van deze opgave dat $g = 0{,}05$.

c Met hoeveel procent neemt de doorbuiging van een plank toe als de plank 20% langer zou zijn? Rond af op gehelen.

d Bereken de lengte van de plank die 2,2 mm doorbuigt. Rond af op gehele cm.

e Schrijf de formule $d = 2{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot l^4$ in de vorm $l = a \cdot \sqrt[n]{d}$. Rond a af op gehelen.

© Noordhoff Uitgevers bv

72

Jaarlijks vinden in Nederland go-toernooien plaats.
De rangschikking wordt berekend met de formule $S = \frac{1000(w - \sqrt{w})}{g}$. Hierin is w het aantal gewonnen partijen, g het aantal gespeelde partijen en S de score.
De score S wordt afgerond op gehelen.
Tijdens een toernooi speelt elke deelnemer 16 partijen.

a Wat is de maximale score die een deelnemer kan halen?

b Eline heeft een score van 375.
Onderzoek hoeveel partijen zij gewonnen heeft.

c Nova heeft twee partijen meer gewonnen dan Finn. Daardoor is de score van Nova 101 hoger dan die van Finn.
Onderzoek hoeveel partijen Nova heeft gewonnen.

E73 *

Bij breedbeeldschermen is de verhouding tussen de lange en de korte zijde 16 : 9.
Er geldt $A = \frac{9}{16}x^2$ en $d^2 = \frac{337}{256}x^2$. Hierin is x de lange zijde van zo'n scherm in cm, A de oppervlakte van het scherm in cm^2 en d de lengte van de diagonaal van het scherm in cm.

a Toon de juistheid van de formules van A en d^2 aan en toon aan dat uit deze formules volgt dat $A = \frac{144}{337}d^2$.

Superbreedbeeldschermen hebben een verhouding 7 : 3. Ook voor deze schermen is een formule op te stellen van de vorm $A = a \cdot d^2$.

b Bereken a.

A74 * *

Er zijn heel wat formules in omloop om uit de afmetingen van een paard een schatting van het gewicht te krijgen. Eén daarvan is de *formule van Marcenac en Aublet*. Deze formule is van de vorm $G = aR^3$, waarin G het gewicht in kg is en R de rompomvang in meter.
Van een paard met een rompomvang van 2 meter en 3 cm is het gewicht 670 kg. Hieruit volgt dat a in gehelen nauwkeurig gelijk is aan 80.

a Bereken a. Rond af op één decimaal.

b Bereken in cm nauwkeurig de rompomvang van een paard dat 580 kg weegt.

c Van een paard is de rompomvang 1,2 keer zo groot als een ander paard.
Hoeveel keer zo groot is het gewicht?

d Van een paard is het gewicht twee keer zo groot als van een ander paard.
Hoeveel keer zo groot is de rompomvang? Rond af op twee decimalen.

e Schrijf de formule $G = 80R^3$ in de vorm $R = bG^c$. Rond b af op drie decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

A75

Elanden leven in noordelijke streken, met name in Scandinavische landen, Siberië en Canada. Mannetjes kunnen ruim twee meter groot worden en tot 800 kg wegen. Vrouwtjeselanden zijn een stuk kleiner en hebben een gewicht tot 375 kg.
De hoeveelheid energie die een eland per dag nodig heeft voor de basislichaamsfuncties, is afhankelijk van het gewicht. De formule die hierbij hoort is $E_{\text{basis}} = 140W^{0,75}$ met W het gewicht in kg. Elanden zijn een groot gedeelte van de dag bezig met het zoeken naar voedsel. Ze eten voornamelijk scheuten en twijgen van bomen. Het bijeenscharrelen van dit voedsel kost veel tijd en energie. Als er voldoende voedsel wordt gevonden, krijgt een eland meer energie binnen dan dat het zoeken ernaar kost. De formule die hoort bij de energie die zo per dag overblijft is $E_{\text{beschikbaar}} = 2200\sqrt{W} - 40W - 11\,500$. Deze energie moet dus minstens gelijk zijn aan E_{basis} om te overleven. In beide formules is E de energie in kcal.

a De grafieken van de gegeven formules hebben twee snijpunten. Bereken de coördinaten van de snijpunten en geef hiervan de praktische betekenis.

Bij het optimale gewicht van een eland is $E_{\text{beschikbaar}} - E_{\text{basis}}$ maximaal.

b Bereken het optimale gewicht van een eland. Geef het antwoord in gehele kg. Hoeveel energie per dag houdt de eland dan over voor andere activiteiten dan het zoeken naar voedsel?

Een elandjong is na de geboorte afhankelijk van moedermelk. Deze afhankelijkheid duurt totdat een gewicht is bereikt waarop het kalf zelfstandig voor zijn voedsel kan zorgen.
Een kalf dat op 1 juni werd geboren, weegt bij de geboorte 12 kg. De eerste maand verdubbelt het kalf in gewicht en daarna neemt het gewicht met 1 kg per dag toe.

c Onderzoek vanaf welke datum het kalf kan ophouden met drinken bij de moeder en zelfstandig voor zijn voedsel kan zorgen.

© Noordhoff Uitgevers bv

A76

Winkels hebben van de artikelen die ze verkopen een bepaalde voorraad. Deze voorraad moet niet te groot zijn, want dan krijg je te maken met hoge voorraadkosten. Een winkel moet dus niet te grote bestellingen in één keer doen.
Ook heeft de winkel te maken met de kosten die gemoeid zijn met het doen van een bestelling: de bestelkosten.
Met de *formule van Camp* is de optimale bestelhoeveelheid te berekenen voor winkels die te maken hebben met een constante vraag naar een bepaald artikel.

Deze formule is $Q = \sqrt{\frac{2Bn}{V}}$. Hierin is

- Q de optimale bestelhoeveelheid
- B de bestelkosten in euro's, ongeacht de grootte van de bestelling
- n het aantal verkochte artikelen per jaar
- V de voorraadkosten in euro's per stuk per jaar.

a Een winkel verkoopt per jaar 2400 vazen van een bepaald model. De bestelkosten zijn 15 euro en de voorraadkosten per vaas per jaar zijn 5 cent.
Toon aan dat de winkel twee keer per jaar een bestelling zal plaatsen.

b Een andere winkel verkoopt per jaar 800 droogmolens.
Schrijf voor deze winkel de formule van Camp in de vorm $Q = c\sqrt{\frac{B}{V}}$.

c Voor een winkel zijn de bestelkosten voor het bestellen van strijkplanken 25 euro en zijn de voorraadkosten 80 cent per strijkplank per jaar.
De optimale bestelhoeveelheid is te schrijven in de vorm $Q = d\sqrt{n}$.
Bereken d. Rond af op één decimaal.

d De voorraadkosten V worden soms berekend met de formule $V = 0{,}01p \cdot I$. Hierin is I de inkoopprijs in euro's per stuk van een artikel en is p een percentage. Dit percentage geeft aan hoeveel procent van de inkoopprijs aan voorraadkosten wordt uitgegeven. Bij een inkoopprijs van 60 euro per stuk en een percentage van 0,5% zijn de voorraadkosten dan $0{,}01 \cdot 0{,}5 \cdot 60 = 0{,}3$, dus 30 cent per stuk per jaar.
Een winkel verkoopt per jaar 200 hogedrukreinigers van type A. De inkoopprijs van deze hogedrukreinigers is 160 euro per stuk en de bestelkosten per bestelling zijn 25 euro. Bij een optimale bestelhoeveelheid blijken vier bestellingen per jaar te horen.
Bereken p.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan formules opstellen bij machtsverbanden.
▶ OPGAVE C10 THEORIE A

☐ Ik kan bij machtsverbanden nagaan wat voor het effect het vermenigvuldigen van de ene variabele heeft op de andere variabele.
▶ OPGAVE C11 THEORIE B

☐ Ik kan machtsformules gebruiken in opgaven met praktische situaties.
▶ OPGAVE C12 THEORIE B

C10 **a** Gegeven is de formule $B = at^{2,52}$. Bij $t = 3{,}1$ hoort $B = 5{,}3$.
Bereken a in twee decimalen.
b Gegeven is de formule $N = 4{,}7q^p$. Bij $q = 3$ hoort $N = 870$.
Bereken p in twee decimalen.

C11 Gegeven is de formule $A = 2{,}3t^{2,15}$.
Bereken hoeveel keer zo groot A wordt, als t drie keer zo groot wordt.
Rond af op één decimaal.

C12 Met de formule van Takahira kun je, als je van een persoon de lengte en het gewicht weet, berekenen wat de lichaamsoppervlakte van deze persoon is. De formule luidt $A = 0{,}007241g^{0,425}l^{0,725}$. Hierin is A de lichaamsoppervlakte in m^2, g het gewicht in kg en l de lengte in cm.
a Mark is 1,84 m. Je kunt de formule van A voor Mark schrijven in de vorm $g = aA^b$.
Bereken a en b. Rond a af op gehelen en b op twee decimalen.

Een andere formule waarmee je de lichaamsoppervlakte kunt berekenen, is de formule van Haycock: $A = 0{,}024265g^{0,5378}l^{0,3964}$.
b Erik weegt 75 kg. Er is een lengte waarbij de formule van Takahira en de formule van Haycock voor Erik dezelfde lichaamsoppervlakte geven.
Bereken deze lengte in cm nauwkeurig.

Antwoorden

C10 **a** 0,31
b 4,75
C11 10,6
C12 **a** $a = 15$ en $b = 2{,}35$
b 175 cm

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedentest

5.1 Grafieken veranderen

1 Op de grafiek van $y = 4(x - 2)^3 + 1$ wordt de verschuiving $(-1, -5)$ toegepast.
Stel de formule op van de beeldgrafiek.

2 Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld in je schets de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

a $N = 2(t - 4)^3 + 5$ **b** $K = -3(q + 1)^2 + 2$ **c** $S = 4(t - 2)^4 + 1$

3 De grafiek van $y = 1\frac{1}{2}(x - 2)^4 - 5$ wordt eerst herschaald in verticale richting met factor 4. Vervolgens wordt de verschuiving $(-3, -16)$ toegepast.
Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van de top.

5.2 Rekenen met machten

4 Herleid de volgende formules.

a $A = \dfrac{18a^5}{6a^2} - \dfrac{(5a^2b)^2}{5ab^2}$

b $B = (3x^2)^3 - 2x \cdot 4x^5 + 3x^2 \cdot 5x^3$

c $C = (2p^2q)^3 - 5pq \cdot 2p^2q^4 + 3p^3 \cdot (pq)^3 - \dfrac{8p^5q^6}{2p^2q}$

5 Schrijf als macht van a.

a $\dfrac{1}{a^3}$ **b** $a^4 \cdot \dfrac{1}{a^7}$ **c** $\dfrac{\left(\frac{1}{a^{12}}\right)}{a^{-5}}$

6 Schrijf zonder negatieve exponent.

a $3a^2b^{-3}$ **b** $\left(\frac{1}{2}a\right)^{-5}$ **c** $\frac{2}{7}a^{-1}b^4$

7 Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

a $4a^{-1\frac{1}{2}}$ **b** $a^{-2}b^{\frac{1}{5}}$ **c** $7a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{5}}$

8 Schrijf als macht van x.

a $x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ **b** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ **c** $\dfrac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{x^3}$

9 Schrijf in de vorm $y = ax^p$.

a $y = 7 \cdot \sqrt[5]{x^2}$

b $y = 6x^{-0,4} \cdot x^{1,2}$

c $y = \dfrac{10}{2x^3 \cdot \sqrt{x}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

5.3 Formules herleiden en variabelen vrijmaken

10 **a** Herleid de formule $A = \sqrt[3]{100b} - 4 \cdot \sqrt[3]{b}$ tot de vorm $A = c \cdot \sqrt[3]{b}$. Rond c af op twee decimalen.

b Herleid de formule $B = 3 \cdot \sqrt[4]{16pq} - \sqrt[4]{3p} \cdot \sqrt[4]{27q}$ tot de vorm $B = c \cdot \sqrt[4]{pq}$.

11 **a** Je kunt de formule $F = 0{,}125\sqrt{p-5}$ schrijven in de vorm $p = aF^2 + b$. Bereken a en b.

b Herleid de formule $S = 0{,}4(R-7)^2$ met $R \geq 7$ tot de vorm $R = a + b\sqrt{S}$. Rond b af op twee decimalen.

c Schrijf de formule $y = 2(0{,}3x)^{1{,}25}$ in de vorm $x = ay^b$. Rond a af op twee decimalen.

12 **a** Maak p vrij bij de formule $F = 4 + \dfrac{3}{p-5}$.

b Gegeven is de formule $G = \dfrac{3q-1}{4q+5}$.

Druk q uit in G.

5.4 Formules met machten en wortels

13 De tijd t in minuten die een persoon nodig heeft om n nieuwe symbolen te leren, voldoet volgens een regel uit de psychologie aan de formule $t = an^{0{,}75}$.

Monique is in staat tien symbolen te leren in twee minuten. Hieruit volgt dat $a \approx 0{,}36$.

a Bereken a in drie decimalen.

b Met hoeveel procent neemt de tijd toe als het aantal te leren symbolen verdubbelt? Rond af op gehelen.

c Hoeveel keer zo groot wordt het aantal geleerde symbolen als de beschikbare tijd om ze te leren met 50% toeneemt? Rond af op twee decimalen.

14 Van Rutger is jarenlang zijn gewicht G in kg en zijn lengte l in meters bijgehouden. Dit leverde het verband $G = 13{,}4l^3$ op.

a Hoeveel woog Rutger toen hij 173 cm lang was?

b Hoe lang was Rutger op 12-jarige leeftijd toen hij 32 kg woog? Geef je antwoord in gehele cm.

c Schrijf de formule van G in de vorm $l = a \cdot \sqrt[n]{G}$. Rond a af op twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Gemengde opgaven

1 **a** De formule $G = 25 - \frac{16}{z+1}$ is te schrijven in de vorm $z = \frac{G+a}{b-G}$.
Bereken a en b.

b Herleid de formule $P = 4 \cdot (243xy)^{0,2} - (32xy)^{0,2}$ tot de vorm $P = a \cdot \sqrt[b]{xy}$.

c Schrijf de formule $y = 3 \cdot \frac{(2x^{0,6})^3}{x^{-4}}$ in de vorm $y = ax^p$.

d Schrijf de formule $A = 4^{2\frac{1}{2}}x^{-3\frac{1}{4}} \cdot y^{1\frac{1}{2}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

e Maak q vrij bij $B = 16(q-5)^2$ met $q > 5$.

2 **a** Maak p vrij bij $A = 0{,}4 \cdot \sqrt[3]{p-6}$.

b Schrijf $\frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{x^4 \cdot \sqrt[5]{x}}$ als macht van x.

c Gegeven is $\frac{5p}{2p+q} = 10 + 3p$.
Druk q uit in p.

d Schrijf de formule $A = 2^{x-3} \cdot 3^{y+2}$ in de vorm $A = b \cdot 2^x \cdot 3^y$.

e Schrijf de formule $C = 12{,}5(4D)^{-1,5}$ in de vorm $D = aC^b$.
Rond a en b af op twee decimalen.

3 Bij een vast drukverschil hangt de hoeveelheid water W in liter die per seconde door een buis stroomt af van de diameter d in cm. De bijbehorende formule heeft de vorm $W = ad^4$.

a Bij een buis met een diameter van 5 cm is $W = 13{,}5$.
Bereken a.

Reken in deze opgave verder met $a = 0{,}02$, dus met de formule $W = 0{,}02d^4$.

b Een buis heeft een diameter van 8 cm.
Hoeveel liter water stroomt er per minuut door de buis?

c In een uur tijd stroomt er 16 650 liter water door een buis.
Bereken de diameter van de buis in mm nauwkeurig.

d Hoeveel keer zoveel water stroomt er per seconde door een buis als de diameter 30% groter wordt genomen? Rond af op één decimaal.

e Welk percentage moet de diameter van een buis groter worden genomen als er per seconde twee keer zoveel water door de buis moet stromen? Rond af op gehelen.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 De formule $G = 0{,}4d^3$ geeft het verband tussen het gewicht G in gram van een appel en de diameter d in cm.

a Van een appel is het gewicht 65 gram.
Welke diameter volgt uit de formule? Geef het antwoord in mm nauwkeurig.

b Hoeveel keer zo groot wordt G als d verdubbelt?

c Een appel is twee keer zo zwaar als een andere appel.
Bereken hoeveel procent groter de diameter dan is. Rond af op gehelen.

5 Wetenschappers hebben een formule opgesteld die het verband geeft tussen het te verwachten hersengewicht H in gram en het lichaamsgewicht G in kg.
De formule is $H = 12 \cdot G^{0{,}67}$.
Bij sommige dieren verschilt H fors van het werkelijke hersengewicht.
Wetenschappers gebruiken de formule $I = \frac{W}{H}$ als maat voor de intelligentie van een dier. Hierin is W het werkelijke hersengewicht in gram.

a Bij een schaap van 40 kg is het werkelijke hersengewicht 130 gram.
Bereken I. Rond af op twee decimalen.

b Een mens van 70 kg heeft een hersengewicht van 1650 gram.
Bereken I. Rond af op één decimaal.

c Van een giraffe is $I = 1{,}04$. Het werkelijke hersengewicht is 1050 gram.
Welk gewicht G volgt hieruit voor de giraffe? Rond af op gehelen.

d Schrijf de formule voor I in de vorm $I = a \cdot W \cdot G^b$. Rond a af op drie decimalen.

6 Er bestaat een verband tussen de populatiedichtheid P en de gemiddelde lengte l in meter van een volwassen organisme. Dit verband is te benaderen door het model $P = 800 \cdot l^{-2{,}25}$. Hierbij is P het aantal exemplaren per km^2.

a Onderzoek of de volgende bewering in overeenstemming is met de formule. ‘Grote organismen leven gemiddeld verder van elkaar dan kleinere.’

b Van een diersoort is de populatiedichtheid 1350.
Bereken de gemiddelde lengte van deze diersoort in gehele cm.

c In een gebied met een oppervlakte van 250 km^2 leeft een kudde kariboes. Kariboes zijn gemiddeld 2,15 meter lang.
Schat het aantal kariboes in dit gebied. Rond af op tientallen.

d In een gebied van 5 km^2 leven ongeveer 160 000 exemplaren van de wandelende tak.
Schat de gemiddelde lengte van deze insectensoort in gehele cm.

e Met hoeveel procent neemt P af als l met 20 procent toeneemt? Rond af op gehelen.

© Noordhoff Uitgevers bv

7 Bij het varen speelt het begrip rompsnelheid een rol. De rompsnelheid is de maximaal bereikbare snelheid waarbij het schip nog onder controle is. Bij een grotere snelheid wordt het achterschip dieper in het water getrokken waardoor de vaareigenschappen afnemen. Dit verschijnsel heet planeren. De rompsnelheid v in km/uur bereken je met de vuistregel $v = 4{,}8\sqrt{l}$. Hierbij is l de lengte van de waterlijn van een schip in meter.

a Een schip met een waterlijn van 8,6 meter heeft een hogere rompsnelheid dan een schip met een waterlijn van 5,8 meter. Hoeveel procent hoger?

b De waterlijn van schip I is twee keer zo lang als die van schip II. Wat weet je van de rompsnelheid van de schepen I en II?

c Druk l uit in v. Rond af op vier decimalen.

d Wat weet je van de lengte van de waterlijn van schepen waarvan de rompsnelheid tussen de 10 en 20 km/uur ligt? Rond af op dm.

8 De snelheid van het geluid hangt af van de temperatuur. Bij windstil weer wordt dit verband bij benadering gegeven door $v = 331\sqrt{1 + \frac{T}{273}}$.

Hierin is v de snelheid van het geluid in m/s bij een temperatuur T in °C. Ga in deze opgave uit van windstil weer.

a In de twintigste eeuw varieerde de temperatuur in Nederland van −27,4 °C tot en met 38,6 °C.
Bereken het verschil van de geluidssnelheden bij deze twee temperaturen. Rond af op gehelen.

b Bereken de temperatuur in gehele graden Celsius in het geval de geluidssnelheid 340 m/s is.

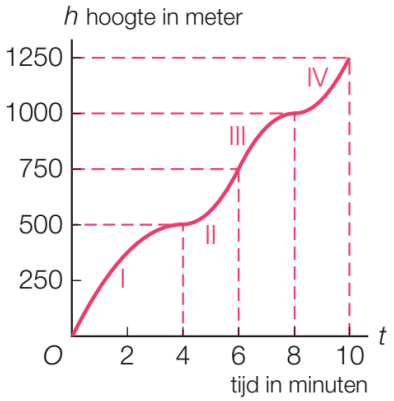
In de atmosfeer neemt de temperatuur af volgens de formule $T = T_0 - 6{,}5h$. Hierin is h de hoogte in km en T_0 de temperatuur in °C op 0 km hoogte.

c Bereken de geluidssnelheid in km/uur op een hoogte van 2,5 km in het geval de temperatuur 25 °C is op 0 km hoogte. Rond af op gehelen.

d Schrijf de formule van v in de vorm $v = a\sqrt{bh + c}$ in het geval het op 2 km hoogte −1 °C is. Rond zo nodig af op vier decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

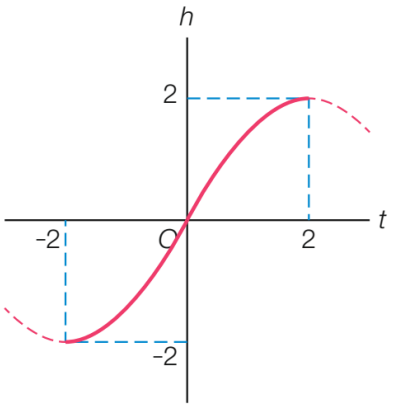
9 Whistler is een stadje in het westen van Canada. Bij Whistler ligt een van de grootste skigebieden in Noord-Amerika: Whistler-Blackcomb. De Whistler Village Gondola brengt je in 10 minuten vanuit Whistler naar een punt dat 1250 meter hoger ligt.
In de figuur hiernaast is de grafiek van de hoogte van een cabine ten opzichte van Whistler uitgezet tegen de tijd. Je ziet in de grafiek vier delen die zijn aangegeven met I, II, III en IV. We nemen aan dat de delen I en IV te beschrijven zijn met tweedegraadsformules van de vorm $h = a(t - p)^2 + q$. Voor de delen I en IV gelden de volgende formules:



I $h = -31{,}25(t - 4)^2 + 500$
IV $h = 62{,}5(t - 8)^2 + 1000$

a Toon voor beide formules aan dat deze passen bij de getekende grafiek.

Voor het gehele stuk dat bestaat uit de delen II en III gaan we een derdegraadsformule opstellen. We gaan eerst uit van de formule $h = -\frac{1}{8}t^3 + 1\frac{1}{2}t$. De grafiek hiervan op het interval $[-2, 2]$ zie je hiernaast. We gaan deze grafiek zodanig bewerken dat het punt van symmetrie (6, 750) wordt en de toppen (4, 500) en (8, 1000).
We gaan de grafiek eerst herschalen in verticale richting. Vervolgens verschuiven we de grafiek zo, dat het punt van symmetrie (6, 750) wordt. Zo ontstaat de formule $h = -15{,}625(t - 6)^3 + 187{,}5(t - 6) + 750$.

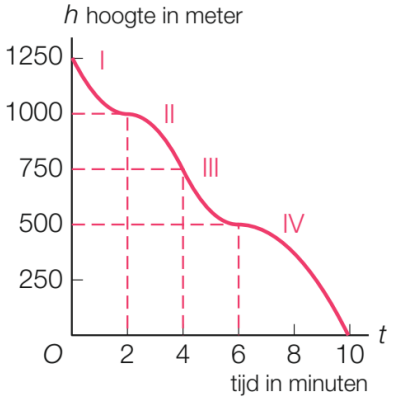


b Toon aan dat deze formule juist is.

Een volgende cabine vertrekt precies één minuut na de cabine waarvan de grafiek in de figuur is getekend.

c Geef de drie formules die bij deze cabine horen.

In de grafiek hiernaast is de hoogte van een cabine die van Whistler Mountain naar Whistler gaat, uitgezet tegen de tijd. Er zijn weer vier delen getekend, die zijn aangegeven met I, II, III en IV.



d Stel bij de delen I en IV een tweedegraadsformule op en bij de delen II en III samen een derdegraadsformule.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

6
Kansrekening

Bij het dobbelspel Yahtzee gooi je met vijf dobbelstenen. Je kunt onder andere carré en grote straat krijgen. Voor carré gooi je met minstens vier dobbelstenen hetzelfde aantal ogen en voor grote straat gooi je vijf opeenvolgende aantallen ogen, dus 1 t/m 5 of 2 t/m 6.

Bij één worp met vijf dobbelstenen is de kans om grote straat te gooien groter dan de kans om carré te gooien. Er zijn namelijk meer mogelijkheden om grote straat te gooien dan om carré te gooien.

Bereken bij één worp met vijf dobbelstenen het aantal mogelijkheden om grote straat te gooien en het aantal mogelijkheden om carré te gooien.

© Noordhoff Uitgevers bv

6.1 Kansen

Kennis en vaardigheden

- Je kent de kansdefinitie van Laplace en kunt hiermee kansen berekenen.
- Je kunt kansen berekenen bij samengestelde kansexperimenten.

O1

De familie Aalbers speelt een spel met twee dobbelstenen. Sonja is aan de beurt. Ze wil graag minstens 10 ogen gooien, want dan heeft ze gewonnen. Maar als ze 8 ogen gooit, dan moet ze 15 plaatsen terug.
Welke gebeurtenis heeft de grootste kans? Waarom?

Theorie A Kansdefinitie van Laplace

Martijn gooit met een rode en een groene dobbelsteen. In het rooster hiernaast zijn alle mogelijke uitkomsten terug te vinden. Je ziet dat er in totaal $6 \cdot 6 = 36$ uitkomsten mogelijk zijn. Eén van de uitkomsten is .

Bij de **gebeurtenis** '**som is 5**' horen vier uitkomsten. Bij de gebeurtenis '**som is 10**' horen drie uitkomsten. De kans op 'som is 10' is dus kleiner dan de kans op 'som is 5'.

	SOM					
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

In het dagelijks leven worden kansen vaak weergegeven met een percentage, bijvoorbeeld 60%. In de kansrekening noteert men meestal deze kans als 0,6 of $\frac{3}{5}$. Kansen zijn altijd minstens 0 en hoogstens 1.

De kans om bij het gooien met twee dobbelstenen 'som is 5' te gooien, bereken je als volgt.
In totaal zijn er 36 uitkomsten mogelijk. Van deze 36 uitkomsten zijn er 4 gunstig. De kans op 'som is 5' is gelijk aan $\frac{4}{36}$. Notatie: $P(\text{som is } 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

De letter P komt van 'probabilitas', het Latijnse woord voor kans.

© Noordhoff Uitgevers bv

Om de kans op een gebeurtenis te berekenen, deel je het aantal **gunstige uitkomsten** door het aantal mogelijke uitkomsten.
Je gebruikt de **kansdefinitie van Laplace**.

De kansdefinitie van Laplace

Bij een kansexperiment met uitkomsten die alle even waarschijnlijk zijn, is de kans op een gebeurtenis G gelijk aan

$$P(G) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}.$$

Bij opgaven met een dobbelsteen gaan we ervan uit dat alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn, dus dat de dobbelsteen eerlijk is.

Voorbeeld

Fien gooit met een gewone dobbelsteen en met een viervlaksdobbelsteen. Met een viervlaksdobbelsteen kun je 1, 2, 3 of 4 gooien.
Bereken de kans dat

a ze met beide stenen evenveel gooit
b de som minstens 8 is
c het product hoogstens 4 is.

Aanpak
Maak een 4 × 6-rooster met alle mogelijke uitkomsten.
Geef de gunstige uitkomsten aan.

Uitwerking

a $P(\text{beide evenveel}) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

b $P(\text{som minstens 8}) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

c $P(\text{product hoogstens 4}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

	1	2	3	4	5	6
4	c			a b	b	b
3	c		a		b	b
2	c	a c				b
1	a c	c	c	c		

a beide evenveel
b som minstens 8
c product hoogstens 4

R2

Harm laat de schijf in de figuur hiernaast ronddraaien. Nadat de schijf is uitgedraaid, wijst de pijl één sector aan. Harm zegt: "Er zijn vijf uitkomsten mogelijk, dus de kans dat de pijl 3 aanwijst is $\frac{1}{5}$."

a Wat is er mis met de redenering van Harm?
b Geef de kans dat de pijl 3 aanwijst.

© Noordhoff Uitgevers bv

3

Dorien gooit met twee dobbelstenen, een rode en een groene.
Bereken de kans dat
- **a** de som van de ogen meer dan 10 is
- **b** de som van de ogen even is
- **c** Dorien met beide dobbelstenen hetzelfde aantal ogen gooit
- **d** het aantal ogen met de rode dobbelsteen hoger is dan met de groene
- **e** het verschil van de ogen 2 is.

4

Bas gooit met twee dobbelstenen.
Bereken de kans op de gebeurtenis
- **a** het verschil van de aantallen ogen is minder dan 2
- **b** het product van de ogen is 12
- **c** het product van de ogen is minder dan 30.

A5

Floor gooit met een achtvlaksdobbelsteen en met een viervlaksdobbelsteen. Op de zijvlakken van de achtvlaksdobbelsteen staan de cijfers 1 tot en met 8.
Bereken de kans op de gebeurtenis
- **a** de aantallen zijn gelijk
- **b** de som is 8
- **c** het product is minstens 16
- **d** het verschil is 1.

E6

Arjan, Bo en Caro hebben schaatstraining. Tijdens deze training rijden ze rondjes van 400 meter, in totaal elk 10 kilometer. Ze doen steeds 45 seconden over een rondje. Ze schaatsen samen, maar Bo begint een ronde later dan Arjan, en Caro begint 3 ronden later dan Bo.
Bereken de kans dat ze tijdens deze training op een willekeurig moment alle drie aan het schaatsen zijn.

Voorkennis Permutaties, combinaties en herhalingen

Een *permutatie* is een rangschikking. Dat betekent dat de volgorde van belang is en dat herhalingen niet zijn toegestaan.
Kies je uit de zes letters A, B, C, D, E en F twee letters waarbij de volgorde van belang is en herhalingen niet zijn toegestaan, dan heb je te maken met een permutatie van 2 uit 6.
Het aantal permutaties van 2 uit 6 is gelijk aan $6 \cdot 5$.
Het aantal permutaties van 6 dingen is gelijk aan $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Dit wordt genoteerd als $6!$

© Noordhoff Uitgevers bv

De GR heeft opties waarmee je faculteiten en het aantal permutaties kunt berekenen.

- TI ! en nPr vind je via f2.
- Casio ! en nPr vind je in het OPTN-PROB-menu.
- NumWorks Faculteit en Permutatie vind je in de toolbox bij Kansrekenen-Combinatoriek.
- HP Factorieel en Permutatie vind je bij Kans in het werksetmenu ( ) Wisk.

Ook bij aantallen *combinaties* zijn herhalingen niet toegestaan, maar in tegenstelling tot bij permutaties is bij combinaties de volgorde niet van belang. Dus bij de keuze van twee letters uit de zes letters A, B, C, D, E en F is de combinatie AB hetzelfde als BA.

Het aantal combinaties van 2 uit 6 wordt genoteerd als $\binom{6}{2}$.

Op de GR vind je de optie voor combinaties in hetzelfde menu als de optie voor permutaties.
Op de TI en Casio worden combinaties weergegeven met nCr.

Je krijgt $\binom{6}{2} = 15$.

Kies je twee letters uit de zes letters A, B, C, D, E en F waarbij *herhalingen* wel zijn toegestaan, dan zijn er $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$ mogelijkheden.

Maakt een bedrijf met de letters A, B, C, D, E en F codes van 2 of 3 letters, dan gebruik je de *somregel* voor de berekening van het aantal codes.
Merk op dat bij een code de volgorde van belang is, immers de code AB is een andere code dan de code BA.
We onderscheiden de volgende situaties.

- Herhalingen zijn toegestaan:
  het aantal codes is $6^2 + 6^3 = 252$.
- Herhalingen zijn niet toegestaan:
  het aantal codes is $6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 = 150$.

V1 Een bedrijf maakt bij het coderen van zijn artikelen gebruik van de letters A, B, C, D en E.
Hoeveel codes zijn er

a van 3 letters als herhalingen zijn toegestaan
b van 4 letters als herhalingen niet zijn toegestaan
c van 2, 3 of 4 letters als herhalingen zijn toegestaan
d van hoogstens 3 letters als herhalingen niet zijn toegestaan?

© Noordhoff Uitgevers bv

V2 Amber gooit met zeven dobbelstenen.
Hoeveel mogelijkheden zijn er om
a twee zessen en vijf enen te gooien
b geen enkele zes te gooien
c in totaal 41 ogen te gooien
d in totaal 40 ogen te gooien
e in totaal hoogstens 9 ogen te gooien?

O7 Anouk gooit met drie dobbelstenen: een gele, een rode en een blauwe.
a Hoeveel mogelijkheden zijn er om met de drie dobbelstenen hetzelfde aantal ogen te gooien?
b Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er in totaal mogelijk?
c Bereken de kans om met de drie dobbelstenen hetzelfde aantal ogen te gooien.

Theorie B Samengestelde kansexperimenten

Het gooien met een dobbelsteen is een voorbeeld van een **kansexperiment**. Kenmerkend voor een kansexperiment is dat de uitkomst niet van tevoren vastligt.
Voorbeelden van **samengestelde kansexperimenten** zijn
- het gooien met een dobbelsteen en een geldstuk
- het gooien met meerdere dobbelstenen of geldstukken
- het meedoen met drie loten in een loterij.

Bij het gooien met drie dobbelstenen bereken je $P(\text{som is } 17)$ als volgt:
- het aantal mogelijke uitkomsten is $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- het aantal gunstige uitkomsten is drie, namelijk 6 6 5, 6 5 6 en 5 6 6
- $P(\text{som is } 17) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

Met $P(\text{som is } 17) = \frac{1}{72}$ is de kans **exact** berekend. Bij een exact antwoord rond je niet af.

Het aantal gunstige uitkomsten bij een samengesteld kansexperiment met dobbelstenen of geldstukken vind je bij
- twee kansexperimenten met een rooster
- drie of meer experimenten met systematisch noteren en/of handig tellen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Bereken exact de kans dat je bij het gooien met vijf geldstukken drie of vier keer kop gooit.

Uitwerking

Het aantal mogelijke uitkomsten is $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$.

Gunstige uitkomsten zijn kkkmm $\binom{5}{3} = 10$ keer

kkkkm $\binom{5}{4} = 5$ keer

Er zijn $10 + 5 = 15$ gunstige uitkomsten.

$P(\text{drie of vier keer kop}) = \frac{15}{32}$

R8 In opgave 7 hadden de dobbelstenen drie verschillende kleuren, maar in de theorie daarna werd er niets vermeld over de kleuren van de dobbelstenen.
Zou de uitkomst van vraag 7c anders zijn geweest als de drie dobbelstenen dezelfde kleur hadden gehad?

9 Justin gooit met vier geldstukken.
Bereken exact de kans dat hij
a vier keer hetzelfde gooit
b één keer kop gooit
c meer dan één keer munt gooit.

10 Mark gooit met drie dobbelstenen.
Bereken exact de kans dat
a de som van de ogen 5 is
b de som van de ogen minder dan 7 is
c hij met één van de dobbelstenen 3 ogen gooit en dat de som van de ogen 9 is.

A11 Bereken exact de kans dat je met zes geldstukken
a vijf keer kop gooit
b drie keer munt gooit
c minder dan drie keer kop gooit.

A12 In een doos zitten 15 briefjes die genummerd zijn van 1 tot en met 15.
Isa pakt drie briefjes uit de doos.
Bereken exact de kans dat de som van de getallen op deze drie briefjes gelijk is aan 15.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik ken de kansdefinitie van Laplace en kan hiermee kansen berekenen.

☐ Ik kan kansen berekenen bij samengestelde kansexperimenten.

▶ OPGAVE C1
THEORIE A
▶ OPGAVE C2
THEORIE B

C1 Zara gooit met twee viervlaksdobbelstenen.
Bereken exact de kans dat de som van de ogen minstens 5 is.

C2 Zubair gooit met drie dobbelstenen.
Bereken exact de kans dat de som van de ogen 15 is.

Antwoorden

C1 $\frac{5}{8}$

C2 $\frac{5}{108}$

© Noordhoff Uitgevers bv

6.2 Empirische kansen

Kennis en vaardigheden

- Je kent het verschil tussen theoretische en empirische kansen.
- Je kunt empirische kansen berekenen.
- Je kunt voorwaardelijke kansen berekenen.
- Je kunt met berekeningen nagaan of gebeurtenissen (on)afhankelijk zijn.

O13

Marieke gooit met een dobbelsteen. Ze vraagt zich af of de dobbelsteen eerlijk is. Daarom gooit zij 300 keer met de dobbelsteen en telt het aantal keren zes ogen. Ze gooit 30 keer een zes.

a In hoeveel procent van de worpen gooit Marieke een zes?

b Wat denk je, is deze dobbelsteen eerlijk? Licht toe.

O14

Margo gooit eerst 50 keer met een punaise, dan 100 keer, dan 150 keer, enzovoort. Bij elke serie telt ze hoe vaak de punt van de punaise omhoog ligt. Zie de tabel.

PUNT VAN DE PUNAISE OMHOOG

aantal keer gooien N	50	100	150	200	250	300	500	1000
frequentie f	31	61	89	114	141	174	282	579
relatieve frequentie $\frac{f}{N}$	0,62							

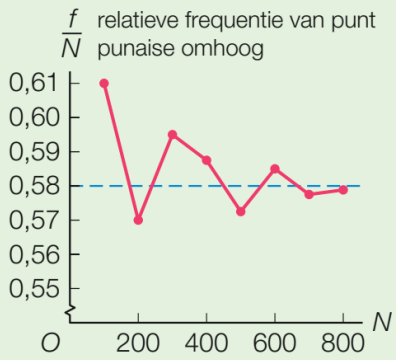
a Vul de tabel in. Rond af op twee decimalen.

b Geef een schatting van P(punt van punaise ligt omhoog).

c Volgens Bart zijn er twee mogelijkheden bij het gooien met een punaise: de punt ligt omhoog of de punt ligt niet omhoog. Daarom is volgens Bart $P(\text{punt ligt omhoog}) = \frac{1}{2}$.
Geef commentaar.

Theorie A Empirische en theoretische kansen

Bij het opgooien van een punaise zijn twee uitkomsten mogelijk, maar deze zijn niet even waarschijnlijk. Je kunt de kans op de gebeurtenis ‘punt omhoog’ schatten door het experiment een groot aantal keren uit te voeren en de relatieve frequentie van de gebeurtenis ‘punt omhoog’ te berekenen. De relatieve frequentie bereken je door de frequentie van de gebeurtenis te delen door de totale frequentie.
Deze relatieve frequentie geeft een goede schatting van de kans als je het experiment heel vaak uitvoert. Dit is een voorbeeld van de **wet van de grote aantallen**.



© Noordhoff Uitgevers bv

Door een kansexperiment heel vaak uit te voeren, komt de relatieve frequentie van een gebeurtenis dicht bij de kans op die gebeurtenis te liggen.

Bij de punaise volgt uit de wet van de grote aantallen dat
$P(\text{punt ligt omhoog}) \approx 0{,}58$.
Wil je de kans weten dat bij een geboorte in Nederland een meisje ter wereld komt, dan gebruik je bijvoorbeeld gegevens van het CBS.
In 2022 werden in Nederland 167 504 kinderen geboren, waarvan 81 780 meisjes. De kans op een meisje is dus $\frac{81\,780}{167\,504} \approx 0{,}488$.

Je schat hier de kans op grond van gegevens uit het verleden. Je gaat er hierbij van uit dat de gegevens van 2022 ook voor de jaren daarna een goed beeld van de werkelijkheid geven.
$P(\text{meisje bij geboorte})$ en $P(\text{punaise met punt omhoog})$ zijn voorbeelden van **empirische kansen**. Empirisch betekent 'op ervaring gegrond'. Empirische kansen krijg je door een groot aantal waarnemingen te gebruiken.

Bij veel kansexperimenten kun je van tevoren zeggen wat de kans op een gebeurtenis is. Zo is $P(\text{meer dan 4 ogen})$ bij een worp met een dobbelsteen gelijk aan $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Je gebruikt hierbij de kansdefinitie van Laplace. Zulke kansen heten **theoretische kansen**, ook wel **a priori** (= vooraf) **kansen** genoemd.
Bij theoretische kansen ga je ervan uit dat kansexperimenten eerlijk verlopen. Dat houdt bijvoorbeeld in dat de gebruikte dobbelsteen eerlijk is. Maar een volmaakte dobbelsteen bestaat niet. Je werkt dus met een wiskundig model.

Voorbeeld

Zie de tabel.
Bereken de kans dat in 2023 een willekeurig gekozen inwoner van Amsterdam

a 25 jaar of ouder was
b jonger dan 15 of 65-plusser was.

BEVOLKINGSOPBOUW VAN AMSTERDAM IN 2023

leeftijd	0-14	15-24	25-44	45-64	65+	totaal
aantal	124 270	120 404	335 216	215 053	123 174	918 117

Uitwerking

a $P(\text{25 jaar of ouder}) = \frac{335\,216 + 215\,053 + 123\,174}{918\,117} \approx 0{,}733$

b $P(\text{jonger dan 15 of 65+}) = \frac{124\,270 + 123\,174}{918\,117} \approx 0{,}270$

© Noordhoff Uitgevers bv

R15

In welke van de volgende situaties gaat het om theoretische en in welke om empirische kansen?
De kans dat

a een Nederlander linkshandig is
b Annemiek bij een loterij een prijs wint
c een trein te laat vertrekt uit Zutphen
d je bij een worp met drie dobbelstenen in totaal negen ogen gooit
e een Nederlander bloedgroep A heeft.

16

Hemelvaartsdag valt altijd op een donderdag. De vroegste datum waarop Hemelvaartsdag kan vallen is 30 april en de laatst mogelijke datum is 3 juni. Het weer op Hemelvaartsdag kan erg uiteenlopen. De hoogste maximumtemperatuur is gemeten op 27 mei 1954. Het werd toen maar liefst 29,2 °C. De laagste maximumtemperatuur was op 13 mei 2010. De temperatuur kwam toen niet hoger dan 9,2 °C. Ook de neerslag-hoeveelheden lopen erg uiteen, evenals het aantal uren zonneschijn.
In de tabel zie je gegevens over het weer op Hemelvaartsdag in de periode van 1906 tot en met 2024. De gegevens zijn afkomstig van het KNMI in De Bilt.
Je leest af dat er 32 Hemelvaartsdagen waren met een maximum-temperatuur van minstens 20 °C.

HET WEER OP HEMELVAARTSDAG

max. temperatuur	freq.		neerslag	freq.		uren zon	freq.
lager dan 10 °C	1		0 tot 0,1 mm	54		0 tot 1	18
10 tot 15 °C	36		0,1 tot 1,0 mm	21		1 tot 5	32
15 tot 20 °C	50		1,0 tot 5,0 mm	24		5 tot 10	40
20 °C of hoger	32		5,0 mm of meer	20		10 of meer	29
	119			119			119

Neem aan dat deze gegevens ook een goed beeld geven van het weer op een willekeurige Hemelvaartsdag in de toekomst. Rond in deze opgave af op twee decimalen.
Bereken de kans dat op een Hemelvaartsdag

a de maximumtemperatuur minstens 15 °C is
b minder dan 5,0 mm regen valt
c de zon minstens één uur schijnt.

© Noordhoff Uitgevers bv

O17 Het CBS heeft onderzoek gedaan naar korte vakanties van Nederlanders in het buitenland. In de kruistabel staan de aantallen in duizendtallen.

KORTE VAKANTIES VAN NEDERLANDERS IN HET BUITENLAND (×1000)

	België	Frankrijk	Duitsland	overige landen	totaal
georganiseerd	699	365	813	756	2633
niet-georganiseerd	411	135	437	84	1067
	1110	500	1250	840	3700

a De kans dat een georganiseerde reis naar België ging, is ongeveer 0,265. Toon dit aan.
b Bereken de kans dat een niet-georganiseerde reis naar België ging.
c Volgens een onderzoeker was België bij de niet-georganiseerde reizen een populairdere bestemming dan bij de georganiseerde reizen. Hoe komt de onderzoeker tot deze conclusie?

Theorie B Voorwaardelijke kansen

Aan 96 volwassen Nederlanders is gevraagd of zij vinden dat Nederland de EU moet verlaten. In de kruistabel zijn de antwoorden verwerkt, waarbij onderscheid is gemaakt naar leeftijd.

VERLATEN EU

	voor	tegen	geen mening	
jongeren	7	14	3	24
dertigers	11	18	5	34
veertigplussers	5	25	8	38
	23	57	16	96

Uitgaande van deze tabel zijn heel wat kansberekeningen te maken. Zo is

- $P(\text{ondervraagde is dertiger}) = \frac{34}{96} \approx 0{,}354$
- $P(\text{ondervraagde is voor verlaten}) = \frac{23}{96} \approx 0{,}240$.

Maar niet altijd moet je delen door de totale frequentie 96 van de gehele groep. Soms is de vraagstelling zo, dat je moet kiezen uit een *beperkte groep*. Beperk je je tot de dertigers, dan deel je door 34.

Dus $P(\text{ondervraagde die dertiger is, is voor verlaten}) = \frac{11}{34} \approx 0{,}324$.

Het gaat hier om de kans dat een ondervraagde voor verlaten is *onder de voorwaarde* dat hij een dertiger is. Zo'n kans, waarbij je je tot een deelgroep beperkt, heet een **voorwaardelijke kans**.
Je kunt deze voorwaardelijke kans ook noteren als $P(\text{voor verlaten onder de voorwaarde dertiger})$.

Hoeveel procent van de dertigers is voor verlaten? Antwoord:
$\frac{11}{34} \cdot 100\% \approx 32{,}4\%$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bij een voorwaardelijke kans beperk je je tot een deelgroep. Je deelt dan door de frequentie van die deelgroep.

Om te voorkomen dat we in elke opgave moeten vermelden op hoeveel decimalen je de gevraagde kansen moet afronden, maken we hierover een afspraak. Staat er niets vermeld, dan rond je de kans af op drie decimalen. Een uitzondering is als de kans door afronden op drie decimalen 0,000 of 1,000 wordt. Zo is bijvoorbeeld de kans om in de Staatsloterij de jackpot te winnen ongeveer gelijk aan 0,00000016. In dit geval ronden we de kans af op zeven of acht decimalen, omdat 0,000 geen zinnig antwoord is.

Afspraak
Rond kansen af op drie decimalen, tenzij
- anders vermeld
- de kans door afronden op drie decimalen 0,000 of 1,000 wordt.

Voorbeeld

Hiernaast zie je nog eens de tabel van het onderzoek naar het verlaten van de EU.

VERLATEN EU

	voor	tegen	geen mening	
jongeren	7	14	3	24
dertigers	11	18	5	34
veertigplussers	5	25	8	38
	23	57	16	96

Bereken de kans dat een willekeurig gekozen ondervraagde
a veertigplusser is
b die voor verlaten, veertigplusser is
c veertigplusser voor verlaten is
d veertigplusser is en voor verlaten is.

Uitwerking

a $P(\text{veertigplusser}) = \frac{38}{96} \approx 0{,}396$

b $P(\text{ondervraagde die voor verlaten is, is veertigplusser}) = \frac{5}{23} \approx 0{,}217$

Deel door het aantal personen dat voor verlaten is.

c $P(\text{veertigplusser is voor verlaten}) = \frac{5}{38} \approx 0{,}132$

Deel door het aantal veertigplussers.

d $P(\text{veertigplusser en voor verlaten}) = \frac{5}{96} \approx 0{,}052$

Deel door het totale aantal ondervraagden, want het gaat om de ondervraagden uit de gehele groep die aan beide kenmerken voldoen.

Bij *en* deel je het aantal dat aan twee kenmerken voldoet door de frequentie van de hele groep.

© Noordhoff Uitgevers bv

R18 Dat je met een voorwaardelijke kans te maken hebt, kun je vaak zien aan het gebruik van het woord *die*. Maar ook zonder het woord *die* kan er sprake zijn van een voorwaardelijke kans.
Formuleer vraag c van het voorbeeld met gebruik van het woordje *die*.

19 Zie het voorbeeld.
Bereken de kans dat een willekeurige ondervraagde
a een jongere is
b jongere geen mening heeft
c jongere is en geen mening heeft
d die geen mening heeft, jongere is.

20 Hiernaast zie je een sterftetafel van de Nederlandse bevolking. Er is uitgegaan van 1 000 000 baby's. Je ziet dat van de 1 000 000 baby's er 983 378 de leeftijd van 30 jaar halen.
Bereken de kans dat
a een dertigjarige zijn zestigste verjaardag haalt
b een dertigjarige voor zijn veertigste sterft
c een tachtigjarige minstens 95 jaar wordt
d een pasgeboren baby voor zijn dertigste sterft
e een zestigjarige wel zijn zeventigste, maar niet zijn tachtigste verjaardag viert.

leeftijd	levenden
30	983 378
35	976 843
40	967 252
45	952 699
50	930 601
55	896 701
60	845 134
65	768 465
70	659 273
75	514 596
80	344 752
85	180 300
90	63 017
95	11 472
100	726

A21 De gemeenteraad van Vierhouten wil weten hoeveel auto's dagelijks het kruispunt in het centrum passeren. Op een dinsdag in mei is niet alleen geteld hoeveel auto's het kruispunt passeerden, maar ook uit welke richting ze kwamen en in welke richting ze hun weg vervolgden. De resultaten staan in de kruistabel.

		van				
		N	O	Z	W	
naar	N	0	877	51	408	1336
	O	1053	1	234	1682	2970
	Z	53	154	0	491	698
	W	982	1711	830	0	3523
		2088	2743	1115	2581	8527

Bereken de kans dat een willekeurig gekozen auto
a uit het westen kwam
b verder ging naar het oosten
c die uit het noorden kwam, verder ging naar het westen
d rechtdoor ging
e linksaf sloeg
f uit het westen verder ging naar het noorden.

Op een andere dinsdag in mei passeerden 7520 auto's het kruispunt.
g Hoeveel auto's daarvan, verwacht je, kwamen uit het westen?

© Noordhoff Uitgevers bv

R22 Bij een onderzoek zijn van 83 treinpassagiers enkele reisgegevens genoteerd.

	afgelegde afstand in km				
	0 tot 20	20 tot 40	40 tot 60	60 of meer	
met abonnement	6	9	12	10	37
zonder abonnement	8	11	12	15	46
	14	20	24	25	83

Bij de tabel is een aantal kansen berekend. De antwoorden staan hieronder. Bedenk bij elk van deze kansen een passende gebeurtenis. Noteer je antwoord in de vorm $P(...)$.

a $\frac{14}{83}$ **b** $\frac{9}{20}$ **c** $\frac{11}{46}$

A23 Corwin gooit 100 keer met drie dobbelstenen. Hij gooit daarbij 10 keer minstens 15 ogen. Is op basis hiervan de empirische kans om minstens 15 ogen te gooien groter of kleiner dan de bijbehorende theoretische kans?

E24 Aan een onderzoek naar de betrouwbaarheid van stemherkenning doen 1200 personen mee. Aan de hand van de stem wordt door een computer bepaald of een persoon al dan niet toestemming krijgt een ruimte te betreden. Van deze groep zijn de gegevens van 800 personen zo geprogrammeerd, dat ze gerechtigd zijn de ruimte te betreden. De andere 400 personen zijn daartoe niet gerechtigd.
Van de personen die de ruimte mogen betreden, wordt 3,5% de toestemming ten onrechte geweigerd. En van de personen die de ruimte niet mogen betreden, wordt 8,5% toch toegelaten.
Uit de groep van 1200 personen wordt willekeurig één persoon gekozen. Deze persoon blijkt niet toegelaten te zijn.
Bereken de kans dat deze persoon ten onrechte geweigerd is.

O25 Op een havo/vwo-school zitten 1120 leerlingen, waarvan 504 jongens. De havo-afdeling telt 600 leerlingen en de vwo-afdeling 520.

a Hoeveel jongens verwacht je op basis van deze gegevens op het vwo? En hoeveel op de havo?

Er blijken 210 jongens op het vwo te zitten.

b Toon met een berekening aan dat voor deze school geldt dat de kans dat een jongen op het vwo zit, niet gelijk is aan de kans dat een willekeurige leerling op het vwo zit.

Theorie C Onafhankelijke gebeurtenissen

In opgave 25 was de kans dat een jongen op het vwo zit niet gelijk aan de kans dat een willekeurige leerling op het vwo zit. Dus de kans dat een leerling op het vwo zit, is afhankelijk van de vraag of deze leerling een jongen is.

© Noordhoff Uitgevers bv

De tabel hiernaast geeft informatie over een groep van 60 leerlingen.
De kans dat een willekeurig gekozen leerling uit deze groep blauwe ogen heeft, is gelijk aan $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$.
Er is bij deze tabel iets bijzonders aan de hand.
Immers ook

	blauwe ogen	geen blauwe ogen	
jongen	15	5	20
meisje	30	10	40
	45	15	60

$P(\text{jongen heeft blauwe ogen}) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ en

$P(\text{meisje heeft blauwe ogen}) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$.

Je kunt zeggen dat het geslacht geen enkele invloed heeft op het al dan niet blauwe ogen hebben. We noemen daarom de gebeurtenissen 'leerling is jongen' en 'leerling heeft blauwe ogen' **onafhankelijk**.
Ook de gebeurtenissen 'leerling is meisje' en 'leerling heeft blauwe ogen' zijn onafhankelijk.
Merk op dat
P('leerling heeft blauwe ogen' onder voorwaarde 'leerling is jongen') = P('leerling heeft blauwe ogen')
Gebeurtenissen die niet onafhankelijk zijn, heten **afhankelijk**.

A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen betekent: P(A onder voorwaarde B) = P(A).

Voorbeeld

Van een groep van 200 personen blijkt iedereen óf bloedgroep AB óf bloedgroep 0 te hebben.
Van elk van deze personen is de resusfactor bekend.
Toon aan dat de gebeurtenissen 'bloedgroep AB' en 'resusfactor positief' afhankelijk zijn.

	AB	0	
Rh+	15	155	170
Rh–	5	25	30
	20	180	200

Aanpak
Laat zien dat P(bloedgroep AB onder voorwaarde Rh+) niet gelijk is aan P(bloedgroep AB).

Uitwerking

$P(\text{bloedgroep AB}) = \frac{20}{200} = 0{,}1$

$P(\text{bloedgroep AB onder voorwaarde Rh+}) = \frac{15}{170} \approx 0{,}088$

$\Big\}\ 0{,}1 \neq \frac{15}{170}$

De gebeurtenissen 'bloedgroep AB' en 'Rh+' zijn dus afhankelijk.

© Noordhoff Uitgevers bv

R26

In de theorie staat

A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen betekent:
P(A onder voorwaarde B) = P(A).

Ook geldt

A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen betekent:
P(B onder voorwaarde A) = P(B).

Laat zien dat dit in de tabel van de theorie ook geldt voor de gebeurtenissen ‘leerlingen is jongen’ en ‘leerling heeft blauwe ogen’.

27

Toon met een berekening aan dat in het voorbeeld ook de gebeurtenissen ‘bloedgroep 0’ en ‘resusfactor negatief’ afhankelijk zijn.

A28

Van een groep van 2000 studenten is nagegaan of ze een bijbaan hebben. Daarbij is onderscheid gemaakt tussen thuis- en uitwonende studenten. Zie de tabel.

	thuiswonend	uitwonend	
bijbaan	1120	480	1600
geen bijbaan	230	170	400
	1350	650	2000

Toon aan dat het hebben van een bijbaan en uitwonend zijn afhankelijke gebeurtenissen zijn.

E29

Op een dag staan er 300 fietsen in een bewaakte fietsenstalling. Daarvan zijn er 120 van abonnementhouders. Van de fietsen zijn er 160 elektrisch. De gebeurtenissen ‘fiets is elektrisch’ en ‘fiets is van abonnementhouder’ zijn onafhankelijk.
Bereken de kans dat een willekeurige fiets niet elektrisch is en niet van een abonnementhouder.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik ken het verschil tussen theoretische en empirische kansen.
- ☐ Ik kan empirische kansen berekenen.
- ☐ Ik kan voorwaardelijke kansen berekenen.
- ☐ Ik kan met berekeningen nagaan of gebeurtenissen (on)afhankelijk zijn.

- OPGAVE C3 THEORIE A
- OPGAVE C4 THEORIE A
- OPGAVE C5 THEORIE B
- OPGAVE C6 THEORIE C

C3 Geef in de volgende situaties aan of het om een empirische kans of om een theoretische kans gaat.

a De kans dat je een schoppenkaart krijgt wanneer je blind een kaart uit een kaartspel trekt.

b De kans dat een klant van een winkel met een pinpas betaalt.

C4 De afgelopen 114 jaar waren er 46 jaren met minstens één zware storm. Neem aan dat deze gegevens ook een goed beeld geven voor een willekeurig jaar in de toekomst.
Bereken de kans dat in een jaar minstens één zware storm voorkomt.

C5 Zie de tabel hiernaast.
Bereken de kans dat een leerling van 15 jaar een jongen is.

	leeftijd				
	14	15	16	17	
jongen	2	9	0	1	12
meisje	6	5	6	1	18
	8	14	6	2	30

C6 Zie de tabel hiernaast.
Toon aan dat de gebeurtenissen ‘leerling is jongen’ en ‘leerling is 14 jaar’ onafhankelijk zijn.

	leeftijd		
	14	15	
jongen	19	6	25
meisje	57	18	75
	76	24	100

Antwoorden

C3 **a** theoretische
b empirische
C4 0,404
C5 0,643
C6 *

© Noordhoff Uitgevers bv

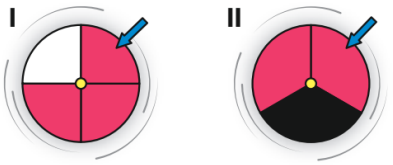
6.3 Regels voor kansrekening

Kennis en vaardigheden

- Je kunt kansen berekenen met behulp van de productregel.
- Je kunt kansen berekenen met behulp van de somregel.
- Je kunt kansen berekenen bij herhaalde kansexperimenten.
- Je kunt kansen berekenen met behulp van de complementregel.

O30

De schijven in de figuur hiernaast draaien onafhankelijk van elkaar. Nadat de schijven tot stilstand zijn gekomen, wijst elke pijl een sector aan.

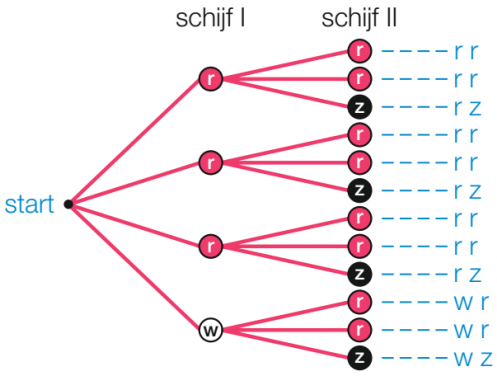


a Maxe draait schijf I één keer.
Waarom is $P(\text{rood}) = \frac{3}{4}$?

b Charlotte draait schijf II één keer.
Hoe groot is $P(\text{rood})$ bij deze schijf?

c Asmin draait beide schijven één keer.
Hoeveel mogelijke uitkomsten volgen uit het boomdiagram?
Hoeveel keer komt de uitkomst rr voor?
Bereken de kans dat Asmin twee keer rood krijgt.

d Controleer dat je de kans van vraag c ook krijgt door de kansen uit de vragen a en b te vermenigvuldigen.

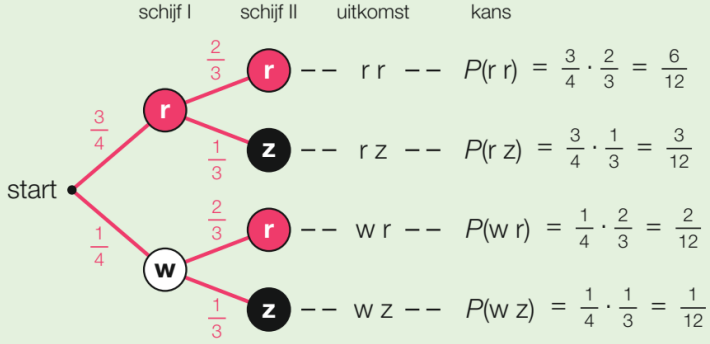


Theorie A De productregel voor kansen

In opgave 30 heb je te maken met een samengesteld kansexperiment: er worden twee schijven gedraaid.
Omdat deze twee experimenten elkaars uitkomsten op geen enkele wijze beïnvloeden, zijn de experimenten **onafhankelijk** van elkaar.
In opgave 30 is $P(\text{r r})$ berekend met behulp van een boomdiagram.
Omdat door de vele vertakkingen een boomdiagram al snel onoverzichtelijk wordt, passen we een vereenvoudiging toe.

- Draai eerst schijf I. Omdat je alleen de mogelijkheden r en w hebt, zijn er vanaf de start slechts twee takken getekend. Bij elke tak staat de bijbehorende kans.
- Draai vervolgens schijf II. Je hebt alleen de mogelijkheden r met kans $\frac{2}{3}$ en z met kans $\frac{1}{3}$.

Zo ontstaat het boomdiagram hiernaast.
Een boomdiagram met kansen bij de takken heet een **kansboom**.



© Noordhoff Uitgevers bv

Bij het doorlopen van een kansboom vermenigvuldig je de kansen die je tegenkomt. Zo is bij de kansboom op de vorige bladzijde $P(\text{r r}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, $P(\text{r z}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, $P(\text{w r}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ en $P(\text{w z}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

Je ziet dat de som van de kansen op alle mogelijke uitkomsten 1 is.

Werkschema: berekenen van kansen bij samengestelde kansexperimenten

1 Maak in gedachten (een gedeelte van) een kansboom.
2 Vermenigvuldig de kansen die je tegenkomt bij het doorlopen van de kansboom.

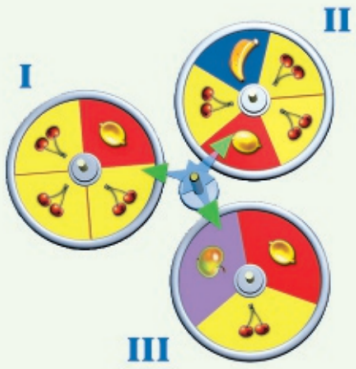
Dat je bij het doorlopen van een kansboom de kansen moet vermenigvuldigen is een gevolg van de **productregel voor onafhankelijke kansexperimenten**.

Voor de gebeurtenis G_1 bij het ene kansexperiment en de gebeurtenis G_2 bij het andere kansexperiment geldt $P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2)$.

Voorbeeld

De schijven in de figuur hiernaast draaien onafhankelijk van elkaar. Nadat de schijven tot stilstand zijn gekomen, wijst elke pijl een sector aan.
Bereken exact de kans op

a drie keer kersen
b een appel, een banaan en een citroen
c geen enkele citroen.

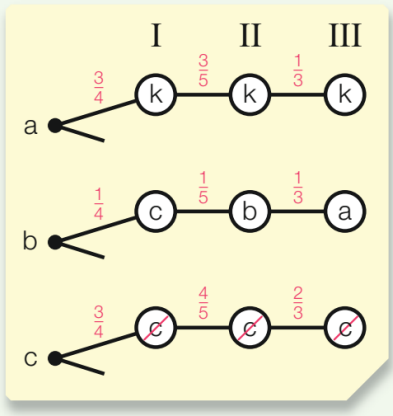


Uitwerking

a $P(\text{drie keer kersen}) = P(\text{k k k}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{20}$

b $P(\text{een appel, een banaan en een citroen}) = P(\text{c b a}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60}$

c $P(\not{c}\not{c}\not{c}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$



$\not{c}$ betekent geen citroen.
Bij schijf I is $P(\not{c}) = \frac{3}{4}$.

Bij elke vraag hoort een andere kansboom.

© Noordhoff Uitgevers bv

31

De schijven in de figuur hiernaast draaien onafhankelijk van elkaar. Nadat de schijven tot stilstand zijn gekomen, wijzen de pijlen elk één sector aan.
Bereken exact.

a P(drie bananen)
b P(geen kersen)
c P(twee citroenen en één banaan)
d P(drie citroenen)

R32

Je mag kansen alleen vermenigvuldigen als de experimenten onafhankelijk zijn.
Is er bij de volgende situaties sprake van onafhankelijke kansexperimenten? Zo ja, bereken de gevraagde kans.

a Wereldwijd is de kans 0,02 dat een willekeurige persoon blauwe ogen heeft.
Bereken de kans dat in een gezin beide kinderen blauwe ogen hebben.
b De kans dat het morgen regent in Breda is 0,7. De kans dat het morgen regent in Sydney (Australië) is 0,2.
Bereken de kans dat het morgen zowel in Breda als in Sydney regent.
c De kans dat het morgen regent in Breda is 0,7. De kans dat het morgen regent in Antwerpen is 0,7.
Bereken de kans dat het morgen zowel in Breda als in Antwerpen regent.

A33

Nikolina gooit met een viervlaksdobbelsteen, een gewone dobbelsteen en een achtvlaksdobbelsteen.
Bereken de kans dat zij

a in totaal 18 gooit
b met geen enkele steen 3 gooit
c met elke steen hoogstens 4 gooit
d met elke steen een drievoud gooit.

A34

Jeanine en Karsten spelen eerst een spelletje schaak, dan gaan ze een potje dammen en vervolgens spelen ze een keer Stratego. Jeanine wint bij schaken 65% van de spelletjes, bij dammen 45% en bij Stratego is deze kans 50%.
Bereken de kans dat Jeanine

a alle drie de spelletjes wint
b alleen bij het schaken wint.

Jeanine wint 65% van de spelletjes, dus de kans dat ze een spelletje wint is 0,65 en de kans dat ze een spelletje niet wint is 0,35.

© Noordhoff Uitgevers bv

O35

Eddy gooit met twee dobbelstenen.

a Bereken exact P(som is 3), P(som is 4) en P(som is 3 of som is 4).

b Is P(som is 3 of som is 4) = P(som is 3) + P(som is 4)?

c Onderzoek of P(som is 4 of product is 4) gelijk is aan P(som is 4) + P(product is 4).

In de wiskunde bedoelen we met het woordje of: of het een, of het ander of allebei.

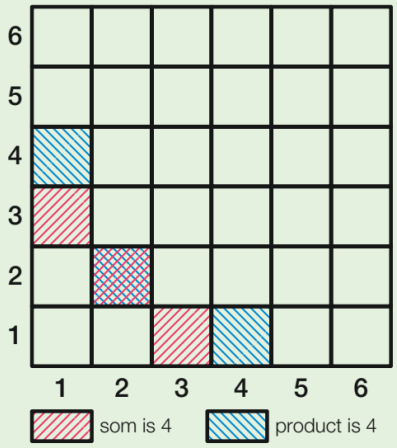
Theorie B De somregel voor kansen

Bij het gooien met twee dobbelstenen is

P(som is 2 of som is 4) = P(som is 2) + P(som is 4).

Dit is een voorbeeld van de **somregel voor kansen**.

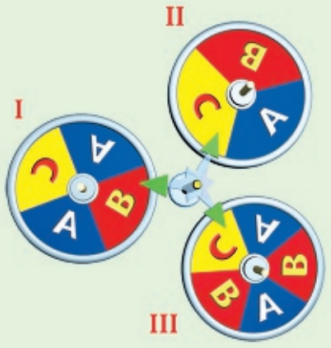
Je mag de somregel hier toepassen, omdat de gebeurtenissen 'som is 2' en 'som is 4' geen gemeenschappelijke uitkomsten hebben.
We zeggen dat de gebeurtenissen **elkaar uitsluiten**.



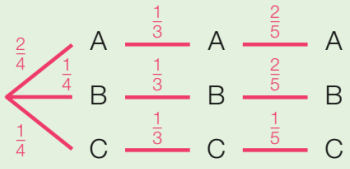
Hebben twee gebeurtenissen wel gemeenschappelijke uitkomsten, dan geldt de somregel niet. Zo is P(som is 4 of product is 4) niet gelijk aan P(som is 4) + P(product is 4), want de gebeurtenissen 'som is 4' en 'product is 4' hebben de uitkomst 2 2 gemeenschappelijk.
Voor P(som is 4 of product is 4) moet je gewoon de gunstige uitkomsten tellen. Je krijgt $P(\text{som is 4 of product is 4}) = \frac{5}{36}$.

Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen G_1 en G_2 geldt de somregel voor kansen: $P(G_1 \text{ of } G_2) = P(G_1) + P(G_2)$.

De drie schijven in de figuur hiernaast draaien onafhankelijk van elkaar.
Om de kans op drie gelijke letters te berekenen, gebruik je de somregel in combinatie met de productregel. Immers
$P(\text{drie gelijke letters}) = P(\text{A A A}) + P(\text{B B B}) + P(\text{C C C}) =$
$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{60} + \frac{2}{60} + \frac{1}{60} = \frac{7}{60}$.
Bij deze berekening maak je in gedachten een deel van een kansboom.



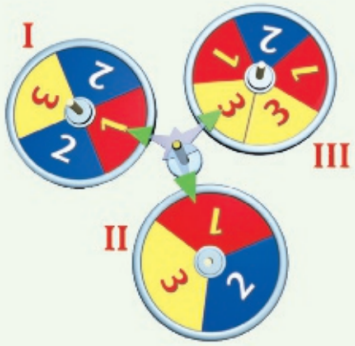
kansboom bij P(drie gelijke letters)



© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Niels laat de schijven in de figuur één keer draaien.
De schijven draaien onafhankelijk van elkaar. Nadat de schijven zijn uitgedraaid, wijst elke pijl één sector aan.
Bereken de kans dat de som van de cijfers 4 is.



Aanpak
Bedenk dat 'som is 4' inhoudt 112 of 121 of 211.

Uitwerking
$P(\text{som is } 4) = P(112) + P(121) + P(211) =$
$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \approx 0{,}117$

36 ⏍⊙∗
Zie het voorbeeld met de schijven.
a Bereken de kans dat één 3 wordt aangewezen.
b Bereken de kans dat geen enkele blauwe sector wordt aangewezen.

37 ⏍⊙
Rob gooit met drie dobbelstenen.
Bereken de kans dat hij
a één vijf gooit
b twee zessen en een drie gooit
c met elke dobbelsteen minstens drie ogen gooit.

38 ⏍⊙∗
Op weg naar huis passeert Marieke drie voetgangerslichten.
De kansen dat deze op rood staan, zijn achtereenvolgens 0,4, 0,7 en 0,2.
De voetgangerslichten werken onafhankelijk van elkaar.
Bereken de kans dat Marieke
a drie keer kan doorlopen
b één keer moet wachten, maar niet voor het derde voetgangerslicht.

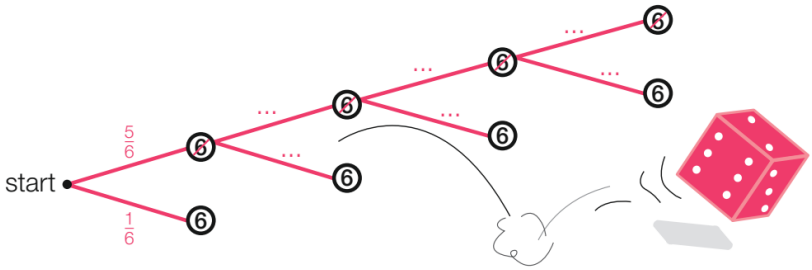
39 ∗
Bij een spel doorloop je achtereenvolgens vijf fasen. In elke fase kun je punten verdienen. Zie de tabel hiernaast.
Je ziet bijvoorbeeld dat je 4 punten kunt verdienen in fase IV.
De kans hierop is 0,4. In elke fase verdien je de punten die in de tabel staan, of je verdient deze punten niet.
Bereken de kans dat je bij één keer spelen bij dit spel minstens 12 punten verdient.

fase	kans	punten
I	0,8	1
II	0,6	2
III	0,5	3
IV	0,4	4
V	0,2	5

A40 ⏍⊙∗
Stijn gooit met een viervlaksdobbelsteen, een gewone dobbelsteen en een achtvlaksdobbelsteen.
Bereken de kans dat Stijn
a één twee gooit
b twee vieren gooit
c in totaal 16 gooit.

© Noordhoff Uitgevers bv

41 Diana gooit vier keer met een dobbelsteen. Om de kans te berekenen dat ze geen enkele keer 6 ogen gooit, gebruikt ze de kansboom in de figuur.



a Bereken de kans op geen enkele keer 6 ogen.

Huan gooit met vier dobbelstenen.

b Wat kun je zeggen van de kans dat hij geen enkele 6 gooit?

Theorie C Kansexperimenten herhalen

Het vier keer gooien met een dobbelsteen is een voorbeeld van het herhaald uitvoeren van hetzelfde kansexperiment. Ook in zo'n situatie gebruik je de productregel om kansen te berekenen.

De productregel gebruik je ook als je hetzelfde experiment twee of meer keren uitvoert.

De schijf in de figuur hiernaast wordt vier keer gedraaid.
De kans op geen enkele keer kiwi is gelijk aan

$P(\text{k}\not{\text{k}}\not{\text{k}}\not{\text{k}}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^4 \approx 0{,}410.$

De kans op precies één keer kiwi is
$P(\text{k}\not{\text{k}}\not{\text{k}}\not{\text{k}}) + P(\not{\text{k}}\text{k}\not{\text{k}}\not{\text{k}}) + P(\not{\text{k}}\not{\text{k}}\text{k}\not{\text{k}}) + P(\not{\text{k}}\not{\text{k}}\not{\text{k}}\text{k}) =$
$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \approx 0{,}410$

Dus $P(\text{één keer kiwi}) = 4 \cdot P(\text{k}\not{\text{k}}\not{\text{k}}\not{\text{k}}) = 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3$.

De kans op twee keer kiwi is
$P(\text{k k}\not{\text{k}}\not{\text{k}}) + P(\text{k}\not{\text{k}}\text{k}\not{\text{k}}) + P(\not{\text{k}}\text{k k}\not{\text{k}}) + \cdots =$
$\binom{4}{2} \cdot P(\text{k k}\not{\text{k}}\not{\text{k}}) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \approx 0{,}154.$

2 van de 4 keer kiwi:
k k k̸ k̸
k k̸ k k̸
k̸ k k k̸
⋮
enz.
} Het aantal rijtjes met 2 keer k en 2 keer k̸ is $\binom{4}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Lucas laat de schijf in de figuur hiernaast acht keer draaien.
Bereken de kans dat hij
a vijf keer 3 en drie keer 1 krijgt
b vijf keer 2 krijgt
c minstens zeven keer 1 krijgt.

Uitwerking

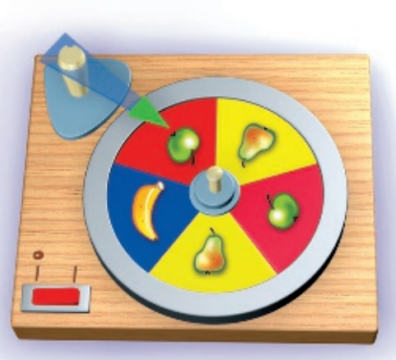
a $P(\text{vijf keer 3 en drie keer 1}) =$
$\binom{8}{5} \cdot P(3\,3\,3\,3\,3\,1\,1\,1) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \approx 0{,}065$

b $P(\text{vijf keer 2}) = \binom{8}{5} \cdot P(2\,2\,2\,2\,2\,1\,1\,1) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}004$

c $P(\text{minstens zeven keer 1}) = P(\text{zeven keer 1}) + P(\text{acht keer 1}) =$
$\binom{8}{7} \cdot P(1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,2) + P(1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1) = \binom{8}{7} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^7 \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^8 \approx 0{,}003$

R42 Zie het voorbeeld.
Bereken de kans dat Lucas alleen de eerste en de laatste keer 2 krijgt.
Waarom gebruik je bij het berekenen van deze kans geen combinaties?

43 Puck laat de schijf in de figuur hiernaast zes keer draaien.
Bereken de kans op
a drie keer appel en drie keer peer
b minstens vijf keer appel
c drie keer banaan
d geen enkele banaan.



44 Joep maakt een proefwerk dat uit 25 vierkeuzevragen bestaat.
Bij zes vragen moet hij het antwoord gokken.
Bereken de kans dat hij bij deze zes vragen
a geen enkele keer goed gokt
b twee keer goed gokt
c minder dan drie keer goed gokt.

© Noordhoff Uitgevers bv

A45

Britse wetenschappers hebben een methode ontwikkeld om uit DNA-materiaal dat afkomstig is van een man een voorspelling te doen over zijn achternaam. De kans op een juiste voorspelling is 0,4.
Bij tien moordzaken is op grond van het beschikbare DNA-materiaal bekend dat de dader een man moet zijn.
Bereken de kans dat in

a drie zaken de achternaam juist voorspeld wordt

b minder dan drie zaken de achternaam juist voorspeld wordt.

A46

Daan gooit acht keer met twee dobbelstenen.
Bereken de kans dat

a de som van de ogen drie keer minder dan 5 is

b de som van de ogen meer dan vijf keer meer dan 7 is.

O47

Quinty gooit zes keer met een geldstuk.

a Bereken de kans dat zij minstens vijf keer kop gooit.

b Bereken de kans dat zij minstens één keer kop gooit.

c Quinty bedenkt dat zij de kans van vraag b ook als volgt kan berekenen: $1 - P(0 \text{ keer kop})$.
Ga na dat dit hetzelfde antwoord oplevert.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie D De complementregel

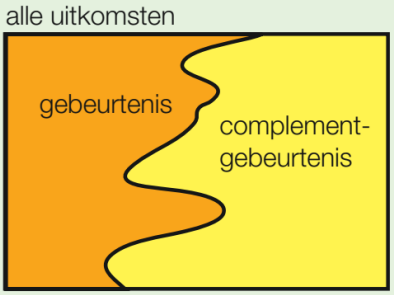
Bij het zes keer gooien met een geldstuk in opgave 47 is de kans op minstens één keer kop gelijk aan
$P(1 \text{ keer kop}) + P(2 \text{ keer kop}) + \cdots + P(6 \text{ keer kop})$.

In plaats van deze zes kansen apart te berekenen en daarna op te tellen, kun je je heel wat rekenwerk te besparen door te bedenken dat de som van de kansen van alle mogelijke uitkomsten gelijk is aan 1.
$P(0 \text{ keer kop}) + P(1 \text{ keer kop}) + \cdots + P(6 \text{ keer kop}) = 1$
$P(1 \text{ keer kop}) + \cdots + P(6 \text{ keer kop}) = 1 - P(0 \text{ keer kop})$
Dus $P(\text{minstens 1 keer kop}) = 1 - P(0 \text{ keer kop})$.
Dit is een voorbeeld van de **complementregel**.
Het complement van een gebeurtenis bestaat uit alle uitkomsten die niet tot de gebeurtenis behoren.

Omdat $P(\text{gebeurtenis}) + P(\text{complement-gebeurtenis}) = 1$, geldt de complementregel. Volgens deze regel is

$$P(\text{gebeurtenis}) = 1 - P(\text{complement-gebeurtenis})$$

Het woord complement komt van complementeren: het toevoegen van het gedeelte dat ontbreekt om iets volledig te maken.
In de figuur hiernaast zie je een gebeurtenis en zijn complement-gebeurtenis. Samen geven ze alle mogelijke uitkomsten.



Komt in de omschrijving van een gebeurtenis ‘minstens’, hoogstens’, ‘niet’, ‘meer dan’ of ‘minder dan’ voor, denk dan goed na of de complementregel je rekenwerk kan besparen.
Zie het volgende schema met enkele voorbeelden.

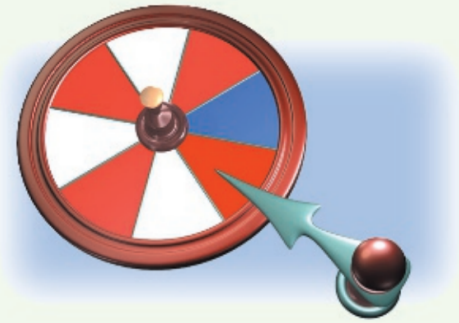
Gooi 6 keer met een geldstuk.			
gebeurtenis		complement-gebeurtenis	complement-regel handig?
minstens 1 keer kop:	1, 2, 3, 4, 5 of 6 keer kop	0 keer kop	ja
meer dan 1 keer kop:	2, 3, 4, 5 of 6 keer kop	0 of 1 keer kop	ja
hoogstens 1 keer kop:	0 of 1 keer kop	2, 3, 4, 5 of 6 keer kop	nee
minder dan 2 keer kop:	0 of 1 keer kop	2, 3, 4, 5 of 6 keer kop	nee
minder dan 6 keer kop:	0, 1, 2, 3, 4 of 5 keer kop	6 keer kop	ja

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Annelie laat de schijf in de figuur hiernaast zes keer draaien.
Bereken de kans dat ze

a twee keer wit krijgt
b minstens één keer blauw krijgt
c hoogstens vier keer rood krijgt.



Uitwerking

a $P(\text{twee keer wit}) = \binom{6}{2} \cdot P(\text{w w w w w w}) =$

$\binom{6}{2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^4 \approx 0{,}322$

b $P(\text{minstens één keer blauw}) = 1 - P(\text{geen enkele keer blauw}) =$

$1 - P(\text{b b b b b b}) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^6 \approx 0{,}551$

c $P(\text{hoogstens vier keer rood}) = 1 - P(\text{vijf keer rood}) - P(\text{zes keer rood}) =$

$1 - \binom{6}{5} \cdot P(\text{r r r r r r}) - P(\text{r r r r r r}) = 1 - \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^5 \cdot \frac{4}{8} - \left(\frac{4}{8}\right)^6 \approx 0{,}891$

R48

Zie het voorbeeld.
Bij het gebruik van de complementregel kan gemakkelijk iets misgaan.
Wat is er fout aan de volgende beweringen?

a $P(\text{geen rood}) = 1 - P(\text{alles rood})$
b $P(\text{meer dan 2 rood}) = 1 - P(\text{minder dan 2 rood})$
c $P(\text{hoogstens 5 witte}) = 1 - P(\text{minstens 5 witte})$

Vul in.

d $P(\text{minstens 1 rode}) = 1 - P($.....$)$

e $P(\text{hoogstens 4 witte}) = 1 - P($.....$)$

f $P(\text{niet 5 witte}) = 1 - P($.....$)$

49

Paul laat de schijf in de figuur hiernaast vijf keer draaien.
Bereken de kans dat hij

a minstens één keer een appel krijgt
b drie appels en twee peren krijgt
c twee bananen krijgt
d hoogstens drie bananen krijgt.

© Noordhoff Uitgevers bv

50

In de gemeenschappelijke ruimte van een studentenhuis zijn vier rookmelders aangebracht. De kans dat rookmelder I bij brand werkt, is 0,95. Voor melder II is dat 0,85, voor melder III is dat 0,88 en voor melder IV is dat 0,77. De rookmelders werken onafhankelijk van elkaar.
In de gemeenschappelijke ruimte breekt brand uit.
Bereken de kans dat minstens één rookmelder afgaat.

A51

In Nederland is 1 op de 12 mannen kleurenblind. In een winkelcentrum wordt een enquête gehouden onder mannen.
Bereken de kans dat

a van de eerste vijf ondervraagde mannen geen enkele kleurenblind is
b minstens één van de eerste tien ondervraagde mannen kleurenblind is
c één van de eerste zes ondervraagde mannen kleurenblind is.

A52

In ons land vinden regelmatig vogeltellingen plaats. Op grond van deze tellingen wordt voor elke vogelsoort de *trefkans* vastgesteld. De trefkans is de kans dat je tijdens een telling in een willekeurige tuin in Nederland de soort aantreft.

vogelsoort	koolmees	vink	ekster
trefkans	0,76	0,28	0,17

Ga er in deze opgave van uit dat de trefkansen onafhankelijk zijn.
Tijdens een vogeltelling verzamelt Nienke de resultaten van de tellingen in 15 tuinen.
Bereken de kans dat in

a hoogstens 13 tuinen een koolmees is aangetroffen
b minstens twee tuinen een ekster is waargenomen
c geen enkele tuin een vink is voorgekomen
d geen enkele tuin zowel een koolmees als een vink is aangetroffen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

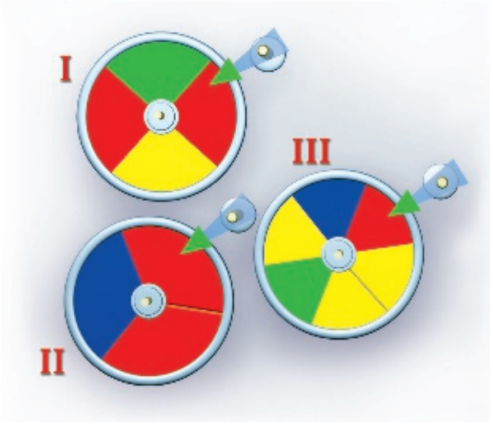
- ☐ Ik kan kansen berekenen met behulp van de productregel.
- ☐ Ik kan kansen berekenen met behulp van de somregel.
- ☐ Ik kan kansen berekenen bij herhaalde kansexperimenten.
- ☐ Ik kan kansen berekenen met behulp van de complementregel.

- ▶ OPGAVE C7a THEORIE A
- ▶ OPGAVE C7b THEORIE B
- ▶ OPGAVE C8 THEORIE C
- ▶ OPGAVE C9 THEORIE D

C7 De schijven in de figuur hiernaast draaien onafhankelijk van elkaar. Nadat de schijven tot stilstand zijn gekomen, wijst elke pijl een sector aan.

a Bereken de kans dat geen enkele rode sector wordt aangewezen.

b Bereken de kans dat één groene sector wordt aangewezen.



C8 Leonita laat de schijf hiernaast vier keer draaien. Bereken de kans op

a twee keer blauw en twee keer rood

b minder dan twee keer rood.

C9 Nando laat de schijf hiernaast acht keer draaien. Bereken de kans op minstens twee keer blauw.

Antwoorden

C7 **a** 0,139
b 0,333
C8 **a** 0,019
b 0,593
C9 0,395

© Noordhoff Uitgevers bv

6.4 Het vaasmodel

Kennis en vaardigheden

- Je kunt kansen berekenen bij het pakken van knikkers uit een vaas.
- Je kunt het vaasmodel toepassen.
- Je kunt kansen berekenen bij pakken met en pakken zonder terugleggen.

O53

Uit een groep van 15 leerlingen worden er willekeurig drie gekozen om samen een cadeau te kopen voor een pasgeboren baby van een docent.

a Volgens Levi zijn er $15 \cdot 15 \cdot 15$ drietallen mogelijk.
Welke fout maakt hij?

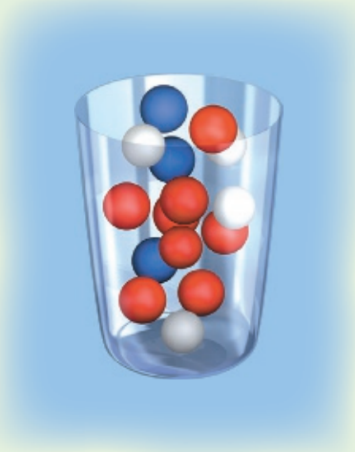
b Volgens Sasha zijn er $15 \cdot 14 \cdot 13$ drietallen mogelijk.
Welke fout maakt zij?

c Hoeveel drietallen zijn er mogelijk?

Theorie A Knikkers pakken uit een vaas

In opgave 53 waren bij het kiezen van de drie leerlingen herhalingen niet toegestaan en was de volgorde niet van belang. Daarbij horen combinaties.

In een vaas zitten acht rode, vier witte en drie blauwe knikkers. We vragen ons af wat de kans is dat je bij het pakken van acht knikkers vijf rode en drie witte knikkers pakt. Hierbij gebruiken we de kansdefinitie van Laplace en hebben we met combinaties te maken.



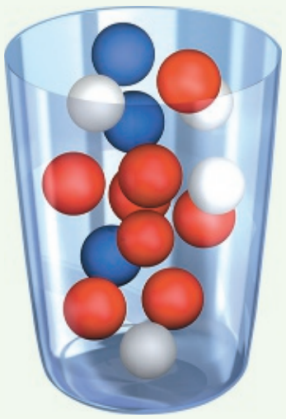
- Het aantal mogelijke uitkomsten is het aantal manieren om 8 knikkers uit de totaal $8 + 4 + 3 = 15$ knikkers te pakken.
  Dat kan op $\binom{15}{8}$ manieren.
- Het aantal gunstige uitkomsten is het aantal manieren om 5 rode uit de 8 rode *en* 3 witte uit de 4 witte knikkers te pakken. Dat kan op $\binom{8}{5} \cdot \binom{4}{3}$ manieren.
- De gevraagde kans is dus $P(\text{5 rode en 3 witte}) = \dfrac{\binom{8}{5} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{15}{8}} \approx 0{,}035$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

In een vaas zitten acht rode, vier witte en drie blauwe knikkers.
Joep pakt vijf knikkers uit de vaas.
Bereken de kans dat Joep

a één rode, twee witte en twee blauwe knikkers pakt
b minstens één rode knikker pakt
c twee of drie rode knikkers pakt.



Uitwerking

1 rode uit 8 rode *en* 2 witte uit 4 witte *en* 2 blauwe uit 3 blauwe

a $P(\text{1 rode, 2 witte en 2 blauwe}) = \dfrac{\binom{8}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{15}{5}} \approx 0{,}048$

b $P(\text{minstens 1 rode}) = 1 - P(\text{geen rode}) = 1 - \dfrac{\binom{7}{5}}{\binom{15}{5}} \approx 0{,}993$

$\binom{7}{5}$ ← 4 + 3 = 7 niet-rode

Gebruik de complementregel.

c $P(\text{2 of 3 rode}) = P(\text{2 rode}) + P(\text{3 rode}) = \dfrac{\binom{8}{2}\cdot\binom{7}{3}}{\binom{15}{5}} + \dfrac{\binom{8}{3}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{15}{5}} \approx 0{,}718$

Gebruik de somregel.

Merk bij vraag a van het voorbeeld de volgende samenhang op:

$8 + 4 + 3 = 15$ — $\dfrac{\binom{8}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{15}{5}}$ — $1 + 2 + 2 = 5$

R54

De zojuist genoemde samenhang lijkt bij vraag b van het voorbeeld te ontbreken.

a Noteer de berekening van de kans van vraag b zo, dat ook hier deze samenhang zichtbaar wordt.

Zie vraag c van het voorbeeld. Loes berekent de kans als volgt: $\dfrac{\binom{8}{2}\cdot\binom{7}{3} + \binom{8}{3}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{15}{5}}$.

b Waarom mag dat? Wat is het voordeel hiervan?

© Noordhoff Uitgevers bv

55

In een vaas zitten zeven rode, acht witte en zes groene knikkers.
Carmen pakt zeven knikkers uit de vaas.
Bereken de kans dat zij

a drie rode, twee witte en twee groene knikkers pakt
b geen groene knikkers pakt
c twee rode en vijf witte knikkers pakt
d twee witte knikkers pakt.

A56

In een vaas zitten 18 rode, 12 blauwe en 32 witte knikkers.
Vincent pakt zes knikkers uit de vaas.
Bereken de kans op

a drie witte en drie blauwe knikkers
b minstens één witte knikker
c drie of vier witte knikkers
d één rode knikker.

O57

Op een fruitschaal liggen vijf appels, vier peren en zes sinaasappels.
Doris pakt willekeurig drie stuks fruit van de schaal.
Bereken de kans dat ze één appel, één peer en één sinaasappel pakt.

Theorie B Het vaasmodel toepassen

Bij veel kansberekeningen kan het handig zijn het kansexperiment om te zetten in het pakken van knikkers uit een vaas. Je maakt dan een **vaasmodel** bij het probleem. Zie het volgende schema.

loterij
50 loten met vijf prijzen, namelijk één hoofdprijs en vier tweede prijzen.

experiment
Yvette koopt vier loten.
P(hoofdprijs en 1 tweede prijs)

vaasmodel
50 knikkers waarvan één rood (de hoofdprijs), vier wit (de tweede prijzen) en 45 zwart (de niet-prijzen).

experiment
Yvette pakt vier knikkers.
P(1 rode en 1 witte en 2 zwarte)

$$P(\text{hoofdprijs en 1 tweede prijs}) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{45}{2}}{\binom{50}{4}} \approx 0{,}017$$

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

In een loterij zijn 80 loten verkocht. Er zijn vijf boekenbonnen te winnen en een fiets. Eva heeft vier loten gekocht.
Bereken de kans dat Eva één boekenbon wint en verder niets.

Uitwerking

$$P(\text{1 boekenbon en verder niets}) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{74}{3}}{\binom{80}{4}} \approx 0{,}205$$

R58 Zie het voorbeeld.
Wat is de samenstelling van de vaas met knikkers?

Bij lastige opgaven schrijf je de samenstelling van de vaas op.

59 Bij een loterij zijn 40 loten verkocht. Er zijn drie eerste prijzen en zeven tweede prijzen. Monique koopt drie loten en Barbara koopt er vier.
Bereken de kans dat
a Monique één prijs wint
b Barbara twee tweede prijzen wint
c geen van beiden een prijs wint
d elk lot van Barbara een prijs oplevert.

60 Bij een loterij zijn 80 loten verkocht. Er is een hoofdprijs van 50 euro en er zijn drie tweede prijzen van 25 euro.
Nina koopt vijf loten.
Bereken de kans dat Nina
a minder dan twee prijzen wint
b 50 euro wint.

A61 In de tabel zie je hoe ver de werknemers van de firma Adphex van hun werk af wonen. Bij een onderzoek naar de vergoeding van reiskosten worden tien personen van dit bedrijf ondervraagd.
Bereken de kans dat
a meer dan acht ondervraagden minder dan 5 km van het bedrijf wonen
b minder dan drie vrouwen worden ondervraagd
c er twee vrouwen bij zitten die 5 km of meer van het werk af wonen.

AFSTAND HUIS - BEDRIJF

	man	vrouw	
0 tot 5 km	18	11	29
5 tot 10 km	13	3	16
10 km of meer	6	2	8
	37	16	53

© Noordhoff Uitgevers bv

A62 ⏍ ⊙ ∗

Van de 28 leerlingen van 4 vwo A van het Zuidland College in Akkerdam zijn er acht 14 jaar, vijftien 15 jaar en vijf 16 jaar. Van de leerlingen van 4 vwo A wonen er zeventien in Akkerdam: van de 14-jarigen zijn dat er zes en van de 15-jarigen zijn dat er tien. De docent wiskunde verdeelt de klas in groepjes van vier leerlingen voor het maken van een praktische opdracht. Hij kiest daartoe willekeurig telkens vier leerlingen.
Bereken de kans dat in het eerstgekozen groepje

a uitsluitend 15-jarigen zitten
b niet de 15-jarige Floris uit Akkerdam zit
c minstens één leerling uit Akkerdam zit
d hoogstens twee leerlingen van 15 jaar zitten, die bovendien in Akkerdam wonen.

E63 ∗

Bij een kaartspel wordt gespeeld met 32 kaarten. Er zijn vier soorten kaarten: klaveren (zwart), schoppen (zwart), harten (rood) en ruiten (rood). Van elke soort wordt gespeeld met de 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer en aas. We trekken acht kaarten uit het spel.
Bereken de kans op minstens één schoppenkaart en geen enkele hartenkaart.

O64 ⏍ ⊙ ∗

In een vaas zitten acht rode en vier blauwe knikkers. Jasmine pakt drie knikkers uit de vaas.

a Bereken de kans dat Jasmine drie rode knikkers pakt.

Jasmine bedenkt dat deze kans ook op een andere manier berekend kan worden. Als ze de drie knikkers één voor één uit de vaas zou pakken, dan zou de kans op drie rode knikkers hetzelfde moeten blijven.

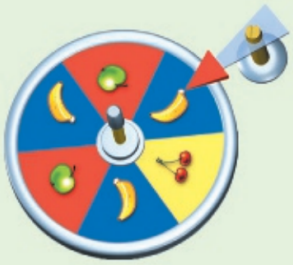
b Bereken de kans dat de eerste knikker die zij pakt rood is.
c Leg uit waarom de kans dat de tweede knikker weer een rode is, gelijk is aan $\frac{7}{11}$. Wat is de kans dat de derde knikker ook een rode is?
d Bereken met behulp van de antwoorden op de vragen b en c de kans op drie rode knikkers. Is je antwoord anders dan bij vraag a?
e Jasmine berekent de kans op twee rode knikkers en één blauwe met $\frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10}$.
Wat vergeet zij?
f Bereken de kans op twee rode knikkers en één blauwe.

Teun pakt een knikker uit dezelfde vaas, noteert de kleur en legt de knikker terug. Dit doet hij drie keer achter elkaar.

g Bereken de kans dat Teun twee rode knikkers en één blauwe pakt.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie C Pakken met en pakken zonder terugleggen



Jade laat de schijf van de figuur hiernaast vier keer draaien. Ook dit experiment kun je omzetten naar een vaasmodel. In de vaas stop je bijvoorbeeld drie blauwe knikkers (de bananen), twee rode knikkers (de appels) en één gele knikker (de kersen).

Eén keer draaien met de schijf komt overeen met één knikker uit de vaas pakken. Vier keer draaien komt overeen met vier keer een knikker uit de vaas pakken, maar je moet dan wel de knikker telkens terugleggen. De samenstelling van de vaas moet elk keer immers hetzelfde zijn. We zeggen dat we vier knikkers **met terugleggen** uit de vaas pakken.

Tot nu toe hadden we steeds te maken met het **vaasmodel zonder terugleggen**. Vier personen kiezen uit een groep van zes kun je vergelijken met vier keer een knikker uit een vaas pakken *zonder terugleggen*. Je kiest iemand namelijk niet twee keer.

Wanneer er staat ‘pak drie knikkers’, dan wordt bedoeld *zonder terugleggen*, tenzij er staat dat het *met terugleggen* is.

Bij pakken *met terugleggen* gebruik je de productregel.
Bij pakken *zonder terugleggen* heb je geleerd de kans te berekenen met de kansdefinitie van Laplace. Je kunt dit echter ook met de productregel doen.

Pak drie knikkers uit een vaas met tien rode en vijf witte knikkers. De kans op twee rode knikkers is:	
met terugleggen	**zonder terugleggen**
$P(\text{2 rode}) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{10}{15}\right)^2 \cdot \frac{5}{15} \approx 0{,}444$	met de productregel: $P(\text{2 rode}) = \binom{3}{2} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \approx 0{,}495$ met de kansdefinitie van Laplace: $P(\text{2 rode}) = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} \approx 0{,}495$

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

a Bij een tv-programma wordt in drie opeenvolgende weken door loting een persoon uit het publiek aangewezen. Het publiek zit op vijftien even lange rijen.
Bereken de kans dat één keer iemand wordt aangewezen die op een van de eerste vier rijen zit.

b In een doos zitten vijftien enveloppen, waarvan er vier een prijs bevatten. Paul pakt drie enveloppen.
Bereken de kans dat Paul één enveloppe pakt met een prijs.

Uitwerking

a $P(\text{één keer iemand uit rij 1 of 2 of 3 of 4}) = \binom{3}{1} \cdot P(\text{1 of 2 of 3 of 4, overig, overig}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{4}{15} \cdot \left(\frac{11}{15}\right)^2 \approx 0{,}430$

b $P(\text{één prijs}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{10}{13} \approx 0{,}484$

R65 Zie voorbeeld b.

a De kans op één enveloppe met een prijs is berekend door gebruik te maken van $P(\text{één prijs}) = \binom{3}{1} \cdot P(\text{p}\not{\text{p}}\not{\text{p}})$.
Laat zien dat $P(\text{p}\not{\text{p}}\not{\text{p}}) = P(\not{\text{p}}\,\text{p}\not{\text{p}}) = P(\not{\text{p}}\not{\text{p}}\,\text{p})$.

b Bereken de gevraagde kans met behulp van de kansdefinitie van Laplace.

c Peter pakt zeven enveloppen. Hij wil de kans dat hij twee enveloppen met een prijs pakt berekenen met de productregel.
Leg uit waarom dat niet praktisch is.

66 In een vaas zitten 24 blauwe en 16 groene knikkers.
Kai pakt drie knikkers uit de vaas.
Bereken de kans op

a twee groene knikkers

b minstens één blauwe knikker.

Parisa pakt met terugleggen drie knikkers uit de vaas.
Bereken de kans op

c twee groene knikkers

d minstens één blauwe knikker.

© Noordhoff Uitgevers bv

67

In een klas zitten tien jongens en twaalf meisjes.

a Elk van de secties Frans, Duits, Engels en Nederlands verloot een boek in de klas.
Bereken de kans dat de vier boeken door meisjes gewonnen worden.

b De sectie verzorging verloot in de klas vier appeltaarten. Elke leerling kan hoogstens één taart winnen.
Bereken de kans dat de vier taarten door meisjes gewonnen worden.

c De leraar wiskunde kiest willekeurig een groepje van vier leerlingen uit de klas om samen een opdracht te maken.
Bereken de kans dat het groepje drie meisjes telt.

d De leraar kunstgeschiedenis verloot in de klas vier reproducties. Bij de verloting van elke reproductie mogen alle leerlingen meedoen.
Bereken de kans dat drie reproducties door meisjes worden gewonnen.

A68

In de wielersport wordt veel gecontroleerd op doping. In deze opgave bekijken we wielerwedstrijden met 175 renners, waarvan 7 van de Visma wielerploeg.

a Bij de Ronde van Vlaanderen worden door middel van loting vijf renners aangewezen voor een dopingcontrole.
Bereken de kans dat geen enkele renner van Visma wordt aangewezen.

b Bij een vijfdaagse wielerkoers wordt iedere dag door loting één renner aangewezen voor een dopingcontrole.
Bereken de kans dat dit geen enkele keer een renner van Visma betreft.

c Bij een tweedaagse wielerkoers worden op beide dagen door loting drie renners aangewezen voor de dopingcontrole.
Bereken de kans dat op minstens één van beide dagen een renner van Visma naar de dopingcontrole moet.

A69

Een fabrikant verpakt zijn zakken chips in dozen van veertig stuks. Om het merk te promoten, zitten in iedere doos drie zakken met een bioscoopbon. Een supermarktmedewerker pakt vijf van deze dozen en haalt uit elk van deze dozen twee zakken chips.
Bereken de kans dat hij minstens één zak met een bioscoopbon erin heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan kansen berekenen bij het pakken van knikkers uit een vaas.
- ☐ Ik kan het vaasmodel toepassen.
- ☐ Ik kan kansen berekenen bij pakken met en pakken zonder terugleggen.

- ▶ OPGAVE C10 THEORIE A
- ▶ OPGAVE C11 THEORIE B
- ▶ OPGAVE C12 THEORIE C

C10 In een vaas zitten vier gele, drie groene en vijf blauwe knikkers.
Olivier pakt er drie uit.
Bereken de kans dat

a er minstens één groene bij is
b er hoogstens twee blauwe bij zijn
c ze alle drie van kleur verschillen
d ze alle drie dezelfde kleur hebben.

C11 Een partij van 500 appels wordt verpakt in 20 dozen van elk 25 stuks. Bij deze 500 appels zijn er tien met een rotte plek. Isa koopt een doos.
Bereken de kans dat alle appels in de doos gaaf zijn.

C12 Chelsey pakt 3 knikkers uit een vaas met 3 rode en 4 witte knikkers.
Bereken P(één rode knikker) als er sprake is van

a pakken met terugleggen
b pakken zonder terugleggen.

Antwoorden

C10 **a** 0,618
b 0,955
c 0,273
d 0,068
C11 0,596
C12 **a** 0,420
b 0,514

© Noordhoff Uitgevers bv

6.5 Allerlei kansproblemen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt kansen berekenen bij een kleine steekproef uit een grote populatie.
- Je kunt een geschikte aanpak kiezen bij een kansprobleem.

O70

Bij een uitverkocht concert in de Ziggo Dome zijn 17 000 bezoekers, waarvan 13 600 vrouwen. Er worden door loting drie bezoekers gekozen voor een meet-and-greet met de artiest.

a Licht toe dat je hier te maken hebt met pakken zonder terugleggen.

b Bereken de kans dat alle drie de gekozen toeschouwers vrouw zijn. Rond af op vijf decimalen.

Tim zegt: 13 600 van de 17 000 toeschouwers zijn vrouw en dat is precies 80%. De kans op drie vrouwen is dus $P(\text{v v v}) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}512$.

c Licht toe dat Tim rekent alsof er sprake is van pakken met terugleggen.

d Vergelijk je antwoord van vraag b met dat van Tim. Waarom is het antwoord bijna hetzelfde?

Theorie A Kleine steekproef uit grote populatie

Bij veel kansexperimenten gaat het om pakken zonder terugleggen. In opgave 70 heb je hier een voorbeeld van gezien. Bij het pakken van drie knikkers uit de vaas hiernaast is

$$P(\text{r r r}) = \frac{12\,000}{30\,000} \cdot \frac{11\,999}{29\,999} \cdot \frac{11\,998}{29\,998}.$$

Omdat $\frac{12\,000}{30\,000} = 0{,}4$ en $\frac{11\,999}{29\,999} \approx 0{,}400$ en $\frac{11\,998}{29\,998} \approx 0{,}400$ maakt het vrijwel niet uit of je de knikkers met of zonder terugleggen pakt. Bij het berekenen van $P(\text{r r r})$ mag je pakken zonder terugleggen opvatten als pakken met terugleggen. Het voordeel hiervan is dat je dan krijgt $P(\text{r r r}) = 0{,}4^3 = 0{,}064$ en dat is veel eenvoudiger dan de berekening

$$P(\text{r r r}) = \frac{12\,000}{30\,000} \cdot \frac{11\,999}{29\,999} \cdot \frac{11\,998}{29\,998} = 0{,}06399...$$

Bij het pakken van drie knikkers uit een vaas met een zeer groot aantal knikkers maakt het voor de kansen weinig uit of het met of zonder terugleggen is.

Bij een kleine steekproef uit een grote populatie mag je pakken zonder terugleggen opvatten als pakken met terugleggen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Van alle boeken die bij de grote webshop Convex worden verkocht, behoort 40% tot het genre fictie en 25% tot het genre kinderboeken. Een boek kan niet tot beide genres behoren.
Bij Convex worden in een minuut tien boeken verkocht.
Bereken de kans dat

a geen van deze boeken een kinderboek is
b zeven van deze boeken tot het genre fictie en drie tot het genre kinderboeken behoren
c vier van deze boeken tot het genre fictie en drie tot het genre kinderboeken behoren.

Uitwerking

a $P(\text{geen kinderboeken}) = 0{,}75^{10} \approx 0{,}056$

b $P(\text{7 fictie en 3 kinderboeken}) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}40^7 \cdot 0{,}25^3 \approx 0{,}003$

c $P(\text{4 fictie, 3 kinderboeken, 3 overige}) = \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot 0{,}40^4 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}35^3 \approx 0{,}072$

R71

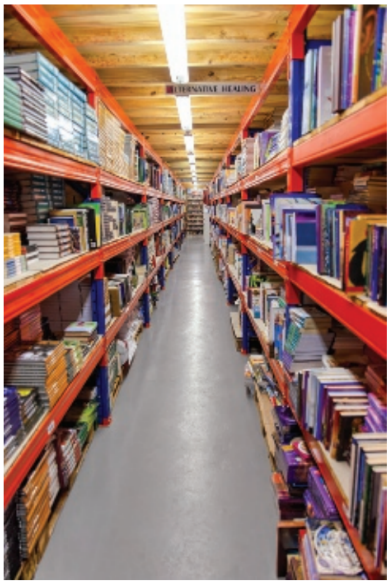
Zie het voorbeeld.

a Waarom mag je deze situatie opvatten als pakken met terugleggen?
b Licht toe waar 0,75 bij vraag a van het voorbeeld vandaan komt.
c Licht toe waarom er in het voorbeeld bij vraag b met een combinatie wordt vermenigvuldigd en bij vraag a niet.
d Licht toe waar de factor $\binom{6}{3}$ bij vraag c van het voorbeeld vandaan komt. Licht ook de factor 0,35 toe.

72

Zie het voorbeeld.
Bereken de kans dat

a al deze boeken tot het genre fictie of kinderboeken behoren
b twee van deze boeken kinderboeken zijn
c twee van deze boeken kinderboeken zijn en drie zowel geen fictie als geen kinderboek zijn.



© Noordhoff Uitgevers bv

A73

Negen van de tien Nederlanders heeft minstens één vriend(in). Van de in Nederland voorkomende vriendschappen is 44% opgedaan via studie/werk, 29% via de buurt en 12% via een sportvereniging.
We bekijken 15 willekeurig gekozen vriendschappen.
Bereken de kans dat er

a minstens één is opgedaan via een sportvereniging
b minstens twee op een andere manier zijn opgedaan dan via de drie genoemde mogelijkheden
c zeven zijn opgedaan via studie/werk en drie via de buurt.

Lieke heeft 20 vrienden uitgenodigd voor een feest. Van deze vrienden kent ze er 8 van haar studie, 7 van haar werk en 5 van de sportschool.

d Bereken de kans dat van vier willekeurig gekozen vrienden er twee van haar studie zijn.

Theorie B Een geschikte aanpak kiezen bij een kansprobleem

Bij kansrekening is het belangrijk om eerst goed te bedenken welke kans je moet berekenen. Noteer dit duidelijk met $P(...)$ en ga na of je gebruik moet maken van de *somregel* of de *complementregel*.

Ga na wat voor soort kansprobleem het is.

- Bij samengestelde kansexperimenten zul je vaak de kansen met elkaar vermenigvuldigen. Denk bijvoorbeeld aan de kans dat drie achtereenvolgende verkeerslichten op rood staan.
  Soms kan het handig zijn om de gunstige uitkomsten te tellen en de kansdefinitie van Laplace te gebruiken. Denk bijvoorbeeld aan het gooien van dobbelstenen. Bij twee dobbelstenen is het meestal handig om een rooster te maken. Bij drie of meer dobbelstenen kan het handig zijn om de gunstige uitkomsten systematisch te noteren.
- Als je bij samengestelde kansexperimenten dezelfde handeling meerdere keren uitvoert, dan ga je na of er sprake is van pakken met of pakken zonder terugleggen.
  - Bij pakken met terugleggen veranderen de kansen niet en gebruik je de productregel. Bedenk goed of je nog een combinatie moet gebruiken om het aantal rijtjes te berekenen.
  - Bij pakken zonder terugleggen veranderen de kansen en gebruik je meestal combinaties en de kansdefinitie van Laplace.
  - Bij een kleine steekproef uit een grote populatie mag je pakken zonder terugleggen opvatten als pakken met terugleggen.
- Soms moet je bij een tabel met gegevens een voorwaardelijke kans berekenen. Let dan goed op door welk totaal aantal je deelt.

© Noordhoff Uitgevers bv

A74

a Stef gooit met twee gewone dobbelstenen. Sasha gooit met drie viervlaksdobbelstenen
Bij wie is de kans om in totaal hoogstens 4 te gooien het grootst?

b Toon gooit acht keer met een dobbelsteen.
Bereken de kans dat hij minstens twee keer 4 ogen gooit.

c In een doos zitten 48 enveloppen, waarvan er acht een prijs bevatten.
Ilsa pakt acht enveloppen uit de doos.
Bereken de kans dat Ilsa minstens twee prijzen wint.

A75

Texas Hold'em is een variant van het kaartspel poker. Iedere speler krijgt in de eerste ronde twee kaarten. Er wordt gespeeld met een spel van 52 kaarten, waarvan de vier azen de beste zijn.
Jimmie en zes van zijn vrienden spelen samen.

a Bereken de kans dat Jimmie in de eerste ronde twee azen krijgt.

b Bereken de kans dat alle azen worden uitgedeeld in de eerste ronde.

A76

Uit een onderzoek blijkt dat 30% van de jongeren een bijbaantje heeft in een supermarkt, 14% in een andere winkel en dat 39% van de jongeren helemaal geen bijbaan heeft.
Bij een onderzoek naar de werkdruk die jongeren ervaren, worden twaalf jongeren ondervraagd.
Bereken de kans dat van deze jongeren

a de helft een bijbaan heeft

b er vijf in een supermarkt werken

c er minstens twee een bijbaan hebben die niet in een supermarkt of een andere winkel is

d er vier in een supermarkt werken, twee in een andere winkel en vijf geen bijbaan hebben.

In een klas van 30 leerlingen werken er negen bij een supermarkt en twaalf hebben geen bijbaan. Er wordt aan drie leerlingen gevraagd wat voor bijbaan ze hebben.
Bereken de kans dat

e één van deze leerlingen bij een supermarkt werkt

f minstens één van deze leerlingen bij een supermarkt werkt

g slechts één van deze leerlingen een bijbaan heeft, maar niet bij een supermarkt.

A77

Op een vliegveld zijn zes balies beschikbaar voor het afhandelen van vluchten naar Porto. Bij elke balie staat een rij van vijf personen. Bij de wachtenden zijn er vijf met een inchecktijd van meer dan vier minuten.
Bereken de kans dat drie van deze wachtenden in de rij bij balie 2 staan.

© Noordhoff Uitgevers bv

A78

Een gemeente doet onderzoek naar ruimte voor vogels. Daarbij zijn in enkele straten gegevens van 61 tuinen verzameld. Er is onder andere gekeken naar de aanwezigheid van een gazon en bomen. Zie de tabel.

	gazon	geen gazon	
bomen	14	23	37
geen bomen	5	19	24
	19	42	61

a Bereken de kans dat een willekeurig gekozen tuin een gazon en bomen heeft.

b Bereken de kans dat een willekeurig gekozen tuin die geen gazon heeft, geen bomen heeft.

c Toon aan dat de gebeurtenissen ‘heeft een gazon’ en ‘heeft bomen’ afhankelijk zijn.

Vijf willekeurig gekozen tuinen worden op de foto gezet.

d Bereken de kans dat twee van deze tuinen zowel bomen als een gazon hebben.

De gemeente kiest willekeurig één tuin waar een bijenhotel wordt opgehangen en een andere tuin waar een vogelvoederhuisje wordt geplaatst.

e Bereken de kans dat het bijenhotel wordt opgehangen in een tuin met een boom en het vogelvoederhuisje wordt geplaatst in een tuin zonder boom.

A79

Uit onderzoek blijkt dat 9% van de Nederlanders een muziekinstrument bespeelt.

a Bereken de kans dat twee willekeurig gekozen Nederlanders beiden geen muziekinstrument bespelen.

b Bereken de kans dat van drie willekeurig gekozen Nederlanders er één een muziekinstrument bespeelt.

c Bereken de kans dat van vijf willekeurig gekozen Nederlanders er hoogstens één een muziekinstrument bespeelt.

d Hoe groot moet een gezelschap zijn, zodat de kans dat hiervan minstens één iemand een muziekinstrument bespeelt groter is dan 95%?

In een bedrijf met 100 medewerkers bespelen er negen een muziekinstrument.

e Bereken de kans dat twee willekeurig gekozen medewerkers beiden een muziekinstrument bespelen.

A80

Een meubelbedrijf werkt met vier leveranciers voor zijn teakhout. De eerste leverancier heeft het teakhout 85% van de tijd op voorraad, de tweede leverancier 80% van de tijd, de derde leverancier 65% van de tijd en de vierde leverancier 55% van de tijd.
Bereken de kans dat op een willekeurig moment minstens één van de leveranciers het teakhout op voorraad heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

A81 *

Een wiskundeleraar kiest in een klas van 24 leerlingen iedere les door loting drie leerlingen die een opgave van het huiswerk op het bord voor moeten doen. De leerlingen Bart, Sterre, Isa en Daphne maken zelden hun huiswerk en hopen dat ze niet worden aangewezen. Tijdens een hoofdstuk kansrekening zijn er tien lessen.
Bereken de kans dat bij minstens één van de tien lessen minstens één van de genoemde leerlingen een opgave op het bord voor moet doen.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan kansen berekenen bij een kleine steekproef uit een grote populatie.

☐ Ik kan een geschikte aanpak kiezen bij een kansprobleem.

▶ OPGAVE C13
THEORIE A
▶ THEORIE B

C13 Van de Nederlanders heeft 12% contactlenzen.

a Bereken de kans dat van een groep van 14 Nederlanders er twee contactlenzen hebben.

b Bereken de kans dat van een groep van 20 Nederlanders minder dan 10% contactlenzen heeft.

c Bereken de kans dat van een groep van 15 Nederlanders er minstens 14 geen contactlenzen hebben.

In een groep van 30 studenten hebben er 4 contactlenzen.

d Bereken de kans dat van vijf studenten die een werkgroep vormen er minstens één contactlenzen heeft.

Antwoorden

C13 **a** 0,283
b 0,289
c 0,448
d 0,538

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedentest

6.1 Kansen

1 Fien gooit met een gewone dobbelsteen en met een achtvlaksdobbelsteen.
Bereken exact de kans dat
a de som 8 is
b de som minder dan 4 is
c het verschil 2 is
d de aantallen gelijk zijn.

2 Anne Geeke gooit met vier viervlaksdobbelstenen.
Bereken exact de kans dat
a het product 16 is
b de som meer dan 13 is.

6.2 Empirische kansen

3 In de bovenbouw van het Noorder College is van elke leerling de lengte gemeten. De resultaten staan in de tabel.
Bereken de kans dat op deze school een willekeurig gekozen bovenbouwleerling
a in de middelste lengteklasse zit
b die 180 cm of langer is in de vierde klas zit
c uit de vierde of vijfde klas 160 cm of langer is
d 160 cm of langer is en in de vijfde of zesde klas zit.

LEERLINGEN BOVENBOUW NOORDER COLLEGE

lengte in cm	klas 4	klas 5	klas 6	
[140, 160⟩	15	5	3	23
[160, 180⟩	59	49	51	159
[180, 200⟩	6	12	15	33
	80	66	69	215

De gebeurtenissen ‘leerling zit in klas 5’ en ‘leerling behoort tot lengteklasse [180, 200⟩’ zijn afhankelijke gebeurtenissen.
e Toon dit aan.

6.3 Regels voor kansrekening

4 Mirthe doet mee aan een selectieprocedure. Ze moet voor vier tests slagen. Bij de eerste test is de kans dat ze slaagt 0,25, bij de tweede is dat 0,60, bij de derde 0,40 en bij de laatste 0,80.
Bereken de kans dat ze voor alle vier de tests slaagt.

5 Just laat de schijf in de figuur hiernaast twee keer draaien.
Bereken de kans op twee keer dezelfde kleur.

6 Jietske laat de schijf in de figuur hiernaast zeven keer draaien.
Bereken de kans dat de pijl
a vijf keer rood en twee keer wit aanwijst
b minstens zes keer niet op blauw komt
c hoogstens twee keer op wit komt.

© Noordhoff Uitgevers bv

7 Tijdens het productieproces ondergaat een stoel drie bewerkingen. De kans dat er iets mis gaat bij de eerste bewerking is 0,05, bij de tweede bewerking is dat 0,09 en bij de derde 0,03.
Bereken de kans dat er bij minstens één bewerking iets misgaat.

6.4 Het vaasmodel

8 In een vaas zitten vijf rode, zeven witte en negen blauwe knikkers.
Marion pakt zes knikkers uit de vaas.
Bereken de kans dat zij

a van elke kleur twee knikkers pakt
b geen blauwe knikkers pakt
c twee of drie rode knikkers pakt
d alleen maar blauwe knikkers pakt.

9 Bij een loterij zijn 120 loten verkocht. De loten kosten 5 euro per stuk.
Er is een hoofdprijs van 100 euro en er zijn vier tweede prijzen van 25 euro. Nicolien heeft zes loten gekocht.
Bereken de kans dat zij

a één prijs wint
b 100 euro wint
c geen verlies lijdt bij deze loterij
d minstens één prijs wint.

10 De sectie wiskunde van een school bestaat uit negen mannen en zeven vrouwen.

a Voor een cursus worden willekeurig vijf sectieleden gekozen.
Bereken de kans dat er drie vrouwen worden gekozen.
b Elk jaar wordt door loting de sectievoorzitter aangewezen.
Bereken de kans dat in vijf opeenvolgende jaren drie keer een vrouwelijke sectievoorzitter uit de bus komt.

6.5 Allerlei kansproblemen

11 Van de woningen in Rotterdam is 34% een koopwoning en 44% een huurwoning van een corporatie. Er worden willekeurig negen woningen aangewezen.
Bereken de kans dat

a drie daarvan huurwoningen van een corporatie zijn
b de woningen allemaal koopwoningen of huurwoningen van een corporatie zijn
c vier daarvan koopwoningen en drie huurwoningen van een corporatie zijn.

In een straat met 65 woningen staan 30 koopwoningen en 20 huurwoningen van een corporatie. In deze straat worden willekeurig negen woningen aangewezen.
Bereken de kans dat

d drie daarvan huurwoningen van een corporatie zijn
e de woningen allemaal koopwoningen of huurwoningen van een corporatie zijn
f vier daarvan koopwoningen en drie huurwoningen van een corporatie zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

Gemengde opgaven

1 Jan gooit met twee dobbelstenen.
Bereken exact de kans op de gebeurtenis
a de som van de ogen is minder dan 6
b het verschil van de ogen is 2.

Oscar gooit tien keer met twee dobbelstenen.
Bereken de kans dat
c hij drie keer een verschil van 2 ogen zal gooien
d hij minstens acht keer een som van minder dan 6 ogen zal gooien.

Frank gooit met een viervlaksdobbelsteen, een gewone dobbelsteen en een achtvlaksdobbelsteen.
Bereken exact de kans dat
e de som 5 is
f hij met elke dobbelsteen hetzelfde gooit.

2 Een vaas bevat vijf rode en vier witte knikkers. Sarah doet drie keer achter elkaar het volgende. Ze pakt één knikker uit de vaas en doet deze knikker samen met nog twee knikkers van dezelfde kleur als de gepakte knikker terug in de vaas.
a Maak een kansboom bij deze situatie.
b Bereken de kans dat Sarah alleen rode knikkers gepakt heeft.
c Bereken de kans dat Sarah meer rode dan witte knikkers gepakt heeft.

3 In een gokautomaat draaien vier schijven onafhankelijk van elkaar. Als de schijven tot stilstand zijn gebracht, dan geeft iedere schijf een plaatje van een fruitsoort weer. In de tabel zie je wat er op elke schijf staat. Emma laat de schijven draaien.
Bereken de kans op
a drie appels en één kers
b vier gelijke plaatjes
c één banaan
d geen kiwi.

	aantal keer op schijf			
plaatje	schijf 1	schijf 2	schijf 3	schijf 4
appel	5	2	2	5
peer	3	4	4	3
banaan	1	5	5	1
kers	3	2	0	0
kiwi	3	2	4	6
	15	15	15	15

4 Bij een loterij zijn 65 loten verkocht. Er zijn tien prijzen beschikbaar: één eerste prijs van 20 euro, drie tweede prijzen van 10 euro en zes derde prijzen van 5 euro. Daan heeft vijf loten gekocht.
Bereken de kans dat
a hij geen prijs wint
b hij minstens 10 euro wint
c hij één tweede en één derde prijs wint
d op twee loten van Daan een prijs valt.

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Op het LaPlace College is in de vierde klassen onderzoek gedaan naar de inkomsten van de leerlingen. Zie de tabel.
Uit deze groep worden willekeurig twaalf vierdeklassers gekozen, die ondervraagd zullen worden over hun bestedingen.
Bereken de kans dat

a hierbij vijf meisjes zitten die minder dan 150 euro per maand aan inkomsten hebben
b hierbij tweemaal zoveel meisjes als jongens zijn
c hierbij vijf meisjes zijn die 150 euro of meer aan inkomsten hebben en niemand minder dan 120 euro aan inkomsten heeft
d minstens drie van hen minstens 150 euro per maand aan inkomsten hebben
e de helft van de gekozen leerlingen een jongen is en minstens vier van de gekozen meisjes 120 euro of meer, maar minder dan 180 euro aan inkomsten hebben.

INKOMSTEN PER MAAND

euro	jongen	meisje	
[0, 120⟩	8	15	23
[120, 150⟩	26	21	47
[150, 180⟩	16	27	43
[180, 300⟩	2	5	7
	52	68	120

De gebeurtenissen ‘leerling is meisje’ en ‘leerling verdient tussen 150 en 180 euro per maand’ zijn afhankelijke gebeurtenissen.

f Toon dit aan.

6 Volgens tellingen van Veilig Verkeer Nederland houdt 68% van de automobilisten in de bebouwde kom van het plaatsje Geldermalsen zich aan de maximumsnelheid van 50 km per uur. Van de automobilisten die te hard rijden, rijdt een kwart meer dan 70 km per uur.
Tussen 10:00 uur en 10:05 uur passeerden tien automobilisten de controlepost in Geldermalsen.
Bereken de kans dat

a alle automobilisten zich aan de maximumsnelheid hielden
b zeven automobilisten zich aan de maximumsnelheid hielden en één automobilist meer dan 70 km per uur reed
c minstens twee automobilisten te hard reden.

7 Tijdens een klassenuitje gaan de 24 leerlingen van klas 4Va met elkaar kanoën. In elke kano passen maximaal zes leerlingen. Er zijn vijf kano’s gehuurd die genummerd zijn van 1 t/m 5. De leerlingen verdelen zich willekeurig over de kano’s.
Bereken de kans dat

a in kano 3 twee plaatsen leeg blijven
b kano 1 en 2 geheel vol zullen zitten.

© Noordhoff Uitgevers bv

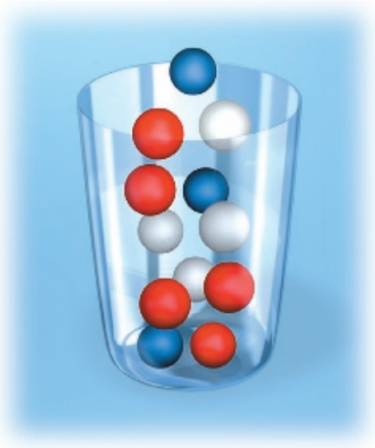
8 Een klas maakt een proefwerk bestaande uit 18 vierkeuzevragen.

a Bereken de kans dat Martijn, die elk antwoord moet raden, twee of drie antwoorden goed heeft.

b Alfred weet op vijf vragen met zekerheid het juiste antwoord. De andere vragen moet hij gokken.
Bereken de kans dat hij in totaal minder dan acht vragen goed beantwoordt.

c Patricia weet op 13 vragen het juiste antwoord. Bij de andere vragen moet ze het antwoord raden.
Bereken de kans dat ze in totaal minstens 16 vragen goed heeft.

9 In een vaas zitten vijf rode, vier witte en drie blauwe knikkers.



a Ferdinand pakt met terugleggen zes keer een knikker uit de vaas.
Bereken de kans dat hij drie keer een rode en drie keer een blauwe knikker pakt.

b Martine pakt in één greep drie knikkers uit de vaas en legt ze vervolgens weer terug. Ze doet dit in totaal zes keer.
Bereken de kans dat ze daarbij twee keer geen enkele rode knikker pakt.

c Rob pakt zonder terugleggen vier knikkers uit de vaas.
Bereken de kans dat er evenveel witte als blauwe knikkers in de vaas achterblijven.

10 J&J's zijn chocoladesnoepjes met een suikerlaagje. Ze bestaan in zes verschillende kleuren. Volgens de fabrikant is de kleurverhouding in elke productiebatch 30% bruin, 20% geel, 20% rood, 10% oranje, 10% groen en 10% blauw.
Voordat de J&J's in de zakjes gaan, worden de kleuren gemixt in een grote mixtrommel.
Jasper is in het bezit van een uitdeelzak met 14 kleine zakjes J&J's. In elk van de zakjes zitten 20 J&J's.

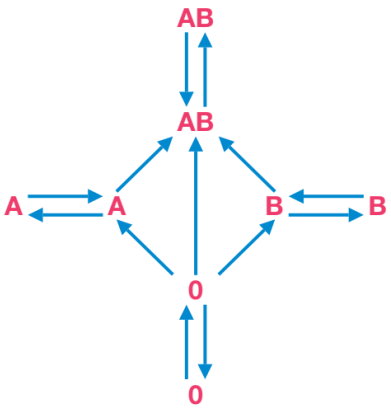
a Bereken de kans dat 20% van de J&J's in de uitdeelzak rood is.

b Hoeveel bruine J&J's verwacht je dat er in de uitdeelzak van Jasper zitten? Bereken de kans op dit aantal.

c Hoeveel van de kleine zakjes bevatten naar verwachting minstens drie blauwe J&J's?

© Noordhoff Uitgevers bv

11 Menselijk bloed behoort altijd tot een van de vier bloedgroepen 0, A, B of AB.
De bloedgroep speelt een belangrijke rol als iemand bloed nodig heeft bij bijvoorbeeld ernstig bloedverlies door een operatie of een ongeluk. Degene die bloed nodig heeft, krijgt tijdens een bloedtransfusie bloed van iemand anders toegediend. Vooraf wordt gelet op de bloedgroep van de donor (gever) en van de ontvanger. In de figuur hiernaast zie je tussen welke bloedgroepen een bloedtransfusie mogelijk is. De richting van de pijlen loopt van donor naar ontvanger. Je kunt zien dat iemand met bloedgroep 0 bloed kan geven aan iemand met bloedgroep A maar omgekeerd niet. Het is altijd mogelijk om bloed te krijgen van iemand met dezelfde bloedgroep.



Welke bloedgroep iemand heeft, is door erfelijkheid bepaald.
In deze opgave gaan we ervan uit dat alle personen geen familie van elkaar zijn en dat hun bloedgroep door het toeval is bepaald.

a Is het bij twee mensen mogelijk dat geen van beiden bloed kan geven aan de ander? Licht je antwoord toe.

Niet elke bloedgroep komt even vaak voor. We gaan uit van de verdeling in de tabel. De kans dat een willekeurige persoon bloedgroep 0 heeft, is dus 0,46.

bloedgroep	0	A	B	AB
percentage	46%	43%	8%	3%

b Bereken de kans dat twee willekeurige personen dezelfde bloedgroep hebben.

In sommige delen van de wereld is het ontvangen van bloed bij een bloedtransfusie zeer riskant, onder andere vanwege de grote kans op besmetting met het hiv-virus. Als je met een groepsreis naar zo'n riskant deel van de wereld gaat en er gebeurt iets waardoor je een bloedtransfusie nodig hebt, dan zou je vanwege dit risico kunnen besluiten om bloed te ontvangen van een van je reisgenoten.
Uit de figuur blijkt dat iemand met bloedgroep 0 aan iedereen bloed kan geven. Het is dus prettig als er in de groep tenminste één persoon is die bloedgroep 0 heeft.

c Bereken de kans dat er in een groep van twaalf personen minstens één persoon bloedgroep 0 heeft.

Tot nu toe zijn we voorbijgegaan aan het feit dat bij een bloedtransfusie ook rekening gehouden moet worden met de resusfactor.
Er is resuspositief bloed en resusnegatief bloed.
Neem aan dat de resusfactor bij mensen door toeval bepaald wordt en dat voor elk van de vier bloedgroepen geldt dat 85% resuspositief is en 15% resusnegatief. Er bestaan dus acht verschillende *bloedtypen*, namelijk 0+ (bloedgroep 0 en resuspositief), 0– (bloedgroep 0 en resusnegatief), A+ (bloedgroep A en resuspositief), enzovoort.

d Bereken de kans dat twee willekeurige personen hetzelfde bloedtype hebben.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

7 Statistiek met de computer

In dit hoofdstuk werk je met een spreadsheetprogramma, zoals bijvoorbeeld Microsoft Excel of Google Spreadsheets. De modules en de bestanden die in dit hoofdstuk genoemd worden, vind je in de digitale leeromgeving.

Open het bestand *SportersRio2016*. Dit bestand bevat informatie van meer dan 11 000 sporters die meededen aan de Olympische Zomerspelen in Rio de Janeiro 2016. De informatie is in een bepaalde volgorde gesorteerd op land, geboortedatum en geslacht.

Welke sport beoefent de oudste sporter uit China? Wat is het gewicht van de enige Nederlandse taekwondo-deelneemster? En hoe heet de langste vrouw van het damesbasketbalteam uit Senegal?

© Noordhoff Uitgevers bv

7.1 Werken met een spreadsheet

Kennis en vaardigheden

- Je kunt data invoeren in een spreadsheet, bijvoorbeeld met de vulgreep.
- Je kunt formules invoeren met behulp van relatieve en absolute verwijzingen.
- Je kunt lijn-, cirkel- en staafdiagrammen maken en opmaken.
- Je kunt data selecteren en sorteren.
- Je kunt boxplots maken.

Theorie A Data invoeren

Een **spreadsheet** of **(digitaal) rekenblad** bestaat uit cellen in rijen en kolommen. Elke cel kan een getal, een tekst of een formule bevatten. Formules maken het mogelijk om bijvoorbeeld bij een kolom het gemiddelde te berekenen en dit weer te geven in een cel. Een spreadsheet is dynamisch. Dat wil zeggen dat de uitkomsten van formules direct opnieuw worden berekend als je de waarde in een cel verandert.

[▸ICT] Neem de module **Data invoeren** door.

1

De tabel gaat over aantallen verkochte woningen in de gemeente Utrecht.
Open een nieuw rekenblad en voer de tabel in. Gebruik zo mogelijk de vulgreep.

	A	B	C	D	E
1	jaar	1e kwartaal	2e kwartaal	3e kwartaal	4e kwartaal
2	2013	544	484	710	882
3	2015	878	1016	1383	1474
4	2017	1243	1239	1472	1404
5	2019	1104	1086	1281	1291
6	2021	1595	1002	1125	1101
7	2023	956	1022	1119	1172

Theorie B Formules en verwijzingen

[▸ICT] Neem de module **Formules en verwijzingen** door.

Het berekenen van kwartielen met een spreadsheetprogramma kan iets andere antwoorden opleveren dan met de methode die je in de onderbouw hebt geleerd. Voor grote aantallen gegevens, zoals in dit hoofdstuk, zijn eventuele verschillen erg klein.

© Noordhoff Uitgevers bv

2

In het bestand *ProefwerkScores* zie je voor elke leerling van een klas hoeveel punten hij of zij gehaald heeft voor elk van de vragen van een proefwerk. In rij 2 zie je de maximale score per vraag.

a Bereken in cel Y2 hoeveel punten er maximaal gescoord konden worden bij dit proefwerk. Welke functie heb je gebruikt?

b Bereken in cel Y3 hoeveel punten Joris gescoord heeft bij dit proefwerk. Gebruik de vulgreep in kolom Y om de scores van de andere leerlingen te berekenen. Welke leerling heeft de meeste punten gehaald en welke leerling de minste?

Belangrijke functies
SOM
AANTAL
GEMIDDELDE
MEDIAAN
MIN
MAX
STDEV.P
KWARTIEL.INC
AFRONDEN

Het cijfer voor dit proefwerk wordt berekend met de formule

$$\text{cijfer} = \frac{\text{score}}{\text{max score}} \times 9 + 1.$$

c Bereken in cel Z3 het cijfer dat Joris voor dit proefwerk heeft gehaald. Gebruik in je formule een absolute verwijzing naar cel Y2 en een relatieve verwijzing naar cel Y3.

d Gebruik de functie AFRONDEN in de formule van Z3 om het cijfer af te ronden op één decimaal. Gebruik de vulgreep om de cijfers van de andere leerlingen te berekenen.

Gebruik F4 voor het wisselen tussen absolute en relatieve verwijzingen.

De docent is geïnteresseerd in de statistieken van de proefwerkresultaten.

e Bereken voor elke vraag het gemiddelde, de standaardafwijking, de laagste score, Q_1, de mediaan, Q_3 en de hoogste score. Doe dit ook voor de totaalscores en de cijfers.

f Gebruik formules om de volgende vragen te beantwoorden.
- Bij welke vragen is de interkwartielafstand van de scores 2,5?
- Bij welke vragen is het gemiddelde gelijk aan de mediaan?

A3

In het bestand *CijfersKlas* zie je een overzicht van toetscijfers van een klas. Het eindcijfer wordt bepaald door een gewogen gemiddelde te nemen van de cijfers. In rij 1 zie je hoe vaak elke toets meetelt voor het eindcijfer.

a Bereken voor elke leerling het eindcijfer in één decimaal. Denk aan het gebruik van relatieve en absolute verwijzingen.

b Bereken in cel J25 het gemiddelde eindcijfer van de klas in twee decimalen.

c Als de laatste toets niet 5, maar 6 keer meetelt, dan is het gemiddelde eindcijfer van de klas hoger.
Hoeveel scheelt het met het gemiddelde van vraag b?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie C Diagrammen

Onderzoeksgegevens worden meestal verzameld in tabellen. Tabellen geven echter niet altijd een goed overzicht van de gegevens. Daarom worden bij tabellen vaak diagrammen gemaakt. Een diagram vat de gegevens op een grafische manier samen. Bekende diagrammen zijn lijn-, staaf-, stapel- en cirkeldiagrammen. Een diagram moet snel inzicht geven in de gegevens. Zorg bij het maken van diagrammen dus voor

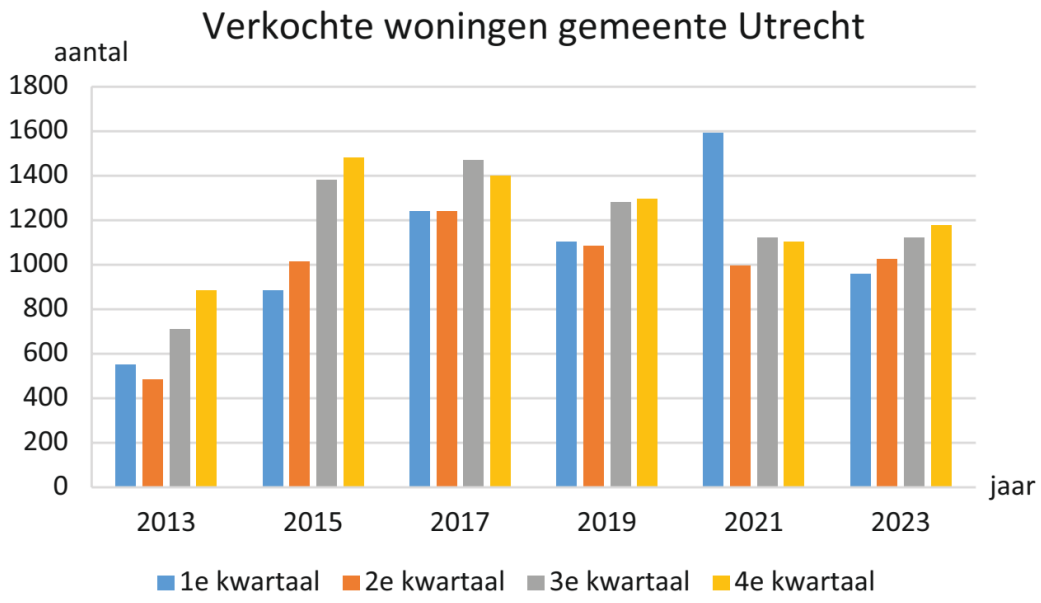
- een passende titel
- duidelijke informatie bij de assen en/of een legenda
- een geschikte schaalverdeling met eventueel roosterlijnen
- logisch kleurgebruik.

[▶ICT] Neem de module **Diagrammen** door.

Bij het namaken van diagrammen in de volgende opgaven is het belangrijk dat de opzet gelijk is. Je gebruikt dus hetzelfde soort diagram, dezelfde variabelen, labels en schaalverdelingen. Details als lettertype, kleuren, posities en afstanden mogen verschillen, zolang het diagram maar duidelijk is. Raadpleeg bij twijfel je docent.

4

Open het bestand *WoningVerkoopUtrecht* en maak bij de gegevens een samengesteld staafdiagram, zoals in de figuur.



© Noordhoff Uitgevers bv

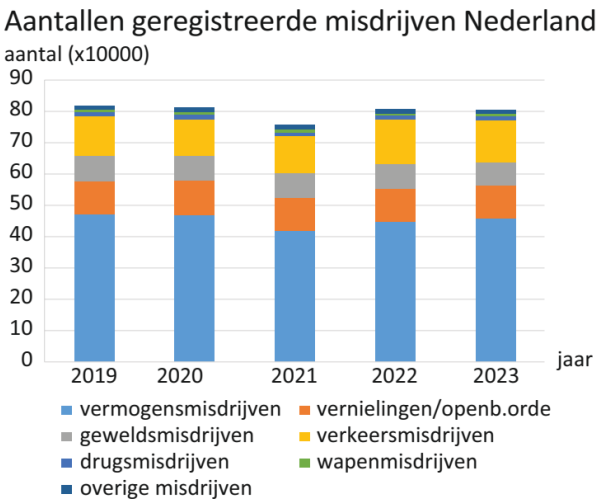
5

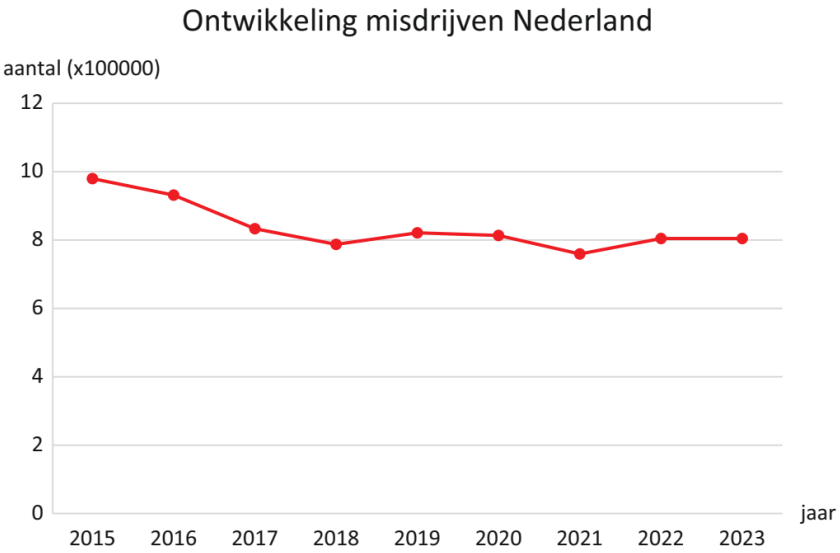
In het bestand *Criminaliteit* staan cijfers over geregistreerde criminaliteit in Nederland in de jaren 2015 tot en met 2023.

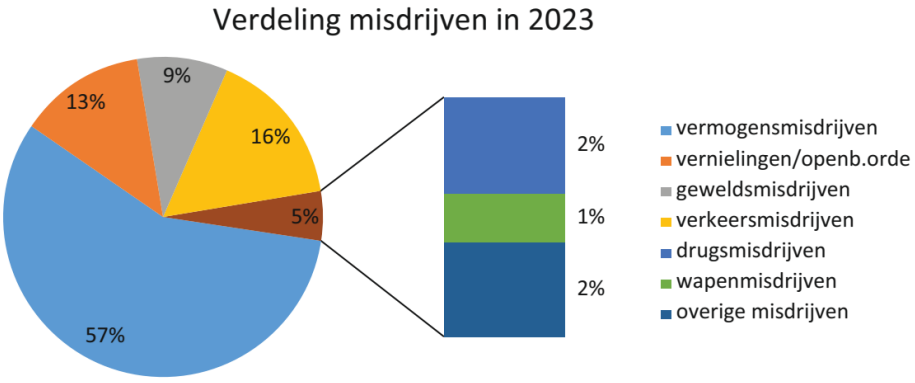
a Maak voor de jaren 2019 tot en met 2023 het stapeldiagram van de eerste figuur.

b Het lijndiagram in de tweede figuur geeft de ontwikkeling weer van het totaal aantal misdrijven in de periode 2015-2023.
Maak dit diagram.

c Het diagram in de derde figuur geeft weer hoe de in 2023 gepleegde misdrijven zijn verdeeld over de verschillende categorieën.
Maak dit diagram.







© Noordhoff Uitgevers bv

Voorkennis Centrummaten

Om aan te geven waar het centrum van gegevens zich bevindt, kun je gebruikmaken van een centrummaat.

Centrummaten

gemiddelde	$\text{gemiddelde} = \dfrac{\text{som van de waarnemingsgetallen}}{\text{aantal waarnemingsgetallen}}$
mediaan	Als de waarnemingsgetallen in volgorde van grootte staan, dan is • bij een oneven aantal getallen de mediaan het middelste getal • bij een even aantal getallen de mediaan het gemiddelde van de middelste twee getallen.
modus	De modus is het waarnemingsgetal met de grootste frequentie. Zijn er twee of meer waarnemingsgetallen met de grootste frequentie, dan bestaat de modus niet.

Zijn er bij een statistisch onderzoek veel verschillende waarnemingsgetallen, dan maak je meestal een indeling in klassen. Bij de klasse [20, 25⟩ doet de linkergrens 20 mee, maar de rechtergrens 25 niet. Het klassenmidden is 22,5. Om bij een klassenindeling het gemiddelde te schatten, maak je gebruik van de klassenmiddens. Je kunt bij een klassenindeling de mediaan niet meer berekenen, maar je kunt vaak wel berekenen in welke klasse de mediaan ligt. In plaats van de modus spreken we bij een klassenindeling van de modale klasse.

V1 Van een groep museumbezoekers is de leeftijd genoteerd. De resultaten staan in de tabel.

AANTAL MUSEUMBEZOEKERS

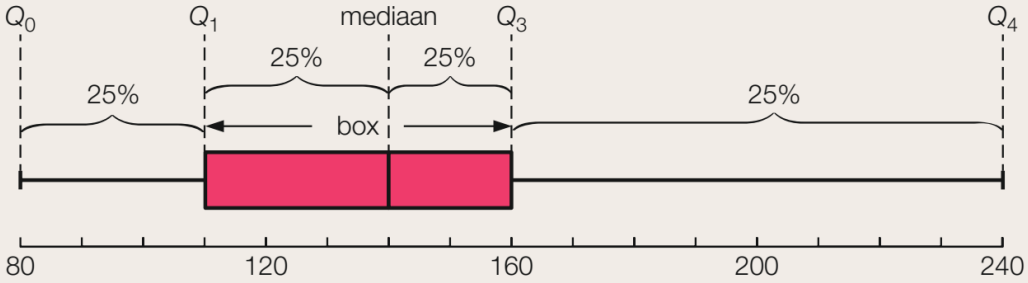
leeftijd	frequentie
[0, 15⟩	12
[15, 30⟩	10
[30, 45⟩	13
[45, 60⟩	24
[60, 75⟩	21
[75, 90⟩	2

a Bereken met klassenmiddens een schatting van de gemiddelde leeftijd. Rond af op één decimaal.
b In welke klasse ligt de mediaan?
c Geef de modale klasse.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorkennis Boxplots en spreidingsmaten

Een boxplot is een diagram dat de spreiding van gegevens in beeld brengt.
Alleen bij een kwantitatieve variabele kun je een boxplot maken.
De mediaan verdeelt een serie waarnemingsgetallen in twee helften. Van elk van deze helften kun je vervolgens weer de mediaan bepalen.
De mediaan van de eerste helft heet het eerste kwartiel. Notatie: Q_1.
De mediaan van de tweede helft heet het derde kwartiel. Notatie: Q_3.

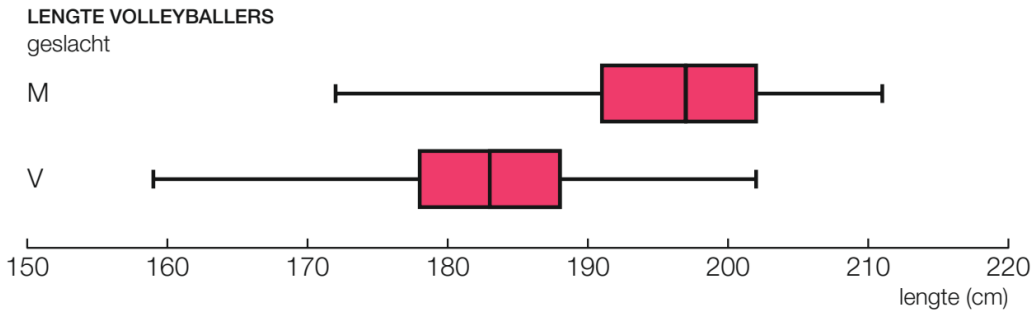


De box van een boxplot is het middelste gedeelte tussen het eerste en derde kwartiel.
Verder ken je de volgende spreidingsmaten:

- spreidingsbreedte = grootste getal (Q_4) – kleinste getal (Q_0)
- interkwartielafstand = $Q_3 - Q_1$
- standaardafwijking σ.

De standaardafwijking geeft een beeld van hoe ver metingen gemiddeld afwijken van het gemiddelde.

V2 Op de Olympische Spelen 2016 in Rio de Janeiro namen aan het volleybaltoernooi zowel bij de mannen als de vrouwen 192 sporters deel. Voor beide geslachten is de lengte verwerkt in boxplots. Zie de figuur.



a Hoeveel vrouwen zijn kleiner dan 1,83 meter?
b Frits beweert dat de langste vrouw langer is dan de meeste mannen. Licht zijn uitspraak toe.
c Is de spreidingbreedte van de lengte groter bij de mannen of de vrouwen? Licht toe.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie D Boxplots en uitbijters

Je hebt geleerd dat een boxplot de spreiding van data in beeld brengt. Boxplots die met de computer gemaakt zijn, worden meestal verticaal weergegeven.
Soms worden niet alle gegevens in de boxplot opgenomen. Waarden die ver van de box van de boxplot liggen, worden **uitschieters** of **uitbijters** genoemd. Deze worden als losse punten buiten de boxplot getekend.

Een veelgebruikte vuistregel is:

> Een uitbijter is een waarnemingsgetal dat meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand onder het eerste of boven het derde kwartiel ligt.

[▶ICT] Neem de module **Boxplots** door.

6

Bij een voetbalclub is bijgehouden hoe vaak iedere speler de bal kan hooghouden. De trainer heeft berekend dat $Q_1 = 10$, $Q_3 = 24$ en mediaan = 20.

a Clara kan de bal 56 keer hooghouden.
Bereken of deze waarde volgens de vuistregel een uitbijter is.

b Sommige jonge voetballers kunnen de bal maar één keer hooghouden.
Waarom zijn deze waarden volgens de vuistregel geen uitbijters?

7

In het bestand *MiddelbareScholen* staan gegevens over het aantal leerlingen en het aantal middelbare scholen per gemeente in Nederland.

a Op welke variabele is het bestand gesorteerd?

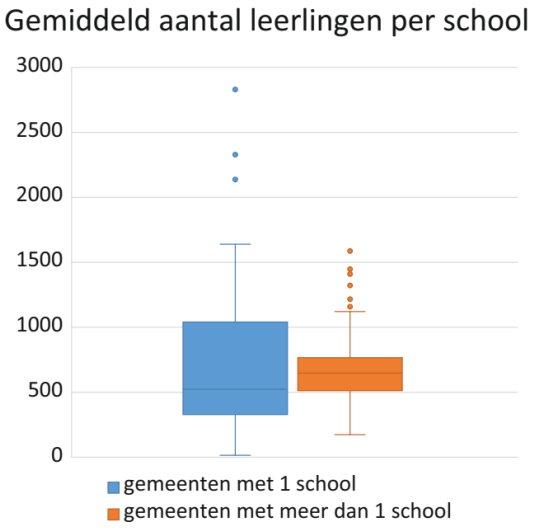
b Sorteer het bestand op het aantal leerlingen, van hoog naar laag.

c Maak de boxplot bij het aantal leerlingen van de 20 gemeenten met het grootste aantal leerlingen. Welke gemeenten horen bij de uitbijterpunten?

d Bereken in kolom D voor elke gemeente het gemiddeld aantal leerlingen per school.

e De boxplots in de figuur geven informatie over het gemiddeld aantal leerlingen per school in gemeenten met één school en gemeenten met meer dan één school.
Maak dit diagram.

f Noem een opvallend verschil tussen de twee boxplots.



© Noordhoff Uitgevers bv

Informatief **Twee boxplots vergelijken**

Voor het bepalen van de grootte van het verschil bij kwantitatieve variabelen kun je twee boxplots vergelijken.
Het gedeelte tussen het eerste en het derde kwartiel heet de box.
Hanteer de volgende vuistregels.

- Als de boxen elkaar niet overlappen, dan zeggen we *het verschil is groot*.
- Als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot ligt buiten de box van de andere boxplot, dan zeggen we *het verschil is middelmatig*.
- In alle andere gevallen zeggen we *het verschil is gering*.

8

Het bestand *SportersRio2016* bevat de gegevens van 11 538 sporters die deelnamen aan de Olympische Spelen 2016 in Rio de Janeiro.

a Van hoeveel sporters staat de lengte niet in de dataset?

b Maak in één figuur voor zowel mannen als vrouwen een boxplot bij de variabele Lengte.

c Mannen vanaf een bepaalde lengte worden als uitbijterpunten weergegeven in de boxplot.
Welke lengte is dat? Om hoeveel mannen gaat het hier?

d Er is één opvallende uitbijter bij de lengte van de vrouwen.
Zou deze lengte kunnen kloppen?

Pas op met uitbijters. Dit kunnen fouten in de dataset zijn.

e Zie het informatief hierboven.
Bepaal door het vergelijken van twee boxplots hoe groot het verschil in lengte tussen de mannelijke en de vrouwelijke sporters is.

f Bepaal door het vergelijken van twee boxplots hoe groot het verschil in gewicht tussen de mannelijke en de vrouwelijke sporters is.

A9

Het bestand *VerwijzingenHalt* bevat gegevens over het aantal verwijzingen per gemeente naar de organisatie Het Alternatief (HALT). Het doel van deze organisatie is om jeugdcriminaliteit te voorkomen en bestraffen. Een verwijzing naar HALT wordt meestal door de politie of een leerplichtambtenaar gedaan.
Suzanne wil onderzoeken hoe groot het verschil in het aantal verwijzingen naar HALT is tussen grote en kleine gemeenten. Ze berekent eerst voor elke gemeente de verwijzingsgraad. Dat is het aantal verwijzingen naar HALT per 10 000 inwoners. Daarna vergelijkt ze de boxplot met de verwijzingsgraad van de 50 grootste gemeenten met die van de 50 kleinste gemeenten.
Voer het onderzoek van Suzanne uit. Welke conclusie trekt ze? Gebruik het informatief hierboven.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan data invoeren in een spreadsheet, bijvoorbeeld met de vulgreep.
- ☐ Ik kan formules invoeren met behulp van relatieve en absolute verwijzingen.
- ☐ Ik kan lijn-, cirkel- en staafdiagrammen maken en opmaken.
- ☐ Ik kan data selecteren en sorteren.
- ☐ Ik kan boxplots maken.

- OPGAVE C1a THEORIE A
- OPGAVE C1b THEORIE B
- OPGAVE C2 THEORIE C
- OPGAVE C3 THEORIE D
- OPGAVE C3 THEORIE D

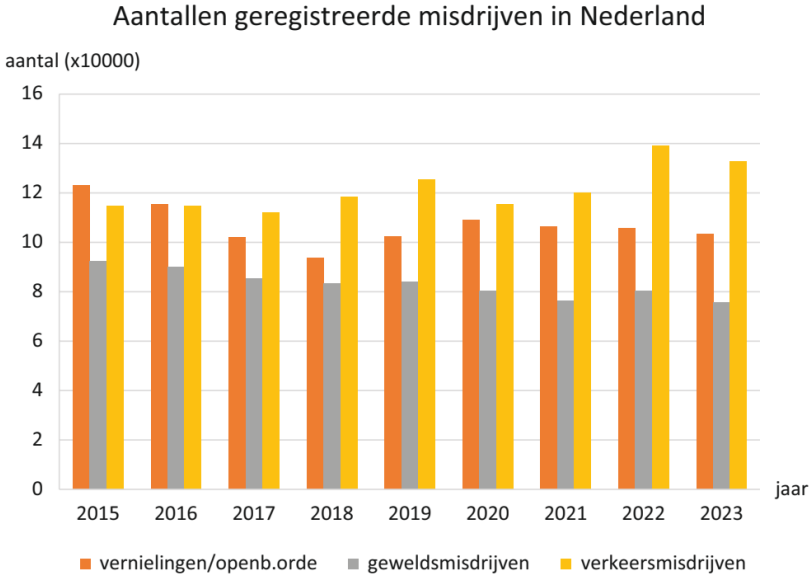
C1 Juf Roosmarijn maakt voor haar leerlingen in groep 4 een spiekbriefje van de vermenigvuldigingstafels. In de figuur zie je hiervan een gedeelte, tot en met het getal 4. In de eerste rij en eerste kolom staan de (vetgedrukte) getallen die worden vermenigvuldigd, in de overige cellen de uitkomsten.

	A	B	C	D	E
1		**1**	**2**	**3**	**4**
2	**1**	1	2	3	4
3	**2**	2	4	6	8
4	**3**	3	6	9	12
5	**4**	4	8	12	16

a Neem kolom A en rij 1 over en vul beide aan tot en met het getal 10 met behulp van de vulgreep.

b Maak in cel B2 een formule met absolute en relatieve verwijzingen en gebruik deze om de overige cellen te vullen.

C2 Maak met behulp van de gegevens in het bestand *Criminaliteit* de volgende figuur.



C3 Maak met behulp van de gegevens in het bestand *SportersRio2016* in één figuur voor zowel de mannen als de vrouwen een boxplot bij de variabele Leeftijd.

Antwoorden

C1 **a** ∗ **b** ∗ C2 ∗ C3 ∗

© Noordhoff Uitgevers bv

7.2 Werken met datasets

Kennis en vaardigheden

- Je kunt in een tabel sorteren en filteren.
- Je kunt de totaalrij van een tabel gebruiken.
- Je kunt een variabele toevoegen aan een tabel, bijvoorbeeld door andere variabelen te combineren.
- Je kunt de weergave van een getal in een cel aanpassen.

10 Gebruik het bestand *SportersRio2016*.
Bereken het gemiddelde gewicht van de Japanse voetballers.

Theorie A Zoeken in een dataset

Om zonder problemen gebruik te kunnen maken van een aantal geavanceerde mogelijkheden van spreadsheetprogramma's, is het belangrijk dat je werkt met een zogenaamde **nette dataset**. Bij een nette dataset zijn de kolommen voorzien van kolomkoppen en zijn de cellen die grenzen aan de dataset leeg. Bovendien staan gegevens die bij elkaar horen steeds in één rij. De informatie in zo'n rij heet een **record**.
Een nette dataset geeft je onder andere de mogelijkheid gegevens te **sorteren** en te **filteren**. Je kunt dan bijvoorbeeld snel het gemiddelde van een deelgroep berekenen.

[▶ICT] Neem de module **Zoeken in een dataset** door.

Zet bij de volgende opgaven indien nodig de dataset om in een Tabel en zorg bij gebruik van Excel dat de totaalrij aanstaat.

Afspraak
Geef bij de beantwoording van de vragen steeds aan
- in welke kolommen je welke filters gebruikt
- in welke kolommen je op welke manier sorteert
- welke functies je gebruikt.

11 De volgende vragen gaan over het weer in De Bilt. Gebruik het bestand *WeerHistorie*, dat een nette dataset bevat met weergegevens gemeten door het weerstation in De Bilt.

a Hoeveel variabelen bevat de dataset?
b Van hoeveel dagen bevat de dataset gegevens?
c Op welke datum was de gemiddelde temperatuur het hoogst?
d Op hoeveel dagen was het gemiddeld 0 °C of kouder?
e Wat is het totaal aantal uren zonneschijn dat is gemeten in de jaren 2021, 2022 en 2023 samen?

© Noordhoff Uitgevers bv

12 Open het bestand *SportersRio2016*.

a Welke sport beoefent de oudste sporter? En de jongste?

b Hoeveel procent van de sporters was 16 jaar of jonger?

c Wat was de gemiddelde leeftijd van de Nederlandse sporters? Rond af op gehelen.

d De sporters die meedoen aan de triatlon hebben een lager gemiddeld gewicht dan de roeiers.
Hoeveel kg scheelt het? Rond af op gehelen.

e Volgens een journalist zijn de vrouwelijke Nederlandse sporters gemiddeld 4 cm langer dan de vrouwelijke sporters uit andere landen. Klopt dit? En hoe zit dat bij de mannelijke sporters?

f Hoeveel procent van de gouden medailles werd gewonnen door sporters uit de Verenigde Staten?

A13 In het bestand *StudentenEnquete* zijn gegevens verzameld van 271 studenten.

a De gemiddelde lengte van de studenten in groep D is groter dan die van de studenten in groep A.
Hoeveel cm scheelt het? Rond af op gehelen.

b Hoeveel procent van de studenten heeft een linkshandige ouder?

Het gemiddeld aantal uren slaap per etmaal van de studenten zie je in de kolom UrenSlaap. Studenten die gemiddeld minder dan 8 uur slapen, hebben een korte slaapduur. Een slaapduur van minstens acht uur noemen we lang.

c Vul de kruistabel in.

d Welk percentage van de vrouwelijke studenten heeft een korte slaapduur? Is dit groter of kleiner dan het percentage bij de mannelijke studenten?

	slaapduur		
	kort	lang	totaal
man			
vrouw			
totaal			

Zie het informatief op de volgende bladzijde.

e Onderzoek met behulp van 95%-betrouwbaarheidsintervallen of het verschil in gemiddeld aantal uren slaap tussen mannelijke en vrouwelijke studenten significant is.

f Luc ziet dat studenten die uit een plattelandsdorp komen vaker uitwonend zijn dan studenten die uit een grote stad komen.
Onderzoek met behulp van 95%-betrouwbaarheidsintervallen of het verschil in woonsituatie significant is.

© Noordhoff Uitgevers bv

Informatief **Betrouwbaarheidsintervallen**

Om twee groepen met elkaar te kunnen vergelijken, kun je gebruikmaken van betrouwbaarheidsintervallen.

- Voor een populatiegemiddelde is het 95%-betrouwbaarheidsinterval gelijk aan $\left[\overline{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$. Hierin is $\overline{X}$ het steekproefgemiddelde, S de steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.
- Voor een populatieproportie is het 95%-betrouwbaarheidsinterval gelijk aan $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$. Hierin is $\hat{p}$ de steekproefproportie en σ de standaardafwijking. Voor de standaardafwijking geldt de formule $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$. Hierin is n de steekproefomvang.

We noemen het verschil tussen twee groepen significant als de 95%-betrouwbaarheidsintervallen elkaar niet overlappen.

O14

Bij een enquête onder de gasten van hotel De Negensprong is gevraagd naar de mate van tevredenheid over het ontbijtbuffet. Men kon daarbij kiezen uit de volgende antwoorden:
slecht matig voldoende ruim voldoende goed

In het bestand *Ontbijtbuffet* zijn de antwoorden op deze vraag in een tabel verzameld.
Bij nader inzien wil de hoteleigenaar alleen onderscheid maken tussen positieve, neutrale en negatieve beoordelingen.
Daarom wil hij de antwoorden ‘ruim voldoende’ en ‘goed’ vervangen door ‘Positief’ en de antwoorden ‘matig’ en ‘slecht’ door ‘Negatief’. De beoordeling ‘voldoende’ beschouwt hij als een neutraal antwoord en wil hij dus ‘Neutraal’ noemen. De hoteleigenaar bedenkt de volgende aanpak.

1 Maak een nieuwe kolom aan door in cel D1 Beoordeling te typen.
2 Filter de kolom Ontbijtbuffet op ‘ruim voldoende’ en ‘goed’, zet in de eerste cel van de nieuwe kolom ‘Positief’ en gebruik de vulgreep om de kolom te vullen.
3 Filter de kolom Ontbijtbuffet op ‘matig’ en ‘slecht’, zet in de eerste cel van de nieuwe kolom ‘Negatief’ en gebruik de vulgreep om de kolom te vullen.
4 Vul op dezelfde wijze de juiste cellen van de nieuwe kolom met ‘Neutraal’.

Onderzoek of deze aanpak werkt.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie B Hercoderen en formules

In opgave 14 heb je een nieuwe variabele gemaakt, die gebaseerd is op een bestaande variabele. Dit wordt het **hercoderen** van een variabele genoemd.

Je kunt ook een nieuwe variabele toevoegen die waarden van verschillende bestaande variabelen combineert. In opgave 13 heb je gebruikgemaakt van een getalfilter om onderzoek te doen naar de kortslapers. Wil je onderzoek doen onder de uitwonende, vrouwelijke kortslapers dan moet je nóg twee filters juist instellen. Het is dan handig te beschikken over een nieuwe variabele die aangeeft of een student al dan niet een uitwonende, vrouwelijke kortslaper is. Je hebt daarna slechts één filter nodig om deze groep te bekijken. In de volgende module wordt uitgelegd hoe je dit doet.

[▶ ICT] Neem de module **Hercoderen** door.

15

Gebruik het bestand *SportersRio2016*.
Voeg een variabele AtletiekVrouwBenelux toe, die met de waarden Ja/Nee aangeeft of een sporter een vrouw uit de Benelux is die aan atletiek doet. Denk aan de afspraak op bladzijde 111.

Geef het in je uitwerking aan als je een nieuwe variabele toevoegt.

16

Gebruik het bestand *SportersRio2016*.

a Voeg een variabele Medailles toe, die aangeeft hoeveel medailles een sporter in totaal won.

b Hoeveel sporters wonnen meer dan één medaille?
Hoeveel van hen wonnen ten minste één gouden medaille?

c Welke sporter won de meeste medailles?

17

Bij koud weer voelt het op een dag met veel wind kouder aan dan op een dag met weinig wind. Om de gevoelstemperatuur te berekenen kan deze formule worden gebruikt:
$G = 1{,}41 - 1{,}162W + 0{,}98T + 0{,}0124W^2 + 0{,}0185WT$
Hierin is T de temperatuur in °C en W de windsnelheid in m/s.
Open het bestand *WeerHistorie*.
Onderzoek met behulp van de gemiddelde temperatuur en de gemiddelde windsnelheid welke dag het koudst aanvoelde.

© Noordhoff Uitgevers bv

A18

Ga uit van de gegevens in het bestand *SportersRio2016*.
Gebruik in deze opgave alleen de gegevens van sporters waarvan zowel het gewicht als de lengte in de dataset staat.

a Ga na dat dit voor 10 858 sporters het geval is.

Er bestaan diverse formules om de energiebehoefte E per dag van volwassenen te schatten. Een voorbeeld daarvan zijn de formules van Roza & Shizgal, waarmee je het zogeheten basaal metabolisme in kcal berekent.

- voor mannen: $E = 88{,}362 + 13{,}397G + 4{,}799H - 5{,}677L$
- voor vrouwen: $E = 447{,}593 + 9{,}247G + 3{,}098H - 4{,}33L$

In deze formules is G het gewicht in kg, H de lengte in cm en L de leeftijd in jaren. In deze opgave houden we geen rekening met inspanning of andere factoren, die leiden tot een grotere energiebehoefte.

b Voeg in het bestand *SportersRio2016* een variabele EnergieBehoefte toe en bereken deze voor alle sporters waarvan zowel het gewicht als de lengte in de dataset staat. Gebruik daarbij de leeftijd in gehele jaren en maak onderscheid tussen mannen en vrouwen. Rond af op een geheel getal.

A19

Sinds een aantal jaren gebruikt het KNMI voor het berekenen van de gevoelstemperatuur niet meer de formule van opgave 17. Tegenwoordig gebruikt men de formule
$G = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37(3{,}6W)^{0{,}16} + 0{,}3965T(3{,}6W)^{0{,}16}$.
Hierin is T de temperatuur in °C en W de windsnelheid in m/s. Deze formule geldt voor $W > 1{,}3$. Als de windsnelheid 1,3 m/s of lager is, dan gaan we ervan uit dat de gevoelstemperatuur gelijk is aan de luchttemperatuur.
Gebruik het bestand *WeerHistorie*.
Onderzoek op welke dag volgens deze formule het verschil tussen de gemiddelde temperatuur en de gevoelstemperatuur het grootst was.
Gebruik voor T de gemiddelde temperatuur en voor W de gemiddelde windsnelheid.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan in een tabel sorteren en filteren. ▶ OPGAVE C4 THEORIE A
- ☐ Ik kan de totaalrij van een tabel gebruiken. ▶ OPGAVE C4 THEORIE A
- ☐ Ik kan een variabele toevoegen aan een tabel, bijvoorbeeld door andere variabelen te combineren. ▶ OPGAVE C5 THEORIE B
- ☐ Ik kan de weergave van een getal in een cel aanpassen. ▶ OPGAVE C4 EN C5 THEORIE B

C4 Gebruik het bestand *WeerHistorie*.

a Een dag wordt tropisch genoemd als de maximumtemperatuur 30 °C of hoger is.
Wat was de gemiddelde temperatuur van alle tropische dagen? Rond af op twee decimalen.

b Het jaar 1965 was één van de natste jaren sinds de neerslag wordt gemeten.
Hoeveel mm neerslag viel er in dat jaar in totaal? Op welke dag regende het dat jaar het langst?

C5 Voor de dosering van bepaalde medicijnen is het belangrijk om een schatting te kunnen maken v lichaam. Hiervoor bestaan diverse formules. Eén daarvan is de formule van Dubois. Deze formule luidt:
oppervlakte = $0{,}007184 \cdot \text{lengte}^{0{,}725} \cdot \text{gewicht}^{0{,}425}$.
Hierin is de oppervlakte in m^2, de lengte in cm en het gewicht in kg.
Voeg in het bestand *SportersRio2016* een variabele Oppervlakte toe, die voor alle sporters met de formule van Dubois een schatting geeft van de lichaamsoppervlakte. Rond af op één decimaal.

Antwoorden

C4 **a** 24,06 °C **b** 1151,9 mm 18 december

C5 *

© Noordhoff Uitgevers bv

7.3 Draaitabellen en draaigrafieken

Kennis en vaardigheden

- Je kunt frequentie- en kruistabellen maken met behulp van een draaitabel.
- Je kunt een klassenindeling maken door groeperen in een draaitabel.
- Je kunt bij een draaitabel een draaigrafiek maken en aanpassen.
- Je kunt datums groeperen en filteren.
- Je kunt een diagram met een secundaire as maken.

20

In het bestand *Maaltijdbezorging* vind je gegevens van een enquête die is gehouden onder inwoners van Australië van 18 tot en met 33 jaar.

a Hoeveel mannen deden mee aan het onderzoek? En hoeveel vrouwen?

b Geef van elk van de steden (Adelaide, Brisbane, Melbourne, Perth en Sydney) aan hoeveel personen meededen aan het onderzoek.

c Vul de kruistabel in.

		geslacht		
		M	V	
stad	Adelaide			
	Brisbane			
	Melbourne			
	Perth			
	Sydney			
				386

Theorie A Draaitabellen maken

In opgave 20 heb je door herhaald gebruik van filters een kruistabel gemaakt. Voor deze kruistabel heb je minstens negen keer een filter moeten instellen.
Wil je bijvoorbeeld een kruistabel maken waarin per leeftijd is af te lezen hoeveel mannen en vrouwen meededen aan het onderzoek, dan is dat met filters instellen veel werk. In een spreadsheet kun je met behulp van **draaitabellen** snel dergelijke kruistabellen maken.
Een draaitabel is een tabel die data uit een nette dataset op een dynamische manier kan samenvatten, rangschikken en groeperen.
Een draaitabel kan onder andere kruistabellen maken met aantallen, gemiddelden, standaardafwijkingen en minima.

[▶ ICT] Neem de module **Draaitabellen** door.

DEELNEMERS ONDERZOEK

	M	V	
18 jaar	1	0	1
19 jaar	3	1	4
20 jaar	6	3	9
21 jaar	17	6	23
22 jaar	30	26	56
23 jaar	32	41	73
⋮			
32 jaar	10	6	16
33 jaar	1	0	1
	221	165	386

© Noordhoff Uitgevers bv

21

Open het bestand *SportersRio2016*.

a Maak een kruistabel met aantallen
- met als rij-variabele Geslacht en als kolomvariabele Leeftijd
- met als rij-variabele Leeftijd en als kolomvariabele Geslacht.

Wat is de modale leeftijd bij de vrouwelijke sporters?

b Maak kruistabellen waarmee de volgende vragen te beantwoorden zijn.
- Bij welke sporten staan evenveel mannen als vrouwen in de dataset?
- Welke sport beoefende de oudste sporter met een gouden medaille?

Door variabelen in rijen of kolommen te verwisselen (draaien) kun je de brongegevens op andere manieren samenvatten.

22

In het bestand *Speerwerpen* is van alle speerwerpers de beste afstand genoteerd die ze hebben geworpen bij de kwalificatieronde tijdens de Olympische Spelen 2016.
Maak een kruistabel waarin de kleinste, de gemiddelde en de grootste geworpen afstanden zijn af te lezen, uitgesplitst naar geslacht en vervolgens naar groep. Rond af op twee decimalen.

A23

Gebruik het bestand *Wiskunde*, waarin gegevens zijn verzameld van leerlingen op twee middelbare scholen in Portugal die een wiskundevak volgen.
In de laatste kolom vind je het resultaat op het eindrapport, uitgedrukt in een cijfer van 0 tot 20.
Rana wil onderzoeken of leerlingen die in de stad wonen, gemiddeld een hoger resultaat hebben op het eindrapport dan leerlingen die op het platteland wonen.

a Maak voor Rana de kruistabel die het gemiddelde resultaat op het eindrapport voor de genoemde woonomgevingen weergeeft. Welke conclusie trekt Rana?

Sofanias beweert dat uit de dataset blijkt dat voor de leerlingen geldt dat
- hoe ouder ze zijn, hoe lager hun resultaat op het eindrapport is
- meisjes gemiddeld een hoger resultaat op hun eindrapport hebben dan jongens.

b Onderzoek of Sofanias gelijk heeft. Licht je antwoord toe met behulp van één draaitabel met het gemiddelde resultaat op het eindrapport.

© Noordhoff Uitgevers bv

24 Het bestand *LeerlingGegevens* bevat informatie over leerlingen van het Playfair College.

a Maak met behulp van een draaitabel een frequentietabel van alle voorkomende lichaamslengtes. Waarom geeft deze frequentietabel geen goed beeld van de verdeling?

b Voeg aan de dataset de nieuwe variabele LengteKlasse toe, die aangeeft tot welk van de lengteklassen 150-159, 160-169, ... de leerling behoort.

c Maak met behulp van een draaitabel een frequentietabel bij de variabele LengteKlasse.

Theorie B Groeperen en draaigrafieken

In opgave 24 heb je door middel van hercoderen een klassenindeling gemaakt. In een spreadsheet is het mogelijk om op een dynamische manier een klassenindeling te maken. Het maken van een klassenindeling komt neer op het **groeperen** van de waarden van een variabele.
Het is ook mogelijk een diagram bij een draaitabel te maken dat met de draaitabel meeverandert. Zo'n dynamisch diagram heet een **draaigrafiek**.

[▶ICT] Neem de module **Groeperen en draaigrafieken** door.

Afspraak
Maak in deze paragraaf de genoemde diagrammen met behulp van draaitabellen/draaigrafieken. Maak elke grafiek netjes op. Zorg dus voor voldoende informatie bij de assen, een passende titel en zo nodig een legenda.

25 Ga uit van het bestand *StudentenEnquete*.

a Maak een cirkeldiagram bij de variabele Groep. Zorg ervoor dat in het diagram de aantallen studenten per groep te zien zijn.

b Maak een staafdiagram bij de variabele Lengte. Neem een klassenindeling tussen 155 en 195, met stapgrootte 5. Je krijgt dan een tabel zoals hiernaast.

c Maak een staafdiagram bij de variabele UrenSlaap. Neem een klassenindeling tussen 5 en 10, met stapgrootte 1.

d Maak een cirkeldiagram bij de variabele AantalBroersEnZussen. Meer dan vijf broers en zussen komt niet vaak voor. Groepeer daarom de aantallen broers en zussen boven vijf in een groep met de naam 'meer dan 5'.

	aantal
< 155	5
155-159	11
160-164	27
165-169	32
170-174	46
175-179	41
180-184	47
185-189	42
190-194	13
>195	7
totaal	271

© Noordhoff Uitgevers bv

26

Gebruik het bestand *Speerwerpen*.

a Maak met een draaitabel een frequentietabel van de geworpen afstanden. Neem een klassenindeling tussen 55 en 90, met stapgrootte 5.

b Maak bij de tabel van vraag a een staafdiagram.

c Met welke standaardverdeling heb je hier te maken?

d Pas de draaitabel en de draaigrafiek aan, zodat mannen en vrouwen apart worden weergegeven. Hoe is het antwoord op vraag c te verklaren?

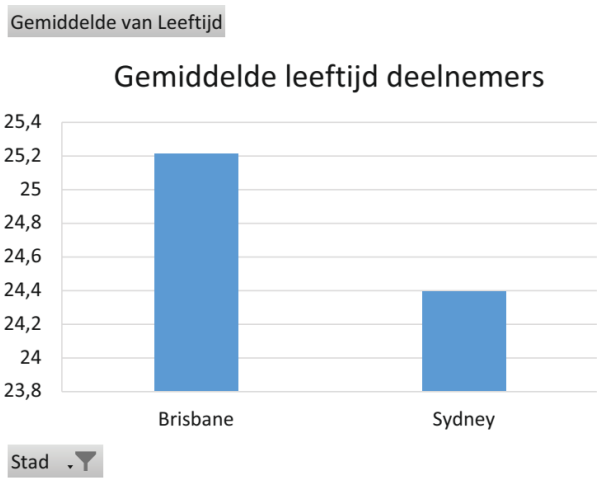
Bij zowel de mannen als de vrouwen waren de atleten opgedeeld in de groepen A en B.

e Pas het staafdiagram van vraag d aan, zodat zowel bij de mannen als bij de vrouwen de resultaten van de A- en de B-groep snel vergeleken kunnen worden.

A27

Open het bestand *Maaltijdbezorging*.

a Maak het staafdiagram in de figuur, waarin voor twee steden te zien is wat de gemiddelde leeftijd van de deelnemers is.



b Maak een stapeldiagram waarin per opleidingsniveau af te lezen is hoeveel mannen en vrouwen aan het onderzoek hebben meegedaan.

c Met een cirkeldiagram kan worden weergegeven in hoeverre alleenstaande mannen een korte bezorgtijd belangrijk vinden.
Maak dit cirkeldiagram en zorg ervoor dat de percentages zichtbaar zijn in het diagram.

d Maak een staafdiagram waarin voor vrouwen uit Brisbane per opleidingsniveau is te zien wat de gemiddelde grootte is van het huishouden.

A28

Ga uit van het bestand *Wiskunde*.

Ezra maakt vier groepen. De groepen bestaan uit personen die

- zowel hulp thuis krijgen als bijles hebben
- alleen bijles hebben
- alleen hulp thuis krijgen
- geen hulp thuis en geen bijles hebben.

a Voeg een variabele Hulp toe, die voor elke leerling aangeeft tot welke van de vier groepen deze behoort.

b Maak een cirkeldiagram dat laat zien hoe de aantallen van de groepen zich verhouden. Zorg ervoor dat de aantallen zichtbaar zijn in het diagram.

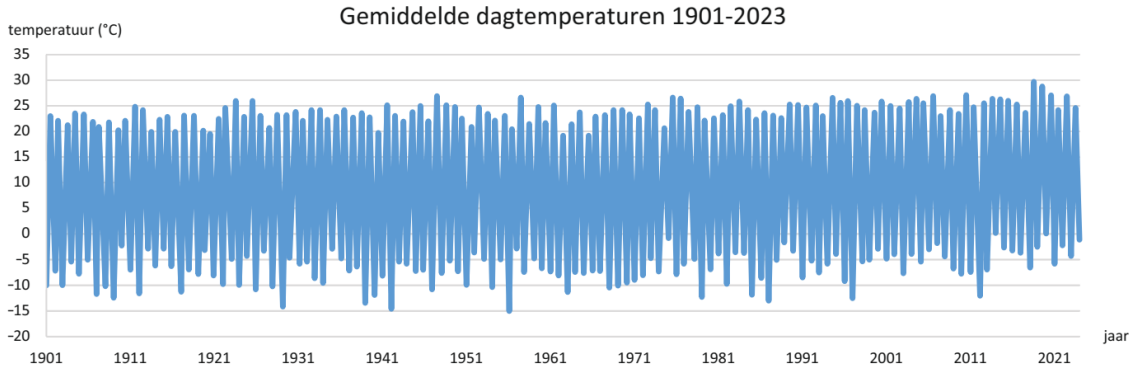
Suze wil onderzoeken of leerlingen die weinig lessen missen, gemiddeld een hoger resultaat op het eindrapport halen. Daartoe maakt ze een staafdiagram met op de horizontale as het aantal uren absentie, ingedeeld in klassen met stapgrootte 10.

c Voer het onderzoek van Suze uit. Wat is haar conclusie?

© Noordhoff Uitgevers bv

O29

Het bestand *TemperatuurHistorie* bevat een dataset met alle door het weerstation in De Bilt gemeten temperaturen in de periode van 1901 tot en met 2023.
Nathalie heeft een artikel gelezen over de opwarming van de aarde. Ook in Nederland zou een stijgende trend te zien zijn in de gemiddelde dagtemperaturen. Ze heeft deze stijgende trend in beeld proberen te brengen door alle temperaturen in de dataset te selecteren en er een lijndiagram bij te maken. Ze krijgt de volgende figuur.



a Vind je dat de stijgende trend goed in beeld wordt gebracht? Licht toe.

b Van hoeveel dagen is de temperatuur in het bestand opgenomen? Zijn al deze dagen in het lijndiagram goed te onderscheiden?

Sven maakt eerst een draaitabel waarin de gemiddelde temperaturen per jaar zijn weergegeven. Hierbij maakt hij een lijndiagram. Hij tekent de verticale as van 7 °C tot 12 °C.

c Maak het lijndiagram van Sven. Is de stijgende trend goed zichtbaar? Licht toe.

Theorie C Groeperen van datums

Het lijndiagram van Nathalie in opgave 29 geeft geen goed beeld van de stijgende trend in temperaturen. Dit komt doordat het lijndiagram uit veel te veel gegevenspunten bestaat. In het diagram is het patroon van de jaargetijden nog enigszins te herkennen, maar dit verbergt grotendeels de trend. Het is beter een lijndiagram te maken met als gegevenspunten bijvoorbeeld de gemiddelde jaartemperaturen, of de gemiddelde maandtemperaturen van de maand mei door de jaren heen. In de volgende module leer je hoe je dit soort diagrammen maakt.

[▶ICT] Neem de module **Groeperen van datums** door.

© Noordhoff Uitgevers bv

30

In het bestand *WoningVerkoop* zie je informatie over woningverkopen in Nederland in de periode 2000 tot en met 2023. De variabele AantalVerkochteWoningen geeft aan hoeveel bestaande woningen (dus exclusief nieuwbouw) er in totaal in de betreffende maand zijn verkocht.

a Groepeer de variabele Periode op jaren én kwartalen en maak voor de periode 2013-2020 een lijndiagram van de verkochte aantallen woningen. Welk patroon is in het diagram te herkennen?

b Maak een draaigrafiek voor de jaren 2000-2023 met daarin:
- een staafdiagram waarmee op de primaire as is te zien hoeveel woningen er dat jaar verkocht zijn;
- een lijndiagram waarmee op de secundaire as is te zien wat de gemiddelde verkoopprijs van een woning was.

A31

Regelmatig verschijnen er in de krant en op internet artikelen over weerrecords. Het artikel hieronder gaat over het weer in De Bilt in juni 2023. Op enkele plaatsen ontbreken getallen.
Met het begrip 'normaal' wordt telkens het gemiddelde in de maanden juni van de jaren 1991-2020 bedoeld.

Artikel **Juni 2023: recordwarm, recordzonnig en zeer droog**

Met een gemiddelde temperatuur van ..... °C tegen normaal ..... °C was het de warmste junimaand sinds 1901. Op de tweede plek staat ..... met ..... °C.

Met gemiddeld over het land 24 mm neerslag tegen normaal 66 mm was de maand zeer droog. In De Bilt viel ..... mm tegen ..... mm normaal. Het landelijk gemiddelde neerslagtekort was eind juni opgelopen tot ongeveer 170 mm. Een tekort van deze grootte komt normaal in minder dan 5% van de jaren voor.
Met gemiddeld over het land 328 uren zon tegen 214 uur normaal was de maand extreem zonnig. In De Bilt scheen de zon ..... uur, tegen ..... uur normaal.

Ga uit van het bestand *WeerDeBilt*. Op het tabblad Historie zijn de gegevens vanaf 1951 tot en met 2023 verzameld. Op het tabblad Tijdvak 1991-2020 zijn de gegevens van de jaren 1991-2020 nog eens apart opgenomen. Op het tabblad Juni 2023 zijn de gegevens van juni 2023 apart opgenomen.

a Onderzoek welke getallen in het artikel op de puntjes moeten staan. Rond indien nodig af op één decimaal.

b Vul de juiste gegevens in op het tabblad Temperaturen juni.
Maak bij de gegevens een lijndiagram waarin de normale temperatuur in juni en de temperatuur in juni 2023 te zien zijn.

c Maak een grafiek waarin voor juni 2023 per dag op de primaire as met een lijndiagram de gemiddelde temperatuur wordt weergegeven, en op de secundaire as met een staafdiagram het aantal uren zon.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan frequentie- en kruistabellen maken met behulp van een draaitabel.
- ☐ Ik kan een klassenindeling maken door groeperen in een draaitabel.
- ☐ Ik kan bij een draaitabel een draaigrafiek maken en aanpassen.
- ☐ Ik kan datums groeperen en filteren.
- ☐ Ik kan een diagram met een secundaire as maken.

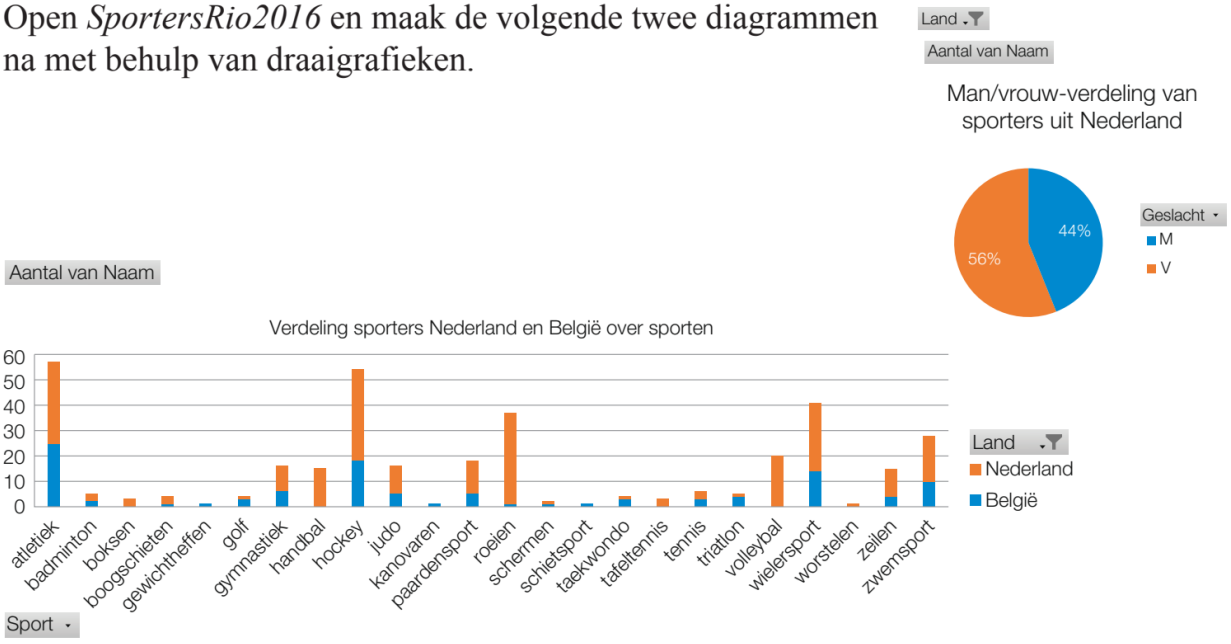
- ▶ OPGAVE C6 THEORIE A
- ▶ OPGAVE C6b THEORIE B
- ▶ OPGAVE C7 THEORIE B
- ▶ OPGAVE C8 THEORIE C
- ▶ OPGAVE C8 THEORIE C

C6 Gebruik in deze opgave het bestand *SportersRio2016* en maak gebruik van draaitabellen.

a Maak een kruistabel waarin af te lezen is hoeveel medailles er door de VS zijn gewonnen, zowel uitgesplitst naar goud, zilver en brons (in kolommen), als naar mannen en vrouwen (in rijen).

b Maak een draaitabel waarin af te lezen is hoe lichaamslengtes (in rijen) voor de sporters uit Nederland verdeeld zijn over leeftijdsgroepen (in kolommen). Zorg ervoor dat in elk geval de lengteklasse 1,4-1,6 en de leeftijdsklasse 10-19 voorkomen.

C7 Open *SportersRio2016* en maak de volgende twee diagrammen na met behulp van draaigrafieken.



C8 Gebruik het bestand *WeerDeBilt*.
Maak een draaigrafiek waarin op de primaire as met een lijndiagram zowel de gemiddelde minimumtemperatuur als de gemiddelde maximumtemperatuur per jaar wordt weergegeven, en op de secundaire as met een staafdiagram de totale neerslag per jaar. Zorg voor een titel boven het diagram en labels bij de assen.

Antwoorden

C6 **a** ∗
b ∗

C7 ∗

C8 ∗

© Noordhoff Uitgevers bv

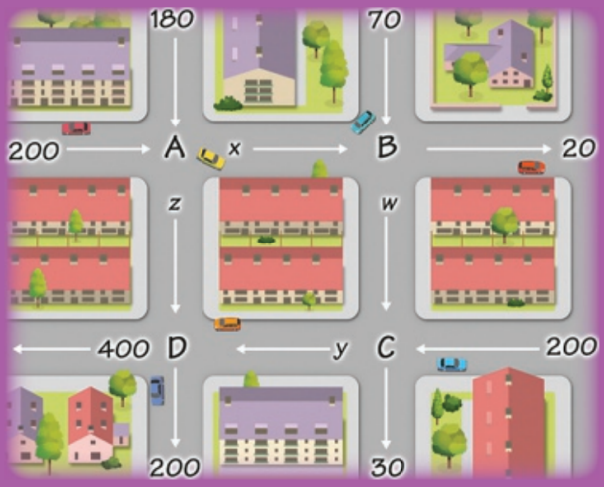
© Noordhoff Uitgevers bv

K

Keuzeonderwerp Lineair programmeren

In de figuur hieronder is weergegeven hoeveel auto's in een uur tijd een stad binnenrijden en verlaten. De verkeersstromen die zijn aangegeven met x, y, z en w zijn ook in aantallen auto's per uur. Aan de pijlen zie je dat er uitsluitend eenrichtingsverkeer is. Bovendien geldt een stopverbod.

- Neem x = 150.
  Hoe groot zijn dan y, z en w?
- Hoeveel auto's per uur telt de verkeersstroom y minimaal?



© Noordhoff Uitgevers bv

K.1 Stelsels van lineaire vergelijkingen

Kennis en vaardigheden

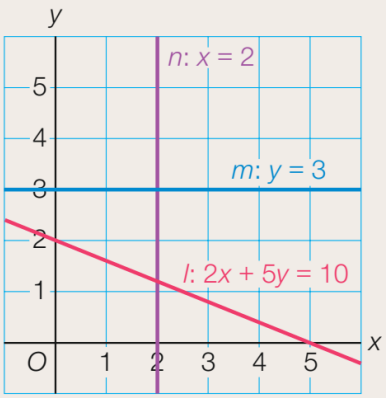
- Je kunt een stelsel lineaire vergelijkingen oplossen.
- Je kunt bij een praktische situatie een stelsel lineaire vergelijkingen opstellen en oplossen.

Voorkennis De vergelijking ax + by = c

De vergelijking $2x + 5y = 10$ is een *lineaire vergelijking met twee variabelen*. De bijbehorende grafiek is de lijn die

- de x-as snijdt in $(5, 0)$ $\quad y = 0$ geeft $2x = 10$, dus $x = 5$
- de y-as snijdt in $(0, 2)$. $\quad x = 0$ geeft $5y = 10$, dus $y = 2$

De lijn m: $y = 3$ is de *horizontale lijn* door het punt $(0, 3)$.
De lijn n: $x = 2$ is de *verticale lijn* door het punt $(2, 0)$.
In de figuur hiernaast zijn de lijnen l: $2x + 5y = 10$, m: $y = 3$ en n: $x = 2$ getekend.



Alle lijnen met een vergelijking van de vorm $2x + 5y = c$ zijn evenwijdig. Om dat te begrijpen maak je y vrij. Je krijgt $5y = -2x + c$, oftewel $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}c$. Dus van elk van deze lijnen is de richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{5}$.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de lijn p die door het punt $(8, 15)$ gaat en evenwijdig is met de lijn q: $3x - 5y = 10$.

Uitwerking

$$\left.\begin{array}{l} p\text{: } 3x - 5y = c \\ \text{door } (8, 15) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 8 - 5 \cdot 15 = -51$$

Dus p: $3x - 5y = -51$.

V1 Teken in één figuur de lijnen p: $3x - y = 6$, q: $x + y = 3$, r: $x + 2y = 0$, s: $y = -3$ en t: $x = 4$.

V2 Bereken van de volgende lijnen zo mogelijk de coördinaten van de snijpunten met de x-as en de y-as.

l: $5x - 3y = 75$ $\quad$ n: $y = 320$ $\quad$ q: $3x - 10y = 7500$
m: $18x + y = 450$ $\quad$ p: $x = 185$ $\quad$ r: $0{,}2x + 0{,}3y = 600$

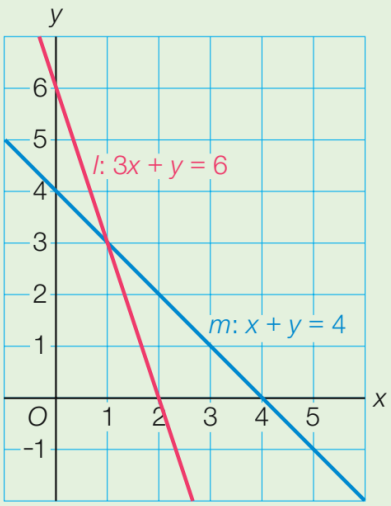
© Noordhoff Uitgevers bv

V3 Stel een vergelijking op van de lijn p die door het punt (51, 70) gaat en evenwijdig is met de lijn m: $5x - 12y = 600$.

O1 Gegeven zijn de lijnen l: $x + 3y = 9$ en m: $x + y = 5$.
a Teken deze lijnen in één figuur.
b Schrijf de coördinaten van het snijpunt van deze lijnen op.

Theorie A Elimineren

In de figuur hiernaast zie je de lijnen l: $3x + y = 6$ en m: $x + y = 4$. Het punt (1, 3) is het snijpunt van deze lijnen. We zeggen dat $x = 1$ en $y = 3$ de oplossing is van het **stelsel** $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$



Je leert hoe je met **elimineren** de oplossing van een **stelsel lineaire vergelijkingen** kunt berekenen.
Elimineren betekent wegwerken.
Bij het stelsel $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$ trek je de vergelijkingen van elkaar af, want dan wordt y geëlimineerd.

$$\begin{array}{rl} 3x + y = 6 & \\ x + y = 4 & - \\ \hline 2x \quad\quad = 2, & \text{dus } x = 1. \end{array}$$

← Noteer het minteken.

Vervolgens bereken je y door $x = 1$ in één van de gegeven vergelijkingen in te vullen.
Invullen in de eerste vergelijking van het stelsel geeft $3 \cdot 1 + y = 6$, dus $y = 6 - 3 = 3$.
De oplossing van het stelsel is dus $x = 1$ en $y = 3$.

Vergelijkingen mag je optellen en aftrekken.
Als $\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases}$ dan is ook
$A + C = B + D$ en
$A - C = B - D$.

Bij het stelsel $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ -2x - 5y = 11 \end{cases}$ elimineer je x door de vergelijkingen op te tellen.

Je krijgt

$$\begin{array}{rl} 2x + 3y = -7 & \\ -2x - 5y = 11 & + \\ \hline -2y = 4, & \text{dus } y = -2. \end{array}$$

← Geef aan dat je optelt.

Invullen van $y = -2$ in $2x + 3y = -7$ geeft $2x - 6 = -7$ oftewel $2x = -1$, dus $x = -\frac{1}{2}$.
De oplossing is $x = -\frac{1}{2}$ en $y = -2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ook bij de volgende stelsels kun je door het optellen of aftrekken van de vergelijkingen de oplossing vinden. Telkens ontstaat na optellen of aftrekken een vergelijking met alleen nog maar x of alleen nog maar y.

$$\begin{cases} 5x + 6y = 4 \\ 2x - 6y = 3 \end{cases} +$$
$$7x \quad = 7$$
dus $x = 1$, enzovoort

$$\begin{cases} 3x - \ y = 5 \\ 3x + 2y = -7 \end{cases} -$$
$$-3y = 12$$
dus $y = -4$, enzovoort

2

Los op.

a $\begin{cases} 5x - 4y = -8 \\ -x + 4y = -12 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$

3

Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 4x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$

a Licht toe dat je niet een variabele kunt elimineren door de vergelijkingen bij elkaar op te tellen of van elkaar af trekken.

b Als je eerst beide leden van de vergelijking $2x + 3y = 16$ met hetzelfde getal vermenigvuldigt, dan kun je daarna wel de variabele x elimineren. Welk getal is dat?

Theorie B Stelsels oplossen

In opgave 3 valt zowel bij het optellen als bij het aftrekken geen van de variabelen weg. Maar als je de tweede vergelijking met 2 vermenigvuldigt, dan staat in beide vergelijkingen $4x$. En dan valt bij aftrekken de variabele x wel weg. Soms moet je beide vergelijkingen met een getal vermenigvuldigen, zoals hieronder.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 8y = 14 \\ 6x + 9y = 48 \end{cases} -$$
$$-17y = -34$$
$$y = 2, \text{ enzovoort}$$

Tussen de strepen staat waarmee vermenigvuldigd is.

Je kunt bij dit stelsel ook y elimineren. Daartoe vermenigvuldig je de eerste vergelijking met 3 en de tweede met 4. In dat geval krijg je

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 9x - 12y = 21 \\ 8x + 12y = 64 \end{cases} +$$
$$17x \quad = 85$$
$$x = 5, \text{ enzovoort}$$

Ga bij het oplossen van een stelsel eerst na welke variabele je het beste kunt elimineren. Doe het zo, dat je zo weinig mogelijk rekenwerk krijgt.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ op.

Uitwerking

$\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 12x - 8y = 16 \end{cases}$ +

$14x = 21$, dus $x = 1\frac{1}{2}$

$\left.\begin{matrix} 2x + 8y = 5 \end{matrix}\right\}$ $3 + 8y = 5$

$8y = 2$

$y = \frac{1}{4}$

Om zo weinig mogelijk rekenwerk te krijgen, is met 1 en 4 vermenigvuldigd en niet met 2 en 8.

De oplossing is $x = 1\frac{1}{2}$ en $y = \frac{1}{4}$.

4 ⏍⊙

Los op.

a $\begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - y = 19 \end{cases}$

A5 ⏍⊙✱

Los op.

a $\begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}2y = 1 \\ 0{,}3x - 0{,}3y = 1{,}5 \end{cases}$

6 ⏍⊙

Gegeven zijn de lijnen p: $12x + 5y = 5$ en q: $3x - y = 6$.

a Teken de lijnen p en q in één figuur.

b Welk stelsel moet je oplossen om de coördinaten van het snijpunt van p en q te berekenen? Bereken de coördinaten van het snijpunt.

Informatief **Stelsels oplossen door substitutie**

Het stelsel uit het voorbeeld is ook op te lossen met behulp van substitutie. Dat gaat als volgt.

1 Kies één van de vergelijkingen om een variabele vrij te maken.
y vrijmaken bij $3x - 2y = 4$ geeft $-2y = -3x + 4$, oftewel $y = 1\frac{1}{2}x - 2$.

2 Substitueer wat je gekregen hebt in de andere vergelijking.
Je krijgt $2x + 8(1\frac{1}{2}x - 2) = 5$, oftewel $2x + 12x - 16 = 5$. Dit geeft $14x = 21$ dus $x = 1\frac{1}{2}$.

3 Bereken de andere variabele door de vergelijking bij 1 te gebruiken.
$x = 1\frac{1}{2}$ en $y = 1\frac{1}{2}x - 2$ geeft $y = \frac{1}{4}$.
De oplossing van het stelsel is $x = 1\frac{1}{2}$ en $y = \frac{1}{4}$.

Deze methode met substitutie is ook bruikbaar bij een stelsel niet-lineaire vergelijkingen. Bij een stelsel lineaire vergelijkingen werkt de methode met elimineren echter meestal sneller.

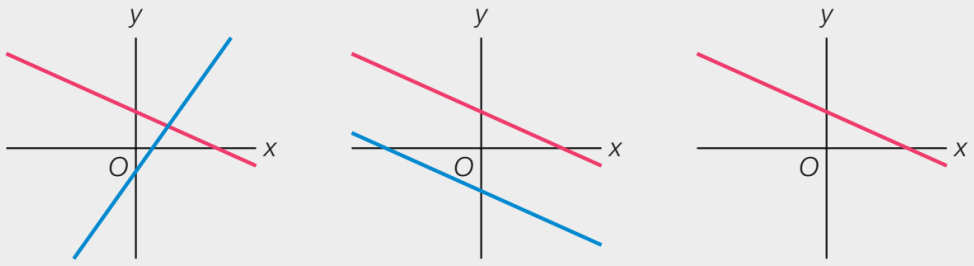
© Noordhoff Uitgevers bv

7 Bij het oplossen van de stelsels $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ -6x + 2y = 5 \end{cases}$ en $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ -6x + 2y = -20 \end{cases}$ is iets bijzonders aan de hand.
Wat voor bijzonders?

Informatief Stelsels oplossen

Bij het oplossen van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen in x en y zijn drie situaties te onderscheiden:

1 Het stelsel heeft één oplossing, want de bijbehorende lijnen snijden elkaar.
2 Het stelsel heeft geen oplossing, want de bijbehorende lijnen zijn evenwijdig.
3 Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen, want de bijbehorende lijnen vallen samen.



situatie 1 situatie 2 situatie 3

A8 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l: $3x - 2y = -12$ en m: $x + 4y = 38$.

E9 Een voorbeeld van een stelsel met drie vergelijkingen in x, y en z is $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$

Door de tweede vergelijking van de eerste af te trekken ontstaat de vergelijking $-3y + 5z = -6$.

$$\begin{array}{r} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ \hline -3y + 5z = -6 \end{array} \; -$$

a Licht toe hoe uit de eerste en de derde vergelijking volgt $-2y + 4z = -2$.

b Je hebt nu het stelsel $\begin{cases} -3y + 5z = -6 \\ -2y + 4z = -2 \end{cases}$
Los dit stelsel op.

c Toon aan dat $x = 2$ en $y = 7$ en $z = 3$ de oplossing van het gegeven stelsel is.

d Los de volgende stelsels vergelijkingen in x, y en z op.

I $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \\ 4x + y - 3z = 1 \end{cases}$ II $\begin{cases} x + 3y + 5z = 4 \\ x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorkennis Vergelijkingen met twee variabelen opstellen

Er zijn heel wat praktische situaties waarin lineaire vergelijkingen met twee variabelen een rol spelen. Het is belangrijk dat je aan de hand van de gegeven informatie een dergelijke vergelijking zelf kunt opstellen.

Voorbeeld

Voor een concert zijn kaartjes te koop van 25 en 40 euro. Op een avond is de totale opbrengst 6750 euro.
Stel bij deze gegevens een lineaire vergelijking op met twee variabelen.

Uitwerking
Voer de variabelen x en y in.
x = aantal verkochte kaartjes van 25 euro
y = aantal verkochte kaartjes van 40 euro
Je krijgt $25x + 40y = 6750$.

V4 Stel bij de volgende situaties telkens een vergelijking op met twee variabelen. Omschrijf eerst de betekenis van de variabelen.

a In een parkeermeter zitten muntstukken van 1 euro en van 50 eurocent. In totaal zit er voor 260 euro in de parkeermeter.

b In een actieweek verkoopt een meubelzaak elke stoel voor 350 euro en elke tafel voor 850 euro. De totale verkoop die week bedraagt 22 000 euro.

c Mariët koopt 400 gram cashewnoten en 700 gram studentenhaver. Ze moet hiervoor € 12,80 betalen.

d Een agrariër verbouwt groenten en granen. In een jaar is de opbrengst van de groenten 20 000 euro per ha en van de granen 15 000 euro per ha. De totale opbrengst in dat jaar is 540 000 euro.

V5 Op een binnenplaats is ruimte voor 180 fietsen. Er kunnen ook bromfietsen gestald worden. Een bromfiets neemt twee keer zo veel ruimte in als een fiets.

a Stel bij deze gegevens een vergelijking op met twee variabelen.

b Op een dag staat de binnenplaats vol met fietsen en bromfietsen. Er staan vier keer zoveel fietsen als bromfietsen. Onderzoek hoeveel fietsen er op de binnenplaats staan.

© Noordhoff Uitgevers bv

10

Een koffiebranderij heeft koffie uit Colombia en uit Jamaica.
De prijs van de Colombiaanse koffie is 12 euro per kg, die uit Jamaica kost 16 euro per kg.
Er komt een bestelling binnen voor een mengsel van deze twee soorten van in totaal 5000 kg.
Stel dat het mengsel bestaat uit x kg koffie uit Colombia en uit y kg uit Jamaica.

a Wat weet je van $x + y$?

De branderij maakt het mengsel zo, dat de prijs van dit mengsel € 12,80 per kg is.

b Waarom is $12x + 16y = 64\,000$?

c Welk stelsel in x en y kun je opschrijven? Los dit stelsel op.

d Hoe is het mengsel samengesteld?

11

Een bedrijf heeft 20 liter antivries nodig die voor 15% bestaat uit alcohol.
De antivries wordt gemaakt door antivriesmiddel A dat voor 18% uit alcohol bestaat te mengen met antivriesmiddel B dat voor 10% uit alcohol bestaat.
Stel dat er x liter A en y liter B nodig is.

a Licht toe dat $0{,}18x + 0{,}10y = 3$.

b Stel nog een vergelijking op in x en y en bereken hoeveel liter A en hoeveel liter B voor het mengsel nodig is.

A12

Een fabrikant wil een nieuw soort vruchtensap op de markt brengen, bestaande uit appelsap en perziksap. De prijs van een liter appelsap is € 0,70 en de prijs van een liter perziksap is € 1,00.
De prijs van een liter van het nieuwe vruchtensap moet € 0,75 worden.
Stel dat één liter vruchtensap uit x liter appelsap en y liter perziksap bestaat.

a Stel twee vergelijkingen op in x en y.

b Bereken de samenstelling van het nieuwe vruchtensap.

E13

Een diëtiste stelt uit de voedingsmiddelen I, II en III een dieet samen.
Het is van belang dat het dieet 500 mg kalium bevat, 75 gram eiwit en 1150 eenheden vitamine D.
In de tabel staat hoeveel kalium, eiwit en vitamine D in 100 gram van elk van de voedingsmiddelen I, II en III aanwezig is.

	I	II	III
kalium (mg)	50	75	10
eiwit (g)	5	10	3
vitamine D (eenheden)	90	100	50

Stel dat het dieet uit x keer 100 gram I, y keer 100 gram II en z keer 100 gram III bestaat.

a Stel een stelsel op met drie vergelijkingen in x, y en z.

b Bereken uit hoeveel gram I, II en III het dieet bestaat.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan een stelsel lineaire vergelijkingen oplossen.

☐ Ik kan bij een praktische situatie een stelsel lineaire vergelijkingen opstellen en oplossen.

▶ OPGAVE C1
THEORIE A EN B
▶ OPGAVE C2
THEORIE B

C1 Los op $\begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ x - 3y = 14 \end{cases}$

C2 Een bakker verkoopt krentenbollen en rozijnenbollen. Een krentenbol kost € 0,40 en een rozijnenbol € 0,50. Mathilde koopt voor een kerstontbijt op school 180 van deze bollen en moet daarvoor € 77,90 betalen.
Stel dat Mathilde x krentenbollen en y rozijnenbollen koopt.

a Stel twee vergelijkingen op in x en y.

b Bereken hoeveel rozijnenbollen Mathilde koopt.

Antwoorden

C1 $x = -4$ en $y = -6$

C2 **a** $x + y = 180$
$0{,}40x + 0{,}50y = 77{,}90$

b 59

© Noordhoff Uitgevers bv

K.2 Ongelijkheden met twee variabelen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt een halfvlak tekenen bij een ongelijkheid.
- Je kunt de grafiek van een gecombineerde ongelijkheid tekenen.

O14

Gegeven zijn de lijn k: $x - 2y = -4$ en de punten $A(-2, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 2)$, $D(4, 1)$, $E(1, 4)$, $F(-1, 4)$, $G(-2, -3)$ en $H(-4, 2)$.

a Teken de lijn k en de punten A, B, C, D, E, F, G en H.

b Reken na dat de coördinaten van $A(-2, -1)$ voldoen aan $x - 2y > -4$.

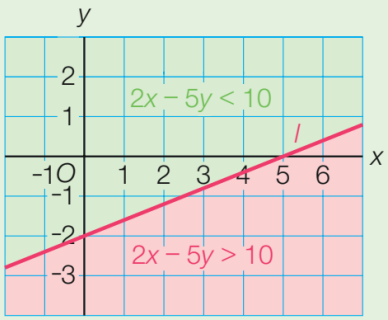
c Vul de tabel verder in.

	A	B	C	D	E	F	G	H
Punt boven k?	nee							
Voldoet aan $x - 2y > -4$?	ja							

d Liggen de punten die voldoen aan de ongelijkheid $x - 2y > -4$ boven of onder k?

Theorie A Halfvlakken

De lijn l: $2x - 5y = 10$ verdeelt het vlak in twee **halfvlakken**. De grafiek van de ongelijkheid $2x - 5y > 10$ is één van die halfvlakken. Om erachter te komen welk halfvlak de grafiek is, vul je in de ongelijkheid de coördinaten van een handig gekozen punt in. Neem bijvoorbeeld (0, 0) of (1, 0). Vul je de coördinaten van $O(0, 0)$ in, dan krijg je $2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 > 10$, oftewel $0 > 10$; dit klopt niet. Dus de grafiek van $2x - 5y > 10$ is het halfvlak waarin (0, 0) niet ligt.



Zowel bij $ax + by \geq c$ als bij $ax + by \leq c$ is de grafiek van een halfvlak met rand. De rand is de lijn met vergelijking $ax + by = c$.

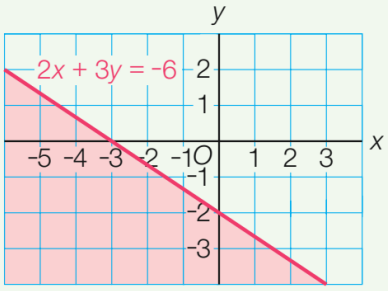
Bij het tekenen van een halfvlak geef je de rand dezelfde kleur als het halfvlak.

Voorbeeld

Kleur de grafiek van $2x + 3y \leq -6$ rood.

Uitwerking

De lijn $2x + 3y = -6$ gaat door $(0, -2)$ en $(-3, 0)$.
$(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 \leq -6$; dit klopt niet.



© Noordhoff Uitgevers bv

R15 Bij de ongelijkheid $2x + y \leq 0$ heb je niets aan (0, 0) als controlepunt.

a Waarom is (0, 0) geen geschikt controlepunt?

b Noem nog een punt dat geen geschikt controlepunt is.

c Kleur de grafiek van $2x + y \leq 0$ rood.

A16 Kleur in verschillende figuren de grafieken.

a $x - y \geq 0$ **c** $3x - y \leq -1$ **e** $y \geq 3x$

b $x \geq 3$ **d** $y \leq 2$ **f** $x + y \geq 0$

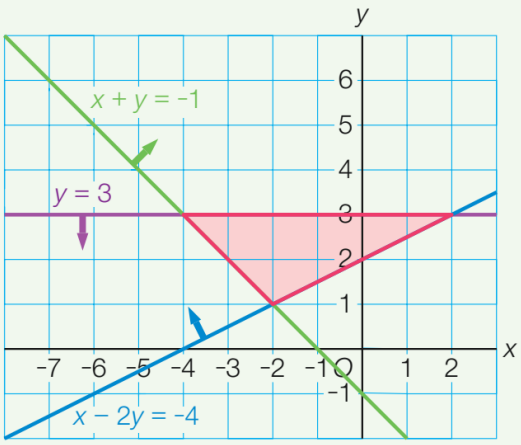
Theorie B Gecombineerde ongelijkheden

In het volgende voorbeeld komt een **gecombineerde ongelijkheid** voor. De grafiek is het gedeelte waar de drie bijbehorende halfvlakken elkaar overlappen.
Om de grafiek overzichtelijk te houden, is het verstandig niet eerst de drie halfvlakken afzonderlijk te kleuren en daarna het gemeenschappelijke deel. Je kunt beter eerst door middel van pijltjes bij elke lijn aangeven welk halfvlak je moet hebben.

Voorbeeld

Teken de grafiek van $x - 2y \leq -4$ en $x + y \geq -1$ en $y \leq 3$.

Uitwerking
De lijn $x - 2y = -4$ gaat door (−4, 0) en (0, 2).
(0, 0) invullen geeft $0 - 0 \leq -4$; dit klopt niet.
De lijn $x + y = -1$ gaat door (−1, 0) en (0, −1).
(0, 0) invullen geeft $0 + 0 \geq -1$; dit klopt.
De lijn $y = 3$.



17 **a** Teken de grafiek van $x + y \leq 3$ en $y \leq 2x - 2$ en $y \geq -1$.

b Teken de grafiek van $3x + 2y + 6 \geq 0$ en $5y \leq 2x + 2$ en $x \leq 0$ en $y \leq 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

18

Zie de figuur.

a Geef de gecombineerde ongelijkheid die bij het roodgekleurde gebied hoort.

b Bereken de coördinaten van het punt A.

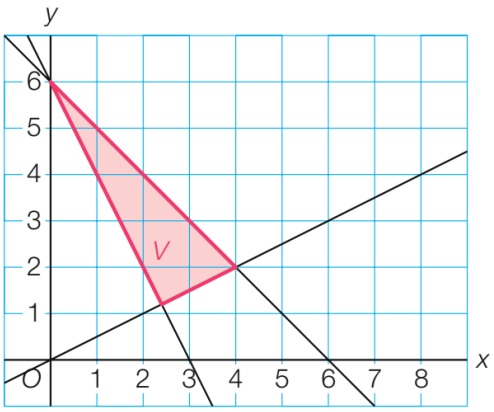
19

a Geef de gecombineerde ongelijkheid die hoort bij het gebied V in de figuur.

b Bereken de coördinaten van het punt van V waarvan de y-coördinaat zo klein mogelijk is.

c Welk punt van V heeft de grootste x-coördinaat?

d In V liggen roosterpunten.
Geef van elk van deze punten de coördinaten.



20

Een aannemer wil op een stuk grond van 4000 m^2 twee typen huizen neerzetten. Voor een huis van type A is 250 m^2 grond nodig, voor een huis van type B is dat 200 m^2.
Voor type A rekent hij per huis op 240 mensdagen werk en bij type B zijn dat er 320.
Stel dat hij x huizen van type A neerzet en y huizen van type B.

a Licht toe dat $250x + 200y \leq 4000$. Vereenvoudig deze ongelijkheid zo ver mogelijk.

b De aannemer heeft hoogstens 4800 mensdagen voor dit bouwproject beschikbaar.
Licht toe dat hieruit volgt dat $3x + 4y \leq 60$.

c Bovendien wil de aannemer minstens vier huizen van type A en minstens vijf huizen van type B bouwen.
Hierbij horen de ongelijkheden $x \geq$ ..... en $y \geq$ .....
Welke getallen horen op de puntjes te staan?

d In de vragen a, b en c komen vier ongelijkheden voor.
Teken de grafiek V van de gecombineerde ongelijkheid.

e Licht toe dat van V alleen de roosterpunten van belang zijn. Geef elk van deze roosterpunten aan met een rode stip.

f De aannemer besluit x en y zo te kiezen dat het totale aantal te bouwen huizen maximaal is en het aantal huizen van type B zo groot mogelijk.
Hoeveel huizen van type A bouwt hij? En hoeveel van type B?
Hoeveel m^2 wordt voor de bouw gebruikt?

© Noordhoff Uitgevers bv

A21 ⊙ ✱

Floris wil een bedrag van maximaal 75 000 euro beleggen in aandelen en obligaties.
Een financieel deskundige adviseert hem minstens 20 000 euro te beleggen in aandelen en hoogstens 30 000 euro in obligaties. Verder luidt het advies minstens evenveel in aandelen als in obligaties te beleggen.

a Stel een gecombineerde ongelijkheid op met vier ongelijkheden. Voer daartoe eerst de variabelen x en y in.

b Teken de grafiek van de gecombineerde ongelijkheid.

c Floris besluit 35 000 euro in aandelen te beleggen.
Hoeveel kan hij dan nog in obligaties beleggen?

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan een halfvlak tekenen bij een ongelijkheid.

☐ Ik kan de grafiek van een gecombineerde lineaire ongelijkheid tekenen.

▶ OPGAVE C3 THEORIE A
▶ OPGAVE C4 THEORIE B

C3 Kleur de grafiek van $2x - 3y \geq 6$.

C4 Teken de grafiek van $x - y \leq 0$ en $2x + y \leq 4$ en $x \geq 0$ en $y \geq 1$.

Antwoorden

C3 ✱

C4 ✱

© Noordhoff Uitgevers bv

K.3 Lineaire programmeringsproblemen

Kennis en vaardigheden

- Je kent de begrippen beperkende voorwaarden, toegestane gebied, productieprogramma en doelfunctie.
- Je kunt een lineair programmeringsprobleem oplossen met behulp van isolijnen.

O22

Zuivelproducent Uniemelk heeft twee nieuwe soorten desserts ontwikkeld. Een liter van de soort Melko (M) bestaat voor 20% uit melk en voor 15% uit room. Bij de soort Romich (R) zijn deze percentages 20 en 30.
Per dag heeft de zuivelproducent 620 liter melk en 600 liter room beschikbaar voor de nieuwe desserts. De afdeling verkoop constateert een grote vraag naar de nieuwe desserts, maar geeft wel twee voorwaarden waaraan de hoeveelheden moeten voldoen.

- Maak nooit meer R dan M.
- Maak in totaal minstens 2000 liter per dag van de nieuwe desserts samen.

a Neem aan dat de producent besluit 1700 liter M en 1400 liter R te maken. Hoeveel liter melk en hoeveel liter room is er dan nodig? Wat gaat er mis?

b Neem aan dat de producent besluit 1200 liter M en 1400 liter R te maken. Welk bezwaar is tegen deze situatie in te brengen?

c Is het mogelijk 2000 liter M en 1000 liter R te maken?

Theorie A Het toegestane gebied

Zuivelproducent Uniemelk vraagt zich af welke mogelijkheden er zijn voor een dagproductie die aan alle eisen van opgave 22 voldoet. Er zijn heel wat voorwaarden waar hij rekening mee moet houden.
Om een goed overzicht te krijgen van alle mogelijkheden voert hij de variabelen x en y in.
x = aantal liter M en y = aantal liter R

Voor x en y gelden de volgende **beperkende voorwaarden**.

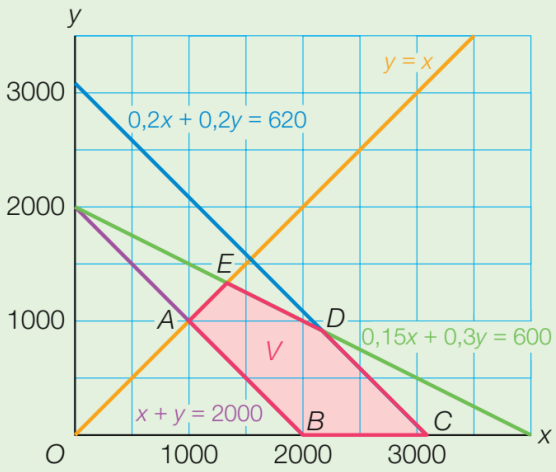
1 Er is maximaal 620 liter melk beschikbaar, dus $0{,}2x + 0{,}2y \leq 620$.
2 Er is maximaal 600 liter room beschikbaar, dus $0{,}15x + 0{,}30y \leq 600$.
3 Er mag niet meer R dan M gemaakt worden, dus $y \leq x$.
4 Er moet totaal minstens 2000 liter gemaakt worden, dus $x + y \geq 2000$.
5 Omdat x en y hoeveelheden zijn, is $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

Bij het vaststellen van de dagproductie heeft Uniemelk dus te maken met een combinatie van zes lineaire ongelijkheden. Bij deze gecombineerde ongelijkheid hoort het vlakdeel V in de figuur op de volgende bladzijde.
Het rode vlakdeel V heet het **toegestane gebied**.
In V ligt bijvoorbeeld het punt (2200, 800). Voor de producent houdt dit in dat een productie van 2200 liter M en 800 liter R aan alle eisen voldoet.

© Noordhoff Uitgevers bv

We zeggen dat (2200, 800) een toegestaan **productieprogramma** is.
V bestaat dus precies uit alle toegestane productieprogramma's (x, y).

Er zijn heel wat praktische situaties waarbij beperkende voorwaarden een rol spelen. Vaak hoort bij deze beperkende voorwaarden een combinatie van lineaire ongelijkheden die een vlakdeel V bepalen. Elk punt (x, y) van dit toegestane gebied V levert een toegestaan productieprogramma.



23
a Bereken de coördinaten van de hoekpunten van V.
b Stel dat de producent zo weinig mogelijk van dessert M maakt. Hoeveel liter M en hoeveel liter R maakt hij dan?
c Stel dat de producent zo veel mogelijk van dessert R maakt. Hoeveel liter M en hoeveel liter R maakt hij dan?
d Stel dat de producent 1500 liter M maakt. Welke hoeveelheden van dessert R zijn er dan mogelijk?

24
Een fabrikant brengt twee nieuwe soorten hardloopschoenen op de markt: Air Extra en Pump. Bij de fabricage spelen de factoren arbeid, machinetijd en materiaal een rol. Zie de tabel.

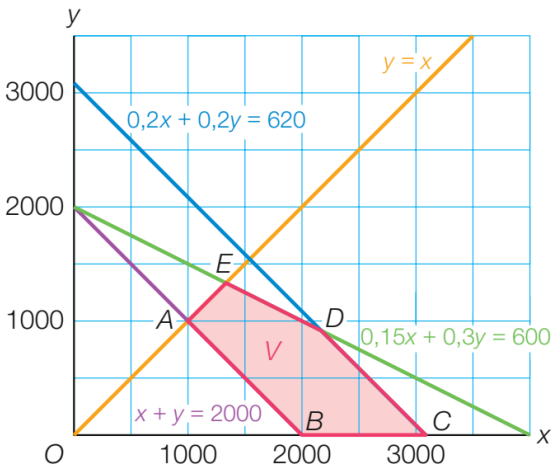
	nodig voor een paar Air Extra	nodig voor een paar Pump	totaal beschikbaar per dag
arbeid	9 minuten	15 minuten	48 000 minuten
machinetijd	3 minuten	3 minuten	10 000 minuten
materiaal	50 cm^2	30 cm^2	120 000 cm^2

Stel dat de fabrikant per dag x paar Air Extra en y paar Pump maakt.
a Toon aan dat $3x + 5y \leq 16\,000$ één van de beperkende voorwaarden is.
b Behalve $x \geq 0$ en $y \geq 0$ zijn er nog twee beperkende voorwaarden. Welke?
c Kleur het toegestane gebied V.
d Kan de fabrikant per dag 3000 paar Air Extra vervaardigen?
e Stel dat de fabrikant besluit 2000 paar Pump per dag te maken. Welke aantallen van Air Extra zijn dan nog mogelijk?

© Noordhoff Uitgevers bv

O25

In de figuur hiernaast zie je nog eens het toegestane gebied V bij het zuivelprobleem van Uniemelk. Hierin is x het aantal liter Melko (M) en y het aantal liter Romich (R) dat per dag geproduceerd wordt. Verder is gegeven dat de winst € 0,45 per liter M is, per liter R is dat € 0,75.



a Hoeveel is de winst bij het productieprogramma (1500, 1000)?

b Hoeveel is de winst als er zo veel mogelijk M geproduceerd wordt? En hoeveel als er zo veel mogelijk R geproduceerd wordt?

c Zoek een productieprogramma dat een hogere winst oplevert dan die van vraag b.

Theorie B De doelfunctie

Zuivelproducent Uniemelk heeft te maken met de volgende zes beperkende voorwaarden, die het toegestane gebied in de figuur hierboven bepalen: $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $0{,}2x + 0{,}2y \leq 620$ en $0{,}15x + 0{,}30y \leq 600$ en $y \leq x$ en $x + y \geq 2000$. Hierbij is x het aantal liter M en y het aantal liter R dat per dag geproduceerd wordt.

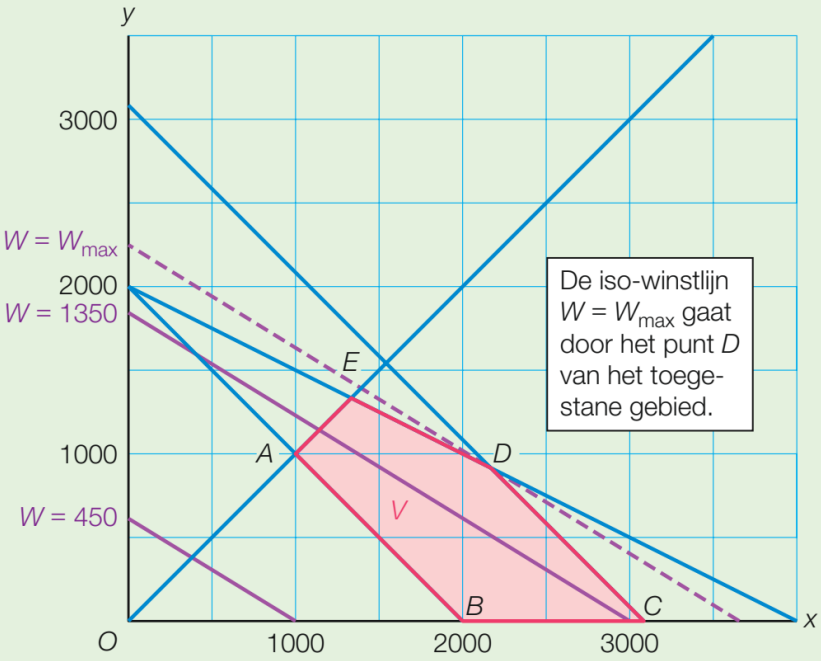
Tot het toegestane gebied V behoren oneindig veel productieprogramma's (x, y). Om het voor de producent meest geschikte programma (x, y) te vinden, moet je weten wat de winst per liter dessert is. Voor één liter M is deze winst € 0,45 en per liter R is dat € 0,75. De totale winst W in euro's op deze nieuwe desserts is $W = 0{,}45x + 0{,}75y$. De functie W heet de **doelfunctie**. De producent heeft als doel om het punt (x, y) van V te vinden waarvoor W maximaal is. Merk op dat W een functie van twee variabelen is die geldig is op het toegestane gebied.

Het maximum van W kun je vinden met behulp van **isolijnen**.
Kies een mooi punt op één van de assen, bijvoorbeeld (1000, 0).
Hierbij hoort $W = 0{,}45 \cdot 1000 + 0{,}75 \cdot 0 = 450$.
Bereken een ander punt op de lijn $0{,}45x + 0{,}75y = 450$, bijvoorbeeld het punt (0, 600). Teken de lijn door (1000, 0) en (0, 600), dit is de isolijn $W = 450$. Bij alle punten op deze isolijn hoort een winst van 450 euro. Daarom heet deze lijn een iso-winstlijn.

Isolijnen zijn lijnen die punten met gelijke 'waarde' verbinden. Voorbeelden zijn isobaren en isothermen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Teken evenwijdig aan de iso-winstlijn $W = 450$ een tweede iso-winstlijn door bijvoorbeeld het punt (3000, 0). Hierbij hoort $W = 0{,}45 \cdot 3000 + 0{,}75 \cdot 0 = 1350$. De vergelijking van de tweede iso-winstlijn is $0{,}45x + 0{,}75y = 1350$. Zie de figuur.



Je ziet in de figuur: hoe hoger de iso-winstlijn loopt, des te hoger is de winst.
We zoeken de maximale winst, dus het gaat erom de hoogstgelegen iso-winstlijn te vinden, die nog juist door een punt van het toegestane gebied gaat. Dat moet dus de gestippelde iso-winstlijn $W = W_{max}$ zijn door het punt $D(2200, 900)$.

$$\left.\begin{array}{l} W = 0{,}45x + 0{,}75y \\ W_{max} \text{ in } (2200, 900) \end{array}\right\} W_{max} = 0{,}45 \cdot 2200 + 0{,}75 \cdot 900 = 1665$$

Uniemelk maakt een maximale winst van 1665 euro per dag bij een productie van 2200 liter Melko en 900 liter Romich.

De methode die we hierboven hebben toegepast, heet **lineair programmeren**. Hierbij zoek je een productie*programma* (x, y) waarmee je een *lineaire* doelfunctie onder *lineaire* beperkende voorwaarden optimaliseert.

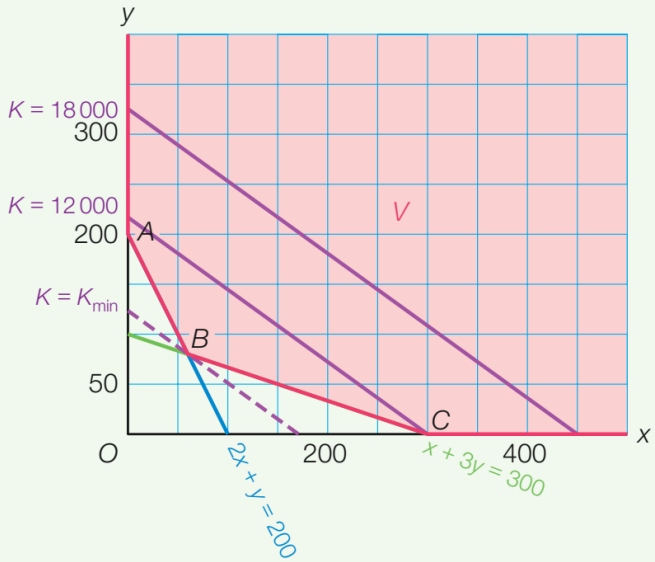
© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Minimaliseer de doelfunctie $K = 40x + 55y$ op het toegestane gebied V: $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $2x + y \geq 200$ en $x + 3y \geq 300$.

Uitwerking

De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,
$2x + y = 200$ door (0, 200) en (100, 0),
$x + 3y = 300$ door (0, 100) en (300, 0).



Isolijn door (300, 0) geeft $K = 40x + 55y = 12\,000$ en gaat ook door (0; 218,2).

$x = 0$ geeft $55y = 12\,000$, dus $y \approx 218{,}2$

Isolijn door (450, 0) geeft $K = 18\,000$.

Teken deze isolijn door (450, 0) en evenwijdig met de isolijn $K = 12\,000$.

K is minimaal in het snijpunt B van de lijnen $2x + y = 200$ en $x + 3y = 300$.

$$\begin{cases} 2x + y = 200 \\ x + 3y = 300 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 6x + 3y = 600 \\ x + 3y = 300 \end{cases} -$$

$$\left.\begin{array}{r} 5x = 300, \text{ dus } x = 60 \\ 2x + y = 200 \end{array}\right\} 120 + y = 200, \text{ dus } y = 80$$

K_{min} in (60, 80), dus $K_{min} = 40 \cdot 60 + 55 \cdot 80 = 6800$.

26 Minimaliseer $K = 20x + 18y$ op het toegestane gebied V: $y \geq 0$ en $x + 6y \leq 18$ en $2x + 3y \geq 12$.

27 Maximaliseer $W = 3x + y$ op het toegestane gebied V: $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $2x + 3y \leq 12$ en $2x + y \leq 8$ en $x - 2y \leq 2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

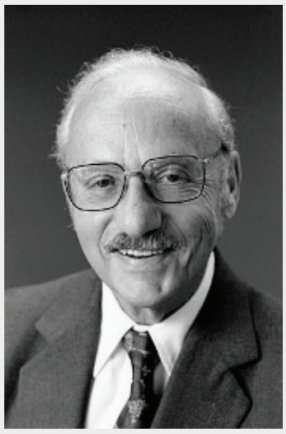
Theorie C Het oplossen van een lineair programmeringsprobleem

Bij het oplossen van een **lineair programmeringsprobleem** vertaal je eerst de situatie in wiskundige formules. Begin daarom met het invoeren van de variabelen x en y en schrijf vervolgens de doelfunctie en de beperkende voorwaarden op. Daarna kun je met het schuiven van de isolijnen de optimale situatie berekenen.

Werkschema: oplossen van een lineair programmerings-probleem

1 Verdiep je in de situatie en voer de variabelen x en y in.
2 Stel de formule op van de doelfunctie.
3 Schrijf de beperkende voorwaarden op.
4 Teken het toegestane gebied.
5 Zoek met behulp van isolijnen het programma (x, y) dat de doelfunctie optimaliseert en beantwoord de gestelde vraag.

Geschiedenis George Dantzig



In 1939 studeerde George Dantzig wiskunde aan de Universiteit in Berkeley (Californië). Op een dag verscheen hij te laat op het college. Hij schreef de twee problemen die op het bord stonden over, in de veronderstelling dat dat het huiswerk was. Zes weken nadat hij de oplossingen van deze problemen had ingeleverd, belde zijn professor hem op. Het bleek dat het twee beroemde nog niet eerder opgeloste problemen uit de statistiek betrof. De naam George Dantzig was hiermee gevestigd.
Spoedig daarna kreeg hij een baan als wiskundige in het Amerikaanse leger, dat zich intussen in de Tweede Wereldoorlog in de strijd had gemengd. Het was zijn taak de distributie van manschappen, wapens en voedsel naar de verschillende fronten zo efficiënt mogelijk te organiseren. Hierbij ontwikkelde hij de theorie van het lineair programmeren.
Deze methode had niet alleen bij militaire operaties haar nut, maar werd al spoedig toegepast in de economie, de industrie en het transportwezen. Er wordt gezegd dat het misschien wel de belangrijkste wiskundige ontdekking van de laatste 100 jaar is.
Een van de problemen die met de door George Dantzig ontwikkelde methode van lineair programmeren werd opgelost, betrof de organisatie van de luchtbrug tussen de Westerse geallieerden en Berlijn in juni 1948. In die maand sloot de Sovjet-Unie alle toevoerwegen over land naar Berlijn af met het doel de Westerse mogendheden uit Berlijn te verdrijven. Het gevolg was een gigantische luchtbrug om de meer dan twee miljoen mensen in West-Berlijn van voedsel te voorzien. Hierbij waren honderden Amerikaanse en Engelse vliegtuigen betrokken die grote hoeveelheden voedsel, kleding, grondstoffen en medicijnen vervoerden. In vereenvoudigde vorm komt dit probleem aan de orde in opgave 38.

© Noordhoff Uitgevers bv

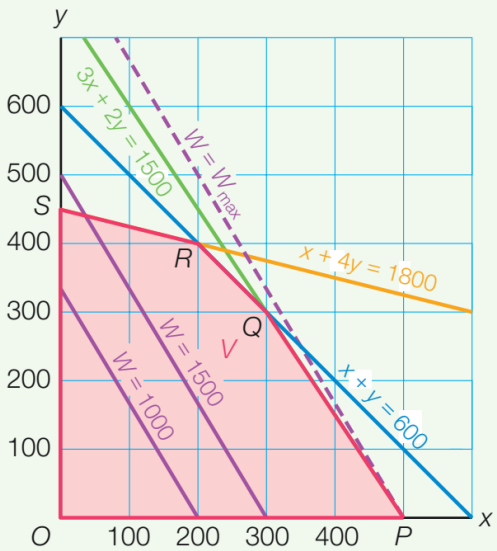
Voorbeeld

In een fabriek worden de producten A en B gemaakt. Bij de fabricage zijn drie machines nodig. Per week is machine I 60 uur beschikbaar, machine II is 50 uur beschikbaar en machine III is 90 uur beschikbaar.
Bij de fabricage van één exemplaar heeft product A 6 minuten machinetijd I nodig, 6 minuten machinetijd II en 3 minuten machinetijd III. Bij product B zijn deze tijden achtereenvolgens 6, 4 en 12 minuten.
De fabrikant kan per exemplaar van A rekenen op een winst van 5 euro en per exemplaar van B op een winst van 3 euro.
Hoeveel exemplaren van A en B moet de fabrikant per week fabriceren om een maximale winst te bereiken? Hoeveel is de maximale winst?

Aanpak
Volg het werkschema voor het oplossen van een lineair programmeringsprobleem.
Verwerk de gegevens overzichtelijk in een tabel.

	product A	product B	beschikbare tijd
machine I	6 minuten	6 minuten	60 uur
machine II	6 minuten	4 minuten	50 uur
machine III	3 minuten	12 minuten	90 uur
winst per exemplaar	5 euro	3 euro	

Uitwerking
Variabelen
x = aantal A per week en y = aantal B per week
Doelfunctie
De doelfunctie is $W = 5x + 3y$.
Beperkende voorwaarden
$x \geq 0$ en $y \geq 0$
$6x + 6y \leq 3600$, oftewel $x + y \leq 600$ (machine I)
$6x + 4y \leq 3000$, oftewel $3x + 2y \leq 1500$ (machine II)
$3x + 12y \leq 5400$, oftewel $x + 4y \leq 1800$ (machine III)
Toegestane gebied
De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,
$x + y = 600$ door (0, 600) en (600, 0),
$3x + 2y = 1500$ door (0, 750) en (500, 0),
$x + 4y = 1800$ door (0, 450) en (1800, 0).



Isolijnen
Isolijn door (200, 0) geeft $W = 5x + 3y = 1000$ en gaat ook door (0; 333,3).
Isolijn door (300, 0) geeft $W = 1500$.
W is maximaal in het punt $P(500, 0)$. Dus $W_{max} = 5 \cdot 500 + 3 \cdot 0 = 2500$.
Conclusie
De weekopbrengst is maximaal 2500 euro bij een weekproductie van 500 exemplaren van A en geen enkel exemplaar van B.

© Noordhoff Uitgevers bv

28 In meubelfabriek Merkens worden luxe fauteuils en sofa's gemaakt.
Bij het productieproces zijn drie fasen te onderscheiden.

1 Op de constructieafdeling worden de meubels in elkaar gezet.
2 Op de bekledingsafdeling wordt de bekleding voor de meubels op maat gemaakt en aangebracht.
3 Op de afwerkingsafdeling vindt de eindcontrole plaats en worden de meubels ingepakt voor verzending.

Voor het maken van een fauteuil rekent men op 6 uur werk op de constructieafdeling, 2 uur op de bekledingsafdeling en 1 uur op de afwerkingsafdeling. Voor het maken van een sofa rekent men achtereenvolgens op 3 uur, 6 uur en 1 uur.

De winst per fauteuil is 640 euro en per sofa 560 euro.

Bij de productie van de meubels heeft Merkens met een aantal beperkende voorwaarden te maken, aangezien de beschikbare hoeveelheid materiaal, gereedschap en arbeid niet onbeperkt is. Er zijn per dag 96 uur op de constructieafdeling beschikbaar, 72 uur op de bekledingsafdeling en 18 uur op de afwerkingsafdeling.

a Vul de volgende tabel in.

	fauteuil	sofa	beschikbaar per dag
constructieafdeling	6 uur	…	96 uur
bekledingsafdeling	…	…	…
afwerkingsafdeling	…	…	…
winst per stuk in euro's	…	…	

b Schrijf de winst W per dag als functie van x en y waarbij x = aantal fauteuils per dag en y = aantal sofa's per dag.
c Schrijf de vijf beperkende voorwaarden op.
d Teken het toegestane gebied.
e Bereken de maximale winst per dag. Bij welk productieprogramma wordt die maximale winst bereikt?
f Op welke afdeling worden niet alle beschikbare uren gebruikt? Hoeveel uren blijven er daar over?

29 Zie opgave 28.

a Stel dat de winst per fauteuil 640 euro is en de winst per sofa 800 euro. Bij welk productieprogramma is de winst W maximaal? Hoeveel is die maximale winst en op welke afdeling blijft een aantal uren ongebruikt?
b Stel dat de winst per fauteuil 200 euro is en per sofa 800 euro. Bij welk productieprogramma is de winst nu maximaal?

© Noordhoff Uitgevers bv

A30

In verband met een grote oefening, die voor de volgende week op het programma staat, krijgt de kok van een kazerne de opdracht blikken met voedsel samen te stellen. Elk blik moet voorzien in de dagelijkse behoefte aan vetten, eiwitten en koolhydraten per manschap. Elke soldaat moet per dag minimaal 100 gram vet, 100 gram eiwit en 200 gram koolhydraten binnenkrijgen.
Een blik wordt gevuld met groenten (inclusief aardappels) en vlees.
1 kg groente kost € 1,50 en bevat 50 gram vet, 250 gram eiwit en 200 gram koolhydraten.
1 kg vlees kost € 4,50 en bevat 200 gram vet, 75 gram eiwit en 250 gram koolhydraten.
De bedoeling is dat de kok de groenten en het vlees zodanig combineert, dat de kosten per blik minimaal zijn.

a Voer de variabelen x en y in, stel de formule van de doelfunctie op en schrijf de beperkende voorwaarden op.

b Bereken de samenstelling van de inhoud van het blik in grammen nauwkeurig in het geval de kosten minimaal zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik ken de begrippen beperkende voorwaarden, toegestane gebied, productieprogramma en doelfunctie.

▶ OPGAVE C5 THEORIE A EN B

☐ Ik kan een lineair programmeringsprobleem oplossen met behulp van isolijnen.

▶ OPGAVE C5 THEORIE B EN C

C5 Aannemer Dijkstra gaat in een uitbreidingsplan twee typen woningen bouwen: seniorenwoningen en villa's. Voor een seniorenwoning heeft Dijkstra een kapitaal van 120 000 euro nodig voor materiaal, arbeidskosten en dergelijke, terwijl voor zo'n huis 200 mensdagen werk nodig zijn. Voor een villa is het benodigde kapitaal 360 000 euro en zijn er voor de bouw 300 mensdagen nodig.

Het aantal beschikbare mensdagen tijdens de bouwperiode is 34 000 en het beschikbare kapitaal is 31 200 000 euro. Het uitbreidingsplan staat de bouw van maximaal 150 woningen toe. Een seniorenwoning levert Dijkstra 25 000 euro winst op en een villa 40 000 euro.

a Schrijf de winst W als functie van x en y waarbij x = aantal seniorenwoningen en y = aantal villa's.

b Schrijf vijf beperkende voorwaarden op en kleur het toegestane gebied.

c Bereken de maximale winst. Hoeveel seniorenwoningen en villa's worden dan gebouwd?

Antwoorden

C5 **a** $W = 25\,000x + 40\,000y$

b $x \geq 0$ en $y \geq 0$
$x + 3y \leq 260$ (kapitaal)
$2x + 3y \leq 340$ (mensdagen)
$x + y \leq 150$ (aantal huizen)
*

c 4 400 000 euro 80 seniorenwoningen en 60 villa's

© Noordhoff Uitgevers bv

K.4 De hoekpuntmethode

Kennis en vaardigheden

- Je weet wanneer een lineair programmeringsprobleem meer dan één oplossing heeft.
- Je kunt een lineair programmeringsprobleem oplossen met behulp van de hoekpuntmethode.
- Je kunt een transportprobleem oplossen met behulp van lineair programmeren.

O31

Bij een lineair programmeringsprobleem is het toegestane gebied gegeven door $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $5x + 4y \leq 60$ en $x \leq 8$ en $y \leq 10$.

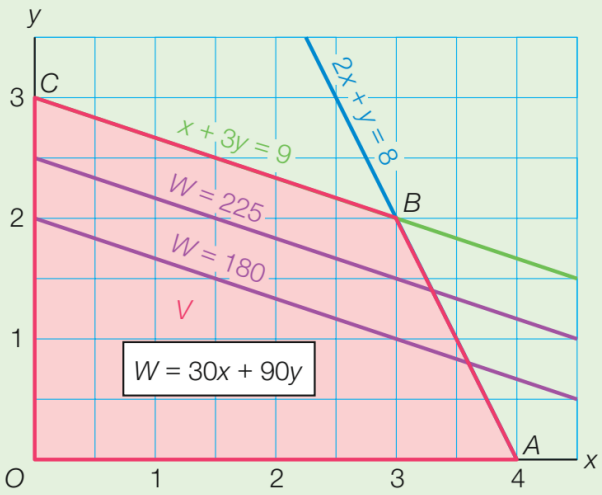
a Kleur het toegestane gebied.

b Welke (x, y) maximaliseert de doelfunctie $W = 3x + 2y$?

c De doelfunctie $R = 10x + 8y$ wordt bij meer dan één programma (x, y) gemaximaliseerd. Licht dit toe.

Theorie A Isolijnen evenwijdig met de rand

Bij het lineair programmeren in opgave 31c ben je een bijzondere situatie tegengekomen: meer dan één programma (x, y) optimaliseert de doelfunctie. Deze situatie komt voor als de isolijnen van de doelfunctie evenwijdig lopen met één van de randen van het toegestane gebied. Zo zijn in de figuur de isolijnen van de doelfunctie $W = 30x + 90y$ evenwijdig met de rand BC. Elk punt (x, y) op het lijnstuk BC maximaliseert W.



Een lineair programmeringsprobleem heeft meer dan één oplossing als de isolijnen van de doelfunctie evenwijdig zijn met één van de randen van het toegestane gebied.

Aan de getallen die voor x en y staan in de formule van W en in de formule van de rand is snel te zien of van evenwijdigheid sprake is. Zo zijn de isolijnen van $W = 30x + 90y$ evenwijdig met de lijn $x + 3y = 9$, want $30 : 90 = 1 : 3$.

32

Gegeven is een lineair programmeringsprobleem waarbij voor het toegestane gebied V geldt dat $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $3x + 2y \leq 20$ en $x + 4y \leq 30$.
Welke van de volgende doelfuncties leveren meer dan één oplossing op? Licht toe.

- $W = 3x + 12y$
- $W = 6x + 8y$
- $W = 4x + 6y$
- $W = 1{,}5x + y$
- $W = 0{,}5x + 2y$
- $W = x + 0{,}7y$

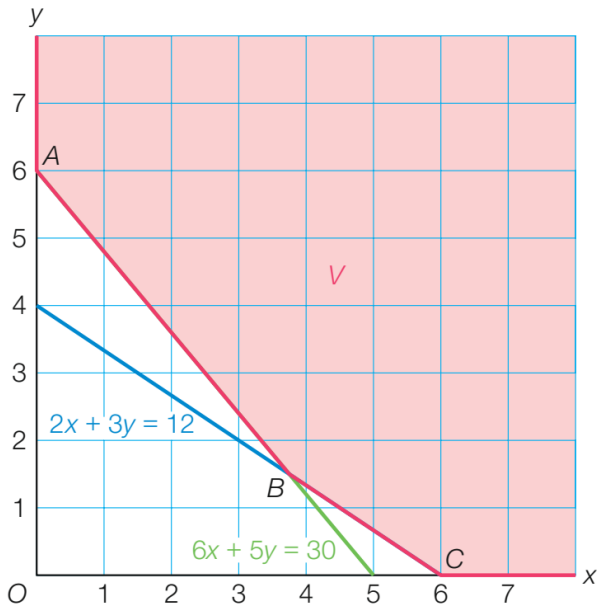
© Noordhoff Uitgevers bv

33 ⊙ ∗

Van het toegestane gebied V is gegeven $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 12$ en $3x + 4y \leq 60$ en $4x + 3y \leq 60$.
Wat weet je van de programma's (x, y) die de doelfunctie $W = 20x + 15y$ maximaliseren? Bereken het maximum.

E34 ∗

Het toegestane gebied V is gegeven door $y \geq 0$ en $2x + 3y \geq 12$ en $6x + 5y \geq 30$.
Zie de figuur.



a Bij het minimaliseren van de doelfunctie $K = 8x + ay$ met $a \neq 0$ blijken oneindig veel programma's (x, y) te voldoen.
Onderzoek welke waarden van a mogelijk zijn en bereken bij elke a het minimum van K.

Gegeven is de doelfunctie $L = px + 3y$.
Onderzoek wat je van p weet in het geval

b elk punt op het lijnstuk AB de doelfunctie minimaliseert

c alleen het programma $(0, 6)$ de doelfunctie minimaliseert

d alleen het programma $(3\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2})$ de doelfunctie minimaliseert.

Theorie B Optimaliseren met behulp van hoekpunten

Je hebt gemerkt dat bij lineaire programmeringsproblemen de optimale waarde van de doelfunctie bereikt wordt in een hoekpunt van het toegestane gebied. Dit is als volgt te verklaren. Bij het schuiven van de isolijnen kom je altijd in een hoekpunt het toegestane gebied binnen, óf verlaat je het toegestane gebied in een hoekpunt. Ook in het geval dat de isolijnen evenwijdig zijn met een rand is dit zo. De optimale waarde wordt in dat geval bereikt in twee hoekpunten én alle tussenliggende punten.

Een doelfunctie neemt de maximale of de minimale waarde aan in een hoekpunt van het toegestane gebied.

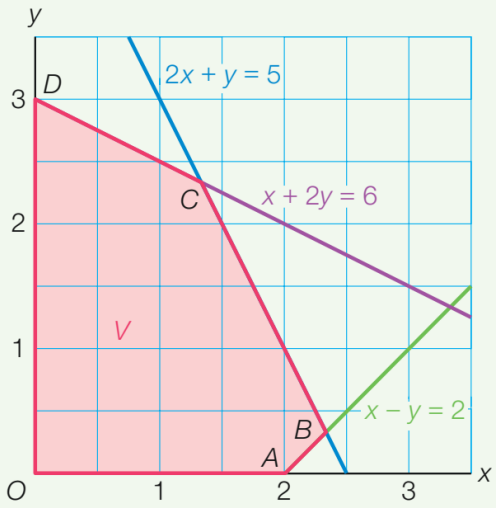
Je kunt een doelfunctie daarom ook optimaliseren zonder isolijnen te gebruiken. Je gebruikt dan de **hoekpuntmethode**.
Bij de hoekpuntmethode bereken je de coördinaten van de hoekpunten van het toegestane gebied. Daarna maak je een tabel waarin je bij elk hoekpunt de waarde van de doelfunctie berekent en geef je aan welk punt (x, y) de doelfunctie optimaliseert.

© Noordhoff Uitgevers bv

Een nadeel van de hoekpuntmethode is dat je van alle hoekpunten van het toegestane gebied de coördinaten moet berekenen, terwijl je bij het schuiven met isolijnen slechts één hoekpunt nodig hebt. Maar een voordeel is dat de hoekpuntmethode bijzonder overzichtelijk is en dat je geen isolijnen hoeft te tekenen.

Voorbeeld

Gegeven is het toegestane gebied V: $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $x + 2y \leq 6$ en $2x + y \leq 5$ en $x - y \leq 2$. Zie de figuur.
Maximaliseer met behulp van de hoekpuntmethode de doelfunctie $W = 4x + 3y$ op V.



Uitwerking

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{array}\right. \underline{\quad +}$$
$$3x \quad = 7, \text{ dus } x = 2\tfrac{1}{3}$$
$$x - y = 2$$
$$\Big\} \; 2\tfrac{1}{3} - y = 2, \text{ dus } y = \tfrac{1}{3}$$

Dus $B(2\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 5 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}\right| \text{ geeft } \left\{\begin{array}{l} x + 2y = 6 \\ 4x + 2y = 10 \end{array}\right. \underline{\quad -}$$
$$-3x \quad = -4, \text{ dus } x = 1\tfrac{1}{3}$$
$$2x + y = 5$$
$$\Big\} \; 2 \cdot 1\tfrac{1}{3} + y = 5, \text{ dus } y = 2\tfrac{1}{3}$$

Dus $C(1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3})$.

hoekpunt	$W = 4x + 3y$	
$O(0, 0)$	0	
$A(2, 0)$	8	
$B(2\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$10\frac{1}{3}$	
$C(1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3})$	$12\frac{1}{3}$	← maximaal
$D(0, 3)$	9	

$W_{max} = 12\frac{1}{3}$ bij het programma $(x, y) = (1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3})$.

R35

Ingrid maximaliseert een doelfunctie op een toegestaan gebied V en gebruikt daarbij de hoekpuntmethode.
Hoe kan ze, tijdens het invullen van de waarden van de doelfunctie in de tabel met hoekpunten, constateren dat er oneindig veel programma's (x, y) zijn die de doelfunctie maximaliseren?

© Noordhoff Uitgevers bv

Geschiedenis **Narendra Karmarkar**

De laatste jaren zijn nieuwe technieken ontwikkeld om lineaire programmeringsproblemen met een computer snel op te lossen. In 1979 kwam Khachian, een Russische wiskundige, met een nieuwe methode die in 1984 door de Amerikaan Narendra Karmarkar sterk verbeterd werd. Karmarkar was een onderzoeker bij de Amerikaanse telefoonmaatschappij AT&T. Met behulp van deze nieuwe lineaire programmeringstechniek heeft de maatschappij in het Amerikaanse telefoonnet miljoenen dollars kunnen besparen. Met de methode van Karmarkar is een lineair programmeringsprobleem met meer dan 800 000 variabelen binnen de kortste keren op te lossen.

36

De regering van een ontwikkelingsland moedigt de bevolking aan dagelijks een voedselpakket bestaande uit rijst en sojabonen te nuttigen. Hiermee hoopt men de dagelijkse behoefte aan eiwit, calorieën en vitamine B te kunnen dekken. Zie de tabel.

	gram eiwit	calorieën in kJ	mg vitamine B	prijs
70 gram rijst	15	3390	0,1	18 cent
70 gram sojabonen	22,5	1130	0,3	12 cent
dagelijkse behoefte	90	6780	0,9	

Onderzoek met de hoekpuntmethode uit hoeveel rijst en sojabonen een voedselpakket voor één persoon moet bestaan om aan de dagelijkse behoefte aan eiwit, calorieën en vitamine B te voldoen, waarbij de kosten per pakket minimaal moeten zijn.

A37

Een fabriek vervaardigt kano's en kajaks. In de tabel zie je informatie over het productieproces.

	kano	kajak	beschikbare hoeveelheid per week
arbeid	10 uur	7,5 uur	2000 uur
polyetheen	0,2 m^2	0,5 m^2	90 m^2
polyester	1,1 m^2	1,2 m^2	264 m^2
kleurstoffen	5 liter	5 liter	1500 liter
winst per boot	350 euro	300 euro	

a De afdeling planning heeft op grond van deze tabel de aantallen kano's x en kajaks y vastgesteld waarvoor de winst maximaal is.
- Bereken de maximale winst per week.
- Welke materialen worden bij de gekozen aantallen niet volledig in een week verbruikt? Hoeveel blijft er per week van elk materiaal over?

b Stel dat het aantal beschikbare arbeidsuren met 20% toeneemt. Met hoeveel procent neemt de maximale winst per week toe?

© Noordhoff Uitgevers bv

38

In het geschiedeniskader op bladzijde 143 heb je kunnen lezen dat kort na de Tweede Wereldoorlog de Westerse geallieerden een luchtbrug naar Berlijn organiseerden om de bevolking in Berlijn van voedsel, medicijnen, kleding en grondstoffen te voorzien.
Voor het organiseren van een luchtbrug, waarbij zoveel mogelijk vracht moet worden vervoerd, zijn Amerikaanse en Engelse vliegtuigen beschikbaar. In verband met de landingsmogelijkheden kunnen maximaal 12 vliegtuigen aan de luchtbrug meedoen. Er zijn maximaal 41 bemanningsleden beschikbaar. Van een Amerikaans vliegtuig bestaat de bemanning uit vijf personen, van een Engels vliegtuig uit drie personen. Een Amerikaans vliegtuig kan 5400 m^3 vracht vervoeren, een Engels vliegtuig 3600 m^3.

a Stel de formule op van de doelfunctie. Met welke beperkende voorwaarden heb je te maken? Bereken de coördinaten van de hoekpunten van het toegestane gebied en bereken bij elk hoekpunt de waarde van de doelfunctie.

Omdat alleen gehele aantallen vliegtuigen kunnen worden ingezet, wordt de doelfunctie niet gemaximaliseerd in het hoekpunt van vraag a met de grootste waarde van de doelfunctie. Door met isolijnen te schuiven, kun je de punten in het toegestane gebied vinden die voor het optimaliseren van de doelfunctie in aanmerking komen.

Als het toegestane gebied alleen uit roosterpunten bestaat, spreken we van een *geheeltallig* lineair programmeringsprobleem.

b Onderzoek bij welke aantallen vliegtuigen er zoveel mogelijk vracht kan worden vervoerd.

A39

Bij de bouw van een nieuw vergadercentrum is in één van de vleugels van een gebouw plaats voor 80 vergaderruimten voor vier personen. Maar men kan ook ruimten voor twaalf personen maken, die twee keer zo groot zijn als de vierpersoonsvergaderruimten.
In totaal wil men minstens 360 personen kunnen onderbrengen. Verder dient het aantal twaalfpersoonsvergaderruimten minstens twee keer het aantal vierpersoonsvergaderruimten te zijn.
De winst op een vierpersoonsvergaderruimte is 100 euro per dag en die op een twaalfpersoonsvergaderruimte is 150 euro per dag.
Bereken bij welk aantal vier- en twaalfpersoonsvergaderruimten de winst maximaal is.

© Noordhoff Uitgevers bv

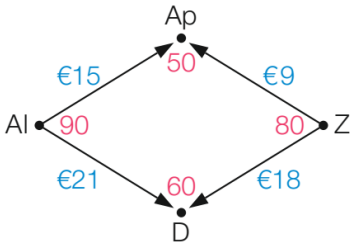
O40

Een groothandel in televisietoestellen heeft een magazijn in Almelo en een in Zutphen. In het magazijn in Almelo zijn 90 tv's aanwezig en in Zutphen 80. Er komt een bestelling binnen voor 50 tv's van een winkel in Apeldoorn en voor 60 tv's van een winkel in Doetinchem.

VERVOERSKOSTEN IN EURO'S PER TV

naar \ van	Almelo	Zutphen
Apeldoorn	15	9
Doetinchem	21	18

De vervoerskosten in euro's per tv staan in de tabel. Je ziet dat het vervoer van tv's van Zutphen naar Doetinchem 18 euro per stuk kost.

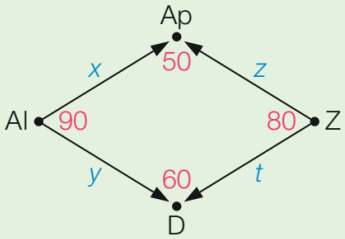


a Stel dat er 20 tv's van Almelo naar Apeldoorn en 30 van Almelo naar Doetinchem worden vervoerd. Hoeveel gaan er dan van Zutphen naar Apeldoorn en van Zutphen naar Doetinchem? Bereken de totale transportkosten.

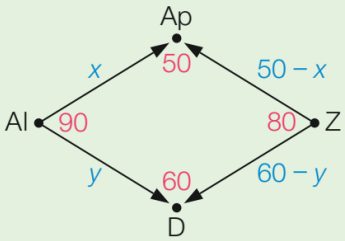
b Stel dat x tv's van Almelo naar Apeldoorn gaan en y van Almelo naar Doetinchem. In Almelo zijn 90 tv's aanwezig. Welke beperkende voorwaarde voor x en y volgt hieruit?

Theorie C Transportproblemen

Het **transportprobleem** in opgave 40 is met behulp van lineair programmeren op te lossen. In eerste instantie lijkt het of er vier variabelen nodig zijn. Zie het transportschema hiernaast. Maar dat valt gelukkig mee.



Een van de voorwaarden is namelijk dat Apeldoorn 50 tv's nodig heeft, dus $x + z = 50$, oftewel $z = 50 - x$.
En zo volgt uit de 60 tv's die naar Doetinchem gaan dat $y + t = 60$, oftewel $t = 60 - y$.
Bij dit transportprobleem kun je dus volstaan met de twee variabelen x en y in het schema hiernaast. Op deze wijze ontstaat een geheeltallig lineair programmeringsprobleem dat op de bekende wijze is op te lossen.

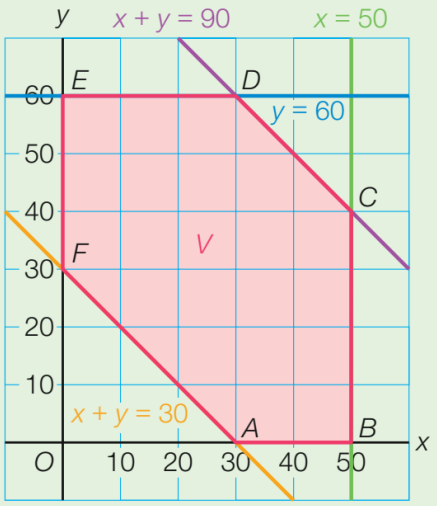


De beperkende voorwaarden zijn:
- Je hebt te maken met aantallen, dus $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $50 - x \geq 0$, oftewel $x \leq 50$ en $60 - y \geq 0$, oftewel $y \leq 60$.
- In Almelo zijn 90 tv's aanwezig, dus $x + y \leq 90$.
- In Zutphen zijn 80 tv's aanwezig, dus $(50 - x) + (60 - y) \leq 80$. Dit geeft $110 - x - y \leq 80$, dus $30 \leq x + y$, oftewel $x + y \geq 30$.

De groothandel streeft ernaar de transportkosten T te minimaliseren.
De doelfunctie is $T = 15x + 21y + 9(50 - x) + 18(60 - y)$, dus $T = 15x + 21y + 450 - 9x + 1080 - 18y$, oftewel $T = 6x + 3y + 1530$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Het toegestane gebied met de randen $x = 0$, $y = 0$, $x = 50$, $y = 60$, $x + y = 90$ en $x + y = 30$ zie je in de figuur.
Met de hoekpuntmethode krijg je:



hoekpunt	$T = 6x + 3y + 1530$
$A(30, 0)$	1710
$B(50, 0)$	1830
$C(50, 40)$	1950
$D(30, 60)$	1890
$E(0, 60)$	1710
$F(0, 30)$	1620 ← minimaal

De minimale transportkosten zijn dus 1620 euro.
Er gaan dan 30 tv's van Almelo naar Doetinchem, 50 van Zutphen naar Apeldoorn en 30 van Zutphen naar Doetinchem.

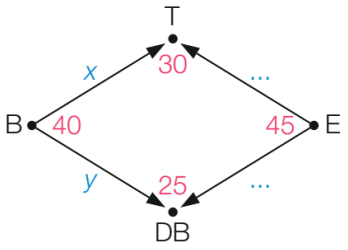
41

In Breda heeft de groothandel 40 bankstellen in voorraad en in Eindhoven zijn dat er 45.
Er komt een bestelling van 30 bankstellen binnen uit Tilburg en een bestelling van 25 bankstellen uit Den Bosch.
De vervoerskosten in euro's per bankstel staan in de tabel.

VERVOERSKOSTEN PER BANKSTEL IN EURO'S

	naar Tilburg	naar Den Bosch
van Breda	25	35
van Eindhoven	15	30

a Vul de open plaatsen van het schema hiernaast in.
b Schrijf de zes beperkende voorwaarden op.
c Hoeveel bankstellen gaan er van Breda naar Tilburg en van Breda naar Den Bosch in het geval dat de transportkosten minimaal zijn? Hoeveel zijn de minimale transportkosten?



A42

Een autoverhuurbedrijf heeft vestigingen in Amsterdam en Rotterdam. In Amsterdam zijn 24 auto's voorradig en in Rotterdam 32. Er komt een aanvraag binnen uit Utrecht voor 16 auto's en uit Leiden voor 28 auto's. De transportkosten van Rotterdam naar Utrecht zijn 24 euro per auto en die van Rotterdam naar Leiden 18 euro per auto. Vanuit Amsterdam zijn deze bedragen respectievelijk 20 euro en 14 euro.
Onderzoek wat de voordeligste manier is om de auto's vanuit de vestigingen naar de plaatsen Utrecht en Leiden te transporteren.

© Noordhoff Uitgevers bv

43

Een pensioenfonds wil 30 miljoen euro onderbrengen bij drie beleggingsfondsen A, B en C. In verband met administratieve regels dient in elk fonds minimaal 3 miljoen euro te worden ondergebracht. Verder moet minstens de helft bij de fondsen A en B samen worden ondergebracht, waarbij het bedrag bij B niet meer dan de twee keer het bedrag van A mag zijn.
De verwachte jaarlijkse opbrengst is 7% voor fonds A, 8% voor fonds B en 9% voor fonds C.
Je onderzoekt in deze opgave hoe je het bedrag over de fondsen moet verdelen om een maximale jaarlijkse opbrengst te krijgen.
Stel dat x het bedrag in miljoenen euro's is dat bij A wordt ondergebracht en dat y het bedrag in miljoenen euro's is dat bij B wordt ondergebracht.

a Druk het bedrag dat bij C wordt ondergebracht uit in x en y en toon aan dat hieruit de beperkende voorwaarde $x + y \leq 27$ volgt.

b Behalve $x \geq 3$ en $y \geq 3$ en de bij vraag a gevonden voorwaarde zijn er nog twee beperkende voorwaarden. Welke?

c Toon aan dat de doelfunctie R te schrijven is als $R = 2{,}7 - 0{,}02x - 0{,}01y$.

d Bereken hoe het bedrag van 30 miljoen euro over de fondsen moet worden verdeeld om een maximale jaarlijkse opbrengst te krijgen.

De voorwaarden $x \leq 30$ en $y \leq 30$ vervallen, want door de voorwaarde $x + y \leq 27$ is hieraan automatisch voldaan.
De voorwaarde $30 - x - y \leq 30$, oftewel $x + y \geq 0$ vervalt ook vanwege $x + y \geq 15$.

44

In een kantoor met een totale vloeroppervlakte van 6000 m^2 moet vloerbedekking worden gelegd. De soorten A, B en C komen in aanmerking.
Voor soort A zijn de afschrijvingskosten € 3,- per m^2 per jaar. Voor de soorten B en C zijn deze kosten € 1,50 respectievelijk € 1,- per m^2 per jaar.
Aan schoonmaakkosten rekent men voor soort A op € 5,-, voor soort B op € 8,- en voor soort C op € 10,- per m^2 per jaar. In totaal wil men per jaar niet meer dan € 40 000,- aan schoonmaakkosten hebben.
Hoeveel m^2 zal men met soort A, soort B en soort C moeten leggen om de jaarlijkse afschrijvingskosten te minimaliseren?

A45

Een olieraffinaderij produceert benzine, diesel en LPG.
De winst per liter is achtereenvolgens € 0,15, € 0,12 en € 0,10. Per dag wordt 100 000 liter geproduceerd. Er is een contract getekend dat inhoudt dat er per dag van elke soort minstens 5000 liter moet worden geproduceerd. Aan benzine en LPG samen moet minstens 50 000 liter geleverd worden en aan diesel en LPG samen minstens 20 000 liter.
Bij welke brandstofverdeling wordt de winst gemaximaliseerd?

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik weet wanneer een lineair programmeringsprobleem meer dan één oplossing heeft.
▶ OPGAVE C6a THEORIE A

☐ Ik kan een lineair programmeringsprobleem oplossen met behulp van de hoekpuntmethode.
▶ OPGAVE C6b THEORIE B

☐ Ik kan een transportprobleem oplossen met behulp van lineair programmeren.
▶ OPGAVE C7 THEORIE C

C6 Het toegestane gebied V is gegeven door $x \geq 0$ en $0 \leq y \leq 3$ en $4x + 3y \leq 12$ en $x \leq 2y$.

a Welke van de volgende doelfuncties leveren meer dan één oplossing op? Licht toe.

$R = 4x - 8y$ $\quad R = 7{,}5x + 10y$ $\quad R = 20x + 15y$

b Maximaliseer $W = 20x + 30y$ met behulp van de hoekpuntmethode.

C7 Een betonproducent heeft locaties in Lochem en Deventer. Op een ochtend is er in Lochem een voorraad van 50 m^3 beton en in Deventer een voorraad van 70 m^3 beton. De producent wordt gevraagd om een levering te doen van 30 m^3 beton in Raalte en van 55 m^3 beton in Vorden. De transportkosten per m^3 beton staan in de tabel hieronder.

TRANSPORTKOSTEN BETON IN EURO'S PER M^3

	naar Raalte	naar Vorden
van Lochem	15	6
van Deventer	10	13

Onderzoek met behulp van lineair programmeren wat de voordeligste manier is om het beton vanuit Lochem en Deventer naar de gewenste bestemmingen te transporteren.

Antwoorden

C6 **a** $R = 4x - 8y$ en $R = 20x + 15y$ *

b $W_{max} = 105$

C7

	naar Raalte	naar Vorden
van Lochem	0 m^3	50 m^3
van Deventer	30 m^3	5 m^3

© Noordhoff Uitgevers bv

K.5 Lineair programmeren met Excel

Kennis en vaardigheden

- Je kunt een lineair programmeringsprobleem oplossen met Excel.
- Je kent de begrippen speling en schaduwprijs.

O46

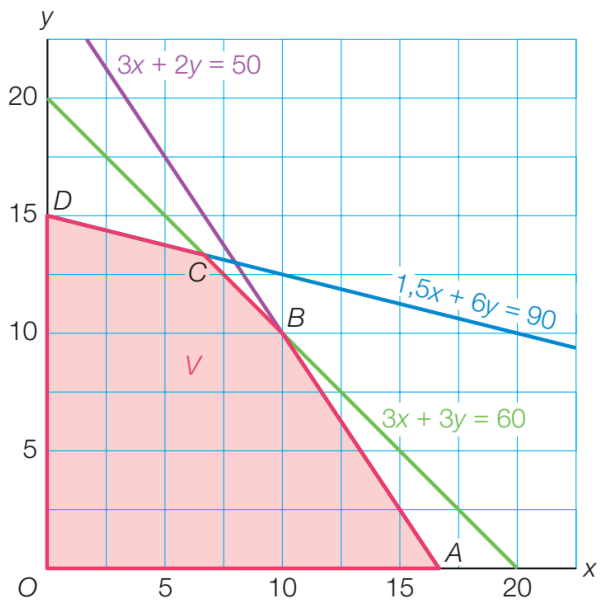
In een fabriek worden de producten A en B gemaakt. Bij de fabricage zijn drie machines nodig. Per week is machine I 60 uur beschikbaar, machine II is 50 uur beschikbaar en machine III is 90 uur beschikbaar.

	product A	product B	beschikbare tijd
machine I	3 uur	3 uur	60 uur
machine II	3 uur	2 uur	50 uur
machine III	1,5 uur	6 uur	90 uur
winst per kg	2 euro	5 euro	

In de tabel staat hoeveel machinetijd voor de fabricage van 1 kg van elk van de producten A en B nodig is.
Stel dat er per week x kg van product A geproduceerd wordt en y kg van product B. In de figuur zie je het toegestane gebied. Hierbij horen behalve $x \geq 0$ en $y \geq 0$ de volgende beperkende voorwaarden.

machine I $3x + 3y \leq 60$ (1)
machine II $3x + 2y \leq 50$ (2)
machine III $1{,}5x + 6y \leq 90$ (3)

De hoekpunten zijn $A(16\frac{2}{3}, 0)$, $B(10, 10)$, $C(6\frac{2}{3}, 13\frac{1}{3})$ en $D(0, 15)$.



a Welk productieprogramma maximaliseert de doelfunctie $W = 2x + 5y$? Bereken W_{max}.

b Van welke machine wordt de capaciteit niet volledig benut? Hoeveel uur is onbenut?

c Door een reorganisatie is het mogelijk machine I één uur per week langer in te zetten. De beperkende voorwaarde $3x + 3y \leq 60$ verandert hierdoor in $3x + 3y \leq 61$. Hierdoor veranderen de hoekpunten B en C in $B'(9\frac{1}{3}, 11)$ en $C'(7\frac{1}{9}, 13\frac{2}{9})$.
Onderzoek hoe W_{max} hierdoor verandert.

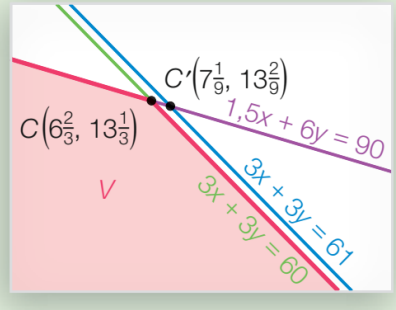
d De fabrikant kan kiezen tussen het één uur per week langer inzetten van machine I en het één uur langer inzetten van machine III.
Wat zal de fabrikant kiezen als hij een zo groot mogelijke winst nastreeft?

e Waarom zal het één uur langer inzetten van machine II geen invloed hebben op W_{max}?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie A De schaduwprijs van een beperkende voorwaarde

In opgave 46 heb je de doelfunctie $W = 2x + 5y$ gemaximaliseerd. Het optimale productieprogramma treedt op in het hoekpunt $C(6\frac{2}{3}, 13\frac{1}{3})$. Dit geeft $W_{max} = 80$.
In deze situatie wordt de capaciteit van machine II niet volledig benut. Immers machine II wordt $3 \cdot 6\frac{2}{3} + 2 \cdot 13\frac{1}{3} = 46\frac{2}{3}$ uur ingezet en blijft dus $50 - 46\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$ uur onbenut. We zeggen dat de **speling** van beperkende voorwaarde (2) gelijk is aan $3\frac{1}{3}$ uur.
Voor de fabrikant is het interessant welke invloed het één uur langer inzetten van een machine op de maximale winst W_{max} heeft. Bij machine II heeft dat geen invloed. Machine I één uur langer inzetten geeft het optimale productieprogramma bij het punt $C'(7\frac{1}{9}, 13\frac{2}{9})$. In dat geval is $W_{max} = 2 \cdot 7\frac{1}{9} + 5 \cdot 13\frac{2}{9} = 80\frac{1}{3}$.



Door machine I één uur langer in te zetten neemt de maximale winst met $80\frac{1}{3} - 80 \approx 0{,}33$ euro toe. We zeggen dat de **schaduwprijs** van beperkende voorwaarde (1) gelijk is aan 0,33 euro.
In deze situatie is de schaduwprijs de toename van de maximale winst als de bijbehorende machinetijd met één uur toeneemt.

Informatief Gevoeligheidsanalyse (van de doelfunctie)

Het uitzoeken welk effect veranderingen in de machinetijd hebben op de maximale winst is een onderdeel van de zogenaamde gevoeligheidsanalyse. Je gaat er hierbij van uit dat slechts één beperkende voorwaarde verandert en dat het bovendien om een kleine verandering gaat. Zou een machinetijd een grote verandering ondergaan, dan treedt het optimale productieprogramma niet meer in hetzelfde hoekpunt van het toegestane gebied op. We gaan daar in deze paragraaf verder niet op in.

In deze paragraaf leer je hoe je het computerprogramma Excel kunt gebruiken bij het oplossen van lineaire programmeringsproblemen. Je gebruikt daarbij de invoegtoepassing Solver. In de digitale leeromgeving staat een handleiding voor gebruik van het programma Spreadheets. Je zou ook online kunnen zoeken naar een oplosser voor lineaire programmeringsproblemen.
Het is bij gebruik van software mogelijk met meer dan twee variabelen te werken. Behalve het optimale productieprogramma en de maximale waarde van de doelfunctie geeft Excel meer informatie, zoals bij elke beperkende voorwaarde de speling en de schaduwprijs.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt Solver pas gebruiken nadat je deze hebt geïnstalleerd in Excel. Ga daarvoor naar het tabblad **Start** en zoek bij **Invoegtoepassingen** naar de toepassing met de naam **Solver**. Klik vervolgens op **Toevoegen**.

Omdat Solver alleen beschikbaar is in het Engels, zie je hiernaast een woordenlijst met de vertaling van de belangrijkste woorden die in Solver gebruikt worden.

Objective - Doelfunctie
Constraint - Randvoorwaarde
Slack - Speling
Shadow Price - Schaduwprijs

Het volgende lineaire programmeringsprobleem lossen we met Excel op.

Maximaliseer de winst $W = 2x + 3y$ onder de beperkende voorwaarden
I $5x + 2y \leq 100$
II $x + 4y \leq 150$
III $3x + y \leq 80$
waarbij de variabelen niet-negatief zijn.

- Open Excel en voer de volgende tabel in.

	A	B	C	D	E	F
1		waarde	voorw I	voorw II	voorw III	winst
2	x	0	5	1	3	2
3	y	0	2	4	1	3
4						

In kolom C herken je het linkerlid van voorwaarde I.

- Voer in cel C4 de formule B2×C2 + B3×C3 in.
  Voer in cel D4 de formule B2×D2 + B3×D3 in.
  Voer in cel E4 de formule B2×E2 + B3×E3 in.
  Voer in cel F4 de formule B2×F2 + B3×F3 in.

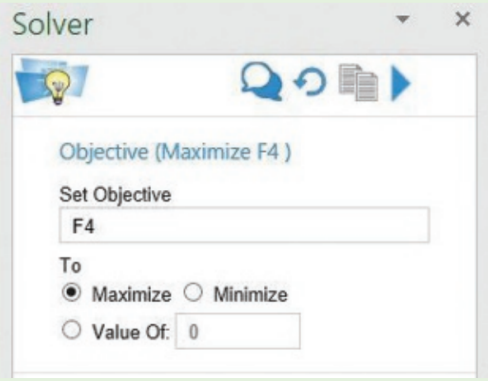
Om een formule in te voeren, begin je met =

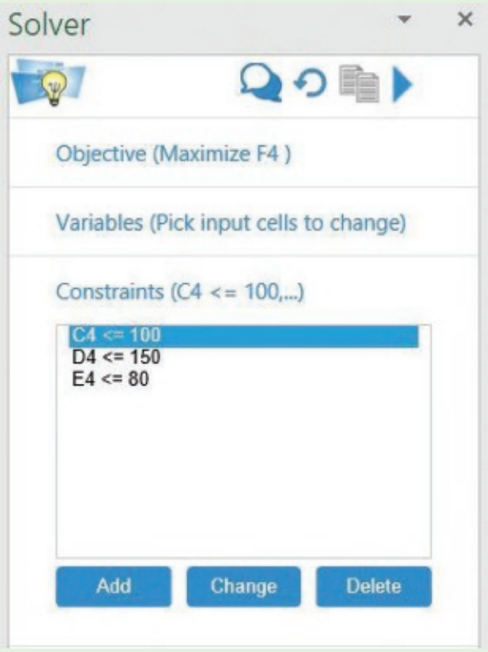
Je hebt nu van elke beperkende voorwaarde het linkerlid ingevoerd en in cel F4 de doelfunctie. Door de waarden van x en y te laten variëren, berekent Excel telkens de waarde van de linkerleden van de voorwaarden I, II en III en de waarde van de doelfunctie.

© Noordhoff Uitgevers bv

- Ga naar het tabblad **Invoegen** en kies bij **Invoegtoepassingen** voor **Mijn invoegtoepassingen**. Kies de invoegtoepassing **Solver**.
  Er verschijnt een invulscherm. Zie de bovenste figuur. Vul bij **Set Objective** F4 in.
- Bij **To:** kies je voor **Maximize**. Je wilt immers het maximum van de winst bepalen.

  Omdat de waarden van x en y variabel zijn, vul je bij **Variables** B2:B3 in door op **Add** te klikken. Sluit af met **OK**. Laat het vinkje bij **Assume Nonnegative** staan.
- Zorg bij **Constraints** voor C4 $\leq$ 100, D4 $\leq$ 150 en E4 $\leq$ 80. Klik daartoe op **Add** en sluit elke voorwaarde af met **OK**. Zie de onderste figuur.
- Klik bij **Model** op de knop **Diagnose** en wacht tot het probleem is geanalyseerd.
- Kies bij **Engines** voor **Standard LP/Simplex**.
- Klik op de **playknop** ▶ rechtsboven in beeld.
  In de tabel verschijnt de oplossing.





	A	B	C	D	E	F
1		waarde	voorw I	voorw II	voorw III	winst
2	x	5,5555556	5	1	3	2
3	y	36,111111	2	4	1	3
4			100	150	52,77778	119,4444

Je leest af $W_{max} \approx 119{,}44$ voor $x \approx 5{,}56$ en $y \approx 36{,}11$.

- Door op de knop , links naast de playknop, te drukken verschijnen de tabbladen met het gevoeligheidsrapport (**Sensitivity Report**) en het antwoordrapport (**Answer Report**).
  In het antwoordrapport lees je af dat alleen voorwaarde III een speling heeft. De speling is 27,22.
  In het gevoeligheidsrapport lees je de schaduwprijs af.

Afspraak
Rond in deze paragraaf zo nodig af op twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

47 Zie de theorie.

a Welke beperkende voorwaarden horen bij het snijpunt dat de optimale oplossing oplevert?

b Bij voorwaarde III is sprake van speling.
Hoe volgt hieruit dat de schaduwprijs 0 is?

c Stel dat voorwaarde I verandert in $5x + 2y \leq 101$.
Bereken met behulp van de schaduwprijs de nieuwe W_{max}.
Controleer je antwoord met Excel.

d Verander in Excel voorwaarde I in $7x + 3y \leq 200$ en voorwaarde III in $5x + 4y \leq 150$. Voorwaarde II verandert niet. Bereken W_{max} en geef het bijbehorende productieprogramma (x, y).
Vermeld bij elke voorwaarde de schaduwprijs en de speling.

48 Hieronder staat de oplossing van een lineair programmeringsprobleem. De uitkomst van de formule die geminimaliseerd is, staat in cel F4.

	A	B	C	D	E	F
1		waarde	voorw I	voorw II	voorw III	kosten
2	x	3	2	2	1	3
3	y	4	3	1	6	2
4			18	10	27	17

Schaduwprijs voorwaarde I is 0,25.
Schaduwprijs voorwaarde II is 1,25.
Schaduwprijs voorwaarde III is 0.

Speling voorwaarde I is 0.
Speling voorwaarde II is 0.
Speling voorwaarde III is 9.

Uit het bovenstaande volgt dat de beperkende voorwaarden $2x + 3y \geq 18$, $2x + y \geq 10$ en $x + 6y \geq 18$ zijn, en de formule van de doelfunctie $K = 3x + 2y$.

a Licht dit toe.

b Geef K_{min} in het geval de beperkende voorwaarde I verandert in $2x + 3y \geq 20$.

Ga bij de vragen c, d en e telkens weer uit van de oorspronkelijke situatie.

c Geef K_{min} in het geval voorwaarde II verandert in $2x + y \geq 9{,}5$.

Voer in Solver 9,5 in als 9.5.

d Stel dat je voorwaarde III verandert in $x + 6y \geq 26$.
Waarom heeft dit geen invloed op K_{min}? En hoe zit het als je beperkende voorwaarde III verandert in $x + 6y \geq 28$?

e Neem aan dat door verandering van het rechterlid van één van de beperkende voorwaarden de minimale kosten 16,5 worden.
Hoe moet je voorwaarde I veranderen om dit te bereiken? En hoe moet je voorwaarde II veranderen om dit effect te krijgen?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie B Lineair programmeren met meer dan twee variabelen

Met Excel zijn ook lineaire programmeringsproblemen met meer dan twee variabelen op te lossen.
Bij het volgende maximaliseringsprobleem hoort in Excel de tabel in de figuur.

Maximaliseer de doelfunctie Winst $= 3p + 2q + 0{,}8r + s$ onder de beperkende voorwaarden

I $2p + 3q + r \leq 40$ III $p + q + 5s \leq 70$

II $p + q + r + 2s \leq 60$ IV $2q + r + 2s \geq 35$

waarbij de variabelen niet-negatief zijn.

	A	B	C	D	E	F	G
1		waarde	voorw I	voorw II	voorw III	voorw IV	winst
2	p	0	2	1	1		3
3	q	0	3	1	1	2	2
4	r	0	1	1		1	0,8
5	s	0		2	5	2	1
6							

49

Zie het maximaliseringsprobleem van theorie B.

a Voer de tabel in Excel in, zet de juiste formules in rij 6 en vul het invulscherm van Solver in.

b Geef de maximale winst en het bijbehorende productieprogramma.

c Vermeld bij elke voorwaarde de speling en de schaduwprijs.

d Stel dat voorwaarde I verandert in $2p + 3q + r \leq 41$.
Welk gevolg heeft dat voor de maximale winst?

50

Los het volgende lineaire programmeringsprobleem op.

Maximaliseer de doelfunctie Winst $= 3p + 5q + 4r + 5s$ onder de beperkende voorwaarden

I $3p + 3q + 2r + 5s \leq 500$ III $4p - 3q - 3r + 7s \geq 40$

II $2p + 2q + 3r - 2s \leq 240$ IV $p + q - r \geq 60$

waarbij de variabelen niet-negatief zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

51 Los het volgende lineaire programmeringsprobleem op.

Minimaliseer de doelfunctie Kosten $= 2p + q + 3r + s$ onder de beperkende voorwaarden

I $p \geq 100 - q$ III $q + r \geq 100$

II $p \geq 150 - q - r$ IV $p + s \geq 200$

waarbij de variabelen niet-negatief zijn.

Bedenk dat $p \geq 100 - q$ op hetzelfde neerkomt als $p + q \geq 100$.

52 Meneer Noorda heeft 100 000 euro voor beleggingsdoeleinden beschikbaar. Een deel wil hij op een spaarrekening storten, een deel beleggen in aandelen en een deel besteden aan obligaties. Hij krijgt 5% rente per jaar op de spaarrekening en 8% rente per jaar op de obligaties. Voor het beleggen in aandelen kan hij kiezen uit de aandelen I en de aandelen II. Meneer Noorda gaat ervan uit dat aandelen I een rendement van 9,5% per jaar hebben en aandelen II een rendement van 10,5% per jaar. Om fiscale redenen en vanwege het spreiden van het risico neemt meneer Noorda de volgende voorwaarden in acht.

- Het totale bedrag op de spaarrekening en de obligaties samen moet meer zijn dan het bedrag voor de aandelen.
- Het bedrag op de spaarrekening is minstens 12 000 euro.
- Het bedrag aandelen I moet minstens de helft van het bedrag aandelen II zijn.
- Het bedrag aandelen II is maximaal 50 000 euro.

Meneer Noorda streeft naar een maximale opbrengst.

a Stel de vijf beperkende voorwaarden en de formule van de doelfunctie op.

b Los het probleem op met Excel.

c Geef een interpretatie van de speling 16 666,67.

d Met hoeveel euro daalt de maximale jaaropbrengst als meneer Noorda besluit minstens 15 000 euro op de spaarrekening te zetten? Bereken dit bedrag met behulp van een schaduwprijs.

e Geef een interpretatie van de schaduwprijs −0,0108 bij voorwaarde II.

f Met hoeveel euro stijgt de jaaropbrengst als meneer Noorda 10 000 euro meer te besteden zou hebben?

© Noordhoff Uitgevers bv

53 ⏍⊙∗

Meubelfabrikant Merkens (zie opgave 28) heeft een interne reorganisatie ondergaan, waardoor de beschikbare hoeveelheid werk per afdeling is toegenomen. Bovendien bestaat het assortiment behalve uit fauteuils en sofa's nu ook uit tafels. Raadpleeg voor verdere informatie de tabel.

afdeling	fauteuil	sofa	tafel	beschikbaar per dag
constructie	6 uur	3 uur	9 uur	900 uur
bekleding	4 uur	3 uur	0 uur	600 uur
afwerking	1 uur	1 uur	1 uur	200 uur
winst per stuk	640 euro	560 euro	480 euro	

a Stel x = aantal fauteuils per dag, y = aantal sofa's per dag en z = aantal tafels per dag.
Schrijf de winst W per dag als functie van x, y en z.

b Schrijf de drie beperkende voorwaarden op.

c Bereken met Excel de maximale winst per dag. Hoeveel fauteuils, sofa's en tafels worden er dan per dag gemaakt?

d Op grond van de computeruitvoer van vraag c besluit de directeur 50 uur op de constructieafdeling weg te halen en naar de afwerkingsafdeling te verplaatsen.
Licht toe dat op grond van de genoemde uitvoer deze beslissing te verdedigen is.

Informatief **Gereduceerde kosten**

In het gevoeligheidsrapport bij opgave 53d is te lezen dat er in de optimale situatie geen fauteuils gemaakt worden. Bij de gereduceerde kosten staat −213,33. Dit getal geeft aan dat de fabrikant in de optimale situatie pas weer fauteuils zal gaan maken als de winst op een fauteuil met minstens 213,33 euro zal toenemen.

E54 ∗

Zie opgave 53.

a Onderzoek of de maximale dagwinst nog verhoogd kan worden ten opzichte van de situatie in vraag d door met uren van de ene naar de andere afdeling te schuiven.

b De directeur wil per dag minstens 25 stuks van elk artikel maken. Verder wil ze dat de winst per dag minstens 120 000 euro is. Onderzoek of dit mogelijk is door de in totaal 1700 beschikbare uren per dag op een geschikte manier over de afdelingen te verdelen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan een lineair programmeringsprobleem oplossen met Excel.

☐ Ik ken de begrippen speling en schaduwprijs.

▶ OPGAVE C8a
THEORIE A EN B
▶ OPGAVE C8bc
THEORIE A

C8 In een fabriek worden de producten A, B en C gemaakt. Bij de fabricage zijn drie machines nodig.
In de tabel staat hoeveel machinetijd voor de fabricage van elk van de producten A, B en C nodig is. In de tabel kun je ook zien hoeveel uur per week de machines beschikbaar zijn en wat de winst is per kg van elk product.

	product A	product B	product C	beschikbare tijd
machine I	2 uur	3 uur	4 uur	100 uur
machine II	3 uur	2 uur	4 uur	90 uur
machine III	5 uur	6 uur	3 uur	135 uur
winst per kg	4 euro	7,5 euro	6,5 euro	

a Bereken W_{max}.
b Van welke machine wordt de capaciteit niet volledig benut? Hoeveel uur is onbenut?
c De fabrikant kan kiezen tussen het één uur per week langer inzetten van machine I en het één uur langer inzetten van machine III.
Wat zal de fabrikant kiezen als hij een zo groot mogelijke winst nastreeft?

Antwoorden

C8 **a** 204,5 euro
b machine II 6 uur
c machine I

© Noordhoff Uitgevers bv

Kennis- en vaardighedentest

K.1 Stelsels van lineaire vergelijkingen

1 Los op.

a $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - y = -1 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 1{,}5x - 2{,}5y = -5 \end{cases}$

2 Een fabrikant brengt ontbijtgranen op de markt die bestaan uit een mix van geroosterde havervlokken en gemengde noten. De prijs van de geroosterde havervlokken is 2 euro per kg en de prijs van de gemengde noten is 8 euro per kg.
De fabrikant wil dat de prijs van een kg ontbijtgranen € 4,40 wordt.
Stel dat één kg ontbijtgranen uit h kg geroosterde havervlokken en n kg gemengde noten bestaat.

a Stel twee vergelijkingen op in h en n.

b Bereken de samenstelling van de ontbijtgranen.

K.2 Ongelijkheden met twee variabelen

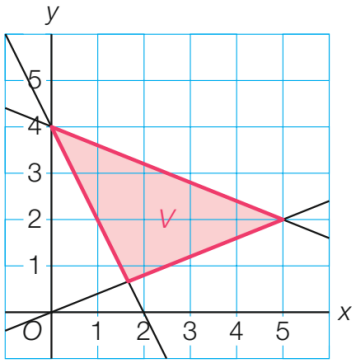
3 Kleur in verschillende figuren de grafieken.

a $2x - y \leq 0$ **c** $2x - 3y \geq -3$

b $x \leq 4$ **d** $y \geq 3$

4 **a** Geef de gecombineerde ongelijkheid die hoort bij het gebied V in de figuur.

b Bereken de coördinaten van het hoekpunt van V dat niet op een roosterpunt ligt.



K.3 Lineaire programmeringsproblemen

5 Een fietshandelaar gaat fietsen verkopen op een beurs. Hij neemt fietsen mee van het type trekking en van het type electric. De fietsen van het type trekking wegen 12 kg en leveren bij verkoop een winst op van 350 euro. De fietsen van het type electric wegen 27 kg en leveren bij verkoop een winst op van 650 euro. De handelaar wil graag minstens evenveel fietsen van het type trekking als van het type electric verkopen. Hij neemt de fietsen mee met een bakwagen waarin maximaal 50 fietsen passen. Het maximale toegestane gewicht van de fietsen in de bakwagen is 750 kg. Ga ervan uit dat de handelaar alle fietsen verkoopt die hij meeneemt naar de beurs en dat hij de winst wil maximaliseren.

a Voer de variabelen x en y in, stel de formule op van de doelfunctie en schrijf de beperkende voorwaarden op.

b Onderzoek wat de maximale winst is die de fietshandelaar kan maken. Hoeveel fietsen van elk type neemt hij dan mee?

© Noordhoff Uitgevers bv

K.4 De hoekpuntmethode

6 Van het toegestane gebied V is gegeven $0 \leq x \leq 20$ en $y \geq 0$ en $2x + 3y \leq 60$ en $2y - x \leq 5$.
Wat weet je van de programma's (x, y) die de doelfunctie $W = 10x + 15y$ maximaliseren? Bereken het maximum.

7 Een fabrikant van auto's heeft een productielijn waarop hij drie verschillende soorten auto's produceert. Per week worden er 4000 auto's op de productielijn geproduceerd.

De winst op een auto van type A is 800 euro, de winst op een auto van type B is 1000 euro en de winst op een auto van type C is 1700 euro. Voor het produceren van een auto van type A zijn 10 mensuren nodig. Voor de typen B en C zijn dat respectievelijk 12 en 18 mensuren. In totaal zijn er per week 54 000 mensuren beschikbaar.
In de auto's wordt gebruikgemaakt van elektromotoren voor de aandrijving. In de auto's van type A en B zit één elektromotor, in de auto's van type C zitten twee van deze elektromotoren. Per week zijn er maximaal 5500 elektromotoren beschikbaar.
Vanwege een reeds bekende order wil de fabrikant komende week minstens 500 auto's van type B produceren.
Onderzoek wat de maximale winst is die de autofabrikant kan maken. Hoeveel auto's van elk type produceert hij dan?

K.4 Lineair programmeren met Excel

8 Isa verkoopt de artikelen a, b, c en d. Bij de verkoop hoort de winstfunctie $W = 2a + 3b + c + 5d$ die Isa wil maximaliseren.
De beperkende voorwaarden waarmee Isa te maken heeft zijn:
$a + 2b + c + 3d \leq 2000$ en
$3a + 2b \leq 1500$ en
$c \geq 1200 - 2d$ en
$b + 2c - d \geq 100$ en
$a \geq 0$ en $b \geq 100$ en $c \geq 0$ en $d \geq 0$.
Los het lineaire programmeringsprobleem op met Excel.

© Noordhoff Uitgevers bv

Antwoorden Kennis- en vaardighedentests

Hoofdstuk 5

1 $y = 4(x-1)^3 - 4$

2
a $*$ (4, 5)
b $*$ (−1, 2)
c $*$ (2, 1)

3 $y = 6(x+1)^4 - 36$
(−1, −36)

4
a $A = -2a^3$
b $B = 19x^6 + 15x^5$
c $C = 11p^6q^3 - 14p^3q^5$

5
a a^{-3}
b a^{-3}
c a^{-7}

6
a $\frac{3a^2}{b^3}$
b $\frac{32}{a^5}$
c $\frac{2b^4}{7a}$

7
a $\frac{4}{a\sqrt{a}}$
b $\frac{\sqrt[5]{b}}{a^2}$
c $\frac{7 \cdot \sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[3]{a}}$

8
a $x^{2\frac{1}{3}}$
b $x^{-\frac{2}{3}}$
c $x^{-\frac{1}{2}}$

9
a $y = 7x^{\frac{2}{5}}$
b $y = 6x^{0,8}$
c $y = 5x^{-3\frac{1}{2}}$

10
a $A = 0{,}64 \cdot \sqrt[3]{b}$
b $B = 3 \cdot \sqrt[4]{pq}$

11
a $a = 64$ en $b = 5$
b $R = 7 + 1{,}58\sqrt{S}$
c $x = 1{,}91y^{0,8}$

12
a $p = 5 + \frac{3}{F-4}$
b $q = \frac{5G+1}{3-4G}$

13
a 0,356
b 68%
c 1,72

14
a 69 kg
b 134 cm
c $l = 0{,}42 \cdot \sqrt[3]{G}$

Hoofdstuk 6

1
a $\frac{1}{8}$
b $\frac{1}{16}$
c $\frac{5}{24}$
d $\frac{1}{8}$

2
a $\frac{19}{256}$
b $\frac{15}{256}$

3
a 0,740
b 0,182
c 0,863
d 0,591
e $*$

© Noordhoff Uitgevers bv

4 0,048

5 0,389

6 **a** 0,073
b 0,670
c 0,571

7 0,161

8 **a** 0,139
b 0,017
c 0,439
d 0,002

9 **a** 0,210
b 0,042
c 0,062
d 0,230

10 **a** 0,288
b 0,265

11 **a** 0,221
b 0,107
c 0,069
d 0,290
e 0,078
f 0,103

Hoofdstuk K

1 **a** $x = 2$ en $y = 3$
b $x = 2{,}5$ en $y = 3{,}5$

2 **a** $h + n = 1$ en $2h + 8n = 4{,}4$
b 0,6 kg geroosterde havervlokken en 0,4 kg noten

3 **a** *
b *
c *
d *

4 **a** $y \geq -2x + 4$ en
$y \leq -\frac{2}{5}x + 4$ en
$y \geq \frac{2}{5}x$
b $(1\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

5 **a** x = aantal fietsen type trekking
y = aantal fietsen type electric
$W = 350x + 650y$
$x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $x - y \geq 0$ en
$x + y \leq 50$ en $4x + 9y \leq 250$
b $W_{max} = 20\,500$ euro
40 trekking en 10 electric

6 elk punt op het lijnstuk BC
met $B(20, 6\frac{2}{3})$ en $C(15, 10)$
$W_{max} = 300$

7 4 750 000 euro bij 1500 type A, 1000 type B en 1500 type C

8 $W_{max} = 3180$ bij
$(a, b, c, d) = (120, 100, 240, 480)$

© Noordhoff Uitgevers bv

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm • Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen. • De toets Ans, en fouten verbeteren. • Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen. • Decimaal getal omzetten in een breuk.	vwo A/C deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 17
Formules en grafieken • Formules invoeren en grafieken plotten. • Tabellen maken en de tabelinstelling veranderen. • De opties snijpunt, nulpunt, maximum en minimum.	vwo A/C deel hoofdstuk 1 bladzijde 33
Allerlei • Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR.	

© Noordhoff Uitgevers bv

Overzicht Excel/Spreadsheets-modules

Module	
Data invoeren • lege werkmap aanmaken • data handig invoeren in rijen en kolommen • vulgreep gebruiken • cellen opmaken	vwo A/C deel 2 hoofdstuk 7 bladzijde 102
Formules en verwijzingen • absolute verwijzingen naar cellen • relatieve verwijzingen naar cellen • verwijzingen gebruiken in formules	vwo A/C deel 2 hoofdstuk 7 bladzijde 102
Diagrammen • lijn-, staaf-, stapel- en cirkeldiagrammen maken	vwo A/C deel 2 hoofdstuk 7 bladzijde 104
Boxplots • boxplots maken	vwo A/C deel 2 hoofdstuk 7 bladzijde 108
Zoeken in een datatset • omzetten van nette dataset in Tabel • sorteren en filteren • bij gebruik van Excel: werken met totaalrij	vwo A/C deel 2 hoofdstuk 7 bladzijde 111
Hercoderen • hercoderen van variabelen	vwo A/C deel 2 hoofdstuk 7 bladzijde 114
Draaitabellen • draaitabellen maken	vwo A/C deel 2 hoofdstuk 7 bladzijde 117
Groeperen en draaigrafieken • groeperen van waarden in draaitabellen • maken van draaigrafieken	vwo A/C deel 2 hoofdstuk 7 bladzijde 119
Groeperen van datums • groeperen van datums	vwo A/C deel 2 hoofdstuk 7 bladzijde 123

© Noordhoff Uitgevers bv

Trefwoordenregister

A
a priori kans *58*
afhankelijk *64*
afhankelijke gebeurtenis *64*

B
beeldgrafiek *9*
beperkende voorwaarde *138*
betrouwbaarheidsinterval *113*
boxplot *107*

C
centrummaat *106*
coëfficiënt *35*
combinatie *53*
complementregel *75*

D
Dantzig, George *143*
dataset *111*
digitaal rekenblad *102*
doelfunctie *140*
draaigrafiek *119*
draaitabel *117*

E
elimineren *127*
elkaar uitsluiten *70*
empirische kans *58*
exact *54*
exponent *17*

F
filteren *111*

G
gebeurtenis *50*
gebroken formule *32*
gecombineerde ongelijkheid *135*
gemiddelde *106*
gereduceerde kosten *164*
groeperen *119*
grondtal *17*
gunstige uitkomsten *51*

H
halfvlak *134*
halfvlak met rand *134*
hercoderen *114*
herschaling in verticale richting *13*
hoekpuntmethode *149*
hogeremachtswortel *22*

I
interkwartielafstand *107*
isolijn *140*

K
kans *50*
  a priori - *58*
  empirische - *58*
  theoretische - *58*
  voorwaardelijke - *60*
kansboom *67*
kansdefinitie van Laplace *51*
kansexperiment *54*
kansexperimenten herhalen *72*
Karmarkar, Narendra *151*
kleine steekproef uit grote populatie *88*

L
lineair programmeren *141*
lineair programmerings-probleem *143*
lineaire vergelijking met twee variabelen *126*

M
machten *17*, *18*
  rekenregels voor - *17*, *18*
machten met gebroken exponenten *23*
machten met negatieve exponenten *19*
machtsformule *30*, *36*
machtsverband *8*, *35*
maximum *11*
mediaan *106*
met terugleggen *84*
minimum *11*
modus *106*

N
nette dataset *111*

O
onafhankelijk *64*, *67*
onafhankelijke gebeurtenis *64*

P
permutatie *52*
productieprogramma *139*
productregel *68*, *72*
productregel voor onafhankelijke kansexperimenten *68*, *72*
punt van symmetrie *8*, *11*

R
record *111*
rekenblad *102*
rekenregels voor machten *17*, *18*

© Noordhoff Uitgevers bv

S
samengesteld
kansexperiment *54*
schaduwprijs *158*
somregel voor kansen *70*
sorteren *111*
speling *158*
spreadsheet *102*
spreidingsbreedte *107*
spreidingsmaat *107*
standaardafwijking *107*
standaardformule *9*
standaardgrafiek *9*
stelsel *127*
stelsel lineaire
vergelijkingen *127*

T
terugleggen *84*
met - *84*
zonder - *84*
theoretische kans *58*
toegestane gebied *138*
transportprobleem *153*

U
uitbijter *108*
uitschieter *108*
uitsluiten *70*

V
vaasmodel *81*
vaasmodel met
terugleggen *84*
vaasmodel zonder
terugleggen *84*
verschuiving *9*
verticaal herschalen *13*
voorwaardelijke kans *60*

W
wet van de grote
aantallen *57*
wisseleigenschap *32*
wortelformule *26*

Z
zonder terugleggen *84*

© Noordhoff Uitgevers bv

Verantwoording

Beeld
Illustraties: Oscar Casander, Arnhem
Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Foto's
Getty Images: p. 6-7, 98, 167
Shutterstock: p. 37, 38 b, 39, 40, 43, 65, 83, 86, 89, 91, 92, 100-101, 115, 118, 131, 132
iStockphoto: p. 48-49, 57, 74, 124-125
ANP / Hollandse Hoogte / Patricia Rehe: p. 77
ANP / Hollandse Hoogte / Tobias Kleuver: p. 97
ANP / Soenar Chamid sportfotografie / Sander Chamid: p. 112
Ed Souza / Stanford News Service: p. 143
ANP / Fotopersburo Dijkstra bv: p. 147
Wikimedia Commons: p. 151
Imageselect: p. 152

Colofon
Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlenen.

0 / 25

MIX
Papier | Ondersteunt verantwoord bosbeheer
FSC® C118189
FSC www.fsc.org

© 2025 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06462-4

© Noordhoff Uitgevers bv

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten

+

Actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten

Noordhoff

MIX
Papier | Ondersteunt verantwoord bosbeheer
FSC® C118189

www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-06462-4

9 789001 064624