

getal & ruimte

A



Noordhoff

Dit boek is van jou!

Naam

Klas

Getal & Ruimte

Leerboek
vwo A deel 3

Dertiende editie, 2026

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd
M. Daems

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek vwo A deel 3

Dit boek bevat een gedeelte van de leerstof van het vak wiskunde A van het vwo. Het boek sluit aan op de delen 1 en 2 van vwo A/C. In vwo A deel 4 komt de resterende leerstof van wiskunde A aan bod.

De totale studielast voor het vak vwo wiskunde A is 520 uur. Met het doorwerken van een hoofdstuk zijn ongeveer 35 studielasturen gemoeid.

In de hoofdstukken komen de volgende subdomeinen aan bod.

Hoofdstuk 8	Differentiaalrekening	D2 en D3
Hoofdstuk 9	Kansverdelingen	E5
Hoofdstuk 10	Exponenten en logaritmen	C1 en C2
Hoofdstuk 11	Het toetsen van hypothesen	E6

De domeinen bij de hoofdstukken 9 en 11 worden alleen in het schoolexamen getoetst. In vwo A deel 4 komen alleen nog onderwerpen aan de orde die in het centraal examen worden getoetst. Zie voor verdere details de handleiding.

Een voor de hand liggende situatie is om in het vijfde leerjaar te beginnen met het afhandelen van vwo A/C deel 2 en de rest van het schooljaar te besteden aan het doorwerken van vwo A deel 3.

De leerstof die in de boeken vwo A deel 3 en vwo C deel 3 wordt aangeboden loopt zoveel mogelijk gelijk op, maar omdat de programma's nogal verschillen is het onmogelijk de leerlingen in het vijfde leerjaar hetzelfde traject te laten volgen. In situaties waarin de leerlingen die wiskunde A en wiskunde C volgen toch in dezelfde groep zitten, dient men goed bedacht te zijn op de verschillen. In het zesde leerjaar verschillen de aangeboden onderwerpen nog meer.

De digitale leeromgeving van Getal & Ruimte

Bij sommige gedeeltes van het boek kunnen opgaven ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

In het docentenmateriaal staan studiewijzers die een indicatie geven van de hoeveelheid leerstof die per week kan worden doorgewerkt. Verder zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

Voorjaar 2026

Legenda

V1 Voorkennisopgave

Een opgave over een onderwerp uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk.

O1 Oriënterende opgave

   Een opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

2 Gewone opgave

   Een opgave waarmee je oefent met wat er in de theorie aan bod is gekomen.

R3 Reflectie-opgave

   Een opgave waarmee je terugkijkt op een voorgaand probleem, of waarmee je op een andere manier naar voorgaande stof kijkt.

A4 Afsluitende opgave

   Een opgave waarmee je oefent op het beoogde beheersingsniveau.

E5 Extra opgave

   Een opgave die je extra uitdaagt.

Kennis- en vaardighedencheck

Je controleert of je de kennis en/of vaardigheid beheerst door de bijbehorende opgave te maken.

C1 Checkopgave

Een opgave waarmee je controleert of je de kennis en/of vaardigheid goed beheerst.

Routeaanduiding

1 Een opgave van de basisroute.



2 Een opgave van de middenroute.



3 Een opgave van de uitdagende route.



NB: De symbolen van de routeaanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder routeaanduiding

In de Kennis- en vaardigheidentest en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen routeaanduiding.

 **GR** Verwijzing naar een module over het gebruik van de grafische rekenmachine. Zie ook het overzicht van de modules achterin dit boek.

 **WERKBLAD** Verwijzing naar een werkblad achterin dit boek.

Inhoud

8	Differentiaalrekening	6	10	Exponenten en logaritmen	106
8.1	Toenamedigrammen en differentiequotiënten	8	10.1	Exponentiële groei	108
8.2	Hellinggrafieken	21	10.2	Exponentiële en lineaire groei	117
8.3	Differentiëren	36	10.3	Logaritmen	130
8.4	Notaties en regels voor de afgeleide	42	10.4	Werken met logaritmen	137
8.5	Extreme waarden en de afgeleide	49	10.5	Het getal e en de natuurlijke logaritme	149
	Kennis- en vaardigheidentest	56		Kennis- en vaardigheidentest	156
	Gemengde opgaven	58		Gemengde opgaven	158
9	Kansverdelingen	64	11	Het toetsen van hypothesen	162
9.1	Toevalsvariabelen en verwachtingswaarde	66	11.1	De wortel- n -wet	164
9.2	De binomiale verdeling	78	11.2	Beslissen op grond van een steekproef	174
9.3	De normale verdeling	88	11.3	Eenzijdig en tweezijdig toetsen	184
9.4	De normale verdeling toepassen	93	11.4	Binomiale toetsen	193
	Kennis- en vaardigheidentest	100		Kennis- en vaardigheidentest	204
	Gemengde opgaven	102		Gemengde opgaven	206
				Werkbladen	210
				Antwoorden Kennis- en vaardigheidentests	223
				Overzicht GR-modules	225
				Trefwoordenregister	226
				Verantwoording	228





8

Differentiaalrekening

Bij basisschool De Toermalijn nam het aantal leerlingen in drie achtereenvolgende schooljaren toe met 7, 5 en 8 leerlingen. Bij basisschool Tak & Twijg nam het aantal leerlingen in dezelfde drie schooljaren eerst af met 10 leerlingen en daarna toe met 12 en 20 leerlingen.

- Bij welk van de twee scholen nam het aantal leerlingen het meest toe in deze drie schooljaren?
- Met hoeveel nam het aantal leerlingen bij Tak & Twijg gemiddeld per schooljaar toe?

8.1 Toenamediagrammen en differentiequotiënten

Kennis en vaardigheden

- Je kunt in een grafiek de verschillende soorten van stijgen en dalen herkennen en de bijbehorende intervallen noteren.
- Je kunt bij een grafiek of een formule een toenamediagram tekenen.
- Je kunt bij een toenamediagram een mogelijke grafiek tekenen.
- Je kunt bij een gegeven situatie de gemiddelde verandering of het differentiequotiënt berekenen.

Voorkennis Intervallen

Een interval is een aaneengesloten stuk van de getallenlijn. In de figuur hieronder zijn boven de getallenlijn vier intervallen getekend:

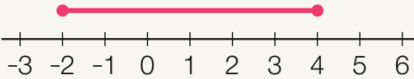


Bij het interval $2 < x < 4$ zie je aan de open rondjes dat de grenzen 2 en 4 niet bij het interval horen. Alle getallen tussen 2 en 4 behoren tot het interval.

Bij het interval $0 \leq x \leq 1$ zie je aan de dichte rondjes dat de grenzen 0 en 1 wel bij het interval horen. Alle getallen vanaf 0 tot en met 1 behoren tot het interval.

Voorbeeld

a Vul in: x ligt tussen 5 en 9 noteer je als

b Vul in: Bij  hoort de notatie

Uitwerking

a $5 < x < 9$

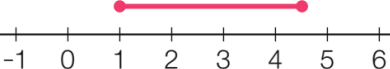
b $-2 \leq x \leq 4$

V1 Vul in.

a x ligt tussen 0 en 6 noteer je als

b x is groter dan of gelijk aan 7 noteer je als

V2 Vul in.

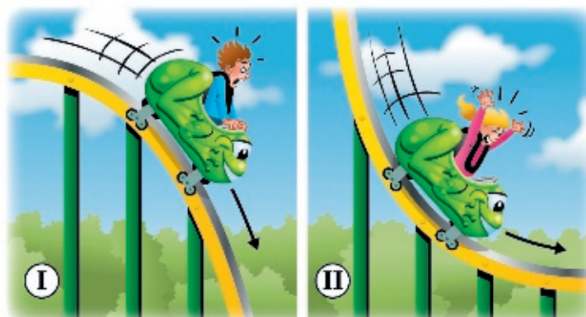
a Bij  hoort de notatie

b Bij  hoort de notatie

O1



In een attractiepark staat een achtbaan met verschillende spectaculaire bochten en hoogteverschillen. We bekijken twee korte delen van de baan. Zie de figuur met de delen I en II. Op beide delen daalt het wagentje. Toch voelt het heel anders wanneer je op deel I rijdt dan wanneer je op deel II rijdt. Dat komt doordat je op verschillende manieren daalt. Leg uit wat het verschil in daling is.



Theorie A Intervallen en soorten van stijgen en dalen

Het interval $x < -1$ noteren we als $\langle \leftarrow, -1 \rangle$.

Het interval $1 < x < 4$ noteren we als $\langle 1, 4 \rangle$.

Het interval $x > 5$ noteren we als $\langle 5, \rightarrow \rangle$.

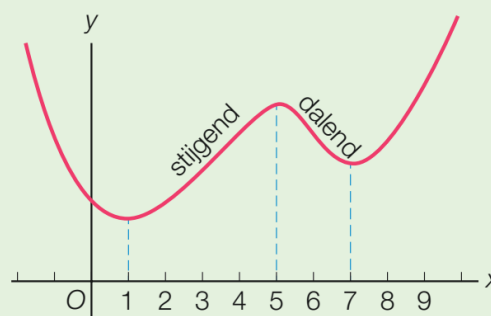
Deze drie intervallen zijn open intervallen. Bij een **open interval** horen de grenzen niet bij het interval.

Behalve open intervallen zijn er ook gesloten intervallen.

Bij een **gesloten interval** horen de grenzen wel bij het interval.

Het gesloten interval $1 \leq x \leq 4$ noteren we als $[1, 4]$.

Zie de figuur hiernaast. Op het interval $\langle 1, 5 \rangle$ is de grafiek **stijgend** en op het interval $\langle 5, 7 \rangle$ is de grafiek **dalend**.

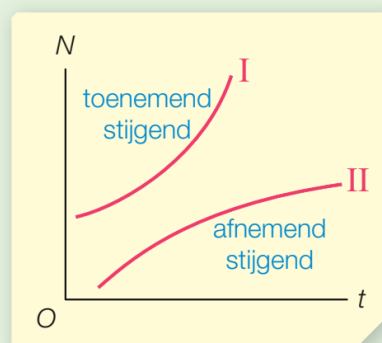


$\langle \leftarrow, -1 \rangle$ spreek je uit als: het open interval min oneindig min 1.

Hiernaast zie je twee grafieken die beide stijgend zijn. Maar toch is er een belangrijk verschil tussen de twee grafieken.

Bij grafiek I is de toename steeds groter; de grafiek gaat steeds steiler omhoog. Er is sprake van **toenemende stijging**.

Bij grafiek II komt er telkens minder bij; de grafiek gaat steeds minder steil omhoog. Er is sprake van **afnemende stijging**.

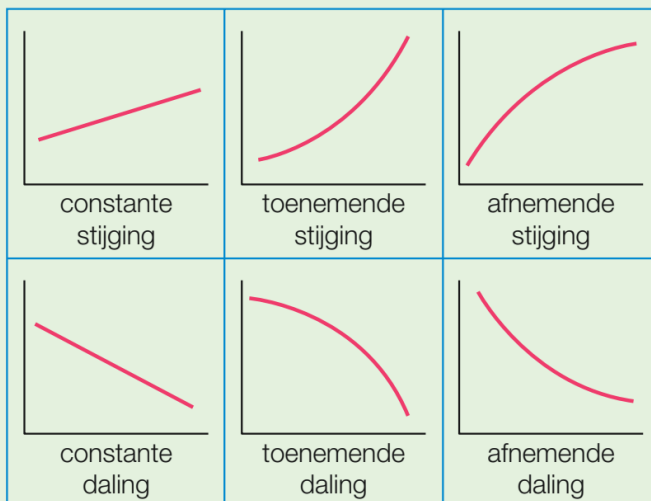


Hiernaast staan de verschillende soorten van stijgen en dalen vermeld.

Afspraak

Bij vragen over stijgen en dalen noteer je met de intervalnotatie de grootst mogelijke open intervallen.

SOORTEN VAN STIJGEN EN DALEN



Voorbeeld

Welke soorten van stijgen en dalen herken je op het interval $\langle 0, 10 \rangle$ in de figuur hiernaast? Noteer ook de bijbehorende intervallen.

Uitwerking

afnemend dalend op $\langle 0, 2 \rangle$
toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$
afnemend stijgend op $\langle 4, 6 \rangle$
toenemend dalend op $\langle 6, 10 \rangle$



2 Zie de figuur hiernaast met t tussen 0 en 10.



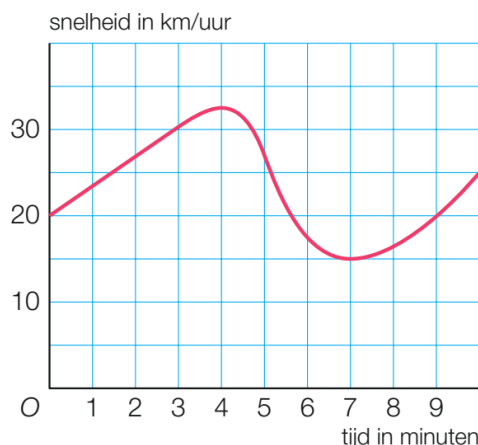
- a** Welke soorten van stijgen herken je? Noteer ook de bijbehorende intervallen.
b Welke soorten van dalen herken je? Noteer ook de bijbehorende intervallen.



3 De grafiek in de figuur hiernaast gaat over de snelheid van een fietser tijdens een tocht door een glooiend landschap.



- a** Welke soorten van stijgen en dalen herken je op het interval $\langle 0, 10 \rangle$? Noteer ook de bijbehorende intervallen.
b Op welk tijdsinterval is de fietser aan het klimmen?





Het aantal luisteraars van een radiostation op een doordeweekse dag neemt in de loop van de ochtend toe. Zie de figuur. Hierin is N het aantal luisteraars in duizendtallen en t de tijd in uren met $t = 0$ om 6:00 uur. Van $t = 0$ tot $t = 2$ is de toename $\Delta N = 30 - 5 = 25$. Dus op het interval $[0, 2]$ is $\Delta N = 25$.

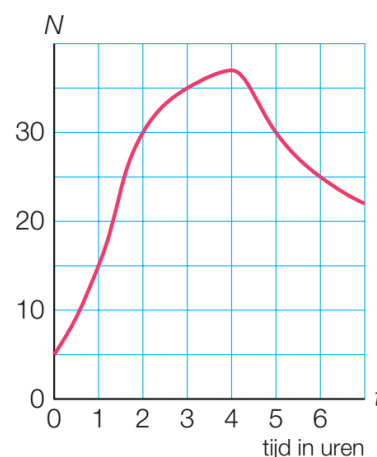
a Op het interval $[4, 6]$ is er sprake van een afname.

Is ΔN dan positief of negatief?

b Vul de tabel in.

interval	$[0, 2]$	$[2, 4]$	$[4, 6]$
ΔN	25		

c Hoe groot is de stapgrootte Δt bij elk interval in de tabel?



Theorie B Van grafiek naar toenamediagram

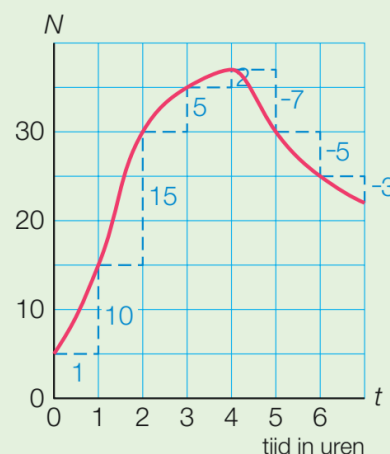
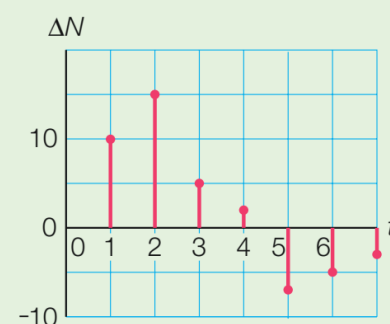
In opgave 4 heb je bij een grafiek, waarin N tegen t is uitgezet, verschillende toenames van N berekend. Maak je de hele tabel met **stapgrootte** $\Delta t = 1$ bij de grafiek, dan krijg je de volgende tabel.

interval	$[0, 1]$	$[1, 2]$	$[2, 3]$	$[3, 4]$	$[4, 5]$	$[5, 6]$	$[6, 7]$
ΔN	10	15	5	2	-7	-5	-3

Aan de waarden in de tabel kun je niet meer zien hoeveel luisteraars er waren. Maar je kunt bijvoorbeeld wel zien dat het aantal luisteraars bij $t = 5$ minder was dan een uur eerder. De tabel geeft inzicht in de verandering van de aantallen.

Hiernaast is bij de tabel een diagram getekend. Eerst is boven de *rechtergrens* van elk interval de bijbehorende ΔN uitgezet. Vervolgens zijn staafjes gemaakt door de punten met de t -as te verbinden. Het diagram dat zo ontstaat heet een **toenamediagram**.

Bij dit toenamediagram is de stapgrootte $\Delta t = 1$.



In een toenamediagram met stapgrootte $\Delta t = 1$ lees je bij $t = 3$ de toename op het interval $[2, 3]$ af.

Voorbeeld

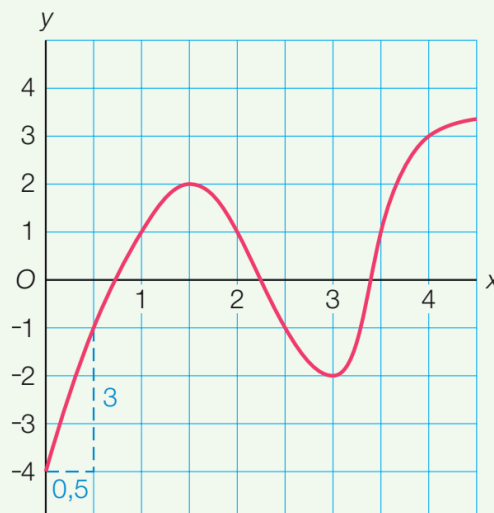
Zie de figuur hiernaast.

Teken het toenamediaqram op het interval $[0; 3,5]$ met stapgrootte $\Delta x = 0,5$.

Aanpak

Maak een tabel met toenamen. De stapgrootte is $0,5$, dus het eerste interval is $[0; 0,5]$.

Zet in het toenamediaqram telkens Δy uit boven de rechtergrens van het bijbehorende interval.

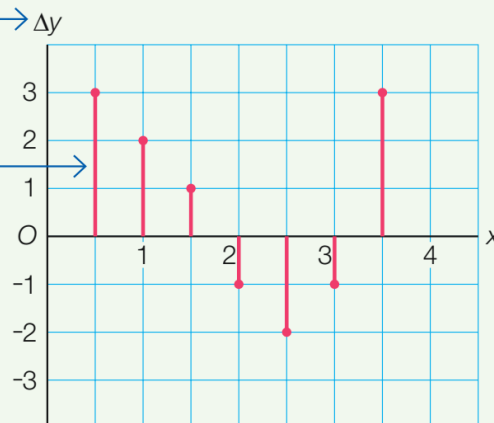


Uitwerking

interval	Δy
$[0; 0,5]$	3
$[0,5; 1]$	2
$[1; 1,5]$	1
$[1,5; 2]$	-1
$[2; 2,5]$	-2
$[2,5; 3]$	-1
$[3; 3,5]$	3

Zet Δy bij de verticale as.

Op $[0; 0,5]$ is de toename 3.
Dus het staafje boven $0,5$ heeft lengte 3.



5 Zie het voorbeeld.

Teken het toenamediaqram op $[0, 4]$ met $\Delta x = 1$.

6 Zie de figuur.

a Teken het toenamediaqram op $[0, 3]$ met $\Delta t = 1$.

b Teken het toenamediaqram op $[0; 3,5]$ met $\Delta t = 0,5$.

c Hoe zie je in de toenamediaqrammen dat de grafiek toppen heeft?

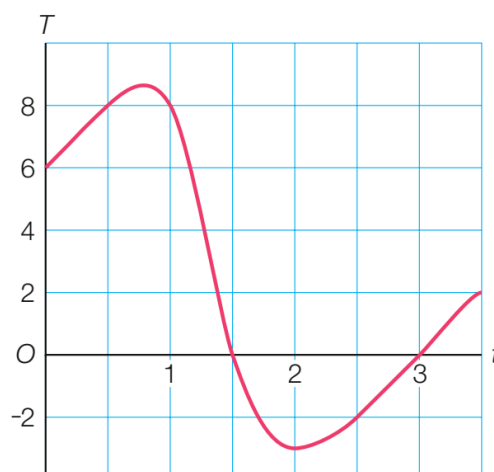
7 Teken een mogelijk toenamediaqram bij een grafiek die

a één maximum heeft

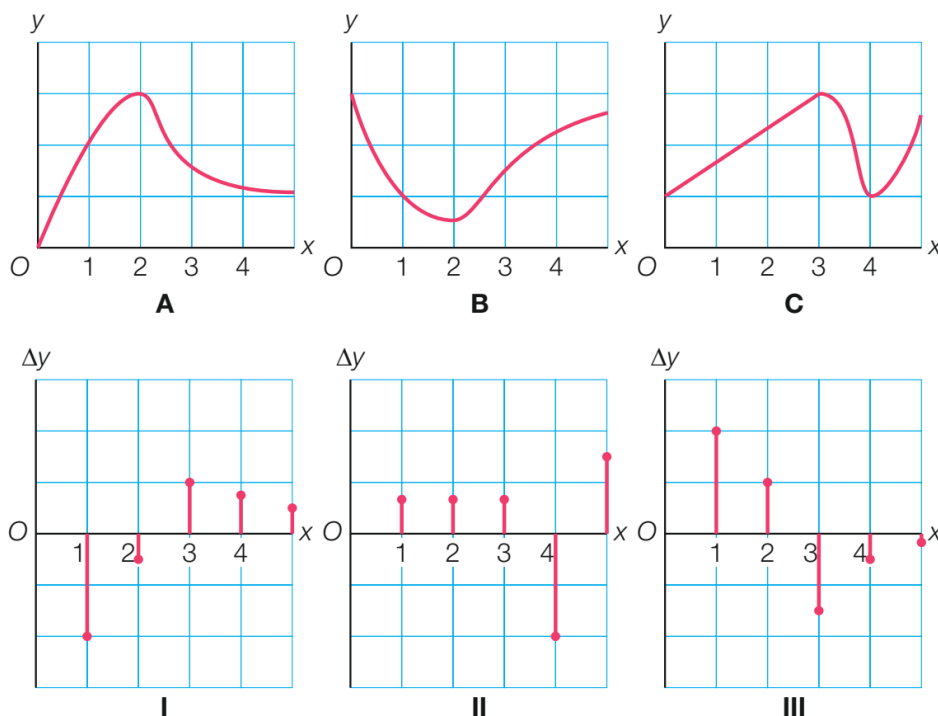
b één minimum heeft

c bij een lineair verband hoort

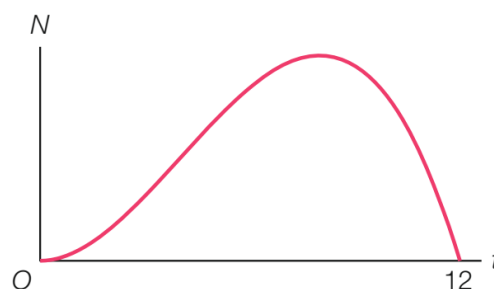
d afnemend dalend is.



- A8** Hieronder zie je drie grafieken en drie toenamediagrammen. Bij elk van de grafieken hoort één van de toenamediagrammen. Zoek bij elke grafiek het juiste toenamediagram. Licht je keuzes toe.



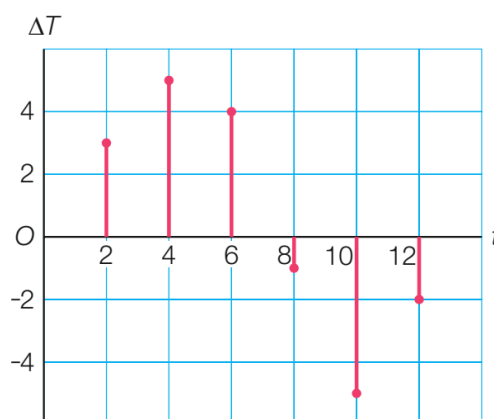
- A9** Het aantal personen dat zich op een zomerse dag in een dierentuin bevindt, is te beschrijven met de formule $N = 480t^2 - 40t^3$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 9:00 uur. De dierentuin sluit om 21:00 uur. Zie de grafiek.



- Welke soorten van stijgen en dalen herken je in de grafiek?
- Teken het toenamediagram op $[0, 12]$ met $\Delta t = 2$.

Je kunt met de GR een tabel bij de formule maken.

- O10** Jasmijn heeft op een dag in juni van 08:00 uur tot 20:00 uur het verloop van de buitentemperatuur bijgehouden. Ze heeft hiervan een toenamediagram gemaakt met stapgrootte 2 uur. Zie de figuur hiernaast. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 8:00 uur en T de temperatuur in graden Celsius. Om 12:00 uur was het 20°C .



- Licht toe dat het om 14:00 uur 24°C was.
- Wat was de temperatuur om 16:00 uur? En om 20:00 uur?
- Reken na dat de temperatuur om 8:00 uur 12°C was.

Theorie C Van toenamediagram naar grafiek

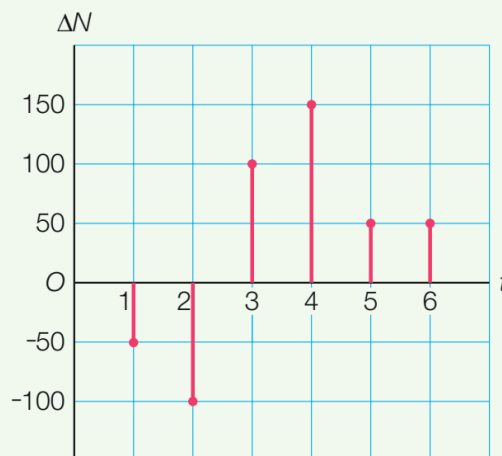
Zijn een toenamediagram en de coördinaten van een punt van de bijbehorende grafiek gegeven, dan kun je coördinaten van andere punten van de grafiek berekenen. Door deze punten kun je vervolgens een grafiek tekenen. Tenzij je nog meer informatie hebt over de grafiek, is in theorie elke grafiek door deze punten mogelijk.

Voorbeeld

Het toenamediagram geeft informatie over het aantal konijnen N in een duingebied. Hierin is t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari.

Op 1 april zijn er 850 konijnen.

- Teken een grafiek bij deze gegevens.
- Tussen 1 januari en 1 juli was het aantal konijnen één keer minimaal. De natuurbeheerder beweert dat dit minimum optrad in de maand februari. Kan dit kloppen?



Aanpak

- Op 1 april (dus op $t = 3$) geldt dat $N = 850$. Gebruik de toenames uit het toenamediagram om de andere waarden van N te berekenen.

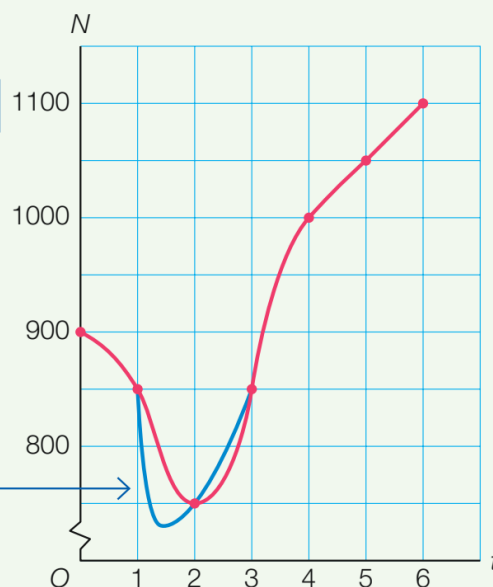
Uitwerking

- | t | N |
|-----|------|
| 0 | 900 |
| 1 | 850 |
| 2 | 750 |
| 3 | 850 |
| 4 | 1000 |
| 5 | 1050 |
| 6 | 1100 |

Zie het staafje bij $t = 1$.

Zie de rode grafiek.

Merk op dat elke grafiek door de zeven gevonden punten bij het toenamediagram past.

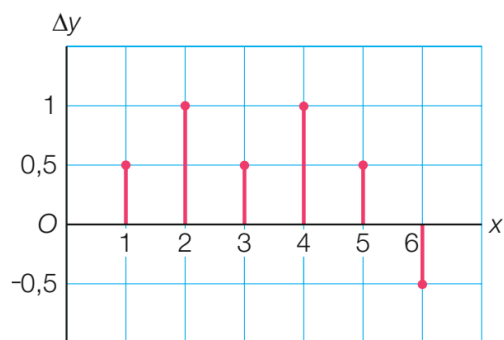


- Ja, dat kan kloppen, zie de blauwe grafiek.

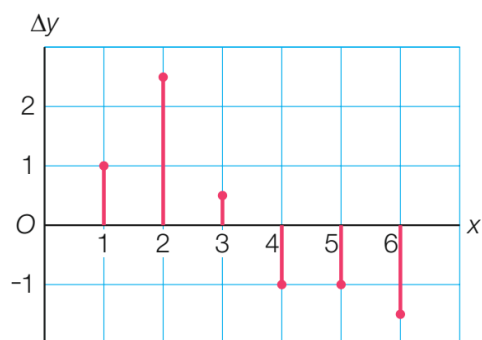
R11 Zie vraag b van het voorbeeld.

☐◎* Zou het aantal konijnen niet in februari, maar in maart minimaal geweest kunnen zijn? Licht toe.

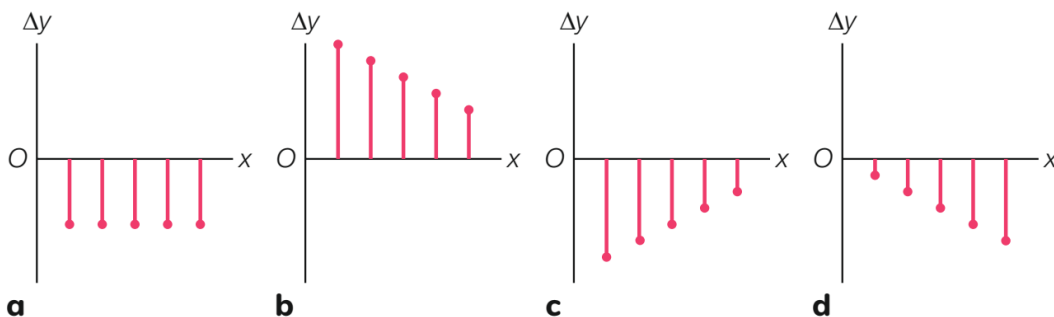
- 12** Gegeven is het toenamediagram in de figuur hiernaast.
- De bijbehorende grafiek gaat door het punt $(2, 3)$.
- Teken een grafiek bij deze gegevens.
 - Waarom zijn er meerdere grafieken mogelijk?
Teken met een andere kleur nog een mogelijke grafiek in de figuur van vraag a.
 - Teken het toenamediagram met $\Delta x = 2$ op het interval $[0, 6]$.



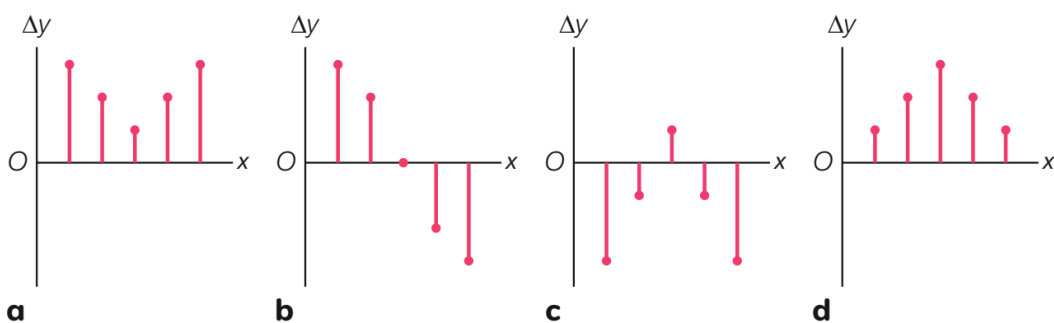
- 13** Gegeven is het toenamediagram in de figuur hiernaast.
- Teken een grafiek die bij het toenamediagram hoort en die door het punt $(3, -2)$ gaat.
 - Als je weet dat de grafiek die bij dit toenamediagram hoort maar één maximum heeft, kan dit maximum dan optreden bij $x = 2,5$? En bij $x = 1,5$? Licht toe.



- 14** Elk van de onderstaande toenamediagrammen hoort bij een grafiek.
- Bepaal bij elk toenamediagram de soort van stijgen of dalen die bij de grafiek hoort. Kies uit: toenemend stijgend, afnemend stijgend, constant stijgend, toenemend dalend, afnemend dalend en constant dalend.

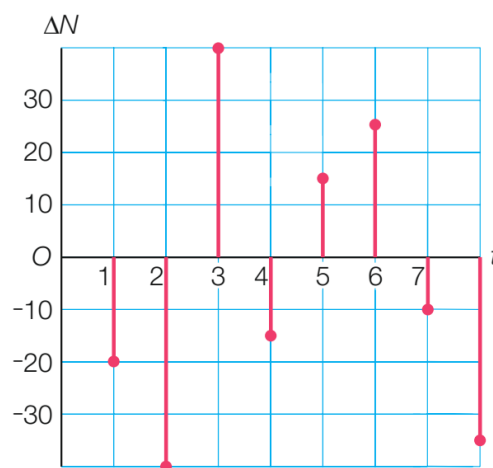


- 15** Schets mogelijke grafieken bij de volgende toenamediagrammen.

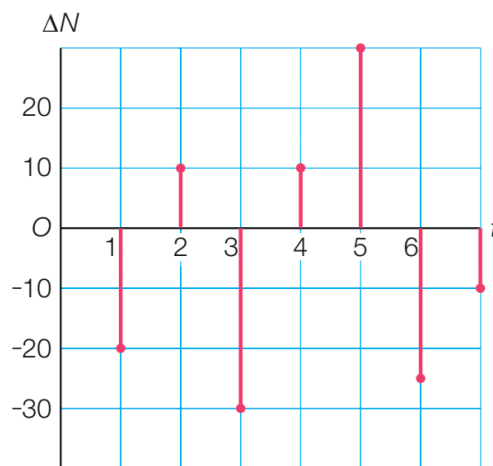


A16 In Nationaal Park De Hoge Veluwe kun je gebruiken van witte leenfietsen. Op een aantal plekken in het park zijn stallingen waar je een fiets kunt meenemen of wegzetten. Een beheerder van het park houdt op een dag vanaf 9:00 uur bij hoeveel fietsen er in één van de stallingen staan. Zie het toenamediaagram waarin t de tijd in uren is met $t = 0$ om 9:00 uur en N het aantal fietsen in de stalling. Om 15:00 uur stonden er 110 fietsen in de stalling.

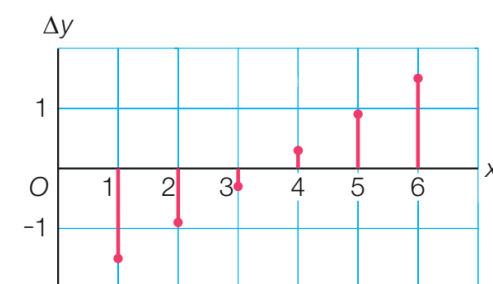
- a** Hoeveel fietsen stonden er om 17:00 uur in de stalling? En om 9:00 uur?
- b** Tussen 10:00 en 11:00 uur hebben in totaal 30 personen een fiets in de stalling gezet. Hoeveel fietsen zijn er tussen 10:00 en 11:00 uur meegenomen?



A17 Op een zonnige dag houdt Daan bij hoeveel mensen er op een groot terras zitten. Zie het toenamediaagram in de figuur hiernaast met t de tijd in uren en $t = 0$ om 15:00 uur en N het aantal mensen op het terras. Onderzoek hoeveel mensen er om 15:00 uur minstens op het terras hebben gezeten.



18 Bij het toenamediaagram in de figuur hiernaast hoort een grafiek met één minimum. Voor welke waarden van x kan dit minimum optreden? Geef een zo groot mogelijk interval.



19 In 2024 passeerde Nederland de grens van 18 miljoen inwoners. In de tabel kun je voor verschillende perioden de toename ΔN van het aantal inwoners N in miljoenen aflezen. Stijn bekijkt de tabel en zegt: “Er is sinds 1840 sprake van een afnemende stijging.” Welke fout maakt Stijn?

BEVOLKING VAN NEDERLAND

periode	toename ΔN
1840-1940	5,8
1940-1970	4,2
1970-1995	2,4
1995-2015	1,5
2015-2025	1,1

Theorie D Gemiddelde verandering en differentiequotiënt

In de tabel bij opgave 19 is bij een aantal perioden de verandering van het inwoneraantal van Nederland gegeven.

Om de veranderingen goed met elkaar te vergelijken, bekijk je de **gemiddelde veranderingen** per tijdseenheid.

Zo geldt voor de tabel van opgave 19:

- in de periode 1840-1940 neemt N met 5,8 toe, dus de gemiddelde verandering is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{5,8}{100} = 0,058$ miljoen per jaar.
- in de periode 1940-1970 neemt N met 4,2 toe, dus de gemiddelde verandering is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{4,2}{30} = 0,14$ miljoen per jaar.

Je ziet dat de gemiddelde verandering is toegenomen van 0,058 tot 0,14 miljoen per jaar. Er is dus geen sprake van een afnemende stijging, zoals Stijn in opgave 19 beweert.

$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ is de gemiddelde verandering van N per tijdseenheid.

Op het interval $[1, 6]$ in de grafiek hiernaast is

$$\Delta x = 6 - 1 = 5 \text{ en } \Delta y = 5 - 2 = 3.$$

De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5} = 0,6$.

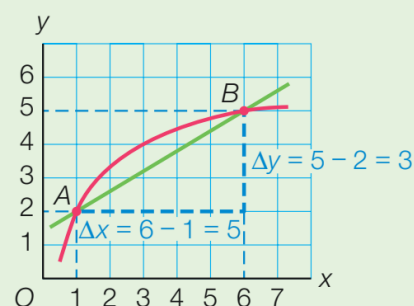
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ heet het **differentiequotiënt** van y op het interval $[1, 6]$.

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is de richtingscoëfficiënt

van de lijn door A en B . In plaats van ‘de richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B ’

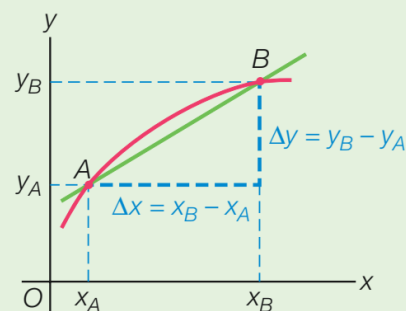
zeggen we ook

‘de **helling** van de lijn door A en B ’.



Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van y op $[x_A, x_B]$ is

- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (oftewel de helling) van de lijn door A en B
- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



Voorbeeld

Zie de figuur hiernaast.

- Bereken de gemiddelde verandering van y op het interval $[-1, 3]$.
- Bereken het differentiequotient op $[3, 5]$.
- Geef een interval waarop de gemiddelde verandering gelijk is aan 0.

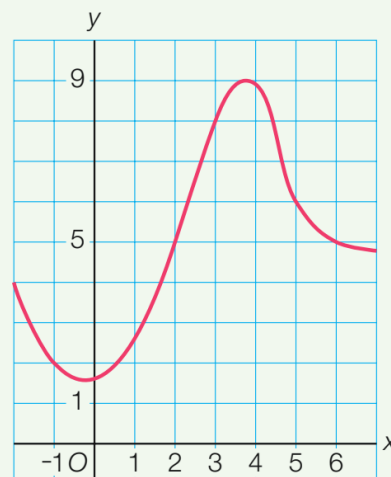
Uitwerking

- De gemiddelde verandering op $[-1, 3]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 2}{3 - (-1)} = 1,5.$$

- Op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 8}{5 - 3} = -1.$

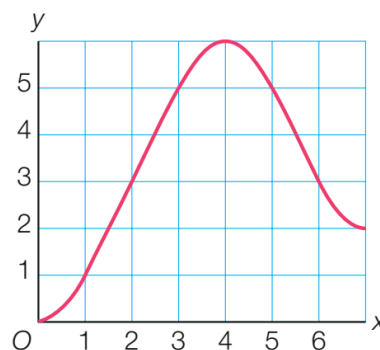
- Het interval $[2, 6]$.



20 Zie de figuur hiernaast.



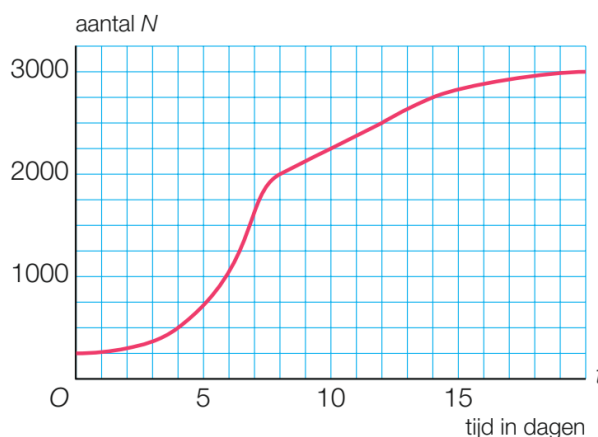
- Bereken het differentiequotient op $[1, 3]$.
- Bereken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op $[4, 6]$. Wat betekent het dat je antwoord negatief is?
- Bereken de gemiddelde verandering op $[2, 7]$.
- Geef een interval waarop de gemiddelde verandering gelijk is aan 0.
- Bepaal een interval waarop $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gelijk is aan 1,5.



21 In de figuur is de groei weergegeven van een populatie fruitvliegjes in een afgesloten ruimte.



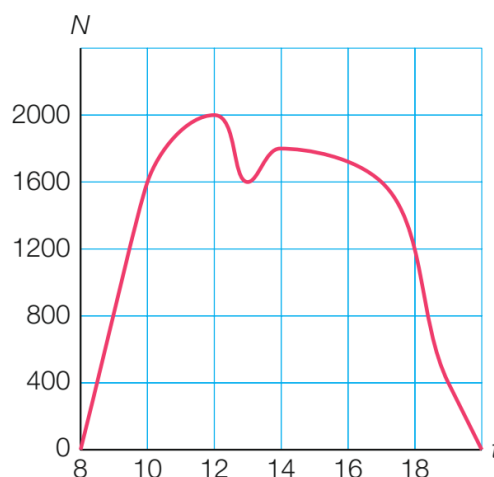
- Bereken de gemiddelde toename per dag van het aantal fruitvliegjes gedurende de eerste tien dagen.
- Hoe kun je in de figuur zien dat de gemiddelde toename per dag op $[5, 8]$ groter is dan op $[10, 14]$?
- Zeg zonder berekening op welk interval de gemiddelde toename per dag het grootst is en ook op welk interval het kleinst. Kies uit $[0, 4]$, $[4, 8]$, $[8, 12]$ en $[12, 20]$.



A22 In de figuur hiernaast is het aantal auto's N op een parkeerterrein bij een dierentuin uitgezet tegen de tijd t in uren. Het betreft een zaterdag in mei.

□ ⊗ *

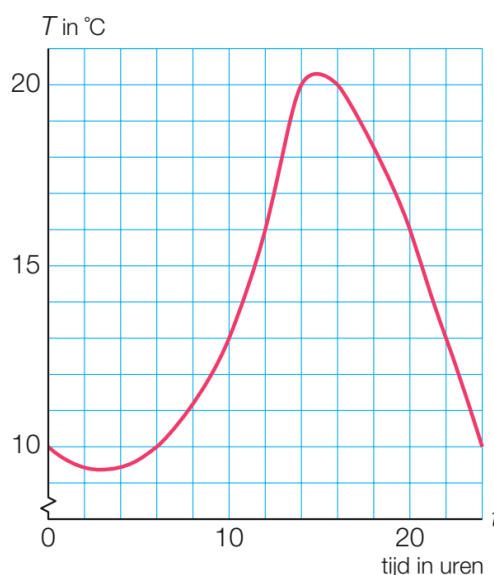
- Bereken $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ op het interval $[9, 13]$.
- Bereken de gemiddelde verandering van N op het interval $[12, 17]$.
- Bepaal een interval waarop de gemiddelde toename 200 auto's per uur is.



A23 De grafiek in de figuur hiernaast gaat over het verloop van de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ op een dag in mei met t de tijd in uren en $t = 0$ om 0:00 uur.

□ ⊗ *

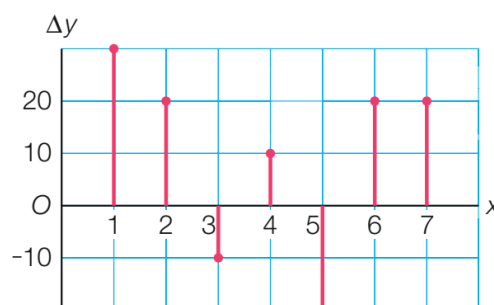
- Bereken $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op $[6, 10]$ en op $[9, 14]$.
- Voor welke t is de gemiddelde toename van de temperatuur op $[0, t]$ gelijk aan die op het interval $[0, 10]$? Licht je antwoord toe met behulp van de figuur.
- Voor welke t is de gemiddelde toename van de temperatuur op $[0, t]$ maximaal? Licht je antwoord toe met behulp van de figuur.



A24 Zie het toenamediaagram in de figuur hiernaast.

□ ⊗ *

- Bereken de differentiequotienten op de intervallen $[0, 7]$ en $[2, 6]$.
- Geef drie intervallen waarop de gemiddelde verandering van y nul is.



A25 Gegeven is de kostenformule $K = q^3 - 6q^2 + 13q + 15$. Hierin is K in duizenden euro's en q de productie in duizendtallen. De productie is maximaal 8000 stuks.

□ ⊗ *

- Wat is de eenheid van $\frac{\Delta K}{\Delta q}$?
- Bereken het differentiequotient op het interval $[4, 6]$.
- Onderzoek of de kosten gemiddeld meer toenemen als de productie toeneemt van 4000 tot 6000 stuks of als de productie toeneemt van 3600 tot 6100 stuks.

R26*****

Van een grafiek is het volgende bekend: de grafiek gaat door het punt $(0, 2)$ en

- op $[0, 2]$ is het differentiequotiënt $0,25$
- op $[1, 3]$ is het differentiequotiënt $1,5$
- op $[0, 5]$ is het differentiequotiënt $0,2$
- op $[1, 5]$ is het differentiequotiënt $0,5$.

a Bereken het differentiequotiënt op $[3, 5]$.

b Is het mogelijk dat het differentiequotiënt op $[1, 4]$ gelijk is aan $1,5$? Licht toe.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan in een grafiek de verschillende soorten van stijgen en dalen herkennen en de bijbehorende intervallen noteren.

► **OPGAVE C1**
THEORIE A

☐ Ik kan bij een grafiek of een formule een toenamediagram tekenen.

► **OPGAVE C2**
THEORIE B

☐ Ik kan bij een toenamediagram een mogelijke grafiek tekenen.

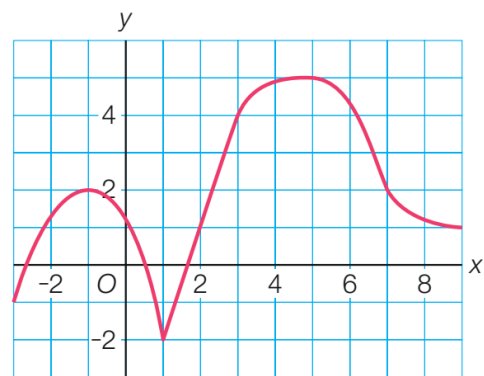
► **OPGAVE C3**
THEORIE C

☐ Ik kan bij een gegeven situatie de gemiddelde verandering of het differentiequotiënt berekenen.

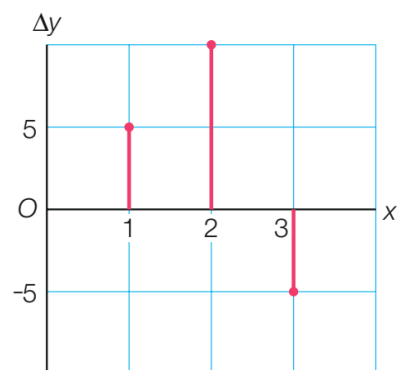
► **OPGAVE C4**
THEORIE D

C1 Welke verschillende soorten van stijgen en dalen herken je op het interval $\langle -3, 9 \rangle$ in de figuur hiernaast? Geef de bijbehorende intervallen.

C2 Teken op het interval $[-3, 9]$ het toenamediagram dat hoort bij de figuur hiernaast. Neem stapgrootte $\Delta x = 2$.



C3 Van een grafiek die door het punt $(2, 18)$ gaat, is het toenamediagram hiernaast getekend. Teken een mogelijke grafiek.



C4 a Zie de figuur bij opgave C1.

Bereken de gemiddelde verandering op het interval $[-1, 5]$.

b Gegeven is de formule $R = -0,001q^2 + 12q$. Hierin is R de maandopbrengst in euro's en q het aantal artikelen dat per maand wordt verkocht.

Bereken het differentiequotiënt op het interval $[2000, 3000]$.

Antwoorden

C1 afnemend stijgend op $\langle -3, -1 \rangle$, toenemend dalend op $\langle -1, 1 \rangle$, constant stijgend op $\langle 1, 3 \rangle$, afnemend stijgend op $\langle 3, 5 \rangle$, toenemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$, afnemend dalend op $\langle 7, 9 \rangle$

C2 *

C3 *

C4 a $0,5$ **b** 7 euro per stuk

8.2 Hellinggrafieken

Kennis en vaardigheden

- Je kunt in een punt van een grafiek de helling bepalen met behulp van een raaklijn.
- Je kunt de hellinggrafiek schetsen bij een gegeven grafiek.
- Je kunt een mogelijke grafiek schetsen als de bijbehorende hellinggrafiek gegeven is.
- Je kunt met de GR de helling berekenen in een punt op de grafiek van een gegeven formule.
- Je kunt met de GR bij een gegeven formule de hellinggrafiek plotten.

O27



Voor een optrekkende motor is de afgelegde afstand s gegeven door de formule $s = t^3 + t$. Hierin is s in meters en t de tijd in seconden.

- Bereken de gemiddelde snelheid in m/s op $[2, 3]$.
- Bereken de gemiddelde snelheden op de intervallen $[2; 2,5]$, $[2; 2,1]$, $[2; 2,01]$ en $[2; 2,001]$.
- Welke snelheid denk je dat de motor heeft op $t = 2$?

Theorie A Snelheid en raaklijn

De tijd-afstandgrafiek hiernaast hoort bij de formule $s = \frac{1}{2}t^3$. Hierin is s de afgelegde weg in meters na t seconden.

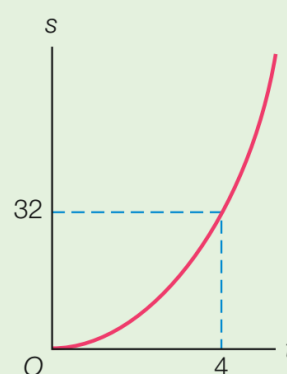
We vragen ons af hoe we met deze formule de snelheid op één moment, bijvoorbeeld op $t = 4$, kunnen krijgen. Om deze vraag te kunnen beantwoorden, bekijken we de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[4, 5]$, $[4; 4,5]$, $[4; 4,1]$, $[4; 4,01]$, ... Zo krijgen we een steeds betere benadering van de

snelheid op $t = 4$. De gemiddelde snelheid $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ op het interval

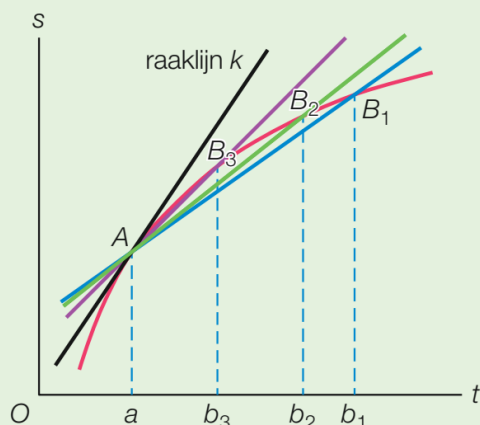
- $[4, 5]$ is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 5^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{5 - 4} = 30,5$ m/s
- $[4; 4,5]$ is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4,5^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0,5} = 27,125$ m/s
- $[4; 4,1]$ is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4,1^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0,1} = 24,605$ m/s
- $[4; 4,01]$ is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4,01^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0,01} \approx 24,060$ m/s.

De gemiddelde snelheid op het kleine interval $[4; 4,01]$ geeft een goede benadering van de snelheid op $t = 4$. Je krijgt het vermoeden dat de snelheid op $t = 4$ gelijk is aan 24 m/s. Als je $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ berekent op een nog kleiner interval, dan krijg je een snelheid die nog dichterbij 24 m/s ligt. Bijvoorbeeld op het

interval $[4; 4,001]$ krijg je $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4,001^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0,001} \approx 24,006$ m/s.



In de figuur hieronder zie je in rood een tijd-afstandgrafiek.



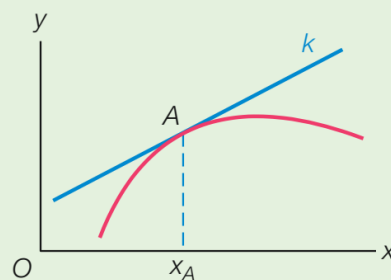
Door de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$. De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de richtingscoëfficiënten van de lijnen AB_1 , AB_2 , AB_3 , ...

Hoe dichter B bij A komt te liggen, des te meer zal de lijn AB lijken op de lijn k die de grafiek in A raakt. De lijn k is de **raaklijn** van de grafiek in A. De snelheid op $t = a$ is dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A.

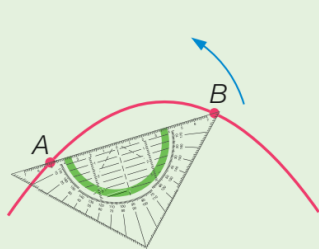
Ook bij een andere grafiek dan een tijd-afstandgrafiek kun je een raaklijn tekenen. De **helling van de grafiek** in een punt is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt. We spreken ook van de snelheid van verandering of kortweg snelheid.

Bij een grafiek geldt voor de raaklijn k in een punt A dat aan elkaar gelijk zijn:

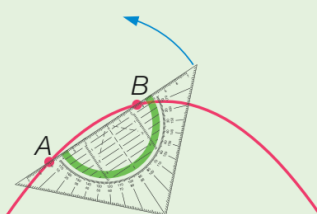
- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A
- de helling van de grafiek in A
- de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.



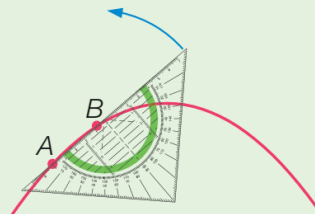
Hieronder zie je hoe je de raaklijn tekent in het punt A van een grafiek.



Draai de geodriehoek om het punt A.



Het punt B komt steeds dichterbij het punt A te liggen.



Zodra B samenvalt met A is de lijn AB overgegaan in de raaklijn in A.

Voorbeeld

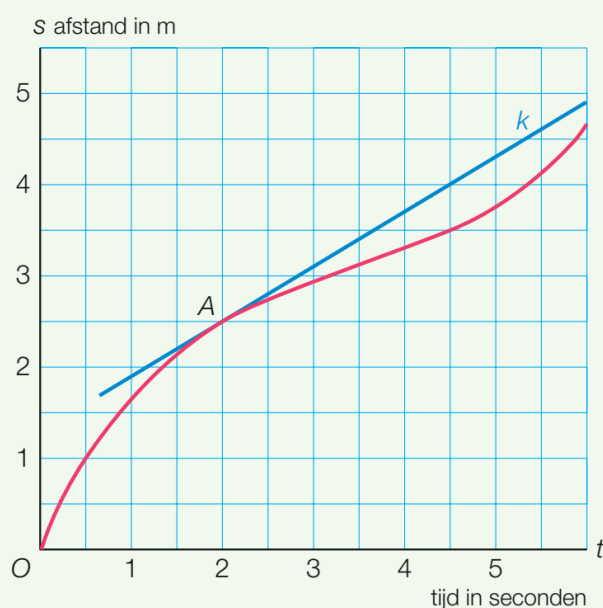
Zie de grafiek in de figuur hiernaast.
Benader met behulp van de grafiek de
snelheid op $t = 2$.



Aanpak

Teken de raaklijn in het punt met $t = 2$, lees geschikte Δt en Δs af en
bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn.

Uitwerking



De raaklijn gaat door de punten $(2; 2,5)$ en $(4,5; 4)$.

De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4 - 2,5}{4,5 - 2} = 0,6$.

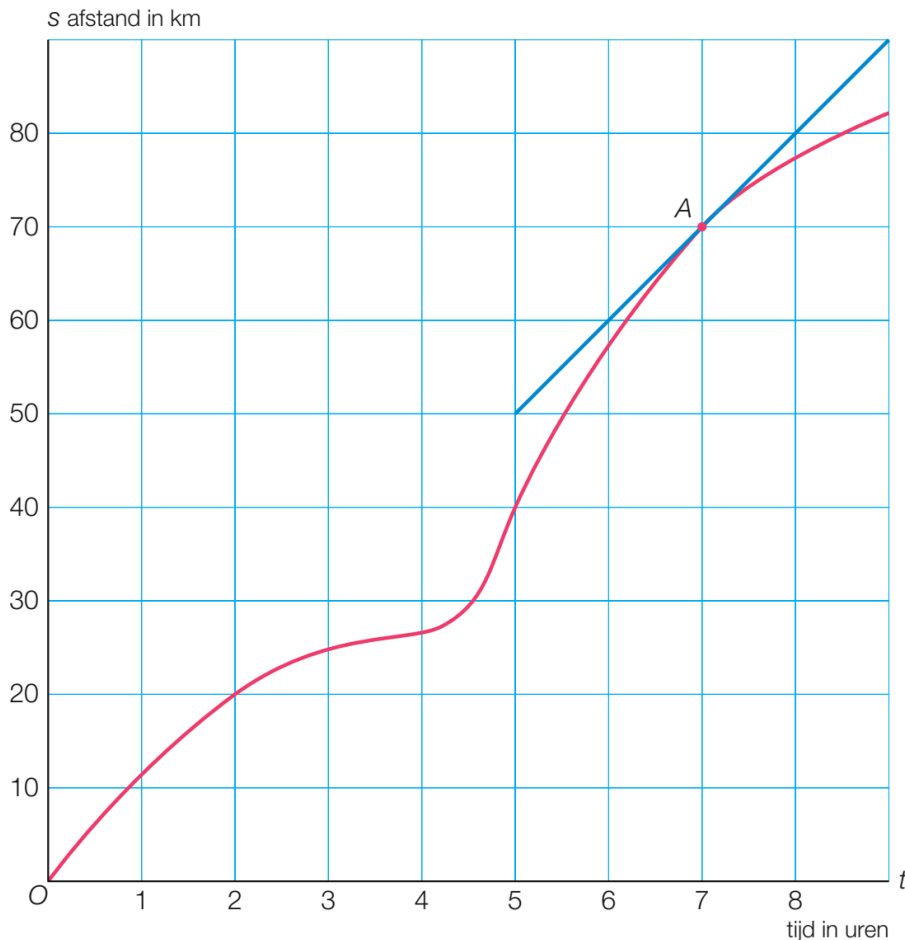
De snelheid op $t = 2$ is ongeveer 0,6 m/s.

Voor Δs neem je het verschil van de s -coördinaten van twee punten op de *raaklijn* en dus niet op de grafiek. Je moet immers de rc van de raaklijn hebben.

28 Hieronder zie je een tijd-afstandgrafiek.



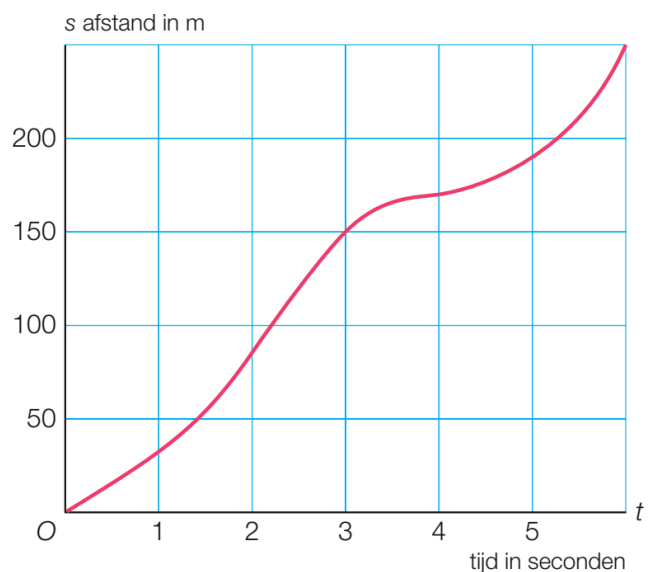
- a** In het punt A is de raaklijn van de grafiek getekend. Bereken hiermee de snelheid op $t = 7$.
- b** Benader met behulp van de grafiek de snelheid op $t = 2$. Geef het antwoord in km/u en rond af op één decimaal.
- c** Neemt de snelheid gedurende de eerste vier uur toe of af? Hoe zie je dat aan de grafiek?
- d** Schat met behulp van de grafiek voor welke t de snelheid minimaal is.



29 **WERKBLAD** Gegeven is de tijd-afstandgrafiek hiernaast.



- a** Schat met behulp van raaklijnen de snelheid in gehele m/s op $t = 3$ en op $t = 5$.
- b** Bepaal met behulp van de grafiek voor welke t de snelheid minimaal is.
- c** Voor welke t is de gemiddelde snelheid op $[2, t]$ minimaal? Licht toe.
- d** Hoeveel tijdstippen zijn er tussen $t = 0$ en $t = 6$ waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[0, 6]$? Licht toe.

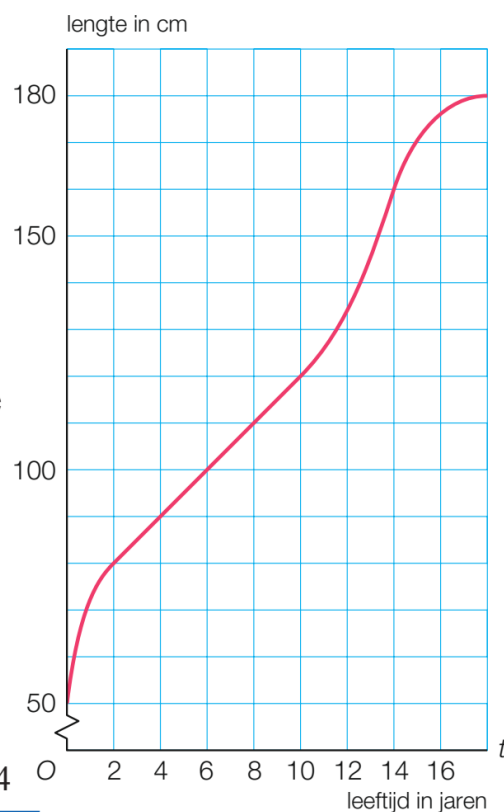


A30



▶ **WERKBLAD** Meneer Kruize heeft vanaf de geboorte van zijn dochter Lotte elke maand haar lengte gemeten. De resultaten staan in de figuur.

- Geef een schatting van de groeisnelheid in cm/jaar op $t = 6$.
- Schat de groeisnelheid in cm/jaar van Lotte rond haar veertiende verjaardag.
- Bereken de gemiddelde groeisnelheid in cm/jaar van 0 tot 18 jaar. Rond af op één decimaal.
- Op welke leeftijden is de groeisnelheid van Lotte gelijk aan de bij vraag c gevraagde snelheid?



O31

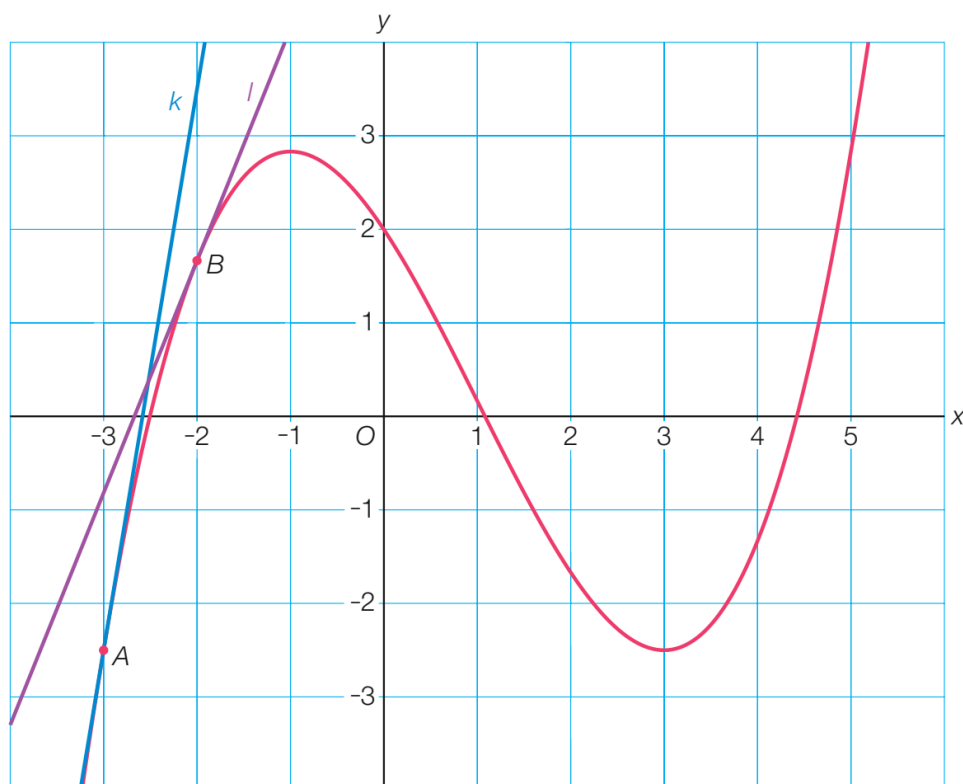


Hieronder zie je een grafiek. Op de grafiek liggen de punten A en B met $x_A = -3$ en $x_B = -2$. In A en B zijn de raaklijnen k en l aan de grafiek getekend. Je kunt nagaan dat $rc_k = 6$ en $rc_l = 2,5$.

- Vul de tabel verder in.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
helling	6	2,5						

- Teken in je schrift de punten die uit de tabel volgen en teken door deze punten een vloeiende kromme.
- De in vraag b getekende kromme snijdt de x -as in twee punten. Bij welke bijzondere punten van de gegeven grafiek horen deze snijpunten?
- De gegeven grafiek is tussen de twee toppen dalend. Hoe zie je dit terug in de kromme die in vraag b getekend is?



Theorie B Hellinggrafieken schetsen

Bij een gegeven grafiek kun je bij elke x de helling van de grafiek in het bijbehorende punt vinden. Zo ontstaat de **hellinggrafiek**.

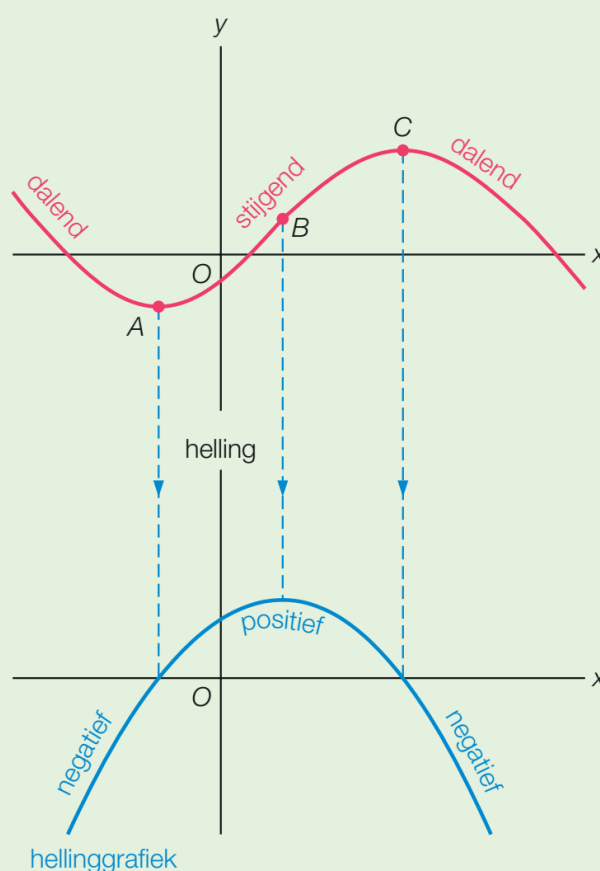
Uit een gegeven grafiek kun je bijzonderheden van de bijbehorende hellinggrafiek afleiden.

- Bij een *dalend* deel van de gegeven grafiek is de helling in elk punt van dat deel *negatief*, dus de hellinggrafiek ligt dan onder de x -as.
- In een *top* van de gegeven grafiek is de helling *nul*, dus de hellinggrafiek snijdt dan de x -as.
- Bij een *stijgend* deel van de gegeven grafiek is de helling in elk punt van dat deel *positief*, dus de hellinggrafiek ligt dan boven de x -as.

In de figuur hiernaast zie je de samenhang tussen een grafiek en de bijbehorende hellinggrafiek. Bij de toppen A en C horen de snijpunten van de hellinggrafiek met de x -as.

Tussen A en C stijgt de grafiek, dus daar ligt de hellinggrafiek boven de x -as.

In het punt B is de helling van de gegeven grafiek maximaal. Dit geeft het hoogste punt van de hellinggrafiek.



Het verband tussen een grafiek en de bijbehorende hellinggrafiek

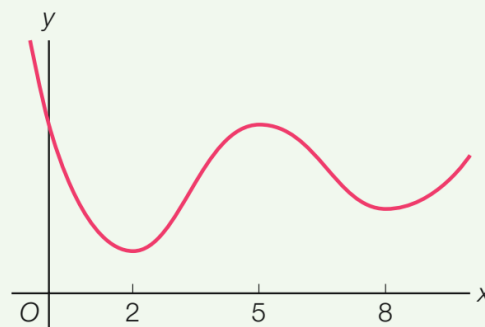
- | | | |
|-----------------------|-----------|----------------------------------|
| • grafiek is stijgend | hoort bij | hellinggrafiek boven de x -as |
| • grafiek is dalend | hoort bij | hellinggrafiek onder de x -as |
| • grafiek heeft top | hoort bij | hellinggrafiek snijdt de x -as |

Voorbeeld

Zie de grafiek hiernaast.
Schets de bijbehorende hellinggrafiek.

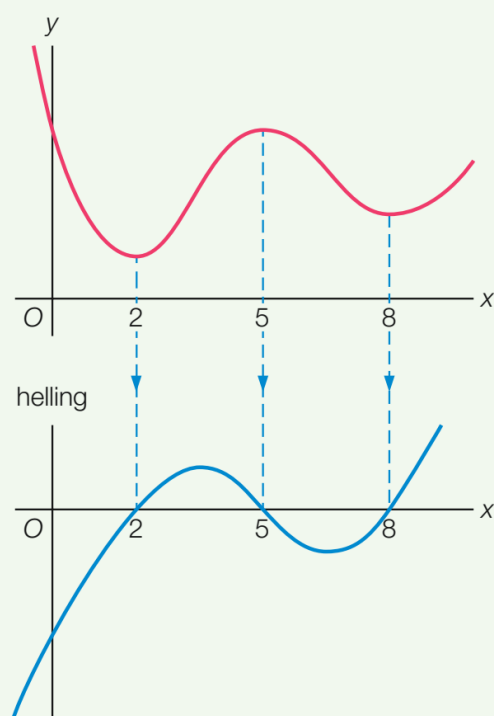
Aanpak

	grafiek	hellinggrafiek
$\langle \leftarrow, 2 \rangle$	dalend	onder de x -as
$x = 2$	top	snijdt de x -as
$\langle 2, 5 \rangle$	stijgend	boven de x -as
$x = 5$	top	snijdt de x -as
$\langle 5, 8 \rangle$	dalend	onder de x -as
$x = 8$	top	snijdt de x -as
$\langle 8, \rightarrow \rangle$	stijgend	boven de x -as



Teken eerst de punten waar de hellinggrafiek de x -as snijdt.
Gebruik stippellijnen.

Uitwerking



R32 Zie het voorbeeld.



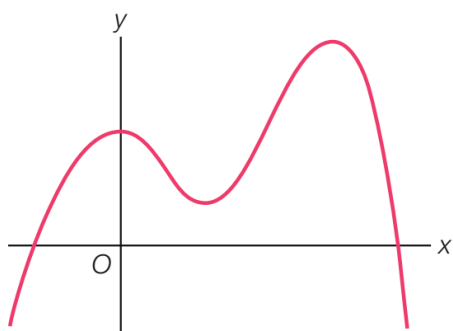
a Op $\langle 2, 5 \rangle$ gaat de gegeven grafiek over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

Hoe zie je dit terug in de hellinggrafiek?

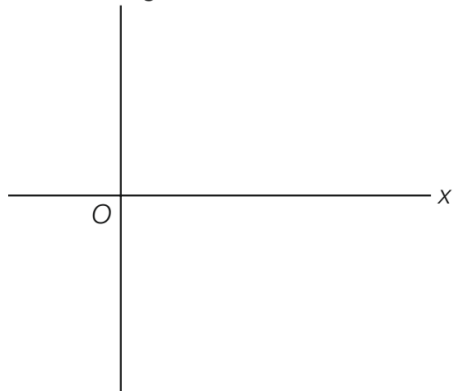
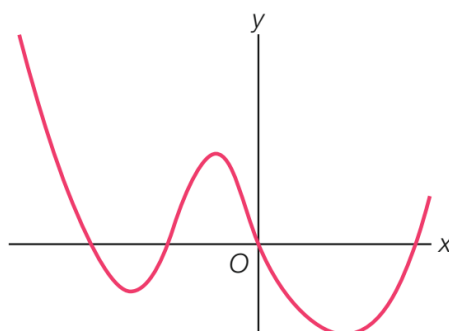
b Op $\langle 5, 8 \rangle$ heeft de hellinggrafiek een laagste punt.

Hoe zie je dit terug in de gegeven grafiek?

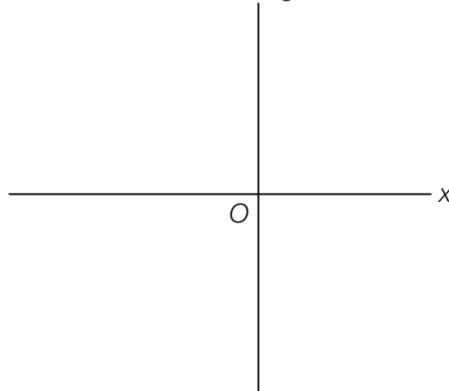
- 33** Hieronder zie je twee grafieken. Schets onder elke grafiek de bijbehorende hellinggrafiek.



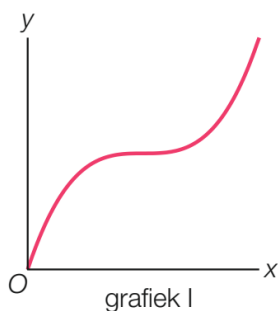
helling



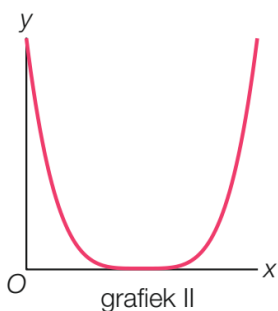
helling



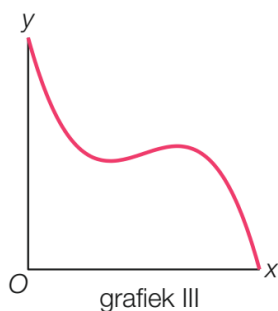
- 34** Hieronder zie je de grafieken I, II, III en IV. De bijbehorende hellinggrafieken staan eronder in een andere volgorde. Zoek bij elke grafiek de juiste hellinggrafiek.



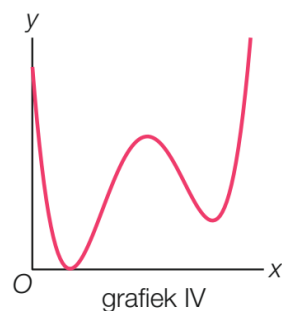
grafiek I



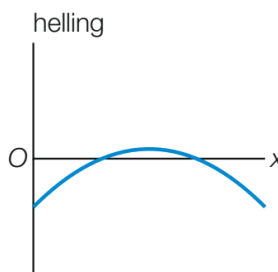
grafiek II



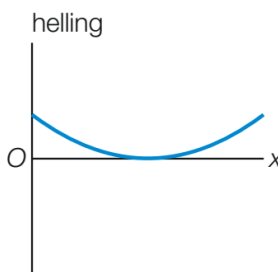
grafiek III



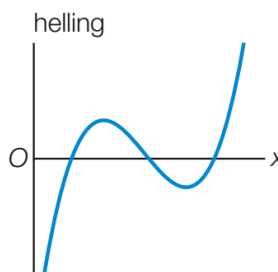
grafiek IV



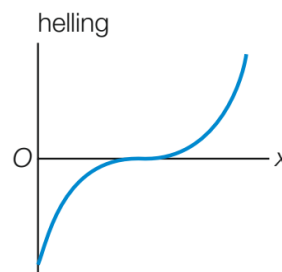
hellinggrafiek A



hellinggrafiek B



hellinggrafiek C



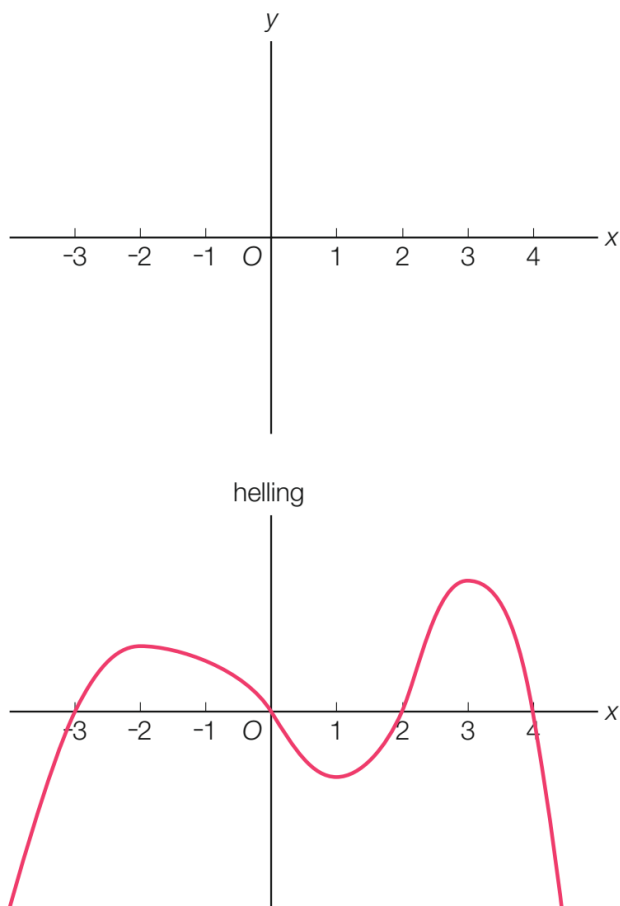
hellinggrafiek D

35



Hiernaast zie je een hellinggrafiek. De oorspronkelijke grafiek, dus de grafiek waarbij deze hellinggrafiek hoort, ontbreekt.

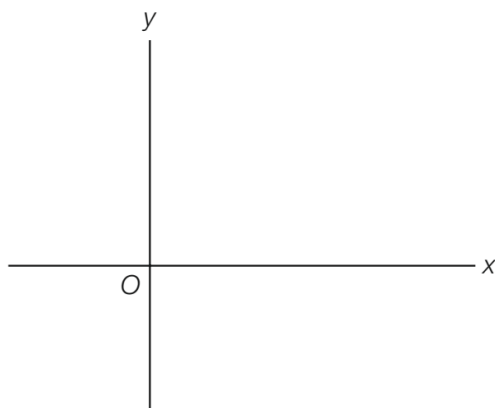
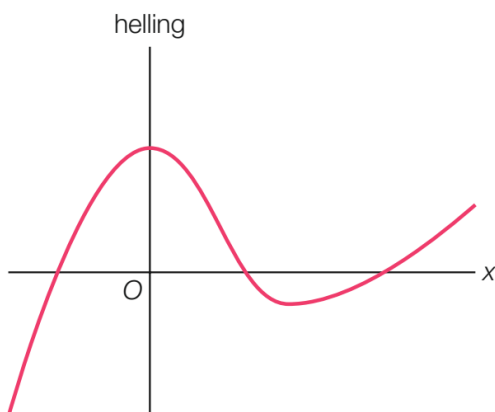
- Voor $x < -3$ ligt de hellinggrafiek onder de x -as.
Licht toe dat hieruit volgt dat de oorspronkelijke grafiek dalend is op $\langle \leftarrow, -3 \rangle$.
- Waarom heeft de oorspronkelijke grafiek een top bij $x = -3$? Is dat een hoogste of een laagste punt?
- Is de oorspronkelijke grafiek stijgend of dalend op $\langle -3, 0 \rangle$?
- Heeft de oorspronkelijke grafiek een hoogste of een laagste punt bij $x = 0$?
- Schets in het assenstelsel een grafiek die de oorspronkelijke grafiek zou kunnen zijn. Waarom zijn er meerdere mogelijkheden?



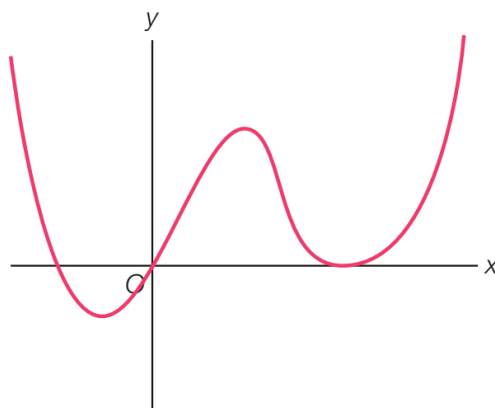
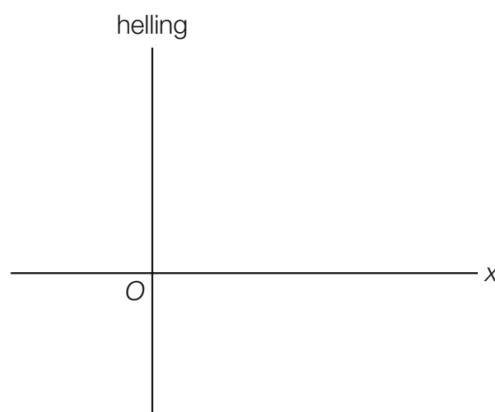
36



- Hieronder zie je een hellinggrafiek. Schets erboven een mogelijke grafiek waarbij deze hellinggrafiek hoort.

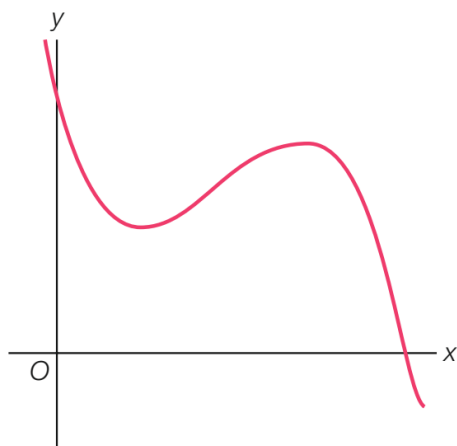


- Hieronder zie je een grafiek. Schets eronder de bijbehorende hellinggrafiek.

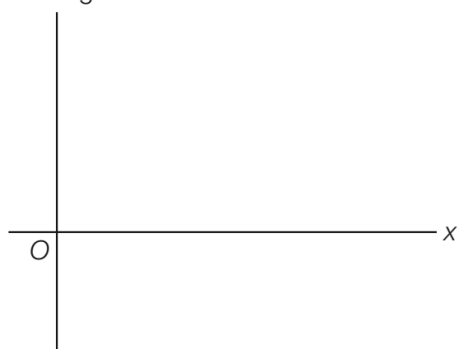
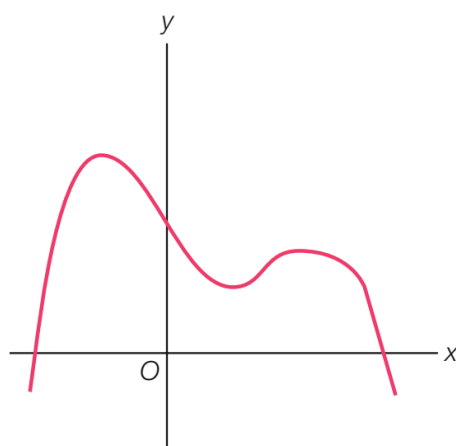


a Hieronder zie je twee grafieken.

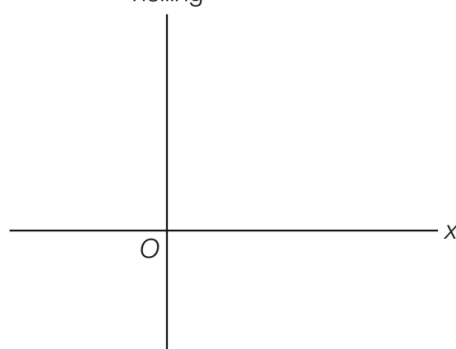
Schets onder elke grafiek de bijbehorende hellinggrafiek.



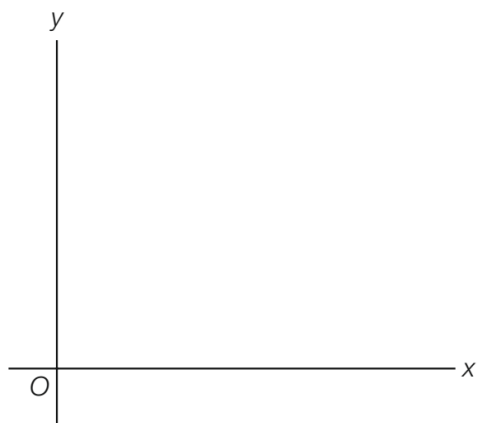
helling



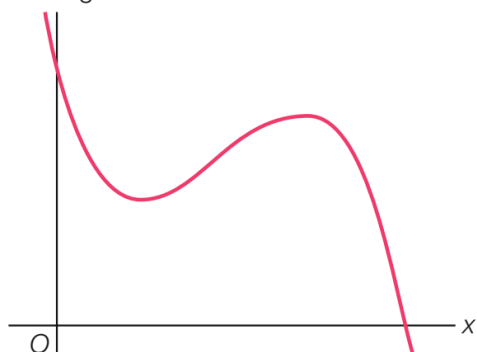
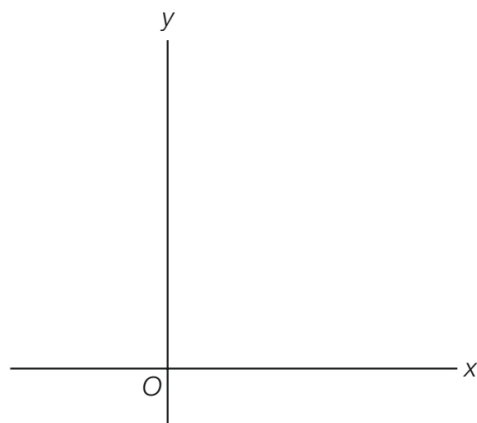
helling



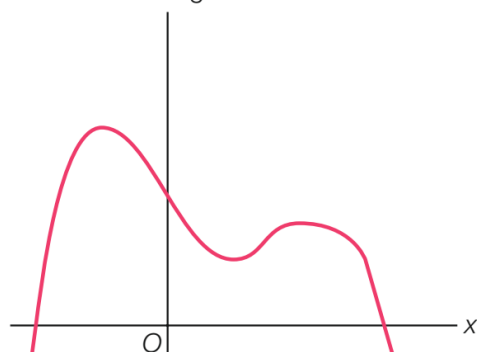
b Hieronder zie je dezelfde grafieken, maar nu zijn dit hellinggrafieken. Schets boven elke hellinggrafiek een mogelijke grafiek waarbij deze hellinggrafiek hoort.



helling

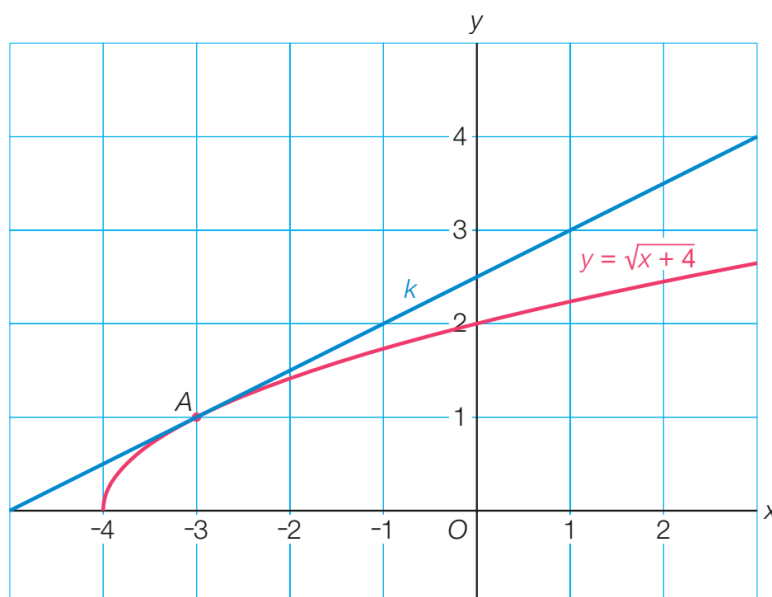


helling



O38 Hiernaast zie je de grafiek van $y = \sqrt{x+4}$ en de raaklijn in het punt $A(-3, 1)$.

- Bereken het differentiequotient van y op $[-3; -2,99]$. Rond af op één decimaal.
- Bereken rc_k .
- Vergelijk de antwoorden van vraag a en b. Wat valt je op?



Theorie C Hellinggrafieken plotten

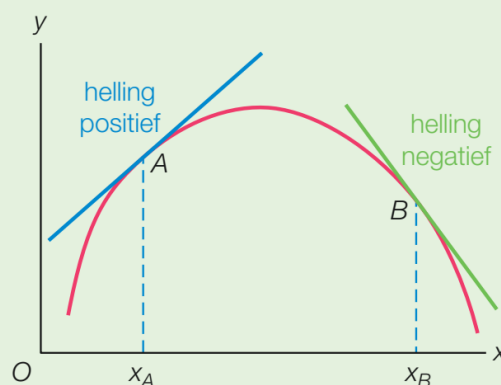
Voor de helling van de grafiek in het punt A bestaat

de notatie $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$. Spreek uit: $d y d x$ voor x is x_A .

Zie de figuur.

Omdat $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A} > 0$, is de helling in het punt A positief, dus y neemt toe.

Omdat $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_B} < 0$, is de helling in het punt B negatief, dus y neemt af.



De grafische rekenmachine heeft een optie om bij een ingevoerde formule de helling voor een willekeurige x te berekenen.

Ook heeft de grafische rekenmachine een optie om bij een ingevoerde formule de hellinggrafiek te plotten. Met deze hellinggrafiek kun je dan allerlei berekeningen uitvoeren, net als met de grafiek van een gewone formule die je hebt ingevoerd. Zo kun je bijvoorbeeld met de hellinggrafiek berekenen voor welke x de grafiek waar de hellinggrafiek bij hoort een bepaalde helling heeft en voor welke x de grafiek het sterkst stijgt.

►GR Neem de module **Helling en hellinggrafiek** door.

Voorbeeld

Het aantal klanten N dat zich op een zaterdag in een warenhuis bevindt, is te benaderen door de formule $N = -1,5t^3 + 12t^2$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 9:00 uur.

- a Bereken de snelheid waarmee het aantal klanten verandert om 11:00 uur.
- b Neemt het aantal klanten om 16:30 uur af of toe? Licht toe.
- c Bereken op welke tijdstippen het aantal klanten toeneemt met 24 per uur.
- d Bereken op welk tijdstip het aantal klanten het sterkst toeneemt.

Aanpak

- d Bij het hoogste punt van de hellinggrafiek hoort de grootste helling van de grafiek van N .

Uitwerking

- a Voer in $y_1 = -1,5x^3 + 12x^2$.

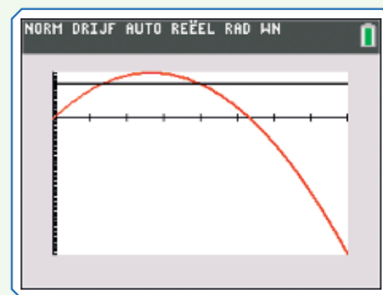
De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 30$.

Het aantal klanten neemt toe met 30 per uur.

- b De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=7,5} \approx -73$

De helling is negatief, dus het aantal klanten neemt af.

- c Plot bij y_2 de hellinggrafiek en voer in $y_3 = 24$.
Optie snijpunt bij y_2 en y_3 geeft $x = 1,33\dots$ en $x = 4$.
Dus om 10:20 uur en om 13:00 uur.
- d De optie maximum bij y_2 geeft $x = 2,66\dots$
Dus om 11:40 uur.



R39 Zie het voorbeeld.



Hoe kun je met de plot van de hellinggrafiek het antwoord van vraag a vinden?

40

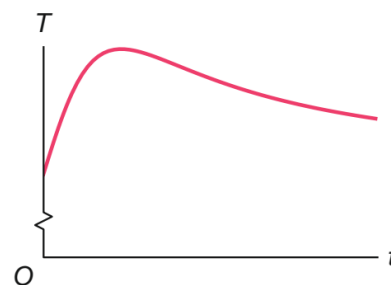


Het aantal vissen in een vijver is gegeven door $N = \frac{2000}{1 + 12 \cdot 0,95^t}$. Hierin is N het aantal vissen en t de tijd in weken met $0 \leq t \leq 120$.

- a Bereken de snelheid waarmee het aantal vissen toeneemt op $t = 10$.
- b Arjen beweert dat de snelheid waarmee het aantal vissen toeneemt op $t = 33$ ongeveer twee keer zo groot is als op $t = 10$.
Onderzoek of Arjen gelijk heeft.
- c Bereken voor welke waarde van t het aantal vissen het snelst toeneemt.
Rond af op één decimaal.

A41

Frank is getroffen door de griep. Zijn lichaamstemperatuur wordt gegeven door de formule $T = 37 + \frac{45t}{t^2 + 70}$. Hierin is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in uren met $t = 0$ op 1 mei om 12:00 uur en $0 \leq t \leq 50$.



- Met welke snelheid neemt de temperatuur van Frank toe op 1 mei om 17:30 uur? Rond af op twee decimalen.
- Toon aan dat de temperatuur van Frank op 2 mei om 8:00 uur afneemt.
- Wat is de maximale lichaamstemperatuur van Frank? Op welke dag en hoe laat wordt die temperatuur bereikt?
- Hoeveel uur is de lichaamstemperatuur boven 39°C ?

A42

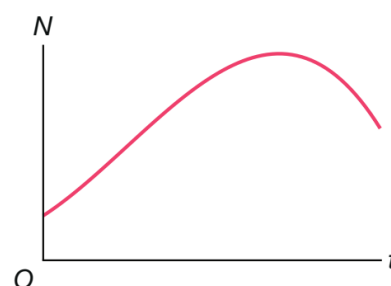
Bij sommige operaties in het onderlichaam krijgt de patiënt als verdoving een zogenaamde ruggenprik (spinale anesthesie). Er wordt dan een verdovend middel in het ruggenmergvocht gespoten. Het is van belang een zodanige hoeveelheid van het verdovend middel in te spuiten, dat de verdoving lang genoeg werkt. In deze opgave gebruiken we voor de hoeveelheid verdovend middel in het lichaam de formule $H = \frac{600t}{4^t}$. Hierin is H in mg en t de tijd in uren na inspuiten met $0 \leq t \leq 2$.

- Bereken met welke snelheid de hoeveelheid verdovend middel afneemt op $t = 1$. Rond in het antwoord af op één decimaal.
- Bereken de gemiddelde snelheid waarmee de hoeveelheid verdovend middel verandert gedurende de eerste drie kwartier. Rond af op gehelen.
- Voor welke waarden van t neemt de hoeveelheid verdovend middel af met 70 mg per uur? Rond af op één decimaal.

A43

Het aantal rendieren N in een natuurpark in Canada is gegeven door de formule $N = -0,2t^3 + 4,5t^2 + 80t + 500$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1995.

- Met welke snelheid nam het aantal rendieren toe op 1 januari 2005?
- Toon aan dat het aantal rendieren op 1 juli 2020 over het hoogtepunt heen was.
- Voor welke t is de snelheid waarmee het aantal rendieren toeneemt het grootst?
- Voor welke t is de snelheid waarmee het aantal rendieren verandert gelijk aan 0? Rond af op één decimaal.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan in een punt van een grafiek de helling bepalen met behulp van een raaklijn.
- ☐ Ik kan de hellinggrafiek schetsen bij een gegeven grafiek.
- ☐ Ik kan een mogelijke grafiek schetsen als de bijbehorende hellinggrafiek gegeven is.
- ☐ Ik kan met de GR de helling berekenen in een punt op de grafiek van een gegeven formule.
- ☐ Ik kan met de GR bij een gegeven formule de hellinggrafiek plotten.

► OPGAVE C5
THEORIE A

► OPGAVE C6a
THEORIE B

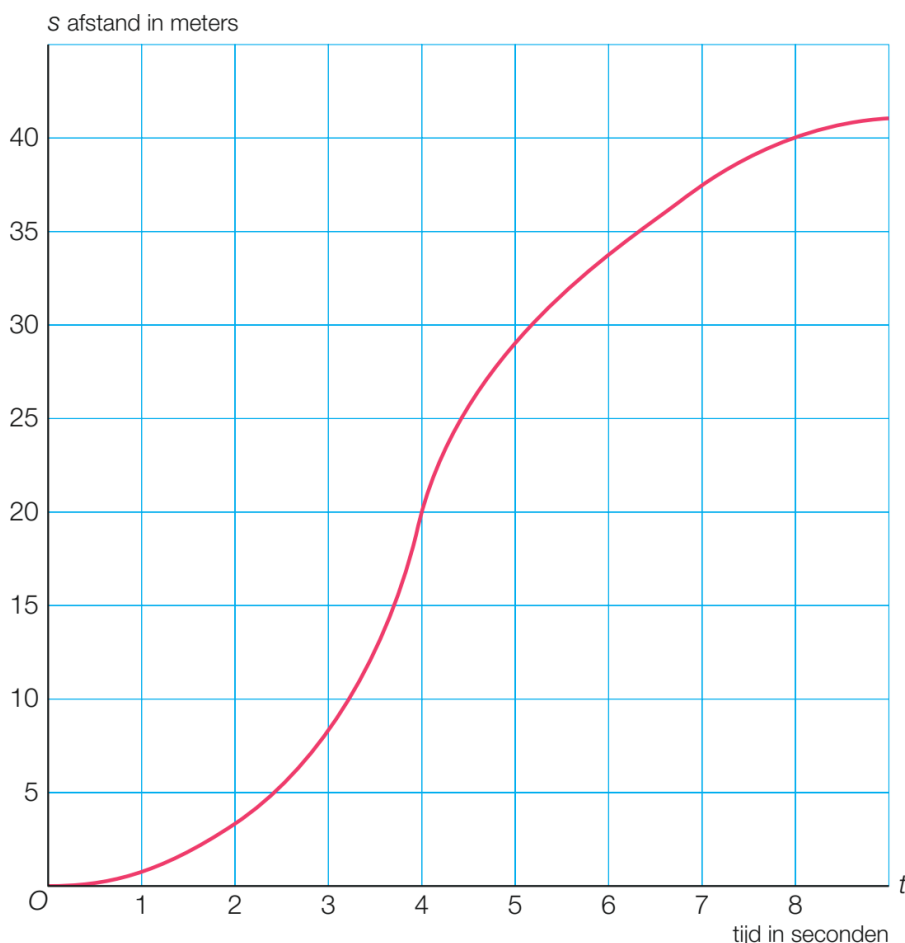
► OPGAVE C6b
THEORIE B

► OPGAVE C7a
THEORIE C

► OPGAVE C7bc
THEORIE C

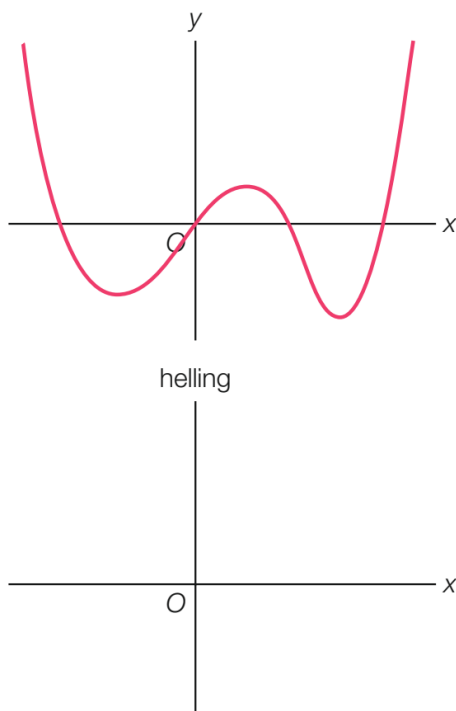
C5 Hieronder zie je een tijd-afstandgrafiek.

- a** Bepaal met behulp van de figuur de snelheid in m/s op $t = 2$ en op $t = 6,5$. Rond af op één decimaal.
- b** Schat met behulp van de grafiek voor welke t de snelheid maximaal is.

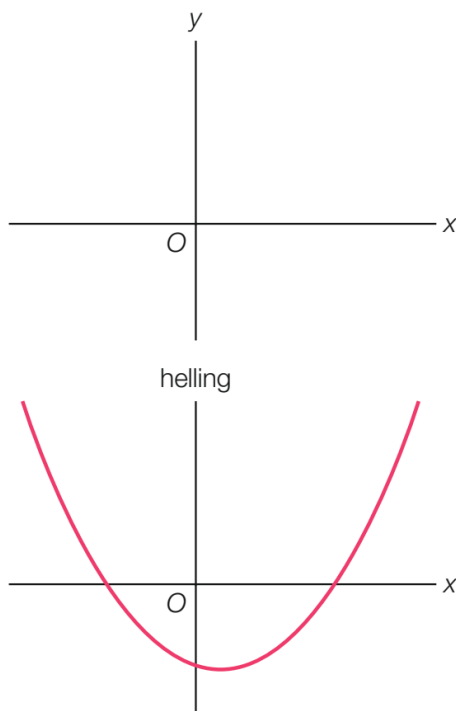


C6

a Hieronder zie je een grafiek. Schets eronder de bijbehorende hellinggrafiek.



b Hieronder zie je een hellinggrafiek. Schets erboven een mogelijke grafiek waarbij deze hellinggrafiek hoort.

**C7**

In een badplaats wordt de temperatuur van het zeewater bijgehouden. Hierbij hoort de formule $T = -0,14t^3 + 1,23t^2 - 0,21t + 5$. Hierin is T de temperatuur van het zeewater in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in maanden met $0 \leq t \leq 7$ en $t = 0$ op 1 februari.

- Bereken de snelheid waarmee de temperatuur van het zeewater toenam op 1 april. Rond af op één decimaal.
- Bereken op welke dag de temperatuur van het zeewater afnam met $0,57^{\circ}\text{C}$ per maand.
- Er was een dag waarop de temperatuur van het zeewater het snelst toenam. Was dit net voor, of net na 1 mei? Licht toe.

Antwoorden

C5 a 3,3 m/s en 3,8 m/s

b 4

C6 a *

b *

C7 a $3,0^{\circ}\text{C}$ per maand

b 1 augustus

c net voor 1 mei *

8.3 Differentiëren

Kennis en vaardigheden

- Je kent de begrippen afgeleide functie en differentiëren.
- Je kunt de functies $f(x) = a$, $f(x) = ax$ en $f(x) = ax^2$ differentiëren.
- Je kunt de somregel en de verschilregel voor het differentiëren toepassen.
- Je kunt de functie $f(x) = ax^n$ voor een positieve en gehele n differentiëren.

Voorkennis Functies

Bij een functie hoort bij elke waarde van x één waarde van y .

Zo hoort bij de functie $f(x) = 2x^2 + 4$ bij $x = 3$ de functiewaarde $f(3) = 2 \cdot 3^2 + 4 = 22$.

Het punt $(3, 22)$ ligt dus op de grafiek van f .

We noemen $f(x) = 2x^2 + 4$ het functievoorschrift van de functie f .

V3 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3x - 2$ en $g(x) = -2x^2 + 5x - 3$.

a Bereken $f(-1)$ en $g(2)$.

b Bereken $\frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)}$.

c De functie h is gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.

Stel het functievoorschrift van h op. Herleid je antwoord.

O44 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = 0,75x^2$ en de hellinggrafiek van f .

De hellinggrafiek van f is een rechte lijn.

a Geef de formule van deze lijn.

Gegeven is de functie $g(x) = 3x$.

De hellinggrafiek van g is een horizontale lijn.

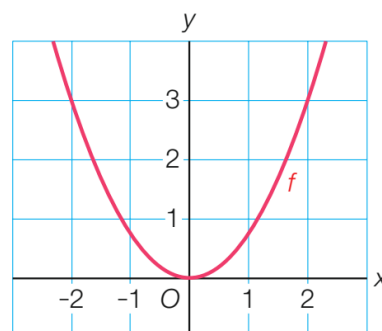
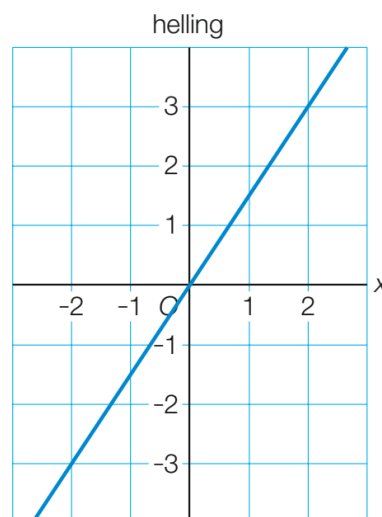
b Geef hiervoor een verklaring.

c Welke formule hoort bij die lijn?

Gegeven is de functie $h(x) = -4$.

De hellinggrafiek van h is een horizontale lijn.

d Welke formule hoort bij die lijn?



Theorie A Afgeleide functie

Bij de grafiek van een functie f hoort een hellinggrafiek. En zo hoort bij een functie f een **hellingfunctie**. In plaats van hellingfunctie wordt meestal de naam **afgeleide functie**, kortweg **afgeleide** gebruikt. De afgeleide van f wordt genoteerd als f' . Spreek uit f accent.

Het is prettig als je van een functie f direct de formule van de afgeleide f' kunt opschrijven.

In opgave 44 heb je gezien: van $f(x) = 0,75x^2$ is de afgeleide $f'(x) = 1,5x$.
Dit is een voorbeeld van de regel: van $f(x) = ax^2$ is de afgeleide $f'(x) = a \cdot 2x$.

Ook heb je gezien: van $g(x) = 3x$ is de afgeleide $g'(x) = 3$.
Dit is een voorbeeld van de regel: van $f(x) = ax$ is de afgeleide $f'(x) = a$.

Verder heb je gezien: van $h(x) = -4$ is de afgeleide $h'(x) = 0$.
Dit is een voorbeeld van de regel: van $f(x) = a$ is de afgeleide $f'(x) = 0$.

Regels voor de afgeleide

$f(x) = a$	geeft	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	geeft	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2$	geeft	$f'(x) = a \cdot 2x$

Het berekenen van de formule van de afgeleide heet **differentiëren**.

Om $f(x) = 5x^2 + 8x + 3$ te differentiëren, neem je term voor term de afgeleide.

Dus $f(x) = 5x^2 + 8x + 3$ geeft $f'(x) = 5 \cdot 2x + 8 + 0 = 10x + 8$.

Je hebt hier een voorbeeld van de **somregel voor het differentiëren**.

somregel

$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft
 $s'(x) = f'(x) + g'(x)$

Om $f(x) = (3x - 2)(5x + 3)$ te differentiëren, werk je eerst de haakjes weg en gebruik je de **verschilregel voor het differentiëren**.

verschilregel

$v(x) = f(x) - g(x)$ geeft
 $v'(x) = f'(x) - g'(x)$

Dus $f(x) = (3x - 2)(5x + 3) = 15x^2 + 9x - 10x - 6 = 15x^2 - x - 6$.

Dit geeft $f'(x) = 30x - 1$.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = -4x^2 - 3x + 17$

b $g(t) = (5t - 7)^2$

Uitwerking

a $f(x) = -4x^2 - 3x + 17$ geeft $f'(x) = -8x - 3$

b $g(t) = (5t - 7)^2 = 25t^2 - 70t + 49$ geeft $g'(t) = 50t - 70$

45 Differentieer.



a $f(x) = 7x + 10$

b $g(x) = 5x^2 - 7x + 5$

c $h(x) = 0,02x^2 + 1,7x$

d $k(x) = -2\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$

46 Bereken de afgeleide.



a $g(p) = -12p^2 + 30p$

b $K(q) = -0,01q^2 + 20q$

c $f(x) = (2x - 7)(8 + x)$

d $V(t) = 100 - (t^2 - 6t)$

A47 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = 3x - 2(x^2 + 1)$

b $P(q) = 0,05q^2 - 200q$

c $g(x) = 3(2x - 3)^2$

d $h(a) = 50 - (\frac{1}{2}a - 4)^2$

A48 Differentieer.



a $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x)$

b $g(x) = (3x + 6)^2$

c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(x - 1) + 8$

d $k(x) = -3(x - 1)(5 - 2x) - 8(x - 7)$

A49 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$.



De formule van de hellinggrafiek is $y = \frac{1}{2}x - 2$.

a Licht dit toe.

b Bereken met de formule van de hellinggrafiek de helling voor $x = 6$.

c Bereken voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -1 .

O50 Hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2$ en de

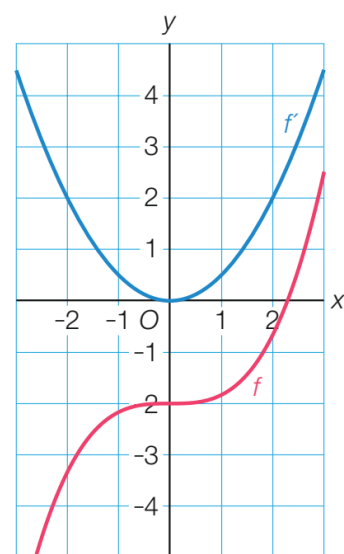


hellinggrafiek van f .

De hellinggrafiek is een parabool. Er geldt $f'(x) = ax^2$.

Je ziet dat de grafiek van f' door het punt $(2, 2)$ gaat.

Bereken a .



Theorie B De afgeleide van $f(x) = ax^n$

In opgave 50 heb je gezien dat

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2 \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Algemeen:

$$f(x) = ax^3 \text{ geeft } f'(x) = a \cdot 3x^2.$$

En zo kun je nagaan dat

$$f(x) = ax^4 \text{ geeft } f'(x) = a \cdot 4x^3 \text{ en}$$

$$f(x) = ax^5 \text{ geeft } f'(x) = a \cdot 5x^4.$$

$$f(x) = ax^n \text{ geeft } f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$$

Je gebruikt hier de algemene regel

$$f(x) = a \cdot g(x) \text{ geeft } f'(x) = a \cdot g'(x).$$

In het voorbeeld hieronder moet bij vraag c de afgeleide van $h(x) = 3px^5 - 5x + p$ worden berekend.

Hierbij is p een constante.

Daarom is de afgeleide van $3px^5$ gelijk aan $3p \cdot 5x^4 = 15px^4$ en is de afgeleide van p gelijk aan 0.

oude exponent ervoor

$$f(x) = 4x^3 \text{ geeft } f'(x) = 4 \cdot 3x^2$$

nieuwe exponent 1 minder

$$h(x) = 3px^5 - 5x + p$$

oude exponent ervoor, nieuwe exponent 1 minder

$$h'(x) = 3p \cdot 5x^4 - 5 + 0$$

p is een constante, dus afgeleide is 0

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 10x^7 - 6x^4 - 3$

b $g(t) = -3t^5 + 3t^2 + 4$

c $h(x) = 3px^5 - 5x + p$

Uitwerking

a $f(x) = 10x^7 - 6x^4 - 3$ geeft $f'(x) = 70x^6 - 24x^3$

b $g(t) = -3t^5 + 3t^2 + 4$ geeft $g'(t) = -15t^4 + 6t$

c $h(x) = 3px^5 - 5x + p$ geeft $h'(x) = 15px^4 - 5$

51 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$

b $g(x) = -2x^7 - 3x^5 + 3,4$

c $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$

d $k(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3$

52 Differentieer.



a $f(x) = 3(2x + 1)^2$

b $g(x) = 7(3x - 2)(x^2 + 2x)$

c $h(x) = 3px^8 - px^4$

d $k(x) = x^3 + a$

53 Bereken de afgeleide.



- a $W(q) = -0,02q^2 + 8q - 5$
- b $N(t) = 5t^3 + 8t^2 - t$
- c $R(q) = 5q(q - 70)^2$
- d $L(a) = -0,006a^4 + 0,2a^3(a - 5) - 8$

A54 Differentieer.



- a $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x)$
- b $g(x) = x^5(x^3 - 4x) - 2x$
- c $N(t) = (3t^3 - 1)^2$
- d $F(a) = 0,16a^2(Q - 3a)$

A55 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 5$.



- a Bereken de formule van de hellinggrafiek.
- b Bereken met de formule van de hellinggrafiek de helling voor $x = 4$.
- c Bereken voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -1 .

E56 De regel $f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ is een voorbeeld van de algemene regel $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$, waarbij c een constante is.

Gegeven is dat van de functie $h(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ de afgeleide is $h'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.

Bereken de afgeleide van de functie $k(x) = \frac{4x-2}{3x+3}$.

Geschiedenis Differentiaalrekening

Zo omstreeks 1600 was de wetenschap volop in ontwikkeling. De Italiaanse geleerde Galileo Galilei probeerde de beweging van een vallend voorwerp te beschrijven met een formule. Men zegt dat hij hierbij kogeltjes liet vallen van de scheve toren van Pisa. Een ander probleem waar de wetenschap naarstig een oplossing voor zocht, was de wiskundige beschrijving van de baan van een kanonskogel. Dit was een probleem dat gezien de talloze vijandelijkheden in Europa veel aandacht kreeg. Ook waren geleerden druk bezig met het bestuderen van de planeetbanen. En dan waren er nog twee eeuwenoude problemen uit de tijd van de Grieken waarmee men nog steeds worstelde. Hoe vind je de oppervlakte van een gebied ingesloten door willekeurige krommen? En hoe krijg je de formule van de raaklijn in een punt aan een willekeurige kromme? Veel wetenschappers hielden zich in de 17^e eeuw met dit soort problemen bezig en stukje bij beetje ontwikkelde zich de theorie van de differentiaalrekening. Maar voor het zover was, moest er heel wat gebeuren. Onafhankelijk van elkaar slaagden Newton (omstreeks 1670) en Leibniz (1675) er ten slotte in een allesomvattende theorie te ontwikkelen.



Galileo Galilei

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik ken de begrippen afgeleide functie en differentiëren.
- ☐ Ik kan de functies $f(x) = a$, $f(x) = ax$ en $f(x) = ax^2$ differentiëren.
- ☐ Ik kan de somregel en de verschilregel voor het differentiëren toepassen.
- ☐ Ik kan de functie $f(x) = ax^n$ voor een positieve en gehele n differentiëren.

► THEORIE A

► OPGAVE C8
THEORIE A

► OPGAVE C8
THEORIE A

► OPGAVE C9
THEORIE B

C8 Bereken de afgeleide.

- a** $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$
- b** $g(x) = 0,02x^2 + 1,7x$
- c** $h(x) = 4x - 2(x - 3)^2$
- d** $N(t) = 0,01t^2 + (0,2t + 1)^2$

C9 Differentieer.

- a** $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$
- b** $g(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$
- c** $h(x) = 3(2x^3 + 1)^2$
- d** $P(n) = an^5 - 2n^3 + 6n + a^2$

Antwoorden

- C8 a** $f'(x) = 10x - 3$
- b** $g'(x) = 0,04x + 1,7$
- c** $h'(x) = -4x + 16$
- d** $N'(t) = 0,1t + 0,4$
- C9 a** $f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2$
- b** $g'(t) = -t^2 + 13t$
- c** $h'(x) = 72x^5 + 36x^2$
- d** $P'(n) = 5an^4 - 6n^2 + 6$

8.4 Notaties en regels voor de afgeleide

Kennis en vaardigheden

- Je kent de verschillende notaties voor de afgeleide.
- Je kunt de functie $f(x) = ax^n$ voor elke n differentiëren.
- Je kunt de kettingregel gebruiken bij het differentiëren van samengestelde functies.

057



- a** Gegeven is de functie $f(x) = 5x^2 + 3a^4$.
Bereken $f'(x)$.
- b** Gegeven is de functie $f(a) = 5x^2 + 3a^4$.
Bereken $f'(a)$.
- c** De afgeleide van $y = 8x^3$ wordt soms genoteerd als $y' = 24x^2$.
Noem een nadeel van de notatie met y' als je $y = 5x^2 + 3a^4$ moet differentiëren.

Theorie A Notaties voor de afgeleide

Er zijn verschillende notaties voor de afgeleide van $y = f(x)$.

Behalve $f'(x)$ komt ook de notatie $\frac{dy}{dx}$ voor.

Dus de afgeleide van $y = 3x^2 + 8x$ is $\frac{dy}{dx} = 6x + 8$.

Bij $N = t^3 + 5t^2$ is niet x maar t de variabele.

Je krijgt $N = t^3 + 5t^2$ geeft $\frac{dN}{dt} = 3t^2 + 10t$.

Er is **naar t gedifferentieerd**.

$R = -0,01q^2 + 10q$ geeft $\frac{dR}{dq} = -0,02q + 10$

Er is naar q gedifferentieerd.

De **d-notatie** is vooral handig als in een formule twee of meer variabelen voorkomen. Je kunt dan zien naar welke variabele gedifferentieerd is.

Bij $y = 5x^3 + a^2$ is

- $\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 0 = 15x^2$ y is naar x gedifferentieerd.
- $\frac{dy}{da} = 0 + 2a = 2a$ y is naar a gedifferentieerd.

Afspraak

Notaties voor de afgeleide van $y = f(x)$ zijn $\frac{dy}{dx}$ en $f'(x)$.

58 Gegeven zijn de formules $y = 7x^4 - a^3$, $R = q^3 - 5pq$ en $B = a^3 - 3t^2$.

□ ⊗ * Bereken.

a $\frac{dy}{dx}$

c $\frac{dR}{dq}$

e $\frac{dB}{dt}$

b $\frac{dy}{da}$

d $\frac{dR}{dp}$

f $\frac{dB}{da}$

A59 Gegeven is de formule $R = 5a^2 - 3ab^3 - 5abc + 5a - 3$.

□ ⊗ * Bereken $\frac{dR}{da}$, $\frac{dR}{db}$ en $\frac{dR}{dc}$.

60 Je weet dat $\frac{5}{x^2}$ te schrijven is als $5x^{-2}$ en dat $3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$.

□ ⊗ * Schrijf in de vorm $y = ax^n$.

a $y = \frac{10}{x^3}$

c $y = \frac{2}{x}$

e $y = 4x\sqrt{x}$

b $y = 8 \cdot \sqrt[3]{x}$

d $y = \frac{7}{\sqrt{x}}$

f $y = \frac{3}{4x^2 \cdot \sqrt{x}}$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$$

$$\sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}$$

Theorie B De afgeleide van $y = ax^n$ met negatieve en gebroken n

Om de afgeleide van $y = x^{-1}$ te krijgen, gebruik je de regel

$$y = ax^n \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = a \cdot nx^{n-1}.$$

$$\text{Je krijgt } y = x^{-1} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2}.$$

De regel $y = ax^n$ geeft $\frac{dy}{dx} = a \cdot nx^{n-1}$ geldt voor elke n .

$$\text{Voor } a = 4 \text{ en } n = -2 \text{ krijg je } y = 4x^{-2} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 4 \cdot -2x^{-2-1} = -8x^{-3}.$$

$$\text{Voor } a = 7 \text{ en } n = 0,6 \text{ krijg je } y = 7x^{0,6} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 7 \cdot 0,6x^{0,6-1} = 4,2x^{-0,4}.$$

Je kunt nu ook de afgeleide van $y = \frac{5}{x^2} + 3x^4 + 2$ berekenen.

$$\text{Immers } y = \frac{5}{x^2} + 3x^4 + 2 = 5x^{-2} + 3x^4 + 2, \text{ dus}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot -2x^{-3} + 3 \cdot 4x^3 = -10x^{-3} + 12x^3 = -\frac{10}{x^3} + 12x^3.$$

$$\text{En bij } y = x\sqrt{x} \text{ krijg je } y = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}, \text{ dus } \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Afspraak

Schrijf de afgeleide zonder negatieve en gebroken exponent(en), tenzij de gegeven formule al een gebroken of negatieve exponent bevat.

Dus bij $f(x) = x^{1,3}$ laat je $f'(x) = 1,3x^{0,3}$ staan.

Bij $g(x) = 6x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ krijg je: $g(x) = 6x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = 6x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 6x^{2\frac{1}{3}}$

geeft $g'(x) = 6 \cdot 2\frac{1}{3}x^{1\frac{1}{3}} = 14 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 14x \cdot \sqrt[3]{x}$.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = \frac{3}{x} + 5x^2$

b $g(q) = 5\sqrt{q} + 2q$

c $h(a) = \frac{1}{5a^2}$

d $k(x) = 6x^2 \cdot \sqrt{x}$

Uitwerking

a $f(x) = \frac{3}{x} + 5x^2 = 3x^{-1} + 5x^2$ geeft $f'(x) = -3x^{-2} + 10x = -\frac{3}{x^2} + 10x$

b $g(q) = 5\sqrt{q} + 2q = 5q^{\frac{1}{2}} + 2q$ geeft $g'(q) = 2\frac{1}{2}q^{-\frac{1}{2}} + 2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} + 2 = \frac{5}{2\sqrt{q}} + 2$

c $h(a) = \frac{1}{5a^2} = \frac{1}{5}a^{-2}$ geeft $h'(a) = -\frac{2}{5}a^{-3} = -\frac{2}{5a^3}$

d $k(x) = 6x^2 \cdot \sqrt{x} = 6x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 6x^{2\frac{1}{2}}$ geeft

$$k'(x) = 15x^{1\frac{1}{2}} = 15x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 15x\sqrt{x}$$

61 Differentieer.



a $f(x) = \frac{6}{x^3} + 6x^3$

b $k(q) = \frac{1}{q}$

c $g(x) = 3x^6 - \frac{4}{x}$

d $m(t) = 12t \cdot \sqrt[4]{t}$

e $l(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2p^2}$

f $h(x) = 3x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$

A62 Bereken de afgeleide.



a $y = x + \frac{4}{\sqrt{x}}$

b $y = 3x^2 \cdot \sqrt{x}$

c $y = 3x - x^{-1,65}$

d $y = 10x^{1,72} + \frac{6}{x^{1,35}}$

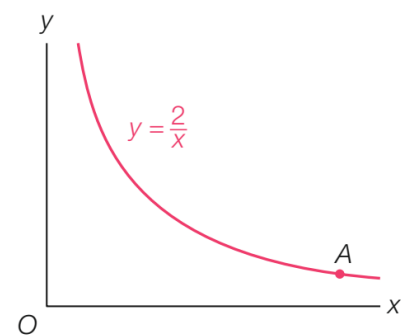
e $y = \frac{2}{5x} + \frac{5x}{2}$

f $y = (1+x)\sqrt{x}$

63 Hiernaast zie je de grafiek van $y = \frac{2}{x}$ met $x > 0$.



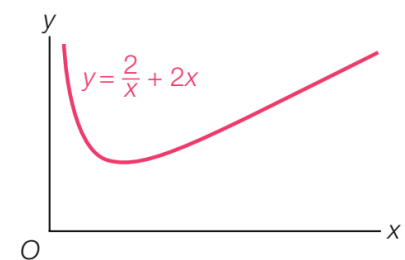
- a** Op de grafiek ligt het punt A met $x_A = 4$. Bereken y_A en de helling van de grafiek in A .
- b** Bereken met de afgeleide de helling van de grafiek in het punt B met $x_B = 1$.
- c** Bereken met behulp van differentiëren de snelheid waarmee y verandert voor $x = 5$.
- d** Bereken de gemiddelde verandering op het interval $[1, 5]$.



64 Hiernaast zie je de grafiek van $y = \frac{2}{x} + 2x$ met $x > 0$.



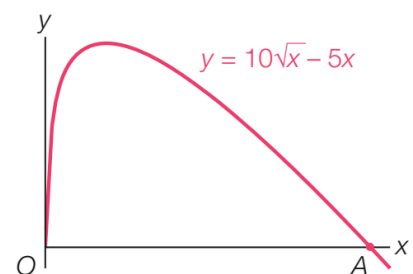
- a** Bereken met de afgeleide met welke snelheid y toeneemt voor $x = 4$.
- b** Toon met de afgeleide aan dat de helling van de grafiek in het punt $P(\frac{1}{2}, 5)$ negatief is.
- c** Toon met de afgeleide aan dat de raaklijn in het punt $Q(1, 4)$ horizontaal is.



A65 Hiernaast zie je de grafiek van $y = 10\sqrt{x} - 5x$. De grafiek snijdt de positieve x -as in het punt A .



- a** Toon aan dat $x_A = 4$ en bereken met de afgeleide de helling van de grafiek in A .
- b** Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee y verandert voor $x = \frac{1}{4}$.
- c** Toon met de afgeleide aan dat de raaklijn in het punt $B(1, 5)$ horizontaal is.



E66 In de figuur bij opgave 64 zie je de grafiek van $y = \frac{2}{x} + 2x$ met $x > 0$.



De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$. Stel de formule op van l .

Gegeven is de functie $k(x) = (3x^3 + 7)^2$. De formule van k is te noteren als $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = g^2$ en $g(x) = 3x^3 + 7$.

Noteer de volgende functies op dezelfde manier met functies f en g .

a $k(x) = (3 - x^5)^6$

b $k(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c $k(x) = \frac{2}{(x + 8)^3}$

Theorie C De kettingregel

De functie $k(x) = (x^2 - 5x)^4$ is een voorbeeld van een **samengestelde functie**. De functie is samengesteld uit de **schakels** $f(g) = g^4$ en $g(x) = x^2 - 5x$.

Een functie die geschreven is als een ketting van schakels heet ook wel een **kettingfunctie**.

Voor het differentiëren van een kettingfunctie gebruik je de **kettingregel**.

Kettingregel

$k(x) = f(g(x))$ geeft $k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Bij $k(x) = (x^2 - 5x)^4$ krijg je $k'(x) = \underbrace{4(x^2 - 5x)^3}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{(2x - 5)}_{g'(x)}$.

Bij het differentiëren van $k(x) = \sqrt{3x + 1}$ krijg je

$k(x) = \sqrt{3x + 1} = (3x + 1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $k'(x) = \frac{1}{2}(3x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}$.

Voorbeeld

Differentieer.

a $A = 4(t^2 - 3t)^{0,4}$

b $y = \frac{5}{(2x - 7)^4}$

c $N = 2p + \sqrt{3p^2 + 4}$

Uitwerking

a $A = 4(t^2 - 3t)^{0,4}$ geeft $\frac{dA}{dt} = 1,6(t^2 - 3t)^{-0,6} \cdot (2t - 3)$

b $y = \frac{5}{(2x - 7)^4} = 5(2x - 7)^{-4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -20(2x - 7)^{-5} \cdot 2 = -\frac{40}{(2x - 7)^5}$

c $N = 2p + \sqrt{3p^2 + 4} = 2p + (3p^2 + 4)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$\frac{dN}{dp} = 2 + \frac{1}{2}(3p^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6p = 2 + 3p \cdot (3p^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} = 2 + \frac{3p}{\sqrt{3p^2 + 4}}$

68 Differentieer.



a $y = -3(2x - 5)^6$

b $y = (4x^2 - x)^{1,4}$

c $y = 2\sqrt{3 - 7x}$

d $y = \frac{8}{\sqrt{3x + 2}}$

e $y = \frac{4}{(2 - x^2)^3}$

f $y = x^2 + \sqrt{x^2 + x}$

69 Gegeven zijn $S = \frac{2}{(3 - a^2)^5}$, $K = \sqrt{2q + 1}$ en $W = 6(p^2 - 2p + 5)^{0,7}$.



Bereken.

a $\frac{dS}{da}$

b $\frac{dK}{dq}$

c $\frac{dW}{dp}$

A70 Bereken de afgeleide.



a $K = (5q + 2)^4 - 3q$

b $y = \frac{5}{(2x + 1)^8} + 4x^2$

c $B = \frac{8}{a^3} + 6\sqrt{a^3 + 2}$

d $P = \sqrt[3]{3q - 5}$

E71 Er geldt $y = \sqrt{x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.



a Toon dit aan.

De regel $y = \sqrt{x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$ kun je gebruiken

om in één keer de afgeleide van $y = \sqrt{3x + 1}$ op te schrijven.

Je krijgt $y = \sqrt{3x + 1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{3x + 1}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}$.

b Gebruik deze regel om in één keer de afgeleide op te schrijven van de formules in de opgaven 68c, 69b en 70c.

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \text{ geeft} \\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$$

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik ken de verschillende notaties voor de afgeleide.
- ☐ Ik kan de functie $f(x) = ax^n$ voor elke n differentiëren.
- ☐ Ik kan de kettingregel gebruiken bij het differentiëren van samengestelde functies.

► OPGAVE C10
THEORIE A
► OPGAVE C11
THEORIE B
► OPGAVE C12
THEORIE C

- C10** a Bereken $\frac{dR}{dx}$ bij $R = 3x^3 + 5a^2x - 2x$.
b Bereken $P'(a)$ bij $P(a) = 2a^4 + 5a^2 - a$.

- C11** a Bereken de afgeleide van $y = \frac{2}{x^4}$.
b Differentieer de formule $y = x^3 \cdot \sqrt{x}$.
c Gegeven is de formule $M = \frac{8}{t^{2,5}} + 15t^{0,3}$.
Bereken $\frac{dM}{dt}$.

- C12** a Bereken de afgeleide van de functie $k(x) = \sqrt{x^2 + x}$.
b Differentieer $N = \frac{6}{(2a - 1)^3} - 5a^2$.

Antwoorden

- C10 a** $\frac{dR}{dx} = 9x^2 + 5a^2 - 2$
b $P'(a) = 8a^3 + 10a - 1$
- C11 a** $\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{x^5}$
b $\frac{dy}{dx} = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x}$
c $\frac{dM}{dt} = -20t^{-3,5} + 4,5t^{-0,7}$
- C12 a** $k'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$
b $\frac{dN}{da} = \frac{-36}{(2a - 1)^4} - 10a$

8.5 Extreme waarden en de afgeleide

Kennis en vaardigheden

- Je kunt extreme waarden berekenen met de afgeleide.
- Je kunt met de afgeleide aantonen dat y een extreme waarde heeft voor $x = a$.
- Je kunt berekeningen met de afgeleide uitvoeren bij formules met een parameter.

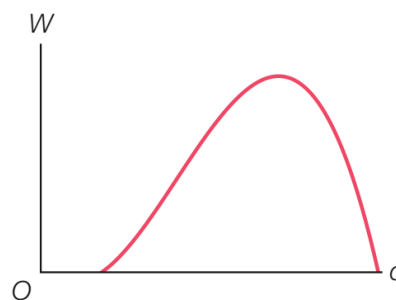
072
□ ⊗ *

Hiernaast zie je de grafiek van $W = -0,1q^3 + 12q^2 - 210q + 500$ met $10 \leq q \leq 100$.

a Bereken $\frac{dW}{dq}$.

b Toon met de afgeleide aan dat $\left[\frac{dW}{dq}\right]_{q=70} = 0$.

Wat volgt hieruit voor het punt op de grafiek dat bij $q = 70$ hoort?



Theorie A Extreme waarden berekenen met de afgeleide

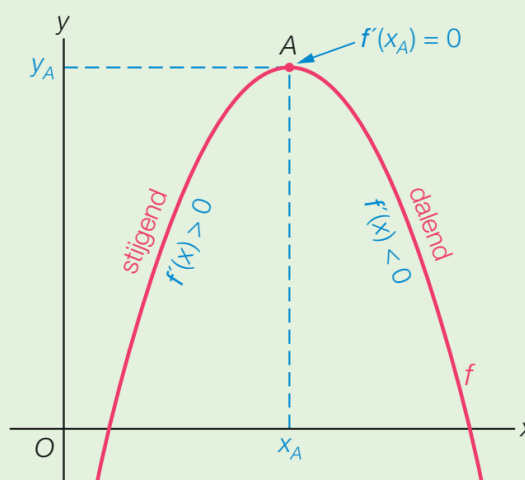
De afgeleide f' van een functie verschaft veel informatie over de grafiek van de functie.

- Is $f'(x) > 0$ op een interval, dan is f stijgend op dat interval.
- Is $f'(x) < 0$ op een interval, dan is f dalend op dat interval.

In de grafiek hiernaast is A een top, dus $f'(x_A) = 0$.

Het maximum van f is y_A .

Maxima en minima heten **extreme waarden**.



Werkschema: een extreme waarde van y berekenen met de afgeleide

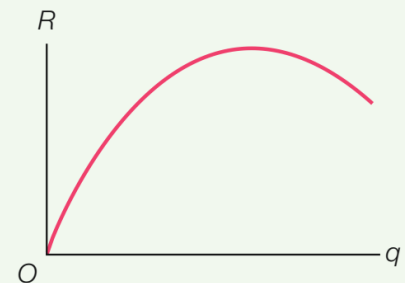
- 1 Bereken de afgeleide $\frac{dy}{dx}$.
- 2 Los de vergelijking $\frac{dy}{dx} = 0$ op.
- 3 Kijk in de grafiek van y of je met een maximum of een minimum te maken hebt.
- 4 Bereken de extreme waarde door de gevonden x -waarde in de formule van y in te vullen.

Bij de meeste opgaven is de grafiek gegeven. Je kunt hierin zien of je met een maximum of een minimum te maken hebt. Is de grafiek niet gegeven, maak dan zelf een schets in je uitwerking. Gebruik bij het maken van de schets de GR.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $R = -0,3q^{1,8} + 25q^{0,9}$. Hierin is R de opbrengst in euro's bij een productie van q stuks met $0 < q < 100$. Zie de grafiek hiernaast.

Bereken met de afgeleide bij welke productie de opbrengst maximaal is. Hoeveel is deze opbrengst? Geef het antwoord in gehele euro's.



Uitwerking

$$R = -0,3q^{1,8} + 25q^{0,9} \text{ geeft } \frac{dR}{dq} = -0,54q^{0,8} + 22,5q^{-0,1}$$

$$\frac{dR}{dq} = 0 \text{ geeft } -0,54q^{0,8} + 22,5q^{-0,1} = 0$$

$$\text{Voer in } y_1 = -0,54x^{0,8} + 22,5x^{-0,1}.$$

De optie nulpunt geeft $x = 63,06...$

Uit de schets volgt dat de opbrengst maximaal is bij een productie van 63 stuks.

$q = 63$ geeft $R = 520,83...$, dus de maximale opbrengst is 521 euro.

Je ziet dat bij de opdracht 'Bereken met de afgeleide ...' het vereist is dat je de formule van de afgeleide opschrijft. Vervolgens mag je de GR gebruiken voor de verdere berekening. In het voorbeeld hierboven is de vergelijking 'afgeleide = 0' met de optie nulpunt van de GR opgelost.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde moet met de afgeleide worden aangetoond dat W maximaal is voor $q = 16$. Gebruik hierbij het volgende werkschema.

Werkschema: met de afgeleide aantonen dat y een maximum (of minimum) heeft voor $x = a$

- 1 Bereken $\frac{dy}{dx}$ en laat zien dat $\frac{dy}{dx} = 0$ voor $x = a$.
- 2 Maak een schets van de grafiek van y en laat zien dat er voor $x = a$ een maximum (of minimum) is.

Als de grafiek is gegeven, dan kun je volstaan met een verwijzing naar deze grafiek.

Voorbeeld

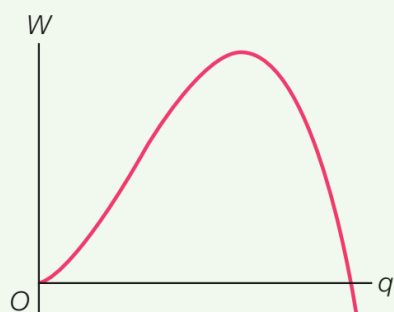
De maandelijkse winst van een bedrijf is gegeven door $W(q) = 4q^2 - \frac{1}{6}q^3$. Hierin is W in honderden euro's en q de maandproductie in honderdtallen. Toon met de afgeleide aan dat W maximaal is voor $q = 16$.

Uitwerking

$$W(q) = 4q^2 - \frac{1}{6}q^3 \text{ geeft } W'(q) = 8q - \frac{1}{2}q^2$$

$$W'(16) = 8 \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 16^2 = 128 - 128 = 0$$

$$\text{Voer in } y_1 = 4x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$



Uit de schets volgt dat W maximaal is voor $q = 16$.

73 Zie het voorbeeld hierboven.



- a** Bereken de maximale winst per maand. Rond af op gehele euro's.
- b** Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee de winst afneemt bij een productie van 2000 stuks per maand.

Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

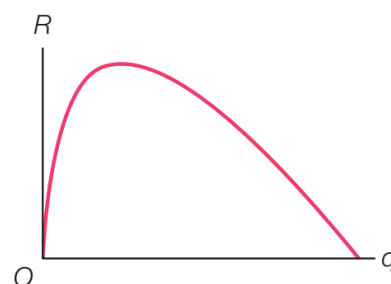
- c** Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee de opbrengst toeneemt bij een productie van 50 stuks. Vermeld hierbij de eenheid en rond af op centen.

74 De opbrengst R van een bedrijf in duizenden euro's wordt gegeven door de formule $R = 4q^{0,41} - q^{0,83}$.

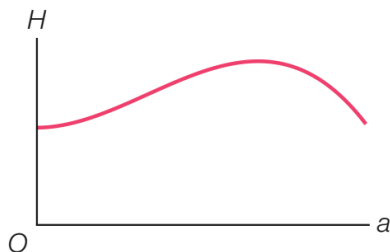


Hierbij is q de productie in duizendtallen.

- a** Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee R toeneemt voor $q = 0,5$. Denk aan het vermelden van de eenheid.
- b** Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee R afneemt bij een productie van 8500 stuks.
- c** Bereken met de afgeleide de maximale opbrengst.



- 75** Sasha houdt tijdens wandelingen met GPS bij waar en op welke hoogte zij zich bevindt. Tijdens een wandeling wordt de hoogte gegeven door $H = -0,4a^3 + 4,8a^2 + 150$ met $0 \leq a \leq 12$. Hierin is H de hoogte in meters boven zeeniveau en a de gelopen afstand in kilometers.

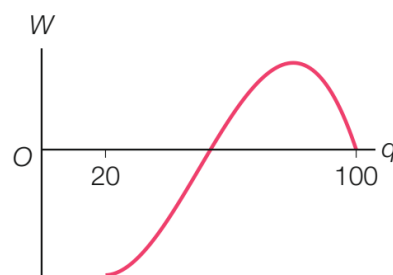


- Zou deze wandeling een rondwandeling kunnen zijn? Licht toe.
- Bereken met de afgeleide de maximale hoogte die Sasha tijdens de wandeling bereikt.



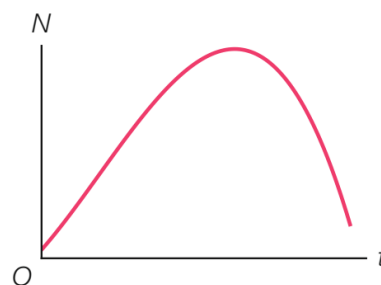
- 76** De maandelijkse winst van een bedrijf is gegeven door $W(q) = -0,01q^3 + 1,5q^2 - 48q - 200$. Hierin is W in duizenden euro's en q de productie in duizendtallen per maand met $20 \leq q \leq 100$.

- Toon met de afgeleide aan dat de winst maximaal is bij een maandelijkse productie van 80 000 stuks.
- Bereken de maximale winst per maand.



- A77** Het aantal bacteriën in een afgesloten ruimte is gegeven door $N(t) = -2t^3 + 9t^2 + 60t + 12$. Hierin is N in miljoenen en t de tijd in weken met $0 \leq t \leq 8$.

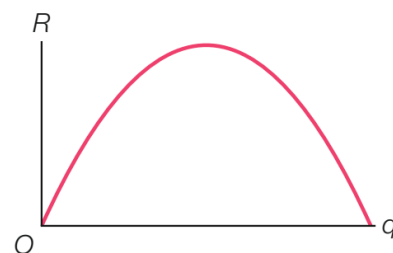
- Met hoeveel procent neemt het aantal bacteriën in de derde week toe?
- Toon met de afgeleide aan dat het aantal bacteriën op $t = 3$ toeneemt.
- Toon met de afgeleide aan dat het aantal bacteriën op $t = 7$ afneemt.
- Bereken met de afgeleide het maximale aantal bacteriën.



- 078** Gegeven is de formule $R(q) = aq^2 + 40q$. Hierin is R de opbrengst in euro's bij een productie van q stuks. Zie de grafiek hiernaast.

Uit $R'(q) = 0$ volgt $q = -\frac{20}{a}$.

- Toon dit aan.
- Neem $a = -0,25$ en bereken bij welke productie de opbrengst maximaal is.



Theorie B Formules met een parameter

In de formule $R(q) = aq^2 + 40q$ is de constante a een parameter, oftewel een hulpvariabele. In opgave 78 heb je aangetoond dat R maximaal is

voor $q = -\frac{20}{a}$.

$q = -\frac{20}{a}$ invullen in de formule van R geeft

$$R\left(-\frac{20}{a}\right) = a \cdot \left(-\frac{20}{a}\right)^2 + 40 \cdot -\frac{20}{a} = a \cdot \frac{400}{a^2} - \frac{800}{a} = \frac{400}{a} - \frac{800}{a} = -\frac{400}{a}.$$

De maximale opbrengst uitgedrukt in a is $R_{\max} = -\frac{400}{a}$.

Hoewel de grafiek van R voor elke waarde van a anders is, mag je ervan uitgaan dat de gegeven schets te gebruiken is voor elke waarde van a .

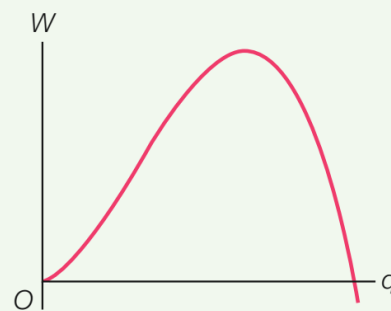
Voorbeeld

De maandelijkse winst van een bedrijf is gegeven door de formule $W = aq^2 - \frac{1}{6}q^3$ met $a > 0$.

Hierin is W in honderden euro's en q de maandproductie in honderdtallen. De constante a is afhankelijk van het economisch perspectief en kan per maand verschillen.

a Toon met de afgeleide aan dat W maximaal is voor $q = 4a$.

b Toon aan dat $W_{\max} = 5\frac{1}{3}a^3$.



Uitwerking

a $W = aq^2 - \frac{1}{6}q^3$ geeft $\frac{dW}{dq} = 2aq - \frac{1}{2}q^2$

$$\text{Voor } q = 4a \text{ is } \frac{dW}{dq} = 2a \cdot 4a - \frac{1}{2} \cdot (4a)^2 = 8a^2 - \frac{1}{2} \cdot 16a^2 = 8a^2 - 8a^2 = 0.$$

Uit de schets volgt dat je bij $q = 4a$ met een maximum te maken hebt.

b $W_{\max} = a \cdot (4a)^2 - \frac{1}{6} \cdot (4a)^3 = a \cdot 16a^2 - \frac{1}{6} \cdot 64a^3$ **Vul $q = 4a$ in de formule van W in.**
 $= 16a^3 - \frac{64}{6}a^3 = 16a^3 - 10\frac{2}{3}a^3 = 5\frac{1}{3}a^3$

79

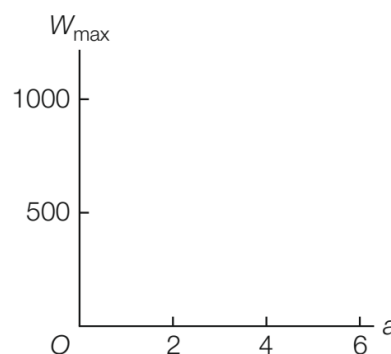


Zie vraag b van het voorbeeld.

De maximale winst hangt af van a .

a Schets in de figuur hiernaast de grafiek van $W_{\max}$.

b Vanaf welke waarde van a is $W_{\max}$ meer dan 100 000 euro? Rond af op twee decimalen.

