

getal & ruimte

B



Noordhoff

Dit boek is van jou!

Naam

Klas

Getal & Ruimte

Leerboek
vwo B deel 3

Dertiende editie, 2026

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
J. D. Kuis
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet
C. van Valburg
N. Nooijen
H. Rachyd

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek vwo B deel 3

Samen met de delen 1, 2 en 4 van vwo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde B, zoals dat met ingang van 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak vwo wiskunde B is 600 uur. De delen 1, 2, 3 en 4 bevatten samen 17 hoofdstukken, waarbij in het laatste hoofdstuk van deel 3 een keuzeonderwerp wordt aangeboden en in het laatste hoofdstuk van deel 4 de examentraining aan bod komt.

De vijf hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 30 uur. In deze hoofdstukken komen de volgende (sub)domeinen aan bod.

Hoofdstuk 9 gedeelten van B en C2

Hoofdstuk 10 E2 en E3

Hoofdstuk 11 C3

Hoofdstuk 12 gedeelten van B, C, D en E

Hoofdstuk K F

De hoofdstukken 9 tot en met 12 bevatten leerstof die in het Centraal Eindexamen wordt getoetst. In het keuzehoofdstuk K Voortgezette integraalrekening worden de substitutiemethode en het partieel integreren aangeboden. Ook komen cyclometrische functies aan de orde, en het berekenen van primitieven met behulp van breuksplitsen. Men is vrij om een ander keuzeonderwerp te kiezen en dus het aangeboden hoofdstuk K, of delen daarvan, over te slaan.

De delen 1, 2 en 3 zijn bedoeld voor de leerjaren 4 en 5. Afhankelijk van de verdeling van de studielast over het vierde en vijfde leerjaar kunnen de hoofdstukken 7 en 8 van deel 2 samen met deel 3 in het vijfde leerjaar worden doorgenomen.

De digitale leeromgeving van Getal & Ruimte

Bij sommige gedeeltes van het boek kunnen opgaven ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Tevens kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

In het docentenmateriaal staan studiewijzers die een indicatie geven van de hoeveelheid leerstof die per week kan worden doorgewerkt. Verder zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

voorjaar 2026

Legenda

V1 Voorkennisopgave

Een opgave over een onderwerp uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk.

O1 Oriënterende opgave

Een opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

2 Gewone opgave

Een opgave waarmee je oefent met wat er in de theorie aan bod is geweest.

R3 Reflectie-opgave

Een opgave waarmee je terugkijkt op een voorgaand probleem, of waarmee je op een andere manier naar voorgaande stof kijkt.

A4 Afsluitende opgave

Een opgave waarmee je oefent op het beoogde beheersingsniveau.

E5 Extra opgave

Een opgave die je extra uitdaagt.

Kennis- en vaardighedencheck

Je controleert of je de kennis en/of vaardigheid beheerst door de bijbehorende opgave te maken.

C1 Checkopgave

Een opgave waarmee je controleert of je de kennis en/of vaardigheid goed beheerst.

Route-aanduiding

1 Een opgave van de basisroute.

2 Een opgave van de middenroute.

3 Een opgave van de uitdagende route.

NB: De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder route-aanduiding

In de Kennis- en vaardigheidentest en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▶ GR](#) Verwijzing naar een module over het gebruik van de grafische rekenmachine. Zie ook het overzicht van de modules achter in dit boek.

Inhoud

9	Exponentiële en logaritmische functies	6
9.1	Groefactoren en groeipercentages	8
9.2	Rekenregels voor logaritmen	17
9.3	Overgaan op ander grondtal	21
9.4	Het grondtal e	27
9.5	De natuurlijke logaritme	35
	Kennis- en vaardighedentest	42
	Gemengde opgaven	44
10	Meetkunde met vectoren	46
10.1	Vectoren en rotaties	48
10.2	Vectoren en lijnen	62
10.3	Vectoren en hoeken	70
10.4	Vectoren bij snelheid en versnelling	80
	Kennis- en vaardighedentest	89
	Gemengde opgaven	92
11	Integraalrekening	96
11.1	Primitieven en integralen	98
11.2	Oppervlakten	108
11.3	Inhouden	118
11.4	Toepassingen van integralen	129
	Kennis- en vaardighedentest	136
	Gemengde opgaven	138
12	Goniometrische formules	140
12.1	Goniometrische formules bij vergelijkingen en herleidingen	142
12.2	Goniometrische formules bij symmetrie en primitiveren	151
12.3	Eenparige cirkelbewegingen en harmonische trillingen	156
12.4	Bewegingsvergelijkingen met goniometrische formules	162
	Kennis- en vaardighedentest	172
	Gemengde opgaven	174
K	Voortgezette integraalrekening	176
K.1	De substitutiemethode	178
K.2	Partieel integreren	185
K.3	Cyclometrische functies	191
K.4	Breuksplitsen	200
K.5	Integralen bij parameterkrommen	208
	Kennis- en vaardighedentest	214
	Gemengde opgaven	216
	Antwoorden Kennis- en vaardighedentests	218
	Overzicht GR-modules	222
	Trefwoordenregister	223
	Verantwoording	225





9

Exponentiële en logaritmische functies

Het biochemisch zuurstofverbruik, kortweg BZV, is een maat voor de verontreiniging van afvalwater met organisch materiaal. Een BZV van 300 mg/liter betekent dat er 300 mg zuurstof nodig is om 1 liter afvalwater te zuiveren. Bij het zuiveren neemt het BZV af. Omdat het zuiveren door micro-organismen gebeurt en deze bij lagere temperaturen minder actief zijn, is de afname van het BZV afhankelijk van de temperatuur. Bij een temperatuur van 20 °C neemt het BZV met 19% per dag af. Is de temperatuur 10 °C, dan neemt het BZV met 62% per week af.

Bij een temperatuur van 10 °C duurt het langer totdat het BZV gehalveerd is dan bij een temperatuur van 20 °C. Hoeveel uur langer?

9.1 Groeifactoren en groeipercentages

Kennis en vaardigheden

- Je kunt exponentiële vergelijkingen die te herleiden zijn tot de vorm $g^A = B$ algebraïsch oplossen.
- Je kunt groeifactoren en groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid.
- Je kunt rekenen met verdubbelingstijd en halveringstijd.

Voorkennis De logaritme

${}^2\log(32)$ is de exponent van een macht met grondtal 2 waarmee de macht gelijk is aan 32. Dus ${}^2\log(32) = 5$, want $32 = 2^5$.

Je schrijft ${}^2\log(32) = {}^2\log(2^5) = 5$.

En zo is ${}^5\log(\frac{1}{125}) = {}^5\log(5^{-3}) = -3$ en ${}^{\frac{1}{3}}\log(9) = {}^{\frac{1}{3}}\log((\frac{1}{3})^{-2}) = -2$.

${}^g\log(g^a) = a$

Merk op dat ${}^2\log(-32)$ niet bestaat, want er is geen macht met grondtal 2 waarvan de uitkomst -32 is.

Voor het oplossen van een logaritmische vergelijking zoals ${}^2\log(x) = 6$ gebruik je de volgende regel.

Uit ${}^g\log(B) = A$ volgt $B = g^A$.

Dus

${}^2\log(x) = 6$ geeft $x = 2^6 = 64$,

${}^{\frac{1}{2}}\log(x) = -3$ geeft $x = (\frac{1}{2})^{-3} = 8$ en

${}^3\log(2x - 5) = 0$ geeft $2x - 5 = 3^0$

$$2x - 5 = 1$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

${}^g\log(x)$ bestaat alleen voor $x > 0$ en $g > 0$ waarbij $g \neq 1$.

V1 Bereken exact.

a ${}^2\log(64)$

b ${}^3\log(\frac{1}{27})$

c ${}^6\log(6\sqrt{6})$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(1)$

e ${}^{\frac{1}{2}}\log(\frac{1}{8})$

f ${}^3\log(\frac{1}{9}\sqrt{3})$

V2 Los exact op.

a ${}^3\log(x) = 5$

b ${}^2\log(3x + 7) = 4$

c $5 + {}^5\log(x + 3) = 7$

d ${}^{\frac{1}{2}}\log(3x + 4) = -2$

e $3 + {}^2\log(5 - \frac{1}{2}x) = 0$

f $4 - 2 \cdot {}^3\log(x) = 3$

O1 Uit ${}^2\log(x) = 5$ volgt $x = 2^5$.

□ ⊗ * En zo volgt uit ${}^2\log(5) = x$ dat $5 = 2^x$.

Geef de exacte oplossing van de vergelijking $3^x = 7$.

Theorie A De vergelijking $g^x = a$

Je weet dat uit ${}^g\log(B) = A$ volgt $B = g^A$.

Zo volgt uit ${}^2\log(30) = x$ dat $30 = 2^x$ oftewel $2^x = 30$.

Omgekeerd volgt uit $2^x = 30$ dat $x = {}^2\log(30)$.

Daarmee is de vergelijking $2^x = 30$ exact opgelost.

Exact oplossen van $g^x = a$ met $a > 0$ geeft $x = {}^g\log(a)$.

In het voorbeeld krijg je te maken met de vergelijking $3^{x+1} = 90$.

Dit is van de vorm $3^A = 90$.

Dus je krijgt $A = {}^3\log(90)$ oftewel $x + 1 = {}^3\log(90)$.

In het algemeen krijg je $g^A = B$ geeft $A = {}^g\log(B)$.

Voorbeeld

Los exact op.

a $3^{x+1} = 90$

b $5 + 2^{3x} = 25$

Uitwerking

a $3^{x+1} = 90$

$x + 1 = {}^3\log(90)$

$x = -1 + {}^3\log(90)$

b $5 + 2^{3x} = 25$

$2^{3x} = 20$

$3x = {}^2\log(20)$

$x = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(20)$

R2 Sara heeft de vergelijkingen van het voorbeeld op een andere manier

   opgelost. Bij a krijgt ze $x = {}^3\log(30)$ en bij b krijgt ze $x = {}^8\log(20)$.

Laat zien hoe Sara aan deze oplossingen komt.

3 Los exact op.

a $3^x - 5 = 7$

d $4 + 3^{x+1} = 25$

b $2^{x-1} = 15$

e $14 - 2^{x+3} = 2$

c $1 + 2^x = 15$

f $7 + 4^{2x} = 12$

A4 Los exact op.

a $5 + 2^{x-3} = 20$

c $3^{x+2} + 3^x = 600$

b $7 + 3 \cdot 5^{2x+1} = 67$

d $2^{1+2x} = 4^x + 6$

E5 Van de vergelijking $7 + p \cdot 3^{x-1} = 57$ is $x = {}^3\log(10)$ de oplossing.

 Bereken exact p .

Voorkennis Exponentiële groei

Bij exponentiële groei geldt het volgende.

- De hoeveelheid wordt per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Dit getal heet de groeifactor per tijdseenheid.
- De formule is van de vorm $N = b \cdot g^t$. Hierin is g de groeifactor per tijdseenheid en b de beginhoeveelheid (ook wel beginwaarde).
- De hoeveelheid neemt toe als $g > 1$.
De hoeveelheid neemt af als $0 < g < 1$. Ook in dit geval spreken we van exponentiële groei, maar de termen exponentiële afname en exponentieel verval worden ook gebruikt.

In de formule $N = 800 \cdot 1,3^t$ herken je

- de beginhoeveelheid is 800
- de groeifactor per tijdseenheid is 1,3.

Neemt een hoeveelheid N exponentieel af met groeifactor 0,92 per tijdseenheid en is de beginhoeveelheid 875, dan hoort hierbij de formule $N = 875 \cdot 0,92^t$.

V3 Een hoeveelheid N wordt elk jaar met 1,05 vermenigvuldigd.

Op $t = 0$, met t in jaren, is $N = 87$.

- a** Stel de formule op van N als functie van t .
- b** Bereken N voor $t = 4$.
- c** Met hoeveel neemt N in het tiende jaar toe?

Het tiende jaar loopt van $t = 9$ tot $t = 10$.

V4 Een hoeveelheid N wordt elk jaar met 0,87 vermenigvuldigd.

Op $t = 0$, met t in jaren, is $N = 725$.

- a** Stel de formule op van N als functie van t .
- b** Bereken N voor $t = 5$.
- c** Met hoeveel neemt N in het achtste jaar af?

O6 Een bedrag B in euro's neemt elk jaar met 5% toe. Op 1 januari 2025 is het bedrag 1000 euro.

- a** Hoeveel is het bedrag op 1 januari 2026? En op 1 januari 2027?
- b** Bij B hoort een formule van de vorm $B = 1000 \cdot g^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2025.
Welk getal is g ?
- c** Met hoeveel procent neemt het bedrag toe in de periode van 1 januari 2025 tot 1 januari 2030?

Theorie B Groeifactoren en groeipercents omzetten

In opgave 6 neemt het bedrag jaarlijks met 5% toe. Er is sprake van exponentiële groei met een **groeipercents** van 5% per jaar. Bij een groeipercents van 5% per jaar hoort een groeifactor van 1,05 per jaar.

Neemt een hoeveelheid per jaar met 8,7% toe, dan heb je te maken met exponentiële groei met groeifactor 1,087 per jaar. Weet je omgekeerd dat bij exponentiële groei een groeifactor per jaar van 1,238 hoort, dan heb je te maken met een procentuele toename van 23,8% per jaar.

8,7% erbij geeft
 $100\% + 8,7\% = 108,7\%$,
 dus groeifactor 1,087.

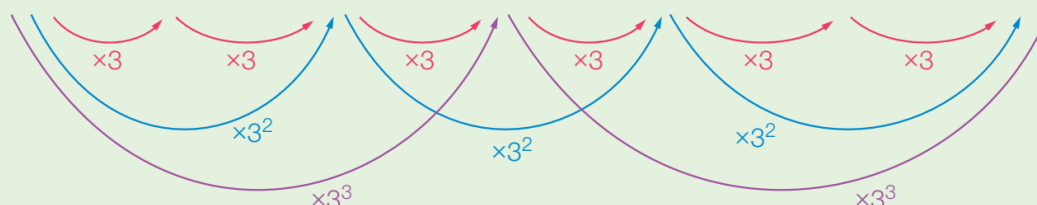
Bij een jaarlijkse afname met 13,6% is de groeifactor 0,864 per jaar. Omgekeerd hoort bij een groeifactor van 0,982 per jaar een procentuele afname van 1,8% per jaar.

Groeifactor 0,982,
 dus een afname van
 $100\% - 98,2\% = 1,8\%$.

Je kunt groeifactoren en groeipercents omzetten naar een andere tijdseenheid. We illustreren dit aan de hand van de onderstaande tabel, die bij een exponentiële groei hoort met beginhoeveelheid 100 en groeifactor 3 per uur. Dit laatste noteren we als $g_{\text{uur}} = 3$.

EXPONENTIËLE GROEI

t	0	1	2	3	4	5	6
N	100	$100 \cdot 3^1$ = 300	$100 \cdot 3^2$ = 900	$100 \cdot 3^3$ = 2700	$100 \cdot 3^4$ = 8100	$100 \cdot 3^5$ = 24 300	$100 \cdot 3^6$ = 72 900



Je ziet per 2 uur is de groeifactor 3^2

per 3 uur is de groeifactor 3^3

⋮

per n uur is de groeifactor 3^n .

Deze regel geldt ook voor niet-gehele waarden van n .

Zo geldt dat per kwartier de groeifactor $3^{\frac{1}{4}} \approx 1,316$ is,

want $g_{\text{kwartier}} = 3^{\frac{1}{4}}$ geeft $g_{\text{uur}} = (3^{\frac{1}{4}})^4 = 3$.

Per 10 minuten is de groeifactor $3^{\frac{1}{6}} \approx 1,201$,

want $g_{10 \text{ minuten}} = 3^{\frac{1}{6}}$ geeft $g_{\text{uur}} = (3^{\frac{1}{6}})^6 = 3$.

Bij exponentiële groei met groeifactor g per tijdseenheid is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Heb je te maken met een exponentiële groei met een groeifactor van 0,6 per dag, dan is

- de groeifactor per week $0,6^7 \approx 0,028$
- de groeifactor per uur $0,6^{\frac{1}{24}} \approx 0,979$
- de groeifactor per acht uur $0,6^{\frac{1}{3}} \approx 0,843$.

Om te berekenen wat het groeipercentage per dag is bij een toename van 63% per week, bedenk je dat $g_{\text{week}} = 1,63$ geeft $g_{\text{dag}} = 1,63^{\frac{1}{7}} \approx 1,072$. Het groeipercentage per dag is dus 7,2%.

Bij exponentiële groei gaat het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid via groeifactoren.

Voorbeeld

Een hoeveelheid neemt per zes uur met 18% af.

- a Hoeveel procent is de afname per dag?
- b Hoeveel procent is de afname per uur?

Uitwerking

- | | |
|---|--|
| <p>a $g_{6 \text{ uur}} = 0,82$
$g_{\text{dag}} = 0,82^4 \approx 0,452$
De afname is 54,8% per dag.</p> | <p>b $g_{6 \text{ uur}} = 0,82$
$g_{\text{uur}} = 0,82^{\frac{1}{6}} \approx 0,967$
De afname is 3,3% per uur.</p> |
|---|--|

7 Een hoeveelheid neemt per kwartier met 12% toe.



- a Hoeveel procent is de toename per uur?
- b Hoeveel is de procentuele toename per vijf minuten?
- c Hoeveel procent is de toename per vijf uur? Rond af op gehelen.

Rond percentages af op één decimaal en rond groeifactoren af op drie decimalen, tenzij anders gevraagd.

8 Bij een exponentiële groei hoort een groeifactor van 1,3 per dag.



- a Bereken het groeipercentage per week. Rond af op gehelen.
- b Bereken het groeipercentage per vier uur.

9 Een hoeveelheid neemt per dag met 16% af.



- a Bereken de groeifactor per week.
- b Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per uur af?

A10 a Een hoeveelheid neemt per uur met 19,5% af.



- Hoeveel procent is de afname per kwartier?
- b Een hoeveelheid neemt per jaar met 8,6% toe.
Hoeveel procent is de toename per 25 jaar? Rond af op gehelen.

- 11** Een hoeveelheid N neemt exponentieel toe. Op $t = 3$ is $N = 1600$ en op $t = 10$ is $N = 4100$. Hierbij is t in uren.
 Er geldt $g_{\text{uur}} = 1,1438\dots$
a Toon dit aan.
b Op $t = 0$ is N , afgerond op tientallen, 1070.
 Toon dit aan en schrijf de formule van N op.
- A12** **a** Een bacteriesoort groeit exponentieel. Op $t = 2$ zijn er 150 miljoen bacteriën en op $t = 8$ zijn dat er 1,250 miljard. Hierbij is t in uren.
 Stel de formule op van het aantal bacteriën N in miljoenen als functie van t .
b Een hoeveelheid radioactieve stof neemt exponentieel af.
 Op $t = 5$ is er 0,60 gram radioactieve stof en op $t = 8$ is er 0,47 gram. Hierbij is t in dagen.
 Stel de formule op van de hoeveelheid radioactieve stof H in gram als functie van t .
- A13** De oppervlakte van een wond neemt tijdens het genezen exponentieel af.
 Na drie dagen is de oppervlakte van de wond 31 mm^2 en na een week 11 mm^2 .
 Bereken de oppervlakte van de wond 60 uur nadat de wond is ontstaan.
- O14** Het aantal inwoners van Senegal wordt gegeven door de formule $N = 17,32 \cdot 1,027^t$. Hierin is N in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2022.
a Na hoeveel jaar is het aantal inwoners verdubbeld ten opzichte van 1 januari 2022?
b Op 1 januari 2010 had Senegal 12,53 miljoen inwoners.
 Hoeveel jaar na 1 januari 2010 is dit aantal verdubbeld? Ga uit van een groeipercentage van 2,7% per jaar.

Theorie C Verdubbelingstijd en halveringstijd

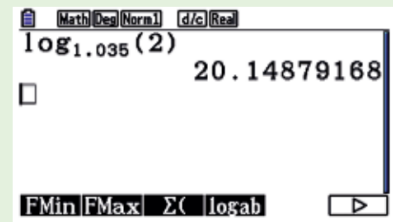
De groei van een bevolking wordt vaak gegeven met een groeipercentage. Met de **verdubbelingstijd** krijg je ook een indruk van de groei. Bij een groei van 3,5% per jaar bereken je de verdubbelingstijd T door de vergelijking $1,035^T = 2$ op te lossen. Je krijgt $T = {}^{1,035}\log(2)$.
 De GR heeft een toets log (TI, NumWorks en Casio) of LOG (HP) waarbij grondtal 10 hoort.
 Bij de TI en HP kun je met deze toets ook logaritmen met een ander grondtal berekenen. Voor het berekenen van ${}^{1,035}\log(2)$ tik je in $\log(2, 1.035)$.

$$\begin{aligned} b \cdot g^T &= 2b \\ g^T &= 2 \end{aligned} \quad \text{): } b$$

Dus de verdubbelingstijd is onafhankelijk van b .

Bij de Casio gebruik je de optie logab uit het OPTN-CALC-menu.

Bij de NumWorks kies je uit de Toolbox de optie $^a\log(x)$. Je krijgt $T = {}^{1,035}\log(2) \approx 20,1$. Dus bij een groei van 3,5% per jaar is de verdubbelingstijd iets meer dan 20 jaar.



De verdubbelingstijd bij exponentiële groei is de tijd waarin de hoeveelheid verdubbelt.

Bij groeifactor g bereken je de verdubbelingstijd T door de vergelijking $g^T = 2$ op te lossen.

Bij exponentiële afname is het begrip **halveringstijd** van belang. De halveringstijd is de tijd waarin de hoeveelheid gehalveerd wordt. Bij groeifactor g bereken je de halveringstijd T door de vergelijking $g^T = \frac{1}{2}$ op te lossen.

Voorbeeld

Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 12% af.
Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.

Uitwerking

$$g_{\text{jaar}} = 0,88$$

$$0,88^T = \frac{1}{2}$$

$$T = {}^{0,88}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 5,422\dots$$

De halveringstijd is 5 jaar en $0,422\dots \cdot 12 \approx 5$ maanden.

15



- a** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 13,1% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- b** Een hoeveelheid neemt wekelijks met 8,5% af.
Bereken de halveringstijd in dagen nauwkeurig.

16



- a** De bevolking van Oeganda neemt jaarlijks met 3,2% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.
- b** De bevolking van de VS groeit elke tien jaar met 6,2%.
Bereken de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.

17

- a Een hoeveelheid verdubbelt elke 25 jaar.
Bereken het groeipercentage per jaar.
- b De radioactieve stof strontium-90 heeft een halveringstijd van 28 jaar.
Bereken met hoeveel procent strontium-90 per jaar afneemt.
- c Een hoeveelheid halveert elke tien uur.
Na hoeveel uur en hoeveel minuten is nog 10% van de beginhoeveelheid over? Rond af op gehelen.

A18

- De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie.
De hoeveelheid radioactieve stof neemt met 8,3% per dag af.
- a Bereken de halveringstijd.
 - b Na hoeveel dagen is nog 10% van de beginhoeveelheid over?

A19

- Alle organismen nemen gedurende hun leven koolstof-14 op. Als het organisme sterft, stopt de opname en neemt de hoeveelheid koolstof-14 af. Door te meten hoeveel koolstof-14 er na verloop van tijd nog over is, kun je berekenen hoelang geleden het organisme is gestorven. Hierbij wordt gebruikt dat koolstof-14 radioactief is. Hoe ouder het materiaal, hoe minder radioactief koolstof-14 er aanwezig is. Dit proces wordt beschreven door de formule $N = 12,5 \cdot 0,999879^t$, met N de radioactiviteit van koolstof-14 in cpm (counts per minute) per gram en t de tijd in jaren nadat het organisme is gestorven.
- a Bereken de halveringstijd van koolstof-14 in jaren. Rond af op tientallen.
 - b Van een stuk hout is bekend dat het 3000 jaar oud is.
Bereken de radioactiviteit van de koolstof-14 in dit hout.

Is de ouderdom van organisch materiaal bekend, dan heeft een wetenschapper de mogelijkheid om de koolstof-14-datering op juistheid te controleren. Zo'n controle kan bijvoorbeeld worden uitgevoerd op stoffelijke resten die op een voormalig slagveld worden gevonden. Een mooi voorbeeld hiervan is de slag bij Trasimeno in Italië. In het jaar 217 voor Christus, in de ochtend van 24 juni, vernietigde het leger van Hannibal een Romeins leger van 25 000 man. Een wetenschapper onderzocht op 24 juni 2006 de botten van een gesneuvelde Romeinse soldaat. Hij vond in de botten nog 77,3% van de oorspronkelijke hoeveelheid radioactieve koolstof.

- c Hoeveel jaar afwijking levert dit meetresultaat op met de werkelijkheid?

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan exponentiële vergelijkingen die te herleiden zijn tot de vorm $g^A = B$ algebraïsch oplossen.

► OPGAVE C1
THEORIE A

☐ Ik kan groeifactoren en groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid.

► OPGAVE C2
THEORIE B

☐ Ik kan rekenen met verdubbelingstijd en halveringstijd.

► OPGAVE C3
THEORIE C

C1 Los exact op.

a $3^{x-2} = 10$

b $3 \cdot 5^{2x} = 18$

c $15 - 6^{x+1} = 8$

C2 **a** Een hoeveelheid neemt per kwartier met 3,2% toe.
Hoeveel procent is de toename per uur?

b Een hoeveelheid neemt per dag met 76,5% af.
Hoeveel procent is de afname per uur?

C3 **a** Een hoeveelheid neemt jaarlijks 15,3% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig

b Een hoeveelheid neemt dagelijks met 67,3% af.
Bereken de halveringstijd in minuten nauwkeurig.

c Een hoeveelheid verdubbelt elke tien jaar.
Bereken het groeipercentage per jaar.

d Een hoeveelheid halveert elke zes uur.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per dag afneemt.

Antwoorden

C1 **a** $x = 2 + {}^3\log(10)$

b $x = \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(6)$

c $x = -1 + {}^6\log(7)$

C2 **a** 13,4%

b 5,9%

C3 **a** 4 jaar en 10 maanden

b 14 uur en 53 minuten

c 7,2%

d 93,8%

9.2 Rekenregels voor logaritmen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de rekenregels voor logaritmen gebruiken bij het herleiden van logaritmen.
- Je kunt de rekenregels voor logaritmen gebruiken bij het algebraïsch oplossen van logaritmische vergelijkingen.

O20



Uit ${}^g\log(x) = y$ geeft $x = g^y$ volgt de regel $g^{{}^g\log(x)} = x$.
Licht dit toe.

Theorie A Herleiden van logaritmen

De formule $g^{{}^g\log(x)} = x$ van opgave 20 gebruiken we om de **rekenregels voor logaritmen** te bewijzen.

Voor $g > 0, g \neq 1, a > 0$ en $b > 0$ geldt
 ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$
 ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$
 $p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$

De rekenregel ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$ bewijs je als volgt met behulp van de rekenregels voor machten en $g^{{}^g\log(x)} = x$.
 $g^{{}^g\log(a) + {}^g\log(b)} = g^{{}^g\log(a)} \cdot g^{{}^g\log(b)} = a \cdot b = g^{{}^g\log(ab)}$,
dus ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$.

De andere rekenregels bewijs je in opgave 25.

Om een getal als logaritme te schrijven, gebruik je $a = {}^g\log(g^a)$.

Zo is 5 bijvoorbeeld te schrijven als ${}^2\log(2^5)$.

Het is gebruikelijk om bij ${}^{10}\log$ het grondtal 10 niet te noteren.

Dus $\log(10\,000) = \log(10^4) = 4$ en $-2 = \log(10^{-2}) = \log\left(\frac{1}{100}\right)$.

$${}^{10}\log(a) = \log(a)$$

Voorbeeld

- Herleid $1 + 2 \cdot {}^3\log(5)$ tot één logaritme.
- Herleid $4 - 3 \cdot \log(2)$ tot één logaritme.
- Herleid de formule $y = {}^2\log(800x)$ tot de vorm $y = a + {}^2\log(bx)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel.

Uitwerking

- $1 + 2 \cdot {}^3\log(5) = {}^3\log(3) + {}^3\log(5^2) = {}^3\log(3) + {}^3\log(25) = {}^3\log(75)$
- $4 - 3 \cdot \log(2) = \log(10^4) - \log(2^3) = \log(10\,000) - \log(8) = \log(1250)$
- $y = {}^2\log(800x) = {}^2\log(32 \cdot 25x) = {}^2\log(32) + {}^2\log(25x) = 5 + {}^2\log(25x)$
Dus $y = 5 + {}^2\log(25x)$.

R21 Zie voorbeeld c op de vorige bladzijde.

□ ⊗ * Herleid op dezelfde manier de formule $y = {}^2\log(804x)$ tot de vorm $y = a + {}^2\log(bx)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel.

22 Herleid tot één logaritme.

- ⊗**
- | | |
|--|---|
| a ${}^2\log(6) + {}^2\log(10)$ | d $\frac{1}{2}\log(15) - 4 \cdot \frac{1}{2}\log(3)$ |
| b ${}^3\log(30) - {}^3\log(6)$ | e $-2 \cdot {}^4\log(6) + {}^4\log(12)$ |
| c $2 \cdot {}^5\log(3) + {}^5\log(\frac{1}{2})$ | f $\log(50) - 2 \cdot \log(5)$ |

23 Herleid tot de vorm $y = a + {}^s\log(bx)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel.

- ⊗**
- a** $y = \log(600x)$
 - b** $y = {}^2\log(24x)$
 - c** $y = 4 + {}^3\log(54x)$

24 Herleid tot één logaritme.

- ⊗ ***
- | | |
|------------------------------------|--|
| a $4 + {}^2\log(3)$ | d ${}^2\log(12) - {}^3\log(9)$ |
| b $2 - \log(5)$ | e $\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(16) + \frac{1}{2}\log(8)$ |
| c $3 - \frac{1}{2}\log(10)$ | f $\log(500) - {}^5\log(125)$ |

25 Vul in.

- ⊗ ***
- a** $g^{{}^s\log(a) - {}^s\log(b)} = \frac{g^{\dots\dots\dots}}{g^{\dots\dots\dots}} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = g^{\dots\dots\dots}$, dus ${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$.
- b** $g^{p \cdot {}^s\log(a)} = (g^{\dots\dots\dots})^{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots = g^{\dots\dots\dots}$, dus $p \cdot {}^s\log(a) = {}^s\log(a^p)$.

A26 Herleid tot één logaritme.

- ⊗ ***
- | | |
|--|--|
| a ${}^2\log(a) + 3 \cdot {}^2\log(b)$ | d $2 - {}^3\log(a)$ |
| b $5 \cdot {}^3\log(a) - 2 \cdot {}^3\log(b)$ | e ${}^6\log(a) - 1$ |
| c $2 + {}^5\log(a)$ | f $2 \cdot {}^5\log(b) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(a)$ |

A27 Herleid tot de vorm $y = a + {}^s\log(bx)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel.

- ⊗ ***
- a** $y = 2 + {}^5\log(1250x)$
 - b** $y = \log(1600x) - 1$
 - c** $y = 7 + {}^2\log(1600x)$

A28 De grafiek van $f(x) = {}^2\log(x)$ wordt eerst vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met a en vervolgens vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as met b . Hierdoor ontstaat de grafiek van $g(x) = -5 + 10 \cdot {}^2\log(x)$. Bereken exact a en b .

O29 Gegeven is de vergelijking $2 \cdot \log(x) = \log(x + 2)$.

□ ⊗ * De vergelijking is te herleiden tot $\log(x^2) = \log(x + 2)$.

a Licht dit toe.

Door de regel ${}^s\log(A) = {}^s\log(B)$ geeft $A = B$ te gebruiken, krijg je de vergelijking $x^2 = x + 2$.

b Los de vergelijking $x^2 = x + 2$ exact op.

c Voldoen beide oplossingen van $x^2 = x + 2$ aan de vergelijking $2 \cdot \log(x) = \log(x + 2)$? Licht toe.

Theorie B Vergelijkingen van de vorm ${}^s\log(A) = {}^s\log(B)$

Bij het exact oplossen van logaritmische vergelijkingen zoals $2 \cdot \log(x) = \log(x + 2)$ in opgave 29, werk je met behulp van de rekenregels toe naar de vorm ${}^s\log(A) = {}^s\log(B)$. Daarna gebruik je:

${}^s\log(A) = {}^s\log(B)$ geeft $A = B \wedge A > 0 \wedge B > 0$

Controleer bij het oplossen van logaritmische vergelijkingen of de gevonden waarden van x aan de oorspronkelijke vergelijking voldoen. Het is daarvoor voldoende om na te gaan of de logaritmen voor de gevonden waarden bestaan.

Voorbeeld

Los de vergelijking $1 + 2 \cdot {}^2\log(x) = {}^2\log(5x + 3)$ exact op.

Uitwerking

$$1 + 2 \cdot {}^2\log(x) = {}^2\log(5x + 3)$$

$${}^2\log(2) + {}^2\log(x^2) = {}^2\log(5x + 3)$$

$${}^2\log(2x^2) = {}^2\log(5x + 3)$$

$$2x^2 = 5x + 3$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 49, \text{ dus } \sqrt{D} = 7$$

$$x = \frac{5+7}{4} = 3 \vee x = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ voldoet niet, dus } x = 3.$$

30 Los exact op.

□ ⊗

a ${}^2\log(x + 3) = 3 + {}^2\log(x)$

b ${}^3\log(2x) = 1 + {}^3\log(x + 1)$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log(2x - 1) = 2 + {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 2)$

d ${}^3\log(x + 2) = 1 - {}^3\log(x)$

A31 Los exact op.



- a** $2 \cdot {}^3\log(x) + 1 = {}^3\log(5x - 2)$
- b** ${}^3\log(x + 4) + 1 = 2 \cdot {}^3\log(x - 2)$
- c** ${}^2\log(2x) - {}^2\log(x + 3) = {}^2\log(x) - 2$
- d** ${}^3\log(x) = 2 - {}^3\log(x - 1)$

A32 Los exact op.



- a** ${}^2\log(8^{x-1}) = 2x$
- b** ${}^3\log(\sqrt{x^2 - 10}) = 1 + {}^3\log(\sqrt{x})$

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan de rekenregels voor logaritmen gebruiken bij het herleiden van logaritmen.

► **OPGAVE C4,C5**
THEORIE A

☐ Ik kan de rekenregels voor logaritmen gebruiken bij het algebraïsch oplossen van logaritmische vergelijkingen.

► **OPGAVE C6**
THEORIE B

C4 Herleid tot één logaritme.

- a** $2 \cdot {}^3\log(5) + {}^3\log(2)$
- b** ${}^6\log(40) - 3 \cdot {}^6\log(2)$
- c** $1 + 2 \cdot \log(3)$
- d** ${}^2\log(56) - {}^3\log(27)$

C5 Herleid tot de vorm $y = a + {}^s\log(bx)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel.

- a** $y = 3 + {}^5\log(500x)$
- b** $y = 8 - {}^3\log(810x)$

C6 Los exact op.

- a** ${}^3\log(x - 5) = {}^3\log(4x) - 2$
- b** $2 \cdot \log(x) - 1 = \log(3x + 40)$

Antwoorden

C4 a ${}^3\log(50)$

b ${}^6\log(5)$

c $\log(90)$

d ${}^2\log(7)$

C5 a $y = 6 + {}^5\log(4x)$

b $y = 4 - {}^3\log(10x)$

C6 a $x = 9$

b $x = 40$

9.3 Overgaan op ander grondtal

Kennis en vaardigheden

- Je kunt logaritmische vergelijkingen algebraïsch oplossen door over te gaan op een ander grondtal.
- Je kunt logaritmische en exponentiële vergelijkingen algebraïsch oplossen met behulp van een substitutie.
- Je kunt logaritmische en exponentiële formules omwerken.

O33

□ ⊗ *

In deze opgave bewijs je de regel ${}^p\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$.

Ga uit van $p^{p\log(g)} = g$ en verhef het linker- en rechterlid tot de macht ${}^g\log(a)$. Je krijgt $p^{p\log(g) \cdot {}^g\log(a)} = a$.

a Licht dit toe.

b Schrijf in het rechterlid a als macht met grondtal p en maak het bewijs af.

Theorie A Op een ander grondtal overgaan

In opgave 33 heb je de regel ${}^p\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$ bewezen.

Met deze regel ga je over van het grondtal g op het grondtal p .

Zo is ${}^2\log(5) = \frac{{}^6\log(5)}{{}^6\log(2)}$, maar bijvoorbeeld ook ${}^2\log(5) = \frac{\log(5)}{\log(2)}$.

Ga je bij $\frac{1}{3}\log(x)$ over op grondtal 3, dan krijg je

$$\frac{1}{3}\log(x) = \frac{{}^3\log(x)}{{}^3\log(\frac{1}{3})} = \frac{{}^3\log(x)}{{}^3\log(3^{-1})} = \frac{{}^3\log(x)}{-1} = -{}^3\log(x).$$

$$\text{Algemeen is } \frac{1}{g}\log(x) = \frac{{}^g\log(x)}{{}^g\log(\frac{1}{g})} = \frac{{}^g\log(x)}{{}^g\log(g^{-1})} = \frac{{}^g\log(x)}{-1} = -{}^g\log(x).$$

Voor $g > 0, g \neq 1, p > 0, p \neq 1$ en $a > 0$ geldt

$${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)} \text{ en } \frac{1}{g}\log(a) = -{}^g\log(a).$$

Met deze regels zijn vergelijkingen zoals $2 \cdot {}^2\log(x) + \frac{1}{2}\log(x+6) = 0$ en ${}^4\log(x) = {}^2\log(x-2)$ exact op te lossen. Zie het voorbeeld op de volgende bladzijde.

Voorbeeld

Los exact op.

a $2 \cdot {}^2\log(x) + \frac{1}{2}\log(x+6) = 0$

b ${}^4\log(x) = {}^2\log(x-2)$

Uitwerking

a $2 \cdot {}^2\log(x) + \frac{1}{2}\log(x+6) = 0$

$${}^2\log(x^2) - {}^2\log(x+6) = 0$$

$${}^2\log(x^2) = {}^2\log(x+6)$$

$$x^2 = x + 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 3$$

$x = -2$ voldoet niet, dus $x = 3$.

b ${}^4\log(x) = {}^2\log(x-2)$

$$\frac{{}^2\log(x)}{{}^2\log(4)} = {}^2\log(x-2)$$

$$\frac{{}^2\log(x)}{2} = {}^2\log(x-2)$$

$${}^2\log(x) = 2 \cdot {}^2\log(x-2)$$

$${}^2\log(x) = {}^2\log((x-2)^2)$$

$$x = (x-2)^2$$

$$x = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 4$$

$x = 1$ voldoet niet, dus $x = 4$.

R34 Je kunt de vergelijking van voorbeeld b ook oplossen door over te gaan op grondtal 4.

Onderzoek hoe dit gaat.

35 Los exact op.

a ${}^3\log(3x-5) + \frac{1}{3}\log(x-1) = 0$

b ${}^5\log(3x) + 2 \cdot \frac{1}{5}\log(x) = 0$

c $2x \cdot \frac{1}{3}\log(3x+5) = \frac{1}{3}\log(3x+5)$

d ${}^2\log(x) = {}^4\log(x+20)$

A36 Los exact op.

a $-2 \cdot \frac{1}{2}\log(x) = 2 + {}^2\log(3-x)$

b ${}^9\log(2x) = {}^3\log(x-4)$

c $4x \cdot {}^4\log(2x-1) + 3 \cdot {}^4\log(2x-1) = 0$

d $x^2 \cdot {}^5\log(2x+1) + 9 \cdot \frac{1}{5}\log(2x+1) = 0$

37 Gegeven is de vergelijking ${}^3\log^2(x) = 2 \cdot {}^3\log(x) + 15$.

Deze vergelijking los je op met de substitutie ${}^3\log(x) = u$.

Hiermee krijg je $u = -3$ en $u = 5$.

Toon dit aan en geef de oplossingen van de gegeven vergelijking.

Met ${}^3\log^2(x)$ wordt $({}^3\log(x))^2$ bedoeld.

38 Los exact op.

a ${}^2\log^2(x) = 3 - 2 \cdot \frac{1}{2}\log(x)$

b ${}^3\log^2(x) = 6 \cdot {}^9\log(x)$

39 Gegeven is de vergelijking $4^x = 2^{x+2} - 3$.

□ ⊗ * De vergelijking is te schrijven als $(2^x)^2 = 4 \cdot 2^x - 3$.

a Toon dit aan.

b Je lost deze vergelijking op met de substitutie $2^x = u$.

Hiermee krijg je $u = 1$ en $u = 3$.

Toon dit aan en geef de exacte oplossingen van de gegeven vergelijking.

40 Los exact op.

□ ⊗ **a** $9^x = 5 \cdot 3^x - 6$

b $4^x = 2^x + 42$

c $9^x + 2 = 3^{x+1}$

d $2^x = 24 - 2^{2x-1}$

A41 Los exact op.

□ ⊗ * **a** $5^{x-1} + 5^{2x-1} = 4$

b $\frac{1}{2}\log^2(x+2) - 3 \cdot \frac{1}{2}\log(x+2) = 0$

c $2^x = 6 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d $5\log^2(x) + 3 \cdot \frac{1}{5}\log(x) + 2 = 0$

A42 Los exact op.

***** **a** $3^x + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 9$

b $2\log(2^x - 4) = 2x - 4$

○43 De formule $y = 2^{x-1}$ is om te werken tot $x = 1 + \frac{1}{2}\log(y)$.

□ ⊗ * Toon dit aan.

Theorie B Formules omwerken

Je kunt de formule $N = 5 \cdot 2^{t-1}$ omwerken tot een formule van de vorm $t = a + \frac{1}{2}\log(cN)$. Dat gaat als volgt.

$$N = 5 \cdot 2^{t-1}$$

$$5 \cdot 2^{t-1} = N$$

$$2^{t-1} = 0,2N$$

$$t-1 = \frac{1}{2}\log(0,2N)$$

$$t = 1 + \frac{1}{2}\log(0,2N)$$

Verwissel beide leden.

Deel beide leden door 5.

Pas toe $g^A = B$ geeft $A = \log_g(B)$.

Bij het omwerken van de formule $t = 1 + \frac{1}{2}\log(0,2N)$ tot een formule van de vorm $t = a + b \cdot \log(N)$ ga je als volgt te werk.

$$t = 1 + \frac{1}{2}\log(0,2N)$$

$$t = 1 + \frac{1}{2}\log(0,2) + \frac{1}{2}\log(N)$$

$$t = 1 + \frac{1}{2}\log(0,2) + \frac{\log(N)}{\log(2)}$$

$$t \approx -1,32 + 3,32 \cdot \log(N)$$

$$\text{Dus } t = -1,32 + 3,32 \cdot \log(N).$$

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

$$\frac{\log(N)}{\log(2)} = \frac{1}{\log(2)} \cdot \log(N)$$

NORM DRIJF AUTO REEEL RAD W/N	
1+log(0.2,2)	-1.321928095
1/log(2)	3.321928095

Je kunt de formule $y = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(x) - 2$ omwerken tot een formule van de vorm $x = b \cdot g^y$. Dat gaat als volgt.

$$y = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(x) - 2$$

$$\frac{1}{3} \cdot {}^2\log(x) = y + 2$$

$${}^2\log(x) = 3y + 6$$

Pas toe ${}^s\log(B) = A$ geeft $B = g^A$.

$$x = 2^{3y+6} = 2^{3y} \cdot 2^6 = 2^6 \cdot (2^3)^y = 64 \cdot 8^y$$

$$\text{Dus } x = 64 \cdot 8^y.$$

Bij het omwerken van de formule $x = 64 \cdot 8^y$ tot een formule van de vorm $x = b \cdot 10^{cy}$ ga je als volgt te werk.

$$x = 64 \cdot 8^y$$

$$8 = 10^{\log(8)}$$

$$x = 64 \cdot (10^{\log(8)})^y$$

$$x \approx 64 \cdot (10^{0,903})^y$$

$$x \approx 64 \cdot 10^{0,903y}$$

$$\text{Dus } x = 64 \cdot 10^{0,903y}.$$

R44 Zie de theorie.



a Werk de formule $t = 1 + {}^2\log(0,2N)$ om tot de vorm $t = b \cdot \log(cN)$.

Rond b af op twee decimalen.

b Werk de formule $t = 1 + {}^2\log(0,2N)$ om tot de vorm $t = a + b \cdot {}^3\log(N)$.

Rond a en b af op twee decimalen.

c Werk de formule $x = 64 \cdot 8^y$ om tot de vorm $x = b \cdot 3^{cy}$. Rond c af op drie decimalen.

45 **a** Werk de formule $N = 50 \cdot 3^{2t+3}$ om tot de vorm $t = a + b \cdot {}^3\log(N)$.



Rond a af op twee decimalen.

b Herleid de formule $y = 20 \cdot 2^{3x-1}$ tot de vorm $x = b \cdot {}^2\log(cy)$.

c Werk de formule $y = 3 \cdot \log(x) - 5$ om tot de vorm $x = b \cdot 10^{cy}$. Rond b en c af op twee decimalen.

d Herleid de formule $K = 1 - \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(2v)$ tot de vorm $v = b \cdot g^K$.

A46 **a** Schrijf de formule ${}^2\log(4t - 1) = 5N + 3$ in de vorm $t = a + b \cdot 10^{cN}$.



Rond c af op twee decimalen.

b Herleid de formule $M = 14 \cdot 1,3^{4N-3}$ tot de vorm $N = a + b \cdot \log(M)$.

Rond a en b af op twee decimalen.

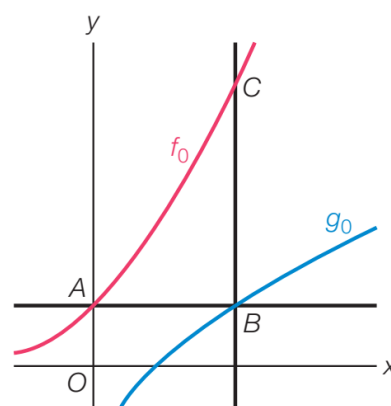
A47 Voor elke waarde van a zijn gegeven de functies

□ ⊗ * $f_a(x) = {}^2\log(4^{x+a} + 1)$ en $g_a(x) = {}^4\log(2^x - 1) - a$.

a Bewijs dat g_a de inverse is van f_a voor elke waarde van a .

In de figuur hiernaast zie je de grafieken van f_0 en g_0 . De grafiek van f_0 snijdt de y -as in het punt A . De horizontale lijn door A snijdt de grafiek van g_0 in het punt B . De verticale lijn door B snijdt de grafiek van f_0 in het punt C . De lengte van het lijnstuk BC is gelijk aan ${}^2\log(13)$.

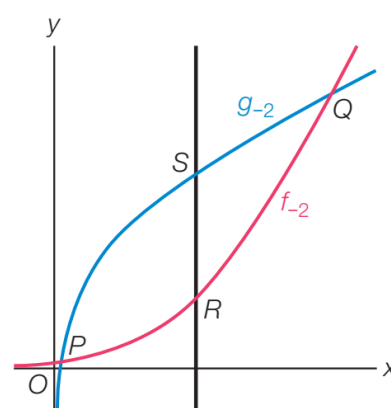
b Bewijs dit.



In de figuur hiernaast zie je de grafieken van f_{-2} en g_{-2} . De grafieken snijden elkaar in de punten P en Q . De lijn $x = p$ met $x_P < p < x_Q$ snijdt de grafiek van f_{-2} in het punt R en de grafiek van g_{-2} in het punt S .

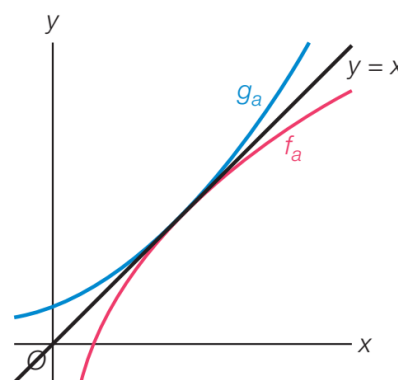
Er is een waarde van p waarvoor de lengte van het lijnstuk RS maximaal is.

c Bereken de maximale lengte van het lijnstuk RS . Rond af op twee decimalen.



A48 Zie opgave 47.

***** Er is een waarde van a waarvoor de grafieken van f_a en g_a elkaar raken. In de figuur hiernaast is deze situatie weergegeven. In deze situatie hebben de grafieken van f_a en g_a één punt gemeenschappelijk met de lijn $y = x$. Bereken exact a voor deze situatie.



A49 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^2\log(x)$ en $g_a(x) = {}^2\log(x\sqrt{x}) + a$. In de figuur hiernaast zie je de grafieken van f en g_{-1} .

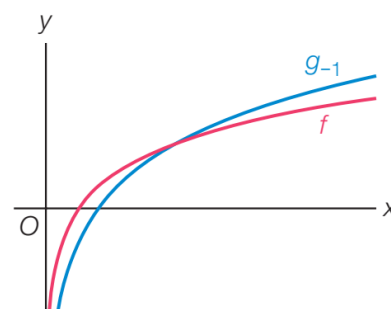
a De grafieken van f en g_a snijden elkaar in het punt S . Druk de coördinaten van S uit in a .

b De grafiek van g_a snijdt de x -as in het punt A . De verticale lijn door A snijdt de grafiek van f in het punt B .

Bereken exact a in het geval $AB = 4$.

c Er is een waarde van a waarvoor de grafiek van g_a^{inv} de y -as snijdt in het punt $(0, 64)$.

Stel bij deze waarde van a het functievoorschrift op van g_a^{inv} .



- E50** Schrijf de formule ${}^2\log(N) = -1,8 + 0,3 \cdot {}^3\log(t)$ in de vorm $t = aN^b$.
* Rond b af op twee decimalen.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan logaritmische vergelijkingen algebraïsch oplossen door over te gaan op een ander grondtal. ▶ **OPGAVE C7**
THEORIE A
- ☐ Ik kan logaritmische en exponentiële vergelijkingen algebraïsch oplossen met behulp van een substitutie. ▶ **OPGAVE C8**
OPGAVE 37,39
- ☐ Ik kan logaritmische en exponentiële formules omwerken. ▶ **OPGAVE C9**
THEORIE B

C7 Los exact op.

a ${}^2\log(x) = {}^4\log(x + 12)$

b ${}^3\log(2x) + 2 \cdot \frac{1}{3}\log(x - 4) = 0$

C8 Los exact op.

a ${}^5\log^2(x) = {}^5\log(x) + 2$

c $\log^2(x) + 3 \cdot \frac{1}{10}\log(x) + 2 = 0$

b $3^x = 18 - 3^{2x-1}$

d $4^x + 8 = 6 \cdot 2^x$

C9 **a** Werk de formule $N = 10 \cdot 2^{3t-1}$ om tot de vorm $t = a + b \cdot \log(N)$.

Rond a en b af op drie decimalen.

b Schrijf de formule $y = 2 - \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(2x)$ in de vorm $x = b \cdot 10^{cy}$.

Rond c af op drie decimalen.

Antwoorden

C7 **a** $x = 4$

b $x = 8$

C8 **a** $x = \frac{1}{5} \vee x = 25$

b $x = {}^3\log(6)$

c $x = 10 \vee x = 100$

d $x = 1 \vee x = 2$

C9 **a** $t = -0,774 + 1,107 \cdot \log(N)$

b $x = 40\frac{1}{2} \cdot 10^{-0,954y}$

9.4 Het grondtal e

Kennis en vaardigheden

- Je kunt rekenen met het getal e.
- Je kunt vergelijkingen met e-machten algebraïsch oplossen.
- Je kunt functies met e-machten differentiëren.

O51 De definitie van de afgeleide van een functie f is



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Bij $f(x) = 2^x$ krijg je $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} \cdot 2^x.$

- Toon dit aan.
- Bereken $\frac{2^h - 1}{h}$ voor $h = 0,01$, $h = 0,001$ en $h = 0,0001$. Rond af op vier decimalen.
- Er geldt $f(x) = 2^x$ geeft $f'(x) = a \cdot 2^x$.
Welke benadering voor a volgt uit vraag b? Geef het antwoord in drie decimalen.
- Er geldt $k(x) = 3^x$ geeft $k'(x) = b \cdot 3^x$.
Bereken b in drie decimalen.

Theorie A Op zoek naar een functie f waarvoor geldt $f'(x) = f(x)$

Uit de definitie van de afgeleide volgt

$$\begin{aligned} f(x) = g^x \text{ geeft } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{x+h} - g^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^x \cdot g^h - g^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g^h - 1) \cdot g^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^h - 1}{h} \cdot g^x \end{aligned}$$

In opgave 51 heb je gezien dat

$$f(x) = 2^x \text{ geeft } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h} \cdot 2^x \approx 0,693 \cdot 2^x \text{ en}$$

$$k(x) = 3^x \text{ geeft } k'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h} \cdot 3^x \approx 1,099 \cdot 3^x.$$

Omdat $0,693 < 1$ en $1,099 > 1$ kun je je afvragen of er een grondtal g bestaat waarbij $f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = 1 \cdot g^x$, oftewel waarbij de afgeleide gelijk is aan de functie zelf.

Er zou dan moeten gelden $\frac{g^h - 1}{h} \approx 1$ voor $h \approx 0$,

oftewel $g^h - 1 \approx h$ voor $h \approx 0$.

Uit $g^h - 1 \approx h$ volgt $g^h \approx h + 1$, dus $g \approx (h + 1)^{\frac{1}{h}}$ voor $h \approx 0$.

We moeten dus onderzoeken wat de uitkomst is van $\lim_{h \rightarrow 0} (h + 1)^{\frac{1}{h}}$.

O52 Gegeven is de formule $y = (h + 1)^{\frac{1}{h}}$.



- a** Plot de grafiek.
- b** Waarom lukt het niet om y te berekenen voor $h = 0$?
- c** Bereken y voor $h = 0,01$, $h = 0,001$, $h = 0,0001$ en $h = 0,00001$. Rond af op vier decimalen.
- d** Er is een getal g waarvoor geldt $f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = g^x$. Geef dit getal in drie decimalen.

Theorie B Het getal e

In opgave 52 heb je gezien dat $\lim_{h \rightarrow 0} (h + 1)^{\frac{1}{h}} \approx 2,718$, dus voor $g \approx 2,718$

geldt $f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = g^x$.

Dit grondtal speelt een belangrijke rol in de wiskunde en in allerlei vakgebieden waar wiskunde wordt gebruikt. Daarom wordt dit getal met een eigen letter aangeduid, de letter **e**. Dit getal wordt ook wel het getal van Euler genoemd. Zie het geschiedeniskader op bladzijde 30.

$$f(x) = e^x \text{ geeft } f'(x) = e^x$$

Met het getal e reken je net zo als met andere getallen.

Dus net als $5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ is $5e + e = 6e$.

En zo gelden voor e ook de rekenregels voor machten.

$e^{4x} \cdot e^x = e^{5x}$ volgt uit $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

$(e^{3x})^2 = e^{6x}$ volgt uit $(a^p)^q = a^{pq}$.

$(5e^x)^2 = 25e^{2x}$ volgt uit $(ab)^p = a^p b^p$ en $(a^p)^q = a^{pq}$.

$e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}} = \frac{1}{(e^x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$ volgt uit $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, $a^{pq} = (a^p)^q$ en $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$.

Voorbeeld

Herleid.

- a** $2e^2 + e^2$
- b** $e^{2x} \cdot e^x$
- c** $(e^{2x} + 3)^2$

Uitwerking

- a** $2e^2 + e^2 = 3e^2$
- b** $e^{2x} \cdot e^x = e^{3x}$
- c** $(e^{2x} + 3)^2 = e^{4x} + 6e^{2x} + 9$

Het oplossen van exponentiële vergelijkingen met grondtal e gaat op dezelfde manier als het oplossen van exponentiële vergelijkingen met een ander grondtal.

Je kijkt eerst of de vergelijking is te herleiden tot de vorm $e^A = e^B$.

Lukt dit, dan gebruik je vervolgens $e^A = e^B$ geeft $A = B$.

Lukt dit niet, dan kun je misschien een factor buiten haakjes brengen of een substitutie gebruiken.

Voorbeeld

Los exact op.

a $e^{2x} - e^x = 0$

b $3xe^x = 10e^x$

c $e^{2x} + 2e^x = 3$

Uitwerking

a $e^{2x} - e^x = 0$

$$e^{2x} = e^x$$

$$2x = x$$

$$x = 0$$

b $3xe^x = 10e^x$

$$e^x = 0 \vee 3x = 10$$

$$x = 3\frac{1}{3}$$

c $e^{2x} + 2e^x = 3$

$$(e^x)^2 + 2e^x - 3 = 0$$

$$\text{Stel } e^x = u.$$

$$u^2 + 2u - 3 = 0$$

$$(u - 1)(u + 3) = 0$$

$$u = 1 \vee u = -3$$

$$e^x = 1 \vee e^x = -3$$

$$x = 0$$

R53 Zie voorbeeld b hierboven met de vergelijking $3xe^x = 10e^x$.



a Welke regel voor het oplossen van vergelijkingen is gebruikt bij de stap dat $3xe^x = 10e^x$ geeft $e^x = 0 \vee 3x = 10$?

b In de uitwerking krijg je bij de laatste stap dat $e^x = 0 \vee 3x = 10$ geeft $x = 3\frac{1}{3}$.

Licht dit toe.

c Je kunt de vergelijking ook oplossen door het rechterlid nul te maken en vervolgens een factor buiten haakjes te brengen. Los op deze manier de vergelijking op.

54 Herleid.



a $2e^2 - e^2$

b $4\sqrt{e} - \sqrt{e}$

c $5e^2 \cdot 3e^3$

d $\frac{12e^6}{4e^2}$

e $e^{5x} \cdot e^x$

f $e^x \cdot e^2$

g $5e^x - 3e^x$

h $e^x(e^2 + 1)$

i $e^x(e^x + 1)$

j $(e^x + 1)^2$

k $(e^{3x} + 3)^2$

l $\frac{6e^{2x} - e^x}{e^x}$

A55 Herleid.

- ⊗ *** **a** $(2 + 3e^{\frac{1}{2}x})^2$
b $(e^x + e^{-x})^2$
c $\frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2}$

56 Los exact op.

- ⊗** **a** $(2x + 4)e^x = 0$ **d** $e^{3x} - e^x = 0$
b $x^2 e^x = 3x e^x$ **e** $e^{4x} - 1 = 0$
c $x^2 e^x = e^x$ **f** $e^x \cdot e^x = e^6$

A57 Los exact op.

- ⊗ *** **a** $e^x + e^x = 2e^6$ **d** $e^{x+2} - \sqrt{e} = 0$
b $\frac{e^{5x}}{e^x} = e$ **e** $e^x + 3 = 2e^{-x} + 2$
c $2xe^x + e^x = 0$ **f** $e^{6x} + 1 = 2e^{3x}$

E58 Los de vergelijking $e^{2x} + e^3 = (e + 1)e^{x+1}$ exact op.

O59 Je weet dat $f(x) = e^x$ geeft $f'(x) = e^x$.

□ ⊗ * Bereken de afgeleide van $g(x) = 2e^x$, $h(x) = e^{2x}$, $k(x) = \frac{1}{e^x}$ en $l(x) = \sqrt{e^x}$.

Geschiedenis Euler

Leonhard Euler (1707-1783) is een van de meest vooraanstaande wiskundigen uit de geschiedenis. De eerste lessen in wiskunde kreeg hij van zijn vader, een dominee uit Basel. Na zijn opleiding op het gymnasium van Basel studeerde hij theologie en wiskunde. Op twintigjarige leeftijd werd hij benoemd tot hoogleraar natuurkunde aan de door tsaar Peter de Grote gestichte academie van Sint-Petersburg. In 1731 werd hij daar hoogleraar wiskunde. Euler was bijzonder productief: hij publiceerde in totaal 886 boeken en geschriften. De functienotatie $f(x)$ werd door hem ingevoerd, evenals de symbolen voor de getallen π en e . Euler bewees dat e een irrationaal getal is.

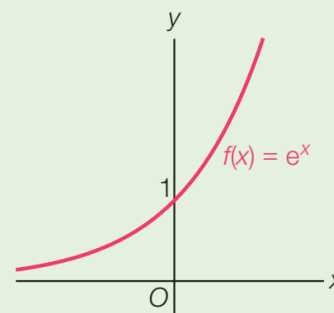
Een irrationaal getal is een getal dat niet als breuk te schrijven is. De decimale ontwikkeling van een irrationaal getal gaat oneindig door en vertoont geen enkele regelmaat. In zijn boek *Introductio in Analysin Infinitorum* geeft Euler e in 23 decimalen. Hij gebruikte

$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$ en vond $e \approx 2,71828182845904523536028$.



Theorie C Functies met e-machten differentiëren

De functie $f(x) = e^x$ is een exponentiële standaardfunctie. Het grondtal is e . De grafiek van f is stijgend en de x -as is de horizontale asymptoot van de grafiek. Het domein van f is $D_f = \mathbb{R}$ en het bereik van f is $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$. Bij het berekenen van de afgeleide van een functie met een **e-macht** gebruik je $f(x) = e^x$ geeft $f'(x) = e^x$. Verder gebruik je de regels voor het differentiëren.



Regels voor het differentiëren

$$f(x) = c \cdot g(x) \text{ geeft } f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$s(x) = f(x) + g(x) \text{ geeft } s'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$v(x) = f(x) - g(x) \text{ geeft } v'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ geeft } p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \text{ geeft } q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$f(x) = u(v(x)) \text{ geeft } f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

somregel

verschilregel

productregel

quotiëntregel

kettingregel

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 3e^x + \frac{1}{x^2}$

b $f(x) = (x^2 + 2)e^x$

c $f(x) = xe^{2x+3}$

d $f(x) = \frac{x^3}{e^{x^2}}$

Uitwerking

a $f(x) = 3e^x + \frac{1}{x^2} = 3e^x + x^{-2}$ geeft $f'(x) = 3e^x - 2x^{-3} = 3e^x - \frac{2}{x^3}$

b $f(x) = (x^2 + 2)e^x$ geeft $f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 + 2) \cdot e^x = (x^2 + 2x + 2)e^x$

c $f(x) = xe^{2x+3}$ geeft $f'(x) = 1 \cdot e^{2x+3} + x \cdot e^{2x+3} \cdot 2 = (2x + 1)e^{2x+3}$

d $f(x) = \frac{x^3}{e^{x^2}}$ geeft $f'(x) = \frac{e^{x^2} \cdot 3x^2 - x^3 \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{(e^{x^2})^2} = \frac{3x^2 - 2x^4}{e^{x^2}}$

Voor het invoeren van formules met e-machten zit op de GR een toets. Deze gebruik je ook om e-machten te benaderen.

R60 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

- ⊗ *** **a** Welke regels voor het differentiëren zijn in voorbeeld c gebruikt? En in voorbeeld d?
- b** Licht de laatste stap in de berekening van f' in voorbeeld d toe.
- c** Je kunt in voorbeeld d de afgeleide van f ook met de productregel berekenen.
Geef deze uitwerking. Krijg je hetzelfde antwoord?

