

WISKUNDE A

VWO

5

LEERBOEK

$\frac{1}{4}$

MODERNE WISKUNDE

+

∞

$\div$

a

x

c^2

=

b

c



Noordhoff Uitgevers

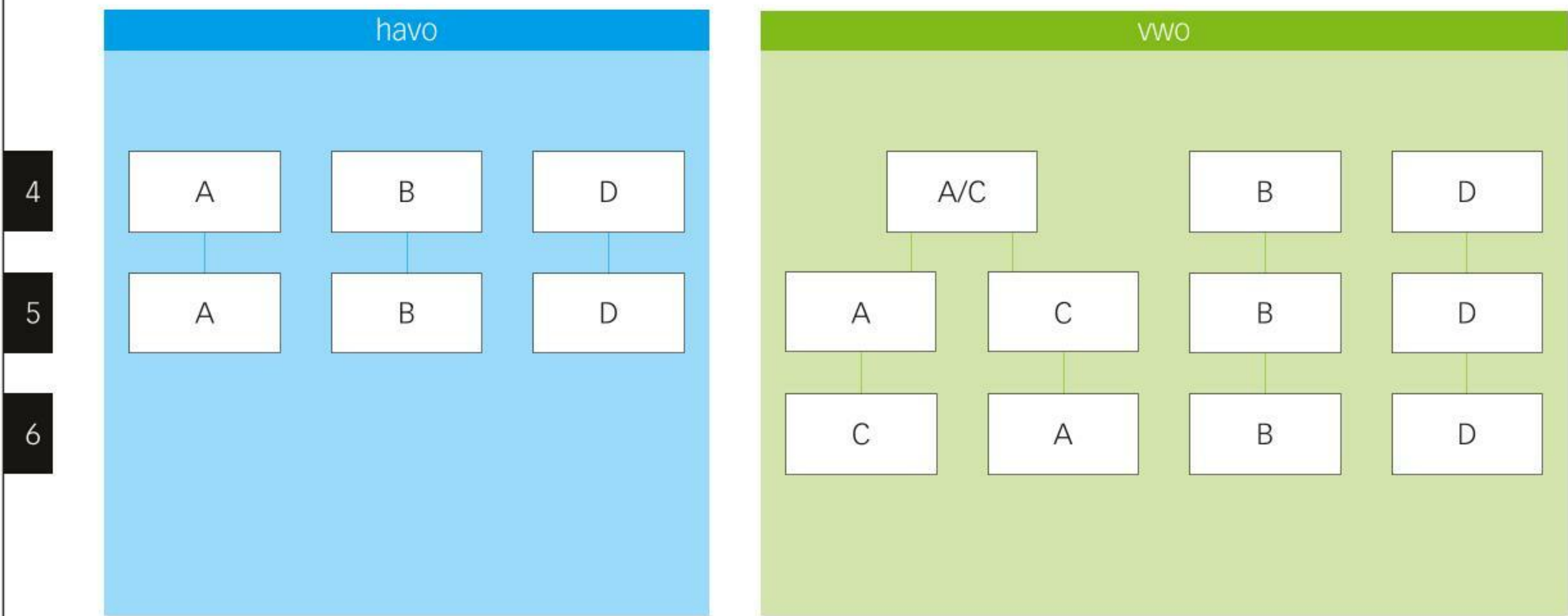


11e editie

Moderne Wiskunde

5 vwo A

Serieoverzicht bovenbouw



Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van (een) gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without prior written permission of the publisher.

11e editie

Moderne Wiskunde

5 vwo A

Harm Bakker
Bert Boon
Dick Bos
Ben van Dijk
Wim Doekes
Nenke Gietema
Sjeng Greefkens
Hielke Peereboom
Karoline van den Reek
Rindert Reijenga
Geertrui Schaberg
Ron Sinkeldam
Cornelia Wallien

Inhoudsopgave

1	Formules herleiden	10
	Voorkennis	12
1-1	Lineaire formules	14
1-2	Gebroken formules	16
1-3	Wortelformules	18
1-4	Machtsformules	20
1-5	Gemengde opdrachten	22
	Samenvatting	24
	Test jezelf	26
	Extra oefening - Basis	28
	Extra oefening - Gemengd	29
	Uitdagende opdrachten	30
	Al-Khwarizmi	31
2	Statistiek (met ICT)	32
	Voorkennis	34
2-1	Frequentieverdelingen	36
2-2	Continue en discrete variabelen	38
2-3	Normale verdeling	40
2-4	Normaal of niet normaal	42
2-5	Steekproeven	44
2-6	Gemengde opdrachten	46
	Samenvatting	48
	Test jezelf	50
	Extra oefening - Basis	52
	Extra oefening - Gemengd	53
	Steekproeven	54
	Vaardigheden 1	56
	Machtsregels	56
	Machtsfuncties	57
	Vergelijkingen en ongelijkheden	59

3	Periodieke functies	60
	Voorkennis	62
3-1	Sinusfunctie	64
3-2	Uitrekken en inkrimpen	66
3-3	Verschuiven	68
3-4	Sinusoïden	70
3-5	Formules opstellen bij sinusoïden	72
3-6	Gemengde opdrachten	74
	Samenvatting	76
	Test jezelf	78
	Extra oefening - Basis	80
	Extra oefening - Gemengd	81
	Uitdagende opdrachten	82
	Tocht naar Chatham	83
4	Toevalsvariabelen	84
	Voorkennis	86
4-1	Stochasten	88
4-2	Standaardafwijking van een stochast	90
4-3	Normale verdeling	92
4-4	Rekenregels voor stochasten	94
4-5	De $\sqrt{n}$ -wet	96
4-6	Gemengde opdrachten	98
	Samenvatting	100
	Test jezelf	102
	Extra oefening - Basis	104
	Extra oefening - Gemengd	105
	Uitdagende opdrachten	106
	Intelligentiequotiënt	107
	Vaardigheden 2	108
	Lineaire vergelijking opstellen	108
	Groeifactoren en percentages	109
	Substitueren en herleiden	110
	Rekenen en herleiden met breuken	110

5	Logaritmische functies	112
	Voorkennis	114
5-1	Logaritmen	116
5-2	Logaritmen berekenen	118
5-3	Grafieken van logaritmische functies	120
5-4	Rekenregels voor logaritmen	122
5-5	Formules herleiden	124
5-6	Logaritmische schalen	126
5-7	Gemengde opdrachten	128
	Samenvatting	130
	Test jezelf	132
	Extra oefening - Basis	134
	Extra oefening - Gemengd	135
	Uitdagende opdrachten	136
	Logaritmentafel	137
6	Rijen en recursie	138
	Voorkennis	140
6-1	Recursieve formules	142
6-2	Tijdgrafieken	144
6-3	Directe formules	146
6-4	Som van een rekenkundige rij	148
6-5	Som van een meetkundige rij	150
6-6	Gemengde opdrachten	152
	Samenvatting	154
	Test jezelf	156
	Extra oefening - Basis	158
	Extra oefening - Gemengd	159
	Uitdagende opdrachten	160
	Fibonacci	161
	Vaardigheden 3	162
	Formules herleiden	162
	Redeneren met gebroken formules	162
	Differentiëren	164
	Periodieke functies	165
	Systematisch tellen	166

7	De binomiale verdeling	168
	Voorkennis	170
7-1	Binomiale verdelingen	172
7-2	Werken met binomiale verdelingen	174
7-3	Cumulatieve kansen	176
7-4	Verwachtingswaarde en standaardafwijking	178
7-5	Gemengde opdrachten	180
	Samenvatting	182
	Test jezelf	184
	Extra oefening - Basis	186
	Extra oefening - Gemengd	187
	Uitdagende opdrachten	188
	Het bord van Galton	189
8	Samengestelde functies	190
	Voorkennis	192
8-1	Machtsfuncties	194
8-2	Machtsfuncties differentiëren	196
8-3	Wortelfuncties en gebroken functies	198
8-4	Kettingfuncties	200
8-5	Kettingfuncties differentiëren	202
8-6	Redeneren met de afgeleide	204
8-7	Gemengde opdrachten	206
	Samenvatting	208
	Test jezelf	210
	Extra oefening - Basis	212
	Extra oefening - Gemengd	213
	Uitdagende opdrachten	214
	Middelwaardestelling	215
	Vaardigheden 4	216
	Exponentiële- en logaritmische verbanden herleiden	216
	Redeneren met exponentiële en logaritmische verbanden	218
	Differentiëren	218
	Periodieke functies	219
	Systematisch tellen	220

Keuzeonderwerpen 222

9	Perspectief	224
	Praktische opdracht - Wereldrecords	242
	Data bewerken en presenteren in Excel	246
	Praktische opdracht - Statistisch onderzoek	252
	Trefwoorden	256

Werken met Moderne Wiskunde

De 11e editie ligt voor u. Deze editie is geschreven op basis van het nieuwe examenprogramma.

Ook in deze editie zijn de twee belangrijkste kernwaarden: inzicht en structuur. Inzicht ontwikkelen en een duidelijke structuur gaan samen. Elke paragraaf start met een oriënterende opdracht, waarna de betreffende theorie wordt vastgelegd. De theorie gaat steeds vergezeld van een of meer volledig uitgewerkte voorbeelden. In het vervolg van een paragraaf wordt de theorie verwerkt en geoefend en daarna weer geïntegreerd in eerder verworven kennis. Hier en daar treft u een Wiskundige Denk Activiteit aan. Op deze manier leren leerlingen niet alleen de theorie te reproduceren, maar krijgen ze inzicht in hoe de wiskunde in elkaar steekt.

Verschillen tussen leerlingen zullen er altijd zijn. Moderne Wiskunde 11e editie houdt hier meer dan ooit rekening mee door een ruim aanbod van extra oefeningen, aan het eind van een hoofdstuk en ook in het hulpboek, enerzijds, en uitdagende opdrachten en keuzeonderwerpen anderzijds.

De leerlijn in Moderne Wiskunde is geschikt om zelfstandig mee te werken. Bij vrijwel iedere lesparagraaf zijn er paragraaf vervangende ICT-opdrachten. Deze bieden naast opdrachten ook theorie, voorbeelden en tips en hints om de stof beter te begrijpen.

Voor u is de ICT erop gericht om uw leerlingen extra inzicht in de stof te geven en om de voortgang van uw leerling (en klas) te volgen. De ICT stelt uw leerling in staat zich efficiënter voor te bereiden op zijn proefwerk, met behulp van de digitale oefentoets.

Leerboek

Het leerboek is opgedeeld in hoofdstukken, afgewisseld met onderdelen algebraïsche vaardigheden.

Aan het eind is een onderdeel met keuzeonderwerpen opgenomen.



Werken met Moderne Wiskunde

[illegible]

Met de voorkennisparagraaf aan het begin van ieder hoofdstuk haal je de benodigde voorkennis weer op.

Bij sommige opdrachten kun je nog meer oefenen in het hulpboek: 

[illegible]

In het leerboek vind je verwijzingen naar de instructie grafische rekenmachine in het hulpboek.

	5.0	5.10
Hoofdstuk 2		
Statistiek		
In dit hoofdstuk		
Verenigen	34	
2-1. Fraag en antwoorvragen	36	
2-2. Looptijd van de afname van de afname	38	
2-3. Het aantal afname van de afname	40	
2-4. Het aantal afname van de afname	42	
2-5. (Aankomst van)	44	
2-6. Samen met de afname van de afname	46	
2-7. Samen met de afname van de afname	48	
2-8. Samen met de afname van de afname	50	
2-9. Samen met de afname van de afname	52	
2-10. Samen met de afname van de afname	54	
2-11. Samen met de afname van de afname	56	
2-12. Samen met de afname van de afname	58	
2-13. Samen met de afname van de afname	60	
2-14. Samen met de afname van de afname	62	
2-15. Samen met de afname van de afname	64	
2-16. Samen met de afname van de afname	66	
2-17. Samen met de afname van de afname	68	
2-18. Samen met de afname van de afname	70	
2-19. Samen met de afname van de afname	72	
2-20. Samen met de afname van de afname	74	
2-21. Samen met de afname van de afname	76	
2-22. Samen met de afname van de afname	78	
2-23. Samen met de afname van de afname	80	
2-24. Samen met de afname van de afname	82	
2-25. Samen met de afname van de afname	84	
2-26. Samen met de afname van de afname	86	
2-27. Samen met de afname van de afname	88	
2-28. Samen met de afname van de afname	90	
2-29. Samen met de afname van de afname	92	
2-30. Samen met de afname van de afname	94	
2-31. Samen met de afname van de afname	96	
2-32. Samen met de afname van de afname	98	
2-33. Samen met de afname van de afname	100	
2-34. Samen met de afname van de afname	102	
2-35. Samen met de afname van de afname	104	
2-36. Samen met de afname van de afname	106	
2-37. Samen met de afname van de afname	108	
2-38. Samen met de afname van de afname	110	
2-39. Samen met de afname van de afname	112	
2-40. Samen met de afname van de afname	114	
2-41. Samen met de afname van de afname	116	
2-42. Samen met de afname van de afname	118	
2-43. Samen met de afname van de afname	120	
2-44. Samen met de afname van de afname	122	
2-45. Samen met de afname van de afname	124	
2-46. Samen met de afname van de afname	126	
2-47. Samen met de afname van de afname	128	
2-48. Samen met de afname van de afname	130	
2-49. Samen met de afname van de afname	132	
2-50. Samen met de afname van de afname	134	
2-51. Samen met de afname van de afname	136	
2-52. Samen met de afname van de afname	138	
2-53. Samen met de afname van de afname	140	
2-54. Samen met de afname van de afname	142	
2-55. Samen met de afname van de afname	144	
2-56. Samen met de afname van de afname	146	
2-57. Samen met de afname van de afname	148	
2-58. Samen met de afname van de afname	150	
2-59. Samen met de afname van de afname	152	
2-60. Samen met de afname van de afname	154	
2-61. Samen met de afname van de afname	156	
2-62. Samen met de afname van de afname	158	
2-63. Samen met de afname van de afname	160	
2-64. Samen met de afname van de afname	162	
2-65. Samen met de afname van de afname	164	
2-66. Samen met de afname van de afname	166	
2-67. Samen met de afname van de afname	168	
2-68. Samen met de afname van de afname	170	
2-69. Samen met de afname van de afname	172	
2-70. Samen met de afname van de afname	174	
2-71. Samen met de afname van de afname	176	
2-72. Samen met de afname van de afname	178	
2-73. Samen met de afname van de afname	180	
2-74. Samen met de afname van de afname	182	
2-75. Samen met de afname van de afname	184	
2-76. Samen met de afname van de afname	186	
2-77. Samen met de afname van de afname	188	
2-78. Samen met de afname van de afname	190	
2-79. Samen met de afname van de afname	192	
2-80. Samen met de afname van de afname	194	
2-81. Samen met de afname van de afname	196	
2-82. Samen met de afname van de afname	198	
2-83. Samen met de afname van de afname	200	
2-84. Samen met de afname van de afname	202	
2-85. Samen met de afname van de afname	204	
2-86. Samen met de afname van de afname	206	
2-87. Samen met de afname van de afname	208	
2-88. Samen met de afname van de afname	210	
2-89. Samen met de afname van de afname	212	
2-90. Samen met de afname van de afname	214	
2-91. Samen met de afname van de afname	216	
2-92. Samen met de afname van de afname	218	
2-93. Samen met de afname van de afname	220	
2-94. Samen met de afname van de afname	222	
2-95. Samen met de afname van de afname	224	
2-96. Samen met de afname van de afname	226	
2-97. Samen met de afname van de afname	228	
2-98. Samen met de afname van de afname	230	
2-99. Samen met de afname van de afname	232	
2-100. Samen met de afname van de afname	234	
2-101. Samen met de afname van de afname	236	
2-102. Samen met de afname van de afname	238	
2-103. Samen met de afname van de afname	240	
2-104. Samen met de afname van de afname	242	
2-105. Samen met de afname van de afname	244	
2-106. Samen met de afname van de afname	246	
2-107. Samen met de afname van de afname	248	
2-108. Samen met de afname van de afname		

Per hoofdstuk staat aangegeven of de stof behoort tot het centraal examen, schoolexamen of keuzeonderwerpen.

Bij deze opdrachten word je uitgedaagd iets verder te kijken dan je geleerd hebt.

Op de rekenmachine zijn er twee opties waarmee je de kans van 0,5 kan berekenen: *stat* → *1-Var* → *binompdf* of *stat* → *1-Var* → *binomcdf*. Daarbij is het van belang dat je de waarde van de kans die je wilt berekenen invoert. Het is zo dat je bijvoorbeeld de kans van 0,5 wilt berekenen voor de kans dat er maximaal twee fouten worden gemaakt. Dan moet je de waarde 3 invullen, want de kans dat er maximaal twee fouten worden gemaakt is de kans dat er 0, 1 of 2 fouten worden gemaakt. Het is dus belangrijk dat je de juiste waarde invult.

10. **Student X en Bin(3; 0,65)-weddijk**

- Bereken $P(X = 3)$ en $P(X = 1,5)$ met behulp van de formule.
- Controleer je antwoorden van opdracht a door de parameters n en p in de *binomcdf* invoeren te laten variëren in je rekenmachine.

11. **Val en tot van twee vliegveldveringen op de golf in.**
 Het veld is verdeeld als van de twee antwoorden goed.

- Formuleer de steekstat. Formuleer de te bepalen kansparameters van de verdeling van X .
- Bereken de kans op drie goede antwoorden.
- Mak je je rekenmachine van tabel met de kansen van steekstat X . Vul de kansverdeling helemaal in.

$P(X = x)$	0	1	2	3	4	5	6
$P(X < x)$							

12. **De Oosterhoutseleten zijn een populaire dat bestaat uit een serie van 42 gepaakte schijven. Die kan maar twee worden toegevoegd. Als de schijven zijn toegevoegd, ontgaat deze dan de controle van de toezichters. Normaal tusschen de schijven optuig zodat het getuig op de Oosterhoutseleten wordt. Elk van de schijven heeft een "officiële" naam van de andere schijven, door een computer bevestigd. De steekstat die wordt uitgelezen als de 42 schijven zijn toegevoegd. Naast een van de schijven om de brandstof kan worden opgevoerd van het toezicht van de 42 schijven op de aan de toezichters.**

- Formuleer een binomiale verdeling steekstat X en geef de parameters n en p .
- Bereken de kans dat geen enkele schijf weigert.
- De kans dat geen van de 42 schijven weigert is 1 op de 1000000 kans weigert.
- Hoe groot is de kans dat geen van de 42 schijven weigert?
- Hoe groot is de kans op twee weigende schijven?
- In het voor de berekening van de kans van belang dat de schijven officieel bevestigd worden. Welke naam is aangeerd?

13. **Student X en Bin(2; 0,5)-weddijk**
 Bereken bij welke waarden van x : $P(X = x) = 0,5$.

Wiskunde 1A

175

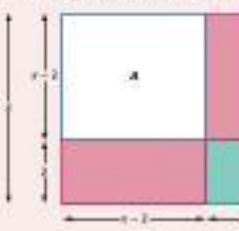
[illegible]

Al-Khwarizmi



Bij het algemeen oplossen van vergelijkingen heb je vaak gebruik gemaakt van de **verplaatsingsmethode**. De Al in *Al-Khwarizmi* betekent de **rekenmethode**. Abu Jafar Muhammad bin Musa al-Khwarizmi deed middelen bij het oplossen van vergelijkingen. Tot era van hem werd in 1983 in de voorstelling *Donat* deze een puntgetal toegevoegd.

opdracht
 In deze methode maakten de methoden gebruik van het oplossen van $x^2 + 12 = x^3$



Het ging al-Khwarizmi om het oplossen van allerlei algebraïsche problemen zoals bij de legenaarsen bij de landerij en bij het verdeken van erfenissen. Hij beschreef zijn methoden in een boek: *Al-Jabr wa'l-Muqabala*. Het boek is een van de eerste boeken over Algebra. Latere West-Europese vertaalt zijn boek naar het Latijn met de woord *algebra* en maakten daar algebra van. Zijn boek bekend bij alle Arabieren en West-Europese vertalingen met een variabele. De methode van variabele van de tijd niet bekend. Dit werden de oplossingen met woorden omschreven.

Zijn methode onderscheidt in twee verschillende soorten vergelijkingen. Voorbeelden hiervan in onze notatie zijn:

- $4x^2 = 3x$
- $3x^2 = y$
- $x = 23$
- $x^2 + 32x = 10$
- $x^2 + 9 = 16x$
- $4x = 12 + x^2$

Het oplossen van deze vergelijkingen handteert al-Khwarizmi in woorden, waarvoor het belang is om een betekenis toe te voegen. Een tekst, lichte bij het oplossen van met variabele.

De oppervlakte van het vierkant is x^2 en de oppervlakte van het witte vierkant is x .

a Laat zien dat de oppervlakte van het gekleurde deel de uitdrukking $4x - x^2$ is.

b Laat zien dat $4x - x^2 = x^2$

De oorspronkelijke vergelijking is $4x - 12x^2 = x^2$

Dus x moet dan gelijk aan 16 zijn.

Ook geldt $x = 16 - 2x^2$.

c Laat zien dat de primitieve oplossing $x = 4$ is.

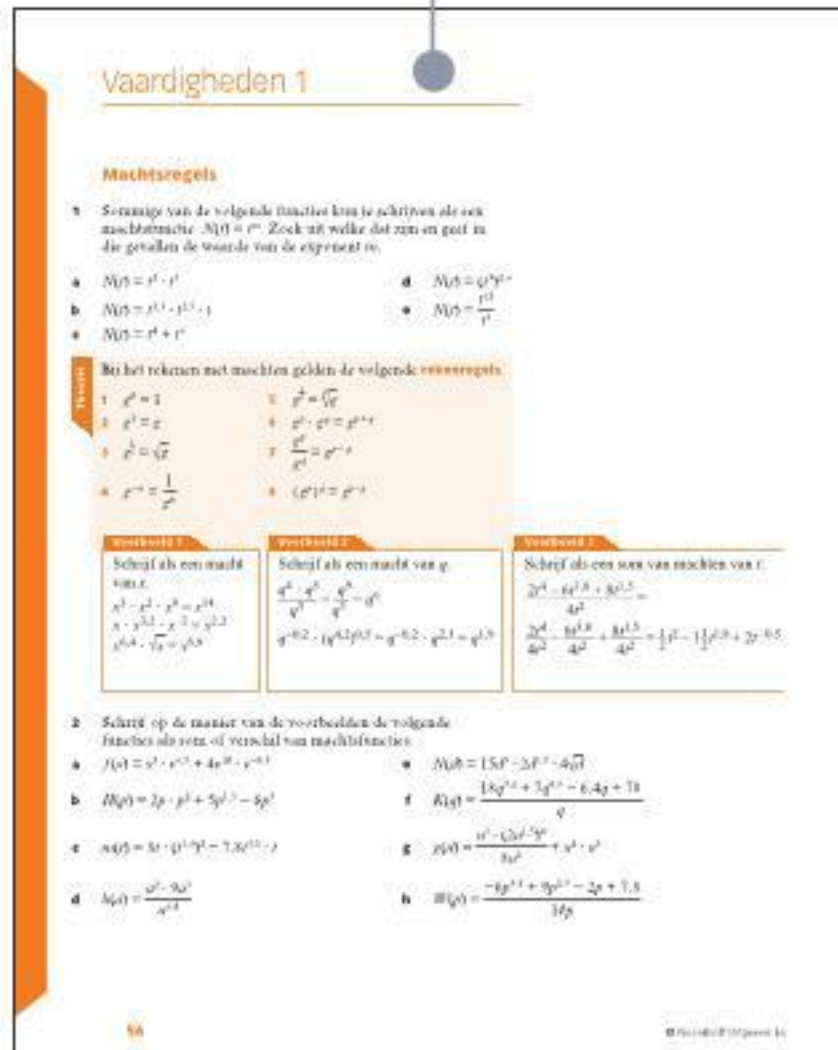
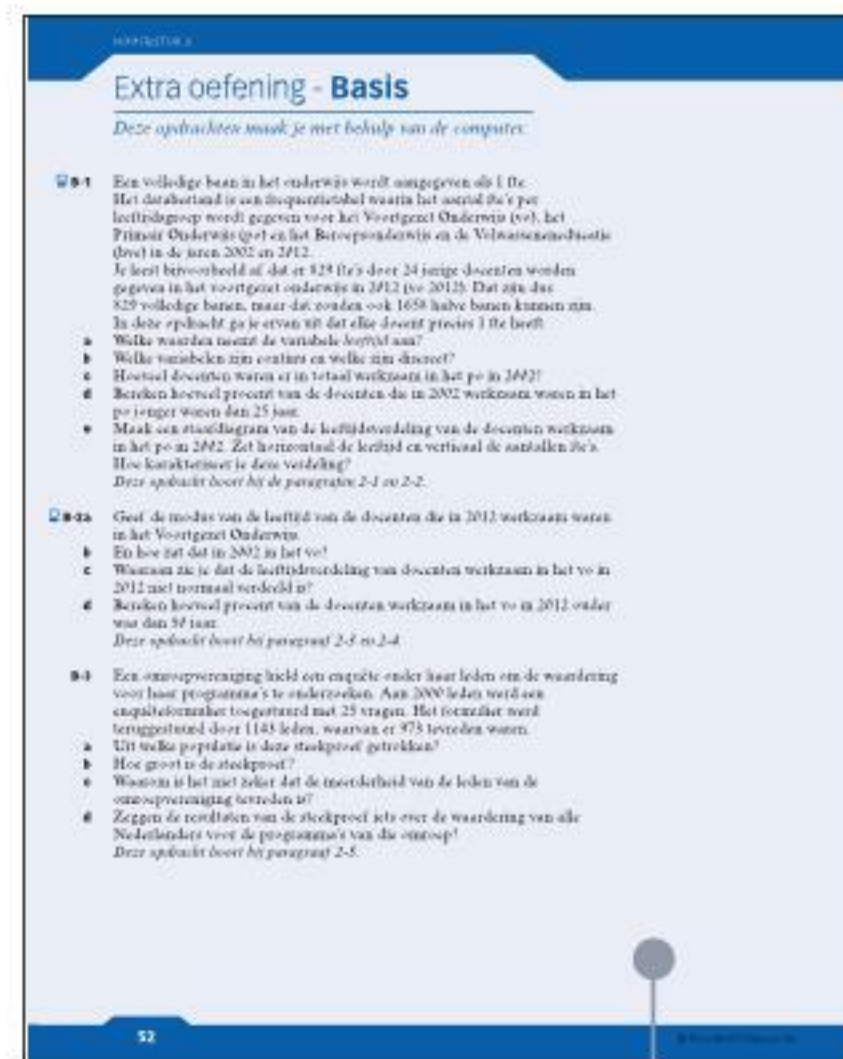
d Laat met behulp van onderstaande tabel op $x^2 + 16x = 31$ Merk op dat x en de oppervlakte van het hele vierkant is

	x	t
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

31

Op deze bladzijde lees je over de geschiedenis of een toepassing van wiskunde.

In dit onderdeel leer je nieuwe vaardigheden en je onderhoudt de vaardigheden die je al geleerd hebt.



Bij de Extra oefening herhaal je stof uit het boek.

Bij de Keuzeonderwerpen vind je praktische opdrachten.



Hulpboek

Het hulpboek bevat de instructies voor de grafische rekenmachines, voorbeeldproefwerken, werkbladen en antwoorden bij de opdrachten uit het leerboek en de voorbeeldproefwerken.



Het leerboek heeft verwijzingen naar de rekenmachine voor de TI en de Casio

Bij ieder hoofdstuk vind je een voorbeeldproefwerk met vaardighedenoverzicht, hints en antwoorden.

De herhalingsommen zijn extra bij sommige opdrachten uit het leerboek

De antwoorden van de opdrachten van het leerboek en de voorbeeldproefwerken staan

Uitwerkingen

Het uitwerkingenboek bevat de uitwerkingen van de opdrachten uit het leerboek en uit het hulpboek. Stap voor stap wordt uitgewerkt wat de oplossing is van de opdrachten.

Werken met de ICT van Moderne Wiskunde

Bijzondere punten NT

Opdracht

Hiernaast zie je de baan van punt P .
De x -coördinaat kun je berekenen met $x = 5\sin(-t)$
en de y -coördinaat met $y = -5\cos(2t)$
Op $t = 0$ is $P(0, -5)$.

$t = 1.49\pi$ $P \approx (5, 4.99)$

De coördinaten van punt P op het tijdstip $t = 4\frac{1}{3}\pi$ zijn (... , ...)

Op dat tijdstip is $\frac{dy}{dt} =$

Op dat tijdstip is $\frac{dx}{dt} =$

Op dat tijdstip is de helling van de raaklijn aan de kromme $\frac{dy}{dx} =$

7 van 10 | score: 0 totaal: 0

© Noordhoff Uitgevers

[Terug](#) [Volgende](#) [Inleveren](#)

Veel opdrachten in de hoofdstukken worden ondersteund door een uitlegvideo of een aanpakanimatie. Hiermee kun je nog makkelijker en zelfstandiger werken met de ICT van Moderne Wiskunde.

Bij vrijwel iedere paragraaf is een vervangende ICT-opdracht opgenomen. In deze opdracht staan ook tips en tussenvragen, die je helpen de stof beter te begrijpen.

Theorie

Hoe maak je een formule bij een lineair verband?

Start

Stap 1

Stap 2

1 Schrijf de algemene formule bij een lineair verband op.

1 De algemene formule is: $y = ax + b$

hellingsgetal

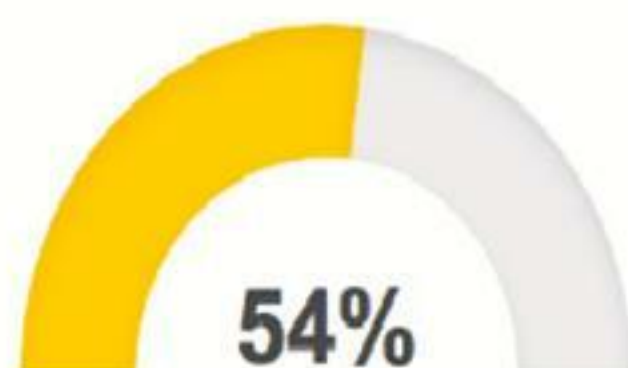
startgetal

(2, 2)

(7, 9)

Diagnose

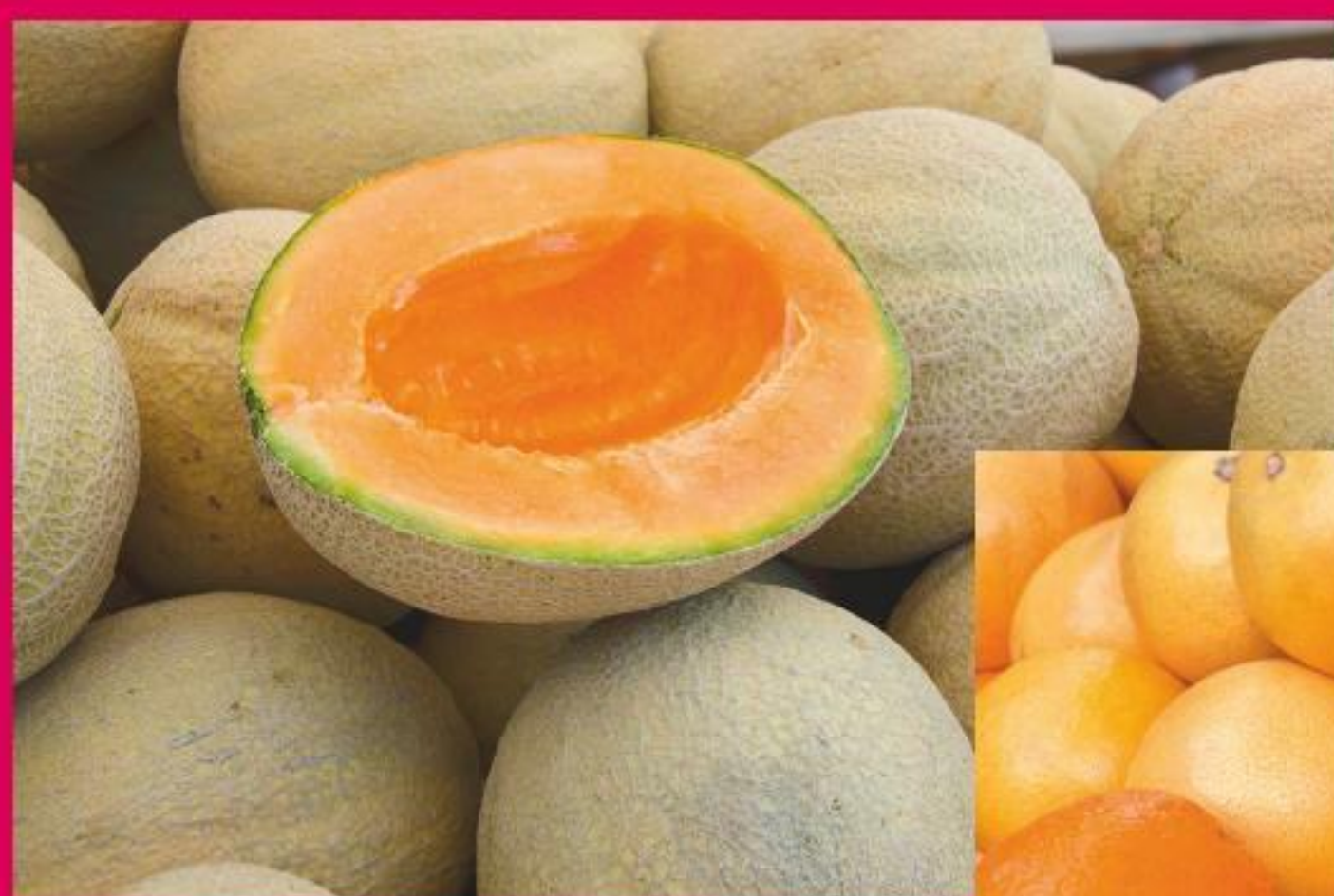
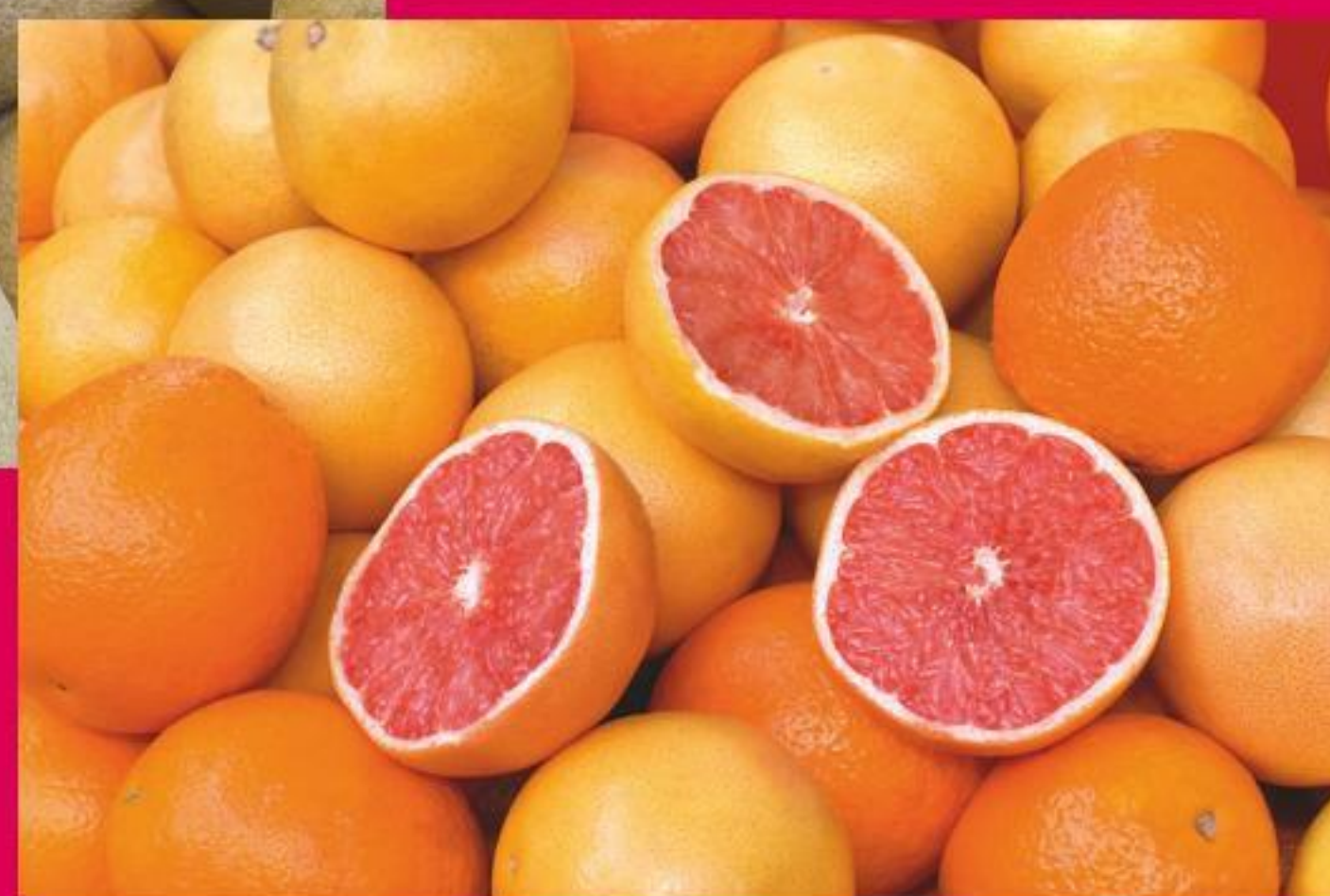
Totaalscore



Score per onderwerp



Na ieder hoofdstuk kun je een Digitale Oefentoets maken. Deze helpt je om een proefwerk efficiënt voor te bereiden. Je krijgt inzicht in hoe je op paragraafniveau scoort en indien nodig krijg je meer uitleg en oefenstof aangeboden.



Vergelijken

Joep koopt twee meloenen en drie grapefruits, hij betaalt €3,75.

Akkie betaalt €4,- voor drie meloenen en twee grapefruits.

Hoeveel kosten de meloenen en de grapefruits per stuk?

Hoofdstuk 1

Formules herleiden

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	12
1-1	Lineaire formules	14
1-2	Gebroken formules	16
1-3	Wortelformules	18
1-4	Machtsformules	20
1-5	Gemengde opdrachten	22
	Samenvatting	24
	Test jezelf	26
	Extra oefening - Basis	28
	Extra oefening - Gemengd	29
	Uitdagende opdrachten	30
	Al-Khwarizmi	31

Voorkennis

V-1 Schrijf zonder haakjes.

a $y = 3(x + 2)$
b $y = -2(x - 6)$
c $y = 3x(2x - 1)$

d $y = 2x(x^2 - 3x)$
e $y = -5x^2(x + 2)$
f $y = -2x(12 - 3x^2)$

V-2 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $K = 5n^2 + 2(n^2 - 3)$ **f** $H = (p - 4)^2$
b $P = 3q - 2(q - 7)$ **g** $y = 6(x + 2)(2x + 3)$
c $g = h(h + 5) + 3(h^2 - 2)$ **h** $B = 3a - (a + 1)^2$
d $a = (b + 3)(b + 7)$ **i** $y = 2(x + 2)^2$
e $c = (2d - 5)(d + 2)$ **j** $W = (v + 3)^2 - (v - 3)^2$

Voorbeeld

Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk:

$$y = (x + 4)^2 - 2(4x - 5)$$

Oplossing

$$\begin{aligned} y &= (x + 4)^2 - 2(4x - 5) \\ y &= (x + 4)(x + 4) - 8x + 10 \\ y &= x^2 + 8x + 16 - 8x + 10 \\ y &= x^2 + 26 \end{aligned}$$

Breuken kun je bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken door de noemers gelijknamig te maken.

Breuken kun je vermenigvuldigen door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen.

Je kunt breuken vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen.

Voorbeeld 1

Herleid en schrijf als één breuk: $q = \frac{8}{3} - \frac{5}{x}$

Oplossing

$$q = \frac{8}{3} - \frac{5}{x}$$

$$q = \frac{8 \cdot x}{3 \cdot x} - \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot x}$$

$$q = \frac{8x}{3x} - \frac{15}{3x} \text{ dus } q = \frac{8x - 15}{3x}$$

Voorbeeld 2

Herleid en schrijf als één breuk: $q = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3x^2} \cdot \frac{6}{x}$

Oplossing

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3x^2} \cdot \frac{6}{x}$$

$$q = \frac{1 \cdot 8 \cdot 6}{2 \cdot 3x^2 \cdot x}$$

$$q = \frac{48}{6x^3} \text{ dus } q = \frac{8}{x^3}$$

V-3 Herleid de volgende formules tot één breuk en vereenvoudig deze indien mogelijk.

a $k = \frac{1}{2p} + \frac{3}{2p}$

d $s = \frac{t}{2t + 1} + \frac{1}{t}$

g $s = \frac{1}{5} \cdot \frac{10n}{n + 1} \cdot \frac{n}{4}$

b $q = \frac{p}{3} + \frac{5p}{3}$

e $a = \frac{3}{b^2} - \frac{5}{2b}$

h $p = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7g}$

c $Q = \frac{7}{3p} - \frac{1}{p}$

f $t = \frac{3k}{k^2} \cdot \frac{k}{6k}$

i $w = \frac{3v}{v^3} \cdot \frac{(v + 1)}{6v}$

Bij het vermenigvuldigen van breuken kun je soms gebruik

maken van de regel: $A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C}$

V-4 Herleid de volgende formules tot één breuk.

a $k = 3 \cdot \frac{2q}{q+1}$

c $D = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{4k+1}$

b $T = 0,5 \cdot \frac{6q}{7}$

d $r = 4 \cdot \frac{7a}{12a^2}$

V-5 Hiernaast zie je hoe je de formule $w = \frac{2q^3 + 6q^2 - 4q}{2q}$ kunt herschrijven. Herleid de volgende formules op dezelfde manier.

a $K = \frac{12p^3 - 6p^2}{3}$

c $Q = \frac{k^3 - 4k}{2k}$

b $a = \frac{-4b^5 + 3b^2 + b}{b}$

d $t = \frac{5x^6 - 8x^3 + 2x^2}{x^2}$

Voorbeeld

Schrijf $W = 6 \cdot \frac{2x+1}{3x}$ als één breuk.

Oplossing

$$W = \frac{6(2x+1)}{3x}$$

$$W = \frac{2(2x+1)}{x} \text{ ofwel } W = \frac{4x+2}{x}$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{2q^3 + 6q^2 - 4q}{2q} \\ w &= \frac{2q^3}{2q} + \frac{6q^2}{2q} - \frac{4q}{2q} \\ w &= q^2 + 3q - 2 \end{aligned}$$

Theorie

Voor het rekenen met machten gelden de volgende rekenregels.

$$g^0 = 1 \text{ en } g^1 = g$$

$$(g^p)^q = g^{pq}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$g^p \cdot g^q = g^{p+q}$$

$$g^{-n} = \frac{1}{g^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$$

$$g^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{g}$$

V-6 Maak gebruik van de regels hierboven om de volgende uitdrukkingen als één macht te schrijven.

a $x^3 \cdot x^{-1} \cdot x^4$

e $(2x^4)^3$

b $(x^5)^{0,3}$

f $(x^{2a} \cdot x^a)^2$

c $5^{2x} \cdot 5^{x+1}$

g $(5x)^2 \cdot (3x)^3$

d $\frac{x^7}{x^3}$

h $\frac{3x^a \cdot 2x^5}{x^{a+1}}$

V-7 Gebruik de rekenregels en schrijf zonder gebroken of negatieve exponenten.

a $5 \cdot 2^{-3}$

d $(p^{-2})^{-1}$

b $5,6 \cdot 4^{\frac{1}{2}}$

e $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-6}$

c $7 \cdot x^{\frac{1}{4}}$

f $(2q^{-3})^2 + 5q^{-6}$

V-8 Schrijf als één macht.

a $\sqrt[4]{b}$

d $\sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[6]{p} \cdot p^{-2}$

b $3\sqrt{x}$

e $2q^5 \cdot 7\sqrt{q} \cdot \sqrt[4]{q}$

c $\frac{1}{a^3}$

f $\frac{\sqrt{k}}{k^3 \cdot \sqrt[3]{k}}$

Voorbeeld

Schrijf $\left(\frac{\frac{1}{2}x \cdot x^2}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$ als één macht.

Oplossing

$$\left(\frac{\frac{1}{2}x \cdot x^2}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}x^3\right)^2}{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{4}x^6}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4} \cdot x^{5\frac{1}{2}}$$

1-1

Lineaire formules

- 1** Het mechaniek van een Friese staartklok wordt aangedreven met een gewicht. Op een dag is op twee tijdstippen de hoogte van zo'n gewicht ten opzichte van de vloer gemeten. Om negen uur 's morgens was die hoogte 141 cm, 's middags om twee uur was de hoogte 96 cm. Als het gewicht de vloer raakt stopt de klok.

Neem aan dat het gewicht elk uur evenveel zakt.

- a** Met hoeveel cm per minuut zakt het gewicht?
b Geef een formule die de hoogte van het gewicht aangeeft na negen uur 's morgens. Neem de hoogte h in cm en de tijd t in minuten.
c Met welke vergelijking kun je berekenen na hoeveel minuten het gewicht op de grond komt?
d Op welk tijdstip zal de klok gaan stilstaan?



- 2** Hiernaast is een begin gemaakt met het oplossen van de lineaire vergelijking $3x + 5(6 - 2x) = 14 - 4(\frac{1}{2}x + 1)$.

	$3x + 5(6 - 2x) = 14 - 4(\frac{1}{2}x + 1)$	(1)
	$3x + 30 - 10x = 14 - 2x - 4$	(2)
	$-7x + 30 = 10 - 2x$	(3)
	$-5x + 30 = 10$	(4)

- a** Leg uit hoe vergelijking (2) uit vergelijking (1) ontstaat.
b Leg uit hoe vergelijking (4) uit vergelijking (3) ontstaat.
c Trek in vergelijking (4) links en rechts van het $=$ -teken 30 af en los de vergelijking verder op.

- 3a** Laat zien dat de formule $8x - 2y = 15$ te herleiden is tot de formule $y = 4x - 7\frac{1}{2}$.
b Schrijf de formule $3m + 4n = 12$ in de vorm $m = \dots n + \dots$.
c Schrijf de formule $20p + 35q = 50$ in de vorm $p = \dots q + \dots$.

Theorie

Veel formules kun je herleiden met de **balansmethode**: links en rechts van het $=$ -teken voer je dezelfde bewerking uit. Deze methode gebruik je ook bij het oplossen van vergelijkingen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $3p + 2q = 10$.
 Bereken q als $p = 4$.

Oplossing

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 + 2q &= 10 \\ 2q &= -12 + 10 = -2 && \text{(links en rechts } -12) \\ q &= -1 && \text{(links en rechts : 2)} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Herleid de formule $3p + 2q = 10$ waarbij je q uitdrukt in p .

Oplossing

$$\begin{aligned} 3p + 2q &= 10 \\ 2q &= -3p + 10 && \text{(links en rechts } -3p) \\ q &= -1\frac{1}{2}p + 5 && \text{(links en rechts : 2)} \end{aligned}$$

- H4** Herleid de volgende formules waarbij je q uitdrukt in p .
- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| a $8p - 4q = 9$ | d $5q + 3p = 6$ |
| b $p + 2q = 0$ | e $4q + 6 = 20p - 10$ |
| c $15p = 3q + 27$ | f $3(q + 1) = 6p + 5$ |

- 5** Een formule om het ideale lichaamsgewicht te berekenen is die van Hamwi. Volgens deze formule is het ideale lichaamsgewicht G voor vrouwen $G = 45,4 + 0,89 \cdot L$. Hierin is G het gewicht in kg. L bereken je met de formule $L = l - 152$.

In deze formule is l de lichaamslengte in cm.

- a** Bereken het ideale gewicht voor een vrouw met een lengte van 176 cm.
- b** In de formule $G = 45,4 + 0,89 \cdot L$ is G uitgedrukt in L . In de formule $L = l - 152$ is L uitgedrukt in l . Om G uit te drukken in l moet je L in de formule $G = 45,4 + 0,89 \cdot L$ vervangen door $L = l - 152$. Hiernaast is daarmee een begin gemaakt. Maak de berekening af.

$$G = 45,4 + 0,89 \cdot L \text{ met}$$

$$L = l - 152$$

$$G = 45,4 + 0,89 \cdot L$$

$$l - 152$$

$$G = 45,4 + 0,89(l - 152)$$

Haakjes wegwerken:

$$G = \dots$$

Theorie

In een formule kun je een variabele vervangen door een formule. Je noemt dit **substitueren**. Na het substitueren vereenvoudig je indien mogelijk de ontstane formule.

Voorbeeld

Gegeven de formule $y = 4t + 8$.

Substitueer hierin de formule $t = -7x + 1$ en vereenvoudig.

Oplossing

$$y = 4(-7x + 1) + 8$$

$$y = -28x + 4 + 8$$

$$y = -28x + 12$$

- 6** Substitueer op dezelfde manier als in het voorbeeld hierboven de formule $t = 2x - 6$ in de formule $y = 4t + 8$.

- H 7** Substitueer formule B in formule A.

- | | | |
|----------------------------|----|-------------------|
| a A: $y = 3t + 14$ | en | B: $t = 5x - 6$ |
| b A: $y = -5t + 89$ | en | B: $t = 19x + 18$ |
| c A: $y = 8p + 10$ | en | B: $p = 5 - 2x$ |
| d A: $y = 6 - 3a$ | en | B: $a = x^2 + 4$ |

- 8** Een meubelfabriek maakt twee soorten stoelen. Voor stoel A is 0,5 uur machinetijd nodig en voor stoel B 1,5 uur. Per dag draait de machine 15 uur. Het aantal stoelen van model A is a en het aantal stoelen van model B is b .

- a** Leg uit dat voor een dagproductie geldt $0,5a + 1,5b = 15$.
- b** De fabriek produceert op een dag in totaal 20 stoelen. Bereken hoeveel stoelen van model A er op deze dag zijn geproduceerd.

1-2

Gebroken formules



- 9 De firma Wortel produceert onder andere hardhouten tuinbankjes. De gemiddelde kosten per bankje worden berekend met de formule $GK = 65 + \frac{12\,000}{2B + 10}$
- Hierin is B het aantal geproduceerde bankjes en zijn GK de gemiddelde kosten in euro's.
- a Bereken de gemiddelde kosten bij een productie van 10 bankjes, van 100 bankjes en van 1000 bankjes. Wat merk je op?
- b Welke vergelijking moet je oplossen als je wilt berekenen hoeveel bankjes er geproduceerd moeten worden bij de gemiddelde kosten van € 75,-?
- c Welke waarde heeft $\frac{12\,000}{2B + 10}$ bij $GK = 75$? En $2B + 10$?
- d Bereken het aantal bankjes waarbij de gemiddelde kosten € 75,- zijn.
- e Bereken B bij $GK = 90$.
- 10 Gegeven is de formule $y = \frac{120}{3x - 15}$
- a Bereken x bij $y = 10$.
- b Bereken x bij $y = 24$.
- c Rick herleidt de formule $y = \frac{120}{3x - 15}$ naar een vorm waarbij x is uitgedrukt in y .
Neem de herleiding over en maak deze af.
- d Controleer je antwoorden van de opdrachten a en b met de formule die je bij opdracht c hebt gevonden.

Rick

$$y = \frac{120}{3x - 15}$$

$$(3x - 15) \cdot y = 120 \quad (\text{links en rechts} \times (3x - 15))$$

$$(3x - 15) = \frac{120}{y} \quad (\text{links en rechts} : y)$$

$$3x = \dots \quad (\text{links en rechts} \dots)$$

$$x = \dots \quad (\text{links en rechts} \dots)$$

Theorie

Een formule heet een **gebroken formule** als een variabele in de noemer van een breuk voorkomt. Een vergelijking met een onbekende in de noemer heet een **gebroken vergelijking**. Bij het herleiden van gebroken formules gebruik je de volgende eigenschappen:

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$.

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

Voorbeeld 1

Herleid $\frac{5}{b} - 3a = 1$, druk b uit in a .

Oplossing

$$\frac{5}{b} = 1 + 3a \quad (\text{links en rechts } + 3a)$$

$$5 = b \cdot (1 + 3a) \quad \left(\frac{A}{B} = C \text{ dus } A = B \cdot C\right)$$

$$b = \frac{5}{1 + 3a} \quad \left(A = B \cdot C \text{ dus } C = \frac{A}{B}\right)$$

Voorbeeld 2

Herleid $\frac{1}{q-8} = \frac{2p}{3q}$, druk p uit in q .

Oplossing

$$1 \cdot 3q = (q-8) \cdot 2p \quad \left(\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ dus } A \cdot D = B \cdot C\right)$$

$$\frac{3q}{q-8} = 2p \quad (\text{links en rechts : } (q-8))$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3q}{q-8} = p \quad (\text{links en rechts : } 2)$$

$$p = \frac{1\frac{1}{2}q}{q-8}$$

11 Herleid de volgende formules waarbij je b uitdrukt in a .

a $a = \frac{12}{b}$

b $\frac{b-1}{a} = 7$

c $a + 1 = \frac{7}{2b}$

d $\frac{4}{b} = 6a - 7$

e $\frac{5}{b} - 4 = 6a + 3$

f $2a = \frac{8}{b+4}$

g $\frac{5}{b+3} = \frac{a-2}{10}$

h $\frac{5}{b} = \frac{-2}{4-a}$

12 Voor iedere gemeente wordt voor de basisscholen een opheffingsnorm vastgesteld. De opheffingsnorm is gebaseerd op de leerlingendichtheid d , dat is het aantal basisschoolleerlingen per km^2 in de gemeente. De opheffingsnorm N kan dan berekend

worden met de formule $N = \frac{0,6d}{0,15 + 0,0027d}$

a De gemeente Rijswijk heeft een oppervlakte van $14,5 \text{ km}^2$. In 2012 had de gemeente Rijswijk 3263 basisschoolleerlingen.

Bereken voor 2012 de opheffingsnorm in Rijswijk.

b De gemeente Heerenveen heeft een oppervlakte van 180 km^2 .

Geef voor de gemeente Heerenveen een formule waarmee je de leerlingendichtheid d uitdrukt in het aantal basisschoolleerlingen a .

c Toon aan dat je de opheffingsnorm N voor een gemeente met een oppervlakte van $P \text{ km}^2$ en a basisschoolleerlingen

kunt berekenen met de formule $N = \frac{0,6a}{0,15P + 0,0027a}$



1-3

Wortelformules

- 13** Het bereik van een televisie- of radiozender hangt af van de hoogte van de zendantenne. Bij benadering geldt dat het bereik R in km afhangt van de hoogte h in meters volgens de formule $R = 3,6 \cdot \sqrt{h + 0,8}$.
- a** Hoe groot is het zendbereik als de zender op de grond zou staan?
 - b** Een zendantenne heeft een hoogte van 12 meter en wordt 3 meter hoger gemaakt.
Met hoeveel km neemt het bereik toe?
 - c** Welke vergelijking moet je oplossen om te berekenen bij welke hoogte het zendbereik gelijk is aan 18 km?
 - d** Welke waarde heeft $\sqrt{h + 0,8}$ bij een zendbereik van 18 km?
En $h + 0,8$?
 - e** Hoe hoog is een zendmast met een bereik van 18 km?
 - f** Bereken h bij $R = 36$.

- 14** Gegeven is de formule $y = \sqrt{2x - 5}$.
- a** Bereken x bij $y = 3$.
 - b** Welke waarde heeft x bij $y = 6$?
 - c** Hiernaast is een begin gemaakt bij het herleiden van de formule $y = \sqrt{2x - 5}$ waarbij x wordt uitgedrukt in y .
Neem deze herleiding over en maak deze af.
 - d** Controleer je antwoorden van de opdrachten a en b met de formule die je bij opdracht c hebt gevonden.

$$y = \sqrt{2x - 5}$$

$$y^2 = 2x - 5 \quad (\text{links en rechts kwadrateren})$$

$$2x = y^2 + \dots \quad (\text{links en rechts } + 5)$$

$$x = \dots$$

Theorie

Een formule waar een variabele onder het wortelteken voorkomt heet een **wortelformule**.

Een wortelformule herleid je door links en rechts van het $=$ -teken dezelfde bewerking uit te voeren. Je gebruikt de regel:

Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$ (voor $B \geq 0$).

Je kunt bij het herleiden van wortelformules dezelfde technieken gebruiken als bij het oplossen van wortelvergelijkingen.

Voorbeeld 1

Gegeven is $b = \frac{1}{2} \sqrt{2a + 1}$, bereken a als $b = 3$.

Oplossing

$$\frac{1}{2} \sqrt{2a + 1} = 3$$

$$\sqrt{2a + 1} = 6 \quad (\text{links en rechts } \times 2)$$

$$2a + 1 = 36 \quad (\sqrt{A} = B \text{ dus } A = B^2)$$

$$2a = 35 \quad (\text{links en rechts } -1)$$

$$a = 17\frac{1}{2} \quad (\text{links en rechts } : 2)$$

Voorbeeld 2

Herleid $b = \frac{1}{2} \sqrt{2a + 1}$ waarbij je a uitdrukt in b .

Oplossing

$$\sqrt{2a + 1} = 2b \quad (\text{links en rechts } \times 2)$$

$$2a + 1 = 4b^2 \quad (\sqrt{A} = B \text{ dus } A = B^2)$$

$$2a = 4b^2 - 1 \quad (\text{links en rechts } - 1)$$

$$a = 2b^2 - \frac{1}{2} \quad (\text{links en rechts } : 2)$$

H 15 Herleid de volgende formules waarbij je p uitdrukt in q .

- | | |
|---|-----------------------------------|
| a $q = \sqrt{3p + 1}$ | e $q - 1 = \sqrt{2p - 6}$ |
| b $q = 0,2\sqrt{p + 3}$ | f $6q = 3\sqrt{p + 2} - 3$ |
| c $q = \frac{1}{3}\sqrt{2p + 5}$ | g $q = -\sqrt{2p + 5}$ |
| d $q = 2 + \sqrt{p - 1}$ | h $5 + 2q = \sqrt{p + 2}$ |

H 16 De waterhoogte in een reservoir dat wordt gevuld met water kun je beschrijven met de formule $H = \sqrt{0,025t^2 + 100}$.

Hierin is H de waterhoogte in cm en t de tijd in seconden.

- a** Hoe hoog staat het water op $t = 0$?
- b** Na hoeveel seconden is de waterhoogte 40 cm?
- c** Geef een formule waarbij je t uitdrukt in H .
- d** Het reservoir heeft een hoogte van 1,5 m.
Hoe lang duurt het vullen van het reservoir?
- e** Hoelang duurt het voordat de waterhoogte van 50 cm naar 60 cm is gestegen? Rond af op hele seconden.

Vergelijkingen kun je ook oplossen met je rekenmachine.

17 De snelheid van het geluid hangt af van de temperatuur en de windsnelheid. Bij windstil weer wordt het verband bij

benadering weergegeven door de formule $V = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273}}$

Hierin is V de snelheid van het geluid in meters per seconde en T de temperatuur in graden Celsius.

In de twintigste eeuw varieerde de temperatuur in Nederland van $-27,4^\circ\text{C}$ tot $38,6^\circ\text{C}$. Neem aan dat de temperaturen gemeten zijn bij windstil weer.

- a** Bereken het verschil van de geluidssnelheden bij deze twee temperaturen.

Ga bij de volgende opdrachten steeds uit van een temperatuur van 15°C op 0 km hoogte.

In de atmosfeer neemt de temperatuur tot op 10 km hoogte lineair af tot -50°C volgens de formule $T = 15 - 6,5h$.

Hierbij is h de hoogte in kilometers. Als deze formule wordt

gecombineerd met de formule $V = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273}}$ kan

worden afgeleid dat voor het verband tussen V en h bij

benadering de formule $V = 331 \cdot \sqrt{1,0549 - 0,0238h}$ geldt.

- b** Leid deze formule af.
- c** Bereken op welke hoogte de geluidssnelheid volgens de formule gelijk is aan 320 meter per seconde.

Ontleend aan CE havo wiskunde B1 2004, tijdvak 1

1-4

Machtsformules

- 18** De levensverwachting L van een zoogdier hangt af van het gewicht G . Daarvoor geldt de formule: $L = 11,75 \cdot G^{0,2}$ met L in jaren en G in kg.
- a** Bereken de levensverwachting van een olifant van 4000 kg.
- b** Ga na dat deze formule niet voor mensen geldt.
- c** Roos wil de vergelijking $80 = 11,75 \cdot G^{0,2}$ oplossen. Welke betekenis heeft de oplossing van deze vergelijking?
- d** Roos heeft een begin gemaakt met het oplossen van deze vergelijking. Waarom heeft Roos ervoor gekozen om links en rechts tot de macht 5 te verheffen?
- e** Maak de berekening van Roos verder af.

Roos

$$11,75 \cdot G^{0,2} = 80$$

$$G^{0,2} = \frac{80}{11,75}$$

$$(G^{0,2})^5 = \left(\frac{80}{11,75}\right)^5$$

$$G^{\dots} = \dots$$

- 19a** Gegeven is de vergelijking $x^7 = 3$. Door links en rechts tot de macht $\frac{1}{7}$ te verheffen, krijg je $(x^7)^{\frac{1}{7}} = 3^{\frac{1}{7}}$.
Waarom geeft dit als oplossing $x = 3^{\frac{1}{7}}$?
- b** Geef de oplossing van de vergelijking $x^7 = 3$ in twee decimalen nauwkeurig.
- c** Vul in: Uit $p^{0,3} = 4,2$ volgt $(p^{0,3})^{\frac{1}{0,3}} = 4,2^{\dots}$ dus is $p = 4,2^{\dots} \approx \dots$

- 20** Herleid de volgende formules tot de vorm $K = b \cdot x^a$.

a $K = 3x^{-0,6} \cdot 2x^{1,3}$

c $K = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x} \cdot 2 \sqrt[6]{x}$

b $K = \frac{1}{4x^3}$

d $K = \frac{4x^2}{\frac{1}{2}x^{0,4}}$

Theorie

Een oplossing van de vergelijking $x^a = c$ is $x = c^{\frac{1}{a}}$.

Bij het oplossen van dit soort vergelijkingen gebruik je de regel: $(g^p)^q = g^{pq}$.

Deze regel kun je ook gebruiken bij het herleiden van machtsformules.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $A = 4 \cdot s^{1,6}$.
Bereken s als $A = 10$.

Oplossing

$$4 \cdot s^{1,6} = 10$$

$$s^{1,6} = 2,5 \quad (\text{links en rechts : 4})$$

$$(s^{1,6})^{\frac{1}{1,6}} = 2,5^{\frac{1}{1,6}} \quad (\text{links en rechts tot de macht } \frac{1}{1,6})$$

$$s = 2,5^{\frac{1}{1,6}} \text{ ofwel } s \approx 1,77$$

Voorbeeld 2

Herleid: $A = 4 \cdot s^{1,6}$, druk s uit in A .

Oplossing

$$4 \cdot s^{1,6} = A$$

$$s^{1,6} = \frac{A}{4} \quad (\text{links en rechts : 4})$$

$$(s^{1,6})^{\frac{1}{1,6}} = \left(\frac{1}{4} \cdot A\right)^{\frac{1}{1,6}} \quad (\text{links en rechts tot de macht } \frac{1}{1,6})$$

$$s = \left(\frac{1}{4} \cdot A\right)^{\frac{1}{1,6}} \text{ ofwel } s = 0,42 \cdot A^{0,625}$$

21 Herleid de volgende formules tot de vorm $p = c \cdot Q^a$.

a $Q = 8p^3$

b $Q = 2,5p^{-3}$

c $\frac{2p}{Q} = 3p^4$

d $Q \cdot p^{-1,3} = 5p^{-0,7}$

e $2p^3 \cdot \sqrt{p} = p^2 \cdot \frac{1}{3} Q$

f $Q = \frac{7p^{-0,8} \cdot 4p^{1,7}}{2p^{0,2}}$

22 De inhoud van een bol met straal r kun je berekenen met de formule $I = 4,19 \cdot r^3$.

a Bereken de straal van een bol met een inhoud van 20 cm^3 .

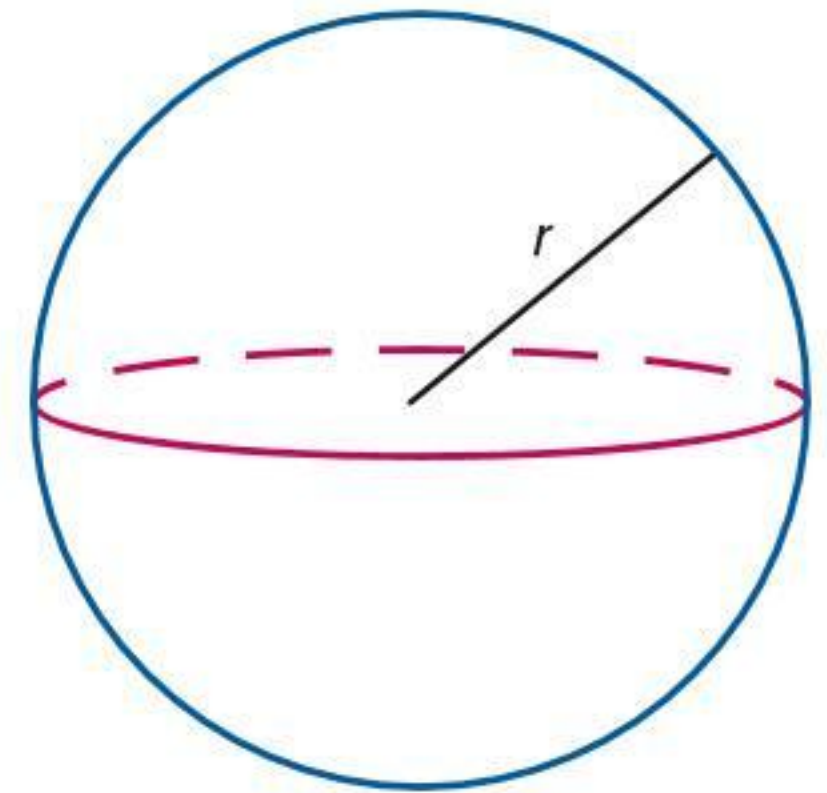
b Laat door herleiden zien dat als de straal van een bol twee keer zo groot wordt, de inhoud acht keer zo groot wordt.

c Laat door herleiden zien dat je de formule $I = 4,19 \cdot r^3$ kunt herleiden tot $r = 0,62 \cdot I^{\frac{1}{3}}$.

d De oppervlakte van een bol met straal r kun je berekenen met de formule $A = 12,56 \cdot r^2$.

Hoe groot is de oppervlakte van een bol met een inhoud van 50 cm^3 ?

e Geef een formule waarbij je de oppervlakte A uitdrukt in de inhoud I .



23 In het algemeen geldt: hoe groter het gebied, des te meer diersoorten er leven. Voor vogels in Noord Amerika is het verband tussen de oppervlakte A in vierkante mijl en het aantal daar levende vogelsoorten S bij benadering een machtsfunctie $S = k \cdot A^n$

A	1	2	3	4	5
S	40,0	44,9	48,0	50,4	52,3

a Gebruik de waarden van A en S bij $A = 1$ om de waarde van k te berekenen.

b Bereken de waarde van n en geef de formule.

c Geef ook een formule waarbij A wordt uitgedrukt in S .

d Yellowstone Park is ongeveer tien keer zo groot als Zion National Park.

Bereken hoeveel keer zoveel soorten vogels je in Yellowstone Park als in Zion Park mag verwachten.



24 Gegeven zijn de formules $A = 3b^{0,4}$ en $b = \frac{5}{t}$

Geef een formule waarbij t uitgedrukt is in A .

1-5

Gemengde opdrachten

- 25** Herleid voor $x > 0$ de volgende functievoorschriften tot de vorm $f(x) = b \cdot x^a$.

a $f(x) = \frac{(2x)^3}{16x^{-\frac{1}{2}}}$

c $f(x) = 3x^{0,2} \cdot \sqrt[4]{x}$

b $f(x) = x^{-2} \cdot \sqrt{4x}$

d $f(x) = \frac{(6x^{\frac{1}{2}})^4}{3\sqrt{x^3}}$

- 26** Herleid de volgende formules waarbij je a uitdrukt in b .

a $2a + 3b = 12$

d $b = 3 \cdot a^{\frac{1}{2}}$

b $b = -\frac{1}{2}a - 7$

e $b = 2\sqrt{3a + 2} - 10$

c $8 + \frac{6}{b} = 7a - 6$

f $\frac{12}{a+5} = \frac{5}{b+6}$

- 27** De bundel grafieken geeft het verband weer tussen het lichaamsgewicht G in kg, de kniebreedte K in cm van de linker en rechter knie samen en de lengte L in cm van mannen tussen 18 en 25 jaar.

a Mats is 20 jaar, heeft een lengte van 183 cm en weegt 72 kg. Geef met behulp van de grafiek een schatting van zijn kniebreedte.

b Het verband tussen G en K lijkt lineair te zijn. Neem aan dat dat ook zo is en kies twee punten op de lijn die hoort bij een lengte van 176 cm.

Stel met behulp van de coördinaten van deze twee punten een formule op van de vorm $G = a \cdot K + b$.

c Het verband tussen G en K kan worden benaderd met de formule: $G = 0,0135 \cdot K \cdot L^{1,126} - 17$.

Controleer hiermee je antwoord van opdracht b.

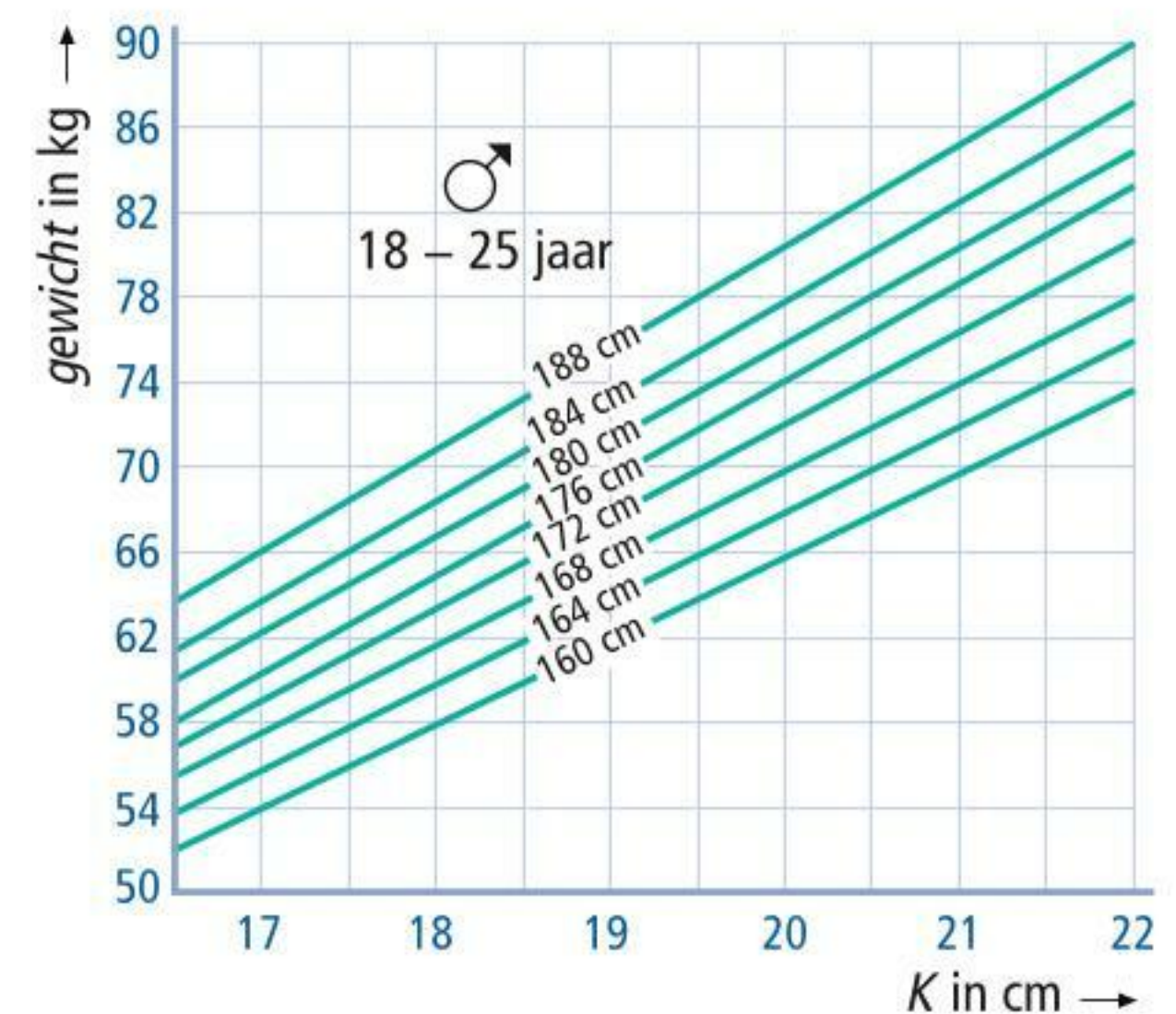
d Voor mannen tussen de 18 en 25 jaar kun je het verband tussen de lengte L en het gewicht G beschrijven met de formule: $G = 0,0022L^2$.

Laat zien dat je het verband tussen K en L kunt beschrijven met de formule $K = 1259 \cdot L^{-1,126} + 0,16 \cdot L^{0,874}$.

- 28** Het volume V van een bepaald model glas kun je berekenen met de formule $V = 0,26 \cdot D^2 \cdot h$. Hierin is V het volume in cm^3 , h de hoogte in cm en D de diameter in cm.

a Geef een formule waarbij je de diameter D uitdrukt in de hoogte h en het volume V .

b Glas A heeft hetzelfde volume als glas B. De diameter van glas A is de helft van de diameter van glas B. Hoeveel keer zo hoog is glas A als glas B?



- 29** Gegeven is de formule $y = \sqrt{x+1} - 3$.
- a** Sofie heeft de formule herschreven tot $x = y^2 + 6y + 8$. Laat zien hoe ze daaraan komt.
 - b** Ga na dat het punt $x = 3$ en $y = -1$ op de grafiek van beide verbanden ligt.
 - c** Welke van de grafieken bij de formules gaan door het punt $x = 3$ en $y = -5$?
 - d** Verklaar waarom het punt $x = 3$ en $y = -5$ niet aan beide formules voldoet.

- 30** Een schoonmaakbedrijf berekent voor het reinigen van vloeren eerst de prijs per m^2 . Voor het berekenen van deze prijs gebruikt men de formule: $P = 0,13 + \frac{0,12}{V}$. Hierin is P de prijs in euro's per m^2 en V de vloeroppervlakte in duizenden m^2 .
- a** Hoe kun je aan de formule zien dat deze prijs lager is naarmate er een grotere oppervlakte moet worden schoongemaakt.
 - b** Bereken voor een vloeroppervlak van 2000 m^2 de prijs per m^2 en vervolgens de totale kosten in euro's.
 - c** De totale kosten voor een klant met een vloeroppervlak van 580 m^2 zijn € 195,40. Hoe is dit bedrag berekend?
 - d** Plot de grafiek van P . Wat gebeurt er met de waarden van P als je voor V steeds grotere waarden neemt?
 - e** Geef een formule voor de totale kosten TK voor het reinigen van een vloeroppervlakte V met TK het bedrag in euro's en V de vloeroppervlakte in duizenden m^2 .

- 31** Biologen hebben onderzocht of er een verband is tussen het aantal fruitvliegjes per dm^3 en de vruchtbaarheid van de fruitvliegjes. Het aantal fruitvliegjes per dm^3 is de dichtheid d en de vruchtbaarheid v is het aantal eitjes per vrouwtje. In de tabel hieronder staan enkele resultaten van het onderzoek.

d	20	40	100	200	400	808
v	340	286	227	193	164	140

Volgens de onderzoekers is er een verband van de vorm $v = c \cdot d^a$.

- a** Laat met behulp van de formule $v = c \cdot d^a$ zien: als d twee keer zo groot wordt, dan wordt v 2^a keer zo groot.
- b** Gebruik de waarden uit de tabel om aan te tonen dat $2^a = 0,85$.
- c** Bereken de waarde van a met behulp van je rekenmachine.
- d** Geef een formule waarbij je v uitdrukt in d .



Samenvatting

Herleiden en uitdrukken

Je kunt formules en uitdrukkingen herleiden. De formule $w - 2v = 8$ kan worden herleid naar de vorm $w = 2v + 8$; je zegt dan dat w uitgedrukt is in v .

Voorbeeld

Herleid $3p - 2q = 8$ zodat q wordt uitgedrukt in p .

Oplossing

$$-2q = 8 - 3p \quad (\text{links en rechts } -3p)$$

$$q = -4 + 1\frac{1}{2}p \quad (\text{links en rechts : } -2)$$

Substitueren

In een formule of vergelijking is een variabele soms te vervangen door een andere formule of uitdrukking. Dit heet substitueren.

Voorbeeld 2

Substitueer de uitdrukking $u = x^2 + 1$ in $y = 3u - 8$ en herleid.

Oplossing

$$y = 3(x^2 + 1) - 8 = 3x^2 + 3 - 8,$$

$$\text{dus } y = 3x^2 - 5.$$

Gebroken formule

Een formule van de vorm $y = \frac{3}{6x + 1}$ heet een gebroken formule, omdat een variabele in de noemer van de breuk voorkomt.

Wortelformule

Een formule van de vorm $y = 5 + 2\sqrt{0,2x + 1}$ heet een wortelformule omdat een variabele onder het wortelteken voorkomt.

Je kunt gebroken formules herleiden

Bij het herleiden van gebroken formules gebruik je dezelfde regels als bij het oplossen van gebroken vergelijkingen.

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

Voorbeeld

Herleid $\frac{1}{x} = \frac{7}{2y+5}$ waarbij je y uitdrukt in x .

Oplossing

$$2y + 5 = 7x$$

$$2y = 7x - 5 \quad (\text{links en rechts } - 5)$$

$$y = 3\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} \quad (\text{links en rechts } : 2)$$

Je kunt wortelformules herleiden

Je kunt wortelformules herleiden door de formule eerst te herleiden tot de vorm $\sqrt{A} = B$. Hieruit volgt $A = B^2$.

Voorbeeld

Herleid: $x + 1 - \sqrt{4y + 1} = 0$ waarbij je y uitdrukt in x .

Oplossing

$$x + 1 = \sqrt{4y + 1} \quad (\text{links en rechts } + \sqrt{4y + 1})$$

$$4y + 1 = (x + 1)^2 \quad (\text{links en rechts kwadrateren})$$

$$4y + 1 = x^2 + 2x + 1 \quad (\text{haakjes weggewerkt})$$

$$4y = x^2 + 2x \quad (\text{links en rechts } - 1)$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \quad (\text{links en rechts } : 4)$$

Je kunt machtsformules herleiden

Bij het herleiden van machtsformules maak je gebruik van de regel: uit $Q = P^a$ volgt $P = Q^{\frac{1}{a}}$.

Voorbeeld

Herleid $Q = 2P^{1,35} + 7$ waarbij je P uitdrukt in Q .

Oplossing

$$2P^{1,35} = Q - 7 \quad (\text{links en rechts } - 7)$$

$$P^{1,35} = \frac{1}{2}Q - 3\frac{1}{2} \quad (\text{links en rechts } : 2)$$

$$P = \left(\frac{1}{2}Q - 3\frac{1}{2}\right)^{0,74} \quad (\text{links en rechts tot de macht } \frac{1}{1,35} \approx 0,74)$$

Test jezelf

- T-1** Op een dag neemt de temperatuur in de atmosfeer tot op 10 kilometer hoogte lineair af volgens de formule $T = 15 - 6,5h$.
Hierbij is T de temperatuur in graden Celsius en h de hoogte in kilometers.
- a** Op welke hoogte is de temperatuur -20°C ?
 - b** Geef een formule waarbij je h uitdrukt in T .
 - c** In de verenigde Staten wordt de temperatuur uitgedrukt in graden Fahrenheit. Voor het omrekenen geldt de formule $F = 1,8T + 32$.
Hierbij is F de temperatuur in graden Fahrenheit.
Geef een formule waarbij je de temperatuur F uitdrukt in de hoogte h .
Werk de formule zo ver mogelijk uit.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-1.

- T-2** Herleid de volgende formules waarbij je p uitdrukt in q .

a $2(q + 1) = 4p - 5$

b $4 + \frac{3}{p} = q + 5$

c $\frac{1}{p+6} = \frac{q+8}{3}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-2.

- T-3** Een voorwerp wordt opgehangen aan een slinger.
De bekende 17e-eeuwse natuurkundige Christiaan Huygens vond de beroemde formule $T = 6,28\sqrt{\frac{l}{9,8}}$. Met deze formule wordt de tijd T die één slingerbeweging duurt (in seconden) uitgedrukt in de lengte l van de slinger (in meters).

- a** Herleid de formule tot de vorm $T = c \cdot \sqrt{l}$.
- b** Geef een formule waarbij l wordt uitgedrukt in T .
-  **c** Als je de slingertijd wilt verdubbelen, wat moet er dan met de lengte van de slinger gebeuren?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-3.

- T-4** Herleid de volgende formules tot de vorm $a = c \cdot K^b$.

a $K = 7a^3$

d $K = 3a^{-0,2}$

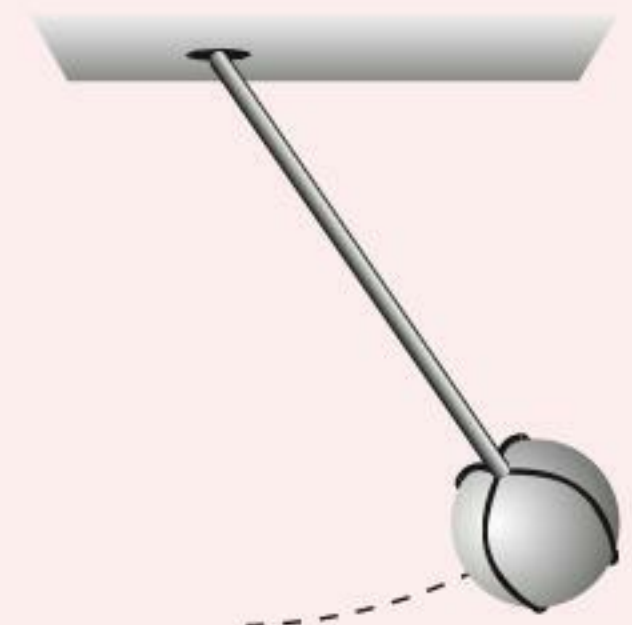
b $\frac{3a}{2K} = 6K^{6,2}$

e $K = \frac{7\sqrt[3]{a} \cdot 4\sqrt{a}}{2\sqrt[6]{a}}$

c $0,5K = 2,5a^5$

f $2a^{1,3} \cdot \sqrt{a} = a^2 \cdot \frac{2}{5} K$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-4.



- T-5** Voor een bepaald type windmolen geldt de formule $P = 0,4 \cdot v^3 \cdot h^{0,75}$. Hierin is P het afgegeven elektrische vermogen in watt, v de windsnelheid in meters per seconde op één meter hoogte boven de grond en h de hoogte van de rotoras in meters.
- a** De rotoras van de molen draait acht meter boven de grond. Hoe groot is het vermogen van deze windmolen bij $v = 6$?
 - b** Laat door herleiden zien: als de rotor twee keer zo hoog boven de grond wordt geplaatst, dan neemt het vermogen met ongeveer 68% toe.
 - c** Bij een andere molen van dit type, waarbij de rotoras zich op tien meter hoogte bevindt, wordt op een bepaald moment een afgegeven elektrisch vermogen gemeten van 700 watt. Bereken de windsnelheid op één meter hoogte op dat moment.