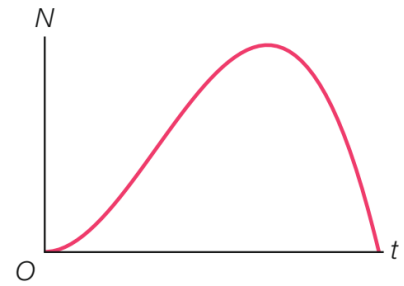


80



Het aantal bezoekers N dat zich in een dierentuin bevindt, is te benaderen door het model $N = 25pt^2 - 50t^3$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 9:00 uur en p een constante tussen 16 en 24 die, afhankelijk van het seizoen en het weer, per dag kan verschillen.

- Toon aan dat binnen het model de laatste bezoeker de dierentuin op $t = \frac{1}{2}p$ verlaat.
- Bereken met de afgeleide het maximale aantal bezoekers in de dierentuin in het geval $p = 20$.
- Toon met de afgeleide aan dat het aantal bezoekers maximaal is op $t = \frac{1}{3}p$.



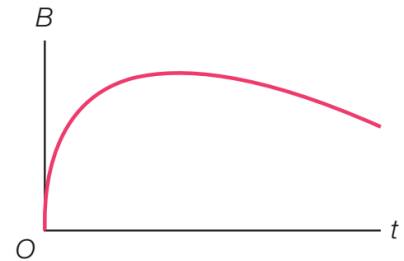
Het maximale aantal bezoekers hangt af van p . Er geldt $N_{\max} = \frac{25}{27}p^3$.

- Toon aan dat de formule voor $N_{\max}$ juist is.
- Schets de grafiek van $N_{\max}$.
- Bereken voor welke waarden van p het maximale aantal bezoekers tussen 6000 en 10000 ligt. Rond af op één decimaal.

A81



De totale bladoppervlakte B van een plant hangt af van de ouderdom van de plant. Een plantenkweker heeft ontdekt dat voor bepaalde plantensoorten de formule $B = a\sqrt{t} - t$ geldt. Hierin is B de oppervlakte in dm^2 , t de tijd in maanden en a een constante die afhangt van de plantensoort.



We bekijken een plantensoort waarvoor geldt $a = 4$.

- Bereken met de afgeleide met welke snelheid in cm^2 per maand de totale bladoppervlakte toeneemt op $t = 3$. Rond af op gehele.
- Toon met de afgeleide aan dat de bladoppervlakte maximaal is op $t = 4$. Hoe groot is die maximale bladoppervlakte?

Volgens de plantenkweker is voor elk van de onderzochte plantensoorten de bladoppervlakte maximaal als $t = \frac{1}{4}a^2$.

- Toon de juistheid van deze bewering aan en druk $B_{\max}$ uit in a .

A82



Het aantal personenauto's dat gebruikmaakt van een tolbrug hangt af van het toltarief. Het aantal auto's kan worden berekend met de formule $N = \frac{1}{3}aT^3 - 15aT^2 + 5000$. Hierin is N het aantal personenauto's dat per dag gebruikmaakt van de brug en T het toltarief in euro's. In deze formule is T maximaal 30. De positieve constante a hangt af van de economische omstandigheden. De dagelijkse opbrengst in euro's kan worden berekend met de formule $R = \frac{1}{3}aT^4 - 15aT^3 + 5000T$. Er is een waarde van a waarbij de opbrengst maximaal is bij een toltarief van 15 euro.

Bereken deze waarde van a en de bijbehorende maximale opbrengst per dag. Hoeveel auto's rijden er dan dagelijks over de brug?

Kennis- en vaardighedencheck

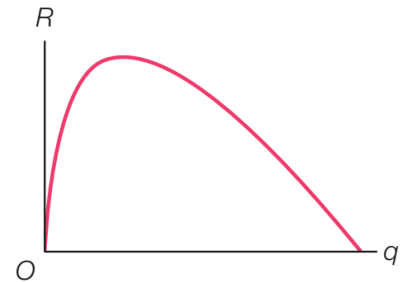
- ☐ Ik kan extreme waarden berekenen met de afgeleide.
- ☐ Ik kan met de afgeleide aantonen dat y een extreme waarde heeft voor $x = a$.
- ☐ Ik kan berekeningen met de afgeleide uitvoeren bij formules met een parameter.

► OPGAVE C13
THEORIE A

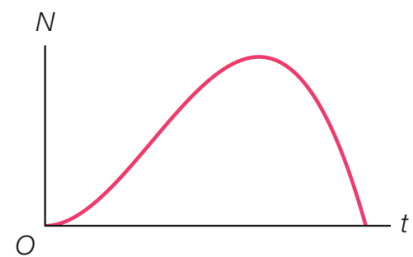
► OPGAVE C14
THEORIE A

► OPGAVE C15
THEORIE B

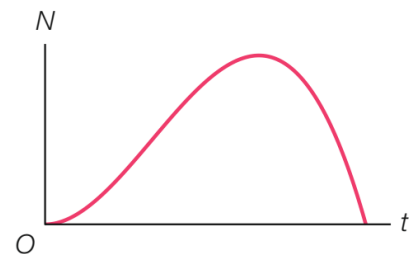
- C13** In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de formule $R = 2q^{0,55} - q^{0,85}$.
Bereken met de afgeleide het maximum van R . Rond af op twee decimalen.



- C14** In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de formule $N = 6t^2 - \frac{1}{12}t^3$.
Toon met de afgeleide aan dat N maximaal is voor $t = 48$.



- C15** Gegeven is de formule $N = at^2 - \frac{1}{12}t^3$ waarin a een constante is.
Druk $N_{\max}$ uit in a .



Antwoorden

C13 $R_{\max} = 1,13$

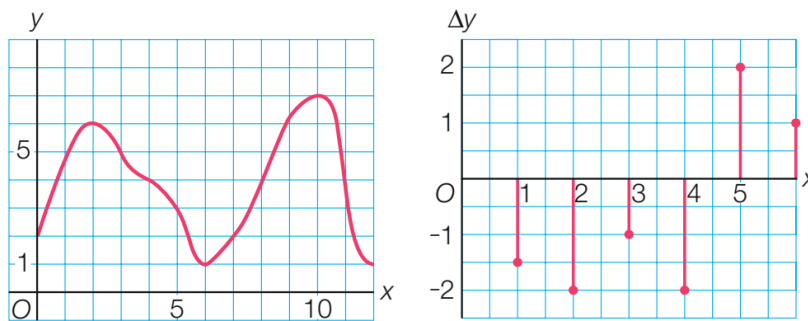
C14 *

C15 $N_{\max} = 21\frac{1}{3}a^3$

Kennis- en vaardigheidentest

8.1 Toenamediagrammen en differentiequotiënten

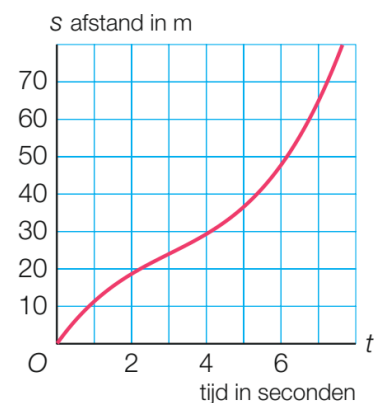
- 1 Zie de linker figuur hieronder.
- Noem alle intervallen op $\langle 0, 12 \rangle$ waarop sprake is van afnemende daling.
 - Teken bij de grafiek het toenamediagram met stapgrootte $\Delta x = 2$.
 - Bereken de gemiddelde verandering van y op het interval $[0, 4]$.
 - Bereken het differentiequotient van y op het interval $[2, 12]$.



- 2 Teken een mogelijke grafiek die door het punt $(3, 5)$ gaat en die hoort bij het toenamediagram in de rechter figuur hierboven.

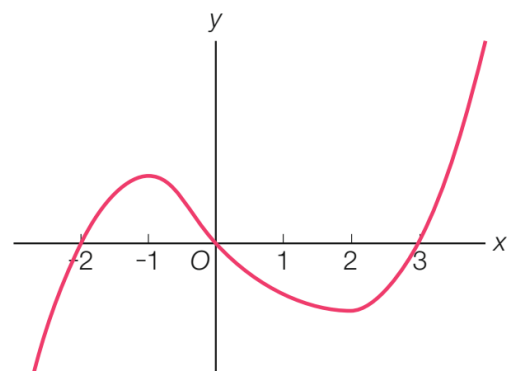
8.2 Hellinggrafieken

- 3 **[WERKBLAD]** In de figuur hiernaast zie je een tijd-afstandgrafiek.
- Schat de snelheid op $t = 1$ en op $t = 6$.
 - Voor welke t schat je dat de snelheid minimaal is? Hoe groot is deze minimale snelheid?
 - Hoeveel tijdstippen zijn er tussen $t = 0$ en $t = 6$ waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[0, 6]$? Licht toe.



- 4 De temperatuur op een dag in juni kan benaderd worden door de formule $T = -0,014t^3 + 0,44t^2 - 2,6t + 11$. Hierin is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en het tijdstip t in uren met $t = 0$ om 0:00 uur.
- Bereken de snelheid waarmee de temperatuur verandert om 9:30 uur.
 - Toon aan dat de temperatuur 's middags om half vier toeneemt.
 - Toon aan dat de temperatuur 's avonds om kwart voor zeven afneemt.

- 5 **[WERKBLAD]** Zie de grafiek hiernaast.
- Schets de bijbehorende hellinggrafiek.
 - Neem nu aan dat de grafiek een hellinggrafiek is. Schets een mogelijke grafiek waarbij deze hellinggrafiek hoort.



8.3 Differentiëren

- 6** Differentieer.
- a** $f(x) = 0,6x^3 - 1,3x^2 + 9$
 - b** $N(t) = (3 - t)(5 + 2t)$
 - c** $K(p) = p^3 - p(p - 3)^2$

8.4 Notaties en regels voor de afgeleide

- 7** Gegeven is de formule $K = 20q^2 - 5pq + 8p^3$.
Bereken $\frac{dK}{dp}$ en $\frac{dK}{dq}$.

- 8** Bereken de afgeleide.

- a** $y = \frac{1}{5x^6} + 5x^6 \cdot \sqrt{x}$
- b** $y = (5 + x)\sqrt{x}$
- c** $y = \sqrt[6]{x^5} + \frac{5}{x} + \frac{x}{6}$

- 9** Differentieer.

- a** $y = 6(3x - 1)^4 + 7x$
- b** $R = 20\sqrt{5q^3 + 4q}$
- c** $A = \frac{4}{(2 - 3q)^4}$

8.5 Extreme waarden en de afgeleide

- 10** De opbrengst R van een bedrijf in duizenden euro's wordt gegeven door de formule $R = 5q^{0,6} - 2q^{0,92}$. Hierbij is q de productie in duizendtallen.

- a** Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee R afneemt voor $q = 6$.
- b** Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee R toeneemt voor $q = 3$.
- c** Bereken met de afgeleide de maximale opbrengst. Rond af op gehele euro's.

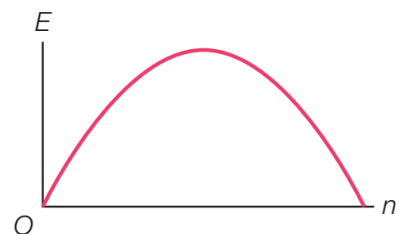


- 11** Onderzoek heeft uitgewezen dat het effect van een tv-commercial op den duur afneemt. Hierbij wordt het begrip effectiviteit E gebruikt.

Een marketingbureau gaat uit van de formule $E(n) = 0,48n - an^2$, waarin n het aantal keer is dat de commercial wordt uitgezonden en a een constante is met $0 < a < 0,2$.

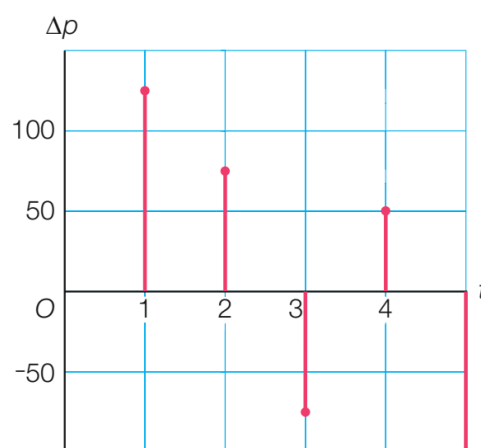
Toon met de afgeleide aan dat de effectiviteit maximaal

is voor $n = \frac{6}{25a}$ en dat $E_{\max} = \frac{1,44}{25a}$.



Gemengde opgaven

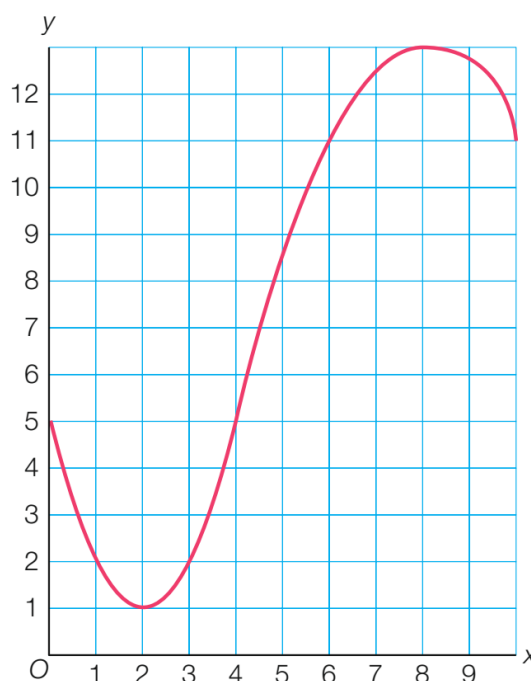
- 1** Tijdens de vaart van Dubai naar de haven van Rotterdam houdt de stuurman van een grote olietanker elke dag de verandering van de olieprijs bij. Zie het toenamediaagram hiernaast. Hierin is t de tijd in dagen met $t = 0$ op 11 maart om 0:00 uur en Δp de prijsverandering in dollarcenten per vat. Een vat komt overeen met 127,2 kg olie. De tanker vervoert 210 000 ton olie. Op 14 maart om 0:00 uur was de olieprijs 101,50 dollar per vat. Geef in deze opgave de antwoorden in miljoenen dollar en rond af op één decimaal.



- Bereken de totale waarde van de olie in de tanker op 16 maart om 0:00 uur. Gebruik dat 1 ton = 1000 kg.
- De stuurman berekent elke dag om 0:00 uur de waarde van de olie in de tanker. Wat is het verschil tussen de hoogste en laagste waarde die hij berekent?



- 2** **[WERKBLAD]** Zie de figuur hiernaast.
- Welke soorten van stijgen en dalen herken je op $\langle 0, 10 \rangle$? Geef de bijbehorende intervallen.
 - Bepaal met behulp van de grafiek voor welke waarde van p de gemiddelde verandering van y op een interval $[p, 10]$ gelijk is aan 1.
 - Geef een interval waarop het differentiequotiënt van y gelijk is aan 0.
 - In de punten A en B van de grafiek is de helling gelijk aan 2. Bepaal de coördinaten van A en B met behulp van de grafiek.

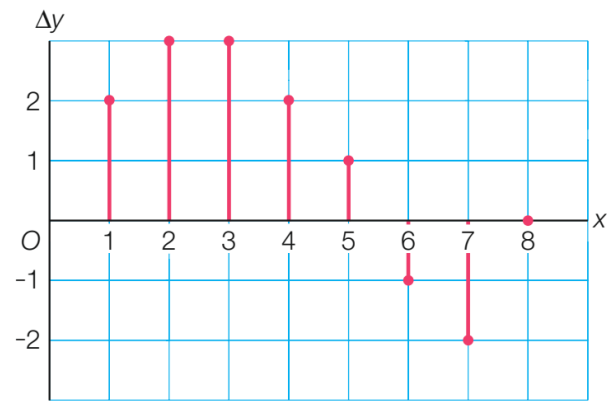


- 3** Van de grafiek bij het toenamediagram in de figuur hiernaast is gegeven dat deze één maximum heeft.

- a** Voor welke waarden van x kan het maximum optreden? Geef een zo groot mogelijk interval.
- b** Bij de grafiek worden gemiddelde toenames berekend op verschillende intervallen die liggen tussen $x = 0$ en $x = 8$. Nandy beweert dat de hoogst mogelijke gemiddelde toename dan gelijk is aan 3.

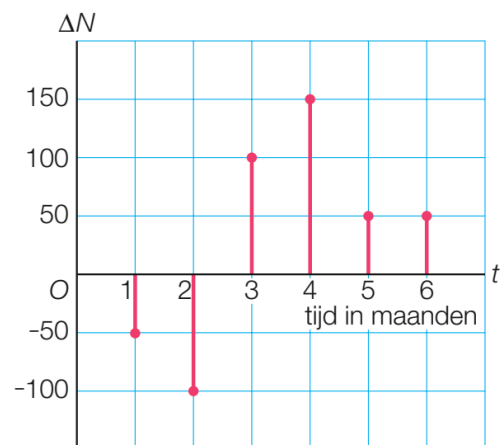
Ben je het met haar eens? Licht toe.

- c** Voor welke van de volgende intervallen geldt dat $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$? Licht toe.
 $[0, 8]$ $[4, 7]$ $[3, 7]$ $[3, 8]$



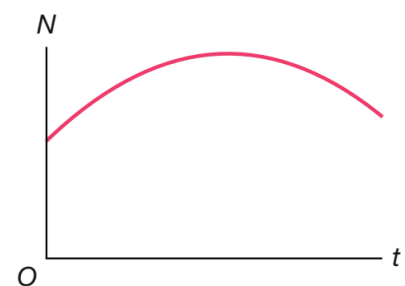
- 4** Het toenamediagram in de figuur hiernaast geeft informatie over het aantal konijnen N in een duingebied. Hierbij is t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2025. Op 1 april 2025 waren er 850 konijnen.

- a** Bereken de gemiddelde snelheid waarmee het aantal konijnen veranderde van $t = 1$ tot $t = 6$.
- b** Teken bij dit toenamediagram een mogelijke grafiek met één maximum en één minimum.



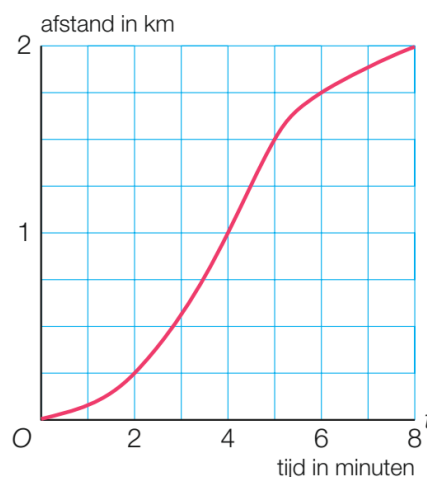
- 5** Het aantal hotelovernachtingen in Amsterdam is in de zomer groter dan in de winter. Voor het jaar 2024 is het aantal hotelovernachtingen te benaderen door het model $N = -0,2t^2 + 2,7t + 21$. Hierin is N het aantal hotelovernachtingen in duizenden per dag en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2024.

- a** Bereken het differentiequotiënt op $[3, 6]$ en geef de praktische betekenis van dit getal.
- b** Bereken de gemiddelde verandering van het aantal hotelovernachtingen per dag in de periode 1 november tot en met 31 december.
- c** Bereken de snelheid waarmee het aantal hotelovernachtingen toenam op 1 maart 2024.
- d** Bereken met behulp van de afgeleide in welke maand het aantal overnachtingen maximaal was.



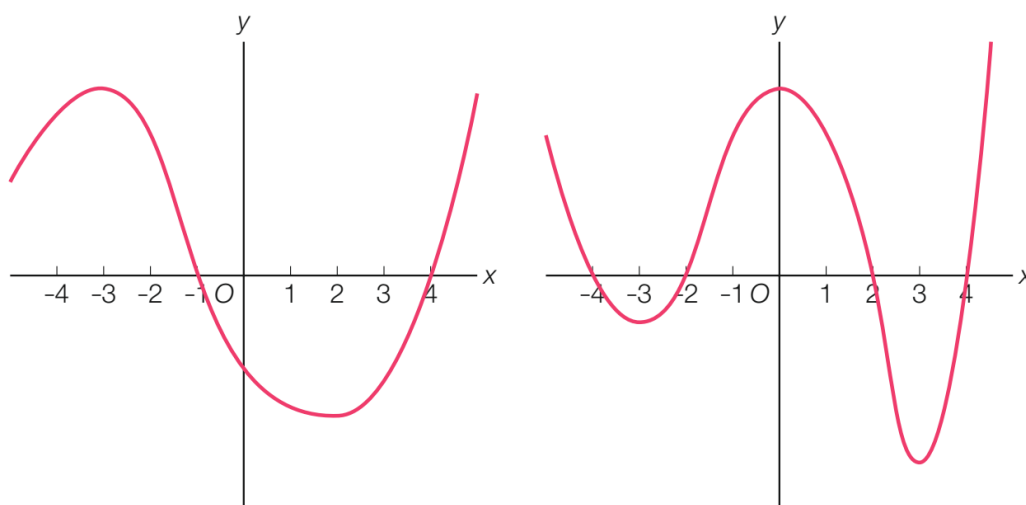
6 **WERKBLAD** In het Belgische Malmedy is bij het NK berglopen een parcours uitgezet met flinke hoogteverschillen. In de figuur hiernaast zie je de tijd-afstandgrafiek van Bjorn over de eerste twee kilometer.

- Bereken in gehele km/uur de gemiddelde snelheid over deze twee kilometer.
- Schat met behulp van de grafiek in gehele km/uur de snelheid op $t = 2$.
- Bepaal met behulp van de grafiek op welk tijdstip de snelheid maximaal is. Bereken deze snelheid in gehele km/uur.
- Op welke tijdstippen is de snelheid gelijk aan 12 km/uur?
- Hoeveel tijdstippen zijn er waarop de snelheid hetzelfde is als de gemiddelde snelheid op het interval $[0, 6]$? Licht toe.



7 **WERKBLAD** In de figuur hieronder zie je twee grafieken.

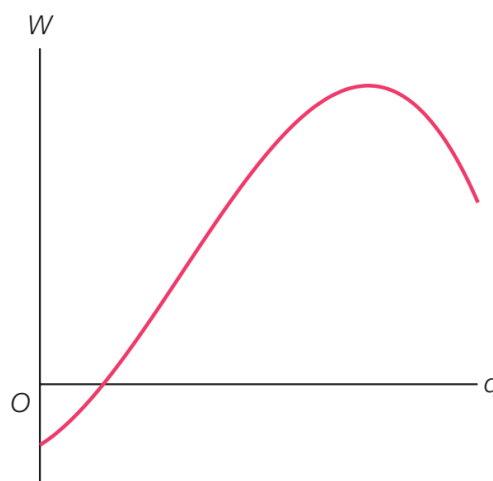
- Schets op het werkblad de bijbehorende hellinggrafieken.
- Ga ervan uit dat de linker grafiek een hellinggrafiek is. Schets een mogelijke grafiek waarbij deze hellinggrafiek hoort.



8 De winst W in euro's bij een productie van q stuks is gegeven door

$$W(q) = -0,0001q^3 + 0,0975q^2 + 22,5q - 5000.$$

- Bereken met de afgeleide bij welke productie de winst maximaal is. Hoeveel is de maximale winst?
- Toon met behulp van de afgeleide aan dat de winst bij een productie van 300 stuks sneller stijgt dan bij een productie van 400 stuks.



- 9** Een mens niest om de luchtwegen schoon te houden. Bij het niezen trekt de luchtpijp samen, waardoor de snelheid van de luchtstroom in de luchtpijp toeneemt. De snelheid van de luchtstroom wordt gegeven door de formule $v = k(D - d)d^2$. Hierin is v in m/s en d de doorsnede van de luchtpijp in cm. Verder is k een constante en D de gemiddelde doorsnede van de luchtpijp in cm onder normale omstandigheden.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van v .

Tijdens het niezen zorgt het lichaam ervoor dat de luchtpijp zo vernauwt, dat de snelheid van de luchtstroom maximaal is.

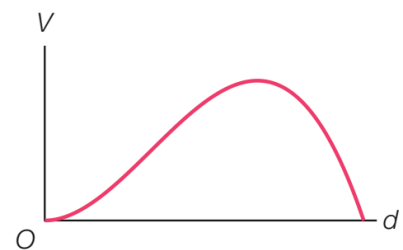
- a** Voor een persoon geldt $k = 20$ en $D = 2,1$.
Bereken met behulp van de afgeleide de maximale snelheid van de luchtstroom in gehele km/uur.



Een arts beweert dat de snelheid maximaal is voor $d = \frac{2}{3}D$.

- b** Toon de juistheid van deze bewering aan.
c Druk $v_{\max}$ uit in k en D .
d In een wetenschappelijk artikel is te lezen dat de snelheid van de lucht bij niezen wel 170 km/uur kan zijn.
Onderzoek of deze bewering juist kan zijn voor een persoon met $k = 20$.

- 10** Het effect van een medicijn om de bloeddruk te verlagen wordt gegeven door de formule $V = 0,0015d^2(\frac{1}{3}M - \frac{1}{2}d)$. Hierin is V de verlaging van de bloeddruk in mmHg bij een gebruik van d mg medicijn per dag en M de maximaal toegestane hoeveelheid medicijn in mg per dag. Bij een hogere dosering dan de maximaal toegestane hoeveelheid van M mg per dag treden bijwerkingen op.



- a** Een patiënt met een te hoge bloeddruk krijgt het medicijn toegediend.
Volgens de arts is de maximaal toegestane dosering 90 mg per dag.
Bereken bij welke dosering de bloeddruk het meest zal dalen. Hoeveel is de maximale verlaging?

De maximaal toegestane hoeveelheid medicijn verschilt per patiënt. De bloeddruk zal het meest dalen als de dosering gelijk is aan $\frac{4}{9}$ deel van de maximaal toegestane hoeveelheid.

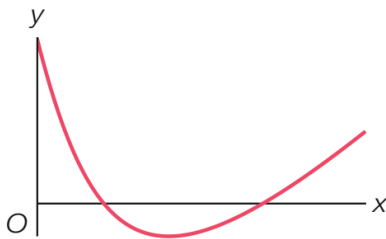
- b** Toon dit aan.
c Toon aan dat de maximale bloeddrukverlaging te schrijven is als $V_{\max} = aM^3$ en bereken a . Rond af op zes decimalen.



- 11** Bij de koers van een aandeel op de Amsterdamse effectenbeurs in de maand juni hoort de formule $P(t) = -0,002t^3 + 0,075t^2 - 0,6t + 64$. Hierin is P de prijs van het aandeel in euro's en t de tijd in dagen met $t = 1$ op 1 juni.
- Schets de grafiek van P .
 - Bereken met de afgeleide de coördinaten van de toppen. Geef de coördinaten van de toppen aan in de schets van vraag a. Zet ook de coördinaten van het beginpunt en van het eindpunt in de schets.
 - Marceline koopt in de loop van juni 50 aandelen en verkoopt ze nog voor het einde van de maand.
Hoeveel winst kan Marceline maximaal behalen?



- 12** Gegeven is de formule $y = 5\sqrt{x^2 + 36} - 20 - 4x$ met $x \geq 0$. In de figuur hieronder zie je de bijbehorende grafiek.



Voor de afgeleide geldt $\frac{dy}{dx} = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 4$.

- Toon dit aan.
- Bereken met de afgeleide de helling in het snijpunt A van de grafiek met de y -as.
- Bereken met behulp van differentiëren het minimum van y .
- Onderzoek of er een punt op de grafiek ligt waarin de helling gelijk is aan 6.

- 13** Voor het alcoholpromillage in het bloed van een proefpersoon heeft een onderzoeker de formule $P = 0,0025t^3 - 0,08t^2 + 0,64t$ opgesteld. Hierin is t de tijd in kwartieren na het innemen van de alcohol en P het alcoholpromillage in het bloed van de proefpersoon. De formule geldt voor de eerste vier uren.
- a** Schets de grafiek van P .
 - b** Na hoeveel minuten is het alcoholpromillage maximaal?
 - c** Bereken $\left[\frac{dP}{dt}\right]_{t=7}$. Rond af op gehele. Wat is de praktische betekenis van dit getal?
 - d** Het is verboden met een alcoholpromillage van meer dan 0,5 een auto te besturen.
Na hoeveel kwartier mag de proefpersoon weer autorijden? Met welke snelheid neemt het alcoholpromillage dan af? Geef je antwoord in promille per kwartier en rond af op één decimaal.





9

Kansverdelingen

Biatlon is een combinatie van langlaufen en geweerschieten. Bij het schieten moeten vijf schijfjes één voor één geraakt worden. Atlete Julia schiet gemiddeld 80% van de keren raak. Bereken de kans dat zij zeven keer moet schieten om alle schijfjes te raken.

9.1 Toevalsvariabelen en verwachtingswaarde

Kennis en vaardigheden

- Je kunt kansen berekenen die genoteerd zijn met behulp van een toevalsvariabele.
- Je kunt de kansverdeling van een toevalsvariabele opstellen.
- Je kunt kansen berekenen bij een kansexperiment dat herhaald wordt totdat succes optreedt.
- Je kunt de verwachtingswaarde van een toevalsvariabele berekenen.

Voorkennis Regels voor kansrekening

Veelgebruikte regels bij kansberekeningen zijn de productregel, de somregel en de complementregel.

Productregel Bij twee onafhankelijke kansexperimenten geldt $P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2)$.

Somregel Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen G_1 en G_2 geldt $P(G_1 \text{ of } G_2) = P(G_1) + P(G_2)$.

Complementregel $P(\text{gebeurtenis}) = 1 - P(\text{complement-gebeurtenis})$

Komt in de omschrijving van een gebeurtenis een woord zoals ‘minstens’, ‘hoogstens’, ‘niet’, ‘meer dan’ of ‘minder dan’ voor, dan kan de complementregel je soms rekenwerk besparen.

Bij het vier keer gooien met een dobbelsteen is

- $P(\text{geen enkele keer } 6) = P(\text{6 6 6 6}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 0,482$
- $P(\text{twee keer } 6) = \binom{4}{2} \cdot P(6 \text{ 6 6 6}) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,116$
- $P(\text{minstens drie keer } 6) = P(\text{drie keer } 6) + P(\text{vier keer } 6)$
 $= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \approx 0,016$
- $P(\text{minstens één keer } 6) = 1 - P(\text{geen enkele keer } 6)$
 $\approx 1 - 0,482 = 0,518$.

Je rondt kansen af op drie decimalen, tenzij anders gemeld.

V1 Judith laat de schijf hiernaast acht keer draaien.

Bereken de kans dat de pijl

- a één keer 2 aanwijst
- b minstens één keer 1 aanwijst
- c vijf keer een 1 en drie keer een 3 aanwijst
- d vier keer een 1 en één keer een 3 aanwijst.



V2 Rijschool R&S biedt allerlei rijopleidingen aan. Zo is er de mogelijkheid drie dagen achter elkaar les te krijgen. Bij deze opleidingsvorm is de kans om in één keer te slagen 0,22. Bij klanten die losse lessen over een langere periode boeken, is deze kans 0,53.

Bereken de kans dat

- a** van acht cursisten die de opleiding van drie dagen volgen er minstens twee in één keer slagen
- b** van twaalf cursisten die losse lessen volgen er zes of zeven in één keer slagen.

Voorkennis Pakken met en zonder terugleggen

Pak je knikkers uit een vaas, dan kan dat *met terugleggen*, maar ook *zonder terugleggen*.

Bij pakken met terugleggen gebruik je de productregel.

Bij pakken zonder terugleggen kun je de kansdefinitie van Laplace of de productregel gebruiken.

Pak drie knikkers uit een vaas met tien rode en vijf witte knikkers.

De kans op twee rode knikkers is:

met terugleggen	zonder terugleggen
$P(2 \text{ rode}) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{10}{15}\right)^2 \cdot \frac{5}{15} \approx 0,444$	<p>met de productregel:</p> $P(2 \text{ rode}) = \binom{3}{2} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \approx 0,495$ <p>met de kansdefinitie van Laplace:</p> $P(2 \text{ rode}) = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} \approx 0,495$

Wanneer er staat ‘pak drie knikkers’, dan wordt bedoeld zonder terugleggen, tenzij er staat dat het met terugleggen is.

Bij een kleine steekproef uit een grote populatie mag je pakken zonder terugleggen opvatten als pakken met terugleggen. Een toepassing van deze vuistregel zie je hieronder.

Van de Nederlanders heeft 12% contactlenzen.

De kans dat van een willekeurige groep van 14 Nederlanders niemand contactlenzen heeft, is $0,88^{14} \approx 0,167$.

De kans dat er twee contactlenzen hebben, is

$$\binom{14}{2} \cdot P(c \text{ c } \cancel{c} \dots \cancel{c}) = \binom{14}{2} \cdot 0,12^2 \cdot 0,88^{12} \approx 0,283.$$

- V3** Bij een loterij zijn 80 loten verkocht. Naast de hoofdprijs zijn er drie tweede prijzen en zes derde prijzen. Sasha heeft vijf loten gekocht. Bereken de kans dat zij
- a minstens één prijs wint
 - b niet de hoofdprijs, maar wel een tweede en derde prijs wint.

- V4** Felix gooit twaalf keer met een dobbelsteen. Bereken de kans dat hij
- a drie keer 2 ogen gooit en één keer 3 ogen
 - b elk aantal ogen twee keer gooit
 - c bij de twaalfde worp evenveel ogen gooit als bij de eerste worp.

- O1** In een klas is gevraagd hoe vaak elke leerling per week aan sport doet. In de tabel zie je de resultaten onderverdeeld naar leeftijd. Er wordt willekeurig een leerling uit deze klas gekozen.

We gebruiken:

X = leeftijd van leerling

Y = aantal keer sporten per week

- a Hoe kun je met behulp van de tabel berekenen dat $P(X = 17) = 0,2$?
- b Bereken $P(Y = 1)$.
- c Bereken $P(X = 16 \text{ en } Y = 1)$.

Aantal keer sporten per week

	0	1	2	3	
16 jaar	3	7	7	3	20
17 jaar	2	1	2	0	5
	5	8	9	3	25

Theorie A Toevalsvariabelen

Bij het kansexperiment uit opgave 1 wordt aselekt (willekeurig) een leerling uit de klas gekozen.

De leeftijd geven we aan met X . Dus X = leeftijd van leerling.

Omdat bij het aselekt kiezen van een leerling de waarde van X afhangt van het toeval heet X een **toevalsvariabele**.

In opgave 1 is nog een toevalsvariabele gedefinieerd, namelijk Y = aantal keer sporten per week.

Toevalsvariabelen noteren we met hoofdletters, vaak X en Y .

Je kunt toevalsvariabelen gebruiken om kansen kort te noteren.

Notatie zonder toevalsvariabele	Notatie met toevalsvariabele
$P(\text{leerling is 16 jaar})$	$P(X = 16)$
$P(\text{leerling sport één keer per week})$	$P(Y = 1)$
$P(\text{leerling sport minstens één keer per week})$	$P(Y \geq 1)$

Volgens de somregel is $P(Y < 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1)$.

Volgens de complementregel is $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$.

Uit een vaas met acht rode, vijf witte en twee blauwe knikkers pak je vijf knikkers.

X = aantal rode knikkers dat je pakt

Voor de berekening van $P(X=2)$ bedenk je dat $X=2$ inhoudt dat je 2 rode uit de 8 rode en 3 niet-rode uit de $5 + 2 = 7$ niet-rode pakt.

$$\text{Je krijgt } P(X=2) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{15}{5}} \approx 0,326.$$

Voorbeeld

In een vaas zitten zeven rode, negen witte en vier blauwe knikkers.

Kate pakt vier knikkers uit de vaas.

X = aantal witte knikkers dat Kate pakt

Bereken $P(X \leq 3)$.

Uitwerking

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - \frac{\binom{9}{4}}{\binom{20}{4}} \approx 0,974$$

X kan de waarden 0, 1, 2, 3 en 4 aannemen

$X=0$ $X=1$ $X=2$ $X=3$ $X=4$

$X \leq 3$

het complement
van $X \leq 3$

2 Vul in voor de toevalsvariabele X uit het voorbeeld hierboven.

- a** $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq \dots)$
- b** $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = \dots) + P(X = \dots)$
- c** $P(X < 2) = P(X = 0) + \dots$
- d** $P(\text{minstens één witte}) = P(X \dots 1)$
- e** $P(\text{hoogstens drie witte}) = P(X \dots 3)$
- f** $P(\text{alleen maar witte}) = P(X = \dots)$



3 In een vaas zitten acht rode, vijf witte en twee blauwe knikkers.

Debby pakt vijf knikkers uit de vaas.

X = aantal witte knikkers dat Debby pakt

a Bereken $P(X=2)$.

Lisette pakt met terugleggen vier knikkers uit de vaas.

Y = aantal rode knikkers dat Lisette pakt

b Bereken $P(Y=0)$.

c Bereken $P(Y \leq 3)$.

4 In een vaas zitten vijf rode, drie witte en twee groene knikkers.

* Elly pakt vier knikkers uit de vaas.

X = aantal rode knikkers dat Elly pakt

a Bereken $P(X = 2)$.

b Bereken $P(X \geq 1)$.

5 Jalou gooit met twee dobbelstenen.

□ ⊙ * X = verschil van de ogen

a Bereken $P(X = 1)$.

b Bereken $P(X < 2)$.

A6 Uit onderzoek van het Sociaal en Cultureel

□ ⊙ * Planbureau blijkt dat bij werkende ouders van wie het jongste kind jonger dan 4 jaar is, 70% gebruikmaakt van formele opvang. Dat is kinderopvang op een kinderdagverblijf of bij een gastouder. Daarnaast wordt bij 23% uitsluitend opgepast door familie, vrienden of burens, de zogeheten informele opvang.

Bij een onderzoek zijn tien werkende ouders betrokken van wie het jongste kind jonger is dan 4 jaar.

X = aantal ouders dat gebruikmaakt van formele opvang

Y = aantal ouders dat uitsluitend gebruikmaakt van informele opvang

Bereken.

a $P(X = 6)$

b $P(Y = 3)$

c $P(Y \geq 2)$

d $P(X = 8 \text{ en } Y = 2)$



A7 In een doos zitten 20 enveloppen. In acht van deze enveloppen zit een briefje van 10 euro, de overige twaalf enveloppen zijn leeg.

□ ⊙ * Arjan pakt twee enveloppen uit de doos.

X = totale bedrag in de twee enveloppen die Arjan pakt

X = totale bedrag in de twee enveloppen die Arjan pakt

a Bereken $P(X = 20)$.

b Bereken $P(X > 0)$.

O8 Op het Zuidpoort College zitten 83 leerlingen in 5 vwo: 25 leerlingen

□ ⊙ * zijn 16 jaar, 40 zijn 17 jaar en 18 zijn 18 jaar.

Er wordt aselekt een leerling gekozen.

X = leeftijd van leerling

a Bereken $P(X = 16)$.

b Wat weet je van $P(X = 16) + P(X = 17) + P(X = 18)$?

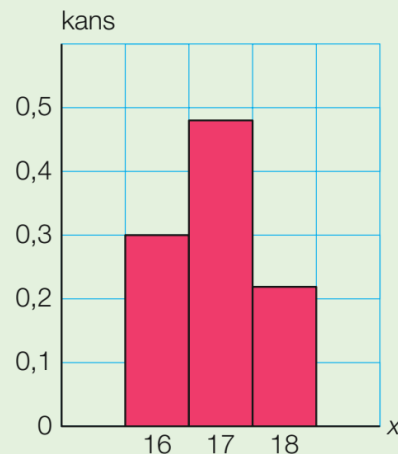
Theorie B Kansverdelingen

In opgave 8 kan de toevalsvariabele X de waarden 16, 17 en 18 aannemen. Deze waarden met de bijbehorende kansen vormen de **kansverdeling** van X . Hieronder is deze kansverdeling weergegeven in een tabel.

De letter x geeft een waarde van X aan.

x	16	17	18
$P(X = x)$	$\frac{25}{83}$	$\frac{40}{83}$	$\frac{18}{83}$

Omdat in een kansverdeling alle mogelijke waarden staan die X kan aannemen, is de som van de kansen gelijk aan 1. Hiernaast is het kanshistogram bij de kansverdeling getekend.



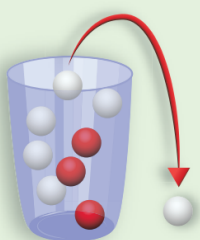
De kansverdeling van een toevalsvariabele bestaat uit alle mogelijke waarden van de toevalsvariabele en de bijbehorende kansen.

Soms heb je te maken met een experiment dat wordt herhaald, totdat een bepaalde gebeurtenis optreedt.

Tom pakt één voor één knikkers uit een vaas met drie rode en vijf witte knikkers. Hij gaat net zo lang door tot hij een rode knikker pakt. Elke keer pakt hij als het ware uit een nieuwe vaas. De kansen veranderen daardoor per keer.

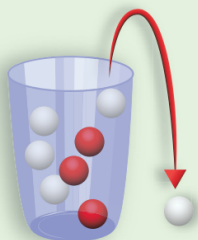
Hieronder zie je de situatie dat Tom bij de vierde keer pakken voor het eerst een rode knikker pakt.

$$P(\text{witte}) = \frac{5}{8}$$



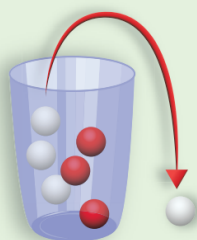
3 rode
5 witte

$$P(\text{witte}) = \frac{4}{7}$$



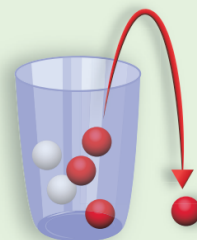
3 rode
4 witte

$$P(\text{witte}) = \frac{3}{6}$$



3 rode
3 witte

$$P(\text{rode}) = \frac{3}{5}$$



3 rode
2 witte

Bij de situatie dat Tom de eerste drie keer een witte knikker pakt en de vierde keer een rode, hoort de kans $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5}$.

Dus $P(4 \text{ keer pakken}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \approx 0,107$.

Voorbeeld

In een vaas zitten twee rode knikkers, twee witte knikkers en een blauwe knikker. Collin pakt zonder terugleggen één voor één knikkers uit de vaas. Hij stopt hiermee zodra hij een witte knikker pakt.

X = aantal keer dat Collin een knikker pakt

Stel de kansverdeling van X op.

Uitwerking

$$P(X = 1) = P(w) = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$P(X = 2) = P(\cancel{w} w) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,3$$

$$P(X = 3) = P(\cancel{w} \cancel{w} w) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0,2$$

$$P(X = 4) = P(\cancel{w} \cancel{w} \cancel{w} w) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = 0,1$$

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,4	0,3	0,2	0,1

R9 Zie het voorbeeld.



a Waarom is $P(X = 5)$ niet opgenomen in de tabel?

b Hoe kun je $P(X = 4)$ berekenen met behulp van de andere drie kansen?

c Stef berekent $P(X = 4)$ als volgt: $\binom{4}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2}$.

Welke denkfout maakt hij?

10 In een vaas zitten vier witte en zes rode knikkers.



Thijs pakt zonder terugleggen één voor één knikkers uit de vaas, totdat hij een rode pakt. Hierbij is X het aantal keer dat Thijs een knikker pakt. Stel de kansverdeling van X op.

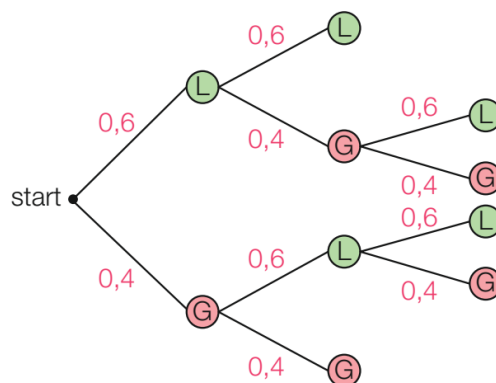
11 Lotte en Gijs spelen een tennispartij over maximaal drie sets. Degene die als eerste twee sets wint, is winnaar. De kans dat Lotte een set wint is 0,6, dus voor Gijs is die kans 0,4. Bij deze situatie hoort de kansboom hiernaast.

Bereken de kans dat

- Lotte de partij in twee sets wint
- Gijs de eerste set wint en Lotte de volgende twee
- de partij drie sets duurt.

Y = aantal sets dat de partij duurt

d Stel de kansverdeling van Y op.



A12 Fred en Barney spelen een dartswedstrijd over maximaal drie sets.

□ ⊙ * Degene die als eerste twee sets wint, is winnaar. De kans dat Barney een set wint is 0,65, dus voor Fred is die kans 0,35.

Z = aantal sets dat de partij duurt

Stel de kansverdeling van Z op.



A13 Bij een opleidingsinstituut moet een toelatingsexamen worden afgelegd.

□ ⊙ * De kans dat iemand voor dit examen slaagt is 0,6.

Iemand die niet slaagt, mag herkansen. De kans om voor de herkansing te slagen is 0,3. In totaal mag je drie keer herkansen. Ben je ook voor de derde herkansing gezakt, dan ben je definitief afgewezen.

A = aantal keer examen gedaan

Stel de kansverdeling van A op.



A14 In een doos zitten twee rode, twee witte en twee blauwe ballen.

***** Jesse pakt één voor één ballen uit de doos, totdat hij twee rode en twee blauwe ballen heeft gepakt.

X = aantal keer dat Jesse een bal pakt

Stel de kansverdeling van X op.

Sportvereniging Nikè organiseert wekelijks een loterij. Elk lot kost 5 euro. Er is een eerste prijs van 2000 euro en er zijn 100 prijzen van 20 euro. Elke week worden 1000 loten verkocht. Hoeveel winst maakt Nikè wekelijks met deze loterij? Hoeveel is dat gemiddeld per lot?



Theorie C De verwachtingswaarde

De sportvereniging uit opgave 15 maakt gemiddeld per lot een winst van 1 euro. Omgekeerd kan dus een deelnemer aan de loterij gemiddeld per lot een verlies van 1 euro verwachten. We zeggen dat de **verwachtingswaarde** van de winst W per lot voor een deelnemer gelijk is aan -1 euro. Notatie $E(W) = -1$.

Je kunt de winstverwachting per lot ook berekenen met de kansverdeling van W . Per lot kan een deelnemer bij deze loterij een winst maken van -5, 15 of 1995 euro, dus W kan de waarden -5, 15 en 1995 aannemen. Omdat 899 van de 1000 loten geen prijs geven, is

$$P(W = -5) = \frac{899}{1000} = 0,899.$$

Zo ontstaat de volgende kansverdeling.

w	1995	15	-5
$P(W = w)$	0,001	0,1	0,899

Door elke mogelijke waarde van W te vermenigvuldigen met de bijbehorende kans en vervolgens de uitkomsten op te tellen, krijg je $E(W)$. Ga maar na: $E(W) = 1995 \cdot 0,001 + 15 \cdot 0,1 + -5 \cdot 0,899 = -1$.

Werkschema: berekenen van de verwachtingswaarde van de toevalsvariabele X

- 1 Stel de kansverdeling van X op.
- 2 Vermenigvuldig elke waarde van X met de bijbehorende kans.
- 3 Tel de uitkomsten op. De som is de verwachtingswaarde $E(X)$.

$$\text{Dus } E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n).$$

De verwachtingswaarde -1 suggereert dat een deelnemer per lot 1 euro verliest. Maar dat kan niet, want per lot kun je uitsluitend 5 euro verliezen of een winst maken van 15 euro, dan wel 1995 euro. De verwachtingswaarde geeft aan wat je gemiddeld per lot kunt verwachten. Zou je 50 loten kopen, dan verwacht je een verlies van $50 \cdot 1 = 50$ euro.

Voorbeeld

Bij een spel met een dobbelsteen gelden de volgende regels.

- Je gebruikt een dobbelsteen met op de zijvlakken de cijfers 1, 1, 1, 1, 5 en 5.
- Je gooit drie keer met de dobbelsteen.
- De uitbetaling is de som van de gegooide cijfers in euro's.
- De inleg is 8 euro.

Gooi je bijvoorbeeld 5 1 1, dan krijg je 7 euro uitbetaald. Je 'wint' dan -1 euro.

Bereken de verwachtingswaarde van de winst per spel.

Uitwerking

W = winst per spel, dus W = uitbetaling - 8.

W kan de waarden 7, 3, -1 en -5 aannemen.

$$P(W = 7) = P(5 \ 5 \ 5) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$P(W = 3) = \binom{3}{2} \cdot P(5 \ 5 \ 1) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{27}$$

$$P(W = -1) = \binom{3}{1} \cdot P(5 \ 1 \ 1) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$

$$P(W = -5) = P(1 \ 1 \ 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

w	7	3	-1	-5
$P(W = w)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

← Controle: $\frac{1}{27} + \frac{6}{27} + \frac{12}{27} + \frac{8}{27} = 1$

$$E(W) = 7 \cdot \frac{1}{27} + 3 \cdot \frac{6}{27} + (-1) \cdot \frac{12}{27} + (-5) \cdot \frac{8}{27} = -1$$

De verwachtingswaarde van de winst is -1 euro per spel.

R16



Zie het voorbeeld. Om de winstverwachting per lot te berekenen, zou je ook eerst de verwachtingswaarde van de uitbetaling U per lot kunnen berekenen.

- Stel de kansverdeling van U op en bereken $E(U)$.
- Hoe volgt $E(W)$ hieruit?

17



Bij een loterij zijn 100 loten van 2 euro verkocht. Er is één prijs van 50 euro en er zijn drie tweede prijzen van 10 euro.

- Bereken de verwachtingswaarde van de winst per lot voor een deelnemer aan de loterij.
- We noemen een loterij eerlijk als de winstverwachting per lot gelijk is aan 0.
Wat moet bij deze loterij een lot kosten om van een eerlijke loterij te kunnen spreken?

Een spel is eerlijk als $E(W) = 0$.

18 Bij een spel met een dobbelsteen waarop vijf keer het cijfer 3 staat en één keer het cijfer 8 gelden de volgende regels.



- De inleg is 8 euro.
 - Je gooit twee keer met de dobbelsteen.
 - De uitbetaling in euro's is de som van de gegooide cijfers.
- Bereken in centen nauwkeurig de verwachtingswaarde van de winst per spel.

A19 Chuck-a-Luck is een spel met dobbelstenen dat in de VS veel gespeeld wordt. Je zet voor één dollar in op een bepaald aantal ogen, bijvoorbeeld op 5 ogen. Daarna gooi je met drie dobbelstenen. Het aantal keren dat je 5 ogen gooit, krijg je in dollars uitbetaald.



- Bereken exact de kans dat je bij een worp met drie dobbelstenen één keer 5 ogen gooit.
- Bereken exact de kans dat je 2 dollar krijgt uitbetaald.
- Bereken exact de kans dat je je inzet kwijt bent.
- Op een bazaar spelen op een dag 500 personen mee. Hoeveel brengt het spel de organisatie naar verwachting op?

A20 In een vaas zitten vier rode en zes witte knikkers. Monique pakt één voor één knikkers uit de vaas, totdat ze een witte pakt.



Bereken de verwachtingswaarde van het aantal knikkers dat Monique pakt.

A21 Een roulettewiel in een casino heeft 37 even grote vakjes, waarvan er 18 rood zijn. Nadat het wiel heeft gedraaid, eindigt een balletje in een van de vakjes. Vooraf kun je als speler op verschillende uitkomsten inzetten. Zet je in op rood, dan krijg je je inzet dubbel terug als het balletje in een rood vakje eindigt. Als het balletje niet in een rood vakje eindigt, dan krijg je niets. Tymon denkt een winnende strategie te hebben. Hij zet steeds in op rood. Hij begint met het inzetten van 10 euro. Als hij wint, dan stopt hij. Als hij verliest, dan verdubbelt hij in het volgende spel zijn inzet. Zo gaat hij door, totdat hij winst heeft of zijn geld op is. Hij heeft 150 euro om mee te spelen.



Onderzoek met behulp van de verwachtingswaarde van de winst of de strategie van Tymon daadwerkelijk een winnende strategie is.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan kansen berekenen die genoteerd zijn met behulp van een toevalsvariabele. ▶ **OPGAVE C1
THEORIE A**
- ☐ Ik kan de kansverdeling van een toevalsvariabele opstellen. ▶ **OPGAVE C2
THEORIE B**
- ☐ Ik kan kansen berekenen bij een kansexperiment dat herhaald wordt totdat succes optreedt. ▶ **OPGAVE C3a
THEORIE B**
- ☐ Ik kan de verwachtingswaarde van een toevalsvariabele berekenen. ▶ **OPGAVE C3b
THEORIE C**

C1 Uit onderzoek van het Sociaal en Cultureel Planbureau blijkt dat 86% van de vaders kraamverlof opneemt, direct na de geboorte van hun kind. Voor een onderzoek worden tien kersverse vaders ondervraagd.
 X = aantal vaders dat kraamverlof opneemt
a Bereken $P(X = 8)$.
b Bereken $P(X < 9)$.

C2 De kans dat Koen bij het basketballen een vrije worp raakschiet is 0,75. Hij mag tijdens een wedstrijd drie vrije worpen nemen. Hierbij is X het aantal vrije worpen dat hij raakschiet.
Stel de kansverdeling van X op.

C3 Frits pakt één voor één knikkers uit een vaas met drie rode en vijf witte knikkers. Hij stopt zodra hij een witte knikker pakt.
 Y = aantal knikkers dat Frits pakt
a Bereken exact $P(Y = 3)$.
b Bereken $E(Y)$.

Antwoorden

C1 a 0,264
b 0,418

C2	x	0	1	2	3
	$P(X = x)$	0,016	0,141	0,422	0,422

C3 a $\frac{5}{56}$
b 1,5

9.2 De binomiale verdeling

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij een kansexperiment herkennen of het een binomiaal kansexperiment is.
- Je kunt bij een binomiaal kansexperiment met de productregel de kans op k keer succes berekenen.
- Je kunt bij de binomiale verdeling met de GR kansen berekenen van de vorm $P(X = k)$ en $P(X \leq k)$.
- Je kunt bij de binomiale verdeling met de GR kansen berekenen van de vorm $P(X \geq k)$ en $P(l \leq X \leq r)$.
- Je kunt de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een binomiaal verdeelde toevalsvariabele berekenen.

022



Jessica gooit acht keer met een dobbelsteen.

Bereken de kans op

- a drie keer 6 ogen
- b vijf keer meer dan 2 ogen.



Theorie A Het binomiaal kansexperiment

In opgave 22a zijn we bij elke worp met de dobbelsteen slechts geïnteresseerd in de gebeurtenis ‘6 ogen’. En in opgave 22b gaat het om de gebeurtenis ‘meer dan 2 ogen’. Het is gebruikelijk om de gebeurtenis waarin we geïnteresseerd zijn **succes** te noemen en de bijbehorende complement-gebeurtenis **mislukking**.

Een kansexperiment waarbij het uitsluitend om de gebeurtenissen succes en mislukking gaat, heet een **Bernoulli-experiment**.

**Een Bernoulli-experiment is een kansexperiment waarbij je alleen op de gebeurtenissen succes en mislukking let.
De kans op succes wordt aangegeven met p .**

Het op de gok beantwoorden van een vierkeuzevraag is een Bernoulli-experiment met $p = \frac{1}{4}$. Het op de gok beantwoorden van zeven vierkeuzevragen is een samengesteld kansexperiment dat bestaat uit zeven gelijke Bernoulli-experimenten die onafhankelijk van elkaar zijn. Bij elk van deze Bernoulli-experimenten is $p = \frac{1}{4}$.

Dit samengestelde kansexperiment is een voorbeeld van een **binomiaal kansexperiment**. Essentieel bij een binomiaal kansexperiment is dat je hetzelfde Bernoulli-experiment een aantal keren uitvoert. Dit aantal geven we aan met n .

X is het aantal keer succes dat hierbij optreedt.

We noemen X een **binomiale toevalsvariabele**.

We zeggen ook dat X **binomiaal verdeeld** is.

Binomiaal kansexperiment

n = aantal keer dat het

experiment wordt uitgevoerd

p = kans op succes

Een binomiaal kansexperiment is een kansexperiment dat bestaat uit n gelijke Bernoulli-experimenten, waarbij p de kans is op succes per experiment.

Hierbij hoort de toevalsvariabele X = aantal keer succes.

Bij het op de gok beantwoorden van 20 vierkeuzevragen is X het aantal juiste antwoorden. Bij dit binomiale kansexperiment is $n = 20$ en $p = \frac{1}{4}$. De kans op 7 juiste antwoorden (en dus $20 - 7 = 13$ foute antwoorden) krijg je als volgt.

$$P(X=7) = \binom{20}{7} \cdot \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{4}}_{7 \text{ keer}} \cdot \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4}}_{13 \text{ keer}} = \binom{20}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13}$$

Er zijn immers $\binom{20}{7}$ rijtjes met 7 juiste en 13 foute antwoorden.

Elk rijtje heeft dezelfde kans van $\left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13}$. Dus $P(X=7) = \binom{20}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13}$.

Bij een binomiaal kansexperiment is de kans op k keer succes gelijk aan $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

Hierin is n het aantal keer dat het Bernoulli-experiment wordt uitgevoerd en p de kans op succes per experiment.

Voorbeeld

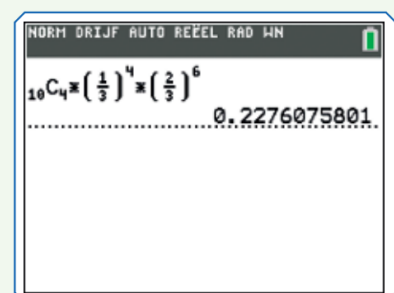
Bereken de kans dat je bij tien worpen met een dobbelsteen vier keer minstens vijf ogen gooit.

Uitwerking

X = aantal keer minstens vijf ogen

X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$$P(X=4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0,228$$



R23 Stel dat je dezelfde kans wilt berekenen als in het voorbeeld, maar dan met behulp van de toevalsvariabele Y = aantal keer hoogstens vier ogen.

- a** Wat zijn de waarden van n , p en k dan?
b Voer de berekening uit en vergelijk de antwoorden.

Geschiedenis De Bernoulli's

De familie Bernoulli heeft veel beroemde wetenschappers voortgebracht. Oorspronkelijk woonden de Bernoulli's in Antwerpen, maar in 1622 vestigden ze zich in Bazel. Tot de familieleden die zich met de kansrekening hebben beziggehouden behoort Jacob Bernoulli (1654-1705). Hij was niet alleen geïnteresseerd in empirische kansen (sterftetafels en juridische statistieken), maar hield zich ook bezig met theoretische kansen gebaseerd op permutaties en combinaties.



Jacob Bernoulli

24 In een vaas zitten acht rode, twee witte en tien groene knikkers.

- a** Carmen pakt met terugleggen zes keer een knikker uit de vaas.
 X = aantal rode knikkers dat Carmen pakt
 Geef n en p en bereken $P(X = 4)$.
b Coen pakt met terugleggen twaalf keer een knikker uit de vaas.
 Y = aantal niet-witte knikkers dat Coen pakt
 Geef n en p en bereken $P(Y = 10)$.
c Mariël pakt zonder terugleggen vier knikkers uit de vaas.
 Z = aantal groene knikkers dat Mariël pakt
 Is Z binomiaal verdeeld? Bereken $P(Z = 3)$.

25 Een honkbalspeelster heeft een slaggemiddelde van 0,3.

- Bereken de kans dat zij
a in tien achtereenvolgende slagbeurten vijf keer slag heeft
b in vijf achtereenvolgende slagbeurten alleen bij de laatste beurt slag heeft.



O26 De toevalsvariabele X is binomiaal verdeeld met $n = 3$ en $p = 0,2$.

Bij X hoort de deels ingevulde kansverdeling in de bovenste tabel.

- a** Bereken de twee ontbrekende kansen.
b Gebruik de kansverdeling om de onderste tabel verder in te vullen.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,512	0,384		

x	0	1	2	3
$P(X \leq x)$				

Theorie B De cumulatieve kansverdeling

In opgave 26 staat een tabel met kansen van het type $P(X \leq x)$.

De tabel heet de **cumulatieve kansverdeling** van X .

Een kans als $P(X \leq 2)$ heet een **cumulatieve kans**.

De GR heeft opties waarmee voor elke mogelijke n , p en k binomiale en cumulatieve binomiale kansen kunnen worden berekend.

cumuleren = opeenhopen,
opstapelen, samenvoegen

►GR] Neem van de module **De binomiale verdeling** de onderdelen Kansen van de vorm $P(X = k)$ en Kansen van de vorm $P(X \leq k)$ door.

Op elk type GR gaat de berekening van binomiale en cumulatieve binomiale kansen op een andere manier. In de uitwerking van het voorbeeld zie je dit niet terug. Daar zie je dat

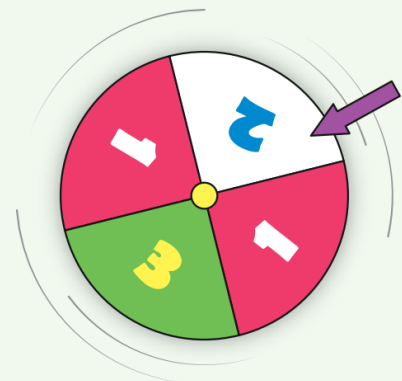
- de betekenis van de toevalsvariabele X wordt omschreven
- wordt genoteerd dat X binomiaal verdeeld is en dat n en p worden vermeld
- wordt genoteerd welke kans met de GR is berekend, met de uitkomst.

Voorbeeld

De schijf hiernaast is verdeeld in vier even grote sectoren. Sandra laat de schijf zeven keer draaien.

Bereken de kans dat zij

- drie keer een 1 krijgt
- hoogstens vier keer een 2 krijgt
- vier keer een 1 en drie keer een 3 krijgt.



Aanpak

- Gebruik op je GR de optie om een binomiale kans te berekenen.
- Gebruik op je GR de optie om een cumulatieve binomiale kans te berekenen.

Uitwerking

- X = aantal keer 1
 X is binomiaal verdeeld met $n = 7$ en $p = \frac{1}{2}$.
De GR geeft $P(X = 3) \approx 0,273$.
- X = aantal keer 2
 X is binomiaal verdeeld met $n = 7$ en $p = \frac{1}{4}$.
De GR geeft $P(X \leq 4) \approx 0,987$.
- $P(\text{vier keer een 1 en drie keer een 3}) = \binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \approx 0,034$

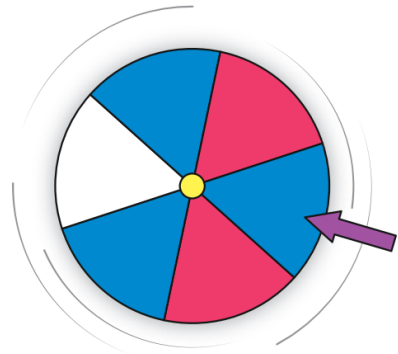
R27 Zie het voorbeeld.

- ⊙ *** **a** Bereken de kans van vraag a zoals in het voorbeeld op bladzijde 79.
b Leg uit waarom de kans bij vraag c geen binomiale kans is.

28 De schijf hiernaast is verdeeld in zes even grote sectoren.

□ ⊙ * Bereken de kans dat de pijl bij

- a** 10 keer draaien drie keer wit aanwijst
b 12 keer draaien hoogstens vijf keer rood aanwijst
c 9 keer draaien minstens één keer blauw aanwijst
d 8 keer draaien vijf keer blauw en drie keer rood aanwijst
e 16 keer draaien acht keer blauw, vijf keer rood en drie keer wit aanwijst.



29 Van een tennisspeelster is bekend dat van haar eerste opslagen 55% in is.

□ ⊙ * Bereken de kans dat

- a** bij tien servicebeurten vijf keer de eerste opslag in is
b bij zes servicebeurten alleen de laatste vier keer de eerste opslag in is.

A30 Op een autosnelweg houdt 84% van de automobilisten zich aan de

□ ⊙ * toegestane maximumsnelheid van 100 km/uur. Van de snelheids-
overtreders rijdt een kwart zelfs 120 km/uur of meer.

Bij een radarcontrole wordt van 60 auto's de snelheid gecontroleerd.

Bereken de kans dat

- a** tien automobilisten te hard rijden
b hoogstens twee automobilisten 120 km/uur of meer rijden
c een kwart van de automobilisten een snelheid heeft tussen 100 en 120 km/uur.

A31 Van een zeer grote partij accu's is 20% ondeugdelijk. Een opkoper, die dit

□ ⊙ * percentage niet kent, besluit de partij op te kopen als hij in een steekproef
van 54 accu's niet meer dan drie ondeugdelijke accu's aantreft.

Bereken de kans dat de opkoper de partij koopt.

O32 Gegeven is de binomiale toevalsvariabele X .

□ ⊙ * De kans op meer dan acht keer succes noteer je als $P(X > 8)$.

- a** Noteer op vergelijkbare wijze de kansen op
- minstens acht keer succes
 - minder dan acht keer succes
 - hoogstens acht keer succes.
- b** Hoe kun je $P(X \text{ tussen } 8 \text{ en } 20)$ ook schrijven? Kies de juiste antwoorden.
- I $P(8 < X < 20)$ II $P(8 \leq X \leq 20)$ III $P(8 \leq X < 20)$ IV $P(9 \leq X \leq 19)$

Gegeven is dat $n = 30$.

c Hoe kun je $P(X \geq 5)$ ook schrijven? Kies de juiste antwoorden.

- I $P(5 \leq X \leq 30)$ II $1 - P(X \leq 4)$ III $1 - P(X \leq 5)$ IV $P(6 \leq X \leq 30)$

Theorie C Binomiale kansen berekenen

Bij berekeningen van binomiale kansen krijg je te maken met vragen waarin formuleringen zoals ‘meer dan’, ‘minder dan’ en ‘tussen’ voorkomen.

Om deze kansen met je GR te kunnen berekenen, moeten ze in de juiste vorm staan. Kansen van de vorm $P(X = k)$ en $P(X \leq k)$ kan elke GR berekenen. Sommige GR's kunnen ook kansen van de vorm $P(X \geq k)$ of $P(l \leq X \leq r)$ direct berekenen, bij andere GR's moet je deze kansen eerst herschrijven.

[►GR] Neem van de module **De binomiale verdeling** het onderdeel Kansen van de vorm $P(X \geq k)$ en van de vorm $P(l \leq X \leq r)$ door.

Werkschema: binomiale kansen berekenen

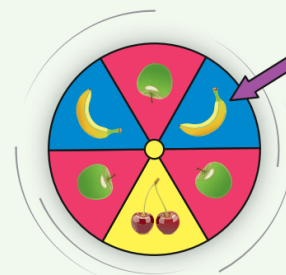
- 1 Omschrijf de betekenis van de toevalsvariabele X .
- 2 Noteer dat X binomiaal verdeeld is en vermeld n en p .
- 3 Noteer de gevraagde kans met X , herleid deze kans zo nodig tot een vorm die je met de GR kunt berekenen en bereken deze kans.

Voorbeeld

De schijf hiernaast is verdeeld in zes even grote sectoren. Per beurt wijst de pijl één sector aan.

Bereken de kans dat in

- a 20 beurten meer dan acht keer een appel wordt aangewezen
- b 50 beurten minder dan zes keer kersen wordt aangewezen
- c 30 beurten negen of tien keer een banaan wordt aangewezen
- d 25 beurten tussen drie en negen keer kersen wordt aangewezen.



Uitwerking

- a X = aantal keer appel
 X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
De GR geeft $P(X > 8) = P(X \geq 9) \approx 0,748$.
- b X = aantal keer kersen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = \frac{1}{6}$.
De GR geeft $P(X < 6) = P(X \leq 5) \approx 0,139$.
- c X = aantal keer banaan
 X is binomiaal verdeeld met $n = 30$ en $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
De GR geeft $P(X = 9 \text{ of } X = 10) = P(X = 9) + P(X = 10) \approx 0,299$.
- d X = aantal keer kersen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 25$ en $p = \frac{1}{6}$.
De GR geeft $P(3 < X < 9) = P(4 \leq X \leq 8) \approx 0,603$.

33 Bij een binomiaal kansexperiment met $n = 25$ en $p = 0,42$ is X het aantal keer succes.

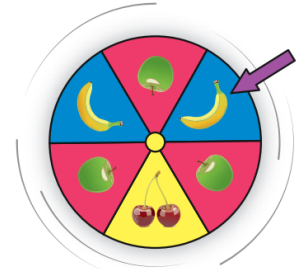
Bereken.

- a $P(X \geq 8)$
- b $P(X < 10)$
- c $P(\text{meer dan 12 keer succes})$
- d $P(\text{tussen 9 en 16 keer succes})$
- e $P(\text{minstens 6 keer succes})$
- f $P(9 \text{ of } 10 \text{ keer succes})$

34 Hiernaast zie je nog eens de schijf van het voorbeeld.

☐ ⊙ * Bereken de kans dat de pijl in

- a 10 beurten minstens vijf keer een appel aanwijst
- b 25 beurten tussen de 10 en 20 keer een appel aanwijst
- c 100 beurten meer dan 60 keer een appel aanwijst
- d 35 beurten zeven keer kersen aanwijst.



35 In een vaas zitten 12 rode, 8 zwarte en 5 witte knikkers.

☐ ⊙ * Mariëlle pakt twee knikkers uit de vaas en kijkt welke kleur deze knikkers hebben. Mariëlle voert dit experiment 15 keer uit. Elke keer legt ze de getrokken knikkers in de vaas terug.

Bereken de kans dat ze

- a drie keer twee rode knikkers pakt
- b minstens tien keer één zwarte knikker pakt
- c minder dan zes keer twee knikkers van dezelfde kleur pakt
- d minstens acht keer minstens één rode knikker pakt.

A36 Van de bijna drie miljoen kinderen tot 15 jaar die ons land telt, leeft

☐ ⊙ * 11% in een eenoudergezin.

Bereken de kans dat

- a in een voetbalelftal van de O13 geen enkele speler uit een eenoudergezin komt
- b in groep 8 van basisschool 'De Cirkel' van de 22 leerlingen er hoogstens twee uit een eenoudergezin komen.

Op muziekschool 'De Blokfluit' zitten 35 kinderen onder de 15 jaar van wie er vijf uit een eenoudergezin komen. Voor een concert worden willekeurig zes kinderen onder de 15 jaar aangewezen.

- c Bereken de kans dat hierbij twee kinderen uit een eenoudergezin zitten.

A37 Bij een vliegmaatschappij weet men uit ervaring dat de kans dat een

☐ ⊙ * passagier bij een vlucht naar Madrid niet komt opdagen 12% is.

Voor de vlucht van 10:00 uur op 15 februari naar Madrid zijn 92 stoelen beschikbaar. Er zijn 100 boekingen.

Bereken de kans dat iedereen die komt opdagen een plaats heeft.

- A38** * Bij een verhuurbedrijf van strandstoelen weet men uit ervaring dat 8% van de badgasten die voor een dag een stoel hebben besproken niet komt opdagen. Het bedrijf heeft elke dag in totaal 190 strandstoelen beschikbaar. Hoeveel stoelen zullen dagelijks verhuurd worden als de kans dat iedereen die komt opdagen een stoel heeft minstens 95% moet zijn?



- O39** * Jan gooit 30 keer met een dobbelsteen. Hij verwacht vijf keer 6 ogen te gooien.
a Licht toe waarom hij dit verwacht.

X = aantal keer dat Jan 6 ogen gooit

- b** Vul de tabel hiernaast in. Rond af op drie decimalen.

x	3	4	5	6	7
$P(X=x)$					

Theorie D Verwachtingswaarde en standaardafwijking van een binomiale toevalsvariabele

Bij het 1200 keer gooien met een dobbelsteen verwacht je $1200 \cdot \frac{1}{6} = 200$ keer 5 ogen te gooien. Bij deze binomiale verdeling is de kans op het aantal dat je verwacht groter dan de kans op elk ander aantal. Hiervan heb je in opgave 39 een voorbeeld gezien.

Algemeen geldt voor de verwachtingswaarde $E(X)$ van de binomiale toevalsvariabele X dat $E(X) = np$.

In hoofdstuk 2 heb je geleerd wat de standaardafwijking is bij een frequentieverdeling. Ook bij een binomiale toevalsvariabele hoort een standaardafwijking.

Voor de standaardafwijking van de binomiale toevalsvariabele X geldt de formule $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$.

De standaardafwijking van een toevalsvariabele geeft een indruk van de gemiddelde afwijking van de mogelijke uitkomsten tot de verwachtingswaarde.

Van de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X is $E(X) = np$ en $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$.

- 40** * **a** Van een binomiale toevalsvariabele X is $n = 140$ en $p = 0,4$. Bereken de kans dat het aantal successen minder dan één standaardafwijking van de verwachtingswaarde afligt.
b Joep gooit 1000 keer met een dobbelsteen. Bereken de kans dat het aantal keer dat hij 6 ogen gooit meer dan twee keer de standaardafwijking van de verwachtingswaarde afligt.

- E41** * Bewering: Bij een binomiale verdeling ligt bij grote waarden van n ongeveer 68,3% van de successen minder dan één standaardafwijking van de verwachtingswaarde af. Onderzoek of deze bewering waar is voor enkele waarden van n en p .

- A42** □ ⊙ * Autoverkoper Nico houdt al jaren bij hoeveel van de door hem opgestelde offertes daadwerkelijk tot verkoop leiden. Hij maakt daarbij onderscheid tussen offertes voor nieuwe auto's en offertes voor occasions. Voor beide soorten geldt dat het aantal offertes dat tot verkoop leidt binomiaal verdeeld is. De kans dat een offerte voor een occasion tot verkoop leidt is 0,28.
- a** In het eerste kwartaal van 2025 leidden 21 offertes voor een occasion tot verkoop. Dat is precies zoveel als het verwachte aantal. Hoeveel offertes voor occasions heeft Nico in het eerste kwartaal van 2025 opgesteld?
 - b** Nico spreekt van een slecht resultaat als het aantal offertes dat tot verkoop leidt meer dan twee standaardafwijkingen kleiner is dan verwacht. In het tweede kwartaal van 2025 stelde Nico 100 offertes voor occasions op en behaalde hij een slecht resultaat. Hoeveel offertes voor occasions leidden in het tweede kwartaal van 2025 tot verkoop?
 - c** In 2025 heeft Nico in totaal 217 offertes voor nieuwe auto's opgesteld. Van deze offertes leidden er 90 tot verkoop. Dat is twee standaardafwijkingen meer dan het aantal dat Nico had verwacht. Bereken de kans dat een offerte voor een nieuwe auto tot verkoop leidt.



Kennis- en vaardighedencheck

- | | |
|---|---------------------------|
| ☐ Ik kan bij een kansexperiment herkennen of het een binomiaal kansexperiment is. | ► OPGAVE C4
THEORIE A |
| ☐ Ik kan bij een binomiaal kansexperiment met de productregel de kans op k keer succes berekenen. | ► OPGAVE C4
THEORIE A |
| ☐ Ik kan bij de binomiale verdeling met de GR kansen berekenen van de vorm $P(X = k)$ en $P(X \leq k)$. | ► OPGAVE C5
THEORIE B |
| ☐ Ik kan bij de binomiale verdeling met de GR kansen berekenen van de vorm $P(X \geq k)$ en $P(l \leq X \leq r)$. | ► OPGAVE C6a
THEORIE C |
| ☐ Ik kan de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een binomiaal verdeelde toevalsvariabele berekenen. | ► OPGAVE C6b
THEORIE D |

- C4** Pieke gooit tien keer met een dobbelsteen.
- a Bereken de kans dat zij twee keer 6 ogen gooit.
 - b Bereken de kans dat zij twee keer minder dan 3 ogen gooit en acht keer meer dan 3 ogen.
- C5** Een weervrouw voorspelt het weer in 95% van de gevallen accuraat. Bereken de kans dat zij het weer bij 20 voorspellingen hoogstens 17 keer accuraat voorspelt.
- C6** Iris beantwoordt 20 vierkeuzevragen op de gok.
- a Bereken de kans dat ze meer dan vier vragen goed beantwoordt.
 - b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal vragen dat ze goed beantwoordt. Rond zo nodig af op twee decimalen.

Antwoorden

- C4** a 0,291
b 0,020
- C5** 0,075
- C6** a 0,585
b 5
1,94

9.3 De normale verdeling

Kennis en vaardigheden

- Je kunt met de GR oppervlakten onder een normaalkromme berekenen.
- Je kunt met de GR grenzen berekenen van gebieden onder een normaalkromme.

Voorkennis De normale verdeling

In de figuur hiernaast is de verdelingskromme bij een bijzondere symmetrische verdeling getekend.

Deze klokvormige kromme heet de *normaalkromme* en hoort bij de *normale verdeling*.

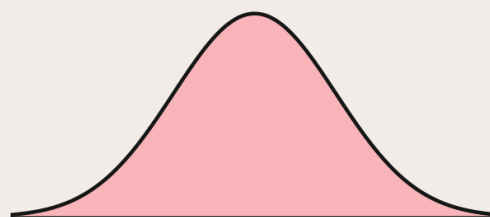
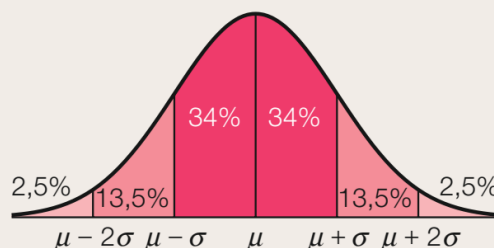
Bij de normale verdeling wordt het gemiddelde aangegeven met de Griekse letter μ . Spreek μ uit als mu.

Voor de standaardafwijking gebruiken we de Griekse letter σ .

Spreek σ uit als sigma.

De totale oppervlakte onder de kromme is 100%. Verder heb je de volgende vuistregels geleerd:

- ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.



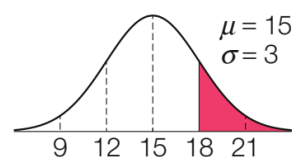
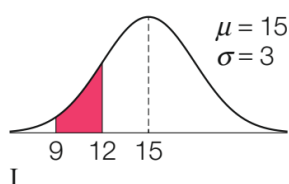
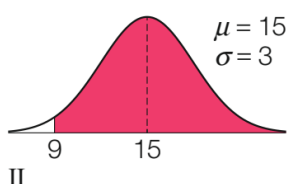
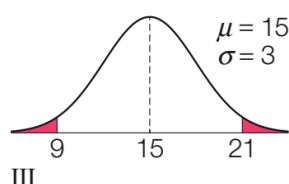
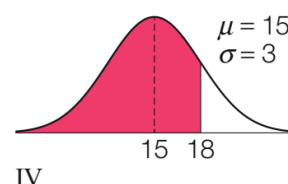
V5 In de figuur hiernaast zie je de normaalkromme met gemiddelde $\mu = 15$ en standaardafwijking $\sigma = 3$.

a Licht toe dat de oppervlakte van het rode gebied ongeveer 16% oftewel 0,16 is.

b De normaalkrommen in de figuur hieronder horen bij $\mu = 15$ en $\sigma = 3$.

Geef van elk gekleurd gebied de oppervlakte. Gebruik de vuistregels.

Noteer de antwoorden met een getal tussen 0 en 1.



Theorie A Oppervlakten berekenen met de GR

In opgave V5 heb je van enkele gebieden onder een normaalkromme met de vuistregels de oppervlakte bepaald. Met de GR kun je elke oppervlakte onder een normaalkromme berekenen. Bij het berekenen van deze oppervlakten heb je te maken met de variabelen

l = linkergrens

r = rechtergrens

μ = gemiddelde

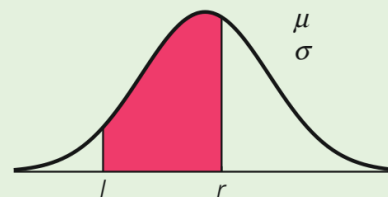
σ = standaardafwijking.

Het rode gebied in figuur b van opgave V5 heeft geen rechtergrens.

Gebruik op de GR indien nodig het grote getal 10^{99} als rechtergrens.

Het rode gebied in figuur d van opgave V5 heeft geen linkergrens. In

zo'n geval gebruik je indien nodig -10^{99} als linkergrens.



[►GR] Neem van de module **De normale verdeling** het onderdeel Oppervlakten berekenen door.

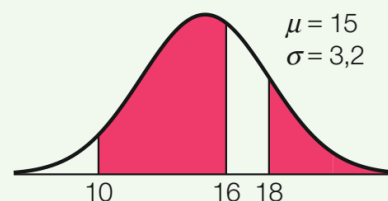
Voorbeeld

Gegeven is de normaalkromme in de figuur hiernaast.

Bereken de oppervlakte van het gebied

a tussen 10 en 16

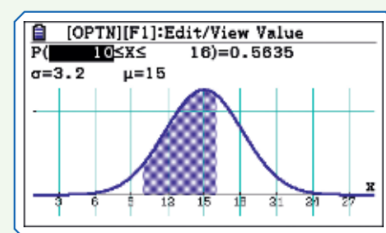
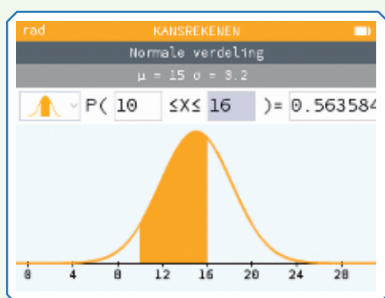
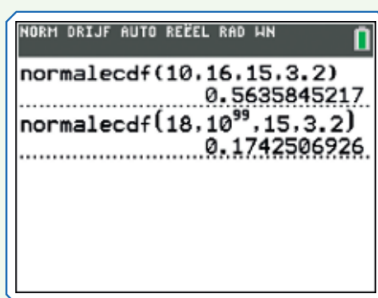
b rechts van 18.



Uitwerking

a Normale verdeling met $\mu = 15$ en $\sigma = 3,2$.

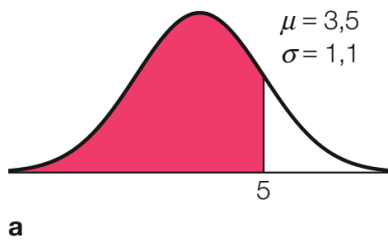
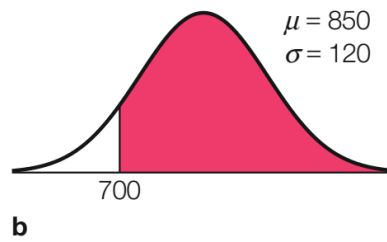
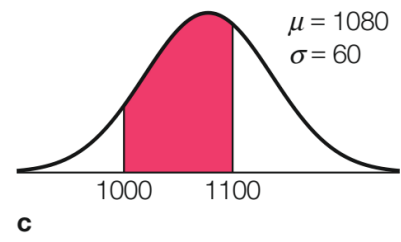
De GR geeft tussen 10 en 16 opp $\approx 0,564$.



b Normale verdeling met $\mu = 15$ en $\sigma = 3,2$.

De GR geeft rechts van 18 opp $\approx 0,174$.

- 43** Bij de normaalkrommen in de figuur hieronder zijn steeds μ en σ vermeld.
Bereken telkens de oppervlakte van het rode gebied.



- 44** Bij een normale verdeling is $\mu = 520$ en $\sigma = 18$.

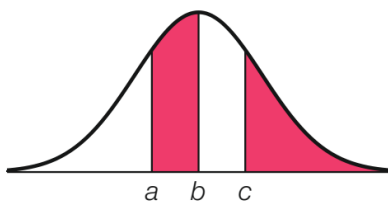
- a** Bereken de oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme links van 480. Maak eerst een schets en kleur het gebied.
b Bereken de oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme rechts van 510.

- 45** Volgens een van de vuistregels bij de normale verdeling ligt 68% van de waarnemingsgetallen binnen één standaardafwijking van het gemiddelde. Hierbij is het percentage afgerond op gehelen.
a Zoek met de GR uit hoeveel dat percentage in twee decimalen is.
b Bereken bij de andere vuistregel het percentage in twee decimalen.

- 46** Bij een normale verdeling is $\mu = 5,8$ cm en $\sigma = 0,4$ cm.

- Hoeveel procent van de waarnemingsgetallen
a is kleiner dan 5,1 cm
b is groter dan 5,25 cm
c ligt tussen 6,1 en 6,4 cm?

- 47** Zie de figuur.

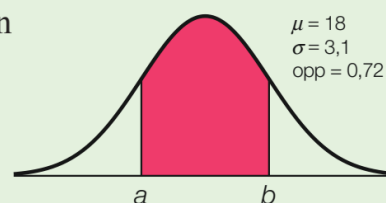


Het gebied onder de normaalkromme is in vier stukken met gelijke oppervlakte verdeeld.
Hoe groot is de oppervlakte tussen a en b ?

Theorie B Grenzen berekenen met de GR

Met de GR kun je ook grenzen berekenen van gebieden onder normaalkrommen. Naast het gemiddelde en de standaardafwijking is dan ook de oppervlakte van het gebied gegeven.

Is de oppervlakte van een gebied tussen twee verticale lijnen onder een normaalkromme gegeven, dan is het alleen mogelijk de bijbehorende grenzen te berekenen als het gebied symmetrisch is. Zo kun je bij het symmetrische gebied in de figuur hiernaast de grenzen a en b berekenen.



►GR] Neem van de module **De normale verdeling** het onderdeel **Grenzen berekenen door**.

Afspraak

Bij het berekenen van een grens a rond je af op één decimaal meer dan de gegeven σ .

Voorbeeld

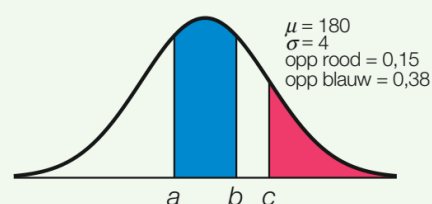
Bij een normale verdeling is $\mu = 180$ en $\sigma = 4$. Zie de figuur hiernaast.

- a** De oppervlakte van het rode gebied is 0,15.

Bereken c .

- b** De oppervlakte van het symmetrische blauwe gebied is 0,38.

Bereken b .



Uitwerking

- a** Normale verdeling met $\mu = 180$ en $\sigma = 4$ en opp rechts = 0,15.

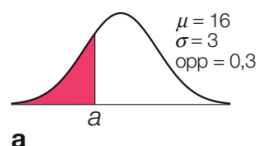
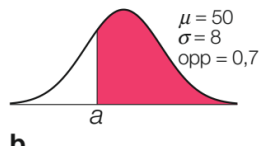
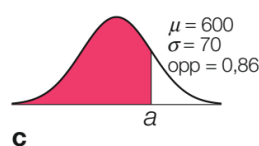
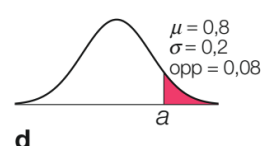
De GR geeft $c \approx 184,1$.

- b** Normale verdeling met $\mu = 180$ en $\sigma = 4$ en opp symmetrisch gebied = 0,38.

De GR geeft $b \approx 182,0$.

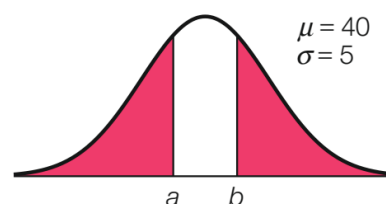
- 48** Bij de normaalkrommen hieronder is bij gegeven μ en σ de oppervlakte van het rode gebied vermeld.

Bereken telkens a .



- 49** Het gebied onder de normaalkromme in de figuur hiernaast is in drie stukken met gelijke oppervlakte verdeeld.

Bereken a en b .

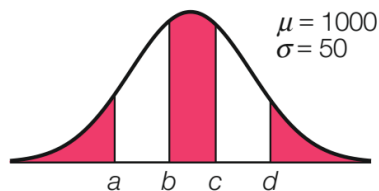


A50 Het gebied onder de normaalkromme in figuur a hieronder is in vijf stukken met gelijke oppervlakte verdeeld.

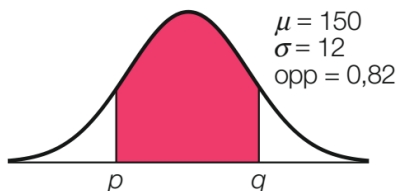
a Bereken a , b , c en d .

De gebieden in de figuren b en c zijn symmetrisch.

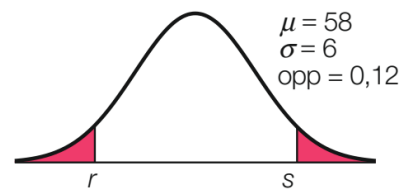
b Bereken p , q , r en s .



a



b



c

A51 Van een normale verdeling is $\mu = 2,3$ en $\sigma = 0,08$. De verticale lijn bij a deelt het gebied onder de normaalkromme tussen 2,18 en 2,36 in twee stukken met gelijke oppervlakte.

Bereken a .

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan met de GR oppervlakten onder een normaalkromme berekenen.

☐ Ik kan met de GR grenzen berekenen van gebieden onder een normaalkromme.

► **OPGAVE C7**
THEORIE A

► **OPGAVE C8**
THEORIE B

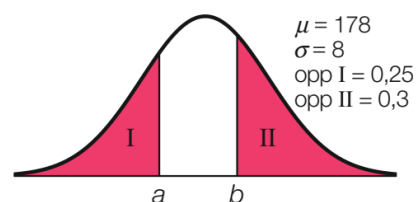
C7 Gegeven is een normale verdeling met $\mu = 445$ en $\sigma = 20$. Bereken de oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme

a links van 420

b rechts van 450

c tussen 425 en 475.

C8 Bij een normale verdeling is $\mu = 178$ en $\sigma = 8$. Zie de figuur hiernaast. Bereken a en b .



Antwoorden

C7 a 0,106

b 0,401

c 0,775

C8 a = 172,6

b = 182,2

9.4 De normale verdeling toepassen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de normale verdeling toepassen in allerlei praktische situaties.
- Je kunt de normale verdeling combineren met de binomiale verdeling.

O52

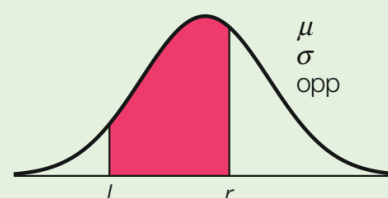


Van een groep jongens is de lengte normaal verdeeld met gemiddelde 178 cm en standaardafwijking 5,4 cm.

- Schets een normaalkromme en geef hierin het gebied aan dat hoort bij de jongens die langer zijn dan 182 cm. Bereken de oppervlakte van dit gebied.
- Hoeveel procent van de jongens is langer dan 182 cm?
- Wat is de kans dat een willekeurig gekozen jongen uit deze groep langer is dan 182 cm?

Theorie A Percentages en kansen bij de normale verdeling

In de vorige paragraaf heb je allerlei berekeningen uitgevoerd bij de normale verdeling. Daarbij had je te maken met het gemiddelde μ , de standaardafwijking σ , de linkergrens l , de rechtergrens r en de oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme.



In opgave 52 heb je gezien dat de oppervlakte onder een normaalkromme overeenkomt met zowel een kans als een percentage. Als je de normale verdeling toepast in een opgave met een praktische situatie, dan is het handig om een schets te maken met de gegevens uit de opgave. Je gebruikt de GR om de vraag te kunnen beantwoorden.

Voorbeeld

Bij een supermarkt is de op vrijdag verkochte hoeveelheid appels normaal verdeeld met een gemiddelde van 500 kg en een standaardafwijking van 40 kg.

Bereken de kans dat op een vrijdag meer dan 575 kg appels wordt verkocht.

Uitwerking



X = gewicht appels in kg

X is normaal verdeeld met $\mu = 500$ en $\sigma = 40$.

De GR geeft $P(X > 575) \approx 0,030$.

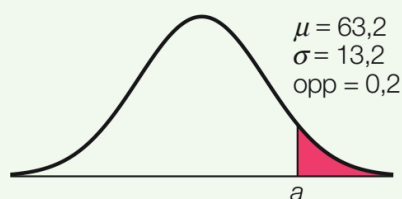
Voorbeeld

Bij een toelatingstest met gehele scores zijn de scores normaal verdeeld met een gemiddelde van 63,2 en een standaardafwijking van 13,2.

Op grond van deze test wil men hoogstens 20% van de deelnemers uitnodigen voor een vervolgtest.

Vanaf welke score mag je aan de vervolgtest meedoen?

Uitwerking



Normale verdeling met $\mu = 63,2$ en $\sigma = 13,2$ en opp rechts = 0,2.

De GR geeft $a \approx 74,31$.

Vanaf een score van 75 mag je aan de vervolgtest meedoen.

Let op: naar boven afronden.

R53



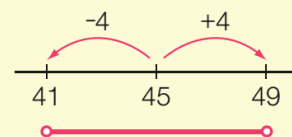
- a Zou het antwoord bij het eerste voorbeeld anders zijn geweest als in de vraag “minstens 575 kg” had gestaan? Licht toe.
- b Waarom is in het tweede voorbeeld het eindantwoord naar boven afgerond?

54



Uit onderzoek blijkt dat de lengte van volwassen forellen in een rivier normaal verdeeld is met $\mu = 45$ cm en $\sigma = 5$ cm.

- a Hoeveel procent van de volwassen forellen is korter dan 36 cm?
- b Bereken de kans dat een volwassen forel een lengte heeft tussen 44 en 52 cm.
- c In een week worden 240 volwassen forellen gevangen. Hoeveel daarvan, verwacht je, zijn langer dan 53 cm?
- d Hoeveel procent van de volwassen forellen heeft een lengte die minder dan 4 cm van het gemiddelde afwijkt?



Minder dan 4 van 45 afwijken betekent: tussen 41 en 49.

55



Van de 1600 mannelijke werknemers van een bedrijf is het gewicht normaal verdeeld met $\mu = 78$ kg en $\sigma = 12$ kg.

- a Hoeveel van deze mannen zijn naar verwachting zwaarder dan 60 kg? En hoeveel lichter dan 65 kg?
- b Bereken de kans dat het gewicht van een man uit deze groep meer dan 5 kg van het gemiddelde afwijkt.
- c Hoeveel van deze werknemers, verwacht je, wegen meer dan 105 kg?
- d De 10% zwaarste mannen worden door de bedrijfsarts opgeroepen voor controle.
- Vanaf welk gewicht in gehele kg kun je een oproep verwachten?

56 Van een bepaald type batterij is de levensduur normaal verdeeld met $\mu = 85$ uur en $\sigma = 280$ minuten.



- a De fabrikant garandeert een levensduur van 78 uur.
Hoeveel procent van de batterijen voldoet niet aan deze garantie?
- b Door een verandering in het fabricageproces weet de fabrikant de standaardafwijking terug te brengen tot 170 minuten.
Hoeveel procent voldoet nu niet aan de garantie?

57 Op een visafslag wordt een partij sardientjes aangeboden met een gemiddelde lengte van 11,5 cm en een standaardafwijking van 18 mm. Ga ervan uit dat de lengte normaal verdeeld is.



De vissen worden verdeeld in vier klassen.

klasse I: minder dan 9 cm

klasse II: van 9 cm tot 11 cm

klasse III: van 11 cm tot 13 cm

klasse IV: meer dan 13 cm

- a Bereken van elke klasse hoeveel procent van de sardientjes ertoe behoort.



Er wordt besloten over te gaan op een verdeling in drie klassen zo, dat elke klasse evenveel sardientjes bevat.

- b Bereken de grenzen van de middelste klasse. Rond af op gehele mm.

58 Op een visafslag wordt een partij sardientjes aangeboden met een gemiddelde lengte van 11,5 cm en een standaardafwijking van 18 mm. Ga ervan uit dat de lengte normaal verdeeld is.



Neem aan dat de sardientjes met een lengte van minstens 12 cm worden verdeeld in twee klassen die evenveel sardientjes bevatten. Bereken in mm nauwkeurig de grens tussen deze klassen.

59 Van een groep kandidaten is de score op een toelatingstest normaal verdeeld met $\mu = 115,2$ en $\sigma = 13,1$.



De kandidaten van wie de score tot de hoogste 10% behoort, gaan meteen door naar de volgende ronde.

- a Vanaf welk score mag een kandidaat meteen door naar de volgende ronde? Rond af op gehelen.
- b De kandidaten met de volgende 25% hoogste scores krijgen een aanvullende test.
Bij welk scores krijg je een aanvullende test? Rond af op gehelen.

A60 De productietijd van een artikel bij de firma Driessen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1 uur en 3 minuten en een standaardafwijking van 125 seconden.



- a Bereken de kans dat de productietijd van zo'n artikel minder dan 4 minuten afwijkt van het gemiddelde.
- b Artikelen die snel geproduceerd worden, vertonen vaak gebreken. De firma Driessen wil daarom de 5% snelst geproduceerde artikelen aan een inspectie onderwerpen.
Wat weet je over de productietijd van deze artikelen?

A61 Op een pak wasmiddel van het merk Bright staat dat de inhoud 2,5 kg is. De inhoud van de pakken is normaal verdeeld met $\sigma = 0,12$ kg.



- a Neem aan dat de vulmachine is ingesteld op een gemiddeld gewicht van 2,52 kg.
Bereken de kans dat een willekeurig pak Bright minder dan 2,5 kg weegt.
- b Neem aan dat de vulmachine is ingesteld op een gemiddeld gewicht van 2,56 kg.
Hoeveel procent van de pakken wijkt meer dan 0,3 kg af van het gemiddelde gewicht?
- c Neem aan dat de vulmachine is ingesteld op een gemiddelde van 2,53 kg. De fabrikant besluit de pakken met een inhoud tussen 2,50 kg en 2,60 kg in twee partijen te verdelen die beide evenveel pakken bevatten.
Bereken bij welk gewicht hij de grens moet leggen.

A62 Uit onderzoek is bekend dat het kopergehalte van de messing sierkannetjes van fabrikant Zomerhuis normaal verdeeld is met een gemiddelde van 68% en een standaardafwijking van 1,5%. De kannetjes met een te laag kopergehalte zijn niet geschikt voor verkoop en worden gerecycled. De grens voor recyclen is zo bepaald dat per 1000 kannetjes er 48 worden gerecycled. Door een nieuw productieproces wordt de standaardafwijking verlaagd naar 1,15%. De fabrikant hanteert nog steeds dezelfde grens voor het recyclen van een kannetje. Ook het gemiddelde kopergehalte is niet veranderd. Met hoeveel procent neemt het aantal gerecyclede kannetjes per 1000 af door dit nieuwe productieproces? Rond af op gehelen.



O63 In tuincentrum Haneveld is de lengte van de coniferen normaal verdeeld met een gemiddelde van 75 cm en een standaardafwijking van 18 cm.



- a Bereken de kans dat een willekeurig gekozen conifeer kleiner is dan 70 cm.
- b Ferdi kiest willekeurig drie coniferen.
Bereken de kans dat ze alle drie kleiner dan 70 cm zijn.



Theorie B De normale en binomiale verdeling

In praktische situaties worden de normale en de binomiale verdeling vaak gecombineerd. Zie hieronder.

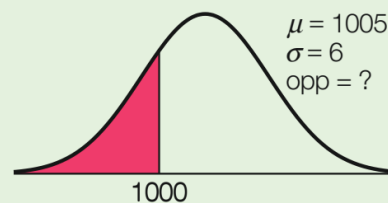
Een machine vult pakken koffie waarbij het vulgewicht X normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1005 gram en een standaardafwijking van 6 gram.

Met de GR kun je de kans berekenen dat een willekeurig pak koffie minder dan 1000 gram bevat.

Je krijgt $P(X < 1000) = 0,2023 \dots$

Tel je bij een steekproef van 20 pakken koffie het aantal pakken dat minder dan 1000 gram bevat, dan heb je te maken met de binomiale toevalsvariabele Y met $n = 20$ en $p = 0,2023 \dots$

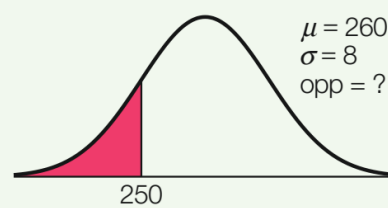
Met de GR kun je de kans berekenen dat minder dan vier pakken minder dan 1000 gram wegen. Je krijgt $P(Y < 4) = P(Y \leq 3) \approx 0,401$.



Voorbeeld

Een machine vult pakken hagelslag. Het gewicht van de pakken hagelslag is normaal verdeeld met een gemiddelde van 260 gram en een standaardafwijking van 8 gram.

Bereken de kans dat in een steekproef van 25 pakken er minstens vier minder dan 250 gram wegen.



Uitwerking

X = gewicht pak hagelslag in gram

X is normaal verdeeld met $\mu = 260$ en $\sigma = 8$.

De GR geeft $P(X < 250) = 0,105 \dots$

Y = aantal pakken dat minder dan 250 gram weegt

Y is binomiaal verdeeld met $n = 25$ en $p = 0,105 \dots$

De GR geeft $P(Y \geq 4) \approx 0,268$.

64



De Vlaamse reus is een zeer grote tamme konijnensoort. Het gewicht van Vlaamse reuzen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 7,5 kg en een standaardafwijking van 0,8 kg.

- Bereken de kans dat een Vlaamse reus meer dan 9 kg weegt.
- Bereken de kans dat in een steekproef van 20 Vlaamse reuzen er hoogstens twee meer dan 9 kg wegen.



65

In een rijwielfabriek is een van de handelingen tijdens het productieproces het instellen van de remmen. De tijd die hiervoor nodig is, is normaal verdeeld met een gemiddelde van 2 minuten en 40 seconden en een standaardafwijking van 15 seconden.

- a Bereken de kans dat van 80 van deze handelingen er minstens 10 langer dan drie minuten duren.
- b Een werknemer wordt geacht op een dag 180 van deze handelingen te verrichten.
Hoeveel van deze 180 handelingen kosten naar verwachting minder dan twee en een halve minuut?

A66

Volgens de wereldvoetbalbond FIFA moet een officiële wedstrijdbal een omtrek hebben van minstens 68 cm en hoogstens 70 cm. Van een grote partij voetballen is de omtrek normaal verdeeld met een gemiddelde van 69,0 cm en een standaardafwijking van 7 mm. Voor een groot toernooi worden 100 ballen aangeschaft.

- a Hoeveel daarvan zullen naar verwachting aan de eisen van de FIFA voldoen?
- b Bereken de kans dat minstens 90 ballen aan de eisen van de FIFA voldoen.

**A67**

Dropfabrikant Grotte verkoopt zakken Engelse drop. Volgens de verpakking is de inhoud 270 gram. Uit metingen blijkt dat de inhoud van een zak normaal verdeeld is met een gemiddelde van 272 gram en een standaardafwijking van 6 gram. De drop wordt verpakt in dozen van negen zakken.

- a In hoeveel procent van de dozen zitten meer dan twee zakken met te weinig drop?
- b Bereken de kans dat in een doos geen enkele zak zit met een gewicht van minder dan 260 gram.

In de uitdeelzakken van Grotte zitten 20 kleine zakjes drop. Daarvan zijn er acht met zoete drop, zes met zoute drop en zes met Engelse drop.

Voor een steekproef worden er uit 10 van deze uitdeelzakken 5 zakjes gekozen om het gewicht te bepalen.

- c Bereken de kans dat uit iedere uitdeelzak minstens één zakje Engelse drop wordt gekozen.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de normale verdeling toepassen in allerlei praktische situaties.
- ☐ Ik kan de normale verdeling combineren met de binomiale verdeling.

► OPGAVE C9
THEORIE A

► OPGAVE C10
THEORIE B

C9 Een machine vult flessen wijn. De vulinhoud van een fles is normaal verdeeld met een gemiddelde van 750 mL en een standaardafwijking van 7 mL.

- a** Bereken de kans dat een fles meer dan 760 mL bevat.
- b** Hoeveel procent van de flessen bevat minstens 748 mL?
- c** Een groothandel neemt 800 flessen wijn af die gevuld zijn door deze machine. Hoeveel daarvan, verwacht je, zullen minder dan 732 mL bevatten?
- d** Wat weet je van de inhoud van de 5% flessen met de kleinste vulinhoud? Rond in je antwoord af op één decimaal.



C10 Van een grote groep vrouwen is de lengte normaal verdeeld met een gemiddelde van 171 cm en een standaardafwijking van 5 cm. Bereken de kans dat in een steekproef van 15 vrouwen er minstens drie langer zijn dan 1,80 m.

Antwoorden

- C9**
- a** 0,077
 - b** 61,2%
 - c** 4
 - d** kleiner dan 738,5 mL
- C10** 0,015

Kennis- en vaardighedentest

9.1 Toevalsvariabelen en verwachtingswaarde

- 1** Robert laat de schijf hiernaast twee keer draaien.

X = som van de aangegeven getallen

Y = verschil van de aangewezen getallen

Z = grootste van de twee aangewezen getallen

Bereken exact.

a $P(X \leq 8)$

b $P(Y > 0)$

c $P(Z = 5)$



- 2** Racing Rotterdam en Utrecht United spelen een volleybalwedstrijd over maximaal vijf sets. Het team dat als eerste drie sets wint, is winnaar. De kans dat Racing een set wint is 0,65.

A = aantal sets dat de partij duurt

Stel de kansverdeling van A op.

- 3** Bij een spel met drie dobbelstenen is de inzet 1 euro. Je mag één keer met de drie dobbelstenen gooien. Is de som van de ogen 18, dan krijg je 100 euro. Is de som van de ogen 17, dan krijg je 15 euro en is de som 16, dan krijg je 5 euro. In alle andere gevallen krijg je niets. Bereken voor een speler de winstverwachting per spel.

9.2 De binomiale verdeling

- 4** Van de bovenbouwleerlingen op het vwo kiest 9% wiskunde C, 45% wiskunde A en 46% wiskunde B.

Bereken de kans dat van 15 willekeurige bovenbouwleerlingen op het vwo

a er hoogstens tien wiskunde A of wiskunde C hebben

b niemand wiskunde C heeft.

- 5** Van de Nederlandse vakantiegangers gaat 51% met de auto en 42% met het vliegtuig naar de vakantiebestemming.

Bereken de kans dat van 20 Nederlandse vakantiegangers

a meer dan de helft met het vliegtuig op vakantie gaat

b de ene helft met de auto en de andere helft met het vliegtuig gaat.

- 6** **a** Van een binomiale toevalsvariabele X is $n = 40$ en $E(X) = 22,4$.

Bereken σ_X . Rond af op twee decimalen.

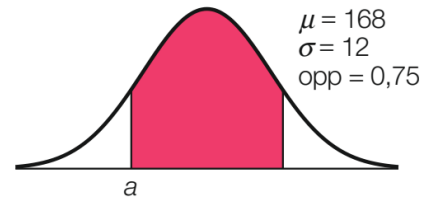
b Van een binomiale toevalsvariabele Y is $E(Y) = 45$ en $\sigma_Y = 6$.

Bereken n en p .

9.3 De normale verdeling

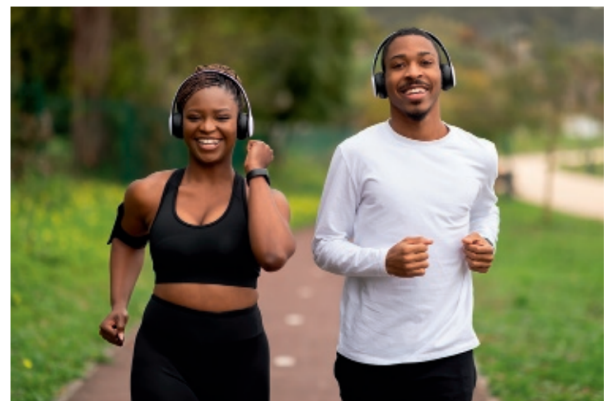
- 7 Bij een normale verdeling is $\mu = 201$ en $\sigma = 44$.
Hoeveel procent van de waarnemingsgetallen
a is kleiner dan 256
b ligt tussen 188 en 241?

- 8 Het rode gebied onder de normaalkromme hiernaast is symmetrisch.
Bereken a .



9.4 De normale verdeling toepassen

- 9 De tijd die atleet Ruben over 15 km loopt is normaal verdeeld met een gemiddelde van 47 minuten en 30 seconden en een standaardafwijking van 50 seconden.
a Bereken in seconden nauwkeurig de tijd die Ruben in slechts 2% van de gevallen overschrijdt.
b In hoeveel procent van de gevallen is de gemiddelde snelheid van Ruben meer dan 20 km per uur?



- 10 Fabrikant Eus verkoopt augurken in glazen potten. De deksels voor deze potten worden aangeleverd door een leverancier. De diameter van deze deksels is normaal verdeeld met een gemiddelde van 651 mm en een standaardafwijking van 0,6 mm. Het is belangrijk dat de deksels goed op de potten passen.

Deksels met een diameter groter dan 652,5 mm zijn te groot voor de potten.

- a** Hoeveel deksels in een partij van 1000 stuks zullen naar verwachting te groot zijn?

Deksels met een diameter kleiner dan 649,4 mm zijn te klein voor de potten.

- b** Bereken de kans dat bij een partij van 1000 deksels er minstens 992 op de potten passen.



Gemengde opgaven

- 1**
- a Bereken de kans dat je bij tien worpen met een dobbelsteen meer dan twee keer 6 ogen gooit.
 - b Bereken de kans dat je bij twaalf worpen met twee dobbelstenen minstens vier keer meer dan 9 ogen gooit.
 - c Bereken de kans dat je bij twintig worpen met drie dobbelstenen hoogstens twee keer hoogstens 5 ogen in totaal gooit.
 - d Eva gooit net zo lang met twee dobbelstenen totdat ze minstens één keer 6 ogen heeft gegooit.
Bereken de kans dat ze vier keer moet gooien.

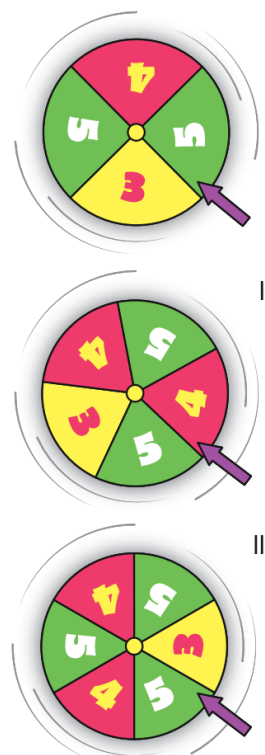
- 2** Hiernaast zie je drie schijven die onafhankelijk van elkaar draaien. Nadat de schijven zijn uitgedraaid, wijst elke pijl een sector aan. Je winst de hoofdprijs van 100 euro als elk van de pijlen het cijfer 3 aanwijst. Bij drie keer het cijfer 4 win je 20 euro en bij drie keer het cijfer 5 win je 5 euro.

Mariska speelt het spel één keer.

X = bedrag dat Mariska wint

Y = som van de drie aangewezen getallen

- a Bereken $P(X = 100)$.
- b Stel de kansverdeling van X op. Schrijf de kansen als breuken met noemer 120.
- c Bereken $P(Y = 10)$.
- d Coby speelt het spel vier keer. Bij elk spel heeft ze twee keer het cijfer 3.
Bereken de kans op deze situatie.
- e Anne speelt het spel net zo lang, totdat ze de hoofdprijs wint.
Bereken de kans dat ze acht of negen keer moet spelen.



- 3** Bij een reisorganisatie weet men uit ervaring dat de kans dat een volledig verzorgde reis naar Malta wordt geannuleerd, gelijk is aan 0,08. De reisorganisatie speelt hierop in door meer van deze reizen te verkopen dan de 1250 beschikbare reizen.
- a Neem aan dat er 1350 reizen naar Malta verkocht zijn.
Bereken de kans dat het aantal ingekochte reizen toch voldoende is.
 - b Neem aan dat er 1300 reizen naar Malta verkocht zijn.
Bereken de kans dat het aantal annuleringen minder dan één standaardafwijking van het verwachte aantal annuleringen afligt.
 - c De eigenaar van de reisorganisatie wil de kans dat iemand teleurgesteld moet worden beperken tot maximaal 5%.
Hoeveel reizen naar Malta zal men maximaal verkopen?

- 4** Pluimveehouder Wegdam heeft 6000 legkippen. Het gewicht van de door deze kippen gelegde eieren is normaal verdeeld met een gemiddelde van 60 gram en een standaardafwijking van 4 gram. Per dag heeft Wegdam 300 euro vaste kosten. De variabele kosten zijn 1,5 cent per ei. Voor de eieren onderscheidt Wegdam drie klassen.

VERDELING EIEREN OVER DE KLASSEN

klasse K	klasse M	klasse G
gewicht tot 56 gram verkoopprijs 9 cent per ei	gewicht tussen 56 en 64 gram verkoopprijs 10 cent per ei	gewicht vanaf 64 gram verkoopprijs 11 cent per ei

Neem aan dat de kippen op een dag 5000 eieren leggen.

- a** Hoeveel van deze eieren zullen naar verwachting tot klasse K behoren? En hoeveel tot klasse M?
- b** Bereken de verwachte winst die Wegdam deze dag maakt.

- 5** Barbut is een dobbelspel dat oorspronkelijk uit het Midden-Oosten komt en dat je tegen elkaar of met een groep kunt spelen. Er wordt met twee dobbelstenen gegooid op een tafel met een rood vlak en een geel vlak. Voor het gooien kies je een vlak en zet je een bedrag in. In deze opgave gaan we uit van een inzet van 10 euro. Bij twee keer een 1, twee keer een 2, twee keer een 4 of (in willekeurige volgorde) een 1 en een 2 winnen spelers die hebben gekozen voor het rode vlak. Wordt er twee keer een 3, twee keer een 5, twee keer een 6 of (in willekeurige volgorde) een 5 en een 6 gegooid, dan winnen spelers die hebben ingezet op het gele vlak. Bij alle andere combinaties is er geen winnaar en wordt er opnieuw gegooid, net zolang totdat er een winnende combinatie is.

- a** De kans dat je bij dit spelletje wint is gelijk aan 0,5. Licht dit toe.

Bij de meeste combinaties krijg je als winnaar twee keer je inzet terug, dat wil zeggen 20 euro. Alleen bij de combinaties dubbel 1 en dubbel 6 krijg je minder terug. In die gevallen krijg je anderhalf keer je inzet, dus 15 euro. Als je verliest, dan krijg je niets, en als er opnieuw wordt gegooid, dan blijft de inzet staan.

- b** Toon aan dat de kans dat je 5 euro wint gelijk is aan 0,1.
- c** Bereken de verwachtingswaarde van de winst per spel.

6 De hartslag is de frequentie waarmee het hart slaat. Voor de meeste mensen ligt deze waarde in rust tussen de 60 en 100 slagen per minuut. Sporters in topconditie bereiken in rust veel lagere waarden, terwijl personen die stress ervaren of zware inspanning leveren met veel hogere waarden te maken krijgen. Een hele lage of juist hoge hartslag kan echter ook een indicatie zijn van een medisch probleem.

Een verpleegkundige onderzoekt bij een grote groep mensen de hartslag in rust. Deze blijkt normaal verdeeld te zijn met een gemiddelde van 70 en een standaardafwijking van 9,2 slagen per minuut. Hij verdeelt de personen in drie groepen, die hij nader wil onderzoeken.

I hartslag lager dan 60

II hartslag van 60 tot 90

III hartslag van 90 of meer

a Bereken van elke groep hoeveel procent van de personen er toe behoort. Rond af op één decimaal.

De verpleegkundige wil de personen in de middelste groep nader onderzoeken. Daarom verdeelt hij deze personen in oplopende hartslag in de groepen IIA en IIB, die elk 50% van de personen van groep II bevatten.

b Bereken de grens tussen de groepen IIA en IIB. Rond af op gehelen.

7 Bij bakker Bolhuis kun je gewone oliebolletjes en oliebolletjes met krenten kopen. Door een goede balans tussen baktijd en baktemperatuur bakt Bolhuis bolletjes die niet al te vet zijn. Het vetpercentage van de gewone oliebolletjes is normaal verdeeld met een gemiddelde van 7,3% en een standaardafwijking van 2,2%.

Victor koopt bij Bolhuis een zak met tien gewone oliebolletjes.

Bereken de kans dat hij meer dan vier bolletjes met een vetpercentage van meer dan 8% krijgt.



8 De Britse natuurkundige Lord Rayleigh deed in de tweede helft van de 19^e eeuw onderzoek naar de windsnelheden die op een bepaalde plaats voorkwamen. Hij ontdekte daarbij dat de in een jaar voorkomende windsnelheden bij benadering normaal verdeeld zijn. Voor Amersfoort is de gemiddelde windsnelheid 3,8 m/s en de standaardafwijking 1,3 m/s.

a Hoeveel uur per jaar is de windsnelheid in Amersfoort meer dan 5 m/s?

b Men spreekt van matige wind als de windsnelheid tussen 3,4 en 7,5 m/s ligt.

Hoeveel uur per jaar is er in Amersfoort matige wind?

- 9** Bij een module van tien lessen bij het vak NLT wordt in elke les gewerkt met groepjes. De 28 leerlingen worden aan het begin van iedere les willekeurig ingedeeld in groepjes van vier. Joeran en zijn twee beste vrienden zitten samen in de NLT-klas.

Bereken de kans dat Joeran meer dan twee lessen met minstens één vriend in het groepje zit.

- 10** Een bijzondere wijn van Goettelmann is zijn Gewurtztraminer. Deze is gemaakt volgens het principe van de ‘Grains Nobles’. Bij wijnen die volgens dit principe zijn gemaakt, laat men de druiven langer hangen dan gebruikelijk. Daarmee worden druiven met een zeer hoog suikergehalte verkregen. Het suikergehalte wordt gemeten in graden Oechsle ($^{\circ}\text{Oe}$).

Niet elke druif bevat precies evenveel suiker. Het suikergehalte is normaal verdeeld. Op 28 november hebben de druiven een gemiddeld suikergehalte van 131°Oe en een standaardafwijking van $2,7^{\circ}\text{Oe}$.

- a** Van hoeveel procent van de druiven wijkt het suikergehalte minder dan $3,5^{\circ}\text{Oe}$ af van het gemiddelde?
- b** Bereken de kans dat van vijf willekeurig gekozen druiven er minstens één een suikergehalte heeft van meer dan 138°Oe .

Eén van de druiven heeft op 28 november een suikergehalte van $136,5^{\circ}\text{Oe}$. Volgens Goettelmann behoort deze druif tot de twee procent druiven met het hoogste suikergehalte.

- c** Onderzoek met een berekening of Goettelmann gelijk heeft.

Wijn met het keurmerk ‘Grains Nobles’ moet voldoen aan strenge overheidseisen. Minimaal 98,5% van de druiven moet een hoger suikergehalte hebben dan een wettelijk vastgestelde ondergrens. Goettelmann constateert dat hij op 28 november nog niet aan de eis voldoet.

- d** Wat weet je van de wettelijk vastgestelde ondergrens?





10

Exponenten en logaritmen

Bij nucleaire geneeskunde wordt gebruikgemaakt van medische isotopen. Dit zijn radioactieve stoffen. De hoeveelheid straling die zo'n stof uitzendt heeft een vaste halfwaardetijd: de tijd waarin de hoeveelheid straling halveert.

De medische isotoop jodium-123 heeft een halfwaardetijd van 13,3 uur. Dat wil zeggen dat de hoeveelheid straling iedere 13,3 uur halveert.

Hoe lang duurt het ongeveer voordat er minder dan 1% over is van de oorspronkelijke hoeveelheid straling?

10.1 Exponentiële groei

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij een beginwaarde en groeifactor per tijdseenheid een formule van exponentiële groei opstellen en er berekeningen mee uitvoeren.
- Je kunt werken met verdubbelingstijd en halveringstijd.

Voorkennis Groeifactoren

Neemt een hoeveelheid per jaar met 15% toe, dan wordt de hoeveelheid met 1,15 per jaar vermenigvuldigd. De factor 1,15 is de *groeifactor* per jaar.

Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 1,26 is, dan heb je te maken met een toename van 26% per jaar.

Bij een jaarlijkse afname van 12% hoort een groeifactor van 0,88 per jaar.

Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 0,982 is, dan heb je te maken met een afname van 1,8% per jaar.

15% erbij geeft $100\% + 15\% = 115\%$,
dus $\times 1,15$

$\times 1,26$, dus 126%

$126\% - 100\% = 26\%$, dus 26% erbij

12% eraf geeft $100\% - 12\% = 88\%$,
dus $\times 0,88$

$\times 0,982$, dus 98,2%

$100\% - 98,2\% = 1,8\%$, dus 1,8% eraf

V1 Vul in.

toename in procenten	13%	3,3%	120%	0,7%			
groeifactor					1,06	2,5	1,237

V2 Vul in.

afname in procenten	13%	41,8%	6,2%	0,3%			
groeifactor					0,98	0,999	0,246

O1 Gegeven zijn vier formules en de bijbehorende grafieken.

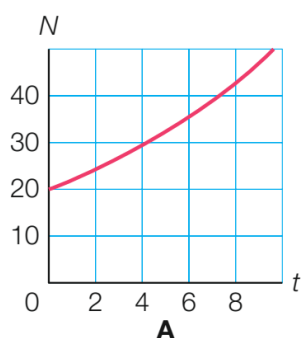
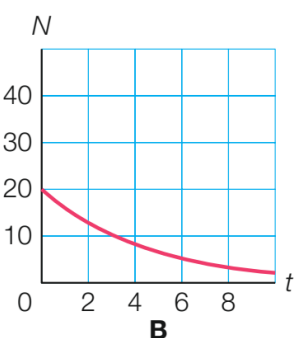
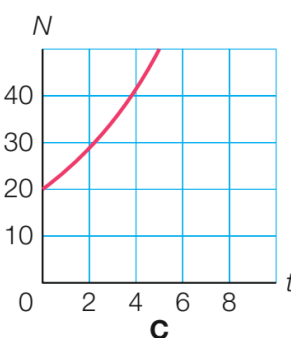
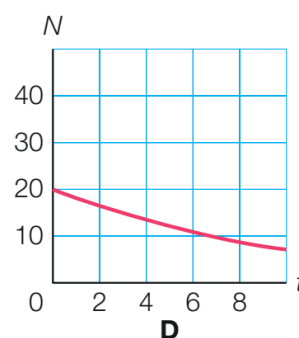
☐⊙* Zoek bij elke formule de juiste grafiek.

I $N = 20 \cdot 1,2^t$

II $N = 20 \cdot 1,1^t$

III $N = 20 \cdot 0,8^t$

IV $N = 20 \cdot 0,9^t$



Theorie A Exponentiële groei

Het **groeipercentage** van het aantal abonnees op een YouTube-kanaal is 18% per maand. Het aantal wordt dus elke maand met 1,18 vermenigvuldigd. Je hebt hier te maken met een voorbeeld van **exponentiële groei**. Het getal waarmee telkens wordt vermenigvuldigd heet de **groefactor**. Bij het YouTube-kanaal is de groefactor 1,18 per maand. De **beginwaarde** (of beginhoeveelheid) is de waarde op $t = 0$. Als op $t = 0$ het YouTube-kanaal 496 abonnees heeft, dan geldt voor het aantal abonnees N na t maanden $N = 496 \cdot 1,18^t$.

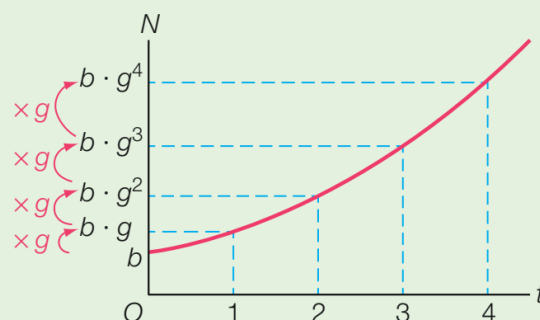
We zeggen dat er een exponentieel verband bestaat tussen N en t .

t	N
0	496
1	$496 \cdot 1,18^1$
2	$496 \cdot 1,18^2$
3	$496 \cdot 1,18^3$
$\vdots$	$\vdots$

Dus $N = 496 \cdot 1,18^t$.

Bij exponentiële groei

- wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal (de groefactor) vermenigvuldigd
- hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, waarin b de beginwaarde (of beginhoeveelheid) is en g de groefactor per tijdseenheid.

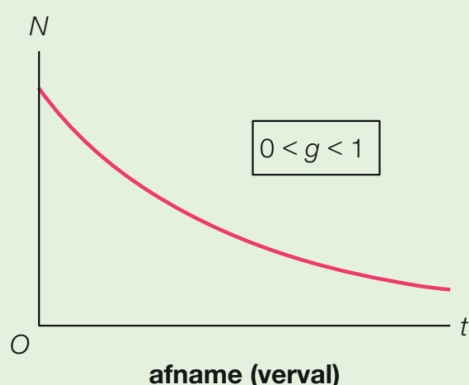
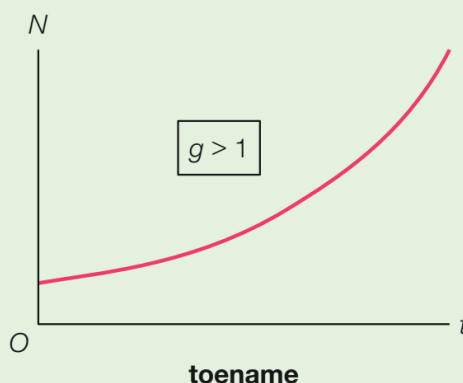


In een formule voor exponentiële groei staat de variabele in de exponent.



Negatieve groeifactoren komen niet voor. De groefactor kan wel tussen 0 en 1 liggen. De hoeveelheid neemt dan af. Ook in deze gevallen spreken we van exponentiële groei, hoewel ook de uitdrukkingen 'exponentiële afname' en 'exponentieel verval' gebruikt worden.

Bij de grafiek van $N = b \cdot g^t$ kun je dus twee situaties onderscheiden: voor g tussen 0 en 1 is de grafiek afnemend dalend en voor g groter dan 1 is de grafiek toenemend stijgend.



Voorbeeld

De waterhyacint is een drijvende waterplant die zich in warme klimaten snel kan verspreiden over het wateroppervlak. Dit heeft negatieve gevolgen voor diverse dier- en plantensoorten in het water. De waterhyacint wordt daarom in veel landen in de wereld bestreden.



In een meer komt deze plant voor. Elke dag wordt op hetzelfde tijdstip een luchtfoto genomen van het meer. Op basis van de luchtfoto wordt de door de plant bedekte oppervlakte bepaald. Het blijkt dat de oppervlakte elke dag met 7% toeneemt. Op 1 maart is de door de plant bedekte oppervlakte 52 m^2 .

- a Stel de formule op van de door de waterhyacint bedekte oppervlakte A in m^2 . Neem t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 maart.
- b Hoeveel m^2 is bedekt op 25 maart? Rond af op gehele.
- c Op welke dag stelt men voor het eerst vast dat de bedekte oppervlakte meer is dan 650 m^2 ?

Uitwerking

a $A = 52 \cdot 1,07^t$

b $t = 24$ geeft $A = 52 \cdot 1,07^{24} \approx 264$
Dus er is dan 264 m^2 bedekt.

c $52 \cdot 1,07^t = 650$

Voer in $y_1 = 52 \cdot 1,07^x$ en $y_2 = 650$.

De optie snijpunt geeft $x = 37,33...$

Dus $t = 38$, dat is op 8 april.

Bij $t = 37$ nog niet, bij
 $t = 38$ voor het eerst wel.

2



Op 1 januari 2024 wordt een zonnepaneel in gebruik genomen. De capaciteit van dit paneel is dan 400 wattpiek (Wp). Door degradatie van het paneel neemt deze capaciteit elk jaar met 0,5% af.

- a Stel de formule op voor de capaciteit C in Wp. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2024.
- b In welk jaar is de capaciteit gedaald tot 375 Wp? En in welke maand van dat jaar is dat?

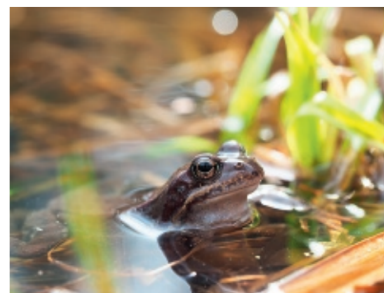
3

De halsbandparkiet komt van oorsprong niet in Nederland voor. De populatie in Nederland ontstond doordat vrijgelaten of ontsnapte dieren zich gingen voortplanten. In 1990 waren er naar schatting 400 halsbandparkieten in het wild in Nederland. Sindsdien is dit aantal elk jaar met 1,12 vermenigvuldigd. Halsbandparkieten veroorzaken veel schade bij fruittelers, doordat ze appels en peren in boomgaarden stukpikken. Volgens fruitteiler Jan Boer uit Barendrecht kost hem dat jaarlijks tienduizend euro aan omzet.

- a Stel de formule op van het aantal in het wild voorkomende halsbandparkieten N in Nederland. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1990.
- b In welk jaar waren er voor het eerst meer dan 15 000 halsbandparkieten in Nederland?
- c Neem aan dat in 2020 de totale omzetschade bij fruittelers veroorzaakt door de halsbandparkiet 3,2 miljoen euro was en dat deze omzetschade elk jaar met 10% toeneemt.
Bereken de gemiddelde omzetschade die één halsbandparkiet veroorzaakt in 2030. Rond af op gehele euro's.

4

Op $t = 0$ zijn er in een vijver 150 kikkers en 300 salamanders. Het aantal kikkers neemt per jaar met 6% toe en het aantal salamanders neemt per jaar met 6% af.
Bereken na hoeveel jaar er evenveel kikkers als salamanders in de vijver zijn. Rond het antwoord af op één decimaal.

**5**

Een hoeveelheid neemt het eerste jaar met 10% toe. De hoeveelheid neemt in het tweede jaar met 10% af. Het derde jaar neemt de hoeveelheid weer met 10% toe, het vierde jaar neemt de hoeveelheid weer met 10% af, enzovoort.
Na hoeveel jaar heb je voor het eerst minder dan 80% van de beginhoeveelheid?

A6

Harm en Francy storten bij de geboorte van hun zoon Jop 6633 euro op een beleggingsrekening. Harm verwacht een rendement van 5,5% per jaar, terwijl Francy een rendement van 8% per jaar verwacht. Het rendement is de winst over een bepaalde periode uitgedrukt in procenten.

- a Volgens de verwachting van Francy heeft Jop op zijn 18^e verjaardag een hoger bedrag op zijn rekening dan volgens de verwachting van Harm. Hoeveel hoger?
- b De financieel adviseur van Harm en Francy verwacht dat het bedrag op de 18^e verjaardag van Jop 22045 euro bedraagt.
Van welk jaarlijks rendement gaat hij uit? Rond af op één decimaal.

A7

Een astmapatiënt met een ernstige astma-aanval krijgt van een arts een injectie met theofylline. Dit medicijn zorgt ervoor dat spieren in de luchtwegen ontspannen, waardoor de luchtwegen verwijden en de patiënt meer lucht krijgt. Direct na toediening van de injectie is de concentratie theofylline in het bloed 15 microgram per mL. Vervolgens neemt de concentratie door afbraak in de lever langzaam af. Bij niet-rokers neemt de concentratie C van theofylline in het bloed af met 11% per uur, terwijl dat bij rokers 16% per uur is.

- a Stel voor zowel rokers als niet-rokers de formule op van de concentratie theofylline C in microgram per mL na t uur.
- b Schets de grafieken in één figuur.

De daling van de concentratie in het eerste uur na toediening is bij rokers groter dan bij niet-rokers.

- c Hoeveel microgram per mL scheelt het?

Het medicijn is uitgewerkt als C minder dan 10 microgram per mL is. De patiënt krijgt om 11:35 uur de injectie.

- d Hoe laat is het medicijn uitgewerkt als de patiënt een roker is?

De patiënt blijkt een niet-roker te zijn. Om 13:50 uur krijgt de patiënt een nieuwe injectie, de onderhoudsdosis, waardoor de concentratie direct met 2,5 microgram per mL toeneemt.

- e Hoe laat is het medicijn uitgewerkt?

O8

Een hoeveelheid van 20 neemt elk jaar met een factor 1,034 toe. Om te berekenen hoeveel jaar het duurt voordat deze hoeveelheid is verdubbeld, kun je de vergelijking $20 \cdot 1,034^t = 40$ oplossen. Hierin is t de tijd in jaren.

- a Licht deze vergelijking toe en los de vergelijking op. Rond af op één decimaal.
- b Na tien jaar is de hoeveelheid ongeveer 27,94.
Bereken hoeveel jaar later deze hoeveelheid is verdubbeld. Rond af op één decimaal.
- c Vergelijk je antwoorden op de vragen a en b. Wat valt je op?

Theorie B Verdubbelingstijd en halveringstijd

Om een goed beeld te krijgen van de snelheid van een exponentiële toename, kun je de verdubbelingstijd gebruiken. De **verdubbelingstijd** is de tijdsduur die nodig is voor de verdubbeling van een hoeveelheid bij exponentiële groei.

In opgave 8 zag je dat bij een groei met groeifactor 1,034 de hoeveelheid elke 20,7 jaar verdubbelt. De verdubbelingstijd is dus 20,7 jaar.

Hiernaast zie je dat de verdubbelingstijd onafhankelijk is van de beginhoeveelheid. De verdubbelingstijd bereken je dus door de vergelijking $1,034^t = 2$ op te lossen. De verdubbelingstijd hangt alleen af van de groeifactor en is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$.

$$\begin{array}{l} 20 \cdot 1,034^t = 40 \\ 1,034^t = 2 \end{array} \quad \text{): } 20$$

$$\begin{array}{l} b \cdot 1,034^t = 2b \\ 1,034^t = 2 \end{array} \quad \text{): } b$$

De verdubbelingstijd is de tijd waarin een hoeveelheid verdubbelt bij exponentiële groei. Is de groeifactor g , dan vind je de verdubbelingstijd door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen.

Heb je te maken met een exponentiële afname, dan kun je de **halveringstijd** berekenen. Dit is de tijdsduur die nodig is voor de halvering van een hoeveelheid. Je vindt de halveringstijd door de vergelijking $g^t = 0,5$ op te lossen.

De halveringstijd is de tijd waarin een hoeveelheid halveert bij exponentiële groei. Is de groeifactor g , dan vind je de halveringstijd door de vergelijking $g^t = 0,5$ op te lossen.

Voorbeeld

- a** Een populatie neemt jaarlijks met 8,6% af.
Bereken de halveringstijd. Geef het antwoord in maanden nauwkeurig.
- b** Gegeven is de formule $N = 200 \cdot 1,12^t$. Hierin is t de tijd in jaren.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- c** Een hoeveelheid verdubbelt elke 15 jaar.
Bereken het groeipercentage per jaar.

Uitwerking

- a** Los op $0,914^t = 0,5$.
Voer in $y_1 = 0,914^x$ en $y_2 = 0,5$. De optie snijpunt geeft $x = 7,708...$
De halveringstijd is 7 jaar en $0,708... \cdot 12 \approx 8$ maanden.
- b** Los op $1,12^t = 2$.
Voer in $y_1 = 1,12^x$ en $y_2 = 2$. De optie snijpunt geeft $x = 6,116...$
De verdubbelingstijd is 6 jaar en $0,116... \cdot 12 \approx 1$ maand.
- c** Er geldt $g^{15} = 2$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{15} = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{15}} \approx 1,047$
Dus het groeipercentage is 4,7% per jaar.

Je kunt ook de optie snijpunt op de GR gebruiken om $g^{15} = 2$ op te lossen.

R9 Een hoeveelheid neemt met 5% per jaar toe. Jimi zegt: “Een verdubbeling is een toename van 100%, dus de verdubbelingstijd is $100 : 5 = 20$ jaar.”

□ ⊙ *

- a Welke fout maakt Jimi?
- b De verdubbelingstijd bij een toename van 5% per jaar is veel korter dan 20 jaar.
Bereken de verdubbelingstijd in jaren. Rond af op één decimaal.

10 a Een hoeveelheid neemt per jaar met 8% af.
Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.

□ ⊙

- b Een hoeveelheid neemt dagelijks met 0,02% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in jaren. Rond af op één decimaal.
- c Een hoeveelheid verdubbelt elke week.
Bereken het groeipercentage per dag.
- d Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 5 jaar en 3 maanden.
Bereken de groeifactor per jaar. Rond af op drie decimalen.

11 a Voor het aantal inwoners van Ghana geldt de formule $N = 25,2 \cdot 1,0235^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2010 en N het aantal inwoners in miljoenen.

□ ⊙ *

Bereken de verdubbelingstijd van het aantal inwoners van Ghana. Rond af op gehele jaren.

- b De bevolking van Gambia neemt elk jaar met 2,5% toe.
De bevolking van Gabon neemt elk jaar met 2,1% toe.
Beredeneer, zonder de verdubbelingstijden te berekenen, bij welk land de bevolking een langere verdubbelingstijd heeft.



12 Het aantal boerenbedrijven in Nederland halveert elke 25 jaar. In 1950 waren er in Nederland 410 000 boerenbedrijven.

□ ⊙ *

- a Stel een formule op voor het aantal boerenbedrijven N in Nederland. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1950. Rond de groeifactor af op drie decimalen.
- b In 2023 waren er 50 600 boerenbedrijven in Nederland.
Bereken hoeveel procent het aantal boerenbedrijven volgens de formule afwijkt van het werkelijke aantal in 2023.

13 Penicilline is een antibacteriële stof die in 1928 in de schimmel Penicillium ontdekt werd door de Schotse arts-bacterioloog Alexander Fleming. Sinds de jaren 40 wordt deze schimmel op grote schaal gekweekt en hiermee zijn vele miljoenen mensenlevens gered. Het aantal cellen in een kweek van Penicillium neemt met 20% per uur toe.

□ ⊙ *

- a Bereken de verdubbelingstijd in minuten nauwkeurig.
- b Bereken in minuten nauwkeurig de benodigde tijd om de hoeveelheid cellen te laten vertienvoudigen.
- c Onderzoek na hoeveel minuten de hoeveelheid cellen met 5% is toegenomen. Rond af op gehelen.

- 14** * Onderzoek of bij exponentiële groei een verdubbeling van het
* groeipercentage een halvering van de verdubbelingstijd tot gevolg heeft.

- A15** □ ⊗ * In Nederland werd in 2003 bijna 61 miljard
euro aan zorg en welzijn uitgegeven.
Sindsdien zijn deze uitgaven enorm
toegenomen, maar niet in elke periode
was de groei even groot. Zie de tabel. Je
kunt bijvoorbeeld aflezen dat in 2004 en
2005 de groei van de uitgaven ten
opzichte van het jaar ervoor 3,7% was.
a Laat met een berekening zien dat in
2005 bijna 65,6 miljard euro werd
uitgegeven aan zorg en welzijn.

periode	jaren	groei t.o.v. het jaar ervoor
I	2004 en 2005	3,7%
II	2006 t/m 2012	4,8%
III	2013 t/m 2015	0,6%
IV	2016 t/m 2018	3,1%

Een nadeel van het geven van groeipercentages is dat je de groei
mogelijk onderschat. Verdubbelingstijden kunnen een beter beeld geven
van de sterkte van de groei.

- b** Bereken voor elke periode de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.
c In een krantenartikel uit eind 2015 staat dat de uitgaven aan zorg en
welzijn sinds 2003 met 52% zijn toegenomen.
Onderzoek of dit in overeenstemming is met de gegevens hierboven.

In de periode 2019 t/m 2021 trad er door Covid-19 een sterke stijging op
van de uitgaven aan zorg en welzijn. De verdubbelingstijd bij de groei in
deze periode was slechts 9 jaar en 10 maanden.

- d** Bereken voor de jaren in de periode 2019 t/m 2021 het
groeipercentage ten opzichte van het jaar ervoor.

- A16** □ ⊗ * Exoten zijn planten en dieren die niet op eigen kracht, maar door de
mens in Nederland terecht zijn gekomen. Als zo'n exoot zich permanent
kan vestigen en zich snel kan vermeerderen in onze natuur, dan spreken
we van een invasieve exoot.

In deze opgave bekijken we een invasieve exoot waarvan het aantal
exemplaren gedurende een periode exponentieel toeneemt met een
verdubbelingstijd van T jaar.

- a** Hoeveel keer zoveel exemplaren zijn er na drie keer T jaar? En na vier
keer T jaar?

Op $t = 0$ zijn er van deze exoot 10 000 exemplaren in Nederland. De
verdubbelingstijd is 1,5 jaar. Onderzoekers waarschuwen dat een kritische
grens wordt bereikt als er nog eens 30 000 exemplaren bijkomen.

- b** Bereken hoeveel jaar het nog duurt voordat de kritische grens wordt
bereikt als er geen maatregelen worden getroffen.
c Op $t = 0$ is men begonnen met de bestrijding van de soort. Daardoor
remt de groei en wordt de verdubbelingstijd 5 jaar.
Bereken hoeveel jaar het dan duurt voordat de kritische grens wordt
bereikt.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan bij een beginwaarde en groeifactor per tijdseenheid een formule van exponentiële groei opstellen en er berekeningen mee uitvoeren.

► OPGAVE C1
THEORIE A

☐ Ik kan werken met verdubbelingstijd en halveringstijd.

► OPGAVE C2
THEORIE B

C1 De Australische zeeleeuw staat op de lijst van bedreigde diersoorten. Daarom wordt één keer per jaar het aantal pups geteld.

In 2010 werden er 5860 pups geteld. Daarna is dit aantal jaarlijks met 2,6% afgenomen.

- a Stel de formule op voor het aantal pups N van de Australische zeeleeuw. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2010.
- b Met hoeveel is het aantal pups afgenomen in de periode 2016-2020?
- c In welk jaar werden er voor het eerst minder dan 4200 pups geteld?



- C2**
- a Een hoeveelheid neemt dagelijks met 67,3% af. Bereken de halveringstijd in minuten nauwkeurig.
 - b Een hoeveelheid verdubbelt elke 10 jaar. Bereken het groeipercentage per jaar.

Antwoorden

- C1**
- a $N = 5860 \cdot 0,974^t$
 - b 500
 - c 2023
- C2**
- a 14 uur en 53 minuten (of 893 minuten)
 - b 7,2%

10.2 Exponentiële en lineaire groei

Kennis en vaardigheden

- Je kunt groeifactoren en groepercentages omzetten naar een andere tijdseenheid.
- Je kunt een formule opstellen bij exponentiële groei.
- Je kunt herkennen of je met lineaire of exponentiële groei te maken hebt en op basis hiervan de juiste werkwijze kiezen.
- Je kunt bepalen of gegevens overeenkomen met een lineair of een exponentieel verband.

017

□ ⊗ *

De tabel hiernaast hoort bij exponentiële groei.

a Met welk getal wordt N per twee jaar vermenigvuldigd?

b Met welk getal wordt N per vier jaar vermenigvuldigd? En per zes jaar?

c Erwin beweert dat N per jaar met 4,5 wordt vermenigvuldigd.

Laat zien dat Erwin niet gelijk heeft. Wat is wel de groeifactor per jaar?

tijd in jaren	0	2	4
hoeveelheid N	1	9	81

Theorie A Groeifactoren omzetten naar een andere tijdseenheid

De tabel hieronder hoort bij exponentiële groei. De beginwaarde is 10 en de groeifactor per uur is 3.

EXPONENTIËLE GROEI

t	0	1	2	3	4	5	6
N	10	$10 \cdot 3^1 = 30$	$10 \cdot 3^2 = 90$	$10 \cdot 3^3 = 270$	$10 \cdot 3^4 = 810$	$10 \cdot 3^5 = 2430$	$10 \cdot 3^6 = 7290$

Je ziet

- per 2 uur is de groeifactor 3^2
- per 3 uur is de groeifactor 3^3 .

In het algemeen geldt:

per n uur is de groeifactor 3^n .

Deze regel geldt ook voor niet-gehele waarden van n .

Zo geldt

- per half uur is de groeifactor $3^{\frac{1}{2}} \approx 1,732$
- per kwartier is de groeifactor $3^{\frac{1}{4}} \approx 1,316$
- per minuut is de groeifactor $3^{\frac{1}{60}} \approx 1,018$.

rad	REKENEN
$3^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{3} \approx 1.732050808$
$3^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{3} \approx 1.316074013$
$3^{\frac{1}{60}}$	$\sqrt[60]{3} \approx 1.018478864$

Afspraak

Rond groeifactoren af op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

Bij exponentiële groei met groeifactor g per tijdseenheid is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Om te berekenen wat de groeifactor per week is bij een groeifactor van 0,60 per dag, gebruik je
 $g_{\text{dag}} = 0,60$ geeft $g_{\text{week}} = 0,60^7 \approx 0,028$.

Om te berekenen wat het groeipercentage per dag is bij een toename van 70% per week, gebruik je
 $g_{\text{week}} = 1,70$ geeft $g_{\text{dag}} = 1,70^{\frac{1}{7}} \approx 1,079$.
Het groeipercentage per dag is 7,9%.

Bij exponentiële groei gaat het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid via groeifactoren.

Voorbeeld

- a Een hoeveelheid neemt per zes uur met 18% toe.
Hoeveel procent is de toename per dag?
- b Een hoeveelheid neemt per jaar met 60% af.
Hoeveel procent is de afname per maand?

Uitwerking

- a $g_{6 \text{ uur}} = 1,18$
 $g_{\text{dag}} = 1,18^4 \approx 1,939$ 1 dag is 4 keer 6 uur
De toename is 93,9% per dag.
- b $g_{\text{jaar}} = 0,4$
 $g_{\text{maand}} = 0,4^{\frac{1}{12}} \approx 0,926$
De afname is 7,4% per maand.

- 18** Een hoeveelheid neemt per dag met 16% af.

-  a Bereken de groeifactor per week.
b Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per uur af?

Een hoeveelheid neemt per kwartier met 12% toe.

- c Hoeveel procent is de toename per uur?
- d Hoeveel is de procentuele toename per vijf minuten?

19

- a** Bij een exponentiële groei hoort een groeifactor van 1,3 per dag.
Bereken het groeipercentage per vier uur.
- b** Een hoeveelheid neemt per jaar met 0,08% toe.
Hoeveel procent is de toename per eeuw?
- c** Een hoeveelheid neemt per week met 180% toe.
Hoeveel procent is de toename per dag?

R20

- Een hoeveelheid heeft een verdubbelingstijd van 4 jaar.
Anne en Lotte vragen zich af wat het groeipercentage per jaar is.
Anne pakt het aan zoals in het voorbeeld op de vorige bladzijde.
Ze noteert $g_{4 \text{ jaar}} = 2$.
Lotte gebruikt dat voor de verdubbelingstijd geldt $g^t = 2$ en noteert $g^4 = 2$ met g de groeifactor per jaar.
- a** Licht toe dat beide aanpakken op hetzelfde neerkomen.
- b** Bereken het groeipercentage per jaar.

21

- Ga bij de volgende vragen uit van een exponentieel verband.
- a** Het beleid van de regering is erop gericht om de hoeveelheid opgewekte energie door particulieren met zonnecellen elke drie jaar met een factor 2,5 te vermenigvuldigen.
Bereken het benodigde groeipercentage per jaar.
- b** In de periode 2016-2023 is de hoeveelheid verbruikte energie afkomstig van windmolens op zee vertienvoudigd.
Bereken het groeipercentage per jaar.
- c** Het aantal muziekwinkels is in 12 jaar tijd met 22% afgenomen.
Hoeveel procent is de afname per jaar?
- d** Het aantal deeltjes van een radioactieve stof halveert elke 12 seconden.
Bereken de procentuele afname per minuut.

**A22**

Wikipedia is een populair naslagwerk op internet. De start van Wikipedia was in januari 2001. Tot januari 2006 nam het aantal maandelijks geplaatste artikelen op de Engelstalige Wikipedia exponentieel toe. In januari 2006 werden 240 keer zoveel artikelen geplaatst als in januari 2001.

- a** Bereken het groeipercentage per maand.

In januari 2025 was het aantal maandelijks geplaatste artikelen met 36% afgenomen vergeleken met januari 2006.

- b** Met hoeveel procent nam in de periode 2006-2025 het aantal maandelijks geplaatste artikelen per jaar af? Ga uit van exponentiële afname.
- c** In januari 2025 was het aantal maandelijks geplaatste artikelen ongeveer 5000.
Schat het aantal geplaatste artikelen in januari 2001. Rond af op tientallen.

A23 Uit een onderzoek in Nederland blijkt dat het aantal loopkevers dramatisch is afgenomen. De onderzoekers vonden een halveringstijd van 12 jaar. Uit een onderzoek in Duitsland blijkt dat in 27 jaar 76% van de loopkevers is verdwenen.
Onderzoek of deze twee resultaten met elkaar in lijn zijn. Ga uit van exponentiële afname.

O24 Een bacteriecultuur groeit exponentieel. Op $t = 5$ zijn er 50 000 bacteriën. Op $t = 9$ zijn er 300 000 bacteriën. Hierbij is t in uren.
a Toon aan dat $g_{4 \text{ uur}} = 6$.
b Toon aan dat $g_{\text{uur}} = 1,5650\dots$

Bij deze situatie hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$ met N het aantal bacteriën en g de groeifactor per uur. Om b te berekenen, kun je de vergelijking $b \cdot 1,5650\dots^5 = 50\,000$ gebruiken.

c Licht dit toe en bereken b . Rond af op honderdtallen.

Theorie B Een formule opstellen bij exponentiële groei

Is bij exponentiële groei de hoeveelheid op twee tijdstippen bekend, dan kun je de bijbehorende formule opstellen. Je berekent hiertoe eerst de groeifactor per tijdseenheid en vervolgens de beginhoeveelheid.

Voorbeeld

Het totaal geïnstalleerd vermogen van zonnepanelen in Nederland is in de periode van 2012 tot 2023 bij benadering exponentieel toegenomen. Dit vermogen wordt meestal vermeld in megawatt (MW). In 2012 was dit 312 MW. In 2023 was dat toegenomen tot 24 400 MW.

Stel de formule op van het totaal geïnstalleerd vermogen van zonnepanelen in Nederland. Neem het vermogen V in megawatt en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2009. Rond b af op gehelen.

Uitwerking

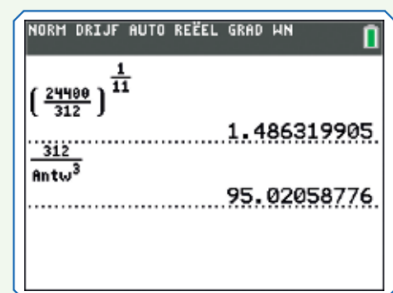
2012 tot 2023 is 11 jaar

Rond tussendoor niet af.

$$V = b \cdot g^t \text{ met } g_{11 \text{ jaar}} = \frac{24\,400}{312}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{24\,400}{312}\right)^{\frac{1}{11}} = 1,4863\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} V = b \cdot 1,4863\dots^t \\ t = 3 \text{ en } V = 312 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,4863\dots^3 = 312 \\ b = \frac{312}{1,4863\dots^3} \approx 95 \end{array}$$

$$\text{Dus } V = 95 \cdot 1,486^t.$$



25

- a** Een bacteriecultuur groeit exponentieel. Op $t = 3$ zijn er 150 000 bacteriën en op $t = 8$ zijn dat er 1 250 000. Hierbij is t in uren. Stel de formule op van het aantal bacteriën B . Rond de beginhoeveelheid af op duizendtallen.
- b** Een hoeveelheid radioactieve stof neemt elke 5,5 dagen met 36% af. Op 5 januari is er 0,6 gram. Stel de formule op van de hoeveelheid radioactieve stof H in gram. Neem de tijd t in dagen met $t = 0$ op 1 januari. Rond de beginhoeveelheid af op twee decimalen.

26

- In 2024, toen de zorguitgaven per Nederlander 6200 euro waren, werd verwacht dat de zorguitgaven per Nederlander exponentieel zouden stijgen. In het jaar 2034 zouden de zorguitgaven per Nederlander al 8100 euro zijn.
- a** Stel de formule op van het bedrag B dat per Nederlander aan zorg wordt uitgegeven. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2020. Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.
- b** Voor welk jaar verwacht men dat de zorguitgaven per Nederlander voor het eerst meer dan 10 000 euro zullen zijn?

27

- Rood licht wordt door water meer geabsorbeerd dan blauw licht. Daarom ziet op grote diepte alles er blauw uit. Zo is in de Caribische Zee op vijf meter diepte al 92% van het rode licht geabsorbeerd. Op deze diepte dringt dus slechts 8% van het rode licht door. Er bestaat een exponentieel verband tussen het percentage P van het rode licht dat doordringt en de diepte d in meter.
- a** Stel de formule op van P .
- b** Op welke diepte wordt 99% van het rode licht geabsorbeerd? Geef je antwoord in dm nauwkeurig.
- c** Matthijs is aan het duiken op een diepte van 3 meter. Hij wil duiken naar een diepte waarop half zoveel rood licht doordringt. Hoeveel meter dieper moet hij duiken? Rond af op één decimaal.

28

- In de wereld wordt steeds meer plastic geproduceerd. In 1977 werd 50 miljard kg geproduceerd en in 2015 was dat toegenomen tot 322 miljard kg. Neem aan dat de toename exponentieel is.
- a** Stel de formule op van de plasticproductie N in miljarden kg. Neem t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1980. Geef de beginhoeveelheid in miljarden kg nauwkeurig.

Onderzoekers vonden op de bodem van de oceaan nabij Californië lagen met microplastics. Elke laag hoort bij een jaar. In de laag die bij 1972 hoort, vond men 6 deeltjes microplastic per 100 cm^2 . In de laag van 1994 was dat 17 deeltjes per 100 cm^2 .

- b** Onderzoek of de hoeveelheid microplastic in de lagen van de bodem met ongeveer hetzelfde percentage per jaar toeneemt als de wereldwijde productie van plastic. Neem aan dat de toename exponentieel is.

A29



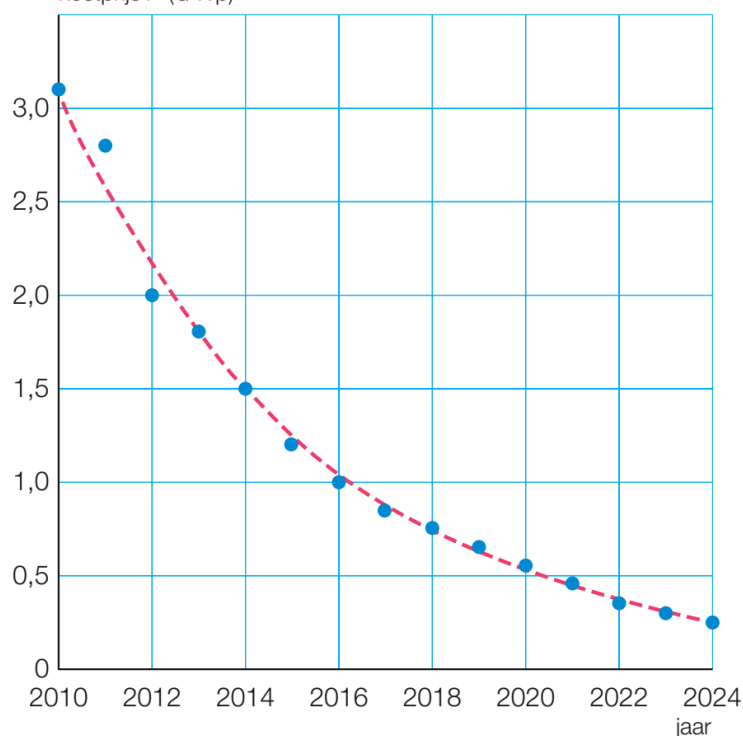
De kosten voor zonnepanelen zijn in de periode 2010 tot 2024 bij benadering exponentieel gedaald. In de figuur staat de kostprijs P in euro per Wp (wattpiek) met stippen uitgezet voor verschillende jaren. Bij de stippen is een exponentieel model opgesteld, zie de rode grafiek.

- a** Lees uit de rode grafiek af wat de halveringstijd van P is. Geef je antwoord in jaren nauwkeurig.

De stippen bij de jaartallen 2014 en 2024 liggen op de rode grafiek.

- b** Gebruik deze stippen om de halveringstijd van P in maanden nauwkeurig te berekenen.
- c** Gebruik deze stippen om de formule van P op te stellen. Neem t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2010. Rond de beginhoeveelheid af op twee decimalen.
- d** Vanaf welk jaar zal volgens het model de prijs per Wp voor het eerst minder dan 20 eurocent zijn?

PRIJSONTWIKKELING ZONNEPANELEN

kostprijs P (€/Wp)

A30



Sinds 2019 nemen de aantallen publieke laadpunten, thuislaadpunten en snellaadpunten voor elektrische auto's in Nederland exponentieel toe.

In de periode van 1 januari 2020 tot 1 januari 2024 nam het aantal publieke laadpunten P met 199% toe tot 145 200 stuks.

- a** Stel de formule op van P . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2019. Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.

Het aantal thuislaadpunten T was op 1 januari 2024 al 487 590, terwijl dat er op 1 januari 2021 nog 165 010 waren. Met deze gegevens kun je het model $T = 80\,130 \cdot 1,435^t$ opstellen met t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2019.

- b** Toon dit aan.
- c** In welke maand van welk jaar waren er 250 000 thuislaadpunten?

Het aantal snellaadpunten S was op 1 januari 2024 gelijk aan 4320 en de verdubbelingstijd is 2,5 jaar.

- d** Stel de formule op van het aantal snellaadpunten S . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2019.
- e** Onderzoek hoeveel snellaadpunten er bij zijn gekomen in de laatste zes maanden van 2024. Rond af op tientallen.



Voorkennis Lineaire formules

Bij een lineair verband is de grafiek een rechte lijn en neemt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal toe of af. De formule is van de vorm $N = at + b$, waarin a de toename per tijdseenheid is en b de beginhoeveelheid, oftewel de hoeveelheid op $t = 0$.

Weet je bij lineaire groei de hoeveelheden op twee tijdstippen, dan kun je de formule opstellen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

De hoeveelheid N groeit lineair. Op $t = 5$ is $N = 130$ en op $t = 8$ is $N = 190$. Stel de formule op van N .

Uitwerking

$$N = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{190 - 130}{8 - 5} = 20$$

$$\left. \begin{array}{l} N = 20t + b \\ t = 5 \text{ en } N = 130 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 20 \cdot 5 + b = 130 \\ 100 + b = 130 \\ b = 30 \end{array}$$

Dus $N = 20t + 30$.

V3 Ga in deze opgave uit van lineaire verbanden.

a Op $t = 4$ is $H = 552$ en op $t = 10$ is $H = 600$.

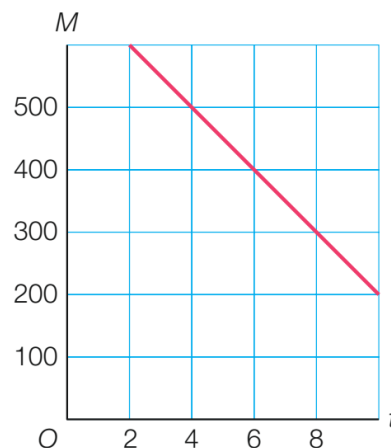
Stel de formule op van H .

b Zie de grafiek.

Stel de formule op van M .

c Het aantal fastfoodrestaurants N in Nederland neemt toe. In 2019 waren er 15 800 van zulke restaurants en in 2024 waren dat er 19 040.

Stel de formule op van N . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2015.



O31



Het aantal gecertificeerde biologische landbouwbedrijven in Nederland neemt lineair toe. Op 31 december 2014 waren er 3738 van deze bedrijven en op 31 december 2023 waren dat er 5745.

a Bereken met hoeveel het aantal gecertificeerde biologische landbouwbedrijven per jaar toeneemt.

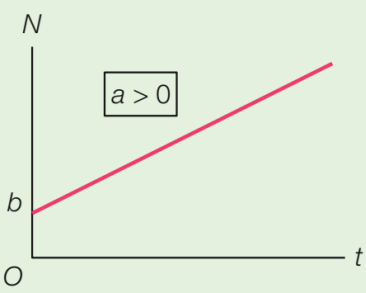
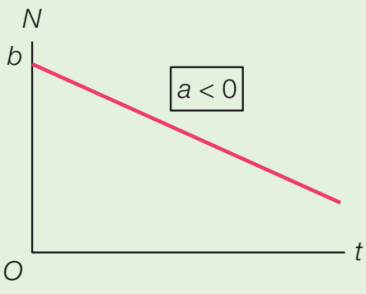
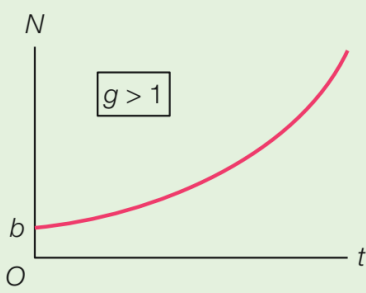
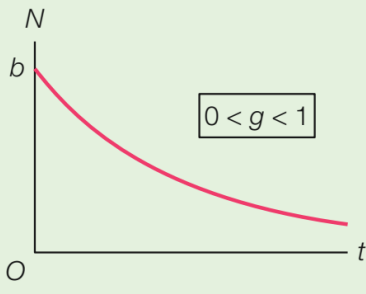
De oppervlakte in Nederland waarop biologische landbouw plaatsvindt (het bio-areaal) neemt exponentieel toe. Op 31 december 2014 was er 56 300 ha bio-areaal en op 31 december 2023 was dat 87 350 ha.

b Bereken de groeifactor per jaar.



Theorie C Lineaire en exponentiële verbanden

In opgave 31 had je zowel met lineaire groei als met exponentiële groei te maken. Zie het volgende overzicht.

	Lineair verband	Exponentieel verband
kenmerk	De hoeveelheid neemt per tijdseenheid met hetzelfde getal toe of af.	De hoeveelheid wordt per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
formule	$N = at + b$ Hierin is <ul style="list-style-type: none"> • b de beginhoeveelheid • a de toename per tijdseenheid: <ul style="list-style-type: none"> - bij een toename is $a > 0$ - bij een afname is $a < 0$. 	$N = b \cdot g^t$ Hierin is <ul style="list-style-type: none"> • b de beginhoeveelheid • g de groeifactor per tijdseenheid: <ul style="list-style-type: none"> - bij een toename is $g > 1$ - bij een afname is $0 < g < 1$.
grafieken	De grafiek is een (rechte) lijn. <ul style="list-style-type: none"> • Bij een toename is de grafiek constant stijgend:  • Bij een afname is de grafiek constant dalend:  	De grafiek is een kromme. <ul style="list-style-type: none"> • Bij een toename is de grafiek toenemend stijgend:  • Bij een afname is de grafiek afnemend dalend: 
voorbeeld	Voor $t = 0$ is $N = 150$ en voor $t = 5$ is $N = 600$.	
berekening	$a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{600 - 150}{5} = 90$	$g = \left(\frac{600}{150}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,320$
formule	$N = 90t + 150$	$N = 150 \cdot 1,320^t$

Voorbeeld

Op 1 januari 2018 waren er in Nederland 742 duizend motorfietsen en 702 duizend snorfietsen. Op 1 januari 2023 waren er 794 duizend motorfietsen en 823 duizend snorfietsen. Ga ervan uit dat in de periode 2015-2023 het aantal motorfietsen jaarlijks met een vast percentage toenam, terwijl het aantal snorfietsen met een vast aantal per jaar toenam.

- a** Stel een formule op van het aantal motorfietsen N_m in duizendtallen. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2015. Rond de beginhoeveelheid af op één decimaal.
- b** Stel een formule op van het aantal snorfietsen N_s in duizendtallen. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2015.

Uitwerking

Exponentiële groei, want vaste jaarlijkse procentuele toename.

a $N_m = b \cdot g^t$ met $g = \left(\frac{794}{742}\right)^{\frac{1}{5}} = 1,0136\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N_m = b \cdot 1,0136\dots^t \\ t = 3 \text{ en } N_m = 742 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,0136\dots^3 = 742 \\ b = \frac{742}{1,0136\dots^3} \approx 712,4 \end{array}$$

$$N_m = 712,4 \cdot 1,014^t$$

Lineaire groei, want vaste jaarlijkse toename.

b $N_s = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{823 - 702}{8 - 3} = 24,2$

$$\left. \begin{array}{l} N_s = 24,2t + b \\ t = 3 \text{ en } N_s = 702 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 24,2 \cdot 3 + b = 702 \\ 72,6 + b = 702 \\ b = 629,4 \end{array}$$

$$N_s = 24,2t + 629,4$$

32 Zie de tabel hiernaast.



- a** Ga uit van lineaire groei.
Stel de formule op van N .
- b** Ga uit van exponentiële groei.
Stel de formule op van N . Rond de beginhoeveelheid af op gehelen.

t	5	9
N	18	35

33



Een portie verse spinazie en een portie diepvriesspinazie bevatten elk 80 mg vitamine C. Bij verse spinazie neemt de hoeveelheid vitamine C per dag met 18 mg af. Bij diepvriesspinazie neemt de hoeveelheid vitamine C aanvankelijk per dag met 15% af.

H_v is het aantal mg vitamine C dat na t dagen nog aanwezig is in de verse spinazie. H_d is het aantal mg vitamine C dat na t dagen nog aanwezig is in de diepvriesspinazie.

- Stel de formules op van H_v en H_d .
- Hoeveel mg vitamine C bevat de diepvriesspinazie op het moment dat de verse spinazie geen vitamine C meer bevat? Rond af op gehelen.
- Bij diepvriesspinazie stabiliseert de hoeveelheid vitamine C zich op een niveau van 40% van de beginhoeveelheid. Na hoeveel tijd is dit? Rond af op gehele uren.



A34



Het gebruik van stikstofmest in de landbouw neemt wereldwijd met een vast percentage per jaar toe. In 2022 was het wereldwijde gebruik 113,5 miljoen ton en het is de verwachting dat dit in 2033 toegenomen zal zijn tot 119,9 miljoen ton.

In Europa neemt het gebruik van stikstofmest juist af met een vaste hoeveelheid per jaar. In 2022 was het gebruik in Europa 9,76 miljoen ton en in 2030 zal het gebruik naar verwachting nog 9,60 miljoen ton zijn.

Stel K_w is het wereldwijde gebruik van stikstofmest in miljoenen ton en K_E is het gebruik van stikstofmest in miljoenen ton in Europa.

- Stel de formules van K_w en K_E op. Neem t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2020. Rond de beginhoeveelheid zo nodig af op honderdduizendtallen.
- Hoeveel procent van de totale hoeveelheid in de landbouw gebruikte stikstofmest in 2020 werd in Europa gebruikt? En hoeveel is dat naar verwachting in 2033?
- In welk jaar wordt er volgens deze verwachtingen buiten Europa voor het eerst meer dan 114 miljoen ton stikstofmest gebruikt in de landbouw?

O35



Zie de tabel hiernaast.

Peter denkt dat er sprake is van een lineair verband tussen N en t .

- Laat zien dat Peter geen gelijk heeft.
- Laat zien dat er wel sprake kan zijn van een exponentieel verband.

t	0	2	4
N	250	300	360

Theorie D Lineaire en exponentiële groei nagaan

Bij een lineair verband heb je bij even grote intervallen te maken met een vaste toe- of afname. In opgave 35 kon je nagaan dat de *verschillen* $300 - 250 = 50$ en $360 - 300 = 60$ niet gelijk zijn, dus dat er geen sprake is van een lineair verband.

Bij een exponentieel verband heb je bij even grote intervallen te maken met een vaste groeifactor. In opgave 35 kon je nagaan dat de *quotiënten* $\frac{300}{250} = 1,2$ en $\frac{360}{300} = 1,2$ gelijk zijn, dus dat er sprake kan zijn van een exponentieel verband.

In praktische situaties zullen de verschillen of quotiënten nooit precies gelijk zijn, maar alleen bij benadering. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Het aantal werklozen is in Nederland in de periode 2014-2023 flink gedaald. In de tabel zie je het aantal werklozen N in duizendtallen voor verschillende jaren.

jaar	2014	2017	2020	2023
N	740	580	460	360

- Toon aan dat de tabel bij benadering klopt bij een exponentieel verband.
- Bereken de procentuele afname van N per jaar.

Uitwerking

a $\frac{580}{740} = 0,783\dots$; $\frac{460}{580} = 0,793\dots$ en $\frac{360}{460} = 0,782\dots$ ←

Gebruik bij het aantonen alle tabelwaarden.

De groeifactoren per 3 jaar zijn ongeveer gelijk, dus de tabel klopt bij benadering bij een exponentieel verband.

b $g_{9 \text{ jaar}} = \frac{360}{740}$

$$g_{\text{jaar}} = \left(\frac{360}{740}\right)^{\frac{1}{9}} = 0,9230\dots$$

Dus de procentuele afname per jaar is 7,7%.

36
□ ⊗ *

Je ziet hiernaast drie tabellen. Eén van de tabellen hoort bij een lineair verband, één hoort bij een exponentieel verband en één bij een omgekeerd evenredig verband. Stel bij elk van de tabellen de formule op. Rond bij het exponentiële verband de beginhoeveelheid af op gehelen.

I

t	1	3	6	10
B	262 144	147 456	62 208	19 683

II

p	1	3	6	10
q	165	55	27,5	16,5

III

r	1	3	6	10
P	282,5	227,5	145	35

A37

Hoe hoger je je bevindt, hoe lager de luchtdruk P en hoe lager het kookpunt T van water. Zie de tabel.

Het verband tussen P en h is exponentieel en het verband tussen T en h is lineair.

- Toon aan dat de tabel hiermee overeenstemt.
- Stel van beide verbanden de formule op. Gebruik de waarden bij 0 en 7 km hoogte. Rond indien nodig af op drie decimalen.
- Een alpinist kookt water in het basiskamp van Mount Everest op een hoogte van 5400 meter. Bereken het kookpunt in gehele graden Celsius.
- Op de top van de Mount Everest is de luchtdruk 320 hPa. Bereken de hoogte van de Mount Everest in tientallen meters nauwkeurig.

hoogte h in km	luchtdruk P in hPa	kookpunt T water in °C
0	1013	100,3
1	889	96,9
2	780	93,6
3	685	90,2
7	406	76,7

A38

Een projectontwikkelaar is gespecialiseerd in het bouwen van woontorens met op de begane grond winkels en vanaf de eerste verdieping appartementen. Zij rekent voor de bouwlaag op de begane grond 7,5 miljoen euro. Hoeveel ze rekent voor de bouwkosten K in miljoenen euro's is afhankelijk van het aantal verdiepingen. Zie de tabel. Hierin is n het aantal verdiepingen met appartementen.

n	0	8	14	21	32
K	7,5	11,25	15,25	21,75	37,98

- Bereken met behulp van lineair interpoleren de bouwkosten in het geval de woontoren bestaat uit 25 verdiepingen met appartementen. Rond af op tienduizenden euro's.
- Toon aan dat tussen K en n geen lineair verband bestaat.

Tussen K en n bestaat een exponentieel verband.

- Laat zien dat de waarden in de tabel hiermee in overeenstemming zijn.
- Bereken met hoeveel procent de bouwkosten toenemen als er twee verdiepingen met appartementen bij komen.
- Gebruik de gegevens bij 21 en 32 verdiepingen om de bouwkosten in tienduizenden euro's nauwkeurig te berekenen in het geval de woontoren bestaat uit 25 verdiepingen met appartementen. Hoeveel verschilt dit met het antwoord van vraag a?
- De projectontwikkelaar wil dat de bouwkosten maximaal 19,5 miljoen euro bedragen. Stel de formule op van K en bereken daarmee hoeveel verdiepingen met appartementen zij voor dit bedrag kan bouwen.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan groeifactoren en groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid.

► OPGAVE C3
THEORIE A

☐ Ik kan een formule opstellen bij exponentiële groei.

► OPGAVE C4
THEORIE B

☐ Ik kan herkennen of ik met lineaire of exponentiële groei te maken heb en op basis hiervan de juiste werkwijze kiezen.

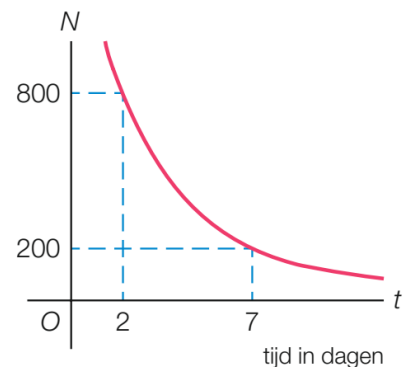
► OPGAVE C5
THEORIE C

☐ Ik kan bepalen of gegevens overeenkomen met een lineair of een exponentieel verband.

► OPGAVE C6
THEORIE D

- C3** a Een hoeveelheid neemt per kwartier met 3,2% toe.
Hoeveel procent is de toename per uur?
b Een hoeveelheid neemt per dag met 76,5% af.
Hoeveel procent is de afname per uur?

- C4** a Een hoeveelheid H halveert elke 15 jaar. Op 1 juli 2025 is $H = 508$.
Stel de formule op van H met t de tijd in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2020. Rond de beginhoeveelheid af op gehelen.
b Zie de grafiek.
Stel de formule op die bij de exponentiële afname van N hoort. Rond de beginhoeveelheid af op gehelen.



- C5** In de gemeenten Uitwijkerwaard en Leegdam neemt het aantal inwoners af. De halveringstijd van het aantal inwoners in Uitwijkerwaard is 12 jaar. In Leegdam neemt het aantal inwoners elke maand met 100 af. In 2022 had Uitwijkerwaard nog 60 duizend inwoners. In 2025 had Leegdam nog 50 duizend inwoners. Stel de formules op van het aantal inwoners N_U en N_L in duizendtallen. Neem t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2022.

- C6** Gegeven is de volgende tabel met t de tijd in maanden.
Onderzoek of de gegevens in de tabel overeenkomen met een lineair of een exponentieel verband.

t	0	3	6	10
N	48,24	40,07	33,28	25,98

Antwoorden

C3 a 13,4%

b 5,9%

C4 a $H = 655 \cdot 0,955^t$

b $N = 1393 \cdot 0,758^t$

C5 $N_U = 60 \cdot 0,944^t$

$N_L = -1,2t + 53,6$

C6 exponentieel

10.3 Logaritmen

Kennis en vaardigheden

- Je weet wat een logaritme is en kunt met logaritmen rekenen.
- Je kunt werken met (formules met) logaritmen op de GR.
- Je kunt variabelen vrijmaken bij formules met exponenten en formules met logaritmen.

O39 Geef de waarde van x zonder de GR te gebruiken.



a $2^x = 8$

c $2^x = 64$

e $3^x = \sqrt{3}$

b $3^x = 9$

d $3^x = 81$

f $3^x = \frac{1}{3}$

Theorie A De logaritme

In opgave 39a heb je de exponent x gegeven waarvoor geldt $2^x = 8$. Je kreeg $x = 3$.

Zoek je de exponent bij $2^x = 7$, dan komt het niet mooi uit.

Deze exponent noteren we als ${}^2\log(7)$. Dus $2^{^2\log(7)} = 7$.

Je kunt controleren dat ${}^2\log(7) \approx 2,8074$, want $2^{2,8074} \approx 7$.

- De notatie log komt van **logaritme**.
- In ${}^2\log(7)$ is 2 het **grondtal van de logaritme**.
- ${}^2\log(7)$ spreek je uit als de tweede logaritme van zeven of kortweg twee log zeven.

$$2^x = 7 \text{ geeft } x = {}^2\log(7)$$
$$g^x = a \text{ geeft } x = {}^g\log(a)$$

$$2^{^2\log(7)} = 7$$
$$g^{^g\log(a)} = a$$

Soms komt een logaritme mooi uit. De uitkomst van ${}^2\log(8)$ is het getal dat op de puntjes hoort te staan bij $2^{\dots} = 8$. Die uitkomst is 3, want $2^3 = 8$.

$$\text{Dus } {}^2\log(8) = {}^2\log(2^3) = 3.$$

En zo is

- ${}^3\log(81) = {}^3\log(3^4) = 4$
- ${}^3\log\left(\frac{1}{9}\right) = {}^3\log\left(\frac{1}{3^2}\right) = {}^3\log(3^{-2}) = -2$
- ${}^5\log(\sqrt{5}) = {}^5\log(5^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$.

$$2^{^2\log(2^3)} = 2^3$$
$$g^{^g\log(g^a)} = g^a$$

De vergelijking $g^x = a$ heeft als oplossing de logaritme $x = {}^g\log(a)$.

In ${}^g\log(a)$ heet g het grondtal van de logaritme.

Er geldt $g^{^g\log(a)} = a$ en ook dat ${}^g\log(g^a) = a$.

40 Vul in.



a $2^x = 5$, dus $x = \dots \log(\dots)$

d $2^{\dots} = 32$, dus ${}^2\log(32) = \dots$

b $3^x = 6$, dus $x = \dots \log(\dots)$

e $4^{\dots} = 64$, dus ${}^4\log(64) = \dots$

c $5^x = \frac{1}{2}$, dus $x = \dots \log(\dots)$

f $5^{\dots} = 1$, dus ${}^5\log(1) = \dots$

41 ${}^2\log(128) = {}^2\log(2^7) = 7$ en $3^{\log(5)} = 5$

□ ⊗ * Bereken op dezelfde manier.

a ${}^4\log(16)$

d ${}^5\log(\frac{1}{5})$

g ${}^2\log(2)$

b ${}^{10}\log(1000)$

e ${}^6\log(1)$

h $5^{\log(8)}$

c ${}^3\log(\sqrt{3})$

f $2^{\log(6)}$

i ${}^2\log(0,25)$

42 Bereken zoals in opgave 41.

*** a** ${}^2\log(256\sqrt{2})$

b ${}^3\log(\frac{1}{9}\sqrt{3})$

c $\frac{1}{2}\log(4 \cdot \sqrt[3]{2})$

43 **a** Kate beweert dat ${}^2\log(-4) = -2$. Waarom is dit fout?

□ ⊗ * **b** Xinly beweert dat ${}^1\log(8) = 8$. Waarom is dit onzin?

c Volgens Elze-Noor is ${}^1\log(1) = 8$. Wat vind je hiervan?

d Samir beweert dat ${}^{-2}\log(8) = -3$. Klopt dit?

44 Gegeven is de formule $y = {}^2\log(x)$.

□ ⊗ * **a** Vul de tabel in.

b Teken de punten van de tabel in een assenstelsel en teken door deze punten een vloeiende kromme. Let op: de kromme snijdt de y -as niet.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = {}^2\log(x)$							

Theorie B Formules met logaritmen

Bij de formule $y = {}^2\log(x)$ is 2 het grondtal van de logaritme.

Bij de formule $y = {}^g\log(x)$ beperken we ons tot positieve grondtallen ongelijk aan 1, dus tot grondtallen waarvoor geldt $0 < g < 1$ of $g > 1$.

Dus ${}^1\log(5)$ en ${}^{-2}\log(4)$ hebben geen betekenis.

Merk op dat ${}^2\log(-4)$ niet bestaat. Om de uitkomst van deze logaritme te bepalen, zou je -4 als macht van 2 moeten schrijven, dus $-4 = 2 \dots$

Maar dat kan niet, want elke macht van 2 is positief.

${}^g\log(x)$ heeft alleen betekenis voor $g > 0$ en $g \neq 1$ en $x > 0$.

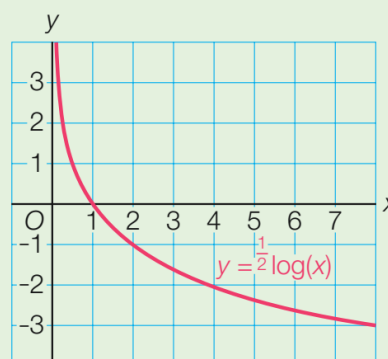
Hiernaast is de grafiek getekend van $y = \frac{1}{2}\log(x)$.

Daarbij is de volgende tabel gebruikt.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \frac{1}{2}\log(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3

De grafiek van $y = \frac{1}{2}\log(x)$ is *dalend*.

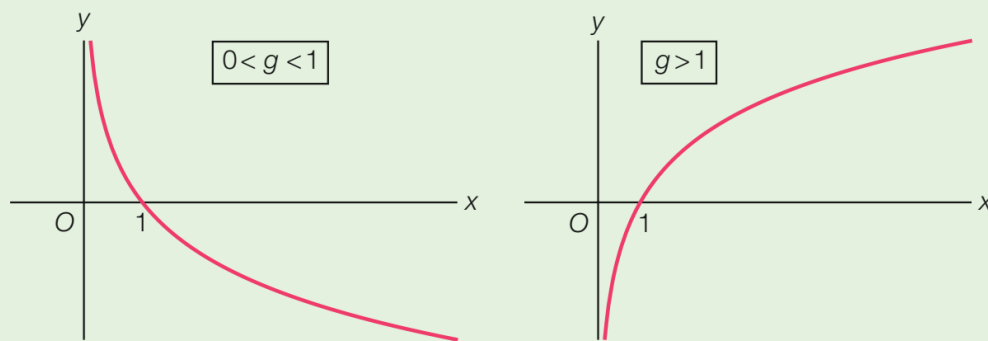
Omdat je voor x alleen positieve getallen mag invullen, blijft de grafiek rechts van de y -as. Wel nadert de grafiek onbeperkt dicht tot de y -as.



De grafiek van $y = {}^g\log(x)$ is een standaardgrafiek.

Bij de grafiek van $y = {}^g\log(x)$ onderscheiden we twee situaties, namelijk $0 < g < 1$ en $g > 1$.

De standaardgrafiek $y = {}^g\log(x)$



De log-toets op de GR staat voor ${}^{10}\log$, dus $\log(100) = 2$, $\log(1000) = 3$ en $\log(\frac{1}{10}) = -1$. Met de GR krijg je $\log(500) \approx 2,699$.

Om ${}^2\log(500)$ te berekenen, ga je als volgt te werk.

- TI Tik in $\log(500, 2)$ of gebruik $\log\text{GROND TAL}$ (via f2).
- Casio Gebruik $\log\text{ab}$ uit het OPTN-CALC -menu.
- NumWorks Gebruik de knop $\log$ en pas het grondtal aan, of gebruik ${}^a\log(x)$ uit de toolbox.
- HP Tik in $\log(500, 2)$ of gebruik $\log\text{b}$ met de knop voor wiskundige sjablonen.

Je krijgt ${}^2\log(500) \approx 8,966$.

Je kunt het bovenstaande ook gebruiken bij het invoeren van een formule met logaritmen op de GR.

45 Bereken. Rond af op twee decimalen.



a ${}^3\log(5)$

c ${}^2\log(20) - {}^2\log(6)$

e $3 \cdot {}^2\log(7)$

b $3 \cdot \log(5)$

d $\frac{1}{3}\log(10) + \log(\frac{1}{3})$

f $\frac{5}{{}^4\log(12)}$

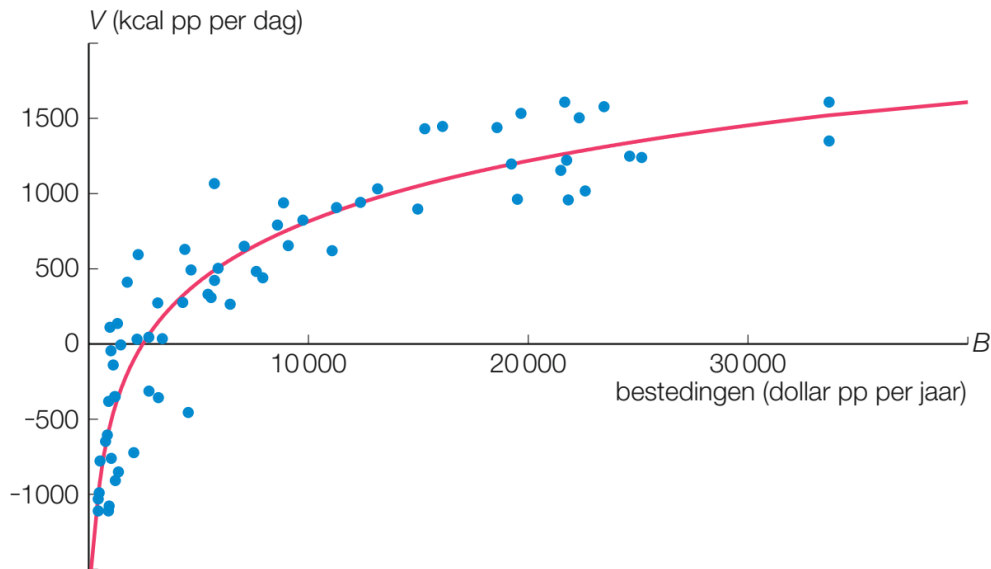
46 Volgens een veelgebruikte vuistregel geldt dat de hondenleeftijd keer



zeven gelijk is aan de mensenleeftijd. Uit deze vuistregel volgt bijvoorbeeld dat een hondenleeftijd van 2 jaar vergelijkbaar is met een mensenleeftijd van 14 jaar. Uit onderzoek naar het DNA van honden en mensen blijkt dat deze regel niet klopt. Een betere benadering van de mensenleeftijd van een hond krijg je met de formule $m = 11 \cdot {}^2\log(h) + 31$ met $h > 0,5$. Hierin is h de hondenleeftijd en m de mensenleeftijd, beide in jaren.

- De oudste hond ooit was 29 jaar oud.
Bereken met de formule de mensenleeftijd die hierbij hoort.
- Welke hondenleeftijd correspondeert volgens de formule met een mensenleeftijd van 72 jaar? Rond af op gehelen.
- Bereken vanaf welke waarde van h de formule lagere mensenleeftijden geeft dan de genoemde vuistregel. Rond af op gehelen.

Hoe meer mensen te besteden hebben in een land, hoe meer voedsel ze verspillen. In de figuur hiernaast zie je voor een aantal landen wat de bestedingen zijn en wat de voedselverspilling is. Elk punt stelt een land voor. In de figuur is ook de grafiek getekend die zo goed mogelijk bij de punten past. De formule bij deze grafiek is $V = 1339 \cdot \log(B) - 4539$. Hierin is V de voedselverspilling in kcal per persoon per dag in een land en B de bestedingen in dollar per persoon per jaar in het land.



- a In Estland zijn de bestedingen per persoon per jaar 11 275 dollar, terwijl er per persoon per dag 907 kcal voedsel verspild wordt. Hoeveel meer verspilling is dit dan volgens de formule verwacht mag worden?
- b In Nederland zijn de bestedingen 22 591 dollar per persoon per jaar en is de voedselverspilling 1017 kcal per persoon per dag. Bereken of Nederland zuiniger met voedsel omgaat dan op basis van de formule verwacht mag worden.

Neem aan dat een mens per dag gemiddeld 2600 kcal energie nodig heeft. Als mensen meer voedsel kopen dan ze op basis van deze aanname nodig hebben, dan noemen we dat verspilling.

- c In Zimbabwe is de voedselverspilling -1000 kcal per persoon per dag. Leg uit wat de betekenis is van deze waarde.
- d Bereken bij welke bestedingen in een land de voedselverspilling gelijk is aan 0.
- e Voor India is V gelijk aan 0. Leg uit waarom dit niet betekent dat niemand in India voedsel verspilt.

a Bij $N = {}^2\log(x)$ kun je x vrijmaken.

Welk antwoord is juist?

I $x = {}^2\log(N)$

II $x = 2^N$

III $x = N^2$

b Je kunt x uitdrukken in y bij de formule $y = 3^x$.

Welk antwoord is juist?

I $x = {}^3\log(y)$

II $x = \sqrt[3]{y}$

III $x = 3^y$

$$g^x = a \text{ geeft } x = {}^g\log(a)$$

$$g^{{}^g\log(a)} = a$$

$${}^g\log(g^a) = a$$

Theorie C Variabelen vrijmaken bij formules met exponenten en formules met logaritmen

Je kunt bij de formule $P = 5 + {}^2\log(x)$ de variabele x vrijmaken.

Je gebruik daarbij dat ${}^g\log(x) = a$ betekent $x = g^a$. Je krijgt

$$P = 5 + {}^2\log(x)$$

$${}^2\log(x) = P - 5$$

$$x = 2^{P-5}$$

$${}^2\log(x) = y \text{ geeft } x = 2^y$$

Je kunt bij de formule $Q = 6 - 2^y$ de variabele y vrijmaken.

Je gebruikt daarbij dat $g^a = x$ geeft $a = {}^g\log(x)$. Je krijgt

$$Q = 6 - 2^y$$

$$2^y = 6 - Q$$

$$y = {}^2\log(6 - Q)$$

$$2^y = x \text{ geeft } y = {}^2\log(x)$$

Voorbeeld

a De formule $N = \log(x - 5) - 2$ is te schrijven in de vorm $x = a + b \cdot 10^N$.

Bereken a en b .

b Gegeven is de formule $y = 5 + 3^{x-1}$.

Druk x uit in y .

Uitwerking

a $N = \log(x - 5) - 2$

$$\log(x - 5) = N + 2$$

$$x - 5 = 10^{N+2}$$

$$x = 5 + 10^N \cdot 10^2$$

$$x = 5 + 100 \cdot 10^N$$

$$\text{Dus } a = 5 \text{ en } b = 100.$$

b $y = 5 + 3^{x-1}$

$$3^{x-1} = y - 5$$

$$x - 1 = {}^3\log(y - 5)$$

$$x = 1 + {}^3\log(y - 5)$$

Gebruik de rekenregel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ van rechts naar links.

49



- a De formule $N = \log(x - 4) - 3$ is te schrijven in de vorm $x = a + b \cdot 10^N$.
Bereken a en b .
- b Gegeven is de formule $y = 2 + 4^{x-3}$.
Druk x uit in y .
- c Schrijf de formule $P = 2 \cdot {}^3\log(x) - 4$ in de vorm $x = a \cdot g^P$.
Rond g af op drie decimalen.
- d Maak de variabele x vrij bij de formule $K = 10 - 2 \cdot 4^x$.

A50



- a De formule $M = {}^2\log(2t - 6)$ is te herleiden tot $t = 3 + 2^{M-1}$.
Laat deze herleiding zien.
- b Maak de variabele N vrij bij de formule $F = 16 - 2^{2N-1}$.
- c De formule $x = 3^{0,25y-0,6}$ is te schrijven in de vorm $y = a + b \cdot {}^3\log(x)$.
Bereken a en b .
- d De formule $y = \log(2x + 3) - 0,8$ is te schrijven in de vorm $x = a + b \cdot 10^y$.
Bereken a en b . Rond zo nodig af op twee decimalen.

51



- a Herleid de formule $Z = {}^3\log(4n + 1) - 6$ tot de vorm $n = a + b \cdot 3^Z$.
- b De formule $y = 3 + 2^{2x-3}$ is te schrijven in de vorm $x = a + b \cdot \log(y - 3)$.
Bereken a en b . Rond zo nodig af op twee decimalen.
- c Schrijf de formule $D = \log(\sqrt{E}) - 1\frac{1}{2}$ in de vorm $E = 10^{aD+b}$.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik weet wat een logaritme is en kan met logaritmen rekenen.
- ☐ Ik kan werken met (formules met) logaritmen op de GR.
- ☐ Ik kan variabelen vrijmaken bij formules met exponenten en formules met logaritmen.

► OPGAVE C7
THEORIE A
► OPGAVE C8
THEORIE B
► OPGAVE C9
THEORIE C

- C7**
- a** Bereken $4^{4\log(6)}$ zonder GR.
 - b** Bereken ${}^5\log(\frac{1}{125})$ zonder GR.
 - c** Los op $2^x = 5$. Schrijf je antwoord als een logaritme.

- C8**
- a** Bereken $4 \cdot {}^5\log(120) - 3 \cdot \log(50)$ in twee decimalen nauwkeurig.
 - b** Los op $5 \cdot {}^3\log(x + 4) = 7$. Rond af op twee decimalen.

- C9**
- a** Schrijf de formule $N = -3 + {}^2\log(t - 4)$ in de vorm $t = a + b \cdot 2^N$.
 - b** Maak bij de formule $y = 5 + 10^{x-3}$ de variabele x vrij.

Antwoorden

- C7**
- a** 6
 - b** -3
 - c** $x = {}^2\log(5)$
- C8**
- a** 6,80
 - b** $x = 0,66$
- C9**
- a** $t = 4 + 8 \cdot 2^N$
 - b** $x = 3 + \log(y - 5)$

10.4 Werken met logaritmen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met logaritmische schaalverdelingen.
- Je weet dat bij een rechte lijn op logaritmisch papier een exponentieel verband hoort, en andersom.
- Je kunt rekenregels voor logaritmen gebruiken om formules te herleiden.

052



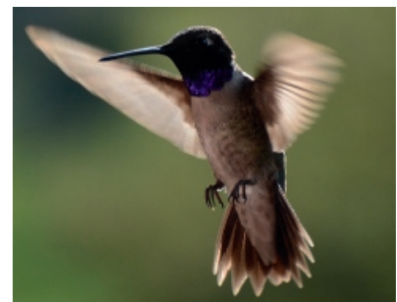
In de tabel staan de gewichten van een aantal dieren.

- a** Hoeveel keer zo zwaar is de walvis als de wasbeer?
En hoeveel keer zo zwaar als de kolibrie?

We willen de gewichten op een getallenlijn zetten.

- b** Hoe lang moet de getallenlijn worden als 1 mm overeenkomt met 1 gram?
c Hoe lang moet de getallenlijn worden als 1 mm overeenkomt met 1000 kg? Welk bezwaar is tegen deze stapgrootte in te brengen?

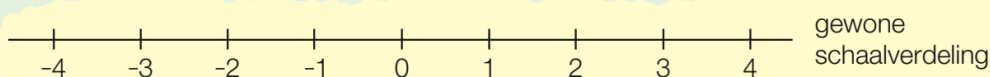
prachtkever	0,001 kg
kolibrie	0,005 kg
muis	0,02 kg
wasbeer	10 kg
zeehond	100 kg
paard	600 kg
olifant	5500 kg
walvis	100 000 kg



Theorie A Logaritmische schaalverdeling

In opgave 52 heb je gezien dat je de waarnemingsgetallen niet goed kunt uitzetten op een getallenlijn met een gewone schaalverdeling. Daarom gebruiken we hiervoor een **logaritmische schaalverdeling**.

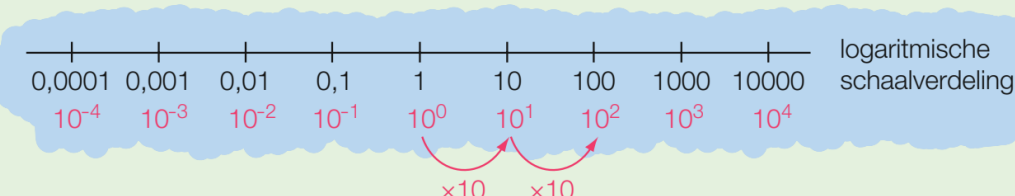
Bij een gewone schaalverdeling zit er tussen de getallen 0 en 1 evenveel afstand als tussen de getallen 1 en 2, enzovoort.



Bij een logaritmische schaalverdeling zit er tussen de getallen $10^0 = 1$ en $10^1 = 10$ evenveel afstand als tussen de getallen $10^1 = 10$ en $10^2 = 100$.

Bij een vaste stapgrootte hoort bij een logaritmische schaalverdeling dus een vaste factor.

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$



In de figuur hiernaast zie je een gedeelte van een vel **logaritmisch papier**. Op de y -as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Op deze as staat het getal 1 bij het snijpunt met de x -as. Op de x -as is een gewone schaalverdeling gekozen.

Met de getallen langs de y -as kun je bij elke horizontale lijn te weten komen welke y -waarde erbij hoort.

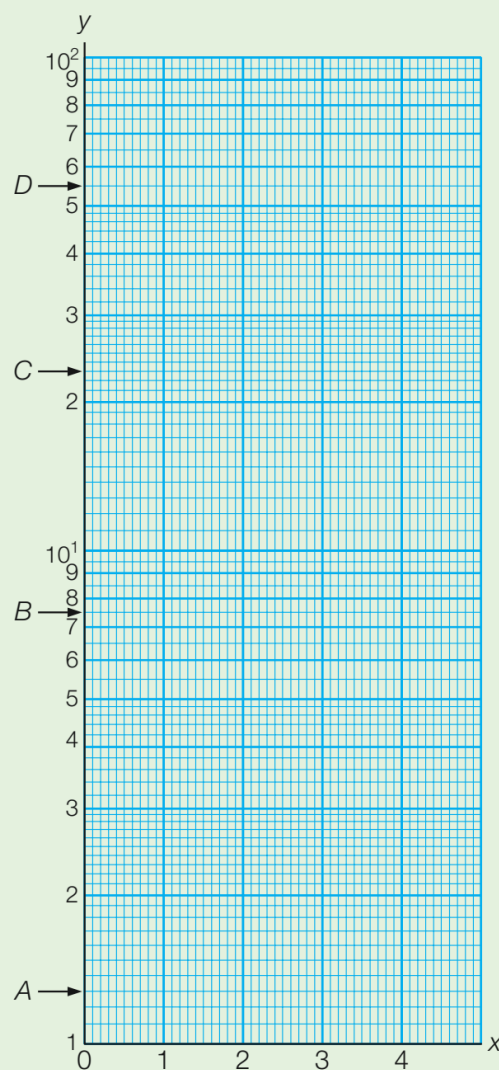
Van onder naar boven zie je eerst de getallen 1, 2, 3, ..., 9 en $10^1 = 10$.

De lijn direct boven de lijn $y = 10$ hoort bij $y = 11$, dan $y = 12$, ... tot en met $y = 20$. Bij de lijn $y = 20$ staat 2, want $2 \cdot 10^1 = 20$.

Verder naar boven krijg je vervolgens lijnen bij de waarden 21, 22, 23, ..., 29 en 30.

Tussen 30 en 40 staan alleen nog maar lijnen bij 32, 34, 36 en 38.

Tussen 50 en 60 staat alleen nog maar een lijn bij 55.



Soms krijg je te maken met logaritmisch papier zoals in de figuur hiernaast. Om de y -waarde van het punt A te berekenen, meet je de afstand tussen 1 en 10 op de verticale as. Dat is 2 cm.

Het punt A ligt 1 cm boven de lijn $y = 1$.

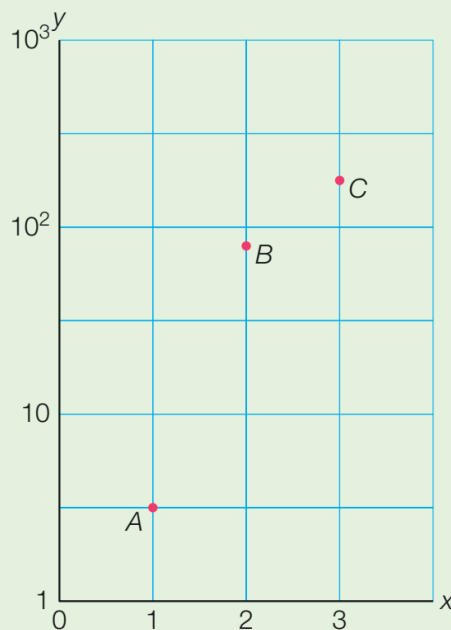
$$\frac{1}{2} = 0,5 \text{ dus } y_A = 10^{0,5} \approx 3,2$$

Het punt B ligt 1,8 cm boven de lijn $y = 10$.

$$\frac{1,8}{2} = 0,9 \text{ dus } y_B = 10^{1+0,9} = 10^{1,9} \approx 79$$

Het punt C ligt 0,5 cm boven de lijn $y = 10^2$.

$$\frac{0,5}{2} = 0,25 \text{ dus } y_C = 10^{2+0,25} = 10^{2,25} \approx 178$$



Voorbeeld

Bij de grafiek in de figuur hiernaast is op de verticale as een logaritmische schaal gebruikt.

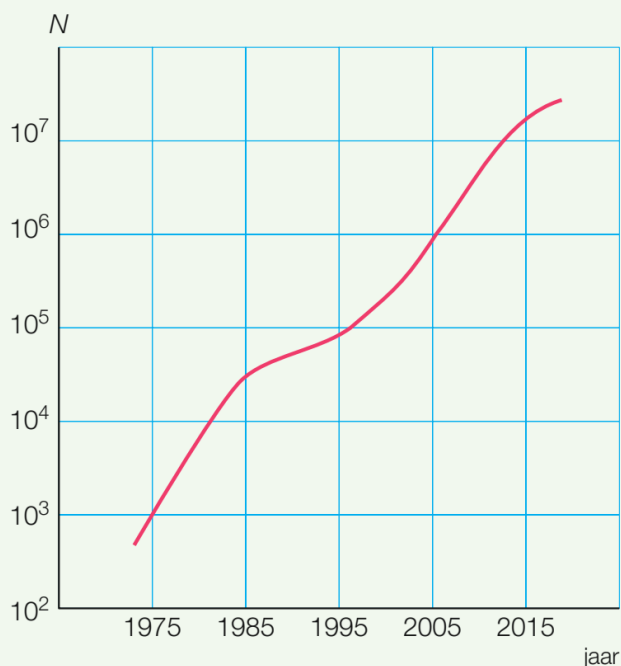
Bereken met welke factor N is toegenomen in de periode 1985-2015. Rond af op tientallen.

Uitwerking

In 1985 is $N = 10^{4,5} \approx 31\,600$.

In 2015 is $N = 10^{7,25} \approx 17\,800\,000$.

De factor is $\frac{17\,800\,000}{31\,600} \approx 560$.



53 Zie de bovenste figuur op bladzijde 138.



- a Welke y -waarden horen bij de letters A tot en met D ?
- b Je ziet in de figuur wel een lijn bij 13, maar niet bij 33.
Bij welke van de volgende y -waarden is een lijn getekend?
49 9,5 2,4 1,25 0
- c Bij een onderzoek variëren de meetresultaten van 10^3 tot 10^5 . Om deze gegevens in de figuur te kunnen uitzetten, zet men op de verticale as 10^3 op de hoogte van de horizontale as en 10^5 bij de bovenste horizontale lijn. Bij de letter A hoort dan het getal 1300. Welke getallen horen in dit geval bij de letters B , C en D ?

R54 [▶ **WERKBLAD**] Gebruik het logaritmisch papier op het werkblad.



- a Teken de horizontale lijnen bij $y = 2$, $y = 4$ en $y = 8$. Wat valt je op als je naar de onderlinge afstanden van deze lijnen kijkt?
- b Jan tekent op het logaritmisch papier de lijnen $y = 2$ en $y = 6$. De volgende lijn die hij tekent heeft dezelfde afstand tot de lijn $y = 6$ als de afstand tussen de lijnen $y = 2$ en $y = 6$.
Welke lijn tekent Jan?
- c Jan zet de regelmaat van vraag b voort.
Geef de formules van de volgende drie lijnen die hierbij horen.

55



WERKBLAD Bij desinfectie wordt het aantal schadelijke micro-organismen op oppervlakken en voorwerpen verminderd. In de tabel zie je hoe het aantal micro-organismen N tijdens het uitkoken van een medisch instrument afneemt. In deze tabel is t de tijd in minuten dat het uitkoken duurt.

- Teken de punten die uit de tabel volgen op het logaritmisch papier en verbind de getekende punten door lijnstukken.
- Gebruik de grafiek die je in vraag a hebt getekend om het aantal micro-organismen te schatten op $t = 1,5$ en $t = 2,5$.
- Na hoeveel minuten ongeveer is het aantal micro-organismen teruggebracht tot 100? Geef het antwoord in één decimaal.

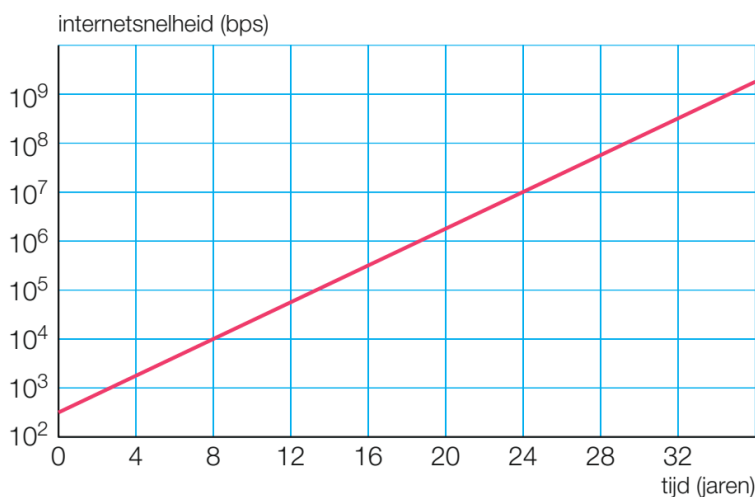
t	N
0	100 000
1	15 000
2	2000
3	400
4	50

56



Internetverbindingen worden steeds sneller.

In 1998 ontdekte de Deense consultant Jakob Nielsen dat de snelheid van de internetverbinding voor zijn bedrijf sinds 1984 elk jaar met ongeveer 50% was toegenomen. Hij voorspelde dat deze exponentiële toename zich zou voortzetten voor alle grootverbruikers, zoals bedrijven en scholen. Deze voorspelling staat bekend als de wet van Nielsen. In de figuur hieronder is de snelheid van de internetverbinding van Nielsens bedrijf weergegeven in bps (bits per seconde), waarbij t de tijd in jaren is met $t = 0$ in 1984. Op de verticale as is een logaritmische schaal gebruikt.

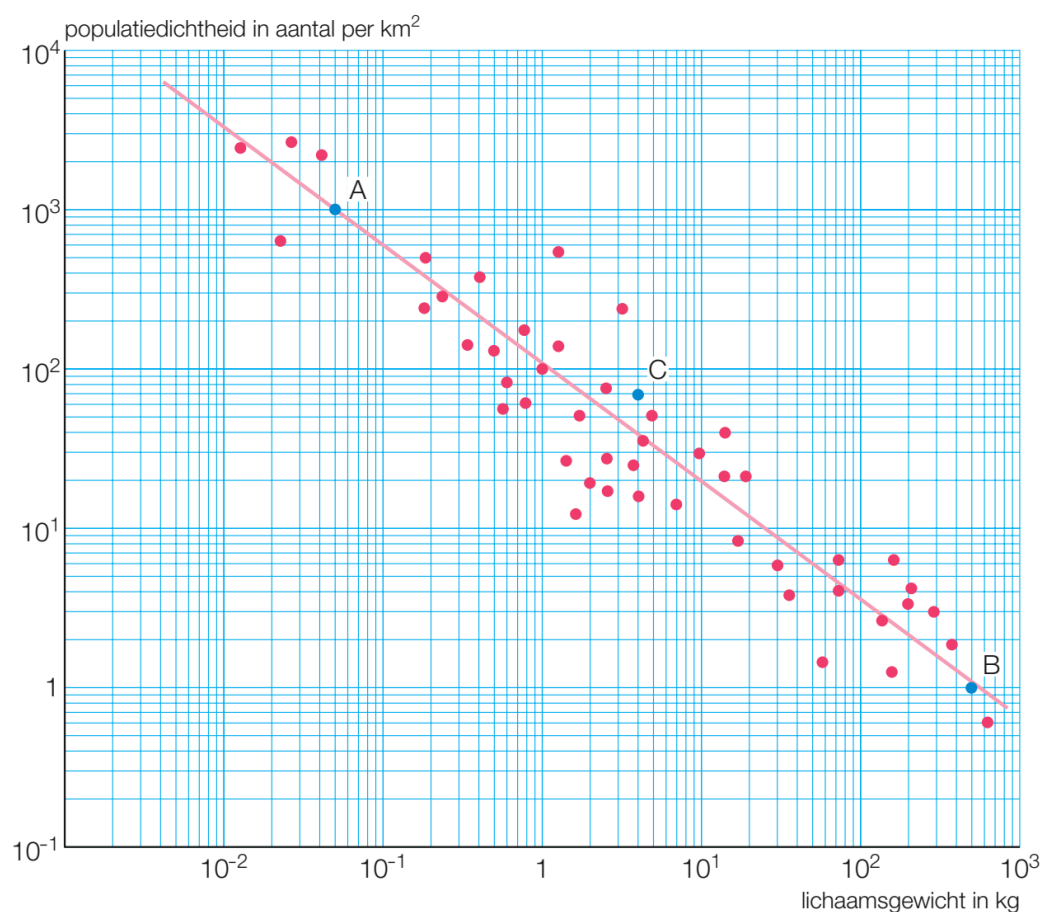


- Wat was de snelheid in bps van de internetverbinding in 2000? Rond af op tienduizendtallen.
- In hoeveel jaar tijd nam de snelheid toe van 10 000 bps tot 10 Mbps? Gebruik dat $1 \text{ Mbps} = 10^6 \text{ bps}$.
- Bereken met hoeveel procent per jaar de snelheid toenam in de periode 1984-2016. Rond af op één decimaal.

A57



In de figuur zie je **dubbellogaritmisch papier**: zowel op de verticale als als op de horizontale as is een logaritmische schaal aangebracht. Van verschillende soorten zoogdieren is de populatiedichtheid uitgezet tegen het gewicht van een volwassen exemplaar.



- Geef het gewicht en de populatiedichtheid van soort A. Doe dat ook voor de soorten B en C.
- Een soort heeft een gewicht van 1 kg.
Geef de populatiedichtheid van deze soort.
- In een natuurpark met een oppervlakte van 25 km² leven 150 bavianen.
Gebruik de getekende lijn om het gewicht van deze soort te bepalen.



58 Gegeven is de formule $\log(N) = 0,1t + 2,5$. Hieruit volgt dat $N = 10^{0,1t + 2,5}$.

☐◎✱ a Licht dit toe.

De formule $N = 10^{0,1t + 2,5}$ is te herleiden tot de vorm $N = b \cdot g^t$.

Je krijgt $N = 316 \cdot 1,259^t$. Hierbij is 316 afgerond op gehelen en 1,259 op drie decimalen.

b Laat deze herleiding zien.

Theorie B Exponentiële groei en logaritmisch papier

De formule $\log(N) = 0,1t + 2,5$ geeft een lineair verband tussen t en $\log(N)$. Teken je de grafiek bij deze formule in een assenstelsel met op de N -as een logaritmische schaalverdeling, dan krijg je dus een rechte lijn.

Op logaritmisch papier met een horizontale t -as en een verticale N -as is de grafiek van $\log(N) = mt + n$ een rechte lijn.

Je hebt gezien dat de formule $\log(N) = 0,1t + 2,5$ te herleiden is tot $N = 316 \cdot 1,259^t$.

In het algemeen is een formule van de vorm $\log(N) = mt + n$ te herleiden tot de vorm $N = b \cdot g^t$.

Dat betekent dat de grafiek van de formule $N = b \cdot g^t$ op logaritmisch papier een rechte lijn is.

Bij een rechte lijn op logaritmisch papier hoort exponentiële groei, dus een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$.

Voorbeeld

Hiernaast is de grafiek van N getekend op logaritmisch papier.

Stel de formule op van N . Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.

Uitwerking

Rechte lijn op logaritmisch papier, dus

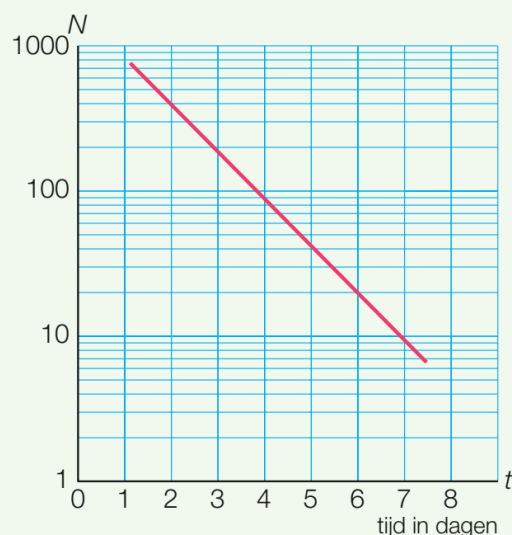
$$N = b \cdot g^t.$$

$$\left. \begin{array}{l} t = 2 \text{ en } N = 400 \\ t = 6 \text{ en } N = 20 \end{array} \right\} g_{4 \text{ dagen}} = \frac{20}{400} = 0,05$$

$$g_{\text{dag}} = 0,05^{\frac{1}{4}} = 0,4728\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,4728\dots^t \\ t = 2 \text{ en } N = 400 \end{array} \right\} \begin{aligned} b \cdot 0,4728\dots^2 &= 400 \\ b &= \frac{400}{0,4728\dots^2} \approx 1790 \end{aligned}$$

Dus $N = 1790 \cdot 0,473^t$.

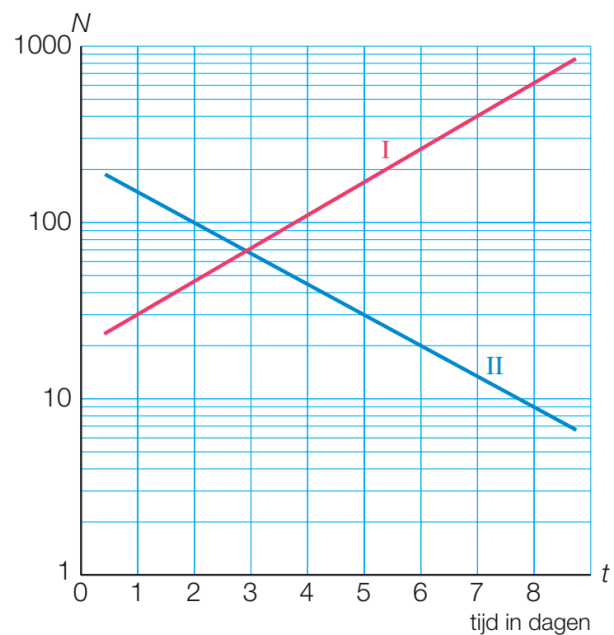


59



In de figuur hiernaast zijn op logaritmisch papier twee grafieken getekend.

- Stel de formule op van grafiek I.
Rond de beginhoeveelheid af op gehelen.
- Stel de formule op van grafiek II.
Rond de beginhoeveelheid af op gehelen.
- Grafiek III gaat door het punt (1, 3) en is evenwijdig met grafiek I.
Teken grafiek III en stel hiervan de formule op.

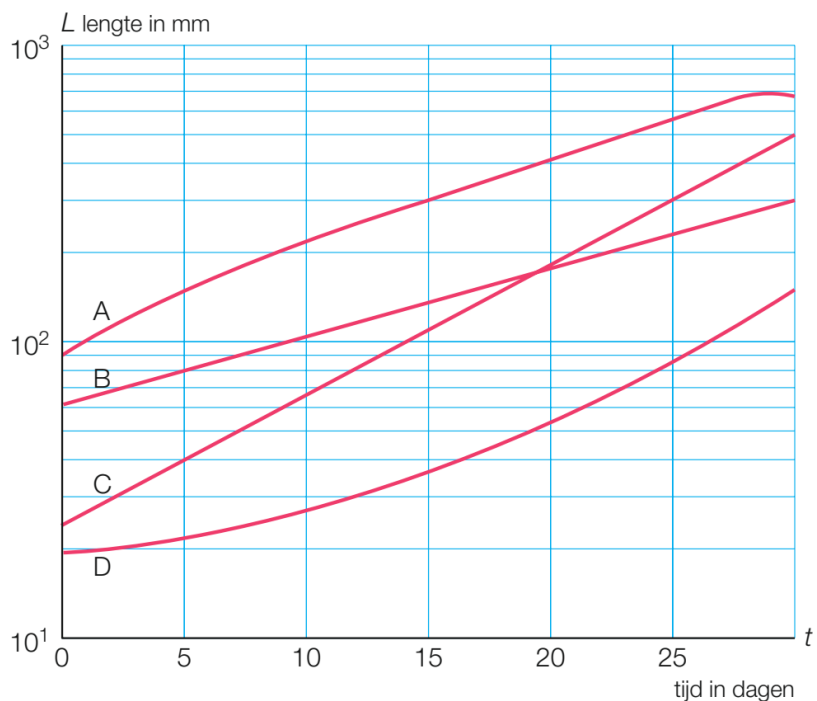


60



Van vier planten A, B, C en D is in de maand juni de lengte bijgehouden. De bijbehorende grafieken zijn op logaritmisch papier getekend. Zie de figuur hiernaast.

- Bij welke planten is sprake van exponentiële groei? Stel van deze planten de formule op van de lengte L in mm na t dagen. Rond de beginhoeveelheid af op gehelen en de groeifactor op twee decimalen.
- Plant E groeit exponentieel. Na 5 dagen is de lengte 30 mm en na 25 dagen is de lengte 400 mm.
Teken de grafiek van de lengte van plant E.
- Plant F groeit exponentieel met dezelfde groeifactor als plant B en na 10 dagen is de lengte 5 cm.
Teken in de figuur van vraag b de grafiek van de lengte van plant F.



A61

Elke computer gebruikt transistoren om berekeningen te maken. Hoe meer transistoren, hoe sneller de computer. In de begintijd van computers ging het om enkele honderden transistoren per computer. Tegenwoordig zijn dat er vele miljarden, die in zogenaamde microprocessors zijn verwerkt.

In 1965 voorspelde de wetenschapper Gordon Moore dat het aantal transistoren per microprocessor exponentieel zou gaan groeien met een verdubbelingstijd van twee jaar. Deze voorspelling staat bekend als de wet van Moore.

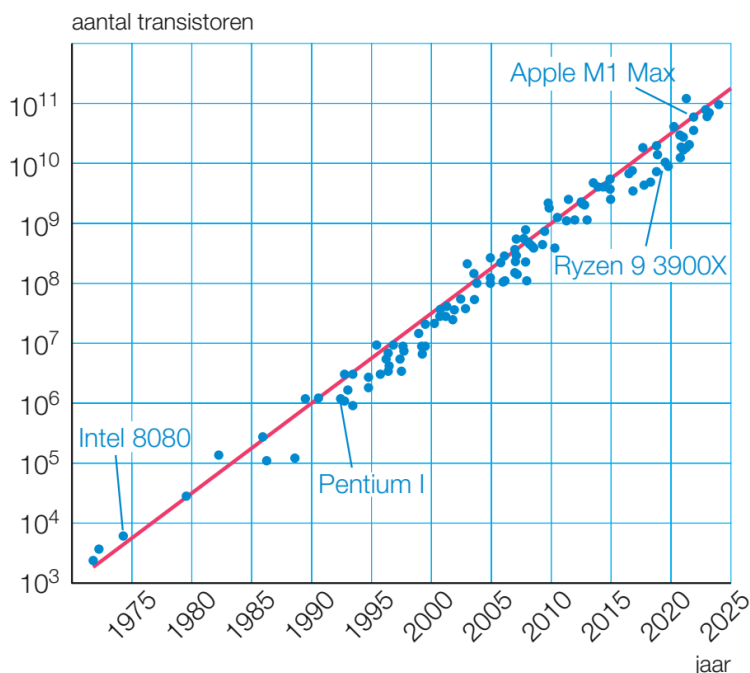
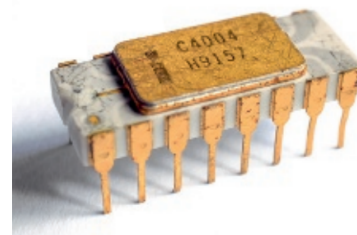
In de figuur is op logaritmisch papier van enkele microprocessors het aantal transistoren per microprocessor uitgezet tegen het jaar van verschijnen. Verder geeft de lijn een goede indruk van de ontwikkeling tussen 1972 en 2025.

Luuk en Maria doen een voorspelling van het aantal transistoren per microprocessor in 2032.

Luuk stelt hiervoor een formule van de lijn op.

Maria gebruikt de wet van Moore en gaat uit van de Intel 4004. De Intel 4004 was in 1971 de eerste commercieel verkrijgbare microprocessor. Deze had slechts 2300 transistoren en kostte \$ 60.

Hoeveel procent is het voorspelde aantal van Maria groter dan dat van Luuk?



Intel 4004

O62

a Welke van de volgende drie beweringen is juist?

- I ${}^2\log(4) \cdot {}^2\log(8) = {}^2\log(4 \cdot 8)$
- II ${}^2\log(4) + {}^2\log(8) = {}^2\log(4 + 8)$
- III ${}^2\log(4) + {}^2\log(8) = {}^2\log(4 \cdot 8)$

b Welke van de volgende drie beweringen is juist?

- I $\frac{{}^2\log(32)}{{}^2\log(8)} = {}^2\log\left(\frac{32}{8}\right)$
- II ${}^2\log(32) - {}^2\log(8) = {}^2\log\left(\frac{32}{8}\right)$
- III ${}^2\log(32) - {}^2\log(8) = {}^2\log(32 - 8)$

c Welke van de volgende drie beweringen is juist?

- I $3 \cdot {}^2\log(4) = {}^6\log(4)$
- II $3 \cdot {}^2\log(4) = {}^2\log(3 \cdot 4)$
- III $3 \cdot {}^2\log(4) = {}^2\log(4^3)$

Theorie C Rekenregels voor logaritmen

De juiste antwoorden van opgave 62 zijn voorbeelden van drie rekenregels voor logaritmen.

Daarnaast is er een rekenregel om het grondtal te veranderen. Er geldt

$${}^s\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}, \text{ waarbij } p \text{ elk grondtal mag zijn.}$$

Rekenregels voor logaritmen

$${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(ab)$$

$${}^s\log(a^p) = p \cdot {}^s\log(a)$$

$${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$${}^s\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$$

Deze vier regels staan op het formuleblad dat je bij het centraal examen krijgt.

Voorbeeld

- a De formule van $N = 40 \cdot {}^3\log(t)$ is te schrijven als $N = a \cdot \log(x)$. Bereken a in één decimaal nauwkeurig.
- b Schrijf de formule $N = {}^2\log(64x)$ in de vorm $N = a + b \cdot \log(x)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- c Gegeven is de formule $N(x) = 31,3 + 24,9 \cdot \log(x)$. Er geldt: als x verdubbelt, dan neemt N met ongeveer 7,5 toe. Toon dit aan.

Uitwerking

a $N = 40 \cdot {}^3\log(t) = 40 \cdot \frac{\log(t)}{\log(3)} = \frac{40}{\log(3)} \cdot \log(t) \approx 83,8 \cdot \log(t)$

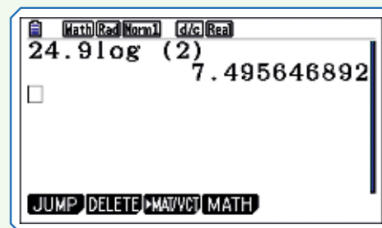
b $N = {}^2\log(64x) = {}^2\log(64) + {}^2\log(x) \leftarrow \text{Gebruik } {}^s\log(ab) = {}^s\log(a) + {}^s\log(b).$

$$= 6 + \frac{\log(x)}{\log(2)} = 6 + \frac{1}{\log(2)} \cdot \log(x) \approx 6 + 3,32 \cdot \log(x)$$

Dus $N = 6 + 3,32 \cdot \log(x)$. Het dubbele van x is $2x$.

c $N(2x) = 31,3 + 24,9 \cdot \log(2x)$
 $= 31,3 + 24,9(\log(2) + \log(x))$
 $= 31,3 + 24,9 \cdot \log(2) + 24,9 \cdot \log(x)$
 $= 31,3 + 24,9 \cdot \log(x) + 7,495\dots$

Dus $N(2x) \approx N(x) + 7,5$ en hiermee is aangetoond dat N met ongeveer 7,5 toeneemt als x verdubbelt.



63 Zie vraag b van het voorbeeld.

- ☐ **a** Schrijf de formule $N = {}^2\log(64x)$ in de vorm $N = a + b \cdot {}^5\log(x)$.
Rond zo nodig af op twee decimalen.

Zie vraag c van het voorbeeld.

- b** Met hoeveel neemt N af als x halveert? Rond af op één decimaal.

64 Rond in deze opgave zo nodig af op twee decimalen.

- ☐ **a** Schrijf de formule $N = 50 \cdot {}^5\log(t)$ in de vorm $N = a \cdot \log(t)$.
b Schrijf de formule $N = {}^3\log(81x)$ in de vorm $N = a + b \cdot \log(x)$.
c Schrijf de formule $N = \log(150x)$ in de vorm $N = a + b \cdot {}^2\log(x)$.

65 Bij de volgende formules geldt: als x verdubbelt, dan neemt N steeds met hetzelfde getal toe of af.

Toon dit aan en bereken dat getal bij elke formule. Rond af op gehele.

- a** $N(x) = 40 + 9,97 \cdot \log(x)$
b $N(x) = 653 - 33,2 \cdot \log(x)$

66 Gegeven is de formule $N(x) = 50 + b \cdot \log(x)$.

☐ * Geef in deze opgave de antwoorden afgerond op twee decimalen.

Voor welke waarde van b geldt

- a** als x verdubbelt, dan neemt N met 15 toe
b als x halveert, dan neemt N met 6 af
c als x verdrievoudigt, dan neemt N met 1 toe?

A67 Bedrijven met een website hebben behoefte aan objectieve informatie over het aantal bezoekers van de website en de effectiviteit van de site. Een instelling die dit soort gegevens verzamelt, rekent het volgende tarief per maand:

- vast bedrag van 50 euro per site
- variabel bedrag afhankelijk van het aantal bezoekers n per maand.

Voor het variabele bedrag in euro's gebruikt men de formule

$V(n) = 59,27 \cdot \log(n) - 191,40$. De formule geldt alleen voor die waarden van n waarvoor V positief is.

- a** Onderzoek vanaf welke n de formule geldt. Rond af op honderdtallen.
b Een site had in februari 158 000 bezoekers en in maart waren dat er 56 000 meer.

Hoeveel betaalt de eigenaar van deze site in maart meer dan in februari?

- c** Een site heeft elke maand (vrijwel) evenveel bezoekers. In een jaar betaalt de eigenaar van deze site 2200 euro.

Bereken het aantal bezoekers per maand. Rond af op honderdtallen.

- d** Bij een verdubbeling van het aantal bezoekers per maand neemt het variabele bedrag steeds met hetzelfde aantal euro's toe.

Toon dit aan en bereken dit bedrag.

68

*

- a** Schrijf de formule $N = 15 \cdot {}^2\log(20x)$ in de vorm $N = a + b \cdot \log(x)$. Rond af op één decimaal.
- b** Gegeven is de formule $N(q) = 17,5 + 12,46 \cdot \log(q)$. Met hoeveel neemt N toe als q verdubbelt? Rond af op twee decimalen.
- c** Gegeven is de formule $N(p) = 38,4 + 9,4 \cdot \log(p^{1,24})$. Toon aan: als p verdubbelt, dan neemt N met ongeveer 3,5 toe.
- d** Gegeven is de formule $N(d) = 12 + b \cdot \log(d)$. Er geldt: als d halveert, dan neemt N met 4,5 af. Bereken b . Rond af op twee decimalen.

A69

□ ⊗ *

Bij netwerkbeheerder Liander krijg je een vergoeding voor het ongemak als je langer dan vier uur zonder gas of stroom hebt gezeten. Op de site van Liander staat het volgende.

U ontvangt:

- €35 wanneer u langer dan 4 uur zonder gas of stroom heeft gezeten
- €20 extra voor elke 4 uur erbij (na 8 uur, 12 uur, etc).

- a** Bereken de vergoeding bij een storing van 3 uur, van 7,5 uur en van 10 uur en 15 minuten.

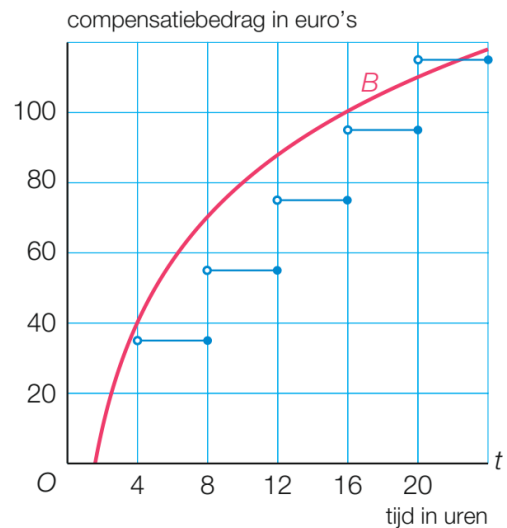
Uit een onderzoek onder huishoudens die een aansluiting hebben bij Liander blijkt dat men vooral voor kortere onderbrekingen een hoger compensatiebedrag verwacht.

Dit onderzoek leverde het model

$$B(t) = -20 + 100 \cdot \log(t) \text{ op.}$$

Hierin is B het compensatiebedrag in euro's en t de tijdsduur van de onderbreking in uren.

De grafiek van B is, samen met de vergoeding die Liander geeft, getekend in de figuur hiernaast.



- b** Voor een korte onderbreking wordt volgens de formule van B geen compensatie gegeven. Bereken tot hoeveel minuten onderbreking geen compensatie wordt gegeven. Rond af op gehelen.
- c** Je kunt in de figuur zien dat bij een onderbreking van minder dan 20 uur er een groot verschil is tussen B en de vergoeding die Liander geeft. Dit verschil is bij $t = 7,5$ groter dan bij $t = 11,5$. Hoeveel groter?
- d** De familie Keil kreeg van Liander bij een onderbreking een vergoeding die precies gelijk was aan de vergoeding die ze zouden krijgen bij toepassing van de formule van B . Hoe lang duurde deze onderbreking? Rond af op gehele minuten.
- e** Bij de formule van B geldt: als de tijdsduur van de onderbreking verdubbelt, dan neemt de compensatie steeds met hetzelfde bedrag toe. Toon dit aan en bereken dit bedrag.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan werken met logaritmische schaalverdelingen.
- ☐ Ik weet dat bij een rechte lijn op logaritmisch papier een exponentieel verband hoort, en andersom.
- ☐ Ik kan rekenregels voor logaritmen gebruiken om formules te herleiden.

► OPGAVE C10
THEORIE A

► OPGAVE C11
THEORIE B

► OPGAVE C12
THEORIE C

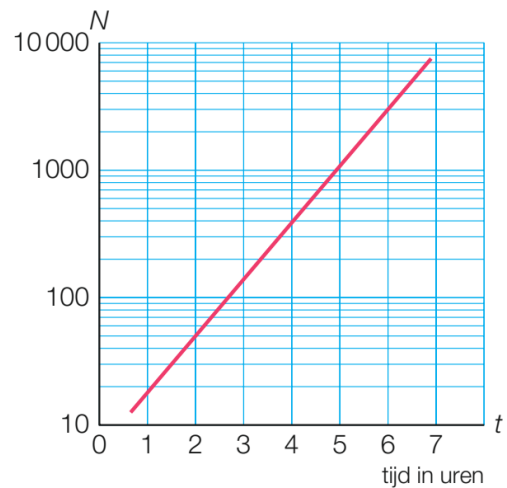
C10 Zie de logaritmische schaalverdeling hieronder.



a Geef de waarden van A en B . Rond af op één decimaal.

Hiernaast is een grafiek op logaritmisch papier getekend.

- b** Welke waarde van N hoort bij $t = 6$?
- c** Welke waarde van t hoort bij $N = 50$?



C11 Zie de grafiek hiernaast.

Stel de formule op van N . Rond de beginhoeveelheid af op één decimaal.

C12 Schrijf de formule $N(x) = {}^3\log(50x)$ in de vorm $N = a + b \cdot \log(x)$. Rond a en b af op twee decimalen.

Antwoorden

C10 a $A = 4,0$ $B = 215,4$

b 3000

c 2

C11 $N = 6,5 \cdot 2,783^t$

C12 $N = 3,56 + 2,10 \cdot \log(x)$

10.5 Het getal e en de natuurlijke logaritme

Kennis en vaardigheden

- Je kent het getal e en je kunt de afgeleide van $y = e^x$ berekenen.
- Je kent de natuurlijke logaritme en kunt hiermee herleidingen uitvoeren.
- Je kunt voor ieder grondtal exponentiële functies differentiëren.

070



In deze opgave onderzoek je wat de afgeleide is van $y = 2^x$ en $y = 3^x$.

Daartoe plot je de grafiek van de afgeleide op de GR. Kijk eventueel nog eens naar de GR-module *Helling en hellinggrafiek*.

a Plot bij y_1 de grafiek van $y = 2^x$ en bij y_2 de afgeleide van y_1 . Neem x tussen -3 en 3 en y tussen 0 en 5 .

b Voer in $y_3 = \frac{y_2}{y_1}$ en kijk in de tabel bij y_3 . Wat valt je op? Hoe volgt

hieruit dat de afgeleide van $y = 2^x$ is $\frac{dy}{dx} \approx 0,6931 \cdot 2^x$?

c De afgeleide van $y = 3^x$ is $\frac{dy}{dx} = c \cdot 3^x$.

Onderzoek op de manier van vraag b wat de waarde van c is. Rond af op vier decimalen.

Theorie A De formule $y = e^x$

In opgave 70 heb je gezien dat $y = 2^x$ geeft $\frac{dy}{dx} \approx 0,6931 \cdot 2^x$

en dat $y = 3^x$ geeft $\frac{dy}{dx} \approx 1,0986 \cdot 3^x$.

En zo kun je nagaan dat $y = 2,7^x$ geeft $\frac{dy}{dx} \approx 0,9933 \cdot 2,7^x$

en $y = 2,8^x$ geeft $\frac{dy}{dx} \approx 1,0296 \cdot 2,8^x$.

Er is een grondtal g tussen $2,7$ en $2,8$ waarbij

$y = g^x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot g^x$ oftewel $\frac{dy}{dx} = g^x$.

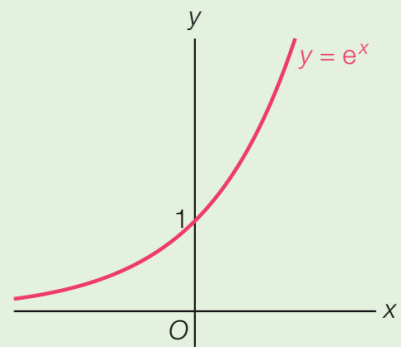
Dit grondtal speelt een belangrijke rol in de wiskunde en in allerlei vakgebieden. Daarom wordt het met een eigen letter aangeduid, de letter **e**. De GR heeft een knop om met e te rekenen. Je kunt nagaan dat $e \approx 2,71828$.

$$y = e^x \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = e^x$$

De grafiek van $y = e^x$ is een standaardgrafiek. Deze grafiek kun je plotten door in te voeren $y_1 = e^x$. Bij het berekenen van de afgeleide van een functie met **e-machten** heb je vaak de kettingregel nodig.

Bij $y = 100 e^{2x}$ krijg je $\frac{dy}{dx} = 100 e^{2x} \cdot 2 = 200 e^{2x}$.

De afgeleide van $2x$.



Een formule waarbij een hoeveelheid N groeit, noemen we een **groeiformule**. Met de afgeleide kun je de **groeisnelheid** berekenen. Zie het voorbeeld.

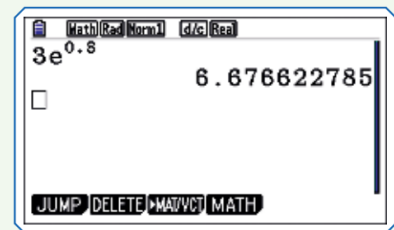
Voorbeeld

Gegeven is de groeiformule $N = 30(1 + e^{0,1t})$. Bereken met de afgeleide de groeisnelheid op $t = 8$. Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

$N = 30(1 + e^{0,1t})$ geeft $\frac{dN}{dt} = 30 \cdot e^{0,1t} \cdot 0,1 = 3 e^{0,1t}$

De groeisnelheid op $t = 8$ is $\frac{dN}{dt} = 3 e^{0,1 \cdot 8} = 3 e^{0,8} \approx 6,68$.



R71 In het voorbeeld is de afgeleide berekend door gebruik te maken van de regel $f(x) = a \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = a \cdot g'(x)$. Je kunt de afgeleide ook berekenen door eerst de haakjes weg te werken en daarna te differentiëren.

Laat zien dat je op deze manier dezelfde afgeleide krijgt.

72 Zie het voorbeeld.

Om te berekenen voor welke waarde van t de groeisnelheid twee keer zo groot is als de groeisnelheid op $t = 8$, los je de vergelijking $3 e^{0,1t} = 2 \cdot 3 e^{0,8}$ op.

a Licht dit toe.

b Voer in $y_1 = 3 e^{0,1x}$ en $y_2 = 2 \cdot 3 e^{0,8}$ en bereken x . Rond af op één decimaal.

c Voor welke waarde van t is de groeisnelheid drie keer zo groot als de groeisnelheid op $t = 5$? Rond af op één decimaal.

73 Bereken de afgeleide.



a $y = 500e^{3x}$

b $y = 600e^{0,4x}$

c $N = 250e^{0,2t+1}$

d $N = 1000e^{-0,6t}$

e $N = 10(1 + e^{0,12p})$

f $F = 20e^{0,01q^2}$

Geschiedenis Euler

Leonhard Euler (1707-1783) is een van de meest vooraanstaande wiskundigen uit de geschiedenis. De eerste lessen in wiskunde kreeg hij van zijn vader, een dominee uit Bazel. Na zijn opleiding op het gymnasium van Bazel studeerde hij theologie en wiskunde. Op twintigjarige leeftijd werd hij benoemd tot hoogleraar natuurkunde aan de door tsaar Peter de Grote gestichte academie van Sint-Petersburg. In 1731 werd hij daar hoogleraar wiskunde. Euler was bijzonder productief: hij publiceerde in totaal 886 boeken en geschriften. De functienotatie $f(x)$ werd door hem ingevoerd, evenals de notaties voor de getallen π en e .



Leonhard Euler

Euler bewees dat e een irrationaal getal is. Een irrationaal getal is een getal dat niet als een breuk te schrijven is. De decimale ontwikkeling van zo'n getal gaat oneindig door en vertoont geen enkele regelmaat. In zijn boek *Introductio in Analysin Infinitorum* geeft Euler e in 23 decimalen.

Hij gebruikte hierbij de formule $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$ en vond $e \approx 2,71828182845904523536028$.

74 Gegeven is de groeiformule $N = 50(1 + e^{0,18t})$.



a Bereken met de afgeleide de groeisnelheid op $t = 10$. Rond af op één decimaal.

b Bereken voor welke waarde van t de groeisnelheid twee keer zo groot is als op $t = 5$. Rond af op één decimaal.

c Bereken voor welke waarde van t de groeisnelheid de helft is van de groeisnelheid op $t = 15$. Rond af op één decimaal.

A75 Een bacteriecultuur groeit volgens de formule $N = 25\,000e^{0,4t}$. Hierbij is N het aantal bacteriën en t de tijd in uren.



a Bereken de gemiddelde groeisnelheid per minuut op het interval $[5, 8]$. Rond af op honderdtallen.

b Bereken met de afgeleide de groeisnelheid per minuut op $t = 5$. Rond af op tientallen.

c Bereken voor welke t de groeisnelheid twee keer zo groot is als op $t = 6$. Rond af op twee decimalen.

O76 Gegeven is de formule $y = 4^x$. De afgeleide is $\frac{dy}{dx} = c \cdot 4^x$.



Bereken c . Rond af op vier decimalen. Ga te werk zoals in opgave 70.

Theorie B De natuurlijke logaritme

Voor elke waarde van g met $g > 0$ en $g \neq 1$ geldt dat $y = g^x$ geeft

$$\frac{dy}{dx} = c \cdot g^x, \text{ waarbij } c \text{ afhangt van } g. \text{ Er geldt } c = {}^e\log(g).$$

Je hebt dus te maken met een logaritme met grondtal e .

De logaritme met grondtal e wordt de **natuurlijke logaritme** genoemd en wordt genoteerd met **ln**.

De afkorting $\ln$ komt van het Latijnse logarithmus naturalis.

De natuurlijke logaritme is de logaritme met grondtal e .

$$\ln(a) = {}^e\log(a)$$

Voor de afgeleide van $y = g^x$ geldt

$$\frac{dy}{dx} = c \cdot g^x \text{ met } c = \ln(g), \text{ dus } \frac{dy}{dx} = g^x \cdot \ln(g).$$

$$y = g^x \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = g^x \cdot \ln(g)$$

Zo is de afgeleide van $y = 4^x$ gelijk aan $\frac{dy}{dx} = 4^x \cdot \ln(4)$

en de afgeleide van $y = 1,5^x$ is $\frac{dy}{dx} = 1,5^x \cdot \ln(1,5)$.

Voorbeeld

a Differentieer $y = 5 \cdot 2^x$.

b Bereken de afgeleide van $N = 3^{2t-1}$.

c De afgeleide van $N = 100(1 + 1,25^{3t})$ is te schrijven in de vorm

$$\frac{dN}{dt} = a \cdot 1,25^{3t}. \text{ Bereken } a \text{ in gehelen.}$$

Uitwerking

a $y = 5 \cdot 2^x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 5 \cdot 2^x \cdot \ln(2) = 5 \cdot \ln(2) \cdot 2^x$

b $N = 3^{2t-1}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 3^{2t-1} \cdot \ln(3) \cdot 2 = 2 \cdot \ln(3) \cdot 3^{2t-1}$

Gebruik de kettingregel.

c $N = 100(1 + 1,25^{3t})$ geeft $\frac{dN}{dt} = 100 \cdot 1,25^{3t} \cdot \ln(1,25) \cdot 3 = 300 \cdot \ln(1,25) \cdot 1,25^{3t}$
 $= 66,94... \cdot 1,25^{3t}$

Dus $a = 67$.

De rekenregels voor logaritmen gelden vanzelfsprekend ook voor de natuurlijke logaritme. Zo volgt

- $\ln(5) + \ln(10) = \ln(50)$ uit ${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(ab)$
- $\ln(10) - \ln(5) = \ln(2)$ uit ${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $\ln(9) = 2 \cdot \ln(3)$ uit ${}^s\log(a^p) = p \cdot {}^s\log(a)$.

Neem je bij de regel ${}^s\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$ in het rechterlid voor het grondtal het getal e , dan krijg je ${}^s\log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(g)}$.

Neem je bij de regel ${}^s\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$ in het linkerlid grondtal e en in het rechterlid grondtal 10 , dan krijg je $\ln(a) = \frac{\log(a)}{\log(e)}$.

$${}^s\log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(g)} \quad \ln(a) = \frac{\log(a)}{\log(e)}$$

Voorbeeld

- Bereken $\ln(e^2 \cdot \sqrt{e})$ zonder GR.
- Schrijf de formule $N = 5 + 10 \cdot {}^3\log(t)$ in de vorm $N = a + b \cdot \ln(t)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- Gegeven is de formule $N(x) = 6,15 + 14,43 \cdot \ln(x)$. Toon aan: als x verdubbelt, dan neemt N met ongeveer 10 toe.

Uitwerking

$$\text{a } \ln(e^2 \cdot \sqrt{e}) = \ln(e^2 \cdot e^{\frac{1}{2}}) = \ln(e^{2\frac{1}{2}}) = 2\frac{1}{2}$$

$$\ln(e^a) = a$$

$$\text{b } N = 5 + 10 \cdot {}^3\log(t) = 5 + 10 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(3)} = 5 + \frac{10}{\ln(3)} \cdot \ln(t) \approx 5 + 9,10 \cdot \ln(t)$$

$$\text{Dus } N = 5 + 9,10 \cdot \ln(t).$$

$$\begin{aligned} \text{c } N(2x) &= 6,15 + 14,43 \cdot \ln(2x) \\ &= 6,15 + 14,43(\ln(2) + \ln(x)) \\ &= 6,15 + 14,43 \cdot \ln(x) + 14,43 \cdot \ln(2) \\ &= 6,15 + 14,43 \cdot \ln(x) + 10,00... \end{aligned}$$

Dus $N(2x) \approx N(x) + 10$ en hiermee is aangetoond dat N met ongeveer 10 toeneemt als x verdubbelt.

77 Bereken de afgeleide.



- a $y = 2 \cdot 3^x$
- b $y = 50 \cdot 4^{3x-1}$
- c $N = 200 \cdot 1,5^{0,4t}$
- d $N = 600 \cdot 0,8^{2t+3}$
- e $P = 80(1 + 1,3^{0,1q})$
- f $Q = 75 \cdot 2^{0,01p^2}$

78 a De afgeleide van $y = 80 \cdot 0,6^{2-x}$ is te schrijven in de vorm



$$\frac{dy}{dx} = a \cdot 0,6^{2-x}.$$

Bereken a in gehelen.

b De afgeleide van $N = 0,05 \cdot 1,28^{3t-1}$ is te schrijven in de vorm

$$\frac{dN}{dt} = a \cdot 1,28^{3t-1}.$$

Bereken a . Rond af op drie decimalen.

79 Bereken zonder GR.



- a $\ln(e)$
- b $\ln(e \cdot \sqrt{e})$
- c $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$
- d $\ln(1)$
- e $3 \ln(e \cdot \sqrt[3]{e})$
- f $e^{\ln(7)} + e^{\ln(8)}$
- g $e^{2\ln(5)}$
- h $e^{\frac{1}{2}\ln(9)}$

Net als $g^{\log(x)} = x$
is ook $e^{\ln(x)} = x$.

80 Schrijf de formule in de vorm $N = a + b \cdot \ln(t)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.



- a $N = 20 + 3 \cdot {}^4\log(t)$
- b $N = 100 - 50 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(t)$
- c $N = 6 + 200 \cdot \log(t)$
- d $N = 5 + 8 \cdot \log(2t)$

81 a Gegeven is de formule $N(q) = 11,13 + 6,49 \cdot \ln(q)$.



Als q verdubbelt, dan neemt N steeds met hetzelfde getal toe.
Toon dit aan en bereken dat getal. Rond af op één decimaal.

b Gegeven is de formule $N(p) = 100 + 13,85 \cdot \ln(p^{1,25})$.

Als p verdubbelt, dan neemt N steeds met hetzelfde getal toe.
Toon dit aan en bereken dat getal. Rond af op gehelen.

c Gegeven is de formule $N(t) = 16 + b \cdot \ln(t)$.

Er geldt: als t drie keer zo groot wordt, dan neemt N met 5 toe.
Bereken b . Rond af op twee decimalen.

A82

Een zojuist ingeschonken kop koffie heeft een temperatuur van 80°C . De koffie koelt af volgens de formule $T = 20 + p \cdot 2^{-0,25t}$. Hierin is t de tijd in minuten en T de temperatuur van de koffie in $^\circ\text{C}$. Uit de gegevens volgt $p = 60$.

- Toon dit aan.
- Bereken na hoeveel minuten en hoeveel seconden de temperatuur van de koffie 60°C is.
- Bereken de gemiddelde snelheid waarmee de koffie in de eerste vier minuten afkoelt.
- Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee de koffie vier minuten na het inschenken afkoelt. Rond af op één decimaal.
- Bereken na hoeveel seconden de snelheid waarmee de koffie afkoelt de helft is van de snelheid waarmee de koffie na 90 seconden afkoelt.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik ken het getal e en ik kan de afgeleide van $y = e^x$ berekenen.
- ☐ Ik ken de natuurlijke logaritme en kan hiermee herleidingen uitvoeren.
- ☐ Ik kan voor ieder grondtal exponentiële functies differentiëren.

► **OPGAVE C13**
THEORIE A

► **OPGAVE C14**
THEORIE B

► **OPGAVE C15**
THEORIE B

C13 Bereken de afgeleide van $N = 25(1 + e^{0,4t})$.

C14 Schrijf de formule $N = 3 - 6 \cdot {}^3\log(t)$ in de vorm $N = a + b \cdot \ln(t)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

C15 Differentieer $y = 3^{4x-2}$.

Antwoorden

C13 $\frac{dN}{dt} = 10 \cdot e^{0,4t}$

C14 $N = 3 - 5,46 \cdot \ln(t)$

C15 $\frac{dy}{dx} = 4 \cdot \ln(3) \cdot 3^{4x-2}$

Kennis- en vaardigheidentest

10.1 Exponentiële groei

- 1** Vanaf 2012 nam de kostprijs per wattpiek van een zonnepaneel met 16% per jaar af. In 2012 was de kostprijs 2,00 euro per wattpiek.
- a** Stel de formule op van de kostprijs K in euro per wattpiek. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2012.
 - b** Bereken de totale kostprijs van 8000 wattpiek aan zonnepanelen in 2025.
 - c** Bereken in welk jaar de kostprijs voor het eerst minder is dan 0,10 euro per wattpiek.

- 2** De halveringstijd van de radioactieve stof jodium-128 is 25,0 minuten. Bereken met welk percentage de hoeveelheid radioactieve stof afneemt per minuut.

10.2 Exponentiële en lineaire groei

- 3** Bij een exponentieel groeiproces neemt de hoeveelheid per dag met 36% toe.
- a** Bereken het groeipercentage per week. Rond af op gehele.
 - b** Bereken het groeipercentage per uur.

Bij een exponentiële toename wordt een hoeveelheid in tien jaar verdrievoudigd.

- c** Hoeveel procent is de toename per maand?

- 4** Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 4$ is $N = 1500$ en op $t = 7$ is $N = 1200$. Hierbij is t de tijd in dagen. Stel de formule op van N . Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.

- 5** Je ziet hiernaast twee tabellen. Eén van de tabellen hoort bij een lineair verband en één hoort bij een exponentieel verband. Laat zien bij welke tabel het lineaire verband hoort en bij welke tabel het exponentiële. Stel bij beide tabellen de formule op. Rond bij het exponentiële verband de groeifactor af op twee decimalen en de beginhoeveelheid op gehele.

I

t	2	4	7	11
B	375	586	1144	2794

II

t	3	5	9	12
N	235	251	283	307

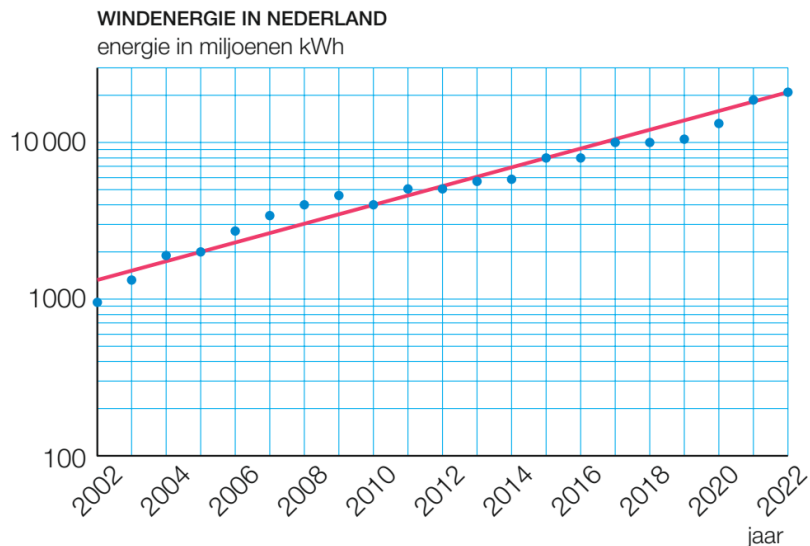
10.3 Logaritmen

- 6** Bereken zonder gebruik te maken van de GR.
- a** ${}^5\log(625)$
 - b** ${}^2\log(\frac{1}{8})$
 - c** ${}^{\frac{1}{2}}\log(\frac{1}{4})$

- 7**
- a** Schrijf de formule $y = {}^5\log(5x - 1) - 2$ in de vorm $x = a + b \cdot g^y$.
 - b** Maak de variabele p vrij bij de formule $q = 3 - 2^{p-2}$.

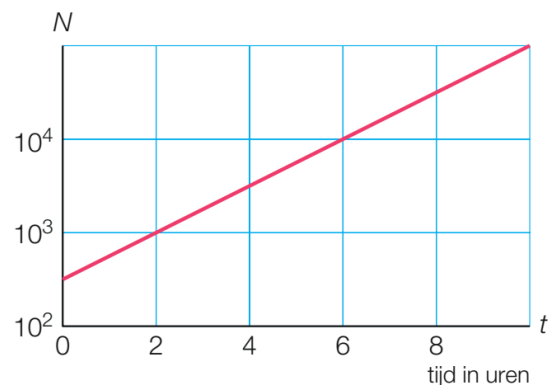
10.4 Werken met logaritmen

- 8** In de figuur hiernaast zie je voor de jaren 2002 tot en met 2022 hoeveel windenergie er in Nederland is geproduceerd. Verder geeft de lijn een indruk van de ontwikkeling in deze periode. Op de verticale as is een logaritmische schaal gebruikt.



- a** In 2018 werd er meer windenergie geproduceerd dan in 2005. Hoeveel keer zoveel?
- b** Gebruik een formule van de lijn om te voorspellen hoeveel windenergie er in Nederland in 2034 geproduceerd zal worden. Geef je antwoord in miljarden kWh en rond af op één decimaal.

- 9** In de figuur hiernaast zie je hoe het aantal bacteriën N op een zojuist schoongemaakte deurklink zich ontwikkelt. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 7:00 uur.
- a** Op welk tijdstip zitten er 10 000 bacteriën op de deurklink?
- b** Hoeveel bacteriën zitten er om 11:00 uur op de deurklink? Rond af op honderdtallen.



- 10 a** Schrijf de formule $N = {}^3\log(6x)$ in de vorm $N = a + b \cdot \log(x)$. Rond af op één decimaal.
- b** Gegeven is de formule $N(t) = 86 + 18,6 \cdot \log(t)$. Als t verviervoudigt, dan neemt N steeds met hetzelfde getal toe. Toon dit aan en bereken dat getal. Rond af op gehelen.

10.5 Het getal e en de natuurlijke logaritme

- 11** Bereken de afgeleide.

- a** $y = 14e^{1,25x}$
- b** $y = 421e^{3x^2-2}$
- c** $y = 2500(1 + e^{0,56x})$
- d** $y = 350 \cdot 10^{7x+3}$
- e** $y = 5,5(1 + 8^{1,44x})$
- f** $y = 6000 \cdot 2,3^{0,12x^2}$

- 12** Schrijf de formule $N = 3 - 5 \cdot \log(2t)$ in de vorm $N = a + b \cdot \ln(t)$. Rond af op twee decimalen.

Gemengde opgaven

1 Differentieer.

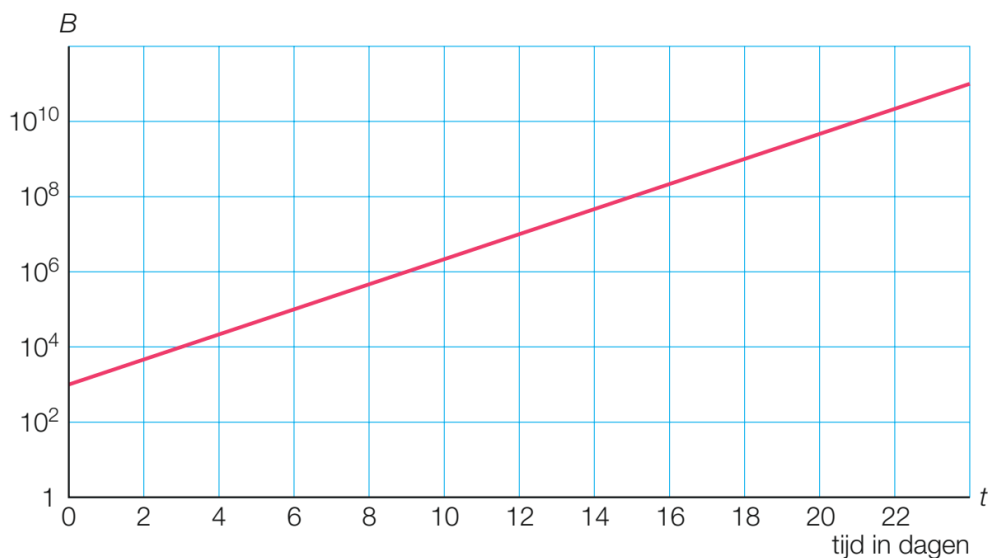
a $y = 40e^{0,6x}$

b $y = 18,5(1 + e^{2x})$

c $N = 34 \cdot 5^{t^2 - 7}$

d $P = 600(1 + 8^{1,5q})$

- 2** Er wordt veel onderzoek gedaan naar de houdbaarheid van verse producten die kunnen bederven. Bij één van de onderzoeken wordt gekeken naar het aantal pseudomonas-bacteriën per kilogram verse kip. In de figuur zijn de resultaten van een proef verwerkt, waarbij 1 kg verse kip werd bewaard in een koelkast die op 0°C was ingesteld. Er werd bijgehouden hoe het aantal bacteriën B per kg verse kip zich ontwikkelde. In de figuur is B uitgezet tegen t , waarbij t de tijd in dagen is vanaf het begin van het koelen van de kip.



Volgens de Warenwet mogen er ten hoogste 50 miljoen bacteriën per kg kip aanwezig zijn. Zijn er meer bacteriën aanwezig, dan wordt het kippenvlees afgekeurd en mag het niet gegeten worden.

- a** Na negen dagen waren er meer bacteriën dan aan het begin van het koelen.

Hoeveel keer zoveel?

- b** Mag de kip volgens de Warenwet na 12 dagen nog gegeten worden? Licht toe.

Bij de lijn hoort de formule $\log(B) = \frac{1}{3}t + 3$.

- c** Bereken met behulp van de formule na hoeveel dagen de kip volgens de Warenwet niet meer gegeten mag worden. Rond af op één decimaal.

- d** Schrijf de formule $\log(B) = \frac{1}{3}t + 3$ in de vorm $B = b \cdot g^t$. Rond g af op drie decimalen.

- 3** a Schrijf de formule $N = {}^4\log(3x)$ in de vorm $N = a + b \cdot \log(x)$. Rond af op twee decimalen.
 b Schrijf de formule $N = 5 + 2 \cdot \log(3t)$ in de vorm $N = a + b \cdot \ln(t)$. Rond af op twee decimalen.
 c Maak bij de formule $Q = 3 + {}^4\log(2x + 1)$ de variabele x vrij.
 d Maak bij de formule $P = 3 - 2^{3t+1}$ de variabele t vrij.

- 4** a Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. Op $t = 4$ is $N = 160$ en op $t = 8$ is $N = 272$. Hierbij is t in dagen. Bereken de verdubbelingstijd van N . Geef je antwoord in dagen en rond af op één decimaal.
 b Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 12$ is er nog 84% over van de oorspronkelijke hoeveelheid. Hierbij is t in dagen. We noemen het percentage dat nog over is P . Stel de formule op van P .
 c Een hoeveelheid is in tien jaar tijd met 85% toegenomen. De eerste zes jaar nam de hoeveelheid met 9,2% per jaar toe. Bereken voor de laatste vier jaar het jaarlijkse toenamepercentage.

- 5** De wereldbevolking consumeert steeds meer vis. Lange tijd werd het grootste gedeelte daarvan door de visserijsector gevangen. Tegenwoordig is het grootste gedeelte echter afkomstig uit viskwekerijen.

In 1970 werd er wereldwijd 3,4 miljoen ton vis gekweekt. In 2022 was die hoeveelheid exponentieel toegenomen tot 94,4 miljoen ton.

Uit deze gegevens volgt de formule

$N = 3,4 \cdot 1,066^t$ met N de hoeveelheid wereldwijd gekweekte vis in miljoen ton en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1970.

- a Toon aan dat deze formule volgt uit de gegevens.
 b Bereken de verdubbelingstijd voor de hoeveelheid wereldwijd gekweekte vis. Rond af op gehele jaren.

Voor de hoeveelheid wereldwijd gevangen vis kun je gebruikmaken van het model $N = 46,5 \cdot \ln(t + 20) - 119,3$. Hierin is N de hoeveelheid wereldwijd gevangen vis in miljoen tonnen en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1970.

- c In welk jaar werd er voor het eerst meer vis gekweekt dan gevangen?
 d In de periode 1970-2022 is de wereldbevolking met 116% toegenomen. De gemiddelde wereldburger is in dezelfde periode meer vis gaan eten. Hoeveel keer zoveel? Rond af op één decimaal.
 e Schrijf de formule $N = 46,5 \cdot \ln(t + 20) - 119,3$ in de vorm $N = a \cdot \log(t + 20) + b$. Rond zo nodig af op één decimaal.

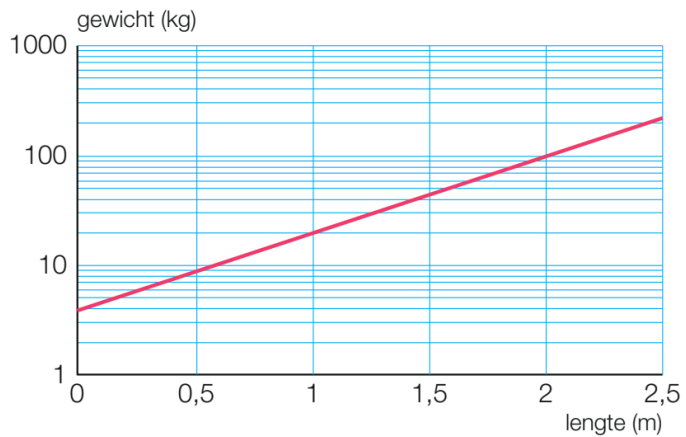


6 In een meer groeit een waterplant die het wateroppervlak bedekt. Op 1 mei om 0:00 uur wordt 20 m^2 van het wateroppervlak bedekt en deze oppervlakte verdubbelt elke vijf dagen. Precies zes weken na 1 mei bedekt de waterplant het gehele meer.

- a** Bereken in m^2 nauwkeurig de oppervlakte van het meer.
- b** Op welke datum is 30% van het meer met de waterplant bedekt?

7 In 2016 werd de app Pokémon GO van het Japanse bedrijf Nintendo een wereldwijde rage. In dit spel worden animaties geprojecteerd op beelden van de camera van je smartphone. Spelers moeten in de echte wereld denkbeeldige wezens zoeken, vangen en trainen: de zogeheten Pokémon.

Bij bepaalde Pokémon bestaat er een verband tussen gewicht en lengte. Dit verband is weergegeven in de figuur. Hierin is G het gewicht van een Pokémon in kilogram en L de lengte in meter.



- a** Als een Pokémon vijf keer zo zwaar is als een andere Pokémon, dan is het verschil in lengte altijd hetzelfde. Zoek uit hoeveel cm dat verschil is.
- b** Stel bij de lijn een formule op van de vorm $\log(G) = aL + b$. Rond af op één decimaal.

8 Daglicht bevordert het gevoel van welzijn, het veraangenaamt de sfeer en verhoogt de arbeidsproductiviteit. Daglicht bespaart bovendien energie en geeft de omgeving in de ware kleuren weer. Solatube is een bedrijf dat via een reflecterende buis het daglicht vanuit een lichtkoepel in de leefruimte van een huis of een kantoor laat vallen. De buizen zijn voorzien van reflectiemateriaal waarbij per weerkaatsing steeds hetzelfde percentage van het weerkaatste licht verloren gaat. De hoeveelheid daglicht die in de woonruimte valt, neemt dus exponentieel af met het aantal weerkaatsingen.



Na 35 weerkaatsingen valt nog altijd 90% van de oorspronkelijke hoeveelheid daglicht in de woonruimte.

- a** Stel de formule op van het percentage P van het daglicht dat na n weerkaatsingen in de woonruimte valt.
- b** Hoeveel procent van het daglicht valt na 15 weerkaatsingen in de woonruimte?
- c** Hoeveel procent van het daglicht is na 20 weerkaatsingen geabsorbeerd?

9 Het aantal inwoners van Nigeria neemt exponentieel toe. Op 1 januari 1970 telde Nigeria 55,9 miljoen inwoners en op 1 januari 1990 waren er dat er 97,1 miljoen. In Bangladesh groeit het aantal inwoners lineair. Op 1 januari 1980 waren er 88,0 miljoen inwoners en op 1 januari 1990 waren dat er 111,6 miljoen.

Bereken in welk jaar Nigeria voor het eerst meer inwoners had dan Bangladesh.

10 In een natuurgebied groeien invasieve exotische plantensoorten A en B. De oppervlakte die bedekt is met plantensoort A neemt dagelijks met 3% toe. De verdubbelingstijd van de begroeide oppervlakte is bij plantensoort B vier keer zo groot als bij plantensoort A.

Bereken met hoeveel procent de oppervlakte die is begroeid met plantensoort B per week toeneemt.

11 De schaal van Richter is een meetschaal waarmee de waargenomen sterkte van een aardbeving wordt uitgedrukt in een getal. Dat getal wordt ook wel de magnitude van een aardbeving genoemd. De magnitude M is afhankelijk van de hoeveelheid energie E in joule die gepaard gaat met een aardbeving. Daarbij hoort de formule $M = 0,67 \cdot \log(0,5E) - 3$. De formule geldt alleen voor waarden van M die groter zijn dan 0.

a Bereken voor welke waarden van E de formule geldt. Rond af op duizendtallen.

b Aan de allesverwoestende tsunami in Japan op 11 maart 2011 gingen meerdere aardbevingen vooraf. De zwaarste was de zeebeving bij Sendai, die gepaard ging met een hoeveelheid energie van $2 \cdot 10^{18}$ joule. Bereken de magnitude van deze aardbeving op de schaal van Richter. Rond af op één decimaal.

c De zwaarste aardbeving in Nederland ooit vond op 13 april 1992 plaats vlakbij Roermond met een kracht van 5,8 op de schaal van Richter.

Bereken de hoeveelheid energie die gepaard ging met deze aardbeving. Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.

d Als de hoeveelheid energie verdubbelt, dan neemt M steeds met hetzelfde getal toe.

Toon dit aan en bereken dit getal in twee decimalen.

e De formule van M is te schrijven in de vorm $M = a \cdot \ln(E) - b$. Bereken a en b . Rond af op twee decimalen.

f De formule van M is ook te schrijven in de vorm $E = b \cdot g^M$. Bereken b en g . Rond b af op duizendtallen en g op gehelen.

g Elke keer als M met 1 toeneemt, wordt E met hetzelfde getal vermenigvuldigd.

Toon dit aan en bereken dit getal. Rond af op gehelen.



11

Het toetsen van hypothesen

Een aanbieder van trainingen voor gezakte examenkandidaten adverteert met de slogan: 'Minstens 60% van de deelnemers aan onze trainingen slaagt alsnog.' Een rector heeft zo zijn twijfels bij deze claim. Van de 56 leerlingen op zijn scholengemeenschap die deelnemen aan een training slagen 32 alsnog.

Vind je de twijfel van de rector terecht? Motiveer je antwoord.

11.1 De wortel-n-wet

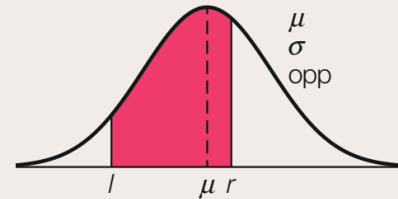
Kennis en vaardigheden

- Je kunt berekeningen uitvoeren met de som van twee of meer normaal verdeelde toevalsvariabelen.
- Je kunt berekeningen uitvoeren met de wortel-n-wet voor een steekproef van lengte n .
- Je kunt berekeningen uitvoeren met de wortel-n-wet voor het steekproefgemiddelde.

Voorkennis De normale verdeling

Bij opgaven over een normaal verdeelde toevalsvariabele heb je te maken met het gemiddelde μ , de standaardafwijking σ , de linkergrens l , de rechtergrens r en de oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme.

Als je de normale verdeling toepast in een opgave met een praktische situatie, dan is het handig om een schets te maken met de gegevens uit de opgave. Je gebruikt de GR om de vraag te kunnen beantwoorden. Neem zo nodig nog eens de GR-module *De normale verdeling* door.



Voorbeeld

Van een groep mannen is de lengte normaal verdeeld met een gemiddelde van 178 cm en een standaardafwijking van 8 cm.

- Hoeveel procent van de mannen is kleiner dan 168 cm?
- Welke lengten horen bij de 25% langste mannen? Rond af op één decimaal.

Uitwerking

- a** X = lengte in cm

X is normaal verdeeld met $\mu = 178$ en $\sigma = 8$.

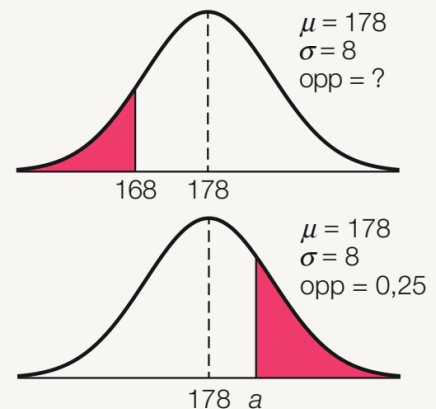
De GR geeft $P(X < 168) \approx 0,106$.

Dus 10,6% is kleiner dan 168 cm.

- b** opp rechts = 0,25

De GR geeft $a \approx 183,4$.

Dus de 25% langste mannen zijn 183,4 cm en langer.



V1 Een machine vult pakken koffie waarvan het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1005 gram en een standaardafwijking van 6 gram.

- Hoeveel procent van de pakken koffie bevat meer dan 1000 gram?
- Van hoeveel procent van de pakken koffie wijkt het gewicht meer dan 4 gram af van het gemiddelde?
- Wat weet je van het gewicht van de lichtste 10% van de pakken?

Van een grote groep mensen geldt voor het gewicht X van de mannen $\mu_X = 82$ kg en $\sigma_X = 10$ kg. Voor het gewicht Y van de vrouwen geldt $\mu_Y = 68$ kg en $\sigma_Y = 10$ kg. Ga ervan uit dat X en Y normaal verdeeld zijn.

Een willekeurige man en vrouw uit deze groep willen samen op een supboard met een maximaal draaggewicht van 150 kg.

Paul berekent de kans dat de man en de vrouw samen op het supboard kunnen met $P(X \leq 82) \cdot P(Y \leq 68)$.

- Licht Paul zijn denkwijze toe en bereken deze kans.
- Wat ziet Paul over het hoofd?
- Sara zegt dat de kans dat de man en vrouw samen op het supboard kunnen gelijk is aan 0,5.
Ben je het met Sara eens? Licht toe.



Theorie A De som van normaal verdeelde toevalsvariabelen

In praktijksituaties komt het voor dat je te maken hebt met de som van twee of meer normaal verdeelde toevalsvariabelen. Zo is bij het vullen van een pak wasmiddel het totale gewicht $S = X + Y$, waarbij X het gewicht van de verpakking is en Y het gewicht van de inhoud. Men heeft bewezen dat de som $S = X + Y$ ook normaal verdeeld is.

De som van normaal verdeelde toevalsvariabelen is normaal verdeeld.

Voor het gemiddelde μ_S en de standaardafwijking σ_S van $S = X + Y$ gelden de formules $\mu_S = \mu_X + \mu_Y$ en $\sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$. De enige voorwaarde voor de tweede formule is dat X en Y onafhankelijke toevalsvariabelen zijn, dat wil zeggen dat de uitkomsten van X en Y niet van elkaar afhangen.

**Voor elk tweetal toevalsvariabelen X en Y geldt $\mu_S = \mu_X + \mu_Y$.
Voor elk tweetal onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt $\sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$.**

Zoals voor twee onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt dat

$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y$ en $\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$, zo geldt voor de som S van n onafhankelijke toevalsvariabelen $X_1, X_2, \dots, X_n$ dat

$\mu_S = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \dots + \mu_{X_n}$ en $\sigma_S = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2}$.

Voorbeeld

Op een montageafdeling worden drie typen buizen A, B en C aan elkaar gezet. De lengtes van de verschillende typen zijn normaal verdeeld.

Bereken de kans dat de totale lengte van een buis minder dan 16 meter is.

Uitwerking

L = totale lengte in meter

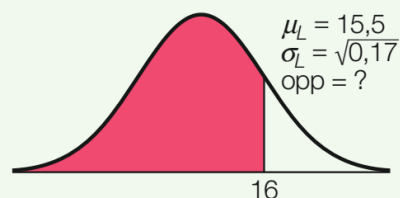
L is normaal verdeeld met $\mu_L = 6,5 + 3,2 + 5,8 = 15,5$ en

$$\sigma_L = \sqrt{0,2^2 + 0,2^2 + 0,3^2} = \sqrt{0,17}.$$

De GR geeft $P(L < 16) \approx 0,887$.

LENGTE VAN BUIZEN

type	μ	σ
A	6,5 m	0,2 m
B	3,2 m	0,2 m
C	5,8 m	0,3 m



- 2** Bij pakken rijst is het gewicht X van de verpakking normaal verdeeld met een gemiddelde van 5 gram en een standaardafwijking van 0,3 gram.

De hoeveelheid rijst Y in een pak is normaal verdeeld met gemiddelde 248 gram en standaardafwijking 12 gram.

In hoeveel procent van de gevallen is het totale gewicht meer dan 250 gram?

- 3** Bij de fabricage van een artikel zijn vier fasen te onderscheiden.

De tijdsduur van elke fase is normaal verdeeld. Zie de tabel.

In hoeveel procent van de gevallen duurt het produceren van één artikel langer dan één minuut?

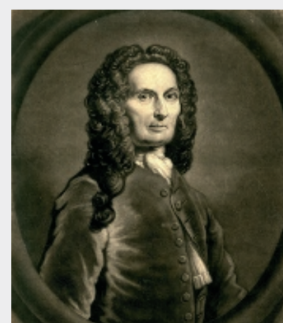
TIJDSDUUR IN SECONDEN

fase	μ	σ
A	12	0,5
B	8	0,3
C	20	0,8
D	18	1,6

Informatief De centrale limietstelling

De regel dat de som S normaal verdeeld is, geldt ook als je te maken hebt met de som van een groot aantal niet-normaal verdeelde toevalsvariabelen. Je hebt hier een toepassing van de zogenaamde centrale limietstelling. De centrale limietstelling zegt dat de som van een groot aantal willekeurige toevalsvariabelen die onderling onafhankelijk zijn, te benaderen is door een normaal verdeelde toevalsvariabele.

De centrale limietstelling is voor het eerst voor een eenvoudige situatie bewezen in het begin van de achttiende eeuw door Abraham de Moivre (1667-1754).



Abraham de Moivre

A4 Iris woont in Dieren en gaat op de fiets naar school in Zutphen.

□ ⊙ * Haar fietstocht bestaat uit drie trajecten.

I van huis naar haar vriendin in Leuvenheim

II van Leuvenheim naar Brummen

III van Brummen naar school

De tijdsduur van elk van deze trajecten is normaal verdeeld. Zie de tabel.

traject	gemiddelde	standaardafwijking
I	18 min	2 min en 30 sec
II	7 min	1 min en 15 sec
III	15 min	2 min

a Bereken de kans dat haar totale fietstijd meer dan drie kwartier is.

Iris vertrekt elke morgen om 7:25 uur. Haar school begint om 8:15 uur. In de periode van zomervakantie tot herfstvakantie gaat ze 35 keer naar school.

b Bereken de kans dat ze in deze periode altijd op tijd op school is.

c Hoe laat moet Iris van huis vertrekken, opdat ze in minstens 98% van de gevallen op tijd op school is?

E5 Gegeven is een toevalsvariabele X met verwachtingswaarde μ_X en standaardafwijking σ_X . Verder is gegeven de toevalsvariabele $-X$ die altijd de tegengestelde waarde van X aanneemt.

a Licht toe dat geldt dat $\mu_{-X} = -\mu_X$.

b Licht toe dat niet geldt $\sigma_{-X} = -\sigma_X$. Hoeveel is σ_{-X} dan wel?

c Stel $V = X - Y$ voor de onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y .

Druk μ_V uit in μ_X en μ_Y en druk σ_V uit in σ_X en σ_Y .

Voorkennis De normale en binomiale verdeling

Bij een binomiaal kansexperiment voer je hetzelfde kansexperiment een aantal keren uit en let je alleen op de gebeurtenissen ‘succes’ en ‘mislukking’. De toevalsvariabele X is het aantal keer succes. Verder is n het aantal keer dat je het experiment uitvoert en p de kans op succes per keer. Vermeld in een uitwerking de betekenis van X , noteer dat X binomiaal verdeeld is en vermeld n en p .

De verwachtingswaarde is $E(X) = np$.

De GR heeft opties waarmee je binomiale kansen kunt berekenen.

Neem zo nodig nog eens de GR-module *De binomiale verdeling* door.

In praktische situaties worden de normale en de binomiale verdeling vaak gecombineerd. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

In een land is het gewicht van mannen normaal verdeeld met een gemiddelde van 75 kg en een standaardafwijking van 9 kg. Bereken de kans dat in een steekproef van 40 van deze mannen er minstens acht meer dan 85 kg wegen.

Uitwerking

X = gewicht man in kg

X is normaal verdeeld met $\mu = 75$ en $\sigma = 9$.

De GR geeft $P(X > 85) = 0,133\dots$

Y = aantal mannen dat meer weegt dan 85 kg

Y is binomiaal verdeeld met $n = 40$ en $p = 0,133\dots$

De GR geeft $P(Y \geq 8) \approx 0,156$.

- V2** Een machine vult zakken chips waarvan het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 130 gram en een standaardafwijking van 5 gram. Bereken de kans dat in een steekproef van 50 zakken chips
- a** er minstens acht minder dan 128 gram wegen
 - b** er precies acht meer dan 132 gram wegen.

- O6** Het gewicht X van een kiwi uit een grote partij is normaal verdeeld met $\mu_X = 77$ gram en $\sigma_X = 6$ gram. De kiwi's worden verpakt in bakjes van acht stuks. Het totale gewicht S van de kiwi's in een bakje is te noteren als $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8$. Hierbij zijn $X_1, X_2, \dots, X_8$ de gewichten van de afzonderlijke kiwi's. Is $\mu_S = 8 \cdot \mu_X$? En is $\sigma_S = 8 \cdot \sigma_X$?

Theorie B Steekproef van lengte n

Van een appel uit een partij goudrenetten is het gewicht X normaal verdeeld met $\mu_X = 150$ gram en $\sigma_X = 18$ gram.

Bij een steekproef van 20 goudrenetten uit deze partij is het totale gewicht S te schrijven als $S = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{20}$.

Dus $\mu_S = \mu_X + \mu_X + \mu_X + \dots + \mu_X = 20 \cdot \mu_X = 20 \cdot 150 = 3000$ gram en

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_X^2 + \sigma_X^2 + \dots + \sigma_X^2} = \sqrt{20 \cdot 18^2} = \sqrt{20} \cdot 18 \approx 80,50 \text{ gram.}$$

Je ziet dat bij een steekproef van lengte 20 de som S een normaal verdeelde toevalsvariabele is met $\mu_S = 20 \cdot \mu_X$ en $\sigma_S = \sqrt{20} \cdot \sigma_X$.

$$\begin{aligned} \sqrt{20 \cdot 18^2} &= \sqrt{20} \cdot \sqrt{18^2} \\ &= \sqrt{20} \cdot 18 \end{aligned}$$

Bij een steekproef van lengte n uit een populatie met een normaal verdeelde toevalsvariabele X is $S = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ normaal verdeeld met $\mu_S = n \cdot \mu_X$ en $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$.

Dit is de **wortel-n-wet voor een steekproef van lengte n** .

Voorbeeld

Het gewicht X van een kiwi uit een grote partij is normaal verdeeld met $\mu_X = 77$ gram en $\sigma_X = 6$ gram. In een bakje zitten acht kiwi's. Bereken de kans dat het gewicht van de kiwi's in een bakje meer dan 640 gram is.

Uitwerking

S = totale gewicht in gram van kiwi's in bakje

S is normaal verdeeld met $\mu_S = 8 \cdot 77 = 616$

en $\sigma_S = \sqrt{8} \cdot 6 = 6\sqrt{8}$.

De GR geeft $P(S > 640) \approx 0,079$.



- 7** De gebruikstijd X van een volgeladen accu van een filmcamera is normaal verdeeld met $\mu_X = 40$ minuten en $\sigma_X = 8$ minuten. Linda neemt op een reis naar Barcelona drie volgeladen accu's mee. Bereken de kans dat Linda hiermee minstens twee uur en een kwartier kan filmen.

- 8** In een magazijn ligt een grote partij tegels waarvan de dikte X normaal verdeeld is met een gemiddelde van 5 cm en een standaardafwijking van 0,5 cm. De tegels worden verpakt in kratten met een hoogte van 105 cm. Telkens worden er stapels van 20 tegels gemaakt, die in zo'n krat geplaatst worden.

- Bereken de kans dat een stapel van 20 tegels niet in een krat past.
- Bereken de kans dat van 12 stapels van 20 tegels er minstens twee niet in een krat passen.

- A9** Bakker Dick ten Broeke verkoopt gevulde koeken in pakken van zes stuks. Het gewicht X van een koek is normaal verdeeld met $\mu_X = 25$ gram en $\sigma_X = 3$ gram. Bereken de kans dat

- een koek minder dan 20 gram weegt
- in een pak minder dan 140 gram zit
- bij een steekproef van 20 pakken er meer dan twee minder dan 140 gram bevatten.

A10

Een televisiequiz bestaat uit zes speelronden. De tijdsduur van elke ronde is normaal verdeeld met een gemiddelde van 4 minuten en een standaardafwijking van 45 seconden.

Volgens de programmering is 25 minuten voor de quiz beschikbaar.

De quiz wordt 50 keer per seizoen opgenomen.

- a** Hoe vaak zal naar verwachting in een seizoen de beschikbare tijd overschreden worden?

In de maand december wordt tien keer een speciale aflevering van de quiz opgenomen. Zo'n aflevering bestaat uit twee rondes, waarvan de tijdsduur normaal verdeeld is. De eerste ronde heeft een gemiddelde tijdsduur van 10 minuten en een standaardafwijking van 30 seconden. De tweede ronde heeft een gemiddelde tijdsduur van 7 minuten en een standaardafwijking van 20 seconden. Voor een aflevering is 18 minuten beschikbaar.

- b** Bereken de kans dat in minstens twee van de tien afleveringen de beschikbare tijd wordt overschreden.

A11

Een supermarkt heeft flessen mineraalwater in de aanbieding.

Het mineraalwater wordt geleverd in kratten van 12 flessen.

Het gewicht van een fles mineraalwater is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,5 kg en een standaardafwijking van 50 gram.

Het gewicht van een leeg krat is normaal verdeeld met een gemiddelde van 2 kg en een standaardafwijking van 300 gram.

Bereken de kans dat een krat met 12 flessen meer dan 20,5 kg weegt.

Theorie C Het steekproefgemiddelde

We bekijken nog eens de steekproef van bladzijde 168 van 20 goudrenetten uit een grote partij, waarbij het gewicht X van een appel normaal verdeeld is met $\mu_X = 150$ gram en $\sigma_X = 18$ gram.

Je weet dat $\mu_S = 20 \cdot \mu_X$ en $\sigma_S = \sqrt{20} \cdot \sigma_X$.

Je kunt bij zo'n steekproef ook het gemiddelde gewicht per appel berekenen. Je moet dan het totale gewicht door 20 delen. Elke steekproef levert een ander totaal gewicht op en dus ook een ander steekproefgemiddelde.

Het steekproefgemiddelde is dus ook weer een toevalsvariabele.

We noteren deze met $\bar{X}$.

Omdat $\bar{X} = \frac{S}{20}$ is $\mu_{\bar{X}} = \frac{\mu_S}{20} = \frac{20 \cdot \mu_X}{20} = \mu_X$

en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_S}{20} = \frac{\sqrt{20} \cdot \sigma_X}{20} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{20}}$

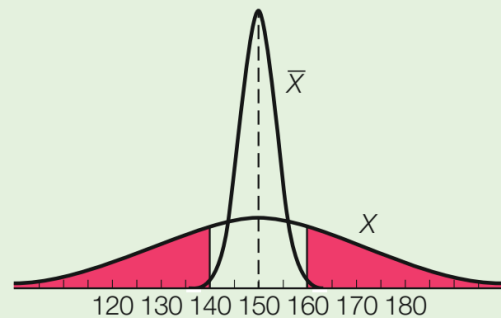
$$\frac{\sqrt{20}}{20} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

$X = \text{gewicht appel}$	$\bar{X} = \text{gemiddelde gewicht in een steekproef van 20 appels}$
$\mu_X = 150 \text{ gram}$	$\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 150 \text{ gram}$
$\sigma_X = 18 \text{ gram}$	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{18}{\sqrt{20}} \approx 4,02 \text{ gram}$

Je ziet dat het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ met een veel kleinere spreiding om het gemiddelde van 150 gram ligt dan het gewicht X van een enkele appel. Zie de figuur hiernaast.

De spreiding van $\bar{X}$ is kleiner naarmate de steekproef groter is.

Je hebt een voorbeeld gezien van de **wortel- n -wet voor het steekproefgemiddelde**.



Bij een normaal verdeelde toevalsvariabele X met gemiddelde μ_X en standaardafwijking σ_X is bij steekproeflengte n het

steekproefgemiddelde $\bar{X}$ normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

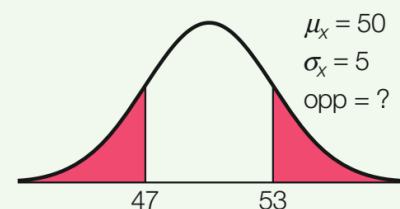
Voorbeeld

Het gewicht X van een mandarijn uit een grote partij is normaal verdeeld met $\mu_X = 50$ gram en $\sigma_X = 5$ gram.

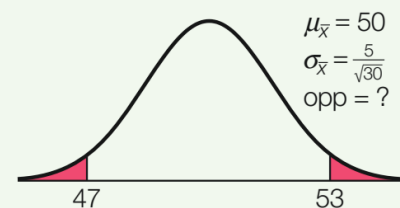
- Bereken de kans dat het gewicht van een mandarijn meer dan 3 gram van μ_X afwijkt.
- Er zitten 30 mandarijnen in een kistje. Bereken de kans dat het gemiddelde gewicht per mandarijn in een kistje meer dan 3 gram van μ_X afwijkt.

Uitwerking

- $X = \text{gewicht in gram van mandarijn}$
 X is normaal verdeeld met $\mu_X = 50$ en $\sigma_X = 5$.
 $P(X < 47 \text{ of } X > 53) = 2 \cdot P(X < 47)$
De GR geeft $P(X < 47 \text{ of } X > 53) \approx 0,549$.



- $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 50$
en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{30}}$.
 $P(\bar{X} < 47 \text{ of } \bar{X} > 53) = 2 \cdot P(\bar{X} < 47)$
De GR geeft $P(\bar{X} < 47 \text{ of } \bar{X} > 53) \approx 0,001$.



Bij een grote steekproef, bijvoorbeeld een steekproef met $n > 1000$, zal de spreiding $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ om $\bar{X}$ heel klein worden. Het steekproefgemiddelde

$\bar{X}$ zal dan heel dicht bij het theoretische gemiddelde μ_X liggen.

Je krijgt dus een goede schatting van μ_X door $\bar{X}$ te berekenen voor grote waarden van n .

Om de gemiddelde lengte van de volwassen Nederlandse vrouwen te weten te komen, hoef je ze niet allemaal op te meten. Een steekproef van 1500 vrouwen zal nagenoeg hetzelfde gemiddelde opleveren.

12



Van een normaal verdeelde toevalsvariabele X is $\mu_X = 30$ en $\sigma_X = 4$.

- a Bereken de kans dat een waarneming meer dan 5 van μ_X afwijkt.
- b Op basis van 20 waarnemingen wordt het gemiddelde $\bar{X}$ berekend. Bereken de kans dat $\bar{X}$ meer dan 5 van μ_X afwijkt.

13



In een fabriek worden kaasbroodjes verpakt in dozen van 16 stuks.

Op de doos staat: gemiddeld gewicht per kaasbroodje minstens 100 gram. Neem aan dat het gewicht van de kaasbroodjes normaal verdeeld is met een gemiddelde van 104,5 gram en een standaardafwijking van 10 gram. Hoeveel procent van de dozen zal voldoen aan de mededeling op de doos?

14



Een vulmachine vult flessen limonade. De hoeveelheid is normaal verdeeld met $\mu = 102$ cL en $\sigma = 1,93$ cL.

- a Bereken de kans dat van twaalf flessen limonade de vulinhoud gemiddeld minder dan 100 cL is. Rond af op vier decimalen.
- b De flessen worden in kratten van 12 stuks vervoerd. Bij een supermarkt worden 25 kratten met elk 12 flessen afgeleverd. Bereken de kans dat in minstens één van deze kratten de gemiddelde vulinhoud per fles minder is dan 100 cL.

A15



Een theefabrikant verpakt 20 theezakjes in een pakje. Het gewicht van een theezakje is normaal verdeeld met een gemiddelde van 5,3 gram en een standaardafwijking van 0,5 gram.

- a Bereken de kans dat een theezakje minder dan 5 gram weegt.
- b Bereken de kans dat een pakje minder dan 100 gram bevat.
- c Van hoeveel procent van de pakjes wijkt het gemiddelde gewicht per theezakje meer dan 0,1 gram af van 5,3 gram?



- A16** Het bedrijf Flamingo maakt potten inkt voor vulpennen. De inhoud X in mL van zo'n pot is normaal verdeeld met $\mu_X = 30$ en $\sigma_X = 2$. De potten worden geleverd in dozen met acht potten.
- Bereken de kans dat de gemiddelde inhoud van de potten in een doos meer dan 5% afwijkt van μ_X .
 - Bereken de kans dat van minstens twee potten in de doos de inhoud meer dan 10% afwijkt van μ_X .
 - Bereken de kans dat de inhoud van de acht potten in een doos samen minstens 10% meer is dan je zou mogen verwachten.

- R17** Zie het voorbeeld op bladzijde 171.
- R17** Je zou vraag b ook kunnen beantwoorden door naar het totale gewicht van de 30 mandarijnen te kijken. Laat eens zien hoe dat gaat.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan berekeningen uitvoeren met de som van twee of meer normaal verdeelde toevalsvariabelen. ▶ OPGAVE C1
THEORIE A
- ☐ Ik kan berekeningen uitvoeren met de wortel-n-wet voor een steekproef van lengte n . ▶ OPGAVE C2a
THEORIE B
- ☐ Ik kan berekeningen uitvoeren met de wortel-n-wet voor het steekproefgemiddelde. ▶ OPGAVE C2b
THEORIE C

- C1** In een productieproces zijn drie fasen te onderscheiden. De tijdsduur van elke fase is normaal verdeeld. Zie de tabel. In hoeveel procent van de gevallen duurt het produceren van één artikel korter dan 50 seconden?

TIJDSDUUR IN SECONDEN

fase	μ	σ
A	8	2
B	45	5
C	7	1,5

- C2** Een farmaceutisch bedrijf verpakt tabletten in buisjes met een lengte van 9 cm. In elk buisje zitten tien tabletten. De dikte X van een tablet is normaal verdeeld met $\mu_X = 8,8$ mm en $\sigma_X = 0,25$ mm. Bereken de kans dat
- de tien tabletten niet in een buisje passen
 - de gemiddelde dikte van een tablet in een buisje meer dan 0,1 mm afwijkt van het gemiddelde.

Antwoorden

- C1** 3,7%
- C2** **a** 0,006
b 0,206

11.2 Beslissen op grond van een steekproef

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij een steekproef bij een normaal verdeelde toevalsvariabele bij een gegeven beslissingsvoorschrift kansen berekenen.
- Je kunt bij een steekproef bij een normaal verdeelde toevalsvariabele een hypothese toetsen met behulp van een beslissingsvoorschrift.
- Je kunt bij een steekproef bij een normaal verdeelde toevalsvariabele een hypothese toetsen met behulp van een overschrijdingskans.

○18



Fabrikant Wick verkoopt ijsthee in flessen van 400 mL. De vulmachine is ingesteld op een gemiddelde $\mu = 400$ mL. De praktijk wijst uit dat na verloop van tijd het gemiddelde niet meer precies 400 mL is.

- Het zou kunnen zijn dat het gemiddelde is toegenomen. Noem hiervan een nadeel voor de fabrikant.
- Noem een nadeel van een te laag gemiddelde.



Theorie A Beslissingsvoorschrift

De vulmachine van fabrikant Wick zorgt per fles ijsthee voor een inhoud van X mL, waarbij X normaal verdeeld is met $\sigma_X = 4$ mL. De vulmachine is ingesteld op een gemiddelde van $\mu_X = 400$ mL, maar na verloop van tijd is het gemiddelde niet meer precies 400 mL. Vandaar dat men op gezette tijden een aselechte steekproef neemt en op grond van het steekproefgemiddelde besluit de vulmachine al dan niet bij te stellen.

Men besluit tot het nemen van een steekproef van 25 flessen en berekent de gemiddelde inhoud $\bar{X}$ per fles. Uit de wortel- n -wet volgt dat $\bar{X}$ normaal verdeeld is met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 400$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} = 0,8$.

Bij een meetresultaat van $\bar{X} = 399$ of $\bar{X} = 400,5$ zal men op grond van $\sigma_{\bar{X}} = 0,8$ geen aanleiding zien tot bijstelling over te gaan.

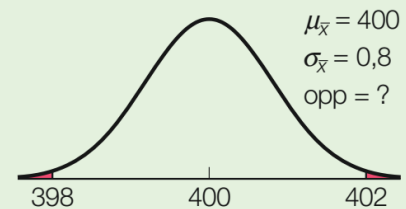
Bij het meetresultaat $\bar{X} = 404$ is er alle aanleiding om te twijfelen aan de juiste werking van de vulmachine, want 404 ligt maar liefst $5 \cdot \sigma_{\bar{X}}$ boven het gemiddelde. Het is vrijwel onmogelijk dat dit een toevallige afwijking is.

Maar wat zal men beslissen als $\bar{X} = 398$ of $\bar{X} = 401,8$?

Het is bij dit soort problemen gebruikelijk een **beslissingsvoorschrift** af te spreken dat aangeeft bij welke meetresultaten tot bijstelling wordt overgegaan. Men zou bijvoorbeeld kunnen afspreken
→ Vulmachine bijstellen als $\bar{X} \leq 398$ of $\bar{X} \geq 402$.

Fabrikant Wick loopt met zo'n afspraak een zeker risico. Het is immers mogelijk dat de steekproef het resultaat $\bar{X} = 397,8$ oplevert, terwijl de machine goed werkt.

Men vraagt zich daarom af hoe groot het risico is dat de machine wordt bijgesteld, terwijl deze goed werkt. Bij $\mu_{\bar{X}} = 400$ en $\sigma_{\bar{X}} = 0,8$ is dit risico $P(\bar{X} \leq 398 \text{ of } \bar{X} \geq 402) = 2 \cdot P(\bar{X} \leq 398) \approx 0,012$.



Wick loopt dus een risico van 1,2% dat de productie wordt stilgelegd om de vulmachine bij te stellen, terwijl dat eigenlijk niet nodig is. We zeggen dat de vulmachine in dat geval **ten onrechte** wordt bijgesteld. Het risico voor Wick wordt kleiner als gekozen wordt voor het volgende beslissingsvoorschrift.

→ Vulmachine bijstellen als $\bar{X} \leq 397$ of $\bar{X} \geq 403$.

In dit geval is de kans op ten onrechte bijstellen gelijk aan $P(\bar{X} \leq 397 \text{ of } \bar{X} \geq 403) = 2 \cdot P(\bar{X} \leq 397) \approx 0,00018$, dat is een kans van minder dan 0,02%.

Toch is het niet verstandig het beslissingsvoorschrift zo te kiezen dat dit risico heel erg klein is. Wick heeft immers nog met een ander soort risico te maken, namelijk het risico dat het productieproces voortgaat, terwijl het gemiddelde niet 400 mL is.

19 Neem aan dat men bij Wick een steekproef van 50 flessen neemt. Men kiest als beslissingsvoorschrift

→ Vulmachine bijstellen als $\bar{X} \leq 399$ of $\bar{X} \geq 401$.

- Bereken de kans dat de machine ten onrechte wordt bijgesteld.
- Waarom is het niet mogelijk de kans te berekenen dat men terecht tot bijstelling overgaat?
- Neem aan dat de machine werkt met een gemiddelde van 401 mL. Bereken de kans dat men op grond van het steekproefresultaat niet tot bijstelling overgaat.

In alle opgaven en theorie over Wick geldt dat de inhoud X in mL normaal verdeeld is met $\sigma_X = 4$ en dat de vulmachine is ingesteld op $\mu_X = 400$.

20 Er wordt bij Wick een steekproef van 120 flessen genomen.

Als beslissingsvoorschrift kiest men

→ Vulmachine bijstellen als $\bar{X} \leq 399$ of $\bar{X} \geq 401$.

- Bereken de kans dat ten onrechte tot bijstelling wordt overgegaan.
- Neem aan dat de machine werkt met een gemiddelde van 399,2 mL. Bereken de kans dat de vulmachine op grond van het steekproefresultaat niet wordt bijgesteld.

Theorie B Significantieniveau

Fabrikant Wick wil op grond van een steekproef van 25 flessen een beslissing nemen over het al dan niet bijstellen van de vulmachine.

Veronderstelling 1: De vulmachine is goed ingesteld, dus de inhoud van een fles is normaal verdeeld met $\mu_X = 400$.

Veronderstelling 2: De vulmachine is niet goed ingesteld, dus de inhoud van een fles is normaal verdeeld met $\mu_X \neq 400$.

De eerste veronderstelling heet de **nulhypothese**, aangegeven met H_0 . We schrijven $H_0 : \mu_X = 400$. Tegenover de nulhypothese staat de **alternatieve hypothese** H_1 die zegt dat het gemiddelde geen 400 is. Notatie $H_1 : \mu_X \neq 400$.

$H_0 : \mu_X = \mu_0$	nulhypothese
$H_1 : \mu_X \neq \mu_0$	alternatieve hypothese

Op grond van het steekproefresultaat $\bar{X}$ zal men besluiten de nulhypothese al dan niet te verwerpen.

Onder H_0 is $\bar{X}$ normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 400$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = 0,8$.

Kiest men het beslissingsvoorschrift

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 399$ of $\bar{X} \geq 401$

dan is de kans dat men H_0 ten onrechte verwerpt gelijk aan $P(\bar{X} \leq 399 \text{ of } \bar{X} \geq 401) = 2 \cdot P(\bar{X} \leq 399) \approx 0,211$.

Kiest men het beslissingsvoorschrift

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 397,5$ of $\bar{X} \geq 402,5$

dan is de kans dat men H_0 ten onrechte verwerpt gelijk aan $P(\bar{X} \leq 397,5 \text{ of } \bar{X} \geq 402,5) = 2 \cdot P(\bar{X} \leq 397,5) \approx 0,002$.

Door een geschikt beslissingsvoorschrift te kiezen, kun je de kans om H_0 ten onrechte te verwerpen zo klein maken als je wilt. Je loopt dan echter het gevaar dat het productieproces doorgaat, terwijl het gemiddelde niet meer 400 mL is.

Je hebt dus met tegenstrijdige belangen te maken. Om aan beide belangen tegemoet te komen, spreekt men van tevoren af wat de maximale kans mag zijn dat H_0 ten onrechte wordt verworpen. Deze maximale waarde heet het **significantieniveau** en wordt aangegeven met α .

De vulmachine wordt ten onrechte bijgesteld.

1. Er vindt bijstelling plaats, dus uit de steekproef volgt $\bar{X} \leq 399$ of $\bar{X} \geq 401$.
2. Het bijstellen is ten onrechte, dus in werkelijkheid werkt de machine goed, d.w.z. μ is nog gewoon 400.



H_0 ten onrechte verwerpen houdt in:

- H_0 is waar
- op grond van het beslissingsvoorschrift en het steekproefgemiddelde wordt H_0 verworpen.

Het significantieniveau α is de kans dat je H_0 ten onrechte verwerpt.

Bij het **toetsen van hypothesen** kies je eerst een significantieniveau. Deze keuze is afhankelijk van de ernst van de gevolgen van het al dan niet verwerpen van de nulhypothese. Wil je de kans op het ten onrechte verwerpen van H_0 klein maken, dan moet α klein worden gekozen, bijvoorbeeld $\alpha = 0,01$. Om de kans op het ten onrechte niet verwerpen van H_0 klein te maken, kies je een grotere waarde van α , bijvoorbeeld $\alpha = 0,10$.

Een toets kan nooit 100% zekerheid geven.

Neem aan dat $\alpha = 0,10$ wordt gekozen en dat de steekproefomvang 25 is.

Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm

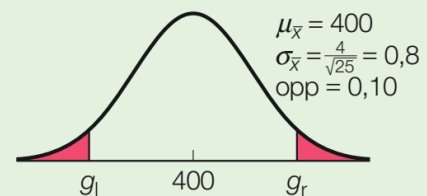
→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of $\bar{X} \geq g_r$.

Bij $\alpha = 0,10$ moet je g_l en g_r zo berekenen, dat

$P(\bar{X} \leq g_l \text{ of } \bar{X} \geq g_r) \leq 0,10$.

Omdat de normaalkromme symmetrisch is, geldt opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,10 = 0,05$. Dus

- $P(\bar{X} \leq g_l) = 0,05$ met $\mu_{\bar{X}} = 400$ en $\sigma_{\bar{X}} = 0,8$ geeft met de GR dat $g_l \approx 398,68$
- $P(\bar{X} \geq g_r) = 0,05$ met $\mu_{\bar{X}} = 400$ en $\sigma_{\bar{X}} = 0,8$ geeft met de GR dat $g_r \approx 401,32$.



De rode gebieden in de figuur hierboven heten het **verwerpingsgebied** (dit wordt ook wel het **kritieke gebied** genoemd). Ligt het steekproefgemiddelde in het verwerpingsgebied, dan wordt H_0 verworpen.

De oppervlakte van het verwerpingsgebied mag door afronden van de grenzen nooit groter worden dan α . Daarom rond je g_l altijd af naar beneden en g_r naar boven. Het gebied tussen g_l en g_r heet het **aanvaardingsgebied** (dit wordt ook wel het **acceptatiegebied** genoemd). Ligt het steekproefgemiddelde in het aanvaardingsgebied, dan wordt H_0 niet verworpen.

Na het vaststellen van het beslissingsvoorschrift laat fabrikant Wick de steekproef uitvoeren. Op grond van het gevonden steekproefgemiddelde $\bar{X}$ zal men H_0 al dan niet verwerpen.

Vindt men bijvoorbeeld $\bar{X} = 398,83$ dan is er geen aanleiding H_0 te verwerpen, maar bij $\bar{X} = 398,63$ zal H_0 verworpen worden.

We zeggen dat het steekproefgemiddelde $\bar{X} = 398,63$ **significant afwijkt** van $\mu = 400$ mL.

Informatief Het significantieniveau

De keuze van het significantieniveau α heeft te maken met twee tegenstrijdige belangen van fabrikant Wick. Enerzijds wil men dat de inhoud van een fles niet te veel van 400 mL afwijkt, want

- te weinig in een fles levert problemen op met controlerende instanties
- te veel in een fles kost geld.

Anderzijds wil de fabrikant het productieproces niet te vaak stilleggen om de machine bij te stellen. Een grote waarde van α betekent dat men vaak moet bijstellen, terwijl men bij een kleine waarde van α het risico loopt flessen te produceren met een afwijkende inhoud. De praktijk heeft bewezen dat $\alpha = 0,10$ of $\alpha = 0,05$ een evenwichtige keuze is.

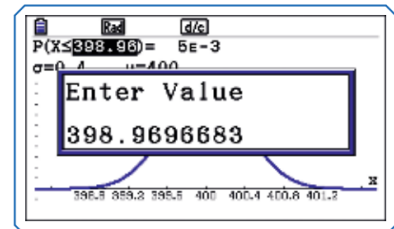
Vóór het uitvoeren van de steekproef moet er overeenstemming zijn over de keuze van α . In de opgaven is steeds een waarde voor α gegeven.

- 21** Fabrikant Wick wil op grond van een steekproef van lengte 100 een beslissing nemen over het al dan niet verwerpen van $H_0 : \mu_X = 400$. Men kiest als significantieniveau $\alpha = 0,01$.

Het beslissingsvoorschrift is

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of $\bar{X} \geq g_r$.

Afgerond op twee decimalen is $g_l = 398,96$. Zie het GR-scherm hiernaast.



- a Waarom wordt g_l niet afgerond naar 398,97?
- b Bereken g_r . Rond af op twee decimalen.
- c Het steekproefgemiddelde blijkt 400,8 mL te zijn. Welke conclusie trekt fabrikant Wick?

- A22** Een fabrikant maakt ledlampen waarvan de levensduur X in uren normaal verdeeld is met $\mu_X = 30\,000$ en $\sigma_X = 4000$.

De afdeling research heeft voor de fabricage van de lampen een goedkopere productiemethode ontwikkeld, waarvan men beweert dat het de levensduur van de lampen niet beïnvloedt. De fabrikant twijfelt hieraan en onderzoekt dit door middel van een steekproef van 100 lampen. Als significantieniveau wordt $\alpha = 0,05$ gekozen.

- a Geef H_0 en H_1 .
- b Het beslissingsvoorschrift is
→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of $\bar{X} \geq g_r$.
Bereken g_l en g_r . Rond af op gehele.
- c Welke conclusie hoort bij een steekproefgemiddelde van 29 502 uur?

Afspraak

Neem aan dat bij de nieuwe productiemethode de standaardafwijking niet verandert. Ook in de rest van dit hoofdstuk gaan we van deze aanname uit.

Een bandenfabrikant beweert dat bij normaal rijgedrag het aantal kilometers X dat zijn banden meegaan normaal verdeeld is met $\mu_X = 55\,000$ en $\sigma_X = 4000$.

Een autotijdschrift houdt een bandentest. Een steekproef van 64 van deze banden levert het steekproefgemiddelde 53 844 km op. We vragen ons af of dit steekproefresultaat significant afwijkt van 55 000 bij $\alpha = 0,05$.

- Geef H_0 en H_1 .
- Bereken $P(\bar{X} \leq 53\,844)$.
- Wijkt het steekproefresultaat significant af van 55 000?

Theorie C Overschrijdingskans

Bij de bandentest in opgave 23 is $H_0 : \mu_X = 55\,000$, $H_1 : \mu_X \neq 55\,000$ en $\alpha = 0,05$. In deze opgave is het steekproefresultaat 53 844 bekend. In zo'n geval is het niet nodig eerst het beslissingsvoorschrift op te stellen.

Door $P(\bar{X} \leq 53\,844)$ te berekenen, kun je direct zien of je H_0 al dan niet moet verwerpen.

Je krijgt $P(\bar{X} \leq 53\,844) \approx 0,010$.

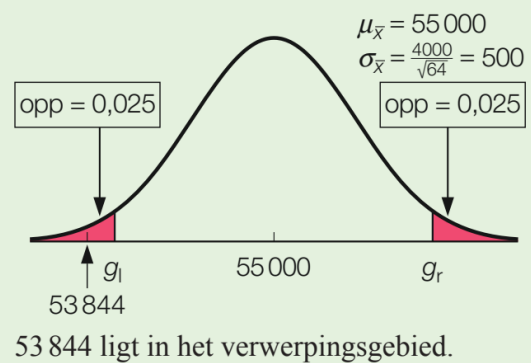
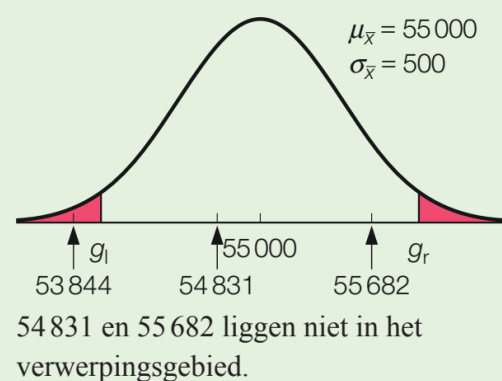
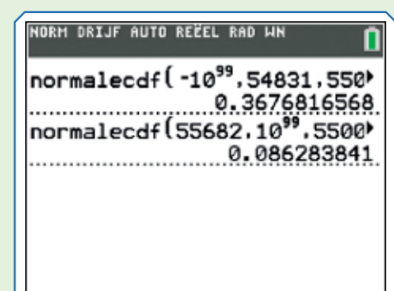
Omdat $P(\bar{X} \leq 53\,844) \leq 0,025$ is $53\,844 < g_l$.

Het steekproefresultaat 53 844 ligt in het verwerpingsgebied en wijkt dus significant af van 55 000.

$P(\bar{X} \leq 53\,844)$ heet de **overschrijdingskans** van het steekproefresultaat $\bar{X} = 53\,844$.

Omdat deze overschrijdingskans kleiner is dan $\frac{1}{2}\alpha$ verwerp je H_0 .

- De overschrijdingskans van $\bar{X} = 54\,831$ is $P(\bar{X} \leq 54\,831)$. Je krijgt $P(\bar{X} \leq 54\,831) \approx 0,368$. Omdat $P(\bar{X} \leq 54\,831) > \frac{1}{2}\alpha$ ligt het steekproefresultaat 54 831 dus niet in het verwerpingsgebied en geeft dus geen aanleiding om H_0 te verwerpen.
- Bij het steekproefresultaat $\bar{X} = 55\,682$ is de overschrijdingskans $P(\bar{X} \geq 55\,682)$, want $55\,682 > 55\,000$. Omdat $P(\bar{X} \geq 55\,682) \approx 0,086$ en $0,086 > \frac{1}{2}\alpha$ is er bij het steekproefresultaat 55 682 geen aanleiding om H_0 te verwerpen.



Bij $H_0 : \mu = \mu_0$ en $H_1 : \mu \neq \mu_0$ is de overschrijdingskans van k

- gelijk aan $P(\bar{X} \leq k)$ als $k < \mu_0$
- gelijk aan $P(\bar{X} \geq k)$ als $k > \mu_0$.

Is de overschrijdingskans van k kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{2}\alpha$, dan wordt H_0 verworpen.

Is het steekproefresultaat bekend, gebruik dan de overschrijdingskans om te bepalen of H_0 al dan niet verworpen wordt.

Voorbeeld

In een bedrijf is de totale tijd die per dag wordt overgewerkt normaal verdeeld met een gemiddelde van 9,3 uur en een standaardafwijking van 2,1 uur. Sinds kort is een systeem van flexibele werktijden ingevoerd. In een periode van 40 werkdagen bleek de gemiddelde overwerktijd 8,6 uur per dag te zijn.

Onderzoek of bij een significantieniveau van 1% geconcludeerd kan worden dat het nieuwe systeem invloed heeft op de overwerktijd.

Uitwerking

X = overwerktijd per dag in uren

$H_0 : \mu_X = 9,3$, $H_1 : \mu_X \neq 9,3$ en $\alpha = 0,01$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 9,3$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{2,1}{\sqrt{40}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 8,6)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 8,6) \approx 0,018$.

$P(\bar{X} \leq 8,6) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Er is geen aanleiding om te veronderstellen dat het nieuwe systeem invloed heeft op de overwerktijd.

Je hebt in deze paragraaf bij een gegeven significantieniveau op grond van een steekproefresultaat de hypothese H_0 al dan niet verworpen.

Men zegt dat de hypothese H_0 **getoetst** is tegen H_1 .

Bij het toetsen van hypothesen wordt op grond van een steekproefresultaat de nulhypothese H_0 al dan niet verworpen. Omdat het hier gaat om het steekproefgemiddelde bij een normale verdeling, spreken we van een **normale toets**.

Informatief Data-snooping

In het voorbeeld hierboven is het misschien verleidelijk om $\alpha = 0,05$ te kiezen. Dan is namelijk $P(\bar{X} \leq 8,6) \leq \frac{1}{2}\alpha$ en zou geconcludeerd mogen worden dat het nieuwe systeem inderdaad invloed heeft op de overwerktijd bij het bedrijf. Zo'n verandering van het toetsmodel wordt in de statistiek data-snooping genoemd en is niet toegestaan. Bij een juiste toetsprocedure moet je vooraf afspraken maken over de hypothesen en over het significantieniveau. Je mag die afspraken niet achteraf bijstellen, na het uitvoeren van de steekproef.



R24 Zie het voorbeeld. Het beslissingsvoorschrift is

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of $\bar{X} \geq g_r$.

- a** Bereken g_l en g_r en onderzoek hiermee of bij een significantieniveau van 1% geconcludeerd kan worden dat het nieuwe systeem invloed heeft op de overwerktijd.
- b** Vergelijk je uitwerking van vraag a met die van het voorbeeld. Welke methode heeft je voorkeur?

25 Gegeven is een normaal verdeelde toevalsvariabele X met $\mu_X = 25$ en

$\sigma_X = 3$. Telkens is het steekproefgemiddelde en de steekproefomvang gegeven.

Onderzoek of bij het gegeven significantieniveau α er aanleiding is om het gemiddelde $\mu_X = 25$ in twijfel te trekken.

- a** Het steekproefgemiddelde is 24, de steekproefomvang is 50 en $\alpha = 5\%$.
- b** Het steekproefgemiddelde is 26, de steekproefomvang is 100 en $\alpha = 1\%$.

26 Een machine vult pakken suiker. Het gewicht van een pak suiker is

normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,02 kg en een standaardafwijking van 0,04 kg.

De fabrikant vermoedt dat de vulmachine na verloop van tijd pakken met een afwijkend gemiddelde levert. Een steekproef van 50 pakken levert een steekproefgemiddelde van 1,04 kg op.

- a** Onderzoek of de fabrikant bij een significantieniveau van 5% zal besluiten de vulmachine opnieuw in te stellen.
- b** Welke conclusie zal de fabrikant trekken als het steekproefgemiddelde 1,03 kg is bij een significantieniveau van 5%?

A27

Bij de productie van tennisballen is de diameter normaal verdeeld met een gemiddelde van 6,51 cm en een standaardafwijking van 0,13 cm. Een klant twijfelt of de gemiddelde diameter klopt. Bij een steekproef van lengte 40 is het steekproefgemiddelde 6,47 cm.



- a** Welke conclusie trekt de klant bij een significantieniveau van $\alpha = 0,10$?
En wat is zijn conclusie bij $\alpha = 0,05$?
- b** De tennisbond wil op grond van een steekproef van lengte 100 een beslissing nemen over het al dan niet verwerpen van $H_0 : \mu = 6,51$.
Bij welke gemiddelde diameters is er een reden om H_0 te verwerpen?
Neem $\alpha = 0,10$ en rond af op twee decimalen.

E28

Zie het voorbeeld.

Onderzoek hoeveel dagen het onderzoek had moeten tellen om bij een gemiddelde overwerktijd van 8,6 uur H_0 wél te mogen verwerpen.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan bij een steekproef uit een normaal verdeelde toevalsvariabele bij een gegeven beslissingsvoorschrift kansen berekenen.
- ☐ Ik kan bij een steekproef uit een normaal verdeelde toevalsvariabele een hypothese toetsen met behulp van een beslissingsvoorschrift.
- ☐ Ik kan bij een steekproef uit een normaal verdeelde toevalsvariabele een hypothese toetsen met behulp van een overschrijdskans.

► OPGAVE C3a
THEORIE A

► OPGAVE C3b
THEORIE B

► OPGAVE C4
THEORIE C

C3 Een fabrikant van biljartballen maakt ballen waarvan het gewicht X in gram normaal verdeeld is met $\mu_X = 212$ en $\sigma_X = 2$.

- a** Er is twijfel of het productieproces wel goed verloopt en de ballen nog wel het juiste gewicht hebben.

Er wordt een steekproef van 80 biljartballen genomen.

Als beslissingsvoorschrift kiest men

→ Productieproces bijstellen als $\bar{X} \leq 211,5$ of $\bar{X} \geq 212,5$.

Bereken de kans dat ten onrechte tot bijstelling van het productieproces wordt overgegaan.

- b** Er is een nieuwe productiemethode ontwikkeld die goedkoper is en die volgens de afdeling research geen invloed heeft op het gewicht van de biljartballen. Een afnemer van de biljartballen twijfelt aan deze bewering en neemt een steekproef van 50 biljartballen. Als significantieniveau wordt $\alpha = 0,05$ genomen.

Het beslissingsvoorschrift is

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of $\bar{X} \geq g_r$.

Bereken g_l en g_r . Rond af op twee decimalen.

C4 De diameter Y in millimeter van de biljartballen uit de vorige opgave is normaal verdeeld met $\mu_Y = 61,5$ en $\sigma_Y = 0,5$. Volgens de fabrikant heeft de nieuwe productiemethode op de diameter eveneens geen invloed. De afnemer trekt ook deze bewering in twijfel en vindt in een steekproef van 50 ballen een gemiddelde diameter van 61,7 mm. Welke conclusie zal hij trekken bij $\alpha = 0,01$?

Antwoorden

C3 a 0,025

b $g_l = 211,44$ en $g_r = 212,56$

C4 redenen om aan bewering fabrikant te twijfelen

11.3 Eenzijdig en tweezijdig toetsen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij een hypothesetoets herkennen of er sprake is van een linkszijdige, tweezijdige of rechtszijdige toets.
- Je kunt een eenzijdige normale toets uitvoeren met behulp van een beslissingsvoorschrift.
- Je kunt een eenzijdige normale toets uitvoeren met behulp van een overschrijdingskans.
- Je weet dat een nulhypothese enkelvoudig moet zijn.

O29



Bij de fabricage van lampen van het merk Flash is de levensduur X in uren van de lampen normaal verdeeld met $\mu_X = 11\,500$ en $\sigma_X = 250$. Een medewerker beweert een nieuwe productiemethode ontwikkeld te hebben waardoor de levensduur van de gloeilampen verlengd wordt. Door middel van een steekproef van 100 lampen, geproduceerd met de nieuwe methode, zal beslist worden of de nieuwe methode inderdaad een gunstig effect heeft. Waarom is het niet juist om bij $H_0 : \mu_X = 11\,500$ als alternatieve hypothese $H_1 : \mu_X \neq 11\,500$ te nemen?

Theorie A Linkszijdige en rechtszijdige toetsen

Tot nu toe was bij het toetsen van hypothesen de alternatieve hypothese steeds van de vorm $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Je verwierpt dan H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of $\bar{X} \geq g_r$. Zo'n toets heet een **tweezijdige toets**. Maar de alternatieve hypothese kan ook van de vorm $H_1 : \mu < \mu_0$ of van de vorm $H_1 : \mu > \mu_0$ zijn. We spreken dan van een **eenzijdige toets**.

Als voorbeeld bekijken we de productiemethode van een bepaald type beeldscherm. De levensduur X in uren van de beeldschermen is normaal verdeeld met $\mu_X = 18\,000$ en $\sigma_X = 3000$.

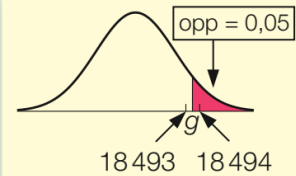
De afdeling productie beweert een nieuwe productiemethode ontwikkeld te hebben waardoor de levensduur van de beeldschermen verlengd wordt, terwijl de kosten en de productietijd gelijk blijven. Op grond van een steekproef van 100 beeldschermen beslist de directie of de nieuwe methode zal worden ingevoerd. De nulhypothese is $H_0 : \mu_X = 18\,000$.

Omdat de productieafdeling beweert dat de levensduur verlengd is, is de alternatieve hypothese $H_1 : \mu_X > 18\,000$. Het beslissingsvoorschrift heeft daarom de vorm

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \geq g$.

Hierbij is $\bar{X}$ normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 18\,000$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{3000}{\sqrt{100}} = 300$.

Bij significantieniveau $\alpha = 0,05$ bereken je g zo, dat $P(\bar{X} \geq g) = 0,05$. De GR geeft $g \approx 18493,46$. Je verworpt H_0 als $\bar{X} \geq 18494$. Merk op dat 18494 in het verwerpsgebied ligt en dat 18493 in het aanvaardingsgebied ligt.



Let op met afronden. Kies je $\bar{X} \geq 18493$, dan is $P(\bar{X} \geq g)$ iets groter dan α en dat mag niet.

Eenzijdige toetsen

Bij de linkszijdige toets $H_0 : \mu = \mu_0$ tegen $H_1 : \mu < \mu_0$ hoort het beslissingsvoorschrift

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g$.

Bij de rechtszijdige toets $H_0 : \mu = \mu_0$ tegen $H_1 : \mu > \mu_0$ hoort het beslissingsvoorschrift

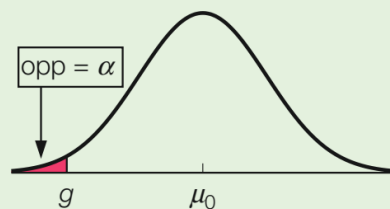
→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \geq g$.

NORMALE TOETSEN

linkszijdige toets

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

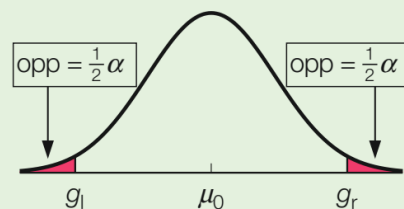


beslissingsvoorschrift
→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g$.

tweezijdige toets

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

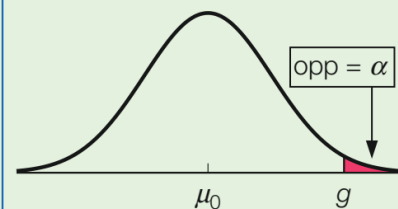


beslissingsvoorschrift
→ Verwerp H_0 als
 $\bar{X} \leq g_l$ of $\bar{X} \geq g_r$.

rechtszijdige toets

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$



beslissingsvoorschrift
→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \geq g$.

30



Gegeven is de normaal verdeelde toevalsvariabele X met $\mu_X = 85$ en $\sigma_X = 15$.

Stel het beslissingsvoorschrift op bij de volgende toetsen. Hierbij is n de steekproefomvang.

- a $H_0 : \mu_X = 85, H_1 : \mu_X > 85, \alpha = 0,10$ en $n = 30$
- b $H_0 : \mu_X = 85, H_1 : \mu_X < 85, \alpha = 0,05$ en $n = 50$
- c $H_0 : \mu_X = 85, H_1 : \mu_X \neq 85, \alpha = 0,01$ en $n = 200$

De afhandelings tijd in minuten van de bestellingen op de verpakingsafdeling van een groothandel is normaal verdeeld met $\mu = 12$ en $\sigma = 3$.

De groothandel beweert dat door een interne reorganisatie de gemiddelde afhandelings tijd is teruggedrongen.

- a Deze bewering wordt getoetst door van 25 bestellingen de afhandelings tijd te meten.

Bij welke steekproefgemiddelden is er bij een significantieniveau van 5% aanleiding te veronderstellen dat de afhandelings tijd inderdaad verminderd is? Rond af op één decimaal.

- b Een steekproef van 80 bestellingen heeft een steekproefgemiddelde van 11,3 minuten.

Is er bij een significantieniveau van 1% aanleiding om te concluderen dat de afhandelings tijd is afgenomen?



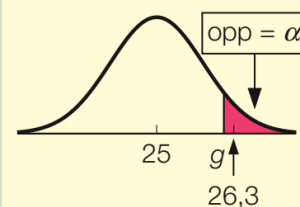
Theorie B Overschrijdingskans bij eenzijdige toetsen

Als je het steekproefresultaat weet, dan is het ook bij eenzijdig toetsen aan te bevelen met overschrijdingskansen te werken.

Bij $H_0 : \mu_X = 25$ tegen $H_1 : \mu_X > 25$ met significantieniveau α is de overschrijdingskans van het steekproefgemiddelde 26,3 gelijk aan $P(\bar{X} \geq 26,3)$.

Je verworpt H_0 als $P(\bar{X} \geq 26,3) \leq \alpha$.

rechtszijdige toets

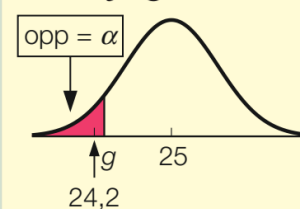


Als $P(\bar{X} \geq 26,3) \leq \alpha$,
dan verwerp je H_0 .

Bij $H_0 : \mu_X = 25$ tegen $H_1 : \mu_X < 25$ met significantieniveau α is de overschrijdingskans van het steekproefgemiddelde 24,2 gelijk aan $P(\bar{X} \leq 24,2)$.

Je verworpt H_0 als $P(\bar{X} \leq 24,2) \leq \alpha$.

linkszijdige toets



Als $P(\bar{X} \leq 24,2) \leq \alpha$,
dan verwerp je H_0 .

	linkszijdige toets	tweezijdige toets	rechtszijdige toets
nulhypothese alternatieve hypothese	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$
overschrijdingskans van k	$P(\bar{X} \leq k)$	$P(\bar{X} \leq k)$ als $k < \mu_0$ $P(\bar{X} \geq k)$ als $k > \mu_0$	$P(\bar{X} \geq k)$
verwerp H_0 als	$P(\bar{X} \leq k) \leq \alpha$	$P(\bar{X} \leq k) \leq \frac{1}{2}\alpha$ als $k < \mu_0$ $P(\bar{X} \geq k) \leq \frac{1}{2}\alpha$ als $k > \mu_0$	$P(\bar{X} \geq k) \leq \alpha$

Voorbeeld

Een fabrikant beweert dat de levensduur van een nieuw soort batterij normaal verdeeld is met een gemiddelde van 800 uur en een standaardafwijking van 40 uur.

Een consumentenorganisatie beweert dat de gemiddelde levensduur minder is dan 800 uur. Een aselechte steekproef van 100 batterijen geeft een gemiddelde levensduur van 793,8 uur.

Is er op grond van dit steekproefresultaat bij een significantieniveau van $\alpha = 0,025$ aanleiding om te twijfelen aan de bewering van de fabrikant?

Uitwerking

X = levensduur in uren

$H_0 : \mu_X = 800$, $H_1 : \mu_X < 800$ en $\alpha = 0,025$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 800$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{40}{\sqrt{100}} = 4$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 793,8)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 793,8) \approx 0,061$.

$P(\bar{X} \leq 793,8) > \alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Er is geen aanleiding de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken.

Werkschema: het toetsen van hypothesen

- 1 Formuleer H_0 en H_1 en vermeld het significantieniveau α .
- 2 Is het steekproefresultaat bekend?
 - ja Bereken de overschrijdingskans.
 - nee Bereken de grens of de grenzen van het verwerpingsgebied.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

R32 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

☐ ⊗ * Stel dat uit de aselechte steekproef een gemiddelde levensduur van 802 uur was gekomen.

Waarom hoef je dit geval geen berekening uit te voeren om tot een conclusie te komen?

33 Een zuivelfabrikant levert margarine in pakjes van 500 gram. Bij de productieafdeling bestaat het vermoeden dat de pakjes te veel margarine bevatten. Een steekproef van 100 pakjes levert een gemiddeld gewicht van 500,4 gram per pakje op.

Is er op grond van het steekproefresultaat bij een significantieniveau van 5% reden om de productieafdeling gelijk te geven? Ga ervan uit dat het gewicht van een pakje normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 1,5 gram.

34 Van elektrische auto's van het type Spirit is de actieradius bij een gewone rijstijl normaal verdeeld met een gemiddelde van 250 km en een standaardafwijking van 25 km.

a Meneer Spee beweert dat bestuurders onder de 30 jaar door hun rijstijl minder zuinig rijden. Uit een representatieve steekproef van 40 bestuurders in deze leeftijdscategorie die met een Spirit op pad gaan, volgt een gemiddelde actieradius van 238 km.

Kun je bij een significantieniveau van 1% concluderen dat meneer Spee gelijk heeft?

b Van bestuurders boven de 50 jaar vermoedt meneer Spee dat deze door hun rijstijl juist zuiniger rijden. Uit een representatieve steekproef onder 35 bestuurders in deze leeftijdscategorie volgt een gemiddelde actieradius van 256 km.

Kun je bij een significantieniveau van 5% concluderen dat meneer Spee gelijk heeft?

c Men vraagt zich af of de actieradius verandert bij gebruik van banden van het merk Peacestone. Uit een representatieve test van 40 ritten volgt een gemiddelde actieradius van 244 km bij gebruik van het merk Peacestone.

Kun je bij een significantieniveau van 10% concluderen dat de actieradius anders is bij het gebruik van deze banden?

35 Van een middeleeuwse schrijver is bekend dat hij zinnen schreef met een gemiddelde zinslengte van 28,6 woorden en een standaardafwijking van 5,9 woorden. De zinslengte is normaal verdeeld.

Onlangs zijn resten van een manuscript gevonden waarvan vermoed wordt dat het door deze schrijver geschreven is.

Onderzoek wees uit dat bij 75 zinnen de gemiddelde zinslengte 30,2 woorden is.

Kun je bij een significantieniveau van 1% stellen dat het pas ontdekte manuscript van deze schrijver afkomstig kan zijn?



36



In een koffiebranderij worden pakken gevuld met koffiebonen. Het gewicht van de bonen in een pak is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 4 gram. De fabrikant beweert dat de vulmachine zo is ingesteld, dat een pak gemiddeld 500 gram bevat.

- a Een consumentenorganisatie zegt dat de pakken gemiddeld minder dan 500 gram koffiebonen bevatten.
Hoeveel moet het gemiddelde gewicht van de koffiebonen per pak in een steekproef van lengte 50 zijn om de consumentenorganisatie bij een significantieniveau van 5% in het gelijk te stellen? Rond af op één decimaal.
- b De afdeling Voorraad beweert dat het gewicht van de koffiebonen in een pak meer dan 500 gram is. Een steekproef van 25 pakken koffie levert een steekproefgemiddelde van 501,94 gram op.
Is er bij een significantieniveau van 2,5% aanleiding de afdeling Voorraad gelijk te geven?
- c De afdeling Controle beweert dat ten gevolge van een defect aan de vulmachine het gewicht van de bonen in een pak niet 500 gram is. Bij een steekproef van 25 pakken is het gemiddelde gewicht per pak gelijk aan 502,48 gram.
Wijkt dit steekproefresultaat significant af van 500 gram? Neem $\alpha = 0,05$.

A37



Zijn basketballers langer dan gemiddeld? De lengte van de Nederlandse man is normaal verdeeld met een gemiddelde van 184 cm en een standaardafwijking van 7 cm. Bij een steekproef van 35 Nederlandse basketbalspelers is de gemiddelde lengte 1,90 meter. Kun je bij een significantieniveau van 1% zeggen dat basketballers inderdaad langer zijn dan gemiddeld?



E38



Net als met basketballers in opgave 37 kun je je afvragen of Nederlandse volleyballers langer zijn dan de gemiddelde Nederlandse man. Bij een steekproef onder Nederlandse volleyballers is de gemiddelde lengte 1,87 meter. Hoe groot moet de steekproef minstens zijn geweest om bij een significantieniveau van 1% te kunnen concluderen dat volleyballers langer zijn dan gemiddeld?



A39

Een medicijn is verkrijgbaar in tabletvorm. Het werkzame aandeel X in een tablet is normaal verdeeld met een gemiddelde van 4 mg en een standaardafwijking van 0,12 mg. Het medicijn helpt als de hoeveelheid werkzame stof per tablet tussen 3,8 mg en 4,2 mg ligt.

- a Bereken de kans dat een tablet helpt.
- b Er vinden regelmatig controles plaats om te kijken of de gemiddelde hoeveelheid werkzame stof inderdaad gemiddeld 4 mg is. Een steekproef van 50 tabletten levert een gemiddelde op van 3,95 mg werkzame stof.
Toets of hieruit volgt dat dit gemiddelde significant afwijkt van 4 mg. Neem $\alpha = 0,05$.
- c Stel dat er gemiddeld 3,95 mg werkzame stof in een tablet zit. Hoeveel procent van de tabletten helpt dan niet?

O40

Een kabelfabrikant beweert dat zijn remkabels voor toerfietsen gemiddeld een trekkracht van minstens 800 newton kunnen weerstaan. De redactie van een fietstijdschrift vindt dit gemiddelde te optimistisch. Een steekproef van 25 kabels levert een gemiddelde trekkracht op van 785 newton. Ga ervan uit dat de trekkracht in newton normaal verdeeld is met $\sigma = 35$.

- a Als het steekproefresultaat 785 newton reden geeft om $H_0 : \mu = 800$ te verwerpen, dan wordt elke H_0 met μ groter dan 800 ook verworpen. Licht dit toe.
- b Licht toe dat $\mu = 800$ voor de fabrikant gunstiger is dan een waarde van μ groter dan 800.

Theorie C Enkelvoudige nulhypothese

In opgave 40 is een eerste gedachte wellicht om $H_0 : \mu \geq 800$ en $H_1 : \mu < 800$ te kiezen.

Beide hypothesen omvatten dan meerdere waarden van μ , en daar kun je niet mee rekenen. We spreken af dat de nulhypothese van de vorm $\mu = \mu_0$ moet zijn. Je kiest daarbij de voor de fabrikant meest gunstige H_0 , hier $H_0 : \mu = 800$.

Niet altijd is direct duidelijk welke hypothese H_0 en welke H_1 is.

De volgende uitgangspunten kunnen je helpen de juiste keuze te maken.

- 1 H_0 is de hypothese die als uitgangspunt dient en die door middel van de alternatieve hypothese in twijfel wordt getrokken.
- 2 H_0 dient een **enkelvoudige hypothese** te zijn, dus H_0 heeft de vorm $H_0 : \mu = \mu_0$.

R41 Een grote rijkschool beweert dat zijn leerlingen gemiddeld hoogstens 37 uren les nodig hebben om het rijbewijs te halen. Een leerling trekt deze bewering in twijfel en gaat dit onderzoeken. Formuleer hierbij de nulhypothese en de alternatieve hypothese.

42 We bekijken nog eens de situatie van de kabelfabrikant van opgave 40. Een kabelfabrikant beweert dat zijn remkabels voor toerfietsen gemiddeld een trekkracht van minstens 800 newton kunnen weerstaan. Een steekproef van 25 kabels levert een gemiddelde trekkracht op van 785 newton. Ga ervan uit dat de trekkracht in newton normaal verdeeld is met $\sigma = 35$. Is er bij een significantieniveau van 5% reden om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken?

A43 Volgens Hans is de Nederlander in zijn vrije tijd gemiddeld minstens 20,2 uur per week bezig met media (internetten, gamen, tv-kijken, enzovoort). Een medewerker van onderzoeksbureau Suikerberg trekt deze bewering in twijfel. Een steekproef van 30 personen levert een gemiddelde van 19,4 uur op. Ben je het eens met de bewering van de medewerker van Suikerberg bij een significantieniveau van 2,5%? Ga ervan uit dat de tijd die een Nederlander in zijn vrije tijd per week met media bezig is normaal verdeeld is met $\sigma = 2,4$ uur.

A44 Jan-Pieter beweert dat zijn gemiddelde kilometertijd bij het hardlopen hoogstens 4 minuten en 30 seconden is bij afstanden korter dan 10 km. Om dit te onderzoeken loopt hij op vijf verschillende dagen een rondje van 8 km. Zijn tijd over dit rondje is gemiddeld 36 minuten en 30 seconden. Is er bij een significantieniveau van 5% reden om aan de bewering van Jan-Pieter te twijfelen? Ga ervan uit dat de kilometertijd normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 12 seconden.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan bij een hypothesetoets herkennen of er sprake is van een linkszijdige, tweezijdige of rechtszijdige toets.

► OPGAVE C5
THEORIE A

☐ Ik kan een eenzijdige normale toets uitvoeren met behulp van een beslissingsvoorschrift.

► OPGAVE C6a
THEORIE A

☐ Ik kan een eenzijdige normale toets uitvoeren met behulp van een overschrijdingskans.

► OPGAVE C6b
THEORIE B

☐ Ik weet dat een nulhypothese enkelvoudig moet zijn.

► OPGAVE C7
THEORIE C

- C5** De inhoud in liter van pakken melk van een fabrikant is normaal verdeeld met $\mu = 1,53$. Na ingebruikname van een nieuwe vulmachine beweert de fabrikant dat de inhoud niet gewijzigd is. Formuleer bij de volgende beweringen steeds de alternatieve hypothese H_1 uitgaande van de nulhypothese $H_0 : \mu = 1,53$. Consumenten beweren dat door de nieuwe vulmachine de inhoud
- a groter is geworden
 - b gewijzigd is
 - c kleiner is geworden.

- C6** In een fabriek worden flessen cola gevuld waarbij de inhoud X normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1000 mL en een standaardafwijking van 50 mL. Een consumentenorganisatie beweert dat de gemiddelde inhoud kleiner is en neemt een steekproef van 100 flessen.
- a Bij welke steekproefgemiddelden is er bij een significantieniveau van 5% aanleiding om te veronderstellen dat de gemiddelde inhoud inderdaad kleiner is? Rond af op één decimaal.

De fabrikant neemt zelf een steekproef van 200 flessen en komt op een steekproefgemiddelde van 994 mL.

- b Is er bij $\alpha = 0,025$ reden om aan te nemen dat de gemiddelde inhoud kleiner is?

- C7** Lea komt elke dag op de fiets naar school. Ze beweert dat ze gemiddeld hoogstens 25 minuten over een ritje doet. Sophia trekt deze bewering in twijfel en gaat dit onderzoeken. Geef H_0 en H_1 .

Antwoorden

- C5** a $H_1 : \mu > 1,53$
b $H_1 : \mu \neq 1,53$
c $H_1 : \mu < 1,53$
- C6** a 991,7 mL en kleiner
b nee
- C7** $H_0 : \mu = 25$ en $H_1 : \mu > 25$

11.4 Binomiale toetsen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt een eenzijdige binomiale toets uitvoeren met behulp van een overschrijdingskans.
- Je kunt een eenzijdige binomiale toets uitvoeren met behulp van een beslissingsvoorschrift.
- Je kunt een tweezijdige binomiale toets uitvoeren.

045



Frisdrankfabrikant Mol beweert in een advertentie dat 40% van de Nederlanders zijn nieuwe frisdrank de lekkerste frisdrank vindt. Concurrent Franck vecht dit aan bij de Reclame Code Commissie (RCC). Volgens hem is dit percentage lager.

De RCC besluit een steekproef van 100 personen te nemen en op grond van het steekproefresultaat zal Mol de advertentie al dan niet moeten herzien.

De toetsingsgrootheid X is het aantal personen in de steekproef dat de frisdrank van fabrikant Mol de lekkerste vindt.

a Licht toe dat X een binomiaal verdeelde toevalsvariabele is.

b Neem aan dat $X = 48$.

Zal Mol de advertentie moeten herzien? Licht toe.

c Neem aan dat $X = 28$.

Welke partij krijgt dan volgens jou gelijk? Licht toe.

Theorie A Eenzijdige binomiale toetsen

In opgave 45 moet op grond van een steekproefresultaat beslist worden of de firma Mol al dan niet gelijk krijgt. In de steekproef wordt het aantal personen X geteld dat de frisdrank van Mol het lekkerst vindt.

De toetsingsgrootheid X is een binomiaal verdeelde toevalsvariabele.

Als Mol gelijk heeft is $p = 0,4$, dus de nulhypothese is $H_0 : p = 0,4$.

Neem als significantieniveau $\alpha = 0,05$.

H_0 wordt verworpen als het aantal personen in de steekproef dat de frisdrank van Mol het lekkerst vindt, klein is.

Dus het beslissingsvoorschrift heeft de vorm

→ Verwerp H_0 als $X \leq g$.

Hierbij is g het grootste gehele getal dat bij $n = 100$ en $p = 0,4$ voldoet aan $P(X \leq g) \leq 0,05$.

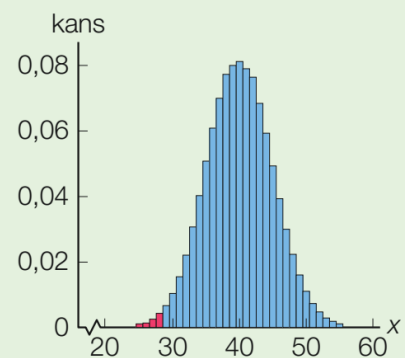
Neem aan dat uit de steekproef volgt dat 28 personen het met Mol eens zijn. Door het berekenen van de overschrijdingskans $P(X \leq 28)$ kom je erachter of H_0 al dan niet verworpen dient te worden.

De GR geeft $P(X \leq 28) \approx 0,008$.

Omdat $P(X \leq 28) \leq \alpha$ weet je dat $28 \leq g$, dus je verwerpt H_0 . Mol zal de advertentie moeten herzien.

Je hebt hier een voorbeeld van een **binomiale toets**.

Bij een binomiale toets is de toetsingsgrootheid X een binomiaal verdeelde toevalsvariabele.



Bij een binomiale toets heeft de nulhypothese de vorm $H_0 : p = p_0$.
Bij een linkszijdige toets is $H_1 : p < p_0$ en bij een rechtszijdige toets is $H_1 : p > p_0$.

Bij een binomiale toets telt X het aantal elementen met een bepaald kenmerk in de steekproef.

X is binomiaal verdeeld, waarbij n de steekproefomvang is.

Linkszijdig: $H_0 : p = p_0$ en $H_1 : p < p_0$

De overschrijdingskans van k is $P(X \leq k)$.

Verwerp H_0 als $P(X \leq k) \leq \alpha$.

Rechtszijdig: $H_0 : p = p_0$ en $H_1 : p > p_0$

De overschrijdingskans van k is $P(X \geq k)$.

Verwerp H_0 als $P(X \geq k) \leq \alpha$.

Voorbeeld

Een bandenfabrikant beweert dat hoogstens 10% van zijn banden minder dan 40 000 km meegaat. Een consumentenorganisatie vermoedt dat dit percentage hoger is. Er wordt besloten tot een steekproef van 50 autobanden. Hiervan blijken er twaalf minder dan 40 000 km mee te gaan.

Is er aanleiding om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken?

Neem $\alpha = 0,05$.

Aanpak

- H_0 is de bewering van de fabrikant, want die wordt aangevochten.
Omdat H_0 enkelvoudig moet zijn, neem je $H_0 : p = 0,1$.
- Het steekproefresultaat is bekend, dus gebruik een overschrijdingskans.

Uitwerking

X = aantal banden dat minder dan 40 000 km meegaat

$H_0 : p = 0,1$, $H_1 : p > 0,1$ en $\alpha = 0,05$.

X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,1$.

De overschrijdingskans is $P(X \geq 12)$.

De GR geeft $P(X \geq 12) \approx 0,003$.

$P(X \geq 12) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

Er is inderdaad aanleiding om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken.

46 In een krant staat dat 45% van de Nederlanders in één keer slaagt voor het rijexamen. De directeur van een rijsschool beweert dat dit percentage bij haar rijsschool hoger ligt. Bij een aselechte groep van 40 klanten van deze rijsschool slagen er 23 in één keer voor het rijexamen.

- Bereken de overschrijdingskans van 23.
- Is er aanleiding om de directeur gelijk te geven bij $\alpha = 0,05$?



47 In Nederland heeft 30% van de bevolking last van een vorm van allergie.



Onderzoekers beweren dat dit percentage lager ligt bij mensen die op jonge leeftijd regelmatig met honden en katten in aanraking zijn gekomen. Door de ontwikkeling van het immuunsysteem zijn ze op latere leeftijd minder vatbaar voor allergieën. De onderzoekers hebben 474 kinderen gevolgd die dagelijks met minstens twee honden of katten in contact kwamen. Het bleek dat 112 van hen later met een allergie te kampen kregen.

Is er bij een significantieniveau van 2,5% voldoende aanleiding om de onderzoekers gelijk te geven?

48 In de westerse wereld lijdt 8% van de mannen aan een vorm van kleurenblindheid. De bioloog Marlies Bouman beweert dat dit percentage onder Aziatische mannen hoger ligt.



Een onderzoek onder 200 Aziatische mannen wijst uit dat er 22 aan een vorm van kleurenblindheid lijden.

Is er aanleiding om Marlies Bouman gelijk te geven? Neem $\alpha = 0,05$.

Informatief Kleurenblindheid

De meeste kleurenblinde mensen zien wel kleuren, maar kunnen geen onderscheid maken tussen bijvoorbeeld groen en rood. Slechts 1 op de 30 000 mensen is echt kleurenblind en ziet alleen zwart-wit. Een bijzondere situatie doet zich voor op het eiland Pingelap in de Stille Oceaan ten noorden van Australië. Omstreeks 1775 werd Pingelap getroffen door een verwoestende tyfoon. Slechts 20 mensen overleefden de catastrofe, waaronder een echt kleurenblinde man. Van de huidige inwoners van Pingelap heeft zo'n 10% de kleurenblindheid geërfd van deze man. De Belgische fotograaf Sanne De Wilde maakte het boek 'The island of the colorblind' met een fotoreportage van haar reis naar het eiland Pingelap.



49



Simon beweert dat bij het draaien van de schijf in de figuur hiernaast de wijzer te vaak op rood komt. Bij het 160 keer draaien van de schijf komt de wijzer maar liefst 52 keer op rood.

Is dat voldoende reden om Simon bij een significantieniveau van 1% gelijk te geven?



A50



In de supermarkt zijn waterflesjes te koop waarbij je poppetjes van tekenfilmfiguren krijgt. Je kunt aan de buitenkant niet zien welk poppetje je erbij krijgt. Er zijn 15 verschillende poppetjes om te verzamelen.

De vader van Liv heeft ergens gelezen dat er meer poppetjes zijn gemaakt van de populaire Papa Varken dan van andere figuren.

Nadat Liv 25 poppetjes heeft gekregen, blijkt ze al 5 keer Papa Varken te hebben gehad. Haar vriendinnetje Veerle spaart de poppetjes ook en heeft er al 15 gekregen, waarvan 2 keer Papa Varken.

Ga na of bij $\alpha = 0,01$ geconcludeerd kan worden dat Papa Varken vaker voorkomt dan gemiddeld.

A51



Mirjam speelt een spel met een dobbelsteen. Volgens haar krijgt ze te weinig keren zes ogen. Bij het 80 keer gooien met de dobbelsteen krijgt ze maar liefst 72 keer geen zes ogen.

Je kunt hierbij zowel een linkszijdige als een rechtszijdige binomiale hypothesetoets opstellen, die beide hetzelfde testen.

a Geef beide toetsen.

b Bereken in beide gevallen de overschrijdingskans.

c Is er bij een significantieniveau van 5% voldoende aanleiding om het met Mirjam eens te zijn?

Theorie B Grenzen berekenen bij binomiale toetsen

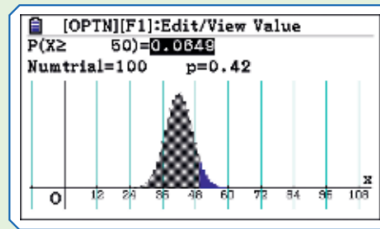
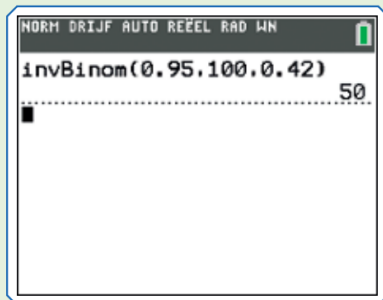
Bij een binomiale toets is $H_0 : p = 0,42$, $H_1 : p > 0,42$ en $\alpha = 0,05$.

Door middel van een steekproef van lengte 100 wordt beslist of H_0 al dan niet verworpen wordt.

In het geval het steekproefresultaat niet bekend is, kun je wel het aanvaardingsgebied en het verwerpsgebied bepalen.

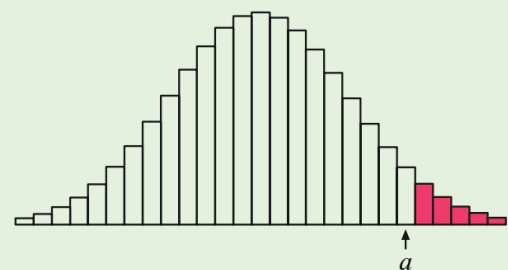
De GR heeft een optie om de grens van het aanvaardingsgebied te berekenen.

[GR] Neem van de module **De binomiale verdeling** het onderdeel **Grenzen aanvaardingsgebied berekenen** door.



De GR geeft 50 als antwoord. Hierbij is de grens a berekend die in de figuur hiernaast is aangegeven.

Dus 51, 52, ..., 100 liggen in het verwerpsgebied. Notatie $X \geq 51$. Bij deze steekproefresultaten wordt H_0 verworpen.



Voorbeeld

Een woordvoerder van de NS beweert dat minstens 90% van de treinen op het traject Utrecht - Arnhem op tijd rijdt. Reizigersvereniging Rover vermoedt dat dit percentage lager is. Er wordt besloten van 150 treinen na te gaan of ze op tijd rijden.

Hoeveel van deze treinen moeten op tijd rijden om de bewering van de NS bij een significantieniveau van 1% te verwerpen?

Uitwerking

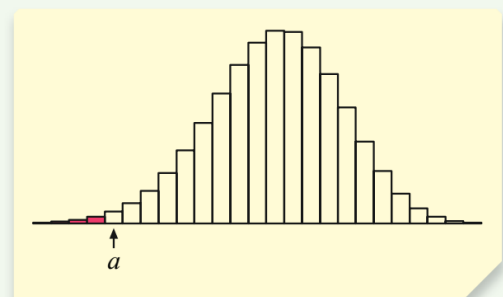
X = aantal keer dat trein op tijd rijdt

$H_0 : p = 0,9$, $H_1 : p < 0,9$ en $\alpha = 0,01$.

X is binomiaal verdeeld met $n = 150$ en $p = 0,9$.

De GR geeft $a = 126$.

De bewering van de NS wordt verworpen als er 125 of minder treinen op tijd rijden.



52 Gegeven is de binomiale toevalsvariabele X met $n = 100$ en $p = 0,8$.



- a** Bij een hypothesetoets is $H_0 : p = 0,8$, $H_1 : p < 0,8$ en $\alpha = 0,05$.
Bereken het verwerpingsgebied.
- b** Bij een hypothesetoets is $H_0 : p = 0,8$, $H_1 : p > 0,8$ en $\alpha = 0,05$.
Bereken het verwerpingsgebied.

53 De fabrikant van het geneesmiddel Pharmeaplus beweert dat dit middel in minstens 80% van de gevallen doeltreffend werkt. Een arts vindt dit percentage te optimistisch en daarom wordt van 500 patiënten die het middel hebben gebruikt het ziekteverloop nagegaan. Bij hoeveel patiënten moet het middel doeltreffend werken, om de bewering van de fabrikant niet te verwerpen? Neem $\alpha = 0,05$.



54 Bob en Geliano doen 100 keer een spel, waarbij altijd maar één winnaar is. Geliano beweert dat ze allebei even goed zijn in het spel.



- a** Wat is in dat geval de kans dat Geliano een spelletje wint?

Bob beweert dat hij beter is in het spel. Hij heeft 57 keer gewonnen.

- b** Is er bij een significantieniveau van 5% aanleiding om Bob gelijk te geven?
- c** Wat is het minimale aantal spelletjes dat Bob gewonnen moet hebben om hem gelijk te geven? Neem $\alpha = 0,05$.

55 * CATERAAR Vigneto neemt regelmatig petitfours af van bakkerij Lekkers. Het gewicht van de petitfours is normaal verdeeld. De accountmanager van Lekkers zegt dat het gemiddelde gewicht van de petitfours minstens 75 gram is. Een medewerker van Vigneto twijfelt aan deze bewering. In een partij van vijftig petitfours blijkt het gemiddelde gewicht slechts 74 gram. Maar liefst 31 petitfours uit deze partij blijken minder te wegen dan 75 gram.



- a** Hoeveel petitfours zouden bij een gemiddeld gewicht van 75 gram naar verwachting minder wegen dan 75 gram?

Ook zonder standaardafwijking kun je bij deze gegevens een hypothesetoets uitvoeren.

- b** Leg dit uit.
- c** Is er bij een significantieniveau van 5% reden om aan de bewering van de accountmanager van Lekkers te twijfelen?

Volgens een tennisliefhebber wint een speler die in een set met serveren begint in minstens 55% van de gevallen de set. Commentator Jacco vindt dit percentage te optimistisch en daarom onderzoekt hij 500 gespeelde sets op Wimbledon.

- a** Neem aan dat Jacco op grond van zijn steekproef gelijk krijgt.
Wat weet je van het aantal sets waarbij de speler die begint met serveren de set wint? Neem $\alpha = 0,05$.
- b** Het werkelijke aantal blijkt 242 te zijn.
Wat is je conclusie?



De kans dat een serveerder de game wint, is voor op Wimbledon gespeelde partijen 81,5%. Volgens Jacco geven nieuwe ballen bij het serveren extra voordeel. Door middel van een steekproef van 300 met nieuwe ballen gespeelde games op Wimbledon wordt onderzocht of Jacco gelijk heeft.

- c** Hoeveel van die games moet de serveerder winnen om bij een significantieniveau van 2,5% Jacco gelijk te geven?

Theorie C Tweezijdige binomiale toetsen

In een krantenartikel is te lezen dat 45% van de jongeren van 13 en 14 jaar regelmatig online gamet. Om deze bewering te toetsen, wordt aselekt een steekproef van 120 jongeren van 13 en 14 jaar genomen. We vragen ons af bij welke aantallen jongeren het percentage van 45% in twijfel wordt getrokken. We nemen $\alpha = 0,05$.

De toetsingsgrootte X is het aantal jongeren in de steekproef dat regelmatig online gamet.

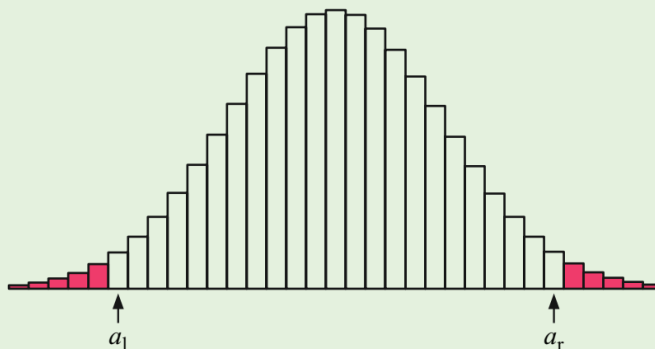
De nulhypothese is $H_0 : p = 0,45$. Het percentage 45% wordt in twijfel getrokken, dus $H_1 : p \neq 0,45$.

Je hebt te maken met een **tweezijdige binomiale toets**.

X is binomiaal verdeeld met $n = 120$ en $p = 0,45$.

De GR geeft $a_1 = 43$ en $a_r = 65$.

Het in het krantenartikel genoemde percentage van 45% wordt bij $\alpha = 0,05$ in twijfel getrokken als het aantal jongeren dat online gamet kleiner dan of gelijk is aan 42 of groter dan of gelijk is aan 66.



Is het steekproefresultaat k bekend, dan heeft ook bij tweezijdige binomiale toetsen de overschrijdingskans de voorkeur. Van tevoren moet je bedenken of je $P(X \leq k)$ of $P(X \geq k)$ moet berekenen. Daarbij gebruik je de verwachtingswaarde.

Overschrijdingskans van k bij tweezijdige binomiale toetsen

$H_0 : p = 0,6, H_1 : p \neq 0,6$
steekproefomvang $n = 60$
steekproefresultaat $k = 42$ } De overschrijdingskans is $P(X \geq 42)$, want de verwachtingswaarde is $0,6 \cdot 60 = 36$ en $42 > 36$.

$H_0 : p = 0,6, H_1 : p \neq 0,6$
steekproefomvang $n = 80$
steekproefresultaat $k = 42$ } De overschrijdingskans is $P(X \leq 42)$, want de verwachtingswaarde is $0,6 \cdot 80 = 48$ en $42 < 48$.

Verwerp H_0 als de overschrijdingskans kleiner dan of gelijk is aan $\frac{1}{2}\alpha$.

Voorbeeld

De directeur van een middelbare school beweert dat 30% van de leerlingen die op de fiets naar school komt, op een elektrische fiets komt. Bij een aselechte steekproef onder 400 scholieren die op de fiets naar school komen, blijken er 262 niet op een elektrische fiets te zijn gekomen. Is er bij een significantieniveau van 5% aanleiding om de bewering van de directeur in twijfel te trekken?

Uitwerking

X = aantal leerlingen op elektrische fiets

$H_0 : p = 0,3, H_1 : p \neq 0,3$ en $\alpha = 0,05$.

X is binomiaal verdeeld met $n = 400$ en $p = 0,3$.

Het steekproefresultaat is $400 - 262 = 138$.

De overschrijdingskans is $P(X \geq 138) \approx 0,029$.

$P(X \geq 138) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is geen aanleiding om de bewering van de directeur in twijfel te trekken.

De verwachtingswaarde is $0,3 \cdot 400 = 120$. Omdat $138 > 120$ is de overschrijdingskans gelijk aan $P(X \geq 138)$.

R57 Zie het voorbeeld.



Voer de hypothesetoets nog eens uit met X = aantal leerlingen niet op elektrische fiets.

58



Judith toetst de zuiverheid van een geldstuk door het geldstuk 100 keer op te gooien.

a Waarom is dit een tweezijdige toets?

b Tot welke conclusie komt ze omtrent de zuiverheid bij $\alpha = 0,05$ als er 59 keer kop boven komt?

59 Martin toetst de zuiverheid van een dobbelsteen. Hij neemt $\alpha = 0,05$.

☐ ⊙ * Tot welke conclusie komt hij als hij bij 150 worpen 12 zessen telt?

60 Een fabrikant beweert dat minstens 80% van zijn spaarlampen een levensduur van meer dan 8000 uur heeft. Een steekproef levert de volgende aantallen branduren op.

7831 8521 8471 9321 6827 5277 8711 9216 5317 9997
5317 9612 8306 8711 8836 7189 7723 9111 9991 9920
8618 8817 8171 8356 7881 9158 8377 7583 9313 8271

Ga na of deze steekproef voldoende aanleiding geeft om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken bij een significantieniveau van 10%.

A61 Bij roulette wordt bij ieder spel een schijf met 37 vakjes, die genummerd zijn van 0 tot en met 36, aan het draaien gebracht. Van de vakjes zijn er 18 rood en 18 zwart. Het vakje met 0 is groen. Zie de figuur hieronder.



De croupier werpt een balletje tegen de draairichting van de schijf in. Na enige tijd blijft het balletje in één van de 37 vakjes liggen. Het nummer van dat vakje is dan het winnende nummer. Bij een zuivere roulette hebben alle nummers dezelfde kans om het winnende nummer te worden.

- a** Men draait de roulette 500 keer en telt hoeveel keer het balletje op het vakje met nummer 10 blijft liggen. Dit blijkt 21 keer te zijn.
Is er bij een significantieniveau van 5% aanleiding te vermoeden dat de roulette niet zuiver is?
- b** Men draait de roulette 1000 keer en telt hoeveel keer het balletje op de vakjes met de nummers 26, 0 en 32 blijft liggen.
Bij welke aantallen zal de zuiverheid van de roulette niet in twijfel worden getrokken? Neem $\alpha = 0,025$.
- c** Volgens Richard komt het balletje niet vaak genoeg op een rood vakje. Bij het 1500 keer draaien gebeurt dit slechts 695 keer.
Is er bij $\alpha = 0,01$ voldoende reden om het met Richard eens te zijn?

A62

De diameter in cm van de tomaten van tomatenexporteur Driessen is normaal verdeeld met $\mu = 7,9$ en $\sigma = 0,5$. De tomaten met een diameter minder dan 7,2 cm zijn niet geschikt voor de export. Deze worden doorgedraaid.

- a** Toon aan dat de kans dat een tomaat van Driessen wordt doorgedraaid gelijk is aan 0,081.

De heer Van Eijk, fabrikant van het middel S3Fb, beweert dat door bespuiting van de tomatenplanten met zijn middel de diameter toeneemt. Van 900 met het middel S3Fb bespoten tomaten wordt de diameter gemeten. Van deze tomaten blijken er na meting 65 te moeten worden doorgedraaid.

- b** Is met een significantieniveau van 1% aangetoond dat het middel S3Fb de diameter inderdaad vergroot?

A63

In Nederland wegen baby's bij de geboorte gemiddeld 3250 gram. Het geboortegewicht is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 425 gram.

Op consultatiebureaus rekent men baby's met een geboortegewicht van meer dan 4000 gram tot de categorie 'zwaar'.

Medewerkers van het consultatiebureau in Appelscha beweren dat in hun omgeving het aantal zware baby's boven het landelijk gemiddelde ligt, want van de laatste 58 pasgeborenen behoorden er maar liefst acht tot de categorie 'zwaar'.

Onderzoek of je bij een significantieniveau van 1% de medewerkers van het consultatiebureau gelijk kunt geven.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan een eenzijdige binomiale toets uitvoeren met behulp van een overschrijdingskans.

► OPGAVE C8
THEORIE A

☐ Ik kan een eenzijdige binomiale toets uitvoeren met behulp van een beslissingsvoorschrift.

► OPGAVE C9
THEORIE B

☐ Ik kan een tweezijdige binomiale toets uitvoeren.

► OPGAVE C10
THEORIE C

C8 Een televisierecensent beweert dat minstens 70% van alle tv-kijkers zich stoort aan reclameblokken tijdens een film. Een aselechte steekproef wijst uit dat 320 van 500 ondervraagden zich inderdaad aan zulke blokken stoort.

Is er op grond van dit steekproefresultaat voldoende reden om de bewering van de recensent in twijfel te trekken? Neem $\alpha = 0,025$.

C9 Bij het geneesmiddel TwF is volgens een vooraanstaand arts de kans om binnen twee weken van een bepaalde ziekte te genezen 0,75. De fabrikant van het geneesmiddel beweert dat de kans groter is dan 0,75. Het geneesmiddel wordt aan 50 patiënten gegeven. Hoeveel personen in de steekproef moeten binnen twee weken genezen om de fabrikant gelijk te geven? Neem $\alpha = 0,05$.

C10 Maud toetst de zuiverheid van een dobbelsteen. Ze neemt $\alpha = 0,05$.

a Ze werpt de dobbelsteen 80 keer en telt het aantal keer zes ogen.

Bij welke aantallen zal de zuiverheid van de dobbelsteen niet in twijfel worden getrokken?

b Ze werpt de dobbelsteen 120 keer en telt het aantal keer minstens drie ogen. Dat aantal is 70.

Tot welke conclusie komt Maud?

Antwoorden

C8 ja

C9 minstens 43

C10 a 7 tot en met 20

b geen reden om te twijfelen aan de zuiverheid van de dobbelsteen

Kennis- en vaardighedentest

11.1 De wortel-n-wet

- 1** Mevrouw Kleuver geeft haar klas een online toets, die bestaat uit twee opgaven. De tijd die leerlingen nodig hebben voor een opgave is normaal verdeeld. Voor de eerste opgave heeft een leerling gemiddeld 16 minuten nodig en voor de tweede opgave gemiddeld 12 minuten. Bij beide opgaven is de standaardafwijking 2 minuten. In de klas zitten 25 leerlingen en ze hebben 30 minuten voor de toets. Hoeveel leerlingen hebben naar schatting de toets niet op tijd af?
- 2** Bij een productieproces moeten drie fasen worden doorlopen. De duur van elke fase is normaal verdeeld. Fase I duurt gemiddeld 19,3 minuten en de standaardafwijking is 2,5 minuten. Voor fase II zijn het gemiddelde en de standaardafwijking 12,5 minuten respectievelijk 1,5 minuten en voor fase III 10,7 minuten respectievelijk 1,2 minuten. In hoeveel procent van de gevallen duurt het productieproces langer dan drie kwartier?
- 3** Potten appelmoes, waarvan de inhoud normaal verdeeld is met een gemiddelde van 720 gram en een standaardafwijking van 14 gram, worden verpakt in dozen van 16 stuks.
- a** Bereken de kans dat een doos meer dan 11 600 gram appelmoes bevat.
 - b** Hoeveel procent van de dozen heeft een gemiddelde inhoud per pot van minder dan 710 gram?
 - c** Bereken de kans dat er in een doos meer dan drie potten appelmoes zitten die meer dan 730 gram appelmoes bevatten.

11.2 Beslissen op grond van een steekproef

- 4** Een graszodenbedrijf levert graszoden waarvan de oppervlakte normaal verdeeld is met een gemiddelde van $1,00 \text{ m}^2$ en een standaardafwijking van $2,5 \text{ dm}^2$. Een tuincentrum veronderstelt dat de gemiddelde oppervlakte afwijkt van $1,00 \text{ m}^2$ en neemt een steekproef van 20 graszoden. Het steekproefgemiddelde is $99,12 \text{ dm}^2$. Welke conclusie trekt het tuincentrum bij $\alpha = 0,10$?



11.3 Eenzijdig en tweezijdig toetsen

- 5** Een fabrikant van pakken volle melk beweert dat het vetgehalte X normaal verdeeld is met een gemiddelde van 3,50% en een standaardafwijking van 0,02%.
- a** De gezondheidsraad beweert dat het vetgehalte van de volle melk meer dan 3,50% is. Een steekproef van 30 pakken levert een steekproefgemiddelde op van 3,508%.
Is er bij een significantieniveau van 2,5% aanleiding de gezondheidsraad gelijk te geven?
 - b** De afdeling controle beweert dat door een fout in het productieproces het vetgehalte niet 3,50% is. Bij een steekproef van 40 pakken is het vetgehalte gelijk aan 3,494%.
Wijkt dit resultaat significant af van 3,50%? Neem $\alpha = 0,05$.

11.4 Binomiale toetsen

- 6** Sportleraar Meijer beweert dat minstens 75% van de jongeren tussen 12 en 18 jaar lid is van een sportvereniging. De schoolleiding betwijfelt dit. Een aselechte steekproef wijst uit dat 81 van de 120 ondervraagde jongeren lid zijn van een sportvereniging.
Is er op grond van dit steekproefresultaat reden om de bewering van sportleraar Meijer in twijfel te trekken? Neem $\alpha = 0,05$.
- 7** Een rad van avontuur heeft 20 gelijke sectoren, genummerd van 1 tot en met 20. Om te controleren of het rad zuiver is, telt men hoe vaak de getallen 6 tot en met 11 worden aangewezen.
- a** Men draait het rad 100 keer.
Bij welke aantallen zal men de zuiverheid van het rad niet in twijfel trekken bij een significantieniveau van 0,05?
 - b** Men draait het rad 200 keer. Hierbij wordt 70 keer één van de getallen 6 tot en met 11 aangewezen.
Is er bij een significantieniveau van 1% aanleiding om aan te nemen dat het rad niet zuiver is?
- 8** Bij het vullen van pakken koffie levert de vulmachine pakken af waarvan het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1006 gram en een standaardafwijking van 5 gram.
- a** Toon aan dat de kans dat een pak minder dan 1000 gram weegt 0,115 is.

Na klachten van een consumentenorganisatie over een te laag gewicht van de pakken, besluit de fabrikant de machine bij te stellen. Nadat de technische dienst de machine heeft bijgesteld, blijken in een steekproef van 250 pakken er 18 minder dan 1000 gram te wegen.
 - b** Is met een significantieniveau van 1% aangetoond dat het gemiddelde inderdaad is toegenomen?

Gemengde opgaven

- 1** Een pakketbezorger weet dat de tijd die hij nodig heeft om een adres te bezoeken voor het afleveren van één of meer pakjes, normaal verdeeld is met een gemiddelde van 8 minuten en 24 seconden en een standaardafwijking van 2 minuten en 3 seconden.

a Bereken de kans dat hij bij het bezoeken van tien adressen gemiddeld minder dan 8 minuten per adres nodig heeft.



Op dinsdagavond moet hij zijn bestelbus om 20:00 uur inleveren bij het sorteercentrum. Hij moet daarom om 19:50 uur stoppen met bezorgen, om voldoende tijd te hebben om naar het sorteercentrum te rijden. Adressen die hij dan nog niet heeft bezocht, moet hij de volgende dag bezoeken. Om 18:37 uur begint hij met het bezorgen van de pakjes voor de laatste tien adressen die nog in de auto liggen.

b Bereken de kans dat hij woensdag nog naar een adres van dinsdag moet.

- 2** Een fabrikant van frisdranken houdt een actie om zijn marktaandeel te vergroten. Bij deze actie kan de consument doppen verzamelen. De onderkant van een dop heeft één van de kleuren rood, groen, blauw of oranje. Lever je vier verschillend gekleurde doppen in, dan krijg je een fles frisdrank gratis.

De fabrikant beweert dat 50% van de doppen rood is, 30% groen, 15% blauw en 5% oranje.

a Bereken de kans dat je een gratis fles frisdrank kunt halen na het kopen van vier flessen.

b Mevrouw Wesselink koopt acht flessen.

Bereken de kans dat ze daarmee twee gratis flessen kan krijgen.

c Mevrouw Meurs heeft 30 flessen gekocht.

Bereken de kans dat er minstens één fles met een oranje dop bij is.

d Volgens barkeeper Ronny is het percentage flessen met een rode dop groter dan 50%. Van 100 flessen die hij heeft opengemaakt, zijn er 57 met een rode dop.

Moet je bij een significantieniveau van 10% Ronny gelijk geven?

e Een groothandel in frisdranken krijgt klachten binnen over het percentage oranje doppen; dat zou minder dan 5% zijn. Er wordt besloten een steekproef te nemen van 200 flessen.

Hoeveel oranje doppen moet men in de steekproef minstens aantreffen, opdat de bewering van de fabrikant niet wordt verworpen?

Neem $\alpha = 0,10$.

- 3** Een onderzoeksbureau beweert dat het aantal uur dat een student per week aan bijbaantjes kwijt is, normaal verdeeld is met een gemiddelde van 10,5 uur en een standaardafwijking van 3,2 uur.
- a** Decaan Heinneman betwijfelt of dit gemiddelde klopt. Een steekproef van lengte 60 levert een gemiddelde tijd op van 9,8 uur.
Is er op grond van dit steekproefresultaat bij een significantieniveau van 5% aanleiding om te twijfelen aan de bewering van het onderzoeksbureau?
 - b** Op grond van een steekproef van lengte 200 wil men beslissen of het gemiddelde van 10,5 uur klopt.
Bij welke steekproefresultaten zal men het onderzoeksbureau gelijk geven? Neem $\alpha = 0,10$. Rond af op twee decimalen.

- 4** De firma Zamo maakt voor de horeca zakjes gevuld met mosterd. Zamo verpakt de zakjes in dozen van 264 stuks. Op de verpakking staat: 264 zakjes à 4 gram.
De inhoud van de zakjes is normaal verdeeld met een gemiddelde van 4,2 gram en een standaardafwijking van 0,3 gram.
- a** Hoeveel zakjes met een inhoud van minder dan 4 gram zitten naar verwachting in een doos?
 - b** Bereken de kans dat een doos meer dan 1120 gram mosterd bevat.
 - c** Van hoeveel procent van de dozen wijkt de gemiddelde inhoud per zakje meer dan 0,15 gram af van de op de doos vermelde 4 gram?
- Het gewicht van een leeg zakje is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,5 gram en een standaardafwijking van 0,2 gram. Bij Zamo wordt een steekproef van 30 met mosterd gevulde zakjes genomen.
- d** Bereken de kans dat in deze steekproef minstens vijf zakjes zitten die minimaal 6 gram wegen.

- 5** In Nederland heeft 47% van de huishoudens een huisdier. Een gemeenteambtenaar in een grote gemeente denkt dat dit percentage bij bewoners van appartementen in zijn gemeente lager ligt. In een steekproef van 60 bewoners van appartementen blijken er 38 geen huisdier te hebben.
Kan bij een significantieniveau van 5% geconcludeerd worden dat de gemeenteambtenaar gelijk heeft?

- 6** Fabrikant Meeuwis vult zakjes pinda's.
Het gewicht van de pinda's in een zakje is normaal verdeeld met een gemiddelde van 150 gram en een standaardafwijking van 3,56 gram.
- a** Bereken de kans dat van tien zakjes het gemiddelde gewicht per zakje minder dan 148 gram is.
 - b** De zakjes pinda's worden verpakt in dozen van 30 stuks.
Bereken de kans dat van drie dozen er minstens één minder dan 4470 gram bevat.

- 7** In een groot bedrijf is het gemiddelde gewicht van de mannen 84 kg met een standaardafwijking van 8 kg. Van de vrouwen is het gemiddelde gewicht 70 kg met een standaardafwijking van 7 kg. Op een ochtend staan er bij dit bedrijf vijf mannelijke en vijf vrouwelijke medewerkers klaar om in dezelfde lift te stappen. De lift heeft een maximaal draagvermogen van 800 kg. Bereken de kans dat de tien medewerkers samen te veel wegen voor de lift.

- 8** In een fabriek worden havermoutrepen met een fruitvulling gemaakt. De hoeveelheden havermoutdeeg en fruitvulling worden door twee verschillende machines afgewogen. Vervolgens worden de vulling en het deeg samengevoegd, waarna de repen worden afgebakken. De hoeveelheid havermoutdeeg per reep is normaal verdeeld met een gemiddelde van 17 gram en een standaardafwijking van



- 0,7 gram. De hoeveelheid fruitvulling per reep is normaal verdeeld met een gemiddelde van 16 gram en een standaardafwijking van 1,1 gram.
- a** Bereken de kans dat van een willekeurig gekozen reep de fruitvulling en het havermoutdeeg samen meer dan 35 gram wegen.
 - b** Bij de kwaliteitscontrole vermoedt men dat na verloop van tijd het gemiddelde gewicht van de fruitvulling minder is dan 16 gram per reep. Door middel van een steekproef van de fruitvulling voor 20 repen zal men besluiten de machine die de hoeveelheid fruitvulling afweegt al dan niet bij te stellen.
Bij welke steekproefgemiddelden zal men bij een significantieniveau van 5% de machine bijstellen? Rond af op twee decimalen.
 - c** Stel dat de machine voor elke reep gemiddeld 15,7 gram fruitvulling afweegt.
Bereken de kans dat men bij een steekproef van lengte 20 en het hanteren van de in vraag b gevonden beslissingsregel *niet* tot bijstelling van de machine overgaat.
 - d** Ook wordt betwijfeld of de machine die de hoeveelheid havermoutdeeg afweegt nog wel een gemiddelde hoeveelheid van 17 gram aflevert. Men neemt een steekproef van 10 hoeveelheden havermoutdeeg.
Bij welke steekproefgemiddelden zal men bij een significantieniveau van 5% besluiten om deze machine bij te stellen? Rond af op twee decimalen.

9 Een huisarts heeft op elke werkdag twee uur gereserveerd voor een spreekuur. De ervaring heeft haar geleerd dat zij tijdens het spreekuur gemiddeld tien minuten voor een patiënt nodig heeft.

De huisarts deelt haar patiënten in drie groepen in:

- *gemakkelijke* patiënten die hoogstens 5 minuten tijd kosten
- *gewone* patiënten die tussen 5 en 15 minuten tijd kosten
- *tijdrovende* patiënten die minstens 15 minuten tijd kosten.



We maken bij deze situatie het volgende model.

- Elke werkdag komen er 12 patiënten op het spreekuur.
- De tijd die de huisarts tijdens het spreekuur voor een patiënt nodig heeft, is normaal verdeeld met een gemiddelde van 10 minuten en een standaardafwijking van 4 minuten.
- a** Bereken de verwachtingswaarde van het aantal *tijdrovende* patiënten tijdens een spreekuur. Rond af op twee decimalen.
- b** Bereken de kans dat de huisarts tijdens een spreekuur 2 *gemakkelijke* en 10 *gewone* patiënten krijgt.
- c** Bereken de kans dat tijdens een spreekuur minstens zes patiënten meer dan 10 minuten kosten.
- d** Bereken de kans dat tijdens een spreekuur de gemiddelde tijd per patiënt minstens 14 minuten is.

In een week had de huisarts voor de 60 patiënten op haar spreekuur in totaal 654 minuten nodig. Dat is aanzienlijk meer dan de 600 minuten die je zou verwachten.

- e** Onderzoek of deze gegevens voldoende aanleiding geven om bij een significantieniveau van 5% de veronderstelde gemiddelde tijd van 10 minuten te verhogen.

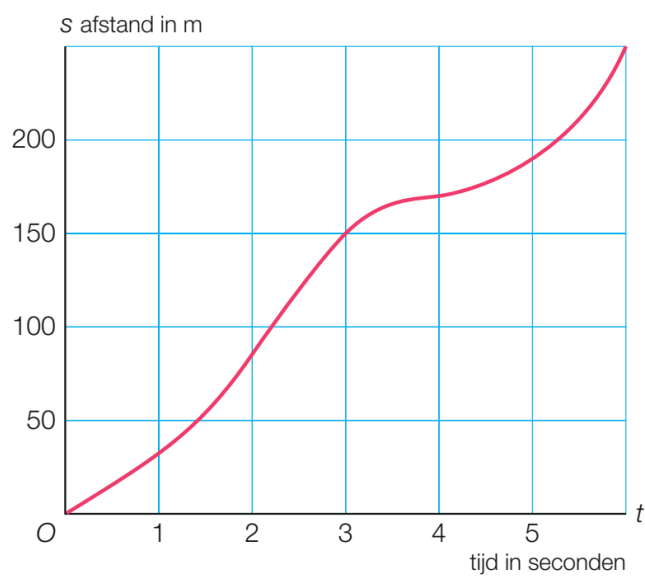
De huisarts beweert dat zij de afgelopen vijf jaar van haar 3000 patiënten 30% wel eens een keer doorverwezen heeft naar een specialist in het ziekenhuis. Haar assistent denkt dat dit percentage kleiner is en neemt een steekproef van 50 patiënten.

- f** Bereken de kans dat de assistent in deze steekproef minder dan 10 doorverwezen patiënten vindt, als de huisarts gelijk heeft.

Werkbladen

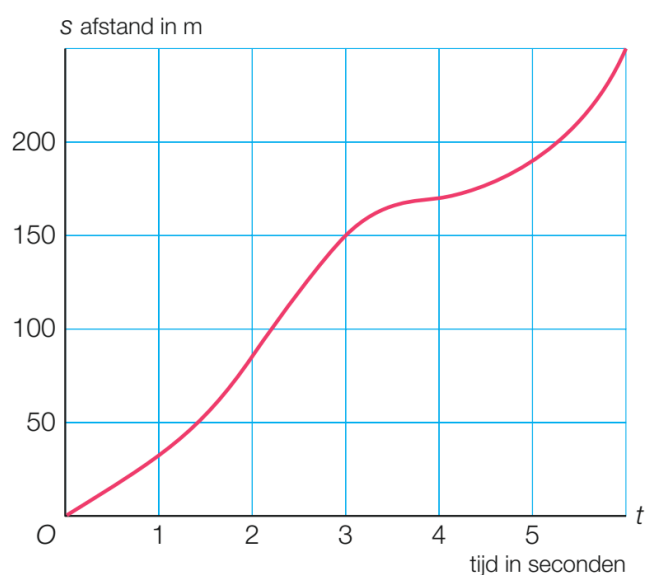
29 a, b

blz. 24



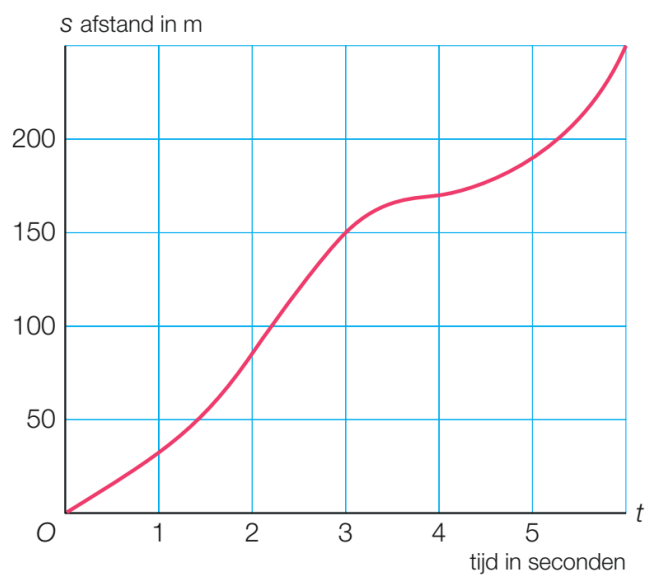
29 c

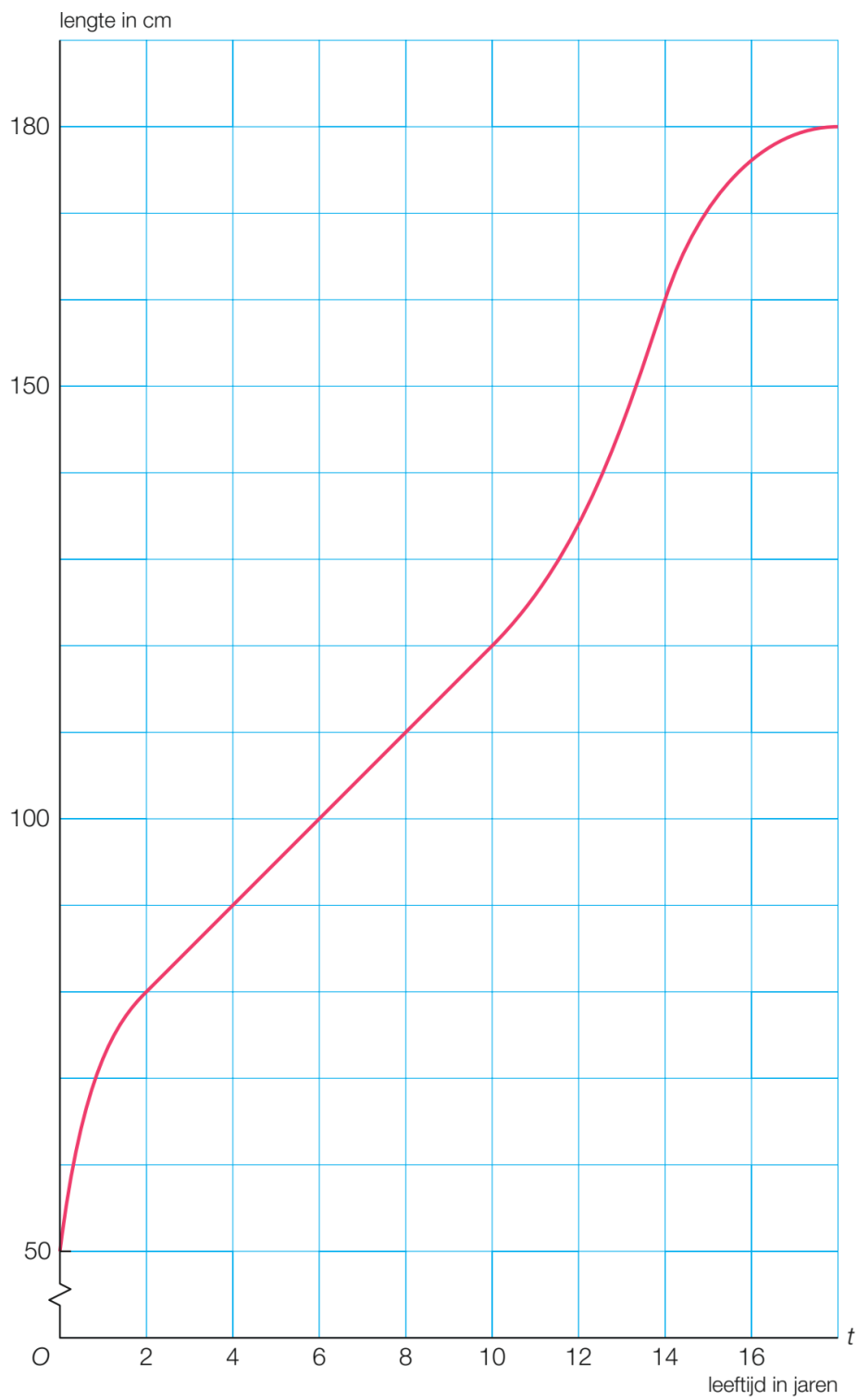
blz. 24

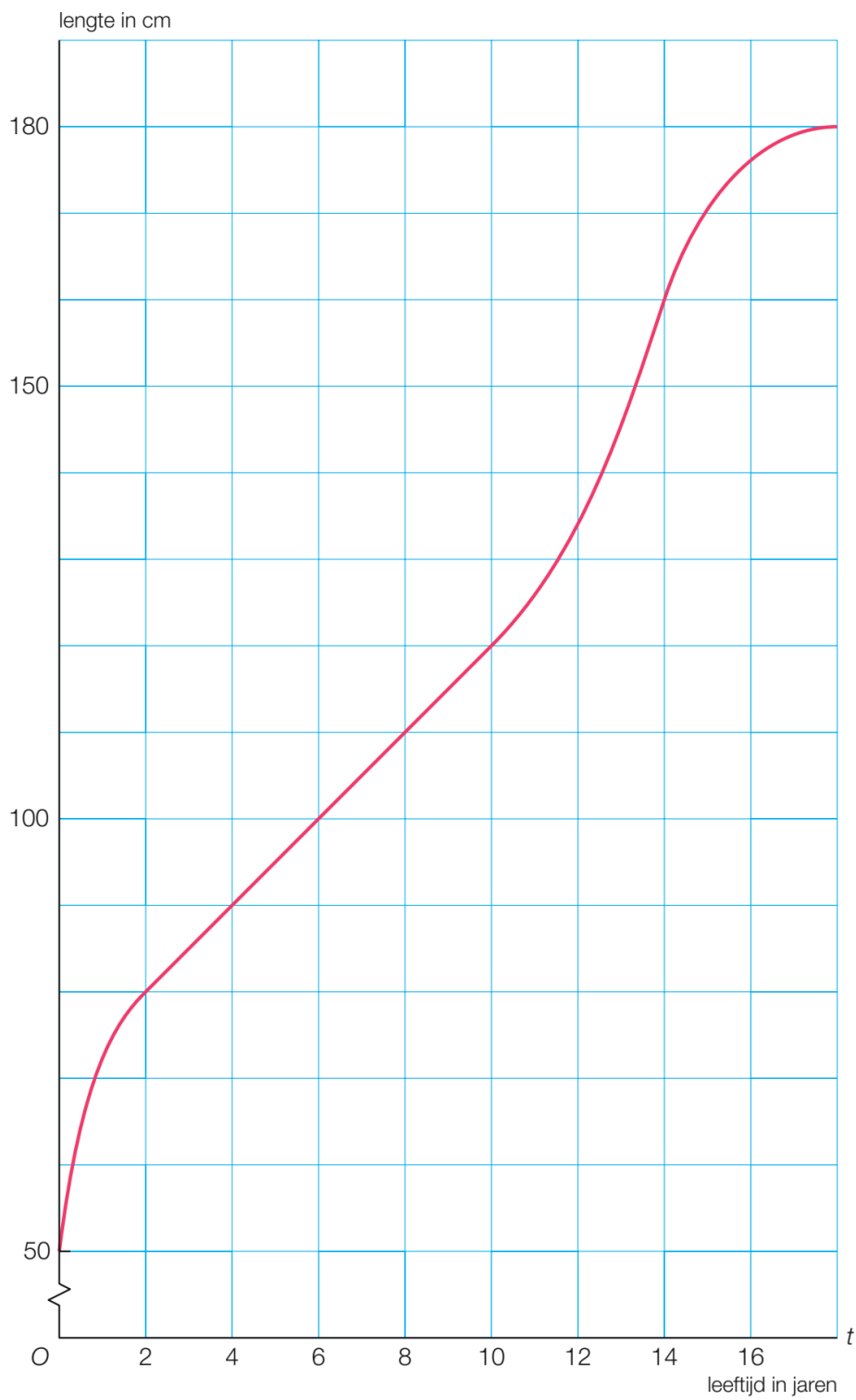


29 d

blz. 24

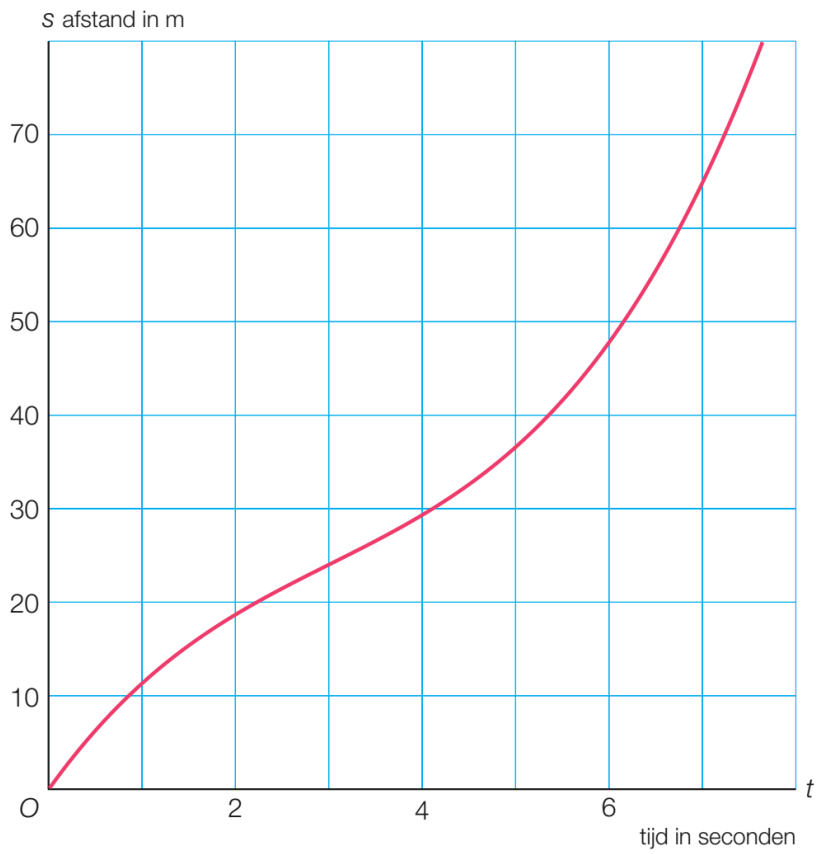




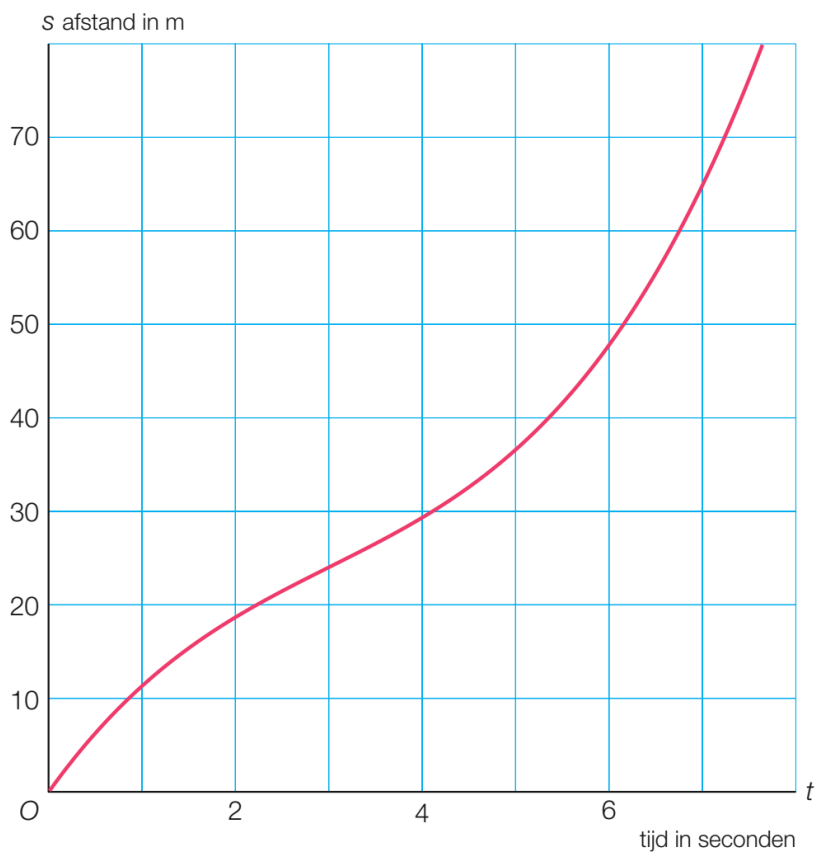


3 a, b

blz. 56

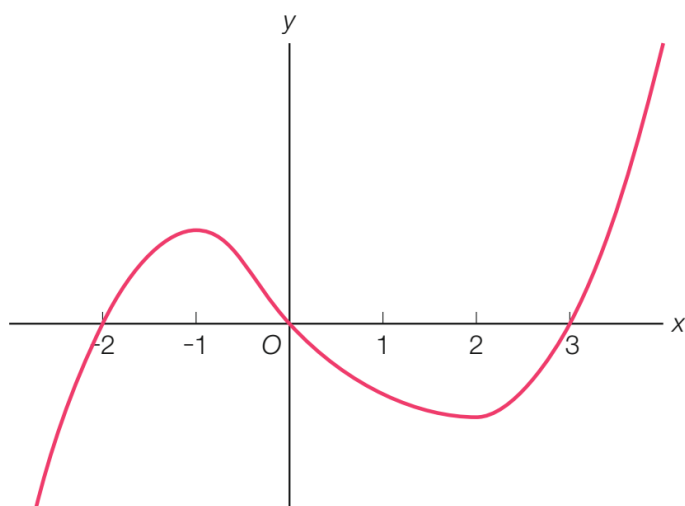
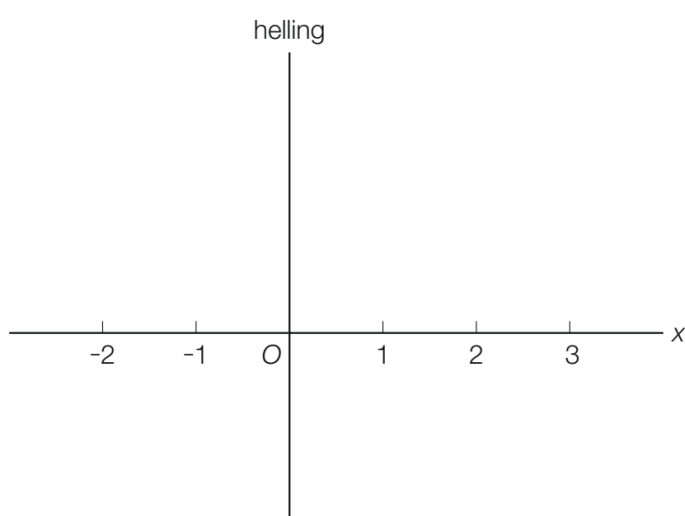
**3 c**

blz. 56



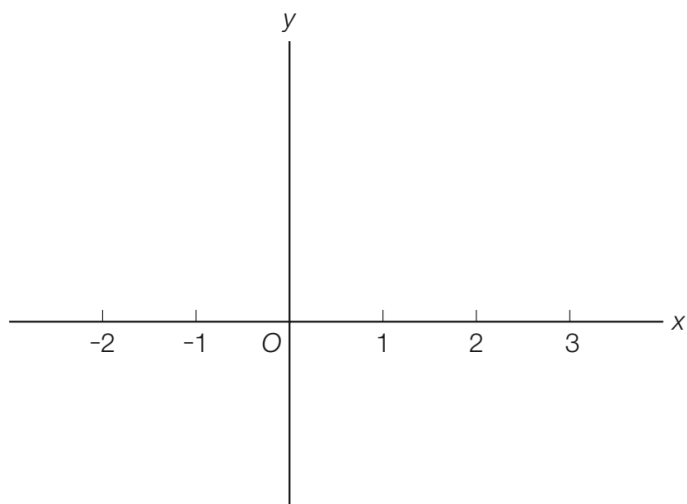
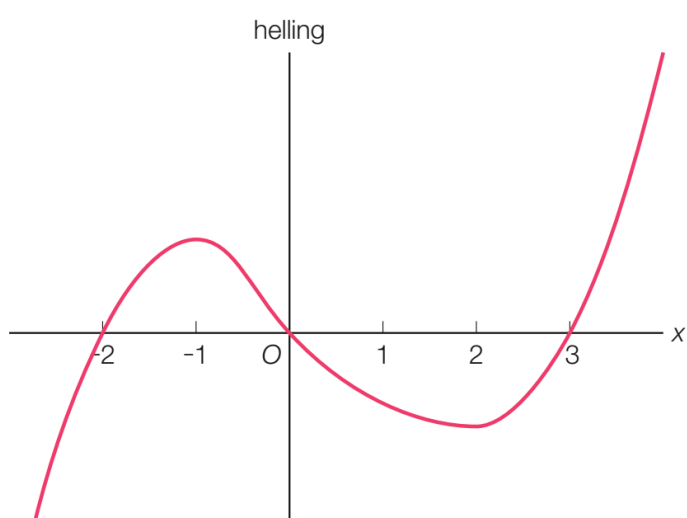
5 a

blz. 56



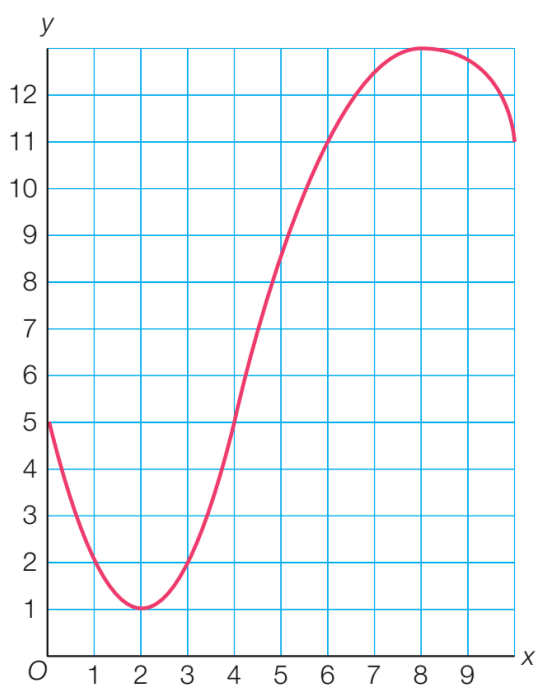
5 b

blz. 56



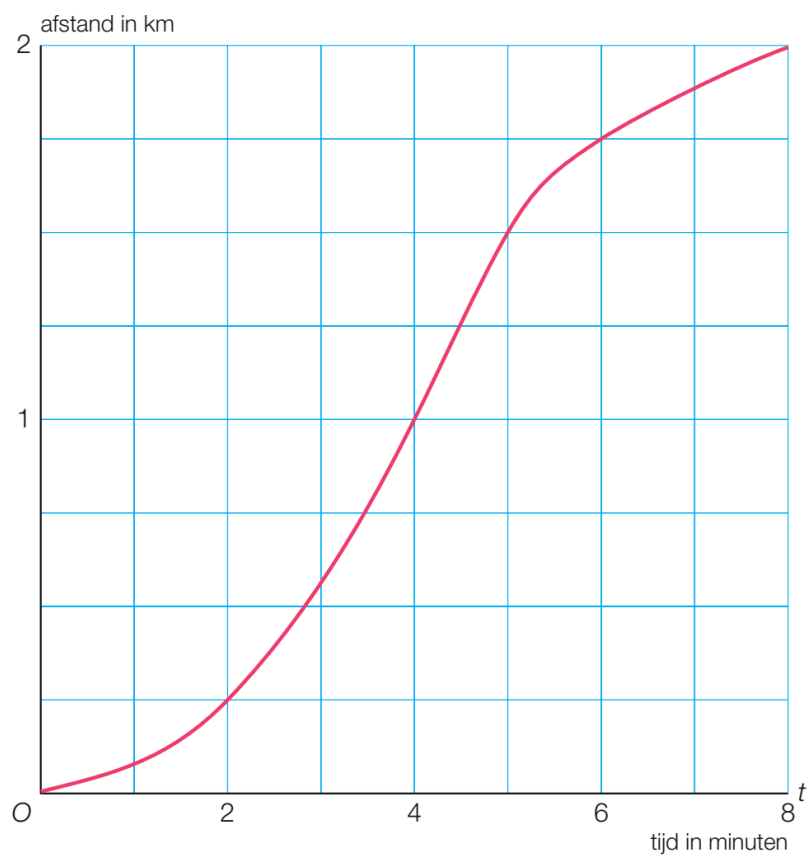
2

blz. 58



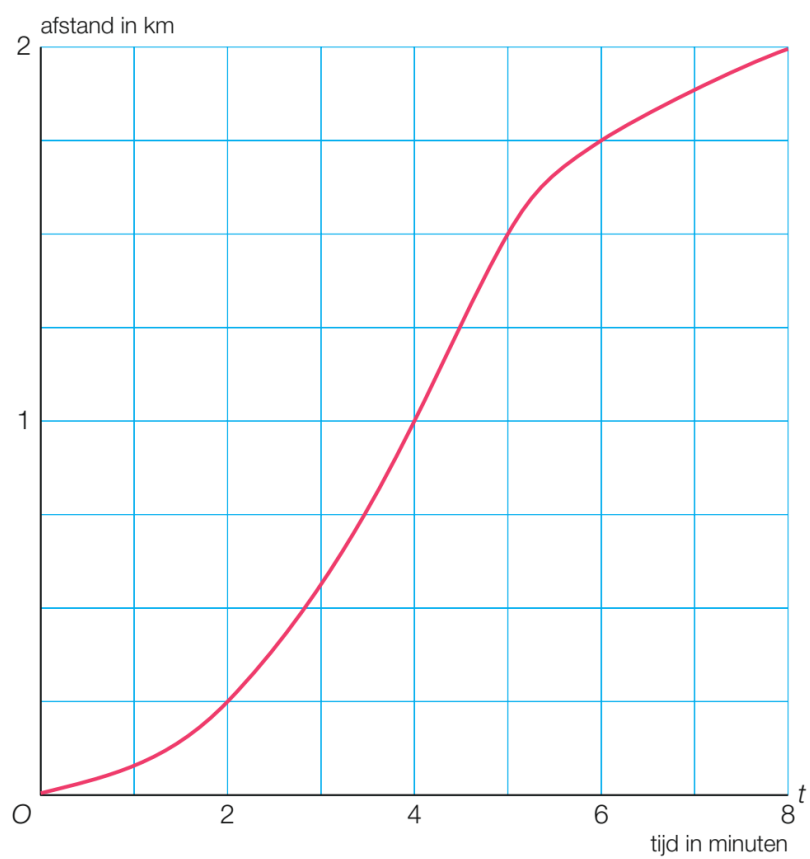
6 b, c

blz. 60



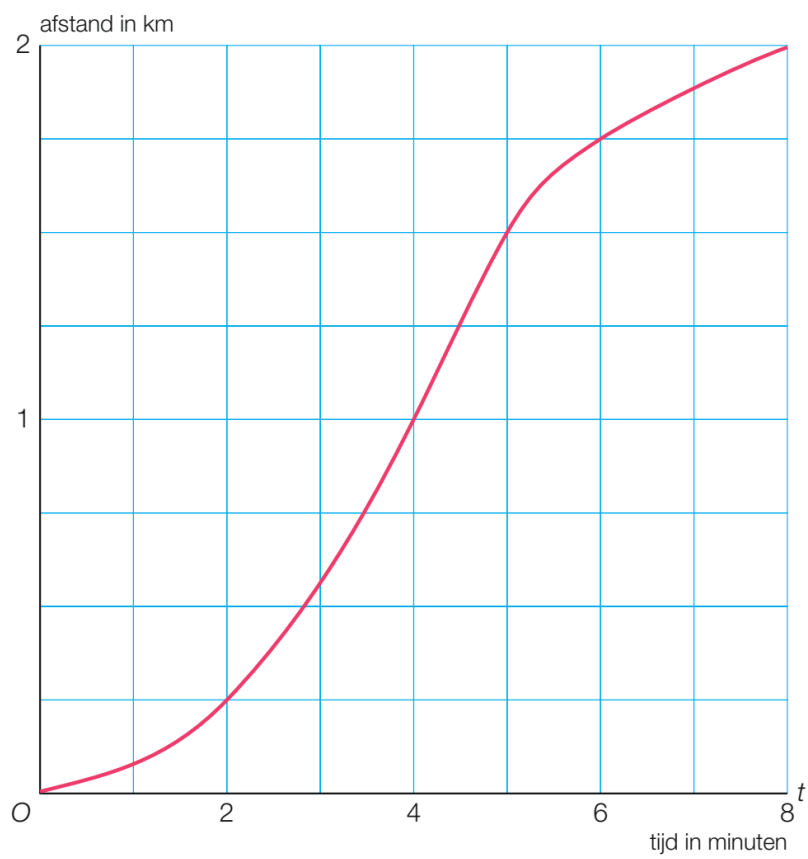
6 d

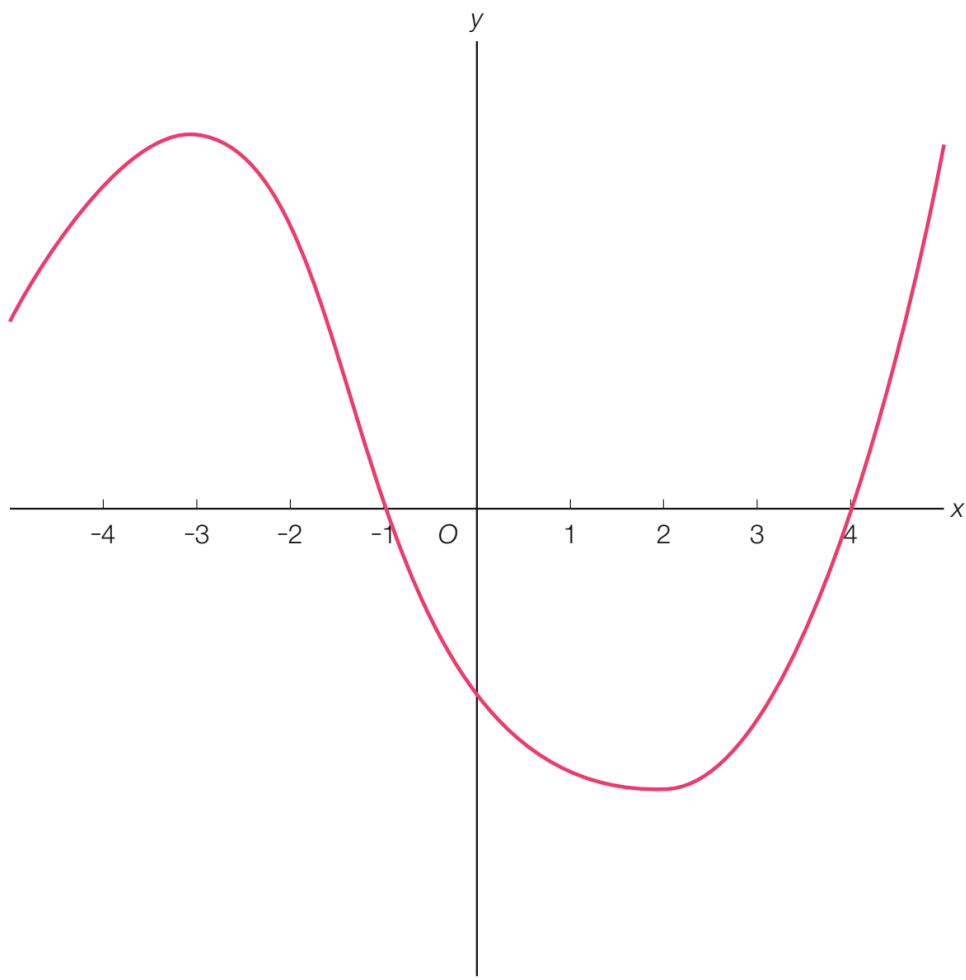
blz. 60



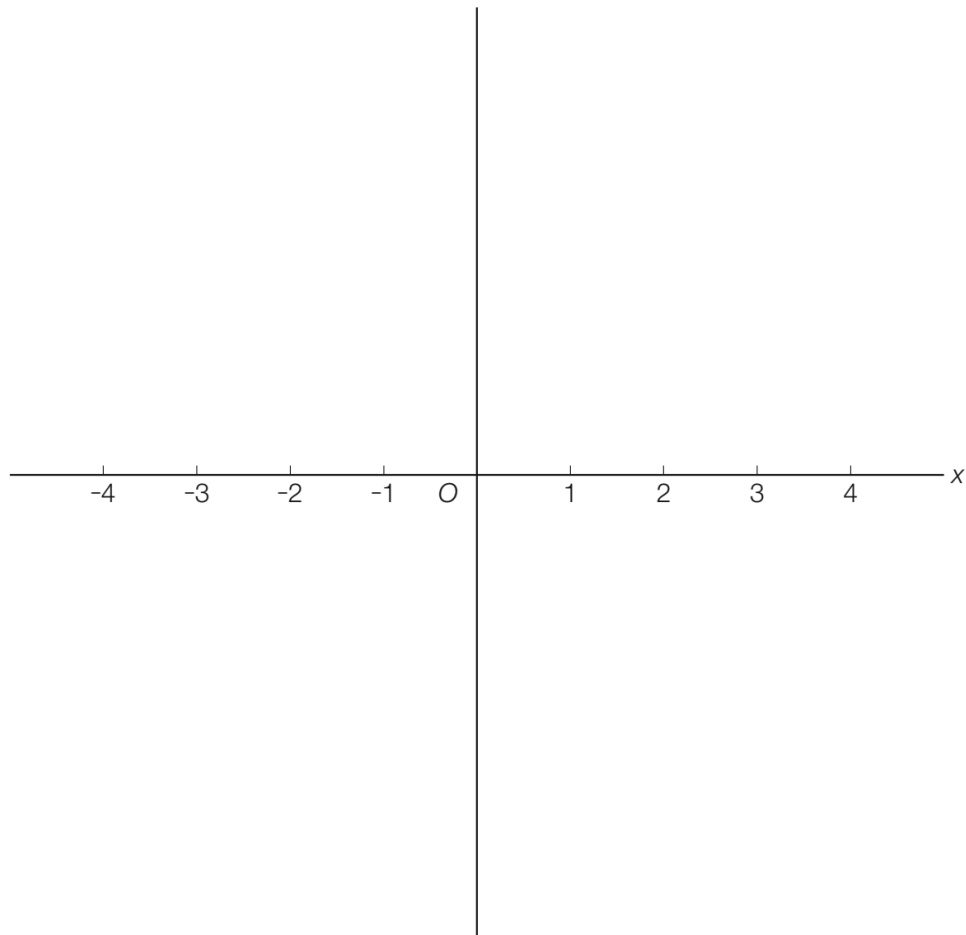
6**e**

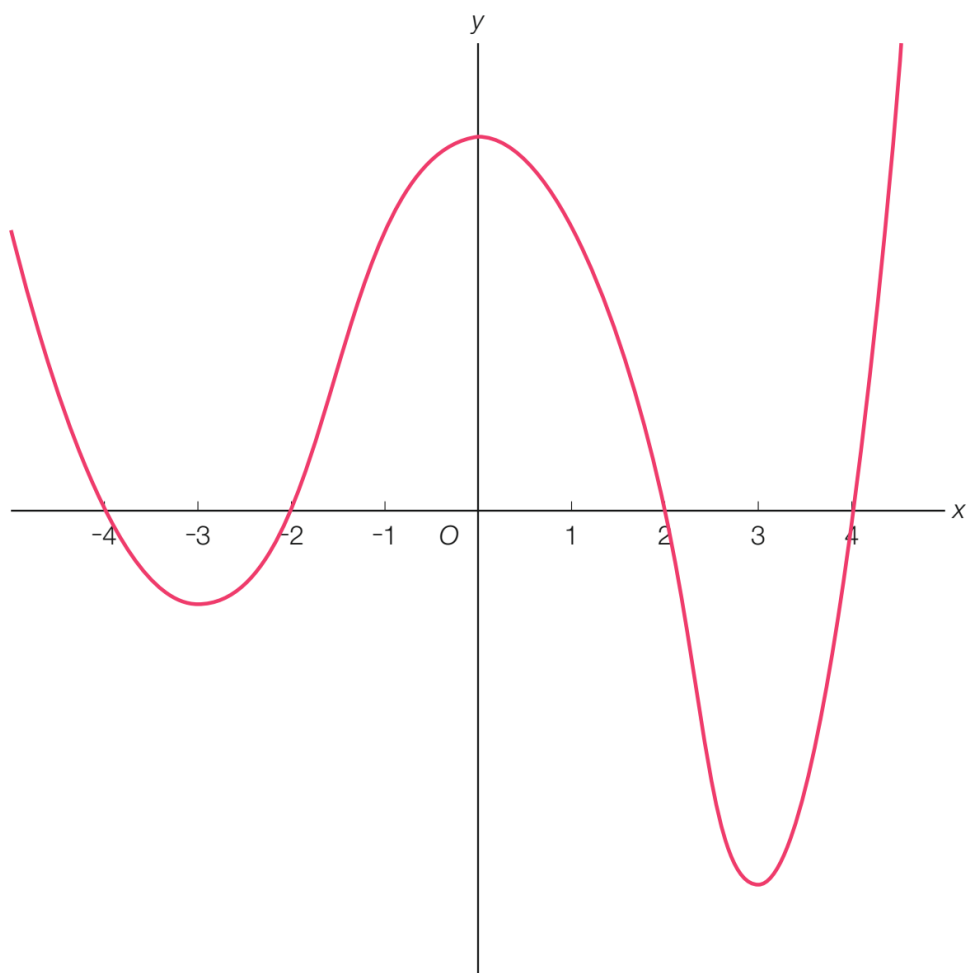
blz. 60



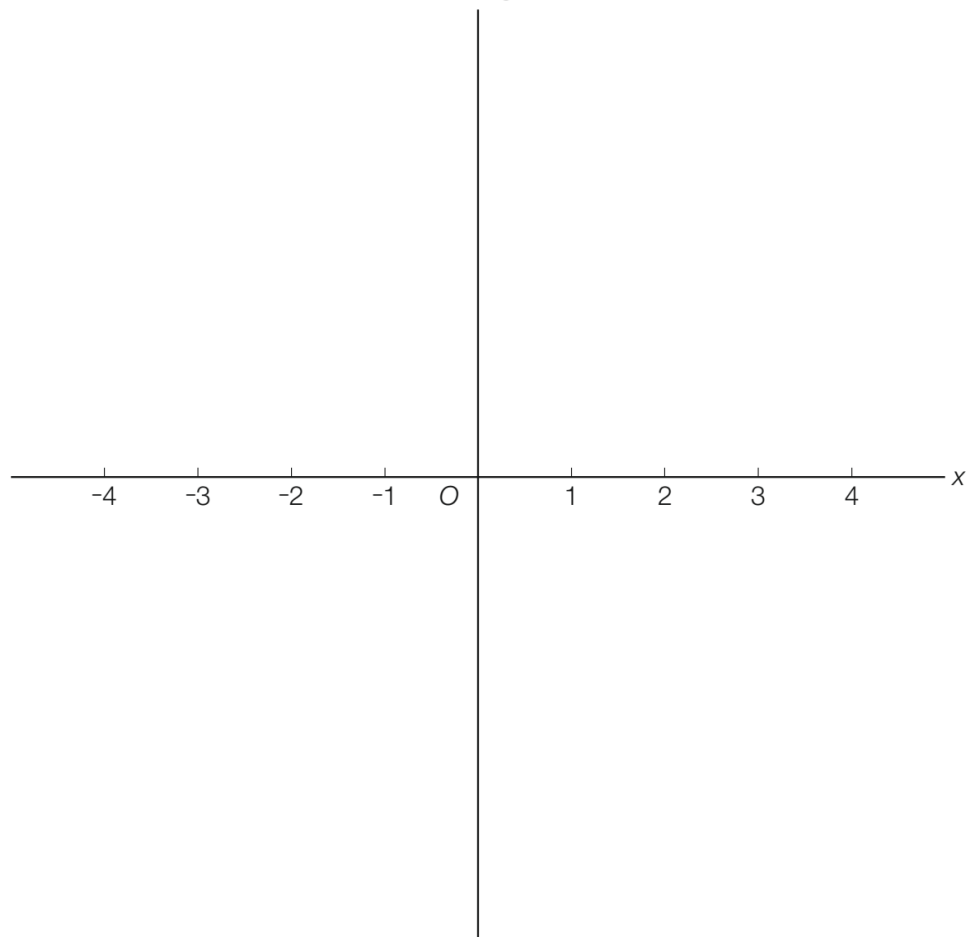


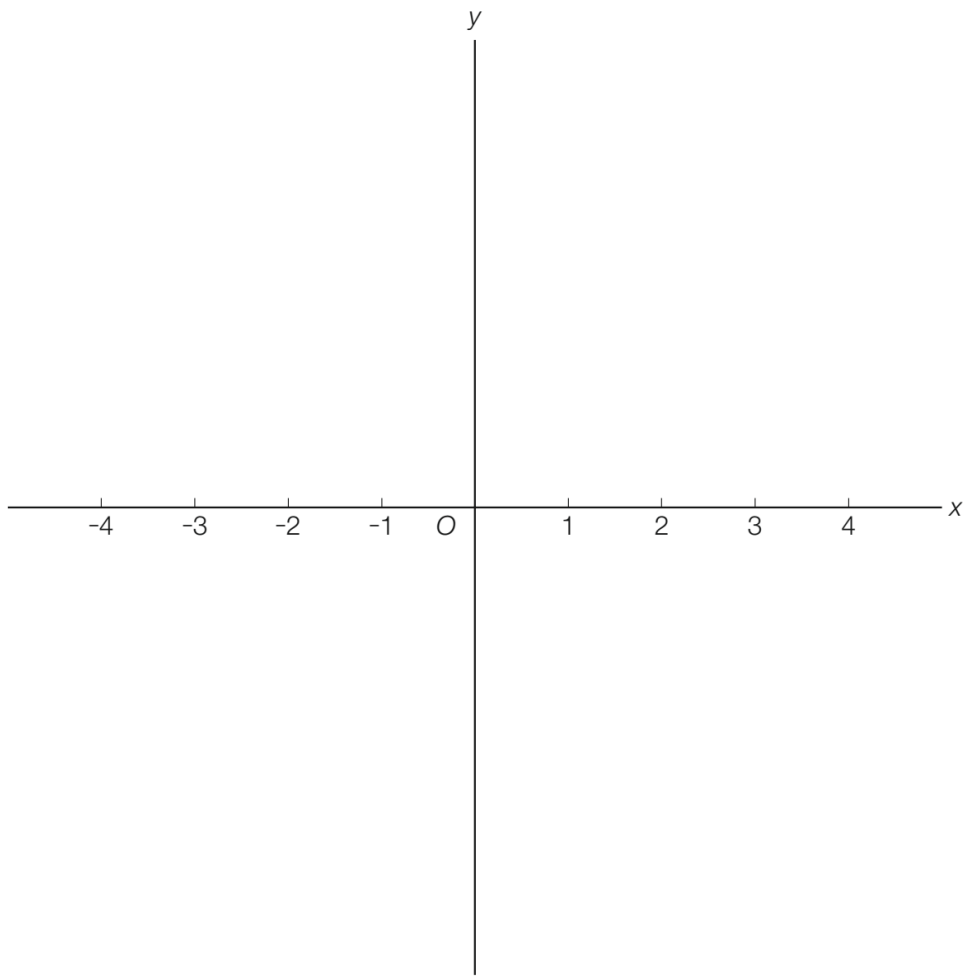
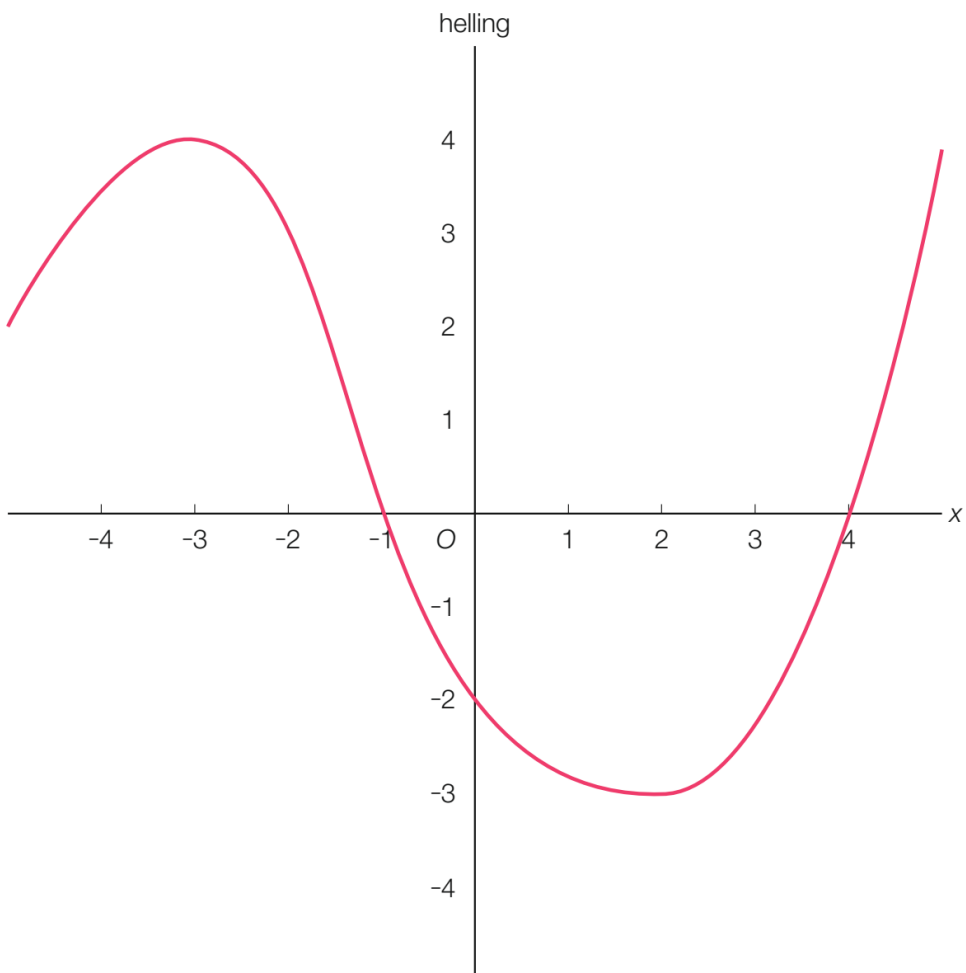
helling

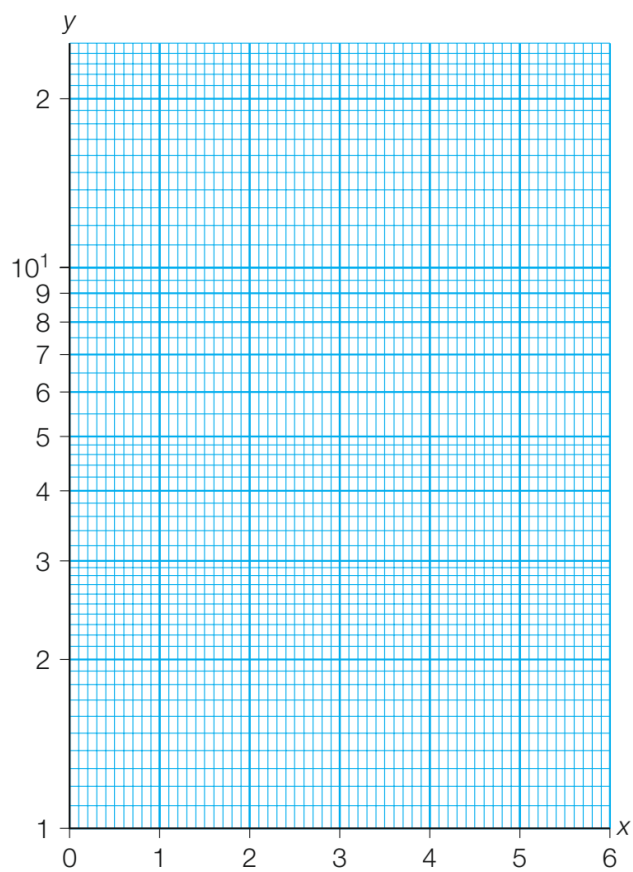


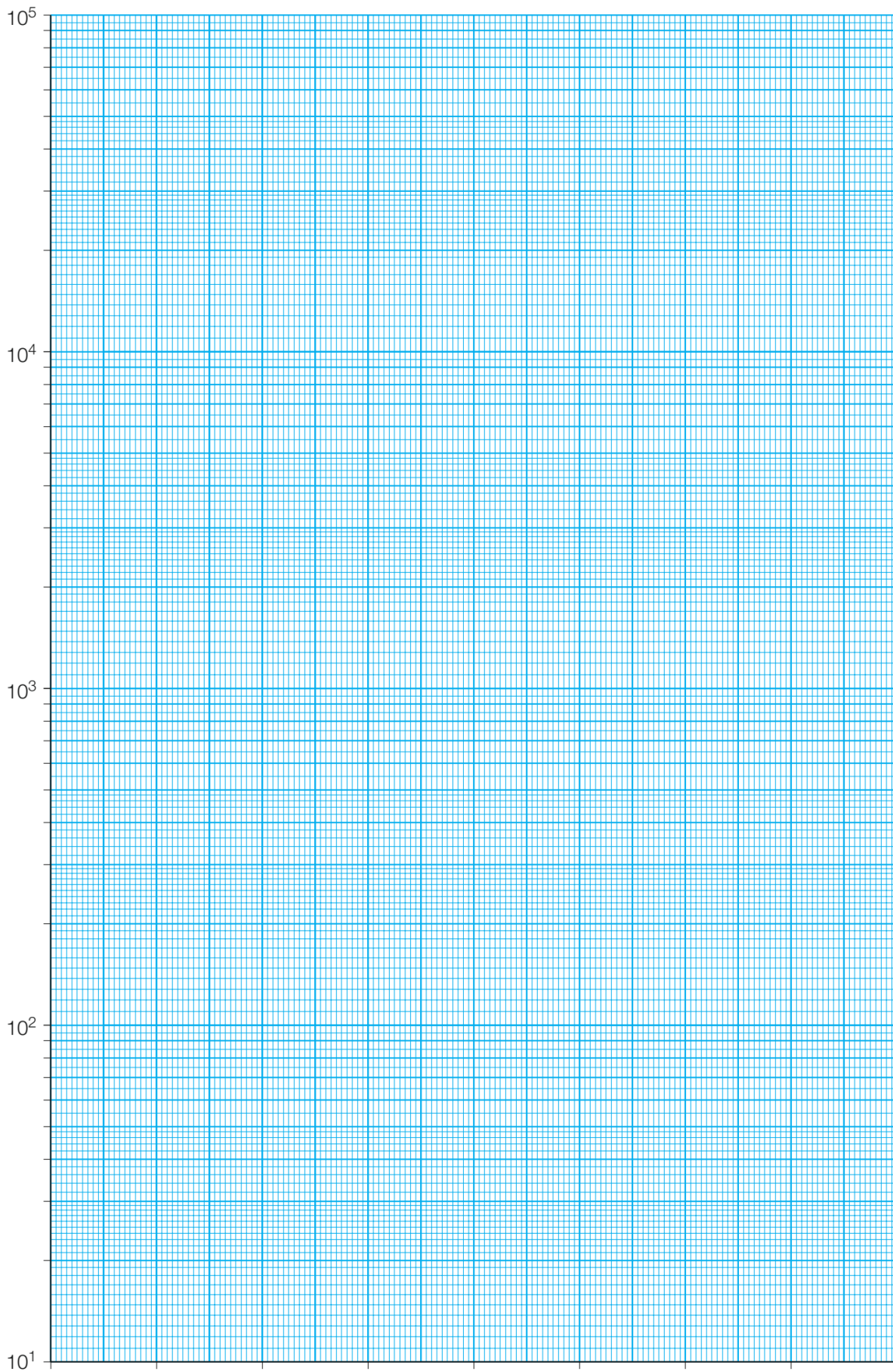


helling









Antwoorden Kennis- en vaardigheidentests

Hoofdstuk 8

1 a $\langle 3, 4 \rangle$ en $\langle 5, 5; 6 \rangle$ en $\langle 11, 12 \rangle$

b *

c $\frac{1}{2}$

d $-\frac{1}{2}$

2 *

3 a 9 m/s 14 m/s

b $t = 3$ 5 m/s

c twee *

4 a $2,0^\circ\text{C}$ per uur

b *

c *

5 a *

b *

6 a $f'(x) = 1,8x^2 - 2,6x$

b $N'(t) = -4t + 1$

c $K'(p) = 12p - 9$

7 $\frac{dK}{dp} = 24p^2 - 5q$

$\frac{dK}{dq} = 40q - 5p$

8 a $\frac{dy}{dx} = -\frac{6}{5x^7} + 32\frac{1}{2}x^5 \cdot \sqrt{x}$

b $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$

c $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{6 \cdot \sqrt[6]{x}} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{6}$

9 a $\frac{dy}{dx} = 72(3x - 1)^3 + 7$

b $\frac{dR}{dq} = \frac{150q^2 + 40}{\sqrt{5q^3 + 4q}}$

c $\frac{dA}{dq} = \frac{48}{(2 - 3q)^5}$

10 a 0,13 euro per stuk

b 0,25 euro per stuk

c 4349 euro

11 *

Hoofdstuk 9

1 a $\frac{1}{6}$

b $\frac{5}{6}$

c $\frac{5}{36}$

2 a	3	4	5
$P(A = a)$	0,318	0,372	0,311

3 -19 cent

4 a 0,894

b 0,243

5 a 0,170

b 0,038

6 a 3,14

b $n = 225$ en $p = 0,2$

7 a 89,4%

b 43,5%

8 154,2

9 a 49 minuten en 13 seconden

b 0,1%

- 10** a 6
b 0,327

Hoofdstuk 10

- 1** a $K = 2,00 \cdot 0,84^t$
b 1658,63 euro
c 2030

- 2** 2,7%

- 3** a 761%
b 1,3%
c 0,9%

- 4** $N = 2020 \cdot 0,928^t$

- 5** I: exponentieel $B = 240 \cdot 1,25^t$
II: lineair $N = 8t + 211$

- 6** a 4
b -3
c 2

- 7** a $x = 0,2 + 18,3 \cdot 3^y$
b $p = 2 + {}^2\log(3 - q)$

- 8** a 5
b 111,4 miljard kWh

- 9** a 13:00 uur
b 3200

- 10** a $N = 1,6 + 2,1 \cdot \log(x)$
b * 13

- 11** a $\frac{dy}{dx} = 17,5 e^{1,25x}$
b $\frac{dy}{dx} = 2526x \cdot e^{3x^2 - 2}$
c $\frac{dy}{dx} = 1400 e^{0,56x}$
d $\frac{dy}{dx} = 2450 \cdot \ln(10) \cdot 10^{7x+3}$
e $\frac{dy}{dx} = 7,92 \cdot \ln(8) \cdot 8^{1,44x}$
f $\frac{dy}{dx} = 1440x \cdot \ln(2,3) \cdot 2,3^{0,12x^2}$

- 12** $N = 1,49 - 2,17 \cdot \ln(t)$

Hoofdstuk 11

- 1** 6

- 2** 21,4%

- 3** a 0,077
b 0,2%
c 0,549

- 4** De gemiddelde oppervlakte wijkt niet significant af van 1,00 m².

- 5** a ja
b nee

- 6** ja

- 7** a 21 tot en met 39
b nee

- 8** a *
b nee

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen.
- De toets Ans, en fouten verbeteren.
- Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen.
- Decimaal getal omzetten in een breuk.

vwo A/C deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 17

Formules en grafieken

- Formules invoeren en grafieken plotten.
- Tabellen maken en de tabelinstelling veranderen.
- De opties snijpunt, nulpunt, maximum en minimum.

vwo A/C deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 33

Helling en hellinggrafiek

- De richtingscoëfficiënt van een raaklijn.
- Hellinggrafiek plotten.

vwo A deel 3
hoofdstuk 8
bladzijde 31

De binomiale verdeling

- Kansen van de vorm $P(X = k)$.
- Kansen van de vorm $P(X \leq k)$.
- Kansen van de vorm $P(X \geq k)$ en van de vorm $P(l \leq X \leq r)$.
- Grenzen aanvaardingsgebied berekenen.

vwo A deel 3
hoofdstuk 9
bladzijde 81 en
83
hoofdstuk 11
bladzijde 196

De normale verdeling

- Oppervlakten berekenen.
- Grenzen berekenen.

vwo A deel 3
hoofdstuk 9
bladzijde 89 en
91

Allerlei

- Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR.
-

Trefwoordenregister

A

aanvaardingsgebied 177
acceptatiegebied 177
afgeleide 37
 - functie 37
afnemende daling 10
afnemende stijging 10
alternatieve hypothese 176

B

beginwaarde 109
Bernoulli, Jacob 80
Bernoulli-experiment 78
beslissingsvoorschrift 175
binomiaal
 kansexperiment 79
binomiale toets 194
binomiale
 toevalsvariabele 79
binomiale verdeling 79, 97

C

centrale limietstelling 166
contante daling 10
contante stijging 10
cumulatieve kans 81
cumulatieve
 kansverdeling 81

D

dalend 9
daling
 afnemende - 10
 contante - 10
 toenemende - 10
data-snooping 181
differentiequotiënt 17
differentiëren 37
 - naar 42
 somregel voor het - 37
 verschilregel voor
 het - 37

d-notatie 42

dubbellogaritmisch
 papier 141

E

e 149
eenzijdige binomiale
 toets 194
eenzijdige normale
 toets 184
e-macht 150
enkelvoudige
 hypothese 190
Euler, Leonhard 151
exponentieel verband 124
exponentiële groei 109
extreme waarde 49

G

Galilei, Galileo 40
gemiddelde
 verandering 17
gesloten interval 9
groefactor 109
groeiformule 150
groeipercantage 109
groeisnelheid 150
grondtal van de
 logaritme 130

H

halveringstijd 113
helling van grafiek 22
helling van lijn 17
hellingfunctie 37
hellinggrafiek 26, 31

I

interval 9
 gesloten - 9
 open - 9

K

kansverdeling 71
 cumulatieve - 81
kettingfunctie 46
kettingregel 46
kritieke gebied 177

L

lineair verband 124
linkszijdige binomiale
 toets 194
linkszijdige normale
 toets 185
ln 152
logaritme 130
logaritmisch papier 138
logaritmische
 schaalverdeling 137

M

mislukking 78
Moivre, Abraham de 166

N

natuurlijke logaritme 152
normale toets 180
nulhypothese 176

O

open interval 9
overschrijdingskans 180

R

raaklijn 22
raken 22
rechtszijdige binomiale
 toets 194
rechtszijdige normale
 toets 185
regels voor de afgeleide 37
rekenregels voor
 logarithmen 145, 153

S

samengestelde functie 46
schakel 46
significant afwijken 178
significantieniveau 177
som van normaal verdeelde
toevalsvariabelen 165
somregel voor het
differentiëren 37
standaardafwijking
van binomiale
toevalsvariabele 85
stapgrootte 11
stijgend 9
stijging
afnemende - 9, 10
constante - 10
toenemende - 9, 10
succes 78

T

ten onrechte 175
toenamediaagram 11
toenemende daling 9, 10
toenemende stijging 9, 10

toets

normale - 180
eenzijdige
binomiale - 194
eenzijdige
normale - 184
linkszijdige
binomiale - 194
linkszijdige
normale - 185
rechtszijdige
binomiale - 194
rechtszijdige
normale - 185
tweezijdige
binomiale - 199
tweezijdige
normale - 184
toetsen 180
toetsen van
hypothesen 177, 180
toevalsvariabele 68
tweezijdige binomiale
toets 199
tweezijdige normale
toets 184

V

verband
exponentieel - 124
lineair - 124
verdubbelingstijd 112
verschilregel voor het
differentiëren 37
verwachtingswaarde 74
verwachtingswaarde van
binomiale
toevalsvariabele 85
verwerpingsgebied 177

W

wortel- n -wet voor
steekproef van
lengte n 169
wortel- n -wet voor
steekproef-
gemiddelde 171

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Oscar Casander, Arnhem

Illustraties: Richard van de Pol, Tilburg

Technisch tekenwerk: Integra Software Services,
India

Beeldresearch: B en U International Picture
Service, Amsterdam

Foto's

Shutterstock: p. 6-7, 33, 58, 61, 64-65, 73 b, 76,
78, 80 o, 95, 96, 97, 98, 99, 101 m, 104, 106-107,
110, 111, 114, 116, 123, 126, 128, 140, 141, 159,
162-163, 165, 182, 186, 189 o, 198, 199, 201,
202, 204, 206, 208

Mark Haneveld, Lochem: p. 19, 70, 86, 122, 137,
155, 160

Imageselect: p. 40, 80 b, 151, 166

Sabine de Waal, Hendrik-Ido-Ambacht: p. 52,
119, 172

Getty Images: p. 62, 63, 85, 189 b

ANP / Lex van Lieshout: p. 105

Wikimedia Commons / Thomas Nguyen: p. 144

Meester van Catharina van Kleef / Pontificale
ecclesiae beatae Mariae Trajectensis /

Universiteitsbibliotheek Utrecht: p. 188

ANP / Patricia Rehe: p. 195

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch
ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of
andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff
Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs,
Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via
www.noordhoff.nl/klantenservice.

*De informatie in deze uitgave is uitsluitend
bedoeld als algemene informatie.*

*Aan deze informatie kunt u geen rechten of
aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontlenen.*



Wij maken bij Noordhoff sinds 2009 bewust keuzes om onze impact op het klimaat te verkleinen. We volgen de klimaatdoelen van het Klimaatakkoord van Parijs. Scan de QR-code voor meer informatie over ons duurzaamheidsbeleid.

Zo is dit product gemaakt van FSC®-gecertificeerd papier en ander gecontroleerd materiaal. Wij gebruiken plantaardige inkt en onze lijmen zijn op waterbasis en afbreekbaar. Hierdoor is dit product goed te recyclen na gebruik.



0 / 26

© 2026 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06463-1

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten