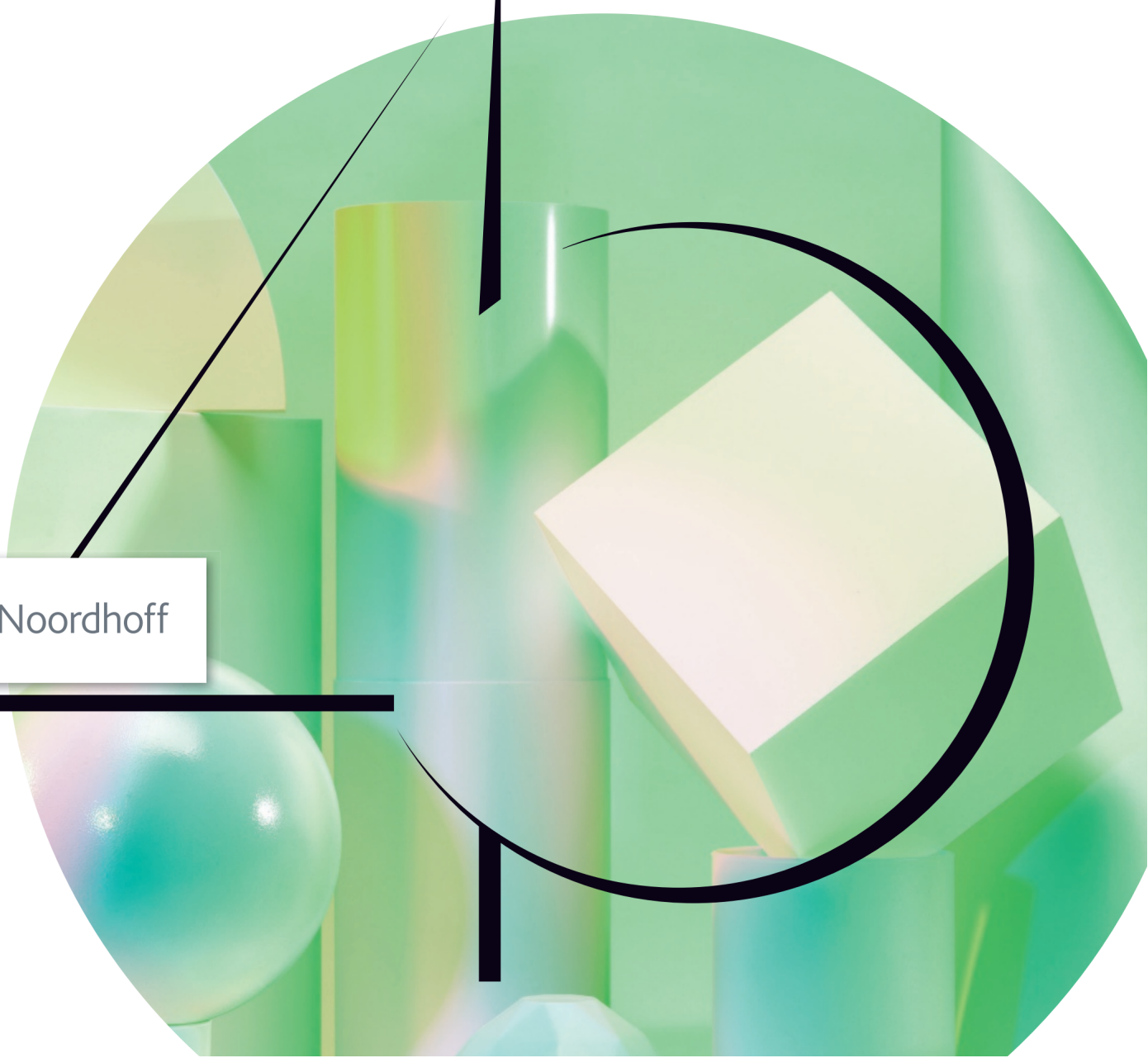


getal & ruimte

A



Noordhoff



Getal & Ruimte

Uitwerkingen vwo A deel 3

Dertiende editie, 2026

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd
M. Daems

Inhoud

8	Differentiaalrekening	4
9	Kansverdelingen	44
10	Exponenten en logaritmen	67
11	Het toetsen van hypothesen	99

8 Differentiaalrekening

8.1 Toenamediagrammen en differentiequotiënten

Bladzijde 8

- V1** **a** $0 < x < 6$
b $x \geq 7$

Bladzijde 9

- V2** **a** $1 \leq x \leq 4,5$
b $x < 2$

- 1** Bij deel I daal je steeds sneller en bij deel II daal je steeds minder snel.

Bladzijde 10

- 2** **a** toenemend stijgend op $\langle 0, 2 \rangle$ en op $\langle 6, 8 \rangle$
 afnemend stijgend op $\langle 2, 3 \rangle$ en op $\langle 8, 10 \rangle$
b toenemend dalend op $\langle 3, 5 \rangle$
 afnemend dalend op $\langle 5, 6 \rangle$
- 3** **a** constant stijgend op $\langle 0, 3 \rangle$
 afnemend stijgend op $\langle 3, 4 \rangle$
 toenemend dalend op $\langle 4, 5 \rangle$
 afnemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$
 toenemend stijgend op $\langle 7, 10 \rangle$
b Tijdens het klimmen neemt de snelheid van de fietser af. Dus op $\langle 4, 7 \rangle$.

Bladzijde 11

- 4** **a** Bij een afname is ΔN negatief.
b

interval	$[0, 2]$	$[2, 4]$	$[4, 6]$
ΔN	25	7	-12

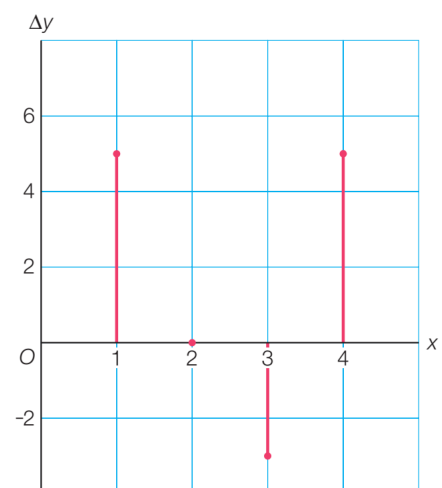
c Bij elk interval in de tabel geldt $\Delta t = 2$.

Bladzijde 12

5

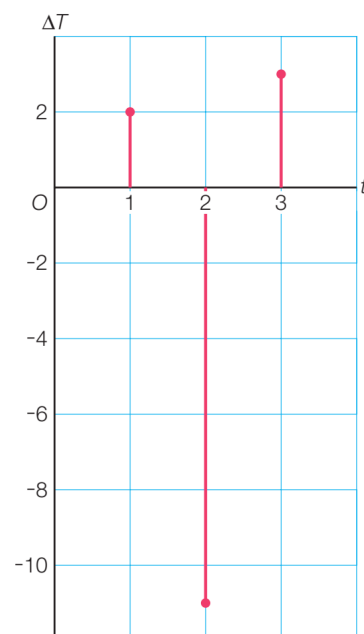
interval	Δy
$[0, 1]$	5
$[1, 2]$	0
$[2, 3]$	-3
$[3, 4]$	5

Zie de figuur.



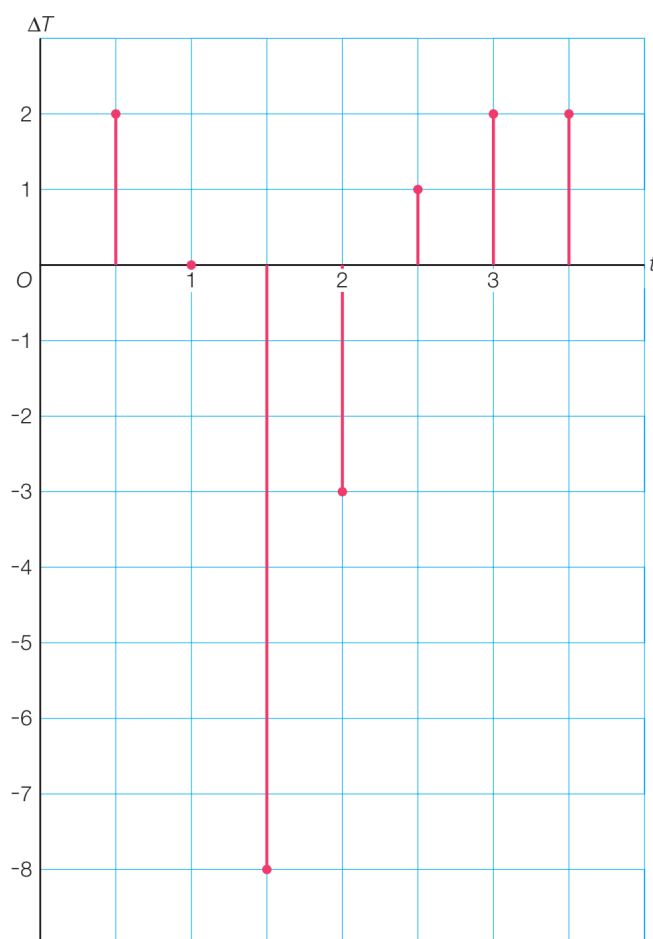
6 a	interval	ΔT
	$[0, 1]$	2
	$[1, 2]$	-11
	$[2, 3]$	3

Zie de figuur.



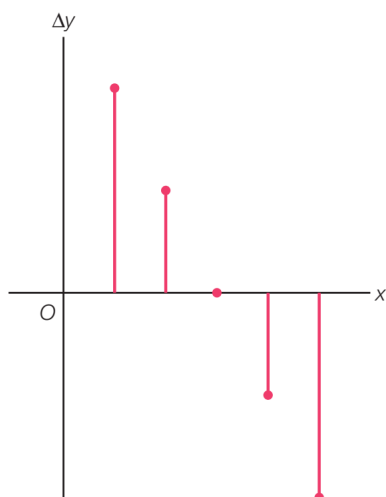
b	interval	ΔT
	$[0; 0,5]$	2
	$[0,5; 1]$	0
	$[1; 1,5]$	-8
	$[1,5; 2]$	-3
	$[2; 2,5]$	1
	$[2,5; 3]$	2
	$[3; 3,5]$	2

Zie de figuur.

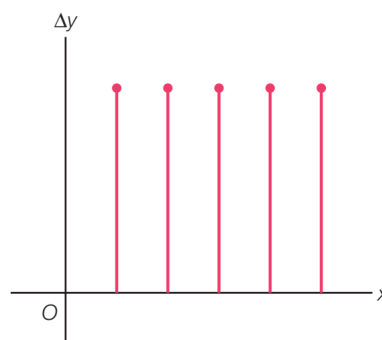


- c** In de toenamediagrammen zie je dat er sprake is van toename (stijging), vervolgens van afname (daling) en vervolgens weer van toename (stijging). Bij een overgang van stijgend naar dalend of dalend naar stijgend is er sprake van een top. De grafiek heeft dus minstens twee toppen.

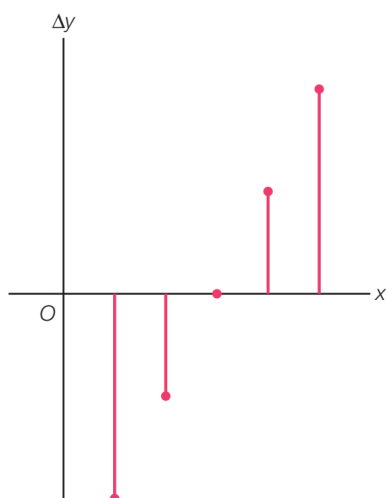
7 a bijvoorbeeld



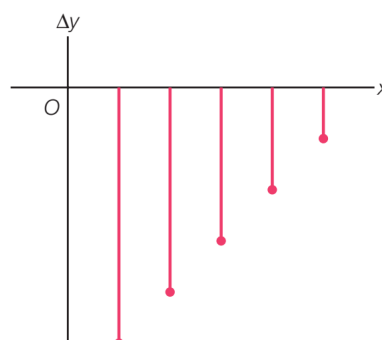
c bijvoorbeeld



b bijvoorbeeld



d bijvoorbeeld



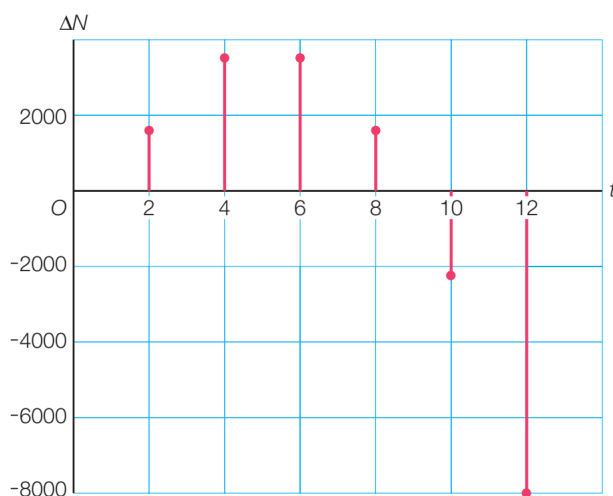
Bladzijde 13

- 8** Bij A hoort III, want tussen 0 en 2 afnemend stijgend en daarna dalend.
 Bij B hoort I, want tussen 0 en 2 afnemend dalend en daarna stijgend.
 Bij C hoort II, want tussen 0 en 3 constant stijgend, dan dalend en daarna weer stijgend.

- 9 a** Toenemend stijgend, afnemend stijgend en toenemend dalend.

interval	ΔN
[0, 2]	1600
[2, 4]	3520
[4, 6]	3520
[6, 8]	1600
[8, 10]	-2240
[10, 12]	-8000

Zie de figuur.

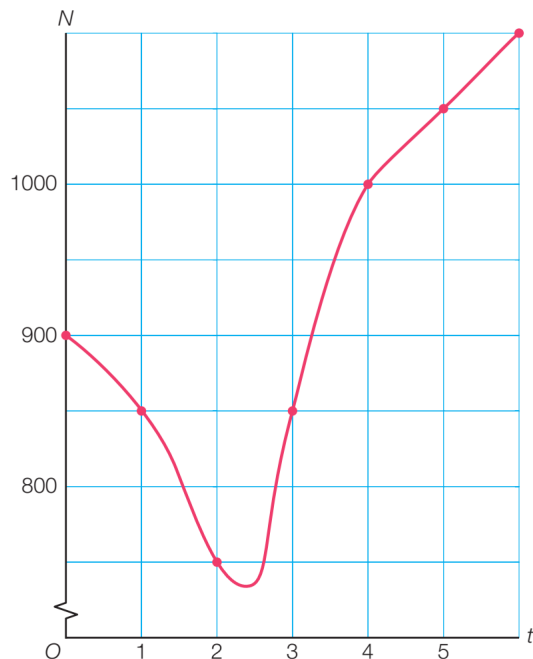


- 10 a** Bij 12:00 uur hoort $t = 4$ en bij 14:00 uur hoort $t = 6$. Op $[4, 6]$ geldt $\Delta T = 4$, dus de temperatuur om 14:00 uur was $20 + 4 = 24^\circ\text{C}$.
b Op $[6, 8]$ geldt $\Delta T = -1$, dus de temperatuur om 16:00 uur was $24 - 1 = 23^\circ\text{C}$.
 Op $[8, 10]$ geldt $\Delta T = -5$ en op $[10, 12]$ geldt $\Delta T = -2$, dus de temperatuur om 20:00 uur was $23 - 5 - 2 = 16^\circ\text{C}$.

- c Op $[0, 2]$ geldt $\Delta T = 3$ en op $[2, 4]$ geldt $\Delta T = 5$, dus de temperatuur om 8:00 uur was $20 - 5 - 3 = 12^\circ\text{C}$.

Bladzijde 14

- 11 Ja, dat kan. Je hebt dan bijvoorbeeld de volgende grafiek.

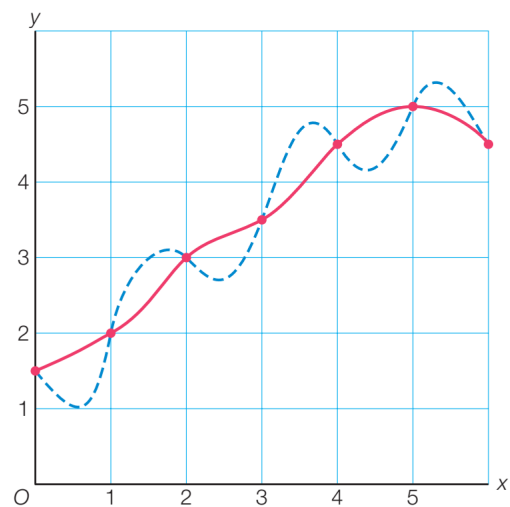


Bladzijde 15

- 12 a, b

x	y
0	1,5
1	2
2	3
3	3,5
4	4,5
5	5
6	4,5

Zie de rode grafiek.

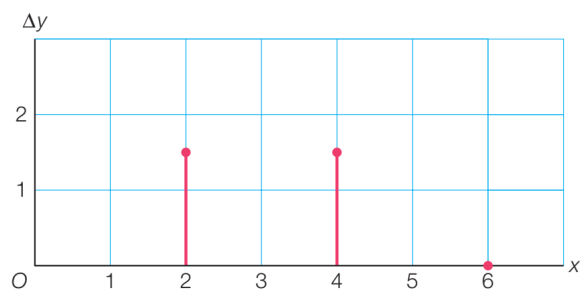


- b Alleen de punten $(0; 1,5)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, ... liggen vast. Elke grafiek door deze punten is mogelijk. Zie bijvoorbeeld de blauwe grafiek.

c

interval	Δy
$[0, 2]$	1,5
$[2, 4]$	1,5
$[4, 6]$	0

Zie de figuur.



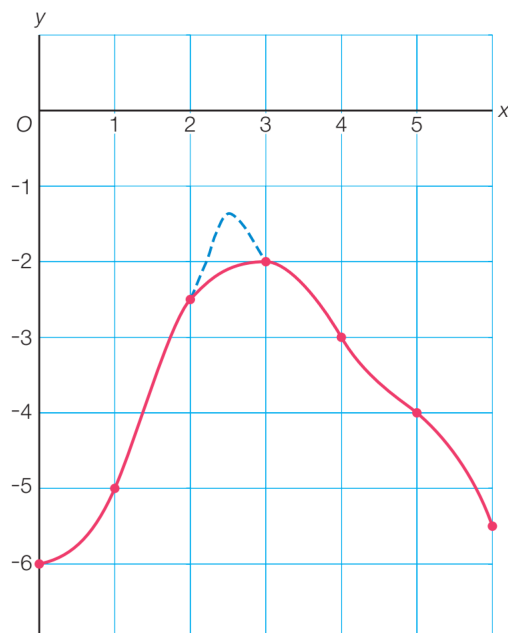
13 a

x	y
0	-6
1	-5
2	-2,5
3	-2
4	-3
5	-4
6	-5,5

+1
+2,5
+0,5
-1
-1
-1,5

Zie de rode grafiek.

- b** Dit maximum kan optreden bij $x = 2,5$. Zie het gestippelde stuk in de grafiek van vraag a. Het maximum kan niet optreden bij $x = 1,5$, want er is al een maximum tussen $x = 2$ en $x = 4$ en er is gegeven dat er maar één maximum is.

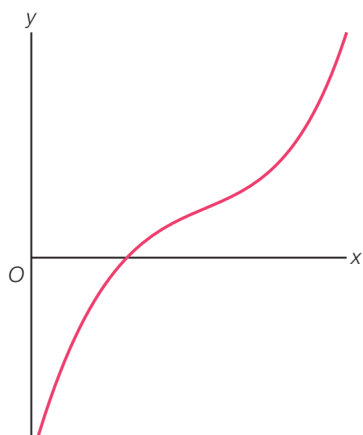


14

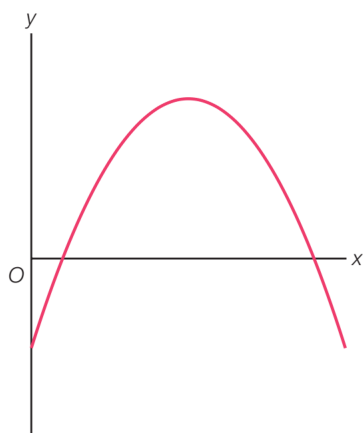
- a** constant dalend
b afnemend stijgend
c afnemend dalend
d toenemend dalend

15

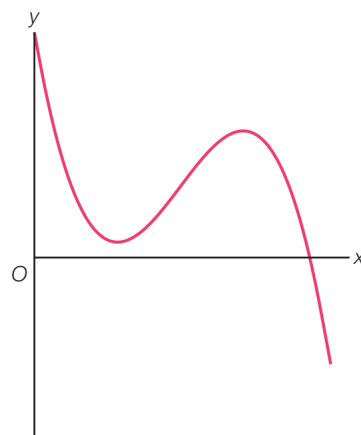
- a** bijvoorbeeld



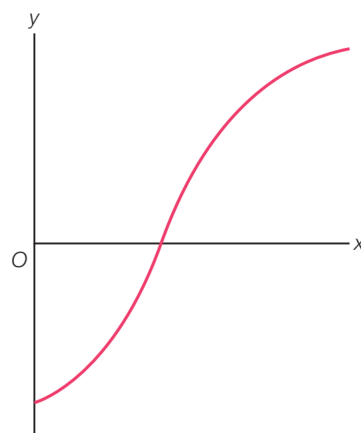
- b** bijvoorbeeld



- c** bijvoorbeeld



- d** bijvoorbeeld



Bladzijde 16

- 16 a** Om 17:00 uur stonden er $110 - 10 - 35 = 65$ fietsen.
Om 9:00 uur stonden er $110 - 25 - 15 + 15 - 40 + 40 + 20 = 105$ fietsen.
- b** Tussen 10:00 en 11:00 uur is er netto een afname van 40.
Als 30 personen een fiets hebben neergezet, dan zijn er dus 70 fietsen meegenomen.

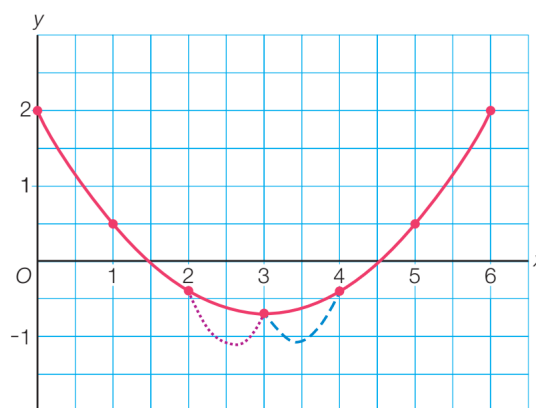
- 17** Stel er zitten om 15:00 uur x mensen op het terras. Je krijgt dan de volgende tabel.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
N	x	$x - 20$	$x - 10$	$x - 40$	$x - 30$	x	$x - 25$	$x - 35$
		-20	$+10$	-30	$+10$	$+30$	-25	-10

Omdat op alle tijdstippen moet gelden dat N minstens 0 is, moet x tenminste 40 zijn.
Dus om 15:00 uur zaten er minstens 40 mensen op het terras.

- 18** Omdat je de waarden van x wilt weten, maakt het niet uit bij welke y -waarde je begint. Kies bijvoorbeeld $y = 2$ bij $x = 0$.

x	y
0	2
1	0,5
2	-0,4
3	-0,7
4	-0,4
5	0,5
6	2



In de getekende rode grafiek treedt het minimum op bij $x = 3$. Verder zijn er twee andere mogelijkheden voor het minimum getekend. Omdat gegeven is dat de grafiek één minimum heeft, kan dit overal op $(2, 4)$ optreden.

- 19** Stijn vergeet rekening te houden met de lengten van de perioden. In de periode 1840-1940 bijvoorbeeld is de toename slechts $\frac{5,8}{100} = 0,058$ miljoen inwoners per jaar en dat is minder dan in de periode 1940-1970 met $\frac{4,2}{30} = 0,14$ miljoen inwoners per jaar.

Bladzijde 18

- 20 a** Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 1}{3 - 1} = 2$.
- b** Op $[4, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 6}{6 - 4} = -1,5$.
- Dat $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ negatief is, betekent dat er sprake is van een afname.
- c** Op $[2, 7]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 3}{7 - 2} = -0,2$.
- d** Bijvoorbeeld $[3, 5]$ of $[2, 6]$.
- e** Bijvoorbeeld $[0, 2]$, want $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 0}{2 - 0} = 1,5$.

- 21 a** Op $[0, 10]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{2250 - 250}{10 - 0} = 200$.

De gemiddelde toename gedurende de eerste tien dagen is 200 fruitvliegjes per dag.

- b** Op $[5, 8]$ is de grafiek steiler dan op $[10, 14]$.
- c** Het grootst op $[4, 8]$ en het kleinst op $[0, 4]$.

Bladzijde 19

22 a Op $[9, 13]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 800}{13 - 9} = 200$ auto's per uur.

b Op $[12, 17]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 2000}{17 - 12} = -80$.

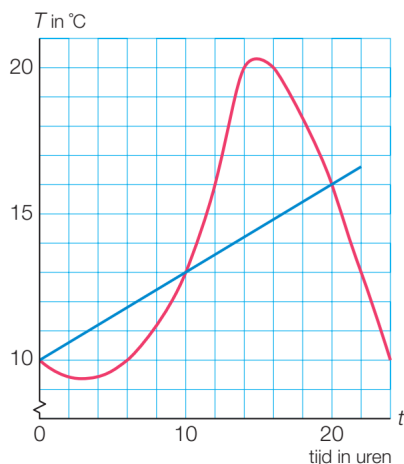
Dus de gemiddelde afname is 80 auto's per uur.

c Bijvoorbeeld $[10, 12]$, omdat $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{2000 - 1600}{12 - 10} = 200$.

23 a Op $[6, 10]$ is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{13 - 10}{10 - 6} = 0,75$ °C per uur.

Op $[9, 14]$ is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{20 - 12}{14 - 9} = 1,6$ °C per uur.

b Teken de lijn door $(0, 10)$ en $(10, 13)$. Deze lijn snijdt de grafiek ook in het punt $(20, 16)$. Zie de figuur. Dus voor $t = 20$.



c De gemiddelde toename is maximaal als de lijn het steilst is. Teken dus een lijn die zo steil mogelijk is door $(0, 10)$ en een ander punt van de grafiek. Dat is de lijn door $(14, 20)$. Zie de figuur. Dus voor $t = 14$.



24 a Op $[0, 7]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30 + 20 - 10 + 10 - 20 + 20 + 20}{7 - 0} = 10$.

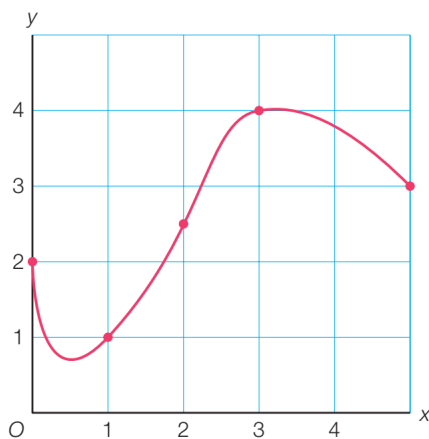
Op $[2, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-10 + 10 - 20 + 20}{6 - 2} = 0$.

b Op $[1, 5]$, $[2, 4]$ en $[4, 6]$.

- 25 a** K is in duizenden euro's en q in duizendtallen, dus de gemiddelde verandering van K is in euro's per stuk.
- b** $q = 4$ geeft $K = 35$
 $q = 6$ geeft $K = 93$
 Op $[4, 6]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{93 - 35}{6 - 4} = 29$ euro per stuk.
- c** $q = 3,6$ geeft $K = 30,696$
 $q = 6,1$ geeft $K = 98,021$
 Op $[3,6; 6,1]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{98,021 - 30,696}{6,1 - 3,6} = 26,93$ euro per stuk.
- Dus de kosten nemen gemiddeld meer toe bij een toename van de productie van 4000 tot 6000 stuks.

Bladzijde 20

- 26 a** Teken de volgende punten. Begin met $(0, 2)$.
 Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,25$, dus door $(2; 2 + 2 \cdot 0,25) = (2; 2,5)$.
 Op $[0, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,2$, dus door $(5; 2 + 5 \cdot 0,2) = (5; 3)$.
 Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,5$, dus door $(1; 3 - 4 \cdot 0,5) = (1; 1)$.
 Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,5$, dus door $(3; 1 + 2 \cdot 1,5) = (3; 4)$.
 Teken door deze punten een mogelijke grafiek.



Het differentiequotiënt op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 4}{5 - 3} = -0,5$.

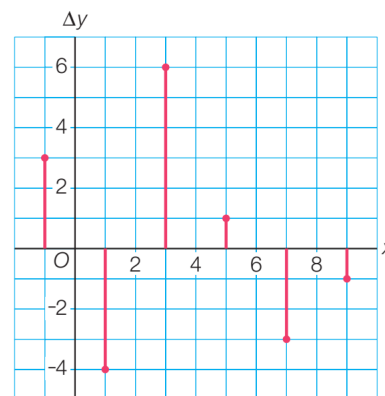
- b** Dat is mogelijk, want bij $x = 4$ is elke y -coördinaat mogelijk, dus ook $y = 5,5$.

En op $[1, 4]$ geeft dit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5,5 - 1}{4 - 1} = 1,5$.

- C1** afnemend stijgend op $\langle -3, -1 \rangle$ en $\langle 3, 5 \rangle$
 toenemend dalend op $\langle -1, 1 \rangle$ en $\langle 5, 7 \rangle$
 constant stijgend op $\langle 1, 3 \rangle$
 afnemend dalend op $\langle 7, 9 \rangle$

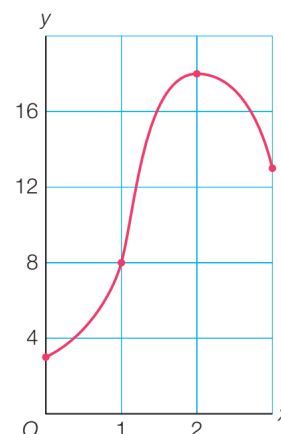
C2	interval	Δy
	$[-3, -1]$	3
	$[-1, 1]$	-4
	$[1, 3]$	6
	$[3, 5]$	1
	$[5, 7]$	-3
	$[7, 9]$	-1

Zie de figuur.



C3	x	y
	0	3
	1	8
	2	18
	3	13

Zie de figuur.



- C4** a Op $[-1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 2}{5 - (-1)} = 0,5$.
- b $q = 2000$ geeft $R = 20\,000$
 $q = 3000$ geeft $R = 27\,000$
 Op $[2000, 3000]$ is $\frac{\Delta R}{\Delta q} = \frac{27\,000 - 20\,000}{3000 - 2000} = 7$ euro per stuk.

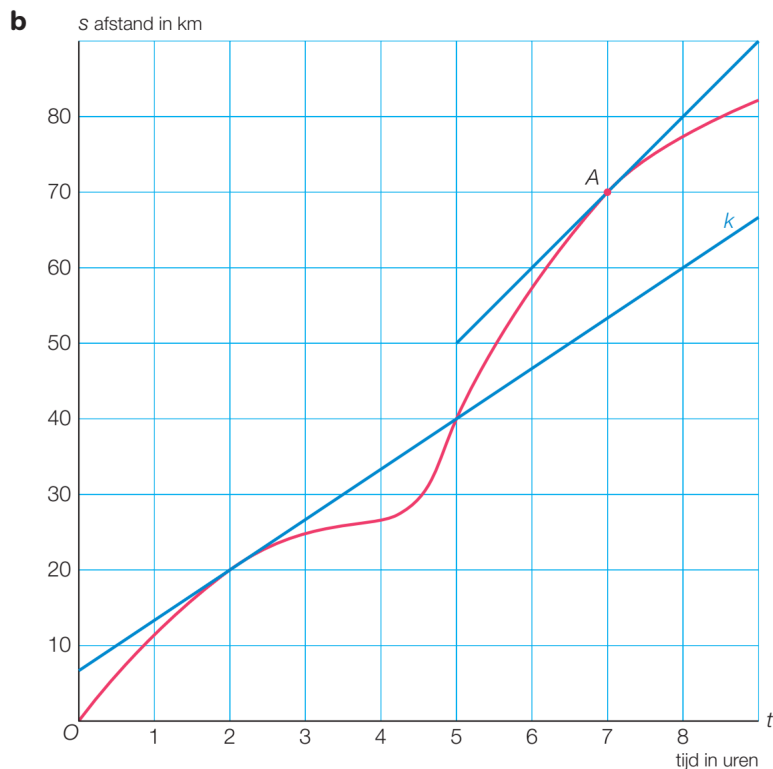
8.2 Hellinggrafieken

Bladzijde 21

- 27** a Op $[2, 3]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3^3 + 3 - (2^3 + 2)}{3 - 2} = 20$ m/s.
- b Op $[2; 2,5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2,5^3 + 2,5 - (2^3 + 2)}{2,5 - 2} = 16,25$ m/s.
- Op $[2; 2,1]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2,1^3 + 2,1 - (2^3 + 2)}{2,1 - 2} = 13,61$ m/s.
- Op $[2; 2,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2,01^3 + 2,01 - (2^3 + 2)}{2,01 - 2} = 13,0601$ m/s.
- Op $[2; 2,001]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2,001^3 + 2,001 - (2^3 + 2)}{2,001 - 2} \approx 13,0060$ m/s.
- c Op een kleiner wordend interval komt de gemiddelde snelheid steeds dichterbij 13, dus 13 m/s.

Bladzijde 24

- 28** a De raaklijn gaat door de punten $(5, 50)$ en $(8, 80)$.
 De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80 - 50}{8 - 5} = 10$.
 De snelheid op $t = 7$ is ongeveer 10 km/u.



De raaklijn k gaat door de punten $(2, 20)$ en $(5, 40)$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{40 - 20}{5 - 2} = 6,66\dots$

De snelheid op $t = 2$ is ongeveer $6,7$ km/u.

c Omdat de grafiek afnemend stijgend is op $[0, 4]$, neemt de snelheid gedurende de eerste vier uur af.

d Voor $t = 4$ is de snelheid minimaal, omdat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn daar het kleinst is.

29 a Teken de raaklijn in het punt $(3, 150)$. Deze raaklijn gaat door de punten $(2, 100)$ en $(4, 200)$.

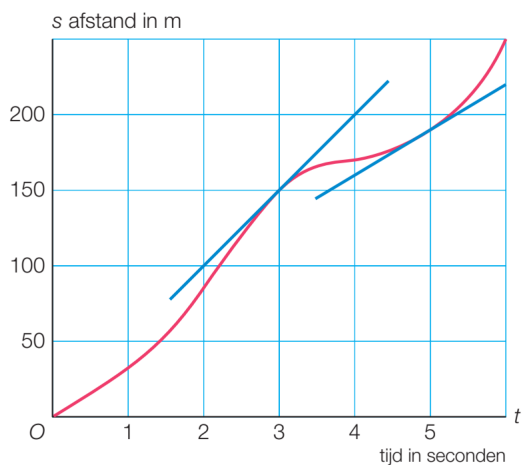
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{200 - 100}{4 - 2} = 50$.

Dus de snelheid op $t = 3$ is ongeveer 50 m/s.

Teken de raaklijn in het punt $(5, 190)$. Deze raaklijn gaat door de punten $(4, 160)$ en $(6, 220)$.

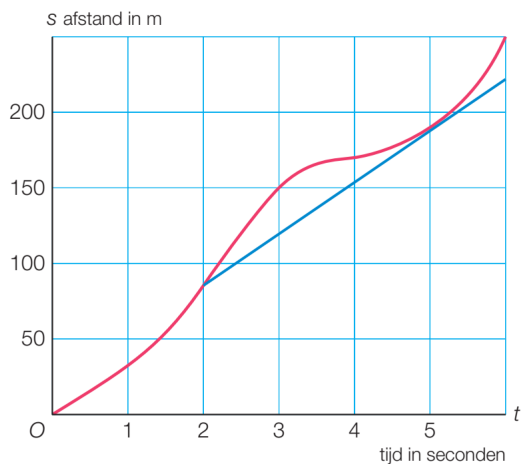
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{220 - 160}{6 - 4} = 30$.

Dus de snelheid op $t = 5$ is ongeveer 30 m/s.

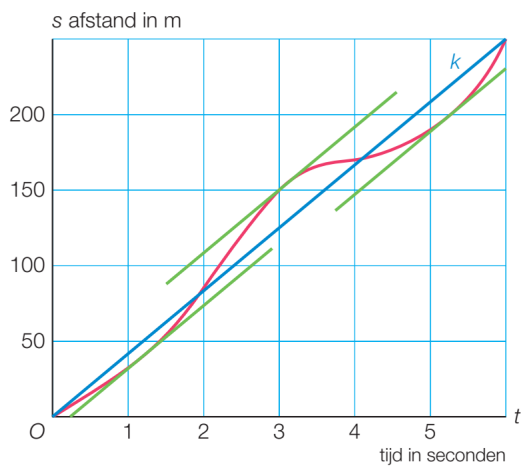


b De helling van de grafiek is het kleinst voor $t = 4$. Dus daar is de snelheid minimaal.

- c** De gemiddelde snelheid is minimaal als de lijn het minst steil is. Teken dus de minst steile lijn door $(2, 85)$ en een ander punt van de grafiek. Dat is de lijn door $(5, 180)$.
Dus voor $t = 5$.



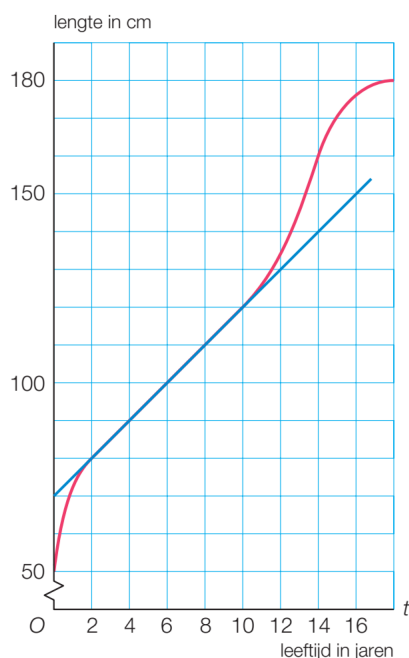
- d** Teken de lijn k door $(0, 0)$ en $(6, 250)$. De grafiek heeft drie raaklijnen die evenwijdig zijn met k . Dus er zijn drie tijdstippen waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 6]$.



Bladzijde 25

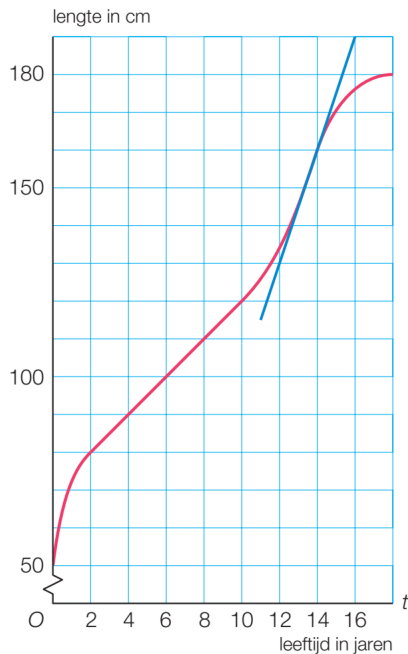
- 30 a** De raaklijn die hoort bij $t = 6$ valt op het interval $[2, 10]$ samen met de grafiek. De raaklijn gaat door de punten $(2, 80)$ en $(10, 120)$.

Dus de groeisnelheid is $\frac{120 - 80}{10 - 2} = 5$ cm/jaar.



- b** De raaklijn die hoort bij $t=14$ gaat door de punten $(12, 130)$ en $(16, 190)$.

Rond haar veertiende verjaardag is de groeisnelheid van Lotte $\frac{190 - 130}{16 - 12} = 15$ cm/jaar.



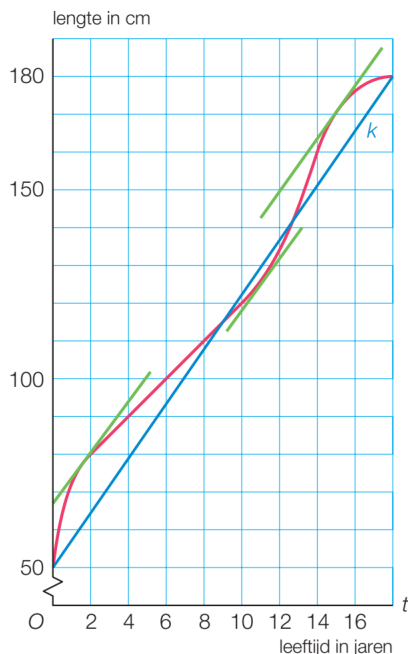
- c** De gemiddelde groeisnelheid van 0 tot 18 jaar is $\frac{180 - 50}{18} \approx 7,2$ cm/jaar.

- d** Teken de lijn k door de punten $(0, 50)$ en $(18, 180)$. Deze lijn hoort bij de gemiddelde groeisnelheid van 0 tot 18 jaar. Verschuif deze lijn evenwijdig.

Je vindt drie raaklijnen die evenwijdig met k zijn.

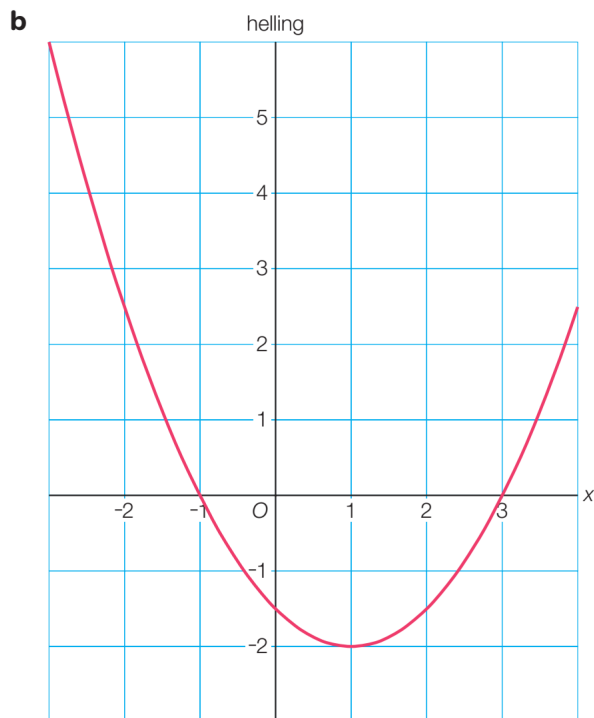
Deze raken de grafiek bij $t \approx 1,5$, $t \approx 11$ en $t \approx 15$.

Dus bij de leeftijden van 1,5 en 11 en 15 jaar is de groeisnelheid van Lotte gelijk aan 7,2 cm/jaar.



- 31 a** Teken steeds de raaklijn en bepaal de richtingscoëfficiënt van deze raaklijn.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
helling	6	2,5	0	-1,5	-2	-1,5	0	2,5



c Bij de toppen van de gegeven grafiek.

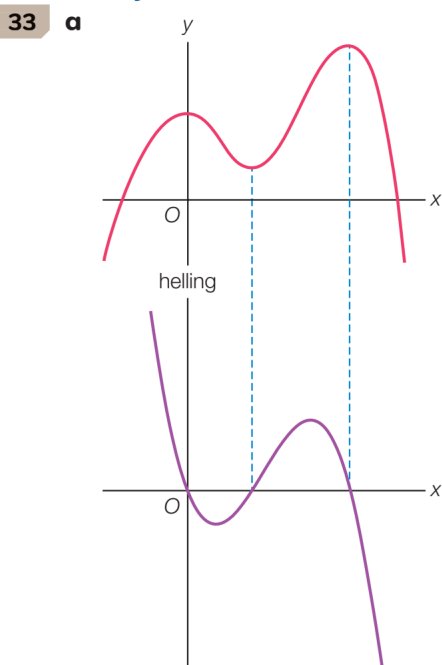
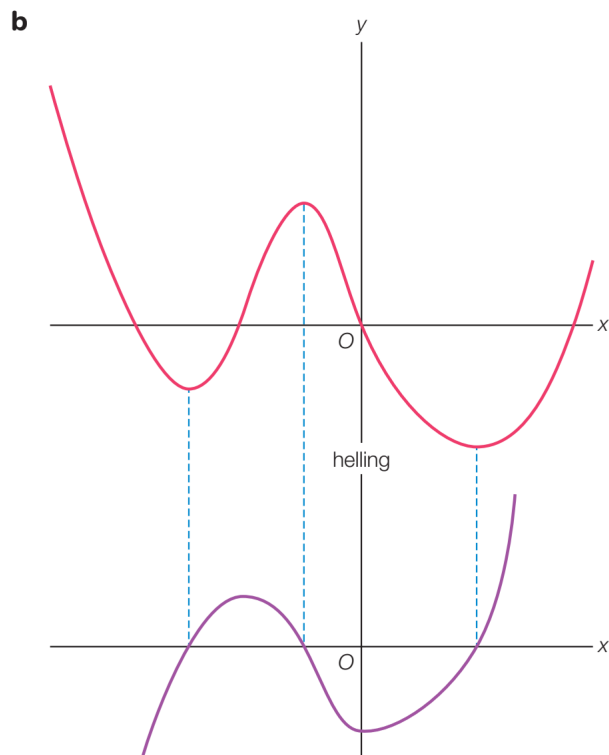
d De in vraag b getekende kromme ligt daar onder de x -as.

Bladzijde 27

32 a De hellinggrafiek heeft op $\langle 2, 5 \rangle$ een hoogste punt.

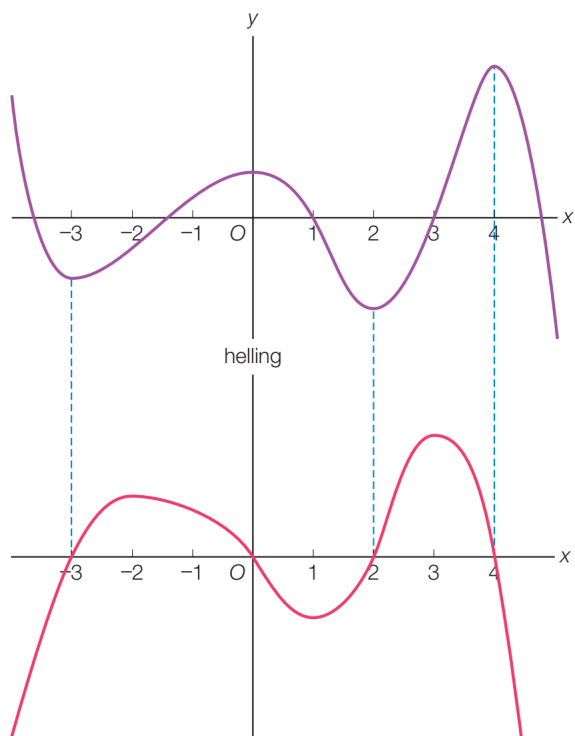
b De helling is daar minimaal. Dus de gegeven grafiek gaat daar over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

Bladzijde 28

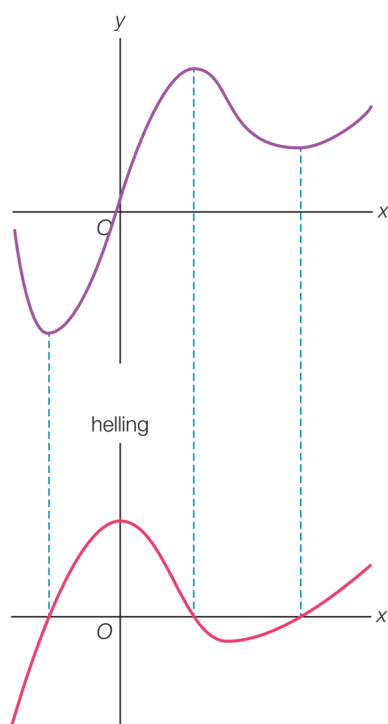


34 Bij grafiek I hoort hellinggrafiek B.
 Bij grafiek II hoort hellinggrafiek D.
 Bij grafiek III hoort hellinggrafiek A.
 Bij grafiek IV hoort hellinggrafiek C.

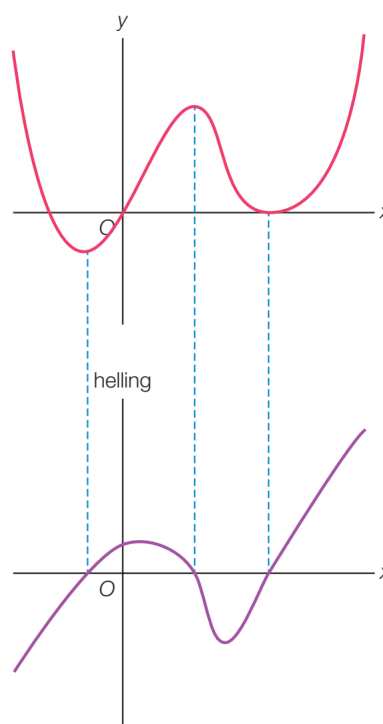
- 35**
- a** De oorspronkelijke grafiek is dalend op $\langle \leftarrow, -3 \rangle$, want bij een negatieve helling hoort een dalende grafiek.
 - b** De oorspronkelijke grafiek heeft een top bij $x = -3$ omdat de hellinggrafiek daar de x -as snijdt. Omdat de hellinggrafiek voor $x = -3$ onder de x -as ligt en na $x = -3$ erboven, gaat de oorspronkelijke grafiek van dalend over in stijgend. Het is dus een laagste punt.
 - c** De oorspronkelijke grafiek is stijgend op $\langle -3, 0 \rangle$, omdat de hellinggrafiek daar boven de x -as ligt.
 - d** De oorspronkelijke grafiek heeft een hoogste punt bij $x = 0$. De grafiek gaat bij $x = 0$ over van stijgend (hellinggrafiek ligt boven de x -as) naar dalend (hellinggrafiek ligt onder de x -as).
 - e** Je weet geen enkel punt op de oorspronkelijke grafiek, dus deze grafiek kan ook hoger of lager liggen.



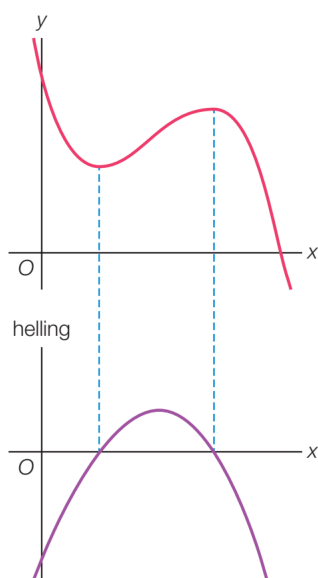
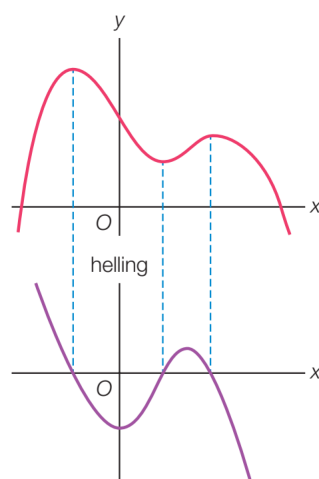
36 a



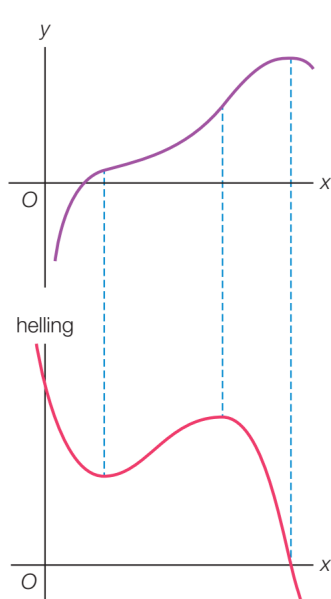
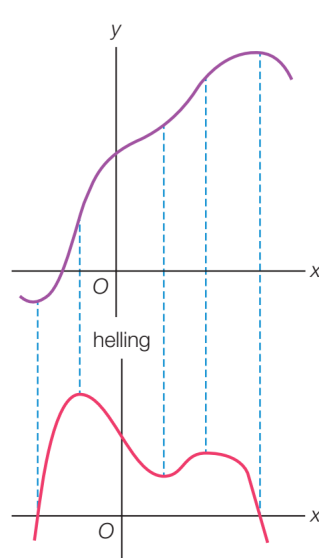
b



a



b



Bladzijde 31

38 a Het differentiequotiënt op $[-3; -2,99]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{-2,99+4} - \sqrt{-3+4}}{0,01} \approx 0,5$.

b De raaklijn gaat door de punten $(-3, 1)$ en $(-1, 2)$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1}{-1-(-3)} = 0,5$.

c Het differentiequotiënt bij punt A is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in punt A.

Bladzijde 32

39 Bij de plot van de hellinggrafiek kun je de y -waarde berekenen die hoort bij $x = 2$. Je krijgt dan als uitkomst 30, dus de snelheid is gelijk aan 30.

40 a Voer in $y_1 = \frac{2000}{1 + 12 \cdot 0,95^x}$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=10} \approx 11,0$.

De gevraagde snelheid is 11 vissen per week.

b De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=33} \approx 22,0$.

Op $t = 33$ is de snelheid 22 vissen per week.

Dus Arjen heeft gelijk.

- c** Plot bij y_2 de hellinggrafiek.
De optie maximum bij y_2 geeft $x = 48,44...$
Dus voor $t \approx 48,4$.

Bladzijde 33

- 41 a** Bij 1 mei om 17:30 uur hoort $t = 5,5$.

Voer in $y_1 = 37 + \frac{45x}{x^2 + 70}$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5,5} \approx 0,18$.

De gevraagde snelheid is $0,18^\circ\text{C}$ per uur.

- b** Bij 2 mei om 08:00 uur hoort $t = 20$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=20} \approx -0,07$.

De helling is negatief, dus de temperatuur neemt af.

- c** De optie maximum geeft $x = 8,36...$ en $y \approx 39,7$.

De maximale temperatuur is ongeveer $39,7^\circ\text{C}$.

Bij $t = 8,36...$ hoort 1 mei om 20:22 uur.

- d** Voer in $y_2 = 39$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 3,73$ en $x \approx 18,77$.

$$18,77 - 3,73 = 15,04$$

Dus de lichaamstemperatuur is iets meer dan 15 uur boven 39°C .

- 42 a** Voer in $y_1 = \frac{600x}{4^x}$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = -57,94...$

Dus de hoeveelheid neemt af met een snelheid van $57,9$ mg per uur.

- b** $t = 0$ geeft $H = 0$

$t = 0,75$ geeft $H = 159,09...$

Op $[0; 0,75]$ is $\frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{159,09... - 0}{0,75} \approx 212$ mg/uur.

- c** Plot bij y_2 de hellinggrafiek en voer in $y_3 = -70$.

De optie snijpunt bij y_2 en y_3 geeft $x = 1,11...$ en $x = 1,91...$

Dus voor $t \approx 1,1$ en $t \approx 1,9$.

- 43 a** Voer in $y_1 = -0,2x^3 + 4,5x^2 + 80x + 500$.

Bij 1 januari 2005 hoort $t = 10$.

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=10} = 110$, dus het aantal rendieren nam op 1 januari 2005 toe met 110 per dag.

- b** Bij 1 juli 2020 hoort $t = 25,5$.

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=25,5} = -80,65 < 0$, dus op 1 juli 2020 nam N af: het aantal rendieren was over het hoogtepunt heen.

- c** Plot bij y_2 de hellinggrafiek.

De optie maximum bij y_2 geeft $x = 7,5$.

Dus de snelheid is het grootst voor $t = 7,5$.

- d** De optie nulpunt bij y_2 geeft $x = 21,26...$

Dus de snelheid is gelijk aan 0 voor $t \approx 21,3$.

Alternatieve uitwerking

De snelheid is gelijk aan 0 in de top van de grafiek.

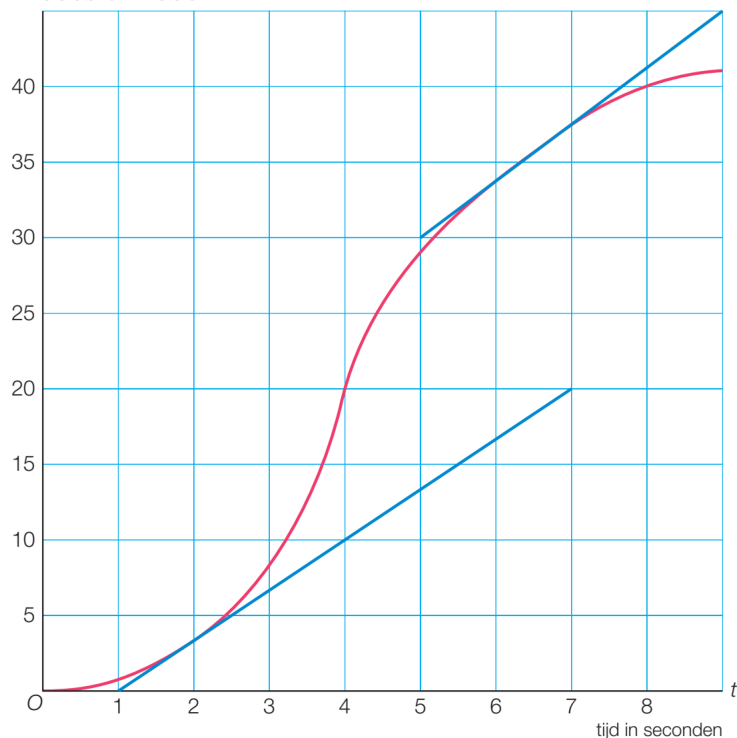
De optie maximum bij y_1 geeft $x = 21,26...$

Dus de snelheid is gelijk aan 0 voor $t \approx 21,3$.

C5

a

s afstand in meters



De raaklijn gaat door de punten $(1, 0)$ en $(7, 20)$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20 - 0}{7 - 1} \approx 3,3$.

De snelheid op $t = 2$ is ongeveer 3,3 m/s.

De raaklijn gaat door de punten $(5, 30)$ en $(9, 45)$.

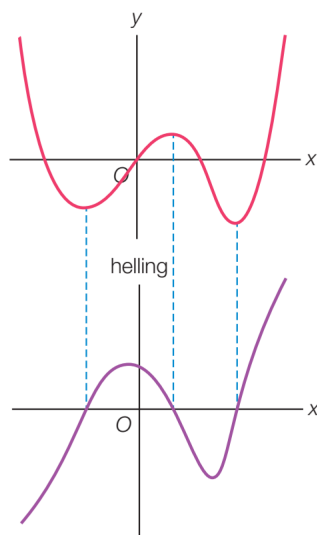
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{45 - 30}{9 - 5} \approx 3,8$.

De snelheid op $t = 6,5$ is ongeveer 3,8 m/s.

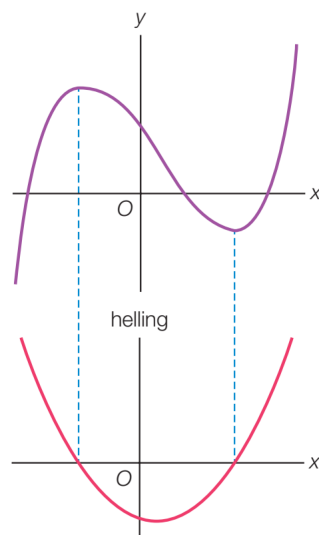
b Voor $t = 4$ is de snelheid maximaal, omdat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn daar het grootst is.

C6

a



b



C7

- a Voer in $y_1 = -0,14x^3 + 1,23x^2 - 0,21x + 5$.

Bij 1 april hoort $t = 2$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} \approx 3,0$.

Dus de temperatuur nam toe met een snelheid van $3,0^\circ\text{C}$ per maand.

- b Plot bij y_2 de hellinggrafiek en voer in $y_3 = -0,57$.

De optie snijpunt bij y_2 en y_3 geeft $x = 6$.

Dus op 1 augustus.

- c De optie maximum bij y_2 geeft $x = 2,92\dots$

Bij 1 mei hoort $t = 3$.

Dus de temperatuur nam het snelst toe net voor 1 mei.

8.3 Differentiëren

Bladzijde 36

V3

- a $f(-1) = 3 \cdot -1 - 2 = -5$ en $g(2) = -2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 3 = -1$

b $\frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{(3 \cdot 3 - 2) - (3 \cdot -2 - 2)}{3 - (-2)} = 3$

c $h(x) = f(x) + g(x) = 3x - 2 + -2x^2 + 5x - 3 = -2x^2 + 8x - 5$

44

- a Door de oorsprong, dus stel $y = ax$.

Door $(2, 3)$, dus $a \cdot 2 = 3$ en dit geeft $a = 1,5$.

De formule is $y = 1,5x$.

- b De grafiek van g is een rechte lijn, dus voor elke x is de helling gelijk.

- c De formule is $y = 3$, want de helling is 3.

- d De formule is $y = 0$, want de helling van de lijn $y = -4$ is 0.

Bladzijde 38

45

- a $f(x) = 7x + 10$ geeft $f'(x) = 7$

- b $g(x) = 5x^2 - 7x + 5$ geeft $g'(x) = 10x - 7$

- c $h(x) = 0,02x^2 + 1,7x$ geeft $h'(x) = 0,04x + 1,7$

- d $k(x) = -2\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$ geeft $k'(x) = -5x + 4$

46

- a $g(p) = -12p^2 + 30p$ geeft $g'(p) = -24p + 30$

- b $K(q) = -0,01q^2 + 20q$ geeft $K'(q) = -0,02q + 20$

- c $f(x) = (2x - 7)(8 + x) = 16x + 2x^2 - 56 - 7x = 2x^2 + 9x - 56$ geeft $f'(x) = 4x + 9$

- d $V(t) = 100 - (t^2 - 6t) = 100 - t^2 + 6t$ geeft $V'(t) = -2t + 6$

47

- a $f(x) = 3x - 2(x^2 + 1) = 3x - 2x^2 - 2$ geeft $f'(x) = 3 - 4x$

- b $P(q) = 0,05q^2 - 200q$ geeft $P'(q) = 0,1q - 200$

- c $g(x) = 3(2x - 3)^2 = 3(4x^2 - 12x + 9) = 12x^2 - 36x + 27$ geeft $g'(x) = 24x - 36$

- d $h(a) = 50 - (\frac{1}{2}a - 4)^2 = 50 - (\frac{1}{4}a^2 - 4a + 16) = -\frac{1}{4}a^2 + 4a + 34$ geeft $h'(a) = -\frac{1}{2}a + 4$

48

- a $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x) = 20x - 15x^2 + 28 - 21x = -15x^2 - x + 28$ geeft $f'(x) = -30x - 1$

- b $g(x) = (3x + 6)^2 = 9x^2 + 36x + 36$ geeft $g'(x) = 18x + 36$

- c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(x - 1) + 8 = 5(x^2 - 6x + 9) + 5x - 5 + 8$

$$= 5x^2 - 30x + 45 + 5x - 5 + 8 = 5x^2 - 25x + 48 \text{ geeft } h'(x) = 10x - 25$$

- d $k(x) = -3(x - 1)(5 - 2x) - 8(x - 7) = -3(5x - 2x^2 - 5 + 2x) - 8x + 56$

$$= -15x + 6x^2 + 15 - 6x - 8x + 56 = 6x^2 - 29x + 71 \text{ geeft } k'(x) = 12x - 29$$

49

- a $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x - 2$

Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = \frac{1}{2}x - 2$.

- b $x = 6$ geeft helling $= \frac{1}{2} \cdot 6 - 2 = 1$

- c helling $= -1$ geeft $\frac{1}{2}x - 2 = -1$

$$\frac{1}{2}x = 1$$

$$x = 2$$

50 $y = ax^2$ door $(2, 2)$ geeft $a \cdot 2^2 = 2$, dus $4a = 2$ en dit geeft $a = \frac{1}{2}$.

Bladzijde 39

51 a $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$ geeft $f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2$
 b $g(x) = -2x^7 - 3x^5 + 3,4$ geeft $g'(x) = -14x^6 - 15x^4$
 c $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$ geeft $h'(t) = -t^2 + 13t$
 d $k(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3$ geeft $k'(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2$

52 a $f(x) = 3(2x + 1)^2 = 3(4x^2 + 4x + 1) = 12x^2 + 12x + 3$ geeft $f'(x) = 24x + 12$
 b $g(x) = 7(3x - 2)(x^2 + 2x) = 7(3x^3 + 6x^2 - 2x^2 - 4x) = 7(3x^3 + 4x^2 - 4x) = 21x^3 + 28x^2 - 28x$ geeft $g'(x) = 63x^2 + 56x - 28$
 c $h(x) = 3px^8 - px^4$ geeft $h'(x) = 24px^7 - 4px^3$
 d $k(x) = x^3 + a$ geeft $k'(x) = 3x^2$

Bladzijde 40

53 a $W(q) = -0,02q^2 + 8q - 5$ geeft $W'(q) = -0,04q + 8$
 b $N(t) = 5t^3 + 8t^2 - t$ geeft $N'(t) = 15t^2 + 16t - 1$
 c $R(q) = 5q(q - 70)^2 = 5q(q^2 - 140q + 4900) = 5q^3 - 700q^2 + 24500q$ geeft $R'(q) = 15q^2 - 1400q + 24500$
 d $L(a) = -0,006a^4 + 0,2a^3(a - 5) - 8 = -0,006a^4 + 0,2a^4 - a^3 - 8 = 0,194a^4 - a^3 - 8$ geeft $L'(a) = 0,776a^3 - 3a^2$

54 a $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x) = 3x^3 + 15x^2 - x^2 - 5x = 3x^3 + 14x^2 - 5x$ geeft $f'(x) = 9x^2 + 28x - 5$
 b $g(x) = x^5(x^3 - 4x) - 2x = x^8 - 4x^6 - 2x$ geeft $g'(x) = 8x^7 - 24x^5 - 2$
 c $N(t) = (3t^3 - 1)^2 = 9t^6 - 6t^3 + 1$ geeft $N'(t) = 54t^5 - 18t^2$
 d $F(a) = 0,16a^2(Q - 3a) = 0,16Qa^2 - 0,48a^3$ geeft $F'(a) = 0,32Qa - 1,44a^2$

55 a $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 5$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$
 Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.
 b $x = 4$ geeft helling $= -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = -24 + 8 + 1 = -15$
 c helling $= -1$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -1$
 Voer in $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ en $y_2 = -1$.
 De optie snijpunt geeft $x = -\frac{2}{3}$ en $x = 2$, dus voor $x = -\frac{2}{3}$ en $x = 2$ is de helling gelijk aan -1 .

56 $k(x) = \frac{4x - 2}{3x + 3} = \frac{2(2x - 1)}{3(x + 1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{2}{3} \left(\frac{2x - 1}{x + 1} \right) = \frac{2}{3} \cdot h(x)$ geeft $k'(x) = \frac{2}{3} \cdot h'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(x + 1)^2} = \frac{2}{(x + 1)^2}$

Bladzijde 41

C8 a $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$ geeft $f'(x) = 10x - 3$
 b $g(x) = 0,02x^2 + 1,7x$ geeft $g'(x) = 0,04x + 1,7$
 c $h(x) = 4x - 2(x - 3)^2 = 4x - 2(x^2 - 6x + 9) = 4x - 2x^2 + 12x - 18 = -2x^2 + 16x - 18$ geeft $h'(x) = -4x + 16$
 d $N(t) = 0,01t^2 + (0,2t + 1)^2 = 0,01t^2 + 0,04t^2 + 0,4t + 1 = 0,05t^2 + 0,4t + 1$ geeft $N'(t) = 0,1t + 0,4$

C9 a $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$ geeft $f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2$
 b $g(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$ geeft $g'(t) = -t^2 + 13t$
 c $h(x) = 3(2x^3 + 1)^2 = 3(4x^6 + 4x^3 + 1) = 12x^6 + 12x^3 + 3$ geeft $h'(x) = 72x^5 + 36x^2$
 d $P(n) = an^5 - 2n^3 + 6n + a^2$ geeft $P'(n) = 5an^4 - 6n^2 + 6$

8.4 Notaties en regels voor de afgeleide

Bladzijde 42

57 a $f(x) = 5x^2 + 3a^4$ geeft $f'(x) = 10x + 0 = 10x$
 b $f(a) = 5a^2 + 3a^4$ geeft $f'(a) = 0 + 12a^3 = 12a^3$
 c Het is niet duidelijk wat de variabele is.

Bladzijde 43

58 a $y = 7x^4 - a^3$ geeft $\frac{dy}{dx} = 28x^3$
 b $y = 7x^4 - a^3$ geeft $\frac{dy}{da} = -3a^2$
 c $R = q^3 - 5pq$ geeft $\frac{dR}{dq} = 3q^2 - 5p$
 d $R = q^3 - 5pq$ geeft $\frac{dR}{dp} = -5q$
 e $B = a^3 - 3t^2$ geeft $\frac{dB}{dt} = -6t$
 f $B = a^3 - 3t^2$ geeft $\frac{dB}{da} = 3a^2$

59 $R = 5a^2 - 3ab^3 - 5abc + 5a - 3$ geeft
 $\frac{dR}{da} = 10a - 3b^3 - 5bc + 5$
 $\frac{dR}{db} = 0 - 9ab^2 - 5ac + 0 = -9ab^2 - 5ac$
 $\frac{dR}{dc} = 0 - 0 - 5ab + 0 = -5ab$

60 a $y = \frac{10}{x^3} = 10x^{-3}$
 b $y = 8 \cdot \sqrt[3]{x} = 8x^{\frac{1}{3}}$
 c $y = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$
 d $y = \frac{7}{\sqrt{x}} = \frac{7}{x^{\frac{1}{2}}} = 7x^{-\frac{1}{2}}$
 e $y = 4x\sqrt{x} = 4x^{\frac{3}{2}}$
 f $y = \frac{3}{4x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$

Bladzijde 44

61 a $f(x) = \frac{6}{x^3} + 6x^3 = 6x^{-3} + 6x^3$ geeft $f'(x) = -18x^{-4} + 18x^2 = -\frac{18}{x^4} + 18x^2$
 b $k(q) = \frac{1}{q} = q^{-1}$ geeft $k'(q) = -q^{-2} = -\frac{1}{q^2}$
 c $g(x) = 3x^6 - \frac{4}{x} = 3x^6 - 4x^{-1}$ geeft $g'(x) = 18x^5 + 4x^{-2} = 18x^5 + \frac{4}{x^2}$
 d $m(t) = 12t \cdot \sqrt[4]{t} = 12t^{1\frac{1}{4}}$ geeft $m'(t) = 15t^{\frac{1}{4}} = 15 \cdot \sqrt[4]{t}$
 e $l(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2p^2} = 2p^{-1} + \frac{1}{2}p^{-2}$ geeft $l'(p) = -2p^{-2} - p^{-3} = -\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p^3}$
 f $h(x) = 3x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 3x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = 4\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

Bladzijde 45

62 a $y = x + \frac{4}{\sqrt{x}} = x + 4x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 1 - 2x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{x\sqrt{x}}$
 b $y = 3x^2 \cdot \sqrt{x} = 3x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 7\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 7\frac{1}{2}x\sqrt{x}$
 c $y = 3x - x^{-1,65}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3 + 1,65x^{-2,65}$
 d $y = 10x^{1,72} + \frac{6}{x^{1,35}} = 10x^{1,72} + 6x^{-1,35}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 17,2x^{0,72} - 8,1x^{-2,35} = 17,2x^{0,72} - \frac{8,1}{x^{2,35}}$
 e $y = \frac{2}{5x} + \frac{5x}{2} = \frac{2}{5}x^{-1} + 2\frac{1}{2}x$ geeft $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{5}x^{-2} + 2\frac{1}{2} = -\frac{2}{5x^2} + 2\frac{1}{2}$
 f $y = (1+x)\sqrt{x} = \sqrt{x} + x\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$

63 a $y_A = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 $y = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$
 helling $= -\frac{2}{4^2} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$

b helling $= -\frac{2}{1^2} = -2$

c snelheid $= -\frac{2}{5^2} = -\frac{2}{25}$

d $x = 1$ geeft $y = 2$

$x = 5$ geeft $y = 0,4$

Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,4 - 2}{5 - 1} = -0,4$.

64 a $y = \frac{2}{x} + 2x = 2x^{-1} + 2x$ geeft $\frac{dy}{dx} = -2x^{-2} + 2 = -\frac{2}{x^2} + 2$

snelheid $= -\frac{2}{4^2} + 2 = -\frac{2}{16} + 2 = -\frac{1}{8} + 2 = 1\frac{7}{8}$

b helling $= -\frac{2}{(\frac{1}{2})^2} + 2 = -\frac{2}{(\frac{1}{4})} + 2 = -8 + 2 = -6 < 0$

c helling $= -\frac{2}{1^2} + 2 = -\frac{2}{1} + 2 = -2 + 2 = 0$, dus de raaklijn is horizontaal.

65 a $x = 4$ geeft $y = 10\sqrt{4} - 5 \cdot 4 = 10 \cdot 2 - 20 = 20 - 20 = 0$
 Dus $x_A = 4$.

$y = 10\sqrt{x} - 5x = 10x^{\frac{1}{2}} - 5x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 5x^{-\frac{1}{2}} - 5 = \frac{5}{\sqrt{x}} - 5$
 helling $= \frac{5}{\sqrt{4}} - 5 = \frac{5}{2} - 5 = -2\frac{1}{2}$

b snelheid $= \frac{5}{\sqrt{\frac{1}{4}}} - 5 = \frac{5}{(\frac{1}{2})} - 5 = 10 - 5 = 5$

c helling $= \frac{5}{\sqrt{1}} - 5 = 5 - 5 = 0$, dus de raaklijn is horizontaal.

66 $y_A = \frac{2}{2} + 2 \cdot 2 = 5$

$l: y = ax + b$ met $a = -\frac{2}{2^2} + 2 = 1\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 5 \\ 3 + b = 5 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $l: y = 1\frac{1}{2}x + 2$.

Bladzijde 46

67 a $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = g^6$ en $g(x) = 3 - x^5$

b $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = \sqrt{g}$ en $g(x) = x^2 + 1$

c $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = \frac{2}{g^3}$ en $g(x) = x + 8$

68 a $y = -3(2x - 5)^6$ geeft $\frac{dy}{dx} = -18(2x - 5)^5 \cdot 2 = -36(2x - 5)^5$
 b $y = (4x^2 - x)^{1,4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 1,4(4x^2 - x)^{0,4} \cdot (8x - 1)$
 c $y = 2\sqrt{3 - 7x} = 2(3 - 7x)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = (3 - 7x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -7 = \frac{-7}{\sqrt{3 - 7x}}$
 d $y = \frac{8}{\sqrt{3x + 2}} = 8(3x + 2)^{-\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -4(3x + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{-12}{(3x + 2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-12}{(3x + 2)\sqrt{3x + 2}}$
 e $y = \frac{4}{(2 - x^2)^3} = 4(2 - x^2)^{-3}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -12(2 - x^2)^{-4} \cdot -2x = \frac{24x}{(2 - x^2)^4}$
 f $y = x^2 + \sqrt{x^2 + x} = x^2 + (x^2 + x)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = 2x + \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

69 a $S = \frac{2}{(3 - a^2)^5} = 2(3 - a^2)^{-5}$ geeft $\frac{dS}{da} = -10(3 - a^2)^{-6} \cdot -2a = \frac{20a}{(3 - a^2)^6}$
 b $K = \sqrt{2q + 1} = (2q + 1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dK}{dq} = \frac{1}{2}(2q + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2q + 1}}$
 c $W = 6(p^2 - 2p + 5)^{0,7}$ geeft $\frac{dW}{dp} = 4,2(p^2 - 2p + 5)^{-0,3} \cdot (2p - 2)$

70 a $K = (5q + 2)^4 - 3q$ geeft $\frac{dK}{dq} = 4(5q + 2)^3 \cdot 5 - 3 = 20(5q + 2)^3 - 3$
 b $y = \frac{5}{(2x + 1)^8} + 4x^2 = 5(2x + 1)^{-8} + 4x^2$ geeft $\frac{dy}{dx} = -40(2x + 1)^{-9} \cdot 2 + 8x = \frac{-80}{(2x + 1)^9} + 8x$
 c $B = \frac{8}{a^3} + 6\sqrt{a^3 + 2} = 8a^{-3} + 6(a^3 + 2)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dB}{da} = -24a^{-4} + 3(a^3 + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3a^2 = -\frac{24}{a^4} + \frac{9a^2}{\sqrt{a^3 + 2}}$
 d $P = \sqrt[3]{3q - 5} = (3q - 5)^{\frac{1}{3}}$ geeft $\frac{dP}{dq} = \frac{1}{3}(3q - 5)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 = \frac{1}{(3q - 5)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3q - 5)^2}}$

71 a $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 b $y = 2\sqrt{3 - 7x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3 - 7x}} \cdot -7 = \frac{-7}{\sqrt{3 - 7x}}$
 $K = \sqrt{2q + 1}$ geeft $\frac{dK}{dq} = \frac{1}{2\sqrt{2q + 1}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2q + 1}}$
 $B = \frac{8}{a^3} + 6\sqrt{a^3 + 2} = 8a^{-3} + 6\sqrt{a^3 + 2}$ geeft $\frac{dB}{da} = -24a^{-4} + 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^3 + 2}} \cdot 3a^2 = -\frac{24}{a^4} + \frac{9a^2}{\sqrt{a^3 + 2}}$

C10 a $R = 3x^3 + 5a^2x - 2x$ geeft $\frac{dR}{dx} = 9x^2 + 5a^2 - 2$
 b $P(a) = 2a^4 + 5a^2 - a$ geeft $P'(a) = 8a^3 + 10a - 1$

C11 a $y = \frac{2}{x^4} = 2x^{-4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -8x^{-5} = -\frac{8}{x^5}$
 b $y = x^3 \cdot \sqrt{x} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3\frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x}$
 c $M = \frac{8}{t^{2,5}} + 15t^{0,3} = 8t^{-2,5} + 15t^{0,3}$ geeft $\frac{dM}{dt} = -20t^{-3,5} + 4,5t^{-0,7}$

C12 a $k(x) = \sqrt{x^2 + x} = (x^2 + x)^{\frac{1}{2}}$ geeft $k'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

b $N = \frac{6}{(2a - 1)^3} - 5a^2 = 6(2a - 1)^{-3} - 5a^2$ geeft $\frac{dN}{da} = -18(2a - 1)^{-4} \cdot 2 - 10a = \frac{-36}{(2a - 1)^4} - 10a$

8.5 Extreme waarden en de afgeleide

Bladzijde 49

72 a $W = -0,1q^3 + 12q^2 - 210q + 500$ geeft $\frac{dW}{dq} = -0,3q^2 + 24q - 210$

b $\left[\frac{dW}{dq}\right]_{q=70} = -0,3 \cdot 70^2 + 24 \cdot 70 - 210 = -1470 + 1680 - 210 = 0$

Het punt op de grafiek dat bij $q = 70$ hoort is een top van de grafiek.

Bladzijde 51

73 a $W(16) = 4 \cdot 16^2 - \frac{1}{6} \cdot 16^3 = 341,333... \text{ euro}$

Dus de maximale winst is 34 133 euro per maand.

b Bij een productie van 2000 stuks per maand hoort $q = 20$.

$W'(20) = 8 \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 20^2 = -40$

De winst neemt af met 40 euro per maand.

c De snelheid is $\left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=50} = -0,54 \cdot 50^{0,8} + 22,5 \cdot 50^{-0,1} = 2,868... \approx 2,87 \text{ euro per stuk.}$

74 a $R = 4q^{0,41} - q^{0,83}$ geeft $\frac{dR}{dq} = 1,64q^{-0,59} - 0,83q^{-0,17}$

De snelheid is $\left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=0,5} = 1,64 \cdot 0,5^{-0,59} - 0,83 \cdot 0,5^{-0,17} \approx 1,53 \text{ euro per stuk.}$

b Bij een productie van 8500 stuks hoort $q = 8,5$.

De snelheid is $\left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=8,5} = 1,64 \cdot 8,5^{-0,59} - 0,83 \cdot 8,5^{-0,17} \approx -0,11$.

De opbrengst neemt af met 0,11 euro per stuk.

c $\frac{dR}{dq} = 0$ geeft $1,64q^{-0,59} - 0,83q^{-0,17} = 0$

Voer in $y_1 = 1,64x^{-0,59} - 0,83x^{-0,17}$.

De optie nulpunt geeft $x = 5,060...$

$q = 5,060... \text{ geeft } R = 3,9350...$

De maximale opbrengst is 3935 euro.

Bladzijde 52

75 a $a = 0$ geeft $H = 150$ en $a = 12$ geeft $H = 150$.

De wandeling eindigt op dezelfde hoogte als hij begint, dus het zou een rondwandeling kunnen zijn.

b $H = -0,4a^3 + 4,8a^2 + 150$ geeft $\frac{dH}{da} = -1,2a^2 + 9,6a$

$\frac{dH}{da} = 0$ geeft $-1,2a^2 + 9,6a = 0$

$-1,2a(a - 8) = 0$

$a = 0 \text{ of } a = 8$

Uit de schets volgt dat H maximaal is voor $a = 8$.

De maximale hoogte is $-0,4 \cdot 8^3 + 4,8 \cdot 8^2 + 150 = 252,4 \text{ meter.}$

76 a $W(q) = -0,01q^3 + 1,5q^2 - 48q - 200$ geeft $W'(q) = -0,03q^2 + 3q - 48$

$W'(80) = -0,03 \cdot 80^2 + 3 \cdot 80 - 48 = -192 + 240 - 48 = 0$

Uit de schets volgt dat W maximaal is voor $q = 80$, dus de winst is maximaal bij een maandelijks productie van 80 000 stuks.

b $W(80) = -0,01 \cdot 80^3 + 1,5 \cdot 80^2 - 48 \cdot 80 - 200 = 440$

De maximale winst is 440 000 euro per maand.

77 a De derde week is van $t = 2$ tot $t = 3$.
 $t = 2$ geeft $N = 152$ en $t = 3$ geeft $N = 219$.
 De toename is $\frac{219 - 152}{152} \cdot 100\% \approx 44,1\%$.

b $N(t) = -2t^3 + 9t^2 + 60t + 12$ geeft $N'(t) = -6t^2 + 18t + 60$

$N'(3) = -6 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 + 60 = 60 > 0$, dus op $t = 3$ neemt het aantal bacteriën toe.

c $N'(7) = -6 \cdot 7^2 + 18 \cdot 7 + 60 = -108 < 0$, dus op $t = 7$ neemt het aantal bacteriën af.

d $N'(t) = 0$ geeft $-6t^2 + 18t + 60 = 0$

Voer in $y_1 = -6x^2 + 18x + 60$.

De optie nulpunt geeft $x = -2$ of $x = 5$.

Uit de schets volgt dat N maximaal is voor $t = 5$.

$N(5) = -2 \cdot 5^3 + 9 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 + 12 = 287$

Er zijn maximaal 287 miljoen bacteriën.

78 a $R(q) = aq^2 + 40q$ geeft $R'(q) = 2aq + 40$

$R'(q) = 0$ geeft $2aq + 40 = 0$

$$2aq = -40$$

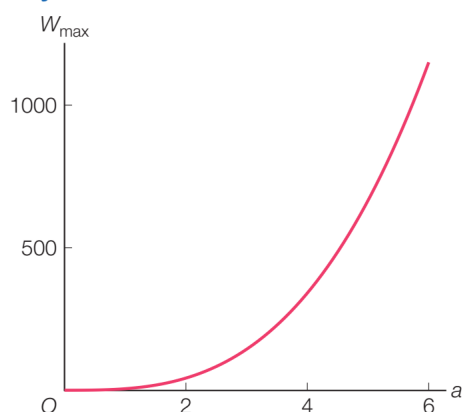
$$q = \frac{-40}{2a} = -\frac{20}{a}$$

b Invullen van $a = -0,25$ in $q = -\frac{20}{a}$ geeft $q = -\frac{20}{-0,25} = 80$.

Dus de opbrengst is maximaal bij een productie van 80 stuks.

Bladzijde 53

79 a



b 100 000 euro, dus $W_{\max} = 1000$.

Voer in $y_1 = 5\frac{1}{3}x^3$ en $y_2 = 1000$.

De optie snijpunt geeft $x = 5,723\dots$

Dus vanaf $a = 5,73$.

Bladzijde 54

80 a

$t = \frac{1}{2}p$ geeft $N = 25p \cdot (\frac{1}{2}p)^2 - 50 \cdot (\frac{1}{2}p)^3 = 25p \cdot \frac{1}{4}p^2 - 50 \cdot \frac{1}{8}p^3 = 6\frac{1}{4}p^3 - 6\frac{1}{4}p^3 = 0$

Dus op $t = \frac{1}{2}p$ is $N = 0$, dat wil zeggen dat de laatste bezoeker de dierentuin op $t = \frac{1}{2}p$ verlaat.

b $p = 20$ geeft $N = 500t^2 - 50t^3$

$N = 500t^2 - 50t^3$ geeft $\frac{dN}{dt} = 1000t - 150t^2$

$\frac{dN}{dt} = 0$ geeft $1000t - 150t^2 = 0$

$$t(1000 - 150t) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } 1000 - 150t = 0$$

$$t = 0 \text{ of } -150t = -1000$$

$$t = 0 \text{ of } t = 6\frac{2}{3}$$

Uit de schets volgt dat N maximaal is voor $t = 6\frac{2}{3}$.

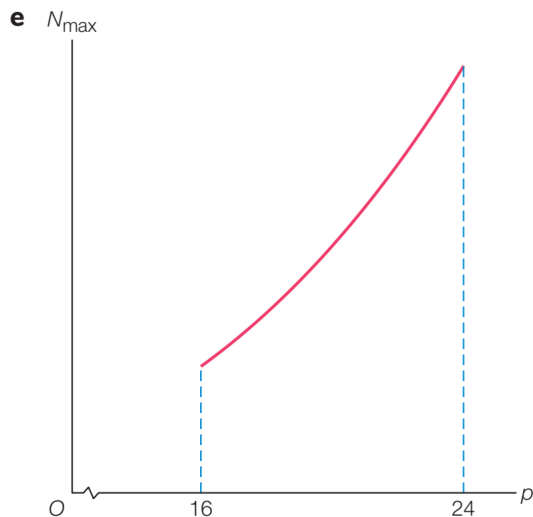
$$N_{\max} = 500 \cdot (6\frac{2}{3})^2 - 50 \cdot (6\frac{2}{3})^3 \approx 7407$$

Er zijn maximaal 7407 bezoekers.

$$\begin{aligned} \text{c } N &= 25pt^2 - 50t^3 \text{ geeft } \frac{dN}{dt} = 50pt - 150t^2 \\ \frac{dN}{dt} &= 0 \text{ geeft } 50pt - 150t^2 = 0 \\ t(50p - 150t) &= 0 \\ t &= 0 \text{ of } 50p - 150t = 0 \\ t &= 0 \text{ of } -150t = -50p \\ t &= 0 \text{ of } t = \frac{1}{3}p \end{aligned}$$

Uit de schets volgt dat je bij $t = \frac{1}{3}p$ met een maximum te maken hebt.

$$\text{d } N_{\max} = 25p \cdot \left(\frac{1}{3}p\right)^2 - 50 \cdot \left(\frac{1}{3}p\right)^3 = 25p \cdot \frac{1}{9}p^2 - 50 \cdot \frac{1}{27}p^3 = \frac{25}{9}p^3 - \frac{50}{27}p^3 = \frac{25}{27}p^3$$



- f Voer in $y_1 = \frac{25}{27}x^3$, $y_2 = 6000$ en $y_3 = 10000$.
De optie snijpunt bij y_1 en y_2 geeft $x = 18,64\dots$
De optie snijpunt bij y_1 en y_3 geeft $x = 22,10\dots$
Dus voor $18,7 < p < 22,1$.

81 a $B = 4\sqrt{t} - t = 4t^{\frac{1}{2}} - t$ geeft $\frac{dB}{dt} = 2t^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{t}} - 1$
De snelheid is $\left[\frac{dB}{dt}\right]_{t=3} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \approx 0,15 \text{ dm}^2 \text{ per maand} = 15 \text{ cm}^2 \text{ per maand}$.

b $\frac{dB}{dt} = 0$ geeft $\frac{2}{\sqrt{t}} - 1 = 0$
 $\frac{2}{\sqrt{t}} = 1$
 $\sqrt{t} = 2$
 $t = 4$

Uit de schets volgt dat B maximaal is voor $t = 4$.

$$B_{\max} = 4\sqrt{4} - 4 = 4 \text{ dm}^2$$

c $B = a\sqrt{t} - t = at^{\frac{1}{2}} - t$ geeft $\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2}at^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{a}{2\sqrt{t}} - 1$
 $\frac{dB}{dt} = 0$ geeft $\frac{a}{2\sqrt{t}} - 1 = 0$
 $\frac{a}{2\sqrt{t}} = 1$
 $2\sqrt{t} = a$
 $\sqrt{t} = \frac{1}{2}a$, dus $t = \frac{1}{4}a^2$

Uit de schets volgt dat de bladoppervlakte maximaal is als $t = \frac{1}{4}a^2$.

$$B_{\max} = a \cdot \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$$

82 $R = \frac{1}{3}aT^4 - 15aT^3 + 5000T$ geeft $\frac{dR}{dT} = \frac{4}{3}aT^3 - 45aT^2 + 5000$

$$T = 15 \text{ geeft } \frac{dR}{dT} = \frac{4}{3}a \cdot 15^3 - 45a \cdot 15^2 + 5000 = -5625a + 5000$$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dT} = 0 \text{ geeft } -5625a + 5000 &= 0 \\ -5625a &= -5000 \\ a &= 0,888... \end{aligned}$$

$$a = 0,888... \text{ en } T = 15 \text{ geeft } N = \frac{1}{3} \cdot 0,888... \cdot 15^3 - 15 \cdot 0,888... \cdot 15^2 + 5000 = 3000 \text{ en}$$

$$R = 0,888... \cdot 15 - 15^3 \cdot 0,888... \cdot 15^3 + 5000 \cdot 15 = 45000.$$

De maximale opbrengst is 45000 euro per dag. Er rijden dan dagelijks 3000 auto's over de brug.

Bladzijde 55

C13 $R = 2q^{0,55} - q^{0,85}$ geeft $\frac{dR}{dq} = 1,1q^{-0,45} - 0,85q^{-0,15}$

$$\frac{dR}{dq} = 0 \text{ geeft } 1,1q^{-0,45} - 0,85q^{-0,15} = 0$$

$$\text{Voer in } y_1 = 1,1x^{-0,45} - 0,85x^{-0,15}.$$

De optie nulpunt geeft $x = 2,361...$

$$q = 2,361... \text{ geeft } R \approx 1,13$$

$$\text{Dus } R_{\max} = 1,13.$$

C14 $N = 6t^2 - \frac{1}{12}t^3$ geeft $\frac{dN}{dt} = 12t - \frac{1}{4}t^2$

$$\text{Voor } t = 48 \text{ is } \frac{dN}{dt} = 12 \cdot 48 - \frac{1}{4} \cdot 48^2 = 0.$$

Uit de schets volgt dat je bij $t = 48$ met een maximum te maken hebt.

C15 $N = at^2 - \frac{1}{12}t^3$ geeft $\frac{dN}{dt} = 2at - \frac{1}{4}t^2$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = 0 \text{ geeft } 2at - \frac{1}{4}t^2 &= 0 \\ t(2a - \frac{1}{4}t) &= 0 \\ t = 0 \text{ of } 2a - \frac{1}{4}t &= 0 \\ t = 0 \text{ of } -\frac{1}{4}t &= -2a \\ t = 0 \text{ of } t &= 8a \end{aligned}$$

Uit de schets volgt dat je bij $t = 8a$ met een maximum te maken hebt.

$$N_{\max} = a(8a)^2 - \frac{1}{12}(8a)^3 = a \cdot 64a^2 - \frac{1}{12} \cdot 512a^3 = 64a^3 - 42\frac{2}{3}a^3 = 21\frac{1}{3}a^3$$

Bladzijde 56

- 1 a $\langle 3, 4 \rangle$ en $\langle 5, 5 \rangle$; $\langle 6 \rangle$ en $\langle 11, 12 \rangle$

b

interval	Δy
$[0, 2]$	4
$[2, 4]$	-2
$[4, 6]$	-3
$[6, 8]$	3
$[8, 10]$	3
$[10, 12]$	-6

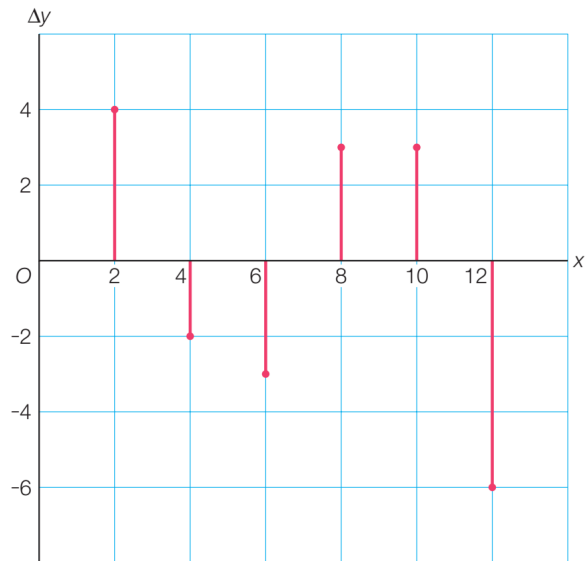
Zie de figuur.

- c De gemiddelde verandering op $[0, 4]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 2}{4 - 0} = \frac{1}{2}.$$

- d Het differentiequotiënt op $[2, 12]$ is

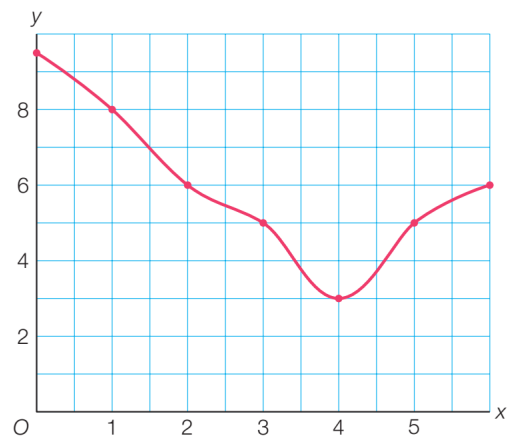
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 6}{12 - 2} = -\frac{1}{2}.$$



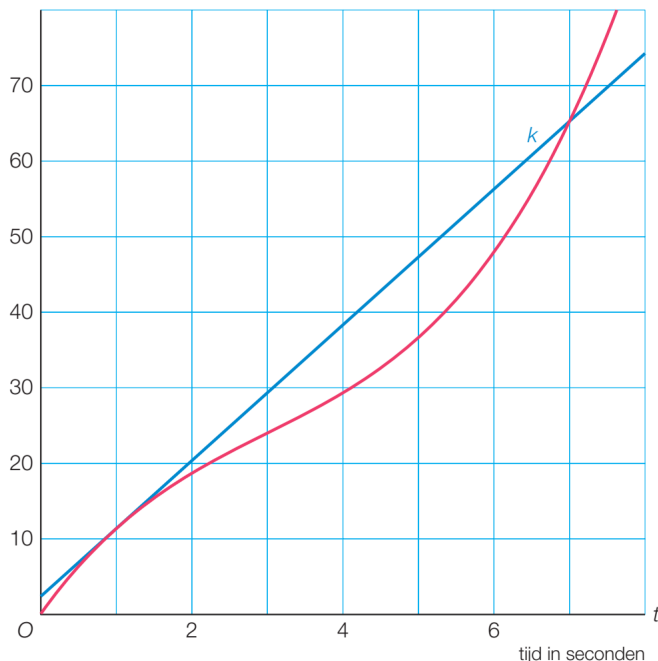
2

x	y
0	9,5
1	8
2	6
3	5
4	3
5	5
6	6

Zie de figuur.



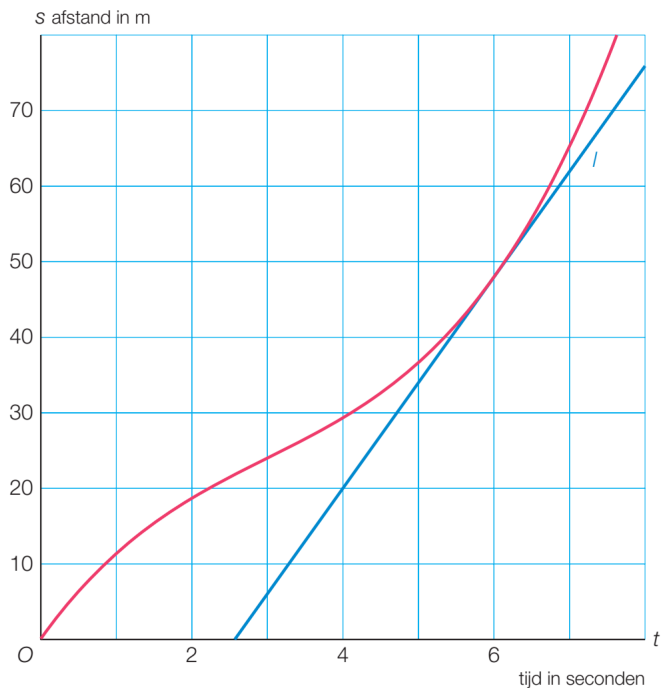
- 3 a s afstand in m



De raaklijn k gaat door de punten $(0, 2)$ en $(8, 74)$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{74 - 2}{8 - 0} = 9$.

De snelheid op $t = 1$ is ongeveer 9 m/s.

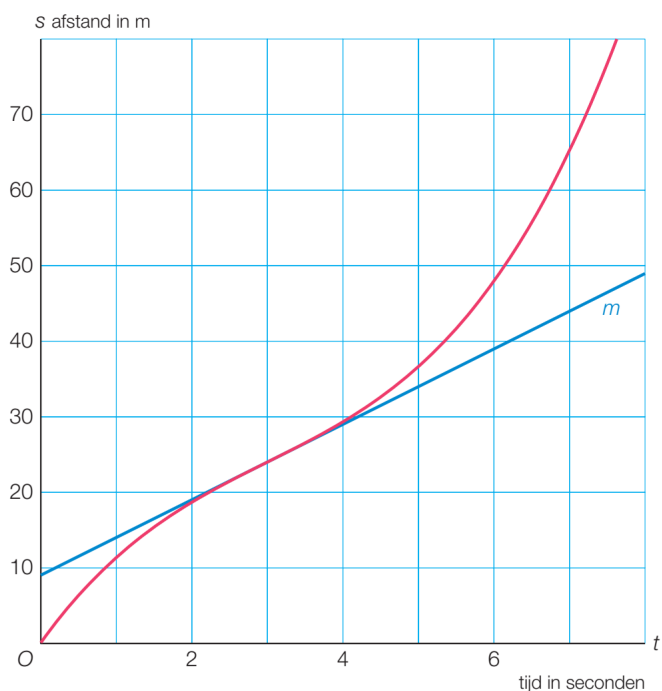


De raaklijn l gaat door de punten $(4, 20)$ en $(8, 76)$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{76 - 20}{8 - 4} = 14$.

De snelheid op $t = 6$ is ongeveer 14 m/s.

- b** Voor $t = 3$ krijg je de raaklijn met de kleinste richtingscoëfficiënt.
Dus voor $t = 3$ is de snelheid minimaal.

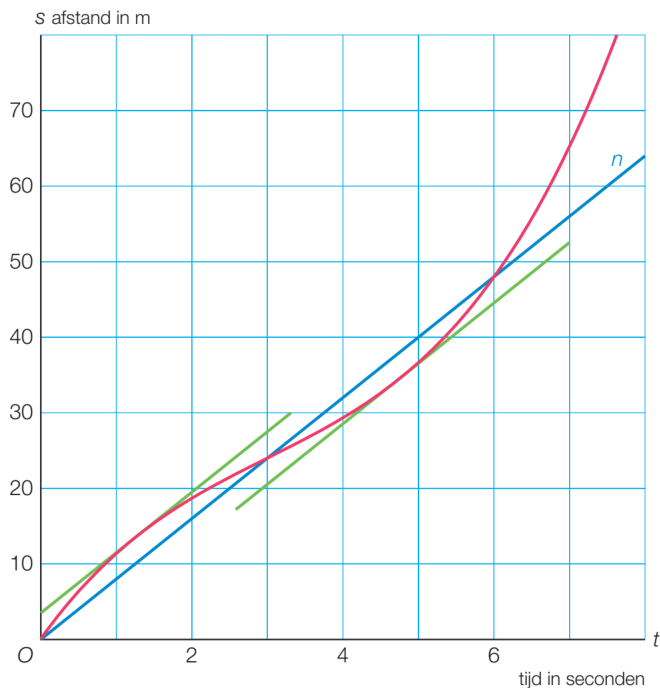


De raaklijn m gaat door de punten $(0, 9)$ en $(8, 49)$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{49 - 9}{8 - 0} = 5$.

Dus de minimale snelheid is ongeveer 5 m/s.

- c** Teken de lijn n door $(0, 0)$ en $(6, 48)$.
Er zijn twee lijnen die raken aan de grafiek en evenwijdig zijn met m .



Er zijn dus twee tijdstippen tussen $t = 0$ en $t = 6$ waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 6]$.

4

- a** Bij 9:30 uur hoort $t = 9,5$.

Voer in $y_1 = -0,014x^3 + 0,44x^2 - 2,6x + 11$.

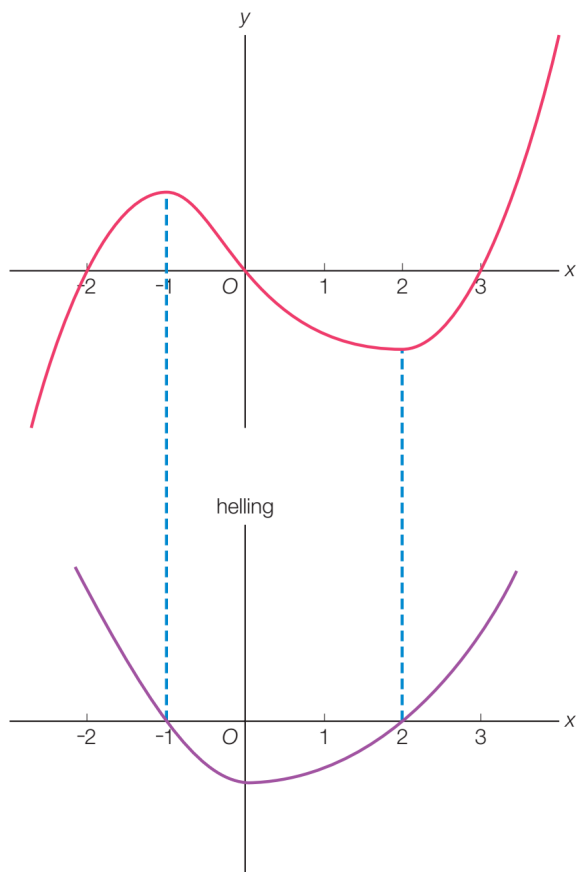
$$\text{snelheid} = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=9,5} \approx 2,0^\circ\text{C per uur}$$

- b** Bij half vier 's middags hoort $t = 15,5$.

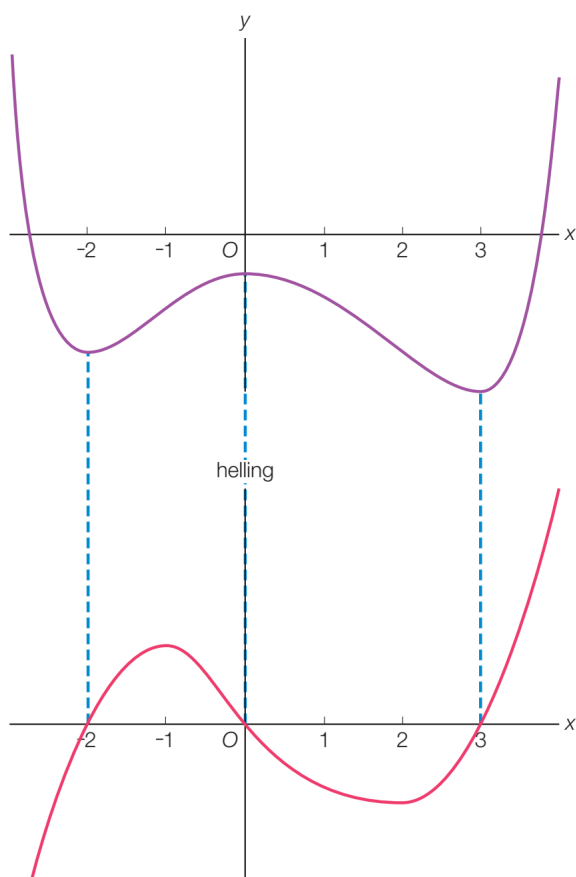
$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=15,5} \approx 0,95 > 0, \text{ dus 's middags om half vier neemt de temperatuur toe.}$$

- c** Bij kwart voor zeven 's avonds hoort $t = 18,75$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=18,75} \approx -0,87 < 0, \text{ dus 's avonds om kwart voor zeven neemt de temperatuur af.}$$



b



Bladzijde 57

- 6 a $f(x) = 0,6x^3 - 1,3x^2 + 9$ geeft $f'(x) = 1,8x^2 - 2,6x$
 b $N(t) = (3 - t)(5 + 2t) = 15 + 6t - 5t - 2t^2 = -2t^2 + t + 15$ geeft $N'(t) = -4t + 1$
 c $K(p) = p^3 - p(p - 3)^2 = p^3 - p(p^2 - 6p + 9) = p^3 - p^3 + 6p^2 - 9p = 6p^2 - 9p$ geeft $K'(p) = 12p - 9$

7 $K = 20q^2 - 5pq + 8p^3$ geeft

$$\frac{dK}{dp} = 0 - 5q + 24p^2 = 24p^2 - 5q$$

$$\frac{dK}{dq} = 40q - 5p$$

8 a $y = \frac{1}{5x^6} + 5x^6 \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{5}x^{-6} + 5x^{6\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -\frac{6}{5}x^{-7} + 32\frac{1}{2}x^{5\frac{1}{2}} = -\frac{6}{5x^7} + 32\frac{1}{2}x^5 \cdot \sqrt{x}$

b $y = (5+x)\sqrt{x} = 5\sqrt{x} + x\sqrt{x} = 5x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$

c $y = \sqrt[6]{x^5} + \frac{5}{x} + \frac{x}{6} = x^{\frac{5}{6}} + 5x^{-1} + \frac{1}{6}x$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} - 5x^{-2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6 \cdot \sqrt[6]{x}} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{6}$

9 a $y = 6(3x-1)^4 + 7x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 24(3x-1)^3 \cdot 3 + 7 = 72(3x-1)^3 + 7$

b $R = 20\sqrt{5q^3+4q} = 20(5q^3+4q)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dR}{dq} = 10(5q^3+4q)^{-\frac{1}{2}} \cdot (15q^2+4) = \frac{10(15q^2+4)}{\sqrt{5q^3+4q}} = \frac{150q^2+40}{\sqrt{5q^3+4q}}$

c $A = \frac{4}{(2-3q)^4} = 4(2-3q)^{-4}$ geeft $\frac{dA}{dq} = -16(2-3q)^{-5} \cdot -3 = \frac{48}{(2-3q)^5}$

10 a $R = 5q^{0,6} - 2q^{0,92}$ geeft $\frac{dR}{dq} = 3q^{-0,4} - 1,84q^{-0,08}$

$$\left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=6} = 3 \cdot 6^{-0,4} - 1,84 \cdot 6^{-0,08} \approx -0,13$$

Dus de snelheid waarmee R afneemt is 0,13 euro per stuk.

b De snelheid is $\left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=3} = 3 \cdot 3^{-0,4} - 1,84 \cdot 3^{-0,08} \approx 0,25$ euro per stuk.

c $\frac{dR}{dq} = 0$ geeft $3q^{-0,4} - 1,84q^{-0,08} = 0$

Voer in $y_1 = 3x^{-0,4} - 1,84x^{-0,08}$.

De optie nulpunt geeft $x = 4,60\dots$

$q = 4,60\dots$ geeft $R = 5 \cdot 4,60\dots^{0,6} - 2 \cdot 4,60\dots^{0,92} \approx 4,349$

De maximale opbrengst is ongeveer 4349 euro.

11 $E(n) = 0,48n - an^2$ geeft $E'(n) = 0,48 - 2an$

$E'(n) = 0$ geeft $0,48 - 2an = 0$

$-2an = -0,48$

$$n = \frac{0,48}{2a} = \frac{0,24}{a} = \frac{24}{100a} = \frac{6}{25a}$$

Uit de schets volgt dat E maximaal is als $n = \frac{6}{25a}$.

$$E_{\max} = E\left(\frac{6}{25a}\right) = 0,48 \cdot \frac{6}{25a} - a \cdot \left(\frac{6}{25a}\right)^2 = \frac{2,88}{25a} - a \cdot \frac{36}{625a^2} = \frac{2,88}{25a} - \frac{1,44}{25a} = \frac{1,44}{25a}$$

Gemengde opgaven

Bladzijde 58

1 a Op 16 maart om 0:00 uur is de olieprijs $101,50 + 0,50 - 1 = 101$ dollar per vat.

De tanker bevat $\frac{210\,000\,000}{127,2} \approx 1\,650\,943$ vaten olie.

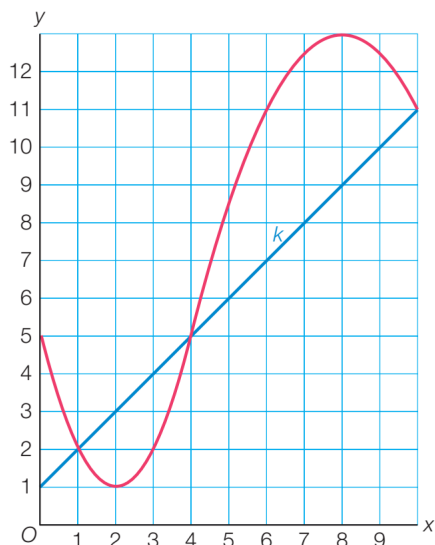
De totale waarde is $1\,650\,943 \cdot 101 \approx 166,7$ miljoen dollar.

b Het grootste prijsverschil is $1,25 + 0,75 = 2$ dollar per vat.

Dus het gevraagde verschil is $1\,650\,943 \cdot 2 \approx 3,3$ miljoen dollar.

2

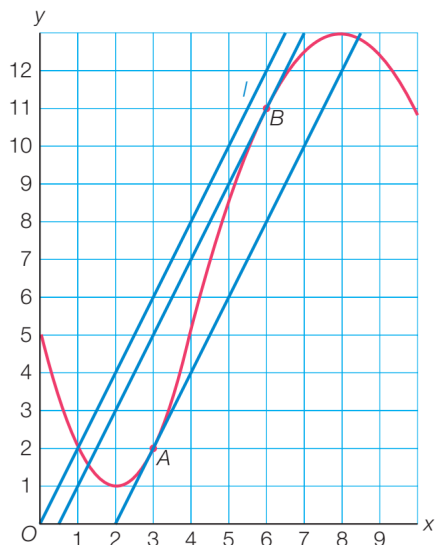
- a** afnemend dalend op $\langle 0, 2 \rangle$
 toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$
 afnemend stijgend op $\langle 4, 8 \rangle$
 toenemend dalend op $\langle 8, 10 \rangle$
- b** Teken de lijn k met $rc_k = 1$ door het punt $(10, 11)$ van de grafiek.



De lijn k snijdt de grafiek in de punten $(1, 2)$ en $(4, 5)$.

Dus voor $p = 1$ en $p = 4$ is de gemiddelde verandering gelijk aan 1.

- c** Bijvoorbeeld de intervallen $[0, 4]$, $[1, 3]$ en $[6, 10]$.
- d** Teken de lijn l door O met $rc_l = 2$.
 Teken lijnen evenwijdig met l die de grafiek raken.



In de raakpunten $A(3, 2)$ en $B(6, 11)$ is de helling van de grafiek gelijk aan 2.

- 3 a** Omdat je de waarden van x wilt weten, maakt het niet uit bij welke y -waarde je begint. Kies bijvoorbeeld $y = 0$ bij $x = 0$.

x	y
0	0 $\rightarrow +2$
1	2 $\rightarrow +3$
2	5 $\rightarrow +3$
3	8 $\rightarrow +2$
4	10 $\rightarrow +1$
5	11 $\rightarrow -1$
6	10 $\rightarrow -2$
7	8 $\rightarrow 0$
8	8



In de getekende rode grafiek treedt het maximum op bij $x = 5$. Verder zijn er twee andere mogelijkheden voor het maximum getekend. Omdat gegeven is dat de grafiek één maximum heeft, kan dit overal op $\langle 4, 6 \rangle$ optreden.

- b** Nee. Neem bijvoorbeeld $\Delta x = 4$. Je krijgt de toenames $\Delta y = 10$ en $\Delta y = -2$. De gemiddelde toename is dan 4 en dit is meer dan 3.

- c** Op $[0, 8]$ is $\Delta y = 2 + 3 + 3 + 2 + 1 - 1 - 2 + 0 = 8$, dus op $[0, 8]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{8} = 1 \neq 0$.

Op $[4, 7]$ is $\Delta y = 1 - 1 - 2 = -2$, dus op $[4, 7]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3} \neq 0$.

Op $[3, 7]$ is $\Delta y = 2 + 1 - 1 - 2 = 0$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{4} = 0$.

Op $[3, 8]$ is $\Delta y = 2 + 1 - 1 - 2 + 0 = 0$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{5} = 0$.

Dus op $[3, 7]$ en op $[3, 8]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

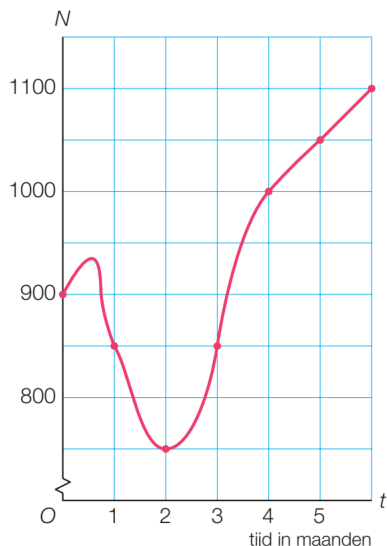
- 4 a** Tussen $t = 1$ en $t = 6$ is $\Delta N = -100 + 100 + 150 + 50 + 50 = 250$.

De gemiddelde snelheid is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{250}{5} = 50$ konijnen per maand.

- b** Maak een tabel.

t	0	1	2	3	4	5	6
N	900	850	750	850	1000	1050	1100

Zie de figuur.



5 a Het differentiequotiënt op $[3, 6]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(6) - N(3)}{6 - 3} = \frac{30 - 27,3}{3} = 0,9$.

Tussen 1 april en 1 juli 2024 is het aantal hotelovernachtingen per dag gemiddeld met 900 per maand toegenomen.

b Bij 1 november tot en met 31 december hoort $[10, 12]$.

Op $[10, 12]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(12) - N(10)}{12 - 10} = \frac{24,6 - 28}{2} = -1,7$.

De gemiddelde afname is 1700 per maand.

c Bij 1 maart hoort $t = 2$.

Voer in $y_1 = -0,2x^2 + 2,7x + 21$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 1,9$.

Dus de snelheid is 1900 hotelovernachtingen per dag, per maand.

d $N = -0,2t^2 + 2,7t + 21$ geeft $\frac{dN}{dt} = -0,4t + 2,7$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = 0 \text{ geeft } -0,4t + 2,7 &= 0 \\ -0,4t &= -2,7 \\ t &= 6,75 \end{aligned}$$

Uit de schets volgt dat N maximaal is voor $t = 6,75$.

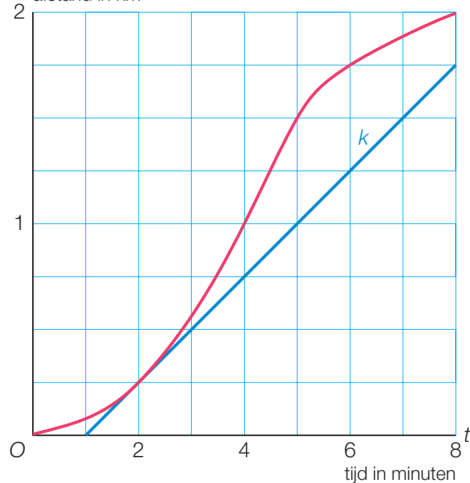
Dus in de maand juli.

Bladzijde 60

6 a $\frac{2}{8} = 0,25$ km/minuut, dat is $60 \cdot 0,25 = 15$ km/uur.

Dus de gevraagde gemiddelde snelheid is 15 km/uur.

b afstand in km



De raaklijn k gaat door de punten $(1, 0)$ en $(5, 1)$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{1 - 0}{5 - 1} = 0,25$.

De snelheid op $t = 2$ is 0,25 km/minuut oftewel 15 km/uur.

c Tussen $t = 4$ en $t = 5$ is de helling van de grafiek het grootst, waarbij de grafiek tussen $t = 4$ en $t = 5$ constant stijgend is.

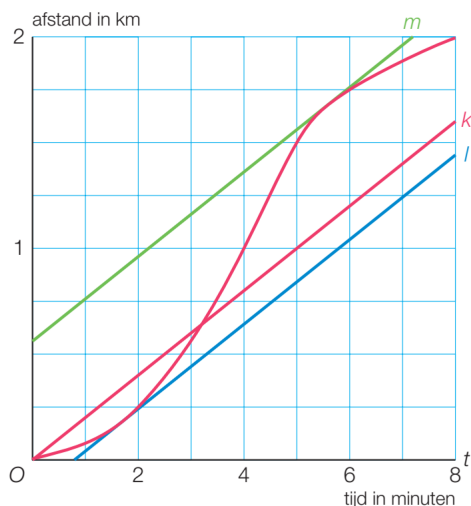
Dus de snelheid is maximaal tussen $t = 4$ en $t = 5$. Deze maximale snelheid is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van het constant stijgende deel van de grafiek.

Op $[4, 5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,5 - 1}{5 - 4} = 0,5$ km/minuut.

Dus de maximale snelheid is $60 \cdot 0,5 = 30$ km/uur.

- d** $12 \text{ km/uur} = 0,2 \text{ km/minuut}$

Teken een lijn met $rc = 0,2$, dus bijvoorbeeld de lijn k door $(0, 0)$ en $(5, 1)$ in de figuur hieronder.



Teken de lijnen l en m die raken aan de grafiek en evenwijdig zijn met k .

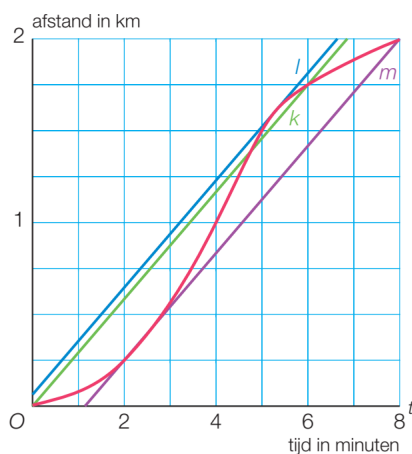
l raakt de grafiek voor $t \approx 1,5$ en m raakt de grafiek voor $t \approx 5,5$.

Dus op $t \approx 1,5$ en op $t \approx 5,5$ is de snelheid gelijk aan 12 km/uur .

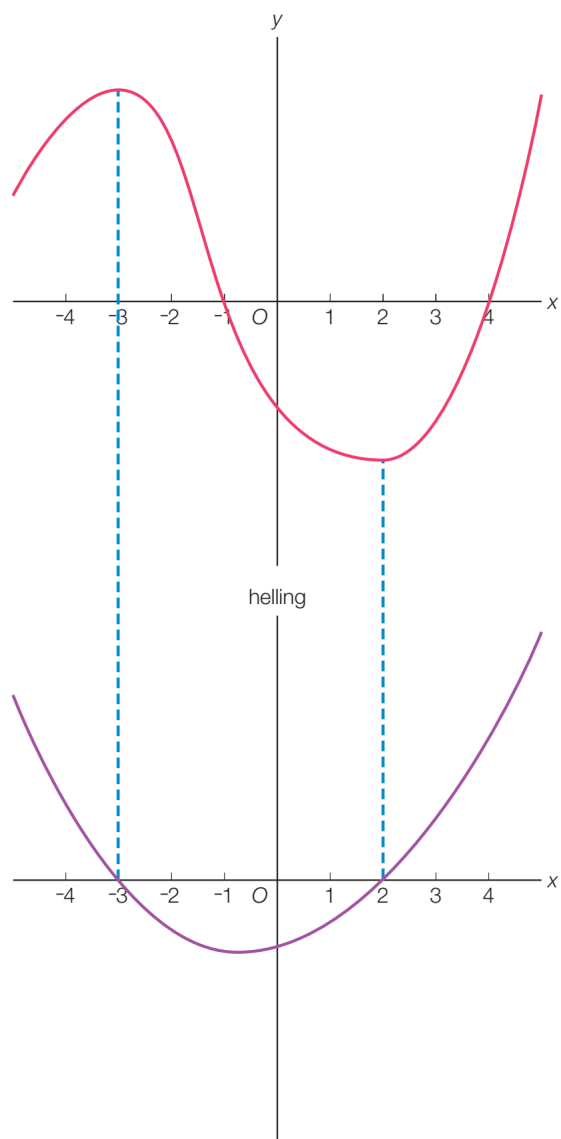
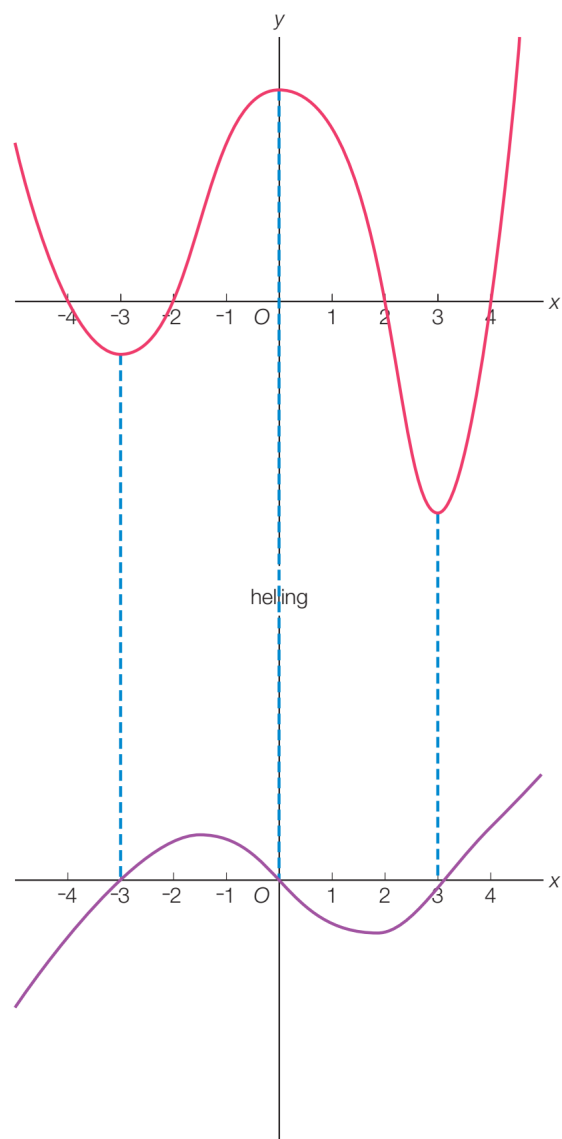
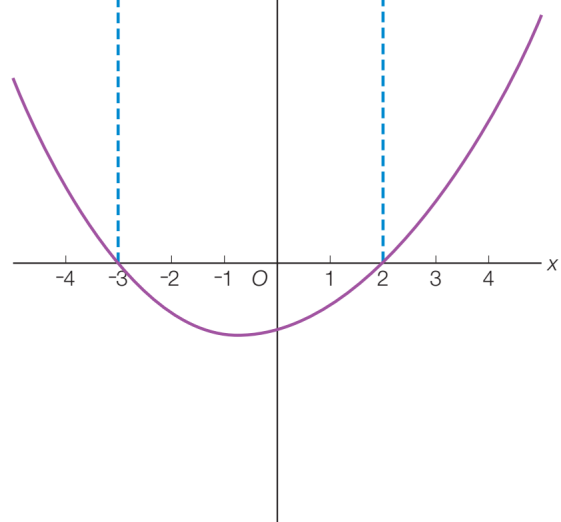
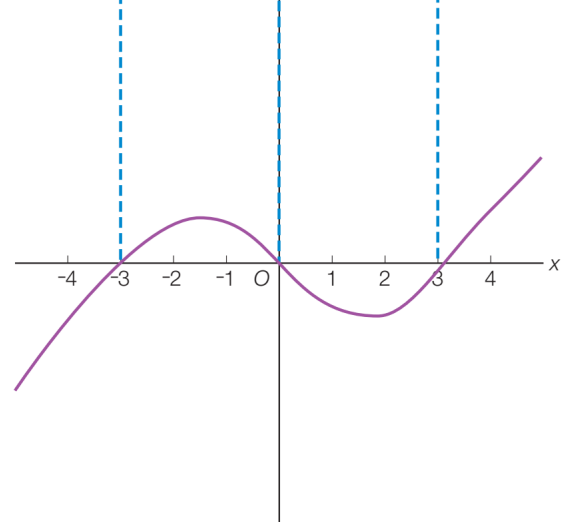
- e** De lijn k door $(0, 0)$ en $(6; 1,75)$ geeft de gemiddelde snelheid op het interval $[0, 6]$.

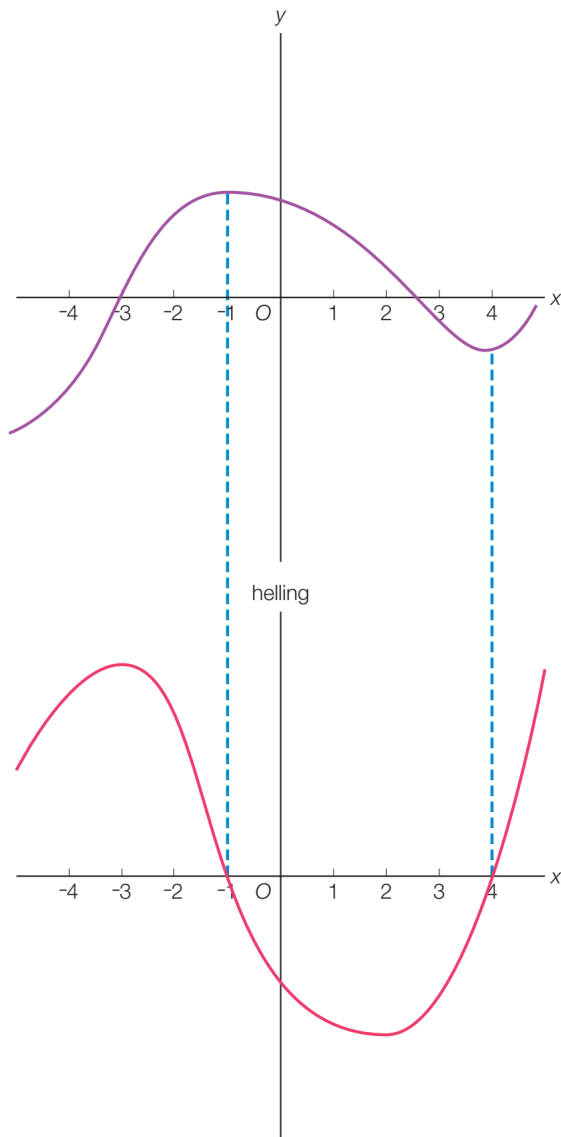
Er zijn twee lijnen die raken aan de grafiek en evenwijdig zijn met k .

Zie de lijnen l en m in de figuur.



Er zijn dus twee tijdstippen waarop de snelheid hetzelfde is als de gemiddelde snelheid op het interval $[0, 6]$.



b

- 8 a** $W(q) = -0,0001q^3 + 0,0975q^2 + 22,5q - 5000$ geeft $W'(q) = -0,0003q^2 + 0,195q + 22,5$

Voer in $y_1 = -0,0003x^2 + 0,195x + 22,5$.

De optie nulpunt geeft $x = 750$.

Uit de schets volgt dat W maximaal is voor $q = 750$.

$W_{\max} = W(750) = 24\,531,25$, dus de maximale winst is 24 531,25 euro.

- b** $W'(300) = -0,0003 \cdot 300^2 + 0,195 \cdot 300 + 22,5 = 54$

$W'(400) = -0,0003 \cdot 400^2 + 0,195 \cdot 400 + 22,5 = 52,5$

Omdat $54 > 52,5$ stijgt de winst bij een productie van 300 stuks sneller dan bij een productie van 400 stuks.

9

a $v = 20(2,1 - d)d^2 = 20d^2(2,1 - d) = 42d^2 - 20d^3$ geeft $\frac{dv}{dd} = 84d - 60d^2$
 $\frac{dv}{dd} = 0$ geeft $84d - 60d^2 = 0$

$$\begin{aligned} d(84 - 60d) &= 0 \\ d &= 0 \text{ of } 84 - 60d = 0 \\ d &= 0 \text{ of } -60d = -84 \\ d &= 0 \text{ of } d = 1,4 \end{aligned}$$

Uit de schets volgt dat v maximaal is voor $d = 1,4$.

$$v_{\max} = 42 \cdot 1,4^2 - 20 \cdot 1,4^3 = 27,44$$

De maximale snelheid is $27,44 \text{ m/s} = 27,44 \cdot 3,6 \approx 99 \text{ km/uur}$.

b $v = k(D - d)d^2 = kd^2(D - d) = kDd^2 - kd^3$ geeft $\frac{dv}{dd} = 2kDd - 3kd^2$
 $\frac{dv}{dd} = 0$ geeft $2kDd - 3kd^2 = 0$

$$\begin{aligned} kd(2D - 3d) &= 0 \\ kd &= 0 \text{ of } 2D - 3d = 0 \\ d &= 0 \text{ of } -3d = -2D \\ d &= 0 \text{ of } d = \frac{2}{3}D \end{aligned}$$

Uit de schets volgt dat v maximaal is voor $d = \frac{2}{3}D$.

c $v_{\max} = kD \cdot \left(\frac{2}{3}D\right)^2 - k \cdot \left(\frac{2}{3}D\right)^3 = kD \cdot \frac{4}{9}D^2 - k \cdot \frac{8}{27}D^3 = \frac{4}{9}kD^3 - \frac{8}{27}kD^3 = \frac{4}{27}kD^3$

d Neem bijvoorbeeld $D = 2,5$.

$$k = 20 \text{ en } D = 2,5 \text{ geeft } v_{\max} = \frac{4}{27} \cdot 20 \cdot 2,5^3 = 46,3 \text{ m/s en dat is } 46,3 \cdot 3,6 \approx 167 \text{ km/uur.}$$

Dus deze bewering kan juist zijn.

10

a $M = 90$ geeft $V = 0,0015d^2\left(\frac{1}{3} \cdot 90 - \frac{1}{2}d\right) = 0,0015d^2(30 - \frac{1}{2}d) = 0,045d^2 - 0,00075d^3$

$$V = 0,045d^2 - 0,00075d^3 \text{ geeft } \frac{dV}{dd} = 0,09d - 0,00225d^2$$

$$\frac{dV}{dd} = 0 \text{ geeft } 0,09d - 0,00225d^2 = 0$$

$$\begin{aligned} d(0,09 - 0,00225d) &= 0 \\ d &= 0 \text{ of } 0,09 - 0,00225d = 0 \\ d &= 0 \text{ of } -0,00225d = -0,09 \\ d &= 0 \text{ of } d = 40 \end{aligned}$$

Uit de schets volgt dat de verlaging V maximaal is voor $d = 40$.

$$\text{De maximale verlaging is } V_{\max} = 0,045 \cdot 40^2 - 0,00075 \cdot 40^3 = 24 \text{ mmHg.}$$

b $V = 0,0015d^2\left(\frac{1}{3}M - \frac{1}{2}d\right) = 0,0005Md^2 - 0,00075d^3$ geeft $\frac{dV}{dd} = 0,001Md - 0,00225d^2$

$$d = \frac{4}{9}M \text{ geeft } \frac{dV}{dd} = 0,001 \cdot M \cdot \frac{4}{9}M - 0,00225 \cdot \left(\frac{4}{9}M\right)^2 = \frac{1}{2250}M^2 - \frac{1}{2250}M^2 = 0$$

Uit de schets volgt dat je bij $d = \frac{4}{9}M$ met een maximum te maken hebt.

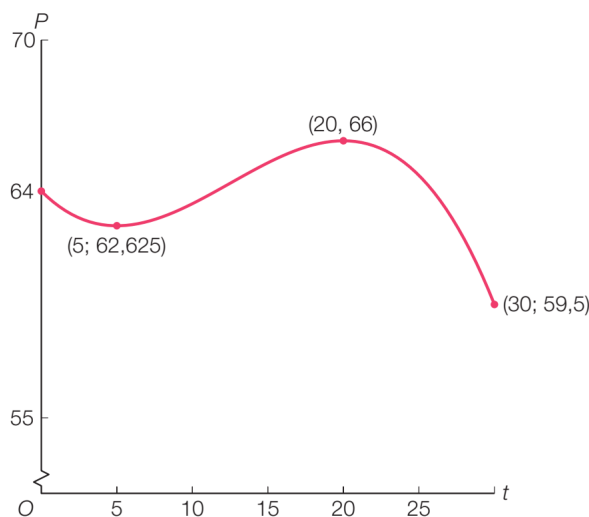
c $d = \frac{4}{9}M$ geeft

$$V_{\max} = 0,0005M \cdot \left(\frac{4}{9}M\right)^2 - 0,00075 \cdot \left(\frac{4}{9}M\right)^3 = 0,0005M \cdot \frac{16}{81}M^2 - 0,00075 \cdot \frac{64}{729}M^3 \approx 0,000033M^3$$

Dus $a = 0,000033$.

Bladzijde 62

- 11 a** Voer in $y_1 = -0,002x^3 + 0,075x^2 - 0,6x + 64$.
Neem x tussen 0 en 30.
Schets (met de coördinaten van de toppen en de randpunten, zie vraag b).
- b** $P(t) = -0,002t^3 + 0,075t^2 - 0,6t + 64$ geeft
 $P'(t) = -0,006t^2 + 0,15t - 0,6$
 $P'(t) = 0$ geeft $-0,006t^2 + 0,15t - 0,6 = 0$
Voer in $y_2 = -0,006x^2 + 0,15x - 0,6$.
De optie nulpunt bij y_2 geeft $x = 5$ en $x = 20$.
 $t = 5$ geeft $P = 62,625$
 $t = 20$ geeft $P = 66$
Dus de toppen zijn $(5; 62,625)$ en $(20, 66)$.
Randpunten: $t = 0$ geeft $P = 64$ en $t = 30$ geeft $P = 59,5$ dus $(0, 64)$ en $(30; 59,5)$.
- c** Kopen op 5 juni en verkopen op 20 juni geeft de maximale winst van $66 - 62,625 = 3,375$ euro per aandeel.
De maximale winst die Marceline kan behalen, is dus $50 \cdot 3,375 = 168,75$ euro.



- 12 a** $y = 5\sqrt{x^2 + 36} - 20 - 4x = 5(x^2 + 36)^{\frac{1}{2}} - 20 - 4x$ geeft
 $\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{2}(x^2 + 36)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - 4 = \frac{5x}{(x^2 + 36)^{\frac{1}{2}}} - 4 = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 4$
- b** helling = $\frac{5 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 36}} - 4 = 0 - 4 = -4$
- c** Los op $\frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 4 = 0$ oftewel $\frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}} = 4$
Voer in $y_1 = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}}$ en $y_2 = 4$.
De optie snijpunt geeft $x = 8$.
Uit de schets volgt dat y minimaal is voor $x = 8$.
 $x = 8$ geeft $y = -2$, dus het minimum van y is -2 .
- d** Onderzoek of $\frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 4 = 6$ een oplossing heeft, oftewel $\frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}} = 10$.
Voer in $y_2 = 10$.
De optie snijpunt geeft geen oplossing.
Dus er is geen punt op de grafiek waarin de helling gelijk is aan 6.

Bladzijde 63

- 13 a** Voer in $y_1 = 0,0025x^3 - 0,08x^2 + 0,64x$.



- b** De optie maximum geeft $x = 5,33...$
Dus na $5,33... \cdot 15 = 80$ minuten is het alcoholpromillage maximaal.

c $\left[\frac{dP}{dt}\right]_{t=7} = -0,1125$

Dus de snelheid waarmee P op $t = 7$ afneemt, is ongeveer 0,1 promille per kwartier.

d Voer in $y_2 = 0,5$.

De optie snijpunt geeft $x = 11,90\dots$

Dus na ongeveer 12 kwartier mag de proefpersoon weer autorijden.

$$\left[\frac{dP}{dt}\right]_{t=11,90\dots} = -0,201\dots$$

De snelheid waarmee het alcoholpromillage dan afneemt, is ongeveer 0,2 promille per kwartier.

9 Kansverdelingen

9.1 Toevalsvariabelen en verwachtingswaarde

Bladzijde 66

- V1**
- a** $P(\text{één keer } 2) = \binom{8}{1} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7 \approx 0,090$
 - b** $P(\text{minstens één keer } 1) = 1 - P(\text{geen enkele } 1) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^8 \approx 0,983$
 - c** $P(\text{vijf keer } 1 \text{ en drie keer } 3) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \approx 0,005$
 - d** $P(\text{vier keer } 1 \text{ en één keer } 3 \text{ en drie keer } 2) = \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \approx 0,092$

Bladzijde 67

- V2**
- a** $P(\text{minstens } 2) = 1 - P(\text{geen of } 1) = 1 - P(\text{geen}) - P(1) = 1 - 0,78^8 - \binom{8}{1} \cdot 0,22 \cdot 0,78^7 \approx 0,554$
 - b** $P(\text{zes of zeven}) = P(\text{zes}) + P(\text{zeven}) = \binom{12}{6} \cdot 0,53^6 \cdot 0,47^6 + \binom{12}{7} \cdot 0,53^7 \cdot 0,47^5 \approx 0,434$

Bladzijde 68

- V3**
- a** $P(\text{minstens één prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) = 1 - \frac{\binom{70}{5}}{\binom{80}{5}} \approx 0,497$
 - b** $P(\text{tweede en derde prijs}) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{70}{3}}{\binom{80}{5}} \approx 0,041$
- V4**
- a** $P(\text{drie keer } 2 \text{ ogen, één keer } 3 \text{ ogen en acht keer } 1, 4, 5 \text{ of } 6 \text{ ogen}) = \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^8 \approx 0,060$
 - b** $P(\text{elk aantal ogen } 2 \text{ keer}) = \binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{12} \approx 0,003$
 - c** $P(\text{bij de twaalfde worp evenveel als bij de eerste worp}) = \frac{1}{6} \approx 0,167$

- 1**
- a** $P(X = 17) = \frac{5}{25} = 0,2$
 - b** $P(Y = 1) = \frac{8}{25} = 0,32$
 - c** $P(X = 16 \text{ en } Y = 1) = \frac{7}{25} = 0,28$

Bladzijde 69

- 2**
- a** $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$
 - b** $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$
 - c** $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$
 - d** $P(\text{minstens één witte}) = P(X \geq 1)$
 - e** $P(\text{hoogstens drie witte}) = P(X \leq 3)$
 - f** $P(\text{alleen maar witte}) = P(X = 4)$

3 a $P(X=2) = P(2 \text{ witte en } 3 \text{ niet-witte}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{15}{5}} \approx 0,400$

b $P(Y=0) = P(\cancel{r} \cancel{r} \cancel{r} \cancel{r}) = \left(\frac{7}{15}\right)^4 \approx 0,047$

c $P(Y \leq 3) = 1 - P(Y=4) = 1 - P(r r r r) = 1 - \left(\frac{8}{15}\right)^4 \approx 0,919$

Bladzijde 70

4 a $P(X=2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} \approx 0,476$

b $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{5}{4}}{\binom{10}{4}} \approx 0,976$

5 a

VERSCHIL

6					1	
5				1		1
4			1		1	
3		1		1		
2	1		1			
1		1				
	1	2	3	4	5	6

$$P(X=1) = \frac{10}{36} \approx 0,278$$

b

VERSCHIL

6					1	0
5				1	0	1
4			1	0	1	
3		1	0	1		
2	1	0	1			
1	0	1				
	1	2	3	4	5	6

$$P(X < 2) = \frac{16}{36} \approx 0,444$$

6 a $P(X=6) = \binom{10}{6} \cdot 0,70^6 \cdot 0,30^4 \approx 0,200$

b $P(Y=3) = \binom{10}{3} \cdot 0,23^3 \cdot 0,77^7 \approx 0,234$

c $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - 0,77^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,23 \cdot 0,77^9 \approx 0,708$

d $P(X=8 \text{ en } Y=2) = \binom{10}{8} \cdot 0,70^8 \cdot 0,23^2 \approx 0,137$

- 7** a $P(X=20) = P(2 \text{ enveloppen met } 10 \text{ euro}) = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \approx 0,147$
 b $P(X>0) = 1 - P(X=0) = 1 - P(2 \text{ lege enveloppen}) = 1 - \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \approx 0,653$

- 8** a $P(X=16) = \frac{25}{83} \approx 0,301$
 b $P(X=16) + P(X=17) + P(X=18) = 1$

Bladzijde 72

- 9** a Omdat er drie niet-witte knikkers zijn en er zonder terugleggen wordt gepakt, is het wel mogelijk om als vierde knikker een witte te pakken, maar niet als vijfde.
 b $P(X=4) = 1 - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3)$, want $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$.
 c Stef vermenigvuldigt met de combinatie $\binom{4}{3}$, maar dat hoeft alleen als er andere volgorde mogelijk zijn met drie keer een niet-witte knikker en één keer een witte knikker. In dit geval ligt de volgorde vast, dus moet hij niet vermenigvuldigen met $\binom{4}{3}$.

- 10** $P(X=1) = P(r) = \frac{6}{10} = 0,6$
 $P(X=2) = P(wr) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \approx 0,267$
 $P(X=3) = P(wwr) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = 0,1$
 $P(X=4) = P(wwwr) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} \approx 0,029$
 $P(X=5) = P(wwwww) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 1 \approx 0,005$

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0,6	0,267	0,1	0,029	0,005

- 11** a $P(\text{Lotte wint in 2 sets}) = P(LL) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$
 b $P(\text{Gijs wint de eerste set en Lotte de volgende twee sets}) = P(GLL) = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,144$
 c $P(\text{de partij duurt 3 sets}) = P(LGL) + P(LGG) + P(GLL) + P(GLG)$
 $= 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,48$

Alternatieve uitwerking

$$P(\text{de partij duurt 3 sets}) = P(LG^*) + P(GL^*) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 1 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 1 = 0,48$$

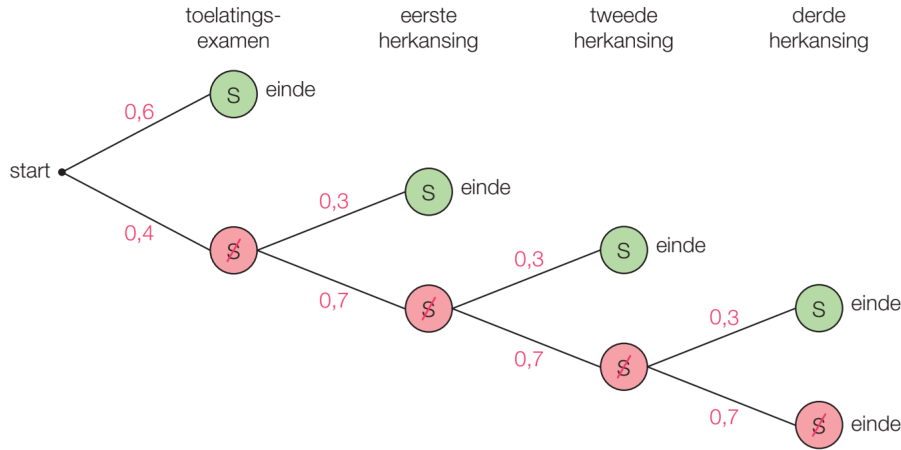
- d** $P(Y=2) = P(LL) + P(GG) = 0,6 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,52$
 $P(Y=3) = 0,48$ (zie vraag c)

y	2	3
$P(Y=y)$	0,52	0,48

Bladzijde 73

- 12** $P(Z=2) = P(BB) + P(FF) = 0,65 \cdot 0,65 + 0,35 \cdot 0,35 = 0,545$
 $P(Z=3) = 1 - P(Z=2) = 1 - 0,545 = 0,455$

z	2	3
$P(Z=z)$	0,545	0,455



$$P(A = 1) = P(S) = 0,6$$

$$P(A = 2) = P(\cancel{S}S) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$$

$$P(A = 3) = P(\cancel{S}\cancel{S}S) = 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,084$$

$$P(A = 4) = P(\cancel{S}\cancel{S}\cancel{S}S^*) = 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 1 = 0,196$$

a	1	2	3	4
$P(A = a)$	0,6	0,12	0,084	0,196

14 $P(X = 4) = P(\cancel{w}\cancel{w}\cancel{w}\cancel{w}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$

$$P(X = 5) = P(1 \text{ witte}) = \binom{4}{1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{15}$$

$$P(X = 6) = P(2 \text{ witte}) = \binom{5}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

x	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{3}$

Bladzijde 74

- 15** De opbrengst per week is $1000 \cdot 5 = 5000$ euro.
 De uitbetaling per week is $2000 + 100 \cdot 20 = 4000$ euro.
 De winst per week is $5000 - 4000 = 1000$ euro.
 Dat is gemiddeld per lot 1 euro.

Bladzijde 75

- 16 a**
- | u | 15 | 11 | 7 | 3 |
|------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|
| $P(U = u)$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{6}{27}$ | $\frac{12}{27}$ | $\frac{8}{27}$ |
- $$E(U) = 15 \cdot \frac{1}{27} + 11 \cdot \frac{6}{27} + 7 \cdot \frac{12}{27} + 3 \cdot \frac{8}{27} = 7 \text{ euro}$$
- b** $E(W) = E(U) - \text{inleg} = 7 - 8 = -1 \text{ euro}$

- 17 a** $W = \text{winst per spel, dus } W = \text{uitbetaling} - 2$

$$P(W = 48) = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$P(W = 8) = \frac{3}{100} = 0,03$$

$$P(W = -2) = \frac{96}{100} = 0,96$$

w	48	8	-2
$P(W = w)$	0,01	0,03	0,96

$$E(W) = -2 \cdot 0,96 + 8 \cdot 0,03 + 48 \cdot 0,01 = -1,20$$

De winstverwachting is -€ 1,20 per lot.

- b** Een lot moet dan $2 - 1,20 = \text{€ } 0,80$ kosten.

Bladzijde 76

18

SOM					
8	11	11	11	11	16
3	6	6	6	6	11
3	6	6	6	6	11
3	6	6	6	6	11
3	6	6	6	6	11
3	6	6	6	6	11
	3	3	3	3	8

$W = \text{winst per spel, dus } W = \text{uitbetaling} - 8$

w	8	3	-2
$P(W = w)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

$$E(W) = 8 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{10}{36} - 2 \cdot \frac{25}{36} = -\frac{12}{36} \approx -0,33$$

De verwachtingswaarde van de winst is -€ 0,33 per spel.

- 19 a** $P(\text{één keer 5 ogen}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$

$$\mathbf{b} \quad P(2 \text{ dollar uitbetaald}) = P(\text{twee keer 5 ogen}) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

$$\mathbf{c} \quad P(\text{geen uitbetaling}) = P(\text{geen 5 ogen}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

d $W = \text{winst per spel voor de organisatie} = 1 - \text{uitbetaling}$

$$P(W = -2) = P(\text{drie keer 5 ogen}) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

w	1	0	-1	-2
$P(W = w)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$$E(W) = 1 \cdot \frac{125}{216} + 0 \cdot \frac{75}{216} - 1 \cdot \frac{15}{216} - 2 \cdot \frac{1}{216} = \frac{108}{216} = 0,5$$

Het spel brengt naar verwachting $500 \cdot 0,5 = 250$ dollar op.

20 X = aantal knikkers dat Monique pakt

$$P(X=1) = P(w) = \frac{6}{10}$$

$$P(X=2) = P(rw) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90}$$

$$P(X=3) = P(rrw) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{72}{720}$$

$$P(X=4) = P(rrrw) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{144}{5040}$$

$$P(X=5) = P(rrrrw) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{24}{5040}$$

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{24}{90}$	$\frac{72}{720}$	$\frac{144}{5040}$	$\frac{24}{5040}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{24}{90} + 3 \cdot \frac{72}{720} + 4 \cdot \frac{144}{5040} + 5 \cdot \frac{24}{5040} = \frac{7920}{5040} = 1\frac{4}{7}$$

21 Tymon stopt met spelen na winst bij spel 1, na winst bij spel 2, na winst bij spel 3 of na winst of verlies bij spel 4. Als hij stopt na winst, dan is die winst altijd 10 euro. Als hij alle spelen verliest, dan is zijn verlies 150 euro.

W = winst in euro's

$$P(W=-150) = P(vvvv) = \left(\frac{19}{37}\right)^4 = 0,0695\dots$$

$$P(W=10) = 1 - P(W=-150) = 1 - 0,0695\dots = 0,9304\dots$$

w	10	-150
$P(W=w)$	0,9304...	0,0695...

$$E(W) = 10 \cdot 0,9304\dots + (-150) \cdot 0,0695\dots \approx -1,13$$

De strategie van Tymon is dus geen winnende strategie.

Bladzijde 77

C1 a $P(X=8) = \binom{10}{8} \cdot 0,86^8 \cdot 0,14^2 \approx 0,264$

b $P(X < 9) = 1 - P(X=9) - P(X=10) = 1 - \binom{10}{9} \cdot 0,86^9 \cdot 0,14 - 0,86^{10} \approx 0,418$

C2 $P(X=0) = 0,25^3 \approx 0,016$

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot 0,75 \cdot 0,25^2 \approx 0,141$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25 \approx 0,422$$

$$P(X=3) = 0,75^3 \approx 0,422$$

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,016	0,141	0,422	0,422

C3 a $P(Y=3) = P(rrw) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$

b $P(Y=1) = P(w) = \frac{5}{8}$

$$P(Y=2) = P(rw) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

$$P(Y=3) = \frac{5}{56} \text{ (zie vraag a)}$$

$$P(Y=4) = P(rrrw) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} = \frac{1}{56}$$

y	1	2	3	4
$P(Y=y)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{5}{8} + 2 \cdot \frac{15}{56} + 3 \cdot \frac{5}{56} + 4 \cdot \frac{1}{56} = 1,5$$

9.2 De binomiale verdeling

Bladzijde 78

- 22 a** $P(\text{drie keer 6 ogen}) = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,104$
b $P(\text{meer dan 2 ogen}) = P(3, 4, 5 \text{ of } 6 \text{ ogen}) = \frac{4}{6}$
 $P(\text{vijf keer meer dan 2 ogen}) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \approx 0,273$

Bladzijde 80

- 23 a** $n = 10, p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ en $k = 6$
b $P(Y = 6) = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \approx 0,228$ en dat is hetzelfde antwoord.
- 24 a** $n = 6$ en $p = \frac{8}{20} = 0,4$
 $P(X = 4) = \binom{6}{4} \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^2 \approx 0,138$
b $n = 12$ en $p = \frac{8+10}{20} = 0,9$
 $P(Y = 10) = \binom{12}{10} \cdot 0,9^{10} \cdot 0,1^2 \approx 0,230$
c Nee, ze pakt zonder terugleggen en dus verandert de kans op succes iedere keer.

$$P(Z = 3) = P(3 \text{ groene en } 1 \text{ niet-groene}) = \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{20}{4}} \approx 0,248$$

- 25 a** $X = \text{aantal keer slag}$
 $P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0,3^5 \cdot 0,7^5 \approx 0,103$
b $P(\text{alleen de laatste beurt slag}) = P(\text{5 keer niet slag}) = 0,7^4 \cdot 0,3 \approx 0,072$

- 26 a** $P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8 = 0,096$
 $P(X = 3) = 0,2^3 = 0,008$

x	0	1	2	3
$P(X \leq x)$	0,512	0,896	0,992	1

Bladzijde 82

- 27 a** $P(X = 3) = \binom{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0,273$
b Er is geen sprake van succes en mislukking.

- 28 a** $X = \text{aantal keer wit}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$.
De GR geeft $P(X = 3) \approx 0,155$.
b $X = \text{aantal keer rood}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 12$ en $p = \frac{2}{6}$.
De GR geeft $P(X \leq 5) \approx 0,822$.
c $X = \text{aantal keer blauw}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 9$ en $p = \frac{3}{6}$.
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$
De GR geeft $P(X \geq 1) \approx 0,998$.
d $P(\text{vijf keer blauw en drie keer rood}) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \approx 0,065$
e $P(\text{acht keer blauw, vijf keer rood en drie keer wit}) = \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 0,054$

- 29 a** X = aantal keer eerste opslag in
 X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = 0,55$.
 De GR geeft $P(X = 5) \approx 0,234$.
b $P(\text{alleen de laatste vier in}) = 0,45^2 \cdot 0,55^4 \approx 0,019$

- 30 a** X = aantal dat te hard rijdt
 X is binomiaal verdeeld met $n = 60$ en $p = 0,16$.
 De GR geeft $P(X = 10) \approx 0,136$.
b X = aantal dat 120 km/uur of meer rijdt
 X is binomiaal verdeeld met $n = 60$ en $p = \frac{1}{4} \cdot 0,16 = 0,04$.
 De GR geeft $P(X \leq 2) \approx 0,568$.
c X = aantal met een snelheid tussen 100 en 120 km/uur
 Een kwart van 60 is $\frac{1}{4} \cdot 60 = 15$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 60$ en $p = 0,16 - \frac{1}{4} \cdot 0,16 = 0,12$.
 De GR geeft $P(X = 15) \approx 0,003$.

- 31** X = aantal ondeugdelijke accu's
 X is binomiaal verdeeld met $n = 54$ en $p = 0,2$.
 De GR geeft $P(X \leq 3) \approx 0,003$.

- 32 a** • $P(X \geq 8)$
 • $P(X < 8)$
 • $P(X \leq 8)$
b I en IV
c I en II

Bladzijde 84

- 33 a** De GR geeft $P(X \geq 8) \approx 0,889$.
b De GR geeft $P(X < 10) = P(X \leq 9) \approx 0,347$.
c De GR geeft $P(\text{meer dan 12 keer succes}) = P(X > 12) = P(X \geq 13) \approx 0,208$.
d De GR geeft $P(\text{tussen 9 en 16 keer succes}) = P(9 < X < 16) = P(10 \leq X \leq 15) \approx 0,631$.
e De GR geeft $P(\text{minstens 6 keer succes}) = P(X \geq 6) \approx 0,982$.
f De GR geeft $P(9 \text{ of } 10 \text{ keer succes}) = P(X = 9 \text{ of } X = 10) = P(X = 9) + P(X = 10) \approx 0,294$.

- 34 a** X = aantal keer appel
 X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
 De GR geeft $P(X \geq 5) \approx 0,623$.
b X = aantal keer appel
 X is binomiaal verdeeld met $n = 25$ en $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
 De GR geeft $P(10 < X < 20) = P(11 \leq X \leq 19) \approx 0,786$.
c X = aantal keer appel
 X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
 De GR geeft $P(X > 60) = P(X \geq 61) \approx 0,018$.
d X = aantal keer kersen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 35$ en $p = \frac{1}{6}$.
 De GR geeft $P(X = 7) \approx 0,146$.

- 35 a** X = aantal keer twee rode knikkers

$$X \text{ is binomiaal verdeeld met } n = 15 \text{ en } p = P(\text{twee rode}) = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{11}{50}.$$

De GR geeft $P(X = 3) \approx 0,246$.

- b** X = aantal keer één zwarte knikker

$$X \text{ is binomiaal verdeeld met } n = 15 \text{ en } p = P(\text{één zwarte}) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{17}{1}}{\binom{25}{2}} = \frac{34}{75}.$$

De GR geeft $P(X \geq 10) \approx 0,081$.

- c** X = aantal keer twee knikkers van dezelfde kleur
 X is binomiaal verdeeld met $n = 15$ en $p = P(\text{twee van dezelfde kleur})$

$$= P(\text{twee rode}) + P(\text{twee zwarte}) + P(\text{twee witte}) = \frac{\binom{12}{2} + \binom{8}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{26}{75}.$$

De GR geeft $P(X < 6) = P(X \leq 5) \approx 0,575$.

- d** X = aantal keer minstens één rode knikker

$$X \text{ is binomiaal verdeeld met } n = 15 \text{ en } p = P(\text{minstens één rode}) = 1 - P(\text{geen rode}) = 1 - \frac{\binom{13}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{37}{50}.$$

De GR geeft $P(X \geq 8) \approx 0,978$.

- 36 a** X = aantal kinderen uit een eenoudergezin
 X is binomiaal verdeeld met $n = 11$ en $p = 0,11$.
 De GR geeft $P(X = 0) \approx 0,278$.

- b** X = aantal kinderen uit een eenoudergezin
 X is binomiaal verdeeld met $n = 22$ en $p = 0,11$.
 De GR geeft $P(X \leq 2) \approx 0,558$.

c $P(\text{twee uit een eenoudergezin}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{30}{4}}{\binom{35}{6}} \approx 0,169$

- 37** X = aantal passagiers dat komt opdagen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,88$.
 De GR geeft $P(X \leq 92) \approx 0,924$.
 De kans dat iedereen die komt opdagen een plaats heeft is 0,924.

Bladzijde 85

- 38** X = aantal gasten dat komt opdagen
 X is binomiaal verdeeld met onbekende n en $p = 0,92$.
 Voor welke n is $P(X \leq 190) \geq 0,95$?
 Voer de binomiale verdeling met $k = 190$, $p = 0,92$ en onbekende n in op het formule-invoerscherm van de GR.
 Je leest in de tabel af voor $n = 200$ is $P(X \leq 190) \approx 0,963$
 voor $n = 201$ is $P(X \leq 190) \approx 0,933$.
 Er kunnen dagelijks hoogstens 200 stoelen worden verhuurd.

- 39 a** $P(6 \text{ ogen}) = \frac{1}{6}$ en $30 \cdot \frac{1}{6} = 5$.
b X is binomiaal verdeeld met $n = 30$ en $p = \frac{1}{6}$.
 De GR geeft de kansen in de tabel.

x	3	4	5	6	7
$P(X = x)$	0,137	0,185	0,192	0,160	0,110

- 40 a** De verwachtingswaarde is $E(X) = np = 140 \cdot 0,4 = 56$ en de standaardafwijking is
 $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{140 \cdot 0,4 \cdot 0,6} \approx 5,8$.
 $E(X) - \sigma_X \approx 56 - 5,8 = 50,2$
 $E(X) + \sigma_X \approx 56 + 5,8 = 61,8$
 De GR geeft $P(50,2 < X < 61,8) = P(51 \leq X \leq 61) \approx 0,657$.

- b** X = aantal keer 6 ogen
 $E(X) = np = 1000 \cdot \frac{1}{6} = 166,66\dots$
 $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 11,78\dots$
 $E(X) - 2\sigma_X = 166,66\dots - 2 \cdot 11,78\dots = 143,09\dots$
 $E(X) + 2\sigma_X = 166,66\dots + 2 \cdot 11,78\dots = 190,23\dots$
 De GR geeft $P(X < 143,09\dots) + P(X > 190,23\dots) = P(X \leq 143) + P(X \geq 191) \approx 0,046$.

Bladzijde 86

41

*

Deze bewering is waar.

42

- a** X = aantal offertes voor occasions dat tot verkoop leidt
 X is binomiaal verdeeld met onbekende n en $p = 0,28$.
 $E(X) = np = 21$
 $0,28n = 21$
 $n = 75$
 Dus Nico heeft 75 offertes voor occasions opgesteld.
- b** X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,28$.
 $E(X) = np = 100 \cdot 0,28 = 28$
 $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0,28 \cdot 0,72} = 4,489\dots$
 $E(X) - 2\sigma_X = 28 - 2 \cdot 4,489\dots = 19,02\dots$
 Dus 19 of minder offertes leiden tot verkoop.
- c** Y = aantal offertes voor nieuwe auto's dat tot verkoop leidt
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 217$ en onbekende p .
 $E(Y) + 2\sigma_Y = 90$, oftewel $np + 2 \cdot \sqrt{np(1-p)} = 90$.
 Los op $217p + 2 \cdot \sqrt{217p(1-p)} = 90$.
 Voer in $y_1 = 217x + 2 \cdot \sqrt{217x(1-x)}$ en $y_2 = 90$.
 De optie snijpunt geeft $x = 0,3499\dots$
 Dus $p = 0,350$.

Bladzijde 87

C4

- a** X = aantal keer 6 ogen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$.
 De GR geeft $P(X = 2) \approx 0,291$.
- b** $P(\text{twee keer minder dan 3, acht keer meer dan 3}) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^8 \approx 0,020$

C5

- X = aantal keer dat het weer accuraat wordt voorspeld
 X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = 0,95$.
 De GR geeft $P(X \leq 17) \approx 0,075$.

C6

- a** X = aantal vragen goed beantwoord
 X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = \frac{1}{4}$.
 De GR geeft $P(X > 4) = P(X \geq 5) \approx 0,585$.
- b** $E(X) = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5$
 $\sigma_X = \sqrt{20 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \approx 1,94$

9.3 De normale verdeling

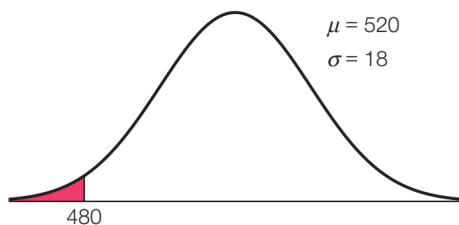
Bladzijde 88

- V5 a** Dit volgt uit de vuistregels bij de normale verdeling.
 $13,5\% + 2,5\% = 16\%$ komt overeen met een oppervlakte van 0,16.
- b** I oppervlakte = 0,135
II oppervlakte = 0,975
III oppervlakte = 0,05
IV oppervlakte = 0,84

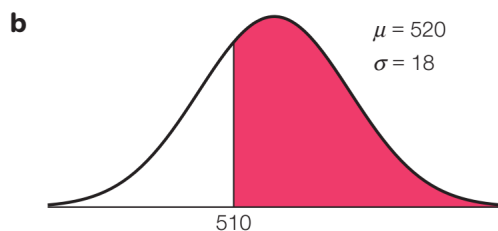
Bladzijde 90

- 43 a** Normale verdeling met $\mu = 3,5$ en $\sigma = 1,1$.
De GR geeft links van 5 opp $\approx 0,914$.
- b** Normale verdeling met $\mu = 850$ en $\sigma = 120$.
De GR geeft rechts van 700 opp $\approx 0,894$.
- c** Normale verdeling met $\mu = 1080$ en $\sigma = 60$.
De GR geeft tussen 1000 en 1100 opp $\approx 0,539$.

- 44 a** Normale verdeling met $\mu = 520$ en $\sigma = 18$.



De GR geeft links van 480 opp $\approx 0,013$.



De GR geeft rechts van 510 opp $\approx 0,711$.

- 45 a** Neem bijvoorbeeld een normale verdeling met $\mu = 0$ en $\sigma = 1$.
De GR geeft tussen -1 en 1 opp $\approx 0,6827$.
Dus dat percentage is 68,27%.
- b** Ga weer uit van $\mu = 0$ en $\sigma = 1$.
De GR geeft tussen -2 en 2 opp $\approx 0,9545$.
Dat percentage is 95,45%.

- 46 a** Normale verdeling met $\mu = 5,8$ en $\sigma = 0,4$.
De GR geeft links van 5,1 opp $\approx 0,040$.
Dus 4,0%.
- b** De GR geeft rechts van 5,25 opp $\approx 0,915$.
Dus 91,5%.
- c** De GR geeft tussen 6,1 en 6,4 opp $\approx 0,160$.
Dus 16,0%.

- 47** De oppervlakte tussen a en b is $\frac{1}{4}$.

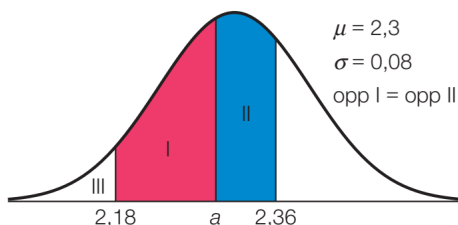
Bladzijde 91

- 48** **a** Normale verdeling met $\mu = 16$ en $\sigma = 3$ en opp links = 0,3.
De GR geeft $a \approx 14,4$.
- b** Normale verdeling met $\mu = 50$ en $\sigma = 8$ en opp rechts = 0,7.
De GR geeft $a \approx 45,8$.
- c** Normale verdeling met $\mu = 600$ en $\sigma = 70$ en opp links = 0,86.
De GR geeft $a \approx 676$.
- d** Normale verdeling met $\mu = 0,8$ en $\sigma = 0,2$ en opp rechts = 0,08.
De GR geeft $a \approx 1,08$.
- 49** Normale verdeling met $\mu = 40$ en $\sigma = 5$ en opp symmetrisch gebied = $\frac{1}{3}$.
De GR geeft $a \approx 37,8$ en $b \approx 42,2$.

Bladzijde 92

- 50** **a** Normale verdeling met $\mu = 1000$ en $\sigma = 50$ en opp links = $\frac{1}{5}$ en opp symmetrisch gebied = $\frac{1}{5}$ en opp rechts = $\frac{1}{5}$.
De GR geeft $a \approx 958$ en $b \approx 987$ en $c \approx 1013$ en $d \approx 1042$.
- b** Normale verdeling met $\mu = 150$ en $\sigma = 12$ en opp symmetrisch gebied is 0,82.
De GR geeft $p \approx 133,9$ en $q \approx 166,1$.
Normale verdeling met $\mu = 58$ en $\sigma = 6$ en opp symmetrisch gebied = $1 - 0,12 = 0,88$.
De GR geeft $r \approx 48,7$ en $s \approx 67,3$.

51



Normale verdeling met $\mu = 2,3$ en $\sigma = 0,08$.
De GR geeft tussen 2,18 en 2,36 opp(I + II) $\approx 0,70657$,
dus opp(I) $\approx \frac{1}{2} \cdot 0,70657 \approx 0,3533$.
De GR geeft links van 2,18 opp(III) $\approx 0,0668$,
dus opp(I + III) $\approx 0,3533 + 0,0668 = 0,4201$.
De GR geeft $a \approx 2,284$.

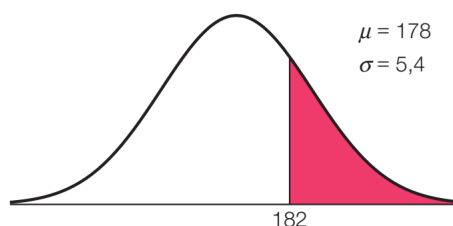
- C7** **a** Normale verdeling met $\mu = 445$ en $\sigma = 20$.
De GR geeft links van 420 opp $\approx 0,106$.
- b** De GR geeft rechts van 450 opp $\approx 0,401$.
- c** De GR geeft tussen 425 en 475 opp $\approx 0,775$.

- C8** Normale verdeling met $\mu = 178$ en $\sigma = 8$ en opp links = 0,25 en opp rechts = 0,3.
De GR geeft $a \approx 172,6$ en $b \approx 182,2$.

9.4 De normale verdeling toepassen

Bladzijde 93

- 52** **a** Normale verdeling met $\mu = 178$ en $\sigma = 5,4$.
De GR geeft rechts van 182 opp $\approx 0,229$.
- b** Van de jongens is 22,9% langer dan 182 cm.
- c** De gevraagde kans is 0,229.



53

- a** Nee, het maakt voor de oppervlakte niet uit of de grens er wel of niet bij hoort.

Dus $P(X > 575) = P(X \geq 575)$.

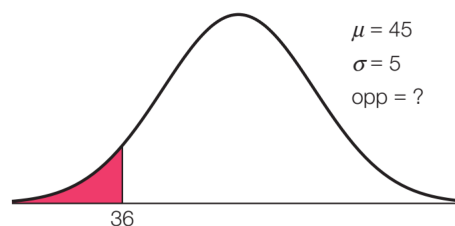
- b** Bij een score van 74 zit je nog niet bij de beste 20% van de deelnemers. Dat is pas het geval bij een score van 75 of meer.

54

- a** Normale verdeling met $\mu = 45$ en $\sigma = 5$.

De GR geeft links van 36 opp $\approx 0,036$.

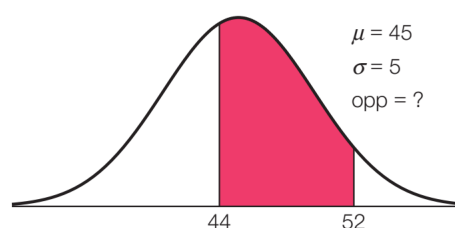
Dus 3,6%.



- b** X = lengte volwassen forel in cm

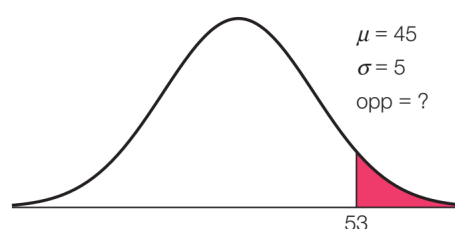
X is normaal verdeeld met $\mu = 45$ en $\sigma = 5$

De GR geeft $P(44 < X < 52) \approx 0,499$.



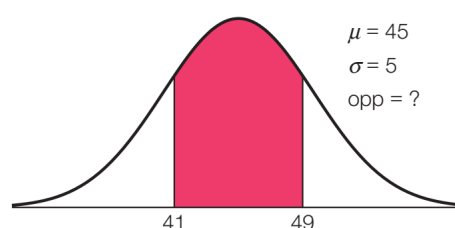
- c** De GR geeft rechts van 53 opp = 0,054...

Je verwacht $0,054... \cdot 240 \approx 13$ forellen.



- d** De GR geeft tussen 41 en 49 opp $\approx 0,576$.

Dus 57,6%.



55

- a** Normale verdeling met $\mu = 78$ en $\sigma = 12$.

De GR geeft rechts van 60 opp = 0,933...

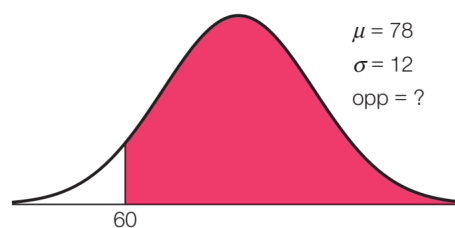
Dus $0,933... \cdot 1600 \approx 1493$ mannen

zijn zwaarder dan 60 kg.

De GR geeft links van 65 opp = 0,139...

Dus $0,139... \cdot 1600 \approx 223$ mannen

zijn lichter dan 65 kg.

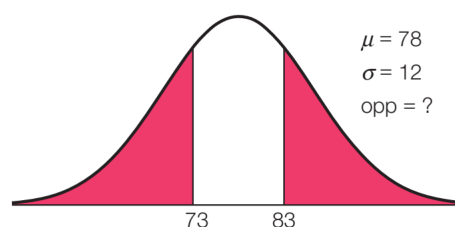


- b** X = gewicht mannelijke werknemer in kg

X is normaal verdeeld met $\mu = 78$ en $\sigma = 12$.

De GR geeft $P(73 \leq X \leq 83) = 0,323...$

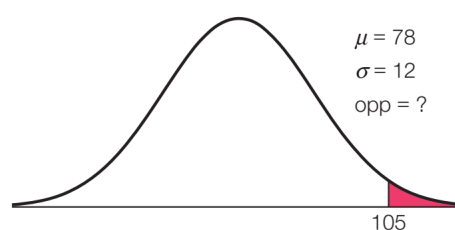
Dus de gevraagde kans is $1 - 0,323... \approx 0,677$



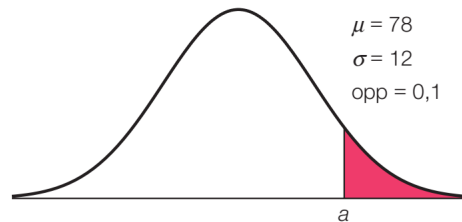
- c** De GR geeft rechts van 105 opp = 0,012...

Dus $0,012... \cdot 1600 \approx 20$ werknemers

wegen meer dan 105 kg.

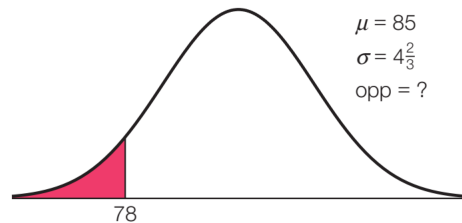


- d** opp rechts = 0,1
De GR geeft $a \approx 93,4$.
Dus vanaf 94 (of 93) kg.

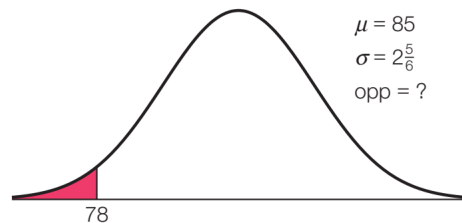


Bladzijde 95

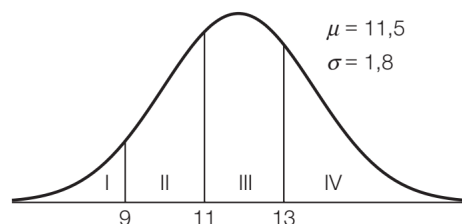
- 56 a** 280 minuten = $4\frac{2}{3}$ uur
Normale verdeling met $\mu = 85$ en $\sigma = 4\frac{2}{3}$.
De GR geeft links van 78 opp $\approx 0,067$.
Dus 6,7%.



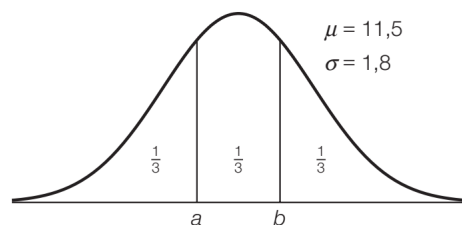
- b** 170 minuten = $2\frac{5}{6}$ uur
Normale verdeling met $\mu = 85$ en $\sigma = 2\frac{5}{6}$.
De GR geeft links van 78 opp $\approx 0,007$.
Dus 0,7%.



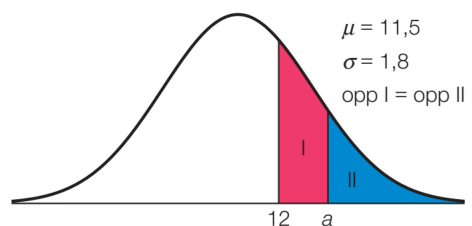
- 57 a** 18 mm = 1,8 cm
Normale verdeling met $\mu = 11,5$ en $\sigma = 1,8$.
De GR geeft links van 9 opp(I) $\approx 0,082$.
De GR geeft tussen 9 en 11 opp(II) $\approx 0,308$.
De GR geeft tussen 11 en 13 opp(III) $\approx 0,407$.
De GR geeft rechts van 13 opp(IV) $\approx 0,202$.
De percentages zijn 8,2%, 30,8%, 40,7% en 20,2%.



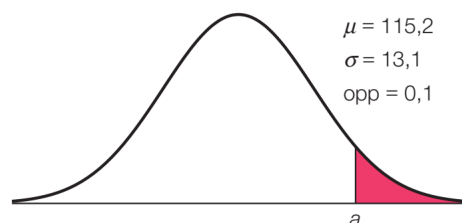
- b** Normale verdeling met $\mu = 11,5$ en $\sigma = 1,8$ en opp tussen a en $b = \frac{1}{3}$.
De GR geeft $a \approx 10,7$ en $b \approx 12,3$.
De grenzen zijn 10,7 en 12,3 cm.



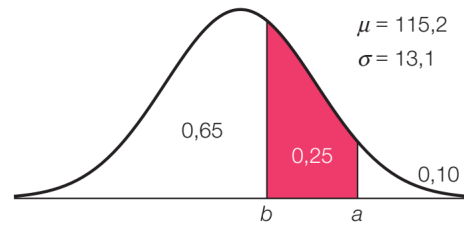
- 58** Normale verdeling met $\mu = 11,5$ en $\sigma = 1,8$.
De GR geeft rechts van 12 opp(I + II) = 0,3906...
Dus opp(II) = $\frac{1}{2} \cdot 0,3906... = 0,1952...$
De GR geeft $a \approx 13,0$.
De grens is 13,0 cm.



- 59 a** Normale verdeling met $\mu = 115,2$ en $\sigma = 13,1$ en opp rechts = 0,1.
De GR geeft $a \approx 131,99$.
Dus vanaf een IQ van 132.

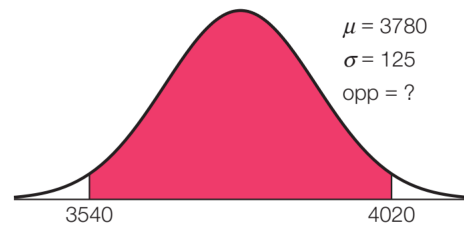


- b** opp links van $b = 0,9 - 0,25 = 0,65$
 De GR geeft $b \approx 120,25$.
 Je krijgt een herkansing bij een IQ van 121 tot en met 131
 (of 120 tot en met 131).

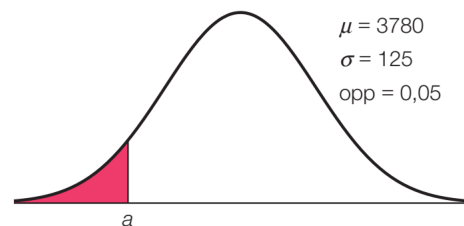


Bladzijde 96

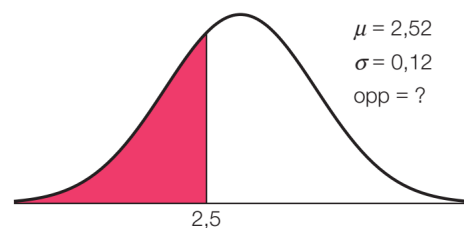
- 60 a** 1 uur en 3 minuten = $63 \cdot 60 = 3780$ seconden
 4 minuten = 240 seconden
 X = productietijd in minuten
 X is normaal verdeeld met $\mu = 3780$ en $\sigma = 125$.
 De GR geeft $P(3540 < X < 4020) \approx 0,945$.



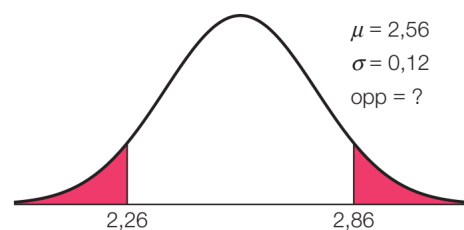
- b** Bij opp links = 0,05 geeft de GR $a \approx 3574,4$.
 De productietijd van deze artikelen is hoogstens
 3574 seconden (of 59 minuten en 34 seconden).



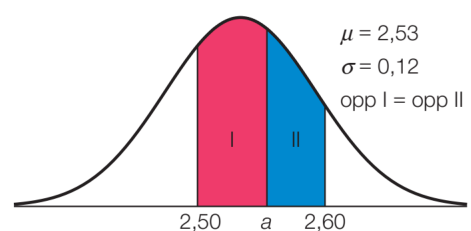
- 61 a** X = inhoud pak in kg
 X is normaal verdeeld met $\mu = 2,52$ en $\sigma = 0,12$.
 De GR geeft $P(X < 2,5) \approx 0,434$.



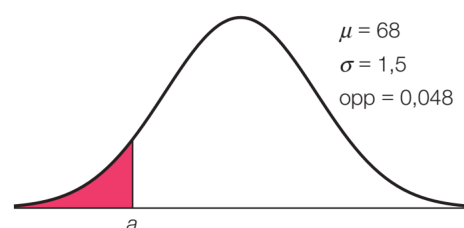
- b** De GR geeft tussen 2,26 en 2,86 opp $\approx 0,988$.
 De gevraagde oppervlakte is $1 - 0,988 = 0,012$.
 Dus 1,2%.



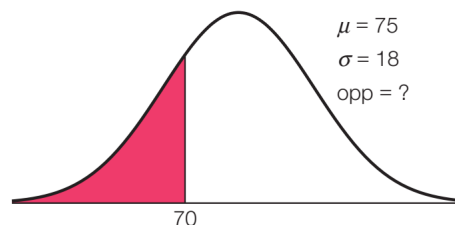
- c** Normale verdeling met $\mu = 2,53$ en $\sigma = 0,12$.
 De GR geeft tussen 2,50 en 2,60 opp = 0,318...,
 dus opp(I) = $\frac{0,318...}{2} = 0,159...$
 De GR geeft links van 2,50 opp = 0,401...
 De oppervlakte links van a is dus $0,401... + 0,159... = 0,560...$
 Bij opp links = 0,560... geeft de GR $a \approx 2,548$.
 Hij moet de grens leggen bij een gewicht van 2,548 kg.



- 62** Bij het oorspronkelijke productieproces hoort een normale
 verdeling met $\mu = 68$ en $\sigma = 1,5$.
 Bij opp links = $\frac{48}{1000} = 0,048$ geeft de GR $a = 65,50...$, dus de
 grens voor recyclen is 65,50...%.
 Bij het nieuwe productieproces hoort een normale verdeling
 met $\mu = 68$ en $\sigma = 1,15$.
 De GR geeft links van 65,50... opp $\approx 0,015$.
 Bij het nieuwe productieproces worden 15 kannetjes per 1000 gerecycled.
 Dat is een afname van $\frac{48 - 15}{48} \cdot 100\% \approx 69\%$.

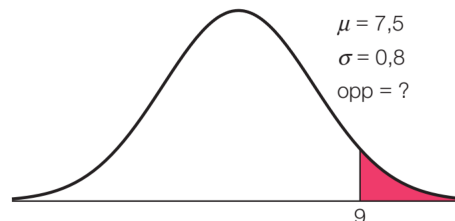


- 63 a** X = lengte conifeer in cm
 X is normaal verdeeld met $\mu = 75$ en $\sigma = 18$.
 De GR geeft $P(X < 70) = 0,390... \approx 0,391$.
- b** $P(\text{alle drie kleiner dan } 70 \text{ cm}) = 0,390...^3 \approx 0,060$



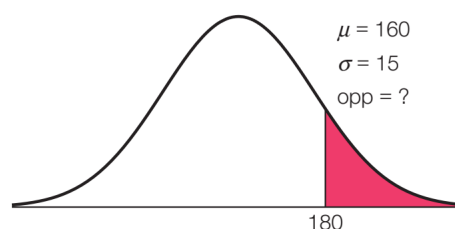
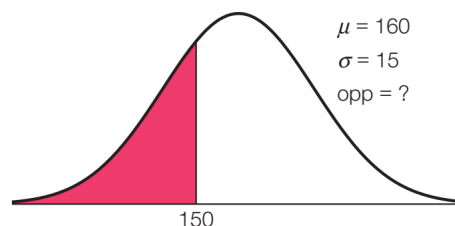
Bladzijde 97

- 64 a** X = gewicht Vlaamse reus in kg
 X is normaal verdeeld met $\mu = 7,5$ en $\sigma = 0,8$.
 De GR geeft $P(X > 9) = 0,0303... \approx 0,030$.
- b** Y = aantal Vlaamse reuzen dat zwaarder is dan 9 kg
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = 0,0303...$
 De GR geeft $P(Y \leq 2) \approx 0,978$.

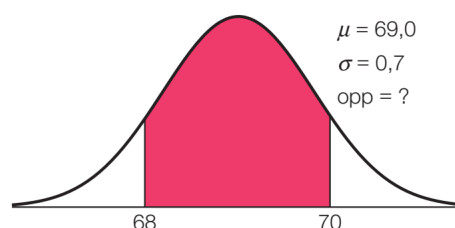


Bladzijde 98

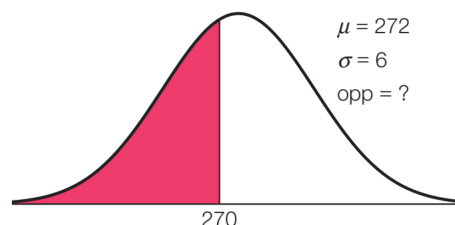
- 65 a** 2 minuten en 40 seconden = 160 seconden en
 3 minuten = 180 seconden.
 X = benodigde tijd voor handeling in seconden
 X is normaal verdeeld met $\mu = 160$ en $\sigma = 15$.
 De GR geeft $P(X > 180) = 0,091...$
 Y = aantal handelingen dat langer duurt dan 3 minuten
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 80$ en $p = 0,091...$
 De GR geeft $P(Y \geq 10) \approx 0,192$.
- b** 2,5 minuut = 150 seconden
 De GR geeft $P(X < 150) = 0,252...$
 Dus $0,252... \cdot 180 \approx 45$ van deze handelingen.



- 66 a** X = omtrek bal in cm
 X is normaal verdeeld met $\mu = 69,0$ en $\sigma = 0,7$.
 De GR geeft $P(68 \leq X \leq 70) = 0,846...$
 Dus $0,846... \cdot 100 \approx 85$ van deze ballen.
- b** Y = aantal ballen dat aan eisen voldoet
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,846...$
 De GR geeft $P(Y \geq 90) \approx 0,086$.



- 67 a** G = gewicht zak in gram
 G is normaal verdeeld met $\mu = 272$ en $\sigma = 6$.
 De GR geeft $P(G < 270) = 0,369...$
 W = aantal zakken met te weinig drop
 W is binomiaal verdeeld met $n = 9$ en $p = 0,369...$
 De GR geeft $P(W > 2) = P(W \geq 3) \approx 0,706$.
 Dus in 70,6% van de dozen.
- b** De GR geeft $P(G < 260) = 0,022...$
 M = aantal zakken met minder dan 260 gram drop
 M is binomiaal verdeeld met $n = 9$ en $p = 0,022...$
 De GR geeft $P(M = 0) \approx 0,813$.



Alternatieve uitwerking

De GR geeft $P(G < 260) = 0,022...$

$P(\text{geen enkele zak lichter dan } 260 \text{ gram}) = (1 - 0,022...) ^ 9 \approx 0,813$

c A = aantal zakjes Engelse drop dat uit uitdeelzak wordt gekozen

$$P(A \geq 1) = 1 - P(A = 0) = 1 - \frac{\binom{14}{5}}{\binom{20}{5}} = 0,870...$$

$$P(\text{uit iedere zak minstens één zakje Engelse drop}) = 0,870...^{10} \approx 0,251$$

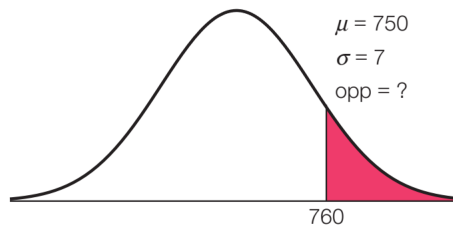
Bladzijde 99

C9

a X = vulinhoud in mL

X is normaal verdeeld met $\mu = 750$ en $\sigma = 7$.

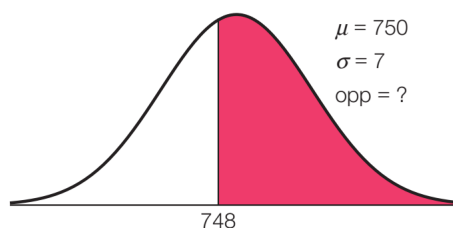
De GR geeft $P(X > 760) \approx 0,077$.



b Normale verdeling met $\mu = 750$ en $\sigma = 7$.

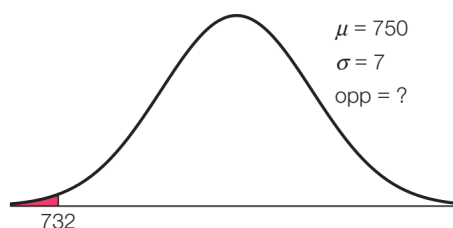
De GR geeft rechts van 748 opp $\approx 0,612$.

Dus 61,2%.



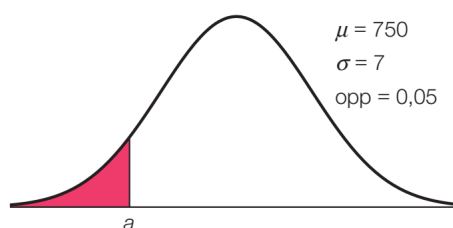
c De GR geeft $P(X < 732) = 0,005...$

Dus $0,005... \cdot 800 \approx 4$ flessen.



d Bij opp links = 0,05 geeft de GR $a \approx 738,5$.

Deze flessen hebben een vulinhoud kleiner dan 738,5 mL.



C10

X = lengte vrouw in cm

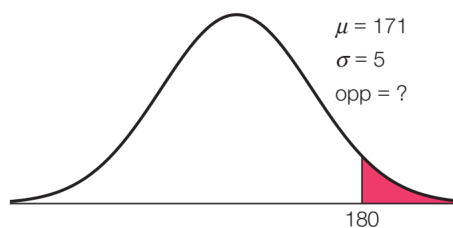
X is normaal verdeeld met $\mu = 171$ en $\sigma = 5$.

De GR geeft $P(X > 180) = 0,035...$

Y = aantal vrouwen langer dan 1,80 m

Y is binomiaal verdeeld met $n = 15$ en $p = 0,035...$

De GR geeft $P(Y \geq 3) \approx 0,015$.



1 a

SOM VAN DE GETALLEN

8	11	12	13	14	15	16
7	10	11	12	13	14	15
6	9	10	11	12	13	14
5	8	9	10	11	12	13
4	7	8	9	10	11	12
3	6	7	8	9	10	11
	3	4	5	6	7	8

1^e keer draaien

2^e keer draaien

$$P(X \leq 8) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b $P(Y > 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

c

Z = 5

8						
7						
6						
5	X	X	X			
4			X			
3			X			
	3	4	5	6	7	8

1^e keer draaien

2^e keer draaien

$$P(Z = 5) = \frac{5}{36}$$

2 $P(A = 3) = P(RRR) + P(UUU) = 0,65^3 + 0,35^3 = 0,3175 \approx 0,318$

$$P(A = 4) = \binom{3}{2} \cdot P(RRUR) + \binom{3}{2} \cdot P(UURU) = \binom{3}{2} \cdot 0,65^3 \cdot 0,35 + \binom{3}{2} \cdot 0,35^3 \cdot 0,65 = 0,3719... \approx 0,372$$

$$P(A = 5) = 1 - P(A = 3) - P(A = 4) = 1 - 0,3175 - 0,3719... \approx 0,311$$

a	3	4	5
$P(A = a)$	0,318	0,372	0,311

- 3** $W = \text{uitbetaling} - 1$
- | | | | |
|----------|-----|--------|--|
| som = 18 | 666 | 1 keer | $P(W = 99) = P(\text{som} = 18) = \frac{1}{216}$ |
| som = 17 | 665 | 3 keer | $P(W = 14) = P(\text{som} = 17) = \frac{3}{216}$ |
| som = 16 | 664 | 3 keer | |
| | 655 | 3 keer | $P(W = 4) = \frac{6}{216}$ |

$$P(W = -1) = 1 - P(W = 99) - P(W = 14) - P(W = 4) = 1 - \frac{1}{216} - \frac{3}{216} - \frac{6}{216} = \frac{206}{216}$$

w	99	14	4	-1
$P(W = w)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{206}{216}$

$$E(W) = 99 \cdot \frac{1}{216} + 14 \cdot \frac{3}{216} + 4 \cdot \frac{6}{216} + (-1) \cdot \frac{206}{216} \approx -0,19$$

De verwachtingswaarde van de winst per spel is -19 cent.

- 4 a** $X = \text{aantal leerlingen met wiskunde A of wiskunde C}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 15$ en $p = 0,45 + 0,09 = 0,54$.
 De GR geeft $P(X \leq 10) \approx 0,894$.

- b** $Y = \text{aantal leerlingen dat geen wiskunde C heeft}$
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 15$ en $p = 1 - 0,09 = 0,91$.
 $P(Y = 0) = 0,91^{15} \approx 0,243$

- 5 a** $X = \text{aantal dat met het vliegtuig gaat}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = 0,42$.
 De GR geeft $P(X > 10) = P(X \geq 11) \approx 0,170$.

- b** $P(10 \text{ met de auto en } 10 \text{ met het vliegtuig}) = \binom{20}{10} \cdot 0,51^{10} \cdot 0,42^{10} \approx 0,038$

- 6 a** $n = 40$ en $E(X) = np = 22,4$ geeft $40p = 22,4$, dus $p = 0,56$.

$$\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{40 \cdot 0,56 \cdot 0,44} \approx 3,14$$

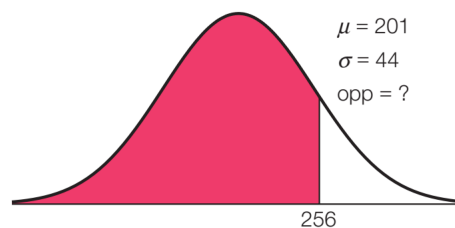
- b** $E(Y) = 45$, dus $np = 45$
- $$\sigma_Y = \sqrt{np(1-p)} = 6 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{45(1-p)} = 6 \\ 45(1-p) = 36 \\ 1-p = 0,8 \\ p = 0,2 \end{array} \right.$$

$$p = 0,2 \text{ en } np = 45 \text{ geeft } 0,2n = 45, \text{ dus } n = 225.$$

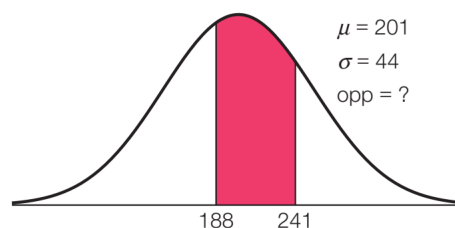
$$\text{Dus } n = 225 \text{ en } p = 0,2.$$

Bladzijde 101

- 7 a** Normale verdeling met $\mu = 201$ en $\sigma = 44$.
 De GR geeft links van 256 opp $\approx 0,894$.
 Dus 89,4%.

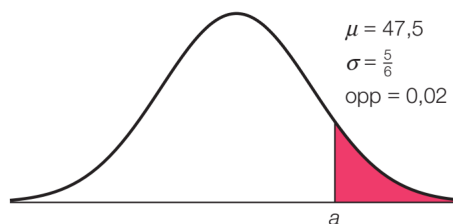


- b** De GR geeft tussen 188 en 241 opp $\approx 0,435$.
 Dus 43,5%.



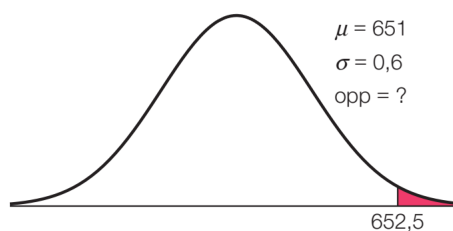
- 8** Normale verdeling met $\mu = 168$ en $\sigma = 12$ en opp symmetrisch gebied = 0,75.
De GR geeft $a \approx 154,2$.

- 9 a** 47 minuten en 30 seconden = 47,5 minuten
50 seconden = $\frac{5}{6}$ minuut
Normale verdeling met $\mu = 47,5$ en $\sigma = \frac{5}{6}$ en
opp rechts = 0,02.
De GR geeft $a \approx 49,21$.
0,21 minuut ≈ 13 seconden
Dus 49 minuten en 13 seconden.

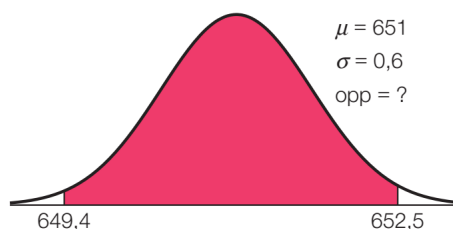


- b** Bij een snelheid van 20 km per uur hoort een tijd van $\frac{15}{20} = 0,75$ uur = 45 minuten.
Snelheid meer dan 20 km per uur, dus tijd minder dan 45 minuten.
De GR geeft links van 45 opp $\approx 0,001$.
Dus in 0,1% van de gevallen.

- 10 a** X = diameter deksel in mm
 X is normaal verdeeld met $\mu = 651$ en $\sigma = 0,6$.
De GR geeft $P(X > 652,5) = 0,006...$
Dus $0,006... \cdot 1000 \approx 6$ deksels.



- b** De GR geeft $P(649,4 \leq X \leq 652,5) = 0,989...$
 Y = aantal deksels dat op de potten past
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 1000$ en $p = 0,989...$
De GR geeft $P(Y \geq 992) \approx 0,327$.



Gemengde opgaven

Bladzijde 102

- 1 a** X = aantal keer 6 ogen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$.
De GR geeft $P(X > 2) = P(X \geq 3) \approx 0,225$.
- b** X = aantal keer meer dan 9 ogen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 12$ en
 $p = P(\text{meer dan 9 ogen}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
De GR geeft $P(X \geq 4) \approx 0,125$.
- c** hoogstens 5 ogen, dus 3, 4 of 5
3 ogen 1 1 1
4 ogen 1 1 2, 1 2 1, 2 1 1
5 ogen 1 1 3, 1 3 1, 3 1 1, 1 2 2, 2 1 2, 2 2 1
 $P(\text{hoogstens 5 ogen}) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$
 X = aantal keer hoogstens 5 ogen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = \frac{5}{108}$.
De GR geeft $P(X \leq 2) \approx 0,937$.
- d** $P(\text{minstens één keer 6 ogen}) = 1 - P(\text{niet één keer 6 ogen})$
 $= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$
 $P(\text{vier keer gooien}) = \left(\frac{25}{36}\right)^3 \cdot \frac{11}{36} \approx 0,102$

		SOM					
	6	7	8	9	10	11	12
	5	6	7	8	9	10	11
	4	5	6	7	8	9	10
	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7
		1	2	3	4	5	6

2 a $P(X = 100) = P(3\ 3\ 3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{120} \approx 0,008$

b $P(X = 20) = P(4\ 4\ 4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{120}$

$P(X = 5) = P(5\ 5\ 5) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{120}$

$P(X = 0) = 1 - P(X = 100) - P(X = 20) - P(X = 5) = 1 - \frac{1}{120} - \frac{4}{120} - \frac{12}{120} = \frac{103}{120}$

x	0	5	20	100
$P(X = x)$	$\frac{103}{120}$	$\frac{12}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{1}{120}$

c $P(Y = 10) = P(3\ 3\ 4) + P(3\ 4\ 3) + P(4\ 3\ 3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,042$

d $P(\text{twee keer een } 3) = P(3\ 3\ \cancel{3}) + P(3\ \cancel{3}\ 3) + P(\cancel{3}\ 3\ 3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = 0,1$
 $P(\text{elke keer twee keer het cijfer } 3) = 0,1^4 = 0,0001$

e $P(\text{hoofdprijs}) = \frac{1}{120}$ en $P(\text{geen hoofdprijs}) = \frac{119}{120}$
 $P(\text{acht of negen keer spelen}) = P(\text{acht keer spelen}) + P(\text{negentien keer spelen})$
 $= \left(\frac{119}{120}\right)^7 \cdot \frac{1}{120} + \left(\frac{119}{120}\right)^8 \cdot \frac{1}{120} \approx 0,016$

3 a X = aantal reizen dat niet wordt geannuleerd
 X is binomiaal verdeeld met $n = 1350$ en $p = 0,92$.

De GR geeft $P(X \leq 1250) \approx 0,802$.

b X = aantal annuleringen

X is binomiaal verdeeld met $n = 1300$ en $p = 0,08$.

De verwachtingswaarde is $E(X) = np = 1300 \cdot 0,08 = 104$ en de standaardafwijking is

$\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1300 \cdot 0,08 \cdot 0,92} \approx 9,8$.

$E(X) - \sigma_X \approx 104 - 9,8 = 94,2$

$E(X) + \sigma_X \approx 104 + 9,8 = 113,8$

De GR geeft $P(94,2 < X < 113,8) = P(95 \leq X \leq 113) \approx 0,669$.

c Stel: men verkoopt maximaal n reizen.

Voor welke n is $P(X \leq 1250) \geq 0,95$?

Voer de binomiale verdeling met $k = 1250$, $p = 0,92$ en onbekende n in op het formule-invoerscherm van de GR.

Je leest in de tabel af voor $n = 1341$ is $P(X \leq 1250) \approx 0,957$

voor $n = 1342$ is $P(X \leq 1250) \approx 0,947$.

Dus maximaal 1341 reizen.

Bladzijde 103

4 a Normale verdeling met $\mu = 60$ en $\sigma = 4$.

De GR geeft links van 56 opp = 0,1586...

Tot de klasse K behoren naar verwachting

$5000 \cdot 0,1586... \approx 793$ eieren.

De GR geeft tussen 56 en 64 opp = 0,6826...

Tot de klasse M behoren naar verwachting

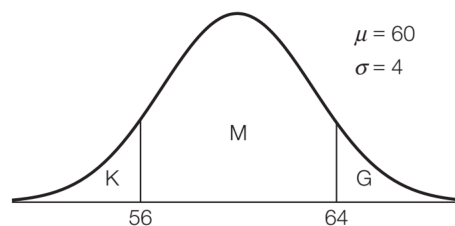
$5000 \cdot 0,6828... \approx 3414$ eieren.

b In klasse G zitten naar verwachting $5000 - 3414 - 793 = 793$ eieren.

De verwachte opbrengst is $793 \cdot 0,09 + 3414 \cdot 0,10 + 793 \cdot 0,11 = 500$ euro.

De kosten zijn dan $300 + 5000 \cdot 0,015 = 375$ euro.

Dus de verwachte winst is $500 - 375 = 125$ euro.



5 a Er wordt net zolang gegooid totdat rood of geel heeft gewonnen. Bij zowel rood als geel leiden 5 van de 36 mogelijkheden tot winst. Dus deze kansen zijn gelijk en dus beide gelijk aan 0,5.

b Je wint 5 euro met dubbel 1 (voor rood) of dubbel 6 (voor geel).

Dubbel 1 is één van de 5 mogelijkheden op winst van rood.

Deze kans is dus $\frac{1}{5} \cdot 0,5 = 0,1$.

- c $P(W = 5) = 0,1$
 $P(W = 10) = \frac{4}{5} \cdot 0,5 = 0,4$
 $P(W = -10) = P(\text{andere kleur wint}) = 0,5$

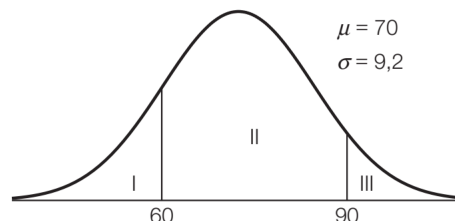
w	5	10	-10
$P(W = w)$	0,1	0,4	0,5

$$E(W) = 5 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,4 + (-10) \cdot 0,5 = -0,5$$

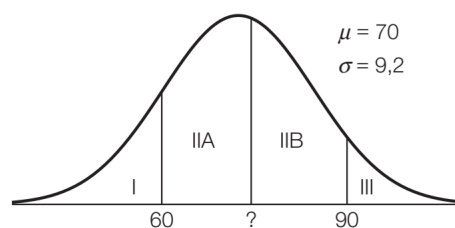
De verwachtingswaarde van de winst per spel is -50 cent.

Bladzijde 104

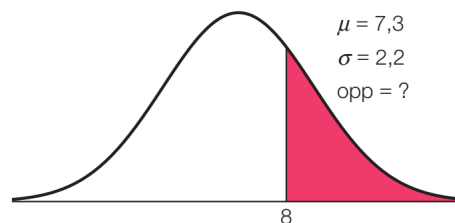
- 6 a Normale verdeling met $\mu = 70$ en $\sigma = 9,2$.
 De GR geeft links van 60 opp(I) = 0,1385... $\approx 0,139$.
 De GR geeft tussen 60 en 90 opp(II) = 0,8466... $\approx 0,847$.
 De GR geeft rechts van 90 opp(III) $\approx 0,015$.
 Dus tot groep I behoort 13,9%, tot II 84,7% en tot III 1,5%.



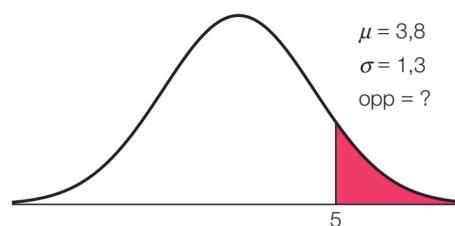
- b opp links van $a = 0,1385... + \frac{1}{2} \cdot 0,8466... = 0,5618...$
 De GR geeft $a \approx 71,43$.
 Dus de grens ligt bij 71.



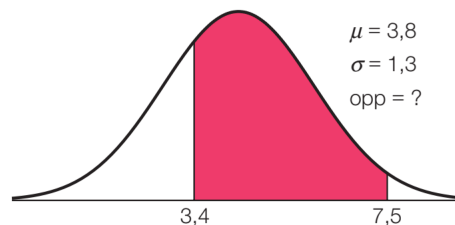
- 7 Normale verdeling met $\mu = 7,3$ en $\sigma = 2,2$.
 De GR geeft rechts van 8 opp = 0,375...
 Y = aantal bollen met een vetpercentage van meer dan 8%
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = 0,375...$
 De GR geeft $P(Y > 4) = P(Y \geq 5) \approx 0,306$.



- 8 a Normale verdeling met $\mu = 3,8$ en $\sigma = 1,3$.
 De GR geeft rechts van 5 opp = 0,177...
 Dus $0,177... \cdot 24 \cdot 365 \approx 1559$ uur.



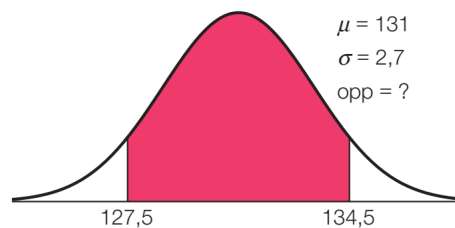
- b De GR geeft tussen 3,4 en 7,5 opp = 0,618...
 Dus $0,618... \cdot 24 \cdot 365 \approx 5420$ uur.



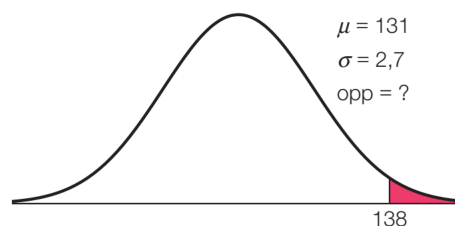
Bladzijde 105

- 9 $P(\text{met minstens 1 vriend in groepje}) = 1 - P(\text{met geen enkele vriend in het groepje}) = 1 - \frac{\binom{25}{3}}{\binom{27}{3}} = 0,213...$
 X = aantal keer met minstens één vriend in groepje
 X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = 0,213...$
 De GR geeft $P(X > 2) = P(X \geq 3) \approx 0,364$.

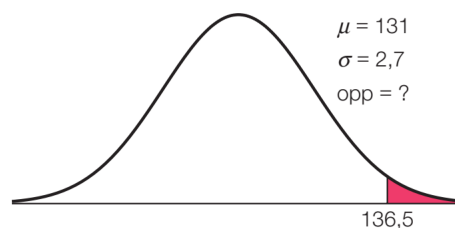
- 10 a** Normale verdeling met $\mu = 131$ en $\sigma = 2,7$.
De GR geeft tussen 127,5 en 134,5 opp $\approx 0,805$.
Dus van 80,5%.



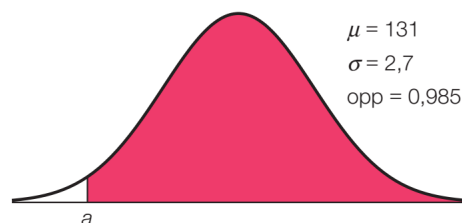
- b** X = suikergehalte van een druif in °Oe
 X is normaal verdeeld met $\mu = 131$ en $\sigma = 2,7$.
 $P(X > 138 \text{ °Oe}) = 0,004\dots$
 $P(\text{minstens één druif meer dan } 138 \text{ °Oe})$
 $= 1 - P(\text{geen enkele druif meer dan } 138 \text{ °Oe})$
 $= 1 - (1 - 0,004\dots)^5 \approx 0,024$



- c** De GR geeft rechts van 136,5 opp $\approx 0,021$.
2,1% heeft een suikergehalte van meer dan 136,5 °Oe,
dus de druif met een suikergehalte van 136,5 °Oe
behoort niet tot de twee procent druiven met het
hoogste suikergehalte.



- d** Bij opp rechts = 0,985 geeft de GR $a \approx 125,14$.
Dus deze ondergrens is 125,14 °Oe of meer.



10 Exponenten en logaritmen

10.1 Exponentiële groei

Bladzijde 108

V1	toename in procenten	13%	3,3%	120%	0,7%	6%	150%	23,7%
	groeifactor	1,13	1,033	2,2	1,007	1,06	2,5	1,237

V2	afname in procenten	13%	41,8%	6,2%	0,3%	2%	0,1%	75,4%
	groeifactor	0,87	0,582	0,938	0,997	0,98	0,999	0,246

- 1** I – C
II – A
III – B
IV – D

Bladzijde 110

- 2** **a** $C = 400 \cdot 0,995^t$
b $400 \cdot 0,995^t = 375$
Voer in $y_1 = 400 \cdot 0,995^x$ en $y_2 = 375$.
De optie snijpunt geeft $x = 12,87\dots$
Bij 12,87... hoort 12 jaar en $0,87\dots \cdot 12 \approx 10,5$ maanden.
Dus in november 2036.

Bladzijde 111

- 3** **a** $N = 400 \cdot 1,12^t$
b $400 \cdot 1,12^t = 15000$
Voer in $y_1 = 400 \cdot 1,12^x$ en $y_2 = 15000$.
De optie snijpunt geeft $x = 31,98\dots$
Dus in het jaar $1990 + 32 = 2022$.
c Bij 2030 hoort $t = 40$.
Het aantal parkieten in 2030 is $N = 400 \cdot 1,12^{40} \approx 37220$.
Voor de omzetschade in miljoenen euro's per jaar geldt $S = 3,2 \cdot 1,10^t$ met t de tijd in jaren en $t = 0$ in 2020.
Bij 2030 hoort $t = 10$.
De omzetschade in miljoenen euro's in 2030 is $S = 3,2 \cdot 1,10^{10} = 8,29\dots$
De gemiddelde schade die één halsbandparkiet veroorzaakt in 2030 is $\frac{8,29\dots \text{ miljoen}}{37220} \approx 223$ euro.

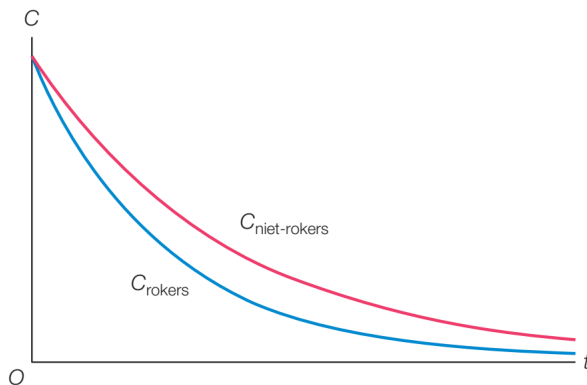
- 4** Voor het aantal kikkers geldt $N_k = 150 \cdot 1,06^t$ met t de tijd in jaren.
Voor het aantal salamanders geldt $N_s = 300 \cdot 0,94^t$ met t in jaren.
Los op $150 \cdot 1,06^t = 300 \cdot 0,94^t$.
Voer in $y_1 = 150 \cdot 1,06^x$ en $y_2 = 300 \cdot 0,94^x$.
De optie snijpunt geeft $x = 5,76\dots$
Dus na 5,8 jaar.

- 5** De groeifactor per twee jaar is $1,10 \cdot 0,90 = 0,99$.
Los op $0,99^t = 0,80$.
Voer in $y_1 = 0,99^x$ en $y_2 = 0,80$.
De optie snijpunt geeft $x = 22,20\dots$
Dus na $2 \cdot 23 = 46$ jaar.

- 6 a** Voor het bedrag B in euro's op de rekening 18 jaar na de geboorte van Jop geldt volgens de verwachting van Harm $B = 6633 \cdot 1,055^{18} \approx 17388,19$ en volgens de verwachting van Francy $B = 6633 \cdot 1,08^{18} \approx 26505,60$. Dus het bedrag is $26505,60 - 17388,19 = 9117,41$ euro hoger.
- b** $6633 \cdot g^{18} = 22045$
 Voer in $y_1 = 6633 \cdot x^{18}$ en $y_2 = 22045$.
 De optie snijpunt geeft $x = 1,0690\dots$
 Dus een rendement van 6,9% per jaar.

Bladzijde 112

- 7 a** $C_{\text{niet-rokers}} = 15 \cdot 0,89^t$
 $C_{\text{rokers}} = 15 \cdot 0,84^t$
- b** Voer in $y_1 = 15 \cdot 0,89^x$ en $y_2 = 15 \cdot 0,84^x$.



- c** $t = 1$ geeft $C_{\text{niet-rokers}} = 15 \cdot 0,89^1 = 13,35$ en $C_{\text{rokers}} = 15 \cdot 0,84^1 = 12,6$.
 Bij niet-rokers is de daling $15 - 13,35 = 1,65$ microgram per mL.
 Bij rokers is de daling $15 - 12,6 = 2,4$ microgram per mL.
 Dus de daling is $2,4 - 1,65 = 0,75$ microgram per mL groter.
- d** $15 \cdot 0,84^t = 10$
 Voer in $y_1 = 15 \cdot 0,84^x$ en $y_2 = 10$.
 De optie snijpunt geeft $x = 2,325\dots$
 Dus na 2 uur en $0,325\dots \cdot 60 \approx 20$ minuten.
 Het medicijn is dan om 13:50 uur uitgewerkt.
- e** Bij 13:50 uur hoort $t = 2,25$.
 $t = 2,25$ geeft $C_{\text{niet-rokers}} = 11,54\dots$
 De concentratie neemt dan toe tot $11,54\dots + 2,5 = 14,04\dots$ microgram per mL.
 Er geldt $C_{\text{na dosis}} = 14,04\dots \cdot 0,89^t$ met t de tijd in uren en $t = 0$ om 13:50 uur.
 Los op $14,04\dots \cdot 0,89^t = 10$.
 Voer in $y_1 = 14,04\dots \cdot 0,89^x$ en $y_2 = 10$.
 De optie snijpunt geeft $x = 2,912\dots$
 Dus na 2 uur en $0,912\dots \cdot 60 \approx 55$ minuten.
 Het medicijn is dan om 16:45 uur uitgewerkt.

- 8 a** Als de uitkomst van de formule 40 is, dan is de beginhoeveelheid van 20 verdubbeld.
 Voer in $y_1 = 20 \cdot 1,034^x$ en $y_2 = 40$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 20,7$. Dus $t = 20,7$.
- b** Het dubbele van 27,94 is 55,88 dus los op $27,94 \cdot 1,034^t = 55,88$.
 Voer in $y_1 = 27,94 \cdot 1,034^x$ en $y_2 = 55,88$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 20,7$.
 Dus 20,7 jaar later.
- c** Een verdubbeling van de hoeveelheid duurt in beide gevallen 20,7 jaar.

Bladzijde 114

- 9 a** Je kunt percentages niet zomaar optellen. Twintig keer een groei van 5% is geen $5 \cdot 20 = 100\%$, maar $1,05^{20} \approx 2,65$ oftewel 165%.
- b** $1,05^t = 2$
 Voer in $y_1 = 1,05^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 14,2$.
 Dus 14,2 jaar.

- 10 a** $0,92^t = 0,5$
 Voer in $y_1 = 0,92^x$ en $y_2 = 0,5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 8,312\dots$
 De halveringstijd is 8 jaar en $0,312\dots \cdot 12 \approx 4$ maanden (of $8,312\dots \cdot 12 \approx 100$ maanden).
- b** $1,0002^t = 2$
 Voer in $y_1 = 1,0002^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3466,082\dots$
 De verdubbelingstijd is $\frac{3466,082\dots}{365} \approx 9,5$ jaar.
- c** Er geldt $g^7 = 2$ met g de groeifactor per dag.
 $g^7 = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{7}} \approx 1,104$
 Dus het groeipercentage per dag is 10,4%.
- d** Er geldt $g^{5,25} = 0,5$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{5,25} = 0,5$ geeft $g = 0,5^{\frac{1}{5,25}} \approx 0,876$
 Dus de groeifactor per jaar is 0,876.

- 11 a** $1,0235^t = 2$
 Voer in $y_1 = 1,0235^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 29,840\dots$
 De verdubbelingstijd is 30 jaar.
- b** De bevolking van Gabon groeit minder snel en zal dus ook minder snel verdubbelen. Dat komt overeen met een langere verdubbelingstijd.

- 12 a** Er geldt $g^{25} = 0,5$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{25} = 0,5$ geeft $g = 0,5^{\frac{1}{25}} \approx 0,973$.
 $N = 410\,000 \cdot 0,973^t$
- b** Bij 2023 hoort $t = 73$.
 Het model geeft $N = 410\,000 \cdot 0,973^{73} \approx 55\,593$.
 De afwijking is $\frac{55\,593 - 50\,600}{50\,600} \cdot 100\% \approx 9,9\%$.

- 13 a** $1,2^t = 2$
 Voer in $y_1 = 1,2^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3,8017\dots$
 De verdubbelingstijd is 3 uur en $0,8017\dots \cdot 60 \approx 48$ minuten.
- b** $1,2^t = 10$
 Voer in $y_1 = 1,2^x$ en $y_2 = 10$.
 De optie snijpunt geeft $x = 12,6292\dots$
 De benodigde tijd is 12 uur en $0,6292\dots \cdot 60 \approx 38$ minuten.
- c** $1,2^t = 1,05$
 Voer in $y_1 = 1,2^x$ en $y_2 = 1,05$.
 De optie snijpunt geeft $x = 0,2676\dots$
 De hoeveelheid cellen is met 5% toegenomen na $0,2676\dots \cdot 60 \approx 16$ minuten.

Bladzijde 115

- 14** Neem bijvoorbeeld groeipercentages 20% (groeifactor 1,20) en 40% (groeifactor 1,40).
 Voer in $y_1 = 1,20^x$, $y_2 = 1,40^x$ en $y_3 = 2$.
 De optie snijpunt bij y_1 en y_2 geeft $x \approx 3,802$.
 De optie snijpunt bij y_2 en y_3 geeft $x \approx 2,060$.
 $\frac{2,060}{3,802} \approx 0,54$
 Een verdubbeling van het groeipercentage heeft dus in het algemeen geen halvering van de verdubbelingstijd als gevolg.

- 15** **a** $61 \cdot 1,037^2 = 65,59...$ miljard euro
b Voor periode I geldt $1,037^t = 2$. Voer in $y_1 = 1,037^x$ en $y_2 = 2$. De optie snijpunt geeft $x \approx 19$.
 Voor periode II geldt $1,048^t = 2$. Voer in $y_1 = 1,048^x$ en $y_2 = 2$. De optie snijpunt geeft $x \approx 15$.
 Voor periode III geldt $1,006^t = 2$. Voer in $y_1 = 1,006^x$ en $y_2 = 2$. De optie snijpunt geeft $x \approx 116$.
 Voor periode IV geldt $1,031^t = 2$. Voer in $y_1 = 1,031^x$ en $y_2 = 2$. De optie snijpunt geeft $x \approx 23$.
 Dus voor de periodes I t/m IV zijn de opeenvolgende verdubbelingstijden 19, 15, 116 en 23 jaar.
c Uit de gegevens volgt de vermenigvuldigingsfactor $1,037^2 \cdot 1,048^7 \cdot 1,006^3 = 1,5201...$
 Dat is een toename van ongeveer 52%, dus het krantenartikel is in overeenstemming met de gegevens.

Alternatieve uitwerking

$61 \cdot 1,037^2 \cdot 1,048^7 \cdot 1,006^3 = 92,727...$ miljard euro

$$\frac{92,727... - 61}{61} \cdot 100\% \approx 52,0\%$$

Het krantenartikel is dus in overeenstemming met de gegevens.

- d** Er geldt $g^{\frac{9}{12}} = 2$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{\frac{9}{12}} = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{12}} \approx 1,073$
 Het groeipercentage ten opzichte van het jaar ervoor was dus 7,3%.

- 16** **a** Elke T jaar verdubbelt het aantal exemplaren, dus na drie keer T jaar zijn er $2^3 = 8$ keer zoveel exemplaren.
 Na vier keer T jaar zijn er $2^4 = 16$ keer zoveel exemplaren.
b In totaal zijn er dan $10\,000 + 30\,000 = 40\,000$ exemplaren. Dus het aantal exemplaren is twee keer verdubbeld. Dat duurt $2 \cdot 1,5 = 3$ jaar.
c Dan duurt het $2 \cdot 5 = 10$ jaar.

Bladzijde 116

- C1** **a** $N = 5860 \cdot 0,974^t$
b $t = 6$ geeft $N \approx 5003...$
 $t = 10$ geeft $N \approx 4503$
 De afname is $5003 - 4503 = 500$.
c $5860 \cdot 0,974^t = 4200$
 Voer in $y_1 = 5860 \cdot 0,974^x$ en $y_2 = 4200$.
 De optie snijpunt geeft $x = 12,64...$
 Dus in $2010 + 13 = 2023$.

- C2** **a** $0,327^t = 0,5$
 Voer in $y_1 = 0,327^x$ en $y_2 = 0,5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 0,62...$
 De halveringstijd is $0,62... \cdot 24 = 14,88...$ uur.
 Dat is 14 uur en $0,88... \cdot 60 \approx 53$ minuten (of $14,88... \cdot 60 \approx 893$ minuten).
b Er geldt $g^{10} = 2$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{10} = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{10}} \approx 1,072$
 Dus het groeipercentage per jaar is 7,2%.

10.2 Exponentiële en lineaire groei

Bladzijde 117

- 17** **a** 9
b per vier jaar met $9^2 = 81$
 per zes jaar met $9^3 = 729$
c Een jaarlijkse groeifactor van 4,5 geeft een groeifactor per twee jaar van $4,5^2 = 20,25$, terwijl dat 9 moet zijn.
 De jaarlijkse groeifactor moet 3 zijn, want $3^2 = 9$.

Bladzijde 118

- 18** a $g_{\text{dag}} = 0,84$
 $g_{\text{week}} = 0,84^7 \approx 0,295$
 b $g_{\text{uur}} = 0,84^{\frac{1}{24}} \approx 0,993$
 De afname is 0,7% per uur.
 c $g_{\text{kwartier}} = 1,12$
 $g_{\text{uur}} = 1,12^4 \approx 1,574$
 De toename is 57,4% per uur.
 d $g_{5 \text{ min}} = 1,12^{\frac{1}{3}} \approx 1,038$
 De toename is 3,8% per vijf minuten.

Bladzijde 119

- 19** a $g_{4 \text{ uur}} = 1,3^{\frac{1}{6}} \approx 1,045$
 Het groeipercentage per vier uur is 4,5%.
 b $g_{\text{jaar}} = 1,0008$
 $g_{\text{eeuw}} = 1,0008^{100} \approx 1,083$
 De toename is 8,3% per eeuw.
 c $g_{\text{week}} = 2,8$
 $g_{\text{dag}} = 2,8^{\frac{1}{7}} \approx 1,158$
 De toename is 15,8% per dag.
- 20** a $g_{4 \text{ jaar}} = g \cdot g \cdot g \cdot g = g^4$
 b De groeifactor per jaar is $2^{\frac{1}{4}} \approx 1,189$.
 Het groeipercentage per jaar is 18,9%.

- 21** a $g_{3 \text{ jaar}} = 2,5$
 $g_{\text{jaar}} = 2,5^{\frac{1}{3}} \approx 1,357$
 Het groeipercentage per jaar is 35,7%.
 b $g_{7 \text{ jaar}} = 10$
 $g_{\text{jaar}} = 10^{\frac{1}{7}} \approx 1,389$
 Het groeipercentage per jaar is 38,9%.
 c $g_{12 \text{ jaar}} = 0,78$
 $g_{\text{jaar}} = 0,78^{\frac{1}{12}} \approx 0,980$
 De afname per jaar is 2,0%.
 d $g_{12 \text{ seconden}} = 0,5$
 $g_{\text{minuut}} = 0,5^5 \approx 0,031$
 De afname per minuut is 96,9%.

- 22** a 5 jaar = 60 maanden
 $g_{60 \text{ maanden}} = 240$
 $g_{\text{maand}} = 240^{\frac{1}{60}} \approx 1,096$
 Het groeipercentage per maand was 9,6%.
 b $g_{19 \text{ jaar}} = 0,64$
 $g_{\text{jaar}} = 0,64^{\frac{1}{19}} \approx 0,977$
 De afname per jaar was 2,3%.
 c In januari 2006 werden $\frac{5000}{0,64} \approx 7813$ artikelen geplaatst.
 Dus in januari 2001 werden $\frac{7813}{240} \approx 30$ artikelen geplaatst.

Bladzijde 120

- 23** $g_{12 \text{ jaar}} = 0,5$, dus $g_{\text{jaar}} = 0,5^{\frac{1}{12}} \approx 0,944$
 $g_{27 \text{ jaar}} = 0,24$, dus $g_{\text{jaar}} = 0,5^{\frac{1}{12}} \approx 0,949$
 Dat scheelt weinig, dus de twee resultaten zijn met elkaar in lijn.

Alternatieve uitwerking

$g_{12 \text{ jaar}} = 0,5$
 $g_{\text{jaar}} = 0,5^{\frac{1}{12}} = 0,943...$
 In 27 jaar is dat $0,943...^{27} \approx 0,21$, oftewel een afname van 79%.
 Dat scheelt weinig met 76%, dus de twee resultaten zijn met elkaar in lijn.

24 a $g_{4 \text{ uur}} = \frac{300\,000}{50\,000} = 6$

b $g_{\text{uur}} = 6^{\frac{1}{4}} = 1,5651\dots$

c Invullen van $N = 50\,000$, $g = 1,5650\dots$ en $t = 5$ geeft $b \cdot 1,5650\dots^5 = 50\,000$.
 $b = \frac{50\,000}{1,5650\dots^5} \approx 5300$

Bladzijde 121

25 a $B = b \cdot g^t$

$g_{5 \text{ uur}} = \frac{1\,250\,000}{150\,000}$, dus $g_{\text{uur}} = \left(\frac{1\,250\,000}{150\,000}\right)^{\frac{1}{5}} = 1,5281\dots$

$B = b \cdot 1,5281\dots^t$
 $t = 3$ en $B = 150\,000$ } $b \cdot 1,5281\dots^3 = 150\,000$

$b = \frac{150\,000}{1,5281\dots^3} \approx 42\,000$

Dus $B = 42\,000 \cdot 1,528^t$.

b $H = b \cdot g^t$

$g_{5,5 \text{ dagen}} = 0,64$, dus $g_{\text{dag}} = 0,64^{\frac{1}{5,5}} = 0,9220\dots$

Bij 5 januari hoort $t = 4$.

$H = b \cdot 0,9220\dots^t$
 $t = 4$ en $H = 0,6$ } $b \cdot 0,9220\dots^4 = 0,6$

$b = \frac{0,6}{0,9220\dots^4} \approx 0,83$

Dus $H = 0,83 \cdot 0,922^t$.

26 a $B = b \cdot g^t$

$g_{10 \text{ jaar}} = \frac{8100}{6200}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{8100}{6200}\right)^{\frac{1}{10}} = 1,0270\dots$

$B = b \cdot 1,0270\dots^t$
 $t = 4$ en $B = 6200$ } $b \cdot 1,0270\dots^4 = 6200$

$b = \frac{6200}{1,0270\dots^4} \approx 5570$

Dus $B = 5570 \cdot 1,027^t$.

b $5570 \cdot 1,027^t = 10\,000$

Voer in $y_1 = 5570 \cdot 1,027^x$ en $y_2 = 10\,000$.

De optie snijpunt geeft $x = 21,9\dots$

Dus voor het eerst in $2020 + 22 = 2042$.

27 a Op 0 meter diepte dringt 100% rood licht door.

$P = 100 \cdot g^d$

$g_{5 \text{ meter}} = 0,08$ dus $g_{\text{meter}} = 0,08^{\frac{1}{5}} \approx 0,603$.

Dus $P = 100 \cdot 0,603^d$.

b Als 99% van het rode licht wordt geabsorbeerd, dan dringt 1% door.

Los op $100 \cdot 0,603^d = 1$.

Voer in $y_1 = 100 \cdot 0,603^x$ en $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft $x = 9,10\dots \approx 9,1$

Dus op een diepte van 9,1 meter wordt 99% van het rode licht geabsorbeerd.

c $0,603^d = 0,5$

Voer in $y_1 = 0,603^x$ en $y_2 = 0,5$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,4$.

Matthijs moet dus 1,4 meter dieper duiken.

28 a $N = b \cdot g^t$

$$g_{38 \text{ jaar}} = \frac{322}{50}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{322}{50}\right)^{\frac{1}{38}} = 1,0502...$$

1980 is drie jaar na 1977, dus $b = 50 \cdot 1,0502...^3 \approx 58$.

Dus $N = 58 \cdot 1,050^t$.

$$\text{b } g_{22 \text{ jaar}} = \frac{17}{6}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{17}{6}\right)^{\frac{1}{22}} = 1,0484...$$

Deze groeifactor wijkt weinig af van die bij vraag a. In beide gevallen lijkt sprake van een toename van ongeveer 5% per jaar.

Bladzijde 122

29 a Zoek twee punten op de grafiek waartussen de prijs halveert, bijvoorbeeld (2014; 1,50) en (2018; 0,75). De halveringstijd is $2018 - 2014 = 4$ jaar.

b Lees af (2014; 1,50) en (2024; 0,25).

$$g_{10 \text{ jaar}} = \frac{0,25}{1,50}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{0,25}{1,50}\right)^{\frac{1}{10}} = 0,8359...$$

Los op $0,8359...^t = 0,5$.

Voer in $y_1 = 0,8359...^x$ en $y_2 = 0,5$.

De optie snijpunt geeft $x = 3,8685...$

De halveringstijd is 3 jaar en $0,8685... \cdot 12 \approx 10$ maanden (of 46 maanden).

c $P = b \cdot g^t$ met $g = 0,8359...$ (zie vraag b)

$$\left. \begin{array}{l} P = b \cdot 0,8359...^t \\ t = 4 \text{ en } P = 1,50 \end{array} \right\} b \cdot 0,8359...^4 = 1,50$$

$$b = \frac{1,50}{0,8359...^4} \approx 3,07$$

Dus $P = 3,07 \cdot 0,836^t$.

d $3,07 \cdot 0,836^t = 0,20$

Voer in $y_1 = 3,07 \cdot 0,836^x$ en $y_2 = 0,20$.

De optie snijpunt geeft $x = 15,2...$

Dus vanaf $2010 + 16 = 2026$.

30 a $P = b \cdot g^t$

$$g_{4 \text{ jaar}} = 2,99, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = 2,99^{\frac{1}{4}} = 1,3149...$$

$$\left. \begin{array}{l} P = b \cdot 1,3149...^t \\ t = 5 \text{ en } P = 145\,200 \end{array} \right\} b \cdot 1,3149...^5 = 145\,200$$

$$b = \frac{145\,200}{1,3149...^5} \approx 36\,930$$

Dus $P = 36\,930 \cdot 1,315^t$.

b $T = b \cdot g^t$

$$g_{3 \text{ jaar}} = \frac{487\,590}{165\,010}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{487\,590}{165\,010}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,4349...$$

$$\left. \begin{array}{l} T = b \cdot 1,4349...^t \\ t = 2 \text{ en } T = 165\,010 \end{array} \right\} b \cdot 1,4349...^2 = 165\,010$$

$$b = \frac{165\,010}{1,4349...^2} \approx 80\,130$$

Dus $T = 80\,130 \cdot 1,435^t$.

c $80\,130 \cdot 1,435^t = 250\,000$

Voer in $y_1 = 80\,130 \cdot 1,435^x$ en $y_2 = 250\,000$.

De optie snijpunt geeft $x = 3,150...$

Dat is 3 jaar en $0,150... \cdot 12 \approx 1,8$ maanden.

Dus in februari 2022.

$$\begin{aligned} \text{d } S &= b \cdot g^t \\ g_{2,5 \text{ jaar}} &= 2, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{2,5}} = 1,31950... \\ S &= b \cdot 1,31950...^t \\ t = 5 \text{ en } P &= 4320 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} S &= b \cdot g^t \\ g_{2,5 \text{ jaar}} &= 2, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{2,5}} = 1,31950... \\ S &= b \cdot 1,31950...^t \\ t = 5 \text{ en } P &= 4320 \end{aligned}} \right\} b \cdot 1,31950...^5 = 4320$$

$$b = \frac{4320}{1,31950...^5} = 1080$$

Dus $S = 1080 \cdot 1,320^t$.

- e De laatste 6 maanden van 2024 liggen tussen $t = 5,5$ en $t = 6$.
Dus $1080 \cdot 1,320^6 - 1080 \cdot 1,320^{5,5} \approx 740$ snellaadpunten.

Bladzijde 123

V3

a $H = at + b$ met $a = \frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{600 - 552}{10 - 4} = 8$

$$\begin{aligned} H &= 8t + b \\ t = 4 \text{ en } H &= 552 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} H &= 8t + b \\ t = 4 \text{ en } H &= 552 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} 8 \cdot 4 + b &= 552 \\ 32 + b &= 552 \\ b &= 520 \end{aligned}$$

Dus $H = 8t + 520$.

- b Lijn door $(2, 600)$ en $(10, 200)$.

$$M = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{200 - 600}{10 - 2} = -50$$

$$\begin{aligned} M &= -50t + b \\ t = 2 \text{ en } M &= 600 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} M &= -50t + b \\ t = 2 \text{ en } M &= 600 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} -50 \cdot 2 + b &= 600 \\ -100 + b &= 600 \\ b &= 700 \end{aligned}$$

Dus $M = -50t + 700$.

c $N = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{19040 - 15800}{9 - 4} = 648$

$$\begin{aligned} N &= 648t + b \\ t = 4 \text{ en } M &= 15800 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} N &= 648t + b \\ t = 4 \text{ en } M &= 15800 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} 648 \cdot 4 + b &= 15800 \\ 2592 + b &= 15800 \\ b &= 13208 \end{aligned}$$

Dus $N = 648t + 13208$.

- 31 a De toename is $5745 - 3738 = 2007$ bedrijven per 9 jaar.

Dat is een toename van $\frac{2007}{9} = 223$ bedrijven per jaar.

b $g_{9 \text{ jaar}} = \frac{87350}{56300}$
 $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{87350}{56300} \right)^{\frac{1}{9}} \approx 1,050$

Bladzijde 125

32

a $N = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{35 - 18}{9 - 5} = 4,25$

$$\begin{aligned} N &= 4,25t + b \\ t = 5 \text{ en } N &= 18 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} N &= 4,25t + b \\ t = 5 \text{ en } N &= 18 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} 4,25 \cdot 5 + b &= 18 \\ 21,25 + b &= 18 \\ b &= -3,25 \end{aligned}$$

$N = 4,25t - 3,25$

b $N = b \cdot g^t$ met $g = \left(\frac{35}{18} \right)^{\frac{1}{4}} = 1,1808...$

$$\begin{aligned} N &= b \cdot 1,1808...^t \\ t = 5 \text{ en } N &= 18 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} N &= b \cdot 1,1808...^t \\ t = 5 \text{ en } N &= 18 \end{aligned}} \right\} b \cdot 1,1808...^5 = 18$$

$$b = \frac{18}{1,1808...^5} \approx 8$$

$N = 8 \cdot 1,181^t$

33

a $H_v = -18t + 80$

$$H_d = 80 \cdot 0,85^t$$

b $-18t + 80 = 0$

$$-18t = -80$$

$$t = \frac{-80}{-18} = 4,44...$$

$$t = 4,44... \text{ geeft } H_d = 80 \cdot 0,85^{4,44...} \approx 39$$

Dus nog ongeveer 39 mg vitamine C.

c 40% van 80 mg is $0,4 \cdot 80 = 32$ mg.

$$\text{Los op } 80 \cdot 0,85^t = 32.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 80 \cdot 0,85^x \text{ en } y_2 = 32.$$

De optie snijpunt geeft $x = 5,63...$

Dus na 5 dagen en $0,63... \cdot 24 \approx 15$ uur.

Alternatieve uitwerking

$$0,85^t = 0,4$$

$$\text{Voer in } y_1 = 0,85^x \text{ en } y_2 = 0,4.$$

De optie snijpunt geeft $x = 5,63...$

Dus na 5 dagen en $0,63... \cdot 24 \approx 15$ uur.

34

a Bij $t = 2$ hoort $K_W = 113,5$ en bij $t = 13$ hoort $K_W = 119,9$.

$$K_W = b \cdot g^t \text{ met } g = \left(\frac{119,9}{113,5} \right)^{\frac{1}{11}} = 1,0049...$$

$$\left. \begin{array}{l} K_W = b \cdot 1,0049...^t \\ t = 2 \text{ en } K_W = 113,5 \end{array} \right\} b \cdot 1,0049...^2 = 113,5$$

$$b = \frac{113,5}{1,0049...^2} \approx 112,4$$

$$K_W = 112,4 \cdot 1,005^t$$

Bij $t = 2$ hoort $K_E = 9,76$ en bij $t = 10$ hoort $K_E = 9,60$.

$$K_E = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta K_E}{\Delta t} = \frac{9,60 - 9,76}{10 - 2} = -0,02$$

$$\left. \begin{array}{l} K_E = -0,02t + b \\ t = 2 \text{ en } K_E = 9,76 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,02 \cdot 2 + b = 9,76 \\ -0,04 + b = 9,76 \\ b = 9,8 \end{array}$$

$$\text{Dus } K_E = -0,02t + 9,8.$$

b In 2020 gold $K_W = 112,4$ en $K_E = 9,8$.

$$\text{Dus in 2020 was het } \frac{9,8}{112,4} \cdot 100\% \approx 8,7\%.$$

$$\text{In 2033 geldt } K_W = 112,4 \cdot 1,005^{13} = 119,929... \text{ en } K_E = -0,02 \cdot 13 + 9,8 = 9,54.$$

$$\text{Dus in 2033 is het } \frac{9,54}{119,929...} \cdot 100\% \approx 8,0\%.$$

c Buiten Europa geldt $K_B = K_W - K_E = 112,4 \cdot 1,005^t - (-0,02t + 9,8) = 112,4 \cdot 1,005^t + 0,02t - 9,8$.

$$\text{Los op } 112,4 \cdot 1,005^t + 0,02t - 9,8 = 114.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 112,4 \cdot 1,005^x + 0,02x - 9,8 \text{ en } y_2 = 114.$$

De optie snijpunt geeft $x = 18,7...$

Dus in 2020 + 19 = 2039.

35 a Tussen $t = 0$ en $t = 2$ geldt $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{300 - 250}{2 - 0} = 25$.

Tussen $t = 2$ en $t = 4$ geldt $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{360 - 300}{4 - 2} = 30$.

Er is dus geen sprake van een vaste toename per tijdseenheid.

b Tussen $t = 0$ en $t = 2$ geldt $g = \left(\frac{300}{250}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,095\dots$

Tussen $t = 2$ en $t = 4$ geldt $g = \left(\frac{360}{300}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,095\dots$

Er is dus wel sprake van een vaste groeifactor per tijdseenheid.

Bladzijde 127

36 I: $\left(\frac{147456}{262144}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,75$; $\left(\frac{62208}{147456}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,75$ en $\left(\frac{19683}{62208}\right)^{\frac{1}{4}} = 0,75$

Er is dus sprake van een exponentieel verband $B = b \cdot g^t$ met $g = 0,75$.

$$\left. \begin{array}{l} B = b \cdot 0,75^t \\ t = 1 \text{ en } B = 262144 \end{array} \right\} b \cdot 0,75^1 = 262144$$

$$b = \frac{262144}{0,75^1} \approx 349525$$

Dus $B = 349525 \cdot 0,75^t$.

II: $1 \cdot 165 = 165$; $3 \cdot 55 = 165$; $6 \cdot 27,5 = 165$ en $10 \cdot 16,5 = 165$

Er is dus sprake van een omgekeerd evenredig verband $q = \frac{a}{p}$ met $a = 165$.

Dus $q = \frac{165}{p}$.

III: $\frac{227,5 - 282,5}{3 - 1} = -27,5$; $\frac{145 - 227,5}{6 - 3} = -27,5$ en $\frac{35 - 145}{10 - 6} = -27,5$

Er is dus sprake van een lineair verband $P = ar + b$ met $a = -27,5$.

$$\left. \begin{array}{l} P = -27,5r + b \\ r = 1 \text{ en } N = 282,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -27,5 \cdot 1 + b = 282,5 \\ -27,5 + b = 282,5 \\ b = 310 \end{array}$$

Dus $P = -27,5r + 310$.

Bladzijde 128

37 a Controleren van het exponentiële verband tussen P en h :

$$\frac{889}{1013} = 0,8775\dots; \frac{780}{889} = 0,8773\dots; \frac{685}{780} = 0,8782\dots \text{ en } \left(\frac{406}{685}\right)^{\frac{1}{4}} = 0,8774\dots$$

De groeifactoren per jaar zijn ongeveer gelijk, dus de tabel stemt overeen met een exponentieel verband.

Controleren van het lineaire verband tussen T en h :

$$\frac{96,9 - 100,3}{1 - 0} = -3,4; \frac{93,6 - 96,9}{2 - 1} = -3,3; \frac{90,2 - 93,6}{3 - 2} = -3,4 \text{ en } \frac{76,7 - 90,2}{7 - 3} = -3,375$$

De richtingscoëfficiënten zijn ongeveer gelijk, dus de tabel stemt overeen met een lineair verband.

b $P = b \cdot g^h$ met $b = 1013$ en $g = \left(\frac{406}{1013}\right)^{\frac{1}{7}} = 0,8775\dots$ geeft $P = 1013 \cdot 0,878^h$.

$$T = ah + b \text{ met } b = 100,3 \text{ en } a = \frac{\Delta T}{\Delta h} = \frac{76,7 - 100,3}{7 - 0} = -3,3714\dots \text{ geeft } T = -3,371h + 100,3$$

c Bij 5400 m hoort $h = 5,4$.

$$h = 5,4 \text{ geeft } T = -3,371 \cdot 5,4 + 100,3 \approx 82$$

Dus 82°C .

d $1013 \cdot 0,878^h = 320$

Voer in $y_1 = 1013 \cdot 0,878^x$ en $y_2 = 320$.

De optie snijpunt geeft $x = 8,856\dots$

Dus Mount Everest is 8,86 km hoog.

38 a In $32 - 21 = 11$ verdiepingen $37,98 - 21,75 = 16,23$ miljoen euro erbij.

Dus $\frac{16,23}{11} = 1,475...$ miljoen euro meer per verdieping.

Bij 25 verdiepingen zijn de bouwkosten dus $21,75 + 4 \cdot 1,475... \approx 27,65$ miljoen euro.

$$\mathbf{b} \quad \frac{11,25 - 7,5}{8 - 0} = 0,468...; \frac{15,25 - 11,25}{14 - 8} = 0,666...; \frac{21,75 - 15,25}{21 - 14} = 0,928... \text{ en}$$

$$\frac{37,98 - 21,75}{32 - 21} = 1,475...$$

De bouwkosten per verdieping zijn niet gelijk, dus er bestaat geen lineair verband tussen K en n .

$$\mathbf{c} \quad \left(\frac{11,25}{7,5}\right)^{\frac{1}{8}} = 1,0519...; \left(\frac{15,25}{11,25}\right)^{\frac{1}{6}} = 1,0520...; \left(\frac{21,75}{15,25}\right)^{\frac{1}{7}} = 1,0520... \text{ en } \left(\frac{37,98}{21,75}\right)^{\frac{1}{11}} = 1,0519...$$

De groeifactoren per verdieping zijn ongeveer gelijk, dus de waarden in de tabel stemmen overeen met een exponentieel verband.

d De groeifactor per verdieping is ongeveer 1,052 (zie vraag c).

$1,052^2 \approx 1,107$, dus 10,7%.

$$\mathbf{e} \quad \left(\frac{37,98}{21,75}\right)^{\frac{1}{11}} = 1,0519..., \text{ dus bij 25 verdiepingen hoort } K = 21,75 \cdot 1,0519...^4 \approx 26,64.$$

Het verschil met het antwoord van vraag a is ongeveer $27,65 - 26,64 = 1,01$ miljoen euro.

$$\mathbf{f} \quad K = 7,5 \cdot 1,052^n$$

Los op $7,5 \cdot 1,052^n = 19,5$.

Voer in $y_1 = 7,5 \cdot 1,052^x$ en $y_2 = 19,5$.

De optie snijpunt geeft $x = 18,8...$

Dus 18 verdiepingen met appartementen.

Bladzijde 129

C3

$$\mathbf{a} \quad g_{\text{kwartier}} = 1,032$$

$$g_{\text{uur}} = 1,032^4 \approx 1,134$$

De toename is 13,4% per uur.

$$\mathbf{b} \quad g_{\text{dag}} = 0,235$$

$$g_{\text{uur}} = 0,235^{\frac{1}{24}} \approx 0,941$$

De afname is 5,9% per uur.

C4

$$\mathbf{a} \quad H = b \cdot g^t$$

$$g_{15 \text{ jaar}} = 0,5, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = 0,5^{\frac{1}{15}} = 0,9548...$$

$$\left. \begin{array}{l} H = b \cdot 0,9548...^t \\ t = 5,5 \text{ en } P = 508 \end{array} \right\} b \cdot 0,9548...^{5,5} = 508$$

$$b = \frac{508}{0,9548...^{5,5}} \approx 655$$

Dus $H = 655 \cdot 0,955^t$.

$$\mathbf{b} \quad N = b \cdot g^t$$

$$g_{5 \text{ dagen}} = \frac{200}{800}, \text{ dus } g_{\text{dag}} = \left(\frac{200}{800}\right)^{\frac{1}{5}} = 0,7578...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,7578...^t \\ t = 2 \text{ en } N = 800 \end{array} \right\} b \cdot 0,7578...^2 = 800$$

$$b = \frac{800}{0,7578...^2} \approx 1393$$

Dus $N = 1393 \cdot 0,758^t$.

C5 $N_U = b \cdot g^t$ met $g = (0,5)^{\frac{1}{12}} = 0,9438\dots$ en $b = 60$
Dus $N_U = 60 \cdot 0,944^t$.

$$N_L = at + b \text{ met } a = -0,1 \cdot 12 = -1,2$$

$$\left. \begin{array}{l} N_L = -1,2t + b \\ t = 3 \text{ en } N_L = 50 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,2 \cdot 3 + b = 50 \\ -3,6 + b = 50 \\ b = 53,6 \end{array}$$

$$\text{Dus } N_L = -1,2t + 53,6.$$

C6 Controleren van het lineaire verband tussen N en t :

$$\frac{40,07 - 48,24}{3 - 0} = -2,723\dots; \frac{33,28 - 40,07}{6 - 3} = -2,263\dots \text{ en } \frac{25,98 - 33,28}{10 - 6} = -1,825$$

De richtingscoëfficiënten zijn niet gelijk, dus de gegevens in de tabel stemmen niet overeen met een lineair verband.

Controleren van het exponentiële verband tussen N en t .

$$\left(\frac{40,07}{48,24}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,9400\dots; \left(\frac{33,28}{40,07}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,9399\dots \text{ en } \left(\frac{25,98}{33,28}\right)^{\frac{1}{4}} = 0,9399\dots$$

De groeifactoren per jaar zijn ongeveer gelijk, dus de gegevens in de tabel stemmen overeen met een exponentieel verband.

10.3 Logaritmen

Bladzijde 130

- 39** **a** $x = 3$
b $x = 2$
c $x = 6$

- d** $x = 4$
e $x = \frac{1}{2}$
f $x = -1$

- 40** **a** $x = {}^2\log(5)$
b $x = {}^3\log(6)$
c $x = {}^5\log\left(\frac{1}{2}\right)$

- d** $2^5 = 32$, dus ${}^2\log(32) = 5$
e $4^3 = 64$, dus ${}^4\log(64) = 3$
f $5^0 = 1$, dus ${}^5\log(1) = 0$

Bladzijde 131

- 41** **a** ${}^4\log(16) = {}^4\log(4^2) = 2$
b ${}^{10}\log(1000) = {}^{10}\log(10^3) = 3$
c ${}^3\log(\sqrt{3}) = {}^3\log(3^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$
d ${}^5\log\left(\frac{1}{5}\right) = {}^5\log(5^{-1}) = -1$
e ${}^6\log(1) = {}^6\log(6^0) = 0$

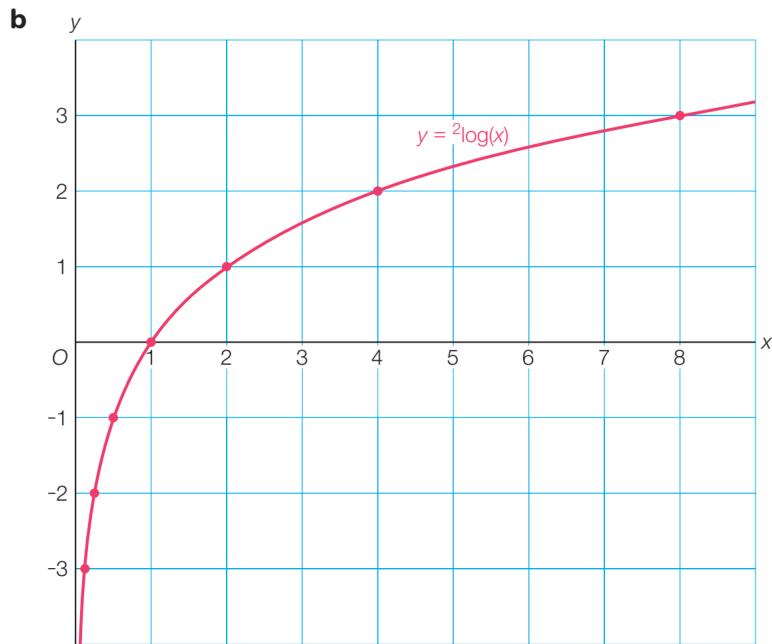
- f** $2^{2\log(6)} = 6$
g ${}^2\log(2) = {}^2\log(2^1) = 1$
h $5^{5\log(8)} = 8$
i ${}^2\log(0,25) = {}^2\log\left(\frac{1}{4}\right) = {}^2\log(2^{-2}) = -2$

- 42** **a** ${}^2\log(256\sqrt{2}) = {}^2\log(2^8 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = {}^2\log(2^{8\frac{1}{2}}) = 8\frac{1}{2}$
b ${}^3\log\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\right) = {}^3\log\left(\frac{1}{3^2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = {}^3\log(3^{-1\frac{1}{2}}) = -1\frac{1}{2}$
c ${}^{\frac{1}{2}}\log(4 \cdot \sqrt[3]{2}) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\right) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2\frac{1}{3}}\right) = -2\frac{1}{3}$

- 43** **a** Omdat $2^{-2} = \frac{1}{4}$ en dus niet $2^{-2} = -4$.
b Omdat $1^8 = 1$ en dus niet $1^8 = 8$.
c Er geldt $1^8 = 1$, maar bijvoorbeeld ook $1^7 = 1$, dus dan zou ${}^1\log(1)$ ook gelijk aan 7 moeten zijn. Dit kan natuurlijk niet.
d $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$ en dus niet $(-2)^{-3} = 8$.
 Het klopt dus niet.

44 **a**

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = {}^2\log(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3



Bladzijde 132

- 45** **a** ${}^3\log(5) \approx 1,46$
b $3 \cdot \log(5) \approx 2,10$
c ${}^2\log(20) - {}^2\log(6) \approx 1,74$
d $\frac{1}{3}\log(10) + \log(\frac{1}{3}) \approx -2,57$
e $3 \cdot {}^2\log(7) \approx 8,42$
f $\frac{5}{{}^4\log(12)} \approx 2,79$

- 46** **a** $h = 29$ geeft $m = 37 \cdot \log(29) + 31 \approx 85$
 Dus 85 jaar.
b $m = 75$ geeft $37 \cdot \log(h) + 31 = 75$
 Voer in $y_1 = 37 \cdot \log(x) + 31$ en $y_2 = 75$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 15$.
 Dus 15 jaar.
c Bij de vuistregel hoort de formule $m = 7h$.
 Voer in $y_2 = 7x$.
 De optie snijpunt geeft $x = 9,62...$
 Dus vanaf $h = 10$.

Bladzijde 133

- 47** **a** $B = 11\,275$ geeft $V = 1139 \cdot \log(11\,275) - 4539 \approx 887$
 Dus $907 - 887 = 20$ kcal per persoon per dag meer.
b $B = 22\,591$ geeft $V = 1139 \cdot \log(22\,591) - 4539 \approx 1291$
 $1017 < 1291$, dus Nederland gaat zuiniger om met voedsel dan op basis van de formule verwacht mag worden.
c Dat betekent dat mensen in Zimbabwe minder voedsel kopen dan ze nodig hebben.

- d** $V = 0$ geeft $1139 \cdot \log(B) - 4539 = 0$
 Voer in $y_1 = 1139 \cdot \log(x) - 4539$.
 De optie nulpunt geeft $x \approx 2454$.
 Dus bij bestedingen van 2454 dollar per persoon per jaar is de voedselverspilling gelijk aan 0.
- e** Het gaat om voedselverspilling per persoon per dag. Dat is een gemiddelde. Er zullen in India zowel mensen zijn die minder voedsel kopen dan ze nodig hebben als mensen die meer voedsel kopen dan ze nodig hebben.

Bladzijde 134

- 48** **a** II
b I

Bladzijde 135

- 49** **a** $N = \log(x - 4) - 3$
 $\log(x - 4) = N + 3$
 $x - 4 = 10^{N+3}$
 $x = 4 + 10^N \cdot 10^3$
 $x = 4 + 1000 \cdot 10^N$
 Dus $a = 4$ en $b = 1000$.
- b** $y = 2 + 4^{x-3}$
 $4^{x-3} = y - 2$
 $x - 3 = {}^4\log(y - 2)$
 $x = 3 + {}^4\log(y - 2)$
- c** $P = 2 \cdot {}^3\log(x) - 4$
 $2 \cdot {}^3\log(x) = P + 4$
 ${}^3\log(x) = \frac{1}{2}P + 2$
 $x = 3^{\frac{1}{2}P + 2} = 3^{\frac{1}{2}P} \cdot 3^2 = 3^2 \cdot (3^{\frac{1}{2}})^P \approx 9 \cdot 1,732^P$
 Dus $x = 9 \cdot 1,732^P$
- d** $K = 10 - 2 \cdot 4^x$
 $2 \cdot 4^x = 10 - K$
 $4^x = 5 - \frac{1}{2}K$
 $x = {}^4\log(5 - \frac{1}{2}K)$

- 50** **a** $M = {}^2\log(2t - 6)$
 $2t - 6 = 2^M$
 $2t = 6 + 2^M$
 $t = 3 + \frac{1}{2} \cdot 2^M = 3 + 2^{-1} \cdot 2^M = 3 + 2^{M-1}$
- b** $F = 16 - 2^{2N-1}$
 $2^{2N-1} = 16 - F$
 $2N - 1 = {}^2\log(16 - F)$
 $2N = 1 + {}^2\log(16 - F)$
 $N = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(16 - F)$
- c** $x = 3^{0,25y - 0,6}$
 $0,25y - 0,6 = {}^3\log(x)$
 $0,25y = 0,6 + {}^3\log(x)$
 $y = 2,4 + 4 \cdot {}^3\log(x)$
 Dus $a = 2,4$ en $b = 4$.
- d** $y = \log(2x + 3) - 0,8$
 $\log(2x + 3) = y + 0,8$
 $2x + 3 = 10^{y+0,8}$
 $2x = -3 + 10^y \cdot 10^{0,8}$
 $x = -1,5 + \frac{1}{2} \cdot 10^{0,8} \cdot 10^y \approx -1,5 + 3,15 \cdot 10^y$
 Dus $a = -1,5$ en $b = 3,15$.

a $Z = {}^3\log(4n + 1) - 6$
 ${}^3\log(4n + 1) = Z + 6$
 $4n + 1 = 3^{Z+6}$
 $4n = -1 + 3^Z \cdot 3^6$
 $n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 3^6 \cdot 3^Z = -\frac{1}{4} + 182\frac{1}{4} \cdot 3^Z$
 Dus $n = -\frac{1}{4} + 182\frac{1}{4} \cdot 3^Z$.

b $y = 3 + 2^{2x-3}$
 $2^{2x-3} = y - 3$
 $2x - 3 = {}^2\log(y - 3)$
 $2x = 3 + \frac{\log(y - 3)}{\log(2)}$
 $x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot \log(2)} \cdot \log(y - 3) \approx 1,5 + 1,66 \cdot \log(y - 3)$

Dus $a = 1,5$ en $b = 1,66$.

c $D = \log(\sqrt{E}) - 1\frac{1}{2}$
 $\log(\sqrt{E}) = D + 1\frac{1}{2}$
 $\sqrt{E} = 10^{D+1\frac{1}{2}}$
 $E = (10^{D+1\frac{1}{2}})^2 = 10^{2D+3}$
 Dus $E = 10^{2D+3}$.

Bladzijde 136

C7

a $4^{4\log(6)} = 6$
b ${}^5\log\left(\frac{1}{125}\right) = {}^5\log(5^{-3}) = -3$
c $x = {}^2\log(5)$

C8

a $4 \cdot {}^5\log(120) - 3 \cdot \log(50) \approx 6,80$
b $5 \cdot {}^3\log(x + 4) = 7$
 ${}^3\log(x + 4) = \frac{7}{5}$
 $x + 4 = 3^{\frac{7}{5}}$
 $x = -4 + 3^{\frac{7}{5}}$
 $x \approx 0,66$
 Dus $x = 0,66$.

C9

a $N = -3 + {}^2\log(t - 4)$
 ${}^2\log(t - 4) = N + 3$
 $t - 4 = 2^{N+3}$
 $t = 4 + 2^N \cdot 2^3$
 $t = 4 + 8 \cdot 2^N$
b $y = 5 + 10^{x-3}$
 $10^{x-3} = y - 5$
 $x - 3 = \log(y - 5)$
 $x = 3 + \log(y - 5)$

10.4 Werken met logaritmen

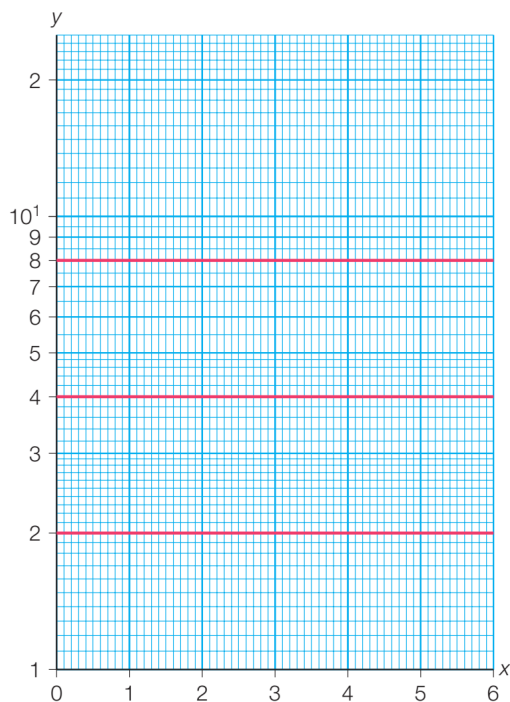
Bladzijde 137

- 52 a** De walvis is $\frac{100\,000}{10} = 10\,000$ keer zo zwaar als de wasbeer.
De walvis is $\frac{100\,000}{0,005} = 20\,000\,000$ keer zo zwaar als de kolibrie.
- b** Het verschil in gewicht tussen het zwaarste en het lichtste dier is 99 999 999 gram.
De getallenlijn moet dus 99 999 999 mm $\approx$ 100 km lang worden.
- c** De getallenlijn moet dan ongeveer 100 mm = 10 cm lang worden.
Het verschil in gewicht tussen de lichtere dieren zal niet meer afleesbaar zijn.

Bladzijde 139

- 53 a** Bij A hoort 1,3, bij B hoort 7,5, bij C hoort 23 en bij D hoort 55.
b Bij $y = 9,5$ en $y = 2,4$ is een lijn getekend.
c De getallen worden allemaal $10^3 = 1000$ keer zo groot, dus bij B hoort 7500, bij C hoort 23 000 en bij D hoort 55 000.

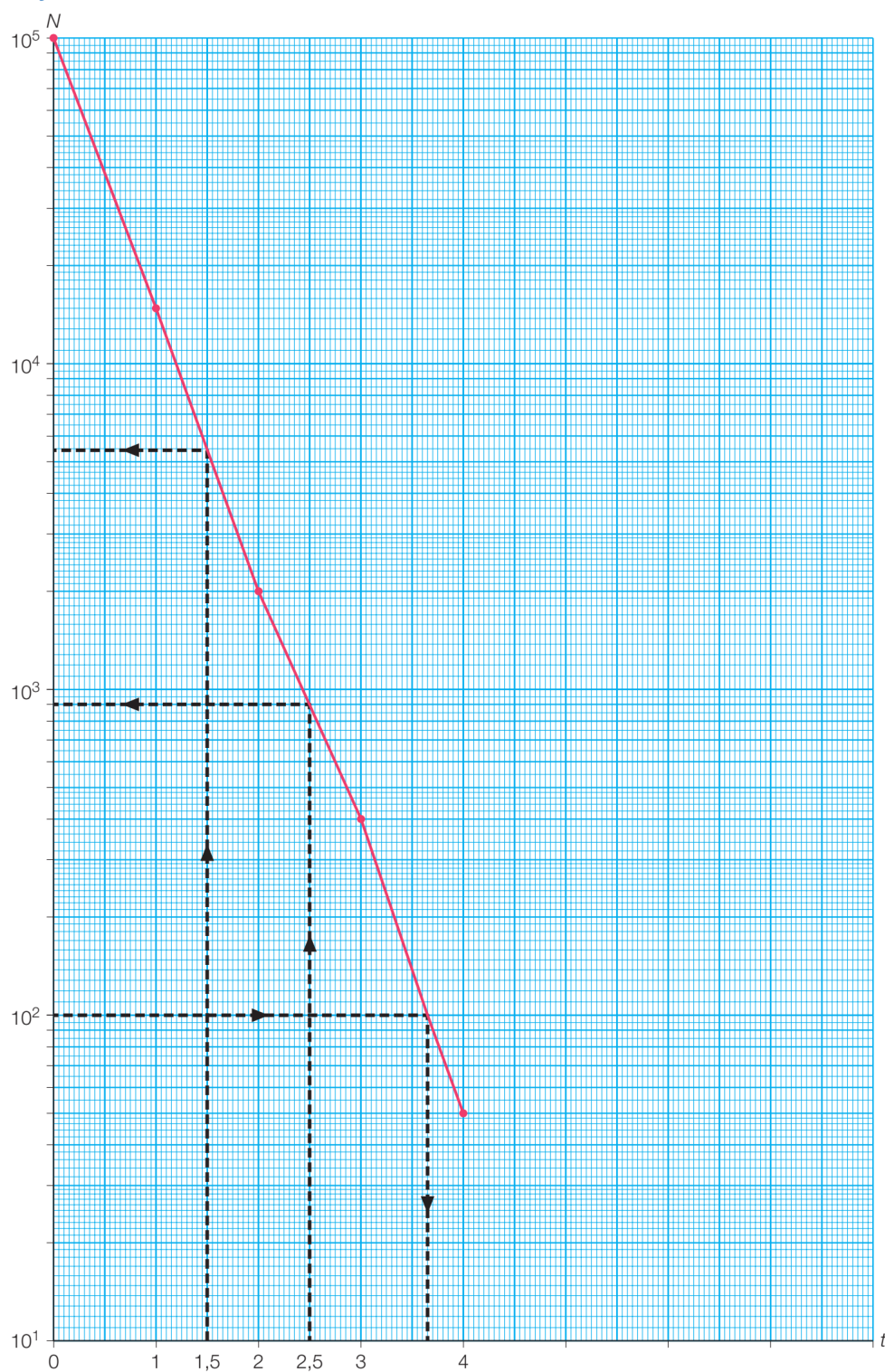
54 a



De afstanden zijn gelijk.

- b** Jan tekent de lijn $y = 18$, want $3 \cdot 6 = 18$.
c Hierbij horen de formules $y = 54$, $y = 162$ en $y = 486$.

a



b Aflezen bij $t = 1,5$ geeft $N = 5500$.

Aflezen bij $t = 2,5$ geeft $N = 900$.

c Aflezen bij $N = 100$ geeft $t = 3,7$.

Dus na ongeveer 3,7 minuten.

- 56 a** Bij 2000 hoort $t = 16$.
Aflezen bij $t = 16$ geeft een internetsnelheid van $10^{5,5} = 320\,000$ bps.
- b** Aflezen bij 10 000 bps geeft $t = 8$.
Aflezen bij 10 Mbps = 10^7 bps geeft $t = 24$.
Dus in 16 jaar.
- c** Bij 1984 hoort $t = 0$, aflezen geeft een internetsnelheid van $10^{2,5}$ bps.
Bij 2016 hoort $t = 32$, aflezen geeft een internetsnelheid van $10^{8,5}$ bps.
- $$g_{32\text{jaar}} = \frac{10^{8,5}}{10^{2,5}} = 10^6, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = (10^6)^{\frac{1}{32}} \approx 1,540$$
- De toename is 54,0% per jaar.

Bladzijde 141

- 57 a** Bij soort A hoort gewicht 0,05 kg en populatiedichtheid 1000 per km^2 .
Bij soort B hoort gewicht 500 kg en populatiedichtheid 1 per km^2 .
Bij soort C hoort gewicht 4 kg en populatiedichtheid 70 per km^2 .
- b** Lees met behulp van de rode stip af dat bij 1 kg een populatiedichtheid van 100 per km^2 hoort.
- c** 150 bavianen op 25 km^2 geeft populatiedichtheid $\frac{150}{25} = 6$ per km^2 .
Lees met behulp van de rode lijn af dat hierbij een gewicht van ongeveer 50 kg hoort.

Bladzijde 142

- 58 a** Dit volgt uit de afspraak ${}^g\log(x) = a$ betekent $x = g^a$.
- b** $N = 10^{0,1t + 2,5} = 10^{0,1t} \cdot 10^{2,5} = 10^{2,5} \cdot (10^{0,1})^t \approx 316 \cdot 1,259^t$
Dus $N = 316 \cdot 1,259^t$.

Bladzijde 143

- 59 a** Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

$$\left. \begin{array}{l} t = 1 \text{ en } N = 30 \\ t = 7 \text{ en } N = 400 \end{array} \right\} g_{6 \text{ dagen}} = \frac{400}{30}$$

$$g_{\text{dag}} = \left(\frac{400}{30} \right)^{\frac{1}{6}} = 1,5398...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,5398...^t \\ t = 1 \text{ en } N = 30 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,5398...^1 = 30 \\ b = \frac{30}{1,5398...} \approx 19 \end{array}$$

Dus $N = 19 \cdot 1,540^t$.

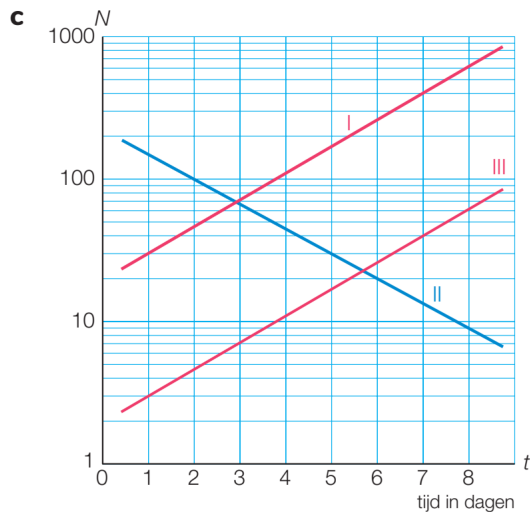
- b** Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

$$\left. \begin{array}{l} t = 2 \text{ en } N = 100 \\ t = 8 \text{ en } N = 9 \end{array} \right\} g_{6 \text{ dagen}} = \frac{9}{100}$$

$$g_{\text{dag}} = \left(\frac{9}{100} \right)^{\frac{1}{6}} = 0,6694...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,6694...^t \\ t = 2 \text{ en } N = 100 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,6694...^2 = 100 \\ b = \frac{100}{0,6694...^2} \approx 223 \end{array}$$

Dus $N = 223 \cdot 0,669^t$.



Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

$$\left. \begin{array}{l} t = 1 \text{ en } N = 3 \\ t = 7 \text{ en } N = 40 \end{array} \right\} g_{6 \text{ dagen}} = \frac{40}{3}$$

$$g_{\text{dag}} = \left(\frac{40}{3} \right)^{\frac{1}{6}} = 1,5398\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,5398\dots^t \\ t = 1 \text{ en } N = 3 \end{array} \right\} b \cdot 1,5398\dots^1 = 3$$

$$b = \frac{3}{1,5398\dots} \approx 2$$

Dus $N = 2 \cdot 1,540^t$.

Opmerking: omdat grafiek III evenwijdig is met grafiek I, geldt dat $g = 1,540$. Verder kun je nagaan dat grafiek III door $(0, 2)$ gaat.

- 60 a** De grafieken van B en C zijn rechte lijnen, dus bij de planten B en C is sprake van exponentiële groei.

$$L_B = b \cdot g^t$$

$$\left. \begin{array}{l} t = 5 \text{ en } L_B = 80 \\ t = 30 \text{ en } L_B = 300 \end{array} \right\} g_{25 \text{ dagen}} = \frac{300}{80} = 3,75$$

$$g_{\text{dag}} = 3,75^{\frac{1}{25}} = 1,054\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} L_B = b \cdot 1,054\dots^t \\ t = 5 \text{ en } L_B = 80 \end{array} \right\} b \cdot 1,054\dots^5 = 80$$

$$b = \frac{80}{1,054\dots^5} \approx 61$$

Dus $L_B = 61 \cdot 1,05^t$.

$$L_C = b \cdot g^t$$

$$\left. \begin{array}{l} t = 5 \text{ en } L_C = 40 \\ t = 25 \text{ en } L_C = 300 \end{array} \right\} g_{20 \text{ dagen}} = \frac{300}{40} = 7,5$$

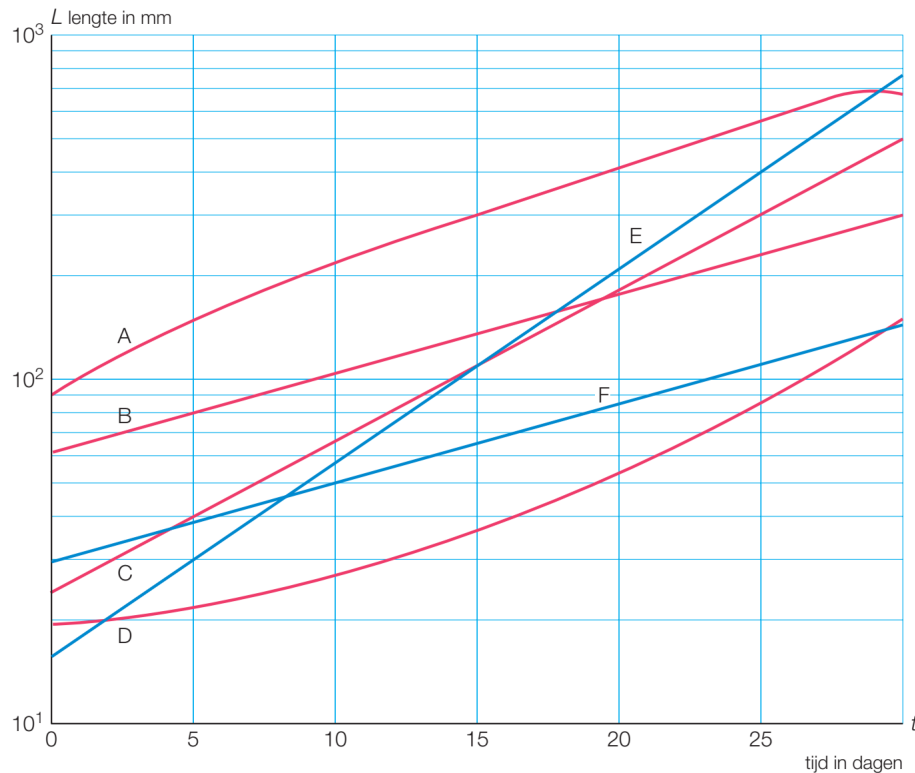
$$g_{\text{dag}} = 7,5^{\frac{1}{20}} = 1,105\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} L_C = b \cdot 1,105\dots^t \\ t = 5 \text{ en } L_C = 40 \end{array} \right\} b \cdot 1,105\dots^5 = 40$$

$$b = \frac{40}{1,105\dots^5} \approx 24$$

Dus $L_C = 24 \cdot 1,11^t$.

- b, c** Exponentiële groei, dus rechte lijn op logaritmisch papier.
Teken de lijn door de punten (5, 30) en (25, 400).



- c** De lijn van F gaat door (10, 50) en is evenwijdig met de lijn van B.

Bladzijde 144

- 61** Luuk: de lijn gaat door (1990, 10^6) en (2010, 10^9).

$$g_{20 \text{ jaar}} = \frac{10^9}{10^6} = 10^3, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = (10^3)^{\frac{1}{20}} = 1,412\dots$$

Aantal transistoren $N = 10^9 \cdot 1,412\dots^t$ met t de tijd in jaren en $t = 0$ in 2010.

Bij 2032 hoort $t = 22$ en dat geeft $N = 10^9 \cdot 1,412\dots^{22} = 1,995\dots \cdot 10^{12}$.

Maria: tussen 1971 en 2032 zit 30,5 keer twee jaar, dus $N = 2300 \cdot 2^{30,5} = 3,492\dots \cdot 10^{12}$.

Het voorspelde aantal van Maria is $\frac{3,492\dots \cdot 10^{12} - 1,995\dots \cdot 10^{12}}{1,995\dots \cdot 10^{12}} \cdot 100\% \approx 75,0\%$ groter.

- 62** **a** III
b II
c III

Bladzijde 146

- 63** **a** $N = {}^2\log(64x) = {}^2\log(64) + {}^2\log(x) = 6 + \frac{{}^5\log(x)}{{}^5\log(2)} = 6 + \frac{1}{{}^5\log(2)} \cdot {}^5\log(x) \approx 6 + 2,32 \cdot {}^5\log(x)$

$$\text{Dus } N = 6 + 2,32 \cdot {}^5\log(x).$$

- b** $N(\frac{1}{2}x) = 31,3 + 24,9 \cdot \log(\frac{1}{2}x)$
 $= 31,3 + 24,9(\log(\frac{1}{2}) + \log(x))$
 $= 31,3 + 24,9 \cdot \log(\frac{1}{2}) + 24,9 \cdot \log(x)$
 $= 31,3 + 24,9 \cdot \log(x) - 7,49\dots$

$$\text{Dus } N(\frac{1}{2}x) \approx N(x) - 7,5.$$

Als x halveert, dan neemt N met 7,5 af.

64 a $N = 50 \cdot {}^5\log(t) = 50 \cdot \frac{\log(t)}{\log(5)} = \frac{50}{\log(5)} \cdot \log(t) \approx 71,5 \cdot \log(t)$

Dus $N = 71,5 \cdot \log(t)$.

b $N = {}^3\log(81x) = {}^3\log(81) + {}^3\log(x) = {}^3\log(81) + \frac{\log(x)}{\log(3)} = {}^3\log(81) + \frac{1}{\log(3)} \cdot \log(x) \approx 4 + 2,10 \cdot \log(x)$

Dus $N = 4 + 2,10 \cdot \log(x)$.

c $N = \log(150x) = \log(150) + \log(x) = \log(150) + \frac{{}^2\log(x)}{{}^2\log(10)} = \log(150) + \frac{1}{{}^2\log(10)} \cdot {}^2\log(x) \approx 2,18 + 0,30 \cdot {}^2\log(x)$

Dus $N = 2,18 + 0,30 \cdot {}^2\log(x)$.

65 a $N(2x) = 40 + 9,97 \cdot \log(2x)$

$= 40 + 9,97(\log(2) + \log(x))$

$= 40 + 9,97 \cdot \log(2) + 9,97 \cdot \log(x)$

$= 40 + 9,97 \cdot \log(x) + 3,00\dots$

Dus $N(2x) \approx N(x) + 3$.

Als x verdubbelt, dan neemt N met 3 toe.

b $N(2x) = 653 - 33,2 \cdot \log(2x)$

$= 653 - 33,2(\log(2) + \log(x))$

$= 653 - 33,2 \cdot \log(2) - 33,2 \cdot \log(x)$

$= 653 - 33,2 \cdot \log(x) - 9,99\dots$

Dus $N(2x) \approx N(x) - 10$.

Als x verdubbelt, dan neemt N met 10 af.

66 a $N(2x) = 50 + b \cdot \log(2x)$

$= 50 + b \cdot (\log(2) + \log(x))$

$= 50 + b \cdot \log(2) + b \cdot \log(x)$

Dus $N(2x) = N(x) + b \cdot \log(2)$

$b \cdot \log(2) = 15$ geeft $b = \frac{15}{\log(2)} \approx 49,83$

Dus $b = 49,83$.

b $N(\frac{1}{2}x) = 50 + b \cdot \log(\frac{1}{2}x)$

$= 50 + b(\log(\frac{1}{2}) + \log(x))$

$= 50 + b \cdot \log(\frac{1}{2}) + b \cdot \log(x)$

Dus $N(\frac{1}{2}x) = N(x) + b \cdot \log(\frac{1}{2})$

$b \cdot \log(\frac{1}{2}) = -6$ geeft $b = \frac{-6}{\log(\frac{1}{2})} \approx 19,93$

Dus $b = 19,93$.

c $N(3x) = 50 + b \cdot \log(3x)$

$= 50 + b(\log(3) + \log(x))$

$= 50 + b \cdot \log(3) + b \cdot \log(x)$

Dus $N(3x) = N(x) + b \cdot \log(3)$

$b \cdot \log(3) = 1$ geeft $b = \frac{1}{\log(3)} \approx 2,10$

Dus $b = 2,10$.

67 a Los op $59,27 \cdot \log(n) - 191,40 = 0$.

Voer in $y_1 = 59,27 \cdot \log(x) - 191,40$.

De optie nulpunt geeft $x \approx 1695$.

De formule geldt vanaf $n = 1700$.

b $n = 158\,000$ geeft $V = 116,72\dots$

$n = 158\,000 + 56\,000 = 214\,000$ geeft $V = 124,53\dots$

Het bedrijf betaalt $124,53\dots - 116,72\dots \approx €7,81$ meer.

- c** Het vaste bedrag per jaar is $50 \cdot 12 = 600$ euro.
 Het variabele bedrag is dat jaar $2200 - 600 = 1600$ euro en dat is per maand $\frac{1600}{12} = 133\frac{1}{3}$ euro.
 Los op $59,27 \cdot \log(n) - 191,40 = 133\frac{1}{3}$.
 Voer in $y_2 = 133\frac{1}{3}$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 301\,219$, dus ongeveer 301 200 bezoekers per maand.
- d** $V(2n) = 59,27 \cdot \log(2n) - 191,40$
 $= 59,27(\log(2) + \log(n)) - 191,40$
 $= 59,27 \cdot \log(2) + 59,27 \cdot \log(n) - 191,40$
 $= 59,27 \cdot \log(n) - 191,40 + 17,842\dots$
 Bij een verdubbeling van het aantal bezoekers neemt het variabele bedrag met € 17,84 toe.

Bladzijde 147

68 a $N = 15 \cdot {}^2\log(20x) = 15 ({}^2\log(20) + {}^2\log(x)) = 15 \cdot {}^2\log(20) + 15 \cdot \frac{\log(x)}{\log(2)}$
 $= 15 \cdot {}^2\log(20) + \frac{15}{\log(2)} \cdot \log(x) \approx 64,8 + 49,8 \cdot \log(x)$

Dus $N = 64,8 + 49,8 \cdot \log(x)$.

b $N(2q) = 17,5 + 12,46 \cdot \log(2q)$
 $= 17,5 + 12,46(\log(2) + \log(q))$
 $= 17,5 + 12,46 \cdot \log(2) + 12,46 \cdot \log(q)$
 $= 17,5 + 12,46 \cdot \log(q) + 3,750\dots$

Dus $N(2q) \approx N(q) + 3,75$.

Als q verdubbelt, dan neemt N met 3,75 toe.

c $N(2p) = 38,4 + 9,4 \cdot \log((2p)^{1,24})$
 $= 38,4 + 9,4 \cdot 1,24 \cdot \log(2p)$
 $= 38,4 + 11,656(\log(2) + \log(p))$
 $= 38,4 + 11,656 \cdot \log(2) + 11,656 \cdot \log(p)$
 $= 38,4 + 11,656 \cdot \log(p) + 3,50\dots$

Dus $N(2p) \approx N(p) + 3,5$.

Als p verdubbelt, dan neemt N met 3,5 toe.

d $N(\frac{1}{2}d) = 50 + b \cdot \log(\frac{1}{2}d)$
 $= 50 + b(\log(\frac{1}{2}) + \log(d))$
 $= 50 + b \cdot \log(\frac{1}{2}) + b \cdot \log(d)$

Dus $N(\frac{1}{2}d) = N(d) + b \cdot \log(\frac{1}{2})$

$$b \cdot \log(\frac{1}{2}) = -4,5 \text{ geeft } b = \frac{-4,5}{\log(\frac{1}{2})} \approx 14,95$$

Dus $b = 14,95$.

- 69 a** Bij een storing van 3 uur krijg je geen vergoeding.
 Bij een storing van 7,5 uur krijg je € 35,-.
 Bij een storing van 10 uur en 15 minuten krijg je $35 + 20 = € 55,-$.

b Los op $-20 + 100 \cdot \log(t) = 0$.

Voer in $y_1 = -20 + 100 \cdot \log(x)$.

De optie nulpunt geeft $x = 1,584\dots$

$1,584\dots \cdot 60 \approx 95$, dus tot een onderbreking van 95 minuten krijg je geen compensatie.

c Bij $t = 7,5$ is de vergoeding van Liander € 35,- en is $B = -20 + 100 \cdot \log(7,5) = 67,50\dots$

Het verschil is dan $67,50\dots - 35 \approx € 32,51$.

Bij $t = 11,5$ is de vergoeding van Liander € 55,- en is $B = -20 + 100 \cdot \log(11,5) = 86,06\dots$

Het verschil is dan $86,06\dots - 55 \approx € 31,07$.

Bij $t = 7,5$ is het verschil $32,51 - 31,07 = € 1,44$ groter dan bij $t = 11,5$.

d In de grafiek kun je zien dat het ging om een vergoeding van $35 + 4 \cdot 20 = € 115,-$.

Los op $-20 + 100 \cdot \log(t) = 115$.

Voer in $y_2 = 115$.

De optie snijpunt geeft $x = 22,38\dots$

De onderbreking duurde 22 uur en $0,38\dots \cdot 60 \approx 23$ minuten.

e $B(2t) = -20 + 100 \cdot \log(2t)$
 $= -20 + 100(\log(2) + \log(t))$
 $= -20 + 100 \cdot \log(2) + 100 \cdot \log(t)$
 $= -20 + 100 \cdot \log(t) + 30,102\dots$

Dus $B(2t) \approx B(t) + 30,10$.

Als t verdubbelt, dan neemt B met € 30,10 toe.

Bladzijde 148

C10

- a** $A = 10^{0,6} \approx 4,0$
 $B = 10^{2\frac{1}{3}} \approx 215,4$
b Bij $t = 6$ hoort $N = 3000$.
c Bij $N = 50$ hoort $t = 2$.

C11

Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

$$\left. \begin{array}{l} t = 2 \text{ en } N = 50 \\ t = 6 \text{ en } N = 3000 \end{array} \right\} g_{4 \text{ uren}} = \frac{3000}{50} = 60$$

$$g_{\text{uur}} = 60^{\frac{1}{4}} = 2,7831\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 2,7831\dots^t \\ t = 2 \text{ en } N = 50 \end{array} \right\} b \cdot 2,7831\dots^2 = 50$$

$$b = \frac{50}{2,7831\dots^2} \approx 6,5$$

Dus $N = 6,5 \cdot 2,783^t$.

C12

$$N(x) = {}^3\log(50x) = {}^3\log(50) + {}^3\log(x) = {}^3\log(50) + \frac{\log(x)}{\log(3)}$$

$$= {}^3\log(50) + \frac{1}{\log(3)} \cdot \log(x) \approx 3,56 + 2,10 \cdot \log(x)$$

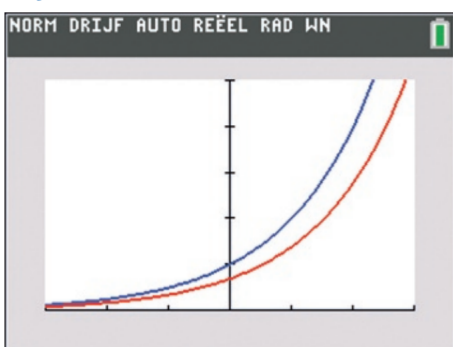
Dus $N = 3,56 + 2,10 \cdot \log(x)$.

10.5 Het getal e en de natuurlijke logaritme

Bladzijde 149

70

a



- b** Steeds is $y_3 \approx 0,6931$.

$$\left. \begin{array}{l} y_3 = \frac{y_2}{y_1} \text{ geeft } y_2 = y_3 \cdot y_1 \\ y_1 = 2^x, y_2 = \frac{dy}{dx} \text{ en } y_3 \approx 0,6931 \end{array} \right\} \frac{dy}{dx} = 0,6931 \cdot 2^x$$

- c** $c \approx 1,0986$

Bladzijde 150

71

$$N = 30(1 + e^{0,1t}) = 30 + 30 \cdot e^{0,1t} \text{ geeft } \frac{dN}{dt} = 30 \cdot e^{0,1t} \cdot 0,1 = 3e^{0,1t}$$

72

- a** Met $3e^{0,1t}$ kun je de groeisnelheid berekenen voor iedere waarde van t . De groeisnelheid die twee keer zo groot is als de groeisnelheid op $t = 8$ is $2 \cdot 3e^{0,8}$. Door de vergelijking $3e^{0,1t} = 2 \cdot 3e^{0,8}$ op te lossen, bereken je voor welke waarde van t de groeisnelheid twee keer zo groot is als de groeisnelheid op $t = 8$.
b De optie snijpunt geeft $x \approx 14,9$.
c De groeisnelheid op $t = 5$ is $3e^{0,1 \cdot 5} = 3e^{0,5}$.
 Los op $3e^{0,1t} = 3 \cdot 3e^{0,5}$.
 Voer in $y_1 = 3e^{0,1x}$ en $y_2 = 3 \cdot 3e^{0,5}$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 16,0$.
 Dus voor $t = 16,0$ is de groeisnelheid drie keer zo groot als op $t = 5$.

73

- a** $y = 500e^{3x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 500e^{3x} \cdot 3 = 1500e^{3x}$
- b** $y = 600e^{0,4x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 600e^{0,4x} \cdot 0,4 = 240e^{0,4x}$
- c** $N = 250e^{0,2t+1}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 250e^{0,2t+1} \cdot 0,2 = 50e^{0,2t+1}$
- d** $N = 1000e^{-0,6t}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 1000e^{-0,6t} \cdot -0,6 = -600e^{-0,6t}$
- e** $N = 10(1 + e^{0,12p})$ geeft $\frac{dN}{dp} = 10 \cdot e^{0,12p} \cdot 0,12 = 1,2e^{0,12p}$
- f** $F = 20e^{0,01q^2}$ geeft $\frac{dF}{dq} = 20e^{0,01q^2} \cdot 0,02q = 0,4q \cdot e^{0,01q^2}$

74

- a** $N = 50(1 + e^{0,18t})$ geeft $\frac{dN}{dt} = 50 \cdot e^{0,18t} \cdot 0,18 = 9e^{0,18t}$
- De groeisnelheid op $t = 10$ is $\frac{dN}{dt} = 9e^{0,18 \cdot 10} = 9e^{1,8} \approx 54,4$.
- b** De groeisnelheid op $t = 5$ is $9e^{0,18 \cdot 5} = 9e^{0,9}$.
 Los op $9e^{0,18t} = 2 \cdot 9e^{0,9}$.
 Voer in $y_1 = 9e^{0,18x}$ en $y_2 = 2 \cdot 9e^{0,9}$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 8,9$.
 Dus op $t = 8,9$ is de groeisnelheid twee keer zo groot als op $t = 5$.
- c** De groeisnelheid op $t = 15$ is $9e^{0,18 \cdot 15} = 9e^{2,7}$.
 Los op $9e^{0,18t} = \frac{1}{2} \cdot 9e^{2,7}$.
 Voer in $y_1 = 9e^{0,18x}$ en $y_2 = \frac{1}{2} \cdot 9e^{2,7}$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 11,1$.
 Dus op $t = 11,1$ is de groeisnelheid de helft van die op $t = 15$.

75

- a** Op $[5, 8]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(8) - N(5)}{8 - 5} = 142\,862,28\dots$ bacteriën per uur, oftewel $\frac{142\,862,28\dots}{60} \approx 2381$ per minuut.
 De gemiddelde groeisnelheid is ongeveer 2400 bacteriën per minuut.
- b** $N = 25\,000e^{0,4t}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 25\,000e^{0,4t} \cdot 0,4 = 10\,000e^{0,4t}$
 De groeisnelheid op $t = 5$ is $\frac{dN}{dt} = 10\,000e^{0,4 \cdot 5} \approx 73\,890,56\dots$ bacteriën per uur
 ≈ 1230 bacteriën per minuut.
- c** De groeisnelheid op $t = 6$ is $\frac{dN}{dt} = 10\,000e^{0,4 \cdot 6} = 10\,000e^{2,4}$.
 Los op $10\,000e^{0,4t} = 2 \cdot 10\,000e^{2,4}$.
 Voer in $y_1 = 10\,000e^{0,4x}$ en $y_2 = 20\,000e^{2,4}$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 7,73$.
 Dus op $t = 7,73$ is de groeisnelheid twee keer zo groot als op $t = 6$.

76

- Voer in $y_1 = 4^x$, $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)$ en $y_3 = \frac{y_2}{y_1}$.
 Aflezen in de tabel geeft $y_3 \approx 1,3863$.
 Dus $c = 1,3863$.

77

a $y = 2 \cdot 3^x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 3^x \cdot \ln(3) = 2 \cdot \ln(3) \cdot 3^x$

b $y = 50 \cdot 4^{3x-1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 50 \cdot 4^{3x-1} \cdot \ln(4) \cdot 3 = 150 \cdot \ln(4) \cdot 4^{3x-1}$

c $N = 200 \cdot 1,5^{0,4t}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 200 \cdot 1,5^{0,4t} \cdot \ln(1,5) \cdot 0,4 = 80 \cdot \ln(1,5) \cdot 1,5^{0,4t}$

d $N = 600 \cdot 0,8^{2t+3}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 600 \cdot 0,8^{2t+3} \cdot \ln(0,8) \cdot 2 = 1200 \cdot \ln(0,8) \cdot 0,8^{2t+3}$

e $P = 80(1 + 1,3^{0,1q})$ geeft $\frac{dP}{dq} = 80 \cdot 1,3^{0,1q} \cdot \ln(1,3) \cdot 0,1 = 8 \cdot \ln(1,3) \cdot 1,3^{0,1q}$

f $Q = 75 \cdot 2^{0,01p^2}$ geeft $\frac{dQ}{dp} = 75 \cdot 2^{0,01p^2} \cdot \ln(2) \cdot 0,02p = 1,5p \cdot \ln(2) \cdot 2^{0,01p^2}$

78

a $y = 80 \cdot 0,6^{2-x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 80 \cdot 0,6^{2-x} \cdot \ln(0,6) \cdot -1$
 $= -80 \cdot \ln(0,6) \cdot 0,6^{2-x}$
 $= 40,866... \cdot 0,6^{2-x}$

Dus $a = 41$.

b $N = 0,05 \cdot 1,28^{3t-1}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 0,05 \cdot 1,28^{3t-1} \cdot \ln(1,28) \cdot 3$
 $= 0,15 \cdot \ln(1,28) \cdot 1,28^{3t-1}$
 $= 0,037... \cdot 1,28^{3t-1}$

Dus $a = 0,037$.

79

a $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$

b $\ln(e \cdot \sqrt{e}) = \ln(e^1 \cdot e^{\frac{1}{2}}) = \ln(e^{\frac{3}{2}}) = 1\frac{1}{2}$

c $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$

d $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$

e $3\ln(e \cdot \sqrt[3]{e}) = 3\ln(e^1 \cdot e^{\frac{1}{3}}) = 3\ln(e^{\frac{4}{3}}) = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$

f $e^{\ln(7)} + e^{\ln(8)} = 7 + 8 = 15$

g $e^{2\ln(5)} = e^{\ln(5^2)} = e^{\ln(25)} = 25$

h $e^{\frac{1}{2}\ln(9)} = e^{\ln(\sqrt{9})} = e^{\ln(3)} = 3$

80

a $N = 20 + 3 \cdot {}^4\log(t) = 20 + 3 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(4)} = 20 + \frac{3}{\ln(4)} \cdot \ln(t) \approx 20 + 2,16 \cdot \ln(t)$

Dus $N = 20 + 2,16 \cdot \ln(t)$.

b $N = 100 - 50 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(t) = 100 - 50 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(\frac{1}{2})} = 100 - \frac{50}{\ln(\frac{1}{2})} \cdot \ln(t) \approx 100 + 72,13 \cdot \ln(t)$

Dus $N = 100 + 72,13 \cdot \ln(t)$.

c $N = 6 + 200 \cdot \log(t) = 6 + 200 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(10)} = 6 + \frac{200}{\ln(10)} \cdot \ln(t) \approx 6 + 86,86 \cdot \ln(t)$

Dus $N = 6 + 86,86 \cdot \ln(t)$.

d $N = 5 + 8 \cdot \log(2t) = 5 + 8(\log(2) + \log(t)) = 5 + 8 \cdot \log(2) + 8 \cdot \log(t) = 5 + 8 \cdot \log(2) + 8 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(10)}$
 $= 5 + 8 \cdot \log(2) + \frac{8}{\ln(10)} \cdot \ln(t) \approx 7,41 + 3,47 \cdot \ln(t)$

Dus $N = 7,41 + 3,47 \cdot \ln(t)$.

81

a $N(2q) = 11,13 + 6,49 \cdot \ln(2q)$
 $= 11,13 + 6,49 \cdot (\ln(2) + \ln(q))$
 $= 11,13 + 6,49 \cdot \ln(2) + 6,49 \cdot \ln(q)$
 $= 11,13 + 6,49 \cdot \ln(q) + 4,49...$

Dus $N(2q) \approx N(q) + 4,5$.

Als q verdubbelt, dan neemt N met 4,5 toe.

$$\begin{aligned}
 \text{b } N(2p) &= 100 + 13,85 \cdot \ln((2p)^{1,25}) \\
 &= 100 + 13,85 \cdot 1,25 \cdot \ln(2p) \\
 &= 100 + 17,3125 \cdot (\ln(2) + \ln(p)) \\
 &= 100 + 17,3125 \cdot \ln(2) + 17,3125 \cdot \ln(p) \\
 &= 100 + 17,3125 \cdot \ln(p) + 12,00...
 \end{aligned}$$

Dus $N(2p) \approx N(p) + 12$.

Als p verdubbelt, dan neemt N met 12 toe.

$$\begin{aligned}
 \text{c } N(3t) &= 16 + b \cdot \ln(3t) \\
 &= 16 + b(\ln(3) + \ln(t)) \\
 &= 16 + b \cdot \ln(3) + b \cdot \ln(t)
 \end{aligned}$$

Dus $N(3t) = N(t) + b \cdot \ln(3)$

$$b \cdot \ln(3) = 5 \text{ geeft } b = \frac{5}{\ln(3)} \approx 4,55$$

Dus $b = 4,55$.

Bladzijde 155

82 a Voor $t = 0$ geldt $T = 80$.

Los op $20 + p \cdot 2^{-0,25 \cdot 0} = 80$.

$$20 + p \cdot 2^0 = 80$$

$$20 + p \cdot 1 = 80$$

$$p = 60$$

$$\text{b } 20 + 60 \cdot 2^{-0,25t} = 60$$

Voer in $y_1 = 20 + 60 \cdot 2^{-0,25x}$ en $y_2 = 60$.

De optie snijpunt geeft $x = 2,33...$

Na 2 minuten en $0,33... \cdot 60 \approx 20$ seconden.

c $t = 0$ geeft $T = 80$

$$t = 4 \text{ geeft } T = 20 + 60 \cdot 2^{-0,25 \cdot 4} = 20 + 60 \cdot 2^{-1} = 50$$

$$\frac{50 - 80}{4} = -7,5, \text{ dus in de eerste vier minuten koelt de koffie gemiddeld } 7,5^\circ\text{C per minuut af.}$$

$$\text{d } T = 20 + 60 \cdot 2^{-0,25t} \text{ geeft } \frac{dT}{dt} = 60 \cdot 2^{-0,25t} \cdot \ln(2) \cdot -0,25 = -15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-0,25t}$$

$$t = 4 \text{ geeft } \frac{dT}{dt} = -15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-0,25 \cdot 4} = -15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-1} \approx -5,2$$

De snelheid waarmee de koffie vier minuten na het inschenken afkoelt, is $5,2^\circ\text{C}$ per minuut.

e De snelheid waarmee de koffie afkoelt na 90 seconden is $-15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-0,25 \cdot 1,5}$.

$$\text{Los op } -15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-0,25t} = \frac{1}{2} \cdot -15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-0,375}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = -15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-0,25x} \text{ en } y_2 = -7,5 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-0,375}.$$

De optie snijpunt geeft $x = 5,5$.

Dus na $5,5 \cdot 60 = 330$ seconden.

$$\text{C13 } N = 25(1 + e^{0,4t}) \text{ geeft } \frac{dN}{dt} = 25 \cdot e^{0,4t} \cdot 0,4 = 10 \cdot e^{0,4t}$$

$$\text{C14 } N = 3 - 6 \cdot {}^3\log(t) = 3 - 6 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(3)} = 3 - \frac{6}{\ln(3)} \cdot \ln(t) \approx 3 - 5,46 \cdot \ln(t)$$

Dus $N = 3 - 5,46 \cdot \ln(t)$.

$$\text{C15 } y = 3^{4x-2} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 3^{4x-2} \cdot \ln(3) \cdot 4 = 4 \cdot \ln(3) \cdot 3^{4x-2}$$

Bladzijde 156

- 1 a** $K = 2,00 \cdot 0,84^t$
b Bij 2025 hoort $t = 13$.
 $K = 2,00 \cdot 0,84^{13} = 0,2073...$
 totale kostprijs $= 0,2073... \cdot 8000 = 1658,63$ euro
c $2,00 \cdot 0,84^t = 0,10$
 Voer in $y_1 = 2,00 \cdot 0,84^x$ en $y_2 = 0,10$.
 De optie snijpunt geeft $x = 17,18...$
 Dus in $2012 + 18 = 2030$.

- 2** Er geldt $g^{25} = 0,5$, met g de groeifactor per minuut.
 $g^{25} = 0,5$ geeft $g = 0,5^{\frac{1}{25}} \approx 0,973$
 De afname is 2,7% per minuut.

- 3 a** $g_{\text{dag}} = 1,36$
 $g_{\text{week}} = 1,36^7 \approx 8,61$
 Het groeipcentage per week is 761%.
b $g_{\text{uur}} = 1,36^{\frac{1}{24}} \approx 1,013$
 Het groeipcentage per uur is 1,3%.
c 10 jaar = 120 maanden
 $g_{120 \text{ maanden}} = 3$
 $g_{\text{maand}} = 3^{\frac{1}{120}} \approx 1,009$
 De toename per maand is 0,9%.

- 4** $N = b \cdot g^t$
 $g_{3 \text{ dagen}} = \frac{1200}{1500}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{1200}{1500}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,9283...$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,9283...^t \\ t = 4 \text{ en } N = 1500 \end{array} \right\} b \cdot 0,9283...^4 = 1500$$

$$b = \frac{1500}{0,9283...^4} \approx 2020$$

 Dus $N = 2020 \cdot 0,928^t$.

- 5** I: $\left(\frac{586}{375}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,250...$; $\left(\frac{1144}{586}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,249...$ en $\left(\frac{2794}{1144}\right)^{\frac{1}{4}} = 1,250...$
 Er is dus sprake van een exponentieel verband $B = b \cdot g^t$ met $g \approx 1,25$.

$$\left. \begin{array}{l} B = b \cdot 1,25^t \\ t = 2 \text{ en } B = 375 \end{array} \right\} b \cdot 1,25^2 = 375$$

$$b = \frac{375}{1,25^2} = 240$$

Dus $B = 240 \cdot 1,25^t$.

II: $\frac{251 - 235}{5 - 3} = 8$, $\frac{283 - 251}{9 - 5} = 8$ en $\frac{307 - 283}{12 - 9} = 8$

Er is dus sprake van een lineair verband $N = at + b$ met $a = 8$.

$$\left. \begin{array}{l} N = 8t + b \\ t = 3 \text{ en } N = 235 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 \cdot 3 + b = 235 \\ 24 + b = 235 \\ b = 211 \end{array}$$

Dus $N = 8t + 211$.

- 6 a** ${}^5\log(625) = {}^5\log(5^4) = 4$
b ${}^2\log\left(\frac{1}{8}\right) = {}^2\log(2^{-3}) = -3$
c ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4}\right) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 2$

7 a $y = {}^3\log(5x - 1) - 2$
 ${}^3\log(5x - 1) = y + 2$
 $5x - 1 = 3^{y+2}$
 $5x = 1 + 3^y \cdot 3^2$
 $5x = 1 + 9 \cdot 3^y$
 $x = 0,2 + 1,8 \cdot 3^y$

b $q = 3 - 2^{p-2}$
 $2^{p-2} = 3 - q$
 $p - 2 = {}^2\log(3 - q)$
 $p = 2 + {}^2\log(3 - q)$

Bladzijde 157

- 8 a** Aflezen punt bij 2005 geeft een productie van 2000 miljoen kWh.
 Aflezen punt bij 2018 geeft een productie van 10 000 miljoen kWh.

Dus $\frac{10000}{2000} = 5$ keer zoveel.

- b** Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $W = b \cdot g^t$, met W de hoeveelheid windenergie in miljoen kWh en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2005.

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \text{ en } W = 2000 \\ t = 10 \text{ en } W = 8000 \end{array} \right\} g_{10 \text{ jaar}} = \frac{8000}{2000} = 4$$

$$g_{\text{jaar}} = 4^{\frac{1}{10}} \approx 1,1487$$

Dus $W = 2000 \cdot 1,1487^t$.

Bij 2034 hoort $t = 29$ en dat geeft $W = 2000 \cdot 1,1487^{29} \approx 111400$.

Dus in 2034 wordt er ongeveer 111,4 miljard kWh windenergie geproduceerd in Nederland.

- 9 a** Aflezen bij $N = 10000 = 10^4$ geeft $t = 6$.
 Dus om 13:00 uur zitten er 10 000 bacteriën op de deurklink.

- b** Bij 11:00 uur hoort $t = 4$ en aflezen geeft $N = 10^{3,5} \approx 3200$.
 Dus er zitten 3200 bacteriën op de deurklink om 11:00 uur.

10 a $N = {}^3\log(6x) = {}^3\log(6) + {}^3\log(x) = {}^3\log(6) + \frac{\log(x)}{\log(3)} = {}^3\log(6) + \frac{1}{\log(3)} \cdot \log(x) \approx 1,6 + 2,1 \cdot \log(x)$

Dus $N = 1,6 + 2,1 \cdot \log(x)$.

b $N(5t) = 86 + 18,6 \cdot \log(5t)$
 $= 86 + 18,6(\log(5) + \log(t))$
 $= 86 + 18,6 \cdot \log(5) + 18,6 \cdot \log(t)$
 $= 86 + 18,6 \log(t) + 13,0...$

Dus $N(5t) \approx N(t) + 13$ en hieruit volgt dat N met 13 toeneemt als t vervijfvoudigt.

11 a $y = 14e^{1,25x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 14e^{1,25x} \cdot 1,25 = 17,5e^{1,25x}$

b $y = 421e^{3x^2-2}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 421e^{3x^2-2} \cdot 6x = 2526x \cdot e^{3x^2-2}$

c $y = 2500(1 + e^{0,56x})$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2500e^{0,56x} \cdot 0,56 = 1400e^{0,56x}$

d $y = 350 \cdot 10^{7x+3}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 350 \cdot 10^{7x+3} \cdot \ln(10) \cdot 7 = 2450 \cdot \ln(10) \cdot 10^{7x+3}$

e $y = 5,5(1 + 8^{1,44x})$ geeft $\frac{dy}{dx} = 5,5 \cdot 8^{1,44x} \cdot \ln(8) \cdot 1,44 = 7,92 \cdot \ln(8) \cdot 8^{1,44x}$

f $y = 6000 \cdot 2,3^{0,12x^2}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 6000 \cdot 2,3^{0,12x^2} \cdot \ln(2,3) \cdot 0,24x = 1440x \cdot \ln(2,3) \cdot 2,3^{0,12x^2}$

12 $N = 3 - 5 \cdot \log(2t) = 3 - 5(\log(2) + \log(t)) = 3 - 5 \cdot \log(2) - 5 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(10)} = 3 - 5 \cdot \log(2) - 5 \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(t)$
 $\approx 1,49 - 2,17 \cdot \ln(t)$

Dus $N = 1,49 - 2,17 \cdot \ln(t)$.

Gemengde opgaven

Bladzijde 158

- 1 a** $y = 40 e^{0,6x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 40e^{0,6x} \cdot 0,6 = 24e^{0,6x}$
- b** $y = 18,5(1 + e^{2x})$ geeft $\frac{dy}{dx} = 18,5 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 37e^{2x}$
- c** $N = 34 \cdot 5^{t^2-7}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 34 \cdot 5^{t^2-7} \cdot \ln(5) \cdot 2t = 68t \cdot \ln(5) \cdot 5^{t^2-7}$
- d** $P = 600(1 + 8^{1,5q})$ geeft $\frac{dP}{dq} = 600 \cdot 8^{1,5q} \cdot \ln(8) \cdot 1,5 = 900 \cdot \ln(8) \cdot 8^{1,5q}$

- 2 a** Aflezen bij $t = 0$ geeft $B = 10^3$ en bij $t = 9$ geeft $B = 10^6$.

Dus $\frac{10^6}{10^3} = 1000$ keer zoveel.

- b** Aflezen bij $t = 12$ geeft $B = 10^7 = 10$ miljoen bacteriën.

Dus na 12 dagen mag de kip nog gegeten worden.

- c** $B = 50 \cdot 10^6$ geeft $\frac{1}{3}t + 3 = \log(50 \cdot 10^6)$

$$\frac{1}{3}t + 3 = 7,69...$$

$$\frac{1}{3}t = 4,69...$$

$$t \approx 14,1$$

Dus na 14,1 dagen.

- d** $\log(B) = \frac{1}{3}t + 3$

$$B = 10^{\frac{1}{3}t + 3}$$

$$B = 10^{\frac{1}{3}t} \cdot 10^3$$

$$B = 10^3 \cdot (10^{\frac{1}{3}})^t$$

$$B \approx 1000 \cdot 2,154^t$$

$$\text{Dus } B = 1000 \cdot 2,154^t.$$

Bladzijde 159

- 3 a** $N = {}^4\log(3x) = {}^4\log(3) + {}^4\log(x) = {}^4\log(3) + \frac{\log(x)}{\log(4)} = {}^4\log(3) + \frac{1}{\log(4)} \cdot \log(x) \approx 0,79 + 1,66 \cdot \log(x)$

$$\text{Dus } N = 0,79 + 1,66 \cdot \log(x).$$

- b** $N = 5 + 2 \cdot \log(3t) = 5 + 2(\log(3) + \log(t)) = 5 + 2 \cdot \log(3) + 2 \cdot \log(t) = 5 + 2 \cdot \log(3) + 2 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(10)}$
 $= 5 + 2 \cdot \log(3) + \frac{2}{\ln(10)} \cdot \ln(t) \approx 5,95 + 0,87 \cdot \ln(t)$

$$\text{Dus } N = 5,95 + 0,87 \cdot \ln(t).$$

- c** $Q = 3 + {}^4\log(2x + 1)$

$${}^4\log(2x + 1) = Q - 3$$

$$2x + 1 = 4^{Q-3}$$

$$2x = -1 + 4^{Q-3}$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4^{Q-3}$$

Dit is eventueel nog te herleiden tot $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{128} \cdot 4^Q$.

- d** $P = 3 - 2^{3t+1}$

$$2^{3t+1} = 3 - P$$

$$3t + 1 = {}^2\log(3 - P)$$

$$3t = -1 + {}^2\log(3 - P)$$

$$t = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(3 - P)$$

4 a $N = b \cdot g^t$

$$g_{4 \text{ dagen}} = \frac{272}{160}, \text{ dus } g_{\text{dag}} = \left(\frac{272}{160}\right)^{\frac{1}{4}} = 1,1418\dots$$

Los op $1,1418\dots^t = 2$.

Voer in $y_1 = 1,1418\dots^x$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x = 5,225\dots$

De verdubbelingstijd is 5,2 dagen.

b $P = b \cdot g^t$

$$g_{12 \text{ dagen}} = 0,84, \text{ dus } g_{\text{dag}} = 0,84^{\frac{1}{12}} \approx 0,986.$$

$$P = b \cdot g^t \text{ met } b = 100 \text{ en } g = 0,986 \text{ geeft } P = 100 \cdot 0,986^t.$$

c Stel: in de laatste vier jaar is g de vermenigvuldigingsfactor per jaar.

$$\text{Er geldt dan } 1,092^6 \cdot g^4 = 1,85.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 1,092^6 \cdot x^4 \text{ en } y_2 = 1,85.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,022$, dus $g \approx 1,022$.

Het jaarlijkse toenamepercentage voor de laatste vier jaar is 2,2%.

5 a $N = b \cdot g^t$

$$g_{52 \text{ jaar}} = \frac{94,4}{3,4}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{94,4}{3,4}\right)^{\frac{1}{52}} \approx 1,066.$$

$$t = 0 \text{ in } 1970, \text{ dus } b = 3,4.$$

Dit geeft de formule $N = 3,4 \cdot 1,066^t$.

b $1,066^t = 2$

$$\text{Voer in } y_1 = 1,066^x \text{ en } y_2 = 2$$

De optie snijpunt geeft $x = 10,84\dots$, dus de verdubbelingstijd is 11 jaar.

c $3,4 \cdot 1,066^t = 46,5 \cdot \ln(t + 20) - 119,3$

$$\text{Voer in } y_1 = 3,4 \cdot 1,066^x \text{ en } y_2 = 46,5 \cdot \ln(x + 20) - 119,3.$$

De optie snijpunt geeft $x = 48,92\dots$

$$\text{Dus in } 1970 + 49 = 2019.$$

d Hoeveelheid gevangen vis in 1970 was $N = 46,5 \cdot \ln(0 + 20) - 119,3 \approx 20,0$

$$\text{en in } 2022 \text{ was dat } N = 46,5 \cdot \ln(52 + 20) - 119,3 \approx 79,6.$$

De totale hoeveelheid in 1970 was $20,0 + 3,4 = 23,4$ miljoen ton

en in 2022 was dat $79,6 + 94,4 = 174,0$ miljoen ton.

$$\text{Dat is } \frac{174,0}{23,4} \approx 7,44 \text{ keer zo veel.}$$

Dus de gemiddelde wereldburger is in deze periode $\frac{7,44}{2,16} \approx 3,4$ keer zoveel vis gaan eten.

$$\text{e } N = 46,5 \cdot \ln(t + 20) - 119,3 = 46,5 \cdot \frac{\log(t + 20)}{\log(e)} - 119,3 = \frac{46,5}{\log(e)} \cdot \log(t + 20) - 119,3$$

$$\approx 107,1 \cdot \log(t + 20) - 119,3$$

$$\text{Dus } N = 107,1 \cdot \log(t + 20) - 119,3.$$

Bladzijde 160**6 a** $g_{5 \text{ dagen}} = 2$ geeft $g_{\text{dag}} = 2^{\frac{1}{5}} = 1,1486\dots \approx 1,149$

Dus de oppervlakte van het meer is $20 \cdot 1,1486\dots^{42} \approx 6756 \text{ m}^2$.

b $20 \cdot 1,149^t = 0,3 \cdot 6756$

$$\text{Voer in } y_1 = 20 \cdot 1,149^x \text{ en } y_2 = 0,3 \cdot 6756.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 33,3$.

$t = 0$ op 1 mei om 0:00 uur en $t = 30$ op 31 mei om 0:00 uur, dus $t = 33,3$ is op 3 juni.

- 7 a** Aflezen bij $G = 20$ geeft $L = 1$.
 Aflezen bij $G = 5 \cdot 20 = 100$ geeft $L = 2$.
 Dus het verschil in lengte is $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$.

b $G = b \cdot g^L$

$$\left. \begin{array}{l} L = 1 \text{ en } G = 20 \\ L = 2 \text{ en } G = 100 \end{array} \right\} g = \frac{100}{20} = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} G = b \cdot 5^L \\ L = 1 \text{ en } G = 20 \end{array} \right\} b \cdot 5^1 = 20$$

$$b = \frac{20}{5^1} = 4$$

Dus $G = 4 \cdot 5^L$.

$$\log(G) = \log(4 \cdot 5^L) = \log(4) + \log(5^L) = \log(4) + L \cdot \log(5) = \log(5) \cdot L + \log(4) \approx 0,7L + 0,6$$

Dus $\log(G) = 0,7L + 0,6$.

- 8 a** $g_{35} \text{ weerkaatsingen} = 0,90$, dus $g_1 \text{ weerkaatsing} = 0,90^{\frac{1}{35}} \approx 0,997$
 $P = b \cdot g^n$ met $b = 100$ en $g = 0,997$ geeft $P = 100 \cdot 0,997^n$.
b $n = 15$ geeft $P = 95,6$, dus $95,6\%$.
c $n = 20$ geeft $P = 94,2$, dus er is $5,8\%$ geabsorbeerd.

Bladzijde 161

- 9** Aantal inwoners N in miljoenen, tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1970.

$$N_N = b \cdot g^t \text{ met } g = \left(\frac{97,1}{55,9} \right)^{\frac{1}{20}} \approx 1,028 \text{ en } b = 55,9.$$

$$\text{Dus } N_N = 55,9 \cdot 1,028^t.$$

$$N_B = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta N_B}{\Delta t} = \frac{111,6 - 88,0}{10} = 2,36$$

$$\left. \begin{array}{l} N_B = 2,36t + b \\ t = 10 \text{ en } N_B = 88,0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2,36 \cdot 10 + b = 88,0 \\ 23,6 + b = 88,0 \\ b = 64,4 \end{array}$$

$$\text{Dus } N_B = 2,36t + 64,4.$$

$$\text{Los op } 55,9 \cdot 1,028^t = 2,36t + 64,4$$

$$\text{Voer in } y_1 = 55,9 \cdot 1,028^x \text{ en } y_2 = 2,36x + 64,4.$$

De optie snijpunt geeft $x = 35,02\dots$

Dus in $1970 + 35 = 2005$.

- 10** De groeifactor per dag bij soort A is $1,03$.
 Stel t de verdubbelingstijd in dagen bij soort A, dan geldt $1,03^t = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,03^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 23,44\dots$ en dus $t = 23,44\dots$
 De verdubbelingstijd bij soort B is gelijk aan $4 \cdot 23,44\dots = 93,79\dots$ dagen.
 Stel g de groeifactor per dag bij soort B, dan geldt $g^{93,79\dots} = 2$ en dus $g = 2^{\frac{1}{93,79\dots}} = 1,0074\dots$
 De groeifactor per week bij soort B is $1,0074\dots^7 \approx 1,053$.
 Dus de oppervlakte die is begroeid met soort B neemt per week met $5,3\%$ toe.

- 11 a** $0,67 \cdot \log(0,5E) - 3 = 0$
 $0,67 \cdot \log(0,5E) = 3$
 $\log(0,5E) = \frac{3}{0,67} = 4,47\dots$
 $0,5E = 10^{4,47\dots}$
 $E = 2 \cdot 10^{4,47\dots} \approx 60\,000$
 De formule geldt voor waarden van E vanaf $60\,000$.

b $M = 0,67 \cdot \log(0,5 \cdot 2 \cdot 10^{18}) - 3 = 9,06$, dus een beving van 9,1 op de schaal van Richter.

c Los op $0,67 \cdot \log(0,5E) - 3 = 5,8$

$$0,67 \cdot \log(0,5E) = 8,8$$

$$\log(0,5E) = 13,13\dots$$

$$0,5E = 10^{13,13\dots}$$

$$E = 2 \cdot 10^{13,13\dots} \approx 2,7 \cdot 10^{13}$$

Dus de hoeveelheid energie is $2,7 \cdot 10^{13}$ joule.

d $M(E) = 0,67 \cdot \log(0,5E) - 3$

$$M(2E) = 0,67 \cdot \log(0,5E \cdot 2) - 3$$

$$= 0,67(\log(0,5E) + \log(2)) - 3$$

$$= 0,67 \cdot \log(0,5E) + 0,67 \cdot \log(2) - 3$$

$$= M(E) + 0,67 \cdot \log(2)$$

$$\approx M(E) + 0,20$$

Als E verdubbelt, dan neemt M met 0,20 toe.

e $M = 0,67 \cdot \log(0,5E) - 3 = 0,67(\log(0,5) + \log(E)) - 3$

$$= 0,67 \cdot \log(0,5) + 0,67 \cdot \log(E) - 3$$

$$= 0,67 \cdot \frac{\ln(E)}{\ln(10)} + 0,67 \cdot \log(0,5) - 3$$

$$= \frac{0,67}{\ln(10)} \cdot \ln(E) + 0,67 \cdot \log(0,5) - 3$$

$$\approx 0,29 \cdot \ln(E) - 3,20$$

Dus $a = 0,29$ en $b = -3,20$.

f $0,67 \cdot \log(0,5E) - 3 = M$

$$0,67 \cdot \log(0,5E) = M + 3$$

$$\log(0,5E) = \frac{M+3}{0,67} = 1,49\dots M + 4,47\dots$$

$$0,5E = 10^{1,49\dots M + 4,47\dots}$$

$$E = 2 \cdot (10^{1,49\dots})^M \cdot 10^{4,47\dots}$$

$$E \approx 60\,000 \cdot 31^M$$

Dus $b = 60\,000$ en $g = 31$.

g $E(M) = 60\,000 \cdot 31^M$

$$E(M+1) = 60\,000 \cdot 31^{M+1} = 60\,000 \cdot 31^M \cdot 31 = 31 \cdot E(M)$$

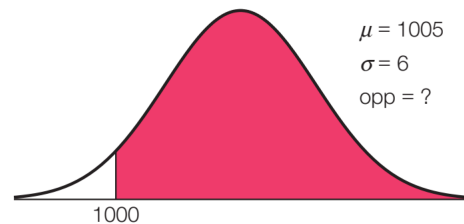
Als M met 1 toeneemt, dan wordt E met 31 vermenigvuldigd.

11 Het toetsen van hypothesen

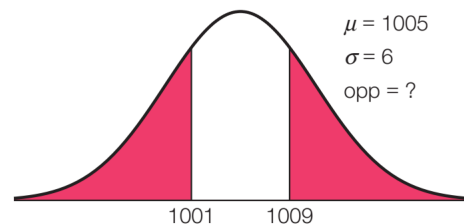
11.1 De wortel-n-wet

Bladzijde 164

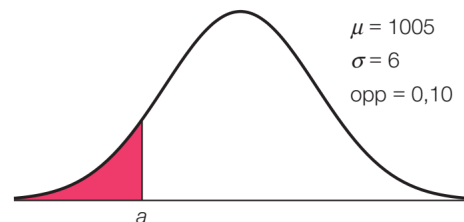
- V1 a** X = gewicht in gram
 X is normaal verdeeld met $\mu = 1005$ en $\sigma = 6$
 De GR geeft $P(X > 1000) \approx 0,798$.
 Dus 79,8%.



- b** $P(X < 1001 \text{ of } X > 1009) = 2 \cdot P(X < 1001)$
 De GR geeft $P(X < 1001 \text{ of } X > 1009) \approx 0,505$.
 Dus van 50,5%.



- c** opp links = 0,10
 De GR geeft $a \approx 997,31$.
 De lichtste 10% van de pakken weegt 997,3 gram of minder.

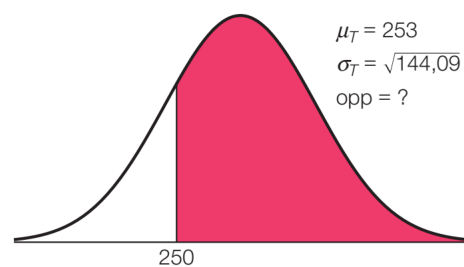


Bladzijde 165

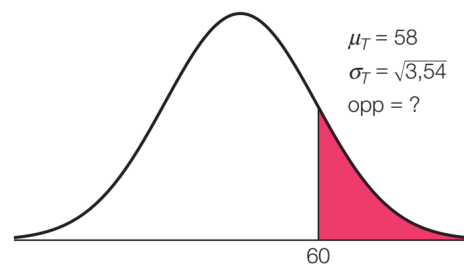
- 1 a** Paul denkt dat de man hoogstens 82 kg mag wegen en de vrouw hoogstens 68 kg. Dat is samen hoogstens 150 kg.
 $P(X \leq 82) \cdot P(Y \leq 68) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$
b Bijvoorbeeld: als een man 85 kg weegt en een vrouw 65 kg weegt, dan is het ook goed.
c Ja. Deze kans is 0,5, want 150 kg is het gemiddelde gewicht van de man en de vrouw samen.

Bladzijde 166

- 2** $T = X + Y$ = totale gewicht in gram
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 5 + 248 = 253$ en
 $\sigma_T = \sqrt{0,3^2 + 12^2} = \sqrt{144,09}$.
 De GR geeft $P(T > 250) \approx 0,599$.
 Dus 59,9%.

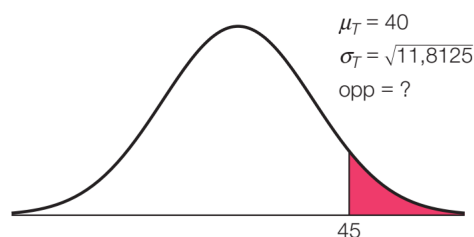


- 3** T = totale productietijd in seconden
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 12 + 8 + 20 + 18 = 58$ en
 $\sigma_T = \sqrt{0,5^2 + 0,3^2 + 0,8^2 + 1,6^2} = \sqrt{3,54}$.
 De GR geeft $P(T > 60) \approx 0,144$.
 Dus 14,4%.

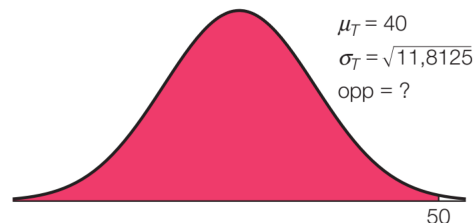


Bladzijde 167

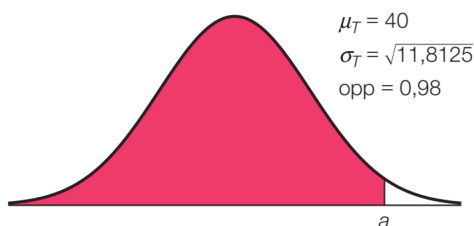
- 4 a** T = totale fietstijd in minuten
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 18 + 7 + 15 = 40$ en
 $\sigma_T = \sqrt{2,5^2 + 1,25^2 + 2^2} = \sqrt{11,8125}$.
 De GR geeft $P(T > 45) \approx 0,073$.



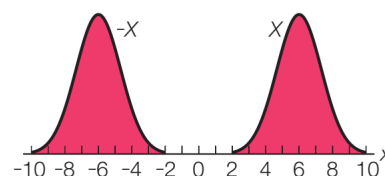
- b** Van 7:25 uur tot 8:15 uur is 50 minuten.
 De GR geeft $P(T \leq 50) = 0,9981...$
 X = aantal keer dat ze op tijd op school komt
 $P(X = 35) = 0,9981...^{35} \approx 0,939$.



- c** opp links = 0,98
 De GR geeft $a \approx 47$.
 Dus minstens 47 minuten voor 8:15 uur.
 Dat is dus voor 7:28 uur.

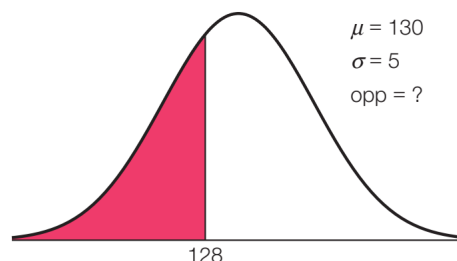


- 5 a** Zie de schets hiernaast.
b Je ziet in de schets dat niet geldt $\sigma_{-X} = -\sigma_X$.
 Wel geldt $\sigma_{-X} = \sigma_X$.
c $\mu_Y = \mu_X - \mu_Y$ en $\sigma_Y = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$

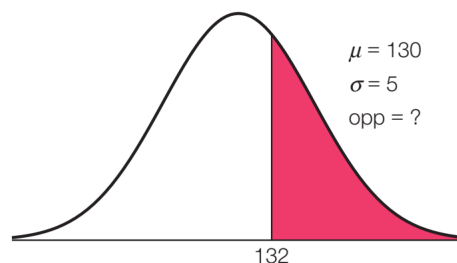


Bladzijde 168

- V2 a** X = gewicht zak in gram
 X is normaal verdeeld met $\mu = 130$ en $\sigma = 5$.
 De GR geeft $P(X < 128) = 0,344...$
 Y = aantal zakken dat minder weegt dan 128 gram
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,344...$
 De GR geeft $P(Y \geq 8) \approx 0,999$.



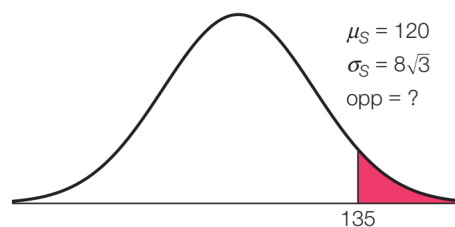
- b** De GR geeft $P(X > 132) = 0,344...$
 Y = aantal zakken dat meer weegt dan 132 gram
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,344...$
 De GR geeft $P(Y = 8) \approx 0,002$.



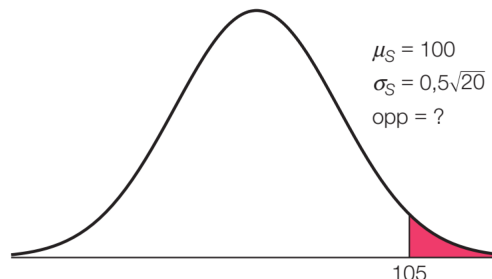
- 6** Er geldt wel dat $\mu_S = 8 \cdot \mu_X$, maar niet dat $\sigma_S = 8 \cdot \sigma_X$.
 Immers $\mu_S = 77 + 77 + \dots + 77 = 8 \cdot 77 = 8 \cdot \mu_X$ en
 $\sigma_S = \sqrt{6^2 + 6^2 + \dots + 6^2} = \sqrt{8 \cdot 6^2} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{6^2} = \sqrt{8} \cdot 6 = \sqrt{8} \cdot \sigma_X \neq 8 \cdot \sigma_X$.

Bladzijde 169

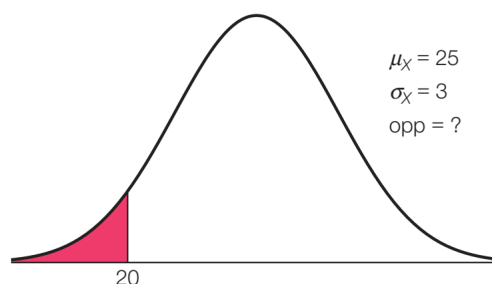
- 7** S = gebruikstijd in minuten van drie volgeladen accu's van filmcamera
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 3 \cdot 40 = 120$ en $\sigma_S = \sqrt{3} \cdot 8 = 8\sqrt{3}$.
 twee uur en een kwartier = 135 minuten
 De GR geeft $P(S \geq 135) \approx 0,140$.



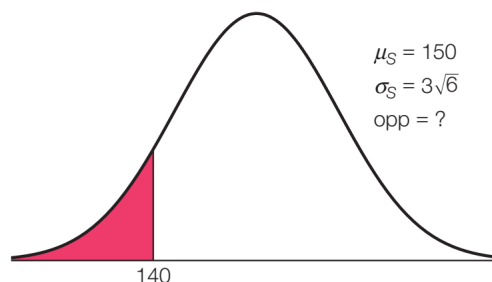
- 8 a** S = dikte in cm van stapel van 20 tegels
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 20 \cdot 5 = 100$ en $\sigma_S = \sqrt{20} \cdot 0,5 = 0,5\sqrt{20}$.
 De GR geeft $P(S > 105) = 0,0126... \approx 0,013$
b Y = aantal stapels dat niet in een krat past
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 12$ en $p = 0,0126...$
 De GR geeft $P(Y \geq 2) \approx 0,010$.



- 9 a** De GR geeft $P(X < 20) \approx 0,048$.

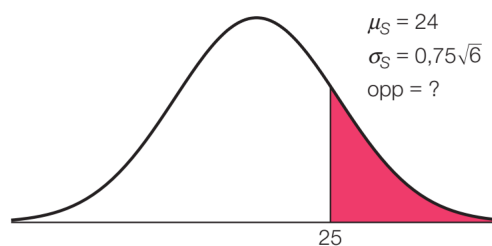


- b** S = gewicht in gram van de koeken in een pak
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 6 \cdot 25 = 150$ en $\sigma_S = \sqrt{6} \cdot 3 = 3\sqrt{6}$.
 De GR geeft $P(S < 140) = 0,0867... \approx 0,087$.
c Y = aantal pakken dat minder bevat dan 140 gram
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = 0,0867...$
 De GR geeft $P(Y > 2) \approx 0,249$.

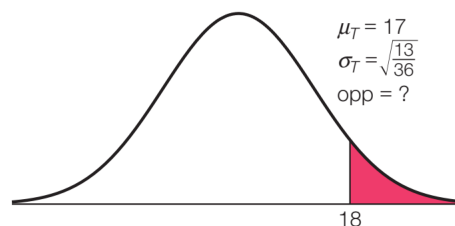


Bladzijde 170

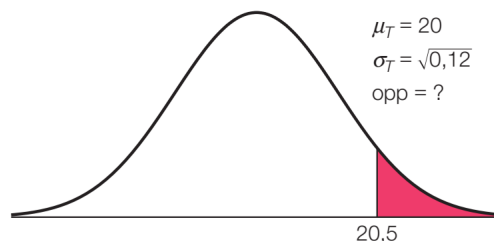
- 10 a** S = tijdsduur in minuten van zes speelronden
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 6 \cdot 4 = 24$ en $\sigma_S = \sqrt{6} \cdot 0,75 = 0,75\sqrt{6}$.
 De GR geeft $P(S \geq 25) = 0,2931...$
 Dus naar verwachting $0,2931... \cdot 50 \approx 15$ keer.



- b** T = totale tijdsduur in minuten van aflevering
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 10 + 7 = 17$ en $\sigma_T = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{36}}$.
 De GR geeft $P(X > 18) = 0,048...$
 X = aantal afleveringen waarin de beschikbare tijd wordt overschreden
 X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = 0,048...$
 De GR geeft $P(X \geq 2) \approx 0,080$.

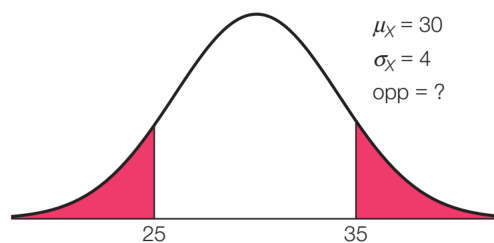


- 11** T = totale gewicht in kg van krat met 12 flessen
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 12 \cdot 1,5 + 2 = 20$ en
 $\sigma_T = \sqrt{12 \cdot 0,05^2 + 0,3^2} = \sqrt{0,12}$.
 De GR geeft $P(T > 20,5) \approx 0,074$.

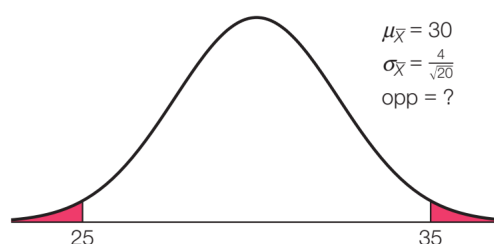


Bladzijde 172

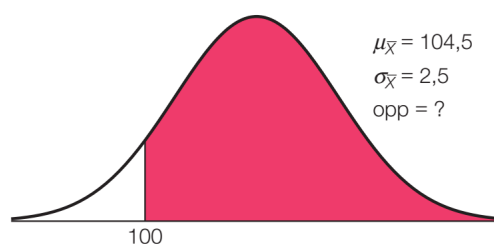
- 12 a** $P(X < 25 \text{ of } X > 35) = 2 \cdot P(X < 25)$
 De GR geeft $P(X < 25 \text{ of } X > 35) \approx 0,211$.



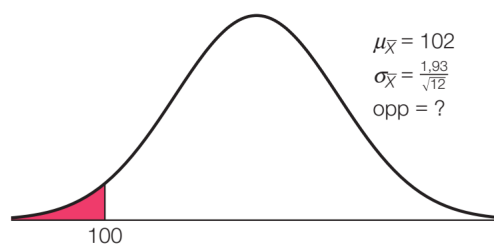
- b** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 30$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{20}}$.
 $P(\bar{X} < 25 \text{ of } \bar{X} > 35) = 2 \cdot P(\bar{X} < 25)$
 De GR geeft $P(\bar{X} < 25 \text{ of } \bar{X} > 35) \approx 0,00000002$.



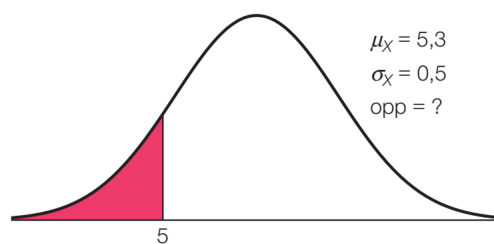
- 13** X = gewicht in gram van kaasbroodje
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 104,5$ en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{16}} = 2,5$.
 De GR geeft $P(\bar{X} \geq 100) \approx 0,964$.
 Dus 96,4%.



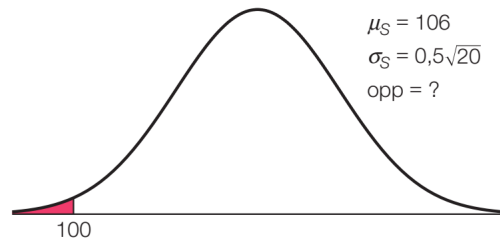
- 14 a** X = vulinhoud in cL van fles
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 102$ en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{1,93}{\sqrt{12}}$.
 De GR geeft $P(\bar{X} < 100) = 0,0001655... \approx 0,0002$.
b Y = aantal kratten waarbij gemiddelde vulinhoud per fles minder is dan 100 cL
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 25$ en $p = 0,0001655...$
 De GR geeft $P(Y \geq 1) \approx 0,004$.



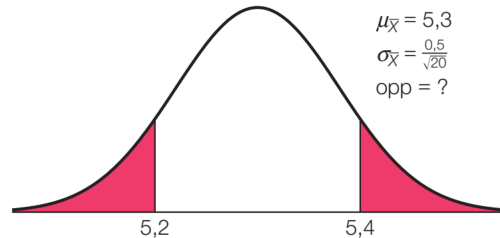
- 15 a** X = gewicht in gram van zakje
 X is normaal verdeeld met $\mu_X = 5,3$ en $\sigma_X = 0,5$.
 De GR geeft $P(X < 5) \approx 0,274$.



- b** S = totale hoeveelheid thee in gram in pakje van 20 stuks
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 20 \cdot 5,3 = 106$ en
 $\sigma_S = \sqrt{20} \cdot 0,5 = 0,5\sqrt{20}$.
 De GR geeft $P(S < 100) \approx 0,004$.

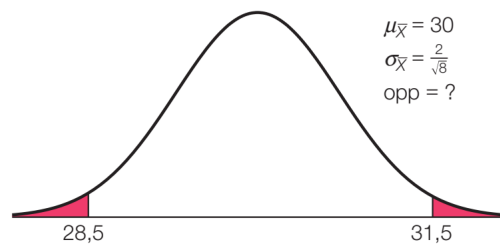


- c** $\bar{X}$ = gewicht in gram van zakje
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 5,3$ en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,5}{\sqrt{20}}$.
 $P(\bar{X} < 5,2 \text{ of } \bar{X} > 5,4) = 2 \cdot P(\bar{X} < 5,2)$
 De GR geeft $P(\bar{X} < 5,2 \text{ of } \bar{X} > 5,4) \approx 0,371$.
 Dus van 37,1%.

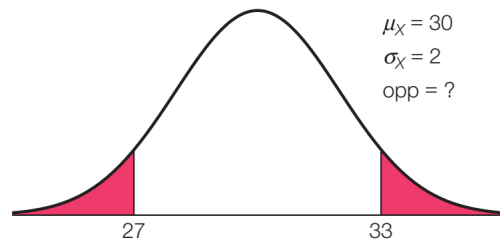


Bladzijde 173

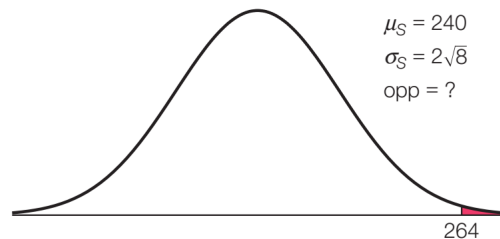
- 16 a** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 30$ en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{8}}$.
 5% van 30 mL is 1,5 mL.
 $P(\bar{X} < 28,5 \text{ of } \bar{X} > 31,5) = 2 \cdot P(\bar{X} < 28,5)$
 De GR geeft $P(\bar{X} < 28,5 \text{ of } \bar{X} > 31,5) \approx 0,034$.



- b** 10% van 30 mL is 3 mL.
 $P(X < 27 \text{ of } X > 33) = 2 \cdot P(X < 27)$
 De GR geeft $P(X < 27 \text{ of } X > 33) = 0,1336...$
 Y = aantal potten waarvan inhoud meer dan 10% afwijkt van μ_X
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 8$ en $p = 0,1336...$
 De GR geeft $P(Y \geq 2) \approx 0,291$.

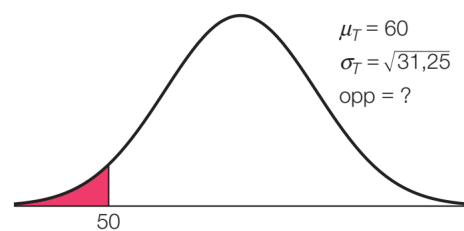


- c** S = totale inhoud in mL van acht potten
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 8 \cdot 30 = 240$ en
 $\sigma_S = \sqrt{8} \cdot 2 = 2\sqrt{8}$.
 Je verwacht 240 mL.
 10% meer is $1,10 \cdot 240 = 264$ mL.
 De GR geeft $P(S > 264) \approx 0,00001$.



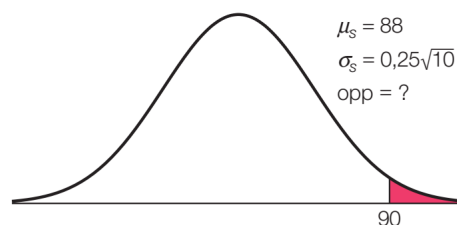
- 17** S is normaal verdeeld met $\mu_S = 30 \cdot 50 = 1500$ en
 $\sigma_S = \sqrt{30} \cdot 5 = 5\sqrt{30}$.
 $\bar{X}$ wijkt meer dan 3 van μ_X af, dan wijkt S meer dan $30 \cdot 3 = 90$ van μ_S af.
 $P(S < 1410 \text{ of } S > 1590) = 2 \cdot P(S < 1410)$
 De GR geeft $P(S < 1410 \text{ of } S > 1590) \approx 0,001$.

- C1** T = totale tijdsduur in seconden
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 8 + 45 + 7 = 60$ en
 $\sigma_T = \sqrt{2^2 + 5^2 + 1,5^2} = \sqrt{31,25}$.
 De GR geeft $P(T < 50) \approx 0,037$.
 Dus 3,7%.

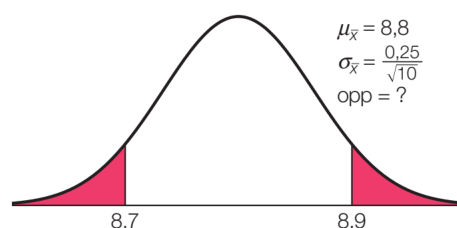


C2

- a** S = totale dikte in mm van tabletten in buisje
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 10 \cdot 8,8 = 88$ en
 $\sigma_S = \sqrt{10} \cdot 0,25 = 0,25\sqrt{10}$.
 De GR geeft $P(S > 90) \approx 0,006$.



- b** $\bar{X}$ = dikte in mm van tablet
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 8,8$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,25}{\sqrt{10}}$.
 $P(\bar{X} < 8,7 \text{ of } \bar{X} > 8,9) = 2 \cdot P(\bar{X} < 8,7)$
 De GR geeft $P(\bar{X} < 8,7 \text{ of } \bar{X} > 8,9) \approx 0,206$.



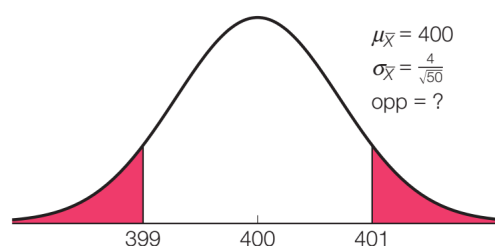
11.2 Beslissen op grond van een steekproef

Bladzijde 174

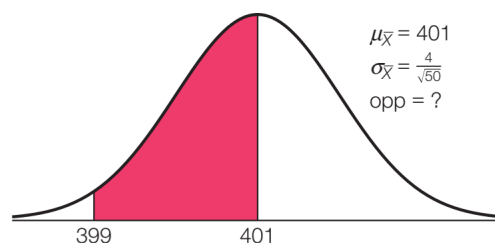
- 18 a** Er wordt dan te veel ijsthee geleverd en dit kost geld.
b Dan zit er te weinig ijsthee in de flessen en dat kost Wick mogelijk klanten.

Bladzijde 175

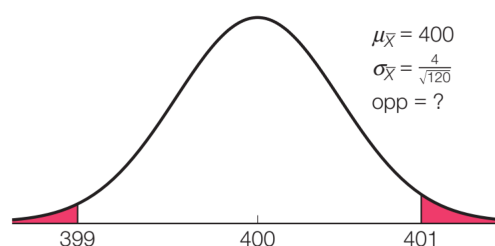
- 19 a** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 400$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{50}}$.
 $P(\text{ten onrechte bijstellen}) = P(\bar{X} \leq 399 \text{ of } \bar{X} \geq 401)$
 $= 2 \cdot P(\bar{X} \leq 399)$
 De GR geeft $P(\bar{X} \leq 399 \text{ of } \bar{X} \geq 401) \approx 0,077$.
b Je weet in dat geval niet wat het werkelijke gemiddelde is.



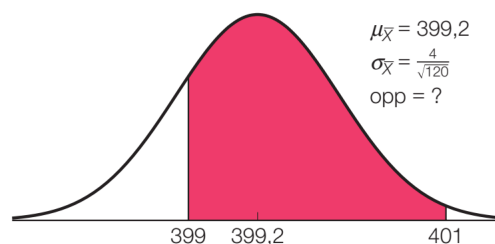
- c** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 401$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{50}}$.
 $P(\text{niet bijstellen}) = P(399 \leq \bar{X} \leq 401)$
 De GR geeft $P(399 \leq \bar{X} \leq 401) \approx 0,500$.



- 20 a** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 400$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{120}}$.
 $P(\text{ten onrechte bijstellen}) = P(\bar{X} \leq 399 \text{ of } \bar{X} \geq 401)$
 $= 2 \cdot P(\bar{X} \leq 399)$
 De GR geeft $P(\bar{X} \leq 399 \text{ of } \bar{X} \geq 401) \approx 0,006$.



- b** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 399,2$ en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{120}}$.
 $P(\text{niet bijstellen}) = P(399 \leq \bar{X} \leq 401)$
 De GR geeft $P(399 \leq \bar{X} \leq 401) \approx 0,708$.



Bladzijde 178

- 21 a** Omdat dan de kans dat je H_0 ten onrechte verworpt groter is dan 0,01.

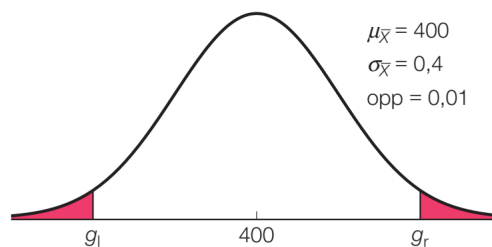
- b** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 400$ en

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{100}} = 0,4.$$

opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,005$

De GR geeft $g_r \approx 401,04$.

- c** Bij $\bar{X} = 400,8$ is er geen aanleiding om H_0 te verwerpen.
Het steekproefgemiddelde wijkt niet significant af.



- 22 a** $H_0 : \mu_X = 30000$ en $H_1 : \mu_X \neq 30000$

- b** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 30000$ en

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4000}{\sqrt{100}} = 400.$$

opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,05 = 0,025$

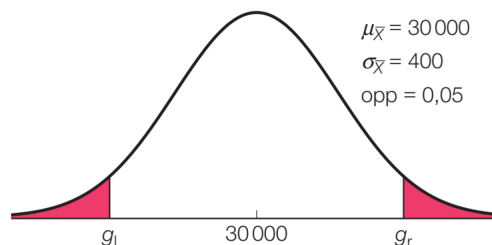
$P(\bar{X} \leq g_l) = 0,025$

De GR geeft $g_l \approx 29216$.

$P(\bar{X} \geq g_r) = 0,025$

De GR geeft $g_r \approx 30784$.

- c** Bij $\bar{X} = 29502$ is er geen aanleiding om H_0 te verwerpen.
Het steekproefresultaat wijkt niet significant af.



Bladzijde 179

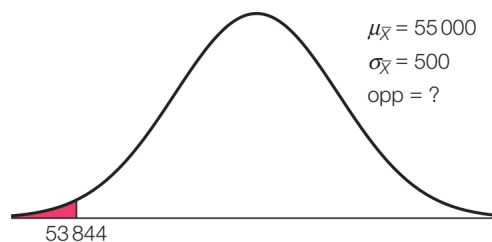
- 23 a** $H_0 : \mu_X = 55000$ en $H_1 : \mu_X \neq 55000$

- b** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 55000$ en

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4000}{\sqrt{64}} = \frac{4000}{8} = 500.$$

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 53844) \approx 0,010$.

- c** Het steekproefgemiddelde wijkt significant af, want
 $P(\bar{X} \leq 53844)$ is kleiner dan $\frac{1}{2}\alpha$.



Bladzijde 181

- 24 a** $P(\bar{X} \leq g_l) = 0,005$ met $\mu_{\bar{X}} = 9,3$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{2,1}{\sqrt{40}}$ geeft met de GR dat $g_l \approx 8,44$.

$P(\bar{X} \geq g_r) = 0,005$ met $\mu_{\bar{X}} = 9,3$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{2,1}{\sqrt{40}}$ geeft met de GR dat $g_r \approx 10,16$.

Het beslissingsvoorschrift is

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 8,44$ of $\bar{X} \geq 10,46$.

Omdat $8,6 > 8,44$ wordt H_0 niet verworpen.

Er is geen aanleiding om aan te nemen dat het nieuwe systeem invloed heeft op de overwerkijd.

- b** De methode met de overschrijdingskans heeft de voorkeur, omdat het minder werk is.

- 25 a** $H_0 : \mu_X = 25$, $H_1 : \mu_X \neq 25$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 25$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{50}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 24)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 24) \approx 0,009$.

$P(\bar{X} \leq 24) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Er is aanleiding om het gemiddelde $\mu_X = 25$ in twijfel te trekken.

- b** $H_0 : \mu_X = 25$, $H_1 : \mu_X \neq 25$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 25$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{100}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 26)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 26) \approx 0,0004$.

$P(\bar{X} \geq 26) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Er is aanleiding om het gemiddelde $\mu_X = 25$ in twijfel te trekken.

- 26 a** $H_0: \mu_X = 1,02$, $H_1: \mu_X \neq 1,02$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 1,02$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,04}{\sqrt{50}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 1,04)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 1,04) \approx 0,0002$.

$P(\bar{X} \geq 1,04) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

De fabrikant zal besluiten de vulmachine opnieuw in te stellen.

- b** $H_0: \mu_X = 1,02$, $H_1: \mu_X \neq 1,02$ en $\alpha = 0,05$

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 1,03)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 1,03) \approx 0,039$.

$P(\bar{X} \geq 1,03) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

De fabrikant zal de conclusie trekken dat de vulmachine niet hoeft te worden bijgesteld.

Bladzijde 182

- 27 a** X = diameter in cm van tennisbal

$H_0: \mu_X = 6,51$, $H_1: \mu_X \neq 6,51$ en $\alpha = 0,10$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 6,51$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,13}{\sqrt{40}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 6,47)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 6,47) \approx 0,026$.

$P(\bar{X} \leq 6,47) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

De klant trekt de conclusie dat de gemiddelde diameter significant afwijkt van 6.51 cm.

Bij $\alpha = 0,05$ is $P(\bar{X} \leq 6,47) > \frac{1}{2}\alpha$, dus dan is de conclusie dat de gemiddelde diameter niet significant afwijkt.

- b** Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of als $\bar{X} \geq g_r$

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 6,51$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,13}{\sqrt{100}} = 0,013$.

$P(\bar{X} \leq g_l) = 0,05$

De GR geeft $g_l \approx 6,489$.

$P(\bar{X} \geq g_r) = 0,05$

De GR geeft $g_r \approx 6,531$.

Dus verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 6,48$ of als $\bar{X} \geq 6,54$.

- 28** Stel minstens n dagen.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 9,3$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{2,1}{\sqrt{n}}$.

Er moet gelden $P(\bar{X} \leq 8,6) \leq 0,005$.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,005$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 59,7$.

Dus minstens 60 dagen.

Bladzijde 183

- C3 a** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 212$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{80}}$.

$P(\text{ten onrechte bijstellen}) = P(\bar{X} \leq 211,5 \text{ of } \bar{X} \geq 212,5)$

$= 2 \cdot P(\bar{X} \leq 211,5)$

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 211,5 \text{ of } \bar{X} \geq 212,5) \approx 0,025$.

- b** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 212$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{50}}$.

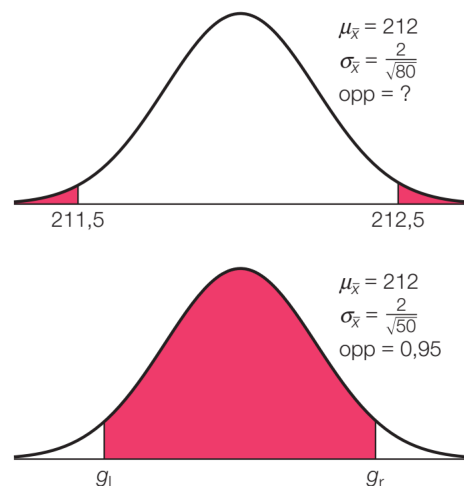
opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,05 = 0,025$

$P(\bar{X} \leq g_l) = 0,025$

De GR geeft $g_l \approx 211,44$.

$P(\bar{X} \geq g_r) = 0,025$

De GR geeft $g_r \approx 212,56$.



C4

 Y = diameter in mm van biljartbal $H_0 : \mu_Y = 61,5$, $H_1 : \mu_Y \neq 61,5$ en $\alpha = 0,01$. $\bar{Y}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{Y}} = 61,5$ en $\sigma_{\bar{Y}} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} = \frac{0,5}{\sqrt{50}}$.De overschrijdingskans is $P(\bar{Y} \geq 61,7)$.De GR geeft $P(\bar{Y} \geq 61,7) \approx 0,002$. $P(\bar{X} \geq 61,7) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

De afnemer trekt de conclusie dat de gemiddelde diameter significant afwijkt van 61,5 mm.

Er is reden om aan de bewering van de fabrikant te twijfelen.

11.3 Eenzijdig en tweezijdig toetsen

Bladzijde 184

- 29 Omdat de bewering is dat de levensduur verlengd wordt.

Bladzijde 185

- 30 a $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 85$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{30}}$.
 $P(\bar{X} \geq g) = 0,10$
 De GR geeft $g \approx 88,51$.
 $\rightarrow$ Verwerp H_0 als $\bar{X} \geq 88,6$.
- b $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 85$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{50}}$.
 $P(\bar{X} \leq g) = 0,05$
 De GR geeft $g \approx 81,51$.
 $\rightarrow$ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 81,5$.
- c $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 85$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{200}}$.
 $P(\bar{X} \leq g_l) = 0,005$
 De GR geeft $g_l \approx 82,27$.
 $P(\bar{X} \leq g_r) = 0,995$
 De GR geeft $g_r \approx 87,73$.
 $\rightarrow$ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 82,2$ of $\bar{X} \geq 87,8$.

Bladzijde 186

- 31 a X = afhandelingstijd in minuten van bestelling
 $H_0 : \mu_X = 12$, $H_1 : \mu_X < 12$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 12$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = 0,6$.
 $P(\bar{X} \leq g) = 0,05$
 De GR geeft $g \approx 11,01$.
 Dus bij steekproefgemiddelden van 11,0 minuten of minder is er aanleiding om te veronderstellen dat de afhandelingstijd verminderd is.
- b $H_0 : \mu_X = 12$, $H_1 : \mu_X < 12$ en $\alpha = 0,01$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 12$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{80}}$.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 11,3)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} \leq 11,3) \approx 0,018$.
 $P(\bar{X} \leq 11,3) > \alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.
 Er is geen aanleiding om te concluderen dat de afhandelingstijd is afgenomen.

Bladzijde 188

- 32 Omdat $802 > 800$ en de alternatieve hypothese $\mu_X < 800$ is.

- 33** X = gewicht in gram van pakje margarine
 $H_0 : \mu_X = 500$, $H_1 : \mu_X > 500$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 500$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{1,5}{\sqrt{100}} = 0,15$.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 500,4)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} \geq 500,4) \approx 0,004$.
 $P(\bar{X} \geq 500,4) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.
 Er is reden om de productieafdeling gelijk te geven.

- 34 a** X = actieradius in km van de Spirit
 $H_0 : \mu_X = 250$, $H_1 : \mu_X < 250$ en $\alpha = 0,01$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 250$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{40}}$.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 238)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} \leq 238) \approx 0,001$.
 $P(\bar{X} \leq 238) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.
 Je kunt concluderen dat meneer Spee gelijk heeft.
- b** $H_0 : \mu_X = 250$, $H_1 : \mu_X > 250$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 250$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{35}}$.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 256)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} \geq 256) \approx 0,078$.
 $P(\bar{X} \geq 256) > \alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.
 Je kunt niet concluderen dat meneer Spee gelijk heeft.
- c** $H_0 : \mu_X = 250$, $H_1 : \mu_X \neq 250$ en $\alpha = 0,10$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 250$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{40}}$.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 244)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} \leq 244) \approx 0,065$.
 $P(\bar{X} \leq 244) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.
 Je kunt niet concluderen dat de actieradius anders is.

- 35** X = zinslengte in woorden
 $H_0 : \mu_X = 28,6$, $H_1 : \mu_X \neq 28,6$ en $\alpha = 0,01$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 28,6$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{5,9}{\sqrt{75}}$.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 30,2)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} \geq 30,2) \approx 0,009$.
 $P(\bar{X} \geq 30,2) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.
 Je kunt stellen dat het pas ontdekte manuscript van de middeleeuwse schrijver afkomstig is.

Bladzijde 189

- 36 a** X = gewicht in gram van de bonen in een pak
 $H_0 : \mu_X = 500$, $H_1 : \mu_X < 500$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 500$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{50}}$.
 $P(\bar{X} \leq g) = 0,05$
 De GR geeft $g \approx 499,07$.
 Dus het gemiddelde gewicht per pak moet dan maximaal 499,0 gram zijn.
- b** $H_0 : \mu_X = 500$, $H_1 : \mu_X > 500$ en $\alpha = 0,025$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 500$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = 0,8$.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 501,94)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} \geq 501,94) \approx 0,008$.
 $P(\bar{X} \geq 501,94) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.
 Er is aanleiding om de afdeling Voorraad gelijk te geven.

- c $H_0 : \mu_X = 500$, $H_1 : \mu_X \neq 500$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 500$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = 0,8$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 502,48)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 502,48) \approx 0,001$.

$P(\bar{X} \geq 502,48) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Het steekproefresultaat wijkt significant af van 500 gram.

- 37 X = lengte in cm van Nederlandse basketballer

$H_0 : \mu_X = 184$, $H_1 : \mu_X > 184$ en $\alpha = 0,01$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 184$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{35}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 190)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 190) \approx 0,0000002$.

$P(\bar{X} \geq 190) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Je kunt inderdaad zeggen dat basketballers langer zijn dan gemiddeld.

- 38 X = lengte in cm Nederlandse volleyballer

$H_0 : \mu_X = 184$, $H_1 : \mu_X > 184$ en $\alpha = 0,01$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 184$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{n}}$.

Er moet gelden $P(\bar{X} \geq 187) \leq 0,01$.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en maak een tabel.

$x = 29$ geeft $y_1 = 0,105\dots$ en $x = 30$ geeft $y_1 = 0,0094\dots$

De grootte van de steekproef moet minstens 30 zijn geweest.

Bladzijde 190

- 39 a X is normaal verdeeld met $\mu_X = 4$ en $\sigma_X = 0,12$.

$P(\text{tablet helpt}) = P(3,8 < X < 4,2)$

De GR geeft $P(3,8 < X < 4,2) \approx 0,904$.

- b $H_0 : \mu_X = 4$, $H_1 : \mu_X \neq 4$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 4$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,12}{\sqrt{50}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 3,95)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 3,95) \approx 0,002$.

$P(\bar{X} \leq 3,95) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Het steekproefgemiddelde wijkt significant af van 4 mg.

- c X is normaal verdeeld met $\mu_X = 3,95$ mg en $\sigma_X = 0,12$ mg.

$P(\text{tablet helpt niet}) = P(\bar{X} \leq 3,8 \text{ of } \bar{X} \geq 4,2) = 1 - P(3,8 < X < 4,2)$

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 3,8 \text{ of } \bar{X} \geq 4,2) \approx 0,124$.

Dus 12,4% van de tabletten helpt dan niet.

- 40 a X = trekkracht in newton van kabel

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 800$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{35}{\sqrt{25}} = 7$.

De overschrijdingskans $P(\bar{X} \leq 785)$ is groter bij $\mu = 800$ dan bij een waarde van μ groter dan 800.

Dus als het steekproefresultaat 785 newton oplevert dat H_0 wordt verworpen bij $H_0: \mu = 800$, dan zal H_0 zeker worden verworpen bij een nulhypothese met μ groter dan 800.

- b Bij een grotere μ neemt de overschrijdingskans $P(\bar{X} \leq 785)$ af, zodat de fabrikant eerder in het ongelijk wordt gesteld.

Bladzijde 191

- 41 $H_0 : \mu_X = 37$ en $H_1 : \mu_X > 37$

42 X = trekkracht in newton van kabel

$H_0 : \mu_X = 800$, $H_1 : \mu_X < 800$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 800$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{35}{\sqrt{25}} = 7$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 785)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 785) \approx 0,016$.

$P(\bar{X} \leq 785) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Er is reden om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken.

43 X = aantal uur dat de Nederlander in zijn vrije tijd per week met media bezig is

$H_0 : \mu_X = 20,2$, $H_1 : \mu_X < 20,2$ en $\alpha = 0,025$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 20,2$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{2,4}{\sqrt{30}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 19,4)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 19,4) \approx 0,034$.

$P(\bar{X} \leq 19,4) > \alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Er is geen reden om het eens te zijn met de bewering van de medewerker van Suikerberg.

44 4 minuten en 30 seconden = 4,5 minuten

36 minuten en 30 seconden is gemiddeld $\frac{36,5}{8} = 4,5625$ minuten per km.

12 seconden = $\frac{12}{60} = 0,2$ minuten

X = kilometertijd in minuten

$H_0 : \mu_X = 4,5$, $H_1 : \mu_X > 4,5$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 4,5$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,2}{\sqrt{40}}$, want $n = 5 \cdot 8 = 40$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 4,5625)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 4,5625) \approx 0,024$.

$P(\bar{X} \geq 4,5625) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Er is reden om aan de bewering van Jan-Pieter te twijfelen.

Bladzijde 192

C5 a $H_1 : \mu > 1,53$

b $H_1 : \mu \neq 1,53$

c $H_1 : \mu < 1,53$

C6 a X = inhoud in mL van fles cola

$H_0 : \mu_X = 1000$, $H_1 : \mu_X < 1000$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 1000$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{50}{\sqrt{100}} = 5$.

$P(\bar{X} \leq g) = 0,05$

De GR geeft $g \approx 991,78$.

Dus bij steekproefgemiddelden van 991,7 mL en kleiner.

b $H_0 : \mu_X = 1000$, $H_1 : \mu_X < 1000$ en $\alpha = 0,025$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 1000$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{50}{\sqrt{200}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 994)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 994) \approx 0,045$.

$P(\bar{X} \leq 994) > \alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Er is geen reden om aan te nemen dat de gemiddelde inhoud kleiner is.

C7 $H_0 : \mu = 25$ en $H_1 : \mu > 25$

11.4 Binomiale toetsen

Bladzijde 193

- 45 a** Je let alleen op de gebeurtenissen succes (de persoon vindt de frisdrank van Mol de lekkerste) en mislukking.
Verder is bij elk kansexperiment de kans op succes dezelfde. Als Mol gelijk heeft, dan is $p = 0,40$.
b Nee, want $X = 48$ is meer dan het verwachte aantal van 40 dat hoort bij $p = 0,40$.
c De concurrent krijgt dan gelijk, want $X = 28$ ligt ver onder het verwachte aantal van 40 als $p = 0,40$.

Bladzijde 195

- 46 a** X = aantal personen dat in één keer voor het rijexamen slaagt
 $H_0 : p = 0,45$ en $H_1 : p > 0,45$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 40$ en $p = 0,45$.
De overschrijdingskans is $P(X \geq 23)$.
De GR geeft $P(X \geq 23) \approx 0,077$.
b $P(X \geq 23) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Er is geen aanleiding om de directeur gelijk te geven.
- 47** X = aantal kinderen dat later met een allergie te kampen kreeg
 $H_0 : p = 0,30$, $H_1 : p < 0,30$ en $\alpha = 0,025$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 474$ en $p = 0,30$.
De overschrijdingskans is $P(X \leq 112)$.
De GR geeft $P(X \leq 112) \approx 0,001$.
 $P(X \leq 112) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .
Er is voldoende aanleiding om de onderzoekers gelijk te geven.
- 48** X = aantal Aziatische mannen dat aan een vorm van kleurenblindheid lijdt
 $H_0 : p = 0,08$, $H_1 : p > 0,08$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 200$ en $p = 0,08$.
De overschrijdingskans is $P(X \geq 22)$.
De GR geeft $P(X \geq 22) \approx 0,080$.
 $P(X \geq 22) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Er is geen aanleiding om Marlies Bouman gelijk te geven.

Bladzijde 196

- 49** X = aantal keer op rood bij het draaien van de schijf
 $H_0 : p = \frac{1}{4}$, $H_1 : p > \frac{1}{4}$ en $\alpha = 0,01$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 160$ en $p = \frac{1}{4}$.
De overschrijdingskans is $P(X \geq 52)$.
De GR geeft $P(X \geq 52) \approx 0,020$.
 $P(X \geq 52) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Er is niet voldoende reden om Simon gelijk te geven.
- 50** X = aantal keer Papa Varken
 $H_0 : p = \frac{1}{15}$, $H_1 : p > \frac{1}{15}$ en $\alpha = 0,01$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 25 + 15 = 40$ en $p = \frac{1}{15}$.
 $5 + 2 = 7$, dus de overschrijdingskans is $P(X \geq 7)$.
De GR geeft $P(X \geq 7) \approx 0,016$.
 $P(X \geq 7) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Er kan niet geconcludeerd worden dat Papa Varken vaker voorkomt.
- 51 a** Eerste toets
 X = aantal keer zes ogen
 $H_0 : p = \frac{1}{6}$ en $H_1 : p < \frac{1}{6}$

Tweede toets
 X = aantal keer geen zes ogen
 $H_0 : p = \frac{5}{6}$ en $H_1 : p > \frac{5}{6}$

b Eerste toets

X is binomiaal verdeeld met $n = 80$ en $p = \frac{1}{6}$.

De overschrijdingskans is $P(X \leq 8)$.

De GR geeft $P(X \leq 8) \approx 0,067$.

Tweede toets

X is binomiaal verdeeld met $n = 80$ en $p = \frac{5}{6}$.

De overschrijdingskans is $P(X \geq 72)$.

De GR geeft $P(X \geq 72) \approx 0,067$.

c Er geldt $P(X \leq 8) > \alpha$ en ook $P(X \geq 72) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is niet voldoende aanleiding om het met Mirjam eens te zijn.

Bladzijde 198

52 a De GR geeft $a = 73$. Het verwerpsgebied is $X \leq 72$.

b De GR geeft $a = 86$. Het verwerpsgebied is $X \geq 87$.

53 X = aantal patiënten waarbij het middel doeltreffend werkt

$H_0 : p = 0,80$, $H_1 : p < 0,80$ en $\alpha = 0,05$.

X is binomiaal verdeeld met $n = 500$ en $p = 0,80$.

De GR geeft $a = 385$.

Bij minstens 385 patiënten.

54 a Die kans is 0,5.

b X = aantal keer dat Bob wint

$H_0 : p = 0,5$, $H_1 : p > 0,5$ en $\alpha = 0,05$.

X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,5$.

De overschrijdingskans is $P(X \geq 57)$.

De GR geeft $P(X \geq 57) \approx 0,097$.

$P(X \geq 57) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is geen aanleiding om Bob gelijk te geven.

c X = aantal keer dat Bob wint

$H_0 : p = 0,5$, $H_1 : p > 0,5$ en $\alpha = 0,05$.

X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,5$.

De GR geeft $a = 58$.

Het minimale aantal spelletjes is 59.

55 a Bij de normale verdeling ligt de helft van de populatie onder het gemiddelde, dus naar verwachting 25.

b De kans dat een petitfour minder weegt dan 75 gram zou 0,5 moeten zijn, dus je kunt een binomiale toets uitvoeren.

c X = aantal petitfours dat minder weegt dan 75 gram

$H_0 : p = 0,5$, $H_1 : p > 0,5$ en $\alpha = 0,05$.

X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,5$.

De overschrijdingskans is $P(X \geq 31)$.

De GR geeft $P(X \geq 31) \approx 0,059$.

$P(X \geq 31) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is geen reden om aan de bewering van de accountmanager van Lekkers te twijfelen.

Bladzijde 199

56 a X = aantal sets waarbij de speler die begint met serveren de set wint

$H_0 : p = 0,55$, $H_1 : p < 0,55$ en $\alpha = 0,05$.

X is binomiaal verdeeld met $n = 500$ en $p = 0,55$.

De GR geeft $a = 257$.

Het aantal sets waarbij de speler die begint met serveren de set wint, is hoogstens 256.

b $242 \leq 256$, dus verwerp H_0 .

Jacco krijgt gelijk. Het door de tennisliefhebber genoemde percentage is te optimistisch.

c X = aantal games dat wordt gewonnen door een speler die met nieuwe ballen heeft mogen serveren

$H_0 : p = 0,815$, $H_1 : p > 0,815$ en $\alpha = 0,025$.

X is binomiaal verdeeld met $n = 300$ en $p = 0,815$.

De GR geeft $a = 257$.

De serveerder moet minstens 258 games winnen om Jacco gelijk te geven.

Bladzijde 200

- 57** X = aantal leerlingen niet op elektrische fiets
 $H_0 : p = 0,7$, $H_1 : p \neq 0,7$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 400$ en $p = 0,7$.
De overschrijdingskans is $P(X \leq 262)$.
De GR geeft $P(X \leq 262) \approx 0,029$.
 $P(X \leq 262) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Er is geen aanleiding om de bewering van de directeur in twijfel te trekken.

- 58** **a** Een onzuiver geldstuk kan te veel maar ook te weinig keer kop geven.
b X = aantal keer kop bij het gooien met een geldstuk
 $H_0 : p = 0,5$, $H_1 : p \neq 0,5$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,5$.
De overschrijdingskans is $P(X \geq 59)$.
De GR geeft $P(X \geq 59) \approx 0,044$.
 $P(X \geq 59) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Ze kan niet concluderen dat het geldstuk niet zuiver is.

Bladzijde 201

- 59** X = aantal keer zes ogen
 $H_0 : p = \frac{1}{6}$, $H_1 : p \neq \frac{1}{6}$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 150$ en $p = \frac{1}{6}$.
De overschrijdingskans is $P(X \leq 12)$.
De GR geeft $P(X \leq 12) \approx 0,002$.
 $P(X \leq 12) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 .
Hij komt tot de conclusie dat de dobbelsteen niet zuiver is.

- 60** X = aantal lampen met levensduur van meer dan 8000 uur
 $H_0 : p = 0,8$, $H_1 : p < 0,8$ en $\alpha = 0,10$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 30$ en $p = 0,8$.
De overschrijdingskans is $P(X \leq 21)$.
De GR geeft $P(X \leq 21) \approx 0,129$.
 $P(X \leq 21) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
De steekproef geeft onvoldoende aanleiding om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken.

- 61** **a** X = aantal keer dat balletje op vakje met nummer 10 blijft liggen
 $H_0 : p = \frac{1}{37}$, $H_1 : p \neq \frac{1}{37}$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 500$ en $p = \frac{1}{37}$.
De overschrijdingskans is $P(X \geq 21)$.
De GR geeft $P(X \geq 21) \approx 0,033$.
 $P(X \geq 21) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Er is geen aanleiding om te vermoeden dat de roulette niet zuiver is.
b X = aantal keer dat het balletje op de vakjes met nummers 26, 0 en 32 blijft liggen
 $H_0 : p = \frac{3}{37}$, $H_1 : p \neq \frac{3}{37}$ en $\alpha = 0,025$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 1000$ en $p = \frac{3}{37}$.
De GR geeft $a_l = 62$ en $a_r = 101$.
De zuiverheid van de roulette wordt niet in twijfel getrokken bij aantallen van 62 tot en met 101.
c X = aantal keer op rood
 $H_0 : p = \frac{18}{37}$, $H_1 : p < \frac{18}{37}$ en $\alpha = 0,01$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 1500$ en $p = \frac{18}{37}$.
De overschrijdingskans is $P(X \leq 695)$.
De GR geeft $P(X \leq 695) \approx 0,038$.
 $P(X \leq 695) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Er is niet voldoende reden om het met Richard eens te zijn.

Bladzijde 202

- 62 a** X = diameter in cm van tomaat
 X is normaal verdeeld met $\mu = 7,9$ en $\sigma = 0,5$.
De GR geeft $P(X < 7,2) = 0,0807\dots$
Dus $P(\text{tomaat wordt doorgedraaid}) \approx 0,081$.
- b** Y = aantal tomaten dat na meting moet worden doorgedraaid
 $H_0 : p = 0,081$, $H_1 : p < 0,081$ en $\alpha = 0,001$.
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 900$ en $p = 0,081$.
De overschrijdingskans is $P(Y \leq 65)$.
De GR geeft $P(Y \leq 65) \approx 0,0184$.
 $P(Y \leq 65) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Er is niet aangetoond dat het middel S3Fb de diameter vergroot.

- 63** X = gewicht in gram van baby bij geboorte
 X is normaal verdeeld met $\mu = 3250$ en $\sigma = 425$.
 $P(X > 4000) = 0,03880\dots$
Dus $P(\text{baby is zwaar}) \approx 0,0388$.
 Y = aantal baby's dat behoort tot de categorie 'zwaar'
 $H_0 : p = 0,0388$, $H_1 : p > 0,0388$ en $\alpha = 0,01$.
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 58$ en $p = 0,0388$.
De overschrijdingskans is $P(Y \geq 8)$.
De GR geeft $P(Y \geq 8) \approx 0,002$.
 $P(Y \geq 8) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .
Je kunt de medewerkers van het consultatiebureau gelijk geven.

Bladzijde 203

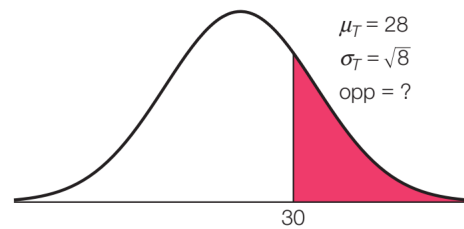
- C8** X = aantal personen dat zich stoort aan reclameblokken tijdens film
 $H_0 : p = 0,70$, $H_1 : p < 0,70$ en $\alpha = 0,025$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 500$ en $p = 0,70$.
De overschrijdingskans is $P(X \leq 320)$.
De GR geeft $P(X \leq 320) \approx 0,002$.
 $P(X \leq 320) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .
Er is voldoende reden om de mening van de recensent in twijfel te trekken.

- C9** X = aantal patiënten dat binnen twee weken geneest
 $H_0 : p = 0,75$, $H_1 : p > 0,75$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,75$.
De GR geeft $a = 42$.
Minstens 43 patiënten moeten genezen.

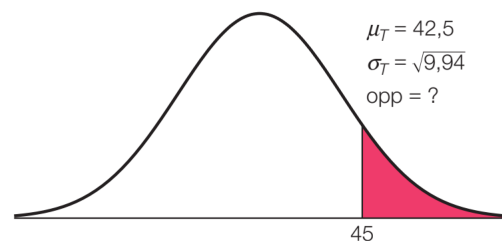
- C10 a** X = aantal keer zes ogen
 $H_0 : p = \frac{1}{6}$, $H_1 : p \neq \frac{1}{6}$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 80$ en $p = \frac{1}{6}$.
De GR geeft $a_1 = 7$ en $a_r = 20$.
De zuiverheid van de dobbelsteen wordt niet in twijfel getrokken bij aantallen van 7 tot en met 20.
- b** X = aantal keer minstens drie ogen
 $H_0 : p = \frac{4}{6}$, $H_1 : p \neq \frac{4}{6}$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 120$ en $p = \frac{4}{6}$.
De overschrijdingskans is $P(X \leq 70)$.
De GR geeft $P(X \leq 70) \approx 0,035$.
 $P(X \leq 70) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Er is geen reden om te twijfelen aan de zuiverheid van de dobbelsteen.

Bladzijde 204

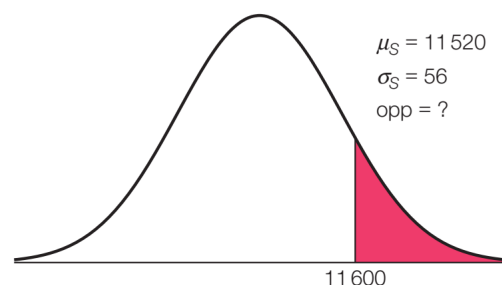
- 1** T = totale tijdsduur in minuten
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 16 + 12 = 28$ en
 $\sigma_T = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.
 De GR geeft $P(T > 30) = 0,239...$
 Naar schatting $0,239... \cdot 25 \approx 6$ leerlingen hebben de toets niet op tijd af.



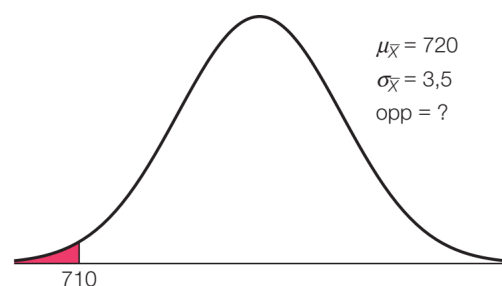
- 2** T = totale productietijd in minuten
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 19,3 + 12,5 + 10,7 = 42,5$ en
 $\sigma_T = \sqrt{2,5^2 + 1,5^2 + 1,2^2} = \sqrt{9,94}$.
 De GR geeft $P(T > 45) \approx 0,214$.
 Dus 21,4%.



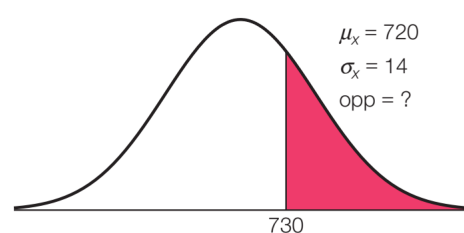
- 3 a** S = inhoud in gram van doos
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 16 \cdot 720 = 11\,520$ en
 $\sigma_S = \sqrt{16} \cdot 14 = 4 \cdot 14 = 56$.
 De GR geeft $P(S > 11\,600) \approx 0,077$.



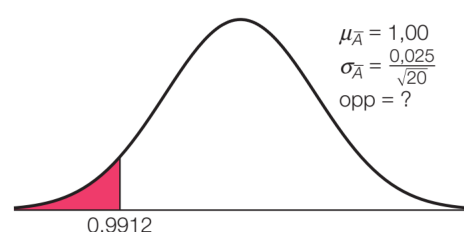
- b** $\bar{X}$ = inhoud in gram van pot appelmoes
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 720$ en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{14}{\sqrt{16}} = 3,5$.
 De GR geeft $P(\bar{X} < 710) \approx 0,002$.
 Dus 0,2%.



- c** X = inhoud in gram van pot appelmoes
 X is normaal verdeeld met $\mu_X = 720$ en $\sigma_X = 14$.
 De GR geeft $P(X > 730) = 0,237...$
 Y = aantal potten in doos die meer dan 730 gram bevatten
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 16$ en $p = 0,237...$
 De GR geeft $P(X > 3) = P(X \geq 4) \approx 0,549$.



- 4** A = oppervlakte in m^2 van graszode
 $H_0 : \mu_A = 1,00$, $H_1 : \mu_A \neq 1,00$ en $\alpha = 0,10$.
 $2,5 \text{ dm}^2 = 0,025 \text{ m}^2$
 $\bar{A}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{A}} = 1,00$ en $\sigma_{\bar{A}} = \frac{\sigma_A}{\sqrt{n}} = \frac{0,025}{\sqrt{20}}$.
 $99,12 \text{ dm}^2 = 0,9912 \text{ m}^2$
 De overschrijdingskans is $P(\bar{A} \leq 0,9912)$.
 De GR geeft $P(\bar{A} \leq 0,9912) \approx 0,058$.
 $P(\bar{A} \leq 0,9912) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.
 Het tuincentrum trekt de conclusie dat de gemiddelde oppervlakte niet significant afwijkt van $1,00 \text{ m}^2$.

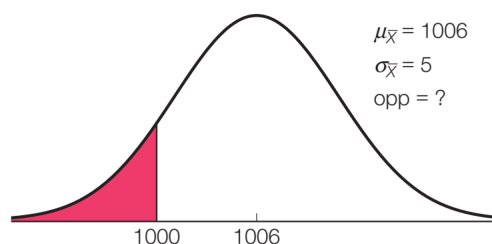


- 5 a** X = vetgehalte in procenten van pak volle melk
 $H_0 : \mu_X = 3,50$, $H_1 : \mu_X > 3,50$ en $\alpha = 0,025$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 3,50$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,02}{\sqrt{30}}$.
 De overschrijdingskans is $P(X \geq 3,508)$.
 De GR geeft $P(X \geq 3,508) \approx 0,014$.
 $P(X \geq 3,508) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.
 Er is aanleiding om de gezondheidsraad gelijk te geven.
- b** $H_0 : \mu_X = 3,50$, $H_1 : \mu_X \neq 3,50$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 3,50$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,02}{\sqrt{40}}$.
 De overschrijdingskans is $P(X \leq 3,494)$.
 De GR geeft $P(X \leq 3,494) \approx 0,029$.
 $P(X \leq 3,494) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.
 Het steekproefresultaat wijkt niet significant af van 3,50%.

- 6** X = aantal jongeren dat lid is van sportvereniging
 $H_0 : p = 0,75$, $H_1 : p < 0,75$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 120$ en $p = 0,75$.
 De overschrijdingskans is $P(X \leq 81)$.
 De GR geeft $P(X \leq 81) \approx 0,039$.
 $P(X \leq 81) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .
 Er is reden om de bewering van sportleraar Meijer in twijfel te trekken.

- 7 a** X = aantal keer dat een van de getallen 6 tot en met 11 wordt aangewezen
 $H_0 : p = \frac{6}{20}$, $H_1 : p \neq \frac{6}{20}$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = \frac{6}{20}$.
 De GR geeft $a_1 = 21$ en $a_r = 39$.
 Bij de aantallen 21 tot en met 39 zal de zuiverheid van het rad niet in twijfel worden getrokken.
- b** $H_0 : p = \frac{6}{20}$, $H_1 : p \neq \frac{6}{20}$ en $\alpha = 0,01$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 200$ en $p = \frac{6}{20}$.
 De overschrijdingskans is $P(X \geq 70)$.
 De GR geeft $P(X \geq 70) \approx 0,073$.
 $P(X \geq 70) < \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er is geen aanleiding om aan te nemen dat het rad niet zuiver is.

- 8 a** X = gewicht in gram van pak koffie
 X is normaal verdeeld met $\mu_X = 1006$ en $\sigma_X = 5$.
 De GR geeft $P(X < 1000) = 0,1150... \approx 0,115$
- b** Y = aantal pakken koffie met gewicht van minder dan 1000 gram
 $H_0 : p = 0,115$, $H_1 : p < 0,115$ en $\alpha = 0,01$.
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 250$ en $p = 0,1150...$.
 De overschrijdingskans is $P(Y \leq 18)$.
 De GR geeft $P(Y \leq 18) \approx 0,017$.
 $P(Y \leq 18) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er is niet aangetoond dat het gemiddelde is toegenomen.

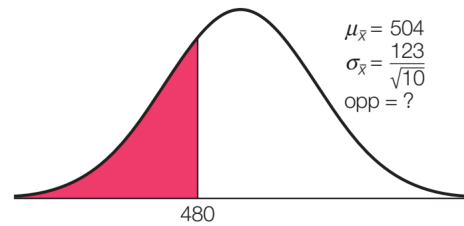
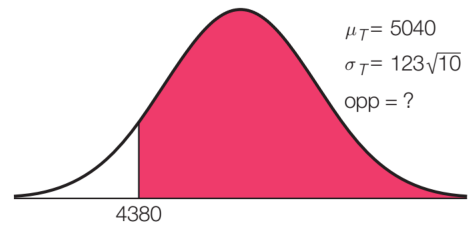


Gemengde opgaven

Bladzijde 206

- 1 a** 8 minuten en 24 seconden = 504 seconden
 2 minuten en 3 seconden = 123 seconden
 X = tijd in seconden per adres
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 504$ en

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{123}{\sqrt{10}}.$$
 8 minuten = 480 seconden
 De GR geeft $P(\bar{X} < 480) \approx 0,269$.
- b** 8 minuten en 24 seconden = 504 seconden
 2 minuten en 3 seconden = 123 seconden
 T = bezorgtijd in seconden van tien adressen
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 10 \cdot 504 = 5040$ seconden
 en $\sigma_T = \sqrt{10} \cdot 123 = 123\sqrt{10}$ seconden.
 Tussen 18:37 uur en 19:50 uur zit 1 uur en 13 minuten,
 dat is 4380 seconden.
 De GR geeft $P(T > 4380) \approx 0,955$.
 De gevraagde kans is 0,955.

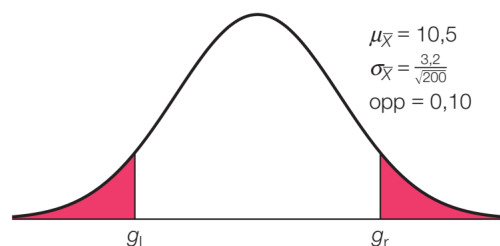


- 2 a** $P(\text{gratis fles}) = 4! \cdot P(r \text{ b g o}) = 4! \cdot 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,15 \cdot 0,05 = 0,027$
- b** $P(\text{twee gratis flessen}) = \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 0,5^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,15^2 \cdot 0,05^2 \approx 0,003$
- c** X = aantal flessen met een oranje dop
 X is binomiaal verdeeld $n = 30$ en $p = 0,05$.
 De GR geeft $P(X \geq 1) \approx 0,785$.
- d** X = aantal flessen met een rode dop
 $H_0: p = 0,50$, $H_1: p > 0,50$ en $\alpha = 0,10$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,50$.
 De overschrijdingskans is $P(X \geq 57)$.
 De GR geeft $P(X \geq 57) \approx 0,097$.
 $P(X \geq 57) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .
 Je moet Ronny gelijk geven.
- e** X = aantal flessen met een oranje dop
 $H_0: p = 0,05$, $H_1: p < 0,05$ en $\alpha = 0,10$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 200$ en $p = 0,05$.
 De GR geeft $a = 6$.
 Dus men moet minstens 6 doppen in de steekproef aantreffen, opdat de bewering van de fabrikant niet wordt verworpen.

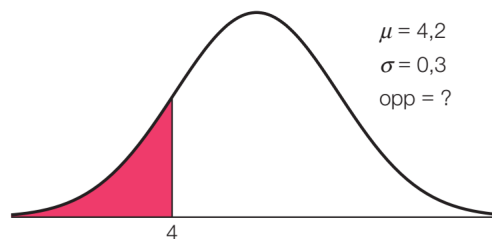
Bladzijde 207

- 3 a** X = tijd in uren die een student per week aan bijbaantjes kwijt is
 $H_0: \mu_X = 10,5$, $H_1: \mu_X \neq 10,5$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 10,5$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3,2}{\sqrt{60}}$.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 9,8)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} \leq 9,8) \approx 0,045$.
 $P(\bar{X} \leq 9,8) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.
 Er is geen aanleiding om te twijfelen aan de bewering van het onderzoeksbureau.
- b** $H_0: \mu_X = 10,5$, $H_1: \mu_X \neq 10,5$ en $\alpha = 0,10$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 10,5$ en

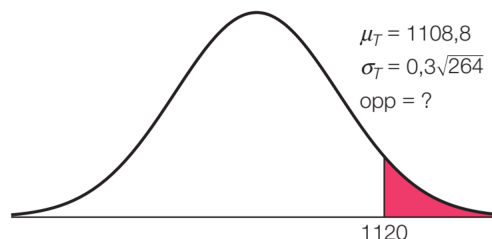
$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3,2}{\sqrt{200}}.$$
 opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,10 = 0,05$
 $P(\bar{X} \leq g_l) = 0,05$
 De GR geeft $g_l \approx 10,128$.
 $P(\bar{X} \geq g_r) = 0,05$
 De GR geeft $g_r \approx 10,872$.
 Men zal het onderzoeksbureau gelijk geven bij steekproefresultaten van 10,13 tot en met 10,87 uur.



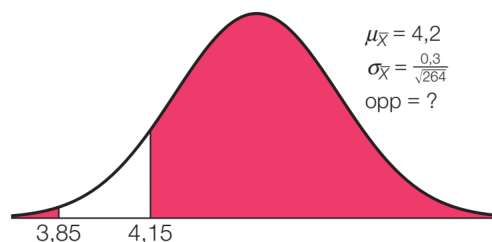
- 4 a** X = inhoud in gram van zakje
 X is normaal verdeeld met $\mu_X = 4,2$ en $\sigma_X = 0,3$.
 De GR geeft $P(X < 4) = 0,252\dots$
 Dus naar verwachting $0,252\dots \cdot 264 \approx 67$ zakjes.



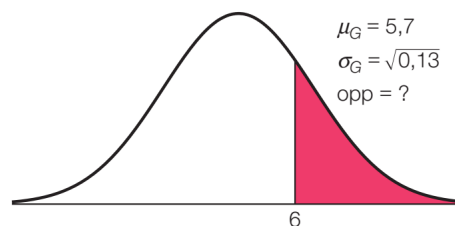
- b** T = inhoud in gram van 264 zakjes
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 264 \cdot 4,2 = 1108,8$ en
 $\sigma_T = \sqrt{264} \cdot 0,3 = 0,3\sqrt{264}$.
 De GR geeft $P(T > 1120) \approx 0,011$.



- c** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 4,2$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,3}{\sqrt{264}}$.
 $P(\bar{X} < 3,85 \text{ of } \bar{X} > 4,15) = P(\bar{X} < 3,85) + P(\bar{X} > 4,15)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} < 3,85 \text{ of } \bar{X} > 4,15) \approx 0,997$.
 Dus van 99,7%.

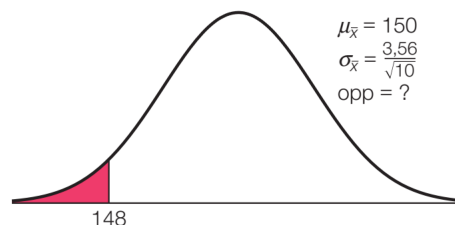


- d** G = totale gewicht in gram
 G is normaal verdeeld met $\mu_G = 4,2 + 1,5 = 5,7$ en
 $\sigma_G = \sqrt{0,3^2 + 0,2^2} = \sqrt{0,13}$ gram.
 De GR geeft $P(G > 6) = 0,202\dots$
 Y = aantal zakjes dat minimaal 6 gram weegt
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 30$ en $p = 0,202\dots$
 De GR geeft $P(Y \geq 5) \approx 0,756$.

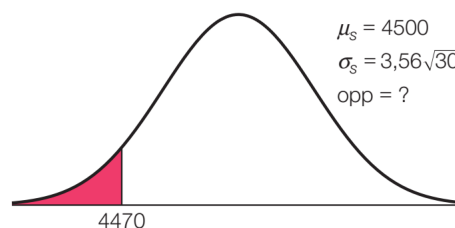


- 5** X = aantal bewoners dat een huisdier heeft
 $H_0 : p = 0,47$, $H_1 : p < 0,47$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 60$ en $p = 0,47$.
 38 geen huisdier, dus $60 - 38 = 22$ wel een huisdier.
 De overschrijdingskans is $P(X \leq 22)$.
 De GR geeft $P(X \leq 22) \approx 0,069$.
 $P(X \leq 22) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er kan niet geconcludeerd worden dat de gemeenteambtenaar gelijk heeft.

- 6 a** X = gewicht in gram van zakje pinda's
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 150$ en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3,56}{\sqrt{10}}$.
 De GR geeft $P(\bar{X} < 148) \approx 0,038$.

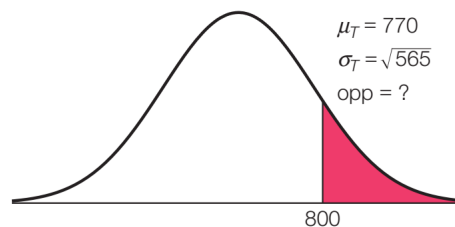


- b** S = totale gewicht in gram van pinda's in doos
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 30 \cdot 150 = 4500$ en
 $\sigma_S = \sqrt{30} \cdot 3,56 = 3,56\sqrt{30}$.
 De GR geeft $P(S < 4470) = 0,061\dots$
 Y = aantal dozen dat minder dan 4470 gram bevat
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 3$ en $p = 0,061\dots$
 De GR geeft $P(Y \geq 1) \approx 0,175$.

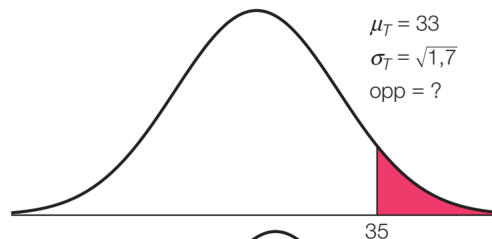


Bladzijde 208

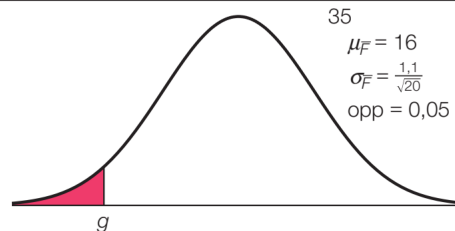
- 7** T = totale gewicht in kg van de 10 medewerkers
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 5 \cdot 84 + 5 \cdot 70 = 770$ en
 $\sigma_T = \sqrt{5 \cdot 8^2 + 5 \cdot 7^2} = \sqrt{565}$.
 De GR geeft $P(T > 800) \approx 0,103$.



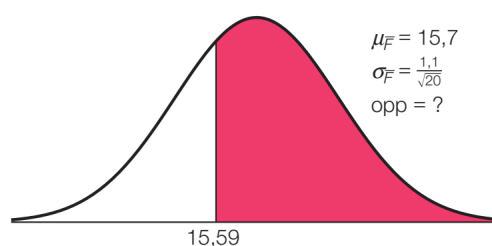
- 8 a** D = aantal gram deeg in een reep
 F = aantal gram fruitvulling in een reep
 Het totale gewicht is $T = D + F$.
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 17 + 16 = 33$ en
 $\sigma_T = \sqrt{0,7^2 + 1,1^2} = \sqrt{1,7}$.
 De GR geeft $P(T > 35) \approx 0,063$.



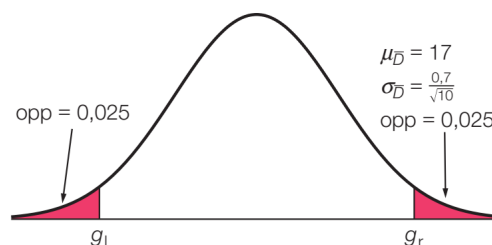
- b** $H_0: \mu_F = 16, H_1: \mu_F < 16$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{F}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{F}} = \mu_F = 16$ en $\sigma_{\bar{F}} = \frac{\sigma_F}{\sqrt{n}} = \frac{1,1}{\sqrt{20}}$.
 $P(\bar{F} \leq g) = 0,05$
 De GR geeft $g = 15,595\dots$
 Dus bij steekproefgemiddelden van 15,59 gram of minder zal men de machine bijstellen.



- c** $\bar{F}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{F}} = 15,7$ en $\sigma_{\bar{F}} = \frac{\sigma_F}{\sqrt{n}} = \frac{1,1}{\sqrt{20}}$.
 De GR geeft $P(\bar{F} > 15,59) \approx 0,673$.

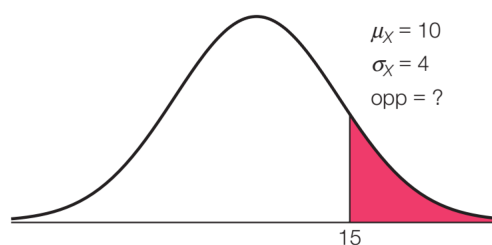


- d** $H_0: \mu_D = 17, H_1: \mu_D \neq 17$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{D}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{D}} = \mu_D = 17$ en
 $\sigma_{\bar{D}} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} = \frac{0,7}{\sqrt{10}}$.
 $P(\bar{D} \leq g_l) = 0,025$
 De GR geeft $g_l \approx 16,566$.
 $P(\bar{D} \geq g_r) = 0,025$
 De GR geeft $g_r \approx 17,434$.
 Dus bijstellen als $\bar{D} \leq 16,56$ of als $\bar{D} \geq 17,44$.



Bladzijde 209

- 9 a** X = tijd in minuten die voor een patiënt nodig is
 X is normaal verdeeld met $\mu_X = 10$ en $\sigma_X = 4$.
 $P(\text{tijdrovende patiënt}) = P(X \geq 15)$
 De GR geeft $P(X \geq 15) = 0,1056\dots$
 De huisarts verwacht $0,1056\dots \cdot 12 \approx 1,27$ tijdrovende patiënten tijdens een spreekuur.
- b** $P(\text{gemakkelijke patiënt}) = P(X \leq 5)$
 De GR geeft $P(X \leq 5) = 0,1056\dots$
 $P(\text{gewone patiënt}) = P(5 < X < 15)$
 De GR geeft $P(5 < X < 15) = 0,7887\dots$
 $P(2 \text{ gemakkelijke en } 10 \text{ gewone patiënten}) = \binom{12}{2} \cdot 0,1056\dots^2 \cdot 0,7887\dots^{10} \approx 0,069$
- c** Y = aantal patiënten dat meer dan 10 minuten kost
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 12$ en $p = 0,5$.
 De GR geeft $P(Y \geq 6) \approx 0,613$.



- d** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 10$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{12}}$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 14) \approx 0,0003$.

- e** T = tijd in minuten die huisarts tijdens spreekuur voor 60 patiënten nodig heeft

$H_0 : \mu_T = 600$, $H_1 : \mu_T > 600$ en $\alpha = 0,05$.

T is normaal verdeeld met $\mu_T = 60 \cdot \mu_X = 60 \cdot 10 = 600$ en $\sigma_T = \sqrt{60} \cdot 4 = 4\sqrt{60}$.

De overschrijdingskans is $P(T \geq 654)$.

De GR geeft $P(T \geq 654) \approx 0,041$.

$P(T \geq 654) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Er is voldoende aanleiding om de veronderstelde gemiddelde tijd van 10 minuten te verhogen.

- f** X = aantal patiënten dat is doorverwezen

X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,3$.

$P(X < 10) = P(X \leq 9)$

De GR geeft $P(X < 10) \approx 0,040$.

Verantwoording

Beeld

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:

Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700

VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.



Wij maken bij Noordhoff sinds 2009 bewust keuzes om onze impact op het klimaat te verkleinen. We volgen de klimaatdoelen van het Klimaatakkoord van Parijs. Scan de QR-code voor meer informatie over ons duurzaamheidsbeleid.

Zo is dit product gemaakt van FSC®-gecertificeerd papier en ander gecontroleerd materiaal. Wij gebruiken plantaardige inkt en onze lijmen zijn op waterbasis en afbreekbaar. Hierdoor is dit product goed te recycleren na gebruik.



0 / 26

© 2026 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06500-3