61 Bereken de afgeleide.

- ⊗**
- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a $f(x) = e^x + 2$ | d $f(x) = \frac{x}{e^x}$ |
| b $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x}$ | e $f(x) = (2x - 4)e^x$ |
| c $f(x) = xe^x + 4$ | f $f(x) = \frac{2e^x}{x - 1}$ |

62 Differentieer.

- ⊗ ***
- | | |
|---------------------------------|---|
| a $f(x) = e^{x^2 + x}$ | d $f(x) = \frac{2e^{-x} - 1}{x^2}$ |
| b $f(x) = x^2 + 2e^{3x}$ | e $f(x) = 3xe^{2x-1}$ |
| c $f(x) = xe^{x^2}$ | f $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$ |

63 Differentieer.

- ⊗ ***
- | | |
|---------------------------------------|---|
| a $f(x) = x^e$ | c $f(x) = \frac{x + e}{ex + 2}$ |
| b $f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^2}$ | d $f(x) = \frac{1}{e(ex - 1)^2}$ |

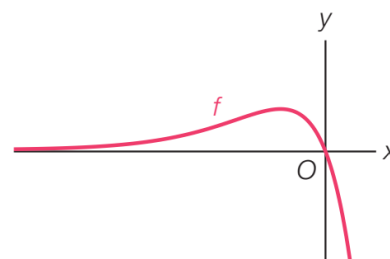
64 Gegeven is de functie $f(x) = -xe^x$.

- ⊗** **a** Bereken exact de extreme waarde van f .

De grafiek van f heeft één buigpunt.

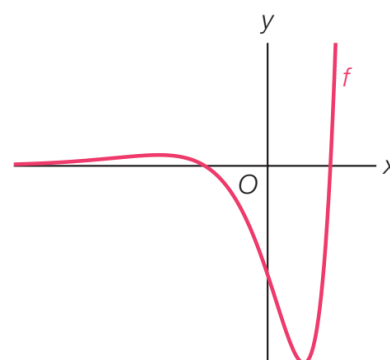
De coördinaten van dit buigpunt zijn $\left(-2, \frac{2}{e^2}\right)$.

- b** Bewijs dit en stel op algebraïsche wijze de formule op van de buigraaklijn k aan de grafiek van f .



65 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

- ⊗ *** **a** Bereken exact de nulpunten van f .
- b** Bereken exact de extreme waarde van f .
- c** Bereken exact de x -coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f .

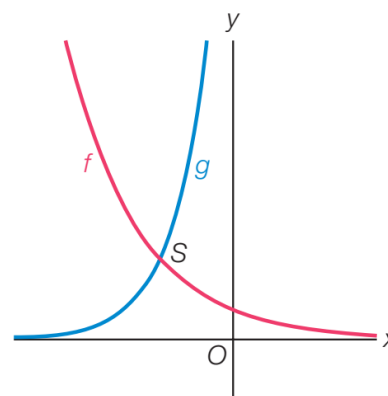


A66 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{e^{x+3}}$ en $g(x) = e^{2x}$.



De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt S . Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken exact de coördinaten van S .
- b** De lijn k raakt de grafiek van f in S .
Bewijs dat k door de oorsprong gaat.
- c** De lijn l raakt de grafiek van g in S en snijdt de x -as in het punt A .
Bereken exact de x -coördinaat van A .



A67 De functie f_a wordt gegeven door $f_a(x) = x e^{ax}$.

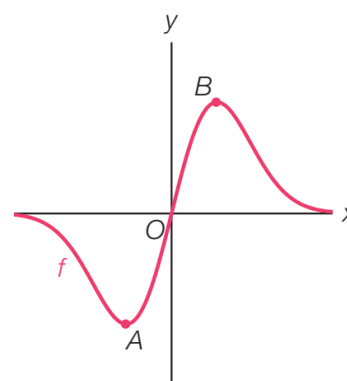


- a** Er is een waarde van a waarvoor de punten A met $x_A = 1$ en B met $x_B = 2$ op de grafiek van f_a liggen, waarbij de lijn door A en B richtingscoëfficiënt 6 heeft.
Bereken exact van A en van B de y -coördinaat.
- b** Voor elke $a \neq 0$ heeft de grafiek van f_a voor $x = p$ een extreme waarde en voor $x = q$ een buigpunt.
Bewijs dat $q = 2p$.

A68 Gegeven is de functie $f(x) = x e^{-\frac{1}{2}x^2}$. De grafiek van f heeft de toppen A en B . Zie de figuur hiernaast.



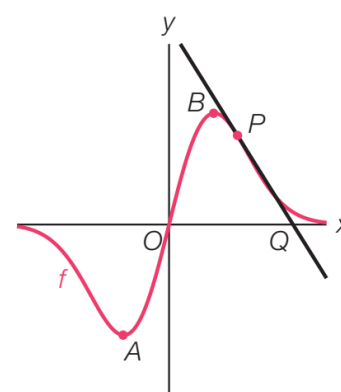
- a** Er geldt $y_B - y_A = \sqrt{c}$.
Bereken exact c .



Op de grafiek van f ligt het punt P met $x_P = p$ en $p > x_B$. De raaklijn aan de grafiek van f in P snijdt de x -as in het punt Q . Zie de figuur hiernaast. De x -coördinaat van Q hangt af van de positie van P op de grafiek van f .

Voor de x -coördinaat van Q geldt $x = \frac{p^3}{p^2 - 1}$.

- b** Toon dit aan.
- c** Er is een positie van P waarvoor de x -coördinaat van Q minimaal is.
Bereken exact deze minimale waarde van de x -coördinaat van Q .



A69 De functie $f_a(x) = x e^{ax^3}$ heeft voor $x = 2$ een extreme waarde. Bereken exact de waarde van a die hierbij hoort en onderzoek of de extreme waarde een minimum of een maximum is.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan rekenen met het getal e .
- ☐ Ik kan vergelijkingen met e -machten algebraïsch oplossen.
- ☐ Ik kan functies met e -machten differentiëren.

► **OPGAVE C10**
THEORIE B

► **OPGAVE C11**
THEORIE B

► **OPGAVE C12**
THEORIE C

C10 Herleid.

- a** $5e^3 - 3e^3$
- b** $2e^5 \cdot 5e^2$
- c** $\frac{15e^{15}}{5e^5}$
- d** $e^{2x} \cdot e^{3x}$
- e** $e^x(e^{2x} + e)$
- f** $(e^{3x} - 5)^2$

C11 Los exact op.

- a** $e^{3x} - e^{x-1} = 0$
- b** $x^2 e^x = 4e^x$
- c** $e^{6x} + 5e^{3x} = 6$

C12 Bereken de afgeleide.

- a** $f(x) = x^2 e^x$
- b** $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$
- c** $f(x) = 2e^{x^2+1}$

Antwoorden

- C10 a** $2e^3$
- b** $10e^7$
 - c** $3e^{10}$
 - d** e^{5x}
 - e** $e^{3x} + e^{x+1}$
 - f** $e^{6x} - 10e^{3x} + 25$
- C11 a** $x = -\frac{1}{2}$
- b** $x = 2 \vee x = -2$
 - c** $x = 0$
- C12 a** $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$
- b** $f'(x) = \frac{3x^2 - x^3}{e^x}$
 - c** $f'(x) = 4xe^{x^2+1}$

9.5 De natuurlijke logaritme

Kennis en vaardigheden

- Je kunt rekenen met de natuurlijke logaritme.
- Je kunt vergelijkingen die te herleiden zijn tot de vorm $e^A = B$ algebraïsch oplossen.
- Je kunt vergelijkingen met natuurlijke logaritmen exact oplossen.
- Je kunt exponentiële en logaritmische functies differentiëren.

070

□ ⊗ *

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = e^x$.

- Geef het functievoorschrift van f^{inv} .
- Geef het functievoorschrift van g^{inv} .

Theorie A Logarithmen met grondtal e

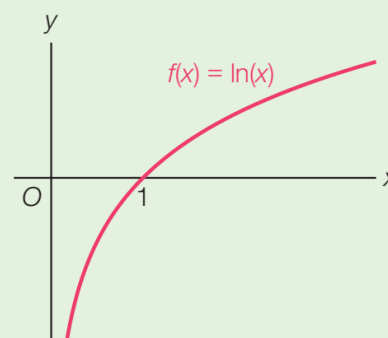
De inverse van de functie $f(x) = e^x$ is $f^{\text{inv}}(x) = {}^e\log(x)$.

De logaritme met grondtal e heet de **natuurlijke logaritme** en wordt aangegeven met **ln**.

Dus $f(x) = e^x$ geeft $f^{\text{inv}}(x) = \ln(x)$.

De functie $f(x) = \ln(x)$ is een logaritmische standaardfunctie. Het grondtal van de logaritme is e. De grafiek van f is stijgend en de y -as is de verticale asymptoot van de grafiek. Het domein van f is $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en het bereik van f is $B_f = \mathbb{R}$.

ln is de afkorting van logarithmus naturalis.



De natuurlijke logaritme van a is de logaritme van a met grondtal e, dus $\ln(a) = {}^e\log(a)$.

Voor de natuurlijke logaritme gelden de rekenregels voor logaritmen.

$\ln(20) + \ln(10) = \ln(200)$ volgt uit ${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(ab)$.

$\ln(20) - \ln(10) = \ln(2)$ volgt uit ${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$.

$\frac{1}{2}\ln(9) = \ln(3)$ volgt uit $p \cdot {}^s\log(a) = {}^s\log(a^p)$.

$\ln(e^4) = 4$ volgt uit ${}^s\log(a^a) = a$.

Het oplossen van vergelijkingen met natuurlijke logaritmen gaat op dezelfde manier als het oplossen van logaritmische vergelijkingen met een ander grondtal.

- Bij de vergelijking $\ln(x+1) = 3$ gebruik je $\ln(B) = A$ geeft $B = e^A$.
- Bij de vergelijking $\ln(2x) = \ln(3x-1)$ gebruik je $\ln(A) = \ln(B)$ geeft $A = B$.
- Bij de vergelijking $\ln^2(2x) + \ln(2x) - 6 = 0$ gebruik je de substitutie $\ln(2x) = u$.

$\ln^2(A)$ betekent $(\ln(A))^2$.

Voorbeeld

- a** Bereken exact $\ln(e^2 \cdot \sqrt{e})$.
b Los algebraïsch op $3e^{2x+1} = 15$. Rond af op drie decimalen.
c Herleid $3 + \ln(2)$ tot één logaritme.
d Los exact op $4\ln(x) = 6$.

Uitwerking

a $\ln(e^2 \cdot \sqrt{e}) = \ln(e^{2\frac{1}{2}}) = 2\frac{1}{2}$

b $3e^{2x+1} = 15$

$$e^{2x+1} = 5$$

$$2x + 1 = \ln(5)$$

$$2x = -1 + \ln(5)$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(5) \approx 0,305$$

c $3 + \ln(2) = \ln(e^3) + \ln(2) = \ln(2e^3)$ $a = \ln(e^a)$

d $4\ln(x) = 6$

$$\ln(x) = 1\frac{1}{2}$$

$$x = e^{1\frac{1}{2}} = e\sqrt{e}$$

$$e^A = B \text{ geeft } A = \ln(B)$$

Calculator screen showing the calculation of $\frac{\ln(5)-1}{2} \approx 0.3047189562$.

71 Bereken exact.



a $\ln(e)$

b $\ln(e\sqrt{e})$

c $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

d $\ln(1)$

e $3\ln(e \cdot \sqrt[3]{e})$

f $\ln^2(e^3)$

g $e^{\ln(7)} + e^{2\ln(7)}$

h $e^{\frac{1}{2}\ln(5)}$

i $e^{\ln(10)} \cdot e^{\ln(3)}$

72 Los algebraïsch op. Rond af op drie decimalen.



a $5e^{3x} = 60$

b $6 + e^{0,5x+2} = 10$

c $\frac{3}{5e^{2x-1}} = 10$

73 Herleid tot één logaritme.



a $2\ln(3) + \ln(4)$

b $\ln(20) - 3\ln(2)$

c $4 + \ln(3)$

d $1 + \ln(10)$

e $\frac{1}{2} + 2\ln(6)$

f $e + \ln(2)$

74 Los exact op.



a $\ln(x) = -1$

b $4\ln(x) = 2$

c $\ln(3x) = 3$

d $\ln(-x+2) = -2$

e $\ln^2(x) = \frac{1}{4}$

f $\ln(x) = 1 + \ln(5)$

A75 Los exact op.



a $x^2\ln(x+1) = 4\ln(x+1)$

b $\ln^2(x) - \ln(x) = 0$

c $4e^{1-3x} = 20$

d $\ln^2(x) - 2\ln(x) - 3 = 0$

e $e^{x^2} = 100$

f $2\ln(x) = \ln(2) + \ln(x+4)$

g $2e^{3x} - 6e^{2x} = 0$

h $\ln(x+3) - \ln(x-1) = \ln(2)$

i $e^{4x} - 8 = 2e^{2x}$

A76 Bij een groep patiënten geeft de formule $F = 16(0,6 + \ln(G))$ het verband tussen het lichaamsgewicht G in kg en de hartslagfrequentie F in slagen per minuut.

- a** Bereken de hartslagfrequentie van een patiënt van 100 kg.
- b** Bereken algebraïsch welk gewicht correspondeert met een hartslagfrequentie van 78 slagen per minuut.
- c** Schrijf de formule in de vorm $G = b \cdot g^F$. Rond af op drie decimalen.

O77 Voor $x > 0$ geldt $g^{\log(x)} = x$. Met deze regel kun je 2 als macht van e schrijven. Je krijgt $2 = e^{\ln(2)}$.

- a** Licht toe dat $2^x = e^{\ln(2) \cdot x}$.
- b** Toon met behulp van $2^x = e^{\ln(2) \cdot x}$ aan dat $f(x) = 2^x$ geeft $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$.

O78 In deze opgave ga je bewijzen dat $f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x}$ en $h(x) = {}^2\log(x)$ geeft $h'(x) = \frac{1}{x \ln(2)}$.

- a** Gebruik $e^{\ln(x)} = x$ om aan te tonen dat $e^{\ln(x)} \cdot f'(x) = 1$.
- b** Hoe volgt uit vraag a dat $f'(x) = \frac{1}{x}$?
- c** Gebruik ${}^2\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ en toon met behulp van vraag b aan dat $h(x) = {}^2\log(x)$ geeft $h'(x) = \frac{1}{x \ln(2)}$.

Theorie B Exponentiële en logaritmische functies differentiëren

In opgave 77 heb je gezien dat $f(x) = 2^x$ geeft $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$.

Algemeen geldt $f(x) = g^x = e^{\ln(g) \cdot x}$ geeft $f'(x) = e^{\ln(g) \cdot x} \cdot \ln(g) = g^x \cdot \ln(g)$.

In opgave 78 heb je gezien dat $f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x}$ en

$h(x) = {}^2\log(x)$ geeft $h'(x) = \frac{1}{x \ln(2)}$.

Algemeen geldt:

$$f(x) = {}^g\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln(g)}.$$

$$f(x) = g^x \text{ geeft } f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$$

$$f(x) = \ln(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = {}^g\log(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x \ln(g)}$$

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = 3^{2x-1}$

b $f(x) = \frac{\ln(x) + 1}{x}$

c $f(x) = {}^3\log(x^2 + 1)$

Uitwerking

a $f(x) = 3^{2x-1}$ geeft $f'(x) = 3^{2x-1} \cdot \ln(3) \cdot 2$

b $f(x) = \frac{\ln(x) + 1}{x}$ geeft $f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - (\ln(x) + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x) - 1}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}$

c $f(x) = {}^3\log(x^2 + 1)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1) \cdot \ln(3)} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2 + 1) \ln(3)}$

79



a Toon met de kettingregel aan dat $f(x) = \ln(ax)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x}$.

b Schrijf in één keer de afgeleide op van $f(x) = \ln(2x)$ en $g(x) = \ln(x\sqrt{2})$.

c Toon met de kettingregel aan dat $f(x) = \ln(x^n)$ geeft $f'(x) = \frac{n}{x}$.

d Schrijf in één keer de afgeleide op van $f(x) = \ln(x^2)$, $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ en $h(x) = \ln(\sqrt{x})$.

80



Differentieer.

a $f(x) = 3^{4x-2}$

b $f(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x}$

c $f(x) = {}^2\log(4x - 1)$

d $f(x) = x \ln(x^3)$

e $f(x) = \frac{\ln(3x)}{x}$

f $f(x) = \ln(x^2 + x)$

81



Bereken de afgeleide.

a $f(x) = \ln(2^x)$

b $f(x) = {}^2\log(x^2 + 1)$

c $f(x) = x \ln^2(x)$

d $f(x) = x^2 \cdot {}^3\log(4x)$

e $f(x) = (2^x - 1) \cdot 2^x$

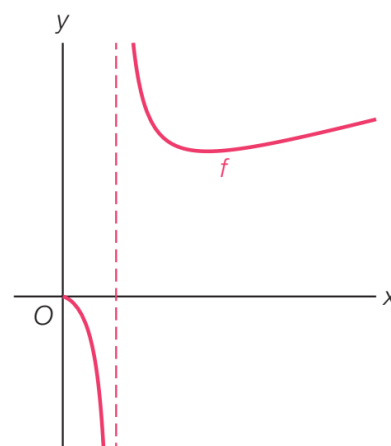
f $f(x) = \ln^2(4x)$

82 De regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ heb je al bewezen voor gehele waarden van n . In deze opgave ga je deze regel bewijzen voor niet-gehele waarden van n . Hierbij nemen we $x > 0$.

- a** Licht toe dat $x^n = e^{n \ln(x)}$.
- b** Toon met de kettingregel aan dat $f(x) = e^{n \ln(x)}$ geeft $f'(x) = e^{n \ln(x)} \cdot \frac{n}{x}$.
- c** Hoe volgt hieruit dat $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$? Waarom is de regel nu ook bewezen voor elke niet-gehele n van $\mathbb{R}$?

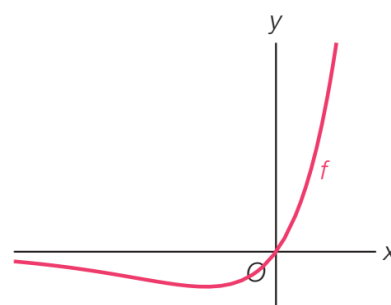
83 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

- a** De lijn k snijdt de grafiek van f loodrecht in het punt A met $x_A = \frac{1}{e}$ en snijdt de x -as in het punt B .
Bereken exact de x -coördinaat van B .
- b** De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -6 .
Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.



84 Gegeven is de functie $f(x) = 2^{2x} - 2^x$.
Zie de grafiek van f in de figuur hiernaast.

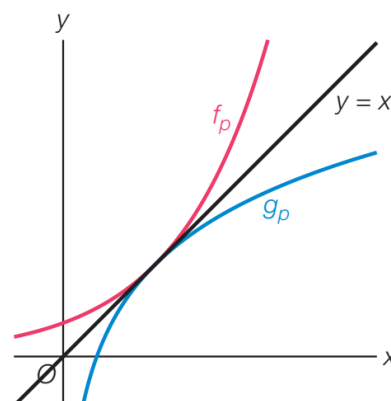
- a** Bereken exact het bereik van f .
- b** De grafiek van f heeft één buigpunt.
Bereken exact de coördinaten van dit buigpunt.



A85 Voor $p \neq 0$ zijn de functies f_p en g_p gegeven door $f_p(x) = e^{-px}$ en $g_p(x) = -\frac{1}{p} \ln(x)$.

De functies f_p en g_p zijn elkaars inverse.

- a** Bewijs dit.
- b** Er bestaat een waarde van p waarbij de lijn $y = x$ de gemeenschappelijke raaklijn is van de grafieken van f_p en g_p . Deze situatie is in de figuur hiernaast weergegeven.
Bereken exact deze waarde van p .



A86 Voor elke $a > 0$ is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \ln\left(\frac{ax}{2x+1}\right)$

□ ⊗ *

met domein $\langle 0, \infty \rangle$.

a De lijn k met $rc_k = \frac{1}{3}$ raakt de grafiek van f_2 in het punt A .

Bereken exact de coördinaten van A .

b Bereken exact voor welke a de functie $g(x) = \frac{e^x}{3 - 2e^x}$ de inverse

is van f_a .

A87 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{|\ln(x)|}$.

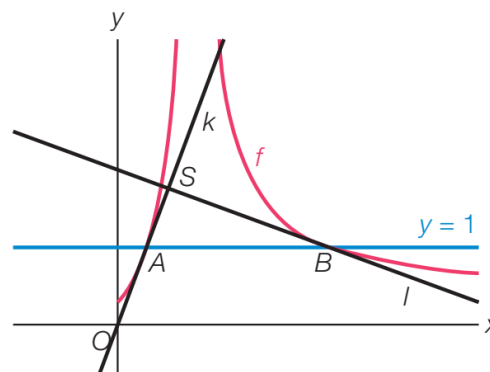
□ ⊗ *

De lijn $y = 1$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B met $x_A < x_B$.

De lijn k raakt de grafiek van f in A en de lijn l raakt de grafiek van f in B . De lijnen k en l snijden elkaar in het punt S . Zie de figuur hiernaast.

a Bewijs dat k en l loodrecht op elkaar staan.

b Bereken exact de coördinaten van S .



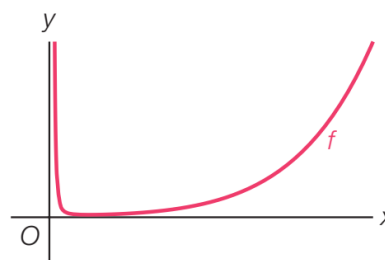
A88 Gegeven is de functie $f(x) = e^{\ln^2(x)} + 2\ln(x) - 3$.

⊗ *

Zie de grafiek van f in de figuur hiernaast.

a Los exact op $f(x) \leq 1$.

b Bereken exact het bereik van f .



E89 Gegeven is de functie $f(x) = x^x$ met domein $\langle 0, \infty \rangle$.

*

De afgeleide van f is $f'(x) = (\ln(x) + 1) \cdot x^x$.

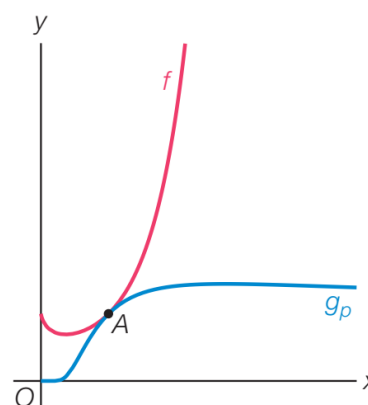
a Bewijs dit.

Voor elke waarde van p is de functie g_p gegeven door

$g_p(x) = x^{\frac{p}{x}}$ met domein $\langle 0, \infty \rangle$.

Er is een waarde van p waarvoor de grafiek van g_p de grafiek van f raakt. Het raakpunt noemen we A . Zie de figuur hiernaast.

b Bereken exact deze waarde van p en stel de formule op van de lijn k die de grafieken raakt in A .



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan rekenen met de natuurlijke logaritme.
- ☐ Ik kan vergelijkingen die te herleiden zijn tot de vorm $e^A = B$ algebraïsch oplossen.
- ☐ Ik kan vergelijkingen met natuurlijke logaritmen exact oplossen.
- ☐ Ik kan exponentiële en logaritmische functies differentiëren.

► OPGAVE C13,C14
THEORIE A

► OPGAVE C15
THEORIE A

► OPGAVE C16
THEORIE A

► OPGAVE C17
THEORIE B

C13 Bereken exact.

- a** $\ln^3(e^2)$ **c** $e^{\ln(7)} + e^{\ln(3)}$
b $\ln(\sqrt{e})$ **d** $e^{3\ln(2)} \cdot e^{\ln(5)}$

C14 Herleid tot één logaritme.

- a** $5 - \ln(3)$ **b** $2\ln(3) + \ln(6)$

C15 Los algebraïsch op. Rond af op drie decimalen.

- a** $e^{3x} = 15$ **b** $e^{2x+3} = 7$

C16 Los exact op.

- a** $x^2 \ln(x) = 4 \ln(x)$ **b** $2 \ln(x) + \ln(9) = 2$ **c** $\ln^2(x) + \ln(x) - 6 = 0$

C17 Differentieer.

- a** $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 1}$ **b** $g(x) = x^2 \cdot \ln(2x)$ **c** $h(x) = {}^2\log(x^2 + 4)$

Antwoorden

- C13 a** 8 **c** 10
b $\frac{1}{2}$ **d** 40

- C14 a** $\ln(\frac{1}{3}e^5)$ **b** $\ln(54)$

- C15 a** $x \approx 0,903$ **b** $x \approx -0,527$

- C16 a** $x = 1 \vee x = 2$ **b** $x = \frac{1}{3}e$ **c** $x = e^2 \vee x = \frac{1}{e^3}$

- C17 a** $f'(x) = \frac{2^x \cdot \ln(2)}{(2^x + 1)^2}$ **b** $g'(x) = 2x \ln(2x) + x$ **c** $h'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 4) \ln(2)}$

Kennis- en vaardigheidentest

9.1 Groeifactoren en groeipercentages

- 1** Los exact op.
- a** $4^{x-1} = 25$ **c** $3 + 5 \cdot 2^{3x-1} = 68$
b $2 + 5^{2x} = 17$ **d** $2^{x+3} + 2^{x+1} = 50$
- 2** Een hoeveelheid neemt per dag met 10% toe.
a Bereken het groeipercentage per week.
b Bereken het groeipercentage per 8 uur.
- 3** Een hoeveelheid neemt per jaar met 36% af.
a Hoeveel procent is de afname per maand?
b Hoeveel procent is de afname per 5 jaar?
- 4** **a** Een hoeveelheid neemt per maand met 0,2% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.
b Een hoeveelheid neemt per week met 20% af.
Bereken de halveringstijd in dagen nauwkeurig.
c Een hoeveelheid verdubbelt elk 36 uur.
Na hoeveel uur is de hoeveelheid vijf keer zoveel? Rond af op gehele.

9.2 Rekenregels voor logaritmen

- 5** Herleid tot één logaritme.
a $4 + {}^2\log(a) + \log(100)$ **b** $2 - {}^3\log(6a)$
- 6** Herleid tot de vorm $y = a + {}^g\log(bx)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel.
a $y = 4 + {}^3\log(36x)$ **b** $y = 5 - \log(500x)$
- 7** Los exact op.
a ${}^4\log(12x + 2) = 2 + {}^4\log(x - 1)$ **b** $2 \cdot {}^3\log(x + 1) = {}^3\log(2x + 14)$

9.3 Overgaan op ander grondtal

- 8** Los exact op.
a ${}^3\log(2x - 1) + \frac{1}{3}\log(x + 2) = 0$ **c** $\log^2(x) + \frac{1}{10}\log(x) = 2$
b ${}^2\log(2x - 1) = {}^4\log(x)$ **d** ${}^2\log^2(x) - 4 \cdot \frac{1}{2}\log(x) = 0$
- 9** Los exact op.
a $4^x - 2^{x+4} = 80$ **b** $5^x - 6 \cdot (\frac{1}{5})^x = 5$
- 10** **a** Werk de formule $y = 4 \cdot \log(3x + 12) - 1$ om tot de vorm $x = a + b \cdot g^y$.
Rond b en g af op twee decimalen.
b Werk de formule $p = 50 \cdot 1,2^{5q+2}$ om tot de vorm $q = a + b \cdot \log(p)$.
Rond a en b af op twee decimalen.

9.4 Het grondtal e

11 Herleid.

a $e^x(2e^x + e^3)$

b $\frac{e^{3x} - e^x}{e^x}$

c $(e^{3x} - 5)^2$

12 Los exact op.

a $3xe^x - e^x = 0$

b $e^{2x-1} - \sqrt[3]{e^2} = 0$

c $e^{2x} + 3e^x = 4$

13 Differentieer.

a $f(x) = 2e^x - 3x^2$

c $f(x) = (x^2 + 1)e^x$

e $f(x) = x^2 \cdot e^{2x-1}$

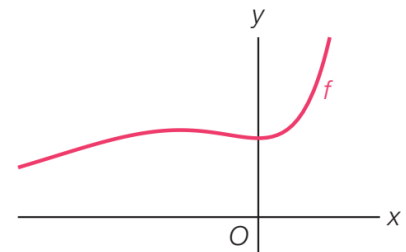
b $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$

d $f(x) = \sqrt{2e^x}$

f $f(x) = e^{x^2+9}$

14 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x$.

- a** Bereken exact de extreme waarden van f .
b Bereken exact de x -coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f .



9.5 De natuurlijke logaritme

15 Herleid tot één logaritme.

a $4 + \ln(3)$

b $\ln(10) - 4\ln(2)$

16 Los exact op.

a $2e^{5x} = 16$

b $\ln^2(5x) = 16$

c $2\ln^2(x) - \ln(x) = 0$

17 Differentieer.

a $f(x) = 2^{3x-4}$

c $f(x) = \ln(x \cdot \sqrt[3]{x})$

e $f(x) = {}^3\log(5x - 6)$

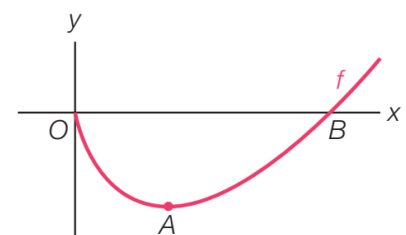
b $f(x) = x \cdot 3^x$

d $f(x) = \frac{2\ln(x) - 3}{x}$

f $f(x) = \ln(3x^2 + 3)$

18 Gegeven is de functie $f(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2}x$. De grafiek van f heeft top A en snijdt de x -as in het punt B . Zie de figuur hiernaast.

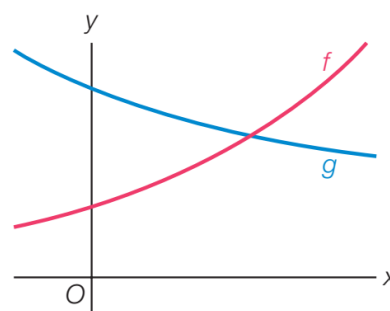
- a** Bereken exact de coördinaten van A .
b De lijn k raakt de grafiek van f in B .
 Stel op algebraïsche wijze de formule op van k .



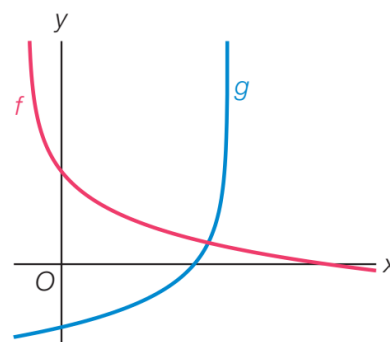
Gemengde opgaven

- 1**
- a** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 9,6% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
 - b** Een hoeveelheid neemt per dag met 17% af.
Bereken de halveringstijd in uren nauwkeurig.
 - c** Een hoeveelheid verdubbelt elke week.
Hoeveel procent is de toename per dag?
 - d** De halveringstijd van een hoeveelheid is 8,3 dagen.
Na hoeveel dagen is er nog 1% over? Rond af op gehele.

- 2** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 \cdot 2^x$ en $g(x) = 4 + 4 \cdot (\frac{1}{2})^x$. Zie de figuur hiernaast.
- a** Los exact op $f(x) \leq g(x)$.
 - b** De lijn $y = 9$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .
Bewijs dat $AB = 2 \log(3\frac{3}{4})$.
 - c** De grafiek van g snijdt de y -as in het punt C . De horizontale lijn door C snijdt de grafiek van f in het punt D . De verticale lijn door D snijdt de grafiek van g in het punt E .
Bereken exact de lengte van het lijnstuk DE .
 - d** Bewijs dat de functie $h(x) = f(x) + g(x)$ een minimum heeft voor $x = 1 - 2 \log(\sqrt{3})$.



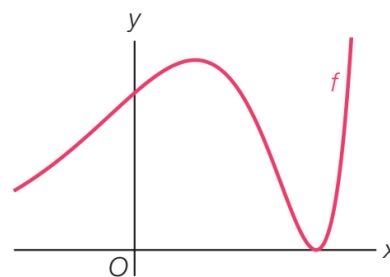
- 3** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 - 3 \log(x + 1)$ en $g(x) = \frac{1}{3} \log(5 - x)$. Zie de figuur hiernaast.
- a** De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A en de grafiek van g snijdt de x -as in het punt B .
Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB .
 - b** De grafieken van f en g snijden van de lijn $y = 1$ het lijnstuk CD af en van de lijn $x = 2$ het lijnstuk EF .
Het lijnstuk CD is langer dan het lijnstuk EF .
Bereken exact hoeveel keer zo lang.
 - c** Los exact op $f(x) \geq g(x)$.
 - d** Op de grafiek van f ligt het punt P waarin de raaklijn evenwijdig is met de lijn $y = -x$.
Bewijs dat $x_P = \frac{1 - \ln(3)}{\ln(3)}$.



- 4**
- a** Werk de formule $p = 10 e^{-\frac{1}{2}t+1}$ om tot de vorm $t = \ln(ap^b)$.
 - b** Werk de formule $y = 3 \ln\left(\frac{2}{x}\right) + 2 \ln(5x)$ om tot de vorm $x = ae^{by}$.

5 Gegeven is de functie $f(x) = (x - 3)^2 e^x$. Zie de figuur hiernaast.

- a** De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A .
De lijn k snijdt de grafiek van f loodrecht in A en snijdt de x -as in het punt B .
Bereken exact de x -coördinaat van B .
- b** De lijn door de toppen van de grafiek van f snijdt de y -as in het punt C .
Bereken exact de y -coördinaat van C .
- c** De buigpunten van de grafiek van f zijn D en E met $x_D < x_E$.
Bereken exact $x_E - x_D$.



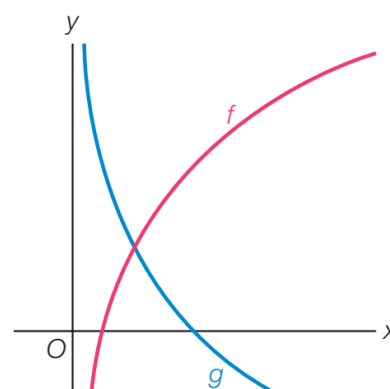
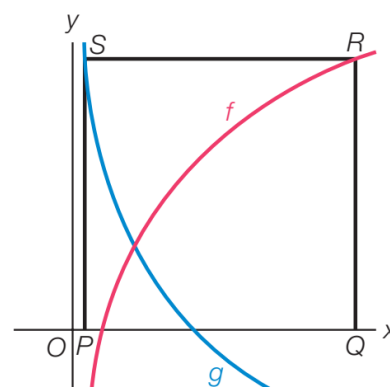
De grafiek van de functie $g(x) = \frac{1}{10}x e^x$ snijdt de grafiek van f in de punten F en G met $x_F < x_G$.

- d** Bereken exact $x_G - x_F$.
- e** De horizontale lijn door F snijdt de grafiek van f van links naar rechts in de punten H , F en I .
Het lijnstuk FH is langer dan het lijnstuk FI .
Bereken in twee decimalen hoeveel keer zo lang.

6 Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(4x)$ en

$g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Zie de figuur hiernaast.

- a** De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt A .
De raaklijnen aan de grafieken van f en g in A snijden van de y -as een lijnstuk af.
Bereken exact de lengte van dit lijnstuk.
- b** De lijn $k: y = px$ raakt de grafiek van f en de lijn $l: y = qx + 2$ raakt de grafiek van g .
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van k en l .
- c** In de figuur hiernaast is $PQRS$ een vierkant. De punten P en Q liggen op de x -as, het punt R ligt op de grafiek van f en het punt S ligt op de grafiek van g .
Bereken de x -coördinaat van P in drie decimalen.



7 Voor elke p is gegeven de functie $f(x) = x^p \cdot \ln(x)$.

- a** Bereken exact de extreme waarde van f_{-2} .
- b** Bereken exact de x -coördinaat van het buigpunt van de grafiek van f_3 .
- c** Bereken exact voor welke p de y -coördinaat van de top van de grafiek van f_p gelijk is aan $\frac{1}{3}e$.
- d** Bereken exact voor welke p de x -coördinaat van het buigpunt van de grafiek van f gelijk is aan e^2 .





10

Meetkunde met vectoren

Bij het Nederlands kampioenschap tegen de wind in fietsen, rijd je pal tegen de wind in. Maar ook als je de wind in de rug hebt, kan het soms voelen alsof je tegenwind hebt.

Als je met 25 km/u naar het noorden fietst en er staat een matige zuidwestenwind van 25 km/u (windkracht 4), dan ervaar je toch een wind die schuin van voren staat.

Licht deze situatie toe met een tekening. Welke snelheid heeft deze tegenwind?

10.1 Vectoren en rotaties

Kennis en vaardigheden

- Je kunt de lengte van een vector berekenen.
- Je kunt met een berekening een vector met een getal vermenigvuldigen en vectoren bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken.
- Je kunt in een tekening een vector met een getal vermenigvuldigen en vectoren bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken.
- Je kunt een vector ontbinden in componenten.
- Je kunt een vector rechtsonder of linksom draaien over 90° .

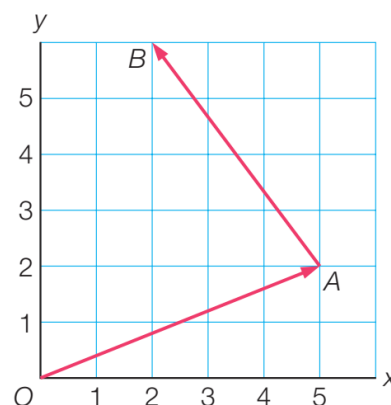
01
□ ⊗ *

Bij een wandeling in het assenstelsel hiernaast ga je eerst van O naar A en daarna van A naar B . De wandeling van O naar A is 5 in de x -richting en 2 in de y -richting. Dit geven we aan met $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a Licht toe dat de wandeling van A naar B kan worden aangegeven met $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b De wandeling van O naar B geven we aan met $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Hoe volgt dit uit $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$?



Theorie A Vectoren optellen en aftrekken

In de figuur hiernaast zijn in een assenstelsel de pijlen van O naar $A(4, 2)$ en van A naar $B(2, 3)$ getekend. Deze pijlen heten **vectoren**.

Notatie: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ spreek je uit als 'de vector OA is vier twee'.

De getallen 4 en 2 zijn de **kentallen** van $\overrightarrow{OA}$.

Een vector die in O begint wordt vaak genoteerd met een kleine letter.

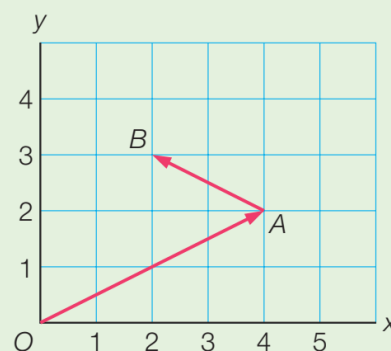
Zo wordt de vector $\overrightarrow{OA}$ genoteerd als $\vec{a}$. Dus $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Een vector heeft zowel een **richting** als een **lengte**.

De lengte van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ is te berekenen met de stelling van

Pythagoras. De lengte is $\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Notatie: $|\vec{a}| = 2\sqrt{5}$.

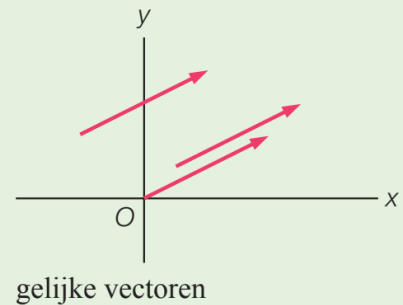
Uitspraak: de lengte van vector a is twee wortel vijf.



Een vector is een lijnstuk met een richting.

De lengte van de vector $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ is $\left| \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right| = \sqrt{p^2 + q^2}$.

Je hebt te maken met **gelijke vectoren** als ze dezelfde richting en dezelfde lengte hebben. In de figuur hiernaast zie je drie gelijke vectoren.



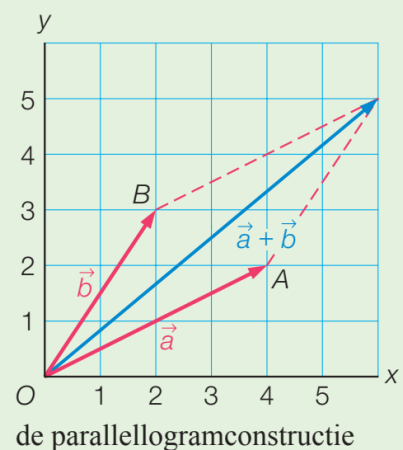
Je kunt vectoren optellen. Je krijgt dan de **somvector**.
Voor het tekenen van een somvector zijn er twee manieren: de parallellogramconstructie en de kop-staartconstructie. Hieronder zijn deze constructies uitgevoerd met de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

De parallellogramconstructie

Teken een parallellogram waarvan $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijden zijn.
Van dit parallellogram is $\vec{a} + \vec{b}$ de diagonaal.

Ga na dat $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

De kentallen van de somvector krijg je door de overeenkomstige kentallen van de vectoren op de tellen.

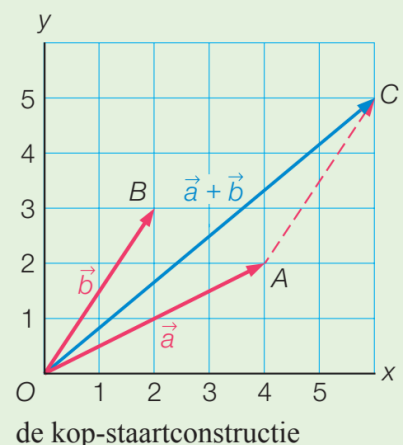


De kop-staartconstructie

Verschuif vector $\vec{b}$ waarbij zijn 'staart' aansluit bij de 'kop' van $\vec{a}$.

Merk op dat hier gebruikt is dat $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{OB}$ gelijke vectoren zijn, dus dat $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$.

Ga na dat je $\vec{a} + \vec{b}$ ook kunt krijgen door $\vec{a}$ met zijn staart aan te sluiten bij de kop van $\vec{b}$.



Je kunt een vector ook met een getal vermenigvuldigen.

In de figuur hiernaast zie je de vectoren $\vec{a}$ en $1\frac{1}{2}\vec{a}$.

Omdat $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ is $1\frac{1}{2}\vec{a} = 1\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

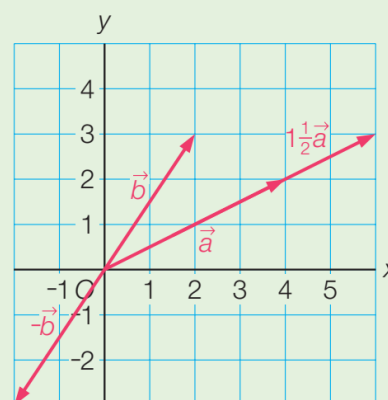
Ook zie je de vectoren $\vec{b}$ en $-1 \cdot \vec{b}$ oftewel $-\vec{b}$.

Omdat $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ is $-\vec{b} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De vectoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $-\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ heten **tegengestelde vectoren**.

Tegengestelde vectoren hebben dezelfde lengte en tegengestelde richting.

Voor $\vec{s} = 1\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ geldt $\vec{s} = 1\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Voor de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ geldt $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$.

Voor de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ geldt $c \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} c \cdot a_x \\ c \cdot a_y \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $-\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ zijn tegengestelde vectoren.

Voorbeeld

In de figuur hiernaast zijn $\vec{a}$ en $\vec{b}$ getekend.

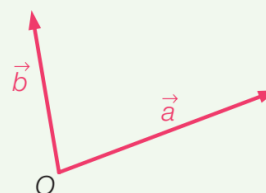
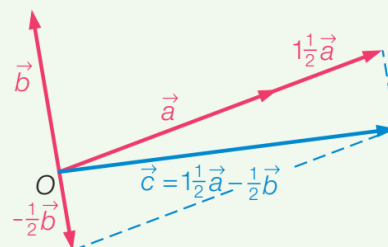
Teken $\vec{c} = 1\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Aanpak

Teken eerst $1\frac{1}{2}\vec{a}$ en $-\frac{1}{2}\vec{b}$.

Uitwerking

Zie de figuur hiernaast.



2 Bereken exact de lengte van de volgende vectoren.

□ ⊗ *

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

d $\vec{d} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix}$

b $\vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$

e $\vec{e} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

f $\vec{f} = 0,6 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

3 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

□ ⊗ *

Bereken de kentallen van de volgende vectoren.

a $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

c $\vec{e} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$

b $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$

d $\vec{f} = 2(\vec{a} + \vec{b})$

4 Hieronder zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ getekend.

□ ⊗ *

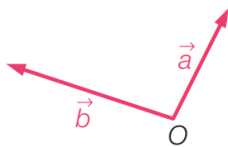
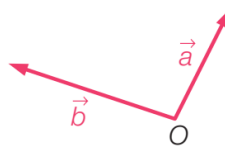
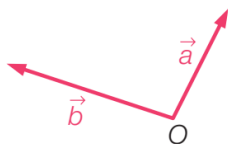
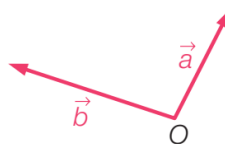
Teken de volgende vectoren.

a $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

c $\vec{e} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

b $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

d $\vec{f} = -2\vec{a} + 1\frac{1}{2}\vec{b}$

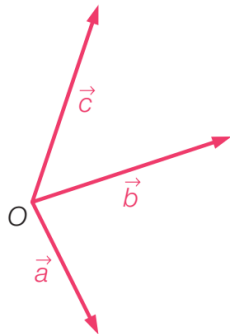
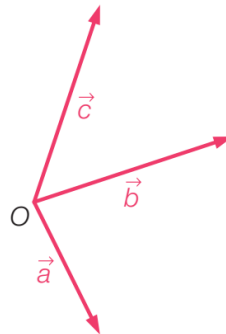


A5 Hieronder zijn de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ getekend.

Teken de volgende vectoren.

a $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

b $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$

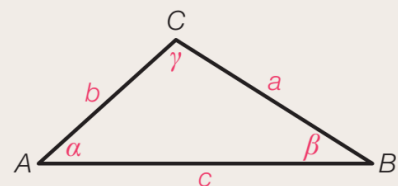


Voorkennis De sinusregel en de cosinusregel

In elke driehoek ABC geldt de sinusregel.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Om de sinusregel te kunnen gebruiken, moet in elk geval een zijde met een overstaande hoek bekend zijn. In het geval één hoek en twee zijden zijn gegeven, kan het zijn dat er twee driehoeken mogelijk zijn.



In elke driehoek ABC geldt de cosinusregel.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

De cosinusregel gebruik je

- voor het berekenen van een zijde van een driehoek als twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven
- voor het berekenen van een hoek van een driehoek als de drie zijden zijn gegeven.

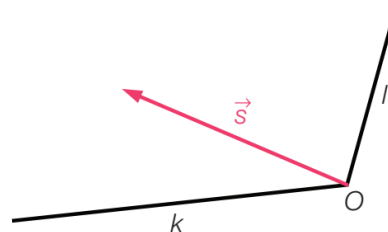
V1 Van driehoek ABC is $AB = 9$, $AC = 6$ en $\angle A = 105^\circ$. Bereken BC . Rond af op twee decimalen.

V2 Van driehoek PQR is $PR = 5$, $QR = 3$, $\angle P = 25^\circ$ en $\angle R > 90^\circ$. Bereken PQ . Rond af op twee decimalen.

O6 In de figuur hiernaast zie je de lijnen k en l en de vector $\vec{s}$.

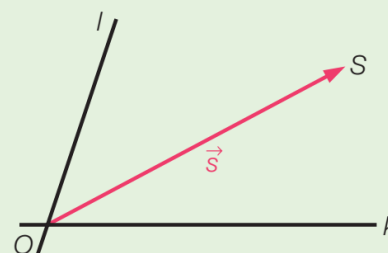


Teken langs k de vector $\vec{a}$ en langs l de vector $\vec{b}$ zodat geldt $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$.

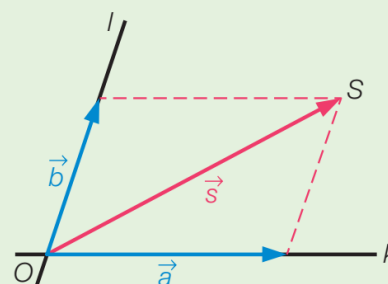


Theorie B Vectoren ontbinden in componenten

In de figuur hiernaast is de vector $\vec{s}$ getekend. Verder is gegeven dat de vector $\vec{a}$ op lijn k ligt en de vector $\vec{b}$ op lijn l waarbij $\vec{a} + \vec{b} = \vec{s}$.



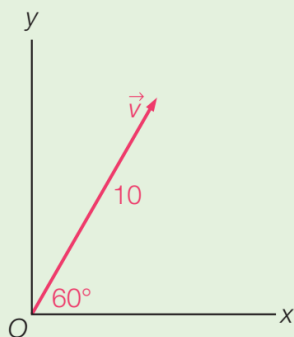
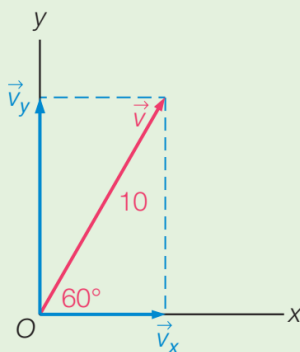
Door een parallellogram te tekenen waarvan OS een diagonaal is, zoals in de figuur hiernaast, zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te tekenen. We zeggen dat we de vector $\vec{s}$ hebben **ontbonden in de componenten** $\vec{a}$ en $\vec{b}$.



In de linker figuur hieronder zie je de vector $\vec{v}$ met lengte 10 die een hoek van 60° maakt met de x -as. De vector $\vec{v}$ is in de rechter figuur ontbonden in de **onderling loodrechte componenten** $\vec{v}_x$ en $\vec{v}_y$. Van deze componenten is de lengte te berekenen.

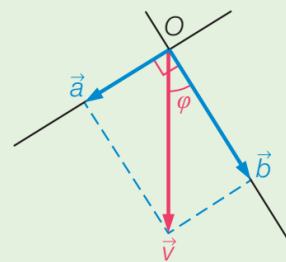
Omdat $\cos(60^\circ) = \frac{|\vec{v}_x|}{10}$ is $|\vec{v}_x| = 10 \cos(60^\circ) = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ en

omdat $\sin(60^\circ) = \frac{|\vec{v}_y|}{10}$ is $|\vec{v}_y| = 10 \sin(60^\circ) = 10 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.



De vector $\vec{v}$ hiernaast is ontbonden in de twee onderling loodrechte componenten $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Er geldt $|\vec{a}| = |\vec{v}| \cdot \sin(\varphi)$ en $|\vec{b}| = |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$.

Als je bij het ontbinden van vectoren in componenten niet met een rechte hoek te maken hebt, dan gebruik je de sinusregel of de cosinusregel. Zie het voorbeeld.



Voorbeeld

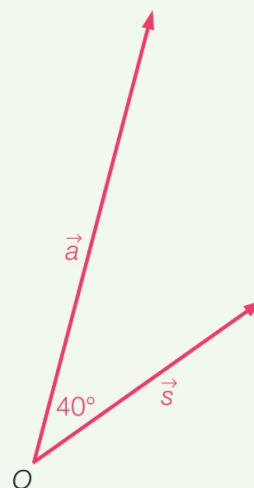
Vector $\vec{s}$ met lengte 3 is de somvector van $\vec{a}$ met lengte 5 en $\vec{b}$. De hoek tussen $\vec{s}$ en $\vec{a}$ is 40° . Zie de figuur hiernaast.

Teken $\vec{b}$ en bereken de lengte van $\vec{b}$. Rond af op twee decimalen.

Aanpak

Teken het parallellogram waarvan $\vec{a}$ een zijde is en $\vec{s}$ de diagonaal.

Gebruik voor het berekenen van $|\vec{b}|$ de cosinusregel.



Uitwerking

Zie de figuur hiernaast.

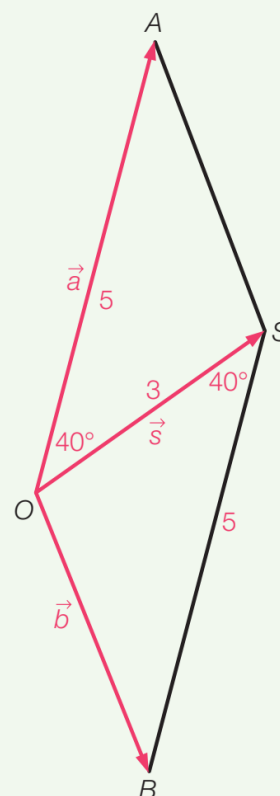
In $\triangle OBS$ is $BS = |\vec{a}| = 5$ en

$\angle OSB = \angle AOS = 40^\circ$ (Z-hoeken).

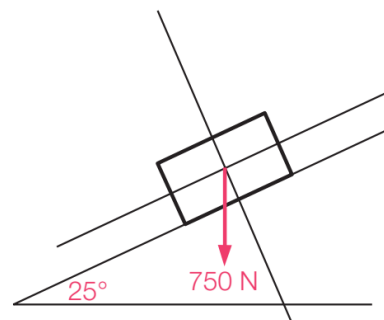
De cosinusregel in $\triangle OBS$ geeft

$$|\vec{b}|^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos(40^\circ) = 11,018...$$

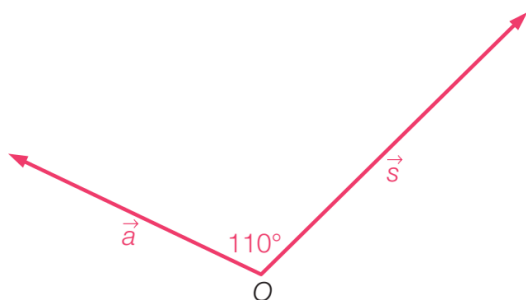
$$|\vec{b}| \approx 3,32$$



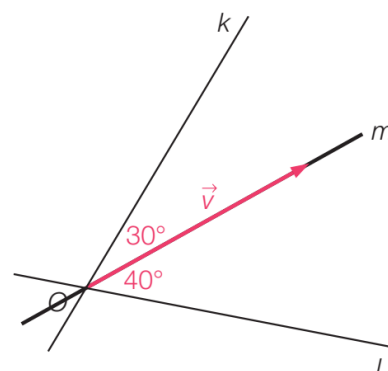
- 7** In de figuur hiernaast staat een kist op een helling die een hoek van 25° met het horizontale vlak maakt. De zwaartekracht die op de kist werkt is 750 newton. Ontbind deze kracht in een component langs de helling en een component loodrecht op de helling. Bereken de grootte van deze krachtcomponenten in newton. Rond af op gehele.



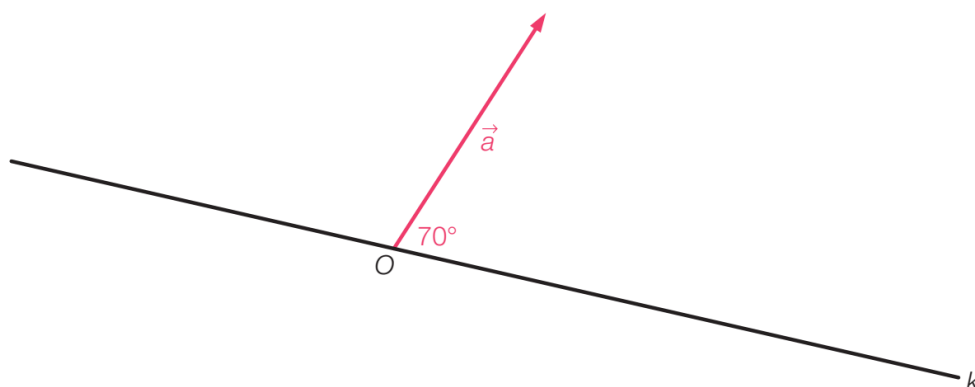
- 8** Vector $\vec{s}$ met lengte 4 is de somvector van $\vec{a}$ met lengte 3 en $\vec{b}$. De hoek tussen $\vec{s}$ en $\vec{a}$ is 110° . Zie de figuur hieronder. Teken $\vec{b}$ en bereken de lengte van $\vec{b}$. Rond af op twee decimalen.



- 9** Vector $\vec{v}$ in de figuur hiernaast heeft lengte 12. De vector wordt ontbonden in de componenten $\vec{a}$ en $\vec{b}$ waarbij $\vec{a}$ op de lijn k ligt en $\vec{b}$ op de lijn l . Bereken $|\vec{a}|$ en $|\vec{b}|$. Rond af op twee decimalen.

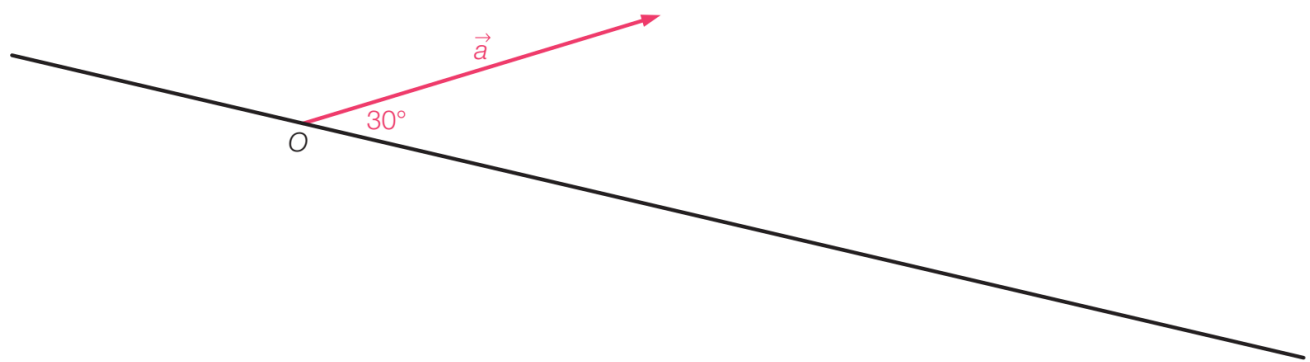


- 10** Vector $\vec{a}$ in de figuur hieronder heeft lengte 3 cm en maakt een hoek van 70° met lijn k . Verder is gegeven dat vector $\vec{c}$ lengte 5 cm heeft en dat vector $\vec{b}$ op k ligt waarbij $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$.
- Teken $\vec{b}$. Gebruik een passer. Er zijn twee mogelijkheden.
 - Bereken algebraïsch voor beide situaties de lengte van $\vec{b}$ in cm. Rond af op twee decimalen.



A11

Gegeven is de vector $\vec{a}$ met lengte 4 cm die een hoek van 30° maakt met de lijn l . Zie de figuur hieronder. Verder is gegeven dat vector $\vec{c}$ lengte 6 cm heeft. Er zijn twee vectoren $\vec{b}$ waarvoor geldt: $\vec{b}$ ligt op l en $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$. Bereken algebraïsch voor beide situaties de lengte van $\vec{b}$ in cm. Rond af op twee decimalen.



O12

a Uit de kop-staartconstructie volgt $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$.

Licht dit toe met een tekening.

b Licht toe dat uit $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$ volgt $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

c Vul in $\vec{OM} = \vec{OA} + \dots$

d Het punt M is het midden van het lijnstuk AB .

Licht toe dat uit de vragen b en c en $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ volgt $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

O13

In de figuur hiernaast zijn de vectoren

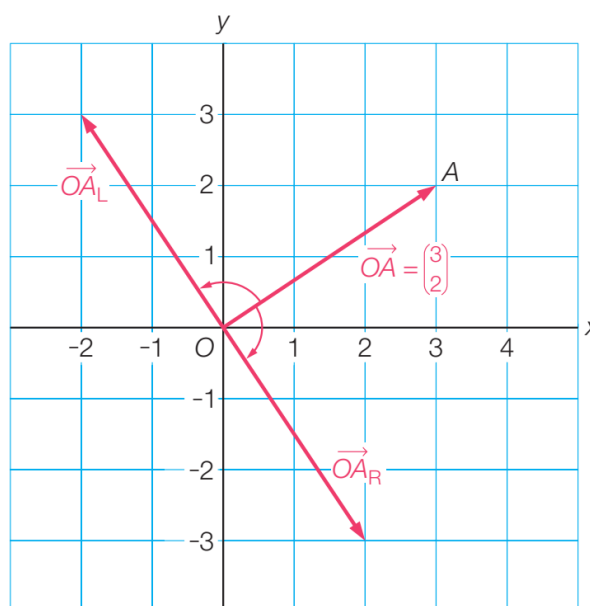
$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{OA}_R$ en $\vec{OA}_L$ getekend.

De vector $\vec{OA}_R$ ontstaat uit $\vec{OA}$ door $\vec{OA}$ om O over 90° rechtsom te draaien en de vector $\vec{OA}_L$ ontstaat uit $\vec{OA}$ door $\vec{OA}$ om O over 90° linksom te draaien.

a Geef de kentallen van $\vec{OA}_R$ en van $\vec{OA}_L$.

De vector $\vec{OB} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ wordt om O over 90° rechtsom gedraaid. Zo ontstaat $\vec{OB}_R$.

b Geef de kentallen van $\vec{OB}_R$.



Theorie C Vectoren gebruiken bij rotaties

Uit $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ volgt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$.

Dus er geldt $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

Voor het midden M van het lijnstuk AB geldt

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Dus er geldt $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

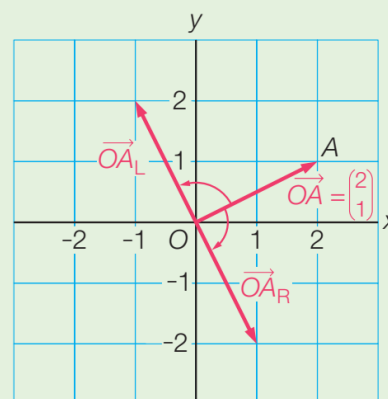
Voor het lijnstuk AB met midden M geldt $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ en $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

In de figuur hiernaast zie je de vectoren

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OA}_R \text{ en } \overrightarrow{OA}_L.$$

De vector $\overrightarrow{OA}_R$ ontstaat uit $\overrightarrow{OA}$ door $\overrightarrow{OA}$ om O over 90° rechtsom te draaien en de vector $\overrightarrow{OA}_L$ ontstaat uit $\overrightarrow{OA}$ door $\overrightarrow{OA}$ om O over 90° linksom te draaien.

Je ziet $\overrightarrow{OA}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OA}_L = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ rechtsom draaien om O over 90° geeft $\overrightarrow{OA}_R = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ linksom draaien om O over 90° geeft $\overrightarrow{OA}_L = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$.

In de figuur hiernaast is het vierkant $ABCD$ getekend met $A(3, 2)$ en $B(7, 3)$. Om de coördinaten van C te vinden, bedenk je dat $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}_R$.

Omdat $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ is $\overrightarrow{BA}_R = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

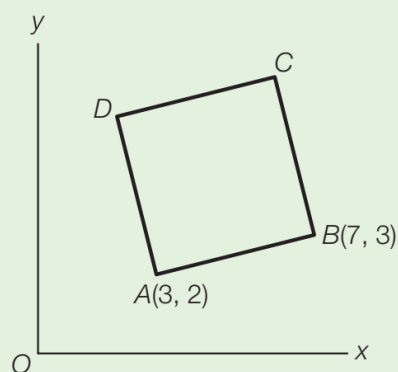
Je krijgt $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}_R = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, dus

$C(6, 7)$.

Om de coördinaten van D te vinden, bedenk je dat

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}_L = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA}_R.$$

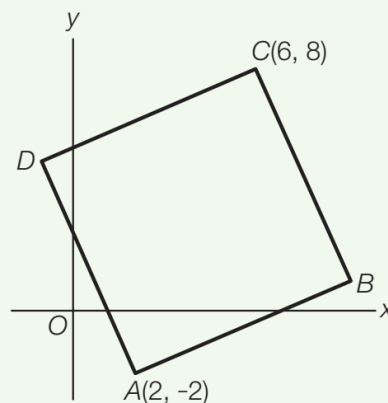
Dit geeft $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, dus $D(2, 6)$.



Voorbeeld

In de figuur hiernaast is het vierkant $ABCD$ getekend met $A(2, -2)$ en $C(6, 8)$.

Bereken de coördinaten van B .



Uitwerking

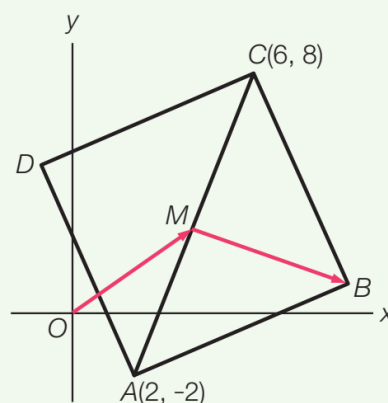
M is het midden van diagonaal AC .

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}_L$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MA} = \vec{a} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \text{ dus } \overrightarrow{MA}_L = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dit geeft } \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dus } B(9, 1).$$



14 Zie het voorbeeld.



Bereken de coördinaten van D .

15 Gegeven is het vierkant $ABCD$ met $A(5, 2)$ en



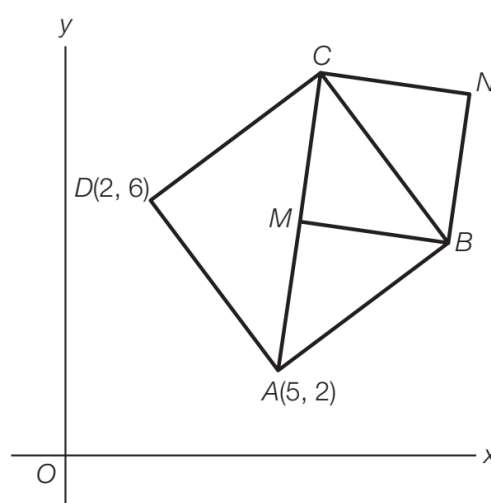
$D(2, 6)$ in de figuur hiernaast.

Er geldt $B(9, 5)$.

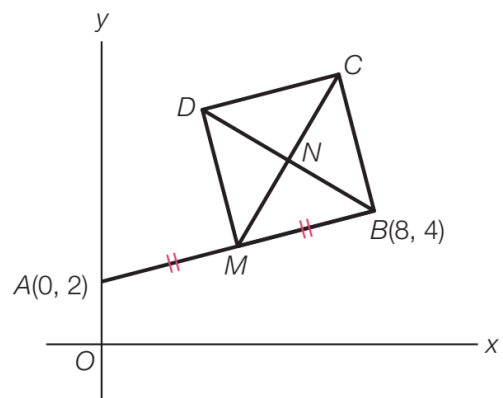
a Toon aan dat de coördinaten van B juist zijn.

b Verder is het punt M het midden van diagonaal AC . Ook is het vierkant $MBNC$ getekend.

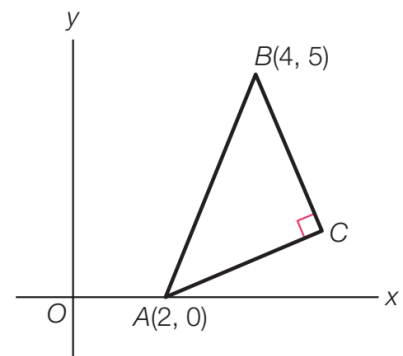
Bereken de coördinaten van N .



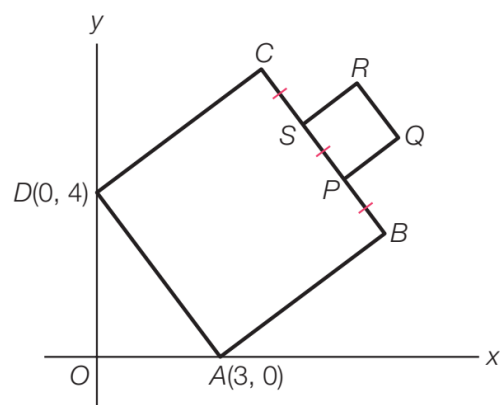
- 16** Gegeven zijn de punten $A(0, 2)$ en $B(8, 4)$ in de figuur hiernaast. Het punt M is het midden van het lijnstuk AB . Ook is het vierkant $MBCD$ getekend. Bereken de coördinaten van het midden N van het vierkant.



- 17** In de figuur hiernaast zijn de punten $A(2, 0)$ en $B(4, 5)$ hoekpunten van de gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC . Bereken de coördinaten van C .



- A18** Gegeven is het vierkant $ABCD$ met $A(3, 0)$ en $D(0, 4)$. Op zijde BC liggen de punten P en S waarbij $BP = PS = SC$. PS is een zijde van het vierkant $PQRS$ zoals in de figuur hiernaast. Bereken de coördinaten van de punten Q en R .



Geschiedenis Het ontstaan van de vectormeetkunde

De vectormeetkunde is in de eerste helft van de 19^e eeuw ontstaan. Voor die tijd werden er echter ook al problemen met vectoren opgelost. Zo kwam Newton in 1687 met het idee om krachten op te tellen via de parallellogramconstructie. Daarnaast bleken vectoren een praktisch hulpmiddel om zogenaamde complexe getallen meetkundig weer te geven. Diverse wiskundigen opperden hier aan het eind van de 18^e eeuw ideeën voor, maar die werden pas serieus genomen toen Gauss er in 1831 een publicatie aan wijdde. De briljante Ierse wis- en natuurkundige William Rowan Hamilton (1804-1865) werkte de principes van Gauss succesvol uit. Als kleine jongen sprak Hamilton liefst dertien talen. Zijn interesse verschoof echter geleidelijk naar de exacte vakken nadat hij op achtjarige leeftijd kennismaakte met het Amerikaanse rekenwonder Zerah Colburn. Als jonge twintiger publiceerde Hamilton al opvallende resultaten in de optica. In zijn verdere carrière werkte hij de vectormeetkunde uit tot een volwaardig systeem. In een publicatie uit 1846 gebruikte hij voor het eerst het woord vector.

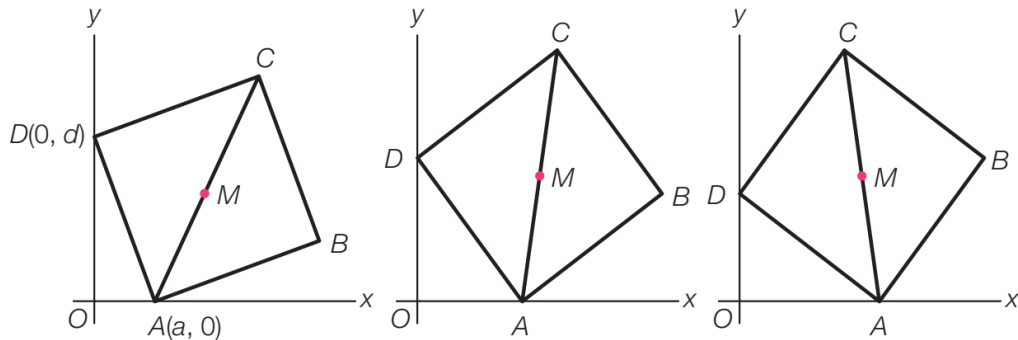


W.R. Hamilton

19



Van het vierkant $ABCD$ ligt het punt $A(a, 0)$ op de positieve x -as en het punt $D(0, d)$ op de positieve y -as. Het punt M is het midden van diagonaal AC . Hieronder zie je drie mogelijkheden.

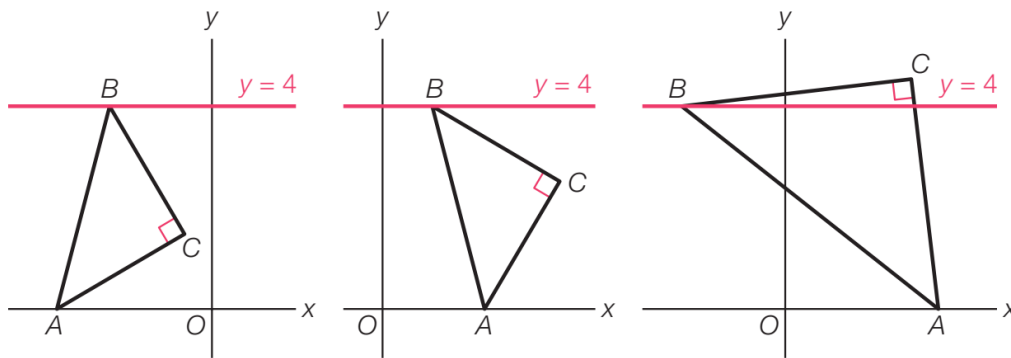


Bewijs dat M op de lijn $y = x$ ligt.

A20



Het punt $A(a, 0)$ ligt op de x -as en het punt $B(b, 4)$ ligt op de lijn $y = 4$. Van de gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC met $\angle C = 90^\circ$ ligt het punt C rechts van de lijn door A en B . Hieronder zie je drie mogelijkheden.



- Druk de coördinaten van C uit in a en b .
- Er is een waarde van a waarvoor alle punten C voor elke waarde van b op de lijn $y = -x$ liggen. Bereken deze waarde van a .

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan de lengte van een vector berekenen.
- ☐ Ik kan met een berekening een vector met een getal vermenigvuldigen en vectoren bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken.
- ☐ Ik kan in een tekening een vector met een getal vermenigvuldigen en vectoren bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken.
- ☐ Ik kan een vector ontbinden in componenten.
- ☐ Ik kan een vector rechtsom of linksom draaien over 90° .

► OPGAVE C1a
THEORIE A

► OPGAVE C1b
THEORIE A

► OPGAVE C2
THEORIE A

► OPGAVE C3
THEORIE B

► OPGAVE C4
THEORIE C

C1 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a Bereken exact $|\vec{a}|$ en $|\vec{b}|$.

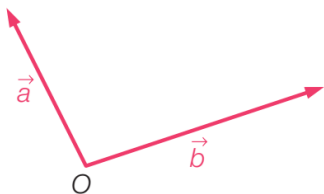
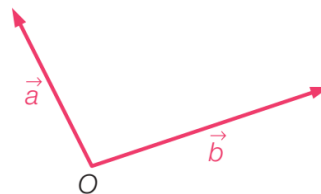
b Bereken de kentallen van de vectoren $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ en $\vec{d} = 3\vec{a} + 2\frac{1}{2}\vec{b}$.

C2 Hieronder zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ getekend.

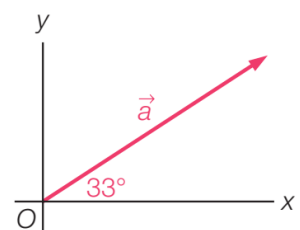
Teken de volgende vectoren.

a $\vec{c} = \vec{a} + 1\frac{1}{2}\vec{b}$

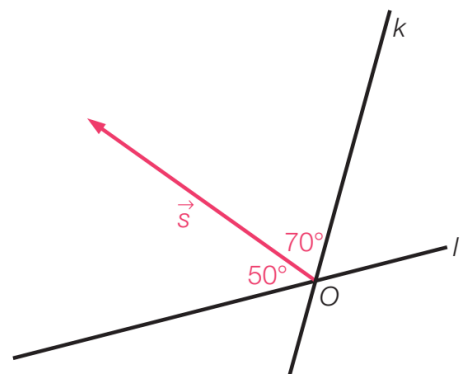
b $\vec{d} = 1\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$



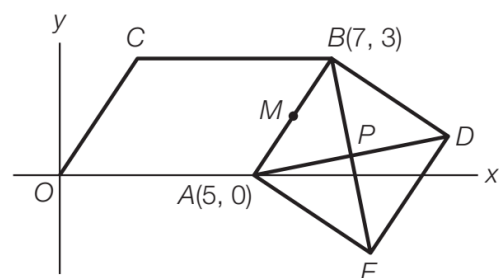
C3 a Vector $\vec{a}$ in de figuur hiernaast heeft lengte 6. Ontbind de vector in de twee loodrechte componenten $\vec{a}_x$ en $\vec{a}_y$, en bereken hiervan de lengte. Rond af op twee decimalen.



b Vector $\vec{s}$ in de figuur hiernaast heeft lengte 4. De vector wordt ontbonden in de componenten $\vec{a}$ en $\vec{b}$ waarbij $\vec{a}$ op de lijn k ligt en $\vec{b}$ op de lijn l . Teken $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en bereken van beide vectoren de lengte. Rond af op twee decimalen.



C4 In de figuur hiernaast is het parallellogram $OABC$ met $A(5, 0)$ en $B(7, 3)$ getekend. Het punt M is het midden van zijde AB . Het punt P is het midden van vierkant $ABDE$. Bereken de coördinaten van M en van P .



Antwoorden

C1 a $|\vec{a}| = \sqrt{10}$ en $|\vec{b}| = 2\sqrt{5}$

b $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

C2 a, b *

C3 a *
 $|\vec{a}_x| \approx 5,03$ en $|\vec{a}_y| \approx 3,27$

b *
 $|\vec{a}| \approx 3,54$ en $|\vec{b}| \approx 4,34$

C4 $M(6, 1\frac{1}{2})$ en $P(7\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

10.2 Vectoren en lijnen

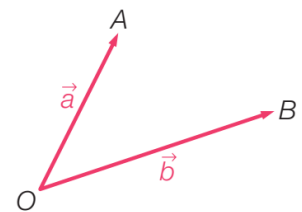
Kennis en vaardigheden

- Je kunt een vectorvoorstelling van een lijn opstellen.
- Je kunt een vergelijking, een parametervoorstelling en een vectorvoorstelling van een lijn in elkaar omzetten.

O21

□ ⊗ *

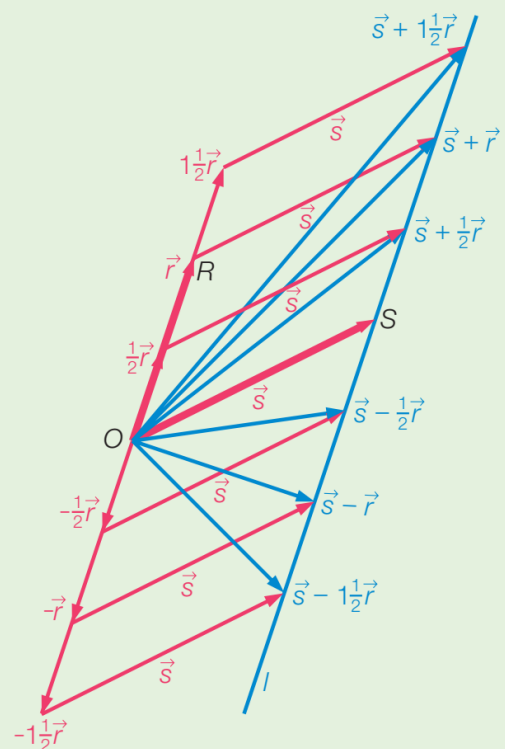
- a Teken de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zoals hiernaast en teken in deze figuur $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{OF} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{OG} = \vec{a} - \vec{b}$ en $\overrightarrow{OH} = \vec{a} - 2\vec{b}$.
- b Wat kun je zeggen van de eindpunten van de in vraag a getekende vectoren?



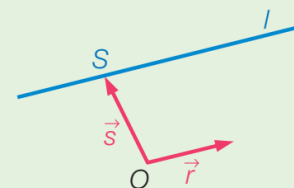
Theorie A De vectorvoorstelling van een lijn

In de figuur hiernaast zijn de punten S en R en de vectoren $\overrightarrow{OS} = \vec{s}$ en $\overrightarrow{OR} = \vec{r}$ getekend. Ook zijn de volgende vectoren en hun eindpunten getekend: $\vec{s} - \frac{1}{2}\vec{r}$, $\vec{s} - \vec{r}$, $\vec{s} - \frac{3}{2}\vec{r}$, $\vec{s} + \frac{1}{2}\vec{r}$, $\vec{s} + \vec{r}$ en $\vec{s} + \frac{3}{2}\vec{r}$.

Al deze eindpunten liggen op de lijn l door S die evenwijdig is met $\vec{r}$. Dat wil zeggen dat elk punt P van l voldoet aan $\overrightarrow{OP} = \vec{s} + t \cdot \vec{r}$. Hierin is t een willekeurig getal. Laat je t alle waarden aannemen, dan krijg je de hele lijn l . We noemen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{s} + t \cdot \vec{r}$ een **vectorvoorstelling van de lijn l** . De vector $\vec{s}$ is een **steunvector** van l en de vector $\vec{r}$ is een **richtingsvector** van l . Een steunvector van een lijn begint in de oorsprong.



$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{s} + t \cdot \vec{r}$ is een vectorvoorstelling van de lijn l door het eindpunt van een steunvector $\vec{s}$ en die evenwijdig is met een richtingsvector $\vec{r}$.

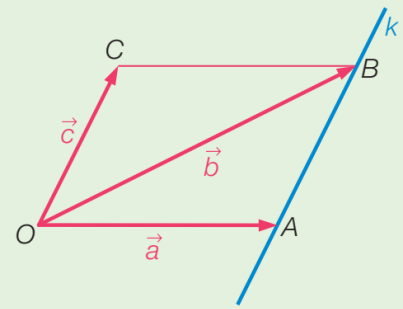


In de figuur hiernaast is de lijn k door de punten A en B getekend. Bovendien is het punt C zo getekend, dat $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$.

Uit $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$ volgt $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$.

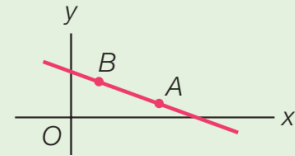
Omdat $\vec{c}$ evenwijdig is met k , is $\vec{c}$ een richtingsvector van k en is dus ook $\vec{b} - \vec{a}$ een richtingsvector van k .

Notatie: $\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.



Een vectorvoorstelling van de lijn door de punten A en B is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}).$$



Voorbeeld

De lijn l gaat door de punten $P(3, 4)$ en $Q(5, 6)$.

a Stel een vectorvoorstelling op van l .

b Onderzoek of het punt $A(27, 28)$ op l ligt.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} \text{a } l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}) \\ \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b $x = 27$ geeft $3 + 2t = 27$

$$2t = 24$$

$$t = 12$$

$$t = 12 \text{ geeft } y = 4 + 12 \cdot 2 = 28$$

Dus A ligt op l .

In de uitwerking van voorbeeld a is $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ een richtingsvector van lijn l .

Elke vector $c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ met $c \neq 0$ is evenwijdig met de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Daarom is $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ook een vectorvoorstelling van lijn l .

Met de notatie $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ geven we aan dat de vectoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ evenwijdig zijn.

In de uitwerking van voorbeeld b is gebruikt dat lijn l ook te noteren is als $x = 3 + 2t \wedge y = 4 + 2t$. We noemen $x = 3 + 2t \wedge y = 4 + 2t$ een **parametervoorstelling van de lijn l** .

R22 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.



a Licht toe dat ook $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van l is.

b Licht toe dat ook $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van l is.

De vectoren $\begin{pmatrix} -10 \\ 15 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ zijn evenwijdig.

Notatie: $\begin{pmatrix} -10 \\ 15 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

23 Stel een vectorvoorstelling op van



a de lijn k door de punten $A(2, 3)$ en $B(-4, 2)$

b de lijn l door de punten $C(1, 0)$ en $D(2, 3)$

c de lijn m door de punten $E(0, 3)$ en $F(-4, 0)$.

24 Onderzoek van de punten $A(7, -7)$, $B(-13, 15)$ en $C(-3\frac{1}{2}, 7)$



of ze op de lijn k : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ liggen.

25 Teken in één figuur de lijnen



k : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, l : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

m : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en n : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

26 Teken in één figuur de lijnstukken.



$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge -1 \leq t \leq 1$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge 1 \leq u \leq 3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge -1 \leq v \leq 0$

A27 Gegeven zijn de punten $A(-1, 2)$, $B(3, 4)$ en $C(-5, -2)$.



Stel een vectorvoorstelling op van

a de lijn k door A , evenwijdig met BC

b de lijn l door B en het midden M van het lijnstuk AC

c de lijn m door het midden N van het lijnstuk AB , evenwijdig met AC

d het lijnstuk BC .

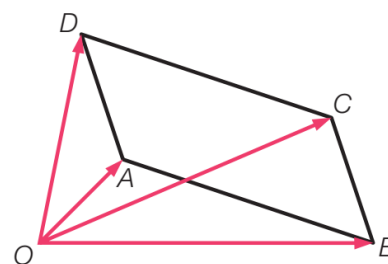
A28 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ en $\vec{d}$ die vanuit O de hoekpunten van het parallellogram $ABCD$ aanwijzen.

- a** Licht toe dat $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + t(\vec{c} - \vec{d})$ een vectorvoorstelling is van de lijn door de middens van de zijden AD en BC .
- b** Geef een vectorvoorstelling van de lijn
- k door A , die evenwijdig is met BD
 - l door B en het midden van de zijde CD
 - m door het snijpunt van de diagonalen, die evenwijdig is met BC .
- c** Omschrijf welke lijn bij de vectorvoorstelling hoort.

I: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{b} + t(\vec{c} - \vec{a})$

II: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + t(\vec{b} - \vec{d})$

III: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + t(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a})$



29 **a** Gegeven zijn de lijnen $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $l: y = 4x - 28$.

Om de coördinaten van het snijpunt S van k en l te vinden, substitueer je $x = 1 - 3t$ en $y = 2 + t$ in $y = 4x - 28$.

Toon aan dat $t = -2$ en bereken de coördinaten van S .

b Bereken de coördinaten van het snijpunt T van de lijnen

$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $n: 2x - 5y = 11$.

A30 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen.

a $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $l: 2x - 5y = 6$

b $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $n: 3x + 4y = 10$

O31 Gegeven is de lijn k met parametervoorstelling $x = 4 + 2t \wedge y = 1 - 5t$.

Door bij het stelsel $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$ de variabele t te elimineren, krijg je een vergelijking van k .

Toon aan dat je krijgt $k: 5x + 2y = 22$.

Theorie B Vergelijking, parametervoorstelling en vectorvoorstelling

Om een vectorvoorstelling van een lijn om te zetten in een vergelijking, gebruik je een parametervoorstelling van de lijn.

Bij de lijn l : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gebruik je dus de parametervoorstelling $x = 3 - t \wedge y = 2 + 3t$.

Je elimineert de variabele t uit het bijbehorende stelsel $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$

Je krijgt $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 3x = 9 - 3t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$
 $3x + y = 11$

Dus l : $3x + y = 11$.

Om een vergelijking van een lijn om te zetten in een vectorvoorstelling, gebruik je ook een parametervoorstelling van de lijn.

Bij de lijn m : $3x + 2y = 12$ gaat dit als volgt.

Kies bijvoorbeeld $x = 2t$. Dit geeft $3 \cdot 2t + 2y = 12$ oftewel $y = -3t + 6$.

Dus een parametervoorstelling van de lijn is m : $x = 2t \wedge y = -3t + 6$ en

hieruit volgt de vectorvoorstelling m : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Zou je $x = t$ kiezen, dan krijg je $3t + 2y = 12$ en dit geeft $y = -1\frac{1}{2}t + 6$.

Probeer x of y zo te kiezen dat je geen breuken krijgt.

Om het probleem van het voorbeeld hieronder op te lossen, gebruik je van de gegeven lijn k : $2x - 3y = -6$ de parametervoorstelling $x = 3t \wedge y = 2t + 2$.

Dit betekent dat $P(3t, 2t + 2)$ een variabel punt op k is, dus

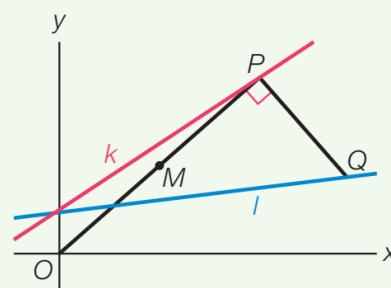
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t + 2 \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld

Het punt P ligt op de lijn k : $2x - 3y = -6$. Het punt M is het midden van OP . Vector $\overrightarrow{PM}$ wordt om P over 90° linksom gedraaid. Het eindpunt van de gedraaide vector $\overrightarrow{PM}$ is het punt Q . Wanneer P over k beweegt, zal Q over een lijn l bewegen. Zie de figuur hiernaast. Stel een vergelijking op van l .

Aanpak

Gebruik $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}_L$.



Uitwerking

Stel $x = 3t$. Dan is $6t - 3y = -6$, dus $-3y = -6t - 6$ oftewel $y = 2t + 2$.

Dus $P(3t, 2t + 2)$ en $M(1\frac{1}{2}t, t + 1)$.

$$\overrightarrow{PM} = \vec{m} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2}t \\ t + 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3t \\ 2t + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2}t \\ -t - 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM}_L = \begin{pmatrix} t + 1 \\ -1\frac{1}{2}t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t + 1 \\ -1\frac{1}{2}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t + 1 \\ \frac{1}{2}t + 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = \frac{1}{2}t + 2 \end{cases} \Big| \begin{matrix} 1 \\ 8 \end{matrix} \text{ geeft } \begin{cases} x = 4t + 1 \\ 8y = 4t + 16 \end{cases} \quad \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \quad \begin{matrix} x - 8y = -15 \end{matrix}$$

Dus $l: x - 8y = -15$.

R32 Zie het voorbeeld.

□ ⊗ * Geef van zowel k als van l een vectorvoorstelling.

33 Gegeven is de lijn $k: y = 2x + 3$.

- ⊗ *** **a** Om van k een parametervoorstelling op te stellen, kun je kiezen $x = 4t$.
Licht toe dat je dan krijgt $y = 8t + 3$.
b Stel een parametervoorstelling op van k waarbij $x = t + 5$.
c Stel een parametervoorstelling op van k waarbij $x = -3t + 2$.
d Stel een parametervoorstelling op van k waarbij $y = 4t$.

34 **a** Stel een vergelijking op van de lijn $k: x = 4t + 5 \wedge y = 3 - 2t$.

- ⊗** **b** Stel een parametervoorstelling op van de lijn $l: 3x - 2y = 6$.
c Stel een vectorvoorstelling op van de lijn $m: x = 2 - 9t \wedge y = 2t - 1$.
d Stel een parametervoorstelling op van de lijn $n: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
e Stel de formule op van de lijn $p: x = 2t - 1 \wedge y = -3t + 5$ in de vorm $y = ax + b$.

A35 **a** Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen

□ ⊗ * $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $l: x - 2y = 10$.

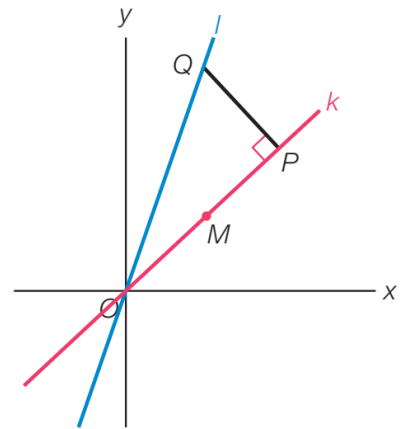
b Het punt $A(-3a + 1, 2a)$ ligt op de lijn $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Bereken de coördinaten van A .

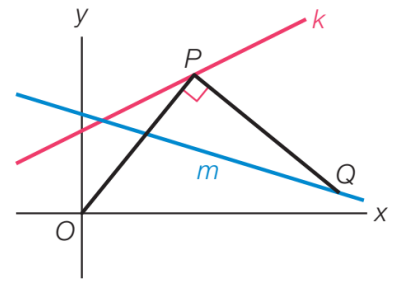
c Bereken voor welke q de lijn $n_q: x = 2v + q \wedge y = -v - 2q$ door het punt $(5, 2)$ gaat.

- A36** De lijn k heeft parametervoorstelling $x = -t - 3 \wedge y = pt - 8$ en
 * vectorvorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
 Bereken p en q .

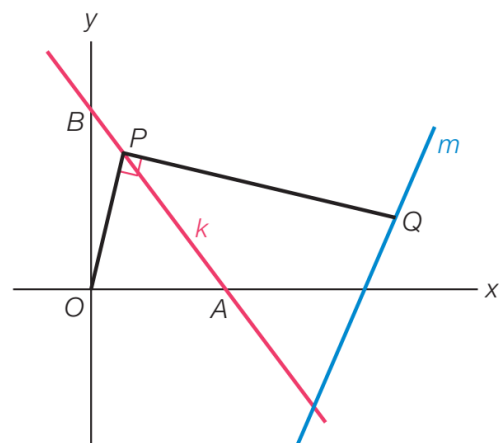
- 37** Het punt P ligt op de lijn $k: y = x$.
 □ ⊙ * Het punt M is het midden van OP .
 De vector $\overrightarrow{PM}$ wordt om P over 90° rechtsom gedraaid. Het eindpunt van de gedraaide vector $\overrightarrow{PM}$ is het punt Q .
 Wanneer P over k beweegt, zal Q over een lijn l bewegen. Zie de figuur hiernaast.
 Stel een vergelijking op van l .



- 38** Het punt P ligt op de lijn $k: y = \frac{1}{2}x + 2$.
 □ ⊙ * De vector $\overrightarrow{PO}$ wordt om P over 90° linksom gedraaid.
 Het eindpunt van de gedraaide vector $\overrightarrow{PO}$ is het punt Q .
 Wanneer P over k beweegt, zal Q over een lijn m bewegen. Zie de figuur hiernaast.
 Bewijs dat $x + 3y = 8$ een vergelijking is van m .



- A39** De lijn k snijdt de assen in de punten $A(3, 0)$ en $B(0, 4)$. Het punt P ligt op k .
 □ ⊙ * De vector $2 \cdot \overrightarrow{PO}$ wordt om P over 90° linksom gedraaid. Het eindpunt van de gedraaide vector $2 \cdot \overrightarrow{PO}$ is het punt Q .
 Wanneer P over k beweegt, zal Q over een lijn m bewegen. Zie de figuur hiernaast.
 Stel een vergelijking op van m .



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan een vectorvoorstelling van een lijn opstellen.
- ☐ Ik kan een vergelijking, een parametervoorstelling en een vectorvoorstelling van een lijn in elkaar omzetten.

► OPGAVE C5
THEORIE A

► OPGAVE C6
THEORIE B

C5 Gegeven zijn de punten $A(-1, 2)$, $B(3, 1)$ en $C(5, -3)$.

Stel een vectorvoorstelling op van

- a** de lijn k door A en B
- b** de lijn l door B , evenwijdig met AC
- c** de lijn p door C en het midden M van AB
- d** het lijnstuk AC .

C6 **a** Stel een vergelijking op van de lijn k : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b Stel een parametervoorstelling op van de lijn l : $4x - 3y = 6$.

c Stel een vectorvoorstelling op van de lijn m : $y = 5x - 1$.

Antwoorden

C5 a $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

b $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

c $p: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$

d $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \wedge 0 \leq t \leq 1$

C6 a $k: 3x + 2y = 15$

b $l: x = 3t \wedge y = 4t - 2$

c $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

10.3 Vectoren en hoeken

Kennis en vaardigheden

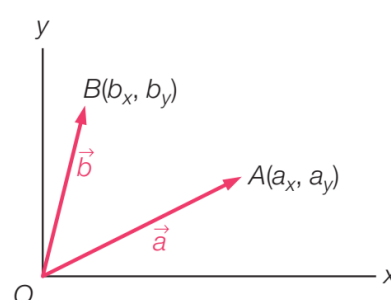
- Je kunt het inproduct van twee vectoren gebruiken om de hoek tussen de vectoren te berekenen.
- Je kunt het inproduct van de richtingsvectoren gebruiken om de hoek tussen twee snijdende lijnen te berekenen.
- Je kunt een normaalvector van een lijn gebruiken om een vergelijking van de lijn om te zetten in een vectorvoorstelling en omgekeerd.
- Je kunt een normaalvector van een lijn k gebruiken om een vergelijking of een vectorvoorstelling op te stellen van een lijn l die loodrecht op k staat.

40



Zie de figuur hiernaast met de punten $A(a_x, a_y)$ en $B(b_x, b_y)$.

- a** Licht toe dat $|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2$ en $|\vec{b}|^2 = b_x^2 + b_y^2$.
- b** Licht toe dat $AB^2 = (b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2$ en herleid dit tot $AB^2 = a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - 2a_x b_x - 2a_y b_y$.



Theorie A De hoek tussen twee vectoren

Om de hoek φ tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in de figuur hiernaast te berekenen, gebruik je de cosinusregel in driehoek OAB .

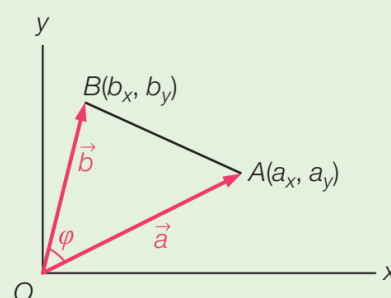
Dit geeft $AB^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$, dus

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - AB^2}{2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Met wat je in opgave 40 hebt gevonden, geeft dit

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - a_x^2 - a_y^2 - b_x^2 - b_y^2 + 2a_x b_x + 2a_y b_y}{2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{2a_x b_x + 2a_y b_y}{2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \end{aligned}$$

De uitdrukking die in de teller staat heet het **inwendig product**, kortweg het **inproduct**, van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en wordt genoteerd als $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Het inproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ is $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$.

Met behulp van het inproduct kan $\cos(\varphi) = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ worden

genoteerd als $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. Voorwaarde is dat $\vec{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

In het vervolg van dit hoofdstuk vermelden we deze voorwaarde niet meer.

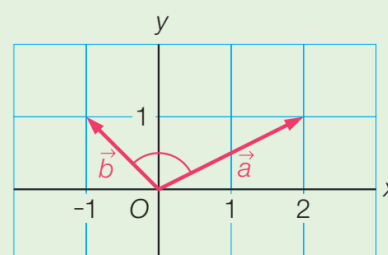
De vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heet de **nulvector** en wordt genoteerd als $\vec{0}$.

Voor de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Bij de berekening van de hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en

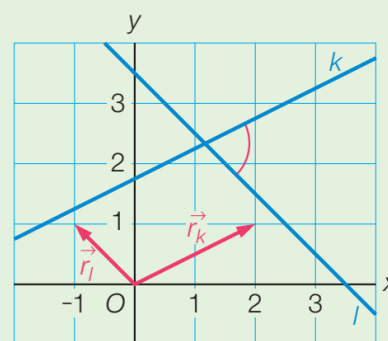
$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ krijg je

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot -1 + 1 \cdot 1 = -1$
- $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ en $|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$
- $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 108,4^\circ$.



Je kunt vectoren gebruiken om de hoek tussen twee snijdende lijnen te berekenen. Voor de berekening van de hoek tussen de lijnen k en l met richtingsvectoren $\vec{r}_k$ en $\vec{r}_l$ bereken je de hoek tussen $\vec{r}_k$ en $\vec{r}_l$.

Omdat de hoek tussen $\vec{r}_k$ en $\vec{r}_l$ stomp kan zijn en omdat volgens afspraak $0^\circ \leq \angle(k, l) \leq 90^\circ$, is echter niet altijd $\angle(k, l) = \angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l)$.



Voor de berekening van de hoek tussen de lijnen k en l met richtingsvectoren $\vec{r}_k$ en $\vec{r}_l$ bereken je de hoek φ tussen $\vec{r}_k$ en $\vec{r}_l$. Als deze hoek stomp is, neem je $\angle(k, l) = 180^\circ - \varphi$.

Om met vectoren $\angle B$ in $\triangle ABC$ te berekenen, gebruik je de vectoren $\vec{BA}$ en $\vec{BC}$. Let hierbij op de volgorde van de letters.

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $n: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bereken $\angle(m, n)$.

Uitwerking

$$\cos(\angle(\vec{r}_m, \vec{r}_n)) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{2 \cdot -3 + 3 \cdot 1}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-3}{\sqrt{130}} \text{ geeft } \angle(\vec{r}_m, \vec{r}_n) = 105,25\dots^\circ$$

Dus $\angle(m, n) = 180^\circ - 105,25\dots^\circ \approx 74,7^\circ$.

Rond bij een antwoord in graden af op één decimaal.

R41 Zie de theorie op de vorige bladzijde.

□ ⊗ * Bereken de hoek tussen de lijnen k en l .

42 Bereken het inproduct van de vectoren.

□

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$

b $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

c $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

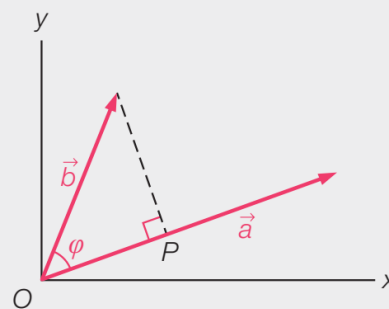
d $\vec{g} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ en $\vec{h} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Informatief De meetkundige betekenis van het inproduct

Uit $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ volgt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$. In de

figuur hiernaast is $\cos(\varphi) = \frac{OP}{|\vec{b}|}$, dus $OP = |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$.

Hieruit volgt $|\vec{a}| \cdot OP = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ en dit is juist het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Dus $\vec{a} \cdot \vec{b}$ is de lengte van $\vec{a}$ keer de lengte van de projectie van $\vec{b}$ op $\vec{a}$. Voor scherpe hoeken φ geldt dat het inproduct de lengte is van de ene vector keer de lengte van de projectie van de andere vector op de eerste vector.



43 Bereken de hoek tussen de vectoren.



a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

d $\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\vec{h} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

44 Bereken de hoek tussen de lijnen.



a $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $n: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c $p: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $q: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

A45 Bereken de hoek tussen de lijnen.



a $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

b $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $n: x = 3u - 2 \wedge y = 10u + 3$

A46 Gegeven zijn de punten $A(1, 3)$, $B(4, 2)$ en $C(3, -2)$.



a Bereken de hoek tussen de lijnen AC en BC .

b Bereken $\angle ABC$.

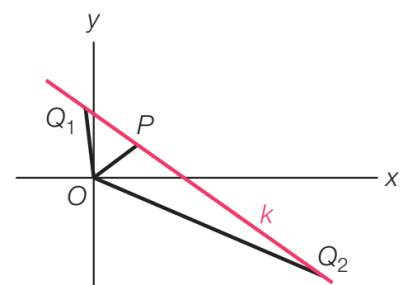
A47 In de figuur hiernaast zie je de lijn



$k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ met daarop het punt $P(2, 1\frac{1}{2})$.

Er zijn twee punten Q op k waarvoor geldt $\angle POQ = 60^\circ$.

Bereken de coördinaten van deze punten. Rond af op één decimaal.



O48 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$.



Bereken $\vec{a} \cdot \vec{b}$ en licht toe hoe hieruit volgt dat $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

O49 In de figuur hiernaast zie je de lijn k : $2x + 3y = 6$.



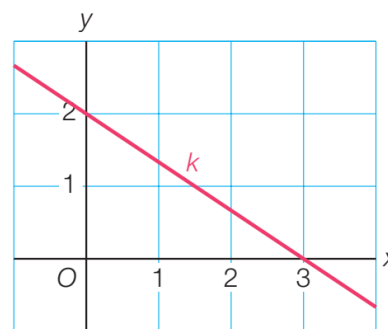
Een richtingsvector van k is $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a Licht dit toe.

De vector $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op k .

b Licht dit toe.

c Noem een vector die loodrecht staat op de lijn l : $5x - 4y = 3$.



Theorie B Een normaalvector van een lijn

Uit $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ volgt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ geeft $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = 0$,

dus $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$. Dat betekent dat $\vec{a}$ loodrecht staat op $\vec{b}$.

Dus $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ geeft $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Ook geldt het omgekeerde: $\vec{a} \perp \vec{b}$ geeft $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ komt op hetzelfde neer als $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Omdat $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix} = 0$ en $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} = 0$ geldt

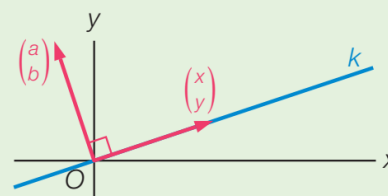
$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$.

In opgave 49 heb je gezien dat de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ loodrecht staat op de lijn k : $2x + 3y = 6$.

In het algemeen geldt dat de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ loodrecht staat op de lijn l : $ax + by = c$. Je kunt dit als volgt bewijzen. In de figuur hiernaast is k een lijn door de oorsprong, is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ een richtingsvector van k en is $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp k$.

Uit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp k$ volgt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ oftewel $ax + by = 0$.

Dus een vergelijking van k is $ax + by = 0$.



Elke lijn $l: ax + by = c$ is evenwijdig met k , dus $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ staat loodrecht op $l: ax + by = c$.

Een vector die loodrecht staat op een lijn heet een **normaalvector van de lijn**.

Een normaalvector noteren we met $\vec{n}$.

Dus $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een normaalvector van de lijn $l: ax + by = c$.

Een normaalvector van een lijn l is een vector die loodrecht op l staat.

De vector $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een normaalvector van de lijn $l: ax + by = c$.

Voor het omzetten van een vectorvoorstelling van een lijn naar een vergelijking van de lijn en omgekeerd kun je gebruikmaken van normaalvectoren.

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $l: 3x - 7y = 8$.

- a Stel een vergelijking op van k in de vorm $ax + by = c$.
- b Stel een vectorvoorstelling op van l .

Uitwerking

a $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: 5x - 4y = c \\ \text{door } (2, 3) \end{array} \right\} c = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -2$$

Dus $k: 5x - 4y = -2$.

b $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

l door $(5, 1)$, dus $\vec{s}_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dus $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

R50 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.



- a** In de vorige paragraaf heb je vectorvoorstellingen van lijnen omgezet naar vergelijkingen zonder gebruik te maken van normaalvectoren. Zet de vectorvoorstelling van k om in een vergelijking op de manier van de vorige paragraaf. Welke manier vind je het handigst, die van de vorige paragraaf of van het voorbeeld?
- b** In de vorige paragraaf heb je vergelijkingen van lijnen omgezet naar vectorvoorstellingen zonder gebruik te maken van normaalvectoren. Zet de vergelijking van l om in een vectorvoorstelling op de manier van de vorige paragraaf. Welke manier vind je het handigst, die van de vorige paragraaf of van het voorbeeld?

51



- a** Stel van de lijnen $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ een vergelijking op in de vorm $ax + by = c$.
- b** Stel van de lijnen $m: x - 2y = -3$ en $n: 4x + y = 0$ een vectorvoorstelling op.

52



- a** Stel een vergelijking op van de lijn l die evenwijdig is met de lijn $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ en die door het punt $A(4, 1)$ gaat.
- b** Stel een vergelijking op van de lijn n die loodrecht staat op de lijn $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en die door het punt $B(5, -1)$ gaat.

53



- a** Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l die evenwijdig is met de lijn $k: 2x - 3y = 10$ en die door het punt $A(5, 2)$ gaat.
- b** Stel een vectorvoorstelling op van de lijn n die loodrecht staat op de lijn $m: 4x + 5y = 6$ en die door het punt $B(1, -3)$ gaat.

A54



- a** Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
- b** De lijn m gaat door de punten $A(-3, 5)$ en $B(3, -1)$.
De lijn n gaat door het punt $C(-4, -2)$ en staat loodrecht op de lijn $p: -x + 5y = 4$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt T van m en n .
- c** Bereken de coördinaten van het snijpunt U van de lijnen $q: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $r: x = 2w - 4 \wedge y = w - 6$.

A55

- a** De lijn $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ snijdt de x -as in het punt A .

Stel een vergelijking op van de lijn l door A die loodrecht op k staat.

- b** Gegeven zijn de punten $B(2, 5)$ en $C(-1, 4)$.

Stel een vectorvoorstelling op van de lijn n door de oorsprong die evenwijdig is met de lijn m door de punten B en C .

- c** Stel een vergelijking op van de lijn p door $D(-4, 7)$ die loodrecht staat op de lijn q door de oorsprong en $E(1, -4)$.

A56

Bereken de hoek tussen de lijnen.

- a** $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $l: 2x - 5y = 6$

- b** $m: 3x - 7y = 8$ en $n: x + 2y = 3$

- c** $p: y = 2x - 5$ en $q: y = -x + 4$

57

Bereken exact de afstand van het punt

- a** $A(2, 1)$ tot de lijn $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

- b** $B(3, 1)$ tot de lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De afstand van het punt

$P(x_P, y_P)$ tot de lijn

$k: ax + by = c$ is

$$d(P, k) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

58

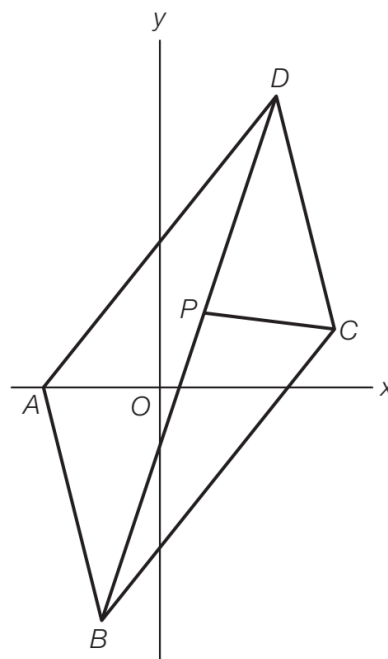
Gegeven is het parallellogram $ABCD$ met hoekpunten $A(-2, 0)$, $B(-1, -4)$, $C(3, 1)$ en $D(2, 5)$. Het punt P ligt op de diagonaal BD .

Er geldt $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 3t+4 \end{pmatrix}$.

- a** Toon dit aan.

- b** Bereken exact de coördinaten van P in het geval $CP \perp BD$.

- c** Bereken exact de coördinaten van P in het geval $CP = OP$.

**A59**

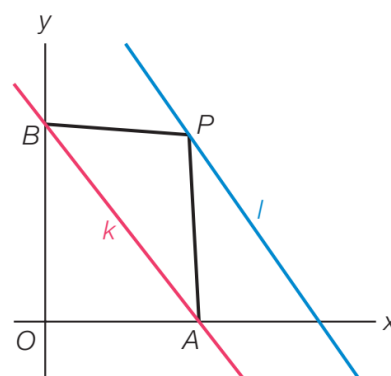
Gegeven is de lijn $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- a** Bereken exact de coördinaten van de punten P op de x -as die op afstand 3 van k liggen.

- b** Stel vectorvoorstellingen op van de lijnen l die op afstand 2 van k liggen.

A60 De lijn k : $4x + 3y = 12$ snijdt de x -as in het punt A en de y -as in het punt B . Verder ligt het punt P op de lijn l : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken exact de coördinaten van P in het geval $AP \perp BP$.
- b** Bereken exact de coördinaten van P in het geval $AP = BP$.



A61 Gegeven zijn de punten $A(1, 0)$, $B(6, 2)$ en $C(4\frac{1}{2}, 0)$, en de lijn k : $x - 2y = -3$.

De lijn l door C snijdt k loodrecht in het punt P . Bereken $\angle APB$.

Kennis- en vaardighedencheck

- | | |
|---|---|
| ☐ Ik kan het inproduct van twee vectoren gebruiken om de hoek tussen de vectoren te berekenen. | ► OPGAVE C7
THEORIE A |
| ☐ Ik kan het inproduct van de richtingsvectoren gebruiken om de hoek tussen twee snijdende lijnen te berekenen. | ► OPGAVE C8
THEORIE A |
| ☐ Ik kan een normaalvector van een lijn gebruiken om een vergelijking van de lijn om te zetten in een vectorvoorstelling en omgekeerd. | ► OPGAVE C9
THEORIE B |
| ☐ Ik kan een normaalvector van een lijn k gebruiken om een vergelijking of een vectorvoorstelling op te stellen van een lijn l die loodrecht op k staat. | ► OPGAVE C10
THEORIE B |

C7 Bereken de hoek tussen de vectoren.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

b $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

C8 Bereken de hoek tussen de lijnen

$k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

C9 a Gegeven is de lijn $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Stel een vergelijking op van k in de vorm $ax + by = c$.

b Gegeven is de lijn $l: 3x - 7y = 15$.

Stel een vectorvoorstelling op van l .

C10 Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l die loodrecht staat op de lijn $k: 5x - 2y = 3$ en die door het punt $A(4, 6)$ gaat.

Antwoorden

C7 a $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 70,3^\circ$

b $\angle(\vec{c}, \vec{d}) \approx 98,1^\circ$

C8 $\angle(k, l) \approx 77,5^\circ$

C9 a $k: 2x - 5y = 7$

b $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

C10 $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

10.4 Vectoren bij snelheid en versnelling

Kennis en vaardigheden

- Je kunt bij bewegingsvergelijkingen werken met snelheidsvectoren en de formule van de baansnelheid.
- Je kunt bij bewegingsvergelijkingen de versnellingsvector berekenen en werken met de formule van de baanversnelling.

062

□ ⊗ *

De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = 2t - 6 \end{cases}$

Hierin is t de tijd. Op $t = 0$ is P in het punt $(0, -6)$.

a Licht dit toe.

b Vul de tabel in en teken de baan van P .

t	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x			0						
y			-6						

c Bereken de vector die de verplaatsing geeft van P op het tijdsinterval $[2, 3]$.

Theorie A Snelheid bij bewegingen

De baan van een punt P wordt gegeven door de

bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$

Hierin is t de tijd.

In de figuur hiernaast zie je de baan van P .

De bewegingsvergelijkingen vormen de

parametervoorstelling van de baan van P .

De baan wordt daarom ook wel een

parameterkromme genoemd.

In het algemeen hebben bewegingsvergelijkingen

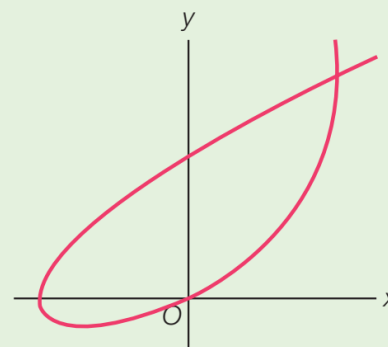
de vorm $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$

Bewegingsvergelijkingen worden ook wel met vectoren genoteerd.

De vector $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ heet de **plaatsvector**

van P en wordt genoteerd als $\vec{r}(t)$.

De plaatsvector is dus de vector die vanuit O het punt P aanwijst.



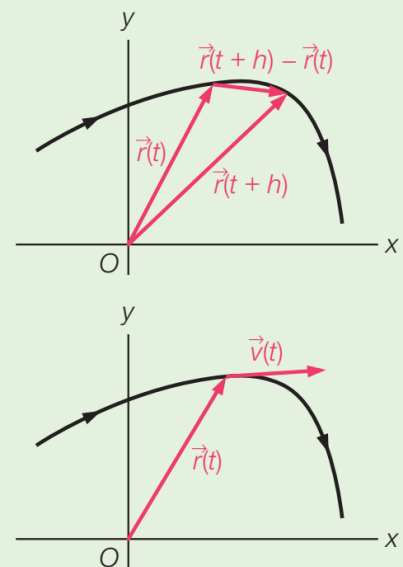
De plaatsvector $\vec{r}$ wordt ook wel voerstraal genoemd, in het Engels radius vector. Vandaar de letter r , niet te verwarren met de r van een richtingsvector van een lijn.

Op het interval $[t, t + h]$ is het punt P verplaatst over de vector $\vec{r}(t + h) - \vec{r}(t)$. Zie de figuur hiernaast.

Om de vector te vinden die de snelheid van P op het tijdstip t geeft, berekenen we $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + h) - \vec{r}(t)}{h}$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + h) - \vec{r}(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\begin{pmatrix} x(t + h) \\ y(t + h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} x(t + h) - x(t) \\ y(t + h) - y(t) \end{pmatrix} &= \lim_{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{x(t + h) - x(t)}{h} \\ \frac{y(t + h) - y(t)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De vector $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ heet de **snelheidsvector** van P en is een richtingsvector van de raaklijn aan de baan van P op het tijdstip t . De lengte van de snelheidsvector is de **baansnelheid** van P op het tijdstip t .



Bij de plaatsvector $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ van een punt P hoort de snelheidsvector $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

De baansnelheid van P is $v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

In de figuur hiernaast beweegt een punt P over de kromme door de punten A , B en C .

In het punt B is de raaklijn verticaal, dus is

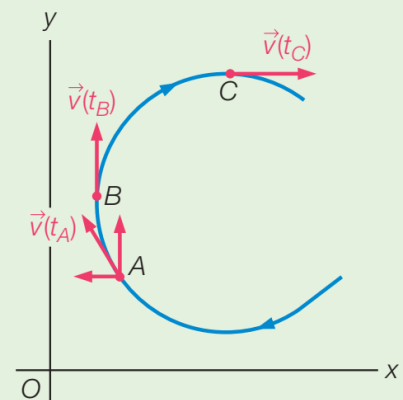
$$\vec{v}(t_B) = \begin{pmatrix} 0 \\ y'(t_B) \end{pmatrix} \text{ waarbij } y'(t_B) \neq 0.$$

In het punt C is de raaklijn horizontaal, dus is

$$\vec{v}(t_C) = \begin{pmatrix} x'(t_C) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ waarbij } x'(t_C) \neq 0.$$

In punt B geldt dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$.

In punt C geldt dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.



Als in een punt van een kromme geldt $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$, dan is de raaklijn in dat punt verticaal. Na het oplossen van $x'(t) = 0$ controleer je voor de gevonden waarden van t of $y'(t) \neq 0$.

Als in een punt van een kromme geldt $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$, dan is de raaklijn in dat punt horizontaal. Na het oplossen van $y'(t) = 0$ controleer je voor de gevonden waarden van t of $x'(t) \neq 0$.

Als in een punt van een kromme geldt $x'(t) = 0 \wedge y'(t) = 0$, dan moet met behulp van de figuur nagegaan worden of in dat punt sprake is van een horizontale of verticale raaklijn of geen van beide.

Informatief Banen plotten met de GR

Op de GR kun je een parametervoorstelling invoeren en de baan plotten. Je krijgt dan de parameterkromme. Om zo'n kromme te plotten, geef je behalve het venster ook op tussen welke waarden t zich bevindt. Bij de kromme die gegeven is door $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t$ en $y(t) = t^2 - 2t$ neem je bijvoorbeeld t tussen -5 en 5 , x tussen -10 en 10 en y tussen -5 en 15 . De variabele t voer je in met dezelfde toets als waarmee je de variabele x invoert.

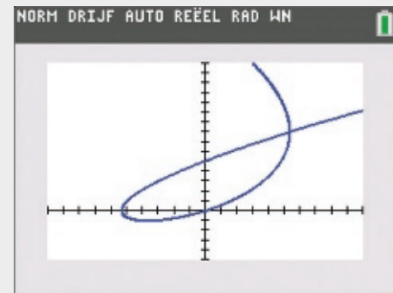
Om met parametervoorstellingen te werken op de TI kies je in het MODE-menu in plaats van FUNCTIE voor PARAMETRISCH.

Op de NumWorks kies je Functies, Element toevoegen en dan bij Templates $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

Daarna vervang je $\cos(t)$ en $\sin(t)$.

Op de Casio kies je in het Graph-menu bij TYPE voor Param.

Op de HP kies je de app Parametrisch.

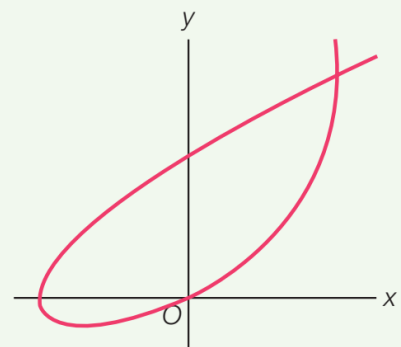


Voorbeeld

De beweging van een punt P wordt beschreven door

de bewegingsvergelijkingen
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$$

- Bereken exact de coördinaten van het punt van de baan waarin de raaklijn evenwijdig is met de x -as.
- Stel een vergelijking op van de lijn k die de baan raakt in het punt met $t = 3$.
- Bereken de minimale baansnelheid. Rond af op drie decimalen.
- Toon algebraïsch aan dat de baan zichzelf snijdt in het punt $(5\frac{1}{3}, 8)$ en bereken de hoek waaronder dit gebeurt.



De hoek waaronder de baan zichzelf snijdt is de hoek tussen de raaklijnen aan de kromme in dat punt.

Uitwerking

- $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t$ geeft $x'(t) = t^2 - 4$
 $y(t) = t^2 - 2t$ geeft $y'(t) = 2t - 2$
 Evenwijdig met de x -as, dus $y'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 2t - 2 &= 0 \\ 2t &= 2 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

$$x'(1) = -3 \neq 0$$

$$x(1) = -3\frac{2}{3} \text{ en } y(1) = -1, \text{ dus } (-3\frac{2}{3}, -1).$$

b $k: ax + by = c$

$$\vec{r}_k = \begin{pmatrix} x'(3) \\ y'(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$\left. \begin{array}{l} k: 4x - 5y = c \\ \text{door } (x(3), y(3)) = (-3, 3) \end{array} \right\} c = 4 \cdot -3 - 5 \cdot 3 = -27$$

$$\text{Dus } k: 4x - 5y = -27.$$

c $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(t^2 - 4)^2 + (2t - 2)^2}$

Invoeren van de formule en gebruiken van de optie minimum. De minimale baansnelheid is ongeveer 1,767 voor $t \approx 1,769$.

d $y = 8$ geeft $t^2 - 2t = 8$

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$(t + 2)(t - 4) = 0$$

$$t = -2 \vee t = 4$$

$x(-2) = 5\frac{1}{3}$ en $x(4) = 5\frac{1}{3}$, dus de baan snijdt zichzelf in $(5\frac{1}{3}, 8)$.

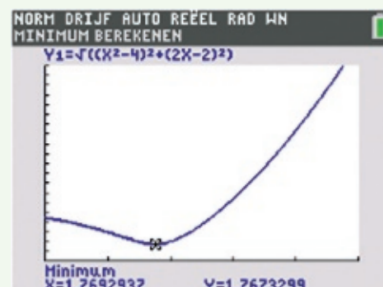
$$\vec{v}(-2) = \begin{pmatrix} x'(-2) \\ y'(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(4) = \begin{pmatrix} x'(4) \\ y'(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

De hoek tussen $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ is gelijk aan de hoek tussen $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{0 \cdot 2 + -1 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$\varphi = 116,56\dots^\circ$, dus de gevraagde hoek is $180^\circ - 116,56\dots^\circ \approx 63,4^\circ$.



63



Zie het voorbeeld met de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$

a Er zijn twee punten op de baan waarin de raaklijn evenwijdig is met de y -as.

Bereken exact de coördinaten van deze punten.

b De baan gaat door de oorsprong.

Stel een vergelijking op van de lijn l die de baan raakt in de oorsprong.

Om te berekenen voor welke t het punt P zowel naar links als omhoog beweegt, los je de gecombineerde ongelijkheid $t^2 - 4 < 0 \wedge 2t - 2 > 0$ op.

c Licht dit toe.

d Los de gecombineerde ongelijkheid op.

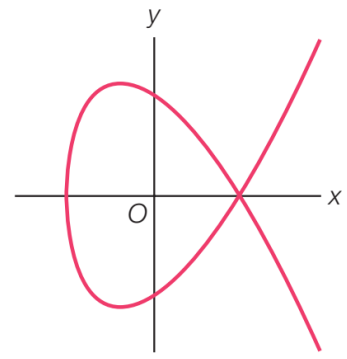
64



De beweging van een punt P wordt beschreven

door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = t^2 - 2 \\ y(t) = t^3 - 4t \end{cases}$

- Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig is met de x -as.
- Bereken exact de baansnelheid op $t = -1$.
- Bereken exact voor welke t het punt P zowel naar rechts als omlaag beweegt.
- Toon algebraïsch aan dat de baan zichzelf snijdt in het punt $(2, 0)$ en bereken de hoek waaronder dit gebeurt.



65

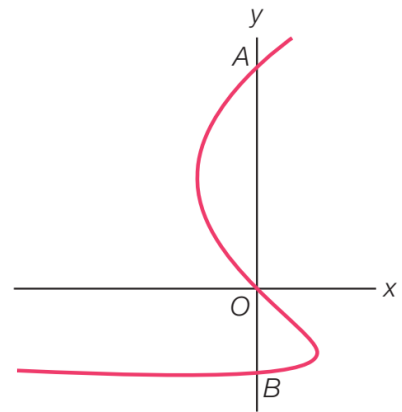


De beweging van een punt P wordt beschreven door

de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 2t - \frac{1}{6}t^3 \\ y(t) = \frac{1}{4}t^2 - 2t \end{cases}$

De baan van P snijdt de y -as behalve in O ook in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact de afstand tussen A en B .
- Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig is met de x -as of met de y -as.
- Bereken exact de baansnelheid in de oorsprong.
- Bereken de minimale baansnelheid. Rond af op twee decimalen.



66



In deze opgave bekijken we het volgende model van de baan van een bal die wordt weggeschoot.

$$\begin{cases} x(t) = 20t \\ y(t) = 12t - 5t^2 \end{cases}$$

Hierin zijn $x(t)$ en $y(t)$ in meters en is t de tijd in seconden. In de figuur hiernaast zie je de baan getekend. Het hoogste punt van de baan is het punt A .

De bal is op $t = 1,2$ in A .

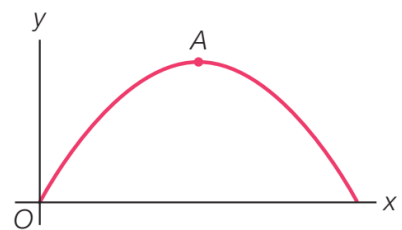
- Laat dit met een berekening zien.

Voor de baansnelheid geldt $v(t) = \sqrt{100t^2 - 240t + 544}$.

- Toon dit aan en laat zien dat $v'(1,2) = 0$.

Voor de versnellingsvector $\vec{a}(t)$ geldt $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$.

- Bereken $\vec{a}(t)$ en licht toe dat hieruit volgt dat $v'(1,2) = 0$.



Theorie B Versnelling bij bewegingen

De snelheid waarmee de snelheidsvector $\vec{v}(t)$ verandert, is de

versnellingsvector $\vec{a}(t)$. Dus er geldt $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$.

De **baanversnelling** $a(t)$ is de snelheid waarmee de baansnelheid $v(t)$ verandert, dus $a(t) = v'(t)$.

In opgave 66 is de plaatsvector $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 20t \\ 12t - 5t^2 \end{pmatrix}$, de snelheidsvector $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 - 10t \end{pmatrix}$ en de versnellingsvector $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Bij de plaatsvector $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ van een punt P hoort

de versnellingsvector $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$.

De baanversnelling van P is $a(t) = v'(t)$.

In het informatief op bladzijde 87 wordt bewezen dat voor de baanversnelling ook geldt $a(t) = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{v(t)}$.

Voorbeeld

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 + t \end{cases}$

- a Bereken exact voor welke t de versnellingsvector loodrecht staat op de snelheidsvector.
- b Druk de baanversnelling uit in t .

Uitwerking

a $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4t \\ \frac{1}{2}t^2 + t \end{pmatrix}$ geeft $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t - 4 \\ t + 1 \end{pmatrix}$, dus $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = (2t - 4) \cdot 2 + (t + 1) \cdot 1 = 4t - 8 + t + 1 = 5t - 7$$

$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$ geeft $5t - 7 = 0$, dus voor $t = 1\frac{2}{5}$ staat de versnellingsvector loodrecht op de snelheidsvector.

b $v(t) = \sqrt{(2t - 4)^2 + (t + 1)^2} = \sqrt{4t^2 - 16t + 16 + t^2 + 2t + 1} = \sqrt{5t^2 - 14t + 17}$

$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{5t^2 - 14t + 17}} \cdot (10t - 14) = \frac{5t - 7}{\sqrt{5t^2 - 14t + 17}}$$

R67 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

a Bereken exact de baanversnelling op $t = 2$.

Zie het informatief op bladzijde 87 met de formule $a(t) = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{v(t)}$.

b Bereken met deze formule de baanversnelling op $t = 2$ door eerst $\vec{v}(2)$, $\vec{a}(2)$ en $v(2)$ te berekenen.

c Druk met deze formule de baanversnelling uit in t .

68 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

a gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4 \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$

De baan snijdt de y -as in de punten A en B en de x -as in de punten C en D . Zie de figuur hiernaast.

a Onderzoek algebraïsch in welke volgorde A , B , C en D worden doorlopen.

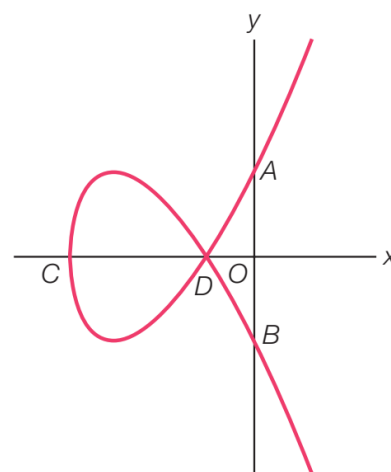
b Druk de baanversnelling uit in t .

c Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in A .

d Bereken exact de baansnelheid in de punten waarin de baanversnelling nul is.

e Bereken exact voor welke t de baansnelheid gelijk is aan 2.

f De baan snijdt zichzelf in het punt $D(-1, 0)$. Toon dit algebraïsch aan en bereken de hoek waaronder dit gebeurt.



A69 De baan van een punt P is gegeven door de

a bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2 \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t \end{cases}$

De baan snijdt de x -as in de punten A en B en de y -as in de punten C en D . Zie de figuur hiernaast.

a Onderzoek algebraïsch in welke volgorde A , B , C en D worden doorlopen.

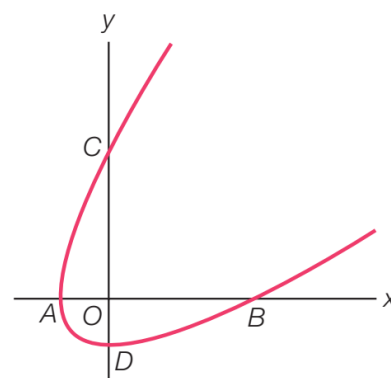
b Druk de baanversnelling uit in t .

c Bereken exact in welk punt van de baan de versnellingsvector loodrecht staat op de snelheidsvector.

d Bereken exact de minimale baansnelheid.

e Toon algebraïsch aan dat P de x -as in het punt B met dezelfde baansnelheid passeert als de y -as in het punt C .

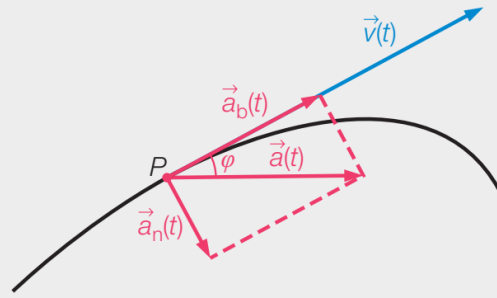
f De lijn k raakt de baan in het punt $E(-1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$. Stel een vergelijking op van k .



A70 Zie opgave 69. De lijn $x = p$ snijdt de baan van P in de punten Q en R waarbij de lengte van het lijnstuk QR gelijk is aan 12 en R boven Q ligt. Bereken exact de coördinaten van Q en R .

Informatief Een andere formule voor de baanversnelling

In de figuur hiernaast is zowel de snelheidsvector als de versnellingsvector op het tijdstip t getekend. De versnellingsvector $\vec{a}(t)$ is ontbonden in de onderling loodrechte componenten $\vec{a}_n(t)$ en $\vec{a}_b(t)$. De lengte van de vector $\vec{a}_n(t)$ hangt samen met de kromming van de baan. De lengte van de vector $\vec{a}_b(t)$ geeft de grootte van de baanversnelling van het punt P .



In het geval $\vec{a}_b(t)$ en $\vec{v}(t)$ dezelfde richting hebben is de baanversnelling positief. In het geval $\vec{a}_b(t)$ en $\vec{v}(t)$ tegengestelde richting hebben is de baanversnelling negatief.

In de figuur geldt $\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a}_b(t)|}{|\vec{a}(t)|}$. Samen met $\cos(\varphi) = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)| \cdot |\vec{a}(t)|}$ geeft dit

$$\frac{|\vec{a}_b(t)|}{|\vec{a}(t)|} = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)| \cdot |\vec{a}(t)|}, \text{ dus } |\vec{a}_b(t)| = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|} \text{ oftewel } a_b(t) = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{v(t)}.$$

De baanversnelling is dus ook te berekenen met de formule $a(t) = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{v(t)}$.

Deze formule geldt ook voor $\varphi > 90^\circ$.

71



Bij het onderdeel speerwerpen in de atletiek wordt na een aanloop een speer zover mogelijk weggeworpen. In deze opgave bekijken we het volgende model van de baan van de punt van een speer.

$$\begin{cases} x(t) = 25t \\ y(t) = -5t^2 + 15t + 3 \end{cases}$$

Hierbij zijn $x(t)$ en $y(t)$ in meters en is t de tijd in seconden.

$x(t)$ en $y(t)$ geven de plaats van de punt van de speer t seconden nadat de speer de hand van de werper heeft verlaten.

- Bereken in m/s de baansnelheid waarmee de speer wordt weggeworpen. Rond af op één decimaal.
- Bereken de hoek van de baan ten opzichte van de grond waaronder de speer wordt weggeworpen. Rond af op gehele graden.
- Bereken algebraïsch de maximale hoogte die de speer bereikt.
- Bereken algebraïsch hoe ver de speer van de afworplijn neerkomt. Neem aan dat de punt van de speer twee meter voor de afworplijn is op het moment dat de speer wordt losgelaten. Geef het antwoord in dm nauwkeurig.
- Bereken de versnellingsvector. Wat stelt deze versnellingsvector voor?



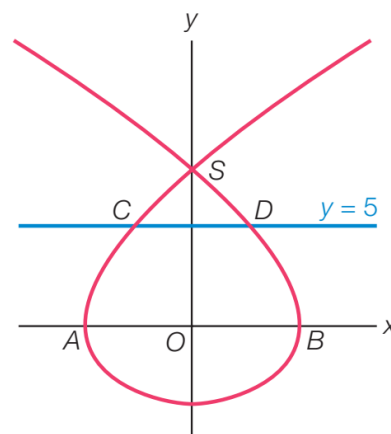
De speer wordt losgelaten bij $x = 0$, dus voor de afworplijn.

A72 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn



gegeven door $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$

De baan snijdt zichzelf in het punt S op de y -as. De snijpunten met de x -as zijn A en B en de snijpunten met de lijn $y = 5$ zijn C en D . Zie de figuur hiernaast.



- Toon algebraïsch aan dat de raaklijn aan de baan verticaal is in A en B .
- Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in C .
- Bereken exact de coördinaten van de punten waarin de baansnelheid gelijk is aan $6\frac{1}{2}$.
- De baanversnelling heeft voor $t > 0$ een minimum. Bereken dit minimum. Rond af op drie decimalen.
- Bereken in gehele graden de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan bij bewegingsvergelijkingen werken met snelheidsvectoren en de formule van de baansnelheid.
- ☐ Ik kan bij bewegingsvergelijkingen de versnellingsvector berekenen en werken met de formule van de baanversnelling.

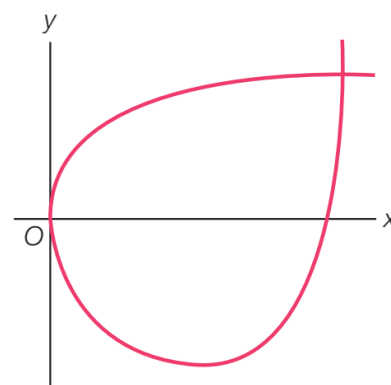
► **OPGAVE C11**
THEORIE A

► **OPGAVE C12**
THEORIE B

C11 De beweging van een punt P wordt beschreven door de

bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 - 9t \end{cases}$

- Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig is met de x -as.
- Stel een vergelijking op van de lijn l die de baan raakt in het punt met $t = 1$.
- Bereken exact de baansnelheid op $t = 1$.



C12 Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen van opgave C11.

- Bereken exact de baanversnelling op $t = 1$.
- Bereken exact voor welke t de versnellingsvector loodrecht staat op de snelheidsvector.

Antwoorden

C11 a $(18, -18)$ en $(36, 18)$

b $l: 8x + 5y = -22$

c $\sqrt{89}$

C12 a $\frac{4}{89}\sqrt{89}$

b $t = 0, t = 1\frac{1}{2}$ en $t = 3$

Kennis- en vaardigheidentest

10.1 Vectoren en rotaties

- 1** Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

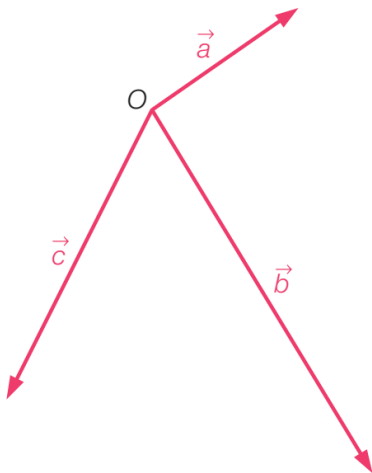
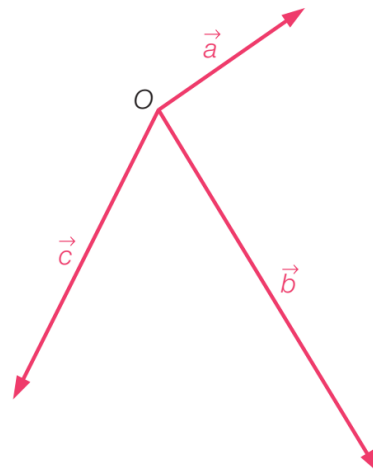
a Bereken exact $|\vec{a}|$ en $|\vec{b}|$.

b Bereken de kentallen van de vectoren $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ en $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.

- 2** Hieronder zijn de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ getekend.
Teken de volgende vectoren.

a $\vec{d} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - 1\frac{1}{2}\vec{c}$

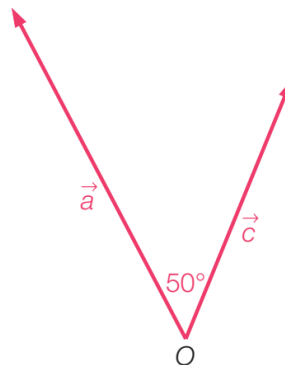
b $\vec{e} = \vec{a} - (\vec{c} - \vec{b})$



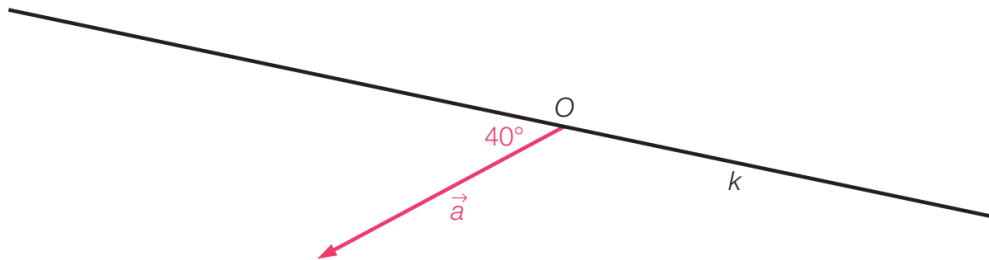
- 3** De vector $\vec{c}$ met lengte 3 is de somvector van $\vec{a}$ met lengte 4 en $\vec{b}$.
De hoek tussen $\vec{c}$ en $\vec{a}$ is 50° .
Zie de figuur hiernaast.

a Teken $\vec{b}$.

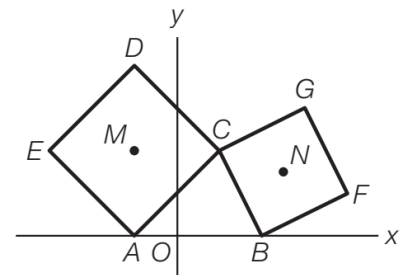
b Bereken de lengte van $\vec{b}$.
Rond af op twee decimalen.



- 4 Gegeven is de vector $\vec{a}$ met lengte 3 cm die een hoek van 40° maakt met de lijn k . Zie de figuur hieronder. Verder is gegeven dat vector $\vec{c}$ lengte 4 cm heeft. Er zijn twee vectoren $\vec{b}$ waarvoor geldt: $\vec{b}$ ligt op k en $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$. Bereken algebraïsch voor beide situaties de lengte van $\vec{b}$ in cm. Rond af op twee decimalen.



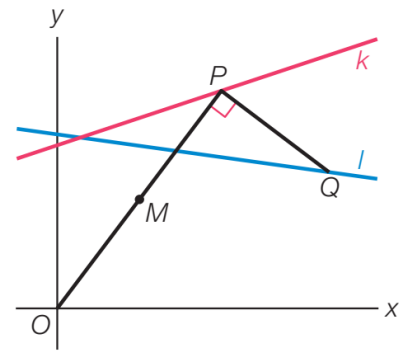
- 5 Gegeven is driehoek ABC met $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$ en $C(2, 4)$. Op de zijden AC en BC van driehoek ABC worden de naar buiten gerichte vierkanten $ACDE$ en $BFGC$ geplaatst. De punten M en N zijn de middens van de vierkanten. Zie de figuur hiernaast. Bereken de coördinaten van M en N .



10.2 Vectoren en lijnen

- 6 Gegeven zijn de punten $A(6, 8)$, $B(-4, 5)$ en $C(1, -4)$. Stel een vectorvoorstelling op van
- de lijn k door B , evenwijdig met AC
 - de lijn l door A en het midden M van het lijnstuk BC
 - het lijnstuk AC .
- 7 Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $l: 2x - 3y = 22$.
- 8 a Stel een vergelijking op van de lijn $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- b Stel een vectorvoorstelling op van de lijn $l: 3x - y = 6$.

- 9** Het punt P ligt op de lijn k : $x - 3y = -6$.
 Het punt M is het midden van OP .
 De vector $\overrightarrow{PM}$ wordt om P over 90° linksom gedraaid.
 Het eindpunt van de gedraaide vector $\overrightarrow{PM}$ is het punt Q .
 Wanneer P over k beweegt, zal Q over een lijn l bewegen.
 Zie de figuur hiernaast.
 Stel een vergelijking op van l .



10.3 Vectoren en hoeken

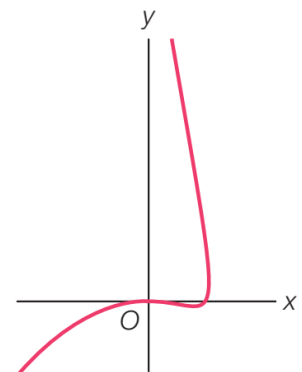
- 10** Gegeven is driehoek ABC met $A(-2, 3)$, $B(4, 4)$ en $C(-3, -1)$.
a Bereken $\angle BAC$.
b Punt M is het midden van AB en punt N is het midden van BC .
 Bereken de hoek tussen de lijnen MN en k : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 11** **a** Stel een vergelijking op van de lijn l die evenwijdig is met de lijn k : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ en die door het punt $A(1, -3)$ gaat.
b Stel een vectorvoorstelling op van de lijn n die evenwijdig is met de lijn m : $4x + 6y = 5$ en die door het punt $B(-4, -1)$ gaat.
c Stel een vectorvoorstelling op van de lijn q die loodrecht staat op de lijn p : $3x + 5y = -2$ en die door het punt $C(-2, 6)$ gaat.
- 12** Gegeven zijn de lijnen k : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en l : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
a Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l .
b De lijn m die door het punt $A(3, -5)$ gaat en loodrecht staat op k , snijdt de x -as in het punt B en de y -as in het punt C .
 Bereken exact $|\overrightarrow{BC}|$.

10.4 Vectoren bij snelheid en versnelling

- 13** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = 4t - t^2 \\ y(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 \end{cases}$$

a Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig is met de x -as of met de y -as.
b Bereken algebraïsch de hoek waaronder de baan de positieve x -as snijdt.
c Bereken de minimale baansnelheid van P . Rond af op twee decimalen.
d Bereken exact de baanversnelling op $t = 3$.



Gemengde opgaven

- 1** Gegeven zijn het punt $A(1, -3)$ en de lijnen $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

en $l: 3x + 4y = 8$.

- a** Bereken de hoek tussen k en l .
- b** De lijn m gaat door A en snijdt k loodrecht in B .
Bereken exact de coördinaten van B .
- c** Het punt P ligt op k waarbij de lijn AP evenwijdig is met l .
Bereken exact de coördinaten van P .
- d** De lijnen k en l snijden elkaar in het punt S .
Stel een vergelijking op van de lijn n door S loodrecht op l .

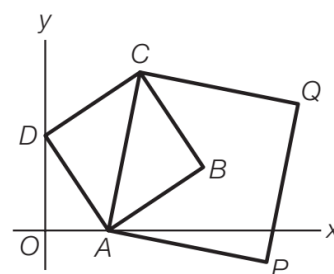
- 2** Gegeven zijn de lijnen $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $l: x + 3y = 12$ en

$m: x = 2u - 6 \wedge y = -5u + 4$.

- a** Bereken de hoek tussen k en m .
- b** Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en m .
- c** Stel een vergelijking op van de lijn n door de oorsprong die loodrecht staat op m .
- d** Bereken de coördinaten van het snijpunt T van k met de lijn p door $A(6, 8)$ die loodrecht staat op l .

- 3** De punten $A(a, 0)$ en $D(0, 2a)$ met $a > 0$ zijn hoekpunten van het vierkant $ABCD$. Op de diagonaal AC wordt het vierkant $APQC$ geplaatst zoals in de figuur hiernaast.

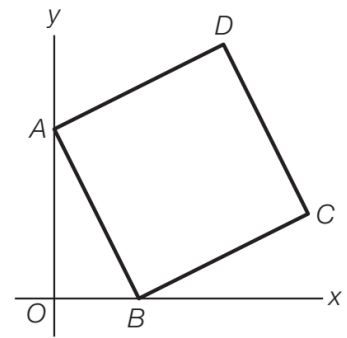
- a** Neem $a = 3$ en bereken de coördinaten van P .
- b** Bereken a in het geval B op de parabool $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$ ligt.



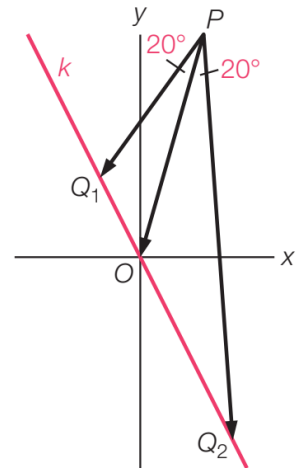
- 4** Gegeven zijn de punten $A(-1, 5)$, $B(2, -1)$, $C(5, 8)$ en $D(99, -195)$.
- a** Onderzoek langs algebraïsche weg of het punt D op de lijn AB ligt.
 - b** Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van de lijn BC en de lijn k door A loodrecht op BC .
 - c** Bereken exact de coördinaten van de punten P waarvoor geldt $AP = BP$ en $\angle APB = 90^\circ$.
 - d** Bereken exact voor welke p en q de vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 38 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} q \\ 3 \end{pmatrix}$ bij de lijn BC hoort.

- 5** Gegeven zijn de punten $A(0, 16)$ en $B(8, 0)$ en het vierkant $ABCD$ in de figuur hiernaast. Verder is gegeven het punt $P(22, 12)$.

- a** Toon aan dat P op de zijde CD ligt.
b Het punt Q ligt op de lijn AP waarbij DQ loodrecht op AP staat.
 Bereken exact de coördinaten van Q .

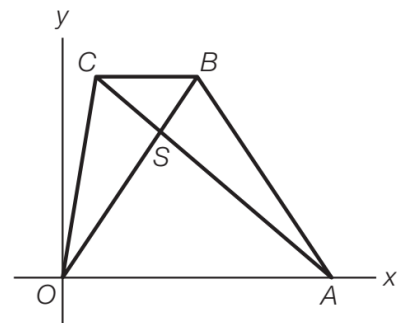


- 6** Gegeven is het punt $P(2, 7)$ en de lijn $k: y = -2x$. Er zijn twee punten Q op k waarvoor geldt $\angle(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PQ}) = 20^\circ$. Zie de figuur hiernaast.
 Bereken van beide punten Q de coördinaten. Rond af op twee decimalen.



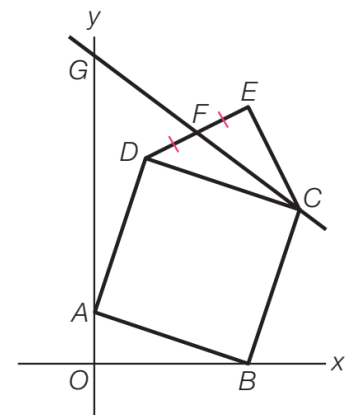
- 7** De punten $A(8, 0)$, $B(p, 6)$ en $C(p - 3, 6)$ zijn hoekpunten van het trapezium $OABC$. Hierbij is $p > 3$. De diagonalen OB en AC snijden elkaar in het punt S . In de figuur hiernaast is de situatie weergegeven voor een waarde van p .

- a** Neem $p = 4$. Het punt D ligt op OB zodat OD loodrecht staat op AD .
 Bereken exact de coördinaten van D .
b Bereken exact voor welke p geldt $|\overrightarrow{OS}| = |\overrightarrow{OA}|$.



- 8** De punten $A(0, 1)$ en $B(3, 0)$ zijn hoekpunten van het vierkant $ABCD$. Op de zijde CD is de naar buiten gerichte gelijkbenige rechthoekige driehoek CED met $\angle E = 90^\circ$ geplaatst. Verder is F het midden van DE . Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken de coördinaten van E .
b De lijn CF snijdt de y -as in het punt G .
 Bewijs dat $CG = 5$.

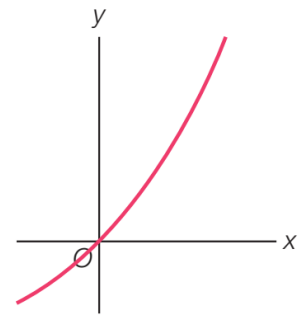


- 9** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 4e^{\frac{1}{2}t} - 4 \end{cases}$$

Zie de figuur hiernaast.

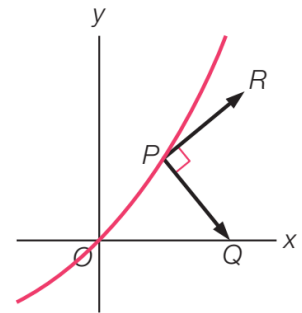
- a** De raaklijn aan de baan van P in het punt A heeft richtingscoëfficiënt 3.
Bereken exact de baansnelheid in A .
- b** De baanversnelling in het punt B is 1.
Bereken algebraïsch de coördinaten van B . Rond af op twee decimalen.



Gegeven is het punt $Q(2, 0)$. Vector $\overrightarrow{PQ}$ wordt linksom gedraaid om P over 90° . Zo ontstaat de vector $\overrightarrow{PR}$. In de figuur hiernaast is de situatie weergegeven voor een waarde van t .

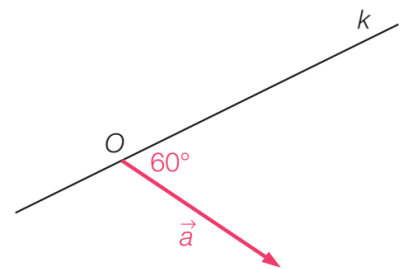
Tijdens de beweging van P beschrijft ook het punt R een baan. Er is een waarde van t waarvoor de y -coördinaat van R minimaal is.

- c** Bereken exact de minimale y -coördinaat van R .

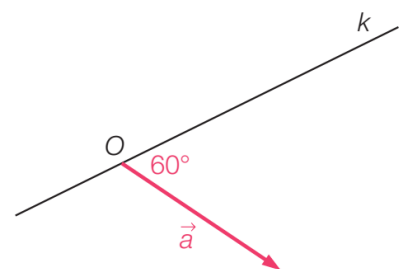


- 10** Gegeven is de vector $\vec{a}$ die een hoek van 60° maakt met de lijn k . Zie de figuur hiernaast. Verder is gegeven dat vector $\vec{b}$ op k ligt en dat $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

- a** Teken mogelijke vectoren $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in het geval $|\vec{a}| = |\vec{c}|$.

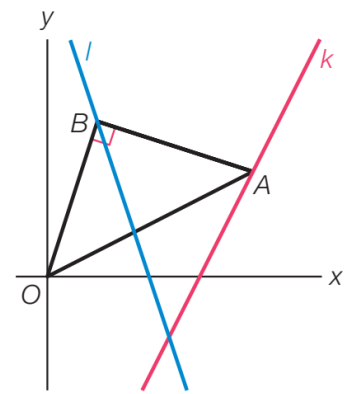


- b** Teken mogelijke vectoren $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in het geval $|\vec{c}| = \sqrt{3} \cdot |\vec{b}|$.
- c** Bewijs dat $|\vec{c}| = \sqrt{3} \cdot |\vec{a}|$ of $|\vec{c}| = \sqrt{7} \cdot |\vec{a}|$ in het geval $|\vec{b}| = 2 \cdot |\vec{a}|$.



- 11** Gegeven is de gelijkbenige rechthoekige driehoek OAB met het punt A op de lijn k : $y = ax - 4$. Wanneer A over k beweegt, zal B over een lijn l bewegen. Zie de figuur hiernaast.

- a Neem $a = 2$ en stel een vergelijking op van l .
- b Bereken a in het geval l een horizontale lijn is.
- c Neem $a = 3$ en bereken de coördinaten van B in het geval zowel A als B op k liggen.

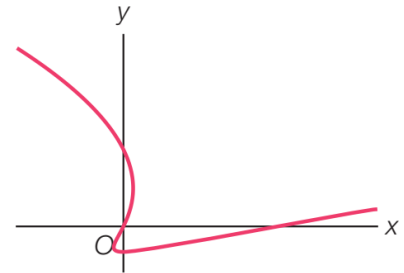


- 12** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = -t^3 + 3t^2 - 2t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}$$

Zie de figuur hiernaast.

- a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan van P met de x -as en met de y -as.
- b Bereken exact voor welke t de raaklijn aan de baan van P evenwijdig is met de x -as of met de y -as.
- c Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan van P waarin de raaklijn evenwijdig is met de lijn k : $y = 2x + 3$.
- d Bereken exact de baansnelheid van P in het punt $(-6, 8)$.
- e Bereken exact de baanversnelling van P in het punt $(-\frac{3}{8}, -\frac{3}{4})$.



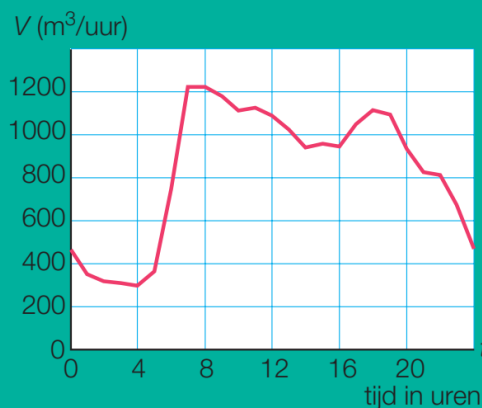


11

Integraalrekening

De figuur hiernaast gaat over het drinkwater dat het bedrijf Vitens gedurende een dag in een stedelijk gebied aan zijn klanten heeft geleverd. Om te weten te komen hoeveel drinkwater er tussen $t = 0$ en $t = 4$ is geleverd, bepaal je de oppervlakte onder dit gedeelte van de grafiek. Dit geeft 1360 m^3 .

Schat met behulp van de figuur hoeveel m^3 drinkwater Vitens deze dag in dit gebied in totaal heeft afgeleverd.



11.1 Primitieven en integralen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt aantonen dat een gegeven functie F een primitieve is van een functie f door te laten zien dat $F' = f$.
- Je kunt machtsfuncties, exponentiële functies en goniometrische functies primitiveren.
- Je kunt voor de berekening van de oppervlakte van een vlakdeel een bepaalde integraal opstellen en deze exact berekenen.

Voorkennis Regels voor het differentiëren

Je kent de volgende regels voor het differentiëren.

$$f(x) = a \text{ geeft } f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax \text{ geeft } f'(x) = a$$

$$f(x) = x^n \text{ geeft } f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = e^x \text{ geeft } f'(x) = e^x$$

$$f(x) = g^x \text{ geeft } f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$$

$$f(x) = \ln(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \log(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x \ln(g)}$$

$$f(x) = \sin(x) \text{ geeft } f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \text{ geeft } f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = \tan(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ en } f'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$f(x) = c \cdot g(x) \text{ geeft } f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$s(x) = f(x) + g(x) \text{ geeft } s'(x) = f'(x) + g'(x) \quad (\text{somregel})$$

$$v(x) = f(x) - g(x) \text{ geeft } v'(x) = f'(x) - g'(x) \quad (\text{verschilregel})$$

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ geeft } p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (\text{productregel})$$

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \text{ geeft } q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2} \quad (\text{quotiëntregel})$$

$$f(x) = u(v(x)) \text{ geeft } f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad (\text{kettingregel})$$

V1 Bereken de afgeleide en herleid.

a $f(x) = (2x - 1)^6$

d $f(x) = 6x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

b $f(x) = \frac{10 \cdot 3^x}{\ln(3)}$

e $f(x) = \frac{e^{4x} - 5}{2e^{3x}}$

c $f(x) = x \ln(x) + x$

f $f(x) = \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x)$

V2 Toon aan dat

a $f'(x) = \frac{1}{(1 + e^x)^2}$ de afgeleide is van $f(x) = x + \frac{1}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x)$

b $f'(x) = \cos^3(x)$ de afgeleide is van $f(x) = \sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x)$

c $f'(x) = \frac{x^2}{(x+2)^2}$ de afgeleide is van $f(x) = x + 2 - \frac{4}{x+2} - 4\ln(x+2)$

d $f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2x+3}}$ de afgeleide is van $f(x) = (0,2x^2 - 0,4x + 1,2)\sqrt{2x+3}$.

O1 Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2$.

□ ⊗ * In deze opgave zoeken we de functie g waarvoor geldt

$g'(x) = f(x)$ en $g(2) = 15$.

Uit $g'(x) = f(x)$ volgt dat het functievoorschrift van g van de vorm

$g(x) = x^3 + c$ is.

Licht dit toe en bereken c .

Theorie A Primitieve functies

In opgave 1 heb je de functie g gevonden waarvoor geldt dat $g'(x) = 3x^2$ en $g(2) = 15$.

Een functie g waarvoor geldt dat $g'(x) = f(x)$ heet een **primitieve functie** van f , kortweg een **primitieve** van f .

Een primitieve van f wordt genoteerd met de hoofdletter F .

In opgave 1 heb je gevonden dat $f(x) = 3x^2$ geeft $F(x) = x^3 + 7$.

Maar ook $F(x) = x^3 + 10$ is een primitieve van $f(x) = 3x^2$, want $F(x) = x^3 + 10$ geeft $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.

Iedere functie F waarvoor geldt $F' = f$ is een primitieve van f .

De functie F is een primitieve van de functie f als $F' = f$.

In het algemeen is $F(x) = 5x^3 + c$ met c een constante een primitieve van $f(x) = 15x^2$.

We zeggen dat $F(x) = 5x^3 + c$ de primitieven zijn van $f(x) = 15x^2$. Hierin is c de **integratieconstante**.

Voorbeeld

Toon aan dat $F(x) = x \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x + 4$ een primitieve is van $f(x) = \ln^2(x)$.

Aanpak

Bereken $F'(x)$ en laat zien dat $F'(x) = f(x)$.

Uitwerking

$F(x) = x \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x + 4$ geeft

$$F'(x) = 1 \cdot \ln^2(x) + x \cdot 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \ln(x) - 2x \cdot \frac{1}{x} + 2$$

$$= \ln^2(x) + 2 \ln(x) - 2 \ln(x) - 2 + 2 = \ln^2(x)$$

$F'(x) = f(x)$, dus F is een primitieve van f .

2 Toon aan.



a $F(x) = \frac{1}{9}(3x + 4)^3$ is een primitieve van $f(x) = (3x + 4)^2$.

b $F(x) = x - \ln(x + 2)$ is een primitieve van $f(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$.

c $F(x) = \frac{-1}{x^2 + 1}$ is een primitieve van $f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

3 Toon aan.



a $F(x) = (x^2 + 1)^6 + 1$ is een primitieve van $f(x) = 12x(x^2 + 1)^5$.

b $G(x) = \frac{5^{3x-1}}{3 \ln(5)}$ is een primitieve van $g(x) = 5^{3x-1}$.

c $H(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + 3$ is een primitieve van $h(x) = x \ln(x)$.

d $J(x) = \frac{e^{3x} - 10}{2e^x} - 4$ is een primitieve van $j(x) = \frac{e^{3x} + 5}{e^x}$.

e $K(x) = \sin^3(x)$ is een primitieve van $k(x) = 3 \cos(x) - 3 \cos^3(x)$.

4 Toon aan dat $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ een primitieve is van $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

5 **a** Van welke functie is $F(x) = \frac{1}{5}x^5$ een primitieve?



b Van welke functie is $G(x) = 6\sqrt{x}$ een primitieve?

c Van welke functie is $H(x) = \frac{2^x}{\ln(2)}$ een primitieve?

d Van welke functie is $K(x) = 2 \sin(x) - 3 \cos(x)$ een primitieve?

Theorie B Primitiveren

Het berekenen van primitieven heet **primitiveren**.

Omdat primitiveren het omgekeerde is van differentiëren, kun je vermoeden dat een primitieve van de functie $f(x) = x^n$ de functie

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \text{ is, waarbij } n \neq -1.$$

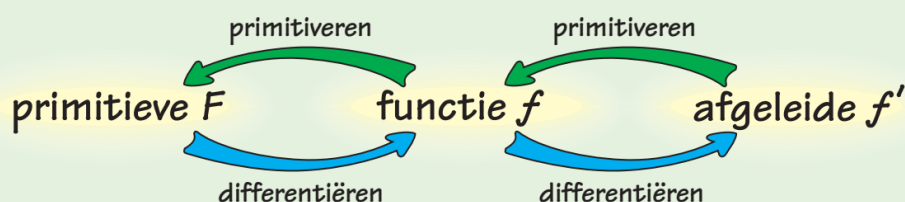
Om aan te tonen dat dit vermoeden juist is, differentieer je de functie F .

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \text{ geeft } F'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n = x^n \text{ en dit is } f(x).$$

Dus $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ is een primitieve van $f(x) = x^n$ met $n \neq -1$.

Op dezelfde manier toon je in opgave 6 de juistheid aan van de primitieven in het overzicht hieronder.

$$\begin{aligned} f(x) = a &\text{ geeft } F(x) = ax + c \\ f(x) = x^n &\text{ geeft } F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \text{ met } n \neq -1 \\ f(x) = g^x &\text{ geeft } F(x) = \frac{g^x}{\ln(g)} + c \\ f(x) = e^x &\text{ geeft } F(x) = e^x + c \\ f(x) = \frac{1}{x} &\text{ geeft } F(x) = \ln|x| + c \\ f(x) = \sin(x) &\text{ geeft } F(x) = -\cos(x) + c \\ f(x) = \cos(x) &\text{ geeft } F(x) = \sin(x) + c \end{aligned}$$



Voor de functie $g(x) = a \cdot F(x)$ geldt $g'(x) = a \cdot F'(x) = a \cdot f(x)$.

Dus als F een primitieve is van f , dan is $a \cdot F$ een primitieve van $a \cdot f$.

Zo geldt voor $f(x) = 2x^2$ dat $F(x) = 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + c = \frac{2}{3}x^3 + c$.

Voorbeeld

Primitiveer.

a $f(x) = 2x^2 - 5x\sqrt{x} + 3$

b $g(x) = 2e^x + 2^x$

c $h(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{4x}$

Uitwerking

a $f(x) = 2x^2 - 5x\sqrt{x} + 3 = 2x^2 - 5x^{1\frac{1}{2}} + 3$ geeft

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2\frac{1}{2}}x^{2\frac{1}{2}} + 3x + c = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 \cdot \sqrt{x} + 3x + c$$

b $g(x) = 2e^x + 2^x$ geeft $G(x) = 2e^x + \frac{2^x}{\ln(2)} + c$

c $h(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{4x} = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$ geeft

$$H(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \ln|x| + c = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln|x| + c$$

6 Toon de juistheid aan van de primitieven in het overzicht op de vorige bladzijde.



R7



a Waarom geldt de regel $f(x) = x^n$ geeft $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ niet voor $n = -1$?

b Geef de primitieven van $f(x) = x^{-1}$.

8 Primitiveer.



a $f(x) = 2x^3 + 5x^4$

b $f(x) = 2e^x$

c $f(x) = \frac{2x^3 + 3x}{x^4}$

d $f(x) = 5 \cdot 2^x$

e $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$

f $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{3x}$

9 Bereken de primitieven.



a $f(x) = x^3 - 3x$

b $f(x) = ex + e^2$

c $f(x) = \frac{x^4 - 6}{2x^3}$

d $f(x) = x^e + e^x$

e $f(x) = 4^x + x^4$

f $f(x) = \frac{10}{3x} - \frac{5}{3\sqrt{x}}$

A10 Primitiveer.

□ ⊗ *

a $f(x) = \frac{8}{x^3} - 1$

b $f(x) = \frac{-x^3 + 2x + 3}{x^4}$

c $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x\sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt[3]{x}$

d $f(x) = ex^2 - 2 \sin(x)$

e $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x} - 3x\sqrt{x} + 1}{2x^2}$

f $f(x) = 3 \cdot 10^x - 5e^x$

A11 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door

***** $f_p(x) = p\sqrt{x} + 2px\sqrt{x}$.

Voor welke p en q is $F_q(x) = (3x + q)x\sqrt{x}$ een primitieve van f_p ?

12 Gegeven is de functie $f(x) = 2x - 3$.

□ ⊗ *

a Bereken de primitieven van f .

b De grafiek van een primitieve van f gaat door het punt $(1, 2)$.
Bereken deze primitieve.

c De grafiek van een primitieve van f raakt de x -as.
Bereken deze primitieve.

A13 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 1)^2$.

□ ⊗ *

De grafiek van een primitieve van f gaat door het punt $(1, 7)$.

Bereken deze primitieve.

A14 De primitieve met integratieconstante 0 van de functie $f(x) = x^2 e^{2x}$

⊗ *

is van de vorm $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$.

Bereken a , b en c .

O15 Gegeven is de functie $f(x) = ax + b$ met $a > 0$ en $b > 0$.

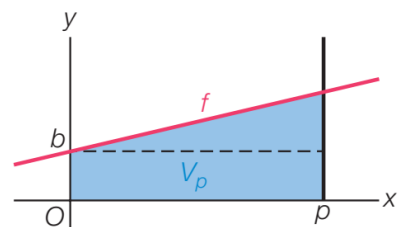
□ ⊗ *

Voor $p > 0$ wordt het vlakdeel V_p ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = p$. Zie de figuur hiernaast.

De oppervlakte A van V_p is een functie van p .

a Toon aan dat $A(p) = \frac{1}{2}ap^2 + bp$.

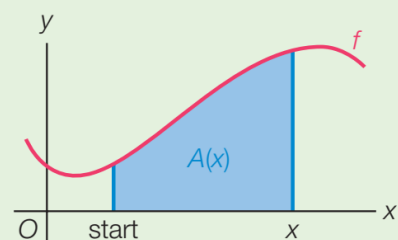
b Bereken $A'(p)$. Wat valt je op?



Theorie C Integralen

We gaan bewijzen dat de oppervlakte $A(x)$ van het blauwe vlakdeel in de figuur hiernaast een primitieve is van $f(x)$. Hiertoe tonen we aan dat $A'(x) = f(x)$.

Je weet $A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \dots (1)$



In de figuur hiernaast is de oppervlakte van het paarse vlakdeel gelijk aan $A(x+h) - A(x)$. Voor kleine waarden van h is het paarse vlakdeel te benaderen door een rechthoek met zijden h en $f(x)$, dus voor kleine waarden van h is $A(x+h) - A(x) \approx f(x) \cdot h$, oftewel

$$f(x) \approx \frac{A(x+h) - A(x)}{h}.$$

Zo krijg je $f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \dots (2)$

Uit (1) en (2) volgt $A'(x) = f(x)$, dus A is een primitieve van f .

De oppervlakte van het vlakdeel V in de figuur hiernaast noteren we als $O(V) = \int_a^b f(x) dx$.

Hierin is $\int_a^b f(x) dx$ een **bepaalde integraal**.

$\int_a^b f(x) dx$ spreek je uit als

‘de integraal van a tot b van f x d x ’.

In de figuur is $O(V) = A(b) - A(a)$.

Je weet dat A een primitieve van f is, dus $A(x) = F(x) + c$.

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} O(V) &= \int_a^b f(x) dx = A(b) - A(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

De formule $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ wordt de

hoofdstelling van de integraalrekening genoemd.

In deze formule is $f(x)$ de **integrand**.

Merk op dat bij het berekenen van een integraal met behulp van een primitieve de constante c wegvalt. Neem dus bij zo’n berekening $c = 0$.

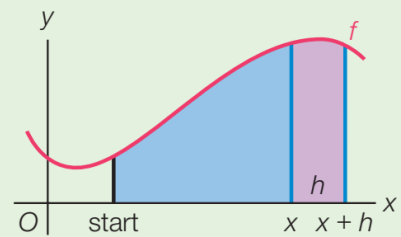
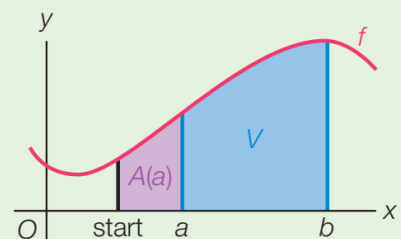
Het is de gewoonte om $F(b) - F(a)$ te noteren als $[F(x)]_a^b$.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

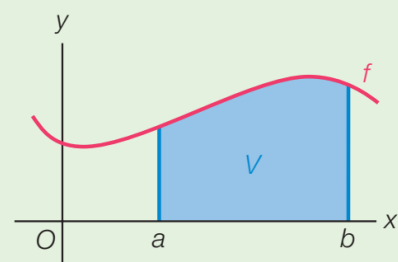
Het berekenen van een integraal heet **integreren**.

De oppervlakte van het vlakdeel V dat boven de x -as ligt en wordt ingesloten door de grafiek van de functie f , de x -as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ met $a < b$

is $O(V) = \int_a^b f(x) dx$.



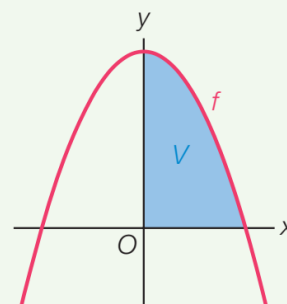
We spreken van een onbepaalde integraal als de integraal geen onder- en bovengrens heeft. Er geldt $\int f(x) dx = F(x)$. Zie ook bladzijde 179 van dit boek.



Voorbeeld

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 4 - x^2$, de positieve x -as en de y -as. Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact de oppervlakte van V .
- De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte.
Bereken p . Rond af op twee decimalen.



Uitwerking

a $f(x) = 0$ geeft $4 - x^2 = 0$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

$$O(V) = \int_0^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = 8 - \frac{1}{3} \cdot 8 - 0 = 5\frac{1}{3}$$

b $\int_0^p (4 - x^2) dx = 2\frac{2}{3} \leftarrow \text{De helft van } 5\frac{1}{3} \text{ is } 2\frac{2}{3}.$

$$\left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^p = 2\frac{2}{3}$$

$$4p - \frac{1}{3}p^3 - 0 = 2\frac{2}{3}$$

$$4p - \frac{1}{3}p^3 = 2\frac{2}{3}$$

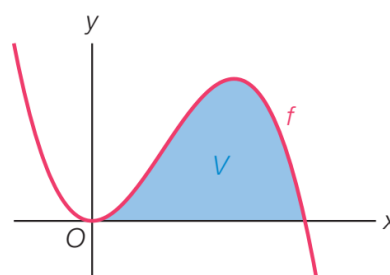
Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $p \approx 0,69$.

16



Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 3x^2 - x^3$ en de x -as. Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact de oppervlakte van V .
- De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte.
Bereken p . Rond af op twee decimalen.



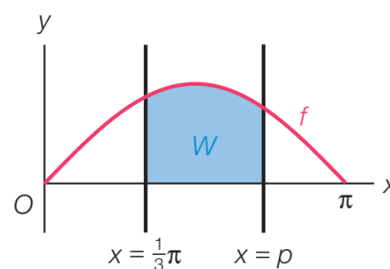
17



Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[0, \pi]$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = p$ met $p > \frac{1}{3}\pi$. Zie de figuur hiernaast.

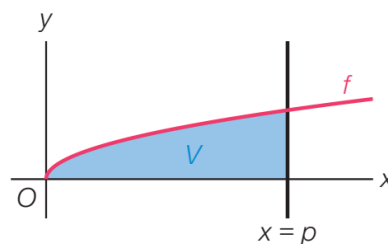
Bereken exact voor welke p de oppervlakte van W de helft is van de oppervlakte van V .



18 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.

□ ⊗ * Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = p$. Zie de figuur hiernaast.

- a** Neem $p = 12$ en bereken exact de oppervlakte van V .
- b** Bereken exact voor welke p de oppervlakte van V gelijk is aan 18.



Het vlakdeel W_1 wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = 4$.

Het vlakdeel W_2 wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = 4$ en $x = p$ met $p > 4$.

- c** Bereken exact voor welke p geldt $O(W_1) = O(W_2)$.

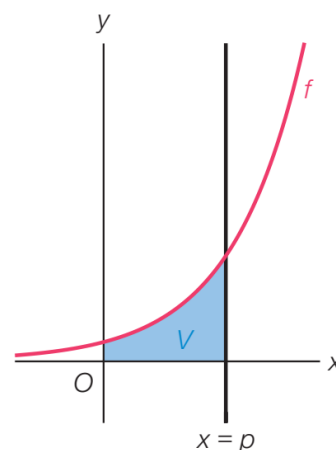
19 Gegeven is de functie $f(x) = e^x$.

□ ⊗ * Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = p$ met $p > 0$. Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken exact voor welke p de oppervlakte van V gelijk is aan 5.

Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = p$ en $x = 2p$ met $p > 0$.

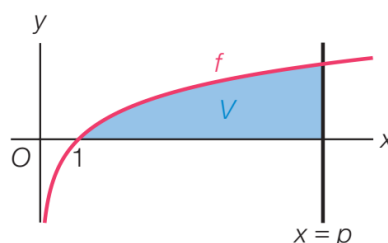
- b** Bereken exact voor welke p de oppervlakte van W twee keer zo groot is als de oppervlakte van V .



A20 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \ln(x)$, de x -as en de lijn $x = p$ met $p > 1$. Zie de figuur hiernaast.

Een primitieve van f is $F(x) = x \ln(x) - x$.

- a** Bewijs dit.
- b** Neem $p = e^2$ en bereken exact de oppervlakte van V .
- c** Bereken voor welke p de oppervlakte van V gelijk is aan 10. Rond af op drie decimalen.



A21 Voor elke $p > 0$ is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = p \sin^3(x)$ met domein $[0, \pi]$.

Een primitieve van f_p is $F_p(x) = \frac{1}{3}p \cos^3(x) - p \cos(x)$.

- a** Bewijs dit.
- b** Bereken exact voor welke p de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f_p en de x -as gelijk is aan 4.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan aantonen dat een gegeven functie F een primitieve is van een functie f door te laten zien dat $F' = f$. ▶ **OPGAVE C1**
THEORIE A
- ☐ Ik kan machtsfuncties, exponentiële functies en goniometrische functies primitiveren. ▶ **OPGAVE C2**
THEORIE B
- ☐ Ik kan voor de berekening van de oppervlakte van een vlakdeel een bepaalde integraal opstellen en deze exact berekenen. ▶ **OPGAVE C3**
THEORIE C

C1 Toon aan.

- a** $F(x) = 3(2x^3 - 10)^4$ is een primitieve van $f(x) = 72x^2(2x^3 - 10)^3$.
b $G(x) = x^3 \ln(x)$ is een primitieve van $g(x) = x^2(3 \ln(x) + 1)$.
c $K(x) = \cos^3(x)$ is een primitieve van $k(x) = 3 \sin^3(x) - 3 \sin(x)$.

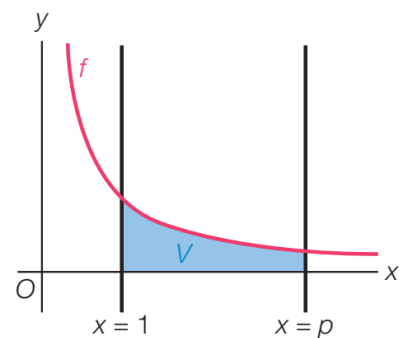
C2 Primitiveer.

- a** $f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 7x}{x^2}$
b $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{5}{3\sqrt{x}} - 1$
c $f(x) = 5^x - e^x$

C3 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$, de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = p$ met $p > 1$.

Zie de figuur hiernaast.

- a** Neem $p = e^2$ en bereken exact de oppervlakte van V .
b Bereken exact voor welke p de oppervlakte van V gelijk is aan $2\frac{1}{2}$.



Antwoorden

C1 a, b, c *

C2 a $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 7 \ln|x| + c$

b $F(x) = \frac{3}{4}x \cdot \sqrt[3]{x} + 3\frac{1}{3}\sqrt{x} - x + c$

c $F(x) = \frac{5^x}{\ln(5)} - e^x + c$

C3 a 2

b $e^2 \cdot \sqrt{e}$

11.2 Oppervlakten

Kennis en vaardigheden

- Je kunt primitieven berekenen van functies van de vorm $f(ax + b)$.
- Je kunt de oppervlakte van een vlakdeel dat wordt ingesloten door grafieken exact berekenen.

O22



Gegeven is de functie $f(x) = (3x + 1)^5$.

De primitieven van f zijn van de vorm $F(x) = a(3x + 1)^6 + c$.

a Toon aan dat $F'(x) = 18a(3x + 1)^5$.

b Bereken a .

Theorie A Primitieven en de kettingregel

Bij het primitiveren kan de kettingregel een rol spelen.

Om de primitieve van $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ met integratieconstante 0 te berekenen, schrijf je $f(x) = (4x - 1)^{\frac{1}{2}}$.

Een primitieve van f is van de vorm $F(x) = a \cdot (4x - 1)^{\frac{1}{2}}$.

$$F'(x) = a \cdot \frac{1}{2}(4x - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = 6a\sqrt{4x - 1}$$

$$F'(x) = f(x), \text{ dus } 6a = 1 \text{ oftewel } a = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Dus } F(x) = \frac{1}{6}(4x - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}(4x - 1)\sqrt{4x - 1}.$$

In plaats van te werk te gaan zoals hierboven, kun je ook de volgende regel gebruiken.

De primitieven van $f(ax + b)$ zijn $\frac{1}{a}F(ax + b) + c$.

Je bewijst deze regel in opgave 23. De primitieven in het overzicht op bladzijde 101 kunnen met deze regel algemener worden geformuleerd. Zo krijg je bijvoorbeeld:

- De primitieven van $f(x) = e^{ax+b}$ zijn $F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$.
- De primitieven van $f(x) = \sin(ax + b)$ zijn $F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$.

Zie verder opgave 24.

Voorbeeld

Primitiveer $f(x) = 2\sqrt{3x-4}$.

Uitwerking

$$f(x) = 2\sqrt{3x-4} = 2(3x-4)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft}$$

$$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} (3x-4)^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{4}{9} (3x-4) \sqrt{3x-4} + c$$

23 Toon aan dat $\frac{1}{a}F(ax+b) + c$ primitieven zijn van $f(ax+b)$.



24 Gebruik de regel



de primitieven van $f(ax+b)$ zijn $\frac{1}{a}F(ax+b) + c$ voor het berekenen van de primitieven.

a $f(x) = (ax+b)^n$

b $f(x) = g^{ax+b}$

c $f(x) = \frac{1}{ax+b}$

d $f(x) = \cos(ax+b)$

25 Bereken de primitieven.



a $f(x) = (2x-1)^6$

b $f(x) = \frac{1}{(3x+4)^3}$

c $f(x) = 4\sqrt{3-2x}$

d $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}}$

e $f(x) = \sin(2x + \frac{1}{3}\pi)$

f $f(x) = 3\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi)$

26 Bereken de primitieven.



a $f(x) = \frac{3}{(2x-1)^4}$

b $f(x) = (4x+3)\sqrt{4x+3}$

c $f(x) = 2\sin(3x + \frac{1}{2}\pi)$

d $f(x) = 8 \cdot \sqrt[3]{3-4x}$

e $f(x) = \frac{6}{3x+1}$

f $f(x) = e^{4x+1} - 4^{ex}$

g $f(x) = 3x - \cos(1-2x)$

h $f(x) = \frac{5}{4x^2 - 12x + 9}$

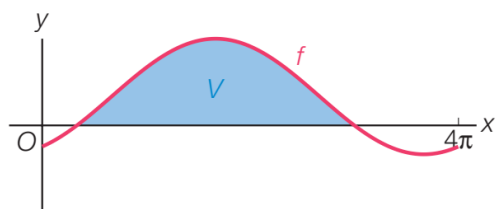
27 Bereken exact.



a $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) dx$

b $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2x + \cos(\frac{1}{2}x)) dx$

- A28** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 2 \cos(\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\pi)$ met domein $[0, 4\pi]$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as. Zie de figuur hiernaast.
- Bereken exact de oppervlakte van V .



- A29** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{9}{3x+2}$ met $D_f = [0, \rightarrow)$.

□ ⊗ *

- a** Het vlakdeel U wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = \frac{1}{3}$.

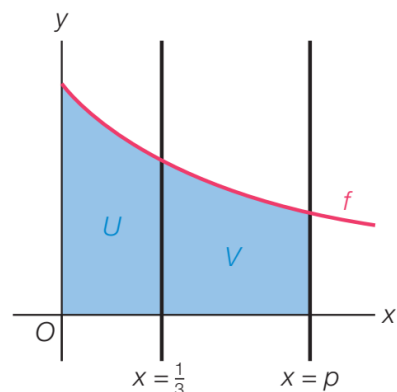
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = \frac{1}{3}$ en $x = p$ met $p > \frac{1}{3}$.

Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact voor welke p de oppervlakte van U gelijk is aan de oppervlakte van V .

- b** Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = q$ en $x = 2q$ met $q > 0$.

Bereken exact voor welke q de oppervlakte van W gelijk is aan $\ln(\frac{27}{8})$.



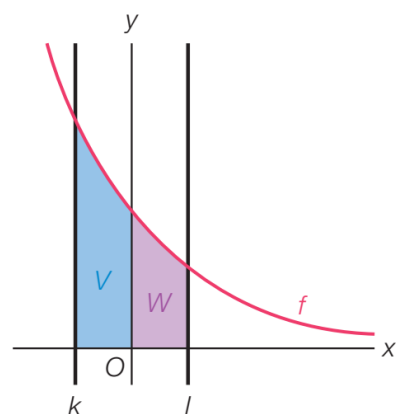
- A30** Gegeven zijn de functie $f(x) = 2e^{1-\frac{1}{3}x}$ en de lijnen

*

$k: x = -p$ en $l: x = p$ met $p > 0$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en k .

Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en l . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact voor welke p de oppervlakte van V twee keer zo groot is als de oppervlakte van W .



- R31** Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

⊗ *

- a** Waarom kun je de in het voorbeeld gebruikte regel niet hanteren bij het berekenen van de primitieven van $g(x) = 2\sqrt{x^3 - 4}$?

Voor het berekenen van de primitieven van $g(x) = 2\sqrt{x^3 - 4}$ zou je kunnen proberen uit te gaan van $G(x) = p(x^3 - 4)^{\frac{1}{2}} + c$.

- b** Licht toe dat je ook op deze manier geen primitieven van g kunt vinden.

032



In de figuur hiernaast wordt het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van de functies f en g .

Je gaat in deze opgave bewijzen dat

$$O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

$$\text{Er geldt } O(V) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

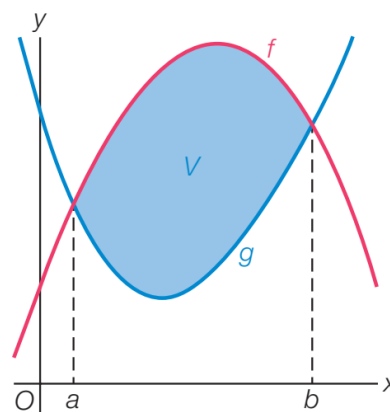
a Licht dit toe.

$$\text{Uit } O(V) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \text{ volgt}$$

$O(V) = F(b) - G(b) - (F(a) - G(a))$, waarbij F een primitieve van f is en G een primitieve van g .

b Toon dit aan.

c Maak het bewijs af.



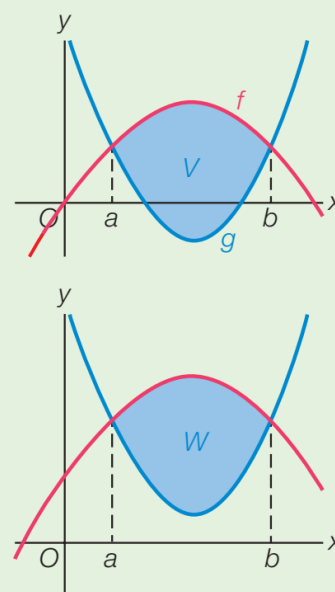
Theorie B Oppervlakte van een vlakdeel tussen grafieken

In opgave 32 heb je bewezen dat $O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

Ook in de figuur hiernaast geldt $O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

Dit kun je inzien door de grafieken van f en g beide q omhoog te schuiven. Zie de figuur hiernaast.

$$\begin{aligned} O(W) &= \int_a^b (f(x) + q) dx - \int_a^b (g(x) + q) dx \\ &= \int_a^b (f(x) + q - g(x) - q) dx \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$



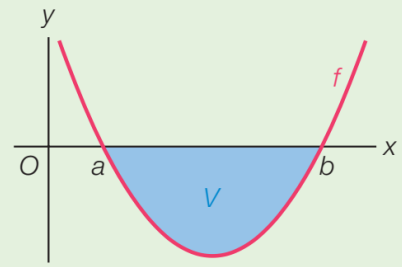
De oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de lijnen $x = a$ en $x = b$ en de grafieken van de functies f en g met $f(x) \geq g(x)$ op het interval $[a, b]$, is $O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

De oppervlakte tussen twee grafieken is $\int_a^b (\text{bovenste} - \text{onderste}) dx$.

De oppervlakte van het vlakdeel V in de figuur hiernaast

$$\text{is } O(V) = \int_a^b (0 - f(x)) dx = \int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx.$$

De bovenste grafiek
is de lijn $y = 0$.



Voorbeeld

In de figuur hiernaast wordt het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = e^x$ en $g(x) = 6 - e^{\frac{1}{2}x}$ en de y -as.

Bereken exact de oppervlakte van V .

Uitwerking

$$f(x) = g(x) \text{ geeft } e^x = 6 - e^{\frac{1}{2}x}$$

$$e^x + e^{\frac{1}{2}x} - 6 = 0$$

$$\text{Stel } e^{\frac{1}{2}x} = u.$$

$$u^2 + u - 6 = 0$$

$$(u - 2)(u + 3) = 0$$

$$u = 2 \vee u = -3$$

$$e^{\frac{1}{2}x} = 2 \vee e^{\frac{1}{2}x} = -3$$

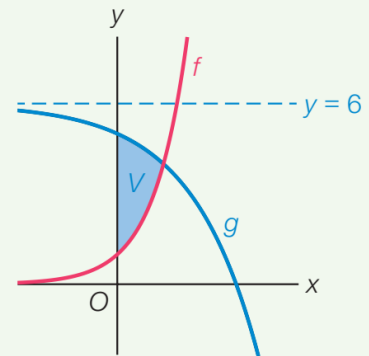
$$\frac{1}{2}x = \ln(2)$$

$$x = 2 \ln(2)$$

$$\begin{aligned} O(V) &= \int_0^{2 \ln(2)} (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_0^{2 \ln(2)} (6 - e^{\frac{1}{2}x} - e^x) dx = [6x - 2e^{\frac{1}{2}x} - e^x]_0^{2 \ln(2)} \\ &= 12 \ln(2) - 2 \cdot 2 - 4 - (0 - 2 - 1) = 12 \ln(2) - 5 \end{aligned}$$

$$e^{\frac{1}{2}x} = 2$$

$$e^x = (e^{\frac{1}{2}x})^2 = 2^2 = 4$$



R33 Zie de theorie op de vorige en deze bladzijde.



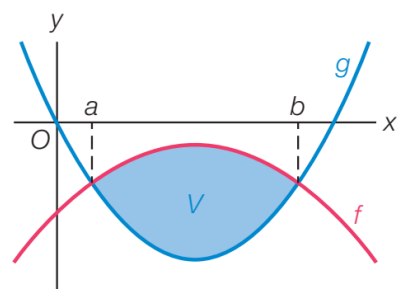
a Toon aan dat ook in de figuur hiernaast geldt dat

$$O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

b $\int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ is een voorbeeld van de

algemene regel $\int_a^b p \cdot f(x) dx = p \int_a^b f(x) dx$ met p een constante.

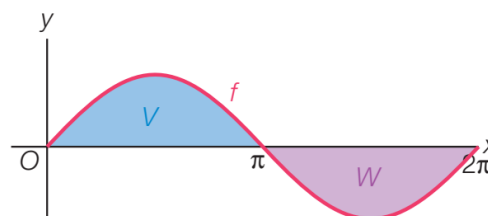
Bewijs deze algemene regel.



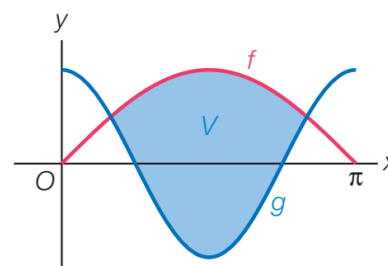
34 In de figuur hiernaast is de grafiek getekend van de functie $f(x) = \sin(x)$ met $D_f = [0, 2\pi]$. Het vlakdeel V ligt boven de x -as en wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as. Het vlakdeel W ligt onder de x -as en wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.

a Bereken $O(V)$ en $O(W)$.

b Bereken $\int_0^{2\pi} f(x) dx$. Licht de uitkomst toe.



35 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(2x)$ met domein $[0, \pi]$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de oppervlakte van V .

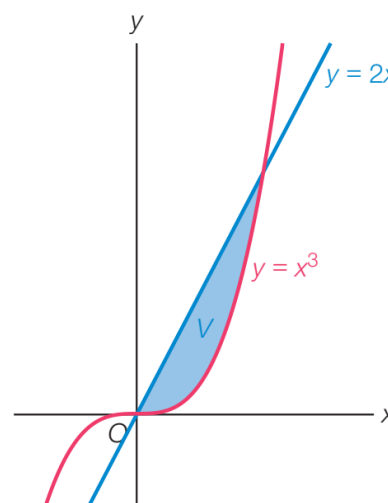


36 Het vlakdeel V in de figuur hiernaast wordt ingesloten door de grafieken van $y = x^3$ en $y = 2x$.

a Bereken exact de oppervlakte van V .

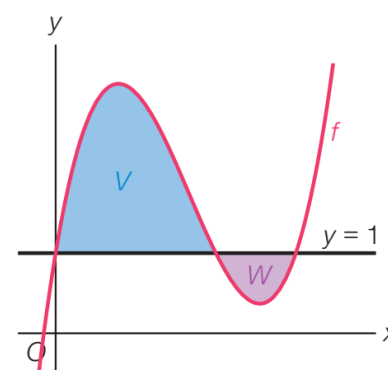
b De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte.

Bereken exact p .

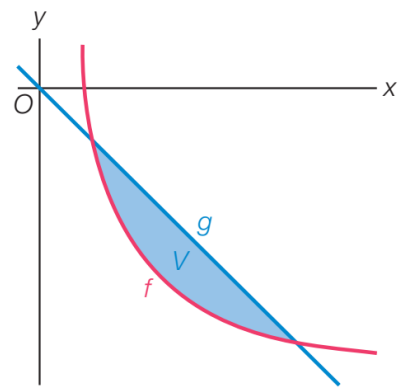


37 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 1$. Het vlakdeel V ligt boven de lijn $y = 1$ en wordt ingesloten door de lijn $y = 1$ en de grafiek van f . Het vlakdeel W ligt onder de lijn $y = 1$ en wordt ingesloten door de lijn $y = 1$ en de grafiek van f . Zie de figuur hiernaast.

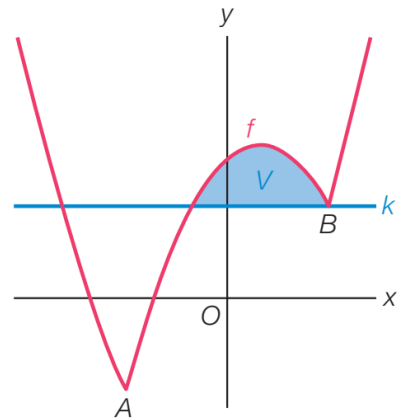
Bereken exact hoeveel keer zo groot de oppervlakte van V is als de oppervlakte van W .



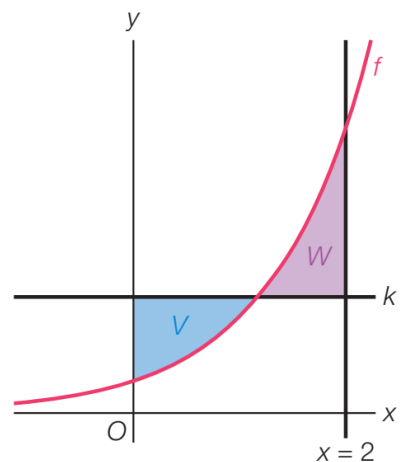
- 38** In de figuur hiernaast wordt het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = x - 4\sqrt{3x - 5}$ en $g(x) = -x$.
 Bereken exact de oppervlakte van V .



- 39** In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = |x^2 - 9| + 2x$ met knikpunten A en B waarbij $x_A < x_B$. Lijn k is de horizontale lijn die door B gaat. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat boven k ligt en wordt ingesloten door de grafiek van f en k .

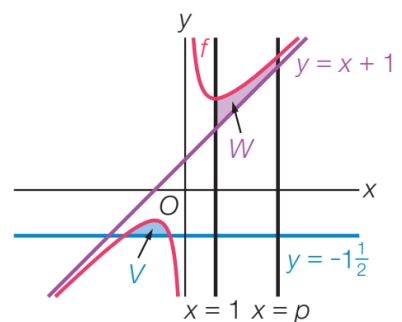


- 40** Gegeven is de functie $f(x) = 3^x$ en de lijn $k: y = q$ met $q > 1$.
 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de y -as en k .
 Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f , de lijn $x = 2$ en k . Zie de figuur hiernaast.
 Bereken exact voor welke q de oppervlakte van V gelijk is aan de oppervlakte van W .



- A41** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$. Zie de figuur hiernaast.

- a** Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = -1\frac{1}{2}$.
 Bereken exact de oppervlakte van V .
b Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $y = x + 1$, $x = 1$ en $x = p$ met $p > 1$.
 Bereken exact voor welke p de oppervlakte van W gelijk is aan 2.



A42 Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \frac{4}{x+2}$.



De grafiek van f snijdt de grafiek van f^{inv} in de punten $A(a, a)$ en $B(b, b)$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en f^{inv} .

Bereken exact de oppervlakte van V .

A43 Gegeven is de functie $f(x) = 2e^{0,2x}$.

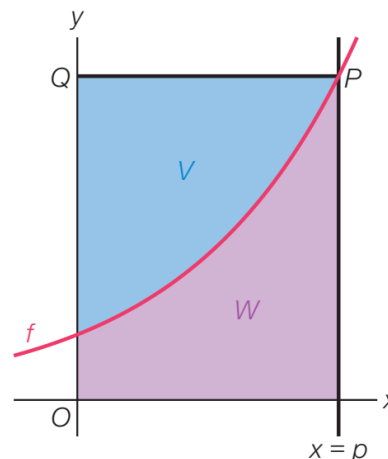


De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt P . De horizontale lijn door P snijdt de y -as in het punt Q . Het vlakdeel V wordt ingesloten door de lijn door P en Q , de y -as en de grafiek van f .

Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = p$. Zie de figuur hiernaast.

Bereken met behulp van primitiveren voor welke p de oppervlakte van V gelijk is aan de oppervlakte van W .

Rond af op twee decimalen.



Geschiedenis De oppervlakte onder een kromme

De eerste die oppervlakten van vlakdelen met kromme grenslijnen berekende was Archimedes (287-212 v.Chr.). Naast de bekende formule $O = \pi r^2$ voor de oppervlakte van een cirkel, bewees hij dat de oppervlakte van een paraboolsegment gelijk is aan $\frac{4}{3}$ keer de oppervlakte van de grootste driehoek die nog net past in het segment.

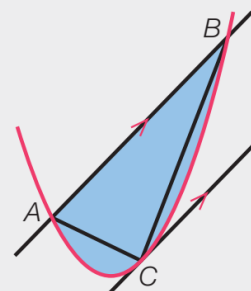
Na Archimedes duurde het bijna 2000 jaar voordat er nieuwe vorderingen werden gemaakt bij het berekenen van de oppervlakten van vlakdelen met kromme grenslijnen.

Het was Bonaventura Cavalieri die in 1635 een boek publiceerde waarin de eerste beginselen van de integraalrekening stonden.

Na Cavalieri kwam de ontwikkeling van de differentiaal- en integraalrekening in een stroomversnelling.

Voor al Newton en Leibniz hebben hier vanaf ongeveer 1660 grote bijdragen aan geleverd. Van steeds meer functies kon een primitieve exact worden berekend.

Tegenwoordig is het mogelijk om primitieve functies door de computer te laten berekenen. De computer gebruikt hierbij eigenlijk een tabellenboek met primitieven. En in het geval de primitieve door de computer niet gevonden kan worden, berekent de computer de integraal door van een groot aantal hele smalle rechthoekjes de som van de oppervlakten te bepalen. Ook je grafische rekenmachine rekent op deze manier.



Archimedes bewees dat het blauwe vlakdeel $\frac{4}{3}$ keer zo groot is als de oppervlakte van driehoek ABC .

A44 Voor elke $p > 0$ is de functie f_p gegeven door

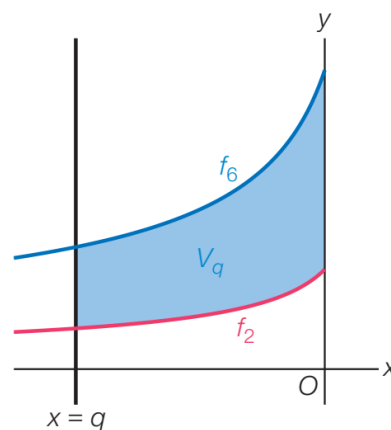
⊙*

$$f_p(x) = \frac{p}{\sqrt{1-x}}.$$

a Primitiveer f_p .

b In de figuur hiernaast wordt het vlakdeel V_q ingesloten door de grafieken van f_2 en f_6 , de lijn $x = q$ met $q < 0$ en de y -as.

Bereken exact voor welke q de oppervlakte van V_q gelijk is aan 12.



A45 Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x}$.

□⊙*

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de y -as en de lijn $y = 8$.

a Bereken exact de oppervlakte van V .

Voor de lengte L van de grafiek van een functie f tussen

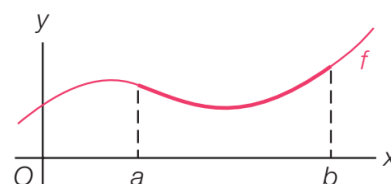
$x = a$ en $x = b$ bestaat de formule $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

In vraag b gebruik je deze formule om de lengte van een deel van de grafiek van f te berekenen.

b Bereken algebraïsch de omtrek van V . Rond af op twee decimalen.

c Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = p$.

Bereken in twee decimalen voor welke p de omtrek van W gelijk is aan 10.



E46 Voor $p > 0$ is gegeven de functie $f_p(x) = p \ln(x)$.

*

Lijn k gaat door de oorsprong en raakt de grafiek van f_p in het punt A .

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f_p , de x -as en k .

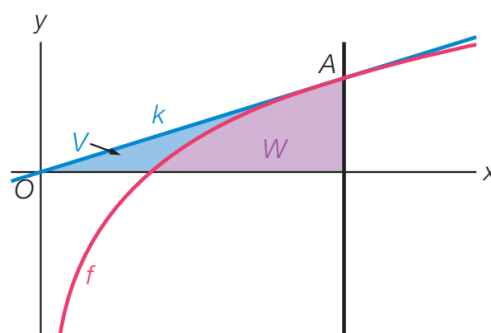
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f_p , de x -as en de verticale lijn door A .

Zie de figuur hiernaast.

De verhouding $\frac{\text{oppervlakte } V}{\text{oppervlakte } W}$ is onafhankelijk

van p . Bewijs dit en bereken exact deze verhouding.

Gebruik dat $F_p(x) = px \ln(x) - px$ een primitieve van f_p is.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan primitieven berekenen van functies van de vorm $f(ax + b)$.
- ☐ Ik kan de oppervlakte van een vlakdeel dat wordt ingesloten door grafieken exact berekenen.

► OPGAVE C4
THEORIE A

► OPGAVE C5
THEORIE B

C4 Bereken de primitieven.

a $f(x) = 4(3x - 2)^5$

b $f(x) = \frac{5}{\sqrt{2-3x}} - \frac{3}{2-3x}$

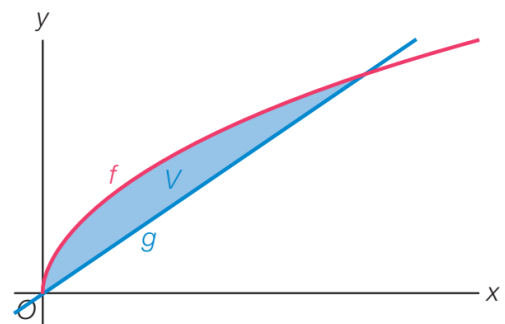
c $f(x) = 3 \cdot 10^{3x-2}$

d $f(x) = 2 - 3 \sin(\pi x - 2)$

C5 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g(x) = x$. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de oppervlakte van V .

b De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte.
Bereken p met behulp van primitiveren.
Rond af op twee decimalen.



Antwoorden

C4 a $F(x) = \frac{2}{9}(3x - 2)^6 + c$

b $F(x) = -3\frac{1}{3}\sqrt{2-3x} + \ln|2-3x| + c$

c $F(x) = \frac{10^{3x-2}}{\ln(10)} + c$

d $F(x) = 2x + \frac{3}{\pi}\cos(\pi x - 2) + c$

C5 a $2\frac{2}{3}$

b $p \approx 1,51$

11.3 Inhouden

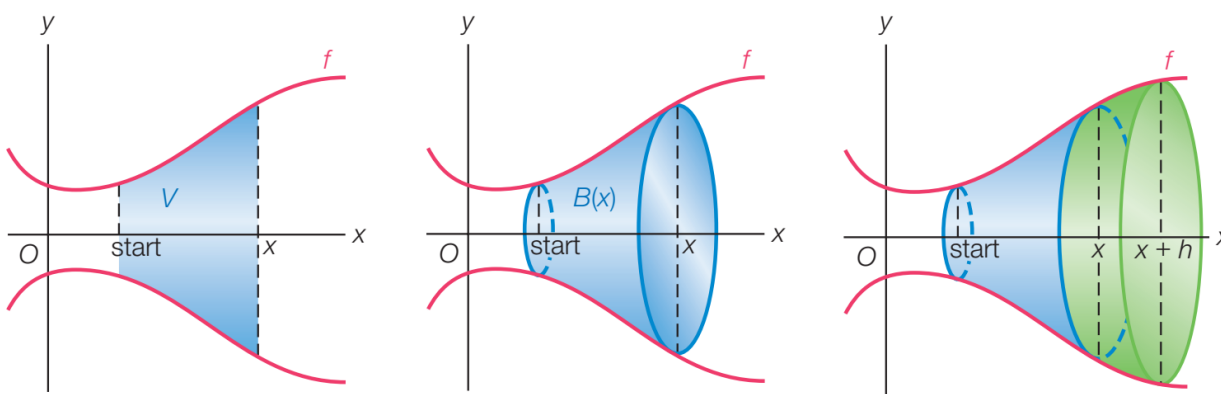
Kennis en vaardigheden

- Je kunt de inhoud van een lichaam berekenen dat ontstaat door een vlakdeel te wentelen om de x -as.
- Je kunt de inhoud van een lichaam berekenen dat ontstaat door een vlakdeel te wentelen om de y -as.
- Je kunt integralen numeriek berekenen.

O47 Zie de figuren hieronder.



In de middelste figuur is het vlakdeel V van de linker figuur gewenteld om de x -as. $B(x)$ is de inhoud van het blauwe lichaam dat zo ontstaat.



In de rechter figuur is de inhoud van het groene lichaam gelijk aan $B(x+h) - B(x)$.

Als $h \approx 0$, dan is $f(x+h) \approx f(x)$ en is de inhoud van het groene lichaam te benaderen door $\pi \cdot (f(x))^2 \cdot h$.

Licht dit toe.

Theorie A De inhoud van een omwentelingslichaam

Voor de inhoudsfunctie B in opgave 47 geldt

$$B'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B(x+h) - B(x)}{h} \dots (1)$$

Als $h \approx 0$ dan is in de rechter figuur van opgave 47 het groene lichaam te benaderen door een cilinder met oppervlakte grondvlak $\pi \cdot (f(x))^2$ en hoogte h , dus $B(x+h) - B(x) \approx \pi \cdot (f(x))^2 \cdot h$.

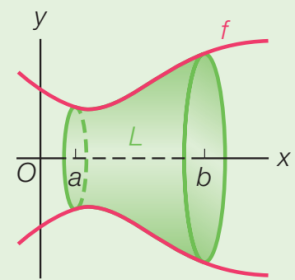
Hieruit volgt dat $\frac{B(x+h) - B(x)}{h} \approx \pi \cdot (f(x))^2$, dus

$$\pi \cdot (f(x))^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B(x+h) - B(x)}{h} \dots (2)$$

Uit (1) en (2) volgt $B'(x) = \pi \cdot (f(x))^2$, dus $B(x)$ is een primitieve van $\pi \cdot (f(x))^2$.

Als V een vlakdeel is dat wordt ingesloten door de grafiek van de functie f , de x -as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ met $a < b$, dan is de inhoud van het **omwentelingslichaam** L dat ontstaat als V wentelt om de x -as gelijk aan

$$I(L) = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$



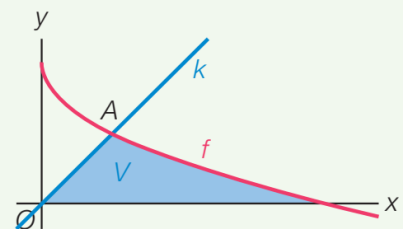
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie f , de x -as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ met $a < b$. De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as is $I(L) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

Voorbeeld

De lijn k : $y = x$ snijdt de grafiek van de functie $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ in het punt $A(1, 1)$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en k .

Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as.



Uitwerking

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \text{ geeft } 2 - \sqrt{x} &= 0 \\ \sqrt{x} &= 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

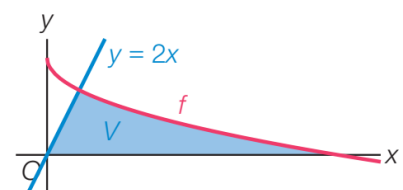
$$\begin{aligned} I(L) &= \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^4 (2 - \sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^4 (4 - 4x^{\frac{1}{2}} + x) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \pi \left[4x - \frac{4}{1\frac{1}{2}} x^{1\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^2 \right]_1^4 = \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \pi \left[4x - \frac{8}{3} x \sqrt{x} + \frac{1}{2} x^2 \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{3} \pi - 0 + \pi \left(4 \cdot 4 - \frac{8}{3} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4^2 - \left(4 \cdot 1 - \frac{8}{3} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \pi + \frac{5}{6} \pi = 1\frac{1}{6} \pi \end{aligned}$$

48



Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 3 - \sqrt{x}$, de lijn $y = 2x$ en de x -as. Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as.



49 Gegeven is de functie $f(x) = e^x$.



Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = 1$.

Het vlakdeel W_p wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = p$ met $p > 1$.

Zie de figuur hiernaast.

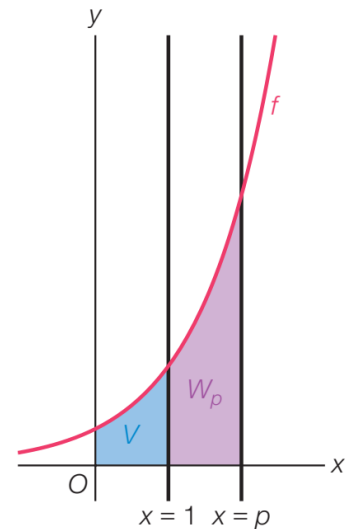
Het lichaam K ontstaat als V wentelt om de x -as en het

lichaam L_p ontstaat als W_p wentelt om de x -as.

De inhoud van L_2 is e^2 keer zo groot als de inhoud van K .

a Bewijs dit.

b Bereken algebraïsch voor welke p de inhoud van L_p tien keer zo groot is als de inhoud van K . Rond af op drie decimalen.



50 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de



functie $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$ en de lijnen $y = 2$, $x = 1$ en $x = 3$.

Zie de figuur hiernaast.

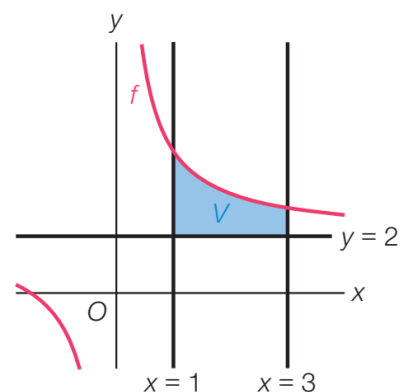
Het lichaam L ontstaat door V om de lijn $y = 2$ te wentelen.

Het vlakdeel V wordt 2 omlaag geschoven. Hierdoor ontstaat het vlakdeel W .

Het vlakdeel W wordt ingesloten door de x -as, de lijnen $x = 1$ en $x = 3$ en de grafiek van de functie g .

a Geef het functievoorschrift van g .

b Bereken exact de inhoud van het lichaam M dat ontstaat als W wentelt om de x -as en licht toe dat je hiermee ook de inhoud van L hebt berekend.



A51

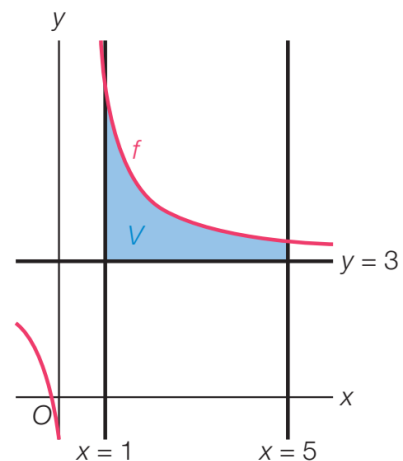


Gegeven is de functie $f(x) = 3 + \frac{4}{2x-1}$. Het vlakdeel V

wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $x = 1$, $x = 5$ en $y = 3$. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de oppervlakte van V .

b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de lijn $y = 3$.



A52



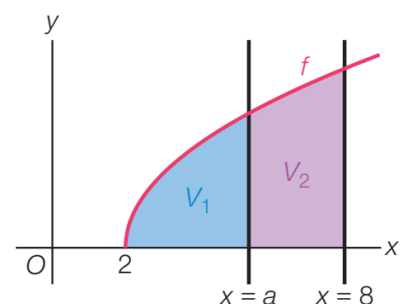
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x-2}$, de x -as en de lijn $x = 8$.

De lijn $x = a$ verdeelt V in de vlakdelen V_1 en V_2 .

Zie de figuur hiernaast.

De lichamen L_1 en L_2 ontstaan als V_1 en V_2 wentelen om de x -as.

Bereken exact voor welke a de inhoud van L_1 en L_2 gelijk zijn.



A53

Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 3^{\frac{1}{2}x+1}$, de x -as, de y -as en de lijn $x = p$ met $p > 0$. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact p in het geval de oppervlakte van V_p

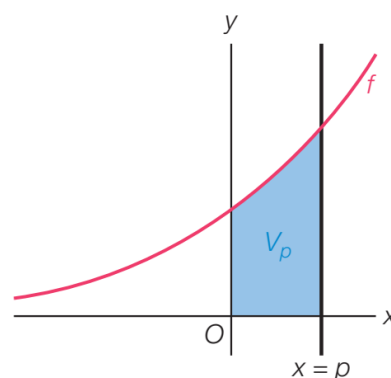
gelijk is aan $\frac{12}{\ln(3)}$.

b Het vlakdeel V_p wordt gewenteld om de x -as.

Zo ontstaat het lichaam L_p .

Bereken exact voor welke p de inhoud van L_p gelijk

is aan $\frac{18\pi}{\ln(3)}$.

**O54**

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = x$ en $g(x) = \frac{1}{2}x$ en de lijnen $x = 1$ en $x = 3$. Zie de figuur hiernaast. Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x -as.

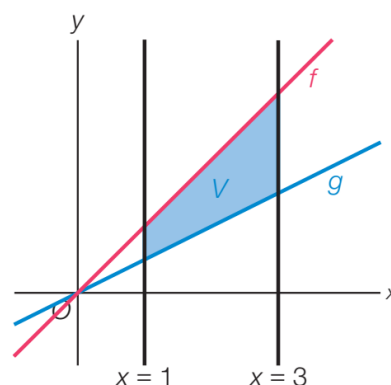
Er geldt $\pi \int_1^3 (f(x))^2 dx = 8\frac{2}{3}\pi$ en $\pi \int_1^3 (g(x))^2 dx = 2\frac{1}{6}\pi$.

a Geef de inhoud van L .

Jolien zegt $I(L) = \pi \int_1^3 (f(x) - g(x))^2 dx$ en

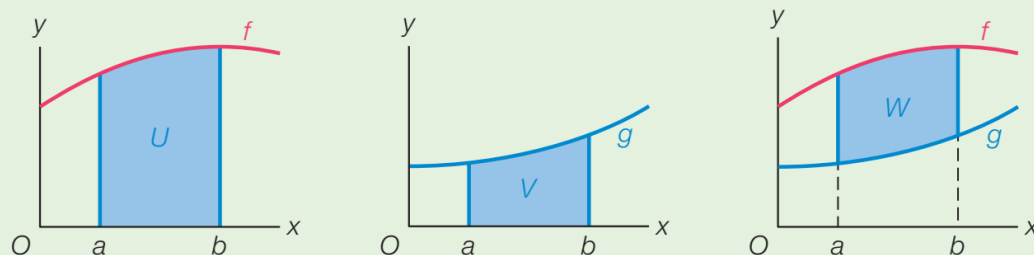
Irma zegt $I(L) = \pi \int_1^3 ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$.

b Onderzoek wie gelijk heeft.



Theorie B Vlakdelen wentelen om de x -as

In de figuren hieronder zijn de vlakdelen U , V en W getekend.



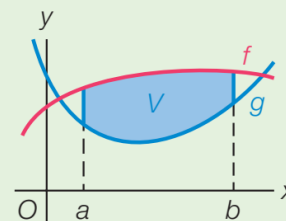
Het lichaam L ontstaat als U wentelt om de x -as, het lichaam M ontstaat als V wentelt om de x -as en het lichaam N ontstaat als W wentelt om de x -as.

Om de inhoud van N te berekenen neem je het verschil van de inhoud van L en M , dus

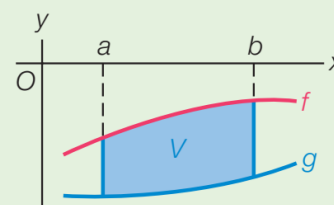
$$I(N) = I(L) - I(M) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \int_a^b (g(x))^2 dx = \pi \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx.$$

Het vlakdeel V ligt boven de x -as en wordt ingesloten door de grafieken van de functies f en g , waarbij $f(x) \geq g(x)$, en de lijnen $x = a$ en $x = b$ met $a < b$.

De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as is $I(L) = \pi \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$.



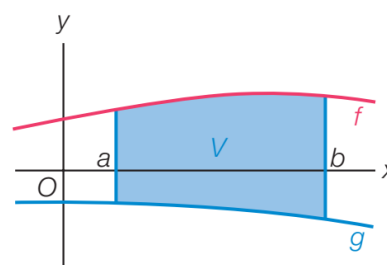
Het vlakdeel V in de figuur hiernaast ligt onder de x -as. De inhoud van het lichaam dat ontstaat als V wentelt om de x -as is gelijk aan $\pi \int_a^b ((g(x))^2 - (f(x))^2) dx$.



Je neemt de 'buitenste' inhoud min de 'binnenste' inhoud.

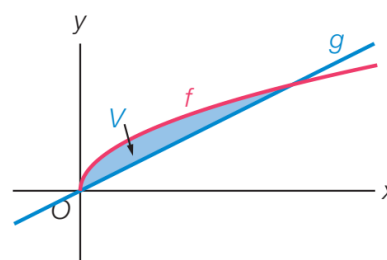
R55 Het lichaam L ontstaat als het vlakdeel V in de figuur hiernaast om de x -as wentelt.

Onderzoek of je met de theorie hierboven de inhoud van L kunt berekenen.



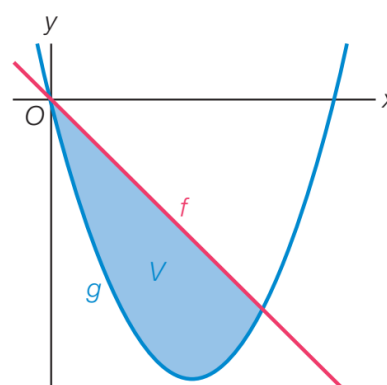
56 In de figuur hiernaast wordt het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{1}{2}x$.

Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as.



57 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = -x$ en $g(x) = x^2 - 4x$. Zie de figuur hiernaast.

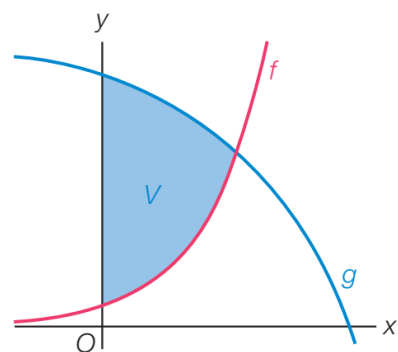
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as.



58
□ ⊗ *

In de figuur hiernaast wordt het vlakdeel V ingesloten door de y -as en de grafieken van de functies $f(x) = e^{2x}$ en $g(x) = 15 - 2e^x$.

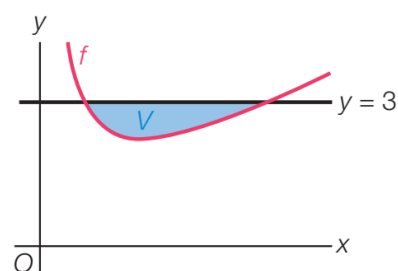
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as.



59
□ ⊗ *

In de figuur hiernaast wordt het vlakdeel V ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2x}$ en de lijn $y = 3$.

- Bereken exact de oppervlakte van V .
- Door V te wentelen om de x -as ontstaat het lichaam L . Bereken exact de inhoud van L .

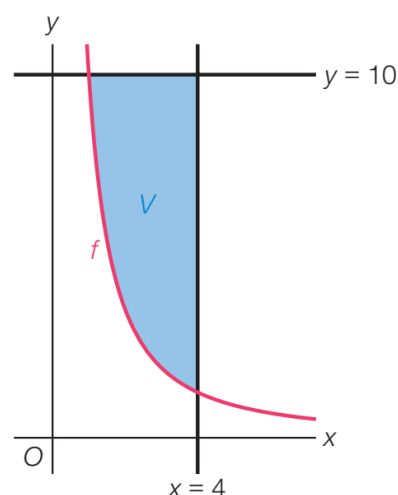


A60
□ ⊗ *

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{10}{x\sqrt{x}}$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $x = 4$ en $y = 10$. Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact de oppervlakte van V .
- Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as.

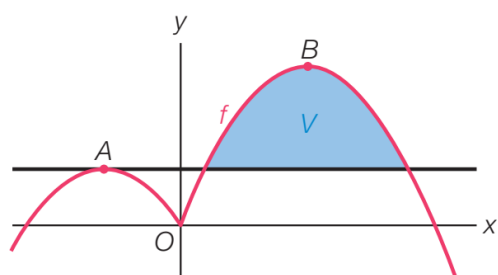


A61
□ ⊗ *

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2|x| + \frac{1}{2}x$.

De grafiek van f heeft toppen A en B en knikpunt O . Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de horizontale lijn door A . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as.



In de figuur hiernaast wordt het vlakdeel V ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 3\sqrt{x}$, de y -as en de lijn $y = 6$.

Je kunt je afvragen wat de inhoud is van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y -as.

Sanne berekent de inhoud van L door de grafiek van f^{inv} te wentelen om de x -as. Ze berekent hiervoor de

integraal $\pi \int_a^b (f^{\text{inv}}(x))^2 dy$.

- a** Laat zien dat $f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{9}x^2$, maak een schets en bereken de integraal. Welke grenzen heb je gebruikt?

Volgens Jasmijn is het helemaal niet nodig om met de inverse te werken.

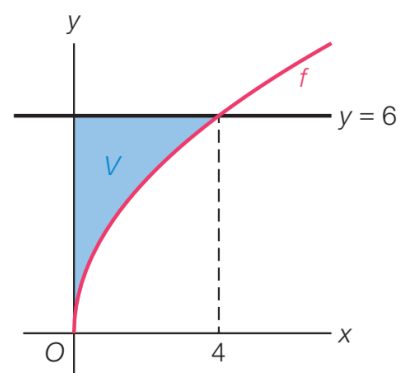
Je kunt, op soortgelijke manier als bij wentelen om de x -as, gebruiken

dat $I(L) = \pi \int_0^6 x^2 dy$.

Je moet dan wel eerst x^2 uitdrukken in y .

- b** Laat zien dat $x^2 = \frac{1}{81}y^4$.

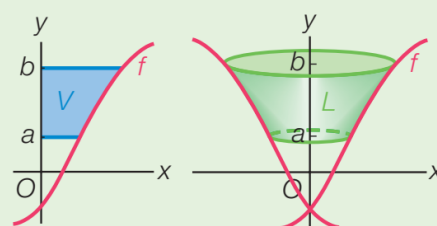
- c** Laat zien dat het berekenen van de integraal van Jasmijn op hetzelfde neerkomt als het berekenen van de integraal van Sanne.



Theorie C Wentelen om de y -as

Het vlakdeel V in de linker figuur hiernaast wentelt om de y -as. Zo ontstaat het lichaam L in de rechter figuur hiernaast. Om de inhoud van L te berekenen, ga je net zo te werk als bij het wentelen om de x -as.

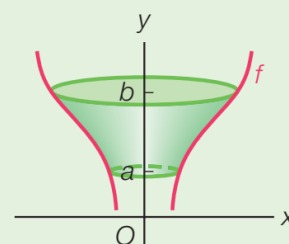
Je krijgt $I(L) = \pi \int_a^b x^2 dy$.



Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie f , de y -as en de lijnen $y = a$ en $y = b$ met $a < b$.

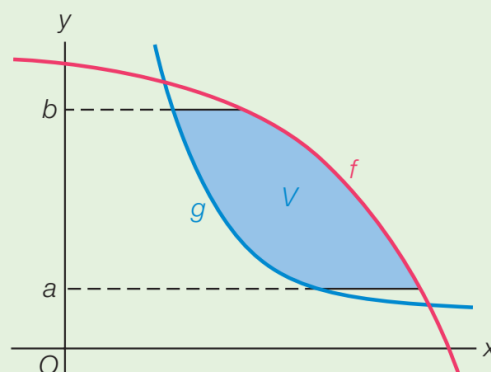
De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt

om de y -as is $I(L) = \pi \int_a^b x^2 dy$.



Het vlakdeel V in de figuur hiernaast ligt rechts van de y -as en wordt ingesloten door de grafieken van de functies f en g en de lijnen $y = a$ en $y = b$ met $a < b$. Omdat de grafiek van f voor $a < y < b$ rechts van de grafiek van g ligt, is de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y -as gelijk aan

$I(L) = \pi \int_a^b (x_f^2 - x_g^2) dy$.



Voorbeeld

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$, de x -as en de lijn $x = 4$.

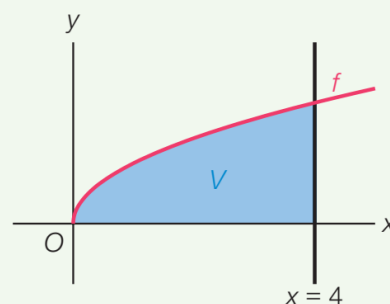
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y -as.

Uitwerking

De grenzen zijn 0 en $f(4) = 2$.

$y = \sqrt{x}$ geeft $x^2 = y^4$

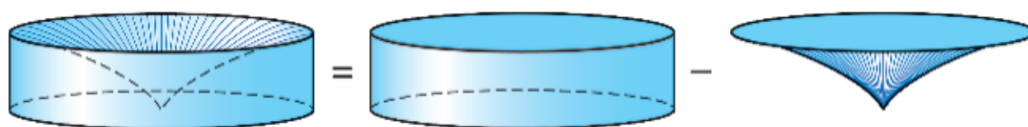
$$I(L) = \pi \int_0^2 (4^2 - x^2) dy = \pi \int_0^2 (16 - y^4) dy = \pi \left[16y - \frac{1}{5}y^5 \right]_0^2 = \pi \left(16 \cdot 2 - \frac{1}{5} \cdot 2^5 - 0 \right) = 25\frac{3}{5}\pi$$



R63



Zie het voorbeeld. Je kunt de inhoud van het lichaam L ook berekenen door te gebruiken dat L een cilinder is waaruit een omwentelingslichaam is weggelaten. Zie de figuur hieronder.



Er geldt dat $I(L) = I(\text{cilinder}) - \pi \int_0^2 x^2 dy$.

Bereken op deze manier $I(L)$.

64



Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $y = \sqrt{2x - 4}$, de x -as, de y -as en de lijn $y = 3$.

Bereken exact de inhoud

- a van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y -as
- b van het lichaam M dat ontstaat als V wentelt om de x -as.

65

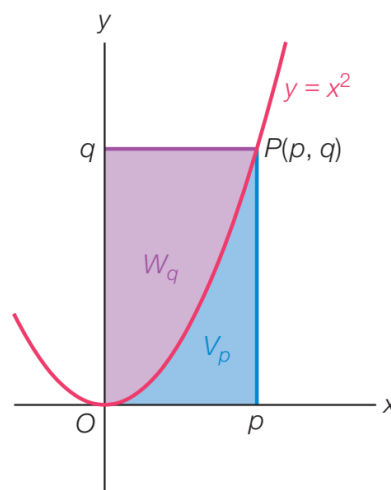


Gegeven zijn de parabool $y = x^2$ en het punt $P(p, q)$ op de parabool.

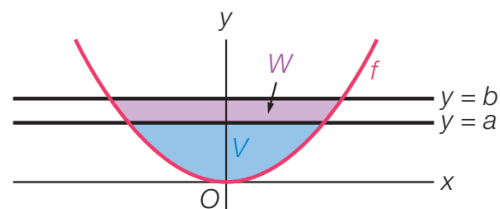
Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de parabool, de x -as en de lijn $x = p$. Het vlakdeel W_q wordt ingesloten door de parabool, de y -as en de lijn $y = q$. Zie de figuur hiernaast.

- a Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als W_q om de y -as wentelt.
- b Bij wenteling van V_p om de x -as ontstaat het lichaam L_p en bij wenteling van W_q om de y -as ontstaat het lichaam M_q .

Bereken exact voor welke p en q de inhoud van L_p en M_q gelijk zijn.



66 Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = a$. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $y = a$ en $y = b$ met $a < b$. Zie de figuur hiernaast.



Door V te wentelen om de y -as ontstaat het lichaam K .

Door W te wentelen om de y -as ontstaat het lichaam L .

In het geval $I(K) = I(L)$ is er een factor k waarvoor geldt $b = k \cdot a$.

Bereken exact deze waarde van k .

A67 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x + 6}$.

□ ⊗ * Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de y -as.

Bereken exact de inhoud

a van het lichaam L dat ontstaat als V om de x -as wentelt

b van het lichaam M dat ontstaat als V om de y -as wentelt.

Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $x = -3$ en $y = 4$.

c Bereken exact de inhoud van het lichaam N dat ontstaat als W wentelt om de lijn $x = -3$.

A68 In de figuur hiernaast wordt het vlakdeel V

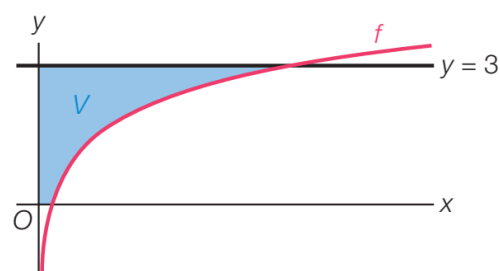
□ ⊗ * ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \ln(x)$, de x -as, de y -as en de lijn $y = 3$.

De lijn $y = a$ verdeelt V in de vlakdelen V_1 en V_2 .

Lichaam L_1 ontstaat als V_1 wentelt om de y -as en

lichaam L_2 ontstaat als V_2 wentelt om de y -as.

Bereken algebraïsch voor welke a de inhoud van L_1 gelijk is aan de inhoud van L_2 . Rond af op drie decimalen.

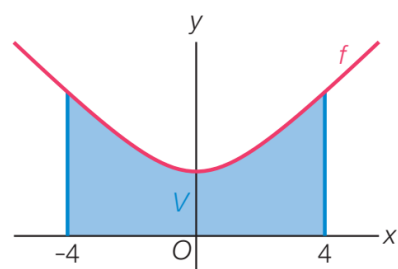


O69 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de

□ ⊗ * functie $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, de x -as en de lijnen $x = -4$ en $x = 4$. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as.

b Welk probleem krijg je als je de oppervlakte van V exact wilt berekenen?



Theorie D Integralen numeriek berekenen

Je hebt gezien dat je van de functie $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ in opgave 69 geen primitieve kunt berekenen. Ook de functie $f(x) = x e^x$ uit het voorbeeld kun je niet primitiveren. En zo zijn er heel veel functies waarvan je geen primitieve kunt berekenen. Voor het berekenen van een integraal kun je dan de GR gebruiken.

►GR Neem de module **Integreren** door.

Voorbeeld

In de figuur hiernaast wordt het vlakdeel V ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = xe^x$, de lijn $y = 2$ en de y -as.

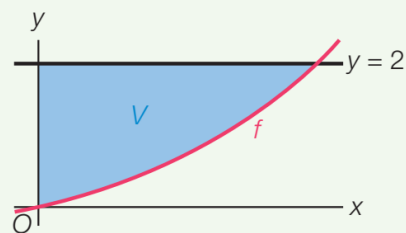
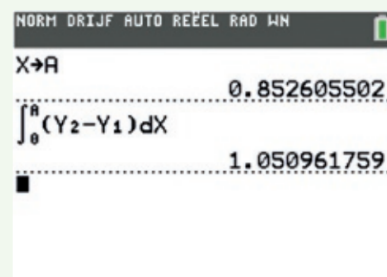
Bereken de oppervlakte van V . Rond af op drie decimalen.

Uitwerking

Los op $xe^x = 2$.

Invoeren van de bijbehorende formules en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 0,852\dots$

De GR geeft $O(V) = \int_0^{0,852\dots} (2 - xe^x) dx \approx 1,051$.



70
□ ⊗ *

Zie het voorbeeld.

Bereken de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as. Rond af op twee decimalen.

71
□ ⊗ *

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$ met $D_f = [0, \pi]$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.

Onderzoek of de lijn $y = \frac{1}{3}x$ het vlakdeel V in twee delen met gelijke oppervlakte verdeelt.

A72
□ ⊗ *

Gegeven is de functie $f(x) = 2 \ln(x) - \ln^2(x)$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f .

a Bereken exact de nulpunten van f .

b Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van f .

Een primitieve van f is

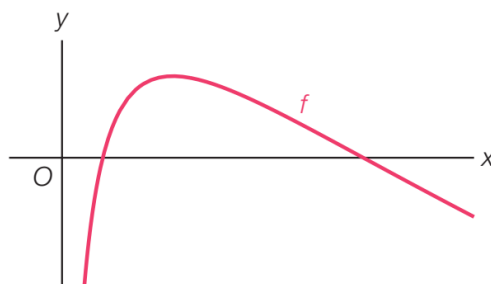
$$F(x) = 4x \ln(x) - x \ln^2(x) - 4x.$$

c Bewijs dat deze primitieve juist is.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.

d Bereken exact de oppervlakte van V .

e Bereken de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de x -as wentelt. Rond af op drie decimalen.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan de inhoud van een lichaam berekenen dat ontstaat door een vlakdeel te wentelen om de x -as.

► **OPGAVE C6a**
THEORIE A,B

☐ Ik kan de inhoud van een lichaam berekenen dat ontstaat door een vlakdeel te wentelen om de y -as.

► **OPGAVE C6b**
THEORIE C

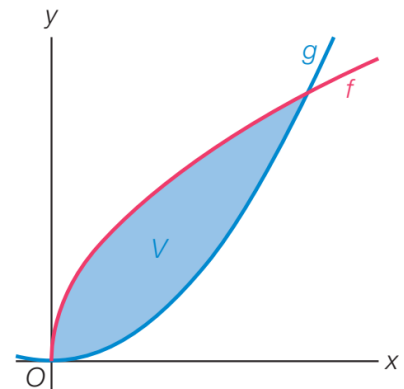
☐ Ik kan integralen numeriek berekenen.

► **OPGAVE C7**
THEORIE D

C6 Gegeven is de functie $f(x) = 4\sqrt{2x}$.

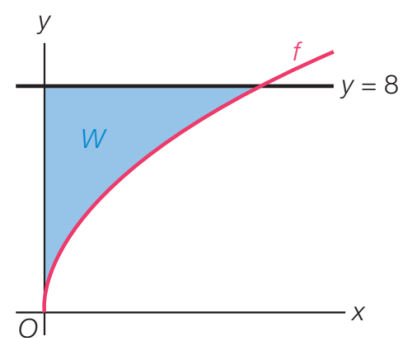
a Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van de functies f en $g(x) = 2x^2$.

Bereken exact de inhoud van het lichaam K dat ontstaat als V wentelt om de x -as.



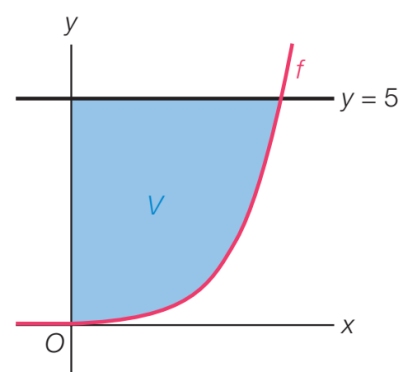
b Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f , de y -as en de lijn $y = 8$.

Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als W wentelt om de y -as.



C7 In de figuur hiernaast zie je het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 0,1x^2 e^x$, de lijn $y = 5$ en de y -as.

Bereken de oppervlakte van V . Rond af op twee decimalen.



Antwoorden

C6 a $38\frac{2}{5}\pi$

b $6\frac{2}{5}\pi$

C7 9,02

11.4 Toepassingen van integralen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt met behulp van een integraal de inhoud berekenen van een ruimtelijke figuur zoals een bol(segment) of (afgeknotte) kegel.
- Je kunt met behulp van primitiveren de afgelegde afstand berekenen als een formule voor de snelheid is gegeven en de snelheid berekenen als een formule voor de versnelling is gegeven.

O73
□ ⊗ *

De cirkel met middelpunt O en straal r heeft vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$, oftewel $y^2 = r^2 - x^2$. Bij wentelen van deze cirkel om de x -as ontstaat een bol met straal r .

Bewijs met integraalrekening dat de inhoud van deze bol $\frac{4}{3}\pi r^3$ is.

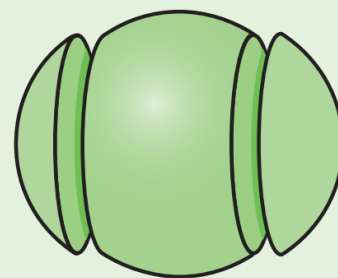
Theorie A Inhoud van bol en kegel

In opgave 73 heb je met integraalrekening bewezen dat de inhoud van een bol met straal r gelijk is aan $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Door een bol met een (plat) vlak te snijden, ontstaan twee **bolsegmenten**.

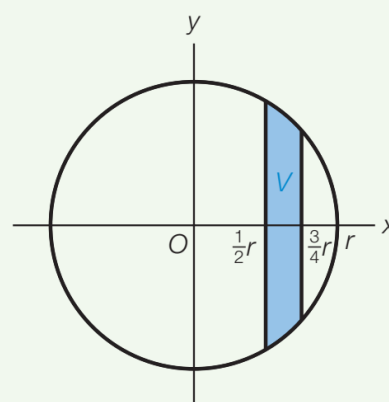
Snijd je een bol met twee evenwijdige vlakken, dan ontstaan twee bolsegmenten en een **bolschijf**. Zie de figuur hiernaast.

Met behulp van een integraal is een formule van de inhoud van een bolsegment en van een bolschijf op te stellen.



Voorbeeld

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ en de lijnen $x = \frac{1}{2}r$ en $x = \frac{3}{4}r$. Zie de figuur hiernaast. Stel met behulp van een integraal de formule op van de inhoud van de bolschijf S die ontstaat als V om de x -as wentelt.



Uitwerking

$$\begin{aligned}
 I(S) &= \pi \int_{\frac{1}{2}r}^{\frac{3}{4}r} y^2 dx \\
 x^2 + y^2 &= r^2, \text{ dus } y^2 = r^2 - x^2
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\int} \right\}
 \begin{aligned}
 I(S) &= \pi \int_{\frac{1}{2}r}^{\frac{3}{4}r} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{\frac{1}{2}r}^{\frac{3}{4}r} \\
 &= \pi \left(r^2 \cdot \frac{3}{4}r - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}r \right)^3 - \left(r^2 \cdot \frac{1}{2}r - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}r \right)^3 \right) \right) \\
 &= \pi \left(\frac{3}{4}r^3 - \frac{9}{64}r^3 - \frac{1}{2}r^3 + \frac{1}{24}r^3 \right) = \frac{29}{192} \pi r^3
 \end{aligned}$$

In de figuur hiernaast zie je dat een kegel een omwentelingslichaam is.

De kegel ontstaat door het vlakdeel V ingesloten door de lijn $y = ax$, de x -as en de lijn $x = h$ om de x -as te wentelen.

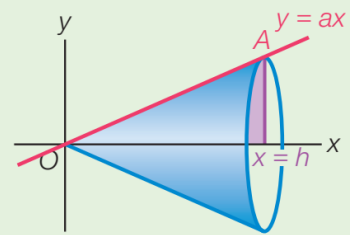
Met behulp van een integraal is een formule van de inhoud van deze kegel op te stellen.

$$I = \pi \int_0^h (ax)^2 dx = \pi \int_0^h a^2 x^2 dx = \pi \left[\frac{1}{3} a^2 x^3 \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi a^2 h^3$$

Uit $x_A = h$ volgt $y_A = ah$, dus de straal r van de grondcirkel is ah .

$$I = \frac{1}{3} \pi a^2 h^3 = \frac{1}{3} \pi \cdot a^2 h^2 \cdot h \quad \left. \begin{array}{l} r = ah \\ I = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h \end{array} \right\}$$

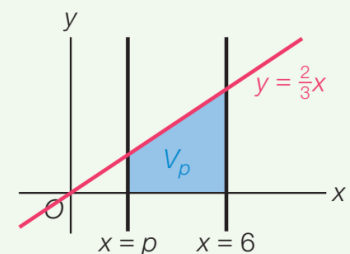
Omdat πr^2 de oppervlakte G van het grondvlak van de kegel is, is de formule ook te schrijven als $I = \frac{1}{3} Gh$.



Voorbeeld

Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de lijn $y = \frac{2}{3}x$, de x -as en de lijnen $x = p$ en $x = 6$ met $0 < p < 6$. Zie de figuur hiernaast. Door V_p te wentelen om de x -as ontstaat de afgeknotte kegel K_p .

Bereken exact voor welke p de inhoud van K_p gelijk is aan 24π .



Uitwerking

$$\begin{aligned} I(K_p) &= \pi \int_p^6 \left(\frac{2}{3}x\right)^2 dx = \pi \int_p^6 \frac{4}{9}x^2 dx = \pi \left[\frac{4}{27}x^3 \right]_p^6 \\ &= \pi \left(\frac{4}{27} \cdot 6^3 - \frac{4}{27}p^3 \right) = \pi \left(32 - \frac{4}{27}p^3 \right) \end{aligned}$$

$$I(K_p) = 24\pi \text{ geeft } \pi \left(32 - \frac{4}{27}p^3 \right) = 24\pi$$

$$32 - \frac{4}{27}p^3 = 24$$

$$\frac{4}{27}p^3 = 8$$

$$p^3 = 54$$

$$p = \sqrt[3]{54}$$

R74 a Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.



Het vlakdeel W wordt ingesloten door de cirkel en de lijnen $x = \frac{1}{4}r$ en $x = \frac{1}{2}r$. Als W om de x -as wentelt ontstaat de bolschijf T .

Bereken exact hoeveel keer zo groot de inhoud van bolschijf T is als de inhoud van bolschijf S .

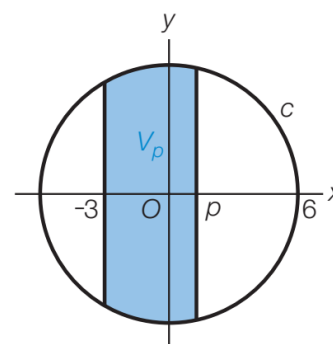
b Zie het voorbeeld op deze bladzijde.

Bereken p met behulp van de formule van de inhoud van een kegel.

- 75** Het vlakdeel V ligt rechts van de lijn $x = \frac{1}{3}r$ en wordt ingesloten door de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ en de lijn $x = \frac{1}{3}r$.
 Stel de formule op van de inhoud van het bolsegment S dat ontstaat als V om de x -as wentelt.

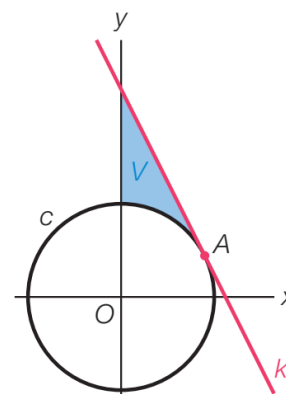
- A76** De bol B ontstaat als de cirkel $c: x^2 + y^2 = 36$ wentelt om de x -as.

Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door c en de lijnen $x = -3$ en $x = p$ met $-3 < p < 6$. Zie de figuur hiernaast.
 De bolschijf S_p ontstaat als V_p om de x -as wentelt.
 Stel de formule op van de inhoud van S_p en bereken hiermee voor welke p de inhoud van S_p gelijk is aan de helft van de inhoud van B . Rond af op twee decimalen.



- A77** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 = 20$.

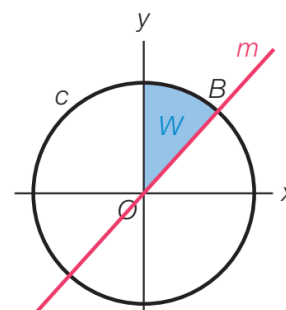
- a** Het vlakdeel V wordt ingesloten door c , de y -as en de lijn k die de cirkel raakt in het punt $A(4, 2)$. Zie de figuur hiernaast.
 Door V te wentelen om de x -as ontstaat het lichaam K .
 Bereken exact de inhoud van K .



De lijn $m: y = ax$ met $a > 0$ snijdt c in het punt B met $x_B = p$.
 Zie de figuur hiernaast.

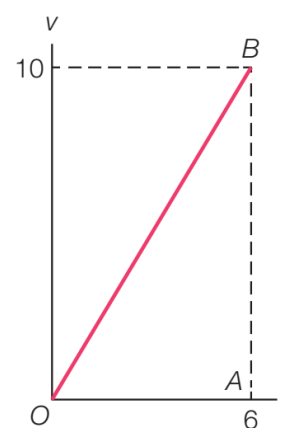
Er geldt $a^2 = \frac{20 - p^2}{p^2}$.

- b** Toon dit aan.
c Het vlakdeel W wordt ingesloten door c , de positieve y -as en m . Door W te wentelen om de x -as ontstaat het lichaam L .
 Bereken exact voor welke a de inhoud van L gelijk is aan 40π .



- O78** In de figuur hiernaast is van een voorwerp de snelheid v in m/s uitgezet tegen de tijd t in seconden met $0 \leq t \leq 6$.

- a** Bereken de gemiddelde snelheid gedurende de eerste zes seconden. Hoeveel meter wordt gedurende deze zes seconden afgelegd?
b Toon aan dat je met de oppervlakte van driehoek OAB de afgelegde afstand gedurende de eerste zes seconden krijgt.
c Uit de figuur volgt $v(t) = \frac{5}{3}t$ en $s(t) = \frac{5}{6}t^2$, waarbij s de afgelegde afstand in meters is.
 Licht dit toe.
d Controleer dat s een primitieve is van v .



Voorbeeld

Een voorwerp met een snelheid van 4 m/s ondergaat vanaf $t = 0$ gedurende 10 seconden een versnelling. De versnelling neemt tussen $t = 0$ en $t = 10$ lineair af van 5 m/s^2 tot 0 m/s^2 .

Bereken exact hoeveel meter gedurende deze 10 seconden wordt afgelegd.

Uitwerking

$$a(t) = mt + n$$

$$m = \frac{a(10) - a(0)}{10 - 0} = \frac{0 - 5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$a(t) = -\frac{1}{2}t + n \text{ en } a(0) = 5 \text{ geeft } a(t) = -\frac{1}{2}t + 5$$

$$a(t) = -\frac{1}{2}t + 5 \text{ en } v(0) = 4 \text{ geeft } v(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 5t + 4$$

De afgelegde afstand gedurende deze 10 seconden is

$$\int_0^{10} \left(-\frac{1}{4}t^2 + 5t + 4\right) dt = \left[-\frac{1}{12}t^3 + 2\frac{1}{2}t^2 + 4t\right]_0^{10} = -\frac{1}{12} \cdot 10^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 - 0 = 206\frac{2}{3} \text{ meter.}$$

79 Zie de theorie op de vorige bladzijde.

  * Stel de formule op van de afgelegde afstand s als voor de snelheid v geldt $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + e^t - 1$. Gebruik $s(0) = 0$.

80 Een voorwerp met een snelheid van 1 m/s ondergaat vanaf $t = 0$

 gedurende 20 seconden een versnelling. De versnelling neemt tussen $t = 0$ en $t = 20$ lineair toe van 0 m/s^2 tot 5 m/s^2 .

Bereken exact hoeveel meter gedurende deze 20 seconden wordt afgelegd.

81 Een voorwerp in rust ondergaat vanaf $t = 0$ gedurende 6 seconden een versnelling die gegeven is door $a(t) = -t^2 + 6t$. Hierin is a in m/s^2 en t in seconden met $0 \leq t \leq 6$.

a Bereken exact de snelheid op $t = 6$.

b Bereken exact de afgelegde afstand gedurende deze 6 seconden.

Na $t = 6$ verandert de snelheid niet meer.

c Bereken exact hoeveel meter in totaal is afgelegd op $t = 10$.

d Bereken exact voor welke t in totaal 500 meter is afgelegd.

82



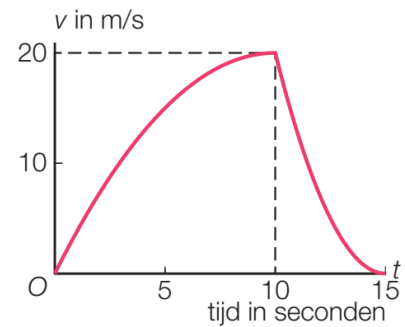
Bij een botsproef rijdt een auto met een snelheid van 54 km/u tegen een betonblok. Door de kreukelzone van de auto en het gebruik van de veiligheidsgordel en een airbag is de remweg van de bestuurder 75 cm. Neem aan dat tijdens de botsing de versnelling constant is.

- Bereken exact hoelang de botsing duurt.
- Bereken in m/s^2 de versnelling tijdens de botsing. Hoeveel keer zo groot als de versnelling van de zwaartekracht g is dit? Neem $g = 10 \text{ m/s}^2$.

83



In de figuur hiernaast is de snelheid van een auto in m/s uitgezet tegen de tijd in seconden. Gedurende de eerste 10 seconden trekt de auto op vanuit stilstand. Bij dit gedeelte van de grafiek hoort de formule $v(t) = -0,2t^2 + 4t$. Vanaf $t = 10$ remt de auto af. De auto komt tot stilstand op $t = 15$. Bij het tweede gedeelte van de grafiek hoort de formule $v(t) = 0,8t^2 - 24t + 180$.



- Bereken exact de totale afstand die de auto gedurende deze 15 seconden aflegt.
- Met behulp van het antwoord van vraag a is de gemiddelde snelheid van de auto gedurende de 15 seconden te berekenen. Er zijn twee tijdstippen waarop de snelheid van de auto gelijk is aan deze gemiddelde snelheid. Bereken deze tijdstippen. Rond af op twee decimalen.
- Bereken na hoeveel seconden de auto 100 meter heeft afgelegd. Geef het antwoord in één decimaal.

A84



Een parachutiste opent op 800 meter hoogte haar parachute. Daardoor ondergaat zij een versnelling (vertraging) die gegeven wordt door de formule $a(t) = -4e^{-0,1t}$. Hierin is t de tijd in seconden met $t = 0$ op het moment dat de parachute wordt geopend en a de versnelling in m/s^2 . Op $t = 3$ is haar snelheid 32 m/s .



- Bereken algebraïsch de snelheid van de parachutiste op het moment dat de parachute wordt geopend.
- Bereken algebraïsch hoeveel meter de parachutiste in de eerste twee minuten na $t = 0$ heeft afgelegd.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan met behulp van een integraal de inhoud berekenen van een ruimtelijke figuur zoals een bol(segment) of (afgeknotte) kegel.

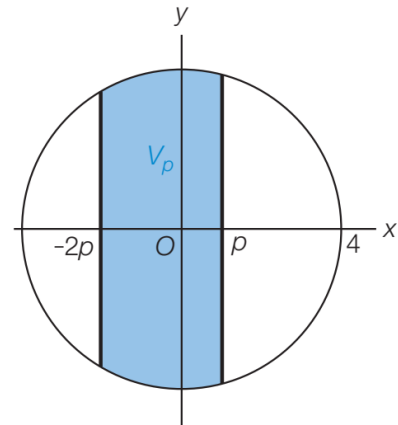
► OPGAVE C8
THEORIE A

☐ Ik kan met behulp van primitiveren de afgelegde afstand berekenen als een formule voor de snelheid is gegeven en de snelheid berekenen als een formule voor de versnelling is gegeven.

► OPGAVE C9
THEORIE B

C8 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 = 16$.

- a** Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door c en de lijnen $x = -2p$ en $x = p$ met $0 < p < 2$. Zie de figuur hiernaast. De bolschijf S_p ontstaat als V_p om de x -as wentelt. Bereken met behulp van primitiveren voor welke p de inhoud van S_p gelijk is aan 45π .
- b** Het vlakdeel W is het kleinste vlakdeel dat wordt ingesloten door c en de lijn $y = -x + 4$. Door W te wentelen om de x -as ontstaat het lichaam L . Bereken exact de inhoud van L .



C9 Een voorwerp in rust ondergaat vanaf $t = 0$ gedurende 10 seconden een versnelling die gegeven is door $a(t) = 4e^{0,1t} - 4$. Hierin is a in m/s^2 en t in seconden met $0 \leq t \leq 10$.

- a** Bereken algebraïsch de snelheid in m/s op $t = 8$. Rond af op twee decimalen.
- b** Bereken algebraïsch de afgelegde afstand in meters gedurende deze 10 seconden. Rond af op gehelen.

Antwoorden

C8 a $p = 1$

b $21\frac{1}{3}\pi$

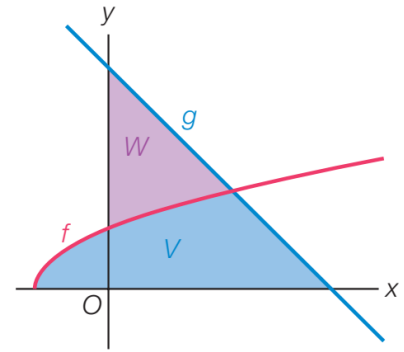
C9 a $17,02 \text{ m/s}$

b 87 m

11.3 Inhouden

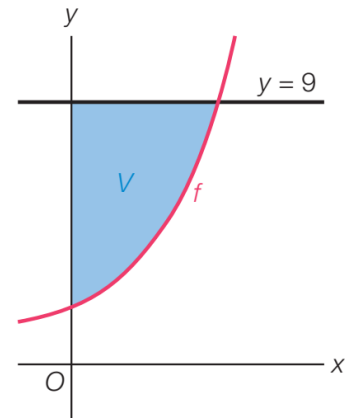
- 7** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{2x+6}$ en $g(x) = -x+9$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g en de x -as. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafieken van f en g en de y -as. Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact de inhoud van het lichaam K dat ontstaat als V wentelt om de x -as.
- Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als W wentelt om de x -as.



- 8** Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 2^x + 1$, de lijn $y = 9$ en de y -as. Zie de figuur hiernaast.

- Bereken algebraïsch de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de lijn $y = 9$. Rond af op één decimaal.
- Bereken de inhoud van het lichaam M dat ontstaat als V wentelt om de y -as. Rond af op één decimaal.

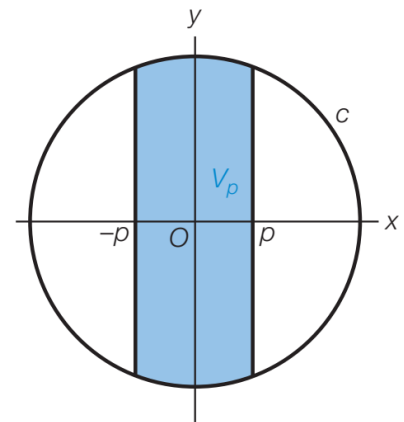


11.4 Toepassingen van integralen

- 9** Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de cirkel $c: x^2 + y^2 = 64$ en de lijnen $x = -p$ en $x = p$ met $p > 0$. Zie de figuur hiernaast.

De bol B ontstaat als c wentelt om de x -as en de bolschijf S_p ontstaat als V_p wentelt om de x -as.

Bereken met behulp van primitiveren voor welke p de inhoud van S_p de helft is van de inhoud van B . Rond af op twee decimalen.



- 10** Een raket wordt verticaal gelanceerd. Omdat door verbranding van de brandstof de massa van de raket voortdurend afneemt, wordt de versnelling bij gelijkblijvende stuwkracht steeds groter. Neem aan dat na de lancering de versnelling gedurende de eerste 60 seconden lineair toeneemt van 8 m/s^2 tot 68 m/s^2 en dat de raket zich verticaal blijft voortbewegen.
- Bereken exact welke hoogte de raket bereikt in deze 60 seconden.
 - Op $t = 60$ wordt de raketmotor uitgeschakeld. Vanaf dat moment werkt alleen de zwaartekracht van de aarde op de raket. Neem aan dat de raket geen wrijving ondervindt en dat voor de versnelling van de zwaartekracht geldt $g = 10 \text{ m/s}^2$. Dus neem $a(t) = -10$. Bereken exact de maximale hoogte van de raket.

Gemengde opgaven

- 1** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 e^x$.

De primitieven van f zijn van de vorm $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x + d$.

De grafiek van een van de primitieven van f heeft de oorsprong als buigpunt.

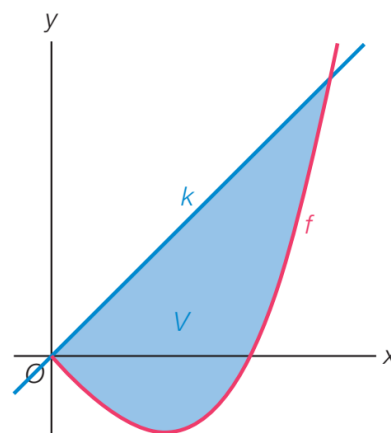
Bereken exact de coördinaten van het andere buigpunt van deze grafiek.

- 2** Gegeven zijn de functie $f(x) = x^3 - 3x$ met $D_f = [0, \rightarrow)$ en de lijn $k: y = ax$ met $a > -3$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en k . Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact voor welke a de oppervlakte van V gelijk is aan 9.

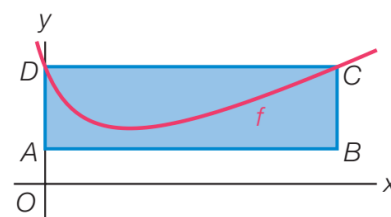
b Bekijk de situatie dat k door het laagste punt van de grafiek van f gaat.

Bereken in dit geval exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as.



- 3** De punten $A(0, p)$, $B(5, p)$, $C(5, 2)$ en $D(0, 2)$ zijn de hoekpunten van de rechthoek $ABCD$. De grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{3}{x+1}$ gaat door C en D en verdeelt de rechthoek in twee delen met gelijke oppervlakte. Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact p .



- 4** Een wielrenner moet bij een snelheid van 54 km/u plotseling remmen voor een auto. Neem aan dat de versnelling tijdens het remmen constant is. Op $t = 0$ is de wielrenner op 40 meter afstand van de auto en begint hij te remmen.

a Bereken algebraïsch de versnelling van de wielrenner in m/s^2 in het geval de wielrenner na 40 meter tot stilstand komt. Rond af op één decimaal.

b De auto rijdt met een snelheid van 6 km/u in dezelfde richting als de wielrenner. Om niet tijdens het remmen ten val te komen, mag de versnelling van de wielrenner niet kleiner zijn dan $-2,5 \text{ m/s}^2$.

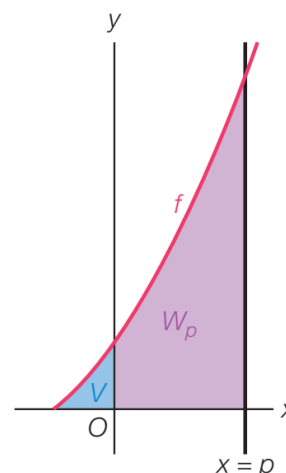
Onderzoek algebraïsch of de wielrenner op tijd voor de auto kan stoppen.

- 5** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 = r^2$. Bij wentelen van c om de x -as ontstaat de bol B . Het vlakdeel W_p wordt ingesloten door c en de lijnen $x = -pr$ en $x = pr$ met $0 < p < 1$.

Bereken voor welke p de inhoud van het lichaam S_p dat ontstaat als W_p om de x -as wentelt gelijk is aan de helft van de inhoud van B . Rond af op twee decimalen.

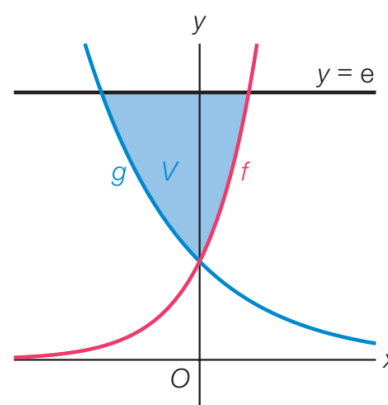
- 6** Gegeven is de functie $f(x) = (2x + 1)\sqrt{2x + 1}$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de y -as. Het vlakdeel W_p wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = p$ met $p > 0$. Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken exact p in het geval dat geldt $O(W_p) = 31 \cdot O(V)$.
b Het lichaam K ontstaat als V wentelt om de x -as, het lichaam L_p ontstaat als W_p wentelt om de x -as. Bereken exact p in het geval dat geldt $I(L_p) = 624 \cdot I(K)$.
c Bereken exact de inhoud van het lichaam M dat ontstaat als V wentelt om de y -as.
d Bereken de inhoud van het lichaam N dat ontstaat als W_3 wentelt om de lijn $x = 3$. Rond af op één decimaal.



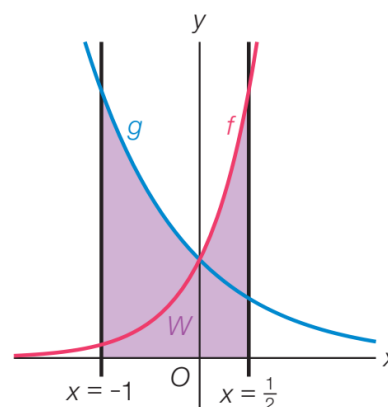
- 7** Gegeven zijn de functies $f(x) = e^{2x}$ en $g(x) = e^{-x}$.

- a** Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g en de lijn $y = e$. Zie de figuur hiernaast. Bereken algebraïsch de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de lijn $y = e$. Rond af op twee decimalen.



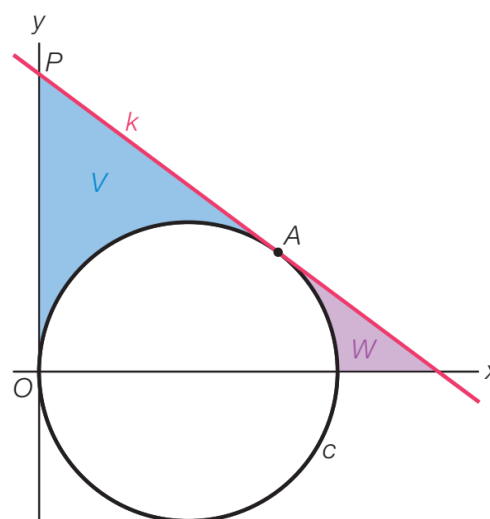
- b** De lijn $x = p$ met $-1 < p < 0$ verdeelt het gekleurde vlakdeel W in de figuur hiernaast in twee delen met gelijke oppervlakte. Bereken exact p . Schrijf het antwoord in de vorm

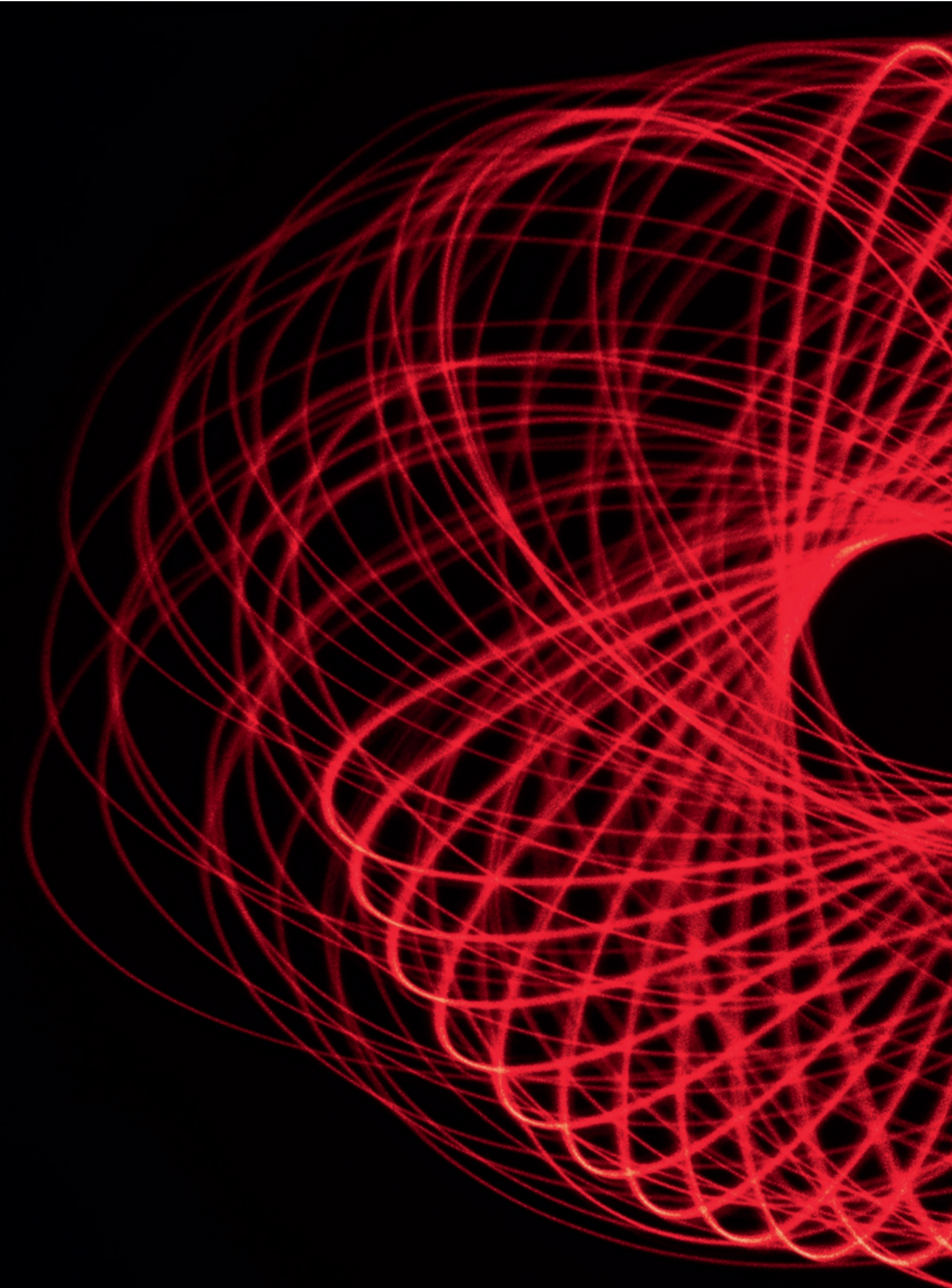
$$p = \ln\left(\frac{4}{a}\right).$$



- 8** Gegeven zijn de cirkel $c: (x - 5)^2 + y^2 = 25$ en het punt $P(0, 10)$. De lijn k door P raakt c in het punt A . Het vlakdeel V wordt ingesloten door c , k en de y -as. Het vlakdeel W wordt ingesloten door c , k en de x -as. Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken algebraïsch $O(V) + O(W)$. Rond af op één decimaal.
b Door V te wentelen om de x -as ontstaat het lichaam K . Door W te wentelen om de x -as ontstaat het lichaam L . De inhoud van K is p keer zo groot als de inhoud van L . Bereken exact p .





12.1 Goniometrische formules bij vergelijkingen en herleidingen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt goniometrische formules gebruiken bij het algebraïsch oplossen van vergelijkingen.
- Je kunt de verschil-, de som- en de verdubbelingsformules gebruiken bij het herleiden van formules en het algebraïsch oplossen van vergelijkingen.

Voorkennis Goniometrische formules en vergelijkingen

Je kent de volgende formules.

$\sin(-A) = -\sin(A)$ $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$ $\sin(A) = \cos(A - \frac{1}{2}\pi)$	$\cos(-A) = \cos(A)$ $-\cos(A) = \cos(A + \pi)$ $\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$	$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ $\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$
---	--	--

Deze formules kun je gebruiken bij herleidingen.

De formule $y = -\cos(x + \frac{1}{4}\pi)$ is te herleiden tot een formule van de vorm $y = \sin(x + a)$.

Stap 1 Zorg dat je het minteken kwijtraakt.

Gebruik de formule $-\cos(A) = \cos(A + \pi)$.

Je krijgt $-\cos(x + \frac{1}{4}\pi) = \cos(x + 1\frac{1}{4}\pi)$.

Stap 2 Maak van de cosinus een sinus.

Gebruik de formule $\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$.

Je krijgt $\cos(x + 1\frac{1}{4}\pi) = \sin(x + 1\frac{3}{4}\pi)$.

De formule $y = -\cos(x + \frac{1}{4}\pi)$ is dus te herleiden tot de formule $y = \sin(x + 1\frac{3}{4}\pi)$.

Omdat geldt dat $\sin(A + 2\pi) = \sin(A)$, kun je ook schrijven

$$\sin(x + 1\frac{3}{4}\pi) = \sin(x - \frac{1}{4}\pi).$$

Hiermee is $y = -\cos(x + \frac{1}{4}\pi)$ herleid tot $y = \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$.

Je kunt ook de stappen 1 en 2 verwisselen. Ga na dat je dan hetzelfde resultaat krijgt.

Je kunt de volgende typen goniometrische vergelijkingen oplossen.

I $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$

II $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

III $\sin(A) = \sin(B)$ en $\cos(A) = \cos(B)$

Type I los je op met behulp van de eenheidscirkel.

$$\sin(A) = 0 \text{ geeft } A = k \cdot \pi$$

$$\cos(A) = 0 \text{ geeft } A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\sin(A) = 1 \text{ geeft } A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\cos(A) = 1 \text{ geeft } A = k \cdot 2\pi$$

$$\sin(A) = -1 \text{ geeft } A = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\cos(A) = -1 \text{ geeft } A = \pi + k \cdot 2\pi$$

Type II los je op met behulp van de exacte-waardencirkel. Je leest één waarde af en daarna gebruik je

$$\sin(A) = C \text{ geeft}$$

$$A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$$

$$\cos(A) = C \text{ geeft}$$

$$A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi.$$

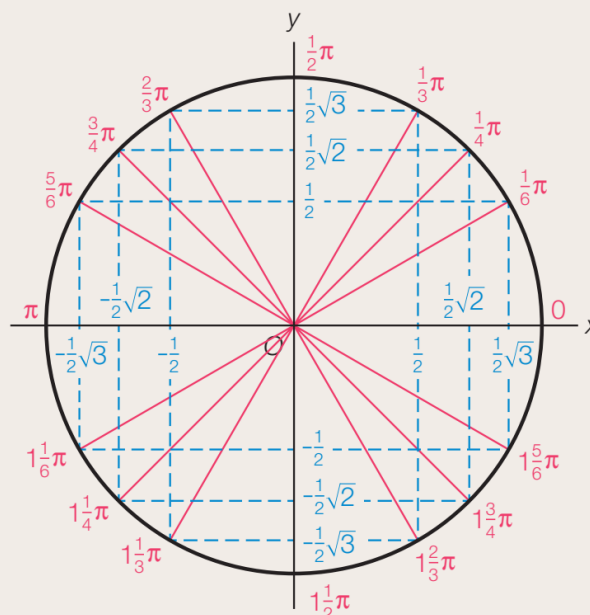
Bij type III gebruik je

$$\sin(A) = \sin(B) \text{ geeft}$$

$$A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$$

$$\cos(A) = \cos(B) \text{ geeft}$$

$$A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi.$$



Ook kun je sommige vergelijkingen met een tangens algebraïsch oplossen. Bij vergelijkingen van het type

$$\tan(A) = C \text{ met } C = -\sqrt{3}, -1, -\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0, \frac{1}{3}\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}$$

gebruik je dat de grafiek van $f(x) = \tan(x)$ periode π heeft en de volgende tabel.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Bij het exact oplossen van de vergelijking $\tan(A) = \tan(B)$ gebruik je

$$\tan(A) = \tan(B) \text{ geeft } A = B + k \cdot \pi.$$

V1 a Herleid de formule $y = \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ tot een formule van de vorm $y = \cos(ax + b)$.

b Herleid de formule $y = -\sin(3x - \frac{1}{4}\pi)$ tot een formule van de vorm $y = \cos(ax + b)$.

c Herleid de formule $y = \cos(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi)$ tot een formule van de vorm $y = \sin(ax + b)$.

d Herleid de formule $y = -\cos(2(x - \frac{1}{6}\pi))$ tot een formule van de vorm $y = \sin(ax + b)$.

V2 Bereken exact de oplossingen.

a $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 0$

b $\cos(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $\sin(2x) = \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$

d $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = \cos(x - \frac{1}{6}\pi)$

V3 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $\sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = -1$

b $\sin(x - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$

c $\sin(\frac{1}{2}x) = \sin(2x - \frac{1}{6}\pi)$

d $\cos(x + \frac{1}{4}\pi) = \cos(\frac{1}{2}x + \pi)$

O1



a De vergelijking $\sin(2x) + \sin(x) = 0$ is te herleiden tot $\sin(2x) = \sin(x + \pi)$.

Toon dit aan.

b De vergelijking $2\sin^2(x) = 3\cos(x)$ is te herleiden tot $2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 2 = 0$.

Toon dit aan.

Theorie A Formules gebruiken bij goniometrische vergelijkingen

Je kunt goniometrische formules gebruiken om vergelijkingen op te lossen.

Zo is de vergelijking $\sin(2x) + \sin(x) = 0$ met behulp van de formule $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$ te herleiden tot $\sin(2x) = \sin(x + \pi)$.

Daarna kun je gebruikmaken van de regel

$$\sin(A) = \sin(B) \text{ geeft } A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi.$$

Bij het algebraïsch oplossen van de vergelijking $2\sin^2(x) = 3\cos(x)$ gebruik je de formule $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ om $2\sin^2(x)$ uit te drukken in $\cos(x)$.

$$\text{Uit } \sin^2(A) + \cos^2(A) = 1 \text{ volgt } \sin^2(A) = 1 - \cos^2(A).$$

$$\text{Dus } 2\sin^2(x) = 2(1 - \cos^2(x)) = 2 - 2\cos^2(x).$$

Zie verder het voorbeeld op de volgende bladzijde.

Voorbeeld

Los exact op.

a $2 \sin^2(x) = 3 \cos(x)$

b $\sin(3x) = \sqrt{3} \cdot \cos(3x)$

Uitwerking

a $2 \sin^2(x) = 3 \cos(x)$

$$2(1 - \cos^2(x)) = 3 \cos(x)$$

$$2 - 2 \cos^2(x) = 3 \cos(x)$$

$$2 \cos^2(x) + 3 \cos(x) - 2 = 0$$

$$\text{Stel } \cos(x) = u.$$

$$2u^2 + 3u - 2 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25, \text{ dus } \sqrt{D} = 5$$

$$u = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \vee u = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \vee \cos(x) = -2$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

b $\sin(3x) = \sqrt{3} \cdot \cos(3x)$

$$\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = \sqrt{3}$$

$$\tan(3x) = \sqrt{3}$$

$$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

2 Gegeven is de vergelijking $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\cos(x + \frac{1}{3}\pi)$.

a Herleid de vergelijking tot de vorm $\sin(A) = \sin(B)$ en bereken exact de oplossingen.

b Bereken exact de oplossingen van de vergelijking door deze te herleiden tot de vorm $\cos(A) = \cos(B)$.

3 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos(2x)$

b $\sin(3x) = -\cos(x)$

c $\sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x) = 1$

d $\sin(\frac{1}{2}x) + \sqrt{3} \cdot \cos(\frac{1}{2}x) = 0$

4 Bereken exact de oplossingen in $[0, 3]$.

a $\cos(2\pi t) = \sin(\frac{1}{2}\pi t)$

b $\sin(\frac{1}{6}\pi t) = -\cos(\pi t)$

A5 Bereken exact de oplossingen

a in $[0, 2\pi]$ van $2 \sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) = 0$

b in $[0, 2\pi]$ van $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\cos(\frac{1}{2}x)$

c in $[0, 10]$ van $\cos(\frac{1}{4}\pi t) = -\sin(\frac{2}{5}\pi t)$

d in $[0, 10]$ van $\cos(\frac{1}{3}\pi x) = \sqrt{3} \cdot \sin(\frac{1}{3}\pi x)$.

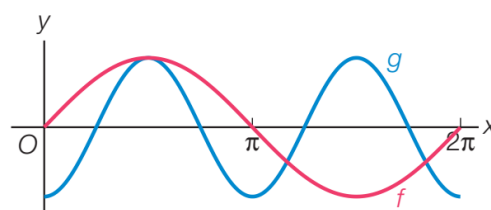
R6 Welke van de volgende vergelijkingen zijn exact op te lossen? Geef bij deze vergelijkingen de eerste stap van de uitwerking.

- a** $2 \sin(x) = \sin(x)$
- b** $\sin(2x) = \sin(x)$
- c** $2 \sin(x) = \cos(x)$
- d** $2 \sin(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$
- e** $\sin(2x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$
- f** $5 \sin(x) = \sin(5x)$

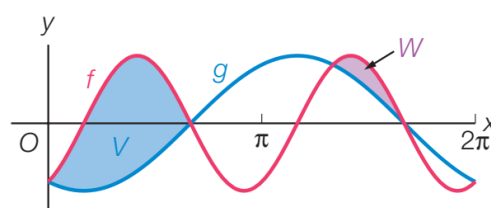
Niet elke goniometrische vergelijking is exact op te lossen.
Grafisch-numeriek oplossen kan altijd.

7 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = -\cos(2x)$, beide met domein $[0, 2\pi]$. Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken exact de oplossingen van $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- b** Bereken exact de oplossingen van $g(x) = \frac{1}{2}$.
- c** Los exact op $f(x) \leq g(x)$.

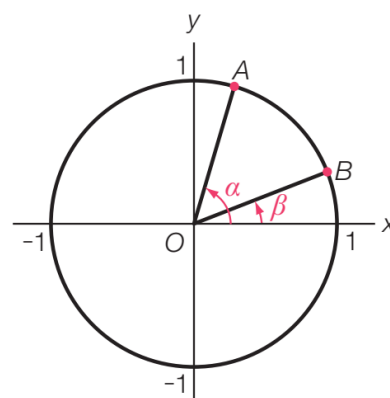


A8 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ en $g(x) = -\cos(x - \frac{1}{6}\pi)$, beide met domein $[0, 2\pi]$. De vlakdelen V en W worden ingesloten door de grafieken van f en g . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact hoeveel keer zo groot de oppervlakte is van het vlakdeel V als de oppervlakte van het vlakdeel W .



A9 Zie opgave 8.
***** De lijn $y = \frac{1}{2}$ verdeelt het vlakdeel V in twee delen. Bereken exact de oppervlakte van het kleinste van deze delen.

O10 Zie de figuur hiernaast met de eenheidscirkel, het punt A met draaiingshoek α en het punt B met draaiingshoek β . Gebruik de regel $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ om te bewijzen dat $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$.



Theorie B Verschil-, som- en verdubbelingsformules

In opgave 10 heb je bewezen dat

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Dit noteren we als $\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$.

Dit is een van de **verschilformules**.

Voor t en u kun je elke uitdrukking invullen.

Verschilformules

$$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$

In opgave 11 leid je beide **somformules** en de verschilformule van de sinus af.

Somformules

$$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$

Uit de somformules volgen de vier **verdubbelingsformules**. Deze leid je af in opgave 12.

Verdubbelingsformules

$$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$$

$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$$

$$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$$

$$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$$

De verdubbelingsformules staan evenals de som- en verschilformules op het formuleblad van het Centraal Eindexamen.

De verdubbelingsformules heb je soms nodig bij het oplossen van goniometrische vergelijkingen.

Bij de vergelijking $4\sin(x)\cos(x) = \sqrt{3}$ gebruik je de formule $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$.

$$\text{Dit geeft } 2\sin(2x) = \sqrt{3}$$

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

enzovoort.

Bij de vergelijking $\sin^2(2x) = \cos(4x) + 2$ gebruik je de formule

$$\sin^2(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x).$$
 Dit is een voorbeeld van de algemene

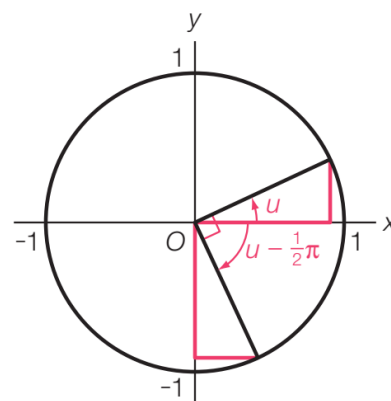
regel $\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$ die je in opgave 17 aantoot.

$$\text{Zo krijg je } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x) = \cos(4x) + 2$$

$$-1\frac{1}{2}\cos(4x) = 1\frac{1}{2}$$

enzovoort.

- 11** **a** Leid de somformule voor de cosinus af uit de verschilformule voor de cosinus door u te vervangen door $-u$.
- b** Leid de somformule voor de sinus af uit de somformule voor de cosinus door u te vervangen door $u - \frac{1}{2}\pi$ en te gebruiken dat $\sin(u - \frac{1}{2}\pi) = -\cos(u)$.
- c** Leid de verschilformule voor de sinus af uit de somformule voor de sinus.



- 12** **a** Leid de eerste twee verdubbelingsformules af uit de somformules door te nemen $t = A$ en $u = A$.
- b** Leid de andere twee verdubbelingsformules af door $\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$ te herleiden.

$\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$, dus
 $\cos^2(A) = 1 - \sin^2(A)$ en
 $\sin^2(A) = 1 - \cos^2(A)$.

- 13** Bewijs.
- a** $\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sin(x) - \cos(x))$
- b** $\sin(\frac{1}{12}\pi) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
- c** $\sin(x + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sin(x) + \cos(x))$
- d** $\sin(\frac{7}{12}\pi) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

- 14** **a** Bewijs dat $\cos(\frac{1}{12}\pi) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.
- * b** Bewijs dat $\sin(\frac{1}{8}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

- 15** **a** Herleid de formule $y = \cos(4x)\cos(x) + \sin(4x)\sin(x)$ tot de vorm $y = \cos(ax)$.
- b** Herleid de formule $y = \sin(1\frac{1}{2}x)\cos(x) - \cos(1\frac{1}{2}x)\sin(x)$ tot de vorm $y = \sin(ax)$.
- c** Herleid de formule $y = \cos(\frac{3}{4}x)\cos(1\frac{1}{4}x) - \sin(\frac{3}{4}x)\sin(1\frac{1}{4}x)$ tot de vorm $y = \sin(ax)$ of $y = \cos(ax)$.
- d** Herleid de formule $y = \sin(1\frac{1}{3}x)\cos(1\frac{2}{3}x) + \cos(1\frac{1}{3}x)\sin(1\frac{2}{3}x)$ tot de vorm $y = \sin(ax)$ of $y = \cos(ax)$.

- 16** Herleid de formule $y = \sin(x)(\sin(4x) - \sin(2x)) + \cos(x)(\cos(4x) + \cos(2x))$ tot de vorm $y = a\cos(bx)$.
- * b**

- 17** **a** Toon aan dat de formule $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$ te herleiden is tot $\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$.
- b** Toon aan dat de formule $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$ te herleiden is tot $\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$.

18 Bereken exact de oplossingen.



- a $2 \sin(x) \cos(x) = \sin(x - 1)$
- b $\cos^2(2x) = \cos(4x) + \frac{1}{2}$
- c $\sin^2(\frac{1}{2}x) = \cos(x) + 1\frac{1}{4}$
- d $(\sin(x) + \cos(x))^2 = 1\frac{1}{2}$

Je mag de formules die je in opgave 17 hebt aangetoond in het vervolg gebruiken.

19 Gegeven is de functie

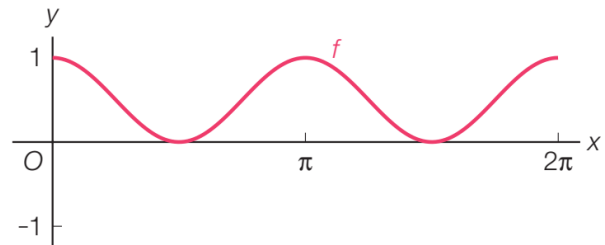


$$f(x) = \sin^2(x) + \cos(2x).$$

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f .

Gegeven is dat de grafiek een sinusoïde is.

- a Stel bij de grafiek een formule op van de vorm $y = a + b \cos(cx)$. Gebruik de vier kenmerken van een sinusoïde.
- b Bewijs dat de in a opgestelde formule juist is door de formule $y = \sin^2(x) + \cos(2x)$ te herleiden.



20 Bewijs dat $\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$. Gebruik $\sin(3x) = \sin(2x + x)$.



A21 a Herleid de formule $y = 1 - \cos(x) - \sin^2(\frac{1}{2}x)$ tot de vorm



$$y = a + b \cos(cx).$$

b Bewijs dat $\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$.

R22 Om bij $-\sin(2x)$ het minteken voor de sinus weg te werken, kun je de



formule $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$ gebruiken.

Je krijgt $-\sin(2x) = \sin(2x + \pi)$.

Welke formule kun je gebruiken om

- a bij $-\cos(2x)$ het minteken weg te werken
- b $\sin(2x)$ om te zetten in een vorm waarin geen sinus meer voorkomt
- c bij $\sin^2(2x)$ het kwadraat weg te werken
- d bij $\cos^2(3x)$ het kwadraat weg te werken
- e $\cos(4x)$ om te zetten in een vorm met $\sin(2x)$?

Claudius Ptolemaeus werd omstreeks het jaar 85 geboren in Egypte. Het belangrijkste werk van Ptolemaeus is de *Almagest*, het grootste astronomische meesterwerk uit de oudheid. De *Almagest* heeft zijn actualiteit nooit verloren. Hij bevat veel goniometrische formules. Enkele voorbeelden hiervan zijn de formules $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ en $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$.



Een aantal formules uit de *Almagest* is door Ptolemaeus zelf ontwikkeld. Opvallend is overigens dat de formule $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ pas in het jaar 980 voor het eerst opduikt in het werk van Abu'l-Wafa, een wiskundige en astronoom geboren in het huidige Iran.

Andere bekende geschriften van Ptolemaeus zijn *Planisphaericum* en *Geographia* waarin hij bijvoorbeeld de geografische begrippen lengte en breedte heeft beschreven.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan goniometrische formules gebruiken bij het algebraïsch oplossen van vergelijkingen.

► **OPGAVE C1**
THEORIE A

☐ Ik kan de verschil-, de som- en de verdubbelingsformules gebruiken bij het herleiden van formules en het algebraïsch oplossen van vergelijkingen.

► **OPGAVE C2**
THEORIE B

- C1** **a** Los de vergelijking $\sin(4x) = -\cos(x)$ exact op.
b Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$ van $2 \sin^2(x) + 7 \cos(x) + 2 = 0$.

- C2** **a** Herleid de formule $y = \cos(2x) - 3 \sin^2(x)$ tot de vorm $y = a + b \cos(cx)$.
b Los de vergelijking $\sin(2x) = 2 \cos^2(x)$ exact op.

Antwoorden

- C1** **a** $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = -\frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$
b $x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi$
C2 **a** $y = -1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\cos(2x)$
b $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

12.2 Goniometrische formules bij symmetrie en primitiveren

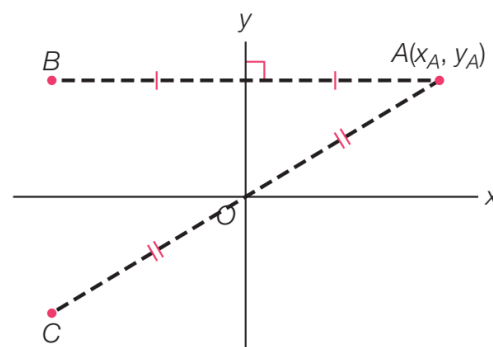
Kennis en vaardigheden

- Je kunt bewijzen dat de grafiek van een functie lijnsymmetrisch of puntsymmetrisch is.
- Je kunt de verdubbelingsformules gebruiken bij het berekenen van primitieven.

O23 Gegeven is het punt $A(x_A, y_A)$.

□ ⊗ * Door A te spiegelen in de y -as krijg je het punt B en door A te spiegelen in de oorsprong krijg je het punt C .

Druk de coördinaten van B en C uit in x_A en y_A .



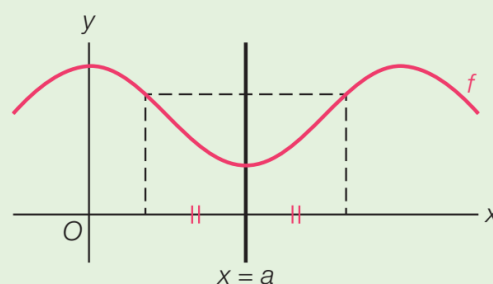
Theorie A Lijn- en puntsymmetrie

De grafiek van de functie f in de figuur hiernaast is **lijnsymmetrisch** in de lijn $x = a$.

Door op deze grafiek de translatie $(-a, 0)$ toe te passen, krijg je de grafiek van de functie g .

De grafiek van g is symmetrisch in de y -as.

Voor deze grafiek geldt $g(-x) = g(x)$ voor elke x van het domein.



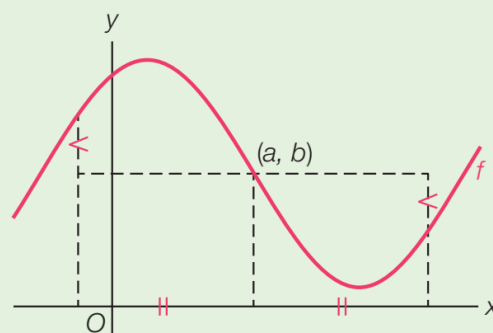
De grafiek van een functie f is lijnsymmetrisch in de y -as als voor elke x van het domein geldt $f(-x) = f(x)$.

De grafiek van de functie f in de figuur hiernaast is **puntsymmetrisch** in het punt (a, b) .

Door op deze grafiek de translatie $(-a, -b)$ toe te passen, krijg je de grafiek van de functie g .

De grafiek van g is symmetrisch in de oorsprong.

Voor deze grafiek geldt $g(-x) = -g(x)$ voor elke x van het domein.



De grafiek van een functie f is puntsymmetrisch in de oorsprong als voor elke x van het domein geldt $f(-x) = -f(x)$.

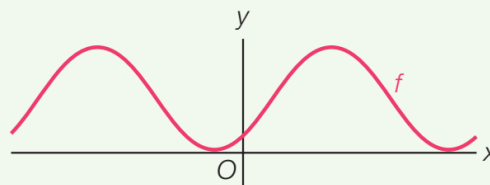
Om in voorbeeld a symmetrie in de lijn $x = \frac{3}{4}\pi$ te bewijzen, verschuiven we de grafiek van f over een afstand $\frac{3}{4}\pi$ naar links. Om in voorbeeld b symmetrie in het punt $(\frac{1}{4}\pi, 1\frac{1}{2})$ te bewijzen, verschuiven we de grafiek van f over een afstand $\frac{1}{4}\pi$ naar links en $1\frac{1}{2}$ omlaag.

Bij de bewijzen worden verder de somformules gebruikt en ook nog de formules $\cos(-A) = \cos(A)$ en $\sin(-A) = -\sin(A)$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + 1\frac{1}{2}$.

- a Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is in de lijn $x = \frac{3}{4}\pi$.
- b Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is in het punt $(\frac{1}{4}\pi, 1\frac{1}{2})$.



Uitwerking

- a Translatie van de grafiek van f over $(-\frac{3}{4}\pi, 0)$ geeft de grafiek van

$$g(x) = \sin(x + \frac{3}{4}\pi) - \cos(x + \frac{3}{4}\pi) + 1\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x)\cos(\frac{3}{4}\pi) + \cos(x)\sin(\frac{3}{4}\pi) - (\cos(x)\cos(\frac{3}{4}\pi) - \sin(x)\sin(\frac{3}{4}\pi)) + 1\frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(x) - (-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin(x)) + 1\frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin(x) + 1\frac{1}{2} \\ &= \sqrt{2}\cos(x) + 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$g(-x) = \sqrt{2}\cos(-x) + 1\frac{1}{2} = \sqrt{2}\cos(x) + 1\frac{1}{2}$$

Er geldt $g(-x) = g(x)$, dus de grafiek van g is symmetrisch in de y -as en hieruit volgt dat de grafiek van f symmetrisch is in de lijn $x = \frac{3}{4}\pi$.

- b Translatie van de grafiek van f over $(-\frac{1}{4}\pi, -1\frac{1}{2})$ geeft de grafiek van

$$h(x) = \sin(x + \frac{1}{4}\pi) - \cos(x + \frac{1}{4}\pi).$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \sin(x)\cos(\frac{1}{4}\pi) + \cos(x)\sin(\frac{1}{4}\pi) - (\cos(x)\cos(\frac{1}{4}\pi) - \sin(x)\sin(\frac{1}{4}\pi)) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(x) - (\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin(x)) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin(x) \\ &= \sqrt{2}\sin(x) \end{aligned}$$

$$h(-x) = \sqrt{2}\sin(-x) = -\sqrt{2}\sin(x)$$

Er geldt $h(-x) = -h(x)$, dus de grafiek van h is symmetrisch in de oorsprong en hieruit volgt dat de grafiek van f symmetrisch is in het punt $(\frac{1}{4}\pi, 1\frac{1}{2})$.

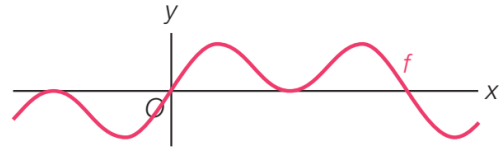
24 Bewijs dat de grafiek van

- a** de functie $f(x) = x \cos(x)$ symmetrisch is in de oorsprong
b de functie $g(x) = x \sin(x)$ symmetrisch is in de y -as.

25 Gegeven is de functie $f(x) = \cos^2(x) \sin(x)$.

a Bewijs dat de grafiek van f

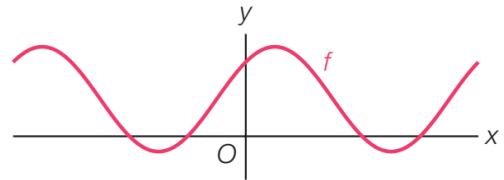
- a** symmetrisch is in O
b symmetrisch is in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.



A26 Bewijs dat de grafiek van de functie

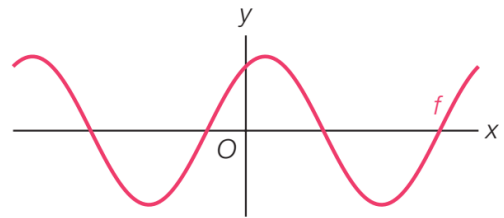
$f(x) = \cos(x) + \sin(x) + 1$

- a** symmetrisch is in de lijn $x = \frac{1}{4}\pi$
b symmetrisch is in het punt $(\frac{3}{4}\pi, 1)$.



A27 Onderzoek of de grafiek van de functie

$f(x) = \sin(x) + \sqrt{3} \cdot \cos(x)$ symmetrisch is in de lijn $x = \frac{1}{6}\pi$.



O28 Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x)$.

- a** Is $y = \frac{1}{3} \sin^3(x)$ een primitieve van f ? Licht toe.
b Druk $\sin^2(x)$ uit in $\cos(2x)$.
c Bereken de primitieven van f .

Theorie B Verdubbelingsformules en primitiveren

Van goniometrische functies die niet van de vorm $f(x) = a + b \sin(c(x - d))$ of $g(x) = a + b \cos(c(x - d))$ zijn, is het meestal niet eenvoudig de primitieven te vinden. Soms zijn deze functies met behulp van een verdubbelingsformule te herleiden tot een vorm die je wel kunt primitiveren.

Voorbeeld

Primitiveer $f(x) = \cos^2(4x)$.

Uitwerking

$$f(x) = \cos^2(4x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(8x) \text{ geeft}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \sin(8x) + c$$

$$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2A)$$

29 Primitiveer.



a $f(x) = \cos^2(x)$

b $g(x) = \sin^2(3x)$

c $h(x) = \sin(\frac{1}{2}x) \cos(\frac{1}{2}x)$

30 Bereken exact.



a $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \sin(2x) \cos(2x) dx$

b $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} (2 - \frac{1}{2}\sin^2(x)) dx$

31 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \sin(2x)$ met domein $[0, \frac{1}{2}\pi]$ en de x -as.

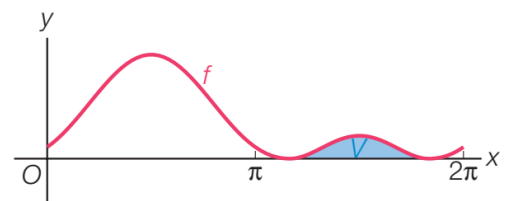


Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as.

A32 Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x) + \sin(x) + \frac{1}{4}$ met domein $[0, 2\pi]$.



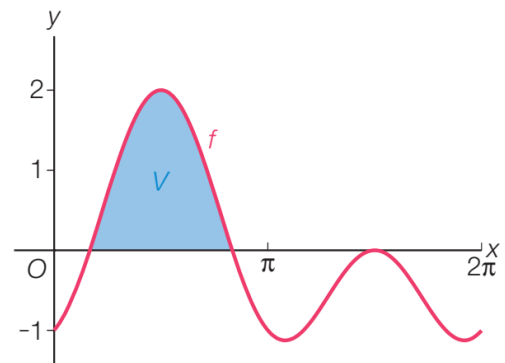
Het vlakdeel V in de figuur hiernaast wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as. Bereken exact de oppervlakte van V .



A33 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = 2\sin^2(x) + \sin(x) - 1$ met domein $[0, 2\pi]$ en het vlakdeel V .



- a** Bereken exact het bereik van f .
b Bereken exact de oppervlakte van V .

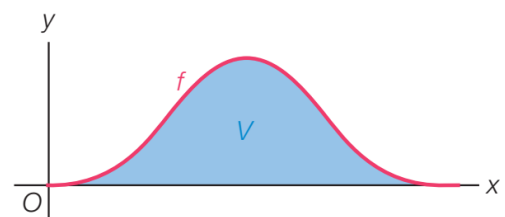


A34 Gegeven is de functie $f(x) = \sin^3(x)$ met domein $[0, \pi]$.



Een primitieve van f is $F(x) = \frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x)$.

- a** Bewijs dat $F(x) = \frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x)$ inderdaad een primitieve is van f .
b Het vlakdeel V in de figuur hiernaast wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as. Bereken exact de oppervlakte van V .
c De grafiek van de functie $g(x) = a + b\cos(x)$ raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = \frac{1}{3}\pi$. Bereken exact a en b .



- A35** Voor elke $p > 0$ is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = p \sin(\frac{1}{3}x) \cos(\frac{1}{3}x)$ met domein $[0, 1\frac{1}{2}\pi]$.
***** Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de grafiek van f_p en de x -as.
 Bereken exact voor welke p de oppervlakte van V_p gelijk is aan 10.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan bewijzen dat de grafiek van een functie lijnsymmetrisch of puntsymmetrisch is.

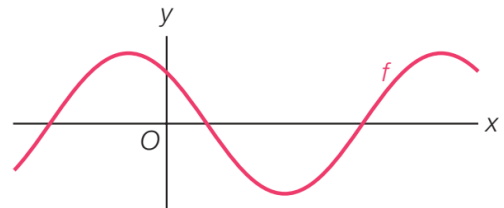
► **OPGAVE C3**
THEORIE A

☐ Ik kan de verdubbelingsformules gebruiken bij het berekenen van primitieven.

► **OPGAVE C4**
THEORIE B

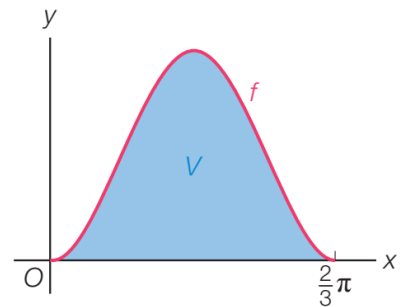
C3 Gegeven is de functie $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$.

- a** Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is in de lijn $x = \frac{3}{4}\pi$.
b Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is in het punt $(\frac{1}{4}\pi, 0)$.



C4 Gegeven is de functie $f(x) = 4 \sin^2(1\frac{1}{2}x)$ met domein $[0, \frac{2}{3}\pi]$.

Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafiek van f en de x -as.



Antwoorden

C3 a *

b *

C4 $1\frac{1}{3}\pi$

12.3 Eenparige cirkelbewegingen en harmonische trillingen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt berekeningen maken met bewegingsvergelijkingen die een eenparige cirkelbeweging beschrijven.
- Je kunt bij een harmonische trilling een formule opstellen en berekeningen maken waarbij je de begrippen frequentie en trillingstijd hanteert.

036
□ ⊙ *

Het punt P beweegt met constante snelheid over de eenheidscirkel. Op tijdstip $t = 0$ met t in seconden bevindt P zich in het punt $(1, 0)$.

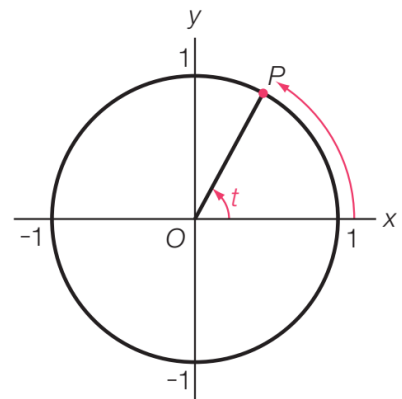
De bewegingsvergelijkingen van P zijn $\begin{cases} x_P(t) = \cos(t) \\ y_P(t) = \sin(t) \end{cases}$

a Na hoeveel seconden is P voor het eerst weer in het punt $(1, 0)$?

Op $t = \frac{1}{3}\pi$ is P in het punt A en op $t = \frac{5}{6}\pi$ is P in het punt B .

b Geef de exacte coördinaten van A en B en bereken hiermee exact de afstand tussen A en B .

c Uit $\angle AOB = \frac{1}{2}\pi$ volgt eenvoudig de afstand tussen A en B . Licht toe.



Theorie A Eenparige cirkelbewegingen

De punten P en Q bewegen met constante snelheid over de eenheidscirkel.

Voor P gelden de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x_P(t) = \cos(t) \\ y_P(t) = \sin(t) \end{cases}$

en voor Q gelden de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x_Q(t) = \cos(1\frac{1}{2}t) \\ y_Q(t) = \sin(1\frac{1}{2}t) \end{cases}$

Hierbij is t de tijd in seconden.

Omdat de snelheid constant is, heb je te maken met **eenparige cirkelbewegingen**.

De draairichting is positief en Q beweegt $1\frac{1}{2}$ keer zo snel als P .

De **omlooptijd** van P is 2π seconden en de omlooptijd van Q is

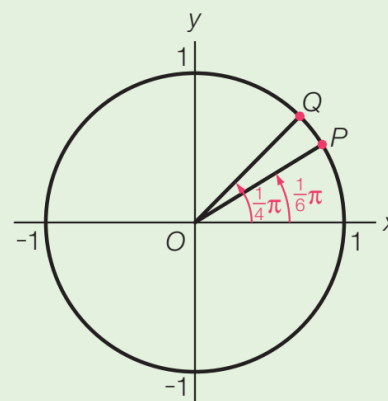
$$\frac{2\pi}{1\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\pi \text{ seconden.}$$

Op $t = \frac{1}{6}\pi$ is P in het punt $(\cos(\frac{1}{6}\pi), \sin(\frac{1}{6}\pi)) = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$
 en is Q in het punt $(\cos(1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\pi), \sin(1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\pi)) =$
 $(\cos(\frac{1}{4}\pi), \sin(\frac{1}{4}\pi)) = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

De afstand tussen P en Q op $t = \frac{1}{6}\pi$ is

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Afgerond op twee decimalen is dit 0,26.



Voorbeeld

Van de punten P en Q zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x_P(t) = \cos(t) \\ y_P(t) = \sin(t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_Q(t) = \cos(1\frac{1}{2}t) \\ y_Q(t) = \sin(1\frac{1}{2}t) \end{cases} \text{ met } t \text{ in seconden.}$$

Voor de afstand tussen P en Q geldt $PQ = \sqrt{2 - 2\cos(\frac{1}{2}t)}$.

Bewijs dit.

Uitwerking

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\cos(1\frac{1}{2}t) - \cos(t))^2 + (\sin(1\frac{1}{2}t) - \sin(t))^2 \\ &= \cos^2(1\frac{1}{2}t) - 2\cos(1\frac{1}{2}t)\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(1\frac{1}{2}t) - 2\sin(1\frac{1}{2}t)\sin(t) + \sin^2(t) \\ &= 2 - 2(\cos(1\frac{1}{2}t)\cos(t) + \sin(1\frac{1}{2}t)\sin(t)) \\ &= 2 - 2\cos(1\frac{1}{2}t - t) \\ &= 2 - 2\cos(\frac{1}{2}t) \end{aligned}$$

$$\text{Dus } PQ = \sqrt{2 - 2\cos(\frac{1}{2}t)}.$$

R37 Zie het voorbeeld.

□ ⊗ * Welke goniometrische formules zijn in de uitwerking gebruikt?

38 Zie het voorbeeld.

□ ⊗ * **a** Bereken exact voor welke t in $[0, 4\pi]$ de afstand tussen P en Q gelijk is aan 1.

b Bereken voor welke t in $[0, 4\pi]$ de afstand tussen P en Q groter is dan $1\frac{1}{2}$.

Rond af op twee decimalen.

De formule $PQ = \sqrt{2 - 2\cos(\frac{1}{2}t)}$ is te herleiden tot $PQ = 2|\sin(\frac{1}{4}t)|$.

c Bewijs dit.

d Bereken met de formule $PQ = 2|\sin(\frac{1}{4}t)|$ de afstand tussen P en Q op $t = \frac{1}{6}\pi$.

Geef het antwoord in twee decimalen.

39



Van de punten A en B zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(2t) \\ y_A(t) = \sin(2t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_B(t) = 3 \cos(t) \\ y_B(t) = 3 \sin(t) \end{cases} \text{ met } t \text{ in seconden en } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- a Bereken exact de afstand tussen A en B op $t = \frac{1}{4}\pi$.
- b Beredeneer dat de minimale afstand tussen A en B gelijk is aan 2 en dat de maximale afstand gelijk is aan 4. Voor welke waarden van t worden deze afstanden bereikt?

Voor de afstand tussen A en B geldt $AB = \sqrt{10 - 6 \cos(t)}$.

- c Bewijs dit.
- d Bereken exact voor welke t de afstand tussen A en B gelijk is aan $\sqrt{7}$.
- e Bereken voor welke t de afstand tussen A en B kleiner is dan 3. Rond zo nodig af op twee decimalen.

40



Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen van punt A van opgave 39.

- a De lijn $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ snijdt de baan van A in de punten P en Q . Bereken exact de lengte van het deel van de baan van A dat tussen P en Q ligt. Geef ook de afstand tussen P en Q .
- b De parabool $y = \frac{2}{3}x^2$ snijdt de baan van A in de punten R en S . Bereken exact de afstand tussen R en S .

A41



Van de punten P en Q zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x_P(t) = 2 \cos(t) \\ y_P(t) = 2 \sin(t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_Q(t) = \cos(2t) \\ y_Q(t) = \sin(2t) \end{cases} \text{ met } t \text{ in seconden.}$$

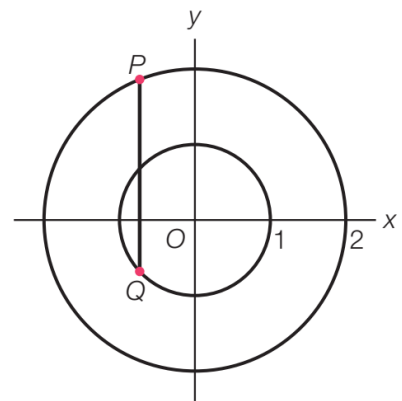
- a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan van P met de lijn $y = \frac{1}{3}x\sqrt{3}$.
- b Bereken exact de lengte van het deel van de baan van P dat rechts van de lijn $x = 1$ ligt.

Voor de afstand tussen de punten P en Q geldt $PQ = \sqrt{5 - 4 \cos(t)}$.

- c Bewijs dit.
- d Bereken exact hoeveel seconden per rondgang van P de afstand tussen P en Q groter is dan $\sqrt{3}$.

Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ zijn er twee situaties waarbij het lijnstuk PQ verticaal is. In de figuur hiernaast is een van deze situaties getekend.

- e Bereken voor deze situatie de waarde van t . Rond af op drie decimalen.
- f Teken de situatie voor de andere waarde van t .



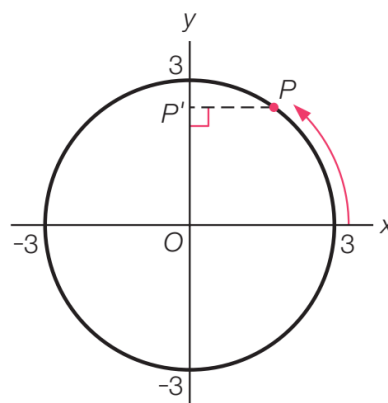
Het punt P doorloopt met constante snelheid de cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal 3. De draairichting is positief.

De bewegingsvergelijkingen van P zijn

$x_P(t) = 3 \cos(\frac{2}{5}\pi t)$ en $y_P(t) = 3 \sin(\frac{2}{5}\pi t)$, waarbij t de tijd in seconden is.

Het punt P' is de loodrechte projectie van P op de y -as.

Geef de formule van $y_{P'}$.



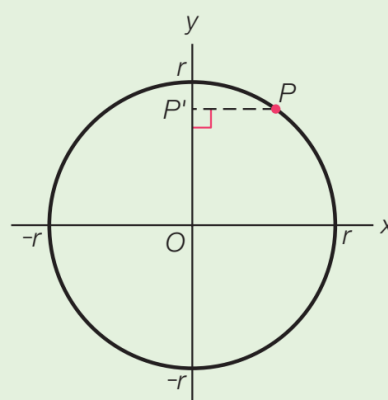
Theorie B Harmonische trillingen

Het punt P doorloopt de cirkel in de figuur hiernaast.

Hierbij voert de projectie P' van P op de y -as een **trilling** uit.

Doorloopt het punt P de cirkel met constante snelheid, dan voert het punt P' een **harmonische trilling** uit. In plaats van harmonische trilling zegt men ook wel **harmonische beweging**.

Bij een eenparige cirkelbeweging van een punt P hoort een harmonische trilling van de projectie P' van P op de y -as.



$PP' \perp y$ -as, dus P' is de projectie van P op de y -as.

De formule die de harmonische trilling van P' beschrijft is gelijk aan de formule van y_P . Bij een trilling spreekt men niet van omlooptijd, maar van **trillingstijd**. Bij een harmonische trilling is de trillingstijd dus gelijk aan de omlooptijd van de bijbehorende eenparige cirkelbeweging. Zo is bij de harmonische trilling die gegeven is door $u = 3 \sin(\frac{2}{5}\pi t)$ met t in seconden de trillingstijd 5 seconden.

De **frequentie** in hertz (Hz) is het aantal trillingen per seconde, dus de frequentie is $\frac{1}{5}$ Hz.

De **amplitude** bij deze trilling is 3.

In plaats van amplitude spreekt men bij trillingen ook wel over **maximale uitwijking**.

Bij een harmonische trilling met amplitude b en frequentie f waarbij op $t = 0$ de evenwichtsstand stijgend wordt gepasseerd, hoort een formule van de vorm $u = b \sin(ct)$ met $c = 2\pi f$ en t de tijd in seconden.

De trillingstijd is $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{c}$ seconden.

$$u = b \sin(2\pi ft)$$

$$u = b \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Voorbeeld

Het punt P voert een harmonische trilling uit die beschreven wordt door $u = 6 \sin(10\pi t)$. Hierin is u in cm en t in seconden.

- a Bereken de frequentie van P .
- b Hoeveel meter legt P af in één minuut?

Uitwerking

- a De frequentie is $\frac{10\pi}{2\pi} = 5$ Hz.
- b Per trilling is de afgelegde afstand $4 \cdot 6 = 24$ cm.
Er zijn 5 trillingen per seconde, dus per minuut zijn er $60 \cdot 5 = 300$ trillingen.
De afgelegde afstand in één minuut is $300 \cdot 24 = 7200$ cm = 72 m.

43 Het punt P voert een harmonische trilling uit die beschreven wordt door $u = 5 \sin(50\pi t)$. Hierin is u in cm en t in seconden.



- a Bereken de frequentie van P .
- b Hoeveel km legt P af in één kwartier?

44 Het punt P voert een harmonische trilling uit met amplitude 10 mm en frequentie 3 hertz. Op $t = 0$ wordt de evenwichtsstand stijgend gepasseerd.



Stel de formule die deze trilling beschrijft op in de vorm $u = b \sin(ct)$.
Neem u in mm en t in seconden.

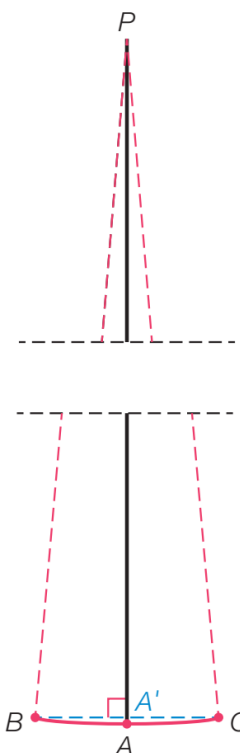
A45 In de figuur hiernaast zie je een schematische tekening van een slinger. Het punt A beweegt tijdens de slingerbeweging over boog BC van de cirkel met middelpunt P en straal $PA = l$.



Een uurwerk heeft een slinger met lengte $l = 1,00$ m.
De slingerhoek BPC is 10° .

- a Bereken de lengte van de boog BC . Geef het antwoord in meters in vier decimalen.
- b Bereken de lengte van het lijnstuk BC . Geef het antwoord in meters in vier decimalen.

Je ziet dat bij dit uurwerk de lengte van de boog BC vrijwel gelijk is aan de lengte van het lijnstuk BC . De slingerbeweging van het punt A mag daarom benaderd worden door een harmonische trilling van het punt A' langs het lijnstuk BC .



Men kan aantonen dat de trillingstijd T wordt gegeven door de formule $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$. Hierin is g de versnelling die wordt veroorzaakt door de zwaartekracht. Neem $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Neem aan dat de harmonische trilling beschreven wordt door een formule van de vorm $u = b \sin(ct)$ met u in meters en t in seconden.

- c** Bereken in twee decimalen de waarden van b en c .
- d** Iedere keer dat de slinger door de evenwichtsstand gaat, geeft de klok een tik.
Hoeveel tikken geeft de klok per seconde?

R46



De bewegingsvergelijkingen van het punt P zijn $\begin{cases} x(t) = b \cos(ct) \\ y(t) = b \sin(ct) \end{cases}$

De projectie van P op de x -as is P'' .

- a** Licht toe dat P'' een harmonische trilling uitvoert. Welke formule hoort bij deze trilling?
- b** Licht de volgende bewering toe.
De projectie van P op de lijn $y = x$ voert een harmonische trilling uit.

Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan berekeningen maken met bewegingsvergelijkingen die een eenparige cirkelbeweging beschrijven.
- ☐ Ik kan bij een harmonische trilling een formule opstellen en berekeningen maken waarbij ik de begrippen frequentie en trillingstijd hanteer.

► **OPGAVE C5**
THEORIE A

► **OPGAVE C6**
THEORIE B

C5 Van de punten P en Q zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x_P(t) = 4 \cos(\frac{2}{3}t) \\ y_P(t) = 4 \sin(\frac{2}{3}t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_Q(t) = \cos(3t) \\ y_Q(t) = \sin(3t) \end{cases} \text{ met } t \text{ in seconden en } 0 \leq t \leq \pi.$$

Voor de afstand tussen P en Q geldt $PQ = \sqrt{17 - 8 \cos(2\frac{1}{3}t)}$.

- a** Bewijs dit.
- b** Bereken exact voor welke t de afstand tussen P en Q gelijk is aan $\sqrt{13}$.

C6 Het punt P voert een harmonische trilling uit met amplitude 10 cm en frequentie 75 hertz. Op $t = 0$ wordt de evenwichtsstand stijgend gepasseerd.

- a** Stel de formule die deze trilling beschrijft op in de vorm $u = b \sin(ct)$.
Neem u in cm en t in seconden.
- b** Hoeveel km legt P af in 10 minuten?

Antwoorden

C5 a *
b $t = \frac{1}{7}\pi \vee t = \pi \vee t = \frac{5}{7}\pi$

C6 a $u = 10 \sin(150\pi t)$
b 18 km

12.4 Bewegingsvergelijkingen met goniometrische formules

Kennis en vaardigheden

- Je kunt berekeningen maken met bewegingsvergelijkingen met een sinus of een cosinus, die geen eenparige cirkelbeweging beschrijven.
- Je kunt bewijzen dat een bepaalde formule bij de grafiek van een gegeven parametervoorstelling hoort.
- Je kunt de bewegingsvergelijkingen opstellen bij een punt dat meebeweegt met een punt dat beweegt over een gegeven parameterkromme.

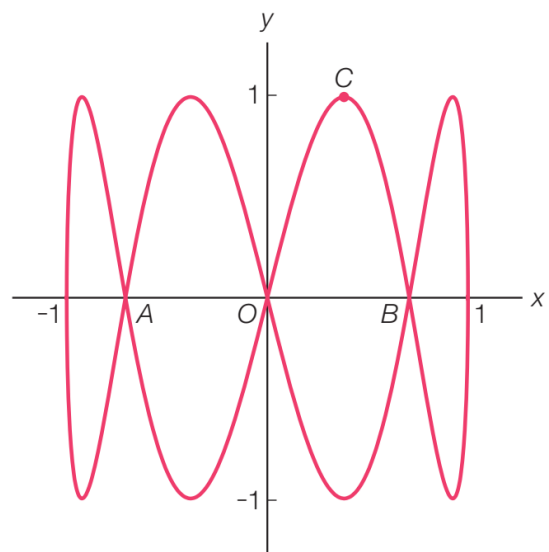
047



De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(4t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

De baan snijdt de x -as behalve in de oorsprong, $(-1, 0)$ en $(1, 0)$ ook in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact x_A en x_B .
- Afgerond op twee decimalen is de x -coördinaat van de top C gelijk aan 0,38. Bereken x_C in drie decimalen.



Theorie A Lengten, hoeken en snelheden

In deze paragraaf krijg je te maken met bewegingsvergelijkingen waarbij x en y functies zijn met een sinus of een cosinus en waarbij geen eenparige cirkelbeweging hoort. Neem je de parameter t in $\mathbb{R}$, dan wordt de baan oneindig vaak doorlopen. Daarom nemen we t vaak in een beperkt interval, bijvoorbeeld in $[0, 2\pi]$.

In opgave 47 heb je te maken met de bewegingsvergelijkingen

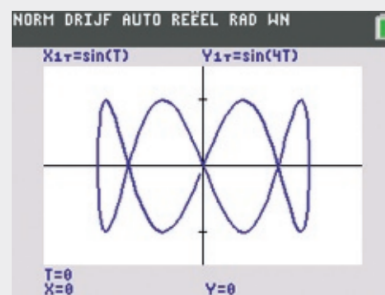
$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(4t) \end{cases}$$

De periode van $x(t) = \sin(t)$ is 2π en de periode van $y(t) = \sin(4t)$ is $\frac{1}{2}\pi$.

Daarom wordt de baan in $[0, 2\pi]$ één keer doorlopen.

Neem je t in $[0, 4\pi]$ dan wordt de baan twee keer doorlopen.

Op bladzijde 82 heb je kunnen lezen hoe je de baan van een parameterkromme kunt plotten op de GR. Ook de krommen in deze paragraaf kun je plotten met de instelling voor parametervoorstellingen. Om de kromme die gegeven is door $x(t) = \sin(t)$ en $y(t) = \sin(4t)$ te plotten, neem je t tussen 0 en 2π met een stapgrootte van bijvoorbeeld 0,05, en x en y bijvoorbeeld tussen -1,5 en 1,5.



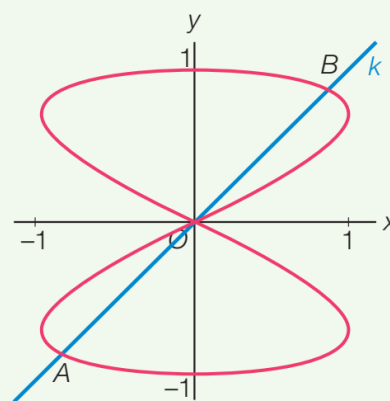
Voorbeeld

De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

De punten A en B zijn snijpunten van de baan met de lijn $k: y = x$. Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB .
- Bereken de hoek die de baan in B maakt met k . Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.



Uitwerking

- $x = \sin(2t)$ en $y = \sin(t)$ substitueren in $y = x$ geeft

$$\sin(t) = \sin(2t)$$

$$t = 2t + k \cdot 2\pi \vee t = \pi - 2t + k \cdot 2\pi$$

$$-t = k \cdot 2\pi \vee 3t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$t \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } t = 0 \vee t = 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \pi \vee t = \frac{2}{3}\pi$$

$t = 0$, $t = \pi$ en $t = 2\pi$ geven de oorsprong.

$$x(\frac{1}{3}\pi) = \sin(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en } x(\frac{2}{3}\pi) = \sin(\frac{4}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Dus } A(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}) \text{ en } B(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}).$$

$$AB = \sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$$

- $x(t) = \sin(2t)$ geeft $x'(t) = 2\cos(2t)$

$$y(t) = \sin(t) \text{ geeft } y'(t) = \cos(t)$$

$$\vec{v}(\frac{1}{3}\pi) = \begin{pmatrix} x'(\frac{1}{3}\pi) \\ y'(\frac{1}{3}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(\frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\frac{1}{3}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ en } \vec{r}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{-1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1}{\sqrt{1\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2\frac{1}{2}}} \text{ geeft } \varphi = 108,43\dots^\circ$$

De gevraagde hoek is $180^\circ - 108,43\dots^\circ \approx 71,6^\circ$.

48 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

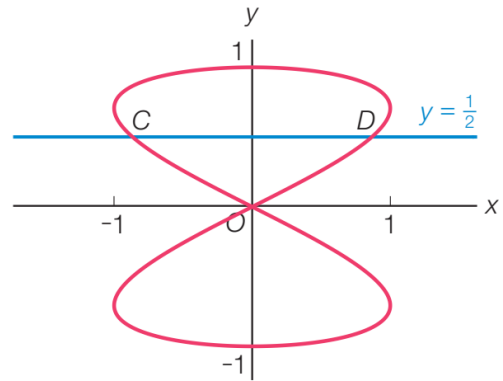


- a** Bewijs dat de baansnelheid van P in B gelijk is aan $\frac{1}{2}\sqrt{5}$.
- b** Bereken exact de baansnelheid van P in de oorsprong.
- c** Bereken de hoek die de baan in de oorsprong maakt met de x -as.
Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.

49 In de figuur hiernaast zie je nog eens de baan van het punt P van het voorbeeld op de vorige bladzijde. De baan snijdt de lijn $y = \frac{1}{2}$ in de punten C en D .



- a** Bereken exact de lengte van het lijnstuk CD .
- b** Bereken in graden in één decimaal de hoek die de baan in D maakt met de lijn $y = \frac{1}{2}$.
- c** Bereken de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt in de oorsprong. Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.
- d** Bereken algebraïsch de baanversnelling van P in D .
Rond af op twee decimalen.



50 De baan van een punt P is gegeven door



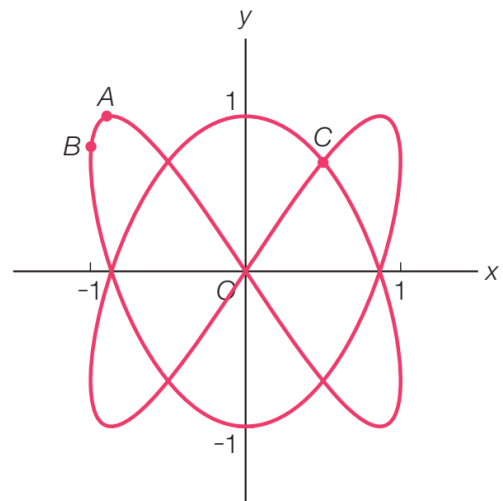
$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

In de figuur hiernaast zie je de baan van P . In het punt A is de raaklijn horizontaal en in het punt B is de raaklijn verticaal. In het punt C snijdt de baan zichzelf.

- a** Bereken exact de coördinaten van A en B .
- b** De lijn $y = x$ snijdt de baan van P behalve in de oorsprong nog in vier punten.
Bereken exact van deze punten de bijbehorende waarden van t .

De coördinaten van C zijn $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

- c** Bewijs dit.
- d** Bereken exact de baansnelheid van P in C .
- e** Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt in de oorsprong.



51



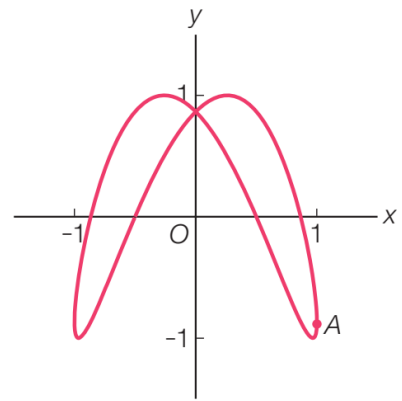
De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t - \frac{1}{6}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \text{ met } t \text{ in } [0, 2\pi].$$

Zie de figuur hiernaast.

In punt A is de raaklijn verticaal.

- Bereken exact de coördinaten van A .
- De lijn $x = \frac{1}{2}$ snijdt de baan in de punten B en C .
Bereken exact de lengte van het lijnstuk BC .
- Bereken exact de t -waarden van de snijpunten van de baan met de lijn $y = x$.
- De baan snijdt zichzelf in het punt $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.
Bereken de hoek waaronder dit gebeurt.
- Bereken exact de baansnelheid van P op $t = \frac{1}{3}\pi$.



52



De baan van een punt P is gegeven door

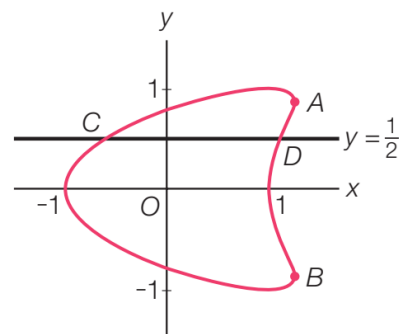
$$\begin{cases} x(t) = \sin^2(t) + \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Zie de figuur hiernaast.

In de punten A en B is de raaklijn verticaal.

De lijn $y = \frac{1}{2}$ snijdt de baan in de punten C en D .

- Bewijs dat de lengte van het lijnstuk AB gelijk is aan de lengte van het lijnstuk CD .
- Bereken exact de baansnelheid in D .
- Bereken de hoek die de baan in C maakt met de lijn $y = \frac{1}{2}$.
Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.



A53



De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t + \frac{1}{3}\pi) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

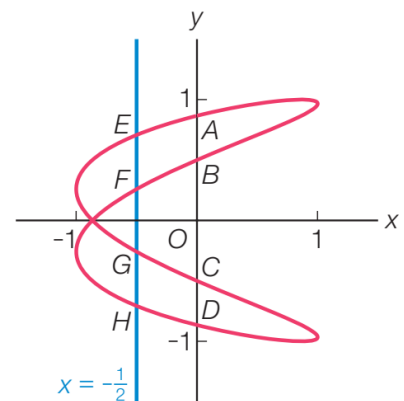
Zie de figuur hiernaast.

De snijpunten van de baan met de y -as zijn A , B , C en D .

- Bereken exact de coördinaten van A , B , C en D .

De lijn $x = -\frac{1}{2}$ snijdt de baan in de punten E , F , G en H .

- Bereken algebraïsch de lengte van het lijnstuk EH .
- Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de baan in B met de y -as maakt.
- Bereken exact de baansnelheid van P in E .



A54



Zie opgave 53.

Op $t = a$ bevindt P zich in het punt T en op $t = a + \pi$ in het punt U .

Er geldt $TU = |2 \sin(a + \frac{1}{3}\pi)|$.

- Bewijs dit.
- Bereken exact voor welke a geldt $TU = 1$.

055



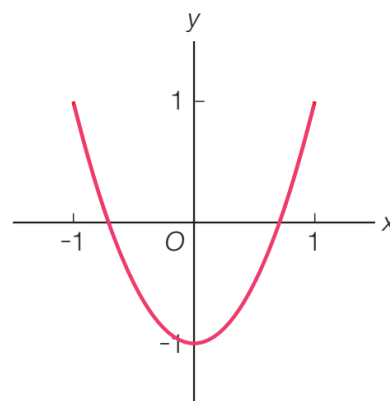
De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t + \frac{1}{4}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

De baan is getekend in de figuur hiernaast.

Er geldt $-1 \leq x \leq 1$ en $-1 \leq y \leq 1$.

- Hoe volgt dit uit de bewegingsvergelijkingen?
- Bereken voor welke t het punt P zich in het punt $(-1, 1)$ bevindt. En voor welke t bevindt P zich in het punt $(1, 1)$? En in het punt $(0, -1)$?
- Bij de grafiek hoort een formule van de vorm $y = px^2 + q$. Bereken p en q .



Theorie B Formules bij parametervoorstellingen

In opgave 55 heb je de formule $y = 2x^2 - 1$ gevonden. Om te bewijzen dat elk punt van de kromme met parametervoorstelling

$\begin{cases} x(t) = \sin(t + \frac{1}{4}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ op de parabool $y = 2x^2 - 1$ ligt, substitueer je $x = \sin(t + \frac{1}{4}\pi)$ in $2x^2 - 1$ en laat je zien dat dit $\sin(2t)$ oplevert.

Omdat $x(t) = \sin(t + \frac{1}{4}\pi)$ geldt $-1 \leq x \leq 1$, dus je krijgt maar een gedeelte van de parabool.

Voorbeeld

Bewijs dat bij de grafiek met parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = \sin(t + \frac{1}{4}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ de formule $y = 2x^2 - 1$ met $-1 \leq x \leq 1$ hoort.

Uitwerking

Substitutie van $x = \sin(t + \frac{1}{4}\pi)$ in $2x^2 - 1$ geeft

$$\begin{aligned} 2x^2 - 1 &= 2\sin^2(t + \frac{1}{4}\pi) - 1 \\ &= -(1 - 2\sin^2(t + \frac{1}{4}\pi)) \\ &= -\cos(2(t + \frac{1}{4}\pi)) \\ &= -\cos(2t + \frac{1}{2}\pi) \\ &= \cos(2t + 1\frac{1}{2}\pi) \\ &= \sin(2t + 2\pi) \\ &= \sin(2t) \text{ en dit is gelijk aan } y. \end{aligned}$$

Omdat $x = \sin(t + \frac{1}{4}\pi)$ geldt $-1 \leq x \leq 1$.

Dus bij de grafiek hoort de formule $y = 2x^2 - 1$ met $-1 \leq x \leq 1$.

R56**a** Zie opgave 55.

Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ worden gedeelten van de parabool vaker doorlopen. Neem je t in $\mathbb{R}$, dan doorloopt P voortdurend de parabool tussen de punten $(-1, 1)$ en $(1, 1)$.

Noem een interval voor t waarbij de hele kromme van links naar rechts één keer wordt doorlopen.

b Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

Welke goniometrische formules zijn gebruikt bij de herleiding van $2 \sin^2(t + \frac{1}{4}\pi) - 1$ tot $\sin(2t)$?

57

Bij de grafiek met parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = \sin(t - \frac{1}{4}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$

hoort de formule $y = -2x^2 + 1$ met $-1 \leq x \leq 1$.

Bewijs dit.

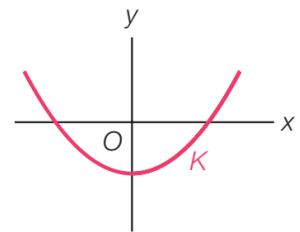
58

In de figuur hiernaast is de kromme K getekend die gegeven is

door $\begin{cases} x(t) = 2 \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t - \frac{1}{2}\pi) \end{cases}$

a Welke waarden kan x aannemen? En welke waarden kan y aannemen?**b** Welke formule hoort vermoedelijk bij K ?

Bewijs je vermoeden.

**A59**

De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$

Bij de baan van P hoort de formule $y^2 = 4x^2 - 4x^4$ met $-1 \leq x \leq 1$.

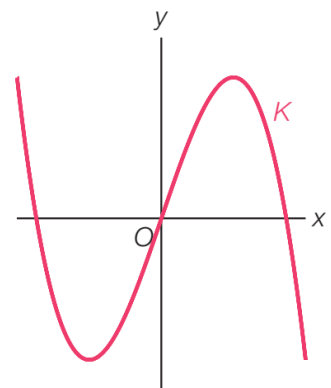
Bewijs dit.

A60

In de figuur hiernaast is de kromme K getekend die

gegeven is door $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$

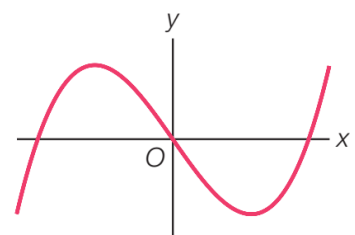
Bewijs dat alle punten van K op de grafiek van $y = 3x - 4x^3$ liggen. Druk hiertoe $\sin(3t)$ uit in $\sin(t)$.

**E61**

De baan van een punt P wordt beschreven door de bewegingsvergelijkingen $x(t) = 2 \cos(t)$ en $y(t) = \cos(3t)$. Zie de figuur hiernaast.

Bij de baan van P hoort een formule waarbij y is uitgedrukt in x .

Stel deze formule op.



062



De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x_P(t) = 2 \sin(t) \\ y_P(t) = 2 \sin(2t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq \pi.$$

Het lijnstuk OP is een zijde van vierkant $OPQR$. In de figuur hiernaast is dit vierkant voor twee verschillende waarden van t getekend.

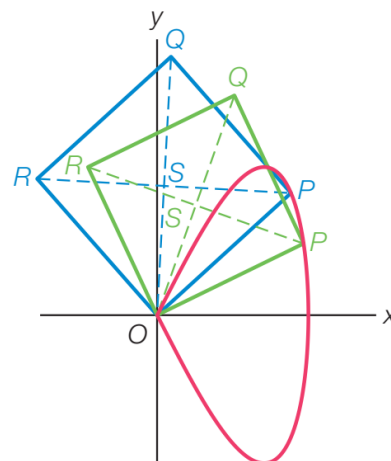
Het punt S is het midden van het vierkant.

Als P zijn baan beschrijft, beweegt S mee.

We vragen ons af wat de bewegingsvergelijkingen van S zijn.

$$\text{Er geldt } \vec{OS} = \frac{1}{2} \vec{OP} + \frac{1}{2} \vec{OP}_L.$$

Licht dit toe.



Theorie C Bewegingsvergelijkingen van meebewegende punten

In opgave 62 beschrijft het punt S een baan die afhangt van de baan van het punt P . Om de bewegingsvergelijkingen van de baan van S te vinden, gebruik je een rotatie van een vector over 90° . Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x_P(t) = 2 \sin(t) \\ y_P(t) = 2 \sin(2t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq \pi.$$

Het lijnstuk OP is de zijde van een vierkant zoals in de figuur hiernaast.

Het punt S is het midden van dit vierkant.

Stel de bewegingsvergelijkingen van S op.

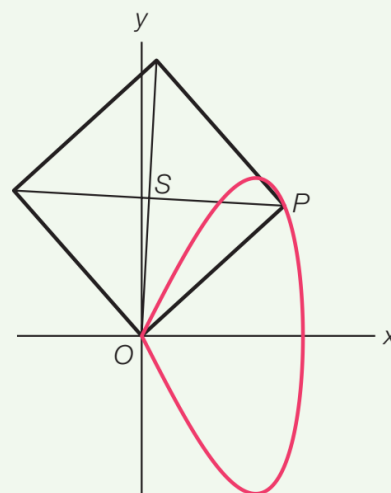
Uitwerking

$$\vec{OS} = \frac{1}{2} \vec{OP} + \frac{1}{2} \vec{OP}_L$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 \sin(t) \\ 2 \sin(2t) \end{pmatrix} \text{ geeft } \vec{OP}_L = \begin{pmatrix} -2 \sin(2t) \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix}$$

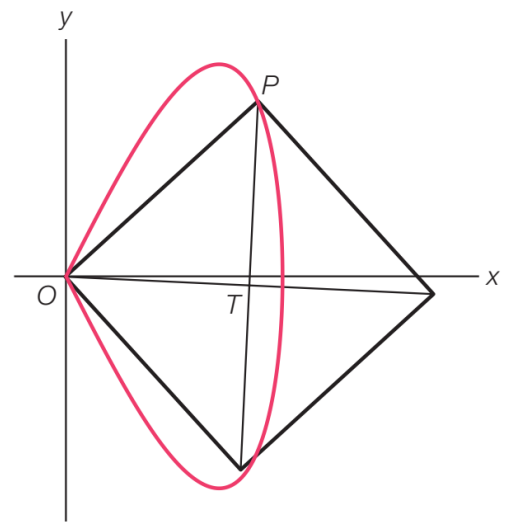
$$\vec{OS} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \sin(t) \\ 2 \sin(2t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin(2t) \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) - \sin(2t) \\ \sin(2t) + \sin(t) \end{pmatrix}$$

De bewegingsvergelijkingen van S zijn $\begin{cases} x_S(t) = \sin(t) - \sin(2t) \\ y_S(t) = \sin(2t) + \sin(t) \end{cases}$



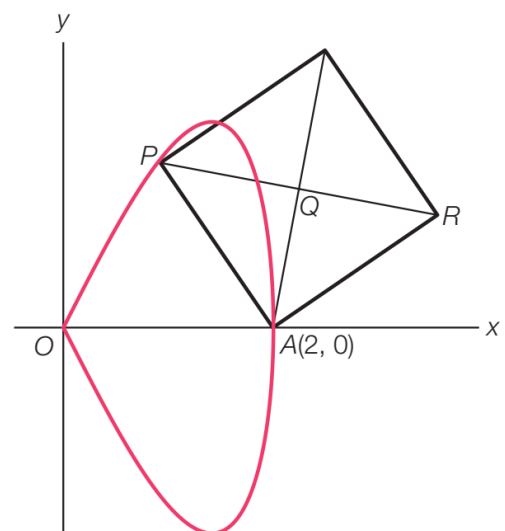
63 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

□ ⊙ * Nu wordt het vierkant aan de andere kant van het lijnstuk OP geplaatst zoals in de figuur hiernaast. Het punt T is het midden van dit vierkant. Stel de bewegingsvergelijkingen op van T en bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de baan van T met de x -as.



64 In de figuur hiernaast zie je nog eens de baan van het punt P van het voorbeeld op de vorige bladzijde. Verder is het punt $A(2, 0)$ getekend. Ook zie je een vierkant waarvan AP een zijde is. Het punt Q is het midden van dit vierkant.

- a** Stel de bewegingsvergelijkingen op van Q .
b In de figuur is ook het hoekpunt R van het vierkant getekend. De baan van R snijdt de lijn $y = 1$ twee keer. Bereken exact de coördinaten van de snijpunten.



65 De baan van een punt P is gegeven door

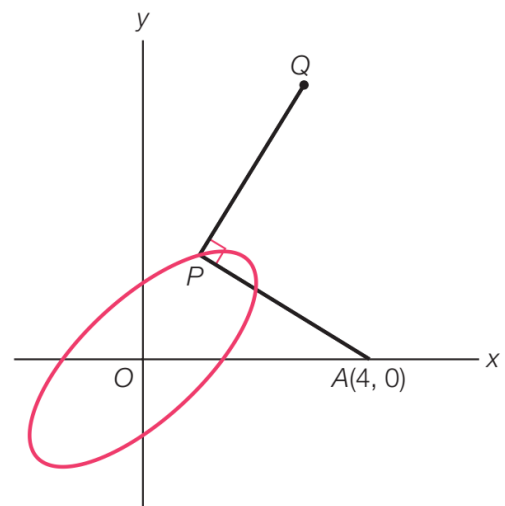
□ ⊙
$$\begin{cases} x_P(t) = 2 \sin(t) \\ y_P(t) = 2 \sin(t - \frac{1}{4}\pi) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Verder is gegeven het punt $A(4, 0)$. Het lijnstuk PQ met $PQ = AP$ staat loodrecht op AP zoals in de figuur hiernaast is getekend.

Als het punt P zijn baan beschrijft, beweegt Q mee. De bewegingsvergelijkingen van Q zijn

$$\begin{cases} x_Q(t) = 2 \sin(t) + 2 \sin(t - \frac{1}{4}\pi) \\ y_Q(t) = 2 \sin(t - \frac{1}{4}\pi) - 2 \sin(t) + 4 \end{cases}$$

- a** Bewijs dit.
b De baan van Q snijdt de y -as in de punten B en C . Bereken algebraïsch de afstand tussen B en C . Rond het eindantwoord af op twee decimalen.



A66 De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x_P(t) = 4 \cos(t) \\ y_P(t) = 6 \sin(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

In de figuur hiernaast zie je de baan van P .

Het lijnstuk AP met $A(4, 0)$ is de zijde van een vierkant zoals in de figuur is getekend.

Het punt S is het midden van dit vierkant.

De bewegingsvergelijkingen van S zijn

$$\begin{cases} x_S(t) = 2 + 3 \sin(t) + 2 \cos(t) \\ y_S(t) = 2 + 3 \sin(t) - 2 \cos(t) \end{cases}$$

a Bewijs dit.

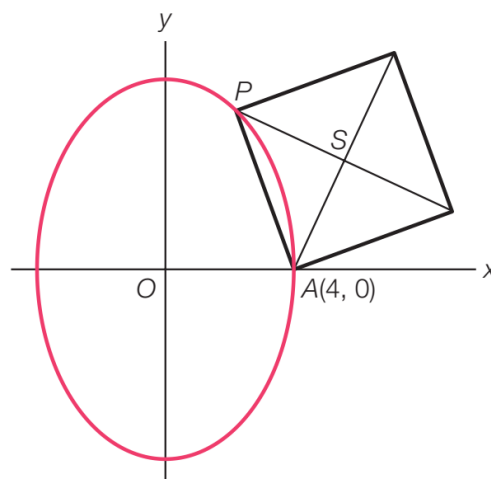
Bij de baan van P hoort de formule $9x^2 + 4y^2 = 144$.

b Bewijs dit.

c De lijn $y = x$ snijdt de baan van P in de punten B en C .

De lijn $y = x$ snijdt de baan van S in de punten D en E .

Bereken exact de coördinaten van B , C , D en E .



A67 De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x_P(t) = 2 \sin(2t) \\ y_P(t) = 2 \sin(t + \frac{1}{4}\pi) \end{cases} \text{ met } \frac{1}{4}\pi \leq t \leq 1\frac{1}{4}\pi.$$

In de figuur hiernaast zie je de baan van P .

Het lijnstuk OP is de zijde van een vierkant zoals in de figuur getekend. Het punt Q is het midden van dit vierkant.

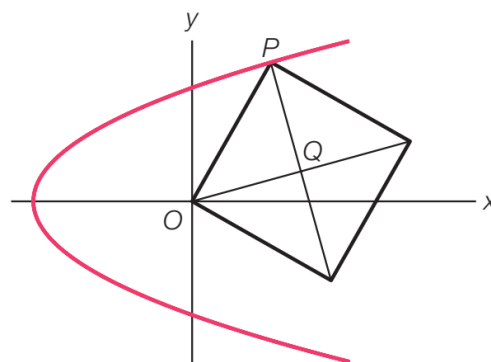
Als P zijn baan beschrijft, beweegt Q mee.

Het punt A is het punt waarin P voor de eerste keer de y -as passeert.

Het punt B is het punt waarin Q zich voor het eerst op de y -as bevindt.

De baansnelheid van P in A is $\frac{2}{5}\sqrt{15}$ keer zo groot als de baansnelheid van Q in B .

Bewijs dit.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan berekeningen maken met bewegingsvergelijkingen met een sinus of een cosinus, die geen eenparige cirkelbeweging beschrijven.
- ☐ Ik kan bewijzen dat een bepaalde formule bij de grafiek van een gegeven parametervoorstelling hoort.
- ☐ Ik kan de bewegingsvergelijkingen opstellen bij een punt dat meebeweegt met een punt dat beweegt over een gegeven parameterkromme.

► OPGAVE C7
THEORIE A

► OPGAVE C8
THEORIE B

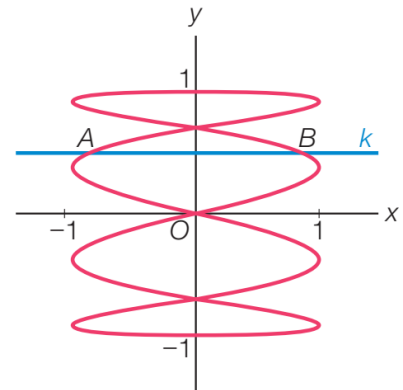
► OPGAVE C9
THEORIE C

C7 De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = \sin(4t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

De snijpunten van de baan met de lijn $k: y = \frac{1}{2}$ zijn A en B . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB .
- Bereken de hoek waaronder de baan lijn k snijdt in A . Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.
- Bereken exact de baansnelheid van P in A .



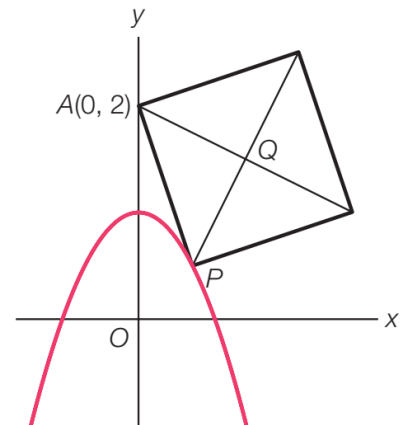
C8 Bij de grafiek met parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(2t + \pi) \end{cases}$ hoort de formule $y = 2x^2 - 1$ met $-1 \leq x \leq 1$. Bewijs dit.

C9 De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x_p(t) = \sin(t) \\ y_p(t) = \cos(2t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

In de figuur hiernaast zie je de baan van P . Verder zie je het punt $A(0, 2)$ en een vierkant waarvan AP een zijde is. Het punt Q is het midden van dit vierkant.

Als P zijn baan beschrijft, beweegt Q mee. Stel de bewegingsvergelijkingen op van Q .



Antwoorden

- C7** **a** $\sqrt{3}$
b $23,4^\circ$
c $\frac{1}{2}\sqrt{19}$

C8 *

C9 $\begin{cases} x_Q(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(2t) \\ y_Q(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(2t) \end{cases}$

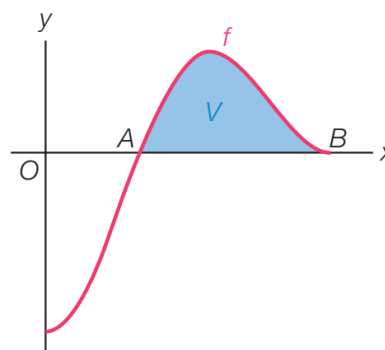
Kennis- en vaardighedentest

12.1 Goniometrische formules bij vergelijkingen en herleidingen

- 1** Bereken exact de oplossingen
 - a** in $[0, \pi]$ van $\sin(3x - \frac{1}{4}\pi) = \cos(2x)$
 - b** in $[0, 2\pi]$ van $2\cos^2(x) + \sin(x) = 1$
 - c** in $[0, 10]$ van $\cos(\frac{2}{5}\pi t) = -\sin(\frac{1}{6}\pi t)$.
- 2** Herleid de volgende formules tot de vorm $y = \sin(ax)$ of $y = \cos(ax)$.
 - a** $y = \sin(\frac{1}{2}x)\cos(\frac{1}{2}x) + \cos(\frac{1}{2}x)\sin(\frac{1}{2}x)$
 - b** $y = \sin(3x)\sin(5x) + \cos(3x)\cos(5x)$
- 3** Bereken exact de oplossingen.
 - a** $\sin(x + \frac{1}{3}\pi) = 2\sin(2x)\cos(2x)$
 - b** $\sin^2(2x) + \frac{1}{4} = \cos(4x)$
- 4**
 - a** Herleid de formule $y = \sin^2(2x) + 2\cos^2(2x) + 3\cos(4x)$ tot de vorm $y = a + b\cos(cx)$.
 - b** Herleid de formule $y = \sin(2x)\cos(2x) + 4\sin(4x) - 1$ tot de vorm $y = a + b\sin(cx)$.

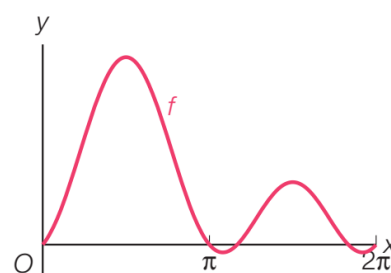
12.2 Goniometrische formules bij symmetrie en primitiveren

- 5**
 - a** Bewijs dat de grafiek van de functie $f(x) = \sin(2x) + \cos(x)$ symmetrisch is in het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$.
 - b** Bewijs dat de grafiek van de functie $g(x) = 2\sin^2(x)\cos(x)$ symmetrisch is in de lijn $x = \pi$.
- 6** Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 2\sin(x)$ met domein $[0, \pi]$ en de x -as. Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as.
- 7** De grafiek van de functie $f(x) = 1 - 2\cos^2(x) - \cos(x)$ met domein $[0, \pi]$ gaat door de punten $A(\frac{1}{3}\pi, 0)$ en $B(\pi, 0)$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as. Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de oppervlakte van V .



Gemengde opgaven

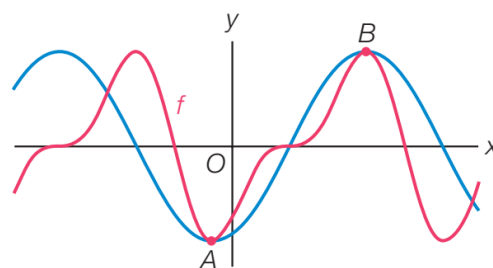
- 1** Gegeven is de functie $f(x) = 2\sin^2(x) + \sin(x)$ met domein $[0, 2\pi]$. Zie de figuur hiernaast.
- a** Bereken exact de oppervlakte van het grootste vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.
 - b** Bereken exact voor welke p de vergelijking $f(x) = p$ precies vier oplossingen heeft.



Op $[0, \pi]$ snijdt de grafiek van f van de lijn $y = q$ een lijnstuk met lengte $\frac{2}{3}\pi$ af.

- c** Bewijs dat de grafiek van f op het interval $[0, \pi]$ symmetrisch is.
- d** Bereken exact q .

- 2** In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \sin(2x) - 2\cos(x)$ met de toppen A en B . De punten A en B zijn ook twee opeenvolgende toppen van een sinusoïde met een formule van de vorm $y = a\cos(b(x - c))$. Deze sinusoïde is ook in de figuur getekend.



- a** Bereken exact mogelijke waarden van a , b en c .
- b** Het punt C is het eerste snijpunt van de grafiek van f met de x -as rechts van de y -as. Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is in C .

- 3** Het punt P beweegt over een cirkel. De bewegingsvergelijkingen

van P zijn
$$\begin{cases} x_P(t) = 2\cos(\frac{1}{4}\pi t) \\ y_P(t) = 2\sin(\frac{1}{4}\pi t) \end{cases} \text{ met } t \geq 0.$$

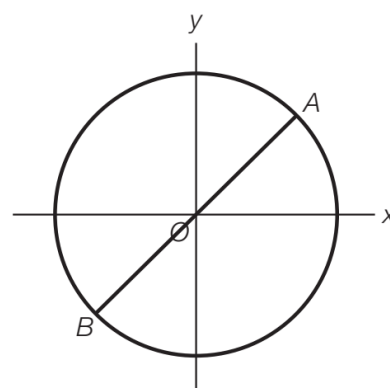
- a** Bewijs dat de snelheidsvector $\vec{v}(t)$ en de versnellingsvector $\vec{a}(t)$ in ieder punt van de cirkel loodrecht op elkaar staan.

De baan van een punt Q is gegeven door

$$\begin{cases} x_Q(t) = \sqrt{2}\sin(ct) \\ y_Q(t) = \sqrt{2}\sin(ct) \end{cases} \text{ met } t \geq 0 \text{ en } c > 0, \text{ zo dat } Q \text{ een}$$

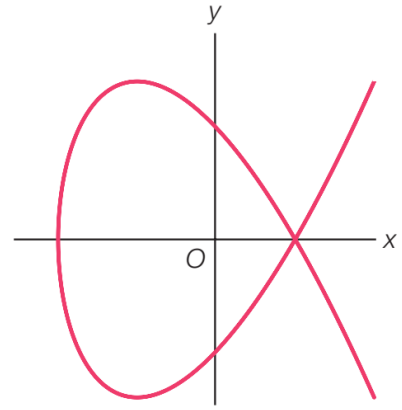
harmonische trilling uitvoert tussen de punten A en B die zich op de baan van P bevinden. Zie de figuur hiernaast.

- b** Bereken exact voor welke c de punten P en Q voor het eerst tegelijk in A zijn.
- c** Voor $t = t_P$ is P voor het eerst in B . Voor $t = t_Q$ is Q voor het eerst in B . Bereken exact voor welke c geldt $t_P < t_Q$.



- 4** De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases}$ met t in $[0, \pi]$. De baan van P is symmetrisch in de x -as. Zie de figuur hiernaast.

- Bereken in graden de hoek waaronder de baan van P zichzelf snijdt op de x -as.
- Stel een vergelijking op van de raaklijn k aan de baan in het snijpunt van de baan met de positieve y -as.
- Bereken exact de baansnelheid waarmee P de negatieve x -as passeert.
- De lijn $x = p$ snijdt de baan in de punten A en B waarbij $AB = 1$.
Bereken algebraïsch de mogelijke waarden van p .
Rond af op twee decimalen.



- 5** Van de punten P en Q zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x_P(t) = 4 \cos(5t) \\ y_P(t) = 4 \sin(5t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_Q(t) = 5 \cos(3t) \\ y_Q(t) = 5 \sin(3t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- Geef de maximale en de minimale afstand tussen P en Q .
Voor welke waarden van t worden deze afstanden bereikt?

Voor de afstand tussen P en Q geldt $PQ = \sqrt{1 + 80 \sin^2(t)}$.

- Bewijs dit.
- Bereken exact voor welke t de afstand tussen P en Q gelijk is aan $\sqrt{41}$.
- Bereken voor welke t het lijnstuk PQ voor de eerste keer evenwijdig is met de y -as. Rond af op twee decimalen.

- 6** De baan van een punt P is gegeven door

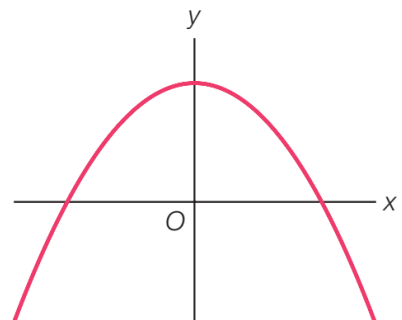
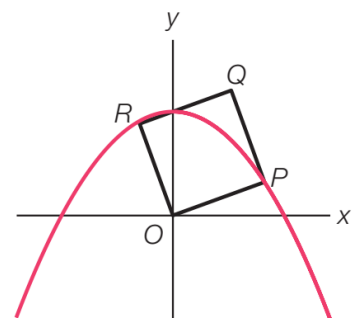
$$\begin{cases} x_P(t) = 3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi) \\ y_P(t) = 2 \cos(2t) \end{cases} \text{ met } t \text{ in } [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi].$$

Zie de figuur hiernaast.

- Bereken in graden in één decimaal de hoek waaronder de baan van P de positieve x -as snijdt.
- Bereken exact de baansnelheid waarmee P de positieve x -as passeert.
- De lijn k met richtingscoëfficiënt $1\frac{1}{3}\sqrt{2}$ raakt de baan van P in het punt A .
Stel op algebraïsche wijze de formule van k op.
- Bewijs dat de baan van P een deel van een parabool is.

Het lijnstuk OP is een zijde van het vierkant $OPQR$ zoals in de figuur hiernaast.

- Stel de bewegingsvergelijkingen op van Q .
- Bereken de oppervlakte van $OPQR$ op het moment dat Q de y -as passeert. Rond af op twee decimalen.





K

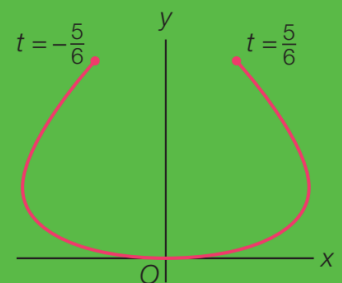
Voortgezette integraalrekening

De glasblazer Dale Chihuly maakt met zijn team allerlei kunstwerken van glas, waaronder manden. Hiernaast zie je het vooraanzicht van zo'n mand van glas. Het vooraanzicht is symmetrisch in de y -as. De kromme kan beschreven worden met de formules

$x = 2 \sin(\pi t)$ en $y = 4t^2$, met x en y in dm en $-\frac{5}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}$.

Het vlakdeel dat wordt ingesloten door de kromme en de lijn door de twee bovenste punten van de kromme noemen we V . Door V te wentelen om de y -as ontstaat het lichaam L . De inhoud van de mand krijg je door de inhoud van L te berekenen.

Hoeveel liter is de inhoud van de mand van glas?



K.1 De substitutiemethode

Kennis en vaardigheden

- Je kunt functies primitiveren met de substitutiemethode.
- Je kunt met behulp van de substitutiemethode integralen exact berekenen.

Voorkennis Regels voor het primitiveren

$$f(x) = a \text{ geeft } F(x) = ax + c$$

$$f(x) = x^n \text{ geeft } F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \text{ met } n \neq -1$$

$$f(x) = e^x \text{ geeft } F(x) = e^x + c$$

$$f(x) = g^x \text{ geeft } F(x) = \frac{g^x}{\ln(g)} + c$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ geeft } F(x) = \ln|x| + c$$

$$f(x) = \sin(x) \text{ geeft } F(x) = -\cos(x) + c$$

$$f(x) = \cos(x) \text{ geeft } F(x) = \sin(x) + c$$

$$\text{De primitieven van } f(ax + b) \text{ zijn } \frac{1}{a}F(ax + b) + c.$$

V1 Primitiveer.

a $f(x) = x^2 + \sin(x)$

c $f(x) = 4 \cdot 3^x$

b $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3}$

d $f(x) = 3e^{x+1}$

V2 Primitiveer.

a $f(x) = 4 \sin(\pi x)$

c $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$

b $f(x) = \frac{5}{(3x+1)^2}$

d $f(x) = \frac{4x+1}{2\sqrt{4x+1}}$

V3 Bereken exact.

a $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \sin(2x) dx$

b $\int_1^4 \frac{6}{2x-1} dx$

c $\int_0^4 6e^{\frac{1}{2}x-3} dx$

01 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x^2 + x)$.



a Toon aan dat $f'(x) = (2x + 1) \cos(x^2 + x)$.

b Licht toe dat $G(x) = \sin(x^2 + x) + 3$ een primitieve is van $g(x) = (2x + 1) \cos(x^2 + x)$.

Theorie A Primitiveren en de kettingregel

De afgeleide van de functie $f(x) = (x^2 + x)^5$ bereken je met de kettingregel. Je krijgt $f'(x) = 5(x^2 + x)^4(2x + 1)$.

Om de kettingregel te kunnen gebruiken bij het primitiveren van $g(x) = 5(x^2 + x)^4(2x + 1)$ gaan we omgekeerd te werk en noteren we dit als volgt.

$$\begin{aligned}\int 5(x^2 + x)^4(2x + 1) dx &= \int 5(x^2 + x)^4 d(x^2 + x) = \int 5(v(x))^4 dv(x) \\ &= (v(x))^5 + c = (x^2 + x)^5 + c\end{aligned}$$

Omdat $\frac{d(x^2 + x)}{dx} = 2x + 1$ is in de herleiding gebruikt dat $(2x + 1) dx$ gelijk is aan $d(x^2 + x)$.

In dit hoofdstuk gebruiken we u in plaats van $v(x)$.

De notatie wordt dan

$$\begin{aligned}\int 5(x^2 + x)^4(2x + 1) dx &= \int 5(x^2 + x)^4 d(x^2 + x) = \int 5u^4 du \\ &= u^5 + c = (x^2 + x)^5 + c.\end{aligned}$$

In de berekening hierboven is het integraalteken zonder grenzen gebruikt. Zo'n integraal heet een **onbepaalde integraal**. Een integraal met grenzen heet een bepaalde integraal.

De functie g is geïntegreerd met de **substitutiemethode**.

Substitueren betekent zoals je weet 'vervangen door'.

Bij het primitiveren van de functie g is $x^2 + x$ vervangen door u en daarmee lukte het primitiveren.

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2 + x)^5 = (v(x))^5 \\ \text{met } v(x) &= x^2 + x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &\text{ wordt ook} \\ &\text{genoteerd als } \frac{df(x)}{dx}. \\ f'(x) &= \frac{df(x)}{dx}, \text{ dus} \\ f'(x) dx &= df(x).\end{aligned}$$

Is u een functie van x dan geldt

$$\int f(u) \cdot u' dx = \int f(u) du = F(u) + c.$$

Voorbeeld

a Primitiveer $f(x) = 6x(x^2 + 1)^5$.

b Primitiveer $g(x) = \frac{10x^3}{\sqrt{x^4 + 7}}$.

Aanpak

a Je wilt $x^2 + 1$ achter het d-teken krijgen.

Omdat $d(x^2 + 1) = 2x dx$ schrijf je $6x$ als $3 \cdot 2x$.

b Je wilt $x^4 + 7$ achter het d-teken krijgen.

Omdat $d(x^4 + 7) = 4x^3 dx$ schrijf je $10x^3$ als $2\frac{1}{2} \cdot 4x^3$.

Uitwerking

a
$$F(x) = \int 6x(x^2 + 1)^5 dx = \int 3 \cdot (x^2 + 1)^5 \cdot 2x dx = \int 3(x^2 + 1)^5 d(x^2 + 1)$$
$$= \int 3u^5 du = \frac{1}{2}u^6 + c = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^6 + c$$

b
$$G(x) = \int \frac{10x^3}{\sqrt{x^4 + 7}} dx = \int 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^4 + 7}} \cdot 4x^3 dx$$
$$= \int \frac{5}{2\sqrt{x^4 + 7}} d(x^4 + 7) = \int \frac{5}{2\sqrt{u}} du = 5\sqrt{u} + c$$
$$= 5\sqrt{x^4 + 7} + c$$

$$[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ dus}$$
$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x}.$$

R2 Zie het voorbeeld.



a Waarom lukt het primitiveren van $f(x) = 6x(x^2 + 1)^5$ wel op deze manier en het primitiveren van $h(x) = 6x(x^3 + 1)^5$ niet?

b Waarom lukt het primitiveren van $g(x) = \frac{10x^3}{\sqrt{x^4 + 7}}$ wel op deze manier en het primitiveren van $k(x) = \frac{10x^3}{\sqrt{x^4 + x}}$ niet?

c Voor welke waarde van a lukt het primitiveren van $l(x) = \frac{10x^3 + a}{\sqrt{x^4 + x}}$?

3 In de uitwerking van voorbeeld b staat $4x^3 dx = d(x^4 + 7)$.



En zo is bijvoorbeeld $\sin(x) dx = d(-\cos(x) + 2)$.

Vul in.

a $3x^2 dx = d(\dots + 5)$

d $\dots dx = d \ln|x|$

b $\dots dx = d(x^5 - 3)$

e $(5 - 2x) dx = d(\dots + 5)$

c $\cos(2x) dx = d(\dots + \pi)$

f $\dots dx = d \frac{1}{2} \sin(4x)$

4 Primitiveer.

a $f(x) = 2x(x^2 + 4)^3$

b $g(x) = 6x\sqrt{x^2 + 1}$

c $h(x) = 6x^2(x^3 - 1)^4$

d $k(x) = x \cos(x^2 + 3)$

5 Primitiveer.

a $f(x) = x(3x^2 - 4)^3$

b $g(x) = 2x\sqrt{x^2 - 3}$

c $h(x) = \frac{6x}{3x^2 + 2}$

d $k(x) = 3x^2 \sin(x^3 - 1)$

A6 Primitiveer.

a $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

b $g(x) = xe^{-x^2}$

c $h(x) = x\sqrt{5 - x^2}$

d $k(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

07 Om de functie $f(x) = \tan(x)$ te primitiveren,noteren we deze als $f(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x)$.**a** Licht toe dat deze notatie juist is.**b** Licht toe dat $\int \tan(x) dx = \int -\frac{1}{\cos(x)} d\cos(x)$.**Theorie B Toepassingen van de substitutiemethode**Om de functie $f(x) = \tan(x)$ te primitiveren, gebruik je $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

en de substitutiemethode. Je krijgt

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int -1 \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot -\sin(x) dx \\
 &= \int -\frac{1}{\cos(x)} d\cos(x) = \int -\frac{1}{u} du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos(x)| + c
 \end{aligned}$$

$f(x) = \tan(x) \text{ geeft } F(x) = -\ln|\cos(x)| + c$

Ook de functie $g(x) = \sin^3(x)$ is te primitiveren met de substitutiemethode.Hiertoe herleid je $\sin^3(x)$ tot $(\cos^2(x) - 1) \cdot -\sin(x)$.

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \int \sin^3(x) dx = \int \sin^2(x) \cdot \sin(x) dx = \int -(1 - \cos^2(x)) \cdot -\sin(x) dx \\
 &= \int (\cos^2(x) - 1) d\cos(x) = \int (u^2 - 1) du = \frac{1}{3}u^3 - u + c \\
 &= \frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x) + c
 \end{aligned}$$

In het voorbeeld hieronder wordt $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3(x) dx$ met de substitutiemethode berekend. De grenzen $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$ horen bij de variabele x . Nadat is overgestapt op de variabele $u = \sin(x)$ moeten de grenzen van u bij de integraal worden genoteerd. Door een onbepaalde integraal te gebruiken is dit niet nodig.

Bij het berekenen van $\int_0^{\frac{1}{9}\pi} \tan(3x) dx$ krijg je niet te maken met de variabele u , omdat van $\tan(x)$ een primitieve bekend is. Je rekent dan op de gebruikelijke manier met een bepaalde integraal en krijgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{9}\pi} \tan(3x) dx &= \left[-\frac{1}{3} \ln|\cos(3x)| \right]_0^{\frac{1}{9}\pi} \\ &= -\frac{1}{3} \ln\left|\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right| + \frac{1}{3} \ln|\cos(0)| \\ &= -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \ln(1) \\ &= -\frac{1}{3} \ln(2^{-1}) + 0 = \frac{1}{3} \ln(2) \end{aligned}$$

$$\int_p^q f(ax+b) dx = \left[\frac{1}{a} F(ax+b) \right]_p^q$$

Voorbeeld

Bereken exact $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3(x) dx$.

Uitwerking

$$\begin{aligned} \int \cos^3(x) dx &= \int \cos^2(x) \cdot \cos(x) dx = \int (1 - \sin^2(x)) d\sin(x) \\ &= \int (1 - u^2) du = u - \frac{1}{3} u^3 + c = \sin(x) - \frac{1}{3} \sin^3(x) + c \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3(x) dx = \left[\sin(x) - \frac{1}{3} \sin^3(x) \right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = 1 - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right) = \frac{5}{24}$$

8 Bereken exact.



a $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \tan(2x) dx$

b $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \sin^3(x) dx$

c $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} dx$

A9 Primitieveer.



a $f(x) = \cos(x) - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$

b $g(x) = \sin^5(x)$

A10 Bereken exact.



a $\int_1^2 \frac{\ln^2(x)}{x} dx$

b $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx$

c $\int_0^1 \frac{x^2}{e^{2x^3}} dx$

11 Om $\int_0^5 x\sqrt{x+4} dx$ te berekenen met de substitutiemethode,



stel je $\sqrt{x+4} = u$.

a Licht toe dat uit $\sqrt{x+4} = u$ volgt $x = u^2 - 4$ en dat $\int x\sqrt{x+4} dx$ hiermee te schrijven is als $\int (u^2 - 4) \cdot u d(u^2 - 4)$.

b Toon aan dat $\int (u^2 - 4) \cdot u d(u^2 - 4) = \int (2u^4 - 8u^2) du$.

c Bereken exact $\int_0^5 x\sqrt{x+4} dx$.

12 **a** Bereken exact $\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx$ met behulp van de substitutie $\sqrt{x+1} = u$.



b Bereken exact $\int_0^7 \frac{5x}{\sqrt{x+9}} dx$ met behulp van de substitutie $\sqrt{x+9} = u$.

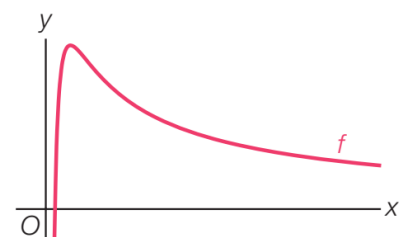
13 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}$.



a Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = e$.

b De oppervlakte van het vlakdeel dat ingesloten wordt door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = p$ met $p > 1$ is gelijk aan 6.

Bereken exact p .

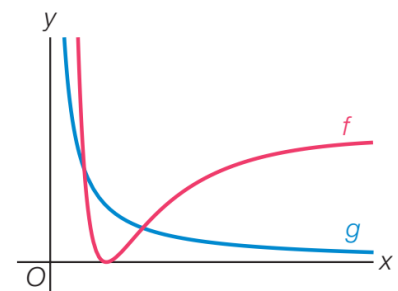


A14 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{4 \ln^2(x)}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x}$.



a Los exact op $f(x) \leq g(x)$.

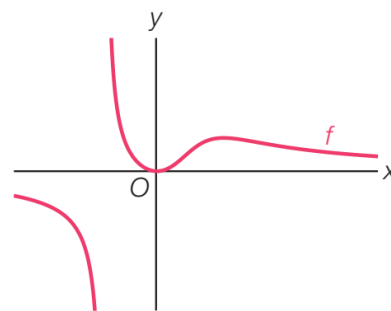
b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g .



A15 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 4}$.

□ ⊗ *

- a** Bereken exact de extreme waarden van f .
b De oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = p$ met $p > 0$ is gelijk aan 2. Bereken exact p .



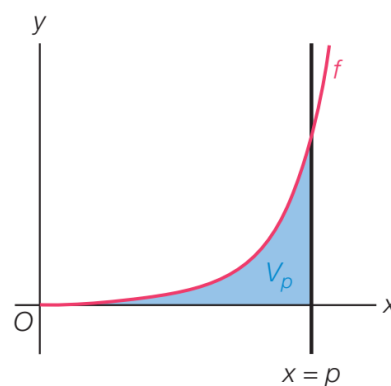
A16 Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{10}\sqrt{3x} \cdot e^{x^2}$, de x -as en de lijn $x = p$.

*

Zie de figuur hiernaast.

Het lichaam L_p ontstaat als V_p wentelt om de x -as.

Bereken exact voor welke p de inhoud van L_p gelijk is aan $3\frac{3}{10}\pi$. Schrijf het antwoord in de vorm $p = \sqrt{\ln(a)}$.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan functies primitiveren met de substitutiemethode.

☐ Ik kan met behulp van de substitutiemethode integralen exact berekenen.

► **OPGAVE C1**
THEORIE A

► **OPGAVE C2**
THEORIE B

C1 Primitiveer.

a $f(x) = 4x(x^2 - 3)^3$

b $g(x) = 4x\sqrt{x^2 + 1}$

C2 Bereken exact $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4(x) \cos(x) dx$.

Antwoorden

C1 a $F(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3)^4 + c$

b $G(x) = 1\frac{1}{3}(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} + c$

C2 $\frac{1}{5}$

R18 a Zie het eerste voorbeeld op de vorige bladzijde.

□ ⊗ *

Bewijs met partieel integreren dat $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} (\ln(x) - 2) + c$.

b Zie het tweede voorbeeld op de vorige bladzijde.

Onderzoek of het primitiveren van $h(x) = x \sin(x)$ ook lukt als je eerst de factor x primitiveert.

19 Primitiveer.

□ ⊗ *

a $f(x) = x e^{2x}$

c $f(x) = \ln(5x)$

b $f(x) = 2x \cos(x)$

d $f(x) = x \ln(x) + x$

20 Primitiveer $f(x) = e^{\sqrt{x}}$. Gebruik $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = d\sqrt{x}$.

*

21 Bereken exact.

□ ⊗ *

a $\int_0^1 2x e^{x+1} dx$

b $\int_0^{\pi} (3x + 1) \sin(x) dx$

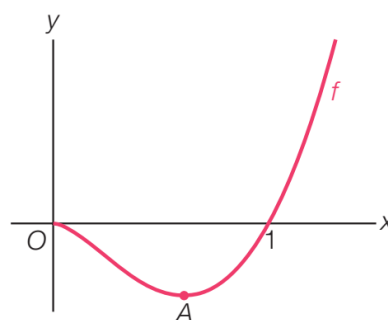
22 In de figuur zie je de grafiek van de functie

□ ⊗ *

$f(x) = x^2 \ln(x)$.

a Bereken exact de coördinaten van de top A .

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = e$.



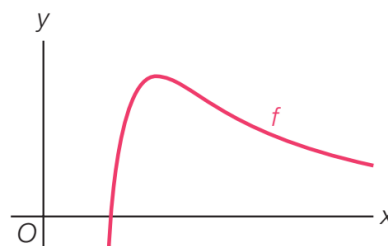
A23 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

□ ⊗ *

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f .

a Bereken exact het bereik van f .

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = e$.



O24 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 e^x$.

□ ⊗ *

a Laat zien dat $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$.

b Laat zien dat $\int 2x e^x dx = 2x e^x - 2e^x + c$.

c Toon aan dat uit a en b volgt dat de primitieven van f zijn $F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$.

Merk op dat de constante c in opgave 24b een andere is dan de constante c in opgave 24c. We gebruiken gemakshalve de letter c voor elke constante.

Theorie B Herhaald partieel integreren

In opgave 24 heb je gezien dat je een primitieve van de functie $f(x) = x^2 e^x$ kunt vinden door twee keer partieel te integreren. Na één keer partieel

integreren kreeg je $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$ en het berekenen van

$\int 2x e^x dx$ leverde $\int 2x e^x dx = 2x e^x - 2 e^x + c$.

Dus $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + c$ en dit geeft de primitieven

$$F(x) = (x^2 - 2x + 2) e^x + c.$$

Om de functie $g(x) = e^x \sin(x)$ te primitiveren, pas je ook twee keer partieel integreren toe.

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x) dx &= e^x \cdot -\cos(x) - \int e^x \cdot -\cos(x) dx \\ &= -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx \\ &= -e^x \cos(x) + e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \sin(x) dx \\ &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx\end{aligned}$$

Dus $\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx$.

Hieruit volgt $2 \int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x)$

oftewel $\int e^x \sin(x) dx = \frac{1}{2} e^x \sin(x) - \frac{1}{2} e^x \cos(x)$.

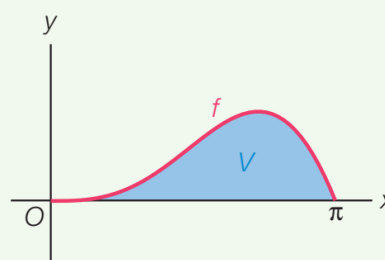
Dus de primitieven van $g(x) = e^x \sin(x)$ zijn $G(x) = \frac{1}{2} e^x (\sin(x) - \cos(x)) + c$.

Je ziet dat twee keer partieel integreren niet direct een primitieve oplevert, maar wel een vorm waaruit een primitieve is af te leiden.

Voorbeeld

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^2 \sin(x)$ met $D_f = [0, \pi]$.

Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.



Uitwerking

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin(x) dx &= x^2 \cdot -\cos(x) - \int 2x \cdot -\cos(x) dx \\ &= -x^2 \cos(x) + \int 2x \cos(x) dx \\ &= -x^2 \cos(x) + 2x \cdot \sin(x) - \int 2 \cdot \sin(x) dx \\ &= -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + c\end{aligned}$$

$\int 2x \cos(x) dx$ is eenvoudiger dan $\int x^2 \sin(x) dx$, dus doorgaan met partieel integreren.

$$\begin{aligned}O(V) &= \int_0^\pi x^2 \sin(x) dx = [-x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x)]_0^\pi \\ &= -\pi^2 \cdot -1 + 2\pi \cdot 0 + 2 \cdot -1 - (0 + 0 + 2 \cdot 1) = \pi^2 - 4\end{aligned}$$

R25 In de theorie op de vorige bladzijde is berekend dat $F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$ een primitieve is van $f(x) = x^2 e^x$. Dit is een voorbeeld van de algemene regel: $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ is een primitieve van $f(x) = (ax^2 + px + q)e^x$.

- a** Bewijs deze regel door de afgeleide te nemen van F en druk p en q uit in a , b en c .
b Bereken met deze regel de primitieven van $f(x) = (4x^2 - 5x + 6)e^x$.

R26 **a** Zie de theorie op de vorige bladzijde met $\int e^x \sin(x) dx$.
 Primitiveer $g(x) = e^x \sin(x)$ door eerst e^x te primitiveren.

- b** Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.
 Controleer de primitieve $F(x) = -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x)$ van $f(x) = x^2 \sin(x)$ met behulp van differentiëren.

27 Primitiveer.

- a** $f(x) = \frac{1}{4}x^2 \cos(x)$ **c** $h(x) = e^{2x} \sin(x)$
b $g(x) = e^{-x} \cos(x)$ **d** $k(x) = \ln^2(x)$

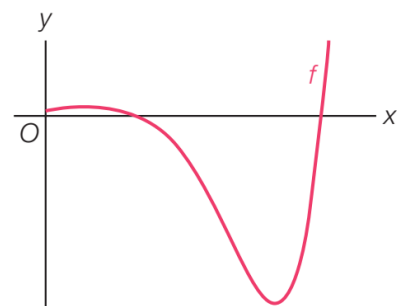
28 Bereken exact.

- a** $\int_1^3 (x^2 - x) e^x dx$ **b** $\int_1^e x \ln^2(x) dx$

A29 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie

a $f(x) = e^x \cos(x)$ met $D_f = [0, 2\pi]$.

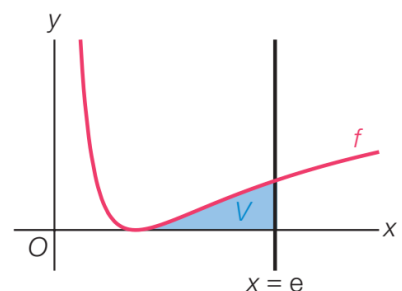
- a** Bereken algebraïsch de coördinaten van de twee toppen. Rond de y -coördinaten af op twee decimalen.
b De oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as is te schrijven in de vorm $a e^{b\pi}(e^\pi + 1)$.
 Bereken exact a en b .



A30 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = e$. Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken exact de oppervlakte van V .
b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de x -as wentelt.



Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan partieel integreren en hiermee integralen exact berekenen.

► **OPGAVE C3**
THEORIE A

☐ Ik kan herhaald partieel integreren en hiermee integralen exact berekenen.

► **OPGAVE C4**
THEORIE B

C3 a Primitieveer $f(x) = 4xe^{3x}$.

b Bereken exact $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \cos(x) dx$.

C4 a Bereken exact $\int_{-1}^1 (1 - x^2)e^x dx$.

b Primitieveer $f(x) = e^x \cos(2x)$.

Antwoorden

C3 a $F(x) = \frac{4}{9}e^{3x}(3x - 1) + c$

b $\frac{1}{2}\pi - 1$

C4 a $\frac{4}{e}$

b $F(x) = \frac{1}{5}e^x(2 \sin(2x) + \cos(2x)) + c$

K.3 Cyclometrische functies

Kennis en vaardigheden

- Je kunt werken met de functie $f(x) = \arctan(x)$.
- Je kunt functies die te herleiden zijn tot de vorm $f(x) = \frac{p}{(ax + b)^2 + 1}$ primitiveren.
- Je kunt werken met de functie $f(x) = \arcsin(x)$.
- Je kunt functies die te herleiden zijn tot de vorm $f(x) = \frac{p}{\sqrt{1 - (ax + b)^2}}$ primitiveren.

031



Gegeven is de functie $f(x) = \tan(x)$.

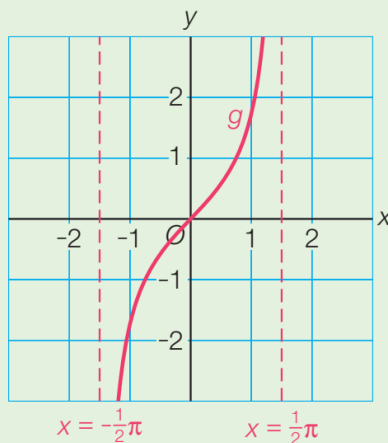
a Licht toe dat f geen inverse heeft op het interval $\langle 0, 2\pi \rangle$.

b Noem een zo groot mogelijk interval waarop f wel een inverse heeft.

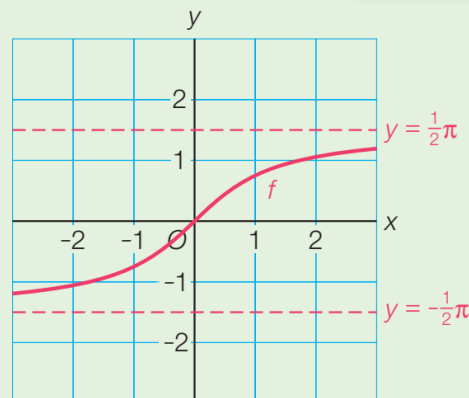
Theorie A De functie $f(x) = \arctan(x)$

In de figuur hier linksonder is de grafiek van $g(x) = \tan(x)$ met $D_g = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ getekend. Omdat op het interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ elke functiewaarde maar één keer voorkomt, heeft de functie $g(x) = \tan(x)$ met $D_g = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ een inverse functie g^{inv} . Deze inverse functie noteren we als $f(x) = g^{\text{inv}}(x) = \arctan(x)$. Spreek uit arctangens x . De functie $f(x) = \arctan(x)$ is een **cyclometrische functie**. De grafiek van f is in de figuur hier rechtsonder getekend.

Je hebt met een functie te maken als bij elke x uit het domein van de functie precies één functiewaarde hoort.

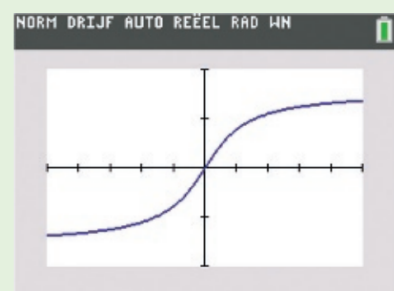


De functie $g(x) = \tan(x)$ met $D_g = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ heeft een inverse.



De functie $f(x) = \arctan(x)$ heeft $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

Je kunt de grafiek van $f(x) = \arctan(x)$ plotten door in te voeren $y = \tan^{-1}(x)$. Op het GR-scherm hiernaast is x tussen -5 en 5 en y tussen -2 en 2 gekozen.



De functie $f(x) = \arctan(x)$ is de inverse van de functie $g(x) = \tan(x)$ met $D_g = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.
Er geldt $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

Voorbeeld

- a** Bereken exact $\arctan(\frac{1}{3}\sqrt{3})$.
b Los algebraïsch op $\arctan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Rond af op drie decimalen.

Uitwerking

a $\arctan(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{1}{6}\pi$ $\tan(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ en $-\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{6}\pi < \frac{1}{2}\pi$

b $\arctan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$x = \tan(\frac{1}{3}\sqrt{3}) \leftarrow \boxed{t = \arctan(x) \text{ geeft } x = \tan(t)}$
 $x \approx 0,651$

De **arctangensfunctie** gebruiken we om de functie $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ te primitiveren.

Substitutie van $x = \tan(t)$ in $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx$ geeft $\int \frac{1}{\tan^2(t) + 1} d\tan(t)$.

Omdat $\frac{d\tan(t)}{dt} = \tan^2(t) + 1$ vervangen we $d\tan(t)$ door $(\tan^2(t) + 1) dt$.

Je krijgt $\int \frac{1}{\tan^2(t) + 1} d\tan(t) = \int \frac{\tan^2(t) + 1}{\tan^2(t) + 1} dt = \int 1 dt = t + c$.

Uit $x = \tan(t)$ volgt $t = \arctan(x)$ en dus $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x) + c$.

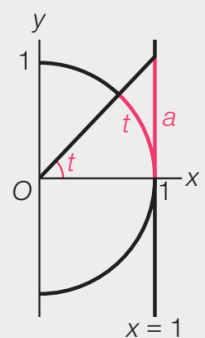
$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ geeft $F(x) = \arctan(x) + c$

$g(x) = \arctan(x)$ geeft $g'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Informatief Arcus en cyclometrisch

Arc in de cyclometrische functie arctangens komt van het Latijnse woord arcus, dat boog betekent. Het gebruik van het begrip boog is als volgt te verklaren. Op de eenheidscirkel hoort bij een hoek van t radialen een boog met lengte t . Is $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$ en stel je $\tan(t) = a$, dan is t de boog (arcus) waarvan de tangens a is, dus $t = \arctan(a)$.

Het woord cyclometrisch komt van het Griekse woord kuklos, dat cirkel betekent, en metrein, dat meten betekent.



Voorbeeld

a Differentieer $f(x) = \arctan(x^2 + 1)$.

b Bereken exact $\int_0^{\frac{1}{4}\sqrt{3}} \frac{1}{16x^2 + 1} dx$.

Uitwerking

a $f(x) = \arctan(x^2 + 1)$ geeft

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 1 + 1} = \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad \int_0^{\frac{1}{4}\sqrt{3}} \frac{1}{16x^2 + 1} dx &= \int_0^{\frac{1}{4}\sqrt{3}} \frac{1}{(4x)^2 + 1} dx = \left[\frac{1}{4} \arctan(4x) \right]_0^{\frac{1}{4}\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{4} \arctan(\sqrt{3}) - \frac{1}{4} \arctan(0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}\pi - 0 = \frac{1}{12}\pi \end{aligned}$$

R32 **a** Waarom is $\arctan(\frac{1}{3}\sqrt{3})$ niet gelijk aan $1\frac{1}{6}\pi$, terwijl $\tan(1\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$?

b Waarom is $x = \tan(\sqrt{3})$ geen oplossing van de vergelijking $\arctan(x) = \sqrt{3}$?

c Zie voorbeeld a hierboven.

Geef een primitieve van de functie $g(x) = \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$.

d Zie de uitwerking van voorbeeld b hierboven.

Licht de factor $\frac{1}{4}$ in de primitieve toe.

33 Vul de tabel in en leer hem uit het hoofd.

□ ⊗ *

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$							

34 Los algebraïsch op. Rond zo nodig af op drie decimalen.

□

a $\arctan(x) = \frac{1}{3}\pi$

c $\arctan(x^2 - 1) = \frac{1}{4}\pi$

e $\arctan(x) = \sqrt{2}$

b $\arctan(x - 2) = -\frac{1}{4}\pi$

d $\arctan(x) = \frac{2}{3}\pi$

f $\arctan(x^2 - 1) = 1$

35 Differentieer.

□

a $f(x) = 2 \arctan(\frac{1}{2}x)$

b $g(x) = \arctan(x - 2)$

c $h(x) = \arctan(x^2)$

36 Bereken exact.

□

a $\int_{-\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx$

b $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx$

c $\int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{3}{9x^2 + 1} dx$

37 a Los de vergelijking $\arctan(2x - 1) = \frac{1}{6}\pi$ exact op.

⊙* b Los de vergelijking $\arctan(1\frac{1}{2}\pi + \sqrt{x}) = \sqrt{2}$ algebraïsch op.
Rond af op twee decimalen.

c Differentieer $f(x) = \arctan(2x^2 + 1)$.

d Bereken exact $\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}\sqrt{3}} \frac{10}{25x^2 + 1} dx$.

038 Om de primitieven van de functie $f(x) = \frac{10}{x^2 + 4}$ te berekenen,

□⊙*

schrijf je het functievoorschrift in de vorm $f(x) = \frac{a}{(bx)^2 + 1}$.

a Bereken a en b .

b Primitiveer f .

Theorie B De arctangensfunctie en primitiveren

Om de functie $f(x) = \frac{24}{9x^2 + 4}$ te primitiveren, gebruik je

$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan(u) + c$ en dat $\frac{1}{a}F(ax + b)$ een primitieve is van $f(ax + b)$.

$$\begin{aligned}\text{Zo krijg je } F(x) &= \int \frac{24}{9x^2 + 4} dx = \int \frac{6}{\frac{9}{4}x^2 + 1} dx = \int 6 \cdot \frac{1}{(\frac{3}{2}x)^2 + 1} dx \\ &= 6 \cdot \frac{2}{3} \arctan(\frac{3}{2}x) + c = 4 \arctan(1\frac{1}{2}x) + c.\end{aligned}$$

Voorbeeld

Bereken exact $\int_0^2 \frac{6}{x^2 - 4x + 8} dx$.

Aanpak

Herleid $\frac{6}{x^2 - 4x + 8}$ tot de vorm $\frac{p}{(ax + b)^2 + 1}$.

Gebruik hierbij kwadraatafsplitsen.

Uitwerking

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{6}{x^2 - 4x + 8} dx &= \int_0^2 \frac{6}{(x - 2)^2 - 4 + 8} dx = \int_0^2 \frac{6}{(x - 2)^2 + 4} dx = \int_0^2 \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{(x - 2)^2}{4} + 1} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1\frac{1}{2}}{\left(\frac{x - 2}{2}\right)^2 + 1} dx = \int_0^2 \frac{1\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}x - 1)^2 + 1} dx = \left[1\frac{1}{2} \cdot 2 \arctan(\frac{1}{2}x - 1)\right]_0^2 \\ &= \left[3 \arctan(\frac{1}{2}x - 1)\right]_0^2 = 3 \arctan(0) - 3 \arctan(-1) = 3 \cdot 0 - 3 \cdot -\frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi\end{aligned}$$

Krijg je bij het berekenen van een bepaalde integraal bovendien te maken met de substitutiemethode, dan bereken je eerst met een onbepaalde integraal een primitieve. Zie bijvoorbeeld opgave 40b.

39 Primitiveer.



a $f(x) = \frac{5}{32x^2 + 2}$

b $g(x) = \frac{5}{x^2 + 6x + 10}$

40 Bereken exact.



a $\int_0^1 \frac{3}{x^2 + 3} dx$

c $\int_3^6 \frac{5}{x^2 - 6x + 18} dx$

b $\int_0^1 \frac{2x}{x^4 + 1} dx$

d $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctan(x)}{x^2 + 1} dx$

A41 Bereken exact.



a $\int_0^{1\frac{1}{2}} \frac{2}{4x^2 + 9} dx$

c $\int_0^1 \frac{1}{4x^2 - 4x + 2} dx$

b $\int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$

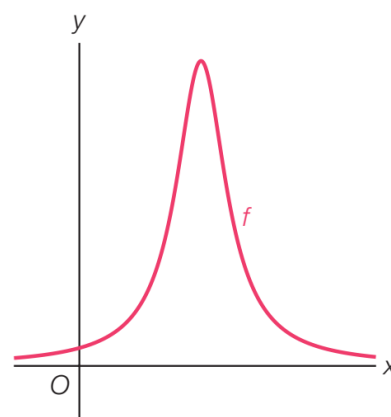
d $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x) + 1} dx$

A42 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie



$f(x) = \frac{10}{x^2 - 8x + 17}$.

- a** Bereken exact het maximum van f .
- b** Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = 4$ en $x = 5$.
- c** Het vlakdeel W_p wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = 4$ en $x = p$ met $p > 4$. Bereken exact p in het geval $O(W_p) = 3\frac{1}{3}\pi$.



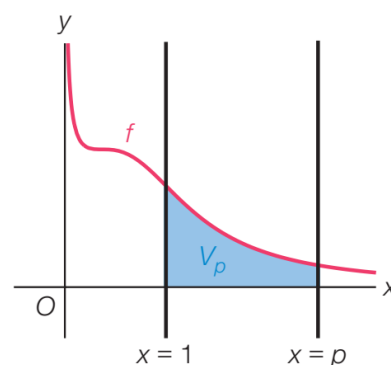
A43 Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de grafiek van de



functie $f(x) = \frac{4}{x \ln^2(x) + x}$, de x -as en de lijnen $x = 1$ en

$x = p$ met $p > 1$. Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact voor welke p de oppervlakte van V_p gelijk is aan π .



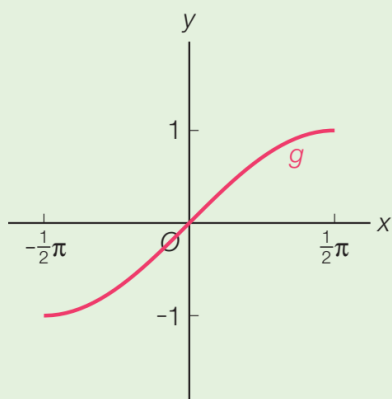
O44 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.



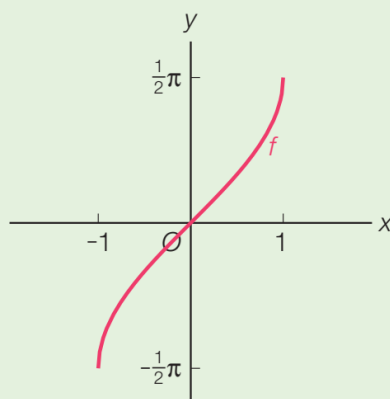
- a** Licht toe dat f geen inverse heeft op het interval $[0, \pi]$.
- b** Noem een zo groot mogelijk gesloten interval waarop f wel een inverse heeft.

Theorie C De functie $f(x) = \arcsin(x)$

De functie $g(x) = \sin(x)$ met domein $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ heeft een inverse. Dit is de cyclometrische functie $f(x) = \arcsin(x)$.



De functie $g(x) = \sin(x)$ met $D_g = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ heeft een inverse.



De functie $f(x) = \arcsin(x)$ heeft $D_f = [-1, 1]$ en $B_f = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

De functie $f(x) = \arcsin(x)$ is de inverse van de functie $g(x) = \sin(x)$ met $D_g = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Er geldt $D_f = [-1, 1]$ en $B_f = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

De **arcsinusfunctie** gebruiken we om de functie $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ te primitiveren.

Substitutie van $x = \sin(t)$ in $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ geeft

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} d\sin(t) = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2(t)}} \cdot \cos(t) dt = \int \frac{\cos(t)}{|\cos(t)|} dt.$$

Neem je $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$, dan is $\cos(t) > 0$ en dus is $|\cos(t)| = \cos(t)$.

$$\text{Zo krijg je } \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int 1 dt = t + c.$$

Omdat $x = \sin(t)$ en $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$ is $t = \arcsin(x)$ en dus

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c.$$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ geeft $F(x) = \arcsin(x) + c$
 $g(x) = \arcsin(x)$ geeft $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Voorbeeld

Bereken exact $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

Uitwerking

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}x)^2}} dx = \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}x\right) \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= \left[\arcsin\left(\frac{1}{2}x\right) \right]_1^{\sqrt{3}} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi \end{aligned}$$

45 Vul de tabel in en leer hem uit het hoofd.

□ ⊗ *

x	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\arcsin(x)$									

46 Los exact op.

□

a $\arcsin(x) = \frac{1}{2}\pi$

c $\arcsin(x) = 2$

b $\arcsin(x) = -\frac{1}{6}\pi$

d $3 \arcsin(x - \sqrt{3}) = \pi$

47 Differentieer.

□ ⊗ *

a $f(x) = \arcsin(\frac{1}{3}x)$

b $g(x) = \arcsin(x^2)$

48 Bereken exact.

□ ⊗ *

a $\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx$

c $\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

b $\int_{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$

d $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx$

49 Primitieveer.

□ ⊗ *

a $f(x) = \frac{6}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$

b $g(x) = \frac{12}{\sqrt{16-(x+1)^2}}$

50 Bereken met behulp van partieel integreren de primitieven.

⊗ *

a $f(x) = \arctan(x)$

b $g(x) = \arcsin(x)$

A51 Primitieveer.

□ ⊗ *

a $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

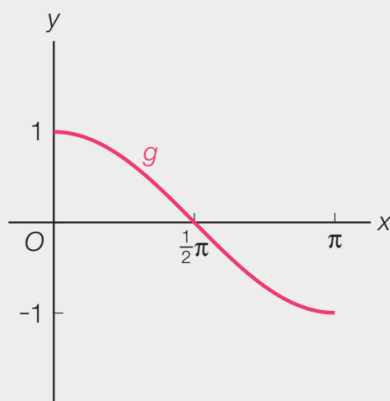
b $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x}{\sqrt{25-x^4}}$.

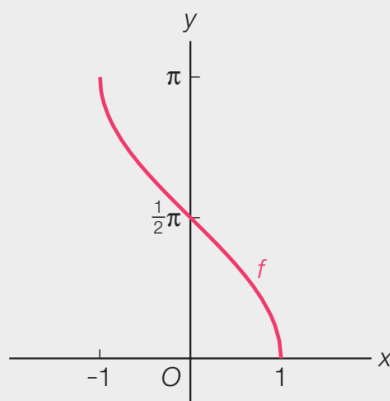
- Bereken exact het domein van f en schets de grafiek van f .
- Los exact op $f(x) \leq \frac{1}{3}x$.
- Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = \frac{1}{2}\sqrt{10}$.

Informatief De functie $f(x) = \arccos(x)$

Kies je bij de functie $g(x) = \cos(x)$ als domein $D_g = [0, \pi]$, dan heeft deze functie een inverse. Dit is de cyclometrische functie $f(x) = \arccos(x)$.



De functie $g(x) = \cos(x)$ met $D_g = [0, \pi]$ heeft een inverse.



De functie $f(x) = \arccos(x)$ heeft $D_f = [-1, 1]$ en $B_f = [0, \pi]$.

De functie $f(x) = \arccos(x)$ is de inverse van $g(x) = \cos(x)$ met domein $D_g = [0, \pi]$. Er geldt $D_f = [-1, 1]$ en $B_f = [0, \pi]$.

$$\left. \begin{array}{l} x = \sin(p) \text{ geeft } p = \arcsin(x) \\ x = \sin(p) = \cos(\frac{1}{2}\pi - p) \text{ geeft } \frac{1}{2}\pi - p = \arccos(x) \end{array} \right\} \arccos(x) = \frac{1}{2}\pi - \arcsin(x)$$

Hieruit volgt $f(x) = \arccos(x)$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ geeft } G(x) = -\arccos(x) + c.$$

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan werken met de functie $f(x) = \arctan(x)$.

☐ Ik kan functies die te herleiden zijn tot de vorm $f(x) = \frac{p}{(ax + b)^2 + 1}$ primitiveren.

☐ Ik kan werken met de functie $f(x) = \arcsin(x)$.

☐ Ik kan functies die te herleiden zijn tot de vorm $f(x) = \frac{p}{\sqrt{1 - (ax + b)^2}}$ primitiveren.

► OPGAVE C5ab
THEORIE A

► OPGAVE C5c
THEORIE A,B

► OPGAVE C6ab
THEORIE C

► OPGAVE C6c
THEORIE C

C5 a Los de vergelijking $\arctan(x) = -1$ algebraïsch op.
Rond af op twee decimalen.

b Differentieer $f(x) = \arctan(x^3)$.

c Bereken exact $\int_{-2}^{-1} \frac{3}{x^2 + 4x + 5} dx$.

C6 a Los de vergelijking $\arcsin(x) = \frac{1}{4}\pi$ exact op.

b Differentieer $f(x) = \arcsin(2x)$.

c Bereken exact $\int_{-2\frac{1}{2}}^{2\frac{1}{2}} \frac{10}{\sqrt{25 - x^2}} dx$.

Antwoorden

C5 a $x \approx -1,56$

b $f'(x) = \frac{3x^2}{x^6 + 1}$

c $\frac{3}{4}\pi$

C6 a $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

c $3\frac{1}{3}\pi$

K.4 Breuksplitsen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt functies van de vorm $f(x) = \frac{p(x)}{ax + b}$ waarbij $p(x)$ een polynoom is, primitiveren.
- Je kunt functies van de vorm $f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + bx + c}$ waarbij $p(x)$ een polynoom is, primitiveren.

053



Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$ en $g(x) = 2 + \frac{3}{x+1}$.

- Toon aan dat deze functies hetzelfde zijn.
- Bereken de primitieven van f .

Theorie A Primitieven van $f(x) = \frac{p(x)}{ax + b}$

De functie $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ is een gebroken functie waarbij de noemer een lineaire functie is. Om dit soort functies te primitiveren, splits je de breuk. Dat gaat als volgt.

Om $x+2$ uit te kunnen delen, vervang je $3x$ door $3(x+2) - 6$.

Deel $x+2$ uit.

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+2} = \frac{3(x+2) - 6 - 1}{x+2} = \frac{3(x+2) - 7}{x+2} = 3 - \frac{7}{x+2}$$

Dit geeft $F(x) = 3x - 7 \ln|x+2| + c$.

Om de primitieven van de functie $g(x) = \frac{2x^2 + 5x + 1}{x+1}$ te kunnen

berekenen, gebruik je ook de methode van het **breuksplitsen**. Je krijgt

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2x^2 + 5x + 1}{x+1} = \frac{2x(x+1) - 2x + 5x + 1}{x+1} = \frac{2x(x+1) + 3x + 1}{x+1} = 2x + \frac{3x+1}{x+1} \\ &= 2x + \frac{3(x+1) - 3 + 1}{x+1} = 2x + \frac{3(x+1) - 2}{x+1} = 2x + 3 - \frac{2}{x+1} \end{aligned}$$

en dit geeft $G(x) = x^2 + 3x - 2 \ln|x+1| + c$.

De teller $2x^2 + 5x + 1$ in het functievoorschrift van g is een voorbeeld van een polynoom.

Een **polynoom** oftewel **veelterm** van graad n is van de vorm $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ met $a_n \neq 0$.

Elke functie van de vorm $f(x) = \frac{p(x)}{ax+b}$ met $p(x)$ een polynoom en $a \neq 0$

is met breuksplitsen te schrijven in de vorm $f(x) = q(x) + \frac{k}{ax+b}$ met $q(x)$ een polynoom en k een constante.

De primitieven zijn $F(x) = Q(x) + \frac{k}{a} \ln|ax+b| + c$.

Voorbeeld

Primitiveer de functie $f(x) = \frac{x^2 + 8x}{2x-1}$.

Uitwerking

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 8x}{2x-1} = \frac{\frac{1}{2}x(2x-1) + \frac{1}{2}x + 8x}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{8\frac{1}{2}x}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{4\frac{1}{4}(2x-1) + 4\frac{1}{4}}{2x-1} \\ &= \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{4} + \frac{4\frac{1}{4}}{2x-1} \end{aligned}$$

Dus $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{8} \ln|2x-1| + c$.

R54 Zie de theorie op de vorige bladzijde.



Jeff denkt dat het handiger is om bij het breuksplitsen bij de functie g als

volgt te beginnen: $g(x) = \frac{2x^2 + 5x + 1}{x+1} = \frac{2x(x+1) - 2x + 5(x+1) - 5 + 1}{x+1}$.

Geef commentaar.

55 Primitiveer.



a $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

b $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

56 Bereken exact.



a $\int_2^3 \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1} dx$

b $\int_{-4}^{-2} \frac{-2x^2 - x}{x+1} dx$

57 **a** Primitiveer $f(x) = \frac{3-4x}{2x+1}$ en $g(x) = \frac{6x-1}{1-2x}$.



b Bereken exact $\int_3^6 \frac{2x^2 - 5x}{2x-1} dx$.

Theorie B Primitieven van $f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + bx + c}$

Elke functie f met een functievoorschrift van de vorm 'een polynoom gedeeld door een tweedegraadsfunctie' is te herleiden tot de vorm $f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + bx + c}$ door teller en noemer te delen door het getal dat in de noemer voor x^2 staat. Met behulp van breuksplitsen is het functievoorschrift van f te schrijven in de vorm

$$f(x) = q(x) + \frac{l(x)}{x^2 + bx + c} \text{ met } q(x) \text{ een polynoom en } l(x) \text{ een lineaire functie.}$$

Om f te primitiveren, moeten we dus onderzoeken hoe functies van de

vorm $g(x) = \frac{l(x)}{x^2 + bx + c}$ te primitiveren zijn. Hierbij is de discriminant

$D = b^2 - 4c$ van de noemer van belang.

We onderscheiden drie situaties: $D < 0$, $D = 0$ en $D > 0$.

I $\frac{l(x)}{x^2 + bx + c}$ met $b^2 - 4c < 0$

De noemer is te schrijven in de vorm $(x - p)^2 + q$ met $q > 0$.

Bij $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 4x + 5}$ krijg je

$2x + 4$ is de afgeleide van $x^2 + 4x + 5$.

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 4x + 5} = \frac{2x + 4 - 5}{x^2 + 4x + 5} = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} - \frac{5}{x^2 + 4x + 5}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} dx &= \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} \cdot (2x + 4) dx = \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} d(x^2 + 4x + 5) = \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln(u) + c_1 = \ln(x^2 + 4x + 5) + c_1 \end{aligned}$$

$$\int \frac{5}{x^2 + 4x + 5} dx = \int \frac{5}{(x + 2)^2 - 4 + 5} dx = \int \frac{5}{(x + 2)^2 + 1} dx = 5 \arctan(x + 2) + c_2$$

Dus $F(x) = \ln(x^2 + 4x + 5) - 5 \arctan(x + 2) + c$.

II $\frac{l(x)}{x^2 + bx + c}$ met $b^2 - 4c = 0$

De noemer is te schrijven in de vorm $(x - p)^2$.

Bij $g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 4x + 4}$ krijg je

$$g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{2x - 1}{(x + 2)^2} = \frac{2(x + 2) - 5}{(x + 2)^2} = \frac{2}{x + 2} - \frac{5}{(x + 2)^2} = \frac{2}{x + 2} - 5(x + 2)^{-2}$$

en dit geeft $G(x) = 2 \ln|x + 2| + 5(x + 2)^{-1} + c = 2 \ln|x + 2| + \frac{5}{x + 2} + c$.

Schrijf de noemer in de vorm $x^2 + bx + c$, dus

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 + 3x + 4} &= \\ \frac{\frac{1}{2}x^3 - x}{x^2 + 1\frac{1}{2}x + 2} \end{aligned}$$

III $\frac{l(x)}{x^2 + bx + c}$ met $b^2 - 4c > 0$

De noemer is te ontbinden in twee verschillende factoren.

Bij $h(x) = \frac{2x-1}{x^2+4x+3}$ krijg je

$$h(x) = \frac{2x-1}{(x+1)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3} = \frac{a(x+3) + b(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{ax + 3a + bx + b}{(x+1)(x+3)} = \frac{(a+b)x + 3a + b}{(x+1)(x+3)}.$$

Zo krijg je het stelsel $\begin{cases} a+b=2 \\ 3a+b=-1 \end{cases}$ en dit geeft $a = -1\frac{1}{2}$ en $b = 3\frac{1}{2}$.

Dus $h(x) = \frac{-1\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{3\frac{1}{2}}{x+3}$ en dit geeft $H(x) = -1\frac{1}{2}\ln|x+1| + 3\frac{1}{2}\ln|x+3| + c$.

Voorbeeld

Primitieveer de functie $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 4x + 4}$.

Aanpak

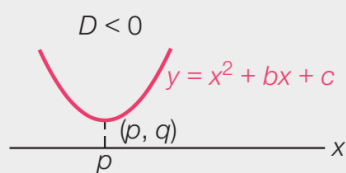
$x^2 - 4x + 4$ is van de vorm $x^2 + bx + c$ met $b^2 - 4c = 0$, dus de noemer is te schrijven in de vorm $(x-p)^2$.

Uitwerking

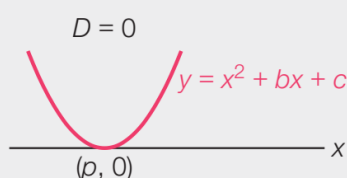
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 4x + 4} = \frac{x^2 - 4x + 4 + x + 1}{x^2 - 4x + 4} = 1 + \frac{x+1}{(x-2)^2} = 1 + \frac{x-2+3}{(x-2)^2} \\ &= 1 + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} = 1 + \frac{1}{x-2} + 3(x-2)^{-2} \end{aligned}$$

Dus $F(x) = x + \ln|x-2| - 3(x-2)^{-1} + c = x + \ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + c$.

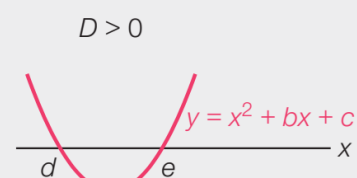
Informatief De discriminant van $y = x^2 + bx + c$



$$y = (x-p)^2 + q \text{ met } q > 0$$



$$y = (x-p)^2$$



$$y = (x-d)(x-e)$$

R60 a Zie de theorie en het voorbeeld op de vorige twee bladzijden.

□ ⊗ *

In de theorie staat dat een functie $f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + bx + c}$ te schrijven

is in de vorm $f(x) = q(x) + \frac{l(x)}{x^2 + bx + c}$.

Geef van de functie in het voorbeeld $p(x)$, $q(x)$, $l(x)$, b en c .

b Bij I op bladzijde 203 is gebruikt dat $\int \frac{1}{u} du = \ln(u)$ en niet $\int \frac{1}{u} du = \ln|u|$.

Waarom mag dat in dit geval?

61 Primitiveer.

□ ⊗

a $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$

b $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 9}$

c $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 3}$

62 Primitiveer.

□ ⊗ *

a $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$

b $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - 6x + 9}$

c $f(x) = \frac{2x^3 + 1}{2x^2 + x}$

63 Bereken exact.

□ ⊗

a $\int_0^2 \frac{x^3}{x^2 + 4} dx$

b $\int_0^8 \frac{x^3}{x^2 + 4x + 4} dx$

c $\int_0^2 \frac{4x - 8}{x^2 - 4x - 5} dx$

64 Bereken exact.

*

a $\int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} dx$

b $\int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^2 + 2x + 1} dx$

c $\int_0^2 \frac{x^4}{x^2 + 4x + 3} dx$

R65 De functie $f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}$ is op twee manieren te primitiveren,

□ ⊗ *

namelijk met breuksplitsen en zonder breuksplitsen.

Werk beide manieren uit en ga na dat de primitieven die je vindt op hetzelfde neerkomen.

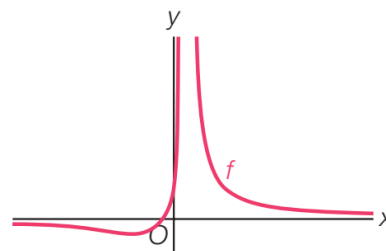
A66 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie

□ ⊗

$f(x) = \frac{10x + 5}{4x^2 - 4x + 1}$.

a Licht toe dat $f(x) > 0$ als $x > \frac{1}{2}$ en bereken exact het bereik van f .

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = 3$.

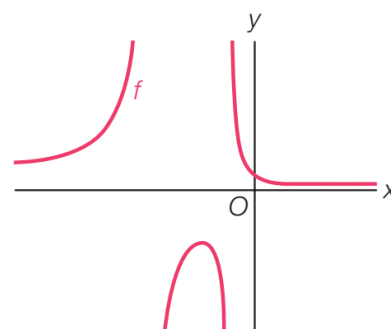


A67 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie



$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 5x + 4}.$$

- Bereken exact de extreme waarden van f .
- Los exact op $f(x) \leq 4$.
- Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = 6$.

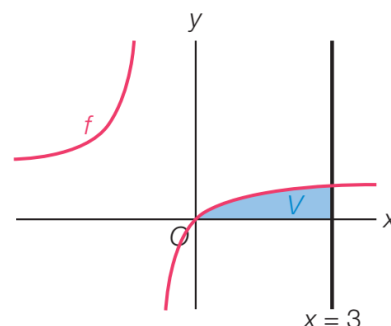


A68 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x}{x+1}$.



Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = 3$. Zie de figuur hiernaast.

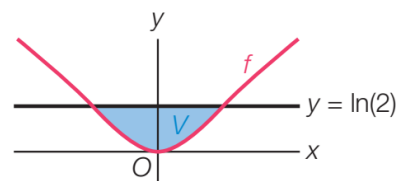
- Bereken exact de oppervlakte van V .
- Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de x -as wentelt.



A69 Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.



- Er zijn twee lijnen met richtingscoëfficiënt $\frac{3}{5}$ die de grafiek van f raken. Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.
- Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = \ln(2)$. Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de oppervlakte van V .



Informatief Ontbinden met de abc -formule of kwadraatplitsen

Bij $x^2 + 2x - 4 = 0$ is $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 20 > 0$.

De oplossingen van de vergelijking zijn

$$x = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = -1 + \sqrt{5} \text{ en } x = -1 - \sqrt{5}.$$

Daarom is $x^2 + 2x - 4$ te ontbinden in $(x + 1 - \sqrt{5})(x + 1 + \sqrt{5})$.

Elke polynoom van graad 2 met $D > 0$ is ook met behulp van kwadraatplitsen te ontbinden.

$$\text{Zo is } x^2 + 2x - 4 = (x + 1)^2 - 5 = (x + 1 + \sqrt{5})(x + 1 - \sqrt{5}).$$

Herken in de laatste stap het merkwaardig product $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Kennis- en vaardighedencheck

☐ Ik kan functies van de vorm $f(x) = \frac{p(x)}{ax + b}$ waarbij $p(x)$ een polynoom is, primitiveren.

► OPGAVE C7
THEORIE A

☐ Ik kan functies van de vorm $f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + bx + c}$ waarbij $p(x)$ een polynoom is, primitiveren.

► OPGAVE C8
THEORIE B

C7 Primitiveer.

a $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$

b $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{2x + 4}$

C8 Primitiveer.

a $f(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 6x + 10}$

b $f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 + 2x + 1}$

c $f(x) = \frac{-6x + 14}{x^2 + 2x - 3}$

Antwoorden

C7 a $F(x) = 2x + 3 \ln|x - 1| + c$

b $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 3\frac{1}{2} \ln|2x + 4| + c$

C8 a $F(x) = \ln(x^2 + 6x + 10) - 2 \arctan(x + 3) + c$

b $F(x) = 2 \ln|x + 1| - \frac{3}{x + 1} + c$

c $F(x) = 2 \ln|x - 1| - 8 \ln|x + 3| + c$

K.5 Integralen bij parameterkrommen

Kennis en vaardigheden

- Je kunt oppervlakten en inhoudten bij parameterkrommen exact berekenen.
- Je kunt oppervlakten van omsloten vlakdelen bij parameterkrommen exact berekenen.

070

□ ⊗ *

Je weet dat $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

a Bewijs dat $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

b Bewijs dat $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$.

071

□ ⊗ *

In de figuur hiernaast is de baan van punt P getekend bij

de bewegingsvergelijkingen
$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t \\ y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2 \end{cases}$$

De baan snijdt de assen voor $t = 0$, $t = 2$ en $t = 4$ achtereenvolgens in de punten A , B en C .

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de baan en de y -as.

We vragen ons af wat de oppervlakte van V is.

Er geldt $O(V) = \int_{x_A}^{x_B} y dx - \int_{x_C}^{x_B} y dx$.

a Licht toe dat hieruit volgt dat $O(V) = \int_{t=0}^{t=2} y dx - \int_{t=4}^{t=2} y dx$ en gebruik de regels van opgave 70 om $O(V)$ te

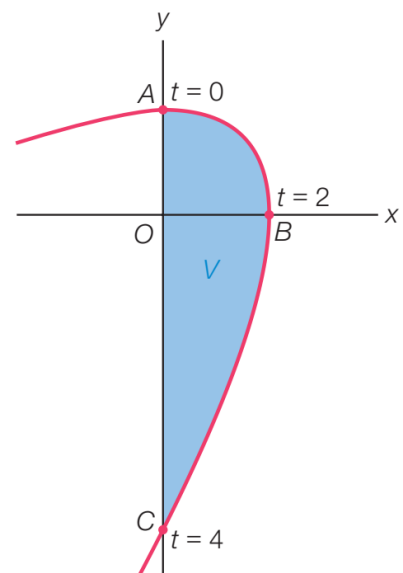
herleiden tot $O(V) = \int_{t=0}^{t=4} y dx$.

b Uit vraag a volgt $O(V) = \int_{t=0}^{t=4} (-\frac{1}{2}t^2 + 2) d(-\frac{1}{2}t^2 + 2t)$.

Bereken $O(V)$.

c Waarom geeft de integraal $\int_{t=4}^{t=0} x dy$ ook de oppervlakte van V ?

Bereken $O(V)$ met deze integraal.



Theorie A Oppervlakten en inhoudten bij parameterkrommen

In opgave 71 heb je gezien dat de oppervlakte van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de parameterkromme en de y -as kan worden

berekend met de integraal $\int_{t=0}^{t=4} y \, dx$. Hierbij zijn de regels gebruikt die je in opgave 70 hebt bewezen.

$$\int_a^b y \, dx = -\int_b^a y \, dx \text{ en } \int_a^b y \, dx + \int_b^c y \, dx = \int_a^c y \, dx$$

Voorbeeld

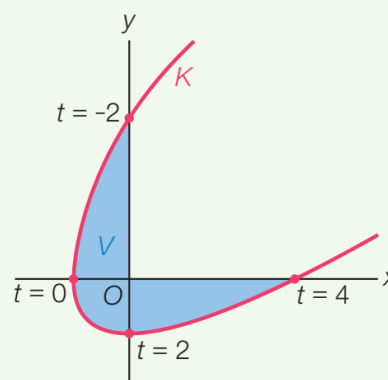
De kromme K is gegeven door
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2 \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t \end{cases}$$

Het vlakdeel V wordt ingesloten door K , de positieve x -as en de positieve y -as. Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de oppervlakte van V .

Aanpak

Bedenk dat $O(V) = \int_{t=0}^{t=-2} y \, dx - \int_{t=0}^{t=4} y \, dx$ en herleid deze vorm tot één integraal.



Uitwerking

$$\begin{aligned} O(V) &= \int_{t=0}^{t=-2} y \, dx - \int_{t=0}^{t=4} y \, dx = \int_{t=0}^{t=-2} y \, dx + \int_{t=4}^{t=0} y \, dx = \int_{t=4}^{t=-2} y \, dx \\ &= \int_{t=4}^{t=-2} \left(\frac{1}{2}t^2 - 2t\right) d\left(\frac{1}{2}t^2 - 2\right) = \int_4^{-2} \left(\frac{1}{2}t^2 - 2t\right) \cdot t \, dt \leftarrow \\ &= \int_4^{-2} \left(\frac{1}{2}t^3 - 2t^2\right) dt = \left[\frac{1}{8}t^4 - \frac{2}{3}t^3\right]_4^{-2} \\ &= \frac{1}{8} \cdot (-2)^4 - \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - \left(\frac{1}{8} \cdot 4^4 - \frac{2}{3} \cdot 4^3\right) = 18 \end{aligned}$$

Zodra je overgaat op dt hoef je bij de grenzen alleen nog de getallen te noteren.

R72 In het voorbeeld wordt de oppervlakte berekend met



$O(V) = \int_{t=0}^{t=-2} y \, dx - \int_{t=0}^{t=4} y \, dx$. Er zijn meer manieren om $O(V)$ te berekenen.

a Licht toe dat bijvoorbeeld ook geldt $O(V) = -\int_{t=2}^{t=-2} x \, dy + \int_{t=2}^{t=4} x \, dy$.

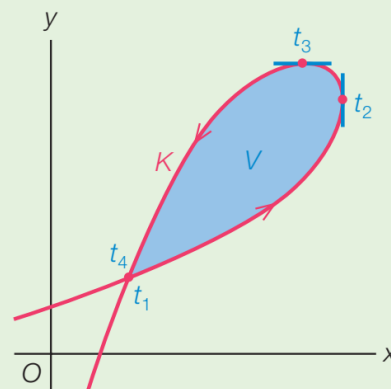
b Er geldt bijvoorbeeld ook $O(V) = -\int_{t=2}^{t=-2} x \, dy - \int_{t=2}^{t=4} y \, dx$.

Licht dit toe. Waarom is deze manier niet handig?

In de figuur hiernaast zie je nogmaals de kromme K van opgave 76, maar nu wordt K in positieve richting doorlopen. In dit geval geldt:

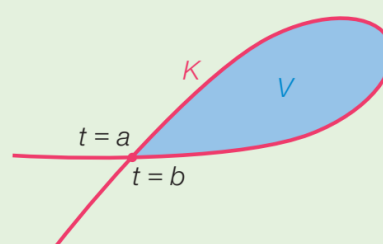
$$\begin{aligned} \bullet \quad O(V) &= \int_{t=t_4}^{t=t_2} y \, dx - \int_{t=t_1}^{t=t_2} y \, dx = \int_{t=t_4}^{t=t_2} y \, dx + \int_{t=t_2}^{t=t_1} y \, dx \\ &= \int_{t=t_4}^{t=t_1} y \, dx = - \int_{t=t_1}^{t=t_4} y \, dx \\ \bullet \quad O(V) &= \int_{t=t_1}^{t=t_3} x \, dy - \int_{t=t_4}^{t=t_3} x \, dy = \int_{t=t_1}^{t=t_3} x \, dy + \int_{t=t_3}^{t=t_4} x \, dy = \int_{t=t_1}^{t=t_4} x \, dy \end{aligned}$$

Uit het bovenstaande volgt $O(V) = \left| \int_{t=t_1}^{t=t_4} y \, dx \right|$ en ook $O(V) = \left| \int_{t=t_1}^{t=t_4} x \, dy \right|$.



Snijdt een kromme K zichzelf voor $t = a$ en $t = b$, dan geldt voor de oppervlakte van het door K omsloten

vlakdeel V dat $O(V) = \left| \int_{t=a}^{t=b} y \, dx \right|$ en $O(V) = \left| \int_{t=a}^{t=b} x \, dy \right|$.



Bereken de bepaalde integraal zonder rekening te houden met de absolute waarde. Als je een negatief antwoord krijgt, neem je hiervan achteraf de absolute waarde.

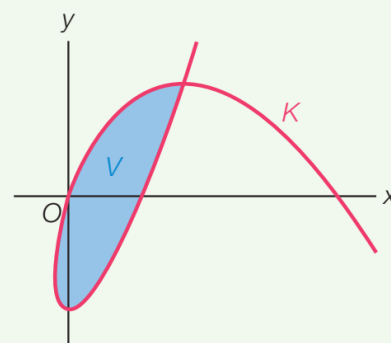
Omdat je altijd kunt kiezen tussen $\int x \, dy$ en $\int y \, dx$ neem je de integraal die het eenvoudigst te berekenen is.

Voorbeeld

De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - t \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$

De kromme snijdt zichzelf in een punt met x -coördinaat 2 en sluit het vlakdeel V in. Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de oppervlakte van V .



Uitwerking

$$x(t) = 2 \text{ geeft } t^2 - t = 2$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2) = 0$$

$$t = -1 \vee t = 2$$

$$\int_{t=-1}^{t=2} x \, dy = \int_{t=-1}^{t=2} (t^2 - t) \, d(t^3 - 3t) = \int_{-1}^2 (t^2 - t) \cdot (3t^2 - 3) \, dt = \int_{-1}^2 (3t^4 - 3t^2 - 3t^3 + 3t) \, dt$$

$$= \left[\frac{3}{5} t^5 - t^3 - \frac{3}{4} t^4 + \frac{3}{2} t^2 \right]_{-1}^2 = \frac{3}{5} \cdot 2^5 - 2^3 - \frac{3}{4} \cdot 2^4 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 - \left(-\frac{3}{5} + 1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \right) = 4 \frac{1}{20}$$

Dus $O(V) = 4 \frac{1}{20}$.

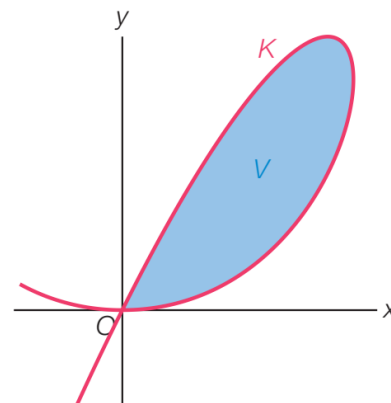
R77 Zie de theorie onderaan de vorige bladzijde en zie het voorbeeld.

☐⊙* Er is in het voorbeeld voor gekozen om $O(V)$ te berekenen met $\int x dy$. $O(V)$ had ook berekend kunnen worden met $\int y dx$. Voer deze berekening uit.

78

Gegeven is de kromme K : $\begin{cases} x(t) = -t^2 + 6t \\ y(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 \end{cases}$

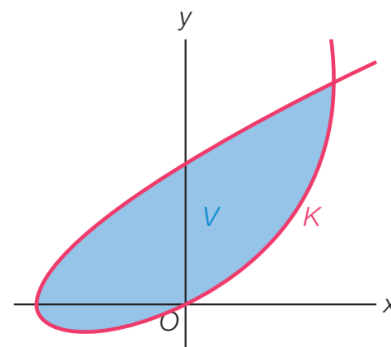
De kromme snijdt zichzelf in de oorsprong en sluit het vlakdeel V in. Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de oppervlakte van V .



79

Gegeven is de kromme K : $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t \\ y(t) = t^2 + 2t \end{cases}$

De kromme snijdt zichzelf in een punt met y -coördinaat 8 en sluit het vlakdeel V in. Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de oppervlakte van V .



A80

Voor elke $a > 0$ en $a \neq 1$ is gegeven de kromme

☐⊙*

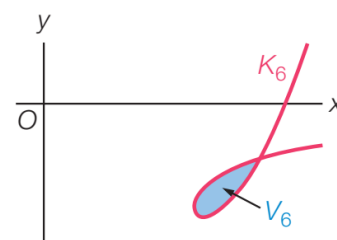
$$K_a: \begin{cases} x(t) = t + \frac{a}{t} \\ y(t) = t^2 - (a+1)t \end{cases} \text{ met } t > 0.$$

De kromme snijdt zichzelf in een punt met y -coördinaat $-a$.

a Bewijs dit.

b In de figuur hiernaast sluit de kromme K_6 het vlakdeel V_6 in.

Bereken exact de oppervlakte van V_6 .



A81

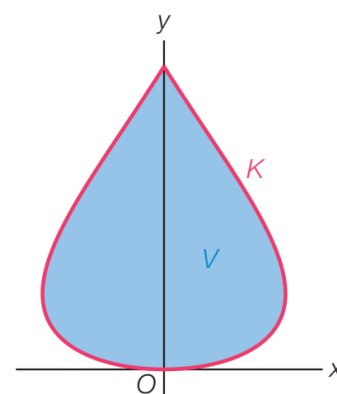
De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = 2 \sin(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$ met

⊙*

$-\pi \leq t \leq \pi$. Het vlakdeel V dat wordt ingesloten door K is symmetrisch in de y -as. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de oppervlakte van V .

b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de y -as wentelt.



Kennis- en vaardighedencheck

- ☐ Ik kan oppervlakten en inhoud en bij parameterkrommen exact berekenen.
- ☐ Ik kan oppervlakten van omsloten vlakdelen bij parameterkrommen exact berekenen.

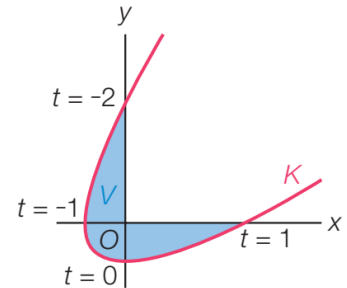
► OPGAVE C9
THEORIE A

► OPGAVE C10
THEORIE B

C9 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}$

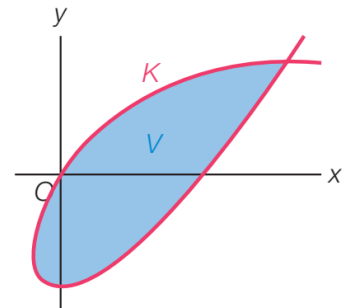
Het vlakdeel V wordt ingesloten door K , de positieve x -as en de positieve y -as. Zie de figuur hiernaast.

- a** Bereken exact de oppervlakte van V .
- b** Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het gedeelte van V dat zich links van de y -as bevindt, wentelt om de y -as.



C10 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = \frac{2}{3}t^3 - 8t \end{cases}$

De kromme snijdt zichzelf in een punt met x -coördinaat 8 en sluit het vlakdeel V in. Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de oppervlakte van V .



Antwoorden

C9 a $4\frac{1}{2}$

b $2\frac{2}{15}\pi$

C10 $86\frac{2}{5}$

Kennis- en vaardighedentest

K.1 De substitutiemethode

1 Primitiveer.

a $f(x) = 3x\sqrt{x^2 + 2}$

b $g(x) = \frac{x}{e^{x^2+1}}$

c $h(x) = \cos^5(x)$

2 Bereken exact.

a $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx$

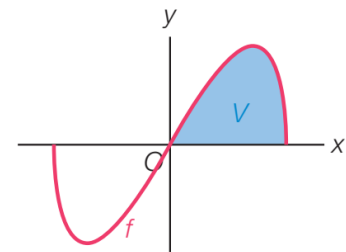
b $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x) \sin^3(x) dx$

c $\int_1^3 \frac{6x}{x^2 + 1} dx$

3 Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$.

Het vlakdeel V in de figuur hiernaast wordt ingesloten door de grafiek van f en de positieve x -as.

Bereken exact de oppervlakte van V .



K.2 Partieel integreren

4 Primitiveer.

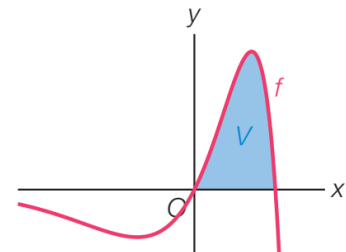
a $f(x) = 4x \sin(2x)$

b $g(x) = x^3 \ln(x)$

5 Gegeven is de functie $f(x) = (2x - x^2)e^x$.

a Bereken exact de extreme waarden van f .

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.



6 Primitiveer.

a $f(x) = 4x^2 \cos(2x)$

b $g(x) = e^x \sin(2x)$

K.3 Cyclometrische functies

7 Los exact op.

a $-\frac{1}{2} \arctan(4x + 1) = \frac{1}{8}\pi$

b $6 \arcsin(x^2) = \pi$

8 Differentieer.

a $f(x) = 4 \arctan(\pi x)$

b $g(x) = 5 \arcsin(2x^3)$

9 Bereken exact.

a $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{4}{x^2 + 4} dx$

c $\int_0^1 \frac{\arctan^2(x)}{x^2 + 1} dx$

e $\int_{-1}^1 \frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}} dx$

b $\int_1^2 \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx$

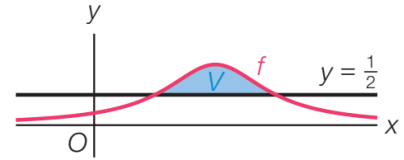
d $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

f $\int_{-\ln(2)}^{\ln(\frac{1}{2}\sqrt{3})} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$

10 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$.

a Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = \frac{1}{2}$.

b Het vlakdeel W_p wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = 2$ en $x = p$ met $p > 2$ waarbij $O(W_p) = \frac{1}{3}\pi$.
Bereken exact p .



K.4 Breuksplitsen

11 Primitiveer.

a $f(x) = \frac{3x+4}{x+4}$

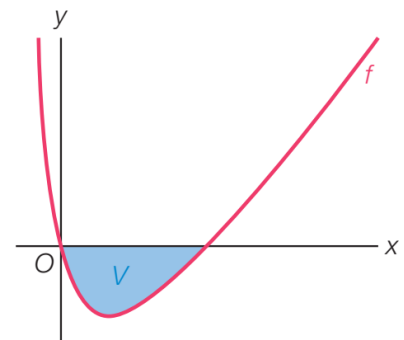
b $g(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x+1}$

12 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x+1}$ met $x > -1$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de extreme waarde van f .

b Bereken exact de oppervlakte van V .



13 Primitiveer.

a $f(x) = \frac{2x+3}{x^2 - 6x + 10}$

b $g(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4x + 4}$

c $h(x) = \frac{6}{x^2 - 1}$

K.5 Integralen bij parameterkrommen

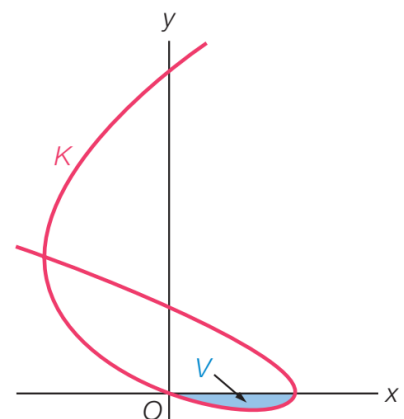
14 Gegeven is de kromme $K: \begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3t \\ y(t) = t^2 + 2t \end{cases}$

V is het vlakdeel onder de x -as dat wordt ingesloten door K en de x -as. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de oppervlakte van V .

b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as.

c De kromme snijdt zichzelf in een punt met y -coördinaat 8 en sluit het vlakdeel W in.
Bereken exact de oppervlakte van W .



Antwoorden Kennis- en vaardigheidentests

Hoofdstuk 9

- 1** a $x = 1 + {}^4\log(25)$
b $x = \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(15)$
c $x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(13)$
d $x = {}^2\log(5)$

- 2** a 94,9%
b 3,2%

- 3** a 3,7%
b 89,3%

- 4** a 29 jaar
b 22 dagen
c 84 uur

- 5** a ${}^2\log(64a)$
b ${}^3\log\left(\frac{3}{2a}\right)$

- 6** a $y = 6 + {}^3\log(4x)$
b $y = 3 - \log(5x)$

- 7** a $x = 4\frac{1}{2}$
b $x = \sqrt{13}$

- 8** a $x = 3$
b $x = 1$
c $x = \frac{1}{10} \vee x = 100$
d $x = 1 \vee x = \frac{1}{16}$

- 9** a $x = {}^2\log(20)$
b $x = {}^5\log(6)$

- 10** a $x = -4 + 0,59 \cdot 1,78^y$
b $q = -4,69 + 2,53 \cdot \log(p)$

- 11** a $2e^{2x} + e^{x+3}$
b $e^{2x} - 1$
c $e^{6x} - 10e^{3x} + 25$

- 12** a $x = \frac{1}{3}$
b $x = \frac{5}{6}$
c $x = 0$

- 13** a $f'(x) = 2e^x - 6x$
b $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x}$
c $f'(x) = (x^2 + 2x + 1)e^x$
d $f'(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}e^x$
e $f'(x) = (2x^2 + 2x)e^{2x-1}$
f $f'(x) = 2xe^{x^2+9}$

- 14** a max. is $f(-1) = \frac{3}{e}$
min. is $f(0) = 1$
b $x = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee x = -1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

- 15** a $\ln(3e^4)$
b $\ln(\frac{5}{8})$

- 16** a $x = \frac{1}{5}\ln(8)$
b $x = \frac{1}{5}e^4 \vee x = \frac{1}{5e^4}$
c $x = 1 \vee x = \sqrt{e}$

- 17** a $f'(x) = 2^{3x-4} \cdot \ln(2) \cdot 3$
b $f'(x) = (1 + x\ln(3)) \cdot 3^x$
c $f'(x) = \frac{4}{3x}$
d $f'(x) = \frac{5 - 2\ln(x)}{x^2}$
e $f'(x) = \frac{5}{(5x-6)\ln(3)}$
f $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

- 18** a $A\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$
b $k: y = x - \sqrt{e}$

Hoofdstuk 10

1 a $|\vec{a}| = 2\sqrt{5}$ en $|\vec{b}| = \sqrt{10}$
b $\vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$

2 a, b *

3 a *
b $|\vec{b}| \approx 3,09$

4 $|\vec{b}| \approx 5,80$ cm of $|\vec{b}| \approx 1,21$ cm

5 $M(-2, 4)$ en $N(5, 3)$

6 a $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$
b $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
c $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \wedge 0 \leq t \leq 1$

7 $S(8, -2)$

8 a $k: 4x - 3y = -2$
b $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

9 $l: x + 7y = 15$

10 a $\angle BAC \approx 113,5^\circ$
b $\angle(MN, k) \approx 57,5^\circ$

11 a $l: 7x + 2y = 1$
b $n: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
c $q: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

12 a $S(-1, 3)$
b $|\vec{BC}| = 4\sqrt{10}$

13 a x-as: $(0, 0)$ en $(3, -\frac{1}{3})$
y-as: $(4, 1\frac{1}{3})$
b $56,3^\circ$
c 1,60 voor $t \approx 1,32$
d $1\frac{25}{37}\sqrt{37}$

Hoofdstuk 11

1 a, b *

2 a $F(x) = 4x^2 \cdot \sqrt{x} + c$
b $F(x) = \frac{2 \cdot 3^x}{\ln(3)} + c$
c $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c$
d $F(x) = 6e^x + \frac{1}{3}x^3 + c$
e $F(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}\ln|x| + c$
f $F(x) = -3\cos(x) + 2\sin(x) + c$

3 $F(x) = 3x^2 - 2x\sqrt{x} + 4$

4 a 1
b $p = 1\frac{1}{3}$

5 a $F(x) = \frac{1}{12}(2x + 6)^6 + c$
b $F(x) = \frac{2}{35}(5x + 2)^3 \cdot \sqrt{5x + 2} + c$
c $F(x) = 2e^{2x+3} + c$
d $F(x) = -\frac{10}{9x-3} + c$
e $F(x) = \frac{2}{\pi}\sin(\pi x + 3) + c$
f $F(x) = 3\ln|2x + 5| + c$

6 a $5\frac{1}{3} - 4\ln(3)$
b $p = e^2$

7 a $85\frac{1}{3}\pi$
b $166\frac{2}{3}\pi$

8 a 238,3
b 31,9

9 $p \approx 2,78$

10 a 50,4 km
b 310,32 km

Hoofdstuk 12

1 **a** $x = \frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{3}{20}\pi \vee x = \frac{11}{20}\pi \vee x = \frac{19}{20}\pi$
b $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$
c $t = 2\frac{1}{7} \vee t = 2\frac{11}{17} \vee t = 6\frac{3}{17} \vee t = 9\frac{12}{17}$

2 **a** $y = \sin(2x)$
b $y = \cos(2x)$

3 **a** $x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{2}{15}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$
b $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

4 **a** $y = 1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}\cos(4x)$
b $y = 4\frac{1}{2}\sin(4x) - 1$

5 **a, b** *

6 $2\pi^2$

7 $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

8 **a** *
b $t = \frac{2}{9}\pi \vee t = 1\frac{5}{9}\pi \vee t = 2\frac{8}{9}\pi \vee$
 $t = 1\frac{1}{9}\pi \vee t = 2\frac{4}{9}\pi \vee t = 3\frac{7}{9}\pi$

9 **a** 4 Hz
b 28,8 km

10 $a = -\frac{1}{2}$
 *

11 **a** $AB = \sqrt{2}$
b 60°
c 3
d $\begin{cases} x_Q(t) = \sin(3t) - \cos(2t - \frac{1}{3}\pi) \\ y_Q(t) = \cos(2t - \frac{1}{3}\pi) + \sin(3t) \end{cases}$
 $t = \frac{23}{30}\pi$

Hoofdstuk K

1 **a** $F(x) = (x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2} + c$
b $G(x) = -\frac{1}{2e^{x^2+1}} + c$
c $H(x) = \frac{1}{5}\sin^5(x) - \frac{2}{3}\sin^3(x) + \sin(x) + c$

2 **a** $\frac{2}{3}$
b $\frac{1}{4}$
c $3\ln(5)$

3 9

4 **a** $F(x) = \sin(2x) - 2x\cos(2x) + c$
b $G(x) = \frac{1}{4}x^4\ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + c$

5 **a** min. is $f(-\sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$
 max. is $f(\sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$
b 4

6 **a** $F(x) = 2x^2\sin(2x) + 2x\cos(2x) - \sin(2x) + c$
b $G(x) = \frac{1}{5}(e^x\sin(2x) - 2e^x\cos(2x)) + c$

7 **a** $x = -\frac{1}{2}$
b $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

8 **a** $f'(x) = \frac{4\pi}{\pi^2x^2 + 1}$
b $g'(x) = \frac{30x^2}{\sqrt{1 - 4x^6}}$

9 **a** $\frac{2}{3}\pi$
b $\frac{1}{4}\pi$
c $\frac{1}{192}\pi^3$
d $\frac{1}{3}\pi$
e π
f $\frac{1}{6}\pi$

10 **a** $\frac{1}{2}\pi - 1$
b $p = 2 + \sqrt{3}$

11 a $F(x) = 3x - 8 \ln|x + 4| + c$

b $G(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \ln|x + 1| + c$

12 a min. is $f(1) = -1$

b $7\frac{1}{2} - 4 \ln(4)$

13 a $F(x) = \ln(x^2 - 6x + 10) + 9 \arctan(x - 3) + c$

b $G(x) = x + 8 \ln|x - 2| - \frac{12}{x - 2} + c$

c $H(x) = 3 \ln|x - 1| - 3 \ln|x + 1| + c$

14 a $2\frac{4}{5}$

b $2\frac{2}{7}\pi$

c $32\frac{2}{5}$

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen
- de toets Ans, en fouten verbeteren
- breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen
- decimaal getal omzetten in een breuk

vwo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 12

Grafieken, toppen en snijpunten

- formules invoeren en grafieken plotten
- functiewaarden berekenen op het grafiekenschermb en op het basisscherm
- tabellen maken en de tabelinstelling veranderen
- toppen en snijpunten van grafieken
- berekenen van nulpunten

vwo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 41

Het gebruik van Ans en lettergeheugens

- de toets Ans
- het gebruik van lettergeheugens

vwo B deel 1
hoofdstuk 3
bladzijde 106

Integreren

- integralen berekenen op het basisscherm
- integralen berekenen op het grafiekenschermb

vwo B deel 3
hoofdstuk 11
bladzijde 126

Allerlei

- specifieke mogelijkheden van het merk/type GR
-

Trefwoordenregister

A

amplitude van trilling 159
arccosinusfunctie 198
arcsinusfunctie 196
arctangensfunctie 192
arcus en
 cyclometrisch 192

B

baansnelheid 81
baanversnelling 85, 87
bepaalde integraal 104
bewegings-
 vergelijkingen 80
bolschijf 129
bolsegment 129
breuksplitsen 200

C

cyclometrische functie 191

D

discriminant van
 $y = x^2 + bx + c$ 204

E

e 28
eenparige
 cirkelbeweging 156
e-macht 31
Euler, Leonhard 30

F

frequentie 159

G

gelijke vectoren 49
groeipercentage 11

H

halveringstijd 14
Hamilton, William
 Rowan 59
harmonische
 beweging 159
harmonische trilling 159
hoek tussen lijnen 71
hoek tussen vectoren 71
hoofdstelling van de
 integraalrekening 104

I

inhoud bol 129
inhoud kegel 130
inproduct 70
integraal 104
integrand 104
integratieconstante 99
integreren 104
inwendig product 70

K

kental 48
kop-staartconstructie 49

L

lengte van vector 48
lijnsymmetrisch 151
ln 35

M

maximale uitwijking 159
meetkundige betekenis van
 inproduct 72

N

natuurlijke logaritme 35
normaalvector van lijn 75
nulvector 71

O

omlooptijd 156
omwentelingslichaam 119
onbepaalde integraal 179
onderling loodrechte
 componenten 53
ontbinden in
 componenten 53
ontbinden met de
 abc -formule of
 kwadraatafsplitsen 206
oppervlakte onder een
 kromme 115

P

parallellogram-
 constructie 49
parameterkromme 80
parametervoorstelling van
 baan 80
parametervoorstelling van
 lijn 63
partieel integreren 185
partieel primitiveren 185
plaatsvector 80
plotten van baan 82, 163
polynoom 200
primitieve 99
primitieve functie 99
primitiveren 101
Ptolemaeus 150
puntsymmetrisch 151

R

rekenregels voor
 logarithmen 17
richting van vector 48
richtingsvector van lijn 62
rotaties 57

S

snelheidsvector 81
somformules 147
somvector 49
steunvector van lijn 62
substitutiemethode 179

T

tegengestelde vectoren 50
trilling 159
trillingstijd 159

V

vector 48
vectormeetskunde 59
vectorvoorstelling van
 lijn 62
veelterm 200
verdubbelings-
 formules 147
verdubbelingstijd 13
verschilformules 147
versnellingsvector 85

W

wentelen om de x -as 121
wentelen om de y -as 124

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Oscar Casander, Arnhem

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Foto's

Getty Images: p. 6-7, 140-41

Alamy Stock Photo / Imageselect: p. 30

ANP / Arie Kievit: p. 46-47

Imageselect: p. 59, 150, 176-177

123RF: p. 96-97

Shutterstock: p. 134

Colofon

Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers B.V., Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via www.noordhoff.nl/klantenservice.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleenen.



Wij maken bij Noordhoff sinds 2009 bewust keuzes om onze impact op het klimaat te verkleinen. We volgen de klimaatdoelen van het Klimaatakkoord van Parijs. Scan de QR-code voor meer informatie over ons duurzaamheidsbeleid.

Zo is dit product gemaakt van FSC®-gecertificeerd papier en ander gecontroleerd materiaal. Wij gebruiken plantaardige inkt en onze lijmen zijn op waterbasis en afbreekbaar. Hierdoor is dit product goed te recyclen na gebruik.



0 / 26

© 2026 Noordhoff Uitgevers B.V. Alle rechten voorbehouden. Tekst- en datamining niet toegestaan.

ISBN 978-90-01-06467-9

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten