

getal & ruimte

B



Noordhoff

Dit boek is van jou!

Naam

Klas

Getal & Ruimte

Leerboek
vwo B deel 1

Dertiende editie, 2025

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek vwo B deel 1

Samen met de delen 2, 3 en 4 van vwo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde B, zoals dat met ingang van 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak vwo wiskunde B is 600 uur. De delen 1, 2, 3 en 4 bevatten samen 17 hoofdstukken.

De vier hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 30 uur.

In hoofdstuk 1 komen enkele aspecten van de subdomeinen B1 (Formules en functies), B3 (Functies en grafieken) en B5 (Vergelijkingen en ongelijkheden) aan de orde. In hoofdstuk 2 worden gedeelten van de subdomeinen C1 (Afgeleide functies) en C2 (Technieken voor differentiëren) behandeld. Het subdomein E1 (Meetkundige vaardigheden) komt in hoofdstuk 3 aan bod. In hoofdstuk 4 is de focus gericht op de subdomeinen B4 (Inverse functies) en B5.

De actief lerende leerling

In deze 13^e editie tweede fase zijn er nieuwe elementen in de leerboeken opgenomen die het actieve leren van de leerlingen ondersteunen en stimuleren.

Elke paragraaf begint met een opsomming van de kennis en vaardigheden die aan bod komen. Hiermee wordt enerzijds een vervolg gegeven aan de onderbouwboeken, waarin er aan het begin van elke paragraaf een opsomming van de leerdoelen staat. Anderzijds vindt aansluiting plaats bij de parate kennis en vaardigheden uit de syllabus.

Met de Kennis- en vaardighedencheck (KVC) aan het eind van een paragraaf kunnen leerlingen controleren of ze de kennis en vaardigheden van de paragraaf beheersen. Met de Kennis- en vaardighedentest (KVT) aan het eind van het hoofdstuk kunnen leerlingen controleren of ze de kennis en vaardigheden van het hoofdstuk beheersen. De antwoorden van de KVC's staan direct onder de opgaven en de antwoorden van de KVT's zijn achter in het boek te vinden. De leerling krijgt zo de mogelijkheid om snel te controleren of de kennis en vaardigheden worden beheerst. De productieve vaardigheden uit de syllabus komen vooral aan bod in de afsluitende opgaven en in de Gemengde opgaven. Het is belangrijk dat leerlingen beseffen dat deze opgaven het beoogde eindniveau hebben. Daarom zijn de Gemengde opgaven in deze editie direct achter de KVT geplaatst.

Een andere vernieuwing in deze editie is het regelmatig terug laten keren van onderwerpen uit eerdere hoofdstukken of paragrafen, ook wel bekend als gespreid en gevarieerd oefenen. Uit onderzoek blijkt dat leerlingen daarmee beter leren onderscheiden en herkennen wanneer zij welke aanpak kunnen gebruiken en dat daarmee de stof beter beklijft. Zie voor verdere details de handleiding.

Naast de nieuwe elementen heeft de Voorkennis een andere plek gekregen. Voorkennis is nu te vinden aan het begin van een (sub)paragraaf waar het activeren ervan wenselijk is.

Drie leerroutes

Net als in de 12^e editie wordt er in deze editie gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Door te werken met deze routes maken leerlingen niet alle aangeboden opgaven. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen ongeveer in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen.

In de basisroute ligt veel nadruk op het inslijpen van basisvaardigheden. In de middenroute worden enkele gewone opgaven overgeslagen en in plaats hiervan maken de leerlingen opgaven die dieper op de stof ingaan. De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder gewone opgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.

De docent kan bepalen in welke route een leerling start, of het aan de leerling zelf overlaten. In geval van twijfel is het verstandig de leerling in de middenroute te laten beginnen. Het is van belang om regelmatig te monitoren of de gekozen route de juiste is.

De digitale leeromgeving van Getal & Ruimte

Bij sommige gedeeltes van het boek kunnen opgaven ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Tevens kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

In het docentenmateriaal staan studiewijzers die een indicatie geven van de hoeveelheid leerstof die per week kan worden doorgewerkt. Verder zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

voorjaar 2024

Legenda

V1 Voorkennisopgave

Een opgave over een onderwerp uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk.

O1 Oriënterende opgave

Een opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

2 Gewone opgave

Een opgave waarmee je oefent met wat er in de theorie aan bod is geweest.

R3 Reflectie-opgave

Een opgave waarmee je terugkijkt op een voorgaand probleem, of waarmee je op een andere manier naar voorgaande stof kijkt.

A4 Afsluitende opgave

Een opgave waarmee je oefent op het beoogde beheersingsniveau.

E5 Extra opgave

Een opgave die je extra uitdaagt.

□ Kennis- en vaardighedencheck

Je controleert of je de kennis en/of vaardigheid beheerst door de bijbehorende opgave te maken.

C1 Checkopgave

Een opgave waarmee je controleert of je de kennis en/of vaardigheid goed beheerst.

Route-aanduiding

1 Een opgave van de basisroute.

2 Een opgave van de middenroute.

3 Een opgave van de uitdagende route.

NB: De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder routeaanduiding

In de Kennis- en vaardighedentest en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen routeaanduiding.

[▶ GR](#) Verwijzing naar een module over het gebruik van de grafische rekenmachine. Zie ook het overzicht van de modules achter in dit boek.

[▶ WERKBLAD](#) Verwijzing naar een werkblad achter in dit boek.

Inhoud

1	Functies en grafieken	6	3	Meetkunde	102
1.1	Lineaire verbanden	8	3.1	Berekeningen in driehoeken	104
1.2	Tweedegraadsvergelijkingen en tweedegraadsfuncties	17	3.2	Lengte, omtrek en oppervlakte	118
1.3	Werken met parameters	24	3.3	Vergelijkingen in de meetkunde	125
1.4	Absolute waarden	34	3.4	De sinusregel en de cosinusregel	134
1.5	Grafisch-numeriek oplossen	40		Kennis- en vaardighedentest	142
	Kennis- en vaardighedentest	46		Gemengde opgaven	144
	Gemengde opgaven	48			
2	De afgeleide functie	50	4	Vergelijkingen en herleidingen	146
2.1	Snelheden	52	4.1	Stelsels vergelijkingen	148
2.2	Raaklijnen en hellinggrafieken	62	4.2	Hogeregraadsvergelijkingen	157
2.3	Limiet en afgeleide	74	4.3	Regels voor het oplossen van vergelijkingen	164
2.4	De productregel en de quotiëntregel	82	4.4	Formules met breuken herleiden	173
2.5	Afgeleide, raaklijn en snelheid	86	4.5	Inverse functies	180
	Kennis- en vaardighedentest	96		Kennis- en vaardighedentest	186
	Gemengde opgaven	99		Gemengde opgaven	188
				Werkbladen	190
				Antwoorden Kennis- en vaardighedentests	193
				Overzicht GR-modules	196
				Trefwoordenregister	197
				Verantwoording	199

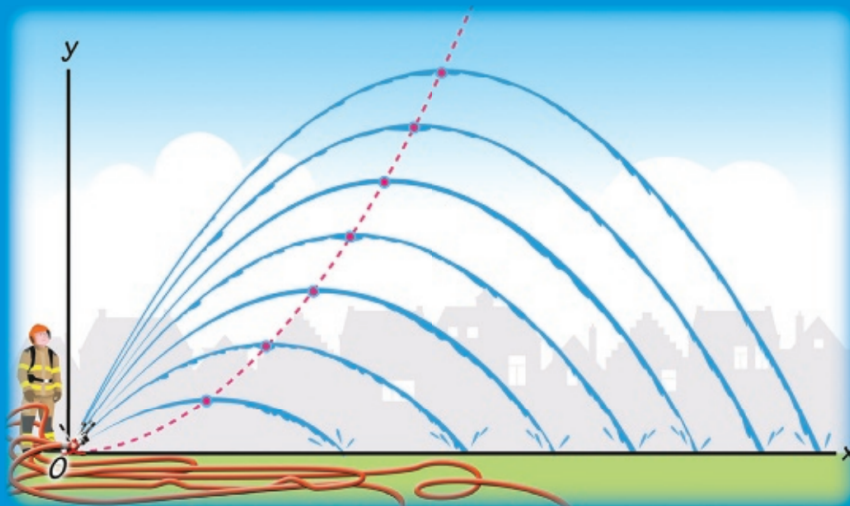


1

Functies en grafieken

Elke parabool van de vorm $y = -x^2 + bx$ gaat door de oorsprong, waarbij de hoek waaronder de parabool door de oorsprong gaat afhangt van b . De toppen van al deze parabolen liggen op een parabool.

Welke formule hoort bij deze parabool?



1.1 Lineaire verbanden

Kennis en vaardigheden

- Je kent de eigenschappen van een lineair verband.
- Je kunt de formule van een lijn opstellen bij een gegeven punt en richtingscoëfficiënt.
- Je kunt de formule van een lijn opstellen bij twee gegeven punten.
- Je kunt de formule van een lineair verband opstellen bij een praktische situatie.

Voorkennis Lineaire vergelijkingen oplossen

Gebruik bij het oplossen van lineaire vergelijkingen het volgende werkschema.

Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

- 1 Werk de haakjes en de breuken weg.
- 2 Herleid beide leden.
- 3 Zorg ervoor dat in het linkerlid alleen een term met x overblijft en in het rechterlid alleen een getal.
- 4 Deel beide leden door het getal dat voor x staat.

Zo gaat het oplossen van de vergelijking $2(x - 1) - x = 3x + 4$ als volgt.

$$2(x - 1) - x = 3x + 4 \quad \text{Werk de haakjes weg.}$$

$$2x - 2 - x = 3x + 4 \quad \text{Herleid beide leden.}$$

$$x - 2 = 3x + 4 \quad \text{Links en rechts } 3x \text{ aftrekken en } 2 \text{ optellen.}$$

$$-2x = 6 \quad \text{Deel beide leden door } -2.$$

$$x = -3$$

V1 In welke stap bij het oplossen van de vergelijking $2x - \frac{1}{5} = \frac{2}{3}x + 3$ zit een fout?

$$2x - \frac{1}{5} = \frac{2}{3}x + 3$$

$$30x - 1 = 10x + 45 \quad \text{stap 1}$$

$$20x = 46 \quad \text{stap 2}$$

$$x = 2\frac{3}{10} \quad \text{stap 3}$$

A stap 1

B stap 2

C stap 3

D geen fout

V2 In de vergelijking $\frac{2}{3}(x - 4) = \frac{1}{5}(2x + 5)$ staan zowel haakjes als breuken. Je kunt de vergelijking oplossen door eerst de haakjes weg te werken en dan de breuken, maar het kan ook andersom. Geef een uitwerking volgens beide manieren. Krijg je inderdaad beide keren de oplossing $x = 13\frac{3}{4}$?

V3 Los op.

a $5x - 2 = 3x + 6$

b $4 - 5(x - 1) = 3(2x + 1)$

c $3x - 0,8 = 2,4x + 1,6$

d $10 - 3(x + 1) = 5x - (2x - 1)$

e $\frac{3}{5}(2x - 1) = 1\frac{2}{5}x - 2$

f $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{2}x + 2$

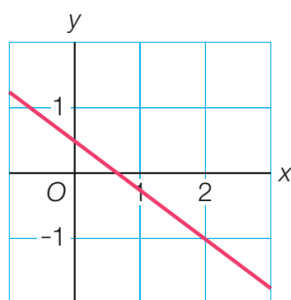
g $\frac{4}{5}x - 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}x - 3$

h $\frac{2}{7}(4x - 1) = \frac{3}{4}(1 - 5x)$

O1 Gegeven zijn vier lineaire formules en de bijbehorende grafieken.

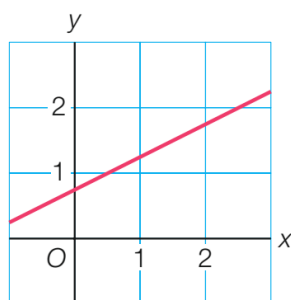
☐⊗* Zoek bij elke formule de juiste grafiek.

a $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$



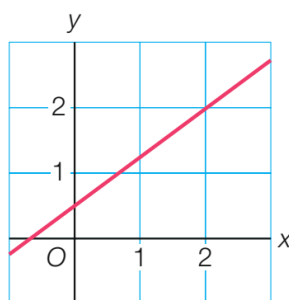
I

b $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$



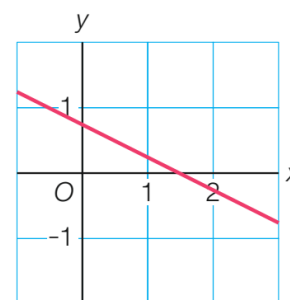
II

c $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$



III

d $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$



IV

Theorie A Formules van de vorm $y = ax + b$

De algemene vorm van een lineaire formule is $y = ax + b$.

Er bestaat een lineair verband tussen x en y . We zeggen ook wel:

y is een **lineaire functie van x** .

De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.

De richtingscoëfficiënt is a en het snijpunt met de y -as is $(0, b)$.

In plaats van richtingscoëfficiënt zeggen we ook wel helling.

Van de lijn l : $y = 3x + 4$ is de richtingscoëfficiënt 3.

Notatie: $rc_l = 3$.

De lijn m : $y = 3x - 2$ is evenwijdig met l , want deze lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt.

Is $a = 0$, dan heb je met een **constant verband** te maken.

Van de lijn n : $y = 5$ is de richtingscoëfficiënt 0.

Dus de lijn n is een horizontale lijn.

$rc_l = 3$ betekent:
1 naar rechts en
3 omhoog.

n : $y = 5$ oftewel
 n : $y = 0x + 5$.

**Bij $y = ax + b$ is y een lineaire functie van x .
De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.
Van deze lijn is a de richtingscoëfficiënt en
 $(0, b)$ het snijpunt met de y -as.**

Voorbeeld

- a** De lijn k : $y = ax + 13$ gaat door het punt $A(4, -7)$.
Bereken a .
- b** De lijn m gaat door het punt $B(-2, 9)$ en is evenwijdig met de lijn l : $y = -3x + 8$.
Stel de formule op van m .

Uitwerking

a $y = ax + 13$ door $A(4, -7)$ $\left\{ \begin{array}{l} 4a + 13 = -7 \\ 4a = -20 \\ a = -5 \end{array} \right.$

b m : $y = ax + b$
 $m \parallel l$, dus $a = rc_m = rc_l = -3$.
 $y = -3x + b$ door $B(-2, 9)$ $\left\{ \begin{array}{l} -3 \cdot -2 + b = 9 \\ 6 + b = 9 \\ b = 3 \end{array} \right.$

Dus m : $y = -3x + 3$.

- 2** **a** De lijn k gaat door het punt $A(-2, 3)$ en $rc_k = -2$.

Stel de formule op van k .

- b** De lijn l gaat door het punt $B(-5, 21)$ en is evenwijdig met de lijn m : $y = 4x - 6$.
Stel de formule op van l .

- 3** De lijn p gaat door het punt $C(-18, 30)$ en is evenwijdig met de lijn

q : $y = -\frac{1}{3}x$.

- a** Stel de formule op van p .

- b** Bereken de coördinaten van het snijpunt van p met de x -as, en de coördinaten van het snijpunt van p met de y -as.

- 4** **a** De lijn k gaat door het punt $A(4, 3)$ en is evenwijdig met de lijn

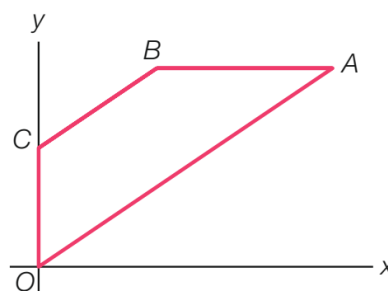
l : $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Stel de formule op van k .

- b** De lijn m : $y = ax + 3$ gaat door het punt $B(-4, 2)$.
Bereken a .

- c** De lijn n : $y = 2\frac{1}{2}x + b$ snijdt de x -as in hetzelfde punt als de lijn p : $y = -1\frac{1}{2}x + 6$.
Bereken b .

- 5** De punten $B(3, 5)$ en $C(0, 3)$ zijn hoekpunten van trapezium $OABC$. De punten A en B liggen op een horizontale lijn. Zie de figuur hiernaast. Bereken de lengte van zijde AB .



- 6** Gegeven zijn de lijnen $k: y = \frac{1}{2}x + 2$, $l: y = ax - 4$ en $m: y = -2x + b$.

- Voor welke b ligt het punt $P(-8, 0)$ op m ?
- Voor welke a en b zijn l en m evenwijdig en ligt het punt $Q(10, 7)$ op m ?
- Voor welke a en b gaan alle drie de lijnen door het punt $R(8, 6)$?
- Voor welke a en b snijden k , l en m elkaar in hetzelfde punt op de x -as?

- A7** Gegeven zijn de lijnen $k: y = ax + 1$ en $l: y = 2ax - 2a$.

Voor elke waarde van a gaat k door het punt A en l door het punt B .

- Bereken de coördinaten van A en B .
- Voor welke a snijden k en l elkaar in het punt C met x -coördinaat 10? Wat is de y -coördinaat van C ?

- A8** Gegeven zijn de lijnen $k: y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$, $l: y = -\frac{2}{3}x + 8\frac{1}{2}$ en $m: y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$.

Het snijpunt van k en l is A en het snijpunt van l en m is B .

Bereken de lengte van het lijnstuk AB . Rond af op één decimaal.

- A9** Het water in een recreatieplas heeft op 1 mei een temperatuur van 8°C .

Daarna warmt het water elke week op met $1,4^\circ\text{C}$.

- Stel de formule op van de temperatuur T in $^\circ\text{C}$ van het water in de recreatieplas als functie van de tijd t in dagen. Neem $t = 0$ op 1 mei.

Op 15 juli is de temperatuur van het water 23°C en dat blijft zo tot 1 september. Vanaf 1 september neemt de temperatuur af met $2,4^\circ\text{C}$ per maand.

- Stel de formule op van de temperatuur T in $^\circ\text{C}$ van het water t dagen na 1 september en bereken hiermee hoeveel dagen na 1 september de temperatuur weer 8°C is. Neem aan dat elke maand 30 dagen telt.



10 De lijn l gaat door de punten $A(2, 1)$ en $B(6, 4)$.

□ ⊗ * Zie de figuur hiernaast.

a Vul in.

Voor de lijn l geldt:

ga je 4 naar rechts, dan ga je 3 omhoog, dus

ga je 1 naar rechts, dan ga je omhoog.

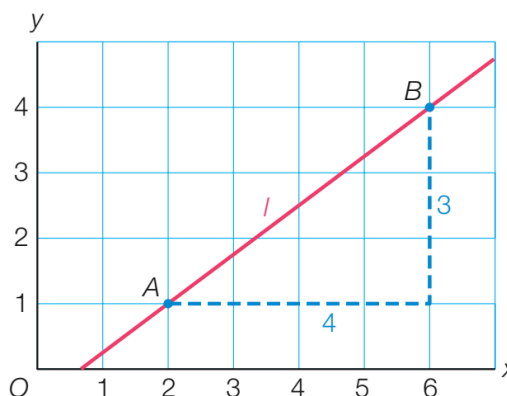
Dus $rc_l = \dots\dots\dots$

b Er geldt dat $x_B - x_A = 6 - 2 = 4$.

Vul in.

$y_B - y_A = \dots\dots\dots$

c Hoe kun je met $x_B - x_A$ en $y_B - y_A$ de richtingscoëfficiënt van l berekenen?



x_P is de x -coördinaat van het punt P .
 y_P is de y -coördinaat van het punt P .

Theorie B Een lijn door twee gegeven punten

Bij de opgaven die hierna komen, heb je regelmatig je rekenmachine nodig. We gaan ervan uit dat je over een grafische rekenmachine (GR) beschikt. Je kunt hiermee leren werken door af en toe een module uit de handleiding GR door te nemen. Deze handleiding vind je in de digitale leeromgeving van Getal & Ruimte.

► GR Neem de module **Berekeningen op het basisscherm** door.

Zijn van een lijn twee punten gegeven, dan is de richtingscoëfficiënt te berekenen. Daarbij gebruiken we de notatie x_A voor de x -coördinaat van A en y_A voor de y -coördinaat van A . Evenzo gebruiken we x_B en y_B .

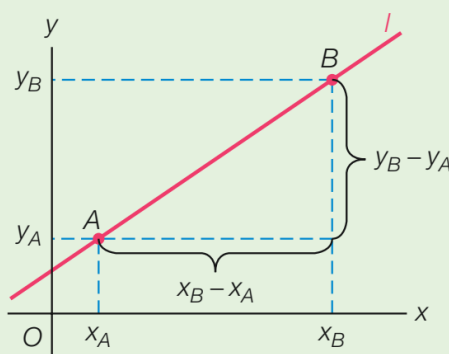
Van een lijn l waarvan de coördinaten van twee punten bekend zijn, is de richtingscoëfficiënt als volgt te berekenen.

Voor de lijn l in de figuur hiernaast geldt:

ga je $x_B - x_A$ naar rechts, dan ga je $y_B - y_A$ omhoog,

dus ga je 1 naar rechts, dan ga je $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ omhoog.

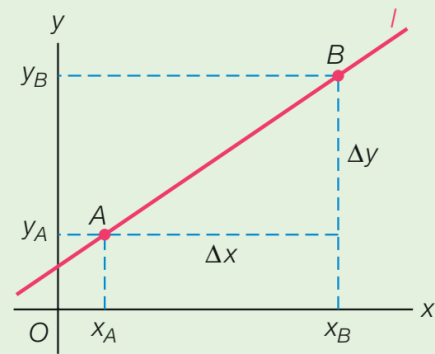
Dus $rc_l = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



Voor $y_B - y_A$ schrijven we Δy , dus $\Delta y = y_B - y_A$.
 Voor $x_B - x_A$ schrijven we Δx , dus $\Delta x = x_B - x_A$.
 Δ is de Griekse hoofdletter D. Je spreekt Δ uit als *delta*.
 D is de eerste letter van *differentie*, dat verschil betekent.

De richtingscoëfficiënt van de lijn door

de punten A en B is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



Voorbeeld

Stel de formule op van lijn l door de punten $P(2, -1)$ en $Q(6, 5)$.

Uitwerking

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-1)}{6 - 2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } P(2, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1 \\ 3 + b = -1 \\ b = -4 \end{array}$$

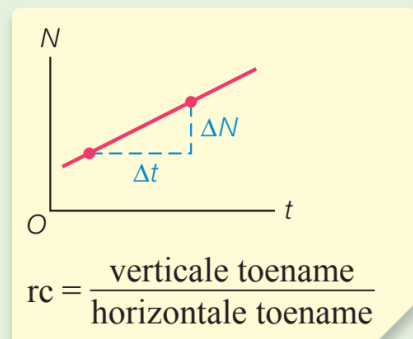
$$\text{Dus } l: y = 1\frac{1}{2}x - 4.$$

Bij praktische situaties worden vaak andere letters dan x en y gebruikt.

In de formule $N = at + b$ is N een lineaire functie van t .

We zeggen ook wel dat N is **uitgedrukt in** t .

Zijn bij twee waarden van t de bijbehorende waarden van N gegeven, dan kun je de formule van N als functie van t opstellen.



Is N een lineaire functie van t , dan is $N = at + b$

met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t}$.

Bij $y = ax + b$ is

- y een functie van x
- y uitgedrukt in x .

Voorbeeld

Een auto begint te remmen, waarbij de snelheid lineair afneemt. Na 2 seconden is de snelheid 90 km/u en na 5 seconden is de snelheid 45 km/u.

Druk de snelheid v in km/u uit in de tijd t in seconden, met $t = 0$ op het moment dat de auto begint met remmen.

Uitwerking

$$v = at + b \leftarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{bij } t = 2 \text{ hoort } v = 90 \\ \text{bij } t = 5 \text{ hoort } v = 45 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{45 - 90}{5 - 2} = -15$$

$$\left. \begin{array}{l} v = -15t + b \\ t = 2 \text{ en } v = 90 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -15 \cdot 2 + b = 90 \\ -30 + b = 90 \\ b = 120 \end{array}$$

$$\text{Dus } v = -15t + 120.$$

$$\text{Bij } v = at + b \text{ hoort } a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

R11 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.



a In het voorbeeld is $\Delta y = y_Q - y_P$ genomen.

Wat krijg je als je $\Delta y = y_P - y_Q$ neemt?

Welke Δx hoort daarbij? Krijg je zo ook $rc_l = 1\frac{1}{2}$?

b In het voorbeeld is het punt $P(2, -1)$ gebruikt om b te berekenen.

Krijg je ook $b = -4$ als je het punt $Q(6, 5)$ gebruikt?

R12 In het voorbeeld hierboven is v uitgedrukt in t .



Stel de formule van t op als functie van v .

13 **a** Stel de formule op van lijn l door de punten $A(-1, 1)$ en $B(1, 4)$.



b K is een lineaire functie van m .

Voor $m = 5$ is $K = 10$ en voor $m = 12$ is $K = 115$.

Druk K uit in m .

c Stel de formule op van lijn k door de punten $C(-3, 5)$ en $D(2, 0)$.

d Er bestaat een lineair verband tussen F en R .

Voor $R = 300$ is $F = 15$ en voor $R = 138$ is $F = 42$.

Schrijf R als functie van F .

e In een assenstelsel met een horizontale n -as en een verticale g -as is de lijn door de punten $(6, 35)$ en $(10, 49)$ getekend.

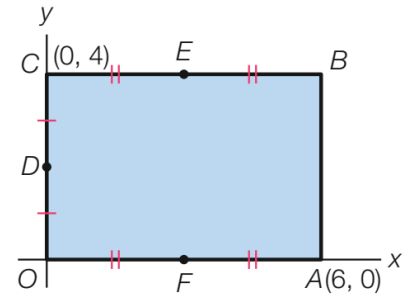
Stel de formule op van deze lijn.

14

- a Lijn k gaat door de punten $A(8, 8)$ en $B(20, 11)$ en lijn l gaat door de punten $C(2, 14)$ en $D(50, -10)$.
Stel van k en van l de formule op en bereken de coördinaten van het snijpunt E van deze lijnen.
- b Tussen M en N bestaat een lineair verband.
Voor $M = 5$ is $N = 62$ en voor $M = 20$ is $N = 86$.
Druk N uit in M en druk M uit in N .

A15

Hiernaast is in een assenstelsel rechthoek $OABC$ met zijden 6 en 4 getekend. De punten D , E en F zijn middens van de zijden.
De lijnen DE en BF snijden elkaar in punt S . De lijn AS snijdt de y -as in punt T .
Bereken de coördinaten van T .

**A16**

- Tijdens een pandemie is het aantal toegediende doses vaccin per 100 inwoners tussen 1 januari en 1 juli van een jaar lineair toegenomen. Op 31 januari waren er 15 doses per 100 inwoners toegediend en op 1 mei waren dat er 75.
- a Stel de formule op van het aantal toegediende doses per 100 inwoners N als functie van de tijd t in dagen, met $t = 1$ op 1 januari. Gebruik dat $t = 121$ bij 1 mei hoort.
- b Op welke dag is het aantal doses per 100 inwoners voor het eerst meer dan 85?

**A17**

Onderzoek of elke lijn door de punten $A(p, p + 1)$ en $B(2p, p + 2)$ met $p \neq 0$ de negatieve x -as snijdt.

Met de kennis- en vaardighedencheck kun je controleren of je de kennis en vaardigheden van de paragraaf kent en beheerst. Achter elke kennis of vaardigheid wordt verwezen naar de bijbehorende checkopgave en theorie.

Maak de checkopgave en controleer je antwoord. De antwoorden staan onder de opgaven. Heb je het antwoord niet goed of twijfel je hoe je de uitwerking moet noteren, bekijk dan het uitwerkingenboek en bestudeer zo nodig nogmaals de aangegeven theorie.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik ken de eigenschappen van een lineair verband.

► OPGAVE C1
THEORIE A

☐ Ik kan de formule van een lijn opstellen bij een gegeven punt en richtingscoëfficiënt.

► OPGAVE C2
THEORIE A

☐ Ik kan de formule van een lijn opstellen bij twee gegeven punten.

► OPGAVE C3
THEORIE B

☐ Ik kan de formule van een lineair verband opstellen bij een praktische situatie.

► OPGAVE C4
THEORIE B

C1 Gegeven zijn de lijnen $k: y = ax + 2$, $l: y = -2x + 3$ en $m: y = 4x + b$.

a Voor welke a zijn k en l evenwijdig?

b Voor welke b hebben k en m hetzelfde snijpunt met de y -as?

c Voor welke a en b hebben k , l en m hetzelfde snijpunt met de x -as?

C2 De lijn l gaat door het punt $A(-6, 3)$ en is evenwijdig met de lijn $k: y = 2\frac{1}{2}x + 4$.

Stel de formule op van l .

C3 Stel de formule op van lijn m door de punten $P(4, 17)$ en $Q(24, 2)$.

C4 Tijdens een vlucht van een Airbus A320 is er na 250 km vliegen 11 ton kerosine in de brandstoftanks aanwezig, 1200 km verder is dat nog 7,4 ton. Er bestaat een lineair verband tussen de aanwezige hoeveelheid kerosine k in ton en de vluchtafstand V in km.

Stel de formule op van k als functie van V .

Antwoorden

C1 a $a = -2$

b $b = 2$

c $a = -1\frac{1}{3}$ en $b = -6$

C2 $l: y = 2\frac{1}{2}x + 18$

C3 $m: y = -\frac{3}{4}x + 20$

C4 $k = -0,003V + 11,75$

1.2 Tweedegraadsvergelijkingen en tweedegraadsfuncties

Kennis en vaardigheden

- Je kunt verschillende typen tweedegraadsvergelijkingen algebraïsch oplossen.
- Je kunt de nulpunten van een tweedegraadsfunctie algebraïsch berekenen.
- Je kunt de extreme waarde van een tweedegraadsfunctie berekenen met behulp van de formule $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$.

○18 De vergelijkingen $x^2 + 7x - 8 = 0$ en $x^2 + 7x = 0$ zijn op te lossen met ontbinden in factoren en daarna de regel ' $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$ ' te gebruiken.

a Welke ontbinding van het linkerlid van $x^2 + 7x - 8 = 0$ is juist?

A $(x + 1)(x - 8) = 0$

C $(x - 1)(x - 8) = 0$

B $(x - 1)(x + 8) = 0$

D $(x - 1)(x - 7) = 0$

b Maroua lost de vergelijking $x^2 + 7x = 0$ op door het linkerlid te ontbinden in $x(x + 7)$.

Welke oplossingen krijgt Maroua?

○19 De kwadratische vergelijkingen hieronder zijn te verdelen in vier verschillende typen. Elk type kan op een andere manier opgelost worden. Van elk type zijn er twee.

Zoek de vergelijkingen van hetzelfde type bij elkaar.

1 $4x^2 = 9x$

5 $x^2 + 8x = 9$

2 $4x^2 - 15x = 5x - 24$

6 $4x^2 = 9$

3 $3x^2 - 10x = 8x + 15$

7 $x^2 + 8x = 9x$

4 $3x^2 = 8 - x^2$

8 $x^2 + 9x = 8$

Theorie A Typen tweedegraadsvergelijkingen

De algemene vorm van een kwadratische vergelijking, oftewel **tweedegraadsvergelijking** is $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$. Bij het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen kun je gebruikmaken van het schema op de volgende bladzijde. Hierbij wordt onderscheid gemaakt tussen vergelijkingen met twee en met drie termen. Bij tweedegraadsvergelijkingen met drie termen gebruik je soms de *abc*-formule.

Bij de *abc*-formule is aan de discriminant D te zien hoeveel oplossingen er zijn:

- voor $D > 0$ zijn er twee oplossingen
- voor $D = 0$ is er één oplossing
- voor $D < 0$ is er geen oplossing.

De *abc*-formule

$ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ geeft

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

met $D = b^2 - 4ac$.

Het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen

twee termen

$$ax^2 + bx = 0$$

Aanpak: breng x buiten haakjes.

- $5x^2 - 7x = 0$
 $x(5x - 7) = 0$
 $x = 0 \vee 5x = 7$
 $x = 0 \vee x = 1\frac{2}{5}$
- $3x = x^2$
 $3x - x^2 = 0$
 $x(3 - x) = 0$
 $x = 0 \vee x = 3$

$$ax^2 + c = 0$$

Aanpak: herleid tot de vorm $x^2 = \text{getal}$.

- $3x^2 - 30 = 0$
 $3x^2 = 30$
 $x^2 = 10$
 $x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$
- $4x^2 + 40 = 0$
 $4x^2 = -40$
 $x^2 = -10$
geen oplossing

drie termen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en het linkerlid is te ontbinden.

Aanpak: gebruik de product-som-methode.

- $x^2 - 6x - 7 = 0$
 $(x + 1)(x - 7) = 0$
 $x = -1 \vee x = 7$
- $2x^2 = 2x + 12$
 $2x^2 - 2x - 12 = 0$
 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x + 2)(x - 3) = 0$
 $x = -2 \vee x = 3$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en het linkerlid is niet te ontbinden.

Aanpak: gebruik de *abc*-formule.

- $2x^2 - 5x - 7 = 0$
 $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -7 = 81$, dus $\sqrt{D} = 9$
 $x = \frac{5 + 9}{4} = 3\frac{1}{2} \vee x = \frac{5 - 9}{4} = -1$
- $x^2 + 7x + 2 = 0$
 $D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 41$
 $x = \frac{-7 + \sqrt{41}}{2} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{41}}{2}$

Het stap voor stap oplossen van een vergelijking, zoals in het schema hierboven is gedaan, heet **algebraïsch oplossen**. Bij de opdracht *los algebraïsch op* kan gevraagd worden om de oplossingen te benaderen.

De opdracht **bereken exact de oplossingen** betekent dat je langs algebraïsche weg de oplossingen berekent en deze niet benadert.

Je laat dus oplossingen als $x = \sqrt{3}$ en $x = \frac{1}{7}$ staan.

Oplossingen als $x = \frac{18}{12}$ en $x = \frac{2 - \sqrt{36}}{4}$ vereenvoudig je.

Dus $x = \frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$ en $x = \frac{2 - \sqrt{36}}{4} = \frac{2 - 6}{4} = -1$.

Bij $x = \frac{12 - 6\sqrt{7}}{6}$ krijg je $x = 2 - \sqrt{7}$.

Door bij de oplossing $x = \frac{8 - \sqrt{48}}{7}$ een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken te brengen, krijg je $x = \frac{8 - \sqrt{48}}{7} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{7}$.

Breng een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken. Dus $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ en niet $\sqrt{48} = 2\sqrt{12}$.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $(2x + 1)^2 = 25$

b $4x^2 = 6x - 2$

c $3x^2 - 6 = 3x$

d $x^2 - 3 = 4x$

Uitwerking

a $(2x + 1)^2 = 25$

$$2x + 1 = 5 \vee 2x + 1 = -5$$

$$2x = 4 \vee 2x = -6$$

$$x = 2 \vee x = -3$$

b $4x^2 = 6x - 2$

$$4x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1, \text{ dus } \sqrt{D} = 1$$

$$x = \frac{3+1}{4} = 1 \vee x = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

c $3x^2 - 6 = 3x$

$$3x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

d $x^2 - 3 = 4x$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 28, \text{ dus } \sqrt{D} = 2\sqrt{7}$$

$$x = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} \vee x = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{2}$$

$$x = 2 + \sqrt{7} \vee x = 2 - \sqrt{7}$$

R20 Zie het voorbeeld.



a Volgens Julia kun je in voorbeeld b de vergelijking $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ook oplossen door $2x^2 - 3x + 1$ te ontbinden in factoren.

Welke ontbinding bedoelt Julia?

b In voorbeeld d wordt de oplossing $x = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} \vee x = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{2}$

vereenvoudigd tot $x = 2 + \sqrt{7} \vee x = 2 - \sqrt{7}$.

Licht deze vereenvoudiging toe.

21 Bereken exact de oplossingen.



a $3x^2 - 6x = 24$

b $3x^2 - 6x = -3(x - 6)$

c $2x^2 - 3x = 2$

d $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$

e $x^2 - 3x = 5(x - 3)$

f $2x^2 - 5x = 3x$

Gebruik de *abc*-formule alleen als het niet anders kan.

22 Bereken exact de oplossingen.



a $6 - x^2 = -2$

b $2x^2 = 9x + 5$

c $3(x + 2)^2 + 5 = 80$

d $\frac{1}{2}(x - 3)^2 - 3 = 5$

e $-(2x - 1)^2 + 5 = 1$

f $8 - 3(4x - 5)^2 = 5$

23 Bereken exact de oplossingen.



a $(x + 3)^2 = 16x$

c $2(x + 3)^2 = -4x$

e $(-4x + 3)^2 = 36$

b $(2x + 3)^2 = -16$

d $(2x + 3)(4 - x) = 9$

f $-4(x + 3)^2 = 4x$

A24 Bereken exact de oplossingen.



a $2x^2 - 13x = 3(x - 10)$

c $100(x^2 - 1) = 525$

e $5(4x - 1)(6x - 5) = 0$

b $3x^2 + 2x + 7 = 7(x + 1)$

d $2(x - 3)^2 = 3x - 10$

f $\frac{1}{4}(2x - 3)^2 - 3 = 1$

E25 In deze opgave ga je de *abc*-formule bewijzen.

⊗* Ga uit van $ax^2 + bx + c = 0$.

a Deel alle termen door a .

Welke vergelijking krijg je?

b De vergelijking van vraag a komt op hetzelfde

neer als $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$.

Laat zien dat dit klopt.

c Maak het bewijs af.

Bewijzen (dat)

Bij bewijzen geef je een redenering en/of *exacte* berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.

Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

E26 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x - 4$ en $g(x) = -\frac{1}{4}x + b$.

***** Bereken exact voor welke waarden van b de top van de grafiek van de functie $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ op de grafiek van g ligt.

O27 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 2x - 8$.



a Los de vergelijking $f(x) = 0$ op.

b Welke informatie over de grafiek van f heb je nu?

O28 Gegeven is de functie $f(x) = ax^2 + bx$ met $a \neq 0$ en $b \neq 0$.



De grafiek van f snijdt de x -as in de oorsprong en in het punt $A(-\frac{b}{a}, 0)$.

a Toon dit aan.

Uit het bovenstaande volgt dat voor de top van de grafiek van f geldt dat $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$.

b Licht dit toe.

Door de grafiek van f te verschuiven, ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = ax^2 + bx + c$.

c Welke verschuiving is dit?

d Licht toe dat uit het bovenstaande volgt dat

ook voor de grafiek van g geldt dat $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$.

Aantonen dat

Bij aantonen geef je een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.

Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

Theorie B Nulpunten en extreme waarden

De algemene vorm van een kwadratische functie, oftewel **tweedegraadsfunctie** is $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$. De bijbehorende grafiek is een parabool. Voor $a > 0$ is de grafiek een dalparabool en voor $a < 0$ is de grafiek een bergparabool.

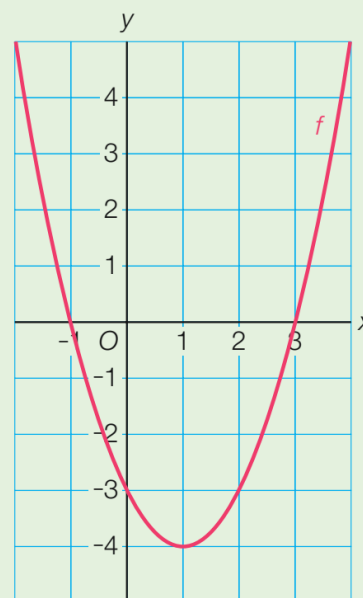
Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 2x - 3$. De grafiek snijdt de x -as in de punten $(-1, 0)$ en $(3, 0)$. Dat betekent dat $f(-1) = f(3) = 0$. De getallen -1 en 3 heten de **nulpunten** van de functie f .

Een nulpunt van een functie f is een x -waarde waarvoor geldt $f(x) = 0$.

Om de nulpunten van de functie $f(x) = x^2 - 2x - 3$ te berekenen, los je de vergelijking $f(x) = 0$ op. Je krijgt

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x + 1)(x - 3) = 0$$
$$x = -1 \vee x = 3$$

Dus de nulpunten zijn -1 en 3 .



In de figuur zie je dat de top van de grafiek van f het punt $(1, -4)$ is. Je kunt de coördinaten van de top berekenen met de regel hieronder.

Van de grafiek van de tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$. Verder is $y_{\text{top}} = f(x_{\text{top}})$.

Bij $f(x) = x^2 - 2x - 3$ krijg je $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$ en $y_{\text{top}} = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$.

Omdat -4 de kleinste functiewaarde is van f zeggen we: het **minimum** van f is -4 . Notatie: $\min. \text{ is } f(1) = -4$. Bij een bergparabool is er sprake van een **maximum**. Maxima en minima heten **extreme waarden** of kortweg **extremen**.

Als er naar een extreme waarde wordt gevraagd, geef je aan of het een minimum of een maximum is en voor welke waarde van x dit minimum of dit maximum bereikt wordt.

Voorbeeld

- a** Bereken exact de nulpunten van de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - x + 3$.
b Bereken de extreme waarde van de functie $g(x) = -0,6x^2 + 2,4x - 1$.

Uitwerking

a $f(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{3}x^2 - x + 3 = 0$

$$x^2 + 3x - 9 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot -9 = 45, \text{ dus } \sqrt{D} = 3\sqrt{5}$$

$$x = \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-3 - 3\sqrt{5}}{2}$$

Dus de nulpunten zijn $\frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2}$ en $\frac{-3 - 3\sqrt{5}}{2}$.

Een nulpunt is geen punt
maar een getal.

b $x_{\text{top}} = -\frac{2,4}{2 \cdot -0,6} = 2$ geeft $y_{\text{top}} = g(2) = -0,6 \cdot 2^2 + 2,4 \cdot 2 - 1 = 1,4$

$a = -0,6$, dus $a < 0$, dus bergparabool en max. is $g(2) = 1,4$.

Een maximum is een grootste functiewaarde, dus het maximum is de y -coördinaat.

29



a Bereken exact de nulpunten van de functie $f(x) = x^2 + 5x + 2$.

b Bereken van de grafiek van de functie $g(x) = -x^2 + 3x + 4$ de coördinaten van de snijpunten met de x -as.

30



a Bereken de extreme waarde van de functie $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

b Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van de functie $g(x) = 2x^2 + 6x + 3$.

31



a Bereken exact de nulpunten van de functie $f(x) = 2x^2 + 8x + 3$.

b Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van de functie $g(x) = -2x^2 + 4x + 14$ met de x -as.

c Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van de functie $h(x) = 4x^2 + 14x$.

d Bereken de extreme waarde van de functie $k(x) = -0,3x^2 + 6x - 2$.

A32



a De top van de grafiek van de functie $f(x) = 0,15x^2 - 1,2x + 5$ ligt op de lijn $k: y = 3x + b$.
Bereken b .

b De top van de grafiek van de functie $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x + c$ ligt op de lijn $l: y = 1\frac{1}{2}x + 4$.
Bereken de extreme waarde van g .

A33 De top van de grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx + 5$ ligt rechts van de y -as. Het maximum van f is 7.
Bereken exact de nulpunten van f .

A34 De functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ heeft de nulpunten -3 en 5 en een maximum van 6 .
Bereken a , b en c .

- E35**
- a** Alle toppen van de parabolen $y = ax^2 + 4x$ liggen op een lijn. Stel de formule op van deze lijn.
 - b** Alle toppen van de parabolen $y = ax^2 - 3x$ liggen op een lijn. Stel de formule op van deze lijn.
 - c** Alle toppen van de parabolen $y = ax^2 + bx$ liggen op een lijn met een formule van de vorm $y = px$, waarbij p van b afhangt. Druk p uit in b .

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan verschillende typen tweedegraadsvergelijkingen algebraïsch oplossen.
- ☐ Ik kan de nulpunten van een tweedegraadsfunctie algebraïsch berekenen.
- ☐ Ik kan de extreme waarde van een tweedegraadsfunctie berekenen met behulp van de formule $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$.

► **OPGAVE C5**
THEORIE A
► **OPGAVE C6**
THEORIE B
► **OPGAVE C7**
THEORIE B

C5 Bereken exact de oplossingen.

- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| a $x^2 + 2x = 24$ | e $(3x + 2)(3x - 4) = 0$ |
| b $x(x - 4) = 21$ | f $x^2 + 4 = 6x$ |
| c $6x^2 = 7x$ | g $(2x - 1)(4x - 1) = 3$ |
| d $4x^2 + 35 = 24x$ | h $(5x + 1)^2 = 49$ |

C6 Bereken exact de nulpunten van de functie $f(x) = -x^2 + 6x - 2$.

C7 Bereken de extreme waarde van de functie $g(x) = -0,3x^2 + 1,2x + 4$.

Antwoorden

- | | |
|---|--|
| C5 a $x = 4 \vee x = -6$ | e $x = -\frac{2}{3} \vee x = 1\frac{1}{3}$ |
| b $x = -3 \vee x = 7$ | f $x = 3 + \sqrt{5} \vee x = 3 - \sqrt{5}$ |
| c $x = 0 \vee x = 1\frac{1}{6}$ | g $x = 1 \vee x = -\frac{1}{4}$ |
| d $x = 3\frac{1}{2} \vee x = 2\frac{1}{2}$ | h $x = 1\frac{1}{5} \vee x = -1\frac{3}{5}$ |
- C6** $3 + \sqrt{7}$ en $3 - \sqrt{7}$
C7 max. is $g(2) = 5,2$

1.3 Werken met parameters

Kennis en vaardigheden

- Je kunt een functie met een parameter zien als een verzameling functies.
- Je kunt bij een tweedegraadsfunctie met een parameter de discriminant gebruiken bij berekeningen over extreme waarden.
- Je kunt bij een tweedegraadsvergelijking met een parameter de discriminant gebruiken bij het berekenen van het aantal oplossingen.
- Je kunt bij een tweedegraadsfunctie met een parameter de parameter berekenen bij een gegeven extreme waarde.

Voorkennis Lineaire ongelijkheden oplossen

De ongelijkheid $4x - 2 < 6x + 5$ is een voorbeeld van een lineaire ongelijkheid. Deze ongelijkheid los je net zo op als de vergelijking $4x - 2 = 6x + 5$.

Je krijgt $4x - 2 < 6x + 5$ Links en rechts $6x$ aftrekken en 2 optellen.
 $-2x < 7$ Deel beide leden door -2 .
 $x > -3\frac{1}{2}$

Je ziet dat bij de laatste stap het teken $<$ is omgeklapt in het teken $>$. Je klapt het ongelijkheidsteken alleen om als je beide leden door een *negatief* getal deelt of met een *negatief* getal vermenigvuldigt.

Gebruik bij het oplossen van lineaire ongelijkheden het volgende werkschema.

Werkschema: lineaire ongelijkheden oplossen

- 1 Werk de haakjes en de breuken weg.
- 2 Herleid beide leden.
- 3 Zorg ervoor dat in het linkerlid alleen een term met x overblijft en in het rechterlid alleen een getal.
- 4 Deel beide leden door het getal dat voor x staat.
Als dit getal negatief is, dan klap je het ongelijkheidsteken om.

Zo gaat het oplossen van de ongelijkheid $5(x + 2) > 9x - 2(x - 6)$ als volgt.

$$5(x + 2) > 9x - 2(x - 6)$$

$$5x + 10 > 9x - 2x + 12$$

$$5x + 10 > 7x + 12$$

$$-2x > 2$$

$$x < -1$$

Deel door -2 , dus klap $>$ om in $<$.

V4 In welke stap bij het oplossen van de ongelijkheid $2(3 - 5x) < 3 - 4(x - 2)$ zit een fout?

$$\begin{array}{ll} 2(3 - 5x) < 3 - 4(x - 2) & \text{) stap 1} \\ 6 - 10x < 3 - 4x + 8 & \text{) stap 2} \\ 6 - 10x < 11 - 4x & \text{) stap 3} \\ -6x < 5 & \text{) stap 4} \\ x < -\frac{5}{6} & \end{array}$$

- A** stap 1 **C** stap 3
B stap 2 **D** stap 4

V5 Los op.

- a** $4x + 5 < 6x - 3$ **e** $\frac{1}{3}x + 10 > \frac{1}{2}x$
b $3x + 1 < 7x + 5$ **f** $x + 6 > 2 - \frac{3}{4}x$
c $5(x - 1) < 7x - 1$ **g** $-3(4x - 1) > 2 - (x - 1)$
d $2(3x - 1) < 5 - (2 - 9x)$ **h** $2(x - 1) - 3(x - 2) > 6$

O36 Gegeven zijn de ongelijkheden I: $x^2 < 9$ en II: $x^2 > 9$ en de volgende acht uitspraken over x .

- A** $x < 3$ **E** $-3 < x < 3$
B $x > 3$ **F** $-3 < x > 3$
C $x < -3$ **G** $-3 > x < 3$
D $x > -3$ **H** $x < -3 \vee x > 3$
a Bij welke twee uitspraken is de wiskundige notatie niet juist?
b Welke uitspraak over x is de oplossing van ongelijkheid I?
c Welke uitspraak over x is de oplossing van ongelijkheid II?

O37 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 6x + p$.

- a** Neem $p = 1$ en bereken de coördinaten van de top van de grafiek van de functie die je krijgt.
b Neem $p = -9$ en toon aan dat de top van de grafiek van de functie die je krijgt op de x -as ligt.
c Druk de discriminant van $y = -x^2 + 6x + p$ uit in p .

Theorie A Discriminant met een parameter

Omdat je bij $f(x) = x^2 + 4x + p$ voor elke waarde van p een andere functie krijgt, heb je met oneindig veel functies te maken. In dit functievoorschrift heet p een **parameter**.

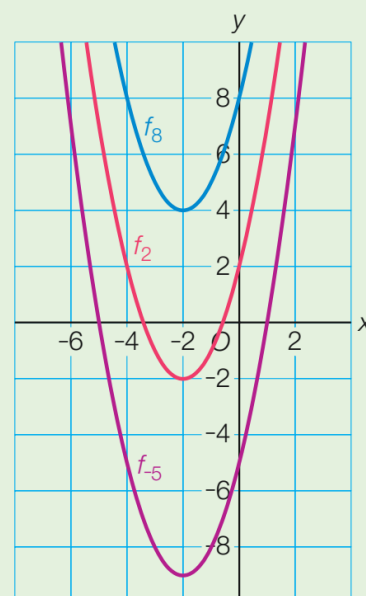
We schrijven in het vervolg $f_p(x) = x^2 + 4x + p$.
Zo krijg je voor $p = 2$ de functie $f_2(x) = x^2 + 4x + 2$,
voor $p = 8$ de functie $f_8(x) = x^2 + 4x + 8$ en voor
 $p = -5$ de functie $f_{-5}(x) = x^2 + 4x - 5$.

Bovenaan de volgende bladzijde zie je de grafieken van deze drie functies.

Een parameter is een hulpvariabele. De parameter p helpt je als het ware oneindig veel functies kort te noteren. Parameter spreek je uit met de klemtoon op de tweede lettergreep.

De ligging van de grafiek van $f_p(x) = x^2 + 4x + p$ ten opzichte van de x -as hangt af van p . Je kunt je bijvoorbeeld afvragen voor welke waarden van p de grafiek geen snijpunt met de x -as heeft. Daartoe kijk je naar de vergelijking $x^2 + 4x + p = 0$. Als deze vergelijking twee oplossingen heeft, dan heeft de grafiek van f_p twee snijpunten met de x -as. Dus dan geldt voor de discriminant $D = b^2 - 4ac$ dat $D > 0$.

De ligging van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ ten opzichte van de x -as hangt dus af van de discriminant.



De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ met $a > 0$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
twee snijpunten met de x -as	één snijpunt (raakpunt) met de x -as	geen snijpunt met de x -as

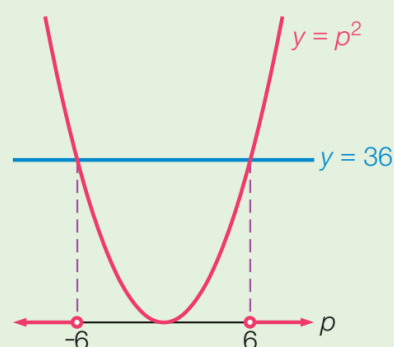
De grafiek van $f_p(x) = x^2 + 4x + p$ heeft geen snijpunt met de x -as als $D < 0$.

Omdat $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 16 - 4p$ krijg je $16 - 4p < 0$
 $-4p < -16$
 $p > 4$

Deel door -4 , dus klap het teken $<$ om.

Dus de grafiek van $f_p(x) = x^2 + 4x + p$ heeft voor $p > 4$ geen snijpunt met de x -as.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde wordt de ongelijkheid $p^2 > 36$ opgelost. Deze ongelijkheid heeft als oplossing $p < -6 \vee p > 6$. Zie de schets hiernaast. Bij het oplossen van ongelijkheden als $p^2 > 36$, $x^2 < 25$ en $q^2 > 6\frac{1}{4}$ mag je de schets weglaten. Dus je mag in één keer opschrijven $x^2 < 25$ geeft $-5 < x < 5$ en $q^2 > 6\frac{1}{4}$ geeft $q < -2\frac{1}{2} \vee q > 2\frac{1}{2}$.



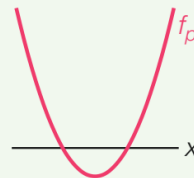
Voorbeeld

Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = x^2 + px + 9$. Bereken exact voor welke p de functie f_p een negatief minimum heeft.

Uitwerking

Zie de schets van de grafiek van f_p hiernaast.

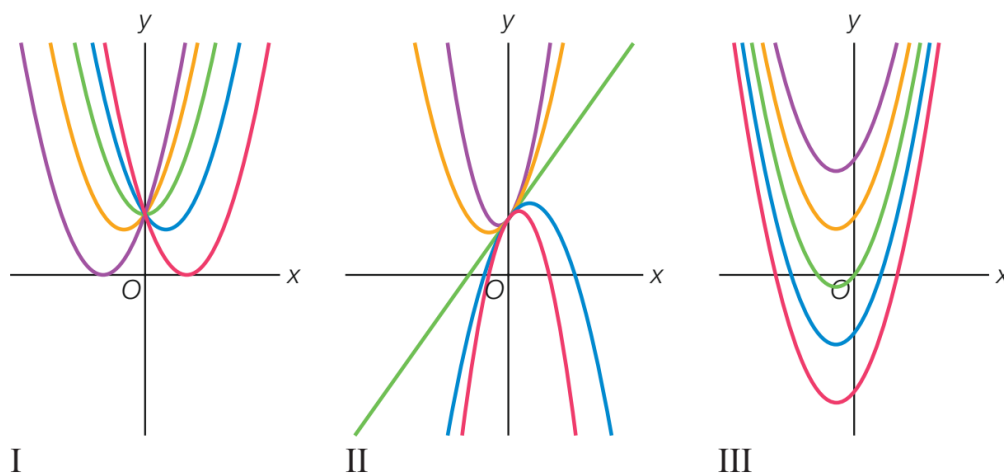
$$\left. \begin{array}{l} \text{Er moet gelden } D > 0. \\ D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = p^2 - 36 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p^2 - 36 > 0 \\ p^2 > 36 \\ p < -6 \vee p > 6 \end{array}$$



R38 Maak een schema zoals op de vorige bladzijde, maar nu voor bergparabolen.

R39 Voor elke waarde van p , q en r zijn gegeven de functies $f_p(x) = 2x^2 + 2x + p$, $g_q(x) = 2x^2 + qx + 2$ en $h_r(x) = rx^2 + 2x + 2$. Voor elke p , q en r krijg je voor f_p , g_q en h_r een andere grafiek.

- a Welke figuur hieronder hoort bij de grafieken van f_p ?
- b Welke figuur hieronder hoort bij de grafieken van g_q ?
- c Welke figuur hieronder hoort bij de grafieken van h_r ?



40 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 5x + p$. Bereken exact voor welke p

- a de top van de grafiek van f_p op de x -as ligt
- b het maximum van f_p kleiner is dan 0.

41 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = 2x^2 - 6x + p$. Bereken exact voor welke p

- a de grafiek van f_p de x -as raakt
- b f_p een negatief minimum heeft.

A42 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = 3x^2 + px + 3$.

□ ⊗ * Bereken exact voor welke p

- a** de top van de grafiek van f_p op de x -as ligt
- b** f_p een positief minimum heeft.

○43 Voor elke waarde van p is gegeven de vergelijking $x^2 + px + 4 = 0$.

□ ⊗ *

- a** Neem $p = 7$ en bereken exact de oplossingen van de vergelijking.
- b** Neem $p = 2$. Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking?
- c** Bereken voor welke p de vergelijking één oplossing heeft.

Theorie B Vergelijkingen met een parameter

Met behulp van de parameter p worden met $x^2 - 5x + p = 0$ oneindig veel vergelijkingen met de variabele x genoteerd.

Neem je $p = 4$, dan krijg je $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Oplossen geeft $(x - 1)(x - 4) = 0$ en hieruit volgt $x = 1 \vee x = 4$.

Neem je $p = 7$, dan krijg je $x^2 - 5x + 7 = 0$. Deze vergelijking heeft geen oplossing, want $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -3 < 0$.

Met de discriminant $D = b^2 - 4ac$ van de vergelijking $x^2 - 5x + p = 0$ bereken je voor welke p de vergelijking twee, één of geen oplossing heeft. Je krijgt $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 25 - 4p$.

$D > 0$ geeft $25 - 4p > 0$, dus $-4p > -25$ oftewel $p < 6\frac{1}{4}$.

Dus voor $p < 6\frac{1}{4}$ zijn er twee oplossingen.

$D = 0$ geeft $p = 6\frac{1}{4}$, dus voor $p = 6\frac{1}{4}$ is er één oplossing.

$D < 0$ geeft $p > 6\frac{1}{4}$, dus voor $p > 6\frac{1}{4}$ is er geen oplossing.

Voorbeeld

Bereken exact voor welke p de vergelijking $px^2 + 3x + 1 = 0$ twee oplossingen heeft.

Aanpak

Onderscheid de situaties $p = 0$ en $p \neq 0$.

Uitwerking

$p = 0$ geeft de vergelijking $3x + 1 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.

$p \neq 0$ geeft $D = 3^2 - 4 \cdot p \cdot 1 = 9 - 4p$

Twee oplossingen als $D > 0$.

$$\left. \begin{array}{l} 9 - 4p > 0 \\ -4p > -9 \\ p < 2\frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

Dus twee oplossingen voor $p < 2\frac{1}{4} \wedge p \neq 0$.

$\wedge$ betekent 'en'.

R44 Zie het voorbeeld.



- a** Waarom wordt onderscheid gemaakt tussen de situaties $p = 0$ en $p \neq 0$?
- b** Voor welke p heeft de vergelijking één oplossing?

45 **a** Bereken exact voor welke p de vergelijking



- $x^2 - 7x + p = 0$ twee oplossingen heeft
- $x^2 + px + 25 = 0$ twee oplossingen heeft
- $x^2 + px + 4 = 0$ geen oplossing heeft.

b Toon aan dat de vergelijking $-2x^2 + px + 3 = 0$ voor elke p twee oplossingen heeft.

46 Bereken exact voor welke p de vergelijking



- a** $px^2 + 5x + 2 = 0$ twee oplossingen heeft
- b** $px^2 - 3x - 4 = 0$ twee oplossingen heeft.

47 **a** Van de vergelijking $x^2 + 2x + p = 0$ is $x = 1$ een oplossing.



Bereken exact p en de andere oplossing.

b Van de vergelijking $px^2 - 11x + 10 = 0$ is $x = 2$ een oplossing. Bereken exact p en de andere oplossing.

A48 Bereken exact voor welke p de vergelijking



- a** $2x^2 + x + p = 0$ geen oplossing heeft
- b** $px^2 + x + p = 0$ twee oplossingen heeft
- c** $2x^2 + px + 1 = 0$ twee oplossingen heeft.

A49 **a** De vergelijking $px^2 + 6x + 9 = 0$ heeft één oplossing.



Bereken exact p en de bijbehorende oplossing.

b De vergelijking $x^2 + px + 1 = 0$ heeft één oplossing. Bereken exact p en de bijbehorende oplossing.

A50 Bereken exact voor welke p de vergelijking



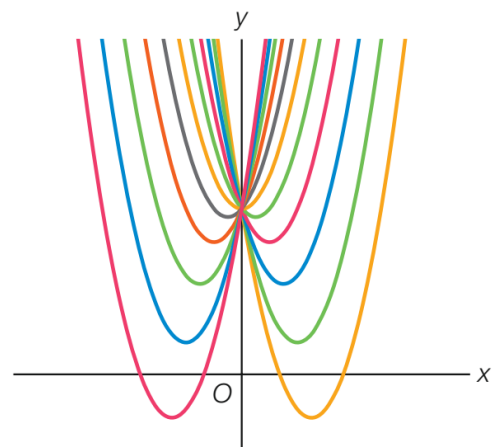
$(p^2 - 14)x^2 + px + 2 = 0$ twee oplossingen heeft.

O51 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 4x^2 + px + 5$.



Er geldt $x_{\text{top}} = -\frac{1}{8}p$ en $y_{\text{top}} = -\frac{1}{16}p^2 + 5$.

- a** Toon dit aan.
- b** Toon met een berekening aan dat y_{top} niet gelijk kan zijn aan 6.



Theorie C Extremen met een parameter

In opgave 51 heb je gezien dat bij de functies $f_p(x) = 4x^2 + px + 5$ geldt $y_{\text{top}} = -\frac{1}{16}p^2 + 5$. Als gegeven is dat het minimum van f_p gelijk is aan 1, dan geldt dus $-\frac{1}{16}p^2 + 5 = 1$. Hiermee is p te berekenen.

$$\begin{aligned}\text{Je krijgt } -\frac{1}{16}p^2 + 5 &= 1 \\ -\frac{1}{16}p^2 &= -4 \\ p^2 &= 64 \\ p &= 8 \vee p = -8\end{aligned}$$

Voorbeeld

Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = 2x^2 + px + 3$. Bereken exact voor welke p het minimum gelijk is aan 1.

Uitwerking

$$\begin{aligned}x_{\text{top}} &= -\frac{p}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}p \quad \leftarrow \boxed{-\frac{p}{4} = -\frac{1}{4}p} \\ y_{\text{top}} &= f_p\left(-\frac{1}{4}p\right) \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}p\right)^2 + p \cdot -\frac{1}{4}p + 3 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{16}p^2 - \frac{1}{4}p^2 + 3 \quad \leftarrow \boxed{\left(-\frac{1}{4}p\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot p^2 = \frac{1}{16}p^2} \\ &= \frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{4}p^2 + 3 \\ &= -\frac{1}{8}p^2 + 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Het minimum is 1 geeft } -\frac{1}{8}p^2 + 3 &= 1 \\ -\frac{1}{8}p^2 &= -2 \\ p^2 &= 16 \\ p &= 4 \vee p = -4\end{aligned}$$

52 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = -2x^2 + px - 1$.

 Bereken exact voor welke p

- a** het maximum 7 is
- b** de grafiek van f_p de x -as raakt.

53 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = x^2 + px + 3$.

 Bereken exact voor welke p

- a** de top van de grafiek van f_p op de lijn $y = x + 1$ ligt
- b** f_p een negatieve extreme waarde heeft.

A54 Van de functie $f_p(x) = px^2 + 6x + 1$ is de extreme waarde -2 .

□ ⊗ *

a Bereken exact de waarde van p .

b Is de extreme waarde een maximum of een minimum? Licht toe.

A55 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door

⊗ *

$$f_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + px + p^2 - 6.$$

a Bereken exact voor welke p de functie f_p een negatief maximum heeft.

b Bereken exact voor welke p de y -coördinaat van de top van de grafiek van f_p groter is dan 18.

A56 De top van de grafiek van $f_{p,q}(x) = \frac{1}{2}x^2 + px + q$ ligt op de parabool

*

$$y = x^2 + x + 1.$$

Bereken exact voor welke p en q het minimum van $f_{p,q}$ gelijk is aan 7.

57

□ ⊗ *

Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = px^2 + 4x - 3$.

Je kunt nagaan dat voor de x -coördinaat van de top van de grafieken van f_p

geldt dat $x = -\frac{2}{p}$.

a Licht toe dat uit $x = -\frac{2}{p}$ volgt $p = -\frac{2}{x}$.

Door $p = -\frac{2}{x}$ te **substitueren** in de formule van f_p ,

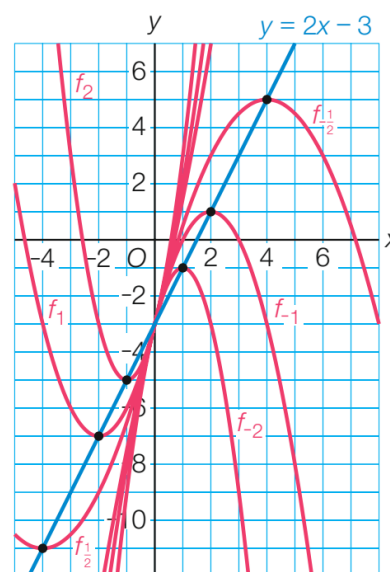
dus in $y = px^2 + 4x - 3$, vind je de formule voor de y -coördinaat van de top. Je krijgt $y = 2x - 3$.

b Toon dit aan.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f_p voor enkele waarden van p en de lijn $y = 2x - 3$.

Je ziet dat de toppen van de getekende grafieken van f_p op de lijn $y = 2x - 3$ liggen.

c Neem een andere waarde voor p dan in de figuur hiernaast en laat met een berekening zien dat de top van de bijbehorende parabool op de lijn $y = 2x - 3$ ligt.



58

□ ⊗ *

In de figuur hiernaast zie je voor enkele waarden van

p de grafiek van de functie $f_p(x) = -x^2 + px + p$. Alle toppen van de grafieken van f_p liggen op een parabool.

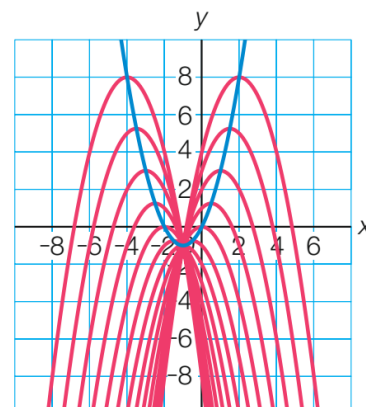
Deze parabool is ook getekend.

Om de formule van deze parabool op te stellen, substitueer je $p = 2x$ in de formule van f .

a Laat zien hoe je aan $p = 2x$ komt.

b Stel de formule op van de parabool waarop alle toppen van de grafieken van de functies

$f_p(x) = -x^2 + px + p$ liggen. Klopt dit met de figuur hiernaast?



A59  *

- a** Bewijs dat alle toppen van de grafieken van de functies $f_p(x) = px^2 - 6x + 5$ op de lijn $y = -3x + 5$ liggen.
- b** Bewijs dat alle toppen van de grafieken van de functies $f_p(x) = -x^2 + px - 6$ op de parabool $y = x^2 - 6$ liggen.
- c** Alle toppen van de grafieken van de functies $f_p(x) = \frac{1}{2}x^2 + px + 2p$ liggen op een parabool.
Stel de formule op van deze parabool.
- d** Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = px^2 + 6x + p$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

A60 *

Voor alle waarden van p en q is de functie $f_{p,q}$ gegeven door

$$f_{p,q}(x) = px^2 + qx + 5.$$

- a** De grafiek van de functie $f_{p,q}$ gaat voor alle p en q door het punt A .
Geef de coördinaten van A .
- b** Voor $p = 2$ krijg je $f_{2,q}(x) = 2x^2 + qx + 5$.
Bereken exact voor welke q de vergelijking $f_{2,q}(x) = 0$ geen oplossing heeft.
- c** Bereken exact voor welke p de top van de grafiek van $f_{p,4}$ onder de x -as ligt.
- d** De extreme waarde van $f_{p,q}$ is 3.
Druk p uit in q .
- e** Voor welke p liggen alle toppen van de grafieken van $f_{p,q}$ op de parabool $y = \frac{1}{2}x^2 + 5$?

E61

*

Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = x^2 - 2px + 7p$.

Alle grafieken van f_p gaan door het punt A .

Bewijs dat het punt A de top van de parabool is waarop alle toppen van de grafieken van de functies f_p liggen.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan een functie met een parameter zien als een verzameling functies.
- ☐ Ik kan bij een tweedegraadsfunctie met een parameter de discriminant gebruiken bij berekeningen over extreme waarden.
- ☐ Ik kan bij een tweedegraadsvergelijking met een parameter de discriminant gebruiken bij het berekenen van het aantal oplossingen.
- ☐ Ik kan bij een tweedegraadsfunctie met een parameter de parameter berekenen bij een gegeven extreme waarde.

► OPGAVE C8
THEORIE A

► OPGAVE C9
THEORIE B

► OPGAVE C10
THEORIE C

► OPGAVE C11
THEORIE D

C8 Voor elke waarde van p , q en r met $r \neq 0$ zijn gegeven de functies $f_p(x) = 2x^2 + 3x + p$, $g_q(x) = 2x^2 + qx + 4$ en $h_r(x) = rx^2 + 3x + 4$. Geef aan welke van onderstaande zes uitspraken waar zijn

- a** voor alle grafieken van f_p
- b** voor alle grafieken van g_q
- c** voor alle grafieken van h_r .

- I De grafieken hebben allemaal dezelfde snijpunten met de x -as.
- II De grafieken hebben allemaal hetzelfde snijpunt met de y -as.
- III De x -coördinaat van de top is bij alle grafieken hetzelfde.
- IV De y -coördinaat van de top is bij alle grafieken hetzelfde.
- V De top is bij alle grafieken een hoogste punt.
- VI De top is bij alle grafieken een laagste punt.

C9 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + px - 12$. Bereken exact voor welke p

- a** de top van de grafiek van f_p op de x -as ligt
- b** f_p een positief maximum heeft.

C10 Bereken exact voor welke p de vergelijking

- a** $3x^2 + 2x + p = 0$ geen oplossing heeft
- b** $4x^2 + px + 6 = 0$ twee oplossingen heeft
- c** $px^2 + 3x + p = 0$ twee oplossingen heeft.

C11 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + px + 5$. Bereken exact voor welke p het minimum gelijk is aan -4 .

Antwoorden

- C8 a** III en VI
b II en VI
c II

- C9 a** $p = 4 \vee p = -4$
b $p < -4 \vee p > 4$

- C10 a** $p > \frac{1}{3}$
b $p < -4\sqrt{6} \vee p > 4\sqrt{6}$
c $-1\frac{1}{2} < p < 1\frac{1}{2} \wedge p \neq 0$

- C11** $p = 3 \vee p = -3$

1.4 Absolute waarden

Kennis en vaardigheden

- Je kent het begrip absolute waarde en kunt berekeningen maken met absolute-waardefuncties.
- Je kunt de coördinaten van knikpunten en toppen van grafieken van absolute-waardefuncties berekenen.

O62 Voor de functie f geldt:

□ ⊗ * $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ als $x \geq 4$ en

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \text{ als } x < 4.$$

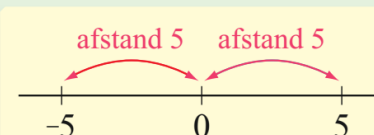
Teken de grafiek van f .

Theorie A De absolute-waardefunctie

De functie f van opgave 62 is te noteren als $f(x) = |\frac{1}{2}x - 2|$.

Hierbij zijn **absolute-waardestrepen** om $\frac{1}{2}x - 2$ gezet.

De **absolute waarde** van een getal is de afstand van dat getal tot 0 op de getallenlijn. Dus de absolute waarde van 5 is gelijk aan 5 en de absolute waarde van -5 is gelijk aan 5. Notatie: $|5| = 5$ en $|-5| = 5$.



$|x|$ is de absolute waarde van x .

$|x|$ is de afstand van het getal x tot 0 op de getallenlijn.

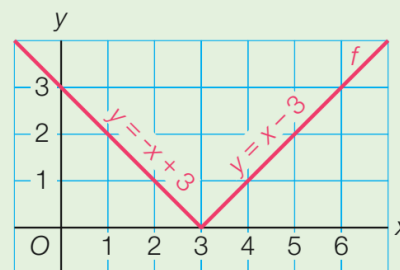
$$|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Voor de **absolute-waardefunctie** $f(x) = |x - 3|$ geldt dus

- $f(x) = x - 3$ als $x - 3 \geq 0$, dus als $x \geq 3$
- $f(x) = -(x - 3) = -x + 3$ als $x < 3$.

$$\text{Dus } f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{als } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{als } x < 3 \end{cases}$$

Hiermee is het functievoorschrift van f gesplitst in twee delen. De grafiek van f bestaat uit twee halve lijnen, zie de figuur hiernaast. De grafiek heeft een **knik** bij $x = 3$. De coördinaten van het **knikpunt** zijn $(3, 0)$, want $f(3) = 0$.

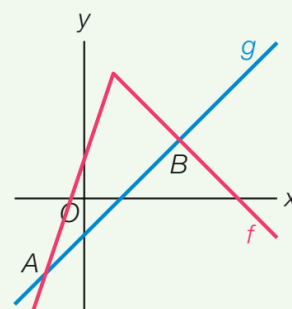


In het algemeen vind je de x -coördinaat van het knikpunt door het gedeelte tussen de absolute-waardestrepen gelijk te stellen aan nul. Zo krijg je bij de functie $f(x) = x + 5 - |2x - 3|$ in het voorbeeld de x -coördinaat van het knikpunt door de vergelijking $2x - 3 = 0$ op te lossen.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = x + 5 - |2x - 3|$ en $g(x) = x - 2$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B .
Zie de figuur hiernaast.

- Bereken de coördinaten van het knikpunt van de grafiek van f .
- Splitst het functievoorschrift van f in twee delen.
- Bereken de coördinaten van A en B .



Uitwerking

- Knik als $2x - 3 = 0$, dus als $x = 1\frac{1}{2}$.
 $f(1\frac{1}{2}) = 1\frac{1}{2} + 5 - 0 = 6\frac{1}{2}$, dus het knikpunt is $(1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$.
- $|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & \text{als } 2x - 3 \geq 0, \text{ dus als } 2x \geq 3 \text{ oftewel } x \geq 1\frac{1}{2} \\ -2x + 3 & \text{als } x < 1\frac{1}{2} \end{cases}$
$$f(x) = \begin{cases} x + 5 - (2x - 3) = x + 5 - 2x + 3 = -x + 8 & \text{als } x \geq 1\frac{1}{2} \\ x + 5 - (-2x + 3) = x + 5 + 2x - 3 = 3x + 2 & \text{als } x < 1\frac{1}{2} \end{cases}$$
- | | |
|--|---|
| <p>punt A: $3x + 2 = x - 2$
 $2x = -4$
 $x = -2$
 $g(-2) = -4$, dus $A(-2, -4)$.</p> | <p>punt B: $-x + 8 = x - 2$
 $-2x = -10$
 $x = 5$
 $g(5) = 3$, dus $B(5, 3)$.</p> |
|--|---|

Noteer ook de voorwaarden.

R63 Zie het voorbeeld.



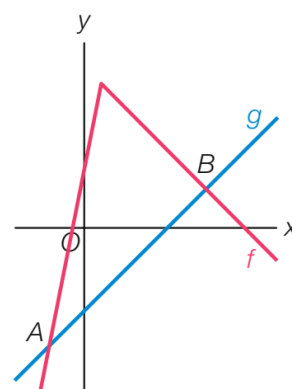
Dilan noteert het functievoorschrift als $f(x) = \begin{cases} -x + 8 & \text{als } x > 1\frac{1}{2} \\ 3x + 2 & \text{als } x \leq 1\frac{1}{2} \end{cases}$

Rebin noteert het functievoorschrift als $f(x) = \begin{cases} -x + 8 & \text{als } x > 1\frac{1}{2} \\ 3x + 2 & \text{als } x < 1\frac{1}{2} \end{cases}$

Eén van hen heeft gelijk. Wie? Licht toe.

64 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x + 4 - |3x - 2|$ en $g(x) = x - 3$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken de coördinaten van het knikpunt van de grafiek van f .
- Splitst het functievoorschrift van f in twee delen.
- Bereken de coördinaten van A en B .



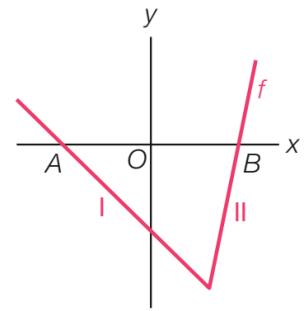
65 Gegeven is de functie $f(x) = 2x - 12 + |3x - 8|$.

□ ⊗ *

De grafiek van f bestaat uit de twee halve lijnen I en II, die de x -as snijden in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken de coördinaten van het knikpunt van de grafiek van f .
- Splitst het functievoorschrift van f in twee delen.
- De lijn k gaat door A en is evenwijdig met II, de lijn l gaat door B en is evenwijdig met I.

Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l .

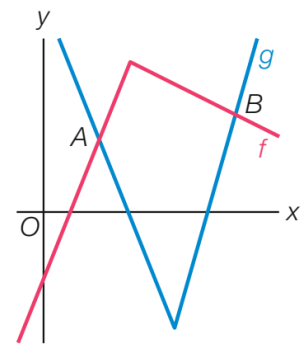


A66 De grafieken van de functies $f(x) = x + 3 - |1\frac{1}{2}x - 6|$ en

□ ⊗ *

$g(x) = \frac{1}{2}x - 8 + |3x - 18|$ snijden elkaar in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.

- De lijn k gaat door de knikpunten van de grafieken. Stel de formule op van k .
- Bereken de coördinaten van A en B .

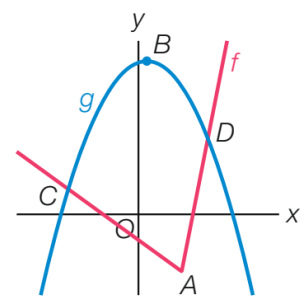


A67 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3x - 12 + |4x - 10|$ en

□ ⊗ *

$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 12$. Het knikpunt van de grafiek van f is A , de top van de grafiek van g is B en de snijpunten van de grafieken zijn C en D . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken $|y_A - y_B|$.
- Bereken de coördinaten van C en D .



A68 Voor elke waarde van a is de functie f_a gegeven door

*

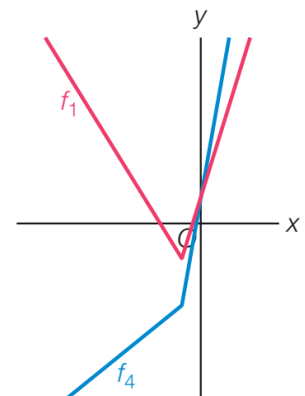
$$f_a(x) = ax - 3 + |3x + 6|.$$

Afhankelijk van de waarde van a heeft de grafiek van f_a wel of geen laagste punt. De grafiek van f_1 heeft bijvoorbeeld wel een laagste punt, maar de grafiek van f_4 niet. Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact voor welke a de grafiek van f_a een laagste punt heeft.

Verder is gegeven de functie $g(x) = x + 3 - |2\frac{1}{2}x - 5|$.

- De lijn k gaat door de knikpunten van de grafieken van f_a en g . Bereken exact voor welke a lijn k evenwijdig is met de lijn $l: y = 3x - 2$.



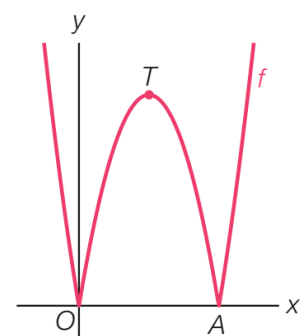
O69 Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = |x^2 - 6x|$.

□ ⊗ *

De grafiek heeft knikpunten O en A en top T .

De y -coördinaat van T is 9.

- Toon dit aan.
- Hoe kun je met behulp van de figuur laten zien dat de vergelijking $|x^2 - 6x| = 8$ vier oplossingen heeft?
- Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $|x^2 - 6x| = 9$? En de vergelijking $|x^2 - 6x| = 10$?



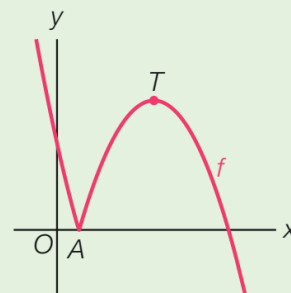
Theorie B Knikken en toppen bij absolute-waardefuncties

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = (4 - \frac{1}{2}x) \cdot |x - 1|$. De grafiek heeft knikpunt A en top T .

De x -coördinaat van A krijg je door de vergelijking $x - 1 = 0$ op te lossen. Je krijgt $x = 1$. Dit geeft $f(1) = (4 - \frac{1}{2} \cdot 1) \cdot 0 = 0$, dus $A(1, 0)$.

Je ziet dat de top T rechts van A ligt. En omdat $|x - 1| = x - 1$ voor $x \geq 1$, geldt voor het gedeelte van de grafiek waar de top ligt het functievoorschrift $f(x) = (4 - \frac{1}{2}x)(x - 1) = -\frac{1}{2}x^2 + 4\frac{1}{2}x - 4$.

Dus $x_T = -\frac{4\frac{1}{2}}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{2}$ en $y_T = f(4\frac{1}{2}) = 6\frac{1}{8}$, dus de top is $T(4\frac{1}{2}, 6\frac{1}{8})$.



Voorbeeld

De grafiek van de functie $f(x) = |x^2 - 9| - 2x$ heeft knikpunten A en B en top T . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact de coördinaten van A , B en T .
- Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $f(x) = 1$? Licht toe.

Uitwerking

- Knikken als $x^2 - 9 = 0$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

$$f(3) = 0 - 2 \cdot 3 = -6 \text{ en } f(-3) = 0 - 2 \cdot -3 = 6$$

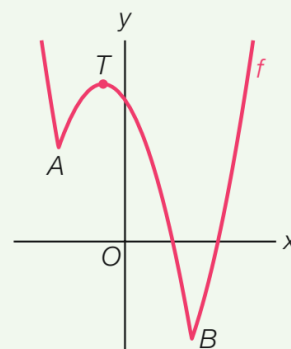
Dus $A(-3, 6)$ en $B(3, -6)$.

Top voor $-3 < x < 3$ en daar is $|x^2 - 9| = -x^2 + 9$, dus daar geldt $f(x) = -x^2 + 9 - 2x = -x^2 - 2x + 9$.

$$x_T = -\frac{-2}{2 \cdot -1} = -1 \text{ en } y_T = f(-1) = -(-1)^2 - 2 \cdot -1 + 9 = 10$$

Dus $T(-1, 10)$.

- De lijn $y = 1$ ligt tussen de twee knikken, dus snijdt de grafiek van f twee keer. Dus de vergelijking $f(x) = 1$ heeft twee oplossingen.



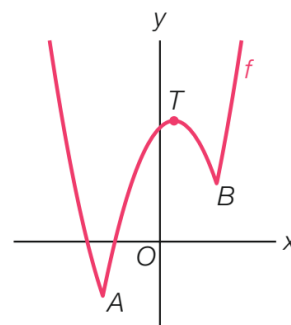
R70 Zie het voorbeeld.



- Laat met een berekening zien dat $|x^2 - 9| = -x^2 + 9$ voor $-3 < x < 3$.
- Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $f(x) = 6$? En de vergelijking $f(x) = 10$? En de vergelijking $f(x) = 14$? Licht toe.

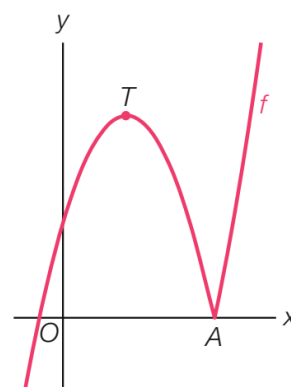
71 De grafiek van de functie $f(x) = |x^2 - 4| + x$ heeft knikpunten A en B en top T . Zie de figuur hiernaast.

- a Bereken exact de coördinaten van A , B en T .
- b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $f(x) = 8$? Licht dit toe en bereken exact deze oplossingen.
- c Bereken exact de nulpunten van f .



72 De grafiek van de functie $f(x) = (x + 1) \cdot |5\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x|$ heeft knikpunt A en top T . Zie de figuur hiernaast.

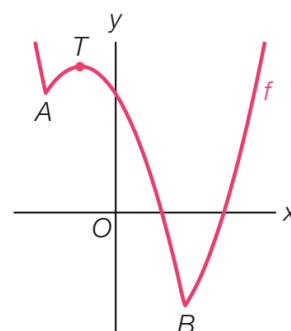
- a Bereken exact de coördinaten van A en T .
- b Bereken exact de x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de lijn $y = 9$.



73 De grafiek van de functie $f(x) = |\frac{1}{2}x^2 - 8| - 2x + 1$ heeft knikpunten A en B en top T . Zie de figuur hiernaast. De lijn k gaat door T en is evenwijdig met de lijn l door A en B .

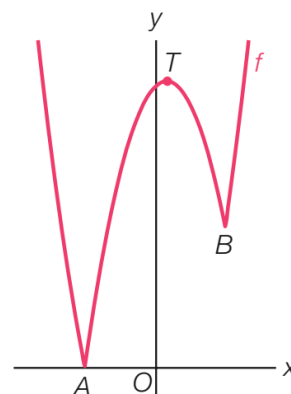
Lijn k snijdt de grafiek van f van links naar rechts in de punten P , T , Q en R .

Bereken exact de coördinaten van Q .



A74 De grafiek van de functie $f(x) = |9 - x^2| + x + 3$ heeft knikpunten A en B en top T . Zie de figuur hiernaast. We bekijken de vergelijking $f(x) = p$.

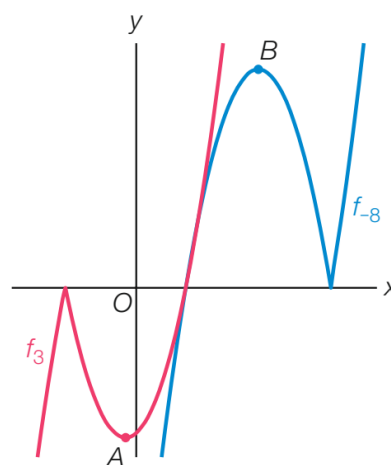
- a Bereken exact voor welke p de vergelijking $f(x) = p$ vier oplossingen heeft.
- b Er zijn twee waarden van p waarvoor de vergelijking $f(x) = p$ drie oplossingen heeft. Geef deze waarden van p en bereken exact voor de kleinste waarde van p de oplossingen van de vergelijking $f(x) = p$.



A75 Voor elke p is gegeven de functie $f_p(x) = (x - 2) \cdot |x + p|$.

⊗* In de figuur hiernaast zie je de grafieken van de functies f_3 en f_{-8} met de toppen A en B .

- Bereken exact de coördinaten van A en B .
- Bereken exact voor welke p de x -coördinaat van de top van de grafiek van f_p gelijk is aan 4.
- Bereken exact voor welke p de y -coördinaat van de top van de grafiek van f_p gelijk is aan -9 .
- Voor $p > -2$ liggen de toppen van de grafieken van f_p op een bergparabool. Stel de formule op van deze bergparabool.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik ken het begrip absolute waarde en kan berekeningen maken met absolute-waardedefuncties.

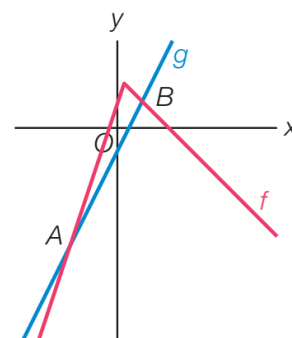
► **OPGAVE C12**
THEORIE A

☐ Ik kan de coördinaten van knikpunten en toppen van grafieken van absolute-waardedefuncties berekenen.

► **OPGAVE C13**
THEORIE B

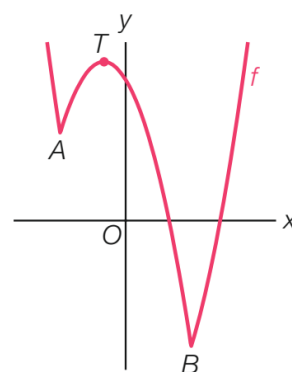
C12 Gegeven zijn de functies $f(x) = x + 3 - |1 - 2x|$ en $g(x) = 2x - 2$. De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact de coördinaten van het knikpunt van de grafiek van f .
- Splits het functievoorschrift van f in twee delen.
- Bereken exact de coördinaten van A en B .



C13 De grafiek van de functie $f(x) = |x^2 - 9| - 2x - 1$ heeft knikpunten A en B en top T . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact de coördinaten van A , B en T .
- Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $f(x) = 5$? Licht toe.
- Bereken exact de nulpunten van f .



Antwoorden

C12 a $(\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$

b $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{als } x \leq \frac{1}{2} \\ -x + 4 & \text{als } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

c $A(-4, -10)$ en $B(2, 2)$

C13 a $A(-3, 5)$, $B(3, -7)$ en $T(-1, 9)$

b drie

*

c 2 en $1 + \sqrt{11}$

1.5 Grafisch-numeriek oplossen

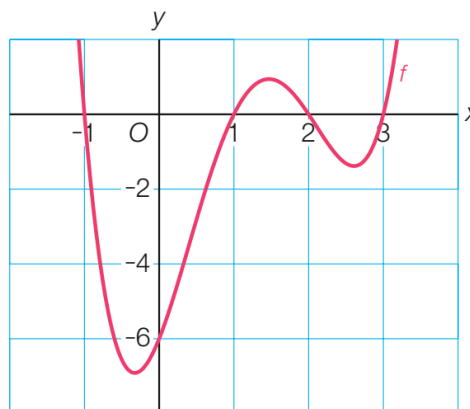
Kennis en vaardigheden

- Je kunt met de GR nulpunten van functies, coördinaten van toppen van grafieken en coördinaten van snijpunten van grafieken berekenen.
- Je kunt met behulp van schetsen van grafieken ongelijkheden oplossen.

076 In de figuur hiernaast is de grafiek van de functie

□ ⊗ * $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ getekend.

- Lees de nulpunten van f af uit de figuur.
- Geef de oplossingen van de vergelijking $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$.

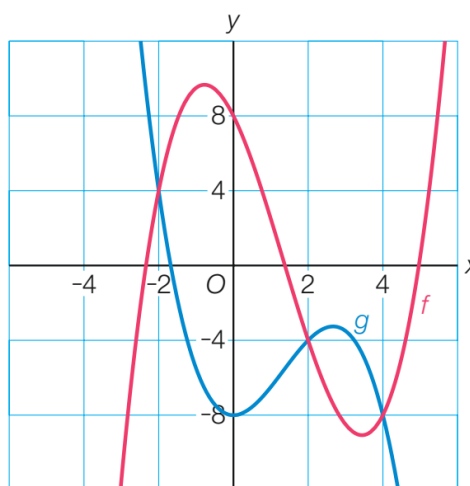


077 In de figuur hiernaast zijn de grafieken van de

□ ⊗ * functies $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ en

$g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 8$ getekend.

- Lees de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken af uit de figuur.
- Geef de oplossingen van de vergelijking $\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 8$.



Theorie A Toppen en snijpunten met de GR

Op de GR kun je grafieken van functies **plotten** en vervolgens nulpunten en x -coördinaten van snijpunten berekenen. Deze x -coördinaten zijn oplossingen van een vergelijking.

Het oplossen van een vergelijking op de GR met behulp van grafieken heet **grafisch-numeriek oplossen**.

Aan de vraagstelling is te zien of je algebraïsch te werk moet gaan of dat het grafisch-numeriek mag.

Plotten is het tekenen van de grafiek op het scherm van de GR.

Bij het oplossen van vergelijkingen kun je met drie soorten opdrachten te maken krijgen.

- Bij de opdracht 'Bereken algebraïsch ...' moet je de vergelijking stap voor stap oplossen. Je mag geen gebruik maken van de specifieke opties van de grafische rekenmachine. De oplossingen moet je soms benaderen.
- Bij de opdracht 'Bereken exact ...' moet je algebraïsch te werk gaan en mag je de oplossingen niet benaderen.
- Bij de opdracht 'Bereken ...' of 'Los op ...' mag je de werkwijze zelf kiezen. Het is daarbij toegestaan om grafisch-numeriek te werk te gaan. Je krijgt dan meestal benaderingen van oplossingen.

Het is raadzaam je antwoorden wel te controleren met de opties van de GR.

►GR] Neem de module **Grafieken, toppen en snijpunten** door.

Bij het gebruik van de GR vermeld je de formules die je invoert, noteer je de gebruikte optie en beantwoord je de gestelde vraag.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 3$.

Rond in deze opgave de antwoorden af op twee decimalen.

- Bereken de nulpunten van f .
- Bereken de extreme waarden van f .
- Los op $f(x) = x - 2$.

Uitwerking

- Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie nulpunt geeft $x = -2,694...$, $x = 0,664...$ en $x = 5,029...$
Dus de nulpunten zijn $-2,69$, $0,66$ en $5,03$.



- Gebruiken van de optie maximum geeft $x = -1,236...$ en $y = 5,786...$
Dus max. is $f(-1,24) \approx 5,79$.
Gebruiken van de optie minimum geeft $x = 3,236...$ en $y = -9,120...$
Dus min. is $f(3,24) \approx -9,12$.
- Invoeren van de formule $y = x - 2$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -3,19$, $x \approx 0,89$ en $x \approx 5,30$.



78 Rond in deze opgave zo nodig af op twee decimalen.

- a** Bereken de nulpunten van de functie $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$.
b Gegeven is de functie $g(x) = 0,4x^3 + 2x^2 + x - 2$.
 Los op $g(x) = x + 2$.

79 Bereken van de volgende functies de extreme waarden.

Rond zo nodig af op twee decimalen.

- a** $f(x) = 0,2x^4 - x^3 - x^2 + 8x + 2$
b $g(x) = -1\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 40x - 28$

80 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + 4$.

Rond in deze opgave de antwoorden af op twee decimalen.

- a** Bereken de nulpunten van f .
b Bereken de extreme waarden van f .
c Los op $f(x) = -x + 3$.

81 Bereken exact de oplossingen.

- a** $x^2 - 5x = 0$ **e** $(2x - 1)(3x + 6) = 0$
b $x^2 - 5x = 14$ **f** $(2x - 1)(3x + 6) = 9x$
c $x^2 - 5 = 14$ **g** $3x(2x - 1) = 6$
d $x^2 - 5 = 14x$ **h** $3x(2x - 1) = 6 - 9x$

82 Los op. Rond af op twee decimalen.

- a** $|x^3 - 9x| = 5$
b $|x^3 - 9x| = x + 5$

A83 Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- a** $0,5x^3 - 5x^2 + 20 = 0$
b $|x^4 - x^3 + x - 5| = x + 3$

A84 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door

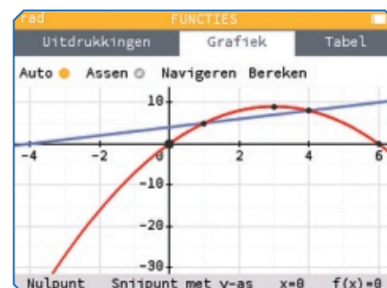
***** $f_p(x) = px^2 + (p + 1)x + \frac{1}{2}p^2$.

- a** Bereken voor welke p de grafiek van f_p de x -as raakt.
 Rond af op twee decimalen.
b Bereken voor welke p het minimum van f_p gelijk is
 aan 10. Rond af op twee decimalen.

O85 Op het GR-scherm hiernaast zijn de grafieken van

***** $f(x) = -x^2 + 6x$ en $g(x) = x + 4$ geplott.

- a** Los de vergelijking $-x^2 + 6x = x + 4$ op.
b Voor welke waarden van x ligt de grafiek van f
 boven de grafiek van g ?



Theorie B Ongelijkheden oplossen

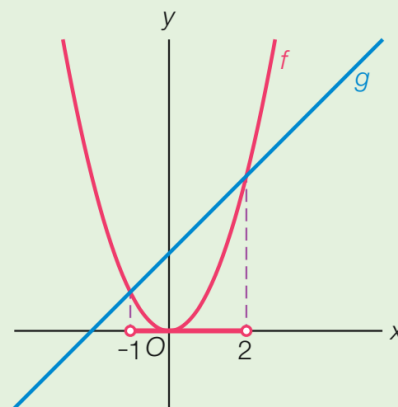
In opgave 85 heb je gekeken voor welke waarden van x de grafiek van $f(x) = -x^2 + 6x$ boven die van $g(x) = x + 4$ ligt. Daarmee heb je de ongelijkheid $-x^2 + 6x > x + 4$ opgelost.

De oplossing van de ongelijkheid $x^2 < x + 2$ is uit de figuur hiernaast af te lezen. Je kijkt voor welke waarden van x de grafiek van $f(x) = x^2$ onder die van $g(x) = x + 2$ ligt.

Op de x -as lees je af $x^2 < x + 2$ geeft $-1 < x < 2$.

x ligt tussen -1 en 2 .

Ook kun je aflezen dat $x^2 \geq x + 2$ geeft $x \leq -1 \vee x \geq 2$.



Op de x -as is aangegeven waar $f(x) < g(x)$ is.

Bij het oplossen van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ heb je de oplossingen van de vergelijking $f(x) = g(x)$ en een schets van de grafieken van f en g nodig. Nadat je de vergelijking hebt opgelost, lees je uit de schets af voor welke waarden van x de grafiek van f onder die van g ligt.

Bij het oplossen van een ongelijkheid lees je het antwoord af op de x -as.

Bij $f(x) < g(x)$ kijk je voor welke waarden van x de grafiek van f onder die van g ligt.

Bij $f(x) > g(x)$ kijk je voor welke waarden van x de grafiek van f boven die van g ligt.

Ook bij het oplossen van ongelijkheden kun je aan de vraagstelling zien of je algebraïsch te werk moet gaan of dat je de grafisch-numerieke aanpak mag kiezen.

Gebruik bij het oplossen van ongelijkheden het volgende werkschema.

Werkschema: het oplossen van de ongelijkheden $f(x) < g(x)$ en $f(x) > g(x)$

- 1 Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ op.
- 2 Schets de grafieken van f en g . Gebruik zo nodig de GR.
- 3 Lees uit de schets de oplossing af.

Voorbeeld

Los op $x^3 - 2x^2 < 3x - 4$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

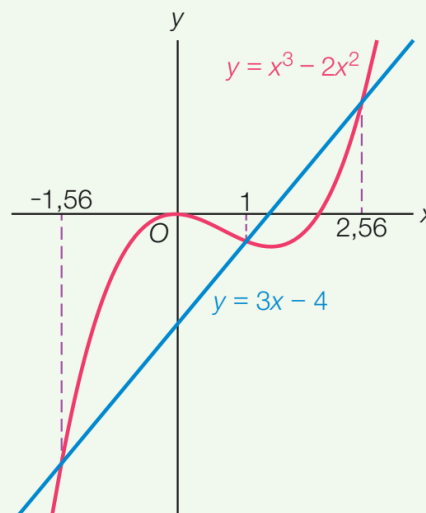
Uitwerking

Los op $x^3 - 2x^2 = 3x - 4$.

Invoeren van de formules $y = x^3 - 2x^2$ en $y = 3x - 4$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = -1,561\dots$, $x = 1$ en $x = 2,561\dots$

Zie de schets hiernaast.

$x^3 - 2x^2 < 3x - 4$ geeft $x < -1,56 \vee 1 < x < 2,56$



86 a Los op $x^3 - 3x < 1$. Rond af op twee decimalen.

87 b Bereken exact de oplossing van $x^2 - 3x \geq 9$.

c Los op $2x^2 - 5x - 10 > 0$. Rond af op twee decimalen.

d Bereken exact de oplossing van $2x^2 - 5x - 2 \leq 0$.

A87 Los op. Rond in het antwoord zo nodig af op twee decimalen.

88 a $0,1x^3 - 2x^2 + 8x + 10 > -x + 15$ b $|x^3 - 10x| < 2x + 8$

A88 Voor elke p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = px^2 + (p + 2)x + 0,3p^2$.

89 Bereken voor welke p de functie f_p een negatief minimum heeft. Rond zo nodig af op twee decimalen.



Grafieken van $f_p(x) = px^2 + (p + 2)x + 0,3p^2$ voor enkele waarden van p .

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan met de GR nulpunten van functies, coördinaten van toppen van grafieken en coördinaten van snijpunten van grafieken berekenen.

► OPGAVE C14
THEORIE A

☐ Ik kan met behulp van schetsen van grafieken ongelijkheden oplossen.

► OPGAVE C15
THEORIE B

- C14** Gegeven is de functie $f(x) = 0,2x^3 - 2x^2 + 4x + 3$.
Rond in deze opgave zo nodig af op twee decimalen.
- a** Bereken de nulpunten van f .
 - b** Bereken de extreme waarden van f .
 - c** Los op $f(x) = 3$.

- C15** **a** Los op $x^3 - 3x > x^2 - 1$. Rond af op twee decimalen.
b Bereken exact de oplossing van $2x^2 + x \leq 2x + 3$.

Antwoorden

C14 a -0,58; 3,92 en 6,66

b max. is $f(1,23) \approx 5,27$ en

min. is $f(5,44) \approx -2,23$

c $x = 0 \vee x \approx 2,76 \vee x \approx 7,24$

C15 a $-1,48 < x < 0,31 \vee x > 2,17$

b $-1 \leq x \leq 1\frac{1}{2}$

Kennis- en vaardigheidentest

1.1 Lineaire verbanden

- 1** **a** De lijn k gaat door het punt $A(1, 6)$ en is evenwijdig met de lijn $l: y = 4x + 1$.
Stel de formule op van k .
- b** De lijn $m: y = ax - 3$ gaat door het punt $B(8, 1)$.
Bereken a .
- c** Stel de formule op van lijn n door de punten $C(1, 5)$ en $D(3, -1)$.
- 2** N is een lineaire functie van t .
Voor $t = 2$ is $N = 100$ en voor $t = 5$ is $N = 160$.
- a** Schrijf N als functie van t .
- b** Druk t uit in N .
- c** Bereken t voor $N = 440$.

1.2 Tweedegraadsvergelijkingen en tweedegraadsfuncties

- 3** Bereken exact de oplossingen.
- a** $5x^2 = 3x$
- b** $2x^2 + 12x = 14$
- c** $(2x - 4)^2 = 144$
- d** $3x^2 = 18x + 30$
- e** $3x^2 - 6x = 2$
- f** $(2x + 1)^2 = 3x(x + 1) - x$
- 4** Gegeven is de functie $f(x) = 0,45x^2 - 1,8x - 5,4$.
- a** Bereken exact de nulpunten van f .
- b** De top van de grafiek van f ligt op de lijn $k: y = 2x + b$.
Bereken exact de waarde van b .

1.3 Werken met parameters

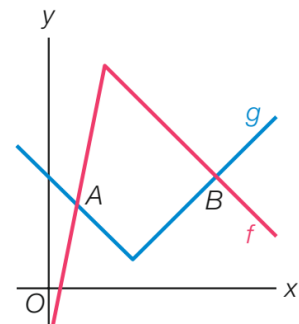
- 5** Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = 4x^2 + px + 1$.
- a** Voor elke p gaat de grafiek van f_p door het punt A .
Geef de coördinaten van A .
- Bereken exact voor welke p
- b** de grafiek van f_p de x -as raakt
- c** f_p een negatief minimum heeft.
- 6** Bereken exact voor welke p de vergelijking
- a** $2x^2 + 4x + p = 0$ geen oplossing heeft
- b** $3x^2 + px + 12 = 0$ één oplossing heeft
- c** $px^2 + 2x + 5 = 0$ twee oplossingen heeft.

- 7** Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = x^2 + px + 1$.
Bereken exact voor welke p het minimum gelijk is aan -3 .

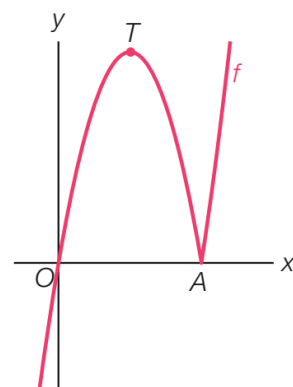
- 8** Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = x^2 + 2px + p$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

1.4 Absolute waarden

- 9** De grafieken van de functies $f(x) = 2x + 4 - |3x - 6|$ en $g(x) = 1 + |x - 3|$ snijden elkaar in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.
De lijn k gaat door A en B en snijdt de x -as in het punt P .
De lijn l gaat door de knikpunten van de grafieken en snijdt de x -as in het punt Q .
Bereken exact $|x_P - x_Q|$.



- 10** De grafiek van de functie $f(x) = x \cdot |10 - 2\frac{1}{2}x|$ heeft knikpunt A en top T . Zie de figuur hiernaast.
a Bereken exact voor welke p de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing heeft.
b De horizontale lijn l door T snijdt de grafiek van f ook nog in het punt B .
Bereken exact de x -coördinaat van B .



1.5 Grafisch-numeriek oplossen

- 11** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$.
Rond in deze opgave af op twee decimalen.
a Bereken de nulpunten van f .
b Bereken de extreme waarden van f .
c Los op $f(x) = 2x - 3$.

- 12** Los op. Rond af op twee decimalen.

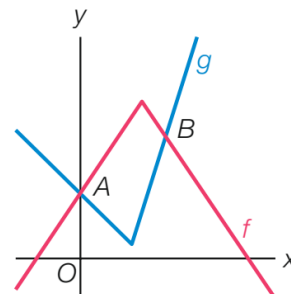
- a** $x^2 + 5x \leq x^3 + 2x^2 - 6x + 1$
b $|x^3 - 3x| < -\frac{1}{2}x + 2$

Gemengde opgaven

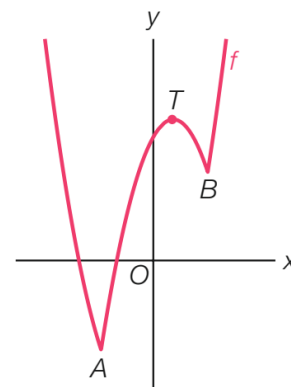
- 1** Gegeven zijn de lijnen $k: y = ax + b$ en $l: y = -3x + 2b$.
- a** Voor welke a en b snijden k en l elkaar in het punt $A(-1, 2)$?
 - b** Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l in het geval k de x -as snijdt in het punt $B(2, 0)$ en l de y -as snijdt in het punt $C(0, 4)$.
 - c** Voor welke a en b zijn k en l evenwijdig en is de afstand tussen de snijpunten P en Q van k en l met de x -as gelijk aan 2?
- 2**
- a** Bereken exact de x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van $f(x) = 2x^2 - 14x + 20$ met de x -as.
 - b** Los de vergelijking $x^3 + x^2 - 8x + 4 = 0$ op. Rond zo nodig af op twee decimalen.
 - c** Los de ongelijkheid $\frac{1}{5}(2 - 3x)^2 - 9 \geq 11$ exact op.
 - d** Bereken exact de nulpunten van de functie $g(x) = 3(2x - 1)(x + 4)$.
 - e** Bereken exact de oplossingen van $\frac{1}{2}(3x + 1)^2 = -4x + \frac{1}{2}$.
 - f** Los de ongelijkheid $|4x - x^2| < \frac{1}{2}x + 2$ op. Rond af op twee decimalen.
 - g** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van de functie $h(x) = 2x^2 - 5x$ en de lijn $k: y = 2x + 4$.
- 3** Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - px + 9$.
- a** Bereken exact voor welke p de functie f_p een negatief minimum heeft.
 - b** Bereken exact voor welke p de top van de grafiek van f_p op de lijn $k: y = -3x + 2$ ligt.
 - c** Er is een kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen. Stel de formule op van deze kromme.
- 4** Voor elke waarde van a zijn de functies f_a en g_a gegeven door $f_a(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax$ en $g_a(x) = ax - 6$. Bereken exact voor welke a
- a** de top van de grafiek van f_a op de grafiek van g_a ligt
 - b** het snijpunt van de grafiek van g_a met de x -as op de grafiek van f_a ligt
 - c** de grafieken van f_a en g_a geen gemeenschappelijke punten hebben.
- 5** Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = (px + 2)(px - 6)$.
- a** De grafiek van f_1 snijdt de x -as in de punten A en B met $x_A < x_B$ en de lijn $k: y = 9$ in de punten C en D met $x_C < x_D$. Bereken exact de oppervlakte van vierhoek $ABDC$.
 - b** Toon algebraïsch aan dat voor elke $p \neq 0$ de top van de grafiek van f_p op de lijn $l: y = -16$ ligt.

- 6** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 7$.
- Bereken de extreme waarden van f .
 - Bereken voor welke a het knikpunt van de grafiek van $g_a(x) = 3x + |2x - a|$ op de grafiek van f ligt. Rond af op twee decimalen.

- 7** De grafieken van de functies $f(x) = 5 - |1\frac{1}{2}x - 3|$ en $g(x) = x - 1 + |2x - 3|$ snijden elkaar in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.
- Bereken exact de coördinaten van A en B .
 - De lijn $y = 3$ snijdt de grafieken van f en g van links naar rechts in de punten P , Q , R en S . Onderzoek algebraïsch welke van de lijnstukken PQ , QR of RS de kleinste lengte heeft.



- 8** De grafiek van de functie $f(x) = |4 - 2x^2| + 2x$ heeft knikpunten A en B en top T . Zie de figuur hiernaast.
- Bereken exact de coördinaten van A , B en T .
 - Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ drie oplossingen?
 - Bereken exact de nulpunten van f .



- 9** Voor elke waarde van a en b met $a \neq 0$ zijn de functies f_a en $g_{a,b}$ gegeven door $f_a(x) = ax^2 - 6ax$ en $g_{a,b}(x) = |ax - 1| + b$. Bereken exact voor welke a en b de top van de grafiek van f_a samenvalt met het knikpunt van de grafiek van $g_{a,b}$.

- 10** Voor elke waarde van a is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = |ax^2 - x + 1|$.
- De grafiek van $f_{-\frac{1}{2}}$ snijdt de lijn $k: y = 1$ van links naar rechts in de punten A , B , C en D . Bereken exact de lengte van het lijnstuk BD .
 - Bereken exact voor welke waarden van a de grafiek van f_a geen knikken heeft.

- 11** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 24x - 10$. De grafiek van f heeft van links naar rechts de toppen A , B en C .
- Bereken de coördinaten van A , B en C .
 - Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ drie oplossingen?
 - De lijn k gaat door B en C . Behalve in B en C snijdt k de grafiek van f ook nog in de punten D en E met $x_D < x_E$. Bereken de coördinaten van D en E . Rond af op twee decimalen.



2

De afgeleide functie

Bij de afgelegde afstand van een optrekkende trein hoort de formule $s = 0,075t^3 - 0,001875t^4$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters en t de tijd in seconden met $0 \leq t \leq 20$. Met deze formule kun je de gemiddelde snelheid tussen $t = 5$ en $t = 10$ berekenen.

Je krijgt $\frac{56,25 - 8,203125}{10 - 5} = 9,60... \text{ m/s} \approx 35 \text{ km/u}$.

Jolanda benadert de snelheid op $t = 15$ door de gemiddelde snelheid tussen $t = 14,9$ en $t = 15,1$ te berekenen.

Welke snelheid krijgt ze zo? Wat vind je van deze aanpak?

2.1 Snelheden

Kennis en vaardigheden

- Je kunt in een grafiek de verschillende soorten van stijgen en dalen herkennen en de bijbehorende intervallen noteren.
- Je kunt bij een tijd-afstandgrafiek een gemiddelde snelheid op een tijdsinterval berekenen.
- Je kunt bij een grafiek een differentiequotiënt berekenen.
- Je kunt bij een functievoorschrift een differentiequotiënt berekenen.
- Je kunt bij een tijd-afstandformule met een differentiequotiënt de snelheid op een tijdstip benaderen.

01 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{10x}$ en $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

□ ⊗ * **a** Schets de grafieken van f en g in één figuur.

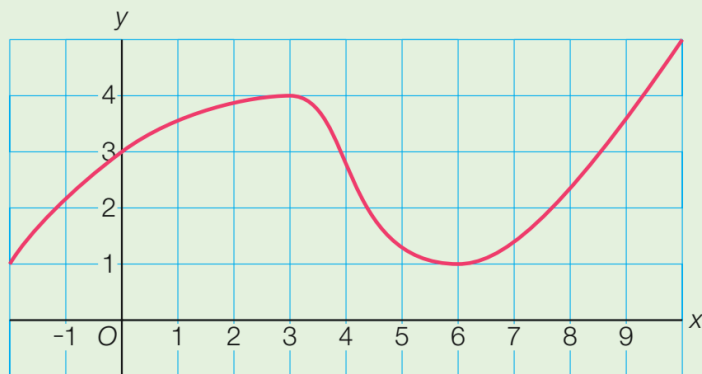
Voor $x > 0$ zijn beide grafieken stijgend.

De ene grafiek is toenemend stijgend en de andere is afnemend stijgend.

b Welke van de twee is afnemend stijgend?

Theorie A Soorten van stijgen en dalen

De grafiek in de figuur hieronder is **stijgend** voor $x < 3$ en voor $x > 6$ en **dalend** voor $3 < x < 6$.



In plaats van: de grafiek is stijgend voor $x < 3$ en voor $x > 6$
schrijven we ook wel: de grafiek is stijgend op de intervallen $\langle \leftarrow, 3 \rangle$ en $\langle 6, \rightarrow \rangle$.

En in plaats van: de grafiek is dalend voor $3 < x < 6$
schrijven we ook wel: de grafiek is dalend op het interval $\langle 3, 6 \rangle$.

Een **interval** is een deel van de getallenlijn.

Tot het **open interval** $\langle 3, 6 \rangle$ behoren alle getallen die tussen 3 en 6 liggen. De grenzen 3 en 6 behoren niet tot het interval.

Behalve open intervallen zijn er ook gesloten intervallen.

Tot het **gesloten interval** $[3, 6]$ behoren ook de getallen 3 en 6.

Voor de getallen x van het interval $[3, 6]$ geldt dus $3 \leq x \leq 6$.

In de figuur op de vorige bladzijde zijn de volgende soorten van stijgen en dalen te herkennen:

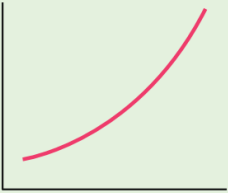
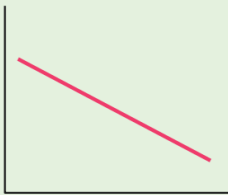
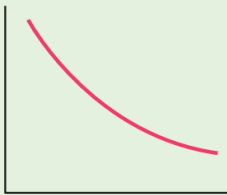
- **afnemend stijgend** op $\langle \leftarrow, 3 \rangle$
- **toenemend dalend** op $\langle 3, 4 \rangle$
- **afnemend dalend** op $\langle 4, 6 \rangle$
- **toenemend stijgend** op $\langle 6, \rightarrow \rangle$.

Bij het noteren van de verschillende soorten van stijgen en dalen gebruiken we open intervallen.

We noemen $\langle \leftarrow, 3 \rangle$ ‘het open interval min oneindig drie’ en $\langle 6, \rightarrow \rangle$ noemen we ‘het open interval zes oneindig’.

In het schema hieronder staan de zes soorten van stijgen en dalen.

Soorten van stijgen en dalen

		
constante stijging	toenemende stijging	afnemende stijging
		
constante daling	toenemende daling	afnemende daling

Afspraak

Op de vraag op welke intervallen een grafiek stijgend/dalend is, noem je de grootst mogelijke intervallen.

R2 Zie de figuur in de theorie op de vorige bladzijde.



a Hafid zegt dat de grafiek stijgend is op het interval $\langle \leftarrow, 3 \rangle$ en dalend is op het interval $[3, 6]$.

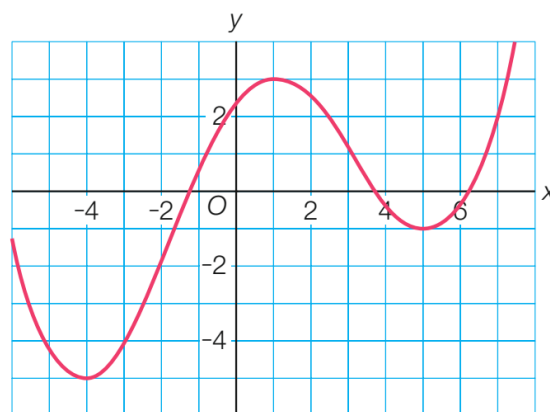
Waarom kan dit niet kloppen?

b Bij $x = 4$ is een overgang van toenemend dalend naar afnemend dalend.

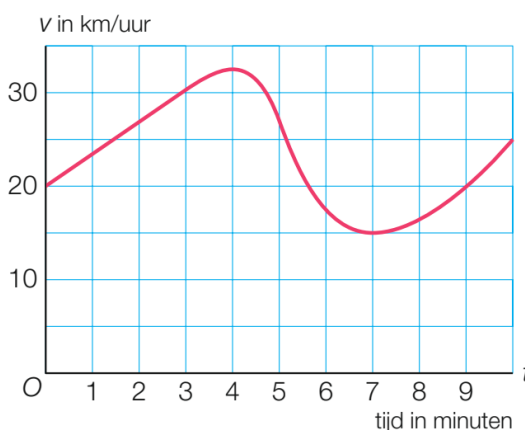
Van de onderstaande uitspraken is er slechts één juist. Welke?

- $x = 4$ behoort tot het interval waarop de grafiek toenemend dalend is.
- $x = 4$ behoort tot het interval waarop de grafiek afnemend dalend is.
- $x = 4$ behoort zowel tot het interval waarop de grafiek toenemend dalend is als tot het interval waarop de grafiek afnemend dalend is.
- $x = 4$ behoort niet tot het interval waarop de grafiek toenemend dalend is en ook niet tot het interval waarop de grafiek afnemend dalend is.

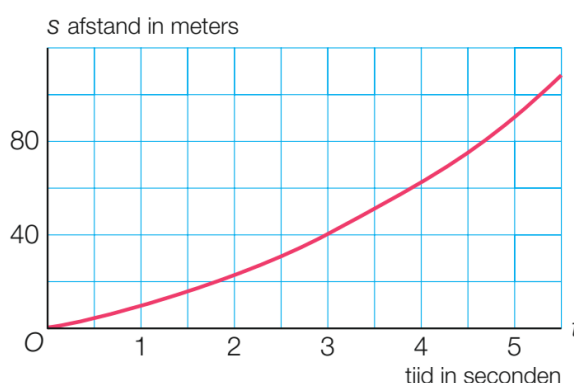
- 3** Welke soorten van stijgen en dalen kun je in de figuur hiernaast herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.



- 4** De grafiek hiernaast gaat over de snelheid van een fietser tijdens een tocht door een glooiend landschap.
- Welke soorten van stijgen en dalen kun je in de figuur herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.
 - Na hoeveel minuten heeft de fietser waarschijnlijk te maken met de steilste helling? Licht toe.



- 5** In de figuur hiernaast is van een motorrijder de afgelegde afstand in meters uitgezet tegen de tijd t in seconden. Bereken de gemiddelde snelheid in m/s van de motorrijder gedurende de eerste vijf seconden.



Theorie B Gemiddelde snelheid en differentiequotiënt

In de figuur hiernaast zie je een **tijd-afstandgrafiek**.

De **gemiddelde snelheid** op het interval $[2, 6]$ is

$$\frac{\text{afgelegde afstand}}{\text{tijd}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{8 - 3}{6 - 2} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ km per minuut.}$$

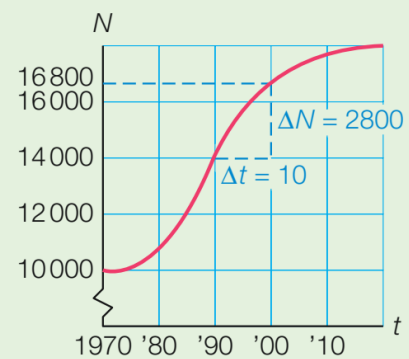
In een tijd-afstandgrafiek is de afgelegde afstand s uitgezet tegen de tijd t .

De gemiddelde snelheid is $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.



In de figuur hiernaast is het aantal inwoners van een plaats uitgezet tegen de tijd. Je ziet dat tussen 1990 en 2000 het aantal inwoners is toegenomen van 14 000 tot 16 800. De gemiddelde verandering in deze periode is

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{2800}{10} = 280 \text{ inwoners per jaar.}$$



$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ is de gemiddelde verandering van N per tijdseenheid.

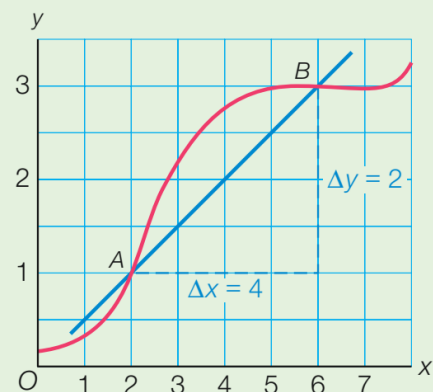
Zie de figuur hiernaast.

Op $[2, 6]$ is $\Delta x = 6 - 2 = 4$ en $\Delta y = 3 - 1 = 2$.

De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{4} = 0,5$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ heet het **differentiequotiënt** van y op $[2, 6]$.

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op $[2, 6]$ is de richtingscoëfficiënt van de lijn AB hiernaast.

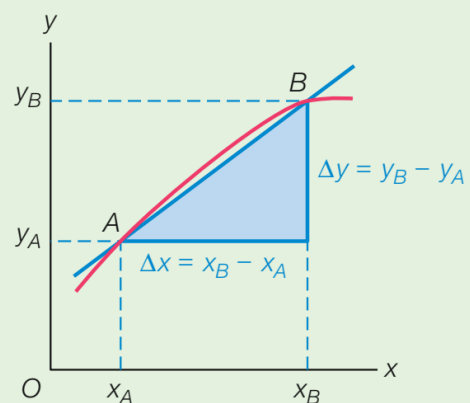


Het woord differentiequotiënt kun je als volgt begrijpen.

- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is een deling, dus een *quotiënt*.
- Onder en boven de breukstreep staan verschillen en een ander woord voor verschil is *differentie*.

Het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$ is

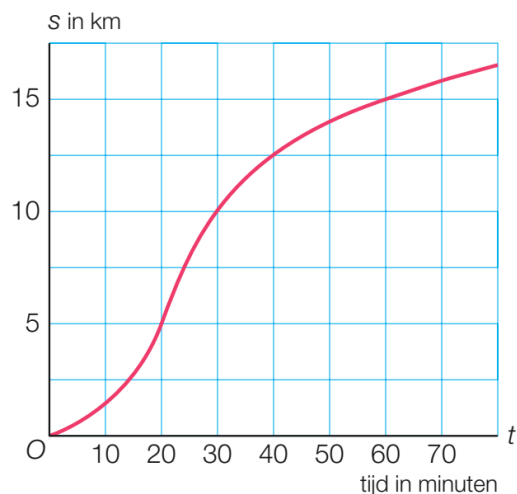
- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (ook wel de helling) van de lijn AB
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



6 Zie de tijd-afstandgrafiek hiernaast.



- a** Hoe zie je dat de snelheid niet constant is?
- b** Bereken de gemiddelde snelheid in km/u op $[20, 40]$ en op $[30, 60]$.
- c** Er is een $p \neq 20$ waarbij de gemiddelde snelheid op $[0, p]$ gelijk is aan die op $[0, 20]$. Voor welke p is dat het geval?
- d** Op $[0, q]$ is de gemiddelde snelheid maximaal. Geef de waarde van q en bereken deze maximale gemiddelde snelheid in km/u.



7 **a** Gegeven is een tijd-afstandgrafiek die afnemend stijgend is.



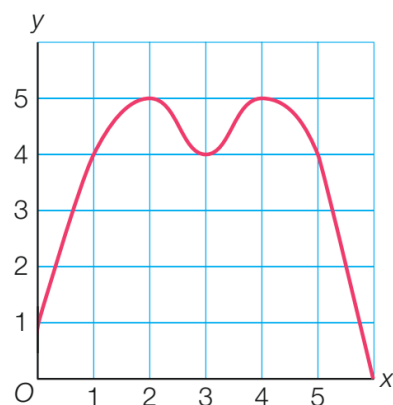
Wat kun je zeggen van de gemiddelde snelheid op $[0, t]$ als je t steeds groter neemt?

- b** Gegeven is de formule $s = 5t^2 - 0,3t^3$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden met $0 \leq t \leq 10$. Voor welke $p < 10$ is de gemiddelde snelheid op $[0, p]$ even groot als op $[0, 10]$? Rond af op één decimaal.

8 Zie de figuur hiernaast.



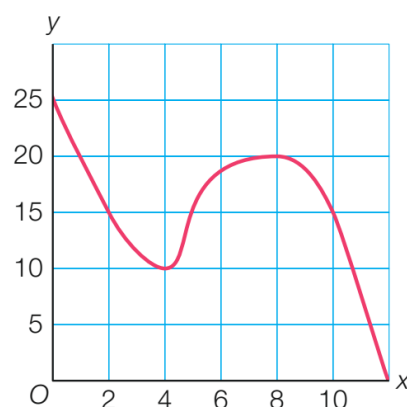
- a** Bereken de gemiddelde verandering van y op $[0, 4]$.
- b** Bereken het differentiequotient van y op $[2, 6]$.
- c** Voor welke p is het differentiequotient van y op $[0, p]$ gelijk aan $0,6$?
- d** Licht toe dat er drie waarden van q zijn waarvoor het differentiequotient van y op $[1, q]$ gelijk is aan $\frac{1}{4}$.



A9 Zie de figuur hiernaast.



- a** Bereken de gemiddelde verandering van y op $[2, 8]$.
- b** Bereken het differentiequotient van y op $[4, 12]$.
- c** Hoeveel waarden van p zijn er waarvoor het differentiequotient van y op $[2, p]$ gelijk is aan $0,5$? Licht toe.
- d** Voor welke q is het differentiequotient van y op $[0, q]$ gelijk aan -1 ?



A10 Bij de grafiek van een functie f met x op $[0, 10]$ en $f(0) = -3$ hoort de volgende tabel.



interval	$[0, 1]$	$[1, 3]$	$[3, 6]$	$[6, 10]$
differentiequotient	4	2	-2	-1

Teken een mogelijke grafiek van f . Waarom zijn er meerdere mogelijkheden?

A11 Van een grafiek is het volgende bekend:

- * • de grafiek gaat door het punt $(0, 2)$
 - op $[0, 2]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{4}$
 - op $[0, 5]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{5}$
 - op $[1, 3]$ is het differentiequotiënt $1\frac{1}{2}$
 - op $[1, 5]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{2}$.
- a Teken een mogelijke grafiek.
b Bereken het differentiequotiënt op $[3, 5]$.
c Is het mogelijk dat het differentiequotiënt op $[1, 4]$ gelijk is aan $1\frac{1}{2}$? Licht toe.

O12 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

- ⊗ * a Bereken $f(1)$ en $f(5)$ en gebruik dit om het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[1, 5]$ te berekenen.
b Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[0, 4]$.

Theorie C Differentiequotiënt bij een functievoorschrift

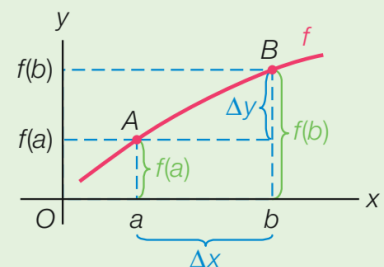
Weet je van een functie het voorschrift, dan kun je daarmee differentiequotiënten berekenen. Je hebt de grafiek dan niet nodig.

Zo is bij de functie $f(x) = x^2$ het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-3, 1]$

gelijk aan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{1^2 - (-3)^2}{4} = \frac{-8}{4} = -2$.

Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[a, b]$ is gelijk aan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



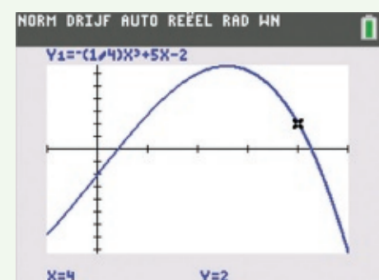
Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 5x - 2$.

Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[1, 4]$.

Uitwerking

Op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{2 - 2\frac{3}{4}}{3} = -\frac{1}{4}$.

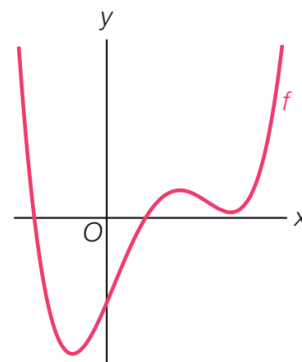


13 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 5x - 2$ van het voorbeeld op de vorige bladzijde.

- a Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op $[-2, 6]$.
- b Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -2$ en $x_B = 6$.
Stel de formule op van de lijn k door A en B .

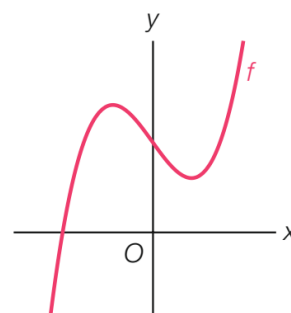
14 Gegeven is de functie $f(x) = 0,4x^4 - 2x^3 + x^2 + 6x - 5$.

- a Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op $[-1, 1]$.
- b Bereken het differentiequotient van $f(x)$ op $[-2, 2]$.
- c Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = 0$ en $x_B = 3$.
Bereken de helling van de lijn AB .
- d De lijn $y = 2x$ snijdt de grafiek van f in de punten C en D .
Wat weet je van de helling van de lijn CD ?



A15 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x + 5$.

- a Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op $[1, 3]$.
- b Bereken het differentiequotient van $f(x)$ op $[-2, 4]$.
- c Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -3$ en $x_B = 1$.
Stel de formule op van de lijn l door A en B .
- d Voor welke p is het differentiequotient van $f(x)$ op $[-2, p]$ gelijk aan 4?



A16 Gegeven de functie $f(x) = ax^2 + 4x - 3$.

- * Het differentiequotient van $f(x)$ op $[1, 4]$ is gelijk aan 2.
Bereken het differentiequotient van $f(x)$ op $[0, 1]$.

17 Voor een optrekkende motor is de afgelegde afstand s gegeven door de formule $s = t^3 + t$. Hierin is s in meters en t de tijd in seconden.

- a Bereken in m/s de gemiddelde snelheid op $[2, 3]$.
- b Bereken de gemiddelde snelheden op de intervallen $[2; 2,5]$, $[2; 2,1]$, $[2; 2,01]$ en $[2; 2,001]$.
- c In vraag b is de gemiddelde snelheid berekend op een steeds kleiner interval $[2; 2 + \Delta t]$. Achtereenvolgens was Δt gelijk aan 0,5, 0,1, 0,01 en 0,001.
Welk vermoeden krijg je over de gemiddelde snelheid als je Δt nog kleiner kiest? Controleer je vermoeden voor $\Delta t = 0,0001$.
- d Welke snelheid denk je dat de motor heeft op $t = 2$?



Theorie D Snelheid op één moment

Je hebt geleerd hoe je de gemiddelde snelheid berekent op een gegeven tijdsinterval. Maar hoe krijg je de snelheid op één moment, bijvoorbeeld op $t = 4$?

Je krijgt een benadering van de snelheid op $t = 4$ door de gemiddelde snelheid op een heel klein interval $[4, \dots]$, bijvoorbeeld op $[4; 4,01]$ of op $[4; 4,001]$ te berekenen.

Bij de **tijd-afstandformule** $s = \frac{1}{2}t^3$ met s in meters en t in seconden is de gemiddelde snelheid op $[4; 4,01]$ gelijk aan

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4,01^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0,01} \approx 24,060 \text{ m/s.}$$

$$\text{En op } [4; 4,001] \text{ is } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4,001^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0,001} \approx 24,006 \text{ m/s.}$$

Je krijgt het vermoeden dat de snelheid op $t = 4$ gelijk is aan 24 m/s.

Bij een tijd-afstandformule benader je de snelheid op het tijdstip $t = a$ met het differentiequotient op $[a, a + \Delta t]$ met bijvoorbeeld $\Delta t = 0,01$ of $\Delta t = 0,001$.

Voorbeeld

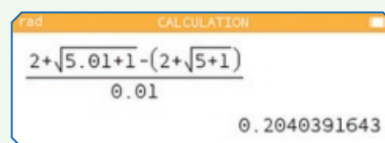
Gegeven is de formule $s = 2 + \sqrt{t+1}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.

Benader in m/s de snelheid op $t = 5$. Neem $\Delta t = 0,01$ en rond af op twee decimalen.

Uitwerking

$$\text{Op } [5; 5,01] \text{ is } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2 + \sqrt{5,01+1} - (2 + \sqrt{5+1})}{0,01} = 0,204\dots$$

De snelheid op $t = 5$ is bij benadering 0,20 m/s.



Calculator screenshot showing the calculation of the derivative quotient for $s = 2 + \sqrt{t+1}$ at $t = 5$ with $\Delta t = 0,01$. The result is 0.2040391643.

R18

Zie het voorbeeld.



Laat zien dat de snelheid op $t = 23$ de helft is van de snelheid op $t = 5$.

- 19** De afgelegde afstand van een optrekkende auto wordt voor de eerste vijf seconden gegeven door de formule $s = 3,5t^2$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.
 Roel beweert dat de auto na 4 seconden een snelheid heeft van meer dan 100 km/u.
 Onderzoek of Roel gelijk heeft. Neem $\Delta t = 0,01$.

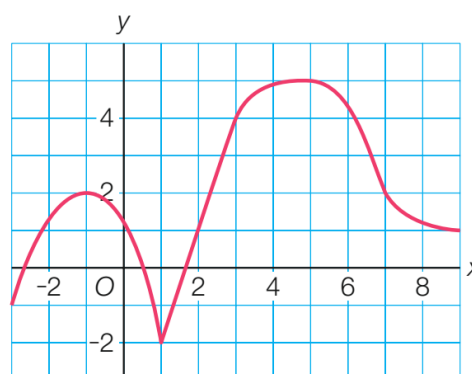
- 20** Gegeven is de formule $s = 8 - \frac{5}{t+2}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.
 Benader in m/s de snelheid op $t = 2$. Neem $\Delta t = 0,01$ en rond af op twee decimalen.

- A21** Gegeven is de formule $s = 10\sqrt{4t+1} - 10$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.
 Neem in deze opgave $\Delta t = 0,01$ en rond af op twee decimalen.
 Onderzoek of de snelheid op $t = 10$ gelijk is aan het gemiddelde van de snelheden op $t = 0$ en $t = 20$.

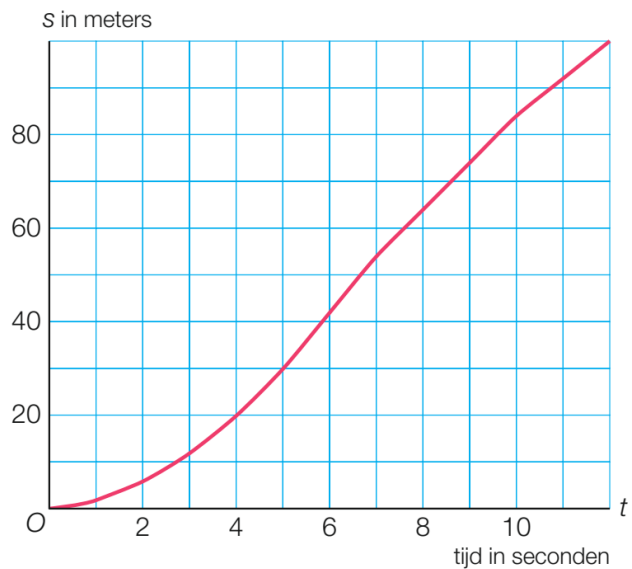
Kennis- en vaardighedencheck

- | | |
|--|--|
| ☐ Ik kan in een grafiek de verschillende soorten van stijgen en dalen herkennen en de bijbehorende intervallen noteren. | ► OPGAVE C1
THEORIE A |
| ☐ Ik kan bij een tijd-afstandgrafiek een gemiddelde snelheid op een tijdsinterval berekenen. | ► OPGAVE C2
THEORIE B |
| ☐ Ik kan bij een grafiek een differentiequotiënt berekenen. | ► OPGAVE C3
THEORIE B |
| ☐ Ik kan bij een functievoorschrift een differentiequotiënt berekenen. | ► OPGAVE C4
THEORIE C |
| ☐ Ik kan bij een tijd-afstandformule met een differentiequotiënt de snelheid op een tijdstip benaderen. | ► OPGAVE C5
THEORIE D |

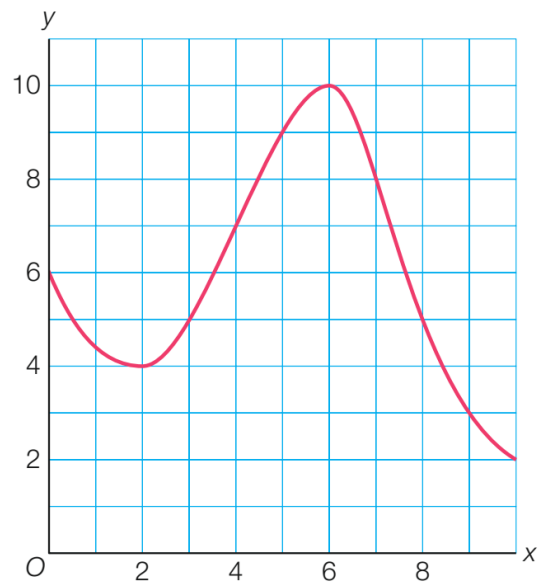
- C1** Welke verschillende soorten van stijgen en dalen kun je in de figuur hiernaast herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.



- C2** De tijd-afstandgrafiek hiernaast hoort bij de 100 meter sprint van een atleet.
- Bereken de gemiddelde snelheid in km/u over de eerste vier seconden en over de laatste twee seconden van de sprint.
 - Bereken de gemiddelde snelheid in km/u op $[5, 8]$.
 - Op $[0, p]$ is de gemiddelde snelheid maximaal.
Geef de waarde van p en bereken de maximale gemiddelde snelheid in km/u.



- C3** Zie de figuur hiernaast.
- Bereken de gemiddelde verandering van y op $[2, 6]$.
 - Bereken het differentiequotiënt van y op $[4, 8]$.
 - Voor welke p is het differentiequotiënt van y op $[5, p]$ gelijk aan $-1\frac{1}{3}$?



- C4** Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 5$.
- Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[0, 3]$.
 - Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op $[-3, 1]$.
 - Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -4$ en $x_B = 4$.
Bereken de helling van de lijn AB .

- C5** Gegeven is de formule $s = 0,4t^2$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden. Benader in m/s de snelheid op $t = 3$. Neem $\Delta t = 0,01$ en rond af op twee decimalen.

Antwoorden

- | | |
|---|--|
| C1 afnemend stijgend op $\langle \leftarrow, -1 \rangle$
toenemend dalend op $\langle -1, 1 \rangle$
constant stijgend op $\langle 1, 3 \rangle$ | afnemend stijgend op $\langle 3, 5 \rangle$
toenemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$
afnemend dalend op $\langle 7, \rightarrow \rangle$ |
| C2 a 18 km/u en 29 km/u | b 41 km/u |
| C3 a $1\frac{1}{2}$ | b $-\frac{1}{2}$ |
| C4 a -2 | b 16 |
| C5 2,40 m/s | c $p = 10$ en 30 km/u
c $p = 8$
c 17 |

2.2 Raaklijnen en hellinggrafieken

Kennis en vaardigheden

- Je kunt in een punt van een grafiek de helling bepalen met behulp van een raaklijn.
- Je kunt de hellinggrafiek schetsen als de grafiek van een functie gegeven is.
- Je kunt een mogelijke grafiek van een functie schetsen als de hellinggrafiek gegeven is.

022

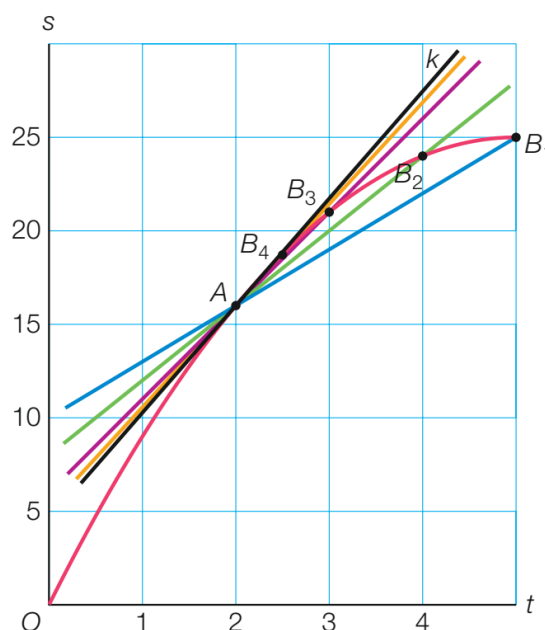


Gegeven is de formule $s = -t^2 + 10t$ met t op $[0, 5]$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.

- a** Bereken in m/s de gemiddelde snelheid op achtereenvolgens $[2, 5]$, $[2, 4]$, $[2, 3]$ en $[2, 2,5]$.

Hiernaast is de bijbehorende grafiek getekend. Ook zijn de lijnen AB_1 , AB_2 , AB_3 en AB_4 getekend met $A(2, 16)$, $B_1(5, 25)$, $B_2(4, 24)$, $B_3(3, 21)$ en $B_4(2,5; 18,75)$.

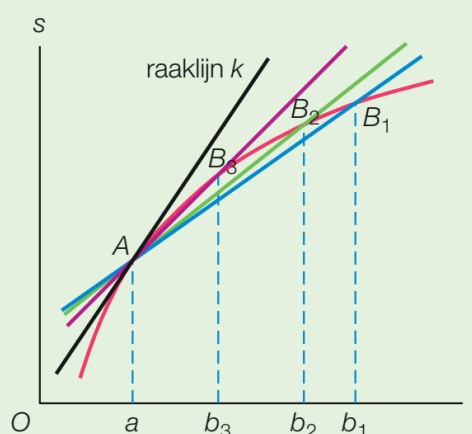
- b** Bij welke van deze lijnen komt de richtingscoëfficiënt het dichtst in de buurt van de richtingscoëfficiënt van de lijn k die de grafiek raakt in A ?



Theorie A Snelheid en richtingscoëfficiënt

Hiernaast zie je een tijd-afstandgrafiek. Door de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$.

De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de richtingscoëfficiënten van de lijnen AB_1 , AB_2 , AB_3 , ... Hoe dichterbij A komt te liggen, des te meer zal de lijn AB lijken op de lijn k die de grafiek in A raakt. De lijn k is de **raaklijn** aan de grafiek in A . De snelheid op $t = a$ is dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A .



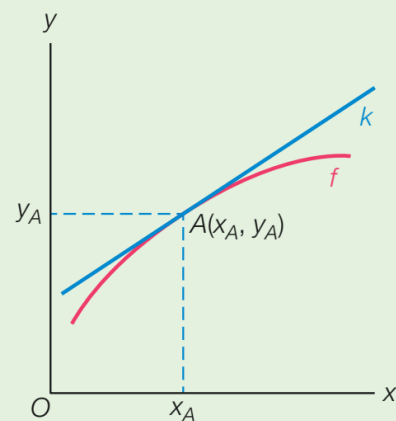
In een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in het bijbehorende punt.

Hiernaast is de raaklijn k aan de grafiek van f in het punt $A(x_A, y_A)$ getekend.

Op dezelfde manier als bij een tijd-afstandgrafiek is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = x_A$.

In plaats van: de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A

zeggen we ook: de **helling van de grafiek** in A .



De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A is

- de helling van de grafiek in A
- de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.

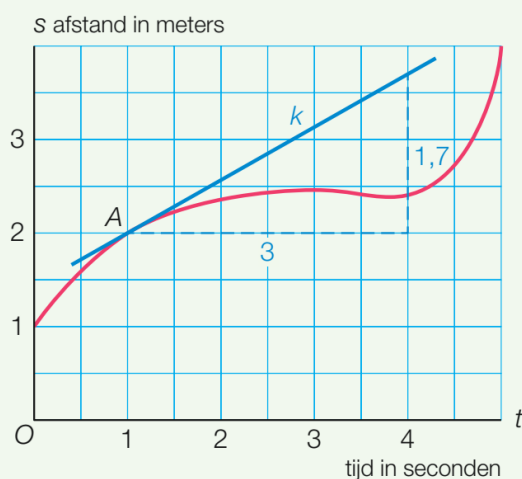
Voorbeeld

Bepaal met behulp van de figuur hiernaast de snelheid op $t = 1$. Geef het antwoord in m/s en rond af op één decimaal.

Aanpak

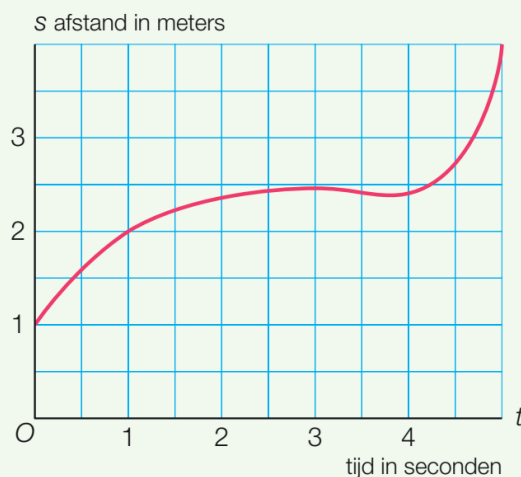
Teken de raaklijn k in het punt met $t = 1$, lees een geschikte Δt en Δs af en bereken rc_k .

Uitwerking



$$rc_k = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,7}{3} = 0,566\dots$$

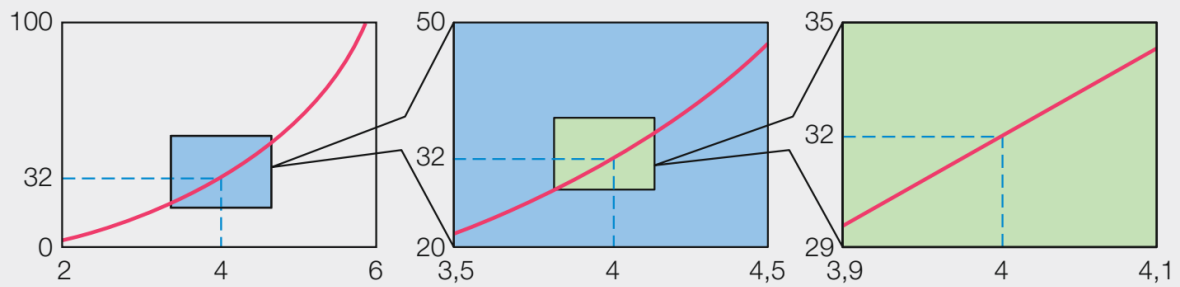
De snelheid op $t = 1$ is ongeveer 0,6 m/s.



Voor Δs neem je het verschil van de s -coördinaten van twee punten op de raaklijn en dus niet op de grafiek. Je moet immers de rc van de raaklijn hebben.

Informatief Inzoomen op de grafiek

In de figuren hieronder is ingezoomd op de grafiek van $f(t) = \frac{1}{2}t^3$.



Hoe meer je inzoomt, hoe meer de grafiek op een rechte lijn gaat lijken.

De helling van deze lijn geeft de snelheid op $t = 4$.

Zoom je in op de grafiek bij $t = 3$, dan geeft de helling de snelheid op $t = 3$.

23 Hieronder zie je een tijd-afstandgrafiek.



a In het punt A is de raaklijn aan de grafiek getekend.

Bepaal met behulp van de figuur de snelheid op $t = 7$.

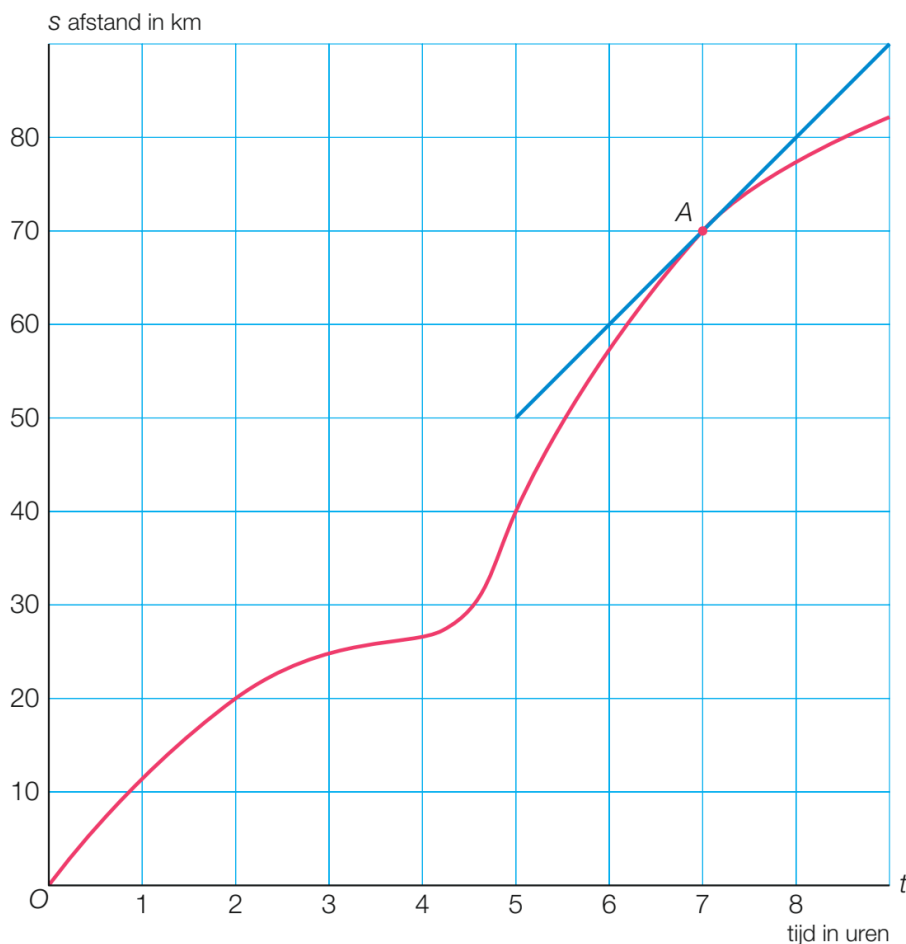
b Bepaal met behulp van de figuur de snelheid op $t = 2$.

Geef het antwoord in km/u en rond af op één decimaal.

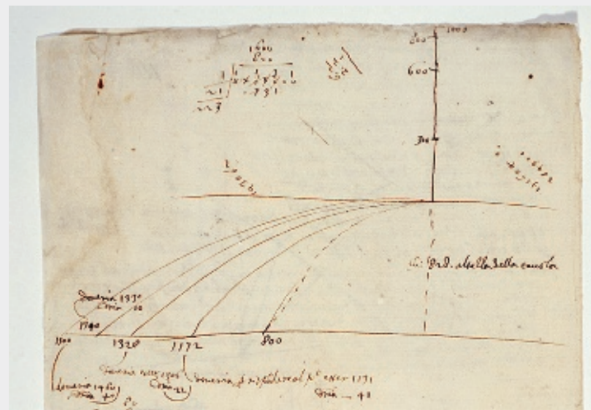
c Neemt de snelheid gedurende de eerste vier uur toe of af?

Hoe zie je dat aan de grafiek?

d Voor welke t schat je dat de snelheid minimaal is? Licht toe.



Galileo Galilei (1564-1642) was de eerste die baanbrekend werk verrichtte met onderzoek op het gebied van snelheid en versnelling. Hierdoor konden later Newton (1642-1727) en Leibniz (1646-1716) hun theorie van de differentiaalrekening ontwikkelen. Bij zijn onderzoek kampte Galilei met het probleem dat er geen eenheid bestond voor snelheid. Volgens de verhoudingsleer van Euclides kon men slechts een verhouding tussen twee grootheden bepalen als deze soortgelijk zijn. Galilei kon dus wel een afstand door een afstand delen, maar niet bijvoorbeeld een afstand door een tijd. Ook nam men aan dat de valsnelheid constant was. Galilei bedacht enkele vernuftige proeven. De benodigde instrumenten maakte hij voornamelijk zelf.



Galilei toonde aan dat de valsnelheid niet constant is. Hij liet van verschillende hoogtes een balletje op een deflector vallen. De deflector die op een tafel stond, zorgde ervoor dat de verticale snelheid werd omgebogen in een horizontale snelheid. Het balletje viel daarna 828 punten naar beneden (Galilei werkte met punten: 1 punt $\approx 0,9$ mm). Bij het loslaten van het balletje op een hoogte van 300 punten boven de tafel kwam het balletje 800 punten ver. Hij berekende dat de horizontale afstanden bij de hoogtes 600, 800 en 1000 punten gelijk moesten zijn aan 1131, 1306 en 1460 punten. De resultaten van zijn experimenten waren hiermee in overeenstemming. Galilei ontdekte dat de formule afstand = $c \cdot \sqrt{\text{hoogte}}$ past bij dit experiment.

Vul je in de formule hoogte 300 en afstand 800 in, dan krijg je $c = \frac{800}{\sqrt{300}} \approx 46,2$.

Dit geeft de volgende formule: afstand = $46,2 \cdot \sqrt{\text{hoogte}}$.

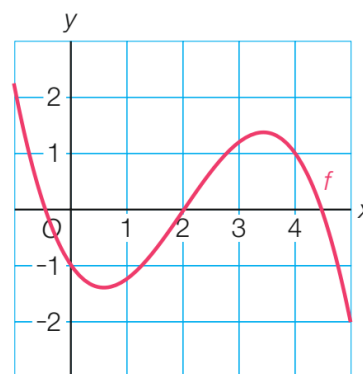
Deze formule klopt met de andere gevonden waarden.

In een briefwisseling met de Italiaanse wetenschapper Sarpi (1552-1623) schrijft Galilei dat uit dit resultaat volgt dat de valsnelheid evenredig is met de tijd dat het balletje valt, oftewel $v = c \cdot t$.

► **WERKBLAD** Hiernaast zie je de grafiek van de functie f .



- a** Bepaal met behulp van de figuur de snelheid waarmee y verandert voor $x = 0$ en voor $x = 1$. Rond zo nodig af op één decimaal.
- b** In hoeveel punten van de grafiek van f is de helling gelijk aan de gemiddelde verandering van y op $[0, 4]$? Licht toe.
- c** Op de grafiek van f ligt het punt A waarin de helling maximaal is. Stel de formule op van de raaklijn k in A . Rond zo nodig af op één decimaal.

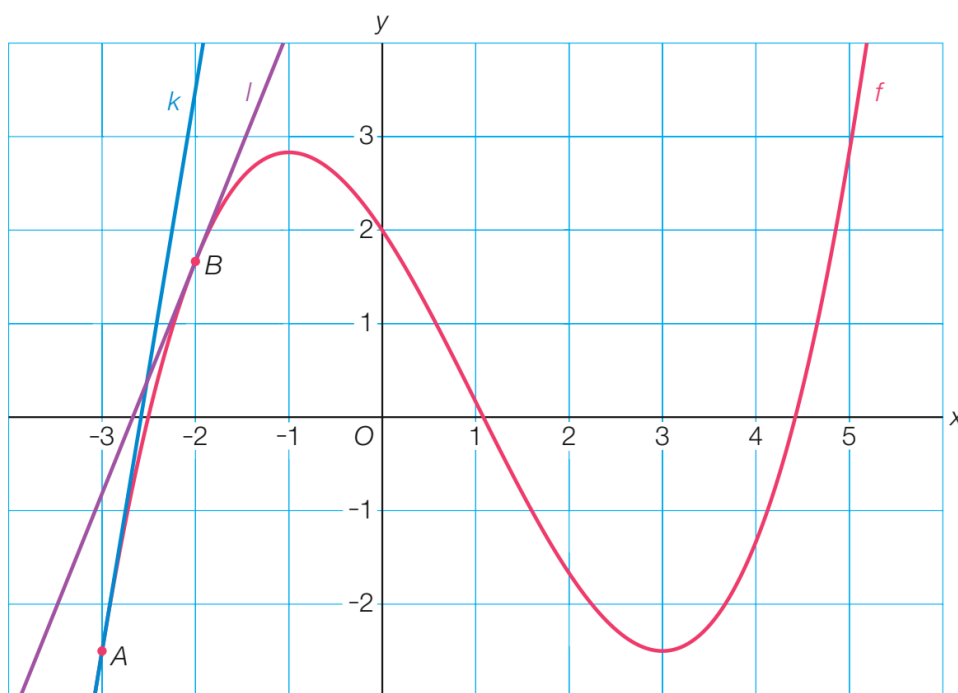


In de figuur hieronder zie je de grafiek van de functie f . Op de grafiek liggen de punten A en B met $x_A = -3$ en $x_B = -2$. In A en B zijn de raaklijnen k en l aan de grafiek getekend. Je kunt nagaan dat $rc_k = 6$ en $rc_l = 2,5$.

- a** Vul de tabel verder in.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
helling	6	2,5						

- b** Teken in een nieuwe figuur de punten die uit de tabel volgen en teken door deze punten een vloeiende kromme.
- c** De in vraag b getekende kromme snijdt de x -as in twee punten. Bij welke bijzondere punten van de grafiek van f horen deze snijpunten?
- d** Tussen de twee toppen van de grafiek van f is de grafiek van f dalend. Hoe zie je dit terug in de getekende kromme van vraag b?



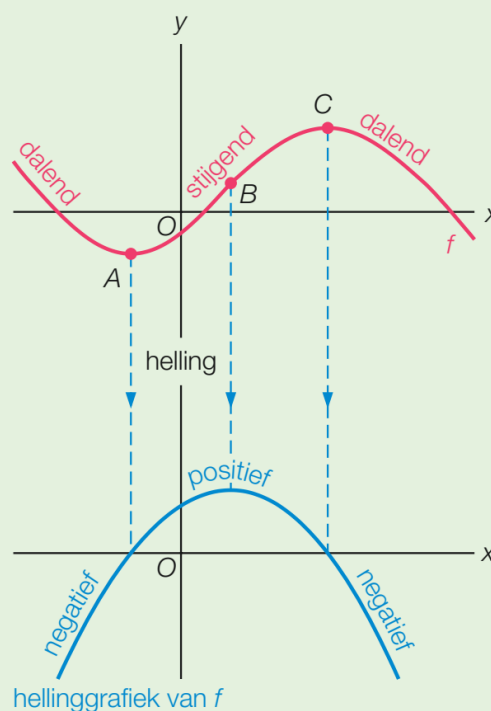
Theorie B Hellinggrafieken schetsen

Bij een gegeven grafiek van een functie f kun je bij elke x de helling van de grafiek in het bijbehorende punt vinden. Zo ontstaat de **hellinggrafiek** van f .

Uit een gegeven grafiek van f kun je bijzonderheden van de hellinggrafiek afleiden.

- Bij een *dalend* deel van de grafiek van f is de helling in elk punt van dat deel *negatief*, dus de hellinggrafiek ligt dan onder de x -as.
- In een *top* van de grafiek van f is de helling *nul*, dus de hellinggrafiek snijdt dan de x -as.
- Bij een *stijgend* deel van de grafiek van f is de helling in elk punt van dat deel *positief*, dus de hellinggrafiek ligt dan boven de x -as.

Bekijk in de figuur hiernaast hoe de hellinggrafiek samenhangt met de grafiek van f . Je ziet dat de toppen A en C de snijpunten opleveren van de hellinggrafiek met de x -as. Tussen A en C stijgt de grafiek van f , dus daar ligt de hellinggrafiek boven de x -as. In het punt B is de helling maximaal. Dit geeft het hoogste punt van de hellinggrafiek.



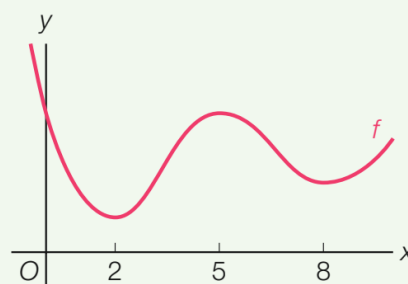
De hellinggrafiek van f hangt samen met de grafiek van f .

Het verband tussen de grafiek van f en de hellinggrafiek van f

- | | | |
|-------------------------------|-----------|----------------------------------|
| • grafiek van f is stijgend | hoort bij | hellinggrafiek boven de x -as |
| • grafiek van f is dalend | hoort bij | hellinggrafiek onder de x -as |
| • grafiek van f heeft top | hoort bij | hellinggrafiek snijdt de x -as |

Voorbeeld

Zie de figuur hiernaast met de grafiek van de functie f .
Schets de hellinggrafiek van f .

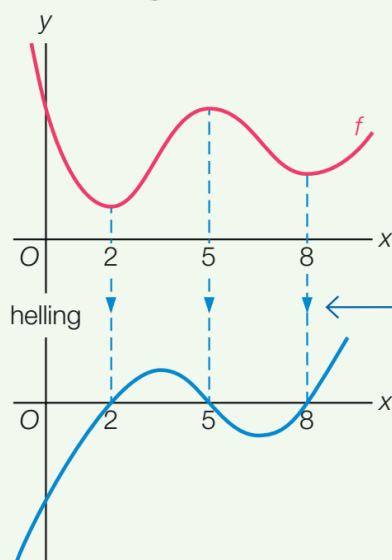


Aanpak

	grafiek van f	hellinggrafiek van f
$\langle \leftarrow, 2 \rangle$	dalend	onder de x -as
$x = 2$	top	snijdt de x -as
$\langle 2, 5 \rangle$	stijgend	boven de x -as
$x = 5$	top	snijdt de x -as
$\langle 5, 8 \rangle$	dalend	onder de x -as
$x = 8$	top	snijdt de x -as
$\langle 8, \rightarrow \rangle$	stijgend	boven de x -as

Teken eerst de punten waar de hellinggrafiek de x -as snijdt.

Uitwerking



Met stippellijnen geef je de
samenhang tussen de grafieken aan.

R26 Zie het voorbeeld.



a Op $\langle 2, 5 \rangle$ gaat de grafiek van f over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

Hoe zie je dit terug in de hellinggrafiek van f ?

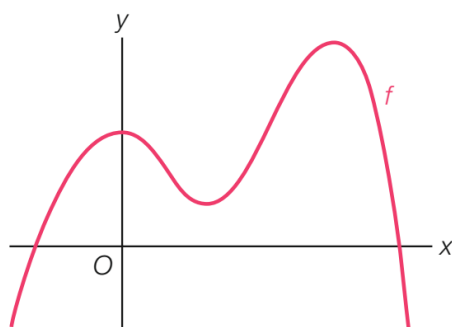
b Op $\langle 5, 8 \rangle$ heeft de hellinggrafiek van f een laagste punt.

Hoe zie je dit terug in de grafiek van f ?

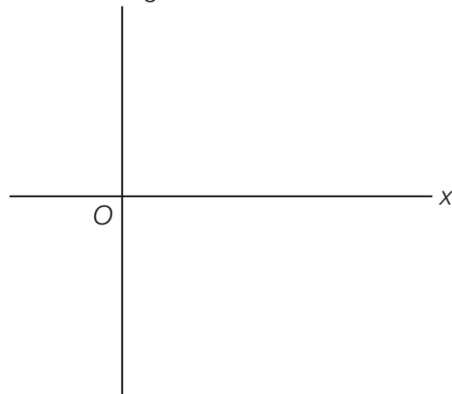
27 Hieronder zie je grafieken van de functies f en g .



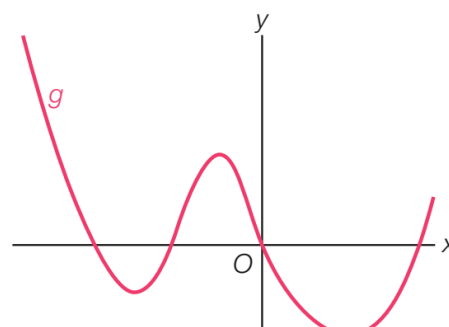
a Schets onder de grafiek van f de hellinggrafiek van f .



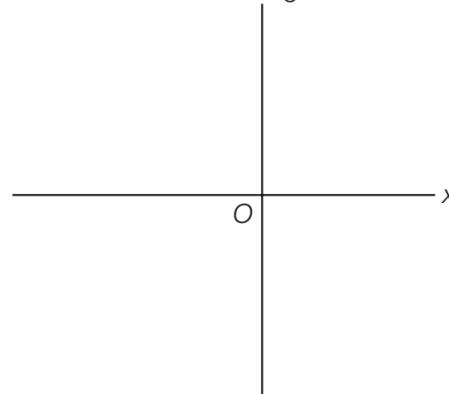
helling



b Schets onder de grafiek van g de hellinggrafiek van g .



helling



R28 Hieronder staan vier gegevens over functies.



- A** De grafiek van de functie is toenemend stijgend.
- B** De grafiek van de functie is afnemend dalend.
- C** De grafiek van de functie heeft een hoogste punt.
- D** De grafiek van de functie gaat over van toenemend dalend in afnemend dalend.

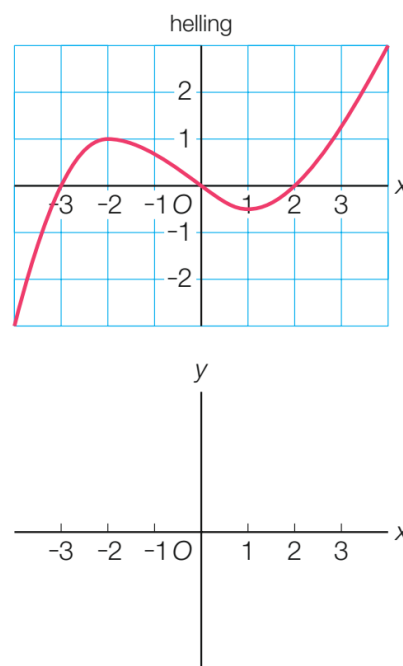
Zoek bij elke beschreven grafiek hierboven de juiste uitspraak hieronder over de bijbehorende hellinggrafiek.

- I De hellinggrafiek gaat dalend door de x -as.
- II De hellinggrafiek ligt onder de x -as en is stijgend.
- III De hellinggrafiek heeft een negatief minimum.
- IV De hellinggrafiek ligt boven de x -as en is stijgend.

29 Hiernaast is de hellinggrafiek van de functie f getekend.

- a** Vul de volgende tabel in. Vul in de middelste kolom in: snijdt de x -as, onder de x -as of boven de x -as en in de rechterkolom: dalend, stijgend of top.

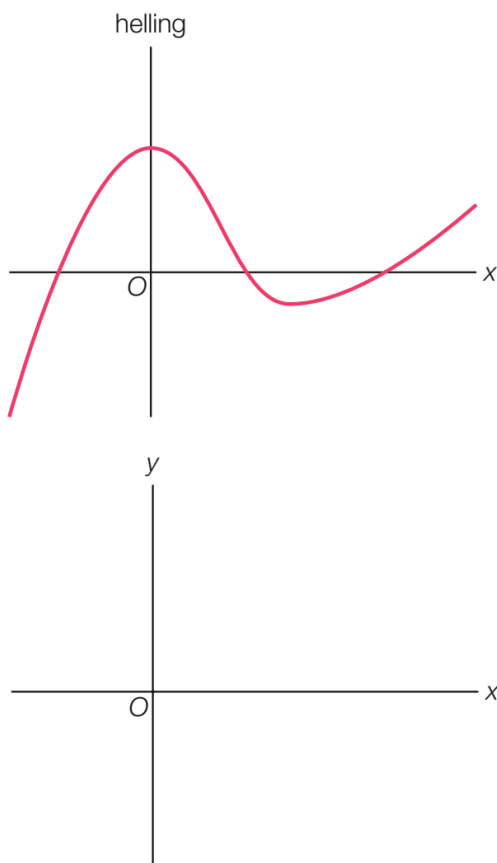
	hellinggrafiek van f	grafiek van f
$\langle \leftarrow, -3 \rangle$		
$x = -3$		
$\langle -3, 0 \rangle$		
$x = 0$		
$\langle 0, 2 \rangle$		
$x = 2$		
$\langle 2, \rightarrow \rangle$		



- b** Schets onder de hellinggrafiek van f een mogelijke grafiek van f .

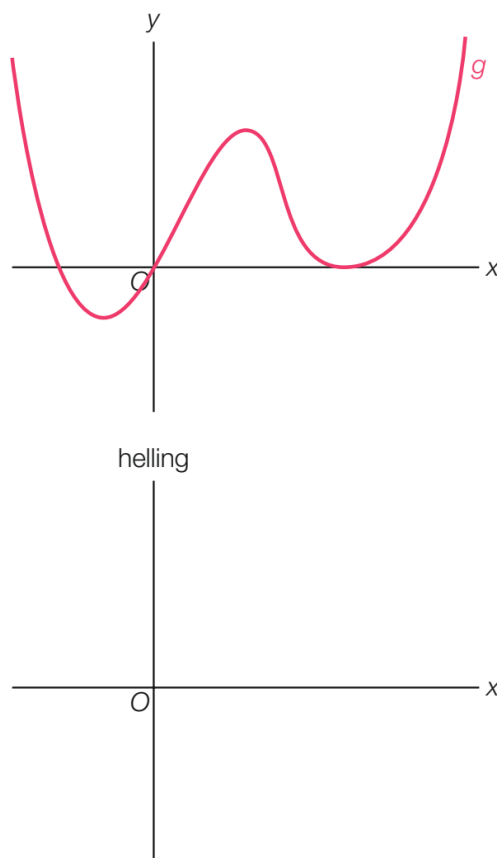
30 **a** Hieronder zie je de hellinggrafiek van de functie f .

Schets onder de hellinggrafiek een mogelijke grafiek van f .



b Hieronder zie je de grafiek van de functie g .

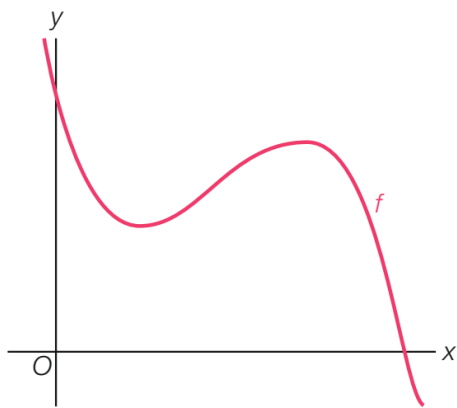
Schets onder de grafiek van g de hellinggrafiek van g .



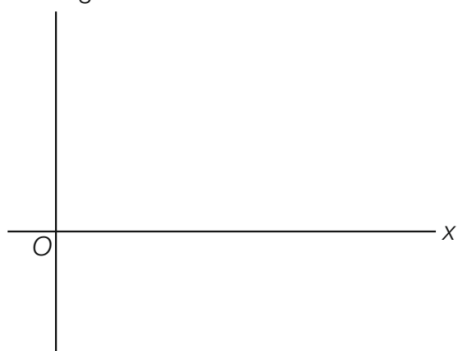
A31 Hieronder zie je de grafieken van de functies f en g .



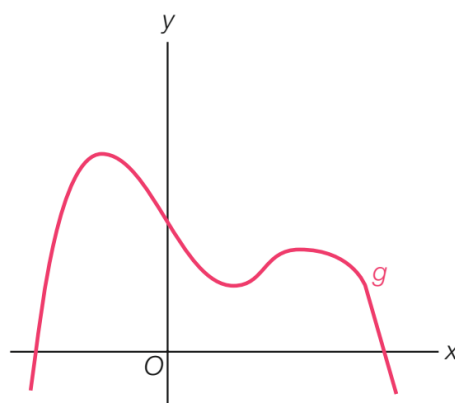
a Schets onder de grafiek van f de hellinggrafiek van f .



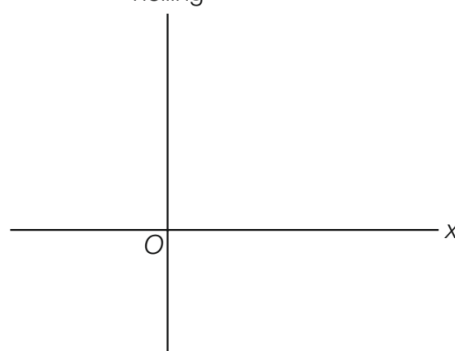
helling



b Schets onder de grafiek van g de hellinggrafiek van g .



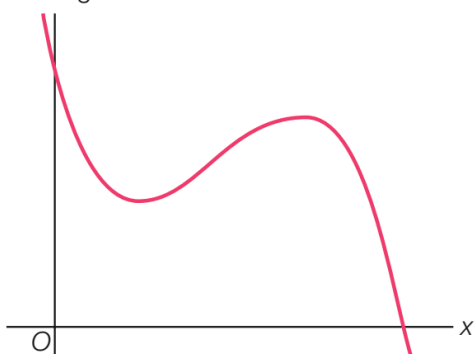
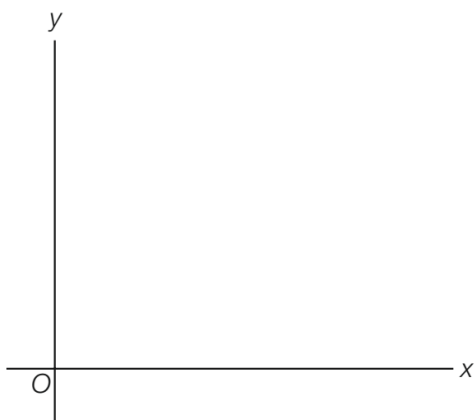
helling



Hieronder zie je dezelfde grafieken, maar nu zijn dit de hellinggrafieken van de functies h en k .

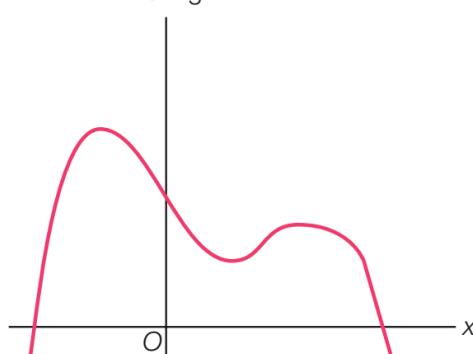
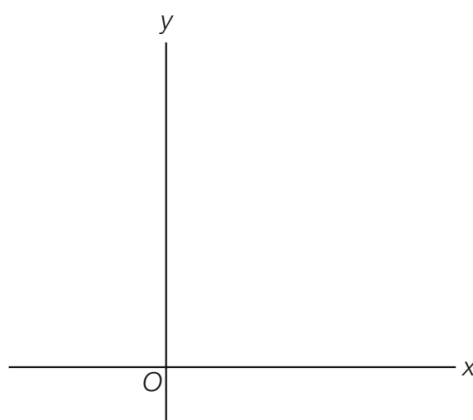
c Schets onder de hellinggrafiek van h een mogelijke grafiek van h .

helling



d Schets onder de hellinggrafiek van k een mogelijke grafiek van k .

helling



A32

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 5$ en $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x - 5$.

- a** Schets de grafieken van f en g en de hellinggrafieken van f en g .
b De hellinggrafiek van f is ook de hellinggrafiek van een functie h .
 De grafiek van h gaat door het punt $A(3, 4)$.
 Stel het functievoorschrift van h op.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan in een punt van een grafiek de helling bepalen met behulp van een raaklijn.
- ☐ Ik kan de hellinggrafiek schetsen als de grafiek van een functie gegeven is.
- ☐ Ik kan een mogelijke grafiek van een functie schetsen als de hellinggrafiek gegeven is.

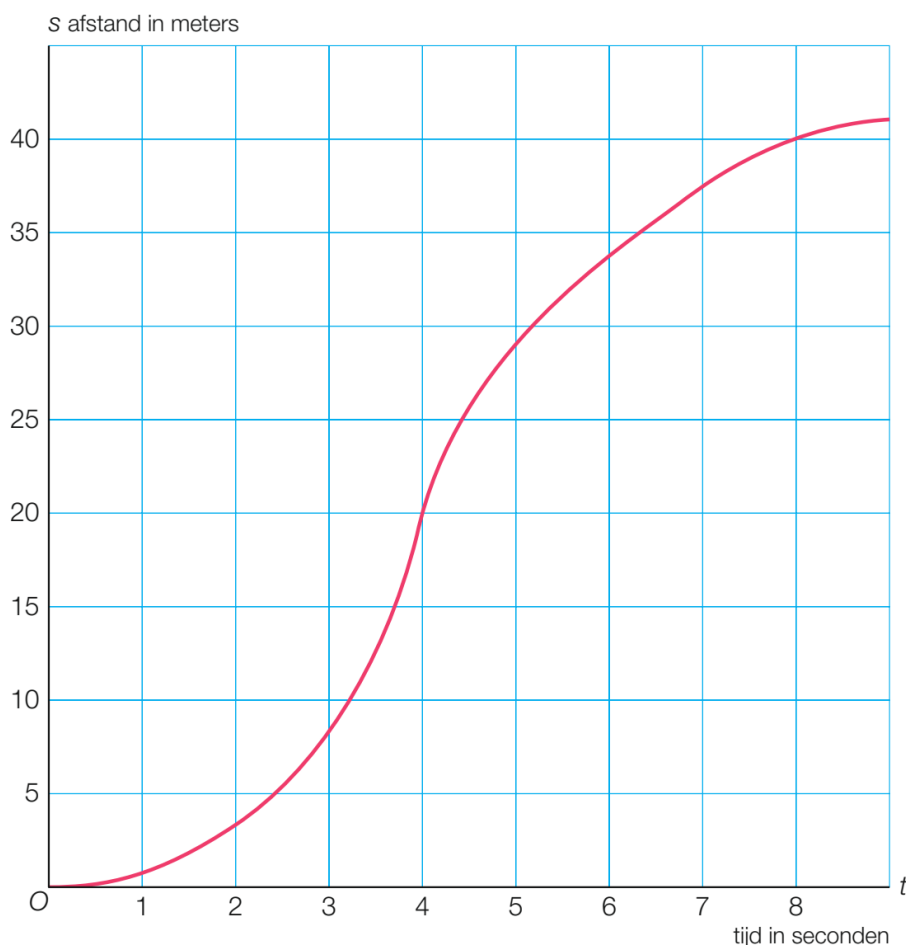
► **OPGAVE C6**
THEORIE A

► **OPGAVE C7a**
THEORIE B

► **OPGAVE C7b**
OPGAVE 32

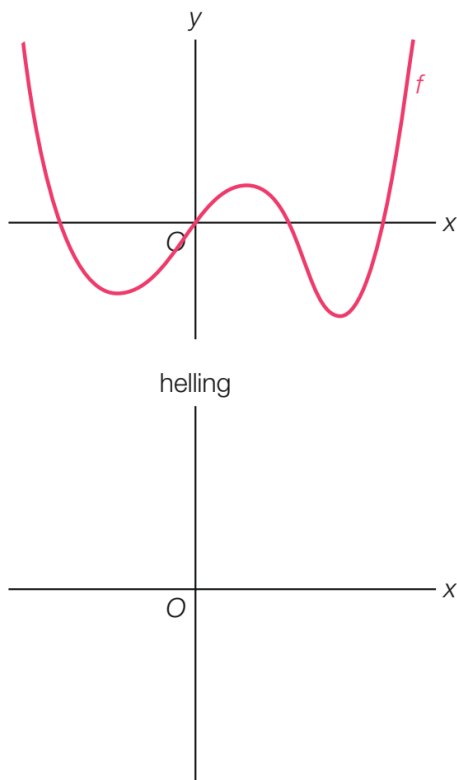
C6 Hieronder zie je een tijd-afstandgrafiek.

- a** Bepaal met behulp van de figuur de snelheid in m/s op $t = 2$ en op $t = 7$. Rond af op één decimaal.
- b** Voor welke t schat je dat de snelheid maximaal is? Licht toe.

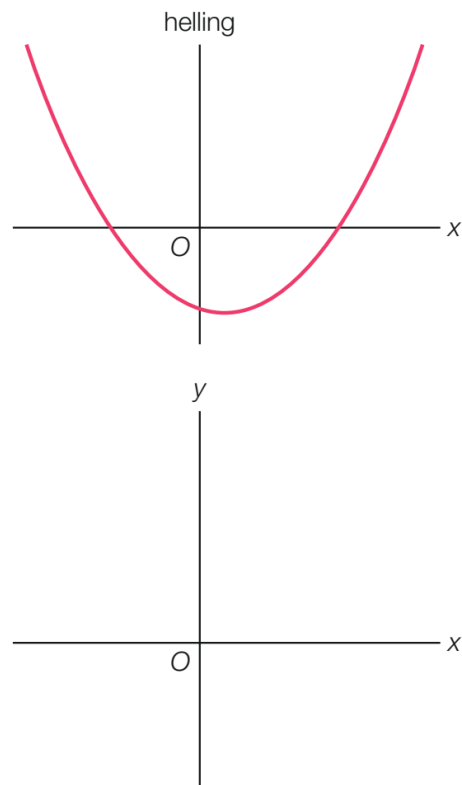


C7 Hieronder zie je de grafiek van de functie f en de hellinggrafiek van de functie g .

a Schets onder de grafiek van f de hellinggrafiek van f .



b Schets onder de hellinggrafiek van g een mogelijke grafiek van g .



Antwoorden

C6 a 3,3 m/s en 3,8 m/s

b $t = 4$

daar is sprake van de sterkste stijging

C7 *

2.3 Limiet en afgeleide

Kennis en vaardigheden

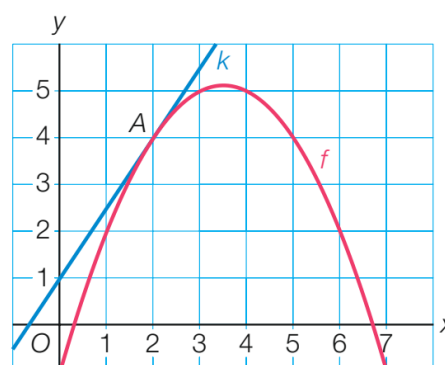
- Je kunt de definitie van de afgeleide gebruiken.
- Je kent de volgende regels voor het differentiëren:
 $f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$
 $f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$
 $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ voor $n = 2, 3, 4, \dots$
 $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$
 $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$
- Je kunt algebraïsch voor elke x de helling van de grafiek in het bijbehorende punt berekenen.
- Je kunt algebraïsch de x -coördinaat van een punt berekenen waarin de helling van de grafiek gegeven is.

033



Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{2}x - 1$ en de raaklijn k aan de grafiek van f in het punt $A(2, 4)$.

- Bepaal rc_k met behulp van de figuur.
- Bereken het differentiequotient van $f(x)$ op $[2; 2,001]$. Rond af op één decimaal.
- Welke conclusie kun je trekken uit de antwoorden van de vragen a en b?



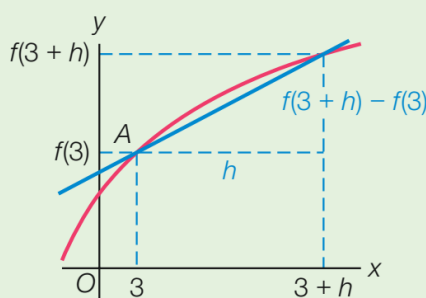
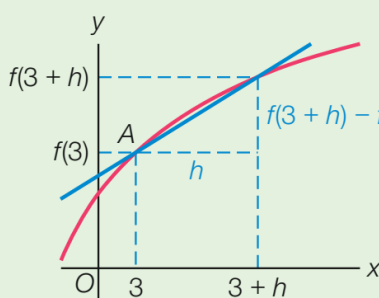
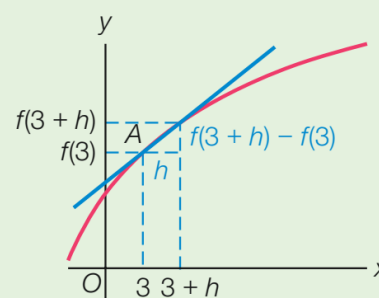
Theorie A Limiet

In de figuur hieronder zie je de grafiek van een functie f en het punt A met x -coördinaat 3 op de grafiek van f . Om de helling van de grafiek van f in A te vinden, kijken we naar het differentiequotient van $f(x)$ op het

interval $[3, 3 + h]$, dus naar $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3 + h) - f(3)}{3 + h - 3} = \frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$.

Neem je op het interval $[3, 3 + h]$ de waarde van h heel klein, dan geeft $\frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$ een goede benadering van de richtingscoëfficiënt van

de raaklijn aan de grafiek van f in A .



De grenswaarde van $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ voor h naar 0
noteren we als $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$.

Uitspraak: **limiet** voor h naar 0 van ...

De helling van de grafiek van $f(x) = 2x^2$ in het punt A met $x_A = 3$ krijg je met behulp van een limiet als volgt.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3+h)^2 - 2 \cdot 3^2}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(9+6h+h^2) - 18}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{18+12h+2h^2-18}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h+2h^2}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12+2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12+2h) = 12\end{aligned}$$

Dus de helling van de grafiek van f in het punt A is 12.

Lim is de afkorting van
limiet. Het Latijnse limes
betekent grens.

R34 Zie de theorie hierboven.



a Waarom kun je niet $h = 0$ nemen bij $\frac{12h+2h^2}{h}$?

b Licht de stap $\lim_{h \rightarrow 0} (12+2h) = 12$ toe.

35 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.



Bereken met behulp van een limiet de helling van de grafiek van f in het punt A met $x_A = 4$.

A36 Gegeven is de functie $f(x) = -3x^2$.



Bereken met behulp van een limiet de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt A met $x_A = 5$.

O37 Gegeven is de functie $f(x) = 3x$.



a De hellinggrafiek van f is een horizontale lijn.

Licht dit toe en geef de formule van de hellinggrafiek van f .

b Bereken $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ en verklaar het resultaat.

Gegeven is de functie $g(x) = 4$.

c Geef de uitkomst van $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Licht je antwoord toe.

Theorie B De afgeleide functie

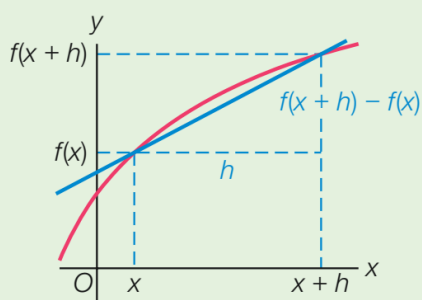
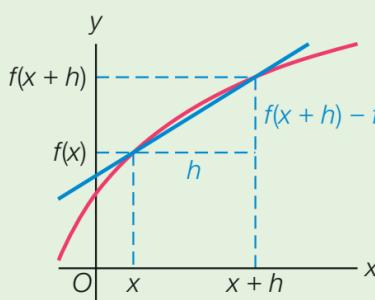
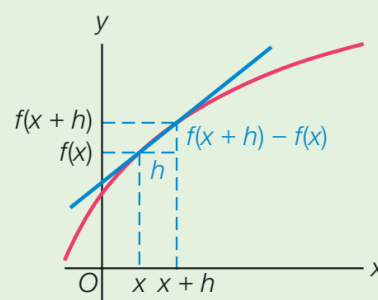
Bij de grafiek van een functie f hoort een hellinggrafiek. En zo hoort bij een functie f een **hellingfunctie**. In plaats van hellingfunctie wordt meestal de naam **afgeleide functie**, kortweg **afgeleide** gebruikt.

De afgeleide van f wordt genoteerd als f' .

Spreek f' uit als f accent.

De afgeleide van een functie f geeft voor elke x

- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het bijbehorende punt
- de helling van de grafiek van f in het bijbehorende punt.



Om de formule van de afgeleide f' te vinden,

bereken je $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

De afgeleide is de limiet van het differentiequotient.

DEFINITIE VAN DE AFGELEIDE

De afgeleide f' van een functie f is $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Voorbeeld

Toon met behulp van de definitie van de afgeleide aan dat $f(x) = 0,5x^2$ geeft $f'(x) = x$.

Uitwerking

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,5(x+h)^2 - 0,5x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,5(x^2 + 2xh + h^2) - 0,5x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,5x^2 + xh + 0,5h^2 - 0,5x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{xh + 0,5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x + 0,5h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (x + 0,5h) = x \end{aligned}$$

38



Toon met behulp van de definitie van de afgeleide aan dat

$f(x) = 1,5x^2$ geeft $f'(x) = 3x$.

A39 Gegeven is de functie $f(x) = 0,3x^2$.

- ⊗ *** **a** Bereken $f'(x)$ met behulp van de definitie van de afgeleide en bereken hiermee $f'(6)$.
b Bereken voor welke waarde van x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 6.

40 Bewijs met behulp van de definitie van de afgeleide dat

- ⊗ *** **a** $f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$
b $f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$
c $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$.

41 Er geldt $(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$.

- ⊗ *** **a** Toon dit aan.
b Bewijs met behulp van de definitie van de afgeleide dat $f(x) = x^3$ geeft $f'(x) = 3x^2$.

42 In deze opgave ga je de volgende regel bewijzen:

□ ⊗ * $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$.

Vul in.

$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot g(x+h) - c \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot (\dots\dots\dots)}{h} = c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dots\dots\dots}{h} = c \cdot g'(x) \end{aligned}$$

43 In deze opgave ga je de **somregel** bewijzen:

□ ⊗ * $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Vul in.

$$\begin{aligned} s(x) = f(x) + g(x) \text{ geeft } s'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - \dots\dots\dots - \dots\dots\dots}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - \dots\dots\dots + g(x+h) - \dots\dots\dots}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\dots\dots\dots}{h} + \frac{\dots\dots\dots}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

- a** Uit de regels $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$ en $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$ volgt dat $h(x) = 10x^2$ geeft $h'(x) = 20x$. Licht dit toe.
- b** De afgeleide van $h(x) = 5x^2 + 6x + 4$ is $h'(x) = 10x + 6$. Uit welke regels volgt dit?

Theorie C Differentiëren

In opgave 40c heb je bewezen dat $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$.
 In opgave 41 heb je bewezen dat $f(x) = x^3$ geeft $f'(x) = 3x^2$.
 Het berekenen van de afgeleide van $f(x) = x^4$ gaat als volgt.
 Hierbij gebruiken we dat $(x + h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$.

$$\begin{aligned} f(x) = x^4 \text{ geeft } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

Door op deze manier door te gaan, kun je bewijzen dat $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ geldt voor $n = 2, 3, 4, \dots$

Het berekenen van de afgeleide heet **differentiëren**.

REGELS VOOR HET DIFFERENTIËREN

$$f(x) = a \text{ geeft } f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax \text{ geeft } f'(x) = a$$

$$f(x) = x^n \text{ geeft } f'(x) = nx^{n-1} \text{ voor } n = 2, 3, 4, \dots$$

$$f(x) = c \cdot g(x) \text{ geeft } f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$s(x) = f(x) + g(x) \text{ geeft } s'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{somregel}$$

De laatste twee regels heb je in de opgaven 42 en 43 bewezen.
 In opgave 44 heb je gezien dat je $h(x) = 10x^2$ kunt differentiëren door de derde en de vierde regel te combineren.

Voor de afgeleide van $f(x) = 6x^5 + 5x^2 - 6x + 8$ bereken je term voor term de afgeleide.
 Dus $f'(x) = 6 \cdot 5x^4 + 5 \cdot 2x - 6 = 30x^4 + 10x - 6$.

oude exponent ervoor

$$f(x) = 4x^3 \text{ geeft } f'(x) = 4 \cdot 3x^2$$

nieuwe exponent 1 minder

In het voorbeeld wordt bij onderdeel c de afgeleide van $h(x) = 3px^5 - 5x + p$ berekend. Hierbij is p een constante. Daarom is de afgeleide van $3px^5$ gelijk aan $3p \cdot 5x^4 = 15px^4$ en is de afgeleide van p gelijk aan 0.

$$h(x) = 3px^5 - 5x + p$$

$$h'(x) = 3p \cdot 5x^4 - 5$$

Voorbeeld

Differentieer.

- a $f(x) = -5x^7 + 2x^4 - x - 9$
- b $g(x) = (3x^4 - 1)(5x^2 + 2)$
- c $h(x) = 3px^5 - 5x + p$
- d $k(t) = at^3 - 4t^2 + 3t - 2$

Uitwerking

- a $f(x) = -5x^7 + 2x^4 - x - 9$ geeft $f'(x) = -35x^6 + 8x^3 - 1$
- b $g(x) = (3x^4 - 1)(5x^2 + 2) = 15x^6 + 6x^4 - 5x^2 - 2$ geeft $g'(x) = 90x^5 + 24x^3 - 10x$
- c $h(x) = 3px^5 - 5x + p$ geeft $h'(x) = 15px^4 - 5$
- d $k(t) = at^3 - 4t^2 + 3t - 2$ geeft $k'(t) = 3at^2 - 8t + 3$

R45 Uit welke regels voor het differentiëren volgt de **verschilregel**

$v(x) = f(x) - g(x)$ geeft $v'(x) = f'(x) - g'(x)$?

46 Bereken de afgeleide.

- a $f(x) = 5x^6 - 3x^5 + 2x - 7$
- b $g(x) = (3x + 6)^2 - 8x$
- c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(2x - 1)$
- d $k(q) = 1 + 3q - 3q^2 - 5aq^7$

A47 Differentieer.

- a $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x)$
- b $g(x) = (3x^3 - 1)^2$
- c $h(x) = (5x^5 - 3)(3x - 2)$
- d $k(x) = 5p - 3(x^4 - x)(x + 1)$
- e $l(t) = (5t^3 - t)(3t^5 + t)$
- f $m(q) = 1 - (3q^2 - 2)^2$

48 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 5$.

De formule van de hellinggrafiek is $y = -1\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

- a Licht dit toe.
- b Bereken met de formule van de hellinggrafiek de helling voor $x = 4$.
- c Bereken algebraïsch voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -1 .

A49 Gegeven is de functie $f(x) = 2x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1)$.



- a** Bereken algebraïsch de helling voor $x = -1$.
b Bereken algebraïsch voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan $2\frac{1}{2}$.

A50 **a** De helling van de grafiek van $f(x) = ax^4 - 3x^2 + 2ax$ in het punt A met $x_A = 2$ is gelijk aan 5.



Bereken a .

- b** De lijn k met $rc_k = 1$ raakt de grafiek van $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + 5$ in het punt B met $x_B = 6$.
Bereken b .

- c** De helling van de grafiek van $h(x) = px^3 - 2x^2 + 4$ in het punt $A(1, q)$ is gelijk aan 8.
Bereken p en q .

A51 Gegeven is dat $h(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ geeft $h'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.



Bereken de afgeleide van de functie $k(x) = \frac{4x-2}{3x+3}$.

Geschiedenis Johannes Hudde

Johannes Hudde (1628-1704) was een veelzijdig man met grote belangstelling voor wiskunde, natuurkunde, techniek en sterrenkunde. Het grootste deel van zijn leven was hij burgemeester van Amsterdam.

Bekend is Huddes methode om toppen te bepalen van grafieken van functies met gehele machten van x , zoals bijvoorbeeld $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$. De door hem bedachte methode wordt de regel van Hudde genoemd.

Hudde gebruikte hierbij onbewust de afgeleide van dit soort functies. Het toepassen van zijn regel op de functie $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ leidt tot het oplossen van de vergelijking $6x^2 - 6 = 0$, dus tot het oplossen van $f'(x) = 0$. De oplossingen $x = -1$ en $x = 1$ zijn de x -coördinaten van de toppen van de grafiek van f .



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan de definitie van de afgeleide gebruiken.

► OPGAVE C8
THEORIE A,B

☐ Ik ken de volgende regels voor het differentiëren:

$f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$

$f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$

$f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ voor $n = 2, 3, 4, \dots$

$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$

$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$

► OPGAVE C9
THEORIE C

☐ Ik kan algebraïsch voor elke x de helling van de grafiek in het bijbehorende punt berekenen.

► OPGAVE C10a
OPGAVE 48

☐ Ik kan algebraïsch de x -coördinaat van een punt berekenen waarin de helling van de grafiek gegeven is.

► OPGAVE C10b
OPGAVE 48

C8 Toon met behulp van de definitie van de afgeleide aan dat $f(x) = 0,1x^2$ geeft $f'(x) = 0,2x$.

C9 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$

c $h(x) = 3(2x^3 + 1)^2$

b $g(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$

d $k(n) = an^5 - 2n^3 + 6an$

C10 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x - 7$.

a Bereken algebraïsch de helling voor $x = -3$.

b Bereken algebraïsch voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -4 .

Antwoorden

C8 *

C9 a $f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2$

c $h'(x) = 72x^5 + 36x^2$

b $g'(t) = -t^2 + 13t$

d $k'(n) = 5an^4 - 6n^2 + 6a$

C10 a -1

b $x = 0 \vee x = -2$

2.4 De productregel en de quotiëntregel

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij het berekenen van de afgeleide gebruikmaken van de productregel.
- Je kunt bij het berekenen van de afgeleide gebruikmaken van de quotiëntregel.

O52 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x - 7$ en $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.



- a** Bereken $p'(x)$, $f'(x)$ en $g'(x)$.
b Onderzoek of $p'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$.
c Laat zien dat $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Theorie A De productregel

Het product van de functies f en g is de functie $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.
Om de functie p te differentiëren, gebruik je de **productregel**.

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ geeft } p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$



afgeleide eerste maal tweede plus eerste maal afgeleide tweede

In het voorbeeld wordt de afgeleide van de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x^3 + 2x + 3)$ met de productregel berekend.
Bij deze functie kun je f' ook berekenen door eerst de haakjes weg te werken. Later kom je echter functies tegen waarbij dit niet mogelijk is. Het gebruik van de productregel is dan noodzakelijk.
In het voorbeeld komt de notatie $[x^2 - 4]'$ voor. Hiermee wordt de afgeleide van $x^2 - 4$ bedoeld. Dus $[x^2 - 4]' = 2x$.

Voorbeeld

Bereken met de productregel de afgeleide van $f(x) = (x^2 - 4)(x^3 + 2x + 3)$.

Aanpak

De productregel geeft

$$f'(x) = [x^2 - 4]' \cdot (x^3 + 2x + 3) + (x^2 - 4) \cdot [x^3 + 2x + 3]'$$

Uitwerking

$f(x) = (x^2 - 4)(x^3 + 2x + 3)$ geeft

$$f'(x) = 2x(x^3 + 2x + 3) + (x^2 - 4)(3x^2 + 2)$$

$[x^3 + 2x + 3]'$ betekent de afgeleide van $x^3 + 2x + 3$.
Dus $[x^3 + 2x + 3]' = 3x^2 + 2$.

53 Bereken met de productregel de afgeleide van de volgende functies.

□ ⊗ * Laat in het antwoord de haakjes staan.

a $f(x) = (2 - 3x^2)(2 + 7x)$

c $h(x) = (x^2 - 3x)(x^3 + x^2 + x)$

b $g(x) = (2x - 5)^2$

d $k(x) = (3x^2 - 4)^2$

54 Je weet $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$. Hieruit volgt $[\sqrt{x}]' \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot [\sqrt{x}]' = 1$.

***** **a** Licht dit toe en bereken de afgeleide van $f(x) = \sqrt{x}$.

b Bereken op dezelfde manier de afgeleide van $g(x) = \sqrt{2x - 1}$ en van $h(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

A55 Gegeven is dat $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ geeft $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$.

□ ⊗ * Bereken exact de helling van de grafiek van de functie $g(x) = (2x - 1)\sqrt{x^2 + 5}$ voor $x = 2$.

E56 **a** De functie $p(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ is te schrijven als $p(x) = k(x) \cdot h(x)$ waarbij $k(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Toon door herhaald gebruik van de productregel aan dat $p = fgh$ geeft $p' = f'gh + fg'h + fgh'$.

b De functie p is het product van de functies f, g, h en k , dus $p(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot k(x)$. Geef de formule van p' .

De productregel in het kort is $[f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Informatief Bewijs van de productregel

Bij het bewijs van de productregel gebruik je de definitie van de afgeleide. $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft

$$\begin{aligned}
 p'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - \overbrace{f(x) \cdot g(x+h)}^{\text{erf}} + \overbrace{f(x) \cdot g(x+h)}^{\text{erbij}} - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)
 \end{aligned}$$

Gegeven is de functie $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$.

Je kunt deze functie differentiëren door de productregel te gebruiken.

Daartoe vermenigvuldig je het linker- en rechterlid met $n(x)$.

Zo krijg je $q(x) \cdot n(x) = t(x)$.

a Differentieer beide leden van $q(x) \cdot n(x) = t(x)$.

b Toon aan dat uit vraag a volgt $q'(x) = \frac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$.

c Substitueer $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ in $q'(x) = \frac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$ en herleid dit tot

$$q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}.$$

Theorie B De quotiëntregel

Het quotiënt van de functies $t(x) = 2x^2 + 1$ en

$n(x) = 3x + 5$ is de functie $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} = \frac{2x^2 + 1}{3x + 5}$.

Om de afgeleide van q te berekenen, gebruik je de **quotiëntregel**. Deze regel heb je in opgave 57 bewezen.

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \text{ geeft } q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

De quotiëntregel in het

$$\text{kort is } \left[\frac{t}{n} \right]' = \frac{nt' - tn'}{n^2}.$$

Om de quotiëntregel makkelijk te kunnen onthouden, kun je hem als volgt schrijven.

$$\left[\frac{t}{n} \right]' = \frac{n \cdot at - t \cdot an}{n^2} = \frac{\text{nat min tan}}{n^2}.$$

$n \cdot at$ betekent **n**oemer **a**fgeleide **t**eller.
 $t \cdot an$ betekent **t**eller **a**fgeleide **n**oemer.

$$\text{Dus } q(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x + 5} \text{ geeft } q'(x) = \frac{\overbrace{(3x + 5)}^n \cdot \overbrace{[2x^2 + 1]'}^{t'} - \overbrace{(2x^2 + 1)}^t \cdot \overbrace{[3x + 5]'}^{n'}}{\underbrace{(3x + 5)^2}_{n^2}} =$$

$$\frac{(3x + 5) \cdot 4x - (2x^2 + 1) \cdot 3}{(3x + 5)^2} = \frac{12x^2 + 20x - 6x^2 - 3}{(3x + 5)^2} = \frac{6x^2 + 20x - 3}{(3x + 5)^2}$$

Werk alleen in de teller de haakjes weg.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = \frac{3}{2x^2 + 1}$

b $g(x) = \frac{2x + 1}{3x - 1}$

Uitwerking

a $f(x) = \frac{3}{2x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(2x^2 + 1) \cdot 0 - 3 \cdot 4x}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{-12x}{(2x^2 + 1)^2}$

b $g(x) = \frac{2x + 1}{3x - 1}$ geeft $g'(x) = \frac{(3x - 1) \cdot 2 - (2x + 1) \cdot 3}{(3x - 1)^2} = \frac{6x - 2 - 6x - 3}{(3x - 1)^2} = \frac{-5}{(3x - 1)^2}$

58 Differentieer.



a $f(x) = \frac{x - 2}{x + 5}$

c $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 + 1}$

e $f(x) = \frac{3 - x^2}{x - 2} + x^3$

b $f(x) = \frac{2}{2x - 1}$

d $f(x) = \frac{x - 2}{3 - x^2}$

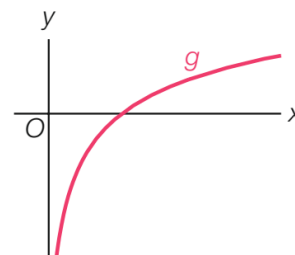
f $f(x) = x - \frac{2}{x + 4}$

A59 Gegeven is dat $f(x) = \sqrt{6x}$ geeft $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{6x}}$.



Bereken exact de helling van de grafiek van de functie

$g(x) = \frac{3x - 1}{\sqrt{6x}}$ voor $x = \frac{1}{6}$.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan bij het berekenen van de afgeleide gebruikmaken van de productregel.

► **OPGAVE C11**
THEORIE A

☐ Ik kan bij het berekenen van de afgeleide gebruikmaken van de quotiëntregel.

► **OPGAVE C12**
THEORIE B

C11 Bereken met de productregel de afgeleide van de functie $f(x) = (x^2 + x)(2x^2 - x)$. Laat in het antwoord de haakjes staan.

C12 Differentieer de functie $f(x) = \frac{x^2 + x}{2x^2 - 1}$.

Antwoorden

C11 $f'(x) = (2x + 1)(2x^2 - x) + (x^2 + x)(4x - 1)$

C12 $f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x - 1}{(2x^2 - 1)^2}$

2.5 Afgeleide, raaklijn en snelheid

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de formule opstellen van een raaklijn in een punt waarvan de x-coördinaat is gegeven.
- Je kunt de formule opstellen van een raaklijn waarvan de richtingscoëfficiënt is gegeven.
- Je kunt bij tijd-afstandformules algebraïsch snelheden berekenen.

60



Op de grafiek van $f(x) = x^2 - 3x - 1$ ligt het punt A met $x_A = 4$.

a Bereken $f'(x)$, $f'(4)$ en $f(4)$.

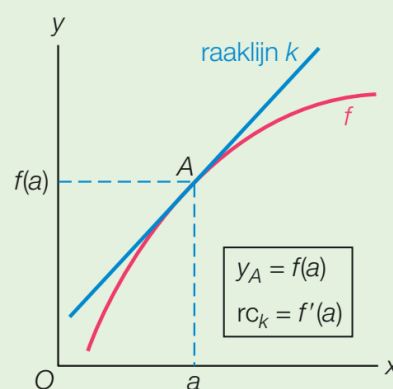
b Floris wil y_A weten. Is dat $f'(4)$ of $f(4)$?

c Bastiaan wil de helling in A weten. Is dat $f'(4)$ of $f(4)$?

Theorie A Raaklijn en afgeleide

Raakt de lijn k de grafiek van een functie f in het punt A met x-coördinaat a , dan is de richtingscoëfficiënt van k gelijk aan $f'(a)$. Dus $rc_k = f'(a)$.

Door vervolgens te gebruiken dat $A(x_A, y_A) = A(a, f(a))$ behalve op de grafiek van f ook op k ligt, kun je de formule van k opstellen.



Op de grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ ligt het punt A met $x_A = 4$. Zie de figuur hiernaast.

Je krijgt y_A door $f(4)$ te berekenen.

$f(4) = 3$, dus $A(4, 3)$.

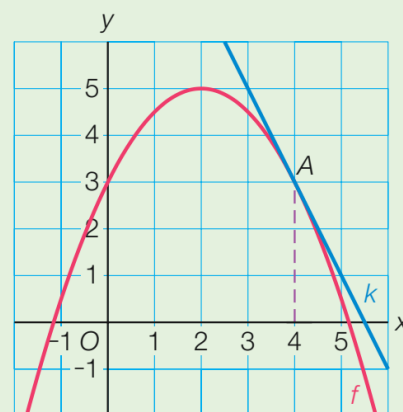
Met $f'(4)$ krijg je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k in A .

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ geeft $f'(x) = -x + 2$,

dus $rc_k = f'(4) = -4 + 2 = -2$.

$$\begin{aligned} k: y &= -2x + b \\ \text{door } A(4, 3) \quad &\left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 4 + b = 3 \\ -8 + b = 3 \\ b = 11 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dus $k: y = -2x + 11$.



Lijn k raakt de grafiek van f in A .
 $y_A = f(4)$ en $rc_k = f'(4)$.

Je hebt op deze manier *algebraïsch* de formule van de raaklijn opgesteld.

We zeggen ook dat je de formule van de raaklijn *langs algebraïsche weg* hebt opgesteld.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x + 3$.

Op de grafiek van f ligt het punt P met $x_P = -2$.

Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in P .

Uitwerking

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x + 3 \text{ geeft } f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 4$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(-2) = 2$$

$$f'(-2) = 1\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 4 = 2$$

$$y = 2x + b$$

$$f(-2) = 7, \text{ dus } P(-2, 7) \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot -2 + b = 7 \\ -4 + b = 7 \end{array} \right.$$

$$b = 11$$

Dus $k: y = 2x + 11$.

- 61** a Op de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2$ ligt het punt A met $x_A = 4$.

Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in A .

- b Op de grafiek van de functie $g(x) = 2x^2 - 6x$ ligt het punt $B(-1, 8)$.
Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn l in B .

- c De grafiek van de functie $h(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$ snijdt de x -as behalve in de oorsprong ook nog in het punt P .

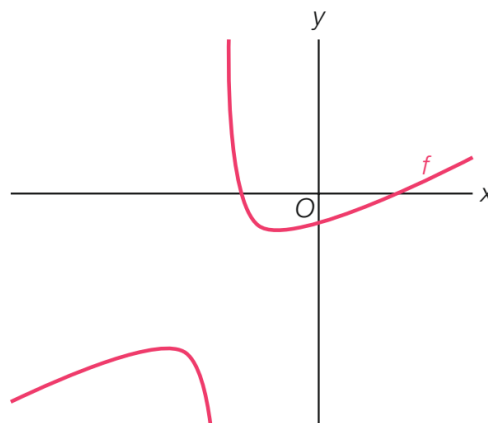
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn m in P .

- 62** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x + 5}$.

- a De grafiek van f snijdt de x -as in de punten $A(-2, 0)$ en $B(2, 0)$.

Stel langs algebraïsche weg de formules op van de raaklijnen k en l in A en B .

- b De grafiek van f snijdt de y -as in het punt C .
Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn m in C .



- A63** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 4}$.

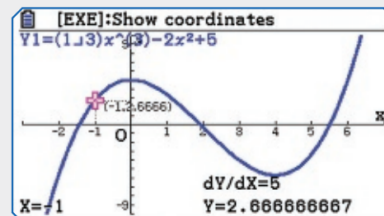
De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A en de x -as in het punt $B(2\frac{1}{2}, 0)$.

Onderzoek algebraïsch of de raaklijn k in A de grafiek in B snijdt.

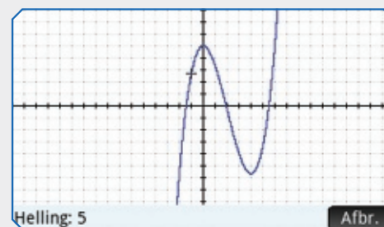
Informatief Helling berekenen met de GR

Om na te gaan of je de helling in een punt van de grafiek juist berekend hebt, kun je de GR gebruiken. De GR heeft namelijk een optie om bij een gegeven functie de helling voor een willekeurige x te berekenen. Hieronder staat hoe je bij de verschillende typen deze optie kunt gebruiken. Daarbij gaan we ervan uit dat je een grafiek hebt geplot op het grafiekscherm. Op de schermen hieronder is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5$ geplot en is de helling berekend voor $x = -1$. Deze helling is 5.

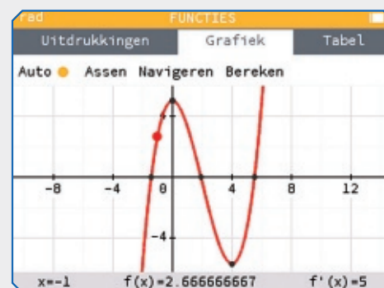
Bij de Casio zet je in het SET-UP-menu Derivative op ON. Op deze manier krijg je met Trace telkens na het invoeren van een x -waarde niet alleen de y -waarde, maar ook de helling.



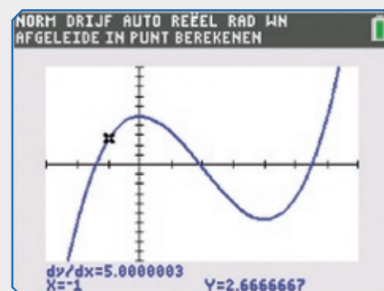
Bij de HP kies je Menu, Fcn en Helling. Na het invoeren van x -waardes krijg je telkens de bijbehorende helling totdat je Annuleer kiest.



Bij de NumWorks kies je in de Toolbox voor Afgeleiden en zet je Eerste afgeleide waarde aan. Na het invoeren van een x -waarde krijg je dan telkens niet alleen de y -waarde, maar ook de helling.



Bij de TI kies je in het calc-menu de optie dy/dx . Na het invoeren van een x -waarde krijg je de helling. Om bij een andere x -waarde de helling te krijgen, kies je weer de optie dy/dx .



Let op dat deze optie enkel ter controle gebruikt mag worden en niet een onderdeel mag zijn van de genoteerde uitwerking.

A64 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$.



a De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -3$.

Stel algebraïsch de formule van k op.

b De grafiek van f snijdt de y -as in het punt B .

Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn l in B .

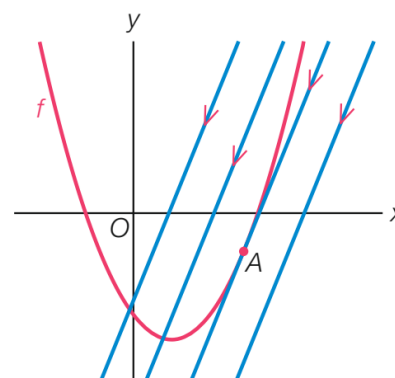
c De grafiek van f snijdt de x -as in drie punten. Het snijpunt met de positieve x -coördinaat is C .

Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn m in C .

A65 Voor elke $a \neq 0$ is gegeven de functie $f(x) = x^3 + ax^2 + a^2x$ en het punt A met $x_A = a$ op de grafiek van f . De lijn k raakt de grafiek van f in A en snijdt de y -as in het punt B . Druk y_B uit in a .

O66 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 2x - 5$ en een aantal evenwijdige lijnen met richtingscoëfficiënt 4. Eén van de lijnen raakt de grafiek van f in het punt A . Je gaat van deze lijn de formule opstellen. De formule van de raaklijn in A is van de vorm $y = 4x + b$.

- Licht dit toe.
- Licht toe dat $f'(x_A) = 4$ en bereken x_A met behulp van deze vergelijking.
- Bereken y_A .
- Gebruik de coördinaten van A om b te berekenen en schrijf de formule van de raaklijn in A op.



Theorie B Raaklijn met gegeven richtingscoëfficiënt

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x$, de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt A en de lijn l die de grafiek van f raakt in het punt B . De lijnen k en l hebben richtingscoëfficiënt 2.

Om de formules van k en l op te stellen, gebruik je dat $f'(x_A) = 2$ en $f'(x_B) = 2$. Om x_A en x_B te berekenen, los je dus de vergelijking $f'(x) = 2$ op.

Algebraïsch gaat dat als volgt.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x \text{ geeft } f'(x) = x^2 - 2x - 1$$

$$f'(x) = 2 \text{ geeft } x^2 - 2x - 1 = 2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

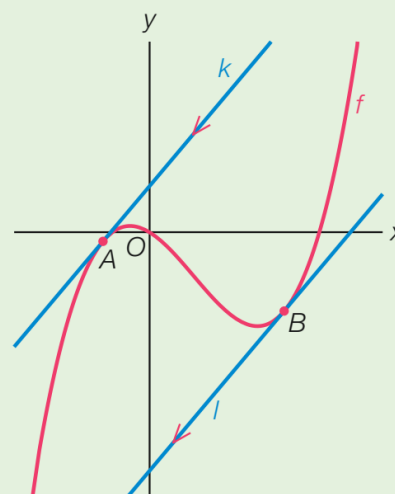
$$x = -1 \vee x = 3$$

$x_A = -1$ en dit geeft $y_A = f(-1) = -\frac{1}{3}$ en $A(-1, -\frac{1}{3})$.

Dit geeft de lijn k : $y = 2x + 1\frac{2}{3}$.

$x_B = 3$ en dit geeft $y_B = f(3) = -3$ en $B(3, -3)$.

Dit geeft de lijn l : $y = 2x - 9$.



Op de vorige bladzijde zijn alle berekeningen gedaan zonder gebruik te maken van speciale opties van de GR. Op deze manier zijn *langs algebraïsche weg* de formules van de raaklijnen opgesteld.

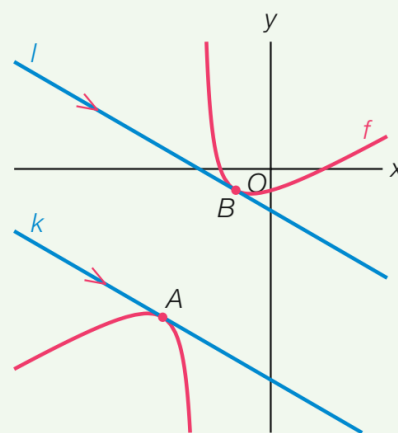
Wordt gevraagd om een formule van een raaklijn op te stellen *met behulp van de afgeleide* of *met behulp van differentiëren*, dan bereken je in elk geval de afgeleide. Daarna mag je bijvoorbeeld wel een vergelijking met de GR oplossen door gebruik te maken van de optie snijpunt. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 2}$.

De lijnen k en l met richtingscoëfficiënt -1 raken de grafiek van f in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.

Stel met behulp van de afgeleide de formules van k en l op.



Uitwerking

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 2} \text{ geeft}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+2) \cdot 2x - (x^2 - 2) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 4x + 2}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Los op $f'(x) = -1$.

Invoeren van de formule van f' en $y = -1$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = -3$ en $x = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -x + b \\ f(-3) = -7, \text{ dus } A(-3, -7) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 \cdot -3 + b = -7 \\ 3 + b = -7 \\ b = -10 \end{array}$$

Dus $k: y = -x - 10$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -x + b \\ f(-1) = -1, \text{ dus } B(-1, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 \cdot -1 + b = -1 \\ 1 + b = -1 \\ b = -2 \end{array}$$

Dus $l: y = -x - 2$.

67

- a** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
De lijn k met richtingscoëfficiënt 4 raakt de grafiek van f .
Stel algebraïsch de formule van k op.
- b** Gegeven is de functie $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10x + 6$.
De lijnen l en m zijn evenwijdig met de lijn $n: y = -4x + 2$
en raken de grafiek van g in de punten A en B .
Stel langs algebraïsche weg de formules van l en m op.

68

- Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.
De lijnen k en l met richtingscoëfficiënt $-\frac{3}{4}$ raken de grafiek van f
in de punten A en B .
Stel met behulp van differentiëren de formules van k en l op.

69

- Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$.
- a** Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = -3$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in A .
- b** De lijnen l en m zijn evenwijdig met de lijn $n: y = 3x + 6$ en raken
de grafiek van f in de punten B en C .
Stel algebraïsch de formules van l en m op.
- c** In de punten D en E van de grafiek van f is de helling gelijk aan 8.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn p door D en E .
- d** De lijn $q: y = -2x + \frac{7}{8}$ snijdt de grafiek van f in het punt F .
De lijn r raakt de grafiek van f in F .
Stel met behulp van differentiëren de formule van r op.

A70

- Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2-3}{2-x}$.
- a** De lijnen k en l met richtingscoëfficiënt 3 raken de grafiek van f in
de punten A en B .
Stel met behulp van de afgeleide de formules van k en l op.
- b** Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn m in het
snijpunt C van de grafiek van f met de y -as.
- c** De grafiek van f heeft twee horizontale raaklijnen.
Bereken met behulp van de afgeleide de afstand tussen deze twee
horizontale raaklijnen.

A71

- a** Bereken exact voor welke waarden van p de grafiek van
 $f_p(x) = x^3 + px^2 + 2x - 3$ twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -1
heeft.
- b** Bereken exact voor welke waarden van p de grafiek van
 $g_p(x) = px^3 + 4x^2 - 4x$ twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -6 heeft.

A72 Gegeven is de functie $f(x) = ax^2 + bx$.

- * **a** Voor welke a en b raakt de lijn k met richtingscoëfficiënt 3 de grafiek van f in het punt $A(2, 4)$?
- b** Voor welke a en b is het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[0, 2]$ gelijk aan 4 en op $[1, 3]$ gelijk aan 5?

O73 Gegeven is de formule $s = -\frac{1}{6}t^3 + 3t^2$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden met $0 \leq t \leq 10$. Bereken de snelheid waarmee s verandert voor $t = 6$ en licht toe dat deze snelheid wordt uitgedrukt in m/s.

De afgeleide van s noteer je als s' .

Theorie C Snelheid en afgeleide

Je hebt geleerd dat de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = a$ gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $(a, f(a))$. En deze richtingscoëfficiënt, dus de snelheid, is $f'(a)$.

Je berekent een snelheid dus met de afgeleide.

$f'(a)$ is de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = a$.

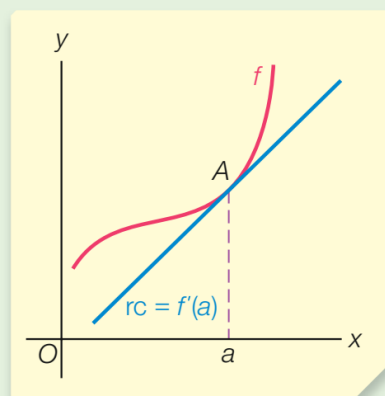
We gaan dit toepassen op een tijd-afstandformule.

Is de afgelegde afstand s in meters na t seconden gegeven door de formule $s = 2t^2 + 4t$, dan is de formule van de snelheid $s' = 4t + 4$.

Het is gebruikelijk de snelheid aan te geven met v .

Dus bij $s = 2t^2 + 4t$ is $v = 4t + 4$.

Op $t = 5$ is de snelheid gelijk aan $v = 4 \cdot 5 + 4 = 24$ m/s.



74 Een auto trekt op. Gedurende de eerste zes seconden is de afgelegde afstand s in meters te berekenen met de formule $s = 0,8t^2$. Hierbij is t de tijd in seconden. Na zes seconden verandert de snelheid niet meer.

- a** Bereken algebraïsch met hoeveel procent de snelheid toeneemt tussen $t = 3$ en $t = 4$.
- b** Bereken algebraïsch na hoeveel seconden de snelheid gelijk is aan 30 km/u. Rond af op twee decimalen.
- c** Hoeveel meter legt de auto in de eerste tien seconden af?

- 75** Een keeper schopt een bal vanuit zijn handen verticaal omhoog. De hoogte h in meters is te berekenen met de formule $h = -5t^2 + 28t + 0,6$. Hierbij is t de tijd in seconden.
- a** Hoeveel seconden duurt het voordat de bal op de grond komt? Rond af op één decimaal.
 - b** Bereken met behulp van de afgeleide de snelheid waarmee de bal op de grond komt. Geef het antwoord in gehele km/u.
 - c** Wat weet je van de snelheid van de bal als deze het hoogste punt heeft bereikt? Na hoeveel seconden is dat het geval?

- A76** Gegeven is de formule $s = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden met $0 \leq t \leq 9$. Bewijs dat er op het interval $[0, 9]$ twee tijdstippen zijn waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 9]$.

- A77** Een auto rijdt weg. Gedurende de eerste vijf seconden wordt de afgelegde afstand s in meters gegeven door de formule $s = a(12t^2 - t^3)$. Hierin is t in seconden en a een constant getal. Na vijf seconden verandert de snelheid niet meer. Het blijkt dat er in de eerste tien seconden 200 meter wordt afgelegd. Bereken algebraïsch de waarde van a .

- A78** Bij een onderzoek naar de hartslagfrequentie van sporters wordt bij een test een zware inspanning geleverd. Het blijkt dat de hartslag direct begint te stijgen, en na het verrichten van de inspanning begint te dalen. In deze opgave gaat het over een zware inspanning die anderhalve minuut duurt. Voor een atleet die aan het onderzoek meedoet geldt de formule

$$F_{\text{atleet}} = \frac{135t + 50}{0,3t^2 + 1}. \text{ Hierin is } F \text{ de hartslagfrequentie in slagen per minuut}$$

en t de tijd in minuten vanaf het begin van de zware inspanning.

Voor een wielrenner die meedoet blijkt te gelden dat

$$F_{\text{wielrenner}} = 1,2 \cdot F_{\text{atleet}}$$

We vragen ons af met welke snelheid de hartslagfrequentie van de wielrenner toeneemt op het moment dat zijn hartslag gelijk is aan de maximale hartslag van de atleet.

Bereken met de afgeleide deze snelheid. Geef je antwoord in slagen per minuut per seconde en rond af op twee decimalen. Gebruik dat bij deze test de maximale hartslag anderhalve minuut na aanvang van de test optreedt.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan de formule opstellen van een raaklijn in een punt waarvan de x-coördinaat is gegeven.

► OPGAVE C13
THEORIE A

☐ Ik kan de formule opstellen van een raaklijn waarvan de richtingscoëfficiënt is gegeven.

► OPGAVE C14
THEORIE B

☐ Ik kan bij tijd-afstandformules algebraïsch snelheden berekenen.

► OPGAVE C15
THEORIE C

C13 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 5x + 3$.

Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = 4$.

C14 a Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 2$. De lijnen k en l met richtingscoëfficiënt 6 raken de grafiek van f in de punten A en B . Stel algebraïsch de formules van k en l op.

b Gegeven is de functie $g(x) = \frac{x}{x-1}$. De lijnen m en n met richtingscoëfficiënt -4 raken de grafiek van g in de punten C en D . Stel met behulp van differentiëren de formules van m en n op.

C15 Gegeven is de formule $s = 1,2t^2 + 0,8t$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden met $0 \leq t \leq 3$. Na drie seconden verandert de snelheid niet meer.

Bereken algebraïsch hoeveel meter in de eerste tien seconden wordt afgelegd.

Antwoorden

C13 $k: y = -3x + 19$

C14 a $k: y = 6x + 20$ en $l: y = 6x - 16$

b $m: y = -4x + 1$ en $n: y = -4x + 9$

C15 69,2 m

In de differentiaalrekening, waarmee je in dit hoofdstuk kennis hebt gemaakt, bestudeert men veranderingen van functies. Daarbij spelen begrippen als snelheid, helling van een grafiek en raaklijn van een grafiek een grote rol.

Het heeft lang geduurd voor men het begrip snelheid wist te doorgronden.

De beroemde geleerden Isaac Newton (1642-1727) en Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) hebben onafhankelijk van elkaar de differentiaalrekening ontwikkeld.

Newton geldt als de grootste en invloedrijkste wetenschapper aller tijden. In zijn belangrijkste werk, de 'Principia Mathematica' uit 1687, zet hij de wiskundige beginselen van de natuurwetenschappen uiteen. Hij verklaart in dit boek hoe het zonnestelsel in elkaar zit en legt er de wetten van de zwaartekracht en de bewegingsleer (mechanica) in vast. Newton werd geboren op 25 december 1642 in Lincolnshire in Engeland. Zijn vader stierf al voor zijn geboorte. Zijn moeder liet hem over aan de zorgen van zijn grootmoeder. Al vroeg werd duidelijk dat hij voor het werk thuis op de boerderij ongeschikt was. Hij had er geen belangstelling voor en verdiepte zich geheel in lezen en knutselen. Newton schreef in 1671 een verhandeling over raaklijnen, maar deze werd pas negen jaar na zijn dood gepubliceerd.



Newton

Leibniz wordt gezien als een van de meest invloedrijke figuren in de westerse cultuur. Behalve aan wiskunde leverde hij ook belangrijke bijdragen aan filosofie, fysica, geologie, rechten, geschiedenis en geneeskunde. Hij was actief als politicus en raadsheer aan het hof van Hannover bij hertog Johann Friedrich. Hij ontwierp nieuwe soorten rijtuigen en drainagesystemen voor de mijnen in de Harz. Ook bedacht hij een manier om fosfor te produceren en was hij de uitvinder van de eerste rekenmachine die in staat was op te tellen, af te trekken, te vermenigvuldigen en te delen. In 1684 publiceerde hij het eerste artikel over de differentiaalrekening. Veel van de huidige notaties in de wiskunde zijn van hem afkomstig.



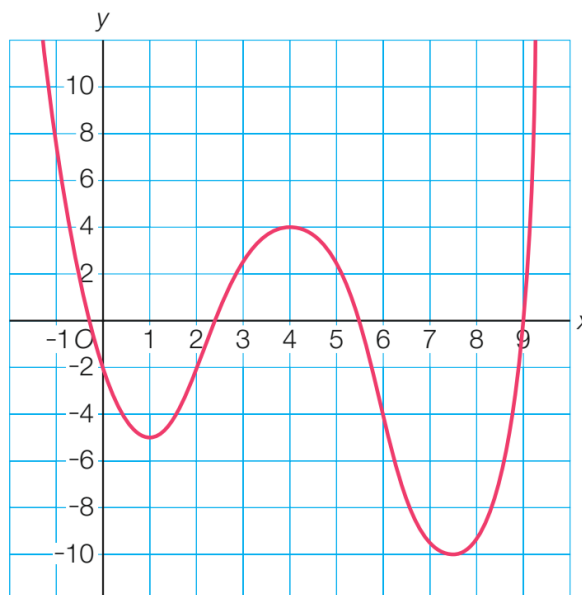
Leibniz

De vraag wie de ontdekker is van de differentiaalrekening heeft heel wat twistgesprekken opgeleverd. Terwijl de Engelsen Newton als de ontdekker beschouwden, ging men er in Duitsland vanuit dat dit Leibniz was. Deze vete heeft zelfs bijna een oorlog veroorzaakt tussen Engeland en Duitsland.

Kennis- en vaardigheidentest

2.1 Snelheden

- 1** Zie de figuur hiernaast.
- Welke soorten van stijgen en dalen kun je in de figuur herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.
 - Bereken de gemiddelde verandering van y op $[1, 4]$.
 - Bereken het differentiequotiënt van y op $[2, 6]$.
 - Hoeveel waarden van p zijn er waarvoor het differentiequotiënt van y op $[0, p]$ gelijk is aan 1? Licht toe.

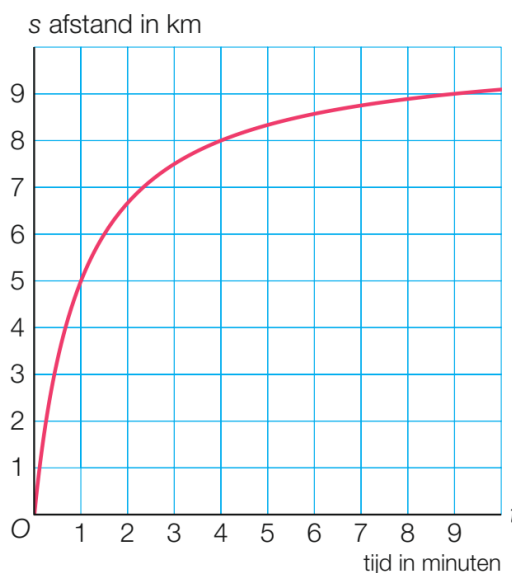


- 2** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 2x$.
- Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op $[1, 4]$.
 - Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-1, 1]$.
 - Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -2$ en $x_B = 3$. Stel de formule op van de lijn l door A en B .

- 3** Gegeven is de tijd-afstandgrafiek in de figuur hiernaast.
- Bereken de gemiddelde snelheid in km/u op $[1, 9]$.
 - Er is een interval $[1, p]$ waarop de gemiddelde snelheid gelijk is aan die op het interval $[0, 9]$. Voor welke p is dat het geval?

Bij de grafiek hoort de formule $s = 10 - \frac{10}{t+1}$.

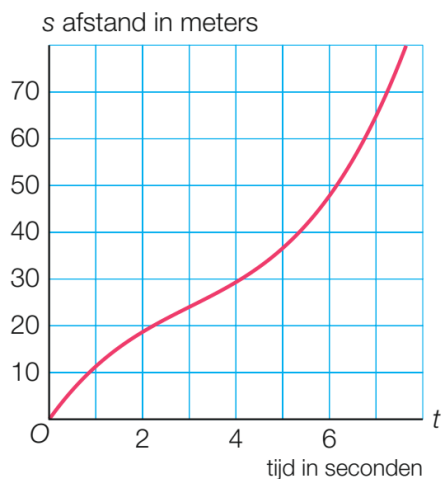
- Benader in km/u de snelheid op $t = 1$. Neem $\Delta t = 0,01$ en rond af op gehele.



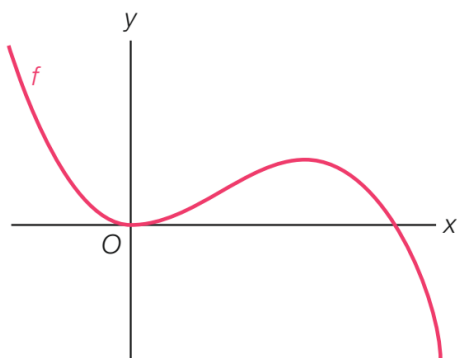
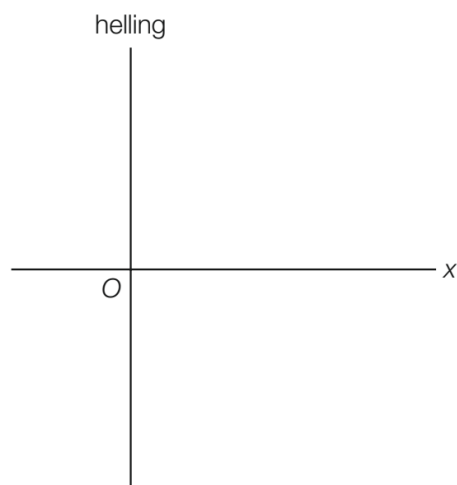
2.2 Raaklijnen en hellinggrafieken

4 **WERKBLAD** Zie de tijd-afstandgrafiek hiernaast.

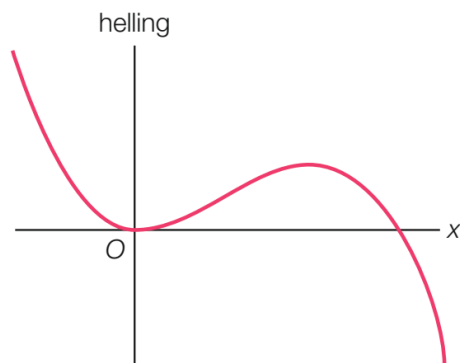
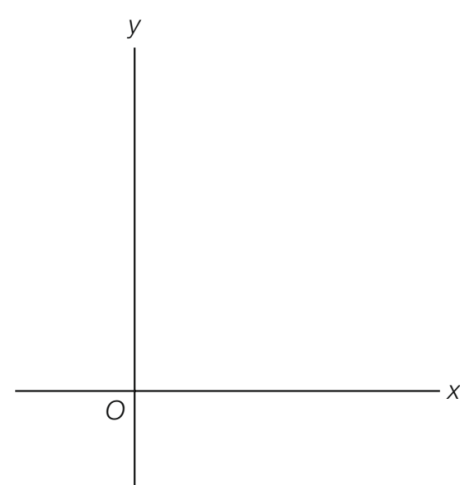
- Bepaal met behulp van de figuur de snelheid op $t = 1$ en op $t = 6$. Rond af op gehele m/s.
- Voor welke t schat je dat de snelheid minimaal is? Hoe groot is deze minimale snelheid in gehele m/s?



- 5 a Hieronder zie je de grafiek van de functie f .
Schets onder de grafiek van f de hellinggrafiek van f .



- b De grafiek van f is de hellinggrafiek van de functie g .
Schets hieronder een mogelijke grafiek van g .



2.3 Limiet en afgeleide

6 Toon met behulp van de definitie van de afgeleide aan dat $f(x) = 5x^2$ geeft $f'(x) = 10x$.

7 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 0,6x^3 - 1,3x^2 + 7$

b $g(p) = 4p^3 + p^2 - 11p + 20$

c $h(x) = x(2x - 1)^2$

d $k(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2(x - a) + 6a^2$

8 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 4x + 5$.

a Bereken algebraïsch de helling van de grafiek van f voor $x = 3$.

b Bereken algebraïsch voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -2 .

9 De helling van de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3px + 1$ in het punt A met $x_A = 2$ is gelijk aan p .
Bereken p .

2.4 De productregel en de quotiëntregel

10 Bereken met de productregel de afgeleide. Laat in het antwoord de haakjes staan.

a $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 7x + 2)$

b $g(x) = (x^3 + 2x + 1)^2$

11 Differentieer.

a $f(x) = \frac{2x - 3}{3x - 1}$

b $g(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1}$

c $h(x) = x^2 - \frac{3}{x + 1}$

2.5 Afgeleide, raaklijn en snelheid

12 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{10x}{x^2 + 1}$.

a Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = 3$.

b De lijnen l en m met richtingscoëfficiënt $4\frac{4}{5}$ raken de grafiek van f in de punten B en C .

Stel met behulp van differentiëren de formules van l en m op.

13 Gegeven is de formule $s = -\frac{1}{6}t^3 + 4t^2$. Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden met $0 \leq t \leq 12$.

a Bereken algebraïsch met hoeveel procent de snelheid toeneemt tussen $t = 4$ en $t = 8$.

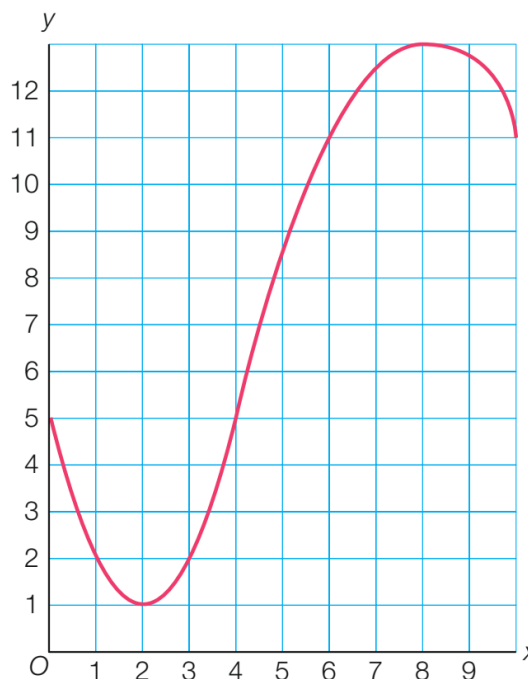
b Bereken algebraïsch na hoeveel seconden de snelheid gelijk is aan 108 km/u .

c Na twaalf seconden verandert de snelheid niet meer.
Bereken hoeveel meter wordt afgelegd in de eerste minuut.

Gemengde opgaven

1 ► **WERKBLAD** Zie de figuur hiernaast.

- Welke soorten van stijgen en dalen kun je herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.
- Voor welke p is de gemiddelde verandering van y op $[p, 10]$ gelijk aan 1?
- Geef het kleinste interval $[a, b]$ met a en b gehele getallen waarop het differentiequotient van y gelijk is aan 0.
- In de punten A en B van de grafiek is de helling gelijk aan 2.
Geef de coördinaten van A en B .
- Onderzoek of er een punt op de grafiek ligt waarin de helling gelijk is aan 6.



- 2** Van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is
- op $[0, 4]$ het differentiequotient gelijk aan 2
 - op $[2, 3]$ het differentiequotient gelijk aan 4.
- Bereken het differentiequotient van $f(x)$ op $[1, 5]$.
 - Voor welke waarde van c is het differentiequotient op $[0, c]$ gelijk aan c ?

3 Gegeven is dat $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ geeft $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

- Bereken exact de helling van de grafiek van de functie $g(x) = (2x + 1)\sqrt{x^2 + 3}$ in het punt A met $x_A = 1$.
- Bewijs dat de helling van de grafiek van de functie $h(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$ in het punt B met $x_B = 1$ gelijk is aan $\frac{5}{8}$.

4 Gegeven is de functie $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x + 3}$.

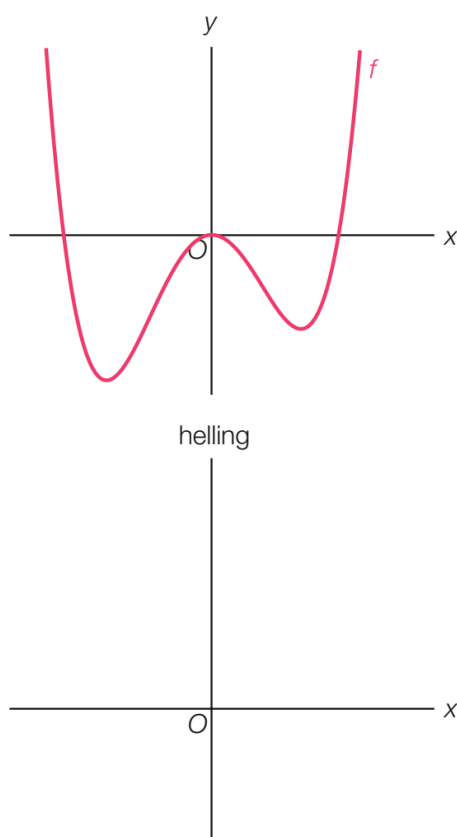
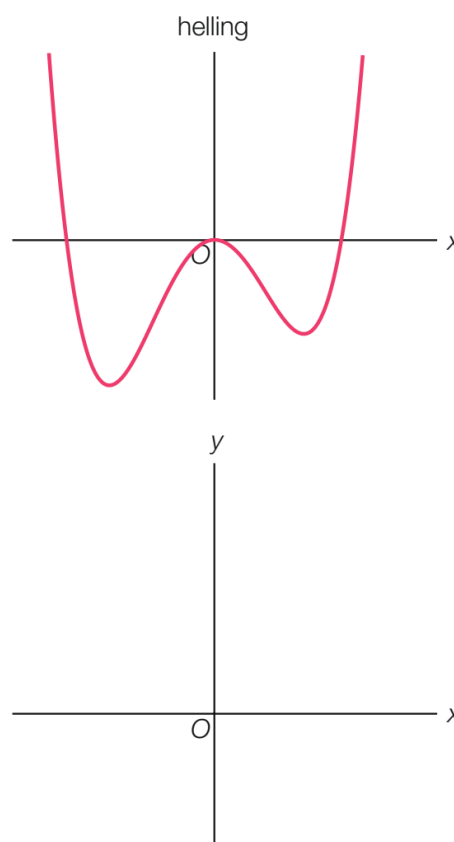
- De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A .
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in A .
- De lijn $y = 3\frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f links van de y -as in het punt B .
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn l in B .
- Er zijn twee punten op de grafiek van f waarin de raaklijn evenwijdig is met de lijn $m: y = -3x + 1$.
Bereken met behulp van de afgeleide de coördinaten van deze punten.

5 Voor elke p is gegeven de functie $f_p(x) = \frac{x^2 - 2x + p}{x - 1}$.

- a** Bereken voor welke p de afgeleide gelijk is aan $f_p'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$.
- b** Bereken voor welke p de helling van de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 3$ gelijk is aan $\frac{1}{4}$.
- c** Bereken met behulp van differentiëren voor welke x de raaklijn aan de grafiek van f_5 evenwijdig is met de lijn $k: y = -3x + 6$.

6 Hieronder zie je de grafiek van de functie f .

- a** Schets onder de grafiek van f de hellinggrafiek van f .
- b** De grafiek van f is de hellinggrafiek van de functie g . Schets hieronder een mogelijke grafiek van g .



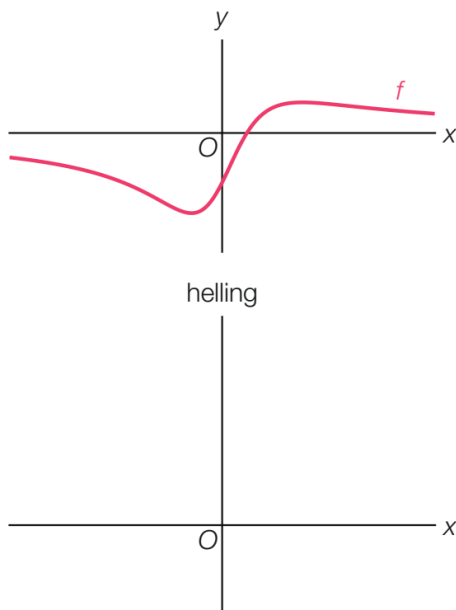
Het functievoorschrift van f is $f(x) = 0,1x^2(2x + 7)(x - 3)$.

De grafiek van f snijdt de x -as rechts van de y -as in het punt A .

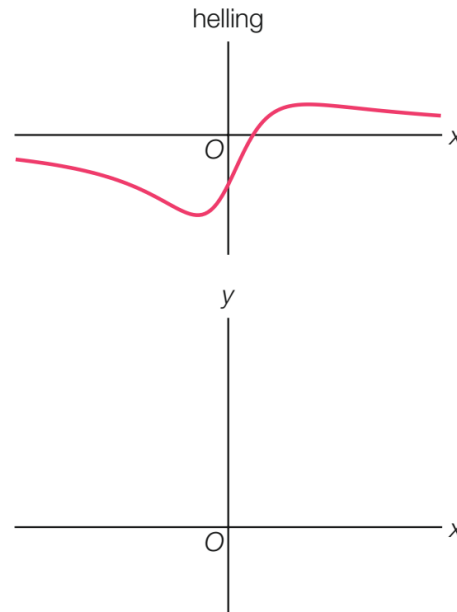
- c** Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in A .
- d** Bereken met behulp van de afgeleide voor welke waarden van x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 1. Rond af op twee decimalen.

7 Hieronder zie je de grafiek van de functie f .

a Schets onder de grafiek van f de hellinggrafiek van f .



b De grafiek van f is de hellinggrafiek van de functie g . Schets hieronder een mogelijke grafiek van g .



Het functievoorschrift van f is $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$.

De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A en de y -as in het punt B .

- c** Onderzoek met behulp van differentiëren of de lijn die de grafiek van f raakt in B door A gaat.
- d** Bereken met behulp van de afgeleide voor welke waarden van x de raaklijnen aan de grafiek van f evenwijdig zijn met de lijn k : $y = \frac{1}{2}x + 1$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

8 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 9)(x + p)$. Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = -2$. De raaklijn k in A is evenwijdig met de lijn l : $y = 7x - 5$. De lijn k snijdt de grafiek van f in het punt B . Bereken de coördinaten van B .

- 9** Een motor trekt op. Gedurende de eerste acht seconden is de afgelegde afstand s in meters te berekenen met de formule $s = 0,06t^3 + 1,2t^2$ met t de tijd in seconden. Na acht seconden verandert de snelheid niet meer.
- a** Bereken algebraïsch met hoeveel procent de snelheid toeneemt tussen $t = 4$ en $t = 6$.
- b** Bereken algebraïsch na hoeveel seconden de snelheid gelijk is aan 90 km/u. Rond af op één decimaal.
- c** Na hoeveel seconden heeft de motor 300 meter afgelegd? Rond af op één decimaal.

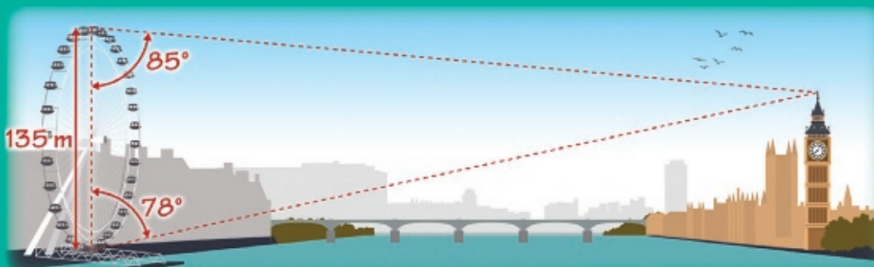


3

Meetkunde

Bram zit in het Millennium Wheel in Londen. Hij vraagt zich af hoe hoog de Big Ben is, die hij aan de overkant van de rivier de Theems ziet. Vanuit het Millennium Wheel heeft hij daartoe twee hoeken gemeten. Zie de figuur hieronder.

Hoe kun je met deze gegevens de hoogte van de Big Ben berekenen?

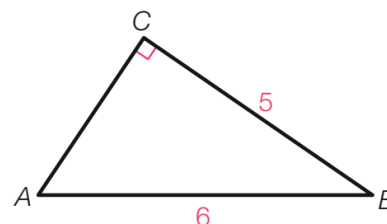


3.1 Berekeningen in driehoeken

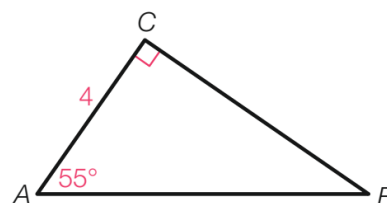
Kennis en vaardigheden

- Je kunt hoeken en lijnstukken berekenen met sinus, cosinus en tangens.
- Je kunt lijnstukken berekenen met de stelling van Pythagoras en met gelijkvormigheid.
- Je kent de volgende meetkundige stellingen:
 - De stelling en de omgekeerde stelling van Thales.
 - De stelling van een raaklijn aan een cirkel.
 - De stelling van de raaklijn in een raakpunt van twee cirkels.
 - De stelling van twee raaklijnen aan een cirkel vanuit een punt.

V1 Zie de rechthoekige driehoek ABC hiernaast. Gebruik je de sinus, de cosinus, de tangens of de stelling van Pythagoras om $\angle A$ te berekenen?

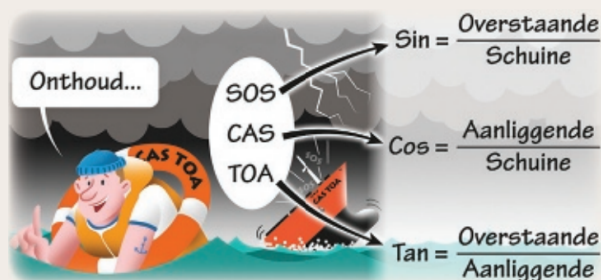


V2 Zie de rechthoekige driehoek ABC hiernaast. Gebruik je de sinus, de cosinus, de tangens of de stelling van Pythagoras om AB te berekenen?



Voorkennis Hoeken en lijnstukken berekenen

Bij hoekberekeningen in rechthoekige driehoeken gebruik je de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens.

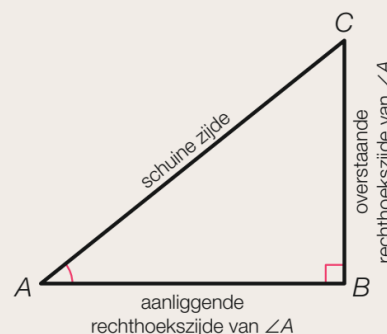


Sinus, cosinus en tangens

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A} = \frac{BC}{AB}$$



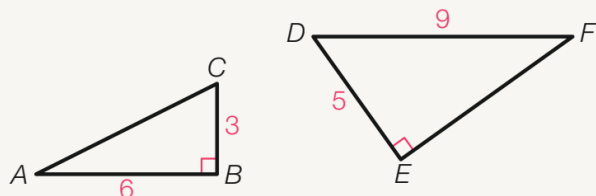
De schuine zijde zit altijd tegenover de rechte hoek.

Om de GR te kunnen gebruiken bij hoekberekeningen stel je deze in op graden. Dit gaat als volgt:

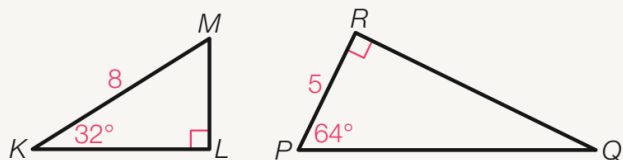
Casio Set up ► Angle ► Deg
 HP Settings ► Hoekmaat ► Graden
 NumWorks Instellingen ► Hoekmaat ► Graden
 TI Mode ► Graden

Voorbeeld

- a** Zie hiernaast.
 Bereken $\angle A$ en $\angle D$.



- b** Zie hiernaast.
 Bereken LM en PQ . Rond af op één decimaal.



Rond bij het berekenen van een hoek af op één decimaal.

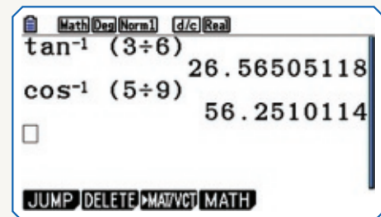
Uitwerking

a $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{6}$ geeft $\angle A \approx 26,6^\circ$

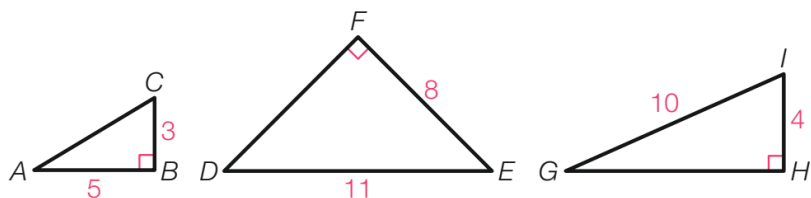
$\cos(\angle D) = \frac{DE}{DF} = \frac{5}{9}$ geeft $\angle D \approx 56,3^\circ$

b $\sin(\angle K) = \frac{LM}{KM}$ geeft $\sin(32^\circ) = \frac{LM}{8}$, dus $LM = 8 \sin(32^\circ) \approx 4,2$.

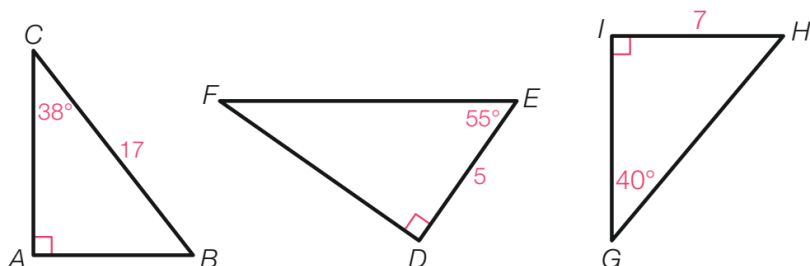
$\cos(\angle P) = \frac{PR}{PQ}$ geeft $\cos(64^\circ) = \frac{5}{PQ}$, dus $PQ = \frac{5}{\cos(64^\circ)} \approx 11,4$.



- V3** Zie hiernaast.
 Bereken $\angle A$, $\angle D$ en $\angle I$.



- V4** Zie hiernaast.
 Bereken AC , DF en GH .
 Rond af op één decimaal.

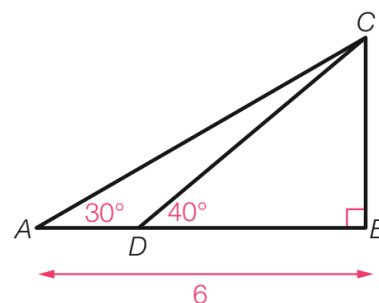


- 01** Van de rechthoekige driehoek ABC hiernaast is $AB = 6$ en $\angle BAC = 30^\circ$. Op AB ligt het punt D met $\angle BDC = 40^\circ$.

We vragen ons af wat de lengte van BD is.

Om BD met een goniometrische verhouding te berekenen in $\triangle BCD$ heb je BC of CD nodig.

- Licht toe dat je BC kunt berekenen in $\triangle ABC$ en bereken BC . Rond af op drie decimalen.
- Welke goniometrische verhouding gebruik je vervolgens in $\triangle BCD$ om BD te berekenen?
- Bereken BD . Rond af op twee decimalen.



Theorie A Goniometrische berekeningen

Met de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens zijn hoeken en lijnstukken te berekenen.

Gebruik je bij berekeningen met de GR tussenresultaten, rond dan de tussenresultaten niet af maar gebruik Ans en lettergeheugens van de GR.

► GR Neem de module **Het gebruik van Ans en lettergeheugens** door.

Afspraak

Rond bij het berekenen van een hoek af op één decimaal.

Om in de rechthoekige driehoek ABC hiernaast $\angle ACE$ te berekenen, ga je als volgt te werk.

- Bereken eerst BC in $\triangle ABC$.

$$\sin(35^\circ) = \frac{BC}{10}, \text{ dus } BC = 10 \sin(35^\circ).$$

- Bereken daarna $\angle BEC$ in $\triangle BCE$.

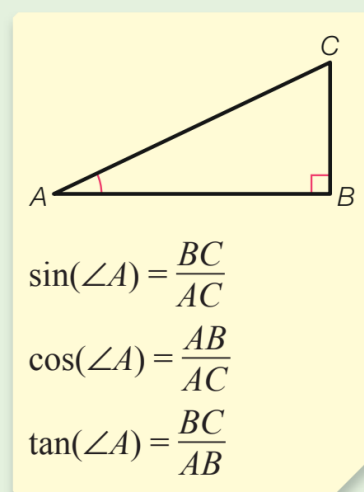
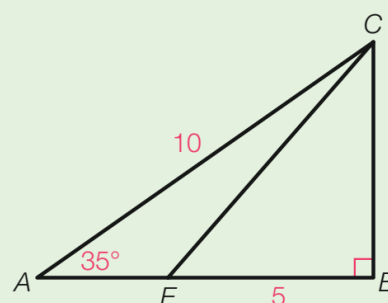
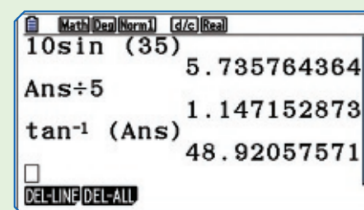
$$\tan(\angle BEC) = \frac{BC}{BE} = \frac{10 \sin(35^\circ)}{5} \text{ geeft}$$

$$\angle BEC = 48,92\dots^\circ$$

- Bereken eerst $\angle AEC$ en daarna $\angle ACE$ in $\triangle AEC$.

$$\angle AEC = 180^\circ - \angle BEC = 180^\circ - 48,92\dots^\circ = 131,07\dots^\circ$$

$$\text{In } \triangle AEC \text{ is } \angle ACE = 180^\circ - 35^\circ - 131,07\dots^\circ \approx 13,9^\circ.$$



Voorbeeld

Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken welk gedeelte BD van AB is. Rond af op twee decimalen.

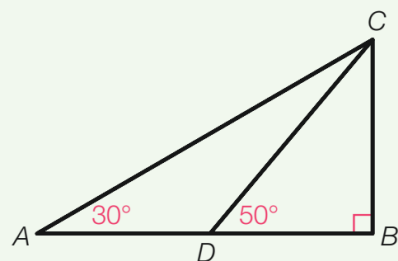
Uitwerking

In $\triangle ABC$ is $\tan(30^\circ) = \frac{BC}{AB}$, dus $BC = AB \tan(30^\circ)$.

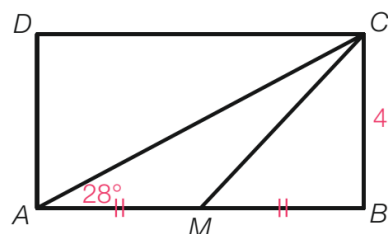
In $\triangle BDC$ is $\tan(50^\circ) = \frac{BC}{BD}$, dus $BD = \frac{BC}{\tan(50^\circ)}$.

Hieruit volgt dat $BD = \frac{AB \tan(30^\circ)}{\tan(50^\circ)} = AB \cdot 0,4844\dots$

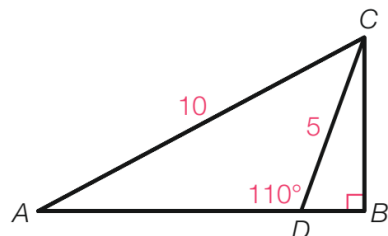
Dus $BD \approx 0,48AB$.



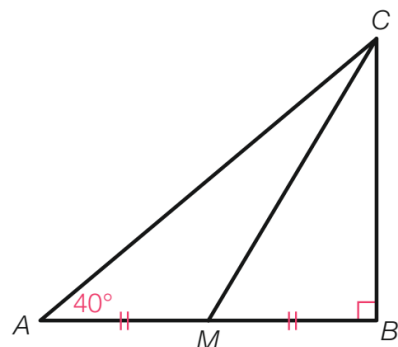
- 2** In de figuur hiernaast is $ABCD$ een rechthoek.
Bereken $\angle BMC$.



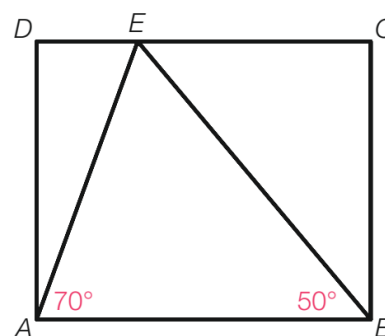
- 3** Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken $\angle ACD$.



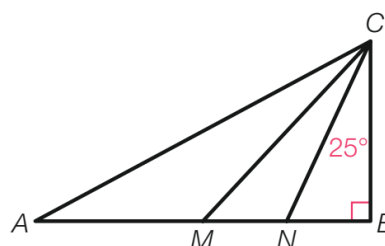
- 4** Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken $\angle BMC$.



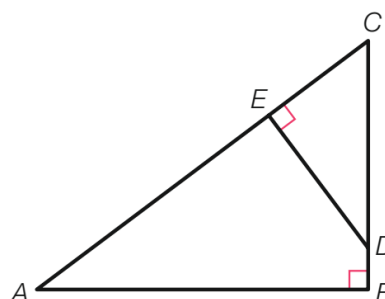
- A5** In de figuur hiernaast is $ABCD$ een rechthoek.
☐⊙* Er geldt $DE : CE = 1 : p$.
 Bereken p . Rond af op twee decimalen.



- A6** Gegeven is $\triangle ABC$ hiernaast met $\angle B = 90^\circ$.
⊙* Het punt M is het midden van AB en het punt N is het midden van BM . Verder is gegeven dat $\angle BCN = 25^\circ$.
 Bereken $\angle ACM$.



- V5** Zie de figuur hiernaast.
a Welke hoek in $\triangle CDE$ is gelijk aan $\angle B$ in $\triangle ABC$?
 En welke hoek in $\triangle CDE$ is gelijk aan $\angle C$ in $\triangle ABC$?
b Vul in.
 $\triangle ABC \sim \triangle \dots\dots\dots$



Voorkennis Gelijkvormige driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee paar gelijke hoeken hebben.

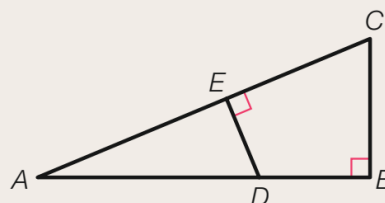
In de figuur hiernaast is
 $\angle A$ in $\triangle ADE$ gelijk aan $\angle A$ in $\triangle ABC$ én
 $\angle E$ in $\triangle ADE$ gelijk aan $\angle B$ in $\triangle ABC$.
 Dus $\triangle ADE$ is gelijkvormig met $\triangle ACB$.
 Notatie: $\triangle ADE \sim \triangle ACB$.



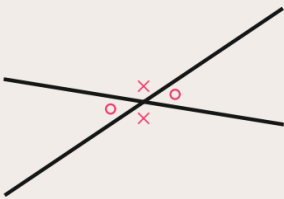
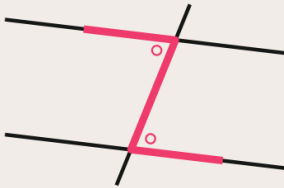
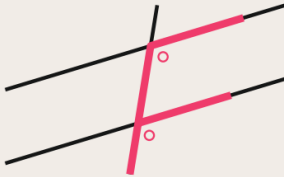
Let op de volgorde bij de letters in $\triangle ADE \sim \triangle ACB$.
 De overeenkomstige hoeken zijn met pijlen aangegeven.
 Met de overeenkomstige zijden maak je een verhoudingstabel.
 Hierin staan de overeenkomstige zijden onder elkaar.

Uit $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ volgt dus de verhoudingstabel

AD	DE	AE
AC	BC	AB



Om gelijkvormigheid van driehoeken aan te tonen, zoek je dus naar gelijke hoeken. Gebruik daarbij de volgende eigenschappen.

overstaande hoeken	Z-hoeken	F-hoeken
Bij snijdende lijnen zijn overstaande hoeken gelijk.	Bij evenwijdige lijnen horen gelijke Z-hoeken.	Bij evenwijdige lijnen horen gelijke F-hoeken.
		

Na het aantonen van gelijkvormigheid kun je met de daaruit volgende verhoudingstabel onbekende zijden berekenen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

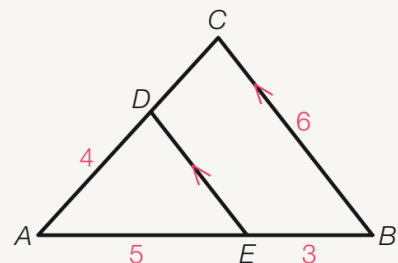
Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken exact AC en DE .

Uitwerking

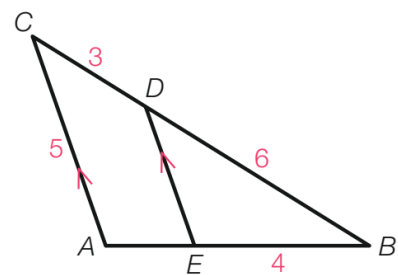
$$\left. \begin{array}{l} \angle CAB = \angle DAE \\ \angle ABC = \angle AED \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle AED$$

$$\frac{AB}{AE} \mid \frac{BC}{DE} \mid \frac{AC}{AD} \text{ geeft } \frac{8}{5} \mid \frac{6}{DE} \mid \frac{AC}{4}$$

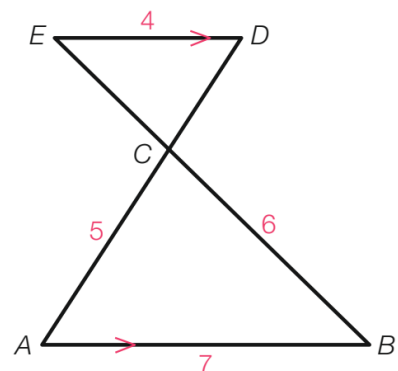
$$AC = \frac{8 \cdot 4}{5} = 6\frac{2}{5} \text{ en } DE = \frac{5 \cdot 6}{8} = 3\frac{3}{4}$$



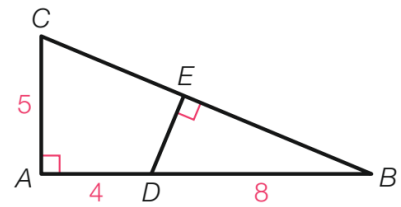
V6 Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken exact AB en DE .



V7 Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken exact CD en CE .



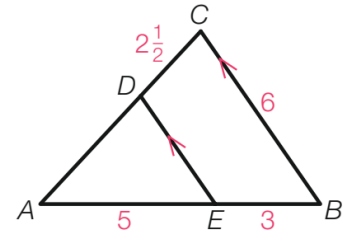
V8 Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken exact BC , DE en CE .



O7 Zie de figuur hiernaast met de gelijkvormige driehoeken ABC en AED .

Uit $\triangle ABC \sim \triangle AED$ volgt de verhoudingstabel $\frac{AB}{AE} \mid \frac{AC}{AD}$

Waarom lukt het niet AD te berekenen met $AD = \frac{AC \cdot AE}{AB}$?



Theorie B Berekeningen met gelijkvormigheid

In opgave 7 lukte het niet om AD te berekenen met $AD = \frac{AC \cdot AE}{AB}$.

Door de lengte van AD gelijk te stellen aan x en AC uit te drukken in x , lukt het wel om AD te berekenen.

Stel $AD = x$, dan is $AC = x + 2\frac{1}{2}$.

Dit geeft de verhoudingstabel $\frac{8}{5} \mid \frac{x + 2\frac{1}{2}}{x}$

en hieruit volgt $8x = 5(x + 2\frac{1}{2})$

$$8x = 5x + 12\frac{1}{2}$$

$$3x = 12\frac{1}{2}$$

$$x = 4\frac{1}{6}$$

Dus $AD = 4\frac{1}{6}$.

In de opgaven hiervoor was het nodig eerst gelijkvormigheid aan te tonen bij het berekenen van lijnstukken. In het vervolg mag je gelijkvormigheid gebruiken zonder het eerst aan te tonen.

Afspraak

Je mag gelijkvormige driehoeken gebruiken zonder de gelijkvormigheid eerst aan te tonen.

Zo mag je in het voorbeeld op de volgende bladzijde direct opschrijven dat $\triangle ABC \sim \triangle PQC$.

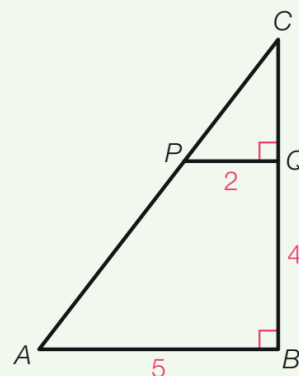
Voorbeeld

Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken exact AC .

Aanpak

Bereken eerst BC met behulp van de gelijkvormige driehoeken ABC en PQC . Bij het invullen van de verhoudingstabel zijn er twee onbekende zijden. Stel daarom de ene zijde gelijk aan x en druk de andere zijde uit in x .

Bereken vervolgens AC met de stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$.



Uitwerking

$\triangle ABC \sim \triangle PQC$ geeft $\frac{AB}{PQ} \mid \frac{BC}{CQ}$

Stel $CQ = x$, dan is $BC = x + 4$.

$$\begin{array}{c|c} 5 & x+4 \\ \hline 2 & x \end{array} \text{ geeft } 5x = 2(x+4)$$

$$5x = 2x + 8$$

$$3x = 8$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

Dus $CQ = 2\frac{2}{3}$ en $BC = 6\frac{2}{3}$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AC = \sqrt{5^2 + (6\frac{2}{3})^2} = 8\frac{1}{3}$.

Om CQ te berekenen, heb je slechts een deel van de verhoudingstabel

$\frac{AB}{PQ} \mid \frac{AC}{CP} \mid \frac{BC}{CQ}$ nodig.

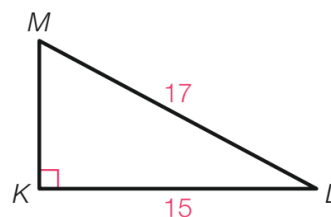
R8 Zie het voorbeeld.



a Licht toe dat $\triangle ABC \sim \triangle PQC$.

b Bij het berekenen van AC met de stelling van Pythagoras is de berekening kort genoteerd met $AC = \sqrt{5^2 + (6\frac{2}{3})^2} = 8\frac{1}{3}$.

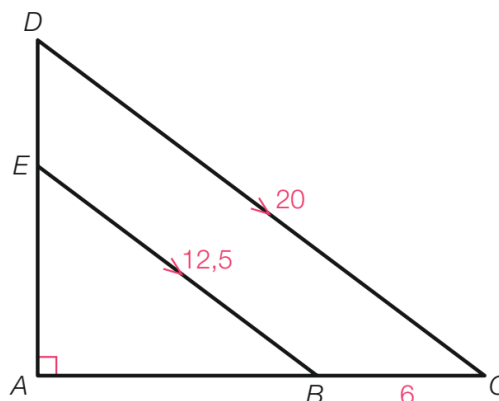
Bereken op dezelfde korte manier KM in de figuur hiernaast.



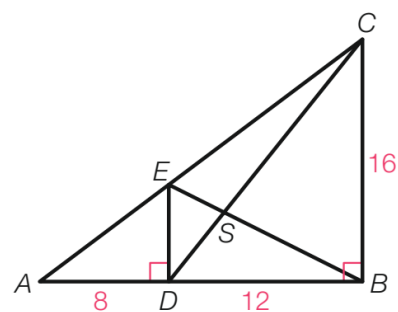
9 Gegeven is de figuur hiernaast.



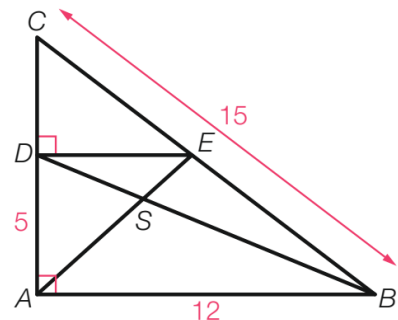
Bereken exact AB en AD .



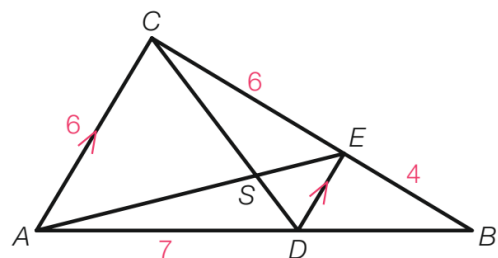
- 10** Gegeven is de figuur hiernaast.
 □ ⊗ * Bereken exact DS .



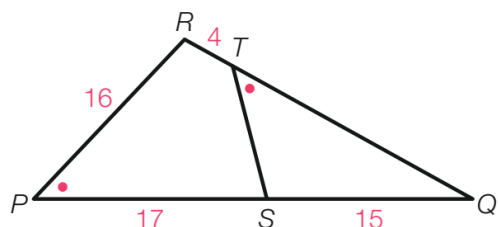
- A11** Gegeven is de figuur hiernaast.
 □ ⊗ * Bereken exact BS .



- A12** Gegeven is de figuur hiernaast.
 ⊗ * **a** Onderzoek met een berekening welke van de volgende beweringen waar is.
 I $\angle ACB < 90^\circ$
 II $\angle ACB = 90^\circ$
 III $\angle ACB > 90^\circ$
b Bereken exact welk gedeelte AS van AE is.



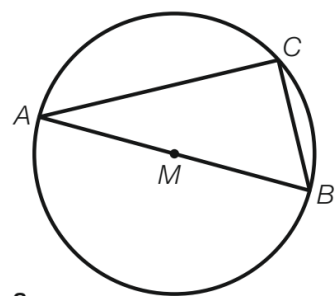
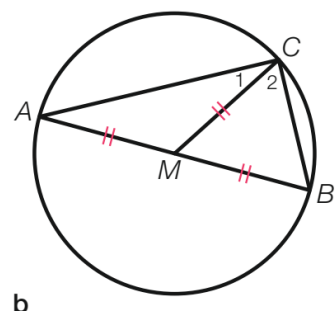
- A13** Gegeven is de figuur hiernaast.
 ⊗ * Bereken exact ST .



- 14** In figuur a hiernaast is de cirkel met middelpunt M en middellijn AB getekend. Het punt C ligt op de cirkel.
 □ ⊗ * In deze opgave ga je bewijzen dat $\angle ACB = 90^\circ$.

Zie figuur b.

- a** Licht toe dat $\angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180^\circ$.
b Licht toe dat $\angle A = \angle C_1$ en $\angle B = \angle C_2$.
c Licht toe hoe uit a en b volgt dat $\angle ACB = \angle C_{12} = 90^\circ$.



Theorie C Stellingen en definities

Bij wiskunde B krijg je vaak te maken met de opdracht ‘bewijs’.

Bij de opdracht ‘bewijs’ geef je een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.

Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

Het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden is niet voldoende. Andersom is het geven van één tegenvoorbeeld genoeg om de bewering tegen te spreken.

In opgave 14 heb je de **stelling van Thales** bewezen.

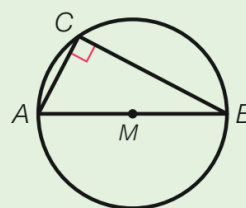
In opgave 15 ga je de **omgekeerde stelling van Thales** bewijzen.

Stelling van Thales

Een driehoek waarvan een zijde de middellijn van de omgeschreven cirkel van de driehoek is, is rechthoekig.

Omgekeerde stelling van Thales

Van een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek.



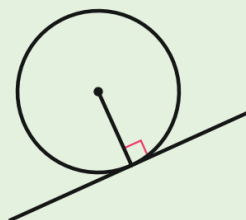
In opgave 16 bewijs je de stelling van een **raaklijn aan een cirkel**.

Daarom geven we eerst de **definitie** van een raaklijn aan een cirkel.

Raaklijn aan een cirkel

Definitie Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die één punt met de cirkel gemeenschappelijk heeft.

Stelling Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van het middelpunt van de cirkel en het raakpunt.

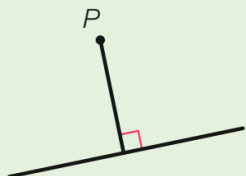


Met behulp van de bovenstaande stelling zijn andere stellingen over raaklijnen aan cirkels te bewijzen. Zie de opgaven 17 en 18.

Daarbij gebruik je ook het begrip **de afstand van een punt tot een lijn**.

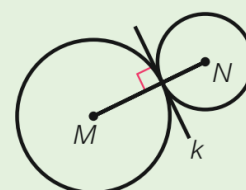
De afstand van een punt tot een lijn

Definitie De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van het verbindingslijnstuk vanuit dat punt loodrecht op die lijn.



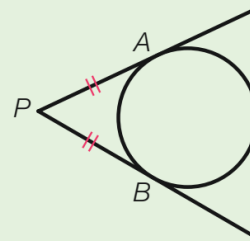
Raaklijn in een raakpunt van twee cirkels

Stelling De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.



Twee raaklijnen aan een cirkel vanuit een punt

Stelling Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.



Nadat je de stellingen hebt bewezen, mag je ze in de opgaven zonder toelichting gebruiken.

Informatief Definitie en stelling

Een definitie is een afspraak en een stelling is een eigenschap of bewering die bewezen kan worden. Bij een bewijs mag je uitgaan van wat bekend is. Dat wil zeggen dat je definities en eerder bewezen stellingen mag gebruiken. Zo heb je bij het bewijs van de stelling van Thales in opgave 14 gebruikt dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is (stelling hoekensom driehoek) en dat in een gelijkbenige driehoek de hoeken tegenover de even lange zijden even groot zijn (stelling gelijkbenige driehoek). Om deze stelling over de gelijkbenige driehoek te bewijzen, ga je uit van de volgende definitie: Een gelijkbenige driehoek is een driehoek met (minstens) twee even lange zijden (definitie gelijkbenige driehoek).

15



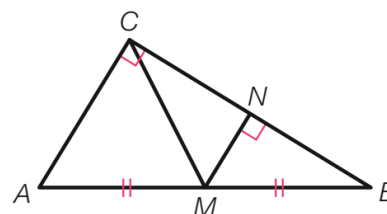
In deze opgave ga je de omgekeerde stelling van Thales bewijzen.

Omgekeerde stelling van Thales:

Van een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek.

In de figuur hiernaast is de rechthoekige driehoek ABC getekend. Verder is M het midden van AB en $MN \perp BC$.

- Toon aan dat $BN = CN$. Gebruik dat $\triangle ABC \sim \triangle MBN$.
- Toon met de stelling van Pythagoras aan dat $BM = CM$.
- Maak het bewijs af.

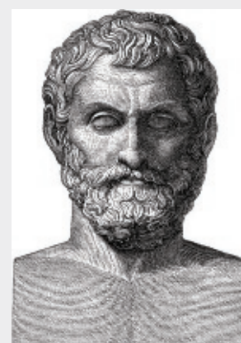


Geschiedenis Thales van Milete

Thales van Milete (ca. 624-547 v.Chr.) leefde in Milete, een plaats in het huidige Turkije. Men veronderstelt dat Thales de grondlegger is van een logische opbouw in de meetkunde en dat hij, naast de naar hem vernoemde stelling, de volgende stellingen ontdekte.

- Een cirkel wordt in twee gelijke delen verdeeld door elke middellijn.
- Een gelijkbenige driehoek heeft gelijke basishoeken.
- Bij snijdende lijnen zijn overstaande hoeken gelijk.
- Twee driehoeken zijn gelijk als ze twee hoeken en een zijde gelijk hebben.

Verder is hij waarschijnlijk de eerste die gebruikmaakte van gelijkvormige driehoeken.



16 In deze opgave ga je de stelling van een raaklijn aan een cirkel bewijzen.

□ ⊙ * Stelling raaklijn aan een cirkel:

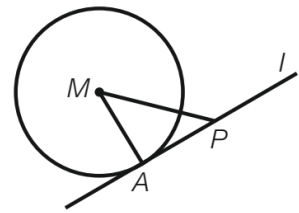
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van het middelpunt van de cirkel en het raakpunt.

In de figuur hiernaast zie je een cirkel met middelpunt M en een lijn l die de cirkel raakt in een punt A . Verder is een punt P dat niet samenvalt met A op l getekend.

Uit de definitie van de raaklijn aan een cirkel volgt dat $MP > MA$.

a Licht dit toe.

b Hoe volgt nu uit de definitie van de afstand van een punt tot een lijn dat $MA \perp l$?

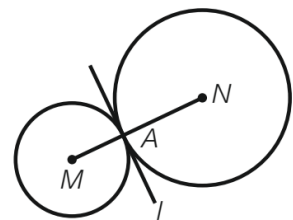


17 In de figuur hiernaast is het punt A het gemeenschappelijke

□ ⊙ * raakpunt van de cirkels met middelpunten M en N . De

gemeenschappelijke raaklijn is l .

Bewijs dat $MN \perp l$.

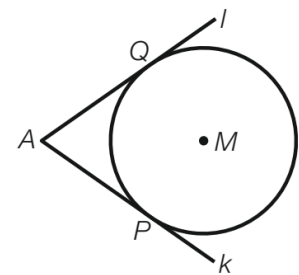


18 In de figuur hiernaast zijn vanuit het punt A de raaklijnen k en l aan de cirkel met middelpunt M getekend.

□ ⊙ *

De raakpunten zijn P en Q .

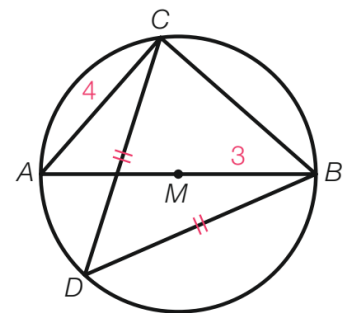
Gebruik de stelling van Pythagoras om te bewijzen dat $AP = AQ$.



19 Hiernaast zie je de cirkel met middelpunt M , middellijn AB en straal 3. Op de cirkel liggen de punten C en D waarbij $AC = 4$ en $BD = CD$.

□ ⊙ *

Bereken exact BD . Gebruik dat in $\triangle BCD$ het punt M op de hoogtelijn door D ligt.

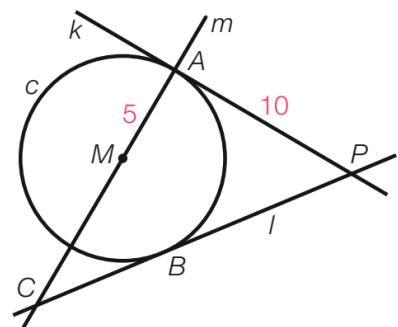


A20 Gegeven is de cirkel c in de figuur hiernaast met middelpunt M en straal 5. De lijn k raakt c in het punt A , de lijn l raakt c in het punt B en k en l snijden elkaar in het punt P waarbij $AP = 10$.

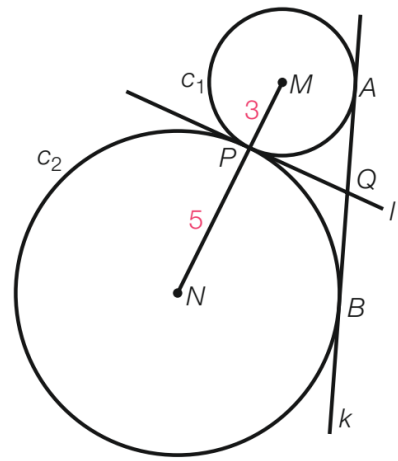
□ ⊙

De lijn m door A en M snijdt l in het punt C .

Bereken de lengte van het lijnstuk BC . Rond af op twee decimalen.



- A21** In de figuur hiernaast zie je cirkel c_1 met middelpunt M en straal 3 en cirkel c_2 met middelpunt N en straal 5. De lijn k raakt c_1 in A en c_2 in B . Het gemeenschappelijke raakpunt van c_1 en c_2 is P en de gemeenschappelijke raaklijn in P is l . De lijnen k en l snijden elkaar in het punt Q . Bereken exact PQ .



Kennis- en vaardighedencheck

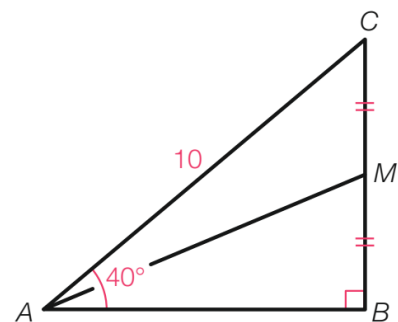
- ☐ Ik kan hoeken en lijnstukken berekenen met sinus, cosinus en tangens.
- ☐ Ik kan lijnstukken berekenen met de stelling van Pythagoras en met gelijkvormigheid.
- ☐ Ik ken de volgende meetkundige stellingen:
- De stelling en de omgekeerde stelling van Thales.
 - De stelling van een raaklijn aan een cirkel.
 - De stelling van de raaklijn in een raakpunt van twee cirkels.
 - De stelling van twee raaklijnen aan een cirkel vanuit een punt.

► **OPGAVE C1**
THEORIE A

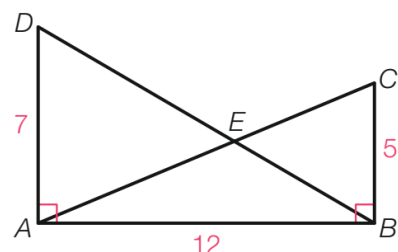
► **OPGAVE C2**
THEORIE B

► **OPGAVE C3**
THEORIE C

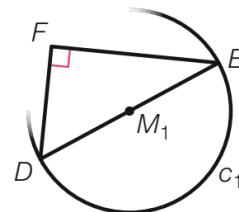
- C1** Gegeven is de figuur hiernaast. Bereken $\angle BAM$.



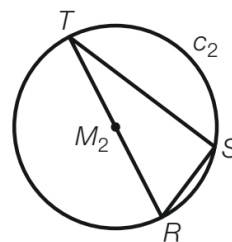
- C2** Gegeven is de figuur hiernaast. Bereken exact AE .



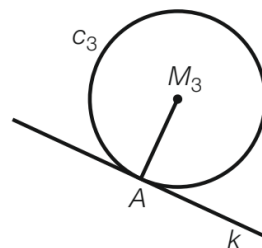
C3 a In de figuur hiernaast is een gedeelte van een cirkel c_1 met middellijn DE getekend. Ligt het punt F binnen, buiten of op c_1 ?



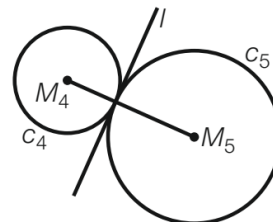
b In de figuur hiernaast is zijde RT van $\triangle RST$ een middellijn van cirkel c_2 en ligt S op c_2 . Hoe groot is $\angle S$?



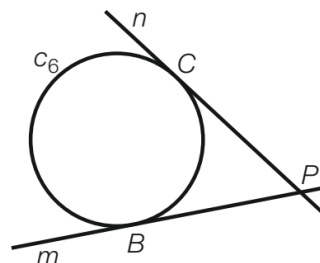
c In de figuur hiernaast raakt lijn k cirkel c_3 met middelpunt M_3 in het punt A . Hoe groot is de hoek tussen k en AM_3 ?



d In de figuur hiernaast raakt lijn l de cirkels c_4 en c_5 met middelpunten M_4 en M_5 . Hoe groot is de hoek tussen l en M_4M_5 ?



e In de figuur hiernaast gaan de lijnen m en n door punt P en raken cirkel c_6 in de punten B en C . Is BP langer dan, korter dan of even lang als CP ?



Antwoorden

C1 $22,8^\circ$

C2 $7\frac{7}{12}$

C3 a op c_1
 b 90°
 c 90°
 d 90°
 e even lang

3.2 Lengte, omtrek en oppervlakte

Kennis en vaardigheden

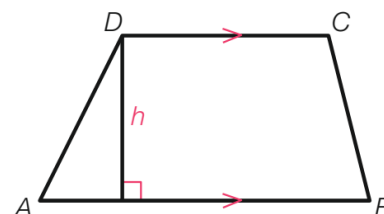
- Je kunt de formules voor de oppervlakte van een driehoek, parallellogram en trapezium gebruiken.
- Je kunt de formules voor de oppervlakte en de omtrek van een cirkel gebruiken.
- Je kunt de formule $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$ gebruiken.
- Je kunt de zijde $\times$ hoogte-methode gebruiken.

O22



In de figuur hiernaast zie je het trapezium $ABCD$ met hoogte h .

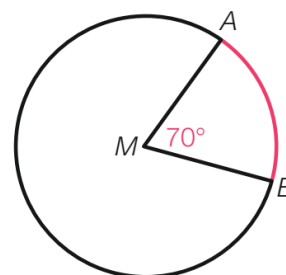
Bewijs dat $O(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h$.



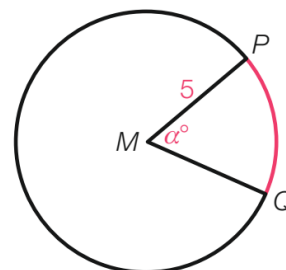
O23



- a Hiernaast is een cirkel met middelpunt M getekend. De punten A en B liggen op de cirkel en $\angle AMB = 70^\circ$. Welk deel van de cirkel is de rode boog AB ?



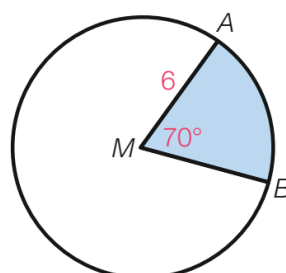
- b Hiernaast is een cirkel met middelpunt M en straal 5 getekend. De punten P en Q liggen op de cirkel en $\angle PMQ = \alpha^\circ$. Druk de lengte van de rode boog PQ uit in α . Gebruik dat omtrek cirkel $= 2\pi r$.



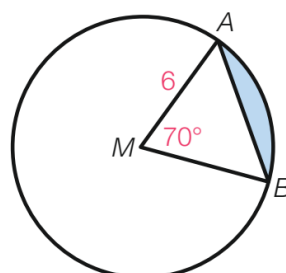
O24



- a Hiernaast is een cirkel met middelpunt M en straal 6 getekend. De punten A en B liggen op de cirkel en $\angle AMB = 70^\circ$. De cirkelsector AMB is met blauw aangegeven. Bereken exact de oppervlakte van deze sector. Gebruik dat oppervlakte cirkel $= \pi r^2$.

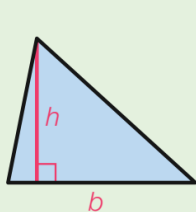


- b Hiernaast is een cirkel met middelpunt M en straal 6 getekend. De punten A en B liggen op de cirkel en $\angle AMB = 70^\circ$. Een cirkelsegment is blauw gekleurd. Bereken de oppervlakte van dit segment. Rond af op twee decimalen.

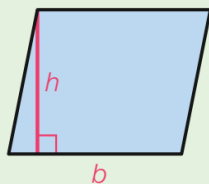


Theorie A Oppervlakte van vlakke figuren

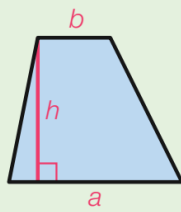
Bij het berekenen van de oppervlakte van vlakke figuren gebruik je de oppervlakteformules van de basisfiguren driehoek, parallellogram, trapezium en cirkel.



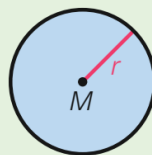
$$O = \frac{1}{2}bh$$



$$O = bh$$



$$O = \frac{1}{2}(a + b)h$$



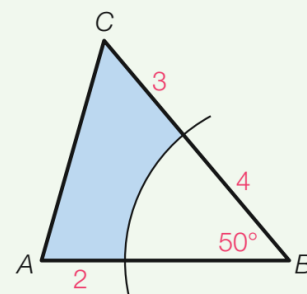
$$O = \pi r^2$$

$$\text{omtrek cirkel} = 2\pi r$$

Voorbeeld

In $\triangle ABC$ hiernaast is punt B het middelpunt van de cirkel met straal 4.

Bereken de oppervlakte van het blauwe gebied. Rond af op twee decimalen.



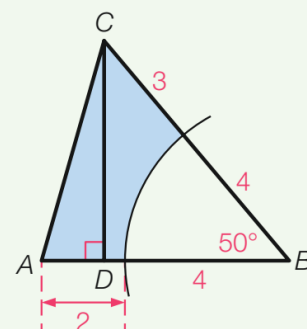
Uitwerking

Zie de schets hiernaast.

In $\triangle BCD$ is $\sin(50^\circ) = \frac{CD}{7}$, dus $CD = 7 \sin(50^\circ)$.

$O(\text{blauwe gebied}) = O(\triangle ABC) - O(\text{cirkelsector})$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \sin(50^\circ) - \frac{50}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 \approx 9,11$$



R25 Zie het voorbeeld.

□ ⊗ * Bereken de omtrek van het blauwe gebied. Rond af op twee decimalen.

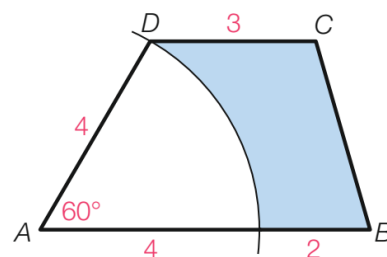
26 In het trapezium $ABCD$ hiernaast is punt A het middelpunt van de cirkel met straal $AD = 4$.

□ ⊗ *

a Bereken de oppervlakte het trapezium. Rond af op twee decimalen.

b Bereken de oppervlakte van het blauwe gebied. Rond af op twee decimalen.

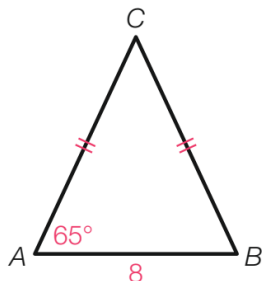
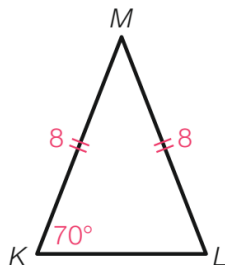
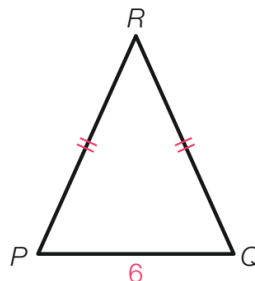
c Bereken de omtrek van het blauwe gebied. Rond af op twee decimalen.



27 Zie de driehoeken hieronder.

□ Rond in deze opgave af op één decimaal.

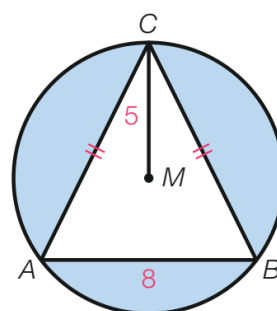
- a** Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.
- b** Bereken de oppervlakte van $\triangle KLM$.
- c** De oppervlakte van $\triangle PQR$ is 20.
Bereken de hoeken van de driehoek.



28 In de figuur hiernaast is M het middelpunt van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$.

□ ⊙ *

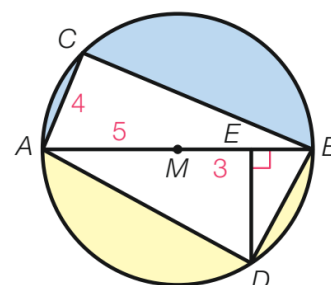
- a** Bereken exact de oppervlakte van het blauwe gebied.
- b** Bereken de oppervlakte en de omtrek van het segment dat wordt ingesloten door zijde AB en boog AB . Rond af op twee decimalen.



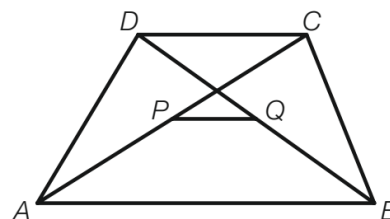
A29 In de figuur hiernaast is M het middelpunt van de cirkel door de punten A, B, C en D .

□ ⊙ *

De totale oppervlakte van de blauwe segmenten is groter dan de totale oppervlakte van de gele segmenten. Bereken exact het verschil tussen deze oppervlaktes.

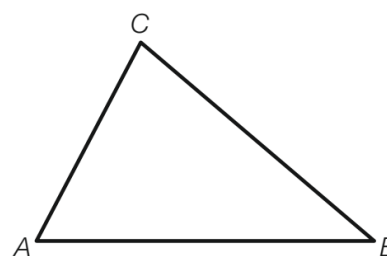


A30 Gegeven is het trapezium $ABCD$ hiernaast met $AB = 2CD$. Punt P is het midden van diagonaal AC en punt Q is het midden van diagonaal BD , waardoor de hoogte van trapezium $ABQP$ de helft is van de hoogte van trapezium $ABCD$. Bereken exact welk deel de oppervlakte van $ABQP$ is van de oppervlakte van $ABCD$.



O31 Druk de oppervlakte van $\triangle ABC$ hiernaast uit in AB, AC en $\sin(\angle A)$.

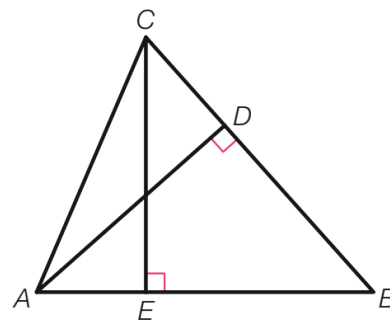
□ ⊙ *



O32 Zie de figuur hiernaast met $\triangle ABC$ en de hoogtelijnen AD en CE .



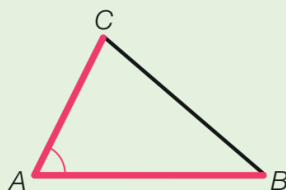
- a Druk de oppervlakte van $\triangle ABC$ uit in AB en CE .
- b Druk de oppervlakte van $\triangle ABC$ uit in BC en AD .
- c Licht toe dat uit de vragen a en b volgt dat $AB \cdot CE = BC \cdot AD$.



Theorie B Lengte en oppervlakte

In opgave 31 heb je gezien dat de oppervlakte van een driehoek gelijk is aan een half keer de ene zijde keer de andere zijde keer de sinus van de ingesloten hoek.

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$$

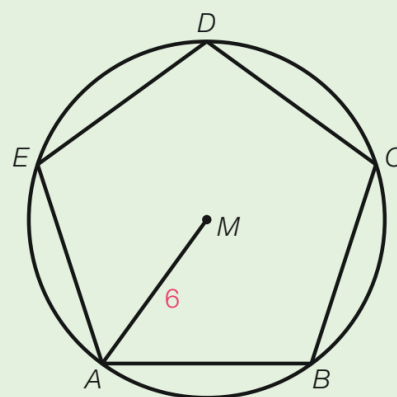


Met deze formule is bijvoorbeeld de oppervlakte van een regelmatige vijfhoek te berekenen waarvan de straal van de omschreven cirkel gelijk is aan 6. Zie de figuur hiernaast.

Bereken eerst $\angle AMB$. Je krijgt $\angle AMB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Dus } O(\triangle ABM) &= \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BM \cdot \sin(\angle AMB) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin(72^\circ) \\ &= 18 \sin(72^\circ) \end{aligned}$$

$$\text{En } O(ABCDE) = 5 \cdot 18 \sin(72^\circ) \approx 85,6.$$



In opgave 32 heb je gezien dat bij de figuur van de opgave geldt dat $AB \cdot CE = BC \cdot AD$.

We zeggen kortweg ‘zijde $\times$ hoogte = zijde $\times$ hoogte’ en spreken daarom van de **zijde $\times$ hoogte-methode**.

DE ZIJDE $\times$ HOOGTE-METHODE

Voor driehoeken geldt:

ene zijde $\times$ bijbehorende hoogte = andere zijde $\times$ bijbehorende hoogte.

Je gebruikt de zijde $\times$ hoogte-methode om in de figuur hiernaast de lengte van AD te berekenen. Bereken eerst BC met de stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$.

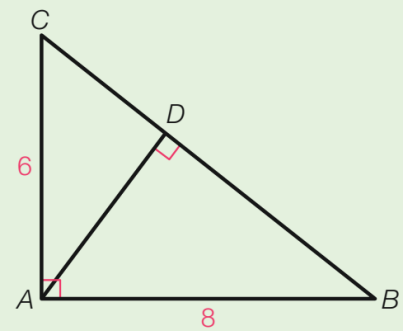
Je krijgt $BC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle ABC$ geeft

$$BC \cdot AD = AB \cdot AC$$

$$10 \cdot AD = 8 \cdot 6$$

$$AD = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4\frac{4}{5}$$



Voorbeeld

Zie de figuur hiernaast met rechthoek $ABCD$.

Bereken exact de lengte van BF .

Aanpak

BF is in $\triangle ABE$ de hoogte bij zijde AE . Teken dus $\triangle ABE$ en gebruik hierin de zijde $\times$ hoogte-methode.

Uitwerking

Zie de figuur hiernaast.

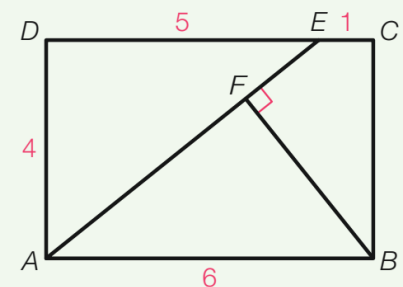
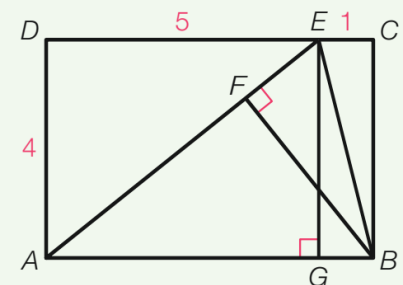
$$AE = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle ABE$ geeft

$$AE \cdot BF = AB \cdot EG$$

$$\sqrt{41} \cdot BF = 6 \cdot 4$$

$$BF = \frac{6 \cdot 4}{\sqrt{41}} = \frac{24}{\sqrt{41}}$$



R33



a Zie de theorie op de vorige bladzijde.

Bereken de oppervlakte van vierhoek $ABCM$. Rond af op één decimaal.

b Zie het voorbeeld hierboven.

In $\triangle ABF$ is FH de hoogte die bij zijde AB hoort.

Bereken de lengte van FH . Rond af op één decimaal.

34



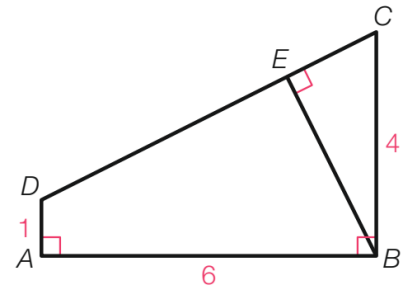
Gegeven is een regelmatige zevenhoek waarvan de straal van de omschreven cirkel gelijk is aan r .

a Neem $r = 3$ en bereken de oppervlakte van de zevenhoek. Rond af op één decimaal.

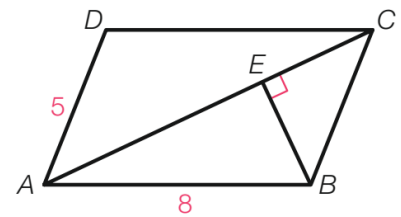
b Bereken voor welke waarde van r de oppervlakte van de zevenhoek gelijk is aan 100. Rond af op drie decimalen.

- 35** Een regelmatige negenhoek heeft oppervlakte 144.
***** Bereken de omtrek van de negenhoek. Rond af op één decimaal.

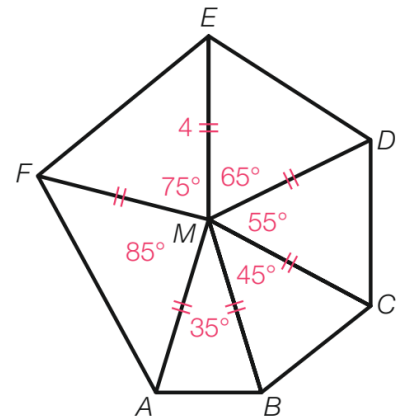
- 36** Zie de figuur hiernaast met het rechthoekig trapezium $ABCD$.
□ ⊙ * Bereken exact BE .



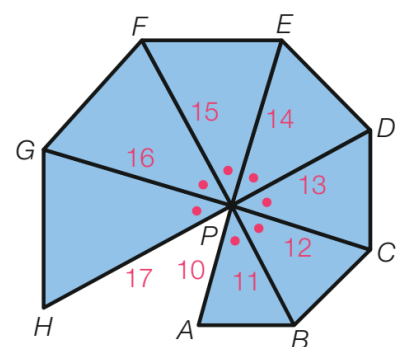
- A37** Zie de figuur hiernaast met het parallellogram $ABCD$.
□ ⊙ * De oppervlakte van het parallellogram is 32.
 Bereken exact BE .



- A38** Zie de zeshoek $ABCDEF$ in de figuur hiernaast met $AM = BM = CM = DM = EM = FM = 4$.
□ ⊙ Bereken de oppervlakte van de zeshoek. Rond af op twee decimalen.



- A39** Gegeven is de figuur hiernaast met $AP = 10$, $BP = 11$, $CP = 12$, $DP = 13$, $EP = 14$, $FP = 15$, $GP = 16$ en $HP = 17$.
***** De oppervlakte van het blauwe gebied is 500.
 Bereken $\angle APB$.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan de formule voor de oppervlakte van een driehoek, parallellogram en trapezium gebruiken.

► OPGAVE C4,C5a
THEORIE A

☐ Ik kan de formule voor de oppervlakte en de omtrek van een cirkel gebruiken.

► OPGAVE C5bc
THEORIE A

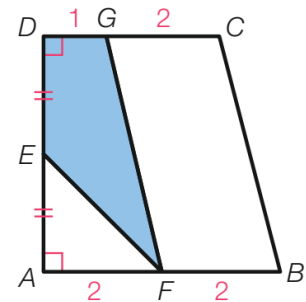
☐ Ik kan de formule $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$ gebruiken.

► OPGAVE C6
THEORIE B

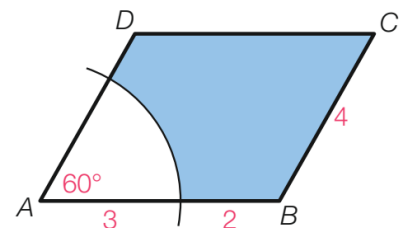
☐ Ik kan de zijde $\times$ hoogte-methode gebruiken.

► OPGAVE C7
THEORIE B

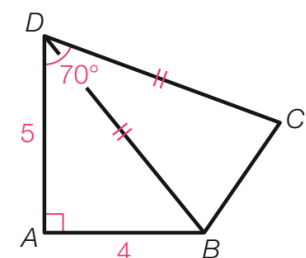
- C4** Gegeven is de figuur hiernaast met trapezium $ABCD$.
De oppervlakte van het trapezium is 14.
Bereken de oppervlakte van vierhoek $DEFG$.



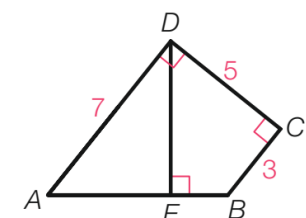
- C5** Van het parallellogram $ABCD$ hiernaast is punt A het middelpunt van de cirkel met straal 3.
- Bereken de oppervlakte van het parallellogram. Rond af op twee decimalen.
 - Bereken de oppervlakte van het blauwe gebied. Rond af op twee decimalen.
 - Bereken de omtrek van het blauwe gebied. Rond af op twee decimalen.



- C6** Zie de figuur hiernaast.
Bereken de oppervlakte van vierhoek $ABCD$. Rond af op twee decimalen.



- C7** Zie de figuur hiernaast met het rechthoekig trapezium $ABCD$.
Bereken exact DE .



Antwoorden

C4 4

C5 a 17,32
b 12,61
c 15,14

C6 20,66

C7 $\frac{35}{\sqrt{41}}$

3.3 Vergelijkingen in de meetkunde

Kennis en vaardigheden

- Je kunt vergelijkingen oplossen waarin wortels voorkomen en je kunt de oplossingen van deze vergelijkingen herleiden.
- Je kunt gebruiken dat de zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek zich verhouden als $1 : 1 : \sqrt{2}$.
- Je kunt gebruiken dat de zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, zich verhouden als $1 : 2 : \sqrt{3}$.
- Je kunt bij de bijzondere rechthoekige driehoeken een lijnstuk berekenen door een lijnstuk x te stellen.
- Je kunt met de stelling van Pythagoras een lijnstuk berekenen door een lijnstuk x te stellen.

Voorkennis Wortels herleiden

Voor het vermenigvuldigen en delen van wortels gelden de volgende regels.

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB} \text{ voor } A \geq 0 \wedge B \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \text{ voor } A \geq 0 \wedge B > 0$$

$$\text{Dus } \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10} \text{ en } \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}} = \sqrt{11}.$$

$\frac{4}{\sqrt{5}}$ is te herleiden tot een vorm zonder worteltekens in de noemer.

Je vermenigvuldigt daartoe de teller en de noemer met $\sqrt{5}$.

$$\text{Je krijgt } \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}\sqrt{5}.$$

Bij $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ kun je de breuk onder het wortelteken wegwerken. Je krijgt

$$\sqrt{12\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Een som en een verschil van gelijksoortige wortels kun je herleiden.

Dus $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$ en $8\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = -\sqrt{2}$. Maar $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ kun je niet herleiden, want $\sqrt{2}$ en $\sqrt{5}$ zijn niet gelijksoortig.

Het lijkt erop dat $\sqrt{2} + \sqrt{32}$ niet herleid kan worden. Maar door bij $\sqrt{32}$ een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken te brengen, zie je dat het wel lukt. Je krijgt $\sqrt{2} + \sqrt{32} = \sqrt{2} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}, \text{ dus ook}$$
$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

v9 Herleid.

a $3\sqrt{6} + 6\sqrt{6}$

e $\sqrt{3\frac{1}{4}}$

i $(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$

b $\sqrt{3} \cdot \sqrt{10}$

f $\sqrt{8} + \sqrt{18}$

j $\sqrt{4\frac{1}{6}}$

c $\frac{6\sqrt{14}}{2\sqrt{7}}$

g $\frac{6}{5\sqrt{2}}$

k $\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9}\sqrt{27}$

d $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$

h $\sqrt{\frac{2}{5}}$

l $\sqrt{\frac{5}{8}} + \sqrt{90}$

o40

□ ⊗ *

$\frac{28}{4 + \sqrt{2}}$ is te herleiden tot de vorm $a + b\sqrt{c}$. Je gebruikt daarbij het merkwaardige product $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. Je krijgt

$$\frac{28}{4 + \sqrt{2}} = \frac{28}{4 + \sqrt{2}} \cdot \frac{4 - \sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}} = \frac{28(4 - \sqrt{2})}{16 - 2} = \frac{28(4 - \sqrt{2})}{14} = 2(4 - \sqrt{2}) = 8 - 2\sqrt{2}.$$

Herleid tot de vorm $a + b\sqrt{c}$.

a $\frac{14}{3 + \sqrt{2}}$

c $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

e $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$

b $\frac{4}{\sqrt{3} - 1}$

d $\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

f $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}$

Theorie A Vergelijkingen met wortels

De vergelijking $x\sqrt{2} + 2x = 8$ is een lineaire vergelijking waarin wortels voorkomen. Hoe je deze vergelijking exact oplost, zie je hieronder. Bij het herleiden van de oplossing tot de vorm $a + b\sqrt{c}$ wordt, net als in opgave 40, het merkwaardig product $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ gebruikt.

$x\sqrt{2} + 2x = 8$ **Breng x buiten haakjes.**

$x(\sqrt{2} + 2) = 8$

$$x = \frac{8}{\sqrt{2} + 2} = \frac{8}{\sqrt{2} + 2} \cdot \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} - 2} = \frac{8(\sqrt{2} - 2)}{2 - 4} = -4(\sqrt{2} - 2) = 8 - 4\sqrt{2}$$

Ook de vergelijking $x\sqrt{2} - 3 = \sqrt{6}$ is een lineaire vergelijking. Bij het exact oplossen van deze vergelijking laat je de term met x in het linkerlid staan en zorg je ervoor dat de overige termen in het rechterlid komen.

$x\sqrt{2} - 3 = \sqrt{6}$

$x\sqrt{2} = 3 + \sqrt{6}$

$$x = \frac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{12}}{2} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

41 Los exact op. Herleid je antwoord.



a $x\sqrt{5} + 2 = \sqrt{10}$

b $\frac{1}{2}x\sqrt{2} + \sqrt{10} = 0$

c $7 - x\sqrt{3} = \sqrt{2}$

42 Los exact op. Herleid je antwoord.



a $4x - 2x\sqrt{3} = \sqrt{6}$

b $x\sqrt{5} + x\sqrt{2} = \sqrt{10}$

c $2x\sqrt{2} - 10 = x\sqrt{3}$

A43 Los exact op. Herleid je antwoord.



a $2x\sqrt{6} - 6 = 4\sqrt{6}$

c $3\sqrt{2} + x\sqrt{2} = 4\sqrt{10}$

b $x\sqrt{3} + 6 = 2x$

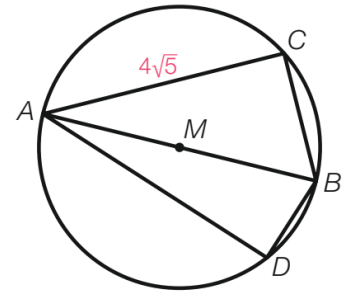
d $3x\sqrt{2} - 2x = 6$

A44 Zie de cirkel met middellijn AB en middelpunt M hiernaast.



De punten C en D liggen op de cirkel, waarbij $AC = 4\sqrt{5}$ en $AD = 3BD$. Verder is gegeven dat de oppervlakte van $\triangle ABC$ gelijk is aan 20.

Bereken exact AD .



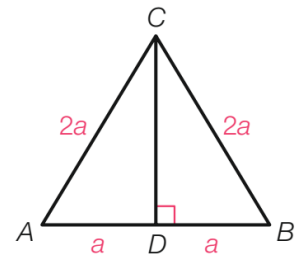
O45 Gegeven is de gelijkzijdige driehoek ABC hiernaast met zijde $2a$.



a Toon aan dat $CD = a\sqrt{3}$.

b Gegeven is $CD = 7\sqrt{3}$.

Bereken de lengte van AC .



Theorie B Bijzondere rechthoekige driehoeken

Hiernaast is de gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC met rechthoekszijden a getekend.

In $\triangle ABC$ is $AC^2 = AB^2 + BC^2$

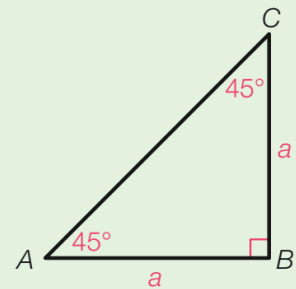
$$AC^2 = a^2 + a^2$$

$$AC^2 = 2a^2$$

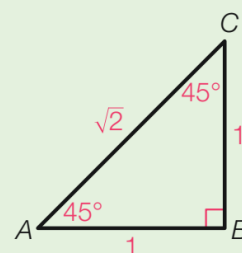
$$AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

De lengten van de zijden van $\triangle ABC$ zijn dus a , a en $a\sqrt{2}$.

In een gelijkbenige rechthoekige driehoek is de verhouding van de zijden dus $1 : 1 : \sqrt{2}$.

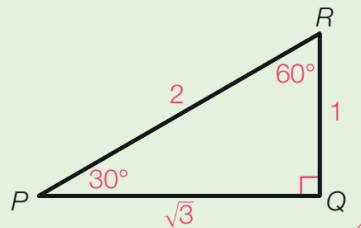


De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.



In opgave 45 heb je ontdekt dat de zijden van een halve gelijkzijdige driehoek de lengten a , $2a$ en $a\sqrt{3}$ hebben. De verhouding van de zijden is dus $1 : 2 : \sqrt{3}$.

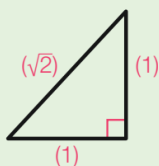
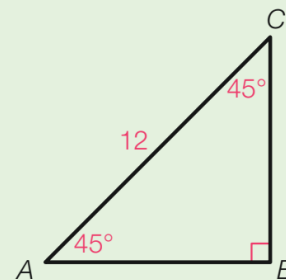
De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.



In $\triangle ABC$ hiernaast is $AC = 12$. $\triangle ABC$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus

$$AB = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

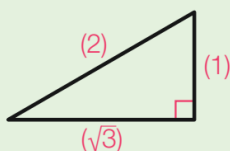
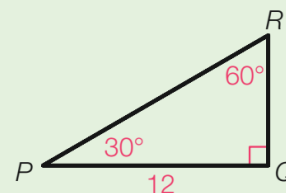
Van AB naar AC keer $\sqrt{2}$,
dus van AC naar AB
gedeeld door $\sqrt{2}$.



In $\triangle PQR$ hiernaast is $PQ = 12$. $\triangle PQR$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek, dus

$$QR = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ en } PR = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

Van QR naar PQ keer $\sqrt{3}$,
dus van PQ naar QR
gedeeld door $\sqrt{3}$.

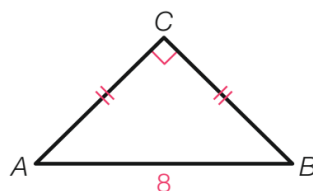
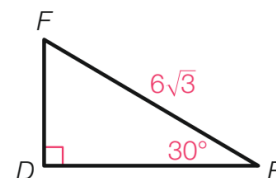
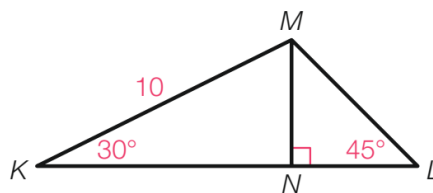
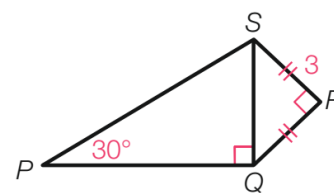


46

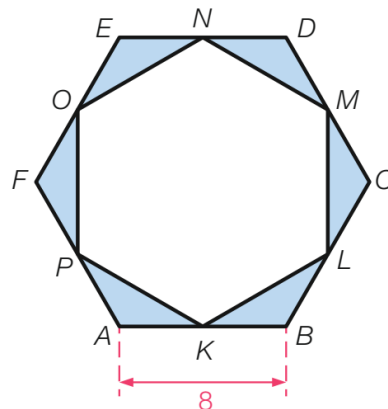
Zie hiernaast.



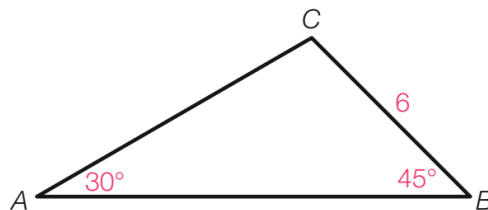
Bereken exact AC , DE , KL en PQ .



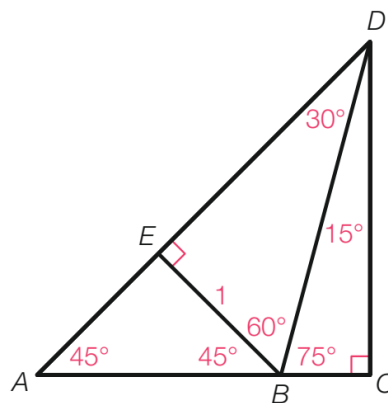
- 47** In de regelmatige zeshoek $ABCDEF$ hiernaast met zijde 8 wordt de regelmatige zeshoek $KLMNOP$ getekend. Hierbij zijn K, L, M, N, O en P de middens van de zijden van $ABCDEF$. Bereken exact de oppervlakte van het blauwe gebied.



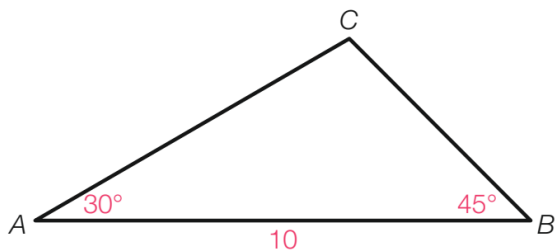
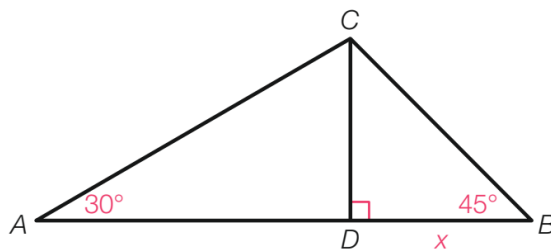
- A48** Bewijs dat de oppervlakte van $\triangle ABC$ hiernaast gelijk is aan $9\sqrt{3} + 9$.



- A49** Zie de figuur hiernaast.
a Bewijs met deze figuur dat $\sin(15^\circ) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.
b Bereken de exacte waarde van $\cos(15^\circ)$.



- 50** Gegeven is $\triangle ABC$ hier linksonder.



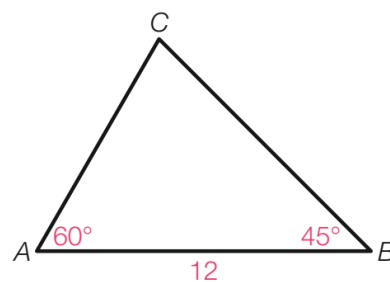
We willen de oppervlakte van $\triangle ABC$ exact berekenen. Daartoe tekenen we de hoogtelijn CD en stellen $BD = x$. Zie de figuur hier rechtsboven.

- a** Licht toe dat $AD = x\sqrt{3}$.

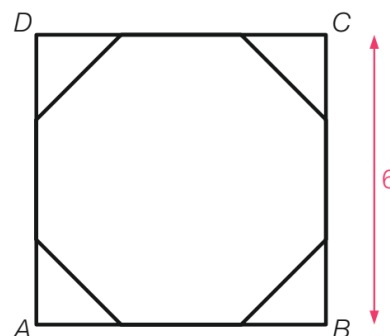
Uit het bovenstaande volgt $x\sqrt{3} + x = 10$.

- b** Licht dit toe en los de vergelijking exact op.
c Schrijf de oppervlakte van $\triangle ABC$ in de vorm $a + b\sqrt{c}$.

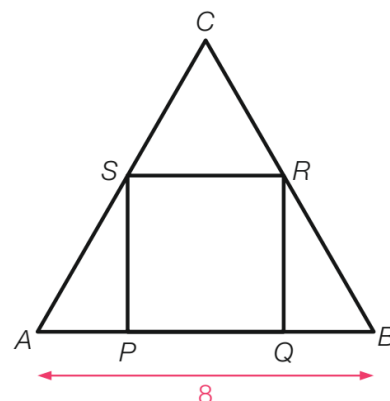
- 51** Bewijs dat de oppervlakte van $\triangle ABC$ hiernaast gelijk is aan $108 - 36\sqrt{3}$.



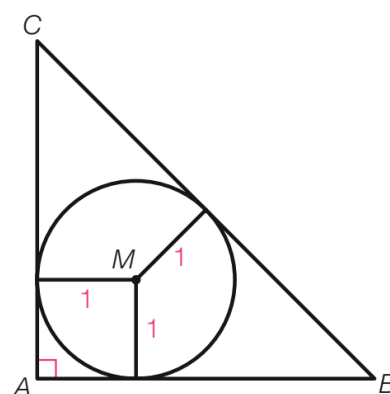
- 52** Van het vierkant $ABCD$ met zijde 6 hiernaast worden bij de hoekpunten driehoeken weggelaten zodat een regelmatige achthoek ontstaat. Bereken exact de zijde van de achthoek. Schrijf het antwoord in de vorm $a + b\sqrt{c}$.



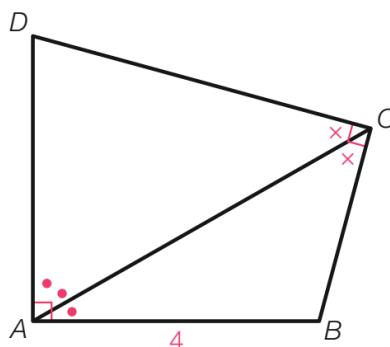
- A53** Gegeven is de gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 8 hiernaast. In de driehoek past precies het vierkant $PQRS$. Bewijs dat $PQ = 16\sqrt{3} - 24$.



- A54** De ingeschreven cirkel van de gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC hiernaast heeft straal 1. Bewijs dat de omtrek van $\triangle ABC$ gelijk is aan $6 + 4\sqrt{2}$.



- A55** Van vierhoek $ABCD$ hiernaast is $AB = 4$ en $\angle A = \angle C = 90^\circ$. De diagonaal AC verdeelt $\angle A$ en $\angle C$ zo, dat $\angle CAD = 2 \cdot \angle BAC$ en $\angle ACB = \angle ACD$. Bewijs dat de omtrek van de vierhoek gelijk is aan $8 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$.



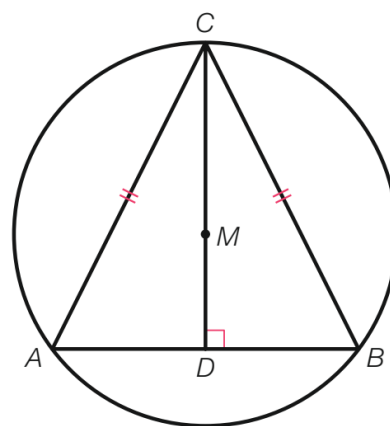
56



In de figuur hiernaast is de gelijkbenige driehoek ABC met $AC = BC$ getekend, waarvan de hoogte CD gelijk is aan AB . Verder is de omgeschreven cirkel van deze driehoek getekend. De straal van deze cirkel is 6.

We vragen ons af wat de lengte van AB is.

- Noem het middelpunt van de cirkel M , stel $DM = x$ en licht toe dat hieruit volgt dat $AD = \frac{1}{2}x + 3$.
- Gebruik de stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ en toon aan dat je de vergelijking $1\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$ krijgt.
- Los de vergelijking van vraag b exact op en bereken de lengte van AB .



De hoogte CD is gelijk aan AB .

Theorie C Vergelijkingen en de stelling van Pythagoras

Hiernaast zie je nogmaals de figuur van opgave 56 met daarin het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ en het lijnstuk AM . In opgave 56 is $DM = x$ gesteld om AB te berekenen.

Je kunt ook bijvoorbeeld $AD = x$ stellen. Dan is $CD = AB = 2x$, dus $DM = 2x - 6$. De stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ geeft dan

$$x^2 + (2x - 6)^2 = 6^2$$

$$x^2 + 4x^2 - 24x + 36 = 36$$

$$5x^2 - 24x = 0$$

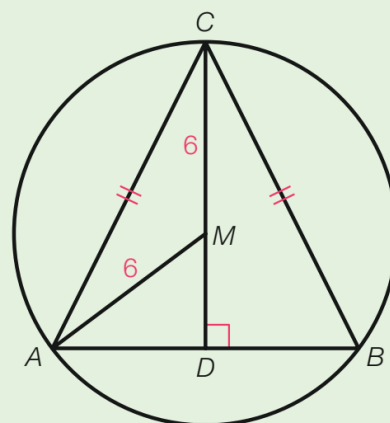
$$x(5x - 24) = 0$$

$$x = 0 \vee 5x = 24$$

$$x = 0 \vee x = 4\frac{4}{5}$$

$$\text{Dus } AD = 4\frac{4}{5} \text{ en } AB = 2 \cdot 4\frac{4}{5} = 9\frac{3}{5}.$$

Je ziet dat deze uitwerking eenvoudiger is dan wat je in opgave 56 hebt gedaan. In het algemeen is het raadzaam om na te gaan welk lijnstuk je x stelt voor een zo eenvoudig mogelijke uitwerking.

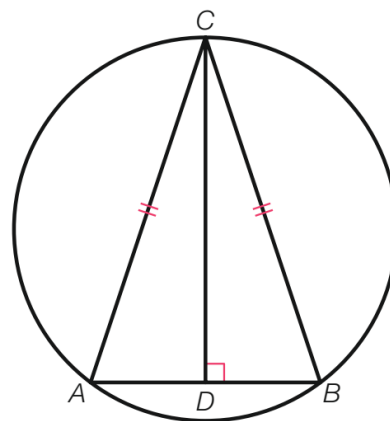


De hoogte CD is gelijk aan AB .

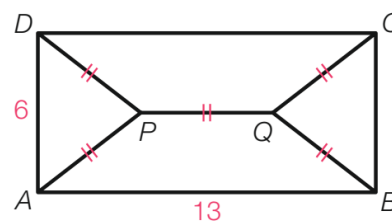
57



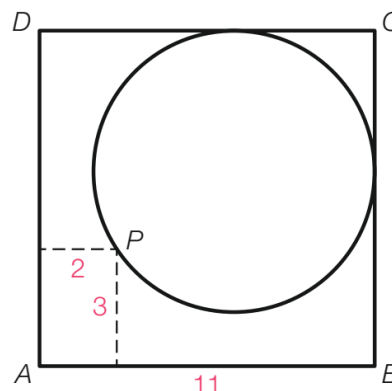
Hiernaast is de gelijkbenige driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel met straal 6 getekend. Verder is de hoogte CD getekend, waarbij geldt dat $CD = 1\frac{1}{2}AB$. Bereken exact AB .



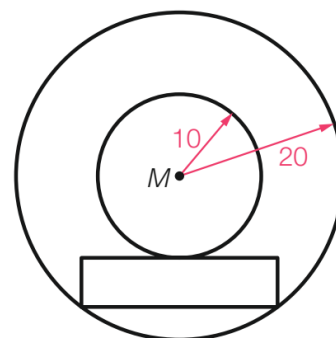
- 58** In de figuur hiernaast is $ABCD$ een rechthoek. Bereken exact AP .



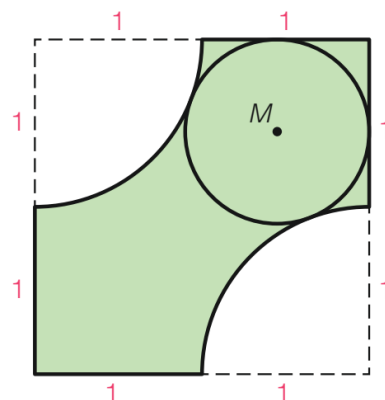
- 59** Gegeven is vierkant $ABCD$ met zijde 11. Binnen het vierkant ligt het punt P op afstand 3 van AB en op afstand 2 van AD . Bereken exact de straal van de cirkel die door P gaat en de zijden BC en CD raakt.



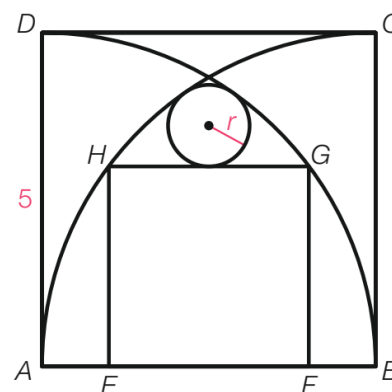
- A60** Gegeven zijn de concentrische cirkels in de figuur hiernaast met middelpunt M en stralen van 10 en 20. In het gebied tussen de cirkels past precies een rechthoek waarvan de lengte 4 keer de breedte is. Bereken algebraïsch hoeveel procent van het gebied tussen de cirkels de rechthoek in beslag neemt.



- A61** Uit een vierkant met zijde 2 worden twee kwartcirkels met straal 1 weggelaten zoals in de figuur hiernaast. Bereken exact de straal van de grootste cirkel die nog op het overgebleven stuk past.



- A62** In het vierkant $ABCD$ met zijde 5 hiernaast zijn twee kwartcirkels met straal 5 getekend. Van het vierkant $EFGH$ liggen de punten E en F op de zijde AB en de punten G en H op de kwartcirkels. De kleine cirkel raakt de zijde GH en de beide kwartcirkels. Bereken exact de zijde van het vierkant $EFGH$ en de straal r van de kleine cirkel.



Kennis- en vaardighedencheck

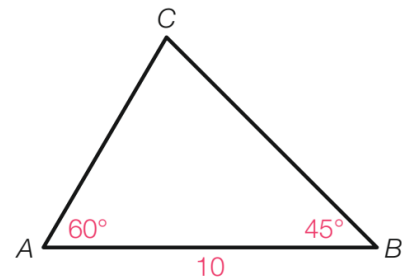
- | | |
|--|---------------------------|
| ☐ Ik kan vergelijkingen oplossen waarin wortels voorkomen en ik kan de oplossingen van deze vergelijkingen herleiden. | ► OPGAVE C8
THEORIE A |
| ☐ Ik kan gebruiken dat de zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek zich verhouden als $1 : 1 : \sqrt{2}$. | ► OPGAVE C9
THEORIE B |
| ☐ Ik kan gebruiken dat de zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, zich verhouden als $1 : 2 : \sqrt{3}$. | ► OPGAVE C9
THEORIE B |
| ☐ Ik kan bij de bijzondere rechthoekige driehoeken een lijnstuk berekenen door een lijnstuk x te stellen. | ► OPGAVE C9
THEORIE B |
| ☐ Ik kan met de stelling van Pythagoras een lijnstuk berekenen door een lijnstuk x te stellen. | ► OPGAVE C10
THEORIE C |

C8 Los exact op.

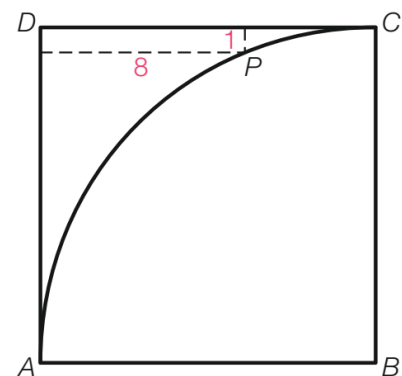
a $6 - x\sqrt{2} = \sqrt{10}$

b $\frac{1}{2}x\sqrt{2} = x - 2$

C9 Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$ hiernaast.



C10 In het vierkant $ABCD$ hiernaast is een kwartcirkel getekend met middelpunt B en straal BC . Het punt P op de kwartcirkel heeft afstand 1 tot CD en afstand 8 tot AD . Bereken exact de lengte van de zijde van het vierkant.



Antwoorden

C8 a $x = 3\sqrt{2} - \sqrt{5}$

b $x = 4 + 2\sqrt{2}$

C9 $75 - 25\sqrt{3}$

C10 13

3.4 De sinusregel en de cosinusregel

Kennis en vaardigheden

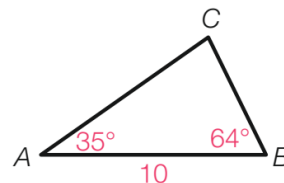
- Je kunt met de sinusregel hoeken en lijnstukken berekenen.
- Je kunt met de cosinusregel hoeken en lijnstukken berekenen.
- Je weet in welke situatie je de sinusregel kunt gebruiken en in welke situatie de cosinusregel.

063



Gegeven is $\triangle ABC$ hiernaast.

Om AC te berekenen, kun je gebruikmaken van de hoogtelijn AD , dat is de lijn door A loodrecht op BC . Bereken AC . Rond af op twee decimalen.



Theorie A De sinusregel in scherphoekige driehoeken

In opgave 63 heb je in $\triangle ABC$ de lengte van de zijde AC berekend. Dit deed je door een hoogtelijn te tekenen en dan gebruik te maken van de twee rechthoekige driehoeken die ontstaan. Deze omslachtige manier was nodig omdat $\triangle ABC$ niet gelijkbenig of rechthoekig is. De berekening wordt een stuk eenvoudiger door gebruik te maken van de **sinusregel**.

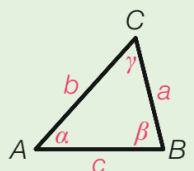
De sinusregel geldt in elke driehoek.

In opgave 66 bewijs je de sinusregel voor scherphoekige driehoeken.

In de sinusregel hieronder is de zijde tegenover $\angle A$ aangegeven met de letter a en $\angle A$ is aangegeven met α . De hoeken B en C geven we aan met β en γ en de zijden tegenover deze hoeken zijn aangegeven met b en c .

In elke driehoek ABC geldt de sinusregel

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$



α alfa
 β bèta
 γ gamma

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle PQR$ hiernaast.

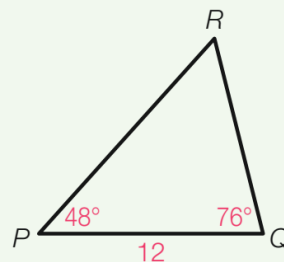
Bereken QR . Rond af op één decimaal.

Uitwerking

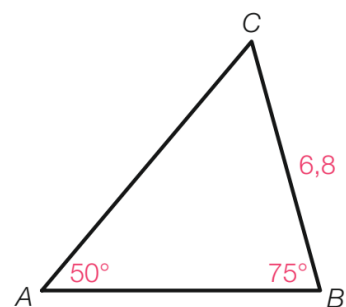
$$\angle R = 180^\circ - 48^\circ - 76^\circ = 56^\circ$$

$$\text{De sinusregel geeft } \frac{QR}{\sin(48^\circ)} = \frac{12}{\sin(56^\circ)}$$

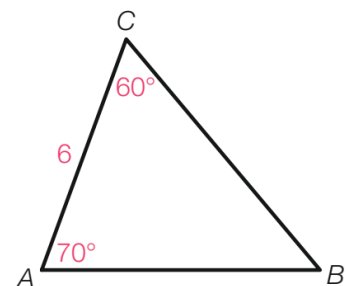
$$QR = \frac{12 \sin(48^\circ)}{\sin(56^\circ)} \approx 10,8$$



- 64** Gegeven is $\triangle ABC$ hiernaast.
Bereken AB en AC . Rond af op één decimaal.



- A65** Bereken de omtrek van $\triangle ABC$ hiernaast. Rond af op twee decimalen.

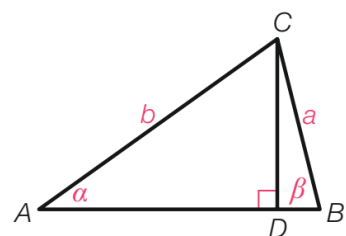


- 66** In deze opgave ga je de sinusregel bewijzen voor scherphoekige driehoeken.

Zie hiernaast $\triangle ABC$ met hierin de hoogtelijn CD .

a Licht toe dat $CD = b \sin(\alpha)$ en $CD = a \sin(\beta)$.

b Licht toe dat uit vraag a volgt $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.

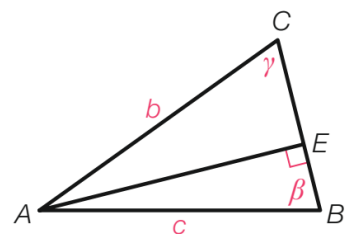


Zie hiernaast nogmaals $\triangle ABC$ met hierin de hoogtelijn AE .

c Licht toe dat $AE = c \sin(\beta)$ en $AE = b \sin(\gamma)$.

d Licht toe dat uit vraag c volgt $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$.

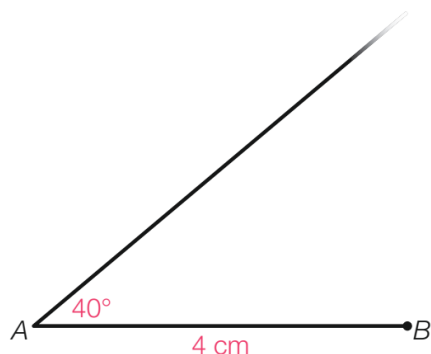
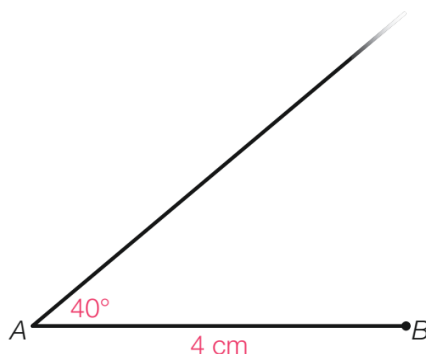
e Hoe volgt uit de vragen b en d de sinusregel?



- O67** Hieronder is twee keer een gedeelte van een $\triangle ABC$ getekend met $AB = 4$ cm en $\angle A = 40^\circ$. Er zijn twee driehoeken mogelijk met $BC = 3$ cm.

a Teken deze twee driehoeken. Gebruik een passer.

b Gebruik de sinusregel om aan te tonen dat $\sin(\angle C) = 0,857...$
Welke $\angle C$ vind je hiermee met de GR?



O68 Hiernaast is de stomphoekige driehoek ABC getekend.

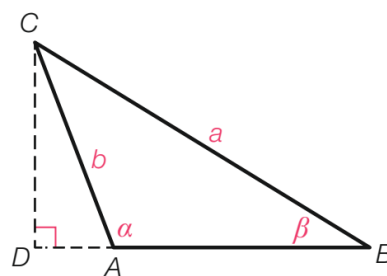


a Licht toe dat $CD = b \sin(180^\circ - \alpha)$.

b Licht toe dat $CD = a \sin(\beta)$.

c Licht toe dat uit de vragen a en b volgt

$$\frac{a}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}.$$



Theorie B De sinusregel in stomphoekige driehoeken

In opgave 68 heb je gezien dat $\frac{a}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.

In hoofdstuk 8 leer je dat $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$.

Hiermee krijg je in de stomphoekige driehoek ABC dat $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.

En omdat in $\triangle ABC$ ook geldt dat $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$,
geldt de sinusregel ook in stomphoekige driehoeken.

Uit de regel $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$ volgt bijvoorbeeld $\sin(170^\circ) = \sin(10^\circ)$ en $\sin(95^\circ) = \sin(85^\circ)$.

Op het GR-scherm hiernaast zie je dat de GR rekent volgens deze regel.

Zoek je omgekeerd de hoek α waarvoor geldt $\sin(\alpha) = 0,1736...$ dan geeft de GR de scherpe hoek, dus $\alpha = 10^\circ$.

NORM DRIJF AUTO REEEL GRAD MN	
$\sin(170)$	0.1736481777
$\sin(10)$	0.1736481777
$\sin(95)$	0.9961946981
$\sin(85)$	0.9961946981

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ hiernaast met $\angle C > 90^\circ$.

Bereken $\angle C$.

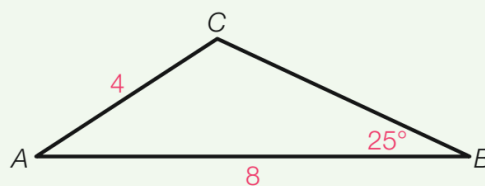
Uitwerking

De sinusregel geeft $\frac{4}{\sin(25^\circ)} = \frac{8}{\sin(\angle C)}$

$$\sin(\angle C) = \frac{8 \sin(25^\circ)}{4} = 0,845...$$

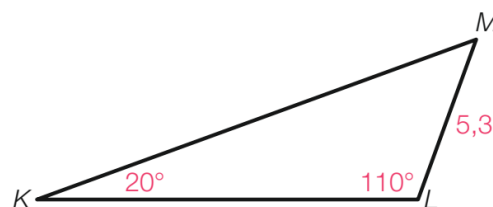
De GR geeft een hoek van $57,69...^\circ$.

Dus $\angle C = 180^\circ - 57,69...^\circ \approx 122,3^\circ$.



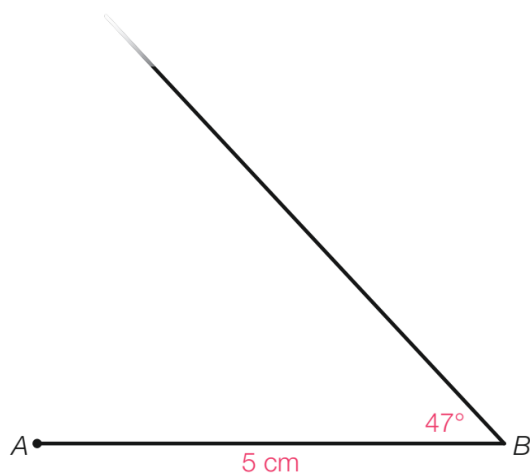
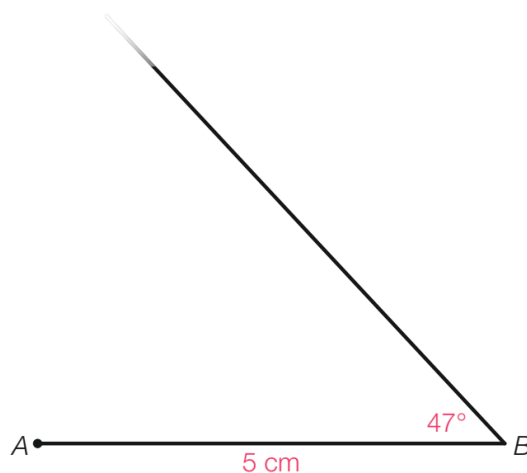
69 Gegeven is $\triangle KLM$ hiernaast.

Bereken KL en KM . Rond af op één decimaal.



70 Hieronder is twee keer een gedeelte van een $\triangle ABC$ getekend met $AB = 5$ cm en $\angle B = 47^\circ$. Er zijn twee driehoeken mogelijk met $AC = 4$ cm.

- Teken deze twee driehoeken. Gebruik een passer.
- Bereken voor $\triangle ABC$ met de scherpe hoek C de hoeken A en C en de zijde BC . Rond af op één decimaal.
- Bereken voor $\triangle ABC$ met de stompe hoek C de hoeken A en C en de zijde BC . Rond af op één decimaal.



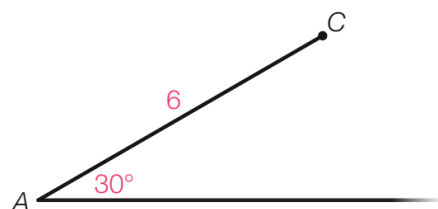
71 Van $\triangle ABC$ is $\angle B = 46^\circ$, $BC = 10$ en $AC = 8$.

- Bereken beide mogelijkheden voor $\angle A$.
- Bereken beide mogelijkheden voor AB . Rond af op één decimaal.
- Judith wil een driehoek tekenen met $\angle B = 46^\circ$, $BC = 10$ en $AC = 7$. Laat met een tekening zien dat dit niet mogelijk is.

72 Bij de gegevens $\angle A = 30^\circ$ en $AC = 6$ hangt het van de lengte van BC af hoeveel driehoeken er mogelijk zijn.

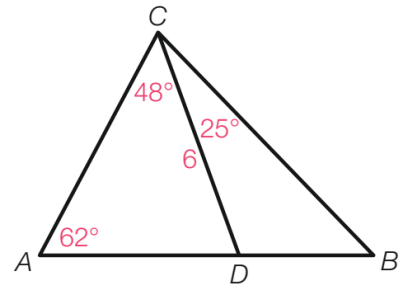
Wat weet je van de lengte van BC als

- er geen driehoek ABC mogelijk is
- er precies één driehoek ABC mogelijk is
- er twee driehoeken ABC mogelijk zijn?

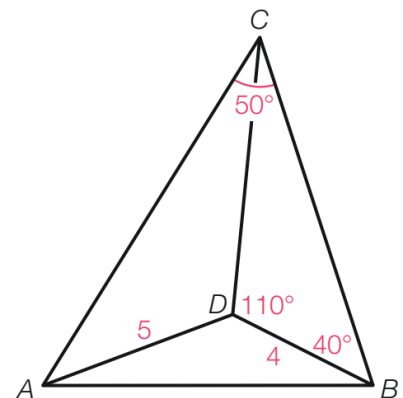


- A73** Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 52^\circ$, $AC = 8$ en $BC = 7$. Er zijn twee driehoeken ABC mogelijk bij deze gegevens. We noemen ze $\triangle AB_1C$ en $\triangle AB_2C$. Bereken B_1B_2 . Rond af op twee decimalen.

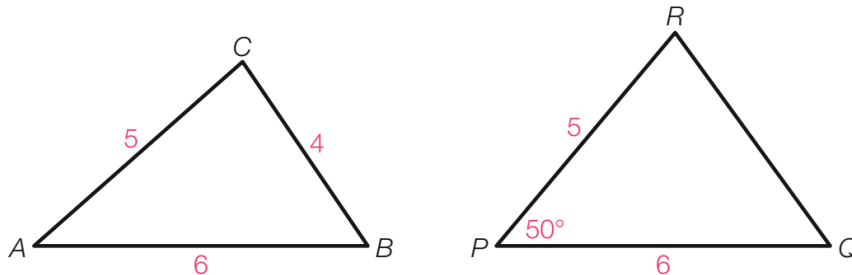
- A74** Bereken de omtrek van $\triangle ABC$ hiernaast. Rond af op één decimaal.



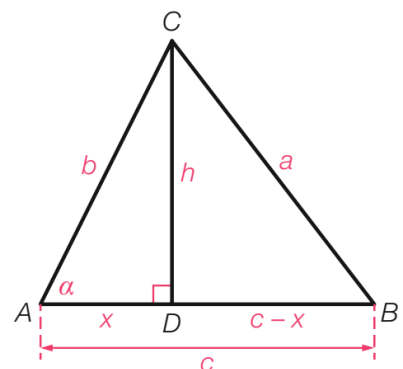
- A75** Gegeven is de figuur hiernaast. Bereken AC . Rond af op twee decimalen.



- O76** Zie $\triangle ABC$ en $\triangle PQR$ hieronder.
a Waarom kun je $\angle A$ niet met de sinusregel berekenen?
b Waarom kun je QR niet met de sinusregel berekenen?



- O77** Hiernaast zie je $\triangle ABC$ met de zijden a , b en c en de hoogtelijn CD . Er is $AD = x$ gesteld, dus $BD = c - x$.
a Licht toe dat $x^2 + h^2 = b^2$.
b Licht toe dat $a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$.
c Licht toe dat uit de vragen a en b volgt $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$.
d Licht toe dat $x = b \cos(\alpha)$.
e Licht toe dat uit de vragen c en d volgt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.



Theorie C De cosinusregel

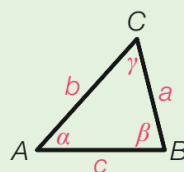
In opgave 77 heb je een van de drie versies van de **cosinusregel** bewezen. Het bewijs van de andere versies gaat net zo.

In elke driehoek ABC geldt de cosinusregel

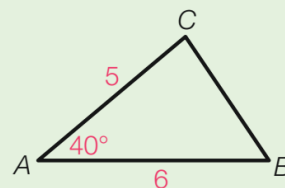
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$



Je kunt met de cosinusregel een zijde van een driehoek berekenen als de twee andere zijden en de ingesloten hoek bekend zijn. Zo krijg je in $\triangle ABC$ hiernaast $BC^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(40^\circ)$ en dit geeft $BC \approx 3,88$.



In opgave 78 geef je het bewijs van de cosinusregel voor stomphoekige driehoeken.

Je gebruikt daarbij dat $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

In hoofdstuk 8 wordt deze regel toegelicht.

Omdat de cosinus van een scherpe hoek positief is, volgt uit deze regel dat de cosinus van een stompe hoek negatief is.

In tegenstelling tot bij de sinus geeft de GR bij de cosinus altijd de hoek die je zoekt. Zo krijg je bij $\cos(\alpha) = -0,6$ dat $\alpha \approx 126,9^\circ$.

In de situatie dat van een driehoek drie zijden bekend zijn, gebruik je de cosinusregel om een hoek te berekenen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 6$, $AC = 5$ en $BC = 10$.
Bereken $\angle A$.

Uitwerking

Zie de schets hiernaast.

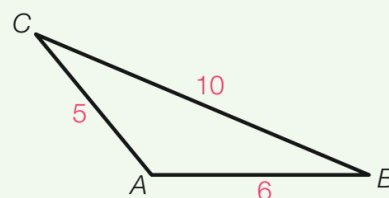
De cosinusregel geeft $10^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(\angle A)$

$$100 = 61 - 60 \cos(\angle A)$$

$$60 \cos(\angle A) = -39$$

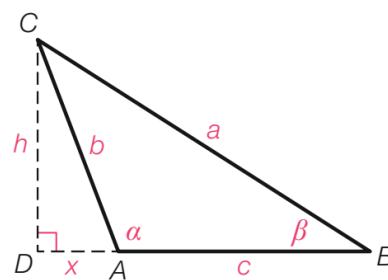
$$\cos(\angle A) = -\frac{39}{60}$$

$$\angle A \approx 130,5^\circ$$



78 Zie de stomphoekige driehoek ABC hiernaast.

- ⊗ ***
- a** Licht toe dat $x^2 + h^2 = b^2$ en $a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2$.
b Licht toe dat uit vraag a volgt dat $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$.
c Licht toe dat $x = b \cos(180^\circ - \alpha)$.
d Bewijs dat de cosinusregel ook geldt voor stomphoekige driehoeken. Gebruik dat $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$.



79 **a** Van $\triangle ABC$ is $AC = 4$, $BC = 6$ en $\angle C = 60^\circ$.

Bereken AB . Rond af op twee decimalen.

b Van $\triangle DEF$ is $DE = 7$, $DF = 6$ en $EF = 5$.

Bereken de hoeken van $\triangle DEF$.

c Van $\triangle GHI$ is $GH = 4$, $HI = 3$ en $\angle H = 150^\circ$.

Bereken GI . Rond af op twee decimalen.

d Gegeven is $\triangle PQR$ met $PQ = 5$, $QR = 4$ en $PR = 7$.

Bereken de hoeken van $\triangle PQR$.

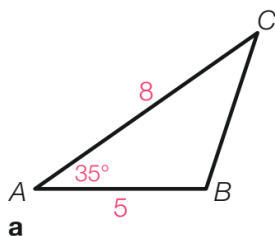
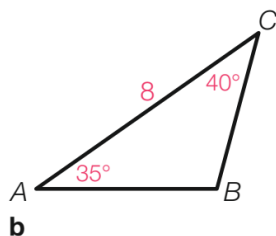
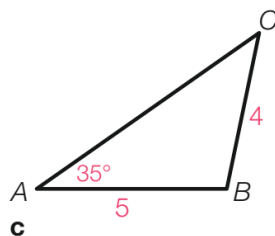
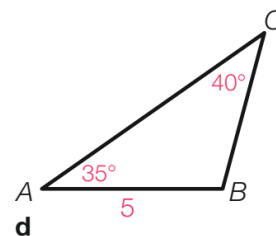
R80 **a** Wat moet van een driehoek bekend zijn om met de sinusregel

- een zijde te berekenen
- een hoek te berekenen?

b Er zijn twee gevallen bij gegevens van een driehoek waarbij je de cosinusregel kunt gebruiken.

Welke twee gevallen zijn dat en wat kun je in elk van deze gevallen berekenen?

81 Bereken in één decimaal in de figuren hieronder de onbekende zijden.

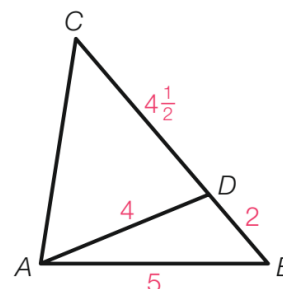


A82 Van parallellogram $ABCD$ is $AB = 10$. De lengte van diagonaal AC is 14 en de lengte van diagonaal BD is 9.

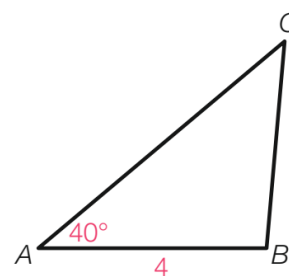
- ⊗ ***
- a** Bereken BC . Rond af op één decimaal.
b Bereken de oppervlakte van $ABCD$. Rond af op één decimaal.

A83 Gegeven is de figuur hiernaast.

Bereken exact AC .



- A84** Zie $\triangle ABC$ hiernaast.
 De lengte van AC is 2 meer dan de lengte van BC .
 Bereken BC en AC . Rond af op drie decimalen.

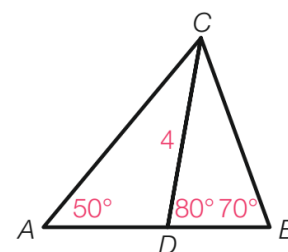


Kennis- en vaardighedencheck

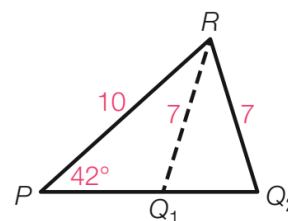
- ☐ Ik kan met de sinusregel hoeken en lijnstukken berekenen.
☐ Ik kan met de cosinusregel hoeken en lijnstukken berekenen.
☐ Ik weet in welke situatie ik de sinusregel kan gebruiken en in welke situatie de cosinusregel.

► **OPGAVE C11**
THEORIE A,B
 ► **OPGAVE C12**
THEORIE C
 ► **OPGAVE C13**
OPGAVE 80

- C11** a Gegeven is de figuur hiernaast.
 Bereken AB . Rond af op twee decimalen.



- b Gegeven is $\triangle PQR$ met $\angle P = 42^\circ$, $PR = 10$ en $QR = 7$.
 Met deze gegevens zijn er twee driehoeken mogelijk:
 $\triangle PQ_1R$ en $\triangle PQ_2R$. Zie de figuur hiernaast.
 Bereken $\angle PRQ_1$.



- C12** a Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 115^\circ$, $AB = 3$ en $AC = 2$.
 Bereken BC . Rond af op twee decimalen.
 b Van $\triangle ABC$ is $AB = 3$, $AC = 2$ en $BC = 4$.
 Bereken $\angle A$.

- C13** a Van $\triangle ABC$ is $AB = 8$, $AC = 6$ en $\angle A = 140^\circ$.
 Bereken BC . Rond af op één decimaal.
 b Van $\triangle ABC$ is $AC = 6$, $BC = 13$, $\angle A > 90^\circ$ en $\angle B = 25^\circ$.
 Bereken $\angle C$.
 c Van $\triangle ABC$ is $AB = 8$, $AC = 6$ en $BC = 13$.
 Bereken $\angle A$.

Antwoorden

C11 a 4,74
b $30,9^\circ$

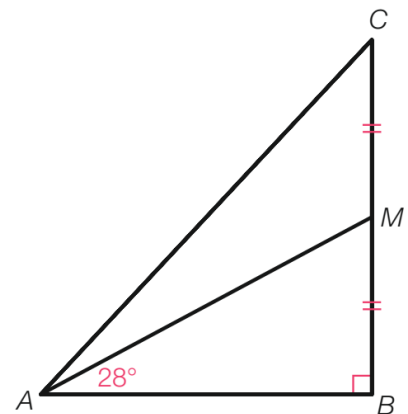
C12 a 4,25
b $104,5^\circ$

C13 a 13,2
b $41,3^\circ$
c $136,0^\circ$

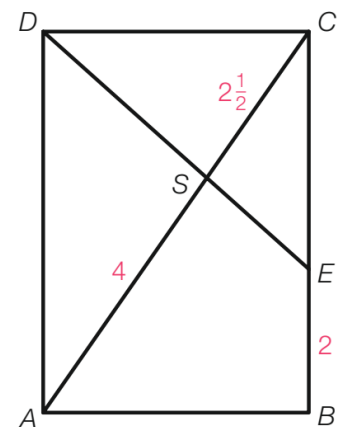
Kennis- en vaardigheidentest

3.1 Berekeningen in driehoeken

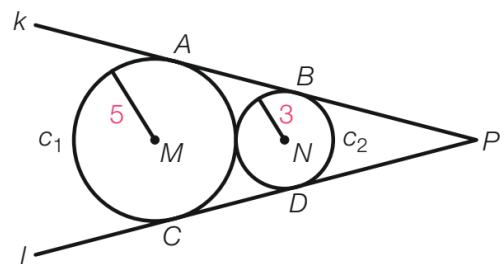
- 1** Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken $\angle CAM$.



- 2** In de figuur hiernaast is $ABCD$ een rechthoek.
Bereken CE .

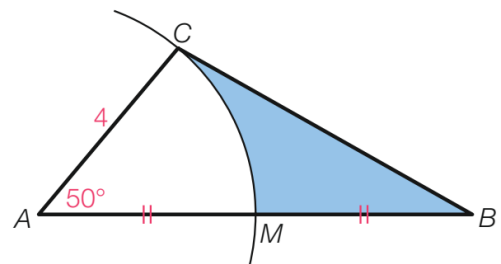


- 3** Cirkel c_1 met middelpunt M en straal 5 raakt in de figuur hiernaast cirkel c_2 met middelpunt N en straal 3. De halve lijn k vanuit punt P raakt c_1 in het punt A en c_2 in het punt B . De halve lijn l vanuit punt P raakt c_1 in het punt C en c_2 in het punt D .
Bereken exact de lengte van AP .

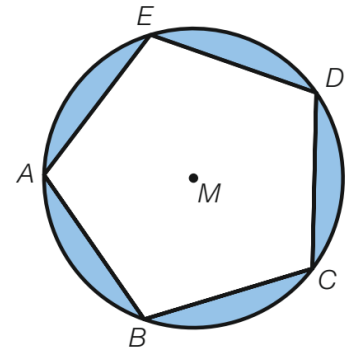


3.2 Lengte, omtrek en oppervlakte

- 4** Hiernaast zie je $\triangle ABC$. De cirkel met middelpunt A gaat door hoekpunt C en door het midden M van AB .
- Bereken de oppervlakte van het blauwe gebied. Rond af op twee decimalen.
 - Bereken de omtrek van het blauwe gebied. Rond af op twee decimalen.



- 5** Gegeven is de regelmatige vijfhoek $ABCDE$ hiernaast met zijn omgeschreven cirkel met middelpunt M en straal r .
- Neem $r = 4$ en bereken de oppervlakte van vierhoek $ABCM$. Rond af op één decimaal.
 - Bereken voor welke waarde van r de oppervlakte van het blauwe gebied gelijk is aan 10. Rond af op twee decimalen.

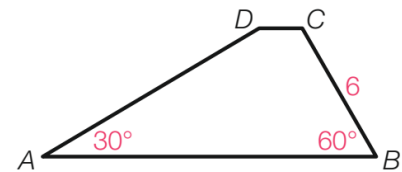


3.3 Vergelijkingen in de meetkunde

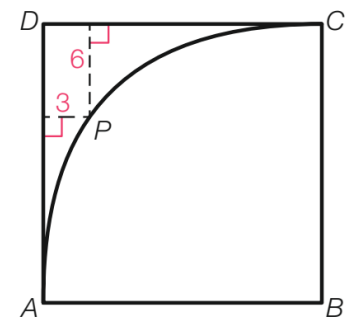
- 6** Los exact op. Herleid je antwoord.

- $x\sqrt{3} + 4 = \sqrt{6}$
- $2x\sqrt{3} + 3x - 12 = 0$
- $2x\sqrt{2} + x\sqrt{6} = \sqrt{3}$

- 7** Gegeven is het trapezium $ABCD$ hiernaast. De oppervlakte van het trapezium is 36. Bereken exact de lengte van AB .



- 8** Gegeven is vierkant $ABCD$ hiernaast. In het vierkant is een kwartcirkel getekend met middelpunt B en straal BC . Het punt P op de kwartcirkel heeft afstand 6 tot CD en afstand 3 tot AD . Bereken exact de oppervlakte van het vierkant.

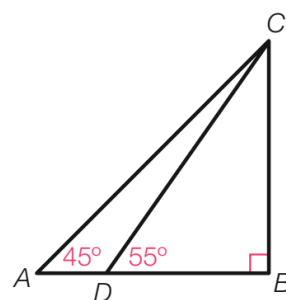


3.4 De sinusregel en de cosinusregel

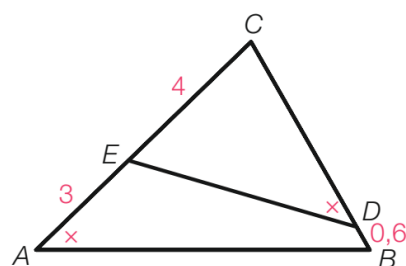
- 9** Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 55^\circ$ en $BC = 6$. Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$. Rond af op twee decimalen.
- 10** Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 50^\circ$ en $AB = 10$.
- Neem $BC = 8,5$ en bereken beide mogelijkheden voor $\angle B$.
 - Wat weet je van de lengte van BC als er precies één driehoek mogelijk is? Rond zo nodig af op twee decimalen.
- 11** Van $\triangle PQR$ is $PQ = 4$, $PR = 5$ en $QR = 6$. Het punt M is het midden van QR . Bereken $\angle PMR$.
- 12** Van parallellogram $ABCD$ is $AB = 15$ en $AD = 8$. Verder is $BD = 10$. Bereken de oppervlakte van het parallellogram. Rond af op twee decimalen.

Gemengde opgaven

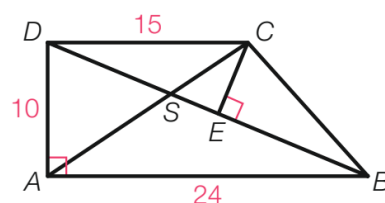
- 1** Gegeven is de figuur hiernaast. De lengte van BD is 2 meer dan de lengte van AD .
Bereken AB en CD . Rond af op twee decimalen.



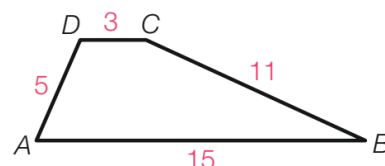
- 2** Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken CD .



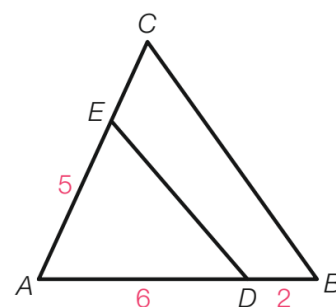
- 3** In de figuur hiernaast is $ABCD$ een rechthoekig trapezium.
a Bereken CE .
b Bewijs dat $\triangle ADS$ gelijkbenig is.



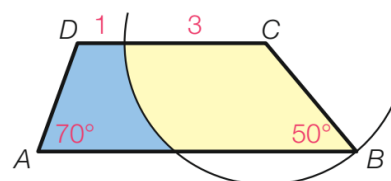
- 4** Gegeven is het trapezium $ABCD$ hiernaast.
Bereken exact de oppervlakte van het trapezium.



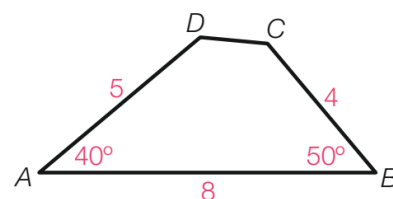
- 5** Gegeven is de figuur hiernaast. De oppervlakte van $\triangle ADE$ is gelijk aan de oppervlakte van vierhoek $BCED$.
Bereken CE .



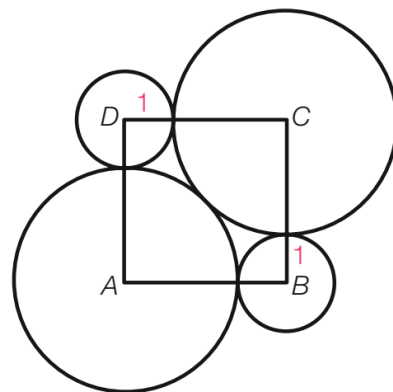
- 6** Hiernaast zie je het trapezium $ABCD$. De cirkel met middelpunt C gaat door hoekpunt B .
a Bereken de oppervlakte van het blauwe gebied. Rond af op twee decimalen.
b Bereken de omtrek van het gele gebied. Rond af op twee decimalen.



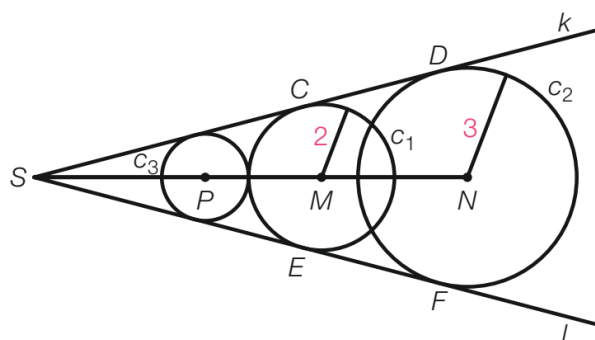
- 7** Gegeven is vierhoek $ABCD$ hiernaast.
Bereken CD . Rond af op twee decimalen.



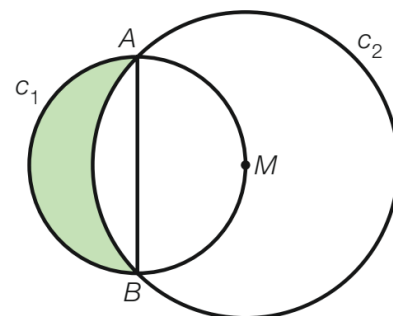
- 8** In de figuur hiernaast is $ABCD$ een vierkant. De hoekpunten B en D zijn de middelpunten van de cirkels met straal 1. De cirkels met de middelpunten A en C raken elkaar en raken de cirkels met straal 1. Bereken exact de straal van de cirkels met de middelpunten A en C .



- 9** Cirkel c_1 met middelpunt M snijdt cirkel c_2 met middelpunt N , waarbij $MN = 4$. De lijn k raakt c_1 in punt C en c_2 in punt D . De lijn l raakt c_1 in punt E en c_2 in punt F . S is het snijpunt van k en l . Cirkel c_3 heeft middelpunt P en raakt c_1 , k en l . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de straal van c_3 .

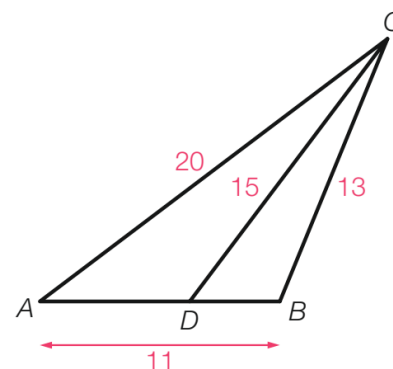


- 10** Het lijnstuk AB is een middellijn van cirkel c_1 . Het middelpunt M van cirkel c_2 ligt op c_1 . Cirkel c_2 gaat door A en B . Bewijs dat de oppervlakte van het groene gebied gelijk is aan de oppervlakte van $\triangle ABM$.



- 11** Gegeven is de figuur hiernaast.
Bereken exact AD .

Deze opgave is niet exact op te lossen met de sinus- en de cosinusregel.





A background image showing a concrete bridge with overhead power lines for a train, spanning a blue river. The bridge has a concrete pier with graffiti that says 'POER'. The sky is clear and blue. A large purple octagonal shape is overlaid on the right side of the image, containing the chapter title and text.

4

Vergelijkingen en herleidingen

Een motorboot vaart over de IJssel met de stroom mee van Arnhem naar Zwolle. Op een zeker moment is 42% van de afstand afgelegd. Vanaf dat punt kost het evenveel tijd om door te varen naar Zwolle, als om terug te varen naar Arnhem. Neem aan dat gedurende deze tocht de snelheid van de boot ten opzichte van het water 25 km/u is en de stroomsnelheid van het water constant is.

Wat is de stroomsnelheid van het water?

4.1 Stelsels vergelijkingen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt een stelsel oplossen door eliminatie.
- Je kunt een stelsel oplossen door substitutie.

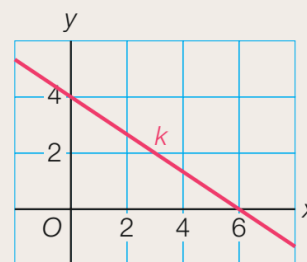
Voorkennis Lineaire vergelijkingen met twee variabelen en stelsels

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$. De bijbehorende grafiek is een lijn.

Om de lijn k : $2x + 3y = 12$ te tekenen, maak je een tabel met twee punten, bijvoorbeeld

x	0	6
y	4	0

De getallenparen $(x, y) = (0, 4)$ en $(x, y) = (6, 0)$ zijn oplossingen van de vergelijking $2x + 3y = 12$.



Je kunt bij de vergelijking $2x + 3y = 12$ de variabele y vrijmaken.

$$2x + 3y = 12$$

$$3y = -2x + 12$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

Hieruit volgt dat:

$rc_k = -\frac{2}{3}$ en k snijdt de y -as in het punt $(0, 4)$.

Met $y = -\frac{2}{3}x + 4$ is y uitgedrukt in x .

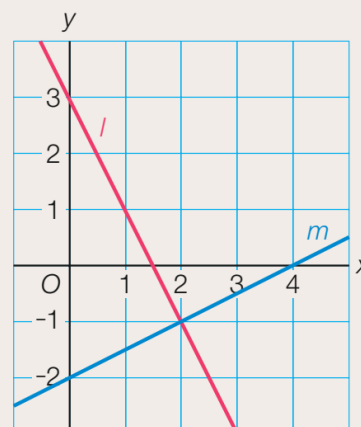
We zeggen ook: y is als functie van x geschreven.

In de figuur hiernaast zijn de lijnen l : $2x + y = 3$ en m : $x - 2y = 4$ getekend.

Het punt $(2, -1)$ is het snijpunt van deze lijnen.

Het getallenpaar $(x, y) = (2, -1)$ is zowel een oplossing van $2x + y = 3$ als van $x - 2y = 4$. We zeggen dat $(x, y) = (2, -1)$ de oplossing is van het stelsel

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$



Het oplossen van een stelsel vergelijkingen gaat in vier stappen.

- 1 Maak bij een van de twee vergelijkingen x of y vrij.
- 2 Substitueer de vrijgemaakte variabele in de andere vergelijking en los de verkregen vergelijking op.
Je hebt nu een van de variabelen berekend.
- 3 Gebruik het antwoord van stap 2 om de andere variabele te berekenen.
- 4 Schrijf de oplossing van het stelsel op.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossing van het stelsel $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

Uitwerking

Uit $2x + y = 3$ volgt $y = -2x + 3$.

$y = -2x + 3$ en $x - 2y = 4$ geeft $x - 2(-2x + 3) = 4$

$$x + 4x - 6 = 4$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

$x = 2$ geeft $y = -2 \cdot 2 + 3 = -1$

Dus $(x, y) = (2, -1)$.

V1 Gegeven zijn de lijnen $l: 3x - y = 6$, $m: x + y = 1$, $n: x - y = 0$ en $p: x + 2y = 4$.

- a Teken deze lijnen in één figuur.
- b Geef van elk van de lijnen de richtingscoëfficiënt.

V2 Gegeven is de lijn $l: 4x - 3y = 24$.

- a Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de assen.
- b Het getallenpaar $(x, y) = (16, p)$ is een oplossing van de vergelijking $4x - 3y = 24$.
Bereken p .
- c Voor welke q is $(x, y) = (q, 48)$ een oplossing van de vergelijking $4x - 3y = 24$?

V3 Bereken exact de oplossingen.

a $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x - 4y = 11 \end{cases}$

b $\begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

c $\begin{cases} x - 6y = 1 \\ 5x + 4y = 56 \end{cases}$

V4 Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen $k: 2x - 3y = 12$ en $l: x + 5y = 5$.

01



Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 7x + 4y = 2 \\ 5x + 4y = 11 \end{cases}$

Je kunt de vergelijkingen van het stelsel van elkaar aftrekken. Welke vergelijking krijg je?

- A $2x = 9$ C $2x + 8y = 9$
B $2x = -9$ D $2x + 8y = -9$

Theorie A Elimineren door optellen of aftrekken

In de voorkennis van deze paragraaf heb je stelsels vergelijkingen opgelost met behulp van **eliminieren door substitutie**.

Je maakt bij een van de vergelijkingen een van de variabelen vrij en substitueert de vrijgemaakte variabele in de andere vergelijking.

Er is nog een manier om een stelsel van twee lineaire vergelijkingen op te lossen. Deze manier heet **eliminieren door optellen of aftrekken**.

Elimineren betekent wegwerken.

Bij het stelsel $\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x + y = 7 \end{cases}$ trek je de vergelijkingen van elkaar af, want dan valt de y weg.

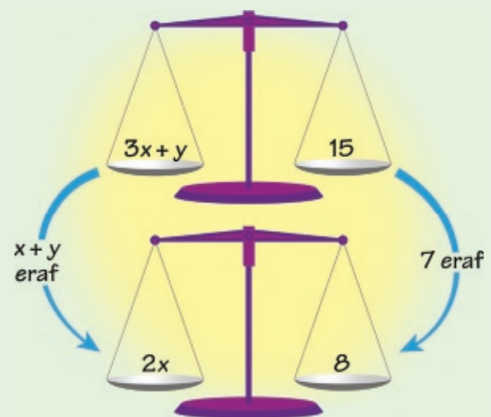
$$\begin{array}{r} 3x + y = 15 \\ x + y = 7 \\ \hline 2x = 8 \end{array} \quad \leftarrow \text{y is geëlimineerd.}$$

$$x = 4$$

$x = 4$ en $x + y = 7$ geeft $4 + y = 7$, dus $y = 3$.

De oplossing van het stelsel is $(x, y) = (4, 3)$.

Dat je de vergelijkingen $3x + y = 15$ en $x + y = 7$ van elkaar af mag trekken, wordt verduidelijkt in de figuur hiernaast.



Weer in evenwicht, want links en rechts is hetzelfde eraf gehaald, want $x + y = 7$.

Bij het stelsel $\begin{cases} 7x + 4y = 1 \\ 5x - 4y = 11 \end{cases}$ tel je de vergelijkingen op, want dan wordt y geëlimineerd.

$$\begin{array}{r} 7x + 4y = 1 \\ 5x - 4y = 11 \\ \hline 12x = 12 \end{array} \quad +$$

$$x = 1$$

$x = 1$ en $7x + 4y = 1$ geeft $7 \cdot 1 + 4y = 1$ en dit geeft $y = -1\frac{1}{2}$.

Dus $(x, y) = (1, -1\frac{1}{2})$ is de oplossing van het stelsel.

Merk op dat $x = 1$ en $5x - 4y = 11$ ook $y = -1\frac{1}{2}$ geeft.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossing van het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$

Uitwerking

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases} \\ \hline 2y = -8 \end{array} \quad \leftarrow \quad -3y - (-5y) = -3y + 5y = 2y$$

$$y = -4$$

$$y = -4 \text{ geeft } 2x - 3 \cdot (-4) = -5$$

$$2x + 12 = -5$$

$$2x = -17$$

$$x = -8\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } (x, y) = (-8\frac{1}{2}, -4).$$

R2



a Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 15 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

Hoe kun je hier een van de variabelen elimineren? Door de vergelijkingen van elkaar af te trekken of door de vergelijkingen bij elkaar op te tellen? Licht toe.

b Gegeven is het stelsel $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$

Hoe kun je hier een van de variabelen elimineren? Door de vergelijkingen van elkaar af te trekken of door de vergelijkingen bij elkaar op te tellen? Licht toe.

3



Bereken exact de oplossingen.

a $\begin{cases} 5x - 4y = -8 \\ -x + 4y = -12 \end{cases}$

b $\begin{cases} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$

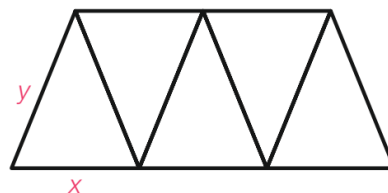
c $\begin{cases} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$

A4



De figuur hiernaast is opgebouwd uit vijf gelijkbenige driehoeken. De omtrek van één zo'n driehoek is 14 en de omtrek van de figuur is 30.

Bereken exact de lengtes van de zijden van de gelijkbenige driehoeken.



A5 Bereken exact de oplossing van het volgende stelsel.

⊗*
$$\begin{cases} a + b = 12 \\ a + c = 13 \\ b + c = 15 \end{cases}$$

O6 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

□⊗*

- a** Tel de vergelijkingen van het stelsel bij elkaar op.
Is nu een van de variabelen geëlimineerd?
- b** Trek de vergelijkingen van het stelsel van elkaar af.
Is nu een van de variabelen geëlimineerd?

Je kunt de variabele y elimineren door eerst de tweede vergelijking met 2 te vermenigvuldigen. Je krijgt dan de vergelijking $6x - 2y = 2$.

- c** Los hiermee het stelsel exact op.

Theorie B Elimineren door optellen of aftrekken na vermenigvuldigen

Bij het stelsel $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$ valt zowel bij optellen als bij aftrekken geen van de variabelen weg. Maar als je de eerste vergelijking met 2 vermenigvuldigt en de tweede vergelijking met 3, dan staat in beide vergelijkingen $6x$. En dan wordt bij aftrekken de variabele x wel geëlimineerd. Je krijgt

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \begin{array}{c} |2| \\ |3| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 8y = 14 \\ 6x + 9y = 48 \end{cases} \begin{array}{r} - \\ + \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 6x - 8y = 14 \\ 6x + 9y = 48 \\ \hline -17y = -34 \end{array}$$

Tussen de verticale strepen staan de getallen waarmee vermenigvuldigd is.

Je kunt bij dit stelsel ook y elimineren. Daartoe vermenigvuldig je de eerste vergelijking met 3 en de tweede met 4. Dan krijg je

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \begin{array}{c} |3| \\ |4| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 9x - 12y = 21 \\ 8x + 12y = 64 \end{cases} \begin{array}{r} + \\ - \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 9x - 12y = 21 \\ 8x + 12y = 64 \\ \hline 17x = 85 \end{array}$$

Ga bij het oplossen van een stelsel eerst na welke variabele je het beste kunt elimineren. Doe het zo, dat je zo weinig mogelijk rekenwerk krijgt.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossing van het stelsel $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

Het is niet nodig met 2 en 8 te vermenigvuldigen.
Je kunt volstaan met een vermenigvuldiging met 1 en 4.

Uitwerking

$$\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \begin{array}{l} | 1 \\ | 4 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 12x - 8y = 16 \end{cases}$$
$$\frac{14x}{14x} = 21 \quad +$$
$$x = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } 2 \cdot 1\frac{1}{2} + 8y = 5$$
$$3 + 8y = 5$$
$$8y = 2$$
$$y = \frac{1}{4}$$

Dus $(x, y) = (1\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

7 Bereken exact de oplossingen.



a $\begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$

b $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - y = 19 \end{cases}$

c $\begin{cases} 4x + 5y = 17 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$

8 Bereken exact de oplossingen.



a $\begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x - 5y = -19 \\ 5x + 4y = 35 \end{cases}$

c $\begin{cases} 0,8x + 0,2y = 1 \\ 0,3x - 0,3y = 1,5 \end{cases}$

A9 Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de lijnen.



a $k: 3x - 2y = -12$ en $l: x + 4y = 38$

b $p: 2x + 5y = 26$ en $q: 3x - 2y = 1$

A10 In deze opgave stellen a en b getallen voor.



In de volgende rij getallen zit een regelmaat.

$a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, \dots$

Het zevende getal van de rij is 34 en het achtste getal 55.

Bereken exact a en b .

A11 Het stelsel $\begin{cases} y = ax + b \\ bx + ay = -22 \end{cases}$ heeft als oplossing $(x, y) = (5, 4)$.
 Bereken exact a en b .

12 De parabool $y = x^2 + bx + c$ gaat door de punten $(1, -2)$ en $(2, 3)$.
 Hieruit volgt het stelsel $\begin{cases} b + c = -3 \\ 2b + c = -1 \end{cases}$
a Toon dit aan.
b Stel langs algebraïsche weg de formule op van de parabool.

13 **a** De parabool $y = ax^2 + bx$ gaat door de punten $(1, 5)$ en $(2, 14)$.
 Stel langs algebraïsche weg de formule op van de parabool.
b De parabool $y = ax^2 + c$ gaat door de punten $(1, 8)$ en $(2, 17)$.
 Stel langs algebraïsche weg de formule op van de parabool.

14 De parabool $y = x^2 + px + q$ snijdt de lijn $y = 2px - q$ in het punt $(2, -1)$.
a Bereken exact p en q .
b Bereken exact de coördinaten van het andere snijpunt van de parabool en de lijn.

A15 De parabool $y = ax^2 + bx + c$ snijdt de y -as in het punt $(0, 4)$ en gaat door de punten $(-2, -10)$ en $(3, 5)$.
 Bereken exact de coördinaten van de snijpunten met de x -as.

A16 Gegeven zijn de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$, de lijn $k: y = x + 4$ en de lijn $l: y = -2x + 19$. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt $(2, 6)$ en de lijn l raakt de grafiek van f in het punt $(8, 3)$.
 Bereken exact a , b en c .

O17 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$
a Licht toe dat je het stelsel niet kunt oplossen met behulp van elimineren door optellen of aftrekken.
b Het is wel mogelijk het stelsel op te lossen met behulp van elimineren door substitutie.
 Als je y elimineert, welke vergelijking krijg je dan?
A $2x^2 - 3x + 4 = 0$
B $x^2 - 3x + 2 = 0$
C $x^2 + 3x + 2 = 0$
D $2x^2 + 3x + 4 = 0$

Theorie C Elimineren door substitutie

Het stelsel $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ kun je niet oplossen met behulp van elimineren door optellen of aftrekken, maar wel met behulp van elimineren door substitutie.

Uit $2x + y = 1$ volgt $y = -2x + 1$.

Substitutie van $y = -2x + 1$ in $x^2 + y^2 = 10$ geeft $x^2 + (-2x + 1)^2 = 10$ en deze vergelijking is op te lossen.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen van het stelsel $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

Uitwerking

$y = x^2 - 4$ en $x + 2y = 2$ geeft $x + 2(x^2 - 4) = 2$

$$x + 2x^2 - 8 = 2$$

$$2x^2 + x - 10 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -10 = 81, \text{ dus } \sqrt{D} = 9$$

$$x = \frac{-1 + 9}{4} = 2 \vee x = \frac{-1 - 9}{4} = -2\frac{1}{2}$$

$$x = 2 \text{ geeft } y = 2^2 - 4 = 0$$

$$x = -2\frac{1}{2} \text{ geeft } y = (-2\frac{1}{2})^2 - 4 = 2\frac{1}{4}$$

$$\text{Dus } (x, y) = (2, 0) \vee (x, y) = (-2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}).$$

R18



a In de theorie staat het stelsel $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

Bereken exact de oplossingen van dit stelsel.

b In het voorbeeld staat het stelsel $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

Harrie lost dit stelsel op met behulp van elimineren door optellen of aftrekken.

Vind je dit handig? Licht toe.

19



Bereken exact de oplossingen.

a $\begin{cases} y = x^2 - 18 \\ x + y = 2 \end{cases}$

b $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ x - y = -3 \end{cases}$

c $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

A20 Bereken exact de oplossingen.



a $\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

b $\begin{cases} xy = 20 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

c $\begin{cases} xy = 15 \\ 4x + y = 16 \end{cases}$

A21 **a** De lijn $y = ax + b$ snijdt de lijn $y = (a^2 - 4)x + 2b$ in het punt $(-1, -1)$.
Bereken exact a en b .



b De lijn $y = ax + b$ snijdt de parabool $y = ax^2 + 2bx - 3$ in het punt $(4, 5)$.
Bereken exact a en b .

A22 Van een ruit met oppervlakte 120 is de som van de lengtes van de diagonalen gelijk aan 34.



Bereken exact de lengte van de zijde van de ruit.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan een stelsel oplossen door eliminatie.

☐ Ik kan een stelsel oplossen door substitutie.

► **OPGAVE C1**
THEORIE A,B

► **OPGAVE C2**
THEORIE C

C1 Bereken exact de oplossing van het stelsel $\begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ x - 3y = 14 \end{cases}$

C2 Bereken exact de oplossingen van het stelsel $\begin{cases} xy = 8 \\ 3x + y = 14 \end{cases}$

Antwoorden

C1 $(x, y) = (-4, -6)$

C2 $(x, y) = (4, 2) \vee (x, y) = (\frac{2}{3}, 12)$

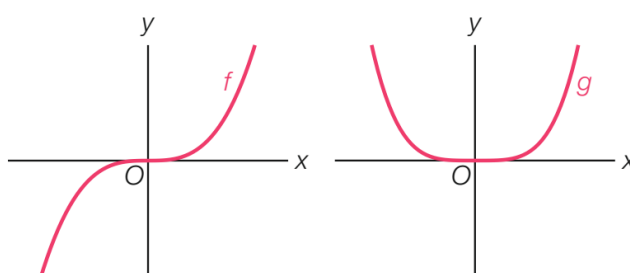
4.2 Hogeregraadsvergelijkingen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de vergelijking $x^n = p$ voor gehele waarden van n met $n > 1$ algebraïsch oplossen.
- Je kunt hogeregraadsvergelijkingen algebraïsch oplossen met ontbinden in factoren en de abc-formule.
- Je kunt hogeregraadsongelijkheden algebraïsch oplossen waarbij je een schets van grafieken gebruikt.
- Je kunt absolute-waardevergelijkingen algebraïsch oplossen.

O23 Hiernaast zijn de grafieken van $f(x) = x^3$ en $g(x) = x^4$ geschetst.

- a** Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = 10$? En $x^3 = -10$?
- b** Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = 10$? En $x^4 = -10$?



O24 De oplossing van de vergelijking $x^5 = 243$ is $x = 3$, want $3^5 = 243$. Om de exacte oplossing van dit soort vergelijkingen direct te kunnen opschrijven, is de tabel hiernaast van belang. Je ziet dat in de kolom waar x^5 boven staat, 243 al is ingevuld.

Vul de tabel verder in en leer hem uit het hoofd, zodat je de getallen voortaan herkent als macht.

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1					
2					
3				243	
4					
5					
6					

Theorie A De vergelijking $x^n = p$

De vergelijking $x^2 = 5$ is een voorbeeld van een tweedegraadsvergelijking. Er zijn ook **hogeregraadsvergelijkingen**, bijvoorbeeld $x^3 = 20$ en $x^4 = 20$.

De oplossingen van $x^2 = 5$ zijn $x = \sqrt{5}$ en $x = -\sqrt{5}$. Je weet dat $(\sqrt{5})^2 = 5$, daarom heet $\sqrt{5}$ ook wel de **tweedemachtswortel** van 5.

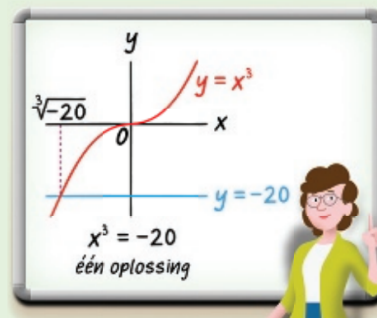
De oplossing van de derdegraadsvergelijking $x^3 = 20$ noteer je als $x = \sqrt[3]{20}$. Dus $(\sqrt[3]{20})^3 = 20$.

$\sqrt[3]{20}$ is de derdemachtswortel van 20.

De oplossing van $x^3 = -20$ is $x = \sqrt[3]{-20}$.

Dus $(\sqrt[3]{-20})^3 = -20$.

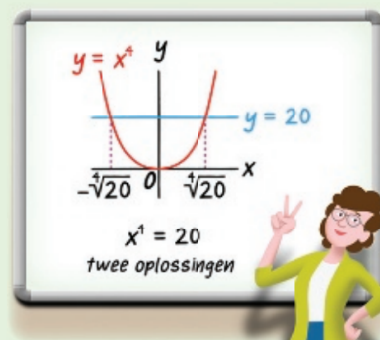
Derdemachtswortels, vierdemachtswortels, ... zijn voorbeelden van **hogeregraadswortels**.



Van de vergelijking $x^4 = 20$ is $x = \sqrt[4]{20}$ een oplossing. In de figuur hiernaast zie je dat ook $x = -\sqrt[4]{20}$ een oplossing is.

De oplossingen van $x^4 = 20$ zijn dus $x = \sqrt[4]{20}$ en $x = -\sqrt[4]{20}$, want $(\sqrt[4]{20})^4 = 20$ en $(-\sqrt[4]{20})^4 = 20$.

De vergelijking $x^4 = -20$ heeft geen oplossing, want de lijn $y = -20$ snijdt de grafiek van $y = x^4$ niet.



Voor $\sqrt[n]{p}$ schrijven we $\sqrt[p]{n}$.

De oplossingen van $x^n = p$ voor gehele waarden van n met $n > 1$

n oneven	$x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p}$
n even en $p > 0$	$x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p} \vee x = -\sqrt[n]{p}$
n even en $p < 0$	$x^n = p$ heeft geen oplossing

Bij het exact berekenen van de oplossingen van een vergelijking laat je wortels als $\sqrt[5]{30}$, $\sqrt[7]{-3}$ en $\sqrt[4]{100}$ staan.

Wortels die mooi uitkomen, herleid je. Daarbij gebruik je de tabel van opgave 24. Zo krijg je bij het exact oplossen van de vergelijking $8 - \frac{1}{2}x^3 = 40$ als oplossing $x = -4$. Zie hiernaast.

$$\begin{aligned} 8 - \frac{1}{2}x^3 &= 40 \\ -\frac{1}{2}x^3 &= 32 \\ x^3 &= -64 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Om een hogere machtswortel te benaderen, zoals in voorbeeld b, gebruik je de GR.

Casio	Gebruik de toets $\sqrt[n]{x}$.
HP	Gebruik de toets $\sqrt[n]{x}$.
NumWorks	Gebruik de optie $\sqrt[n]{x}$ uit de Toolbox.
TI	Gebruik de optie $\sqrt[n]{x}$ uit het FUNC-menu.

Voorbeeld

- a** Bereken exact de oplossingen van $5x^4 + 8 = 43$.
b Bereken algebraïsch de oplossingen van $2(x - 3)^4 + 7 = 17$.
 Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

a $5x^4 + 8 = 43$

$$5x^4 = 35$$

$$x^4 = 7$$

$$x = \sqrt[4]{7} \vee x = -\sqrt[4]{7}$$

b $2(x - 3)^4 + 7 = 17$

$$2(x - 3)^4 = 10$$

$$(x - 3)^4 = 5$$

$$x - 3 = \sqrt[4]{5} \vee x - 3 = -\sqrt[4]{5}$$

$$x = 3 + \sqrt[4]{5} \vee x = 3 - \sqrt[4]{5}$$

$$x \approx 4,50 \vee x \approx 1,50$$

25 Bereken exact de oplossingen.



- a** $5x^3 = 135$ **d** $5x^3 - 1 = 9$
b $1 - 3x^5 = 97$ **e** $8x^3 + 2 = 1$
c $\frac{1}{4}x^8 + 3 = 10$ **f** $5x^6 + 7 = 97$

26 Bereken algebraïsch de oplossingen. Rond zo nodig af op twee decimalen.



- a** $5x^4 - 3 = 17$ **c** $3(4x - 5)^3 = 15$
b $4x^3 - 5 = 1367$ **d** $13 - 2(1 - x)^4 = 1$

A27 Bereken exact de oplossingen.

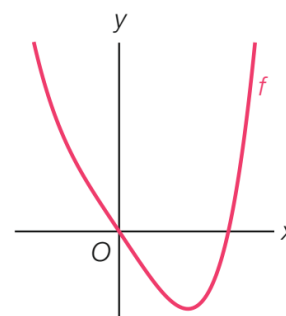


- a** $\frac{1}{4}x^3 + 60 = 6$ **c** $\frac{1}{2}(4x - 1)^5 + 3 = 19$
b $100 - 3x^4 = 55$ **d** $2\frac{1}{2}(1 - 2x)^6 - 6 = 14$

A28 Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 15x$.



- a** Bereken exact de helling van de grafiek voor $x = \sqrt[3]{6}$.
b Bereken exact voor welke x de helling van de grafiek gelijk is aan -5 .



A29 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = px^5 - 3x$ met $p > 0$.



Er zijn twee punten op de grafiek van f_p waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 1. Druk de x -coördinaten van deze punten uit in p .

A30 Gegeven is de vergelijking $2x^4 + 4a = a^2 + 4$.



- a** Beschouw de gegeven vergelijking als een vergelijking in x en druk de oplossingen uit in a .
b Beschouw de gegeven vergelijking als een vergelijking in a en druk de oplossingen uit in x .

O31 Gegeven is de vergelijking $x^3 - x^2 - 6x = 0$.



Het linkerlid van de vergelijking is te ontbinden in drie factoren door eerst een factor x buiten haakjes te brengen.

- a** Ontbind het linkerlid van de vergelijking in drie factoren.
b Geef de oplossingen van de vergelijking $x^3 - x^2 - 6x = 0$.

O32 Gegeven is de vergelijking $x^4 - x^2 - 6 = 0$.



Stel je $x^2 = u$, dan krijg je $u^2 - u - 6 = 0$.

- a** Licht dit toe.

De vergelijking $u^2 - u - 6 = 0$ heeft de oplossingen $u = -2$ en $u = 3$.

- b** Toon dit aan.

- c** Licht toe dat de vergelijking $x^4 - x^2 - 6 = 0$ de oplossingen $x = \sqrt{3}$ en $x = -\sqrt{3}$ heeft.

Theorie B Hogeregraadsvergelijkingen exact oplossen

De derdegraadsvergelijking $x^3 - x^2 - 2x = 0$ is exact op te lossen door x buiten haakjes te brengen. Je krijgt

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$$

Ook de vergelijking $x^4 - x^2 - 2 = 0$ is exact op te lossen.

Je gebruikt de substitutie $x^2 = u$. Je krijgt

$$u^2 - u - 2 = 0$$

$$x^2 = u, \text{ dus } x^4 = (x^2)^2 = u^2.$$

$$(u + 1)(u - 2) = 0$$

$$u = -1 \vee u = 2$$

$$x^2 = -1 \vee x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

$$\text{Bedenk dat } x^2 = -1 \text{ geen oplossing heeft.}$$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

b $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Uitwerking

a $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$$

b $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

$$\text{Stel } x^2 = u.$$

$$u^2 - 3u + 2 = 0$$

$$(u - 1)(u - 2) = 0$$

$$u = 1 \vee u = 2$$

$$x^2 = 1 \vee x^2 = 2$$

$$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

Soms krijg je na substitutie een vergelijking die niet eenvoudig is op te lossen met ontbinden in factoren. Dan gebruik je de *abc*-formule.

Zo krijg je bij de vergelijking $2x^4 - 13x^2 + 20 = 0$ na substitutie van $x^2 = u$ de vergelijking $2u^2 - 13u + 20 = 0$.

De *abc*-formule geeft $u = 4 \vee u = 2\frac{1}{2}$.

Dus $x^2 = 4 \vee x^2 = 2\frac{1}{2}$ en dit geeft $x = 2 \vee x = -2 \vee x = \sqrt{2\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{2\frac{1}{2}}$, oftewel $x = 2 \vee x = -2 \vee x = \frac{1}{2}\sqrt{10} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{10}$.

33 Bereken exact de oplossingen.

- a** $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ **c** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
b $x^3 - 5x^2 = 6x$ **d** $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

34 Bereken exact de oplossingen.

- a** $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ **c** $x^4 + 16 = 10x^2$
b $x^3 = 4x^2 + 12x$ **d** $x^3 + 25x = 10x^2$

A35 Bereken exact de oplossingen.

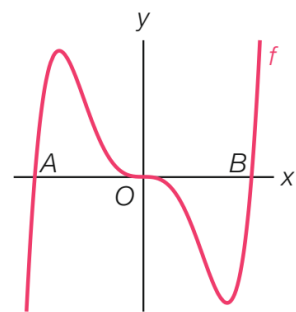
- a** $4x^4 + 153 = 53x^2$ **c** $4x^6 + 35 = 24x^3$
b $4x^4 + 21x^2 = 148$ **d** $4x^3 + 7x^2 = 36x$

A36 Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$.

- a** De lijn $y = 2x$ heeft behalve de oorsprong ook de punten A en B gemeenschappelijk met de grafiek van f . Bereken exact de x -coördinaten van A en B .
b Bereken exact de helling van de grafiek van f voor $x = \sqrt{2}$.
c Bereken exact voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 2.

A37 Zie de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{100}x^5 - \frac{1}{4}x^3$ hiernaast.

- a** De grafiek snijdt de x -as behalve in de oorsprong ook in de punten A en B . Bereken exact
a de coördinaten van A en B
b de helling van de grafiek voor $x = 3$
c voor welke x de helling van de grafiek gelijk is aan 0
d voor welke x de helling van de grafiek gelijk is aan $\frac{4}{5}$.

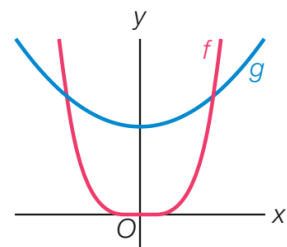


A38 Van een rechthoek met oppervlakte 90 is de lengte van een diagonaal 15.

Bereken exact de lengtes van de zijden.

39 Hiernaast zijn de grafieken van de functies $f(x) = x^4$ en

- a** $g(x) = 2x^2 + 3$ geschetst.
a Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ exact op.
b Geef de exacte oplossing van de ongelijkheid $x^4 \leq 2x^2 + 3$.



A40 Los exact op.

- a** $x^3 \geq 2x^2 + 8x$
b $\frac{2}{3}x^4 + 9 \leq 7x^2$

- O41** Gegeven is de vergelijking $|4x - 5| = 9$.
□ ⊗ * Licht toe dat zowel $x = -1$ als $x = 3\frac{1}{2}$ een oplossing is.

Theorie C Absolute-waardevergelijkingen

De **absolute-waardevergelijking** $|x| = 6$ heeft als oplossing $x = 6 \vee x = -6$.

De vergelijking $|3x - 1| = 8$ los je exact op door te gebruiken $3x - 1 = 8 \vee 3x - 1 = -8$. Zie voorbeeld a.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $|3x - 1| = 8$ **b** $|1 - x^2| = 8$

Uitwerking

a $ 3x - 1 = 8$	b $1 - x^2 = 8 \vee 1 - x^2 = -8$
$3x - 1 = 8 \vee 3x - 1 = -8$	$-x^2 = 7 \vee -x^2 = -9$
$3x = 9 \vee 3x = -7$	$x^2 = -7 \vee x^2 = 9$
$x = 3 \vee x = -2\frac{1}{3}$	$x = 3 \vee x = -3$

- 42** Bereken exact de oplossingen.

□ **a** $|2x - 1| = 8$ **c** $|2x^2 - 5| = 11$
b $|x^2 - 3| = 1$ **d** $|5 - x^2| = 11$

- A43** Bereken exact de oplossingen.

□ ⊗ * **a** $|2x^4 - 5| = 15$ **c** $|x^2 - 5x| = 6$
b $|2x^3 - 5| = 15$ **d** $|8x - x^2| = 12$

- A44** Los de ongelijkheid $|x^4 - 5x^2| \leq 6$ exact op.

⊗ *

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de vergelijking $x^n = p$ voor gehele waarden van n met $n > 1$ algebraïsch oplossen.
- ☐ Ik kan hogeregraadsvergelijkingen algebraïsch oplossen met ontbinden in factoren en de abc -formule.
- ☐ Ik kan hogeregraadsongelijkheden algebraïsch oplossen waarbij ik een schets van grafieken gebruik.
- ☐ Ik kan absolute-waardevergelijkingen algebraïsch oplossen.

► OPGAVE C3
THEORIE A

► OPGAVE C4abc
THEORIE B

► OPGAVE C4d
OPGAVE 39

► OPGAVE C5
THEORIE C

C3 Bereken exact de oplossingen.

- a** $3x^5 + 7 = 19$ **c** $3(x - 1)^4 + 7 = 19$
b $2x^3 + 17 = 1$ **d** $2x^6 + 17 = 1$

C4 Bereken exact de oplossingen.

- a** $x^3 + 10x = 7x^2$ **c** $x^4 + 3x^2 = 54$
b $x^4 + 10 = 7x^2$ **d** $\frac{1}{3}x^4 \geq 4x^2 - 9$

C5 Bereken exact de oplossingen.

- a** $|1 - x^3| = 3$ **b** $|x^2 - 10x| = 24$

Antwoorden

- C3** **a** $x = \sqrt[5]{4}$
b $x = -2$
c $x = 1 + \sqrt[4]{4} \vee x = 1 - \sqrt[4]{4}$
d geen oplossing
- C4** **a** $x = 0 \vee x = 2 \vee x = 5$
b $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$
c $x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$
d $x \leq -3 \vee -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \vee x \geq 3$
- C5** **a** $x = \sqrt[3]{-2} \vee x = \sqrt[3]{4}$
b $x = -2 \vee x = 12 \vee x = 4 \vee x = 6$

4.3 Regels voor het oplossen van vergelijkingen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt vergelijkingen van de vorm $AB = 0$, $A^2 = B^2$, $AB = AC$ en $AB = A$ algebraïsch oplossen.
- Je kunt wortelvergelijkingen algebraïsch oplossen.
- Je kunt gebroken vergelijkingen algebraïsch oplossen.

045



Gegeven is de vergelijking $5x(x^2 - 4) = 15(x^2 - 4)$.

- a** Werk de haakjes weg en licht toe dat dit geen goede aanpak is om de vergelijking op te lossen.
- b** Volgens Maud is $x = 2$ een oplossing. Ben je het daarmee eens? Licht toe.
- c** Klaas deelt het linker- en het rechterlid door $x^2 - 4$ en lost dus de vergelijking $5x = 15$ op. Geef commentaar.

Theorie A Vergelijkingen van de vorm $AB = 0$, $A^2 = B^2$, $AB = AC$ en $AB = A$

Bij het oplossen van de vergelijking $(x^2 - 1)(2x^2 - 10) = 0$ gebruik je de volgende regel.

$AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$

$$\begin{aligned}\text{Dus je krijgt } (x^2 - 1)(2x^2 - 10) &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \vee 2x^2 - 10 = 0 \\ x^2 &= 1 \vee x^2 = 5 \\ x &= 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}\end{aligned}$$

Bij het oplossen van de vergelijking $(2x^2 - 10)^2 = x^2$ gebruik je de volgende regel.

$A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$

Dus je krijgt
 $(2x^2 - 10)^2 = x^2$

$$2x^2 - 10 = x$$

$$2x^2 - x - 10 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -10 = 81, \text{ dus } \sqrt{D} = 9$$

$$x = \frac{1+9}{4} = 2\frac{1}{2} \vee x = \frac{1-9}{4} = -2$$

$$\vee 2x^2 - 10 = -x$$

$$\vee 2x^2 + x - 10 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -10 = 81, \text{ dus } \sqrt{D} = 9$$

$$\vee x = \frac{-1+9}{4} = 2 \vee x = \frac{-1-9}{4} = -2\frac{1}{2}$$

$$A^2 = B^2$$

$$A^2 - B^2 = 0$$

$$(A - B)(A + B) = 0$$

$$A - B = 0 \vee A + B = 0$$

$$A = B \vee A = -B$$

Bij het oplossen van de vergelijking $x^2(2x^2 - 10) = 4(2x^2 - 10)$ mag je niet beginnen met beide leden te delen door $2x^2 - 10$, want $2x^2 - 10$ zou gelijk aan nul kunnen zijn. Je hebt te maken met een vergelijking van de vorm $AB = AC$ en bij het oplossen gebruik je de volgende regel.

$AB = AC$ geeft $A = 0 \vee B = C$

Het oplossen van de vergelijking $x^2(2x^2 - 10) = 4(2x^2 - 10)$ gaat dus als volgt.

$$x^2(2x^2 - 10) = 4(2x^2 - 10)$$

$$2x^2 - 10 = 0 \vee x^2 = 4$$

$$2x^2 = 10 \vee x = 2 \vee x = -2$$

$$x^2 = 5 \vee x = 2 \vee x = -2$$

$$x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5} \vee x = 2 \vee x = -2$$

Neem je $C = 1$ in de regel ' $AB = AC$ geeft $A = 0 \vee B = C$ ', dan krijg je de volgende regel.

$AB = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$

Bij het oplossen van de vergelijking $x^2(x - 1) = x^2$ krijg je $x^2(x - 1) = x^2$

$$x^2 = 0 \vee x - 1 = 1$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

Ga bij het oplossen van vergelijkingen na of je een van de volgende regels kunt gebruiken.

$AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$

$A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$

$AB = AC$ geeft $A = 0 \vee B = C$

$AB = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$

$$AB = AC$$

$$AB - AC = 0$$

$$A(B - C) = 0$$

$$A = 0 \vee B - C = 0$$

$$A = 0 \vee B = C$$

$$AB = A$$

$$AB - A = 0$$

$$A(B - 1) = 0$$

$$A = 0 \vee B - 1 = 0$$

$$A = 0 \vee B = 1$$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen van $(2x - 1)^3 = 2x - 1$.

Uitwerking

$$(2x - 1)^3 = 2x - 1$$

$$(2x - 1)(2x - 1)^2 = 2x - 1$$

$$2x - 1 = 0 \vee (2x - 1)^2 = 1$$

$$2x = 1 \vee 2x - 1 = 1 \vee 2x - 1 = -1$$

$$x = \frac{1}{2} \vee 2x = 2 \vee 2x = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 0$$

R46

a Zie de theorie op de vorige bladzijde.

Welke oplossingen mis je als je bij de vergelijking

$$x^2(2x^2 - 10) = 4(2x^2 - 10)$$

begint met beide leden te delen door $2x^2 - 10$?

b Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

Welke regel uit het rode kader boven het voorbeeld wordt gebruikt bij het oplossen van de vergelijking?

47

Bereken exact de oplossingen.

a $(4x - 1)^2 = (3x - 2)^2$

b $(3x^2 - 5)^2 = 4x^2$

c $(x^2 - 4x)(x^2 - 8) = 0$

d $x^3(x - 3) = 8(x - 3)$

e $(3x - 2)^4 = 3x - 2$

f $2x(x^2 - 4) = 6(x - 2)$

A48

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{8}(3x + 4)(x - 2)^3$.

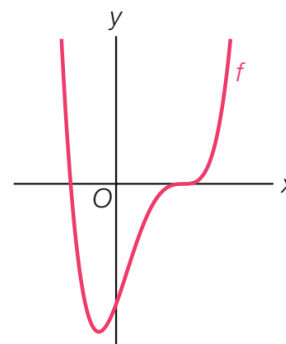
a Bereken het minimum van f . Rond af op één decimaal.

b Bereken exact de nulpunten van f .

c De lijn $k: y = 3x + 4$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B .

Bereken exact de coördinaten van A en B .

d Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de parabool $y = (3x + 4)(2x - 4)$.

**O49**

a Gegeven is de vergelijking $\sqrt{2x - 5} = 3$.

Licht toe dat hieruit volgt $2x - 5 = 9$ en los deze vergelijking op.

b Gegeven is de vergelijking $\sqrt{2x - 5} = -3$.

Licht toe dat deze vergelijking geen oplossing heeft.

Theorie B Wortelvergelijkingen

De vergelijking $\sqrt{2x - 3} = 5$ is een voorbeeld van een **wortelvergelijking**.

Bij het algebraïsch oplossen van de vergelijking $\sqrt{2x - 3} = 5$

ga je als volgt te werk.

$$\sqrt{2x - 3} = 5 \quad \text{Kwadrateer het linker- en rechterlid.}$$

$$2x - 3 = 25$$

$$2x = 28$$

$$x = 14$$

Bij de vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$ verdwijnt het wortelteken niet als je het linker- en rechterlid kwadrateert. Zorg er daarom voor dat in het linkerlid alleen $\sqrt{x}$ komt te staan. Dit noemen we het **isoleren** van de wortelvorm. Je krijgt $\sqrt{x} = 12 - x$. Nu verdwijnt het wortelteken wel als je het linker- en rechterlid kwadrateert. Zie de volgende bladzijde.

$$x + \sqrt{x} = 12$$

$$\sqrt{x} = 12 - x$$

Kwadrateren geeft $x = (12 - x)^2$

$$x = 144 - 24x + x^2$$

$$x^2 - 25x + 144 = 0$$

$$(x - 9)(x - 16) = 0$$

$$x = 9 \vee x = 16$$

De getallen 9 en 16 zijn echter niet beide een oplossing van de oorspronkelijke vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$.

Invullen van $x = 9$ in de vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$ geeft $9 + \sqrt{9} = 12$ en dit klopt.

Invullen van $x = 16$ in de vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$ geeft $16 + \sqrt{16} = 12$ en dit klopt niet.

Daarom is $x = 9$ de enige oplossing die **voldoet**.

Door bij een wortelvergelijking te kwadrateren, ontstaat er een nieuwe vergelijking. Oplossingen van deze nieuwe vergelijking voldoen mogelijk niet aan de oorspronkelijke vergelijking. Controleer daarom of de oplossingen van de nieuwe vergelijking voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking.

Het algebraïsch oplossen van wortelvergelijkingen gaat in drie stappen: isoleren, kwadrateren en controleren.

Werkschema: wortelvergelijkingen algebraïsch oplossen

- 1 **Isoleer** de wortelvorm, dus zet de wortelvorm apart.
- 2 **Kwadrateer** het linker- en rechterlid en los de verkregen vergelijking op.
- 3 **Controleer** of de oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking.

Vervang je in een vergelijking de variabele door een getal en klopt het, dan zeggen we dat het getal voldoet aan de vergelijking. Het getal is dus een oplossing van de vergelijking.

Vul je een getal in en klopt het niet, dan zeggen we dat het getal niet aan de vergelijking voldoet.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen van $4\sqrt{2x-1} = x + 3$.

Uitwerking

$$4\sqrt{2x-1} = x + 3$$

kwadrateren geeft $16(2x-1) = (x+3)^2$

$$32x - 16 = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 - 26x + 25 = 0$$

$$(x-1)(x-25) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 25$$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen van $x - \sqrt{x+1} = 5$.

Uitwerking

$$x - \sqrt{x+1} = 5$$

$$x - 5 = \sqrt{x+1}$$

kwadrateren geeft $(x - 5)^2 = x + 1$

$$x^2 - 10x + 25 = x + 1$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$(x - 3)(x - 8) = 0$$

$$x = 3 \vee x = 8$$

$x = 3$ voldoet niet, dus $x = 8$.

R50 Zie het voorbeeld hierboven.

   Controleer dat $x = 3$ niet voldoet en $x = 8$ wel.

51 Bereken exact de oplossingen.



a $x = \sqrt{5x+14}$

c $5\sqrt{x} = x$

b $3x = \sqrt{8x+20}$

d $3x = \sqrt{18x+72}$

52 Bereken exact de oplossingen.



a $4 - 3\sqrt{x} = 2$

c $2x - 5\sqrt{x} = 3$

b $5\sqrt{x} - 2x = 0$

d $5 - 2\sqrt{x} = 3$

A53 Bereken exact de oplossingen.

a $2x + \sqrt{x} = 10$

c $10 - x\sqrt{x} = 2$

b $x + 2\sqrt{6-5x} = 6$

d $-3 + \sqrt{7+x} = \frac{1}{3}x - 4$

A54 De vergelijking $x - \sqrt{x} = 12$ is exact op te lossen met isoleren, kwadrateren en controleren.



Maar de vergelijking is ook op te lossen met de substitutie $\sqrt{x} = u$.

a Gebruik de substitutie $\sqrt{x} = u$ om de vergelijking $x - \sqrt{x} = 12$ exact op te lossen.

b Gebruik de substitutie $x\sqrt{x} = u$ om de vergelijking $x^3 - 9x\sqrt{x} + 8 = 0$ exact op te lossen.

c Los exact op $x^5 + 10 = 7x^2\sqrt{x}$.

Bij de vergelijking $\frac{x}{2} = \frac{x+4}{x}$ hoort de verhoudingstabel

x	$x+4$
2	x

- a Licht toe dat uit deze verhoudingstabel volgt $x^2 - 2x - 8 = 0$.
b Bereken x .

Theorie C Gebroken vergelijkingen

De vergelijking $\frac{x+2}{x+1} = \frac{6}{x+3}$ is een **gebroken vergelijking**, omdat de variabele in de noemer van een breuk voorkomt. Je kunt deze vergelijking algebraïsch oplossen met kruislings vermenigvuldigen.

$$\begin{aligned} \text{Je krijgt } \frac{x+2}{x+1} &= \frac{6}{x+3} \\ (x+2)(x+3) &= 6(x+1) \\ x^2 + 5x + 6 &= 6x + 6 \\ x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \\ x = 0 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Ook de vergelijking $\frac{x+3}{x+1} = 0$ is een gebroken vergelijking.

Omdat de breuk nul is als de teller nul is, krijg je $x+3=0$, dus de oplossing van deze vergelijking is $x=-3$.

Bij de vergelijking $\frac{2x-4}{x+1} = \frac{x+3}{x+1}$ zijn de noemers gelijk.

Daarom krijg je een oplossing als ook de tellers aan elkaar gelijk zijn. Dus $2x-4=x+3$ en dit geeft $x=7$.

Bij de vergelijking $\frac{x+3}{2x-4} = \frac{x+3}{x+1}$ zijn de tellers gelijk.

Als deze tellers gelijk zijn aan 0 staat er $\frac{0}{2x-4} = \frac{0}{x+1}$

en dit levert een oplossing. Deze oplossing is $x=-3$.

Maar ook als de noemers gelijk zijn heb je een oplossing.

Dit geeft $2x-4=x+1$, dus $x=5$.

$$\frac{0}{1} = 0 \quad \frac{1}{0} \text{ kan niet}$$

$$\frac{0}{0} \text{ kan niet} \quad \frac{0}{10} = 0$$

Een breuk is nul als de teller nul is en de noemer niet.

Je kunt bij het oplossen van gebroken vergelijkingen x -waarden vinden die geen oplossing zijn van de oorspronkelijke vergelijking omdat ze een noemer nul maken. Daarom moet je bij gebroken vergelijkingen controleren of de gevonden waarden van x voldoen. Dit doe je door voor de gevonden waarden van x te controleren of er geen noemer nul wordt.

REGELS VOOR HET ALGEBRAÏSCH OPLOSSEN VAN GEBROKEN VERGELIJKINGEN

$$\frac{A}{B} = 0 \text{ geeft } A = 0 \wedge B \neq 0$$

$$\frac{A}{B} = C \text{ geeft } A = BC \wedge B \neq 0$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ geeft } AD = BC \wedge B \neq 0 \wedge D \neq 0$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{B} \text{ geeft } A = C \wedge B \neq 0$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{D} \text{ geeft } (A = 0 \vee B = D) \wedge B \neq 0 \wedge D \neq 0$$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{6x^2 - 12}{x^2 - 3} = 0$

b $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

Uitwerking

a $\frac{6x^2 - 12}{x^2 - 3} = 0$

$$6x^2 - 12 = 0$$

$$6x^2 = 12$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

b $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

$$x = 1 \text{ voldoet niet, dus } x = -1.$$

R56 Zie het voorbeeld.



a Bij het oplossen van de vergelijking van voorbeeld a wordt gebruikt

$\frac{A}{B} = 0$ geeft $A = 0 \wedge B \neq 0$. In de tweede regel van de uitwerking staat echter alleen $6x^2 - 12 = 0$ en niet $x^2 - 3 \neq 0$.

Ga na dat de noemer niet nul is door $x = \sqrt{2}$ en $x = -\sqrt{2}$ in te vullen in de noemer.

b Welke regel uit het rode kader boven het voorbeeld wordt gebruikt bij het oplossen van de vergelijking van voorbeeld b? Waarom voldoet $x = 1$ niet?

Informatief Oplossingen invoeren bij kruislings vermenigvuldigen

Kruislings vermenigvuldigen bij $\frac{5}{x^2 - 2x} = \frac{2}{x^2 + x}$ geeft $5(x^2 + x) = 2(x^2 - 2x)$

$$5x^2 + 5x = 2x^2 - 4x$$

$$3x^2 + 9x = 0$$

$$3x(x + 3) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -3$$

Invullen van $x = 0$ in de oorspronkelijke vergelijking geeft $\frac{5}{0} = \frac{2}{0}$ en dit klopt niet.

Door het kruislings vermenigvuldigen is een oplossing ingevoerd.

57 Bereken exact de oplossingen.



a $\frac{x+3}{x-1} = \frac{10}{x}$

c $\frac{3x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

b $\frac{5x^2 - 15}{x^2 + 5} = 0$

d $\frac{x^2 - 3}{x} + 1 = 3$

58 Bereken exact de oplossingen.



a $\frac{x^2 - 4}{2x + 5} = \frac{x^2 - 4}{x + 4}$

c $\frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$

b $\frac{x^2 - 4}{x + 1} = 3\frac{1}{2}$

d $\frac{3x^2 - 10}{x^2 + 1} = 2$

A59 Bereken exact de oplossingen.



a $\frac{3x + 4}{x - 1} = \frac{x + 18}{x}$

c $\frac{x^3 - 8}{x^2 + 2} = \frac{x^3 - 8}{x + 8}$

b $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8} = 0$

d $\frac{3x + 1}{2x - 1} = \frac{3x + 5}{2x + 1}$

A60 Bereken exact de x -coördinaten van de punten op de grafiek van



de functie $f(x) = \frac{-10x}{x^2 + 2}$ waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan $\frac{5}{9}$.

A61 Voor $a \neq 0$ en $b \neq 0$ is gegeven de functie $f(x) = \frac{ax}{bx - 3}$.



De helling van de grafiek van f in het punt $A(3, 5)$ is $-1\frac{2}{3}$. Bereken exact de waarden van a en b .

A62*****

Aan een meer liggen de havens A en B . Een vrachtschip vertrekt om 9:00 uur uit A op weg naar B . Om 13:00 vertrekt uit B een motorboot op weg naar A . De schepen varen elk met een constante snelheid langs dezelfde route. Om 15:00 uur passeren de schepen elkaar. De motorboot arriveert in A een uur nadat het vrachtschip in B is aangekomen.

We vragen ons af hoe laat het vrachtschip in B is aangekomen.

Als de schepen elkaar bij punt P passeren en t de tijd in uren is die het vrachtschip erover doet om van P naar B te varen, dan geldt $AP = 6 \cdot v_v$ en $AP = (t + 1) \cdot v_m$. Hierin is v_v de snelheid van het vrachtschip en v_m de snelheid van de motorboot, beide in km/u.

Druk v_m uit in t en v_v en bereken hoe laat het vrachtschip in B is aangekomen.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan vergelijkingen van de vorm $AB = 0$, $A^2 = B^2$, $AB = AC$ en $AB = A$ algebraïsch oplossen.

► **OPGAVE C6**
THEORIE A

☐ Ik kan wortelvergelijkingen algebraïsch oplossen.

► **OPGAVE C7**
THEORIE B

☐ Ik kan gebroken vergelijkingen algebraïsch oplossen.

► **OPGAVE C8**
THEORIE C

C6 Bereken exact de oplossingen.

a $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$

c $x^2(x^2 - x) = 9(x^2 - x)$

b $(x^2 - x)^2 = (x^2 - 1)^2$

d $x^2(x^2 - x) = x^2 - x$

C7 Bereken exact de oplossingen.

a $x = 2\sqrt{x+3}$

b $2x - \sqrt{x} = 21$

C8 Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = 0$

d $\frac{2x - 1}{x^2 - 4} = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$

b $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = 2$

e $\frac{x^2 - 4}{2x} = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

c $\frac{2x}{x - 2} = \frac{x}{x - 4}$

Antwoorden

C6 a $x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$

c $x = 0 \vee x = 1 \vee x = 3 \vee x = -3$

b $x = 1 \vee x = -\frac{1}{2}$

d $x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$

C7 a $x = 6$

b $x = 12\frac{1}{4}$

C8 a $x = 0$

d geen oplossing

b $x = -4$

e $x = 2 \vee x = -2 \vee x = 1$

c $x = 0 \vee x = 6$

4.4 Formules met breuken herleiden

Kennis en vaardigheden

- Je kunt breuken optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
- Je kunt breuken vereenvoudigen.
- Je kunt bij breuken de noemer uitdelen.

063

□ ⊗ *

- a Herleid $\frac{3x}{x+1} + \frac{2x-4}{x+1}$ tot één breuk.
- b Herleid $\frac{x+1}{2} \cdot \frac{3}{5x}$ tot één breuk en werk de haakjes weg.
- c Linda heeft $\frac{x}{\left(\frac{2}{x}\right)}$ herleid tot $\frac{1}{2}x^2$.

Licht deze herleiding toe. Voor welke x is de herleiding niet juist?

Theorie A Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen

Om breuken op te tellen of af te trekken, maak je ze eerst gelijknamig.

Zo is

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-1} - \frac{x}{x+2} &= \frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)} - \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \\ \frac{2(x+2) - x(x-1)}{(x-1)(x+2)} &= \frac{2x+4-x^2+x}{(x-1)(x+2)} = \frac{3x+4-x^2}{(x-1)(x+2)}.\end{aligned}$$

Breuken vermenigvuldig je volgens de regel

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}.$$

$$\text{Dus } \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x+3}{5} = \frac{(x-2)(x+3)}{5(x-1)} = \frac{x^2+x-6}{5(x-1)}.$$

Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

$$\text{Dus } \frac{4x}{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)} = 4x \cdot \frac{x-2}{x+1} = \frac{4x(x-2)}{x+1} = \frac{4x^2-8x}{x+1}.$$

Maar let op. Bij $\frac{4x}{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)}$ moet gelden dat $x \neq 2 \wedge x \neq -1$.

Daarom moet dit ook gelden bij $\frac{4x^2-8x}{x+1}$.

$$\text{We schrijven } \frac{4x}{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)} = \frac{4x^2-8x}{x+1} \text{ voor } x \neq 2.$$

Ga bij het herleiden van breuken na of er voorwaarden gelden.

Werk in tellers haakjes weg. In noemers mag je ze laten staan.

Werk bij het herleiden van breukvormen altijd breuken in tellers en noemers weg.

Voorbeeld

a Herleid het rechterlid van de formule $y = x - \frac{2x-1}{x-1}$ tot één breuk.

b Herleid de formule $y = \frac{x+5}{\left(\frac{x-1}{2x}\right)}$.

Uitwerking

a $y = x - \frac{2x-1}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} - \frac{2x-1}{x-1} = \frac{x^2 - x - 2x + 1}{x-1} = \frac{x^2 - 3x + 1}{x-1}$

b $y = \frac{x+5}{\left(\frac{x-1}{2x}\right)} = (x+5) \cdot \frac{2x}{x-1} = \frac{2x(x+5)}{x-1} = \frac{2x^2 + 10x}{x-1}$ voor $x \neq 0$

R64 Zie de theorie op de vorige bladzijde.



a Waarom moet bij $\frac{4x}{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)}$ gelden dat $x \neq 2 \wedge x \neq -1$?

b Waarom staat bij het eindantwoord $\frac{4x^2 - 8x}{x+1}$ wel de voorwaarde $x \neq 2$, maar niet de voorwaarde $x \neq -1$?

65



a Herleid het rechterlid van de formule $y = \frac{x+1}{x-3} - \frac{x+2}{x-4}$ tot één breuk.

b Herleid de formule $y = \frac{2x^2}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$.

c Herleid het rechterlid van de formule $y = \frac{10}{x-1} - x^2$ tot één breuk.

d Herleid het rechterlid van de formule $y = \frac{x}{x-1} \left(x + \frac{1}{x-1}\right)$ tot één breuk.

e Herleid de formule $y = (x-1) \cdot \frac{2}{\left(\frac{x-3}{x+1}\right)}$.

A66



Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{4x}{x+1}$ en $g(x) = \frac{4}{x-1}$.

Bereken exact de oplossingen.

a $f(x) = g(x)$

b $f(x) \cdot g(x) = 6$

c $f(x) - g(x) = 7$

a De formule $y = \frac{2x + \frac{1}{3}}{x + 4}$ is te herleiden tot de vorm $y = \frac{ax + 1}{cx + d}$.

Welke getallen zijn a , c en d ?

b De formule $y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x}$ is te herleiden tot $y = x - 6 + \frac{5}{x}$.

Licht dit toe.

c Sedar heeft de formule $y = \frac{3x}{2x^2 + x}$ herleid tot $y = \frac{3}{2x + 1}$.

Licht deze herleiding toe. Voor welke x is de herleiding niet juist?

Theorie B Vereenvoudigen en uitdelen

Om de formule $y = \frac{3 - \frac{2}{x}}{x + 4}$ te vereenvoudigen, werk je de breuk $\frac{2}{x}$ in de teller weg. Je vermenigvuldigt daartoe de teller en de noemer van het

rechterlid met x . Dus $y = \frac{3 - \frac{2}{x}}{x + 4} = \frac{\left(3 - \frac{2}{x}\right) \cdot x}{(x + 4) \cdot x} = \frac{3x - 2}{x(x + 4)}$.

Bij de formule $y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x}$ kun je x **uitdelen**.

Je krijgt $y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{5x}{x} - \frac{6}{x} = x + 5 - \frac{6}{x}$.

Je mag in één keer schrijven $y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x} = x + 5 - \frac{6}{x}$.

De formule $y = \frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 - x - 20}$ is te vereenvoudigen door teller en noemer van het rechterlid te ontbinden in factoren en vervolgens teller en noemer te delen door dezelfde factor.

Je krijgt $y = \frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 - x - 20} = \frac{(x + 4)(x + 5)}{(x + 4)(x - 5)} = \frac{x + 5}{x - 5}$ voor $x \neq -4$.

Voorbeeld

Herleid.

a $N = \frac{500}{4b + \frac{10}{3b}}$

b $y = \frac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

Uitwerking

a $N = \frac{500}{4b + \frac{10}{3b}} = \frac{500 \cdot 3b}{\left(4b + \frac{10}{3b}\right) \cdot 3b} = \frac{1500b}{12b^2 + 10} = \frac{750b}{6b^2 + 5} \text{ voor } b \neq 0$

b $y = \frac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{x(x^2 + 4x + 3)}{x(x^2 + 2x - 3)} = \frac{x(x+1)(x+3)}{x(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x-1} \text{ voor } x \neq 0 \wedge x \neq -3$

R68



a Zie de theorie op de vorige bladzijde.

Bij de herleiding van $y = \frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 - x - 20}$ tot $y = \frac{x+5}{x-5}$ is de voorwaarde 'voor $x \neq -4$ ' toegevoegd.

Waarom is de toevoeging 'voor $x \neq 5$ ' niet nodig?

b Zie voorbeeld a hierboven.

Waarom is de toevoeging 'voor $b \neq 0$ ' nodig?

c Zie voorbeeld b hierboven.

Waarom is de toevoeging 'voor $x \neq 0 \wedge x \neq -3$ ' nodig?

R69



In voorbeeld b op bladzijde 174 is de formule $y = \frac{x+5}{\left(\frac{x-1}{2x}\right)}$ herleid door

gebruik te maken van de regel 'delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk'.

Je kunt de formule ook herleiden op de manier van voorbeeld a hierboven.

Herleid de formule zoals in voorbeeld a. Welke manier heeft je voorkeur?

70



a Herleid de formule $y = \frac{x + \frac{3}{x+1}}{x}$.

b Deel x uit bij de formule $y = \frac{5x^2 + 1000}{x}$.

c Herleid de formule $y = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 7x + 12}$.

71 a Deel $3t$ uit bij de formule $K = \frac{6t^2 + 12t + 1500}{3t}$.

□ ⊗ *

b Herleid de formule $y = \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^3 + x^2 - 30x}$.

c Herleid de formule $y = \frac{10 + \frac{5}{x-1}}{6 - \frac{3}{x-1}}$ tot de vorm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

72 Herleid. Gebruik een merkwaardig product.

□ ⊗ *

a $y = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$

c $y = \frac{x^4 + 4x^2 + 4}{x^4 - 4}$

b $y = \frac{2x^5 - 32x}{x^2 - 4}$

d $y = \frac{x^4 - 9x^2}{x^2 - 3x}$

Merkwaardige producten

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

A73 a Herleid de formule $y = \frac{\left(\frac{x+1}{2x}\right)}{x-1}$.

□ ⊗ *

b Herleid het rechterlid van de formule $Q = \frac{10}{p + \frac{5}{2p}} - p$ tot één breuk.

c Deel $2p$ uit bij de formule $N = \frac{6p^2 - 3p - 1}{2p}$.

d Herleid de formule $y = \frac{x^3 + 10x^2 + 9x}{x^4 + 11x^3 + 18x^2}$.

e Herleid de formule $y = \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 1}$.

A74 Gegeven zijn de formules $N = \frac{4p-1}{2p+3}$ en $p = \frac{3x}{x+5}$.

□ ⊗ *

a Substitueer $p = \frac{3x}{x+5}$ in $N = \frac{4p-1}{2p+3}$ en herleid tot de vorm $N = \frac{ax+b}{cx+d}$.

b Bereken exact voor welke x geldt dat $N = 9$.

A75 a De lijn k snijdt de parabool $y = x^2$ in de punten P en Q met $x_P = p$, $x_Q = q$ en $p < q$.

⊗ *

Stel de formule op van k .

b Op de grafiek van $f(x) = x^4$ liggen de punten A en B met $x_A = a$, $x_B = b$ en $a < b$.

De formule van de lijn l door A en B is

$$y = (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)x - ab(a^2 + ab + b^2).$$

Bewijs dit.

Rob is met vakantie in de Provence. Op een dag beklimt hij op zijn racefiets vanaf de camping de Mont Ventoux. Nadat Rob op de top is aangekomen, rust hij even uit, reset zijn fietscomputer en rijdt zo snel mogelijk weer naar beneden. De beklimming doet Rob met een gemiddelde snelheid van 12 km/u en bij de afdaling is zijn gemiddelde snelheid 48 km/u. Rob vraagt zich af wat de gemiddelde snelheid $\bar{v}$ gedurende de heen- en terugreis samen is.

Stel de afstand van de camping tot de top is d km. De tijd t in uren voor de heen- en terugreis samen is dan $t = \frac{d}{12} + \frac{d}{48}$.

a Licht dit toe.

b De gemiddelde snelheid is $\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{48}}$.

Toon dit aan en bereken de gemiddelde snelheid van Rob in km/u.

Bij de gemiddelde snelheid heb je te maken met het **harmonisch gemiddelde**.

Het harmonisch gemiddelde h van de getallen a en b is $h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

c Herleid de formule van h zo, dat de breuken in de noemer verdwijnen.

Het harmonisch gemiddelde van de getallen a , b en c is $h = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.

d Het harmonisch gemiddelde van a , $2a$ en $3a$ is pa .
Bereken exact de waarde van p .

Informatief Gemiddelden

Het *harmonisch gemiddelde* h van de getallen a en b is het omgekeerde van het rekenkundig gemiddelde van $\frac{1}{a}$ en $\frac{1}{b}$, dus $h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

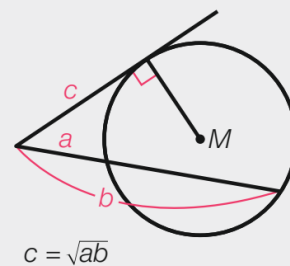
Het harmonisch gemiddelde wordt ook vaak gebruikt bij het vervangen van parallel geschakelde weerstanden in een stroomkring door één weerstand.

Het *kwadratisch gemiddelde* van een serie getallen is de wortel uit het rekenkundig gemiddelde van de kwadraten van de getallen.

In de statistiek komt het kwadratisch gemiddelde tevoorschijn bij de standaardafwijking en in de elektrotechniek bij het effectieve vermogen.

Het *meetkundig gemiddelde* van n getallen is de n^{e} machtswortel van het product van de getallen.

In de meetkunde heb je met het meetkundig gemiddelde van twee getallen te maken bij de lengte van een raaklijnstuk aan een cirkel.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan breuken optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
- ☐ Ik kan breuken vereenvoudigen.
- ☐ Ik kan bij breuken de noemer uitdelen.

► OPGAVE C9
THEORIE A
► OPGAVE C10
THEORIE B
► OPGAVE C11
THEORIE B

C9 a Herleid het rechterlid van de formule $y = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x}$ tot één breuk.

b Herleid de formule $y = \frac{x-2}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}$.

C10 a Herleid de formule $y = \frac{6x}{3 - \frac{5}{x+2}}$ tot de vorm $y = \frac{ax^2 + bx}{cx + d}$.

b Herleid de formule $y = \frac{x^2 + 9x + 8}{x^2 + 7x - 8}$.

C11 Deel $4t$ uit bij de formule $N = \frac{2t^3 - 3t^2 + 5}{4t}$.

Antwoorden

C9 a $y = \frac{x-2}{x(x+1)}$

b $y = \frac{x^2 - x - 2}{x}$ voor $x \neq -1$

C10 a $y = \frac{6x^2 + 12x}{3x + 1}$ voor $x \neq -2$

b $y = \frac{x+1}{x-1}$ voor $x \neq -8$

C11 $N = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{5}{4t}$

4.5 Inverse functies

Kennis en vaardigheden

- Je kunt variabelen vrijmaken bij gebroken formules.
- Je weet wanneer een functie een inverse heeft.
- Je kunt van een gebroken lineaire functie het functievoorschrift van de inverse opstellen.

077



Toon aan dat de formule $x = \frac{2}{y}$ op hetzelfde neerkomt als $y = \frac{2}{x}$.

Theorie A Variabele vrijmaken bij een gebroken formule

Bij de formule $y = \frac{2}{x-3}$ kun je de variabele x vrijmaken zodat x is uitgedrukt in y , oftewel x als functie van y is geschreven. Dit gaat als volgt.

$$y = \frac{2}{x-3} \quad \text{Vermenigvuldig beide leden met } x-3.$$

$$y(x-3) = 2$$

$$xy - 3y = 2 \quad \text{Alleen termen met } x \text{ in het linkerlid.}$$

$$xy = 3y + 2 \quad \text{Deel door } y.$$

$$x = \frac{3y+2}{y}$$

Op de tweede regel van de uitwerking is de voorwaarde 'voor $x \neq 3$ ' niet vermeld. In opgave 78 ontdek je waarom in dit soort situaties voorwaarden overbodig zijn.

Voorbeeld

Maak x vrij bij de formule $y = 4 + \frac{x}{x-5}$.

Uitwerking

$$y = 4 + \frac{x}{x-5}$$

Vermenigvuldig alle termen met $x-5$.

$$y(x-5) = 4(x-5) + x$$

$$xy - 5y = 4x - 20 + x$$

$$xy - 5y = 5x - 20$$

$$xy - 5x = 5y - 20$$

$$x(y-5) = 5y - 20$$

$$x = \frac{5y-20}{y-5}$$

R78 In de theorie op de vorige bladzijde wordt x vrijgemaakt bij de formule

□ ⊗ * $y = \frac{2}{x-3}$. Bij de formule $y = \frac{2}{x-3}$ mag je niet $x = 3$ nemen.

Na het vrijmaken krijg je $x = \frac{3y+2}{y}$.

Onderzoek of in deze formule $x = 3$ mogelijk is.

79 **a** Gegeven is de formule $y = \frac{x}{x+2}$.

Druk x uit in y .

b Gegeven is de formule $y = \frac{x-5}{x}$.

Schrijf x als functie van y .

c Maak x vrij bij de formule $y = \frac{x-2}{x-1}$.

d Druk x uit in y bij de formule $y = 320 - \frac{18}{x-1}$.



80 **a** Maak x vrij bij de formule $y = \frac{3x+2}{x-4}$.

b Druk x uit in y bij de formule $y = 20 - \frac{15}{x+1}$.

c Schrijf x als functie van y bij de formule $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{2x} + 4$.

A81 **a** Gegeven is de formule $y = \frac{ax+4}{x+1}$.

Bereken a als na het vrijmaken van x geldt $x = \frac{1}{y-3} - 1$.

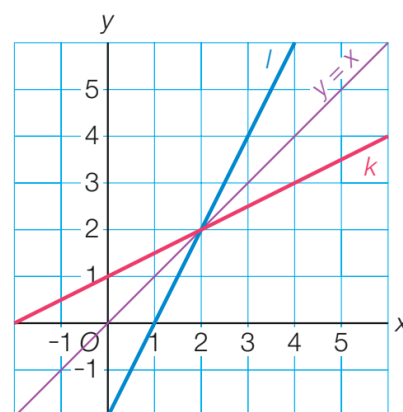
b Gegeven is de formule $y = 2 - \frac{3x+b}{x-1}$.

Bereken b als na het vrijmaken van x geldt $x = \frac{y-3}{y+1}$.

A82 Gegeven is de formule $y = \frac{ax+b}{3x+c}$.

Bereken a , b en c als na het vrijmaken van x geldt $x = 2 - \frac{1}{3y+4}$.

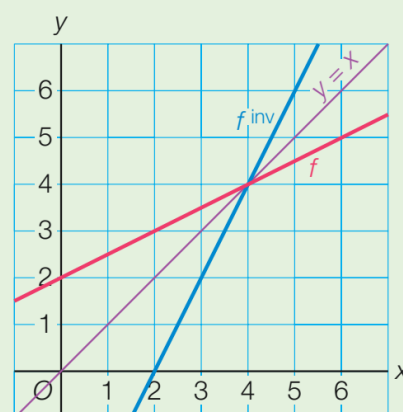
- a** Hiernaast is de grafiek van $k: y = \frac{1}{2}x + 1$ gespiegeld in de lijn $y = x$.
Stel bij het spiegelbeeld l de formule op.
- b** Maak x vrij bij $y = \frac{1}{2}x + 1$ en vergelijk het resultaat met de formule van l . Wat valt je op?



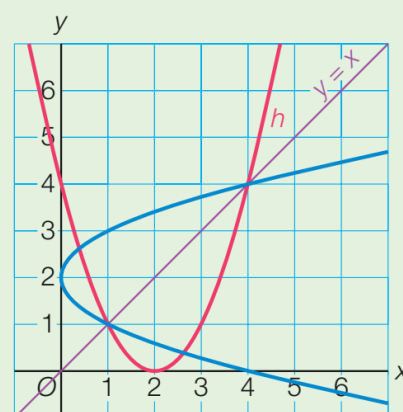
Theorie B Functie en inverse functie

Je hebt met een **functie van x naar y** te maken als bij elke waarde van x hoogstens één waarde van y hoort. De functie $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ is hiervan een voorbeeld.

Hiernaast is de grafiek van f gespiegeld in de lijn $y = x$. Bij de functie f hoort bij elke waarde van y één waarde van x . Hierdoor hoort bij het spiegelbeeld van de grafiek van f bij elke waarde van x één waarde van y en is dit spiegelbeeld ook de grafiek van een functie van x naar y . We zeggen dat de functie f een **inverse** heeft. De **inverse functie** van een functie f noteren we met f^{inv} .



Hiernaast is de grafiek van de functie $h(x) = (x - 2)^2$ gespiegeld in de lijn $y = x$. Bij de functie h horen bij elke waarde van $y > 0$ twee waarden van x . Hierdoor horen bij het spiegelbeeld van de grafiek van h bij elke waarde van $x > 0$ twee waarden van y en is dit spiegelbeeld dus niet de grafiek van een functie van x naar y . De functie h heeft dus geen inverse.



Functionen f en g met de eigenschap dat hun grafieken elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$ zijn elkaars inverse. Notatie: $g = f^{\text{inv}}$ en $f = g^{\text{inv}}$.

Om het functievoorschrift van de inverse van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ op te stellen, kun je als volgt te werk gaan. Verwissel in $y = \frac{1}{2}x + 2$ de variabelen x en y en maak bij de verkregen vorm de variabele y vrij.

Verwisselen van x en y in $y = \frac{1}{2}x + 2$ geeft $x = \frac{1}{2}y + 2$.

Vervolgens y vrijmaken geeft $\frac{1}{2}y = x - 2$, dus $y = 2x - 4$.

Dus de inverse van $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ is $f^{\text{inv}}(x) = 2x - 4$.

In de rest van deze paragraaf krijg je te maken met **gebroken lineaire functies**. Dat zijn functies van de vorm $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ met $c \neq 0$ en $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$. Bij een gebroken lineaire functie hoort bij elke waarde van y één waarde van x . Dus een gebroken lineaire functie heeft een inverse.

Voorbeeld

Bewijs dat de functie $g(x) = \frac{2-x}{x-5}$ de inverse is van de functie $f(x) = 5 - \frac{3}{x+1}$.

Uitwerking

Voor f geldt $y = 5 - \frac{3}{x+1}$, dus voor f^{inv} geldt $x = 5 - \frac{3}{y+1}$.

$$\begin{aligned} x = 5 - \frac{3}{y+1} \text{ geeft } x(y+1) &= 5(y+1) - 3 \\ xy + x &= 5y + 5 - 3 \\ xy - 5y &= 2 - x \\ y(x-5) &= 2 - x \\ y &= \frac{2-x}{x-5} \end{aligned}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = \frac{2-x}{x-5}$ en er geldt inderdaad dat $g(x) = f^{\text{inv}}(x)$.

R84 Zie de theorie hierboven.



a Licht toe dat $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ geen gebroken lineaire functie is als $c = 0$.

b $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ kan geschreven worden als $f(x) = \frac{b(\frac{a}{b}x+1)}{d(\frac{c}{d}x+1)}$.

Licht toe dat hieruit volgt dat f geen gebroken lineaire functie is als

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

R85 Toon aan dat de functie $f(x) = 5 - \frac{3}{x+1}$ uit het voorbeeld een gebroken lineaire functie is.



86 Stel het functievoorschrift op van de inverse van de volgende functies.



a $f(x) = \frac{2x}{x+3}$

c $h(x) = 5x - 4$

b $g(x) = \frac{x+3}{2x}$

d $k(x) = \frac{3x-1}{4x+5}$

87 **a** Bewijs dat de functie $g(x) = \frac{2-2x}{x-3}$ de inverse is van de functie



$f(x) = 3 - \frac{4}{x+2}$.

b Bewijs dat de functie $k(x) = 5 + \frac{x}{x+1}$ de inverse is van de functie

$h(x) = \frac{5-x}{x-6}$.

88 Onderzoek of de inverse van elke gebroken lineaire functie ook een gebroken lineaire functie is.



A89 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{ax-2}{2x-5}$.



Bereken exact voor welke a

a de functie $g(x) = 2\frac{1}{2} + \frac{4}{x-2}$ de inverse is van f

b de grafiek van f geen gemeenschappelijk punt heeft met de lijn $y = x$.

A90 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x-2}{2x+1}$.



Op de grafiek van f^{inv} ligt het punt A met $x_A = 2$. De lijn k raakt de grafiek van f^{inv} in A .

Stel op algebraïsche wijze de formule op van k .

A91 De lijn k met $rc_k = 2$ raakt de grafiek van $f(x) = \frac{ax+b}{x+2}$ in het punt $A(-4, 6)$.



De lijnen l en m zijn evenwijdig met k en raken de grafiek van f^{inv} in de punten B en C .

Stel op algebraïsche wijze de formule op van de lijn n door B en C .

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan variabelen vrijmaken bij gebroken formules.
- ☐ Ik weet wanneer een functie een inverse heeft.
- ☐ Ik kan van een gebroken lineaire functie het functievoorschrift van de inverse opstellen.

► OPGAVE C12
THEORIE A

► OPGAVE C13
THEORIE B

► OPGAVE C14
THEORIE B

- C12** a Maak x vrij bij de formule $y = \frac{2x-1}{3x+1}$.
- b Druk x uit in y bij de formule $y = 5 - \frac{4}{x+1}$.
- c Schrijf x als functie van y bij de formule $y = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x} + 3$.

C13 Welke van de volgende functies hebben geen inverse? Licht toe.

- $f(x) = 5$
- $g(x) = 3x + 2$
- $h(x) = x^2$
- $k(x) = x^3$
- $l(x) = \frac{2x-3}{x+2}$

C14 a Stel het functievoorschrift op van de inverse van de functie $f(x) = \frac{3x+15}{4x-1}$.

b Bewijs dat de functie $g(x) = \frac{6}{x-3} - 2$ de inverse is van de functie $h(x) = \frac{3x+12}{x+2}$.

Antwoorden

C12 a $x = \frac{-y-1}{3y-2}$

b $x = \frac{1-y}{y-5}$

c $x = \frac{-1}{2y-6}$

C13 f en h
*

C14 a $f^{\text{inv}}(x) = \frac{x+15}{4x-3}$

b *

Kennis- en vaardighedentest

4.1 Stelsels vergelijkingen

1 Bereken exact de oplossingen.

a
$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + 3y = 23 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 4x + 5y = 27 \\ -2x + 3y = 25 \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases}$$

2 Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen $k: 3x - 2y = 14$ en $l: 2x + 5y = 3$.

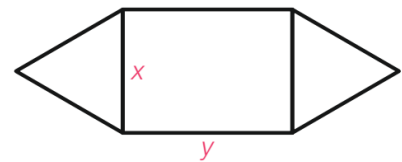
3 De parabool $y = ax^2 + bx$ gaat door de punten $(-6, 18)$ en $(30, -450)$. Stel langs algebraïsche weg de formule op van de parabool.

4 Bereken exact de oplossingen.

a
$$\begin{cases} (x - 4)^2 + y^2 = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} xy = -6 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$

5 De figuur hiernaast is opgebouwd uit twee gelijkzijdige driehoeken en een rechthoek. De oppervlakte van de rechthoek is 22 en de omtrek van de figuur is 27. Bereken exact de grootste mogelijke omtrek van de rechthoek.



4.2 Hogeregraadsvergelijkingen

6 Bereken exact de oplossingen.

a $3x^3 + 5 = 86$

c $\frac{1}{2}(x + 2)^4 = \frac{1}{32}$

b $2x^3 + 19 = 5$

d $100 - (2x + 1)^5 = 68$

7 Bereken algebraïsch de oplossingen. Rond af op twee decimalen.

a $5x^4 - 6 = 9$

b $(2x + 4)^3 = 10$

8 Bereken exact de oplossingen.

a $x^3 = x^2 + 20x$

c $x^8 + x^4 = 42$

b $x^6 - 6x^3 + 5 = 0$

d $5x^4 + 1 \leq 6x^2$

9 Bereken exact de oplossingen.

a $|2x^3 - 5| = 49$

b $|x^2 - 15x| = 54$

4.3 Regels voor het oplossen van vergelijkingen

10 Bereken exact de oplossingen.

a $(x^2 - 6)(x^2 - 2x) = 0$

c $x(x^2 - 1) = 4(x^2 - 1)$

b $(2x^2 - 1)^2 = (6x + 1)^2$

d $(x^3 - 9x)(x^2 - 3) = x^3 - 9x$

11 Bereken exact de oplossingen.

a $\sqrt{3x+5}+1=5$

c $x=\sqrt{x}+6$

b $3x=5\sqrt{x+4}$

d $2x+3\sqrt{x}=2$

12 Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{2x^2-6}{2x+4}=0$

c $\frac{2x-1}{x+1}=\frac{4x+1}{5x-1}$

b $\frac{x^2-9}{3x-1}=\frac{x^2-9}{x-5}$

d $\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{5x-6}{x^3-8}$

4.4 Formules met breuken herleiden

13 a Herleid het rechterlid van de formule $y=2x-\frac{x-1}{x-2}$ tot één breuk.

b Herleid het rechterlid van de formule $y=\frac{3}{x}\left(2-\frac{x}{x-1}\right)$ tot één breuk.

14 a Herleid $y=\frac{2x+1}{\left(\frac{x}{x^2-1}\right)}$.

b Herleid $y=\frac{\frac{2}{x+1}-3}{4-\frac{x}{x+1}}$ tot de vorm $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.

15 Deel uit.

a $N=\frac{4x^3-50}{2x}$

b $B=\frac{6p^2-3p+4}{3p}$

16 Herleid.

a $y=\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x+3}$

b $y=\frac{x^4-16}{x^3-4x}$

4.5 Inverse functies

17 a Maak x vrij bij de formule $y=\frac{2x-3}{x+5}$.

b Druk x uit in y bij de formule $y=3+\frac{2x}{x-1}$.

18 Stel het functievoorschrift op van de inverse van de volgende functies.

a $f(x)=\frac{2x-1}{5-x}$

b $g(x)=2-\frac{3}{x-4}$

Gemengde opgaven

- 1 a** De grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{px + q}$ gaat door de punten $A(-2, 2)$ en $B(8, 3)$.
Bereken exact de waarden van p en q .
- b** De grafiek van de functie $g(x) = ax^4 + bx^2 + c$ gaat door de punten $C(-1, 24)$, $D(0, 18)$ en $E(2, 30)$.
Bereken exact de nulpunten van g .

- 2** In een kassa zitten biljetten van 5, 10 en 20 euro.
De biljetten van 5 en 10 euro zijn samen 180 euro waard.
De biljetten van 5 en 20 euro zijn samen 230 euro waard.
De biljetten van 10 en 20 euro zijn samen 270 euro waard.
Hoeveel biljetten van 5 euro zitten er in de kassa?

- 3** Bereken exact de oplossingen.

a $17 - (2x - 1)^4 = 1$	f $\frac{3}{2\sqrt{x+5}} = \frac{\sqrt{2x+1}}{x+2}$
b $(2x^2 - 1)^2 = x^2$	g $6x^5 + 10x^2 \cdot \sqrt{x} - 464 = 0$
c $\frac{x-3}{ 2-\sqrt{x} } = 2x-6$	h $\begin{cases} (2x-1)^2 + (3y-1)^2 = 73 \\ x+5y = 17 \end{cases}$
d $\sqrt{x^2 + 2x} + x = 6$	i $ x^4 - 3x^2 \leq x^2$
e $(2x-3)(x^2-3) + 3 = 2x$	j $(2x-1)^4 - 5(2x-1)^2 + 4 = 0$

- 4** Van een rechthoek is de oppervlakte 160.
Bereken exact de lengtes van de zijden als
- a** de omtrek van de rechthoek $62\frac{4}{5}$ is
- b** de lengte van een diagonaal van de rechthoek 20 is.

- 5** Herleid de volgende formules.

a $B = \frac{2 - \frac{a}{a^2 + 1}}{5a}$	b $y = \frac{x^4 - x^2}{x - 1}$	c $K = \frac{2a}{a+2} \left(\frac{a-1}{2a} - \frac{a+2}{a^2} \right)$
---	--	---

- 6** Gegeven zijn de functies $f(x) = ax^3 + 6x^2$ en $g(x) = -ax^3 + bx$.
- a** Voor $b = -6$ hebben de grafieken van f en g voor $x = \frac{1}{2}$ evenwijdige raaklijnen.
Bereken exact de nulpunten van g .
- b** De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten $O(0, 0)$, $A(1, 5)$ en B .
Bereken exact de coördinaten van B .

7 a Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$.

Bereken exact de oplossing van $f^{\text{inv}}(x) = 3$.

b Gegeven is de functie $g(x) = \frac{x+2}{3-2x}$.

Los exact op $g^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{g(x)}$.

c Voor elke a is gegeven de functie $h(x) = 3 + \frac{5}{2x+a}$.

Bereken exact voor welke a geldt dat $h^{\text{inv}}(x) = h(x)$.

d Gegeven is de functie $k(x) = \frac{2x-1}{x+2}$.

Bereken exact de coördinaten van de punten van de grafiek van k^{inv} waarin de helling van de grafiek van k^{inv} gelijk is aan 5.

8 Voor elke waarde van p is gegeven de functie $f_p(x) = 2x^5 - px^3 - 8x$.

a Er zijn twee punten op de grafiek van f_5 waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 2.

Bereken exact de coördinaten van deze punten.

b De lijn $k: y = -8x$ snijdt de grafiek van f_p behalve in de oorsprong ook nog in de punten A en B .

Bereken exact voor welke p geldt dat $|x_A - x_B| = 8$.

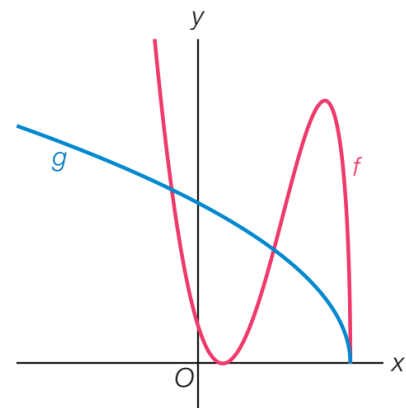
9 In de figuur hiernaast zie je de grafieken van de functies $f(x) = (2x - \frac{1}{2})^2 \cdot \sqrt{3-2x}$ en $g(x) = \sqrt{3-2x}$.

a Bereken exact de nulpunten van f .

b De grafieken van f en g hebben drie punten gemeenschappelijk.

Bereken exact de coördinaten van deze punten.

c Bereken exact voor welke p de grafiek van g en de lijn $k: y = p - x$ één punt gemeenschappelijk hebben.



10 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x-2}{x^2}$.

a De lijn $k: y = -3$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B . Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB .

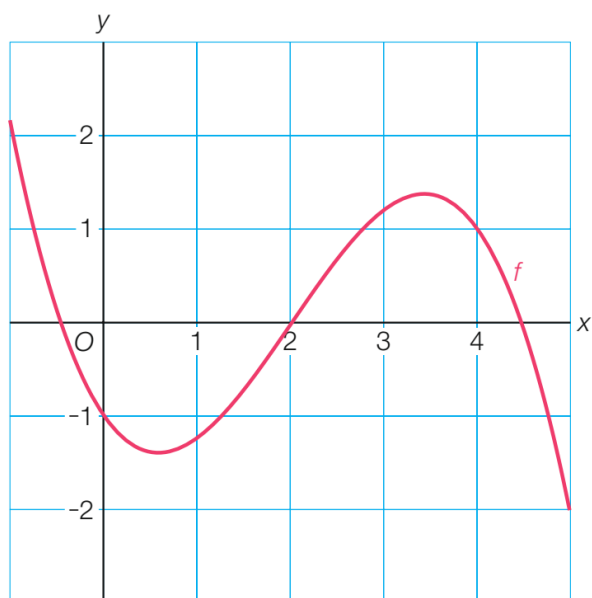
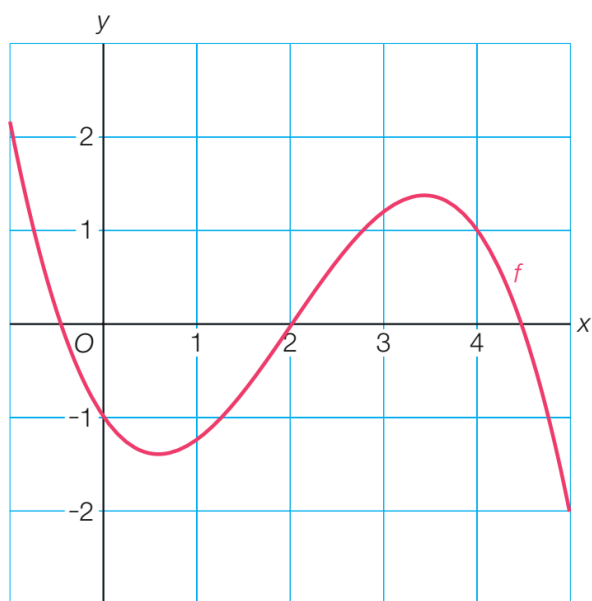
b De lijn $l: y = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}$ snijdt de grafiek van f in de punten C , D en E met $x_C < x_D < x_E$.

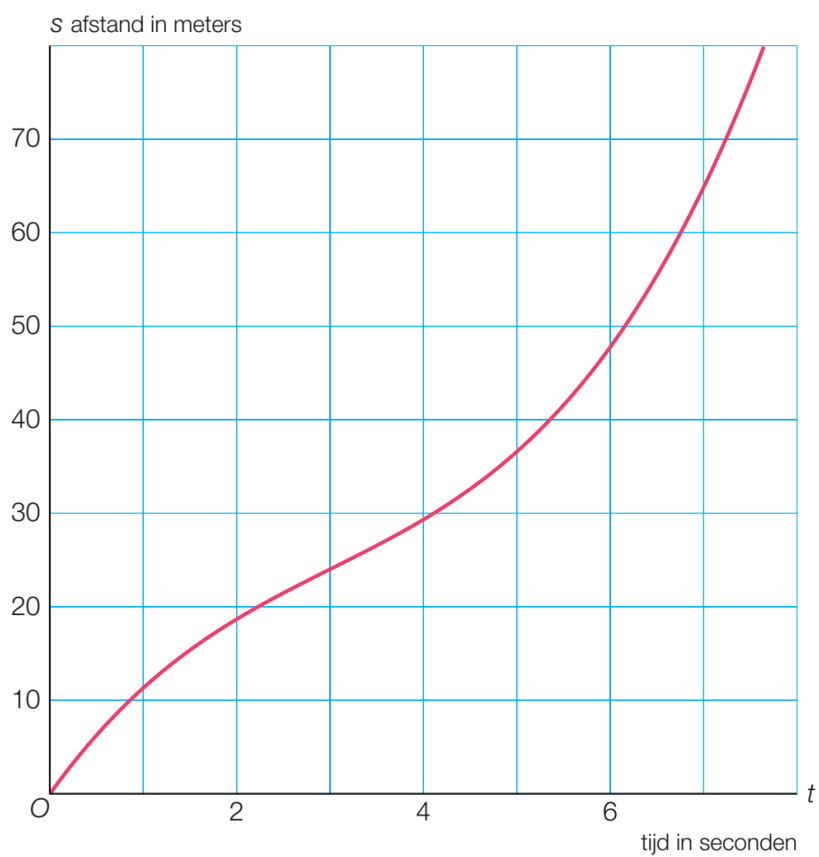
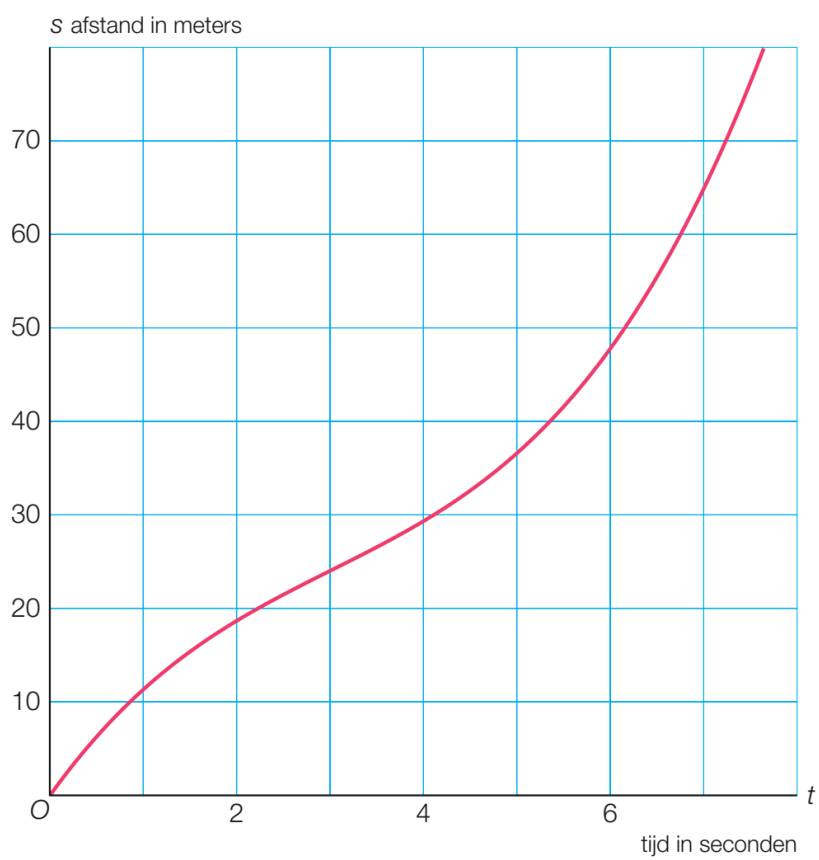
Bereken exact $|y_C - y_D|$.

Werkbladen

24

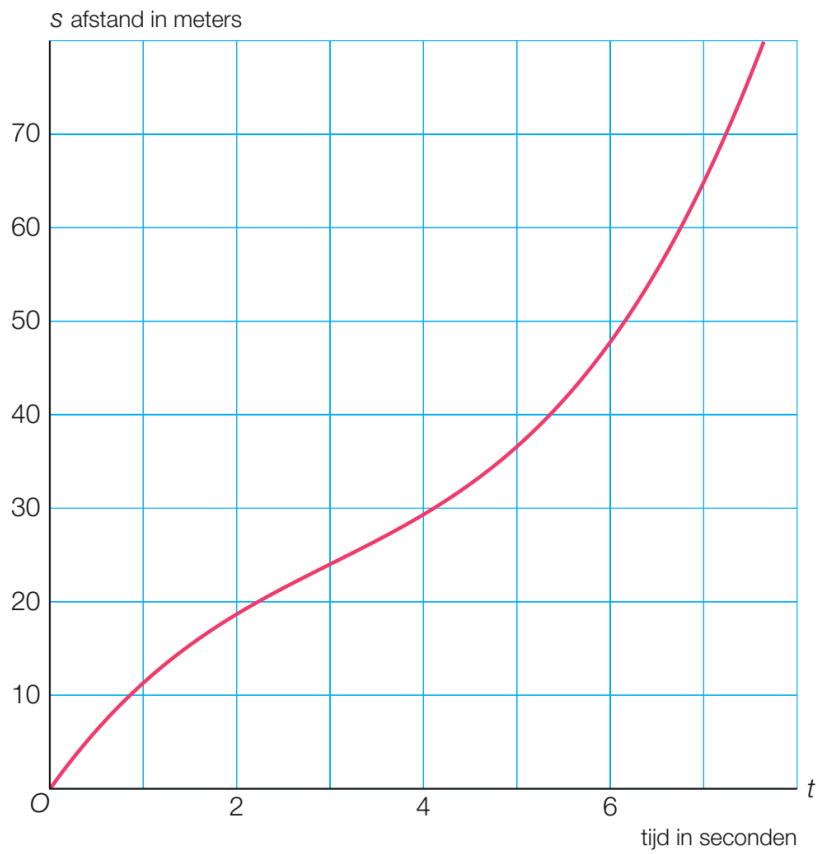
blz 66





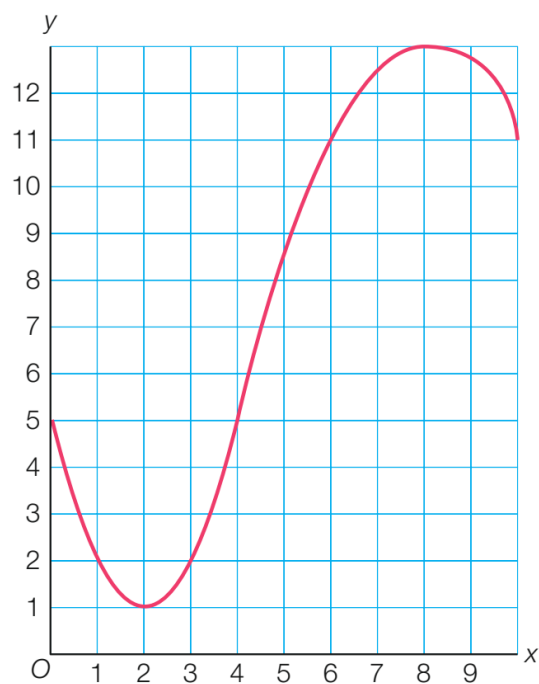
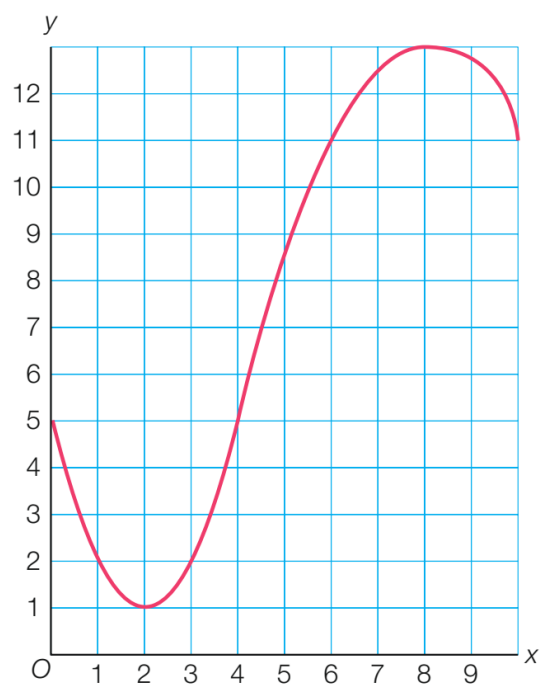
4

blz 97



1

blz 99



Antwoorden Kennis- en vaardigheidentests

Hoofdstuk 1

- 1** a $k: y = 4x + 2$
b $a = \frac{1}{2}$
c $n: y = -3x + 8$

- 2** a $N = 20t + 60$
b $t = \frac{1}{20}N - 3$
c $t = 19$

- 3** a $x = 0 \vee x = \frac{3}{5}$
b $x = 1 \vee x = -7$
c $x = 8 \vee x = -4$
d $x = 3 + \sqrt{19} \vee x = 3 - \sqrt{19}$
e $x = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{15} \vee x = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{15}$
f $x = -1$

- 4** a -2 en 6
b $b = -11,2$

- 5** a $A(0, 1)$
b $p = 4 \vee p = -4$
c $p < -4 \vee p > 4$

- 6** a $p > 2$
b $p = 12 \vee p = -12$
c $p < \frac{1}{5} \wedge p \neq 0$

- 7** $p = 4 \vee p = -4$

- 8** $y = -x^2 - x$

- 9** $17\frac{1}{7}$

- 10** a $p < 0$ en $p > 10$
b $x_B = 2 + 2\sqrt{2}$

- 11** a -0,50, 2,54 en 7,96
b max. is $f(0,86) \approx 3,23$
min. is $f(5,81) \approx -8,86$
c $x \approx -1,28$, $x \approx 2,13$ en $x \approx 9,16$

- 12** a $-3,89 \leq x \leq 0,09 \vee x \geq 2,80$
b $-2,11 < x < 0,65 \vee 1,46 < x < 1,89$

Hoofdstuk 2

- 1** a $\langle \leftarrow, 1 \rangle$ afnemend dalend
 $\langle 1, 2 \rangle$ toenemend stijgend
 $\langle 2, 4 \rangle$ afnemend stijgend
 $\langle 4, 6 \rangle$ toenemend dalend
 $\langle 6, 7\frac{1}{2} \rangle$ afnemend dalend
 $\langle 7\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$ toenemend stijgend

- b 3
c $-\frac{1}{2}$
d drie
*

- 2** a $3\frac{1}{2}$
b $-1\frac{1}{2}$
c $l: y = \frac{1}{2}x - 3$

- 3** a 30 km/u
b $p = 4$
c 149 km/u

- 4** a 9 m/s en 14 m/s
b $t = 3$
5 m/s

- 5** a, b *

- 6** *

- 7** a $f'(x) = 1,8x^2 - 2,6x$
b $g'(p) = 12p^2 + 2p - 11$
c $h'(x) = 12x^2 - 8x + 1$
d $k'(x) = 7x^2 - 4ax$

- 8** a $-3\frac{1}{2}$
b $x = 2 \vee x = 6$

- 9** $p = -1$

- 10** a $f'(x) = 3x^2(x^2 + 7x + 2) + (x^3 - 1)(2x + 7)$
b $g'(x) = 2(3x^2 + 2)(x^3 + 2x + 1)$

11 a $f'(x) = \frac{7}{(3x-1)^2}$
 b $g'(x) = \frac{2x^5 + 4x^3}{(x^2 + 1)^2}$
 c $h'(x) = 2x + \frac{3}{(x+1)^2}$

12 a $k: y = -\frac{4}{5}x + 5\frac{2}{5}$
 b $l: y = 4\frac{4}{5}x - 1\frac{3}{5}$
 m: $y = 4\frac{4}{5}x + 1\frac{3}{5}$

13 a 33,3%
 b na 6 en na 10 seconden
 c 1440 m

Hoofdstuk 3

1 $\angle CAM \approx 18,8^\circ$

2 $CE = 3\frac{1}{3}$

3 $AP = 5\sqrt{15}$

4 a 5,28
 b 13,72

5 a 15,2
 b $r \approx 3,62$

6 a $x = \sqrt{2} - 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$
 b $x = 8\sqrt{3} - 12$
 c $x = \sqrt{6} - 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

7 $AB = 6 + 4\sqrt{3}$

8 225

9 22,85

10 a $\angle B \approx 65,7^\circ$ en $\angle B \approx 14,3^\circ$
 b $BC \approx 7,66 \vee BC \geq 10$

11 $\angle PMR \approx 102,8^\circ$

12 73,96

Hoofdstuk 4

1 a $(x, y) = (5, 1)$
 b $(x, y) = (-2, 7)$
 c $(x, y) = (2, 1)$

2 $S(4, -1)$

3 $y = -\frac{1}{3}x^2 - 5x$

4 a $(x, y) = (2, -1) \vee (x, y) = (3, 2)$
 b $(x, y) = (-4, 1\frac{1}{2}) \vee (x, y) = (6, -1)$

5 $21\frac{1}{2}$

6 a $x = 3$
 b $x = \sqrt[3]{-7}$
 c $x = -1\frac{1}{2} \vee x = -2\frac{1}{2}$
 d $x = \frac{1}{2}$

7 a $x \approx 1,32 \vee x \approx -1,32$
 b $x \approx -0,92$

8 a $x = 0 \vee x = -4 \vee x = 5$
 b $x = 1 \vee x = \sqrt[3]{5}$
 c $x = \sqrt[4]{6} \vee x = -\sqrt[4]{6}$
 d $-1 \leq x \leq -\sqrt{\frac{1}{5}} \vee \sqrt{\frac{1}{5}} \leq x \leq 1$

9 a $x = 3 \vee x = \sqrt[3]{-22}$
 b $x = -3 \vee x = 18 \vee x = 6 \vee x = 9$

10 a $x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6} \vee x = 0 \vee x = 2$
 b $x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} \vee x = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \vee x = 0 \vee x = -3$
 c $x = 1 \vee x = -1 \vee x = 4$
 d $x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3 \vee x = 2 \vee x = -2$

11 a $x = 3\frac{2}{3}$
 b $x = 5$
 c $x = 9$
 d $x = \frac{1}{4}$

12 a $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$
 b $x = 3 \vee x = -3 \vee x = -2$
 c $x = 0 \vee x = 2$
 d $x = 3$

13 a $y = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x - 2}$
 b $y = \frac{3x - 6}{x(x - 1)}$

14 a $y = \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{x}$
 voor $x \neq 1 \wedge x \neq -1$
 b $y = \frac{-3x - 1}{3x + 4}$ voor $x \neq -1$

15 a $N = 2x^2 - \frac{25}{x}$
 b $B = 2p - 1 + \frac{4}{3p}$

16 a $y = \frac{x - 4}{x - 3}$ voor $x \neq 1$
 b $y = \frac{x^2 + 4}{x}$
 voor $x \neq 2 \wedge x \neq -2$

17 a $x = \frac{5y + 3}{2 - y}$
 b $x = \frac{y - 3}{y - 5}$

18 a $f^{\text{inv}}(x) = \frac{5x + 1}{x + 2}$
 b $g^{\text{inv}}(x) = \frac{4x - 11}{x - 2}$

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen
- de toets Ans, en fouten verbeteren
- breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen
- decimaal getal omzetten in een breuk

vwo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 12

Grafieken, toppen en snijpunten

- formules invoeren en grafieken plotten
- functiewaarden berekenen op het grafiekenschermb en op het basisscherm
- tabellen maken en de tabelinstelling veranderen
- toppen en snijpunten van grafieken
- berekenen van nulpunten

vwo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 41

Het gebruik van Ans en lettergeheugens

- de toets Ans
- het gebruik van lettergeheugens

vwo B deel 1
hoofdstuk 3
bladzijde 106

Allerlei

- specifieke mogelijkheden van het merk/type GR
-

Trefwoordenregister

A

aantonen dat 20
abc-formule 17
absolute waarde 34
absolute-waardefunctie 34
 knikken en toppen bij
 een – 37
absolute-waardestrepen 34
absolute-
 waardevergelijking 162
afgeleide 76
 – functie 76
afnemend dalend 53
afnemend stijgend 53
afstand van een punt tot een
 lijn 113
algebraïsch oplossen 18

B

bereken exact de oplossing
 18
bergparabool 21
bewijs 113
bewijzen (dat) 20
bijzondere rechthoekige
 driehoeken 127
breuken herleiden 173,
 175

C

constant verband 9
cosinusregel 139

D

dalend 52
 afnemend – 53
 toenemend – 53
dalparabool 21
definitie 113, 114
 – van de afgeleide 76
differentiaalrekening 95

differentiequotiënt 55
 – bij een
 functievoorschrift 57
differentiëren 78
discriminant 17
 – met een parameter 25

E

eliminieren
 – door optellen of
 aftrekken 150, 152
 – door substitutie 149,
 150, 155
evenwijdig 9
extreem 21
extreme waarde 21
extremen met een
 parameter 28

F

factor voor wortelteken
 brengen 19
formule van een
 – lijn opstellen 12
 – raaklijn opstellen 86,
 89
functie
 – met een parameter 25
 – van x naar y 182
functievoorschrift 25

G

Galileï, Galileo 65
gebroken
 – lineaire functies 183
 – vergelijking 169
gelijkvormige driehoeken
 108
gemiddelde
 – snelheid 54
 – verandering 55

gesloten interval 52
goniometrische
 verhoudingen 104
grafisch-numeriek
 oplossen 40

H

harmonisch gemiddelde
 178
helling 9, 55
 – berekenen met de GR 88
 – van de grafiek 63
hellingfunctie 76
hellinggrafiek 67
hogeregraadsvergelijking
 157, 160
hogermachtswortel 157
horizontale lijn 9
Hudde, Johannes 80

I

interval 52
 gesloten – 52
 open – 52
inverse 182
 – functie 182
isoleren 166

K

knik 34
knikpunt 34
kruislings
 vermenigvuldigen 169
kwadratisch gemiddelde
 178
kwadratische
 – functie 21
 – vergelijking 17

L

lengte x stellen 110
 Leibniz, Gottfried Wilhelm 95
 lijn door twee gegeven punten 12
 limiet 75
 lineair verband 9
 lineaire
 – functie van x 9
 – ongelijkheid 24
 – vergelijking 8, 126
 – vergelijking met twee variabelen 148

M

maximum 21
 meetkundig gemiddelde 178
 merkwaardig product 126
 minimum 21

N

Newton, Isaac 95
 nulpunt 21

O

omgekeerde stelling van Thales 113
 ongelijkheid
 lineaire – 24
 – oplossen 43
 open interval 52
 oplossing benaderen 18
 oplossing invoeren 171
 oppervlakte van vlakke figuren 119

P

parabool 21
 parameter 25
 discriminant met een – 25
 extreme met een – 30
 functie met een – 25
 vergelijking met een – 28
 plotten 40
 productregel 82
 bewijs van de – 83

Q

quotiëntregel 84

R

raaklijn 62
 formule van een – opstellen 86, 89
 richtingscoëfficiënt 9, 13, 55

S

Sarpi 65
 sinusregel 134, 136
 snelheid op één moment 62
 – benaderen 59
 somregel 78
 stelling 113, 114
 – van Thales 113
 – raaklijn aan een cirkel 113
 – raaklijn in een raakpunt van twee cirkels 113
 – twee raaklijnen aan een cirkel vanuit een punt 114
 stijgend 52
 afnemend – 53
 toenemend – 53
 substitueren 31

T

Thales van Milete 114
 Thales
 (omgekeerde) stelling van – 113
 tijd-afstandformule 59
 tijd-afstandgrafiek 54
 toenemend dalend 53
 toenemend stijgend 53
 tweedegraadsfunctie 21
 tweedegraadsvergelijking 17
 tweedemachtswortel 157

U

uitdelen 175
 uitdrukken in 13

V

variabele vrijmaken 148, 180
 vergelijking
 lineaire – 8
 – met een parameter 28
 tweedegraads– 17
 verschilregel 79
 voldoen 167

W

wortels herleiden 125
 wortelvergelijking 166

X

x_{top} 21

Z

zijde $\times$ hoogte-methode 121

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten