

getal & ruimte

B



Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen vwo B deel 1

Dertiende editie, 2025

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd

Inhoud

1	Functies en grafieken	4
2	De afgeleide functie	44
3	Meetkunde	78
4	Vergelijkingen en herleidingen	110

1 Functies en grafieken

1.1 Lineaire verbanden

Bladzijde 8

V1 A stap 1

V2 $\frac{2}{3}(x-4) = \frac{1}{5}(2x+5)$

$$\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = \frac{2}{5}x + 1$$

$$15 \cdot \frac{2}{3}x - 15 \cdot \frac{8}{3} = 15 \cdot \frac{2}{5}x + 15 \cdot 1$$

$$10x - 40 = 6x + 15$$

$$4x = 55$$

$$x = 13\frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{3}(x-4) = \frac{1}{5}(2x+5)$$

$$15 \cdot \frac{2}{3}(x-4) = 15 \cdot \frac{1}{5}(2x+5)$$

$$10(x-4) = 3(2x+5)$$

$$10x - 40 = 6x + 15$$

$$4x = 55$$

$$x = 13\frac{3}{4}$$

Je krijgt inderdaad in beide gevallen $x = 13\frac{3}{4}$.

Bladzijde 9

V3 a $5x - 2 = 3x + 6$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

b $4 - 5(x-1) = 3(2x+1)$

$$4 - 5x + 5 = 6x + 3$$

$$9 - 5x = 6x + 3$$

$$-11x = -6$$

$$x = \frac{6}{11}$$

c $3x - 0,8 = 2,4x + 1,6$

$$0,6x = 2,4$$

$$x = 4$$

d $10 - 3(x+1) = 5x - (2x-1)$

$$10 - 3x - 3 = 5x - 2x + 1$$

$$7 - 3x = 3x + 1$$

$$-6x = -6$$

$$x = 1$$

e $\frac{3}{5}(2x-1) = 1\frac{2}{5}x - 2$

$$1\frac{1}{5}x - \frac{3}{5} = 1\frac{2}{5}x - 2$$

$$-\frac{1}{5}x = -1\frac{2}{5}$$

$$x = 7$$

f $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{2}x + 2$

$$6 \cdot \frac{1}{3}x - 6 \cdot 1 = 6 \cdot \frac{1}{2}x + 6 \cdot 2$$

$$2x - 6 = 3x + 12$$

$$-x = 18$$

$$x = -18$$

g $\frac{4}{5}x - 1\frac{1}{5} = 2\frac{1}{5}x - 3$

$$15 \cdot \frac{4}{5}x - 15 \cdot 1\frac{1}{5} = 15 \cdot 2\frac{1}{5}x - 15 \cdot 3$$

$$12x - 20 = 35x - 45$$

$$-23x = -25$$

$$x = 1\frac{2}{23}$$

h $\frac{2}{7}(4x-1) = \frac{3}{4}(1-5x)$

$$28 \cdot \frac{2}{7}(4x-1) = 28 \cdot \frac{3}{4}(1-5x)$$

$$8(4x-1) = 21(1-5x)$$

$$32x - 8 = 21 - 105x$$

$$137x = 29$$

$$x = \frac{29}{137}$$

1 a grafiek II

b grafiek IV

c grafiek III

d grafiek I

Bladzijde 10

2 a $k: y = ax + b$

$$a = rc_k = -2$$

$$y = -2x + b$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } A(-2, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot -2 + b = 3 \\ 4 + b = 3 \end{array}$$

$$b = -1$$

$$\text{Dus } k: y = -2x - 1.$$

b $l: y = ax + b$

$$l \parallel m, \text{ dus } a = rc_l = rc_m = 4.$$

$$y = 4x + b$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ \text{door } B(-5, 21) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot -5 + b = 21 \\ -20 + b = 21 \end{array}$$

$$b = 41$$

$$\text{Dus } l: y = 4x + 41.$$

3 a $p: y = ax + b$
 $p \parallel q$, dus $a = rc_p = rc_q = -\frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } C(-18, 30) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot -18 + b = 30 \\ 6 + b = 30 \\ b = 24 \end{array}$$

Dus $p: y = -\frac{1}{3}x + 24$.

b $y = 0$ geeft $-\frac{1}{3}x + 24 = 0$
 $-\frac{1}{3}x = -24$
 $x = 72$

Dus p snijdt de x -as in $(72, 0)$.

$x = 0$ geeft $y = -\frac{1}{3} \cdot 0 + 24 = 24$

Dus p snijdt de y -as in $(0, 24)$.

4 a $k: y = ax + b$
 $k \parallel l$, dus $a = rc_k = rc_l = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(4, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 3 \\ -2 + b = 3 \\ b = 5 \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{2}x + 5$.

b $m: y = ax + 3$

$$\left. \begin{array}{l} \text{door } B(-4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4a + 3 = 2 \\ -4a = -1 \\ a = \frac{1}{4} \end{array}$$

c p snijden met de x -as geeft $-1\frac{1}{2}x + 6 = 0$
 $-1\frac{1}{2}x = -6$
 $x = 4$

Dus p snijdt de x -as in $(4, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} n: y = 2\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 0 \\ 10 + b = 0 \\ b = -10 \end{array}$$

Bladzijde 11

5 $OABC$ is een trapezium, dus $OA \parallel CB$.

Hieruit volgt $rc_{OA} = rc_{CB} = \frac{5-3}{3-0} = \frac{2}{3}$.

Dus $OA: y = \frac{2}{3}x$.

Van de horizontale lijn door A en B is de formule $y = 5$.

$\frac{2}{3}x = 5$ geeft $2x = 15$ oftewel $x = 7\frac{1}{2}$, dus $A(7\frac{1}{2}, 5)$.

Dus $AB = 7\frac{1}{2} - 3 = 4\frac{1}{2}$.

6 a $m: y = -2x + b$

$$\left. \begin{array}{l} \text{door } P(-8, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot -8 + b = 0 \\ 16 + b = 0 \\ b = -16 \end{array}$$

b $l \parallel m$ geeft $a = rc_l = rc_m = -2$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -2x + b \\ \text{door } Q(10, 7) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 10 + b = 7 \\ -20 + b = 7 \\ b = 27 \end{array}$$

c k gaat door $R(8, 6)$, want $x = 8$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot 8 + 2 = 6$ klopt.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = ax - 4 \\ \text{door } R(8, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8a - 4 = 6 \\ 8a = 10 \\ a = 1\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -2x + b \\ \text{door } R(8, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 8 + b = 6 \\ -16 + b = 6 \\ b = 22 \end{array}$$

d k snijden met de x -as geeft $\frac{1}{2}x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x &= -2 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Dus het snijpunt met de x -as is $(-4, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = ax - 4 \\ \text{door } (-4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4a - 4 = 0 \\ -4a = 4 \\ a = -1 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -2x + b \\ \text{door } (-4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot -4 + b = 0 \\ 8 + b = 0 \\ b = -8 \end{array}$$

7 a Voor $k: y = ax + 1$ geldt dat $x = 0$ geeft $y = a \cdot 0 + 1 = 1$, dus $A(0, 1)$.

Voor $l: y = 2ax - 2a$ geldt dat

$$y = 2ax - 2a = 2a(x - 1).$$

$x = 1$ geeft $y = 2a(1 - 1) = 0$, dus $B(1, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = ax + 1 \\ x = 10 \end{array} \right\} y = 10a + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = 2ax - 2a \\ x = 10 \end{array} \right\} y = 2a \cdot 10 - 2a = 18a$$

Hieruit volgt $10a + 1 = 18a$

$$\begin{aligned} -8a &= -1 \\ a &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } y = 10 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2\frac{1}{4}.$$

8 k snijden met l geeft $\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = -\frac{2}{3}x + 8\frac{1}{2}$

$$3x + 9 = -4x + 51$$

$$7x = 42$$

$$x = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 6 \\ y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} \end{array} \right\} y = \frac{1}{2} \cdot 6 + 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Dus $A(6, 4\frac{1}{2})$.

l snijden met m geeft $-\frac{2}{3}x + 8\frac{1}{2} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$

$$-x = -9$$

$$x = 9$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 9 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} \end{array} \right\} y = \frac{1}{3} \cdot 9 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Dus $B(9, 2\frac{1}{2})$.

De horizontale afstand tussen A en B is $9 - 6 = 3$ en de verticale afstand tussen A en B is $4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 2$.

Met de stelling van Pythagoras krijg je $AB^2 = 3^2 + 2^2 = 13$, dus $AB = \sqrt{13} \approx 3,6$.

9 a $1,4^\circ\text{C}$ per week warmer, dus $1,4^\circ\text{C} : 7 = 0,2^\circ\text{C}$ per dag warmer.

De formule is $T = 8 + 0,2t$.

b $2,4^\circ\text{C}$ per maand kouder, dus $2,4^\circ\text{C} : 30 = 0,08^\circ\text{C}$ per dag kouder.

De formule is $T = 23 - 0,08t$.

$$T = 8 \text{ geeft } 23 - 0,08t = 8$$

$$-0,08t = -15$$

$$t = 187,5$$

Dus 188 dagen na 1 september is de temperatuur weer 8°C .

Bladzijde 12

- 10 a** Ga je 4 naar rechts, dan ga je 3 omhoog, dus ga je 1 naar rechts, dan ga je $\frac{3}{4}$ omhoog.
 Dus $rc_l = \frac{3}{4}$.
- b** $y_B - y_A = 4 - 1 = 3$
- c** Door $y_B - y_A$ te delen door $x_B - x_A$.
 Dus $rc_l = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{4}$.

Bladzijde 14

- 11 a** Je krijgt dan $\Delta y = y_P - y_Q = -1 - 5 = -6$.
 Hierbij hoort $\Delta x = x_P - x_Q = 2 - 6 = -4$.
 Dit geeft $rc_l = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6}{-4} = 1\frac{1}{2}$.
 Je krijgt zo dus ook $rc_l = 1\frac{1}{2}$.
- b** $y = 1\frac{1}{2}x + b$ } $1\frac{1}{2} \cdot 6 + b = 5$
 door $Q(6, 5)$ } $9 + b = 5$
 $b = -4$
- Je krijgt dus ook $b = -4$ als je het punt $Q(6, 5)$ gebruikt.

- 12** $t = av + b$
 bij $v = 90$ hoort $t = 2$ } $a = \frac{\Delta t}{\Delta v} = \frac{5 - 2}{45 - 90} = -\frac{1}{15}$
 bij $v = 45$ hoort $t = 5$ }
- $t = -\frac{1}{15}v + b$ } $-\frac{1}{15} \cdot 90 + b = 2$
 $v = 90$ en $t = 2$ } $-6 + b = 2$
 $b = 8$
- Dus $t = -\frac{1}{15}v + 8$.

- 13 a** $y = ax + b$
 $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 1}{1 - -1} = 1\frac{1}{2}$
 $y = 1\frac{1}{2}x + b$ } $1\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 4$
 door $B(1, 4)$ } $1\frac{1}{2} + b = 4$
 $b = 2\frac{1}{2}$
- Dus $l: y = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.
- b** $K = am + b$
 bij $m = 5$ hoort $K = 10$ } $a = \frac{\Delta K}{\Delta m} = \frac{115 - 10}{12 - 5} = 15$
 bij $m = 12$ hoort $K = 115$ }
- $K = 15m + b$ } $15 \cdot 5 + b = 10$
 $m = 5$ en $K = 10$ } $75 + b = 10$
 $b = -65$
- Dus $K = 15m - 65$.
- c** $k: y = ax + b$
 $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 5}{2 - -3} = -1$
 $y = -x + b$ } $-2 + b = 0$
 door $D(2, 0)$ } $b = 2$
- Dus $k: y = -x + 2$.

d $R = aF + b$

$$\left. \begin{array}{l} \text{bij } F = 15 \text{ hoort } R = 300 \\ \text{bij } F = 42 \text{ hoort } R = 138 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta R}{\Delta F} = \frac{138 - 300}{42 - 15} = -6$$

$$\left. \begin{array}{l} R = -6F + b \\ F = 15 \text{ en } R = 300 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -6 \cdot 15 + b = 300 \\ -90 + b = 300 \\ b = 390 \end{array}$$

Dus $R = -6F + 390$.

e $g = an + b$

$$a = \frac{\Delta g}{\Delta n} = \frac{49 - 35}{10 - 6} = 3\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} g = 3\frac{1}{2}n + b \\ \text{door } (6, 35) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\frac{1}{2} \cdot 6 + b = 35 \\ 21 + b = 35 \\ b = 14 \end{array}$$

Dus $g = 3\frac{1}{2}n + 14$.

Bladzijde 15

14 a $k: y = ax + b$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11 - 8}{20 - 8} = \frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + b \\ \text{door } A(8, 8) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot 8 + b = 8 \\ 2 + b = 8 \\ b = 6 \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{1}{4}x + 6$.

$l: y = ax + b$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-10 - 14}{50 - 2} = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } C(2, 14) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 14 \\ -1 + b = 14 \\ b = 15 \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{2}x + 15$.

k snijden met l geeft $\frac{1}{4}x + 6 = -\frac{1}{2}x + 15$

$$x + 24 = -2x + 60$$

$$3x = 36$$

$$x = 12$$

$$y = \frac{1}{4}x + 6 \left\} y = \frac{1}{4} \cdot 12 + 6 = 9$$

Dus $E(12, 9)$.

b $N = aM + b$

$$\left. \begin{array}{l} M = 5 \text{ en } N = 62 \\ M = 20 \text{ en } N = 86 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta N}{\Delta M} = \frac{86 - 62}{20 - 5} = 1\frac{3}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} N = 1\frac{3}{5}M + b \\ M = 5 \text{ en } N = 62 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{3}{5} \cdot 5 + b = 62 \\ 8 + b = 62 \\ b = 54 \end{array}$$

Dus $N = 1\frac{3}{5}M + 54$.

$$N = 1\frac{3}{5}M + 54$$

$$-1\frac{3}{5}M = -N + 54$$

$$8M = 5N - 270$$

$$M = \frac{5}{8}N - 33\frac{3}{4}$$

Alternatieve uitwerking

$$M = aN + b$$

$$\left. \begin{array}{l} N = 62 \text{ en } M = 5 \\ N = 86 \text{ en } M = 20 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta M}{\Delta N} = \frac{20 - 5}{86 - 62} = \frac{5}{8}$$

$$\left. \begin{array}{l} M = \frac{5}{8}N + b \\ N = 62 \text{ en } M = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{5}{8} \cdot 62 + b = 5 \\ 38\frac{3}{4} + b = 5 \\ b = -33\frac{3}{4} \end{array}$$

$$\text{Dus } M = \frac{5}{8}N - 33\frac{3}{4}.$$

15 $D(0, 2)$ en $E(3, 4)$

$$DE: y = ax + b$$

Door $D(0, 2)$, dus $b = 2$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 2}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Dus } DE: y = \frac{2}{3}x + 2.$$

$$F(3, 0) \text{ en } B(6, 4)$$

$$BF: y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 0}{6 - 3} = 1\frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } F(3, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{3} \cdot 3 + b = 0 \\ 4 + b = 0 \\ b = -4 \end{array}$$

$$\text{Dus } BF: y = 1\frac{1}{3}x - 4.$$

$$DE \text{ snijden met } BF \text{ geeft } \frac{2}{3}x + 2 = 1\frac{1}{3}x - 4$$

$$-\frac{2}{3}x = -6$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 9 \\ y = \frac{2}{3}x + 2 \end{array} \right\} y = \frac{2}{3} \cdot 9 + 2 = 8$$

$$\text{Dus } S(9, 8).$$

$$A(6, 0) \text{ en } S(9, 8)$$

$$AS: y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 0}{9 - 6} = 2\frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(6, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\frac{2}{3} \cdot 6 + b = 0 \\ 16 + b = 0 \\ b = -16 \end{array}$$

$$\text{Dus } AS: y = 2\frac{2}{3}x - 16.$$

AS snijdt de y -as in het punt $(0, -16)$, dus $T(0, -16)$.

16 **a** $N = at + b$

$$\left. \begin{array}{l} \text{bij } t = 31 \text{ hoort } N = 15 \\ \text{bij } t = 121 \text{ hoort } N = 75 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{75 - 15}{121 - 31} = \frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} N = \frac{2}{3}t + b \\ t = 31 \text{ en } N = 15 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot 31 + b = 15 \\ 20\frac{2}{3} + b = 15 \\ b = -5\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } N = \frac{2}{3}t - 5\frac{2}{3}.$$

b $N = 85$ geeft $\frac{2}{3}t - 5\frac{2}{3} = 85$

$$2t - 17 = 255$$

$$2t = 272$$

$$t = 136$$

$$136 - 121 = 15 \text{ en } 1 + 15 = 16$$

Dus op 16 mei.

17 $y = ax + b$
 $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p+2-(p+1)}{2p-p} = \frac{1}{p}$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{p}x + b \\ \text{door } (p, p+1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{p} \cdot p + b = p+1 \\ 1 + b = p+1 \\ b = p \end{array}$$

Dus $y = \frac{1}{p}x + p$.
 $y = 0$ geeft $\frac{1}{p}x + p = 0$
 $\frac{1}{p}x = -p$
 $x = -p^2$

Voor $p \neq 0$ geldt dat $-p^2 < 0$, dus $x < 0$.
Dus elke lijn met $p \neq 0$ snijdt de negatieve x -as.

Bladzijde 16

- C1** **a** Voor $a = -2$.
b Voor $b = 2$.
c l snijden met de x -as geeft $-2x + 3 = 0$
 $-2x = -3$
 $x = 1\frac{1}{2}$

Dus het snijpunt met de x -as is $(1\frac{1}{2}, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = ax + 2 \\ \text{door } (1\frac{1}{2}, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2}a + 2 = 0 \\ 3a + 4 = 0 \\ 3a = -4 \\ a = -1\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = 4x + b \\ \text{door } (1\frac{1}{2}, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 1\frac{1}{2} + b = 0 \\ 6 + b = 0 \\ b = -6 \end{array}$$

C2 $l: y = ax + b$
 $l \parallel k$, dus $a = rc_l = rc_k = 2\frac{1}{2}$.
 $y = 2\frac{1}{2}x + b$
 $\left. \begin{array}{l} \text{door } A(-6, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{2} \cdot -6 + b = 3 \\ -15 + b = 3 \\ b = 18 \end{array}$

Dus $l: y = 2\frac{1}{2}x + 18$.

C3 $m: y = ax + b$
 $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-17}{24-4} = -\frac{3}{4}$
 $y = -\frac{3}{4}x + b$
 $\left. \begin{array}{l} \text{door } P(4, 17) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 4 + b = 17 \\ -3 + b = 17 \\ b = 20 \end{array}$

Dus $m: y = -\frac{3}{4}x + 20$.

C4 $k = aV + b$
 $\left. \begin{array}{l} \text{bij } V = 250 \text{ hoort } k = 11 \\ \text{bij } V = 1450 \text{ hoort } k = 7,4 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta k}{\Delta V} = \frac{7,4 - 11}{1450 - 250} = -0,003$
 $\left. \begin{array}{l} k = -0,003V + b \\ V = 250 \text{ en } k = 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,003 \cdot 250 + b = 11 \\ -0,75 + b = 11 \\ b = 11,75 \end{array}$

Dus $k = -0,003V + 11,75$.

1.2 Tweedegraadsvergelijkingen en tweedegraadsfuncties

Bladzijde 17

18 a B $(x-1)(x+8) = 0$

b Maroua krijgt de oplossingen $x = 0$ en $x = -7$.

19 1 $4x^2 = 9x$ geeft $4x^2 - 9x = 0$

2 $4x^2 - 15x = 5x - 24$ geeft $4x^2 - 20x + 24 = 0$ oftewel $x^2 - 5x + 6 = 0$, dus $(x-2)(x-3) = 0$.

3 $3x^2 - 10x = 8x + 15$ geeft $3x^2 - 18x - 15 = 0$ oftewel $x^2 - 6x - 5 = 0$ en het linkerlid kan vervolgens niet worden ontbonden in factoren.

4 $3x^2 = 8 - x^2$ geeft $4x^2 - 8 = 0$

5 $x^2 + 8x = 9$ geeft $x^2 + 8x - 9 = 0$, dus $(x-1)(x+9) = 0$.

6 $4x^2 = 9$ geeft $4x^2 - 9 = 0$

7 $x^2 + 8x = 9x$ geeft $x^2 - x = 0$

8 $x^2 + 9x = 8$ geeft $x^2 + 9x - 8 = 0$ en het linkerlid kan vervolgens niet worden ontbonden in factoren.

1 en 7 zijn te herleiden tot de vorm $ax^2 + bx = 0$.

2 en 5 zijn te herleiden tot de vorm $x^2 + bx + c = 0$ waarbij het linkerlid kan worden ontbonden in factoren.

3 en 8 zijn te herleiden tot de vorm $x^2 + bx + c = 0$ waarbij het linkerlid niet kan worden ontbonden in factoren.

4 en 6 zijn te herleiden tot de vorm $ax^2 + c = 0$.

Bladzijde 19

20 a Julia bedoelt de ontbinding $(2x-1)(x-1)$.

b Je kunt een breuk vereenvoudigen door de teller en de noemer door dezelfde factor te delen.

Ontbind je bij $\frac{4+2\sqrt{7}}{2}$ de teller in factoren, dan krijg je $\frac{2(2+\sqrt{7})}{2}$. Je kunt bij deze

breuk dus de teller en de noemer delen door 2. Dit geeft $\frac{2+\sqrt{7}}{1}$ oftewel $2+\sqrt{7}$.

Dus $x = \frac{4+2\sqrt{7}}{2} \vee x = \frac{4-2\sqrt{7}}{2}$ is te vereenvoudigen tot $x = 2 + \sqrt{7} \vee x = 2 - \sqrt{7}$.

21 a $3x^2 - 6x = 24$

$3x^2 - 6x - 24 = 0$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x+2)(x-4) = 0$

$x = -2 \vee x = 4$

b $3x^2 - 6x = -3(x-6)$

$3x^2 - 6x = -3x + 18$

$3x^2 - 3x - 18 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x+2)(x-3) = 0$

$x = -2 \vee x = 3$

c $2x^2 - 3x = 2$

$2x^2 - 3x - 2 = 0$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$, dus $\sqrt{D} = 5$

$x = \frac{3+5}{4} = 2 \vee x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$

d $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x+2)(x-6) = 0$

$x = -2 \vee x = 6$

e $x^2 - 3x = 5(x-3)$

$x^2 - 3x = 5x - 15$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$(x-3)(x-5) = 0$

$x = 3 \vee x = 5$

f $2x^2 - 5x = 3x$

$2x^2 - 8x = 0$

$2x(x-4) = 0$

$x = 0 \vee x = 4$

22 a $6 - x^2 = -2$

$$-x^2 = -8$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}$$

$$x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$$

b $2x^2 = 9x + 5$

$$2x^2 - 9x - 5 = 0$$

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 121, \text{ dus } \sqrt{D} = 11$$

$$x = \frac{9+11}{4} = 5 \vee x = \frac{9-11}{4} = -\frac{1}{2}$$

c $3(x+2)^2 + 5 = 80$

$$3(x+2)^2 = 75$$

$$(x+2)^2 = 25$$

$$x+2 = 5 \vee x+2 = -5$$

$$x = 3 \vee x = -7$$

d $\frac{1}{2}(x-3)^2 - 3 = 5$

$$\frac{1}{2}(x-3)^2 = 8$$

$$(x-3)^2 = 16$$

$$x-3 = 4 \vee x-3 = -4$$

$$x = 7 \vee x = -1$$

e $-(2x-1)^2 + 5 = 1$

$$-(2x-1)^2 = -4$$

$$(2x-1)^2 = 4$$

$$2x-1 = 2 \vee 2x-1 = -2$$

$$2x = 3 \vee 2x = -1$$

$$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

f $8 - 3(4x-5)^2 = 5$

$$-3(4x-5)^2 = -3$$

$$(4x-5)^2 = 1$$

$$4x-5 = 1 \vee 4x-5 = -1$$

$$4x = 6 \vee 4x = 4$$

$$x = 1\frac{1}{2} \vee x = 1$$

Bladzijde 20

23 a $(x+3)^2 = 16x$

$$x^2 + 6x + 9 = 16x$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x-1)(x-9) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 9$$

b $(2x+3)^2 = -16$

geen oplossing

c $2(x+3)^2 = -4x$

$$(x+3)^2 = -2x$$

$$x^2 + 6x + 9 = -2x$$

$$x^2 + 8x + 9 = 0$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 28, \text{ dus } \sqrt{D} = 2\sqrt{7}$$

$$x = \frac{-8+2\sqrt{7}}{2} \vee x = \frac{-8-2\sqrt{7}}{2}$$

$$x = -4 + \sqrt{7} \vee x = -4 - \sqrt{7}$$

d $(2x+3)(4-x) = 9$

$$8x - 2x^2 + 12 - 3x = 9$$

$$-2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot -2 \cdot 3 = 49, \text{ dus } \sqrt{D} = 7$$

$$x = \frac{-5+7}{-4} = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{-5-7}{-4} = 3$$

e $(-4x+3)^2 = 36$

$$-4x+3 = 6 \vee -4x+3 = -6$$

$$-4x = 3 \vee -4x = -9$$

$$x = -\frac{3}{4} \vee x = 2\frac{1}{4}$$

f $-4(x+3)^2 = 4x$

$$(x+3)^2 = -x$$

$$x^2 + 6x + 9 = -x$$

$$x^2 + 7x + 9 = 0$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 13$$

$$x = \frac{-7+\sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{-7-\sqrt{13}}{2}$$

24 a $2x^2 - 13x = 3(x-10)$

$$2x^2 - 13x = 3x - 30$$

$$2x^2 - 16x + 30 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x-3)(x-5) = 0$$

$$x = 3 \vee x = 5$$

b $3x^2 + 2x + 7 = 7(x+1)$

$$3x^2 + 2x + 7 = 7x + 7$$

$$3x^2 - 5x = 0$$

$$x(3x-5) = 0$$

$$x = 0 \vee 3x = 5$$

$$x = 0 \vee x = 1\frac{2}{3}$$

c $100(x^2-1) = 525$

$$x^2 - 1 = 5\frac{1}{4}$$

$$x^2 = 6\frac{1}{4}$$

$$x = 2\frac{1}{2} \vee x = -2\frac{1}{2}$$

d $2(x-3)^2 = 3x - 10$

$$2(x^2 - 6x + 9) = 3x - 10$$

$$2x^2 - 12x + 18 = 3x - 10$$

$$2x^2 - 15x + 28 = 0$$

$$D = (-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 28 = 1, \text{ dus } \sqrt{D} = 1$$

$$x = \frac{15+1}{4} = 4 \vee x = \frac{15-1}{4} = 3\frac{1}{2}$$

e $5(4x-1)(6x-5) = 0$

$$4x-1 = 0 \vee 6x-5 = 0$$

$$4x = 1 \vee 6x = 5$$

$$x = \frac{1}{4} \vee x = \frac{5}{6}$$

f $\frac{1}{4}(2x-3)^2 - 3 = 1$

$$\frac{1}{4}(2x-3)^2 = 4$$

$$(2x-3)^2 = 16$$

$$2x-3 = 4 \vee 2x-3 = -4$$

$$2x = 7 \vee 2x = -1$$

$$x = 3\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

25 a Je krijgt de vergelijking $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

b Haakjes wegwerken bij $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$ geeft $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

en dat is de vergelijking van vraag a.

c $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$ geeft $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{D}{4a^2}} \vee x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{D}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{D}{4a^2}} \vee x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{D}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{4a^2}} \vee x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \vee x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

26 $h(x) = 0$ geeft $f(x) = 0 \vee g(x) = 0$

$$2x - 4 = 0 \vee -\frac{1}{4}x + b = 0$$

$$2x = 4 \vee -\frac{1}{4}x = -b$$

$$x = 2 \vee x = 4b$$

De top van de grafiek van h ligt midden tussen de snijpunten van de grafiek van h met de x -as.

Dus $x_{\text{top}} = \frac{2+4b}{2} = 1+2b$ en dit geeft $y_{\text{top}} = h(1+2b) = f(1+2b) \cdot g(1+2b)$

$$= (2(1+2b) - 4)\left(-\frac{1}{4}(1+2b) + b\right)$$

$$= (2+4b-4)\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}b + b\right)$$

$$= (4b-2)\left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 2b^2 - b - b + \frac{1}{2}$$

$$= 2b^2 - 2b + \frac{1}{2}$$

Dus de top van de grafiek van h is $(1+2b, 2b^2 - 2b + \frac{1}{2})$.

$(1+2b, 2b^2 - 2b + \frac{1}{2})$ op de grafiek van g geeft $g(1+2b) = 2b^2 - 2b + \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{4}(1+2b) + b = 2b^2 - 2b + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}b = 2b^2 - 2b + \frac{1}{2}$$

$$2b^2 - 2\frac{1}{2}b + \frac{3}{4} = 0$$

$$8b^2 - 10b + 3 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = 4, \text{ dus } \sqrt{D} = 2$$

$$b = \frac{10 \pm 2}{16} = \frac{3}{4} \vee b = \frac{10-2}{16} = \frac{1}{2}$$

27 a $f(x) = 0$ geeft $x^2 + 2x - 8 = 0$
 $(x - 2)(x + 4) = 0$
 $x = 2 \vee x = -4$

b De grafiek van f snijdt de x -as in de punten $(2, 0)$ en $(-4, 0)$.

28 a $f(x) = 0$ geeft $ax^2 + bx = 0$
 $x(ax + b) = 0$
 $x = 0 \vee ax = -b$
 $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$

Dus de grafiek van f snijdt de x -as in de punten $(0, 0)$ en in $(-\frac{b}{a}, 0)$.

b De top van de grafiek van f ligt midden tussen de snijpunten van de grafiek van f met de x -as, dus $x_{\text{top}} = \frac{1}{2} \left(0 + -\frac{b}{a} \right) = -\frac{b}{2a}$.

c Dat is de verschuiving c omhoog.

d Bij een verticale verschuiving van een grafiek blijft de x -coördinaat van de top gelijk.

Dus ook voor de grafiek van g geldt dat $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$.

Bladzijde 22

29 a $f(x) = 0$ geeft $x^2 + 5x + 2 = 0$
 $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 17$
 $x = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{17}}{2}$
Dus de nulpunten zijn $\frac{-5 + \sqrt{17}}{2}$ en $\frac{-5 - \sqrt{17}}{2}$.

b $g(x) = 0$ geeft $-x^2 + 3x + 4 = 0$
 $x^2 - 3x - 4 = 0$
 $(x + 1)(x - 4) = 0$
 $x = -1 \vee x = 4$

Dus de snijpunten met de x -as zijn $(-1, 0)$ en $(4, 0)$.

30 a $x_{\text{top}} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ geeft $y_{\text{top}} = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3$
 $a = 1$, dus $a > 0$, dus dalparabool en min. is $f(2) = -3$.

b $x_{\text{top}} = -\frac{6}{2 \cdot 2} = -1\frac{1}{2}$ geeft $y_{\text{top}} = g(-1\frac{1}{2}) = 2 \cdot (-1\frac{1}{2})^2 + 6 \cdot -1\frac{1}{2} + 3 = -1\frac{1}{2}$
Dus de top is $(-1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$.

31 a $f(x) = 0$ geeft $2x^2 + 8x + 3 = 0$
 $D = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 40$, dus $\sqrt{D} = 2\sqrt{10}$
 $x = \frac{-8 + 2\sqrt{10}}{4} \vee x = \frac{-8 - 2\sqrt{10}}{4}$
 $x = -2 + \frac{1}{2}\sqrt{10} \vee x = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{10}$

Dus de nulpunten zijn $-2 + \frac{1}{2}\sqrt{10}$ en $-2 - \frac{1}{2}\sqrt{10}$.

b $g(x) = 0$ geeft $-2x^2 + 4x + 14 = 0$
 $x^2 - 2x - 7 = 0$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -7 = 32$, dus $\sqrt{D} = 4\sqrt{2}$
 $x = \frac{2 + 4\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{2 - 4\sqrt{2}}{2}$
 $x = 1 + 2\sqrt{2} \vee x = 1 - 2\sqrt{2}$

Dus de snijpunten met de x -as zijn $(1 + 2\sqrt{2}, 0)$ en $(1 - 2\sqrt{2}, 0)$.

c $x_{\text{top}} = -\frac{14}{2 \cdot 4} = -1\frac{3}{4}$ geeft $y_{\text{top}} = h(-1\frac{3}{4}) = 4 \cdot (-1\frac{3}{4})^2 + 14 \cdot -1\frac{3}{4} = -12\frac{1}{4}$
Dus de top is $(-1\frac{3}{4}, -12\frac{1}{4})$.

d $x_{\text{top}} = -\frac{6}{2 \cdot -0,3} = 10$ geeft $y_{\text{top}} = k(10) = -0,3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 - 2 = 28$
 $a = -0,3$, dus $a < 0$, dus bergparabool en max. is $k(10) = 28$.

32 a $x_{\text{top}} = -\frac{-1,2}{2 \cdot 0,15} = 4$ geeft $y_{\text{top}} = f(4) = 0,15 \cdot 4^2 - 1,2 \cdot 4 + 5 = 2,6$, dus de top is $(4; 2,6)$.
 $k: y = 3x + b$
 door $(4; 2,6)$ $\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 4 + b = 2,6 \\ 12 + b = 2,6 \\ b = -9,4 \end{array} \right\}$

b $x_{\text{top}} = -\frac{6}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = 6$ geeft $y_{\text{top}} = g(6) = -\frac{1}{2} \cdot 6^2 + 6 \cdot 6 + c = 18 + c$, dus de top is $(6, 18 + c)$.
 $l: y = 1\frac{1}{2}x + 4$
 door $(6, 18 + c)$ $\left. \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 6 + 4 = 18 + c \\ 9 + 4 = 18 + c \\ c = -5 \end{array} \right\}$
 $a = -\frac{1}{2}$, dus $a < 0$, dus bergparabool en max. is $g(6) = 18 + -5 = 13$.

Bladzijde 23

33 $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = b$ geeft $y_{\text{top}} = f(b) = -\frac{1}{2}b^2 + b^2 + 5 = \frac{1}{2}b^2 + 5$

Het maximum van f is 7, dus $\frac{1}{2}b^2 + 5 = 7$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}b^2 &= 2 \\ b^2 &= 4 \\ b &= 2 \vee b = -2 \end{aligned}$$

Er moet gelden $x_{\text{top}} > 0$ oftewel $b > 0$, dus $b = 2$.

Dit geeft $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \text{ geeft } -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5 &= 0 \\ x^2 - 4x - 10 &= 0 \\ D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -10 &= 56, \text{ dus } \sqrt{D} = 2\sqrt{14} \\ x = \frac{4 + 2\sqrt{14}}{2} \vee x = \frac{4 - 2\sqrt{14}}{2} \\ x &= 2 + \sqrt{14} \vee x = 2 - \sqrt{14} \end{aligned}$$

Dus de nulpunten zijn $2 + \sqrt{14}$ en $2 - \sqrt{14}$.

34 $f(-3) = 0$ geeft $9a - 3b + c = 0$ oftewel $c = -9a + 3b$.
 $f(5) = 0$ geeft $25a + 5b + c = 0$ oftewel $c = -25a - 5b$.
 Hieruit volgt $-9a + 3b = -25a - 5b$

$$\begin{aligned} 8b &= -16a \\ b &= -2a \\ c &= -9a + 3b \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} c = -9a + 3 \cdot -2a = -15a$$

Dus $f(x) = ax^2 - 2ax - 15a$.

$$x_{\text{top}} = -\frac{-2a}{2 \cdot a} = 1 \text{ geeft } y_{\text{top}} = f(1) = a - 2a - 15a = -16a$$

Het maximum is 6, dus $-16a = 6$ en dit geeft $a = -\frac{3}{8}$.

$$b = -2a = -2 \cdot -\frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = -15a = -15 \cdot -\frac{3}{8} = 5\frac{5}{8}$$

Alternatieve uitwerking

Uit de nulpunten -3 en 5 volgt dat het functievoorschrift van f geschreven kan worden als $f(x) = a(x+3)(x-5)$.

Uit de nulpunten -3 en 5 volgt $x_{\text{top}} = \frac{-3+5}{2} = 1$. Dit geeft $y_{\text{top}} = f(1) = a(1+3)(1-5) = -16a$.

Het maximum is 6, dus $-16a = 6$ en dit geeft $a = -\frac{3}{8}$.

$$\text{Dit geeft } f(x) = -\frac{3}{8}(x+3)(x-5) = -\frac{3}{8}(x^2 - 2x - 15) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 5\frac{5}{8}.$$

Dus $a = -\frac{3}{8}$, $b = \frac{3}{4}$ en $c = 5\frac{5}{8}$.

35

a $x_{\text{top}} = -\frac{4}{2a} = -\frac{2}{a}$ geeft $y_{\text{top}} = a \cdot \left(-\frac{2}{a}\right)^2 + 4 \cdot -\frac{2}{a} = a \cdot \frac{4}{a^2} - \frac{8}{a} = \frac{4}{a} - \frac{8}{a} = -\frac{4}{a} = 2 \cdot -\frac{2}{a} = 2 \cdot x_{\text{top}}$

Dus de formule van deze lijn is $y = 2x$.

b $x_{\text{top}} = -\frac{-3}{2a} = \frac{3}{2a}$ geeft $y_{\text{top}} = a \cdot \left(\frac{3}{2a}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2a} = a \cdot \frac{9}{4a^2} - \frac{9}{2a} = \frac{9}{4a} - \frac{18}{4a} = -\frac{9}{4a} = -\frac{4\frac{1}{2}}{2a} = -1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2a} = -1\frac{1}{2} \cdot x_{\text{top}}$

Dus de formule van deze lijn is $y = -1\frac{1}{2}x$.

c $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$ geeft $y_{\text{top}} = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot -\frac{b}{2a} = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} = -\frac{b^2}{4a} = \frac{b}{2} \cdot -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}b \cdot x_{\text{top}}$

De formule van de lijn is $y = \frac{1}{2}bx$.

Dus $p = \frac{1}{2}b$.

C5

a $x^2 + 2x = 24$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x - 4)(x + 6) = 0$$

$$x = 4 \vee x = -6$$

b $x(x - 4) = 21$

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$(x + 3)(x - 7) = 0$$

$$x = -3 \vee x = 7$$

c $6x^2 = 7x$

$$6x^2 - 7x = 0$$

$$x(6x - 7) = 0$$

$$x = 0 \vee 6x = 7$$

$$x = 0 \vee x = 1\frac{1}{6}$$

d $4x^2 + 35 = 24x$

$$4x^2 - 24x + 35 = 0$$

$$D = (-24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 35 = 16, \text{ dus } \sqrt{D} = 4$$

$$x = \frac{24 \pm 4}{8} = 3\frac{1}{2} \vee x = \frac{24 - 4}{8} = 2\frac{1}{2}$$

e $(3x + 2)(3x - 4) = 0$

$$3x = -2 \vee 3x = 4$$

$$x = -\frac{2}{3} \vee x = 1\frac{1}{3}$$

f $x^2 + 4 = 6x$

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 20, \text{ dus } \sqrt{D} = 2\sqrt{5}$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{2}$$

$$x = 3 + \sqrt{5} \vee x = 3 - \sqrt{5}$$

g $(2x - 1)(4x - 1) = 3$

$$8x^2 - 2x - 4x + 1 = 3$$

$$8x^2 - 6x - 2 = 0$$

$$4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -1 = 25, \text{ dus } \sqrt{D} = 5$$

$$x = \frac{3 \pm 5}{8} = 1 \vee x = \frac{3 - 5}{8} = -\frac{1}{4}$$

h $(5x + 1)^2 = 49$

$$5x + 1 = 7 \vee 5x + 1 = -7$$

$$5x = 6 \vee 5x = -8$$

$$x = 1\frac{1}{5} \vee x = -1\frac{3}{5}$$

C6

$f(x) = 0$ geeft $-x^2 + 6x - 2 = 0$

$$x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 28, \text{ dus } \sqrt{D} = 2\sqrt{7}$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{2} \vee x = \frac{6 - 2\sqrt{7}}{2}$$

$$x = 3 + \sqrt{7} \vee x = 3 - \sqrt{7}$$

Dus de nulpunten zijn $3 + \sqrt{7}$ en $3 - \sqrt{7}$.

C7

$x_{\text{top}} = -\frac{1,2}{2 \cdot -0,3} = 2$ geeft $y_{\text{top}} = g(2) = -0,3 \cdot 2^2 + 1,2 \cdot 2 + 4 = 5,2$

$a = -0,3$, dus $a < 0$, dus bergparabool en max. is $g(2) = 5,2$.

1.3 Werken met parameters

Bladzijde 25

V4 D stap 4

V5 a $4x + 5 < 6x - 3$
 $-2x < -8$
 $x > 4$

b $3x + 1 < 7x + 5$
 $-4x < 4$
 $x > -1$

c $5(x - 1) < 7x - 1$
 $5x - 5 < 7x - 1$
 $-2x < 4$
 $x > -2$

d $2(3x - 1) < 5 - (2 - 9x)$
 $6x - 2 < 5 - 2 + 9x$
 $6x - 2 < 3 + 9x$
 $-3x < 5$
 $x > -1\frac{2}{3}$

e $\frac{1}{3}x + 10 > \frac{1}{2}x$
 $2x + 60 > 3x$
 $-x > -60$
 $x < 60$

f $x + 6 > 2 - \frac{3}{4}x$
 $1\frac{3}{4}x > -4$
 $7x > -16$
 $x > -2\frac{2}{7}$

g $-3(4x - 1) > 2 - (x - 1)$
 $-12x + 3 > 2 - x + 1$
 $-12x + 3 > 3 - x$
 $-11x > 0$
 $x < 0$

h $2(x - 1) - 3(x - 2) > 6$
 $2x - 2 - 3x + 6 > 6$
 $-x + 4 > 6$
 $-x > 2$
 $x < -2$

36 a F $-3 < x < 3$ en G $-3 > x < 3$

b E $-3 < x < 3$

c H $x < -3 \vee x > 3$

37 a $p = 1$ geeft $f(x) = -x^2 + 6x + 1$

$x_{\text{top}} = -\frac{6}{2 \cdot -1} = 3$ en $y_{\text{top}} = f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 1 = 10$

De top is (3, 10).

b $p = -9$ geeft $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

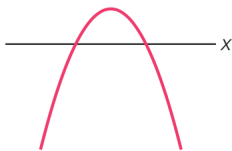
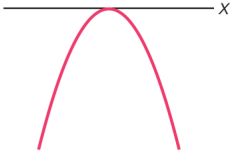
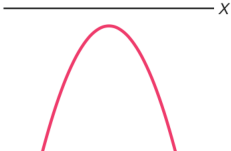
$x_{\text{top}} = -\frac{6}{2 \cdot -1} = 3$ en $y_{\text{top}} = f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 9 = 0$

De top is (3, 0), dus de top ligt op de x-as.

c $D = 6^2 - 4 \cdot -1 \cdot p = 36 + 4p$

Bladzijde 27

38 De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ met $a < 0$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
twee snijpunten met de x-as	één snijpunt (raakpunt) met de x-as	geen snijpunt met de x-as
		

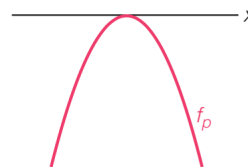
39 a Bij de grafieken van f_p hoort figuur III.

b Bij de grafieken van g_q hoort figuur I.

c Bij de grafieken van h_r hoort figuur II.

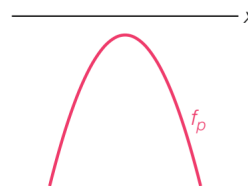
- 40 a** Zie de schets van de grafiek van f_p hiernaast.
Er moet gelden $D = 0$.

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot -\frac{1}{2} \cdot p = 25 + 2p \quad \left\{ \begin{array}{l} 25 + 2p = 0 \\ 2p = -25 \\ p = -12\frac{1}{2} \end{array} \right.$$



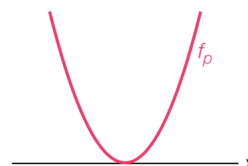
- b** Zie de schets van de grafiek van f_p hiernaast.
Er moet gelden $D < 0$.

$$D = 25 + 2p \quad \left\{ \begin{array}{l} 25 + 2p < 0 \\ 2p < -25 \\ p < -12\frac{1}{2} \end{array} \right.$$



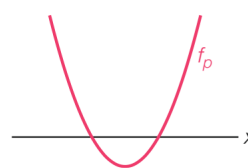
- 41 a** Zie de schets van de grafiek van f_p hiernaast.
Er moet gelden $D = 0$.

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 36 - 8p \quad \left\{ \begin{array}{l} 36 - 8p = 0 \\ -8p = -36 \\ p = 4\frac{1}{2} \end{array} \right.$$



- b** Zie de schets van de grafiek van f_p hiernaast.
Er moet gelden $D > 0$.

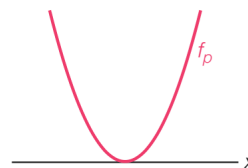
$$D = 36 - 8p \quad \left\{ \begin{array}{l} 36 - 8p > 0 \\ -8p > -36 \\ p < 4\frac{1}{2} \end{array} \right.$$



Bladzijde 28

- 42 a** Zie de schets van de grafiek van f_p hiernaast.
Er moet gelden $D = 0$.

$$D = p^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = p^2 - 36 \quad \left\{ \begin{array}{l} p^2 - 36 = 0 \\ p^2 = 36 \\ p = 6 \vee p = -6 \end{array} \right.$$



- b** Zie de schets van de grafiek van f_p hiernaast.
Er moet gelden $D < 0$.

$$D = p^2 - 36 \quad \left\{ \begin{array}{l} p^2 - 36 < 0 \\ p^2 < 36 \\ -6 < p < 6 \end{array} \right.$$



- 43 a** $p = 7$ geeft $x^2 + 7x + 4 = 0$
 $D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 33$

$$x = \frac{-7 + \sqrt{33}}{2} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{33}}{2}$$
- b** $p = 2$ geeft $x^2 + 2x + 4 = 0$
 $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12$
 $D < 0$, dus de vergelijking heeft nul oplossingen.
- c** $x^2 + px + 4 = 0$
 Eén oplossing als $D = 0$.

$$D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = p^2 - 16 \quad \left\{ \begin{array}{l} p^2 - 16 = 0 \\ p^2 = 16 \\ p = 4 \vee p = -4 \end{array} \right.$$

Bladzijde 29

- 44 a** Omdat je voor $p = 0$ een lineaire vergelijking krijgt en voor $p \neq 0$ een kwadratische vergelijking.
- b** $p = 0 \vee p = 2\frac{1}{4}$

- 45 a**
- Twee oplossingen als $D > 0$. $\left. \begin{array}{l} D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 49 - 4p \\ 49 - 4p > 0 \\ -4p > -49 \\ p < 12\frac{1}{4} \end{array} \right\}$
 - Twee oplossingen als $D > 0$. $\left. \begin{array}{l} D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = p^2 - 100 \\ p^2 - 100 > 0 \\ p^2 > 100 \\ p < -10 \vee p > 10 \end{array} \right\}$
 - Geen oplossing als $D < 0$. $\left. \begin{array}{l} D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = p^2 - 16 \\ p^2 - 16 < 0 \\ p^2 < 16 \\ -4 < p < 4 \end{array} \right\}$
- b** Twee oplossingen als $D > 0$. $\left. \begin{array}{l} D = p^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = p^2 + 24 \\ p^2 + 24 > 0 \text{ voor elke } p \end{array} \right\}$
De vergelijking heeft dus twee oplossingen voor elke p .

- 46 a** $p = 0$ geeft de vergelijking $5x + 2 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.
 $p \neq 0$ geeft $D = 5^2 - 4 \cdot p \cdot 2 = 25 - 8p$ $\left. \begin{array}{l} 25 - 8p > 0 \\ -8p > -25 \\ p < 3\frac{1}{8} \end{array} \right\}$
Twee oplossingen als $D > 0$.
Dus twee oplossingen voor $p < 3\frac{1}{8} \wedge p \neq 0$.
- b** $p = 0$ geeft de vergelijking $-3x - 4 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.
 $p \neq 0$ geeft $D = (-3)^2 - 4 \cdot p \cdot (-4) = 9 + 16p$ $\left. \begin{array}{l} 9 + 16p > 0 \\ 16p > -9 \\ p > -\frac{9}{16} \end{array} \right\}$
Twee oplossingen als $D > 0$.
Dus twee oplossingen voor $p > -\frac{9}{16} \wedge p \neq 0$.

- 47 a** $x = 1$ is een oplossing, dus $1^2 + 2 \cdot 1 + p = 0$
 $3 + p = 0$
 $p = -3$
 $p = -3$ geeft $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x - 1)(x + 3) = 0$
 $x = 1 \vee x = -3$
Dus $p = -3$ en de andere oplossing is $x = -3$.
- b** $x = 2$ is een oplossing, dus $p \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 + 10 = 0$
 $4p - 12 = 0$
 $4p = 12$
 $p = 3$
 $p = 3$ geeft $3x^2 - 11x + 10 = 0$
 $D = (-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 1$, dus $\sqrt{D} = 1$
 $x = \frac{11 + 1}{6} = 2 \vee x = \frac{11 - 1}{6} = 1\frac{2}{3}$
Dus $p = 3$ en de andere oplossing is $x = 1\frac{2}{3}$.

- 48 a** Geen oplossing als $D < 0$. $\left. \begin{array}{l} D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 1 - 8p \\ 1 - 8p < 0 \\ -8p < -1 \\ p > \frac{1}{8} \end{array} \right\}$
- b** $p = 0$ geeft de vergelijking $x = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.
 $p \neq 0$ geeft $D = 1^2 - 4 \cdot p \cdot p = 1 - 4p^2$ $\left. \begin{array}{l} 1 - 4p^2 > 0 \\ -4p^2 > -1 \\ p^2 < \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2} \end{array} \right\}$
Twee oplossingen als $D > 0$.
Dus twee oplossingen voor $-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2} \wedge p \neq 0$.
- c** Twee oplossingen als $D > 0$. $\left. \begin{array}{l} D = p^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = p^2 - 8 \\ p^2 - 8 > 0 \\ p^2 > 8 \\ p < -2\sqrt{2} \vee p > 2\sqrt{2} \end{array} \right\}$

49 a $p = 0$ geeft de vergelijking $6x + 9 = 0$

$$6x = -9$$

$$x = -1\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} p \neq 0 \text{ geeft } D = 6^2 - 4 \cdot p \cdot 9 = 36 - 36p \\ \text{Eén oplossing als } D = 0. \end{array} \right\} \begin{array}{l} 36 - 36p = 0 \\ -36p = -36 \\ p = 1 \end{array}$$

$p = 1$ geeft de vergelijking $x^2 + 6x + 9 = 0$

$$(x + 3)^2 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Voor $p = 0$ is de oplossing $x = -1\frac{1}{2}$ en voor $p = 1$ is de oplossing $x = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{b } D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = p^2 - 4 \\ \text{Eén oplossing als } D = 0. \end{array} \right\} \begin{array}{l} p^2 - 4 = 0 \\ p^2 = 4 \end{array}$$

$$p = 2 \vee p = -2$$

$p = 2$ geeft de vergelijking $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$(x + 1)^2 = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$p = -2$ geeft de vergelijking $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Voor $p = 2$ is de oplossing $x = -1$ en voor $p = -2$ is de oplossing $x = 1$.

50 $p = \sqrt{14}$ geeft de vergelijking $\sqrt{14} \cdot x + 2 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.

$p = -\sqrt{14}$ geeft de vergelijking $-\sqrt{14} \cdot x + 2 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.

$$\left. \begin{array}{l} p \neq \sqrt{14} \wedge p \neq -\sqrt{14} \text{ geeft } D = p^2 - 4 \cdot (p^2 - 14) \cdot 2 = p^2 - 8p^2 + 112 = -7p^2 + 112 \\ \text{Twee oplossingen als } D > 0. \end{array} \right\} \begin{array}{l} -7p^2 + 112 > 0 \\ -7p^2 > -112 \\ p^2 < 16 \\ -4 < p < 4 \end{array}$$

Dus twee oplossingen voor $-4 < p < 4 \wedge p \neq \sqrt{14} \wedge p \neq -\sqrt{14}$.

51 a $x_{\text{top}} = -\frac{p}{2 \cdot 4} = -\frac{p}{8} = -\frac{1}{8}p$

$$y_{\text{top}} = f_p\left(-\frac{1}{8}p\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}p\right)^2 + p \cdot -\frac{1}{8}p + 5$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{64}p^2 - \frac{1}{8}p^2 + 5$$

$$= \frac{1}{16}p^2 - \frac{1}{8}p^2 + 5$$

$$= -\frac{1}{16}p^2 + 5$$

b $y_{\text{top}} = 6$ geeft $-\frac{1}{16}p^2 + 5 = 6$

$$-\frac{1}{16}p^2 = 1$$

$$p^2 = -16$$

geen oplossing

Dus y_{top} kan niet gelijk zijn aan 6.

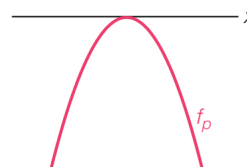
52 a $x_{\text{top}} = -\frac{p}{2 \cdot -2} = \frac{1}{4}p$
 $y_{\text{top}} = f_p\left(\frac{1}{4}p\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{4}p\right)^2 + p \cdot \frac{1}{4}p - 1$
 $= -2 \cdot \frac{1}{16}p^2 + \frac{1}{4}p^2 - 1$
 $= -\frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}p^2 - 1$
 $= \frac{1}{8}p^2 - 1$
 Het maximum is 7 geeft $\frac{1}{8}p^2 - 1 = 7$
 $\frac{1}{8}p^2 = 8$
 $p^2 = 64$
 $p = 8 \vee p = -8$

b Het maximum is 0 geeft $\frac{1}{8}p^2 - 1 = 0$
 $\frac{1}{8}p^2 = 1$
 $p^2 = 8$
 $p = 2\sqrt{2} \vee p = -2\sqrt{2}$

Alternatieve uitwerking

Zie de schets van de grafiek van f_p hiernaast.

Er moet gelden $D = 0$.
 $D = p^2 - 4 \cdot -2 \cdot -1 = p^2 - 8$ $\left. \begin{array}{l} p^2 - 8 = 0 \\ p^2 = 8 \end{array} \right\}$
 $p = 2\sqrt{2} \vee p = -2\sqrt{2}$



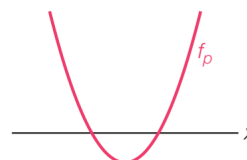
53 a $x_{\text{top}} = -\frac{p}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}p$
 $y_{\text{top}} = f_p\left(-\frac{1}{2}p\right) = \left(-\frac{1}{2}p\right)^2 + p \cdot -\frac{1}{2}p + 3$
 $= \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p^2 + 3$
 $= -\frac{1}{4}p^2 + 3$
 $y = x + 1$
 door $\left(-\frac{1}{2}p, -\frac{1}{4}p^2 + 3\right)$ $\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{4}p^2 + 3 = -\frac{1}{2}p + 1 \\ -\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + 2 = 0 \\ p^2 - 2p - 8 = 0 \\ (p+2)(p-4) = 0 \\ p = -2 \vee p = 4 \end{array} \right\}$

b $y_{\text{top}} < 0$ geeft $-\frac{1}{4}p^2 + 3 < 0$
 $-\frac{1}{4}p^2 < -3$
 $p^2 > 12$
 $p < -2\sqrt{3} \vee p > 2\sqrt{3}$

Alternatieve uitwerking

Zie de schets van de grafiek van f_p hiernaast.

Er moet gelden $D > 0$.
 $D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = p^2 - 12$ $\left. \begin{array}{l} p^2 - 12 > 0 \\ p^2 > 12 \end{array} \right\}$
 $p < -2\sqrt{3} \vee p > 2\sqrt{3}$



$$\begin{aligned}
 54 \quad a \quad x_{\text{top}} &= -\frac{6}{2 \cdot p} = -\frac{3}{p} \\
 y_{\text{top}} &= f_p\left(-\frac{3}{p}\right) = p \cdot \left(-\frac{3}{p}\right)^2 + 6 \cdot -\frac{3}{p} + 1 \\
 &= p \cdot \frac{9}{p^2} - \frac{18}{p} + 1 \\
 &= \frac{9}{p} - \frac{18}{p} + 1 \\
 &= -\frac{9}{p} + 1
 \end{aligned}$$

De extreme waarde is -2 geeft $-\frac{9}{p} + 1 = -2$

$$\begin{aligned}
 -\frac{9}{p} &= -3 \\
 p &= 3
 \end{aligned}$$

- b $f_3(x) = 3x^2 + 6x + 1$
De grafiek is een dalparabool, dus de externe waarde is een minimum.

$$\begin{aligned}
 55 \quad a \quad x_{\text{top}} &= -\frac{p}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = p \\
 y_{\text{top}} &= f_p(p) = -\frac{1}{2}p^2 + p \cdot p + p^2 - 6 = \frac{1}{2}p^2 - 6 \\
 y_{\text{top}} < 0 &\text{ geeft } \frac{1}{2}p^2 - 6 < 0 \\
 \frac{1}{2}p^2 &< 6 \\
 p^2 &< 12 \\
 -2 < p &< 2
 \end{aligned}$$

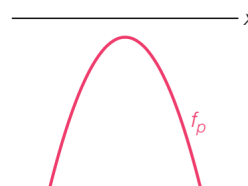
Alternatieve uitwerking

Zie de schets van de grafiek van f_p hiernaast.

Er moet gelden $D < 0$.

$$D = p^2 - 4 \cdot -\frac{1}{2} \cdot (p^2 - 6) = p^2 + 2p^2 - 12 = 3p^2 - 12 \left\{ \begin{array}{l} 3p^2 - 12 < 0 \\ 3p^2 < 12 \\ p^2 < 4 \\ -2 < p < 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 b \quad y_{\text{top}} > 18 &\text{ geeft } \frac{1}{2}p^2 - 6 > 18 \\
 \frac{1}{2}p^2 &> 24 \\
 p^2 &> 48 \\
 p &< -4 \vee p > 4
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 56 \quad x_{\text{top}} &= -\frac{p}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -p \\
 y_{\text{top}} &= f_{p,q}(-p) = \frac{1}{2} \cdot (-p)^2 + p \cdot -p + q = \frac{1}{2}p^2 - p^2 + q = -\frac{1}{2}p^2 + q \\
 \text{Het minimum is 7} &\text{ geeft } -\frac{1}{2}p^2 + q = 7 \\
 q &= \frac{1}{2}p^2 + 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 + x + 1 \\
 \text{door } (-p, -\frac{1}{2}p^2 + q) &\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}p^2 + q = (-p)^2 + -p + 1 \\ -\frac{1}{2}p^2 + q = p^2 - p + 1 \\ q = \frac{1}{2}p^2 - p + 1 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{1}{2}p^2 + 7 \\
 q &= \frac{1}{2}p^2 - p + 1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}p^2 + 7 = \frac{1}{2}p^2 - p + 1 \\ p^2 - p - 6 = 0 \\ (p+2)(p-3) = 0 \\ p = -2 \vee p = 3 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$p = -2 \text{ geeft } q = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 7 = 9$$

$$p = 3 \text{ geeft } q = \frac{1}{2} \cdot 3^2 + 7 = 11\frac{1}{2}$$

Dus voor $p = -2 \wedge q = 9$ en voor $p = 3 \wedge q = 11\frac{1}{2}$.

57 a Bij $x = -\frac{2}{p}$ beide leden met p vermenigvuldigen geeft $px = -2$.

Bij $px = -2$ beide leden door x delen geeft $p = -\frac{2}{x}$.

Dus uit $x = -\frac{2}{p}$ volgt $p = -\frac{2}{x}$.

b $p = -\frac{2}{x}$ substitueren in $y = px^2 + 4x - 3$ geeft $y = -\frac{2}{x} \cdot x^2 + 4x - 3$
 $= -2x + 4x - 3$
 $= 2x - 3$

c Bijvoorbeeld $p = -4$ geeft $f_{-4}(x) = -4x^2 + 4x - 3$.

$$x_{\text{top}} = -\frac{4}{2 \cdot -4} = \frac{1}{2} \text{ en } y_{\text{top}} = f_{-4}\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -2, \text{ dus de top is } \left(\frac{1}{2}, -2\right).$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ en } y = 2x - 3 \text{ geeft } y = \frac{1}{2} \cdot 2 - 3 = -2.$$

Dus de top van de parabool ligt inderdaad op de lijn $y = 2x - 3$.

58 a Voor de x -coördinaat van de top geldt $x = -\frac{p}{2 \cdot -1} = \frac{1}{2}p$ en hieruit volgt $p = 2x$.

b $p = 2x$ substitueren in $y = -x^2 + px + p$ geeft $y = -x^2 + 2x \cdot x + 2x$
 $= -x^2 + 2x^2 + 2x$
 $= x^2 + 2x$

Dit klopt met de figuur ernaast.

Bladzijde 32

59 a Voor de x -coördinaat van de top geldt $x = -\frac{-6}{2 \cdot p} = \frac{3}{p}$ en hieruit volgt $p = \frac{3}{x}$.

$p = \frac{3}{x}$ substitueren in $y = px^2 - 6x + 5$ geeft $y = \frac{3}{x} \cdot x^2 - 6x + 5$
 $= 3x - 6x + 5$
 $= -3x + 5$

Hiermee is het bewijs geleverd.

b Voor de x -coördinaat van de top geldt $x = -\frac{p}{2 \cdot -1} = \frac{1}{2}p$ en hieruit volgt $p = 2x$.

$p = 2x$ substitueren in $y = -x^2 + px - 6$ geeft $y = -x^2 + 2x \cdot x - 6$
 $= -x^2 + 2x^2 - 6$
 $= x^2 - 6$

Hiermee is het bewijs geleverd.

c Voor de x -coördinaat van de top geldt $x = -\frac{p}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -p$ en hieruit volgt $p = -x$.

$p = -x$ substitueren in $y = \frac{1}{2}x^2 + px + 2p$ geeft $y = \frac{1}{2}x^2 + -x \cdot x + 2 \cdot -x$
 $= \frac{1}{2}x^2 - x^2 - 2x$
 $= -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

Dus de formule van deze parabool is $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$.

d Voor de x -coördinaat van de top geldt $x = -\frac{6}{2 \cdot p} = -\frac{3}{p}$ en hieruit volgt $p = -\frac{3}{x}$.

$p = -\frac{3}{x}$ substitueren in $y = px^2 + 6x + p$ geeft $y = -\frac{3}{x} \cdot x^2 + 6x + -\frac{3}{x}$
 $= -3x + 6x - \frac{3}{x}$
 $= 3x - \frac{3}{x}$

Dus de formule van deze kromme is $y = 3x - \frac{3}{x}$.

a $A(0, 5)$

b Geen oplossing als $D < 0$.
 $D = q^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = q^2 - 40$
 $\left. \begin{array}{l} q^2 - 40 < 0 \\ q^2 < 40 \\ -2\sqrt{10} < q < 2\sqrt{10} \end{array} \right\}$

c $f_{p,4}(x) = px^2 + 4x + 5$

$$D = 4^2 - 4 \cdot p \cdot 5 = 16 - 20p$$

Als $p > 0$, dan top onder de x -as als $D > 0$

$$16 - 20p > 0$$

$$-20p > -16$$

$$p < \frac{4}{5}$$

Als $p < 0$, dan top onder de x -as als $D < 0$

$$16 - 20p < 0$$

$$-20p < -16$$

$$p > \frac{4}{5}$$

geen oplossing

Dus voor $0 < p < \frac{4}{5}$.

d $x_{\text{top}} = -\frac{q}{2p}$

$$y_{\text{top}} = f_{p,q}\left(-\frac{q}{2p}\right) = p \cdot \left(-\frac{q}{2p}\right)^2 + q \cdot -\frac{q}{2p} + 5$$

$$= p \cdot \frac{q^2}{4p^2} - \frac{q^2}{2p} + 5$$

$$= \frac{q^2}{4p} - \frac{2q^2}{4p} + 5$$

$$= -\frac{q^2}{4p} + 5$$

De extreme waarde is 3 geeft $-\frac{q^2}{4p} + 5 = 3$

$$2 = \frac{q^2}{4p}$$

$$8p = q^2$$

$$p = \frac{1}{8}q^2$$

e $y = \frac{1}{2}x^2 + 5$
 door $\left(-\frac{q}{2p}, -\frac{q^2}{4p} + 5\right)$ $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{q^2}{4p} + 5 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{q}{2p}\right)^2 + 5 \\ -\frac{q^2}{4p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4p^2} \end{array} \right.$

$$-1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p}$$

$$-2 = \frac{1}{p}$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

$f_p(x) = x^2 - 2px + 7p = x^2 - p(2x - 7)$

$2x - 7 = 0$ geeft $x = 3\frac{1}{2}$

In dat geval is $f_p(x) = x^2$ en dit geeft $y = f_p(3\frac{1}{2}) = (3\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{4}$, dus $A(3\frac{1}{2}, 12\frac{1}{4})$.

Bij $f_p(x) = x^2 - 2px + 7p$ geldt voor de x -coördinaat van de top dat $x = -\frac{-2p}{2 \cdot 1} = p$.

$p = x$ substitueren in $y = x^2 - 2px + 7p$ geeft $y = x^2 - 2x \cdot x + 7x$

$$= x^2 - 2x^2 + 7x$$

$$= -x^2 + 7x$$

Dus de formule van de parabool waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen,

is $y = -x^2 + 7x$.

Van deze parabool is $x_{\text{top}} = -\frac{7}{2 \cdot -1} = 3\frac{1}{2}$ en $y_{\text{top}} = -(3\frac{1}{2})^2 + 7 \cdot 3\frac{1}{2} = 12\frac{1}{4}$, dus top $(3\frac{1}{2}, 12\frac{1}{4})$.

En dat is het punt A .

Bladzijde 33

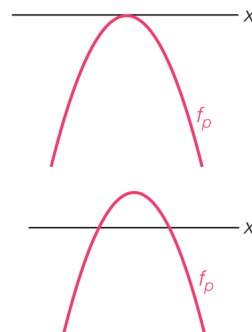
- C8** a Voor alle grafieken van f_p zijn de uitspraken III en VI waar.
b Voor alle grafieken van g_q zijn de uitspraken II en VI waar.
c Voor alle grafieken van h_r is uitspraak II waar.

- C9** a Zie de schets van de grafiek van f_p hiernaast.
Er moet gelden $D = 0$.

$$D = p^2 - 4 \cdot -\frac{1}{3} \cdot -12 = p^2 - 16 \quad \left\{ \begin{array}{l} p^2 - 16 = 0 \\ p^2 = 16 \\ p = 4 \vee p = -4 \end{array} \right.$$

- b Zie de schets van de grafiek van f_p hiernaast.
Er moet gelden $D > 0$.

$$D = p^2 - 16 \quad \left\{ \begin{array}{l} p^2 - 16 > 0 \\ p^2 > 16 \\ p < -4 \vee p > 4 \end{array} \right.$$



- C10** a Geen oplossing als $D < 0$.

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot p = 4 - 12p \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 - 12p < 0 \\ -12p < -4 \\ p > \frac{1}{3} \end{array} \right.$$
- b Twee oplossingen als $D > 0$.

$$D = p^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6 = p^2 - 96 \quad \left\{ \begin{array}{l} p^2 - 96 > 0 \\ p^2 > 96 \\ p < -4\sqrt{6} \vee p > 4\sqrt{6} \end{array} \right.$$
- c $p = 0$ geeft de vergelijking $3x = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.
 $p \neq 0$ geeft $D = 3^2 - 4 \cdot p \cdot p = 9 - 4p^2$
Twee oplossingen als $D > 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 9 - 4p^2 > 0 \\ -4p^2 > -9 \\ p^2 < \frac{9}{4} \\ -1\frac{1}{2} < p < 1\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Dus twee oplossingen voor $-1\frac{1}{2} < p < 1\frac{1}{2} \wedge p \neq 0$.

C11 $x_{\text{top}} = -\frac{p}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2p$

$$y_{\text{top}} = f_p(-2p) = \frac{1}{4} \cdot (-2p)^2 + p \cdot -2p + 5 = \frac{1}{4} \cdot 4p^2 - 2p^2 + 5 = p^2 - 2p^2 + 5 = -p^2 + 5$$

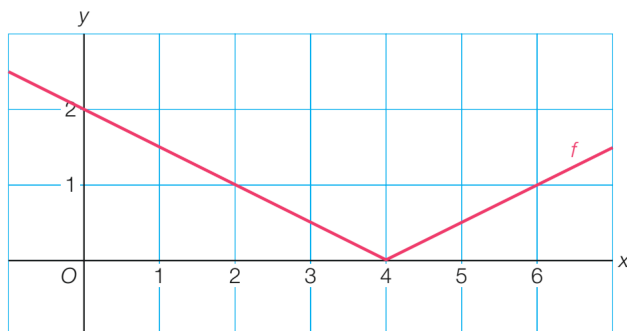
Het minimum is -4 geeft $-p^2 + 5 = -4$

$$\begin{aligned} -p^2 &= -9 \\ p^2 &= 9 \\ p &= 3 \vee p = -3 \end{aligned}$$

1.4 Absolute waarden

Bladzijde 34

62



Bladzijde 35

- 63** Dilan heeft gelijk.
Bij de notatie van Rebin ontbreekt in de voorwaarden $x = 1\frac{1}{2}$.

- 64** **a** Knik als $3x - 2 = 0$, dus als $x = \frac{2}{3}$.
 $f(\frac{2}{3}) = 2 \cdot \frac{2}{3} + 4 - 0 = 5\frac{1}{3}$, dus het knikpunt is $(\frac{2}{3}, 5\frac{1}{3})$.
- b** $|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{als } 3x - 2 \geq 0, \text{ dus als } 3x \geq 2 \text{ oftewel } x \geq \frac{2}{3} \\ -3x + 2 & \text{als } x < \frac{2}{3} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 - (3x - 2) = 2x + 4 - 3x + 2 = -x + 6 & \text{als } x \geq \frac{2}{3} \\ 2x + 4 - (-3x + 2) = 2x + 4 + 3x - 2 = 5x + 2 & \text{als } x < \frac{2}{3} \end{cases}$
- c** punt A: $5x + 2 = x - 3$
 $4x = -5$
 $x = -1\frac{1}{4}$
 $g(-1\frac{1}{4}) = -4\frac{1}{4}$, dus $A(-1\frac{1}{4}, -4\frac{1}{4})$.
- punt B: $-x + 6 = x - 3$
 $-2x = -9$
 $x = 4\frac{1}{2}$
 $g(4\frac{1}{2}) = 1\frac{1}{2}$, dus $B(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.

Bladzijde 36

- 65** **a** Knik als $3x - 8 = 0$, dus als $x = 2\frac{2}{3}$.
 $f(2\frac{2}{3}) = 2 \cdot 2\frac{2}{3} - 12 + 0 = -6\frac{2}{3}$, dus het knikpunt is $(2\frac{2}{3}, -6\frac{2}{3})$.
- b** $|3x - 8| = \begin{cases} 3x - 8 & \text{als } 3x - 8 \geq 0, \text{ dus als } 3x \geq 8 \text{ oftewel } x \geq 2\frac{2}{3} \\ -3x + 8 & \text{als } x < 2\frac{2}{3} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 2x - 12 + 3x - 8 = 5x - 20 & \text{als } x \geq 2\frac{2}{3} \\ 2x - 12 + -3x + 8 = -x - 4 & \text{als } x < 2\frac{2}{3} \end{cases}$
- c** lijn k
 $f(x) = 0$ geeft $-x - 4 = 0$
 $-x = 4$
 $x = -4$
Dus $A(-4, 0)$.
 $y = ax + b$
 $k \parallel \Pi$, dus $a = rc_k = rc_{\Pi} = 5$.
 $y = 5x + b$
door $A(-4, 0)$ $\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot -4 + b = 0 \\ -20 + b = 0 \end{array} \right.$
 $b = 20$
Dus $k: y = 5x + 20$.
- lijn l
 $f(x) = 0$ geeft $5x - 20 = 0$
 $5x = 20$
 $x = 4$
Dus $B(4, 0)$.
 $y = ax + b$
 $l \parallel I$, dus $a = rc_l = rc_I = -1$.
 $y = -x + b$
door $B(4, 0)$ $\left\{ \begin{array}{l} -4 + b = 0 \\ b = 4 \end{array} \right.$
Dus $l: y = -x + 4$.
- k snijden met l geeft $5x + 20 = -x + 4$
 $6x = -16$
 $x = -2\frac{2}{3}$
 $y = -x + 4$ $\left\{ \right. y = 6\frac{2}{3}$
Dus $S(-2\frac{2}{3}, 6\frac{2}{3})$.

- 66** **a** De grafiek van f heeft een knik als $1\frac{1}{2}x - 6 = 0$, dus als $x = 4$.
 $f(4) = 4 + 3 - 0 = 7$, dus het knikpunt is $(4, 7)$.
De grafiek van g heeft een knik als $3x - 18 = 0$, dus als $x = 6$.
 $g(6) = \frac{1}{2} \cdot 6 - 8 + 0 = -5$, dus het knikpunt is $(6, -5)$.

$k: y = ax + b$
 $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5 - 7}{6 - 4} = -6$
 $y = -6x + b$
door $(4, 7)$ $\left\{ \begin{array}{l} -6 \cdot 4 + b = 7 \\ -24 + b = 7 \end{array} \right.$
 $b = 31$
Dus $k: y = -6x + 31$.

$$\mathbf{b} \quad |1\frac{1}{2}x - 6| = \begin{cases} 1\frac{1}{2}x - 6 & \text{als } 1\frac{1}{2}x - 6 \geq 0, \text{ dus als } 1\frac{1}{2}x \geq 6 \text{ oftewel } x \geq 4 \\ -1\frac{1}{2}x + 6 & \text{als } x < 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 - (1\frac{1}{2}x - 6) = x + 3 - 1\frac{1}{2}x + 6 = -\frac{1}{2}x + 9 & \text{als } x \geq 4 \\ x + 3 - (-1\frac{1}{2}x + 6) = x + 3 + 1\frac{1}{2}x - 6 = 2\frac{1}{2}x - 3 & \text{als } x < 4 \end{cases}$$

$$|3x - 18| = \begin{cases} 3x - 18 & \text{als } 3x - 18 \geq 0, \text{ dus als } 3x \geq 18 \text{ oftewel } x \geq 6 \\ -3x + 18 & \text{als } x < 6 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 8 + 3x - 18 = 3\frac{1}{2}x - 26 & \text{als } x \geq 6 \\ \frac{1}{2}x - 8 + -3x + 18 = -2\frac{1}{2}x + 10 & \text{als } x < 6 \end{cases}$$

$$\text{punt A: } 2\frac{1}{2}x - 3 = -2\frac{1}{2}x + 10$$

$$5x = 13$$

$$x = 2\frac{3}{5}$$

$$f(2\frac{3}{5}) = 3\frac{1}{2}, \text{ dus } A(2\frac{3}{5}, 3\frac{1}{2}).$$

$$\text{punt B: } -\frac{1}{2}x + 9 = 3\frac{1}{2}x - 26$$

$$-4x = -35$$

$$x = 8\frac{3}{4}$$

$$f(8\frac{3}{4}) = 4\frac{5}{8}, \text{ dus } B(8\frac{3}{4}, 4\frac{5}{8}).$$

67 a Knik als $4x - 10 = 0$, dus als $x = 2\frac{1}{2}$.

$$f(2\frac{1}{2}) = 3 \cdot 2\frac{1}{2} - 12 + 0 = -4\frac{1}{2}, \text{ dus het knikpunt is } A(2\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}).$$

$$x_{\text{top}} = -\frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{ en } y_{\text{top}} = g(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 12 = 12\frac{1}{8}, \text{ dus de top is } B(\frac{1}{2}, 12\frac{1}{8}).$$

$$|y_A - y_B| = |-4\frac{1}{2} - 12\frac{1}{8}| = |-16\frac{5}{8}| = 16\frac{5}{8}$$

$$\mathbf{b} \quad |4x - 10| = \begin{cases} 4x - 10 & \text{als } 4x - 10 \geq 0, \text{ dus als } 4x \geq 10 \text{ oftewel } x \geq 2\frac{1}{2} \\ -4x + 10 & \text{als } x < 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 12 + 4x - 10 = 7x - 22 & \text{als } x \geq 2\frac{1}{2} \\ 3x - 12 + -4x + 10 = -x - 2 & \text{als } x < 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{punt C: } -x - 2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 12$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}x - 14 = 0$$

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

$$(x + 4)(x - 7) = 0$$

$$x = -4 \vee x = 7$$

$$\text{Er geldt } x_C < 2\frac{1}{2}, \text{ dus } x_C = -4.$$

$$f(-4) = 2, \text{ dus } C(-4, 2).$$

$$\text{punt D: } 7x - 22 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 12$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 6\frac{1}{2}x - 34 = 0$$

$$x^2 + 13x - 68 = 0$$

$$(x - 4)(x + 17) = 0$$

$$x = 4 \vee x = -17$$

$$\text{Er geldt } x_D > 2\frac{1}{2}, \text{ dus } x_D = 4.$$

$$f(4) = 6, \text{ dus } D(4, 6).$$

68 a $|3x + 6| = \begin{cases} 3x + 6 & \text{als } 3x + 6 \geq 0, \text{ dus als } 3x \geq -6 \text{ oftewel } x \geq -2 \\ -3x - 6 & \text{als } x < -2 \end{cases}$

$$f_a(x) = \begin{cases} ax - 3 + 3x + 6 = (a + 3)x + 3 & \text{als } x \geq -2 \\ ax - 3 + -3x - 6 = (a - 3)x - 9 & \text{als } x < -2 \end{cases}$$

$$\text{Knik als } 3x + 6 = 0, \text{ dus als } x = -2.$$

Er is een laagste punt als de grafiek links van de knik dalend is en rechts van de knik stijgend.

$$\text{Er moet dan gelden } a + 3 > 0 \text{ en } a - 3 < 0 \text{ oftewel } a > -3 \text{ en } a < 3.$$

Dus voor $-3 < a < 3$ heeft de grafiek een laagste punt.

b $f(-2) = -2a - 3 + 0 = -2a - 3$, dus het knikpunt van de grafiek van f is $(-2, -2a - 3)$.

$$\text{De grafiek van } g \text{ heeft een knik als } 2\frac{1}{2}x - 5 = 0, \text{ dus als } x = 2.$$

$$g(2) = 2 + 3 - 0 = 5, \text{ dus het knikpunt van de grafiek van } g \text{ is } (2, 5).$$

$$\text{rc}_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-2a - 3)}{2 - (-2)} = \frac{5 + 2a + 3}{2 + 2} = \frac{2a + 8}{4}$$

$$k // l \text{ geeft } \text{rc}_k = \text{rc}_l$$

$$\frac{2a + 8}{4} = 3$$

$$2a + 8 = 12$$

$$2a = 4$$

$$a = 2$$

69 a Knikken als $x^2 - 6x = 0$
 $x(x - 6) = 0$
 $x = 0 \vee x = 6$

Dus $A(6, 0)$.

$$x_T = \frac{x_O + x_A}{2} = \frac{0 + 6}{2} = 3 \text{ en dit geeft}$$

$$y_T = f(3) = |3^2 - 6 \cdot 3| = |9 - 18| = |-9| = 9.$$

b De lijn $y = 8$ ligt tussen de knikken en de top en snijdt de grafiek van f dus vier keer.

Dus de vergelijking $|x^2 - 6x| = 8$ heeft vier oplossingen.

c De vergelijking $|x^2 - 6x| = 9$ heeft drie oplossingen.

De vergelijking $|x^2 - 6x| = 10$ heeft twee oplossingen.

Bladzijde 37

70 a $|x^2 - 9| = -x^2 + 9$ voor $x^2 - 9 < 0$
 $x^2 < 9$
 $-3 < x < 3$

b De lijn $y = 6$ gaat door A , dus snijdt de grafiek van f drie keer.

Dus de vergelijking $f(x) = 6$ heeft drie oplossingen.

De lijn $y = 10$ gaat door T , dus snijdt de grafiek van f drie keer.

Dus de vergelijking $f(x) = 10$ heeft drie oplossingen.

De lijn $y = 14$ ligt boven T , dus snijdt de grafiek van f twee keer.

Dus de vergelijking $f(x) = 14$ heeft twee oplossingen.

Bladzijde 38

71 a Knikken als $x^2 - 4 = 0$
 $x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$

$$f(2) = 0 + 2 = 2 \text{ en } f(-2) = 0 + (-2) = -2$$

Dus $A(-2, -2)$ en $B(2, 2)$.

Top voor $-2 < x < 2$ en daar is $|x^2 - 4| = -x^2 + 4$, dus daar geldt $f(x) = -x^2 + 4 + x = -x^2 + x + 4$.

$$x_T = -\frac{1}{2 \cdot -1} = \frac{1}{2} \text{ en } y_T = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 4 = 4\frac{1}{4}$$

Dus $T\left(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4}\right)$.

b De lijn $y = 8$ ligt boven T , dus snijdt de grafiek van f twee keer.

Dus de vergelijking $f(x) = 8$ heeft twee oplossingen.

Snijpunten voor $x < -2$ en $x > 2$ en daar is $|x^2 - 4| = x^2 - 4$, dus daar geldt $f(x) = x^2 - 4 + x$.

$f(x) = 8$ geeft $x^2 - 4 + x = 8$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x - 3)(x + 4) = 0$$

$$x = 3 \vee x = -4$$

c Links van A geldt $f(x) = x^2 + x - 4$.

$f(x) = 0$ geeft $x^2 + x - 4 = 0$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 17$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$x < -2, \text{ dus } x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}.$$

Tussen A en B geldt $f(x) = -x^2 + x + 4$.

$f(x) = 0$ geeft $-x^2 + x + 4 = 0$

$$x^2 - x - 4 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 17$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$-2 < x < 2, \text{ dus } x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}.$$

Dus de nulpunten zijn $\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$ en $\frac{1 - \sqrt{17}}{2}$.

72 a Knik als $5\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x = 0$

$$-\frac{3}{4}x = -5\frac{1}{4}$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

$$f(7) = (7 + 1) \cdot 0 = 0, \text{ dus } A(7, 0).$$

Top voor $x < 7$ en daar is $|5\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x| = 5\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x$, dus daar geldt $f(x) = (x + 1)(5\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x)$.

$$f(x) = 0 \text{ geeft } x = -1 \vee x = 7$$

$$x_T = \frac{-1 + 7}{2} = 3 \text{ en } y_T = f(3) = (3 + 1)(5\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot 3) = 12, \text{ dus } T(3, 12).$$

$$\begin{aligned} \text{b Links van } A \text{ geldt } f(x) &= (x + 1)(5\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x) \\ &= 5\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}x^2 + 5\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x \\ &= -\frac{3}{4}x^2 + 4\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$f(x) = 9 \text{ geeft } -\frac{3}{4}x^2 + 4\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{4} = 9$$

$$-\frac{3}{4}x^2 + 4\frac{1}{2}x - 3\frac{3}{4} = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 5$$

$$\begin{aligned} \text{Rechts van } A \text{ geldt } f(x) &= (x + 1)(-5\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x) \\ &= -5\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}x^2 - 5\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x \\ &= \frac{3}{4}x^2 - 4\frac{1}{2}x - 5\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$f(x) = 9 \text{ geeft } \frac{3}{4}x^2 - 4\frac{1}{2}x - 5\frac{1}{4} = 9$$

$$\frac{3}{4}x^2 - 4\frac{1}{2}x - 14\frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 - 6x - 19 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -19 = 112, \text{ dus } \sqrt{D} = 4\sqrt{7}$$

$$x = \frac{6 + 4\sqrt{7}}{2} \vee x = \frac{6 - 4\sqrt{7}}{2}$$

$$x = 3 + 2\sqrt{7} \vee x = 3 - 2\sqrt{7}$$

$$x > 7, \text{ dus } x = 3 + 2\sqrt{7}.$$

Dus de x-coördinaten zijn $x = 1$, $x = 5$ en $x = 3 + 2\sqrt{7}$.

73 Knikken als $\frac{1}{2}x^2 - 8 = 0$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

$$f(4) = 0 - 2 \cdot 4 + 1 = -7 \text{ en } f(-4) = 0 - 2 \cdot -4 + 1 = 9$$

$$\text{Dus } A(-4, 9) \text{ en } B(4, -7).$$

Top voor $-4 < x < 4$ en daar is $|\frac{1}{2}x^2 - 8| = -\frac{1}{2}x^2 + 8$, dus daar geldt

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8 - 2x + 1 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 9.$$

$$x_T = \frac{-2}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = -2 \text{ en } y_T = f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot -2 + 9 = 11$$

$$\text{Dus } T(-2, 11).$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = \text{rc}_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-7 - 9}{4 - -4} = -2$$

$$\left. \begin{aligned} y &= -2x + b \\ \text{door } T(-2, 11) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -2 \cdot -2 + b &= 11 \\ 4 + b &= 11 \\ b &= 7 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } k: y = -2x + 7.$$

Snijpunt Q voor $-4 < x < 4$.

$$\text{Los op } f(x) = -2x + 7, \text{ dus } -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 9 = -2x + 7$$

$$-\frac{1}{2}x^2 = -2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

$$x = 2 \text{ geeft } y = -2 \cdot 2 + 7 = 3, \text{ dus } Q(2, 3).$$

- 74 a** De vergelijking $f(x) = p$ heeft vier oplossingen als de lijn $y = p$ tussen B en T ligt.

Knikken als $9 - x^2 = 0$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

$$f(3) = 0 + 3 + 3 = 6 \text{ en } f(-3) = 0 + -3 + 3 = 0$$

Dus $A(-3, 0)$ en $B(3, 6)$.

Top voor $-3 < x < 3$ en daar is $|9 - x^2| = 9 - x^2$, dus daar geldt $f(x) = 9 - x^2 + x + 3 = -x^2 + x + 12$.

$$x_T = -\frac{1}{2 \cdot -1} = \frac{1}{2} \text{ en } y_T = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 12 = 12\frac{1}{4}$$

Dus $T\left(\frac{1}{2}, 12\frac{1}{4}\right)$.

Dus voor $6 < p < 12\frac{1}{4}$ heeft de vergelijking $f(x) = p$ vier oplossingen.

- b** Drie oplossingen voor $p = 6$ en voor $p = 12\frac{1}{4}$.

Links van A geldt $f(x) = -9 + x^2 + x + 3 = x^2 + x - 6$. Tussen A en B geldt $f(x) = -x^2 + x + 12$.

$f(x) = 6$ geeft $x^2 + x - 6 = 6$

$f(x) = 6$ geeft $-x^2 + x + 12 = 6$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$-x^2 + x + 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 4) = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = 3 \vee x = -4$$

$$(x + 2)(x - 3) = 0$$

$$x < -3, \text{ dus } x = -4.$$

$$x = -2 \vee x = 3$$

Dus de oplossingen zijn $x = -4$, $x = -2$ en $x = 3$.

Bladzijde 39

- 75 a** $f_3(x) = (x - 2) \cdot |x + 3|$

Knikken als $x = -3$ en top voor $x > -3$.

Daar geldt $f_3(x) = (x - 2)(x + 3)$.

$f_3(x) = 0$ geeft $x = 2 \vee x = -3$

$$x_A = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2} \text{ en } y_A = f_3\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} - 2\right)\left(-\frac{1}{2} + 3\right) = -6\frac{1}{4}$$

Dus $A\left(-\frac{1}{2}, -6\frac{1}{4}\right)$.

$$f_{-8}(x) = (x - 2) \cdot |x - 8|$$

Knikken als $x = 8$ en top voor $x < 8$.

Daar geldt $f_{-8}(x) = (x - 2)(-x + 8)$.

$f_{-8}(x) = 0$ geeft $x = 2 \vee x = 8$

$$x_B = \frac{2 + 8}{2} = 5 \text{ en } y_B = f_{-8}(5) = (5 - 2)(-5 + 8) = 9$$

Dus $B(5, 9)$.

- b** $x_{\text{top}} = \frac{2 + -p}{2} = 1 - \frac{1}{2}p$

$x_{\text{top}} = 4$ geeft $1 - \frac{1}{2}p = 4$

$$-\frac{1}{2}p = 3$$

$$p = -6$$

- c** $y_{\text{top}} = f_p\left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \left(1 - \frac{1}{2}p - 2\right) \cdot \left|1 - \frac{1}{2}p + p\right| = \left(-1 - \frac{1}{2}p\right) \cdot \left|1 + \frac{1}{2}p\right|$

$$\left|1 + \frac{1}{2}p\right| = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}p & \text{als } 1 + \frac{1}{2}p \geq 0, \text{ dus als } \frac{1}{2}p \geq -1 \text{ oftewel } p \geq -2 \\ -1 - \frac{1}{2}p & \text{als } p < -2 \end{cases}$$

$$y_{\text{top}} = \begin{cases} (-1 - \frac{1}{2}p)(1 + \frac{1}{2}p) = -(1 + \frac{1}{2}p)(1 + \frac{1}{2}p) = -(1 + \frac{1}{2}p)^2 & \text{als } p \geq -2 \\ (-1 - \frac{1}{2}p)(-1 - \frac{1}{2}p) = (1 + \frac{1}{2}p)(1 + \frac{1}{2}p) = (1 + \frac{1}{2}p)^2 & \text{als } p < -2 \end{cases}$$

$$y_{\text{top}} = -9 \text{ en } p \geq -2 \text{ geeft } -(1 + \frac{1}{2}p)^2 = -9$$

$$(1 + \frac{1}{2}p)^2 = 9$$

$$1 + \frac{1}{2}p = 3 \vee 1 + \frac{1}{2}p = -3$$

$$\frac{1}{2}p = 2 \vee \frac{1}{2}p = -4$$

$$p = 4 \vee p = -8$$

$$p \geq 2, \text{ dus } p = 4.$$

$$y_{\text{top}} = -9 \text{ en } p < -2 \text{ geeft } (1 + \frac{1}{2}p)^2 = -9$$

geen oplossing

Dus $p = 4$.

- d** Voor $p > -2$ geldt voor de coördinaten van de top $(1 - \frac{1}{2}p, -(1 + \frac{1}{2}p)^2)$.
 Uit $x = 1 - \frac{1}{2}p$ volgt $\frac{1}{2}p = 1 - x$, dus $p = 2 - 2x$.
 $p = 2 - 2x$ substitueren in $y = -(1 + \frac{1}{2}p)^2$ geeft $y = -(1 + \frac{1}{2}(2 - 2x))^2$
 $= -(1 + 1 - x)^2$
 $= -(2 - x)^2$
 $= -(4 - 4x + x^2)$
 $= -x^2 + 4x - 4$

Dus de formule van deze bergparabool is $y = -x^2 + 4x - 4$.

C12

- a** Knik als $1 - 2x = 0$, dus als $x = \frac{1}{2}$.
 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 3 - 0 = 3\frac{1}{2}$, dus het knikpunt is $(\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.
- b** $|1 - 2x| = \begin{cases} 1 - 2x & \text{als } 1 - 2x \geq 0, \text{ dus als } -2x \geq -1 \text{ oftewel } x \leq \frac{1}{2} \\ -1 + 2x & \text{als } x > \frac{1}{2} \end{cases}$
 $f(x) = \begin{cases} x + 3 - (1 - 2x) = x + 3 - 1 + 2x = 3x + 2 & \text{als } x \leq \frac{1}{2} \\ x + 3 - (-1 + 2x) = x + 3 + 1 - 2x = -x + 4 & \text{als } x > \frac{1}{2} \end{cases}$
- c** punt A: $3x + 2 = 2x - 2$ punt B: $-x + 4 = 2x - 2$
 $x = -4$ $-3x = -6$
 $x = 2$
 $g(-4) = -10$, dus $A(-4, -10)$. $g(2) = 2$, dus $B(2, 2)$.

C13

- a** Knikken als $x^2 - 9 = 0$
 $x^2 = 9$
 $x = 3 \vee x = -3$
 $f(3) = 0 - 2 \cdot 3 - 1 = -7$ en $f(-3) = 0 - 2 \cdot -3 - 1 = 5$
 Dus $A(-3, 5)$ en $B(3, -7)$.
 Top voor $-3 < x < 3$ en daar is $|x^2 - 9| = -x^2 + 9$, dus daar geldt
 $f(x) = -x^2 + 9 - 2x - 1 = -x^2 - 2x + 8$.
 $x_T = -\frac{-2}{2 \cdot -1} = -1$ en $y_T = f(-1) = -(-1)^2 - 2 \cdot -1 + 8 = 9$
 Dus $T(-1, 9)$.
- b** De lijn $y = 5$ gaat door A, dus snijdt de grafiek van f drie keer.
 Dus de vergelijking $f(x) = 5$ heeft drie oplossingen.
- c** Tussen A en B geldt $f(x) = -x^2 - 2x + 8$. Rechts van B geldt $f(x) = x^2 - 9 - 2x - 1 = x^2 - 2x - 10$.
 $f(x) = 0$ geeft $-x^2 - 2x + 8 = 0$ $f(x) = 0$ geeft $x^2 - 2x - 10 = 0$
 $x^2 + 2x - 8 = 0$ $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -10 = 44$, dus $\sqrt{D} = 2\sqrt{11}$
 $(x - 2)(x + 4) = 0$ $x = \frac{2 + 2\sqrt{11}}{2} \vee x = \frac{2 - 2\sqrt{11}}{2}$
 $x = 2 \vee x = -4$ $x = 1 + \sqrt{11} \vee x = 1 - \sqrt{11}$
 $-3 < x < 3$, dus $x = 2$. $x > 3$, dus $x = 1 + \sqrt{11}$.

Dus de nulpunten zijn 2 en $1 + \sqrt{11}$.

1.5 Grafisch-numeriek oplossen

Bladzijde 40

- 76** **a** De nulpunten zijn -1, 1, 2 en 3.
b $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ en $x = 3$
- 77** **a** De x -coördinaten zijn -2, 2 en 4.
b $x = -2$, $x = 2$ en $x = 4$

- 78 a** Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie nulpunt geeft $x = -0,791\dots$, $x = 1$ en $x = 3,791\dots$.
Dus de nulpunten zijn $-0,79$, 1 en $3,79$.
- b** Invoeren van de formule van g en $y = x + 2$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -4,51$, $x \approx -1,76$ en $x \approx 1,26$.

- 79 a** Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie minimum geeft $x = -1,617\dots$ en $y = -7,955\dots$ en $x = 3,693\dots$ en $y = 4,740\dots$.
Dus min. is $f(-1,62) \approx -7,96$ en min. is $f(3,69) \approx 4,74$.
Gebruiken van de optie maximum geeft $x = 1,673\dots$ en $y = 9,469\dots$.
Dus max. is $f(1,67) \approx 9,47$.
- b** Invoeren van de formule van g en gebruiken van de optie minimum geeft $x = -2,5$ en $y = -88,416\dots$.
Dus min. is $g(-2,5) \approx -88,42$.
Gebruiken van de optie maximum geeft $x = 4$ en $y = 94,666\dots$.
Dus max. is $g(4) \approx 94,67$.

- 80 a** Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie nulpunt geeft $x = -4,326\dots$, $x = -0,771\dots$ en $x = 3,597\dots$.
Dus de nulpunten zijn $-4,33$, $-0,77$ en $3,60$.
- b** Gebruiken van de optie minimum geeft $x = -2,791\dots$ en $y = -6,602\dots$.
Dus min. is $f(-2,79) \approx -6,60$.
Gebruiken van de optie maximum geeft $x = 1,791\dots$ en $y = 9,436\dots$.
Dus max. is $f(1,79) \approx 9,44$.
- c** Invoeren van de formule $y = -x + 3$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -4,99$, $x \approx -0,16$ en $x \approx 3,65$.

- 81 a** $x^2 - 5x = 0$
 $x(x - 5) = 0$
 $x = 0 \vee x = 5$
- b** $x^2 - 5x = 14$
 $x^2 - 5x - 14 = 0$
 $(x + 2)(x - 7) = 0$
 $x = -2 \vee x = 7$
- c** $x^2 - 5 = 14$
 $x^2 = 19$
 $x = \sqrt{19} \vee x = -\sqrt{19}$
- d** $x^2 - 5 = 14x$
 $x^2 - 14x - 5 = 0$
 $D = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -5 = 216$, dus $\sqrt{D} = 6\sqrt{6}$
 $x = \frac{14 + 6\sqrt{6}}{2} \vee x = \frac{14 - 6\sqrt{6}}{2}$
 $x = 7 + 3\sqrt{6} \vee x = 7 - 3\sqrt{6}$

- e** $(2x - 1)(3x + 6) = 0$
 $2x = 1 \vee 3x = -6$
 $x = \frac{1}{2} \vee x = -2$
- f** $(2x - 1)(3x + 6) = 9x$
 $6x^2 + 12x - 3x - 6 = 9x$
 $6x^2 + 9x - 6 = 9x$
 $6x^2 = 6$
 $x^2 = 1$
 $x = 1 \vee x = -1$
- g** $3x(2x - 1) = 6$
 $6x^2 - 3x = 6$
 $6x^2 - 3x - 6 = 0$
 $2x^2 - x - 2 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 17$
 $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \vee x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}$
- h** $3x(2x - 1) = 6 - 9x$
 $6x^2 - 3x = 6 - 9x$
 $6x^2 + 6x - 6 = 0$
 $x^2 + x - 1 = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$
 $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

- 82 a** Invoeren van de formules $y = |x^3 - 9x|$ en $y = 5$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -3,25$, $x \approx -2,67$, $x \approx -0,58$, $x \approx 0,58$, $x \approx 2,67$ en $x \approx 3,25$.
- b** Invoeren van de formules $y = |x^3 - 9x|$ en $y = x + 5$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -3,10$, $x \approx -2,87$, $x \approx -0,51$, $x \approx 0,66$, $x \approx 2,44$ en $x \approx 3,39$.

- 83 a** Invoeren van de formule $y = 0,5x^3 - 5x^2 + 20$ en gebruiken van de optie nulpunt geeft de oplossingen $x \approx -1,84$, $x \approx 2,28$ en $x \approx 9,56$.
- b** Invoeren van de formules $y = |x^4 - x^3 + x - 5|$ en $y = x + 3$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -1,48$, $x \approx -1,26$, $x = 1$ en $x = 2$.

- 84 a** Er moet gelden $D = 0$.
 $D = (p+1)^2 - 4 \cdot p \cdot \frac{1}{2}p^2 = p^2 + 2p + 1 - 2p^3$
 Invoeren van de formule $y = x^2 + 2x + 1 - 2x^3$ en gebruiken van de optie nulpunt geeft $x = 1,437\dots$

Dus voor $p \approx 1,44$ raakt de grafiek van f_p de x -as.

b $x_{\text{top}} = -\frac{p+1}{2p}$
 $y_{\text{top}} = f_p\left(-\frac{p+1}{2p}\right) = p \cdot \left(-\frac{p+1}{2p}\right)^2 + (p+1)\left(-\frac{p+1}{2p}\right) + \frac{1}{2}p^2 = \frac{(p+1)^2}{4p} - \frac{(p+1)^2}{2p} + \frac{1}{2}p^2$

Invoeren van de formules $y = \frac{(x+1)^2}{4x} - \frac{(x+1)^2}{2x} + \frac{1}{2}x^2$ en $y = 10$ en gebruiken

van de optie snijpunt geeft $x = -4,326\dots$, $x = 0,023\dots$ en $x = 4,850\dots$

Er is sprake van een minimum, dus de grafiek is een dalparabool, dus $p > 0$.

Dus voor $p \approx 4,85$ is het minimum van f_p gelijk aan 10.

- 85 a** Invoeren van de formules van f en g en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 1$ en $x = 4$.

Dus $-x^2 + 6x = x + 4$ geeft $x = 1 \vee x = 4$.

- b** Voor $1 < x < 4$.

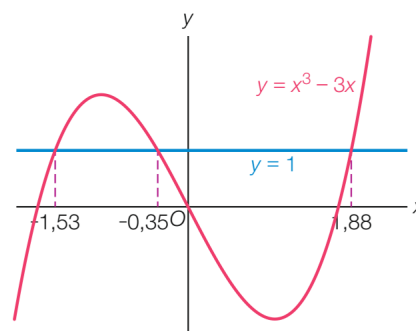
Bladzijde 44

- 86 a** Los op $x^3 - 3x = 1$.

Invoeren van de formules $y = x^3 - 3x$ en $y = 1$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = -1,532\dots$, $x = -0,347\dots$ en $x = 1,879\dots$

Zie de schets hiernaast.

$x^3 - 3x < 1$ geeft $x < -1,53 \vee -0,35 < x < 1,88$



- b** Los op $x^2 - 3x = 9$

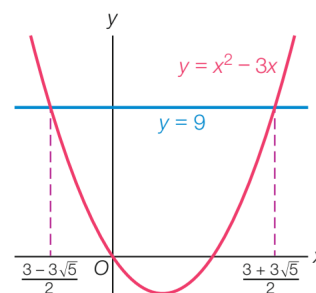
$$x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -9 = 45, \text{ dus } \sqrt{D} = 3\sqrt{5}$$

$$x = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}$$

Zie de schets hiernaast.

$$x^2 - 3x \geq 9 \text{ geeft } x \leq \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$$

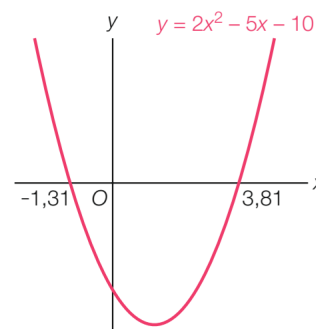


- c** Los op $2x^2 - 5x - 10 = 0$.

Invoeren van de formule $y = 2x^2 - 5x - 10$ en gebruiken van de optie nulpunt geeft $x = -1,311\dots$ en $x = 3,811\dots$

Zie de schets hiernaast.

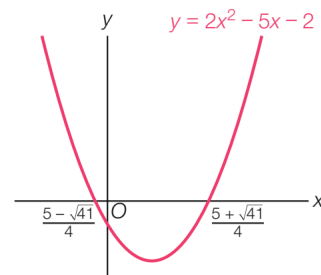
$2x^2 - 5x - 10 > 0$ geeft $x < -1,31 \vee x > 3,81$



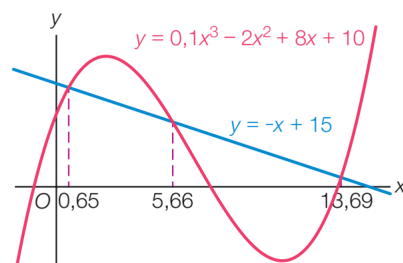
d Los op $2x^2 - 5x - 2 = 0$
 $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 41$
 $x = \frac{5 + \sqrt{41}}{4} \vee x = \frac{5 - \sqrt{41}}{4}$

Zie de schets hiernaast.

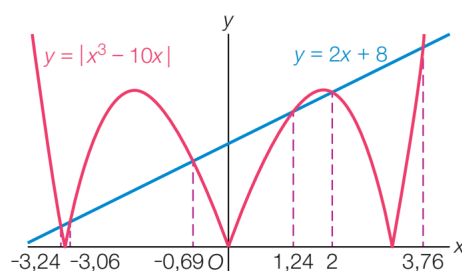
$2x^2 - 5x - 2 \leq 0$ geeft $\frac{5 - \sqrt{41}}{4} \leq x \leq \frac{5 + \sqrt{41}}{4}$



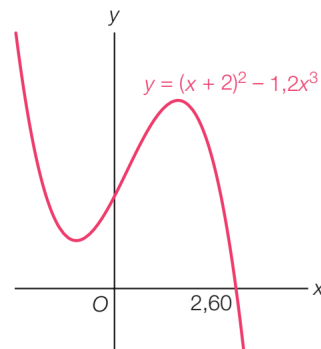
- 87 a** Los op $0,1x^3 - 2x^2 + 8x + 10 = -x + 15$.
 Invoeren van de formules $y = 0,1x^3 - 2x^2 + 8x + 10$ en $y = -x + 15$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 0,645\dots$, $x = 5,660\dots$ en $x = 13,694\dots$
 Zie de schets hiernaast.
 $0,1x^3 - 2x^2 + 8x + 10 > -x + 15$ geeft $0,65 < x < 5,66 \vee x > 13,69$



- b** Los op $|x^3 - 10x| = 2x + 8$.
 Invoeren van de formules $y = |x^3 - 10x|$ en $y = 2x + 8$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = -3,236\dots$, $x = -3,064\dots$, $x = -0,694\dots$, $x = 1,236\dots$, $x = 2$ en $x = 3,758\dots$
 Zie de schets hiernaast.
 $|x^3 - 10x| < 2x + 8$ geeft
 $-3,24 < x < -3,06 \vee -0,69 < x < 1,24 \vee 2 < x < 3,76$



- 88** Een minimum betekent dat de grafiek van f_p een dalparabool is, dus $p > 0$.
 Een negatief minimum betekent dat de grafiek van f_p de x -as in twee punten snijdt, dus $D > 0$.
 $D = (p + 2)^2 - 4 \cdot p \cdot 0,3p^2 = (p + 2)^2 - 1,2p^3$
 Los op $(p + 2)^2 - 1,2p^3 = 0$.
 Invoeren van de formule $y = (x + 2)^2 - 1,2x^3$ en gebruiken van de optie nulpunt geeft $x = 2,604\dots$
 Zie de schets hiernaast.
 $D > 0$ geeft $p < 2,604\dots$
 Dus voor $0 < p < 2,60$ heeft f_p een negatief minimum.

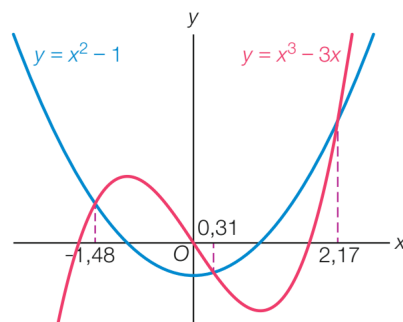


Bladzijde 45

- C14 a** Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie nulpunt geeft $x = -0,575\dots$, $x = 3,917\dots$ en $x = 6,657\dots$
 Dus de nulpunten zijn $-0,58$, $3,92$ en $6,66$.
b Gebruiken van de optie maximum geeft $x = 1,225\dots$ en $y = 5,266\dots$
 Dus max. is $f(1,23) \approx 5,27$.
 Gebruiken van de optie minimum geeft $x = 5,441\dots$ en $y = -2,229\dots$
 Dus min. is $f(5,44) \approx -2,23$.
c Invoeren van de formule $y = 3$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft de oplossingen $x = 0$, $x \approx 2,76$ en $x \approx 7,24$.

C15

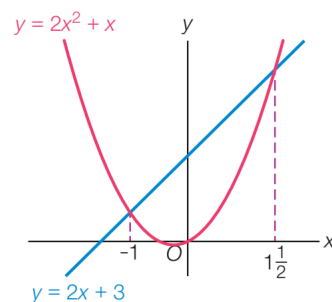
- a** Los op $x^3 - 3x = x^2 - 1$.
 Invoeren van de formules $y = x^3 - 3x$ en $y = x^2 - 1$
 en gebruiken van de optie snijpunt geeft
 $x = -1,481\dots$, $x = 0,311\dots$ en $x = 2,170\dots$
 Zie de schets hiernaast.
 $x^3 - 3x > x^2 - 1$ geeft $-1,48 < x < 0,31 \vee x > 2,17$



- b** Los op $2x^2 + x = 2x + 3$
 $2x^2 - x - 3 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 25$, dus $\sqrt{D} = 5$
 $x = \frac{1+5}{4} = 1\frac{1}{2} \vee x = \frac{1-5}{4} = -1$

Zie de schets hiernaast.

$2x^2 + x \leq 2x + 3$ geeft $-1 \leq x \leq 1\frac{1}{2}$



Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 46

- 1 a** $k: y = ax + b$
 $k \parallel l$, dus $a = rc_k = rc_l = 4$.
 $y = 4x + b$
 door $A(1, 6)$ $\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 1 + b = 6 \\ 4 + b = 6 \\ b = 2 \end{array} \right.$

Dus $k: y = 4x + 2$.

- b** $y = ax - 3$
 door $B(8, 1)$ $\left\{ \begin{array}{l} 8a - 3 = 1 \\ 8a = 4 \\ a = \frac{1}{2} \end{array} \right.$

- c** $n: y = ax + b$
 $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 5}{3 - 1} = -3$
 $y = -3x + b$
 door $C(1, 5)$ $\left\{ \begin{array}{l} -3 \cdot 1 + b = 5 \\ -3 + b = 5 \\ b = 8 \end{array} \right.$

Dus $n: y = -3x + 8$.

- 2 a** $N = at + b$
 $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{160 - 100}{5 - 2} = 20$
 $N = 20t + b$
 $t = 2$ en $N = 100$ $\left\{ \begin{array}{l} 20 \cdot 2 + b = 100 \\ 40 + b = 100 \\ b = 60 \end{array} \right.$

Dus $N = 20t + 60$.

- b** $N = 20t + 60$
 $-20t = -N + 60$
 $t = \frac{1}{20}N - 3$

- c** $N = 440$ geeft $t = \frac{1}{20} \cdot 440 - 3 = 19$

3 a $5x^2 = 3x$
 $5x^2 - 3x = 0$
 $x(5x - 3) = 0$
 $x = 0 \vee 5x = 3$
 $x = 0 \vee x = \frac{3}{5}$

b $2x^2 + 12x = 14$
 $2x^2 + 12x - 14 = 0$
 $x^2 + 6x - 7 = 0$
 $(x - 1)(x + 7) = 0$
 $x = 1 \vee x = -7$

c $(2x - 4)^2 = 144$
 $2x - 4 = 12 \vee 2x - 4 = -12$
 $2x = 16 \vee 2x = -8$
 $x = 8 \vee x = -4$

d $3x^2 = 18x + 30$
 $3x^2 - 18x - 30 = 0$
 $x^2 - 6x - 10 = 0$
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -10 = 76$, dus $\sqrt{D} = 2\sqrt{19}$
 $x = \frac{6 + 2\sqrt{19}}{2} \vee x = \frac{6 - 2\sqrt{19}}{2}$

$x = 3 + \sqrt{19} \vee x = 3 - \sqrt{19}$
e $3x^2 - 6x = 2$
 $3x^2 - 6x - 2 = 0$
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -2 = 60$, dus $\sqrt{D} = 2\sqrt{15}$
 $x = \frac{6 + 2\sqrt{15}}{6} \vee x = \frac{6 - 2\sqrt{15}}{6}$
 $x = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{15} \vee x = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{15}$

f $(2x + 1)^2 = 3x(x + 1) - x$
 $4x^2 + 4x + 1 = 3x^2 + 3x - x$
 $x^2 + 2x + 1 = 0$
 $(x + 1)^2 = 0$
 $x = -1$

4 a $f(x) = 0$ geeft $0,45x^2 - 1,8x - 5,4 = 0$
 $x^2 - 4x - 12 = 0$
 $(x + 2)(x - 6) = 0$
 $x = -2 \vee x = 6$

Dus de nulpunten zijn -2 en 6.

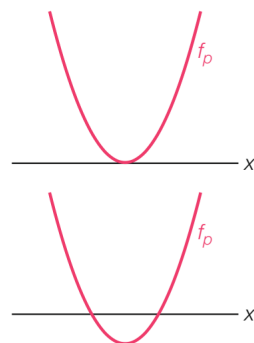
b $x_{\text{top}} = \frac{-2 + 6}{2} = 2$ geeft $y_{\text{top}} = f(2) = 0,45 \cdot 2^2 - 1,8 \cdot 2 - 5,4 = -7,2$, dus top (2; -7,2).

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } (2; -7,2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + b = -7,2 \\ 4 + b = -7,2 \\ b = -11,2 \end{array}$$

5 a $A(0, 1)$

b Zie de schets van de grafiek van f_p hiernaast.
Er moet gelden $D = 0$.
 $D = p^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = p^2 - 16$ $\left\{ \begin{array}{l} p^2 - 16 = 0 \\ p^2 = 16 \\ p = 4 \vee p = -4 \end{array} \right.$

c Zie de schets van de grafiek van f_p hiernaast.
Er moet gelden $D > 0$.
 $D = p^2 - 16$ $\left\{ \begin{array}{l} p^2 - 16 > 0 \\ p^2 > 16 \\ p < -4 \vee p > 4 \end{array} \right.$



6 a Geen oplossing als $D < 0$.
 $D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 16 - 8p$ $\left\{ \begin{array}{l} 16 - 8p < 0 \\ -8p < -16 \\ p > 2 \end{array} \right.$

b Eén oplossing als $D = 0$.
 $D = p^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = p^2 - 144$ $\left\{ \begin{array}{l} p^2 - 144 = 0 \\ p^2 = 144 \\ p = 12 \vee p = -12 \end{array} \right.$

c $p = 0$ geeft de vergelijking $2x + 5 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.

$p \neq 0$ geeft $D = 2^2 - 4 \cdot p \cdot 5 = 4 - 20p$ $\left\{ \begin{array}{l} 4 - 20p > 0 \\ -20p > -4 \\ p < \frac{1}{5} \end{array} \right.$
Twee oplossingen als $D > 0$.

Dus twee oplossingen voor $p < \frac{1}{5} \wedge p \neq 0$.

7 $x_{\text{top}} = -\frac{p}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}p$ geeft $y_{\text{top}} = f_p(-\frac{1}{2}p) = (-\frac{1}{2}p)^2 + p \cdot -\frac{1}{2}p + 1 = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p^2 + 1 = -\frac{1}{4}p^2 + 1$
 Het minimum is -3 geeft $-\frac{1}{4}p^2 + 1 = -3$
 $-\frac{1}{4}p^2 = -4$
 $p^2 = 16$
 $p = 4 \vee p = -4$

8 Voor de x -coördinaat van de top geldt $x = -\frac{2p}{2 \cdot 1} = -p$ en hieruit volgt $p = -x$.
 $p = -x$ substitueren in $y = x^2 + 2px + p$ geeft $y = x^2 + 2 \cdot -x \cdot x + -x$
 $= x^2 - 2x^2 - x$
 $= -x^2 - x$

Dus de formule van deze kromme is $y = -x^2 - x$.

9 $|3x - 6| = \begin{cases} 3x - 6 & \text{als } 3x - 6 \geq 0, \text{ dus als } 3x \geq 6 \text{ oftewel } x \geq 2 \\ -3x + 6 & \text{als } x < 2 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 - (3x - 6) = 2x + 4 - 3x + 6 = -x + 10 & \text{als } x \geq 2 \\ 2x + 4 - (-3x + 6) = 2x + 4 + 3x - 6 = 5x - 2 & \text{als } x < 2 \end{cases}$$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{als } x - 3 \geq 0, \text{ dus als } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{als } x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x - 3 = x - 2 & \text{als } x \geq 3 \\ 1 + -x + 3 = -x + 4 & \text{als } x < 3 \end{cases}$$

punt A: $5x - 2 = -x + 4$
 $6x = 6$
 $x = 1$

punt B: $-x + 10 = x - 2$
 $-2x = -12$
 $x = 6$

$g(1) = 3$, dus A(1, 3).

$g(6) = 4$, dus B(6, 4).

$k: y = ax + b$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 3}{6 - 1} = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{1}{5}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5} \cdot 1 + b = 3 \\ \frac{1}{5} + b = 3 \\ b = 2\frac{4}{5} \end{array} \right.$$

Dus $k: y = \frac{1}{5}x + 2\frac{4}{5}$.

k snijden met de x -as geeft $\frac{1}{5}x + 2\frac{4}{5} = 0$
 $x + 14 = 0$
 $x = -14$

Dus $x_P = -14$.

De grafiek van f heeft een knik als $3x - 6 = 0$, dus als $x = 2$.

$f(2) = 2 \cdot 2 + 4 - 0 = 8$, dus het knikpunt is (2, 8).

De grafiek van g heeft een knik als $x - 3 = 0$, dus als $x = 3$.

$g(3) = 1 + 0 = 1$, dus het knikpunt is (3, 1).

$l: y = ax + b$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 8}{3 - 2} = -7$$

$$y = -7x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} -7 \cdot 3 + b = 1 \\ -21 + b = 1 \\ b = 22 \end{array} \right.$$

Dus $l: y = -7x + 22$.

l snijden met de x -as geeft $-7x + 22 = 0$
 $-7x = -22$
 $x = 3\frac{1}{7}$

Dus $x_Q = 3\frac{1}{7}$.

$|x_P - x_Q| = |-14 - 3\frac{1}{7}| = |-17\frac{1}{7}| = 17\frac{1}{7}$

- 10 a** Knik als $10 - 2\frac{1}{2}x = 0$, dus als $x = 4$.
 $f(4) = 4 \cdot 0 = 0$, dus $A(4, 0)$.
 Top voor $x < 4$ en daar is $|10 - 2\frac{1}{2}x| = 10 - 2\frac{1}{2}x$, dus daar geldt $f(x) = x(10 - 2\frac{1}{2}x)$.
 $f(x) = 0$ geeft $x = 0 \vee x = 4$
 $x_T = \frac{0+4}{2} = 2$ en $y_T = f(2) = 2(10 - 2\frac{1}{2} \cdot 2) = 10$, dus $T(2, 10)$.

Dus voor $p < 0$ en voor $p > 10$ heeft de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing.

- b** Rechts van A geldt $f(x) = x(-10 + 2\frac{1}{2}x) = 2\frac{1}{2}x^2 - 10x$.
 $f(x) = 10$ geeft $2\frac{1}{2}x^2 - 10x = 10$
 $2\frac{1}{2}x^2 - 10x - 10 = 0$
 $x^2 - 4x - 4 = 0$
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 32$, dus $\sqrt{D} = 4\sqrt{2}$
 $x = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{4 - 4\sqrt{2}}{2}$
 $x = 2 + 2\sqrt{2} \vee x = 2 - 2\sqrt{2}$
 $x > 4$, dus $x_B = 2 + 2\sqrt{2}$.

- 11 a** Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie nulpunt geeft $x = -0,495\dots$, $x = 2,538\dots$ en $x = 7,956\dots$

Dus de nulpunten zijn $-0,50$, $2,54$ en $7,96$.

- b** Gebruiken van de optie maximum geeft $x = 0,861\dots$ en $y = 3,228\dots$

Dus max. is $f(0,86) \approx 3,23$.

Gebruiken van de optie minimum geeft $x = 5,805\dots$ en $y = -8,857\dots$

Dus min. is $f(5,81) \approx -8,86$.

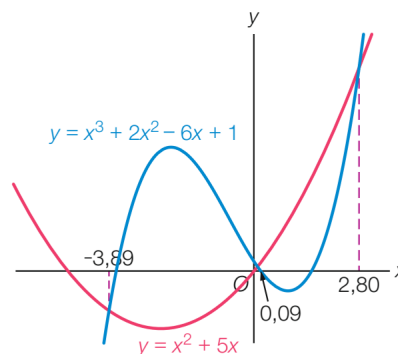
- c** Invoeren van de formule $y = 2x - 3$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -1,28$, $x \approx 2,13$ en $x \approx 9,16$.

- 12 a** Los op $x^2 + 5x = x^3 + 2x^2 - 6x + 1$.

Invoeren van de formules $y = x^2 + 5x$ en $y = x^3 + 2x^2 - 6x + 1$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = -3,892\dots$, $x = 0,091\dots$ en $x = 2,800\dots$

Zie de schets hiernaast.

$x^2 + 5x \leq x^3 + 2x^2 - 6x + 1$ geeft $-3,89 \leq x \leq 0,09 \vee x \geq 2,80$



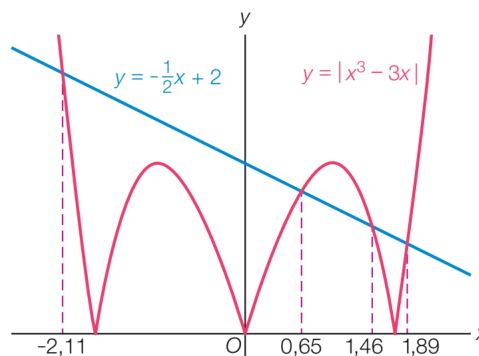
- b** Los op $|x^3 - 3x| = -\frac{1}{2}x + 2$.

Invoeren van de formules $y = |x^3 - 3x|$ en $y = -\frac{1}{2}x + 2$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = -2,109\dots$,

$x = 0,649\dots$, $x = 1,459\dots$ en $x = 1,886\dots$

Zie de schets hiernaast.

$|x^3 - 3x| < -\frac{1}{2}x + 2$ geeft $-2,11 < x < 0,65 \vee 1,46 < x < 1,89$



Bladzijde 48

1 a
$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + 2b \\ \text{door } A(-1, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot -1 + 2b = 2 \\ 3 + 2b = 2 \\ 2b = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = ax - \frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = ax - \frac{1}{2} \\ \text{door } A(-1, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot -1 - \frac{1}{2} = 2 \\ -a = 2\frac{1}{2} \\ a = -2\frac{1}{2} \end{array}$$

b
$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + 2b \\ \text{door } C(0, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 + 2b = 4 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $k: y = ax + 2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = ax + 2 \\ \text{door } B(2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2a + 2 = 0 \\ 2a = -2 \\ a = -1 \end{array}$$

Dus $k: y = -x + 2$ en $l: y = -3x + 4$.
 k snijden met l geeft $-x + 2 = -3x + 4$

$$\begin{array}{l} 2x = 2 \\ x = 1 \\ y = -x + 2 \end{array} \left. \right\} y = 1$$

Dus $S(1, 1)$.

c $k \parallel l$, dus $a = rc_k = rc_l = -3$.

Dus $k: y = -3x + b$.

k snijden met de x -as geeft $-3x + b = 0$

$$\begin{array}{l} -3x = -b \\ x = \frac{1}{3}b \end{array}$$

Dus het snijpunt van k met de x -as is $P(\frac{1}{3}b, 0)$.

l snijden met de x -as geeft $-3x + 2b = 0$

$$\begin{array}{l} -3x = -2b \\ x = \frac{2}{3}b \end{array}$$

Dus het snijpunt van l met de x -as is $Q(\frac{2}{3}b, 0)$.

$PQ = 2$ geeft $\frac{1}{3}b - \frac{2}{3}b = 2 \vee \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}b = 2$

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{3}b = 2 \vee \frac{1}{3}b = 2 \\ b = -6 \vee b = 6 \end{array}$$

Dus $a = -3$ en $b = -6$ of $b = 6$.

2 a $f(x) = 0$ geeft $2x^2 - 14x + 20 = 0$

$$\begin{array}{l} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ (x - 2)(x - 5) = 0 \\ x = 2 \vee x = 5 \end{array}$$

b Invullen van de formule $y = x^3 + x^2 - 8x + 4$ en gebruiken van de optie nulpunt geeft de oplossingen $x \approx -3,56$, $x \approx 0,56$ en $x = 2$.

c $\frac{1}{5}(2 - 3x)^2 - 9 \geq 11$

$$\frac{1}{5}(2 - 3x)^2 \geq 20$$

$$(2 - 3x)^2 \geq 100$$

$$2 - 3x \leq -10 \vee 2 - 3x \geq 10$$

$$-3x \leq -12 \vee -3x \geq 8$$

$$x \geq 4 \vee x \leq -2\frac{2}{3}$$

d $g(x) = 0$ geeft $3(2x - 1)(x + 4) = 0$

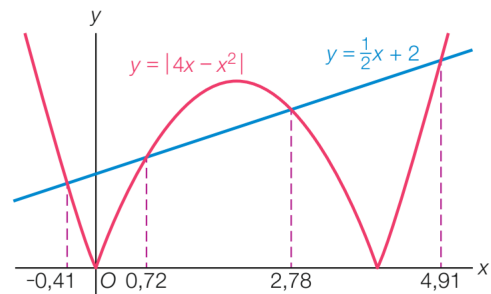
$$2x = 1 \vee x = -4$$

$$x = \frac{1}{2} \vee x = -4$$

Dus de nulpunten zijn -4 en $\frac{1}{2}$.

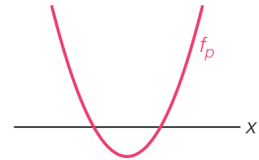
$$\begin{aligned} \text{e } \frac{1}{2}(3x+1)^2 &= -4x + \frac{1}{2} \\ (3x+1)^2 &= -8x + 1 \\ 9x^2 + 6x + 1 &= -8x + 1 \\ 9x^2 + 14x &= 0 \\ x(9x + 14) &= 0 \\ x = 0 \vee 9x &= -14 \\ x = 0 \vee x &= -1\frac{5}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } \text{Los op } |4x - x^2| &= \frac{1}{2}x + 2. \\ \text{Invoeren van de formules } y &= |4x - x^2| \text{ en } y = \frac{1}{2}x + 2 \text{ en} \\ \text{gebruiken van de optie snijpunt geeft } x &= -0,407\dots, \\ x = 0,719\dots, x &= 2,780\dots \text{ en } x = 4,907\dots \\ \text{Zie de schets hiernaast.} \\ |4x - x^2| < \frac{1}{2}x + 2 &\text{ geeft } -0,41 < x < 0,72 \vee 2,78 < x < 4,91 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{g } h(x) = 2x + 4 \text{ geeft } 2x^2 - 5x &= 2x + 4 \\ 2x^2 - 7x - 4 &= 0 \\ D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) &= 81, \text{ dus } \sqrt{D} = 9 \\ x = \frac{7+9}{4} = 4 \vee x = \frac{7-9}{4} &= -\frac{1}{2} \\ h(4) = 12 \text{ en } h(-\frac{1}{2}) &= 3, \text{ dus de snijpunten zijn } (-\frac{1}{2}, 3) \text{ en } (4, 12). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{3 a } \text{Zie de schets van de grafiek van } f_p &\text{ hiernaast.} \\ \text{Er moet gelden } D > 0. \\ D = (-p)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 9 = p^2 - 9 &\left. \begin{aligned} p^2 - 9 > 0 \\ p^2 > 9 \end{aligned} \right\} \\ p < -3 \vee p > 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{b } x_{\text{top}} &= -\frac{-p}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2p \\ y_{\text{top}} = f(2p) &= \frac{1}{4} \cdot (2p)^2 - p \cdot 2p + 9 = p^2 - 2p^2 + 9 = -p^2 + 9 \\ y &= -3x + 2 \\ \text{door } (2p, -p^2 + 9) &\left. \begin{aligned} -3 \cdot 2p + 2 &= -p^2 + 9 \\ p^2 - 6p - 7 &= 0 \\ (p+1)(p-7) &= 0 \\ p &= -1 \vee p = 7 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } \text{Voor de } x\text{-coördinaat van de top geldt } x &= 2p \text{ en hieruit volgt } p = \frac{1}{2}x. \\ p = \frac{1}{2}x \text{ substitueren in } y &= \frac{1}{4}x^2 - px + 9 \text{ geeft } y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \cdot x + 9 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + 9 = -\frac{1}{4}x^2 + 9. \\ \text{Dus de formule van deze kromme is } y &= -\frac{1}{4}x^2 + 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{4 a } x_{\text{top}} &= -\frac{-a}{2 \cdot \frac{1}{2}} = a \\ y_{\text{top}} = f(a) &= \frac{1}{2}a^2 - a \cdot a = \frac{1}{2}a^2 - a^2 = -\frac{1}{2}a^2 \\ g_a(a) = -\frac{1}{2}a^2 &\text{ geeft } a \cdot a - 6 = -\frac{1}{2}a^2 \\ a^2 - 6 &= -\frac{1}{2}a^2 \\ 1\frac{1}{2}a^2 &= 6 \\ a^2 &= 4 \\ a &= 2 \vee a = -2 \end{aligned}$$

b $g_a(x) = 0$ geeft $ax - 6 = 0$ oftewel $ax = 6$, dus $x = \frac{6}{a}$.

$$\begin{aligned} f_a\left(\frac{6}{a}\right) &= 0 \text{ geeft } \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{a}\right)^2 - a \cdot \frac{6}{a} = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{a^2} - 6 &= 0 \\ \frac{18}{a^2} &= 6 \\ a^2 &= 3 \\ a &= \sqrt{3} \vee a = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

c $f_a(x) = g_a(x)$ geeft $\frac{1}{2}x^2 - ax = ax - 6$ oftewel $\frac{1}{2}x^2 - 2ax + 6 = 0$.

Er moet gelden $D < 0$.

$$D = (-2a)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = 4a^2 - 12 \left\{ \begin{array}{l} 4a^2 - 12 < 0 \\ 4a^2 < 12 \\ a^2 < 3 \\ -\sqrt{3} < a < \sqrt{3} \end{array} \right.$$

Dus voor $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$ hebben de grafieken van f_a en g_a geen gemeenschappelijke punten.

5 a $f_1(x) = 0$ geeft $(x+2)(x-6) = 0$, dus $x = -2 \vee x = 6$.

$$f_1(x) = 9 \text{ geeft } (x+2)(x-6) = 9$$

$$x^2 - 4x - 12 = 9$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$(x+3)(x-7) = 0$$

$$x = -3 \vee x = 7$$

Vierhoek $ABDC$ is een trapezium met $AB = 6 - (-2) = 8$ en $CD = 7 - (-3) = 10$ en hoogte 9.

$$O(ABDC) = \frac{1}{2}(8+10) \cdot 9 = 81$$

b $f_p(x) = (px+2)(px-6) = p^2x^2 - 4px - 12$

$$x_{\text{top}} = -\frac{-4p}{2p^2} = \frac{2}{p}$$

$$y_{\text{top}} = f_p\left(\frac{2}{p}\right) = p^2 \cdot \left(\frac{2}{p}\right)^2 - 4p \cdot \frac{2}{p} - 12 = p^2 \cdot \frac{4}{p^2} - 8 - 12 = 4 - 8 - 12 = -16$$

Dus voor elke $p \neq 0$ ligt de top van de grafiek van f_p op de lijn $l: y = -16$.

Bladzijde 49

6 a Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie maximum geeft $x = -4$ en $y = 9$.

Dus max. is $f(-4) = 9$.

Gebruiken van de optie minimum geeft $x = 0$ en $y = -7$.

Dus min. is $f(0) = -7$.

b Knik als $2x - a = 0$

$$2x = a$$

$$x = \frac{1}{2}a$$

$g_a\left(\frac{1}{2}a\right) = 3 \cdot \frac{1}{2}a + 0 = 1\frac{1}{2}a$, dus het knikpunt is $\left(\frac{1}{2}a, 1\frac{1}{2}a\right)$.

$$f\left(\frac{1}{2}a\right) = 1\frac{1}{2}a \text{ geeft } \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 7 = 1\frac{1}{2}a$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}a^3 + 3 \cdot \frac{1}{4}a^2 - 7 = 1\frac{1}{2}a$$

$$\frac{1}{16}a^3 + \frac{3}{4}a^2 - 7 = 1\frac{1}{2}a$$

Invoeren van de formules $y = \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 7$ en $y = 1\frac{1}{2}x$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = -13,176\dots$, $x = -2,386$ en $x = 3,562\dots$

Dus voor $a \approx -13,18$, $a \approx -2,39$ en $a \approx 3,56$ ligt het knikpunt van de grafiek van g_a op de grafiek van f .

$$\mathbf{a} \quad |1\frac{1}{2}x - 3| = \begin{cases} 1\frac{1}{2}x - 3 & \text{als } 1\frac{1}{2}x - 3 \geq 0, \text{ dus als } 1\frac{1}{2}x \geq 3 \text{ oftewel } x \geq 2 \\ -1\frac{1}{2}x + 3 & \text{als } x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5 - (1\frac{1}{2}x - 3) = 5 - 1\frac{1}{2}x + 3 = -1\frac{1}{2}x + 8 & \text{als } x \geq 2 \\ 5 - (-1\frac{1}{2}x + 3) = 5 + 1\frac{1}{2}x - 3 = 1\frac{1}{2}x + 2 & \text{als } x < 2 \end{cases}$$

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & \text{als } 2x - 3 \geq 0, \text{ dus als } 2x \geq 3 \text{ oftewel } x \geq 1\frac{1}{2} \\ -2x + 3 & \text{als } x < 1\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 + 2x - 3 = 3x - 4 & \text{als } x \geq 1\frac{1}{2} \\ x - 1 + -2x + 3 = -x + 2 & \text{als } x < 1\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = g(x) \text{ voor } x < 1\frac{1}{2} \text{ geeft } 1\frac{1}{2}x + 2 = -x + 2$$

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{2}x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$g(0) = -0 + 2 = 2, \text{ dus } A(0, 2).$$

$$f(x) = g(x) \text{ voor } x \geq 2 \text{ geeft } -1\frac{1}{2}x + 8 = 3x - 4$$

$$\begin{aligned} -4\frac{1}{2}x &= -12 \\ x &= 2\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$g(2\frac{2}{3}) = 3 \cdot 2\frac{2}{3} - 4 = 4, \text{ dus } B(2\frac{2}{3}, 4).$$

b De lijn $y = 3$ ligt tussen A en B .

$$\text{Voor } P \text{ geldt } g(x) = 3 \text{ en } x < 1\frac{1}{2}, \text{ dus } -x + 2 = 3$$

$$\begin{aligned} -x &= 1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } P(-1, 3).$$

$$\text{Voor } Q \text{ geldt } f(x) = 3 \text{ en } x < 2, \text{ dus } 1\frac{1}{2}x + 2 = 3$$

$$\begin{aligned} 1\frac{1}{2}x &= 1 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } Q(\frac{2}{3}, 3).$$

$$\text{Voor } R \text{ geldt } g(x) = 3 \text{ en } x > 1\frac{1}{2}, \text{ dus } 3x - 4 = 3$$

$$\begin{aligned} 3x &= 7 \\ x &= 2\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } R(2\frac{1}{3}, 3).$$

$$\text{Voor } S \text{ geldt } f(x) = 3 \text{ en } x > 2, \text{ dus } -1\frac{1}{2}x + 8 = 3$$

$$\begin{aligned} -1\frac{1}{2}x &= -5 \\ x &= 3\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } S(3\frac{1}{3}, 3).$$

$$PQ = \frac{2}{3} - (-1) = 1\frac{2}{3}, QR = 2\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3} \text{ en } RS = 3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3} = 1$$

Dus RS heeft de kleinste lengte.

a Knikken als $4 - 2x^2 = 0$

$$2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2}) = 0 + 2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ en } f(-\sqrt{2}) = 0 + 2 \cdot -\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\text{Dus } A(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) \text{ en } B(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}).$$

$$\text{Top voor } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \text{ en daar is } |4 - 2x^2| = 4 - 2x^2, \text{ dus daar geldt}$$

$$f(x) = 4 - 2x^2 + 2x = -2x^2 + 2x + 4.$$

$$x_T = -\frac{2}{2 \cdot -2} = \frac{1}{2} \text{ en } y_T = f(\frac{1}{2}) = -2 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 4\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } T(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}).$$

b De vergelijking $f(x) = p$ heeft drie oplossingen voor $p = 2\sqrt{2}$ en voor $p = 4\frac{1}{2}$.

- c** Links van A geldt $f(x) = -4 + 2x^2 + 2x = 2x^2 + 2x - 4$. Tussen A en B geldt $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$.
 $f(x) = 0$ geeft $2x^2 + 2x - 4 = 0$ $f(x) = 0$ geeft $-2x^2 + 2x + 4 = 0$
 $x^2 + x - 2 = 0$ $x^2 - x - 2 = 0$
 $(x - 1)(x + 2) = 0$ $(x + 1)(x - 2) = 0$
 $x = 1 \vee x = -2$ $x = -1 \vee x = 2$
 $x < -\sqrt{2}$, dus $x = -2$. $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, dus $x = -1$.
Dus de nulpunten zijn -2 en -1 .

- 9** Van de grafiek van f_a is $x_{\text{top}} = -\frac{6a}{2a} = 3$ en $y_{\text{top}} = f_a(3) = a \cdot 3^2 - 6a \cdot 3 = 9a - 18a = -9a$, dus top $(3, -9a)$.
In de grafiek van $g_{a,b}$ zit een knik voor $ax - 1 = 0$

$$ax = 1$$

$$x = \frac{1}{a}$$

$$g_{a,b}\left(\frac{1}{a}\right) = 0 + b = b, \text{ dus knikpunt } \left(\frac{1}{a}, b\right).$$

Als de top samenvalt met het knikpunt moet gelden $(3, -9a) = \left(\frac{1}{a}, b\right)$.

$$3 = \frac{1}{a} \text{ geeft } a = \frac{1}{3}$$

$$-9a = b \text{ en } a = \frac{1}{3} \text{ geeft } b = -3$$

- 10 a** $f_{\frac{1}{2}}(x) = \left| -\frac{1}{2}x^2 - x + 1 \right|$

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = 1 \text{ geeft } -\frac{1}{2}x^2 - x + 1 = 1 \vee -\frac{1}{2}x^2 - x + 1 = -1$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - x = 0 \quad \vee \quad -\frac{1}{2}x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^2 + 2x = 0 \quad \vee \quad x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x(x + 2) = 0 \quad D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 20, \text{ dus } \sqrt{D} = 2\sqrt{5}$$

$$x = 0 \vee x = -2$$

$$x = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{2}$$

$$x = -1 + \sqrt{5} \vee x = -1 - \sqrt{5}$$

$$\text{Dus } x_A = -1 - \sqrt{5}, x_B = -2, x_C = 0 \text{ en } x_D = -1 + \sqrt{5}.$$

$$\text{Dus } BD = -1 + \sqrt{5} - (-2) = 1 + \sqrt{5}.$$

- b** Geen knikken als de vergelijking $ax^2 - x + 1 = 0$ geen oplossing heeft, dus als $D < 0$.

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot a \cdot 1 = 1 - 4a$$

$$D < 0 \text{ geeft } 1 - 4a < 0$$

$$-4a < -1$$

$$a > \frac{1}{4}$$

- 11 a** Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie

minimum geeft $x = -1$ en $y = -25,25$, dus $A(-1; -25,25)$

maximum geeft $x = 2$ en $y = 22$, dus $B(2, 22)$

minimum geeft $x = 4$ en $y = 6$, dus $C(4, 6)$.

- b** Er zijn drie oplossingen als de lijn $y = p$ door de top B of de top C gaat.

Dus voor $p = 6$ en voor $p = 22$.

- c** $k: y = ax + b$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 22}{4 - 2} = -8$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -8x + b \\ \text{door } C(4, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -8 \cdot 4 + b = 6 \\ -32 + b = 6 \end{array}$$

$$b = 38$$

Dus $k: y = -8x + 38$.

Invoeren van de formule $y = -8x + 38$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$x = -2,514\dots$ en $y = 58,117\dots$, dus $D(-2,51; 58,12)$

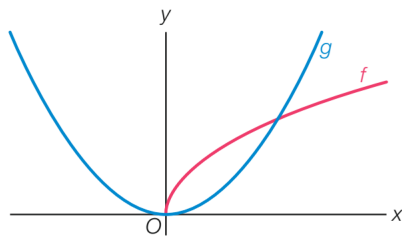
$x = 3,181\dots$ en $y = 12,549\dots$, dus $E(3,18; 12,55)$.

2 De afgeleide functie

2.1 Snelheden

Bladzijde 52

1 a



b Voor $x > 0$ is de grafiek van f afnemend stijgend.

Bladzijde 53

2 a Een grafiek kan voor $x = 3$ niet zowel stijgend als dalend zijn.

b Uitspraak IV is juist.

Bladzijde 54

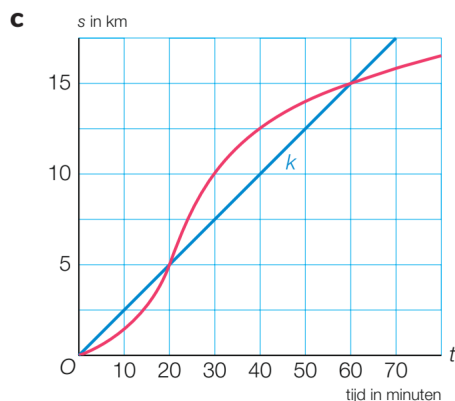
3 Afnemend dalend op $\langle \leftarrow, -4 \rangle$ en op $\langle 3, 5 \rangle$.
Toenemend stijgend op $\langle -4, -2 \rangle$ en op $\langle 5, \rightarrow \rangle$.
Afnemend stijgend op $\langle -2, 1 \rangle$.
Toenemend dalend op $\langle 1, 3 \rangle$.

4 a Constant stijgend op $\langle 0, 3 \rangle$.
Afnemend stijgend op $\langle 3, 4 \rangle$.
Toenemend dalend op $\langle 4, 5 \rangle$.
Afnemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$.
Toenemend stijgend op $\langle 7, 10 \rangle$.
b Bij de steilste helling is de snelheid het laagst. Dus na 7 minuten.

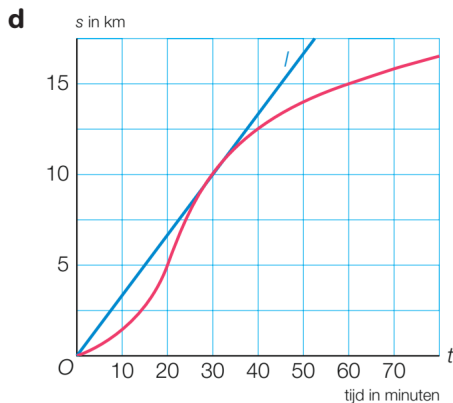
5 Gedurende de eerste 5 seconden legt de motorrijder 90 meter af.
Dus de gevraagde gemiddelde snelheid is $\frac{90}{5} = 18$ m/s.

Bladzijde 56

6 a De grafiek is niet overal even steil.
b Op $[20, 40]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{12,5 - 5}{40 - 20} = \frac{7,5}{20} = 0,375$ km/minuut.
Dus op $[20, 40]$ is de gemiddelde snelheid $0,375 \cdot 60 = 22,5$ km/u.
Op $[30, 60]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{15 - 10}{60 - 30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ km/minuut.
Dus op $[30, 60]$ is de gemiddelde snelheid $\frac{1}{6} \cdot 60 = 10$ km/u.



De lijn k door $(0, 0)$ en $(20, 5)$ snijdt de grafiek ook in het punt $(60, 15)$.
Dus voor $p = 60$.



De lijn l door $(0, 0)$ raakt de grafiek in het punt $(30, 10)$.

Dus $q = 30$.

10 km in 30 minuten, dus de maximale gemiddelde snelheid is 20 km/u.

7 a De gemiddelde snelheid op $[0, t]$ wordt steeds kleiner als je t steeds groter neemt.

b $t = 0$ geeft $s = 0$ en $t = 10$ geeft $s = 5 \cdot 10^2 - 0,3 \cdot 10^3 = 200$

Op $[0, 10]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{200}{10} = 20$ m/s.

Op $[0, p]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5p^2 - 0,3p^3}{p} = \frac{p(5p - 0,3p^2)}{p} = 5p - 0,3p^2$ m/s.

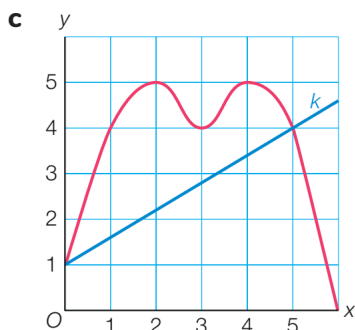
Los op $5p - 0,3p^2 = 20$.

Invoeren van de formules $y = 5x - 0,3x^2$ en $y = 20$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 6,66\dots$

Dus voor $p \approx 6,7$.

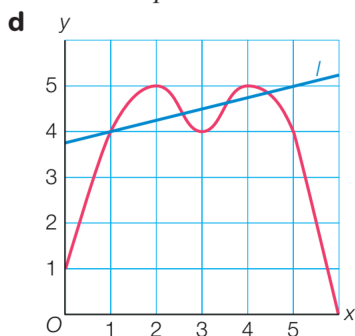
8 a De gemiddelde verandering op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 1}{4 - 0} = \frac{4}{4} = 1$.

b Op $[2, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 5}{6 - 2} = \frac{-5}{4} = -1\frac{1}{4}$.



De lijn k door $(0, 1)$ met $rc_k = 0,6$ snijdt de grafiek in het punt $(5, 4)$.

Dus voor $p = 5$.

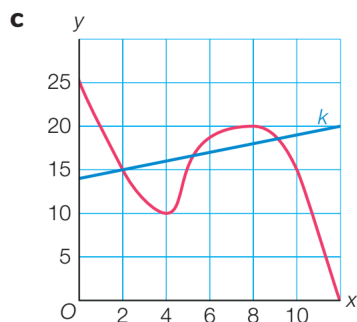


De lijn l door $(1, 4)$ met $rc_l = \frac{1}{4}$ snijdt de grafiek rechts van $x = 1$ in drie punten.

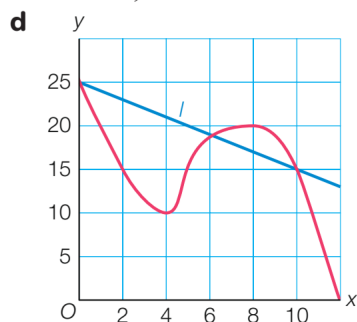
Dus er zijn drie waarden van q waarvoor het differentiequotiënt van y op $[1, q]$ gelijk is aan $\frac{1}{4}$.

9 a De gemiddelde verandering op $[2, 8]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20 - 15}{8 - 2} = \frac{5}{6}$.

b Het differentiequotient op $[4, 12]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 10}{12 - 4} = \frac{-10}{8} = -1\frac{1}{4}$.



De lijn k door $(2, 15)$ met $rc_k = 0,5$ snijdt de grafiek rechts van $x = 2$ in twee punten. Dus er zijn twee waarden van p waarvoor het differentiequotient van y op $[2, p]$ gelijk is aan $0,5$.



De lijn l door $(0, 25)$ met $rc_l = -1$ snijdt de grafiek bij $x = 6,5$ en bij $x = 10$. Dus voor $q = 6,5$ en voor $q = 10$ is het differentiequotient van y op $[0, q]$ gelijk aan -1 .

10 $f(0) = -3$

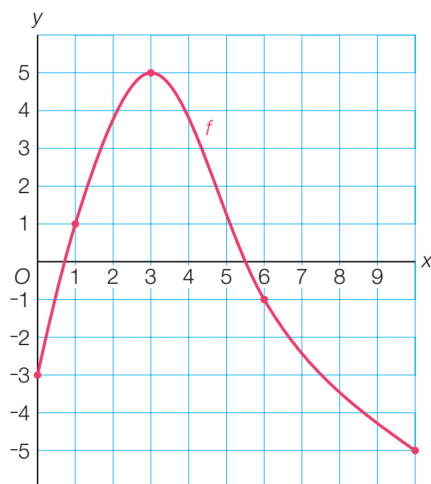
Op $[0, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$, dus $f(1) = -3 + 4 = 1$.

Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$, dus $f(3) = 1 + 2 \cdot 2 = 5$.

Op $[3, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2$, dus $f(6) = 5 + 3 \cdot -2 = -1$.

Op $[6, 10]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, dus $f(10) = -1 + 4 \cdot -1 = -5$.

Hieronder zie je een mogelijke grafiek.



Elke grafiek die door de punten $(0, -3)$, $(1, 1)$, $(3, 5)$, $(6, -1)$ en $(10, -5)$ gaat, is goed.

Bladzijde 57

11 a Door $(0, 2)$.

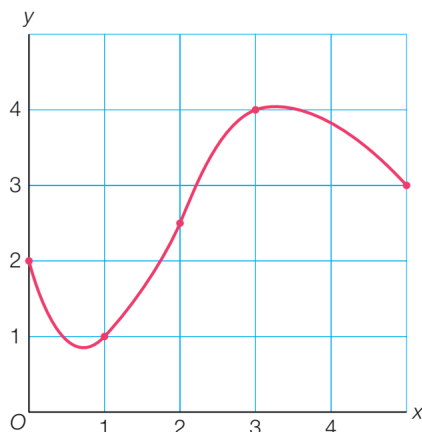
Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$, dus door $(2, 2 + 2 \cdot \frac{1}{4}) = (2, 2\frac{1}{2})$.

Op $[0, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{5}$, dus door $(5, 2 + 5 \cdot \frac{1}{5}) = (5, 3)$.

Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$, dus door $(1, 3 - 4 \cdot \frac{1}{2}) = (1, 1)$.

Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\frac{1}{2}$, dus door $(3, 1 + 2 \cdot 1\frac{1}{2}) = (3, 4)$.

Hieronder zie je een mogelijke grafiek.



b Het differentiequotiënt op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 4}{5 - 3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

c Dat is mogelijk, want bij $x = 4$ is elke y -coördinaat mogelijk, dus ook $y = 5\frac{1}{2}$.

En op $[1, 4]$ geeft dit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\frac{1}{2} - 1}{4 - 1} = \frac{4\frac{1}{2}}{3} = 1\frac{1}{2}$.

12 a $f(1) = -2$ en $f(5) = 6$, dus op de grafiek liggen de punten $(1, -2)$ en $(5, 6)$.

Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - (-2)}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$.

b $f(0) = 1$ en $f(4) = 1$, dus op de grafiek liggen de punten $(0, 1)$ en $(4, 1)$.

Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 1}{4 - 0} = 0$.

Bladzijde 58

13 a Op $[-2, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(6) - f(-2)}{6 - (-2)} = \frac{-26 - (-10)}{8} = -2$.

b $y = ax + b$ met $a = -2$

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } (-2, -10) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot -2 + b = -10 \\ 4 + b = -10 \\ b = -14 \end{array}$$

Dus $k: y = -2x - 14$.

14 a Op $[-1, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{0,4 - (-7,6)}{2} = 4$.

b Op $[-2, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{1,4 - 9,4}{4} = -2$.

c $f(0) = -5$, dus $A(0, -5)$.

$f(3) = 0,4$, dus $B(3; 0,4)$.

De helling van de lijn AB is $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0,4 - (-5)}{3 - 0} = 1,8$.

d De helling van de lijn CD is gelijk aan de helling van de lijn $y = 2x$.

Dus de helling van de lijn CD is 2.

15 a Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{23 - 3}{2} = 10$.

b Op $[-2, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{57 - 3}{6} = 9$.

c $f(-3) = -13$, dus $A(-3, -13)$.

$f(1) = 3$, dus $B(1, 3)$.

$y = ax + b$

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - (-13)}{1 - (-3)} = 4$

$y = 4x + b$
 door $B(1, 3)$ $\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 1 + b = 3 \\ 4 + b = 3 \end{array} \right.$
 $b = -1$

Dus $l: y = 4x - 1$.

d Op $[-2, p]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(p) - f(-2)}{p - (-2)} = \frac{p^3 - 3p + 5 - 3}{p + 2} = \frac{p^3 - 3p + 2}{p + 2}$.

Los op $\frac{p^3 - 3p + 2}{p + 2} = 4$.

Invoeren van de formules $y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2}$ en $y = 4$ en gebruiken van de optie

snijpunt geeft $x = -1$ en $x = 3$.

Dus voor $p = -1$ en voor $p = 3$.

16 Op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ en

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{16a + 16 - 3 - (a + 4 - 3)}{3} = \frac{16a + 16 - 3 - a - 4 + 3}{3} = \frac{15a + 12}{3} = \frac{3(5a + 4)}{3} = 5a + 4$.

Dus $5a + 4 = 2$

$5a = -2$

$a = -\frac{2}{5}$

Dit geeft $f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 4x - 3$.

Op $[0, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\frac{3}{5} - (-3)}{1} = 3\frac{3}{5}$.

17 a Op $[2, 3]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3^3 + 3 - (2^3 + 2)}{3 - 2} = \frac{30 - 10}{1} = 20$ m/s.

b Op $[2; 2,5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2,5^3 + 2,5 - (2^3 + 2)}{2,5 - 2} = \frac{18,125 - 10}{0,5} = 16,25$ m/s.

Op $[2; 2,1]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2,1^3 + 2,1 - (2^3 + 2)}{2,1 - 2} = \frac{11,361 - 10}{0,1} = 13,61$ m/s.

Op $[2; 2,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2,01^3 + 2,01 - (2^3 + 2)}{2,01 - 2} = \frac{10,130601 - 10}{0,01} = 13,0601$ m/s.

Op $[2; 2,001]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2,001^3 + 2,001 - (2^3 + 2)}{2,001 - 2} = \frac{10,013006... - 10}{0,001} \approx 13,0060$ m/s.

c Op een kleiner wordend interval komt de gemiddelde snelheid steeds dichterbij 13 m/s.

De gemiddelde snelheid op $[2; 2,0001]$ is

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,0001^3 + 2,0001) - (2^3 + 2)}{2,0001 - 2} = \frac{10,00130006... - 10}{0,0001} \approx 13,0006$ m/s.

d 13 m/s

Bladzijde 59

18 Op $[23; 23,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2 + \sqrt{23,01 + 1} - (2 + \sqrt{23 + 1})}{0,01} = 0,102... \text{ m/s}$,

en dat is de helft van de snelheid op $t = 5$.

Bladzijde 60

19 Op $[4; 4,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3,5 \cdot 4,01^2 - 3,5 \cdot 4^2}{0,01} = 28,035 \text{ m/s.}$

Na 4 seconden is de snelheid $28,035 \cdot 3,6 = 100,926 \text{ km/u.}$
Dus Roel heeft gelijk.

20 Op $[2; 2,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{8 - \frac{5}{2,01 + 2} - \left(8 - \frac{5}{2 + 2}\right)}{0,01} = 0,311 \dots$

De snelheid op $t = 2$ is bij benadering $0,31 \text{ m/s.}$

21 Op $[10; 10,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\sqrt{4 \cdot 10,01 + 1} - 10 - (10\sqrt{4 \cdot 10 + 1} - 10)}{0,01} = 3,122 \dots$

De snelheid op $t = 10$ is bij benadering $3,122 \dots \text{ m/s.}$

Op $[0; 0,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\sqrt{4 \cdot 0,01 + 1} - 10 - (10\sqrt{4 \cdot 0 + 1} - 10)}{0,01} = 19,803 \dots$

Op $[20; 20,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\sqrt{4 \cdot 20,01 + 1} - 10 - (10\sqrt{4 \cdot 20 + 1} - 10)}{0,01} = 2,221 \dots$

Het gemiddelde van de snelheden op $t = 0$ en $t = 20$ is $\frac{19,803 \dots + 2,221 \dots}{2} = 11,012 \dots \text{ m/s.}$

Dus de snelheid op $t = 10$ is niet gelijk aan het gemiddelde van de snelheden op $t = 0$ en $t = 20$.

- C1** Afnemend stijgend op $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en $\langle 3, 5 \rangle$.
Toenemend dalend op $\langle -1, 1 \rangle$ en $\langle 5, 7 \rangle$.
Constant stijgend op $\langle 1, 3 \rangle$.
Afnemend dalend op $\langle 7, \rightarrow \rangle$.

Bladzijde 61

C2 **a** Op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20 - 0}{4 - 0} = 5 \text{ m/s.}$

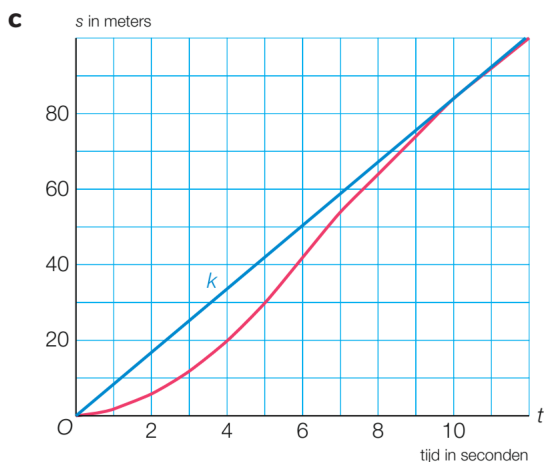
De gemiddelde snelheid over de eerste vier seconden is $5 \cdot 3,6 = 18 \text{ km/u.}$

Op $[10, 12]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{100 - 84}{12 - 10} = 8 \text{ m/s.}$

De gemiddelde snelheid over de laatste twee seconden is $8 \cdot 3,6 \approx 29 \text{ km/u.}$

b Op $[5, 8]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{64 - 30}{8 - 5} = 11,33 \dots \text{ m/s.}$

De gemiddelde snelheid op $[5, 8]$ is $11,33 \dots \cdot 3,6 \approx 41 \text{ km/u.}$



De lijn k door $(0, 0)$ raakt de grafiek in het punt $(10, 84)$.

Dus $p = 10$.

Op $[0, 10]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{84}{10} = 8,4 \text{ m/s.}$

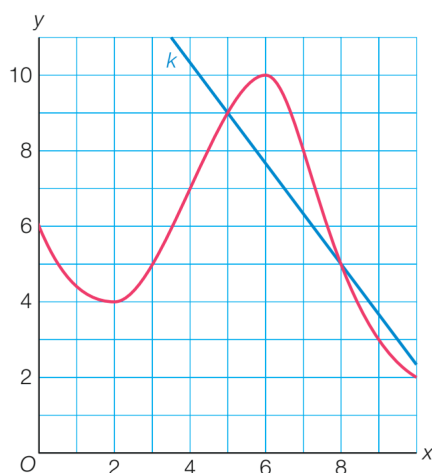
De maximale gemiddelde snelheid is $8,4 \cdot 3,6 \approx 30 \text{ km/u.}$

C3

a Op $[2, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10 - 4}{6 - 2} = 1\frac{1}{2}$.

b Op $[4, 8]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 7}{8 - 4} = -\frac{1}{2}$.

c



De lijn k door $(5, 9)$ met $rc_k = -1\frac{1}{3}$ snijdt de grafiek ook in het punt $(8, 5)$.
Dus voor $p = 8$.

C4

a Op $[0, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{-1 - 5}{3} = -2$.

b Op $[-3, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{3 - (-61)}{4} = 16$.

c $f(-4) = -127$, dus $A(-4, -127)$.
 $f(4) = 9$, dus $B(4, 9)$.

De helling van de lijn AB is $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9 - (-127)}{4 - (-4)} = 17$.

C5

Op $[3; 3,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,4 \cdot 3,01^2 - 0,4 \cdot 3^2}{0,01} = 2,404$.

De snelheid op $t = 3$ is bij benadering 2,40 m/s.

2.2 Raaklijnen en hellinggrafieken

Bladzijde 62

22

a Op $[2, 5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-5^2 + 10 \cdot 5 - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{5 - 2} = \frac{25 - 16}{3} = 3$ m/s.

Op $[2, 4]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-4^2 + 10 \cdot 4 - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{4 - 2} = \frac{24 - 16}{2} = 4$ m/s.

Op $[2, 3]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-3^2 + 10 \cdot 3 - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{3 - 2} = \frac{21 - 16}{1} = 5$ m/s.

Op $[2; 2,5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-2,5^2 + 10 \cdot 2,5 - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{2,5 - 2} = \frac{18,75 - 16}{0,5} = 5,5$ m/s.

b De richtingscoëfficiënt van de lijn AB_4 komt het dichtst in de buurt bij die van k .

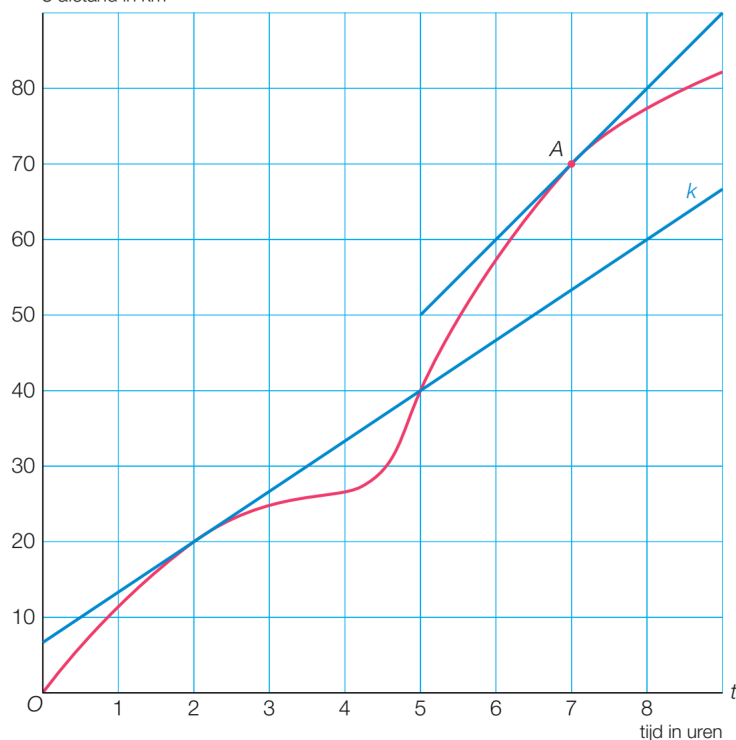
Bladzijde 64

- 23 a** De raaklijn gaat door de punten (5, 50) en (8, 80).

De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80 - 50}{8 - 5} = 10$.

De snelheid op $t = 7$ is ongeveer 10 km/u.

- b** s afstand in km



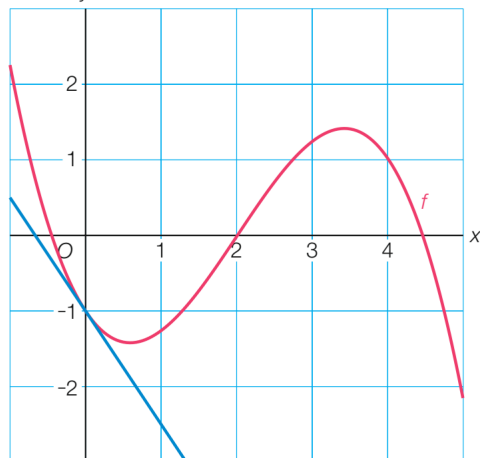
Raaklijn k door (2, 20) en (5, 40), dus $rc_k = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{40 - 20}{5 - 2} = 6,66\dots$

De snelheid op $t = 2$ is ongeveer 6,7 km/u.

- c** Omdat de grafiek afnemend stijgend is op $[0, 4]$, neemt de snelheid gedurende de eerste vier uur af.
d Voor $t = 4$ is de snelheid minimaal omdat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn daar het kleinst is.

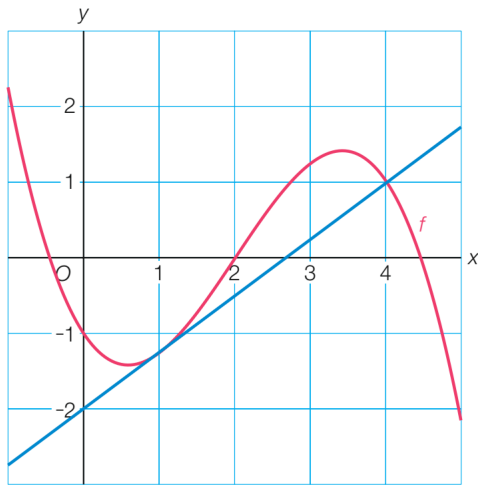
Bladzijde 66

- 24 a** y



Raaklijn door (0, -1) en (1, -2,5), dus $rc = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2,5 - (-1)}{1 - 0} = -1,5$.

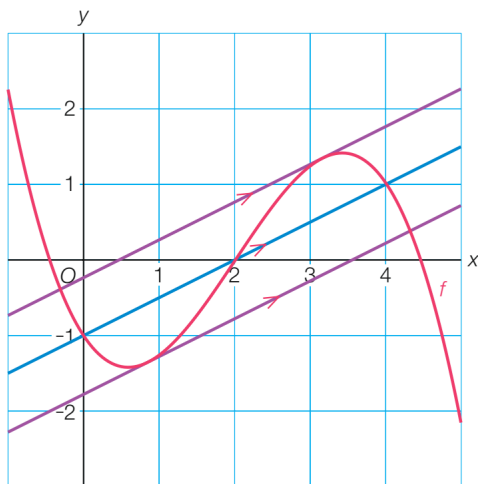
De snelheid waarmee y verandert voor $x = 0$ is -1,5.



Raaklijn door $(0, -2)$ en $(4, 1)$, dus $rc = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - (-2)}{4 - 0} = 0,75$.

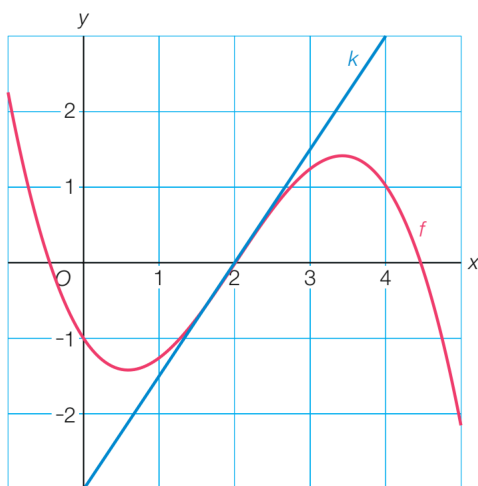
De snelheid waarmee y verandert voor $x = 1$ is $0,8$.

- b** Teken de lijn door de punten van de grafiek met $x = 0$ en $x = 4$.
Er zijn twee lijnen evenwijdig met deze lijn, die de grafiek van f raken.
Zie de figuur hieronder.



Dus in twee punten van de grafiek van f is de helling gelijk aan de gemiddelde verandering van y op $[0, 4]$.

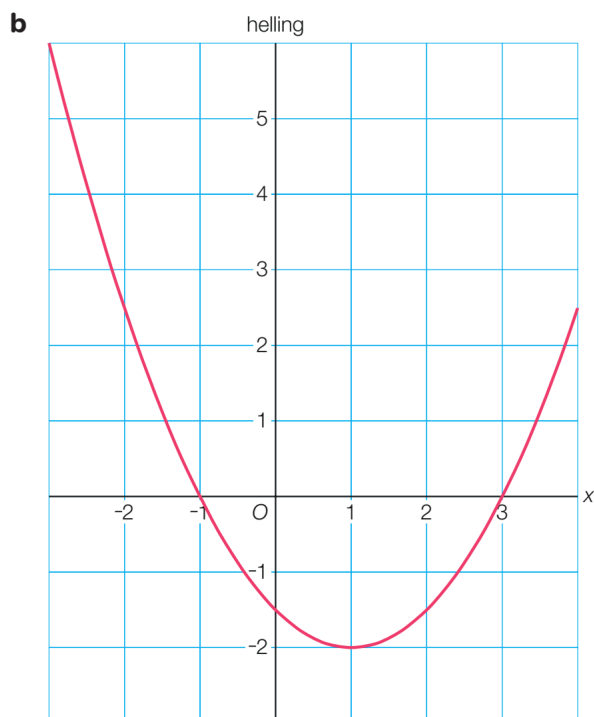
- c** Voor $x = 2$ krijg je de raaklijn met de grootste richtingscoëfficiënt.
Dus voor $x = 2$ is de snelheid maximaal.



Raaklijn k door $(0, -3)$ en $(4, 3)$, dus $rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - (-3)}{4 - 0} = 1\frac{1}{2}$.

Dus $k: y = 1\frac{1}{2}x - 3$.

25 a	x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	helling	6	2,5	0	-1,5	-2	-1,5	0	2,5

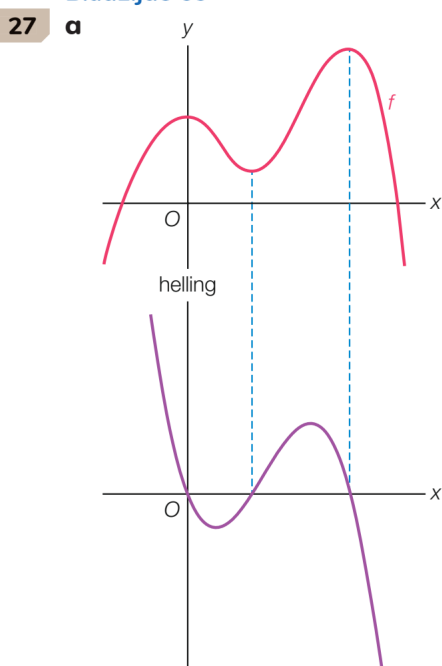
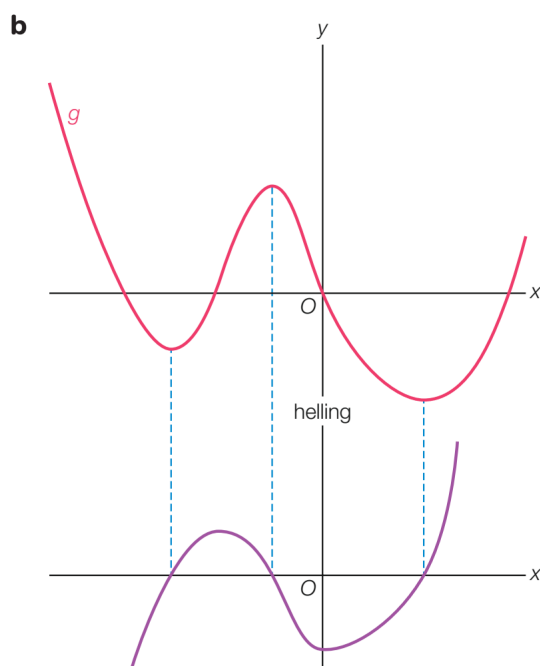


- c** Bij de toppen van de grafiek van f .
d De in vraag b getekende kromme ligt daar onder de x -as.

Bladzijde 68

- 26 a** De hellinggrafiek heeft op $\langle 2, 5 \rangle$ een hoogste punt.
b De helling is daar minimaal. Dus de grafiek van f gaat daar over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

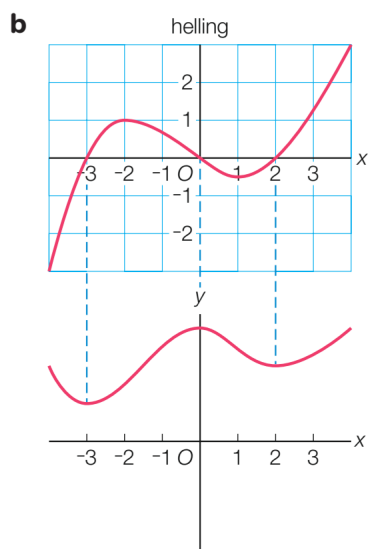
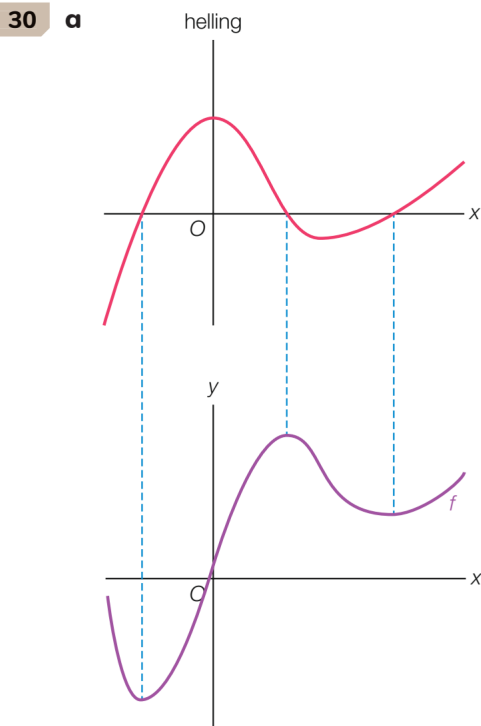
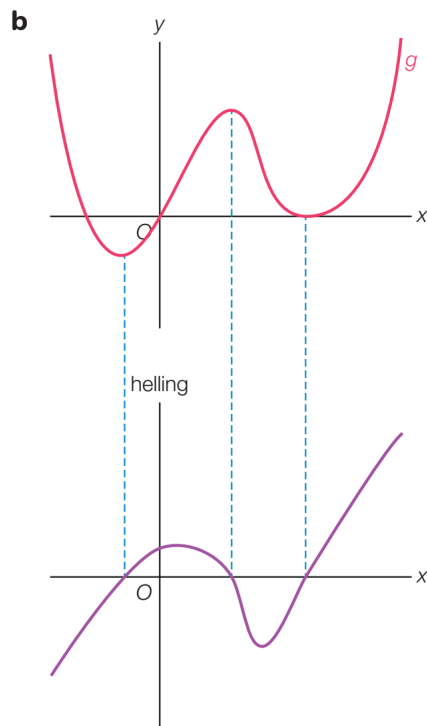
Bladzijde 69



- 28 Bij **A** hoort uitspraak IV.
 Bij **B** hoort uitspraak II.
 Bij **C** hoort uitspraak I.
 Bij **D** hoort uitspraak III.

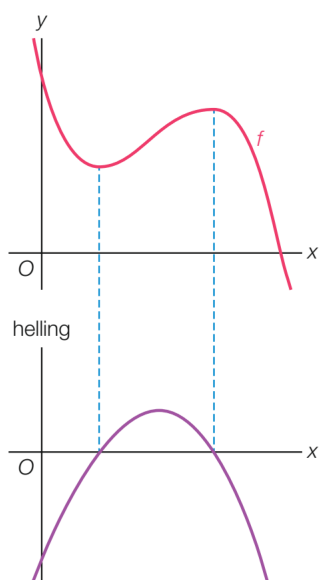
Bladzijde 70

29 a	hellinggrafiek van f	grafiek van f
$\langle \leftarrow, -3 \rangle$	onder de x -as	dalend
$x = -3$	snijdt de x -as	top
$\langle -3, 0 \rangle$	boven de x -as	stijgend
$x = 0$	snijdt de x -as	top
$\langle 0, 2 \rangle$	onder de x -as	dalend
$x = 2$	snijdt de x -as	top
$\langle 2, \rightarrow \rangle$	boven de x -as	stijgend

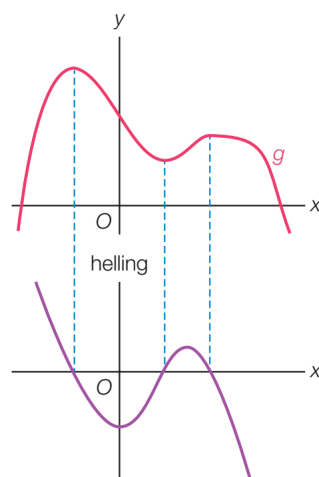


31

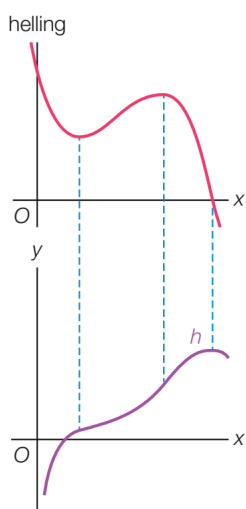
a



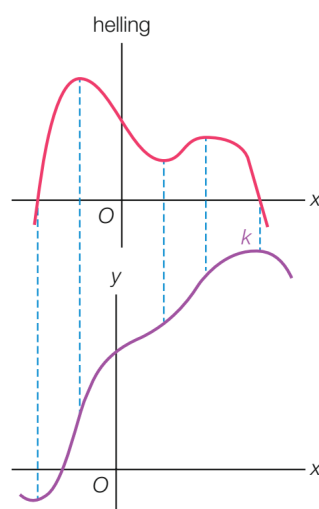
b



c

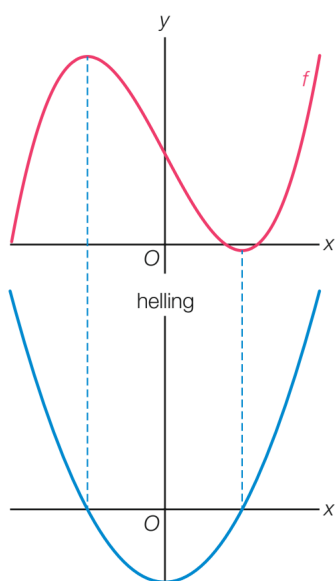
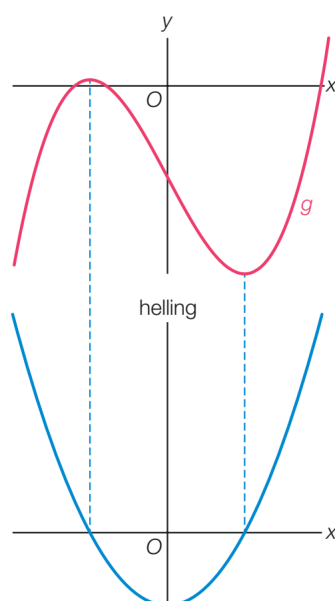


d



32

a



- b** Het functievoorschrift van h is van de vorm $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + c$.
 De grafiek van h gaat door $A(3, 4)$, dus $h(3) = 4$

$$\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 4 \cdot 3 + c = 4$$

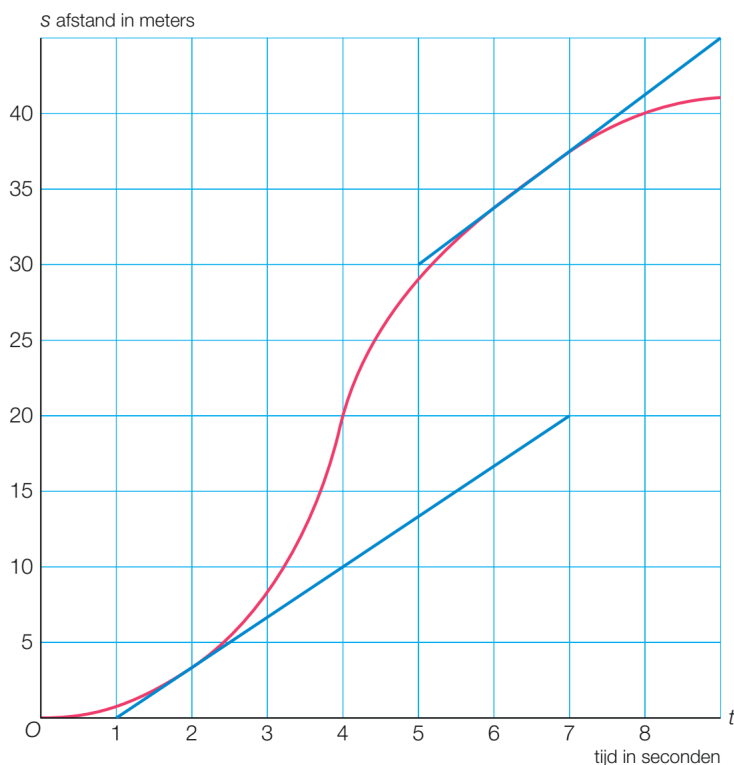
$$9 - 12 + c = 4$$

$$c = 7$$

Dus $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 7$.

C6

a



De raaklijn gaat door de punten $(1, 0)$ en $(7, 20)$.

De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20 - 0}{7 - 1} \approx 3,3$.

De snelheid op $t = 2$ is ongeveer 3,3 m/s.

De raaklijn gaat door de punten $(5, 30)$ en $(9, 45)$.

De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{45 - 30}{9 - 5} \approx 3,8$.

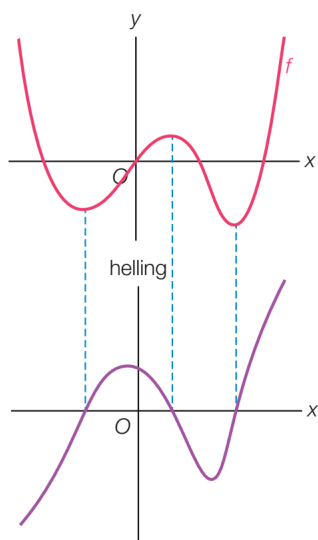
De snelheid op $t = 7$ is ongeveer 3,8 m/s.

- b** Voor $t = 4$ is de snelheid maximaal omdat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn daar het grootst is.

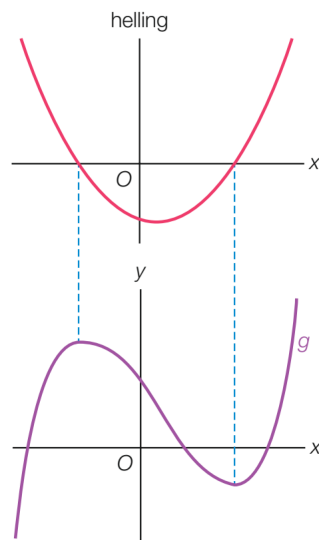
Bladzijde 73

C7

a



b



2.3 Limiet en afgeleide

Bladzijde 74

- 33 a** k door $(0, 1)$ en $(2, 4)$ geeft $rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{2-0} = 1\frac{1}{2}$.
- b** Op $[2; 2,001]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2,001) - f(2)}{2,001 - 2} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot 2,001^2 + 3\frac{1}{2} \cdot 2,001 - 1 - (-\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 3\frac{1}{2} \cdot 2 - 1)}{0,001} \approx 1,5$.
- c** Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[2; 2,001]$ geeft een goede benadering van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $A(2, 4)$.

Bladzijde 75

- 34 a** $h = 0$ nemen bij $\frac{12h + 2h^2}{h}$ geeft dat de noemer gelijk is aan nul.
Delen door nul is niet toegestaan.
- b** $\lim_{h \rightarrow 0} (12 + 2h) = 12 + 2 \cdot 0 = 12$
- 35** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(4+h)^2 - \frac{1}{2} \cdot 4^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(16 + 8h + h^2) - 24}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{24 + 12h + \frac{1}{2}h^2 - 24}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + \frac{1}{2}h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12 + \frac{1}{2}h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12 + \frac{1}{2}h) = 12$
Dus de helling van de grafiek van f in het punt A is 12.

- 36** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3(5+h)^2 - 3 \cdot 5^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3(25 + 10h + h^2) + 75}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-75 - 30h - 3h^2 + 75}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-30h - 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-30 - 3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-30 - 3h) = -30$
Dus richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in het punt A is -30 .

- 37 a** De grafiek van f is een lijn met richtingscoëfficiënt 3.
Dus in elk punt van de grafiek van f is de helling 3.
Dus de hellinggrafiek van f is een horizontale lijn met formule $y = 3$.
- b** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x + 3h - 3x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3) = 3$
Met een limiet bereken je de helling in een punt van de grafiek van een functie.
In elk punt van de grafiek van f is de helling gelijk aan 3.
Dus voor elke waarde van x moet de uitkomst van $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ gelijk zijn aan 3.
- c** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = 0$, want in elk punt van de grafiek van g is de helling gelijk aan nul.

Bladzijde 76

- 38** $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1,5(x+h)^2 - 1,5x^2}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1,5(x^2 + 2xh + h^2) - 1,5x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1,5x^2 + 3xh + 1,5h^2 - 1,5x^2}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3xh + 1,5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x + 1,5h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x + 1,5h) = 3x$

$$\begin{aligned}
 39 \quad \mathbf{a} \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,3(x+h)^2 - 0,3x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,3(x^2 + 2xh + h^2) - 0,3x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,3x^2 + 0,6xh + 0,3h^2 - 0,3x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,6xh + 0,3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(0,6x + 0,3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (0,6x + 0,3h) = 0,6x \\
 f'(6) &= 0,6 \cdot 6 = 3,6
 \end{aligned}$$

b $f'(x) = 6$ geeft $0,6x = 6$, dus $x = 10$.

$$40 \quad \mathbf{a} \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) - ax}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax + ah - ax}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (a) = a$$

$$\mathbf{b} \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x
 \end{aligned}$$

$$41 \quad \mathbf{a} \quad (x+h)^3 = (x+h)(x+h)^2 = (x+h)(x^2 + 2xh + h^2) = x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2
 \end{aligned}$$

$$42 \quad f(x) = c \cdot g(x) \text{ geeft}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot g(x+h) - c \cdot g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot (g(x+h) - g(x))}{h} = c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = c \cdot g'(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 43 \quad s(x) = f(x) + g(x) \text{ geeft } s'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)
 \end{aligned}$$

$$44 \quad \mathbf{a} \quad \left. \begin{aligned} h(x) &= c \cdot f(x) \text{ met } c = 10 \text{ en } f(x) = x^2 \\ f(x) &= c \cdot g(x) \text{ geeft } f'(x) = c \cdot g'(x) \\ f(x) &= x^2 \text{ geeft } f'(x) = 2x \end{aligned} \right\} h'(x) = c \cdot f'(x) = 10 \cdot 2x = 20x$$

b Dit volgt uit de regels

- $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$
- $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$
- $f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$
- $f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$
- $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Bladzijde 79

- 45** $v(x) = f(x) - g(x) = f(x) + (-1) \cdot g(x) = f(x) + h(x)$ met $h(x) = -1 \cdot g(x)$.
 Uit $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$ volgt $h'(x) = -1 \cdot g'(x)$.
 Uit $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ volgt
 $v'(x) = f'(x) + h'(x) = f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x)$.
 Dus de verschilregel $v(x) = f(x) - g(x)$ geeft $v'(x) = f'(x) - g'(x)$ volgt uit de regels
 $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$ en $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- 46** **a** $f(x) = 5x^6 - 3x^5 + 2x - 7$ geeft $f'(x) = 30x^5 - 15x^4 + 2$
b $g(x) = (3x + 6)^2 - 8x = 9x^2 + 36x + 36 - 8x = 9x^2 + 28x + 36$ geeft $g'(x) = 18x + 28$
c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(2x - 1) = 5(x^2 - 6x + 9) + 10x - 5 = 5x^2 - 30x + 45 + 10x - 5 = 5x^2 - 20x + 40$
 geeft $h'(x) = 10x - 20$
d $k(q) = 1 + 3q - 3q^2 - 5aq^7$ geeft $k'(q) = 3 - 6q - 35aq^6$
- 47** **a** $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x) = 3x^3 + 15x^2 - x^2 - 5x = 3x^3 + 14x^2 - 5x$ geeft $f'(x) = 9x^2 + 28x - 5$
b $g(x) = (3x^3 - 1)^2 = 9x^6 - 6x^3 + 1$ geeft $g'(x) = 54x^5 - 18x^2$
c $h(x) = (5x^5 - 3)(3x - 2) = 15x^6 - 10x^5 - 9x + 6$ geeft $h'(x) = 90x^5 - 50x^4 - 9$
d $k(x) = 5p - 3(x^4 - x)(x + 1) = 5p - 3(x^5 + x^4 - x^2 - x) = 5p - 3x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 3x$ geeft
 $k'(x) = -15x^4 - 12x^3 + 6x + 3$
e $l(t) = (5t^3 - t)(3t^5 + t) = 15t^8 + 5t^4 - 3t^6 - t^2$ geeft $l'(t) = 120t^7 + 20t^3 - 18t^5 - 2t$
f $m(q) = 1 - (3q^2 - 2)^2 = 1 - (9q^4 - 12q^2 + 4) = 1 - 9q^4 + 12q^2 - 4 = -9q^4 + 12q^2 - 3$ geeft
 $m'(q) = -36q^3 + 24q$

- 48** **a** $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 5$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$
 Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

b $x = 4$ geeft helling $= -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = -15$

c helling $= -1$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -1$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -4 = 64, \text{ dus } \sqrt{D} = 8$$

$$x = \frac{4 + 8}{6} = 2 \vee x = \frac{4 - 8}{6} = -\frac{2}{3}$$

Bladzijde 80

- 49** **a** $f(x) = 2x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = 2x^3 - 2x - 3x^2 + 3$ geeft $f'(x) = 6x^2 - 2 - 6x$
 helling $= f'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 - 2 - 6 \cdot (-1) = 10$

b $f'(x) = 2\frac{1}{2}$ geeft $6x^2 - 2 - 6x = 2\frac{1}{2}$
 $6x^2 - 6x - 4\frac{1}{2} = 0$
 $4x^2 - 4x - 3 = 0$
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -3 = 64, \text{ dus } \sqrt{D} = 8$
 $x = \frac{4 + 8}{8} = 1\frac{1}{2} \vee x = \frac{4 - 8}{8} = -\frac{1}{2}$

- 50** **a** $f(x) = ax^4 - 3x^2 + 2ax$ geeft $f'(x) = 4ax^3 - 6x + 2a$
 $f'(2) = 5$ geeft $4a \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 + 2a = 5$

$$32a - 12 + 2a = 5$$

$$34a = 17$$

$$a = \frac{1}{2}$$

b $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + 5$ geeft $g'(x) = \frac{1}{2}x + b$
 $g'(6) = 1$ geeft $\frac{1}{2} \cdot 6 + b = 1$
 $3 + b = 1$
 $b = -2$

c $h(x) = px^3 - 2x^2 + 4$ geeft $h'(x) = 3px^2 - 4x$
 $h'(1) = 8$ geeft $3p \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$
 $3p - 4 = 8$
 $3p = 12$
 $p = 4$
Dus $h(x) = 4x^3 - 2x^2 + 4$.
 $q = h(1) = 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 4 = 6$

51 $k(x) = \frac{4x-2}{3x+3} = \frac{2(2x-1)}{3(x+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2}{3} \cdot h(x)$ geeft $k'(x) = \frac{2}{3} \cdot h'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

Bladzijde 81

C8 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,1(x+h)^2 - 0,1x^2}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,1(x^2 + 2xh + h^2) - 0,1x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,1x^2 + 0,2xh + 0,1h^2 - 0,1x^2}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,2xh + 0,1h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(0,2x + 0,1h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (0,2x + 0,1h) = 0,2x$

C9 a $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$ geeft $f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2$
b $g(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$ geeft $g'(t) = -t^2 + 13t$
c $h(x) = 3(2x^3 + 1)^2 = 3(4x^6 + 4x^3 + 1) = 12x^6 + 12x^3 + 3$ geeft $h'(x) = 72x^5 + 36x^2$
d $k(n) = an^5 - 2n^3 + 6an$ geeft $k'(n) = 5an^4 - 6n^2 + 6a$

C10 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x - 7$ geeft $f'(x) = x^2 + 2x - 4$
helling $= f'(-3) = (-3)^2 + 2 \cdot -3 - 4 = -1$
b $f'(x) = -4$ geeft $x^2 + 2x - 4 = -4$
 $x^2 + 2x = 0$
 $x(x+2) = 0$
 $x = 0 \vee x = -2$

2.4 De productregel en de quotiëntregel

Bladzijde 82

52 a $p(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot (3x - 7) = 3x^3 - 7x^2$ geeft $p'(x) = 9x^2 - 14x$
 $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$
 $g(x) = 3x - 7$ geeft $g'(x) = 3$
b $f'(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot 3 = 6x$ en $p'(x) = 9x^2 - 14x$, dus $p'(x) \neq f'(x) \cdot g'(x)$.
c $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot (3x - 7) + x^2 \cdot 3 = 6x^2 - 14x + 3x^2 = 9x^2 - 14x$ en $p'(x) = 9x^2 - 14x$,
dus $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Bladzijde 83

53 a $f(x) = (2 - 3x^2)(2 + 7x)$ geeft $f'(x) = -6x(2 + 7x) + (2 - 3x^2) \cdot 7 = 7(2 - 3x^2) - 6x(2 + 7x)$
b $g(x) = (2x - 5)^2 = (2x - 5)(2x - 5)$ geeft $g'(x) = 2 \cdot (2x - 5) + (2x - 5) \cdot 2 = 4(2x - 5)$
c $h(x) = (x^2 - 3x)(x^3 + x^2 + x)$ geeft $h'(x) = (2x - 3)(x^3 + x^2 + x) + (x^2 - 3x)(3x^2 + 2x + 1)$
d $k(x) = (3x^2 - 4)^2 = (3x^2 - 4)(3x^2 - 4)$ geeft $k'(x) = 6x \cdot (3x^2 - 4) + (3x^2 - 4) \cdot 6x = 12x(3x^2 - 4)$

54 a $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$) Neem van het linker- en het rechterlid de afgeleide.
 $[\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}]' = [x]'$
 $[\sqrt{x}]' \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot [\sqrt{x}]' = 1$
 $2\sqrt{x} \cdot [\sqrt{x}]' = 1$) $: 2\sqrt{x}$
 $[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Dus $f(x) = \sqrt{x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\text{b } \sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{2x-1} = 2x-1$$

$$[\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{2x-1}]' = [2x-1]'$$

$$[\sqrt{2x-1}]' \cdot \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x-1} \cdot [\sqrt{2x-1}]' = 2$$

$$2\sqrt{2x-1} \cdot [\sqrt{2x-1}]' = 2$$

$$[\sqrt{2x-1}]' = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\text{Dus } g(x) = \sqrt{2x-1} \text{ geeft } g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

$$\sqrt{x^2-x} \cdot \sqrt{x^2-x} = x^2-x$$

$$[\sqrt{x^2-x} \cdot \sqrt{x^2-x}]' = [x^2-x]'$$

$$[\sqrt{x^2-x}]' \cdot \sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2-x} \cdot [\sqrt{x^2-x}]' = 2x-1$$

$$2\sqrt{x^2-x} \cdot [\sqrt{x^2-x}]' = 2x-1$$

$$[\sqrt{x^2-x}]' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

$$\text{Dus } h(x) = \sqrt{x^2-x} \text{ geeft } h'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}.$$

$$\text{55 } g(x) = (2x-1)\sqrt{x^2+5} \text{ geeft } g'(x) = 2 \cdot \sqrt{x^2+5} + (2x-1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$$\text{helling} = g'(2) = 2 \cdot \sqrt{2^2+5} + (2 \cdot 2 - 1) \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2+5}} = 2\sqrt{9} + 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 6 + 2 = 8$$

$$\text{56 a } p = fgh = fg \cdot h = fh \text{ geeft } p' = f'h + fh'$$

$$j = fg \text{ geeft } j' = f'g + fg'$$

$$\text{Dus } p' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

$$\begin{aligned} \text{b } p = fghk \text{ geeft } p' &= [fgh]' \cdot k + fgh \cdot [k]' \\ &= (f'gh + fg'h + fgh') \cdot k + fgh \cdot k' \\ &= f'ghk + fg'hk + fgh'k + fghk' \end{aligned}$$

Bladzijde 84

$$\text{57 a } \text{Differentiëren van beide leden van } q(x) \cdot n(x) = t(x) \text{ geeft } q'(x) \cdot n(x) + q(x) \cdot n'(x) = t'(x).$$

$$\text{b } q'(x) \cdot n(x) + q(x) \cdot n'(x) = t'(x)$$

$$q'(x) \cdot n(x) = t'(x) - q(x) \cdot n'(x)$$

$$q'(x) = \frac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$$

$$\text{c } \text{Substitueren van } q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \text{ in } q'(x) = \frac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)} \text{ geeft } q'(x) = \frac{t'(x) - \frac{t(x)}{n(x)} \cdot n'(x)}{n(x)}.$$

$$\text{Teller en noemer vermenigvuldigen met } n(x) \text{ geeft } q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}.$$

Bladzijde 85

$$\text{58 a } f(x) = \frac{x-2}{x+5} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(x+5) \cdot 1 - (x-2) \cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{x+5-x+2}{(x+5)^2} = \frac{7}{(x+5)^2}$$

$$\text{b } f(x) = \frac{2}{2x-1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(2x-1) \cdot 0 - 2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{-4}{(2x-1)^2}$$

$$\text{c } f(x) = \frac{x^3}{2x^2+1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(2x^2+1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{6x^4+3x^2-4x^4}{(2x^2+1)^2} = \frac{2x^4+3x^2}{(2x^2+1)^2}$$

$$\text{d } f(x) = \frac{x-2}{3-x^2} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(3-x^2) \cdot 1 - (x-2) \cdot -2x}{(3-x^2)^2} = \frac{3-x^2+2x^2-4x}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(3-x^2)^2}$$

$$\text{e } f(x) = \frac{3-x^2}{x-2} + x^3 \text{ geeft } f'(x) = \frac{(x-2) \cdot -2x - (3-x^2) \cdot 1}{(x-2)^2} + 3x^2 = \frac{-2x^2+4x-3+x^2}{(x-2)^2} + 3x^2 = \frac{-x^2+4x-3}{(x-2)^2} + 3x^2$$

$$\text{f } f(x) = x - \frac{2}{x+4} \text{ geeft } f'(x) = 1 - \frac{(x+4) \cdot 0 - 2 \cdot 1}{(x+4)^2} = 1 - \frac{-2}{(x+4)^2} = 1 + \frac{2}{(x+4)^2}$$

$$59 \quad g(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{6x}} \text{ geeft } g'(x) = \frac{\sqrt{6x} \cdot 3 - (3x-1) \cdot \frac{3}{\sqrt{6x}}}{6x}$$

$$\text{helling} = g'(\tfrac{1}{6}) = \frac{\sqrt{6 \cdot \frac{1}{6}} \cdot 3 - (3 \cdot \frac{1}{6} - 1) \cdot \frac{3}{\sqrt{6 \cdot \frac{1}{6}}}}{6 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{1} \cdot 3 - (\frac{1}{2} - 1) \cdot \frac{3}{\sqrt{1}}}{1} = 1 \cdot 3 - -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 4\frac{1}{2}$$

$$C11 \quad f(x) = (x^2 + x)(2x^2 - x) \text{ geeft } f'(x) = (2x + 1)(2x^2 - x) + (x^2 + x)(4x - 1)$$

$$C12 \quad f(x) = \frac{x^2 + x}{2x^2 - 1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(2x^2 - 1) \cdot (2x + 1) - (x^2 + x) \cdot 4x}{(2x^2 - 1)^2} = \frac{4x^3 + 2x^2 - 2x - 1 - 4x^3 - 4x^2}{(2x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 1}{(2x^2 - 1)^2}$$

2.5 Afgeleide, raaklijn en snelheid

Bladzijde 86

- 60 a $f(x) = x^2 - 3x - 1$ geeft $f'(x) = 2x - 3$
 $f'(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$
 $f(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 - 1 = 3$
 b $y_A = f(4)$
 c De helling in A is $f'(4)$.

Bladzijde 87

- 61 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2$ geeft $f'(x) = x^2 - 4x$
 $k: y = ax + b$
 $a = f'(4) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} y = b \\ f(4) = -8\frac{2}{3}, \text{ dus } A(4, -8\frac{2}{3}) \end{array} \right\} b = -8\frac{2}{3}$$

Dus $k: y = -8\frac{2}{3}$.

- b $g(x) = 2x^2 - 6x$ geeft $g'(x) = 4x - 6$
 $l: y = ax + b$
 $a = g'(-1) = -10$
 $y = -10x + b$
 door $B(-1, 8)$ $\left\{ \begin{array}{l} -10 \cdot -1 + b = 8 \\ 10 + b = 8 \\ b = -2 \end{array} \right.$

Dus $l: y = -10x - 2$.

- c $h(x) = 0$ geeft $\frac{1}{4}x^2 - 2x = 0$
 $\frac{1}{4}x(x - 8) = 0$
 $x = 0 \vee x = 8$

Dus $P(8, 0)$.

$h(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$ geeft $h'(x) = \frac{1}{2}x - 2$

$m: y = ax + b$

$a = h'(8) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } P(8, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 8 + b = 0 \\ 16 + b = 0 \\ b = -16 \end{array}$$

Dus $m: y = 2x - 16$.

62

$$\mathbf{a} \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x + 5} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(2x + 5) \cdot 2x - (x^2 - 4) \cdot 2}{(2x + 5)^2} = \frac{4x^2 + 10x - 2x^2 + 8}{(2x + 5)^2} = \frac{2x^2 + 10x + 8}{(2x + 5)^2}$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(-2) = -4$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -4x + b \\ \text{door } A(-2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 \cdot -2 + b = 0 \\ 8 + b = 0 \end{array}$$

$$b = -8$$

$$\text{Dus } k: y = -4x - 8.$$

$$l: y = ax + b$$

$$a = f'(2) = \frac{4}{9}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{4}{9}x + b \\ \text{door } B(2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{4}{9} \cdot 2 + b = 0 \\ \frac{8}{9} + b = 0 \\ b = -\frac{8}{9} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}.$$

$$\mathbf{b} \quad m: y = ax + b$$

$$a = f'(0) = \frac{8}{25}$$

$$y = \frac{8}{25}x + b$$

$$f(0) = -\frac{4}{5}, \text{ dus } C(0, -\frac{4}{5}) \text{ en } m: y = \frac{8}{25}x - \frac{4}{5}.$$

63

$$f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 4} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(x^2 - 4) \cdot 2 - (2x - 5) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^2 - 8 - 4x^2 + 10x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{(x^2 - 4)^2}$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$f(0) = 1\frac{1}{4}, \text{ dus } A(0, 1\frac{1}{4}) \text{ en } k: y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4}.$$

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ invullen in de formule van } k \text{ geeft } y = -\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = 0$$

Dus B ligt op k .

Dus de raaklijn k in A snijdt de grafiek in B .

Bladzijde 88

64

$$\mathbf{a} \quad f(x) = (x^2 - 4)(x + 1) = x^3 + x^2 - 4x - 4 \text{ geeft } f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(-3) = 17$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 17x + b \\ f(-3) = -10, \text{ dus } A(-3, -10) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 17 \cdot -3 + b = -10 \\ -51 + b = -10 \\ b = 41 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 17x + 41.$$

$$\mathbf{b} \quad l: y = ax + b$$

$$a = f'(0) = -4$$

$$y = -4x + b$$

$$f(0) = -4, \text{ dus } B(0, -4) \text{ en } l: y = -4x - 4.$$

$$\mathbf{c} \quad f(x) = 0 \text{ geeft } (x^2 - 4)(x + 1) = 0$$

$$x^2 = 4 \vee x = -1$$

$$x = 2 \vee x = -2 \vee x = -1$$

$$\text{Dus } C(2, 0).$$

$$m: y = ax + b$$

$$a = f'(2) = 12$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 12x + b \\ \text{door } C(2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 12 \cdot 2 + b = 0 \\ 24 + b = 0 \\ b = -24 \end{array}$$

$$\text{Dus } m: y = 12x - 24.$$

Bladzijde 89

65 $f(x) = x^3 + ax^2 + a^2x$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a^2$

$k: y = mx + n$

$m = f'(a) = 3 \cdot a^2 + 2a \cdot a + a^2 = 6a^2$

$y = 6a^2x + n$

$$\left. \begin{aligned} f(a) &= 3a^3, \text{ dus } A(a, 3a^3) \\ 6a^2 \cdot a + n &= 3a^3 \\ 6a^3 + n &= 3a^3 \\ n &= -3a^3 \end{aligned} \right\}$$

Dus $y_B = -3a^3$.

66 a $y = ax + b$ met $a = rc = 4$ geeft $y = 4x + b$.

b Je kunt de helling in een punt van een grafiek van een functie berekenen door in de formule van de afgeleide de x -coördinaat van dat punt in te vullen.

De helling in A is 4, dus er geldt $f'(x_A) = 4$.

$f(x) = x^2 - 2x - 5$ geeft $f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 4$ geeft $2x - 2 = 4$

$2x = 6$

$x = 3$

Dus $x_A = 3$.

c $y_A = f(3) = -2$

d $y = 4x + b$ door $A(3, -2)$ $\left\{ \begin{aligned} 4 \cdot 3 + b &= -2 \\ 12 + b &= -2 \\ b &= -14 \end{aligned} \right.$

Dus $y = 4x - 14$ is de formule van de raaklijn in A .

Bladzijde 91

67 a $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ geeft $f'(x) = -2x + 2$

$f'(x) = 4$ geeft $-2x + 2 = 4$

$-2x = 2$

$x = -1$

$k: y = 4x + b$

$f(-1) = 0$, dus door $(-1, 0)$ $\left\{ \begin{aligned} 4 \cdot -1 + b &= 0 \\ -4 + b &= 0 \\ b &= 4 \end{aligned} \right.$

Dus $k: y = 4x + 4$.

b $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10x + 6$ geeft $f'(x) = x^2 + x - 10$

$f'(x) = -4$ geeft $x^2 + x - 10 = -4$

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x - 2)(x + 3) = 0$

$x = 2 \vee x = -3$

$l: y = -4x + b$

$f(-3) = 31\frac{1}{2}$, dus $A(-3, 31\frac{1}{2})$ $\left\{ \begin{aligned} -4 \cdot -3 + b &= 31\frac{1}{2} \\ 12 + b &= 31\frac{1}{2} \\ b &= 19\frac{1}{2} \end{aligned} \right.$

Dus $l: y = -4x + 19\frac{1}{2}$.

$m: y = -4x + b$

$f(2) = -9\frac{1}{3}$, dus $B(2, -9\frac{1}{3})$ $\left\{ \begin{aligned} -4 \cdot 2 + b &= -9\frac{1}{3} \\ -8 + b &= -9\frac{1}{3} \\ b &= -1\frac{1}{3} \end{aligned} \right.$

Dus $m: y = -4x - 1\frac{1}{3}$.

68

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(x-1) \cdot 2 - (2x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Los op $f'(x) = -\frac{3}{4}$.

Invoeren van de formule van f' en $y = -\frac{3}{4}$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = -1$ en $x = 3$.

$$\begin{aligned} k: y &= -\frac{3}{4}x + b \\ f(-1) &= \frac{1}{2}, \text{ dus } A(-1, \frac{1}{2}) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} -\frac{3}{4} \cdot -1 + b &= \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} + b &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{1}{4} \end{aligned} \right.$$

Dus $k: y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} l: y &= -\frac{3}{4}x + b \\ f(3) &= 3\frac{1}{2}, \text{ dus } B(3, 3\frac{1}{2}) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} -\frac{3}{4} \cdot 3 + b &= 3\frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{4} + b &= 3\frac{1}{2} \\ b &= 5\frac{3}{4} \end{aligned} \right.$$

Dus $l: y = -\frac{3}{4}x + 5\frac{3}{4}$.

69

a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$ geeft $f'(x) = x^2 - 2x$

$k: y = ax + b$

$a = f'(-3) = 15$

$y = 15x + b$

$$f(-3) = -19, \text{ dus } A(-3, -19) \left\{ \begin{aligned} 15 \cdot -3 + b &= -19 \\ -45 + b &= -19 \\ b &= 26 \end{aligned} \right.$$

Dus $k: y = 15x + 26$.

b $f'(x) = 3$ geeft $x^2 - 2x = 3$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 3$$

$$\begin{aligned} l: y &= 3x + b \\ f(-1) &= -2\frac{1}{3}, \text{ dus } B(-1, -2\frac{1}{3}) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} 3 \cdot -1 + b &= -2\frac{1}{3} \\ -3 + b &= -2\frac{1}{3} \\ b &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right.$$

Dus $l: y = 3x + \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} m: y &= 3x + b \\ f(3) &= -1, \text{ dus } C(3, -1) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} 3 \cdot 3 + b &= -1 \\ 9 + b &= -1 \\ b &= -10 \end{aligned} \right.$$

Dus $m: y = 3x - 10$.

c $f'(x) = 8$ geeft $x^2 - 2x = 8$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x+2)(x-4) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 4$$

$f(-2) = -7\frac{2}{3}$, dus $D(-2, -7\frac{2}{3})$.

$f(4) = 4\frac{1}{3}$, dus $E(4, 4\frac{1}{3})$.

$p: y = ax + b$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\frac{1}{3} - (-7\frac{2}{3})}{4 - (-2)} = 2$$

$$\begin{aligned} y &= 2x + b \\ \text{door } E(4, 4\frac{1}{3}) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} 2 \cdot 4 + b &= 4\frac{1}{3} \\ 8 + b &= 4\frac{1}{3} \\ b &= -3\frac{2}{3} \end{aligned} \right.$$

Dus $p: y = 2x - 3\frac{2}{3}$.

d Invoeren van de formules van f en q en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 1\frac{1}{2}$ en $y = -2\frac{1}{8}$.

$r: y = ax + b$

$a = f'(1\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } F(1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{8}) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} -\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{2} + b &= -2\frac{1}{8} \\ -1\frac{1}{8} + b &= -2\frac{1}{8} \\ b &= -1 \end{aligned} \right.$$

Dus $r: y = -\frac{3}{4}x - 1$.

$$\mathbf{a} \quad f(x) = \frac{x^2 - 3}{2 - x} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(2 - x) \cdot 2x - (x^2 - 3) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2 - 3}{(2 - x)^2} = \frac{4x - x^2 - 3}{(2 - x)^2}$$

Los op $f'(x) = 3$.

Invoeren van de formule van f' en $y = 3$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 1\frac{1}{2}$ en $x = 2\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 3x + b \\ f(1\frac{1}{2}) = -1\frac{1}{2}, \text{ dus } A(1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 1\frac{1}{2} + b = -1\frac{1}{2} \\ 4\frac{1}{2} + b = -1\frac{1}{2} \\ b = -6 \end{array}$$

Dus $k: y = 3x - 6$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = 3x + b \\ f(2\frac{1}{2}) = -6\frac{1}{2}, \text{ dus } B(2\frac{1}{2}, -6\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 2\frac{1}{2} + b = -6\frac{1}{2} \\ 7\frac{1}{2} + b = -6\frac{1}{2} \\ b = -14 \end{array}$$

Dus $l: y = 3x - 14$.

$$\mathbf{b} \quad m: y = ax + b$$

$$a = f'(0) = -\frac{3}{4}$$

$$f(0) = -1\frac{1}{2}, \text{ dus } C(0, -1\frac{1}{2}) \text{ en } m: y = -\frac{3}{4}x - 1\frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{c} \quad \text{Los op } f'(x) = 0.$$

Invoeren van de formule van f' en gebruiken van de optie nulpunt geeft $x = 1$ en $x = 3$.

$$f(1) = -2, \text{ dus horizontale raaklijn } y = -2.$$

$$f(3) = -6, \text{ dus horizontale raaklijn } y = -6.$$

Dus de afstand tussen deze twee horizontale raaklijnen is 4.

$$\mathbf{a} \quad f_p(x) = x^3 + px^2 + 2x - 3 \text{ geeft } f_p'(x) = 3x^2 + 2px + 2$$

$$f_p'(x) = -1 \text{ geeft } 3x^2 + 2px + 2 = -1$$

$$3x^2 + 2px + 3 = 0$$

Twee raaklijnen betekent twee oplossingen, dus $D > 0$.

$$D = (2p)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4p^2 - 36$$

$$\left. \begin{array}{l} 4p^2 - 36 > 0 \\ 4p^2 > 36 \\ p^2 > 9 \\ p < -3 \vee p > 3 \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{b} \quad g_p(x) = px^3 + 4x^2 - 4x \text{ geeft } g_p'(x) = 3px^2 + 8x - 4$$

$$g_p'(x) = -6 \text{ geeft } 3px^2 + 8x - 4 = -6$$

$$3px^2 + 8x + 2 = 0$$

Twee raaklijnen betekent twee oplossingen, dus $p \neq 0$ want $p = 0$ geeft $8x + 2 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Verder moet gelden } D > 0. \\ D = 8^2 - 4 \cdot 3p \cdot 2 = 64 - 24p \end{array} \right\} \begin{array}{l} 64 - 24p > 0 \\ -24p > -64 \\ p < 2\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } p < 2\frac{2}{3} \wedge p \neq 0.$$

Bladzijde 92

$$\mathbf{a} \quad f(2) = 4 \text{ geeft } 4a + 2b = 4$$

$$f(x) = ax^2 + bx \text{ geeft } f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(2) = 3 \text{ geeft } 4a + b = 3 \text{ oftewel } b = 3 - 4a.$$

$$b = 3 - 4a \text{ en } 4a + 2b = 4 \text{ geeft } 4a + 2(3 - 4a) = 4$$

$$4a + 6 - 8a = 4$$

$$-4a = -2$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ en } b = 3 - 4a \text{ geeft } b = 3 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Dus voor $a = \frac{1}{2}$ en $b = 1$.

b Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4a + 2b}{2} = \frac{2(2a + b)}{2} = 2a + b$.

Dus $2a + b = 4$ oftewel $b = 4 - 2a$.

Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9a + 3b - (a + b)}{2} = \frac{9a + 3b - a - b}{2} = \frac{8a + 2b}{2} = \frac{2(4a + b)}{2} = 4a + b$.

Dus $4a + b = 5$ oftewel $b = 5 - 4a$.

$b = 4 - 2a$ en $b = 5 - 4a$ geeft $4 - 2a = 5 - 4a$

$$2a = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$a = \frac{1}{2}$ geeft $b = 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$

Dus voor $a = \frac{1}{2}$ en $b = 3$.

73 $s = -\frac{1}{6}t^3 + 3t^2$ geeft $s' = -\frac{1}{2}t^2 + 6t$

$t = 6$ geeft $s' = -\frac{1}{2} \cdot 6^2 + 6 \cdot 6 = 18$

De afstand s is in meters en de tijd t is in seconden, dus de snelheid waarmee s verandert is in m/s en is dus 18 m/s.

74 a $s = 0,8t^2$ geeft $v = 1,6t$

$t = 3$ geeft $v = 1,6 \cdot 3 = 4,8$ m/s

$t = 4$ geeft $v = 1,6 \cdot 4 = 6,4$ m/s

De procentuele toename is $\frac{6,4 - 4,8}{4,8} \cdot 100\% \approx 33,3\%$.

b $30 \text{ km/u} = \frac{30}{3,6} \text{ m/s}$

$v = \frac{30}{3,6}$ geeft $1,6t = \frac{30}{3,6}$

$$t = \frac{30}{3,6 \cdot 1,6} \approx 5,21$$

Dus na 5,21 seconden is de snelheid 30 km/u.

c $t = 6$ geeft $s = 0,8 \cdot 6^2 = 28,8$ en $v = 1,6 \cdot 6 = 9,6$

De auto legt in de eerste tien seconden $28,8 + (10 - 6) \cdot 9,6 = 67,2$ meter af.

Bladzijde 93

75 a Los op $h = 0$.

Invoeren van de formule van h en gebruiken van de optie nulpunt geeft $t = 5,62\dots$

Dus het duurt ongeveer 5,6 seconden voordat de bal op de grond komt.

b $h = -5t^2 + 28t + 0,6$ geeft $h' = -10t + 28$

$t = 5,62\dots$ geeft $h' = -10 \cdot 5,62\dots + 28 = -28,21\dots$

De snelheid waarmee de bal op de grond komt is $28,21\dots \cdot 3,6\dots \approx 102 \text{ km/u}$.

c Als de bal het hoogste punt heeft bereikt, is de snelheid nul.

$h' = 0$ geeft $-10t + 28 = 0$

$$-10t = -28$$

$$t = 2,8$$

Dat is na 2,8 seconden het geval.

76 $t = 0$ geeft $s = 0$

$t = 9$ geeft $s = 162$

Op $[0, 9]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{162}{9} = 18 \text{ m/s}$.

$s = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2$ geeft $v = -t^2 + 10t$

$v = 18$ geeft $-t^2 + 10t = 18$

$$t^2 - 10t + 18 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 28$$

$$t = \frac{10 + \sqrt{28}}{2} > 0 \vee t = \frac{10 - \sqrt{28}}{2} > 0$$

Dus op $[0, 9]$ zijn er twee tijdstippen waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 9]$.

77 $t = 5$ geeft $s = a(12 \cdot 5^2 - 5^3) = 175a$, dus in de eerste vijf seconden wordt er 175a meter afgelegd.
 $s = a(12t^2 - t^3) = 12at^2 - at^3$ geeft $v = 24at - 3at^2$
 $t = 5$ geeft $v = 24a \cdot 5 - 3a \cdot 5^2 = 120a - 75a = 45a$
Dus in de tweede vijf seconden wordt er $5 \cdot 45a = 225a$ meter afgelegd.
Er moet gelden $175a + 225a = 200$
 $400a = 200$
 $a = \frac{1}{2}$

78 $t = 1,5$ geeft $F_{\text{atleet}} = \frac{135 \cdot 1,5 + 50}{0,3 \cdot 1,5^2 + 1} = 150,74 \dots$

$$F_{\text{wielrenner}} = 1,2 \cdot F_{\text{atleet}} = 1,2 \cdot \frac{135t + 50}{0,3t^2 + 1}$$

Invoeren van de formule van $F_{\text{wielrenner}}$ en $y = 150,74 \dots$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 0,695 \dots$

$$F_{\text{atleet}} = \frac{135t + 50}{0,3t^2 + 1} \text{ geeft } F'_{\text{atleet}} = \frac{(0,3t^2 + 1) \cdot 135 - (135t + 50) \cdot 0,6t}{(0,3t^2 + 1)^2} = \frac{40,5t^2 + 135 - 81t^2 - 30t}{(0,3t^2 + 1)^2} = \frac{-40,5t^2 + 135 - 30t}{(0,3t^2 + 1)^2}$$

$$F_{\text{wielrenner}} = 1,2 \cdot F_{\text{atleet}} \text{ geeft } F'_{\text{wielrenner}} = 1,2 \cdot F'_{\text{atleet}} = 1,2 \cdot \frac{-40,5t^2 + 135 - 30t}{(0,3t^2 + 1)^2}$$

$$t = 0,695 \dots \text{ geeft } F'_{\text{wielrenner}} = 1,2 \cdot \frac{-40,5 \cdot 0,695 \dots^2 + 135 - 30 \cdot 0,695 \dots}{(0,3 \cdot 0,695 \dots^2 + 1)^2} = 86,59 \dots$$

Dus de snelheid waarmee de hartslagfrequentie van de wielrenner dan toeneemt is $\frac{86,59 \dots}{60} \approx 1,44$ slagen per minuut per seconde.

Bladzijde 94

C13 $f(x) = -x^2 + 5x + 3$ geeft $f'(x) = -2x + 5$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(4) = -3$$

$$y = -3x + b$$

$$f(4) = 7, \text{ dus } A(4, 7) \left\{ \begin{array}{l} -3 \cdot 4 + b = 7 \\ -12 + b = 7 \\ b = 19 \end{array} \right.$$

Dus $k: y = -3x + 19$.

C14 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 2$ geeft $f'(x) = x^2 - 3$

$$f'(x) = 6 \text{ geeft } x^2 - 3 = 6$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

$$k: y = 6x + b$$

$$f(-3) = 2, \text{ dus } A(-3, 2) \left\{ \begin{array}{l} 6 \cdot -3 + b = 2 \\ -18 + b = 2 \\ b = 20 \end{array} \right.$$

Dus $k: y = 6x + 20$.

$$l: y = 6x + b$$

$$f(3) = 2, \text{ dus } B(3, 2) \left\{ \begin{array}{l} 6 \cdot 3 + b = 2 \\ 18 + b = 2 \\ b = -16 \end{array} \right.$$

Dus $l: y = 6x - 16$.

$$\text{b } g(x) = \frac{x}{x-1} \text{ geeft } g'(x) = \frac{(x-1) \cdot 1 - x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Los op $g'(x) = -4$.

Invoeren van de formule van g' en $y = -4$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = \frac{1}{2}$ en $x = 1\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -4x + b \\ f(\frac{1}{2}) = -1, \text{ dus } C(\frac{1}{2}, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 \cdot \frac{1}{2} + b = -1 \\ -2 + b = -1 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $m: y = -4x + 1$.

$$\left. \begin{array}{l} n: y = -4x + b \\ f(1\frac{1}{2}) = 3, \text{ dus } D(1\frac{1}{2}, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 \cdot 1\frac{1}{2} + b = 3 \\ -6 + b = 3 \\ b = 9 \end{array}$$

Dus $n: y = -4x + 9$.

C15 $t = 3$ geeft $s = 1,2 \cdot 3^2 + 0,8 \cdot 3 = 13,2$

$$s = 1,2t^2 + 0,8t \text{ geeft } v = 2,4t + 0,8$$

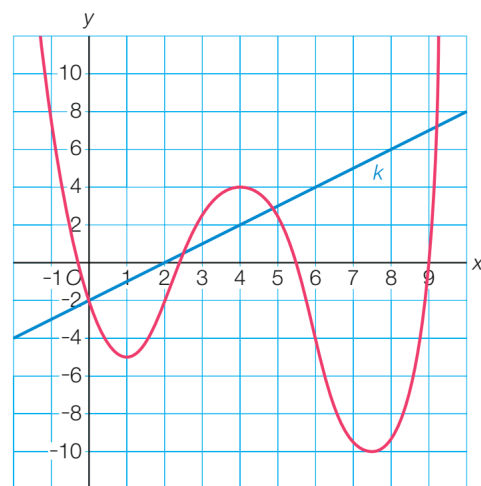
$$t = 3 \text{ geeft } v = 2,4 \cdot 3 + 0,8 = 8$$

In de eerste tien seconden wordt er $13,2 + (10 - 3) \cdot 8 = 69,2$ meter afgelegd.

Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 96

- 1 a** Afnemend dalend op $\langle \leftarrow, 1 \rangle$ en $\langle 6, 7\frac{1}{2} \rangle$.
Toenemend stijgend op $\langle 1, 2 \rangle$ en $\langle 7\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.
Afnemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$.
Toenemend dalend op $\langle 4, 6 \rangle$.
- b** De gemiddelde verandering op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - -5}{4 - 1} = 3$.
- c** Op $[2, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4 - -2}{6 - 2} = -\frac{1}{2}$.
- d** Zie de figuur hiernaast.
De lijn k door $(0, -2)$ met $rc_k = 1$ snijdt de grafiek rechts van $x = 0$ in drie punten.
Dus er zijn drie waarden van p waarvoor het differentiequotiënt van y op $[0, p]$ gelijk is aan 1.

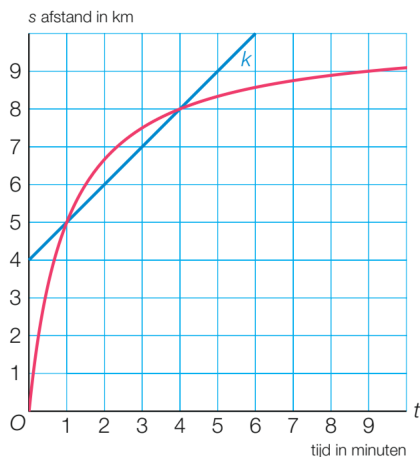


- 2 a** Op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{8 - -2\frac{1}{2}}{3} = 3\frac{1}{2}$.
- b** Op $[-1, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - -1} = \frac{-2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2} = -1\frac{1}{2}$.
- c** $f(-2) = -4$, dus $A(-2, -4)$.
 $f(3) = -1\frac{1}{2}$, dus $B(3, -1\frac{1}{2})$.
 $y = ax + b$
 $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1\frac{1}{2} - -4}{3 - -2} = \frac{1}{2}$
 $y = \frac{1}{2}x + b$
door $A(-2, -4)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot -2 + b = -4 \\ -1 + b = -4 \\ b = -3 \end{array} \right.$
Dus $l: y = \frac{1}{2}x - 3$.

3 a Op $[1, 9]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{9-5}{9-1} = 0,5$ km/minuut.

Dus de gevraagde gemiddelde snelheid is $0,5 \cdot 60 = 30$ km/u.

b Op $[0, 9]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{9-0}{9-0} = 1$ km/minuut.



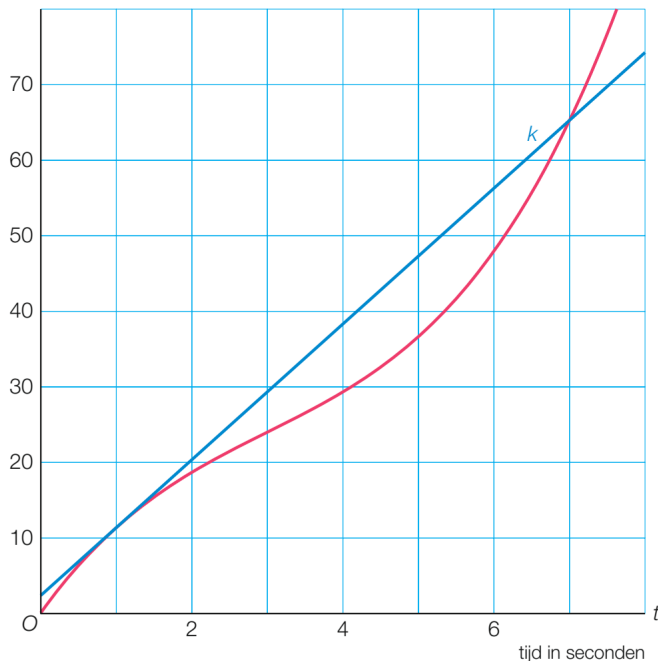
De lijn k door $(1, 5)$ met $rc_k = 1$ snijdt de grafiek ook in het punt $(4, 8)$.
Dus voor $p = 4$.

c Op $[1; 1,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10 - \frac{10}{1,01+1} - \left(10 - \frac{10}{1+1}\right)}{0,01} = 2,48\dots$ km/minuut.

De snelheid op $t = 1$ is bij benadering $60 \cdot 2,48\dots \approx 149$ km/u.

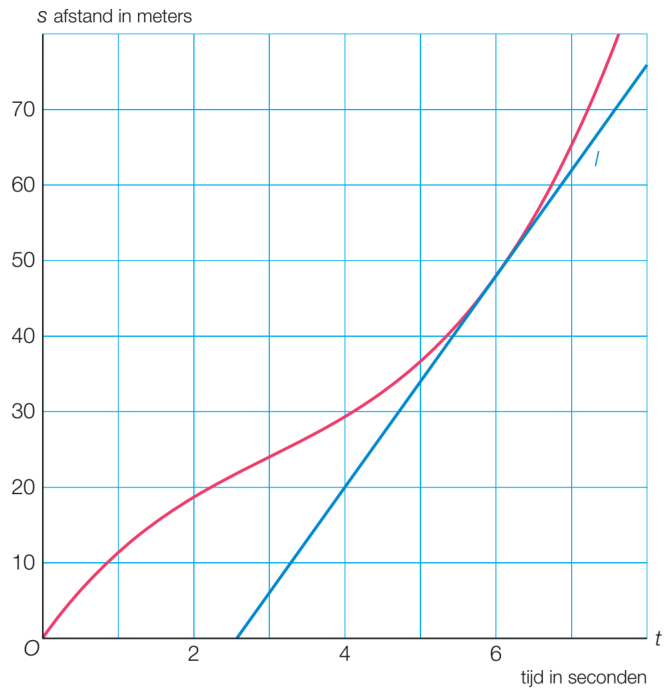
Bladzijde 97

4 a s afstand in meters



Raaklijn k door $(0, 2)$ en $(8, 74)$, dus $rc_k = \frac{74-2}{8-0} = 9$.

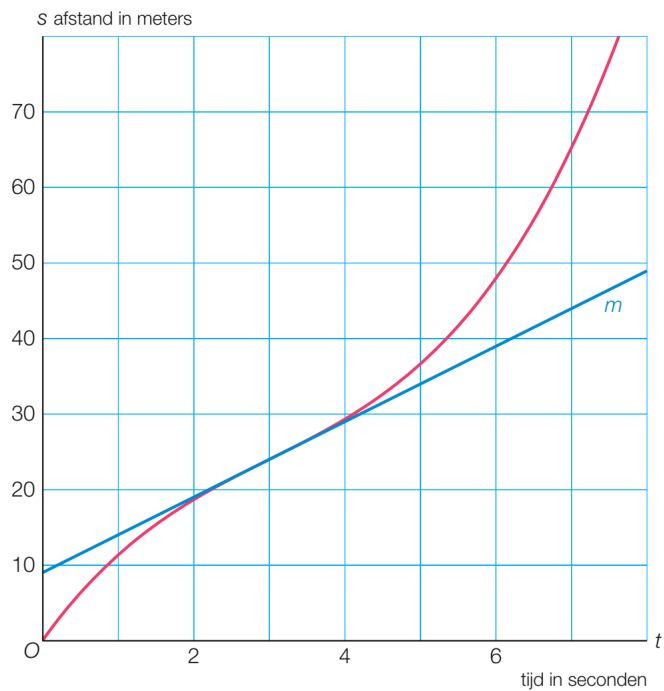
De snelheid op $t = 1$ is ongeveer 9 m/s.



Raaklijn l door $(4, 20)$ en $(8, 76)$, dus $rc_l = \frac{76 - 20}{8 - 4} = 14$.

De snelheid op $t = 6$ is ongeveer 14 m/s.

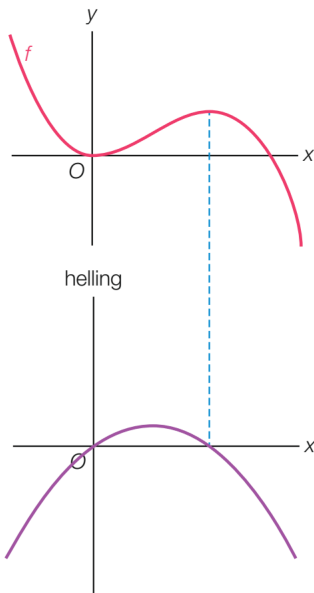
- b** Voor $t = 3$ krijg je de raaklijn met de kleinste richtingscoëfficiënt.
Dus voor $t = 3$ is de snelheid minimaal.



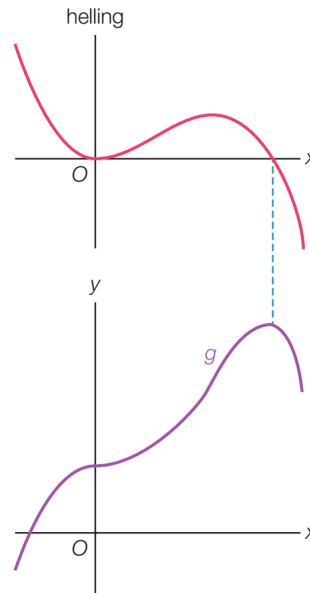
Raaklijn m door $(0, 9)$ en $(8, 49)$, dus $rc_m = \frac{49 - 9}{8 - 0} = 5$.

Dus de minimale snelheid is ongeveer 5 m/s.

5 a



b



Bladzijde 98

$$\begin{aligned}
 6 \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h)^2 - 5x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x^2 + 2xh + h^2) - 5x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 - 5x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10xh + 5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(10x + 5h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10x + 5h) = 10x
 \end{aligned}$$

- 7 a $f(x) = 0,6x^3 - 1,3x^2 + 7$ geeft $f'(x) = 1,8x^2 - 2,6x$
 b $g(p) = 4p^3 + p^2 - 11p + 20$ geeft $g'(p) = 12p^2 + 2p - 11$
 c $h(x) = x(2x - 1)^2 = x(4x^2 - 4x + 1) = 4x^3 - 4x^2 + x$ geeft $h'(x) = 12x^2 - 8x + 1$
 d $k(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2(x - a) + 6a^2 = \frac{1}{3}x^3 + 2x^3 - 2ax^2 + 6a^2 = 2\frac{1}{3}x^3 - 2ax^2 + 6a^2$ geeft $k'(x) = 7x^2 - 4ax$

8 a $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$
 helling = $f'(3) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = -3\frac{1}{2}$

b $f'(x) = -2$ geeft $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 = -2$
 $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 = 0$
 $x^2 - 8x + 12 = 0$
 $(x - 2)(x - 6) = 0$
 $x = 2 \vee x = 6$

9 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3px + 1$ geeft $f'(x) = x + 3p$
 $f'(2) = p$ geeft $2 + 3p = p$
 $2p = -2$
 $p = -1$

10 a $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 7x + 2)$ geeft $f'(x) = 3x^2(x^2 + 7x + 2) + (x^3 - 1)(2x + 7)$

b $g(x) = (x^3 + 2x + 1)^2 = (x^3 + 2x + 1)(x^3 + 2x + 1)$ geeft
 $g'(x) = (3x^2 + 2)(x^3 + 2x + 1) + (x^3 + 2x + 1)(3x^2 + 2) = 2(3x^2 + 2)(x^3 + 2x + 1)$

11 a $f(x) = \frac{2x - 3}{3x - 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(3x - 1) \cdot 2 - (2x - 3) \cdot 3}{(3x - 1)^2} = \frac{6x - 2 - 6x + 9}{(3x - 1)^2} = \frac{7}{(3x - 1)^2}$

b $g(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1}$ geeft $g'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 4x^3 - x^4 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^5 + 4x^3 - 2x^5}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^5 + 4x^3}{(x^2 + 1)^2}$

c $h(x) = x^2 - \frac{3}{x + 1}$ geeft $h'(x) = 2x - \frac{(x + 1) \cdot 0 - 3 \cdot 1}{(x + 1)^2} = 2x - \frac{-3}{(x + 1)^2} = 2x + \frac{3}{(x + 1)^2}$

12

a $f(x) = \frac{10x}{x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 10 - 10x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{10x^2 + 10 - 20x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{10 - 10x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$k: y = ax + b$

$a = f'(3) = -\frac{4}{5}$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{4}{5}x + b \\ f(3) = 3, \text{ dus } A(3, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{4}{5} \cdot 3 + b = 3 \\ -2\frac{2}{5} + b = 3 \\ b = 5\frac{2}{5} \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{4}{5}x + 5\frac{2}{5}$.

b Los op $f'(x) = 4\frac{4}{5}$.

Invoeren van de formule van f' en $y = 4\frac{4}{5}$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = -\frac{1}{2}$ en $x = \frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = 4\frac{4}{5}x + b \\ f(-\frac{1}{2}) = -4, \text{ dus } B(-\frac{1}{2}, -4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4\frac{4}{5} \cdot -\frac{1}{2} + b = -4 \\ -2\frac{2}{5} + b = -4 \\ b = -1\frac{3}{5} \end{array}$$

Dus $l: y = 4\frac{4}{5}x - 1\frac{3}{5}$.

$$\left. \begin{array}{l} m: y = 4\frac{4}{5}x + b \\ f(\frac{1}{2}) = 4, \text{ dus } C(\frac{1}{2}, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + b = 4 \\ 2\frac{2}{5} + b = 4 \\ b = 1\frac{3}{5} \end{array}$$

Dus $m: y = 4\frac{4}{5}x + 1\frac{3}{5}$.

13

a $s = -\frac{1}{6}t^3 + 4t^2$ geeft $v = -\frac{1}{2}t^2 + 8t$

$t = 4$ geeft $v = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 = 24$

$t = 8$ geeft $v = -\frac{1}{2} \cdot 8^2 + 8 \cdot 8 = 32$

De procentuele toename is $\frac{32 - 24}{24} \cdot 100\% \approx 33,3\%$.

b $108 \text{ km/u} = \frac{108}{3,6} \text{ m/s} = 30 \text{ m/s}$

$v = 30$ geeft $-\frac{1}{2}t^2 + 8t = 30$

$-\frac{1}{2}t^2 + 8t - 30 = 0$

$t^2 - 16t + 60 = 0$

$(t - 6)(t - 10) = 0$

$t = 6 \vee t = 10$

Dus na 6 seconden en na 10 seconden is de snelheid 108 km/u.

c $t = 12$ geeft $s = -\frac{1}{6} \cdot 12^3 + 4 \cdot 12^2 = 288$ en $v = -\frac{1}{2} \cdot 12^2 + 8 \cdot 12 = 24$

De auto legt in de eerste minuut $288 + (60 - 12) \cdot 24 = 1440$ meter af.

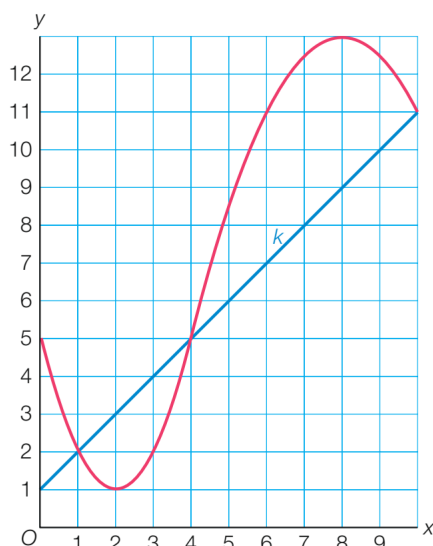
Gemengde opgaven

Bladzijde 99

1

- a** Afnemend dalend op $\langle \leftarrow, 2 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle 4, 8 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 8, \rightarrow \rangle$.

- b** Teken de lijn k met $rc_k = 1$ door het punt $(10, 11)$ van de grafiek.

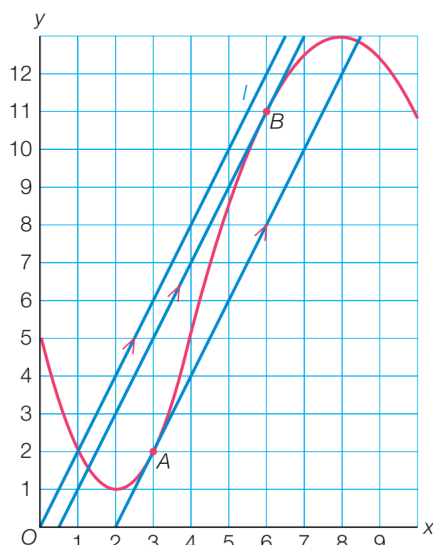


De lijn k door $(10, 11)$ met $rc_k = 1$ snijdt de grafiek in de punten $(1, 2)$ en $(4, 5)$.

Dus op $[1, 10]$ en op $[4, 10]$ is de gemiddelde verandering gelijk aan 1.

Dus voor $p = 1$ en voor $p = 4$.

- c** De intervallen $[0, 4]$, $[1, 3]$ en $[6, 10]$ zijn de intervallen waarvan de grenzen gehele getallen zijn en waarop het differentiequotiënt gelijk is aan 0. Dus $[1, 3]$ is het gevraagde interval.
- d** Teken de lijn l door O met $rc_l = 2$.
Teken lijnen evenwijdig met l die de grafiek raken.



In de raakpunten $A(3, 2)$ en $B(6, 11)$ is de helling van de grafiek gelijk aan 2.

- e** Er zijn geen lijnen met richtingscoëfficiënt 6 die de grafiek raken.
Dus er ligt geen punt op de grafiek waarin de helling van de grafiek gelijk is aan 6.

2 a Op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{16a + 4b + c - c}{4} = \frac{16a + 4b}{4} = \frac{4(4a + b)}{4} = 4a + b$.

Dus $4a + b = 2$ oftewel $b = 2 - 4a$.

Op $[2, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9a + 3b + c - (4a + 2b + c)}{1} = \frac{5a + b}{1} = 5a + b$.

Dus $5a + b = 4$ oftewel $b = 4 - 5a$.

$b = 2 - 4a$ en $b = 4 - 5a$ geeft $2 - 4a = 4 - 5a$

$$a = 2$$

$a = 2$ geeft $b = 2 - 4 \cdot 2 = -6$

Dus $f(x) = 2x^2 - 6x + c$.

Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{20 + c - (-4 + c)}{4} = \frac{24}{4} = 6$.

- b** Op $[0, c]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{2c^2 - 6c + c - (0 - 0 + c)}{c} = \frac{2c^2 - 6c}{c} = \frac{c(2c - 6)}{c} = 2c - 6$.
Dus $2c - 6 = c$ oftewel $c = 6$.

3 a $g(x) = (2x + 1)\sqrt{x^2 + 3}$ geeft $g'(x) = 2 \cdot \sqrt{x^2 + 3} + (2x + 1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

helling = $g'(1) = 2 \cdot \sqrt{1^2 + 3} + (2 \cdot 1 + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3}} = 2\sqrt{4} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 4 + 1\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$

b $h(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$ geeft $h'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 3}) \cdot 2 - (2x + 1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}}{x^2 + 3}$

helling = $h'(1) = \frac{(\sqrt{1^2 + 3}) \cdot 2 - (2 \cdot 1 + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3}}}{1^2 + 3} = \frac{\sqrt{4} \cdot 2 - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{4}}}{4} = \frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot \frac{1}{2}}{4} = \frac{4 - 1\frac{1}{2}}{4} = \frac{2\frac{1}{2}}{4} = \frac{5}{8}$

4 a $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x + 3}$ geeft $f'(x) = 1 + \frac{(x + 3) \cdot 0 - 4 \cdot 1}{(x + 3)^2} = 1 - \frac{4}{(x + 3)^2}$

$k: y = ax + b$

$a = f'(0) = \frac{5}{9}$

$f(0) = -\frac{2}{3}$, dus $A(0, -\frac{2}{3})$ en $k: y = \frac{5}{9}x - \frac{2}{3}$.

- b** Invoeren van de formule van f en $y = 3\frac{1}{2}$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = -2\frac{1}{2}$ en $x = 5$, dus $B(-2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.

$l: y = ax + b$

$a = f'(-2\frac{1}{2}) = -15$

$y = -15x + b$
door $B(-2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$ $\left. \begin{array}{l} -15 \cdot -2\frac{1}{2} + b = 3\frac{1}{2} \\ 37\frac{1}{2} + b = 3\frac{1}{2} \end{array} \right\}$

$b = -34$

Dus $l: y = -15x - 34$.

- c** Los op $f'(x) = -3$.

Invoeren van de formule van f' en $y = -3$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$x = -4$ en $x = -2$.

$f(-4) = -10$ en $f(-2) = 0$

Dus de punten zijn $(-4, -10)$ en $(-2, 0)$.

Bladzijde 100

5 a $f_p(x) = \frac{x^2 - 2x + p}{x - 1}$ geeft

$f_p'(x) = \frac{(x - 1) \cdot (2x - 2) - (x^2 - 2x + p) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - x^2 + 2x - p}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 2 - p}{(x - 1)^2}$

Er moet gelden $x^2 - 2x + 2 - p = x^2 - 2x$, dus $p = 2$.

b $f_p'(3) = \frac{1}{4}$ geeft $\frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 2 - p}{(3 - 1)^2} = \frac{1}{4}$

$\frac{9 - 6 + 2 - p}{4} = \frac{1}{4}$

$9 - 6 + 2 - p = 1$

$p = 4$

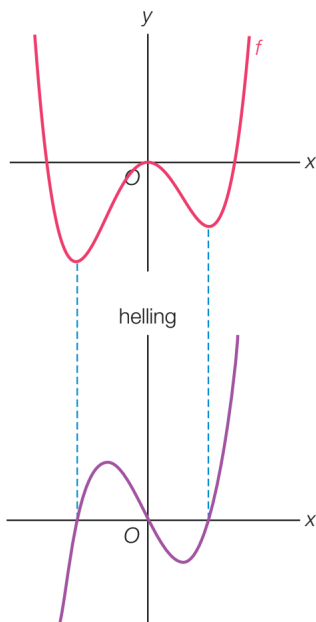
c $f_5'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2 - 5}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$

Los op $f_5'(x) = -3$.

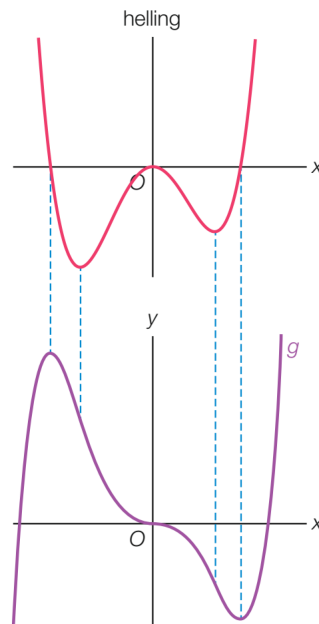
Invoeren van de formule van f_5' en $y = -3$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 0$ en $x = 2$.

Dus voor $x = 0$ en voor $x = 2$.

6 a



b



c $f(x) = 0$ geeft $0,1x^2(2x + 7)(x - 3) = 0$
 $x = 0 \vee 2x = -7 \vee x = 3$
 $x = 0 \vee x = -3\frac{1}{2} \vee x = 3$

Dus $A(3, 0)$.

$f(x) = 0,1x^2(2x + 7)(x - 3) = 0,1x^2(2x^2 - 6x + 7x - 21) = 0,1x^2(2x^2 + x - 21) = 0,2x^4 + 0,1x^3 - 2,1x^2$
 geeft $f'(x) = 0,8x^3 + 0,3x^2 - 4,2x$

k: $y = ax + b$

$a = f'(3) = 11,7$

$y = 11,7x + b$
 door $A(3, 0)$ $\left\{ \begin{array}{l} 11,7 \cdot 3 + b = 0 \\ 35,1 + b = 0 \\ b = -35,1 \end{array} \right.$

Dus k: $y = 11,7x - 35,1$.

d Los op $f'(x) = 1$.

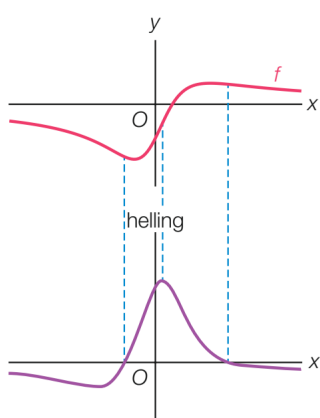
Invoeren van de formule van f' en $y = 1$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$x = -2,368\dots$, $x = -0,236\dots$ en $x = 2,230\dots$

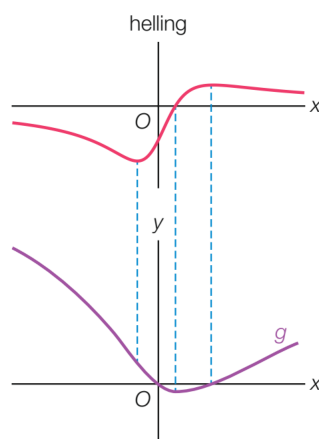
Dus voor $x \approx -2,37$, $x \approx -0,24$ en $x \approx 2,23$ is de helling van de grafiek van f gelijk aan 1.

Bladzijde 101

7 a



b



$$\text{c } f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 2 - (2x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$$

$$y = ax + b$$

$$a = f'(0) = 2$$

$$y = 2x + b$$

$$f(0) = -1, \text{ dus } B(0, -1) \text{ en } y = 2x - 1.$$

Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie nulpunt geeft $x = \frac{1}{2}$, dus $A(\frac{1}{2}, 0)$.

$$x = \frac{1}{2} \text{ invullen in } y = 2x - 1 \text{ geeft } y = 0.$$

Dus de lijn die de grafiek van f raakt in B gaat door A .

$$\text{d } \text{Los op } f'(x) = \frac{1}{2}.$$

Invoeren van de formule van f' en $y = \frac{1}{2}$ en gebruiken van de optie snijpunt

geeft $x = -0,444\dots$ en $x = 1$.

Dus voor $x \approx -0,44$ en $x = 1$ zijn de raaklijnen aan de grafiek van f evenwijdig met de lijn k .

$$\text{8 } f(x) = (x^2 - 9)(x + p) = x^3 + px^2 - 9x - 9p \text{ geeft } f'(x) = 3x^2 + 2px - 9$$

$$f'(-2) = 7 \text{ geeft } 3 \cdot (-2)^2 + 2p \cdot -2 - 9 = 7$$

$$12 - 4p - 9 = 7$$

$$-4p = 4$$

$$p = -1$$

$$\text{Dus } f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9.$$

$$k: y = ax + b$$

$$k \parallel l, \text{ dus } a = rc_k = rc_l = 7.$$

$$y = 7x + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = 15, \text{ dus } A(-2, 15) \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7 \cdot -2 + b = 15 \\ -14 + b = 15 \\ b = 29 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 7x + 29.$$

$$\text{Los op } f(x) = 7x + 29.$$

Invoeren van de formules van f en k en gebruiken van de optie snijpunt geeft

$$x = -2 \text{ en } y = 15 \text{ en } x = 5 \text{ en } y = 64.$$

$$\text{Dus } B(5, 64).$$

$$\text{9 a } s = 0,06t^3 + 1,2t^2 \text{ geeft } v = 0,18t^2 + 2,4t$$

$$t = 4 \text{ geeft } v = 0,18 \cdot 4^2 + 2,4 \cdot 4 = 12,48$$

$$t = 6 \text{ geeft } v = 0,18 \cdot 6^2 + 2,4 \cdot 6 = 20,88$$

$$\text{De procentuele toename is } \frac{20,88 - 12,48}{12,48} \cdot 100\% \approx 67,3\%.$$

$$\text{b } 90 \text{ km/u} = \frac{90}{3,6} \text{ m/s} = 25 \text{ m/s}$$

$$v = 25 \text{ geeft } 0,18t^2 + 2,4t = 25$$

$$0,18t^2 + 2,4t - 25 = 0$$

$$D = 2,4^2 - 4 \cdot 0,18 \cdot -25 = 23,76$$

$$t = \frac{-2,4 + \sqrt{23,76}}{0,36} \vee t = \frac{-2,4 - \sqrt{23,76}}{0,36}$$

$$t = 6,87\dots \vee t = -20,20\dots$$

Dus na ongeveer 6,9 seconden is de snelheid gelijk aan 90 km/u.

$$\text{c } t = 8 \text{ geeft } s = 0,06 \cdot 8^3 + 1,2 \cdot 8^2 = 107,52 \text{ en } v = 0,18 \cdot 8^2 + 2,4 \cdot 8 = 30,72$$

$$\frac{300 - 107,52}{30,72} = 6,26\dots, \text{ dus na } 8 + 6,26\dots \approx 14,3 \text{ seconden heeft de motor}$$

300 meter afgelegd.

3 Meetkunde

3.1 Berekeningen in driehoeken

Bladzijde 104

V1 Van $\triangle ABC$ zijn de overstaande rechthoekszijde van $\angle A$ en de schuine zijde bekend. Dus gebruik je de sinus om $\angle A$ te berekenen.

V2 Van $\triangle ABC$ zijn $\angle A$ en de aanliggende rechthoekszijde van $\angle A$ bekend. Dus gebruik je de cosinus om de schuine zijde AB te berekenen.

Bladzijde 105

V3 $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$ geeft $\angle A \approx 31,0^\circ$

$\sin(\angle D) = \frac{EF}{DE} = \frac{8}{11}$ geeft $\angle D \approx 46,7^\circ$

$\cos(\angle I) = \frac{HI}{GI} = \frac{4}{10}$ geeft $\angle I \approx 66,4^\circ$

V4 $\cos(\angle C) = \frac{AC}{BC}$ geeft $\cos(38^\circ) = \frac{AC}{17}$, dus $AC = 17 \cos(38^\circ) \approx 13,4$.

$\tan(\angle E) = \frac{DF}{DE}$ geeft $\tan(55^\circ) = \frac{DF}{5}$, dus $DF = 5 \tan(55^\circ) \approx 7,1$.

$\sin(\angle G) = \frac{HI}{GH}$ geeft $\sin(40^\circ) = \frac{7}{GH}$, dus $GH = \frac{7}{\sin(40^\circ)} \approx 10,9$.

Bladzijde 106

1 a Van $\triangle ABC$ zijn $\angle A$ en de aanliggende rechthoekszijde van $\angle A$ bekend. Dus gebruik je de tangens om BC te berekenen.

$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB}$ geeft $\tan(30^\circ) = \frac{BC}{6}$, dus $BC = 6 \tan(30^\circ) \approx 3,464$.

b Van $\triangle BCD$ zijn $\angle D$ en de overstaande rechthoekszijde van $\angle D$ bekend. Dus gebruik je de tangens om BD te berekenen.

c $\tan(\angle BDC) = \frac{BC}{BD}$ geeft $\tan(40^\circ) = \frac{3,46\dots}{BD}$, dus $BD = \frac{3,46\dots}{\tan(40^\circ)} \approx 4,13$.

Bladzijde 107

2 In $\triangle ABC$ is $\tan(28^\circ) = \frac{4}{AB}$, dus $AB = \frac{4}{\tan(28^\circ)} = 7,52\dots$

$BM = \frac{1}{2}AB = 3,76\dots$

In $\triangle BCM$ is $\tan(\angle BMC) = \frac{4}{3,76\dots}$, dus $\angle BMC \approx 46,8^\circ$.

3 $\angle BDC = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

In $\triangle BCD$ is $\sin(70^\circ) = \frac{BC}{5}$, dus $BC = 5 \sin(70^\circ)$.

In $\triangle ABC$ is $\sin(\angle A) = \frac{5 \sin(70^\circ)}{10}$, dus $\angle A = 28,02\dots^\circ$.

$\angle ACD = 180^\circ - 110^\circ - 28,02\dots^\circ \approx 42,0^\circ$

4 $AB = 2BM$

In $\triangle ABC$ is $\tan(40^\circ) = \frac{BC}{AB}$, dus $BC = AB \tan(40^\circ) = 2BM \tan(40^\circ)$.

In $\triangle BCM$ is $\tan(\angle BMC) = \frac{BC}{BM} = \frac{2BM \tan(40^\circ)}{BM} = 2 \tan(40^\circ)$.

Dus $\angle BMC \approx 59,2^\circ$.

Bladzijde 108

- 5** $\angle AED = \angle BAE = 70^\circ$ (Z-hoeken) en $\angle BEC = \angle ABE = 50^\circ$ (Z-hoeken)

In $\triangle ADE$ is $\tan(70^\circ) = \frac{AD}{DE}$, dus $AD = DE \cdot \tan(70^\circ)$.

In $\triangle BCE$ is $\tan(50^\circ) = \frac{BC}{CE} = \frac{BC}{DE \cdot p}$, dus $BC = DE \cdot p \tan(50^\circ)$.

$BC = AD$, dus $DE \cdot p \tan(50^\circ) = DE \cdot \tan(70^\circ)$

$$p = \frac{\tan(70^\circ)}{\tan(50^\circ)} \approx 2,31$$

- 6** In $\triangle BCN$ is $\tan(25^\circ) = \frac{BN}{BC}$, dus $BN = BC \tan(25^\circ)$.

In $\triangle BCM$ is $\tan(\angle MCB) = \frac{BM}{BC} = \frac{2BN}{BC} = \frac{2BC \tan(25^\circ)}{BC} = 2 \tan(25^\circ)$, dus $\angle BCM = 43,00 \dots^\circ$.

In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle ACB) = \frac{AB}{BC} = \frac{4BN}{BC} = \frac{4BC \tan(25^\circ)}{BC} = 4 \tan(25^\circ)$, dus $\angle ACB = 61,80 \dots^\circ$.

Dus $\angle ACM = 61,80 \dots^\circ - 43,00 \dots^\circ \approx 18,8^\circ$.

- V5** **a** $\angle E$ in $\triangle CDE$ is gelijk aan $\angle B$ in $\triangle ABC$.
 $\angle C$ in $\triangle CDE$ is gelijk aan $\angle C$ in $\triangle ABC$.
b $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

Bladzijde 109

- V6** $\left. \begin{array}{l} \angle ABC = \angle EBD \\ \angle BAC = \angle BED \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle EBD$

$$\frac{AB}{BE} \mid \frac{BC}{BD} \mid \frac{AC}{DE} \text{ geeft } \frac{AB}{4} \mid \frac{9}{6} \mid \frac{5}{DE}$$

$$AB = \frac{9 \cdot 4}{6} = 6 \text{ en } DE = \frac{5 \cdot 6}{9} = 3\frac{1}{3}$$

- V7** $\left. \begin{array}{l} \angle ACB = \angle DCE \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle BAC = \angle EDC \text{ (Z hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DEC$

$$\frac{AB}{DE} \mid \frac{BC}{CE} \mid \frac{AC}{CD} \text{ geeft } \frac{7}{4} \mid \frac{6}{CE} \mid \frac{5}{CD}$$

$$CD = \frac{5 \cdot 4}{7} = 2\frac{6}{7} \text{ en } CE = \frac{6 \cdot 4}{7} = 3\frac{3}{7}$$

Bladzijde 110

- V8** $\angle A = 90^\circ$, dus $BC^2 = AB^2 + AC^2$
 $BC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$
 $BC = \sqrt{169} = 13$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ABC = \angle EBD \\ \angle BAC = \angle BED \text{ (rechte hoek)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle EBD$$

$$\frac{AB}{BE} \mid \frac{BC}{BD} \mid \frac{AC}{DE} \text{ geeft } \frac{12}{BE} \mid \frac{13}{8} \mid \frac{5}{DE}$$

$$DE = \frac{5 \cdot 8}{13} = 3\frac{1}{13}$$

$$BE = \frac{12 \cdot 8}{13} = 7\frac{5}{13}, \text{ dus } CE = 13 - 7\frac{5}{13} = 5\frac{8}{13}.$$

- 7** Omdat AC niet gegeven is.

Bladzijde 111

- 8** a $\left. \begin{array}{l} \angle ABC = \angle PQC \text{ (rechte hoek)} \\ \angle ACB = \angle PCQ \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle PQC$
 b $KM = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$

9 $\triangle ACD \sim \triangle ABE$ geeft $\frac{CD}{BE} = \frac{AC}{AB}$

Stel $AB = x$, dan is $AC = x + 6$.

$$\frac{20}{12,5} = \frac{x+6}{x} \text{ geeft } 20x = 12,5(x+6)$$

$$20x = 12,5x + 75$$

$$7,5x = 75$$

$$x = 10$$

Dus $AB = 10$ en $AC = 10 + 6 = 16$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft $AD = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$.

Bladzijde 112

10 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \text{ geeft } \frac{20}{8} = \frac{16}{DE}, \text{ dus } DE = \frac{8 \cdot 16}{20} = 6\frac{2}{5}.$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle BCD$ geeft $CD = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$.

$$\triangle DES \sim \triangle CBS \text{ geeft } \frac{DE}{BC} = \frac{DS}{CS}$$

Stel $DS = x$, dan is $CS = 20 - x$.

$$\frac{6\frac{2}{5}}{16} = \frac{x}{20-x} \text{ geeft } 16x = 6\frac{2}{5}(20-x)$$

$$16x = 128 - 6\frac{2}{5}x$$

$$22\frac{2}{5}x = 128$$

$$x = 5\frac{5}{7}$$

Dus $DS = 5\frac{5}{7}$.

11 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AC = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.

$$CD = 9 - 5 = 4$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CD} \text{ geeft } \frac{12}{DE} = \frac{9}{4}$$

$$DE = \frac{12 \cdot 4}{9} = 5\frac{1}{3}$$

$$\triangle ABS \sim \triangle EDS \text{ geeft } \frac{AB}{DE} = \frac{BS}{DS}$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABD$ geeft $BD = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

Stel $BS = x$, dan is $DS = 13 - x$.

$$\frac{12}{5\frac{1}{3}} = \frac{x}{13-x} \text{ geeft } 5\frac{1}{3}x = 12(13-x)$$

$$5\frac{1}{3}x = 156 - 12x$$

$$17\frac{1}{3}x = 156$$

$$x = 9$$

Dus $BS = 9$.

12 a $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ geeft $\frac{AB}{BD} \mid \frac{BC}{BE}$

Stel $BD = x$, dan is $AB = x + 7$.

$$\frac{x+7}{x} \mid \frac{10}{4} \text{ geeft } 10x = 4(x+7)$$

$$10x = 4x + 28$$

$$6x = 28$$

$$x = 4\frac{2}{3}$$

Dus $BD = 4\frac{2}{3}$ en $AB = 11\frac{2}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} AC^2 + BC^2 = 6^2 + 10^2 = 136 \\ AB^2 = (11\frac{2}{3})^2 = 136\frac{1}{9} \end{array} \right\} AB^2 > AC^2 + BC^2, \text{ dus } \angle ACB > 90^\circ.$$

Dus bewering III is waar.

b $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ geeft $\frac{AC}{DE} \mid \frac{BC}{BE}$ oftewel $\frac{6}{DE} \mid \frac{10}{4}$

Dit geeft $DE = \frac{4 \cdot 6}{10} = 2\frac{2}{5}$.

$$\triangle ACS \sim \triangle EDS \text{ geeft } \frac{AC}{DE} \mid \frac{AS}{ES} \text{ oftewel } \frac{6}{2\frac{2}{5}} \mid \frac{AS}{ES}$$

Hieruit volgt $AS : ES = 6 : 2\frac{2}{5} = 5 : 2$.

Dus AS is $\frac{5}{7}$ deel van AE .

13 $\triangle PQR \sim \triangle TQS$ geeft $\frac{PQ}{QT} \mid \frac{QR}{QS}$

Stel $QT = x$, dan is $QR = x + 4$.

$$\frac{32}{x} \mid \frac{x+4}{15} \text{ geeft } x(x+4) = 15 \cdot 32$$

$$x^2 + 4x = 480$$

$$x^2 + 4x - 480 = 0$$

$$(x-20)(x+24) = 0$$

$$x = 20 \vee x = -24$$

Dus $QT = 20$.

$$\frac{PQ}{QT} \mid \frac{PR}{ST} \text{ geeft } \frac{32}{20} \mid \frac{16}{ST}$$

Dus $ST = \frac{16 \cdot 20}{32} = 10$.

14 a De som van de hoeken in een driehoek is 180° , dus in $\triangle ABC$ is $\angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180^\circ$.

b In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.

$AM = CM$, dus $\triangle ACM$ is een gelijkbenige driehoek met $\angle A = \angle C_1$.

$BM = CM$, dus $\triangle BCM$ is een gelijkbenige driehoek met $\angle B = \angle C_2$.

c $\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180^\circ \\ \angle A = \angle C_1 \\ \angle B = \angle C_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_{12} = 180^\circ \\ \angle C_{12} + \angle C_{12} = 180^\circ \\ 2 \cdot \angle C_{12} = 180^\circ \\ \angle C_{12} = 90^\circ \end{array}$

Dus $\angle ACB = \angle C_{12} = 90^\circ$.

15 a $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ geeft $\frac{AB}{BM} \mid \frac{BC}{BN}$

$$\frac{2}{1} \mid \frac{BC}{BN}, \text{ dus } BC = 2BN.$$

$$\left. \begin{array}{l} BC = 2BN \\ BC = BN + CN \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2BN = BN + CN \\ BN = CN \end{array}$$

b De stelling van Pythagoras in $\triangle BMN$ geeft $BM^2 = BN^2 + MN^2$.

Invullen van $BN = CN$ geeft $BM^2 = CN^2 + MN^2$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle CMN$ geeft $CM^2 = CN^2 + MN^2$.

Hieruit volgt $BM^2 = CM^2$, dus $BM = CM$.

c $\left. \begin{array}{l} AM = BM \text{ (gegeven)} \\ BM = CM \text{ (zie b)} \end{array} \right\} A, B \text{ en } C \text{ liggen op de cirkel met middelpunt } M, \text{ straal } AM \text{ en middellijn } AB.$

Hiermee is de stelling bewezen.

Bladzijde 115

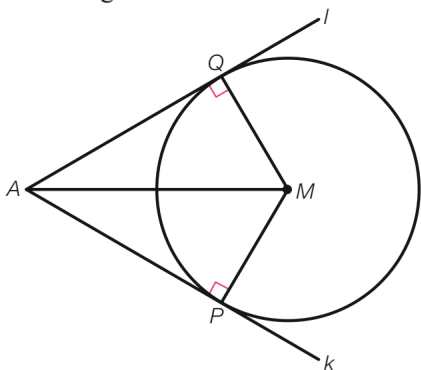
16 a De definitie zegt dat een raaklijn aan een cirkel één punt met de cirkel gemeenschappelijk heeft. Dus elk ander punt op de raaklijn ligt niet op de cirkel.

Dit kan alleen als voor elk punt P van de raaklijn geldt $MP > MA$.

b Voor elk punt P waarvoor $P \neq A$ geldt dat $MP > MA$. Dus MA is de kortste verbinding van punt M tot raaklijn l . Uit de definitie van de afstand van een punt tot een lijn volgt dat $MA \perp l$.

17 $\left. \begin{array}{l} l \text{ raakt de cirkel met middelpunt } M \text{ in } A, \text{ dus } AM \perp l. \\ l \text{ raakt de cirkel met middelpunt } N \text{ in } A, \text{ dus } AN \perp l. \end{array} \right\} \angle MAN = 180^\circ, \text{ dus } MN \perp l.$

18 Zie de figuur hieronder.



$MP \perp k$ en $MQ \perp l$, dus $\angle APM = \angle AQM = 90^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{In } \triangle APM \text{ is } AP^2 + MP^2 = AM^2. \\ \text{In } \triangle AQM \text{ is } AQ^2 + MQ^2 = AM^2. \end{array} \right\} \begin{array}{l} AP^2 + MP^2 = AQ^2 + MQ^2 \\ MP = MQ \text{ (straal cirkel)} \end{array} \left\} \begin{array}{l} AP^2 + MQ^2 = AQ^2 + MQ^2 \\ AP^2 = AQ^2 \\ AP = AQ \end{array}$$

19 Zie de schets hiernaast.

$\angle ACB = 90^\circ$ (stelling van Thales)

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $BC = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$.

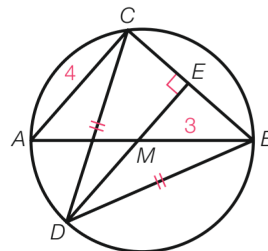
De hoogtelijn door D gaat door M en snijdt BC in E .

Uit $\triangle ABC \sim \triangle MBE$ volgt $\frac{AB}{BM} \mid \frac{BC}{BE} \mid \frac{AC}{EM}$ oftewel $\frac{6}{3} \mid \frac{2\sqrt{5}}{BE} \mid \frac{4}{ME}$.

Dit geeft $BE = \frac{2\sqrt{5} \cdot 3}{6} = \sqrt{5}$ en $EM = \frac{4 \cdot 3}{6} = 2$.

$DE = 3 + 2 = 5$

De stelling van Pythagoras in $\triangle BDE$ geeft $BD = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 5^2} = \sqrt{30}$.



20 Zie de schets hiernaast.

$\angle MAP = 90^\circ$ (raaklijn aan een cirkel)

In $\triangle AMP$ is $\tan(\angle APM) = \frac{5}{10}$, dus $\angle APM = 26,56\dots^\circ$.

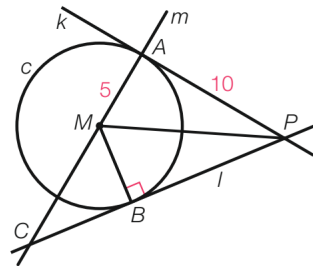
$BP = AP = 10$ (twee raaklijnen aan een cirkel vanuit punt)

In $\triangle BMP$ is $\tan(\angle BPM) = \frac{5}{10}$, dus $\angle BPM = 26,56\dots^\circ$.

Dus $\angle APB = 2 \cdot 26,56\dots^\circ = 53,13\dots^\circ$.

In $\triangle ACP$ is $\cos(53,13\dots^\circ) = \frac{10}{CP}$, dus $CP = \frac{10}{\cos(53,13\dots^\circ)} = 16,66\dots$

$BC = 16,66\dots - 10 \approx 6,67$



Bladzijde 116

21 Zie de schets hiernaast.

$PQ = AQ$ (twee raaklijnen aan een cirkel vanuit punt)

$PQ = BQ$ (twee raaklijnen aan een cirkel vanuit punt)

Dus ook $AQ = BQ$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle DMN$ geeft

$DM = \sqrt{8^2 - 2^2} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$.

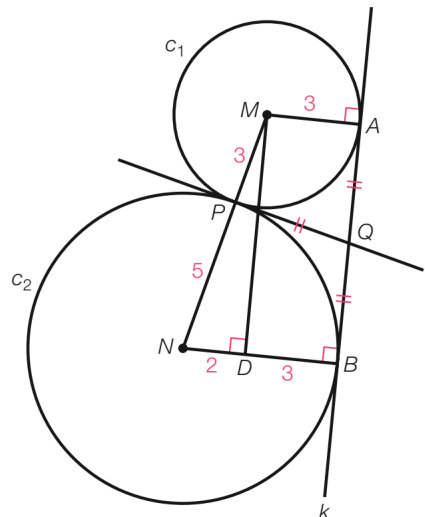
$\angle MAB = 90^\circ$ (raaklijn aan een cirkel),

$\angle NBA = 90^\circ$ (raaklijn aan een cirkel) en $\angle MDB = 90^\circ$,

dus $ABDM$ is een rechthoek met $DM = AB$.

$DM = AB = AQ + BQ = PQ + PQ = 2PQ$

Dit geeft $PQ = \frac{1}{2}DM = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{15} = \sqrt{15}$.



C1 In $\triangle ABC$ is $\sin(40^\circ) = \frac{BC}{10}$, dus $BC = 10 \sin(40^\circ)$ en $BM = \frac{1}{2}BC = 5 \sin(40^\circ)$

$\cos(40^\circ) = \frac{AB}{10}$, dus $AB = 10 \cos(40^\circ)$

In $\triangle ABM$ is $\tan(\angle BAM) = \frac{BM}{AB} = \frac{5 \sin(40^\circ)}{10 \cos(40^\circ)}$

$\angle BAM \approx 22,8^\circ$

C2 $\triangle ADE \sim \triangle CBE$ geeft $\frac{AD}{BC} = \frac{AE}{CE}$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

Stel $AE = x$, dan is $CE = 13 - x$.

$\frac{7}{5} = \frac{x}{13-x}$ geeft $5x = 7(13-x)$
 $5x = 91 - 7x$
 $12x = 91$
 $x = 7\frac{7}{12}$

Dus $AE = 7\frac{7}{12}$.

Bladzijde 117

C3 a Punt F ligt op c_1 .

b $\angle S = 90^\circ$

c De hoek tussen k en AM_3 is 90° .

d De hoek tussen l en M_4M_5 is 90° .

e BP is even lang als CP .

3.2 Lengte, omtrek en oppervlakte

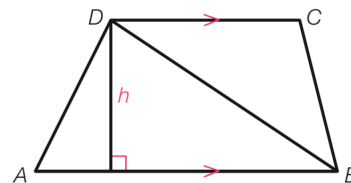
Bladzijde 118

- 22 Zie de schets hiernaast.

$$O(\triangle ABD) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h$$

$$O(\triangle BCD) = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot h$$

$$\begin{aligned} O(ABCD) &= O(\triangle ABD) + O(\triangle BCD) \\ &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h + \frac{1}{2} \cdot CD \cdot h \\ &= \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot h \end{aligned}$$



- 23 a $\frac{70}{360} = \frac{7}{36}$ deel

- b De lengte van de rode boog PQ is $\frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 = \frac{10}{360} \pi \alpha = \frac{1}{36} \pi \alpha$.

- 24 a $O(\text{blauwe sector}) = \frac{70}{360} \cdot \pi \cdot 6^2 = 7\pi$

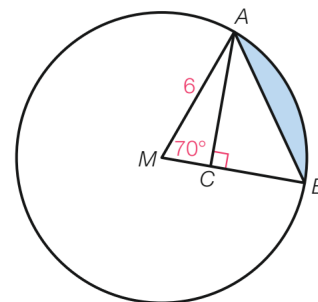
- b Zie de schets hiernaast.

$$\text{In } \triangle ACM \text{ is } \sin(70^\circ) = \frac{AC}{6}$$

$$AC = 6 \sin(70^\circ) = 5,63\dots$$

$$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5,63\dots = 16,91\dots$$

$$O(\text{blauwe segment}) = 7\pi - 16,91\dots \approx 5,08$$



Bladzijde 119

- 25 In $\triangle BCD$ is $\cos(50^\circ) = \frac{BD}{7}$, dus $BD = 7 \cos(50^\circ)$.

$$AD = 6 - 7 \cos(50^\circ)$$

$$\text{De stelling van Pythagoras in } \triangle ACD \text{ geeft } AC = \sqrt{(6 - 7 \cos(50^\circ))^2 + (7 \sin(50^\circ))^2} = 5,56\dots$$

$$\text{De omtrek is } \frac{50}{360} \cdot 2\pi \cdot 4 + 3 + 2 + 5,56\dots \approx 14,06.$$

- 26 a Zie de schets hiernaast.

$$\text{In } \triangle ADE \text{ is } \sin(60^\circ) = \frac{DE}{4}, \text{ dus } DE = 4 \sin(60^\circ).$$

$$O(ABCD) = \frac{1}{2} (6 + 3) \cdot 4 \sin(60^\circ) \approx 15,59$$

- b $O(\text{blauwe gebied}) = 15,58\dots - \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 \approx 7,21$

- c Zie de schets hiernaast.

$$\text{In } \triangle ADE \text{ is } \cos(60^\circ) = \frac{AE}{4}, \text{ dus } AE = 4 \cos(60^\circ) = 2.$$

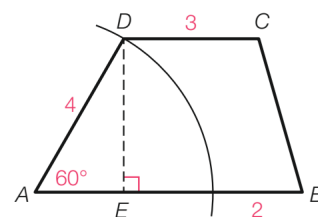
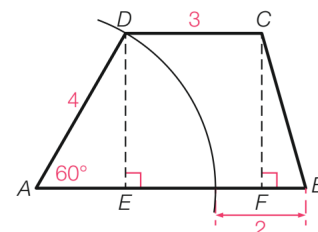
$$BF = AB - AE - EF = 6 - 2 - 3 = 1$$

$$CF = DE = 4 \sin(60^\circ)$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle CBF$ geeft

$$BC = \sqrt{(4 \sin(60^\circ))^2 + 1^2} = \sqrt{13}.$$

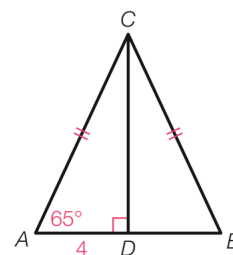
$$\text{De omtrek is } \frac{60}{360} \cdot 2\pi \cdot 4 + 3 + 2 + \sqrt{13} \approx 12,79.$$



27 a Zie de schets hiernaast.

In $\triangle ACD$ is $\tan(65^\circ) = \frac{CD}{4}$, dus $CD = 4 \tan(65^\circ)$.

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \tan(65^\circ) \approx 34,31$$

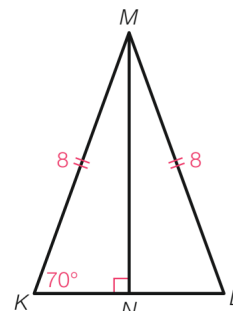


b Zie de schets hiernaast.

In $\triangle KMN$ is $\sin(70^\circ) = \frac{MN}{8}$, dus $MN = 8 \sin(70^\circ)$ en

$$\cos(70^\circ) = \frac{KN}{8}, \text{ dus } KN = 8 \cos(70^\circ).$$

$$O(\triangle KLM) = \frac{1}{2} \cdot 16 \cos(70^\circ) \cdot 8 \sin(70^\circ) \approx 20,57$$

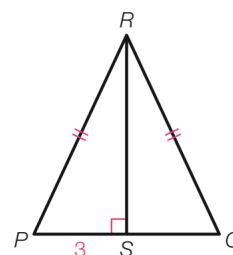


c Zie de schets hiernaast.

$$\left. \begin{aligned} O(\triangle PQR) &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot RS = 3 \cdot RS \\ O(\triangle PQR) &= 20 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3RS &= 20 \\ RS &= 6\frac{2}{3} \end{aligned}$$

In $\triangle PRS$ is $\tan(\angle P) = \frac{6\frac{2}{3}}{3}$, dus $\angle P \approx 65,8^\circ$.

$$\angle Q = \angle P \approx 65,8^\circ \text{ en } \angle R = 180^\circ - 2 \cdot 65,77\dots^\circ \approx 48,5^\circ$$



28 a Zie de schets hiernaast.

$$AM = BM = CM = 5$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ geeft $DM = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (5 + 3) = 32$$

De oppervlakte van het blauwe gebied is $\pi \cdot 5^2 - 32 = 25\pi - 32$.

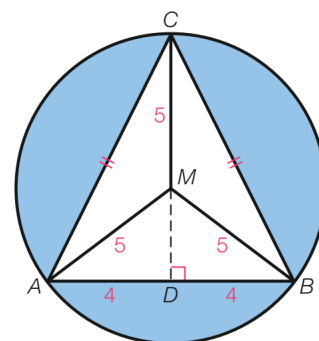
b $O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$

In $\triangle ADM$ is $\sin(\angle AMD) = \frac{AD}{AM} = \frac{4}{5}$, dus $\angle AMD = 53,13\dots^\circ$.

$$\angle AMB = 2 \cdot 53,13\dots^\circ = 106,26\dots^\circ$$

De gevraagde oppervlakte is $\frac{106,26\dots}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 - 12 \approx 11,18$.

De gevraagde omtrek is $8 + \frac{106,26\dots}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 \approx 17,27$.



29 $\angle ACB = 90^\circ$ (stelling van Thales), dus de stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft

$$BC = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

$$O(\text{blauwe gebied}) = O(\text{halve cirkel}) - O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{21} = 12\frac{1}{2}\pi - 4\sqrt{21}$$

Zie de schets hiernaast.

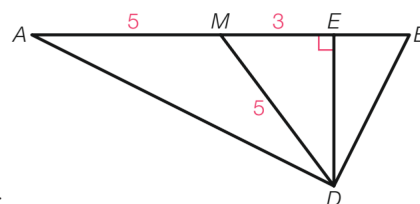
De stelling van Pythagoras in $\triangle DEM$ geeft $DE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

$$O(\text{gele gebied}) = O(\text{halve cirkel}) - O(\triangle ABD) =$$

$$12\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 12\frac{1}{2}\pi - 20$$

Het verschil tussen de oppervlaktes is

$$12\frac{1}{2}\pi - 4\sqrt{21} - (12\frac{1}{2}\pi - 20) = 12\frac{1}{2}\pi - 4\sqrt{21} - 12\frac{1}{2}\pi + 20 = 20 - 4\sqrt{21}.$$



- 30** Zie de schets hiernaast.
Stel $CD = x$, dan is $AB = 2x$.

$$\triangle PRC \sim \triangle ABC \text{ geeft } \frac{PR}{AB} \mid \frac{CP}{AC}$$

$$\frac{PR}{AB} = \frac{CP}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } PR = \frac{1}{2}AB = x.$$

$$\triangle BRQ \sim \triangle BCD \text{ geeft } \frac{BQ}{BD} \mid \frac{QR}{CD}$$

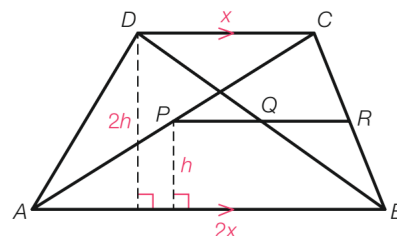
$$\frac{QR}{CD} = \frac{BQ}{BD} = \frac{1}{2}, \text{ dus } QR = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}x.$$

$$PQ = PR - QR = x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$$

$$O(ABQP) = \frac{1}{2}(2x + \frac{1}{2}x) \cdot h = \frac{5}{4}xh$$

$$O(ABCD) = \frac{1}{2}(2x + x) \cdot 2h = 3xh$$

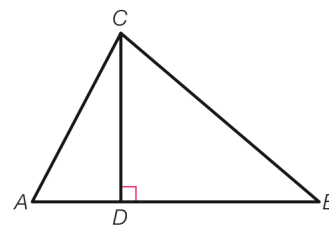
$$\text{Dus } O(ABQP) = \frac{\frac{5}{4}xh}{3xh} = \frac{5}{12} \text{ deel van } O(ABCD).$$



- 31** Zie de schets hiernaast.

$$\text{In } \triangle ACD \text{ is } \sin(\angle A) = \frac{CD}{AC}, \text{ dus } CD = AC \cdot \sin(\angle A).$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$$



Bladzijde 121

- 32** **a** $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CE$
b $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$
c Uit a en b volgt $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$.
Dus $AB \cdot CE = BC \cdot AD$.

Bladzijde 122

- 33** **a** $O(ABCM) = 2 \cdot O(\triangle ABM) = 2 \cdot 18 \sin(72^\circ) \approx 34,2$
b $AF = \sqrt{6^2 - \left(\frac{24}{\sqrt{41}}\right)^2} = 4,68\dots$

De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle ABF$ geeft

$$AB \cdot FH = AF \cdot BF$$

$$6 \cdot FH = 4,68\dots \cdot \frac{24}{\sqrt{41}}$$

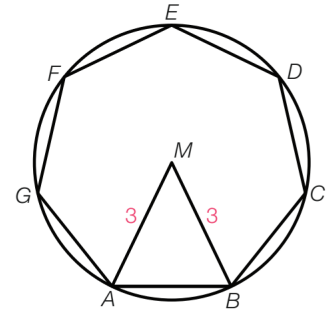
$$FH = \frac{4,68\dots \cdot \frac{24}{\sqrt{41}}}{6} \approx 2,9$$

- 34 a Zie de schets hiernaast.

$$\angle AMB = \frac{360^\circ}{7}$$

$$O(ABCDEFG) = 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{7}\right) \approx 24,6$$

$$\left. \begin{aligned} b \quad O(ABCDEFG) &= 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{7}\right) = 3\frac{1}{2}r^2 \sin\left(\frac{360^\circ}{7}\right) \\ O(ABCDEFG) &= 100 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3\frac{1}{2}r^2 \sin\left(\frac{360^\circ}{7}\right) &= 100 \\ r^2 &= \frac{100}{3\frac{1}{2} \sin\left(\frac{360^\circ}{7}\right)} \\ r &\approx 6,045 \end{aligned}$$



Bladzijde 123

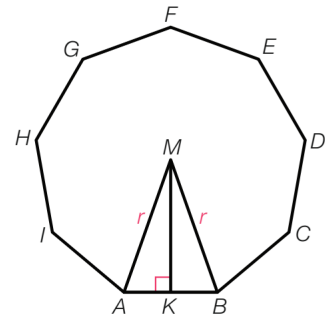
- 35 Zie de schets hiernaast.

$$\angle AMB = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ, \text{ dus } \angle AMK = 20^\circ.$$

$$\left. \begin{aligned} O(ABCDEFGHI) &= 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin(40^\circ) = 4\frac{1}{2}r^2 \sin(40^\circ) \\ O(ABCDEFGHI) &= 144 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 4\frac{1}{2}r^2 \sin(40^\circ) &= 144 \\ r^2 &= \frac{144}{4\frac{1}{2} \sin(40^\circ)} \\ r &= 7,055... \end{aligned}$$

$$\text{In } \triangle AKM \text{ is } \sin(20^\circ) = \frac{AK}{7,055...}, \text{ dus } AK = 7,055... \cdot \sin(20^\circ) = 2,413...$$

Dus de omtrek van de negenhoek is $18 \cdot 2,413... \approx 43,4$.



- 36 Zie de schets hiernaast.

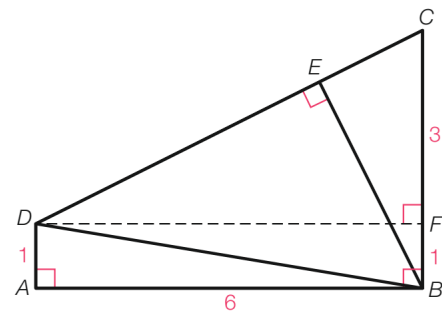
$$CD = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle BCD$ geeft

$$CD \cdot BE = BC \cdot DF$$

$$3\sqrt{5} \cdot BE = 4 \cdot 6$$

$$BE = \frac{4 \cdot 6}{3\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$



- 37 Zie de schets hiernaast.

$$\left. \begin{aligned} O(ABCD) &= AB \cdot CF = 8CF \\ O(ABCD) &= 32 \end{aligned} \right\} CF = 4$$

$$BF = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

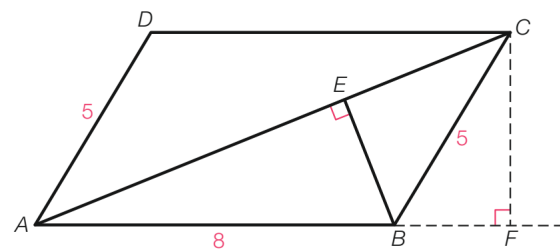
$$AC = \sqrt{11^2 + 4^2} = \sqrt{137}$$

De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle ABC$ geeft

$$AC \cdot BE = AB \cdot CF$$

$$\sqrt{137} \cdot BE = 8 \cdot 4$$

$$BE = \frac{8 \cdot 4}{\sqrt{137}} = \frac{32}{\sqrt{137}}$$



- 38 $O(ABCDEF) = O(\triangle ABM) + O(\triangle BCM) + O(\triangle CDM) + O(\triangle DEM) + O(\triangle EFM) + O(\triangle AFM)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin(35^\circ) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin(45^\circ) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin(55^\circ) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin(65^\circ) + \\ &\quad \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin(75^\circ) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin(85^\circ) \\ &= 8 \cdot (\sin(35^\circ) + \sin(45^\circ) + \sin(55^\circ) + \sin(65^\circ) + \sin(75^\circ) + \sin(85^\circ)) \approx 39,75 \end{aligned}$$

39 $O(\text{blauwe gebied}) = O(\triangle ABP) + O(\triangle BCP) + O(\triangle CDP) + O(\triangle DEP) + O(\triangle EFP) + O(\triangle FGP) + O(\triangle GHP)$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 \cdot \sin(\angle APB) + \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 12 \cdot \sin(\angle BPC) + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 \cdot \sin(\angle CPD) +$$

$$\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 \cdot \sin(\angle DPE) + \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 \cdot \sin(\angle EPF) + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 \cdot \sin(\angle FPG) +$$

$$\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 17 \cdot \sin(\angle GPH)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (10 \cdot 11 + 11 \cdot 12 + 12 \cdot 13 + 13 \cdot 14 + 14 \cdot 15 + 15 \cdot 16 + 16 \cdot 17) \cdot \sin(\angle APB)$$

$$= 651 \sin(\angle APB)$$

$O(\text{blauwe gebied}) = 500$, dus $651 \sin(\angle APB) = 500$

$$\sin(\angle APB) = \frac{500}{651}$$

$$\angle APB \approx 50,2^\circ$$

Bladzijde 124

C4 $O(ABCD) = \frac{1}{2}(4+3) \cdot AD$
 $O(ABCD) = 14$ $\left. \begin{array}{l} 3\frac{1}{2} \cdot AD = 14 \\ AD = 4 \end{array} \right\}$

$O(DEFG) = O(ABCD) - O(\triangle AEF) - O(BCGF) = 14 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 4$

C5 a Zie de schets hiernaast.

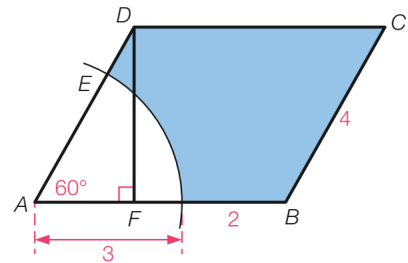
In $\triangle ADF$ is $\sin(60^\circ) = \frac{DF}{4}$, dus $DF = 4 \sin(60^\circ)$.

$O(ABCD) = 5 \cdot 4 \sin(60^\circ) \approx 17,32$

b $O(\text{blauwe gebied}) = 17,32 \dots - \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 3^2 \approx 12,61$

c $DE = 4 - 3 = 1$

De omtrek is $\frac{60}{360} \cdot 2\pi \cdot 3 + 1 + 5 + 4 + 2 \approx 15,14$.



C6 $\triangle ABD$ is $\tan(\angle ADB) = \frac{4}{5}$, dus $\angle ADB = 38,65 \dots^\circ$.

$\angle BDC = 70^\circ - 38,65 \dots^\circ = 31,34 \dots^\circ$

$BD = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

$O(ABCD) = O(\triangle ABD) + O(\triangle BCD) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{41} \cdot \sqrt{41} \cdot \sin(31,34 \dots^\circ) \approx 20,66$

C7 Zie de schets hiernaast.

$AF = 7 - 3 = 4$ en $BF = CD = 5$

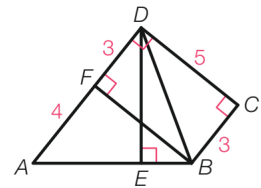
$AB = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle ABD$ geeft

$AB \cdot DE = AD \cdot BF$

$\sqrt{41} \cdot DE = 7 \cdot 5$

$DE = \frac{35}{\sqrt{41}}$



3.3 Vergelijkingen in de meetkunde

Bladzijde 126

v9 a $3\sqrt{6} + 6\sqrt{6} = 9\sqrt{6}$

b $\sqrt{3} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{30}$

c $\frac{6\sqrt{14}}{2\sqrt{7}} = 3\sqrt{2}$

d $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

e $\sqrt{3\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$

$$\mathbf{f} \quad \sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\mathbf{g} \quad \frac{6}{5\sqrt{2}} = \frac{6}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{10} = \frac{3}{5}\sqrt{2}$$

$$\mathbf{h} \quad \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{10}$$

$$\mathbf{i} \quad (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$$

$$\mathbf{j} \quad \sqrt{4\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{25}{6}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} = \frac{5}{6}\sqrt{6}$$

$$\mathbf{k} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9}\sqrt{27} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9}\sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\mathbf{l} \quad \sqrt{\frac{5}{8}} + \sqrt{90} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{10} = \frac{\sqrt{40}}{8} + 3\sqrt{10} = \frac{1}{8}\sqrt{4} \cdot \sqrt{10} + 3\sqrt{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10} + 3\sqrt{10} = 3\frac{1}{4}\sqrt{10}$$

40

$$\mathbf{a} \quad \frac{14}{3 + \sqrt{2}} = \frac{14}{3 + \sqrt{2}} \cdot \frac{3 - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{14(3 - \sqrt{2})}{9 - 2} = \frac{14(3 - \sqrt{2})}{7} = 2(3 - \sqrt{2}) = 6 - 2\sqrt{2}$$

$$\mathbf{b} \quad \frac{4}{\sqrt{3} - 1} = \frac{4}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{4(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \frac{4(\sqrt{3} + 1)}{2} = 2(\sqrt{3} + 1) = 2 + 2\sqrt{3}$$

$$\mathbf{c} \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{\sqrt{15} - 3}{2} = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{15}$$

$$\mathbf{d} \quad \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{12\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3} = 4\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 8 + 4\sqrt{10}$$

$$\mathbf{e} \quad \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{2 - 5} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{-3} = -\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{10}$$

$$\mathbf{f} \quad \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \sqrt{6}} \cdot \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2} + \sqrt{6})}{8 - 6} = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

Bladzijde 127

41

$$\mathbf{a} \quad x\sqrt{5} + 2 = \sqrt{10}$$

$$x\sqrt{5} = -2 + \sqrt{10}$$

$$x = \frac{-2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \sqrt{2} = \frac{-2\sqrt{5}}{5} + \sqrt{2} = -\frac{2}{5}\sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$\mathbf{b} \quad \frac{1}{2}x\sqrt{2} + \sqrt{10} = 0$$

$$\frac{1}{2}x\sqrt{2} = -\sqrt{10}$$

$$x\sqrt{2} = -2\sqrt{10}$$

$$x = \frac{-2\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{5}$$

$$\mathbf{c} \quad 7 - x\sqrt{3} = \sqrt{2}$$

$$x\sqrt{3} = 7 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{7 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{7 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{6}}{3} = 2\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

42 a $4x - 2x\sqrt{3} = \sqrt{6}$

$$x(4 - 2\sqrt{3}) = \sqrt{6}$$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{4 - 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}(4 + 2\sqrt{3})}{16 - 12} = \frac{4\sqrt{6} + 2\sqrt{18}}{4} = \frac{4\sqrt{6} + 6\sqrt{2}}{4} = \sqrt{6} + 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

b $x\sqrt{5} + x\sqrt{2} = \sqrt{10}$

$$x(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \sqrt{10}$$

$$x = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{\sqrt{50} - \sqrt{20}}{3} = \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{3} = 1\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{5}$$

c $2x\sqrt{2} - 10 = x\sqrt{3}$

$$2x\sqrt{2} - x\sqrt{3} = 10$$

$$x(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 10$$

$$x = \frac{10}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{10}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{10(2\sqrt{2} + \sqrt{3})}{8 - 3} = 2(2\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

43 a $2x\sqrt{6} - 6 = 4\sqrt{6}$

$$2x\sqrt{6} = 6 + 4\sqrt{6}$$

$$x = \frac{6 + 4\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{6 + 4\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6} + 24}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{6} + 2$$

b $x\sqrt{3} + 6 = 2x$

$$2x - x\sqrt{3} = 6$$

$$x(2 - \sqrt{3}) = 6$$

$$x = \frac{6}{2 - \sqrt{3}} = \frac{6}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{6(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 6(2 + \sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3}$$

c $3\sqrt{2} + x\sqrt{2} = 4\sqrt{10}$

$$x\sqrt{2} = 4\sqrt{10} - 3\sqrt{2}$$

$$x = \frac{4\sqrt{10} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{5} - 3$$

d $3x\sqrt{2} - 2x = 6$

$$x(3\sqrt{2} - 2) = 6$$

$$x = \frac{6}{3\sqrt{2} - 2} = \frac{6}{3\sqrt{2} - 2} \cdot \frac{3\sqrt{2} + 2}{3\sqrt{2} + 2} = \frac{6(3\sqrt{2} + 2)}{18 - 4} = \frac{18\sqrt{2} + 12}{14} = 1\frac{2}{7}\sqrt{2} + \frac{6}{7}$$

44 $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ (stelling van Thales)

$$\left. \begin{aligned} O(\triangle ABC) &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot 4\sqrt{5} = BC \cdot 2\sqrt{5} \\ O(\triangle ABC) &= 20 \end{aligned} \right\} BC \cdot 2\sqrt{5} = 20$$

$$BC = \frac{20}{2\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AB = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 10$.

Stel $BD = x$, dan is $AD = 3x$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABD$ geeft $AD^2 + BD^2 = AB^2$

$$(3x)^2 + x^2 = 10^2$$

$$10x^2 = 100$$

$$x^2 = 10$$

$$x = \sqrt{10}$$

Dus $AD = 3\sqrt{10}$.

- 45 a** De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft $CD = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{3}$.
b $a = 7$, dus $AC = 2 \cdot 7 = 14$.

Bladzijde 128

- 46** $\triangle ABC$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus $AC = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$.

$\triangle DEF$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek, dus $DF = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ en $DE = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 9$.

$\triangle KMN$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek, dus $MN = \frac{10}{2} = 5$ en $KN = 5\sqrt{3}$.

$\triangle LMN$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus $LN = 5$.

Dus $KL = 5\sqrt{3} + 5$.

$\triangle QRS$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus $QS = 3\sqrt{2}$.

$\triangle PQS$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek, dus $PQ = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{6}$.

Bladzijde 129

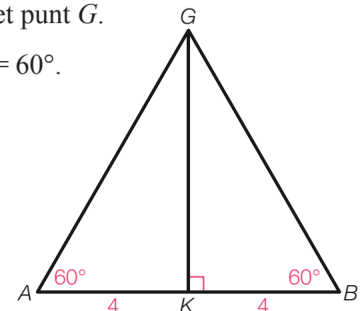
- 47** Noem het middelpunt van de omschreven cirkel van zeshoek $ABCDEF$ het punt G .

$\triangle ABG$ is gelijkbenig met $\angle AGB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, dus $\angle A = \angle B = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.

Hieruit volgt dat $\triangle ABG$ hiernaast een gelijkzijdige driehoek is.

$\triangle AGK$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek, dus $GK = 4\sqrt{3}$.

$O(ABCDEF) = 6 \cdot O(\triangle ABG) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$



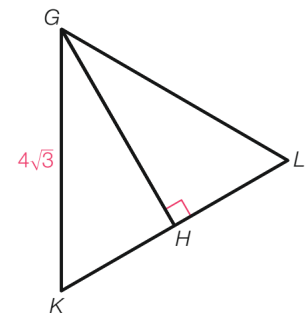
Ook van zeshoek $KLMNOP$ is G het middelpunt van de omschreven cirkel.

Hieruit volgt dat $\triangle GKL$ hiernaast een gelijkzijdige driehoek is met $KL = 4\sqrt{3}$ en $HK = 2\sqrt{3}$.

$\triangle GHK$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek, dus $GH = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6$.

$O(KLMNOP) = 6 \cdot O(\triangle GKL) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 72\sqrt{3}$

Dus $O(\text{blauwe gebied}) = O(ABCDEF) - O(KLMNOP) = 96\sqrt{3} - 72\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$.

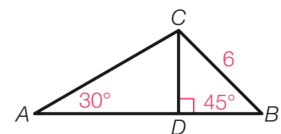


- 48** Zie de schets hiernaast.

$\triangle BCD$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus $BD = CD = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

$\triangle ACD$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek, dus $AD = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} = 3\sqrt{6}$.

$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}) \cdot 3\sqrt{2} = 4\frac{1}{2}\sqrt{12} + 9 = 4\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} + 9 = 9\sqrt{3} + 9$



- 49 a** $\triangle ABE$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus $AB = \sqrt{2}$ en $AE = 1$.

$\triangle BDE$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek, dus $DE = \sqrt{3}$ en $BD = 2$.

$AD = 1 + \sqrt{3}$

$\triangle ACD$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus $AC = CD = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

$BC = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

In $\triangle BCD$ is $\sin(15^\circ) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

- b** In $\triangle BCD$ is $\cos(15^\circ) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6} = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

- 50** a $\triangle BCD$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus $CD = x$.
 $\triangle ACD$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek, dus $AD = \sqrt{3} \cdot x = x\sqrt{3}$.

b
$$\begin{cases} AB = x\sqrt{3} + x \\ AB = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{3} + x = 10 \\ x(\sqrt{3} + 1) = 10 \end{cases}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3} + 1} = \frac{10}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{10(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} = \frac{10\sqrt{3} - 10}{2} = 5\sqrt{3} - 5$$

c $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (5\sqrt{3} - 5) = -25 + 25\sqrt{3}$

Bladzijde 130

- 51** Zie de schets hiernaast.

Stel $AD = x$.

$\triangle ACD$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek, dus $CD = x\sqrt{3}$.

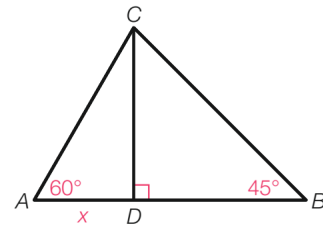
$\triangle BCD$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus $BD = x\sqrt{3}$.

$$\begin{cases} AB = x + x\sqrt{3} \\ AB = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + x\sqrt{3} = 12 \\ x(1 + \sqrt{3}) = 12 \end{cases}$$

$$x = \frac{12}{1 + \sqrt{3}} = \frac{12}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{12(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{12 - 12\sqrt{3}}{-2} = -6 + 6\sqrt{3}$$

$CD = (-6 + 6\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = -6\sqrt{3} + 18$

$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (-6\sqrt{3} + 18) = 108 - 36\sqrt{3}$



- 52** Zie de schets hiernaast.

Stel $AP = x$.

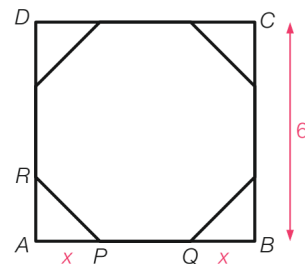
$\triangle APR$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus $PR = x\sqrt{2}$.

Het is een regelmatige achthoek, dus $PQ = PR = x\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} AB = x + x\sqrt{2} + x = 2x + x\sqrt{2} \\ AB = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + x\sqrt{2} = 6 \\ x(2 + \sqrt{2}) = 6 \end{cases}$$

$$x = \frac{6}{2 + \sqrt{2}} = \frac{6}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{6(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = \frac{12 - 6\sqrt{2}}{2} = 6 - 3\sqrt{2}$$

De zijde van de achthoek is $x\sqrt{2} = (6 - 3\sqrt{2})\sqrt{2} = -6 + 6\sqrt{2}$.



Alternatieve uitwerking

Stel $PR = x$.

$\triangle APR$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus $AP = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{2}$.

Het is een regelmatige achthoek, dus $PQ = PR = x$.

$$\begin{cases} AB = \frac{1}{2}x\sqrt{2} + x + \frac{1}{2}x\sqrt{2} = x + x\sqrt{2} \\ AB = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + x\sqrt{2} = 6 \\ x(1 + \sqrt{2}) = 6 \end{cases}$$

$$x = \frac{6}{1 + \sqrt{2}} = \frac{6}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{6(1 - \sqrt{2})}{1 - 2} = \frac{6(1 - \sqrt{2})}{-1} = -6 + 6\sqrt{2}$$

De zijde van de achthoek is $-6 + 6\sqrt{2}$.

- 53** $\triangle ABC$ is gelijkzijdig, dus $\angle A = 60^\circ$.

Stel $AP = x$, dan is ook $BQ = x$.

$\triangle APS$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek, dus $PS = x\sqrt{3}$.

$PQRS$ is een vierkant, dus $PQ = PS = x\sqrt{3}$.

$$\begin{cases} AB = x + x\sqrt{3} + x = 2x + x\sqrt{3} \\ AB = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + x\sqrt{3} = 8 \\ x(2 + \sqrt{3}) = 8 \end{cases}$$

$$x = \frac{8}{2 + \sqrt{3}} = \frac{8}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{8(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 8(2 - \sqrt{3}) = 16 - 8\sqrt{3}$$

$PQ = x\sqrt{3} = (16 - 8\sqrt{3})\sqrt{3} = 16\sqrt{3} - 24$

54 Zie de schets hiernaast.

Stel $BP = BQ = CQ = CR = x$.

Dan is $AB = x + 1$ en $BC = 2x$.

$\triangle ABC$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus $BC = (x + 1) \cdot \sqrt{2}$.

Dus $2x = (x + 1) \cdot \sqrt{2}$

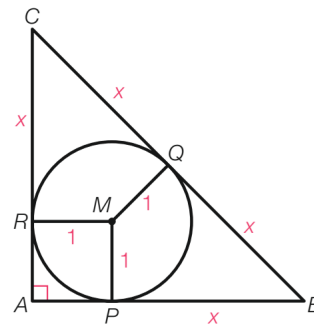
$$2x = x\sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$2x - x\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$x(2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1$$

De omtrek is $4(\sqrt{2} + 1) + 2 = 6 + 4\sqrt{2}$.



55 Zie de schets hiernaast.

$\angle BAE = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ$, dus $\triangle ABE$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek.

Hieruit volgt dat $BE = \frac{4}{2} = 2$ en $AE = 2\sqrt{3}$.

$\angle BCE = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$, dus $\triangle BCE$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek.

Hieruit volgt dat $CE = 2$ en $BC = 2\sqrt{2}$.

$$AC = AE + CE = 2\sqrt{3} + 2$$

Stel $AF = x$.

In $\triangle ADF$ is $\angle DAF = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, dus $\triangle ADF$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek.

Hieruit volgt dat $DF = x\sqrt{3}$.

$\angle DCF = \angle BCE = 45^\circ$, dus $\triangle CDF$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek.

Hieruit volgt dat $CF = x\sqrt{3}$.

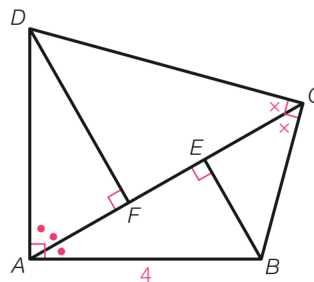
$$\left. \begin{array}{l} AC = AF + CF = x + x\sqrt{3} \\ AC = 2\sqrt{3} + 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + x\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2 \\ x(1 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} + 2 \end{array}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3} + 2}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} + 2}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3} + 2)(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{2\sqrt{3} - 6 + 2 - 2\sqrt{3}}{-2} = 2$$

In $\triangle ADF$ is $AD = 2 \cdot 2 = 4$.

In $\triangle CDF$ is $CD = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$.

De omtrek is $4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 4 = 8 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$.



Bladzijde 131

56 a Zie de schets hiernaast.

$$AB = CD = x + 6$$

$$AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}x + 3$$

b De stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ geeft $(\frac{1}{2}x + 3)^2 + x^2 = 6^2$

$$\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 + x^2 = 36$$

$$1\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$$

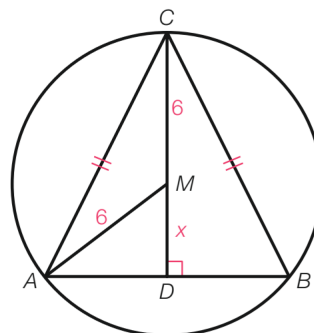
c $1\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$

$$5x^2 + 12x - 108 = 0$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 5 \cdot -108 = 2304, \text{ dus } \sqrt{D} = 48$$

$$x = \frac{-12 \pm 48}{10} = 3\frac{3}{5} \vee x = \frac{-12 - 48}{10} = -6$$

DM is niet negatief, dus $AB = 3\frac{3}{5} + 6 = 9\frac{3}{5}$.



57 Zie de schets hiernaast.

M is het middelpunt van de cirkel.

Dus $AM = CM = 6$.

Stel $AD = x$, dan is $CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$ en $DM = 3x - 6$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ geeft $x^2 + (3x - 6)^2 = 6^2$

$$x^2 + 9x^2 - 36x + 36 = 36$$

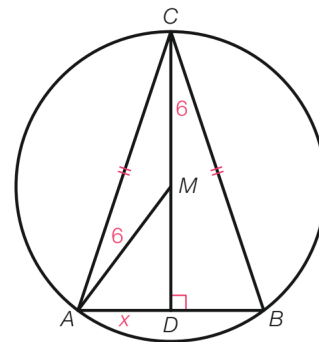
$$10x^2 - 36x = 0$$

$$x(10x - 36) = 0$$

$$x = 0 \vee 10x = 36$$

$$x = 0 \vee x = 3\frac{3}{5}$$

Dus $AB = 2 \cdot 3\frac{3}{5} = 7\frac{1}{5}$.



Bladzijde 132

58 Zie de schets hiernaast.

Stel $AP = DP = PQ = BQ = CQ = x$.

$$PR = \frac{13 - x}{2} = 6\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle APR$ geeft

$$(6\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x)^2 + 3^2 = x^2$$

$$42\frac{1}{4} - 6\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + 9 = x^2$$

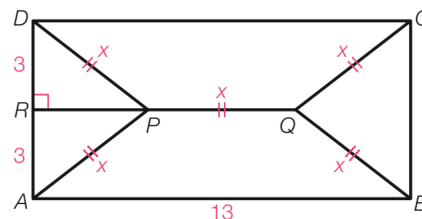
$$\frac{3}{4}x^2 + 6\frac{1}{2}x - 51\frac{1}{4} = 0$$

$$3x^2 + 26x - 205 = 0$$

$$D = 26^2 - 4 \cdot 3 \cdot -205 = 3136, \text{ dus } \sqrt{D} = 56$$

$$x = \frac{-26 + 56}{6} = 5 \vee x = \frac{-26 - 56}{6} = -13\frac{2}{3}$$

Dus $AP = 5$.



59 Zie de schets hiernaast.

M is het middelpunt van de cirkel met straal r .

$MR \perp BC$ en $MS \perp CD$ (raaklijn aan een cirkel)

Er geldt $PQ = 11 - 2 - r = 9 - r$ en $MQ = 11 - 3 - r = 8 - r$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle MPQ$ geeft

$$(9 - r)^2 + (8 - r)^2 = r^2$$

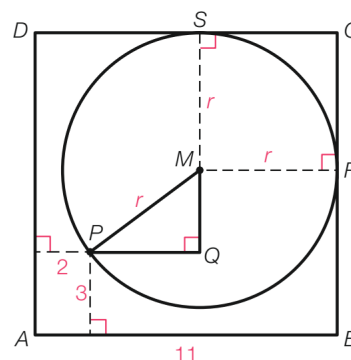
$$81 - 18r + r^2 + 64 - 16r + r^2 = r^2$$

$$r^2 - 34r + 145 = 0$$

$$(r - 5)(r - 29) = 0$$

$$r = 5 \vee r = 29$$

Er moet gelden $r < 5\frac{1}{2}$, dus de straal van de cirkel die door P gaat en de zijden BC en CD raakt is 5.



60 Zie de schets hiernaast.

Stel de breedte van de rechthoek is x , dan is de lengte $4x$.

Er geldt $MR = x + 10$, $PR = 2x$ en $MP = 20$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle MPR$ geeft $(2x)^2 + (x + 10)^2 = 20^2$

$$4x^2 + x^2 + 20x + 100 = 400$$

$$5x^2 + 20x - 300 = 0$$

$$x^2 + 4x - 60 = 0$$

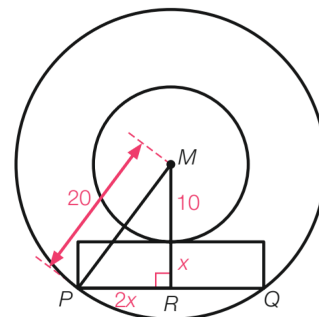
$$(x - 6)(x + 10) = 0$$

$$x = 6 \vee x = -10$$

De oppervlakte van de rechthoek is $6 \cdot 24 = 144$.

De oppervlakte van het gebied tussen de cirkels is $\pi \cdot 20^2 - \pi \cdot 10^2 = 300\pi$.

De rechthoek neemt $\frac{144}{300\pi} \cdot 100\% \approx 15,3\%$ van het gebied tussen de cirkels in beslag.



- 61** Zie de schets hiernaast.
 MB en MC staan loodrecht op de zijden van het vierkant (raaklijn aan een cirkel).

Er geldt $BM = r$, $AB = 2 - r$ en $AM = r + 1$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABM$ geeft

$$(2 - r)^2 + r^2 = (r + 1)^2$$

$$4 - 4r + r^2 + r^2 = r^2 + 2r + 1$$

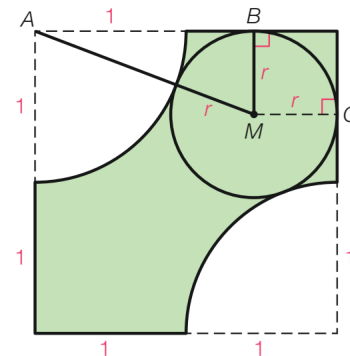
$$r^2 - 6r + 3 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 24, \text{ dus } \sqrt{D} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$r = \frac{6 + 2\sqrt{6}}{2} \vee r = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{2}$$

$$r = 3 + \sqrt{6} \vee r = 3 - \sqrt{6}$$

Er moet gelden dat $r < 1$, dus de straal van de grootste cirkel die nog in het overgebleven stuk past is $3 - \sqrt{6}$.



- 62** Zie de schets hiernaast.

Stel $EF = x$, dan geldt $AE = \frac{5-x}{2} = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$.

Dus $AF = AE + EF = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + x = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle AFG$ geeft $(2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x)^2 + x^2 = 5^2$

$$6\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + x^2 = 25$$

$$1\frac{1}{4}x^2 + 2\frac{1}{2}x - 18\frac{3}{4} = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x - 3)(x + 5) = 0$$

$$x = 3 \vee x = -5$$

Dus $EF = 3$.

Zie de schets hiernaast.

Q is het middelpunt van de kleine cirkel en P is het midden van AB en EF .

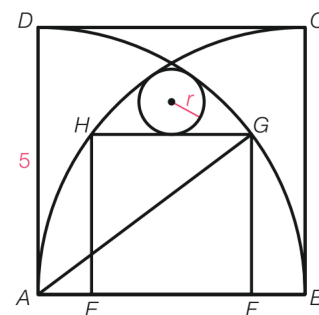
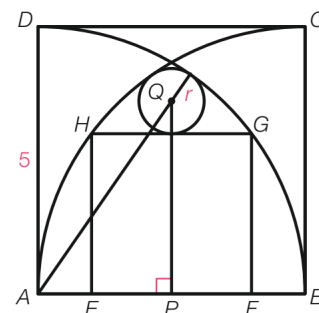
Er geldt dat $AQ = 5 - r$ en $PQ = 3 + r$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle APQ$ geeft $(2\frac{1}{2})^2 + (3 + r)^2 = (5 - r)^2$

$$6\frac{1}{4} + 9 + 6r + r^2 = 25 - 10r + r^2$$

$$16r = 9\frac{3}{4}$$

$$r = \frac{39}{64}$$



Bladzijde 133

C8 a $6 - x\sqrt{2} = \sqrt{10}$

$$x\sqrt{2} = 6 - \sqrt{10}$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \sqrt{5} = \frac{6\sqrt{2}}{2} - \sqrt{5} = 3\sqrt{2} - \sqrt{5}$$

b $\frac{1}{2}x\sqrt{2} = x - 2$

$$x - \frac{1}{2}x\sqrt{2} = 2$$

$$x(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = 2$$

$$x = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{2(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})}{1 - \frac{1}{2}} = 4(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2}$$

C9 Zie de schets hiernaast.

Stel $AD = x$.

$\triangle ACD$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek, dus $CD = x\sqrt{3}$.

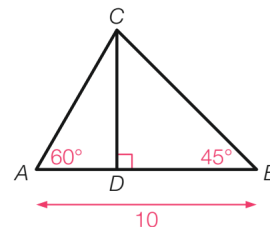
$\triangle BCD$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus $BD = x\sqrt{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} AB = x + x\sqrt{3} \\ AB = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + x\sqrt{3} = 10 \\ x(1 + \sqrt{3}) = 10 \end{array}$$

$$x = \frac{10}{1 + \sqrt{3}} = \frac{10}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{10(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} = -5(1 - \sqrt{3}) = -5 + 5\sqrt{3}$$

$$CD = (-5 + 5\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = -5\sqrt{3} + 15$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (-5\sqrt{3} + 15) = 75 - 25\sqrt{3}$$



C10 Zie de schets hiernaast.

B is het middelpunt van de cirkel met straal r .

Nu geldt $BE = r - 8$ en $EP = r - 1$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle BEP$ geeft $(r - 8)^2 + (r - 1)^2 = r^2$

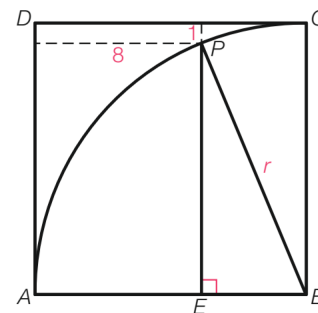
$$r^2 - 16r + 64 + r^2 - 2r + 1 = r^2$$

$$r^2 - 18r + 65 = 0$$

$$(r - 5)(r - 13) = 0$$

$$r = 5 \vee r = 13$$

Er moet gelden dat $r > 8$, dus $r = 13$ en dus de lengte van de zijde van het vierkant is 13.



3.4 De sinusregel en de cosinusregel

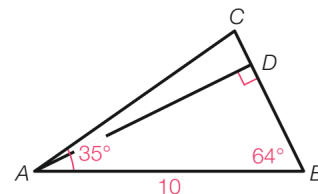
Bladzijde 134

63 $\angle C = 180^\circ - 35^\circ - 64^\circ = 81^\circ$

Zie de schets hiernaast met hoogtelijn AD .

In $\triangle ABD$ is $\sin(64^\circ) = \frac{AD}{10}$, dus $AD = 10 \sin(64^\circ)$.

In $\triangle ACD$ is $\sin(81^\circ) = \frac{AD}{AC}$, dus $AC = \frac{10 \sin(64^\circ)}{\sin(81^\circ)} \approx 9,10$.



Bladzijde 135

64 $\angle C = 180^\circ - 50^\circ - 75^\circ = 55^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{AB}{\sin(55^\circ)} = \frac{6,8}{\sin(50^\circ)} = \frac{AC}{\sin(75^\circ)}$

$$AB = \frac{6,8 \sin(55^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 7,3$$

$$AC = \frac{6,8 \sin(75^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 8,6$$

65 $\angle B = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{AB}{\sin(60^\circ)} = \frac{BC}{\sin(70^\circ)} = \frac{6}{\sin(50^\circ)}$

$$AB = \frac{6 \sin(60^\circ)}{\sin(50^\circ)} = 6,78\dots$$

$$BC = \frac{6 \sin(70^\circ)}{\sin(50^\circ)} = 7,36\dots$$

De omtrek van $\triangle ABC$ is $6 + 6,78\dots + 7,36\dots \approx 20,14$.

66 a In $\triangle ACD$ is $\sin(\alpha) = \frac{CD}{b}$, dus $CD = b \sin(\alpha)$.

In $\triangle BCD$ is $\sin(\beta) = \frac{CD}{a}$, dus $CD = a \sin(\beta)$.

b Uit a volgt $a \sin(\beta) = b \sin(\alpha)$.

Het linker- en rechterlid delen door $\sin(\alpha) \sin(\beta)$ geeft $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.

c In $\triangle ABE$ is $\sin(\beta) = \frac{AE}{c}$, dus $AE = c \sin(\beta)$.

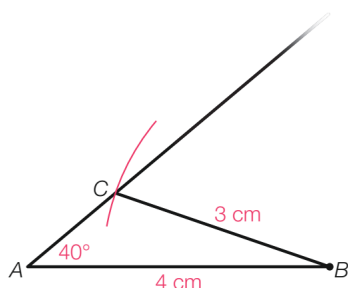
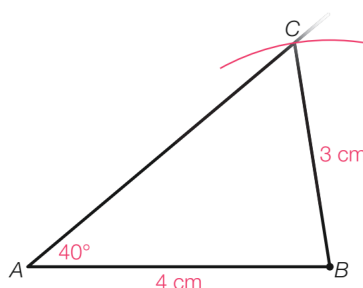
In $\triangle ACE$ is $\sin(\gamma) = \frac{AE}{b}$, dus $AE = b \sin(\gamma)$.

d Uit c volgt $b \sin(\gamma) = c \sin(\beta)$.

Het linker- en rechterlid delen door $\sin(\beta) \sin(\gamma)$ geeft $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$.

e
$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \\ \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \end{array} \right\} \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

67 a Zie de figuren hieronder.



b De sinusregel geeft $\frac{3}{\sin(40^\circ)} = \frac{4}{\sin(\angle C)}$

$$\sin(\angle C) = \frac{4 \sin(40^\circ)}{3} = 0,857\dots$$

$$\angle C \approx 59,0^\circ$$

Je vindt hiermee $\angle C$ van de rechterfiguur.

Bladzijde 136

68 a In $\triangle ACD$ is $\sin(\angle DAC) = \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{CD}{b}$, dus $CD = b \sin(180^\circ - \alpha)$.

b In $\triangle BCD$ is $\sin(\beta) = \frac{CD}{a}$, dus $CD = a \sin(\beta)$.

c Uit a en b volgt $a \sin(\beta) = b \sin(180^\circ - \alpha)$.

Het linker- en rechterlid delen door $\sin(180^\circ - \alpha) \sin(\beta)$ geeft $\frac{a}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.

Bladzijde 137

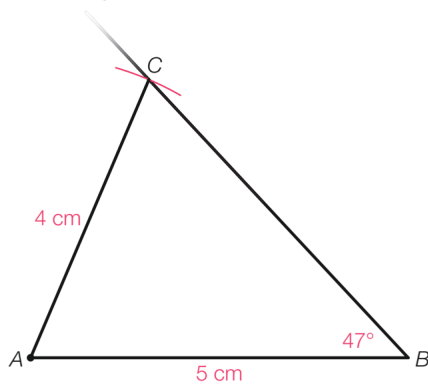
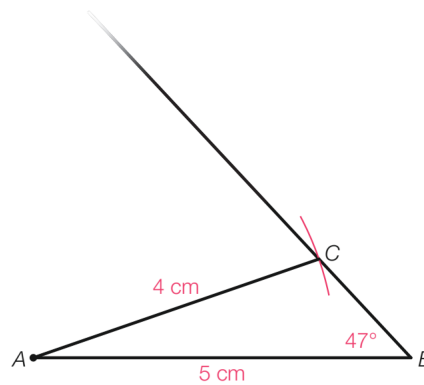
69 $\angle M = 180^\circ - 20^\circ - 110^\circ = 50^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{KL}{\sin(50^\circ)} = \frac{5,3}{\sin(20^\circ)} = \frac{KM}{\sin(110^\circ)}$

$$KL = \frac{5,3 \sin(50^\circ)}{\sin(20^\circ)} \approx 11,9$$

$$KM = \frac{5,3 \sin(110^\circ)}{\sin(20^\circ)} \approx 14,6$$

70 a Zie de figuren hieronder.



- b** De sinusregel in $\triangle ABC$ met de scherpe hoek C geeft $\frac{4}{\sin(47^\circ)} = \frac{5}{\sin(\angle C)}$
 $\sin(\angle C) = \frac{5 \sin(47^\circ)}{4}$
 $\angle C \approx 66,1^\circ$

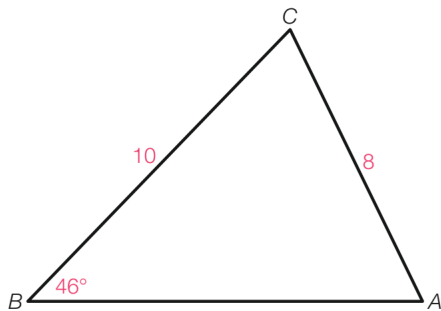
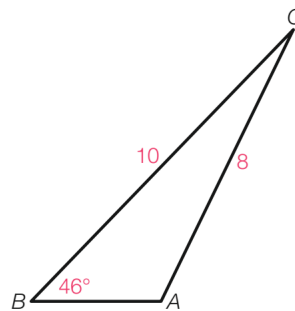
$$\angle A = 180^\circ - 47^\circ - 66,09...^\circ \approx 66,9^\circ$$

Verder geeft de sinusregel $\frac{4}{\sin(47^\circ)} = \frac{BC}{\sin(66,90...^\circ)}$
 $BC = \frac{4 \sin(66,90...^\circ)}{\sin(47^\circ)} \approx 5,0$

- c** Voor $\triangle ABC$ met de scherpe hoek C geldt $66,09...^\circ$, dus voor $\triangle ABC$ met de stompe hoek C geldt $\angle C = 180^\circ - 66,09...^\circ \approx 113,9^\circ$.
 $\angle A = 180^\circ - 47^\circ - 113,90...^\circ \approx 19,1^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{4}{\sin(47^\circ)} = \frac{BC}{\sin(19,09...^\circ)}$
 $BC = \frac{4 \sin(19,09...^\circ)}{\sin(47^\circ)} \approx 1,8$

71 a



De sinusregel in de scherphoekige driehoek geeft $\frac{8}{\sin(46^\circ)} = \frac{10}{\sin(\angle A)}$
 $\sin(\angle A) = \frac{10 \sin(46^\circ)}{8}$
 $\angle A \approx 64,0^\circ$

In de stomphoekige driehoek is $\angle A = 180^\circ - 64,04...^\circ \approx 116,0^\circ$.

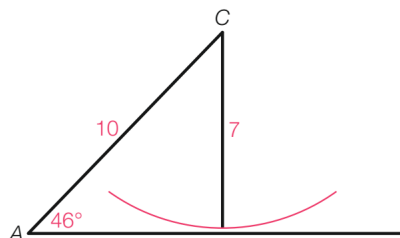
- b** In de scherphoekige driehoek is $\angle C = 180^\circ - 46^\circ - 64,04...^\circ \approx 69,95...^\circ$.

De sinusregel in de scherphoekige driehoek geeft $\frac{8}{\sin(46^\circ)} = \frac{AB}{\sin(69,95...^\circ)}$
 $AB = \frac{8 \sin(69,95...^\circ)}{\sin(46^\circ)} \approx 10,4$

In de stomphoekige driehoek is $\angle C = 180^\circ - 46^\circ - 115,95...^\circ \approx 18,04...^\circ$.

De sinusregel in de stomphoekige driehoek geeft $\frac{8}{\sin(46^\circ)} = \frac{AB}{\sin(18,04...^\circ)}$
 $AB = \frac{8 \sin(18,04...^\circ)}{\sin(46^\circ)} \approx 3,4$

c



De cirkel met middelpunt C en straal 7 snijdt het andere been van hoek B niet.

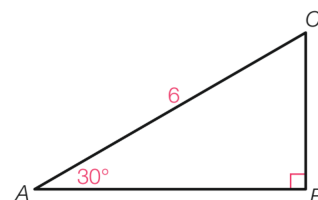
72 a Zie de schets hiernaast.

$$\sin(30^\circ) = \frac{BC}{6}, \text{ dus } BC = 6 \sin(30^\circ) = 3.$$

Als er geen driehoek ABC mogelijk is, dan is $BC < 3$.

b Als er precies één driehoek ABC mogelijk is, dan is $BC = 3 \vee BC \geq 6$.

c Als er twee driehoeken ABC mogelijk zijn, dan is $3 < BC < 6$.



Bladzijde 138

73 Zie de schets hiernaast.

$$\text{De sinusregel in } \triangle AB_2C \text{ geeft } \frac{7}{\sin(52^\circ)} = \frac{8}{\sin(\angle AB_2C)}$$

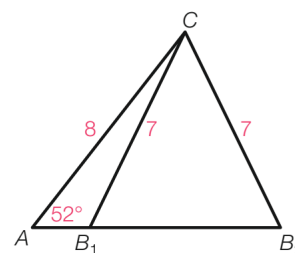
$$\sin(\angle AB_2C) = \frac{8 \sin(52^\circ)}{7}$$

$$\angle AB_2C = 64,23\dots^\circ$$

$$\angle B_1CB_2 = 180^\circ - 2 \cdot 64,23\dots^\circ = 51,53\dots^\circ$$

$$\text{De sinusregel in } \triangle B_1B_2C \text{ geeft } \frac{7}{\sin(64,23\dots^\circ)} = \frac{B_1B_2}{\sin(51,53\dots^\circ)}$$

$$B_1B_2 = \frac{7 \sin(51,53\dots^\circ)}{\sin(64,23\dots^\circ)} \approx 6,09$$



74 $\angle ADC = 180^\circ - 62^\circ - 48^\circ = 70^\circ$

$$\text{De sinusregel in } \triangle ACD \text{ geeft } \frac{AC}{\sin(70^\circ)} = \frac{6}{\sin(62^\circ)}$$

$$AC = \frac{6 \sin(70^\circ)}{\sin(62^\circ)} = 6,38\dots$$

$$\angle B = 180^\circ - 62^\circ - 48^\circ - 25^\circ = 45^\circ$$

$$\text{De sinusregel in } \triangle ABC \text{ geeft } \frac{6,38\dots}{\sin(45^\circ)} = \frac{BC}{\sin(62^\circ)} = \frac{AB}{\sin(48^\circ + 25^\circ)}$$

$$BC = \frac{6,38\dots \cdot \sin(62^\circ)}{\sin(45^\circ)} = 7,97\dots$$

$$AB = \frac{6,38\dots \cdot \sin(73^\circ)}{\sin(45^\circ)} = 8,63\dots$$

De omtrek van $\triangle ABC$ is $6,38\dots + 7,97\dots + 8,63\dots \approx 23,0$.

75 $\angle BCD = 180^\circ - 110^\circ - 40^\circ = 30^\circ$

De sinusregel in $\triangle BCD$ geeft $\frac{CD}{\sin(40^\circ)} = \frac{4}{\sin(30^\circ)}$

$$CD = \frac{4 \sin(40^\circ)}{\sin(30^\circ)} = 5,14\dots$$

$\angle ACD = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$

De sinusregel in $\triangle ACD$ geeft $\frac{5,14\dots}{\sin(\angle CAD)} = \frac{5}{\sin(20^\circ)}$

$$\sin(\angle CAD) = \frac{5,14\dots \cdot \sin(20^\circ)}{5}$$

$$\angle CAD = 20,59\dots^\circ$$

$\angle ADC = 180^\circ - 20,59\dots^\circ - 20^\circ = 139,40\dots^\circ$

De sinusregel in $\triangle ACD$ geeft $\frac{AC}{\sin(139,40\dots^\circ)} = \frac{5}{\sin(20^\circ)}$

$$AC = \frac{5 \sin(139,40\dots^\circ)}{\sin(20^\circ)} \approx 9,51$$

76 a De sinusregel geeft $\frac{4}{\sin(\angle A)} = \frac{5}{\sin(\angle B)} = \frac{6}{\sin(\angle C)}$.

Bij elke combinatie van twee breuken zijn er twee onbekenden.

Je kunt $\angle A$ dus niet met de sinusregel berekenen.

b De sinusregel geeft $\frac{QR}{\sin(50^\circ)} = \frac{5}{\sin(\angle Q)} = \frac{6}{\sin(\angle R)}$.

Bij elke combinatie van twee breuken zijn er twee onbekenden.

Je kunt QR dus niet met de sinusregel berekenen.

77 a De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft $AD^2 + CD^2 = AC^2$
 $x^2 + h^2 = b^2$

b De stelling van Pythagoras in $\triangle BCD$ geeft $BC^2 = BD^2 + CD^2$

$$a^2 = (c - x)^2 + h^2$$

$$a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$$

c Vervangen van $x^2 + h^2$ door b^2 in $a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$ geeft $a^2 = c^2 - 2cx + b^2$
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

d In $\triangle ACD$ is $\cos(\alpha) = \frac{x}{b}$, dus $x = b \cos(\alpha)$.

e Vervangen van x door $b \cos(\alpha)$ in $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ geeft $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.

Bladzijde 140

78 a De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft $AD^2 + CD^2 = AC^2$
 $x^2 + h^2 = b^2$

De stelling van Pythagoras in $\triangle BCD$ geeft $BC^2 = BD^2 + CD^2$

$$a^2 = (c + x)^2 + h^2$$

$$a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2$$

b Vervangen van $x^2 + h^2$ door b^2 in $a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2$ geeft
 $a^2 = c^2 + 2cx + b^2$ oftewel $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$.

c In $\triangle ACD$ is $\angle CAD = 180^\circ - \alpha$ en $\cos(\angle CAD) = \frac{AD}{AC}$.

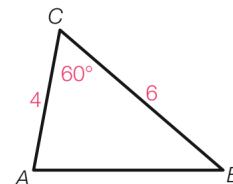
Dus $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x}{b}$ oftewel $x = b \cos(180^\circ - \alpha)$.

d $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$
 $x = b \cos(180^\circ - \alpha) = -b \cos(\alpha)$ } $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$

Dus de cosinusregel geldt ook voor stomphoekige driehoeken.

79 a Zie de schets hiernaast.

De cosinusregel geeft $AB^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(60^\circ) = 28$
 $AB \approx 5,29$



b Zie de schets hiernaast.

De cosinusregel geeft $5^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos(\angle D)$

$$25 = 85 - 84 \cos(\angle D)$$

$$84 \cos(\angle D) = 60$$

$$\cos(\angle D) = \frac{60}{84}$$

$$\angle D \approx 44,4^\circ$$

De cosinusregel geeft $6^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos(\angle E)$

$$36 = 74 - 70 \cos(\angle E)$$

$$70 \cos(\angle E) = 38$$

$$\cos(\angle E) = \frac{38}{70}$$

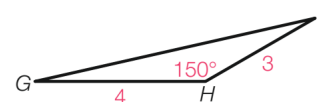
$$\angle E \approx 57,1^\circ$$

$$\angle F = 180^\circ - 44,41^\circ - 57,12^\circ \approx 78,5^\circ$$

c Zie de schets hiernaast.

De cosinusregel geeft $GI^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(150^\circ) = 45,78\dots$

$$GI \approx 6,77$$



d Zie de schets hiernaast.

De cosinusregel geeft $4^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(\angle P)$

$$16 = 74 - 70 \cos(\angle P)$$

$$70 \cos(\angle P) = 58$$

$$\cos(\angle P) = \frac{58}{70}$$

$$\angle P \approx 34,0^\circ$$

De cosinusregel geeft $7^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos(\angle Q)$

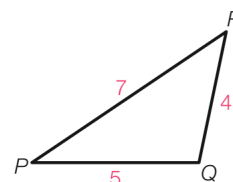
$$49 = 41 - 40 \cos(\angle Q)$$

$$40 \cos(\angle Q) = -8$$

$$\cos(\angle Q) = -\frac{8}{40}$$

$$\angle Q \approx 101,5^\circ$$

$$\angle R = 180^\circ - 101,53^\circ - 34,04^\circ \approx 44,4^\circ$$



- 80 a**
- De overstaande hoek en een andere hoek met zijn overstaande zijde.
 - De overstaande zijde en een andere zijde met zijn overstaande hoek.

- b** In het geval dat drie zijden zijn gegeven, kun je alle hoeken berekenen.
 In het geval dat twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven, kun je de overige zijde berekenen.

81 a De cosinusregel geeft $BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(35^\circ) = 23,46\dots$
 $BC \approx 4,8$

b $\angle B = 180^\circ - 35^\circ - 40^\circ = 105^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{AB}{\sin(40^\circ)} = \frac{BC}{\sin(35^\circ)} = \frac{8}{\sin(105^\circ)}$

$$AB = \frac{8 \sin(40^\circ)}{\sin(105^\circ)} \approx 5,3$$

$$BC = \frac{8 \sin(35^\circ)}{\sin(105^\circ)} \approx 4,8$$

c De sinusregel geeft $\frac{4}{\sin(35^\circ)} = \frac{5}{\sin(\angle C)}$

$$\sin(\angle C) = \frac{5 \sin(35^\circ)}{4}$$

$$\angle C = 45,80\dots^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 35^\circ - 45,80\dots^\circ = 99,19\dots^\circ$$

De cosinusregel geeft $AC^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos(99,19\dots^\circ) = 47,39\dots$

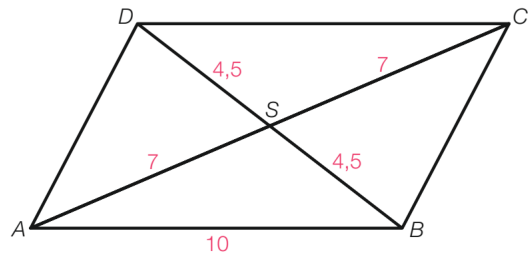
$$AC \approx 6,9$$

d $\angle B = 180^\circ - 35^\circ - 40^\circ = 105^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{5}{\sin(40^\circ)} = \frac{BC}{\sin(35^\circ)} = \frac{AC}{\sin(105^\circ)}$

$$BC = \frac{5 \sin(35^\circ)}{\sin(40^\circ)} \approx 4,5$$

$$AC = \frac{5 \sin(105^\circ)}{\sin(40^\circ)} \approx 7,5$$



82 a Zie de schets hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABS$ geeft

$$4,5^2 = 10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cos(\angle SAB)$$

$$20,25 = 149 - 140 \cos(\angle SAB)$$

$$140 \cos(\angle SAB) = 128,75$$

$$\cos(\angle SAB) = \frac{128,75}{140}$$

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $BC^2 = 10^2 + 14^2 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \frac{128,75}{140} = 38,5$

$$BC \approx 6,2$$

b $\cos(\angle SAB) = \frac{128,75}{140}$ geeft $\angle SAB = 23,12\dots^\circ$

$$O(ABCD) = 2 \cdot O(\triangle ABC) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 14 \cdot \sin(23,12\dots^\circ) \approx 55,0$$

83 De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $4^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \cos(\angle B)$

$$16 = 29 - 20 \cos(\angle B)$$

$$20 \cos(\angle B) = 13$$

$$\cos(\angle B) = \frac{13}{20}$$

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $AC^2 = 5^2 + (6\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{20} = 25$

$$AC = 5$$

Bladzijde 141

84 Zie de schets hiernaast.

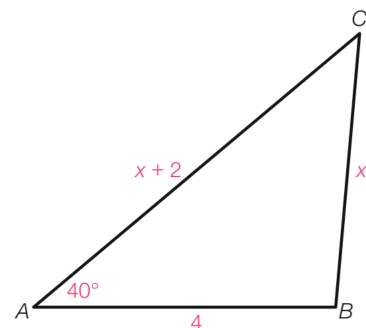
De cosinusregel geeft $x^2 = 4^2 + (x+2)^2 - 2 \cdot 4 \cdot (x+2) \cdot \cos(40^\circ)$

$$x^2 = 16 + (x+2)^2 - 8(x+2) \cos(40^\circ)$$

Invoeren van de formules $y = x^2$ en $y = 16 + (x+2)^2 - 8(x+2) \cos(40^\circ)$

en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 3,6381\dots$

Dus $BC \approx 3,638$ en $AC \approx 5,638$.



C11

a De sinusregel in $\triangle BCD$ geeft $\frac{BC}{\sin(80^\circ)} = \frac{4}{\sin(70^\circ)}$

$$BC = \frac{4 \sin(80^\circ)}{\sin(70^\circ)} = 4,19\dots$$

$$\angle ACB = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$$

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\frac{4,19\dots}{\sin(50^\circ)} = \frac{AB}{\sin(60^\circ)}$

$$AB = \frac{4,19\dots \cdot \sin(60^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 4,74$$

b De sinusregel in $\triangle PQ_1R$ geeft $\frac{7}{\sin(42^\circ)} = \frac{10}{\sin(\angle PQ_1R)}$

$$\sin(\angle PQ_1R) = \frac{10 \sin(42^\circ)}{7}$$

De GR geeft een hoek van $72,92\dots^\circ$, dus $\angle PQ_1R = 180^\circ - 72,92\dots^\circ = 107,07\dots^\circ$.

Hieruit volgt $\angle PRQ_1 = 180^\circ - 42^\circ - 107,07\dots^\circ \approx 30,9^\circ$.

C12

a Zie de schets hiernaast.

De cosinusregel geeft $BC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos(115^\circ) = 18,07\dots$

$$BC \approx 4,25$$

b Zie de schets hiernaast.

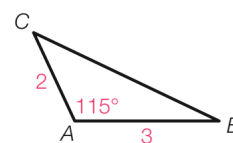
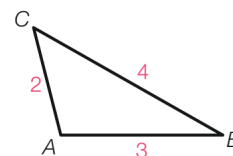
De cosinusregel geeft $4^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos(\angle A)$

$$16 = 13 - 12 \cos(\angle A)$$

$$12 \cos(\angle A) = -3$$

$$\cos(\angle A) = -\frac{3}{12}$$

$$\angle A \approx 104,5^\circ$$

**C13**

a Zie de schets hiernaast.

De cosinusregel geeft $BC^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos(140^\circ) = 173,54\dots$

$$BC \approx 13,2$$

b Zie de schets hiernaast.

De sinusregel geeft $\frac{6}{\sin(25^\circ)} = \frac{13}{\sin(\angle A)}$

$$\sin(\angle A) = \frac{13 \sin(25^\circ)}{6}$$

De GR geeft een hoek van $66,30\dots^\circ$.

$$\angle A = 180^\circ - 66,30\dots^\circ = 113,69\dots^\circ$$

Dus $\angle C = 180^\circ - 113,69\dots^\circ - 25^\circ \approx 41,3^\circ$.

c Zie de schets hiernaast.

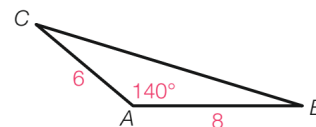
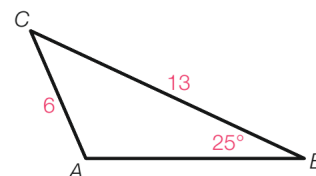
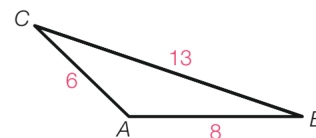
De cosinusregel geeft $13^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos(\angle A)$

$$169 = 100 - 96 \cos(\angle A)$$

$$96 \cos(\angle A) = -69$$

$$\cos(\angle A) = -\frac{69}{96}$$

$$\angle A \approx 136,0^\circ$$



Bladzijde 142

1 In $\triangle ABM$ is $\tan(28^\circ) = \frac{BM}{AB}$, dus $BM = AB \tan(28^\circ)$.

In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle BAC) = \frac{BC}{AB} = \frac{2BM}{AB} = \frac{2AB \tan(28^\circ)}{AB} = 2 \tan(28^\circ)$, dus $\angle BAC = 46,76\dots^\circ$.

Dus $\angle CAM = 46,76\dots^\circ - 28^\circ \approx 18,8^\circ$.

2 $\triangle ADS \sim \triangle CES$ geeft $\frac{AD}{CE} = \frac{AS}{CS}$

Stel $CE = x$, dan is $AD = x + 2$.

$$\frac{x+2}{x} = \frac{4}{2\frac{1}{2}} \text{ geeft } 4x = 2\frac{1}{2}(x+2)$$

$$4x = 2\frac{1}{2}x + 5$$

$$1\frac{1}{2}x = 5$$

$$x = 3\frac{1}{3}$$

Dus $CE = 3\frac{1}{3}$.

3 Zie de schets hiernaast.
 $\angle PAM = 90^\circ$ en $\angle PBN = 90^\circ$ (raaklijn aan een cirkel)

$\triangle AMP \sim \triangle BNP$

Stel $NP = x$, dan is $MP = x + 8$.

$$\frac{AM}{BN} = \frac{MP}{NP} \text{ geeft } \frac{5}{3} = \frac{x+8}{x}$$

$$5x = 3(x+8)$$

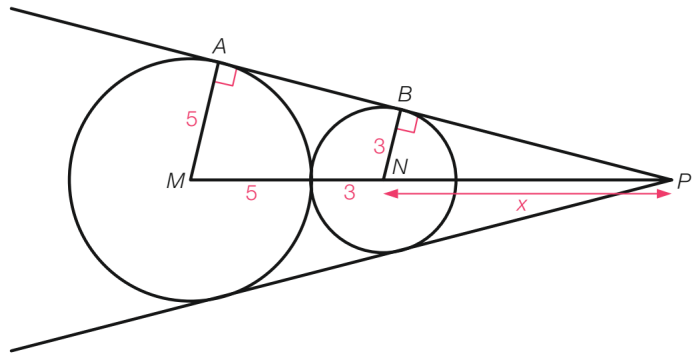
$$5x = 3x + 24$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

Dus $MP = 12 + 8 = 20$.

In $\triangle AMP$ is $AP = \sqrt{20^2 - 5^2} = \sqrt{375} = 5\sqrt{15}$.



4 a $O(\text{blauwe gebied}) = O(\triangle ABC) - O(\text{sector}) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \sin(50^\circ) - \frac{50}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 \approx 5,28$

b Zie de schets hiernaast.

In $\triangle ACD$ is $\cos(50^\circ) = \frac{AD}{4}$, dus $AD = 4 \cos(50^\circ)$ en

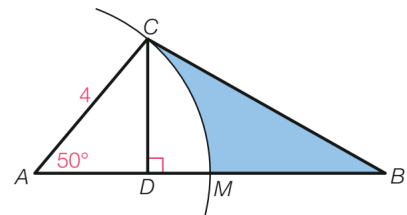
$\sin(50^\circ) = \frac{CD}{4}$, dus $CD = 4 \sin(50^\circ)$.

$BD = AB - AD = 8 - 4 \cos(50^\circ)$

De stelling van Pythagoras in $\triangle BCD$ geeft

$BC = \sqrt{(4 \sin(50^\circ))^2 + (8 - 4 \cos(50^\circ))^2} = 6,23\dots$

De omtrek is $\frac{50}{360} \cdot 2\pi \cdot 4 + 4 + 6,23\dots \approx 13,72$.



Bladzijde 143

5 a $\angle AMB = \frac{360^\circ}{7} = 72^\circ$

$O(ABCM) = 2 \cdot O(\triangle ABM) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin(72^\circ) \approx 15,2$

b $O(\text{blauwe gebied}) = \pi \cdot r^2 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin(72^\circ)$

$$\left. \begin{aligned} O(\text{blauwe gebied}) &= 10 \\ O(\text{blauwe gebied}) &= \pi \cdot r^2 - 2\frac{1}{2}r^2 \sin(72^\circ) = 10 \\ r^2(\pi - 2\frac{1}{2}\sin(72^\circ)) &= 10 \\ r^2 &= \frac{10}{\pi - 2\frac{1}{2}\sin(72^\circ)} \\ r &\approx 3,62 \end{aligned} \right\}$$

6 a $x\sqrt{3} + 4 = \sqrt{6}$
 $x\sqrt{3} = \sqrt{6} - 4$
 $x = \sqrt{2} - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2} - 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$

b $2x\sqrt{3} + 3x - 12 = 0$
 $x(2\sqrt{3} + 3) = 12$
 $x = \frac{12}{2\sqrt{3} + 3} = \frac{12}{2\sqrt{3} + 3} \cdot \frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} - 3} = \frac{12(2\sqrt{3} - 3)}{12 - 9} = 4(2\sqrt{3} - 3) = 8\sqrt{3} - 12$

c $2x\sqrt{2} + x\sqrt{6} = \sqrt{3}$
 $x(2\sqrt{2} + \sqrt{6}) = \sqrt{3}$
 $x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}} \cdot \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{2} - \sqrt{6})}{8 - 6} = \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{18}}{2} = \frac{2\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6} - 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

7 Zie de schets hiernaast.

$\triangle BCF$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek, dus $BF = \frac{6}{2} = 3$ en $CF = 3\sqrt{3}$.

$DE = CF = 3\sqrt{3}$

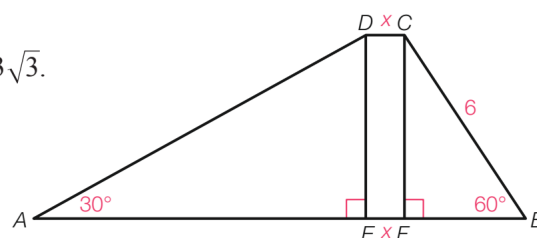
$\triangle ADE$ is een $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek, dus $AE = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9$.

Stel $CD = EF = x$.

$$\left. \begin{aligned} O(ABCD) &= \frac{1}{2}(9 + x + 3 + x) \cdot 3\sqrt{3} = (x + 6) \cdot 3\sqrt{3} \\ O(ABCD) &= 36 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (x + 6) \cdot 3\sqrt{3} &= 36 \\ x + 6 &= \frac{36}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$x = \frac{12}{\sqrt{3}} - 6 = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - 6 = \frac{12\sqrt{3}}{3} - 6 = 4\sqrt{3} - 6$$

Dus $AB = 9 + 4\sqrt{3} - 6 + 3 = 6 + 4\sqrt{3}$.

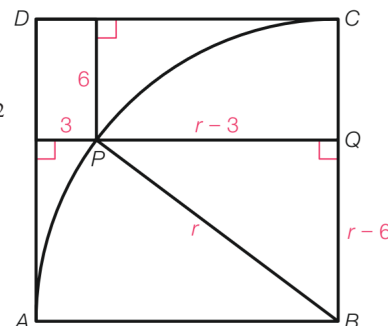


8 Zie de schets hiernaast.

Stel de straal van de cirkel r .

De stelling van Pythagoras in $\triangle BPQ$ geeft $(r - 3)^2 + (r - 6)^2 = r^2$
 $r^2 - 6r + 9 + r^2 - 12r + 36 = r^2$
 $r^2 - 18r + 45 = 0$
 $(r - 3)(r - 15) = 0$
 $r = 3 \vee r = 15$

Er moet gelden dat $r > 6$, dus de oppervlakte van het vierkant is $15^2 = 225$.

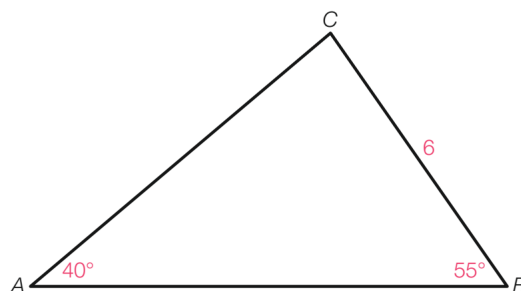


9 Zie de schets hiernaast.

$\angle C = 180^\circ - 40^\circ - 55^\circ = 85^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{AC}{\sin(55^\circ)} = \frac{6}{\sin(40^\circ)}$
 $AC = \frac{6 \sin(55^\circ)}{\sin(40^\circ)} = 7,64\dots$

$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 7,64\dots \cdot 6 \cdot \sin(85^\circ) \approx 22,85$



10 a Zie de schets hiernaast.

De sinusregel in de scherphoekige driehoek geeft

$$\frac{8,5}{\sin(50^\circ)} = \frac{10}{\sin(\angle C)}$$

$$\sin(\angle C) = \frac{10 \sin(50^\circ)}{8,5}$$

$$\angle C = 64,32\dots^\circ$$

Dus in de scherphoekige driehoek is $\angle B = 180^\circ - 50^\circ - 64,32\dots^\circ \approx 65,7^\circ$.

In de stomphoekige driehoek is $\angle C = 180^\circ - 64,32\dots^\circ = 115,67\dots^\circ$ en

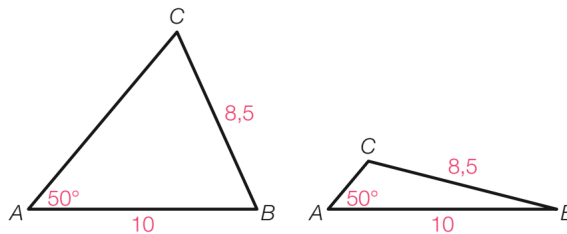
$$\angle B = 180^\circ - 50^\circ - 115,67^\circ \approx 14,3^\circ.$$

b Zie de schets hiernaast.

$$\sin(50^\circ) = \frac{BC}{10}, \text{ dus } BC = 10 \sin(50^\circ) \approx 7,66.$$

Als er precies één driehoek ABC mogelijk is, dan is

$$BC \approx 7,66 \vee BC \geq 10.$$



11 Zie de schets hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle PQR$ geeft $4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(\angle R)$

$$16 = 61 - 60 \cos(\angle R)$$

$$60 \cos(\angle R) = 45$$

$$\cos(\angle R) = \frac{45}{60}$$

De cosinusregel in $\triangle MPR$ geeft $PM^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{45}{60} = 11\frac{1}{2}$

$$PM = 3,39\dots$$

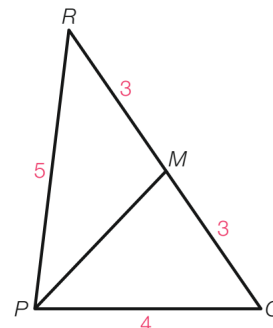
De cosinusregel in $\triangle MPR$ geeft $5^2 = 11\frac{1}{2} + 3^2 - 2 \cdot 3,39\dots \cdot 3 \cdot \cos(\angle PMR)$

$$25 = 20\frac{1}{2} - 6 \cdot 3,39\dots \cdot \cos(\angle PMR)$$

$$6 \cdot 3,39\dots \cdot \cos(\angle PMR) = -4\frac{1}{2}$$

$$\cos(\angle PMR) = \frac{-4\frac{1}{2}}{6 \cdot 3,39\dots}$$

$$\angle PMR \approx 102,8^\circ$$



12 Zie de schets hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft

$$10^2 = 8^2 + 15^2 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \cos(\angle A)$$

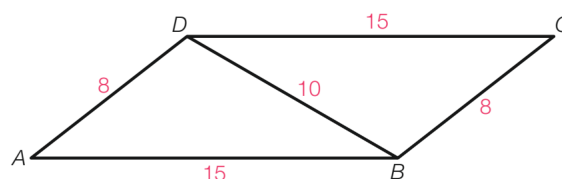
$$100 = 289 - 240 \cos(\angle A)$$

$$240 \cos(\angle A) = 189$$

$$\cos(\angle A) = \frac{189}{240}$$

$$\angle A = 38,04\dots^\circ$$

$$O(ABCD) = 2 \cdot O(\triangle ABD) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 \cdot \sin(38,04\dots^\circ) \approx 73,96$$



Gemengde opgaven

Bladzijde 144

- 1 Stel $AD = x$, dan is $BD = x + 2$.

$$BC = AB = AD + BD = x + x + 2 = 2x + 2$$

$$\text{In } \triangle BCD \text{ is } \tan(55^\circ) = \frac{2x+2}{x+2}, \text{ dus los op } \frac{2x+2}{x+2} = \tan(55^\circ).$$

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 1,497\dots$

$$\text{Dus } AB = 2 \cdot 1,497\dots + 2 \approx 4,99.$$

$$\text{In } \triangle BCD \text{ is } \cos(55^\circ) = \frac{x+2}{CD} = \frac{1,497\dots + 2}{CD}.$$

$$\text{Dus } CD = \frac{1,497\dots + 2}{\cos(55^\circ)} \approx 6,10.$$

- 2 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ geeft $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE}$

Stel $CD = x$, dan is $BC = x + 0,6$.

$$\text{Dit geeft } \frac{7}{x} = \frac{x + 0,6}{4}$$

$$x(x + 0,6) = 28$$

$$x^2 + 0,6x = 28$$

$$x^2 + 0,6x - 28 = 0$$

$$D = 0,6^2 - 4 \cdot 1 \cdot -28 = 112,36, \text{ dus } \sqrt{D} = 10,6$$

$$x = \frac{-0,6 + 10,6}{2} = 5 \vee x = \frac{-0,6 - 10,6}{2} = -5,6$$

Dus $CD = 5$.

- 3 a De stelling van Pythagoras in $\triangle ABD$ geeft $BD = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$.

De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle BCD$ geeft $BD \cdot CE = CD \cdot AD$

$$26 \cdot CE = 15 \cdot 10$$

$$CE = \frac{15 \cdot 10}{26} = 5\frac{10}{13}$$

- b $\triangle ABS \sim \triangle CDS$ geeft $\frac{AB}{CD} = \frac{BS}{DS}$

Stel $DS = x$, dan is $BS = 26 - x$.

$$\text{Dit geeft } \frac{24}{15} = \frac{26 - x}{x}$$

$$24x = 15(26 - x)$$

$$24x = 390 - 15x$$

$$39x = 390$$

$$x = 10$$

$AD = DS = 10$, dus $\triangle ADS$ is gelijkbenig.

- 4 Zie de schets hiernaast met $AE = x$.

$$BF = 15 - 3 - x = 12 - x$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ADE$ geeft $DE^2 = 5^2 - x^2$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle BCF$ geeft $CF^2 = 11^2 - (12 - x)^2$.

$DE = CF$ oftewel $DE^2 = CF^2$, dus $5^2 - x^2 = 11^2 - (12 - x)^2$

$$25 - x^2 = 121 - (144 - 24x + x^2)$$

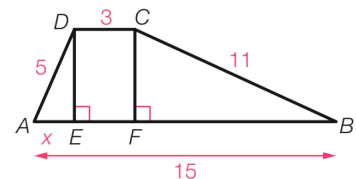
$$25 - x^2 = 121 - 144 + 24x - x^2$$

$$24x = 48$$

$$x = 2$$

$$DE = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

$$O(ABCD) = \frac{1}{2}(15 + 3) \cdot \sqrt{21} = 9\sqrt{21}$$



$$\begin{aligned} O(\triangle ADE) &= O(BCED), \text{ dus } O(\triangle ABC) = 2 \cdot O(\triangle ADE) \\ \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (5 + CE) \cdot \sin(\angle A) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin(\angle A) \\ 4(5 + CE) &= 30 \\ 5 + CE &= 7\frac{1}{2} \\ CE &= 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

a Zie de schets hiernaast.

$\angle BGC = \angle CBG = 50^\circ$ (basishoeken) en $\angle DCG = \angle BGC = 50^\circ$ (Z-hoeken)

In $\triangle BCE$ is $\sin(50^\circ) = \frac{CE}{3}$, dus $CE = 3 \sin(50^\circ)$ en

$$\cos(50^\circ) = \frac{BE}{3}, \text{ dus } BE = 3 \cos(50^\circ).$$

$$EG = BE = 3 \cos(50^\circ), \text{ dus } FG = 4 - 3 \cos(50^\circ).$$

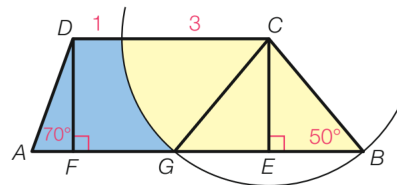
$$\text{In } \triangle ADF \text{ is } \tan(70^\circ) = \frac{3 \sin(50^\circ)}{AF}, \text{ dus } AF = \frac{3 \sin(50^\circ)}{\tan(70^\circ)}.$$

$$O(\text{blauwe gebied}) = O(AGCD) - O(\text{gele cirkelsector})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3 \sin(50^\circ)}{\tan(70^\circ)} + 4 - 3 \cos(50^\circ) + 4 \right) \cdot 3 \sin(50^\circ) - \frac{50}{360} \cdot \pi \cdot 3^2 \approx 4,01$$

$$\mathbf{b} \quad BG = 2 \cdot BE = 2 \cdot 3 \cos(50^\circ) = 6 \cos(50^\circ)$$

De omtrek van het gele gebied is $\frac{50}{360} \cdot 2\pi \cdot 3 + 3 + 3 + 6 \cos(50^\circ) \approx 12,47$.



Bladzijde 145

Zie de schets hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft

$$AC^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos(50^\circ) = 38,861...$$

$$AC = 6,233 \dots$$

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\frac{6,233...}{\sin(50^\circ)} = \frac{4}{\sin(\angle BAC)}$

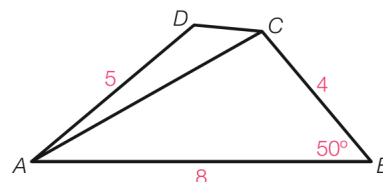
$$\sin(\angle BAC) = \frac{4 \sin(50^\circ)}{6,233 \dots}$$

$$\angle BAC = 29,44 \dots^\circ$$

$$\angle CAD = 40^\circ - 29,44\dots^\circ = 10,55\dots^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle CAD$ geeft $CD^2 = 38,861... + 5^2 - 2 \cdot 6,233... \cdot 5 \cdot \cos(10,55...^\circ) = 2,578...$

$CD \approx 1,61$



Stel de straal van de grote cirkels is r .

Zie de schets hiernaast.

$\triangle ABC$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus

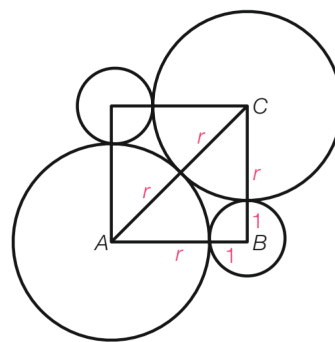
$$AC = 2r \text{ en } AB = \frac{2r}{\sqrt{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = r\sqrt{2} \\ AB = r + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} r\sqrt{2} = r + 1 \\ r\sqrt{2} - r = 1 \end{array}$$

$$r(\sqrt{2}-1)=1$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

Dus de straal van de cirkels met de middelpunten A en C is $\sqrt{2} + 1$.



- 9** Zie de schets hiernaast.
 $\angle NDS = 90^\circ$ en $\angle MCS = 90^\circ$ (raaklijn aan een cirkel)

$$\triangle DNS \sim \triangle CMS \text{ geeft } \frac{DN}{CM} = \frac{NS}{MS}$$

Stel $MS = x$, dan is $NS = x + 4$.

$$\text{Dit geeft } \frac{3}{2} = \frac{x+4}{x}$$

$$3x = 2(x+4)$$

$$3x = 2x + 8$$

$$x = 8.$$

Dus $MS = 8$.

Zie de schets hiernaast.

$\angle PQS = 90^\circ$ (raaklijn aan een cirkel)

$$\triangle CMS \sim \triangle QPS \text{ geeft } \frac{CM}{PQ} = \frac{MS}{PS}$$

Stel de straal van c_3 is r .

Dan is $PQ = r$ en $PS = 8 - 2 - r = 6 - r$.

$$\text{Dit geeft } \frac{2}{r} = \frac{8}{6-r}$$

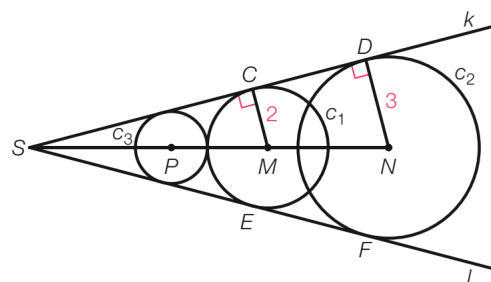
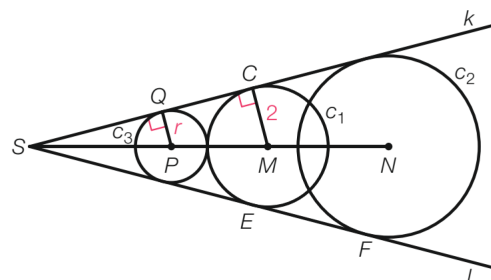
$$8r = 2(6-r)$$

$$8r = 12 - 2r$$

$$10r = 12$$

$$r = 1\frac{1}{5}$$

De straal van c_3 is $1\frac{1}{5}$.



- 10** Stel $AM = BM = r$. Zie de schets hiernaast.
 AB is een middellijn van c_1 , dus $\angle AMB = 90^\circ$ (stelling van Thales).
 $\triangle ABM$ is een $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek, dus $AB = r\sqrt{2}$.

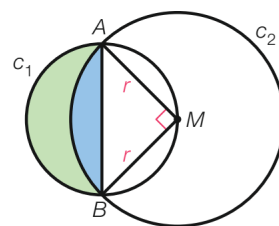
De straal van c_1 is $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$ en de oppervlakte van c_1 is $\pi \cdot (\frac{1}{2}r\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$.

$$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BM = \frac{1}{2}r^2$$

$$O(\text{blauwe gebied}) = \frac{90}{360} \cdot \pi r^2 - O(\triangle ABM) = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2$$

$$O(\text{groene gebied}) = \frac{1}{2}O(\text{cirkel } c_1) - O(\text{blauwe gebied}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 - (\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2) = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 + \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}r^2$$

Dus de oppervlakte van het groene gebied is gelijk is aan de oppervlakte van $\triangle ABM$.



- 11** Zie de schets hiernaast.

Stel $BE = x$, dan is $AE = x + 11$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle BCE$ geeft $CE^2 = 13^2 - x^2$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ACE$ geeft $CE^2 = 20^2 - (x + 11)^2$.

Dus $169 - x^2 = 400 - (x^2 + 22x + 121)$

$$169 - x^2 = 400 - x^2 - 22x - 121$$

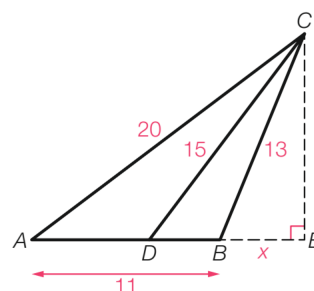
$$22x = 110$$

$$x = 5$$

Dus $BE = 5$, $AE = 11 + 5 = 16$ en $CE^2 = 13^2 - 5^2 = 144$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle CDE$ geeft $DE = \sqrt{15^2 - 144} = 9$.

Dus $AD = AE - DE = 16 - 9 = 7$.



4 Vergelijkingen en herleidingen

4.1 Stelsels vergelijkingen

Bladzijde 149

V1

a lijn l

x	0	2
y	-6	0

lijn m

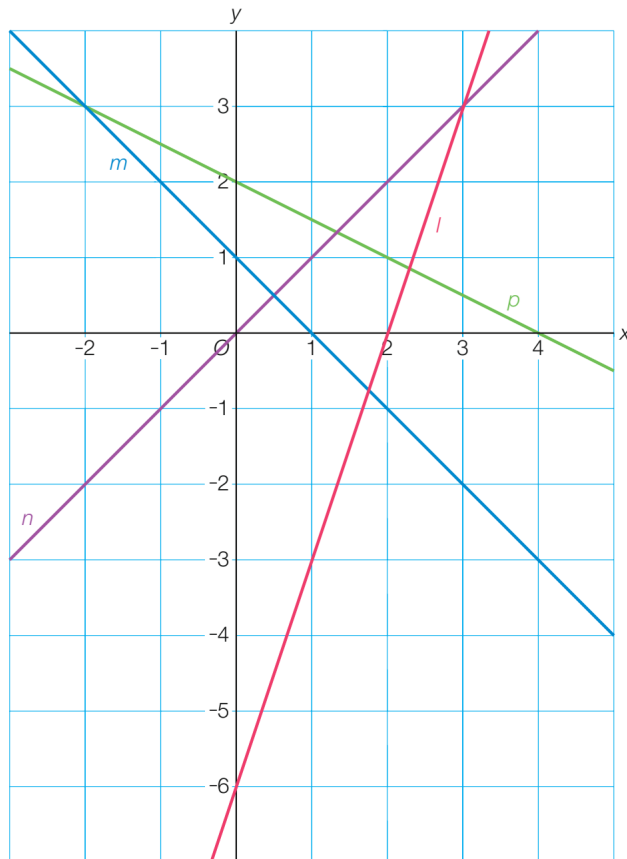
x	0	1
y	1	0

lijn n

x	0	2
y	0	2

lijn p

x	0	4
y	2	0



- b** $3x - y = 6$ $x + y = 1$ $x - y = 0$ $x + 2y = 4$
 $-y = -3x + 6$ $y = -x + 1$ $-y = -x$ $2y = -x + 4$
 $y = 3x - 6$ Dus $rc_m = -1$. $y = x$ $y = -\frac{1}{2}x + 2$
Dus $rc_l = 3$. Dus $rc_n = 1$. Dus $rc_p = -\frac{1}{2}$.

V2

- a** $y = 0$ invullen in $4x - 3y = 24$ geeft $4x = 24$ oftewel $x = 6$, dus het snijpunt met de x -as is $(6, 0)$.
 $x = 0$ invullen in $4x - 3y = 24$ geeft $-3y = 24$ oftewel $y = -8$, dus het snijpunt met de y -as is $(0, -8)$.
b $x = 16$ en $y = p$ invullen in $4x - 3y = 24$ geeft $4 \cdot 16 - 3 \cdot p = 24$
 $64 - 3p = 24$
 $-3p = -40$
 $p = 13\frac{1}{3}$
c $x = q$ en $y = 48$ invullen in $4x - 3y = 24$ geeft $4 \cdot q - 3 \cdot 48 = 24$
 $4q - 144 = 24$
 $4q = 168$
 $q = 42$
Dus voor $q = 42$.

V3 a Uit $x - 4y = 11$ volgt $x = 4y + 11$.
 $x = 4y + 11$ en $3x + y = 7$ geeft $3(4y + 11) + y = 7$
 $12y + 33 + y = 7$
 $13y = -26$
 $y = -2$

$y = -2$ geeft $x = 4 \cdot -2 + 11 = 3$
Dus $(x, y) = (3, -2)$.

b Uit $x + 2y = -3$ volgt $x = -2y - 3$.
 $x = -2y - 3$ en $4x - 3y = 10$ geeft $4(-2y - 3) - 3y = 10$
 $-8y - 12 - 3y = 10$
 $-11y = 22$
 $y = -2$

$y = -2$ geeft $x = -2 \cdot -2 - 3 = 1$
Dus $(x, y) = (1, -2)$.

c Uit $x - 6y = 1$ volgt $x = 6y + 1$.
 $x = 6y + 1$ en $5x + 4y = 56$ geeft $5(6y + 1) + 4y = 56$
 $30y + 5 + 4y = 56$
 $34y = 51$
 $y = 1\frac{1}{2}$

$y = 1\frac{1}{2}$ geeft $x = 6 \cdot 1\frac{1}{2} + 1 = 10$
Dus $(x, y) = (10, 1\frac{1}{2})$.

V4 Uit $x + 5y = 5$ volgt $x = -5y + 5$.
 $x = -5y + 5$ en $2x - 3y = 12$ geeft $2(-5y + 5) - 3y = 12$
 $-10y + 10 - 3y = 12$
 $-13y = 2$
 $y = -\frac{2}{13}$

$y = -\frac{2}{13}$ geeft $x = -5 \cdot -\frac{2}{13} + 5 = 5\frac{10}{13}$

Dus $S(5\frac{10}{13}, -\frac{2}{13})$.

Bladzijde 150

1 Je krijgt $2x = -9$.

Bladzijde 151

2 a Door de vergelijkingen van elkaar af te trekken. Daardoor wordt y geëlimineerd, want $-3y - (-3y) = 0$.

b Door de vergelijkingen bij elkaar op te tellen. Daardoor wordt y geëlimineerd, want $3y + (-3y) = 0$.

3 a
$$\begin{cases} 5x - 4y = -8 \\ -x + 4y = -12 \end{cases} +$$

$$\frac{4x}{4x} = -20$$

 $x = -5$

$x = -5$ geeft $5 + 4y = -12$
 $4y = -17$
 $y = -4\frac{1}{4}$

Dus $(x, y) = (-5, -4\frac{1}{4})$.

b
$$\begin{cases} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} -$$

$$\frac{-2y}{-2y} = 8$$

 $y = -4$

$y = -4$ geeft $-2x - 4 = 7$
 $-2x = 11$
 $x = -5\frac{1}{2}$

Dus $(x, y) = (-5\frac{1}{2}, -4)$.

$$\begin{aligned} \text{c} \quad & \begin{cases} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} + \\ & \frac{-3x}{-3x} = -9 + \\ & x = 3 \\ & x = 3 \text{ geeft } -3 - 3y = -8 \\ & \quad -3y = -5 \\ & \quad y = 1\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dus $(x, y) = (3, 1\frac{2}{3})$.

- 4** Omtrek driehoek is 14 geeft $x + 2y = 14$.
Omtrek figuur is 30 geeft $5x + 2y = 30$.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + 2y = 14 \\ 5x + 2y = 30 \end{cases} - \\ & \frac{-4x}{-4x} = -16 - \\ & x = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 4 \text{ geeft } 4 + 2y &= 14 \\ 2y &= 10 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

De lengtes van de zijden zijn 4 (basis) en 5 (benen).

Bladzijde 152

$$\begin{aligned} \text{5} \quad & \begin{cases} a + b = 12 \\ a + c = 13 \end{cases} - \\ & \frac{b - c = -1}{b - c = -1} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} b - c = -1 \\ b + c = 15 \end{cases} + \\ & \frac{2b = 14}{2b = 14} + \\ & b = 7 \end{aligned}$$

$$b = 7 \text{ en } a + b = 12 \text{ geeft } a + 7 = 12$$

$$a = 5$$

$$b = 7 \text{ en } b + c = 15 \text{ geeft } 7 + c = 15$$

$$c = 8$$

Dus $(a, b, c) = (5, 7, 8)$.

$$\begin{aligned} \text{6 a} \quad & \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} + \\ & \frac{4x + y = 6}{4x + y = 6} + \end{aligned}$$

Er is geen variabele geëlimineerd.

$$\begin{aligned} \text{b} \quad & \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} - \\ & \frac{-2x + 3y = 4}{-2x + 3y = 4} - \end{aligned}$$

Er is geen variabele geëlimineerd.

$$\begin{aligned} \text{c} \quad & \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases} + \\ & \frac{7x = 7}{7x = 7} + \end{aligned}$$

$$x = 1$$

$$x = 1 \text{ geeft } 1 + 2y = 5$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

Dus $(x, y) = (1, 2)$.

7

$$\text{a } \begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases} \begin{array}{l} | 3 \\ | 5 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 9x + 15y = -21 \\ 10x + 15y = -20 \end{cases} \begin{array}{l} - \\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x = -1 \\ x = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 1 \text{ geeft } 2 \cdot 1 + 3y = -4 \\ 2 + 3y = -4 \\ 3y = -6 \\ y = -2 \end{array}$$

Dus $(x, y) = (1, -2)$.

$$\text{b } \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - y = 19 \end{cases} \begin{array}{l} | 3 \\ | 1 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ 3x - y = 19 \end{cases} \begin{array}{l} - \\ - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5y = -10 \\ y = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y = 2 \text{ geeft } x - 2 \cdot 2 = 3 \\ x - 4 = 3 \\ x = 7 \end{array}$$

Dus $(x, y) = (7, 2)$.

$$\text{c } \begin{cases} 4x + 5y = 17 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases} \begin{array}{l} | 2 \\ | 5 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 8x + 10y = 34 \\ 15x - 10y = 35 \end{cases} \begin{array}{l} + \\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23x = 69 \\ x = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 3 \text{ geeft } 4 \cdot 3 + 5y = 17 \\ 12 + 5y = 17 \\ 5y = 5 \\ y = 1 \end{array}$$

Dus $(x, y) = (3, 1)$.

8

$$\text{a } \begin{cases} x + 3y = -7 \\ 5x + 2y = 69 \end{cases} \begin{array}{l} | 5 \\ | 1 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 5x + 15y = -35 \\ 5x + 2y = 69 \end{cases} \begin{array}{l} - \\ - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13y = -104 \\ y = -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y = -8 \text{ geeft } x + 3 \cdot -8 = -7 \\ x - 24 = -7 \\ x = 17 \end{array}$$

Dus $(x, y) = (17, -8)$.

$$\text{b } \begin{cases} 2x - 5y = -19 \\ 5x + 4y = 35 \end{cases} \begin{array}{l} | 4 \\ | 5 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 8x - 20y = -76 \\ 25x + 20y = 175 \end{cases} \begin{array}{l} + \\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33x = 99 \\ x = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 3 \text{ geeft } 2 \cdot 3 - 5y = -19 \\ 6 - 5y = -19 \\ -5y = -25 \\ y = 5 \end{array}$$

Dus $(x, y) = (3, 5)$.

$$\text{c } \begin{cases} 0,8x + 0,2y = 1 \\ 0,3x - 0,3y = 1,5 \end{cases} \begin{array}{l} | 3 \\ | 2 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 2,4x + 0,6y = 3 \\ 0,6x - 0,6y = 3 \end{cases} \begin{array}{l} + \\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x = 6 \\ x = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 2 \text{ geeft } 0,8 \cdot 2 + 0,2y = 1 \\ 1,6 + 0,2y = 1 \\ 0,2y = -0,6 \\ y = -3 \end{array}$$

Dus $(x, y) = (2, -3)$.

9

$$\text{a } \begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ x + 4y = 38 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 3x + 12y = 114 \end{cases} \begin{array}{r} - \\ -14y = -126 \\ y = 9 \end{array}$$

$$y = 9 \text{ geeft } x + 4 \cdot 9 = 38$$

$$x + 36 = 38$$

$$x = 2$$

Het snijpunt is (2, 9).

$$\text{b } \begin{cases} 2x + 5y = 26 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 10y = 52 \\ 15x - 10y = 5 \end{cases} \begin{array}{r} + \\ 19x = 57 \\ x = 3 \end{array}$$

$$x = 3 \text{ geeft } 2 \cdot 3 + 5y = 26$$

$$6 + 5y = 26$$

$$5y = 20$$

$$y = 4$$

Het snijpunt is (3, 4).

10 Telkens worden de laatste twee getallen bij elkaar opgeteld om het volgende getal te krijgen.

Het zevende getal is dus $2a + 3b + 3a + 5b = 5a + 8b$.

Het achtste getal is $3a + 5b + 5a + 8b = 8a + 13b$.

$$\begin{cases} 5a + 8b = 34 \\ 8a + 13b = 55 \end{cases} \begin{vmatrix} 8 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 40a + 64b = 272 \\ 40a + 65b = 275 \end{cases} \begin{array}{r} - \\ -b = -3 \\ b = 3 \end{array}$$

$$b = 3 \text{ geeft } 5a + 8 \cdot 3 = 34$$

$$5a + 24 = 34$$

$$5a = 10$$

$$a = 2$$

Dus $a = 2$ en $b = 3$.

Bladzijde 154

$$\text{11 } x = 5 \text{ en } y = 4 \text{ invullen in } \begin{cases} y = ax + b \\ bx + ay = -22 \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} 5a + b = 4 \\ 4a + 5b = -22 \end{cases} \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ oftewel } \begin{cases} 25a + 5b = 20 \\ 4a + 5b = -22 \end{cases} \begin{array}{r} - \\ 21a = 42 \\ a = 2 \end{array}$$

$$a = 2 \text{ geeft } 5 \cdot 2 + b = 4$$

$$10 + b = 4$$

$$b = -6$$

Dus $a = 2$ en $b = -6$.

12 a $x = 1$ en $y = -2$ invullen in $y = x^2 + bx + c$ geeft $1^2 + b + c = -2$, dus $b + c = -3$.

$x = 2$ en $y = 3$ invullen in $y = x^2 + bx + c$ geeft $2^2 + 2b + c = 3$, dus $2b + c = -1$.

$$\text{Dus } \begin{cases} b + c = -3 \\ 2b + c = -1 \end{cases}$$

$$\text{b } \begin{cases} b + c = -3 \\ 2b + c = -1 \end{cases} \begin{array}{r} - \\ -b = -2 \\ b = 2 \end{array}$$

$$b = 2 \text{ geeft } 2 + c = -3$$

$$c = -5$$

De formule is $y = x^2 + 2x - 5$.

13 a (1, 5) en $y = ax^2 + bx$ geeft $a + b = 5$
 (2, 14) en $y = ax^2 + bx$ geeft $4a + 2b = 14$ oftewel $2a + b = 7$.

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ \hline -a = -2 \\ a = 2 \end{array}$$

$a = 2$ geeft $2 + b = 5$
 $b = 3$

De formule is $y = 2x^2 + 3x$.

b (1, 8) en $y = ax^2 + c$ geeft $a + c = 8$
 (2, 17) en $y = ax^2 + c$ geeft $4a + c = 17$

$$\begin{cases} a + c = 8 \\ 4a + c = 17 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ \hline -3a = -9 \\ a = 3 \end{array}$$

$a = 3$ geeft $3 + c = 8$
 $c = 5$

De formule is $y = 3x^2 + 5$.

14 a (2, -1) en $y = x^2 + px + q$ geeft $4 + 2p + q = -1$ oftewel $2p + q = -5$.
 (2, -1) en $y = 2px - q$ geeft $4p - q = -1$

$$\begin{cases} 2p + q = -5 \\ 4p - q = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} + \\ \hline 6p = -6 \\ p = -1 \end{array}$$

$p = -1$ geeft $-2 + q = -5$
 $q = -3$

Dus $p = -1$ en $q = -3$.

b $p = -1$ en $q = -3$ geeft $y = x^2 - x - 3$ en $y = -2x + 3$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 3 &= -2x + 3 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x - 2)(x + 3) &= 0 \\ x &= 2 \vee x = -3 \\ x = -3 &\text{ geeft } y = -2 \cdot -3 + 3 = 9 \end{aligned}$$

Het andere snijpunt is $(-3, 9)$.

15 (0, 4) en $y = ax^2 + bx + c$ geeft $0 + 0 + c = 4$, dus $c = 4$.
 (-2, -10) en $y = ax^2 + bx + 4$ geeft $4a - 2b + 4 = -10$ oftewel $4a - 2b = -14$, dus $2a - b = -7$.
 (3, 5) en $y = ax^2 + bx + 4$ geeft $9a + 3b + 4 = 5$ oftewel $9a + 3b = 1$.

$$\begin{cases} 2a - b = -7 \\ 9a + 3b = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} \times 3 \\ \hline 6a - 3b = -21 \\ 9a + 3b = 1 \\ \hline 15a = -20 \\ a = -1\frac{1}{3} \end{array}$$

$a = -1\frac{1}{3}$ geeft $2 \cdot -1\frac{1}{3} - b = -7$

$$\begin{aligned} -2\frac{2}{3} - b &= -7 \\ -b &= -4\frac{1}{3} \\ b &= 4\frac{1}{3} \end{aligned}$$

De formule is $y = -1\frac{1}{3}x^2 + 4\frac{1}{3}x + 4$.

$$-1\frac{1}{3}x^2 + 4\frac{1}{3}x + 4 = 0$$

$$4x^2 - 13x - 12 = 0$$

$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -12 = 361, \text{ dus } \sqrt{D} = 19$$

$$x = \frac{13 \pm 19}{8} = 4 \vee x = \frac{13 - 19}{8} = -\frac{3}{4}$$

De snijpunten met de x -as zijn $(4, 0)$ en $(-\frac{3}{4}, 0)$.

16 $f(x) = ax^2 + bx + c$ geeft $f'(x) = 2ax + b$

$f'(2) = \text{rc}_k$ geeft $4a + b = 1$

$f'(8) = \text{rc}_l$ geeft $16a + b = -2$

$$\begin{cases} 4a + b = 1 \\ 16a + b = -2 \end{cases} \quad -$$

$$\frac{-12a = 3}{a = -\frac{1}{4}}$$

$a = -\frac{1}{4}$ geeft $4 \cdot -\frac{1}{4} + b = 1$

$-1 + b = 1$

$b = 2$

$a = -\frac{1}{4}$ en $b = 2$ geeft $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + c$

$f(2) = 6$ geeft $-\frac{1}{4} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + c = 6$

$-1 + 4 + c = 6$

$c = 3$

Dus $a = -\frac{1}{4}$, $b = 2$ en $c = 3$.

17 a Je kunt de vergelijking $x + y = 3$ niet met een getal vermenigvuldigen zodat na optellen of aftrekken van de vergelijking $x^2 + y^2 = 5$ een variabele wordt geëlimineerd.

Ook kun je de vergelijking $x^2 + y^2 = 5$ niet met een getal vermenigvuldigen zodat na optellen of aftrekken van de vergelijking $x + y = 3$ een variabele wordt geëlimineerd.

Dus je kunt het gegeven stelsel niet oplossen met behulp van elimineren door optellen of aftrekken.

b $x + y = 3$ geeft $y = 3 - x$

$y = 3 - x$ en $x^2 + y^2 = 5$ geeft $x^2 + (3 - x)^2 = 5$

$x^2 + 9 - 6x + x^2 = 5$

$2x^2 - 6x + 4 = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

Je krijgt $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Bladzijde 155

18 a $2x + y = 1$ geeft $y = -2x + 1$

$y = -2x + 1$ en $x^2 + y^2 = 10$ geeft $x^2 + (-2x + 1)^2 = 10$

$x^2 + 4x^2 - 4x + 1 = 10$

$5x^2 - 4x - 9 = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -9 = 196$, dus $\sqrt{D} = 14$

$x = \frac{4 \pm 14}{10} = 1\frac{4}{5} \vee x = \frac{4 - 14}{10} = -1$

$x = 1\frac{4}{5}$ geeft $y = -2 \cdot 1\frac{4}{5} + 1 = -2\frac{3}{5}$

$x = -1$ geeft $y = -2 \cdot -1 + 1 = 3$

Dus $(x, y) = (1\frac{4}{5}, -2\frac{3}{5}) \vee (x, y) = (-1, 3)$.

b $y = x^2 - 4$ geeft $x^2 - y = 4$

$\begin{cases} x^2 - y = 4 & | 2 \\ x + 2y = 2 & | 1 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} 2x^2 - 2y = 8 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ +

$2x^2 + x = 10$

$2x^2 + x - 10 = 0$

Dit is niet handig, want Harrie heeft meer stappen nodig om tot $2x^2 + x - 10 = 0$ te komen.

19 a $y = x^2 - 18$ en $x + y = 2$ geeft $x + x^2 - 18 = 2$

$x^2 + x - 20 = 0$

$(x - 4)(x + 5) = 0$

$x = 4 \vee x = -5$

$x = 4$ geeft $y = 4^2 - 18 = -2$

$x = -5$ geeft $y = (-5)^2 - 18 = 7$

Dus $(x, y) = (4, -2) \vee (x, y) = (-5, 7)$.

b $y = x^2 - 3$ en $x - y = -3$ geeft $x - (x^2 - 3) = -3$
 $x - x^2 + 3 = -3$
 $-x^2 + x + 6 = 0$
 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x + 2)(x - 3) = 0$
 $x = -2 \vee x = 3$

$x = -2$ geeft $y = (-2)^2 - 3 = 1$

$x = 3$ geeft $y = 3^2 - 3 = 6$

Dus $(x, y) = (-2, 1) \vee (x, y) = (3, 6)$.

c $3x + y = 5$ geeft $y = 5 - 3x$
 $y = 5 - 3x$ en $x^2 + y^2 = 25$ geeft $x^2 + (5 - 3x)^2 = 25$
 $x^2 + 25 - 30x + 9x^2 = 25$
 $10x^2 - 30x = 0$
 $10x(x - 3) = 0$
 $x = 0 \vee x = 3$

$x = 0$ geeft $y = 5 - 3 \cdot 0 = 5$

$x = 3$ geeft $y = 5 - 3 \cdot 3 = -4$

Dus $(x, y) = (0, 5) \vee (x, y) = (3, -4)$.

Bladzijde 156

20 a $2x + y = 4$ geeft $y = 4 - 2x$
 $y = 4 - 2x$ en $(x - 3)^2 + y^2 = 8$ geeft $(x - 3)^2 + (4 - 2x)^2 = 8$
 $x^2 - 6x + 9 + 16 - 16x + 4x^2 = 8$
 $5x^2 - 22x + 17 = 0$
 $D = (-22)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 17 = 144$, dus $\sqrt{D} = 12$
 $x = \frac{22 + 12}{10} = 3\frac{2}{5} \vee x = \frac{22 - 12}{10} = 1$

$x = 3\frac{2}{5}$ geeft $y = 4 - 2 \cdot 3\frac{2}{5} = -2\frac{4}{5}$

$x = 1$ geeft $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$

Dus $(x, y) = (3\frac{2}{5}, -2\frac{4}{5}) \vee (x, y) = (1, 2)$.

b $2x - y = 3$ geeft $y = 2x - 3$
 $y = 2x - 3$ en $xy = 20$ geeft $x(2x - 3) = 20$
 $2x^2 - 3x = 20$
 $2x^2 - 3x - 20 = 0$
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -20 = 169$, dus $\sqrt{D} = 13$
 $x = \frac{3 + 13}{4} = 4 \vee x = \frac{3 - 13}{4} = -2\frac{1}{2}$

$x = 4$ geeft $y = 2 \cdot 4 - 3 = 5$

$x = -2\frac{1}{2}$ geeft $y = 2 \cdot -2\frac{1}{2} - 3 = -8$

Dus $(x, y) = (4, 5) \vee (x, y) = (-2\frac{1}{2}, -8)$.

c $4x + y = 16$ geeft $y = 16 - 4x$
 $y = 16 - 4x$ en $xy = 15$ geeft $x(16 - 4x) = 15$
 $16x - 4x^2 = 15$
 $4x^2 - 16x + 15 = 0$
 $D = (-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16$, dus $\sqrt{D} = 4$
 $x = \frac{16 + 4}{8} = 2\frac{1}{2} \vee x = \frac{16 - 4}{8} = 1\frac{1}{2}$

$x = 1\frac{1}{2}$ geeft $y = 16 - 4 \cdot 1\frac{1}{2} = 10$

$x = 2\frac{1}{2}$ geeft $y = 16 - 4 \cdot 2\frac{1}{2} = 6$

Dus $(x, y) = (1\frac{1}{2}, 10) \vee (x, y) = (2\frac{1}{2}, 6)$.

21 a $(-1, -1)$ en $y = ax + b$ geeft $-a + b = -1$ oftewel $a = b + 1$.
 $(-1, -1)$ en $y = (a^2 - 4)x + 2b$ geeft $-(a^2 - 4) + 2b = -1$ oftewel $-a^2 + 4 + 2b = -1$, dus $-a^2 + 2b = -5$.
 $a = b + 1$ en $-a^2 + 2b = -5$ geeft $-(b + 1)^2 + 2b = -5$
 $-b^2 - 2b - 1 + 2b = -5$
 $b^2 = 4$
 $b = 2 \vee b = -2$
 $b = 2$ geeft $a = 2 + 1 = 3$ en $b = -2$ geeft $a = -2 + 1 = -1$
Dus $a = 3$ en $b = 2$ of $a = -1$ en $b = -2$.

- b** $(4, 5)$ en $y = ax + b$ geeft $4a + b = 5$
 $(4, 5)$ en $y = ax^2 + 2bx - 3$ geeft $16a + 8b - 3 = 5$ oftewel $16a + 8b = 8$, dus $2a + b = 1$.
- $$\begin{cases} 4a + b = 5 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} 4a + b = 5 \\ \underline{2a + b = 1} \\ 2a = 4 \\ a = 2 \end{array}$$
- $a = 2$ geeft $4 \cdot 2 + b = 5$
 $8 + b = 5$
 $b = -3$
Dus $a = 2$ en $b = -3$.

22 Zie de figuur hiernaast.

Stel $AS = x$ en $BS = y$.

In een ruit delen de diagonalen elkaar middendoor, dus

$$AC + BD = 2x + 2y.$$

$$2x + 2y = 34 \text{ oftewel } x + y = 17$$

In een ruit staan de diagonalen loodrecht op elkaar, dus $\angle ASB = 90^\circ$ en

$$O(ABCD) = 4 \cdot O(\triangle ABS) = 4 \cdot \frac{1}{2}xy = 2xy.$$

$$2xy = 120 \text{ geeft } xy = 60$$

$$x + y = 17 \text{ geeft } y = 17 - x$$

$$y = 17 - x \text{ en } xy = 60 \text{ geeft } x(17 - x) = 60$$

$$17x - x^2 = 60$$

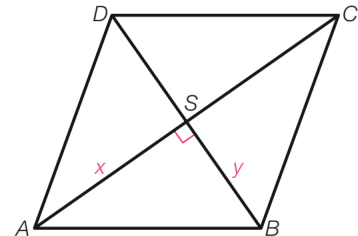
$$x^2 - 17x + 60 = 0$$

$$(x - 5)(x - 12) = 0$$

$$x = 5 \vee x = 12$$

$$x = 5 \text{ geeft } y = 17 - 5 = 12 \text{ en } x = 12 \text{ geeft } y = 17 - 12 = 5$$

Dus de lengte van de zijde van de ruit is $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.



C1

$$\begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ x - 3y = 14 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ 3x - 9y = 42 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3x - 5y = 18 \\ \underline{3x - 9y = 42} \\ 4y = -24 \\ y = -6 \end{array}$$

$$y = -6 \text{ geeft } x - 3 \cdot -6 = 14$$

$$x + 18 = 14$$

$$x = -4$$

Dus $(x, y) = (-4, -6)$.

C2

$$3x + y = 14 \text{ geeft } y = 14 - 3x$$

$$y = 14 - 3x \text{ en } xy = 8 \text{ geeft } x(14 - 3x) = 8$$

$$14x - 3x^2 = 8$$

$$3x^2 - 14x + 8 = 0$$

$$D = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 100, \text{ dus } \sqrt{D} = 10$$

$$x = \frac{14 + 10}{6} = 4 \vee x = \frac{14 - 10}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x = 4 \text{ geeft } y = 14 - 3 \cdot 4 = 2$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ geeft } y = 14 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 12$$

Dus $(x, y) = (4, 2) \vee (x, y) = (\frac{2}{3}, 12)$.

4.2 Hogeregraadsvergelijkingen

Bladzijde 157

23

a De vergelijking $x^3 = 10$ heeft één oplossing.

De vergelijking $x^3 = -10$ heeft één oplossing.

b De vergelijking $x^4 = 10$ heeft twee oplossingen.

De vergelijking $x^4 = -10$ heeft nul oplossingen.

24

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	
5	25	125	625		
6	36	216			

Bladzijde 159

25

a $5x^3 = 135$

$$x^3 = 27$$

$$x = 3$$

b $1 - 3x^5 = 97$

$$-3x^5 = 96$$

$$x^5 = -32$$

$$x = -2$$

c $\frac{1}{4}x^8 + 3 = 10$

$$\frac{1}{4}x^8 = 7$$

$$x^8 = 28$$

$$x = \sqrt[8]{28} \vee x = -\sqrt[8]{28}$$

26

a $5x^4 - 3 = 17$

$$5x^4 = 20$$

$$x^4 = 4$$

$$x = \sqrt[4]{4} \vee x = -\sqrt[4]{4}$$

$$x \approx 1,41 \vee x \approx -1,41$$

b $4x^3 - 5 = 1367$

$$4x^3 = 1372$$

$$x^3 = 343$$

$$x = 7$$

27

a $\frac{1}{4}x^3 + 60 = 6$

$$\frac{1}{4}x^3 = -54$$

$$x^3 = -216$$

$$x = -6$$

b $100 - 3x^4 = 55$

$$-3x^4 = -45$$

$$x^4 = 15$$

$$x = \sqrt[4]{15} \vee x = -\sqrt[4]{15}$$

d $5x^3 - 1 = 9$

$$5x^3 = 10$$

$$x^3 = 2$$

$$x = \sqrt[3]{2}$$

e $8x^3 + 2 = 1$

$$8x^3 = -1$$

$$x^3 = -\frac{1}{8}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

f $5x^6 + 7 = 97$

$$5x^6 = 90$$

$$x^6 = 18$$

$$x = \sqrt[6]{18} \vee x = -\sqrt[6]{18}$$

c $3(4x - 5)^3 = 15$

$$(4x - 5)^3 = 5$$

$$4x - 5 = \sqrt[3]{5}$$

$$4x = 5 + \sqrt[3]{5}$$

$$x = 1\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$x \approx 1,68$$

d $13 - 2(1 - x)^4 = 1$

$$-2(1 - x)^4 = -12$$

$$(1 - x)^4 = 6$$

$$1 - x = \sqrt[4]{6} \vee 1 - x = -\sqrt[4]{6}$$

$$-x = -1 + \sqrt[4]{6} \vee -x = -1 - \sqrt[4]{6}$$

$$x = 1 - \sqrt[4]{6} \vee x = 1 + \sqrt[4]{6}$$

$$x \approx -0,57 \vee x \approx 2,57$$

c $\frac{1}{2}(4x - 1)^5 + 3 = 19$

$$\frac{1}{2}(4x - 1)^5 = 16$$

$$(4x - 1)^5 = 32$$

$$4x - 1 = 2$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

d $2\frac{1}{2}(1 - 2x)^6 - 6 = 14$

$$2\frac{1}{2}(1 - 2x)^6 = 20$$

$$(1 - 2x)^6 = 8$$

$$1 - 2x = \sqrt[6]{8} \vee 1 - 2x = -\sqrt[6]{8}$$

$$-2x = -1 + \sqrt[6]{8} \vee -2x = -1 - \sqrt[6]{8}$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[6]{8} \vee x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[6]{8}$$

- 28 a** $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 15x$ geeft $f'(x) = 2x^3 - 15$
 $f'(\sqrt[3]{6}) = 2 \cdot (\sqrt[3]{6})^3 - 15 = 2 \cdot 6 - 15 = 12 - 15 = -3$
 De helling voor $x = \sqrt[3]{6}$ is gelijk aan -3 .
- b** $f'(x) = -5$ geeft $2x^3 - 15 = -5$
 $2x^3 = 10$
 $x^3 = 5$
 $x = \sqrt[3]{5}$
 De helling is gelijk aan -5 voor $x = \sqrt[3]{5}$.

- 29** $f_p(x) = px^5 - 3x$ geeft $f'_p(x) = 5px^4 - 3$
 $rc = 1$, dus $f'_p(x) = 1$ geeft $5px^4 - 3 = 1$
 $5px^4 = 4$
 $x^4 = \frac{4}{5p}$
 $x = \sqrt[4]{\frac{4}{5p}} \vee x = -\sqrt[4]{\frac{4}{5p}}$

Dus de x -coördinaten van deze punten zijn $x = -\sqrt[4]{\frac{4}{5p}}$ en $x = \sqrt[4]{\frac{4}{5p}}$.

- 30 a** $2x^4 + 4a = a^2 + 4$
 $2x^4 = a^2 - 4a + 4$
 $x^4 = \frac{1}{2}a^2 - 2a + 2$
 $x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}a^2 - 2a + 2} \vee x = -\sqrt[4]{\frac{1}{2}a^2 - 2a + 2}$
- b** $2x^4 + 4a = a^2 + 4$
 $a^2 - 4a + 4 = 2x^4$
 $(a - 2)^2 = 2x^4$
 $a - 2 = \sqrt{2x^4} \vee a - 2 = -\sqrt{2x^4}$
 $a = 2 + x^2 \cdot \sqrt{2} \vee a = 2 - x^2 \cdot \sqrt{2}$

- 31 a** $x^3 - x^2 - 6x = 0$
 $x(x^2 - x - 6) = 0$
 $x(x + 2)(x - 3) = 0$
- b** $x = 0 \vee x = -2 \vee x = 3$

- 32 a** $x^4 - x^2 - 6 = 0$ is te schrijven als $(x^2)^2 - x^2 - 6 = 0$.
 $x^2 = u$ geeft vervolgens $u^2 - u - 6 = 0$.
- b** $u^2 - u - 6 = 0$
 $(u + 2)(u - 3) = 0$
 $u = -2 \vee u = 3$
- c** $x^2 = u$ en $u = -2$ geeft $x^2 = -2$, dus geen oplossing.
 $x^2 = u$ en $u = 3$ geeft $x^2 = 3$, dus $x = \sqrt{3}$ en $x = -\sqrt{3}$.
 Dus de vergelijking $x^4 - x^2 - 6 = 0$ heeft de oplossingen $x = \sqrt{3}$ en $x = -\sqrt{3}$.

Bladzijde 161

- 33 a** $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$
 $x(x^2 - 5x + 6) = 0$
 $x(x - 2)(x - 3) = 0$
 $x = 0 \vee x = 2 \vee x = 3$
- b** $x^3 - 5x^2 = 6x$
 $x^3 - 5x^2 - 6x = 0$
 $x(x^2 - 5x - 6) = 0$
 $x(x + 1)(x - 6) = 0$
 $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 6$
- c** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 8u - 9 = 0$
 $(u + 1)(u - 9) = 0$
 $u = -1 \vee u = 9$
 $x^2 = -1 \vee x^2 = 9$
 $x = 3 \vee x = -3$
- d** $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 13u + 36 = 0$
 $(u - 4)(u - 9) = 0$
 $u = 4 \vee u = 9$
 $x^2 = 4 \vee x^2 = 9$
 $x = 2 \vee x = -2 \vee x = 3 \vee x = -3$

34

a $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Stel $x^2 = u$.

$$u^2 - 10u + 9 = 0$$

$$(u-1)(u-9) = 0$$

$$u = 1 \vee u = 9$$

$$x^2 = 1 \vee x^2 = 9$$

$$x = 1 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = -3$$

b $x^3 = 4x^2 + 12x$

$$x^3 - 4x^2 - 12x = 0$$

$$x(x^2 - 4x - 12) = 0$$

$$x(x+2)(x-6) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 6$$

c $x^4 + 16 = 10x^2$

$$x^4 - 10x^2 + 16 = 0$$

Stel $x^2 = u$.

$$u^2 - 10u + 16 = 0$$

$$(u-2)(u-8) = 0$$

$$u = 2 \vee u = 8$$

$$x^2 = 2 \vee x^2 = 8$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$$

d $x^3 + 25x = 10x^2$

$$x^3 - 10x^2 + 25x = 0$$

$$x(x^2 - 10x + 25) = 0$$

$$x(x-5)^2 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 5$$

35

a $4x^4 + 153 = 53x^2$

$$4x^4 - 53x^2 + 153 = 0$$

Stel $x^2 = u$.

$$4u^2 - 53u + 153 = 0$$

$$D = (-53)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 153 = 361, \text{ dus } \sqrt{D} = 19$$

$$u = \frac{53 + 19}{8} = 9 \vee u = \frac{53 - 19}{8} = 4\frac{1}{4}$$

$$x^2 = 9 \vee x^2 = 4\frac{1}{4}$$

$$x = 3 \vee x = -3 \vee x = \sqrt{4\frac{1}{4}} \vee x = -\sqrt{4\frac{1}{4}}$$

$$x = 3 \vee x = -3 \vee x = \frac{1}{2}\sqrt{17} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{17}$$

b $4x^4 + 21x^2 = 148$

$$4x^4 + 21x^2 - 148 = 0$$

Stel $x^2 = u$.

$$4u^2 + 21u - 148 = 0$$

$$D = 21^2 - 4 \cdot 4 \cdot -148 = 2809, \text{ dus } \sqrt{D} = 53$$

$$u = \frac{-21 + 53}{8} = 4 \vee u = \frac{-21 - 53}{8} = -9\frac{1}{4}$$

$$x^2 = 4 \vee x^2 = -9\frac{1}{4}$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

c $4x^6 + 35 = 24x^3$

$$4x^6 - 24x^3 + 35 = 0$$

Stel $x^3 = u$.

$$4u^2 - 24u + 35 = 0$$

$$D = (-24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 35 = 16, \text{ dus } \sqrt{D} = 4$$

$$u = \frac{24 + 4}{8} = 3\frac{1}{2} \vee u = \frac{24 - 4}{8} = 2\frac{1}{2}$$

$$x^3 = 3\frac{1}{2} \vee x^3 = 2\frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt[3]{3\frac{1}{2}} \vee x = \sqrt[3]{2\frac{1}{2}}$$

d $4x^3 + 7x^2 = 36x$

$$4x^3 + 7x^2 - 36x = 0$$

$$x(4x^2 + 7x - 36) = 0$$

$$x = 0 \vee 4x^2 + 7x - 36 = 0$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot -36 = 625, \text{ dus } \sqrt{D} = 25$$

$$x = \frac{-7 + 25}{8} = 2\frac{1}{4} \vee x = \frac{-7 - 25}{8} = -4$$

36

a $f(x) = 2x$ geeft $x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x = 2x$

$$x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - x - \frac{1}{2}) = 0$$

$$x^2 = 0 \vee x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -\frac{1}{2} = 3$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

De x-coördinaten van A en B zijn $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

b $f(x) = x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - x + 2$

$$f'(\sqrt{2}) = 4 \cdot (\sqrt{2})^3 - 3 \cdot (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} + 2 = 4 \cdot 2\sqrt{2} - 3 \cdot 2 - \sqrt{2} + 2 = 7\sqrt{2} - 4$$

De helling voor $x = \sqrt{2}$ is gelijk aan $7\sqrt{2} - 4$.

c $f'(x) = 2$ geeft $4x^3 - 3x^2 - x + 2 = 2$

$$4x^3 - 3x^2 - x = 0$$

$$x(4x^2 - 3x - 1) = 0$$

$$x = 0 \vee 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -1 = 25, \text{ dus } \sqrt{D} = 5$$

$$x = \frac{3 + 5}{8} = 1 \vee x = \frac{3 - 5}{8} = -\frac{1}{4}$$

De helling is gelijk aan 2 voor $x = 0$, $x = 1$ en $x = -\frac{1}{4}$.

37 a $f(x) = 0$ geeft $\frac{1}{100}x^5 - \frac{1}{4}x^3 = 0$

$$x^3(\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{4}) = 0$$

$$x^3 = 0 \vee \frac{1}{100}x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = 0 \vee x^2 = 25$$

$$x = 0 \vee x = 5 \vee x = -5$$

Dus $A(-5, 0)$ en $B(5, 0)$.

b $f(x) = \frac{1}{100}x^5 - \frac{1}{4}x^3$ geeft $f'(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{3}{4}x^2$

$$f'(3) = \frac{1}{20} \cdot 3^4 - \frac{3}{4} \cdot 3^2 = -2\frac{7}{10}$$

De helling voor $x = 3$ is gelijk aan $-2\frac{7}{10}$.

c $f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{20}x^4 - \frac{3}{4}x^2 = 0$

$$x^2(\frac{1}{20}x^2 - \frac{3}{4}) = 0$$

$$x^2 = 0 \vee \frac{1}{20}x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x = 0 \vee x^2 = 15$$

$$x = 0 \vee x = \sqrt{15} \vee x = -\sqrt{15}$$

De helling is gelijk aan 0 voor $x = 0$, $x = \sqrt{15}$ en $x = -\sqrt{15}$.

d $f'(x) = \frac{4}{5}$ geeft $\frac{1}{20}x^4 - \frac{3}{4}x^2 = \frac{4}{5}$

$$\frac{1}{20}x^4 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5} = 0$$

$$x^4 - 15x^2 - 16 = 0$$

Stel $x^2 = u$.

$$u^2 - 15u - 16 = 0$$

$$(u + 1)(u - 16) = 0$$

$$u = -1 \vee u = 16$$

$$x^2 = -1 \vee x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

De helling is gelijk aan $\frac{4}{5}$ voor $x = 4$ en $x = -4$.

38 Stel de lengtes van de zijden zijn x en y .

Dan geldt $xy = 90$ en $x^2 + y^2 = 15^2$ oftewel $x^2 + y^2 = 225$.

Uit $xy = 90$ volgt $y = \frac{90}{x}$.

Substitutie van $y = \frac{90}{x}$ in $x^2 + y^2 = 225$ geeft

$$x^2 + \left(\frac{90}{x}\right)^2 = 225$$

$$x^2 + \frac{8100}{x^2} = 225$$

$$x^4 + 8100 = 225x^2$$

$$x^4 - 225x^2 + 8100 = 0$$

Stel $x^2 = u$.

$$u^2 - 225u + 8100 = 0$$

$$D = (-225)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8100 = 18225, \text{ dus } \sqrt{D} = 135$$

$$u = \frac{225 + 135}{2} = 180 \vee u = \frac{225 - 135}{2} = 45$$

$$x^2 = 180 \vee x^2 = 45$$

$$x = \sqrt{180} \vee x = -\sqrt{180} \vee x = \sqrt{45} \vee x = -\sqrt{45}$$

$$x = 6\sqrt{5} \vee x = -6\sqrt{5} \text{ (kan niet)} \vee x = 3\sqrt{5} \vee x = -3\sqrt{5} \text{ (kan niet)}$$

$$x = 6\sqrt{5} \text{ geeft } y = \frac{90}{6\sqrt{5}} = \frac{90}{6\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{90\sqrt{5}}{30} = 3\sqrt{5}$$

$$x = 3\sqrt{5} \text{ geeft } y = \frac{90}{3\sqrt{5}} = \frac{90}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{90\sqrt{5}}{15} = 6\sqrt{5}$$

De lengtes van de zijden zijn $6\sqrt{5}$ en $3\sqrt{5}$.

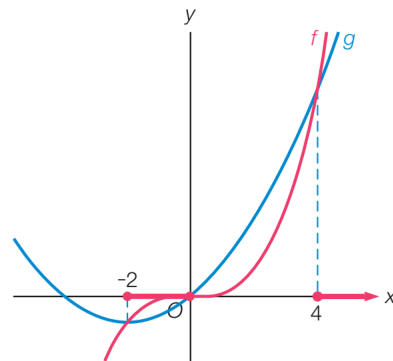
39 a $f(x) = g(x)$ geeft $x^4 = 2x^2 + 3$
 $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 2u - 3 = 0$
 $(u + 1)(u - 3) = 0$
 $u = -1 \vee u = 3$
 $x^2 = -1 \vee x^2 = 3$
 $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

b $x^4 \leq 2x^2 + 3$ geeft $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

40 a Stel $f(x) = x^3$ en $g(x) = 2x^2 + 8x$.
 $f(x) = g(x)$ geeft $x^3 = 2x^2 + 8x$
 $x^3 - 2x^2 - 8x = 0$
 $x(x^2 - 2x - 8) = 0$
 $x(x + 2)(x - 4) = 0$
 $x = 0 \vee x = -2 \vee x = 4$

Zie de schets hiernaast.

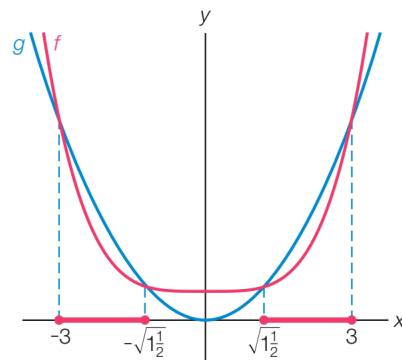
$x^3 \geq 2x^2 + 8x$ geeft $-2 \leq x \leq 0 \vee x \geq 4$



b Stel $f(x) = \frac{2}{3}x^4 + 9$ en $g(x) = 7x^2$.
 $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{2}{3}x^4 + 9 = 7x^2$
 $2x^4 + 27 = 21x^2$
 $2x^4 - 21x^2 + 27 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $2u^2 - 21u + 27 = 0$
 $D = (-21)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 27 = 225$, dus $\sqrt{D} = 15$
 $u = \frac{21 + 15}{4} = 9 \vee u = \frac{21 - 15}{4} = 1\frac{1}{2}$
 $x^2 = 9 \vee x^2 = 1\frac{1}{2}$
 $x = 3 \vee x = -3 \vee x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$

Zie de schets hiernaast.

$\frac{2}{3}x^4 + 9 \leq 7x^2$ geeft $-3 \leq x \leq -\sqrt{1\frac{1}{2}} \vee \sqrt{1\frac{1}{2}} \leq x \leq 3$



Bladzijde 162

41 $x = -1$ geeft $|4 \cdot -1 - 5| = 9$ $x = 3\frac{1}{2}$ geeft $|4 \cdot 3\frac{1}{2} - 5| = 9$
 $|-4 - 5| = 9$ $|14 - 5| = 9$
 $|-9| = 9$ $|9| = 9$
 $9 = 9$ $9 = 9$

Dus zowel $x = -1$ als $x = 3\frac{1}{2}$ is een oplossing.

42 a $|2x - 1| = 8$
 $2x - 1 = 8 \vee 2x - 1 = -8$
 $2x = 9 \vee 2x = -7$
 $x = 4\frac{1}{2} \vee x = -3\frac{1}{2}$

b $|x^2 - 3| = 1$
 $x^2 - 3 = 1 \vee x^2 - 3 = -1$
 $x^2 = 4 \vee x^2 = 2$
 $x = 2 \vee x = -2 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

c $|2x^2 - 5| = 11$
 $2x^2 - 5 = 11 \vee 2x^2 - 5 = -11$
 $2x^2 = 16 \vee 2x^2 = -6$
 $x^2 = 8 \vee x^2 = -3$
 $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \vee x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$
d $|5 - x^2| = 11$
 $5 - x^2 = 11 \vee 5 - x^2 = -11$
 $-x^2 = 6 \vee -x^2 = -16$
 $x^2 = -6 \vee x^2 = 16$
 $x = 4 \vee x = -4$

43

a $|2x^4 - 5| = 15$

$$2x^4 - 5 = 15 \vee 2x^4 - 5 = -15$$

$$2x^4 = 20 \vee 2x^4 = -10$$

$$x^4 = 10 \vee x^4 = -5$$

$$x = \sqrt[4]{10} \vee x = -\sqrt[4]{10}$$

b $|2x^3 - 5| = 15$

$$2x^3 - 5 = 15 \vee 2x^3 - 5 = -15$$

$$2x^3 = 20 \vee 2x^3 = -10$$

$$x^3 = 10 \vee x^3 = -5$$

$$x = \sqrt[3]{10} \vee x = \sqrt[3]{-5}$$

c $|x^2 - 5x| = 6$

$$x^2 - 5x = 6 \vee x^2 - 5x = -6$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \vee x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x+1)(x-6) = 0 \vee (x-2)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 6 \vee x = 2 \vee x = 3$$

d $|8x - x^2| = 12$

$$8x - x^2 = 12 \vee 8x - x^2 = -12$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \vee x^2 - 8x - 12 = 0$$

$$(x-2)(x-6) = 0 \vee D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -12 = 112, \text{ dus } \sqrt{D} = 4\sqrt{7}$$

$$x = 2 \vee x = 6 \vee x = \frac{8 + 4\sqrt{7}}{2} = 4 + 2\sqrt{7} \vee x = \frac{8 - 4\sqrt{7}}{2} = 4 - 2\sqrt{7}$$

44 Stel $f(x) = |x^4 - 5x^2|$ en $g(x) = 6$.

$f(x) = g(x)$ geeft $|x^4 - 5x^2| = 6$

$$x^4 - 5x^2 = 6 \vee x^4 - 5x^2 = -6$$

$$x^4 - 5x^2 - 6 = 0 \vee x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

Stel $x^2 = u$.

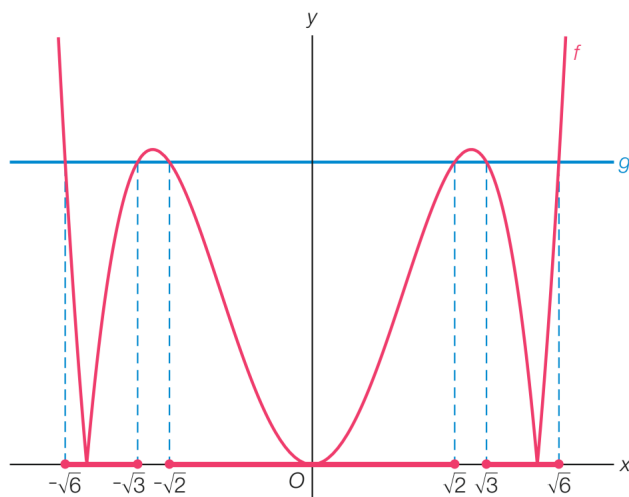
$$u^2 - 5u - 6 = 0 \vee u^2 - 5u + 6 = 0$$

$$(u+1)(u-6) = 0 \vee (u-2)(u-3) = 0$$

$$u = -1 \vee u = 6 \vee u = 2 \vee u = 3$$

$$x^2 = -1 \vee x^2 = 6 \vee x^2 = 2 \vee x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6} \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$



$$|x^4 - 5x^2| \leq 6 \text{ geeft } -\sqrt{6} \leq x \leq -\sqrt{3} \vee -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \vee \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{6}$$

C3

a $3x^5 + 7 = 19$
 $3x^5 = 12$
 $x^5 = 4$
 $x = \sqrt[5]{4}$

b $2x^3 + 17 = 1$
 $2x^3 = -16$
 $x^3 = -8$
 $x = -2$

c $3(x-1)^4 + 7 = 19$
 $3(x-1)^4 = 12$
 $(x-1)^4 = 4$
 $x-1 = \sqrt[4]{4} \vee x-1 = -\sqrt[4]{4}$
 $x = 1 + \sqrt[4]{4} \vee x = 1 - \sqrt[4]{4}$

d $2x^6 + 17 = 1$
 $2x^6 = -16$
 $x^6 = -8$
geen oplossing

C4

a $x^3 + 10x = 7x^2$
 $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$
 $x(x^2 - 7x + 10) = 0$
 $x(x-2)(x-5) = 0$
 $x = 0 \vee x = 2 \vee x = 5$

b $x^4 + 10 = 7x^2$
 $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$
Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 7u + 10 = 0$
 $(u-2)(u-5) = 0$
 $u = 2 \vee u = 5$
 $x^2 = 2 \vee x^2 = 5$
 $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$

c $x^4 + 3x^2 = 54$
 $x^4 + 3x^2 - 54 = 0$
Stel $x^2 = u$.
 $u^2 + 3u - 54 = 0$
 $(u-6)(u+9) = 0$
 $u = 6 \vee u = -9$
 $x^2 = 6 \vee x^2 = -9$
 $x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$

d Stel $f(x) = \frac{1}{3}x^4$ en $g(x) = 4x^2 - 9$.
 $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{1}{3}x^4 = 4x^2 - 9$
 $\frac{1}{3}x^4 - 4x^2 + 9 = 0$
 $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$
Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 12u + 27 = 0$
 $(u-3)(u-9) = 0$
 $u = 3 \vee u = 9$
 $x^2 = 3 \vee x^2 = 9$
 $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \vee x = 3 \vee x = -3$

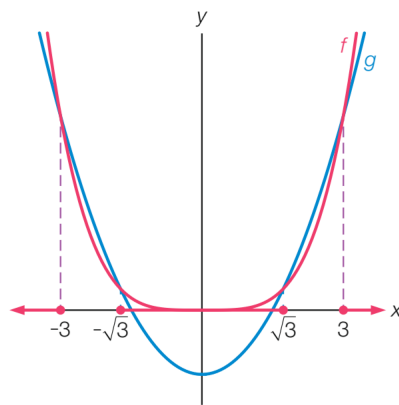
Zie de schets hiernaast.

$$\frac{1}{3}x^4 \geq 4x^2 - 9 \text{ geeft } x \leq -3 \vee -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \vee x \geq 3$$

C5

a $|1 - x^3| = 3$
 $1 - x^3 = 3 \vee 1 - x^3 = -3$
 $-x^3 = 2 \vee -x^3 = -4$
 $x^3 = -2 \vee x^3 = 4$
 $x = \sqrt[3]{-2} \vee x = \sqrt[3]{4}$

b $|x^2 - 10x| = 24$
 $x^2 - 10x = 24 \vee x^2 - 10x = -24$
 $x^2 - 10x - 24 = 0 \vee x^2 - 10x + 24 = 0$
 $(x+2)(x-12) = 0 \vee (x-4)(x-6) = 0$
 $x = -2 \vee x = 12 \vee x = 4 \vee x = 6$



4.3 Regels voor het oplossen van vergelijkingen

Bladzijde 164

45

a $5x(x^2 - 4) = 15(x^2 - 4)$
 $5x^3 - 20x = 15x^2 - 60$

Dit is geen goede aanpak omdat je geen methode kent om deze derdegraadsvergelijking algebraïsch op te lossen.

b $x = 2$ invullen in $5x(x^2 - 4) = 15(x^2 - 4)$ geeft $5 \cdot 2(2^2 - 4) = 15(2^2 - 4)$
 $10(4 - 4) = 15(4 - 4)$
 $10 \cdot 0 = 15 \cdot 0$
 $0 = 0$

Dit klopt, dus ik ben het eens met Maud.

c $5x = 15$ geeft de oplossing $x = 3$.

Maar ook $x = 2$ en $x = -2$ zijn oplossingen.

Door het linker- en rechterlid door $x^2 - 4$ te delen, zijn deze oplossingen echter verloren gegaan.

Bladzijde 166

46

a Dan mis je de oplossingen $x = \sqrt{5}$ en $x = -\sqrt{5}$.

b De regel ' $AB = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$ ' wordt gebruikt.

47

a $(4x - 1)^2 = (3x - 2)^2$
 $4x - 1 = 3x - 2 \vee 4x - 1 = -3x + 2$
 $x = -1 \vee 7x = 3$
 $x = -1 \vee x = \frac{3}{7}$

b $(3x^2 - 5)^2 = 4x^2$
 $3x^2 - 5 = 2x$ $\vee 3x^2 - 5 = -2x$
 $3x^2 - 2x - 5 = 0$ $\vee 3x^2 + 2x - 5 = 0$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64$, dus $\sqrt{D} = 8$ $\vee D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64$, dus $\sqrt{D} = 8$
 $x = \frac{2+8}{6} = 1\frac{2}{3} \vee x = \frac{2-8}{6} = -1$ $\vee x = \frac{-2+8}{6} = 1 \vee x = \frac{-2-8}{6} = -1\frac{2}{3}$

c $(x^2 - 4x)(x^2 - 8) = 0$
 $x^2 - 4x = 0 \vee x^2 - 8 = 0$
 $x(x - 4) = 0 \vee x^2 = 8$
 $x = 0 \vee x = 4 \vee x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}$
 $x = 0 \vee x = 4 \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$

d $x^3(x - 3) = 8(x - 3)$
 $x - 3 = 0 \vee x^3 = 8$
 $x = 3 \vee x = 2$

e $(3x - 2)^4 = 3x - 2$
 $(3x - 2)(3x - 2)^3 = 3x - 2$
 $3x - 2 = 0 \vee (3x - 2)^3 = 1$
 $3x - 2 = 0 \vee 3x - 2 = 1$
 $x = \frac{2}{3} \vee 3x = 3$
 $x = \frac{2}{3} \vee x = 1$

f $2x(x^2 - 4) = 6(x - 2)$
 $2x(x + 2)(x - 2) = 6(x - 2)$
 $x - 2 = 0 \vee 2x(x + 2) = 6$
 $x = 2 \vee 2x^2 + 4x - 6 = 0$
 $x = 2 \vee x^2 + 2x - 3 = 0$
 $x = 2 \vee (x - 1)(x + 3) = 0$
 $x = 2 \vee x = 1 \vee x = -3$

- 48 a** Invoeren van de formule van f en gebruiken van de optie minimum geeft $x = -0,5$ en $y = -4,882...$

Dus min. is $f(-0,5) \approx -4,9$.

b $f(x) = 0$ geeft $\frac{1}{8}(3x+4)(x-2)^3 = 0$
 $3x+4 = 0 \vee (x-2)^3 = 0$
 $3x = -4 \vee x-2 = 0$
 $x = -1\frac{1}{3} \vee x = 2$

Dus de nulpunten zijn $-1\frac{1}{3}$ en 2.

c $f(x) = 3x+4$ geeft $\frac{1}{8}(3x+4)(x-2)^3 = 3x+4$
 $3x+4 = 0 \vee \frac{1}{8}(x-2)^3 = 1$
 $3x = -4 \vee (x-2)^3 = 8$
 $x = -1\frac{1}{3} \vee x-2 = 2$
 $x = -1\frac{1}{3} \vee x = 4$

$x = -1\frac{1}{3}$ geeft $y = 0$ (zie b)

$x = 4$ geeft $y = 3 \cdot 4 + 4 = 16$

Dus $A(-1\frac{1}{3}, 0)$ en $B(4, 16)$.

d $f(x) = (3x+4)(2x-4)$ geeft $\frac{1}{8}(3x+4)(x-2)^3 = (3x+4)(2x-4)$
 $\frac{1}{8}(3x+4)(x-2)(x-2)^2 = 2(3x+4)(x-2)$
 $(3x+4)(x-2) = 0 \vee \frac{1}{8}(x-2)^2 = 2$
 $3x = -4 \vee x = 2 \vee (x-2)^2 = 16$
 $x = -1\frac{1}{3} \vee x = 2 \vee x-2 = 4 \vee x-2 = -4$
 $x = -1\frac{1}{3} \vee x = 2 \vee x = 6 \vee x = -2$

$x = -2$ geeft $y = (3 \cdot -2 + 4)(2 \cdot -2 - 4) = 16$

$x = -1\frac{1}{3}$ geeft $y = 0$ (zie b)

$x = 2$ geeft $y = 0$ (zie b)

$x = 6$ geeft $y = (3 \cdot 6 + 4)(2 \cdot 6 - 4) = 176$

Dus de snijpunten zijn $(-2, 16)$, $(-1\frac{1}{3}, 0)$, $(2, 0)$ en $(6, 176)$.

- 49 a** De wortel van 9 is 3, dus $2x - 5 = 9$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

- b** Een wortel kan niet negatief zijn, dus $\sqrt{2x-5}$ is voor geen enkele x gelijk aan -3 .

Dus de vergelijking $\sqrt{2x-5} = -3$ heeft geen oplossing.

Bladzijde 168

- 50** Invullen van $x = 3$ in de vergelijking $x - \sqrt{x+1} = 5$ geeft $3 - \sqrt{4} = 5$ en dit klopt niet.

Invullen van $x = 8$ in de vergelijking $x - \sqrt{x+1} = 5$ geeft $8 - \sqrt{9} = 5$ en dit klopt.

- 51 a** $x = \sqrt{5x+14}$

kwadrateren geeft $x^2 = 5x + 14$

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$(x+2)(x-7) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 7$$

$x = -2$ voldoet niet, dus $x = 7$.

- b** $3x = \sqrt{8x+20}$

kwadrateren geeft $9x^2 = 8x + 20$

$$9x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -20 = 784, \text{ dus } \sqrt{D} = 28$$

$$x = \frac{8+28}{18} = 2 \vee x = \frac{8-28}{18} = -1\frac{1}{9}$$

$x = -1\frac{1}{9}$ voldoet niet, dus $x = 2$.

- c** $5\sqrt{x} = x$

kwadrateren geeft $25x = x^2$

$$x^2 - 25x = 0$$

$$x(x-25) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 25$$

d $3x = \sqrt{18x + 72}$
kwadrateren geeft $9x^2 = 18x + 72$
 $9x^2 - 18x - 72 = 0$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x + 2)(x - 4) = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$
 $x = -2$ voldoet niet, dus $x = 4$.

52 a $4 - 3\sqrt{x} = 2$

$$-3\sqrt{x} = -2$$

$$\sqrt{x} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{4}{9}$$

b $5\sqrt{x} - 2x = 0$

$$5\sqrt{x} = 2x$$

kwadrateren geeft $25x = 4x^2$

$$4x^2 - 25x = 0$$

$$x(4x - 25) = 0$$

$$x = 0 \vee 4x = 25$$

$$x = 0 \vee x = 6\frac{1}{4}$$

c $2x - 5\sqrt{x} = 3$

$$2x - 3 = 5\sqrt{x}$$

kwadrateren geeft $(2x - 3)^2 = 25x$

$$4x^2 - 12x + 9 = 25x$$

$$4x^2 - 37x + 9 = 0$$

$$D = (-37)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 1225, \text{ dus } \sqrt{D} = 35$$

$$x = \frac{37 + 35}{8} = 9 \vee x = \frac{37 - 35}{8} = \frac{1}{4}$$

$x = \frac{1}{4}$ voldoet niet, dus $x = 9$.

d $5 - 2\sqrt{x} = 3$

$$-2\sqrt{x} = -2$$

$$\sqrt{x} = 1$$

$$x = 1$$

53 a $2x + \sqrt{x} = 10$

$$\sqrt{x} = 10 - 2x$$

kwadrateren geeft $x = (10 - 2x)^2$

$$x = 100 - 40x + 4x^2$$

$$4x^2 - 41x + 100 = 0$$

$$D = (-41)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 100 = 81, \text{ dus } \sqrt{D} = 9$$

$$x = \frac{41 + 9}{8} = 6\frac{1}{4} \vee x = \frac{41 - 9}{8} = 4$$

$x = 6\frac{1}{4}$ voldoet niet, dus $x = 4$.

b $x + 2\sqrt{6 - 5x} = 6$

$$2\sqrt{6 - 5x} = 6 - x$$

kwadrateren geeft $4(6 - 5x) = (6 - x)^2$

$$24 - 20x = 36 - 12x + x^2$$

$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

$$(x + 2)(x + 6) = 0$$

$$x = -2 \vee x = -6$$

- c** $10 - x\sqrt{x} = 2$
 $-x\sqrt{x} = -8$
kwadrateren geeft $x^3 = 64$
 $x = 4$
- d** $-3 + \sqrt{7+x} = \frac{1}{3}x - 4$
 $\sqrt{7+x} = \frac{1}{3}x - 1$
kwadrateren geeft $7+x = (\frac{1}{3}x - 1)^2$
 $7+x = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$
 $\frac{1}{9}x^2 - 1\frac{2}{3}x - 6 = 0$
 $x^2 - 15x - 54 = 0$
 $(x+3)(x-18) = 0$
 $x = -3 \vee x = 18$
 $x = -3$ voldoet niet, dus $x = 18$.

- 54 a** $\sqrt{x} = u$, dus $(\sqrt{x})^2 = u^2$ oftewel $x = u^2$.
Dit geeft $u^2 - u = 12$
 $u^2 - u - 12 = 0$
 $(u+3)(u-4) = 0$
 $u = -3 \vee u = 4$
 $\sqrt{x} = -3 \vee \sqrt{x} = 4$
 $x = 16$
- b** $x\sqrt{x} = u$, dus $(x\sqrt{x})^2 = u^2$ oftewel $x^3 = u^2$.
Dit geeft $u^2 - 9u + 8 = 0$
 $(u-1)(u-8) = 0$
 $u = 1 \vee u = 8$
 $x\sqrt{x} = 1 \vee x\sqrt{x} = 8$
 $x^3 = 1 \vee x^3 = 64$
 $x = 1 \vee x = 4$
- c** Stel $x^2\sqrt{x} = u$, dan is $(x^2\sqrt{x})^2 = u^2$ oftewel $x^5 = u^2$.
Dit geeft $u^2 + 10 = 7u$
 $u^2 - 7u + 10 = 0$
 $(u-2)(u-5) = 0$
 $u = 2 \vee u = 5$
 $x^2\sqrt{x} = 2 \vee x^2\sqrt{x} = 5$
 $x^5 = 4 \vee x^5 = 25$
 $x = \sqrt[5]{4} \vee x = \sqrt[5]{25}$

Bladzijde 169

- 55 a** Bij een verhoudingstabel zijn de kruisproducten gelijk.

$$\text{Dus } \frac{x}{2} \mid \frac{x+4}{x} \text{ geeft } x \cdot x = 2 \cdot (x+4)$$

$$x^2 = 2x + 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

- b** $x^2 - 2x - 8 = 0$ geeft $(x+2)(x-4) = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$

Bladzijde 170

- 56 a** Invullen van $x = \sqrt{2}$ in de noemer $x^2 - 3$ geeft $(\sqrt{2})^2 - 3 = 2 - 3 = -1$ en dit is niet nul.
Invullen van $x = -\sqrt{2}$ in de noemer $x^2 - 3$ geeft $(-\sqrt{2})^2 - 3 = 2 - 3 = -1$ en dit is niet nul.
- b** De regel ' $\frac{A}{B} = \frac{C}{B}$ ' geeft $A = C \wedge B \neq 0$ wordt gebruikt.
 $x = 1$ voldoet niet omdat de noemers voor $x = 1$ gelijk zijn aan nul.

57

a $\frac{x+3}{x-1} = \frac{10}{x}$
 $x(x+3) = 10(x-1)$
 $x^2 + 3x = 10x - 10$
 $x^2 - 7x + 10 = 0$
 $(x-2)(x-5) = 0$
 $x = 2 \vee x = 5$

b $\frac{5x^2-15}{x^2+5} = 0$
 $5x^2 - 15 = 0$
 $5x^2 = 15$
 $x^2 = 3$
 $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

58

a $\frac{x^2-4}{2x+5} = \frac{x^2-4}{x+4}$
 $x^2 - 4 = 0 \vee 2x + 5 = x + 4$
 $x^2 = 4 \vee x = -1$
 $x = 2 \vee x = -2 \vee x = -1$

b $\frac{x^2-4}{x+1} = 3\frac{1}{2}$
 $x^2 - 4 = 3\frac{1}{2}(x+1)$
 $x^2 - 4 = 3\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$
 $x^2 - 3\frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2} = 0$
 $2x^2 - 7x - 15 = 0$
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -15 = 169$, dus $\sqrt{D} = 13$
 $x = \frac{7+13}{4} = 5 \vee x = \frac{7-13}{4} = -1\frac{1}{2}$

59

a $\frac{3x+4}{x-1} = \frac{x+18}{x}$
 $x(3x+4) = (x-1)(x+18)$
 $3x^2 + 4x = x^2 + 17x - 18$
 $2x^2 - 13x + 18 = 0$
 $D = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 25$, dus $\sqrt{D} = 5$
 $x = \frac{13+5}{4} = 4\frac{1}{2} \vee x = \frac{13-5}{4} = 2$

b $\frac{x^2+2x-8}{x^3-8} = 0$
 $x^2 + 2x - 8 = 0$
 $(x-2)(x+4) = 0$
 $x = 2 \vee x = -4$
 $x = 2$ voldoet niet, dus $x = -4$.

c $\frac{3x^2-x}{x^2-1} = \frac{2x^2}{x^2-1}$
 $3x^2 - x = 2x^2$
 $x^2 - x = 0$
 $x(x-1) = 0$
 $x = 0 \vee x = 1$
 $x = 1$ voldoet niet, dus $x = 0$.

d $\frac{x^2-3}{x} + 1 = 3$
 $\frac{x^2-3}{x} = 2$
 $x^2 - 3 = 2x$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x+1)(x-3) = 0$
 $x = -1 \vee x = 3$

c $\frac{x^2-3}{x^2+1} = \frac{x-1}{x^2+1}$
 $x^2 - 3 = x - 1$
 $x^2 - x - 2 = 0$
 $(x+1)(x-2) = 0$
 $x = -1 \vee x = 2$

d $\frac{3x^2-10}{x^2+1} = 2$
 $3x^2 - 10 = 2(x^2 + 1)$
 $3x^2 - 10 = 2x^2 + 2$
 $x^2 = 12$
 $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \vee x = -2\sqrt{3}$

c $\frac{x^3-8}{x^2+2} = \frac{x^3-8}{x+8}$
 $x^3 - 8 = 0 \vee x^2 + 2 = x + 8$
 $x^3 = 8 \vee x^2 - x - 6 = 0$
 $x = 2 \vee (x+2)(x-3) = 0$
 $x = 2 \vee x = -2 \vee x = 3$

d $\frac{3x+1}{2x-1} = \frac{3x+5}{2x+1}$
 $(3x+1)(2x+1) = (2x-1)(3x+5)$
 $6x^2 + 5x + 1 = 6x^2 + 7x - 5$
 $-2x = -6$
 $x = 3$

60

$$f(x) = \frac{-10x}{x^2 + 2} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(x^2 + 2) \cdot -10 + 10x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-10x^2 - 20 + 20x^2}{(x^2 + 2)^2} = \frac{10x^2 - 20}{(x^2 + 2)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{5}{9} \text{ geeft } \frac{10x^2 - 20}{(x^2 + 2)^2} &= \frac{5}{9} \\ 5(x^2 + 2)^2 &= 9(10x^2 - 20) \\ 5(x^4 + 4x^2 + 4) &= 90x^2 - 180 \\ 5x^4 + 20x^2 + 20 &= 90x^2 - 180 \\ 5x^4 - 70x^2 + 200 &= 0 \\ x^4 - 14x^2 + 40 &= 0 \\ \text{Stel } x^2 &= u. \\ u^2 - 14u + 40 &= 0 \\ (u - 4)(u - 10) &= 0 \\ u = 4 \vee u = 10 \\ x^2 = 4 \vee x^2 = 10 \\ x = 2 \vee x = -2 \vee x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10} \end{aligned}$$

61

$$f(x) = \frac{ax}{bx - 3} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(bx - 3) \cdot a - ax \cdot b}{(bx - 3)^2} = \frac{abx - 3a - abx}{(bx - 3)^2} = \frac{-3a}{(bx - 3)^2}$$

$$\begin{aligned} f(3) = 5 \text{ geeft } \frac{3a}{3b - 3} &= 5 \\ 3a &= 5(3b - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(3) = -1\frac{2}{3} \text{ geeft } \frac{-3a}{(3b - 3)^2} &= -1\frac{2}{3} \\ -3a &= -1\frac{2}{3}(3b - 3)^2 \\ 3a &= 1\frac{2}{3}(3b - 3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hieruit volgt } 5(3b - 3) &= 1\frac{2}{3}(3b - 3)^2 \\ 3(3b - 3) &= (3b - 3)(3b - 3) \\ 3b - 3 &= 0 \vee 3b - 3 = 3 \\ 3b &= 3 \vee 3b = 6 \\ b &= 1 \vee b = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = 1 \text{ geeft } 3a &= 5(3 \cdot 1 - 3) \\ 3a &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = 2 \text{ geeft } 3a &= 5(3 \cdot 2 - 3) \\ 3a &= 15 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

$a \neq 0$, dus $a = 5$ en $b = 2$.

Bladzijde 172

62

$$AP = 6 \cdot v_v \text{ en } AP = (t + 1) \cdot v_m \text{ geeft } v_m = \frac{6}{t + 1} \cdot v_v.$$

$$BP = 2 \cdot v_m \text{ en } BP = t \cdot v_v \text{ geeft } v_m = \frac{t}{2} \cdot v_v.$$

$$\begin{aligned} \text{Uit } v_m = \frac{6}{t + 1} \cdot v_v \text{ en } v_m = \frac{t}{2} \cdot v_v \text{ volgt } \frac{6}{t + 1} &= \frac{t}{2} \\ t(t + 1) &= 12 \\ t^2 + t - 12 &= 0 \\ (t - 3)(t + 4) &= 0 \\ t &= 3 \vee t = -4 \end{aligned}$$

$t = -4$ kan niet, dus $t = 3$.

$9 + 6 + 3 = 18$, dus het vrachtschip is in B aangekomen om 18:00 uur.

C6

a $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$

$x^2 - x = 0 \vee x^2 - 1 = 0$

$x(x - 1) = 0 \vee x^2 = 1$

$x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$

b $(x^2 - x)^2 = (x^2 - 1)^2$

$x^2 - x = x^2 - 1 \vee x^2 - x = -x^2 + 1$

$-x = -1 \vee 2x^2 - x - 1 = 0$

$x = 1 \quad D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9, \text{ dus } \sqrt{D} = 3$

$x = \frac{1+3}{4} = 1 \vee x = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$

c $x^2(x^2 - x) = 9(x^2 - x)$

$x^2 - x = 0 \vee x^2 = 9$

$x(x - 1) = 0 \vee x = 3 \vee x = -3$

$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 3 \vee x = -3$

d $x^2(x^2 - x) = x^2 - x$

$x^2 - x = 0 \vee x^2 = 1$

$x(x - 1) = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$

$x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$

C7

a $x = 2\sqrt{x+3}$

kwadrateren geeft $x^2 = 4(x+3)$

$x^2 = 4x + 12$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x+2)(x-6) = 0$

$x = -2 \vee x = 6$

 $x = -2$ voldoet niet, dus $x = 6$.

b $2x - \sqrt{x} = 21$

$2x - 21 = \sqrt{x}$

kwadrateren geeft $(2x - 21)^2 = x$

$4x^2 - 84x + 441 = x$

$4x^2 - 85x + 441 = 0$

$D = (-85)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 441 = 169, \text{ dus } \sqrt{D} = 13$

$x = \frac{85+13}{8} = 12\frac{1}{4} \vee x = \frac{85-13}{8} = 9$

 $x = 9$ voldoet niet, dus $x = 12\frac{1}{4}$.**C8**

a $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x = 0 \vee x = 2$

 $x = 2$ voldoet niet, dus $x = 0$.

b $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = 2$

$x^2 - 2x = 2(x^2 - 4)$

$x^2 - 2x = 2x^2 - 8$

$-x^2 - 2x + 8 = 0$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x-2)(x+4) = 0$

$x = 2 \vee x = -4$

 $x = 2$ voldoet niet, dus $x = -4$.

c $\frac{2x}{x-2} = \frac{x}{x-4}$

$2x(x-4) = x(x-2)$

$2x^2 - 8x = x^2 - 2x$

$x^2 - 6x = 0$

$x(x-6) = 0$

$x = 0 \vee x = 6$

d $\frac{2x-1}{x^2-4} = \frac{x+1}{x^2-4}$

$2x-1 = x+1$

$x = 2$

 $x = 2$ voldoet niet, dus er is geen oplossing.

e $\frac{x^2-4}{2x} = \frac{x^2-4}{x+1}$

$x^2 - 4 = 0 \vee 2x = x + 1$

$x^2 = 4 \vee x = 1$

$x = 2 \vee x = -2 \vee x = 1$

4.4 Formules met breuken herleiden

Bladzijde 173

63

a $\frac{3x}{x+1} + \frac{2x-4}{x+1} = \frac{5x-4}{x+1}$

b $\frac{x+1}{2} \cdot \frac{3}{5x} = \frac{3(x+1)}{10x} = \frac{3x+3}{10x}$

c Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Dus $\frac{x}{\left(\frac{2}{x}\right)} = x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$.

Voor $x = 0$ is de herleiding niet juist.

Bladzijde 174

64

a Omdat zowel voor $x = 2$ als voor $x = -1$ een noemer gelijk is aan nul. Immers voor $x = 2$ is de noemer $x - 2$ gelijk aan nul, en voor $x = -1$ is de noemer $\frac{x+1}{x-2}$ gelijk aan nul.

b Voor $x = -1$ is zowel bij $\frac{4x}{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)}$ als bij $\frac{4x^2-8x}{x+1}$ een noemer gelijk aan nul.

Dus de voorwaarde 'voor $x \neq -1$ ' is overbodig.

Voor $x = 2$ is bij $\frac{4x}{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)}$ een noemer gelijk aan nul en bij $\frac{4x^2-8x}{x+1}$ niet.

Dus de voorwaarde 'voor $x \neq 2$ ' is noodzakelijk.

65

a $y = \frac{x+1}{x-3} - \frac{x+2}{x-4} = \frac{(x+1)(x-4) - (x+2)(x-3)}{(x-3)(x-4)} = \frac{x^2-3x-4 - (x^2-x-6)}{(x-3)(x-4)} = \frac{-2x+2}{(x-3)(x-4)}$

b $y = \frac{2x^2}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = 2x^2 \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x^2(x-1)}{x+1} = \frac{2x^3-2x^2}{x+1}$ voor $x \neq 1$

c $y = \frac{10}{x-1} - x^2 = \frac{10}{x-1} - \frac{x^2(x-1)}{x-1} = \frac{10-x^3+x^2}{x-1}$

d $y = \frac{x}{x-1} \left(x + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{x^2}{x-1} + \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x^2(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x^3-x^2+x}{(x-1)^2}$

e $y = (x-1) \cdot \frac{2}{\left(\frac{x-3}{x+1}\right)} = 2(x-1) \cdot \frac{x+1}{x-3} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-3} = \frac{2(x^2-1)}{x-3} = \frac{2x^2-2}{x-3}$ voor $x \neq -1$

66

a $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{4x}{x+1} = \frac{4}{x-1}$

$$4x(x-1) = 4(x+1)$$

$$4x^2 - 4x = 4x + 4$$

$$4x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 8, \text{ dus } \sqrt{D} = 2\sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \vee x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b } f(x) \cdot g(x) = 6 \text{ geeft } \frac{4x}{x+1} \cdot \frac{4}{x-1} &= 6 \\ \frac{16x}{x^2-1} &= 6 \\ 16x &= 6(x^2-1) \\ 16x &= 6x^2-6 \\ 6x^2-16x-6 &= 0 \\ 3x^2-8x-3 &= 0 \\ D &= (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100, \text{ dus } \sqrt{D} = 10 \\ x &= \frac{8+10}{6} = 3 \vee x = \frac{8-10}{6} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } f(x) - g(x) = 7 \text{ geeft } \frac{4x}{x+1} - \frac{4}{x-1} &= 7 \\ \frac{4x(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{4(x+1)}{(x+1)(x-1)} &= 7 \\ \frac{4x^2-4x-4x-4}{(x+1)(x-1)} &= 7 \\ \frac{4x^2-8x-4}{x^2-1} &= 7 \\ 4x^2-8x-4 &= 7(x^2-1) \\ 4x^2-8x-4 &= 7x^2-7 \\ -3x^2-8x+3 &= 0 \\ D &= (-8)^2 - 4 \cdot -3 \cdot 3 = 100, \text{ dus } \sqrt{D} = 10 \\ x &= \frac{8+10}{-6} = -3 \vee x = \frac{8-10}{-6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Bladzijde 175

- 67** **a** $a = 6$, $c = 3$ en $d = 12$
- b** $y = \frac{x^2-6x+5}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{6x}{x} + \frac{5}{x} = x - 6 + \frac{5}{x}$
- c** $y = \frac{3x}{2x^2+x} = \frac{3x}{x(2x+1)} = \frac{3}{2x+1}$
 Voor $x = 0$ is de herleiding niet juist.

Bladzijde 176

- 68** **a** Omdat voor $x = 5$ zowel bij $\frac{x^2+9x+20}{x^2-x-20}$ als bij $\frac{x+5}{x-5}$ de noemer gelijk is aan nul.
 Dus de voorwaarde 'voor $x \neq 5$ ' is overbodig.
- b** Omdat voor $b = 0$ bij $\frac{500}{4b+\frac{10}{3b}}$ een noemer gelijk is aan nul en bij $\frac{750b}{6b^2+5}$ niet.
- c** Omdat zowel voor $x = 0$ als $x = -3$ bij $\frac{x^3+4x^2+3x}{x^3+2x^2-3x}$ de noemer gelijk is aan nul en bij $\frac{x+1}{x-1}$ niet.

69 $y = \frac{x+5}{\left(\frac{x-1}{2x}\right)} = \frac{(x+5) \cdot 2x}{\left(\frac{x-1}{2x}\right) \cdot 2x} = \frac{2x^2+10x}{x-1}$ voor $x \neq 0$

*

- 70** **a** $y = \frac{x+\frac{3}{x+1}}{x} = \frac{\left(x+\frac{3}{x+1}\right) \cdot (x+1)}{x \cdot (x+1)} = \frac{x(x+1)+3}{x(x+1)} = \frac{x^2+x+3}{x(x+1)}$
- b** $y = \frac{5x^2+1000}{x} = 5x + \frac{1000}{x}$
- c** $y = \frac{x^2-x-12}{x^2+7x+12} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x+4)} = \frac{x-4}{x+4}$ voor $x \neq -3$

71 a $K = \frac{6t^2 + 12t + 1500}{3t} = 2t + 4 + \frac{500}{t}$

b $y = \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^3 + x^2 - 30x} = \frac{x(x^2 - 11x + 30)}{x(x^2 + x - 30)} = \frac{x(x-5)(x-6)}{x(x-5)(x+6)} = \frac{x-6}{x+6}$ voor $x \neq 0 \wedge x \neq 5$

c $y = \frac{10 + \frac{5}{x-1}}{6 - \frac{3}{x-1}} = \frac{\left(10 + \frac{5}{x-1}\right) \cdot (x-1)}{\left(6 - \frac{3}{x-1}\right) \cdot (x-1)} = \frac{10(x-1) + 5}{6(x-1) - 3} = \frac{10x-5}{6x-9}$ voor $x \neq 1$

72 a $y = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = x^2 - 1$

b $y = \frac{2x^5 - 32x}{x^2 - 4} = \frac{2x(x^4 - 16)}{x^2 - 4} = \frac{2x(x^2 + 4)(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = 2x(x^2 + 4) = 2x^3 + 8x$ voor $x \neq 2 \wedge x \neq -2$

c $y = \frac{x^4 + 4x^2 + 4}{x^4 - 4} = \frac{(x^2 + 2)(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)(x^2 - 2)} = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}$

d $y = \frac{x^4 - 9x^2}{x^2 - 3x} = \frac{x^2(x^2 - 9)}{x(x-3)} = \frac{x^2(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = x(x+3) = x^2 + 3x$ voor $x \neq 0 \wedge x \neq 3$

73 a $y = \frac{\left(\frac{x+1}{2x}\right)}{x-1} = \frac{x+1}{2x(x-1)}$

b $Q = \frac{10}{p + \frac{5}{2p}} - p = \frac{10 \cdot 2p}{\left(p + \frac{5}{2p}\right) \cdot 2p} - p = \frac{20p}{2p^2 + 5} - \frac{p(2p^2 + 5)}{2p^2 + 5} = \frac{20p - 2p^3 - 5p}{2p^2 + 5} = \frac{15p - 2p^3}{2p^2 + 5}$ voor $p \neq 0$

c $N = \frac{6p^2 - 3p - 1}{2p} = 3p - 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$

d $y = \frac{x^3 + 10x^2 + 9x}{x^4 + 11x^3 + 18x^2} = \frac{x(x^2 + 10x + 9)}{x^2(x^2 + 11x + 18)} = \frac{x(x+1)(x+9)}{x^2(x+2)(x+9)} = \frac{x+1}{x(x+2)}$ voor $x \neq -9$

e $y = \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 4)}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

74 a $p = \frac{3x}{x+5}$ substitueren in $N = \frac{4p-1}{2p+3}$ geeft

$$N = \frac{4 \cdot \frac{3x}{x+5} - 1}{2 \cdot \frac{3x}{x+5} + 3} = \frac{\left(\frac{12x}{x+5} - 1\right) \cdot (x+5)}{\left(\frac{6x}{x+5} + 3\right) \cdot (x+5)} = \frac{12x - (x+5)}{6x + 3(x+5)} = \frac{12x - x - 5}{6x + 3x + 15} = \frac{11x - 5}{9x + 15}$$
 voor $x \neq -5$

b $N = 9$ geeft $\frac{11x - 5}{9x + 15} = 9$
 $11x - 5 = 9(9x + 15)$
 $11x - 5 = 81x + 135$
 $-70x = 140$
 $x = -2$

75 a $x_P = p$ geeft $y_P = p^2$, dus $P(p, p^2)$.

$x_Q = q$ geeft $y_Q = q^2$, dus $Q(q, q^2)$.

$k: y = ax + b$

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{q^2 - p^2}{q - p} = \frac{(q+p)(q-p)}{q-p} = q + p$

$y = (p+q)x + b$
 door $P(p, p^2)$ $\left\{ \begin{array}{l} (p+q) \cdot p + b = p^2 \\ p^2 + pq + b = p^2 \end{array} \right.$
 $b = -pq$

Dus $k: y = (p+q)x - pq$.

b $f(a) = a^4$, dus $A(a, a^4)$.
 $f(b) = b^4$, dus $B(b, b^4)$.
 $l: y = mx + n$
 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^4 - a^4}{b - a} = \frac{(b^2 + a^2)(b^2 - a^2)}{b - a} = \frac{(b^2 + a^2)(b + a)(b - a)}{b - a} = (b^2 + a^2)(b + a) = b^3 + ab^2 + a^2b + a^3$
 $y = (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)x + n$
 door $A(a, a^4)$

$$\left. \begin{aligned} (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \cdot a + n &= a^4 \\ a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + n &= a^4 \\ n &= -a^3b - a^2b^2 - ab^3 \\ n &= -ab(a^2 + ab + b^2) \end{aligned} \right\}$$

 Dus $l: y = (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)x - ab(a^2 + ab + b^2)$.

Bladzijde 178

76 a tijd heenreis = $\frac{d}{12}$ uur en tijd terugreis = $\frac{d}{48}$ uur, dus $t = \frac{d}{12} + \frac{d}{48}$.

b gemiddelde snelheid = $\frac{\text{afstand}}{\text{tijd}}$ en afstand = $2d$, dus $\bar{v} = \frac{2d}{\frac{d}{12} + \frac{d}{48}}$.

Teller en noemer delen door d geeft $\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{48}}$.

De gemiddelde snelheid is $\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{48}} = 19,2$ km/u.

c $h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2 \cdot ab}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot ab} = \frac{2ab}{b + a} = \frac{2ab}{a + b}$

d $h = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a}} = \frac{3 \cdot 6a}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a}\right) \cdot 6a} = \frac{18a}{6 + 3 + 2} = \frac{18a}{11} = \frac{18}{11} \cdot a$, dus $p = 1\frac{7}{11}$.

Bladzijde 179

C9 a $y = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{3x}{x(x+1)} - \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{3x - 2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x-2}{x(x+1)}$

b $y = \frac{x-2}{\left(\frac{x}{x+1}\right)} = (x-2) \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{(x-2)(x+1)}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$ voor $x \neq -1$

C10 a $y = \frac{6x}{3 - \frac{5}{x+2}} = \frac{6x \cdot (x+2)}{\left(3 - \frac{5}{x+2}\right) \cdot (x+2)} = \frac{6x(x+2)}{3(x+2) - 5} = \frac{6x^2 + 12x}{3x + 1}$ voor $x \neq -2$

b $y = \frac{x^2 + 9x + 8}{x^2 + 7x - 8} = \frac{(x+1)(x+8)}{(x-1)(x+8)} = \frac{x+1}{x-1}$ voor $x \neq -8$

C11 $N = \frac{2t^3 - 3t^2 + 5}{4t} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{5}{4t}$

4.5 Inverse functies

Bladzijde 180

77 $y = \frac{2}{x}$
 $xy = 2$
 $x = \frac{2}{y}$

78 $x = 3$ invullen in $x = \frac{3y+2}{y}$ geeft $3 = \frac{3y+2}{y}$
 $3y = 3y + 2$
 $0y = 2$

Er is geen y die aan deze vergelijking voldoet.

Dus in de formule $x = \frac{3y+2}{y}$ is $x = 3$ niet mogelijk.

79 a $y = \frac{x}{x+2}$
 $y(x+2) = x$
 $xy + 2y = x$
 $xy - x = -2y$
 $x(y-1) = -2y$
 $x = \frac{-2y}{y-1}$

b $y = \frac{x-5}{x}$
 $xy = x - 5$
 $xy - x = -5$
 $x(y-1) = -5$
 $x = \frac{-5}{y-1}$

c $y = \frac{x-2}{x-1}$
 $y(x-1) = x-2$
 $xy - y = x-2$
 $xy - x = y-2$
 $x(y-1) = y-2$
 $x = \frac{y-2}{y-1}$

d $y = 320 - \frac{18}{x-1}$
 $y(x-1) = 320(x-1) - 18$
 $xy - y = 320x - 320 - 18$
 $xy - 320x = y - 338$
 $x(y-320) = y - 338$
 $x = \frac{y-338}{y-320}$

80 a $y = \frac{3x+2}{x-4}$
 $y(x-4) = 3x+2$
 $xy - 4y = 3x+2$
 $xy - 3x = 4y+2$
 $x(y-3) = 4y+2$
 $x = \frac{4y+2}{y-3}$

b $y = 20 - \frac{15}{x+1}$
 $y(x+1) = 20(x+1) - 15$
 $xy + y = 20x + 20 - 15$
 $xy - 20x = 5 - y$
 $x(y-20) = 5 - y$
 $x = \frac{5-y}{y-20}$

c $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{2x} + 4$
 $2xy = 2 + 3 + 8x$
 $2xy - 8x = 5$
 $x(2y-8) = 5$
 $x = \frac{5}{2y-8}$

81 a $y = \frac{ax+4}{x+1}$
 $y(x+1) = ax+4$
 $xy + y = ax+4$
 $xy - ax = 4 - y$
 $x(y-a) = 4 - y$
 $x = \frac{4-y}{y-a}$
 $x = \frac{1}{y-3} - 1 = \frac{1}{y-3} - \frac{y-3}{y-3} = \frac{4-y}{y-3}$
Dus $a = 3$.

b $y = 2 - \frac{3x+b}{x-1}$
 $y(x-1) = 2(x-1) - (3x+b)$
 $xy - y = 2x - 2 - 3x - b$
 $xy + x = y - 2 - b$
 $x(y+1) = y - 2 - b$
 $x = \frac{y-2-b}{y+1}$
Er moet gelden $y-2-b = y-3$, dus $b = 1$.

82 $y = \frac{ax+b}{3x+c}$
 $y(3x+c) = ax+b$
 $3xy + cy = ax+b$
 $3xy - ax = -cy + b$
 $x(3y-a) = -cy + b$
 $x = \frac{-cy+b}{3y-a}$
 $x = 2 - \frac{1}{3y+4} = \frac{2(3y+4)}{3y+4} - \frac{1}{3y+4} = \frac{6y+7}{3y+4}$
Dus $a = -4$, $b = 7$ en $c = -6$.

Bladzijde 182

- 83 a** l snijdt de y -as in het punt $(0, -2)$.

$$\text{Dus } l: y = ax - 2 \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 0}{2 - 1} = 2.$$

$$\text{Dus } l: y = 2x - 2.$$

- b** $y = \frac{1}{2}x + 1$

$$\frac{1}{2}x = y - 1$$

$$x = 2y - 2$$

Als bij het resultaat de variabelen x en y verwisseld worden, dan krijg je de formule van l .

Bladzijde 183

- 84 a** Als $c = 0$, dan geldt $f(x) = \frac{ax + b}{d} = \frac{a}{d} \cdot x + \frac{b}{d}$ en dit is een lineaire functie.

- b** Als $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dan geldt $f(x) = \frac{b(\frac{c}{d}x + 1)}{d(\frac{c}{d}x + 1)} = \frac{b}{d}$ en dit is een constante functie.

85
$$f(x) = 5 - \frac{3}{x+1} = \frac{5(x+1)}{x+1} - \frac{3}{x+1} = \frac{5x+2}{x+1}$$

$\frac{5}{2} \neq \frac{1}{1}$, dus f is een gebroken lineaire functie.

Bladzijde 184

- 86 a** Voor f geldt $y = \frac{2x}{x+3}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{2y}{y+3}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{2y}{y+3} \text{ geeft } x(y+3) &= 2y \\ xy + 3x &= 2y \\ xy - 2y &= -3x \\ y(x-2) &= -3x \\ y &= \frac{-3x}{x-2} \\ y &= \frac{3x}{2-x} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = \frac{3x}{2-x}.$$

- b** Voor g geldt $y = \frac{x+3}{2x}$, dus voor g^{inv} geldt $x = \frac{y+3}{2y}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{y+3}{2y} \text{ geeft } 2xy &= y+3 \\ 2xy - y &= 3 \\ y(2x-1) &= 3 \\ y &= \frac{3}{2x-1} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } g^{\text{inv}}(x) = \frac{3}{2x-1}.$$

- c** Voor h geldt $y = 5x - 4$, dus voor h^{inv} geldt $x = 5y - 4$.

$$\begin{aligned} x = 5y - 4 \text{ geeft } 5y &= x + 4 \\ y &= \frac{1}{5}x + \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } h^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}.$$

d Voor k geldt $y = \frac{3x-1}{4x+5}$, dus voor k^{inv} geldt $x = \frac{3y-1}{4y+5}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{3y-1}{4y+5} \text{ geeft } x(4y+5) &= 3y-1 \\ 4xy+5x &= 3y-1 \\ 4xy-3y &= -5x-1 \\ y(4x-3) &= -5x-1 \\ y &= \frac{-5x-1}{4x-3} \\ y &= \frac{5x+1}{3-4x} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } k^{\text{inv}}(x) = \frac{5x+1}{3-4x}.$$

87 a Voor f geldt $y = 3 - \frac{4}{x+2}$, dus voor f^{inv} geldt $x = 3 - \frac{4}{y+2}$.

$$\begin{aligned} x = 3 - \frac{4}{y+2} \text{ geeft } x(y+2) &= 3(y+2) - 4 \\ xy+2x &= 3y+6-4 \\ xy-3y &= 2-2x \\ y(x-3) &= 2-2x \\ y &= \frac{2-2x}{x-3} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = \frac{2-2x}{x-3} \text{ en er geldt inderdaad dat } g(x) = f^{\text{inv}}(x).$$

b Voor h geldt $y = \frac{5-x}{x-6}$, dus voor h^{inv} geldt $x = \frac{5-y}{y-6}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{5-y}{y-6} \text{ geeft } x(y-6) &= 5-y \\ xy-6x &= 5-y \\ xy+y &= 6x+5 \\ y(x+1) &= 6x+5 \\ y &= \frac{6x+5}{x+1} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } h^{\text{inv}}(x) = \frac{6x+5}{x+1}.$$

$$k(x) = 5 + \frac{x}{x+1} = \frac{5(x+1)}{x+1} + \frac{x}{x+1} = \frac{5x+5+x}{x+1} = \frac{6x+5}{x+1}$$

Dus er geldt inderdaad dat $k(x) = h^{\text{inv}}(x)$.

88 Stel $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ is een gebroken lineaire functie.

Voor f geldt $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{ay+b}{cy+d}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{ay+b}{cy+d} \text{ geeft } x(cy+d) &= ay+b \\ cxy+dx &= ay+b \\ cxy-ay &= -dx+b \\ y(cx-a) &= -dx+b \\ y &= \frac{-dx+b}{cx-a} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}.$$

$c \neq 0$ en uit $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ volgt $ad \neq bc$, dus $\frac{d}{b} \neq \frac{c}{a}$ oftewel $\frac{-d}{b} \neq \frac{c}{-a}$.

Dus de inverse van een gebroken lineaire functie is ook een gebroken lineaire functie.

89 a Voor f geldt $y = \frac{ax-2}{2x-5}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{ay-2}{2y-5}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{ay-2}{2y-5} \text{ geeft } x(2y-5) &= ay-2 \\ 2xy-5x &= ay-2 \\ 2xy-ay &= 5x-2 \\ y(2x-a) &= 5x-2 \\ y &= \frac{5x-2}{2x-a} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = \frac{5x-2}{2x-a}.$$

$$g(x) = 2\frac{1}{2} + \frac{4}{x-2} = \frac{5}{2} + \frac{4}{x-2} = \frac{5(x-2)}{2(x-2)} + \frac{8}{2(x-2)} = \frac{5x-10+8}{2(x-2)} = \frac{5x-2}{2x-4}$$

$$g(x) = f^{\text{inv}}(x), \text{ dus } a = 4.$$

b $f(x) = x$ geeft $\frac{ax-2}{2x-5} = x$

$$\begin{aligned} ax-2 &= x(2x-5) \\ ax-2 &= 2x^2-5x \\ 2x^2-ax-5x+2 &= 0 \\ 2x^2-(a+5)x+2 &= 0 \\ D &= -(a+5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = (a+5)^2 - 16 \end{aligned}$$

Geen oplossingen voor $D < 0$, dus voor $(a+5)^2 - 16 < 0$

$$\begin{aligned} (a+5)^2 &< 16 \\ -4 &< a+5 < 4 \\ -9 &< a < -1 \end{aligned}$$

90 Voor f geldt $y = \frac{3x-2}{2x+1}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{3y-2}{2y+1}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{3y-2}{2y+1} \text{ geeft } x(2y+1) &= 3y-2 \\ 2xy+x &= 3y-2 \\ 2xy-3y &= -x-2 \\ y(2x-3) &= -x-2 \\ y &= \frac{-x-2}{2x-3} \\ y &= \frac{x+2}{3-2x} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = \frac{x+2}{3-2x}.$$

$$f^{\text{inv}}(x) = \frac{x+2}{3-2x} \text{ geeft } f^{\text{inv}'}(x) = \frac{(3-2x) \cdot 1 - (x+2) \cdot (-2)}{(3-2x)^2} = \frac{3-2x+2x+4}{(3-2x)^2} = \frac{7}{(3-2x)^2}$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f^{\text{inv}'}(2) = 7$$

$$\left. \begin{aligned} y &= 7x + b \\ f^{\text{inv}}(2) &= -4, \text{ dus } A(2, -4) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 7 \cdot 2 + b &= -4 \\ 14 + b &= -4 \\ b &= -18 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } k: y = 7x - 18.$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+2} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(x+2) \cdot a - (ax+b) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{ax+2a-ax-b}{(x+2)^2} = \frac{2a-b}{(x+2)^2}$$

$$f(-4) = 6 \text{ geeft } \frac{-4a+b}{-4+2} = 6$$

$$\frac{-4a+b}{-2} = 6$$

$$-4a+b = -12$$

$$f'(-4) = 2 \text{ geeft } \frac{2a-b}{(-4+2)^2} = 2$$

$$\frac{2a-b}{4} = 2$$

$$2a-b = 8$$

$$\begin{cases} -4a+b = -12 \\ 2a-b = 8 \end{cases} +$$

$$-2a = -4$$

$$a = 2$$

$$a = 2 \text{ geeft } -4 \cdot 2 + b = -12$$

$$-8 + b = -12$$

$$b = -4$$

$$\text{Dus } f(x) = \frac{2x-4}{x+2}.$$

$$\text{Voor } f \text{ geldt } y = \frac{2x-4}{x+2}, \text{ dus voor } f^{\text{inv}} \text{ geldt } x = \frac{2y-4}{y+2}.$$

$$x = \frac{2y-4}{y+2} \text{ geeft } x(y+2) = 2y-4$$

$$xy + 2x = 2y - 4$$

$$xy - 2y = -2x - 4$$

$$y(x-2) = -2x-4$$

$$y = \frac{-2x-4}{x-2}$$

$$y = \frac{2x+4}{2-x}$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = \frac{2x+4}{2-x}.$$

$$f^{\text{inv}}(x) = \frac{2x+4}{2-x} \text{ geeft } f^{\text{inv}'}(x) = \frac{(2-x) \cdot 2 - (2x+4) \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{4-2x+2x+4}{(2-x)^2} = \frac{8}{(2-x)^2}$$

$$l \parallel m, \text{ dus } rc_l = rc_m = rc_k = 2.$$

$$f^{\text{inv}'}(x) = 2 \text{ geeft } \frac{8}{(2-x)^2} = 2$$

$$(2-x)^2 = 4$$

$$2-x = 2 \vee 2-x = -2$$

$$x = 0 \vee x = 4$$

$$f^{\text{inv}}(0) = 2 \text{ en } f^{\text{inv}}(4) = -6, \text{ dus } B(0, 2) \text{ en } C(4, -6).$$

$$n: y = px + q \text{ door } B(0, 2), \text{ dus } q = 2.$$

$$p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6-2}{4-0} = -2$$

$$\text{Dus } n: y = -2x + 2.$$

Bladzijde 185

C12 a $y = \frac{2x-1}{3x+1}$

$$y(3x+1) = 2x-1$$

$$3xy + y = 2x-1$$

$$3xy - 2x = -y-1$$

$$x(3y-2) = -y-1$$

$$x = \frac{-y-1}{3y-2}$$

b $y = 5 - \frac{4}{x+1}$

$$y(x+1) = 5(x+1) - 4$$

$$xy + y = 5x+1$$

$$xy - 5x = 1-y$$

$$x(y-5) = 1-y$$

$$x = \frac{1-y}{y-5}$$

c $y = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x} + 3$

$$2xy = 1 - 2 + 6x$$

$$2xy - 6x = -1$$

$$x(2y-6) = -1$$

$$x = \frac{-1}{2y-6}$$

C13 f en h hebben geen inverse.

Bij f en h zijn er waarden van y waarbij meerdere waarden van x horen.

C14 a Voor f geldt $y = \frac{3x+15}{4x-1}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{3y+15}{4y-1}$.

$$\begin{aligned}x = \frac{3y+15}{4y-1} \text{ geeft } x(4y-1) &= 3y+15 \\4xy - x &= 3y+15 \\4xy - 3y &= x+15 \\y(4x-3) &= x+15 \\y &= \frac{x+15}{4x-3}\end{aligned}$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = \frac{x+15}{4x-3}.$$

b Voor h geldt $y = \frac{3x+12}{x+2}$, dus voor h^{inv} geldt $x = \frac{3y+12}{y+2}$.

$$\begin{aligned}x = \frac{3y+12}{y+2} \text{ geeft } x(y+2) &= 3y+12 \\xy + 2x &= 3y+12 \\xy - 3y &= 12-2x \\y(x-3) &= 12-2x \\y &= \frac{12-2x}{x-3}\end{aligned}$$

$$\text{Dus } h^{\text{inv}}(x) = \frac{12-2x}{x-3}.$$

$$g(x) = \frac{6}{x-3} - 2 = \frac{6}{x-3} - \frac{2(x-3)}{x-3} = \frac{6-2x+6}{x-3} = \frac{12-2x}{x-3}$$

Dus er geldt inderdaad dat $g(x) = h^{\text{inv}}(x)$.

Kennis- en vaardigheidentest

Bladzijde 186

1 a
$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + 3y = 23 \end{cases} +$$

$$6x = 30$$

$$x = 5$$

$$x = 5 \text{ geeft } 2 \cdot 5 - 3y = 7$$

$$10 - 3y = 7$$

$$-3y = -3$$

$$y = 1$$

$$\text{Dus } (x, y) = (5, 1).$$

b
$$\begin{cases} 4x + 5y = 27 \\ -2x + 3y = 25 \end{cases} \begin{array}{l} |1| \\ |2| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 5y = 27 \\ -4x + 6y = 50 \end{cases} +$$

$$11y = 77$$

$$y = 7$$

$$y = 7 \text{ geeft } 4x + 5 \cdot 7 = 27$$

$$4x + 35 = 27$$

$$4x = -8$$

$$x = -2$$

$$\text{Dus } (x, y) = (-2, 7).$$

$$\text{c } \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 15x - 6y = 24 \end{cases} +$$

$$\frac{19x = 38}{x = 2}$$

$$x = 2 \text{ geeft } 2 \cdot 2 + 3y = 7$$

$$4 + 3y = 7$$

$$3y = 3$$

$$y = 1$$

$$\text{Dus } (x, y) = (2, 1).$$

$$\text{2 } \begin{cases} 3x - 2y = 14 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 4y = 28 \\ 6x + 15y = 9 \end{cases}$$

$$\frac{-19y = 19}{y = -1}$$

$$y = -1 \text{ geeft } 2x + 5 \cdot -1 = 3$$

$$2x - 5 = 3$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$\text{Dus } S(4, -1).$$

$$\text{3 } (-6, 18) \text{ en } y = ax^2 + bx \text{ geeft } 36a - 6b = 18 \text{ oftewel } 6a - b = 3.$$

$$(30, -450) \text{ en } y = ax^2 + bx \text{ geeft } 900a + 30b = -450 \text{ oftewel } 30a + b = -15.$$

$$\begin{cases} 6a - b = 3 \\ 30a + b = -15 \end{cases} +$$

$$\frac{36a = -12}{a = -\frac{1}{3}}$$

$$a = -\frac{1}{3} \text{ geeft } 30 \cdot -\frac{1}{3} + b = -15$$

$$-10 + b = -15$$

$$b = -5$$

$$\text{De formule is } y = -\frac{1}{3}x^2 - 5x.$$

$$\text{4 a } 3x - y = 7 \text{ geeft } y = 3x - 7$$

$$y = 3x - 7 \text{ en } (x - 4)^2 + y^2 = 5 \text{ geeft } (x - 4)^2 + (3x - 7)^2 = 5$$

$$x^2 - 8x + 16 + 9x^2 - 42x + 49 = 5$$

$$10x^2 - 50x + 60 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 3$$

$$x = 2 \text{ geeft } y = 3 \cdot 2 - 7 = -1$$

$$x = 3 \text{ geeft } y = 3 \cdot 3 - 7 = 2$$

$$\text{Dus } (x, y) = (2, -1) \vee (x, y) = (3, 2).$$

$$\text{b } x + 4y = 2 \text{ geeft } x = 2 - 4y$$

$$x = 2 - 4y \text{ en } xy = -6 \text{ geeft } (2 - 4y)y = -6$$

$$2y - 4y^2 = -6$$

$$-4y^2 + 2y + 6 = 0$$

$$2y^2 - y - 3 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 25, \text{ dus } \sqrt{D} = 5$$

$$y = \frac{1 + 5}{4} = 1\frac{1}{2} \vee y = \frac{1 - 5}{4} = -1$$

$$y = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } x = 2 - 4 \cdot 1\frac{1}{2} = -4$$

$$y = -1 \text{ geeft } x = 2 - 4 \cdot -1 = 6$$

$$\text{Dus } (x, y) = (-4, 1\frac{1}{2}) \vee (x, y) = (6, -1).$$

5 Oppervlakte rechthoek is 22 geeft $xy = 22$.

Omtrek figuur is 27 geeft $4x + 2y = 27$, dus $2y = -4x + 27$ oftewel $y = -2x + 13\frac{1}{2}$.
 $y = -2x + 13\frac{1}{2}$ en $xy = 22$ geeft $x(-2x + 13\frac{1}{2}) = 22$

$$-2x^2 + 13\frac{1}{2}x - 22 = 0$$

$$4x^2 - 27x + 44 = 0$$

$$D = (-27)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 44 = 25, \text{ dus } \sqrt{D} = 5$$

$$x = \frac{27+5}{8} = 4 \vee x = \frac{27-5}{8} = 2\frac{3}{4}$$

$x = 4$ geeft $y = -2 \cdot 4 + 13\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$, dus omtrek rechthoek $= 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5\frac{1}{2} = 19$.

$x = 2\frac{3}{4}$ geeft $y = -2 \cdot 2\frac{3}{4} + 13\frac{1}{2} = 8$, dus omtrek rechthoek $= 2 \cdot 2\frac{3}{4} + 2 \cdot 8 = 21\frac{1}{2}$.

De grootste mogelijke omtrek van de rechthoek is $21\frac{1}{2}$.

6 a $3x^3 + 5 = 86$

$$3x^3 = 81$$

$$x^3 = 27$$

$$x = 3$$

b $2x^3 + 19 = 5$

$$2x^3 = -14$$

$$x^3 = -7$$

$$x = \sqrt[3]{-7}$$

c $\frac{1}{2}(x+2)^4 = \frac{1}{32}$

$$(x+2)^4 = \frac{1}{16}$$

$$x+2 = \frac{1}{2} \vee x+2 = -\frac{1}{2}$$

$$x = -1\frac{1}{2} \vee x = -2\frac{1}{2}$$

d $100 - (2x+1)^5 = 68$

$$-(2x+1)^5 = -32$$

$$(2x+1)^5 = 32$$

$$2x+1 = 2$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

7 a $5x^4 - 6 = 9$

$$5x^4 = 15$$

$$x^4 = 3$$

$$x = \sqrt[4]{3} \vee x = -\sqrt[4]{3}$$

$$x \approx 1,32 \vee x \approx -1,32$$

b $(2x+4)^3 = 10$

$$2x+4 = \sqrt[3]{10}$$

$$2x = -4 + \sqrt[3]{10}$$

$$x = -2 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{10}$$

$$x \approx -0,92$$

8 a $x^3 = x^2 + 20x$

$$x^3 - x^2 - 20x = 0$$

$$x(x^2 - x - 20) = 0$$

$$x(x+4)(x-5) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -4 \vee x = 5$$

b $x^6 - 6x^3 + 5 = 0$

$$\text{Stel } x^3 = u.$$

$$u^2 - 6u + 5 = 0$$

$$(u-1)(u-5) = 0$$

$$u = 1 \vee u = 5$$

$$x^3 = 1 \vee x^3 = 5$$

$$x = 1 \vee x = \sqrt[3]{5}$$

c $x^8 + x^4 = 42$

$$x^8 + x^4 - 42 = 0$$

$$\text{Stel } x^4 = u.$$

$$u^2 + u - 42 = 0$$

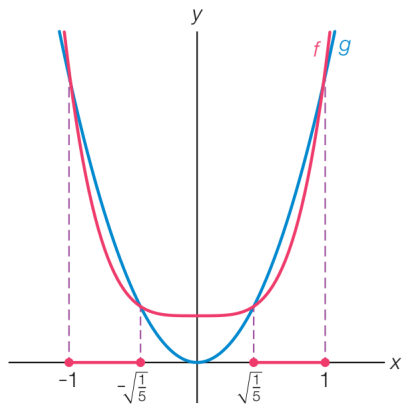
$$(u-6)(u+7) = 0$$

$$u = 6 \vee u = -7$$

$$x^4 = 6 \vee x^4 = -7$$

$$x = \sqrt[4]{6} \vee x = -\sqrt[4]{6}$$

d Stel $f(x) = 5x^4 + 1$ en $g(x) = 6x^2$.
 $f(x) = g(x)$ geeft $5x^4 + 1 = 6x^2$
 $5x^4 - 6x^2 + 1 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $5u^2 - 6u + 1 = 0$
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 16$, dus $\sqrt{D} = 4$
 $u = \frac{6+4}{10} = 1 \vee u = \frac{6-4}{10} = \frac{1}{5}$
 $x^2 = 1 \vee x^2 = \frac{1}{5}$
 $x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{\frac{1}{5}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{5}}$



$5x^4 + 1 \leq 6x^2$ geeft $-1 \leq x \leq -\sqrt{\frac{1}{5}} \vee \sqrt{\frac{1}{5}} \leq x \leq 1$

9 a $|2x^3 - 5| = 49$
 $2x^3 - 5 = 49 \vee 2x^3 - 5 = -49$
 $2x^3 = 54 \vee 2x^3 = -44$
 $x^3 = 27 \vee x^3 = -22$
 $x = 3 \vee x = \sqrt[3]{-22}$

b $|x^2 - 15x| = 54$
 $x^2 - 15x = 54 \vee x^2 - 15x = -54$
 $x^2 - 15x - 54 = 0 \vee x^2 - 15x + 54 = 0$
 $(x+3)(x-18) = 0 \vee (x-6)(x-9) = 0$
 $x = -3 \vee x = 18 \vee x = 6 \vee x = 9$

10 a $(x^2 - 6)(x^2 - 2x) = 0$
 $x^2 - 6 = 0 \vee x^2 - 2x = 0$
 $x^2 = 6 \vee x(x-2) = 0$
 $x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6} \vee x = 0 \vee x = 2$
b $(2x^2 - 1)^2 = (6x + 1)^2$
 $2x^2 - 1 = 6x + 1 \quad \vee 2x^2 - 1 = -6x - 1$
 $2x^2 - 6x - 2 = 0 \quad \vee 2x^2 + 6x = 0$
 $x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \vee 2x(x+3) = 0$
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 13$
 $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \quad \vee x = 0 \vee x = -3$
 $x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} \vee x = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \vee x = 0 \vee x = -3$

c $x(x^2 - 1) = 4(x^2 - 1)$
 $x^2 - 1 = 0 \vee x = 4$
 $x^2 = 1 \vee x = 4$
 $x = 1 \vee x = -1 \vee x = 4$
d $(x^3 - 9x)(x^2 - 3) = x^3 - 9x$
 $x^3 - 9x = 0 \vee x^2 - 3 = 1$
 $x(x^2 - 9) = 0 \vee x^2 = 4$
 $x = 0 \vee x^2 = 9 \vee x = 2 \vee x = -2$
 $x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3 \vee x = 2 \vee x = -2$

11 a $\sqrt{3x+5} + 1 = 5$

$$\sqrt{3x+5} = 4$$

kwadrateren geeft $3x + 5 = 16$

$$3x = 11$$

$$x = 3\frac{2}{3}$$

b $3x = 5\sqrt{x+4}$

kwadrateren geeft $9x^2 = 25(x+4)$

$$9x^2 = 25x + 100$$

$$9x^2 - 25x - 100 = 0$$

$$D = (-25)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -100 = 4225, \text{ dus } \sqrt{D} = 65$$

$$x = \frac{25 + 65}{18} = 5 \vee x = \frac{25 - 65}{18} = -2\frac{2}{9}$$

$x = -2\frac{2}{9}$ voldoet niet, dus $x = 5$.

c $x = \sqrt{x} + 6$

$$x - 6 = \sqrt{x}$$

kwadrateren geeft $(x-6)^2 = x$

$$x^2 - 12x + 36 = x$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$(x-4)(x-9) = 0$$

$$x = 4 \vee x = 9$$

$x = 4$ voldoet niet, dus $x = 9$.

d $2x + 3\sqrt{x} = 2$

$$3\sqrt{x} = 2 - 2x$$

kwadrateren geeft $9x = (2 - 2x)^2$

$$9x = 4 - 8x + 4x^2$$

$$-4x^2 + 17x - 4 = 0$$

$$D = 17^2 - 4 \cdot -4 \cdot -4 = 225, \text{ dus } \sqrt{D} = 15$$

$$x = \frac{-17 + 15}{-8} = \frac{1}{4} \vee x = \frac{-17 - 15}{-8} = 4$$

$x = 4$ voldoet niet, dus $x = \frac{1}{4}$.

12 a $\frac{2x^2 - 6}{2x + 4} = 0$

$$2x^2 - 6 = 0$$

$$2x^2 = 6$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

b $\frac{x^2 - 9}{3x - 1} = \frac{x^2 - 9}{x - 5}$

$$x^2 - 9 = 0 \vee 3x - 1 = x - 5$$

$$x^2 = 9 \vee 2x = -4$$

$$x = 3 \vee x = -3 \vee x = -2$$

c $\frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{4x + 1}{5x - 1}$

$$(2x - 1)(5x - 1) = (x + 1)(4x + 1)$$

$$10x^2 - 7x + 1 = 4x^2 + 5x + 1$$

$$6x^2 - 12x = 0$$

$$6x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

d $\frac{x^2}{x^3 - 8} = \frac{5x - 6}{x^3 - 8}$

$$x^2 = 5x - 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 3$$

$x = 2$ voldoet niet, dus $x = 3$.

13 a $y = 2x - \frac{x-1}{x-2} = \frac{2x(x-2)}{x-2} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{2x^2 - 4x - x + 1}{x-2} = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x-2}$

b $y = \frac{3}{x} \left(2 - \frac{x}{x-1} \right) = \frac{6}{x} - \frac{3x}{x(x-1)} = \frac{6(x-1)}{x(x-1)} - \frac{3x}{x(x-1)} = \frac{3x-6}{x(x-1)}$

$$14 \quad \mathbf{a} \quad y = \frac{2x+1}{\left(\frac{x}{x^2-1}\right)} = \frac{(2x+1)(x^2-1)}{x} = \frac{2x^3+x^2-2x-1}{x} \text{ voor } x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

$$\mathbf{b} \quad y = \frac{\frac{2}{x+1}-3}{4-\frac{x}{x+1}} = \frac{\left(\frac{2}{x+1}-3\right) \cdot (x+1)}{\left(4-\frac{x}{x+1}\right) \cdot (x+1)} = \frac{2-3(x+1)}{4(x+1)-x} = \frac{2-3x-3}{4x+4-x} = \frac{-3x-1}{3x+4} \text{ voor } x \neq -1$$

$$15 \quad \mathbf{a} \quad N = \frac{4x^3-50}{2x} = 2x^2 - \frac{25}{x}$$

$$\mathbf{b} \quad B = \frac{6p^2-3p+4}{3p} = 2p - 1 + \frac{4}{3p}$$

$$16 \quad \mathbf{a} \quad y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-4}{x-3} \text{ voor } x \neq 1$$

$$\mathbf{b} \quad y = \frac{x^4-16}{x^3-4x} = \frac{(x^2+4)(x^2-4)}{x(x^2-4)} = \frac{x^2+4}{x} \text{ voor } x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

$$17 \quad \mathbf{a} \quad y = \frac{2x-3}{x+5}$$

$$y(x+5) = 2x-3$$

$$xy+5y = 2x-3$$

$$xy-2x = -5y-3$$

$$x(y-2) = -5y-3$$

$$x = \frac{-5y-3}{y-2}$$

$$x = \frac{5y+3}{2-y}$$

$$\mathbf{b} \quad y = 3 + \frac{2x}{x-1}$$

$$y(x-1) = 3(x-1) + 2x$$

$$xy-y = 3x-3+2x$$

$$xy-5x = y-3$$

$$x(y-5) = y-3$$

$$x = \frac{y-3}{y-5}$$

$$18 \quad \mathbf{a} \quad \text{Voor } f \text{ geldt } y = \frac{2x-1}{5-x}, \text{ dus voor } f^{\text{inv}} \text{ geldt } x = \frac{2y-1}{5-y}.$$

$$x = \frac{2y-1}{5-y} \text{ geeft } x(5-y) = 2y-1$$

$$5x-xy = 2y-1$$

$$-xy-2y = -5x-1$$

$$xy+2y = 5x+1$$

$$y(x+2) = 5x+1$$

$$y = \frac{5x+1}{x+2}$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = \frac{5x+1}{x+2}.$$

$$\mathbf{b} \quad \text{Voor } g \text{ geldt } y = 2 - \frac{3}{x-4}, \text{ dus voor } g^{\text{inv}} \text{ geldt } x = 2 - \frac{3}{y-4}.$$

$$x = 2 - \frac{3}{y-4} \text{ geeft } x(y-4) = 2(y-4) - 3$$

$$xy-4x = 2y-8-3$$

$$xy-2y = 4x-11$$

$$y(x-2) = 4x-11$$

$$y = \frac{4x-11}{x-2}$$

$$\text{Dus } g^{\text{inv}}(x) = \frac{4x-11}{x-2}.$$

Gemengde opgaven

Bladzijde 188

1 a $f(-2) = 2$ geeft $\sqrt{-2p + q} = 2$ oftewel $-2p + q = 4$.

$f(8) = 3$ geeft $\sqrt{8p + q} = 3$ oftewel $8p + q = 9$.

$$\begin{cases} -2p + q = 4 \\ 8p + q = 9 \end{cases} \quad -$$

$$-10p = -5$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$p = \frac{1}{2}$ geeft $-2 \cdot \frac{1}{2} + q = 4$

$$-1 + q = 4$$

$$q = 5$$

Dus $p = \frac{1}{2}$ en $q = 5$.

b $g(0) = 18$ geeft $0 + 0 + c = 18$, dus $c = 18$ en $g(x) = ax^4 + bx^2 + 18$.

$g(-1) = 24$ geeft $a + b + 18 = 24$ oftewel $a + b = 6$.

$g(2) = 30$ geeft $16a + 4b + 18 = 30$ oftewel $16a + 4b = 12$, dus $4a + b = 3$.

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ 4a + b = 3 \end{cases} \quad -$$

$$-3a = 3$$

$$a = -1$$

$a = -1$ geeft $-1 + b = 6$

$$b = 7$$

Dus $g(x) = -x^4 + 7x^2 + 18$.

$g(x) = 0$ geeft $-x^4 + 7x^2 + 18 = 0$

$$x^4 - 7x^2 - 18 = 0$$

Stel $x^2 = u$.

$$u^2 - 7u - 18 = 0$$

$$(u + 2)(u - 9) = 0$$

$$u = -2 \vee u = 9$$

$$x^2 = -2 \vee x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

De nulpunten zijn 3 en -3.

2 Stel a is het aantal biljetten van 5 euro, b is het aantal biljetten van 10 euro en c is het aantal biljetten van 20 euro.

Dan geldt $5a + 10b = 180$, $5a + 20c = 230$ en $10b + 20c = 270$.

$$\begin{cases} 5a + 10b = 180 \\ 5a + 20c = 230 \end{cases} \quad -$$

$$10b - 20c = -50$$

$$\begin{cases} 10b - 20c = -50 \\ 10b + 20c = 270 \end{cases} \quad +$$

$$20b = 220$$

$$b = 11$$

$b = 11$ geeft $5a + 10 \cdot 11 = 180$

$$5a + 110 = 180$$

$$5a = 70$$

$$a = 14$$

Er zitten veertien biljetten van 5 euro in de kassa.

a $17 - (2x - 1)^4 = 1$

$$(2x - 1)^4 = 16$$

$$2x - 1 = 2 \vee 2x - 1 = -2$$

$$2x = 3 \vee 2x = -1$$

$$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

b $(2x^2 - 1)^2 = x^2$

$$2x^2 - 1 = x$$

$$\vee 2x^2 - 1 = -x$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\vee 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9, \text{ dus } \sqrt{D} = 3 \quad D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9, \text{ dus } \sqrt{D} = 3$$

$$x = \frac{1+3}{4} = 1 \vee x = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \quad \vee x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \vee x = \frac{-1-3}{4} = -1$$

c $\frac{x-3}{|2-\sqrt{x}|} = 2x-6$

$$(2x-6)|2-\sqrt{x}| = x-3$$

$$2(x-3)|2-\sqrt{x}| = x-3$$

$$x-3 = 0 \vee 2|2-\sqrt{x}| = 1$$

$$x = 3 \vee |2-\sqrt{x}| = \frac{1}{2}$$

$$2-\sqrt{x} = \frac{1}{2} \vee 2-\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x} = 1\frac{1}{2} \vee \sqrt{x} = 2\frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{4} \vee x = 6\frac{1}{4}$$

d $\sqrt{x^2+2x}+x=6$

$$\sqrt{x^2+2x} = 6-x$$

kwadrateren geeft $x^2+2x = (6-x)^2$

$$x^2+2x = 36-12x+x^2$$

$$14x = 36$$

$$x = 2\frac{4}{7}$$

e $(2x-3)(x^2-3)+3=2x$

$$(2x-3)(x^2-3) = 2x-3$$

$$2x-3 = 0 \vee x^2-3 = 1$$

$$2x = 3 \vee x^2 = 4$$

$$x = 1\frac{1}{2} \vee x = 2 \vee x = -2$$

f $\frac{3}{2\sqrt{x+5}} = \frac{\sqrt{2x+1}}{x+2}$

$$2\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{2x+1} = 3(x+2)$$

kwadrateren geeft $4(x+5)(2x+1) = 9(x+2)^2$

$$4(2x^2+11x+5) = 9(x^2+4x+4)$$

$$8x^2+44x+20 = 9x^2+36x+36$$

$$-x^2+8x-16 = 0$$

$$x^2-8x+16 = 0$$

$$(x-4)^2 = 0$$

$$x = 4$$

g $6x^5 + 10x^2 \cdot \sqrt{x} - 464 = 0$

Stel $x^2 \cdot \sqrt{x} = u$.

$$6u^2 + 10u - 464 = 0$$

$$3u^2 + 5u - 232 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot -232 = 2809, \text{ dus } \sqrt{D} = 53$$

$$u = \frac{-5+53}{6} = 8 \vee u = \frac{-5-53}{6} = -9\frac{2}{3}$$

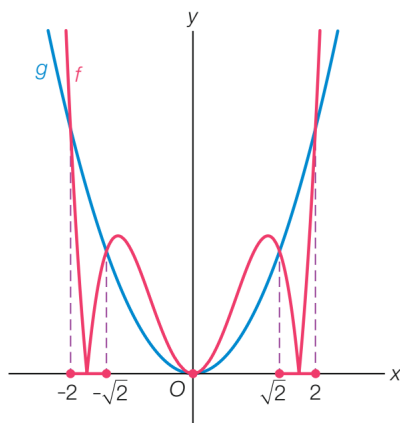
$$x^2 \cdot \sqrt{x} = 8 \vee x^2 \cdot \sqrt{x} = -9\frac{2}{3}$$

$$x^5 = 64$$

$$x = \sqrt[5]{64}$$

h $x + 5y = 17$ geeft $x = 17 - 5y$
 $x = 17 - 5y$ en $(2x - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 73$ geeft $(2(17 - 5y) - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 73$
 $(34 - 10y - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 73$
 $(33 - 10y)^2 + (3y - 1)^2 = 73$
 $1089 - 660y + 100y^2 + 9y^2 - 6y + 1 = 73$
 $109y^2 - 666y + 1017 = 0$
 $D = (-666)^2 - 4 \cdot 109 \cdot 1017 = 144$, dus $\sqrt{D} = 12$
 $y = \frac{666 + 12}{218} = 3\frac{12}{109} \vee y = \frac{666 - 12}{218} = 3$
 $y = 3\frac{12}{109}$ geeft $x = 17 - 5 \cdot 3\frac{12}{109} = 1\frac{49}{109}$
 $y = 3$ geeft $x = 17 - 5 \cdot 3 = 2$
Dus $(x, y) = (1\frac{49}{109}, 3\frac{12}{109}) \vee (x, y) = (2, 3)$.

i $|x^4 - 3x^2| \leq x^2$
Stel $f(x) = |x^4 - 3x^2|$ en $g(x) = x^2$.
 $f(x) = g(x)$ geeft $|x^4 - 3x^2| = x^2$
 $x^4 - 3x^2 = x^2 \vee x^4 - 3x^2 = -x^2$
 $x^4 - 4x^2 = 0 \vee x^4 - 2x^2 = 0$
 $x^2(x^2 - 4) = 0 \vee x^2(x^2 - 2) = 0$
 $x = 0 \vee x^2 = 4 \vee x^2 = 2$
 $x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$



$|x^4 - 3x^2| \leq x^2$ geeft $-2 \leq x \leq -\sqrt{2} \vee x = 0 \vee \sqrt{2} \leq x \leq 2$
j $(2x - 1)^4 - 5(2x - 1)^2 + 4 = 0$
Stel $(2x - 1)^2 = u$.
 $u^2 - 5u + 4 = 0$
 $(u - 1)(u - 4) = 0$
 $u = 1 \vee u = 4$
 $(2x - 1)^2 = 1 \vee (2x - 1)^2 = 4$
 $2x - 1 = 1 \vee 2x - 1 = -1 \vee 2x - 1 = 2 \vee 2x - 1 = -2$
 $2x = 2 \vee 2x = 0 \vee 2x = 3 \vee 2x = -1$
 $x = 1 \vee x = 0 \vee x = 1\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

4 a Stel de lengtes van de zijden zijn x en y .
Dan geldt $xy = 160$ en $2x + 2y = 62\frac{4}{5}$.
 $2x + 2y = 62\frac{4}{5}$ geeft $2y = 62\frac{4}{5} - 2x$ oftewel $y = 31\frac{2}{5} - x$.
 $y = 31\frac{2}{5} - x$ en $xy = 160$ geeft $x(31\frac{2}{5} - x) = 160$

$$31\frac{2}{5}x - x^2 = 160$$

$$x^2 - 31\frac{2}{5}x + 160 = 0$$

$$D = (-31\frac{2}{5})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 160 = 345\frac{24}{25}, \text{ dus } \sqrt{D} = 18\frac{3}{5}$$

$$x = \frac{31\frac{2}{5} + 18\frac{3}{5}}{2} = 25 \vee x = \frac{31\frac{2}{5} - 18\frac{3}{5}}{2} = 6\frac{2}{5}$$

$x = 25$ geeft $y = 31\frac{2}{5} - 25 = 6\frac{2}{5}$

$x = 6\frac{2}{5}$ geeft $y = 31\frac{2}{5} - 6\frac{2}{5} = 25$

De lengtes van de zijden zijn $6\frac{2}{5}$ en 25.

- b** Stel de lengtes van de zijden zijn x en y .
 Dan geldt $xy = 160$ en $x^2 + y^2 = 20^2$ oftewel $x^2 + y^2 = 400$.
 Uit $xy = 160$ volgt $y = \frac{160}{x}$.

Substitutie van $y = \frac{160}{x}$ in $x^2 + y^2 = 400$ geeft

$$x^2 + \left(\frac{160}{x}\right)^2 = 400$$

$$x^2 + \frac{25600}{x^2} = 400$$

$$x^4 + 25600 = 400x^2$$

$$x^4 - 400x^2 + 25600 = 0$$

$$\text{Stel } x^2 = u.$$

$$u^2 - 400u + 25600 = 0$$

$$(u - 80)(u - 320) = 0$$

$$u = 80 \vee u = 320$$

$$x^2 = 80 \vee x^2 = 320$$

$$x = \sqrt{80} \vee x = -\sqrt{80} \vee x = \sqrt{320} \vee x = -\sqrt{320}$$

$$x = 4\sqrt{5} \vee x = -4\sqrt{5} \text{ (vold. niet)} \vee x = 8\sqrt{5} \vee x = -8\sqrt{5} \text{ (vold. niet)}$$

$$x = 4\sqrt{5} \text{ geeft } y = \frac{160}{4\sqrt{5}} = \frac{160}{4\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{160\sqrt{5}}{20} = 8\sqrt{5}$$

$$x = 8\sqrt{5} \text{ geeft } y = \frac{160}{8\sqrt{5}} = \frac{160}{8\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{160\sqrt{5}}{40} = 4\sqrt{5}$$

De lengtes van de zijden zijn $4\sqrt{5}$ en $8\sqrt{5}$.

5 a $B = \frac{2 - \frac{a}{a^2 + 1}}{5a} = \frac{\left(2 - \frac{a}{a^2 + 1}\right) \cdot (a^2 + 1)}{5a \cdot (a^2 + 1)} = \frac{2(a^2 + 1) - a}{5a(a^2 + 1)} = \frac{2a^2 + 2 - a}{5a(a^2 + 1)}$

b $y = \frac{x^4 - x^2}{x - 1} = \frac{x^2(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{x^2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x^2(x + 1) = x^3 + x^2$ voor $x \neq 1$

c $K = \frac{2a}{a + 2} \left(\frac{a - 1}{2a} - \frac{a + 2}{a^2} \right) = \frac{2a}{a + 2} \cdot \frac{a(a - 1) - 2(a + 2)}{2a^2} = \frac{2a}{a + 2} \cdot \frac{a^2 - a - 2a - 4}{2a^2}$
 $= \frac{2a(a^2 - 3a - 4)}{2a^2(a + 2)} = \frac{a^2 - 3a - 4}{a(a + 2)}$

6 a $f(x) = ax^3 + 6x^2$ geeft $f'(x) = 3ax^2 + 12x$

$$g(x) = -ax^3 - 6x \text{ geeft } g'(x) = -3ax^2 - 6$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = g'\left(\frac{1}{2}\right) \text{ geeft } \frac{3}{4}a + 6 = -\frac{3}{4}a - 6$$

$$1\frac{1}{2}a = -12$$

$$a = -8$$

$$\text{Dus } g(x) = 8x^3 - 6x.$$

$$g(x) = 0 \text{ geeft } 8x^3 - 6x = 0$$

$$x(8x^2 - 6) = 0$$

$$x = 0 \vee 8x^2 = 6$$

$$x = 0 \vee x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x = 0 \vee x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

De nulpunten van g zijn $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

b $f(1) = 5$ geeft $a + 6 = 5$

$$a = -1$$

$g(1) = 5$ en $a = -1$ geeft $1 + b = 5$

$$b = 4$$

Dus $f(x) = -x^3 + 6x^2$ en $g(x) = x^3 + 4x$.

$f(x) = g(x)$ geeft $-x^3 + 6x^2 = x^3 + 4x$

$$-2x^3 + 6x^2 - 4x = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x(x-1)(x-2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$$

$f(2) = 16$, dus $B(2, 16)$.

Bladzijde 189

- 7 a** De oplossing van $f^{\text{inv}}(x) = 3$ krijg je met $f(3)$.

$$f(3) = \frac{3 \cdot 3 + 1}{3 - 2} = 10$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = 3$ geeft $x = 10$.

- b** Voor g geldt $y = \frac{x+2}{3-2x}$, dus voor g^{inv} geldt $x = \frac{y+2}{3-2y}$.

$x = \frac{y+2}{3-2y}$ geeft $x(3-2y) = y+2$

$$3x - 2xy = y + 2$$

$$-2xy - y = 2 - 3x$$

$$y(-2x - 1) = 2 - 3x$$

$$y = \frac{2-3x}{-2x-1}$$

$$y = \frac{3x-2}{2x+1}$$

Dus $g^{\text{inv}}(x) = \frac{3x-2}{2x+1}$.

$g^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{g(x)}$ geeft $\frac{3x-2}{2x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+2}{3-2x}\right)}$

$$\frac{3x-2}{2x+1} = \frac{3-2x}{x+2}$$

$$(3x-2)(x+2) = (2x+1)(3-2x)$$

$$3x^2 + 4x - 4 = -4x^2 + 4x + 3$$

$$7x^2 = 7$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

- c** Voor h geldt $y = 3 + \frac{5}{2x+a}$, dus voor h^{inv} geldt $x = 3 + \frac{5}{2y+a}$.

$x = 3 + \frac{5}{2y+a}$ geeft $x(2y+a) = 3(2y+a) + 5$

$$2xy + ax = 6y + 3a + 5$$

$$2xy - 6y = -ax + 3a + 5$$

$$y(2x-6) = -ax + 3a + 5$$

$$y = \frac{-ax + 3a + 5}{2x-6}$$

Dus $h^{\text{inv}}(x) = \frac{-ax + 3a + 5}{2x-6}$.

$$h(x) = 3 + \frac{5}{2x+a} = \frac{3(2x+a)}{2x+a} + \frac{5}{2x+a} = \frac{6x+3a+5}{2x+a}$$

Dus voor $a = -6$ geldt dat $h^{\text{inv}}(x) = h(x)$.

d Voor k geldt $y = \frac{2x-1}{x+2}$, dus voor k^{inv} geldt $x = \frac{2y-1}{y+2}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{2y-1}{y+2} \text{ geeft } x(y+2) &= 2y-1 \\ xy+2x &= 2y-1 \\ xy-2y &= -2x-1 \\ y(x-2) &= -2x-1 \\ y &= \frac{-2x-1}{x-2} = \frac{2x+1}{2-x} \end{aligned}$$

Dus $k^{\text{inv}}(x) = \frac{2x+1}{2-x}$.

$$k^{\text{inv}}(x) = \frac{2x+1}{2-x} \text{ geeft } k^{\text{inv}'}(x) = \frac{(2-x) \cdot 2 - (2x+1) \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{4-2x+2x+1}{(2-x)^2} = \frac{5}{(2-x)^2}$$

$$\begin{aligned} k^{\text{inv}'}(x) = 5 \text{ geeft } \frac{5}{(2-x)^2} &= 5 \\ (2-x)^2 &= 1 \\ 2-x &= 1 \vee 2-x = -1 \\ x &= 1 \vee x = 3 \end{aligned}$$

$$k^{\text{inv}}(1) = \frac{2 \cdot 1 + 1}{2-1} = 3 \text{ en } k^{\text{inv}}(3) = \frac{2 \cdot 3 + 1}{2-3} = -7$$

De gevraagde punten zijn $(1, 3)$ en $(3, -7)$.

8 a $f_5(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$ geeft $f_5'(x) = 10x^4 - 15x^2 - 8$

$$\begin{aligned} f_5'(x) = 2 \text{ geeft } 10x^4 - 15x^2 - 8 &= 2 \\ 2x^4 - 3x^2 - 2 &= 0 \\ \text{Stel } x^2 &= u. \\ 2u^2 - 3u - 2 &= 0 \\ D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) &= 25, \text{ dus } \sqrt{D} = 5 \\ u = \frac{3+5}{4} = 2 \vee u = \frac{3-5}{4} &= -\frac{1}{2} \\ x^2 = 2 \vee x^2 = -\frac{1}{2} \\ x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$f_5(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^5 - 5(\sqrt{2})^3 - 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 10\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = -10\sqrt{2}$$

$$f_5(-\sqrt{2}) = 2(-\sqrt{2})^5 - 5(-\sqrt{2})^3 - 8 \cdot -\sqrt{2} = -8\sqrt{2} + 10\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

De gevraagde punten zijn $(\sqrt{2}, -10\sqrt{2})$ en $(-\sqrt{2}, 10\sqrt{2})$.

b $f_p(x) = -8x$ geeft $2x^5 - px^3 - 8x = -8x$

$$\begin{aligned} 2x^5 - px^3 &= 0 \\ x^3(2x^2 - p) &= 0 \\ x = 0 \vee 2x^2 &= p \\ x^2 &= \frac{1}{2}p \\ x &= \sqrt{\frac{1}{2}p} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{2}p} \end{aligned}$$

Dus $x_A = -\sqrt{\frac{1}{2}p}$ en $x_B = \sqrt{\frac{1}{2}p}$.

$$|x_A - x_B| = 8 \text{ geeft } 2\sqrt{\frac{1}{2}p} = 8$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}p} = 4$$

$$\frac{1}{2}p = 16$$

$$p = 32$$

9 a $f(x) = 0$ geeft $(2x - \frac{1}{2})^2 \cdot \sqrt{3-2x} = 0$

$$(2x - \frac{1}{2})^2 = 0 \vee \sqrt{3-2x} = 0$$

$$2x - \frac{1}{2} = 0 \vee 3 - 2x = 0$$

$$2x = \frac{1}{2} \vee 2x = 3$$

$$x = \frac{1}{4} \vee x = 1\frac{1}{2}$$

De nulpunten van f zijn $\frac{1}{4}$ en $1\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{b } f(x) = g(x) \text{ geeft } (2x - \tfrac{1}{2})^2 \cdot \sqrt{3 - 2x} &= \sqrt{3 - 2x} \\ \sqrt{3 - 2x} &= 0 \vee (2x - \tfrac{1}{2})^2 = 1 \\ 3 - 2x &= 0 \vee 2x - \tfrac{1}{2} = 1 \vee 2x - \tfrac{1}{2} = -1 \\ -2x &= -3 \vee 2x = 1 \tfrac{1}{2} \vee 2x = -\tfrac{1}{2} \\ x &= 1 \tfrac{1}{2} \vee x = \tfrac{3}{4} \vee x = -\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

$$g(1 \tfrac{1}{2}) = \sqrt{3 - 2 \cdot 1 \tfrac{1}{2}} = 0$$

$$g(\tfrac{3}{4}) = \sqrt{3 - 2 \cdot \tfrac{3}{4}} = \sqrt{1 \tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$g(-\tfrac{1}{4}) = \sqrt{3 - 2 \cdot -\tfrac{1}{4}} = \sqrt{3 \tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{7}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{14}$$

De gevraagde punten zijn $(1 \tfrac{1}{2}, 0)$, $(\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2}\sqrt{6})$ en $(-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\sqrt{14})$.

$$\begin{aligned} \text{c } g(x) = p - x \text{ geeft } \sqrt{3 - 2x} &= p - x \\ \text{kwadrateren geeft} \\ 3 - 2x &= (p - x)^2 \\ 3 - 2x &= p^2 - 2px + x^2 \\ x^2 - 2px + 2x + p^2 - 3 &= 0 \\ x^2 + (-2p + 2)x + p^2 - 3 &= 0 \\ D &= (-2p + 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p^2 - 3) = 4p^2 - 8p + 4 - 4p^2 + 12 = -8p + 16 \end{aligned}$$

Eén punt gemeenschappelijk als $D = 0$

$$-8p + 16 = 0$$

$$-8p = -16$$

$$p = 2$$

De grafiek van g en lijn k hebben ook één punt gemeenschappelijk als k onder het snijpunt $(1 \tfrac{1}{2}, 0)$ van de grafiek van g met de x -as ligt.

$$(1 \tfrac{1}{2}, 0) \text{ en } y = p - x \text{ geeft } p - 1 \tfrac{1}{2} = 0$$

$$p = 1 \tfrac{1}{2}$$

De grafiek van g en lijn k hebben één punt gemeenschappelijk voor $p < 1 \tfrac{1}{2}$ en voor $p = 2$.

$$\begin{aligned} 10 \text{ a } f(x) = -3 \text{ geeft } \frac{x-2}{x^2} &= -3 \\ -3x^2 &= x - 2 \\ -3x^2 - x + 2 &= 0 \\ D &= (-1)^2 - 4 \cdot -3 \cdot 2 = 25, \text{ dus } \sqrt{D} = 5 \\ x &= \frac{1+5}{-6} = -1 \vee x = \frac{1-5}{-6} = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Dus $A(-1, -3)$, $B(\tfrac{2}{3}, -3)$ en $AB = \tfrac{2}{3} - (-1) = 1 \tfrac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{b } f(x) = \tfrac{4}{9}x - \tfrac{8}{9} \text{ geeft } \frac{x-2}{x^2} &= \tfrac{4}{9}x - \tfrac{8}{9} \\ \frac{x-2}{x^2} &= \tfrac{4}{9}(x-2) \\ x-2 &= \tfrac{4}{9}x^2(x-2) \\ x-2 &= 0 \vee \tfrac{4}{9}x^2 = 1 \\ x &= 2 \vee x^2 = 2 \tfrac{1}{4} \\ x &= 2 \vee x = 1 \tfrac{1}{2} \vee x = -1 \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x_C = -1 \tfrac{1}{2} \text{ geeft } y_C = \tfrac{4}{9} \cdot -1 \tfrac{1}{2} - \tfrac{8}{9} = -1 \tfrac{5}{9}$$

$$x_D = 1 \tfrac{1}{2} \text{ geeft } y_D = \tfrac{4}{9} \cdot 1 \tfrac{1}{2} - \tfrac{8}{9} = -\tfrac{2}{9}$$

$$|y_C - y_D| = |-1 \tfrac{5}{9} - (-\tfrac{2}{9})| = |-1 \tfrac{3}{9}| = 1 \tfrac{1}{3}$$

Verantwoording

Beeld

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlenen.

0 / 25



© 2025 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06502-7

