

getal & ruimte

B



Noordhoff

Dit boek is van jou!

Naam

Klas

Getal & Ruimte

Leerboek
vwo B deel 2

Dertiende editie, 2025

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek vwo B deel 2

Samen met de delen 1, 3 en 4 van vwo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde B, zoals dat met ingang van 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak vwo wiskunde B is 600 uur. De delen 1, 2, 3 en 4 bevatten samen 17 hoofdstukken, waarbij in het laatste hoofdstuk van deel 3 een keuzeonderwerp wordt aangeboden en in het laatste hoofdstuk van deel 4 de examentraining aan bod komt.

De vier hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 30 uur en bevatten leerstof die in het Centraal Eindexamen wordt getoetst.

In de hoofdstukken komen de volgende subdomeinen aan bod.

Hoofdstuk 5 gedeelten van B

Hoofdstuk 6 C1 en C2

Hoofdstuk 7 E2

Hoofdstuk 8 het grootste gedeelte van D

De delen 1, 2 en 3 zijn bedoeld voor de leerjaren 4 en 5. Afhankelijk van de verdeling van de studielast over het vierde en vijfde leerjaar kunnen de hoofdstukken 7 en 8 samen met deel 3 in het vijfde leerjaar worden doorgenomen.

De digitale leeromgeving van Getal & Ruimte

Bij sommige gedeeltes van het boek kunnen opgaven ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback.

Tevens kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

In het docentenmateriaal staan studiewijzers die een indicatie geven van de hoeveelheid leerstof die per week kan worden doorgewerkt. Verder zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

zomer 2025

Legenda

V1 Voorkennisopgave

Een opgave over een onderwerp uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk.

O1 Oriënterende opgave

Een opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

2 Gewone opgave

Een opgave waarmee je oefent met wat er in de theorie aan bod is geweest.

R3 Reflectie-opgave

Een opgave waarmee je terugkijkt op een voorgaand probleem, of waarmee je op een andere manier naar voorgaande stof kijkt.

A4 Afsluitende opgave

Een opgave waarmee je oefent op het beoogde beheersingsniveau.

E5 Extra opgave

Een opgave die je extra uitdaagt.

☐ **Kennis- en vaardighedencheck**

Je controleert of je de kennis en/of vaardigheid beheerst door de bijbehorende opgave te maken.

C1 Checkopgave

Een opgave waarmee je controleert of je de kennis en/of vaardigheid goed beheerst.

Route-aanduiding

1 Een opgave van de basisroute.



2 Een opgave van de middenroute.



3 Een opgave van de uitdagende route.



NB: De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder routeaanduiding

In de Kennis- en vaardigheidentest en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen routeaanduiding.

Inhoud

5	Functies en vergelijkingen	6	7	Meetkunde met coördinaten	92
5.1	Machtsfuncties	8	7.1	Lijnen en hoeken	94
5.2	Wortelfuncties	12	7.2	Afstanden bij punten en lijnen	101
5.3	Machten met negatieve en gebroken exponenten	20	7.3	Cirkelvergelijkingen	110
5.4	Exponentiële functies	29	7.4	Afstanden en raaklijnen bij cirkels	117
5.5	Logaritmen	38		Kennis- en vaardighedentest	126
	Kennis- en vaardighedentest	44		Gemengde opgaven	128
	Gemengde opgaven	46			
6	Differentiaalrekening	48	8	Goniometrische functies	130
6.1	Toppen en buigpunten	50	8.1	De eenheidscirkel en radialen	132
6.2	De afgeleide van machtsfuncties	63	8.2	Sinusoïden	142
6.3	De kettingregel	70	8.3	Goniometrische vergelijkingen	156
6.4	Raaklijnen, toppen, rakende en loodrecht snijdende grafieken	78	8.4	Herleiden en differentiëren	167
	Kennis- en vaardighedentest	88		Kennis- en vaardighedentest	175
	Gemengde opgaven	90		Gemengde opgaven	177
				Antwoorden Kennis- en vaardighedentests	180
				Overzicht GR-modules	184
				Trefwoordenregister	185
				Verantwoording	187



5

Functies en vergelijkingen

Volgens de eerste wet van Kepler bewegen alle planeten in elliptische banen rond de zon. Voor de meeste planeten zijn deze elliptische banen goed te benaderen door cirkels. Volgens de derde wet van Kepler is het kwadraat van de omlooptijd T van een planeet evenredig met de derde macht van de straal r van de cirkel, dus $T^2 = ar^3$ met a een constante. Zo is de omlooptijd van de aarde ongeveer 365 dagen. Hoeveel aardse dagen duurt een Marsjaar? Neem hierbij aan dat de afstand tussen Mars en de zon anderhalf keer de afstand tussen de aarde en de zon is.

5.1 Machtsfuncties

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met transformaties van de grafiek van een machtsfunctie.

- 01** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^6$ en $k(x) = x^9$.
- ⊗ *** **a** Plot de grafieken van deze functies. Neem x tussen $-1,5$ en $1,5$ en y tussen -2 en 2 .
- b** Welke van deze grafieken zijn lijnsymmetrisch? En welke zijn puntsymmetrisch?

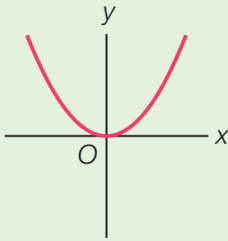
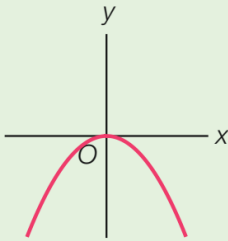
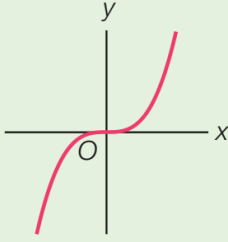
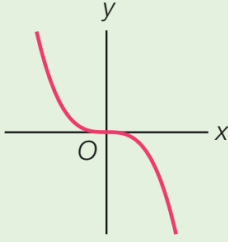
Theorie A De grafiek van een machtsfunctie

Een functie van de vorm $f(x) = ax^n$ is een **machtsfunctie**.

In het schema hieronder zie je hoe de grafiek van $f(x) = ax^n$ eruitziet voor gehele waarden van n met $n > 1$.

Bij even waarden van n is de grafiek lijnsymmetrisch met de y -as als symmetrieas. Bij oneven waarden van n is de grafiek puntsymmetrisch met de oorsprong als **punt van symmetrie**.

De grafiek van de functie $f(x) = ax^n$

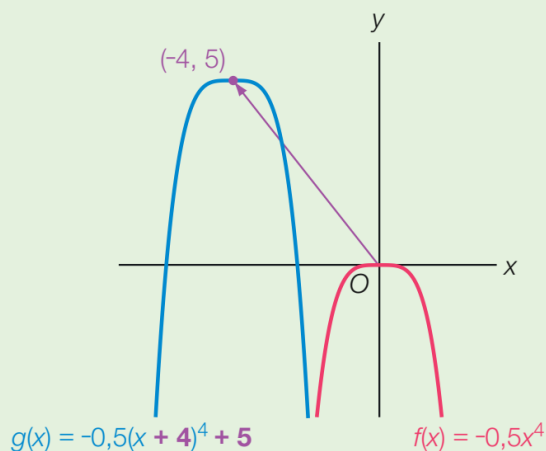
	$a > 0$	$a < 0$
n even		
n oneven		

De functies $f(x) = ax^n$ zijn **standaardfuncties** en de bijbehorende grafieken zijn **standaardgrafieken**. Je mag standaardgrafieken zonder toelichting tekenen en schetsen.

Een grafiek kun je verschuiven. Zo ontstaat een **beeldgrafiek**. Een ander woord voor verschuiving is **translatie**.

In plaats van ‘de verschuiving 1 naar links en 4 omlaag’ zeggen we ‘de translatie $(-1, -4)$ ’. Bij de translatie $(-1, -4)$ vervang je in het functievoorschrift x door $x + 1$ en trek je 4 af van de functiewaarde.

De grafiek van $g(x) = -0,5(x + 4)^4 + 5$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = -0,5x^4$ door de translatie $(-4, 5)$. Zie de figuur hiernaast. Bij de grafiek van g zijn de coördinaten van de top genoteerd. Het maximum van g is $g(-4) = 5$.

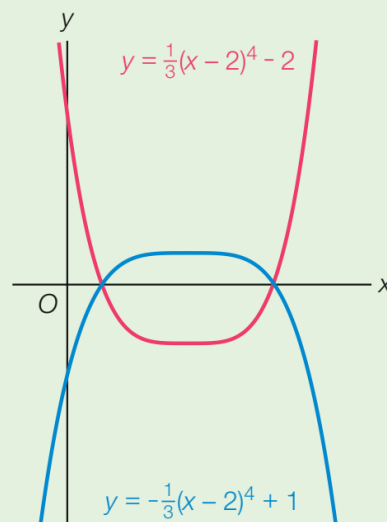


Algemeen geldt: bij de translatie (p, q) vervang je in het functievoorschrift x door $x - p$ en tel je q bij de functiewaarde op. Pas je de translatie **(8, 6)** toe op de grafiek van $h(x) = 3(x + 7)^5 - 2$, dan krijg je de grafiek van $k(x) = 3(x - 8 + 7)^5 - 2 + 6$, dus van $k(x) = 3(x - 1)^5 + 4$.

grafiek $y = ax^n$ $\xrightarrow{\text{translatie } (p, q)}$ **beeldgrafiek** $y = a(x - p)^n + q$

Behalve verschuiven kun je een grafiek ook vermenigvuldigen.

Bij de **vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as** met $-\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van $y = \frac{1}{3}(x - 2)^4 - 2$ als beeld de grafiek van $y = -\frac{1}{2}(\frac{1}{3}(x - 2)^4 - 2)$, dus van $y = -\frac{1}{6}(x - 2)^4 + 1$. Zie de figuur hiernaast.



grafiek $y = x^n$ $\xrightarrow{\times a \text{ t.o.v. de } x\text{-as}}$ **beeldgrafiek** $y = ax^n$

Translaties en vermenigvuldigingen zijn voorbeelden van **transformaties**. De volgorde waarin je transformaties toepast, kan van belang zijn. Kijk maar.

$$\begin{aligned} y &= x^3 \\ &\downarrow \times 4 \text{ t.o.v. de } x\text{-as} \\ y &= 4x^3 \\ &\downarrow \text{translatie } (2, 5) \\ y &= 4(x - 2)^3 + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x^3 \\ &\downarrow \text{translatie } (2, 5) \\ y &= (x - 2)^3 + 5 \\ &\downarrow \times 4 \text{ t.o.v. de } x\text{-as} \\ y &= 4((x - 2)^3 + 5) = 4(x - 2)^3 + 20 \end{aligned}$$

Voorbeeld

Op de grafiek van $y = 0,4x^4$ wordt eerst de translatie $(2, -3)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -2 ten opzichte van de x -as. Stel de formule op van de beeldgrafiek en geef de coördinaten van de top.

Uitwerking

$$y = 0,4x^4$$

↓
translatie $(2, -3)$

$$y = 0,4(x - 2)^4 - 3$$

↓
 $\times -2$ t.o.v. de x -as

$$y = -2(0,4(x - 2)^4 - 3) = -0,8(x - 2)^4 + 6$$

De top is het punt $(2, 6)$.

- 2** Op de grafiek van $y = -2x^3$ wordt eerst de translatie $(-3, -5)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -3 ten opzichte van de x -as. Stel de formule op van de beeldgrafiek en geef de coördinaten van het punt van symmetrie.

- 3 a** Op de grafiek van $y = 0,3x^4$ wordt eerst de translatie $(-5, 6)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -4 ten opzichte van de x -as. Stel de formule op van de beeldgrafiek en geef de coördinaten van de top.
- b** Op de grafiek van $y = 0,3x^4$ wordt eerst de vermenigvuldiging met -4 ten opzichte van de x -as toegepast en vervolgens de translatie $(-5, 6)$. Stel de formule op van de beeldgrafiek en geef de coördinaten van de top.

- 4** Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld hierin de coördinaten van de top of van het punt van symmetrie.

a $y = -\frac{1}{3}(x - 2)^4$

b $y = 12 - (x + 3)^5$

c $y = 3(x^4 - 2) + 5$

- 5** Op de grafiek van $y = x^3$ wordt eerst de translatie $(5, -4)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie f . Voor de inverse van f geldt $f^{\text{inv}}(x) = 5 + \sqrt[3]{4 - 2x}$. Bewijs dit.

6

⊗*

a Op de grafiek van $f(x) = 3(x - 2)^7 + 6$ wordt eerst de vermenigvuldiging met a ten opzichte van de x -as toegepast en vervolgens de translatie (m, n) . Zo ontstaat de grafiek van $g(x) = -(x + 5)^7 - 12$.

Bereken de waarden van a , m en n .

b Op de grafiek van $f(x) = 3(x - 2)^7 + 6$ wordt eerst de translatie (p, q) toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met c ten opzichte van de x -as. Zo ontstaat de grafiek van $g(x) = -(x + 5)^7 - 12$.

Bereken de waarden van c , p en q .

A7

□⊗*

a Op de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^5 + 7$ wordt eerst de translatie $(1, 2)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -1 ten opzichte van de x -as.

Bereken de coördinaten van het punt van symmetrie van de beeldgrafiek.

b De grafiek van $g(x) = -2\frac{1}{2}(x + 4)^6 - 1$ wordt eerst vermenigvuldigd met -4 ten opzichte van de x -as en vervolgens wordt de translatie $(-5, -4)$ toegepast. Zo ontstaat de grafiek van de functie h .

Bereken de extreme waarde van h .

A8

⊗*

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x - 1)^4 + 5$.

De grafiek van de functie g ontstaat uit de grafiek van f door eerst de vermenigvuldiging met -3 ten opzichte van de x -as en daarna de translatie $(a, 21)$ toe te passen.

De toppen van de grafieken van f en g liggen op de parabool $y = 3x^2 + bx + 6$.

Bereken exact a en b .

E9

*

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^4 + 6$.

Op de grafiek van f wordt eerst de translatie (p, q) toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met a ten opzichte van de x -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . De grafiek van g gaat door het punt $A(1, 310)$ en heeft $T(5, -10)$ als top.

Bereken a , p en q .

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met transformaties van de grafiek van een machtsfunctie.

► **OPGAVE C1**
THEORIE A

C1

Op de grafiek van $f(x) = 0,2(x + 1)^8 - 3$ wordt eerst de translatie $(-3, 2)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -10 ten opzichte van de x -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie g .

Bereken de extreme waarde van g .

Antwoorden

C1 max. is $g(-4) = 10$

5.2 Wortelfuncties

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met transformaties van de grafiek van een wortelfunctie.
- Je kunt werken met het domein en het bereik van een wortelfunctie.
- Je kunt bij een wortelformule de variabele vrijmaken.

10

□ ⊗ *

- a Plot de grafiek van $y = \sqrt{x}$.
Welke waarden kan x aannemen? En welke waarden kan y aannemen?
- b Plot de grafiek van $y = \sqrt{x+2} + 3$.
Welke waarden kan x aannemen? En welke waarden kan y aannemen?
- c Hoe ontstaat de grafiek van $y = \sqrt{x+2} + 3$ uit die van $y = \sqrt{x}$?

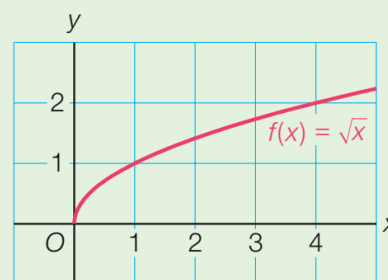
Theorie A Domein en bereik van wortelfuncties

De eenvoudigste **wortelfunctie** is de standaardfunctie $f(x) = \sqrt{x}$. De bijbehorende standaardgrafiek is een halve parabool die de y -as in het **randpunt** $O(0, 0)$ raakt. Je mag voor x alleen getallen nemen groter dan of gelijk aan 0. We zeggen dat het **domein** van $f(x) = \sqrt{x}$ het interval $[0, \rightarrow)$ is. Notatie: $D_f = [0, \rightarrow)$.

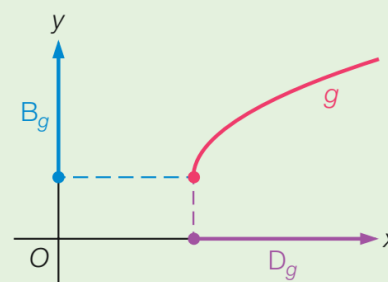
De functie $f(x) = \sqrt{x}$ kan alleen waarden groter dan of gelijk aan 0 aannemen. We zeggen dat het **bereik** van f het interval $[0, \rightarrow)$ is. Notatie: $B_f = [0, \rightarrow)$.

Het domein gaat dus over de waarden van x en het bereik over de waarden van y . Zie de figuur hiernaast.

Het domein van een functie bestaat uit alle originelen.
Het bereik van een functie bestaat uit alle beelden.



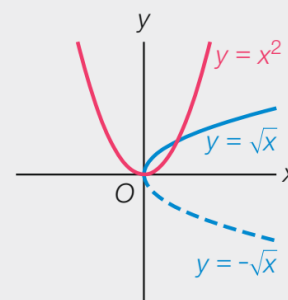
De grafiek van $y = \sqrt{x}$ is een standaardgrafiek.



Informatief Het verband tussen de grafieken van $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$

Je weet dat de grafiek van $y = x^2$ een parabool is die de x -as raakt in de oorsprong. Verwissel je x en y , dan krijg je de parabool $x = y^2$ die de y -as raakt in de oorsprong.

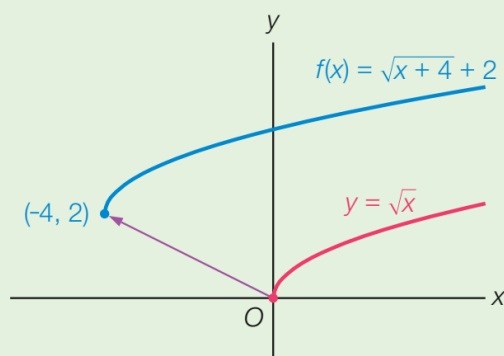
Uit $x = y^2$ volgt $y^2 = x$ en dit geeft $y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}$. Dus de grafiek van $y = \sqrt{x}$ is een halve parabool die de y -as raakt in de oorsprong.



Door gebruik te maken van transformaties van de standaardgrafiek zijn grafieken met formules van de vorm $y = a + b\sqrt{x + c}$ te schetsen. Het effect van transformaties op randpunt, domein en bereik zie je hieronder.

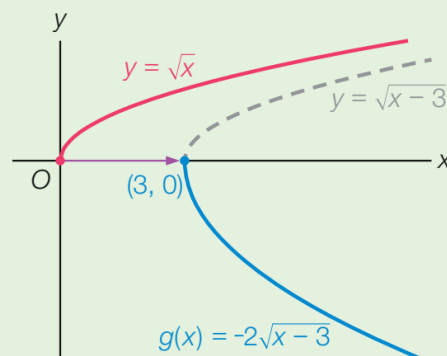
Het ontstaan van de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{x + 4} + 2$ en $g(x) = -2\sqrt{x - 3}$ uit de standaardgrafiek.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x} \\ &\downarrow \text{translatie } (-4, 2) \\ y &= \sqrt{x + 4} + 2 \end{aligned}$$



Van de grafiek van f is het randpunt $(-4, 2)$, $D_f = [-4, \rightarrow)$ en $B_f = [2, \rightarrow)$.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x} \\ &\downarrow \text{translatie } (3, 0) \\ y &= \sqrt{x - 3} \\ &\downarrow \times -2 \text{ t.o.v. de } x\text{-as} \\ y &= -2\sqrt{x - 3} \end{aligned}$$



Van de grafiek van g is het randpunt $(3, 0)$, $D_g = [3, \rightarrow)$ en $B_g = \langle \leftarrow, 0]$.

Afspraak

In een schets van de grafiek van een wortelfunctie vermeld je de coördinaten van het randpunt.

11 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x - 3} - 2$ en $g(x) = -2\sqrt{x + 3}$.



- Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit de standaardgrafiek?
- Schets de grafieken van f en g .
- Geef D_f , B_f , D_g en B_g .

12 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$ en $g(x) = -\sqrt{x + 5}$.



- Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit de standaardgrafiek?
- Schets de grafieken van f en g .
- Geef D_f , B_f , D_g en B_g .

A13 Geef van elk van de volgende functies de coördinaten van het randpunt van de grafiek. Geef ook het domein en het bereik.



- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| a $f(x) = \sqrt{x + 5} + 3$ | d $k(x) = 3\sqrt{x} + 1$ |
| b $g(x) = \sqrt{x + 3} - 7$ | e $l(x) = -\sqrt{x - 1} - 1$ |
| c $h(x) = -2\sqrt{x + 1}$ | f $m(x) = -3 + \sqrt{x}$ |

E14 Hoe ontstaat de grafiek van $f(x) = \sqrt{4x - 12} - 5$ uit die van $g(x) = \sqrt{x}$?

*

O15 Gegeven is de functie $f(x) = 5 - \sqrt{2x - 6}$.

□ ⊗ *

- a** Welke vergelijking moet je oplossen om de x -coördinaat van het randpunt van de grafiek van f te vinden? Bereken de coördinaten van het randpunt.
- b** Plot de grafiek van f en geef het domein en het bereik van f .

Theorie B De grafiek van een wortelfunctie

In de vorige theorie heb je gezien hoe je met behulp van transformaties grafieken met formules van de vorm $y = a + b\sqrt{x + c}$ kunt schetsen. Vanaf nu mag je voor het schetsen van de grafiek van een wortelfunctie de GR gebruiken.

Hiernaast zie je een plot van de grafiek van de functie $f(x) = -2 + \sqrt{7 - 2x}$.

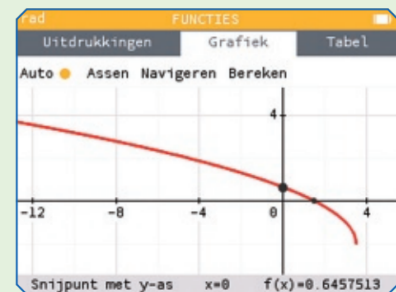
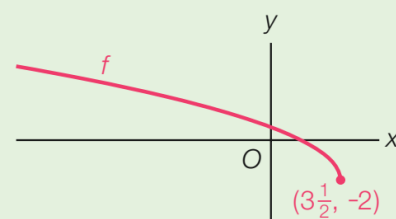
De coördinaten van het randpunt van de grafiek van f vind je door eerst de uitdrukking onder het wortelteken gelijk te stellen aan nul. Dit geeft $7 - 2x = 0$

$$-2x = -7$$

$$x = 3\frac{1}{2}$$

$f(3\frac{1}{2}) = -2$, dus het randpunt is $(3\frac{1}{2}, -2)$.

Voor het bepalen van het domein en het bereik gebruik je een schets zoals hiernaast. Je krijgt $D_f = \langle \leftarrow, 3\frac{1}{2} \rangle$ en $B_f = [-2, \rightarrow)$.



In het voorbeeld zie je hoe het domein en het bereik een rol spelen bij vraagstukken die bij wortelfuncties kunnen voorkomen.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - \sqrt{6 - 2x}$.

- a** Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) > -2$.
- b** Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x \geq -5$.

Aanpak

- a** Om de ongelijkheid op te lossen, gebruik je een schets van de grafiek van f . Dus bereken eerst de coördinaten van het randpunt.

Uitwerking

a $6 - 2x = 0$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$f(3) = 1, \text{ dus randpunt } (3, 1).$$

$$f(x) = -2 \text{ geeft } 1 - \sqrt{6 - 2x} = -2$$

$$\sqrt{6 - 2x} = 3$$

$$6 - 2x = 9$$

$$2x = -3$$

$$x = -1\frac{1}{2}$$

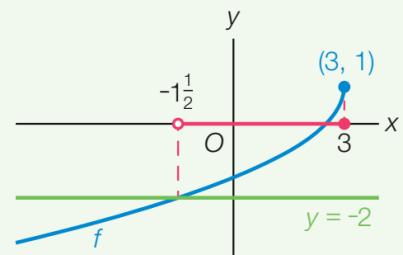
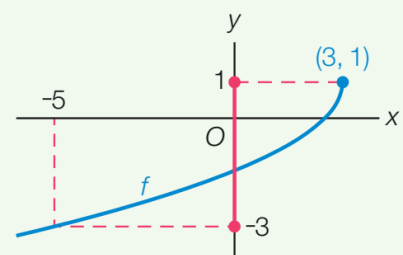
Zie de schets hiernaast.

$$f(x) > -2 \text{ geeft } -1\frac{1}{2} < x \leq 3$$

b $f(-5) = -3$

Zie de schets hiernaast.

$$x \geq -5 \text{ geeft } -3 \leq f(x) \leq 1$$



R16 Zie het voorbeeld.



a Wordt er bij voorbeeld a rekening gehouden met het domein of met het bereik? Licht toe.

b Wordt er bij voorbeeld b rekening gehouden met het domein of met het bereik? Licht toe.

17 Bereken van elk van de volgende functies het domein en het bereik.



a $f(x) = 3 + \sqrt{8 - 4x}$

b $g(x) = 3 + \sqrt{4x - 8}$

c $h(x) = 5 - \sqrt{2x + 6}$

d $k(x) = -2\sqrt{x} + 3$

18 Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \sqrt{2x + 5}$.



a Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) > -2$.

b Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x < 22$.

19 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{7 - 3x} - 4$.



a Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) > -2$.

b Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x \geq -3$.

A20 Het randpunt van de grafiek van $f(x) = 4 - \sqrt{5 + ax}$ ligt op de grafiek van $g(x) = ax^2 + 3x - 1$.
 Bereken exact het domein van f en het bereik van g .

21 Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \sqrt{x^2 - 4}$.
 De grafiek van f heeft twee randpunten.
 a Bereken exact de coördinaten van de randpunten.
 b Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x > -3$?
 c Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) > 0$.

22 Gegeven is de functie $f(x) = 6 - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.
 De grafiek van f heeft geen randpunten.
 a Toon dit aan.
 b Het bereik van f is $B_f = \langle \leftarrow, 5 \rangle$.
 Bewijs dit.
 c Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) < 3$.

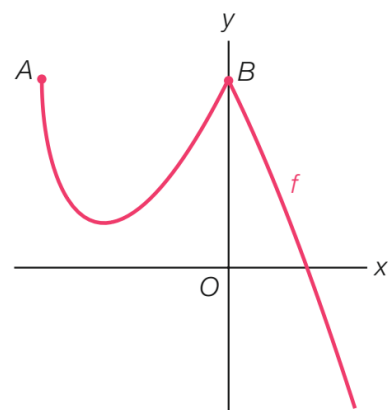
A23 Gegeven is de functie $f(x) = 4 - \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.
 a Bereken exact welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x < 5$.
 b Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) > 2$.

A24 Gegeven is de functie $f(x) = 4 - |x| \cdot \sqrt{x + 4}$.
 De grafiek van f heeft randpunt A en knikpunt B .
 Zie de figuur hiernaast.
 a Het punt C met $x_C = -3$ ligt op de grafiek van f .
 De lijn k door B en C snijdt de x -as in het punt D .
 Bereken exact de x -coördinaat van D .

De lijn l door A en de oorsprong snijdt de grafiek van f rechts van de y -as in het punt E .

Bij het berekenen van de x -coördinaat van E krijg je te maken met een vergelijking van de vorm $x + a = x\sqrt{x + a}$.
 Uit deze vergelijking volgt dat $\sqrt{x + a} = 0 \vee \sqrt{x + a} = x$.

b Licht dit toe.
 c Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) > y_E$.
 d Bereken exact welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x < x_E$.



O25 a Toon aan dat uit $y = 2\sqrt{x}$ volgt $x = \frac{1}{4}y^2$.
 b Toon aan dat uit $y = 2\sqrt{x - 2}$ volgt $x = \frac{1}{4}y^2 + 2$.

Theorie C Variabelen vrijmaken bij wortelformules

Bij de formule $y = 2 + \sqrt{x - 3}$ kun je de variabele x vrijmaken.

Dit gaat als volgt.

$$y = 2 + \sqrt{x - 3} \quad \text{Isoleer de wortelvorm met } x \text{ in het linkerlid.}$$

$$\sqrt{x - 3} = y - 2$$

kwadrateren geeft $x - 3 = (y - 2)^2$

$$x - 3 = y^2 - 4y + 4$$

$$x = y^2 - 4y + 7$$

Informatief Variabelen vrijmaken bij wortelformules

De functie $f(x) = 2 + \sqrt{x - 3}$ heeft $D_f = [3, \rightarrow)$ en $B_f = [2, \rightarrow)$, dat wil zeggen $x \geq 3$ en $y \geq 2$. Deze voorwaarden blijven gelden bij het vrijmaken van x .

Maak je x vrij bij $y = 2 + \sqrt{x - 3}$, dan krijg je $x = y^2 - 4y + 7$.

Dus ook bij $x = y^2 - 4y + 7$ is $x \geq 3$ en $y \geq 2$. Dat betekent dat je bij $x = y^2 - 4y + 7$ bijvoorbeeld niet $y = 0$ mag nemen. De voorwaarde $y \geq 2$ mag je in de uitwerking achterwege laten.

Afspraak

Bij het vrijmaken van variabelen hoef je geen voorwaarden te vermelden, tenzij daar om gevraagd wordt.

Voorbeeld

Maak t vrij bij de formule $N = 3 - 2\sqrt{t - 1}$.

Uitwerking

$$N = 3 - 2\sqrt{t - 1}$$

$$2\sqrt{t - 1} = 3 - N$$

kwadrateren geeft $4(t - 1) = (3 - N)^2$

$$4t - 4 = 9 - 6N + N^2$$

$$4t = 13 - 6N + N^2$$

$$t = \frac{1}{4}N^2 - 1\frac{1}{2}N + 3\frac{1}{4}$$

26



a Maak t vrij bij de formule $F = 3\sqrt{2t - 1}$.

b Gegeven is de formule $A = 5 + \sqrt{4 - 3B}$.

Schrijf B als functie van A .

c Druk y uit in x bij $2x\sqrt{y} - 5 = 0$.

d Gegeven is $R\sqrt{q} - \sqrt{R} = 6$.

Schrijf q als functie van R .

27 Maak x vrij bij de volgende formules.



a $y = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{5-4x}$

b $y = 2 \cdot \sqrt[3]{5x-1}$

c $y = \frac{2}{3x-1} + 4$

A28 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{x+3} - 3$.



Voor de inverse van f geldt $f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ met $x \geq p$.

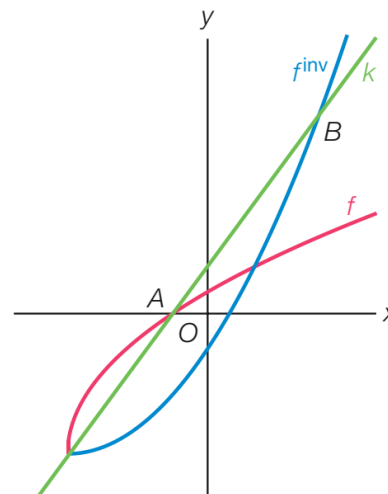
a Bewijs dit en geef de waarde van p .

b De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A .

De lijn k gaat door A en het randpunt van de grafiek van f en snijdt de grafiek van f^{inv} in het punt B .

Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de coördinaten van B .



A29 De snelheid van het geluid hangt af van de temperatuur. Bij windstil



weer wordt dit verband bij benadering gegeven door $v = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273}}$.

Hierin is v de snelheid van het geluid in m/s bij een temperatuur van $T^\circ\text{C}$.

Ga in deze opgave uit van windstil weer.

a In de twintigste eeuw varieerde de temperatuur in Nederland van $-27,4^\circ\text{C}$ tot en met $38,6^\circ\text{C}$.

Bereken in m/s het verschil van de geluidssnelheden bij deze twee temperaturen. Rond af op gehelen.

b Druk T uit in v .

c Bereken de temperatuur in gehele graden Celsius in het geval de geluidssnelheid 340 m/s is.

In de atmosfeer neemt de temperatuur af volgens de formule $T = T_0 - 6,5h$.

Hierin is h de hoogte in km en T_0 de temperatuur in $^\circ\text{C}$ op 0 km hoogte.

d Bereken de geluidssnelheid in km/u op een hoogte van 2,5 km in het geval de temperatuur 25°C is op 0 km hoogte. Rond af op gehelen.

e Schrijf de formule van v in de vorm $v = a\sqrt{bh+c}$ in het geval het op 2 km hoogte -1°C is. Rond zo nodig af op vier decimalen.

E30 Gegeven is de functie $f(x) = a + \sqrt{bx+c}$.



Verder is gegeven de functie $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ met $x \geq 3$.

Bereken exact voor welke a , b en c geldt $g = f^{\text{inv}}$.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan werken met transformaties van de grafiek van een wortelfunctie.
- ☐ Ik kan werken met het domein en het bereik van een wortelfunctie.
- ☐ Ik kan bij een wortelformule de variabele vrijmaken.

► OPGAVE C2
THEORIE A
► OPGAVE C3
THEORIE B
► OPGAVE C4
THEORIE C

- C2** Gegeven zijn de functies $f(x) = -\sqrt{x+2}$ en $g(x) = 4\sqrt{x} - 1$.
- a** Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit de standaardgrafiek?
 - b** Schets de grafieken van f en g .
 - c** Geef D_f , B_f , D_g en B_g .

- C3** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \sqrt{2x+5}$.
- a** Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) < 3$.
 - b** Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x < 10$.

- C4** Maak t vrij bij de formule $N = 4 - \frac{1}{2}\sqrt{3t-5}$.

Antwoorden

- C2 a** $\times -1$ t.o.v. de x -as en translatie $(-2, 0)$
 $\times 4$ t.o.v. de x -as en dan translatie $(0, -1)$
b *
c $D_f = [-2, \rightarrow)$, $B_f = \langle \leftarrow, 0]$, $D_g = [0, \rightarrow)$, $B_g = [-1, \rightarrow)$
- C3 a** $-2\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{2}$
b $1 \leq f(x) < 6$
- C4** $t = 1\frac{1}{3}N^2 - 10\frac{2}{3}N + 23$

5.3 Machten met negatieve en gebroken exponenten

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met machten met negatieve en gebroken exponenten.
- Je kunt vergelijkingen met machten met gebroken exponenten algebraïsch oplossen.
- Je kunt werken met evenredige en omgekeerd evenredige grootheden.
- Je kunt bij formules van de vorm $y = ax^p$ de variabele x vrijmaken.

Voorkennis Machten herleiden

Bij machten gelden de volgende rekenregels.

Rekenregels voor machten

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	Bij het herleiden van een product van twee machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten bij elkaar op.
$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	Bij het herleiden van een quotiënt van twee machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af.
$(a^p)^q = a^{pq}$	Bij het herleiden van een macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten met elkaar.
$(ab)^p = a^p b^p$	Bij het herleiden van een macht van een product krijg je een product van machten.

Hieronder zie je enkele herleidingen waarbij deze regels zijn gebruikt.

$$(-3x^3)^4 = (-3)^4 \cdot (x^3)^4 = 81x^{12}$$

$$(-3x^2)^3 = (-3)^3 \cdot (x^2)^3 = -27x^6$$

$$(2x^3)^2 - (x^2)^3 = 2^2 \cdot (x^3)^2 - x^6 = 4x^6 - x^6 = 3x^6$$

$$x^5 \cdot x^2 + x^5 + x^2 = x^7 + x^5 + x^2$$

$$\frac{12x^3y}{3xy} = 4x^2$$

V1 Herleid.

a $2x^3 \cdot 3x^2$

b $(x^2y)^3$

c $-2x^4y^3 \cdot -3xy$

d $(-4xy^4)^2$

e $(3x)^2 \cdot (2x^2)^3$

f $(3x^3)^2 + (-2x^2)^3$

V2 Herleid.

a $\frac{12x^6}{4x^2}$

b $\frac{5x^{10}}{15x^5}$

c $\frac{24x^4y^2}{6xy}$

d $\frac{-15x^6y}{5x^2y}$

e $\frac{(2xy)^3}{(3xy)^2}$

f $\left(\frac{9x^4}{x}\right)^2$

031 In deze opgave is $a \neq 0$.



a Vul in: $\frac{a^5}{a^5} = a^{\dots}$. Gebruik de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.

b Licht toe dat $a^0 = 1$.

c Vul in: $\frac{1}{a^5} = \frac{a^{\dots}}{a^5} = a^{\dots}$.

Theorie A Machten met negatieve exponenten

Uit de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ volgt $\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0$.

Je weet dat ook geldt $\frac{a^p}{a^p} = 1$ voor $a \neq 0$.

Hieruit volgt dat $a^0 = 1$ voor $a \neq 0$.

Uit $a^0 = 1$ en $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ volgt $\frac{1}{a^q} = \frac{a^0}{a^q} = a^{0-q} = a^{-q}$.

Voor $a \neq 0$ is $a^0 = 1$ en $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$.

In de opgaven mag je ervan uitgaan dat $a \neq 0$.

Dus $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ en $3x^{-5} = 3 \cdot \frac{1}{x^5} = \frac{3}{x^5}$.

Maar ook $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$ en $\frac{5}{x} = 5 \cdot \frac{1}{x} = 5x^{-1}$.

Voorbeeld

Schrijf als macht van x .

a $x^2 \cdot \frac{1}{x^8}$

b $\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}$

c $\frac{1}{x^{-5}} \cdot (x^3)^2$

Uitwerking

a $x^2 \cdot \frac{1}{x^8} = x^2 \cdot x^{-8} = x^{-6}$

b $\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \frac{x^{-2}}{x} = x^{-3}$

c $\frac{1}{x^{-5}} \cdot (x^3)^2 = x^5 \cdot x^6 = x^{11}$

Je schrijft $5x^{-3}y^2$ als volgt zonder negatieve exponenten.

$$5x^{-3}y^2 = 5 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot y^2 = \frac{5y^2}{x^3}$$

Je mag hierbij de tussenstap weglaten.

Zonder tussenstappen:

$$3x^{-2}y^6 = \frac{3y^6}{x^2}$$

$$\frac{3}{5}x^{-2}y^6 = \frac{3y^6}{5x^2}$$

Voorbeeld

Schrijf zonder negatieve exponenten.

a $2x^{-5}y^3$

c $\frac{3}{4}x^{-1}$

b $(2x)^{-5}y^3$

d $(\frac{3}{4}x)^{-1}$

Uitwerking

a $2x^{-5}y^3 = \frac{2y^3}{x^5}$

c $\frac{3}{4}x^{-1} = \frac{3}{4x}$

b $(2x)^{-5}y^3 = \frac{y^3}{(2x)^5} = \frac{y^3}{32x^5}$

d $(\frac{3}{4}x)^{-1} = (\frac{3}{4})^{-1} \cdot x^{-1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{3x}$

R32



a In de uitwerking van voorbeeld d zie je dat $(\frac{3}{4})^{-1} = \frac{4}{3}$.

Toon dit aan.

b Op dezelfde manier kun je in een keer opschrijven $(\frac{3}{4})^{-2} = (\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$.

Bereken op deze manier $(\frac{1}{5})^{-2}$, $(\frac{2}{3})^{-3}$ en $(1\frac{1}{4})^{-1}$.

33



Schrijf als macht van x .

a $\frac{1}{x^2}$

d $\frac{x^8}{x^0}$

g $\frac{x}{x^{12}}$

b $x^4 \cdot \frac{1}{x^6}$

e $(x^3)^{-2}$

h $\frac{1}{x^8} \cdot (x^3)^{-1}$

c $\frac{x^4}{(\frac{1}{x^4})}$

f $\frac{(\frac{1}{x^5})}{x}$

i $\frac{(\frac{1}{x})}{x^{-3}}$

34



Schrijf zonder negatieve exponenten.

a $\frac{1}{2}x^{-3}$

d $(3x)^{-4}y^3$

g $-4 \cdot 3x^{-2}$

b $(\frac{1}{2}x)^{-3}$

e $\frac{3}{5}x^{-1}$

h $-4 \cdot (3x)^{-2}$

c $3x^{-4}y^3$

f $(\frac{3}{5}x)^{-1}$

i $(-4 \cdot 3x)^{-2}$

Uit $(\sqrt{x})^2 = x$ en $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$ volgt $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Licht op dezelfde manier toe dat $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Theorie B Machten met gebroken exponenten

Met de regel $(a^p)^q = a^{pq}$ lichten we de betekenis van $x^{\frac{1}{5}}$ toe.

Je kiest daartoe $p = \frac{1}{5}$ en $q = 5$.

Je krijgt $(x^{\frac{1}{5}})^5 = x^1 = x$.
Je weet $(\sqrt[5]{x})^5 = x$. } Hieruit volgt dat $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$.

Algemeen is $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$. Verder is $a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} \text{ en } a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Een macht met een gebroken exponent kun je dus herleiden tot een (hogeremachts)wortel.

Zo is $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$ en $x^{-\frac{3}{7}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}$.

$$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} \text{ en } x^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{x^4}.$$

Maar ook $\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$ en

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}.$$

Voorbeeld

Schrijf als macht van x .

a $x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

b $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

c $\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}$

Uitwerking

a $x \cdot \sqrt[3]{x^2} = x \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{1\frac{2}{3}}$

b $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{1\frac{2}{3}}$

c $\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{12}}$

Voorbeeld

Schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten.

a $5xy^{-\frac{1}{3}}$

b $4x^{2\frac{1}{2}}$

c $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}$

Uitwerking

a $5xy^{-\frac{1}{3}} = \frac{5x}{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{5x}{\sqrt[3]{y}}$

b $4x^{2\frac{1}{2}} = 4x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 4x^2 \cdot \sqrt{x}$

c $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{4y^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{x}}{4 \cdot \sqrt[3]{y^2}}$

36 Schrijf als macht van x .



a $x \cdot \sqrt[3]{x}$

d $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$

b $\frac{1}{\sqrt{x}}$

e $\sqrt[3]{x^{12}}$

c $x^2 \cdot \sqrt{x}$

f $\frac{1}{x^4} \cdot \sqrt[3]{x}$

37 Je kunt $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ als macht van 2 schrijven: $\frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-1\frac{1}{2}}$.



Schrijf als macht van 2, 3 of 10.

a $8\sqrt{2}$

d $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

b $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

e $\frac{1}{27} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

c $\frac{1}{100}\sqrt{10}$

f $\frac{100\sqrt{10}}{\sqrt[3]{10}}$

38 Schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten.



a $5x^{3\frac{1}{3}}$

d $\frac{2}{3}x^{-3}y^{1\frac{1}{2}}$

b $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{4}}y$

e $\frac{1}{5}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$

c $3x^{-\frac{2}{3}}$

f $(5x)^{-\frac{1}{2}}$

A39 Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.



a $y = \frac{50x^{1,9}}{10x^{1,1}}$

d $y = \frac{x}{\sqrt[5]{x}}$

b $y = \sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[3]{x}$

e $y = \frac{5}{x\sqrt{x}}$

c $y = \frac{3}{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$

f $y = 4x\sqrt{x^3}$

A40 Schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten.



a $\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}$

b $(2x^{-\frac{2}{7}})^3$

c $\frac{6y^{-2}}{3x^{-1\frac{1}{4}}}$

O41 Gegeven is de vergelijking $x^{\frac{2}{3}} = 10$.



Verhef het linker- en rechterlid tot de macht $\frac{3}{2}$ en toon aan dat $x = 10\sqrt{10}$ de oplossing van de vergelijking is.

Theorie C Vergelijkingen met gebroken exponenten

Om de vergelijking $x^{\frac{1}{2}} = 6$ exact op te lossen, schrijf je eerst de vergelijking als $x^{\frac{3}{2}} = 6$. Vervolgens verhef je het linker- en rechterlid tot de macht $\frac{2}{3}$. Je krijgt $(x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 6^{\frac{2}{3}}$, dus $x = 6^{\frac{2}{3}}$ oftewel $x = \sqrt[3]{6^2} = \sqrt[3]{36}$. Er kunnen problemen ontstaan als je bij machten met gebroken exponenten negatieve grondtallen toestaat. Vandaar dat we bij de vergelijking $x^p = c$ het grondtal x positief nemen als p een gebroken getal is.

Voor $c > 0$ en $x > 0$ geldt $x^{\frac{a}{b}} = c$ geeft $x = c^{\frac{b}{a}}$.

Voorbeeld

Los exact op.

a $10x^{-\frac{1}{3}} = 5$

b $\sqrt[3]{(2x)^2} = 5$

Uitwerking

a $10x^{-\frac{1}{3}} = 5$

$$x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$x = (2^{-1})^{-3}$$

$$x = 2^3 = 8$$

b $\sqrt[3]{(2x)^2} = 5$

$$(2x)^{\frac{2}{3}} = 5$$

$$2x = 5^{\frac{3}{2}}$$

$$2x = 5\sqrt{5}$$

$$x = 2\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

42 Los exact op.



a $x^{\frac{2}{3}} = 9$

c $5 - 2x^{-3} = 4$

b $8x^{-\frac{1}{2}} = 1$

d $\sqrt{(2x)^3} = \frac{1}{8}$

A43 Los exact op.



a $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}} = 2\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}$

c $(x+9)^{-\frac{1}{2}} = \frac{8}{27}$

b $3 \cdot \sqrt[4]{(2x)^{-1}} = 6$

d $\frac{1}{3}(x^2-3)^{2\frac{1}{2}} = 81$

O44 **a** Gegeven is de formule $y = ax^{1,3}$. Bij $x = 2$ hoort $y = 17$.



Bereken a . Rond af op twee decimalen.

b Gegeven is de formule $y = \frac{b}{x^{3,1}}$. Bij $x = 5$ hoort $y = 0,32$.

Bereken b . Rond af op gehelen.

Theorie D Evenredig en omgekeerd evenredig

Grootheid P is **evenredig** met grootheid Q als er een getal a bestaat waarvoor $P = aQ$. Hierin is a de **evenredigheidsconstante**.

De grootheden R en S zijn **omgekeerd evenredig** als er een getal a bestaat waarvoor $R = \frac{a}{S}$.

Is gegeven dat y omgekeerd evenredig is met $x^{1,72}$, dan geldt $y = \frac{a}{x^{1,72}}$.

Is verder gegeven dat $y = 0,3$ hoort bij $x = 4$, dan bereken je de evenredigheidsconstante a als volgt.

$x = 4$ en $y = 0,3$ invullen in $y = \frac{a}{x^{1,72}}$ geeft $\frac{a}{4^{1,72}} = 0,3$, dus $a = 0,3 \cdot 4^{1,72} \approx 3,26$.

Zo krijg je $y = \frac{3,26}{x^{1,72}}$.

Je kunt deze formule herleiden tot de vorm $x = by^c$.

Je krijgt $y = \frac{3,26}{x^{1,72}}$

$$x^{1,72} \cdot y = 3,26$$

$$x^{1,72} = \frac{3,26}{y}$$

$$x^{1,72} = 3,26y^{-1}$$

$$x = (3,26y^{-1})^{\frac{1}{1,72}} = 3,26^{\frac{1}{1,72}} \cdot y^{-\frac{1}{1,72}} \approx 1,99y^{-0,58}$$

Dus $x = 1,99y^{-0,58}$.

Voorbeeld

Gegeven is dat y evenredig is met $x \cdot \sqrt[3]{x}$.

Bij $x = 8$ hoort $y = 336$.

Stel de formule op van y als functie van x .

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} y = ax \cdot \sqrt[3]{x} \\ x = 8 \text{ en } y = 336 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 8 \cdot \sqrt[3]{8} = 336 \\ 16a = 336 \\ a = 21 \end{array}$$

Dus $y = 21x \cdot \sqrt[3]{x}$.

R45



De formule $y = 21x \cdot \sqrt[3]{x}$ is te herleiden tot de vorm $x = by^c$.

Je krijgt $x = 0,10y^{0,75}$. Hierbij is b afgerond op twee decimalen.

Bereken b in drie decimalen.

46

- a** Gegeven is dat y evenredig is met $x^{2,3}$. Bij $x = 3$ hoort $y = 37$.
Stel de formule op van y als functie van x . Rond de evenredigheidsconstante af op twee decimalen.
- b** Gegeven is dat y omgekeerd evenredig is met $x^{1,65}$.
Bij $x = 8$ hoort $y = 3$.
Stel de formule op van y als functie van x . Rond de evenredigheidsconstante af op gehele.

47

- a** Gegeven is dat y evenredig is met $x^{\frac{2}{5}}$. Bij $x = 32$ hoort $y = 5$.
Stel de formule op van y als functie van x en herleid deze formule tot de vorm $x = by^c$. Rond b af op gehele.
- b** Gegeven is dat y omgekeerd evenredig is met $x \cdot \sqrt[3]{x}$.
Bij $x = 64$ hoort $y = 3,5$.
Stel de formule op van y als functie van x en herleid deze formule tot de vorm $x = by^c$. Rond b af op gehele.

48

- a** Gegeven is dat y evenredig is met $\sqrt{2x - 5}$. Bij $x = 7$ hoort $y = 1$.
Stel de formule op van y als functie van x .
- b** Gegeven is dat y omgekeerd evenredig is met $3x + 4$. Bij $x = 2$ hoort $y = 8$.
Stel de formule op van y als functie van x .
- c** Gegeven is dat y evenredig is met $(x + 4)^3$. Bij $x = -7$ hoort $y = 81$.
Stel de formule op van y als functie van x .
- d** Maak bij de formules van de vragen a, b en c de variabele x vrij.

A49

De luchtdruk D in mbar is evenredig met $(1 - 0,0226h)^{5,26}$. Hierin is h de hoogte in km boven zeeniveau. Op een hoogte van 1,5 km boven zeeniveau is de luchtdruk 846 mbar.
Bereken algebraïsch op welke hoogte boven zeeniveau de luchtdruk 0,5 bar is. Geef je antwoord in honderden meters nauwkeurig.

A50

Volgens de eerste wet van Kepler bewegen alle planeten in elliptische banen rond de zon. Voor de meeste planeten zijn deze elliptische banen goed te benaderen door cirkels. Volgens de derde wet van Kepler is het kwadraat van de omlooptijd T van een planeet evenredig met de derde macht van de straal r van de cirkel.
Bereken de lengte van een Venusjaar uitgedrukt in aardse dagen. Neem hierbij aan dat de afstand tussen Venus en de zon driekwart keer de afstand tussen de aarde en de zon is en dat de omlooptijd van de aarde 365 dagen is.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan werken met machten met negatieve en gebroken exponenten.
- ☐ Ik kan vergelijkingen met machten met gebroken exponenten algebraïsch oplossen.
- ☐ Ik kan werken met evenredige en omgekeerd evenredige grootheden.
- ☐ Ik kan bij formules van de vorm $y = ax^p$ de variabele x vrijmaken.

► OPGAVE C5,C6
THEORIE A,B

► OPGAVE C7
THEORIE C

► OPGAVE C8
THEORIE D

► OPGAVE C9
THEORIE D

C5 Schrijf als macht van x .

a $\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt{x}$

b $\sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

c $\frac{x\sqrt{x}}{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}}$

C6 Schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten.

a $x^{3\frac{2}{5}}$

b $\frac{1}{4}x^{1\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}}$

c $\frac{3}{7}x^{-2}y^{1\frac{1}{4}}$

C7 Los de vergelijking $6x^{-1\frac{1}{2}} + 5 = 53$ exact op.

C8 a Gegeven is dat y evenredig is met $x^{2,8}$. Bij $x = 3$ hoort $y = 117$.

Stel de formule op van y als functie van x . Rond de evenredigheidsconstante af op één decimaal.

b Gegeven is dat y omgekeerd evenredig is met $x\sqrt{x}$.

Bij $x = 25$ hoort $y = 4$.

Stel de formule op van y als functie van x .

C9 Herleid de formule $y = \frac{3,7}{x^{1,36}}$ tot de vorm $x = by^c$. Rond af op twee decimalen.

Antwoorden

C5 a $x^{1\frac{1}{4}}$

b $x^{-1\frac{1}{6}}$

c $x^{-\frac{3}{4}}$

C6 a $x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}$

b $\frac{x\sqrt{x}}{4 \cdot \sqrt[3]{y}}$

c $\frac{3y \cdot \sqrt[4]{y}}{7x^2}$

C7 $x = \frac{1}{4}$

C8 a $y = 5,4x^{2,8}$

b $y = \frac{500}{x\sqrt{x}}$

C9 $x = 2,62y^{-0,74}$

5.4 Exponentiële functies

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met transformaties van de grafiek van een exponentiële functie.
- Je kunt formules herleiden tot de vorm $y = b \cdot g^x$.
- Je kunt exponentiële vergelijkingen die te herleiden zijn tot de vorm $g^A = g^B$ algebraïsch oplossen.

O51



Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = (\frac{1}{3})^x$.

- Plot de grafieken van f en g . Neem x tussen -5 en 5 en y tussen -5 en 25 .
- Is de grafiek van f stijgend of dalend? En de grafiek van g ?
- Bereken $f(-10)$, $f(-20)$ en $f(-100)$.
- Is er bij de functie f een origineel te vinden waarvan het beeld 0 is? Licht toe.
- Geef van f en van g het bereik.

Theorie A De functie $f(x) = g^x$

Een functie van de vorm $f(x) = g^x$ met g constant en $g > 0$ is een **exponentiële functie**. Je ziet dat de variabele x in de exponent voorkomt. De grafiek van $f(x) = g^x$ is stijgend in het geval $g > 1$ en dalend in het geval $0 < g < 1$.

In opgave 51c heb je gezien dat voor hele kleine waarden van x de grafiek van $f(x) = 2^x$ vrijwel samenvalt met de x -as. De x -as is de **horizontale asymptoot** van de grafiek van f .

De functie $f(x) = 2^x$ kan elke waarde groter dan 0 aannemen.

Dus $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Omdat je bij de functie f voor x elk getal mag nemen, is het domein $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$. We noteren dit als $D_f = \mathbb{R}$. Hierbij is $\mathbb{R}$ het symbool voor alle reële getallen.

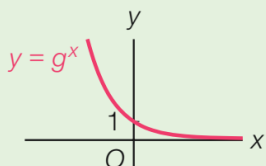
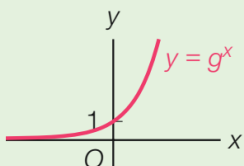
Een asymptoot is een lijn waarmee de grafiek op den duur vrijwel samenvalt.

Ook bij de functie $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ is het domein $\mathbb{R}$ en het bereik $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

Ook hier is de x -as de asymptoot, maar nu valt de grafiek voor hele grote waarden van x vrijwel samen met de x -as.

De functies $f(x) = g^x$ zijn standaardfuncties en de bijbehorende grafieken zijn standaardgrafieken.

De standaardgrafiek $y = g^x$

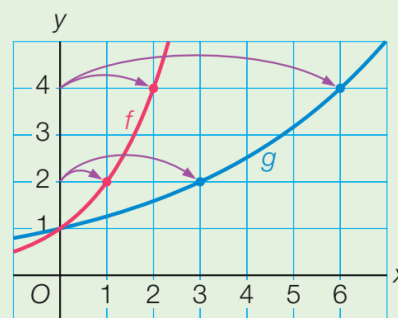
$0 < g < 1$	$g > 1$
 <p style="text-align: center;">dalend</p>	 <p style="text-align: center;">stijgend</p>
<p style="text-align: center;">domein $\mathbb{R}$ en bereik $\langle 0, \rightarrow \rangle$ de x-as (de lijn $y = 0$) is de asymptoot</p>	

Hiernaast zie je de grafieken van $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 2^{\frac{1}{3}x}$. Vermenigvuldig je van een punt van de grafiek van f de x-coördinaat met 3, dan krijg je een punt van de grafiek van g . De afstand tot de y-as wordt drie keer zo groot. Door de grafiek van $f(x) = 2^x$ met 3 te **vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as**,

ontstaat de grafiek van $g(x) = 2^{\frac{1}{3}x}$.

Bij de vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de y-as vervang je in de formule x door $\frac{1}{3}x$.

$$f(x) = 2^x \xrightarrow{\times 3 \text{ t.o.v. de y-as}} g(x) = 2^{\frac{1}{3}x}$$



In het schema hieronder staat een overzicht van de transformaties die je hebt geleerd, en het effect ervan op de standaardgrafiek $y = g^x$. Zoals je weet, kan de volgorde waarin je transformaties toepast van belang zijn.

Transformaties op de standaardgrafiek $y = g^x$

$y = g^x$ $\downarrow \times a \text{ t.o.v. de x-as}$ $y = a \cdot g^x$	Vermenigvuldig in de formule de functiewaarde met a .
$y = g^x$ $\downarrow \times b \text{ t.o.v. de y-as}$ $y = g^{\frac{1}{b}x}$	Vervang in de formule x door $\frac{1}{b} \cdot x$.
$y = g^x$ $\downarrow \text{translatie } (c, 0)$ $y = g^{x-c}$	Vervang in de formule x door $x - c$.
$y = g^x$ $\downarrow \text{translatie } (0, d)$ $y = g^x + d$	Tel in de formule d op bij de functiewaarde.

De grafiek van $y = g^x + d$ heeft als asymptoot de lijn $y = d$.

Voorbeeld

Geef aan hoe de grafiek van de functie $f(x) = 150 - 0,7^{0,2x-3}$ uit een standaardgrafiek ontstaat. Geef ook het bereik en de formule van de horizontale asymptoot.

Uitwerking

$$\begin{aligned} y = 0,7^x &\xrightarrow{\times -1 \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} y = -0,7^x \\ &\xrightarrow{\text{translatie } (3, 150)} y = 150 - 0,7^{x-3} \\ &\xrightarrow{\times 5 \text{ t.o.v. de } y\text{-as}} f(x) = 150 - 0,7^{0,2x-3} \end{aligned}$$

$B_f = \langle \leftarrow, 150 \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 150$.

$0,7^{0,2x-3}$ is groter dan 0 voor elke x , dus
 $150 - 0,7^{0,2x-3}$ is kleiner dan 150 voor elke x .

Het is handig om een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as als laatste toe te passen.

R52



In de theorie wordt uitgelegd dat de grafiek van $g(x) = 2^{\frac{1}{3}x}$ ontstaat door de grafiek van $f(x) = 2^x$ met 3 te vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as. Van elk punt op de grafiek van f wordt de x -coördinaat met 3 vermenigvuldigd en wordt dus de afstand tot de y -as drie keer zo groot.

- a** Bij een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as wordt van elk punt op de grafiek van f de afstand tot de y -as vier keer zo klein. Zo ontstaat de grafiek van $h(x) = 2^{ax}$ met $a > 0$. Om welke vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as gaat het hier? Welk getal is a in dit geval?
- b** De grafiek van f wordt gespiegeld in de y -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie k . Om welke vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as gaat het hier? Geef het functievoorschrift van k . Schrijf het antwoord in de vorm $k(x) = g^x$.
- c** Door welke vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as ontstaat de grafiek van $l(x) = (\frac{1}{8})^x$ uit de grafiek van f ?

R53



In het voorbeeld staat ‘Het is handig om een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as als laatste toe te passen’.

Welke formule krijg je als je op de standaardgrafiek $y = 0,7^x$, na de vermenigvuldiging met -1 ten opzichte van de x -as, eerst de vermenigvuldiging met 5 ten opzichte van de y -as en daarna de translatie $(3, 150)$ toepast?

54 Geef van elk van de grafieken van de volgende functies aan hoe ze uit een standaardgrafiek ontstaan. Geef ook het bereik en de formule van de horizontale asymptoot.

- a $f(x) = 5 - 6 \cdot 0,4^x$
- b $g(x) = 3 \cdot 2^{3x} + 4$
- c $h(x) = 0,8^{0,5x-4} - 10$

55 Geef van elk van de grafieken van de volgende functies aan hoe ze uit een standaardgrafiek ontstaan. Geef ook het bereik en de formule van de horizontale asymptoot.

- a $f(x) = 2 \cdot 0,8^{2x} - 7$
- b $g(x) = 1000 - 0,3^{0,1x+2}$
- c $h(x) = 1000(1 - 1,3^x)$

56 Geef van elk van de grafieken van de volgende functies aan hoe ze uit een standaardgrafiek ontstaan.

- a $f(x) = 4 - 0,7^{-0,2x+1}$
- b $g(x) = -1 + 2\sqrt{3x-5}$

57 Op de standaardgrafiek $y = 3^x$ worden transformaties toegepast. Stel telkens de formule op van de beeldgrafiek.

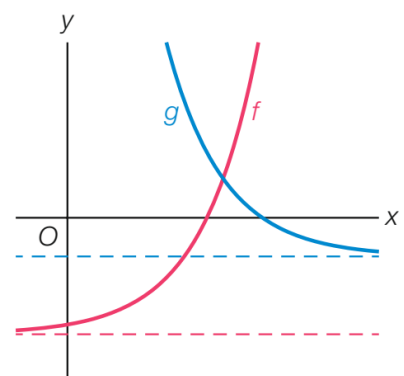
- a Eerst spiegelen in de x -as, dan 1 omlaag verschuiven.
- b Eerst de translatie $(2, 5)$ en dan de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met 6.
- c Eerst 5 omlaag en 4 naar rechts verschuiven, dan met 3 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.
- d Eerst met 3 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as, dan de verschuiving 5 omlaag en 4 naar rechts.

A58 Hiernaast zie je de grafieken van de functies

$$f(x) = 2^{x-2} - 3 \text{ en } g(x) = 4 \cdot 0,5^{x-3} - 1.$$

- a Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- b Hoe ontstaat de grafiek van g uit een standaardgrafiek?
- c Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x \leq 2$.
- d Bereken welke waarden $g(x)$ aanneemt voor $x \geq 2$.
- e Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing en de vergelijking $g(x) = p$ geen oplossing?
- f De lijn $x = 1$ snijdt de grafiek van f in het punt P en de grafiek van g in het punt Q .

Bereken exact de lengte van het lijnstuk PQ .



O59 a Toon aan dat $8 \cdot 4^x$ te herleiden is tot 2^{2x+3} .

b Welke rekenregels voor machten heb je bij vraag a gebruikt?

Theorie B Herleiden tot de vorm $y = b \cdot g^x$

In opgave 59 heb je bij het herleiden van $8 \cdot 4^x$ tot 2^{2x+3} de regels $(a^p)^q = a^{pq}$ en $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ gebruikt. Omgekeerd kun je 2^{2x+3} schrijven als $8 \cdot 4^x$. Je gebruikt dan de regels $(a^p)^q = a^{pq}$ en $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ van rechts naar links. Zo krijg je $2^{2x+3} = 2^{2x} \cdot 2^3 = (2^2)^x \cdot 8 = 8 \cdot 4^x$. Op dezelfde manier kun je een formule als $y = 40 \cdot 3^{-2x+1}$ schrijven in de vorm $y = b \cdot g^x$. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Schrijf de formule $y = 40 \cdot 3^{-2x+1}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$.

Uitwerking

$$y = 40 \cdot 3^{-2x+1} = 40 \cdot 3^{-2x} \cdot 3^1 = 40 \cdot (3^{-2})^x \cdot 3 = 120 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x$$

$$\text{Dus } y = 120 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x.$$

60 Schrijf in de vorm $y = b \cdot g^x$.



a $y = 15 \cdot 2^{3x+2}$

b $y = 260 \cdot 4^{1\frac{1}{2}x-1}$

c $y = 8 \cdot 4^{-2x-1}$

61 Schrijf in de vorm $y = b \cdot g^x$.



a $y = 2^x \cdot 2^{2x-3}$

b $y = 63 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-2}$

c $y = 50\,000 \cdot 100^{-x-2\frac{1}{2}}$

A62 Schrijf in de vorm $y = ax^p$ of $y = b \cdot g^x$.



a $y = 50 \cdot 2^{3x-1}$

c $y = 162 \cdot 9^{-\frac{1}{2}x-2}$

e $y = \frac{1}{4x^2 \cdot \sqrt{x}}$

b $y = 10x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

d $y = \frac{3\sqrt{x}}{x \cdot \sqrt[3]{x}}$

f $y = \frac{64}{4^{\frac{1}{2}x+2}}$

63 **a** De grafiek van $g(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^{x-3} - 2$ kan ontstaan uit de grafiek van $f(x) = 3^x$ door de translatie (p, q) toe te passen.



Bereken p en q .

b Op de grafiek van $h(x) = 2^{x-3}$ wordt de translatie $(-5, 0)$ toegepast. Zo ontstaat de grafiek van de functie k . Je kunt de grafiek van k ook krijgen door de grafiek van h met a te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.

Bereken a .

A64 De grafiek van $f(x) = 5 - 2^{\frac{1}{2}x+4}$ wordt 8 naar beneden en 12 naar rechts verschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie h . De functie h kan geschreven worden in de vorm $h(x) = a + b \cdot g^x$. Bereken exact a , b en g .

A65 We bekijken een vlucht van een Boeing 747-400 van Amsterdam naar Tokio, dat is een vliegafstand van 10 200 km. Tijdens de vlucht gebruiken de motoren 12 000 liter kerosine per uur. De dichtheid van kerosine is 0,8 kg per liter. De Boeing heeft een vleugeloppervlakte van 541 m^2 en een kruissnelheid van 900 km/u. Na een uur vliegt het toestel op een hoogte van 10 km.



Met de formules $G = 0,03dv^2A$ en $d = 1,225 \cdot 0,88^h$ is te berekenen welk gewicht het toestel heeft na een uur vliegen. In deze formules is G het gewicht in kg, d de luchtdichtheid in kg/m^3 , v de kruissnelheid in m/s, A de vleugeloppervlakte in m^2 en h de hoogte in km. Uit de gegevens volgt dat het startgewicht van deze Boeing 355 668 kg is.

- Toon dit aan met een berekening.
- Bereken in km de vlieghoogte tien uur na de start. Rond af op één decimaal.
- De hoogte h in km waarop de Boeing vliegt, is een functie van de vliegtijd t in uren. We bekijken de tijd vanaf $t = 0,5$ tot aan een half uur voor de landing. Met de gegevens is een formule op te stellen van de vorm $g^h = at + b$. Bereken g , a en b . Rond g en b af op twee en a op vier decimalen.

O66 Schrijf $4\sqrt{2}$ als macht van 2 en los de vergelijking $2^{x-1} = 4\sqrt{2}$ exact op.

Theorie C Exponentiële vergelijkingen

Bij het algebraïsch oplossen van **exponentiële vergelijkingen** zoals in opgave 66 werk je toe naar een vorm waarin het linker- en rechterlid als macht met hetzelfde grondtal g zijn geschreven. Daarna gebruik je de regel $g^A = g^B$ geeft $A = B$.

$g^A = g^B$ geeft $A = B$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $3^{x+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$

b $2 \cdot 3^{2x-1} = 18$

c $2 \cdot 9^{\frac{1}{2}x-3} = 6$

Uitwerking

a $3^{x+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$

$$3^{x+1} = 3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{x+1} = 3^{-1\frac{1}{2}}$$

$$x+1 = -1\frac{1}{2}$$

$$x = -2\frac{1}{2}$$

b $2 \cdot 3^{2x-1} = 18$

$$3^{2x-1} = 9$$

$$3^{2x-1} = 3^2$$

$$2x-1 = 2$$

$$2x = 3$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

c $2 \cdot 9^{\frac{1}{2}x-3} = 6$

$$9^{\frac{1}{2}x-3} = 3$$

$$(3^2)^{\frac{1}{2}x-3} = 3$$

$$3^{x-6} = 3^1$$

$$x-6 = 1$$

$$x = 7$$

R67 In voorbeeld c wordt de vergelijking $2 \cdot 9^{\frac{1}{2}x-3} = 6$ opgelost door toe te werken naar de vorm $3^A = 3^B$. Je kunt de vergelijking ook oplossen door toe te werken naar de vorm $9^A = 9^B$. Doe dit. Welke manier heeft je voorkeur?

□ ⊗ *

68 Bereken exact de oplossingen.

□

a $2^{x-3} = \frac{1}{8}$

c $5 \cdot 2^x = 80$

e $10 \cdot 3^{2x-1} = 270$

b $3^{2x} - 2 = 25$

d $3^{2x+1} = 27\sqrt{3}$

f $3 \cdot 8^{2-x} = 48$

69 Bereken exact de oplossingen.

□ ⊗ *

a $3 \cdot 2^x + 4 = 28$

c $7^{3x+1} = 49^{2x}$

e $5 \cdot 4^{x-1} = 2\frac{1}{2}$

b $5^{2x-6} = \frac{1}{25}$

d $32^{x-2} = \frac{1}{16}$

f $8 \cdot 2^x = 4^{x+1}$

70 Bereken exact de oplossingen.

□ ⊗ *

a $4 \cdot 2^x = 2^x + 3$

c $3x^3 + 17x^2 = 5x^2 + 36x$

e $5^{x+6} = (\frac{1}{5})^x$

b $\frac{1}{5}(2x+1) + 2 = \frac{1}{2}x + 3$

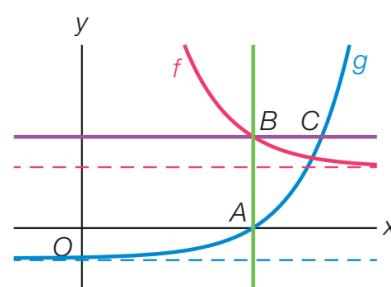
d $2\sqrt{x+5} = x+2$

f $\frac{3x+2}{2x+5} = \frac{3x+2}{3x^2}$

A71 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 \cdot (\frac{1}{2})^{x-4} + 2$ en $g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{x-3} - 1$.

□ ⊗ *

De grafiek van g snijdt de x -as in het punt A . De verticale lijn door A snijdt de grafiek van f in het punt B . De horizontale lijn door B snijdt de grafiek van g in het punt C . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de lengte van het lijnstuk AC .



- A72** De grafiek van $g(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^{x-3} - 2$ wordt eerst met -6 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as en vervolgens 7 omlaag verschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie h . De grafieken van g en h snijden elkaar in het punt S .
Bereken exact de coördinaten van S .

- O73** Gegeven is de vergelijking $2^{x+1} + 2^x = 48$.
□ ⊗ * **a** Licht toe dat uit $2^{x+1} + 2^x = 48$ volgt $2 \cdot 2^x + 2^x = 48$.
b Licht toe dat uit $2 \cdot 2^x + 2^x = 48$ volgt $3 \cdot 2^x = 48$ en los deze vergelijking exact op.

Theorie D Herleiden tot de vorm $g^A = g^B$

De vergelijking $3^{x+2} + 3^x = 10\sqrt{3}$ is algebraïsch op te lossen door deze te herleiden tot de vorm $g^A = g^B$. Je krijgt

$$3^{x+2} + 3^x = 10\sqrt{3}$$

$$3^x \cdot 3^2 + 3^x = 10\sqrt{3}$$

$$9 \cdot 3^x + 3^x = 10\sqrt{3}$$

$$10 \cdot 3^x = 10\sqrt{3}$$

$$3^x = \sqrt{3}$$

$$3^x = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

- 74** Bereken exact de oplossingen.
□ ⊗ **a** $3^{x+2} + 3^x = 810$ **d** $3^{x+2} = 24 + 3^x$
b $2^{x-1} + 2^{x+1} = 10$ **e** $3^x - 3^{x-1} = 2\sqrt{3}$
c $2^{x+3} - 2^x = \frac{7}{8}$ **f** $5^{x-1} + 5^{x-2} = 6\sqrt{5}$

- 75** Bereken exact de oplossingen.
□ ⊗ * **a** $3^{x+1} = 9^{x+2}$ **d** $5^{x^2+5} = 125^{x+1}$
b $3^{x+1} - 3^{x-1} = 8\sqrt{3}$ **e** $2^{x+2} - (\frac{1}{2})^{-x+1} = 28$
c $3^{x^2} = (\frac{1}{3})^{x-6}$ **f** $4^{x^2+1} = 8^{x^2-1}$

- 76** Bereken exact de oplossingen.
***** **a** $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$
b $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 6$
c $4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{x+4} = 384$

A77

Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^{x+1} - 4$ en $g(x) = 6 - 3^{x-1}$.

Zie de figuur hiernaast.

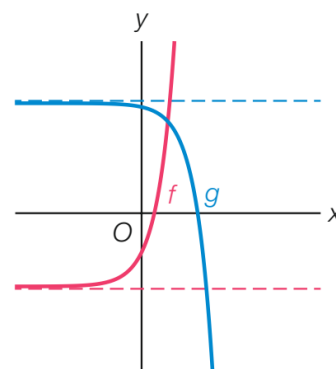
a Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) \leq g(x)$.

b De lijn $x = 2\frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .

Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB . Geef je eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b} + c$.

c Los exact op $f(x) - g(x) = 80$.

d Voor welke p heeft de vergelijking $g(x) - f(x) = p$ geen oplossing?



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met transformaties van de grafiek van een exponentiële functie.

☐ Ik kan formules herleiden tot de vorm $y = b \cdot g^x$.

☐ Ik kan exponentiële vergelijkingen die te herleiden zijn tot de vorm $g^A = g^B$ algebraïsch oplossen.

► **OPGAVE C10**
THEORIE A

► **OPGAVE C11**
THEORIE B

► **OPGAVE C12**
THEORIE C,D

C10 Geef van elk van de grafieken van de volgende functies aan hoe ze uit een standaardgrafiek ontstaan. Geef ook het bereik en de formule van de horizontale asymptoot.

a $f(x) = 1 - 3 \cdot 0,5^x$

b $g(x) = 4 \cdot 3^{0,2x+1}$

C11 Schrijf in de vorm $y = b \cdot g^x$.

a $y = 5 \cdot 3^{2x+1}$

b $y = (\frac{1}{2})^x \cdot 2^{3x+4}$

c $y = \frac{1}{5^{2x-1}}$

C12 Bereken exact de oplossingen.

a $3^{x+2} = 9\sqrt{3}$

c $8 \cdot 4^x = 2^{x-5}$

e $2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{16}$

b $5 \cdot 2^{1-3x} = 20$

d $3^{x+1} - 3^x = 162$

f $5^{2x-1} - (\frac{1}{25})^{-x+1} = 100$

Antwoorden

C10 a $\times -3$ t.o.v. de x -as en dan translatie $(0, 1)$

$B_f = \langle \leftarrow, 1 \rangle$ en asymptoot $y = 1$

b $\times 4$ t.o.v. de x -as, translatie $(-1, 0)$ en dan $\times 5$ t.o.v. de y -as

$B_g = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en asymptoot $y = 0$

C11 a $y = 15 \cdot 9^x$

b $y = 16 \cdot 4^x$

c $y = 5 \cdot (\frac{1}{25})^x$

C12 a $x = \frac{1}{2}$

c $x = -8$

e $x = -3$

b $x = -\frac{1}{3}$

d $x = 4$

f $x = 2$

5.5 Logaritmen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met logaritmen.
- Je kunt logaritmische vergelijkingen algebraïsch oplossen.
- Je kunt van een logaritmische functie het domein en de formule van de verticale asymptoot van de bijbehorende grafiek berekenen.
- Je kunt problemen bij logaritmische functies oplossen waarbij het domein een rol speelt.

078

□ ⊗ *

Het zonder rekenmachine berekenen van de uitkomst van een vermenigvuldiging zoals 81×2187 is veel werk. Door met de tabel hiernaast de vermenigvuldiging te schrijven als een product van machten met grondtal 3, kan met een eenvoudige optelling de uitkomst verkregen worden.

- Schrijf 81×2187 als product van machten met grondtal 3 en laat zien hoe je met een optelling en de tabel hiernaast de uitkomst kunt krijgen.
- Bereken op dezelfde manier met de tabel 27×729 en 9×6561 .
- Lees het geschiedeniskader hieronder.

x	3^x	x	3^x
1	3	7	2187
2	9	8	6561
3	27	9	19683
4	81	10	59049
5	243	11	177147
6	729	12	531441

Geschiedenis Logaritmen

Om grote vermenigvuldigingen en delingen te vereenvoudigen, kwam de Schotse landheer John Napier (1550-1617) op het idee om met exponenten te werken. Zo is bijvoorbeeld de vermenigvuldiging 32×256 om te zetten in de optelling van de exponenten 5 en 8, want $32 \times 256 = 2^5 \times 2^8 = 2^{5+8} = 2^{13}$. Vervolgens kijk je in een tabel met machten van 2 bij de exponent 13. Je vindt het getal 8192 en dit is dus de uitkomst van de vermenigvuldiging.



Om deze rekenmethode zinvol te kunnen toepassen, heeft Napier lange tabellen gemaakt van getallen met de bijbehorende exponenten van machten met een bepaald grondtal. Na jaren rekenwerk publiceerde hij in 1614 deze tabellen. In deze tabellen gebruikte hij het woord *logaritme* voor de exponent bij een bepaald grondtal.

Hiernaast zie je een tabel met logaritmen voor grondtal 3.

- Uit de tabel volgt dat $291 \approx 3^{5,16408}$ en $1234 \approx 3^{6,47910}$. Ga met de GR na dat dit klopt.
- Welke logaritme zou ook in de tabel moeten staan om de uitkomst van 291×1234 te kunnen geven? Ga met de GR na of deze logaritme klopt en geef het bijbehorende getal.

getal	logaritme
⋮	⋮
290	5,16095
291	5,16408
292	5,16720
⋮	⋮
1233	6,47836
1234	6,47910
1235	6,47983
⋮	⋮

Theorie A De logaritme

In opgave 78 worden getallen geschreven als macht van 3.

Zo is $81 = 3^4$, $291 \approx 3^{5,16408}$ en $1234 \approx 3^{6,47910}$.

We gaan daarbij uit van grondtal 3 en zoeken hierbij de exponent zodat de uitkomst van de macht gelijk is aan 81, 291 of 1234.

Voor de exponent bij grondtal 3 en uitkomst 81 schrijven we ${}^3\log(81)$, dus ${}^3\log(81) = 4$.

En zo is ${}^3\log(291) \approx 5,16408$ en ${}^3\log(1234) \approx 6,47910$.

De notatie 'log' komt van **logaritme**.

In ${}^3\log(81)$ is 3 het **grondtal van de logaritme**.

${}^3\log(81)$ spreek je uit als 'de derde logaritme van 81' of kortweg '3 log 81'.

${}^3\log(81)$ is de exponent van een macht met grondtal 3 waarmee de macht gelijk is aan 81.

${}^g\log(x)$ is de exponent van een macht met grondtal g waarmee de macht gelijk is aan x . In ${}^g\log(x)$ heet g het grondtal van de logaritme.

Zoek je de uitkomst van ${}^3\log(\frac{1}{81})$, dan zoek je dus de exponent bij het grondtal 3 zodat je $\frac{1}{81}$ krijgt. Daartoe bedenk je dat $\frac{1}{81} = 3^{-4}$, dus ${}^3\log(\frac{1}{81}) = {}^3\log(3^{-4}) = -4$.

En zo is ${}^3\log(9\sqrt{3}) = {}^3\log(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^3\log(3^{2\frac{1}{2}}) = 2\frac{1}{2}$.

Je ziet dat je logaritmen als ${}^2\log(8)$ en ${}^3\log(9\sqrt{3})$ exact kunt berekenen, omdat 8 een bekende macht van 2 is en $9\sqrt{3}$ een bekende macht van 3.

$${}^g\log(g^a) = a$$

Voorbeeld

Bereken exact.

a ${}^2\log(\frac{1}{8}\sqrt{2})$

b ${}^5\log(0,04)$

Uitwerking

a ${}^2\log(\frac{1}{8}\sqrt{2}) = {}^2\log(2^{-3} \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = {}^2\log(2^{-2\frac{1}{2}}) = -2\frac{1}{2}$

b ${}^5\log(0,04) = {}^5\log(\frac{4}{100}) = {}^5\log(\frac{1}{25}) = {}^5\log(5^{-2}) = -2$

79

Bereken exact.

a ${}^5\log(125)$

b ${}^{10}\log(0,1)$

c ${}^2\log(4)$

d ${}^7\log(49)$

e ${}^2\log(\sqrt{2})$

f ${}^2\log(0,5)$

g ${}^4\log(0,25)$

h ${}^4\log(4)$

i ${}^4\log(1)$

80 Bereken exact.

$\square \odot *$ **a** ${}^2\log(64\sqrt{2})$

b ${}^3\log(\frac{1}{9}\sqrt{3})$

c ${}^3\log(3^{21,5})$

d ${}^5\log(\frac{1}{125})$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log(\frac{1}{27})$

f ${}^{\frac{1}{2}}\log(\frac{1}{4})$

g ${}^2\log(\frac{1}{32} \cdot \sqrt[3]{2})$

h ${}^5\log(1)$

i ${}^3\log(81 \cdot \sqrt[5]{27})$

81 Licht toe.

$\square \odot *$ **a** ${}^3\log(x) = 2$ geeft $x = 9$

b ${}^5\log(x) = -2$ geeft $x = \frac{1}{25}$

Theorie B Logaritmische vergelijkingen

De **logaritmische vergelijking** ${}^2\log(x) = 5$ heeft als oplossing $x = 2^5$. Immers ${}^2\log(2^5) = 5$.

En zo krijg je bij de vergelijking ${}^2\log(x + 3) = 5$ dat $x + 3 = 2^5$, dus $x = 2^5 - 3 = 29$.

Uit ${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$.

${}^2\log(x) = 5$ geeft $x = 2^5$

${}^g\log(x) = 5$ geeft $x = g^5$

${}^g\log(x) = y$ geeft $x = g^y$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a ${}^2\log(2x - 1) = 3$

b $1 + 2 \cdot {}^5\log(x) = 7$

Uitwerking

a ${}^2\log(2x - 1) = 3$

$2x - 1 = 2^3$

$2x - 1 = 8$

$2x = 9$

$x = 4\frac{1}{2}$

b $1 + 2 \cdot {}^5\log(x) = 7$

$2 \cdot {}^5\log(x) = 6$

${}^5\log(x) = 3$

$x = 5^3$

$x = 125$

R82 Bereken x .

$\square \odot *$ **a** $x = {}^5\log(0,2)$

b ${}^9\log(x) = \frac{1}{2}$

c ${}^x\log(1000) = 3$

83 Bereken exact de oplossingen.

$\square \odot$ **a** ${}^3\log(x + 2) = 2$

c ${}^3\log(2x + 1) = 4$

e ${}^{\frac{1}{2}}\log(x - 1) = 3$

b $1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 4$

d $5 + {}^4\log(x) = 3$

f ${}^2\log(x^2 - 4) = 5$

A84 Bereken exact de oplossingen.

$\square \odot *$ **a** $4 \cdot {}^3\log(x) = 2$

c $3 + {}^2\log(x) = -1$

e ${}^3\log(0,4x - 5) = 2$

b ${}^3\log(4x - 1) = -2$

d ${}^5\log(3x + 2) = 1$

f $4 + 2 \cdot {}^2\log(x) = 7$

E85 Bereken exact de oplossing van ${}^2\log({}^3\log(x)) = -1$.

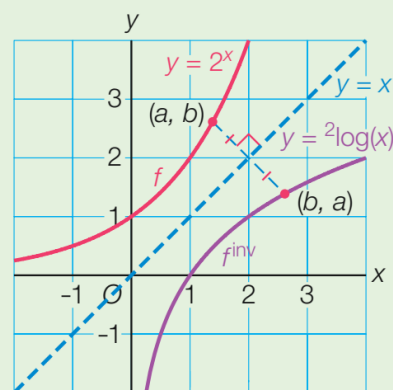
O86 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^2\log(x)$.

□ ⊙ * Toon aan dat g de inverse is van f .

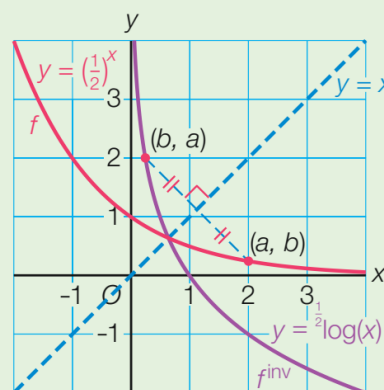
Theorie C Logaritmische functies

In opgave 86 heb je aangetoond dat de exponentiële functie $f(x) = 2^x$ als inverse de **logaritmische functie** $f^{\text{inv}}(x) = {}^2\log(x)$ heeft. Dus de grafieken van f en f^{inv} zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

In de figuur hiernaast zijn de grafieken van $f(x) = 2^x$ en $f^{\text{inv}}(x) = {}^2\log(x)$ getekend. Je ziet dat $D_{f^{\text{inv}}} = B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_{f^{\text{inv}}} = D_f = \mathbb{R}$. De grafiek van f heeft als horizontale asymptoot de x -as, dus de grafiek van f^{inv} heeft als **verticale asymptoot** de y -as.



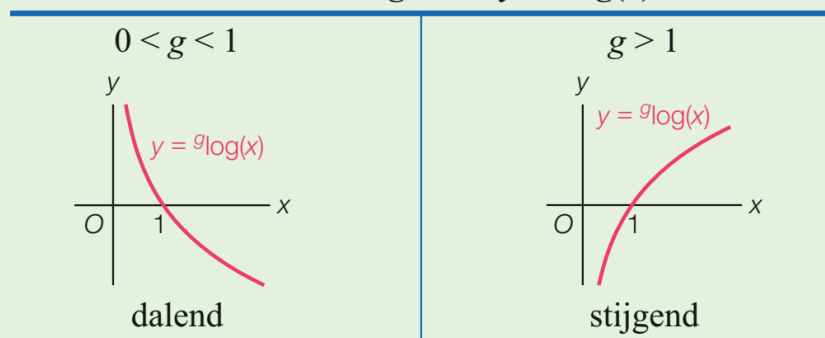
In de figuur hiernaast zie je de grafieken van $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ en $f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{2}\log(x)$. De grafiek van f^{inv} is dalend en heeft de y -as als verticale asymptoot. Verder is $D_{f^{\text{inv}}} = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_{f^{\text{inv}}} = \mathbb{R}$.



Omdat de functie $f(x) = g^x$ alleen gedefinieerd is voor $g > 0$, moet bij de functie $h(x) = {}^g\log(x)$ ook gelden $g > 0$. Verder heeft $f(x) = g^x$ geen inverse voor $g = 1$, dus bij $h(x) = {}^g\log(x)$ geldt bovendien $g \neq 1$.

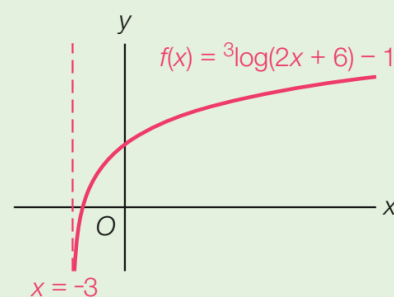
De logaritmische functie $f(x) = {}^g\log(x)$ is alleen gedefinieerd voor $g > 0$ en $g \neq 1$, heeft domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ en bereik $\mathbb{R}$. De lijn $x = 0$ is de verticale asymptoot van de grafiek.

De standaardgrafiek $y = {}^g\log(x)$



domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ en bereik $\mathbb{R}$
de y -as (de lijn $x = 0$) is de asymptoot

Om het domein van de functie $f(x) = {}^3\log(2x + 6) - 1$ te berekenen, los je de ongelijkheid $2x + 6 > 0$ op. Je krijgt $x > -3$, dus $D_f = \langle -3, \rightarrow \rangle$. Uit het domein volgt dat de verticale asymptoot van de grafiek van f de lijn $x = -3$ is. Het domein van de functie $f(x) = {}^s\log(ax + b)$ volgt uit $ax + b > 0$.



De verticale asymptoot van de grafiek van de functie $f(x) = {}^s\log(ax + b)$ volgt uit $ax + b = 0$.

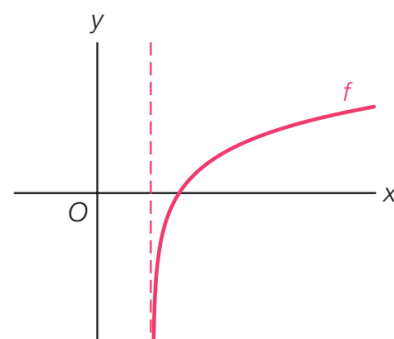
R87 Zie de theorie hierboven.

□ ⊗ * Bereken exact voor welke waarden van x geldt ${}^3\log(2x + 6) - 1 \leq 2$.

88 Hiernaast zie je de grafiek van de functie

□ ⊗ * $f(x) = -3 + {}^2\log(5x - 8)$.

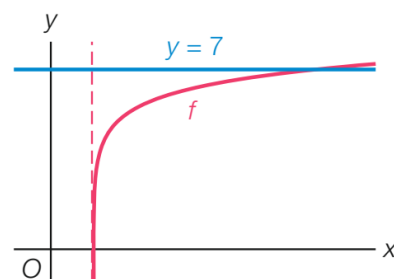
- Bereken het domein van f en geef de formule van de verticale asymptoot van de grafiek van f .
- Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) \leq 0$.
- Bereken exact welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x \leq 8$.



A89 Hiernaast zie je de grafiek van de functie

□ $f(x) = {}^3\log(2x - 5) + 4$ en de lijn $y = 7$.

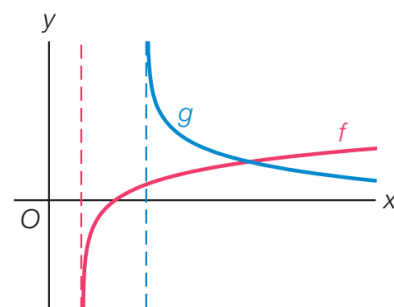
- Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) < 7$.
- Bereken exact welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x \leq 7$.



A90 Hiernaast zie je de grafieken van de functies

⊗ * $f(x) = {}^4\log(x - 1)$ en $g(x) = {}^{\frac{1}{4}}\log(x - 3) + 2$.

- Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) \leq 1\frac{1}{2}$.
- Bereken exact voor welke waarden van x geldt $g(x) \geq 1$.
- De lijn $x = 5$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B . Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB .



E91 Gegeven is de functie $f(x) = -3 + {}^2\log(2x - 1)$.

- *** Het functievoorschrift van de inverse van f is te schrijven in de vorm $f^{\text{inv}}(x) = a + b \cdot 2^x$. Bereken exact de waarden van a en b .

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met logaritmen.

☐ Ik kan logaritmische vergelijkingen algebraïsch oplossen.

☐ Ik kan van een logaritmische functie het domein en de formule van de verticale asymptoot van de bijbehorende grafiek berekenen.

☐ Ik kan problemen bij logaritmische functies oplossen waarbij het domein een rol speelt.

► OPGAVE C13
THEORIE A

► OPGAVE C14
THEORIE B

► OPGAVE C15a
THEORIE C

► OPGAVE C15bc
THEORIE C

C13 Bereken exact.

a ${}^2\log(16\sqrt{2})$

c ${}^5\log(\frac{1}{5})$

e ${}^2\log(\frac{1}{8} \cdot \sqrt[5]{2})$

b ${}^3\log(\frac{1}{27}\sqrt{3})$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(\frac{1}{9})$

f ${}^{10}\log(1)$

C14 Bereken exact de oplossingen.

a $2 + {}^4\log(x) = 1$

b ${}^3\log(2x - 5) = 2$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log(x - 3) + 1 = 0$

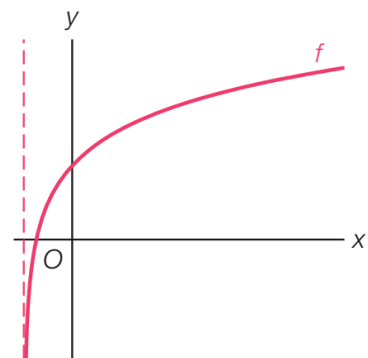
C15 Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$f(x) = {}^2\log(x + 1) + 2$.

a Bereken het domein van f en geef de formule van de verticale asymptoot van de grafiek van f .

b Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) \leq 0$.

c Bereken exact welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x \leq 0$.



Antwoorden

C13 a $4\frac{1}{2}$

c -1

e $-2\frac{4}{5}$

b $-2\frac{1}{2}$

d 2

f 0

C14 a $x = \frac{1}{4}$

b $x = 7$

c $x = 5$

C15 a $D_f = \langle -1, \rightarrow \rangle$ en asymptoot $x = -1$

b $-1 < x \leq -\frac{3}{4}$

c $f(x) \leq 2$

Kennis- en vaardigheidentest

5.1 Machtsfuncties

- 1** Op de grafiek van $f(x) = 0,3(x+2)^4 - 6$ wordt eerst de vermenigvuldiging met -4 ten opzichte van de x -as toegepast en vervolgens de translatie $(3, -15)$. Zo ontstaat de grafiek van de functie g .
Stel het functievoorschrift van g op en geef de extreme waarde van g .

5.2 Wortelfuncties

- 2** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x-2} + 3$ en $g(x) = -2 - \sqrt{x+4}$.
a Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit een standaardgrafiek?
b Schets de grafieken van f en g .
c Geef D_f , B_f , D_g en B_g .
- 3** Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \sqrt{3-4x}$.
a Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) > 2$.
b Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x \geq -\frac{1}{4}$.
- 4** Gegeven is de functie $f(x) = 2 - \sqrt{x^2-9}$.
Bereken exact de coördinaten van de randpunten van de grafiek van f en geef het bereik van f .
- 5** **a** Schrijf t als functie van N bij de formule $N = 2\sqrt{-5t+1}$.
b Maak y vrij bij de formule $2x\sqrt{y} - \sqrt{x} = 1$.

5.3 Machten met negatieve en gebroken exponenten

- 6** Schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten.
- | | | |
|--|----------------------------------|---|
| a $x^{\frac{2}{3}}$ | c $(5x^{-\frac{1}{4}})^3$ | e $(4x^{\frac{1}{3}})^{-2}$ |
| b $\frac{2}{3}xy^{-1\frac{1}{2}}$ | d $(\frac{2}{3}x)^{-1}$ | f $\frac{3}{5}x^{-2}y^{\frac{3}{4}}$ |
- 7** Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.
- | | | |
|--------------------------------------|--|---|
| a $y = x \cdot \sqrt[4]{x^3}$ | b $y = \frac{6}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$ | c $y = \frac{10}{x} \cdot \sqrt[5]{x^3}$ |
|--------------------------------------|--|---|
- 8** Los exact op.
- | | | |
|------------------------------------|--|--|
| a $3x^{-2\frac{1}{2}} = 96$ | b $\sqrt[3]{(6x)^{-1}} = \frac{1}{4}$ | c $(2x+3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}$ |
|------------------------------------|--|--|
- 9** Gegeven is dat y omgekeerd evenredig is met $x^{\frac{3}{4}}$. Bij $x = 16$ hoort $y = 3$.
a Stel de formule op van y als functie van x .
b Herleid de formule tot de vorm $x = by^c$. Rond b af op één decimaal.

5.4 Exponentiële functies

- 10** Geef van de grafieken van de volgende functies aan hoe ze uit een standaardgrafiek ontstaan. Geef ook het bereik en de formule van de horizontale asymptoot.

a $f(x) = 0,3 \cdot 2^{x-1} - 5$

b $g(x) = 2 + 0,7^{3x}$

c $h(x) = 4 - 5 \cdot 3^{0,25x}$

- 11** Schrijf in de vorm $y = b \cdot g^x$.

a $y = 108 \cdot 3^{4x-3}$

b $y = \frac{250}{5^{2x+3}}$

c $y = 32 \cdot 4^{2\frac{1}{2}x-2}$

- 12** Bereken exact de oplossingen.

a $5^{x-1} = 125\sqrt{5}$

c $3^{2x-5} = (\frac{1}{27})^x$

e $2^{x+2} + 2^{x-1} = 36$

b $4^{2x-1} - 3 = 61$

d $9^{x-1} = 27^{x+1}$

f $2^{x^2} = (\frac{1}{8})^x$

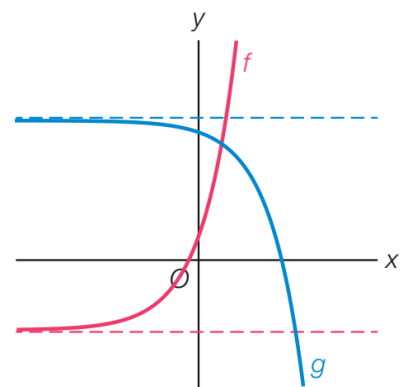
- 13** Hiernaast zie je de grafieken van de functies

$f(x) = 2^{x+2} - 3$ en $g(x) = 6 - 2^{x-1}$.

- a** Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) \geq g(x)$.

- b** Bereken welke waarden $g(x)$ aanneemt voor $x \leq 4$.

- c** Bereken voor welke p de vergelijking $f(x) + g(x) = p$ geen oplossing heeft.



5.5 Logaritmen

- 14** Bereken exact.

a ${}^2\log(\frac{1}{4}\sqrt{8})$

b ${}^3\log(27\sqrt{3})$

c ${}^5\log(\frac{1}{125} \cdot \sqrt[3]{5})$

- 15** Bereken exact de oplossingen.

a ${}^4\log(2x-3) = 2$

b ${}^{\frac{1}{2}}\log(x-3) = -4$

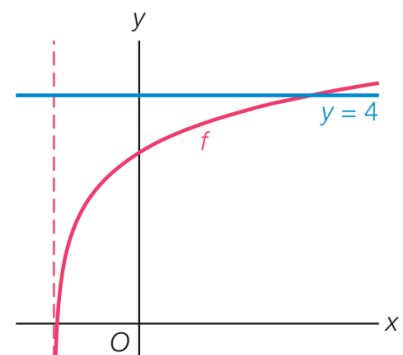
c $5 + 3 \cdot {}^2\log(x) = 20$

- 16** Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$f(x) = 2 + {}^3\log(2x+3)$ en de lijn $y = 4$.

- a** Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) \leq 4$.

- b** Bereken exact welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x < -1\frac{1}{3}$.



Gemengde opgaven

1 a Schrijf $y = \frac{6x^4}{(2\sqrt{x})^3}$ in de vorm $y = ax^p$.

b Schrijf $y = (\frac{1}{4})^{2-\frac{1}{2}x}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$.

c Herleid $y = 4x^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^4)^2$ tot de vorm $x = ay^b$. Rond af op twee decimalen.

d Herleid $A = 6 + 2\sqrt{3B+2}$ tot de vorm $B = aA^2 + bA + c$.

2 Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{1}{2}(2x^2 - 4)^{\frac{1}{2}} = 4$

c $(2x - 5)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$

e $(\sqrt{3})^{x+2} = 9\sqrt{3}$

b $2^{x+4} - 2^{x+3} = 16\sqrt{2}$

d $(\frac{1}{2}x^2 + 9) \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2 + 9} = 81$

f ${}^5\log(x^2 \cdot \sqrt{x} - 7) = 2$

3 Hiernaast zie je de grafieken van de functies

$f(x) = {}^2\log(2x+6)$ en $g(x) = 4 - 3\sqrt{10-2x}$.

a De lijn $x = 1$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .

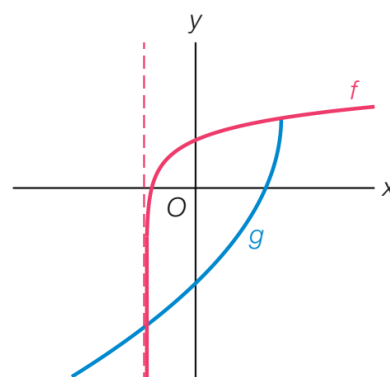
Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB . Schrijf het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b} + c$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.

b Bewijs dat de grafiek van f door het randpunt van de grafiek van g gaat.

c De verticale asymptoot van de grafiek van f heeft de vergelijking $x = p$.

Bereken exact welke waarden $g(x)$ aanneemt voor $x > p$.

d Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) > -2$ en $g(x) < -2$.



4 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 \cdot 3^{x-1}$ en

$g(x) = 7 - 9^{0,5x-1}$. Hiernaast zie je de grafieken van f en g .

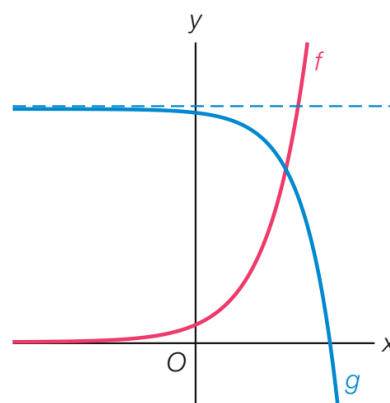
a Geef aan hoe de grafiek van g kan ontstaan uit die van f .

b Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing en de vergelijking $g(x) = p$ geen oplossing?

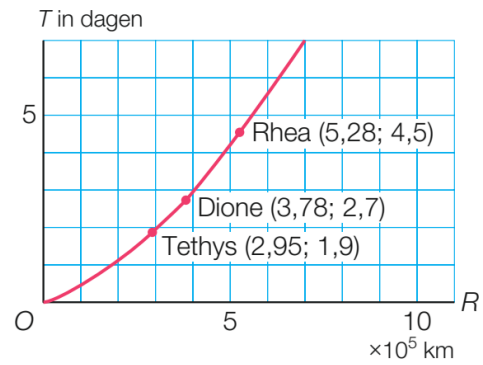
c De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt S . Bereken exact de coördinaten van S .

d De lijn $x = q$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .

Bereken exact voor welke q de lengte van het lijnstuk AB groter is dan 14.



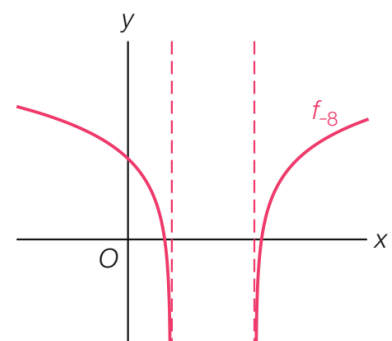
- 5** De planeet Saturnus heeft veel manen. In de figuur hiernaast is voor drie van die manen het verband tussen de omlooptijd T in dagen en de straal R van de baan in 10^5 km af te lezen. Sterrenkundigen hebben aangetoond dat T evenredig is met $R^{1,5}$. Uit de gegevens in de figuur volgt dat de evenredigheidsconstante, afgerond op twee decimalen, gelijk is aan 0,37.



- Toon dit aan.
- De baan van de maan Iapetus heeft een straal van $3,56 \cdot 10^6$ km. Bereken de omlooptijd van Iapetus in dagen.
- De straal van de baan van de maan Hyperion is 5,0 keer de straal van de baan van de maan Telesto. Bereken hoeveel keer zo groot de omlooptijd van Hyperion is.
- Herleid de formule $T = 0,37R^{1,5}$ tot de vorm $R = pT^q$. Rond p en q af op twee decimalen.
- In 1980 heeft de Voyager enkele tot dan toe onbekende manen van Saturnus gefotografeerd. Van een van deze manen, de 1980S.27, is de omlooptijd 15 uur. Bereken de straal van de baan.

- 6** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \sqrt[3]{2x + 8}$. Het punt van symmetrie van de grafiek van f^{inv} is het punt A en het snijpunt van de grafiek van f^{inv} met de x -as is het punt B . De grafiek van de functie $g(x) = p + \sqrt{qx + r}$ heeft randpunt A en gaat door B . Bereken exact p , q en r .

- 7** Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = {}^2\log(x^2 + px + 12)$. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f_{-8} . Het domein van f_{-8} bestaat uit de intervallen $\langle \leftarrow, 2 \rangle$ en $\langle 6, \rightarrow \rangle$.



- Toon dit aan.
- Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f_{-8}(x) \leq 3$.
- Bereken exact welke waarden $f_{-8}(x)$ aanneemt voor $-2 \leq x \leq 10$.

De grafiek van f_p heeft twee verticale asymptoten voor $p < -4\sqrt{3} \vee p > 4\sqrt{3}$.

- Bewijs dit.
- Er zijn twee waarden van p waarvoor geldt dat de afstand tussen de verticale asymptoten van de grafiek van f_p gelijk is aan 1. Bereken exact deze waarden van p en geef de formules van de verticale asymptoten van de bijbehorende grafieken van f_p .

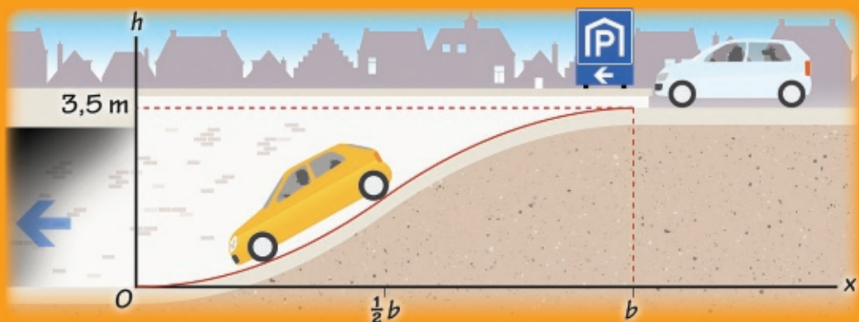


6

Differentiaalrekening

De op- en afrit van een ondergrondse parkeergarage moeten aan bepaalde eisen voldoen. Zo mag de helling maximaal 20% zijn.

We gaan uit van de formule $h = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}abx^2$. Hierin zijn x en h in meters en is b de horizontaal gemeten lengte in meters van de op- en afrit. Het begin en het einde van de oprit zijn horizontaal en er moet een hoogteverschil van 3,5 meter worden overwonnen.



Bereken de waarde van b in het geval de maximale helling 20% is. Gebruik dat de maximale helling halverwege de oprit zit.

6.1 Toppen en buigpunten

Kennis en vaardigheden

- Je kunt extreme waarden berekenen met behulp van de afgeleide.
- Je kunt de afgeleide gebruiken om extreme waarden aan te tonen.
- Je kunt de tweede afgeleide gebruiken om coördinaten van buigpunten te berekenen.

Voorkennis Regels voor de afgeleide en raaklijnen

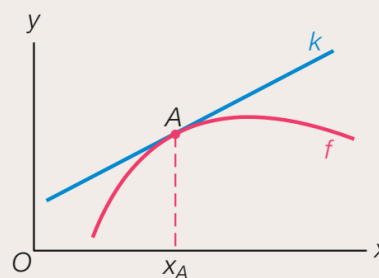
Per definitie is de afgeleide f' van een functie f gelijk aan

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

De afgeleide van een functie f geeft voor elke x

- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k aan de grafiek van f in het bijbehorende punt A , dus $rc_k = f'(x_A)$
- de helling van de grafiek van f in het bijbehorende punt
- de snelheid waarmee $f(x)$ verandert.

Het berekenen van de formule van de afgeleide heet differentiëren.



Regels voor het differentiëren

$$f(x) = a \text{ geeft } f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax \text{ geeft } f'(x) = a$$

$$f(x) = x^n \text{ geeft } f'(x) = nx^{n-1} \text{ voor } n = 2, 3, 4, \dots$$

$$f(x) = c \cdot g(x) \text{ geeft } f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$s(x) = f(x) + g(x) \text{ geeft } s'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ geeft } p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \text{ geeft } q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

SOMREGEL

PRODUCTREGEL

QUOTIËNTREGEL

Bij het opstellen van de formule van de raaklijn k met behulp van de afgeleide gebruik je dat voor een punt A op de grafiek van een functie f geldt dat $f'(x_A)$ de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k in A is.

Is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt B gelijk aan 3, dan bereken je de coördinaten van B met behulp van de vergelijking $f'(x) = 3$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 3$.

- a** Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = 2$.

Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in A .

- b** In de punten B en C van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 3.

Bereken exact de coördinaten van B en C .

Uitwerking

- a** $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$

$$k: y = ax + b$$

$$a = f'(2) = -2$$

$$y = -2x + b$$

$$f(2) = -3, \text{ dus } A(2, -3) \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 2 + b = -3 \\ -4 + b = -3 \end{array} \right.$$

$$b = 1$$

Dus $k: y = -2x + 1$.

- b** $f'(x) = 3$ geeft $3x^2 - 10x + 6 = 3$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64, \text{ dus } \sqrt{D} = 8$$

$$x = \frac{10+8}{6} = 3 \vee x = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$$

$f(\frac{1}{3}) = -1\frac{14}{27}$ en $f(3) = -3$, dus $B(\frac{1}{3}, -1\frac{14}{27})$ en $C(3, -3)$.

V1 Differentieer.

a $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6x - 1$

b $g(x) = (5x^2 - 2)^2$

c $h(x) = \frac{x-3}{x^2+4}$

d $k(p) = (2p^2 - 3p + 1)(5p - 4)$

e $l(q) = 10 - 5q^2 + 9q^3 - a^4$

f $m(x) = 2x^2 - \frac{6}{x+1}$

V2 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 2$.

- a** De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A .

Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in A .

- b** In de punten B en C van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 1.

Bereken exact de coördinaten van B en C .

V3 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

a Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = 2$.

Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in A .

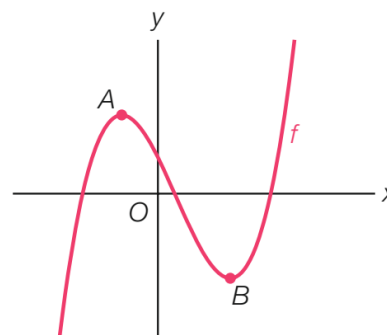
b De lijnen l en m met richtingscoëfficiënt $\frac{3}{4}$ raken de grafiek van f in de punten B en C .

Stel langs algebraïsche weg de formules van l en m op.

O1 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$.

□ ⊗ * Op de grafiek van f liggen de punten A en B waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 0. Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de coördinaten van A en B en geef van beide horizontale raaklijnen de formule.



Theorie A Extreme waarden algebraïsch berekenen

Je kunt met de GR de coördinaten van toppen van grafieken berekenen.

Je gebruikt dan de opties maximum en minimum.

Maar soms wordt gevraagd de coördinaten van toppen algebraïsch te berekenen.

Je gebruikt dan dat de raaklijn in een top horizontaal is.

Dat betekent dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn en dus de afgeleide gelijk is aan nul. De x -coördinaten van de toppen bereken je dus door de vergelijking $f'(x) = 0$ op te lossen. De extreme waarden zijn gelijk aan de y -coördinaten van de toppen.

Werkschema: algebraïsch berekenen van extreme waarden

1 Bereken $f'(x)$.

2 Los algebraïsch de vergelijking $f'(x) = 0$ op.

3 Kijk naar de grafiek van f of je met een maximum of een minimum te maken hebt.

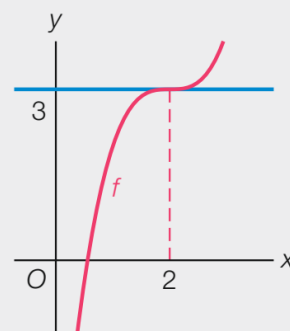
4 Bereken de y -coördinaten van de toppen en noteer het antwoord in de vorm max. is $f(\dots) = \dots$ en min. is $f(\dots) = \dots$

Je kunt met de opties maximum en minimum op de GR controleren of je de extreme waarden goed hebt berekend.

Let op hoe de vraagstelling is. Als er alleen staat 'Bereken', dan mag je de opties maximum en minimum op de GR gebruiken. Staat er 'Bereken exact' dan ga je algebraïsch te werk en rond je niet af.

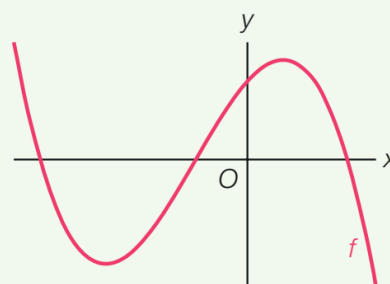
Informatief Afgeleide = 0 en top van de grafiek

In het werkschema op de vorige bladzijde staat bij stap 3 dat je naar de grafiek moet kijken. Dit is nodig omdat je na het oplossen van de vergelijking 'afgeleide = 0' nog niet weet of je met een minimum of een maximum te maken hebt. Bovendien zijn de beweringen 'afgeleide = 0' en 'de grafiek heeft een top' niet gelijk. Zo is bij de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ voor $x = 2$ wel $f'(x) = 0$, maar heeft de grafiek geen top. De grafiek heeft een horizontale raaklijn in het punt $(2, 3)$.



Voorbeeld

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2x + 4$.
Bereken exact de extreme waarden van f .



Uitwerking

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2x + 4 \text{ geeft } f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 2$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } -\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 2 = 0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x - 1)(x + 4) = 0$$

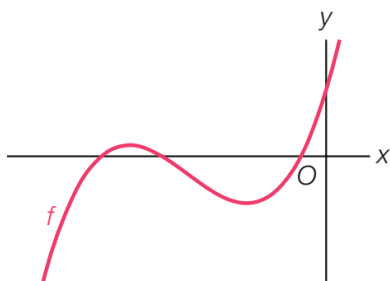
$$x = 1 \vee x = -4$$

Je krijgt min. is $f(-4) = -5\frac{1}{3}$ en max. is $f(1) = 5\frac{1}{12}$.

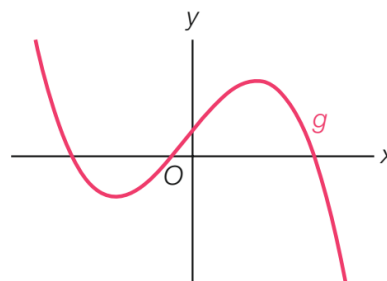
2 Bereken exact de extreme waarden.



a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 + 10x + 5$



b $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + 3\frac{3}{4}x + 3$

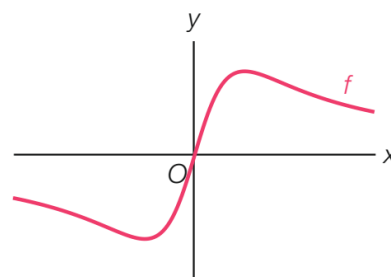


3 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie



$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + 4}.$$

- Bereken exact de extreme waarden van f en geef het bereik.
- Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = 6$.
- Los exact op $f(x) < 1$.

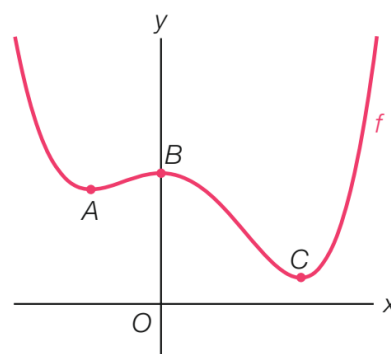


4 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie



$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 40 \text{ met de toppen } A, B \text{ en } C.$$

- Bereken exact de coördinaten van A , B en C .
- Geef het bereik van f .
- Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $f(x) = p$ vier oplossingen?
- De lijn k gaat door de toppen B en C en snijdt de grafiek van f ook nog in de punten D en E . Bereken de coördinaten van D en E . Rond zo nodig af op twee decimalen.
- Tussen de punten B en C liggen twee punten op de grafiek van f waar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan -24 . Bereken met behulp van de afgeleide de coördinaten van deze punten. Rond zo nodig af op twee decimalen.



A5 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door



$$f_p(x) = (x^2 + p)(x^2 - 16).$$

- Bereken van f_{-2} exact de extreme waarden en geef het bereik.
- Bereken exact voor welke p het punt A met $x_A = 2$ een top is van de grafiek van f_p .

Als de grafiek van de functie niet gegeven is, maak je in je uitwerking zelf een schets.

A6 Gegeven is de functie f_p van opgave 5 met $p < 0$.



De grafiek van f_p heeft een top T waarvoor geldt dat $p = 14 \cdot x_T$.

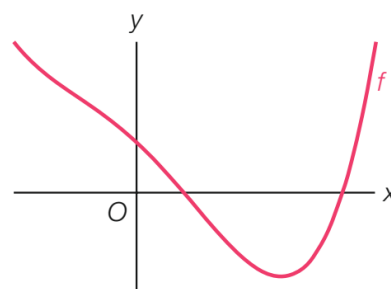
Bereken exact het bereik van f_p .

O7 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 4x + 3$.



In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f .

- Toon aan dat $f'(2) = 0$.
- Hoe volgt uit vraag a en de figuur dat de grafiek van f een extreme waarde heeft voor $x = 2$?



Theorie B Aantonen van extreme waarden

Bij het met de afgeleide aantonen dat de functie f een extreme waarde heeft voor $x = a$ gebruik je het volgende werkschema.

Werkschema: met de afgeleide aantonen dat de functie f een extreme waarde heeft voor $x = a$

- 1 Bereken $f'(x)$.
- 2 Laat met een berekening zien dat $f'(a) = 0$.
- 3 Laat zien dat de grafiek een top heeft voor $x = a$ door te verwijzen naar de grafiek van f .

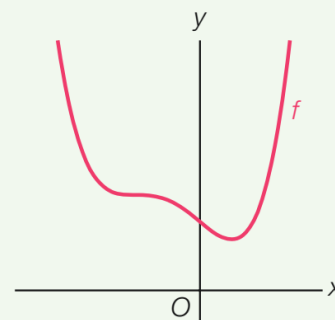
In de opgaven wordt in plaats van ‘Toon met de afgeleide aan’ ook wel ‘Bewijs’ gebruikt.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x + 3$.

Hiernaast zie je de grafiek van f .

Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = \frac{1}{2}$.



Uitwerking

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x + 3 \text{ geeft } f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2$$

$$f'(\tfrac{1}{2}) = 4 \cdot (\tfrac{1}{2})^3 + 6 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 - 2 = 0$$

$f'(\tfrac{1}{2}) = 0$ en in de figuur is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \frac{1}{2}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \frac{1}{2}$.

R8 Gegeven is de functie $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x + 3$ van het voorbeeld.



a Toon aan dat $f'(-1) = 0$.

Heeft f een extreme waarde voor $x = -1$? Licht toe.

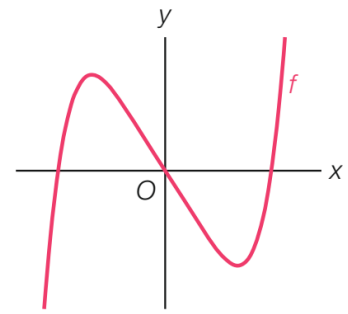
b De grafiek van f heeft twee horizontale raaklijnen.

Stel van deze lijnen een vergelijking op.

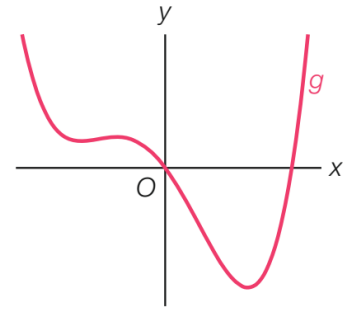
9



- a Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - 7x$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f .
Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{2}$.



- b Gegeven is de functie $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 3x$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van g .
Toon met de afgeleide aan dat g een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{3}$.

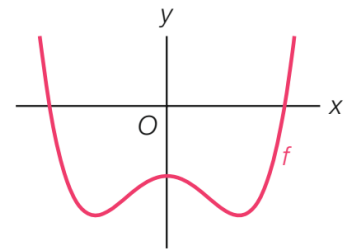


10



Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$. Zie de grafiek hiernaast.

- a Toon met de afgeleide aan dat f geen extreme waarde heeft voor $x = 1$.
b Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.
c Behalve voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$ heeft f ook extremen voor $x = 0$ en $x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$.
Bereken exact voor welke p de vergelijking $f(x) = p$ vier oplossingen heeft.
d De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -1$.
Bewijs dat k de grafiek van f snijdt in het snijpunt van de grafiek van f met de positieve x -as.
e Bewijs dat de lijn met vergelijking $y = 4\frac{1}{2}x - 12\frac{7}{16}$ de grafiek van f raakt in het punt B met $x_B = 1\frac{1}{2}$.



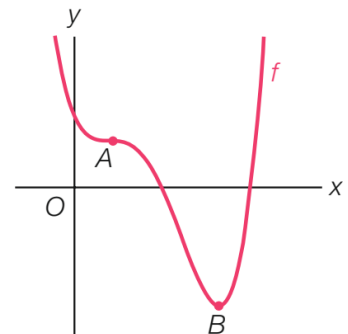
A11



Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 8x + 6$.

Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = 1$ en de top van de grafiek is het punt B . Zie de figuur hiernaast.

- a Toon met de afgeleide aan dat de grafiek van f een horizontale raaklijn heeft in A en geef de formule van deze raaklijn.
b Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = 4$ en bereken het bereik van f .
c De lijn k raakt de grafiek van f in punt C met $x_C = 2$ en snijdt de lijn met vergelijking $x = 4$ in punt D .
Bereken exact $y_D - y_B$.



E12*****

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f .

a Bereken exact de extreme waarde van f .

Verder is gegeven de functie $g(x) = \frac{x+1}{x^3+1}$.

b Bewijs dat g een extreme waarde heeft voor $x = \frac{1}{2}$.

Voor $x \neq -1$ geldt dat $f(x) \cdot \frac{x+1}{x+1} = g(x)$.

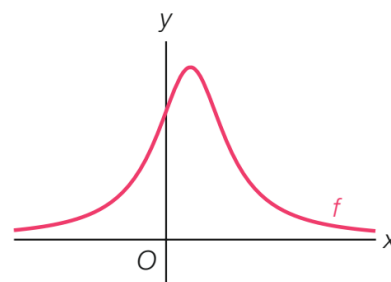
c Toon dit aan.

De grafieken van f en g vallen samen, maar de grafiek van g heeft één punt minder dan de grafiek van f .

d Bereken exact de coördinaten van dat punt.

e Bereken exact voor welke x geldt dat $g(x) < 1$.

f Welke waarden neemt $g(x)$ aan voor $-10 < x < 0$?

**O13****□ ⊗ ***

Gegeven is de functie $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x - 5$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f met de toppen $A(-1, -13)$ en $B(5, 95)$.

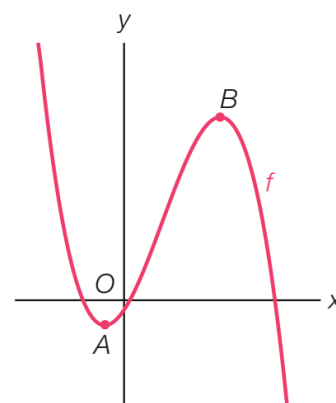
a Welke soorten van stijgen herken je? Geef een schatting van de bijbehorende intervallen.

b Bereken $f'(x)$ en schets de grafiek van f' .

De grafiek van f' heeft een hoogste punt voor $x = x_p$.

c Bereken x_p .

d Wat heeft $x = x_p$ te maken met de verschillende soorten van stijgen van de grafiek van f ? Licht toe.



Theorie C Buigpunt en buigraaklijn

In opgave 13 heb je gezien dat je bij het maximum van de afgeleide van f te maken hebt met een overgang van toenemend stijgend naar afnemend stijgend bij de grafiek van f .

Want bij een toenemend stijgend deel van de grafiek hoort een positieve helling die steeds groter wordt en bij een afnemend stijgend deel van de grafiek hoort een positieve helling die steeds kleiner wordt. In het punt waar toenemend stijgend overgaat in afnemend stijgend hoort dus een maximale helling, dus een maximum van de afgeleide.

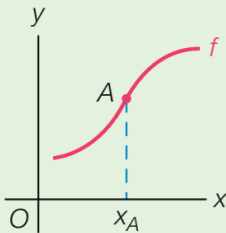
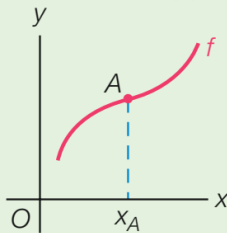
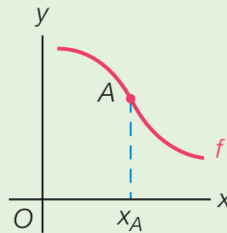
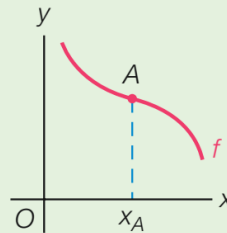
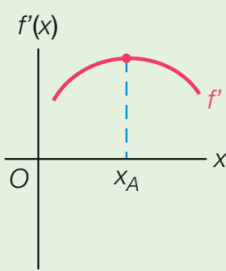
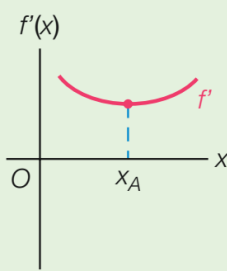
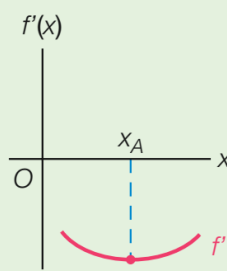
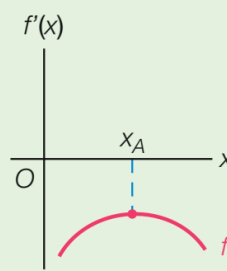
Het punt op de grafiek van f waar deze overgang plaatsvindt, heet een **buigpunt**.

Ook bij de overgangen

- van afnemend stijgend naar toenemend stijgend
- van toenemend dalend naar afnemend dalend
- van afnemend dalend naar toenemend dalend

heb je te maken met een buigpunt.

Buigpunten van de grafiek van f

van toenemend naar afnemend stijgend	van afnemend naar toenemend stijgend	van toenemend naar afnemend dalend	van afnemend naar toenemend dalend
			
de afgeleide heeft een maximum	de afgeleide heeft een minimum	de afgeleide heeft een minimum	de afgeleide heeft een maximum
			

De grafiek van f heeft een buigpunt als de afgeleide f' een extreme waarde heeft.

Bij het algebraïsch berekenen van de coördinaten van een buigpunt heb je dus de afgeleide van f' nodig.

De afgeleide van f' heet de **tweede afgeleide** van f en wordt genoteerd als f'' . Uitspraak: f dubbel accent.

De raaklijn in een buigpunt heet **buigraaklijn**.

Voor het algebraïsch berekenen van de coördinaten van buigpunten gebruik je het volgende werkschema.

Werkschema: algebraïsch berekenen van de coördinaten van buigpunten

- 1 Bereken $f'(x)$ en $f''(x)$.
- 2 Los algebraïsch de vergelijking $f''(x) = 0$ op.
- 3 Kijk naar de grafiek van f of de oplossingen van $f''(x) = 0$ buigpunten opleveren.
- 4 Bereken de bijbehorende y -coördinaten.

Je kunt bij stap 3 ook de grafiek van f' schetsen en kijken of f' extreme waarden heeft.

Voorbeeld

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + 5.$$

Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f .

Uitwerking

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + 5$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4$$

$$f''(x) = x^2 - x - 6$$

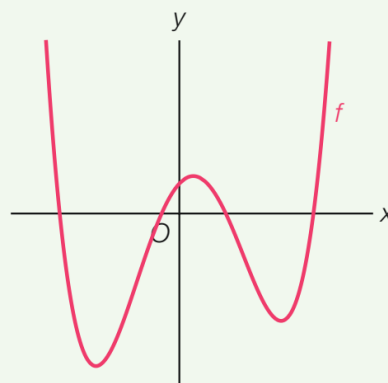
$$f''(x) = 0 \text{ geeft } x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 3$$

$$f(-2) = -12\frac{1}{3} \text{ en } f(3) = -7\frac{3}{4}$$

Uit de figuur volgt dat $(-2, -12\frac{1}{3})$ en $(3, -7\frac{3}{4})$ de buigpunten zijn.



14



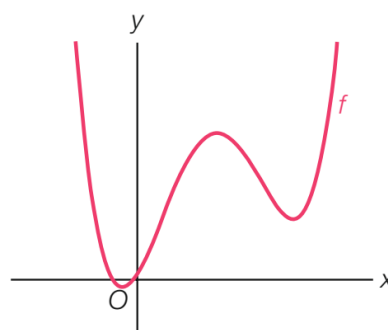
a Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 48x + 5.$$

Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f .

b Stel langs algebraïsche weg de formule op van de buigraaklijn k aan de grafiek van de functie

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x + 4.$$



15



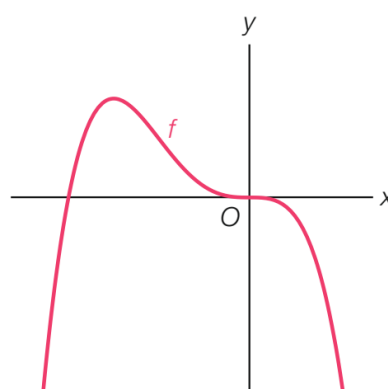
Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3.$$

a Bewijs dat de grafiek van f een horizontale buigraaklijn heeft.

b De parabool $y = -x^2 + bx$ gaat door de buigpunten van de grafiek van f .

Bereken exact b .



16



Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door

$$f_p(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + px^2 - 5x - 5.$$

a Bewijs dat de grafiek van f_5 twee buigpunten heeft.

b Bewijs dat de grafiek van f_6 geen buigpunten heeft.

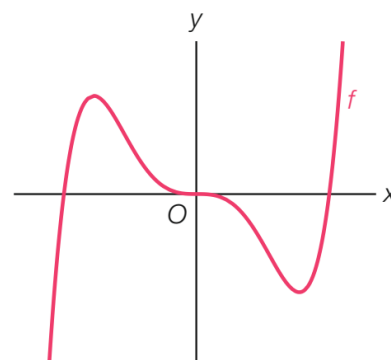
c Bereken exact voor welke p de grafiek van f_p geen buigpunten heeft.

d Onderzoek of het mogelijk is dat de grafiek van f_p één buigpunt heeft.

A17 Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{3}{4}x^5 - 5x^3$.

□ ⊗ * De grafiek heeft drie buigpunten: de oorsprong en de punten A en B met $x_A < x_B$. Verder is voor elke p gegeven de functie $g_p(x) = -x^3 + px$.

- Bereken exact voor welke p de grafiek van g_p door de toppen van de grafiek van f gaat.
- Bereken exact voor welke p de grafiek van g_p door A en B gaat.
- De buigraaklijn k aan de grafiek van f in het punt B snijdt de x -as in het punt C en de y -as in het punt D . Bereken exact de oppervlakte van $\triangle OCD$.

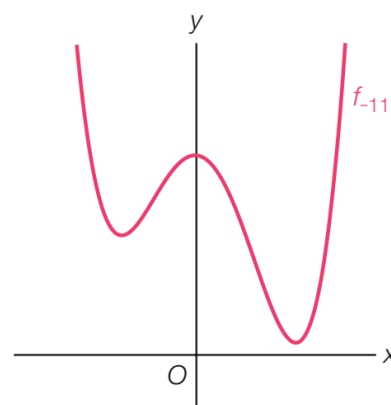


A18 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door

□ ⊗ * $f_p(x) = x^4 - x^3 + px^2 + 50$.

Hiernaast zie je de grafiek van de functie f_{-11} .

- Bereken exact voor welke a de vergelijking $f_{-11}(x) = a$ vier oplossingen heeft.
- De lijn k gaat door de buigpunten van de grafiek van f_{-18} en snijdt de y -as in het punt A . Bereken exact de y -coördinaat van A .
- De grafiek van f_p heeft een buigpunt voor $x = -\frac{1}{2}$. Bereken exact de coördinaten van het andere buigpunt van de grafiek van f_p .
- Bereken exact voor welke p de grafiek van f_p twee buigpunten heeft.



A19 Gegeven is de derdegraadsfunctie $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

- *** **a** Bewijs dat de grafiek van elke derdegraadsfunctie precies één buigpunt heeft.

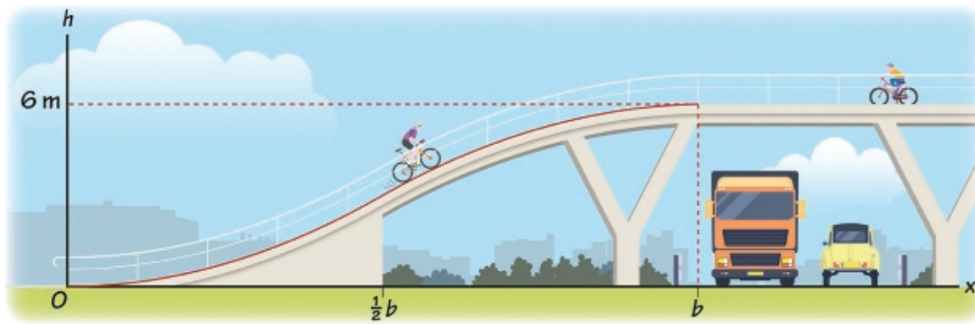
Gegeven is verder dat de grafiek van f de toppen P en Q heeft.

- b** Bewijs dat hieruit volgt dat $b^2 > 3ac$.

- c** Bewijs dat voor het buigpunt R geldt dat $x_R = \frac{x_P + x_Q}{2}$.

A20 Bij het ontwerp van de oprit van een fietsbrug gaat men uit van de

- *** formule $h = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}abx^2$ met x en h in meters. Verder is a een constante met $a < 0$ en b is de horizontaal gemeten lengte van de oprit in meters. In het vervolg van deze opgave noemen we 'de horizontaal gemeten lengte van de oprit' kortweg 'de lengte van de oprit'. We gaan eerst uit van de situatie dat een hoogteverschil van 6 meter moet worden overwonnen. Zie de figuur op de volgende bladzijde.



Er moet aan drie eisen worden voldaan:

- De oprit is aan het begin horizontaal.
- De oprit is aan het eind horizontaal.
- Halverwege de oprit, dus bij $x = \frac{1}{2}b$, is de helling maximaal.

a Toon aan dat de formule met deze drie eisen in overeenstemming is.

Door te gebruiken dat $h = 6$ voor $x = b$, is de formule van h te

herleiden tot $h = \frac{-12}{b^3}x^3 + \frac{18}{b^2}x^2$.

b Toon dit aan.

c Bereken het maximale hellingspercentage van de oprit in het geval de lengte van de oprit 240 meter is.

d Bereken exact de minimale lengte van de oprit in het geval de maximale helling van de oprit 3% is.

In de volgende vraag bekijken we een oprit met een lengte van 400 meter die een hoogte van 8 meter moet overwinnen.

e Onderzoek of bij deze oprit de maximaal acceptabele helling van 3% wordt overschreden.



Kennis- en vaardighedencheck

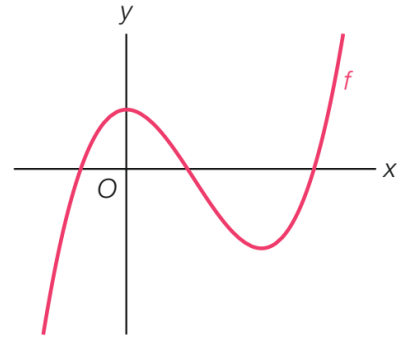
- ☐ Ik kan extreme waarden berekenen met behulp van de afgeleide.
- ☐ Ik kan de afgeleide gebruiken om extreme waarden aan te tonen.
- ☐ Ik kan de tweede afgeleide gebruiken om coördinaten van buigpunten te berekenen.

► OPGAVE C1
THEORIE A

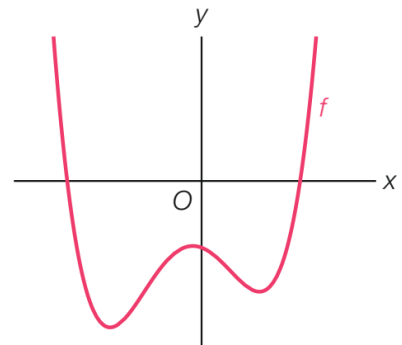
► OPGAVE C2
THEORIE B

► OPGAVE C3
THEORIE C

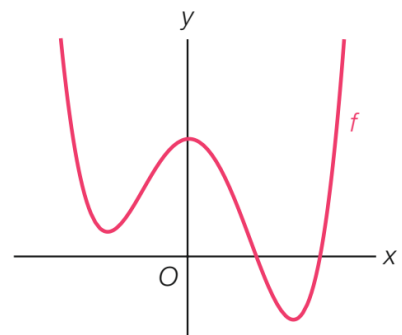
C1 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4$.
Bereken exact de extreme waarden van f .



C2 Gegeven is de functie $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 3$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f .
Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = 1$.



C3 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 6x^2 + 100$.
Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f .



Antwoorden

C1 max. is $f(0) = 4$ en min. is $f(3) = -5$

C2 *

C3 $(-3, 57\frac{1}{4})$ en $(4, 14\frac{2}{3})$

6.2 De afgeleide van machtsfuncties

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met de afgeleide van $f(x) = x^n$ waarbij n een negatief geheel getal is.
- Je kunt werken met de afgeleide van $f(x) = x^n$ waarbij n geen geheel getal is.

O21

□ ⊗ *

- a Toon met behulp van de quotiëntregel aan dat $f(x) = \frac{1}{x^2}$ geeft $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$.
- b Licht toe dat uit a volgt dat $f(x) = x^{-2}$ geeft $f'(x) = -2x^{-3}$.
- c Toon met behulp van de quotiëntregel aan dat $g(x) = x^{-5}$ geeft $g'(x) = -5x^{-6}$.

Theorie A De afgeleide van $f(x) = x^n$ met $n = -1, -2, -3, \dots$

In opgave 21 heb je gezien dat de regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ ook geldt voor enkele negatieve waarden van n .

Om te bewijzen dat deze regel geldt voor elke negatieve gehele waarde van n gaan we uit van $f(x) = x^{-p}$, waarin $p = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} f(x) = x^{-p} = \frac{1}{x^p} \text{ geeft } f'(x) &= \frac{x^p \cdot [1]' - 1 \cdot [x^p]'}{(x^p)^2} \\ &= \frac{x^p \cdot 0 - 1 \cdot p \cdot x^{p-1}}{x^{2p}} \\ &= \frac{-p \cdot x^{p-1}}{x^{2p}} \\ &= -p \cdot x^{-p-1} \end{aligned}$$

Vervangen we $-p$ door n , dan krijgen we

$$f(x) = x^n \text{ geeft } f'(x) = n \cdot x^{n-1} \text{ met } n = -1, -2, -3, \dots$$

In opgave 22 bewijst je dat deze regel ook geldt voor $n = 0$ en $n = 1$.

$f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ voor elk geheel getal n .

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = \frac{6}{x^3}$

b $g(x) = \frac{x^3 + 1}{3x^2}$

Uitwerking

a $f(x) = \frac{6}{x^3} = 6x^{-3}$ geeft $f'(x) = -18x^{-4} = -\frac{18}{x^4}$

b $g(x) = \frac{x^3 + 1}{3x^2} = \frac{x^3}{3x^2} + \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^{-2}$

$$\frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}x^{-2}$$

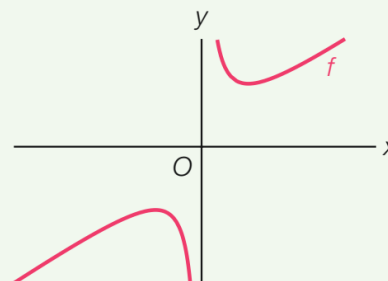
geeft $g'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3} = \frac{x^3}{3x^3} - \frac{2}{3x^3} = \frac{x^3 - 2}{3x^3}$

Afspraak

- Is een functievoorschrift gegeven zonder negatieve exponenten, dan noteer je de afgeleide ook zonder negatieve exponenten.
- Is het rechterlid van een functievoorschrift als één breuk geschreven, dan noteer je het rechterlid van de afgeleide ook als één breuk.

Voorbeeld

De grafiek van de functie $f(x) = 2x + \frac{5}{x}$ heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt $1\frac{4}{5}$. Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.



Aanpak

$rc_{\text{raaklijn}} = 1\frac{4}{5}$, dus los de vergelijking $f'(x) = 1\frac{4}{5}$ op.

Uitwerking

$$f(x) = 2x + \frac{5}{x} = 2x + 5x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = 2 - 5x^{-2} = 2 - \frac{5}{x^2}$$

$$f'(x) = 1\frac{4}{5} \text{ geeft } 2 - \frac{5}{x^2} = 1\frac{4}{5}$$

$$\frac{5}{x^2} = \frac{1}{5}$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \vee x = -5$$

$f(5) = 11$ en $f(-5) = -11$, dus de raakpunten zijn $(5, 11)$ en $(-5, -11)$.

R22 Bewijs dat de regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ ook geldt voor $n = 0$ en $n = 1$.

R23 a In het eerste voorbeeld op de vorige bladzijde is de afgeleide van $g(x) = \frac{x^3 + 1}{3x^2}$ berekend met behulp van uitdelen.

Welke van de volgende functies kun je differentiëren door uit te delen?

$$h(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 4}$$

$$l(x) = \frac{x + 2}{4x}$$

$$k(x) = \frac{x^2 + 4}{2x^3}$$

$$m(x) = \frac{4x}{x + 2}$$

b Je kunt de afgeleide van $g(x) = \frac{x^3 + 1}{3x^2}$ ook berekenen met de quotiëntregel.

Doe dit en herleid je uitkomst. Welke manier heeft jouw voorkeur?

24 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = \frac{1}{x^6}$ b $g(x) = 5 - \frac{3}{x^2}$ c $h(x) = ax^4 - \frac{b}{x^4}$

25 Differentieer.

a $f(x) = \frac{2x - 1}{3x^2}$ b $g(x) = \frac{3x^2}{2x - 1}$ c $h(x) = \frac{3x^6 - 3}{x^3}$

26 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 5x^2 - \frac{5}{x^2}$ b $g(x) = \frac{5}{2x^2} - \frac{2x^2}{5}$ c $h(x) = 6 - \frac{x^2 - 1}{x}$

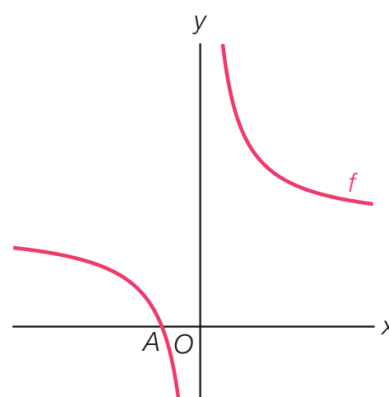
27 Gegeven is de functie $f(x) = 3 + \frac{3}{x}$.

a De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A .
De lijn k raakt de grafiek van f in A en snijdt de y -as in het punt B .

Bereken exact de y -coördinaat van B .

b De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt $-\frac{3}{4}$.

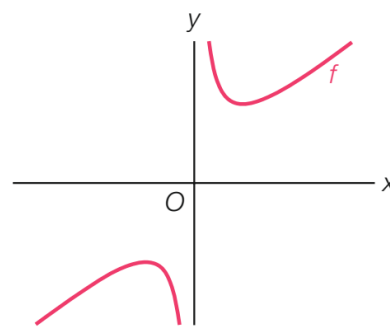
Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.



A28

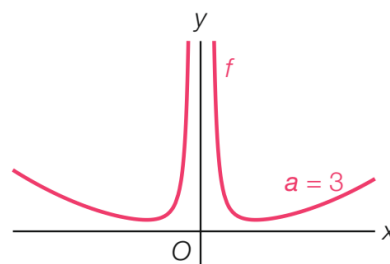
Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$.

- De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 3$ en snijdt de x -as in het punt B . Bereken exact de x -coördinaat van B .
- De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -3 . Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.
- Bereken exact de extreme waarden van f .
- Bewijs dat de grafiek van f geen raaklijn heeft met richtingscoëfficiënt 2 .

**A29**

Voor $a > 0$ zijn gegeven de functies $f(x) = \frac{x^2}{a} + \frac{a}{x^2}$.

- Hiernaast zie je de grafiek voor $a = 3$.
- Bereken exact voor welke waarden van p de vergelijking $\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2} = p$ vier oplossingen heeft.
- Bewijs dat voor elke waarde van a de toppen van de grafiek van f op de lijn $y = 2$ liggen.

**O30**

In deze opgave ga je bewijzen dat $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

- Toon aan dat uit $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x$ en de productregel volgt $2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$.
- Licht toe dat uit $2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$ volgt $[x^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

Theorie B De afgeleide van $f(x) = x^n$ voor elke n van $\mathbb{R}$

De regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ geldt ook voor gebroken waarden van n . Hiervan heb je in opgave 30 een voorbeeld gezien. De regel geldt zelfs voor elk getal n van $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ voor elke n van $\mathbb{R}$.

Het bewijs van deze regel geef je in leerboek deel 3.

Om $f(x) = x\sqrt{x}$ te differentiëren, schrijf je eerst het functievoorschrift van f in de vorm $f(x) = x^n$. Je krijgt $f(x) = x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{1\frac{1}{2}}$ en dit geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Vervolgens schrijf je $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$ zonder gebroken exponent, dus $f'(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Afspraak

Is een functievoorschrift gegeven zonder gebroken exponenten, dan noteer je de afgeleide ook zonder gebroken exponenten.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$ **b** $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}$ **c** $h(x) = (2x - \sqrt{x})^2$

Uitwerking

a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} = x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$

$$x^{2\frac{2}{3}} = x^2 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

b $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-2} = x^{-1\frac{2}{3}}$ geeft $g'(x) = -1\frac{2}{3}x^{-2\frac{2}{3}} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{2}{3}}} = -\frac{5}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

c $h(x) = (2x - \sqrt{x})^2 = 4x^2 - 4x\sqrt{x} + x = 4x^2 - 4x^{\frac{3}{2}} + x$ geeft

$$h'(x) = 8x - 6x^{\frac{1}{2}} + 1 = 8x - 6\sqrt{x} + 1$$

31 Differentieer.



a $f(x) = x + \sqrt{x}$

c $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

b $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$

d $k(x) = (3 - \sqrt{x})^2$

32 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x}$

c $h(x) = (x + 1)(1 + \sqrt{x})$

b $g(x) = \frac{4x + 1}{\sqrt{x}}$

d $k(x) = \frac{x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$

33 Differentieer.



a $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

c $h(x) = \frac{x^2 - 2}{x\sqrt{x}}$

b $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

d $k(x) = x^2(x\sqrt{x} - 3)$

A34 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = (x\sqrt{x} - 3)^2$

c $h(x) = (x - \sqrt[3]{x})^2$

b $g(x) = \frac{2x - 3}{x\sqrt{x}}$

d $k(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt[4]{x}}$

35 Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

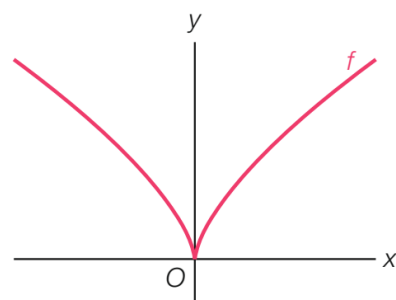


De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = \frac{1}{8}$.

De lijn l raakt de grafiek van f in het punt B met $x_B = 8$.

De lijnen k en l snijden elkaar in het punt C .

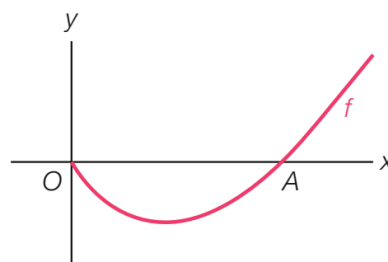
Bereken exact de coördinaten van C .



A36 Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$.



- a** Bereken exact het bereik van f .
- b** De lijn k raakt de grafiek van f in de oorsprong. De grafiek van f snijdt de positieve x -as in het punt A . De lijn l door A is evenwijdig met k en snijdt de y -as in het punt B . Bereken exact de y -coördinaat van B .
- c** De lijn m met richtingscoëfficiënt 3 raakt de grafiek van f in het punt C en snijdt de x -as in het punt D . Bereken exact de x -coördinaat van D .



A37 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x\sqrt{x}}$.

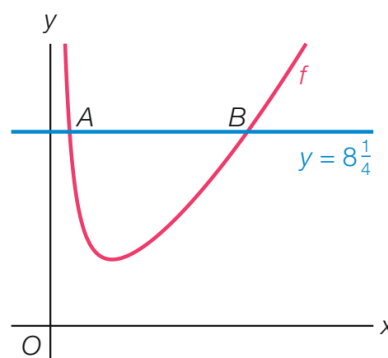


De lijn $y = 8\frac{1}{4}$ snijdt de grafiek van f in de punten

A en B . Zie de figuur hiernaast.

De oplossing van de ongelijkheid $f(x) < 8\frac{1}{4}$ is te schrijven in de vorm $2^a < x < 2^b$.

- a** Bereken exact de waarden van a en b .
- b** De top van de grafiek is te schrijven in de vorm $(2^p, 2^q)$. Bereken exact de waarden van p en q .
- c** De lijn k raakt de grafiek van f in het punt C met $x_C = 1$ en snijdt de x -as in het punt D . Bereken exact de oppervlakte van $\triangle OCD$.



A38 Een magneetzweeftrein trekt op. Gedurende de eerste negen seconden is de afgelegde afstand s in meters te benaderen door de functie $s(t) = 10t\sqrt{t}$ met t in seconden. Na negen seconden verandert de snelheid niet meer.



Bereken exact

- a** de snelheid na acht seconden
- b** na hoeveel seconden de snelheid gelijk is aan 108 km/u
- c** hoeveel meter de trein aflegt in de eerste minuut.



A39 Voor elke waarde van p is gegeven de functie $f_p(x) = (2x - p\sqrt{x})^2$.



Bereken exact voor welke p de functie een maximum heeft voor $x = 2\frac{1}{4}$ en bereken dit maximum.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met de afgeleide van $f(x) = x^n$ waarbij n een negatief geheel getal is.

► **OPGAVE C4**
THEORIE A

☐ Ik kan werken met de afgeleide van $f(x) = x^n$ waarbij n geen geheel getal is.

► **OPGAVE C5**
THEORIE B

C4 a Bereken de afgeleide van $f(x) = \frac{2}{x^4}$.

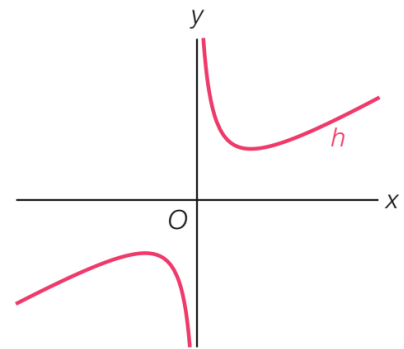
b Differentieer de functie $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

c Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2x}.$$

De grafiek van h heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -4 .

Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.

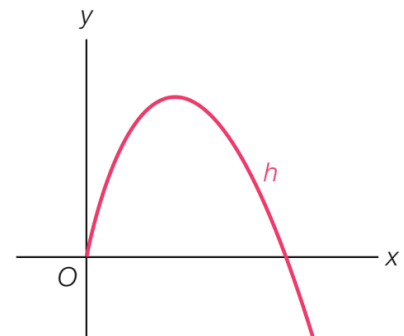


C5 a Bereken de afgeleide van $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{x}$.

b Differentieer de functie $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x}}$.

c Hiernaast zie je de grafiek van de functie $h(x) = 6x - 2x\sqrt{x}$.

Bereken exact het maximum van h .



Antwoorden

C4 a $f'(x) = -\frac{8}{x^5}$

b $g'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

c $(-1, -5)$ en $(1, 5)$

C5 a $f'(x) = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x}$

b $g'(x) = \frac{x^2 - 3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

c max. is $h(4) = 8$

6.3 De kettingregel

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de kettingregel gebruiken voor het differentiëren van een samengestelde functie.
- Je kunt de kettingregel combineren met de productregel of de quotiëntregel voor het differentiëren van functies.

○40 Gegeven zijn de functies $u(v) = v^4$ en $v(x) = x^2 - 5x$.

- ⊗ * a Bereken $v(3)$ en $u(v(3))$.
b Bereken $u(v(4))$.

○41 Gegeven is de functie $f(x) = (3x^3 + 7)^2$. Het functievoorschrift van f is te noteren als $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = v^2$ en $v(x) = 3x^3 + 7$. Noteer op dezelfde manier met functies u en v .

a $f(x) = (3 - x^5)^6$ b $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ c $f(x) = \frac{2}{(x + 8)^3}$

Theorie A De afgeleide van een samengestelde functie

De functie $f(x) = (x^2 - 5x)^4$ is een voorbeeld van een **samengestelde functie**.

De functie is samengesteld uit de **schakels** $u(v) = v^4$ en $v(x) = x^2 - 5x$.

Een functie die geschreven kan worden als een ketting van schakels heet een **kettingfunctie**.

Voor het differentiëren van de functie f gebruik je de **kettingregel**.

Een bewijs van de kettingregel staat in het informatief op bladzijde 72.

KETTINGREGEL

$$f(x) = u(v(x)) \text{ geeft } f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

$$\text{Bij } f(x) = (x^2 - 5x)^4 \text{ krijg je } f'(x) = \underbrace{4(x^2 - 5x)^3}_{u'(v(x))} \cdot \underbrace{(2x - 5)}_{v'(x)}$$

Bij het differentiëren van $f(x) = \sqrt{3x + 1}$ krijg je

$$f(x) = \sqrt{3x + 1} = (3x + 1)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}(3x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}.$$

Omdat van $g(x) = \sqrt{x}$ de afgeleide $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ is,

mag je in één keer opschrijven

$$f(x) = \sqrt{3x + 1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x + 1}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}.$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \text{ geeft} \\ g'(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = \frac{5}{(2x^3 - 7x)^4}$

b $g(x) = 2x + \sqrt{3x^2 + 4}$

c $h(x) = (4x + 1)^3 \cdot \sqrt{4x + 1}$

Uitwerking

a $f(x) = \frac{5}{(2x^3 - 7x)^4} = 5(2x^3 - 7x)^{-4}$ geeft

$$f'(x) = -20(2x^3 - 7x)^{-5} \cdot (6x^2 - 7) = \frac{-120x^2 + 140}{(2x^3 - 7x)^5}$$

b $g(x) = 2x + \sqrt{3x^2 + 4}$ geeft $g'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 4}} \cdot 6x = 2 + \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$

c $h(x) = (4x + 1)^3 \cdot \sqrt{4x + 1} = (4x + 1)^{3\frac{1}{2}}$ geeft

$$h'(x) = 3\frac{1}{2}(4x + 1)^{2\frac{1}{2}} \cdot 4 = 14(4x + 1)^2 \cdot \sqrt{4x + 1}$$

$f(x) = u(v(x))$ met
 $v(x) = 2x^3 - 7x$ en
 $u(v) = 5v^{-4}$.

42 Differentieer.



a $f(x) = -2(2x + 1)^4$

d $j(x) = \frac{1}{\sqrt{4x - 1}}$

b $g(x) = \frac{1}{(3x - 2)^2}$

e $k(x) = (x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}$

c $h(x) = \sqrt{2x^2 + 4x}$

f $l(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$

A43 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = 4(x^3 + 7x - 2)^2$

d $j(x) = \frac{1}{(4 - x)\sqrt{4 - x}}$

b $g(x) = -\frac{6}{(x^2 + 3x)^3}$

e $k(x) = 5\sqrt{2x^4 + x^2} + 4x^2$

c $h(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x}$

f $l(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 4}}$

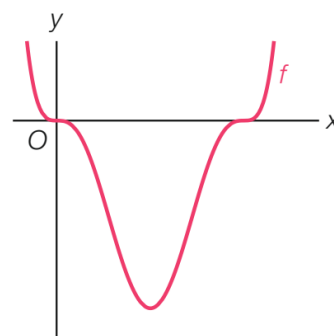
44 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie



$f(x) = (x^2 - 3x)^3$.

a Bereken exact de coördinaten van de punten van de grafiek waarin de raaklijn horizontaal is.

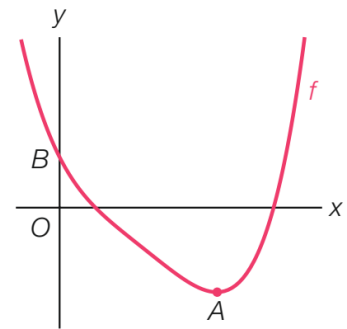
b De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$ en snijdt de x -as in het punt B . Bereken exact de x -coördinaat van B .



45 Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2$.

□ ⊗ * De grafiek van f heeft top A en snijdt de y -as in punt B . Zie de figuur hiernaast.

- a Bereken exact het bereik van f .
- b De lijn k gaat door A en B en snijdt de x -as in punt C . Bereken exact de x -coördinaat van C .
- c De lijn l raakt de grafiek van f en is evenwijdig met de lijn m : $y = -x$. De lijn p raakt de grafiek van f en is evenwijdig met de lijn q : $y = 7x$. De lijnen l en p snijden elkaar in het punt S . Bereken exact de coördinaten van S .

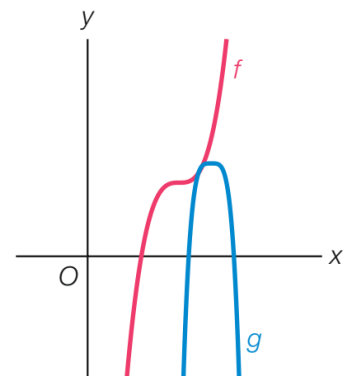


A46 In de figuur hiernaast zie je de grafieken van de functies

□ ⊗ * $f(x) = \frac{1}{4}(2x - 5)^3 + 2$ en $g(x) = -\frac{1}{4}(3x - 10)^4 + 2\frac{1}{2}$.

Het punt $A(3, 2\frac{1}{4})$ ligt zowel op de grafiek van f als op die van g .

- a Toon dit aan.
- b Het lijkt of de grafieken van f en g elkaar raken in A , dus dat de grafieken in A dezelfde raaklijn hebben. Onderzoek langs algebraïsche weg of de grafieken elkaar raken in A .
- c Er zijn twee punten op de grafiek van f waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan $13\frac{1}{2}$. Bereken exact de afstand tussen deze punten. Schrijf het antwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.



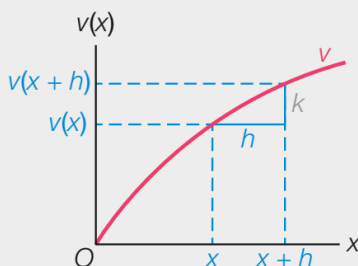
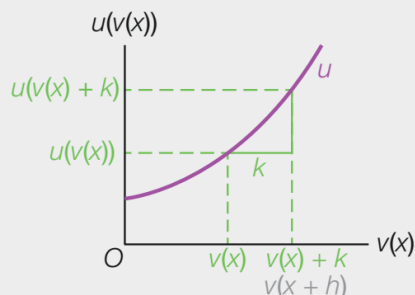
Informatief Een bewijs van de kettingregel

Een bewijs van de kettingregel gaat als volgt.

$$\begin{aligned} f(x) = u(v(x)) \text{ geeft } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{v(x+h) - v(x)} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \end{aligned}$$

Stel $v(x+h) - v(x) = k$, dus $v(x+h) = v(x) + k$. Hieruit volgt dat k nadert naar 0 als h nadert naar 0, zie ook de figuren hieronder.

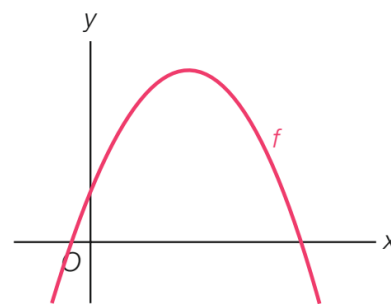
$$\text{Dus } f'(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(v(x) + k) - u(v(x))}{k} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$



A47 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} - x^2 + 5x$.

□ ⊗ *

- a** Toon met de afgeleide aan dat f een extreme waarde heeft voor x tussen $2\frac{1}{2}$ en 3.
- b** De lijn $k: y = 5x - 2$ snijdt de x -as in het punt A . De lijn l raakt de grafiek van f , is evenwijdig met k en snijdt de x -as in het punt B . Bewijs dat de afstand tussen A en B gelijk is aan 1.
- c** De grafiek van f snijdt de y -as in het punt C . De lijn m raakt de grafiek van f in het punt D met $x_D = 4$ en snijdt de y -as in het punt E . Bereken exact de afstand tussen C en E .



A48 Bij een autorally leggen de deelnemers een parcours

□ ⊗ *

af dat gedeeltelijk over een terrein zonder wegen en gedeeltelijk over onverharde wegen gaat. In de figuur hiernaast zie je een gedeelte van het parcours. De deelnemers rijden van A naar B . Punt B ligt 2 km oostelijk en 10 km zuidelijk van A . Tussen C en B ligt een onverharde weg, waar met een gemiddelde snelheid van 100 km/u wordt gereden. Ten westen van deze onverharde weg is ruw terrein, waar de gemiddelde snelheid 80 km/u is.

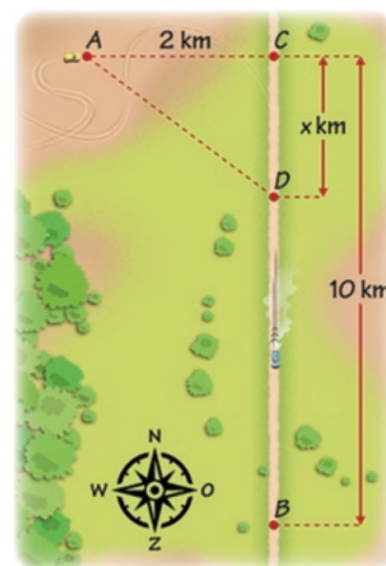
Een deelnemer kan rechtstreeks van A naar B , maar bijvoorbeeld ook via C naar B gaan. In het laatste geval is hij ongeveer 9 seconden eerder in B dan in het geval hij rechtstreeks van A naar B rijdt.

- a** Toon dit aan.

Het is ook mogelijk dat een deelnemer vanaf A schuin doorsteekt naar de onverharde weg tussen C en B en daarna zijn weg vervolgt over de onverharde weg richting B . Stel hij komt daarbij x km ten zuiden van C uit in D .

Dan geldt $t = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{100}x$. Hierin is t de tijd in uren die de deelnemer over de afstand tussen A en B doet.

- b** Toon aan dat deze formule juist is.
- c** Bereken exact voor welke waarde van x de tijd t voor de deelnemer minimaal is. Hoeveel seconden scheelt het met de situatie dat hij via C naar B gaat?



A49 **a** Gegeven is de functie $f(x) = ax + b + \sqrt{ax + b}$ met $x \neq -\frac{b}{a}$.

*

Bewijs dat f voor geen enkele a en b een extreme waarde heeft.

- b** Bereken exact voor welke a de functie $g(x) = (ax - 2)^4 + \frac{1}{2}ax$ een extreme waarde heeft voor $x = 3$.

Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{2x+1}$.

Licht toe dat je voor het berekenen van de afgeleide de productregel én de kettingregel nodig hebt.

Theorie B De kettingregel gecombineerd met de productregel of de quotiëntregel

De functie $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ is het product van de factoren x en $\sqrt{2x+1}$. Daarom gebruik je bij het differentiëren de productregel:

$$f'(x) = [x]' \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot [\sqrt{2x+1}]'$$

Om de afgeleide van $\sqrt{2x+1}$ te berekenen, heb je de kettingregel nodig. Zie verder voorbeeld a.

De functie $g(x) = \frac{x+6}{\sqrt{8x+9}}$ is het quotiënt van $x+6$ en $\sqrt{8x+9}$.

Daarom gebruik je bij het differentiëren de quotiëntregel:

$$g'(x) = \frac{\sqrt{8x+9} \cdot [x+6]' - (x+6) \cdot [\sqrt{8x+9}]'}{(\sqrt{8x+9})^2}$$

Om de afgeleide van $\sqrt{8x+9}$ te berekenen, heb je de kettingregel nodig. Zie verder voorbeeld b.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = x\sqrt{2x+1}$

b $g(x) = \frac{x+6}{\sqrt{8x+9}}$

Uitwerking

a $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2 = \sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$

b $g(x) = \frac{x+6}{\sqrt{8x+9}}$ geeft

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\sqrt{8x+9} \cdot 1 - (x+6) \cdot \frac{1}{2\sqrt{8x+9}} \cdot 8}{8x+9} = \frac{\sqrt{8x+9} - \frac{4(x+6)}{\sqrt{8x+9}}}{8x+9} \\ &= \frac{8x+9 - 4(x+6)}{(8x+9)\sqrt{8x+9}} = \frac{4x-15}{(8x+9)\sqrt{8x+9}} \end{aligned}$$

R51 Zie voorbeeld a op de vorige bladzijde.



Toon aan dat $f'(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$ te herleiden is tot $f'(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$.

52 a Bereken de afgeleide van $f(x) = x(3x+1)^3$.



b Differentieer $g(x) = x\sqrt{3x+4}$. Herleid de formule van de afgeleide tot één breuk.

c Bewijs dat de afgeleide van $h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$ te schrijven is als

$$h'(x) = \frac{x-2}{(2x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1}}.$$

E53 Gegeven is nogmaals de functie $g(x) = x\sqrt{3x+4}$ van opgave 52.



Harm wil de functie g differentiëren zonder de productregel te gebruiken. Hij herschrijft daartoe het functievoorschrift op de volgende manier:

$$g(x) = x\sqrt{3x+4} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{3x+4} = \sqrt{3x^3+4x^2}.$$

Waarom mag dit niet?

54 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie



$$f(x) = \frac{1}{4}x\sqrt{3x+12}.$$

De afgeleide van f is te schrijven als $f'(x) = \frac{9x+24}{8\sqrt{3x+12}}$.

a Bewijs dit.

b Bereken exact het minimum van f .

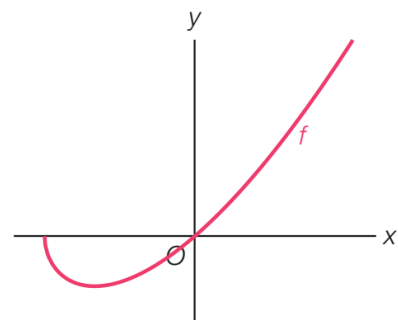
c De lijn k gaat door het randpunt van de grafiek van f en is evenwijdig met de lijn l die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = 8$.

De lijn k snijdt de y -as in het punt B en de lijn l snijdt de y -as in het punt C .

Bereken exact de afstand tussen B en C .

d De lijn m met richtingscoëfficiënt $\frac{5}{8}$ raakt de grafiek van f in het punt D .

Bereken exact de coördinaten van D .



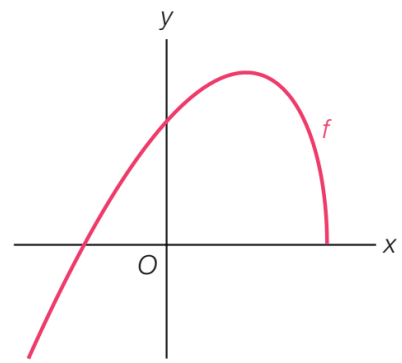
55



In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = (x+2)\sqrt{8-2x}$.

De afgeleide van f is te schrijven als $f'(x) = \frac{-3x+6}{\sqrt{8-2x}}$.

- a Bewijs dit.
- b Bereken exact het domein en het bereik van f .
- c De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -4$. De lijn l raakt de grafiek van f in het punt B met $x_B = -\frac{1}{2}$.
Onderzoek langs algebraïsche weg of k en l elkaar snijden in een punt boven de x -as.
- d De lijn m met richtingscoëfficiënt $-4\frac{1}{2}$ raakt de grafiek van f en snijdt de y -as in het punt C .
Bereken exact de y -coördinaat van C .



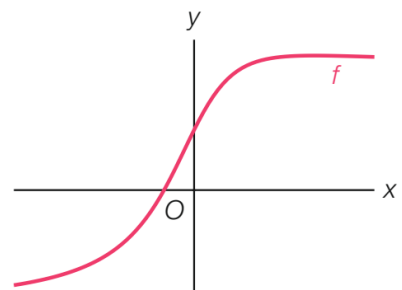
A56



Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x+4}{\sqrt{x^2+4}}$.

Zie de figuur hiernaast.

- a Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek.
- b De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A en de y -as in het punt B . De lijn k raakt de grafiek van f in A en de lijn l raakt de grafiek van f in B .
Onderzoek langs algebraïsche weg voor elk van de volgende beweringen of deze waar is.
I De lijn k gaat door B .
II De lijn l gaat door A .

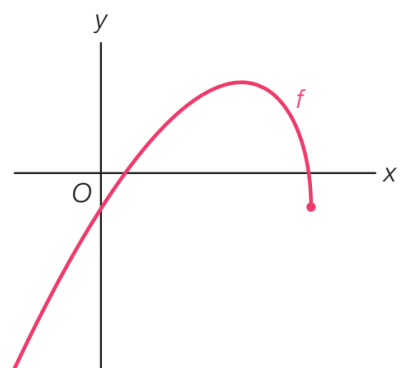


A57



In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = 2x\sqrt{9-2x} - 3$.

- a Bereken exact het domein en het bereik van f .
- b De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 0$. De lijn l raakt de grafiek van f in het punt B met $x_B = 4$.
Bewijs dat de y -coördinaat van het snijpunt van k en l gelijk is aan 13.
- c De lijn m is evenwijdig met de lijn $y = 1\frac{1}{2}x$, raakt de grafiek van f en snijdt de x -as in het punt S .
Bereken exact de x -coördinaat van S .



A58



Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = \frac{px}{\sqrt{x^2+9}}$.

De lijn k is evenwijdig met de lijn $y = x$, raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 4$ en snijdt de y -as in het punt B .
Bereken exact de y -coördinaat van B .

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan de kettingregel gebruiken voor het differentiëren van een samengestelde functie.

► OPGAVE C6
THEORIE A

☐ Ik kan de kettingregel combineren met de productregel of de quotiëntregel voor het differentiëren van functies.

► OPGAVE C7
THEORIE B

C6 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 5(x^2 - 4)^3$

b $g(x) = \sqrt{x^2 + x}$

c $h(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$

C7 a Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x^2 + x}$.

Bewijs dat de afgeleide van f te schrijven is als $f'(x) = \frac{4x^2 + 3x}{2\sqrt{x^2 + x}}$.

b Gegeven is de functie $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x + 1}$.

Bewijs dat de afgeleide van g te schrijven is als $g'(x) = \frac{1}{2(x + 1)\sqrt{x^2 + x}}$.

Antwoorden

C6 a $f'(x) = 30x(x^2 - 4)^2$

b $g'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

c $h'(x) = \frac{-3x}{(x^2 + 1)^2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}}$

C7 a, b *

6.4 Raaklijnen, toppen, rakende en loodrecht snijdende grafieken

Kennis en vaardigheden

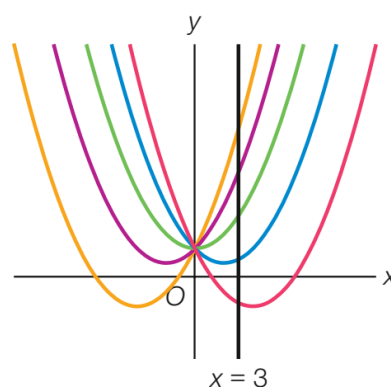
- Je kunt bij functies met een parameter raaklijnproblemen oplossen.
- Je kunt bij functies met een parameter de formule opstellen van de kromme waarop alle toppen liggen.
- Je kunt langs algebraïsche weg onderzoeken onder welke voorwaarden de grafieken van twee functies elkaar raken.
- Je kunt langs algebraïsche weg onderzoeken onder welke voorwaarden de grafieken van twee functies elkaar loodrecht snijden.

59

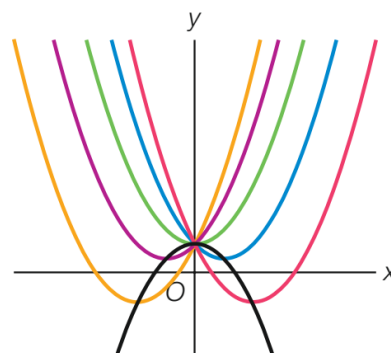


Voor elke p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + px + 2$. Hiernaast zijn de grafieken getekend van f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1 en f_2 . Ook is de lijn $x = 3$ getekend.

- a** We vragen ons af voor welke waarde van p de lijn k met $rc = 2\frac{1}{2}$ de grafiek van f_p raakt in het punt A met $x_A = 3$.
Licht toe dat geldt $f'_p(3) = 2\frac{1}{2}$ en bereken p .



- b** Alle toppen van de grafieken van f_p liggen op een parabool. Deze parabool is hiernaast getekend. Om de formule van deze parabool te vinden, los je de vergelijking $f'_p(x) = 0$ op naar p , dat wil zeggen dat je p uitdrukt in x .
Licht toe dat je zo krijgt dat $p = -\frac{1}{2}x$ en substitueer dit in $y = \frac{1}{4}x^2 + px + 2$. Welke formule hoort bij de parabool die door alle toppen van de grafieken van f_p gaat?



Theorie A Raaklijnen en toppen bij functies met een parameter

In voorbeeld a op de volgende bladzijde raakt de lijn k : $y = 4x + q$ de grafiek van de functie $f_p(x) = x^3 + px^2 + 2x + 3$ in het punt A met $x_A = 2$. Gevraagd wordt om exact de waarden van p en q te berekenen. Je berekent eerst p door de vergelijking $f'_p(x_A) = rc_k$ oftewel $f'_p(2) = 4$ op te lossen. Als p bekend is, kun je y_A berekenen. Door vervolgens de coördinaten van A in de formule $y = 4x + q$ in te vullen, kun je q berekenen.

Om in voorbeeld b de formule van de kromme te vinden waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen, gebruik je de vergelijking $f'_p(x) = 0$ om p uit te drukken in x . Vervolgens substitueer je dit in de formule $y = x^3 + px^2 + 2x + 3$. Na herleiden is de formule van de gevraagde kromme gevonden.

Merk op dat je in hoofdstuk 1 ook al formules hebt opgesteld van krommen waarop de toppen liggen van functies met een parameter. Toen had je te maken met tweedegraadsfuncties f_p en kon je p uitdrukken in x door de formule $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$ te gebruiken. Zie zo nodig nog eens de opgaven 57 en 58 van hoofdstuk 1.

Voorbeeld

Voor elke p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = x^3 + px^2 + 2x + 3$.

- a** De lijn $k: y = 4x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 2$. Bereken exact p en q .
- b** Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

Uitwerking

- a** $f_p(x) = x^3 + px^2 + 2x + 3$ geeft $f'_p(x) = 3x^2 + 2px + 2$
 $f'_p(x_A) = \text{rc}_k$ oftewel $f'_p(2) = 4$ geeft $3 \cdot 2^2 + 2p \cdot 2 + 2 = 4$
 $12 + 4p + 2 = 4$
 $4p = -10$
 $p = -2\frac{1}{2}$

$$f_{-2\frac{1}{2}}(x) = x^3 - 2\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + q \\ f_{-2\frac{1}{2}}(2) = 5, \text{ dus } A(2, 5) \end{array} \right\} 4 \cdot 2 + q = 5 \text{ geeft } q = -3$$

$$\text{Dus } p = -2\frac{1}{2} \text{ en } q = -3.$$

- b** $f'_p(x) = 0$ geeft $3x^2 + 2px + 2 = 0$
 $2px = -3x^2 - 2$
 $p = \frac{-3x^2 - 2}{2x} \text{ voor } x \neq 0$ $\left\{ \begin{array}{l} y = x^3 + \frac{-3x^2 - 2}{2x} \cdot x^2 + 2x + 3 \\ y = x^3 + \frac{1}{2}x(-3x^2 - 2) + 2x + 3 \\ y = x^3 - \frac{1}{2}x^3 - x + 2x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x^3 + x + 3 \end{array} \right.$

Dus de gevraagde formule is $y = -\frac{1}{2}x^3 + x + 3$.

60 Voor elke p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x + 5$.



- a** De lijn $k: y = 3x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 4$.
Bereken exact p en q .
- b** Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

61 Voor $p < 0$ is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = (x^2 + p) \cdot \sqrt{x}$.



- a** De lijn $k: y = 18x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 4$.
Bereken exact p en q .
- b** Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

62 Voor $p < 0$ is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = 6x\sqrt{x} + px^2$.



- a** Bereken exact voor welke p de functie f_p een maximum heeft voor $x = 2\frac{1}{4}$.
- b** De lijn $k: y = 5x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 1$.
Bereken exact p en q .
- c** Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

A63 Voor elke p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = \frac{4x + p}{x^2 + 1}$.



- a** De lijn $k: y = ax + 4$ raakt de grafiek van f_p in het snijpunt van de grafiek met de y -as.
Bereken exact a en p .
- b** De lijn l met $rc_l = -1$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = -1$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van l .
- c** De functie f_p heeft een extreme waarde voor $x = 2$.
Bereken exact de extreme waarden.

A64 Voor elke p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 - 3x - p$.



- a** Bewijs dat f_p voor elke p twee extreme waarden heeft.
- b** De functie f_p heeft een extreme waarde voor $x = 3$.
Bereken exact de extreme waarden.
- c** De lijn $l: y = -x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = -2$.
Bereken exact p en q .
- d** Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

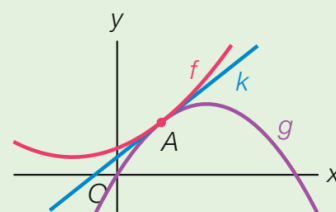
- A65** Voor elke p en q is de functie $f_{p,q}$ gegeven door $f_{p,q}(x) = px\sqrt{x^2 + 9} + qx^2$.
⊙* De lijn k is evenwijdig met de lijn $l: y = x$ en raakt de grafiek van $f_{p,q}$ in het punt $A(4, 20)$.
 Bereken exact p en q .

- O66** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}$ en $g(x) = -x^2 + 4x$.
⊞⊙* Het punt $A(1, 3)$ ligt zowel op de grafiek van f als op de grafiek van g .
a Toon dit aan.
 De lijn k raakt de grafiek van f in A en de lijn l raakt de grafiek van g in A .
b Stel langs algebraïsche weg de formules op van k en l .
c Wat voor bijzonder punt is het punt A ?

Theorie B Rakende grafieken

In opgave 66 heb je gezien dat de raaklijn in A aan de grafiek van f samenvalt met de raaklijn in A aan de grafiek van g . De grafieken hebben in A een gemeenschappelijke raaklijn. De grafieken van f en g raken elkaar in A .

De grafieken van f en g raken elkaar in het punt A als de raaklijn in A aan de grafiek van f samenvalt met de raaklijn in A aan de grafiek van g .



In het raakpunt A geldt dus niet alleen $f(x_A) = g(x_A)$, maar ook $f'(x_A) = g'(x_A)$.

De grafieken van f en g raken elkaar in het punt A als de x -coördinaat van A voldoet aan $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde geven de vergelijkingen

$f(x) = g_p(x)$ en $f'(x) = g'_p(x)$ achtereenvolgens

$\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x = -x^2 + 4x + p$ en $x^2 - 4x + 1 = -2x + 4$.

Omdat in de tweede vergelijking alleen de variabele x voorkomt, begin je met het oplossen van deze vergelijking. Daarna kun je de gevonden waarden van x invullen in de eerste vergelijking om de waarden van p te berekenen.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x$ en $g_p(x) = -x^2 + 4x + p$.
Bereken exact voor welke p de grafieken van f en g_p elkaar raken.

Uitwerking

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x \text{ geeft } f'(x) = x^2 - 4x + 1$$

$$g_p(x) = -x^2 + 4x + p \text{ geeft } g_p'(x) = -2x + 4$$

$$f'(x) = g_p'(x) \text{ geeft } x^2 - 4x + 1 = -2x + 4$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 3$$

$$f(-1) = g_p(-1) \text{ geeft } -3\frac{1}{3} = -1 - 4 + p \text{ oftewel } p = 1\frac{2}{3}.$$

$$f(3) = g_p(3) \text{ geeft } -6 = -9 + 12 + p \text{ oftewel } p = -9.$$

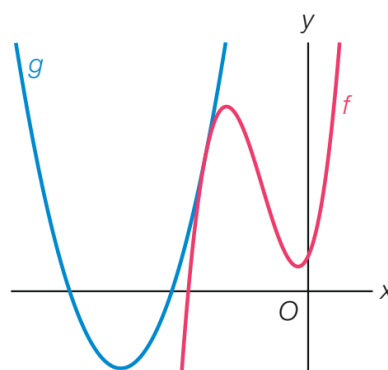
Dus de grafieken van f en g_p raken elkaar voor $p = 1\frac{2}{3}$ en voor $p = -9$.

R67 Zie het voorbeeld.

□ ⊙ * Stel langs algebraïsche weg de formule op van de gemeenschappelijke raaklijn k in het raakpunt dat hoort bij $p = -9$.

68 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ en $g(x) = x^2 + 11x + 28$.

- a** Bewijs dat de grafieken van f en g elkaar raken.
b Stel langs algebraïsche weg de formule op van de gemeenschappelijke raaklijn k in het raakpunt.



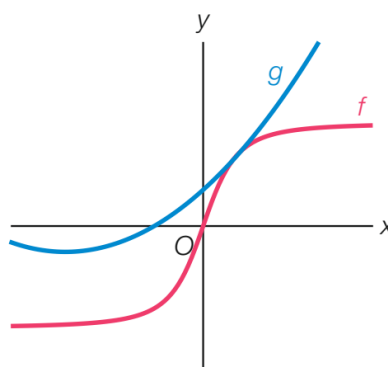
69 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{2x}$ en $g_p(x) = x^2 + p$.

□ ⊙ Bereken exact voor welke p de grafieken van f en g_p elkaar raken.

70 In de figuur hiernaast zie je de grafieken van de functies

□ ⊙ * $f(x) = \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 5}}$ en $g(x) = \frac{1}{18}x^2 + \frac{8}{9}x + 2$.

Bewijs dat de grafieken van f en g elkaar raken in het punt A met $x_A = 2$ en stel langs algebraïsche weg de formule op van de gemeenschappelijke raaklijn k in A . Geef het antwoord in de vorm $ax + by = c$ met a , b en c zo klein mogelijke gehele getallen.

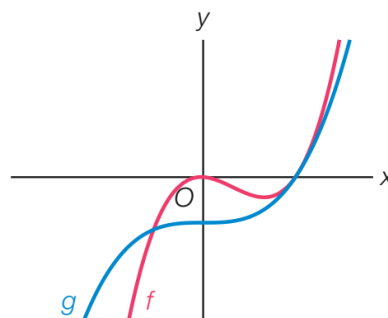


- 71** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + px$ en $g(x) = x^2 + 2x$.
□ ⊗ * Bij het berekenen voor welke p de grafieken van f_p en g elkaar raken, volgt uit de vergelijking $f_p'(x) = g'(x)$ dat $p = 2x^2 + 4x + 2$.
a Toon dit aan.

Uit $f_p(x) = g(x)$ en $p = 2x^2 + 4x + 2$ volgt de vergelijking $1\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 = 0$.

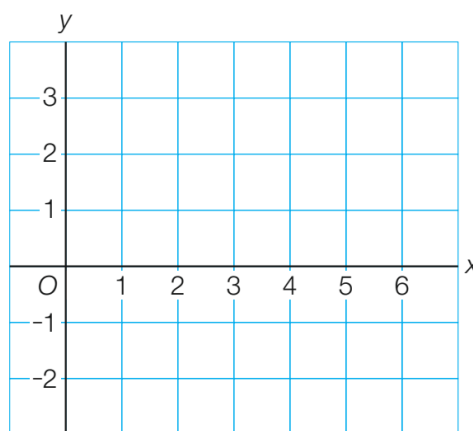
- b** Toon dit aan.
c Bereken exact voor welke p de grafieken van f_p en g elkaar raken.

- A72** **a** Bewijs dat de grafieken van de functies $f(x) = x^3 - 2x^2$ en $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3}$ elkaar raken en geef de coördinaten van het raakpunt.
b Bereken exact voor welke p de grafieken van $h(x) = -x^2 + 8x - 12$ en $k_p(x) = x^2 + px$ elkaar raken.



- A73** Bereken exact voor welke a en b de grafieken van de functies
***** $f(x) = \frac{10x}{\sqrt{x^2 + 16}}$ en $g(x) = ax^2 + bx + 3$ elkaar raken in het punt A met $x_A = 3$.

- O74** Gegeven zijn de lijnen $k: y = 2x - 2$ en $l: y = -\frac{1}{2}x + 3$.
□ ⊗ * **a** Teken de lijnen in de figuur hiernaast.
b Bram beweert dat de lijnen k en l loodrecht op elkaar staan. Ben je het daarmee eens?
c De lijn m gaat door het punt $A(4, 0)$ en staat loodrecht op k . Stel van m de formule op.
d Stel de formule op van de lijn n die door het punt $B(1, 3)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $p: y = \frac{1}{4}x + 5$.



Theorie C Elkaar loodrecht snijdende grafieken

In opgave 74 heb je gezien dat de lijnen k met $rc_k = 2$ en l met $rc_l = -\frac{1}{2}$ loodrecht op elkaar staan.

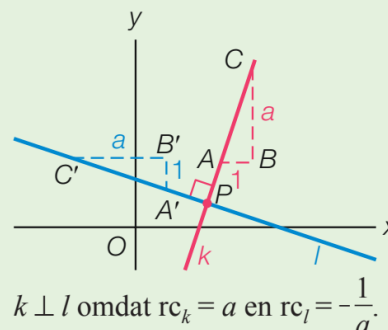
Ook de lijnen p met $rc_p = \frac{1}{4}$ en n met $rc_n = -4$ staan loodrecht op elkaar.

In het algemeen staan de lijnen k en l met $rc_k = a$ en

$rc_l = -\frac{1}{a}$ loodrecht op elkaar. In de figuur hiernaast wordt dit toegelicht.

Dus als $rc_k \cdot rc_l = -1$, dan staan de lijnen k en l loodrecht op elkaar. In het geval $rc_k \neq 0$ en $rc_l \neq 0$ geldt:

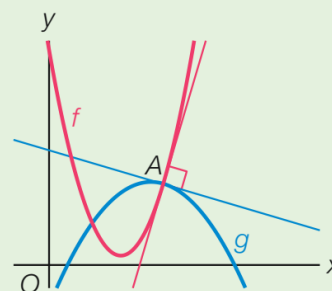
als $k \perp l$, dan $rc_k \cdot rc_l = -1$.



**Voor de lijnen k en l met $rc_k \neq 0$ en $rc_l \neq 0$ geldt:
 $rc_k \cdot rc_l = -1$ en $k \perp l$ komt op hetzelfde neer.**

De grafieken van de functies f en g snijden elkaar loodrecht in het punt A als in dat punt de raaklijnen van de grafieken loodrecht op elkaar staan. In het punt A geldt dus niet alleen $f(x_A) = g(x_A)$, maar ook $f'(x_A) \cdot g'(x_A) = -1$.

De grafieken van f en g snijden elkaar loodrecht in het punt A als de x -coördinaat van A voldoet aan $f(x) = g(x) \wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$.



In het voorbeeld op de volgende bladzijde geven de vergelijkingen $f(x) = g_p(x)$ en $f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$ achtereenvolgens

$$2\sqrt{x} = \frac{p}{x} \text{ en } \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-p}{x^2} = -1.$$

Omdat in beide vergelijkingen zowel x als p voorkomt, heb je hier te maken met een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. In het voorbeeld vind je de oplossingen van deze vergelijkingen met behulp van een substitutie.

In opgave 75 zie je dat er ook een andere manier is.

Voorbeeld

De grafieken van de functies $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g_p(x) = \frac{p}{x}$ snijden elkaar loodrecht.

Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van het punt waarin de grafieken elkaar loodrecht snijden.

Uitwerking

$$f(x) = 2\sqrt{x} \text{ geeft } f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$g_p(x) = \frac{p}{x} = px^{-1} \text{ geeft } g_p'(x) = -px^{-2} = -\frac{p}{x^2}$$

$$f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$$

$$2\sqrt{x} = \frac{p}{x} \wedge \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-p}{x^2} = -1$$

$$p = 2x\sqrt{x} \wedge \frac{p}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = 1$$

$$p = 2x\sqrt{x} \text{ substitueren in } \frac{p}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = 1 \text{ geeft } \frac{2x\sqrt{x}}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = 1$$

$$\frac{2}{x} = 1$$

$$x = 2$$

$$x = 2 \text{ geeft } p = 4\sqrt{2} \text{ en } f(2) = 2\sqrt{2}$$

Dus $p = 4\sqrt{2}$ en de grafieken snijden elkaar loodrecht in het punt $(2, 2\sqrt{2})$.

R75 Zie het voorbeeld.



Je kunt x ook berekenen door in zowel $2\sqrt{x} = \frac{p}{x}$ als $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-p}{x^2} = -1$

de parameter p vrij te maken.

Doe dit.

76



a Bewijs dat de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10$ elkaar loodrecht snijden.

b De grafieken van de functies $h_p(x) = p\sqrt{x}$ en $k(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3}$ snijden elkaar loodrecht.

Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van het punt waarin de grafieken elkaar loodrecht snijden.

77



- a Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x$.

De lijn k snijdt de grafiek van f loodrecht in het punt A met $x_A = 5$ en snijdt de x -as in het punt B .

Bereken exact de x -coördinaat van B .

- b Bereken exact voor welke p de lijn $l: y = -5x + p$ de grafiek van de functie $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ loodrecht snijdt.

A78



Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - x$ en $g_p(x) = \frac{p}{x}$.

- a De grafieken van f en g_p raken elkaar in het punt A .

Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van A .

- b De grafieken van f en g_p snijden elkaar loodrecht in het punt B .

Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van B .

A79



Voor elke p en q is de functie $f_{p,q}$ gegeven door $f_{p,q}(x) = px\sqrt{x^2+3} + qx$.

Bereken exact voor welke p en q de grafiek van $g(x) = -x^2 + 1\frac{4}{5}x + 2\frac{1}{5}$ de grafiek van $f_{p,q}$ loodrecht snijdt in het punt A met $x_A = 1$.

Informatief Verticale raaklijnen

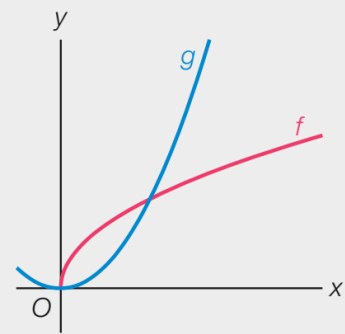
De grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ heeft in het randpunt $(0, 0)$ een verticale raaklijn. De vergelijking van de raaklijn is $x = 0$ en deze raaklijn heeft geen richtingscoëfficiënt.

De grafiek van de functie $g(x) = x^2$ heeft in $(0, 0)$ een horizontale raaklijn. De grafieken van f en g staan in $(0, 0)$ dus loodrecht op elkaar.

Uit $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ volgt $f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0}}$ en dus bestaat $f'(0)$

niet. Daarom geldt hier niet $f'(0) \cdot g'(0) = -1$.

Bij loodrecht snijden waarbij één van de raaklijnen verticaal is, kun je dus niet de regel $f'(x) \cdot g'(x) = -1$ gebruiken.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan bij functies met een parameter raaklijnproblemen oplossen.
- ☐ Ik kan bij functies met een parameter de formule opstellen van de kromme waarop alle toppen liggen.
- ☐ Ik kan langs algebraïsche weg onderzoeken onder welke voorwaarden de grafieken van twee functies elkaar raken.
- ☐ Ik kan langs algebraïsche weg onderzoeken onder welke voorwaarden de grafieken van twee functies elkaar loodrecht snijden.

► OPGAVE C8
THEORIE A

► OPGAVE C9
THEORIE A

► OPGAVE C10
THEORIE B

► OPGAVE C11
THEORIE C

C8 Voor elke p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = \sqrt{2x^2 + p}$.
De lijn $k: y = \frac{2}{3}x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 1$.
Bereken exact p en q .

C9 Voor elke p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + px - 5$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

C10 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$ en $g_p(x) = -2x^2 + px$.
a Bewijs dat de grafieken van f en g_{-1} elkaar raken en bereken exact de coördinaten van het raakpunt.
b Er is nog een waarde van p waarvoor de grafieken van f en g_p elkaar raken.
Bereken exact deze waarde van p .

C11 De grafieken van de functies $f(x) = -x^2 + 5$ en $g_p(x) = p\sqrt{x}$ snijden elkaar loodrecht.
Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van het punt waarin de grafieken elkaar loodrecht snijden.

Antwoorden

C8 $p = 7$ en $q = 2\frac{1}{3}$

C9 $y = \frac{2}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 5$

C10 a *
(-3, -15)

b $p = 2$

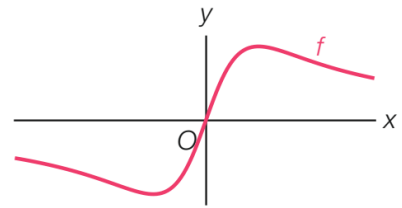
C11 $p = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
(2, 1)

Kennis- en vaardigheidentest

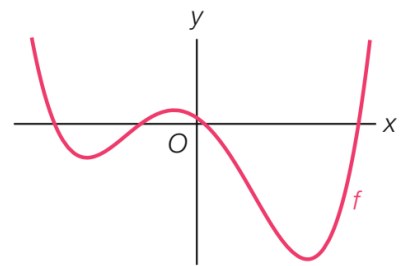
6.1 Toppen en buigpunten

- 1** Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 9}$.

Bereken exact de extreme waarden van f en geef het bereik.



- 2** Gegeven is de functie $f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 45x^2 - 30x + 5$.
Hiernaast zie je de grafiek van f .
Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{2\frac{1}{2}}$.



- 3** De grafiek van de functie $f(x) = x^5 - 10x^3$ heeft drie buigpunten: de oorsprong en de punten A en B met $x_A < x_B$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de buigraaklijn k aan de grafiek van f in B .

6.2 De afgeleide van machtsfuncties

- 4** Differentieer.

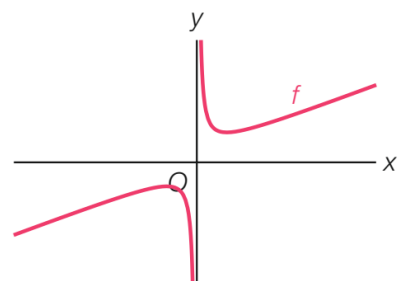
a $f(x) = \frac{5}{x^6}$

b $g(x) = \frac{x^6 - 2x^4}{x^5}$

c $h(x) = 4 - \frac{3x - 2}{x^3}$

- 5** In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = 2x + \frac{8}{x} + 1$.

- a** Bereken exact de extreme waarden van f .
b De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -6 .
Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.
c Onderzoek op algebraïsche wijze of de grafiek van f een raaklijn heeft met richtingscoëfficiënt 3 .



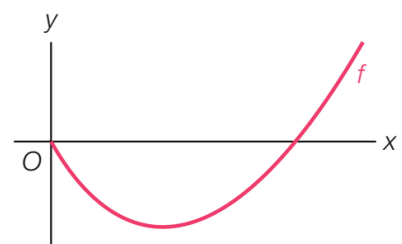
- 6** Bereken de afgeleide.

a $f(x) = \frac{8x^6 - x^4}{x\sqrt{x}}$

b $g(x) = \frac{3}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}$

c $h(x) = (x^2 + 2\sqrt{x})^2$

- 7** Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot \sqrt{x} - 5x$.
Bereken exact het bereik van f .



6.3 De kettingregel

8 Differentieer.

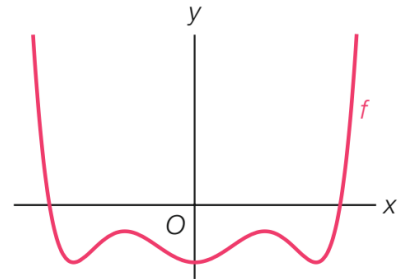
a $f(x) = \frac{5}{(2x^2 - x)^4}$

b $g(x) = (x^2 + 3x) \cdot \sqrt[3]{x^2 + 3x}$

9 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 2)^3 - x^2$.

a Bereken exact de x -coördinaten van de punten van de grafiek van f waarin de raaklijn horizontaal is.

b De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$ en snijdt de x -as in het punt B . Bereken exact de coördinaten van B .



10 Differentieer.

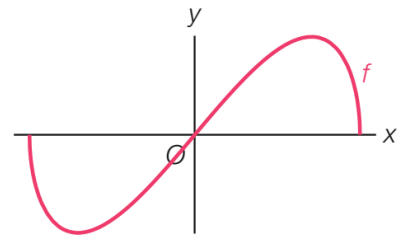
a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x - 3}$

b $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^3 - 3}}$

11 Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{50 - x^2}$.

a Bereken exact het domein en het bereik van f .

b Stel algebraïsch de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = 1$.



6.4 Raaklijnen, toppen, rakende en loodrecht snijdende grafieken

12 Voor elke p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = \frac{2}{3}x^3 + px^2 - 4x + 2$.

a De functie f_p heeft een extreme waarde voor $x = 1$. Bereken exact de extreme waarden.

b De lijn $k: y = 8x + q$ raakt de grafiek f_p in het punt A met $x_A = -2$. Bereken exact p en q .

c Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

13 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + p$ en $g(x) = 2x^2 - 3x$. Bereken exact voor welke p de grafieken van f_p en g elkaar raken.

14 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3$ en $g_p(x) = \frac{p}{x^2} + 4$.

De grafieken van f en g_p snijden elkaar loodrecht in de punten A en B . Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van A en B .

Gemengde opgaven

1 Differentieer.

a $f(x) = \frac{x^2 - 5\sqrt{x}}{2x^3 \cdot \sqrt{x}}$

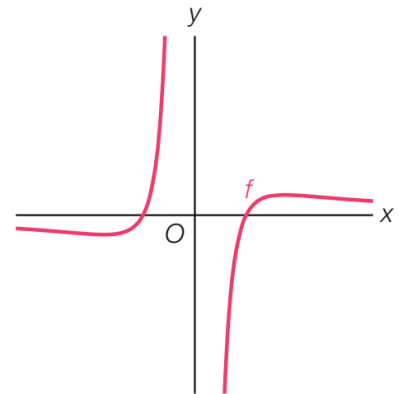
c $h(x) = \frac{3x}{2(4 - x^2)^4}$

b $g(x) = \frac{4}{3(x^2 - 3x)^6}$

d $k(x) = (x - \frac{1}{2}x^3) \cdot \sqrt[4]{x^3 - 2x}$

2 Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{3x^2 - 9}{x^3}$.

- a Bereken exact de extreme waarden van f .
- b De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt 24.
Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.
- c Bereken exact voor welke p de grafieken van f en $g_p(x) = px^2$ elkaar raken.



3 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door

$$f_p(x) = x^4 + px^3 + 3x^2 + 4x + 1.$$

- a Bereken exact voor welke p de grafiek van f_p twee buigpunten heeft.
- b Voor een waarde van p heeft de grafiek van f_p de buigpunten A en B met $x_B = -\frac{1}{2}$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de buigraaklijn k in A .
- c Bereken exact voor welke p de grafiek van f_p drie raaklijnen heeft die evenwijdig zijn met de lijn $k: y = 4x$.

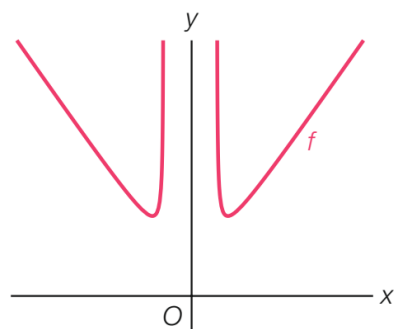
4 Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

- a Los exact op $f(x) \leq 15$.

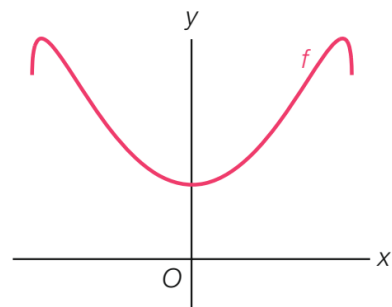
De afgeleide van f is te schrijven als

$$f'(x) = \frac{3x^3 - 24x}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}}.$$

- b Bewijs dit.
- c Bereken exact voor welke p de vergelijking $f(x) = p$ geen oplossing heeft.



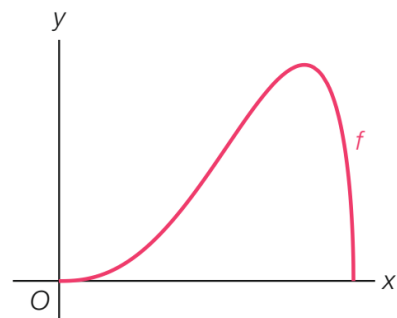
- 5** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{9-x^2} + \frac{1}{2}x^2 - 2$.
Bereken exact het bereik van f .



- 6** In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{6x-x^2}$.

De afgeleide van f is te schrijven als $f'(x) = \frac{15x^2 - 3x^3}{\sqrt{6x-x^2}}$.

- a** Bewijs dit.
- b** Bereken exact het domein en het bereik van f .
- c** Het punt A met $x_A = 3$ ligt op de grafiek van f .
De lijn k raakt de grafiek van f in A en snijdt de y -as in het punt B . De lijn l snijdt de grafiek van f loodrecht in A en snijdt de y -as in het punt C .
Bereken exact de lengte van het lijnstuk BC .



- 7** Voor elke p en q is de functie $f_{p,q}$ gegeven door $f_{p,q}(x) = \frac{px+q}{\sqrt{x^2+1}}$.

- a** Bewijs dat $f_{p,0}$ voor geen enkele p een extreme waarde heeft.
- b** De grafiek van $f_{p,q}$ heeft een top met x -coördinaat $\sqrt{3}$.
Bereken exact voor welke p en q de top van de grafiek van $f_{p,q}$ op de parabool $y = x^2 - q$ ligt.

- 8** Voor elke waarde van p is gegeven de functie $f_p(x) = x\sqrt{x} + p\sqrt{x}$.

- a** De lijn $k: y = 5x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 4$.
Bereken q exact.
- b** Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.
- c** Voor elke waarde van r is gegeven de functie $g_r(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + r$.
De grafieken van f_{-14} en g_r snijden elkaar loodrecht in het punt B .
Bereken exact de waarde van r en de coördinaten van B .



7

Meetkunde met coördinaten

Het beheersen van een verre ingooi kan bij een voetbalwedstrijd als wapen gebruikt worden. We bekijken de worpen van een speler die is getraind op het nemen van verre ingooien. Hierbij gaan we uit van een voetbalveld van 100 bij 70 meter. De straal van de middencirkel is 9,15 meter. Het doelgebied is 18,3 bij 5,5 meter. Zie ook de figuur. Vanuit positie A kan hij nog juist in het doelgebied gooien. Kan de bal in de middencirkel terechtkomen, als deze speler vanuit positie B gooit richting de middenstip?



7.1 Lijnen en hoeken

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met de onderlinge ligging van twee lijnen.
- Je kunt werken met de assenvergelijking van een lijn.
- Je kunt de hoek tussen twee lijnen berekenen.

01



Gegeven zijn de lijnen $k: 2x + 3y = 12$ en $l: 4x + 6y = 15$.

- a Maak bij zowel de vergelijking van k als van l de variabele y vrij.
 b Licht toe dat k en l evenwijdig zijn, maar niet samenvallen.
 c Licht toe dat het stelsel $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 6y = 15 \end{cases}$ geen oplossing heeft.

Theorie A Onderlinge ligging van lijnen

De lijnen $m: 2x - 3y = 5$ en $n: 4x - 6y = 7$ hebben dezelfde richtingscoëfficiënt en vallen niet samen. Ook zonder y vrij

te maken kun je dat inzien, want $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{5}{7}$.

Omdat je met twee lijnen te maken hebt die geen punt gemeenschappelijk hebben, heeft het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 7 \end{cases}$ geen oplossing. De vergelijkingen van het stelsel zijn **strijdig**.

De lijnen $m: 2x - 3y = 5$ en $p: 4x - 6y = 10$ vallen samen, want

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{5}{10}.$$

Het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$ heeft oneindig veel oplossingen.

De vergelijkingen van het stelsel zijn **afhankelijk**.

$$\begin{aligned} m: 2x - 3y &= 5 \\ -3y &= -2x + 5 \\ y &= \frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3} \\ n: 4x - 6y &= 7 \\ -6y &= -4x + 7 \\ y &= \frac{2}{3}x - 1\frac{1}{6} \\ \text{Dus } rc_m &= rc_n. \end{aligned}$$

De lijnen $k: ax + by = c$ en $l: px + qy = r$

$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$	$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$	$\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$
lijnen hebben geen punt gemeenschappelijk	lijnen vallen samen	lijnen hebben een snijpunt
vergelijkingen zijn strijdig	vergelijkingen zijn afhankelijk	vergelijkingen zijn onafhankelijk

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $k_p: px + (p + 1)y = 5$ en $l_{p,q}: (p - 1)x + (p - 3)y = q$.
Bereken exact voor welke p en q de lijnen k_p en $l_{p,q}$ samenvallen.

Uitwerking

Samenvallen, dus $\frac{p}{p-1} = \frac{p+1}{p-3} = \frac{5}{q}$.

$\frac{p}{p-1} = \frac{p+1}{p-3}$ geeft $p(p-3) = (p-1)(p+1)$

$$p^2 - 3p = p^2 - 1$$

$$-3p = -1$$

$$p = \frac{1}{3}$$

$p = \frac{1}{3}$ geeft $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{q}$ oftewel $\frac{1}{-2} = \frac{5}{q}$, dus $q = -10$.

Dus voor $p = \frac{1}{3}$ en $q = -10$ vallen de lijnen samen.

R2 Zie het voorbeeld met de lijnen k_p en $l_{p,q}$.

□ ⊗ * Voor welke p en q

- a** hebben de lijnen geen punt gemeenschappelijk
- b** hebben de lijnen een snijpunt
- c** snijden de lijnen elkaar in het punt $(2, -3)$?

3 Gegeven zijn de lijnen $k_p: 3x + py = 5$ en $l_{p,q}: (p-1)x + (p+4)y = q$.

□ ⊗ * Bereken exact voor welke p en q

- a** de lijnen samenvallen
- b** de lijnen geen punt gemeenschappelijk hebben.

A4 Bereken exact voor welke p en q de lijnen $k_{p,q}: px + qy = 4$ en

□ ⊗ * $l_{p,q}: (q+3)x + (p-1)y = 1$ samenvallen.

O5 Gegeven is de lijn $l: 2x + 3y = 18$.

□ ⊗ * **a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de x -as en de y -as.

b Licht toe dat de vergelijking $2x + 3y = 18$ ook kan worden geschreven als $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$.

c Hoe kun je in de vorm $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$ de coördinaten van de snijpunten van l met de assen herkennen?

06



Gegeven is de lijn $k: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

- a Toon aan dat k de x -as snijdt in het punt $(a, 0)$.
- b Toon aan dat k de y -as snijdt in het punt $(0, b)$.

Theorie B De assenvergelijking van een lijn

De lijn $k: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ snijdt de x -as in het punt $(a, 0)$ en de y -as in het punt $(0, b)$. Dit gebruik je om een vergelijking van een lijn op te stellen als de coördinaten van de snijpunten van de lijn met de assen bekend zijn.

De vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ heet de **assenvergelijking van de lijn**.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ snijden met de x -as geeft $y = 0$, dus $\frac{x}{a} = 1$ oftewel $x = a$.
Het snijpunt is $(a, 0)$.

Van de lijn door de punten $(a, 0)$ en $(0, b)$ met $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ is de vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Voorbeeld

De lijn k snijdt de x -as in het punt $(6, 0)$ en de y -as in het punt $(0, q)$.

- a Stel een vergelijking op van k in de vorm $ax + by = c$.
- b Bereken exact voor welke q de lijnen k en $l: y = 3x + 2$ geen punt gemeenschappelijk hebben.

Uitwerking

a $k: \frac{x}{6} + \frac{y}{q} = 1$

Vermenigvuldig alle termen met $6q$.

$k: qx + 6y = 6q$

b $k: qx + 6y = 6q$ en $l: 3x - y = -2$

Geen punt gemeenschappelijk, dus $\frac{q}{3} = \frac{6}{-1} \neq \frac{6q}{-2}$.

$\frac{q}{3} = \frac{6}{-1}$ geeft $q = -18$ en $\frac{6}{-1} \neq \frac{6q}{-2}$ geeft $q \neq 2$

Dus voor $q = -18$ hebben k en l geen punt gemeenschappelijk.

7

Stel een vergelijking op van de lijn in de vorm $ax + by = c$.

- a l door $(p, 0)$ en $(0, 5)$
- b m door $(4, 0)$ en $(0, q)$
- c n door $(3r, 0)$ en $(0, r)$

8 De lijn k snijdt de x -as in het punt $(p, 0)$ en de y -as in het punt $(0, 8)$.

- a** Stel een vergelijking op van k in de vorm $ax + by = c$.
b Bereken exact voor welke p het punt $(1, 2)$ op k ligt.
c Bereken exact voor welke p de lijnen k en $l: y = 2x + 3$ elkaar snijden.

A9 De lijn k snijdt de assen in de punten $(3, 0)$ en $(0, p)$ en de lijn l snijdt de assen in de punten $(2p, 0)$ en $(0, 5)$.

- a** Stel van k en van l een vergelijking op in de vorm $ax + by = c$.

Bereken exact voor welke p

- b** het punt $A(1, 2)$ op k ligt
c het punt $B(-3, 4)$ op l ligt
d de lijnen k en $m: y = 4x + 5$ geen punt gemeenschappelijk hebben
e de lijnen l en $n: 2x + 3y = 10$ een snijpunt hebben.

A10 Bereken exact voor welke p de lijn $l_p: \frac{x}{p} + \frac{y}{p+2} = 1$

- a** door het punt $(3, 4)$ gaat
b richtingscoëfficiënt 2 heeft.

O11 In de figuur hiernaast zie je de lijn $k: y = 2x - 4$ en het punt $C(3, 0)$.

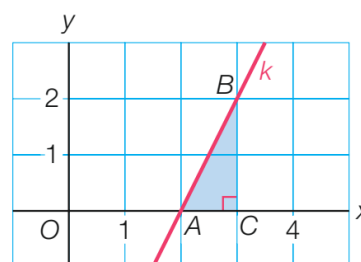
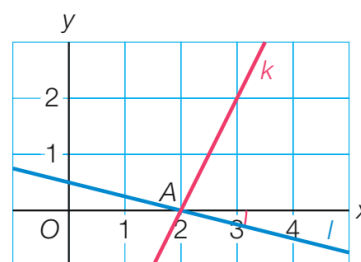
Het punt $A(2, 0)$ is het snijpunt van k met de x -as en het punt $B(3, 2)$ ligt op k .

Er geldt $\angle BAC = 63,43\dots^\circ$.

- a** Toon dit aan.

In de figuur hiernaast is ook de lijn $l: y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ getekend. De hoek tussen l en de x -as is met een boogje aangegeven. Deze hoek is $14,03\dots^\circ$.

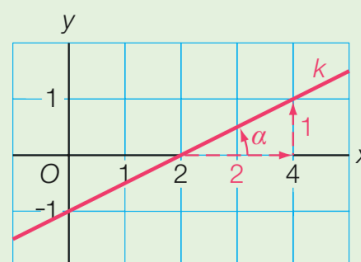
- b** Toon dit aan.
c Bereken de hoek tussen de lijnen k en l . Rond af op één decimaal.



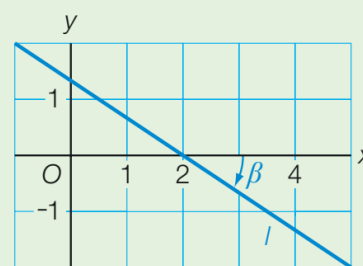
Theorie C De hoek tussen twee lijnen

In de figuur hiernaast is de lijn $k: y = \frac{1}{2}x - 1$ getekend. De **richtingshoek** van deze lijn is de hoek α waarover je de x -as moet draaien om de x -as te laten samenvallen met k . Je ziet dat $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ en dit geeft $\alpha = 26,56\dots^\circ$.

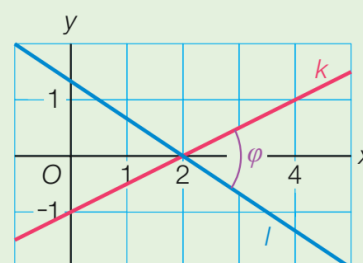
Voor de richtingshoek α van de lijn k geldt $\tan(\alpha) = rc_k$ en $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.



De richtingshoek van de lijn $l: y = -\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$ is in de figuur hiernaast aangegeven met β .
 Er geldt $\tan(\beta) = \text{rc}_l$, dus $\tan(\beta) = -\frac{2}{3}$ en dit geeft $\beta = -33,69\dots^\circ$. De richtingshoek van l is dus negatief.



In de figuur hiernaast zijn de lijnen k en l beide getekend. De **hoek tussen de lijnen** k en l is aangegeven met φ . Hier is $\varphi = \alpha - \beta = 26,56\dots^\circ - (-33,69\dots^\circ) \approx 60,3^\circ$.



Voor de hoek φ tussen twee lijnen nemen we altijd de hoek waarvoor geldt $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

In de figuur hiernaast zijn de lijnen $m: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ en $n: y = -x + 2$ getekend.

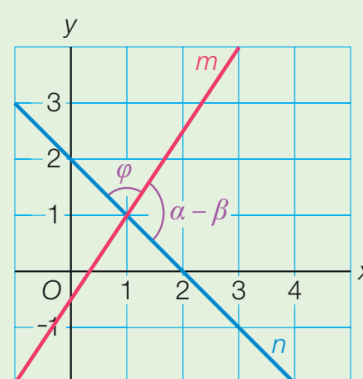
Voor de richtingshoek α van m geldt $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$, dus $\alpha = 26,56\dots^\circ$.

Voor de richtingshoek β van n geldt $\tan(\beta) = -1$, dus $\beta = -45^\circ$.

Omdat $\alpha - \beta = 26,56\dots^\circ - (-45^\circ) = 71,56\dots^\circ$

geldt voor de hoek φ tussen m en n dat

$\varphi = 180^\circ - 71,56\dots^\circ \approx 108,4^\circ$.



Voor de hoek φ tussen twee lijnen met richtingshoeken α en β , waarbij $\alpha > \beta$, geldt

- $\varphi = \alpha - \beta$ als $\alpha - \beta \leq 90^\circ$
- $\varphi = 180^\circ - (\alpha - \beta)$ als $\alpha - \beta > 90^\circ$.

Voorbeeld

Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen $k: 5x - 4y = 6$ en $l: 5x + 3y = 2$.

Uitwerking

$$k: 5x - 4y = 6$$

$$-4y = -5x + 6$$

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = \frac{5}{4} \text{ geeft } \alpha = 51,3\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 51,3\dots^\circ - (-59,0\dots^\circ) = 110,3\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(k, l) = 180^\circ - 110,3\dots^\circ \approx 69,7^\circ.$$

$$l: 5x + 3y = 2$$

$$3y = -5x + 2$$

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = -\frac{5}{3} \text{ geeft } \beta = -59,0\dots^\circ$$

12 Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen.



a $k: y = 3x + 4$ en $l: y = 2x - 1$

b $m: y = 1\frac{1}{2}x + 2$ en $n: y = -\frac{1}{2}x + 3$

c $p: y = 3\frac{1}{2}x - 1$ en $q: y = -1\frac{1}{4}x + 5$

13 Bereken in graden de hoek tussen de lijnen. Rond af op één decimaal.



a $k: 3x - 2y = 5$ en $l: 4x - 3y = 6$

b $m: 4x + y = 1$ en $n: 3x + 4y = 2$

c $p: 5x + 3y = 4$ en $q: 6x - 5y = 1$

A14 **a** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen



$k: y = \frac{2}{3}x + 4$ en $l: 8x - 5y = 3$.

b De lijn m gaat door de punten $(4, 0)$ en $(0, 5)$ en de lijn n gaat door de punten $(-2, 0)$ en $(0, 1)$.

Bereken in graden de hoek tussen m en n . Rond af op één decimaal.

c De lijn p gaat door de punten $(2, 1)$ en $(5, 6)$ en de lijn q gaat door de punten $(-3, 1)$ en $(2, -6)$.

Bereken in gehele graden de hoek tussen p en q .

A15 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4}{4 - x^2}$.



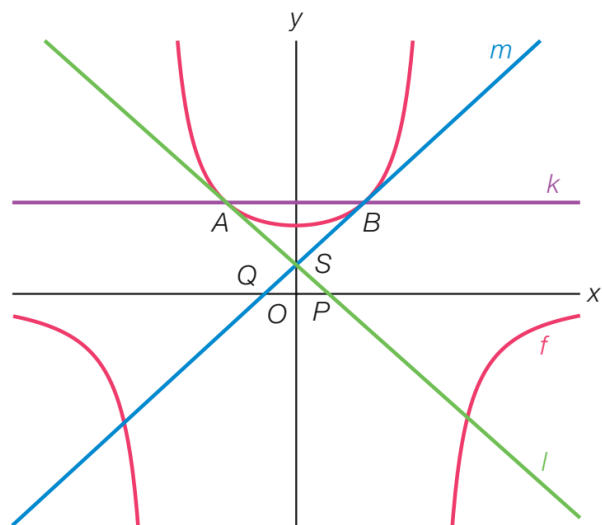
De grafiek van f is symmetrisch in de y -as.

De lijn $k: y = 1\frac{1}{3}$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B . De lijn l raakt de grafiek van f in A en de lijn m raakt de grafiek van f in B . Lijn l snijdt de x -as in het punt P , lijn m snijdt de x -as in het punt Q , en l en m snijden elkaar in het punt S . Zie de figuur hiernaast.

a Bereken algebraïsch $\angle ASB$ in graden.

Rond af op één decimaal.

b Bereken exact de oppervlakte van vierhoek $AQPB$.



A16 De lijnen $k: y = 2x - 3$ en l snijden elkaar onder een hoek van 20° .



***** Bereken de mogelijke richtingscoëfficiënten van l . Rond af op twee decimalen.

E17 Gegeven zijn de lijnen $k: 2x - 5y = 9$ en $l: ax + by = 3$.



***** Bereken a en b in het geval k en l elkaar snijden onder een hoek van 60° in het punt $S(2, -1)$. Rond af op twee decimalen.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan werken met de onderlinge ligging van twee lijnen.
- ☐ Ik kan werken met de assenvergelijking van een lijn.
- ☐ Ik kan de hoek tussen twee lijnen berekenen.

► OPGAVE C1
THEORIE A
► OPGAVE C2
THEORIE B
► OPGAVE C3
THEORIE C

- C1** Gegeven zijn de lijnen $k_p: px + (p + 2)y = 5$ en $l_{p,q}: (p + 1)x + (p - 3)y = q$.
Bereken exact voor welke p en q
- a** de lijnen samenvallen
 - b** de lijnen een snijpunt hebben.

- C2** De lijn k snijdt de x -as in het punt $(5, 0)$ en de y -as in het punt $(0, p)$.
- a** Stel een vergelijking op van k in de vorm $ax + by = c$.
 - b** Bereken exact voor welke p het punt $(-3, 4)$ op k ligt.
 - c** Bereken exact voor welke p de lijnen k en $l: y = 3x - 2$ geen punt gemeenschappelijk hebben.

- C3**
- a** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen $k: y = 2x - 3$ en $l: y = -0,3x - 1$.
 - b** Bereken in graden de hoek tussen de lijnen $m: 3x + 4y = 5$ en $n: y = -\frac{1}{3}x + 1$. Rond af op één decimaal.
 - c** Bereken de hoek tussen de lijnen $p: 3x - y = 6$ en $q: x + 2y = 5$. Geef je antwoord in graden en rond af op één decimaal.

Antwoorden

- C1**
- a** $p = -\frac{1}{3}$ en $q = -10$
 - b** $p \neq -\frac{1}{3}$ en q mag elk getal zijn
- C2**
- a** $k: px + 5y = 5p$
 - b** $p = 2\frac{1}{2}$
 - c** $p = -15$
- C3**
- a** $\angle(k, l) \approx 80^\circ$
 - b** $\angle(m, n) \approx 18,4^\circ$
 - c** $\angle(p, q) \approx 81,9^\circ$

7.2 Afstanden bij punten en lijnen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met het midden van een lijnstuk en de afstand tussen twee punten.
- Je kunt een vergelijking opstellen van een lijn die door een gegeven punt gaat en loodrecht staat op een gegeven lijn.
- Je kunt de afstand van een punt tot een lijn berekenen.
- Je kunt werken met de afstandsformule.

○18

□⊗*

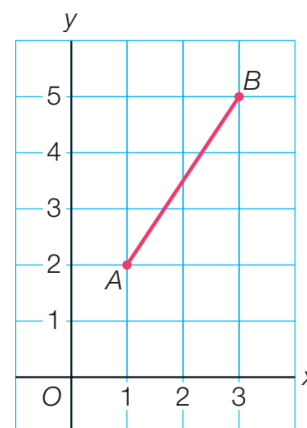
Hiernaast is het lijnstuk AB met $A(1, 2)$ en $B(3, 5)$ getekend.

a Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB .

b Het punt M is het midden van het lijnstuk AB .

Hoe volgen de coördinaten van M uit de coördinaten van A en B ? Geef de coördinaten van M .

c Geef de coördinaten van het midden N van het lijnstuk CD met $C(83, 61)$ en $D(89, 69)$.



Theorie A De afstand tussen twee punten

De afstand tussen de punten A en B is de lengte van het lijnstuk AB .

Voor de lengte van het lijnstuk AB bestaat de notatie $d(A, B)$.

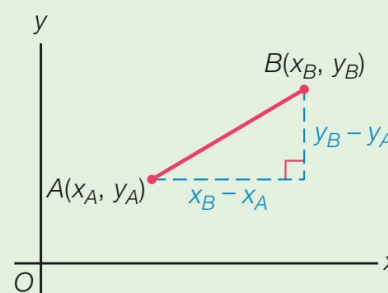
In deze notatie is de letter d van distance (afstand) gebruikt.

Hiernaast zijn de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ getekend. Met de stelling van Pythagoras in de getekende driehoek vind je

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, dus de afstand tussen de punten A en B is $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Om de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB te berekenen, neem je het gemiddelde van de x -coördinaten van A en B en het gemiddelde van de y -coördinaten van A en B .

Zo krijg je $M(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B))$.



Voor de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ geldt

- $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ is de afstand tussen A en B
- $M(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B))$ is het midden van het lijnstuk AB .

Voorbeeld

Gegeven zijn de punten $A(p, 3)$ en $B(4, q)$.

- a Neem $p = 2$ en $q = 7$ en bereken exact de afstand tussen A en B .
Geef het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.
- b Druk de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB uit in p en q .
- c Neem $q = 2p$ en schrijf de afstand d tussen A en B in de vorm $d = \sqrt{ap^2 + bp + c}$.

Uitwerking

- a $A(2, 3)$ en $B(4, 7)$ geeft $d(A, B) = \sqrt{(4-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
- b $M(\frac{1}{2}(p+4), \frac{1}{2}(3+q)) = M(\frac{1}{2}p+2, 1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}q)$
- c $A(p, 3)$ en $B(4, 2p)$ geeft $d = \sqrt{(4-p)^2 + (2p-3)^2} = \sqrt{16-8p+p^2+4p^2-12p+9} = \sqrt{5p^2-20p+25}$

R19 Zie het voorbeeld.



- a Bereken exact de afstand tussen A en B als M het punt $(-1, \frac{1}{2})$ is.
Geef het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.
- b Bereken exact de mogelijke coördinaten van A en B als $q = 2p$ en de afstand tussen A en B gelijk is aan $5\sqrt{2}$.

20 Gegeven zijn de punten $A(0, p)$ en $B(p, 7)$. Het punt M is het midden van het lijnstuk AB .



- a Neem $p = 12$ en bereken exact de afstand tussen A en B .
- b Neem $p = -2$ en bereken de coördinaten van M .
- c Neem $p = 4$ en bereken exact de afstand tussen A en M .
- d Druk de coördinaten van M uit in p .
- e Schrijf de afstand d tussen A en B in de vorm $d = \sqrt{ap^2 + bp + c}$.

21 Gegeven zijn de punten $A(p, 3)$ en $B(p+2, 2p)$.



- a Druk de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB uit in p .

Voor de afstand d tussen A en B geldt $d = \sqrt{4p^2 - 12p + 13}$.

- b Toon dit aan.
- c Bereken exact voor welke p de afstand tussen A en B gelijk is aan $2\sqrt{2}$.

A22 Gegeven zijn de punten $A(3, 4)$ en $B(p + 5, p + 2)$. Het punt M is het midden van het lijnstuk AB .



- a Bereken y_M als $x_M = 10$.
- b Bereken p als M op de lijn $k: y = 2x - 3$ ligt.
- c Neem $p = 6$ en bereken exact de afstand tussen A en B . Geef het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.
- d De afstand d tussen A en B is te schrijven in de vorm $d = \sqrt{mp^2 + n}$. Bereken exact m en n .

O23 a Gegeven zijn de lijnen $m: 5x + 2y = 3$ en $n: 2x - 5y = 12$.



- Toon met een berekening aan dat m en n loodrecht op elkaar staan.
- b Gegeven zijn de lijnen $k: ax + by = c$ en $l: bx - ay = d$. Bewijs dat k en l loodrecht op elkaar staan.

Theorie B Loodrechte lijnen en loodrechte projectie

Je weet:

Voor de lijnen k en l met $rc_k \neq 0$ en $rc_l \neq 0$ geldt:
 $rc_k \cdot rc_l = -1$ en $k \perp l$ komt op hetzelfde neer.

Van de lijn $k: ax + by = c$ met $b \neq 0$ is $rc_k = -\frac{a}{b}$.

Van de lijn $l: bx - ay = d$ met $a \neq 0$ is $rc_l = \frac{b}{a}$.

Hieruit volgt $rc_k \cdot rc_l = -\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = -1$, dus $k \perp l$.

De lijnen $k: ax + by = c$ en $l: bx - ay = d$ staan loodrecht op elkaar.

Voorbeeld

De lijn k gaat door het punt $A(2, -5)$ en staat loodrecht op de lijn $l: 3x + 4y = 12$.

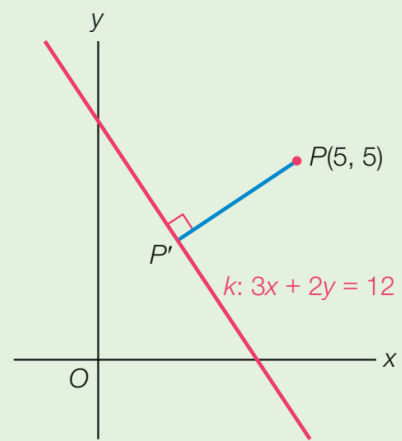
Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

Uitwerking

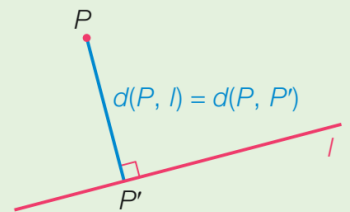
$k \perp l$, dus $k: 4x - 3y = c$
door $A(2, -5)$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} k \perp l \\ \text{door } A(2, -5) \end{matrix}} \right\} c = 4 \cdot 2 - 3 \cdot -5 = 23$

Dus $k: 4x - 3y = 23$.

In opgave 27 op de volgende bladzijde ga je de afstand van het punt $P(5, 5)$ tot de lijn $k: 3x + 2y = 12$ berekenen. Daarbij speelt het begrip **loodrechte projectie** een rol. Hiernaast is P' de loodrechte projectie van P op k . De afstand van P tot k is gelijk aan de lengte van het lijnstuk PP' . Voor het berekenen van de coördinaten van P' gebruik je de lijn door P loodrecht op k .



De afstand van een punt P tot een lijn l is de afstand van P tot zijn loodrechte projectie P' op l .



R24



Op de vorige bladzijde staan in de theorie boven het rode kader de voorwaarden $b \neq 0$ en $a \neq 0$. In het rode kader ontbreken deze voorwaarden. Waarom zijn deze voorwaarden wel nodig in de theorie boven het rode kader en niet nodig in het rode kader zelf?

$a = 0$ in $ax + by = c$
geeft $by = c$.
 $a = 0$ in $bx - ay = d$
geeft $bx = d$.

25



- a** De lijn k gaat door het punt $A(4, 1)$ en staat loodrecht op de lijn $l: 2x - 3y = 5$.
Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.
- b** De lijn m gaat door het punt $B(3, -1)$ en staat loodrecht op de lijn $n: 4x + 5y = 6$.
Stel van m een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.
- c** De lijn p gaat door het punt $C(-4, 3)$ en staat loodrecht op de lijn $q: 2x - y = 6$.
Stel van p een vergelijking op van de vorm $y = ax + b$.

26



- a** De lijn k gaat door de punten $A(2, 3)$ en $B(6, 5)$.
De lijn l gaat door het punt $C(4, 6)$ en staat loodrecht op k .
Stel van l een vergelijking op van de vorm $y = ax + b$.
- b** De lijn m gaat door de punten $D(-3, 4)$ en $E(2, -6)$.
De lijn n gaat door het punt $F(3, 7)$ en staat loodrecht op m .
Stel van n een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$ met a, b en c geheel.

27 Gegeven zijn het punt $P(5, 5)$ en de lijn $k: 3x + 2y = 12$

□ ⊗ * uit de theorie op de vorige bladzijde.

Het punt P' is de loodrechte projectie van P op k .

a Bereken exact de coördinaten van P' .

b Bereken exact de afstand van P tot k .

A28 Bereken exact de afstand van het punt $P(6, 4)$ tot de lijn $k: x - 2y = 2$.

□ ⊗ * Geef het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.

Theorie C De afstandsformule

In opgave 28 heb je de afstand van een punt tot een lijn berekend.

Je gebruikte daarbij de loodrechte projectie van dat punt op de lijn.

Voor het berekenen van de afstand van het punt $P(x_P, y_P)$ tot de lijn $k: ax + by = c$ kun je ook de **afstandsformule** hieronder gebruiken.

Deze afstandsformule ga je in opgave 40 bewijzen.

DE AFSTANDSFORMULE

De afstand van het punt $P(x_P, y_P)$ tot de lijn $k: ax + by = c$ is

$$d(P, k) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Bij het punt $P(6, 4)$ en de lijn $k: x - 2y = 2$ van opgave 28 krijg je

$$d(P, k) = \frac{|6 - 2 \cdot 4 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}.$$



Werk de wortel uit de noemer weg.

Met de afstandsformule kun je bovendien problemen oplossen zoals hieronder.

Zoek je de punten P op de x -as die de afstand $\sqrt{5}$ tot de lijn $k: x - 2y = 2$ hebben, dan stel je $P(p, 0)$. Met de afstandsformule krijg je vervolgens

$$\begin{aligned} \frac{|p - 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} &= \sqrt{5} \text{ oftewel } \frac{|p - 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \\ |p - 2| &= 5 \\ p - 2 &= 5 \vee p - 2 = -5 \\ p &= 7 \vee p = -3 \end{aligned}$$

Dus de punten zijn $P_1(-3, 0)$ en $P_2(7, 0)$.

Voorbeeld

Stel vergelijkingen op van de lijnen k die door het punt $B(12, 0)$ gaan en op afstand $\sqrt{13}$ van het punt $A(4, 1)$ liggen.

Uitwerking

$k: y = ax + b$ door $B(12, 0)$ geeft $12a + b = 0$, dus $b = -12a$.

$k: y = ax - 12a$ oftewel $k: ax - y - 12a = 0$

$$d(A, k) = \sqrt{13} \text{ geeft } \frac{|4a - 1 - 12a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{13}$$

$$|-8a - 1| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$$

$$|-8a - 1| = \sqrt{13a^2 + 13}$$

kwadrateren geeft $\leftarrow$

$$64a^2 + 16a + 1 = 13a^2 + 13$$

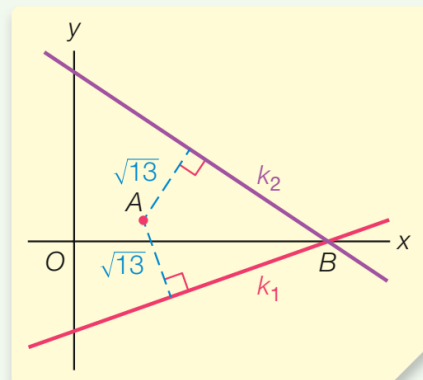
$$51a^2 + 16a - 12 = 0$$

$$D = 16^2 - 4 \cdot 51 \cdot (-12) = 2704, \text{ dus } \sqrt{D} = 52$$

$$a = \frac{-16 + 52}{102} = \frac{6}{17} \vee a = \frac{-16 - 52}{102} = -\frac{2}{3}$$

$$a = \frac{6}{17} \text{ geeft } b = -12 \cdot \frac{6}{17} = -4\frac{4}{17}, \text{ dus } k_1: y = \frac{6}{17}x - 4\frac{4}{17}.$$

$$a = -\frac{2}{3} \text{ geeft } b = -12 \cdot -\frac{2}{3} = 8, \text{ dus } k_2: y = -\frac{2}{3}x + 8.$$



$|A| = A$ als $A \geq 0$
 $|A| = -A$ als $A < 0$
 Dus $|A|^2 = A^2$, want $(-A)^2 = A^2$.

R29 Zie het voorbeeld.



De formule $d(P, k) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ gaat uit van de vorm

$ax + by = c$, maar in de eerste regel van de uitwerking wordt uitgegaan van $k: y = ax + b$.

- a** Welk probleem ontstaat als daar was uitgegaan van $k: ax + by = c$?
- b** Had je ook uit kunnen gaan van bijvoorbeeld $k: ax + by = 1$?

30 Gegeven is de lijn $k: x - 4y = -4$.

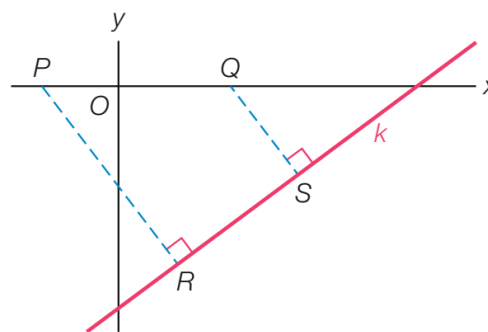


- a** Bereken exact de afstand van het punt $A(1, -1)$ tot k .
- b** Onderzoek met een berekening welk van de punten $B(2, 3\frac{1}{2})$ of $C(6, 5)$ het dichtst bij k ligt.

- 31** Bereken exact de afstand van het punt
 □ ⊗ * **a** $A(2, 5)$ tot de lijn $k: 3x + 4y = 10$
b $B(2, -1)$ tot de lijn $l: y = -2x + 5$
c $C(5, 3)$ tot de lijn $m: \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$.

- 32** Gegeven is $\triangle ABC$ met de hoekpunten $A(1, 0)$, $B(7, 4)$ en $C(3\frac{1}{2}, 6)$.
 ⊗ * Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$.

- A33** Gegeven zijn de lijn $k: 3x - 4y = 24$ en de punten
 □ ⊗ * $P(-2, 0)$ en $Q(3, 0)$. Het punt R is de loodrechte projectie van P op k en het punt S is de loodrechte projectie van Q op k . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de oppervlakte van vierhoek $PRSQ$.



- 34** **a** Bereken exact de coördinaten van de punten P op de x -as die op afstand 1 van de lijn $k: 3x + 4y = 10$ liggen.
 □ ⊗ * **b** Stel vergelijkingen op van de lijnen l die door het punt $A(0, 4)$ gaan en op afstand 5 van het punt $B(5\frac{1}{2}, 5)$ liggen.

- A35** **a** Bereken exact de coördinaten van de punten P op de lijn $k: y = 2x$ die op afstand $\sqrt{13}$ van de lijn $l: 2x - 3y = 5$ liggen.
 □ ⊗ * **b** Stel vergelijkingen op van de lijnen m die door het punt $A(3, 0)$ gaan en op afstand $\sqrt{5}$ van het punt $B(6, 4)$ liggen.

- 36** Gegeven is de lijn $k: 5x + 12y = 26$.
 □ ⊗ * De lijnen l zijn evenwijdig met k en hebben afstand 3 tot k . Om vergelijkingen van deze lijnen te vinden, ga je uit van de vorm $l: 5x + 12y = c$.
 Neem een punt P op k , los de vergelijking $d(P, l) = 3$ op en geef vergelijkingen van l .

- A37** Gegeven is de lijn $k: 3x + 4y = 12$.
 □ ⊗ * **a** Bereken exact de afstand tussen de lijnen k en $l: 3x + 4y = 20$.
b Stel vergelijkingen op van de lijnen m die op afstand 2 van k liggen.
c Bereken de coördinaten van de punten A op de x -as die op afstand 3 van k liggen.

- A38** Bereken exact de coördinaten van de punten P op de parabool $y = 2x^2$
 ⊗ * die afstand $\sqrt{5}$ tot de lijn $k: x - 2y = 2$ hebben.

E39 Gegeven zijn de punten $A(4, 0)$ en $B(6, 0)$.

***** Stel vergelijkingen op van de lijnen k waarvoor geldt $d(A, k) = \sqrt{2}$ en $d(B, k) = 2\sqrt{2}$.

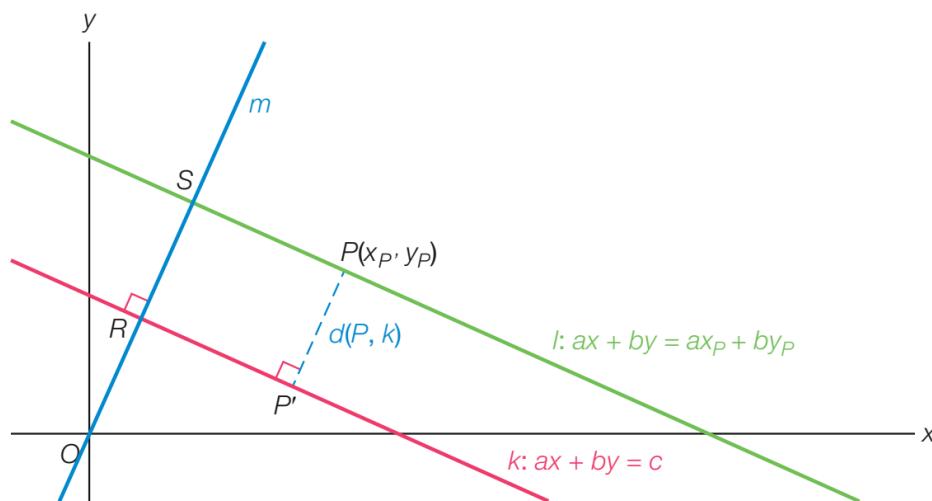
E40 In de figuur hieronder zie je het punt $P(x_P, y_P)$ en de lijn $k: ax + by = c$.

□ ⊗ * In deze opgave ga je bewijzen dat voor de afstand van P tot k geldt

$$d(P, k) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \text{ Je gebruikt daarbij de lijn } l: ax + by = ax_P + by_P$$

door P evenwijdig met k en de lijn m door O loodrecht op k . De lijn m snijdt k en l in de punten R en S .

Omdat m loodrecht op k en l staat, geldt $d(P, k) = d(S, R)$.



a Toon aan dat $y = \frac{b}{a}x$ een vergelijking van m is.

b Toon aan dat R het punt $\left(\frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2}\right)$ is en S het punt

$$\left(\frac{a^2x_P + aby_P}{a^2 + b^2}, \frac{abx_P + b^2y_P}{a^2 + b^2}\right).$$

c Licht toe dat $d(S, R) = \sqrt{\left(\frac{a^2x_P + aby_P - ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{abx_P + b^2y_P - bc}{a^2 + b^2}\right)^2}$

en toon aan dat dit te herleiden is tot

$$d(S, R) = \frac{\sqrt{(a(ax_P + by_P - c))^2 + (b(ax_P + by_P - c))^2}}{a^2 + b^2}.$$

d Stel $E = ax_P + by_P - c$. Daarmee krijg je $d(S, R) = \frac{\sqrt{(aE)^2 + (bE)^2}}{a^2 + b^2}$.

Toon aan dat deze formule te herleiden is tot $d(S, R) = \frac{|E|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ en maak het bewijs af.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan werken met het midden van een lijnstuk en de afstand tussen twee punten. ► **OPGAVE C4 THEORIE A**
- ☐ Ik kan een vergelijking opstellen van een lijn die door een gegeven punt gaat en loodrecht staat op een gegeven lijn. ► **OPGAVE C5 THEORIE B**
- ☐ Ik kan de afstand van een punt tot een lijn berekenen. ► **OPGAVE C6 THEORIE B**
- ☐ Ik kan werken met de afstandsformule. ► **OPGAVE C7 THEORIE C, OPGAVE 36**

- C4** Gegeven zijn de punten $A(2p, 7)$ en $B(3, p + 2)$. Het punt M is het midden van het lijnstuk AB .
- a** Neem $p = 1$ en bereken exact de afstand tussen A en B .
 - b** Bereken exact de afstand tussen A en B als $y_M = 6$.
 - c** Schrijf de afstand d tussen A en B in de vorm $d = \sqrt{ap^2 + bp + c}$.

- C5** **a** De lijn k gaat door het punt $A(-2, 5)$ en staat loodrecht op de lijn $l: 2x - 3y = 8$.
Stel van k een vergelijking op van de vorm $y = ax + b$.
- b** De lijn m gaat door het punt $B(9, -1)$ en staat loodrecht op de lijn $n: y = -3x - 5$.
Stel van m een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

- C6** Gegeven zijn de lijn $k: x + 2y = 3$ en het punt $A(4, -3)$.
- a** Bereken exact de coördinaten van de loodrechte projectie A' van A op k .
 - b** Bereken exact de afstand van A tot k .

- C7** **a** Stel vergelijkingen op van de lijnen k die door het punt $A(-2, 0)$ gaan en op afstand $\sqrt{13}$ van het punt $B(3, -1)$ liggen.
- b** Stel vergelijkingen op van de lijnen l die op afstand $\sqrt{5}$ van de lijn $m: x + 2y = 4$ liggen.

Antwoorden

- C4** **a** $d(A, B) = \sqrt{17}$
b $d(A, B) = \sqrt{13}$
c $d = \sqrt{5p^2 - 22p + 34}$
- C5** **a** $k: y = -1\frac{1}{2}x + 2$
b $m: x - 3y = 12$

- C6** **a** $A'(5, -1)$
b $d(A, k) = \sqrt{5}$
- C7** **a** $k_1: y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$ en $k_2: y = -1\frac{1}{2}x - 3$
b $l_1: x + 2y = -1$ en $l_2: x + 2y = 9$

7.3 Cirkelvergelijkingen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt een vergelijking van een cirkel opstellen van de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.
- Je kunt met behulp van kwadraatafsplitsen de straal en de coördinaten van het middelpunt van een cirkel berekenen bij een cirkelvergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

041



Gegeven is het punt $M(1, 4)$ en het variabele punt $P(x, y)$.

Voor de afstand d tussen M en P geldt $d^2 = (x - 1)^2 + (y - 4)^2$.

a Licht dit toe.

Voor $d = 5$ krijg je de vergelijking $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

b Licht toe dat deze vergelijking hoort bij de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal $r = 5$.

c Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal 10.

d Geef van de cirkel met vergelijking $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ de coördinaten van het middelpunt en de lengte van de straal.

Theorie A De cirkelvergelijking $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

Voor een punt $P(x, y)$ op afstand r van $M(x_M, y_M)$ geldt

$d(P, M) = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}$ en $d(P, M) = r$, dus

$$\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} = r.$$

Kwadrateren geeft $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$. Hiermee is een vergelijking opgesteld van de cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r .

Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r is $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

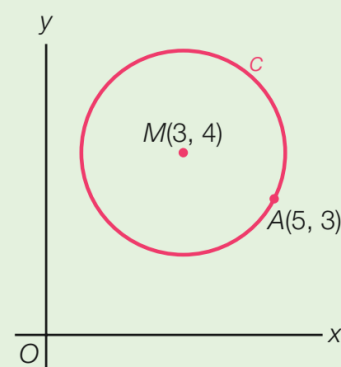
In de figuur hiernaast zie je de cirkel c met middelpunt $M(3, 4)$ die door het punt $A(5, 3)$ gaat.

Uit $M(3, 4)$ volgt dat de vergelijking van c van de vorm $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ is.

$A(5, 3)$ ligt op c , dus $r = d(A, M) = \sqrt{(3 - 5)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{5}$.

Dus c : $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$.

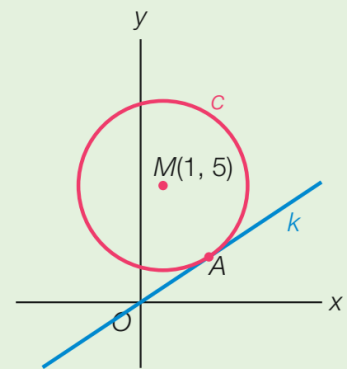
Hoe je een vergelijking opstelt van een cirkel waarvan de coördinaten van het middelpunt en een vergelijking van een raaklijn zijn gegeven, zie je op de volgende bladzijde.



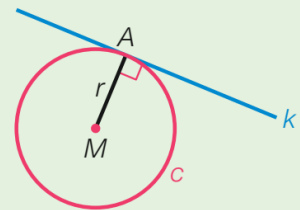
In de figuur hiernaast raakt de cirkel c met middelpunt $M(1, 5)$ de lijn $k: 2x - 3y = 0$ in het punt A . Omdat een raaklijn aan een cirkel loodrecht staat op de verbindingslijn van het middelpunt en het raakpunt, is de straal van de cirkel gelijk aan de afstand tussen M en A , dus $r = d(M, A) = d(M, k)$.

$$r = d(M, k) = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-13|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}, \text{ dus}$$

$$c: (x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 13.$$



Voor de cirkel met middelpunt M en straal r die de lijn k raakt in het punt A , geldt $MA \perp k$ en $r = d(M, A) = d(M, k)$.



Voorbeeld

De cirkels c en d hebben straal 3. De middelpunten M en N van c en d liggen op de lijn $k: y = \frac{1}{2}x - 2$. Verder raakt c de y -as en raakt d de x -as zoals in de figuur hiernaast. Stel van c en van d een vergelijking op.

Uitwerking

c raakt de y -as en de straal is 3, dus $x_M = -3$.
 $x = -3$ en M op k geeft $y = \frac{1}{2} \cdot -3 - 2 = -3\frac{1}{2}$.

Dus $M(-3, -3\frac{1}{2})$ en $c: (x + 3)^2 + (y + 3\frac{1}{2})^2 = 9$.

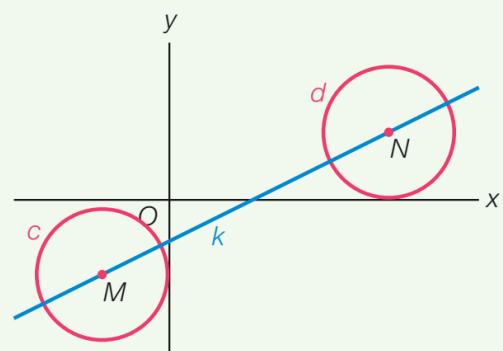
d raakt de x -as en de straal is 3, dus $y_N = 3$.

$y = 3$ en N op k geeft $\frac{1}{2}x - 2 = 3$

$$\frac{1}{2}x = 5$$

$$x = 10$$

Dus $N(10, 3)$ en $d: (x - 10)^2 + (y - 3)^2 = 9$.



R42

In de theorie op de vorige bladzijde werd bij het opstellen van de vergelijking van c de straal r berekend met $r = d(A, M)$.

Je kunt bij het opstellen van de vergelijking van c ook r^2 berekenen door de coördinaten van punt A in te vullen in $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$.

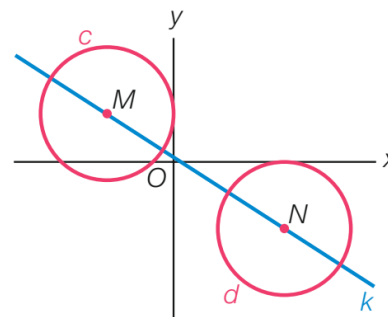
a Doe dat.

b Welke manier heeft je voorkeur? Licht toe.

43 Stel een vergelijking op van de cirkel

- a c_1 met middelpunt $M_1(2, -5)$ en straal 3
 b c_2 met middelpunt $M_2(3, 4)$ die door de oorsprong gaat
 c c_3 met middelpunt $M_3(-3, 5)$ die door het punt $A(-1, 2)$ gaat
 d c_4 met middelpunt $M_4(3, 1)$ die de y -as raakt
 e c_5 met middelpunt $M_5(-4, 2)$ die de x -as raakt.

44 De cirkels c en d hebben straal 10, c raakt de y -as en d raakt de x -as. De middelpunten M en N van c en d liggen op de lijn $k: y = -\frac{3}{5}x$ zoals in de figuur hiernaast. Stel van c en van d een vergelijking op.



A45 Gegeven zijn de punten $A(3, 7)$ en $B(9, 1)$.

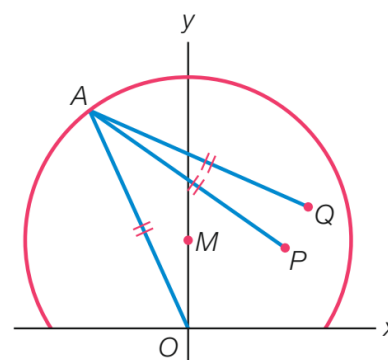
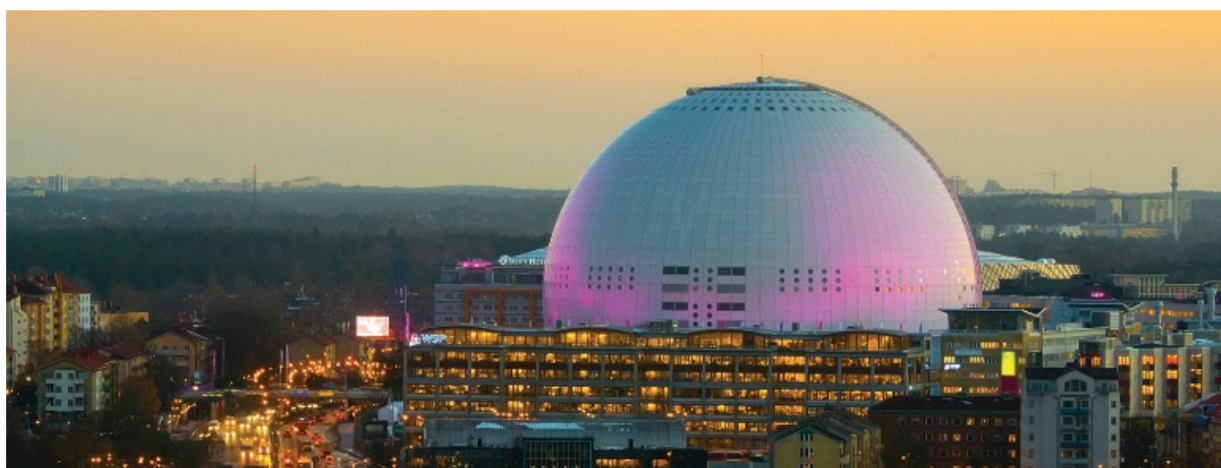
- a cirkel c_1 met middelpunt A die de x -as raakt
 b cirkel c_2 met middelpunt B die door A gaat
 c cirkel c_3 met middellijn AB
 d cirkels c_4 en c_5 , die straal 2 hebben, de y -as raken en waarvan de middelpunten op de lijn $k: 5x + 2y = 12$ liggen.

A46 De Avicii Arena in Stockholm is een bolvormige hal met een hoogte van 85 meter en een straal van 55 meter.

In de hal worden regelmatig ijshockeywedstrijden gespeeld.

In de figuur hiernaast is een doorsnede van de Arena in een assenstelsel getekend. O is het midden van het ijshockeyveld, M is het middelpunt van de bol en A is een televisiecamera die op een hoogte van 74 meter boven de grond hangt. P en Q zijn toeschouwers op de tribune met $x_P = 33$ en $x_Q = 41$. De camera hangt even ver van het midden O als van beide toeschouwers.

Bereken algebraïsch hoeveel meter de toeschouwers P en Q uit elkaar zitten. Rond af op één decimaal.



De Avicii Arena in Stockholm

A47 De cirkel c gaat door de punten $P(-1, p)$, $Q(-2, 6)$ en $R(5, 7)$.

⊗* Bereken exact p in het geval

- a** QR een middellijn van c is
- b** PR een middellijn van c is.

E48 Gegeven is de cirkel c met middelpunt $M(p, q)$ en straal $\sqrt{13}$.

***** Cirkel c gaat door de punten $A(4, -1)$ en $B(-1, -2)$.

Bereken exact p en q .

49 **a** Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(5, 3)$ die de lijn $k: y = x$ raakt.

b Stel een vergelijking op van de cirkel d met middelpunt $N(-1, 3)$ die de lijn $m: x + 2y = 0$ raakt.

50 Gegeven is de lijn $k: 2x + 3y = 12$ die de x -as snijdt in het punt A en de y -as snijdt in het punt B .

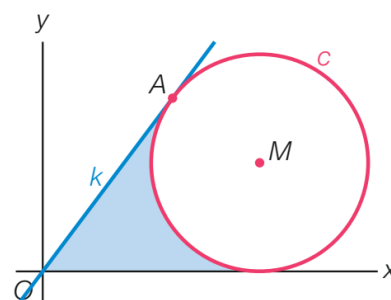
Stel een vergelijking op van de

- a** cirkel c_1 met middelpunt $M_1(8, 3)$ die k raakt
- b** cirkels c_2 en c_3 waarvan de middelpunten op k liggen, die straal 8 hebben en die de x -as raken
- c** cirkel c_4 met middellijn AB .

A51 De cirkel c heeft middelpunt $M(4, 2)$. De lijn $k: y = 1\frac{1}{3}x$ raakt c in het punt A . Zie de figuur hiernaast.

Cirkel c raakt ook de x -as.

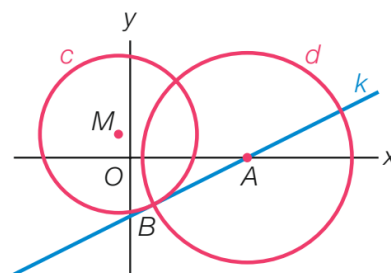
- a** Bewijs dit.
- b** Bereken de oppervlakte van het blauwe gebied. Rond af op twee decimalen.



A52 De lijn $k: x - 2y = 10$ snijdt de x -as in het punt A .

⊗* Cirkel c met middelpunt $M(-1, 2)$ raakt k in het punt B . Cirkel d met middelpunt A gaat door B . Zie de figuur hiernaast.

- a** Stel van zowel c als d een vergelijking op.
- b** Van cirkel e is het lijnstuk AM een middellijn. Onderzoek op algebraïsche wijze of e door B gaat.



E53 Er zijn twee cirkels met straal 5 die de lijn $k: 3x - 4y = 10$ raken in het punt $A(2, -1)$.

***** Stel van elk van deze cirkels een vergelijking op.

O54 Gegeven is de cirkel c met middelpunt $M(4, -1)$ en straal 6.

⊗* Stel van c een vergelijking op en herleid deze tot de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Theorie B De cirkelvergelijking $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

In opgave 54 heb je gezien dat bij de cirkel met middelpunt $M(4, -1)$ en straal 6 de vergelijking $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 19 = 0$ hoort. De vergelijking $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 19 = 0$ is van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Heb je te maken met een cirkel waarvan de vergelijking is gegeven in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, dan krijg je met **kwadraatafsplitsen** een vergelijking van de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ waaruit de straal en de coördinaten van het middelpunt zijn af te lezen.

Om de vergelijking $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ te herleiden tot de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ ga je bij $x^2 - 4x$ en bij $y^2 + 6y$ het kwadraat afsplitsen.

Om bij $x^2 - 4x$ het kwadraat af te splitsen, vul je eerst $x^2 - 4x$ aan tot een kwadraat. Je krijgt $x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x - 2)^2 - 4$.

Bij $y^2 + 6y$ krijg je $y^2 + 6y = y^2 + 6y + 9 - 9 = (y + 3)^2 - 9$.

Dus $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 3 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Dus van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ is het middelpunt $(2, -3)$ en de straal 4.

Om in het voorbeeld hieronder het kwadraat af te splitsen bij $x^2 + 8x$, vul je eerst $x^2 + 8x$ aan tot $x^2 + 8x + 16$, want dit is $(x + 4)^2$. Merk op dat 4 de helft is van 8 en dat 16 het kwadraat is van 4. Je krijgt $x^2 + 8x = x^2 + 8x + 16 - 16 = (x + 4)^2 - 16$.

En omdat de helft van 3 gelijk is aan $1\frac{1}{2}$, krijg je

$$y^2 - 3y = y^2 - 3y + (1\frac{1}{2})^2 - (1\frac{1}{2})^2 = (y - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4}.$$

Voorbeeld

Bereken van de cirkel $x^2 + y^2 + 8x - 3y + 6 = 0$ de straal en de coördinaten van het middelpunt.

Uitwerking

$$x^2 + y^2 + 8x - 3y + 6 = 0$$

$$x^2 + 8x + y^2 - 3y + 6 = 0$$

$$(x + 4)^2 - 16 + (y - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 6 = 0$$

$$(x + 4)^2 + (y - 1\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{4}$$

Dus de straal is $\sqrt{12\frac{1}{4}} = 3\frac{1}{2}$ en het middelpunt is $(-4, 1\frac{1}{2})$.

Merk op dat niet elke vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ een cirkel voorstelt. Zo is $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 15 = 0$ te schrijven als $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = -2$, en dit is niet de vergelijking van een cirkel.

55 Bereken van de cirkel de straal en de coördinaten van het middelpunt.



- a** $c_1: x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$
- b** $c_2: x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$
- c** $c_3: x^2 + y^2 + 5x + 3y + 3 = 0$
- d** $c_4: x^2 + y^2 - 7x + 8y = 0$

56 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$ en de punten



$A(-1, 5)$, $B(-4, 0)$ en $C(-2, 1)$.

Van c is het middelpunt $M(-3, 4)$ en de straal $r = \sqrt{10}$.

- a** Toon dit aan.
- b** Bereken exact $d(A, M)$. Ligt A op, binnen of buiten c ? Licht toe.
- c** Bereken exact $d(B, M)$. Ligt B op, binnen of buiten c ? Licht toe.
- d** Onderzoek op algebraïsche wijze of C op, binnen of buiten c ligt.

A57 Onderzoek op algebraïsche wijze of



- a** het punt $A(-1, 2)$ op, binnen of buiten de cirkel

$c_1: x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ ligt

- b** de oorsprong op, binnen of buiten de cirkel

$c_2: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0$ ligt

- c** het punt $B(1, 4)$ op, binnen of buiten de cirkel

$c_3: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ ligt.

- A58 a** Bereken exact voor welke p het punt $P(1, p)$ binnen de cirkel $c_1: x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ ligt.



- b** Bereken exact voor welke q het punt $Q(1, 5)$ buiten de cirkel $c_2: x^2 + y^2 - 8x - 2y + q = 0$ ligt.

E59 Van de cirkel $c: x^2 + y^2 + ax + by = 71$ is de straal 10 en ligt het middelpunt op de lijn $k: x + 2y = 1$.



Bereken exact a en b .

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan een vergelijking van een cirkel opstellen van de vorm
 $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

► OPGAVE C8
THEORIE A

☐ Ik kan met behulp van kwadraatafsplitsen de straal en de coördinaten van het middelpunt van een cirkel berekenen bij een cirkelvergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

► OPGAVE C9
THEORIE B

C8 Gegeven zijn de punten $A(-1, 4)$ en $B(7, 2)$.

Stel een vergelijking op van de

- a** cirkel c_1 met middelpunt A en straal 8
- b** cirkel c_2 met middelpunt B die de y -as raakt
- c** cirkel c_3 met middellijn AB
- d** cirkels c_4 en c_5 , die straal 3 hebben, de x -as raken en waarvan de middelpunten op de lijn $k: y = 1\frac{1}{2}x$ liggen.

- C9** **a** Bereken van de cirkel $c: x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$ de straal r en de coördinaten van het middelpunt M .
- b** Onderzoek op algebraïsche wijze of het punt $A(5, -1)$ op, binnen of buiten de cirkel $d: x^2 + y^2 - 2x + 8y - 7 = 0$ ligt.

Antwoorden

C8 a $c_1: (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 64$

b $c_2: (x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 49$

c $c_3: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 17$

d $c_4: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$

$c_5: (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$

C9 a $r = 6$ en $M(-5, 3)$

b A ligt buiten d

7.4 Afstanden en raaklijnen bij cirkels

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de afstand van een punt tot een cirkel, de afstand tussen twee cirkels en de afstand van een lijn tot een cirkel berekenen.
- Je kunt een vergelijking opstellen van een raaklijn aan een cirkel door een gegeven punt op de cirkel.
- Je kunt vergelijkingen opstellen van raaklijnen aan een cirkel
 - die door een gegeven punt buiten de cirkel gaan
 - die een gegeven richtingscoëfficiënt hebben.

60 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$.

□ ⊗ * De punten $P(1, 6)$ en $Q(6, -2)$ liggen buiten c .

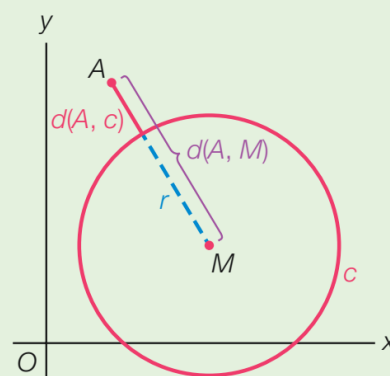
- Toon dit aan.
- Is de afstand van P tot c groter dan of kleiner dan de afstand van Q tot c ? Licht toe.

Theorie A Afstanden bij cirkels

Hiernaast is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$ met middelpunt $M(5, 3)$ en straal 4 van opgave 60 getekend. Verder zie je het punt $A(2, 8)$ dat buiten cirkel c ligt. Om de afstand van het punt A tot de cirkel te berekenen, gebruik je dat de afstand van A tot c gelijk is aan de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen A en c .

Hiernaast zie je dat voor de afstand van A tot c geldt dat $d(A, c) = d(A, M) - r$.

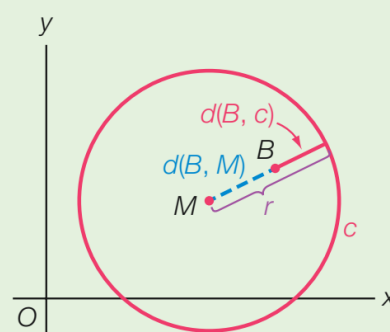
Omdat $r = 4$ en $d(A, M) = \sqrt{(5-2)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{34}$ is $d(A, c) = \sqrt{34} - 4$.



De afstand van een punt tot een kromme is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen het punt en de kromme.

Hiernaast zie je nogmaals de cirkel c met middelpunt $M(5, 3)$ en straal 4. Verder zie je het punt $B(7, 4)$ dat binnen cirkel c ligt. Je ziet dat voor de afstand van B tot c geldt dat $d(B, c) = r - d(B, M)$.

Omdat $r = 4$ en $d(B, M) = \sqrt{(5-7)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{5}$ is $d(B, c) = 4 - \sqrt{5}$.



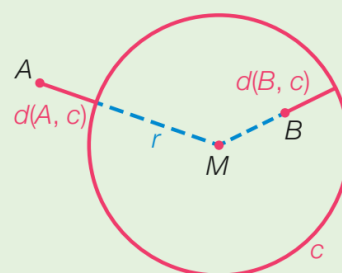
DE AFSTAND VAN EEN PUNT TOT EEN CIRKEL

Voor punt A buiten c geldt:

$$d(A, c) = d(A, M) - r$$

Voor punt B binnen c geldt:

$$d(B, c) = r - d(B, M)$$



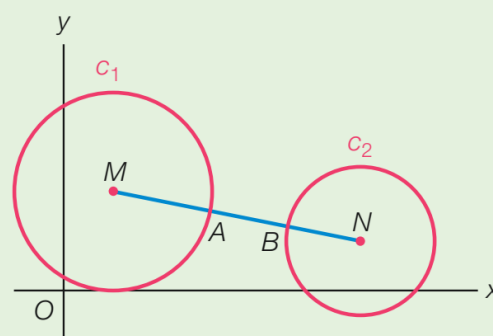
Hiernaast zie je de cirkel c_1 met middelpunt $M(1, 2)$ en straal $r_1 = 2$ en de cirkel c_2 met middelpunt $N(6, 1)$ en straal $r_2 = 1\frac{1}{2}$.

Het lijnstuk MN snijdt c_1 in het punt A en c_2 in het punt B . De lengte van het lijnstuk AB is de afstand tussen c_1 en c_2 , dus $d(c_1, c_2) = d(A, B)$.

Er geldt $d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2$.

Omdat $d(M, N) = \sqrt{(6-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}$,

$r_1 = 2$ en $r_2 = 1\frac{1}{2}$, is $d(c_1, c_2) = \sqrt{26} - 2 - 1\frac{1}{2} = \sqrt{26} - 3\frac{1}{2}$.



Voorbeeld

Op de lijn $k: x + 4y = 16$ ligt het punt M met $x_M = 2$ en het punt N met $x_N = 8$. De cirkels c met middelpunt M en d met middelpunt N raken de x -as.

Bereken algebraïsch de afstand tussen c en d . Rond het eindantwoord af op twee decimalen.

Uitwerking

M op k geeft $2 + 4y = 16$

$$4y = 14$$

$$y = 3\frac{1}{2}$$

Dus $M(2, 3\frac{1}{2})$ en $r_c = 3\frac{1}{2}$.

N op k geeft $8 + 4y = 16$

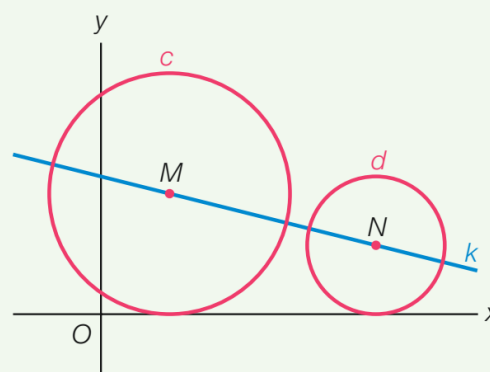
$$4y = 8$$

$$y = 2$$

Dus $N(8, 2)$ en $r_d = 2$.

$$d(M, N) = \sqrt{(8-2)^2 + (2-3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{38\frac{1}{4}}$$

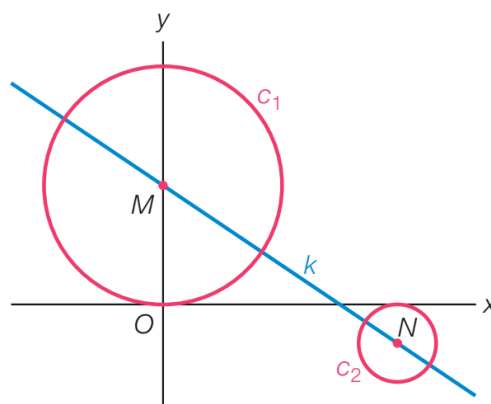
$$\text{Dus } d(c, d) = \sqrt{38\frac{1}{4}} - 3\frac{1}{2} - 2 \approx 0,68.$$



61 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ en de punten $A(2, 1)$, $B(-1, 5)$ en $C(9, 4)$.
Bereken exact.

- a** $d(A, c)$ **b** $d(B, c)$ **c** $d(C, c)$

62 Op de lijn $k: 2x + 3y = 18$ ligt het punt M met $y_M = 6$ en het punt N met $x_N = 12$. De cirkels c_1 met middelpunt M en c_2 met middelpunt N raken de x -as. Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact de afstand tussen c_1 en c_2 . Schrijf je antwoord in de vorm $a\sqrt{b} + c$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.

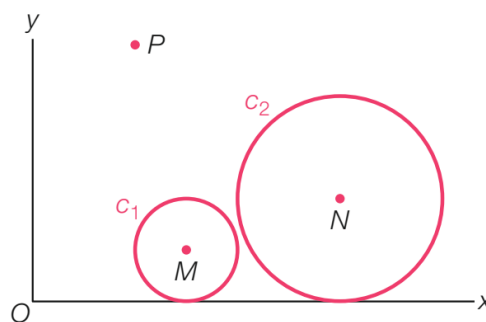


A63 Gegeven zijn het punt $P(2, 5)$ en de cirkels $c_1: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ en $c_2: x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$. Zie de figuur hiernaast.

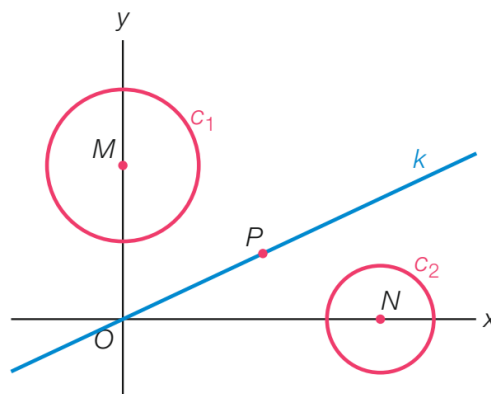
- a** Bereken exact $d(c_1, c_2)$.

De lijn $l: 3x - 4y = 0$ raakt beide cirkels.

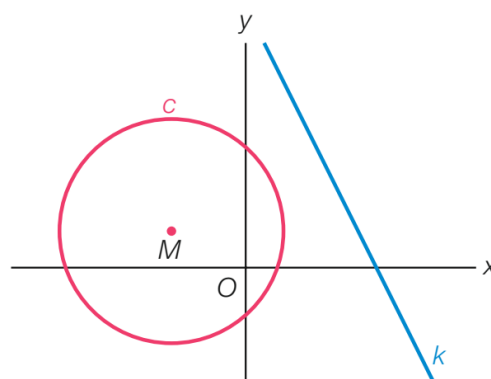
- b** Toon met een berekening aan dat dit klopt.
c Stel een vergelijking op van de cirkel c_3 met middelpunt P die l raakt.



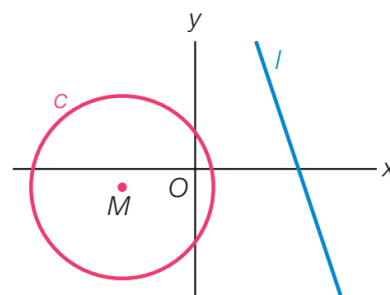
A64 Gegeven zijn de cirkels $c_1: x^2 + y^2 - 12y + 27 = 0$ en $c_2: x^2 + y^2 - 20x + 96 = 0$ en de lijn $k: x - 2y = 0$. Het punt P ligt op k , waarbij geldt dat $d(P, c_1) = d(P, c_2)$.
Bereken de coördinaten van P en de afstand van P tot de cirkels. Rond af op twee decimalen.



65 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ met middelpunt M en de lijn $k: 2x + y = 7$. Zie de figuur hiernaast.
Bewijs dat de afstand van k tot c gelijk is aan $2\sqrt{5} - 3$.

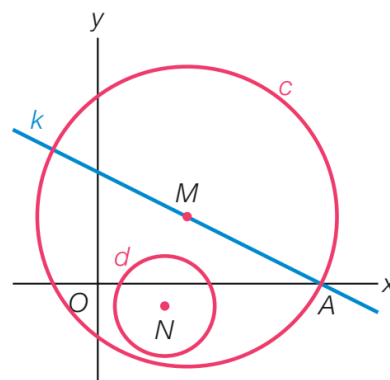


- A66** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$ en de lijn $l: y = -3x + 17$. Zie de figuur hiernaast. Onderzoek op algebraïsche wijze of de afstand van l tot c groter dan, kleiner dan, of gelijk is aan de straal van c .



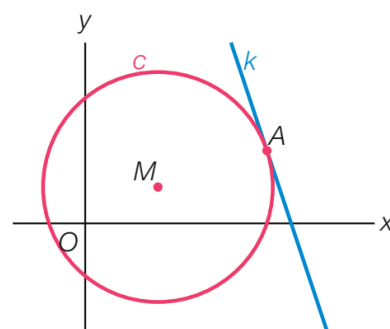
- A67** Gegeven zijn de cirkels $c: x^2 + y^2 - 8x - 6y - 20 = 0$ en $d: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$. Het middelpunt van c is M en het middelpunt van d is N . De lijn k door M snijdt c op de positieve x -as in het punt A . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact $d(k, d)$.
- Bereken exact $d(c, d)$.



- O68** Gegeven zijn de cirkel $c: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ met middelpunt M en het punt $A(5, 2)$ op c . De lijn k raakt c in A . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn l door M en A .
- Licht toe dat je nu ook de richtingscoëfficiënt van k kunt berekenen.
- Stel een vergelijking op van k .



Theorie B Raaklijn aan cirkel in gegeven raakpunt

In opgave 68 heb je een vergelijking opgesteld van een raaklijn aan een cirkel in een gegeven raakpunt. Gebruik bij dit soort situaties het volgende werkschema.

Werkschema: opstellen van een vergelijking van een raaklijn k aan een cirkel c met middelpunt M in een gegeven punt A op c

- Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A .
- Gebruik $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, om de richtingscoëfficiënt rc_k van k te berekenen.
- Gebruik rc_k en de coördinaten van A om een vergelijking van k op te stellen.

Voorbeeld

Op de cirkel $c: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$ met middelpunt M ligt het punt $A(2, 3)$. Zie de figuur hiernaast.
Stel een vergelijking op van de lijn k die c raakt in A .

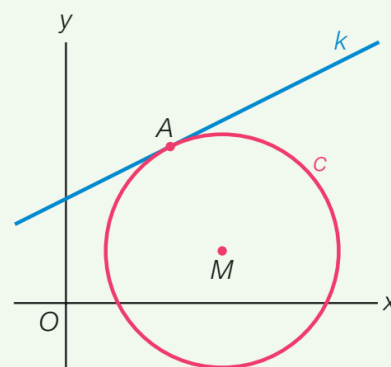
Uitwerking

Lijn l door $M(3, 1)$ en A heeft $rc_l = \frac{3-1}{2-3} = -2$.

$k \perp l$, dus $rc_k \cdot -2 = -1$ en dit geeft $rc_k = \frac{1}{2}$.

$$k: y = \frac{1}{2}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 2 + b = 3 \\ 1 + b = 3 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

Dus $k: y = \frac{1}{2}x + 2$.



69 Zie het voorbeeld.



a Stel een vergelijking op van de lijn m die c raakt in het punt $B(2, -1)$.

b Toon aan dat de lijn $p: y = 2x$ raakt aan c .

c Cirkel c snijdt de x -as in de punten C en D met $x_C < x_D$.

Stel een vergelijking op van de lijn q die c raakt in C .

70 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$. De punten A en B met $x_A = x_B = 3$ liggen op c . De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B . Zie hiernaast.

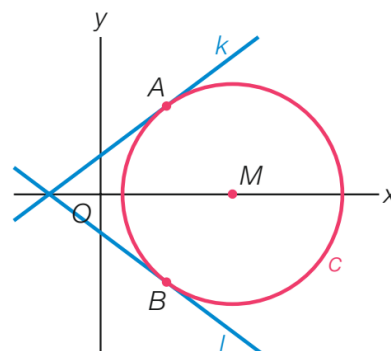


a Stel van k en van l een vergelijking op.

b Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen k en l .

c De lijnen m en n raken de cirkel en gaan door de oorsprong.

Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen m en n .



71 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 + 6x - 6y - 7 = 0$.



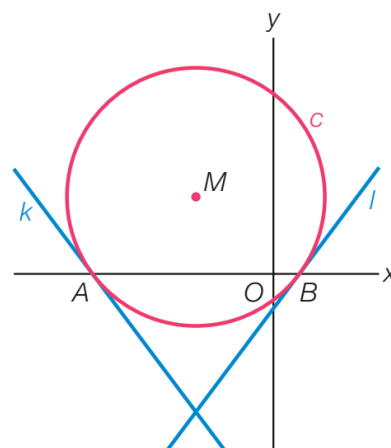
De cirkel snijdt de x -as in de punten A en B . De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B . Zie hiernaast.

a Stel van k en van l een vergelijking op.

De cirkel snijdt de y -as in de punten C en D met $y_C < y_D$. De lijn p raakt c in C en de lijn q raakt c in D .

b Stel van p en van q een vergelijking op.

c Onderzoek met een berekening of de hoek tussen k en l groter dan, kleiner dan, of gelijk is aan de hoek tussen p en q .



72

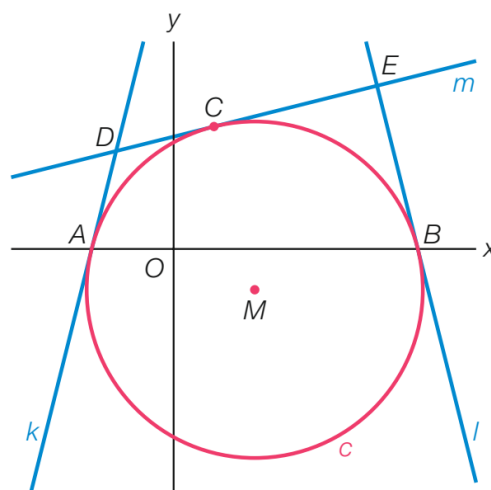


- a Lijn k raakt de cirkel $c_1: x^2 + y^2 - 2x + 8y + 4 = 0$ in het punt $A(4, -2)$.
 Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.
- b De cirkel c_2 met middelpunt $M_2(-3, 4)$ raakt de lijn $m: y = 2x - 5$.
 Stel van c_2 een vergelijking op van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

A73



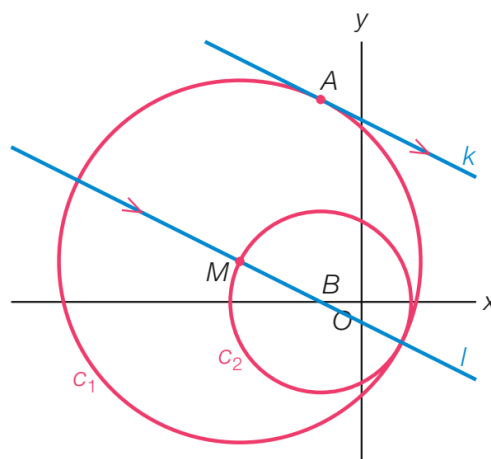
- Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$ met middelpunt M . De cirkel snijdt de x -as in de punten A en B . Verder ligt het punt $C(1, 3)$ op c . De lijn k raakt c in A , de lijn l raakt c in B en de lijn m raakt c in C . De lijnen k en m snijden elkaar in het punt D en de lijnen l en m snijden elkaar in het punt E . Zie de figuur hiernaast.
- a Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen k en m .
- b Bereken in graden nauwkeurig $\angle AMB$.
- c Bereken exact de afstand van E tot c .



A74



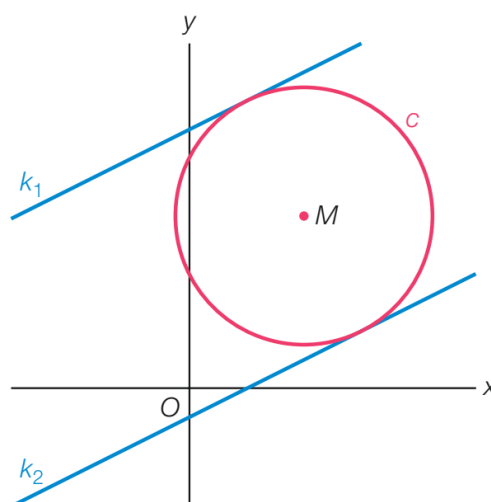
- Gegeven is de cirkel $c_1: x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$ met middelpunt M . De lijn k raakt c_1 in het punt A met $x_A = -1$. De lijn l gaat door M en is evenwijdig met k . Het punt B is het snijpunt van l met de x -as. De cirkel c_2 gaat door M en heeft middelpunt B . Zie de figuur hiernaast. Stel een vergelijking van c_2 op.



O75



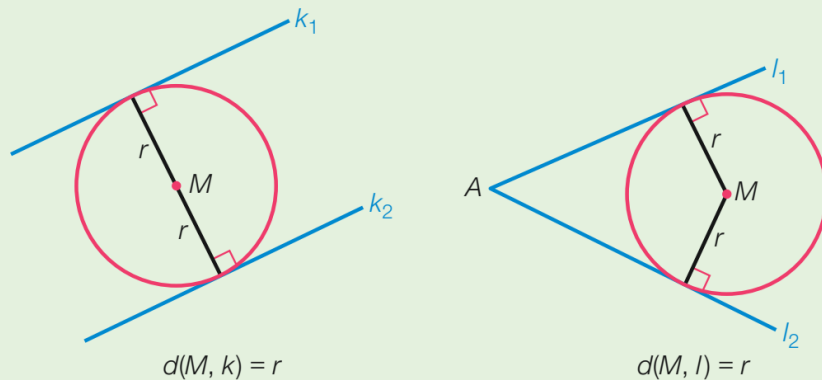
- Gegeven is de cirkel $c: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$ met middelpunt M . Er zijn twee lijnen k met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$ die c raken. Voor deze lijnen geldt $y = \frac{1}{2}x + b$. Uit het bovenstaande volgt $|2b - 4| = 5$.
- a Toon dit aan.
- b Bereken de mogelijke waarden van b en geef vergelijkingen van k_1 en k_2 .



Theorie C Raaklijnen aan cirkels

In opgave 75 heb je vergelijkingen opgesteld van de lijnen k met een gegeven richtingscoëfficiënt die de cirkel met middelpunt M en straal r raken. Je gebruikte daarbij dat $d(M, k) = r$.

In het voorbeeld worden vergelijkingen opgesteld van de lijnen l die een cirkel met middelpunt M en straal r raken en door een punt A buiten de cirkel gaan. Daarbij wordt gebruikt dat $d(M, l) = r$.



Voorbeeld

Gegeven is de cirkel $c: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ en het punt $A(9, 2)$ buiten c . Stel langs algebraïsche weg vergelijkingen op van de lijnen l die door A gaan en c raken.

Uitwerking

Van c is $M(2, 3)$ en $r = 5$.

$l: y = ax + b$

$A(9, 2)$ op l geeft $9a + b = 2$, dus $b = 2 - 9a$.

$l: y = ax + 2 - 9a$ oftewel $l: ax - y + 2 - 9a = 0$

$$d(M, l) = r \text{ geeft } \frac{|2a - 3 + 2 - 9a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$$

$$|-7a - 1| = 5\sqrt{a^2 + 1}$$

kwadrateren geeft

$$49a^2 + 14a + 1 = 25a^2 + 25$$

$$24a^2 + 14a - 24 = 0$$

$$12a^2 + 7a - 12 = 0$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-12) = 625, \text{ dus } \sqrt{D} = 25$$

$$a = \frac{-7 + 25}{24} = \frac{3}{4} \vee a = \frac{-7 - 25}{24} = -1\frac{1}{3}$$

$$a = \frac{3}{4} \text{ geeft } b = 2 - 9 \cdot \frac{3}{4} = -4\frac{3}{4}, \text{ dus } l_1: y = \frac{3}{4}x - 4\frac{3}{4}.$$

$$a = -1\frac{1}{3} \text{ geeft } b = 2 - 9 \cdot -1\frac{1}{3} = 14, \text{ dus } l_2: y = -1\frac{1}{3}x + 14.$$

76 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 = 10$.

☐⊙ Stel langs algebraïsche weg vergelijkingen op van de lijnen

- a l met richtingscoëfficiënt 3 die c raken
- b m die door het punt $A(10, 0)$ gaan en c raken.

77 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$.

☐⊙*

- a Stel een vergelijking op van de lijn k die c raakt in het punt $A(4, 5)$.
- b Stel langs algebraïsche weg vergelijkingen op van de lijnen m met richtingscoëfficiënt 3 die c raken.
- c Stel langs algebraïsche weg vergelijkingen op van de lijnen n die door het punt $B(9, 0)$ gaan en c raken.

A78 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$.

☐⊙*

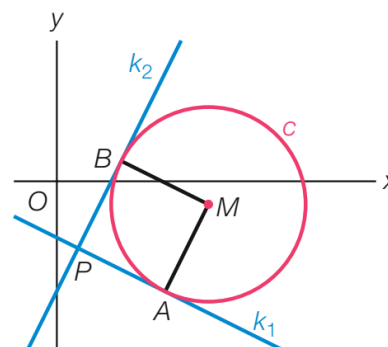
- a Stel een vergelijking op van de lijn k die c raakt in het punt $A(-3, 1)$.
- b Stel vergelijkingen op van de lijnen m die c raken en loodrecht staan op de lijn $n: 4x - y = 1$.
- c Stel langs algebraïsche weg vergelijkingen op van de lijnen p die door het punt $B(6, -1)$ gaan en c raken.

A79 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 14x + 2y + 30 = 0$ met

*

middelpunt M en het punt $P(1, -3)$. De lijnen k_1 en k_2 door P raken c in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.

Bewijs dat vierhoek $AMBP$ een vierkant is.



Geschiedenis Analytische meetkunde

Meetkunde waarbij de principes van algebra, vaak in combinatie met assenstelsels, worden gebruikt, wordt analytische meetkunde genoemd. Met de coördinaten van het assenstelsel worden vergelijkingen van bijvoorbeeld lijnen en cirkels opgesteld. Een assenstelsel wordt ook wel een *Cartesisch coördinatenstelsel* genoemd en dankt deze naam aan René Descartes (1596-1650). Veel wiskundigen zijn van mening dat de introductie van de analytische meetkunde door Descartes het begin van de moderne wiskunde is. In 1637 publiceerde Descartes het belangrijke *Discours de la Méthode*. In het bijbehorende essay *La Géométrie* formuleerde hij de volgende drie stellingen.

- 1 Ieder vraagstuk over grootheden kan teruggebracht worden tot een meetkundig probleem.
- 2 Ieder meetkundig probleem kan worden teruggebracht tot een algebraïsch probleem.
- 3 Ieder algebraïsch probleem kan worden teruggebracht tot het oplossen van één of meer vergelijkingen.



René Descartes

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de afstand van een punt tot een cirkel, de afstand tussen twee cirkels en de afstand van een lijn tot een cirkel berekenen.
- ☐ Ik kan een vergelijking opstellen van een raaklijn aan een cirkel door een gegeven punt op de cirkel.
- ☐ Ik kan vergelijkingen opstellen van raaklijnen aan een cirkel
- die door een gegeven punt buiten de cirkel gaan
 - die een gegeven richtingscoëfficiënt hebben.

► **OPGAVE C10**
THEORIE A,
OPGAVE 65

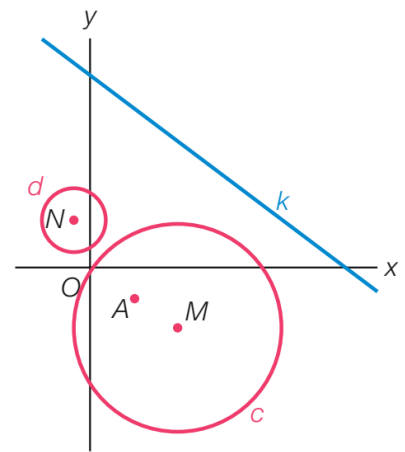
► **OPGAVE C11**
THEORIE B

► **OPGAVE C12**
THEORIE C

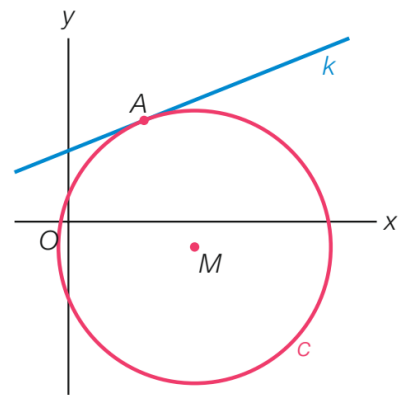
C10 Gegeven zijn de cirkels $c: x^2 + y^2 - 12x + 8y + 3 = 0$ en $d: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$, het punt $A(3, -2)$ en de lijn $k: 3x + 4y = 52$.

Bereken exact.

- a $d(A, c)$
- b $d(c, d)$
- c $d(k, c)$



C11 De lijn k raakt de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x + 2y - 3 = 0$ in het punt A met $x_A = 3$. Zie de figuur hiernaast. Stel een vergelijking op van k .



C12 Gegeven is de cirkel $c: (x - 5)^2 + y^2 = 13$.

Stel langs algebraïsche weg vergelijkingen op van

- a de lijnen l die door het punt $A(10, 1)$ gaan en c raken
- b de lijnen m met richtingscoëfficiënt $-1\frac{1}{2}$ die c raken.

Antwoorden

C10 a $d(A, c) = 7 - \sqrt{13}$

b $d(c, d) = 7\sqrt{2} - 9$

c $d(k, c) = 3$

C11 k: $y = \frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5}$

C12 a $l_1: y = 1\frac{1}{2}x - 14$ en $l_2: y = -\frac{2}{3}x + 7\frac{2}{3}$

b $m_1: y = -1\frac{1}{2}x + 1$ en $m_2: y = -1\frac{1}{2}x + 14$

Kennis- en vaardigheidentest

7.1 Lijnen en hoeken

- 1** Gegeven zijn de lijnen $k_{p,q}: 9x + py = q$ en $l_p: px + (p + 4)y = -2$. Bereken exact voor welke p en q de lijnen $k_{p,q}$ en l_p samenvallen.
- 2** De lijn k snijdt de assen in de punten $(p, 0)$ en $(0, 2)$ en de lijn l snijdt de assen in de punten $(4, 0)$ en $(0, 2p)$.
- a** Stel van k en van l een vergelijking op in de vorm $ax + by = c$.
Bereken exact voor welke p
 - b** het punt $A(3, 4)$ op k ligt
 - c** k en l geen punt gemeenschappelijk hebben.
- 3**
- a** Bereken de hoek tussen de lijnen $k: y = 3x - 1$ en $l: 5x - 2y = 6$. Geef je antwoord in graden en rond af op één decimaal.
 - b** De lijn m gaat door de punten $(-2, -5)$ en $(4, 4)$ en de lijn n snijdt de assen in de punten $(3, 0)$ en $(0, 8)$.
Bereken in graden de hoek tussen m en n . Rond af op één decimaal.
 - c** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen $p: 4x + y = 8$ en $q: 2x + 3y = 9$.

7.2 Afstanden bij punten en lijnen

- 4** Gegeven zijn de punten $A(p, -1)$ en $B(3, p - 2)$. Het punt M is het midden van het lijnstuk AB .
- a** Bereken exact de afstand tussen A en B als $x_M = 5$. Geef het eindantwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.
 - b** Bereken exact voor welke p de afstand tussen A en B gelijk is aan 10.
- 5** Gegeven zijn de lijn $k: 3x - 5y = 2$ en het punt $A(7, -3)$.
- a** Bereken exact de coördinaten van de loodrechte projectie A' van A op k .
 - b** Bereken exact de afstand van A tot k .
- 6**
- a** Bereken exact de coördinaten van de punten P op de x -as die op afstand 8 van de lijn $k: 4x - 3y = 12$ liggen.
 - b** Stel vergelijkingen op van de lijnen l die door het punt $A(2, 0)$ gaan en op afstand $\sqrt{10}$ van het punt $B(-2, 2)$ liggen.
 - c** Stel vergelijkingen op van de lijnen m die op afstand $\sqrt{13}$ van de lijn $n: 2x + 3y = 5$ liggen.

7.3 Cirkelvergelijkingen

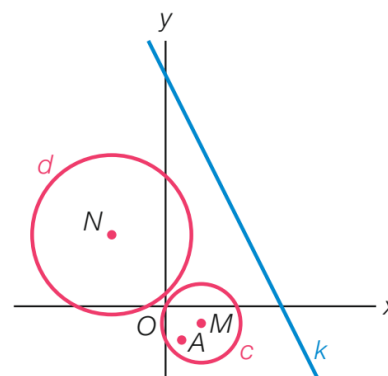
- 7** Gegeven zijn de punten $A(2, -3)$ en $B(8, 2)$.
Stel een vergelijking op van de
- cirkel c_1 met middelpunt A die door B gaat
 - cirkel c_2 met middelpunt B die de y -as raakt
 - cirkel c_3 met middellijn AB
 - cirkels c_4 en c_5 , die straal 3 hebben, de y -as raken en waarvan de middelpunten op de lijn $k: y = 3x - 6$ liggen.
- 8** Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(6, -1)$ die de lijn $k: y = 2x - 3$ raakt.
- 9** Bereken van de cirkel de straal en de coördinaten van het middelpunt.
- $c_1: x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$
 - $c_2: x^2 + y^2 + 3x - 7y = 0$
- 10** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 18x + 10y + 6 = 0$ en de punten $A(3, 3)$, $B(2, 4)$ en $C(15, -3)$.
Onderzoek op algebraïsche wijze voor elk van de punten of het op, binnen of buiten de cirkel ligt.

7.4 Afstanden en raaklijnen bij cirkels

- 11** Gegeven zijn de cirkels $c: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ en $d: x^2 + y^2 + 6x - 8y + 5 = 0$, het punt $A(1, -2)$ en de lijn $k: 2x + y = 13$.

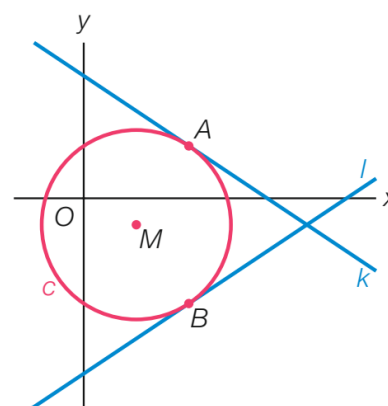
Bereken exact

- $d(A, c)$
- $d(c, d)$
- $d(k, d)$.



- 12** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$.
De punten A en B met $x_A = x_B = 4$ liggen op c .
De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B .
Zie de figuur hiernaast.

- Stel van k en van l een vergelijking op.
- Bereken in graden de hoek tussen k en l .
Rond af op één decimaal.



- 13** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + (y + 2)^2 = 20$.
Stel langs algebraïsche weg vergelijkingen op van
- de lijnen l die door het punt $A(-6, 0)$ gaan en c raken
 - de lijnen m met richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ die c raken.

Gemengde opgaven

- 1** De lijn k snijdt de assen in de punten $(2p + 1, 0)$ en $(0, 5)$.
De lijn l snijdt de assen in de punten $(2, 0)$ en $(0, q + 2)$.
Bereken exact
 - a** voor welke p het punt $A(2, 3)$ op k ligt
 - b** voor welke p en q de lijnen k en l geen punt gemeenschappelijk hebben met de lijn $m: y = -2x + 3$
 - c** voor welke p en q de lijnen k en l samenvallen.

- 2** Gegeven zijn de punten $A(-3, 4)$, $B(1, 6)$ en $C(0, -1)$ en de lijn k door A en B en de lijn l door A en C .
 - a** Stel vergelijkingen op van de lijnen m die afstand 2 hebben tot het punt A en door het punt B gaan.
 - b** Stel vergelijkingen op van de lijnen n die afstand $2\sqrt{5}$ hebben tot k .
 - c** Bereken exact de coördinaten van de punten P op k die afstand 5 hebben tot de lijn $q: 3x + 4y = 7$.
 - d** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen k en l .

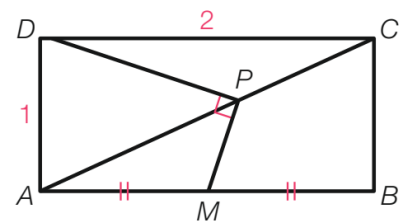
- 3** Gegeven zijn de lijnen $k: y = px + 1$ en $l: 2x + y = 3$.
 - a** Neem $p = -3$ en bereken $\angle(k, l)$. Rond af op één decimaal.
 - b** Bereken p als gegeven is dat $\angle(k, l) = 15^\circ$. Rond af op drie decimalen.

- 4** De lijn l snijdt de lijn $k_p: \frac{x}{p} - \frac{y}{4} = 1$ loodrecht in het punt $A(4, 4)$.
Bereken exact de coördinaten van de punten P op l met afstand $5\sqrt{5}$ tot A .

- 5** Gegeven zijn de punten $A(2, 8)$, $B(4, 4)$ en $C(5, q)$.
Bereken exact voor welke q de oppervlakte van $\triangle ABC$ gelijk is aan 10.

- 6** Gegeven is de lijn $k: 3x - 4y = 6$.
 - a** Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(8, 2)$ die k raakt.
 - b** Stel vergelijkingen op van de lijnen l die afstand 3 tot k hebben.
 - c** Bereken exact de coördinaten van de punten A op de lijn $m: y = x$ die afstand 4 tot k hebben.

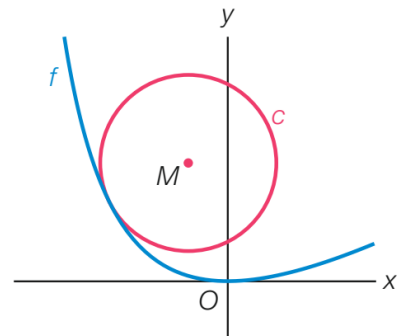
- 7** Gegeven is rechthoek $ABCD$ met $AD = 1$ en $CD = 2$.
Het punt M is het midden van de zijde AB . Het punt P ligt zo op de diagonaal AC , dat de lijnstukken MP en DP loodrecht op elkaar staan. Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact de oppervlakte van vierhoek $AMPD$.



- 8** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 12x + 4y + 15 = 0$ met middelpunt M .
- Stel vergelijkingen op van de lijnen l die door het punt $A(-8, -4)$ gaan en afstand 5 tot c hebben.
 - Stel vergelijkingen op van de cirkels d met straal 2 die afstand 3 tot c hebben en waarvan de middelpunten N op de y -as liggen.
 - Stel een vergelijking op van de cirkel e die door M gaat en de y -as in de oorsprong raakt.

- 9** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 + 4x - 12y + 20 = 0$ en de functie $f(x) = \frac{2x^2}{3x + 36}$. Zie de figuur hiernaast.

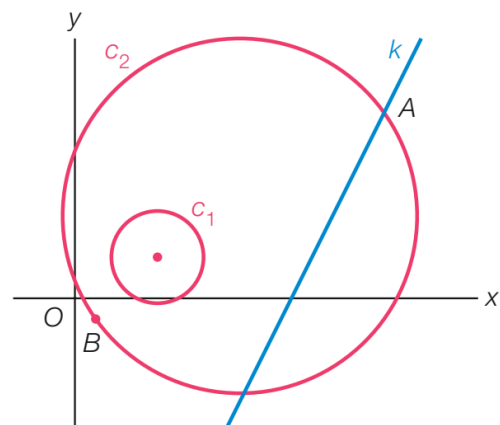
- Bewijs dat c de grafiek van f raakt in het punt $A(-6, 4)$.
- De grafiek van $g(x) = 2\sqrt{ax + b}$ heeft randpunt R en snijdt c loodrecht in het punt $B(-6, 8)$. Bereken exact de afstand van R tot c .



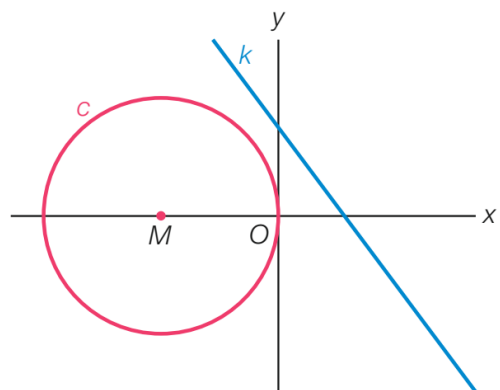
- 10** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x + 30y + 191 = 0$. De lijn k raakt c in het punt $A(9, -10)$. De lijn m snijdt k op de x -as in het punt B en is ook een raaklijn aan c . Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen k en m .

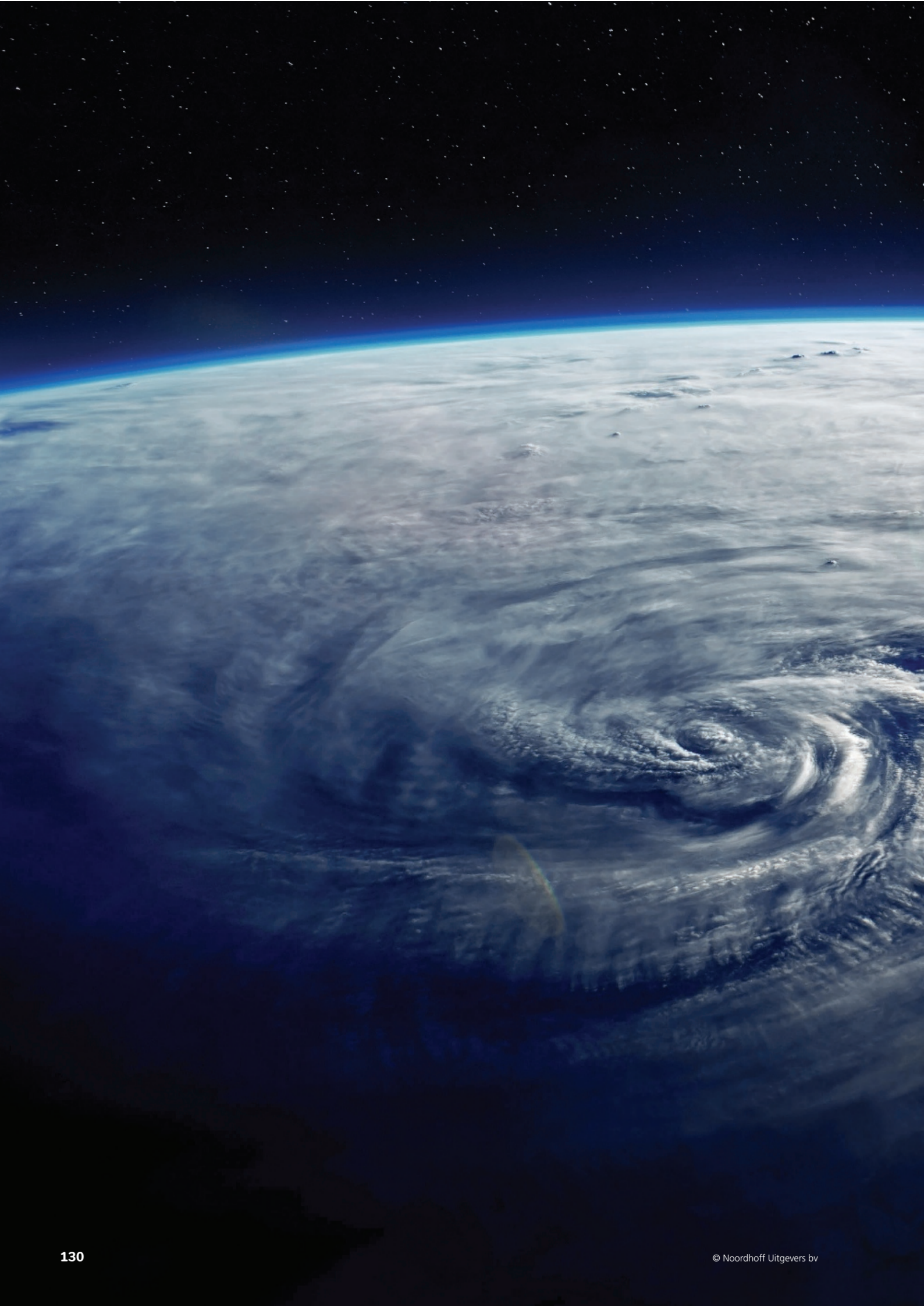
- 11** Gegeven zijn de lijn $k: 2x - y = 21$, de cirkel $c_1: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$ en het punt $A(15, 9)$ op k . Het lijnstuk AB met $B(1, -1)$ is een middellijn van cirkel c_2 .

- Stel vergelijkingen op van de lijnen l die loodrecht staan op k en c_1 raken.
- Onderzoek op algebraïsche wijze of $d(A, c_1) > 2\frac{1}{2} \cdot d(k, c_1)$.
- Bereken exact $d(c_1, c_2)$.



- 12** Gegeven zijn de lijn $k: 4x + 3y = 9$ en de cirkel $c: x^2 + y^2 + 8x = 0$. De cirkel d is de kleinste cirkel met middelpunt op k die c raakt. Stel een vergelijking op van d .





8

Goniometrische functies

Hoe warmer het water in het Caribisch gebied, hoe groter de kans op orkanen. Voor de periode 1982-2011 kan het jaarlijkse verloop van de oppervlaktetemperatuur van het zeewater in de Noordelijke Atlantische Oceaan bij benadering beschreven worden door de formule $T = 21,6 + 2,4 \sin(t - 183)$. Hierin is t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 januari en T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$. Door de grafiek te plotten, kun je nagaan dat je met een periodiek verschijnsel te maken hebt waarbij de temperatuur jaarlijks varieert tussen $19,2^{\circ}\text{C}$ en $24,0^{\circ}\text{C}$.

In 2023 varieerde de temperatuur tussen $19,8^{\circ}\text{C}$ en $25,4^{\circ}\text{C}$. Met welke formule kun je het temperatuurverloop van 2023 beschrijven?

8.1 De eenheidscirkel en radialen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt met de sinus en de cosinus de coördinaten berekenen van een punt op de eenheidscirkel waarvan de draaiingshoek gegeven is.
- Je kunt de draaiingshoek berekenen van een punt op de eenheidscirkel waarvan de x-coördinaat of de y-coördinaat gegeven is.
- Je kunt hoeken omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd.
- Je kunt de exacte-waardencirkel gebruiken om exacte waarden te geven van de sinus, cosinus en tangens van hoeken die een veelvoud zijn van $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{1}{4}\pi$.

O1
□ ⊗ *

Rond in deze opgave de lengten van lijnstukken en de coördinaten van punten af op twee decimalen.

In de figuur hiernaast is de cirkel getekend met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1. Het punt P draait tegen de wijzers van de klok in over de cirkel en begint daarbij in het punt $(1, 0)$. De hoek waarover gedraaid is, geven we aan met de Griekse letter α . In de figuur is $\alpha = 65^\circ$.

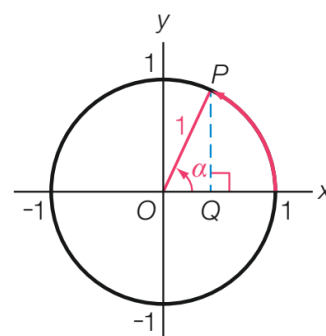
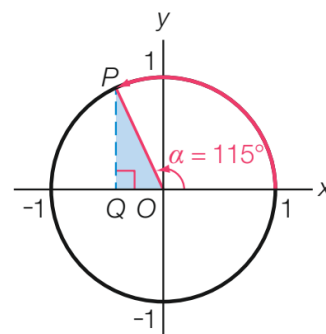
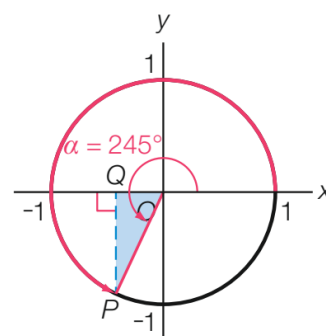
- Bereken PQ en OQ .
- Geef de coördinaten van P .

In de figuur hiernaast zie je de situatie met $\alpha = 115^\circ$.

- Hoeveel graden is $\angle POQ$? Geef PQ , OQ en de coördinaten van P .
- Bereken $\cos(115^\circ)$ en $\sin(115^\circ)$ met de GR. Wat valt je op?

In de figuur hiernaast zie je de situatie met $\alpha = 245^\circ$.

- Geef $\angle POQ$ en de coördinaten van P .
- Ga na dat je de coördinaten van P op je GR kunt krijgen door $\cos(245^\circ)$ en $\sin(245^\circ)$ te berekenen.



Theorie A Sinus, cosinus en tangens in de eenheidscirkel

De cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1 heet de **eenheidscirkel**.

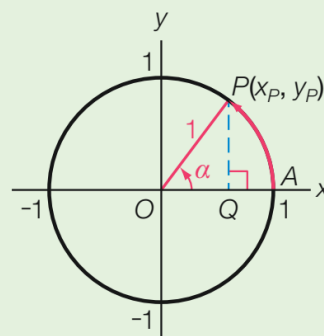
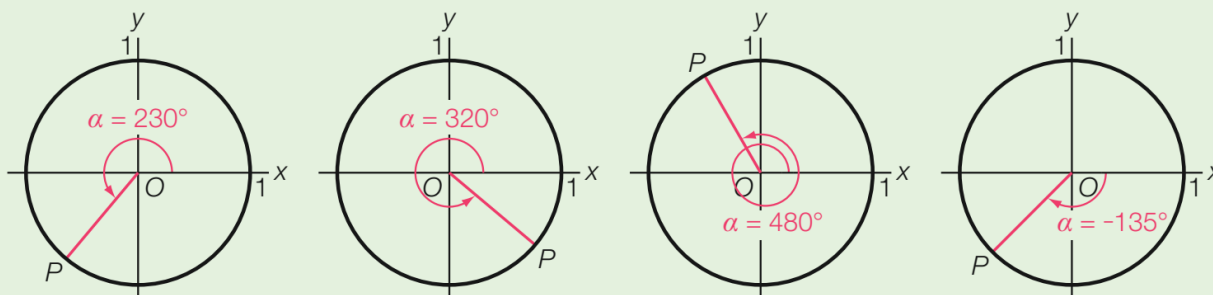
Het punt P beweegt over de eenheidscirkel en begint in het punt $A(1, 0)$. Zie de figuur hiernaast. Hierdoor ontstaat $\angle AOP$ die we de **draaiingshoek** van P noemen. We geven deze hoek aan met α . Het eerste been van een draaiingshoek is altijd de positieve x -as, het tweede been gaat door het punt P .

In de figuur is de draaiingshoek α scherp. Voor deze scherpe

hoek weet je dat geldt $\sin(\alpha) = \frac{PQ}{OP} = \frac{y_P}{1} = y_P$,

$\cos(\alpha) = \frac{OQ}{OP} = \frac{x_P}{1} = x_P$ en $\tan(\alpha) = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y_P}{x_P}$.

De draaiingshoek α kan allerlei waarden aannemen. Hieronder zie je enkele voorbeelden. Je ziet dat α ook kleiner dan 0° of groter dan 360° kan zijn.

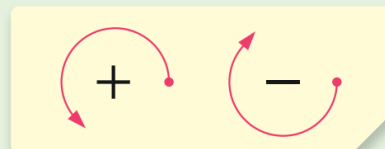


Draaiingshoeken kunnen zowel positief als negatief zijn.

Afspraak

Draait P

- tegen de wijzers van de klok in, dan is α positief
- met de wijzers van de klok mee, dan is α negatief.

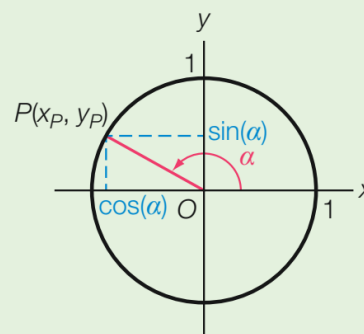


Ook voor niet-scherpe draaiingshoeken van punt P geldt

per definitie dat $\sin(\alpha) = y_P$, $\cos(\alpha) = x_P$ en $\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$.

Snijdt het tweede been van de draaiingshoek α de eenheidscirkel in het punt $P(x_P, y_P)$, dan is

$\sin(\alpha) = y_P$ en $\cos(\alpha) = x_P$ en $\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$.



Van sommige draaiingshoeken zoals 180° en -90° kun je de sinus en de cosinus uit de eenheidscirkel aflezen. Zo hoort bij $\alpha = 180^\circ$ het punt $P(-1, 0)$, dus $\sin(180^\circ) = 0$ en $\cos(180^\circ) = -1$. Ook kun je de tangens te weten komen van hoeken die een veelvoud zijn van 90° .

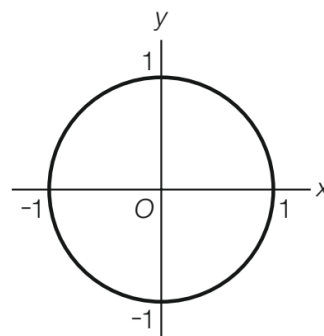
Zo is $\tan(180^\circ) = \frac{0}{-1} = 0$. Omdat $\tan(90^\circ) = \frac{1}{0}$ bestaat $\tan(90^\circ)$ niet.

Maar bij de meeste draaiingshoeken moet je de GR gebruiken.

Je krijgt dan benaderingen. Zo is $\sin(215^\circ) \approx -0,57$. Ga dit na.

2 Lees uit de eenheidscirkel af.

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| a $\sin(0^\circ)$ | e $\sin(270^\circ)$ | i $\sin(450^\circ)$ |
| b $\cos(0^\circ)$ | f $\cos(270^\circ)$ | j $\cos(-90^\circ)$ |
| c $\sin(90^\circ)$ | g $\sin(360^\circ)$ | k $\tan(-540^\circ)$ |
| d $\cos(90^\circ)$ | h $\tan(360^\circ)$ | l $\cos(-180^\circ)$ |



3 In de eenheidscirkel is gegeven de draaiingshoek α met

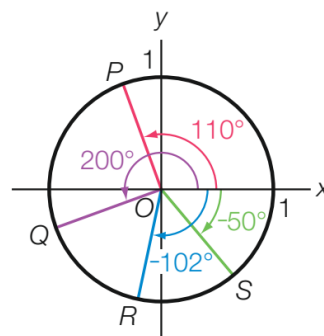
0 $0 \leq \alpha \leq 360^\circ$.

Geef alle waarden van α waarvoor geldt

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| a $\sin(\alpha) = 0$ | c $\sin(\alpha) = 1$ | e $\tan(\alpha) = 1$ |
| b $\cos(\alpha) = 0$ | d $\cos(\alpha) = 1$ | f $\tan(\alpha) = -1$ |

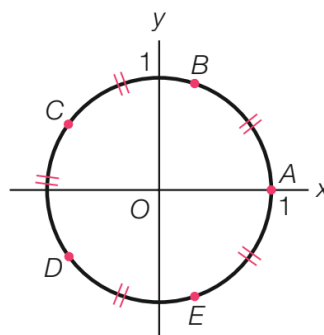
4 In de figuur hiernaast liggen de punten P , Q , R en S op de eenheidscirkel.

Bereken de coördinaten van P , Q , R en S . Rond af op twee decimalen.



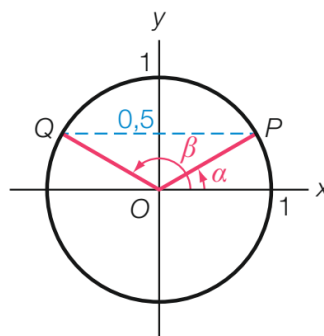
A5 In de figuur hiernaast verdelen de punten A , B , C , D en E de eenheidscirkel in vijf cirkelbogen van gelijke lengte. Het punt A is het punt $(1, 0)$.

Bereken de coördinaten van B , C , D en E . Rond af op twee decimalen.



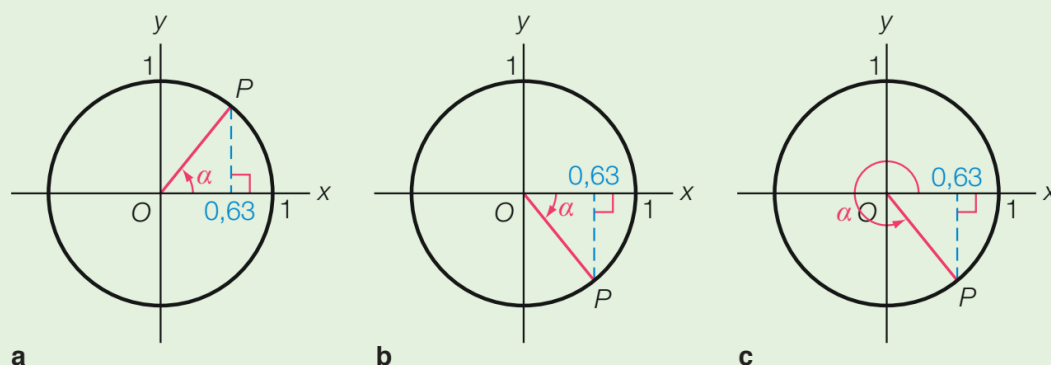
06 Op de eenheidscirkel in de figuur hiernaast liggen de punten P en Q met $y_P = y_Q = 0,5$. Voor draaiingshoek α van P geldt $\alpha = 30^\circ$.

Hoe groot is draaiingshoek β van Q ?



Theorie B Hoek berekenen bij gegeven x_P of y_P

In de figuur hieronder zie je drie situaties met een punt P op de eenheidscirkel waarvoor geldt dat $x_P = 0,63$. Er geldt dus steeds dat $\cos(\alpha) = 0,63$.



De draaiingshoek α in figuur a kun je direct met de GR berekenen.

Je krijgt $\alpha \approx 51^\circ$.

De draaiingshoek α in figuur b krijg je niet direct met de GR.

Je gebruikt symmetrie om zelf te bedenken dat $\alpha \approx -51^\circ$.

De draaiingshoek α in figuur c is $\alpha \approx 360^\circ - 51^\circ = 309^\circ$.

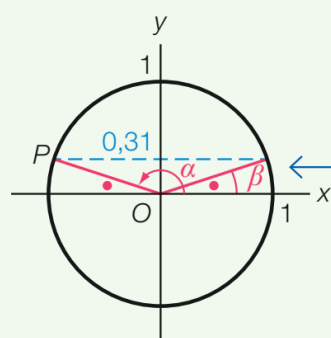
Voorbeeld

In de figuur hiernaast is $y_P = 0,31$.

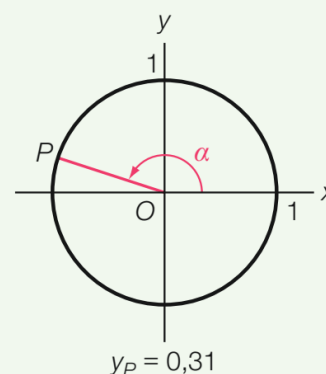
Bereken α in graden. Rond af op één decimaal.

Aanpak

Gebruik de symmetrie in de figuur hieronder.



De GR geeft $\beta = 18,05\dots^\circ$.



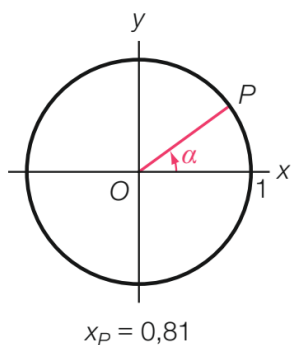
Uitwerking

$y_P = 0,31$, dus $\sin(\alpha) = 0,31$.

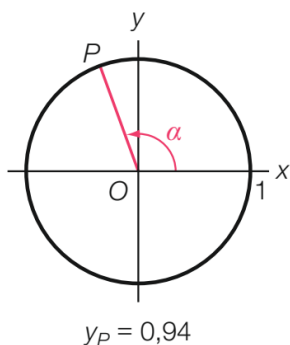
De GR geeft $18,05\dots^\circ$.

Dus $\alpha = 180^\circ - 18,05\dots^\circ \approx 161,9^\circ$.

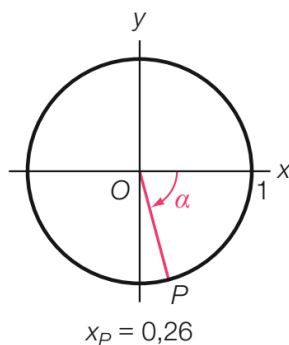
- 7** Zie de eenheidscirkels hieronder.
 Bereken α in graden. Rond af op één decimaal.



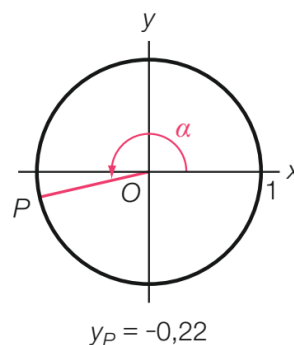
a



b

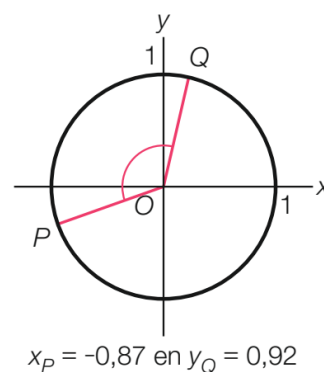


c



d

- A8** In de figuur hiernaast is $x_P = -0,87$ en $y_Q = 0,92$.
 Bereken $\angle POQ$ in graden. Rond af op één decimaal.



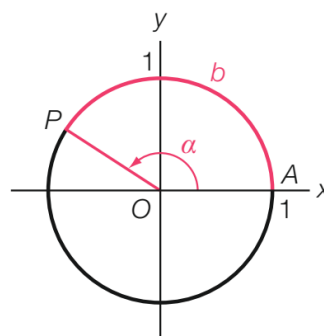
- 09** **a** Licht toe dat de omtrek van de eenheidscirkel gelijk is aan 2π .

Het punt P begint in A en doorloopt de eenheidscirkel. De draaiingshoek α is positief. Zie de figuur hiernaast. De lengte van de cirkelboog b hangt af van α .

- b** Licht toe dat bij $\alpha = 90^\circ$ de lengte van de door P doorlopen cirkelboog gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi$.

- c** Vul de tabel verder in.

draaiingshoek α	0°	90°	180°	270°	360°
lengte cirkelboog b		$\frac{1}{2}\pi$			2π

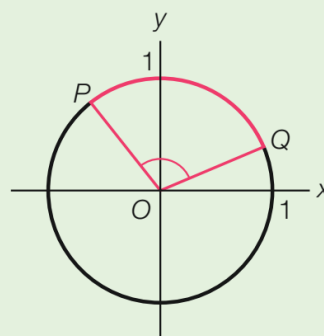


Theorie C De hoekeenheid radiaal

Voor de punten P en Q op een cirkel met middelpunt M heet $\angle PMQ$ een **middelpuntshoek**.

We definiëren met behulp van de eenheidscirkel de hoekmaat **radiaal**.

Voor de punten P en Q op de eenheidscirkel is de middelpuntshoek POQ in radialen gelijk aan de lengte van de bijbehorende cirkelboog PQ . Kortweg: hoek = booglengte. De radiaal is dus zo gedefinieerd, dat bij een booglengte van 1 op de eenheidscirkel een middelpuntshoek van 1 radiaal hoort.

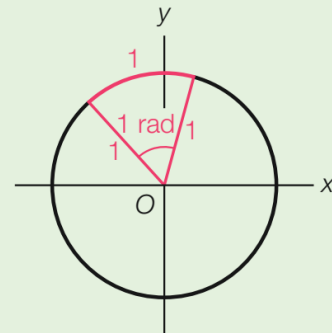


De hoekmaat radiaal wordt afgekort tot **rad**.

Bij een booglengte van 2 op de eenheidscirkel hoort een middelpuntshoek van 2 rad.

En bij een booglengte van π op de eenheidscirkel hoort een middelpuntshoek van π rad.

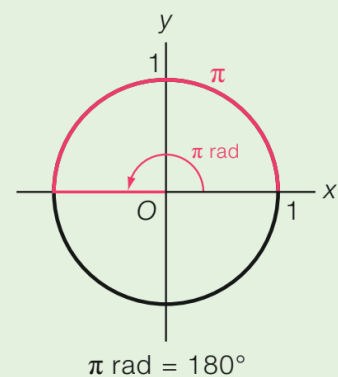
De middelpuntshoek in de eenheidscirkel die hoort bij een cirkelboog met lengte 1 is een hoek van 1 radiaal.



De omtrek van een cirkel met straal r is $2\pi r$. De straal van de eenheidscirkel is 1, dus de hele eenheidscirkel heeft booglengte $2\pi \cdot 1 = 2\pi$.

Bij deze booglengte hoort dus een draaiingshoek van 2π rad. Hieruit volgt dat $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$, dus $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.

$\pi \text{ rad} = 180^\circ$



Radialen en graden in elkaar omrekenen

radialen naar graden	graden naar radialen (benaderd)	graden naar radialen (exact)
$\frac{3}{4}\pi \text{ rad} = \frac{3}{4} \cdot 180^\circ = 135^\circ$	$107^\circ = \frac{107}{180}\pi \text{ rad} \approx 1,87 \text{ rad}$	$20^\circ = \frac{20}{180}\pi \text{ rad} = \frac{1}{9}\pi \text{ rad}$
$\frac{3}{4} \text{ rad} = \frac{3}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 43,0^\circ$	$26^\circ = \frac{26}{180}\pi \text{ rad} \approx 0,45 \text{ rad}$	$75^\circ = \frac{75}{180}\pi \text{ rad} = \frac{5}{12}\pi \text{ rad}$

Let op het verschil tussen $\frac{3}{4} \text{ rad}$ en $\frac{3}{4}\pi \text{ rad}$.

Bij het berekenen van bijvoorbeeld $\sin(\frac{3}{4} \text{ rad})$ is het nodig om op de GR de hoekeenheid in te stellen op radialen.

Casio	Set up ► Angle ► Rad
HP	Settings ► Hoekmaat ► Radialen
NumWorks	Instellingen ► Hoekmaat ► Radialen
TI	Mode ► Radialen

Geschiedenis **Hoekenheden**

Bij de graad als hoekenheid is uitgegaan van een verdeling van een cirkel in 360 stukken. Men vermoedt dat deze verdeling afkomstig is uit de astronomie.

In de Soemerische periode (ongeveer 2100 v.Chr.) verdeelden astronomen een jaar in 12 maanden van elk 30 dagen ($12 \times 30 = 360$).

De Soemeriërs waren woonachtig in het huidige Irak. Ze waren al bedreven in het rekenen, waarbij ze een zestigtallig stelsel hadden ontwikkeld. Dit getallenstelsel verschilt in principe niet veel van het tientallig stelsel dat we tegenwoordig gebruiken. Er zijn duizenden teksten uit deze periode gevonden met verslagen over de levering van vee en graan, vergezeld van bijbehorende berekeningen in het zestigtallig stelsel.

De hoekenheid radiaal werd door James Thomson in 1873 gedefinieerd.

Thomson was wiskundeprofessor aan het Queens College in Belfast.

10 Druk uit in graden. Rond zo nodig af op één decimaal.



- | | | | |
|-------------------------------|---------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| a $\frac{1}{6}\pi$ rad | c 2π rad | e $1\frac{1}{4}\pi$ rad | g $-2\frac{1}{3}\pi$ rad |
| b $\frac{1}{4}\pi$ rad | d 2 rad | f $1\frac{1}{4}$ rad | h $-2\frac{1}{3}$ rad |

11 Druk uit in radialen. Geef een exact antwoord.

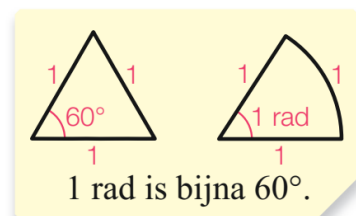


- | | | | |
|----------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| a 360° | c 45° | e 90° | g 300° |
| b 30° | d 60° | f 135° | h 210° |

12 Druk uit in radialen. Rond af op twee decimalen.



- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a 10° | c 1030° |
| b $57,3^\circ$ | d 90° |



Afspraak

In het vervolg laten we bij een hoek in radialen de eenheid rad weg.

Dus $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ betekent $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ rad.

13 Bereken. Rond af op twee decimalen.



- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|-------------------------|
| a $\cos(\frac{5}{8}\pi)$ | c $\sin(\frac{4}{5}\pi)$ | e $\cos(7,6\pi)$ |
| b $\cos(\frac{5}{8})$ | d $\sin(\frac{4}{5})$ | f $\cos(7,6)$ |

14 Bereken α met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Rond af op twee decimalen.



- | | | |
|--------------------------------|--|---|
| a $\sin(\alpha) = 0,92$ | c $\sin(\alpha) = \frac{5}{12}$ | e $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ |
| b $\cos(\alpha) = 0,85$ | d $\cos(\alpha) = \frac{3}{17}$ | f $\cos(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ |

A15

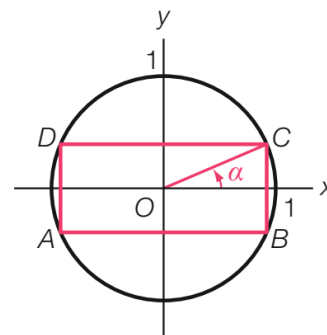


- a Er zijn twee punten P op de eenheidscirkel met $y_P = 0,35$. Bereken de bijhorende draaiingshoeken tussen 0 en 2π . Rond af op twee decimalen.
- b Er zijn twee punten Q op de eenheidscirkel met $x_Q = -0,35$. Bereken de bijbehorende draaiingshoeken tussen 0 en 2π . Rond af op twee decimalen.

E16



- Van de rechthoek $ABCD$ in de figuur hiernaast is AB evenwijdig met de x -as. De draaiingshoek α neemt toe van $0,2$ naar $0,4$. Daardoor neemt de oppervlakte van de rechthoek toe. Bereken met hoeveel procent de oppervlakte toeneemt.

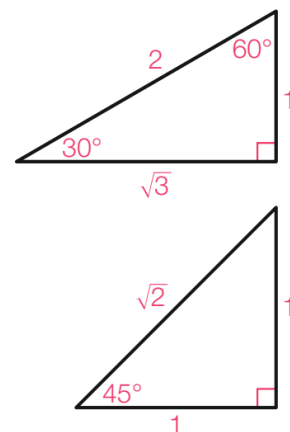


O17



- Hiernaast zie je de $1 : 2 : \sqrt{3}$ -driehoek en de $1 : 1 : \sqrt{2}$ -driehoek.
- a Licht toe dat $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, $\cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$.
- b Vul de volgende tabel verder in.

hoek	30°	45°	60°
sinus	$\frac{1}{2}$		
cosinus		$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	
tangens			$\sqrt{3}$

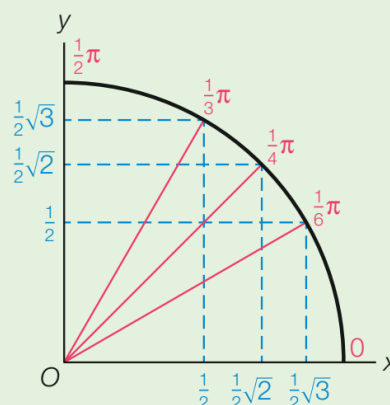


Theorie D De exacte-waardencirkel

De tabel van opgave 17 hierboven breiden we uit met hoeken van 0° en 90° . Verder gebruiken we radialen in plaats van graden. Zo krijg je de tabel hieronder.

hoek	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

In de kwart eenheidscirkel hiernaast zijn de sinus en de cosinus van de hoeken uit de tabel verwerkt. Zorg dat je deze kwart eenheidscirkel kunt reproduceren.



Door de kwart eenheidscirkel te spiegelen in de y-as en de x-as krijg je de **exacte-waardencirkel**. Zie de figuur hiernaast.

Je leest bijvoorbeeld af dat

$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en}$$

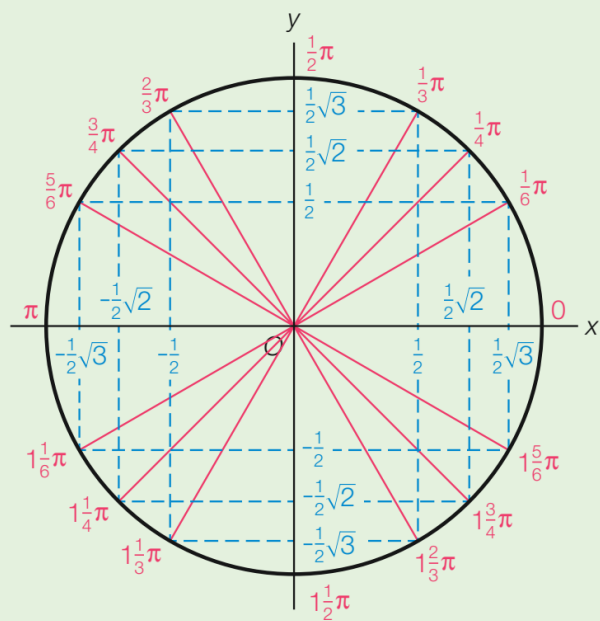
$$\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Uit de definities $\sin(\alpha) = y_P$, $\cos(\alpha) = x_P$

$$\text{en } \tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P} \text{ volgt dat } \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Zo is bijvoorbeeld

$$\tan\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right)}{\cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$



R18 Zie de tabel in de theorie op de vorige bladzijde.

□ ⊗ * Om de exacte waarden van de sinus en de cosinus te reproduceren, kun je gebruikmaken van het ezelsbruggetje hiernaast.

a Licht dit toe.

b Met behulp van de regel $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ kun je vervolgens ook de exacte waarden van de tangens in de tabel reproduceren. Doe dit.



19 Geef de exacte waarde.

□ ⊗

- | | | |
|---|---|---|
| a $\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ | c $\cos\left(1\frac{2}{3}\pi\right)$ | e $\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right)$ |
| b $\cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right)$ | d $\tan\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ | f $\tan\left(1\frac{3}{4}\pi\right)$ |

20 Bereken de exacte waarde van $\tan\left(1\frac{5}{6}\pi\right) - \tan\left(\frac{2}{3}\pi\right)$.

21 Geef de exacte waarden van α met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

□ ⊗ *

- | | | |
|---|--|---|
| a $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ | c $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | e $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| b $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ | d $\cos(\alpha) = 0$ | f $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ |

A22 Geef de exacte waarde van x .

□ ⊗ *

- | | |
|---|---|
| a $x = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ | c $x = \cos\left(1\frac{3}{4}\pi\right)$ |
| b $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ met $0 \leq x \leq 1\frac{1}{2}\pi$ | d $\cos(x) = \frac{1}{2}$ met $1\frac{1}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$ |

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan met de sinus en de cosinus de coördinaten berekenen van een punt op de eenheidscirkel waarvan de draaiingshoek gegeven is.
- ☐ Ik kan de draaiingshoek berekenen van een punt op de eenheidscirkel waarvan de x-coördinaat of de y-coördinaat gegeven is.
- ☐ Ik kan hoeken omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd.
- ☐ Ik kan de exacte-waardencirkel gebruiken om exacte waarden te geven van de sinus, cosinus en tangens van hoeken die een veelvoud zijn van $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{1}{4}\pi$.

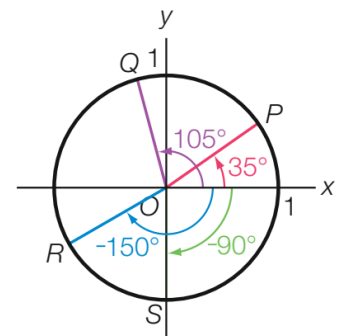
► OPGAVE C1
THEORIE A

► OPGAVE C2
THEORIE B

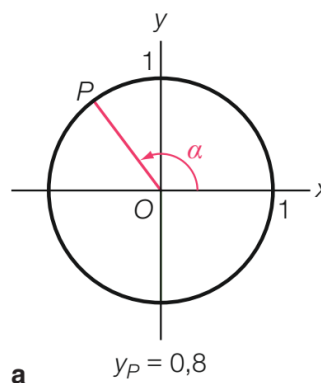
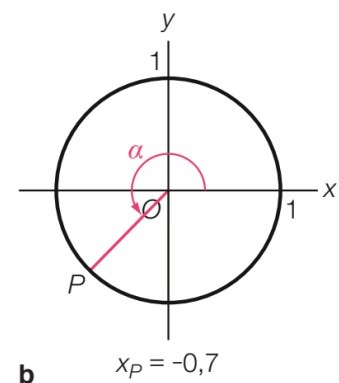
► OPGAVE C3
THEORIE C

► OPGAVE C4
THEORIE D

- C1** In de figuur hiernaast liggen de punten P , Q , R en S op de eenheidscirkel. De draaiingshoeken zijn achtereenvolgens 35° , 105° , -150° en -90° . Bereken de coördinaten van P , Q , R en S . Rond zo nodig af op twee decimalen.



- C2** Zie de eenheidscirkels hiernaast. Bereken α in graden. Rond af op één decimaal.



- C3**
- a** Druk de hoeken van $\frac{2}{5}\pi$ rad, $2\frac{1}{2}$ rad en $-1\frac{3}{4}\pi$ rad uit in graden. Rond zo nodig af op één decimaal.
 - b** Druk de hoeken van 120° , -150° en 20° uit in radialen. Geef exacte antwoorden.
 - c** Druk de hoeken van 15° , 400° en -99° uit in radialen. Rond af op twee decimalen.

- C4** Geef de exacte waarde van $\cos(1\frac{1}{4}\pi)$, $\sin(-\frac{2}{3}\pi)$ en $\tan(1\frac{5}{6}\pi)$.

Antwoorden

C1 $P(0,82; 0,57)$ $R(-0,87; -0,5)$
 $Q(-0,26; 0,97)$ $S(0, -1)$

C2 **a** $126,9^\circ$
b $225,6^\circ$

C3 **a** 72° , $143,2^\circ$ en -315°

b $\frac{2}{3}\pi$ rad, $-\frac{5}{6}\pi$ rad en $\frac{1}{9}\pi$ rad

c $0,26$ rad, $6,98$ rad en $-1,73$ rad

C4 $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

8.2 Sinusoïden

Kennis en vaardigheden

- Je kunt op de grafieken van de standaardfuncties $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ transformaties toepassen en het effect hiervan bepalen op de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.
- Je kunt formules van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ opstellen door de kenmerken van sinusoïden te gebruiken.
- Je kunt de sinusoïden $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ tekenen door de kenmerken hiervan te gebruiken.
- Je kunt bij het tekenen van de sinusoïden $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ onderscheid maken tussen de situaties met $b > 0$ en $b < 0$.

O23 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$.



- a** Schets de grafiek van f door deze eerst te plotten. Neem y tussen -2 en 2 . Zorg voor de instelling op radialen.
- b** Zet in je schets de exacte coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x -as en de exacte coördinaten van de toppen.

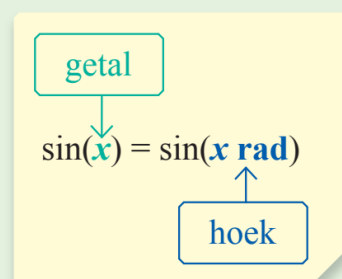
Theorie A De grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$

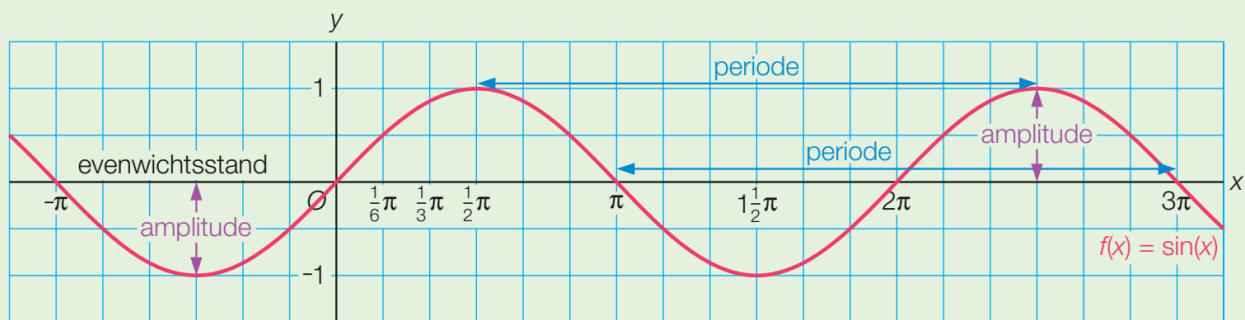
Het sinusbegrip wordt niet alleen bij hoeken, maar ook bij getallen gebruikt. De sinus van het getal 2 is de sinus van een hoek van 2 radialen. We definiëren de functie $f(x) = \sin(x)$ als de functie die bij elk getal x de sinus van x radialen geeft.

Voor het tekenen van de grafiek van de **goniometrische functie** $f(x) = \sin(x)$ kun je de volgende tabel gebruiken.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{5}{6}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

Zie de figuur op de volgende bladzijde. Hierbij is op de horizontale as een stapgrootte van $\frac{1}{6}\pi$ gebruikt.





Op de x -as is 1 cm rechts van de oorsprong $\frac{1}{3}\pi$ gezet. Merk op dat $\frac{1}{3}\pi \approx 1,047 \approx 1$.

De grafiek is periodiek met **periode** 2π . De **evenwichtsstand** is 0 en de **amplitude** is 1. De nulpunten zijn $\dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

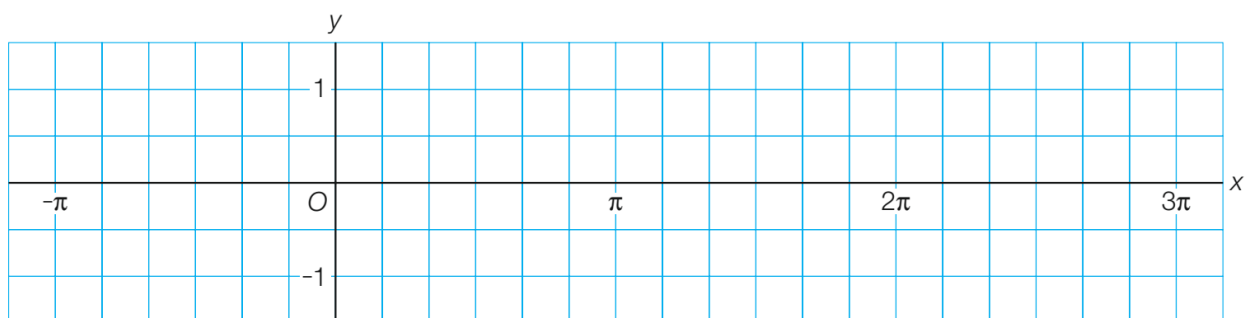
24 Gegeven is de functie $g(x) = \cos(x)$.

- a** Vul de tabel hieronder in. Maak hierbij gebruik van de exacte-waardencirkel.

$$\cos(x) = \cos(x \text{ rad})$$

x	0	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$1\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$	2π
$\cos(x)$									

- b** Teken hieronder de grafiek van g . Gebruik de periodiciteit.



25 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.

- a** Hoe ontstaat de grafiek van $g(x) = 2 + \sin(x)$ uit de grafiek van f ?
Wat is de evenwichtsstand van de grafiek van g ?
- b** Hoe ontstaat de grafiek van $h(x) = \sin(x - 3)$ uit de grafiek van f ?
- c** Hoe ontstaat de grafiek van $k(x) = 4 \sin(x)$ uit de grafiek van f ?
Wat is de amplitude van de grafiek van k ?
- d** Hoe ontstaat de grafiek van $l(x) = \sin(5x)$ uit de grafiek van f ?
Wat is de periode van de grafiek van l ?

Theorie B Transformaties bij grafieken van goniometrische functies

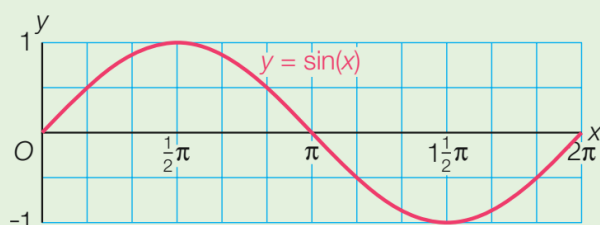
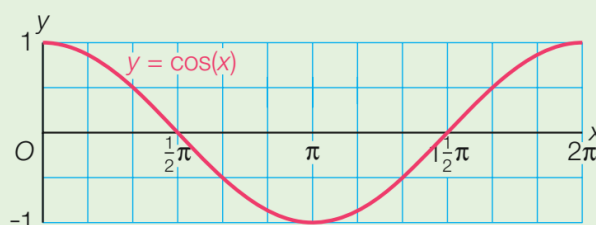
De functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ zijn standaardfuncties.

De bijbehorende grafieken mag je zonder toelichting tekenen.

Bij beide grafieken hoort evenwichtsstand 0, amplitude 1 en periode 2π .

Een punt waar de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ stijgend door de evenwichtsstand gaat, noemen we een **beginpunt** van de grafiek.

Een hoogste punt van de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ noemen we een beginpunt van de grafiek van g .



Van de standaardgrafieken $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ is één periode getekend.

Op deze standaardgrafieken kun je de vier bekende transformaties toepassen. Zie hieronder.

Effect van transformaties op de standaardgrafiek $y = \sin(x)$

transformatie	beeldgrafiek	kenmerk
translatie $(0, a)$	$y = a + \sin(x)$	evenwichtsstand a
$\times b$ t.o.v. de x -as	$y = b \sin(x)$	amplitude $ b $
$\times \frac{1}{c}$ t.o.v. de y -as	$y = \sin(cx)$	periode $\frac{2\pi}{ c }$
translatie $(d, 0)$	$y = \sin(x - d)$	beginpunt $(d, 0)$

Pas je meerdere transformaties na elkaar toe, let dan op de volgorde.

$$\begin{aligned}
 y &= \sin(x) \\
 &\downarrow \times 3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as} \\
 y &= 3 \sin(x) \\
 &\downarrow \text{translatie } (0, 2) \\
 y &= 2 + 3 \sin(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \sin(x) \\
 &\downarrow \text{translatie } (0, 2) \\
 y &= 2 + \sin(x) \\
 &\downarrow \times 3 \text{ t.o.v. de } x\text{-as} \\
 y &= 3(2 + \sin(x)) = 6 + 3 \sin(x)
 \end{aligned}$$

Ook bij de combinatie van een horizontale translatie en een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as is de volgorde van belang.

$$\begin{aligned}
 y &= \sin(x) \\
 &\downarrow \text{translatie } (\frac{1}{3}\pi, 0) \\
 y &= \sin(x - \frac{1}{3}\pi) \\
 &\downarrow \times 2 \text{ t.o.v. de } y\text{-as} \\
 y &= \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \sin(x) \\
 &\downarrow \times 2 \text{ t.o.v. de } y\text{-as} \\
 y &= \sin(\frac{1}{2}x) \\
 &\downarrow \text{translatie } (\frac{1}{3}\pi, 0) \\
 y &= \sin(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}\pi)) = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi)
 \end{aligned}$$

29



- a De grafiek van de functie f ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door eerst de translatie $(\frac{1}{4}\pi, 4)$ en dan de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 3 toe te passen.

Stel het functievoorschrift van f op.

- b De grafiek van de functie g ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 3 en dan de translatie $(\frac{1}{4}\pi, 4)$ toe te passen.

Stel het functievoorschrift van g op.

A30



Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2} + \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$ met domein $[0, 3\pi]$.

- a Geef van de grafiek van f de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.
- b Geef de exacte coördinaten van de punten waar de grafiek van f de lijn van de evenwichtsstand snijdt.
- c Geef de exacte coördinaten van de drie toppen van de grafiek van f .
- d De grafiek van f snijdt de x -as achtereenvolgens in de punten A , B en C . Geef de exacte afstand tussen de punten A en C .

A31



Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 + 4 \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$ en

$g(x) = -2 + 4 \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$. Je kunt een translatie (m, n) op de grafiek van f toepassen, zodat het beeld van de grafiek van f samenvalt met de grafiek van g .

Bereken mogelijke waarden van m en n .

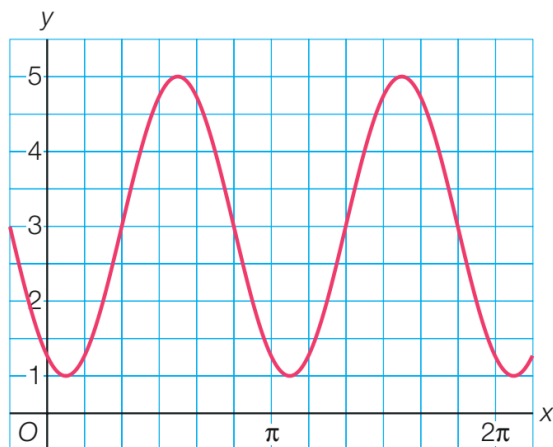
O32



Bij de grafiek in de figuur hieronder hoort een formule van de vorm

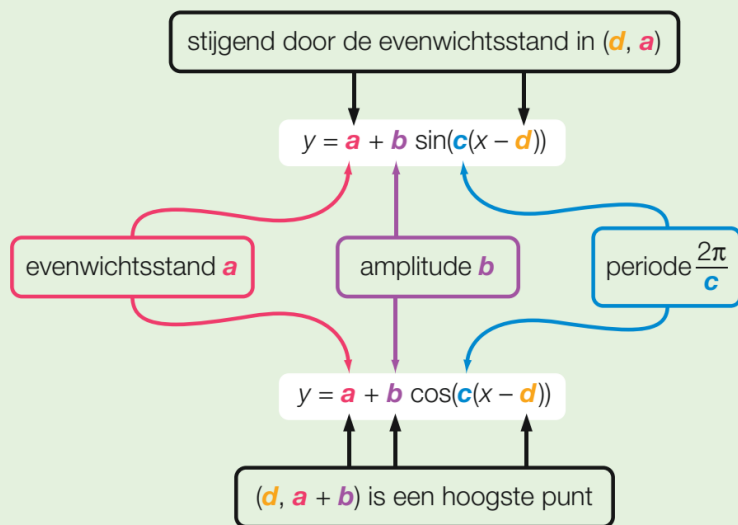
$$y = a + b \sin(c(x - d)).$$

- a Lees de evenwichtsstand, de amplitude en de periode af.
- b Geef mogelijke waarden van a , b en d en licht toe dat $c = 2$.



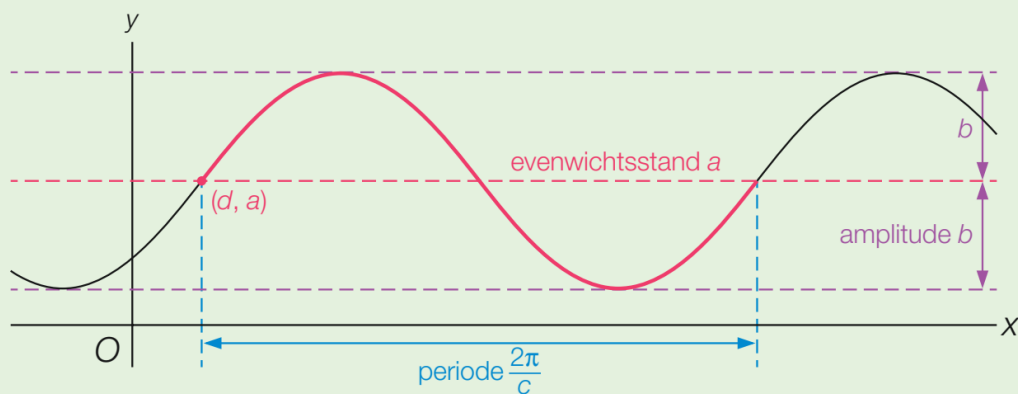
Theorie C Een formule van een sinusöide opstellen

De grafieken van $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ heten **sinusoïden**. Om bij een sinusöide een formule op te stellen, gebruik je het schema hieronder. In het schema is $b > 0$ en $c > 0$.



De vier kenmerken van de grafiek van $y = a + b \sin(c(x - d))$ met $b > 0$ en $c > 0$

- evenwichtsstand a
- periode $\frac{2\pi}{c}$
- amplitude b
- stijgend door de evenwichtsstand in het punt (d, a)



In het voorbeeld op de volgende bladzijde zie je hoe je bij een sinusöide een formule opstelt.

Voorbeeld

In de figuur hiernaast is een sinusöide getekend.

Stel bij de sinusöide een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$.

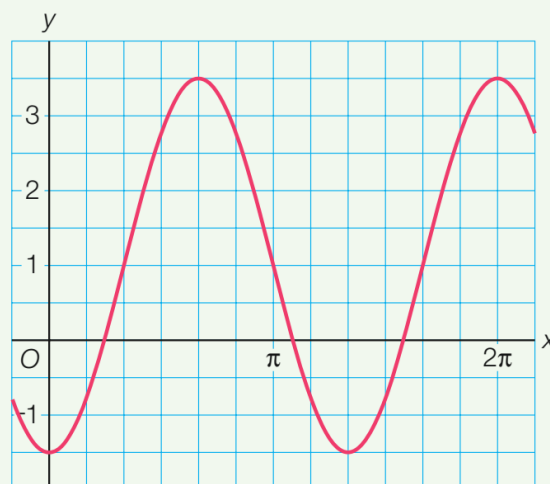
Uitwerking

$$a = \frac{3\frac{1}{2} + -1\frac{1}{2}}{2} = 1 \text{ en } b = 3\frac{1}{2} - 1 = 2\frac{1}{2}$$

$$\text{De periode is } 1\frac{1}{3}\pi, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{1\frac{1}{3}\pi} = 1\frac{1}{2}.$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{3}\pi$, dus $d = \frac{1}{3}\pi$.

$$\text{Dus } y = 1 + 2\frac{1}{2} \sin(1\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}\pi)).$$

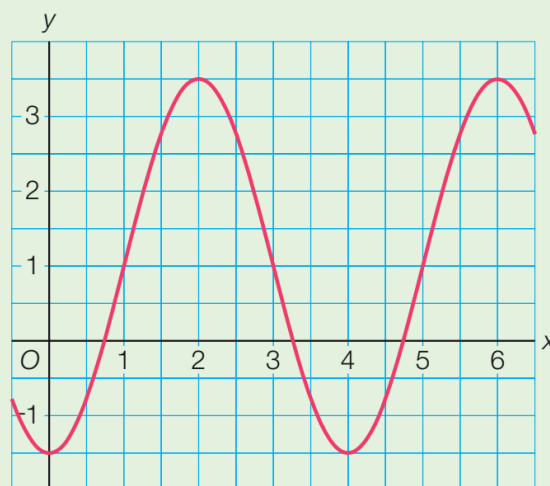


Bij de sinusöide van het voorbeeld is ook een formule van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$ op te stellen. Je neemt dan een hoogste punt als beginpunt. Een hoogste punt is $(\frac{2}{3}\pi, 3\frac{1}{2})$, dus $d = \frac{2}{3}\pi$ en de formule is $y = 1 + 2\frac{1}{2} \cos(1\frac{1}{2}(x - \frac{2}{3}\pi))$.

In de figuur hiernaast zie je een sinusöide zoals in het voorbeeld, maar nu staan bij de horizontale as de getallen 1, 2, 3, ...

$$\text{De periode is } 4, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi.$$

$$\text{Je krijgt } y = 1 + 2\frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2}\pi(x - 1)) \text{ en ook } y = 1 + 2\frac{1}{2} \cos(\frac{1}{2}\pi(x - 2)).$$

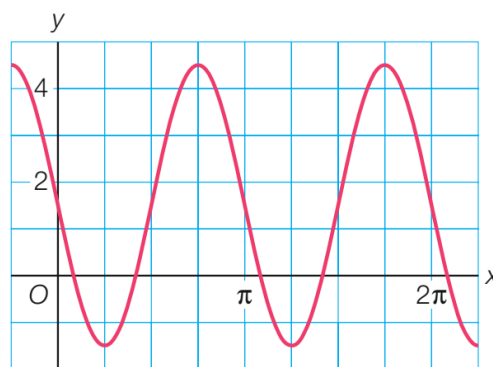


R33 Zie het voorbeeld.

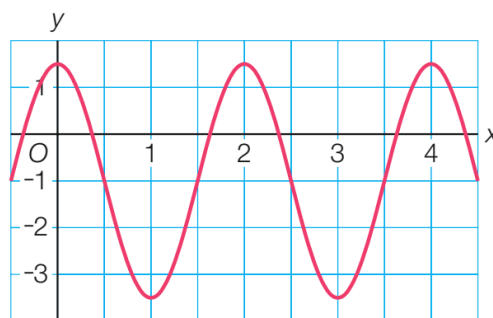


Een manier om de periode te bepalen, is door de afstand tussen twee opeenvolgende hoogste punten af te lezen. Geef nog twee manieren om met behulp van de figuur de periode te bepalen.

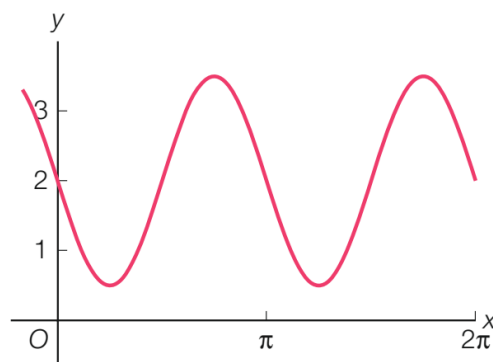
- 34** In de figuur hiernaast is een sinusoïde getekend.
 Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
a $y = a + b \sin(c(x - d))$
b $y = a + b \cos(c(x - d))$.



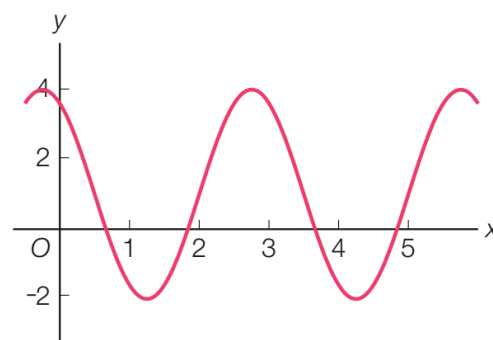
- 35** In de figuur hiernaast is een sinusoïde getekend.
 Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
a $y = a + b \sin(c(x - d))$
b $y = a + b \cos(c(x - d))$.



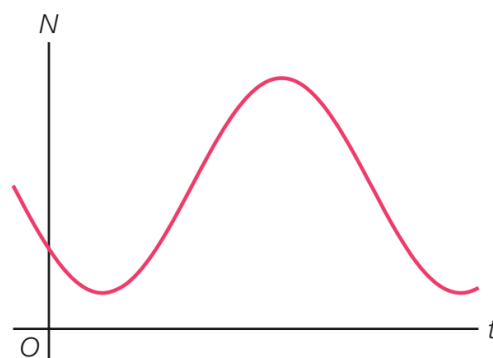
- 36** Bij de sinusoïde in de figuur hiernaast zijn twee opeenvolgende toppen $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ en $(\frac{3}{4}\pi, 3\frac{1}{2})$.
 Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
a $y = a + b \sin(c(x - d))$
b $y = a + b \cos(c(x - d))$.



- 37** Bij de sinusoïde in de figuur hiernaast zijn twee opeenvolgende toppen $(1\frac{1}{4}, -2)$ en $(2\frac{3}{4}, 4)$.
 Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
a $y = a + b \sin(c(x - d))$
b $y = a + b \cos(c(x - d))$.



- A38** Bij de sinusoïde in de figuur hiernaast geldt voor de toppen dat $N = 25$ of $N = 175$. De grafiek gaat door de evenwichtsstand bij achtereenvolgens $t = 4$ en $t = 9$.
 Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
a $N = a + b \sin(c(t - d))$
b $N = a + b \cos(c(t - d))$.



A39



- a** Van een sinusoid zijn de punten (3, 12) en (18, 12) twee opeenvolgende hoogste punten, die op afstand 4 van de evenwichtsstand liggen.
Stel een formule op van deze sinusoid.
- b** Van een sinusoid is de evenwichtsstand 650 en de periode 48.
Het punt (16, 812) is een top.
Stel een formule op van deze sinusoid.
- c** Van een sinusoid zijn de punten (2, 250) en (26, 110) twee opeenvolgende toppen.
Stel een formule op van deze sinusoid.

O40

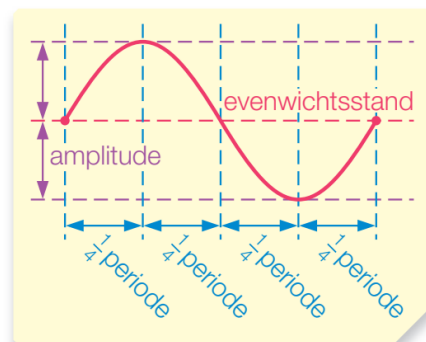
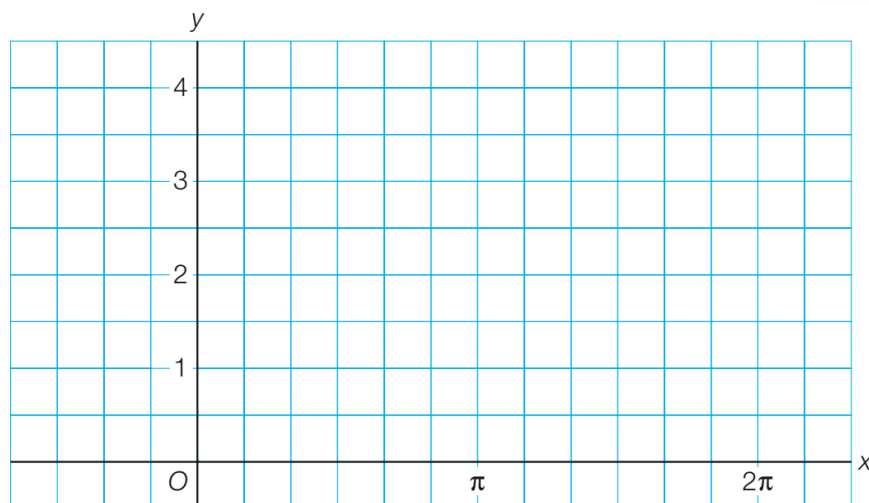


Gegeven is de functie $f(x) = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$. Om de grafiek van f te tekenen, gebruik je de vier kenmerken van sinusoiden.

- a** Geef de vier kenmerken van de grafiek van f .

Zie de figuur hieronder.

- b** Teken in de figuur de lijn van de evenwichtsstand.
- c** Gebruik de evenwichtsstand en de amplitude om de horizontale lijnen te tekenen waarop de toppen van de grafiek van f liggen.
- d** Teken het beginpunt van vraag a en het punt dat één periode verder ligt.
- e** Teken één periode van de grafiek. Gebruik de schets hiernaast.
- f** Maak de grafiek af door links en rechts nog een periode van de grafiek te tekenen.



Theorie D Sinusoiden tekenen

Bij het tekenen van een sinusoid gebruik je de vier kenmerken, dus de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt. Daarbij ga je stap voor stap te werk. Zie het voorbeeld op de volgende bladzijde.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2} \sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Teken de grafiek van f .

Aanpak

- 1 Schrijf het functievoorschrift in de vorm $f(x) = a + b \sin(c(x - d))$ en vermeld de vier kenmerken.

$$f(x) = -1 + 1\frac{1}{2} \sin(2x - \frac{2}{3}\pi) = -1 + 1\frac{1}{2} \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$$

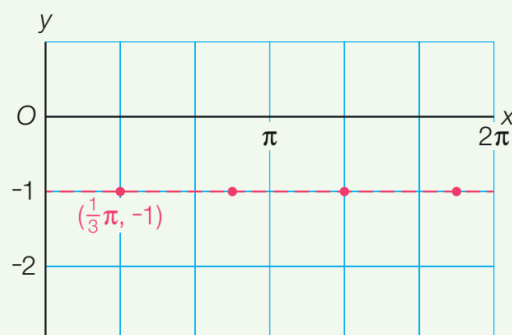
evenwichtsstand -1

amplitude $1\frac{1}{2}$

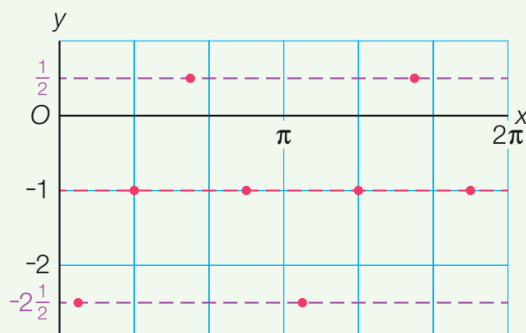
periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$

stijgend door de evenwichtsstand in het punt $(\frac{1}{3}\pi, -1)$

- 2 Teken de evenwichtsstand en daarop het punt $(\frac{1}{3}\pi, -1)$ en de andere snijpunten met de evenwichtsstand. Omdat de periode π is, liggen deze punten op afstand $\frac{1}{2}\pi$ van elkaar.



- 3 Teken de hoogste en laagste punten van de grafiek. Omdat de amplitude $1\frac{1}{2}$ is, liggen deze punten $1\frac{1}{2}$ boven of $1\frac{1}{2}$ onder de evenwichtsstand. De punten liggen telkens midden tussen twee snijpunten met de evenwichtsstand.



- 4 Teken de grafiek op het gegeven domein. Gebruik de periodiciteit.

Uitwerking

$$f(x) = -1 + 1\frac{1}{2} \sin(2x - \frac{2}{3}\pi) = -1 + 1\frac{1}{2} \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$$

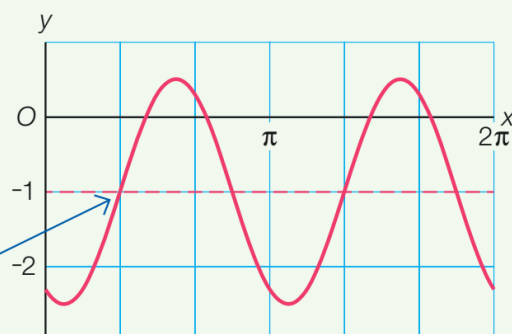
evenwichtsstand -1

amplitude $1\frac{1}{2}$

periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$

stijgend door de evenwichtsstand in $(\frac{1}{3}\pi, -1)$

Zie de figuur hiernaast.



- 41** **a** Teken de grafiek van $f(x) = -2 + 3 \sin(3x - \pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
b Teken de grafiek van $g(x) = 1 + 3 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[-\pi, \pi]$.

Controleer de grafiek met de GR.

A42 Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 2 \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi)$.

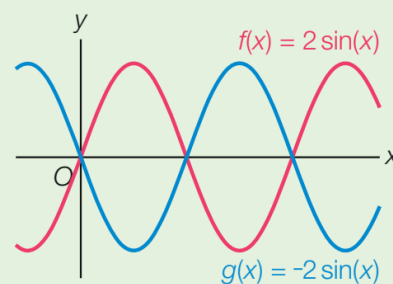
Van de grafiek van de functie $g(x) = a + b \cos(c(x - d))$ is de evenwichtsstand gelijk aan die van de grafiek van f , de amplitude is twee keer zo groot als die van de grafiek van f en de periode is de helft van die van de grafiek van f . De grafiek van g gaat bij $x = \frac{1}{2}\pi$ stijgend door de evenwichtsstand. Geef mogelijke waarden van a , b , c en d en teken de grafiek van g met domein $[0, 2\pi]$.

O43 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + 3 \sin(x)$ en $g(x) = 2 - 3 \sin(x)$.

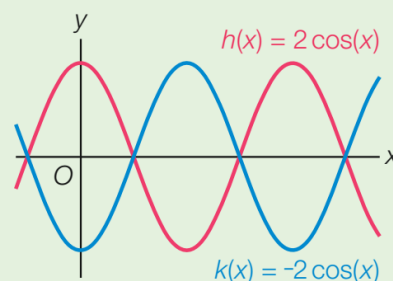
- a** Plot de grafieken. Neem x tussen 0 en 2π .
b De amplitude is een positief getal.
 Geef de amplitude van de grafiek van f en van de grafiek van g .
c Vul *stijgend* of *dalend* in.
 De grafiek van f gaat in het punt $(0, 2)$
 door de evenwichtsstand.
 De grafiek van g gaat in het punt $(0, 2)$
 door de evenwichtsstand.

Theorie E De amplitude van een sinusöide

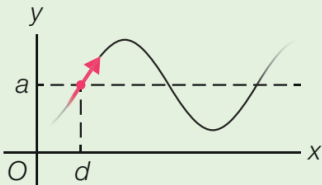
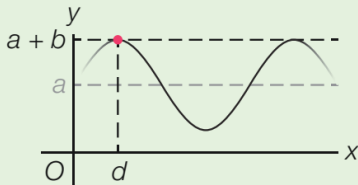
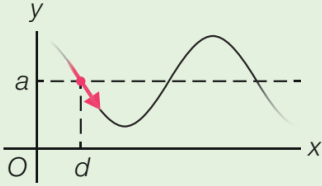
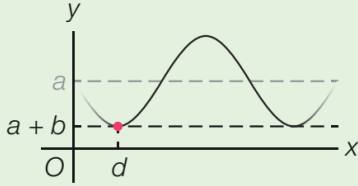
De grafiek van $f(x) = 2 \sin(x)$ heeft amplitude 2 en gaat in het punt $(0, 0)$ stijgend door de evenwichtsstand. Spiegel je de grafiek van f in de x -as, dan krijg je de grafiek van $g(x) = -2 \sin(x)$. Ook de grafiek van g heeft amplitude 2, maar deze grafiek gaat in het punt $(0, 0)$ dalend door de evenwichtsstand. Zie de figuur hiernaast.



De grafiek van $h(x) = 2 \cos(x)$ heeft amplitude 2 en heeft voor $x = 0$ een hoogste punt. Spiegel je de grafiek van h in de x -as, dan krijg je de grafiek van $k(x) = -2 \cos(x)$. Ook de grafiek van k heeft amplitude 2, maar deze grafiek heeft voor $x = 0$ een laagste punt. Zie de figuur hiernaast.



Sinusoiden met $b > 0$ en $b < 0$

	$y = a + b \sin(c(x - d))$	$y = a + b \cos(c(x - d))$
$b > 0$	 <p>stijgend door de evenwichtsstand in het punt (d, a)</p>	 <p>$(d, a + b)$ is een hoogste punt</p>
$b < 0$	 <p>dalend door de evenwichtsstand in het punt (d, a)</p>	 <p>$(d, a + b)$ is een laagste punt</p>

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3 \sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Teken de grafiek van f .

Uitwerking

$$f(x) = 1 - 3 \sin(2x - \frac{2}{3}\pi) = 1 - 3 \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$$

evenwichtsstand 1

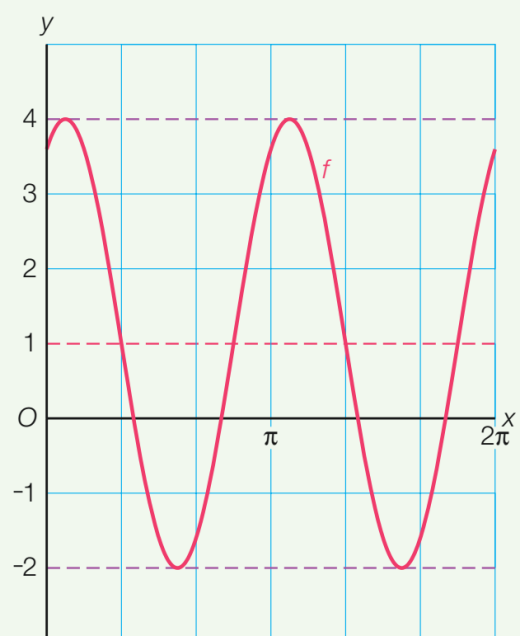
amplitude 3

periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$

$-3 < 0$, dus grafiek dalend door de
evenwichtsstand in $(\frac{1}{3}\pi, 1)$.

Zie de figuur hiernaast.

Voor de grafiek van
 $y = a + b \sin(c(x - d))$
geldt amplitude = $|b|$.



44 a Teken de grafiek van $f(x) = 1 - 2 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.

 b Teken de grafiek van $g(x) = 3 - 4 \cos(\pi x)$ met domein $[0, 6]$.

45 Gegeven is de functie $f(x) = -2 - \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.

 a Teken de grafiek van f .

b De lijn k gaat door de twee toppen van de grafiek van f en snijdt de x -as in het punt S .

Bereken exact de x -coördinaat van S .

A46 Gegeven is de functie $f(x) = 5 - 3 \sin(\frac{1}{4}\pi x)$ met domein $[0, 8]$.

 a Teken de grafiek van f .

b De grafiek van f heeft de toppen A en B met $x_A < x_B$.

De lijn k gaat door O en A en de lijn l gaat door O en B .

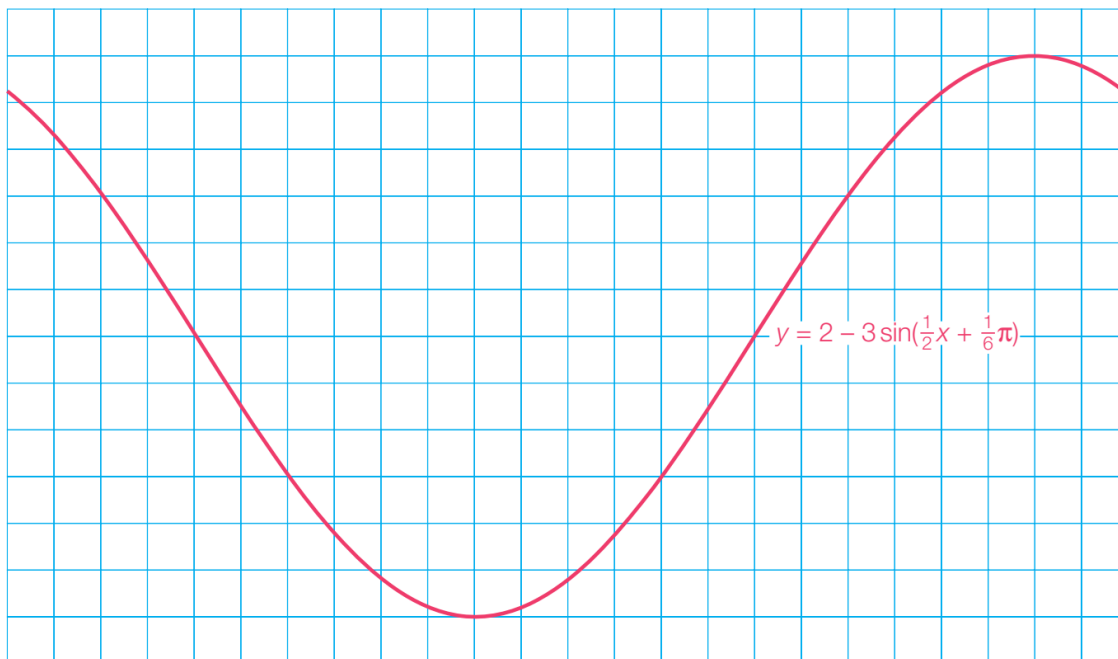
Bereken in graden $\angle(k, l)$ en rond af op één decimaal.

c De lijn $y = 6,5$ snijdt de grafiek van f in de punten C en D .

Bereken de afstand tussen C en D . Rond af op twee decimalen.

E47 Hieronder is de sinusöide $y = 2 - 3 \sin(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi)$ met domein $[-\pi, 3\pi]$ op een rooster, maar zonder assenstelsel getekend.

* Teken het assenstelsel op de juiste plaats. Licht je werkwijze toe.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan op de grafieken van de standaardfuncties $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ transformaties toepassen en het effect hiervan bepalen op de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt. ▶ OPGAVE C5
THEORIE A,B
- ☐ Ik kan formules van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ opstellen door de kenmerken van sinusoiden te gebruiken. ▶ OPGAVE C6
THEORIE C
- ☐ Ik kan de sinusoiden $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ tekenen door de kenmerken hiervan te gebruiken. ▶ OPGAVE C7
THEORIE D
- ☐ Ik kan bij het tekenen van de sinusoiden $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ onderscheid maken tussen de situaties met $b > 0$ en $b < 0$. ▶ OPGAVE C8
THEORIE E

C5 Geef van de grafiek van de functie de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

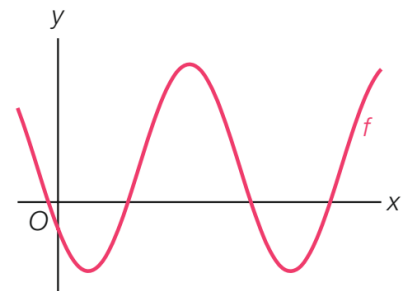
a $f(x) = 6 + 7 \sin(4(x - 2))$

b $g(x) = 2,5 + 0,6 \cos(0,4(x - \frac{1}{4}\pi))$

C6 Bij de sinusoiden in de figuur hiernaast zijn twee opeenvolgende toppen $(\frac{3}{4}, -2)$ en $(3\frac{1}{4}, 4)$.
Stel bij deze sinusoiden een formule op van de vorm

a $y = a + b \sin(c(x - d))$

b $y = a + b \cos(c(x - d))$.



C7 Teken de grafiek van $f(x) = -1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} \sin(2x - 1\frac{1}{2}\pi)$ met domein $[0, 1\frac{1}{2}\pi]$.

C8 Teken de grafiek van $g(x) = 4 - \cos(1\frac{1}{2}x - 2\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.

Antwoorden

C5 a evenwichtsstand 6, amplitude 7, periode $\frac{1}{2}\pi$ en beginpunt (2, 6)

b evenwichtsstand 2,5, amplitude 0,6, periode 5π en beginpunt $(\frac{1}{4}\pi; 3,1)$

C6 a $y = 1 + 3 \sin(\frac{2}{5}\pi(x - 2))$

b $y = 1 + 3 \cos(\frac{2}{5}\pi(x - 3\frac{1}{4}))$

C7 *

C8 *

8.3 Goniometrische vergelijkingen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ exact oplossen.
- Je kunt vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ exact oplossen.
- Je kunt vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = \sin(B)$ en $\cos(A) = \cos(B)$ exact oplossen.
- Je kunt vergelijkingen van de vorm $\tan(A) = C$ en $\tan(A) = \tan(B)$ exact oplossen.
- Je kunt de kenmerken van de standaardgrafiek $y = \tan(x)$ gebruiken.

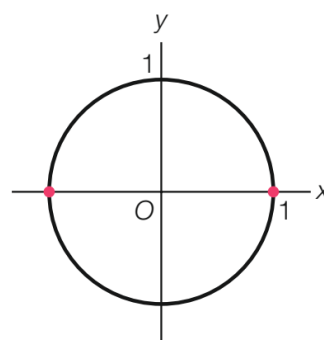
048

□ ⊙ *

De eenheidscirkel snijdt de x -as in de punten $(1, 0)$ en $(-1, 0)$.

Bij deze punten horen de draaiingshoeken $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ en ook $-\pi, -2\pi, -3\pi, \dots$

Welke draaiingshoeken horen bij het snijpunt $(0, 1)$ van de eenheidscirkel met de y -as? En welke horen bij het snijpunt $(0, -1)$ van de eenheidscirkel met de y -as?

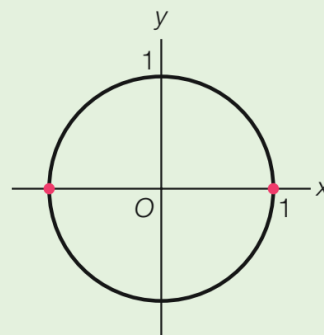


Theorie A $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$

Bij de snijpunten van de eenheidscirkel met de x -as horen de draaiingshoeken $\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

Dit noteren we kort als $k \cdot \pi$, waarbij k een geheel getal is.

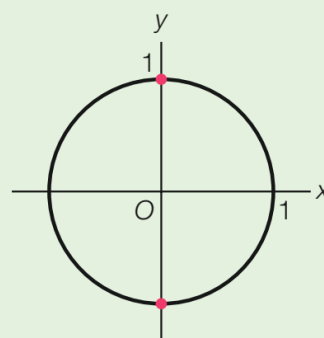
De getallen $k \cdot \pi$ zijn alle oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = 0$, want de sinus van een hoek is de y -coördinaat van het bijbehorende punt op de eenheidscirkel en de punten $(-1, 0)$ en $(1, 0)$ zijn alle punten op de eenheidscirkel met y -coördinaat 0.



k is in dit hoofdstuk een geheel getal.

Bij de snijpunten van de eenheidscirkel met de y -as horen de draaiingshoeken $\dots, -2\frac{1}{2}\pi, -1\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi, \dots$

Dit noteren we kort als $\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$. Hiermee heb je alle oplossingen van de vergelijking $\cos(x) = 0$, want de cosinus van een hoek is de x -coördinaat van het bijbehorende punt op de eenheidscirkel en de punten $(0, 1)$ en $(0, -1)$ zijn alle punten op de eenheidscirkel met x -coördinaat 0.



Bij de vergelijking $\sin(x) = 1$ hoort het punt op de eenheidscirkel met y-coördinaat 1, dus het punt $(0, 1)$.
Dus de vergelijking $\sin(x) = 1$ heeft als oplossing $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Bij het punt $(0, 1)$ horen de draaiingshoeken $\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi, 4\frac{1}{2}\pi, \dots$ en ook $-1\frac{1}{2}\pi, -3\frac{1}{2}\pi, -5\frac{1}{2}\pi, \dots$

De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ los je op met behulp van de eenheidscirkel.

$\sin(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$

$\cos(A) = 0$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$\sin(A) = 1$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = 1$ geeft $A = k \cdot 2\pi$

$\sin(A) = -1$ geeft $A = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = -1$ geeft $A = \pi + k \cdot 2\pi$

Voor A kun je elke uitdrukking invullen.

Bij de vergelijking $\sin(4x - \frac{1}{3}\pi) = 0$ is $A = 4x - \frac{1}{3}\pi$.

Je krijgt $4x - \frac{1}{3}\pi = k \cdot \pi$, dus $4x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$ oftewel $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1$

b $\cos^2(x) - \cos(x) = 0$

c $\sin^2(\frac{1}{2}\pi x) = 1$

$\cos^2(x)$ betekent $(\cos(x))^2$.

Uitwerking

a $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$$

Deel alle termen door 2, dus $k \cdot 2\pi$ wordt $k \cdot \pi$.

b $\cos^2(x) - \cos(x) = 0$

$$\cos(x)(\cos(x) - 1) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \vee \cos(x) = 1$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = k \cdot 2\pi$$

Breng $\cos(x)$ buiten haakjes.

Gebruik $AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

c $\sin^2(\frac{1}{2}\pi x) = 1$

$$\sin(\frac{1}{2}\pi x) = 1 \vee \sin(\frac{1}{2}\pi x) = -1$$

$$\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1 + k \cdot 4 \vee x = 3 + k \cdot 4$$

Gebruik $A^2 = 1$ geeft $A = 1 \vee A = -1$.

R49 Je kunt de oplossing van voorbeeld c ook noteren als $x = 1 + k \cdot 2$.

   Licht dit toe.

50 Bereken exact de oplossingen.



- a** $\sin(3x - \frac{1}{2}\pi) = 0$ **c** $\sin^2(x) - \sin(x) = 0$
b $\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi) = 0$ **d** $\cos^2(2x) + \cos(2x) = 0$

51 Bereken exact de oplossingen.



- a** $\cos^2(x - \frac{1}{5}\pi) = 1$ **c** $\sin^3(x) - \sin(x) = 0$
b $\sin^2(2x - \frac{1}{4}\pi) = 1$ **d** $\cos^3(2x) - \cos(2x) = 0$

A52 Bereken exact de oplossingen.

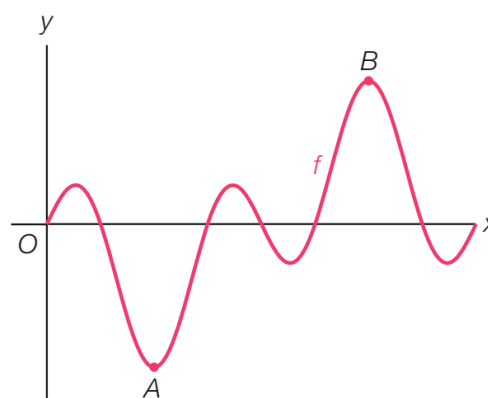


- a** $\sin(4x - \frac{1}{3}\pi) = 1$ **c** $\sin^2(\frac{1}{4}\pi x) = 1$
b $\cos(4\pi x) = -1$ **d** $\sin(2x)\cos(2x) + \sin(2x) = 0$

A53 Gegeven is de functie $f(x) = 2 \sin(x) \cos(2x)$ met domein $[0, 2\pi]$. Hiernaast zie je de grafiek van f met de toppen $A(\frac{1}{2}\pi, -2)$ en $B(1\frac{1}{2}\pi, 2)$.



- a** Bereken exact de nulpunten van f .
b Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn door A en B door een snijpunt van de grafiek van f met de x -as gaat.



Op de grafiek van f liggen de punten $C(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2})$ en $D(1\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{2})$.

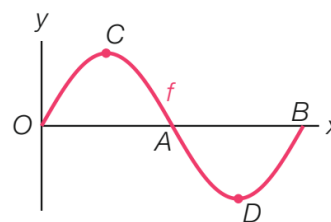
- c** Toon dit aan.
d Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn door C en D door een snijpunt van de grafiek van f met de x -as gaat.

A54 Gegeven is de functie $f(x) = 3 \sin(\frac{1}{2}\pi x)$ met domein $[0, 4]$.



De grafiek van f snijdt de x -as in de oorsprong en in de punten A en B . De toppen van de grafiek van f zijn de punten C en D . Zie de figuur hiernaast.

- a** De grafiek van de functie $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ gaat door de oorsprong en de punten A , B en C . Bereken exact de x -coördinaten van de twee toppen van de grafiek van g .
b De grafiek van de functie $h(x) = px^3 + qx^2 + rx$ snijdt de x -as behalve in de oorsprong ook nog in B en in het punt $(m, 0)$. Verder is C een top van de grafiek van h . Bereken exact de x -coördinaat van de andere top van de grafiek van h .



De grafiek van $y = ax(x - m)(x - n)$ snijdt de x -as in de punten $(0, 0)$, $(m, 0)$ en $(n, 0)$.

55 Gegeven is de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$.



- a Licht toe dat $x = \frac{1}{6}\pi$ een oplossing is.
- b Waarom is $x = 2\frac{1}{6}\pi$ een oplossing? En waarom $x = 4\frac{1}{6}\pi$?
- c Licht toe dat $x = \frac{5}{6}\pi$ een oplossing is.
- d Waarom is $x = 2\frac{5}{6}\pi$ een oplossing? En waarom $x = -1\frac{1}{6}\pi$?

Theorie B $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

In opgave 55 heb je gezien dat bij de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$ de oplossingen $\dots, \frac{1}{6}\pi, 2\frac{1}{6}\pi, 4\frac{1}{6}\pi, \dots$ en $\dots, -1\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, 2\frac{5}{6}\pi, \dots$ horen.

Omdat $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ krijg je $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Omdat ook $\sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ krijg je ook $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

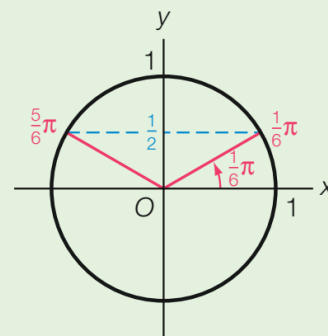
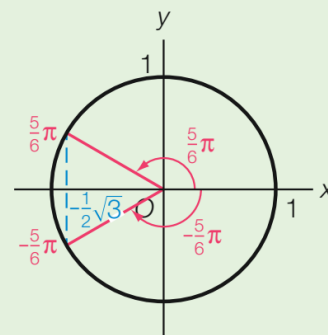
De oplossingen $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{5}{6}\pi$ zijn gevonden met de exacte-waardencirkel.

Merk op dat $\frac{5}{6}\pi = \pi - \frac{1}{6}\pi$.

Neem je bij $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ voor k de waarde -1 , dan krijg je de oplossing $x = \frac{5}{6}\pi - 1 \cdot 2\pi = -1\frac{1}{6}\pi$.

Voor $k = 3$ krijg je de oplossing $x = \frac{5}{6}\pi + 3 \cdot 2\pi = 6\frac{5}{6}\pi$.

Bij het vinden van de oplossingen van de vergelijking $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ gebruik je de figuur hiernaast. Je krijgt $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.



De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ los je op door uit de exacte-waardencirkel één oplossing B af te lezen.

Daarna gebruik je

$\sin(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$.

Zoek je de oplossingen van de vergelijking $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ met x in $[0, 2\pi]$ dan noteer je eerst

$$\cos(2x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

Daarna bedenkt je het volgende.

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \text{ geeft}$$

$$\vdots$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + -1 \cdot \pi = -\frac{5}{6}\pi \quad \text{niet in } [0, 2\pi]$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + 0 \cdot \pi = \frac{1}{6}\pi \quad \text{wel in } [0, 2\pi]$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + 1 \cdot \pi = 1\frac{1}{6}\pi \quad \text{wel in } [0, 2\pi]$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + 2 \cdot \pi = 2\frac{1}{6}\pi \quad \text{niet in } [0, 2\pi]$$

$\vdots$

$$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \text{ geeft}$$

$$\vdots$$

$$x = -\frac{1}{6}\pi + 0 \cdot \pi = -\frac{1}{6}\pi \quad \text{niet in } [0, 2\pi]$$

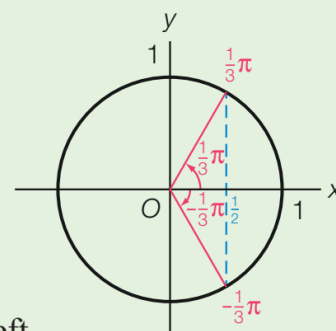
$$x = -\frac{1}{6}\pi + 1 \cdot \pi = \frac{5}{6}\pi \quad \text{wel in } [0, 2\pi]$$

$$x = -\frac{1}{6}\pi + 2 \cdot \pi = 1\frac{5}{6}\pi \quad \text{wel in } [0, 2\pi]$$

$$x = -\frac{1}{6}\pi + 3 \cdot \pi = 2\frac{5}{6}\pi \quad \text{niet in } [0, 2\pi]$$

$\vdots$

Dus de oplossingen van de vergelijking $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ met x in $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = 1\frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.



Voorbeeld

a Bereken exact de oplossingen van $2 \sin(3x) = \sqrt{3}$.

b Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$ van $2 \cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\sqrt{2}$.

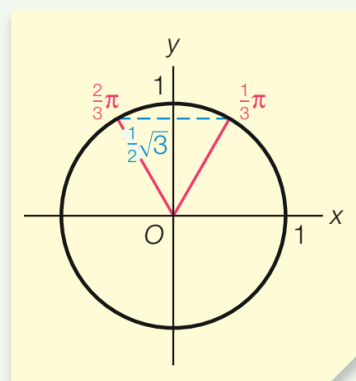
Uitwerking

a $2 \sin(3x) = \sqrt{3}$

$$\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$



b $2 \cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\sqrt{2}$

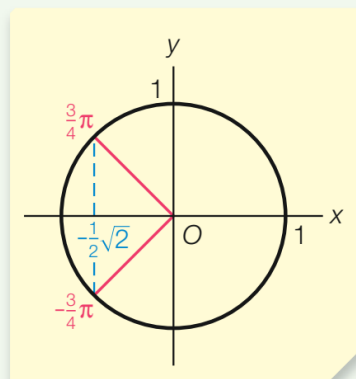
$$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{13}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{13}{24}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{5}{24}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{13}{24}\pi \vee x = 1\frac{13}{24}\pi \vee x = \frac{19}{24}\pi \vee x = 1\frac{19}{24}\pi$$



56 Bereken exact de oplossingen.



- a** $2 \sin(\frac{1}{2}x) = 1$ **c** $2 \sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{3}$
b $2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 1$ **d** $2 \cos(3x - \pi) = -1$

57 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.



- a** $2 \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \sqrt{2}$ **c** $\sin(\frac{2}{3}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
b $2 \cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = \sqrt{3}$ **d** $\cos(\frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

58 Gegeven is de vergelijking $2 \sin^2(x) = 1$.



- a** Licht toe dat uit $2 \sin^2(x) = 1$ volgt $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
b Licht toe dat uit $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ volgt
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.
c Licht toe dat de oplossingen van b te combineren zijn tot
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.
d Licht toe dat de oplossing $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ ook direct uit de
exacte-waardencirkel is af te lezen.

A59 Bereken exact de oplossingen.



- a** $2 \cos^2(\frac{1}{2}x) = 1$ **c** $4 \cos^2(x + \frac{1}{4}\pi) = 3$
b $4 \sin^2(x - \frac{1}{6}\pi) = 1$ **d** $4 \sin^3(x) - \sin(x) = 0$

A60 Bereken exact de oplossingen in $[0, 10]$.



- a** $\sin(\frac{1}{2}\pi x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **c** $4 \sin^2(\frac{1}{5}\pi x) = 1$
b $\cos(\frac{1}{3}\pi x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **d** $2 \cos^2(\frac{1}{10}\pi x) + \cos(\frac{1}{10}\pi x) = 1$

A61 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2} + \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$ met domein $[0, 3\pi]$.



- a** Schets de grafiek van f .
b Bereken exact de coördinaten van de punten waar de grafiek van f de
lijn van de evenwichtsstand snijdt.
c Bereken exact de coördinaten van de drie toppen van de grafiek.
d De grafiek van f snijdt de x -as achtereenvolgens in de punten A , B en C .
Bereken exact de afstand tussen A en B .
e Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) \geq -1$.

A62 Gegeven is de functie $f(x) = |2 \sin(x) - 1|$ met domein $[0, 2\pi]$.



- *** Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) \geq 2$.

O63 Bereken exact de oplossingen.



a $\sin(3x) = \sin(\frac{1}{6}\pi)$

b $\cos(3x) = \cos(\frac{1}{6}\pi)$

Theorie C $\sin(A) = \sin(B)$ en $\cos(A) = \cos(B)$

Zoals uit $\sin(3x) = \sin(\frac{1}{6}\pi)$ volgt $3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \pi - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

volgt uit $\sin(3x) = \sin(x)$ dat $3x = x + k \cdot 2\pi \vee 3x = \pi - x + k \cdot 2\pi$.

Zoals uit $\cos(3x) = \cos(\frac{1}{6}\pi)$ volgt $3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

volgt uit $\cos(3x) = \cos(x)$ dat $3x = x + k \cdot 2\pi \vee 3x = -x + k \cdot 2\pi$.

$\sin(A) = \sin(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = \cos(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$

Voorbeeld

a Bereken exact de oplossingen van $\sin(x+1) = \sin(2x-3)$.

b Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$ van $\cos(3x) = \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$.

Uitwerking

a $\sin(x+1) = \sin(2x-3)$

$x+1 = 2x-3 + k \cdot 2\pi \vee x+1 = \pi - (2x-3) + k \cdot 2\pi$

$-x = -4 + k \cdot 2\pi \vee x+1 = \pi - 2x + 3 + k \cdot 2\pi$

$x = 4 - k \cdot 2\pi \vee 3x = \pi + 2 + k \cdot 2\pi$

$x = 4 + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3} + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Je mag $x = 4 - k \cdot 2\pi$ ook schrijven als $x = 4 + k \cdot 2\pi$,
want dit geeft dezelfde oplossingen.

b $\cos(3x) = \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$

$3x = x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -(x - \frac{1}{4}\pi) + k \cdot 2\pi$

$2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \vee 4x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{7}{8}\pi \vee x = 1\frac{7}{8}\pi \vee x = \frac{1}{16}\pi \vee x = \frac{9}{16}\pi \vee x = 1\frac{1}{16}\pi \vee x = 1\frac{9}{16}\pi$

64 Bereken exact de oplossingen.



a $\sin(x+1) = \sin(2x+3)$

b $\cos(2x-1) = \cos(x+1)$

c $\sin(2x - \frac{1}{2}\pi) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$

d $\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = \cos(2x)$

e $\sin(2\pi x) = \sin(\pi(x-1))$

f $\cos(\frac{1}{2}\pi x) = \cos(\pi(x-2))$

A65 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.



a $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$

b $\cos(3x + \frac{1}{2}\pi) = \cos(2x - \frac{1}{4}\pi)$

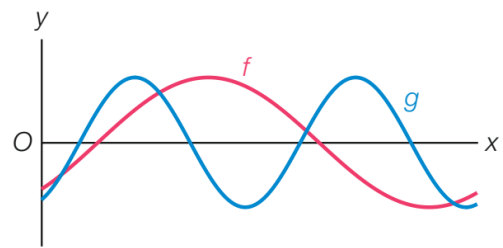
A66 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$ en



$g(x) = \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.

Hiernaast zie je de grafieken van f en g .

Bereken exact voor welke waarden van x geldt $f(x) < g(x)$.



O67 Gegeven is de functie $f(x) = \tan(x)$.



a Plot de grafiek. Neem x tussen 0 en 2π en y tussen -5 en 5.

b De grafiek van f heeft in $[0, 2\pi]$ twee verticale asymptoten.

Welke lijnen zijn dat, denk je?

O68 Er geldt $\tan(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$.



a Licht dit toe.

b Bereken exact de oplossingen van $\tan(2x - \frac{1}{6}\pi) = 0$.

Theorie D De tangensfunctie

Je weet dat voor de draaiingshoek α van het punt $P(x_P, y_P)$

op de eenheidscirkel geldt $\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$.

Bij de draaiingshoek $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ is $P(0, 1)$, dus $\tan(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{0}$

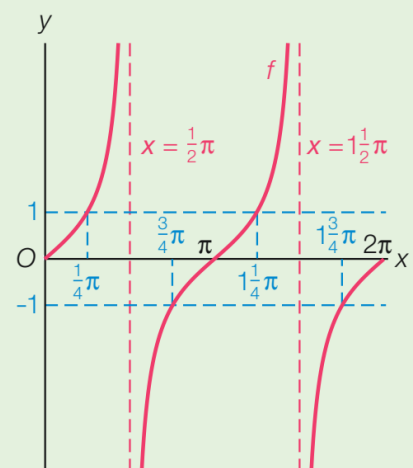
en dit bestaat niet. De lijn $x = \frac{1}{2}\pi$ is een verticale asymptoot van de grafiek van $f(x) = \tan(x)$.

Bij de draaiingshoek $\alpha = 1\frac{1}{2}\pi$ is $P(0, -1)$, dus ook

$\tan(1\frac{1}{2}\pi) = \frac{-1}{0}$ bestaat niet. Ook de lijn met vergelijking

$x = 1\frac{1}{2}\pi$ is een verticale asymptoot van de grafiek van $f(x) = \tan(x)$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = \tan(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$. Het punt $(0, 0)$ is een beginpunt van de grafiek en de periode is π .



In opgave 68 heb je gezien dat geldt $\tan(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$.
 Ook de vergelijkingen $\tan(A) = C$ met $C = -\sqrt{3}, -1, -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}$
 zijn exact op te lossen. Je gebruikt de volgende tabel en dat de grafiek
 van $f(x) = \tan(x)$ periode π heeft.

x	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
$\tan(x)$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Bij het exact oplossen van de vergelijking $\tan(A) = \tan(B)$ gebruik je

$$\tan(A) = \tan(B) \text{ geeft } A = B + k \cdot \pi$$

Je hebt gezien dat de grafiek van $f(x) = \tan(x)$ verticale asymptoten heeft
 voor $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$. En zo vind je de asymptoten van de grafiek van
 $g(x) = \tan(3\pi x)$ door de vergelijking $3\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ op te lossen.

R69 Gegeven is de functie $g(x) = \tan(3\pi x)$ uit de theorie.

   Bereken de vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van g op
 het interval $[0, 1]$.

70 Bereken exact de oplossingen.

a $\tan(3x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

b $1 - \tan(\frac{3}{4}x) = 2$

c $\tan(\frac{1}{2}x) = \tan(2x - \frac{1}{6}\pi)$

d $3 \tan(\frac{1}{2}\pi x) = \sqrt{3}$

e $2 + \sqrt{3} \cdot \tan(\frac{1}{8}\pi x) = 5$

f $\tan(\frac{1}{3}\pi x) = \tan(\frac{1}{4}\pi(x - 1))$

71 Op het interval $[0, 3\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = 2 + \tan(\frac{1}{2}x)$.



a Geef van de grafiek van f de periode en de coördinaten van een beginpunt,
 bereken de vergelijkingen van de asymptoten, en schets de grafiek van f .

b De functie heeft één nulpunt.

Bereken dit nulpunt in twee decimalen.

c De lijn $y = 3$ snijdt de grafiek van f twee keer.

Bereken exact de coördinaten van deze snijpunten.

72 Op het interval $[0, 4\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = 1 - \tan(\frac{2}{3}x)$.



a Geef van de grafiek van f de periode en de coördinaten van een beginpunt,
 bereken de vergelijkingen van de asymptoten, en schets de grafiek van f .

b Bereken exact de nulpunten van f .

c Bereken exact de oplossingen van $f(x) < 2$.

A73 Op het interval $[0, 12]$ is gegeven de functie $f(x) = 3 + \tan(\frac{1}{4}\pi x)$.

- ⊗ *** **a** Geef van de grafiek van f de periode en de coördinaten van een beginpunt, bereken de vergelijkingen van de asymptoten, en schets de grafiek van f .
b Bereken exact de oplossingen van $f(x) > 4$.
c Los op $f(x) > x$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

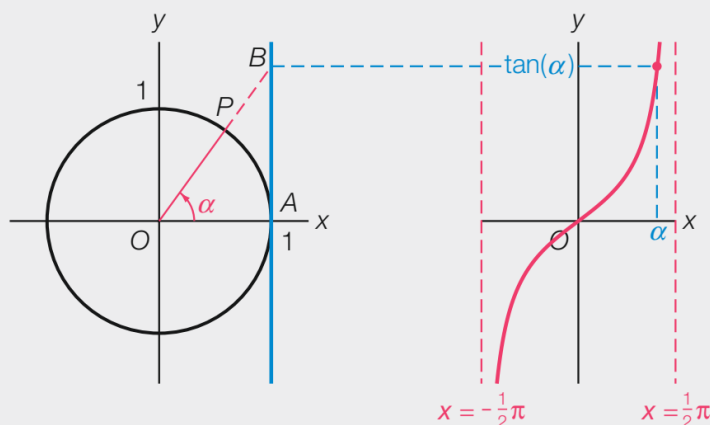
A74 Bereken exact de oplossingen van $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\cos(2x - \frac{1}{3}\pi)$.

Informatief Tangensfunctie en tangensgrafiek

De naam tangens komt van het Latijnse woord *tangere* dat raken betekent. In de figuur hieronder is aan de eenheidscirkel een raaklijn in het punt $A(1, 0)$ getekend. Het tweede been van de draaiingshoek α met $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ snijdt deze raaklijn in het punt B .

Er geldt dat $\tan(\alpha) = y_B$, want $\tan(\alpha) = \frac{y_B}{x_B} = \frac{y_B}{1} = y_B$.

Door in een Oxy -assenstelsel y_B uit te zetten tegen α , ontstaat de grafiek van de tangens.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ exact oplossen. ▶ **OPGAVE C9**
THEORIE A
- ☐ Ik kan vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ exact oplossen. ▶ **OPGAVE C10**
THEORIE B
- ☐ Ik kan vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = \sin(B)$ en $\cos(A) = \cos(B)$ exact oplossen. ▶ **OPGAVE C11**
THEORIE C
- ☐ Ik kan vergelijkingen van de vorm $\tan(A) = C$ en $\tan(A) = \tan(B)$ exact oplossen. ▶ **OPGAVE C12**
THEORIE D
- ☐ Ik kan de kenmerken van de standaardgrafiek $y = \tan(x)$ gebruiken. ▶ **OPGAVE C13**
THEORIE D

C9 Bereken exact de oplossingen.

a $\sin(1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\pi) = -1$ **b** $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 0$

C10 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $2\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = \sqrt{3}$ **b** $\cos(2x + \frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

C11 a Bereken exact de oplossingen van $\sin(2x - \frac{1}{2}\pi) = \sin(3x - \frac{1}{6}\pi)$.

b Bereken exact de oplossingen in $[0, 3]$ van $\cos(\frac{1}{2}\pi x) = \cos(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{3}\pi)$.

C12 Bereken exact de oplossingen.

a $1 - \sqrt{3} \cdot \tan(\frac{1}{12}\pi x) = 2$ **b** $\tan(\frac{2}{3}x) = \tan(1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\pi)$

C13 Op het interval $[0, 5]$ is gegeven de functie $f(x) = 1 + \tan(\frac{1}{3}\pi x)$.

Geef van de grafiek van f de periode en de coördinaten van een beginpunt, bereken de vergelijkingen van de asymptoten, en schets de grafiek van f .

Antwoorden

C9 a $x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi$

b $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

C10 a $x = \frac{7}{2}\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi$

b $x = \frac{1}{8}\pi \vee x = \frac{3}{8}\pi \vee x = 1\frac{1}{8}\pi \vee x = 1\frac{3}{8}\pi$

C11 a $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

b $x = \frac{1}{6} \vee x = 1\frac{1}{6} \vee x = 1\frac{2}{3} \vee x = 2\frac{1}{6}$

C12 a $x = 10 + k \cdot 12$

b $x = \frac{9}{10}\pi + k \cdot 1\frac{1}{5}\pi$

C13 beginpunt $(0, 1)$, periode 3 en asymptoten $x = 1\frac{1}{2}$ en $x = 4\frac{1}{2}$

*

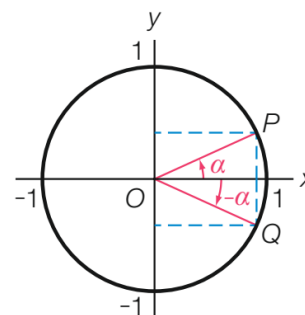
8.4 Herleiden en differentiëren

Kennis en vaardigheden

- Je kunt een goniometrische formule herleiden tot een gelijkwaardige formule.
- Je kunt goniometrische functies differentiëren.

O75
□ ⊗ *

Gegeven is het punt P op de eenheidscirkel. De draaiingshoek van P is α . Het punt Q is het spiegelbeeld van P in de x -as, dus de draaiingshoek van Q is $-\alpha$. Zie de figuur hiernaast. Licht toe dat $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ en dat $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.



Theorie A Goniometrische formules herleiden

In opgave 75 heb je gezien dat $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ en $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

Zie de figuur hiernaast. Het punt P ligt op de eenheidscirkel en de draaiingshoek van P is α . Punt R is het beeld van P bij draaiing om O over $\frac{1}{2}\pi$, dus de draaiingshoek van R is $\alpha + \frac{1}{2}\pi$ en ook geldt $x_R = -y_P$ en $y_R = x_P$.

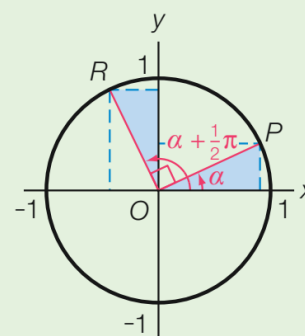
Dus $\cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = x_R = -y_P = -\sin(\alpha)$ en

$\sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = y_R = x_P = \cos(\alpha)$.

Door de formule $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = \cos(\alpha)$ te schrijven als $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi)$ is deze te gebruiken om een cosinus om te zetten in een sinus. Voor het omzetten van een sinus in een cosinus gebruik je de formule $\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi)$. Deze formule toon je aan in opgave 77.

Verder toon je in deze opgave aan dat $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$ en $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Uit de definities van $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ en $\tan(\alpha)$ volgt direct dat $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.



$\sin(-A) = -\sin(A)$	$\cos(-A) = \cos(A)$	$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$
$-\sin(A) = \sin(A + \pi)$	$-\cos(A) = \cos(A + \pi)$	$\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$
$\sin(A) = \cos(A - \frac{1}{2}\pi)$	$\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$	

Neem je in de formule $\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$ voor A de uitdrukking $2x - \frac{1}{4}\pi$, dan krijg je $\cos(2x - \frac{1}{4}\pi) = \sin(2x - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(2x + \frac{1}{4}\pi)$.

Voorbeeld

Herleid de formule $y = -\cos(2x + \frac{2}{3}\pi)$ tot de vorm $y = \sin(ax + b)$.

Uitwerking

$$\begin{aligned} y &= -\cos(2x + \frac{2}{3}\pi) = \cos(2x + \frac{2}{3}\pi + \pi) = \cos(2x + 1\frac{2}{3}\pi) \\ &= \sin(2x + 1\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(2x + 2\frac{1}{6}\pi) = \sin(2x + \frac{1}{6}\pi) \end{aligned}$$

Dus $y = \sin(2x + \frac{1}{6}\pi)$.

Door beide grafieken te plotten, kun je nagaan of de gevonden formule klopt.

In het voorbeeld is $\sin(2x + 2\frac{1}{6}\pi)$ herleid tot $\sin(2x + \frac{1}{6}\pi)$. Daarbij is gebruikt dat $\sin(A + k \cdot 2\pi) = \sin(A)$. Er geldt ook dat $\cos(A + k \cdot 2\pi) = \cos(A)$ en $\tan(A + k \cdot \pi) = \tan(A)$.

R76 Zie het voorbeeld.



- a** Welke formules uit het rode kader op de vorige bladzijde zijn gebruikt bij de herleiding?
- b** Door achtereenvolgens de formules $\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$ en $\sin(-A) = -\sin(A)$ te gebruiken, kun je de formule $y = -\cos(2x + \frac{2}{3}\pi)$ herleiden tot $y = \sin(-2x - 1\frac{1}{6}\pi)$. Toon dit aan.

77 Toon aan met behulp van de eenheidscirkel.



- a** $\cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi) = \sin(\alpha)$
- b** $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$
- c** $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$
- d** $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

78 **a** Herleid $y = \sin(x + \frac{1}{6}\pi)$ tot de vorm $y = \cos(ax + b)$.



- b** Herleid $y = \cos(2x + \frac{1}{3}\pi)$ tot de vorm $y = \sin(ax + b)$.
- c** Herleid $y = -\sin(3x - \frac{2}{3}\pi)$ tot de vorm $y = \cos(ax + b)$.
- d** Herleid $y = -\cos(4x + 1\frac{1}{6}\pi)$ tot de vorm $y = \sin(ax + b)$.

79 **a** Herleid $y = (\sin(x) - \cos(x))^2$.



- b** Herleid $y = \frac{2\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}$ tot een vorm met $\tan(x)$.

A80

- a** Bewijs dat de formule $y = (\sin(x) + 1)^2 + \cos^2(x) - \sin(x)$ te schrijven is als $y = \sin(x) + 2$.
- b** Herleid de formule $y = 2 \cos^2(x) + 2 \sin(x) - 3$ tot de vorm $y = a \sin^2(x) + b \sin(x) + c$.
- c** De formule $y = 2 \sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x)$ is te schrijven in de vorm $y = a \cos^2(x) + b \cos(x) + c$.
Bereken exact de waarden van a , b en c .

O81

In deze opgave gebruik je de definitie van de afgeleide om te onderzoeken wat de afgeleide is van de functie $f(x) = \sin(x)$.

Definitie van de afgeleide

De afgeleide f' van een functie f is $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Dus $f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$.

Je krijgt een goede benadering van $f'(x)$ als je $h = 0,01$ neemt, dus $f'(x) \approx \frac{\sin(x+0,01) - \sin(x)}{0,01}$.

- a** Voer de formules $y = \frac{\sin(x+0,01) - \sin(x)}{0,01}$ en $y = \cos(x)$ in op je GR en plot de grafieken in één figuur. Neem x tussen 0 en 2π en y tussen -2 en 2.
Op grond van de figuur die je krijgt, kun je vermoeden dat $f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$.
Licht dit toe.
- b** Neem aan dat inderdaad geldt dat $f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$.
Gebruik dit en de regels $\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$ en $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$ om aan te tonen dat $g(x) = \cos(x)$ geeft $g'(x) = -\sin(x)$.

Theorie B De afgeleide van sinus, cosinus en tangens

In opgave 81 heb je het volgende gezien.

$f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$
 $g(x) = \cos(x)$ geeft $g'(x) = -\sin(x)$

In het informatief op de volgende bladzijde wordt bewezen dat $f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$. Daarbij is de hoek in radialen uitgedrukt. Daarom geldt deze regel alleen als x in radialen is uitgedrukt.

Informatief Een bewijs van de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$

We bewijzen als volgt dat geldt

$f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$.

Hiernaast is in de eenheidscirkel de draaiingshoek van punt A gelijk aan x en van punt B gelijk aan $x + h$.

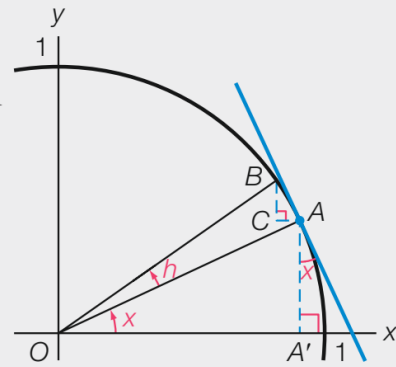
Uit de definitie van de radiaal volgt dat

booglengte $AB = h$. Voor kleine waarden van h is

booglengte $AB \approx$ lijnstuk AB en $\angle ABC \approx x$.

Met de definitie van de afgeleide krijg je $f(x) = \sin(x)$

$$\begin{aligned} \text{geeft } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_B - y_A}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_B - y_C}{\text{booglengte } AB} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{BC}{\text{lijnstuk } AB} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(\angle ABC) = \cos(x). \end{aligned}$$



Voor het berekenen van de afgeleide van $f(x) = \tan(x)$

gebruik je de formule $\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$ en de quotiëntregel.

Je krijgt $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Dit geeft

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot -\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}.$$

Deze afgeleide kun je op twee manieren herleiden.

- Met de formule $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ krijg je $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
- Uitdelen en de formule $\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \tan^2(x).$$

$$f(x) = \tan(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ en } f'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

Bij het differentiëren van goniometrische functies heb je vaak de kettingregel nodig.

Bij het differentiëren van $f(x) = \sin(3x)$ krijg je
 $f'(x) = \cos(3x) \cdot 3 = 3 \cos(3x)$.

Bij het differentiëren van $g(x) = \sin(x^3)$ krijg je
 $g'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3)$.

Bij het differentiëren van $h(x) = \sin^3(x)$ krijg je $h'(x) = 3 \sin^2(x) \cos(x)$.
 Met behulp van de formule $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ is $h'(x)$ uit te drukken in $\cos(x)$. Immers $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, dus
 $h'(x) = 3(1 - \cos^2(x)) \cos(x) = 3 \cos(x) - 3 \cos^3(x)$.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = 1 + 2 \cos(3(x - \frac{1}{12}\pi))$

b $g(x) = x \sin(x)$

c $h(x) = \frac{x + \cos(x)}{\sin(x)}$

d $k(x) = x^2 \tan(x)$

Productregel

$$[f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Quotiëntregel

$$\left[\frac{t}{n}\right]' = \frac{nt' - tn'}{n^2}$$

Uitwerking

a $f(x) = 1 + 2 \cos(3(x - \frac{1}{12}\pi)) = 1 + 2 \cos(3x - \frac{1}{4}\pi)$ geeft
 $f'(x) = -2 \sin(3x - \frac{1}{4}\pi) \cdot 3 = -6 \sin(3x - \frac{1}{4}\pi)$

de kettingregel

b $g(x) = x \sin(x)$ geeft
 $g'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \sin(x) + x \cos(x)$

de productregel

c $h(x) = \frac{x + \cos(x)}{\sin(x)}$ geeft

$$h'(x) = \frac{\sin(x) \cdot (1 - \sin(x)) - (x + \cos(x)) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$= \frac{\sin(x) - \sin^2(x) - x \cos(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$

$$= \frac{\sin(x) - x \cos(x) - 1}{\sin^2(x)}$$

de quotiëntregel

d $k(x) = x^2 \tan(x)$ geeft
 $k'(x) = 2x \cdot \tan(x) + x^2 \cdot (1 + \tan^2(x)) = 2x \tan(x) + x^2 + x^2 \tan^2(x)$

Gebruik je in voorbeeld d de regel $f(x) = \tan(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$,
 dan krijg je $k'(x) = 2x \tan(x) + \frac{x^2}{\cos^2(x)}$.

82 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = 3 + 4 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$

d $k(x) = \cos^2(x)$

b $g(x) = x \cos(x)$

e $l(x) = x + 3 \sin^2(x)$

c $h(x) = \frac{x^2 + \sin(x)}{\cos(x)}$

f $m(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

83 Differentieer.



- a $f(x) = 10 + 16 \cos(\frac{1}{2}(x - 1))$
- b $g(x) = x^2 \sin(3x)$
- c $h(x) = \frac{\sin(x)}{x^2 + \cos(x)}$
- d $k(x) = 2 \sin^2(x)$

84 Differentieer.



- a $f(x) = x \cos(2x)$
- b $g(x) = 2x \sin(3x - 1)$
- c $h(x) = \frac{x \sin(x)}{x + \sin(x)}$
- d $k(x) = 1 + 2 \cos^2(x)$

85 a Differentieer $f(x) = 3 \tan(2x)$.



- b Toon aan $g(x) = \tan^2(x)$ geeft $g'(x) = \frac{2 \sin(x)}{\cos^3(x)}$.

A86 Bereken de afgeleide.



- a $f(x) = \cos^3(x)$
- b $g(x) = \cos(x^3)$
- c $h(x) = \sqrt{\sin(x)}$
- d $k(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

A87 a Bewijs dat $f(x) = \sin^3(x) + \sin(x)$ geeft $f'(x) = 4 \cos(x) - 3 \cos^3(x)$.



- b Druk de afgeleide van $g(x) = \sin^2(x) \cos(x)$ uit in $\sin(x)$.

c Bewijs dat $h(x) = \frac{\tan(x)}{\sin(x)}$ geeft $h'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.

A88 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3 \cos(x)}{2 - \sin(x)}$ met domein $[0, 2\pi]$.

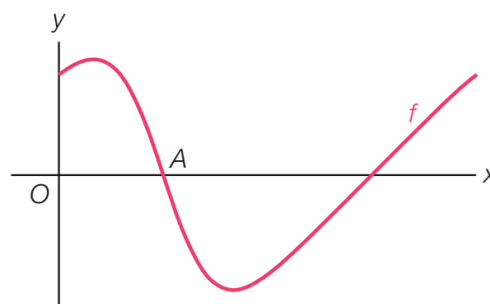


De afgeleide is te herleiden tot $f'(x) = \frac{-6 \sin(x) + 3}{(2 - \sin(x))^2}$.

- a Bewijs dit.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f . Het punt A is een snijpunt van de grafiek met de x -as.

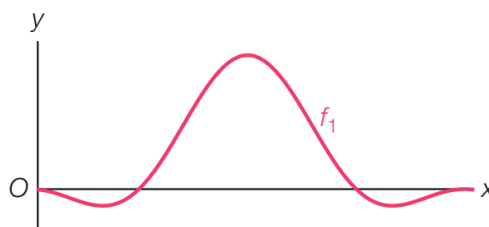
- b Bereken exact het bereik van f .
- c De lijn k snijdt de grafiek van f loodrecht in het punt A en snijdt de y -as in het punt B . Bereken exact de y -coördinaat van B .



A89 Voor elke waarde van p is gegeven de functie

⊠ ⊙ * $f_p(x) = p \cos^2(x) - \cos(x)$ met domein $[0, 2\pi]$.

- In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f_1 . Bereken exact het bereik van f_1 .
- Bereken exact het positieve maximum van f_p als gegeven is dat f_p een minimum heeft voor $x = \frac{1}{6}\pi$.
- Alle grafieken van f_p raken elkaar in de punten met x -coördinaat $\frac{1}{2}\pi$ en in de punten met x -coördinaat $1\frac{1}{2}\pi$. Bewijs dit.
- Alle toppen van de grafieken van f_p waarvoor niet geldt $x = 0$, $x = \pi$ en $x = 2\pi$ liggen op een kromme. Stel de formule op van deze kromme.

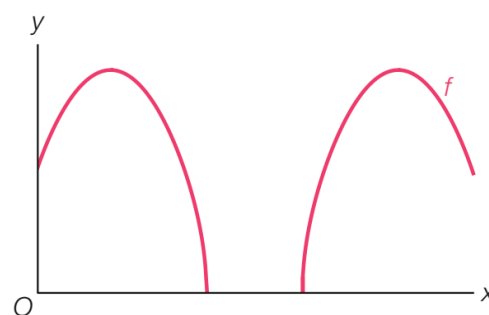


A90 Op het interval $[0, \pi]$ is gegeven de functie

⊠ * $f(x) = \sqrt{2 \sin(3x) + 1}$.

De afgeleide van f is $f'(x) = \frac{3 \cos(3x)}{\sqrt{2 \sin(3x) + 1}}$.

- Bewijs dit.
- In de figuur hiernaast zie je dat het domein van f bestaat uit twee losse intervallen. Bereken exact het domein en het bereik van f .
- De lijn $y = 1$ snijdt de grafiek van f van links naar rechts in de punten $A(0, 1)$, B , C en $D(\pi, 1)$. De lijn k raakt de grafiek van f in B en snijdt de x -as in het punt S . Bereken exact de x -coördinaat van S .
- Voor de grafiek van de functie g geldt het volgende. De grafiek van g is een sinusoïde. Twee opeenvolgende laagste punten van de grafiek van g vallen samen met de twee hoogste punten van de grafiek van f . De y -coördinaat van een hoogste punt van de grafiek van g is $3\sqrt{3}$. Stel een functievoorschrift op van g van de vorm $g(x) = a + b \sin(c(x - d))$. Geef exacte waarden van a , b , c en d .



A91 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door

⊠ * $f_p(x) = \cos^2(x) + 4 \sin(x) + p$.

Bereken exact voor welke p en q de grafiek van $g_q(x) = q \cos(x)$ de grafiek van f_p loodrecht snijdt in het punt A met $x_A = \frac{1}{6}\pi$.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan een goniometrische formule herleiden tot een gelijkwaardige formule.

► **OPGAVE C14**
THEORIE A

☐ Ik kan goniometrische functies differentiëren.

► **OPGAVE C15**
THEORIE B

- C14** **a** Herleid de formule $y = -\sin(2x + \frac{1}{4}\pi)$ tot de vorm $y = \cos(ax + b)$.
b Herleid de formule $y = 2\sin^2(x) + 3\cos(x)$ tot de vorm $y = a\cos^2(x) + b\cos(x) + c$.

C15 Differentieer.

- a** $f(x) = 2\sin(4x - \frac{1}{2}\pi)$
b $g(x) = \cos(3x^2 + 1)$
c $h(x) = 4\tan(2x)$
d $k(x) = x^3\sin(x)$
e $l(x) = \frac{\sin(x)}{x + \cos(x)}$

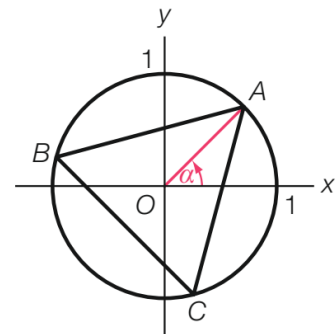
Antwoorden

- C14 a** $y = \cos(2x + \frac{3}{4}\pi)$
b $y = -2\cos^2(x) + 3\cos(x) + 2$
C15 a $f'(x) = 8\cos(4x - \frac{1}{2}\pi)$
b $g'(x) = -6x\sin(3x^2 + 1)$
c $h'(x) = \frac{8}{\cos^2(2x)}$ of $h'(x) = 8 + 8\tan^2(2x)$
d $k'(x) = 3x^2\sin(x) + x^3\cos(x)$
e $l'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x) + 1}{(x + \cos(x))^2}$

Kennis- en vaardighedentest

8.1 De eenheidscirkel en radialen

- 1** De hoekpunten van de gelijkzijdige driehoek ABC liggen op de eenheidscirkel. De draaiingshoek α is 40° . Zie de figuur hiernaast.
Bereken de coördinaten van de punten A , B en C . Rond af op twee decimalen.



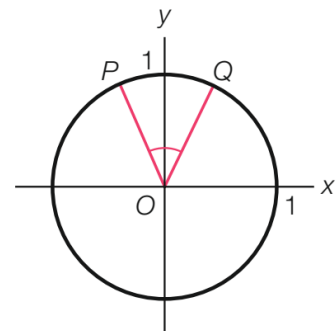
- 2** Druk uit in graden. Rond zo nodig af op één decimaal.

- a** $\frac{3}{4}\pi$ rad **c** $0,6$ rad **e** $\frac{2}{3}\pi$ rad
b $\frac{1}{5}\pi$ rad **d** 26π rad **f** $\frac{2}{3}$ rad

- 3** Druk uit in radialen. Geef een exact antwoord.

- a** 270° **c** 150° **e** 40°
b -60° **d** 330° **f** -70°

- 4** In de figuur hiernaast is $x_P = -0,4$ en $y_Q = 0,9$.
Bereken $\angle POQ$ in radialen. Rond af op twee decimalen.



$x_P = -0,4$ en $y_Q = 0,9$

- 5** Geef de exacte waarde van x .

- a** $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ met $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ **d** $x = \sin(1\frac{2}{3}\pi)$
b $x = \cos(\frac{3}{4}\pi)$ **e** $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ met $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq 1\frac{1}{2}\pi$
c $\cos(x) = \frac{1}{2}$ met $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$ **f** $x = \tan(1\frac{5}{6}\pi)$

8.2 Sinusoïden

- 6** Geef van de grafiek van de functie de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

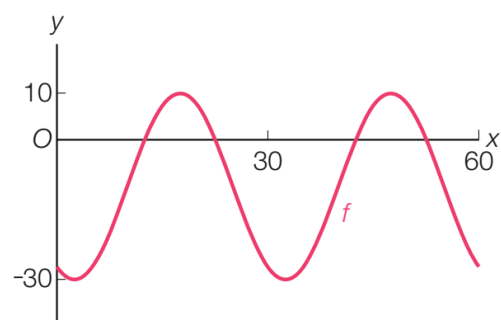
- a** $f(x) = -2 + 3 \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$ **b** $g(x) = 3 + 4 \cos(2(x - \frac{1}{4}))$

- 7** Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[-\pi, 3\pi]$.

- a** Geef van de grafiek van f de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.
b Geef de exacte coördinaten van de punten waar de grafiek van f de lijn van de evenwichtsstand snijdt.
c Geef de exacte coördinaten van de vier toppen van de grafiek van f .

- 8** Bij de sinusoïde in de figuur hiernaast zijn twee opeenvolgende toppen $(2\frac{1}{2}, -30)$ en $(17\frac{1}{2}, 10)$.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm

- a** $y = a + b \sin(c(x - d))$
b $y = a + b \cos(c(x - d))$.



- 9** **a** Teken de grafiek van $f(x) = 1 + 2 \sin(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[0, 8]$.
b Teken de grafiek van $g(x) = 2 - 3 \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$.

8.3 Goniometrische vergelijkingen

10 Bereken exact de oplossingen.

- a** $\sin(2x - \frac{1}{2}\pi) = -1$ **c** $\cos(\frac{1}{2}\pi x) \cdot (\cos(2\pi x) + 1) = 0$
b $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 0$ **d** $\sin^3(\frac{1}{3}\pi x) + \sin^2(\frac{1}{3}\pi x) = 0$

11 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

- a** $4 \sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = 2\sqrt{2}$ **c** $4 \cos^2(\frac{1}{2}x) = 2$
b $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **d** $\sin^2(\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}\pi) = \frac{3}{4}$

12 Bereken exact de oplossingen.

- a** $\sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$ **c** $\tan(\frac{2}{3}\pi x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$
b $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = \cos(4x + \frac{1}{4}\pi)$ **d** $\tan(2x - \frac{1}{3}\pi) = \tan(x + \frac{1}{2}\pi)$

13 Op het interval $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = 2 - \tan(1\frac{1}{2}x)$.

- a** Geef van de grafiek van f de periode en de coördinaten van een beginpunt, bereken de vergelijkingen van de asymptoten, en schets de grafiek van f .
b Bereken exact de oplossingen van $f(x) \leq 3$.

8.4 Herleiden en differentiëren

- 14** **a** Herleid de formule $y = \sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$ tot de vorm $y = \cos(ax + b)$.
b Herleid de formule $y = -\cos(5x + 1\frac{1}{4}\pi)$ tot de vorm $y = \sin(ax + b)$.
c Herleid de formule $y = (\sin(x) - \cos(x)) \cdot (\sin(x) + \cos(x)) \cdot \cos(x)$ tot de vorm $y = a \cos^3(x) + b \cos(x)$.

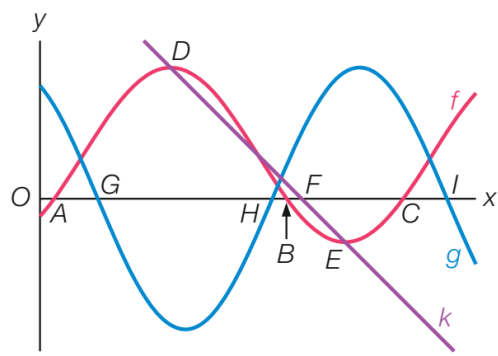
15 Differentieer.

- a** $f(x) = x^3 \sin(4x)$ **c** $h(x) = 5 \sin^2(x)$
b $g(x) = \frac{\sin(2x)}{2 + \cos(x)}$ **d** $k(x) = \tan(x^3)$

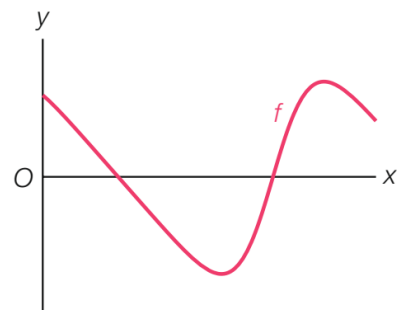
16 Op de grafiek van de functie $f(x) = \frac{\sin(2x)}{2 + \sin(x)}$ ligt het punt A met $x_A = \frac{1}{2}\pi$.

Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k aan de grafiek in A .

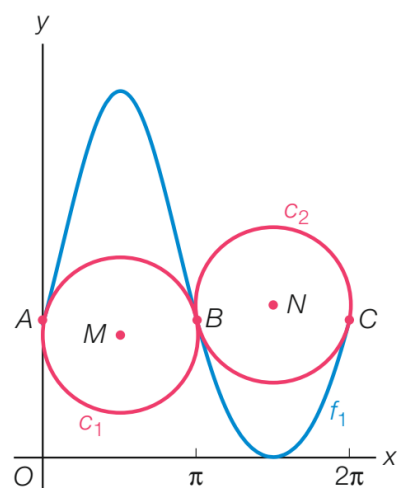
- 3** Gegeven zijn de functies $f(x) = 1 + 2 \sin(\frac{1}{2}\pi(x - \frac{1}{2}))$ en $g(x) = 3 \cos(\frac{1}{2}\pi(x + \frac{1}{3}))$ met domein $[0, 5]$. De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A , B en C en de toppen zijn de punten D en E . De lijn k gaat door D en E en snijdt de x -as in het punt F . De grafiek van g snijdt de x -as in de punten G , H en I . Zie de figuur hiernaast.
- Bereken exact de afstand tussen B en F .
 - Bewijs dat B het midden is van het lijnstuk HF .
 - In de punten P en Q met $x_P < x_Q$ van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan π . De lijn l raakt de grafiek van f in P en snijdt de y -as in het punt R . Bereken exact de y -coördinaat van R .



- 4** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{5 \cos(x)}{2 + \sin(x)}$ met domein $[0, 2\pi]$. Zie de figuur hiernaast. De afgeleide van f is te herleiden tot
- $$f'(x) = \frac{-5 - 10 \sin(x)}{(2 + \sin(x))^2}.$$
- Bewijs dit.
 - Bereken exact het bereik van f .
 - De grafiek van de functie $g(x) = a \cos(x) + b$ snijdt de grafiek van f loodrecht in het punt A met $x_A = \frac{1}{6}\pi$. Bereken exact a en b .



- 5** Voor $p > -1$ is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = (\sin(x) + p)(\sin(x) + 3)$ met domein $[0, 2\pi]$. De grafiek van f_p is een sinusoïde.
- Bereken exact het bereik van f_p in het geval $\frac{1}{6}\pi$ een nulpunt is.
 - Bereken exact het maximum van f_p in het geval het minimum van f_p gelijk is aan $-2 + \sqrt{3}$.
 - Op de grafiek van f_1 liggen de punten A met $x_A = 0$, B met $x_B = \pi$ en C met $x_C = 2\pi$. De cirkel c_1 met middelpunt M raakt de grafiek van f_1 in A en B . De cirkel c_2 met middelpunt N raakt de grafiek van f_1 in B en C . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de afstand tussen M en N .



6 Op het interval $[0, \pi]$ zijn gegeven de functies

$$f(x) = \frac{2 \cos(x + \frac{2}{3}\pi) - \cos(x - \frac{1}{3}\pi)}{2 \sin(x + \frac{1}{3}\pi) + \sin(x - \frac{2}{3}\pi)} \text{ en}$$

$$g(x) = \frac{\cos(x - \frac{1}{3}\pi)}{\sin(x + \frac{2}{3}\pi)}. \text{ Zie de figuur hiernaast.}$$

Het functievoorschrift van f is te herleiden tot

$$f(x) = \frac{\sin(x + \frac{1}{6}\pi)}{\cos(x - \frac{1}{6}\pi)} \text{ en het functievoorschrift}$$

van g is te herleiden tot $g(x) = \tan(x + \frac{1}{6}\pi)$.

a Bewijs dit.

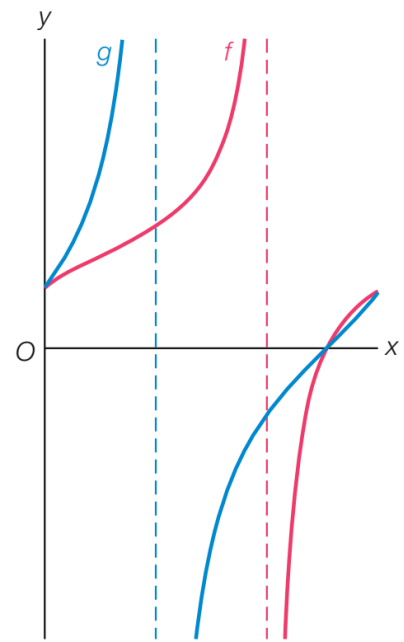
b Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .

c De verticale asymptoot van de grafiek van g snijdt de grafiek van f in het punt A . De lijn k raakt de grafiek van f in A .

Stel langs algebraïsche weg de formule op van k .

d De lijn $y = \sqrt{3}$ snijdt de grafiek van g in het punt B . De lijn l raakt de grafiek van g in B en snijdt de y -as in het punt C .

Bereken exact de y -coördinaat van C .



Antwoorden Kennis- en vaardigheidentests

Hoofdstuk 5

1 $g(x) = -1,2(x-1)^4 + 9$
max. is $g(1) = 9$

- 2** **a** translatie (2, 3)
× -1 t.o.v. de x -as en dan
translatie (-4, -2)
b *
c $D_f = [2, \rightarrow\rangle$, $B_f = [3, \rightarrow\rangle$,
 $D_g = [-4, \rightarrow\rangle$ en $B_g = \langle \leftarrow, -2]$

3 **a** $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}$
b $1 \leq f(x) \leq 3$

4 randpunten (3, 2) en (-3, 2)
 $B_f = \langle \leftarrow, 2]$

5 **a** $t = -\frac{1}{20}N^2 + \frac{1}{5}$
b $y = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{4x^2}$

6 **a** $x \cdot \sqrt[3]{x^2}$ **d** $\frac{3}{2x}$
b $\frac{2x}{3y\sqrt{y}}$ **e** $\frac{1}{16} \cdot \sqrt[3]{x^2}$
c $\frac{125}{\sqrt[4]{x^3}}$ **f** $\frac{3 \cdot \sqrt[4]{y^3}}{5x^2}$

7 **a** $y = x^{1\frac{1}{4}}$
b $y = 3x^{-2\frac{1}{2}}$
c $y = 10x^{-\frac{2}{5}}$

8 **a** $x = \frac{1}{4}$
b $x = 10\frac{2}{3}$
c $x = 12$

9 **a** $y = \frac{24}{x^{\frac{3}{4}}}$
b $x = 69,2y^{-\frac{1}{3}}$

- 10** **a** × 0,3 t.o.v. de x -as en dan
translatie (1, -5)
 $B_f = \langle -5, \rightarrow\rangle$
asymptoot $y = -5$
b translatie (0, 2) en dan
× $\frac{1}{3}$ t.o.v. de y -as
 $B_g = \langle 2, \rightarrow\rangle$
asymptoot $y = 2$
c × -5 t.o.v. de x -as en
translatie (0, 4) en dan
× 4 t.o.v. de y -as
 $B_h = \langle \leftarrow, 4\rangle$
asymptoot $y = 4$

11 **a** $y = 4 \cdot 81^x$
b $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^x$
c $y = 2 \cdot 32^x$

12 **a** $x = 4\frac{1}{2}$ **d** $x = -5$
b $x = 2$ **e** $x = 3$
c $x = 1$ **f** $x = 0 \vee x = -3$

13 **a** $x \geq 1$
b $-2 \leq g(x) < 6$
c $p \leq 3$

14 **a** $-\frac{1}{2}$ **b** $3\frac{1}{2}$ **c** $-2\frac{2}{3}$

15 **a** $x = 9\frac{1}{2}$ **b** $x = 19$ **c** $x = 32$

16 **a** $-1,5 < x \leq 3$
b $f(x) < 1$

Hoofdstuk 6

- 1** min. is $f(-3) = -1$
max. is $f(3) = 1$
 $B_f = [-1, 1]$

2 *

3 $k: y = -45x + 24\sqrt{3}$

4 **a** $f'(x) = -\frac{30}{x^7}$
b $g'(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2}$
c $h'(x) = \frac{6x - 6}{x^4}$

- 5** **a** max. is $f(-2) = -7$
min. is $f(2) = 9$
b $(1, 11)$ en $(-1, -9)$
c nee

6 **a** $f'(x) = 36x^3 \cdot \sqrt{x} - 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$
b $g'(x) = -\frac{7}{x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}$
c $h'(x) = 4x^3 + 10x\sqrt{x} + 4$

7 $B_f = [-12, \rightarrow)$

8 **a** $f'(x) = \frac{-80x + 20}{(2x^2 - x)^5}$
b $g'(x) = (2\frac{2}{3}x + 4) \cdot \sqrt[3]{x^2 + 3x}$

9 **a** $x = 0 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \vee$
 $x = 1 \vee x = -1$
b $B(2\frac{1}{9}, 0)$

10 **a** $f'(x) = \frac{5x^2 - 6x}{\sqrt{2x - 3}}$
b $g'(x) = \frac{-x^3 - 6}{(x^3 - 3)\sqrt{x^3 - 3}}$

11 **a** $D_f = [-5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}]$
 $B_f = [-25, 25]$
b $k: y = 6\frac{6}{7}x + \frac{1}{7}$

12 **a** max. is $f_1(-2) = 8\frac{2}{3}$
min. is $f_1(1) = -\frac{1}{3}$
b $p = -1$ en $q = 16\frac{2}{3}$
c $y = -\frac{1}{3}x^3 - 2x + 2$

13 $p = 0$ of $p = -1\frac{1}{3}$

14 $p = 8$
 $A(-2\sqrt{2}, 5)$ en $B(2\sqrt{2}, 5)$

Hoofdstuk 7

1 $p = -3$ en $q = 6$ of
 $p = 12$ en $q = -1\frac{1}{2}$

2 **a** $k: 2x + py = 2p$
 $l: px + 2y = 4p$
b $p = -3$
c $p = 2 \vee p = -2$

3 **a** $\angle(k, l) \approx 3,4^\circ$
b $\angle(m, n) \approx 54,2^\circ$
c $\angle(p, q) \approx 42^\circ$

4 **a** $d(A, B) = 2\sqrt{13}$
b $p = -5 \vee p = 9$

5 **a** $A'(4, 2)$
b $d(A, k) = \sqrt{34}$

6 **a** $P_1(13, 0)$ en $P_2(-7, 0)$
b $l_1: y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$
 $l_2: y = -3x + 6$
c $m_1: 2x + 3y = -8$
 $m_2: 2x + 3y = 18$

- 7** a $c_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 61$
 b $c_2: (x-8)^2 + (y-2)^2 = 64$
 c $c_3: (x-5)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 15\frac{1}{4}$
 d $c_4: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$
 $c_5: (x+3)^2 + (y+15)^2 = 9$

8 $c: (x-6)^2 + (y+1)^2 = 20$

- 9** a straal 6 en middelpunt (3, -4)
 b straal $\sqrt{14\frac{1}{2}}$ en middelpunt $(-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$

- 10** A ligt op c
 B ligt buiten c
 C ligt binnen c

- 11** a $d(A, c) = \sqrt{5} - \sqrt{2}$
 b $d(c, d) = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{5}$
 c $d(k, d) = \sqrt{5}$

- 12** a $k: y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{2}{3}$
 $l: y = \frac{2}{3}x - 6\frac{2}{3}$
 b $\angle(k, l) \approx 67,4^\circ$

- 13** a $l_1: y = \frac{1}{2}x + 3$
 $l_2: y = -2x - 12$
 b $m_1: y = -\frac{1}{2}x - 7$
 $m_2: y = -\frac{1}{2}x + 3$

Hoofdstuk 8

- 1** A(0,77; 0,64), B(-0,94; 0,34) en C(0,17; -0,98)

- 2** a 135° d 4680°
 b 36° e 120°
 c $34,4^\circ$ f $38,2^\circ$

- 3** a $1\frac{1}{2}\pi$ rad d $1\frac{5}{6}\pi$ rad
 b $-\frac{1}{3}\pi$ rad e $\frac{2}{9}\pi$ rad
 c $\frac{5}{6}\pi$ rad f $-\frac{7}{18}\pi$ rad

4 $\angle POQ \approx 0,86$

- 5** a $x = -\frac{1}{6}\pi$ d $x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 b $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $x = \frac{2}{3}\pi$
 c $x = 1\frac{2}{3}\pi$ f $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

- 6** a evenwichtsstand -2
 amplitude 3
 periode 2π
 beginpunt $(\frac{1}{3}\pi, -2)$
 b evenwichtsstand 3
 amplitude 4
 periode π
 beginpunt $(\frac{1}{4}, 7)$

- 7** a evenwichtsstand -1
 amplitude 2
 periode 2π
 beginpunt $(\frac{1}{3}\pi, 1)$
 b $(-\frac{1}{6}\pi, -1), (\frac{5}{6}\pi, -1),$
 $(1\frac{5}{6}\pi, -1)$ en $(2\frac{5}{6}\pi, -1)$
 c $(-\frac{2}{3}\pi, -3), (\frac{1}{3}\pi, 1),$
 $(1\frac{1}{3}\pi, -3)$ en $(2\frac{1}{3}\pi, 1)$

- 8** a $y = -10 + 20 \sin(\frac{1}{15}\pi(x-10))$
 b $y = -10 + 20 \cos(\frac{1}{15}\pi(x-17\frac{1}{2}))$

- 9** a, b *

- 10** a $x = \pi + k \cdot \pi$
 b $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
 c $x = \frac{1}{3} + k \cdot \frac{2}{3} \vee x = \frac{1}{2} + k \cdot 1$
 d $x = k \cdot 3 \vee x = 4\frac{1}{2} + k \cdot 6$

11 a $x = \frac{7}{8}\pi \vee x = 1\frac{7}{8}\pi \vee x = \frac{1}{8}\pi \vee x = 1\frac{1}{8}\pi$

b $x = \pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi$

c $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$

d $x = 1\frac{1}{9}\pi \vee x = 1\frac{5}{9}\pi \vee x = \frac{2}{9}\pi$

12 a $x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

b $x = -\frac{5}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = -\frac{1}{60}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

c $x = 1\frac{1}{4} + k \cdot 1\frac{1}{2}$

d $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$

13 a periode $\frac{2}{3}\pi$

beginpunt $(0, 2)$

asymptoten $x = \frac{1}{3}\pi$, $x = \pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$

*

b $0 \leq x < \frac{1}{3}\pi \vee \frac{1}{2}\pi \leq x < \pi \vee 1\frac{1}{6}\pi \leq x < 1\frac{2}{3}\pi \vee 1\frac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\pi$

14 a $y = \cos(2x - 1\frac{1}{6}\pi)$

b $y = \sin(5x + \frac{3}{4}\pi)$

c $y = -2\cos^3(x) + \cos(x)$

15 a $f'(x) = 3x^2 \sin(4x) + 4x^3 \cos(4x)$

b $g'(x) = \frac{4\cos(2x) + 2\cos(x)\cos(2x) + \sin(x)\sin(2x)}{(2 + \cos(x))^2}$

c $h'(x) = 10\sin(x)\cos(x)$

d $k'(x) = \frac{3x^2}{\cos^2(x^3)}$ of $k'(x) = 3x^2 + 3x^2 \tan^2(x^3)$

16 $k: y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\pi$

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen
- de toets Ans, en fouten verbeteren
- breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen
- decimaal getal omzetten in een breuk

vwo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 12

Grafieken, toppen en snijpunten

- formules invoeren en grafieken plotten
- functiewaarden berekenen op het grafiekenscherf en op het basisscherm
- tabellen maken en de tabelinstelling veranderen
- toppen en snijpunten van grafieken
- berekenen van nulpunten

vwo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 41

Het gebruik van Ans en lettergeheugens

- de toets Ans
- het gebruik van lettergeheugens

vwo B deel 1
hoofdstuk 3
bladzijde 106

Allerlei

- specifieke mogelijkheden van het merk/type GR
-

Trefwoordenregister

A

- afgeleide van
 - een samengestelde functie 70
 - $f(x) = x^n$ 66
 - sinus en cosinus 169
 - tangens 170
- afhankelijke vergelijkingen 94
- afstand
 - tussen twee cirkels 118
 - tussen twee punten 101
 - van punt tot cirkel 118
 - van punt tot kromme 117
 - van punt tot lijn 104
- afstandsformule 105
- amplitude 143
 - van een sinusöide 152
- analytische meetkunde 124
- assenvergelijking van een lijn 96
- asymptoot
 - horizontale – 29
 - verticale – 41

B

- beeldgrafiek 8
- beginpunt 144
- bereik 12
- bewijs van de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ 170
- buigpunt 57
- buigraaklijn 58

C

- cirkel en raaklijn 111, 120, 123
- cirkelvergelijking 110, 114

D

- Descartes, René 124
- domein 12
- draaiingshoek 133

E

- eenheidscirkel 133
- evenredig 26
- evenredigheidsconstante 26
- evenwichtsstand 143
- exacte-waardencirkel 140
- exponentiële
 - functie 29
 - vergelijking 34
- extreme waarde
 - aantonen van – 55
 - algebraïsch berekenen 52

F

- formule opstellen van
 - een raaklijn aan een cirkel 120, 123
 - een sinusöide 147
- functie
 - exponentiële – 29
 - goniometrische – 142
 - logaritmische – 41
 - samengestelde – 70
 - tangens– 173, 175
 - wortel– 12
- functies met een parameter 78

G

- gebroken exponent 23
- gemeenschappelijke raaklijn 81
- goniometrische
 - formules herleiden 167
 - functie 142

- vergelijking 156, 159, 162, 164
- transformaties bij grafieken van – functies 144
- grondtal van de logaritme 39

H

- hoek tussen twee lijnen 98
- hoekeenheden 138
- horizontale asymptoot 29

K

- kenmerken van een sinusöide 147
- kettingfunctie 70
- kettingregel 70
 - een bewijs van de – 72
- kromme door toppen 79
- kwadraatafsplitsen 114

L

- logaritme 38, 39
 - grondtal van de – 39
- logaritmische
 - functie 41
 - vergelijking 40
- loodrecht snijdende grafieken 84
- loodrechte
 - lijnen 103
 - projectie 104

M

- machten met
 - gebroken exponenten 23
 - negatieve exponenten 21
- machtsfunctie 8
- middelpuntshoek 136
- midden van een lijnstuk 101

N

Napier, John 38
negatieve exponent 21

O

omgekeerd evenredig 26
onafhankelijke
vergelijkingen 94

P

periode 143
punt van symmetrie 8

R

raaklijn aan cirkel
111, 120, 123
rad 137
radiaal 136
rakende grafieken 81
randpunt 12
richtingshoek 97

S

samengestelde functie 70
schakel 70
sinusoïde 147
formule opstellen van
een – 147
kenmerken van een
– 147
– tekenen 150
standaard
–functie 8
–grafiek 8
strijdige vergelijkingen 94

T

tangensfunctie 163, 165
tangensgrafiek 165
transformatie 9, 30
translatie 8
tweede afgeleide 58

V

variabele vrijmaken 17, 26
vergelijking
exponentiële – 34
goniometrische
– 156, 159, 162, 164
logaritmische – 40
– met gebroken
exponent 25
vermenigvuldigen ten
opzichte van
– de x -as 9
– de y -as 30
verticale asymptoot 41
verticale raaklijn 86

W

wortelfunctie 12

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Oscar Casander, Arnhem

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Foto's

ANP / Science Photo Library: p. 6-7

Shutterstock: p. 34, 48-49, 130-131

Imageselect: p. 38, 112

wUrck: p. 61

Depositphotos: p. 68

ANP / REX by Shutterstock / George Tewkesbury: p. 92-93

Frans Hals - portrait René Descartes (Louvre, Parijs): p. 124

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleenen.

0 / 25



© 2025 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06466-2

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten