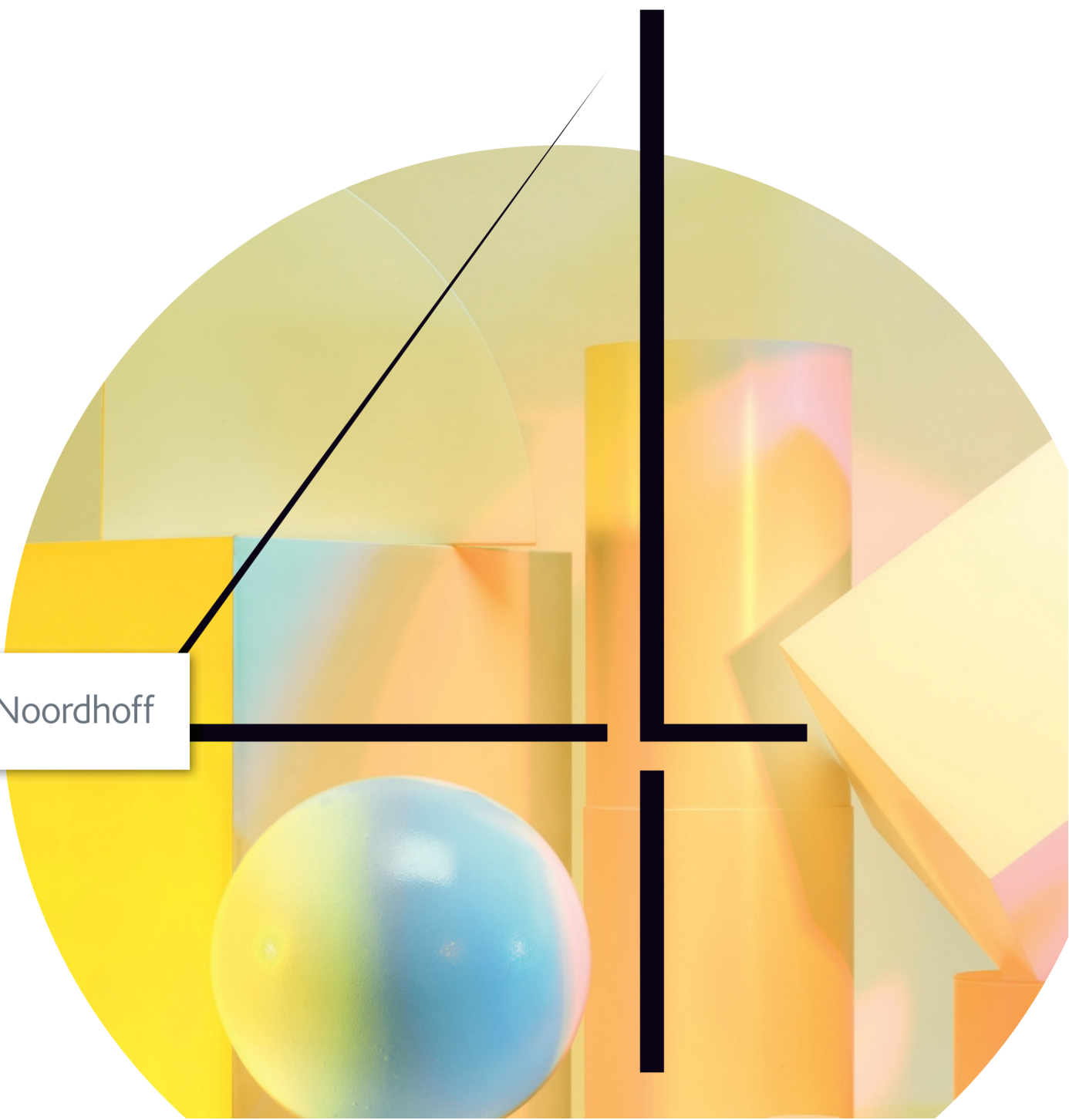


getal & ruimte

A/C



Noordhoff



Getal & Ruimte

Uitwerkingen vwo A/C deel 2

Dertiende editie, 2025

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd

Inhoud

5	Machtsverbanden	4
6	Kansrekening	33
7	Statistiek met de computer	57
K	Keuzeonderwerp Lineair programmeren	77

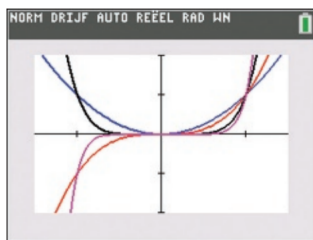
5 Machtsverbanden

5.1 Grafieken veranderen

Bladzijde 8

1

a



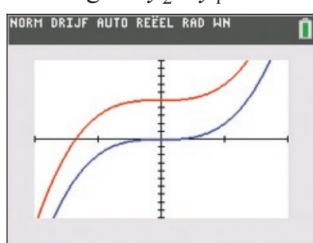
- b De punten $(0, 0)$ en $(1, 1)$ liggen op elk van deze grafieken.
 c Van de grafieken $y_1 = x^2$ en $y_3 = x^6$ ligt geen enkel punt onder de x -as.

2

a

Voor $x = 1$ is $y_1 = 2$ en $y_2 = 2 + 5 = 7$.
 Voor $x = 2$ is $y_1 = 16$ en $y_2 = 16 + 5 = 21$.
 Voor $x = 3$ is $y_1 = 54$ en $y_2 = 54 + 5 = 59$.
 Steeds geldt $y_2 = y_1 + 5$.

b



De grafiek van y_2 ontstaat door de grafiek van y_1 5 omhoog te verschuiven.

3

a

$x = 3$ geeft $y_1 = 54$ en $x = 5$ geeft $y_2 = 54$.
 Voor $x = 3$ krijg je $y_1 = 2 \cdot 3^3$ en voor $x = 5$ krijg je $y_2 = 2 \cdot (5 - 2)^3 = 2 \cdot 3^3$.

b

Dan moet je $x = 8$ nemen, immers $x = 8$ geeft $y_3 = 2(8 - 5)^3 = 2 \cdot 3^3$.

Bladzijde 10

4

a

$y = -5x^2$
 $\downarrow$ verschuiving $(2, 5)$
 $y = -5(x - 2)^2 + 5$

$y = -5x^2$
 $\downarrow$ verschuiving $(-3, 6)$
 $y = -5(x + 3)^2 + 6$

$y = -5x^2$
 $\downarrow$ verschuiving $(7, 0)$
 $y = -5(x - 7)^2$

b

$y = 4x^5$
 $\downarrow$ verschuiving $(-5, 7)$
 $y = 4(x + 5)^5 + 7$

$y = 4x^5$
 $\downarrow$ verschuiving $(0, -10)$
 $y = 4x^5 - 10$

5

a

$y = 5x^2 + 1$
 $\downarrow$ verschuiving $(4, 6)$
 $y = 5(x - 4)^2 + 1 + 6 = 5(x - 4)^2 + 7$

b

$y = -x^4 + 2$
 $\downarrow$ verschuiving $(4, 6)$
 $y = -(x - 4)^4 + 2 + 6 = -(x - 4)^4 + 8$

c

$y = (x - 6)^3$
 $\downarrow$ verschuiving $(4, 6)$
 $y = (x - 4 - 6)^3 + 6 = (x - 10)^3 + 6$

d

$y = 3(x - 5)^6 + 8$
 $\downarrow$ verschuiving $(4, 6)$
 $y = 3(x - 4 - 5)^6 + 8 + 6 = 3(x - 9)^6 + 14$

e

$y = -2(x + 4)^5 + 6$
 $\downarrow$ verschuiving $(4, 6)$
 $y = -2(x - 4 + 4)^5 + 6 + 6 = -2x^5 + 12$

f $y = -2(x-4)^2 - 6$
 $\downarrow$ verschuiving (4, 6)
 $y = -2(x-4-4)^2 - 6 + 6 = -2(x-8)^2$

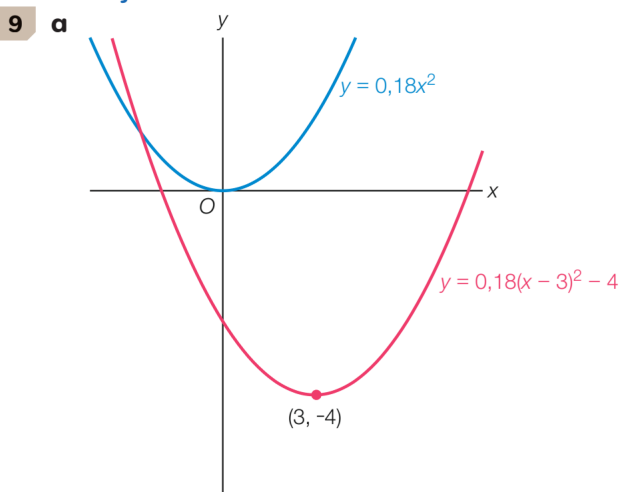
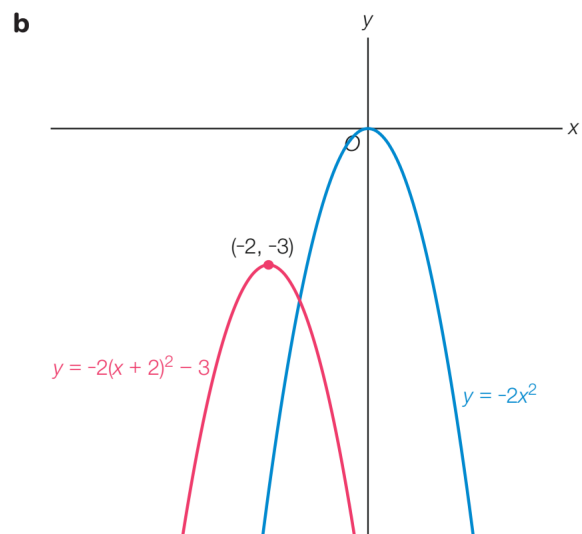
- 6 a $y = 5x^6$
 $\downarrow$ verschuiving (8, -3)
 $y = 5(x-8)^6 - 3$
 b $y = -x^4$
 $\downarrow$ verschuiving (7, -8)
 $y = -(x-7)^4 - 8$
 c $y = -3x^4 + 6$
 $\downarrow$ verschuiving (-4, 0)
 $y = -3(x+4)^4 + 6$
 d $y = x^5 + 6$
 $\downarrow$ verschuiving (-8, -3)
 $y = (x+8)^5 + 6 - 3 = (x+8)^5 + 3$
 e $y = 2(x-3)^2$
 $\downarrow$ verschuiving (5, 0)
 $y = 2(x-5-3)^2 = 2(x-8)^2$
 f $y = -5(x-1)^3 + 8$
 $\downarrow$ verschuiving (2, -7)
 $y = -5(x-2-1)^3 + 8 - 7 = -5(x-3)^3 + 1$

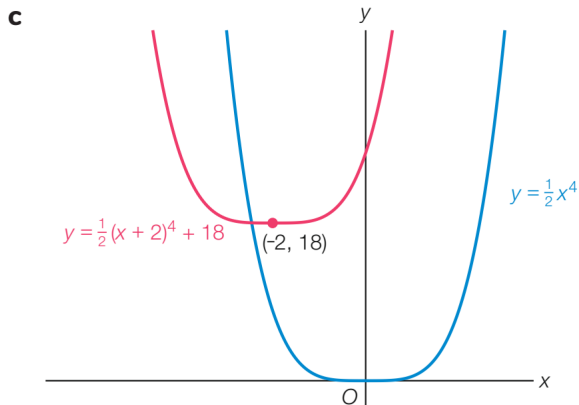
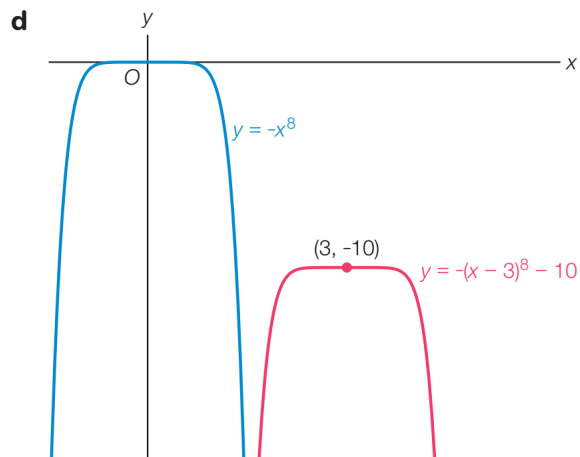
7 $y = -\frac{1}{2}(x-2+3)^2 - 5 + q = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 5 + q = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) - 5 + q$
 $= -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} - 5 + q = -\frac{1}{2}x^2 - x - 5\frac{1}{2} + q$
 Er moet gelden $-\frac{1}{2}x^2 - x - 5\frac{1}{2} + q = -\frac{1}{2}x^2 - x$.
 Hieruit volgt dat $-5\frac{1}{2} + q = 0$, dus $q = 5\frac{1}{2}$.

Bladzijde 11

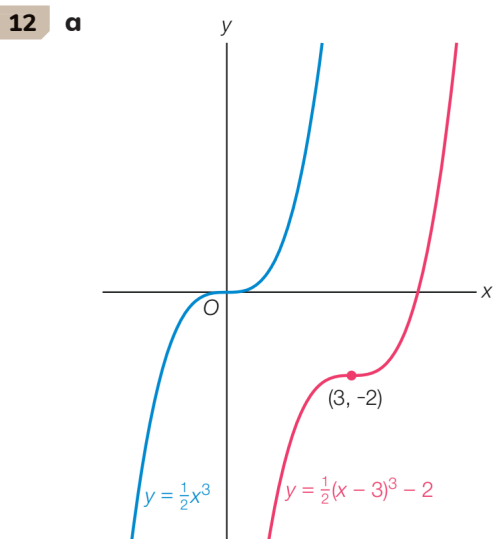
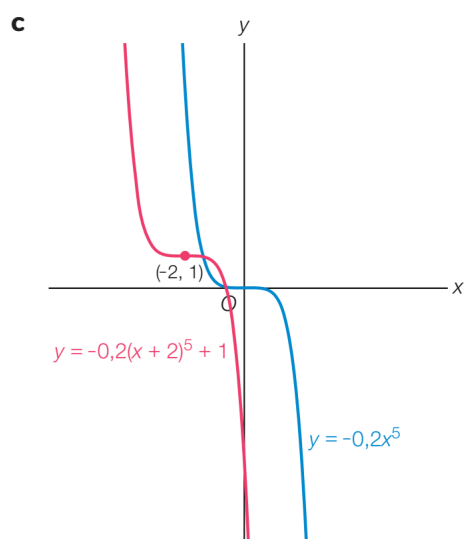
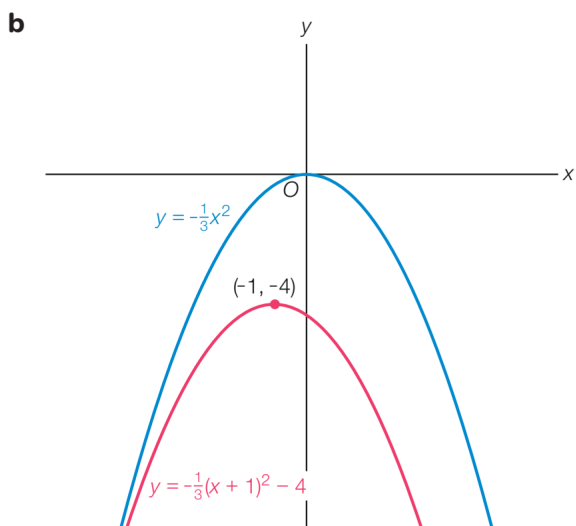
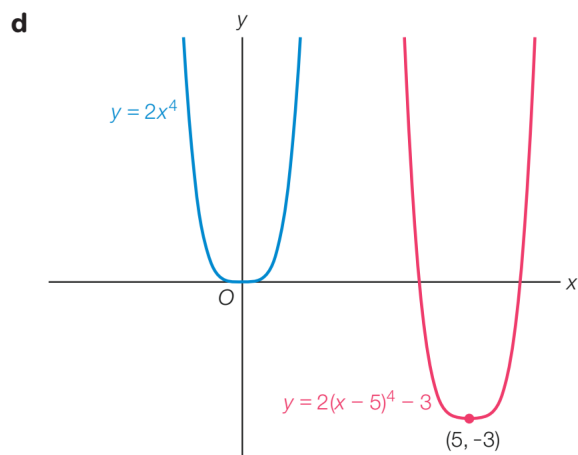
- 8 a De grafiek van $y = 2x^2$ heeft als top $O(0, 0)$.
 b Als de grafiek 4 naar links en 1 naar boven wordt geschoven, dan wordt de top $(-4, 1)$.
 c $y = 2x^2$
 $\downarrow$ verschuiving $(-4, 1)$
 $y = 2(x+4)^2 + 1$
 De formule van de beeldgrafiek is $y = 2(x+4)^2 + 1$.
 Hieraan kun je zien dat de grafiek van $y = 2x^2$ met top $O(0, 0)$ 4 naar links en 1 naar boven is verschoven, dus dat de top van de beeldgrafiek $(-4, 1)$ is.

Bladzijde 12



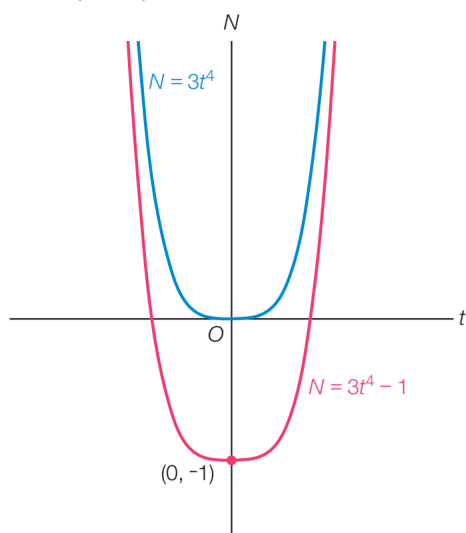


- 10**
- a** Het minimum is -4 voor $x = 3$.
 - b** Het maximum is -3 voor $x = -2$.
 - c** Het minimum is 18 voor $x = -2$.
 - d** Het maximum is -10 voor $x = 3$.
- 11**
- a** De coördinaten van de top zijn $(5, 8)$.
 - b** De coördinaten van de top zijn $(0, 7)$.
 - c** De coördinaten van de top zijn $(-8, 0)$.
 - d** De coördinaten van het punt van symmetrie zijn $(8, 12)$.
 - e** De coördinaten van de top zijn $(100, 0)$.
 - f** De coördinaten van de top zijn $(-0,15; -0,3)$.

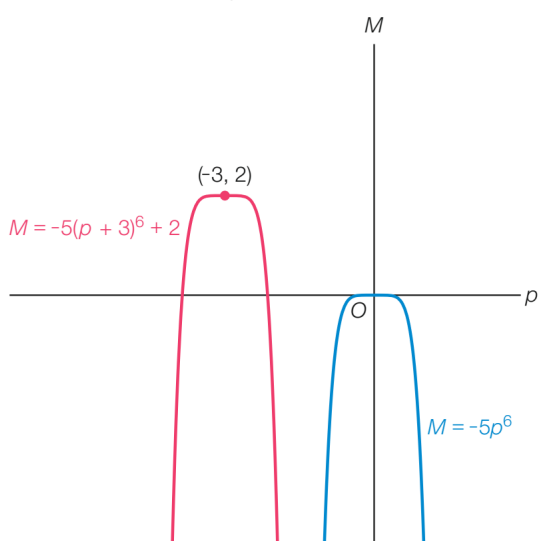


Bladzijde 13

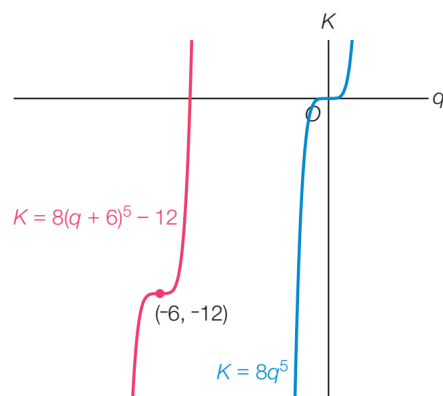
13 a $N = 3(t^4 - 2) + 5 = 3t^4 - 6 + 5 = 3t^4 - 1$



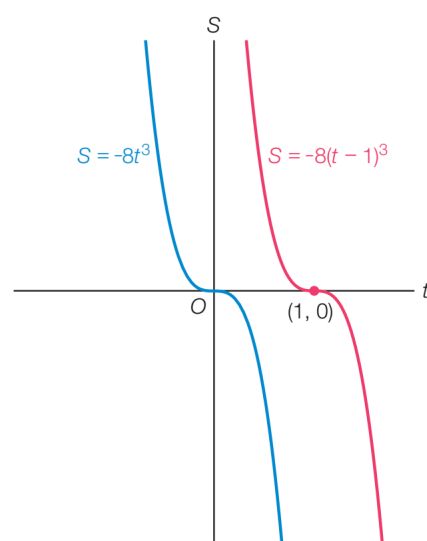
b



c



d



14 $A = a(t-2)^4 + b$ en het maximum is 10, dus $b = 10$.

$$\begin{aligned} A &= a(t-2)^4 + 10 \\ \text{door } (4, 2) &\left\{ \begin{aligned} a(4-2)^4 + 10 &= 2 \\ a \cdot 2^4 + 10 &= 2 \end{aligned} \right. \\ 16a &= -8 \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

15 Voer in $y_1 = x^2 - 10x + 26$ en $y_2 = x^2 - 2x + 4$.
De optie minimum bij y_1 geeft $x = 5$ en $y = 1$.
De optie minimum bij y_2 geeft $x = 1$ en $y = 3$.
Dus de top is van $(1, 3)$ naar $(5, 1)$ verschoven.
De verschuiving is dus $(4, -2)$.

16 a $x = 2$ geeft $y = 0$, $x = 3$ geeft $y = 1$ en $x = 4$ geeft $y = 16$.

b $x = 2$ geeft $y = 0$, $x = 3$ geeft $y = 3$ en $x = 4$ geeft $y = 48$.

c De uitkomsten bij vraag b zijn 3 keer de uitkomsten bij vraag a.

Bladzijde 14

17 a Bij spiegelen in de x -as neem je van de y -coördinaten het tegenovergestelde. Dat is hetzelfde als herschalen in de verticale richting met factor -1 .
Dus herschalen in verticale richting met factor -1 komt op hetzelfde neer als spiegelen in de x -as.

- b** $y = 3(x - 1)^2 - 6$
 $\downarrow$ spiegelen in de x -as
 $y = -(3(x - 1)^2 - 6) = -3(x - 1)^2 + 6$
 De formule van de beeldgrafiek is $y = -3(x - 1)^2 + 6$.

- 18 a** $y = \frac{1}{2}(x + 1)^3$
 $\downarrow$ vert. herschaling factor 5
 $y = 5(\frac{1}{2}(x + 1)^3) = 2\frac{1}{2}(x + 1)^3$
 De formule van de beeldgrafiek is $y = 2\frac{1}{2}(x + 1)^3$.

- b** $y = 0,6(x - 2)^6 - 4$
 $\downarrow$ vert. herschaling factor $\frac{1}{4}$
 $y = \frac{1}{4}(0,6(x - 2)^6 - 4) = 0,15(x - 2)^6 - 1$
 De formule van de beeldgrafiek is $y = 0,15(x - 2)^6 - 1$.

- 19 a** $y_1 = 0,3x^2$
 $\downarrow$ verschuiving $(-5, 6)$
 $y_2 = 0,3(x + 5)^2 + 6$
 $y_3 = 3 \cdot y_2 = 3(0,3(x + 5)^2 + 6) = 0,9(x + 5)^2 + 18$
 De formule is $y_3 = 0,9(x + 5)^2 + 18$.
 De top is $(-5, 18)$.

- b** $y_1 = 0,5x^4$
 $y_2 = -4 \cdot y_1 = -4 \cdot 0,5x^4 = -2x^4$
 $\downarrow$ verschuiving $(-3, 5)$
 $y_3 = -2(x + 3)^4 + 5$
 De top is $(-3, 5)$.

- c** $y_1 = -3x^5 + 4$
 $\downarrow$ verschuiving $(2, -7)$
 $y_2 = -3(x - 2)^5 - 3$
 $y_3 = 6 \cdot y_2 = 6(-3(x - 2)^5 - 3) = -18(x - 2)^5 - 18$
 De formule is $y_3 = -18(x - 2)^5 - 18$.
 Het punt van symmetrie is $(2, -18)$.

Bladzijde 15

- 20 a** $y = -0,12x^2$
 $\downarrow$ verschuiving $(4, 5)$
 $y = -0,12(x - 4)^2 + 5$
 $\downarrow$ vert. herschaling factor 4
 $y = 4(-0,12(x - 4)^2 + 5) = -0,48(x - 4)^2 + 20$
 De formule van de beeldgrafiek is $y = -0,48(x - 4)^2 + 20$.
 De top is $(4, 20)$.

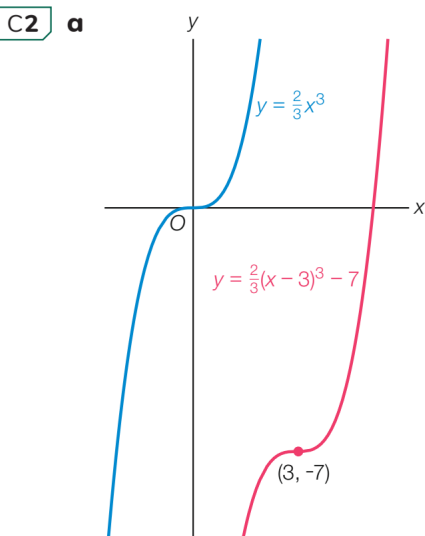
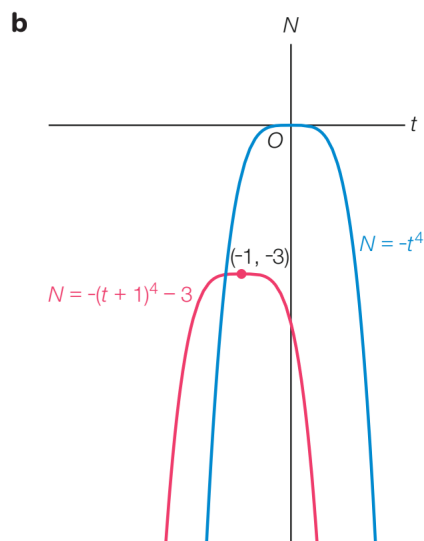
- b** $y = 3(x - 4)^2 - 8$
 $\downarrow$ verschuiving $(-5, 2)$
 $y = 3(x + 5 - 4)^2 - 8 + 2 = 3(x + 1)^2 - 6$
 $\downarrow$ vert. herschaling factor -4
 $y = -4(3(x + 1)^2 - 6) = -12(x + 1)^2 + 24$
 De formule van de beeldgrafiek is $y = -12(x + 1)^2 + 24$.
 De top is $(-1, 24)$.

- c** $y = -1\frac{1}{2}(x + 3)^3 + 8$
 $\downarrow$ vert. herschaling factor 2
 $y = 2(-1\frac{1}{2}(x + 3)^3 + 8) = -3(x + 3)^3 + 16$
 $\downarrow$ verschuiving $(8, 20)$
 $y = -3(x - 8 + 3)^3 + 16 + 20 = -3(x - 5)^3 + 36$
 De formule van de beeldgrafiek is $y = -3(x - 5)^3 + 36$.
 Het punt van symmetrie is $(5, 36)$.

21 $y_1 = 0,1x^3$
 $y_2 = 4 \cdot y_1 = 4 \cdot 0,1x^3 = 0,4x^3$
 $y_3 = \frac{1}{5} \cdot y_2 = \frac{1}{5} \cdot 0,4x^3 = 0,08x^3$
 $\downarrow$ verschuiving $(6, p)$
 $y_4 = 0,08(x-6)^3 + p$
 $y_4 = 0,08(x-6)^3 + p$
door $(0, 0)$ $\left. \begin{array}{l} 0,08(0-6)^3 + p = 0 \\ -17,28 + p = 0 \\ p = 17,28 \end{array} \right\}$

Bladzijde 16

C1 **a** $y = -\frac{1}{2}x^2$
 $\downarrow$ verschuiving $(-3, 2)$
 $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 2$
b $y = \frac{1}{3}(x-2)^3 - 3$
 $\downarrow$ verschuiving $(-5, -4)$
 $y = \frac{1}{3}(x+5-2)^3 - 3 - 4 = \frac{1}{3}(x+3)^3 - 7$



C3 $y = 0,23x^4$
 $\downarrow$ verschuiving $(5, -6)$
 $y = 0,23(x-5)^4 - 6$
 $\downarrow$ vert. herschaling factor 3
 $y = 3(0,23(x-5)^4 - 6) = 0,69(x-5)^4 - 18$
De formule van de beeldgrafiek is $y = 0,69(x-5)^4 - 18$.

5.2 Rekenen met machten

Bladzijde 18

V1 **a** $2p^3 \cdot 3p^2 = 6p^5$
b $-2p^4q^3 \cdot -3pq = 6p^5q^4$
c $(p^2q)^3 = p^6q^3$
d $(-5x^2y^3)^2 = 25x^4y^6$

V2 **a** $\frac{5x^{10}}{15x^5} = \frac{1}{3}x^5$ **c** $\frac{-15p^6q}{5p^2q} = -3p^4$
b $\frac{24a^4b^2}{6ab} = 4a^3b$ **d** $\frac{(2ab)^3}{(3ab)^2} = \frac{8a^3b^3}{9a^2b^2} = \frac{8}{9}ab$

V3 a $(3a)^2 \cdot (2a^2)^3 = 9a^2 \cdot 8a^6 = 72a^8$

b $(\frac{1}{2}a)^2 + (-a)^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2 = 1\frac{1}{4}a^2$

c $(\frac{9a^4}{a})^2 = \frac{81a^8}{a^2} = 81a^6$

d $(-2ab)^3 \cdot b = -8a^3b^3 \cdot b = -8a^3b^4$

e $12a^4b \cdot \frac{1}{4}ab - 8ab = 3a^5b^2 - 8ab$

f $(5a^4)^2 + (-a^2)^4 = 25a^8 + a^8 = 26a^8$

22 $A = (3xy)^2 - \frac{6x^3y^4}{2xy^2} = 9x^2y^2 - 3x^2y^2 = 6x^2y^2$

Bladzijde 19

23 Bij $(2a^3)^2 = 4a^6$ gebruik je de regel $(ab)^p = a^p b^p$ en vervolgens de regel $(a^p)^q = a^{pq}$.

Bij $(a^2)^3 = a^6$ gebruik je de regel $(a^p)^q = a^{pq}$.

Bij $a^3 \cdot a^2 = a^5$ gebruik je de regel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

Bij $\frac{12x^3y}{3xy} = 4x^2$ gebruik je de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.

Bij $(4xy)^2 = 16x^2y^2$ gebruik je de regel $(ab)^p = a^p b^p$.

Bij $\frac{16x^2y^2}{2xy^2} = 8x^2$ gebruik je de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.

24 a $A = (4x^3)^2 - 3x^5 \cdot 2x = 16x^6 - 6x^6 = 10x^6$

b $B = \frac{15a^3b}{5ab} - (1\frac{1}{2}a)^2 = 3a^2 - 2\frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$

c $C = 3p^2q \cdot 4pq - \frac{(6p^2q^2)^2}{9pq^2} = 12p^3q^2 - \frac{36p^4q^4}{9pq^2} = 12p^3q^2 - 4p^3q^2 = 8p^3q^2$

25 a $P = 6a^2 \cdot 4a^3 - 5a^4 \cdot 3a - (2a^2)^3 = 24a^5 - 15a^5 - 8a^6 = 9a^5 - 8a^6$

b $Q = \frac{28x^6}{7x} - \frac{(3x^2y)^3}{2xy^3} = 4x^5 - \frac{27x^6y^3}{2xy^3} = 4x^5 - 13\frac{1}{2}x^5 = -9\frac{1}{2}x^5$

c $R = (3p^2q)^2 - \frac{2p^5q^3}{pq} + (2p^2)^2 - (3q)^2 = 9p^4q^2 - 2p^4q^2 + 4p^4 - 9q^2 = 7p^4q^2 + 4p^4 - 9q^2$

26 $2^{a+6} \cdot 3^4 \cdot 5^a = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 2^a \cdot 5^a = 64 \cdot 81 \cdot (2 \cdot 5)^a = 5184 \cdot 10^a$

Dat getal is 5184 met a nullen erachter. Het laatste cijfer voor de nullen is dus een 4.

27 a Als de exponent 1 lager wordt, dan deel je de vorige uitkomst door 2.

Dus $2^1 = \frac{4}{2} = 2$, $2^0 = \frac{2}{2} = 1$, $2^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$ en $2^{-2} = \frac{(\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$.

b $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ en $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

c $x^{-1} = \frac{1}{x}$ en $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

Bladzijde 21

28 a $(a^3)^{-2} = a^{-6}$

b $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$

c $\frac{a^8}{a^0} = \frac{a^8}{1} = a^8$

d $\frac{a}{a^{12}} = \frac{a^1}{a^{12}} = a^{1-12} = a^{-11}$

e $a^4 \cdot \frac{1}{a^6} = a^4 \cdot a^{-6} = a^{-2}$

f $\frac{(\frac{1}{a^5})}{a} = \frac{a^{-5}}{a^1} = a^{-5-1} = a^{-6}$

g $\frac{a^n}{(\frac{1}{a^4})} = \frac{a^n}{a^{-4}} = a^{n-(-4)} = a^{n+4}$

h $\frac{(\frac{1}{a^n})}{a^{-3}} = \frac{a^{-n}}{a^{-3}} = a^{-n-(-3)} = a^{-n+3}$

i $\frac{1}{a^8} \cdot (a^3)^n = a^{-8} \cdot a^{3n} = a^{-8+3n}$

- 29**
- a $\frac{1}{3}a^{-3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{3a^3}$
 - b $\frac{3}{5}a^{-4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{a^4} = \frac{3}{5a^4}$
 - c $6a^{-5}b^3 = 6 \cdot \frac{1}{a^5} \cdot b^3 = \frac{6b^3}{a^5}$
 - d $\frac{1}{6}a^{-2}b^4 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot b^4 = \frac{b^4}{6a^2}$
 - e $(5a^{-4}b^2)^{-1} = 5^{-1} \cdot (a^{-4})^{-1} \cdot (b^2)^{-1} = \frac{1}{5} \cdot a^4 \cdot b^{-2} = \frac{1}{5} \cdot a^4 \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{a^4}{5b^2}$
 - f $(\frac{1}{2}a)^{-3} = (\frac{1}{2})^{-3} \cdot a^{-3} = (2^{-1})^{-3} \cdot \frac{1}{a^3} = 2^3 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{8}{a^3}$
 - g $-4 \cdot (3a)^{-2} = \frac{-4}{(3a)^2} = \frac{-4}{9a^2}$
 - h $(3a)^{-2}b^{-3} = \frac{1}{(3a)^2 \cdot b^3} = \frac{1}{9a^2b^3}$
 - i $(\frac{3}{8}a^{-1}b)^{-2} = (\frac{3}{8})^{-2} \cdot (a^{-1})^{-2} \cdot b^{-2} = (\frac{8}{3})^2 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{64}{9} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{64a^2}{9b^2}$

- 30**
- a $y = 2^{x+4} = 2^x \cdot 2^4 = 2^x \cdot 16 = 16 \cdot 2^x$
Dus de formule is inderdaad te herleiden tot $y = 16 \cdot 2^x$.
 - b $y = 2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2} = 2^x \cdot \frac{1}{2^2} = 2^x \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 2^x$
Dus $y = \frac{1}{4} \cdot 2^x$.
 - c $y = 3^{4-2x} = 3^4 \cdot 3^{-2x} = 81 \cdot (3^{-2})^x = 81 \cdot (\frac{1}{3^2})^x = 81 \cdot (\frac{1}{9})^x$
Dus $y = 81 \cdot (\frac{1}{9})^x$.

- 31**
- a $\frac{a^4 \cdot a^6}{(\frac{1}{a})} = \frac{a^{10}}{a^{-1}} = a^{10-(-1)} = a^{11}$
 - b $(\frac{2}{3}a^{-4}b^3)^{-3} = (\frac{2}{3})^{-3} \cdot (a^{-4})^{-3} \cdot (b^3)^{-3} = (\frac{3}{2})^3 \cdot a^{12} \cdot b^{-9} = \frac{27}{8} \cdot a^{12} \cdot \frac{1}{b^9} = \frac{27a^{12}}{8b^9}$
 - c $4a^{-2}b + \frac{3}{a^2b^{-1}} = 4 \cdot \frac{1}{a^2} \cdot b + \frac{3}{a^2} \cdot b = \frac{4b}{a^2} + \frac{3b}{a^2} = \frac{7b}{a^2}$

Bladzijde 22

- 32**
- a $y = 5(2x^3)^2 \cdot \frac{3}{x^4} = 5 \cdot 2^2 \cdot (x^3)^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{x^4} = 5 \cdot 4 \cdot x^6 \cdot 3 \cdot x^{-4} = 60x^2$
Dus $y = 60x^2$.
 - b $y = \frac{1}{3}(3x^2)^3 \cdot \frac{2}{x^{10}} = \frac{1}{3} \cdot 3^3 \cdot (x^2)^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^{10}} = \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot x^6 \cdot 2 \cdot x^{-10} = 18x^{-4}$
Dus $y = 18x^{-4}$.
 - c $y = \frac{162}{(3x^2)^4} = \frac{162}{3^4 \cdot (x^2)^4} = \frac{162}{81x^8} = 2x^{-8}$
Dus $y = 2x^{-8}$.
 - d $y = (\frac{4}{5}x)^{-2} \cdot \frac{4}{x} = (\frac{4}{5})^{-2} \cdot x^{-2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{x} = (\frac{5}{4})^2 \cdot x^{-2} \cdot 4 \cdot x^{-1} = \frac{25}{4} \cdot x^{-3} = 6,25 \cdot x^{-3}$
Dus $y = 6,25x^{-3}$.

- V4**
- a $\sqrt{81} = 9$
 - b $\sqrt[4]{16} = 2$
 - c $\sqrt[3]{1000} = 10$
 - d $\sqrt[4]{81} = 3$

V5 a $\sqrt[3]{15} \approx 2,47$
b $\sqrt[7]{125} \approx 1,99$

33 a $(\sqrt{9})^2 = 9$ en $(\sqrt{3})^2 = 3$
b $(\sqrt{x})^2 = x$
b $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x^{\frac{1}{2} \cdot 2} = x^1 = x$
d $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$ en $(\sqrt{x})^2 = x$, dus $(x^{\frac{1}{2}})^2 = (\sqrt{x})^2$ en ook $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Bladzijde 24

34 a $5a^{\frac{3}{2}} = 5a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 5a^3 \cdot \sqrt{a}$
b $3a^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{a}}$
c $\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{4}}b = \frac{b}{2a^{\frac{1}{4}}} = \frac{b}{2 \cdot \sqrt[4]{a}}$

d $\frac{1}{5}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{5a^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{5\sqrt{a}}$
e $\frac{2}{3}a^{-3}b^{\frac{1}{2}} = \frac{2b \cdot b^{\frac{1}{2}}}{3a^3} = \frac{2b \cdot \sqrt{b}}{3a^3}$
f $(5a)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(5a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5a}}$

35 a $\frac{1}{a} = a^{-1}$
b $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$
c $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}}$
d $\sqrt[3]{a^{12}} = (a^{12})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$
e $a \cdot \sqrt[3]{a} = a \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{1\frac{1}{3}}$

f $a^2 \cdot \sqrt{a} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{2\frac{1}{2}}$
g $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} = \sqrt[3]{a^{-2}} = (a^{-2})^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{2}{3}}$
h $\frac{1}{a^4} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{-4} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{-3\frac{2}{3}}$
i $\frac{a^3}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a^3}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{3-\frac{1}{3}} = a^{2\frac{2}{3}}$

36 a $8\sqrt{2} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3\frac{1}{2}}$
b $\frac{1}{3}\sqrt{3} = 3^{-1} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$
c $\frac{1}{100}\sqrt{10} = \frac{1}{10^2} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{-2} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{-1\frac{1}{2}}$

d $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{2^3}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{2\frac{1}{2}}$
e $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{2\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{2\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{2\frac{1}{6}}$
f $\frac{10}{\sqrt[3]{0,1}} = \frac{10}{\sqrt[3]{10^{-1}}} = \frac{10}{(10^{-1})^{\frac{1}{3}}} = \frac{10^1}{10^{-\frac{1}{3}}} = 10^{1-(-\frac{1}{3})} = 10^{1\frac{1}{3}}$

37 a $(x^{0,25})^4 = x$ en $(\sqrt[4]{x})^4 = x$, dus $x^{0,25} = \sqrt[4]{x}$.
b $25^{0,5} = \sqrt{25} = 5$
 $4^{1,5} = 4 \cdot 4^{0,5} = 4 \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$

38 a $N = 5p^{\frac{1}{2}} \cdot q^{-\frac{1}{3}} = 5 \cdot p^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{q^{\frac{1}{3}}} = 5 \cdot \sqrt{p} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{q}} = \frac{5\sqrt{p}}{\sqrt[3]{q}}$
Dus $N = \frac{5\sqrt{p}}{\sqrt[3]{q}}$.

b $R = 100a^{-4} \cdot b^{2\frac{1}{2}} = 100 \cdot \frac{1}{a^4} \cdot b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}} = \frac{100b^2 \cdot \sqrt{b}}{a^4}$
Dus $R = \frac{100b^2 \cdot \sqrt{b}}{a^4}$.

c $P = 9^{\frac{1}{2}}x^{-1\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = 9^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = 9^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} \cdot y \cdot y^{\frac{1}{3}} = \frac{27y \cdot \sqrt[3]{y}}{x\sqrt{x}}$
Dus $P = \frac{27y \cdot \sqrt[3]{y}}{x\sqrt{x}}$.

Bladzijde 25

39

$$\begin{aligned} \text{a} \quad & \frac{x^6}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^6}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^6}{x^{2\frac{1}{2}}} = x^{6-2\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}} \\ \text{b} \quad & \frac{x}{\sqrt[5]{x}} = \frac{x^1}{x^{\frac{1}{5}}} = x^{1-\frac{1}{5}} = x^{\frac{4}{5}} \\ \text{c} \quad & x^4 \cdot \sqrt{x} = x^4 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{4\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad & \frac{x^{0,13}}{x^{0,57}} = x^{0,13-0,57} = x^{-0,44} \\ \text{e} \quad & x \cdot \sqrt[7]{x^3} = x \cdot (x^3)^{\frac{1}{7}} = x^1 \cdot x^{\frac{3}{7}} = x^{1\frac{3}{7}} \\ \text{f} \quad & x^2 \cdot \frac{x^{0,6}}{x^{3,1}} = x^2 \cdot x^{0,6-3,1} = x^2 \cdot x^{-2,5} = x^{-0,5} \end{aligned}$$

40

$$\begin{aligned} \text{a} \quad & y = 5x\sqrt{x^3} = 5x^1 \cdot x^{1\frac{1}{2}} = 5x^{2\frac{1}{2}} \\ & \text{Dus } y = 5x^{2\frac{1}{2}}. \\ \text{b} \quad & y = \frac{5}{x^3} \cdot 2\sqrt{x} = 5x^{-3} \cdot 2x^{\frac{1}{2}} = 10x^{-2\frac{1}{2}} \\ & \text{Dus } y = 10x^{-2\frac{1}{2}}. \\ \text{c} \quad & y = \frac{5}{x\sqrt{x}} = \frac{5}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{x^{1\frac{1}{2}}} = 5x^{-1\frac{1}{2}} \\ & \text{Dus } y = 5x^{-1\frac{1}{2}}. \\ \text{d} \quad & y = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3} = 3 \cdot (x^3)^{\frac{1}{4}} = 3 \cdot x^{\frac{3}{4}} \\ & \text{Dus } y = 3x^{\frac{3}{4}}. \\ \text{e} \quad & y = 5x^{-0,2} \cdot x^{1,3} = 5x^{1,1} \\ & \text{Dus } y = 5x^{1,1}. \\ \text{f} \quad & y = \frac{50x^{1,9}}{10x^{1,1}} = 5x^{1,9-1,1} = 5x^{0,8} \\ & \text{Dus } y = 5x^{0,8}. \end{aligned}$$

C4

$$B = \frac{12p^4q}{-3p^2q} + (2\frac{1}{2}p)^2 = -4p^2 + 6\frac{1}{4}p^2 = 2\frac{1}{4}p^2$$

Dus $B = 2\frac{1}{4}p^2$.

C5

$$\begin{aligned} \text{a} \quad & \frac{5}{6}a^{-3}b^2 = \frac{5b^2}{6a^3}. \\ \text{b} \quad & y = \frac{144x^3}{(2x)^5} = \frac{144x^3}{32x^5} = \frac{144}{32}x^{3-5} = 4\frac{1}{2}x^{-2} \\ & \text{Dus } y = 4\frac{1}{2}x^{-2}. \\ \text{c} \quad & y = 3^{x-4} = 3^x \cdot 3^{-4} = 3^x \cdot \frac{1}{81} = \frac{1}{81} \cdot 3^x \\ & \text{Dus } y = \frac{1}{81} \cdot 3^x. \end{aligned}$$

C6

$$\begin{aligned} \text{a} \quad & \frac{x^5}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{x^5}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^5}{x^{3\frac{1}{4}}} = x^{5-3\frac{1}{4}} = x^{1\frac{3}{4}}. \\ \text{b} \quad & K = \frac{10y^{1\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{10y \cdot y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{10y\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x}} \\ & \text{Dus } K = \frac{10y\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x}}. \end{aligned}$$

5.3 Formules herleiden en variabelen vrijmaken

Bladzijde 26

41

$$\begin{aligned} \text{a} \quad & y = \sqrt{16x} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} = 4\sqrt{x} \\ & \text{Dus } a = 4. \\ \text{b} \quad & y = \sqrt[3]{27x} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{x} = 3 \cdot \sqrt[3]{x} \\ & \text{Dus } b = 3. \end{aligned}$$

42

a *

$$b \quad 2 \cdot \sqrt[4]{50} + \sqrt[4]{60} \approx 8,101$$

43

$$a \quad A = \sqrt[3]{125xy} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{xy} = 5 \cdot \sqrt[3]{xy}$$

$$\text{Dus } A = 5 \cdot \sqrt[3]{xy}.$$

$$b \quad A = \sqrt[4]{256xy} = \sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{xy} = 4 \cdot \sqrt[4]{xy}$$

$$\text{Dus } A = 4 \cdot \sqrt[4]{xy}.$$

$$c \quad A = \sqrt[5]{-32xy} = \sqrt[5]{-32} \cdot \sqrt[5]{xy} = -2 \cdot \sqrt[5]{xy}$$

$$\text{Dus } A = -2 \cdot \sqrt[5]{xy}.$$

$$d \quad A = 8\sqrt{25xy} - 3\sqrt{49xy} = 8 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{xy} - 3 \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{xy} = 8 \cdot 5 \cdot \sqrt{xy} - 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{xy} \\ = 40 \cdot \sqrt{xy} - 21 \cdot \sqrt{xy} = 19 \cdot \sqrt{xy}$$

$$\text{Dus } A = 19 \cdot \sqrt{xy}.$$

44

$$a \quad B = 6 \cdot \sqrt[5]{10a} = 6 \cdot \sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{a} \approx 9,51 \cdot \sqrt[5]{a}$$

$$\text{Dus } B = 9,51 \cdot \sqrt[5]{a}.$$

$$b \quad B = \frac{\sqrt[5]{a}}{7} = \frac{1}{7} \cdot \sqrt[5]{a} \approx 0,14 \cdot \sqrt[5]{a}$$

$$\text{Dus } B = 0,14 \cdot \sqrt[5]{a}.$$

$$c \quad B = 2 \cdot \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{-20a} = 2 \cdot \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{-20} \cdot \sqrt[5]{a} \approx 0,18 \cdot \sqrt[5]{a}$$

$$\text{Dus } B = 0,18 \cdot \sqrt[5]{a}.$$

$$d \quad B = \frac{\sqrt[5]{50a}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{\sqrt[5]{50} \cdot \sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{\sqrt[5]{50}}{\sqrt[5]{2}} \cdot \sqrt[5]{a} \approx 1,90 \cdot \sqrt[5]{a}$$

$$\text{Dus } B = 1,90 \cdot \sqrt[5]{a}.$$

45

$$a \quad K = 2 \cdot \sqrt[3]{8pq} - \sqrt[3]{pq} = 2 \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{pq} - \sqrt[3]{pq} = 4 \cdot \sqrt[3]{pq} - \sqrt[3]{pq} = 3 \cdot \sqrt[3]{pq}$$

$$\text{Dus } K = 3 \cdot \sqrt[3]{pq}.$$

$$b \quad F = 2 \cdot \sqrt[4]{9xy} - \sqrt[4]{3x} \cdot \sqrt[4]{6y} = 2 \cdot \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{xy} - \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[4]{y} = 2 \cdot \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{xy} - \sqrt[4]{18} \cdot \sqrt[4]{xy} \approx 1,40 \cdot \sqrt[4]{xy}$$

$$\text{Dus } F = 1,40 \cdot \sqrt[4]{xy}.$$

$$c \quad N = 4 \cdot \sqrt[5]{243t} + 2 \cdot \sqrt[5]{1024t} = 4 \cdot \sqrt[5]{243} \cdot \sqrt[5]{t} + 2 \cdot \sqrt[5]{1024} \cdot \sqrt[5]{t} = 12 \cdot \sqrt[5]{t} + 8 \cdot \sqrt[5]{t} = 20 \cdot \sqrt[5]{t}$$

$$\text{Dus } N = 20 \cdot \sqrt[5]{t}.$$

46

$$a \quad y = (200x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{200x} = \sqrt[3]{200} \cdot \sqrt[3]{x} \approx 5,85 \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$\text{Dus } y = 5,85 \cdot \sqrt[3]{x}.$$

$$b \quad A = 5 \cdot (81p)^{\frac{1}{4}} - (625p)^{\frac{1}{4}} = 5 \cdot \sqrt[4]{81p} - \sqrt[4]{625p} = 5 \cdot \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{625} \cdot \sqrt[4]{p} = 15 \cdot \sqrt[4]{p} - 5 \cdot \sqrt[4]{p} = 10 \cdot \sqrt[4]{p}$$

$$\text{Dus } A = 10 \cdot \sqrt[4]{p}.$$

$$c \quad K = 10x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{4}} = \frac{10y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{10y \cdot y^{\frac{1}{4}}}{(x^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{10y \cdot \sqrt[4]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{Dus } K = \frac{10y \cdot \sqrt[4]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$d \quad y = -3 \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \sqrt{9x^3} = -3 \cdot 2 \cdot x^{-3} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^3} = -3 \cdot 2 \cdot x^{-3} \cdot 3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = -18x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Dus } y = -18x^{-\frac{1}{2}}$$

47

$$N = \sqrt[5]{0,6x^2} = \sqrt[5]{0,6} \cdot \sqrt[5]{x^2} \approx 0,90 \cdot \sqrt[5]{x^2}$$

Dus er is herschaald met factor 0,90.

Bladzijde 28

- 48 a** Een wortel is ook een macht, want $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.
b De verschuiving (4, 0).
c $y = \sqrt{x-4}$
 $\sqrt{x-4} = y$
 $x-4 = y^2$
 $x = y^2 + 4$

Bladzijde 29

- 49** Bij het wegwerken van de haakjes zou je moeten gebruiken dat $(2y-12)^5 = (2y-12) \cdot (2y-12) \cdot (2y-12) \cdot (2y-12) \cdot (2y-12)$.
 Naast dat dit veel werk is, wordt het resultaat ook niet overzichtelijker.

- 50 a** $N = 4\sqrt{t-2}$
 $4\sqrt{t-2} = N$
 $\sqrt{t-2} = \frac{1}{4}N$
 $t-2 = \left(\frac{1}{4}N\right)^2$
 $t = \frac{1}{16}N^2 + 2$
b $B = 0,2 \cdot \sqrt[3]{t-3}$
 $0,2 \cdot \sqrt[3]{t-3} = B$
 $\sqrt[3]{t-3} = 5B$
 $t-3 = (5B)^3$
 $t = 125B^3 + 3$
c $L = 2 \cdot \sqrt[4]{t-5}$
 $2 \cdot \sqrt[4]{t-5} = L$
 $\sqrt[4]{t-5} = \frac{1}{2}L$
 $t-5 = \left(\frac{1}{2}L\right)^4$
 $t = \frac{1}{16}L^4 + 5$
d $A = 0,4 \cdot \sqrt[3]{t+2}$
 $0,4 \cdot \sqrt[3]{t+2} = A$
 $0,4 \cdot \sqrt[3]{t} = A - 2$
 $\sqrt[3]{t} = 2,5A - 5$
 $t = (2,5A - 5)^3$

- 51 a** $Q = \sqrt{p}$
 $\downarrow$ verschuiving (3, 0)
 $Q = \sqrt{p-3}$
 $\downarrow$ vert. herschaling factor 5
 $Q = 5\sqrt{p-3}$
 Dus een verschuiving (3, 0) en een verticale herschaling met factor 5.
b $y = \sqrt[5]{x}$
 $\downarrow$ vert. herschaling factor 0,5
 $y = 0,5 \cdot \sqrt[5]{x}$
 $\downarrow$ verschuiving (0, 6)
 $y = 0,5 \cdot \sqrt[5]{x} + 6$
 Dus verticale herschaling met factor 0,5 en een verschuiving (0, 6).

Bladzijde 30

- 52 a** $z = 6\sqrt{8 + \frac{1}{4}y}$
 $6\sqrt{8 + \frac{1}{4}y} = z$
 $\sqrt{8 + \frac{1}{4}y} = \frac{1}{6}z$
 $8 + \frac{1}{4}y = \left(\frac{1}{6}z\right)^2$
 $\frac{1}{4}y = \frac{1}{36}z^2 - 8$
 $y = \frac{1}{9}z^2 - 32$
 Dus $a = \frac{1}{9}$ en $b = -32$.
b $L = \frac{1}{6} \cdot \sqrt[3]{A} - 7$
 $\frac{1}{6} \cdot \sqrt[3]{A} - 7 = L$
 $\frac{1}{6} \cdot \sqrt[3]{A} = L + 7$
 $\sqrt[3]{A} = 6(L + 7)$
 $\sqrt[3]{A} = 6L + 42$
 $A = (6L + 42)^3$
c $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt[5]{3x}$
 $\frac{1}{6} \cdot \sqrt[5]{3x} = y$
 $\sqrt[5]{3x} = 6y$
 $3x = (6y)^5$
 $3x = 7776y^5$
 $x = 2592y^5$

53 a $y = 2,5x^{\frac{1}{3}}$
 $2,5x^{\frac{1}{3}} = y$
 $x^{\frac{1}{3}} = 0,4y$
 $x = (0,4y)^3$
 $x = 0,4^3 \cdot y^3$
 $x = 0,064y^3$

Bladzijde 31

54 a $A = 8(t-2)^3$
 $8(t-2)^3 = A$
 $(t-2)^3 = \frac{1}{8}A$
 $t-2 = \sqrt[3]{\frac{1}{8}A}$
 $t = 2 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{A}$
b $P = 0,125(t+5)^3$
 $0,125(t+5)^3 = P$
 $(t+5)^3 = 8P$
 $t+5 = \sqrt[3]{8P}$
 $t = 2 \cdot \sqrt[3]{P} - 5$

55 a $y = 3x^{2,6}$
 $3x^{2,6} = y$
 $x^{2,6} = \frac{1}{3}y$
 $x = \left(\frac{1}{3}y\right)^{\frac{1}{2,6}}$
 $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2,6}} \cdot y^{\frac{1}{2,6}}$
 $x \approx 0,66y^{0,38}$
Dus $x = 0,66y^{0,38}$.
b $y = 0,2 \cdot 2x^{-1,4}$
 $0,2 \cdot 2x^{-1,4} = y$
 $0,4x^{-1,4} = y$
 $x^{-1,4} = 2,5y$
 $x = (2,5y)^{\frac{1}{-1,4}}$
 $x = 2,5^{\frac{1}{-1,4}} \cdot y^{\frac{1}{-1,4}}$
 $x \approx 0,52y^{-0,71}$
Dus $x = 0,52y^{-0,71}$.

56 a $y = 5x^{-0,4}$
 $5x^{-0,4} = y$
 $x^{-0,4} = \frac{1}{5}y$
 $x = \left(\frac{1}{5}y\right)^{\frac{1}{-0,4}}$
 $x = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{-0,4}} \cdot y^{\frac{1}{-0,4}}$
 $x \approx 55,90y^{-2,5}$
Dus $x = 55,90y^{-2,5}$.
b $P = 3 \cdot \sqrt[3]{t} + 6$
 $3 \cdot \sqrt[3]{t} + 6 = P$
 $3 \cdot \sqrt[3]{t} = P - 6$
 $\sqrt[3]{t} = \frac{1}{3}P - 2$
 $t = \left(\frac{1}{3}P - 2\right)^3$

b $y = 125x^3$
 $125x^3 = y$
 $x^3 = 0,008y$
 $x = \sqrt[3]{0,008y}$
 $x = \sqrt[3]{0,008} \cdot \sqrt[3]{y}$
 $x = 0,2 \cdot \sqrt[3]{y}$

c $L = 5(t-3)^2$
 $5(t-3)^2 = L$
 $(t-3)^2 = \frac{1}{5}L$
 $t-3 = \sqrt{\frac{1}{5}L}$
 $t = 3 + \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{L}$
 $t \approx 3 + 0,45\sqrt{L}$
Dus $t = 3 + 0,45\sqrt{L}$.

c $y = 15(0,2x)^{1,6}$
 $15(0,2x)^{1,6} = y$
 $(0,2x)^{1,6} = \frac{1}{15}y$
 $0,2x = \left(\frac{1}{15}y\right)^{\frac{1}{1,6}}$
 $x = 5 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{1}{1,6}} \cdot y^{\frac{1}{1,6}}$
 $x \approx 0,92y^{0,625}$
Dus $x = 0,92y^{0,625}$.

c $p = -2\sqrt{\frac{1}{2}q - 3}$
 $-2\sqrt{\frac{1}{2}q - 3} = p$
 $\sqrt{\frac{1}{2}q - 3} = -\frac{1}{2}p$
 $\frac{1}{2}q - 3 = \left(-\frac{1}{2}p\right)^2$
 $\frac{1}{2}q = \frac{1}{4} \cdot p^2 + 3$
 $q = \frac{1}{2}p^2 + 6$
Dus $a = \frac{1}{2}$ en $b = 6$.
d $T = 0,125(x+4)^3$
 $0,125(x+4)^3 = T$
 $(x+4)^3 = 8T$
 $x+4 = \sqrt[3]{8T}$
 $x = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{T} - 4$
 $x = 2 \cdot \sqrt[3]{T} - 4$
Dus $a = 2$ en $b = 4$.

57

$$y = \frac{10}{x-3}$$

$$y(x-3) = 10$$

$$x-3 = \frac{10}{y}$$

$$x = 3 + \frac{10}{y}$$

Bladzijde 33

58

$$\mathbf{a} \quad K = \frac{8}{q-1}$$

$$q-1 = \frac{8}{K}$$

$$q = 1 + \frac{8}{K}$$

$$\mathbf{b} \quad P = \frac{7}{3q-2}$$

$$3q-2 = \frac{7}{P}$$

$$3q = \frac{7}{P} + 2$$

$$q = \frac{1}{3} \left(\frac{7}{P} + 2 \right)$$

$$q = \frac{7}{3P} + \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{c} \quad K = 5 + \frac{8}{q}$$

$$K-5 = \frac{8}{q}$$

$$q = \frac{8}{K-5}$$

$$\mathbf{d} \quad P = 18 - \frac{5}{q-2}$$

$$P-18 = -\frac{5}{q-2}$$

$$18-P = \frac{5}{q-2}$$

$$q-2 = \frac{5}{18-P}$$

$$q = 2 + \frac{5}{18-P}$$

59

$$\mathbf{a} \quad T = \frac{a}{a-6}$$

$$\frac{a}{a-6} = T$$

$$a = T(a-6)$$

$$a = Ta - 6T$$

$$a - Ta = -6T$$

$$a(1-T) = -6T$$

$$a = \frac{-6T}{1-T}$$

$$a = \frac{6T}{T-1}$$

$$\mathbf{e} \quad K = \frac{q+3}{2q-1}$$

$$\frac{q+3}{2q-1} = K$$

$$q+3 = K(2q-1)$$

$$q+3 = 2Kq-K$$

$$q-2Kq = -K-3$$

$$q(1-2K) = -K-3$$

$$q = \frac{-K-3}{1-2K}$$

$$q = \frac{K+3}{2K-1}$$

$$\mathbf{f} \quad A = \frac{q}{q+4}$$

$$\frac{q}{q+4} = A$$

$$q = A(q+4)$$

$$q = Aq + 4A$$

$$q - Aq = 4A$$

$$q(1-A) = 4A$$

$$q = \frac{4A}{1-A}$$

$$\mathbf{b} \quad L = 320 - \frac{18}{q-1}$$

$$L-320 = -\frac{18}{q-1}$$

$$320-L = \frac{18}{q-1}$$

$$q-1 = \frac{18}{320-L}$$

$$q = 1 + \frac{18}{320-L}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad \frac{3x}{x+y} &= 5-x \\ \frac{3x}{5-x} &= x+y \\ x+y &= \frac{3x}{5-x} \\ y &= \frac{3x}{5-x} - x \end{aligned}$$

60 a $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ en $y = x^{-1}$ is van de vorm $y = ax^n$, dus de formule $y = \frac{1}{x}$ hoort bij een machtsverband.

$$\text{b} \quad y = \frac{1}{x}$$

↓ verschuiving (3, 0)

$$y = \frac{1}{x-3}$$

↓ vert. herschaling factor 4

$$y = 4 \cdot \frac{1}{x-3} = \frac{4}{x-3}$$

$$\text{c} \quad y = 1 + \frac{4}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{4}{x-3} = \frac{x-3+4}{x-3} = \frac{x+1}{x-3}$$

$$\text{d} \quad y = \frac{1}{x}$$

↓ verschuiving (3, 0)

$$y = \frac{1}{x-3}$$

↓ vert. herschaling factor 4

$$y = \frac{4}{x-3}$$

↓ verschuiving (0, 1)

$$y = 1 + \frac{4}{x-3} = \frac{x+1}{x-3}$$

e De grafiek van $y = \frac{x+1}{x-3}$ ontstaat uit de grafiek van $y = x^{-1}$ door twee verschuivingen en een herschaling in verticale richting. Omdat $y = x^{-1}$ een machtsverband is, heeft de formule $y = \frac{x+1}{x-3}$ dus ook te maken met een machtsverband.

Bladzijde 34

$$\text{61 a} \quad y = \frac{1}{x}$$

↓ verschuiving (2, -3)

$$y = \frac{1}{x-2} - 3$$

↓ vert. herschaling factor 1,5

$$y = 1,5 \left(\frac{1}{x-2} - 3 \right) = \frac{1,5}{x-2} - 4,5$$

$$y = \frac{1,5}{x-2} - 4,5$$

$$y + 4,5 = \frac{1,5}{x-2}$$

$$x-2 = \frac{1,5}{y+4,5}$$

$$x = \frac{3}{2y+9} + 2$$

$$\begin{aligned}
\text{b } L &= 24 - \frac{4}{n+1} \\
&\downarrow \text{vert. herschaling factor } \frac{1}{2} \\
L &= \frac{1}{2} \left(24 - \frac{4}{n+1} \right) = 12 - \frac{2}{n+1} \\
&\downarrow \text{verschuiving } (3, -8) \\
L &= 12 - \frac{2}{n-3+1} - 8 = 4 - \frac{2}{n-2} \\
4 - \frac{2}{n-2} &= L \\
4 - L &= \frac{2}{n-2} \\
n-2 &= \frac{2}{4-L} \\
n &= \frac{2}{4-L} + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{62 a } P &= 3 \cdot \sqrt[5]{8t} - \sqrt[5]{t} + 2 \cdot \sqrt[5]{3t} = 3 \cdot \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{t} - \sqrt[5]{t} + 2 \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{t} \approx 6,04 \cdot \sqrt[5]{t} \\
\text{Dus } P &= 6,04 \cdot \sqrt[5]{t}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b } T &= 3 \cdot \sqrt[3]{2l+1} \\
3 \cdot \sqrt[3]{2l+1} &= T \\
\sqrt[3]{2l+1} &= \frac{1}{3} T \\
2l+1 &= \left(\frac{1}{3} T \right)^3 \\
2l &= \frac{1}{27} T^3 - 1 \\
l &= \frac{1}{54} T^3 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c } W &= 9(a-2)^2 \\
9(a-2)^2 &= W \\
(a-2)^2 &= \frac{1}{9} W \\
a-2 &= \sqrt{\frac{1}{9} W} \\
a &= 2 + \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{W} \\
a &= 2 + \frac{1}{3} \sqrt{W} \\
\text{Dus } a &= 2 + \frac{1}{3} \sqrt{W}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d } R &= 2,5(3q)^{2,1} \\
2,5(3q)^{2,1} &= R \\
(3q)^{2,1} &= 0,4R \\
3q &= (0,4R)^{\frac{1}{2,1}} \\
q &= \frac{1}{3} \cdot 0,4^{\frac{1}{2,1}} \cdot R^{\frac{1}{2,1}} \\
q &\approx 0,215R^{0,476} \\
\text{Dus } q &= 0,215R^{0,476}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e } K &= \frac{2x-1}{3-x} \\
\frac{2x-1}{3-x} &= K \\
2x-1 &= K(3-x) \\
2x-1 &= 3K-Kx \\
Kx+2x &= 3K+1 \\
x(K+2) &= 3K+1 \\
x &= \frac{3K+1}{K+2}
\end{aligned}$$

C7 a $B = 10 \cdot \sqrt[3]{20p} - 5 \cdot \sqrt[3]{10p} = 10 \cdot \sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{p} - 5 \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{p} \approx 16,37 \cdot \sqrt[3]{p}$

Dus $B = 16,37 \cdot \sqrt[3]{p}$.

b $D = \frac{1}{12}\sqrt{p+10}$

$\frac{1}{12}\sqrt{p+10} = D$

$\sqrt{p+10} = 12D$

$p+10 = (12D)^2$

$p = 144D^2 - 10$

C8 a $E = 2\frac{1}{4}(q-6)^2$

$2\frac{1}{4}(q-6)^2 = E$

$(q-6)^2 = \frac{4}{9}E$

$q-6 = \sqrt{\frac{4}{9}E}$

$q = \sqrt{\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{E} + 6$

$q = \frac{2}{3}\sqrt{E} + 6$

b $F = 25(2t)^{1,6}$

$25(2t)^{1,6} = F$

$(2t)^{1,6} = 0,04F$

$2t = (0,04F)^{\frac{1}{1,6}}$

$t = \frac{1}{2} \cdot 0,04^{\frac{1}{1,6}} \cdot F^{\frac{1}{1,6}}$

$t \approx 0,067F^{0,625}$

Dus $t = 0,067F^{0,625}$.

C9 a $G = \frac{2}{x-3} + 4$

$G - 4 = \frac{2}{x-3}$

$x-3 = \frac{2}{G-4}$

$x = \frac{2}{G-4} + 3$

b $H = \frac{2x}{x+3}$

$\frac{2x}{x+3} = H$

$2x = H(x+3)$

$2x = Hx + 3H$

$2x - Hx = 3H$

$x(2-H) = 3H$

$x = \frac{3H}{2-H}$

5.4 Formules met machten en wortels

Bladzijde 35

63 a $\left. \begin{array}{l} y = ax^3 \\ x = 2 \text{ en } y = 48 \end{array} \right\} a \cdot 2^3 = 48, \text{ dus } a = \frac{48}{2^3} = 6$

b $\left. \begin{array}{l} y = 10x^p \\ x = 4 \text{ en } y = 80 \end{array} \right\} 10 \cdot 4^p = 80$

Voer in $y_1 = 10 \cdot 4^x$ en $y_2 = 80$.

De optie snijpunt geeft $x = 1,5$, dus $p = 1,5$.

64 a $\left. \begin{array}{l} y = ax^{-1,81} \\ x = 12 \text{ en } y = 16 \end{array} \right\} a \cdot 12^{-1,81} = 16, \text{ dus } a = \frac{16}{12^{-1,81}} \approx 1437$

Dus $y = 1437x^{-1,81}$.

b $\left. \begin{array}{l} y = 180x^p \\ x = 4 \text{ en } y = 900 \end{array} \right\} 180 \cdot 4^p = 900$

Voer in $y_1 = 180 \cdot 4^x$ en $y_2 = 900$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,16$, dus $p = 1,16$.

Dus $y = 180x^{1,16}$.

Bladzijde 36

65 a $\left. \begin{array}{l} y = ax^{2,15} \\ x = 8 \text{ en } y = 600 \end{array} \right\} a \cdot 8^{2,15} = 600, \text{ dus } a = \frac{600}{8^{2,15}} \approx 6,86$

b $\left. \begin{array}{l} y = 50x^b \\ x = 8 \text{ en } y = 600 \end{array} \right\} 50 \cdot 8^b = 600$

Voer in $y_1 = 50 \cdot 8^x$ en $y_2 = 600$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,19$, dus $b = 1,19$.

- 66 a** $A = ap^{1,83}$
 $p = 18$ en $A = 350$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} A = ap^{1,83} \\ p = 18 \end{matrix}} \right\} a \cdot 18^{1,83} = 350$, dus $a = \frac{350}{18^{1,83}} = 1,7657\dots$
 $p = 25$ geeft $A = 1,7657\dots \cdot 25^{1,83} \approx 638$
- b** $A = 1,7657\dots p^{1,83}$
 $1,7657\dots p^{1,83} = A$
 $p^{1,83} = \frac{1}{1,7657\dots} A$
 $p = \left(\frac{1}{1,7657\dots} A \right)^{\frac{1}{1,83}}$
 $p = \left(\frac{1}{1,7657\dots} \right)^{\frac{1}{1,83}} \cdot A^{\frac{1}{1,83}}$
 $p \approx 0,733 \cdot A^{0,546}$
Dus $p = 0,733 \cdot A^{0,546}$.

- 67** $y = ax^p$
 $x = 1$ en $y = 5,18$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} y = ax^p \\ x = 1 \end{matrix}} \right\} a \cdot 1^p = 5,18$, dus $a = 5,18$
 $y = 5,18x^p$
 $x = 2$ en $y = 13,86$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} y = 5,18x^p \\ x = 2 \end{matrix}} \right\} 5,18 \cdot 2^p = 13,86$
- Voer in $y_1 = 5,18 \cdot 2^x$ en $y_2 = 13,86$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 1,42$, dus $b = 1,42$.
Dus $y = 5,18x^{1,42}$.

- 68 a** De formule geeft (t afgerond op gehele):

n	5	10	15	20
t	66	100	127	151

Dus de formule past goed bij de tabel.

- b** Als n verdubbelt van 5 naar 10, dan wordt t volgens de tabel $\frac{100}{66} \approx 1,5$ keer zo groot.
Dat is een toename van 50%.
- Als n verdubbelt van 10 naar 20, dan wordt t volgens de tabel $\frac{151}{100} \approx 1,5$ keer zo groot.
Dat is een toename van 50%.
- Dus het klopt.

Bladzijde 37

- 69 a** Neem $3n$ voor n in de formule $t = 25n^{0,6}$
Je krijgt $t = 25 \cdot (3n)^{0,6} = 25 \cdot 3^{0,6} \cdot n^{0,6} = 3^{0,6} \cdot 25n^{0,6} \approx 1,93 \cdot 25n^{0,6}$.
Dus de tijd dat ze de oefening kan volhouden neemt met ongeveer 93% toe.
- b** Neem $1,4t$ voor t in de formule $n = (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}$.
Je krijgt $n = (0,04 \cdot 1,4t)^{\frac{1}{0,6}} = 1,4^{\frac{1}{0,6}} \cdot (0,04t)^{\frac{1}{0,6}} \approx 1,75 \cdot (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}$.
Dus ze moet het aantal pogingen met een factor 1,75 groter maken.
- 70 a** Neem $2v$ voor v in de formule $r = 0,016v^{1,75}$.
Je krijgt $r = 0,016 \cdot (2v)^{1,75} = 0,016 \cdot 2^{1,75} \cdot v^{1,75} = 2^{1,75} \cdot 0,016v^{1,75} \approx 3,4 \cdot 0,016v^{1,75}$.
Dus de remweg is ongeveer 3,4 keer zo lang.
- b** Neem $2n$ voor n in de formule $M = 150\,000n^{-0,3}$.
Je krijgt $M = 150\,000 \cdot (2n)^{-0,3} = 150\,000 \cdot 2^{-0,3} \cdot n^{-0,3} = 2^{-0,3} \cdot 150\,000n^{-0,3} \approx 0,812 \cdot 150\,000n^{-0,3}$.
Dus M neemt met ongeveer 18,8% af.
- c** $N = 4,4A^{0,3}$
 $4,4A^{0,3} = N$
 $A^{0,3} = \frac{1}{4,4} N$
 $A = \left(\frac{1}{4,4} N \right)^{\frac{1}{0,3}}$
- Neem $1,25N$ voor N in deze formule.
Je krijgt $A = \left(\frac{1}{4,4} \cdot 1,25N \right)^{\frac{1}{0,3}} = 1,25^{\frac{1}{0,3}} \cdot \left(\frac{1}{4,4} N \right)^{\frac{1}{0,3}} \approx 2,1 \cdot \left(\frac{1}{4,4} N \right)^{\frac{1}{0,3}}$.
Dus eiland P is ongeveer 2,1 keer zo groot als eiland Q.

71 a 2 meter = 20 dm, dus $l = 20$.

$$20 \cdot 4 = 80 \text{ kg, dus } g = \frac{80}{2000} = 0,04.$$

$$d = 0,0005 \cdot 0,04 \cdot 20^4 = 3,2$$

De doorbuiging is 3,2 mm.

b $0,0005g \cdot 25^4 = 2,5$

$$195,3125g = 2,5$$

$$g = 0,0128$$

Het totale gewicht van de stenen is $0,0128 \cdot 2500 = 32 \text{ kg}$.

c $g = 0,05$ geeft $d = 0,0005 \cdot 0,05 \cdot l^4 = 0,000025l^4$

Neem $1,2l$ voor l in de formule $d = 0,000025l^4$.

$$\text{Je krijgt } d = 0,000025 \cdot (1,2l)^4 = 0,000025 \cdot 1,2^4 \cdot l^4 = 1,2^4 \cdot 0,000025l^4 \approx 2,07 \cdot 0,000025l^4.$$

Dus de doorbuiging neemt toe met ongeveer 107%.

d $0,000025l^4 = 2,2$

$$l^4 = 88\,000$$

$$l = \sqrt[4]{88\,000}$$

$$l \approx 17,2$$

De lengte is ongeveer $17,2 \text{ dm} = 172 \text{ cm}$.

Alternatieve uitwerking

$$0,000025l^4 = 2,2$$

Voer in $y_1 = 0,000025x^4$ en $y_2 = 2,2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 17,2$.

De lengte is ongeveer $17,2 \text{ dm} = 172 \text{ cm}$.

e $d = 0,000025l^4$

$$0,000025l^4 = d$$

$$l^4 = 40\,000d$$

$$l = \sqrt[4]{40\,000d}$$

$$l = \sqrt[4]{40\,000} \cdot \sqrt[4]{d}$$

$$l \approx 14 \cdot \sqrt[4]{d}$$

$$\text{Dus } l = 14 \cdot \sqrt[4]{d}.$$

Bladzijde 38

72 a De maximale score is $S = \frac{1000(16 - \sqrt{16})}{16} \approx 750$.

b Los op $\frac{1000(w - \sqrt{w})}{16} = 375$.

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{1000(x - \sqrt{x})}{16} \text{ en maak een tabel.}$$

$$x = 9 \text{ geeft } y_1 = 375$$

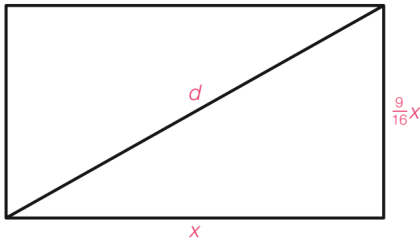
Dus Eline heeft 9 partijen gewonnen.

c In de tabel kijken bij y_1 :

$$x = 6 \text{ geeft } y_1 = 222 \text{ en } x = 8 \text{ geeft } y_1 = 323.$$

Omdat $323 - 222 = 101$ heeft Nova 8 partijen gewonnen.

- 73 a** De lange zijde is x cm, dus de korte zijde is $\frac{9}{16}x$ cm.
Dus de oppervlakte A is $A = x \cdot \frac{9}{16}x = \frac{9}{16}x^2 \text{ cm}^2$.



De stelling van Pythagoras geeft $d^2 = x^2 + \left(\frac{9}{16}x\right)^2$
 $d^2 = x^2 + \frac{81}{256}x^2$
 $d^2 = \left(1 + \frac{81}{256}\right)x^2$
 $d^2 = \frac{337}{256}x^2$

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{9}{16}x^2 \\ d^2 = \frac{337}{256}x^2, \text{ dus } x^2 = \frac{256}{337}d^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = \frac{9}{16} \cdot \frac{256}{337}d^2 \\ A = \frac{144}{337}d^2 \end{array}$$

- b** De lange zijde is x cm, dus de korte zijde is $\frac{3}{7}x$ cm.
Dus de oppervlakte A is $A = x \cdot \frac{3}{7}x = \frac{3}{7}x^2 \text{ cm}^2$.

De stelling van Pythagoras geeft $d^2 = x^2 + \left(\frac{3}{7}x\right)^2$
 $d^2 = x^2 + \frac{9}{49}x^2$
 $d^2 = \left(1 + \frac{9}{49}\right)x^2$
 $d^2 = \frac{58}{49}x^2$

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{3}{7}x^2 \\ d^2 = \frac{58}{49}x^2, \text{ dus } x^2 = \frac{49}{58}d^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = \frac{3}{7} \cdot \frac{49}{58}d^2 \\ A = \frac{21}{58}d^2 \end{array}$$

Dus $a = \frac{21}{58}$.

- 74 a** $G = aR^3$
 $R = 2,03$ en $G = 670$ $\left\} a \cdot 2,03^3 = 670, \text{ dus } a = \frac{670}{2,03^3} \approx 80,1\right.$

- b** $80R^3 = 580$

$$R^3 = 7,25$$

$$R = \sqrt[3]{7,25} \approx 1,94$$

Dus de rompomvang is 1,94 m.

Alternatieve uitwerking

$$80R^3 = 580$$

Voer in $y_1 = 80x^3$ en $y_2 = 580$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,94$.

Dus de rompomvang is 1,94 m.

- c** Neem $1,2R$ voor R in de formule $G = 80R^3$.

$$\text{Dit geeft } G = 80 \cdot (1,2R)^3 = 80 \cdot 1,2^3 \cdot R^3 = 1,2^3 \cdot 80R^3 = 1,728 \cdot 80R^3.$$

Dus het gewicht is 1,728 keer zo groot.

- d** $G = 80R^3$

$$80R^3 = G$$

$$R^3 = \frac{1}{80}G$$

$$R = \left(\frac{1}{80}G\right)^{\frac{1}{3}}$$

Neem $2G$ voor G in deze formule.

$$\text{Je krijgt } R = \left(\frac{1}{80} \cdot 2G\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{80}G\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1,26 \cdot \left(\frac{1}{80}G\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Dus de rompomvang is 1,26 keer zo groot.

- e** Zie vraag d.

$$R = \left(\frac{1}{80}G\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{80}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot G^{\frac{1}{3}} \approx 0,232G^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{Dus } R = 0,232G^{\frac{1}{3}}.$$

Bladzijde 39

- 75 a** Los op $140W^{0,75} = 2200\sqrt{W} - 40W - 11\,500$.
 Voer in $y_1 = 140x^{0,75}$ en $y_2 = 2200\sqrt{x} - 40x - 11\,500$.
 De optie snijpunt geeft $x = 58,11\dots$ en $y = 2946,78\dots$ en $x = 681,42\dots$ en $y = 18\,672,06\dots$.
 Bij een gewicht van 58 en 681 kg kunnen elanden juist genoeg voedsel vinden om te voorzien in hun basislichaamsfuncties.
- b** Voer in $y_3 = 2200\sqrt{x} - 40x - 11\,500 - 140x^{0,75}$.
 De optie maximum geeft $x \approx 281$ en $y \approx 4530$.
 Het optimale gewicht is dus 281 kg.
 Een eland heeft dan 4530 kcal per dag over voor andere activiteiten dan het zoeken naar voedsel.
- c** Het kalf moet 58 kg wegen.
 Op 1 juli is het gewicht 24 kg.
 Daarna zijn er nog $58 - 24 = 34$ dagen nodig.
 Dus vanaf 4 augustus kan het jong stoppen met drinken en kan het zelfstandig voor voedsel zorgen.

Bladzijde 40

- 76 a** $n = 2400$, $B = 15$ en $V = 0,05$ geeft $Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 2400}{0,05}} = 1200$.
 $\frac{2400}{1200} = 2$, dus er zal inderdaad twee keer per jaar een bestelling geplaatst worden.
- b** $n = 800$ geeft $Q = \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot 800}{V}} = \sqrt{\frac{1600 \cdot B}{V}} = \sqrt{1600 \cdot \frac{B}{V}} = \sqrt{1600} \cdot \sqrt{\frac{B}{V}} = 40 \cdot \sqrt{\frac{B}{V}}$
 Dus $Q = 40\sqrt{\frac{B}{V}}$.
- c** $B = 25$ en $V = 0,80$ geeft $Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot n}{0,80}} = \sqrt{\frac{50 \cdot n}{0,80}} = \sqrt{\frac{50}{0,80} \cdot n} = \sqrt{\frac{50}{0,80}} \cdot \sqrt{n} \approx 7,9 \cdot \sqrt{n}$.
 Dus $Q = 7,9\sqrt{n}$.
- d** 200 artikelen per jaar verdeeld over 4 keer bestellen, dus $Q = \frac{200}{4} = 50$.
 $Q = \sqrt{\frac{2Bn}{V}}$ met $B = 25$ en $n = 200$ geeft $\sqrt{\frac{10\,000}{V}} = 50$.
 Voer in $y_1 = \sqrt{\frac{10\,000}{x}}$ en $y_2 = 50$.
 De optie snijpunt geeft $x = 4$.
 Dus $V = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} V = 0,01p \cdot I \\ I = 160 \text{ en } V = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,01p \cdot 160 = 4 \\ 1,6p = 4 \\ p = \frac{4}{1,6} = 2,5 \end{array}$$

Bladzijde 41

- C10 a** $B = at^{2,52}$
 $t = 3,1$ en $B = 5,3$ $\left\{ \begin{array}{l} a \cdot 3,1^{2,52} = 5,3, \text{ dus } a = \frac{5,3}{3,1^{2,52}} \approx 0,31 \end{array} \right.$
- b** $N = 4,7q^p$
 $q = 3$ en $N = 870$ $\left\{ \begin{array}{l} 4,7 \cdot 3^p = 870 \end{array} \right.$
 Voer in $y_1 = 4,7 \cdot 3^x$ en $y_2 = 870$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 4,75$, dus $p = 4,75$.

- C11** Neem $3t$ voor t in de formule $A = 2,3t^{2,15}$.
 Je krijgt $A = 2,3(3t)^{2,15} = 2,3 \cdot 3^{2,15} \cdot t^{2,15} = 3^{2,15} \cdot 2,3 \cdot t^{2,15} \approx 10,6 \cdot 2,3t^{2,15}$
 Dus A wordt 10,6 keer zo groot.

C12

a $l = 184$ geeft

$$A = 0,007241g^{0,425} \cdot 184^{0,725}$$

$$0,007241g^{0,425} \cdot 184^{0,725} = A$$

$$g^{0,425} = \frac{1}{0,007241 \cdot 184^{0,725}} A$$

$$g = \left(\frac{1}{0,007241 \cdot 184^{0,725}} A \right)^{\frac{1}{0,425}}$$

$$g = \left(\frac{1}{0,007241 \cdot 184^{0,725}} \right)^{\frac{1}{0,425}} \cdot A^{\frac{1}{0,425}}$$

$$g \approx 15 \cdot A^{2,35}$$

$$\text{Dus } g = 15A^{2,35}.$$

b $g = 75$ geeft voor de formule van Takahira $A = 0,007241 \cdot 75^{0,425} l^{0,725}$ en voor de formule van Haycock $A = 0,024265 \cdot 75^{0,5378} l^{0,3964}$.

Voer in $y_1 = 0,007241 \cdot 75^{0,425} x^{0,725}$ en $y_2 = 0,024265 \cdot 75^{0,5378} x^{0,3964}$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 175$, dus bij een lengte van 175 cm.

Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 42

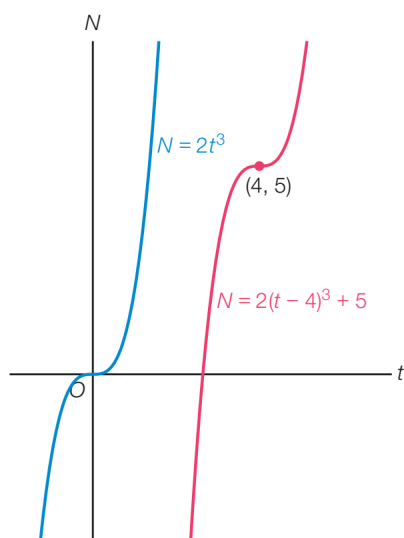
1 $y = 4(x - 2)^3 + 1$

↓ verschuiving $(-1, -5)$

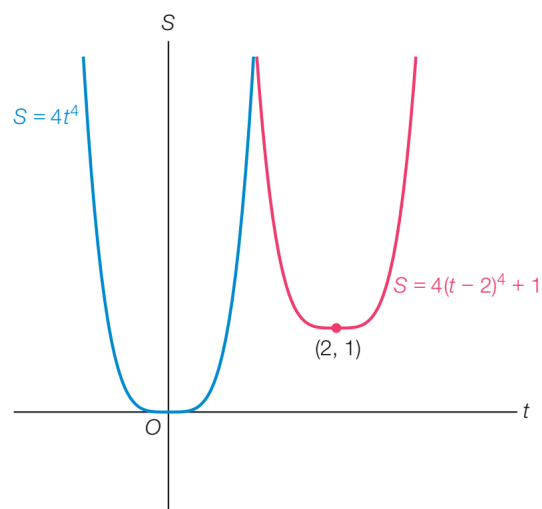
$$y = 4(x + 1 - 2)^3 + 1 - 5$$

De formule van de beeldgrafiek is $y = 4(x - 1)^3 - 4$.

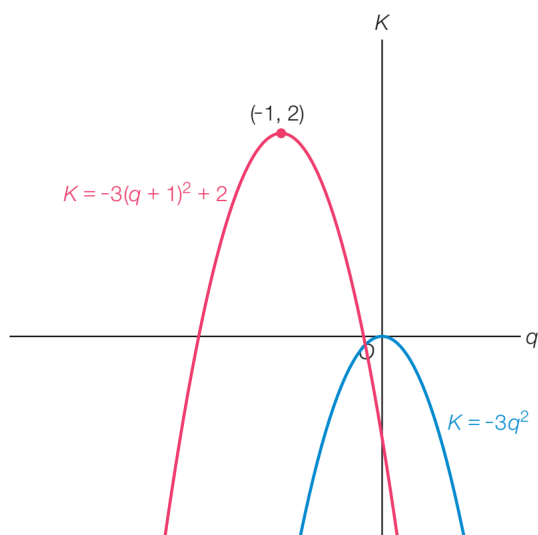
2 a



c



b



- 3** $y = 1\frac{1}{2}(x-2)^4 - 5$
 $\downarrow$ vert. herschaling factor 4
 $y = 4(1\frac{1}{2}(x-2)^4 - 5) = 6(x-2)^4 - 20$
 $\downarrow$ verschuiving $(-3, -16)$
 $y = 6(x+3-2)^4 - 20 - 16$
 De formule van de beeldgrafiek is $y = 6(x+1)^4 - 36$.
 De coördinaten van de top zijn $(-1, -36)$.

- 4** **a** $A = \frac{18a^5}{6a^2} - \frac{(5a^2b)^2}{5ab^2} = 3a^3 - \frac{25a^4b^2}{5ab^2} = 3a^3 - 5a^3 = -2a^3$
b $B = (3x^2)^3 - 2x \cdot 4x^5 + 3x^2 \cdot 5x^3 = 27x^6 - 8x^6 + 15x^5 = 19x^6 + 15x^5$
c $C = (2p^2q)^3 - 5pq \cdot 2p^2q^4 + 3p^3 \cdot (pq)^3 - \frac{8p^5q^6}{2p^2q} = 8p^6q^3 - 10p^3q^5 + 3p^3 \cdot p^3q^3 - 4p^3q^5$
 $= 8p^6q^3 - 10p^3q^5 + 3p^6q^3 - 4p^3q^5 = 11p^6q^3 - 14p^3q^5$

- 5** **a** $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$
b $a^4 \cdot \frac{1}{a^7} = a^4 \cdot a^{-7} = a^{-3}$
c $\frac{\left(\frac{1}{a^{12}}\right)}{a^{-5}} = \frac{a^{-12}}{a^{-5}} = a^{-12-(-5)} = a^{-7}$

- 6** **a** $3a^2b^{-3} = 3a^2 \cdot \frac{1}{b^3} = \frac{3a^2}{b^3}$
b $\left(\frac{1}{2}a\right)^{-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \cdot a^{-5} = (2^{-1})^{-5} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{2^5}{a^5} = \frac{32}{a^5}$
c $\frac{2}{7}a^{-1}b^4 = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{a} \cdot b^4 = \frac{2b^4}{7a}$

- 7** **a** $4a^{-1\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{1}{a^{1\frac{1}{2}}} = \frac{4}{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{a\sqrt{a}}$
b $a^{-2} \cdot b^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{a^2} \cdot b^{\frac{1}{5}} = \frac{b^{\frac{1}{5}}}{a^2} = \frac{\sqrt[5]{b}}{a^2}$
c $7a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{3}{5}} = 7 \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \cdot b^{\frac{3}{5}} = \frac{7b^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{7 \cdot \sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[3]{a}}$

- 8** **a** $x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{2\frac{1}{3}}$
b $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}$
c $\frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{x^3} = \frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^3} = \frac{x^{2\frac{1}{2}}}{x^3} = x^{-\frac{1}{2}}$

- 9** **a** $y = 7 \cdot \sqrt[5]{x^2} = 7 \cdot x^{\frac{2}{5}}$
 Dus $y = 7x^{\frac{2}{5}}$.
b $y = 6x^{-0,4} \cdot x^{1,2} = 6x^{0,8}$
 Dus $y = 6x^{0,8}$.
c $y = \frac{10}{2x^3 \cdot \sqrt{x}} = \frac{10}{2x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{10}{2} \cdot \frac{1}{x^{3\frac{1}{2}}} = 5x^{-3\frac{1}{2}}$
 Dus $y = 5x^{-3\frac{1}{2}}$.

10 a $A = \sqrt[3]{100b} - 4 \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[3]{b} - 4 \cdot \sqrt[3]{b} = 4,64... \cdot \sqrt[3]{b} - 4 \cdot \sqrt[3]{b} \approx 0,64 \cdot \sqrt[3]{b}$

Dus $A = 0,64 \cdot \sqrt[3]{b}$.

b $B = 3 \cdot \sqrt[4]{16pq} - \sqrt[4]{3p} \cdot \sqrt[4]{27q} = 3 \cdot \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{pq} - \sqrt[4]{81pq} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{pq} - \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{pq}$
 $= 6 \cdot \sqrt[4]{pq} - 3 \cdot \sqrt[4]{pq} = 3 \cdot \sqrt[4]{pq}$

Dus $B = 3 \cdot \sqrt[4]{pq}$.

11 a $F = 0,125\sqrt{p-5}$

$0,125\sqrt{p-5} = F$

$\sqrt{p-5} = 8F$

$p-5 = (8F)^2$

$p = 64F^2 + 5$

Dus $a = 64$ en $b = 5$.

b $S = 0,4(R-7)^2$

$0,4(R-7)^2 = S$

$(R-7)^2 = 2,5S$

$R-7 = \sqrt{2,5S}$

$R = 7 + \sqrt{2,5} \cdot \sqrt{S}$

$R \approx 7 + 1,58\sqrt{S}$

Dus $R = 7 + 1,58\sqrt{S}$.

c $y = 2(0,3x)^{1,25}$

$2(0,3x)^{1,25} = y$

$(0,3x)^{1,25} = \frac{1}{2}y$

$0,3x = \left(\frac{1}{2}y\right)^{\frac{1}{1,25}}$

$x = \frac{1}{0,3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1,25}} \cdot y^{\frac{1}{1,25}}$

$x \approx 1,91 \cdot y^{0,8}$

Dus $x = 1,91y^{0,8}$.

12 a $F = 4 + \frac{3}{p-5}$

$F - 4 = \frac{3}{p-5}$

$p-5 = \frac{3}{F-4}$

$p = 5 + \frac{3}{F-4}$

b $G = \frac{3q-1}{4q+5}$

$\frac{3q-1}{4q+5} = G$

$3q-1 = G(4q+5)$

$3q-1 = 4Gq+5G$

$3q-4Gq = 5G+1$

$q(3-4G) = 5G+1$

$q = \frac{5G+1}{3-4G}$

13 a $t = an^{0,75}$
 $n = 10$ en $t = 2$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} t = an^{0,75} \\ n = 10 \text{ en } t = 2 \end{matrix}} \right\} a \cdot 10^{0,75} = 2$, dus $a = \frac{2}{10^{0,75}} \approx 0,356$

b $t = 0,36n^{0,75}$

Neem $2n$ voor n in de formule $t = 0,36n^{0,75}$.

Dit geeft $t = 0,36 \cdot (2n)^{0,75} = 0,36 \cdot 2^{0,75} \cdot n^{0,75} = 2^{0,75} \cdot 0,36n^{0,75} \approx 1,68 \cdot 0,36n^{0,75}$.

Dus de tijd neemt met 68% toe.

c $t = 0,36n^{0,75}$

$0,36n^{0,75} = t$

$n^{0,75} = \frac{1}{0,36}t$

$n = \left(\frac{1}{0,36}t\right)^{\frac{1}{0,75}}$

Neem $1,5t$ voor t in deze formule.

Dit geeft $n = \left(\frac{1}{0,36} \cdot 1,5t\right)^{\frac{1}{0,75}} = 1,5^{\frac{1}{0,75}} \cdot \left(\frac{1}{0,36}t\right)^{\frac{1}{0,75}} \approx 1,72 \cdot \left(\frac{1}{0,36}t\right)^{\frac{1}{0,75}}$.

Dus het aantal geleerde symbolen wordt 1,72 keer zo groot.

14 a $l = 1,73$ geeft $G = 13,4 \cdot 1,73^3 \approx 69,38$

Dus Rutger woog ongeveer 69 kg.

b $13,4l^3 = 32$

$l^3 = \frac{32}{13,4}$

$l \approx \sqrt[3]{\frac{32}{13,4}} \approx 1,34$

Dus Rutger was ongeveer 134 cm lang.

Alternatieve uitwerking

$$13,4l^3 = 32$$

$$\text{Voer in } y_1 = 13,4x^3 \text{ en } y_2 = 32.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,34$.

Dus Rutger was ongeveer 134 cm lang.

$$\text{c } G = 13,4l^3$$

$$13,4l^3 = G$$

$$l^3 = \frac{1}{13,4}G$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{1}{13,4}G}$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{1}{13,4}} \cdot \sqrt[3]{G}$$

$$l \approx 0,42 \cdot \sqrt[3]{G}$$

$$\text{Dus } l = 0,42 \cdot \sqrt[3]{G}.$$

Gemengde opgaven**Bladzijde 44**

$$\text{1 a } G = 25 - \frac{16}{z+1}$$

$$\frac{16}{z+1} = 25 - G$$

$$z+1 = \frac{16}{25-G}$$

$$z = -1 + \frac{16}{25-G}$$

$$z = \frac{-25 + G + 16}{25-G}$$

$$z = \frac{G-9}{25-G}$$

Dus $a = -9$ en $b = 25$.

$$\text{b } P = 4 \cdot (243xy)^{0,2} - (32xy)^{0,2} = 4 \cdot 243^{0,2} \cdot (xy)^{0,2} - 32^{0,2} \cdot (xy)^{0,2} = 12 \cdot \sqrt[5]{xy} - 2 \cdot \sqrt[5]{xy} = 10 \cdot \sqrt[5]{xy}$$

$$\text{Dus } P = 10 \cdot \sqrt[5]{xy}.$$

$$\text{c } y = 3 \cdot \frac{(2x^{0,6})^3}{x^{-4}} = 3 \cdot \frac{2^3 \cdot (x^{0,6})^3}{x^{-4}} = 3 \cdot \frac{8 \cdot x^{1,8}}{x^{-4}} = 24x^{5,8}$$

$$\text{Dus } y = 24x^{5,8}.$$

$$\text{d } A = 4^{2\frac{1}{2}} x^{-3\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = 4^{2\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x^{3\frac{1}{4}}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = 4^{2\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{4}}} \cdot y \cdot y^{\frac{1}{2}} = \frac{32y\sqrt{y}}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}$$

$$\text{Dus } A = \frac{32y\sqrt{y}}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}.$$

$$\text{e } B = 16(q-5)^2$$

$$16(q-5)^2 = B$$

$$(q-5)^2 = \frac{1}{16}B$$

$$q-5 = \sqrt{\frac{1}{16}B}$$

$$q-5 = \sqrt{\frac{1}{16}} \cdot \sqrt{B}$$

$$q = \frac{1}{4}\sqrt{B} + 5$$

$$\text{2 a } A = 0,4 \cdot \sqrt[3]{p-6}$$

$$0,4 \cdot \sqrt[3]{p-6} = A$$

$$\sqrt[3]{p-6} = 2,5A$$

$$p-6 = (2,5A)^3$$

$$p = 15,625A^3 + 6$$

$$\text{b } \frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{x^4 \cdot \sqrt[5]{x}} = \frac{x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^4 \cdot x^{\frac{1}{5}}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{4}{5}}} = x^{\frac{3}{2} - \frac{4}{5}} = x^{-\frac{7}{10}}$$

$$\text{c } \frac{5p}{2p+q} = 10 + 3p$$

$$2p+q = \frac{5p}{10+3p}$$

$$q = -2p + \frac{5p}{10+3p}$$

$$\text{d } A = 2^{x-3} \cdot 3^{y+2} = 2^x \cdot 2^{-3} \cdot 3^y \cdot 3^2 = 2^x \cdot \frac{1}{2^3} \cdot 3^y \cdot 9 = 2^x \cdot \frac{1}{8} \cdot 3^y \cdot 9 = 1\frac{1}{8} \cdot 2^x \cdot 3^y$$

$$\text{Dus } A = 1\frac{1}{8} \cdot 2^x \cdot 3^y.$$

$$\text{e } C = 12,5(4D)^{-1,5}$$

$$12,5(4D)^{-1,5} = C$$

$$(4D)^{-1,5} = 0,08C$$

$$4D = (0,08C)^{-\frac{1}{1,5}}$$

$$D = \frac{1}{4} \cdot 0,08^{-\frac{1}{1,5}} \cdot C^{-\frac{1}{1,5}}$$

$$D \approx 1,35C^{-0,67}$$

$$\text{Dus } D = 1,35C^{-0,67}.$$

$$\text{3 a } \left. \begin{array}{l} W = ad^4 \\ d = 5 \text{ en } W = 13,5 \end{array} \right\} a \cdot 5^4 = 13,5, \text{ dus } a = \frac{13,5}{5^4} = 0,0216$$

$$\text{b } d = 8 \text{ geeft } W = 0,02 \cdot 8^4 = 81,92$$

Dus er stroomt 81,92 liter per seconde door de buis, dat is $81,92 \cdot 60 \approx 4915$ liter per minuut.

$$\text{c } \text{In een uur } 16\,650 \text{ liter, dus per seconde } \frac{16\,650}{3600} = 4,625 \text{ liter.}$$

$$W = 4,625 \text{ geeft } 0,02d^4 = 4,625$$

$$d^4 = 231,25$$

$$d = \sqrt[4]{231,25} \text{ (de negatieve waarde van } d \text{ voldoet niet)}$$

$$d \approx 3,9$$

Dus de diameter is ongeveer 3,9 cm.

Alternatieve uitwerking

$$\text{In een uur } 16\,650 \text{ liter, dus per seconde } \frac{16\,650}{3600} = 4,625 \text{ liter.}$$

$$W = 4,625 \text{ geeft } 0,02d^4 = 4,625$$

$$\text{Voer in } y_1 = 0,02x^4 \text{ en } y_2 = 4,625.$$

$$\text{De optie snijpunt geeft } x \approx 3,9.$$

Dus de diameter is ongeveer 3,9 cm.

$$\text{d } \text{Neem } 1,3d \text{ voor } d \text{ in de formule } W = 0,02d^4.$$

$$\text{Dit geeft } W = 0,02 \cdot (1,3d)^4 = 0,02 \cdot 1,3^4 \cdot d^4 = 1,3^4 \cdot 0,02d^4 \approx 2,9 \cdot 0,02d^4.$$

Dus er stroomt ongeveer 2,9 keer zo veel water per seconde door de buis.

$$\text{e } W = 0,02d^4$$

$$0,02d^4 = W$$

$$d^4 = 50W$$

$$d = \sqrt[4]{50W}$$

Neem $2W$ voor W in deze formule.

$$\text{Dit geeft } d = \sqrt[4]{50 \cdot 2W} = \sqrt[4]{2 \cdot 50W} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{50W} \approx 1,19 \cdot \sqrt[4]{50W}.$$

Dus de diameter van een buis moet 19% groter worden.

Bladzijde 45

$$\text{4 a } G = 65 \text{ geeft } 0,4d^3 = 65$$

$$d^3 = 162,5$$

$$d = \sqrt[3]{162,5}$$

$$d \approx 5,46$$

Dus de diameter is 5,5 cm.

Alternatieve uitwerking

$$G = 65 \text{ geeft } 0,4d^3 = 65$$

$$\text{Voer in } y_1 = 0,4x^3 \text{ en } y_2 = 65.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 5,46$.

Dus de diameter is 5,5 cm.

- b** Neem $2d$ voor d in de formule $G = 0,4d^3$.

$$\text{Dit geeft } G = 0,4 \cdot (2d)^3 = 0,4 \cdot 2^3 \cdot d^3 = 2^3 \cdot 0,4d^3 = 8 \cdot 0,4d^3.$$

Dus G wordt 8 keer zo groot.

- c** $G = 0,4d^3$

$$0,4d^3 = G$$

$$d^3 = 2,5G$$

$$d = \sqrt[3]{2,5G}$$

Neem $2G$ voor G in deze formule.

$$\text{Dit geeft } G = \sqrt[3]{2,5 \cdot 2G} = \sqrt[3]{2 \cdot 2,5 \cdot G} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2,5G} \approx 1,26 \cdot \sqrt[3]{2,5G}.$$

Dus de diameter is 26% groter.

- 5 a** $G = 40$ geeft $H = 12 \cdot 40^{0,67} = 142,08...$

$$\text{Dus } I = \frac{130}{142,08...} \approx 0,91.$$

- b** $G = 70$ geeft $H = 12 \cdot 70^{0,67} = 206,72...$

$$\text{Dus } I = \frac{1650}{206,72...} \approx 8,0.$$

- c** Er geldt $\frac{1050}{H} = 1,04$, dus $H = \frac{1050}{1,04} \approx 1010$.

$$\text{Los op } 12 \cdot G^{0,67} = 1010$$

$$\text{Voer in } y_1 = 12x^{0,67} \text{ en } y_2 = 1010.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 747$.

Dus $G = 747$ kg.

- d** $H = 12 \cdot G^{0,67}$ invullen in $I = \frac{W}{H}$ geeft $I = \frac{W}{12 \cdot G^{0,67}} = \frac{1}{12} \cdot W \cdot \frac{1}{G^{0,67}} \approx 0,083 \cdot W \cdot G^{-0,67}.$

$$\text{Dus } I = 0,083 \cdot W \cdot G^{-0,67}.$$

- 6 a** $P = 800 \cdot l^{-2,25}$

$$P = 800 \cdot \frac{1}{l^{2,25}}$$

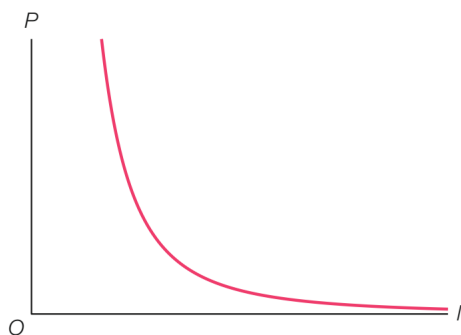
$$P = \frac{800}{l^{2,25}}$$

Als l groter wordt, dan wordt de noemer van de breuk groter en dan wordt P kleiner.

Dat wil zeggen dat er minder organismen per km^2 leven, oftewel dat de organismen gemiddeld verder van elkaar leven. Dus de bewering klopt.

Alternatieve uitwerking

$$\text{Voer in } y_1 = 800x^{-2,25}.$$



Als l groter wordt, dan wordt P kleiner. Dus de bewering klopt.

- b** $P = 1350$ geeft $800 \cdot l^{-2,25} = 1350$

$$\text{Voer in } y_1 = 800x^{-2,25} \text{ en } y_2 = 1350.$$

De optie snijpunt geeft $x = 0,792...$

De gemiddelde lengte is dus ongeveer 79 cm.

- c** $l = 2,15$ geeft $P = 800 \cdot 2,15^{-2,25} \approx 142,92 \dots$
 In het gebied van 250 km^2 geeft dit $250 \cdot 142,92 \dots = 35\,730,8 \dots$
 Er leven dus ongeveer 35 730 kariboes in dit gebied.
- d** 160 000 exemplaren per 5 km^2 geeft $P = \frac{160\,000}{5} = 32\,000$.
 Hieruit volgt $800 \cdot l^{-2,25} = 32\,000$.
 Voer in $y_1 = 800x^{-2,25}$ en $y_2 = 32\,000$.
 De optie snijpunt geeft $x = 0,194 \dots$
 De gemiddelde lengte is dus ongeveer 19 cm.
- e** Neem $1,2l$ voor l in de formule $P = 800 \cdot l^{-2,25}$.
 Dit geeft $P = 800 \cdot (1,2l)^{-2,25} = 800 \cdot 1,2^{-2,25} \cdot l^{-2,25} = 1,2^{-2,25} \cdot 800 \cdot l^{-2,25} \approx 0,66 \cdot 800 \cdot l^{-2,25}$.
 Dus P neemt met 34% af.

Bladzijde 46

- 7 a** $l = 8,6$ geeft $v = 4,8\sqrt{8,6} \approx 14,08 \text{ km/uur}$
 $l = 5,8$ geeft $v = 4,8\sqrt{5,8} \approx 11,56 \text{ km/uur}$
 Dat is dus $\frac{14,08 - 11,56}{11,56} \cdot 100\% \approx 21,8\%$ hoger.
- b** Bij schip II is $v = 4,8\sqrt{l_{II}}$, dus bij schip I is
 $v = 4,8\sqrt{2l_{II}} = 4,8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{l_{II}} = \sqrt{2} \cdot 4,8\sqrt{l_{II}} \approx 1,4 \cdot 4,8\sqrt{l_{II}}$.
 De rompsnelheid bij schip I is 1,4 keer zo groot als bij schip II.
- c** $v = 4,8\sqrt{l}$
 $4,8\sqrt{l} = v$
 $\sqrt{l} = \frac{1}{4,8}v$
 $l = \left(\frac{1}{4,8}v\right)^2$
 $l \approx 0,0434v^2$
 Dus $l = 0,0434v^2$.
- d** $v = 10$ geeft $l = 0,0434 \cdot 10^2 \approx 4,3$
 $v = 20$ geeft $l = 0,0434 \cdot 20^2 \approx 17,4$
 Die schepen hebben een lengte van de waterlijn tussen 4,3 en 17,4 meter.

- 8 a** $T = -27,4$ geeft $v = 331\sqrt{1 + \frac{-27,4}{273}} \approx 313,95 \text{ m/s}$
 $T = 38,6$ geeft $v = 331\sqrt{1 + \frac{38,6}{273}} \approx 353,63 \text{ m/s}$
 Het verschil in snelheid is dus $353,63 - 313,95 \approx 40 \text{ m/s}$.
- b** Los op $331\sqrt{1 + \frac{T}{273}} = 340$.
 Voer in $y_1 = 331\sqrt{1 + \frac{x}{273}}$ en $y_2 = 340$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 15$.
 Dus de temperatuur is 15°C .
- c** $T_0 = 25$ geeft $T = 25 - 6,5 \cdot 2,5 = 8,75$
 $T = 8,75$ geeft $v = 331\sqrt{1 + \frac{8,75}{273}} = 336,2 \dots \text{ m/s} \approx 1211 \text{ km/uur}$
- d**
$$\left. \begin{array}{l} T = T_0 - 6,5h \\ h = 2 \text{ en } T = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} T_0 - 6,5 \cdot 2 = -1 \\ T_0 - 13 = -1 \\ T_0 = 12 \end{array}$$

 $T = 12 - 6,5h$ invullen in $v = 331\sqrt{1 + \frac{T}{273}}$ geeft

$$v = 331\sqrt{1 + \frac{12 - 6,5h}{273}} = 331\sqrt{1 + \frac{12}{273} - \frac{6,5h}{273}} = 331\sqrt{-\frac{6,5}{273}h + 1 + \frac{12}{273}} \approx 331\sqrt{-0,0238h + 1,0440}$$

 Dus $v = 331\sqrt{-0,0238h + 1,0440}$.

9

- a** Deel I is een parabool met top (4, 500).

$$\left. \begin{array}{l} h = a(t-4)^2 + 500 \\ \text{door } (0, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot (-4)^2 + 500 = 0 \\ 16a = -500 \\ a = -31,25 \end{array}$$

$$\text{Dus } h = -31,25(t-4)^2 + 500.$$

Deel IV is een parabool met top (8, 1000).

$$\left. \begin{array}{l} h = a(t-8)^2 + 1000 \\ \text{door } (10, 1250) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot (10-8)^2 + 1000 = 1250 \\ 4a = 250 \\ a = 62,5 \end{array}$$

$$\text{Dus } h = 62,5(t-8)^2 + 1000.$$

- b** De punten (-2, 2) en (2, 2) hebben een hoogteverschil van 2 met het punt van symmetrie (0, 0).

De punten (4, 500) en (8, 1000) hebben een hoogteverschil van 250 met het punt van symmetrie (6, 750).

$$\frac{250}{2} = 125, \text{ dus er moet worden herschaald met een factor 125.}$$

$$\text{Dit geeft } h = 125\left(-\frac{1}{8}t^3 + \frac{1}{2}t\right) = 125 \cdot -\frac{1}{8}t^3 + 125 \cdot \frac{1}{2}t = -15,625t^3 + 187,5t.$$

De grafiek van $h = -15,625t^3 + 187,5t$ heeft het punt (0, 0) als punt van symmetrie.

Het punt van symmetrie bij de delen II en III is (6, 750). De grafiek van $h = -15,625t^3 + 187,5t$ moet dus 6 naar rechts en 750 omhoog worden geschoven.

$$\text{Dit geeft } h = -15,625(t-6)^3 + 187,5(t-6) + 750.$$

- c** Voor deel I:

$$h = -31,25(t-4)^2 + 500$$

↓ verschuiving (1, 0)

$$h = -31,25(t-1-4)^2 + 500 = -31,25(t-5)^2 + 500$$

Voor delen II en III:

$$h = -15,625(t-6)^3 + 187,5(t-6) + 750$$

↓ verschuiving (1, 0)

$$h = -15,625(t-1-6)^3 + 187,5(t-1-6) + 750 = -15,625(t-7)^3 + 187,5(t-7) + 750$$

Voor deel IV:

$$h = -15,625(t-8)^3 + 187,5(t-8) + 750$$

↓ verschuiving (1, 0)

$$h = -15,625(t-1-8)^3 + 187,5(t-1-8) + 750 = -15,625(t-9)^3 + 187,5(t-9) + 750$$

- d** Deel I is een parabool met top (2, 1000).

$$\left. \begin{array}{l} h = a(t-2)^2 + 1000 \\ \text{door } (0, 1250) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot (0-2)^2 + 1000 = 1250 \\ 4a = 250 \\ a = 62,5 \end{array}$$

$$\text{Dus } h = 62,5(t-2)^2 + 1000.$$

Deel IV is een parabool met top (6, 500).

$$\left. \begin{array}{l} h = a(t-6)^2 + 500 \\ \text{door } (10, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot (10-6)^2 + 500 = 0 \\ 16a = -500 \\ a = -31,25 \end{array}$$

$$\text{Dus } h = -31,25(t-6)^2 + 500.$$

Ga voor de delen II en III eerst uit van de formule $h = \frac{1}{8}t^3 - \frac{1}{2}t$, want de grafiek van de delen II en III is dalend. Het punt van symmetrie van de grafiek bij deze formule is (0, 0) en de toppen zijn (-2, 2) en (2, -2).

Omdat het verschil in hoogte tussen het punt van symmetrie en de toppen 250 moet worden, moet er worden herschaald met een factor 125.

$$\text{Dat geeft } h = 125\left(\frac{1}{8}t^3 - \frac{1}{2}t\right) = 125 \cdot \frac{1}{8}t^3 - 125 \cdot \frac{1}{2}t = 15,625t^3 - 187,5t.$$

Nu moet de grafiek nog 4 naar rechts en 750 omhoog worden geschoven. De formule wordt $h = 15,625(t-4)^3 - 187,5(t-4) + 750.$

6 Kansrekening

6.1 Kansen

Bladzijde 50

1 10 ogen: 64, 55, 46

11 ogen: 56, 65

12 ogen: 66

Met twee dobbelstenen minstens 10 ogen gooien kan dus op 6 manieren.

8 ogen: 62, 53, 44, 35, 26

Voor het gooien van 8 ogen zijn er 5 manieren.

De kans op minstens 10 ogen gooien is dus groter.

Bladzijde 51

2 a De sectoren van de schijf zijn niet even groot, dus de kansen ook niet.

b De sector van 3 is een zesde deel van de hele schijf.

$$P(\text{pijl wijst 3 aan}) = \frac{1}{6}$$

Bladzijde 52

3 a

6		e		e	x	x	e
5	e		e		e		x
4		e		e		e	
3	e		e		e		
2		e		e		e	
1	e		e		e		
	1	2	3	4	5	6	

rood

groen

x som meer dan 10

e som is even

$$P(\text{som is meer dan 10}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

b $P(\text{som is even}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

c

6	x	x	x	x	x	g
5	x	x	x	x	g	
4	x	x	x	g		
3	x	x	g			
2	x	g				
1	g					
	1	2	3	4	5	6

rood

groen

g gelijk aantal ogen

x rood hoger dan groen

$$P(\text{gelijk aantal ogen}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

d $P(\text{rood hoger dan groen}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

e

6				2		
5			2			
4		2				2
3	2				2	
2				2		
1			2			
	1	2	3	4	5	6

rood

groen

VERSCHIL

$$P(\text{verschil is 2}) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

4 a

VERSCHIL						
6				1	0	
5			1	0	1	
4			1	0	1	
3		1	0	1		
2	1	0	1			
1	0	1				
	1	2	3	4	5	6

$$P(\text{verschil is minder dan 2}) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

b

PRODUCT

6	6	12	18	24	30	36
5	5	10	15	20	25	30
4	4	8	12	16	20	24
3	3	6	9	12	15	18
2	2	4	6	8	10	12
1	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6

$$P(\text{product is 12}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

c $P(\text{product is minder dan 30}) = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$

5 a

$$P(\text{aantallen gelijk}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

b $P(\text{som is 8}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

c $P(\text{product is minstens 16}) = \frac{9}{32}$

d $P(\text{verschil is 1}) = \frac{7}{32}$

4			1	g	8	1	24	28	32
3		1	g	1	8		18	21	24
2	1	g	1			8			16
1	g	1					8		
	1	2	3	4	5	6	7	8	

g gelijk
8 som = 8
16, 18, ... zijn producten
1 verschil = 1

6

Ze schaatsen elk $\frac{10000}{400} = 25$ rondjes. De training duurt $25 + 3 + 1 = 29$ rondjes.

Daarvan zijn ze $25 - 3 - 1 = 21$ alle drie aan het schaatsen.

Dus $P(\text{alle drie aan het schaatsen}) = \frac{21}{29}$.

Bladzijde 53

V1

a aantal = $5^3 = 125$

b aantal = $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

c aantal = $5^2 + 5^3 + 5^4 = 775$

d aantal = $5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 = 85$

Bladzijde 54

V2

a aantal = $\binom{7}{2} = 21$

b aantal = $5^7 = 78125$

c 6 6 6 6 6 5

aantal = $\binom{7}{1} = 7$

d 6 6 6 6 6 4 $\binom{7}{6} = 7$ keer

6 6 6 6 5 5 $\binom{7}{5} = 21$ keer

aantal = $7 + 21 = 28$

e	7 ogen	1 1 1 1 1 1 1	1 keer
	8 ogen	1 1 1 1 1 1 2	$\binom{7}{6} = 7$ keer
	9 ogen	1 1 1 1 1 1 3	$\binom{7}{6} = 7$ keer
		1 1 1 1 1 2 2	$\binom{7}{5} = 21$ keer

$$\text{aantal} = 1 + 7 + 7 + 21 = 36$$

- 7 a** Er zijn 6 mogelijkheden om met de drie dobbelstenen hetzelfde aantal ogen te gooien, namelijk 1 1 1, 2 2 2, 3 3 3, 4 4 4, 5 5 5 en 6 6 6.
- b** In totaal zijn er $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ verschillende uitkomsten mogelijk.
- c** Dus $P(\text{hetzelfde aantal ogen}) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

Bladzijde 55

- 8** Nee, want de kleur van de dobbelstenen heeft geen invloed op het aantal ogen dat wordt gegooit.

- 9 a** Het aantal mogelijke uitkomsten is $2^4 = 16$.
Gunstige uitkomsten zijn kkkk en mmmm.
 $P(\text{vier keer hetzelfde}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
- b** Gunstige uitkomsten zijn kmmm, mkmm, mmkm en mmmk.
 $P(\text{één keer kop}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
- c** Er zijn $\binom{4}{2} = 6$ uitkomsten met twee keer munt, $\binom{4}{3} = 4$ uitkomsten met drie keer munt en er is $\binom{4}{4} = 1$ uitkomst met vier keer munt.
 $P(\text{meer dan één keer munt}) = \frac{11}{16}$

- 10 a** Het aantal mogelijke uitkomsten is $6^3 = 216$.
Gunstige uitkomsten zijn 1 1 3, 1 3 1, 3 1 1, 1 2 2, 2 1 2 en 2 2 1.
 $P(\text{som is 5}) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$
- b** Som is 3: uitkomst 1 1 1
Som is 4: uitkomsten 1 1 2, 1 2 1 en 2 1 1
Som is 5: 6 uitkomsten, zie vraag a
Som is 6: 1 1 4 3 keer
1 2 3 3! = 6 keer
2 2 2 1 keer
Er zijn $1 + 3 + 6 + 10 = 20$ gunstige uitkomsten.
 $P(\text{som is minder dan 7}) = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$
- c** Gunstige uitkomsten zijn 3 2 4 (6 keer) en 3 1 5 (6 keer).
Er zijn $6 + 6 = 12$ gunstige uitkomsten.
 $P(\text{met één dobbelsteen 3 en som is 9}) = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$

- 11 a** Het aantal mogelijke uitkomsten is $2^6 = 64$.
Gunstige uitkomsten zijn kkkkkk 6 keer
 $P(\text{vijf keer kop}) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$

b Gunstige uitkomsten zijn mmmkkk $\binom{6}{3} = 20$ keer

$$P(\text{drie keer munt}) = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

c Gunstige uitkomsten zijn mmmmmm
kmmmmm 6 keer
kkmmmm $\binom{6}{2} = 15$ keer

Er zijn $1 + 6 + 15 = 22$ gunstige uitkomsten.

$$P(\text{minder dan drie keer kop}) = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

12 Het aantal mogelijke uitkomsten is $\binom{15}{3} = 455$.

Gunstige combinaties zijn:

1 2 12	2 3 10	3 4 8	4 5 6
1 3 11	2 4 9	3 5 7	
1 4 10	2 5 8		
1 5 9	2 6 7		
1 6 8			

Er zijn 12 gunstige combinaties.

$$P(\text{som is 15}) = \frac{12}{455}$$

Bladzijde 56

C1

SOM				
4	5	6	7	8
3		5	6	7
2			5	6
1				5
	1	2	3	4

Er zijn 10 gunstige uitkomsten.

$$P(\text{som is minstens 5}) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

C2 Het aantal mogelijke uitkomsten is $6^3 = 216$.

Som is 15: 6 6 3 3 keer
6 5 4 3! = 6 keer
5 5 5 1 keer

Er zijn $3 + 6 + 1 = 10$ gunstige uitkomsten.

$$P(\text{som is 15}) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

6.2 Empirische kansen

Bladzijde 57

13 a Marieke gooit in $\frac{30}{300} \cdot 100\% = 10\%$ van de worpen een zes.

b Bij een eerlijke dobbelsteen geldt $P(6 \text{ ogen gooien}) = \frac{1}{6} \approx 0,167$.

Dan zou je in 16,7% van de worpen een zes gooien.

Omdat 16,7% veel meer is dan 10%, is deze dobbelsteen waarschijnlijk niet eerlijk.

14 a	N	50	100	150	200	250	300	500	1000
	f	31	61	89	114	141	174	282	579
	$\frac{f}{N}$	0,62	0,61	0,59	0,57	0,56	0,58	0,56	0,58

b De beste schatting krijg je door alle worpen te nemen.

$$P(\text{punt omhoog}) = \frac{31 + 61 + 89 + 114 + 141 + 174 + 282 + 579}{50 + 100 + 150 + 200 + 250 + 300 + 500 + 1000} = \frac{1471}{2550} \approx 0,58$$

c De twee mogelijkheden bij een worp met een punaise zijn niet even waarschijnlijk. Je kunt dus niet zeggen dat $P(\text{punt omhoog}) = \frac{1}{2}$.

Bladzijde 59

- 15 a** empirische kans
b theoretische kans
c empirische kans
d theoretische kans
e empirische kans

16 a $P(\text{max. temperatuur minstens } 15^\circ\text{C}) = \frac{50 + 32}{119} \approx 0,69$

b $P(\text{minder dan } 5,0 \text{ mm regen}) = \frac{54 + 21 + 24}{119} \approx 0,83$

c $P(\text{minstens 1 uur zon}) = \frac{32 + 40 + 29}{119} \approx 0,85$

Bladzijde 60

17 a $P(\text{georganiseerde reis ging naar België}) = \frac{699}{2633} \approx 0,265$

b $P(\text{niet-georganiseerde reis ging naar België}) = \frac{411}{1067} \approx 0,385$

c $0,385 > 0,265$ en dus gingen er verhoudingsgewijs meer mensen naar België die een niet-georganiseerde reis deden dan die een georganiseerde reis deden.

Bladzijde 62

18 Bereken de kans dat een willekeurig gekozen ondervraagde die veertigplusser is, voor verlaten is.

19 a $P(\text{jongere}) = \frac{24}{96} = 0,25$

b $P(\text{jongere heeft geen mening}) = \frac{3}{24} = 0,125$

c $P(\text{jongere en geen mening}) = \frac{3}{96} \approx 0,031$

d $P(\text{ondervraagde die geen mening heeft, is jongere}) = \frac{3}{16} \approx 0,188$

20 a $P(\text{dertigjarige wordt 60}) = \frac{845\,134}{983\,378} \approx 0,859$

b $P(\text{dertigjarige sterft voor zijn 40e}) = \frac{983\,378 - 967\,252}{983\,378} \approx 0,016$

c $P(\text{tachtigjarige wordt minstens 95}) = \frac{11\,472}{344\,752} \approx 0,033$

d $P(\text{pasgeboren baby sterft voor zijn 30e}) = \frac{1\,000\,000 - 983\,378}{1\,000\,000} \approx 0,017$

e $P(\text{zestigjarige haalt wel zijn 70e, maar niet zijn 80e}) = \frac{659\,273 - 344\,752}{845\,134} \approx 0,372$

- 21** a $P(\text{uit west}) = \frac{2581}{8527} \approx 0,303$
 b $P(\text{naar oost}) = \frac{2970}{8527} \approx 0,348$
 c $P(\text{uit noord naar west}) = \frac{982}{2088} \approx 0,470$
 d $P(\text{rechtdoor}) = P(N \rightarrow Z \text{ of } O \rightarrow W \text{ of } Z \rightarrow N \text{ of } W \rightarrow O)$

$$= \frac{53 + 1711 + 51 + 1682}{8527} = \frac{3497}{8527} \approx 0,410$$

 e $P(\text{linksaf}) = P(N \rightarrow O \text{ of } O \rightarrow Z \text{ of } Z \rightarrow W \text{ of } W \rightarrow N)$

$$= \frac{1053 + 154 + 830 + 408}{8527} = \frac{2445}{8527} \approx 0,287$$

 f $P(\text{uit west naar noord}) = \frac{408}{2581} \approx 0,158$
 g $P(\text{uit west}) = \frac{2581}{8527}$, dus verwachte aantal is $\frac{2581}{8527} \cdot 7520 \approx 2276$.

Bladzijde 63

- 22** a $P(\text{passagier heeft minder dan 20 km afgelegd})$
 b $P(\text{passagier die tussen de 20 en 40 km heeft afgelegd, heeft een abonnement})$
 c $P(\text{passagier die geen abonnement heeft, heeft tussen de 20 en 40 km afgelegd})$

- 23** De empirische kans op basis van het experiment is $\frac{10}{100} = 0,1$.

Voor de theoretische kans geldt het volgende.

Aantal mogelijke uitkomsten is $6^3 = 216$.

Som is 15: 663 3 keer
 654 3! = 6 keer

555 1 keer

Som is 16: 664 3 keer

655 3 keer

Som is 17: 665 3 keer

Som is 18: 666 1 keer

Er zijn $3 + 6 + 1 + 3 + 3 + 3 + 1 = 20$ gunstige uitkomsten.

$$P(\text{som is 15}) = \frac{20}{216} \approx 0,093$$

Omdat $0,1 > 0,093$ is de empirische kans groter dan de theoretische kans.

- 24** 3,5% van 800 is 28
 8,5% van 400 is 34

	gerechtigd ruimte te betreden		
	ja	nee	
toegelaten	772	34	806
geweigerd	28	366	394
	800	400	1200

$$P(\text{niet toegelaten persoon is ten onrechte geweigerd}) = \frac{28}{394} \approx 0,071$$

- 25** a Het gedeelte jongens op de hele school is $\frac{504}{1120} = 0,45$.

Op het vwo mag je daarom $0,45 \cdot 520 = 234$ jongens verwachten.

Op de havo zijn dat er $0,45 \cdot 600 = 270$.

$$\text{b } P(\text{vwo voor jongen}) = \frac{210}{504} \approx 0,417$$

$$P(\text{vwo voor willekeurige leerling}) = \frac{520}{1120} \approx 0,464$$

Deze kansen zijn niet hetzelfde.

Bladzijde 65

$$\text{26 } \left. \begin{aligned} P(\text{leerling is jongen onder voorwaarde leerling heeft blauwe ogen}) &= \frac{15}{45} = \frac{1}{3} \\ P(\text{leerling is jongen}) &= \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \text{ kansen zijn hetzelfde}$$

$$\text{27 } \left. \begin{aligned} P(\text{bloedgroep 0 onder voorwaarde Rh-}) &= \frac{25}{30} \approx 0,833 \\ P(\text{bloedgroep 0}) &= \frac{180}{200} = 0,9 \end{aligned} \right\} \frac{25}{30} \neq 0,9$$

De gebeurtenissen 'bloedgroep 0' en 'Rh-' zijn dus afhankelijk.

$$\text{28 } \left. \begin{aligned} P(\text{bijbaan onder voorwaarde uitwonend}) &= \frac{480}{650} \approx 0,738 \\ P(\text{bijbaan}) &= \frac{1600}{2000} = 0,8 \end{aligned} \right\} \frac{480}{650} \neq 0,8$$

Het hebben van een bijbaan en uitwonend zijn, zijn dus afhankelijke gebeurtenissen.

29 Stel x het aantal elektrische fietsen van abonneementhouders.

	elektrisch	niet elektrisch	
abonnement	x	$120 - x$	120
geen abonnement	$160 - x$	$20 + x$	180
	160	140	300

$$P(\text{elektrisch onder voorwaarde abonnement}) = P(\text{elektrisch})$$

$$\frac{x}{120} = \frac{160}{300}$$

$$x = 64$$

$$P(\text{niet elektrisch en geen abonnement}) = \frac{20 + x}{300} = \frac{20 + 64}{300} = 0,28$$

Bladzijde 66

- C3** **a** theoretische kans
b empirische kans

$$\text{C4 } P(\text{jaar met minstens één zware storm}) = \frac{46}{114} \approx 0,404$$

$$\text{C5 } P(\text{leerling van 15 is jongen}) = \frac{9}{14} \approx 0,643$$

$$\text{C6 } \left. \begin{aligned} P(\text{leerling is jongen onder voorwaarde leerling is 14 jaar}) &= \frac{19}{76} = \frac{1}{4} \\ P(\text{leerling is jongen}) &= \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \text{ kansen zijn hetzelfde}$$

De gebeurtenissen zijn dus onafhankelijk.

6.3 Regels voor kansrekening

Bladzijde 67

- 30** a Van de vier even grote vakken van schijf I zijn er drie rood.
b $P(\text{rood}) = \frac{2}{3}$
c Er zijn 12 mogelijke uitkomsten.
De uitkomst rr komt 6 keer voor.
 $P(2 \text{ keer rood}) = \frac{6}{12} = 0,5$
d $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = 0,5$ en dat klopt.

Bladzijde 69

- 31** a $P(3 \text{ bananen}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$
b $P(\text{geen kersen}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
c $P(2 \text{ citroenen en 1 banaan}) = P(\text{c c b}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$
d $P(3 \text{ citroenen}) = 0$
- 32** a Afhankelijk, want de kinderen komen uit hetzelfde gezin en bijvoorbeeld in Noord-Europa is de kans op blauwe ogen veel groter dan in Azië.
b Onafhankelijk, de plaatsen liggen heel erg ver van elkaar af.
 $P(\text{regen in Breda en Sydney}) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14$
c Afhankelijk, de plaatsen liggen vrij dicht bij elkaar.
- 33** a $P(\text{totaal } 18) = P(468) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \approx 0,005$
b $P(\text{geen enkele } 3) = P(\overline{3}\overline{3}\overline{3}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \approx 0,547$
c $P(\text{elke steen hoogstens } 4) = 1 \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{8} \approx 0,333$
d $P(\text{elke steen een drievoud}) = P(3,3 \text{ of } 6,3 \text{ of } 6) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{8} \approx 0,021$
- 34** a $P(\text{Jeanine wint 3 keer}) = 0,65 \cdot 0,45 \cdot 0,5 \approx 0,146$
b $P(\text{Jeanine wint alleen schaken}) = 0,65 \cdot 0,55 \cdot 0,5 \approx 0,179$

Bladzijde 70

- 35** a Maak een rooster zoals in de bovenste figuur van theorie A.
 $P(\text{som is } 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, $P(\text{som is } 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ en $P(\text{som is } 3 \text{ of som is } 4) = \frac{5}{36}$
b ja
c $P(\text{product is } 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
 $P(\text{som is } 4 \text{ of product is } 4) = P(13 \text{ of } 22 \text{ of } 31 \text{ of } 14 \text{ of } 41) = \frac{5}{36}$
 $P(\text{som is } 4) + P(\text{product is } 4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
Dus $P(\text{som is } 4 \text{ of product is } 4) \neq P(\text{som is } 4) + P(\text{product is } 4)$.

Bladzijde 71

- 36** a $P(\text{één } 3) = P(3\overline{3}\overline{3}) + P(\overline{3}3\overline{3}) + P(\overline{3}\overline{3}3)$
 $= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = 0,45$
b $P(\overline{3}\overline{3}\overline{3}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \approx 0,267$
- 37** a $P(\text{één } 5) = P(5\overline{5}\overline{5}) + P(\overline{5}5\overline{5}) + P(\overline{5}\overline{5}5)$
 $= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{75}{216} \approx 0,347$
b $P(\text{twee keer } 6 \text{ en een } 3) = P(663) + P(636) + P(366)$
 $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{216} \approx 0,014$
c $P(\text{steeds minstens } 3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{64}{216} \approx 0,296$

- 38 a** $P(3 \text{ keer doorlopen}) = P(rtr) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,144$
b $P(1 \text{ keer wachten, niet voor het derde}) = P(rtr) + P(trr) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,432$

Punten- totaal	Score in fase					Kans op deze situatie
	I	II	III	IV	V	
15	1	2	3	4	5	$0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,0192$
14	0	2	3	4	5	$0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,0048$
13	1	0	3	4	5	$0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,0128$
12	0	0	3	4	5	$0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,0032$
12	1	2	0	4	5	$0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,0192$

$$P(\text{minstens 12 punten}) = 0,0192 + 0,0048 + 0,0128 + 0,0032 + 0,0192 \approx 0,059$$

- 40 a** $P(\text{één } 2) = P(222) + P(222) + P(222)$
 $= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{8} \approx 0,370$
b $P(\text{twee keer } 4) = P(444) + P(444) + P(444)$
 $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \approx 0,078$
c Gunstige uitkomsten zijn 466 457 448 367 358 268
De kans op elk van deze uitkomsten is gelijk, namelijk $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}$.
 $P(16 \text{ ogen}) = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \approx 0,031$

Bladzijde 72

- 41 a** $P(\text{geen enkele keer } 6) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 0,482$
b Vier keer achter elkaar met één dobbelsteen gooien is dezelfde situatie als in één keer met vier dobbelstenen gooien. De kans is dus gelijk aan de kans in vraag a, dus
 $P(\text{geen enkele } 6) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 0,482$.

Bladzijde 73

- 42** $P(\text{alleen eerste en laatste keer } 2) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} \approx 0,009$
Bij het berekenen van deze kans gebruik je geen combinaties, omdat de posities van de tweeën (eerste en laatste) al vastliggen en er niets meer te kiezen valt.

- 43 a** $P(3 \text{ keer appel en } 3 \text{ keer peer}) = \binom{6}{3} \cdot P(\text{aaappp}) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \approx 0,082$
b $P(\text{minstens } 5 \text{ keer appel}) = P(5 \text{ keer appel}) + P(6 \text{ keer appel}) = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^6 \approx 0,041$
c $P(3 \text{ keer banaan}) = \binom{6}{3} \cdot P(\text{bbbbb}) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \approx 0,082$
d $P(\text{geen enkele banaan}) = P(\text{bbbbb}) = \left(\frac{4}{5}\right)^6 \approx 0,262$
44 a $P(\text{geen enkele goed}) = P(\text{gggggg}) = \left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 0,178$
b $P(2 \text{ keer goed}) = \binom{6}{2} \cdot P(\text{GGgggg}) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0,297$
c $P(\text{minder dan } 3 \text{ keer goed}) = P(0 \text{ keer goed}) + P(1 \text{ keer goed}) + P(2 \text{ keer goed})$
 $= \left(\frac{3}{4}\right)^6 + \binom{6}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 + \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0,831$

Bladzijde 74

- 45 a** $P(3 \text{ juist}) = \binom{10}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^7 \approx 0,215$
b $P(\text{minder dan } 3 \text{ juist}) = P(0 \text{ juist}) + P(1 \text{ juist}) + P(2 \text{ juist})$
 $= 0,6^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^8 \approx 0,167$

46 a $P(\text{som is minder dan } 5) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$$P(3 \text{ keer minder dan } 5) = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,104$$

b $P(\text{som is meer dan } 7) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

$$P(\text{meer dan } 5 \text{ keer meer dan } 7) = P(6 \text{ keer meer dan } 7) + P(7 \text{ keer meer dan } 7) + P(8 \text{ keer meer dan } 7) \\ = \binom{8}{6} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^6 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^2 + \binom{8}{7} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^7 \cdot \frac{7}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^8 \approx 0,061$$

47 a $P(\text{minstens } 5 \text{ keer kop}) = P(5 \text{ keer kop}) + P(6 \text{ keer kop}) = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 0,109$

b $P(\text{minstens } 1 \text{ keer kop})$
 $= P(1 \text{ keer kop}) + P(2 \text{ keer kop}) + P(3 \text{ keer kop}) + P(4 \text{ keer kop}) + P(5 \text{ keer kop}) + P(6 \text{ keer kop})$
 $= \binom{6}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 0,984$

c $1 - P(0 \text{ keer kop}) = 1 - P(6 \text{ keer munt}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 0,984$ en dat levert hetzelfde antwoord op.

Bladzijde 76

48 a $P(\text{geen rood})$ is niet gelijk aan $1 - P(\text{allemaal rood})$, want

$$P(\text{geen rood}) = 1 - P(\text{minstens één rood})$$

b $P(\text{meer dan } 2 \text{ rood})$ is niet gelijk aan $1 - P(\text{minder dan } 2 \text{ rood})$, want

$$P(\text{meer dan } 2 \text{ rood}) = 1 - P(\text{hoogstens } 2 \text{ rood})$$

c $P(\text{hoogstens } 5 \text{ witte})$ is niet gelijk aan $1 - P(\text{minstens } 5 \text{ witte})$, want

$$P(\text{hoogstens } 5 \text{ witte}) = 1 - P(\text{meer dan } 5 \text{ witte})$$

d $P(\text{minstens } 1 \text{ rode}) = 1 - P(\text{geen enkele rode})$

e $P(\text{hoogstens } 4 \text{ witte}) = 1 - P(5 \text{ witte})$

f $P(\text{niet } 5 \text{ witte}) = 1 - P(\text{wel } 5 \text{ witte})$

49 a $P(\text{minstens } 1 \text{ keer appel}) = 1 - P(\text{geen enkele keer appel}) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5 \approx 0,672$

b $P(3 \text{ appels en } 2 \text{ peren}) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \approx 0,013$

c $P(2 \text{ bananen}) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \approx 0,346$

d $P(\text{hoogstens } 3 \text{ bananen}) = 1 - P(4 \text{ bananen}) - P(5 \text{ bananen})$
 $= 1 - \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \frac{3}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^5 \approx 0,913$

Bladzijde 77

50 $P(\text{minstens één rookmelder gaat af}) = 1 - P(\text{geen enkele rookmelder gaat af})$
 $= 1 - 0,05 \cdot 0,15 \cdot 0,12 \cdot 0,23 \approx 0,9998$

51 a $P(\text{alle vijf niet kleurenblind}) = \left(\frac{11}{12}\right)^5 \approx 0,647$

b $P(\text{minstens één van tien kleurenblind}) = 1 - P(\text{alle tien niet kleurenblind}) = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^{10} \approx 0,581$

c $P(\text{één van zes kleurenblind}) = \binom{6}{1} \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^5 \approx 0,324$

52 a $P(\text{in hoogstens } 13 \text{ een koolmees}) = 1 - P(14) - P(15) = 1 - \binom{15}{14} \cdot 0,76^{14} \cdot 0,24 - 0,76^{15} \approx 0,906$

b $P(\text{in minstens } 2 \text{ een ekster}) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - 0,83^{15} - \binom{15}{1} \cdot 0,17 \cdot 0,83^{14} \approx 0,751$

c $P(\text{in geen enkele een vink}) = 0,72^{15} \approx 0,007$

d $P(\text{in geen enkele zowel een koolmees als een vink}) = (1 - 0,76 \cdot 0,28)^{15} \approx 0,028$

Bladzijde 78

C7 a $P(\text{geen rood}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} \approx 0,139$

b $P(\text{één keer groen}) = P(g \ g \ g) + P(g \ g \ g) = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} \approx 0,333$

C8 a $P(\text{twee blauw en twee rood}) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \approx 0,019$

b $P(\text{minder dan twee rood}) = P(\text{geen rood}) + P(\text{één rood}) = \left(\frac{4}{6}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^3 \approx 0,593$

C9 $P(\text{minstens twee blauw}) = 1 - P(\text{geen blauw}) - P(\text{één blauw}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 - \binom{8}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,395$

6.4 Het vaasmodel

Bladzijde 79

- 53** a Elke leerling kan maar één keer gekozen worden, dus herhaling is niet toegestaan.
b Het maakt niet uit in welke volgorde de leerlingen gekozen worden.
c Er zijn $\binom{15}{3} = 455$ drietallen mogelijk.

Bladzijde 80

54 a $P(\text{geen rode knikkers}) = \frac{\binom{8}{0} \cdot \binom{7}{5}}{\binom{15}{5}}$

- b Omdat de noemers van de breuken die worden opgeteld gelijk zijn.
Je hoeft nu maar één keer de deling door $\binom{15}{5}$ in je rekenmachine in te tikken.

Bladzijde 81

55 a $P(3 \text{ rode, 2 witte en 2 groene}) = \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{21}{7}} \approx 0,126$

b $P(\text{geen groene}) = \frac{\binom{15}{7}}{\binom{21}{7}} \approx 0,055$

c $P(2 \text{ rode en 5 witte}) = \frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{8}{5}}{\binom{21}{7}} \approx 0,010$

d $P(2 \text{ witte}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{13}{5}}{\binom{21}{7}} \approx 0,310$

56 a $P(3 \text{ witte en 3 blauwe}) = \frac{\binom{32}{3} \cdot \binom{12}{3}}{\binom{62}{6}} \approx 0,018$

b $P(\text{minstens 1 witte}) = 1 - P(\text{geen witte}) = 1 - \frac{\binom{30}{6}}{\binom{62}{6}} \approx 0,990$

c $P(3 \text{ of 4 witte}) = P(3 \text{ witte}) + P(4 \text{ witte}) = \frac{\binom{32}{3} \cdot \binom{30}{3}}{\binom{62}{6}} + \frac{\binom{32}{4} \cdot \binom{30}{2}}{\binom{62}{6}} \approx 0,582$

$$\text{d } P(1 \text{ rode}) = \frac{\binom{18}{1} \cdot \binom{44}{5}}{\binom{62}{6}} \approx 0,318$$

$$\text{57 } P(\text{één appel, één peer en één sinaasappel}) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{15}{3}} \approx 0,264$$

Bladzijde 82

58 80 knikkers waarvan één rood (de fiets), vijf wit (de boekenbonnen) en 74 zwart (de niet-prijzen).

$$\text{59 a } P(\text{Monique 1 prijs}) = \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{30}{2}}{\binom{40}{3}} \approx 0,440$$

$$\text{b } P(\text{Barbara 2 tweede prijzen}) = \frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{30}{2}}{\binom{40}{4}} \approx 0,100$$

$$\text{c } P(\text{geen van beiden een prijs}) = \frac{\binom{30}{7}}{\binom{40}{7}} \approx 0,109$$

$$\text{d } P(\text{Barbara 4 prijzen}) = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{40}{4}} \approx 0,002$$

$$\text{60 a } P(\text{minder dan 2 prijzen}) = P(0 \text{ prijzen}) + P(1 \text{ prijs}) = \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{76}{5}}{\binom{80}{5}} + \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{76}{4}}{\binom{80}{5}} \approx 0,982$$

$$\begin{aligned} \text{b } P(50 \text{ euro}) &= P(\text{hoofdprijs en verder niets}) + P(2 \text{ keer } 25 \text{ euro en verder niets}) \\ &= \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{76}{4}}{\binom{80}{5}} + \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{76}{3}}{\binom{80}{5}} \approx 0,062 \end{aligned}$$

61 a $P(\text{meer dan 8 ondervraagden wonen dichtbij})$

$$= P(9 \text{ wonen dichtbij}) + P(10 \text{ wonen dichtbij}) = \frac{\binom{29}{9} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{53}{10}} + \frac{\binom{29}{10} \cdot \binom{24}{0}}{\binom{53}{10}} \approx 0,013$$

$$\begin{aligned} \text{b } P(\text{minder dan 3 vrouwen}) &= P(0 \text{ vrouwen}) + P(1 \text{ vrouw}) + P(2 \text{ vrouwen}) \\ &= \frac{\binom{16}{0} \cdot \binom{37}{10}}{\binom{53}{10}} + \frac{\binom{16}{1} \cdot \binom{37}{9}}{\binom{53}{10}} + \frac{\binom{16}{2} \cdot \binom{37}{8}}{\binom{53}{10}} \approx 0,358 \end{aligned}$$

$$\text{c } P(2 \text{ vrouwen die 5 km of meer van het werk af wonen}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{48}{8}}{\binom{53}{10}} \approx 0,194$$

Bladzijde 83

62 Uit de gegevens volgt de tabel hiernaast.

	14	15	16	
in A	6	10	1	17
niet in A	2	5	4	11
	8	15	5	28

$$\text{a } P(\text{alleen 15-jarigen}) = \frac{\binom{15}{4}}{\binom{28}{4}} \approx 0,067$$

$$\text{b } P(\text{niet Floris}) = \frac{\binom{27}{4}}{\binom{28}{4}} \approx 0,857$$

$$\text{c } P(\text{minstens 1 uit A}) = 1 - P(\text{geen uit A}) = 1 - \frac{\binom{11}{4}}{\binom{28}{4}} \approx 0,984$$

$$\begin{aligned} \text{d } P(\text{hoogstens 2 uit A die 15 jaar zijn}) &= P(\text{geen}) + P(1) + P(2) \\ &= \frac{\binom{18}{4}}{\binom{28}{4}} + \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{18}{3}}{\binom{28}{4}} + \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{18}{2}}{\binom{28}{4}} \approx 0,884 \end{aligned}$$

63 $P(\text{minstens 1 schoppenkaart en geen enkele hartenkaart})$
 $= P(\text{geen hartenkaart}) - P(\text{geen hartenkaart en geen schoppenkaart})$

$$= \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}} - \frac{\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}} \approx 0,069$$

64 a $P(3 \text{ rode}) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} \approx 0,255$

b $P(\text{eerste rood}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

c Er zijn nog 11 knikkers, waarvan er 7 rood zijn, dus $P(\text{tweede ook rood}) = \frac{7}{11}$.
 $P(\text{derde ook rood}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

d $P(3 \text{ rode}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{3}{5} \approx 0,255$ en dat is hetzelfde antwoord als bij vraag a.

e Jasmine vergeet dat je de twee rode knikkers en één blauwe ook in een andere volgorde kunt pakken.

f $P(2 \text{ rode en 1 blauwe}) = P(rrb) + P(rbr) + P(brr) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \approx 0,509$

g $P(2 \text{ rode en 1 blauwe}) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{8}{12}\right)^2 \cdot \frac{4}{12} \approx 0,444$

Bladzijde 85

65 a $\left. \begin{aligned} P(p \not p \not p) &= \frac{4}{15} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{10}{13} = \frac{44}{273} \\ P(\not p p \not p) &= \frac{11}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13} = \frac{44}{273} \\ P(\not p \not p p) &= \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{44}{273} \end{aligned} \right\} \text{alle drie hetzelfde}$

b $P(\text{één prijs}) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{11}{2}}{\binom{15}{3}} \approx 0,484$

c Je moet dan acht getallen met elkaar vermenigvuldigen: een combinatie én zeven breuken. Dat is niet praktisch, omdat het veel werk is en je snel fouten maakt bij het opstellen van de breuken.

$$66 \quad a \quad P(2 \text{ groene}) = P(2 \text{ groene en } 1 \text{ blauwe}) = \frac{\binom{16}{2} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{40}{3}} \approx 0,291$$

$$b \quad P(\text{minstens } 1 \text{ blauwe}) = 1 - P(\text{geen blauwe}) = 1 - \frac{\binom{16}{3}}{\binom{40}{3}} \approx 0,943$$

$$c \quad P(2 \text{ groene}) = \binom{3}{1} \cdot P(\text{g g b}) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{16}{40}\right)^2 \cdot \frac{24}{40} = 0,288$$

$$d \quad P(\text{minstens } 1 \text{ blauwe}) = 1 - P(\text{geen blauwe}) = 1 - P(\text{g g g}) = 1 - \left(\frac{16}{40}\right)^3 = 0,936$$

Bladzijde 86

67 a Een leerling kan meerdere boeken winnen, dus pakken met terugleggen.

$$P(4 \text{ meisjes}) = \left(\frac{12}{22}\right)^4 \approx 0,089$$

b Een leerling kan hoogstens één taart winnen, dus pakken zonder terugleggen.

$$P(4 \text{ meisjes}) = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{22}{4}} \approx 0,068$$

c Een leerling kan maar één keer worden gekozen, dus pakken zonder terugleggen.

$$P(3 \text{ meisjes}) = \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{22}{4}} \approx 0,301$$

d Een leerling kan meerdere reproducties winnen, dus pakken met terugleggen.

$$P(3 \text{ meisjes}) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{12}{22}\right)^3 \cdot \frac{10}{22} \approx 0,295$$

$$68 \quad a \quad P(\text{geen enkele Visma}) = \frac{\binom{168}{5}}{\binom{175}{5}} \approx 0,813$$

$$b \quad P(\text{geen enkele Visma}) = \left(\frac{168}{175}\right)^5 \approx 0,815$$

$$c \quad P(\text{geen Visma}) = \frac{\binom{168}{3}}{\binom{175}{3}} = 0,884\dots$$

$$P(\text{minstens } 1 \text{ Visma}) = 1 - (P(\text{geen Visma}))^2 = 1 - 0,884\dots^2 \approx 0,218$$

$$69 \quad P(\text{geen prijs bij pakken twee zakken uit doos}) = \frac{\binom{37}{2}}{\binom{40}{2}} = 0,853\dots$$

$$P(\text{minstens één zak met biscoopbon}) = 1 - (P(\text{geen prijs bij pakken twee zakken uit doos}))^5 \\ = 1 - 0,853\dots^5 \approx 0,546$$

Bladzijde 87

$$C10 \quad a \quad P(\text{minstens } 1 \text{ groene}) = 1 - P(\text{geen groene}) = 1 - \frac{\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}} \approx 0,618$$

$$b \quad P(\text{hoogstens } 2 \text{ blauwe}) = 1 - P(3 \text{ blauwe}) = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} \approx 0,955$$

$$\text{c } P(\text{drie verschillende kleuren}) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} \approx 0,273$$

$$\text{d } P(\text{drie dezelfde kleuren}) = P(\text{ge ge ge}) + P(\text{gr gr gr}) + P(\text{bb bb}) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} \approx 0,068$$

C11 $P(\text{alle appels gaaf}) = \frac{\binom{490}{25}}{\binom{500}{25}} \approx 0,596$

C12 **a** $P(1 \text{ rode knikker}) = \binom{3}{1} \cdot P(r r r) = \binom{3}{1} \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 \approx 0,420$

b $P(1 \text{ rode knikker}) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} \approx 0,514$

6.5 Allerlei kansproblemen

Bladzijde 88

- 70** **a** Elke bezoeker kan maar één keer gekozen worden, dus de samenstelling van de vaas verandert.
- b** $P(\text{alle drie vrouw}) = \frac{13\,600}{17\,000} \cdot \frac{13\,599}{16\,999} \cdot \frac{13\,598}{16\,998} \approx 0,51198$
- c** Hij vermenigvuldigt drie keer met dezelfde kans, alsof de samenstelling van de vaas niet is veranderd.
- d** Het antwoord is bijna hetzelfde, omdat $\frac{13\,599}{16\,999} \approx 0,8000$ en $\frac{13\,598}{16\,998} \approx 0,8000$.

Bladzijde 89

- 71** **a** Omdat je te maken hebt met een kleine steekproef uit een grote populatie.
- b** Van de boeken behoort 25% tot het genre kinderboeken, dus 75% behoort daar niet toe.
- c** Bij vraag a zijn er geen verschillende volgordes mogelijk, bij vraag b wel.
- d** Na het kiezen van de vier boeken uit het genre fictie worden er nog zes boeken gekozen, waarvan er drie kinderboeken moeten zijn.
Omdat 65% tot het genre fictie of het genre kinderboeken behoort, geldt dat voor 35% niet.

- 72** **a** $P(\text{boek behoort tot het genre kinderboek of fictie}) = 0,4 + 0,25 = 0,65$
 $P(10 \text{ boeken met genre kinderboeken of fictie}) = 0,65^{10} \approx 0,013$
- b** $P(2 \text{ kinderboeken}) = \binom{10}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^8 \approx 0,282$
- c** $P(2 \text{ kinderboeken, 3 overige en 5 fictie}) = \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} \cdot 0,25^2 \cdot 0,35^3 \cdot 0,40^5 \approx 0,069$

Bladzijde 90

- 73** **a** $P(\text{minstens 1 via sportvereniging}) = 1 - P(\text{geen via sportvereniging}) = 1 - 0,88^{15} \approx 0,853$
- b** $P(\text{anders}) = 1 - (0,44 + 0,29 + 0,12) = 1 - 0,85 = 0,15$
 $P(\text{minstens 2 anders}) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - 0,85^{15} - \binom{15}{1} \cdot 0,15 \cdot 0,85^{14} \approx 0,681$
- c** $P(7 \text{ via studie/werk en 3 via de buurt}) = \binom{15}{7} \cdot \binom{8}{3} \cdot 0,44^7 \cdot 0,29^3 \cdot 0,27^5 \approx 0,040$
- d** $P(2 \text{ van studie}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{20}{4}} \approx 0,381$

74 a Stef:

SOM

6						
5						
4						
3	4					
2	3	4				
1	2	3	4			
	1	2	3	4	5	6

$$P(\text{hoogstens 4 voor Stef}) = \frac{6}{36} \approx 0,167$$

Sasha:

De gunstige uitkomsten zijn: 1 1 1 1 1 2 1 2 1 2 1 1

Er zijn dus 4 gunstige uitkomsten en $4^3 = 64$ mogelijke uitkomsten.

$$P(\text{hoogstens 4 voor Sasha}) = \frac{4}{64} \approx 0,063$$

De kans is dus het grootst bij Stef.

$$\mathbf{b} \quad P(\text{minstens 2 keer 4 ogen}) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 - \binom{8}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,395$$

$$\mathbf{c} \quad P(\text{minstens 2 prijzen}) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - \frac{\binom{40}{8}}{\binom{48}{8}} - \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{40}{7}}{\binom{48}{8}} \approx 0,401$$

$$\mathbf{75 a} \quad P(\text{Jimmy 2 azen}) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} \approx 0,005$$

$$\mathbf{b} \quad P(\text{alle azen uitgedeeld}) = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{10}}{\binom{52}{14}} \approx 0,004$$

$$\mathbf{76 a} \quad P(6 \text{ bijbaan}) = \binom{12}{6} \cdot 0,61^6 \cdot 0,39^6 \approx 0,168$$

$$\mathbf{b} \quad P(5 \text{ supermarkt}) = \binom{12}{5} \cdot 0,30^5 \cdot 0,70^7 \approx 0,158$$

$$\mathbf{c} \quad P(\text{niet in supermarkt of andere winkel}) = 1 - (0,30 + 0,14 + 0,39) = 1 - 0,83 = 0,17$$

$$P(\text{minstens 2 bijbaan, niet in supermarkt of andere winkel}) = 1 - P(0) - P(1) \\ = 1 - 0,83^{12} - \binom{12}{1} \cdot 0,17 \cdot 0,83^{11} \approx 0,630$$

$$\mathbf{d} \quad P(4 \text{ supermarkt, 2 winkel, 5 geen en 1 overig}) = \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{5} \cdot 0,30^4 \cdot 0,14^2 \cdot 0,39^5 \cdot 0,17 \approx 0,020$$

$$\mathbf{e} \quad P(1 \text{ supermarkt}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{9}{30} \cdot \frac{21}{29} \cdot \frac{20}{28} \approx 0,466$$

Alternatieve uitwerking

$$P(1 \text{ supermarkt}) = \frac{\binom{9}{1} \cdot \binom{21}{2}}{\binom{30}{3}} \approx 0,466$$

$$\mathbf{f} \quad P(\text{minstens 1 supermarkt}) = 1 - P(\text{geen supermarkt}) = 1 - \frac{21}{30} \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{19}{28} \approx 0,672$$

Alternatieve uitwerking

$$P(\text{minstens 1 supermarkt}) = 1 - \frac{\binom{21}{3}}{\binom{30}{3}} \approx 0,672$$

g $P(1 \text{ bijbaan, niet bij supermarkt}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{9}{30} \cdot \frac{12}{29} \cdot \frac{11}{28} \approx 0,146$

Alternatieve uitwerking

$$P(1 \text{ bijbaan, niet bij supermarkt}) = \frac{\binom{9}{1} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{30}{3}} \approx 0,146$$

77 $P(\text{drie in de rij bij balie 2}) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{25}{2}}{\binom{30}{5}} \approx 0,021$

Bladzijde 92

78 a $P(\text{gazon en bomen}) = \frac{14}{61} \approx 0,230$

b $P(\text{tuin zonder gazon heeft geen bomen}) = \frac{19}{42} \approx 0,452$

c $P(\text{gazon onder voorwaarde bomen}) = \frac{14}{37} \approx 0,378$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{14}{37} \neq \frac{19}{61} \\ P(\text{gazon}) = \frac{19}{61} \approx 0,311 \end{array} \right.$

De gebeurtenissen 'heeft een gazon' en 'heeft bomen' zijn dus afhankelijke gebeurtenissen.

d $P(2 \text{ met bomen en gazon}) = \frac{\binom{14}{2} \cdot \binom{47}{3}}{\binom{61}{5}} \approx 0,248$

e $P(\text{bijenhotel bij boom en voederhuisje zonder boom}) = \frac{37}{61} \cdot \frac{24}{60} \approx 0,243$

79 a $P(\text{allebei geen muziekinstrument}) = 0,91^2 \approx 0,828$

b $P(\text{één muziekinstrument}) = \binom{3}{1} \cdot 0,09 \cdot 0,91^2 \approx 0,224$

c $P(\text{hoogstens één muziekinstrument}) = P(0) + P(1) = 0,91^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,09 \cdot 0,91^4 \approx 0,933$

d Stel het gezelschap telt x personen.

$$P(\text{minstens één muziekinstrument}) = 1 - P(\text{geen muziekinstrument}) = 1 - 0,91^x$$

Er moet gelden $1 - 0,91^x > 0,95$.

Voer in $y_1 = 1 - 0,91^x$ en maak een tabel.

$x = 31$ geeft $y \approx 0,946$ en $x = 32$ geeft $y \approx 0,951$.

Dus het gezelschap moet minimaal uit 32 personen bestaan.

e $P(\text{allebei een muziekinstrument}) = \frac{9}{100} \cdot \frac{8}{99} \approx 0,007$

80 $P(\text{minstens één met voorraad}) = 1 - P(\text{geen met voorraad}) = 1 - 0,15 \cdot 0,2 \cdot 0,35 \cdot 0,45 \approx 0,995$

Bladzijde 93

81 $P(\text{niet op bord}) = \frac{\binom{20}{3}}{\binom{24}{3}} = 0,563\dots$

$$P(\text{minstens één les minstens één van de vier op bord}) = 1 - (P(\text{niet op bord}))^4 = 1 - 0,563\dots^4 \approx 0,997$$

C13 a $P(2 \text{ contactlenzen}) = \binom{14}{2} \cdot 0,12^2 \cdot 0,88^{12} \approx 0,283$

b 10% van 20 Nederlanders is $0,1 \cdot 20 = 2$ Nederlanders

$$P(\text{minder dan 2 contactlenzen}) = P(0) + P(1) = 0,88^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0,12^1 \cdot 0,88^{19} \approx 0,289$$

$$\text{c } P(\text{minstens 14 geen contactlenzen}) = P(14) + P(15) = \binom{15}{14} \cdot 0,88^{14} \cdot 0,12^1 + 0,88^{15} \approx 0,448$$

$$\text{d } P(\text{minstens 1 contactlenzen}) = 1 - P(0) = 1 - \frac{\binom{26}{5}}{\binom{30}{5}} \approx 0,538$$

Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 94

1 a

SOM

6		8					
5			8				
4				8			
3					8		
2	3					8	
1	2	3					8
	1	2	3	4	5	6	7

$$P(\text{som is 8}) = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$$

$$\text{b } P(\text{som is minder dan 4}) = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

c

VERSCHIL

6				2		0		2
5			2		0		2	
4		2		0		2		
3	2		0		2			
2		0		2				
1	0		2					
	1	2	3	4	5	6	7	8

$$P(\text{verschil is 2}) = \frac{10}{48} = \frac{5}{24}$$

$$\text{d } P(\text{gelijk}) = P(\text{verschil is 0}) = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$$

2 a

Het aantal mogelijke uitkomsten is $4^4 = 256$.

Gunstige uitkomsten zijn 1144 $\binom{4}{2} = 6$ keer

1224 $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} = 12$ keer of $\frac{4!}{2!} = 12$ keer

2222 1 keer

Er zijn $6 + 12 + 1 = 19$ gunstige uitkomsten.

$$P(\text{product is 16}) = \frac{19}{256}$$

b Som is 14: 4442 4 keer

4433 $\binom{4}{2} = 6$ keer

Som is 15: 4443 4 keer

Som is 16: 4444 1 keer

Er zijn $4 + 6 + 4 + 1 = 15$ gunstige uitkomsten.

$$P(\text{som is meer dan 13}) = \frac{15}{256}$$

$$3 \quad a \quad P(\text{leerling zit in middelste lengteklasse}) = \frac{159}{215} \approx 0,740$$

$$b \quad P(\text{leerling in hoogste lengteklasse zit in vierde klas}) = \frac{6}{33} \approx 0,182$$

$$c \quad P(\text{vierde- of vijfdeklasser is 160 cm of langer}) = \frac{59 + 49 + 6 + 12}{80 + 66} \approx 0,863$$

$$d \quad P(160 \text{ cm of langer en in de vijfde of zesde klas}) = \frac{49 + 51 + 12 + 15}{215} \approx 0,591$$

$$e \quad P(\text{vijfdeklasser onder voorwaarde hoogste lengteklasse}) = \frac{12}{33} \approx 0,364 \quad \left. \vphantom{\frac{12}{33}} \right\} \frac{12}{33} \neq \frac{66}{215}$$

$$P(\text{vijfdeklasser}) = \frac{66}{215} = 0,307$$

De gebeurtenissen 'leerling zit in klas 5' en 'leerling behoort tot lengteklasse [180, 200]' zijn afhankelijk.

$$4 \quad P(\text{slaagt voor alle tests}) = 0,25 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 0,048$$

$$5 \quad P(\text{twee keer dezelfde kleur}) = P(rr) + P(ww) + P(bb) = \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \approx 0,389$$

$$6 \quad a \quad P(5 \text{ keer rood en 2 keer wit}) = \binom{7}{5} \cdot P(rrrrrww) = \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \approx 0,073$$

$$b \quad P(\text{minstens 6 keer geen blauw}) = P(6 \text{ keer geen blauw}) + P(7 \text{ keer geen blauw})$$

$$= \binom{7}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,670$$

$$c \quad P(\text{hoogstens 2 keer wit}) = P(0 \text{ keer wit}) + P(1 \text{ keer wit}) + P(2 \text{ keer wit})$$

$$= \left(\frac{4}{6}\right)^7 + \binom{7}{1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^6 + \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^5 \approx 0,571$$

Bladzijde 95

$$7 \quad P(\text{iets mis}) = 1 - P(\text{niets mis}) = 1 - 0,95 \cdot 0,91 \cdot 0,97 \approx 0,161$$

$$8 \quad a \quad P(2 \text{ rood, 2 wit en 2 blauw}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{9}{2}}{\binom{21}{6}} \approx 0,139$$

$$b \quad P(\text{geen blauwe}) = \frac{\binom{12}{6}}{\binom{21}{6}} \approx 0,017$$

$$c \quad P(2 \text{ of 3 rode}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{16}{4}}{\binom{21}{6}} + \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{16}{3}}{\binom{21}{6}} \approx 0,439$$

$$d \quad P(6 \text{ blauwe}) = \frac{\binom{9}{6}}{\binom{21}{6}} \approx 0,002$$

$$9 \quad a \quad P(1 \text{ prijs}) = \frac{\binom{5}{1} \binom{115}{5}}{\binom{120}{6}} \approx 0,210$$

$$b \quad P(100 \text{ euro}) = P(1 \text{ keer 100 euro}) + P(4 \text{ keer 25 euro}) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{115}{5}}{\binom{120}{6}} + \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{115}{2}}{\binom{120}{6}} \approx 0,042$$

c $P(\text{geen verlies}) = 1 - P(\text{verlies})$

$$= 1 - P(\text{geen prijs}) - P(1 \text{ tweede prijs}) = 1 - \frac{\binom{115}{6}}{\binom{120}{6}} - \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{115}{5}}{\binom{120}{6}} \approx 0,062$$

d $P(\text{minstens 1 prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) = 1 - \frac{\binom{115}{6}}{\binom{120}{6}} \approx 0,230$

- 10 a Iedere docent kan maar één keer gekozen worden, dus pakken zonder terugleggen.

$$P(3v \text{ en } 2m) = \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{9}{2}}{\binom{16}{5}} \approx 0,288$$

- b Iedere docent kan meerdere keren gekozen worden, dus pakken met terugleggen.

$$P(3v \text{ en } 2m) = \binom{5}{3} \cdot P(vvmm) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^2 \approx 0,265$$

11 a $P(3 \text{ huurwoningen van corporatie}) = \binom{9}{3} \cdot 0,44^3 \cdot 0,56^6 \approx 0,221$

b $P(\text{woning is koopwoning of huurwoning van corporatie}) = 0,34 + 0,44 = 0,78$

$$P(\text{allemaal koopwoningen of allemaal huur van corporatie}) = 0,78^9 \approx 0,107$$

c $P(\text{woning is geen koopwoning of huurwoning van corporatie}) = 1 - 0,78 = 0,22$

$$P(4 \text{ koopwoningen en } 3 \text{ huurwoningen van corporatie})$$

$$= \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot 0,34^4 \cdot 0,44^3 \cdot 0,22^2 \approx 0,069$$

d $P(3 \text{ huurwoningen van corporatie}) = \frac{\binom{20}{3} \cdot \binom{45}{6}}{\binom{65}{9}} \approx 0,290$

e $P(\text{allemaal koopwoningen of allemaal huur van corporatie}) = \frac{\binom{50}{9}}{\binom{65}{9}} \approx 0,078$

f $P(4 \text{ koopwoningen en } 3 \text{ huurwoningen van corporatie}) = \frac{\binom{30}{4} \cdot \binom{20}{3} \cdot \binom{15}{2}}{\binom{65}{9}} \approx 0,103$

Gemengde Opgaven

Bladzijde 96

1 a

SOM					
6					
5					
4	5				
3	4	5			
2	3	4	5		
1	2	3	4	5	
	1	2	3	4	5

$$P(\text{som minder dan } 6) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

b

VERSCHIL

6				2		
5			2			
4		2				2
3	2				2	
2				2		
1			2			
	1	2	3	4	5	6

$$P(\text{verschil is } 2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$\text{c } P(3 \text{ keer verschil van } 2 \text{ ogen}) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^7 \approx 0,227$$

$$\begin{aligned} \text{d } P(\text{minstens } 8 \text{ keer som minder dan } 6) \\ = P(8 \text{ keer som} < 6) + P(9 \text{ keer som} < 6) + P(10 \text{ keer som} < 6) \\ = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^8 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^2 + \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^9 \cdot \frac{13}{18} + \left(\frac{5}{18}\right)^{10} \approx 0,001 \end{aligned}$$

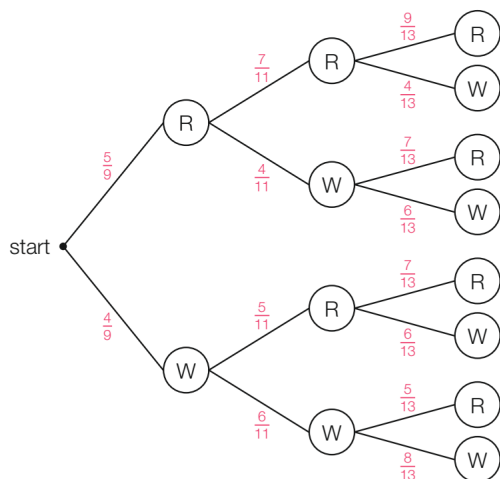
e Het aantal mogelijke uitkomsten is $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$.
Gunstige uitkomsten zijn 1 1 3, 1 3 1, 3 1 1, 1 2 2, 2 1 2 en 2 2 1.

$$P(\text{som is } 5) = \frac{6}{192} = \frac{1}{32}$$

f Gunstige uitkomsten zijn 1 1 1, 2 2 2, 3 3 3 en 4 4 4.

$$P(\text{alle dobbelstenen hetzelfde aantal}) = \frac{4}{192} = \frac{1}{48}$$

2 a



$$\text{b } P(\text{alleen rode}) = P(rrr) = \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{9}{13} \approx 0,245$$

$$\begin{aligned} \text{c } P(\text{meer rode dan witte}) &= P(rrr) + P(rrw) + P(rwr) + P(wrr) \\ &= \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{9}{13} + \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{13} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{13} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{7}{13} \approx 0,571 \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} \text{a } P(3 \text{ appels en } 1 \text{ kers}) &= P(aaak) + P(aaka) + P(akaa) + P(kaaa) \\ &= 0 + 0 + \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} \approx 0,003 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } P(4 \text{ gelijke}) &= P(aaaa) + P(pppp) + P(bbbb) + P(ki \text{ ki ki ki}) \\ &= \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{15} + \frac{1}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{1}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{6}{15} \approx 0,008 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } P(1 \text{ banaan}) &= P(b\emptyset\emptyset\emptyset) + P(\emptyset b\emptyset\emptyset) + P(\emptyset\emptyset b\emptyset) + P(\emptyset\emptyset\emptyset b) \\ &= \frac{1}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{1}{15} \approx 0,442 \end{aligned}$$

$$\text{d } P(\text{geen kiwi}) = P(k\bar{k} \ k\bar{k} \ k\bar{k} \ k\bar{k}) = \frac{12}{15} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{9}{15} \approx 0,305$$

4 a $P(\text{geen prijs}) = \frac{\binom{55}{5}}{\binom{65}{5}} \approx 0,421$

b $P(\text{minstens €10}) = 1 - P(\text{hoogstens €5}) = 1 - P(\text{geen prijs}) - P(1 \text{ derde prijs})$

$$= 1 - \frac{\binom{55}{5}}{\binom{65}{5}} - \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{55}{4}}{\binom{65}{5}} \approx 0,331$$

c $P(1 \text{ tweede prijs en } 1 \text{ derde prijs en verder niets}) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{55}{3}}{\binom{65}{5}} \approx 0,057$

d $P(2 \text{ prijzen}) = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{55}{3}}{\binom{65}{5}} \approx 0,143$

Bladzijde 97

5 a $15 + 21 = 36$ meisjes met minder dan 150 euro en $120 - 36 = 84$ overigen.

$$P(5 \text{ meisjes met minder dan 150 euro}) = \frac{\binom{36}{5} \cdot \binom{84}{7}}{\binom{120}{12}} \approx 0,162$$

b $P(8 \text{ meisjes en } 4 \text{ jongens}) = \frac{\binom{68}{8} \cdot \binom{52}{4}}{\binom{120}{12}} \approx 0,190$

c $27 + 5 = 32$ meisjes met 150 euro of meer
en $47 + 43 + 7 - 32 = 65$ overigen met minder dan 120 euro.

$$P(5 \text{ meisjes met 150 euro of meer en niemand met minder dan 120 euro}) = \frac{\binom{32}{5} \cdot \binom{65}{7}}{\binom{120}{12}} \approx 0,013$$

d $43 + 7 = 50$ met minstens 150 euro en $120 - 70 = 50$ overigen.

$$P(\text{minstens 3 met minstens 150 euro}) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$$

$$= 1 - \frac{\binom{70}{12}}{\binom{120}{12}} - \frac{\binom{50}{1} \cdot \binom{70}{11}}{\binom{120}{12}} - \frac{\binom{50}{2} \cdot \binom{70}{10}}{\binom{120}{12}} \approx 0,943$$

e $21 + 27 = 48$ meisjes met 120 euro of meer, maar minder dan 180 euro
en $68 - 48 = 20$ overige meisjes.

$P(6 \text{ jongens én } 4, 5 \text{ of } 6 \text{ meisjes met 120 euro of meer en minder dan 180 euro})$

$$= \frac{\binom{52}{6} \cdot \left(\binom{48}{4} \cdot \binom{20}{2} + \binom{48}{5} \cdot \binom{20}{1} + \binom{48}{6} \right)}{\binom{120}{12}} \approx 0,161$$

f $P(\text{meisje onder voorwaarde verdient tussen 150 en 180 euro}) = \frac{27}{43} \approx 0,628$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{27}{43} \neq \frac{68}{120} \end{array} \right.$
 $P(\text{meisje}) = \frac{68}{120} = 0,567$

De gebeurtenissen 'leerling is meisje' en 'leerling verdient tussen 150 en 180 euro per maand' zijn afhankelijk.

6 a $P(\text{alle automobilisten houden zich aan de maximumsnelheid}) = 0,68^{10} \approx 0,021$

b $P(\text{meer dan 70 km per uur}) = \frac{1}{4} \cdot 0,32 = 0,08$

$P(\text{tussen 50 en 70 km per uur}) = 1 - 0,68 - 0,08 = 0,24$

De gevraagde kans is $\binom{10}{7} \cdot \binom{3}{1} \cdot 0,68^7 \cdot 0,08 \cdot 0,24^2 \approx 0,112$.

c $P(\text{minstens 2 te hard}) = 1 - P(0 \text{ of } 1 \text{ te hard}) = 1 - P(0) - P(1)$
 $= 1 - 0,68^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,32 \cdot 0,68^9 \approx 0,879$

7 a $P(2 \text{ plaatsen leeg in kano 3}) = \frac{\binom{24}{4} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{30}{6}} \approx 0,268$

Alternatieve uitwerking

$P(2 \text{ plaatsen leeg in kano 3}) = \frac{\binom{24}{20} \cdot \binom{6}{4}}{\binom{30}{24}} \approx 0,268$

b $P(\text{kano 1 en 2 geheel vol}) = \frac{\binom{24}{12}}{\binom{30}{12}} \approx 0,031$

Alternatieve uitwerking

$P(\text{kano 1 en 2 geheel vol}) = \frac{\binom{18}{12}}{\binom{30}{24}} \approx 0,031$

Bladzijde 98

8 a $P(2 \text{ of } 3 \text{ goed}) = P(2 \text{ goed}) + P(3 \text{ goed})$
 $= \binom{18}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^{16} + \binom{18}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^{15} \approx 0,266$

b $P(\text{minder dan 8 goed}) = P(\text{minder dan 3 goed gegokt})$
 $= P(0 \text{ goed gegokt}) + P(1 \text{ goed gegokt}) + P(2 \text{ goed gegokt})$
 $= 0,75^{13} + \binom{13}{1} \cdot 0,25 \cdot 0,75^{12} + \binom{13}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^{11} \approx 0,333$

c $P(\text{minstens 16 goed}) = P(\text{minstens 3 goed geraden})$
 $= P(3 \text{ goed geraden}) + P(4 \text{ goed geraden}) + P(5 \text{ goed geraden})$
 $= \binom{5}{2} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^2 + \binom{5}{1} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75 + 0,25^5 \approx 0,104$

9 a $P(3 \text{ rode en } 3 \text{ blauwe}) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{12}\right)^3 \approx 0,023$

b $P(\text{geen enkele rode in één greep}) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{7}{44}$

$P(2 \text{ van de 6 keer geen enkele rode}) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \left(\frac{37}{44}\right)^4 \approx 0,190$

c $P(\text{evenveel witte als blauwe blijven achter}) = P(\text{één witte meer dan blauwe pakken})$
 $= P(1 \text{ witte en } 3 \text{ rode}) + P(2 \text{ witte, } 1 \text{ blauwe en } 1 \text{ rode}) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{12}{4}} + \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{4}} \approx 0,263$

- 10 a** In een uitdeelzak zitten $14 \cdot 20 = 280$ J&J's.

20% van 280 is 56

$$P(56 \text{ rood}) = \binom{280}{56} \cdot 0,2^{56} \cdot 0,8^{224} \approx 0,060$$

- b** Je verwacht $0,3 \cdot 280 = 84$ bruine J&J's.

$$P(84 \text{ bruin}) = \binom{280}{84} \cdot 0,3^{84} \cdot 0,7^{196} \approx 0,052$$

- c** $P(\text{minstens 3 blauw}) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$

$$= 1 - 0,9^{20} - \binom{20}{1} \cdot 0,1 \cdot 0,9^{19} - \binom{20}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{18} = 0,323...$$

Dus naar verwachting $0,323... \cdot 14 \approx 4,52$, oftewel 5 zakjes.

Bladzijde 99

- 11 a** Ja, als de een bloedgroep A heeft en de ander bloedgroep B.

b $P(\text{dezelfde bloedgroep}) = P(00) + P(AA) + P(BB) + P(ABAB)$
 $= 0,46^2 + 0,43^2 + 0,08^2 + 0,03^2 = 0,4038 \approx 0,404$

c $P(\text{minstens één met 0}) = 1 - 0,54^{12} \approx 0,999$

d $P(\text{dezelfde resusfactor}) = 0,85^2 + 0,15^2 = 0,745$

$$P(\text{dezelfde bloedgroep én dezelfde resusfactor}) = 0,4038 \cdot 0,745 \approx 0,301$$

7 Statistiek met de computer

7.1 Werken met een spreadsheet

Bladzijde 102

1

*

Bladzijde 103

2

- a** Gebruik de functie SOM.
 $Y2 = \text{SOM}(B2:X2)$ geeft 82 punten.
- b** $Y3 = \text{SOM}(B3:X3)$ geeft 61 punten voor Joris.
Lisa heeft de meeste punten gehaald, Kim de minste.
- c** $Z3 = Y3/Y\$2*9+1$ geeft het cijfer 7,695...
- d** $Z3 = \text{AFRONDEN}(Y3/Y\$2*9+1;1)$ geeft het cijfer 7,7.
- e** $B27 = \text{GEMIDDELDE}(B3:B25)$
 $B28 = \text{STDEV.P}(B3:B25)$
 $B29 = \text{MIN}(B3:B25)$
 $B30 = \text{KWARTIEL.INC}(B3:B25;1)$
 $B31 = \text{MEDIAAN}(B3:B25)$
 $B32 = \text{KWARTIEL.INC}(B3:B25;3)$
 $B33 = \text{MAX}(B3:B25)$
Met de vulgreep bereken je in één keer de overige waarden.
- f** $B34 = B32 - B30$ en gebruik de vulgreep.
Bij de vragen 14 en 15 is de interkwartielafstand 2,5.
 $B35 = B27 - B31$ en gebruik de vulgreep.
Bij de vragen 2, 3 en 20 is het verschil nul, dus het gemiddelde gelijk aan de mediaan.

3

- a** $J3 = \text{AFRONDEN}((B3*B\$1+C3*C\$1+D3*D\$1+...+I3*I\$1)/\text{SOM}(B\$1:I\$1);1)$
Gebruik de vulgreep om de overige cijfers te berekenen.
De eindcijfers zijn achtereenvolgens 6,7 5,7 7,2 3,8 6,9 5,7 6,8 5,2 4,9 4,9 5,4 6,4 4,8 7,9 6,3 6,0 6,3 5,3 7,0 8,1 en 6,6.
- b** $J25 = \text{AFRONDEN}(\text{GEMIDDELDE}(J3:J23);2)$ geeft het gemiddelde eindcijfer 6,09.
- c** $I1 = 6$ geeft het gemiddelde eindcijfer 6,10.
Het scheelt 0,01 punt met het gemiddelde van vraag b.

Bladzijde 104

4

- Selecteer de cellen A1:E7 en maak het juiste staafdiagram (in Excel: Gegroepeerde kolom). Maak het diagram verder op.

Bladzijde 105

5

- a** Selecteer de cellen A1:H1 en tegelijk (houd Ctrl ingedrukt) A6:H10 en maak het juiste staafdiagram (Gestapelde kolom). Klik (indien nodig) bij Gegevens selecteren op Rijen/kolommen omdraaien.
Kies bij As opmaken voor Weergave-eenheden 10 000. Maak het diagram verder op.
- b** Voeg een kolom toe door in cel I1 Totaal te typen.
 $I2 = \text{SOM}(B2:H2)$ en gebruik de vulgreep.
Selecteer de cellen A1:A10 en tegelijk I1:I10 en maak een lijndiagram (Lijn met markeringsen).
Kies bij As opmaken voor Weergave-eenheden 100 000. Maak het diagram verder op.
- c** Selecteer de cellen B1:H1 en tegelijk B10:H10 en maak een cirkeldiagram (Staaf-van-cirkel).
Voeg Gegevenslabels toe en kies bij Gegevenslabels opmaken voor Percentage in plaats van Waarde. Maak het diagram verder op.

Bladzijde 106

V1

- a** totale frequentie = $12 + 10 + 13 + 24 + 21 + 2 = 82$
gemiddelde = $\frac{12 \cdot 7,5 + 10 \cdot 22,5 + 13 \cdot 37,5 + 24 \cdot 52,5 + 21 \cdot 67,5 + 2 \cdot 82,5}{82} \approx 44,5$ jaar
- b** De mediaan is het gemiddelde van het 41^e en 42^e getal.
Omdat $12 + 10 + 13 = 35$ en $35 + 24 = 59$ ligt de mediaan in de klasse $[45, 60)$.
- c** De modale klasse is $[45, 60)$.

Bladzijde 107

V2

- a** De helft van de vrouwen is kleiner dan 1,83 meter. Dat zijn $\frac{192}{2} = 96$ vrouwen.
- b** De langste vrouw is 202 cm en driekwart van de mannen is kleiner dan 202 cm.
- c** Bij de mannen is de spreidingsbreedte $211 - 172 = 39$ cm.
Bij de vrouwen is de spreidingsbreedte $202 - 159 = 43$ cm.
De spreidingsbreedte is groter bij de vrouwen.

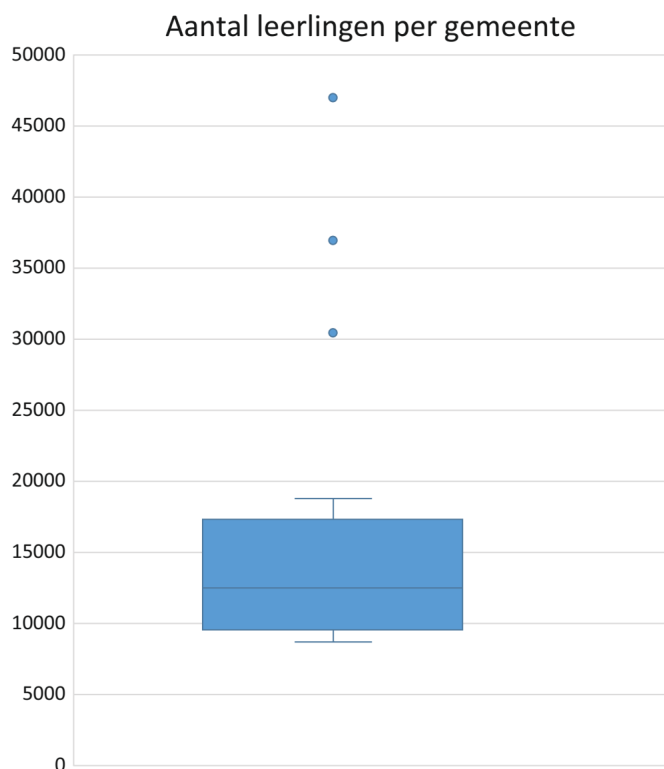
Bladzijde 108

6

- a** De interkwartielafstand is $24 - 10 = 14$ en $24 + 1,5 \cdot 14 = 45$. De waarde 56 is dus een uitbijter.
- b** $10 - 1,5 \cdot 14 = -11$. De waarde 1 is dus geen uitbijter.

7

- a** Het bestand is gesorteerd op de variabele Gemeente.
- b** Sorteer de kolom AantalLeerlingen met 'Sorteren van laag naar hoog'.
- c** Selecteer de cellen B268 (Arnhem) tot en met B287 (Amsterdam) en maak een boxplot (Box-and-whisker). Maak het diagram verder op.

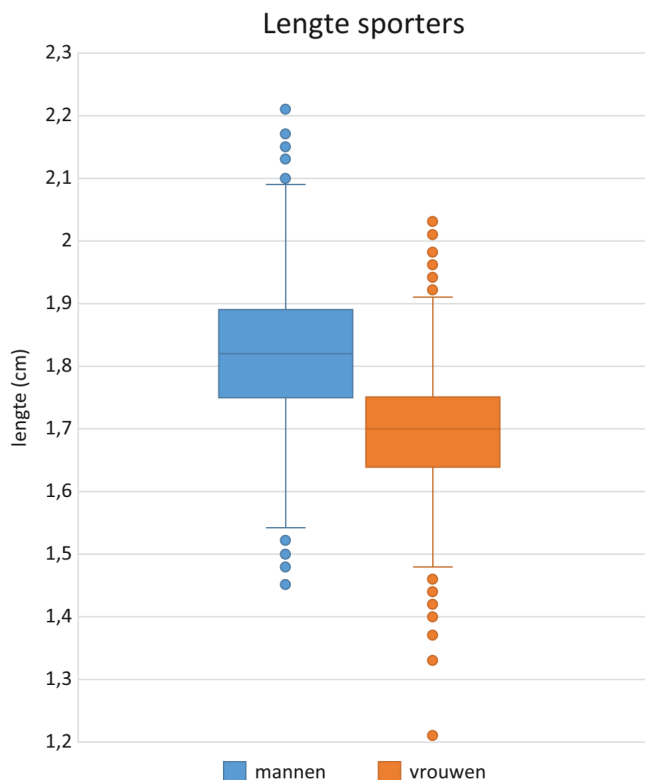


Bij de uitbijterpunten horen de gemeenten Den Haag, Rotterdam en Amsterdam.

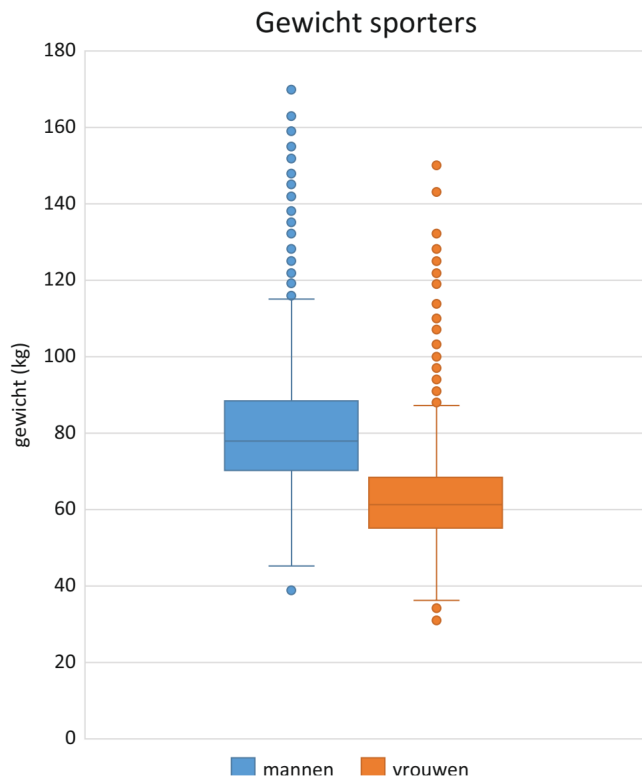
- d** Voeg een kolom toe door in cel D1 GemiddeldAantalLeerlingen te typen.
 $D2=B2/C2$ en gebruik de vulgreep.
- e** Sorteer de kolom AantalScholen met 'Sorteren van laag naar hoog'.
Selecteer de cellen D2:D91 en maak hierbij een boxplot (Box-and-whisker).
Kies Gegevens selecteren (door met de rechtermuisknop op de boxplot te klikken).
Bewerk reeks 1 en geef deze de naam 'gemeenten met 1 school'. Voeg een nieuwe reeks toe en noem deze 'gemeenten met meer dan 1 school' en selecteer bij Reekswaarden de cellen D92:D287. Maak het diagram verder op.
- f** Bij gemeenten met meer dan één middelbare school is de spreiding van het gemiddeld aantal leerlingen per school veel kleiner dan bij gemeenten met één middelbare school.

8

- a** Sorteert de kolom Lengte met 'Sorteren van laag naar hoog'. De cellen E11210 tot en met E11539 zijn leeg, dus van 330 sporters staat de lengte niet in de dataset.
- b** Sorteert de kolom Lengte met 'Sorteren van laag naar hoog' en daarna de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z'.
 Selecteer de cellen E2:E6143 (de lengten van de mannen) en maak hierbij een boxplot (Box-and-whisker).
 Kies Gegevens selecteren (door met de rechtermuisknop op de boxplot te klikken).
 Bewerk reeks 1 en geef deze de naam 'mannen'. Voeg een nieuwe reeks toe en noem deze 'vrouwen' en selecteer bij Reekswaarden de cellen E6335:E11400 (de lengten van de vrouwen). Maak het diagram verder op.



- c** Die lengte is 2,10 meter. Je ziet in de tabel dat het gaat om 32 mannen.
- d** De opvallende lengte is 1,21 meter. Dit lijkt een fout in de dataset te zijn.
- e** De boxen overlappen elkaar (net) en beide medianen liggen buiten de box van de andere boxplot, dus het verschil is middelmatig.
- f** Sorteert eerst de kolom Gewicht met 'Sorteren van laag naar hoog' en daarna de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z'.
 Selecteer de cellen F2:F5874 (de gewichten van de mannen) en maak hierbij een boxplot.
 Kies Gegevens selecteren (door met de rechtermuisknop op de boxplot te klikken).
 Bewerk reeks 1 en geef deze de naam 'mannen'. Voeg een nieuwe reeks toe en noem deze 'vrouwen' en selecteer bij Reekswaarden de cellen F6335:F11340 (de gewichten van de vrouwen). Maak het diagram verder op.



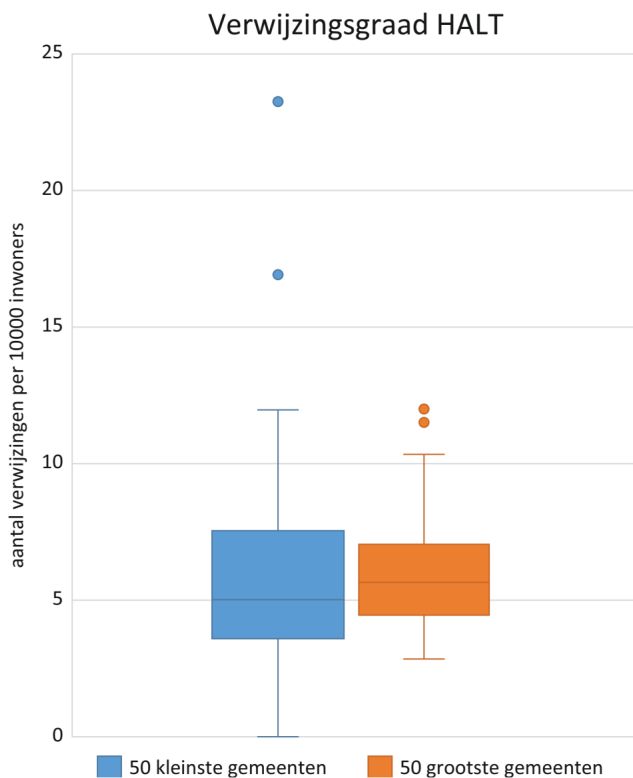
De boxen overlappen elkaar niet, dus het verschil is groot.

9 Voeg een kolom toe door in cel D1 Verwijzingsgraad te typen.

$D2 = C2/B2 * 10000$ en gebruik de vulgreep.

Sorteer de kolom Bevolkingsaantal met 'Sorteren laag naar hoog' en maak een boxplot (Box-and-whisker).

Gebruik een reeks voor de 50 kleinste gemeenten (Schiermonnikoog tot en met Waterland) en een tweede reeks voor de 50 grootste gemeenten (Roosendaal tot en met Amsterdam). Maak het diagram verder op.



De boxen overlappen elkaar en beide medianen vallen binnen de box van de andere boxplot, dus het verschil is gering.

C1

a *

b $B2=B\$1*\$A2$ en gebruik de vulgreep.

C2

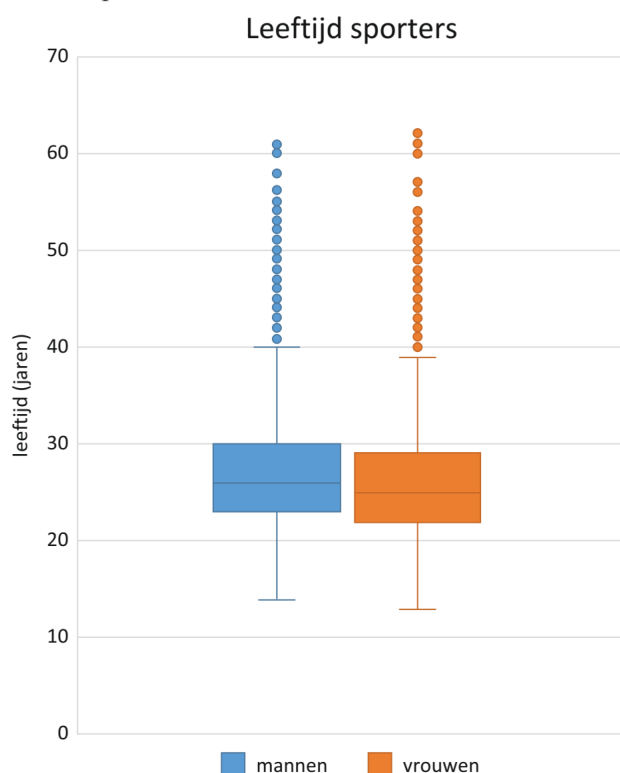
Selecteer de cellen A1:A10 en tegelijk C1:E10 en maak het juiste staafdiagram (Gegroepeerde kolom).

Kies bij As opmaken voor Weergave-eenheden 10000. Maak het diagram verder op.

C3

Sorteer eerst de kolom Leeftijd met 'Sorteren van laag naar hoog' en daarna de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z'. Maak een boxplot (Box-and-whisker).

Gebruik een reeks voor mannen en een tweede reeks voor vrouwen. Maak het diagram verder op.



7.2 Werken met datasets

Bladzijde 111

10

Sorteer eerst de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z' en daarna de kolom Sport met 'Sorteren van A naar Z'. Selecteer de cellen F8037:F8058 (de gewichten van de Japanse voetballmannen) en lees rechtsonder in beeld af dat hun gemiddelde gewicht 74,1 kg is.

Alternatieve uitwerking

Sorteer eerst de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z' en daarna de kolom Sport met 'Sorteren van A naar Z'. Typ in een lege cel `=GEMIDDELDE(F8037:F8058)` en lees af dat het gemiddelde gewicht van de Japanse voetballmannen ongeveer 74,1 kg is.

11

a De dataset bevat 11 variabelen.

b Kiezen van 'Aantal' in kolom A van de totaalrij geeft 26663.
De dataset bevat gegevens van 26663 dagen.

c Sorteer de kolom GemiddeldeTemperatuur met 'Sorteren van hoog naar laag'.
Op 27 juli 2018 was de gemiddelde temperatuur het hoogst.

d Filter de kolom GemiddeldeTemperatuur op 'Is kleiner dan of gelijk aan' 0.
Kiezen van 'Aantal' in kolom C van de totaalrij geeft 1655.
Op 1655 dagen was het gemiddeld 0°C of kouder.

- e** Filter uit vraag d verwijderen.
 Filter de kolom Datum op 2021, 2022 en 2023.
 Kiezen van 'Som' in kolom H van de totaalrij geeft 5776,5.
 Het totaal aantal uren zonneshijndat is gemeten in de jaren 2021, 2022 en 2023 samen is 5776,5 uur.

Bladzijde 112

- 12 a** Sorteert eerst de kolom Leeftijd met 'Sorteren van hoog naar laag' en daarna met 'Sorteren van laag naar hoog'.
 De oudste sporter doet aan paardensport en de jongste aan zwemsport.
- b** Kiezen van 'Aantal' in kolom D van de totaalrij geeft 11 538.
 Filter de kolom Leeftijd op 'Is kleiner dan of gelijk aan' 16.
 Nu geeft 'Aantal' in kolom D van de totaalrij 82.

$$\text{Dus } \frac{82}{11\,538} \cdot 100\% \approx 0,7\% \text{ van de sporters was 16 jaar of jonger.}$$
- c** Filter uit vraag b verwijderen. Filter de kolom Land op Nederland.
 Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom D van de totaalrij geeft 26,78...
 De gemiddelde leeftijd van de Nederlandse sporters was 27 jaar.
- d** Filters uit vraag c verwijderen.
 Filter de kolom Sport op triatlon.
 Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom F van de totaalrij geeft 60,63... kg.
 Filter de kolom Sport op roeien.
 Aflezen in kolom F van de totaalrij geeft 79,93... kg.
 Het scheelt $79,93\ldots - 60,63\ldots \approx 19$ kg.
- e** Filter uit vraag d verwijderen.
 Filter de kolom Land op Nederland en filter de kolom Geslacht op V.
 Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom E van de totaalrij geeft 1,747... m.
 Filter de kolom Land op alles behalve Nederland. Aflezen in kolom E van de totaalrij geeft 1,698... m.
 Het verschil is dus $1,747\ldots - 1,698\ldots \approx 0,05$ m = 5 cm.
 De journalist heeft dus niet gelijk.
 Filter de kolom Geslacht op M en voer dezelfde handelingen uit als hierboven bij de vrouwen.
 Het verschil bij de mannen is $1,850\ldots - 1,820\ldots \approx 0,03$ m = 3 cm.
- f** Filters uit vraag e verwijderen.
 Filter de kolom Goud op alles behalve 0.
 Kiezen van 'Som' in kolom H van de totaalrij geeft 666 gouden medailles.
 Filter de kolom Land op Verenigde Staten.
 Aflezen in kolom H van de totaalrij geeft 139 gouden medailles.

$$\text{Dus } \frac{139}{666} \cdot 100\% \approx 20,9\% \text{ van de gouden medailles werd gewonnen door sporters uit de Verenigde Staten.}$$

- 13 a** Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom C van de totaalrij.
 Filteren van de kolom Groep op D geeft 177,47... cm.
 Filteren van de kolom Groep op A geeft 173,5 cm.
 Het verschil is $177,47\ldots - 173,5 \approx 4$ cm.
- b** Filter uit vraag a verwijderen.
 Filter kolom LR-handig-moeder op L.
 Kiezen van 'Aantal' in kolom I van de totaalrij geeft 15 linkshandige moeders.
 Filter kolom LR-handig-vader op L.
 Aflezen in kolom J van de totaalrij geeft 1 paar met ouders die beiden linkshandig zijn.
 Filter verwijderen uit kolom LR-handig-moeder.
 Aflezen in kolom J van de totaalrij geeft 28 linkshandige vaders.
 In totaal hebben $15 + 28 - 1 = 42$ studenten een linkshandige ouder.

$$\text{Dus } \frac{42}{271} \cdot 100\% \approx 15,5\% \text{ van de studenten heeft een linkshandige ouder.}$$

- c** Filters uit vraag b verwijderen. Kies ‘Aantal’ in kolom G van de totaalrij.
 Filter de kolom Geslacht op M. Aflezen in kolom G van de totaalrij geeft 139 mannen en dus $271 - 139 = 132$ vrouwen.
 Filter de kolom UrenSlaap op ‘Kleiner dan’ 8.
 Filter de kolom Geslacht op M. Aflezen in kolom G van de totaalrij geeft 101 kortslapers bij de mannen en dus $139 - 101 = 38$ langslapers bij de mannen.
 Kolom Geslacht filteren op V. Aflezen in kolom G van de totaalrij geeft 93 kortslapers bij de vrouwen en dus $132 - 93 = 39$ langslapers bij de vrouwen.

	slaapduur		totaal
	kort	lang	
man	101	38	139
vrouw	93	39	132
totaal	194	77	271

- d** Bij de vrouwen heeft $\frac{93}{132} \cdot 100\% \approx 70,5\%$ een korte slaapduur. Bij de mannen is dat $\frac{101}{139} \cdot 100\% \approx 72,7\%$.

Bij de vrouwen is dit percentage dus kleiner dan bij de mannen.

- e** Filters uit vraag c verwijderen.
 Filter de kolom Geslacht op M en kies ‘Gemiddelde’ in kolom G van de totaalrij. Lees af dat de gemiddelde slaapduur voor mannen 7,052 uur is. Kies in kolom G van de totaalrij vervolgens voor ‘Stdev’ en lees af dat de standaardafwijking 1,290 uur is. Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$\left[7,052 - 2 \cdot \frac{1,290}{\sqrt{139}}; 7,052 + 2 \cdot \frac{1,290}{\sqrt{139}} \right] \approx [6,83; 7,27].$$

Filter de kolom Geslacht op V en kies ‘Gemiddelde’ in kolom G van de totaalrij. Lees af dat de gemiddelde slaapduur voor vrouwen 7,172 uur is. Kies in kolom G van de totaalrij vervolgens voor ‘Stdev’ en lees af dat de standaardafwijking 1,321 uur is. Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$\left[7,172 - 2 \cdot \frac{1,321}{\sqrt{132}}; 7,172 + 2 \cdot \frac{1,321}{\sqrt{132}} \right] \approx [6,94; 7,40].$$

De 95%-betrouwbaarheidsintervallen overlappen elkaar. Er is dus geen significant verschil.

- f** Filter uit vraag e verwijderen.
 Kies ‘Aantal’ in kolom K van de totaalrij.
 Filter de kolom Herkomst op plattelandsdorp. Aflezen in kolom K van de totaalrij geeft 49 studenten uit een plattelandsdorp. Filter de kolom Woonsituatie op Uitwonend. Aflezen in kolom K van de totaalrij geeft 34 uitwonende studenten uit een plattelandsdorp en dus $49 - 34 = 15$ thuiswonende studenten uit een plattelandsdorp.
 Filter de kolom Herkomst op grote stad. Aflezen in kolom K van de totaalrij geeft 22 uitwonende studenten uit een grote stad. Filter verwijderen uit kolom Woonsituatie en aflezen in Kolom K van de totaalrij geeft in totaal 37 studenten uit een grote stad. Er zijn dus $37 - 22 = 15$ thuiswonende studenten uit een grote stad.

	herkomst	
	plattelandsdorp	grote stad
thuiswonend	15	15
uitwonend	34	22
totaal	49	37

Voor de uitwonende studenten uit een plattelandsdorp geldt $\hat{p} = \frac{34}{49} = 0,6938\dots$ en

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,6938\dots \cdot (1 - 0,6938\dots)}{49}} = 0,0658\dots$$

Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval is
[0,6938... - 2 · 0,0658...; 0,6938... + 2 · 0,0658...] ≈ [0,562; 0,826].

Voor de uitwonende studenten uit een grote stad geldt $\hat{p} = \frac{22}{37} = 0,5945\dots$ en

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,5945\dots \cdot (1 - 0,5945\dots)}{37}} = 0,0807\dots$$

Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval is
[0,5945... - 2 · 0,0807...; 0,5945... + 2 · 0,0807...] ≈ [0,433; 0,756].

De 95%-betrouwbaarheidsintervallen overlappen elkaar. Er is dus geen significant verschil.

Bladzijde 113

- 14** Deze aanpak werkt.

Bladzijde 114

- 15** Maak een nieuwe kolom door in cel L1 AtletiekVrouwBenelux te typen.
Filter de kolom Land op België, Luxemburg en Nederland. Filter de kolom Geslacht op V en filter de kolom Sport op Atletiek.
Zet in de eerste cel van de nieuwe kolom Ja en gebruik de vulgreep.
Verwijder alle filters en filter de kolom AtletiekVrouwBenelux op Lege cellen.
Zet in de eerste cel van de kolom Nee en gebruik de vulgreep.
Verwijder alle filters.
- 16** **a** Maak een nieuwe kolom door in cel L1 Medailles te typen.
L2=SOM(H2:J2)
b Kiezen van 'Aantal' in kolom L van de totaalrij en filteren van de kolom Medailles op 'Groter dan' 1 geeft 129 sporters met meer dan één medaille.
Filteren van de kolom Goud op 'Groter dan' 0 en aflezen in kolom L van de totaalrij geeft 89 sporters met meer dan één medaille, waarvan ten minste één gouden.
c Verwijderen van alle filters en de kolom Medailles sorteren met 'Sorteren van hoog naar laag' geeft Michael Phelps met 6 medailles.
- 17** Maak een nieuwe kolom door in cel L1 Gevoelstemperatuur te typen.
L2=1,41-1,162*B2+0,98*C2+0,0124*B2^2+0,0185*B2*C2
Sorteer de kolom Gevoelstemperatuur met 'Sorteren van laag naar hoog'.
De dag die het koudst aanvoelde was 1 februari 1956.

Bladzijde 115

- 18** **a** Filter in de kolommen Lengte en Gewicht de Lege cellen eruit.
Kiezen van 'Aantal' in kolom E van de totaalrij geeft 10858 sporters.
b Voeg een kolom toe door in cel L1 Energiebehoefte te typen.
Filter de kolom Geslacht op M.
L2=AFRONDEN(88,362+13,397*F2+4,799*E2*100-5,677*D2;0) en gebruik de vulgreep.
Filter de kolom Geslacht op V.
L2=AFRONDEN(447,593+9,247*F2+3,098*E2*100-4,33*D2;0) en gebruik de vulgreep.
Verwijder het filter.

- 19** Maak een nieuwe kolom door in cel L1 Gevoelstemperatuur te typen.
 Filter de kolom GemiddeldeWindsnelheid op 'Is kleiner dan of gelijk aan' 1,3.
 $L709=C709$ en gebruik de vulgreep.
 Filter de kolom GemiddeldeWindsnelheid op 'Groter Dan' 1,3.
 $L2=13,12+0,6215*C2-11,37*(3,6*B2)^{0,16}+0,3965*C2*(3,6*B2)^{0,16}$ en gebruik de
 vulgreep.
 Verwijder alle filters en maak een nieuwe kolom door in cel M1 Verschil te typen.
 $M2=L2-C2$
 Kolom Verschil eerst sorteren met 'Sorteren van hoog naar laag' en daarna met 'Sorteren
 van laag naar hoog' geeft het grootste verschil op 31 januari 1956.

Bladzijde 116

- C4** **a** Filter de kolom MaximaleTemperatuur op 'Is groter dan of gelijk aan' 30.
 Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom C van de totaalrij geeft 24,06...
 De gemiddelde temperatuur van alle tropische dagen was 24,06 °C.
b Filter uit vraag a verwijderen. Filter de kolom Datum op 1965.
 Kiezen van 'Som' in kolom J van de totaalrij geeft 1151,9.
 In 1965 viel in totaal 1151,9 mm neerslag.
 Sorteert de kolom Neerslagduur met 'Sorteren van hoog naar laag'.
 Op 18 december regende het dat jaar het langst.

- C5** Filter in de kolommen Lengte en Gewicht de Lege cellen eruit.
 Voeg een kolom toe door in cel L1 Oppervlakte te typen.
 $L2 = \text{AFRONDEN}(0,007184*(100*E2)^{0,725}*F2^{0,425};1)$

7.3 Draaitabellen en draaigrafieken

Bladzijde 117

- 20** **a** Kies 'Aantal' in kolom B van de totaalrij.
 Filteren van kolom Geslacht op M geeft 221 mannen en filteren op V geeft
 165 vrouwen.
b Kies 'Aantal' in kolom F van de totaalrij.
 Filteren van kolom Stad op Adelaide geeft 70, filteren op Brisbane geeft 88, filteren
 op Melbourne geeft 73, filteren op Perth geeft 72 en filteren op Sydney geeft
 83 personen.
c Filter per Stad op M en op V.

		geslacht		
		M	V	
stad	Adelaide	37	33	70
	Brisbane	39	49	88
	Melbourne	50	23	73
	Perth	41	31	72
	Sydney	54	29	83
		221	165	386

Bladzijde 118

- 21** **a** De modale leeftijd bij de vrouwelijke sporters is 25 jaar.
b • Maak een draaitabel met als rij-variabele Sport en als kolomvariabele Geslacht en
 kies bij Waarden voor Aantal van Geslacht.
 Bij de sporten badminton, basketbal, boogschieten, hockey, moderne vijfkamp,
 taekwondo, tafeltennis, triatlon en volleybal staan evenveel mannen als vrouwen in
 de dataset.

- Maak een draaitabel met als rij-variabele Leeftijd en als kolomvariabele Goud en kies bij Waarden voor Aantal van Goud.
De oudste winnaar van een gouden medaille is 58. Dubbelklikken op de waarde 1 in de tabel geeft een nieuw tabblad met de gegevens van deze sporter.
De oudste goudenmedaillewinnaar deed aan paardensport.

Alternatieve uitwerking

Maak een draaitabel met als rij-variabele Leeftijd en als Kolomvariabele Sport, filter op Goud en kies bij Waarden voor Aantal van Goud. Selecteer bij het filter Meerdere items selecteren en vink 0 uit.
De oudste goudenmedaillewinnaar deed aan paardensport.

- 22** Maak een draaitabel met als rij-variabelen Geslacht en Groep en zorg bij Waarden voor Min van Afstand, Gemiddelde van Afstand en Max van Afstand.
Stel de getalnotatie van Gemiddelde van Afstand in op twee decimalen.

Rijlabels	Min van Afstand (m)	Gemiddelde van Afstand (m)	Max van Afstand (m)
M	71,93	79,95	88,68
A	71,93	79,70	84,46
B	72,61	80,21	88,68
V	53,42	59,92	67,11
A	54,94	60,20	64,3
B	53,42	59,63	67,11
Eindtotaal	53,42	70,69	88,68

- 23 a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Omgeving en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van Eindcijfer.
Stel de getalnotatie eventueel in op één decimaal.

Rijlabels	Gemiddelde van Eindcijfer
platteland	9,5
stad	10,7
Eindtotaal	10,4

Rana concludeert dat leerlingen die in de stad wonen gemiddeld een hoger resultaat hebben op het eindrapport dan leerlingen die op het platteland wonen.

- b** Maak een draaitabel met Leeftijd als rij-variabele, Geslacht als kolomvariabele en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van Eindcijfer.
Stel de getalnotatie eventueel in op één decimaal.

Gemiddelde van Eindcijfer	Kolomlabels		
Rijlabels	M	V	Eindtotaal
15	12,7	9,6	11,3
16	11,6	10,5	11,0
17	10,0	10,5	10,3
18	9,8	9,3	9,5
19	8,0	8,4	8,2
Eindtotaal	10,9	9,9	10,4

Naarmate jongens ouder zijn, hebben ze gemiddeld een lager resultaat op het eindrapport. Voor meisjes geldt dat niet (helemaal).
Gemiddeld hebben meisjes een hoger resultaat op hun eindrapport dan jongens.
Sofanias heeft dus niet (helemaal) gelijk.

Bladzijde 119

- 24 a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Lengte en kies bij Waarden voor Aantal van LeerlingID.
Er komen zeer veel verschillende lengtes voor en de meeste lengtes hebben een lage frequentie. Dat levert een weinig overzichtelijke frequentietabel op.

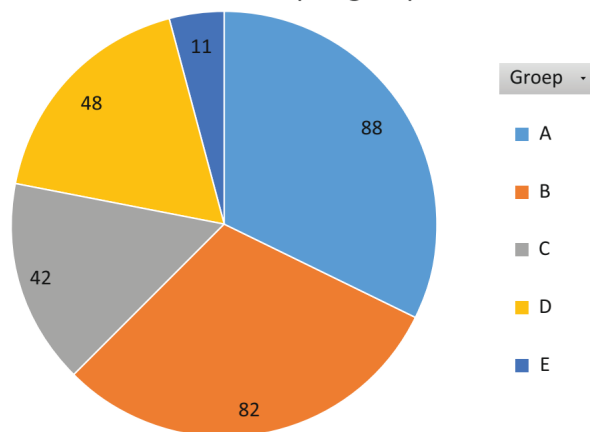
- b** Maak een nieuwe kolom door LengteKlasse te typen in cel H1 van het werkblad DATASET.
Filter Lengte met getalfilter Tussen op 'Is groter dan of gelijk aan' 150 en 'Is kleiner dan of gelijk aan' 159.
Typ in de eerste cel van de nieuwe kolom 150–159 en gebruik de vulgreep.
Herhaal deze handeling voor de overige lengteklassen.
- c** Maak een draaitabel met als rij-variabele LengteKlasse en kies bij Waarden voor Aantal van LeerlingID.

Rijlabels	Aantal van LeerlingID
150-159	9
160-169	44
170-179	54
180-189	31
190-199	8
Eindtotaal	146

- 25 a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Groep en kies bij Waarden voor Aantal van Groep.
Maak als draaigrafiek een cirkeldiagram (Cirkel). Voeg Gegevenslabels toe. Maak het diagram verder op.

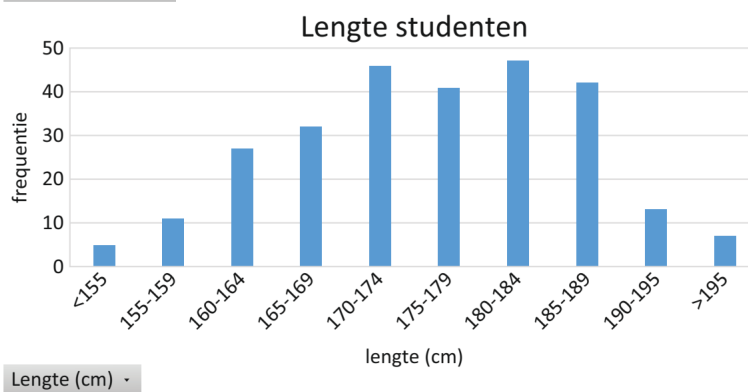
Aantal van Groep

Aantallen studenten per groep



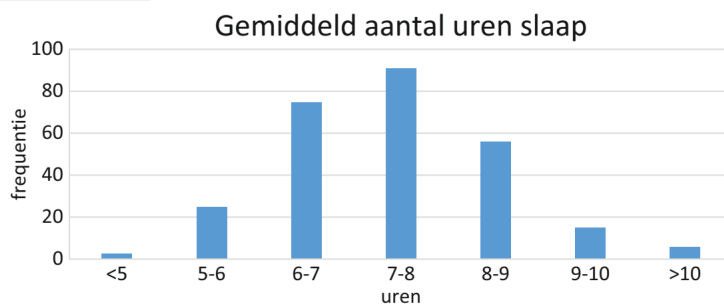
- b** Maak een draaitabel met als rij-variabele Lengte en kies bij Waarden voor Aantal van Groep.
Kies bij Lengte voor groeperen: Beginnen bij 155, Eindigen bij 195 en Op 5.
Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gegroepeerde kolom). Maak het diagram verder op.

Aantal van Groep



- c** Maak een draaitabel met als rij-variabele UrenSlaap en kies bij Waarden voor Aantal van Groep.
Kies bij UrenSlaap voor groeperen: Beginnen bij 5, Eindigen bij 10 en Op 1.
Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gegroepeerde kolom). Maak het diagram verder op.

Aantal van Groep

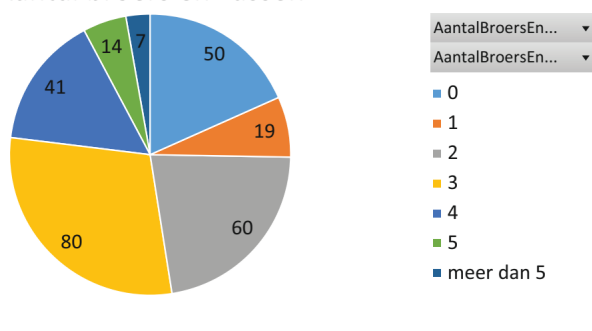


UrenSlaap -

- d** Maak een draaitabel met als rij-variabele AantalBroersEnZussen en kies bij Waarden voor Aantal van AantalBroersEnZussen.
Kies bij AantalBroersEnZussen voor groeperen van 6 en 7 broers en zussen, en verander de naam van 'Groep 1' in 'meer dan 5'.
Maak als draaigrafiek een cirkeldiagram (Cirkel). Voeg eventueel Gegevenslabels toe. Maak het diagram verder op.

Aantal van AantalBroersEnZussen

Aantal broers en zussen

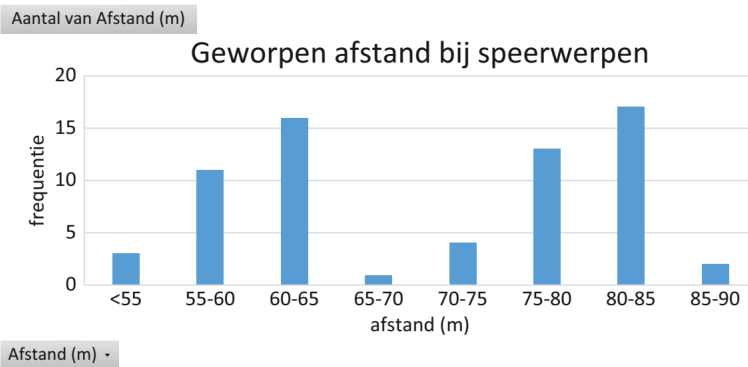


Bladzijde 120

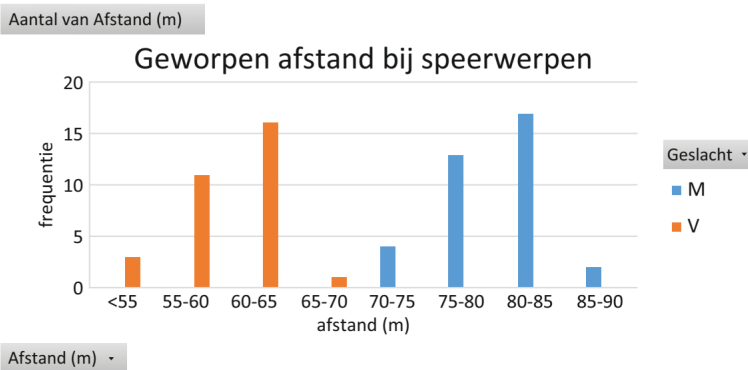
- 26 a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Afstand en kies bij Waarden voor Aantal van Afstand.
Kies bij Afstand voor groeperen: Beginnen bij 55, Eindigen bij 90 en Op 5.

Rijlabels	Aantal van Afstand (m)
<55	3
55-60	11
60-65	16
65-70	1
70-75	4
75-80	13
80-85	17
85-90	2
Eindtotaal	67

- b** Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gegroepeerde kolom). Maak het diagram verder op.

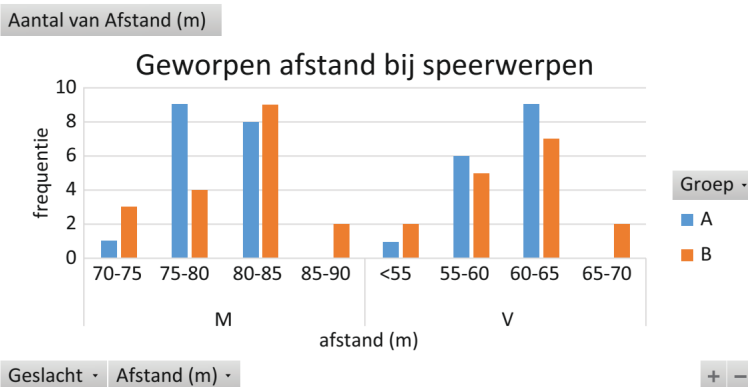


- c** Je hebt te maken met een meertoppige verdeling.
d Voeg Geslacht toe als kolomvariabele.



De mannen gooien verder dan de vrouwen. Dit veroorzaakt de twee toppen.

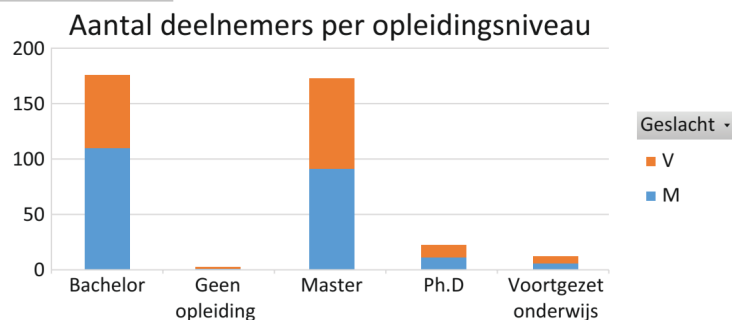
- e** Versleep Geslacht van Kolommen naar Rijen en zet Geslacht boven Afstand. Voeg Groep toe als kolomvariabele.



- 27 a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Stad en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van Leeftijd.
 Filter vervolgens in de draaitabel op de juiste steden.
 Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gegroepeerde kolom). Maak het diagram verder op.
 Je kunt ook eerst een diagram maken van de ongefilterde tabel en dan in het diagram filteren.

- b** Maak een draaitabel met Opleiding als rij-variabele, Geslacht als kolomvariabele en kies bij Waarden voor Aantal van Geslacht. Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gestapelde kolom). Maak het diagram verder op.

Aantal van Geslacht

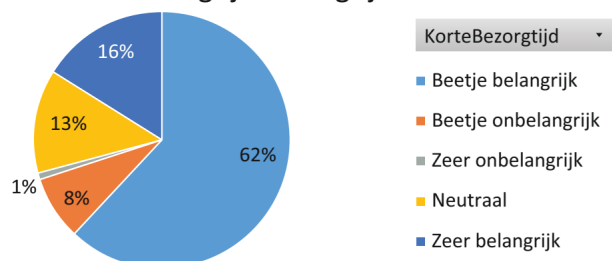


Opleiding

- c** Maak een draaitabel met KorteBezorgtijd als rij-variabele, Geslacht en BurgerlijkeStaat als kolomvariabele en kies bij Waarden voor Aantal van KorteBezorgtijd. Filter in de draaitabel op man en alleenstaand. Maak als draaigrafiek een cirkeldiagram (Cirkel). Voeg Gegevenslabels toe en kies bij Gegevenslabels opmaken voor Percentage in plaats van Waarde. Maak het diagram verder op. Je kunt ook eerst een diagram maken van de ongefilterde tabel en dan in het diagram filteren.

Aantal van KorteBezorgtijd

Vind je een korte bezorgtijd belangrijk?

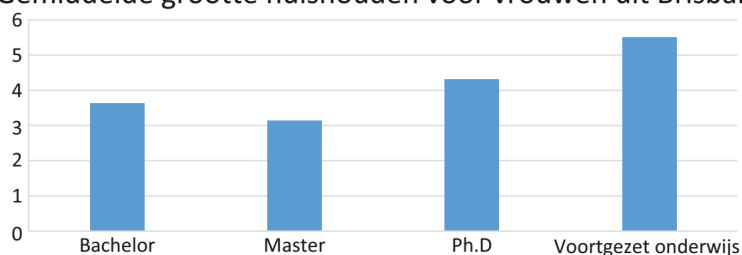


Geslacht BurgerlijkeStaat

- d** Maak een draaitabel met als Opleiding als rij-variabele, Geslacht en Stad als kolomvariabelen, en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van GrootteHuishouden. Filter in de draaitabel op vrouw en Brisbane. Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gegroepeerde kolom). Maak het diagram verder op. Je kunt ook eerst een diagram maken van de ongefilterde tabel en dan in het diagram filteren.

Gemiddelde van GrootteHuishouden

Gemiddelde grootte huishouden voor vrouwen uit Brisbane



Opleiding

28 a Maak een nieuwe kolom door Hulp te typen in cel V1.

Filter Thuishulp op ja en Bijles op ja.

Typ in de eerste cel van de nieuwe kolom 'zowel hulp thuis als bijles' en gebruik de vulgreep.

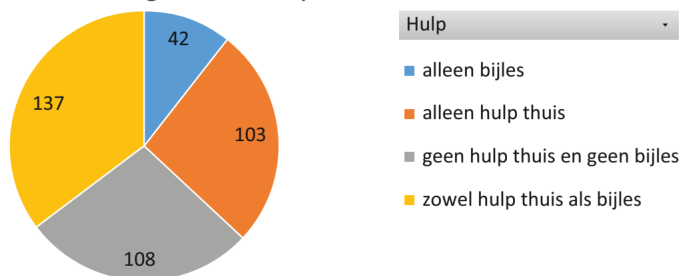
Herhaal deze handelingen voor de overige groepen 'alleen bijles', 'alleen hulp thuis' en 'geen hulp thuis en geen bijles'.

b Maak een draaitabel met als rij-variabele Hulp en kies bij Waarden voor Aantal van Hulp.

Maak als draaigrafiek een cirkeldiagram (Cirkel). Voeg Gegevenslabels toe. Maak het diagram verder op.

Aantal van Hulp

Aantal leerlingen met hulp

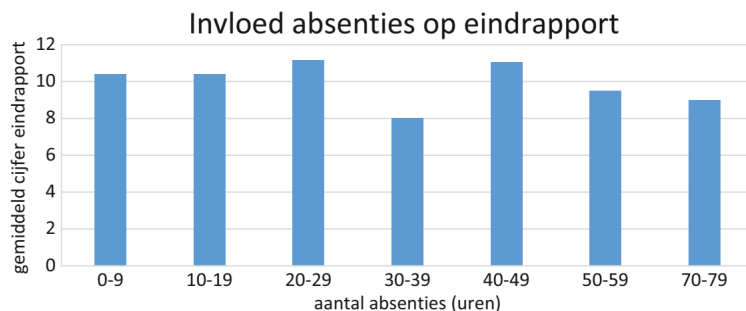


c Maak een draaitabel met als rij-variabele Absenties en kies bij Waarden voor Gemiddelde van Eindcijfer.

Kies bij Absenties voor groeperen: Beginnen bij 0, Eindigen bij 79 en Op 10.

Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gegroepeerde kolom). Maak het diagram verder op.

Gemiddelde van Eindcijfer



Absenties

De conclusie van Suze is dat je niet kunt stellen dat leerlingen die weinig lessen missen, gemiddeld een beter resultaat op het eindrapport halen.

Bladzijde 121

29 a Nee, er zijn zoveel datapunten dat de grafiek onoverzichtelijk is.

b Kies Aantal in kolom A van de totaalrij. Aflezen geeft 44925 dagen.

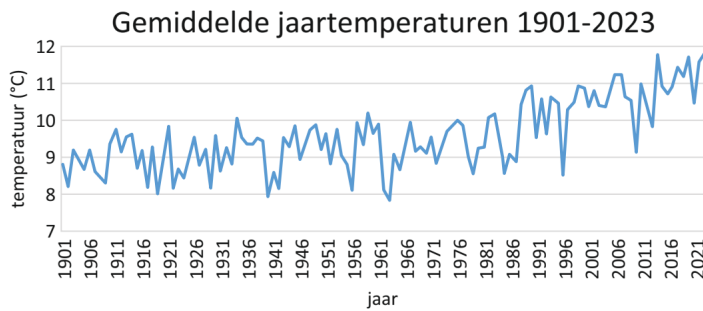
Deze dagen zijn niet allemaal in het lijndiagram te onderscheiden.

c Maak een draaitabel met als rij-variabele Datum en zorg bij waarde voor Gemiddelde van GemiddeldeTemperatuur.

Het kan zijn dat Excel zelf al voor een groepering per jaar zorgt. Als dat niet zo is, dan kies je voor Groeperen en selecteer je Jaren.

Maak als draaigrafiek een lijndiagram (Lijn). Maak het diagram verder op. Pas de grenzen voor de as aan.

De stijgende trend is in de figuur goed zichtbaar.



Jaren (Datum) ▾ Kwartalen (Datum) ▾ Maanden (Datum) ▾ Datum ▾ + -

Bladzijde 122

- 30 a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Periode en zorg bij Waarden voor Som van AantalVerkochteWoningen.
- Het kan zijn dat Excel zelf al voor een groepering op jaren en kwartalen zorgt. Als dat niet zo is, dan kies je voor Groeperen en selecteer je Jaren en Kwartalen. Filter de variabele Periode met een Datumfilter op Tussen 1-1-2013 en 31-12-2020. Je kunt ook in de draaitabel bij Rijlabels de juiste jaren selecteren. Maak als draaigrafiek een lijndiagram (Lijn). Maak het diagram verder op.

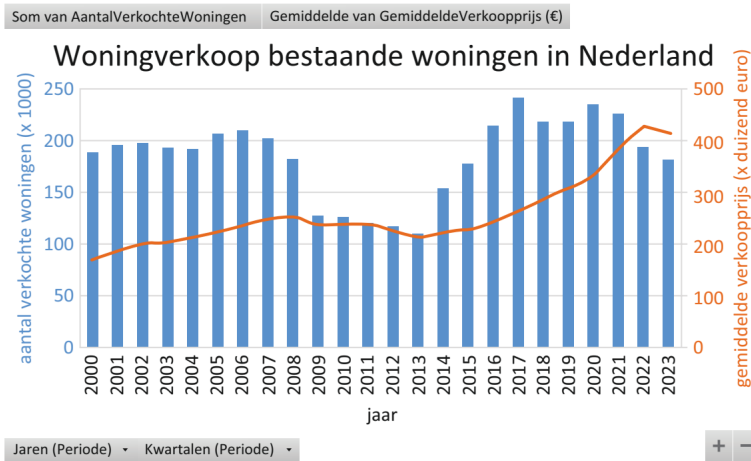
Som van AantalVerkochteWoningen



Jaren (Periode) ▾ Kwartalen (Periode) ▾ + -

Vrijwel elk jaar neemt de kwartaalverkoop binnen een jaar per kwartaal toe en steeds is het aantal verkochte woningen in het eerste kwartaal van een jaar minder dan in het laatste kwartaal van het voorafgaande jaar.

- b** Maak een draaitabel met als rij-variabele Periode en zorg bij Waarden voor Som van AantalVerkochteWoningen en Gemiddelde van GemiddeldeVerkoopprijs.
- Het kan zijn dat Excel zelf al voor een groepering op jaren zorgt. Als dat niet zo is, dan kies je voor Groeperen en selecteer je Jaren.
- Maak als draaigrafiek een combinatiediagram (Combinatie). Kies bij de grafiek van de aantal verkochte woningen voor het type Gegroepeerde kolom en bij de gemiddelde verkoopprijs voor Lijn. Vink voor de tweede grafiek de Secundaire as aan. Maak het diagram verder op. Pas eventueel de grenzen en eenheden voor beide verticale assen aan.



- 31 a** Maak op het tabblad Juni 2023 de totaalrij aan. Kies Gemiddelde in kolom C van de totaalrij en lees af dat de gemiddelde temperatuur in juni 2023 ongeveer 19,4 °C is. Dus het getal dat op de eerste puntjes moet staan is 19,4.

Maak bij de gegevens in het tabblad Tijdvak 1991-2020 een draaitabel met als rij-variabele Datum en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van GemiddeldeTemperatuur. Groepeer Datum op Maanden.

Lees bij juni af dat de normale gemiddelde temperatuur ongeveer 16,1 °C is. Dus het getal dat op de tweede puntjes moet staan is 16,1. Bewaar deze draaitabel.

Maak bij de gegevens in het tabblad Historie een draaitabel met als rij-variabele Datum en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van GemiddeldeTemperatuur. Kies bij Groeperen indien nodig voor zowel Maanden als Jaren. Zet de rij-variabele Maanden (Datum) bovenaan bij de rij-variabelen. Filter de variabele Datum op Alle datums in de periode juni. Sorteer de waarden van Gemiddelde van GemiddeldeTemperatuur met 'Sorteren van hoog naar laag'. Merk op dat 2023 inderdaad op plek 1 staat. Op plek 2 staat 2021 met ongeveer 18,2 °C. Dus de getallen die op de derde en vierde puntjes moeten staan zijn 2021 en 18,2.

Kies op het tabblad Juni 2023 in kolom J van de totaalrij voor Som en lees af dat er in juni 2023 in totaal 14,3 mm neerslag viel. Dit is het getal dat op de eerste puntjes in de tweede alinea moet staan.

Voeg aan de draaitabel over het Tijdvak 1991-2020 bij Waarden Som van HoeveelheidNeerslag toe. In totaal viel er in deze 30 jaar in de maanden juni 2116,2 mm neerslag, dat is gemiddeld ongeveer 70,5 mm per maand. Het getal op de tweede puntjes in de tweede alinea is dus 70,5.

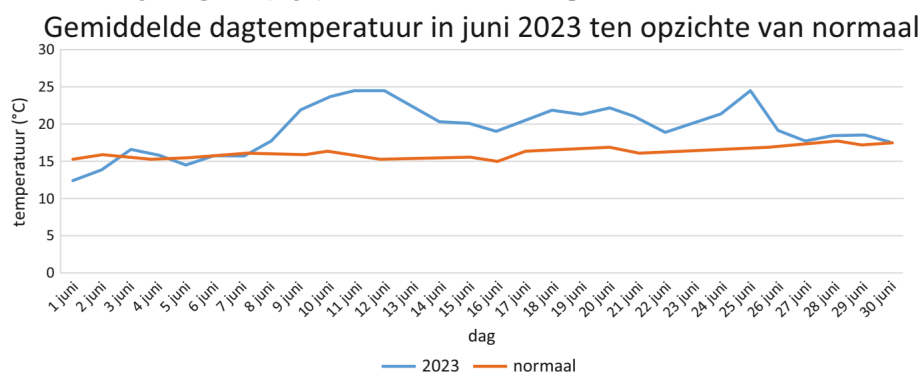
Kies op het tabblad Juni 2023 in kolom H van de totaalrij voor Som en lees af dat in juni 2023 de zon in totaal 326 uur scheen. Het getal op de eerste puntjes in de derde alinea is dus 326. Voeg aan de draaitabel over het Tijdvak 1991-2020 bij Waarden Som van Zonneschijnduur toe. In totaal scheen de zon in deze 30 jaar in de maanden juni 6214,4 uur, dat is gemiddeld ongeveer 207,1 uur per maand. Het getal op de laatste puntjes is dus 207,1.

- b** Zet in de cellen B3 t/m B32 van het tabblad Temperaturen juni de gemiddelde dagtemperaturen van juni 2023. Kopieer deze uit kolom C van het tabblad Juni 2023.

Gebruik de draaitabel bij het tabblad Tijdvak 1991-2020 uit vraag a. Kies bij Groeperen voor zowel Maanden als Dagen. Zet de rij-variabele Maanden (Datum) bovenaan bij de rij-variabelen. Kopieer de gemiddelde dagtemperaturen van juni in de periode 1991-2020 naar de cellen C3 t/m C32 van het tabblad Temperaturen juni. Zorg ervoor dat de getallen in één decimaal worden weergegeven. Je krijgt de volgende tabel.

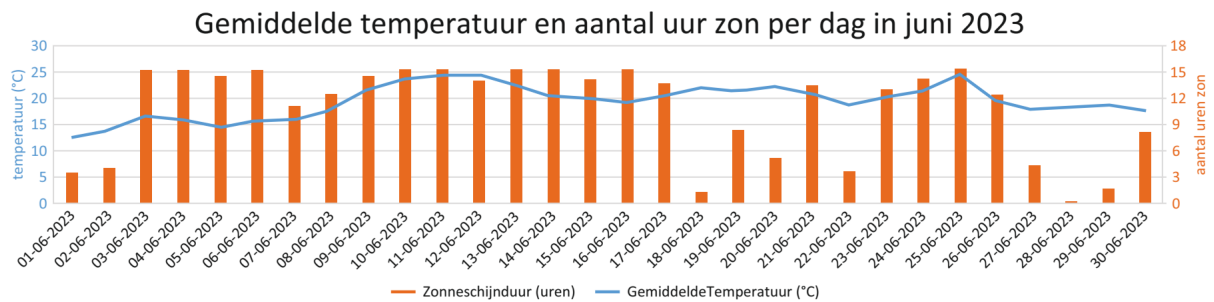
	A	B	C
1	GemiddeldeTemperatuur (°C)		
2	Dag	2023	normaal
3	1 juni	12,5	15,3
4	2 juni	13,9	16,0
5	3 juni	16,6	15,5
6	4 juni	15,9	15,2
7	5 juni	14,5	15,4
8	6 juni	15,7	15,9
9	7 juni	15,9	16,1
10	8 juni	17,8	16,1
11	9 juni	21,8	15,9
12	10 juni	23,6	16,2
13	11 juni	24,5	15,8
14	12 juni	24,3	15,2
15	13 juni	22,4	15,4
16	14 juni	20,3	15,6
17	15 juni	20	15,5
18	16 juni	19,1	15,1
19	17 juni	20,5	16,2
20	18 juni	21,9	16,4
21	19 juni	21,3	16,6
22	20 juni	22,1	16,8
23	21 juni	20,8	16,1
24	22 juni	18,9	15,9
25	23 juni	20,2	16,2
26	24 juni	21,3	16,6
27	25 juni	24,5	16,7
28	26 juni	19,2	17,1
29	27 juni	17,7	17,3
30	28 juni	18,4	17,7
31	29 juni	18,6	17,3
32	30 juni	17,6	17,6

Maak een lijndiagram (Lijn) en maak het verder op.



- c Selecteer in het tabblad Juni 2023 de cellen A1:A31 en tegelijk C1:C31 én H1:H31. Maak een combinatiediagram (Combinatie). Kies bij de grafiek van de gemiddelde temperatuur voor het type Lijn en bij de zonneshijnduur voor Gegroepeerde kolom. Vink voor de tweede grafiek de Secundaire as aan.

Maak het diagram verder op. Pas eventueel de grenzen en de eenheden voor de secundaire as aan.



Bladzijde 123

C6

- a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Geslacht, filter op Land en zorg bij Waarden voor Som van Goud, Som van Zilver en Som van Brons. Filter in de draaitabel op Verenigde Staten.

Land Verenigde Staten

Rijlabels	Som van Goud	Som van Zilver	Som van Brons
M	54	25	36
V	85	29	35
Eindtotaal	139	54	71

- b** Maak een draaitabel met als rij-variabele Lengte, kolomvariabele Leeftijd, filter op Land en kies bij Waarden voor Aantal van Naam. Filter in de draaitabel op Nederland. Kies bij Lengte voor groeperen: Beginnen bij 1,4 en Eindigen bij 2,2 en Op 0,2. Kies bij Leeftijd voor groeperen: Beginnen bij 10, Eindigen bij 50 en Op 10.

Land Nederland

Aantal van Naam	Kolomlabels				
Rijlabels	10-19	20-29	30-39	40-50	Eindtotaal
1,4-1,6		5			5
1,6-1,8	4	86	27	2	119
1,8-2	3	89	23	4	119
2-2,2		5	1		6
Eindtotaal	7	185	51	6	249

C7

- Maak een draaitabel met als rij-variabele Geslacht, filter op Land en kies bij Waarden voor Aantal van Naam. Filter in de draaitabel op Nederland. Maak als draaigrafiek een cirkeldiagram (Cirkel). Voeg Gegevenslabels toe en kies bij Gegevenslabels opmaken voor Percentage in plaats van Waarde. Maak het diagram verder op.
- Maak een draaitabel met Sport als rij-variabele en Land als kolomvariabele en kies bij Waarden voor Aantal van Naam. Filter in de draaitabel op Nederland en België. Maak als draaigrafiek een staafdiagram (Gestapelde kolom). Maak het diagram verder op.

Bij het eerste diagram kun je ook eerst een diagram maken van de ongefilterde tabel en dan in het diagram filteren.

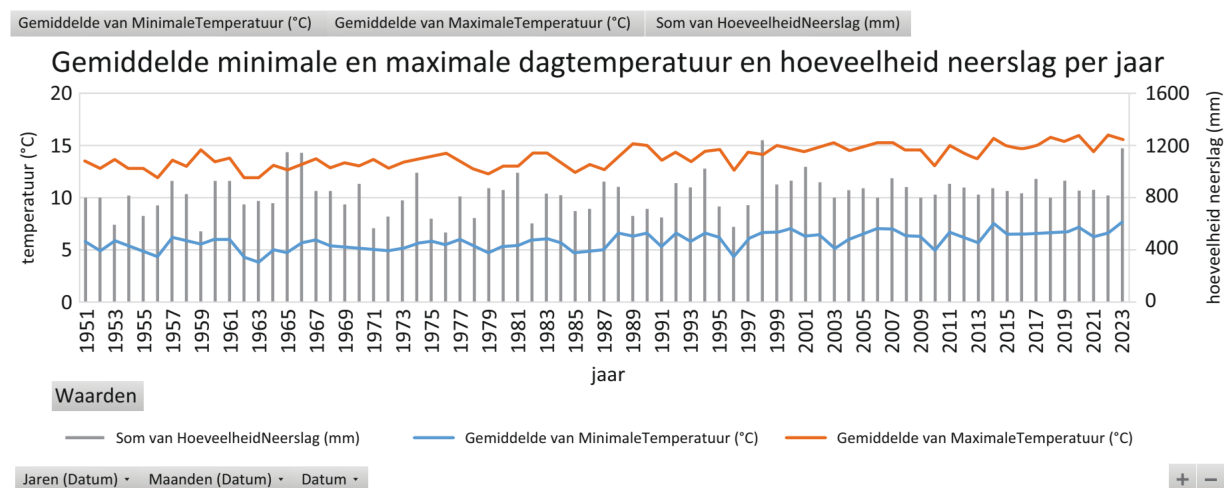
C8

Maak bij de gegevens in het tabblad Historie een draaitabel met als rij-variabele Datum, en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van MinimaleTemperatuur, Gemiddelde van MaximaleTemperatuur en Som van HoeveelheidNeerslag.

Het kan zijn dat Excel zelf al voor een groepering per jaar zorgt. Als dat niet zo is, dan kies je voor Groeperen en selecteer je Jaren.

Maak als draaigrafiek een combinatiediagram (Combinatie). Kies bij de grafieken van de minimale en maximale temperatuur voor het type Lijn en bij de hoeveelheid neerslag voor Gegroepeerde kolom. Vink voor de laatste grafiek de Secundaire as aan.

Maak het diagram verder op. Pas eventueel de grenzen en de eenheden voor beide verticale assen aan.



K Keuzeonderwerp Lineair programmeren

K.1 Stelsels van lineaire vergelijkingen

Bladzijde 126

V1 $p : 3x - y = 6$

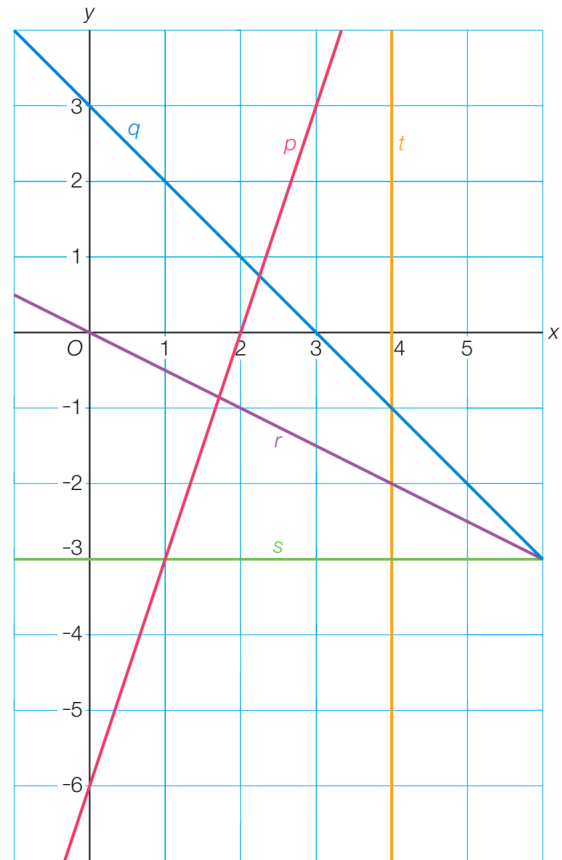
x	0	2
y	-6	0

$q : x + y = 3$

x	0	3
y	3	0

$r : x + 2y = 0$

x	0	2
y	0	-1



V2 $l : 5x - 3y = 75$

$y = 0$ geeft $5x = 75$, dus $x = 15$ en snijpunt x -as is $(15, 0)$.

$x = 0$ geeft $-3y = 75$, dus $y = -25$ en snijpunt y -as is $(0, -25)$.

$m : 18x + y = 450$

$y = 0$ geeft $18x = 450$, dus $x = 25$ en snijpunt x -as is $(25, 0)$.

$x = 0$ geeft $y = 450$ en snijpunt y -as is $(0, 450)$.

$n : y = 320$ horizontale lijn, dus geen snijpunt x -as en snijpunt y -as is $(0, 320)$.

$p : x = 185$ verticale lijn, dus geen snijpunt y -as en snijpunt x -as is $(185, 0)$.

$q : 3x - 10y = 7500$

$y = 0$ geeft $3x = 7500$, dus $x = 2500$ en snijpunt x -as is $(2500, 0)$.

$x = 0$ geeft $-10y = 7500$, dus $y = -750$ en snijpunt y -as is $(0, -750)$.

$r : 0,2x + 0,3y = 600$

$y = 0$ geeft $0,2x = 600$, dus $x = 3000$ en snijpunt x -as is $(3000, 0)$.

$x = 0$ geeft $0,3y = 600$, dus $y = 2000$ en snijpunt y -as is $(0, 2000)$.

Bladzijde 127

V3
$$\left. \begin{array}{l} p : 5x - 12y = c \\ \text{door } (51, 70) \end{array} \right\} c = 5 \cdot 51 - 12 \cdot 70 = -585$$

Dus $p : 5x - 12y = -585$.

1 a $l: x + 3y = 9$

x	0	9
y	3	0

$m: x + y = 5$

x	0	5
y	5	0



b De coördinaten van het snijpunt zijn (3, 2).

Bladzijde 128

2 a $\begin{cases} 5x - 4y = -8 \\ -x + 4y = -12 \end{cases} +$

$4x = -20$, dus $x = -5$

Invullen van $x = -5$ in $-x + 4y = -12$ geeft $5 + 4y = -12$

$4y = -17$

$y = -4\frac{1}{4}$

Dus $x = -5$ en $y = -4\frac{1}{4}$.

b $\begin{cases} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} -$

$-2y = 8$, dus $y = -4$

Invullen van $y = -4$ in $-2x + y = 7$ geeft $-2x - 4 = 7$

$-2x = 11$

$x = -5\frac{1}{2}$

Dus $x = -5\frac{1}{2}$ en $y = -4$.

c $\begin{cases} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} +$

$-3x = -9$, dus $x = 3$

Invullen van $x = 3$ in $-x - 3y = -8$ geeft $-3 - 3y = -8$

$-3y = -5$

$y = 1\frac{2}{3}$

Dus $x = 3$ en $y = 1\frac{2}{3}$.

3 a Optellen geeft $6x - y = 23$, er is geen variabele geëlimineerd.

Aftrekken geeft $2x - 7y = -9$, er is geen variabele geëlimineerd.

b Beide leden vermenigvuldigen met 2 geeft $\begin{cases} 4x - 4y = 7 \\ 4x + 6y = 32 \end{cases}$

Bladzijde 129

4 a $\begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 10x + 5y = 0 \end{cases} -$

$-7x = -7$, dus $x = 1$

$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

De oplossing is $x = 1$ en $y = -2$.

$$\text{b } \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - y = 19 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ 3x - y = 19 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5y &= -10, \text{ dus } y = 2 \\ x - 2y &= 3 \end{aligned} \begin{cases} x - 4 = 3 \\ x = 7 \end{cases}$$

De oplossing is $x = 7$ en $y = 2$.

$$\text{5 a } \begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ x + 3y = -7 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ 5x + 15y = -35 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -13y &= 104, \text{ dus } y = -8 \\ x + 3y &= -7 \end{aligned} \begin{cases} x - 24 = -7 \\ x = 17 \end{cases}$$

De oplossing is $x = 17$ en $y = -8$.

$$\text{b } \begin{cases} 0,8x + 0,2y = 1 \\ 0,3x - 0,3y = 1,5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 2,4x + 0,6y = 3 \\ 0,6x - 0,6y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3x &= 6, \text{ dus } x = 2 \\ 0,8x + 0,2y &= 1 \end{aligned} \begin{cases} 1,6 + 0,2y = 1 \\ 0,2y = -0,6 \\ y = -3 \end{cases}$$

De oplossing is $x = 2$ en $y = -3$.

$$\text{6 a } p: 12x + 5y = 5$$

x	0	2
y	1	-3,8

$$q: 3x - y = 6$$

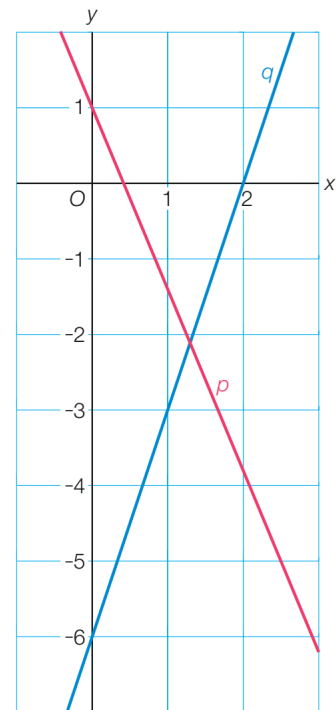
x	0	2
y	-6	0

$$\text{b } \text{Je moet het stelsel } \begin{cases} 12x + 5y = 5 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \text{ oplossen.}$$

$$\begin{cases} 12x + 5y = 5 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 12x + 5y = 5 \\ 15x - 5y = 30 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 27x &= 35, \text{ dus } x = 1\frac{8}{27} \\ 3x - y &= 6 \end{aligned} \begin{cases} 3\frac{8}{9} - y = 6 \\ -y = 2\frac{1}{9} \\ y = -2\frac{1}{9} \end{cases}$$

De coördinaten van het snijpunt zijn $(1\frac{8}{27}, -2\frac{1}{9})$.



Bladzijde 130

$$\text{7 } \begin{cases} 3x - y = 10 \\ -6x + 2y = 5 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 2y = 20 \\ -6x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 25 \end{aligned}$$

Er zijn geen waarden voor x en y .

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ -6x + 2y = -20 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 2y = 20 \\ -6x + 2y = -20 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \end{aligned}$$

Je hebt hier eigenlijk maar één vergelijking, want $-6x + 2y = -20$ delen door -2 geeft $3x - y = 10$.

8

$$\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ x + 4y = 38 \end{cases} \begin{array}{l} |2| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 4y = -24 \\ x + 4y = 38 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 7x \\ = 14, \text{ dus } x = 2 \\ x + 4y = 38 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 7x \\ = 14, \text{ dus } x = 2 \\ x + 4y = 38 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 2 + 4y = 38 \\ 4y = 36 \\ y = 9 \end{array}$$

De coördinaten van het snijpunt zijn (2, 9).

9

$$\text{a } \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases} \begin{array}{l} |3| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 3x - 3y + 9z = 12 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases} -$$

$$\begin{array}{r} -2y + 4z = -2 \end{array}$$

$$\text{b } \begin{cases} -3y + 5z = -6 \\ -2y + 4z = -2 \end{cases} \begin{array}{l} |4| \\ |5| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} -12y + 20z = -24 \\ -10y + 20z = -10 \end{cases} -$$

$$\begin{array}{r} -2y \\ = -14, \text{ dus } y = 7 \\ -2y + 4z = -2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} -2y \\ = -14, \text{ dus } y = 7 \\ -2y + 4z = -2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} -14 + 4z = -2 \\ 4z = 12 \\ z = 3 \end{array}$$

De oplossing is $y = 7$ en $z = 3$.

$$\text{c } \text{Invullen van } y = 7 \text{ en } z = 3 \text{ in } x - y + 3z = 4 \text{ geeft } x + 2 = 4$$

$$x = 2$$

Dus $x = 2$ en $y = 7$ en $z = 3$.

d Stelsel I:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \end{cases} \begin{array}{l} |2| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 4 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \end{cases} -$$

$$5y = 0, \text{ dus } y = 0$$

Dan $y = 0$ invullen in de eerste en derde vergelijking.

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ 4x - 3z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} |3| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 3x + 3z = 6 \\ 4x - 3z = 1 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 7x \\ = 7, \text{ dus } x = 1 \\ x + z = 2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 7x \\ = 7, \text{ dus } x = 1 \\ x + z = 2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 1 + z = 2 \\ z = 1 \end{array}$$

De oplossing is $x = 1$ en $y = 0$ en $z = 1$.

Stelsel II:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 4 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} -$$

$$2y + 2z = 2, \text{ dus } y + z = 1$$

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 4 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases} -$$

$$y + 4z = -2$$

$$\begin{cases} y + 4z = -2 \\ y + z = 1 \end{cases} -$$

$$3z = -3, \text{ dus } z = -1 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 3z = -3, \text{ dus } z = -1 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} y + -1 = 1 \\ y = 2 \end{array}$$

Uit $x + y + 3z = 2$ volgt $x = 2 - y - 3z = 2 - 2 - 3 \cdot -1 = 3$.

De oplossing is $x = 3$ en $y = 2$ en $z = -1$.

Bladzijde 131

V4

- a x = aantal muntstukken van 1 euro
 y = aantal muntstukken van 50 eurocent
 Je krijgt $x + 0,5y = 260$.
- b x = aantal verkochte stoelen
 y = aantal verkochte tafels
 Je krijgt $350x + 850y = 22\,000$.

- c** x = prijs in euro's van 100 gram cashewnoten
 y = prijs in euro's van 100 gram studentenhaver
 Je krijgt $4x + 7y = 12,80$.
- d** x = aantal ha groenten
 y = aantal ha granen
 Je krijgt $20\,000x + 15\,000y = 540\,000$.

- V5 a** x = aantal fietsen dat op de binnenplaats kan
 y = aantal bromfietsen dat op de binnenplaats kan
 Je krijgt $x + 2y = 180$

- b** Er geldt $x = 4y$.
 Invullen van $x = 4y$ in $x + 2y = 180$ geeft $4y + 2y = 180$
 $6y = 180$
 $y = 30$

$y = 30$ geeft $x = 4 \cdot 30 = 120$
 Er staan 120 fietsen op de binnenplaats.

Bladzijde 132

- 10 a** Er geldt $x + y = 5000$.
b x kg van 12 euro per kg kost $12x$ euro.
 y kg van 16 euro per kg kost $16y$ euro.
 5000 kg van $12,80$ euro per kg kost $5000 \cdot 12,80 = 64\,000$ euro.
 Dus $12x + 16y = 64\,000$.

- c** $\begin{cases} x + y = 5000 \\ 12x + 16y = 64\,000 \end{cases} \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 12x + 12y = 60\,000 \\ 12x + 16y = 64\,000 \end{cases}$ _
 $-4y = -4000$, dus $y = 1000$
 $x + y = 5000$
 $x = 4000$

De oplossing is $x = 4000$ en $y = 1000$.

- d** Het mengsel bevat 4000 kg koffie uit Colombia en 1000 kg koffie uit Jamaica.

- 11 a** x liter A van 18% alcohol geeft $0,18x$ liter alcohol.
 y liter B van 10% alcohol geeft $0,10y$ liter alcohol.
 20 liter van 15% geeft $20 \cdot 0,15 = 3$ liter alcohol.
 Dus $0,18x + 0,10y = 3$.

- b** Er geldt ook dat $x + y = 20$.
 $\begin{cases} 0,18x + 0,10y = 3 \\ x + y = 20 \end{cases} \begin{vmatrix} 10 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 1,8x + y = 30 \\ x + y = 20 \end{cases}$ _
 $0,8x = 10$, dus $x = 12,5$
 $x + y = 20$
 $12,5 + y = 20$
 $y = 7,5$

Er is $12,5$ liter A nodig en $7,5$ liter B.

- 12 a** Samen 1 liter, dus $x + y = 1$.
 Uit de prijzen volgt $0,70x + y = 0,75$.

- b** $\begin{cases} x + y = 1 \\ 0,70x + y = 0,75 \end{cases}$ _
 $0,30x = 0,25$, dus $x = \frac{5}{6}$
 $x + y = 1$
 $\frac{5}{6} + y = 1$
 $y = \frac{1}{6}$

De samenstelling is $\frac{5}{6}$ liter appelsap en $\frac{1}{6}$ liter perziksap.

- 13 a** $\begin{cases} 50x + 75y + 10z = 500 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \\ 90x + 100y + 50z = 1150 \end{cases}$ oftewel $\begin{cases} 10x + 15y + 2z = 100 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \\ 9x + 10y + 5z = 115 \end{cases}$

- b** $\begin{cases} 10x + 15y + 2z = 100 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 20x + 30y + 4z = 200 \\ 15x + 30y + 9z = 225 \end{cases}$ _
 $5x - 5z = -25$, dus $x - z = -5$

$$\begin{cases} 5x + 10y + 3z = 75 \\ 9x + 10y + 5z = 115 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ \hline \end{array}$$

$$4x \quad - 2z = -40, \text{ dus } 2x + z = 20$$

$$\begin{cases} x - z = -5 \\ 2x + z = 20 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ \hline \end{array}$$

$$3x = 15, \text{ dus } x = 5$$

$$\begin{cases} x - z = -5 \\ x - z = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ \hline \end{array}$$

$$z = 10$$

Invullen van $x = 5$ en $z = 10$ in $5x + 10y + 3z = 75$ geeft $55 + 10y = 75$
 $10y = 20$
 $y = 2$

De oplossing is $x = 5$ en $y = 2$ en $z = 10$.

Het dieet bestaat dus uit 500 gram I, 200 gram II en 1000 gram III.

Bladzijde 133

C1 $\begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ x - 3y = 14 \end{cases} \begin{array}{r} |1| \\ |3| \end{array}$ geeft $\begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ 3x - 9y = 42 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ \hline \end{array}$

$$4y = -24, \text{ dus } y = -6$$

$$x - 3y = 14 \quad \begin{cases} x - 3 \cdot -6 = 14 \\ x + 18 = 14 \\ x = -4 \end{cases}$$

De oplossing is $x = -4$ en $y = -6$.

C2 a In totaal 180 bollen, dus $x + y = 180$.
 Uit de prijzen volgt $0,40x + 0,50y = 77,90$.

b $\begin{cases} x + y = 180 \\ 0,40x + 0,50y = 77,90 \end{cases} \begin{array}{r} |1| \\ |2| \end{array}$ geeft $\begin{cases} x + y = 180 \\ 0,80x + y = 155,80 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ \hline \end{array}$

$$0,20x = 24,20, \text{ dus } x = 121$$

$$\begin{cases} 121 + y = 180 \\ x + y = 180 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ \hline \end{array}$$

$$y = 59$$

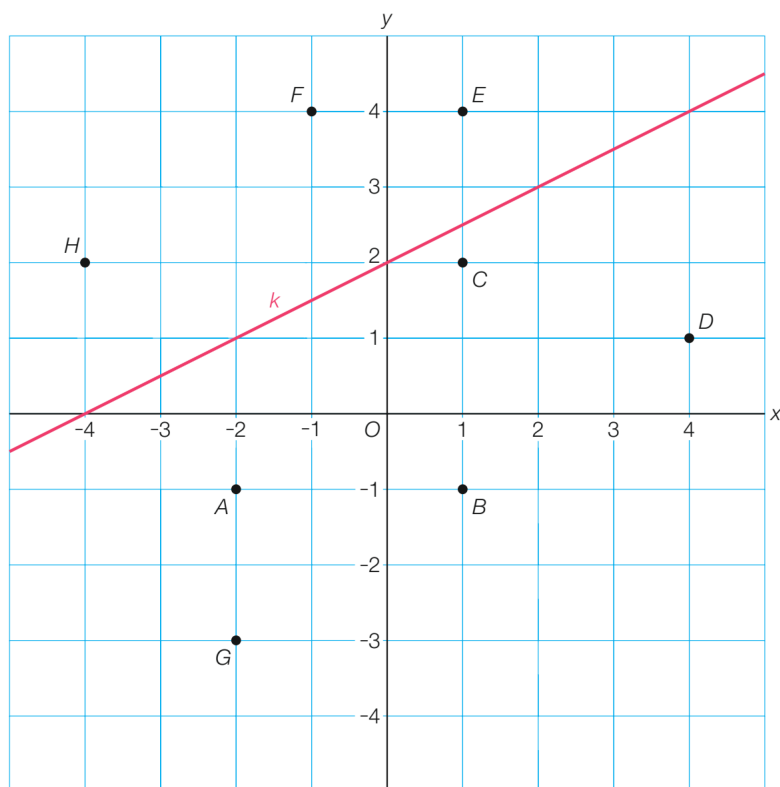
Dus 59 rozijnenbollen.

K.2 Ongelijkheden met twee variabelen

Bladzijde 134

14 a $k: x - 2y = -4$

x	0	-4
y	2	0



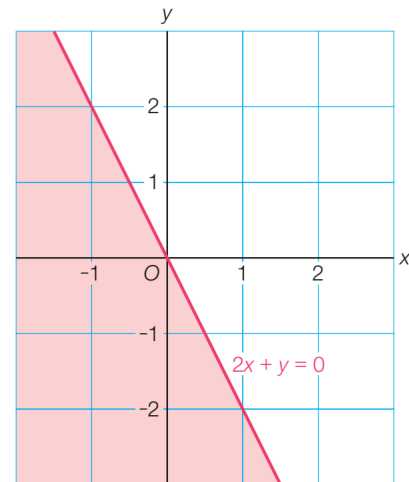
b Invullen geeft $-2 + 2 > -4$ en dat klopt.

c	A	B	C	D	E	F	G	H
Punt boven k ?	nee	nee	nee	nee	ja	ja	nee	ja
Voldoet aan $x - 2y > -4$?	ja	ja	ja	ja	nee	nee	ja	nee

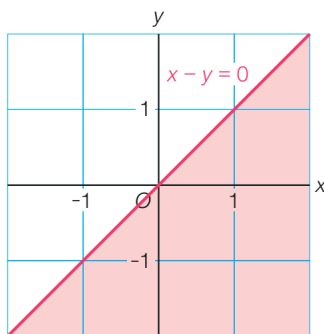
d De punten die voldoen aan $x - 2y > -4$ liggen onder k .

Bladzijde 135

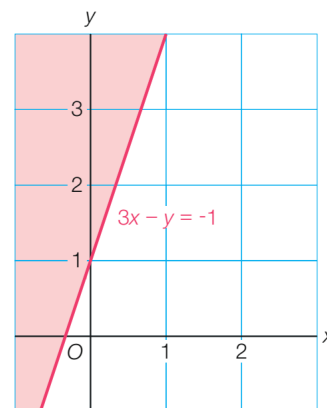
- 15** **a** Omdat dit punt op de lijn $2x + y = 0$ ligt.
b Bijvoorbeeld $(1, -2)$, want dit punt ligt ook op de lijn $2x + y = 0$.
c $(0, 1)$ invullen geeft $1 \leq 0$; dit klopt niet.



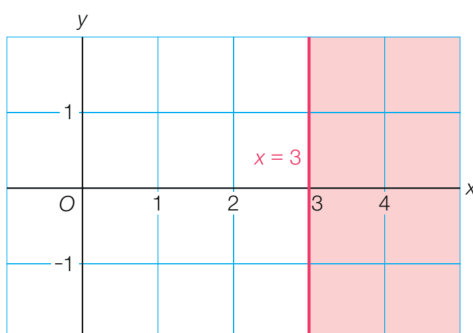
- 16** **a** De lijn $x - y = 0$ gaat door $(0, 0)$ en $(1, 1)$.
 $(1, 0)$ invullen geeft $1 - 0 \geq 0$; dit klopt.



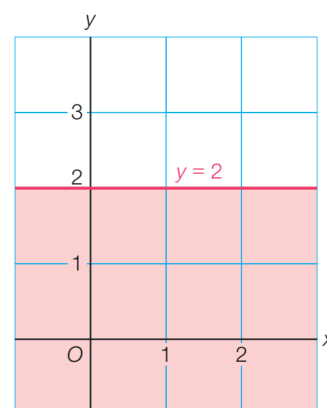
- c** De lijn $3x - y = -1$ gaat door $(0, 1)$ en $(1, 4)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 - 0 \leq -1$; dit klopt niet.



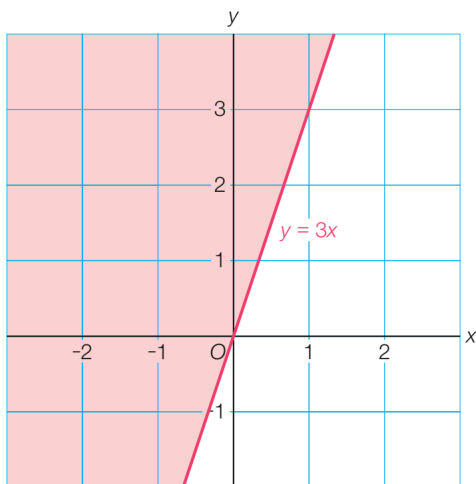
- b** De lijn $x = 3$ is een verticale lijn.



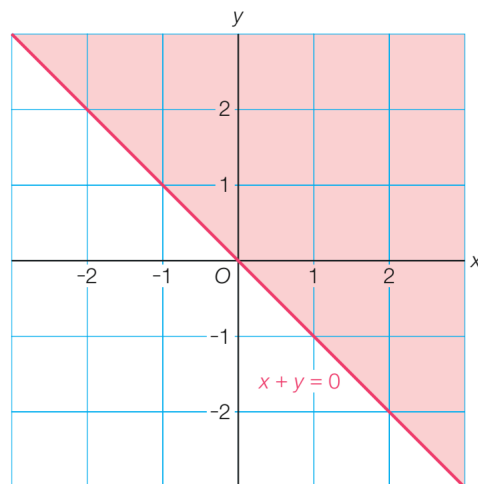
- d** De lijn $y = 2$ is een horizontale lijn.



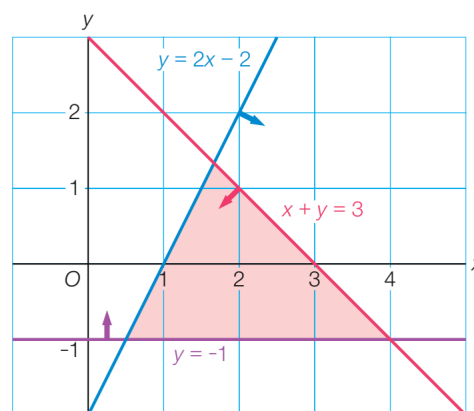
- e** De lijn $y = 3x$ gaat door $(0, 0)$ en $(1, 3)$.
 $(1, 0)$ invullen geeft $0 \geq 1$; dit klopt niet.



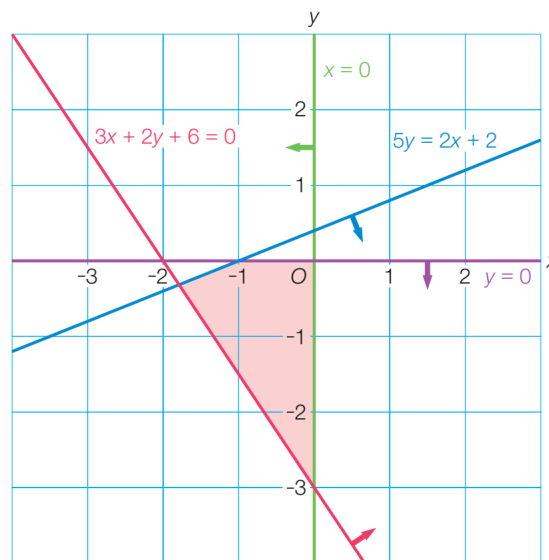
- f** De lijn $x + y = 0$ gaat door $(0, 0)$ en $(1, -1)$.
 $(1, 0)$ invullen geeft $0 + 1 \geq 0$; dit klopt.



- 17 a** De lijn $x + y = 3$ gaat door $(0, 3)$ en $(3, 0)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 \leq 3$; dit klopt.
De lijn $y = 2x - 2$ gaat door $(1, 0)$ en $(0, -2)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 \leq 0 - 2$; dit klopt niet.
De lijn $y = -1$ is een horizontale lijn.



- b** De lijn $3x + 2y + 6 = 0$ gaat door $(-2, 0)$ en $(0, -3)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 + 6 \geq 0$; dit klopt.
De lijn $5y = 2x + 2$ gaat door $(-1, 0)$ en $(4, 2)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 \leq 0 + 2$; dit klopt.
De lijn $x = 0$ is de y -as.
De lijn $y = 0$ is de x -as.



Bladzijde 136

- 18 a** Het gebied heeft vier grenslijnen:
1. De y -as: $x = 0$.
 2. De lijn door $(0, 5)$ en $(2, 0)$: $y = -2\frac{1}{2}x + 5$.
 3. De lijn door $(0, 3)$ en $(4, 0)$: $y = -\frac{3}{4}x + 3$.
 4. De x -as: $y = 0$.
- Voor het gebied geldt: $x \geq 0$ en $y \geq -2\frac{1}{2}x + 5$ en $y \geq -\frac{3}{4}x + 3$ en $y \geq 0$.

b Los op $-2\frac{1}{2}x + 5 = -\frac{3}{4}x + 3$

$$-1\frac{3}{4}x = -2$$

$$x = 1\frac{1}{7}$$

Samen met $y = -\frac{3}{4}x + 3$ geeft dit $y = -\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{7} + 3 = 2\frac{1}{7}$.

De coördinaten van A zijn $(1\frac{1}{7}, 2\frac{1}{7})$.

19 a De grenslijn door (0, 6) en (3, 0): $y = -2x + 6$.

De grenslijn door (0, 6) en (6, 0): $y = -x + 6$.

De grenslijn door (0, 0) en (2, 1): $y = \frac{1}{2}x$.

Voor het gebied geldt: $y \geq -2x + 6$ en $y \leq -x + 6$ en $y \geq \frac{1}{2}x$.

b Los op $-2x + 6 = \frac{1}{2}x$

$$-2\frac{1}{2}x = -6$$

$$x = 2\frac{2}{5}$$

Samen met $y = \frac{1}{2}x$ geeft dit $y = 1\frac{1}{5}$.

Het punt met de kleinste y -coördinaat is hoekpunt $(2\frac{2}{5}, 1\frac{1}{5})$.

c Het punt met de grootste x -coördinaat is hoekpunt (4, 2).

d De coördinaten van de roosterpunten in V zijn (2, 2), (3, 2), (4, 2), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (2, 4), (1, 5) en (0, 6).

20 a Voor x huizen van het type A is $250x$ m² nodig en voor y huizen van het type B is $200y$ m² nodig.

Het totaal moet kleiner dan of gelijk aan de beschikbare 4000 m² zijn.

Dus $250x + 200y \leq 4000$. Delen door 50 geeft $5x + 4y \leq 80$.

b Het totaal aantal mensdagen is $240x + 320y$.

Hiervoor geldt $240x + 320y \leq 4800$. Delen door 80 geeft $3x + 4y \leq 60$.

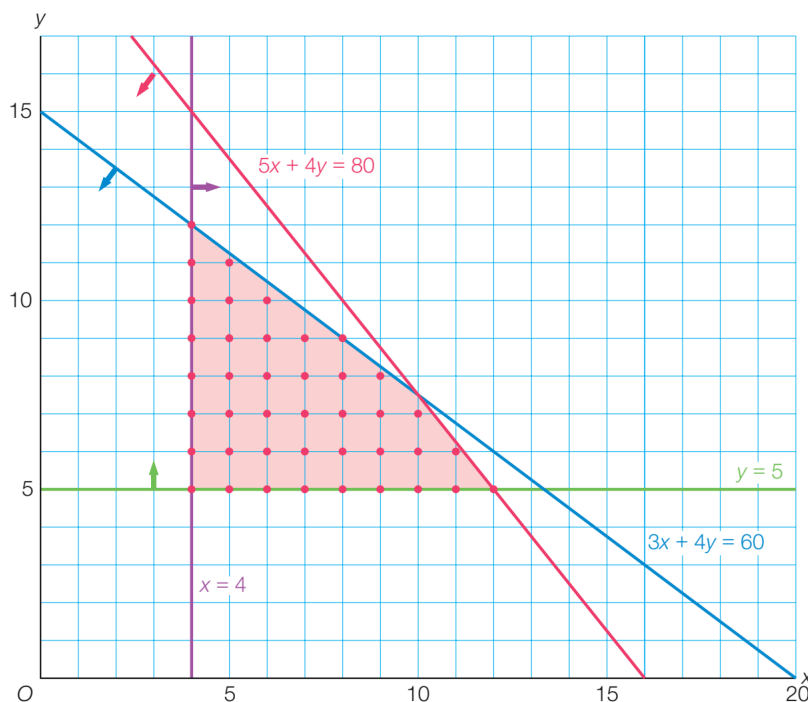
c Hierbij horen de ongelijkheden $x \geq 4$ en $y \geq 5$.

d De lijn $5x + 4y = 80$ gaat door (0, 20) en (16, 0).

De lijn $3x + 4y = 60$ gaat door (0, 15) en (20, 0).

De lijn $x = 4$ is een verticale lijn en de lijn $y = 5$ is een horizontale lijn.

Door het uitproberen van bijvoorbeeld (0, 0) in beide formules komen we voor de gecombineerde ongelijkheden tot het volgende gebied.

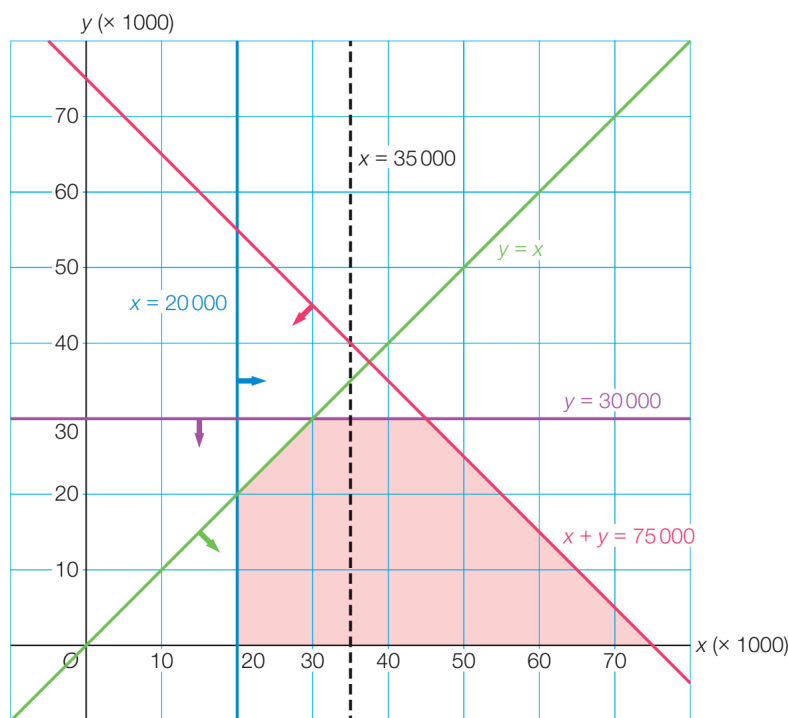


e Alleen gehele waarden van x en y zijn mogelijk. Bij de roosterpunten horen gehele waarden van x en y , dus alleen de roosterpunten zijn van belang. Zie de punten in de figuur.

- f** Kies van de roosterpunten van vraag e het punt waarvoor $x + y$ maximaal is en y zo groot mogelijk is. Dit levert het punt (8, 9).
 Er worden acht huizen van type A en negen van type B gebouwd.
 Er wordt $8 \cdot 250 + 9 \cdot 200 = 3800 \text{ m}^2$ gebruikt.

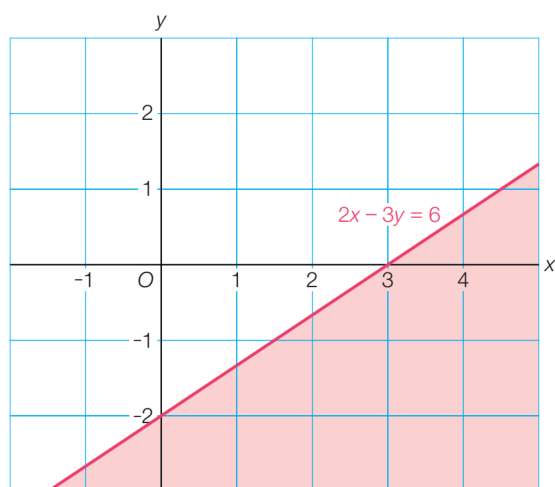
Bladzijde 137

- 21 a** Stel dat hij x euro in aandelen belegt en y euro in obligaties.
 Je krijgt $x \geq 20\,000$ en $y \leq 30\,000$ en $x \geq y$ en $x + y \leq 75\,000$.
b De lijn $x = y$ gaat door (0, 0) en (70 000, 70 000).
 De lijn $x + y = 75\,000$ gaat door (0, 75 000) en (75 000, 0).
 Door het uitproberen van bijvoorbeeld (0, 0) in beide formules komen we voor de gecombineerde ongelijkheden tot het volgende gebied.

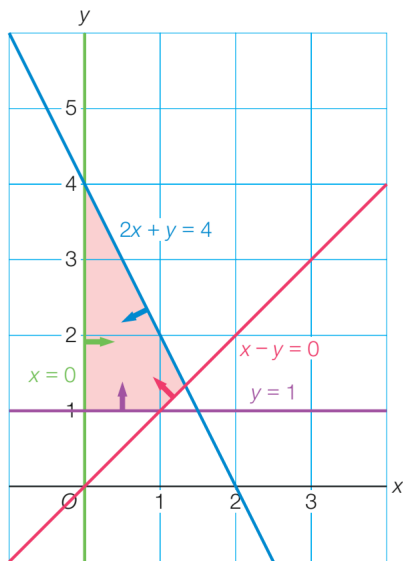


- c** De lijn $x = 35\,000$ snijdt de rand van het gebied bij de lijn $y = 30\,000$, dus hij kan nog 30 000 euro in obligaties beleggen.

- C3** De lijn $2x - 3y = 6$ gaat door (0, -2) en (3, 0).
 (0, 0) invullen geeft $0 - 0 \geq 6$; dit klopt niet.



- C4** De lijn $x - y = 0$ gaat door $(0, 0)$ en $(1, 1)$.
 $(1, 0)$ invullen geeft $1 - 0 \leq 0$; dit klopt niet.
 De lijn $2x + y = 4$ gaat door $(2, 0)$ en $(0, 4)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 \leq 4$; dit klopt.
 De lijn $x = 0$ is de y -as.
 De lijn $y = 1$ is een horizontale lijn.



K.3 Lineaire programmeringsproblemen

Bladzijde 138

- 22 a** Voor 1700 liter M is $0,2 \cdot 1700 = 340$ liter melk nodig en $0,15 \cdot 1700 = 255$ liter room.
 Voor 1400 liter R is $0,2 \cdot 1400 = 280$ liter melk nodig en $0,3 \cdot 1400 = 420$ liter room.
 Totaal is dus $340 + 280 = 620$ liter melk nodig en $255 + 420 = 675$ liter room.
 Er is te weinig room beschikbaar.
b Er wordt meer R dan M gemaakt.
c Meer M dan R, dat klopt.
 Nodig aan melk: $0,2 \cdot 2000 + 0,2 \cdot 1000 = 600$ liter, dat kan.
 Nodig aan room: $0,15 \cdot 2000 + 0,3 \cdot 1000 = 600$ liter, dat kan.
 Dus het is mogelijk.

Bladzijde 139

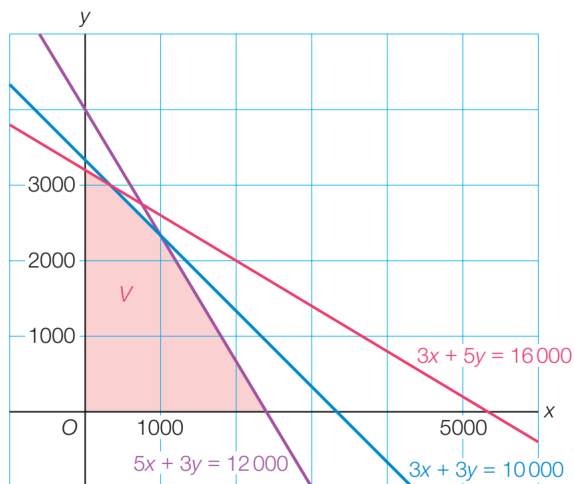
- 23 a** Voor punt A geldt $\begin{cases} y = x \\ x + y = 2000 \end{cases}$ en dit geeft $(1000, 1000)$.
 Punt B is het punt $(2000, 0)$.
 Punt C is het punt $(3100, 0)$.
 Voor punt D geldt $\begin{cases} 0,2x + 0,2y = 620 & | \cdot 15 \\ 0,15x + 0,3y = 600 & | \cdot 10 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} 3x + 3y = 9300 \\ 1,5x + 3y = 6000 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 3x + 3y = 9300 \\ -1,5x + 0y = 3300 \\ \hline 1,5x = 3300, \text{ dus } x = 2200 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1,5x = 3300, \text{ dus } x = 2200 \\ x + y = 3100 \end{array} \Rightarrow y = 900$$

 Dus $D(2200, 900)$.
 Voor punt E geldt $\begin{cases} y = x \\ 0,15x + 0,3y = 600 \end{cases}$ en dit geeft $(1333\frac{1}{3}, 1333\frac{1}{3})$.
b Je zit dan in het punt A, dus 1000 liter M en 1000 liter R.
c Je zit dan in het punt E, dus $1333\frac{1}{3}$ liter M en $1333\frac{1}{3}$ liter R.
d In het snijpunt van de lijn $x = 1500$ met de lijn $x + y = 2000$ geldt $1500 + y = 2000$, dus $y = 500$.
 In het snijpunt van de lijn $x = 1500$ met de lijn $0,15x + 0,3y = 600$ geldt $0,15 \cdot 1500 + 0,3y = 600$ en dit geeft $y = 1250$.
 Dus nog 500 liter tot en met 1250 liter R mogelijk.

- 24** **a** Bij de factor arbeid hoort $9x + 15y \leq 48\,000$, oftewel $3x + 5y \leq 16\,000$.
b Bij de factor machinetijd hoort $3x + 3y \leq 10\,000$.
 Bij de factor materiaal hoort $50x + 30y \leq 120\,000$, oftewel $5x + 3y \leq 12\,000$.
c De lijn $3x + 5y = 16\,000$ gaat door $(0, 3200)$ en $(5333\frac{1}{3}, 0)$.
 De lijn $3x + 3y = 10\,000$ gaat door $(0, 3333\frac{1}{3})$ en $(3333\frac{1}{3}, 0)$.
 De lijn $5x + 3y = 12\,000$ gaat door $(0, 4000)$ en $(2400, 0)$.



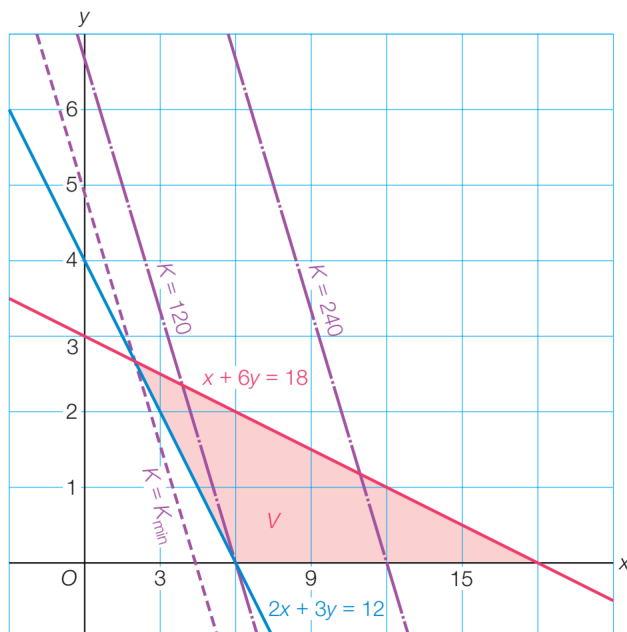
- d** De lijn $x = 3000$ snijdt V niet, dus 3000 paar Air Extra lukt niet.
e De lijn $y = 2000$ snijdt de rand van V bij de lijn $5x + 3y = 12\,000$, dus $5x + 3 \cdot 2000 = 12\,000$ en dit geeft $x = 1200$.
 Dus maximaal 1200 paar Air Extra mogelijk.

Bladzijde 140

- 25** **a** De winst is $0,45 \cdot 1500 + 0,75 \cdot 1000 = 1425$ euro.
b Zo veel mogelijk M, dus in $C(3100, 0)$.
 De winst is $0,45 \cdot 3100 = 1395$ euro.
 Zo veel mogelijk R, dus in $E(1333\frac{1}{3}, 1333\frac{1}{3})$.
 De winst is $0,45 \cdot 1333\frac{1}{3} + 0,75 \cdot 1333\frac{1}{3} = 1600$ euro.
c In het punt $D(2200, 900)$ is de winst $0,45 \cdot 2200 + 0,75 \cdot 900 = 1665$ euro.

Bladzijde 142

- 26** De grenslijnen zijn $y = 0$,
 $x + 6y = 18$ door $(0, 3)$ en $(18, 0)$,
 $2x + 3y = 12$ door $(6, 0)$ en $(0, 4)$.



Isolijn door (6, 0) geeft $K = 20x + 18y = 120$ en gaat ook door $(0, 6\frac{2}{3})$.

Isolijn door (12, 0) geeft $K = 240$.

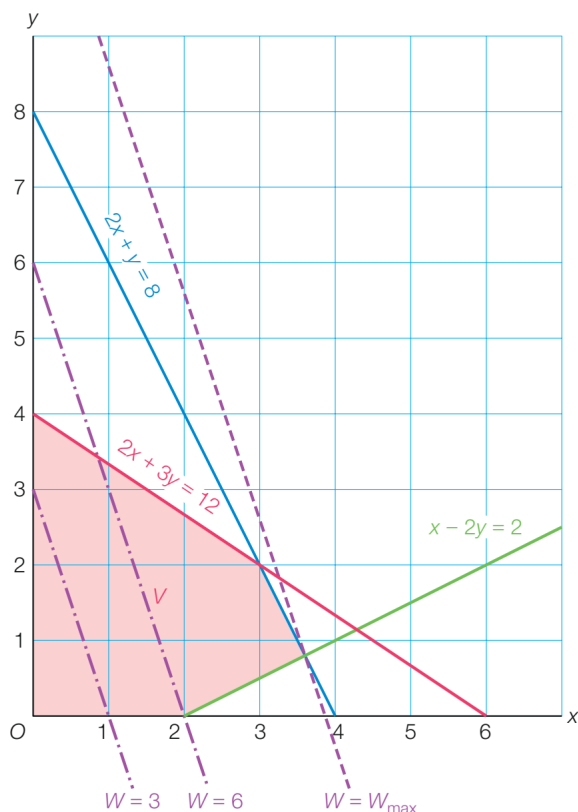
K is minimaal in het snijpunt van de lijnen $x + 6y = 18$ en $2x + 3y = 12$.

$$\begin{cases} x + 6y = 18 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \begin{array}{l} |1| \\ |2| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} x + 6y = 18 \\ 4x + 6y = 24 \end{cases} \quad \begin{array}{l} -3x \\ \quad \quad \quad \end{array} = -6, \text{ dus } x = 2$$

$$\begin{cases} 2 + 6y = 18 \\ 6y = 16 \\ y = 2\frac{2}{3} \end{cases}$$

$K_{\min}$ in $(2, 2\frac{2}{3})$, dus $K_{\min} = 20 \cdot 2 + 18 \cdot 2\frac{2}{3} = 88$.

- 27** De grenslijnen zijn $x = 0, y = 0$,
 $2x + 3y = 12$ door (6, 0) en (0, 4),
 $2x + y = 8$ door (4, 0) en (0, 8),
 $x - 2y = 2$ door (2, 0) en (0, -1).



Isolijn door (1, 0) geeft $W = 3x + y = 3$ en gaat ook door (0, 3).

Isolijn door (2, 0) geeft $W = 6$.

W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $2x + y = 8$ en $x - 2y = 2$.

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \begin{array}{l} |2| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} + \\ 5x \end{array} = 18, \text{ dus } x = 3,6$$

$$\begin{cases} 7,2 + y = 8 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = 0,8 \end{array}$$

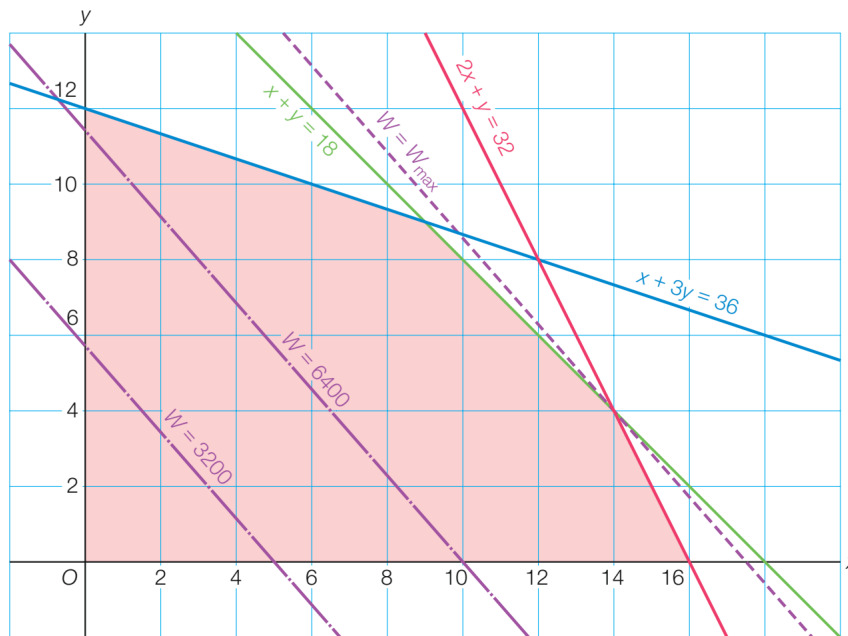
$W_{\max}$ in $(3,6; 0,8)$, dus $W_{\max} = 3 \cdot 3,6 + 0,8 = 11,6$.

Bladzijde 145

28 a

	fauteuil	sofa	beschikbaar per dag
constructieafdeling	6 uur	3 uur	96 uur
bekledingsafdeling	2 uur	6 uur	72 uur
afwerkingsafdeling	1 uur	1 uur	18 uur
winst per stuk in euro's	640	560	

- b** $W = 640x + 560y$
c $x \geq 0$ en $y \geq 0$
 $6x + 3y \leq 96$, oftewel $2x + y \leq 32$ (constructieafdeling)
 $2x + 6y \leq 72$, oftewel $x + 3y \leq 36$ (bekledingsafdeling)
 $x + y \leq 18$ (afwerkingsafdeling)
d De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,
 $2x + y = 32$ door $(0, 32)$ en $(16, 0)$,
 $x + 3y = 36$ door $(0, 12)$ en $(36, 0)$,
 $x + y = 18$ door $(0, 18)$ en $(18, 0)$.



- e** Isolijn door $(5, 0)$ geeft $W = 640x + 560y = 3200$ en gaat ook door $(0; 5,7)$.
 Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 6400$.
 W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $2x + y = 32$ en $x + y = 18$.

$$\begin{cases} 2x + y = 32 \\ x + y = 18 \end{cases} \quad \underline{\quad}$$

$$\begin{array}{r} x = 14 \\ x + y = 18 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 14 + y = 18 \\ y = 4 \end{array}$$
 $W_{\max}$ in $(14, 4)$, dus $W_{\max} = 640 \cdot 14 + 560 \cdot 4 = 11\,200$ euro.
f $W_{\max}$ in het snijpunt van de lijnen die bij de constructieafdeling en de afwerkingsafdeling horen.
 Dus op de bekledingsafdeling worden niet alle beschikbare uren gebruikt.
 Er worden daar $2 \cdot 14 + 6 \cdot 4 = 52$ uren gebruikt, dus er blijven $72 - 52 = 20$ uren over.

- 29 a** Isolijn door $(5, 0)$ geeft $W = 640x + 800y = 3200$ en gaat ook door $(0, 4)$.
 Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 6400$.
 W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $x + 3y = 36$ en $x + y = 18$.

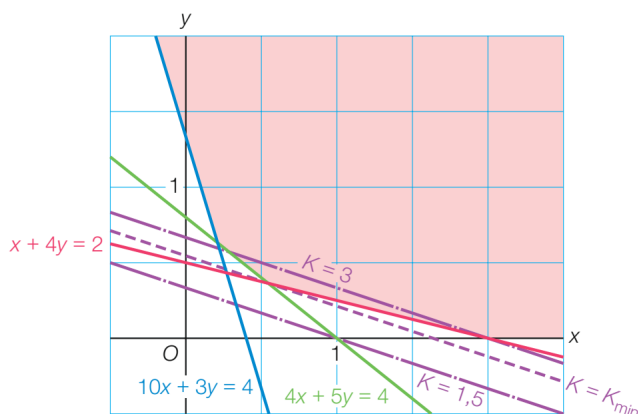
$$\begin{cases} x + 3y = 36 \\ x + y = 18 \end{cases} \quad \underline{\quad}$$

$$\begin{array}{r} 2y = 18, \text{ dus } y = 9 \\ x + y = 18 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 9 = 18 \\ x = 9 \end{array}$$

$W_{\max}$ in $(9, 9)$, dus $W_{\max} = 640 \cdot 9 + 800 \cdot 9 = 12\,960$ euro.
 $W_{\max}$ in het snijpunt van de lijnen die bij de bekledingsafdeling en de afwerkingsafdeling horen.
 Op de constructieafdeling worden $6 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = 81$ uren gebruikt, dus er blijven
 $96 - 81 = 15$ uren over.

- b** Isolijn door $(5, 0)$ geeft $200x + 800y = 1000$ en gaat ook door $(0, 1\frac{1}{4})$.
 Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 2000$.
 W is maximaal in het punt $(0, 12)$.
 Dus maximale winst bij programma $(0, 12)$.

- a** x = aantal kg groenten in een blik
 y = aantal kg vlees in een blik
 De doelfunctie is $K = 1,5x + 4,5y$.
 De beperkende voorwaarden zijn $x \geq 0$ en $y \geq 0$,
 $50x + 200y \geq 100$, oftewel $x + 4y \geq 2$ (vet),
 $250x + 75y \geq 100$, oftewel $10x + 3y \geq 4$ (eiwit),
 $200x + 250y \geq 200$, oftewel $4x + 5y \geq 4$ (koolhydraten).
- b** De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,
 $x + 4y = 2$ door $(0, \frac{1}{2})$ en $(2, 0)$,
 $10x + 3y = 4$ door $(0, \frac{4}{3})$ en $(\frac{2}{5}, 0)$,
 $4x + 5y = 4$ door $(0, \frac{4}{5})$ en $(1, 0)$.



Isolijn door $(1, 0)$ geeft $1,50x + 4,50y = 1,50$ en gaat ook door $(0, \frac{1}{3})$.
 Isolijn door $(2, 0)$ geeft $K = 3$.

K is minimaal in het snijpunt van de lijnen $x + 4y = 2$ en $4x + 5y = 4$.

$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 4x + 5y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 16y = 8 \\ 4x + 5y = 4 \end{cases}$$

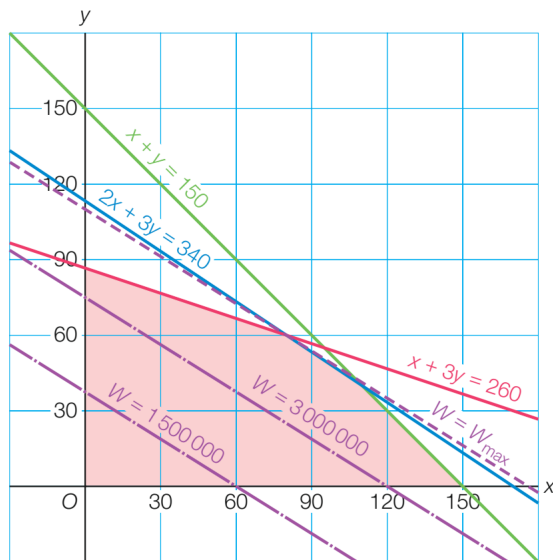
$$\begin{aligned} 11y &= 4, \text{ dus } y = \frac{4}{11} \\ x + 4y &= 2 \end{aligned} \Rightarrow x + \frac{16}{11} = 2 \Rightarrow x = \frac{6}{11}$$

Dus de samenstelling van een blik is $\frac{6}{11}$ kg ≈ 545 gram groenten en $\frac{4}{11}$ kg ≈ 364 gram vlees.

	seniorenwoning	villa	
kapitaal	120 000 euro	360 000 euro	31 200 000 euro
mensdagen	200 dagen	300 dagen	34 000 dagen
winst per woning	25 000 euro	40 000 euro	

$$W = 25\,000x + 40\,000y$$

- b** $x \geq 0$ en $y \geq 0$
 $120\,000x + 360\,000y \leq 31\,200\,000$, oftewel $x + 3y \leq 260$ (kapitaal)
 $200x + 300y \leq 34\,000$, oftewel $2x + 3y \leq 340$ (mensdagen)
 $x + y \leq 150$ (aantal huizen)
 De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,
 $x + 3y = 260$ door $(0, 90)$ en $(260, 0)$,
 $2x + 3y = 340$ door $(0, 120)$ en $(170, 0)$,
 $x + y = 150$ door $(0, 150)$ en $(150, 0)$.



- c** Isolijn door $(60, 0)$ geeft $W = 25\,000x + 40\,000y = 1\,500\,000$ en gaat ook door $(0; 37,5)$.
Isolijn door $(120, 0)$ geeft $W = 3\,000\,000$.

W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $2x + 3y = 340$ en $x + 3y = 260$.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 340 \\ x + 3y = 260 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 80 \\ x + 3y = 260 \end{array} \quad \begin{array}{l} 80 + 3y = 260 \\ 3y = 180 \\ y = 60 \end{array}$$

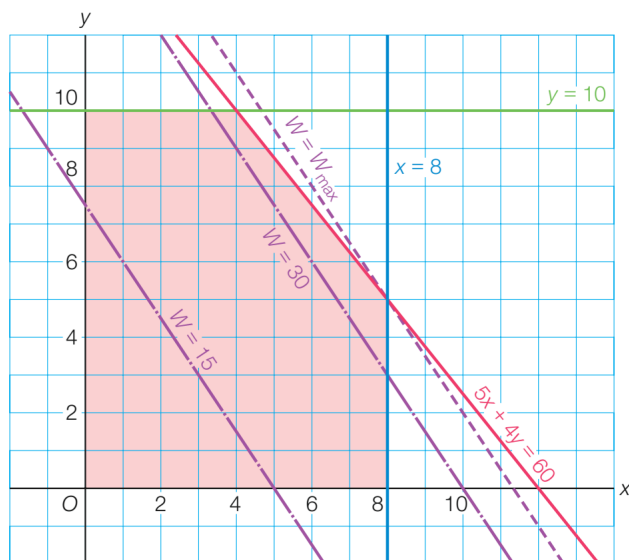
$W_{\max}$ in $(80, 60)$, dus $W_{\max} = 25\,000 \cdot 80 + 40\,000 \cdot 60 = 4\,400\,000$ euro.

Er worden dan 80 seniorenwoningen en 60 villa's gebouwd.

K.4 De hoekpuntmethode

Bladzijde 148

- 31 a** De grenslijnen $x = 0$, $y = 0$,
 $5x + 4y = 60$ door $(0, 15)$ en $(12, 0)$,
 $x = 8$ en $y = 10$.



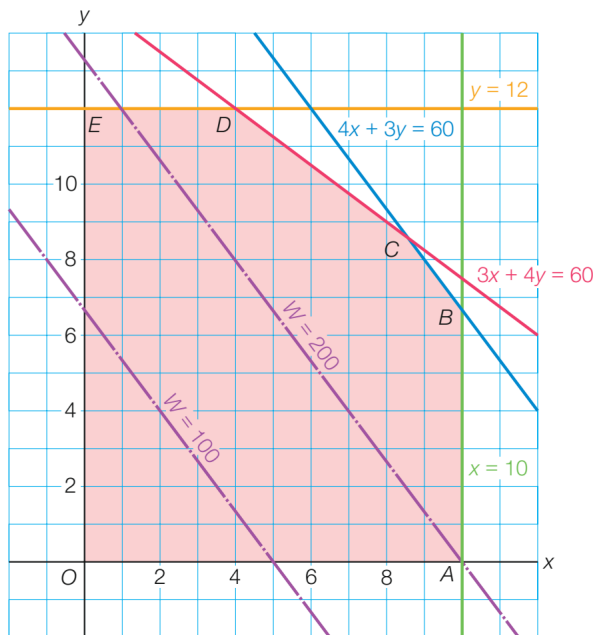
- b** Isolijn door $(5, 0)$ geeft $W = 3x + 2y = 15$ en gaat ook door $(0, 7\frac{1}{2})$.
Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 30$.
 W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $5x + 4y = 60$ en $x = 8$, dus in het punt $(8, 5)$.
- c** De isolijnen van $R = 10x + 8y$ zijn evenwijdig met de lijn $5x + 4y = 60$,
dus met een rand van het toegestane gebied. Elk punt op de rand maximaliseert de
doelfunctie.

32 De volgende doelfuncties leveren meer dan één oplossing op:

- $W = 3x + 12y$, want de isolijnen van W zijn evenwijdig met de lijn $x + 4y = 30$, omdat $3 : 12 = 1 : 4$.
- $W = 1,5x + y$, want de isolijnen van W zijn evenwijdig met de lijn $3x + 2y = 20$, omdat $1,5 : 1 = 3 : 2$.
- $W = 0,5x + 2y$, want de isolijnen van W zijn evenwijdig met de lijn $x + 4y = 30$, omdat $0,5 : 2 = 1 : 4$.

Bladzijde 149

33 De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,
 $3x + 4y = 60$ door $(0, 15)$ en $(20, 0)$,
 $4x + 3y = 60$ door $(0, 20)$ en $(15, 0)$,
 $x = 10$ en $y = 12$.



Isolijn door $(5, 0)$ geeft $W = 20x + 15y = 100$ en gaat ook door $(0, 6\frac{2}{3})$.

Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 200$.

De isolijnen zijn evenwijdig met de rand BC op de lijn $4x + 3y = 60$, want $20 : 15 = 4 : 3$.

Het punt B is het snijpunt van de lijnen $4x + 3y = 60$ en $x = 10$, dus

$4 \cdot 10 + 3y = 60$, oftewel $3y = 20$ en $y = 6\frac{2}{3}$. Dus $B(10, 6\frac{2}{3})$.

Het punt C is het snijpunt van de lijnen $3x + 4y = 60$ en $4x + 3y = 60$.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 60 & |3| \\ 4x + 3y = 60 & |4| \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} 9x + 12y = 180 \\ 16x + 12y = 240 \end{cases} \quad \begin{array}{l} -7x \\ = -60, \text{ dus } x = 8\frac{4}{7} \end{array} \quad \begin{cases} 25\frac{5}{7} + 4y = 60 \\ 4y = 34\frac{2}{7} \\ y = 8\frac{4}{7} \end{cases}$$

Dus $C(8\frac{4}{7}, 8\frac{4}{7})$.

Elk punt op het lijnstuk BC met $B(10, 6\frac{2}{3})$ en $C(8\frac{4}{7}, 8\frac{4}{7})$ maximaliseert de doelfunctie

$W = 20x + 15y$.

$W_{\max} = 20 \cdot 10 + 15 \cdot 6\frac{2}{3} = 300$ of $W_{\max} = 20 \cdot 8\frac{4}{7} + 15 \cdot 8\frac{4}{7} = 300$.

- 34 a** Isolijnen van de doelfunctie $K = 8x + ay$ evenwijdig met de lijn $6x + 5y = 30$ geeft

$$8 : a = 6 : 5, \text{ oftewel } \frac{8}{a} = \frac{6}{5}, \text{ dus } a = \frac{8 \cdot 5}{6} = 6\frac{2}{3}.$$

$$\text{Dit geeft } K = 8x + 6\frac{2}{3}y.$$

$$K = 8x + 6\frac{2}{3}y \text{ door } (0, 6) \text{ geeft } K_{\min} = 8 \cdot 0 + 6\frac{2}{3} \cdot 6 = 40.$$

Isolijnen van de doelfunctie $K = 8x + ay$ evenwijdig met de lijn $2x + 3y = 12$ geeft

$$8 : a = 2 : 3, \text{ oftewel } \frac{8}{a} = \frac{2}{3}, \text{ dus } a = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12.$$

$$\text{Dit geeft } K = 8x + 12y.$$

$$K = 8x + 12y \text{ door } (6, 0) \text{ geeft } K_{\min} = 8 \cdot 6 + 12 \cdot 0 = 48.$$

- b** Er geldt $p : 3 = 6 : 5$, oftewel $\frac{p}{3} = \frac{6}{5}$ en dit geeft $p = \frac{6 \cdot 3}{5} = 3,6$.

- c** Hoe groter de waarde van p , hoe steiler de isolijnen naar beneden lopen.

Het punt $(0, 6)$ minimaliseert de doelfunctie als de isolijnen steiler naar beneden lopen dan AB , dus $p > 3,6$.

- d** De isolijnen van de doelfunctie lopen evenwijdig aan het lijnstuk BC als $p : 3 = 2 : 3$, dus $p = 2$.

Het punt $(3\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2})$ minimaliseert de doelfunctie als de isolijnen minder steil lopen dan AB en steiler dan BC , dus $2 < p < 3,6$.

Bladzijde 150

- 35** Ze krijgt bij twee hoekpunten dezelfde maximale waarde van de doelfunctie. Dat betekent dat de isolijn samenvalt met het lijnstuk tussen die twee hoekpunten en dat alle programma's op dat lijnstuk de doelfunctie maximaliseren.

Bladzijde 151

- 36** x = aantal keer 70 gram rijst
 y = aantal keer 70 gram sojabonen
 Doelfunctie: $P = 0,18x + 0,12y$.

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0, y \geq 0$,

$$15x + 22,5y \geq 90, \text{ oftewel } 2x + 3y \geq 12,$$

$$3390x + 1130y \geq 6780, \text{ oftewel } 3x + y \geq 6,$$

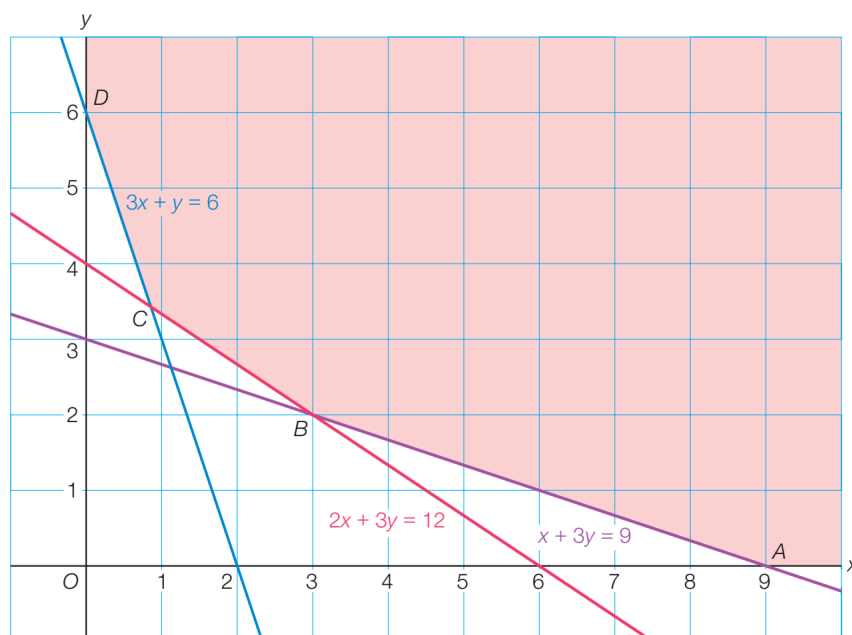
$$0,1x + 0,3y \geq 0,9, \text{ oftewel } x + 3y \geq 9.$$

Grenslijnen: $x = 0, y = 0$,

$$2x + 3y = 12 \text{ door } (0, 4) \text{ en } (6, 0),$$

$$3x + y = 6 \text{ door } (0, 6) \text{ en } (2, 0),$$

$$x + 3y = 9 \text{ door } (0, 3) \text{ en } (9, 0).$$



$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ x + 3y = 9 \end{array} \right\} 3 + 3y = 9, \text{ dus } y = 2$$

Dus $B(3, 2)$.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \begin{array}{l} |1| \\ |3| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 9x + 3y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -7x \quad \quad = -6 \\ x = \frac{6}{7} \end{array} \left. \begin{array}{l} x = \frac{6}{7} \\ 3x + y = 6 \end{array} \right\} \frac{18}{7} + y = 6, \text{ dus } y = \frac{24}{7}$$

Dus $C(\frac{6}{7}, \frac{24}{7})$.

hoekpunt	$P = 0,18x + 0,12y$
$A(9, 0)$	1,62
$B(3, 2)$	0,78
$C(\frac{6}{7}, \frac{24}{7})$	$\approx 0,57 \quad \leftarrow \text{minimaal}$
$D(0, 6)$	0,72

Dus het voedselpakket moet bestaan uit $\frac{6}{7} \cdot 70 = 60$ gram rijst en $\frac{24}{7} \cdot 70 = 240$ gram sojabonen.

37 a Doelfunctie: $W = 350x + 300y$.

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0, y \geq 0$,

$10x + 7,5y \leq 2000$, oftewel $4x + 3y \leq 800$ (arbeid),

$0,2x + 0,5y \leq 90$, oftewel $2x + 5y \leq 900$ (polyetheen),

$1,1x + 1,2y \leq 264$, oftewel $11x + 12y \leq 2640$ (polyester),

$5x + 5y \leq 1500$, oftewel $x + y \leq 300$ (kleurstoffen).

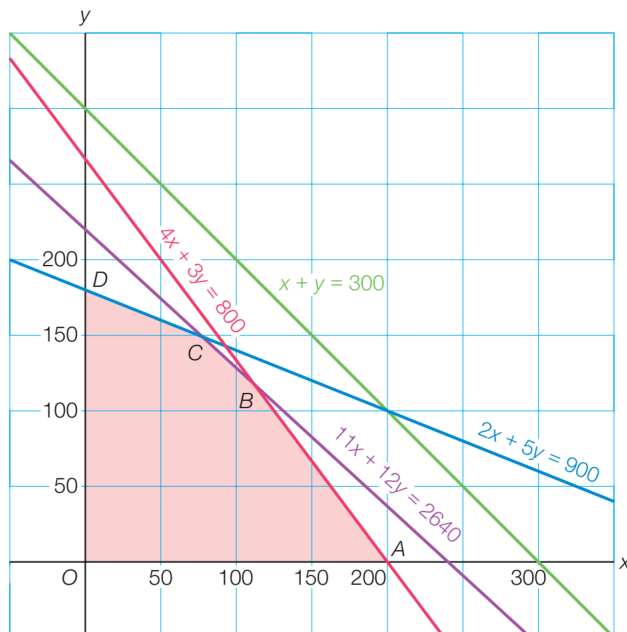
Grenslijnen: $x = 0, y = 0$,

$4x + 3y = 800$ door $(0, 266\frac{2}{3})$ en $(200, 0)$,

$2x + 5y = 900$ door $(0, 180)$ en $(450, 0)$,

$11x + 12y = 2640$ door $(0, 220)$ en $(240, 0)$,

$x + y = 300$ door $(0, 300)$ en $(300, 0)$.



$$\begin{cases} 4x + 3y = 800 \\ 11x + 12y = 2640 \end{cases} \begin{array}{l} |4| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 16x + 12y = 3200 \\ 11x + 12y = 2640 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 5x \quad \quad = 560, \text{ dus } x = 112 \\ 4x + 3y = 800 \end{array} \left. \begin{array}{l} x = 112 \\ 4x + 3y = 800 \end{array} \right\} 448 + 3y = 800, \text{ dus } y = 117\frac{1}{3}$$

Dus $B(112, 117\frac{1}{3})$.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 900 \\ 11x + 12y = 2640 \end{cases} \begin{vmatrix} 12 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 24x + 60y = 10800 \\ 55x + 60y = 13200 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} -31x & = -2400, \text{ dus } x \approx 77,4 \\ & 2x + 5y = 900 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 24x + 60y = 10800 \\ 55x + 60y = 13200 \end{matrix}} \right\} 154,8 + 5y = 900, \text{ dus } y \approx 149,0$$

Dus $C(77,4; 149,0)$.

hoekpunt	$W = 350x + 300y$	
$A(200, 0)$	70 000	
$B(112, 117\frac{1}{3})$	74 400	← maximaal
$C(77,4; 149,0)$	71 790	
$D(0, 180)$	54 000	

Dus $W_{\max} = 74\,400$ euro.

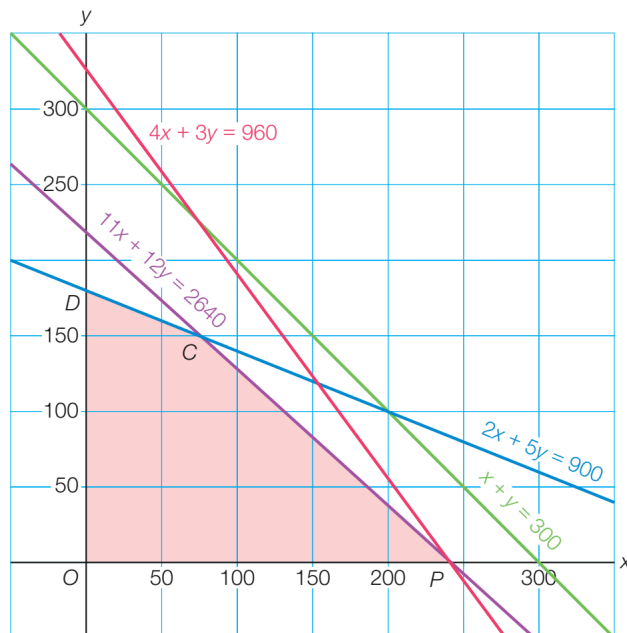
Omdat B het snijpunt is van de lijnen die bij arbeid en polyester horen, blijft er polyetheen en kleurstoffen over.

Gebruik polyetheen: $0,2 \cdot 112 + 0,5 \cdot 117\frac{1}{3} \approx 81,07 \text{ m}^2$, dus er blijft $90 - 81,07 = 8,93 \text{ m}^2$ over.

Gebruik kleurstoffen: $5 \cdot 112 + 5 \cdot 117\frac{1}{3} \approx 1146\frac{2}{3}$ liter, dus er blijft $1500 - 1146\frac{2}{3} = 353\frac{1}{3}$ liter over.

- b** De beperkende voorwaarde van de arbeid wordt $10x + 7,5y \leq 2400$, oftewel $4x + 3y \leq 960$.

De bijbehoren grenslijn is $4x + 3y = 960$ door $(0, 320)$ en $(240, 0)$.



hoekpunt	$W = 350x + 300y$	
$P(240, 0)$	84 000	← maximaal
$C(77,4; 149,0)$	71 790	
$D(0, 180)$	54 000	

Nu is $W_{\max} = 84\,000$ euro.

Dat is $\frac{84\,000 - 74\,400}{74\,400} \cdot 100\% \approx 12,9\%$ meer.

a x = aantal Amerikaanse vliegtuigen

y = aantal Engelse vliegtuigen

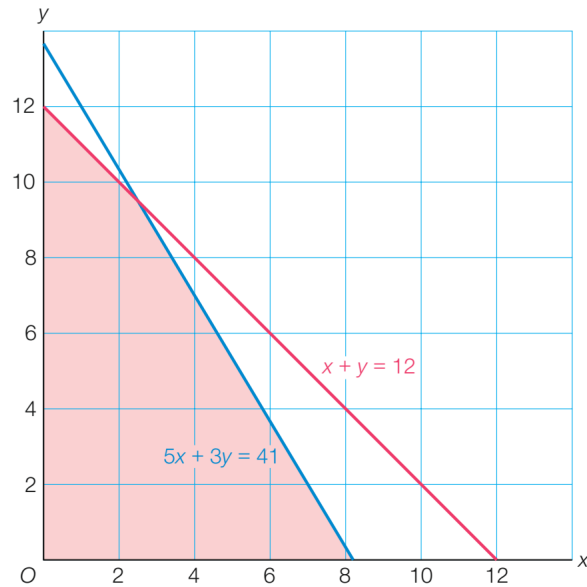
Doelfunctie: $V = 5400x + 3600y$.

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $x + y \leq 12$ en $5x + 3y \leq 41$.

Grenslijnen: $x = 0, y = 0$,

$x + y = 12$ door $(0, 12)$ en $(12, 0)$,

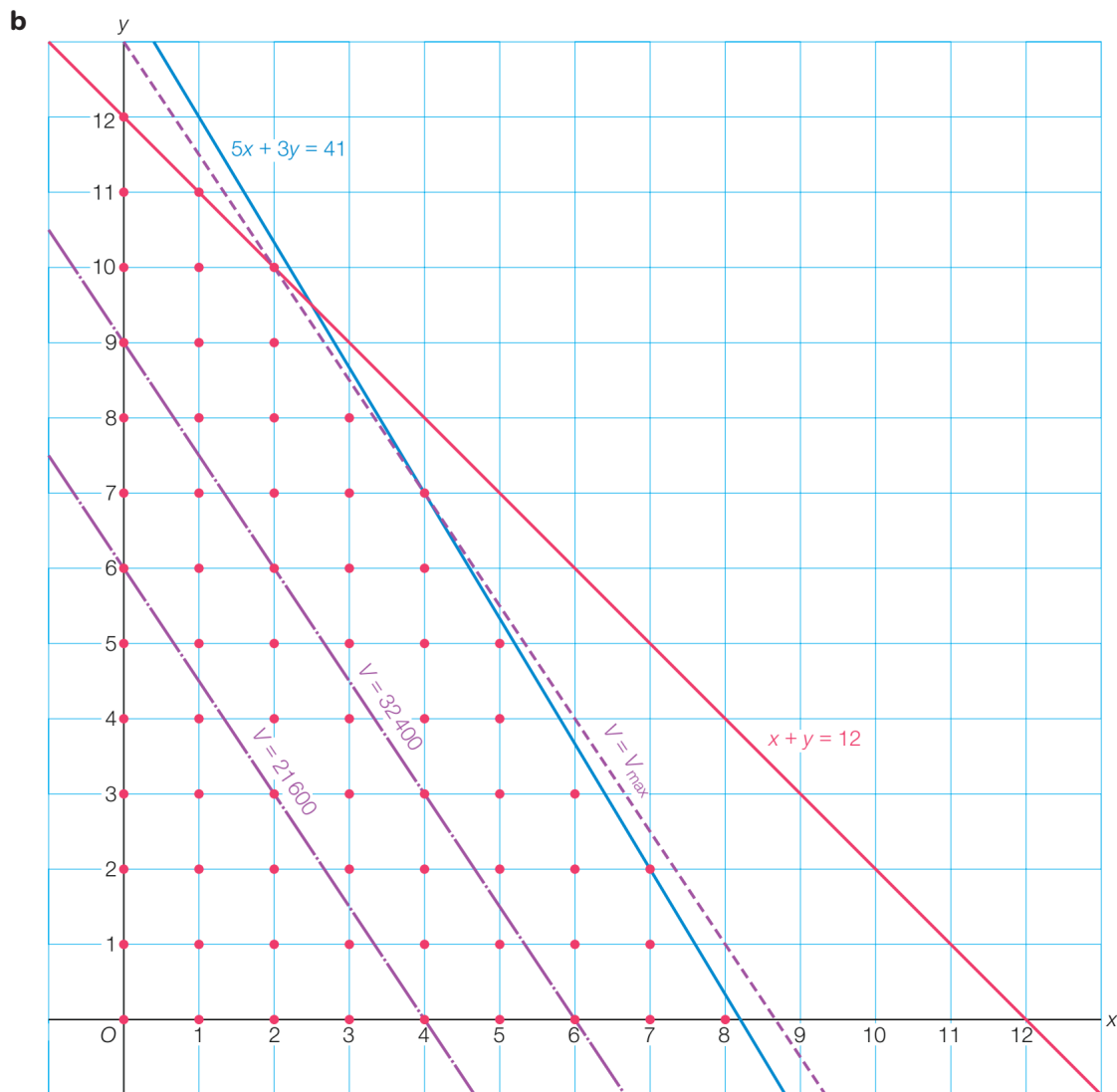
$5x + 3y = 41$ door $(8\frac{1}{5}, 0)$ en $(0, 13\frac{2}{3})$.



$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 5x + 3y = 41 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 12 \\ 41 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 3x + 3y = 36 \\ 5x + 3y = 41 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} -2x & = -5, \text{ dus } x = 2\frac{1}{2} \\ x + y = 12 \end{matrix} \begin{cases} 2\frac{1}{2} + y = 12 \\ y = 9\frac{1}{2} \end{cases}$$

hoekpunt	$V = 5400x + 3600y$
$(0, 12)$	43 200
$(8\frac{1}{5}, 0)$	44 280
$(2\frac{1}{2}, 9\frac{1}{2})$	47 700



Isolijn door (4, 0) geeft $V = 5400x + 3600y = 21\,600$ en gaat ook door (0, 6).

Isolijn door (6, 0) geeft $V = 32\,400$.

V is maximaal in de punten (2, 10) en (4, 7).

Dus bij 2 Amerikaanse en 10 Engelse vliegtuigen, of bij 4 Amerikaanse en 7 Engelse vliegtuigen.

39 x = aantal vierpersoonsvergader ruimten

y = aantal twaalfpersoonsvergader ruimten

Doelfunctie: $W = 100x + 150y$.

Beperkende voorwaarden: $x + 2y \leq 80$,

$4x + 12y \geq 360$, oftewel $x + 3y \geq 90$,

$y \geq 2x$ met x en y geheel.

Grenslijnen: $x + 2y = 80$ door (0, 40) en (80, 0),

$x + 3y = 90$ door (0, 30) en (90, 0),

$y = 2x$ door (0, 0) en (20, 40).

Alleen roosterpunten.



Isolijn door (30, 0) geeft $W = 100x + 150y = 3000$ en gaat ook door (0, 20).

Isolijn door (40, 0) geeft $W = 4000$.

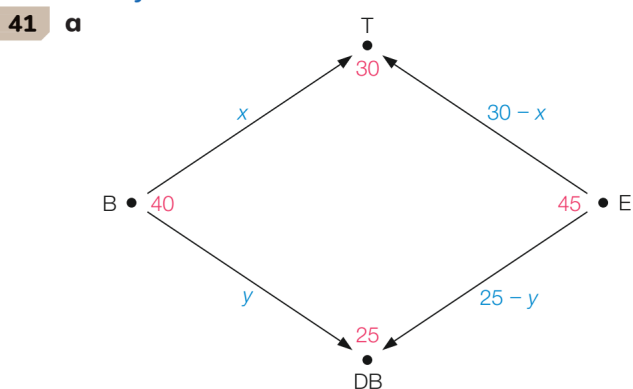
W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $x + 2y = 80$ en $y = 2x$. Dit snijpunt is (16, 32).

Dus W is maximaal bij 16 vier- en 32 twaalfpersoonsvergaderuimten.

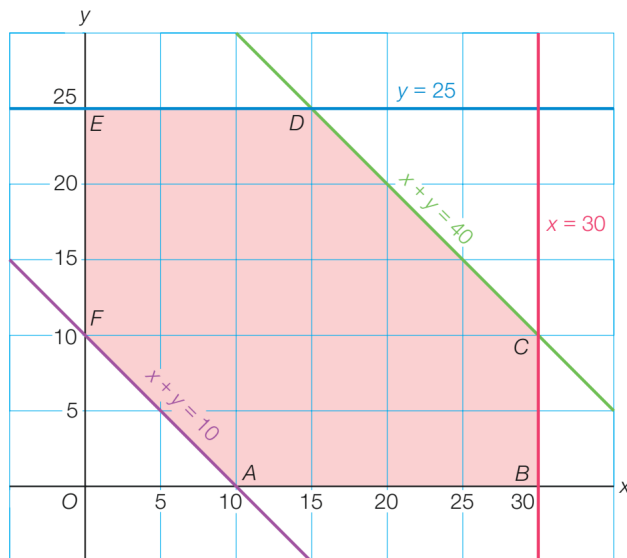
Bladzijde 153

- 40 a** Van Zutphen naar Apeldoorn $50 - 20 = 30$.
 Van Zutphen naar Doetinchem $60 - 30 = 30$.
 Transportkosten = $20 \cdot 15 + 30 \cdot 21 + 30 \cdot 9 + 30 \cdot 18 = 1740$ euro.
- b** Beperkende voorwaarde: $x + y \leq 90$.

Bladzijde 154



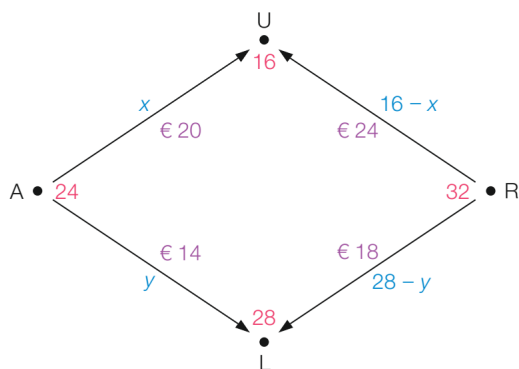
- b** Beperkende voorwaarden: $x \geq 0, y \geq 0$,
 $30 - x \geq 0$, oftewel $x \leq 30$,
 $25 - y \geq 0$, oftewel $y \leq 25$
 $x + y \leq 40$,
 $30 - x + 25 - y \leq 45$, oftewel $x + y \geq 10$.
- c** Doelfunctie: $T = 25x + 35y + 15(30 - x) + 30(25 - y)$
 $= 25x + 35y + 450 - 15x + 750 - 30y$
 $= 10x + 5y + 1200$
- Grenslijnen: $x = 0, y = 0, x = 30, y = 25$,
 $x + y = 40$ door (0, 40) en (40, 0),
 $x + y = 10$ door (0, 10) en (10, 0).
- Toegestane gebied: roosterpunten binnen en op de zeshoek $ABCDEF$.



hoekpunt	doelfunctie T
$A(10, 0)$	1300
$B(30, 0)$	1500
$C(30, 10)$	1550
$D(15, 25)$	1475
$E(0, 25)$	1325
$F(0, 10)$	1250 ← minimaal

Bij minimale transportkosten gaan 0 bankstellen van Breda naar Tilburg en 10 bankstellen van Breda naar Den Bosch.
De minimale transportkosten zijn 1250 euro.

42

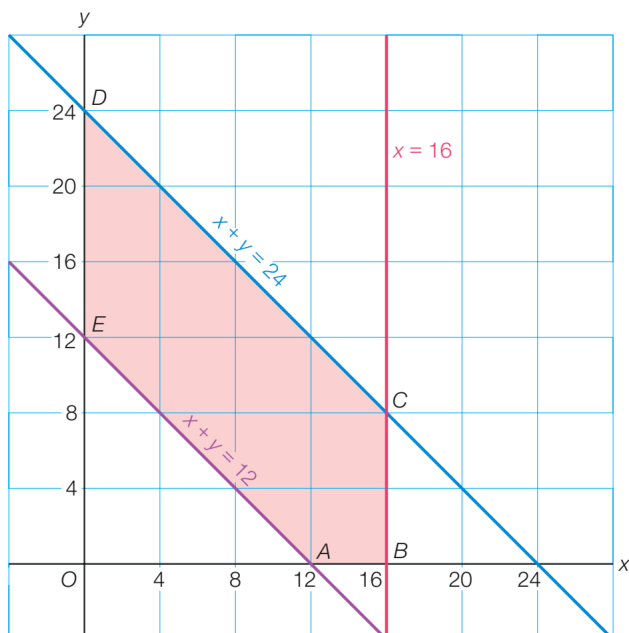


$$\begin{aligned} \text{Doelfunctie: } T &= 20x + 14y + 24(16 - x) + 18(28 - y) \\ &= 20x + 14y + 384 - 24x + 504 - 18y \\ &= -4x - 4y + 888 \end{aligned}$$

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0, y \geq 0$,
 $16 - x \geq 0$, oftewel $x \leq 16$,
 $28 - y \geq 0$, oftewel $y \leq 28$,
 $x + y \leq 24$,
 $16 - x + 28 - y \leq 32$, oftewel $x + y \geq 12$.

Grenslijnen: $x = 0, y = 0, x = 16, y = 28$,
 $x + y = 24$ door $(0, 24)$ en $(24, 0)$,
 $x + y = 12$ door $(0, 12)$ en $(12, 0)$.

Toegestane gebied: roosterpunten binnen en op de vijfhoek $ABCDE$.



Isolijn door (8, 0) geeft $-4x - 4y + 888 = 856$, oftewel $x + y = 8$.

Isolijn door (16, 0) geeft $-4x - 4y + 888 = 824$, oftewel $x + y = 16$.

De isolijnen zijn dus evenwijdig met de randen AE en CD .

De transportkosten zijn dus minimaal voor de programma's (x, y) met x en y geheel die op het lijnstuk CD liggen, met $C(16, 8)$ en $D(0, 24)$.

Bladzijde 155

43

a Er wordt $30 - x - y$ miljoen euro ondergebracht bij C.

Beperkende voorwaarde: $30 - x - y \geq 3$, oftewel $x + y \leq 27$.

b $x + y \geq 15$ en $y \leq 2x$

c De opbrengst in miljoenen euro's is

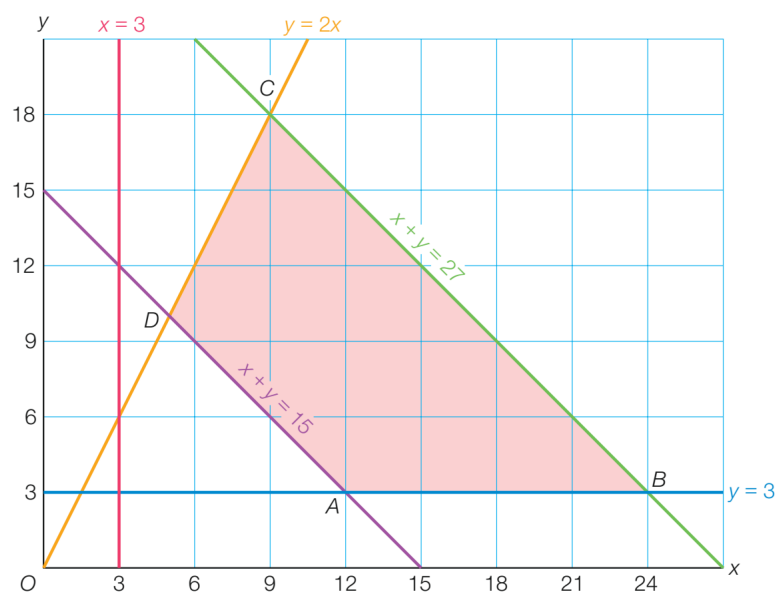
$$R = 0,07x + 0,08y + 0,09(30 - x - y) = 0,07x + 0,08y + 2,7 - 0,09x - 0,09y = 2,7 - 0,02x - 0,01y.$$

d De grenslijnen zijn $x = 3$, $y = 3$,

$x + y = 27$ door (0, 27) en (27, 0),

$x + y = 15$ door (0, 15) en (15, 0),

$y = 2x$.



D is het snijpunt van $x + y = 15$ en $y = 2x$. Dit snijpunt is $D(5, 10)$.

hoekpunt	$R = 2,7 - 0,02x - 0,01y$
$A(12, 3)$	2,43
$B(24, 3)$	2,19
$C(9, 18)$	2,34
$D(5, 10)$	2,5 ← maximaal

R is maximaal voor $x = 5$ en $y = 10$.

Breng 5 miljoen euro onder bij fonds A, 10 miljoen euro bij fonds B en 15 miljoen euro bij fonds C.

44 $x = \text{aantal m}^2 \text{ A}$

$y = \text{aantal m}^2 \text{ B}$

Dan $6000 - x - y \text{ m}^2 \text{ C}$.

Doelfunctie: $K = 3x + 1,5y + 1 \cdot (6000 - x - y)$, dus $K = 2x + 0,5y + 6000$.

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0, y \geq 0$,

$6000 - x - y \geq 0$, oftewel $x + y \leq 6000$,

$5x + 8y + 10(6000 - x - y) \leq 40\,000$, oftewel $-5x - 2y + 60\,000 \leq 40\,000$,

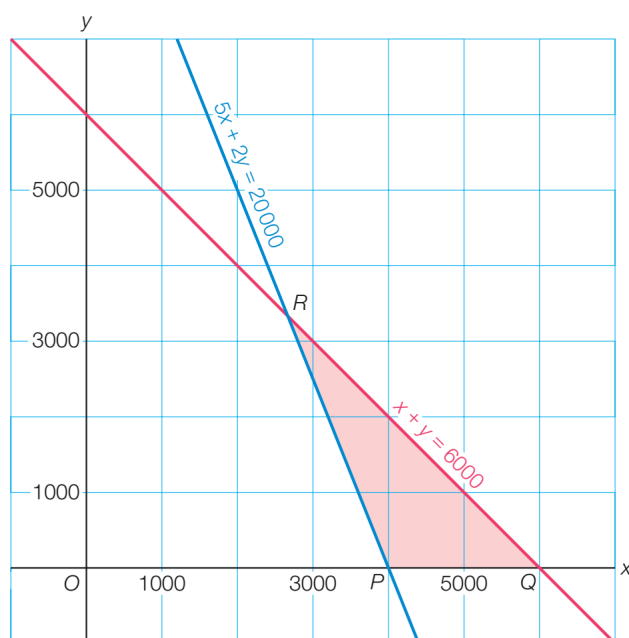
oftewel $5x + 2y \geq 20\,000$.

Grenslijnen:

$x = 0, y = 0$,

$x + y = 6000$ door $(0, 6000)$ en $(6000, 0)$,

$5x + 2y = 20\,000$ door $(0, 10\,000)$ en $(4000, 0)$.



$$\begin{cases} x + y = 6000 \\ 5x + 2y = 20\,000 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 2x + 2y = 12\,000 \\ 5x + 2y = 20\,000 \end{cases} + \begin{matrix} -3x & = & -8000, \text{ dus } x = 2666\frac{2}{3} \\ & & x + y = 6000 \end{matrix} \left. \begin{matrix} 2666\frac{2}{3} + y = 6000, \text{ dus } y = 3333\frac{1}{3} \end{matrix} \right\}$$

Dus $R(2666\frac{2}{3}, 3333\frac{1}{3})$.

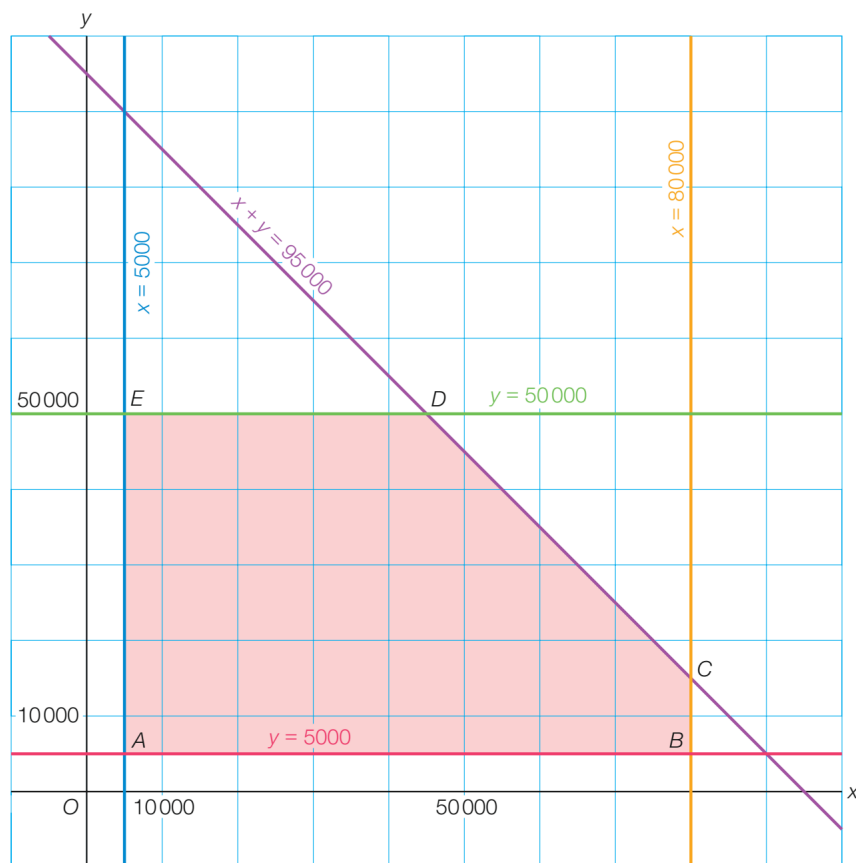
hoekpunt	$K = 2x + 0,5y + 6000$
$P(4000, 0)$	14 000
$Q(6000, 0)$	18 000
$R(2666\frac{2}{3}, 3333\frac{1}{3})$	13 000 ← minimaal

Dus minimale afschrijvingskosten bij ongeveer $2667 \text{ m}^2 \text{ A}$, $3333 \text{ m}^2 \text{ B}$ en geen C.

45

 x = aantal liter benzine y = aantal liter dieselDan $100\,000 - x - y$ liter LPG.Doelfunctie: $W = 0,15x + 0,12y + 0,10(100\,000 - x - y)$, dus $W = 0,05x + 0,02y + 10\,000$.Beperkende voorwaarden: $x \geq 5000$, $y \geq 5000$, $100\,000 - x - y \geq 5000$, oftewel $x + y \leq 95\,000$, $x + 100\,000 - x - y \geq 50\,000$, oftewel $y \leq 50\,000$, $y + 100\,000 - x - y \geq 20\,000$, oftewel $x \leq 80\,000$.

Grenslijnen:

 $x = 5000$, $y = 5000$, $x + y = 95\,000$ door $(0, 95\,000)$ en $(95\,000, 0)$, $y = 50\,000$, $x = 80\,000$.

hoekpunt	$W = 0,05x + 0,02y + 10\,000$
$A(5000, 5000)$	10 350
$B(80\,000, 5000)$	14 100
$C(80\,000, 15\,000)$	14 300 ← maximaal
$D(45\,000, 50\,000)$	13 250
$E(5000, 50\,000)$	11 250

Dus maximale winst bij 80 000 liter benzine, 15 000 liter diesel en 5000 liter LPG.

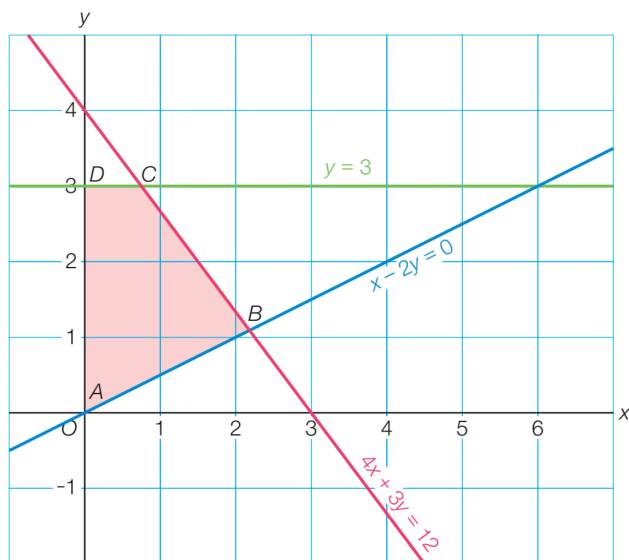
Bladzijde 156

C6

a De volgende doelfuncties leveren meer dan één oplossing op:

- $R = 4x - 8y$, want de isolijnen van R zijn evenwijdig met de lijn $x - 2y \leq 0$, omdat $4 : -8 = 1 : -2$.
- $R = 20x + 15y$, want de isolijnen van R zijn evenwijdig met de lijn $4x + 3y \leq 12$, omdat $20 : 15 = 4 : 3$.

b Grenslijnen: $x = 0$, $y = 0$, $4x + 3y = 12$ door $(0, 4)$ en $(3, 0)$, $x - 2y = 0$ door $(0, 0)$ en $(2, 1)$, $y = 3$.



Punt B is het snijpunt van de lijnen $x - 2y = 0$ en $4x + 3y = 12$.

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x - 8y = 0 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} -11y = -12, \text{ dus } y = 1\frac{1}{11} \\ x - 2y = 0 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} -11y = -12, \text{ dus } y = 1\frac{1}{11} \\ x - 2y = 0 \end{matrix}} \right\} x - 2\frac{2}{11} = 0, \text{ dus } x = 2\frac{2}{11}$$

Dus $B(2\frac{2}{11}, 1\frac{1}{11})$.

Punt C is het snijpunt van de lijnen $4x + 3y = 12$ en $y = 3$.

$$4x + 3 \cdot 3 = 12$$

$$4x = 3$$

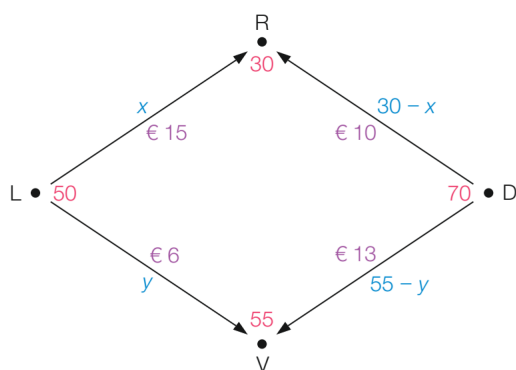
$$x = \frac{3}{4}$$

Dus $C(\frac{3}{4}, 3)$.

hoekpunt	$W = 20x + 30y$	
$A(0, 0)$	0	
$B(2\frac{2}{11}, 1\frac{1}{11})$	$\approx 87,3$	
$C(\frac{3}{4}, 3)$	105	← maximaal
$D(0, 3)$	90	

Dus $W_{\max} = 105$.

C7

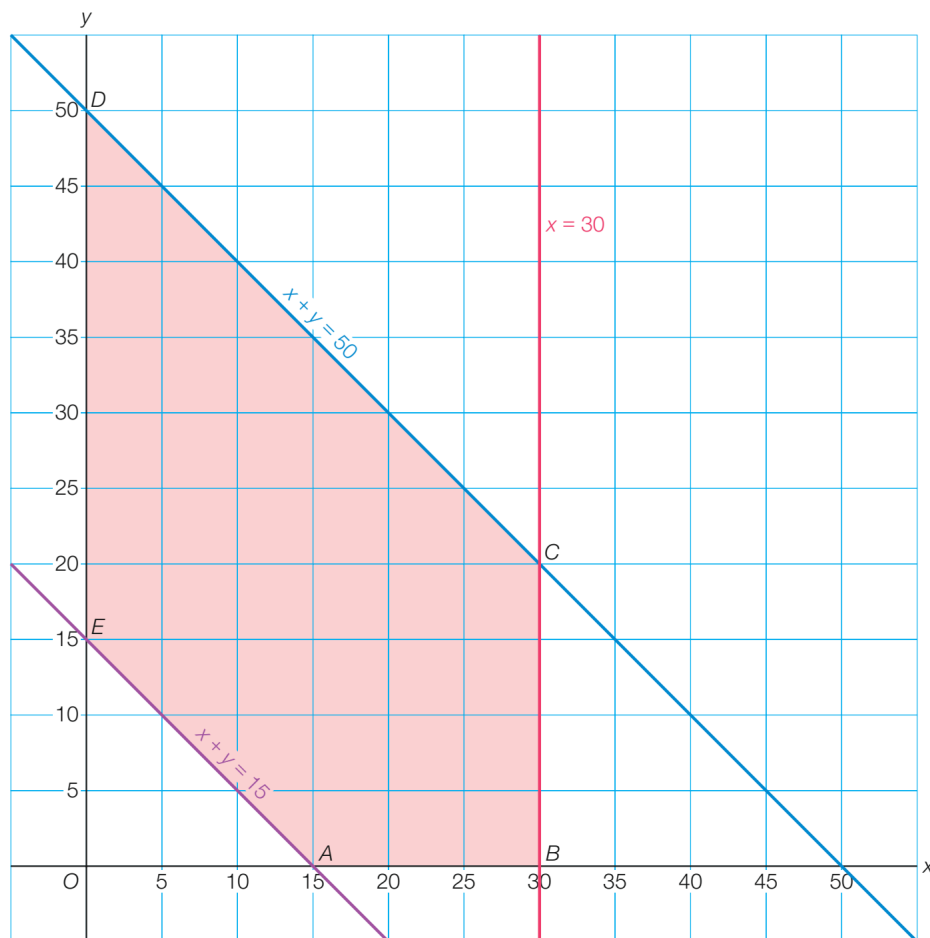


$$\begin{aligned} \text{Doelfunctie: } T &= 15x + 6y + 10(30 - x) + 13(55 - y) \\ &= 15x + 6y + 300 - 10x + 715 - 13y \\ &= 5x - 7y + 1015 \end{aligned}$$

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0, y \geq 0$,
 $30 - x \geq 0$, oftewel $x \leq 30$,
 $55 - y \geq 0$, oftewel $y \leq 55$,
 $x + y \leq 50$,
 $30 - x + 55 - y \leq 70$, oftewel $x + y \geq 15$.

Grenslijnen: $x = 0, y = 0, x = 30, y = 55,$
 $x + y = 50$ door $(0, 50)$ en $(50, 0),$
 $x + y = 15$ door $(0, 15)$ en $(15, 0).$

Toegestane gebied: roosterpunten binnen en op de vijfhoek $ABCDE.$



hoekpunt	doelfunctie T
$A(15, 0)$	1090
$B(30, 0)$	1165
$C(30, 20)$	1025
$D(0, 50)$	665 ← minimaal
$E(0, 15)$	910

Dus 0 m^3 van Lochem naar Raalte, 50 m^3 van Lochem naar Vorden, 30 m^3 van Deventer naar Raalte en 5 m^3 van Deventer naar Vorden.

K.5 Lineair programmeren met Excel

Bladzijde 157

46 a	hoekpunt	$W = 2x + 5y$
	$A(16\frac{2}{3}, 0)$	$33\frac{1}{3}$
	$B(10, 10)$	70
	$C(6\frac{2}{3}, 13\frac{1}{3})$	80 ← maximaal
	$D(0, 15)$	75

Het productieprogramma $(6\frac{2}{3}, 13\frac{1}{3})$ en $W_{\max} = 80$ euro.

- b** C is het snijpunt van de lijnen $3x + 3y = 60$ (machine I) en $1,5x + 6y = 90$ (machine III).
Dus van machine II wordt de capaciteit niet volledig benut.
Deze machine wordt $3 \cdot 6\frac{2}{3} + 2 \cdot 13\frac{1}{3} = 46\frac{2}{3}$ uur ingezet en is dus $50 - 46\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$ uur onbenut.

hoekpunt	$W = 2x + 5y$	
$A(16\frac{2}{3}, 0)$	$33\frac{1}{3}$	
$B'(9\frac{1}{3}, 11)$	$73\frac{2}{3}$	
$C'(7\frac{1}{9}, 13\frac{2}{9})$	$80\frac{1}{3}$	← maximaal
$D(0, 15)$	75	

$W_{\max}$ wordt $80\frac{1}{3}$ in plaats van 80.

- d** Eén uur langer machine III geeft beperkende voorwaarde $1,5x + 6y \leq 91$ en punt $C''(6\frac{4}{9}, 13\frac{5}{9})$ en hierbij hoort $W_{\max} = 2 \cdot 6\frac{4}{9} + 5 \cdot 13\frac{5}{9} = 80\frac{2}{3}$.
Deze $W_{\max}$ is meer dan die in vraag c, dus hij kiest voor machine III.
- e** Deze machine heeft onbenutte uren. Je zou machine II zelfs $3\frac{1}{3}$ uur minder kunnen inzetten zonder dat $W_{\max}$ verandert.

Bladzijde 161

- 47 a** Bij het snijpunt dat de optimale oplossing oplevert, horen de beperkende voorwaarden $5x + 2y \leq 100$ en $x + 4y \leq 150$.
- b** De grens van voorwaarde III wordt niet bereikt, dus de winst zal niet toenemen als deze voorwaarde wordt verruimd.
- c** De schaduwprijs is ongeveer 0,28, dus de nieuwe $W_{\max}$ is $119,44 + 0,28 = 119,72$.
Controleren met de computer geeft inderdaad $W_{\max} = 119,72$.
- d** $W_{\max} = 112,5$
Het programma is (0; 37,5).

voorwaarde	schaduwprijs	speling
I	0	87,5
II	0,44	0
III	0,31	0

- 48 a** De doelfunctie is af te lezen in kolom F.
Omdat de functie geminimaliseerd wordt, hebben de beperkende voorwaarden een $\geq$ teken.
De beperkende voorwaarden I en II hebben geen speling en zijn af te lezen in kolom C en D: het linkerlid in rij 2 en 3, het rechterlid in rij 4.
Beperkende voorwaarde III is af te lezen in kolom E, maar heeft een speling van 9.
Dat betekent dat het rechterlid niet gelijk is aan het getal in cel E4, maar dat daar 9 vanaf getrokken moet worden.
- b** $K_{\min} = 17,5$
- c** $K_{\min} \approx 16,38$
- d** Dit heeft geen invloed op $K_{\min}$, omdat $x + 6y = 27$ bij de optimale oplossing.
Verandert voorwaarde III in $x + 6y \geq 28$, dan heeft dit wel invloed, immers $28 > 27$.
- e** De schaduwprijs bij voorwaarde I is gelijk aan 0,25. De minimale kosten moeten met $17 - 16,5 = 0,5$ afnemen, dus het rechterlid van voorwaarde I moet $18 - \frac{0,5}{0,25} = 16$ worden en voorwaarde I moet je veranderen in $2x + 3y \geq 16$.
Omdat bij voorwaarde II de schaduwprijs 1,25 is en $10 - \frac{0,5}{1,25} = 9,6$, moet je voorwaarde II veranderen in $2x + y \geq 9,6$.

Bladzijde 162

- 49** **a** *
- b** $W_{\max} = 62,50$
productieprogramma $(p, q, r, s) = (13,75; 0; 12,5; 11,25)$
- c**
- | voorwaarde | schaduwprijs | speling |
|------------|--------------|---------|
| I | 1,3 | 0 |
| II | 0 | 11,25 |
| III | 0,4 | 0 |
| IV | 0,5 | 0 |
- d** Dan is $W_{\max} = 63,80$.

- 50** Je krijgt $W_{\max} \approx 695,27$ bij $(p, q, r, s) = (33,22; 62,20; 35,43; 28,57)$.

Bladzijde 163

- 51** Beperkende voorwaarde I is $p \geq 100 - q$, oftewel $p + q \geq 100$.
Beperkende voorwaarde II is $p \geq 150 - q - r$, oftewel $p + q + r \geq 150$.
Je krijgt $K_{\min} = 350$ bij $(p, q, r, s) = (50, 100, 0, 150)$.
- 52** **a** a = bedrag op de spaarrekening
 b = bedrag aan obligaties
 c = bedrag in aandelen I
 d = bedrag in aandelen II
Beperkende voorwaarden: $a + b + c + d \leq 100\,000$,
 $a + b > c + d$, oftewel $a + b - c - d > 0$,
 $a \geq 12\,000$,
 $c \geq \frac{1}{2}d$, oftewel $c - \frac{1}{2}d \geq 0$,
 $d \leq 50\,000$.
Doelfunctie: $R = 0,05a + 0,08b + 0,095c + 0,105d$.
- b** $R_{\max} = €8723,33$
bij €12 000 op de spaarrekening,
€38 000 aan obligaties,
€16 666,67 aan aandelen I,
€33 333,33 aan aandelen II.
- c** Er wordt €33 333,33 in aandelen II belegd, dat is $50\,000 - 33\,333,33 = €16\,666,67$ minder dan het toegestane maximum.
- d** De schaduwprijs bij voorwaarde III (over het spaarbedrag) is -0,03.
Omdat $15\,000 - 12\,000 = 3000$ zal de maximale jaaropbrengst met $3000 \cdot 0,03 = 90$ euro dalen als de voorwaarde $a \geq 15\,000$ wordt.
- e** Dat betekent dat als de voorwaarde $a + b - c - d > 0$ wordt gewijzigd in $a + b - c - d > 1$, de maximale jaaropbrengst €0,0108 minder wordt.
 $a + b - c - d > 1$, oftewel $a + b > c + d + 1$ betekent dat er 1 euro meer aan sparen en obligaties wordt besteed dan aan aandelen.
- f** De schaduwprijs bij voorwaarde I is 0,090833.
Dus de maximale jaaropbrengst zal met $10\,000 \cdot 0,090833 \approx €908,33$ stijgen.

Bladzijde 164

- 53** **a** $W = 640x + 560y + 480z$
- b** Constructieafdeling: $6x + 3y + 9z \leq 900$
Bekledingsafdeling: $4x + 3y \leq 600$
Afwerkingsafdeling: $x + y + z \leq 200$
- c** $W_{\max} = 115\,200$ euro
Er worden 60 fauteuils, 120 sofa's en 20 tafels gemaakt.
- d** De schaduwprijs bij de afwerkingsafdeling (384) is veel hoger dan die bij de constructieafdeling (10, 67). Verder is er op beide afdelingen geen speling.

- 54 a** Ja: bij 870 uur op de constructieafdeling en 230 uur op de afwerkingsafdeling is $W_{\max} = 126\,400$ euro.
- b** Dit is mogelijk.
Gebruik de beperkende voorwaarden
 $6x + 3y + 9z \leq 900$,
 $4x + 3y \leq 580$,
 $x + y + z \leq 220$,
 $x \geq 25$, $y \geq 25$ en $z \geq 25$.
 Je krijgt $W_{\max} = 120\,000$ euro.
 Er worden dan 25 fauteuils, 160 sofa's en 30 tafels gemaakt.

Bladzijde 165

- C8 a** Stel a = aantal kg A, b = aantal kg B en c = aantal kg C.
 Je krijgt $W_{\max} = 204,5$ bij $(a, b, c) = (0, 16, 13)$.
- b** Van machine II is 6 uur van de capaciteit onbenut.
- c** De fabrikant kiest voor het langer inzetten van machine I. De winst zou dan 1,1 euro hoger uitvallen.

Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 166

1 a $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - y = -1 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x - 3y = -3 \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \underline{5y = 15, \text{ dus } y = 3} \\ & \begin{cases} x - 3 = -1 \\ x - y = -1 \end{cases} \begin{vmatrix} x - 3 = -1 \\ x = 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

De oplossing is $x = 2$ en $y = 3$.

b $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 1,5x - 2,5y = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3x - 5y = -10 \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \underline{6y = 21, \text{ dus } y = 3,5} \\ & \begin{cases} 3x + 3,5 = 11 \\ 3x + y = 11 \end{cases} \begin{vmatrix} 3x + 3,5 = 11 \\ 3x = 7,5 \\ x = 2,5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

De oplossing is $x = 2,5$ en $y = 3,5$.

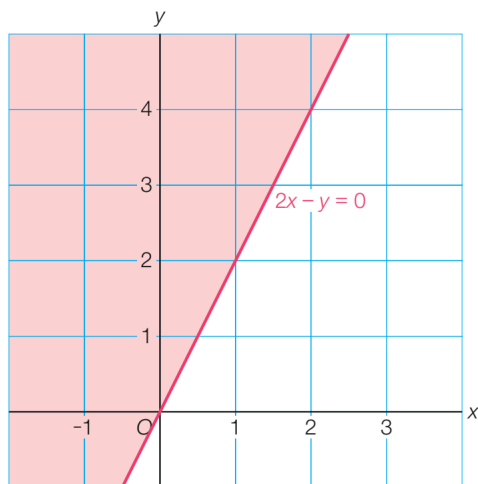
2 a $h + n = 1$
 $2h + 8n = 4,4$

b $\begin{cases} h + n = 1 \\ 2h + 8n = 4,4 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2h + 2n = 2 \\ 2h + 8n = 4,4 \end{cases}$

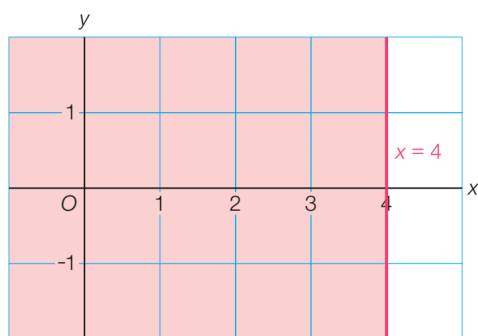
$$\begin{aligned} & \underline{-6n = -2,4, \text{ dus } n = 0,4} \\ & \begin{cases} h + 0,4 = 1 \\ h + n = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} h + 0,4 = 1 \\ h = 0,6 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Dus 0,6 kg havervlokken en 0,4 kg gemengde noten per kg ontbijtgranen.

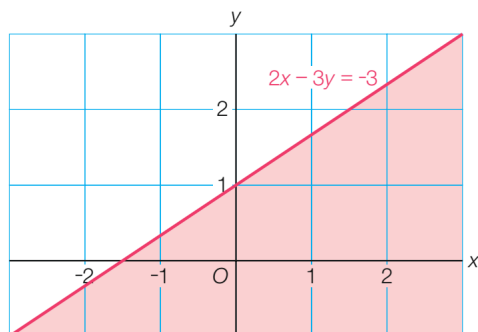
- 3 a** De lijn $2x - y = 0$ gaat door $(0, 0)$ en $(1, 2)$.
 $(1, 0)$ invullen geeft $2 - 0 \leq 0$; dit klopt niet.



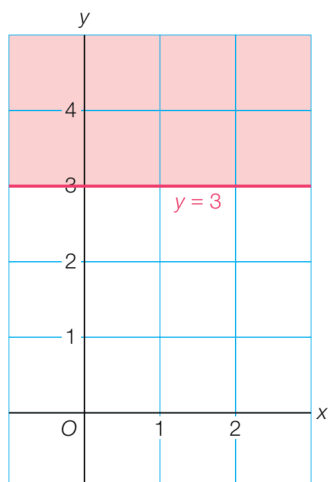
- b** De lijn $x = 4$ is een verticale lijn.



- c** De lijn $2x - 3y = -3$ gaat door $(0, 1)$ en $(3, 3)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 - 0 \geq -3$; dit klopt.



- d** De lijn $y = 3$ is een horizontale lijn.



- 4 a** De grenslijn door (0, 4) en (2, 0): $y = -2x + 4$.
 De grenslijn door (0, 4) en (5, 2): $y = -\frac{2}{5}x + 4$.
 De grenslijn door (0, 0) en (5, 2): $y = \frac{2}{5}x$.
 Voor het gebied geldt: $y \geq -2x + 4$ en $y \leq -\frac{2}{5}x + 4$ en $y \geq \frac{2}{5}x$.

b Los op $-2x + 4 = \frac{2}{5}x$

$$-2\frac{2}{5}x = -4$$

$$x = 1\frac{2}{3}$$

Samen met $y = \frac{2}{5}x$ geeft dit $y = \frac{2}{5} \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

De coördinaten van het hoekpunt dat niet op een roosterpunt ligt zijn $(1\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

- 5 a** x = aantal fietsen van type trekking
 y = aantal fietsen van type electric
 De doelfunctie is $W = 350x + 650y$.
 De beperkende voorwaarden zijn $x \geq 0$ en $y \geq 0$,
 $x \geq y$, oftewel $x - y \geq 0$ (minstens evenveel van type trekking als van type electric),
 $x + y \leq 50$ (maximaal aantal fietsen bakwagen),
 $12x + 27y \leq 750$, oftewel $4x + 9y \leq 250$ (maximaal gewicht bakwagen).
- b** De grenslijnen zijn $x = 0$ en $y = 0$,
 $x - y = 0$ door (0, 0) en (10, 10),
 $x + y = 50$ door (0, 50) en (50, 0),
 $4x + 9y = 250$ door (0, $27\frac{7}{9}$) en (40, 10).



Isolijn door (0, 10) geeft $W = 350x + 650y = 6500$ en gaat ook door (18,6; 0).

Isolijn door (0, 20) geeft $W = 13000$.

W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $x + y = 50$ en $4x + 9y = 250$.

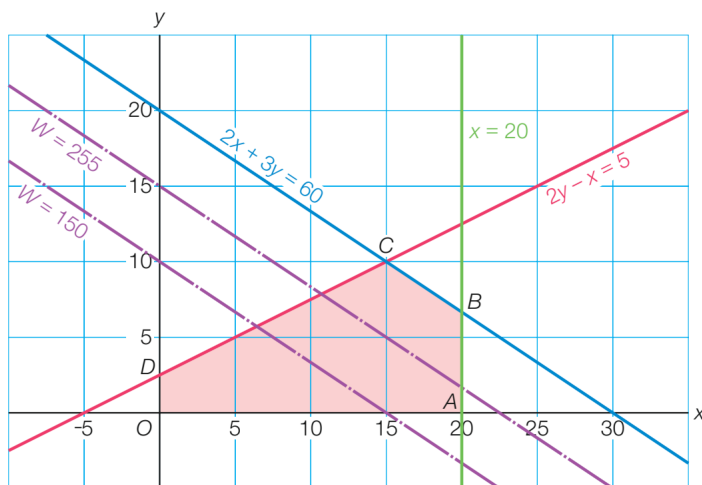
$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 4x + 9y = 250 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 4y = 200 \\ 4x + 9y = 250 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & -5y = -50, \text{ dus } y = 10 \\ & \begin{cases} x + 10 = 50 \\ x + y = 50 \end{cases} \Rightarrow x = 40 \end{aligned}$$

$$W_{\max} = 350 \cdot 40 + 650 \cdot 10 = 20500 \text{ euro}$$

Om de maximale winst te behalen neemt de fietshandelaar 40 fietsen van het type trekking mee en 10 fietsen van het type electric.

- 6 De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,
 $2x + 3y = 60$ door $(0, 20)$ en $(30, 0)$,
 $2y - x = 5$ door $(1, 3)$ en $(-5, 0)$,
 $x = 20$.



Isolijs door $(0, 10)$ geeft $W = 10x + 15y = 150$ en gaat ook door $(15, 0)$.

Isolijs door $(0, 15)$ geeft $W = 225$.

De isolijnen zijn evenwijdig met de rand BC op de lijn $2x + 3y = 60$, want $10 : 15 = 2 : 3$.

Het punt B is het snijpunt van de lijnen $2x + 3y = 60$ en $x = 20$, dus

$$2 \cdot 20 + 3y = 60, \text{ oftewel } 3y = 20 \text{ en } y = 6\frac{2}{3}. \text{ Dus } B(20, 6\frac{2}{3}).$$

Het punt C is het snijpunt van de lijnen $2x + 3y = 60$ en $2y - x = 5$.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 60 \\ 2y - x = 5 \end{cases} \begin{array}{l} |1| \\ |2| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 2x + 3y = 60 \\ -2x + 4y = 10 \end{cases} + \begin{array}{l} \\ 7y = 70, \text{ dus } y = 10 \end{array} \begin{cases} 20 - x = 5 \\ -x = -15 \\ x = 15 \end{cases}$$

Dus $C(15, 10)$.

Elk punt op het lijnstuk BC met $B(20, 6\frac{2}{3})$ en $C(15, 10)$ maximaliseert de doelfunctie

$$W = 10x + 15y.$$

$$W_{\max} = 10 \cdot 15 + 15 \cdot 20 = 300.$$

- 7 x = aantal auto's van type A

y = aantal auto's van type B

Dan $4000 - x - y$ auto's van type C.

Doelfunctie: $W = 800x + 1000y + 1700 \cdot (4000 - x - y)$, dus $W = -900x - 700y + 6\,800\,000$.

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0$, $y \geq 0$,

$$4000 - x - y \geq 0, \text{ oftewel } x + y \leq 4000,$$

$$10x + 12y + 18(4000 - x - y) \leq 54\,000, \text{ oftewel } -8x - 6y \leq -18\,000,$$

$$\text{oftewel } 4x + 3y \geq 9000.$$

$$x + y + 2(4000 - x - y) \leq 5500, \text{ oftewel } -x - y \leq -2500,$$

$$\text{oftewel } x + y \geq 2500.$$

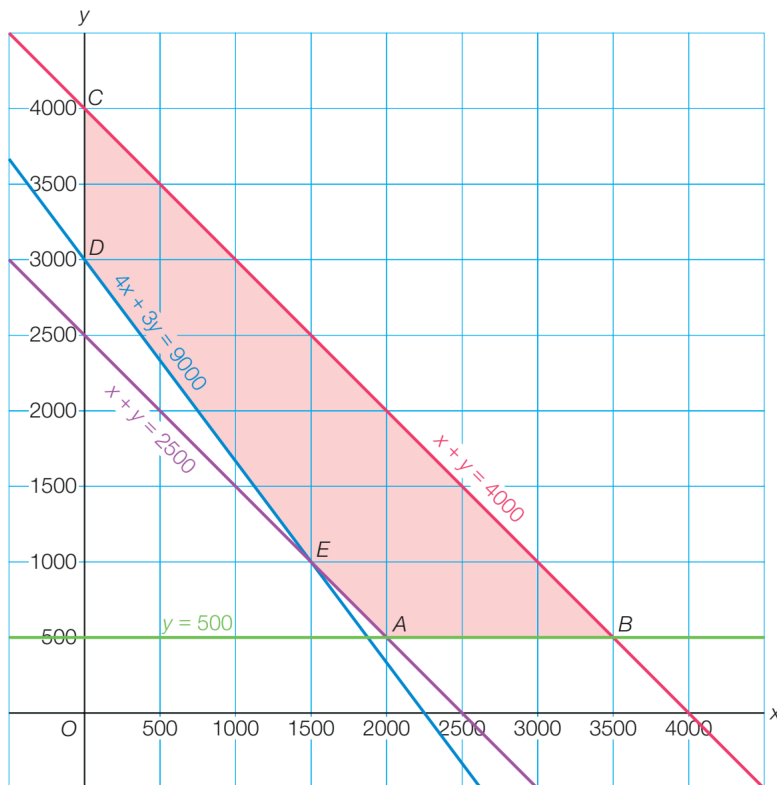
$$y \geq 500$$

Grenslijnen:

$$x = 0, y = 0,$$

$$x + y = 4000 \text{ door } (0, 4000) \text{ en } (4000, 0),$$

$$4x + 3y = 9000 \text{ door } (0, 3000) \text{ en } (2250, 0).$$



$x + y = 2500$ en $y = 500$ geeft $x = 2000$, dus $A(2000, 500)$.

$x + y = 4000$ en $y = 500$ geeft $x = 3500$, dus $B(3500, 500)$.

$$\begin{cases} x + y = 2500 \\ 4x + 3y = 9000 \end{cases} \begin{array}{l} |4| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 4y = 10000 \\ 4x + 3y = 9000 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} y = 1000 \\ x + y = 2500 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 1000 = 2500 \\ x = 1500 \end{array}$$

Dus $E(1500, 1000)$.

hoekpunt	$W = -900x - 700y + 6\,800\,000$	
$A(2000, 500)$	4 650 000	
$B(3500, 500)$	3 300 000	
$C(0, 4000)$	4 000 000	
$D(0, 3000)$	4 700 000	
$E(1500, 1000)$	4 750 000	← maximaal

Dus de maximale winst is 4 750 000 euro bij 1500 auto's van type A, 1000 van type B en 1500 van type C.

8 Je krijgt $W_{\max} = 3180$ bij $(a, b, c, d) = (120, 100, 240, 480)$.

Verantwoording

Beeld

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer
13, 9700 VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

*De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie.
Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontlelen.*

0 / 25



© 2025 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden.
Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06499-0