- T-6** Een schaatsenfabriek heeft een nieuw type klapschaats ontwikkeld. De gemiddelde productiekosten per paar schaatsen hangen af van het geproduceerde aantal q .

Met de formule $GK = 200 + \frac{12000}{q + 10}$ kun je de gemiddelde

productiekosten in euro's per paar schaatsen berekenen.

- a** Bij welk aantal paar schaatsen zijn de gemiddelde productie kosten 300 euro?
 - b** Geef een formule waarbij q wordt uitgedrukt in GK .
 - c** Hoe groot zijn de totale kosten bij het produceren van 300 paar schaatsen?
 - d** De producent kan € 250 000,- investeren in de schaatsen. Hoeveel paar schaatsen kan hij produceren?
- T-7** Bij het legen van een vat water geldt voor de hoogte van het water in het vat de formule $h = 100 - 0,4V$. Hierin is h de hoogte van het water in het vat in cm en V het volume van het weggestroomde water in liters.
- a** Hoeveel liter water zat er in het vat ?
 - b** Er is een verband tussen de tijd t in minuten en het volume V van het weggestroomde water. De formule bij dit verband is $V = \sqrt{2500t}$. Op $t = 0$ begint het water weg te stromen. Druk h uit in t .
 - c** Bereken na hoeveel minuten de hoogte van het water 40 cm is. Hoeveel liter water is er dan uit het vat gestroomd?
 - d** Bereken na hoeveel minuten het vat leeg is.

Extra oefening - Basis

B-1 Herleid de volgende formules tot de vorm $n = a \cdot k + b$.

a $8k - 3n = 7$

b $5n + 2k = 0$

c $15k = 5n + 50$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-1.

d $6k - 6 = 4n + 3$

e $10n - 4k = 6(k + 2)$

f $5(n + 1) = -4(k - 5) - 7k$

B-2 Druk u uit in p .

a A: $u = 8 - 9t$ en B: $t = 3p + 1$

b A: $u = q^2 + 1$ en B: $p = 4q - 3$

c A: $u = 3a - a^2$ en B: $a = 1 - p$

d A: $u = a(2a - 1)$ en B: $a = 2 - 3p$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-1.

B-3 Herleid de volgende formules waarbij je p uitdrukt in q .

a $q + 2 = \frac{12}{p}$

b $\frac{q - 1}{p} = -2$

c $\frac{18}{p} = \frac{3}{q + 1}$

d $q = \frac{q - 1}{p + 5}$

e $\frac{3 + q}{p} = \frac{5}{q}$

f $\frac{1}{2 + p} = \frac{q - 3}{10}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-2.

B-4 Herleid de volgende formules waarbij je a uitdrukt in b .

a $b = \sqrt{a + 1}$

b $b = 0,1\sqrt{2a + 1}$

c $b = 3 - 0,1\sqrt{a + 5}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-3.

d $b + 2 = \sqrt{5a - 6}$

e $12 - \sqrt{2a + 1} = b$

f $24 - 2\sqrt{a} = b + 7$

B-5 Herleid de volgende formules tot de vorm $p = c \cdot K^a$.

a $K = 4p^5$

b $K = 0,5p^{-2,5}$

c $K = \frac{3}{p^{1,5}}$

d $3p^{0,3} \cdot 2p^2 \cdot \sqrt{p} = 15K$

e $6p^{0,25} \cdot \sqrt{p} = p^2 \cdot \frac{1}{3} K$

f $K = \frac{p^{-0,8} \cdot p^{1,8}}{2p^{0,2}}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-4.

Extra oefening - Gemengd

- G-1** Een pottenbakker maakt vazen en schalen. Voor een vaas heeft hij 450 gram klei nodig en voor een schaal heeft hij 350 gram klei nodig. Hij heeft 25 kg klei op voorraad. Omdat de vraag naar vazen groter is, wil hij twee keer zoveel vazen als schalen maken.
- a** Stel twee formules op bij het verband tussen het aantal vazen v en het aantal schalen s .
 - b** Hoeveel vazen en hoeveel schalen gaat hij met de 25 kg klei maken?
- G-2** Koppelingsplaten van een motor bestaan uit twee ronde platen met een gat voor de as erin. Bij het schakelen worden de platen tegen elkaar aangezet en drijven daarmee de wielen aan. Daarvoor moet de oppervlakte van de platen groot genoeg zijn. Voor het verband tussen de straal r in cm en de oppervlakte A in cm^2 van de koppelingsplaat geldt de formule $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} + 9$.
- a** Een koppelingsplaat heeft een oppervlakte van 50 cm^2 . Bereken hoe groot de straal is van deze koppelingsplaat.
 - b** Van een andere koppelingsplaat is de straal gelijk aan 6,23 cm. Bereken hoe groot de oppervlakte van deze koppelingsplaat is.
 - c** Herleid de formule waarbij je A uitdrukt in r .
 - d** De koppelingsplaat van een auto heeft een oppervlakte die twee keer zo groot is als die van een bromfiets. Ga na of de straal ook twee keer zo groot is.
- G-3** Bij een mens is de huidoppervlakte onder andere afhankelijk van het gewicht en de lengte. De huidoppervlakte kun je benaderen met de formule $H = 0,006681 \cdot G^{0,425} \cdot L^{0,725}$. In deze formule is H de huidoppervlakte in m^2 , G het gewicht in kilogram en L de lengte in centimeter.
- a** Bereken met behulp van de formule het gewicht van iemand die 160 cm lang is en een huidoppervlakte heeft van $1,5 \text{ m}^2$.
 - b** Voor iemand met een lengte van 180 cm kun je een formule afleiden van de vorm $H = c \cdot G^{0,425}$. Bereken c en rond je antwoord af op twee decimalen.
 - c** Druk G uit in H voor mensen met een lengte van 180 cm.
 - d** Een man en een vrouw hebben dezelfde huidoppervlakte. De vrouw is 180 cm lang en weegt 75 kg. De man is slechts 150 cm lang. Bereken het gewicht van de man.
 - e** Iemand met een gewicht van 90 kg is na een vermageringskuur 20% van zijn gewicht kwijtgeraakt. Met welk percentage is zijn huidoppervlakte verminderd?



Uitdagende opdrachten

- U-1** Elk jaar wordt er onderzoek gedaan naar het verband tussen de schelpenlengte en het gewicht van het vlees van de gewone mossel in de Waddenzee. Hiervoor worden van een groot aantal van deze mosselen de schelpenlengte en het gewicht van het vlees gemeten. De resultaten voor het jaar 2006 zijn in de tabel weergegeven.

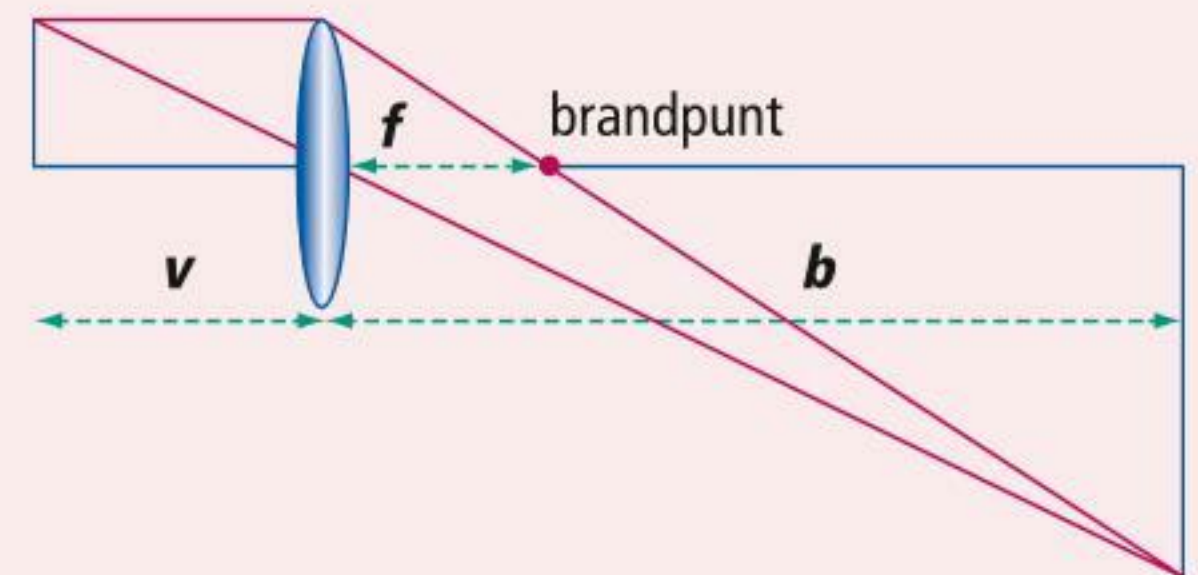
L in mm	30	40	50	60	70
W in grammen	0,12	0,28	0,55	0,95	1,51

Bij de tabel hoort een formule van de vorm $W = a \cdot L^b$.
Bereken a en b .

Ontleend aan CE havo wiskunde B pilot 2011, tijdvak 2

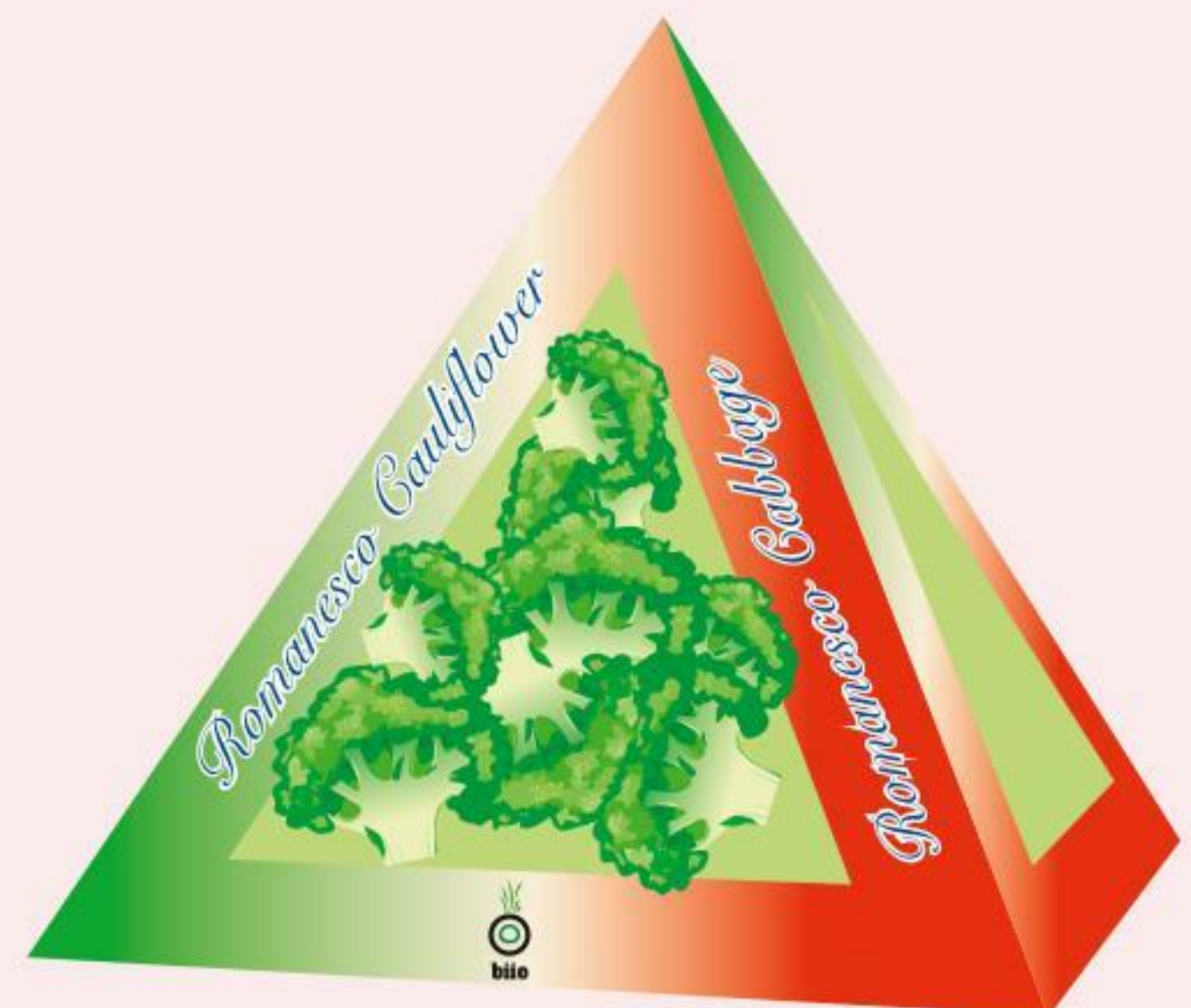
- U-2** Voor lenzen geldt de zogenaamde lenzenformule: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$

Hierin is f de brandpuntsafstand van de lens, v de afstand van het voorwerp en b de afstand van het beeld, beide gerekend vanaf de lens.



- a** Je wilt een lampje afbeelden op een scherm dat op 120 cm afstand van de lens staat. Je gebruikt een lens met $f = 15$ cm.
Op welke afstand van de lens moet je het lampje zetten?
- b** Neem $b = 50$ en druk v uit in f .
- c** Neem $f = 10$ en laat zien dat je de formule kunt herleiden tot $b = \frac{10v}{v - 10}$
- d** De vergroting N van het voorwerp kun je berekenen met de formule $N = \frac{b}{v}$
Bereken v en b als gegeven is dat $N = 1,5$ en $f = 10$ cm.

- U-3** Een groenteboer verpakt kostbare groente en fruit in piramidevormige doosjes. De vier zijvlakken zijn gelijkzijdige driehoeken en de bodem is een vierkant. De oppervlakte A in cm^2 van deze doosjes kun je berekenen met de formule $A = 2,73r^2$ waarbij r de lengte van de ribben in cm is. De inhoud I in cm^3 van de doosjes bereken je met de formule $I = 0,236r^3$.
Hoeveel keer groter wordt de inhoud als de oppervlakte n keer zo groot wordt?



Al-Khwarizmi

Bij het algebraïsch oplossen van vergelijkingen heb je vaak gebruik gemaakt van de bordjes- en de balansmethode. Al in 830 gebruikte een Perzische wiskundige, Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi deze middelen bij het oplossen van vergelijkingen. Ter ere van hem werd in 1983 in de voormalige Sovjet-Unie een postzegel uitgebracht.



Het ging al-Khwarizmi om het oplossen van allerlei dagelijkse problemen zoals hij die tegenkwam bij de handel en bij het verdelen van erfenissen. Hij beschreef zijn methoden in een boek, *Hisab al-jabr al-muqabala*. Dit werk is één van de eerste boeken over Algebra. Latere West-Europese vertalers wisten zich geen raad met het woord al-jabr en maakten daar algebra van. In zijn boek behandelt hij alleen lineaire en kwadratische vergelijkingen met één variabele. De notatie van variabelen was in die tijd niet bekend, dus werden de oplossingen met woorden omschreven.

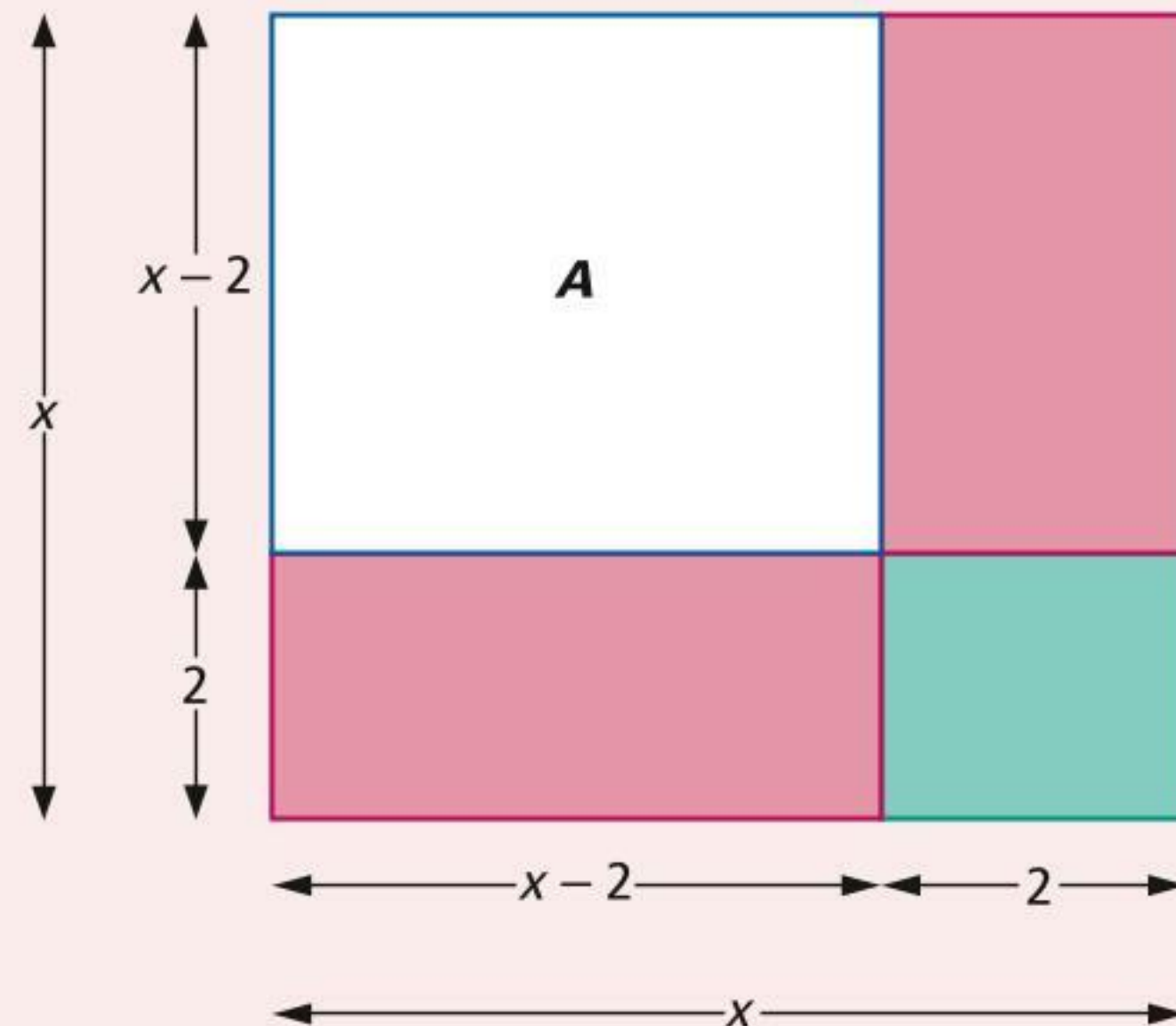
Hij maakte onderscheid in zes verschillende soorten vergelijkingen. Voorbeelden hiervan in onze notatie zijn:

1. $4x^2 = 3x$
2. $3x^2 = 5$
3. $x = 25$
4. $x^2 + 10x = 39$
5. $x^2 + 21 = 10x$
6. $4x + 12 = x^2$

Het oplossen van deze vergelijkingen beschreef Al-Khwarizmi in woorden, waardoor het lastig is om zijn berekeningen te doorgronden. Gelukkig lichtte hij zijn berekeningen toe met meetkunde.

Opdracht

Je gaat deze meetkundige methode gebruiken voor het oplossen van $4x + 12 = x^2$.



De oppervlakte van het vierkant is x^2 en de oppervlakte van het witte vierkant is A .

a Laat zien dat de oppervlakte van het gekleurde deel te schrijven is als $4x - 4$.

b Dit levert $4x - 4 + A = x^2$.

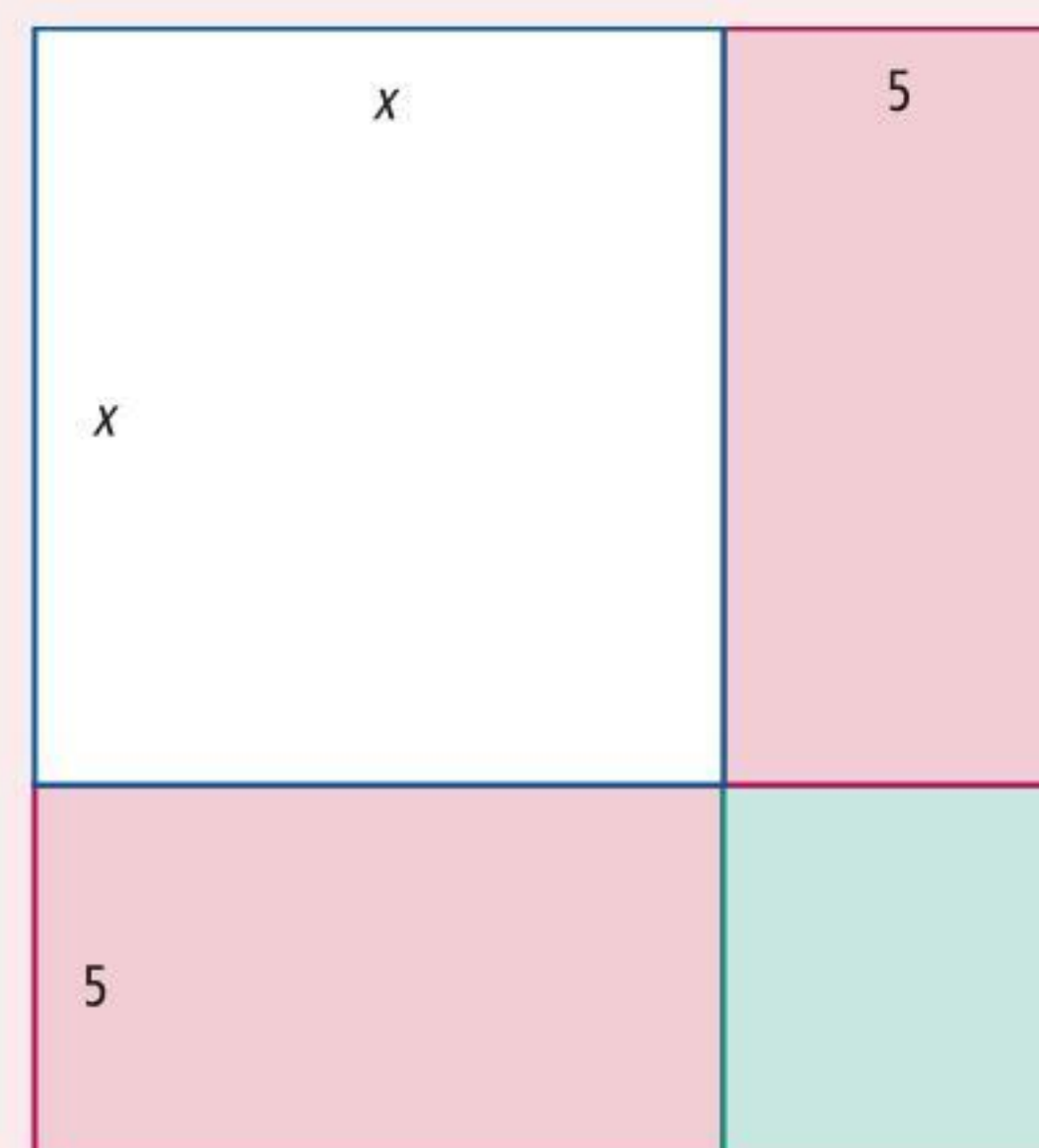
De oorspronkelijke vergelijking is $4x + 12 = x^2$.

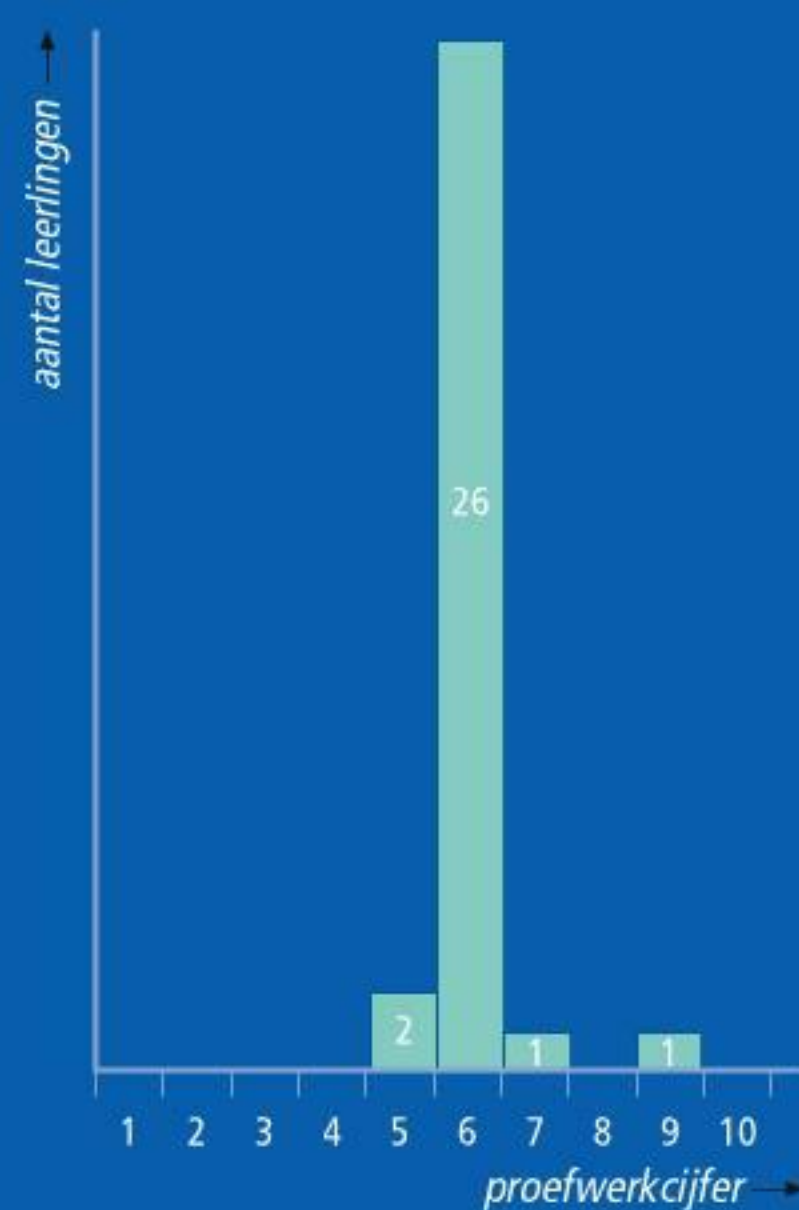
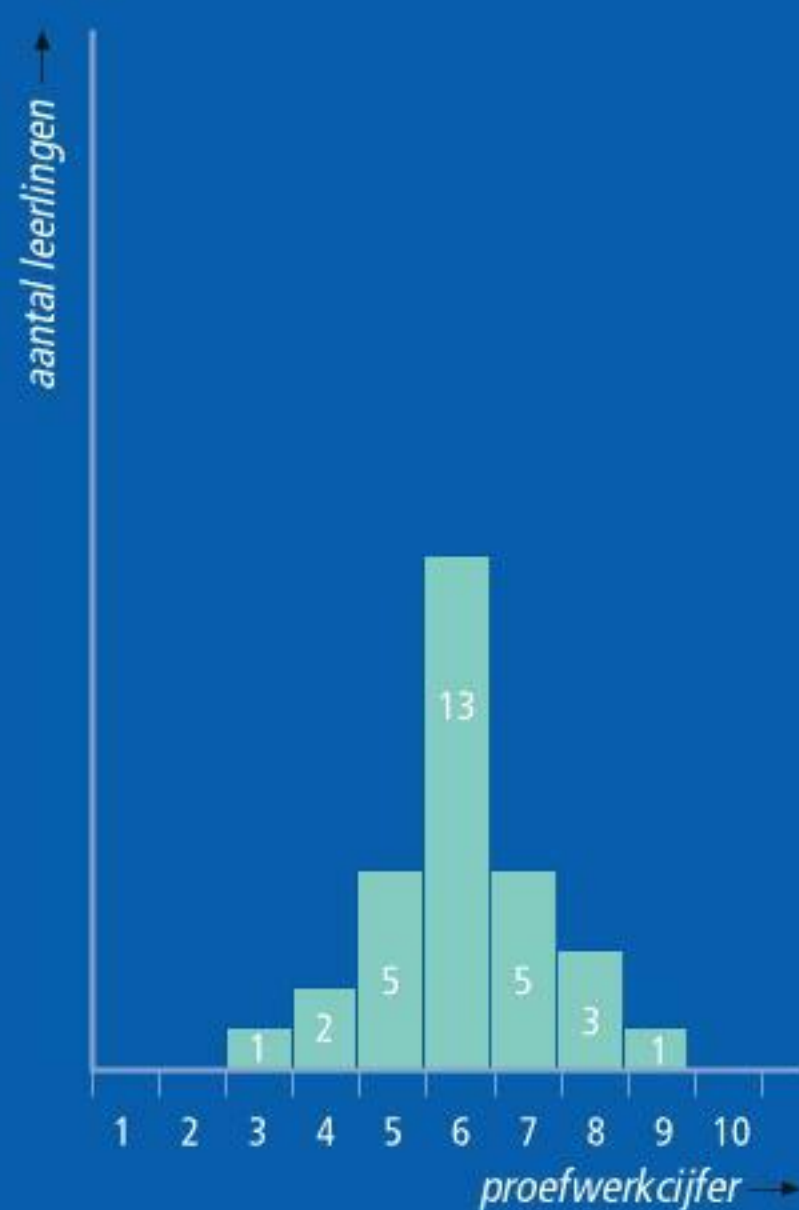
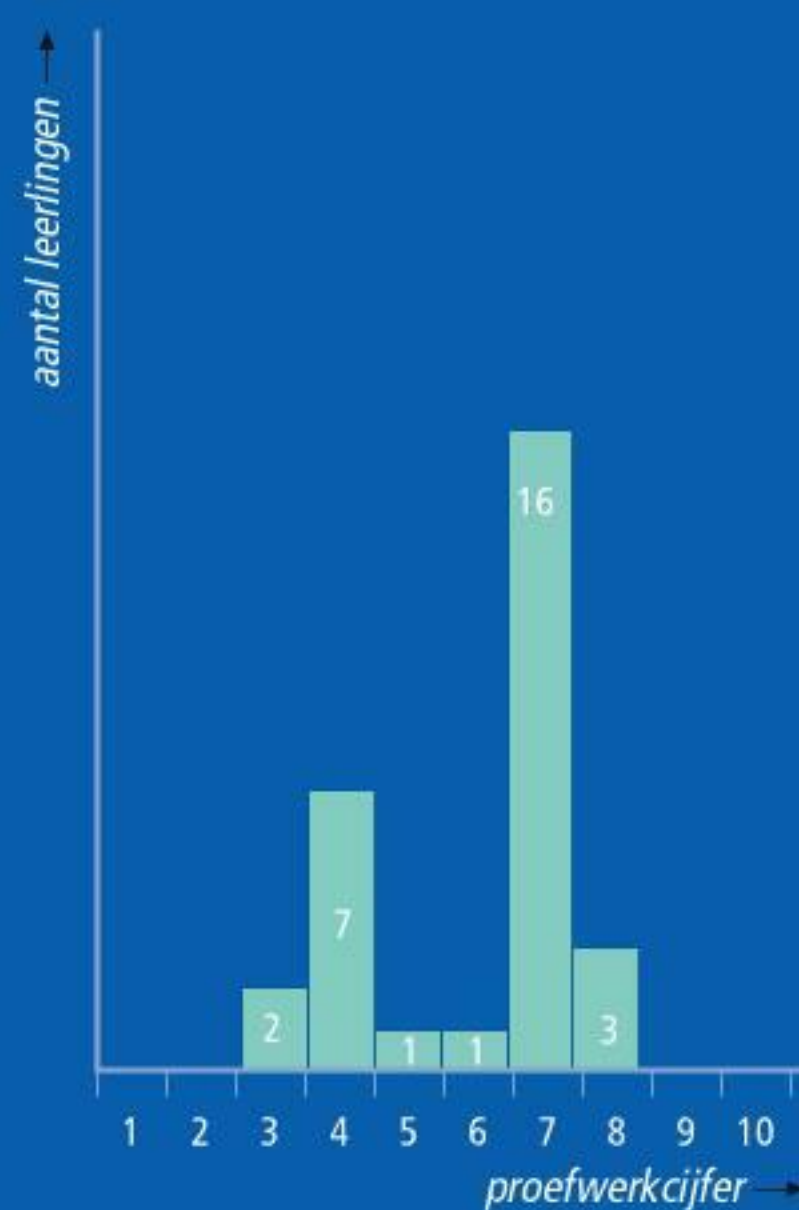
Dus A moet dan gelijk aan 16 zijn.

Ook geldt $A = (x - 2)^2$.

Controleer dat de positieve oplossing $x = 6$ is.

c Los met behulp van onderstaande tekening op: $x^2 + 10x = 39$. Merk op dat A nu de oppervlakte van het hele vierkant is.





Proefwerkcijfers

Je ziet de resultaten van drie verschillende proefwerken van een klas weergegeven.

Welk resultaat zal de leraar het best bevallen?

Hoofdstuk 2

Statistiek

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	34
2-1	Frequentieverdelingen	36
2-2	Continue en discrete variabelen	38
2-3	Normale verdeling	40
2-4	Normaal of niet normaal	42
2-5	Steekproeven	44
2-6	Gemengde opdrachten	46
	Samenvatting	48
	Test jezelf	50
	Extra oefening - Basis	52
	Extra oefening - Gemengd	53
	Steekproeven	54



Voorkennis

- V-1** Hieronder is voor een 4 havo-klas met 25 leerlingen een tabel gegeven van proefwerkcijfers met hun bijbehorende relatieve frequenties.

<i>cijfer</i>	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>relatieve frequentie</i>	0,04	0,00	0,08	0,16	0,40	0,20	0,08	0,00	0,04

- a** Zet de gegeven tabel om in een tabel met absolute frequenties.
b Bereken met behulp van die absolute frequenties het gemiddelde cijfer.
c Je kunt dat gemiddelde cijfer ook direct met de relatieve frequenties uitrekenen. Hoe?
d Geef de modus.
-  **V-2** De dataset geeft informatie over het weer in De Bilt in 2013.
a Van welke variabele kun je niet het gemiddelde berekenen?
b Sorteert de variabelen om antwoorden te vinden op de volgende vragen:
 – Op welke dag is de laagste gemiddelde temperatuur gemeten?
 – Werd op die dag ook de laagste maximale temperatuur gemeten?
 – Op welke dag was het verschil in maximum- en minimumtemperatuur het grootst?
c Zoek uit voor welke gemiddelde dagtemperatuur geldt: De helft van het jaar waren de gemiddelde dagtemperaturen hoger (en dus de andere helft lager).

Theorie

Statistische variabelen kun je verdelen in **kwantitatieve** en **kwalitatieve** variabelen. De waarde van een kwantitatieve variabele is een getal, die van een kwalitatieve variabele geeft een kenmerk weer en hoeft niet in een getal te zijn uitgedrukt. Frequenties kun je **absoluut** of **relatief** weergeven. De absolute frequentie is het getelde aantal, de relatieve frequentie is de verhouding van het getelde aantal tot het totaal. Deze kan worden weergegeven als een getal tussen 0 en 1 of als een percentage. De waarneming met de grootste frequentie heet de **modus**. Van een rij waarnemingen die op volgorde staan van klein naar groot heet de middelste waarneming de **mediaan**. Modus, mediaan en **gemiddelde** heten **centrummaten**.

Voorbeeld

Soms zijn de waarden van een variabele uitgedrukt in getallen, maar is de variabele toch kwalitatief. Denk bijvoorbeeld aan een lijst met telefoonnummers. Het ordenen van deze getallen of het berekenen van het gemiddelde heeft geen betekenis.

-  **V-3a** Geef de mediaan van de gemiddelde dagtemperatuur in 2013.
b Welke variabelen in deze dataset zijn kwalitatief?
c Geef de modus van de gemiddelde dagtemperatuur.
d Maak een relatieve cumulatieve frequentietabel bij de variabele $\text{max} - \text{min}$ en geef het percentage dagen waarop het verschil in maximum en minimumtemperatuur kleiner was dan 10 °C.

- V-4a** De variabele *jaar van hist max* geeft voor elke datum in het jaar aan in welk jaar op die dag de hoogste temperatuur werd gemeten vanaf het jaar dat de metingen begonnen tot aan 2013. Maak een dotplot van die variabele. Welk jaar heeft de meeste historische maximum temperaturen gekend?
- b** Maak een staafdiagram bij de variabele *jaar van hist max*. Neem een klassenbreedte van 20 jaar en begin in 1900.
- c** Men gaat ervan uit dat de aarde opwarmt. Geeft het staafdiagram van opdracht b aanleiding om deze bewering te onderbouwen? Licht je antwoord toe.
- V-5a** Maak een boxplot bij de variabele *gem. temp*.
- b** Uit de boxplot en uit het feit dat een jaar 365 dagen heeft, kun je afleiden dat op 91 dagen in 2013 de temperatuur niet boven de 5 °C is uitgekomen. Leg uit hoe je dat kunt doen.
- c** Bereken de interkwartielafstand van de gemiddelde temperatuur.
- d** Geef de gemiddelde maximumtemperatuur en de gemiddelde minimumtemperatuur.
- e** Bij welke van de twee in opdracht d genoemde variabelen is de standaarddeviatie het grootst? Wat betekent dat?

Theorie

Interkwartielafstand en **standaarddeviatie** of **standaardafwijking** worden **spreidingsmaten** genoemd. De interkwartielafstand of kwartielafstand is het verschil tussen het derde kwartiel Q_3 en het eerste kwartiel Q_1 . De standaarddeviatie geeft aan hoe de waarnemingen verspreid liggen ten opzichte van het gemiddelde. Ook de **spreidingsbreedte**, dat is het verschil tussen de grootste en de kleinste waarneming, is een spreidingsmaat.

- V-6a** Hoe groot was de spreidingsbreedte van de temperatuur op 6 mei 2013?
- b** Op welke dag in 2013 was de spreidingsbreedte van de temperatuur het grootst?
- c** Op welke dagen in 2013 was er sprake van de hoogste maximumtemperatuur sinds 1901?
- d** Waaraan kun je zien dat de dataset na 1 april is opgeleverd?
- V-7a** Geef het gemiddelde $\bar{x}$ en de standaardafwijking σ van de variabele *max*, beide in 1 decimaal nauwkeurig.
- b** Bereken $\bar{x} + \sigma$ en $\bar{x} - \sigma$.
- c** Onderzoek op hoeveel dagen in 2013 de maximumtemperatuur tussen de twee in opdracht b berekende waarden lag.
- V-8a** Op 1 juni was de gemiddelde dagtemperatuur 11 °C. Bereken het gemiddelde van de minimale en de maximale temperatuur op die dag en leg uit waarom dat niet de gemiddelde dagtemperatuur hoeft te zijn.
- b** Onderzoek in welk decennium de meeste jaren met een historisch minimum voorkwamen.



Een decennium is een periode van 10 jaar, meestal beginnend in een jaar dat een veelvoud van 10 is. Bijvoorbeeld: 1960 tot en met 1969.

2-1

Frequentieverdelingen

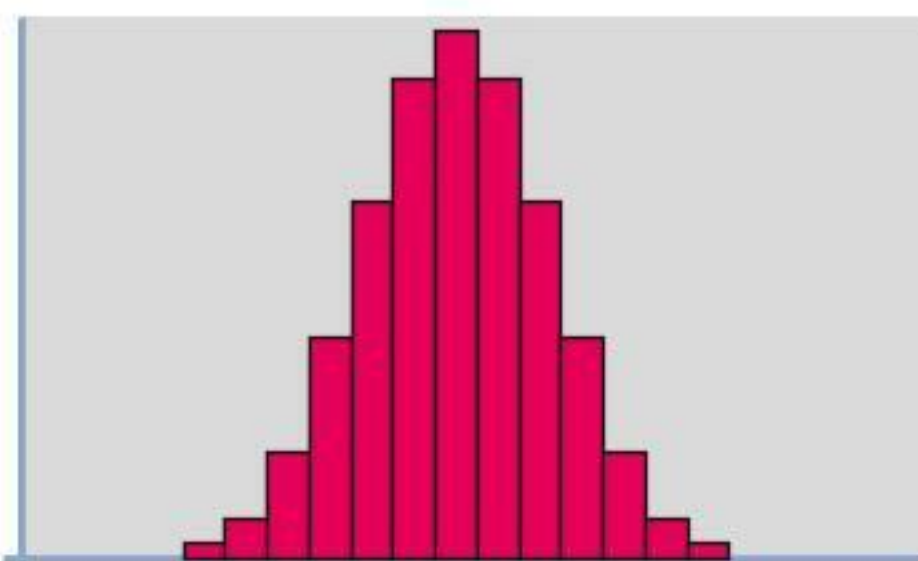
Deze opdrachten maak je met behulp van de computer.

- 1** Van 154 zestienjarige jongens en meisjes zijn allerlei gegevens verzameld.
- a** Geef aan welke variabelen kwantitatief en welke kwalitatief zijn.
 - b** Maak staafdiagrammen van de volgende vijf variabelen.

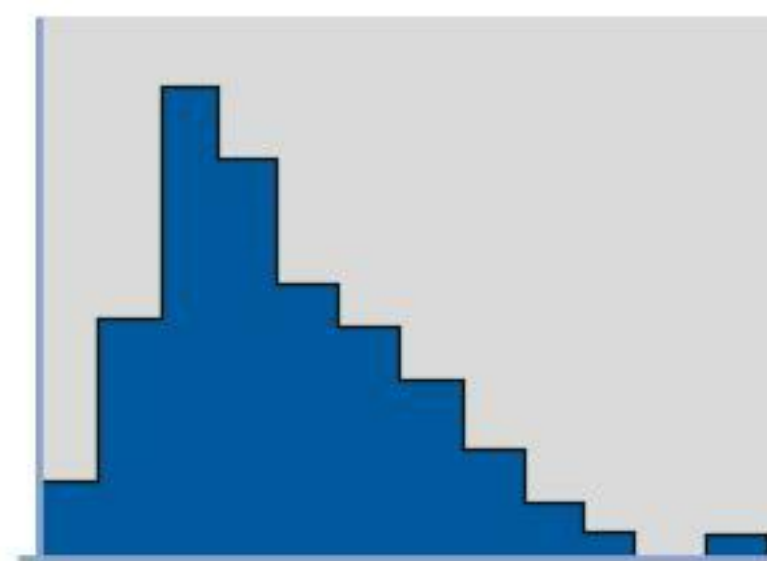
I <i>inkomen ouders</i>	IV <i>ver gooien</i>
II <i>gbmnd</i> (geboortemaand)	V <i>ver gooien</i> gesplitst naar <i>geslacht</i>
III <i>lengte</i> van de meisjes	
 - c** Welke staafdiagrammen in opdracht b zijn min of meer symmetrisch?
 - d** Bij welke variabelen in opdracht b komen waarden voor die sterk afwijken van de meeste andere waarden?

Theorie

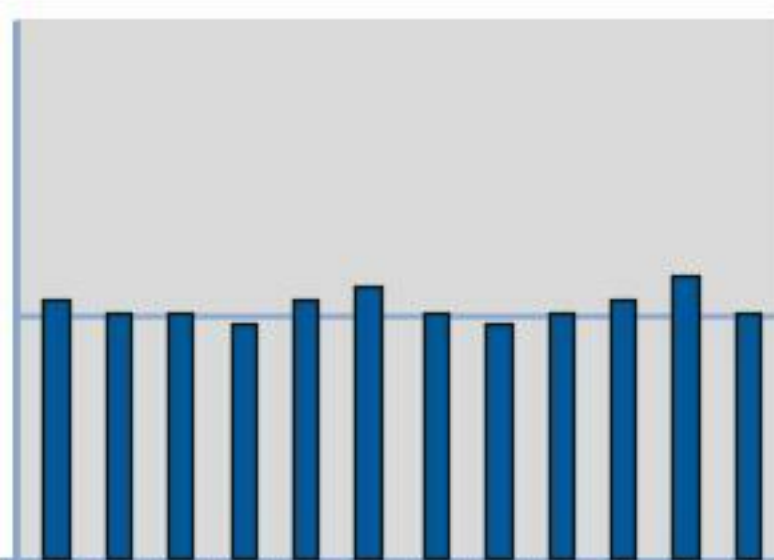
Datasets kun je ordenen in bijvoorbeeld frequentietabellen of staafdiagrammen. Dit zijn beide voorbeelden van een **frequentieverdeling**. De vorm van een staafdiagram geeft informatie over de frequentieverdeling. Daarbij kun je letten op symmetrie zoals bij een **klokvormige** verdeling, een **uniforme** verdeling, een **scheve** verdeling met een **staart**, een **meertoppige** verdeling of een verdeling met **uitschieters**.

Voorbeelden


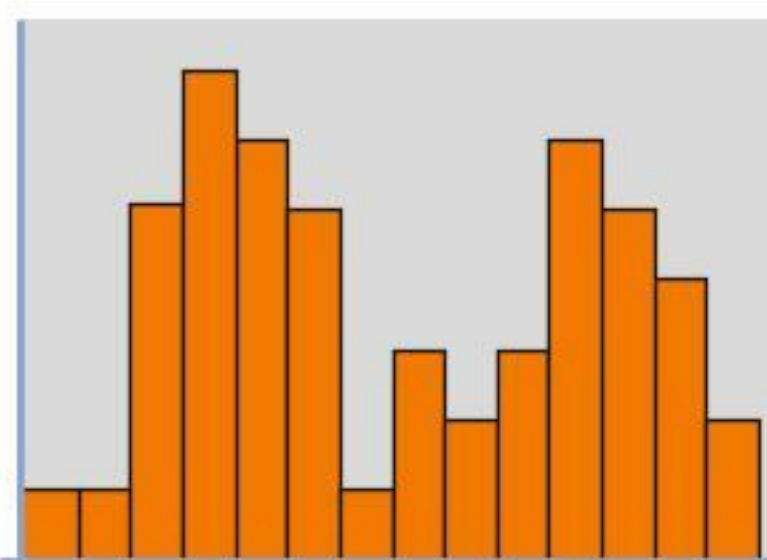
klokvormig
Deze verdeling is symmetrisch.



scheef met staart naar rechts en een uitschieter
De top ligt niet in het midden.



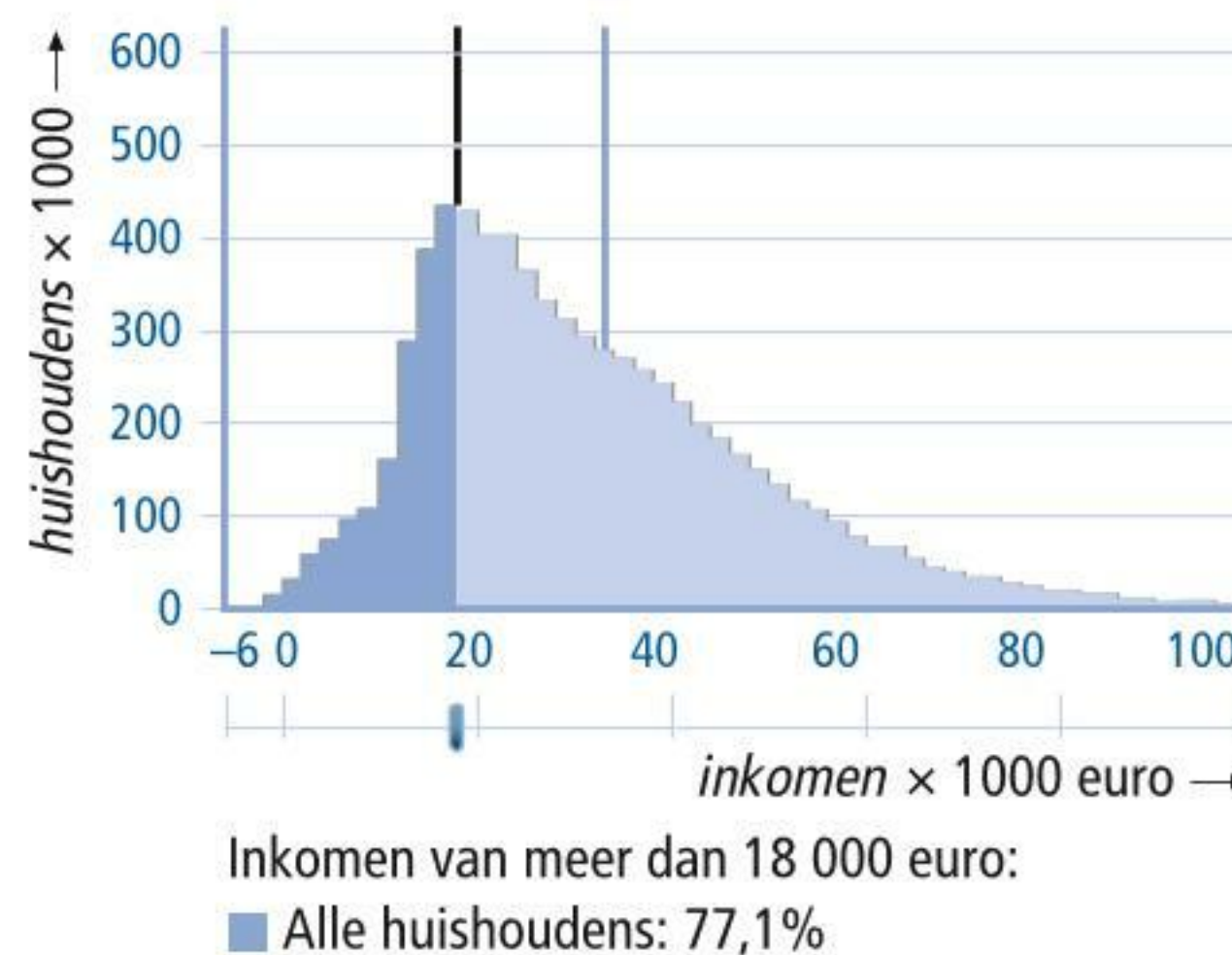
uniform
De staafjes zijn ongeveer even lang.



meertoppig
Er is meer dan één top.

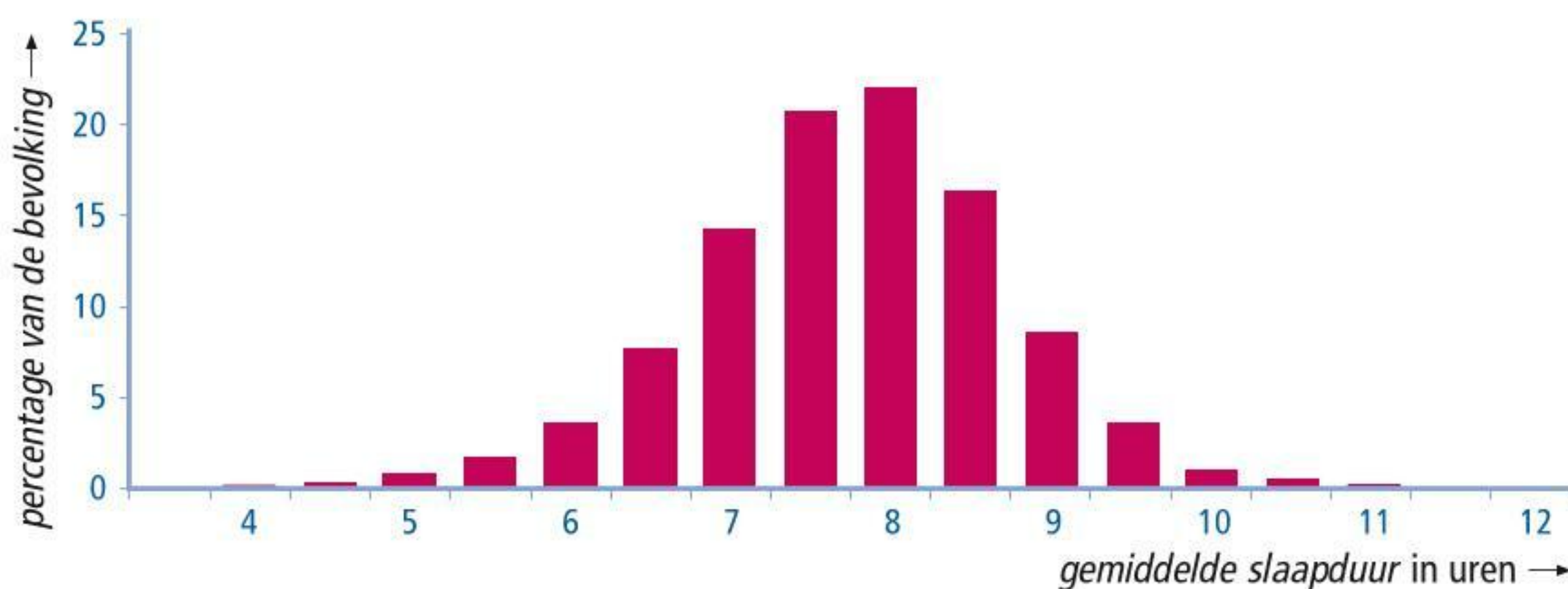
- 2a** Beschrijf de vorm van de staafdiagrammen van opdracht 1. Gebruik daarbij de kenmerken van de voorbeelden hierboven.
- b** Verklaar de vorm van elk staafdiagram van opdracht 1.
 - c** Voorspel de vorm van het staafdiagram bij de variabele *gewicht* en ga na of je voorspelling klopt.

- 3** Hiernaast zie je de frequentieverdeling van de inkomens van Nederlandse huishoudens in 2012.
- a** Hoe zie je dat het diagram een staafdiagram is?
- b** Hoe groot is de breedte van elke staaf?
- c** Hoe karakteriseer je de vorm van deze verdeling?
- d** Het blauwe streepje geeft het gemiddelde inkomen weer. Geef een schatting van het gemiddelde inkomen.
- e** De modus van een inkomensverdeling wordt ook wel het modale inkomen genoemd. Hoe groot is het modale inkomen?
- f** Christina zegt: de helft van alle huishoudens verdient meer dan het gemiddelde. Mohammed gelooft dat niet en zegt dat dat aandeel kleiner is. Wie heeft gelijk? Verklaar je antwoord.



- 4** Deze opdracht gaat over dezelfde inkomensverdeling als de vorige opdracht. Je kunt in het staafdiagram aflezen in hoeveel procent van de Nederlandse huishoudens het inkomen hoger is dan een bepaald bedrag.
- a** Ga na hoeveel procent van de huishoudens meer verdient dan het gemiddelde.
- b** Vanaf welk inkomen kun je zeggen: 'Ik behoor tot de 50% meest verdienende huishoudens'?
- c** Het huishouden van Jorrit en Marja behoort tot de 10% huishoudens met de laagste inkomens. Hoe hoog kan het inkomen van Jorrit en Marja maximaal zijn?

- 5** In de figuur zie je de verdeling van de gemiddelde slaapduur van de inwoners van Nederland.



- a** Hoe karakteriseer je de vorm van deze verdeling?
- b** Hoeveel uur is de modale slaapduur?
- c** Slapen de Nederlanders gemiddeld langer of korter dan modaal? Licht je antwoord toe.
- d** Mensen met een gemiddelde slaapduur van 6 uur of minder hebben een grote kans op een chronisch slaapttekort. Hoeveel % van de Nederlandse bevolking behoort tot deze groep?

2-2

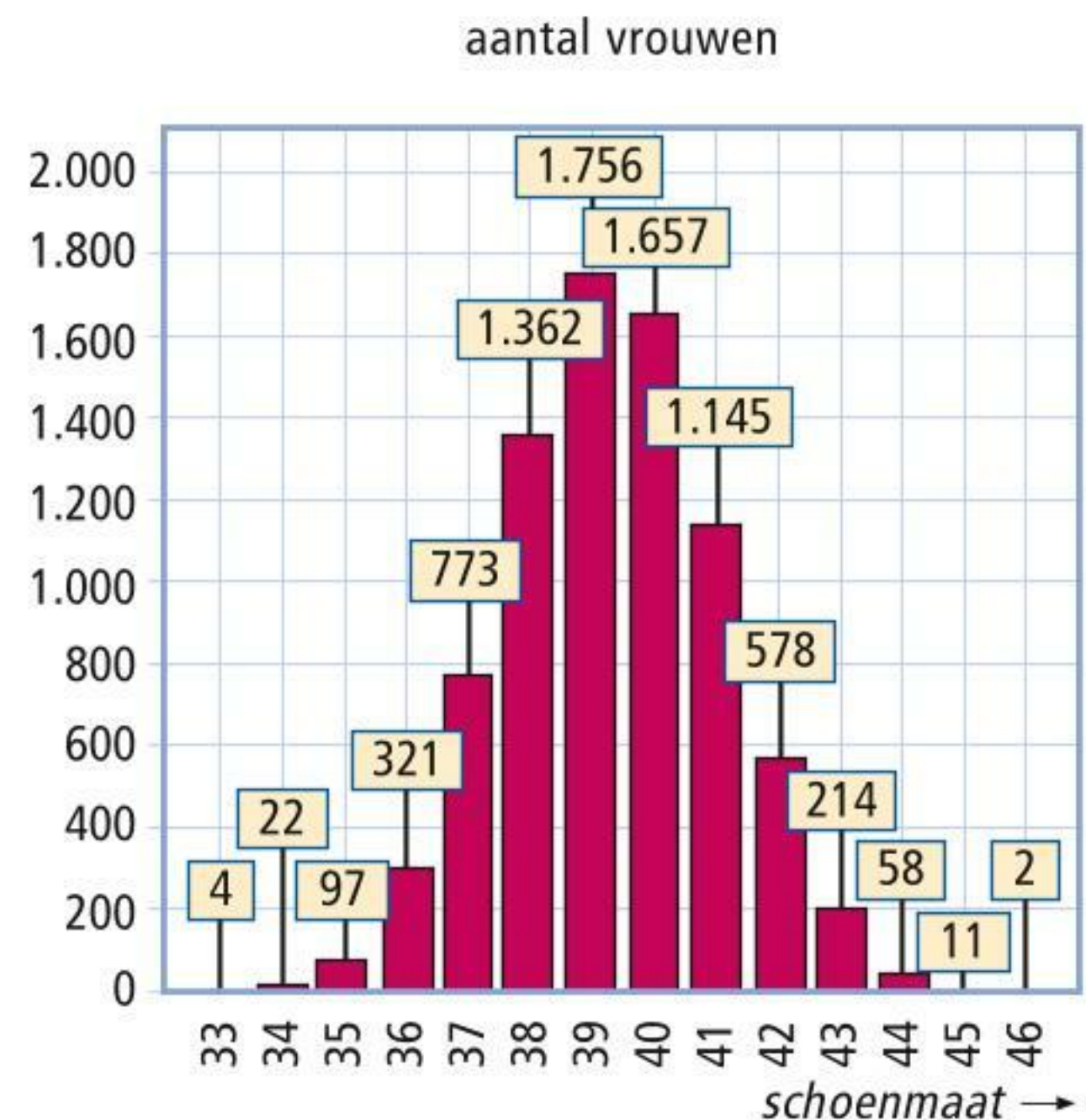
Continue en discrete variabelen

Deze opdrachten maak je met behulp van de computer.

Dutchvogue	Titel: Welke aantallen per maat voor inkoop schoenen / kleding? ■ Geplaatst: 17 juni 2013
Geregiseerd: 16 juni 2013 Berichten: 17 Karma: 0	Beste webwinkelforum lezers, Mijn naam is Ria van der Veen en ik heb ben bezig met de lancering van mijn eigen webshop voor de verkoop van damesschoenen. Nu mijn vraag: Hoeveel koop je in per maat? Is hier misschien ergens een handig artikel over te vinden? Qua schoenmaten zullen de maten 38-39 (lijkt mij?) het populairst zijn, maar ik zou zelf inkopen vanaf maat 36. Alleen hoeveel aantallen, en dan bedoel ik ook vooral de verhouding.

- 6a** Lees de vraag op het webwinkelforum, geplaatst op 17 juni 2013. Als reactie op de vraag van Ria werd haar het staafdiagram gestuurd dat hiernaast is afgedrukt. Hoeveel waarden neemt de variabele *schoenmaat* aan?
- b** Had Ria gelijk met haar opmerking over de populairste maten?
- c** Waarom wil Ria alleen vanaf maat 36 inkopen?
- d** Waarom is het verstandig dat Ria ongeveer twee keer zoveel schoenen inkoopt van maat 41 als van maat 42?
- e** Hoeveel procent van de vrouwen heeft een gangbare schoenmaat, dat wil zeggen maat 37 tot en met 42?
- f** Ria heeft zelf schoenmaat 39. Een vriendin van haar heeft schoenmaat 38. Kunnen er vrouwen zijn met een schoenmaat tussen 38 en 39?

Verdeling schoenmaten naar aanleiding van onderzoek onder 8000 vrouwen



- 7** In 1947 deden de wiskundigen Freudenthal en Sittig in opdracht van de Bijenkorf onderzoek naar onder andere de lengtes van 5001 vrouwen. Dit onderzoek stond aan de basis van een nieuw maatsysteem voor dames-confectie.
- a** Jeanne is 173,9 cm lang. Een vriendin van haar is 173,8 cm lang. Kunnen er vrouwen zijn met een lengte tussen die van Jeanne en haar vriendin in?
- b** Maak drie frequentieverdelingen in de vorm van een staafdiagram bij de klassenbreedten 5 cm, 3 cm en 1 cm. Beschrijf de vorm van elk staafdiagram.
- c** Onderzoek hoeveel procent van de vrouwen een lengte heeft groter dan 168,5 cm.



Bij variabelen maak je onderscheid tussen discrete en continue variabelen.

Een **discrete** variabele neemt alleen bepaalde waarden aan.

Een **continue** variabele kan in principe alle waarden op een interval aannemen.

Voorbeeld 1

Continue variabelen:

- a** Het *gewicht* van een leerling.
- b** De *temperatuur* in De Bilt.
- c** De *tijd* die een schaatser rijdt op de 500 meter.

Voorbeeld 2

Discrete variabelen:

- a** Het *cijfer* dat een leerling haalt voor een toets Engels.
- b** De *waarde* die een digitale thermometer aangeeft.
- c** Het *bedrag* dat je op een dag betaalt voor een paar boodschappen in de supermarkt.

- 8** Bekijk de variabelen in het voorbeeld. Leg uit waarom de variabele in voorbeeld 1b continu is en die in voorbeeld 2b discreet.

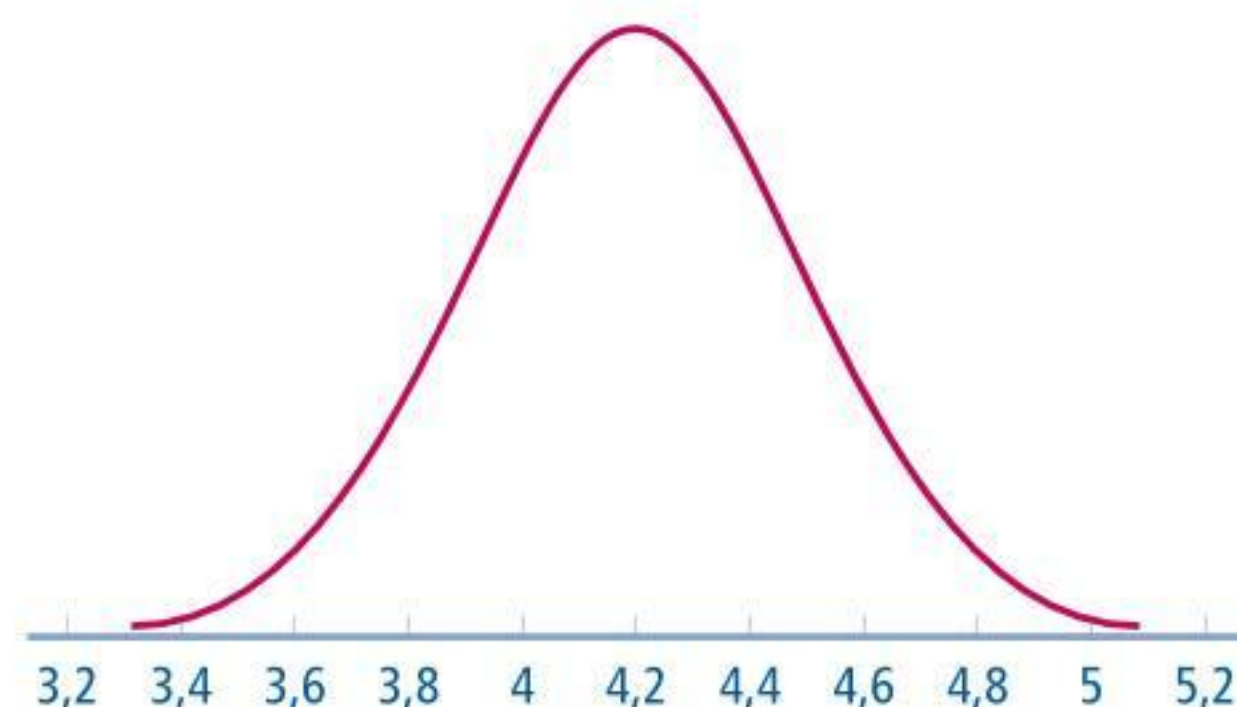
- 9** Zijn de volgende variabelen discreet of continu?
- a** De *score* die iemand haalt op een toets met 80 vragen.
 - b** De *duur* van een broedperiode van zwanen.
 - c** Het *gewicht* van een bospaddenstoel.
 - d** De *lengte* van de dikke darm van een persoon.
 - e** Het *aantal* zonnebloempitten in een zonnebloem.

-  **10** Zijn onderstaande variabelen discreet of continu?
- a** *Temperatuur*.
 - b** *Temperatuur* weergegeven door een digitale thermometer.
 - c** *Temperatuur* weergegeven door een kwikthermometer.



-  **11** Van bomen die gekapt worden in een bepaald bos worden de volgende variabelen verzameld: Het *aantal* jaarringen, de *hoogte* in meters, de *dikte* in meters, het *gewicht* in kilogrammen en de *opbrengst* aan hout in m^3 .
Welke van de hier genoemde variabelen zou je continu en welke zou je discreet willen noemen?

- 12** Hiernaast is een frequentieverdeling gegeven van het gewicht van potloden.
- a** Is de variabele *gewicht* discreet of continu?
 - b** Hoe groot is het gemiddelde gewicht van deze potloden?
 - c** Welk gewicht is de mediaan?
 - d** Waarom is de kans groter op een potlood met een gewicht tussen 4 gram en 4,4 gram, dan op een potlood met een gewicht tussen 3,2 gram en 3,6 gram?

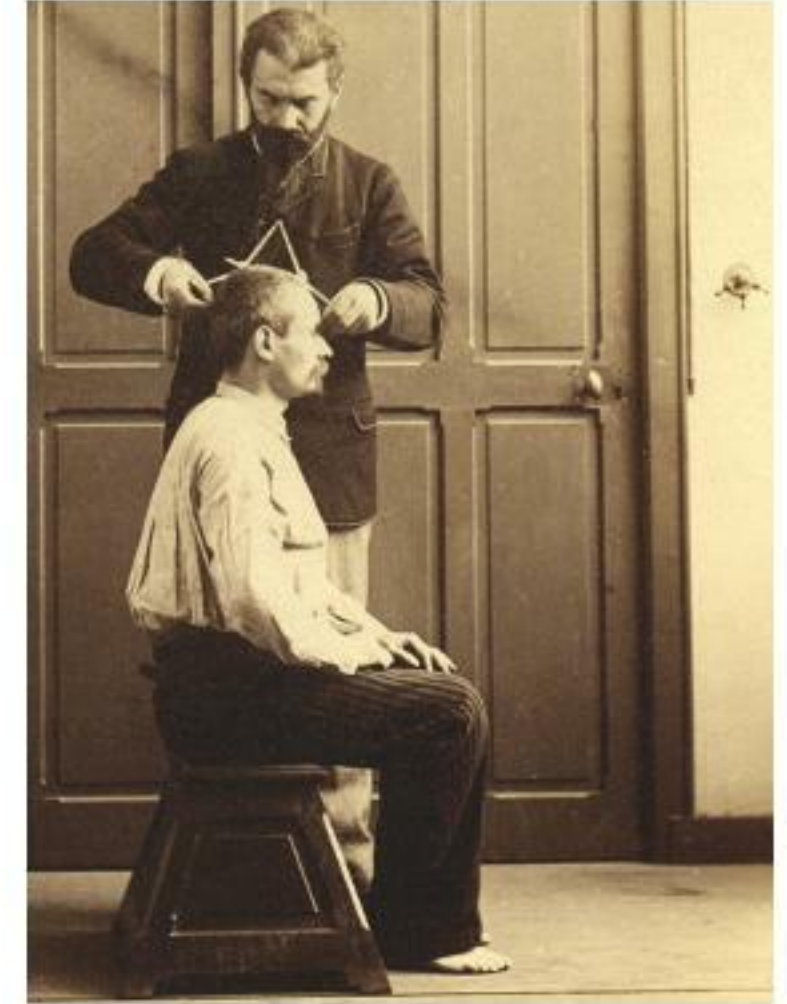


2-3

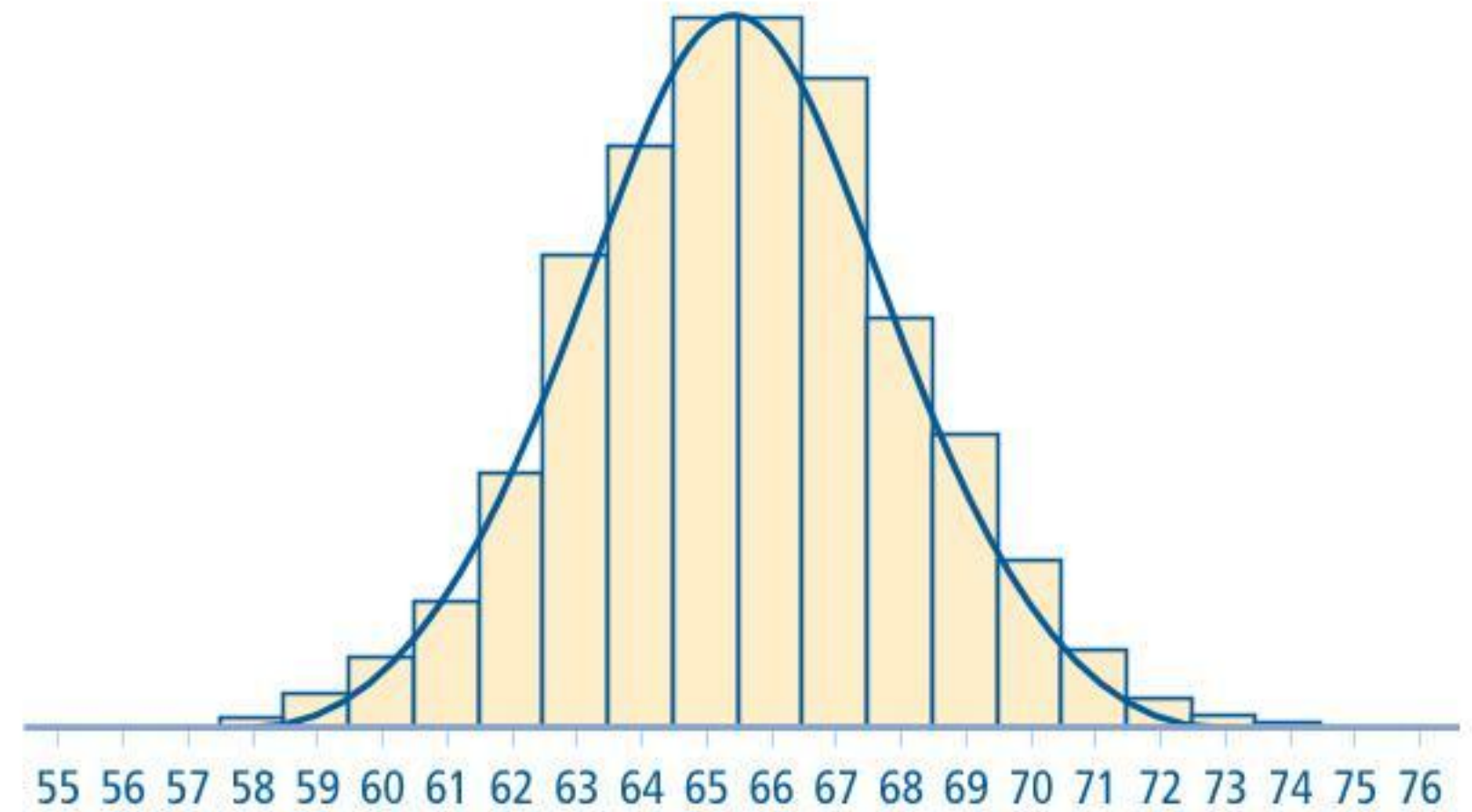
Normale verdeling

Deze opdrachten maak je met behulp van de computer.

- 13** In 1901 werd uit het archief van Scotland Yard van 3000 criminelen de lengte in inches gepubliceerd.
- a** Is de variabele *lengte* continu of discreet?
 - b** Maak lijndiagrammen van de lengte bij een klassebreedte van 10, 5, 3, 2, 1 en 0,5 inch. Zorg dat je alle lengtes in beeld krijgt. Bij welke klassebreedte benadert het lijndiagram het beste een vloeiend verloop?



- 14** Hiernaast zie je het staafdiagram met klassebreedte 1 inch uit opdracht 13. Ook is een vloeiende grafiek getekend die er zo goed mogelijk bij past.
- a** Waarom kun je bij een groep van 15 criminelen geen vloeiende grafiek vinden die het diagram goed benadert, maar bij een groep van 3000 criminelen wel?
 - b** Geef de gemiddelde lengte $\bar{x}$ en geef deze waarde aan op de x -as.
 - c** Geef de standaarddeviatie σ .
 - d** Bereken de uitkomst van $\bar{x} - \sigma$ en $\bar{x} + \sigma$ en geef deze waarden aan op de x -as.
 - e** Onderzoek hoeveel criminelen een lengte hadden tussen $\bar{x} - \sigma$ en $\bar{x} + \sigma$. Geef het absolute aantal en het percentage.
 - f** Bereken hoeveel procent van de criminelen een lengte had tussen $\bar{x} - 2\sigma$ en $\bar{x} + 2\sigma$.



- 15a** Onderzoek of je de lengtes van de 5001 vrouwen uit het al eerder genoemde Bijenkorf-onderzoek kunt weergeven door een klokvormige grafiek. Motiveer je antwoord.
- b** Geef het gemiddelde $\bar{x}$ en de standaarddeviatie σ van de lengte en bereken $\bar{x} - \sigma$, $\bar{x} + \sigma$, $\bar{x} - 2\sigma$ en $\bar{x} + 2\sigma$.
 - c** Maak een cumulatieve frequentietabel van de lengte met klassebreedte 1 en bereken daarmee het aantal vrouwen met een lengte die maximaal één keer de standaarddeviatie afwijkt van het gemiddelde.
 - d** Bereken ook het aantal vrouwen waarvan de lengte maximaal twee keer de standaarddeviatie van het gemiddelde afwijkt.
 - e** Geef het percentage vrouwen met een lengte tussen $\bar{x} - \sigma$ en $\bar{x} + \sigma$.
 - f** Geef het percentage vrouwen met een lengte tussen $\bar{x} - 2\sigma$ en $\bar{x} + 2\sigma$.

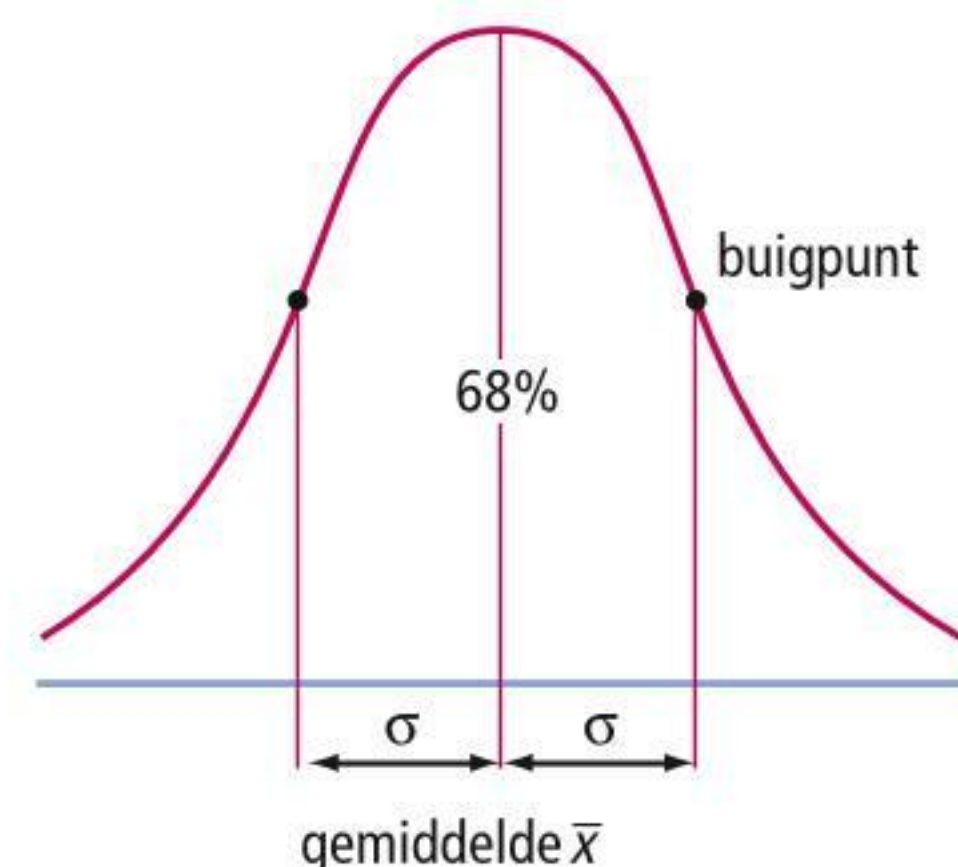
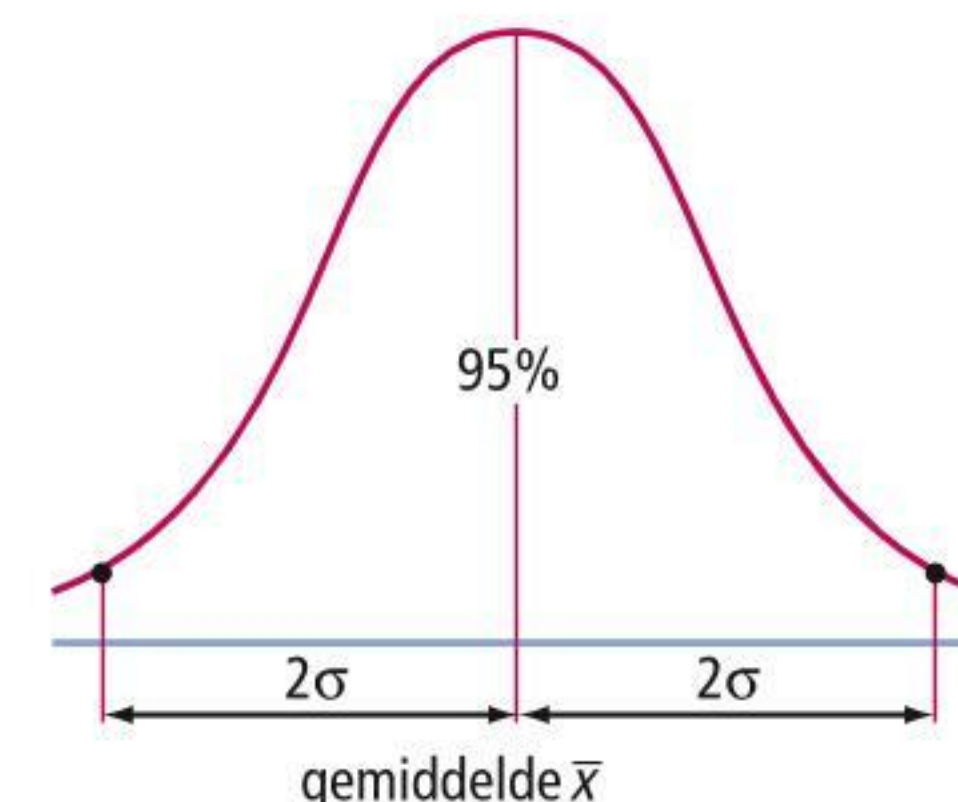
De frequentieverdeling van zowel discrete en continue variabelen kun je vaak benaderen met een klokvormige grafiek. De belangrijkste kenmerken van zo'n grafiek zijn:

- > de grafiek is symmetrisch
- > de symmetrie-as ligt precies bij de mediaan
- > gemiddelde en mediaan vallen samen
- > σ is de afstand van de symmetrie-as tot de buigpunten van de kromme.

Er gelden de volgende twee vuistregels:

- 1 van de data ligt ongeveer 68% tussen $\bar{x} - \sigma$ en $\bar{x} + \sigma$
- 2 van de data ligt ongeveer 95% tussen $\bar{x} - 2\sigma$ en $\bar{x} + 2\sigma$

De ideale klokvormige verdeling wordt de **normale verdeling** genoemd. Een variabele waarvan de frequentieverdeling benaderd kan worden door de normale verdeling heet **normaal verdeeld**.



- 16a** Laat met een berekening zien dat de vuistregels van de normale verdeling aardig kloppen voor de variabele *gewicht*. Licht je antwoord toe.
- b** Onderzoek of de frequentieverdeling van de gewichten van de 5001 vrouwen ook klokvormig is zoals bij de lengtes.
- c** Het gewicht van de 5001 vrouwen is niet normaal verdeeld. Leg uit waarom niet.

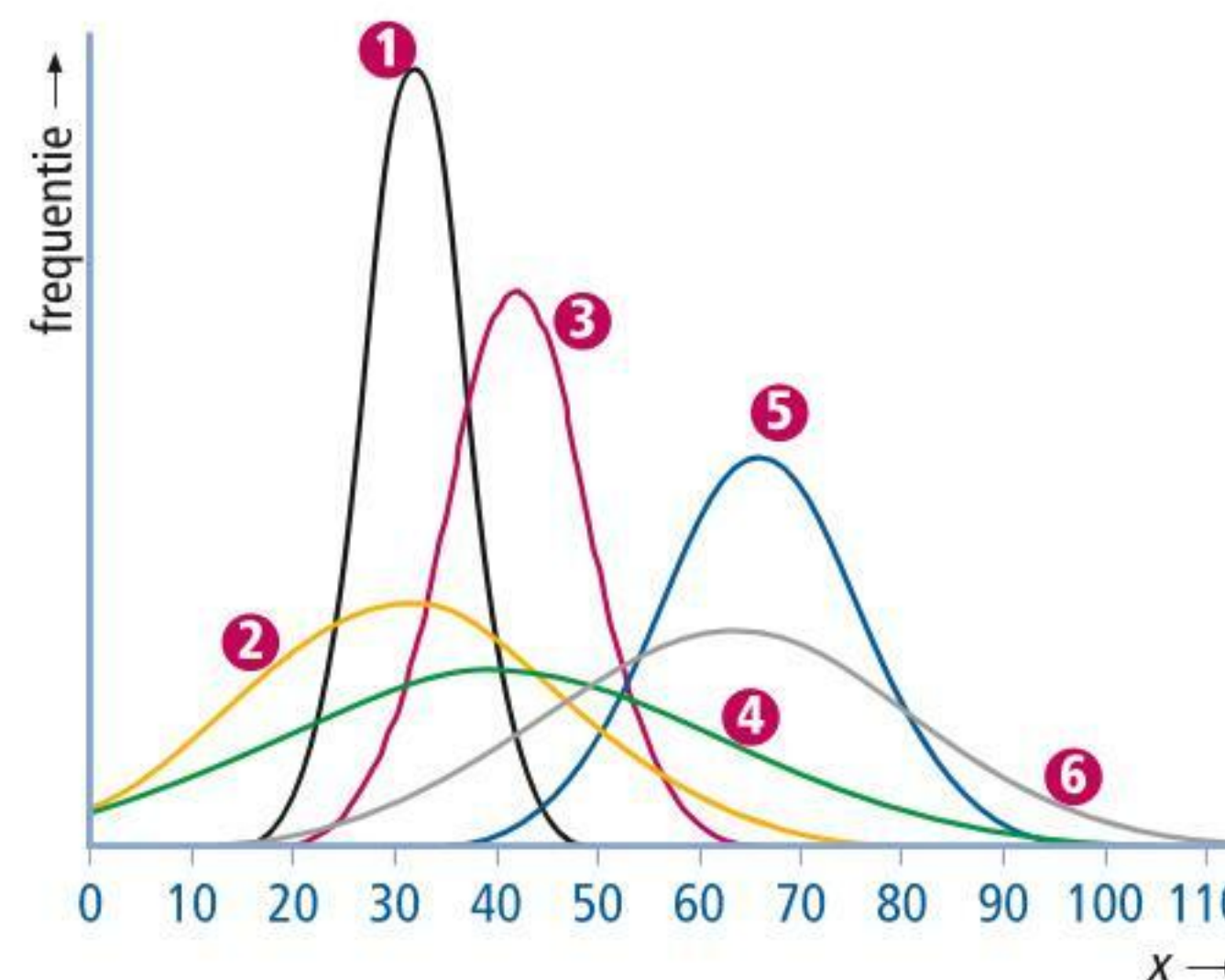
- 17** In de figuur hiernaast staan zes grafieken behorende bij zes normale verdelingen van een continue variabele x .
- a** Welke verdeling heeft het grootste gemiddelde? En welke het kleinste?
- b** Welke verdeling heeft de grootste standaarddeviatie? En welke de kleinste?

- 18** Geef van elke grafiek uit opdracht 17 het gemiddelde en de standaardafwijking.

De grafiek van een normale verdeling is volledig bepaald als gemiddelde en standaardafwijking bekend zijn.

- 19** Wat gebeurt er met de grafiek van een normale verdeling als het gemiddelde kleiner wordt en de standaarddeviatie gelijk blijft?

- 20** Wat gebeurt er met de grafiek van een normale verdeling als de standaarddeviatie groter wordt en het gemiddelde gelijk blijft? Geef hiervoor een verklaring.



2-4

Normaal of niet normaal

Deze opdrachten maak je met behulp van de computer

- 21a** Van 608 maïsplanten is de *lengte* in cm gemeten. Plot een staafdiagram en geef het gemiddelde en de standaardafwijking van de lengte van een maïsplant. Plot in de figuur ook de normale verdeling die past bij de gemiddelde lengte en de standaardafwijking.
- b** Vind je de frequentieverdeling van de lengte klokvormig?
- c** Hoeveel procent van de maïsplanten heeft een lengte tussen $\bar{x} - \sigma$ en $\bar{x} + \sigma$?
- d** Hoeveel procent van de maïsplanten heeft een lengte tussen $\bar{x} - 2\sigma$ en $\bar{x} + 2\sigma$?
- e** Ondersteunen de antwoorden van opdracht c en d het vermoeden dat de lengtes van de maïsplanten normaal verdeeld is?

Theorie

Om na te gaan of een frequentieverdeling van een variabele x normaal verdeeld is, maak je een staafdiagram of lijndiagram en controleer je of de frequentieverdeling klokvormig is.

Om nog meer zekerheid te krijgen of je de verdeling met een normale verdeling mag benaderen, kun je de vuistregels van de normale verdeling controleren.

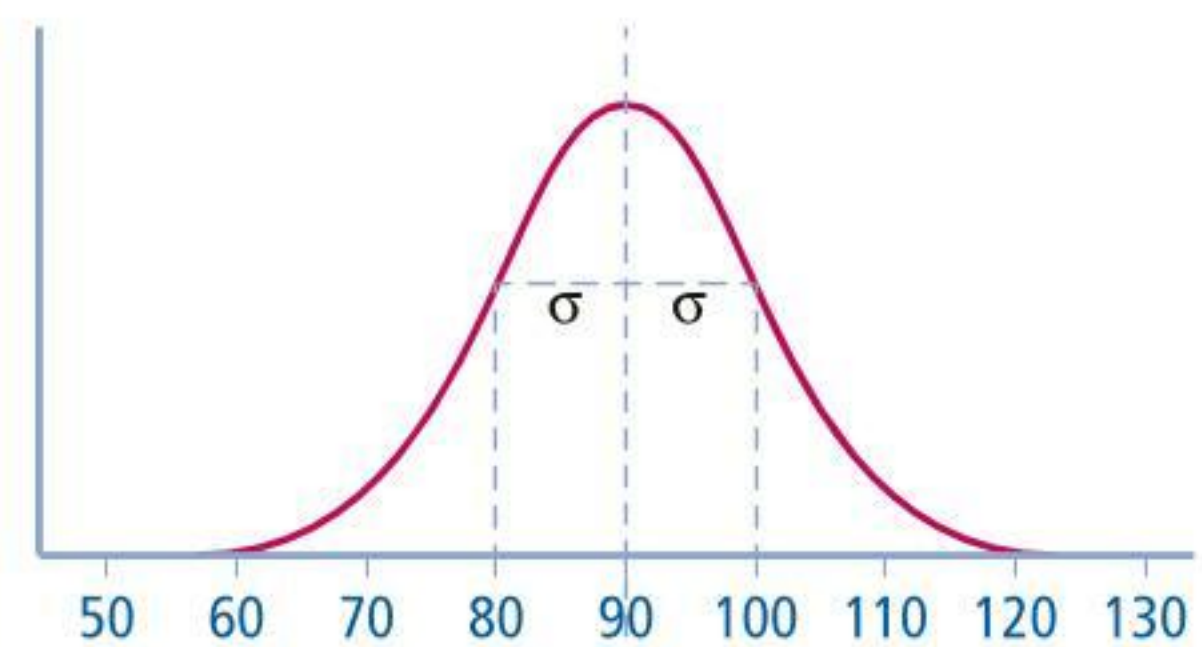
De grafiek van de normale verdeling kun je schetsen als het gemiddelde en de standaarddeviatie bekend zijn.

Voorbeeld

Schets de grafiek van de normale verdeling van een variabele x met $\bar{x} = 90$ en $\sigma = 10$.

Oplossing

- > Teken een x -as en een y -as.
- > Geef op de x -as de waarden aan van $\bar{x}$, $\bar{x} + \sigma (=100)$ en $\bar{x} - \sigma (=80)$.
- > Teken een klokvormige kromme zó dat de lijn $x = 90$ de symmetrie-as is en de buigpunten bij $x = 80$ en $x = 100$ zitten.

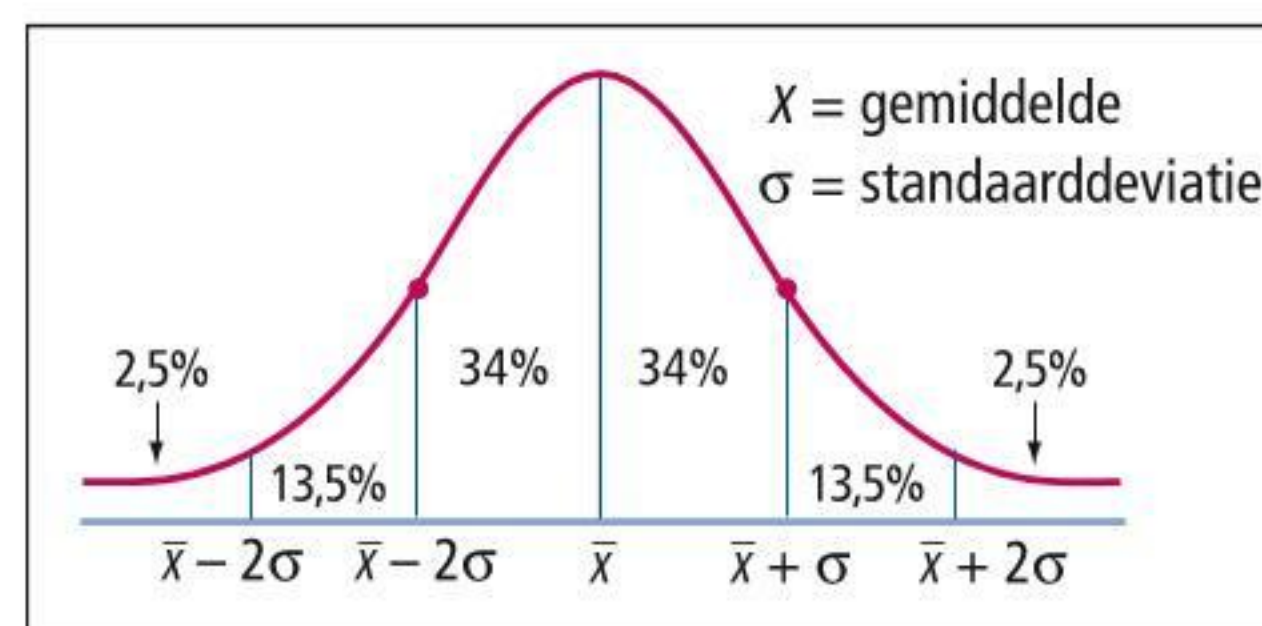


- 22a** Is de variabele *gemiddelde dagtemperatuur* continu of discreet?
- b** Onderzoek of de gemiddelde dagtemperatuur in 2013 normaal verdeeld is.
- c** Was de maximum dagtemperatuur in 2013 normaal verdeeld?
- 23** Tot 1996 was er in Nederland militaire dienstplicht voor jongens. Van de laatste lichting werd de lengte gemeten. De gemiddelde lengte was 181 centimeter, de standaardafwijking bedroeg 8 centimeter. Ga ervan uit dat de variabele *lengte* normaal verdeeld was.
- a** Schets de grafiek van de bijbehorende normale verdeling.
- b** Hoeveel procent van deze groep zal langer geweest zijn dan 181 cm?
- c** Twintig procent van deze groep bleek kleiner te zijn dan 175 cm. Wat weet je van de lengte van de langste twintig procent van deze jongens?
- d** Hoeveel procent van de dienstplichtigen had een lengte tussen 173 en 189 centimeter?
- e** Hoeveel procent van de jongens was langer dan 189 cm?



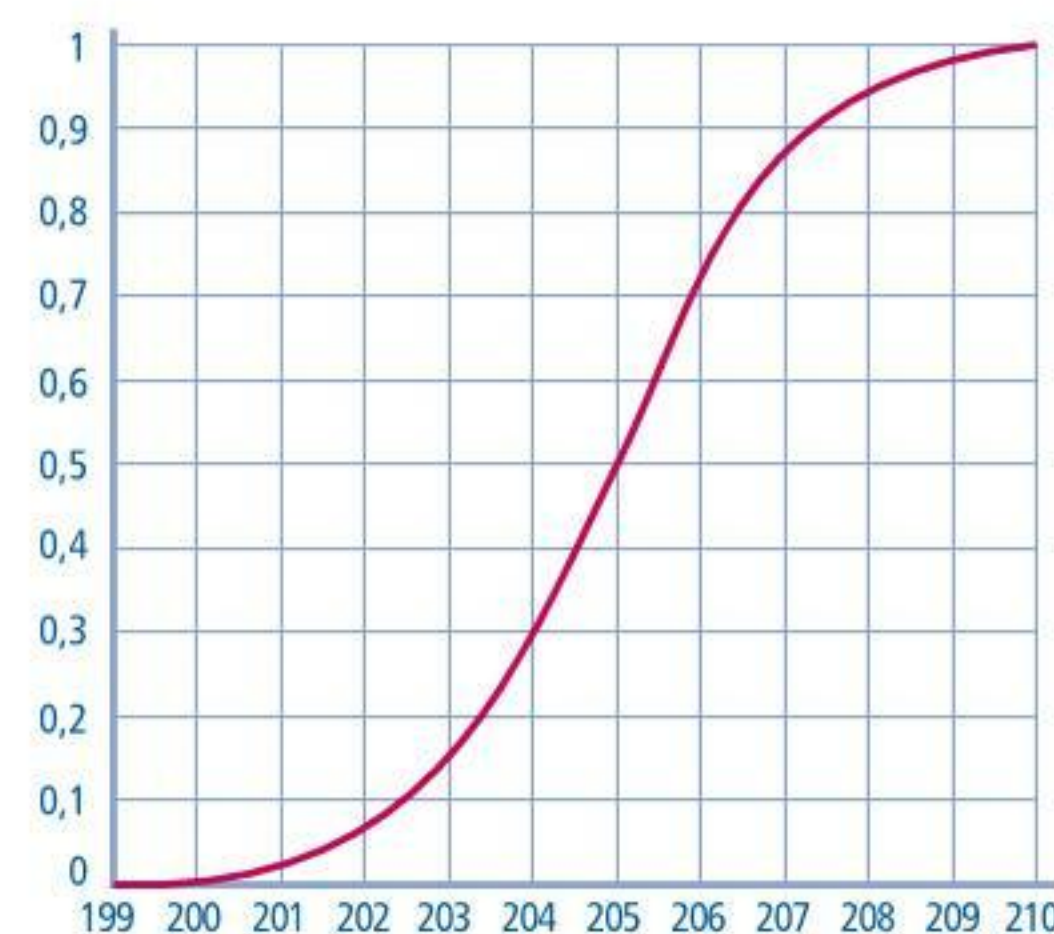
- 24** In het al eerder genoemde Bijenkorf-onderzoek is ook de voetlengte van de 5001 vrouwen gemeten.
- Vind je de voetlengte normaal verdeeld? Licht je antwoord toe.
 - Geef de gemiddelde voetlengte en de standaarddeviatie.
 - Schets de grafiek van de bijbehorende normale verdeling.
 - Gebruik de vuistregels en de grafiek voor de volgende berekeningen:
 - > bereken hoeveel vrouwen een voetlengte hebben tussen 23,3 en 24,5 cm.
 - > bereken hoeveel vrouwen er zijn met een voetlengte kleiner dan 22,1 cm.
 - Ga na of de gevonden waarden in opdracht d kloppen met de werkelijke gegevens van de 5001 vrouwen.

Met de vuistregels kun je de oppervlakte onder de grafiek van een normale verdeling opsplitsen in zes stukken. De tekening voldoet aan de eerste vuistregel dat 68% van de data tussen $\bar{x} - \sigma$ en $\bar{x} + \sigma$ ligt en ook aan de tweede vuistregel dat 95% van de data tussen $\bar{x} - 2\sigma$ en $\bar{x} + 2\sigma$ ligt.



- 25** Een supermarkt verkoopt waspoeder in pakken van 4 kg. Een consumentenorganisatie controleert het gewicht van 500 pakken. Het gemiddelde gewicht blijkt 4,07 kg te zijn, met een standaardafwijking van 0,12 kg. Neem aan dat de gewichten van de pakken waspoeder normaal verdeeld zijn.
- Maak een schets van de grafiek van de bijbehorende normale verdeling.
 - Waarom zal de fabrikant de pakken vullen met een gemiddelde van meer dan 4 kg?
 - Bereken het aantal pakken met een gewicht tussen 3,95 en 4,31 kg.
 - Geef een schatting van het percentage pakken met een gewicht van minder dan 4 kg.
- 26** In een kantoorgebouw worden lampen gebruikt met een brandtijd van gemiddeld 1400 uur en een standaardafwijking van 150 uur. Neem aan dat de variabele *brandtijd* normaal verdeeld is. Om arbeidsloon te besparen worden alle lampen tegelijk vervangen.
- Is *brandtijd* een continue of discrete variabele?
 - Pas als 16% van de lampen stuk is, mag er vervangen worden. Na hoeveel branduren is dat het geval?
 - Na een aantal jaar besluit de directie om over te stappen op led-verlichting. Na 3200 branduren is 2,5% van deze lampen stuk. De standaarddeviatie van de brandtijd van deze lampen is 75 uur. Bereken de gemiddelde brandtijd van deze lampen.

- 27** Hiernaast zie je de relatieve cumulatieve grafiek van een normaal verdeelde variabele. Bepaal met behulp van de grafiek het gemiddelde en de standaardafwijking.
- 28** Bij een continue variabele x maakt het niet uit of je vraagt naar het percentage waarnemingen waarvoor geldt: $x \leq 150$ of $x < 150$. Leg uit waarom.



2-5

Steekproeven

Deze opdrachten maak je met behulp van de computer.

- 29** De directie van een school met 1425 leerlingen beweert dat 60% van de leerlingen minder dan 8 kilometer van school woont. Een paar vwo leerlingen willen nagaan of het percentage klopt. Het ontbreekt ze aan tijd om dit aan elke leerling afzonderlijk te vragen.
- a** Aan vijf willekeurige leerlingen vragen ze hoe ver ze van school wonen. Twee van de vijf wonen minder dan 8 km van school. Mag je nu concluderen dat de directie niet gelijk heeft?
 - b** Is het mogelijk dat geen enkele van deze vijf leerlingen minder dan 8 km van school woont?
 - c** Stel dat ze dezelfde vraag stellen aan 25 willekeurige leerlingen. Is het mogelijk dat geen enkele van deze leerlingen minder dan 8 km van school woont?

Theorie

Om iets te weten te komen over een groep mensen of dingen, kun je proberen de hele groep, de populatie, te onderzoeken. Maar meestal onderzoek je, om bijvoorbeeld werk te besparen, slechts een deel van de groep, een **steekproef**. Om juiste conclusies te trekken over een populatie, moet je een goede **steekproefgrootte** kiezen en moet de steekproef **aselect** zijn. Dat wil zeggen dat iedereen (of ieder ding) uit de populatie evenveel kans moet hebben om in de steekproef terecht te komen. Een steekproef moet ook **representatief** zijn. Dat wil zeggen dat de steekproef een goede afspiegeling vormt van de hele populatie.

Voorbeeld

Een leerlingenvereniging wil door middel van een steekproef peilen hoe de achterban van 1168 leerlingen de activiteiten waardeert. De voorzitter stelt voor de mening van de 34 aanwezigen op een vergadering te peilen. De secretaris wil willekeurig 30 namen uit de ledenlijst prikken en die leden een vragenlijst afnemen. Het voorstel van de voorzitter levert geen aselechte steekproef, dat van de secretaris wel.

- 30** Bekijk het voorbeeld. Waarom levert het voorstel van de voorzitter geen aselechte steekproef en het voorstel van de secretaris wel?

- H 31** Om na te gaan of je uit het resultaat van een steekproef met grootte 5 de conclusie kunt trekken dat de directie gelijk heeft, ga je het nemen van een aselechte steekproef simuleren. In een grote vaas stop je 1425 kaartjes: elk kaartje stelt een leerling van school voor. Van de kaartjes is 60% blauw. Dat zijn de leerlingen die minder dan 8 km van school wonen.

De overige kaartjes zijn wit.

Je trekt 5 kaartjes uit de vaas en je berekent het percentage blauwe. In de tabel zie je het resultaat van zes simulaties met grootte 5.

- a** Waarom zijn andere percentages niet mogelijk?
- b** Welke steekproeven geven het percentage blauwe kaartjes dat je mag verwachten?
- c** Wat moet er op de stippeltjes in de laatste rij staan?

simuleren is nabootsen

percentage	0	20	40	60	80	100
blauwe kaartjes						
steekproef 1			√			
steekproef 2				√		
steekproef 3			√			
steekproef 4						√
steekproef 5					√	
steekproef 6				√		
frequentie	0	0	2	...	...	...

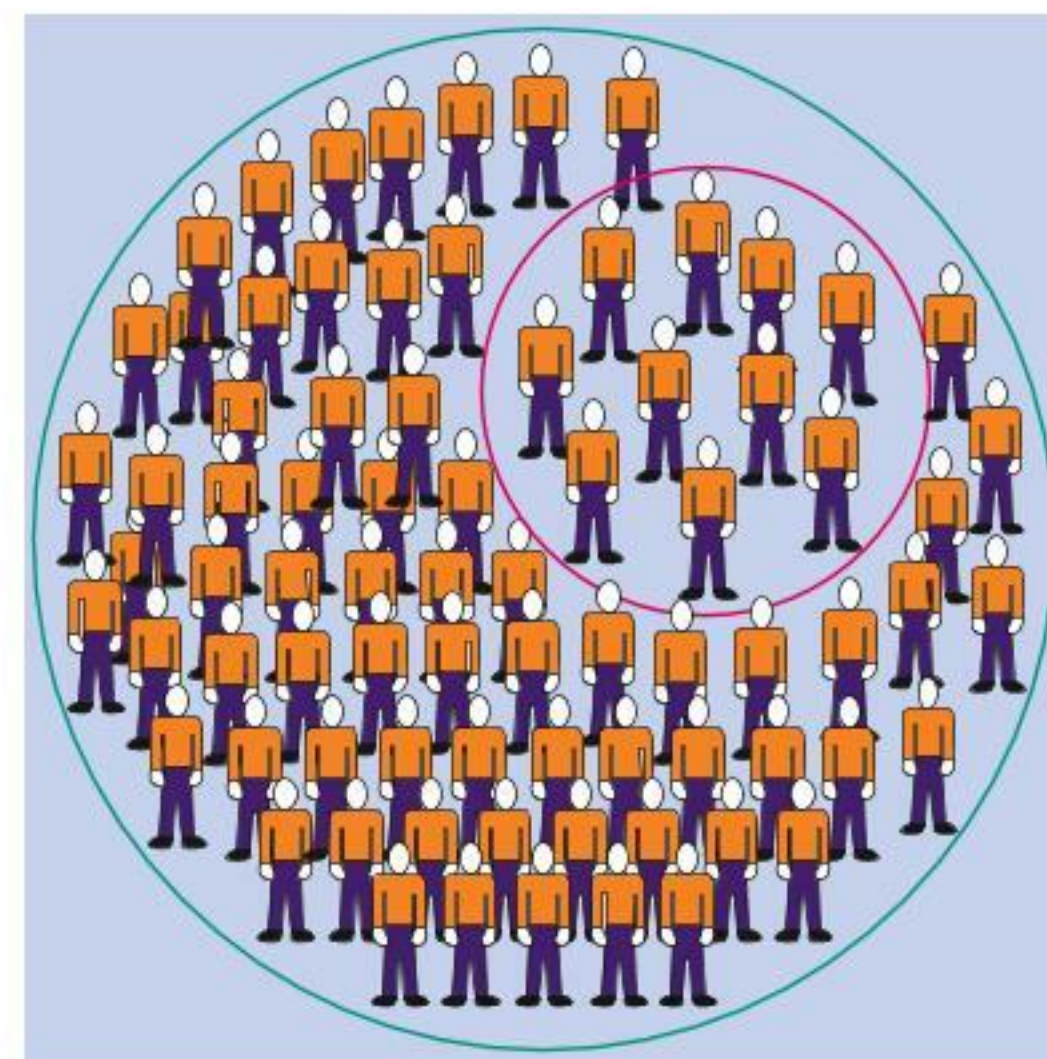
- 32** Het simuleren van steekproeven kun je de computer laten doen.
- Simuleer 2000 keer het trekken van een steekproef van 5 kaartjes. Noteer het resultaat in de tabel.
 - In hoeveel van de 2000 keer komt het voor dat geen enkel kaartje blauw is, dus dat geen enkele leerling in de steekproef minder dan 8 km van school woont?

percentage blauwe kaartjes	0	20	40	60	80	100
frequentie						

- 33a** Kies een steekproefgrootte van 25. Welke percentages blauwe kaartjes zijn nu mogelijk?
- Simuleer 2000 keer het trekken van een steekproef van 25 kaartjes.
 - In hoeveel van de 2000 keer komt het voor dat geen enkel kaartje blauw is, dus dat geen enkele leerling minder dan 8 km van school woont?

Door toeval komt het resultaat van een steekproef meestal niet overeen met wat voor de hele populatie geldt. Je kunt er zelfs flink naast zitten. In de praktijk houdt men bij de conclusie altijd een zekere marge aan. De kans op een steekproefresultaat binnen die marge is bij een grote steekproef groter dan bij een kleine steekproef. Vandaar dat een goede steekproefgrootte van belang is.

- 34** Ga ervan uit dat de directie van de school gelijk heeft. De vwo leerlingen nemen een steekproef. Ze houden een marge aan van 25%. Dat betekent dat ze denken dat de directie gelijk heeft als het percentage blauwe kaartjes tussen 35% ($60 - 25$) en 85% ($60 + 25$) ligt.
- Neem steekproefgrootte 5. Bereken op grond van het resultaat van opdracht 32 de kans dat de leerlingen denken dat de directie gelijk heeft.
 - Neem steekproefgrootte 25. Bereken op grond van het resultaat van opdracht 33 de kans dat de leerlingen denken dat de directie gelijk heeft.
 - Bereken ook in beide gevallen hoe groot de kans is dat de leerlingen een verkeerde beslissing nemen.



- 35** Ga weer uit van 60% blauwe kaartjes. Simuleer tweeduizend keer een steekproef ter grootte van 50. Hoe groot is de kans op een steekproef met als resultaat dat het percentage blauwe kaartjes tussen 45 en 75 procent ligt?

- 36a** Hoe groter de steekproef, hoe betrouwbaarder de conclusie. Leg uit wat hiermee bedoeld wordt.
- Noem enkele nadelen van het houden van een grote steekproef.
 - Behalve dat de steekproef groot genoeg is en aselekt, dient deze ook representatief te zijn. Noem een aantal aspecten waar de leerlingen rekening mee moeten houden als ze een representatieve steekproef willen samenstellen.

2-6

Gemengde opdrachten

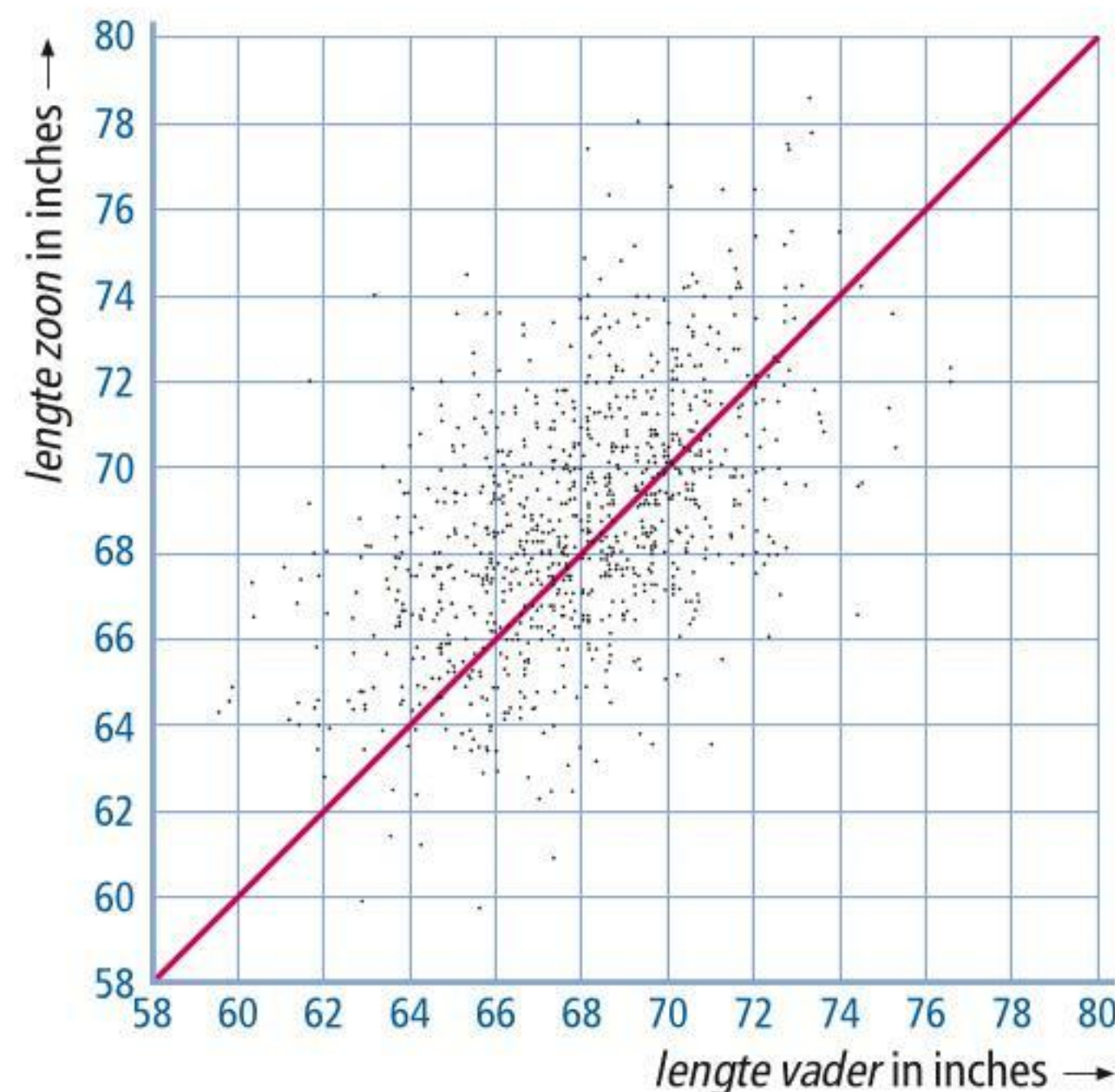
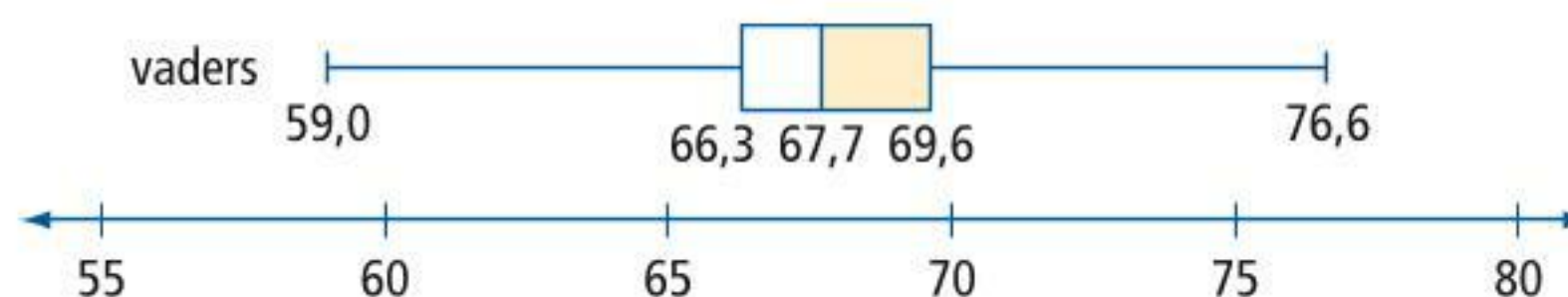
Deze opdrachten maak je met behulp van de computer.

- 37** De Engelsman Karl Pearson was een van de grondleggers van de moderne statistiek. Hij heeft zich vaak bezig gehouden met statistiek over biologische onderwerpen. Ongeveer een eeuw geleden onderzocht hij, samen met zijn collega Alice Lee, of in Engeland zonen gemiddeld langer zijn dan hun vaders. Zij vergeleken de lengtes van 1064 zonen en hun vaders. De zonen studeerden allen aan een Londense universiteit.
- Is hier sprake van een aselechte steekproef? Licht je antwoord toe.
 - De lengtes zijn gemeten in inches. Wat was de lengte van de kleinste zoon en wat de lengte van de langste zoon? Geef je antwoord in cm.
 - Wat was de gemiddelde lengte, de modus en de mediaan?
 - Geeft het antwoord van opdracht c je al een vermoeden of de lengtes normaal verdeeld zijn? Licht je antwoord toe.
 - Onderzoek of de lengtes normaal verdeeld zijn.
 - Hoeveel procent van de zonen had een lengte die meer dan 5 inch van het gemiddelde afweek?

- 38** Pearson en Lee vergeleken de lengtes van de vaders en de zonen met behulp van een spreidingsdiagram, dat op het werkblad is afgedrukt.

- In de figuur is een lijn getekend. Wat betekent het als een stip op deze lijn ligt?
- We noemen een vader en zijn zoon *ongeveer even lang* als ze minder dan 2 inch in lengte verschillen. Teken in de figuur het gebied waarin de punten liggen die horen bij vaders en zonen die *ongeveer even lang* zijn. Licht je werkwijze toe.
- Kun je met behulp van het in opdracht b getekende gebied concluderen dat de zonen gemiddeld langer zijn dan hun vaders? Licht je antwoord toe.
- Hiernaast zie je een boxplot van de lengtes van de 1064 vaders. De vijf kenmerkende getallen van de boxplot staan erbij. Deze figuur staat ook op een werkblad. Teken de boxplot van de lengtes van de zonen boven de boxplot van de vaders. Schrijf de kenmerkende getallen van de boxplot erbij.
- Vind je, op grond van de boxplots, dat er verschil is in lengtes van vaders en zonen?

Ontleend aan CE havo wiskunde A 2003, tijdvak 1



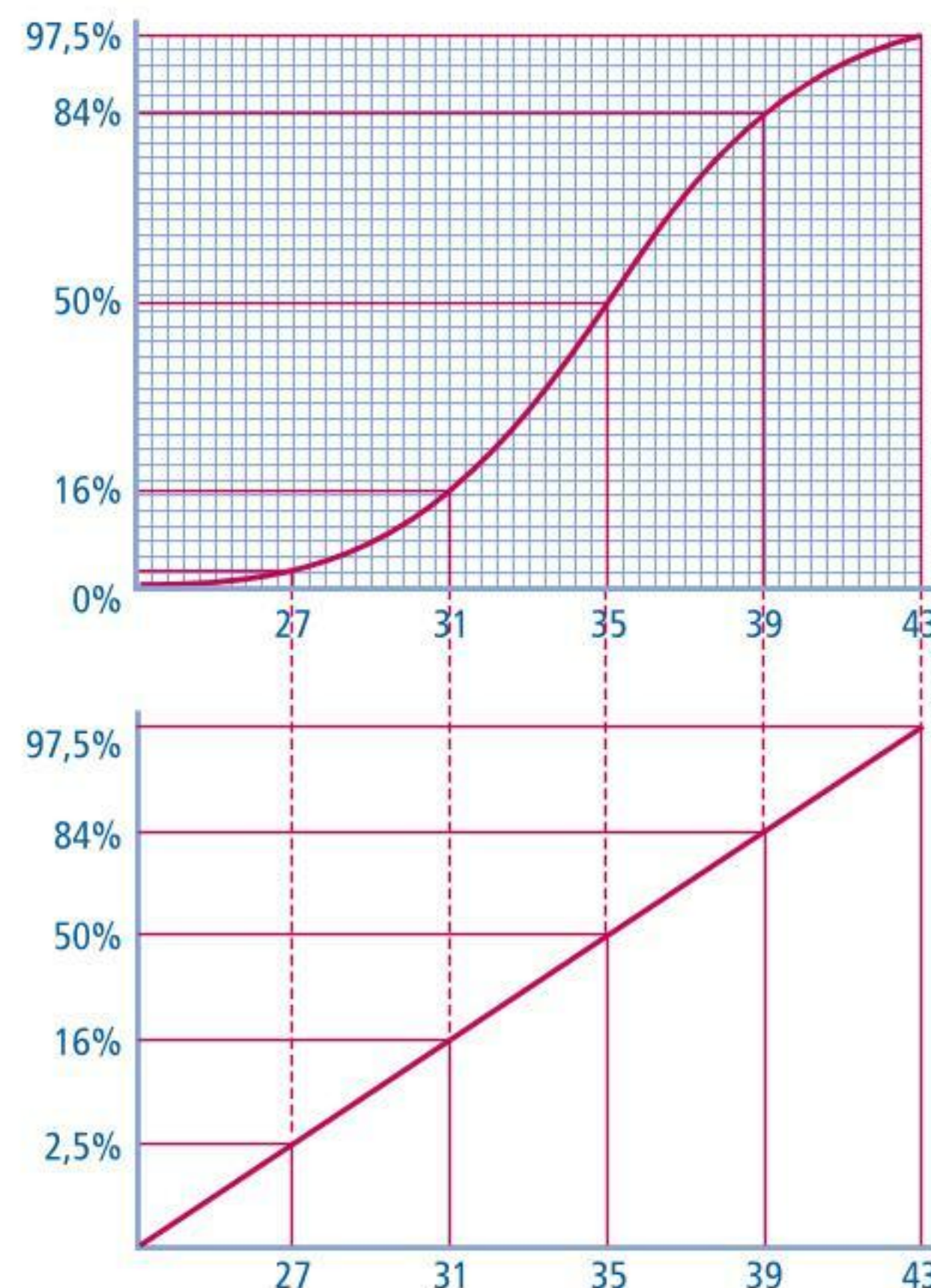
- 39** Hiernaast staan twee grafieken van de cumulatieve verdeling van een normaal-verdeelde variabele. De tweede grafiek is uit de eerste ontstaan door de verticale as aan te passen. Zowel boven als onder de 50% is de as in toenemende mate opgerekt. De uitgerekte S van de eerste grafiek is daardoor een rechte lijn geworden.

- a** Ga na dat de grafieken met elkaar overeenstemmen.
- b** In de eerste grafiek ligt op de verticale as de waarde 67% precies midden tussen de waarden 50% en 84%. Leg uit waarom dat in de tweede grafiek niet het geval is.
- c** De data ondervinden een aanpassing zo, dat elke waarneming 4 groter wordt. Leg voor beide grafieken uit hoe ze veranderen.
- d** De data ondervinden een aanpassing zo dat de standaarddeviatie van 4 in 2 wijzigt. Leg voor beide grafieken uit hoe ze veranderen.

-  **40** Vroeger, toen men nog niet de beschikking had over krachtige computers, gebruikte men het zogenaamde normaal waarschijnlijkheidspapier om te onderzoeken of een variabele normaal verdeeld was. De schaalverdeling langs de verticale as is zo gemaakt, dat de grafiek van een cumulatieve normale verdeling een rechte lijn is. Onderzoek of de lengte van de zonen uit opdracht 37 normaal verdeeld is. Je moet daartoe wel eerst een klassenindeling maken van de lengtes, bestaande uit maximaal 10 klassen.

-  **41** De vloeiende kromme waarmee je het staafdiagram van de lengtes van de 5001 vrouwen uit het Bijenkorf-onderzoek kunt benaderen is een voorbeeld van een normale verdeling. In welke van de volgende gevallen zal er volgens jou ook sprake zijn van een normale verdeling?

- a** De lengte van Nederlandse meisjes van 18 jaar.
- b** Het gewicht van Nederlandse jongens van 18 jaar.
- c** De lengte van Nederlandse kinderen van 0 tot 12 jaar?
- d** Het inkomen van Nederlanders.
- e** Het nettogewicht van kilo-pakken suiker.
- f** De wachttijden bij het loket.



Samenvatting

Frequentieverdeling, klokvormig, uniform, scheef, meertoppige, staart, uitschieter

Datasets kun je ordenen in bijvoorbeeld frequentietabellen of staafdiagrammen. Dit zijn beide voorbeelden van een frequentieverdeling. De vorm van een staafdiagram geeft informatie over de frequentieverdeling. Daarbij kun je letten op symmetrie zoals een klokvormige verdeling, een uniforme verdeling, een scheve verdeling, met een staart, een meertoppige verdeling of een verdeling met uitschieters.

Discrete en continue variabelen

Bij variabelen maak je onderscheid tussen discrete en continue variabelen. Een discrete variabele neemt alleen bepaalde waarden aan.

Een continue variabele kan in principe alle waarden op een interval aannemen.

Normale verdeling en normaal verdeelde variabele

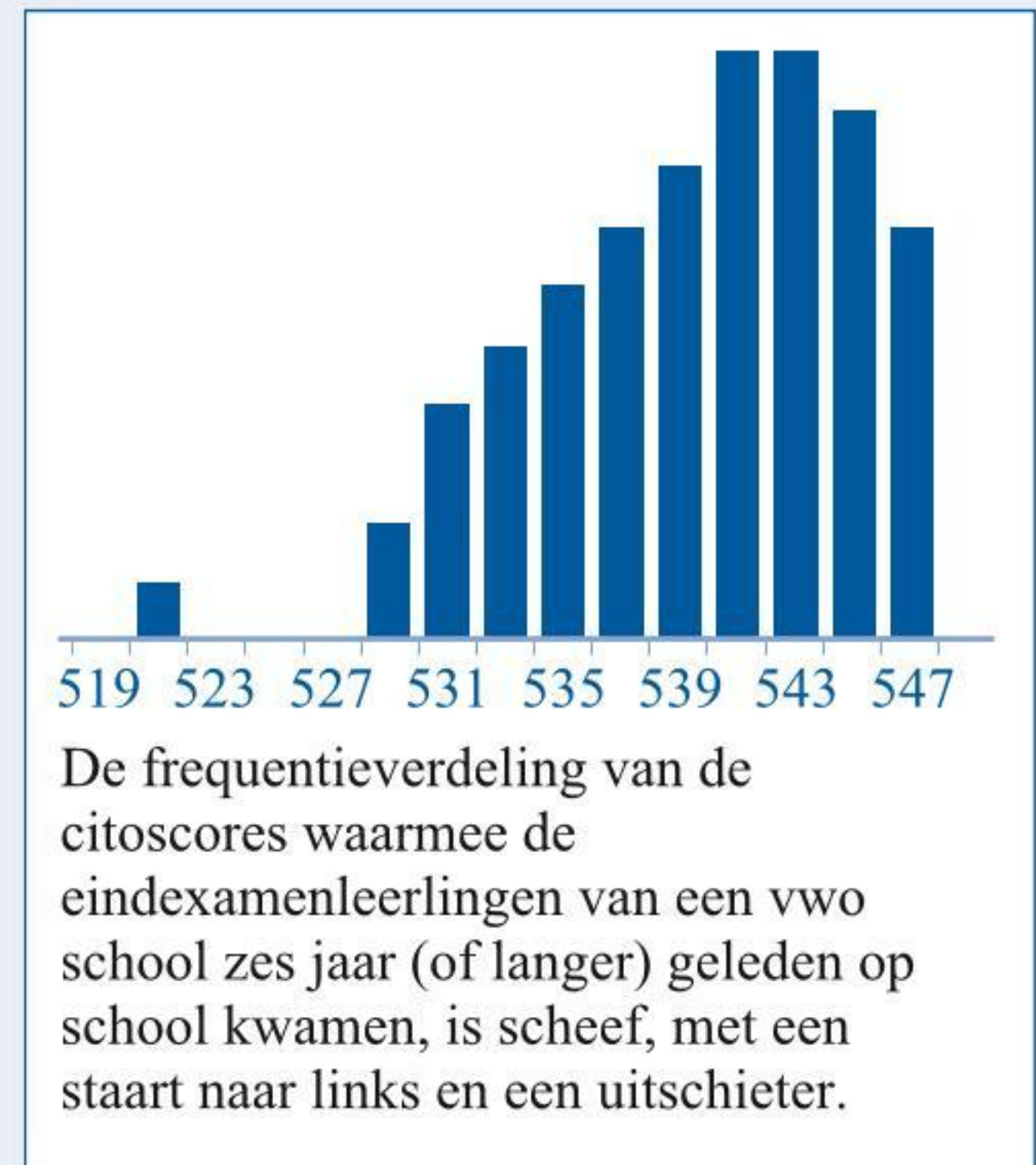
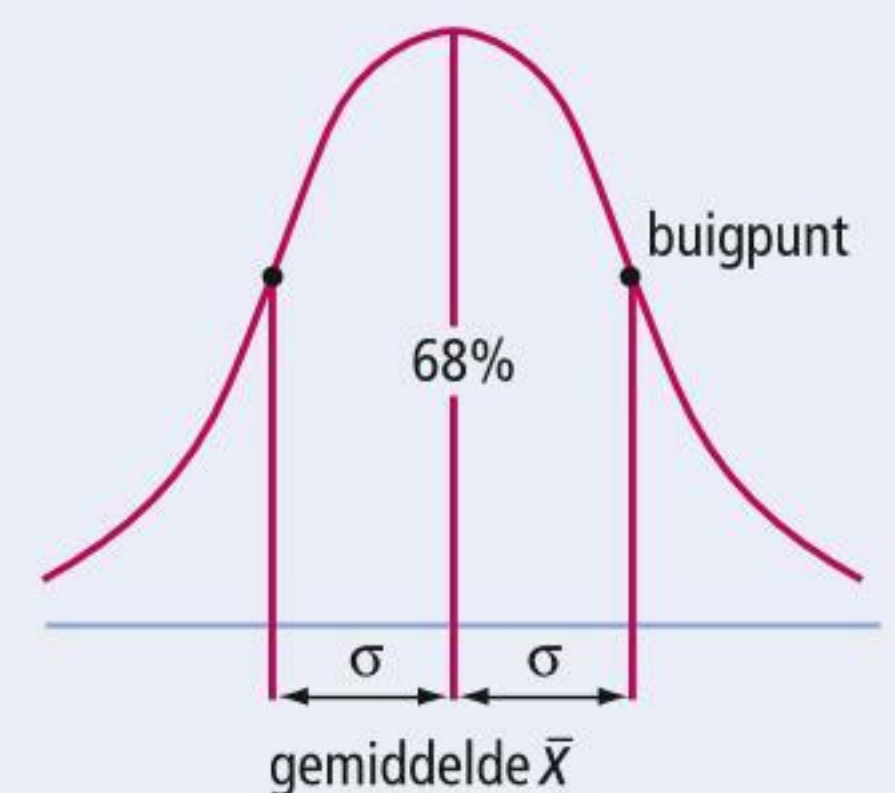
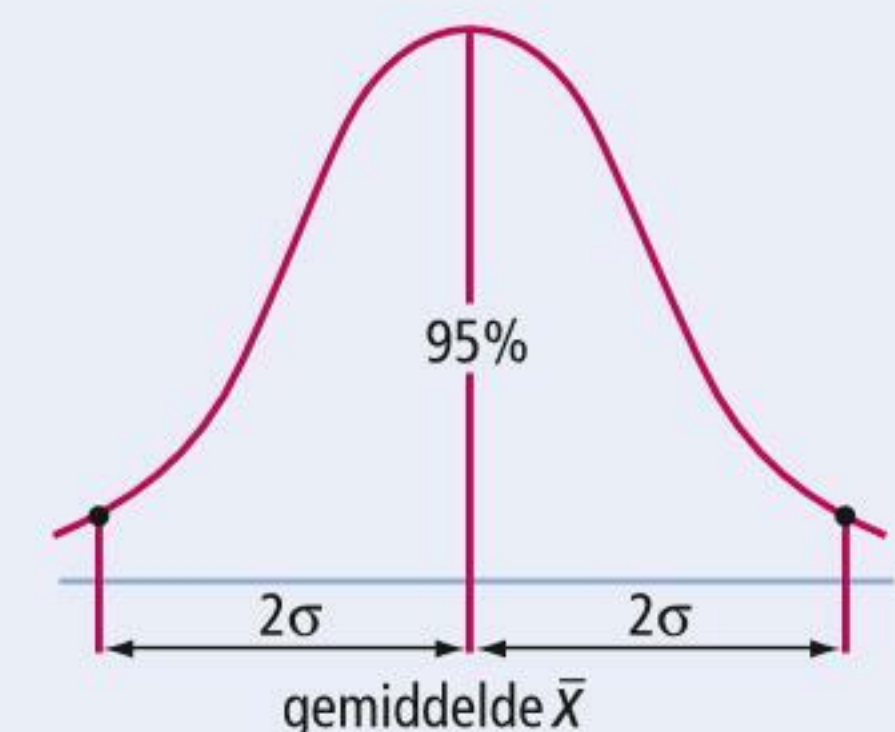
De frequentieverdeling van zowel discrete en continue variabelen kun je vaak benaderen met een klokvormige grafiek. De belangrijkste kenmerken van zo'n grafiek zijn:

- > de grafiek is symmetrisch
- > de symmetrie-as ligt precies bij de mediaan
- > gemiddelde en mediaan vallen samen
- > σ is de afstand van de symmetrie-as tot de buigpunten van de kromme.

Er gelden de volgende twee vuistregels:

- 1 van de data ligt ongeveer 68% tussen $\bar{x} - \sigma$ en $\bar{x} + \sigma$
- 2 van de data ligt ongeveer 95% tussen $\bar{x} - 2\sigma$ en $\bar{x} + 2\sigma$

Men spreekt in dit geval van een normale verdeling. Je kunt ook zeggen dat de variabele normaal verdeeld is.



Steekproef, steekproefgrootte, aselekt, representatief

Om iets te weten te komen over een groep mensen of dingen, kun je proberen de hele groep, de populatie, te onderzoeken. Maar meestal onderzoek je, om bijvoorbeeld werk te besparen, slechts een deel van de groep, een steekproef. Om juiste conclusies te trekken over een populatie, moet je een goede steekproefgrootte kiezen en moet de steekproef aselekt zijn. Dat wil zeggen dat iedereen (of ieder ding) uit de populatie evenveel kans moet hebben om in de steekproef terecht te komen. Een steekproef moet ook representatief zijn. Dat wil zeggen dat de steekproef een goede afspiegeling vormt van de hele populatie.

Je kunt van een variabele nagaan of deze normaal verdeeld is

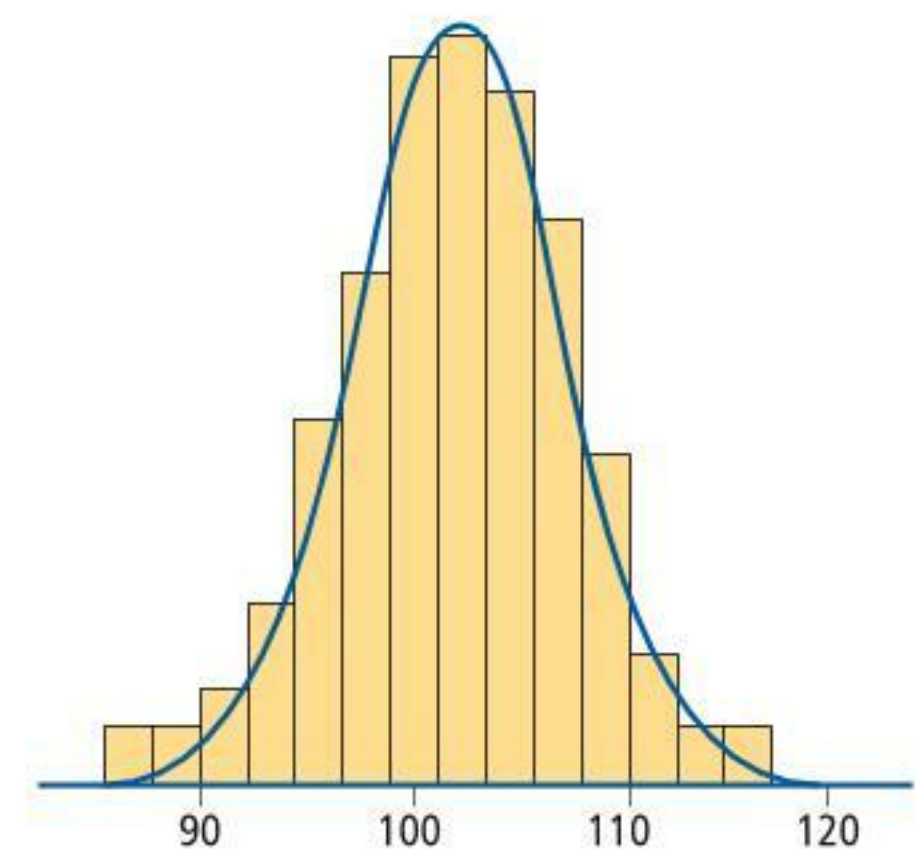
Je mag de frequentieverdeling van een variabele benaderen met de normale verdeling, als het staaf- of lijndiagram van de frequentieverdeling van de variabele redelijk klokvormig is.

Voorbeeld

Van 2500 Elstar appels is het gewicht in grammen genoteerd. Het gemiddelde gewicht is 102,2 gram, de standaardafwijking bedraagt 5,0 gram. De vraag is of je de verdeling van de variabele *gewicht* mag benaderen met een normale verdeling.

Oplossing

Hiernaast zie je het staafdiagram bij een klassenbreedte van 2 gram. De bij dit gemiddelde en deze standaarddeviatie behorende normale verdeling is ingetekend. De verdeling van de variabele *gewicht* is klokvormig. Dat betekent dat je de variabele *gewicht* als normaal verdeeld mag beschouwen.



Je kunt de symmetrie en de vuistregels van de normale verdeling gebruiken

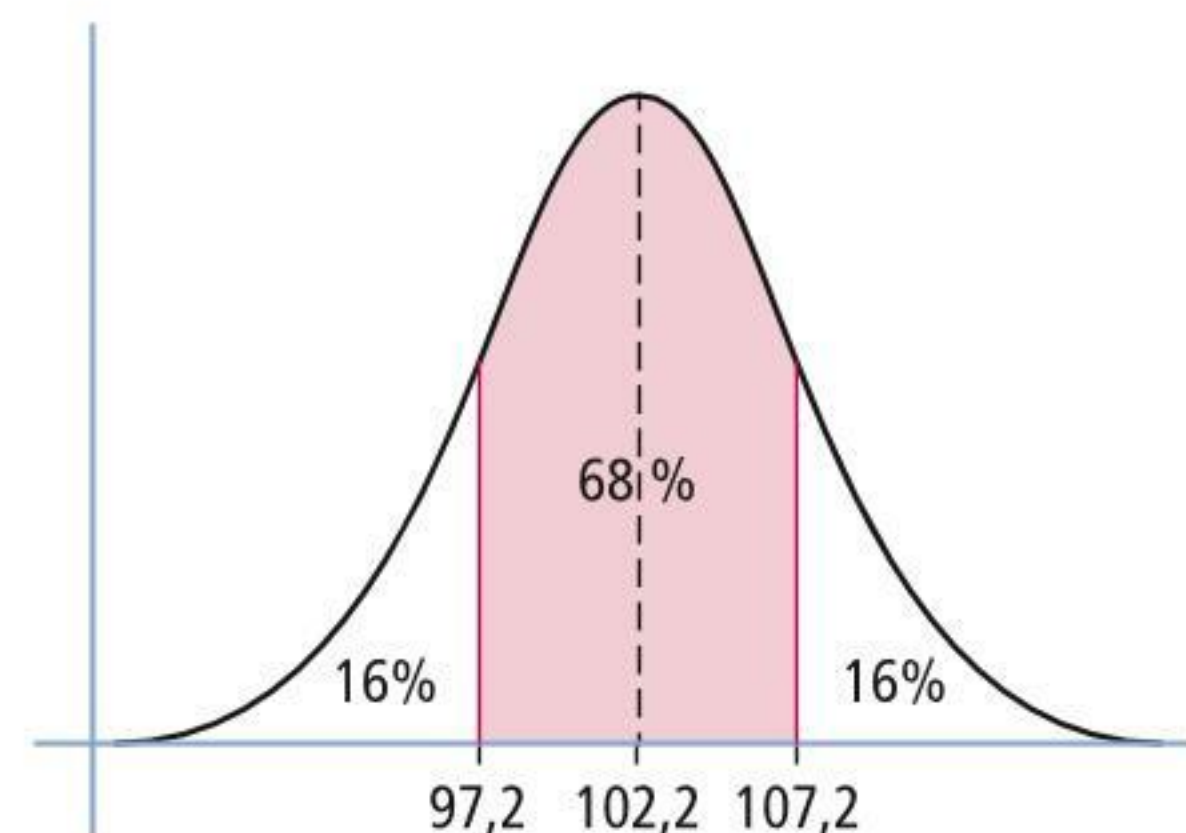
Als een variabele normaal verdeeld is, dan gebruik je de symmetrie en de vuistregels om uitspraken te doen over de variabele.

Voorbeeld

Bekijk het voorbeeld van de Elstar appels hierboven. Hoeveel appels wegen meer dan 97,2 gram?

Oplossing

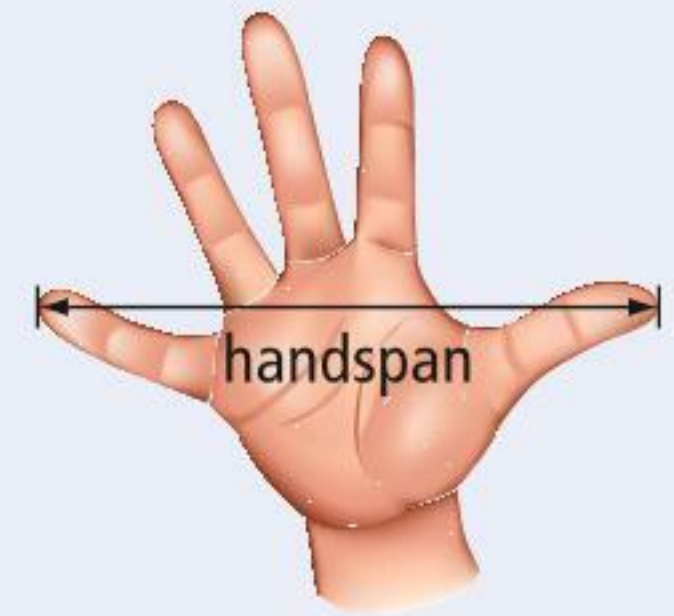
Schets bij het gegeven gemiddelde en standaardafwijking een grafiek. 97,2 gram ligt precies bij $\bar{x} - \sigma$. Omdat de variabele *gewicht* normaal verdeeld is, ligt 68% van de waarnemingen tussen $\bar{x} - \sigma$ en $\bar{x} + \sigma$. De overige 32% moet vanwege de symmetrie van de grafiek eerlijk verdeeld worden. 84% (68 + 16) van de appels weegt meer dan 97,2 gram. Dat zijn dus $0,84 \cdot 2500 = 2100$ appels.



Test jezelf

Deze opdrachten maak je met behulp van de computer.

- T-1** In de dataset vind je gegevens over lichaamskenmerken van jongens en meisjes van 10 en 12 jaar.
Maak staafdiagrammen van de variabelen *schoenmaat*, *handspan* en *schedel*. Beschrijf zo goed mogelijk de vorm ervan: klokvormig, scheef met een staart, uitschieters, meertoppig of uniform.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-1.
- T-2** Zijn de volgende variabelen discreet of continu?
a De *tijdsduur* die een vertegenwoordiger doorbrengt bij een klant.
b Het *aantal* vakantiewoningen dat in een jaar in Friesland gebouwd wordt.
c Het *aantal* boeken van een 6 vwo leerling.
d Het *gemiddelde benzinegebruik per 100 kilometer* van een personenauto.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-2.
- T-3** Spaarlampen van het merk Lumi gaan gemiddeld 6000 uur mee. De brandduur B is normaal verdeeld met standaardafwijking van 400 uur.
a Schets een grafiek van de verdeling van B .
Geef in de tekening het gemiddelde en de standaarddeviatie aan.
b Op een dag verlaten 800 spaarlampen de fabriek.
Schat hoeveel van deze lampen een brandduur zullen hebben tussen de 5600 en 6400 uur.
c Op een dag verlaten 1100 spaarlampen de fabriek.
Schat hoeveel van deze lampen een brandduur zullen hebben van meer dan 6400 uur.
d We kijken naar de 2,5% lampen met de hoogste brandduur.
Hoe lang branden deze lampen minstens?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-3.
- T-4** In een textielfabriek worden rollen linnen gemaakt. Elke rol hoort 100 meter stof te bevatten. Er worden 400 rollen precies nagemeten. Het resultaat is een gemiddelde per rol van 102,1 meter met een standaarddeviatie van 2,1 meter.
a Er worden 9000 rollen stof per dag afgeleverd.
Hoeveel meter verwacht je dat er per dag gemiddeld te veel wordt afgeleverd?
b Veronderstel dat de *lengte* van een rol normaal verdeeld is.
Maak een schets van de grafiek van deze normale verdeling.
c Hoeveel procent van de rollen bevat te weinig linnen?
d De directie vindt dat te veel rollen te weinig linnen bevatten. Zij wil het percentage terugbrengen tot 2,5%. Dat kun je doen door de gemiddelde lengte per rol te verhogen.
Op welke lengte moet het gemiddelde worden afgesteld zo, dat aan de wens van de directie wordt voldaan?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-4.



T-5 Priesters in de Rooms Katholieke Kerk mogen niet trouwen. Deze regel wordt het celibaat genoemd. Het NCRV-programma 'Altijd wat' stuurde ruim 700 maatschappelijk actieve priesters een enquêteformulier toe met vragen die onder meer over het celibaat gingen. Van hen zonden 135 priesters het formulier terug, al dan niet anoniem. Deze 135 personen vormen volgens de NCRV een steekproef uit de populatie priesters.

Is hier sprake van een aselechte steekproef en denk je dat de enquête een representatief beeld oplevert?

Licht je antwoord toe.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-5.



T-6 Deze opdracht gaat over de textielfabriek van opdracht T-4. De consumentenbond verlangt dat niet meer dan 5% van de rollen die de fabriek verlaten een lengte heeft van minder dan 100 meter.

- a** Zoek uit met de schuifparameter welke gemiddelde lengte een rol moet hebben. Houd de standaardafwijking op 2,1 meter.
- b** De directeur vindt dat hij nog steeds gemiddeld te veel linnen op een rol heeft. Door de standaardafwijking te verlagen, kan hij een nog lager gemiddelde kiezen om toch nog aan de wens van de consumentenbond te voldoen.

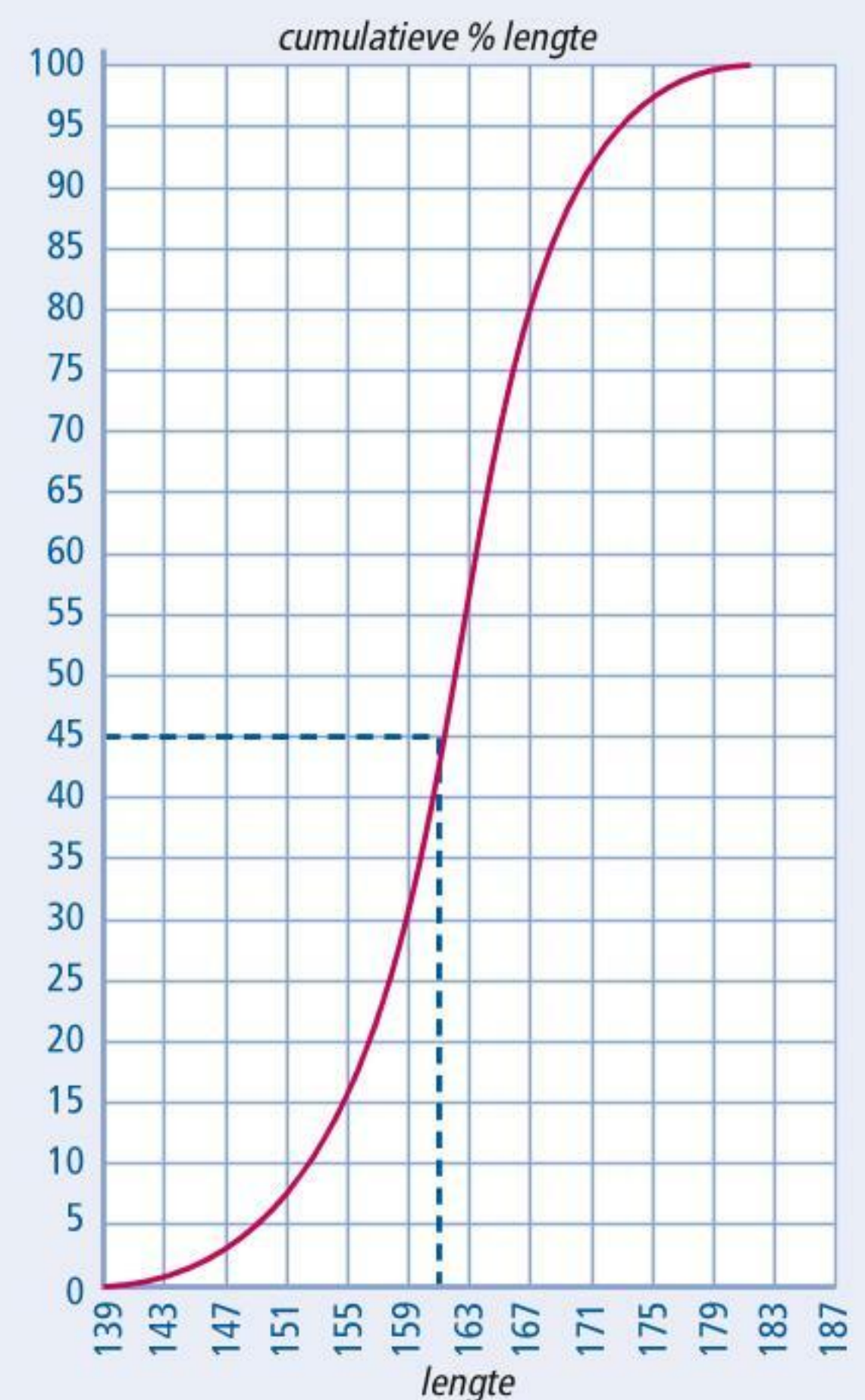
Onderzoek welke standaardafwijking nodig is bij een gemiddelde van 101 meter. Hoeveel meter wordt er dan per dag teveel afgeleverd?

T-7 De lengtes van de 5001 vrouwen uit het Bijenkorf-onderzoek zijn normaal verdeeld met een gemiddelde van $\bar{x} = 162,0$ cm en een standaardafwijking van $\sigma = 6,50$ cm.

- a** Geef een frequentietabel met de frequenties en de cumulatieve frequenties, zowel absoluut als relatief. Neem een klassenbreedte van 2 cm.
- b** Wat betekent het getal 4957 in de cumulatieve frequentietabel?

T-8 Hiernaast staat de grafiek van de relatieve cumulatieve frequenties van de data uit de vorige opdracht. Gebruik de grafiek voor de volgende vragen.

- a** Hoeveel % van de vrouwen heeft een lengte kleiner dan 155 cm?
- b** Hoeveel % van de vrouwen heeft een lengte groter dan 165 cm?
- c** Hoe lang zijn de 10% langste vrouwen minstens?



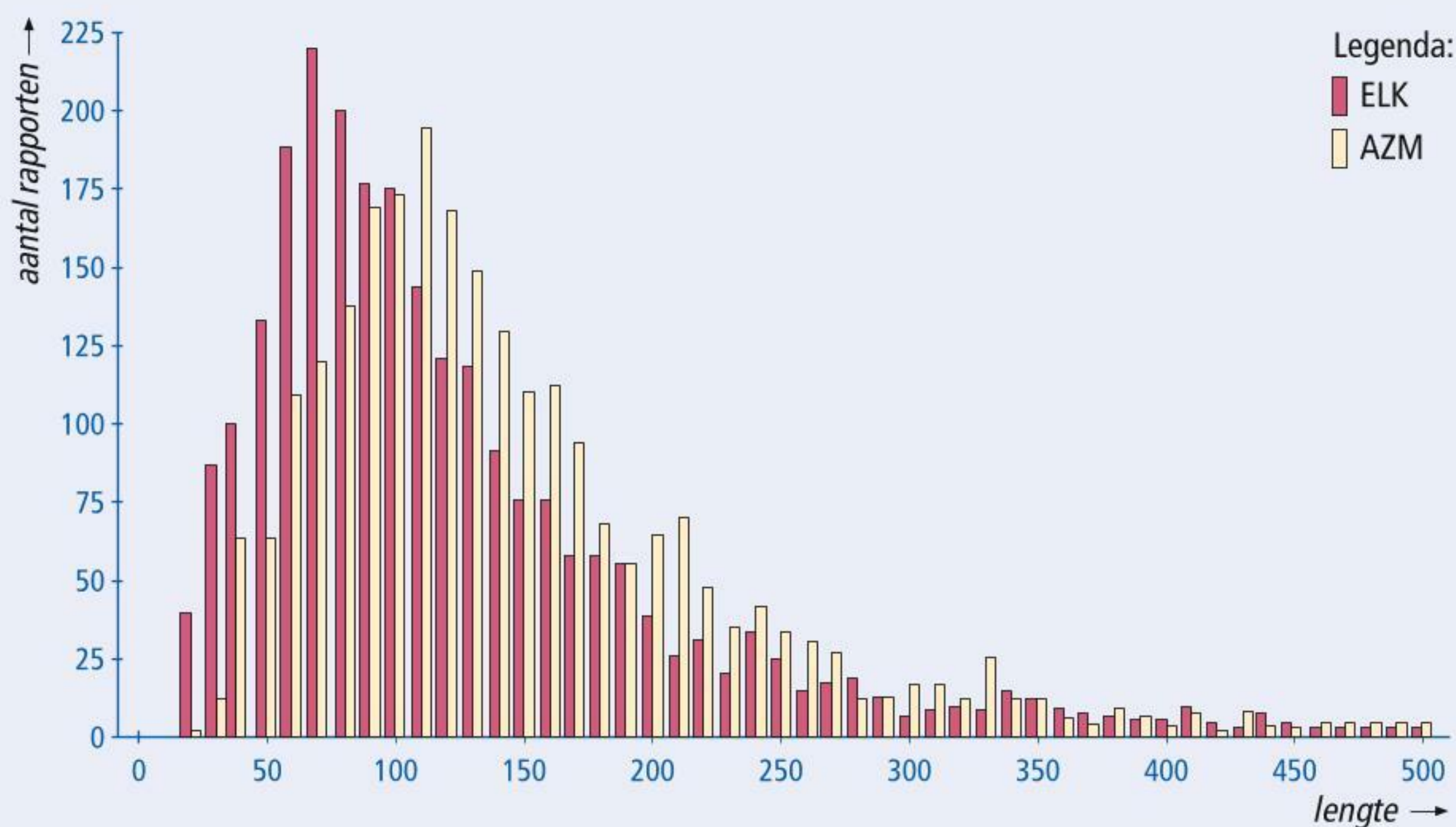
Extra oefening - Basis

Deze opdrachten maak je met behulp van de computer.

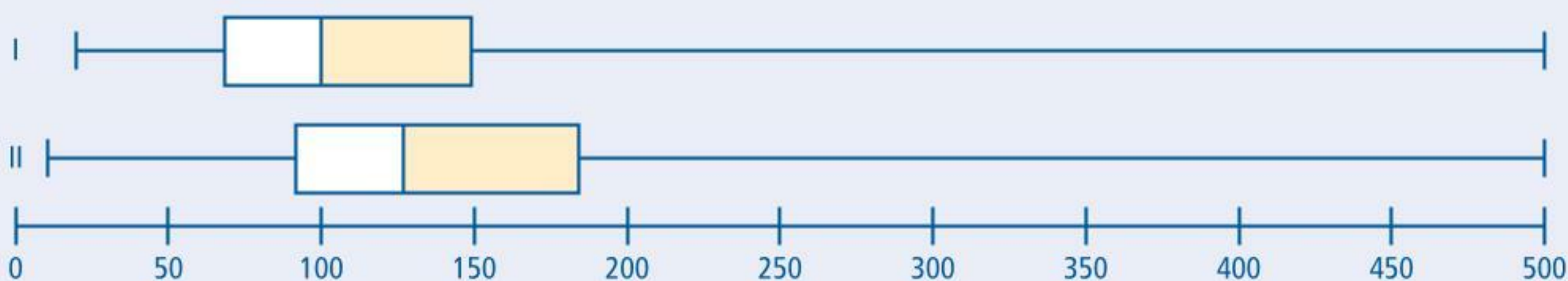
- B-1** Een volledige baan in het onderwijs wordt aangegeven als 1 fte. Het databestand is een frequentietabel waarin het aantal fte's per leeftijdsgroep wordt gegeven voor het Voortgezet Onderwijs (vo), het Primair Onderwijs (po) en het Beroepsonderwijs en de Volwasseneneducatie (bve) in de jaren 2002 en 2012. Je leest bijvoorbeeld af dat er 829 fte's door 24 jarige docenten worden gegeven in het voortgezet onderwijs in 2012 (vo 2012). Dat zijn dus 829 volledige banen, maar dat zouden ook 1658 halve banen kunnen zijn. In deze opdracht ga je ervan uit dat elke docent precies 1 fte heeft.
- a** Welke waarden neemt de variabele *leeftijd* aan?
 - b** Welke variabelen zijn continu en welke zijn discreet?
 - c** Hoeveel docenten waren er in totaal werkzaam in het po in 2002?
 - d** Bereken hoeveel procent van de docenten die in 2002 werkzaam waren in het po jonger waren dan 25 jaar.
 - e** Maak een staafdiagram van de leeftijdsverdeling van de docenten werkzaam in het po in 2002. Zet horizontaal de leeftijd en verticaal de aantallen fte's. Hoe karakteriseer je deze verdeling?
- Deze opdracht hoort bij de paragrafen 2-1 en 2-2.*
- B-2a** Geef de modus van de leeftijd van de docenten die in 2012 werkzaam waren in het Voortgezet Onderwijs.
- b** En hoe zat dat in 2002 in het vo?
 - c** Waaraan zie je dat de leeftijdsverdeling van docenten werkzaam in het vo in 2012 niet normaal verdeeld is?
 - d** Bereken hoeveel procent van de docenten werkzaam in het vo in 2012 ouder was dan 50 jaar.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-3 en 2-4.*
- B-3** Een omroepvereniging hield een enquête onder haar leden om de waardering voor haar programma's te onderzoeken. Aan 2000 leden werd een enquêteformulier toegestuurd met 25 vragen. Het formulier werd teruggestuurd door 1143 leden, waarvan er 973 tevreden waren.
- a** Uit welke populatie is deze steekproef getrokken?
 - b** Hoe groot is de steekproef?
 - c** Waarom is het niet zeker dat de meerderheid van de leden van de omroepvereniging tevreden is?
 - d** Zeggen de resultaten van de steekproef iets over de waardering van alle Nederlanders voor de programma's van die omroep?
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-5.*

Extra oefening - Gemengd

- G-1** In ziekenhuizen worden vaak medische rapporten geschreven. Bij een onderzoek naar de inhoud van dergelijke rapporten zijn 2500 rapporten van het Elkerliek Ziekenhuis (ELK) te Deurne vergeleken met 2500 rapporten van het Academisch Ziekenhuis Maastricht (AZM). Van elk rapport is de lengte bepaald; de lengte van een rapport is het aantal woorden dat het bevat. In de figuur zijn de gegevens weergegeven in een gecombineerd staafdiagram met klassenbreedte 10.



- a** Beschrijf de overeenkomst in de vorm van de twee verdelingen.
b Bij de gegevens over de lengtes van de rapporten zijn boxplots gemaakt. Zie de figuur hieronder.



Welke van deze boxplots, I of II, hoort bij de rapporten van het ELK?
Licht je antwoord toe.

- c** Kun je op grond van de twee boxplots concluderen dat er een verschil is tussen de lengtes van de rapporten in de twee ziekenhuizen? Beargumenteer je antwoord.
d Uit het onderzoek bleek dat de mediaan en het gemiddelde die horen bij de rapporten van het AZM niet even groot zijn. Geef met een redenering, dus zonder een berekening, aan of de mediaan groter of kleiner is dan het gemiddelde.

Steekproeven

Over het algemeen zal een grote steekproef een betrouwbaarder resultaat geven dan een kleine, dachten ze in 1936 bij het blad *The Literary Digest*.



In 1936, midden in een economische crisis met veel werklozen, stuurden ze 10 miljoen briefkaarten naar hun abonnees en naar personen uit telefoonboeken en uit registers van autokentekens. Op de briefkaart kon de keuze tussen Landon (republikein) en Roosevelt (democraat) vermeld worden. Het resulteerde in 2,4 miljoen reacties met 57% voor Landon en 43% voor Roosevelt. De verkiezingen werden echter door Roosevelt gewonnen met 61% tegen 37%. Het blad verloor aan geloofwaardigheid en aan aanzien en was twee jaar later verdwenen. Uiteraard volgde er een onderzoek naar oorzaken van dit falen.

Opdracht

Wat kunnen volgens jou de oorzaken zijn dat deze zeer grote steekproef faalde?

Veel mensen hadden in 1936 door de economische crisis geen werk en hadden onvoldoende geld voor een auto of telefoon. Ook gaven ze hun geld eerder uit aan noodzakelijke levensbehoeften dan aan een abonnement op *The Literary Digest*. De mensen uit de steekproef waren over het algemeen bemiddeld en niet representatief voor de Amerikaanse bevolking. Ze waren niet willekeurig gekozen en ze stemden meer republikeins.

Het gevolg was dat er gezocht werd naar methoden waarbij steekproeven gebaseerd zijn op kansrekening, waardoor personen aselekt werden gekozen. George Gallup, oprichter van het onderzoeksbureau Gallup, dat in meer dan 20 landen opinieonderzoek doet, gebruikte deze methode in 1948. Zijn bureau voorspeldde dat de democraat Truman het zou verliezen van zijn uitdager Dewey. Steekproeven wezen uit dat Dewey met 49,5% tegen 44,5% zou winnen. De *Chicago Daily Tribune* was hiervan zo overtuigd dat deze krant de uitslag vroegtijdig publiceerde.



Truman won echter de verkiezing met 49,1% tegen 45,1%. Met veel plezier toonde Truman dan ook de miskleun van de krant.

De belangrijkste oorzaken van het falen van de onderzoekers was het stoppen van de interviews tien dagen voor de verkiezing en de aanname dat mensen die nog geen keuze konden maken niet zouden stemmen.

In Nederland voelen veel mensen zich overvallen door telefonische enquêtes. Onderzoeksbureaus hanteren daarom ook wel bestanden waarin allerlei soorten mensen zijn opgenomen die bereid zijn om mee te werken aan onderzoeken. Je kunt, als je ouder bent dan 18 jaar, je aanmelden voor het *EenVandaag* Opiniepanel. Je moet wel allerlei gegevens, zoals leeftijd, opleiding, beroep, inkomen, afkomst en dergelijke invullen.

Opdracht

- a** Is dit panel representatief voor Nederland?
- b** Noem enkele vragen waarvoor je het panel kunt gebruiken.

Een andere situatie waarin het steekproefresultaat niet erg betrouwbaar was, deed zich enkele jaren geleden voor.

Op 21 maart 2013 maakte de Schotse regering de datum bekend waarop het referendum over onafhankelijkheid zou worden gehouden, namelijk op 18 september 2014. De vraag die gesteld werd was: 'Moet Schotland een onafhankelijk land zijn?' Er kon gekozen worden uit de antwoorden 'JA' of 'NEE'.

Vanaf het moment dat tot het referendum werd besloten, werden er vele opiniepeilingen gehouden. Deze leverden stevast een meerderheid op voor het NEE-kamp. Op 7 september gaf voor het eerst een van de peilingen een nipte meerderheid (51%) voor een JA te zien. Dit had onmiddellijk impact op de beurzen en de politiek in Londen. De pond sterling daalde in waarde, evenals de aandelenwaarde van Schotse bedrijven. De Britse regering beloofde meer autonomie voor de Schotten als ze binnen de Unie zouden blijven.

De dagen voor 18 september werd druk gespeculeerd over een nek-aan-nek-race tussen het JA- en het NEE-kamp.

Een steekproef door middel van een telefonische enquête van onderzoeksbureau ICM (Independant Communications and Marketing) onder 1000 stemmers leverde enkele dagen voor de stemming een respons op van 52% JA stemmers.

Opdracht

Welke conclusie werd er uit de steekproef getrokken?

Hoeveel procentpunten wijkt het resultaat van de steekproef af van een geheel andere conclusie?



Opdracht met de computer

Na de stemming bleek 48% van de Schotse kiezers die hadden gestemd, voorstander van onafhankelijkheid te zijn. De conclusie was: Schotland blijft in het Verenigd Koninkrijk.

In deze opdracht ga je na hoe groot de kans is dat onderzoeksbureau ICM een steekproefresultaat had, op grond waarvan de conclusie werd getrokken dat Schotland voor onafhankelijkheid zou stemmen.

Het nemen van een steekproef met grootte 1000 uit de verzameling Schotse stemmers kun je simuleren, door een vaas te vullen met net zoveel kaartjes als kiezers die gaan stemmen, waarvan 48% blauwe kaartjes zijn. Het trekken van een blauw kaartje betekent dan dat die stem er één voor onafhankelijkheid is. Het trekken van 1000 kaartjes komt dan overeen met het nemen van een steekproef ter grootte van 1000.

Je ziet een simulatie waarin het trekken van 1000 kaartjes 3000 keer is uitgevoerd.

Bereken de kans dat ICM een steekproefresultaat had, op grond waarvan de conclusie zou worden getrokken dat Schotland voor onafhankelijkheid zou stemmen (bekijk de uitslagen van 50,1% of hoger).

Vaardigheden 1

Machtsregels

- 1 Sommige van de volgende functies kun je schrijven als een machtsfunctie $N(t) = t^m$. Zoek uit welke dat zijn en geef in die gevallen de waarde van de exponent m .

a $N(t) = t^2 \cdot t^3$

b $N(t) = t^{1,3} \cdot t^{2,5} \cdot t$

c $N(t) = t^4 + t^6$

d $N(t) = (t^3)^{2,6}$

e $N(t) = \frac{t^{12}}{t^3}$

Theorie

Bij het rekenen met machten gelden de volgende **rekenregels**.

1 $g^0 = 1$

2 $g^1 = g$

3 $g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g}$

4 $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$

5 $g^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{g}$

6 $g^p \cdot g^q = g^{p+q}$

7 $\frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$

8 $(g^p)^q = g^{p \cdot q}$

Voorbeeld 1

Schrijf als een macht van x .

$$x^3 \cdot x^2 \cdot x^9 = x^{14}$$

$$x \cdot x^{3,2} \cdot x^{-2} = x^{2,2}$$

$$x^{6,4} \cdot \sqrt{x} = x^{6,9}$$

Voorbeeld 2

Schrijf als een macht van q .

$$\frac{q^4 \cdot q^5}{q^3} = \frac{q^9}{q^3} = q^6$$

$$q^{-0,2} \cdot (q^{4,2})^{0,5} = q^{-0,2} \cdot q^{2,1} = q^{1,9}$$

Voorbeeld 3

Schrijf als een som van machten van t .

$$\frac{2t^4 - 6t^{3,8} + 8t^{1,5}}{4t^2} =$$

$$\frac{2t^4}{4t^2} - \frac{6t^{3,8}}{4t^2} + \frac{8t^{1,5}}{4t^2} = \frac{1}{2}t^2 - 1\frac{1}{2}t^{1,8} + 2t^{-0,5}$$

- 2 Schrijf op de manier van de voorbeelden de volgende functies als som of verschil van machtsfuncties.

a $f(v) = v^3 \cdot v^{6,5} + 4v^{10} \cdot v^{-0,5}$

b $H(p) = 2p \cdot p^2 + 5p^{1,3} - 6p^3$

c $m(t) = 3t \cdot (t^{1,6})^2 - 7,8t^{3,1} \cdot t$

d $h(a) = \frac{a^2 \cdot 9a^3}{a^{6,4}}$

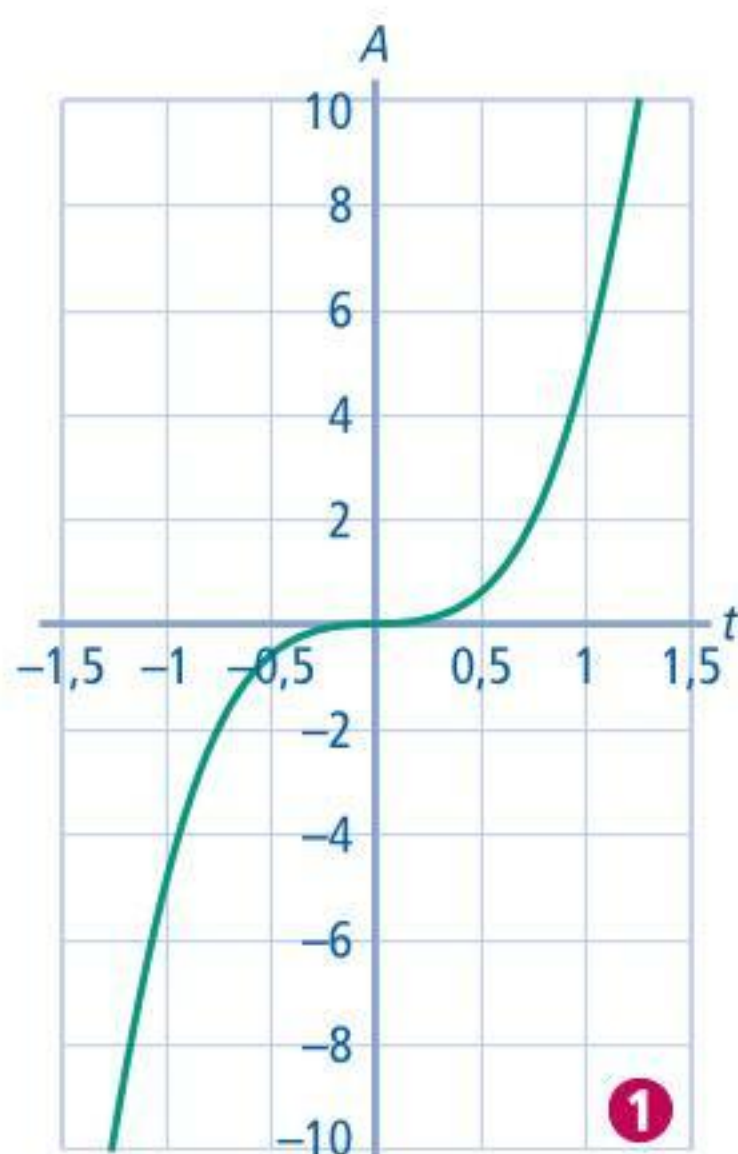
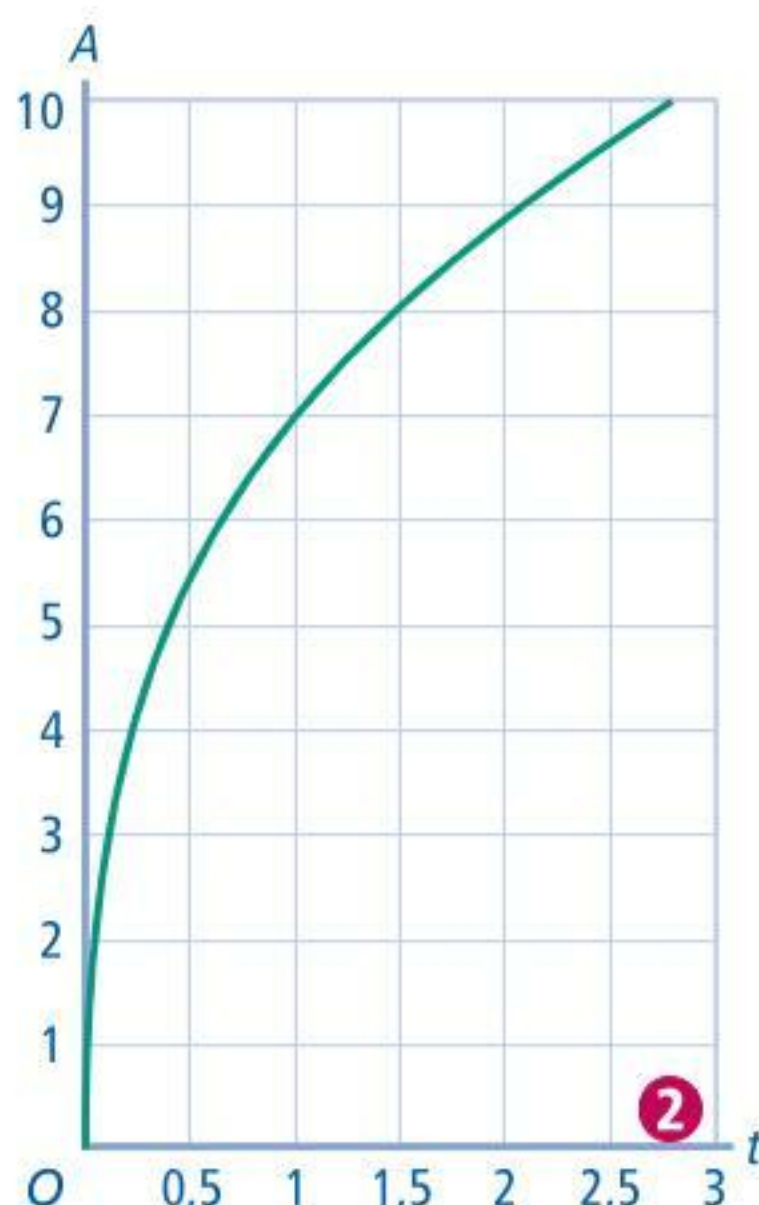
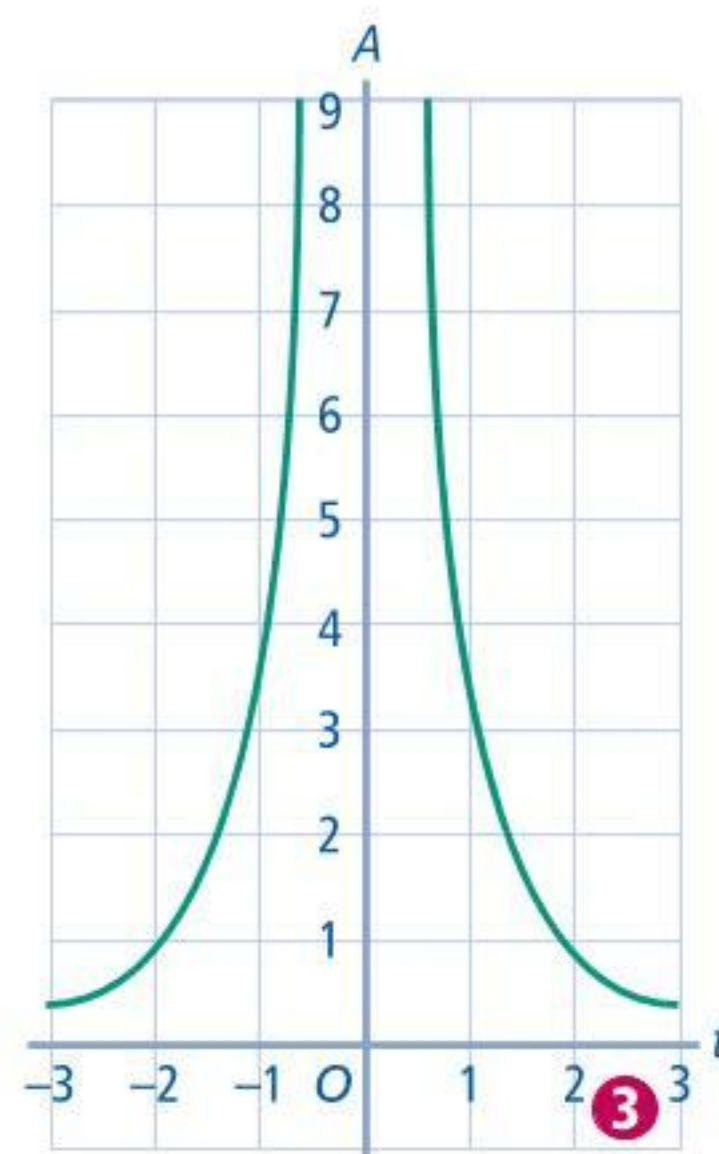
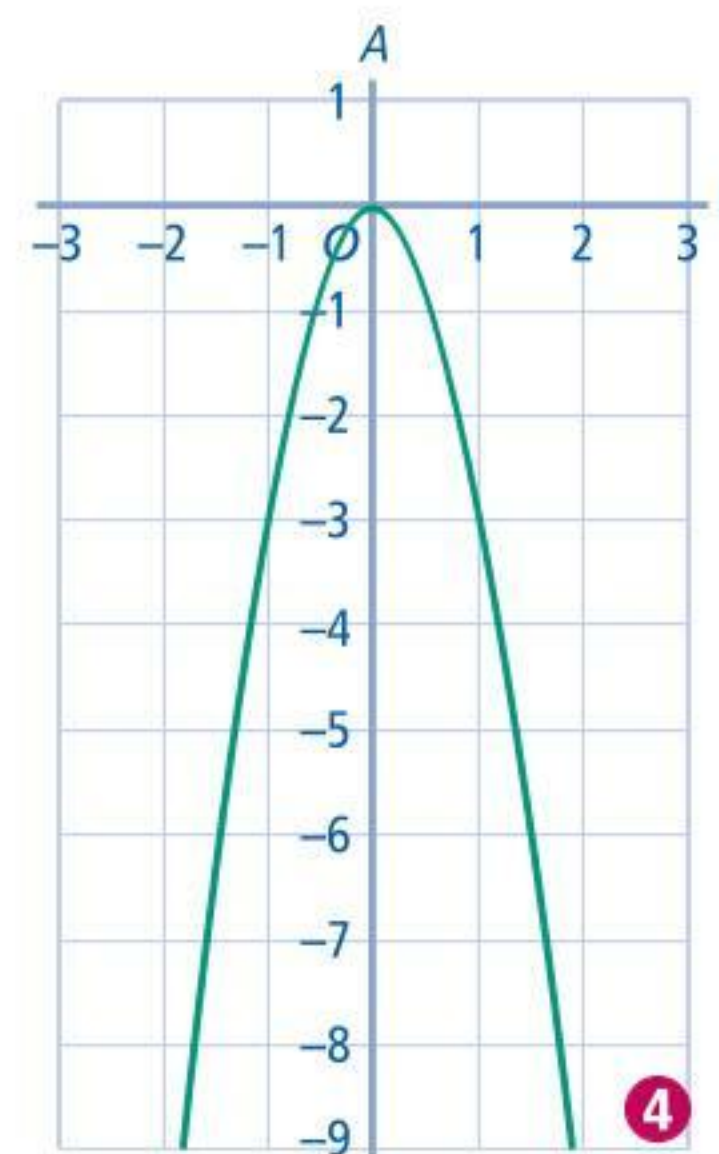
e $N(d) = 15d^3 \cdot 2d^{1,5} \cdot 4\sqrt{d}$

f $K(q) = \frac{18q^{3,2} + 7q^{4,9} - 6,4q + 78}{q}$

g $g(u) = \frac{u^3 \cdot (2u^{1,5})^4}{8u^2} + u^4 \cdot u^3$

h $W(p) = \frac{-6p^{3,8} + 9p^{2,3} - 2p + 7,3}{10p}$

Machtsfuncties



- 3** Hierboven zie je vier grafieken van machtsfuncties. De bijbehorende functievoorschriften zijn $A(t) = 3,5t^{-2}$, $A(t) = 5t^3$, $A(t) = 7t^{0,35}$ en $A(t) = -3t^2$. Beredeneer welke grafiek bij welk functievoorschrift hoort.

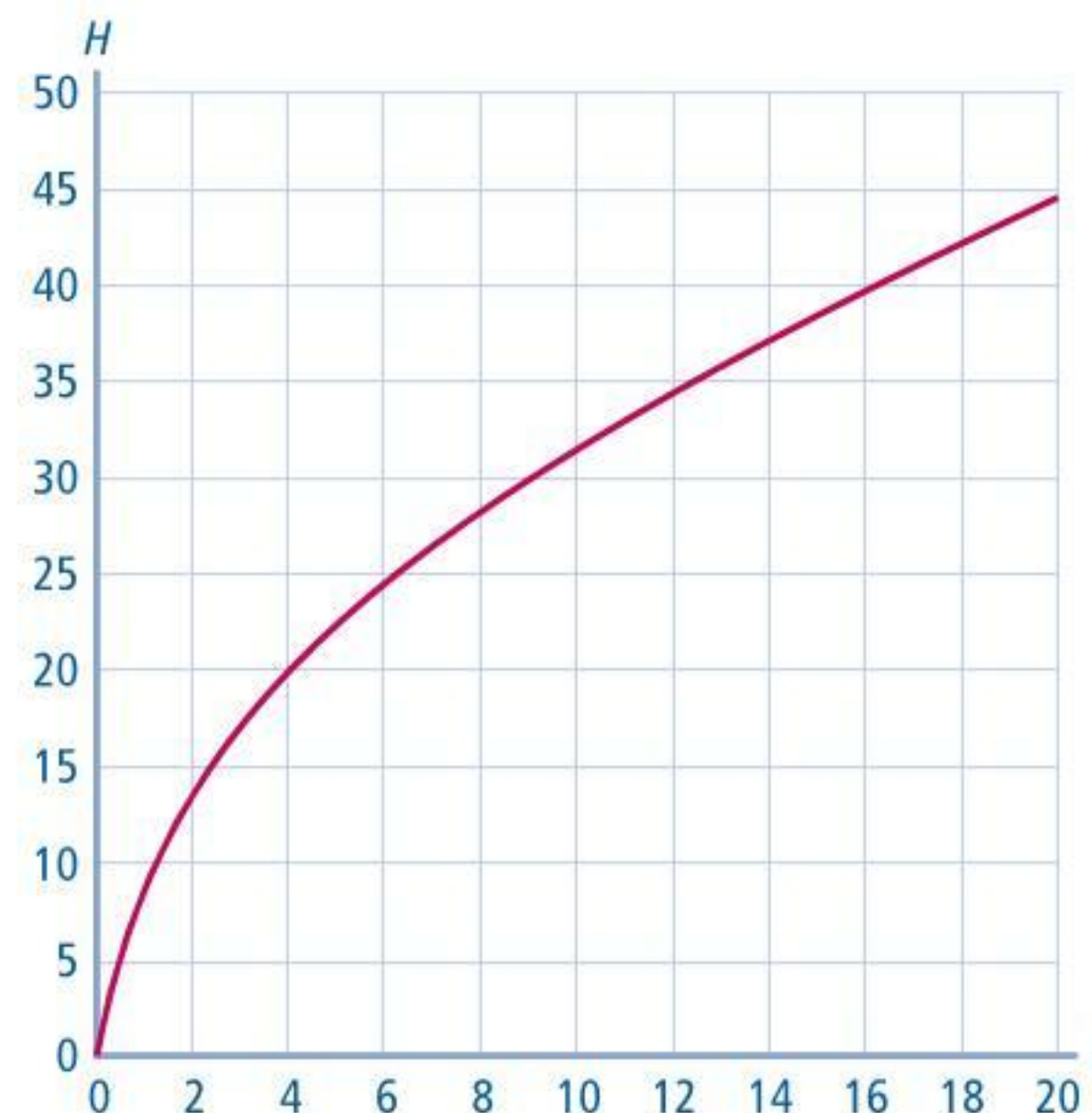
- 4** Hiernaast staat de grafiek bij de formule $H = 10 \cdot P^{\frac{1}{2}}$

a Bereken H voor $P = 12$.

b Vul de onderstaande tabel in.

P	1	2	4	8	16	18
H	...	...	...	...	...	...

- c** In de tabel zie je dat verdubbeling van P niet leidt tot verdubbeling van H . Datzelfde is ook uit de grafiek af te leiden. Hoe zou de grafiek eruit hebben gezien als elke verdubbeling van P wel leidt tot een verdubbeling van H ?
- d** Als de waarde van P vier keer zo groot wordt, hoeveel keer zo groot wordt dan de bijbehorende waarde van H ?
- e** Wat gebeurt er met de waarde van H als je de waarde van P een factor 16 keer zo groot maakt?
- f** Verklaar je antwoorden van d en e met behulp van de formule.



De macht van een product is gelijk aan het product van de machten. In formule: $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$.

Ook geldt de rekenregel $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

Je kunt van deze rekenregels gebruik maken om sommige eigenschappen van formules te verklaren of om formules te vereenvoudigen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $w = 50 \cdot d^{0,75}$.
Wat gebeurt er met w als d tien keer zo groot wordt?

Oplossing

Substitueer voor d een 10 keer zo grote waarde, dat is $10d$, in de formule $w = 50 \cdot d^{0,75}$

De nieuwe formule wordt dan $w = 50 \cdot (10d)^{0,75}$

Werk de haakjes weg: $w = 50 \cdot 10^{0,75} \cdot d^{0,75}$

Dit kun je ook schrijven als $w = 10^{0,75} \cdot 50 \cdot d^{0,75}$

De waarde van w die je hiermee berekent, is $10^{0,75} \approx 5,62$ keer zo groot als de oorspronkelijke waarde van w .

Dus w wordt dan $10^{0,75} \approx 5,62$ keer zo groot.

Voorbeeld 2

Schrijf de formule $K = 48q^2 \cdot \left(\frac{3}{2q}\right)^4$ in de vorm $K = a \cdot q^b$.

Oplossing

$$K = 48q^2 \cdot \frac{3^4}{(2q)^4} \text{ geeft } K = 48q^2 \cdot \frac{81}{16q^4}$$

$$K = \frac{48 \cdot 81 \cdot q^2}{16q^4} \text{ ofwel } K = 243q^{-2}$$

- 5** Bereken bij de volgende formules hoeveel keer zo groot B wordt in het geval A tien keer zo groot wordt.

a $B = 12,5 \cdot A^{3,4}$

b $B = \frac{0,35}{A^{1,34}}$

c $B = 1,9876A$

- 6** Schrijf de volgende formules in de vorm $K = a \cdot q^b$.

a $K = 0,32 \cdot \left(\frac{2}{q}\right)^{1,5}$

b $K = \frac{16}{q} \cdot \left(\frac{1}{2}q\right)^4$

c $K = -3q^4 \cdot \left(\frac{-2}{q}\right)^3$

- 7** Het verband tussen lichaamsgewicht en skeletgewicht van landzoogdieren is te benaderen met de formule $S = 0,0343 \cdot M^{1,083}$. Hierin is S het skeletgewicht in grammen en M het lichaamsgewicht in grammen.

- a** Het lichaamsgewicht van een olifant is 200 000 keer zo groot als dat van een muis. Iemand beweert dat het skeletgewicht van de olifant ook 200 000 keer zo groot is als dat van de muis.

Toon aan dat dat niet waar is.

- b** Hoeveel keer zo groot is het skeletgewicht van de olifant?

- c** Het lichaamsgewicht van zoogdier A is 60 keer zo groot als dat van zoogdier B.

Welke verhouding hebben hun skeletgewichten?

Als voor een verband tussen twee variabelen P en Q de formule $P = Q^m$ geldt, dan volgt daaruit dat $Q = P^{\frac{1}{m}}$.

In de eerste formule is P een functie van Q , in de tweede formule is Q een functie van P .

Hiermee kun je formules voor machtsverbanden herschrijven.

- 8** Schrijf bij de volgende verbanden Q als functie van P .

a $P = 10 \cdot Q^{0,5}$

d $P = 16 - Q^{0,01}$

b $P = 0,04 \cdot Q^{1,25}$

e $P = 18 + 2 \cdot Q^{0,1}$

c $P = 12 + Q^4$

f $P = 0,25Q^{25} - 18$

Voorbeeld

$$P = 40 \cdot Q^{2,1}$$

Schrijf Q als functie van P .

Oplossing

$$40 \cdot Q^{2,1} = P$$

$$Q^{2,1} = \frac{P}{40} = 0,025P$$

$$Q = (0,025P)^{\frac{1}{2,1}} = 0,025^{\frac{1}{2,1}} \cdot P^{\frac{1}{2,1}}$$

$$Q \approx 0,173 \cdot P^{0,476}$$

Vergelijkingen en ongelijkheden

9 Los de volgende vergelijkingen op.

a $3x + 1 = -3x + 6$

c $3(2r - 7) = 33$

e $13 + 8g = 15 - 2g$

b $7 - 3k = 2(k + 5)$

d $4(b - 10) = 8(b + 4)$

f $45 + h = 3(h + 1)$

10 Los de volgende vergelijkingen op.

a $(x + 5)(x - 3) = 0$

d $\frac{1}{4}(4x - 1)^2 = 1$

g $(x - 4)(x + 4) = 9$

b $(x + 5)(2x - 5) = 0$

e $\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^2 - 16 = 0$

h $\frac{1}{2}x^2 + x - 1\frac{1}{2} = 0$

c $(x + 3)^2 = 81$

f $x^2 + 11x + 10 = 0$

i $3x^2 - 5x - 2 = 0$

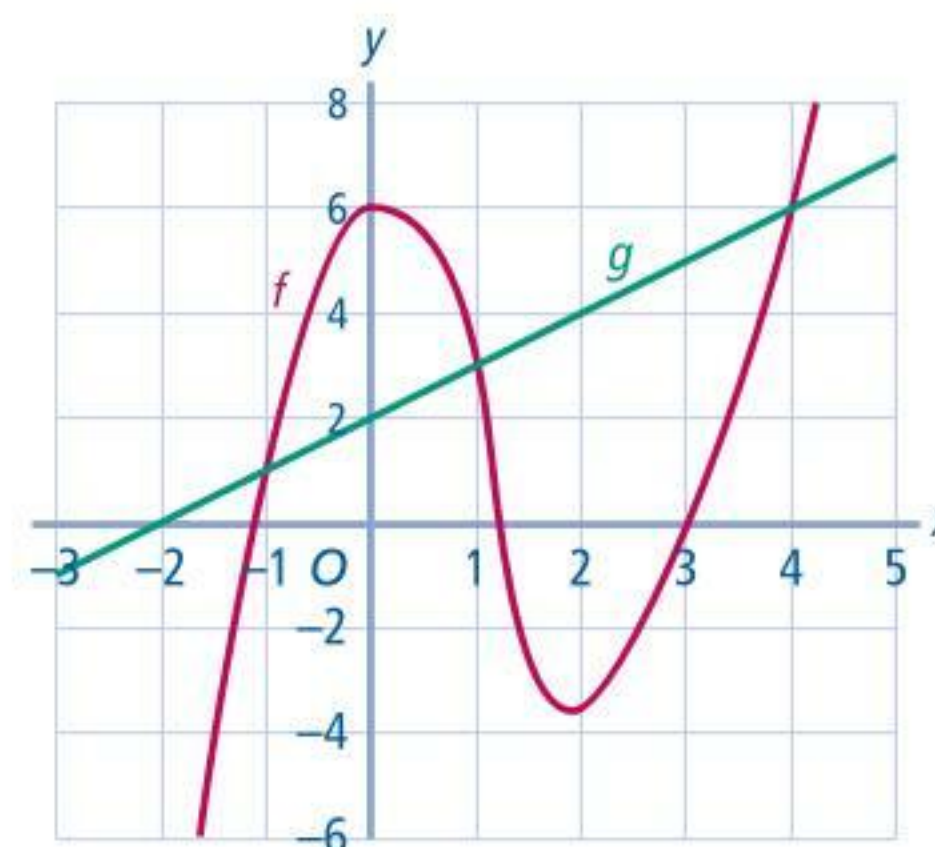
11a Lees uit de grafieken hiernaast af welke van de volgende beweringen waar is: $f(2) > g(2)$ of $f(2) < g(2)$

b Is $f(0) > g(0)$ of is $f(0) < g(0)$?

c Lees uit de grafieken de oplossing af van de ongelijkheden $f(x) > g(x)$ en $f(x) \leq g(x)$.

De oplossing van een ongelijkheid is meestal één of meer intervallen. Als de oplossing tussen 1 en 4 ligt kun je dat noteren als $1 < x < 4$ of in de intervalnotatie $\langle 1, 4 \rangle$.

Voor alle waarden x groter of gelijk aan 4 noteer je $x \geq 4$ of in de intervalnotatie $[4, \rightarrow)$.



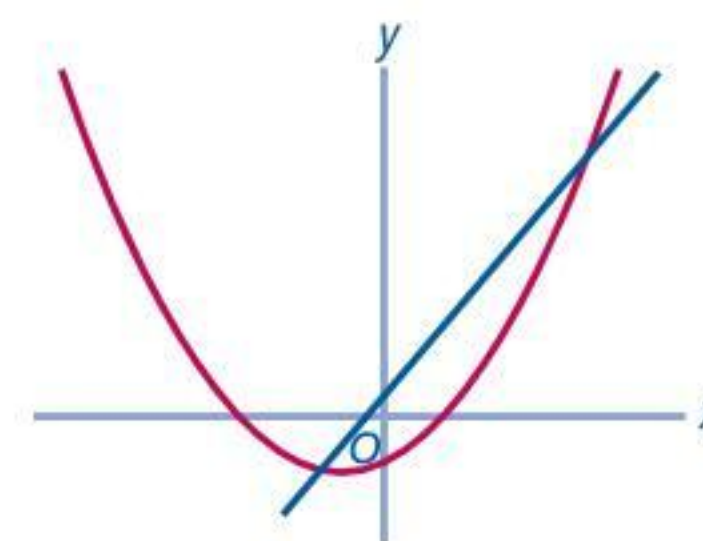
12 Hiernaast staan de grafieken van de functies $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ en $g(x) = 7x + 1$.

a Bereken de x -coördinaten van de snijpunten.

b Voor welke waarden van x ligt de grafiek van f boven de grafiek van g ?

c Welke ongelijkheid hoort bij opdracht b?

$2x^2 + 3x - 5 < 7x + 1$ of $2x^2 + 3x - 5 > 7x + 1$



Aanpak

Hoe los je een ongelijkheid op?

- 1 Stel vast om welke functies of formules het gaat.
- 2 Plot of schets de bijbehorende grafieken.
- 3 Bereken de oplossing(en) van de bijbehorende vergelijking.
- 4 Geef met behulp van de grafieken de oplossing van de ongelijkheid.

Voorbeeld

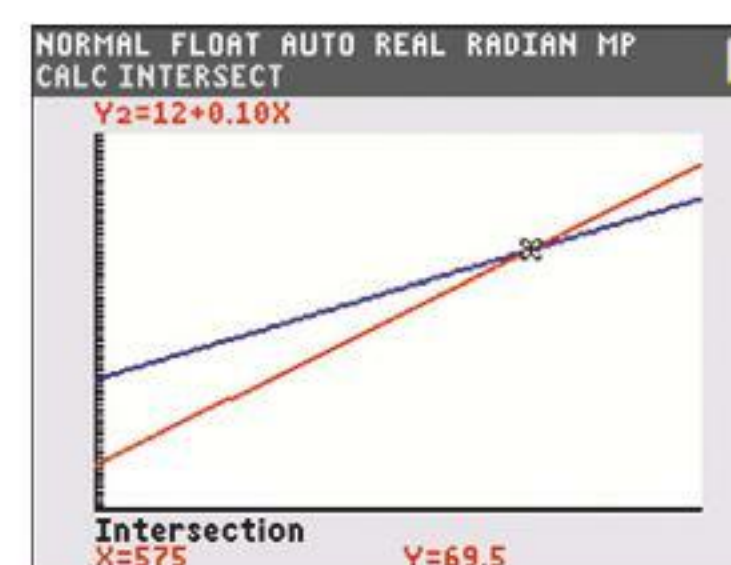
Gegeven zijn de functies

$H(t) = 35 + 0,06t$ en $M(t) = 12 + 0,10t$.

Voor welke waarden van t geldt $H(t) < M(t)$?

Oplossing

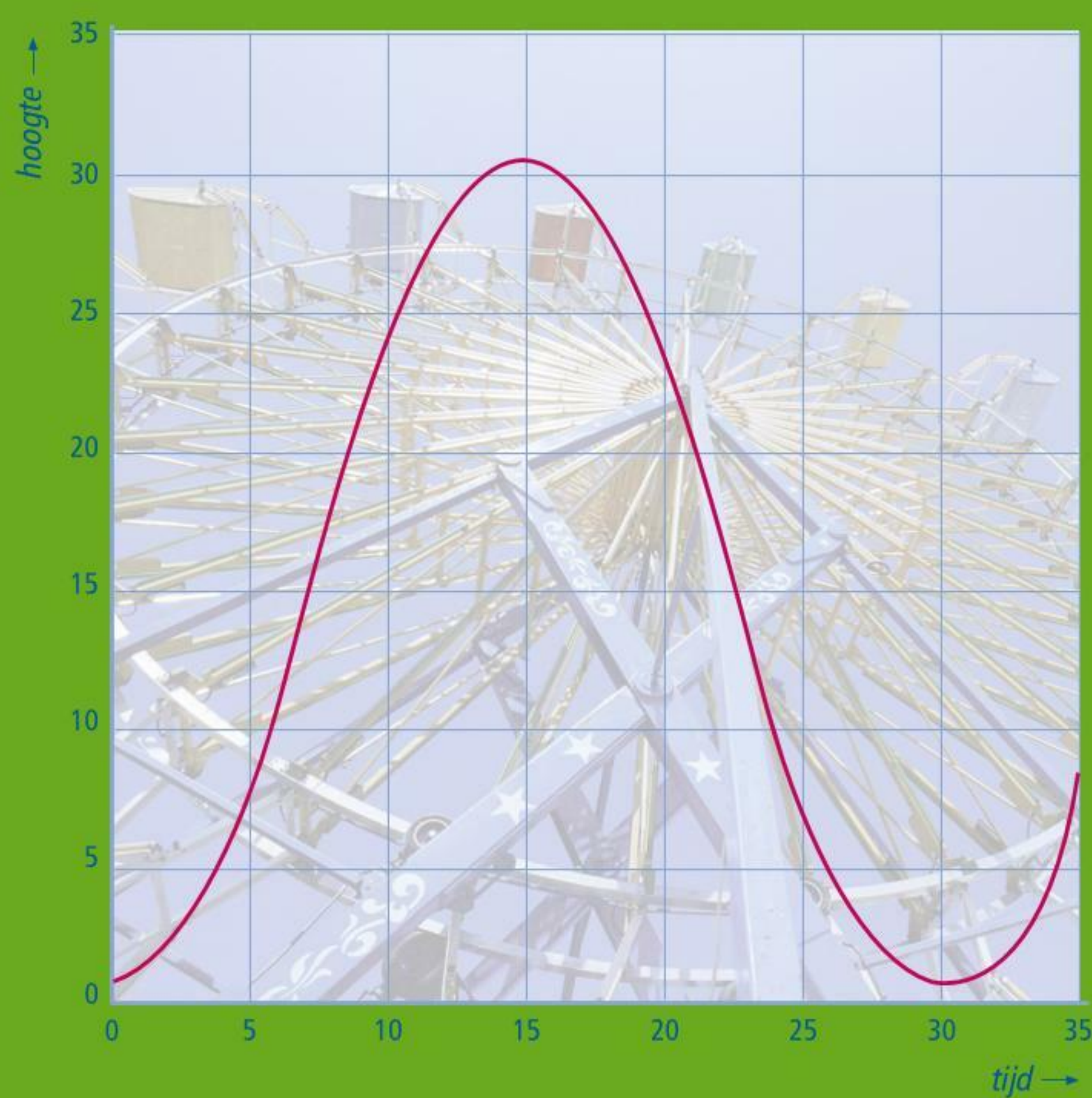
1,2



3 $35 + 0,06t = 12 + 0,10t$

$-0,04t = -23$ dus $t = 575$

4 $t > 575$



Het reuzenrad

Dit is de tijd-hoogte grafiek van een stoeltje in een reuzenrad. De tijd is in seconden en de hoogte is in meters.

Wat kun je met behulp van de grafiek over het reuzenrad te weten komen?

Hoofdstuk 3

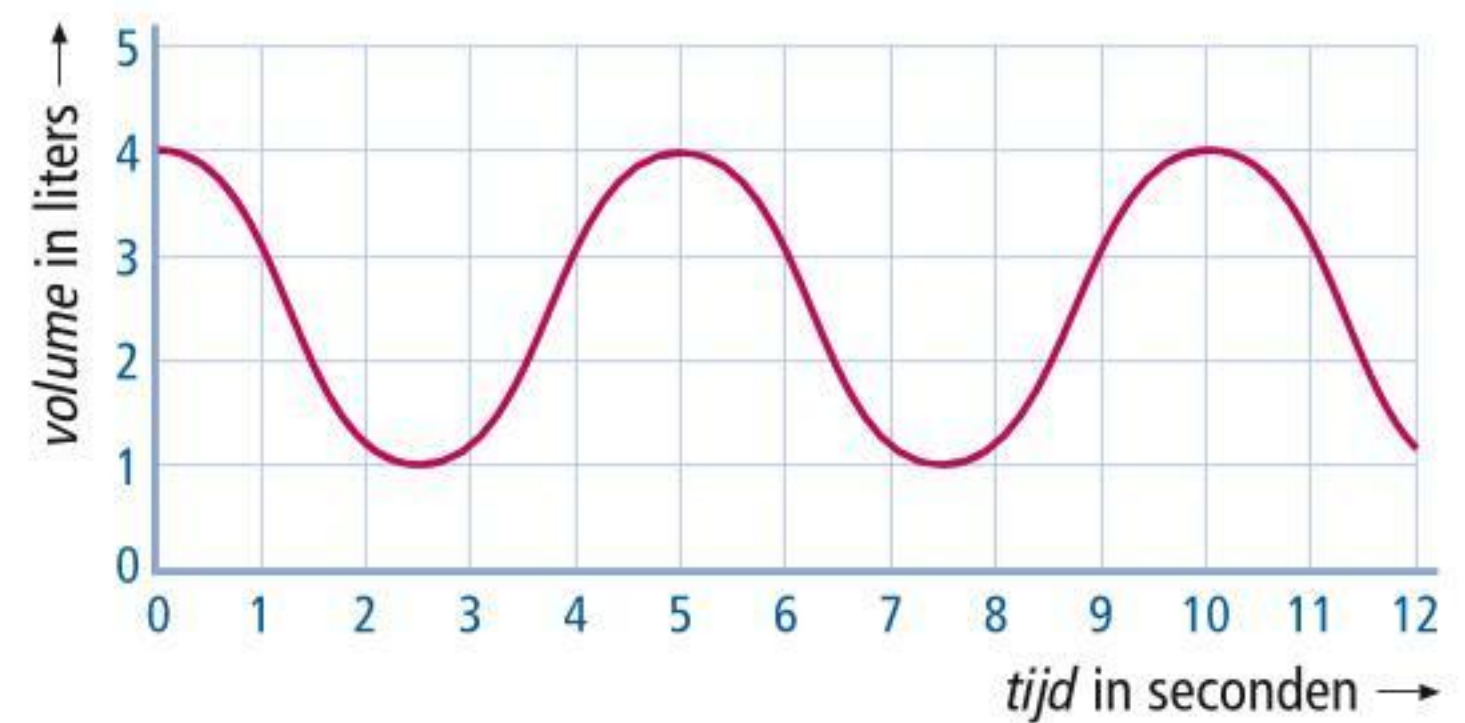
Periodieke functies

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	62
3-1	Sinusfunctie	64
3-2	Uitrekken en inkrimpen	66
3-3	Verschuiven	68
3-4	Sinusoïden	70
3-5	Formules opstellen bij sinusoïden	72
3-6	Gemengde opdrachten	74
	Samenvatting	76
	Test jezelf	78
	Extra oefening - Basis	80
	Extra oefening - Gemengd	81
	Uitdagende opdrachten	82
	Tocht naar Chatham	83

Voorkennis

- V-1** Een persoon ligt in bed en heeft een rustige en regelmatige ademhaling. Bij het inademen neemt de hoeveelheid lucht in de longen toe, terwijl bij het uitademen deze hoeveelheid weer afneemt. In de grafiek hiernaast zie je hoe de hoeveelheid lucht in de longen in de loop van de tijd varieert.
- Hoeveel seconden duurt één ademhaling?
 - Hoeveel lucht zit er minimaal en maximaal in de longen?
 - Schat hoeveel lucht er gemiddeld in de longen zit en hoe groot de maximale afwijking is van dit gemiddelde.



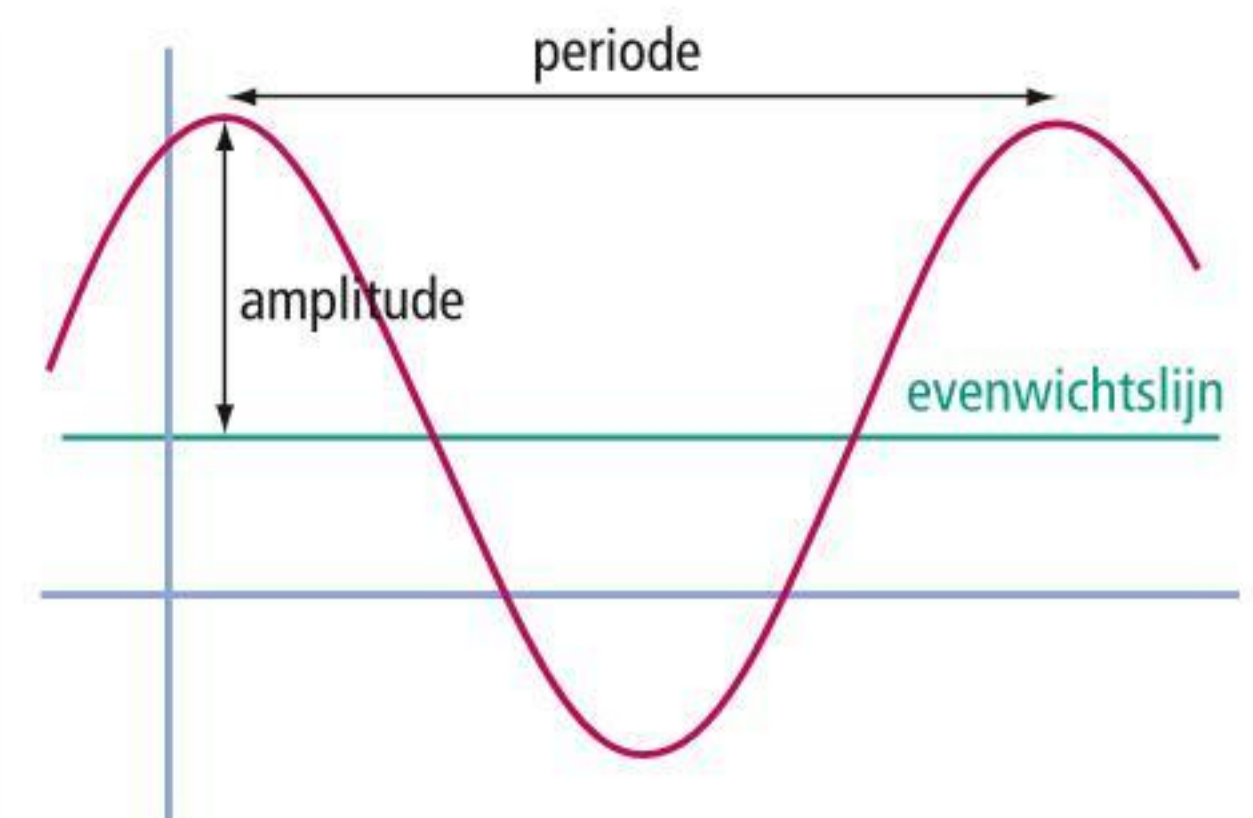
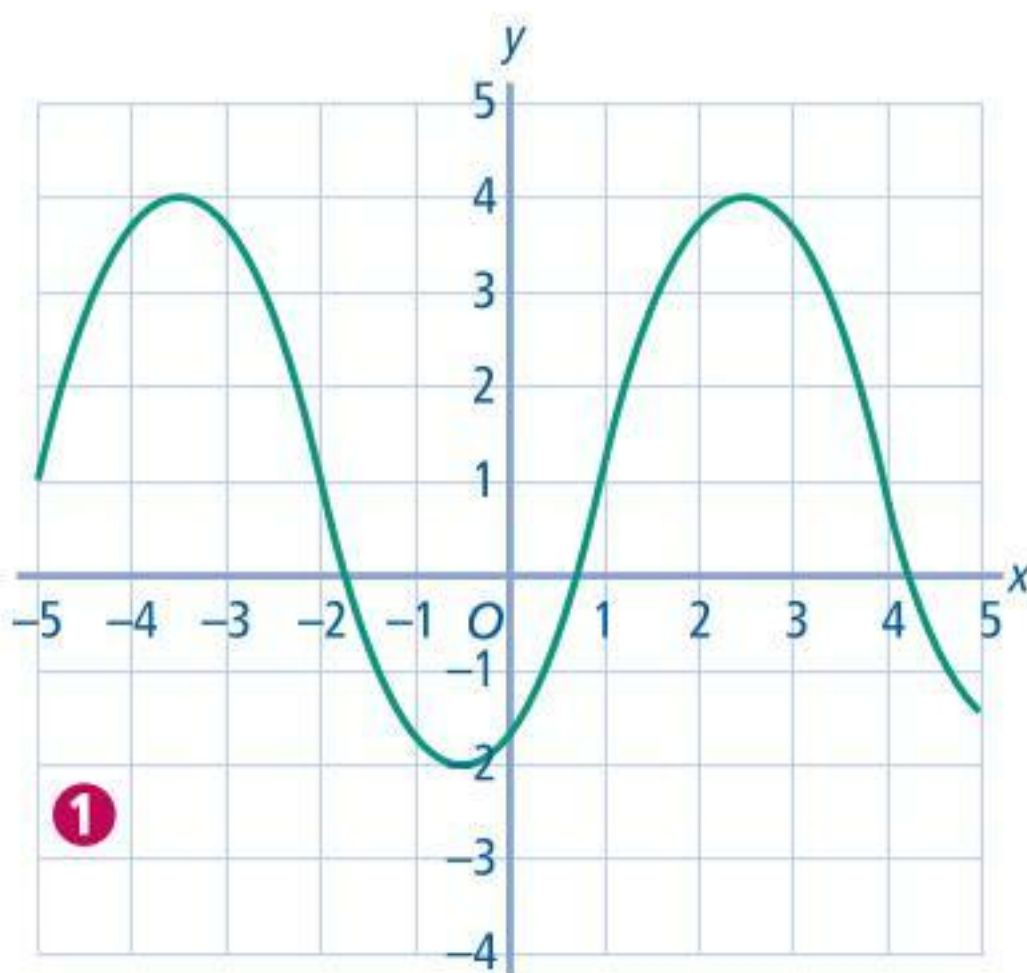
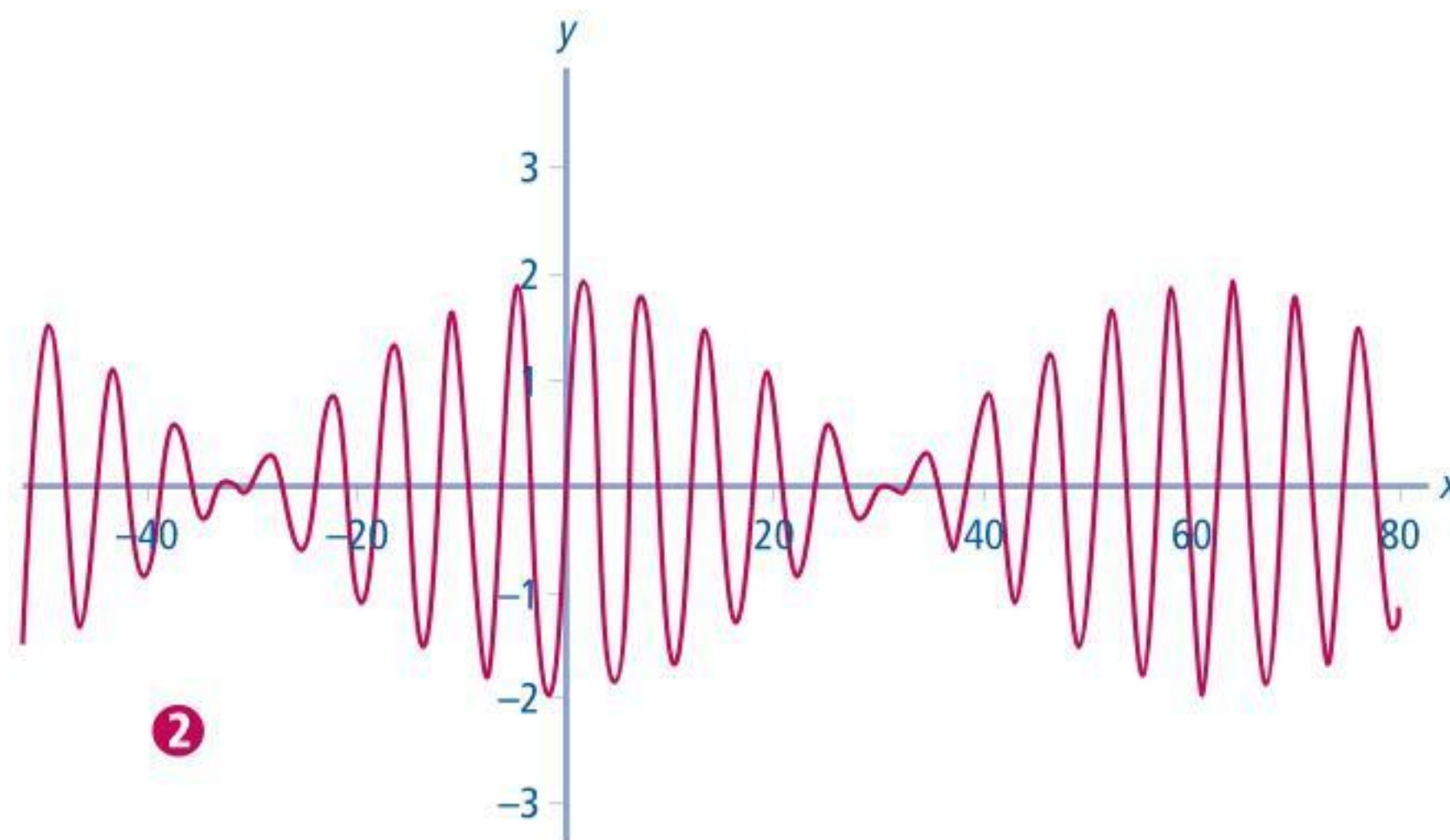
Theorie

Versijnselen die zichzelf steeds herhalen heten **periodieke versijnselen**. De bijbehorende grafieken heten **periodieke grafieken**.

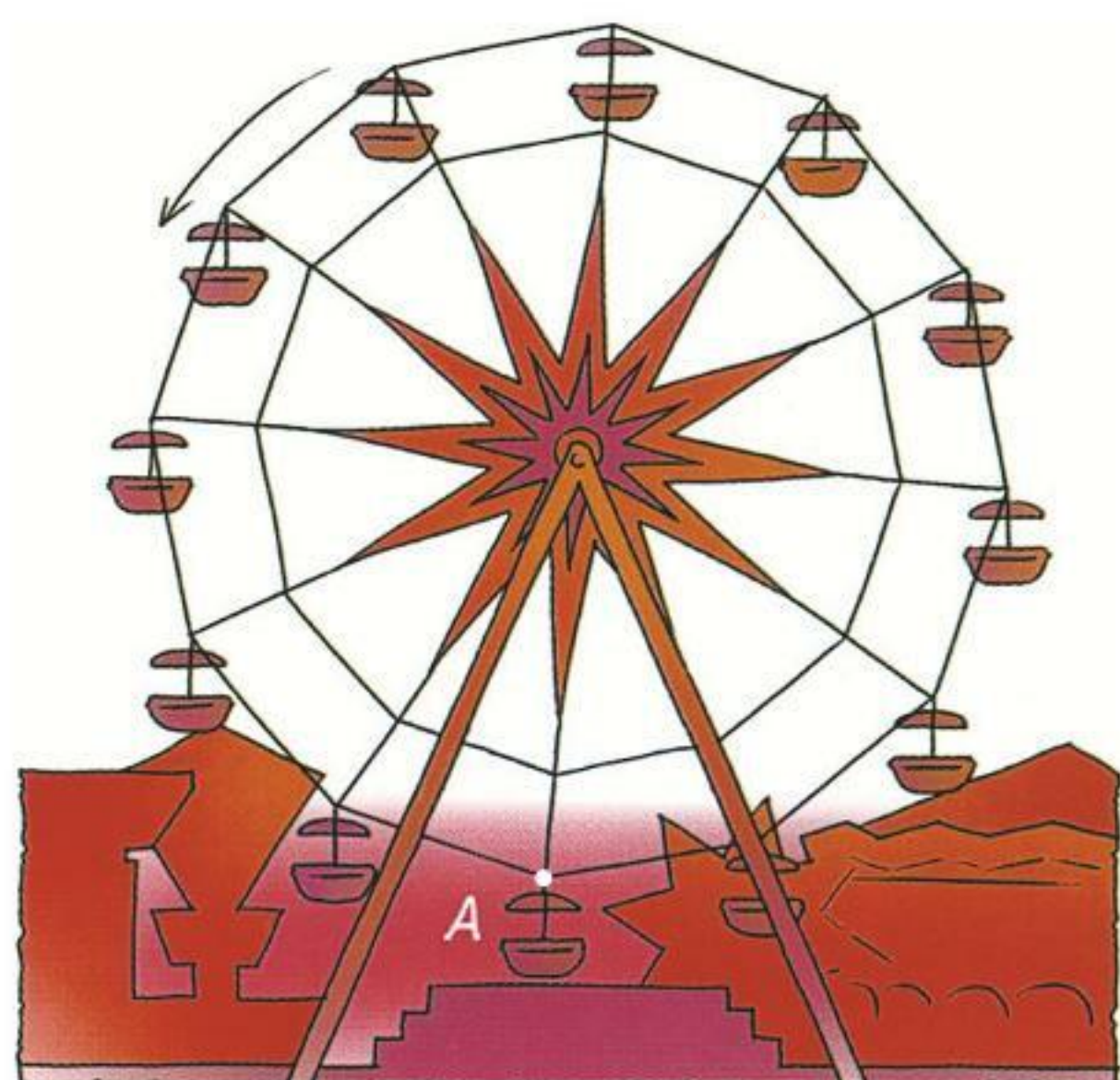
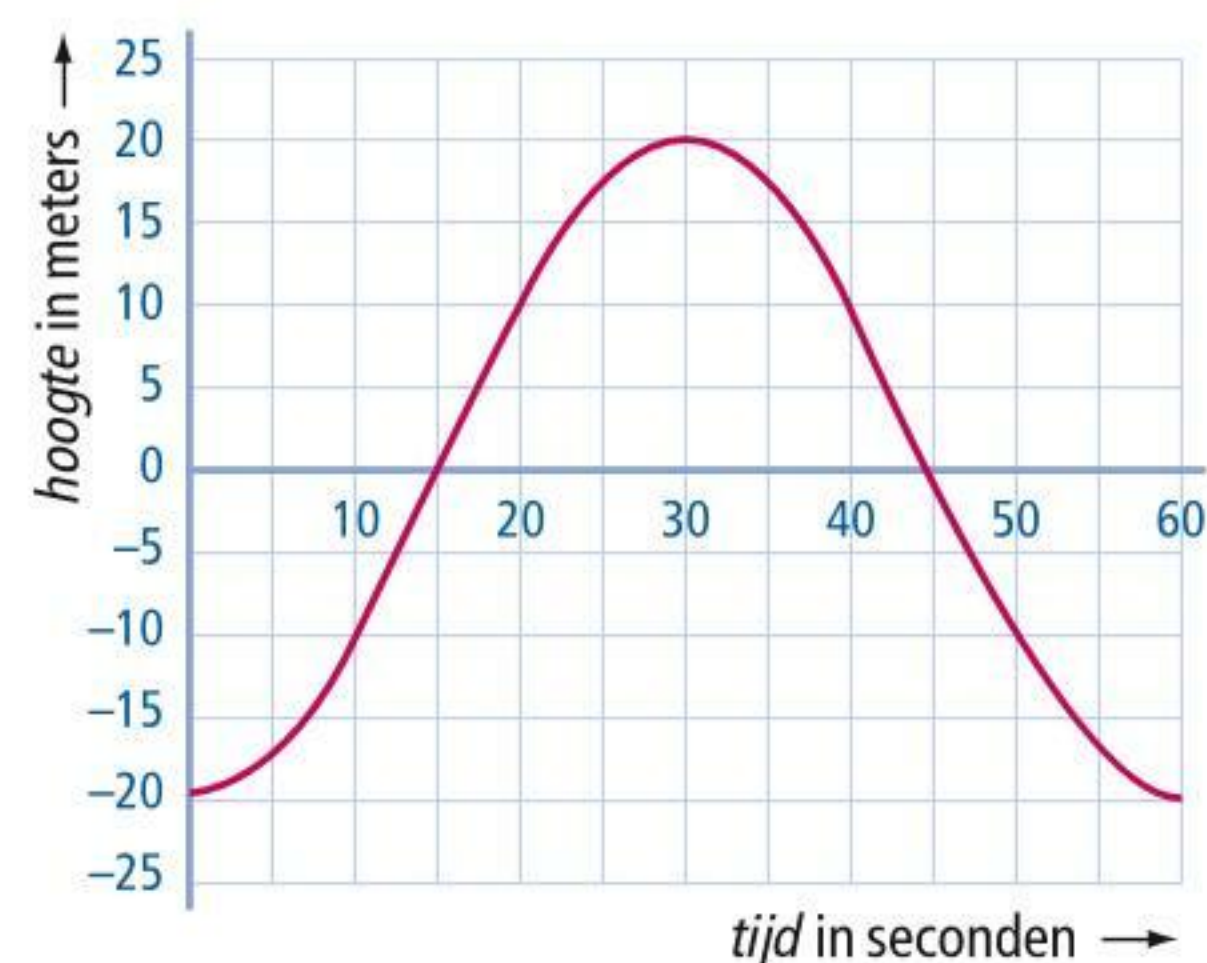
De **periode** is de kleinste positieve afstand waarover je een periodieke grafiek horizontaal kunt verschuiven zodat hij weer samenvalt met zichzelf.

De **evenwichtsstand** of **evenwichtslijn** is de horizontale lijn die de gemiddelde hoogte van de grafiek aangeeft.

De **amplitude** is grootste afwijking van de grafiek ten opzichte van de evenwichtslijn.



- V-2** De grafieken 1 en 2 hierboven zijn deel van een periodieke grafiek. Geef van beide grafieken de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.
- V-3** Schets één periode van een periodieke grafiek met periode 10, evenwichtsstand 7 en amplitude 5.



- V-4** Op volle snelheid draait dit reuzenrad hierboven in één minuut steeds precies één keer rond.
In het plaatje is punt A het ophangpunt van de onderste cabine.
- Na hoeveel seconden is punt A voor het eerst op de hoogte van de as?
En hoeveel seconden later weer?
 - Ook zie je hierboven één periode van de grafiek die hoort bij de hoogte van punt A ten opzichte van de as van het rad.
Hoe groot is de straal van het rad?
 - Hoe hoog is punt A na 80 seconden?
 - Noem vijf tijdstippen waarop punt A zich 15 meter onder de as bevindt.
 - Bereken welke afstand punt A in één minuut aflegt.

Sommige grafieken hebben symmetrie. Hiernaast zie je de grafieken van $f(x) = x^4 - 2x^2$ en $g(x) = \frac{2x}{x-3}$.

De grafiek van f is lijnsymmetrisch in de y -as en de grafiek van g is puntsymmetrisch in het punt $(3, 2)$.

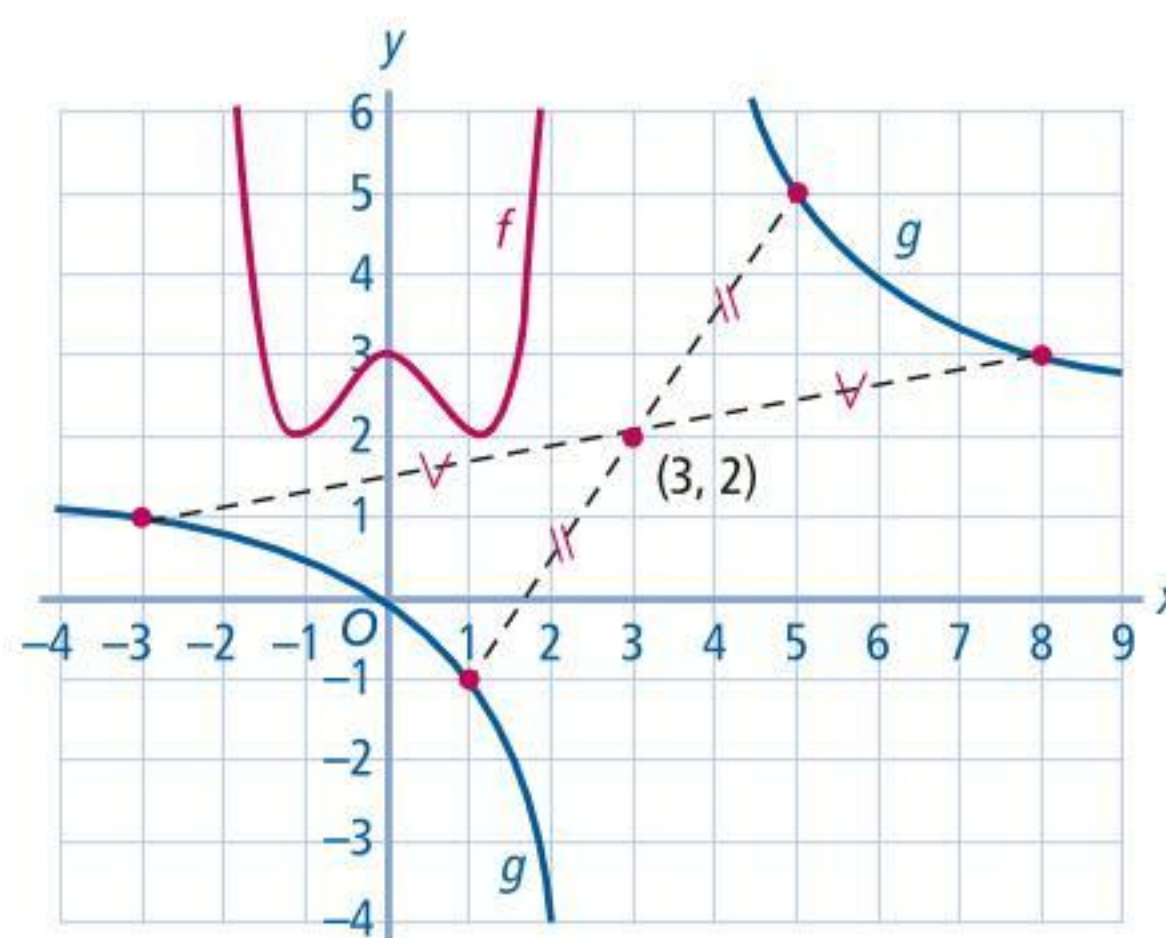
- V-5a** Is de grafiek bij opdracht V-4 lijnsymmetrisch? Zo ja, ten opzichte van welke lijn?
- De grafiek van opdracht V-4 is één periode van een periodieke grafiek. Deze grafiek is puntsymmetrisch in het punt $(15, 0)$. Geef nog een punt van symmetrie.

- Schets de grafiek van de functie $h(x) = \frac{1}{x-2}$

Is de grafiek van h lijnsymmetrisch? Zo ja, geef de vergelijking van deze lijn.

- Is de grafiek van h puntsymmetrisch? Zo ja, geef de coördinaten van het punt van symmetrie.

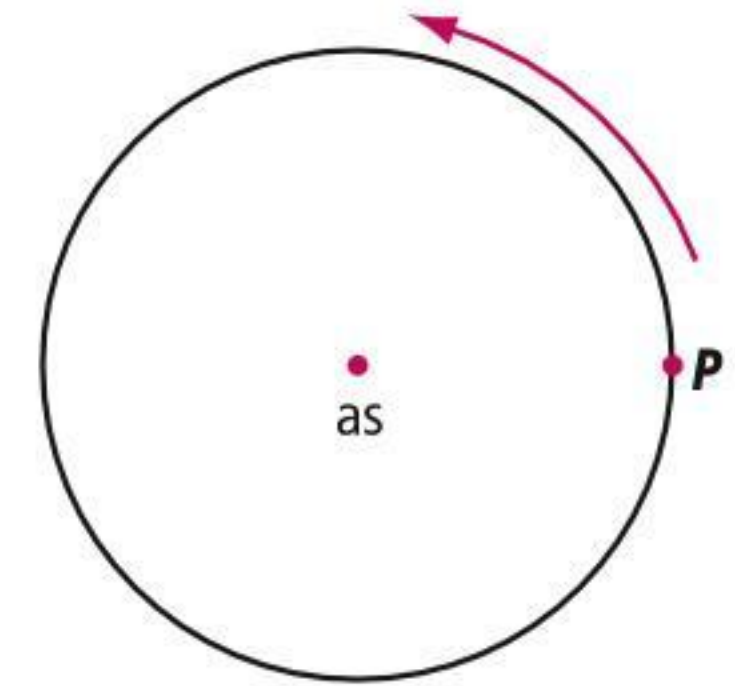
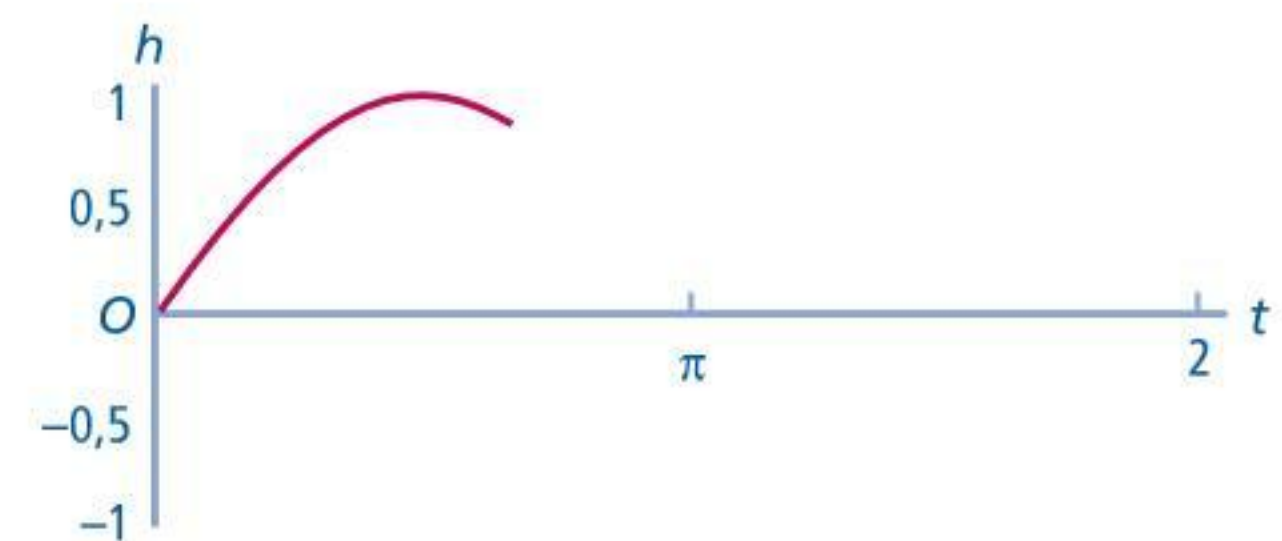
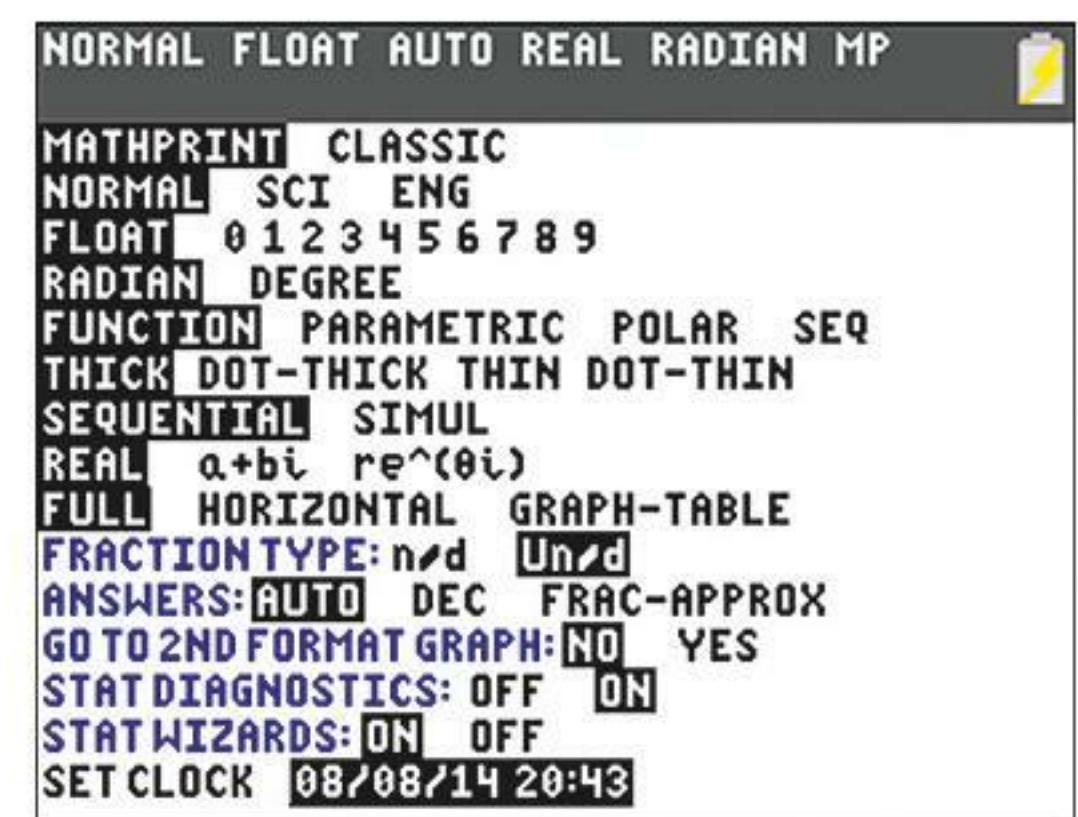
De omtrek van een cirkel met straal r is gelijk aan $2 \cdot \pi \cdot r$.



3-1

Sinusfunctie

- 1 Een wiel met een straal van 1 meter draait rond met een constante snelheid. Een punt op de rand van het wiel heeft een snelheid van 1 meter per seconde. Op tijdstip $t = 0$ bevindt punt P op de rand zich op gelijke hoogte met de as van het wiel zoals in de figuur hiernaast.
 - a Leg uit dat P in 2π seconden precies één keer rond draait.
 - b Waar bevindt het punt zich op het tijdstip $t = \pi$ seconden?
 - c Na hoeveel seconden bevindt P zich op het laagste punt? Geef je antwoord uitgedrukt in π en geef vervolgens een antwoord afgerond op twee decimalen.
 - d Hiernaast zie je een begin van een grafiek waarin de hoogte h van het punt ten opzichte van de as van het wiel is uitgezet tegen de tijd t .
Leg uit dat het vervolg van deze grafiek tot aan $t = \pi$ het spiegelbeeld is van het getekende deel bij spiegeling in de verticale lijn door $t = \frac{1}{2}\pi$.
 - e Maak de grafiek af op het gegeven interval.
- 2a Stel je rekenmachine in op radialen en plot de grafiek van $y = \sin(x)$. Neem de horizontale as van 0 tot 2π en de verticale as van -1 tot 1.
- b Vergelijk je plot van opdracht 2a met de getekende grafiek uit opdracht 1. Wat valt je op?



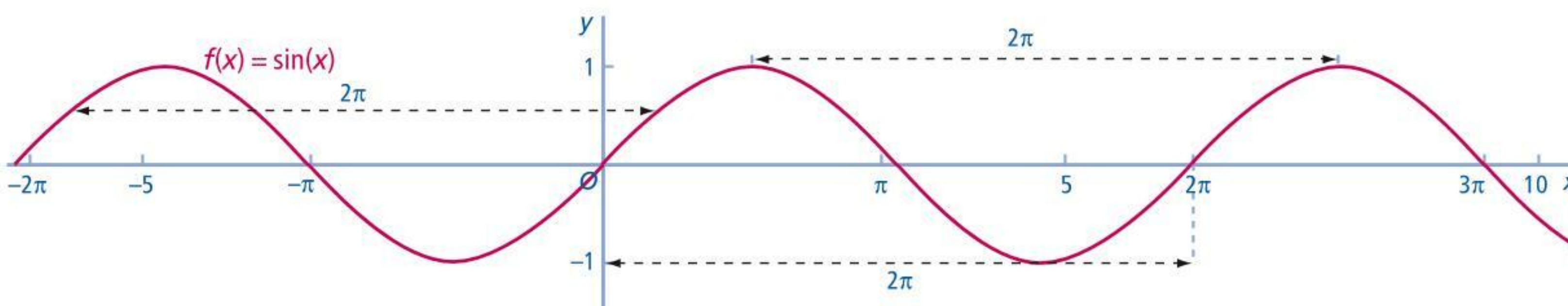
Theorie

Een punt P dat met een snelheid van 1 meter per seconde over een cirkel met straal 1 meter beweegt, is na 2π seconden terug in het beginpunt $(1, 0)$.
De hoogte van punt P na t seconden kun je berekenen met $\sin(t)$.
De functie $f(t) = \sin(t)$ heet de **sinusfunctie**.

- 3a Plot de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[-6\pi, 4\pi]$.
- b Hoeveel perioden zie je in de plot?
- c Geef de evenwichtsstand en de amplitude van de grafiek.
- d In welke punten is de grafiek het steilst?
- e Geef een interval waarop de grafiek van f toenemend dalend is.
- f De grafiek van opdracht a is een deel van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.
Geef drie lijnen ten opzichte waarvan de grafiek van f lijnsymmetrisch is.
- g Geef de coördinaten van vier punten ten opzichte waarvan de grafiek van f puntsymmetrisch is.

De sinusfunctie $f(x) = \sin(x)$ is een standaardfunctie.

- > De evenwichtsstand van de grafiek van deze functie is de lijn $y = 0$.
- > De amplitude, de grootste afwijking van de evenwichtsstand, is 1.
- > De periode is 2π .
- > In het punt $(0, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand.
De verticale lijnen door de toppen zijn assen van symmetrie van de grafiek.
De snijpunten van de grafiek met de x -as zijn punten van symmetrie.

**Voorbeeld**

Het punt $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2})$ ligt op grafiek van $f(x) = \sin(x)$.

Leg met behulp van de eigenschappen van de grafiek uit, dat de punten $(2\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2})$ en $(1\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{2})$ ook op de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ liggen.

Oplossing

De verticale lijn door $x = \frac{1}{2}\pi$ is een as van symmetrie, dus $(\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2})$ ligt op de grafiek van f .

Eén periode naar rechts ligt het punt $(2\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2})$. Dus ligt $(2\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2})$ op de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.

Het punt $(\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2})$ ligt op de grafiek van f . Omdat $(\pi, 0)$ een punt van symmetrie is, ligt het punt $(1\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{2})$ ook op de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.

- H 4** Leg met behulp van de eigenschappen van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ uit of de volgende punten wel of niet op deze grafiek liggen.

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| a $(7\pi, 1)$ | d $(-11\pi, 0)$ |
| b $(119\pi, 0)$ | e $(-8\frac{1}{2}\pi, -1)$ |
| c $(5\frac{1}{2}\pi, 1)$ | f $(236\frac{1}{2}\pi, 1)$ |

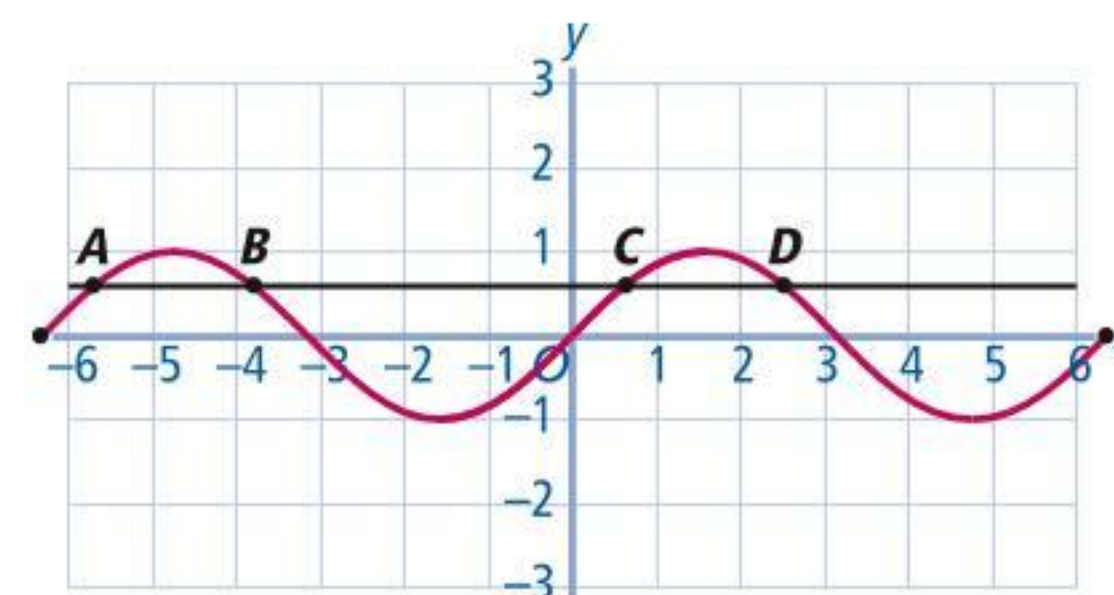
- 5** Hiernaast is de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ getekend op het interval $[-2\pi, 2\pi]$. De punten A , B , C en D liggen op dezelfde hoogte. Het punt C ligt bij $x = 0,64$. Geef de x -coördinaten van de punten A , B en D .

- 6** Gegeven is de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op $[-2\pi, 4\pi]$.

Het punt $A(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2})$ ligt op de grafiek van f .

Er zijn op het gegeven interval ook punten op de grafiek van f met een y -coördinaat die gelijk is aan $-\frac{1}{2}$.

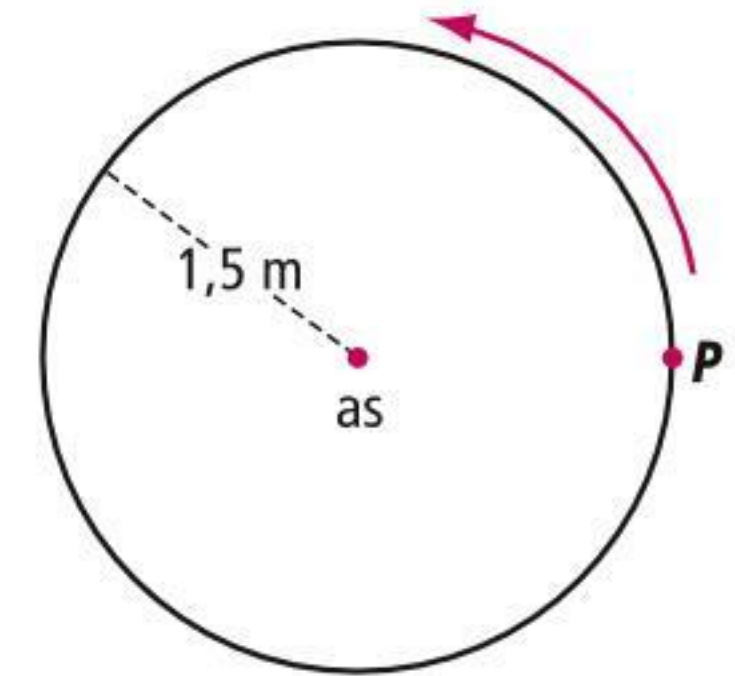
Bereken hoe groot de x -coördinaten van deze punten zijn.



3-2

Uitrekken en inkrimpen

- 7** Het wiel hiernaast heeft een straal van 1,5 meter en draait in 2π seconden precies één keer rond. Op tijdstip $t = 0$ bevindt punt P zich op gelijke hoogte met de as van het wiel. Schets één periode van de bijbehorende tijd-hoogte grafiek.
- 8a** Plot op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ de grafiek van $g(x) = a \cdot \sin(x)$ voor $a = 3$, $a = -5$ en $a = 0,5$.
Welke van de kenmerken periode, evenwichtsstand, amplitude verandert als je het getal a verschillende waarden geeft?
- b** Welk effect heeft een negatieve waarde van het getal a op de grafiek?


Theorie

De grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een **vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as** met factor a .

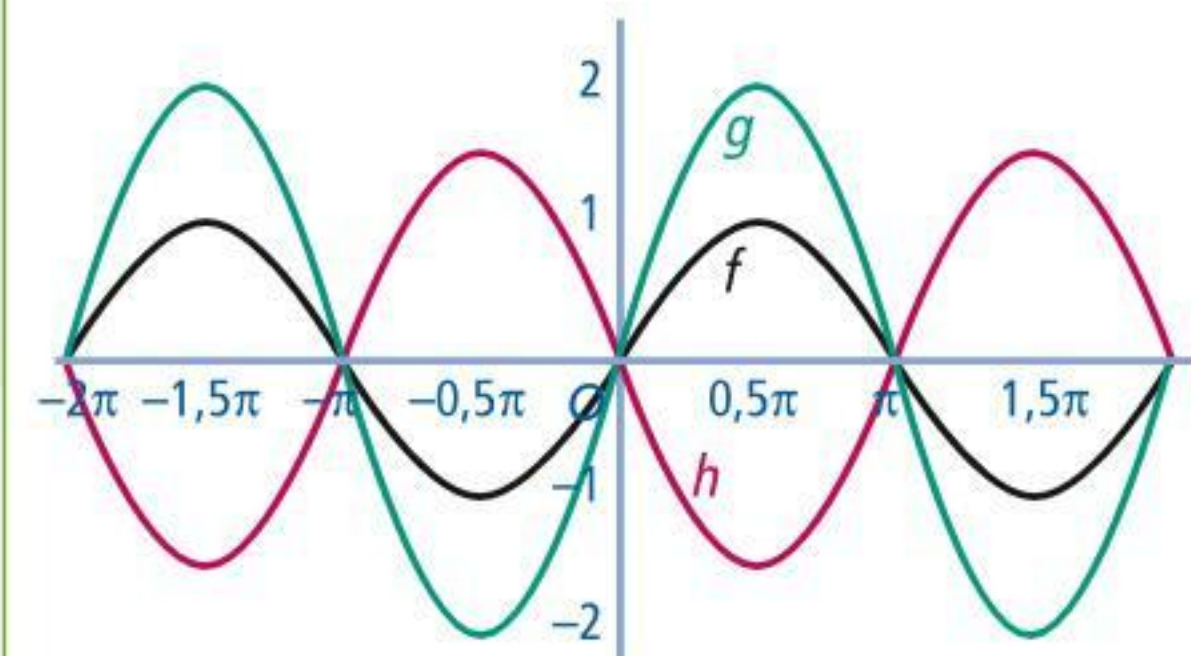
De grafiek wordt verticaal uitgerekt als $a > 1$ of $a < -1$ en in elkaar gedrukt als $-1 < a < 1$.

Als het getal a negatief is, dan wordt de grafiek bovendien in de x -as gespiegeld.

De amplitude van de functie $h(x) = a \cdot \sin(x)$ is gelijk aan a als a positief is en gelijk aan $-a$ als a negatief is.

Voorbeeld

Hieronder zie je de grafieken van $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 2 \sin(x)$ en $h(x) = -\frac{1}{2} \sin(x)$.



De amplitude van g is gelijk aan 2 en de amplitude van h is $\frac{1}{2}$.

- 9** Geef de amplitude van de volgende functies.
- a** $f(x) = 4 \sin(x)$
- b** $g(x) = -\frac{2}{3} \cdot \sin(x)$
- c** $h(x) = 1,8 \cdot \sin(x)$
- 10** Het wiel uit opdracht 7 draait nu in π seconden precies één keer rond.
Schets één periode van de bijbehorende tijd-hoogte grafiek.
- 11a** Plot op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ de grafiek van $g(x) = \sin(bx)$ voor $b = 2$, $b = 3$ en $b = 0,5$.
Welke van de kenmerken periode, evenwichtsstand, amplitude verandert als je het getal b verschillende waarden geeft?
- b** Voor welke positieve waarden van b is de periode kleiner dan 2π ?
- c** En voor welke positieve waarden van b is de periode groter dan 2π ?
- d** Vul de tabel hiernaast in.
- e** Welk verband bestaat er tussen b en de periode van $g(x) = \sin(bx)$?

b	0,5	1	3	π	2π
periode	...	...	...	...	...

De grafiek van de functie $h(x) = \sin(bx)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een **vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as**.

De grafiek wordt in horizontale richting uitgerekt als $0 < b < 1$ en in elkaar gedrukt als $b > 1$.

Als het getal b negatief is, dan wordt de grafiek bovendien in de y-as gespiegeld.

Voor positieve waarden van b is het verband tussen b en de

periode: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$ ofwel de $\text{periode} = \frac{2\pi}{b}$.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = -4 \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$.

Geeft de amplitude en periode van de grafiek van f .

Oplossing

$a = -4$, dus is de amplitude 4.

$b = \frac{1}{3}$, dus de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

- H 12** Geef van de volgende functies de amplitude en de periode.
- $f(x) = 13 \sin(3x)$
 - $f(x) = -0,6 \sin(0,6x)$
 - $f(x) = -20 \sin(\pi x)$
 - $f(x) = \frac{1}{10} \sin(0,3\pi x)$
- 13** Schets de grafiek van $f(x) = a \cdot \sin(bx)$ met amplitude 6 en periode 3.
- H 14** De getijdenbeweging in een kustplaats wordt bij benadering beschreven door de functie $h(t) = 1,85 \sin(0,506t)$. Hierbij is h de waterhoogte in meter boven NAP en is t de tijd in uren met $t = 0$ gerekend vanaf 00.00 uur.
- Hoeveel uren verstrijken er tussen twee opeenvolgende hoogwaterstanden? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.
 - Plot en schets de grafiek van h en bereken gedurende hoeveel tijd per periode de waterstand hoger dan 1,20 meter boven NAP is.
 - Geef twee tijdstippen waarop de waterhoogte het snelst afneemt.
 - Op een andere plaats is het verschil tussen hoogwater en laagwater gelijk aan 4,3 meter waarbij de tijdstippen waarop deze optreden gelijk zijn aan die bij vraag a. Geef het functievoorschrift dat hierbij past.
- ☀ 15** Hiernaast zie je een foto van een waterrad. De straal van het rad is één meter en het draait rond met een snelheid van één omwenteling per 8 seconden. Op tijdstip $t = 0$ is het punt A op de hoogte van de as en beweegt omhoog. Bereken de hoogte van punt A na 4,5 seconden.



3-3

Verschuiven

- 16a** Plot op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ de grafiek van $g(x) = d + \sin(x)$ voor $d = 3$ en voor $d = -5$.
- b** Welk effect heeft het variëren van de waarde van d op de grafiek van g ?
- 17a** Plot op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ de grafiek van $h(x) = \sin(x - c)$ voor $c = \frac{1}{2}\pi$, $c = 3$ en $c = -1$.
- b** Welk effect heeft het variëren van de waarde van c op de grafiek van h ?

Theorie

- De grafiek van de functie $g(x) = d + \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een **verticale verschuiving** van d omhoog. De evenwichtsstand is in dat geval de lijn $y = d$.
- De grafiek van de functie $h(x) = \sin(x - c)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een **horizontale verschuiving** van c naar rechts. In het punt $(c, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $g(x) = -1 + \sin(x - 2)$.

Geef de evenwichtsstand van de grafiek van g en geef de coördinaten van twee punten waarin de grafiek van g stijgend door de evenwichtsstand gaat.

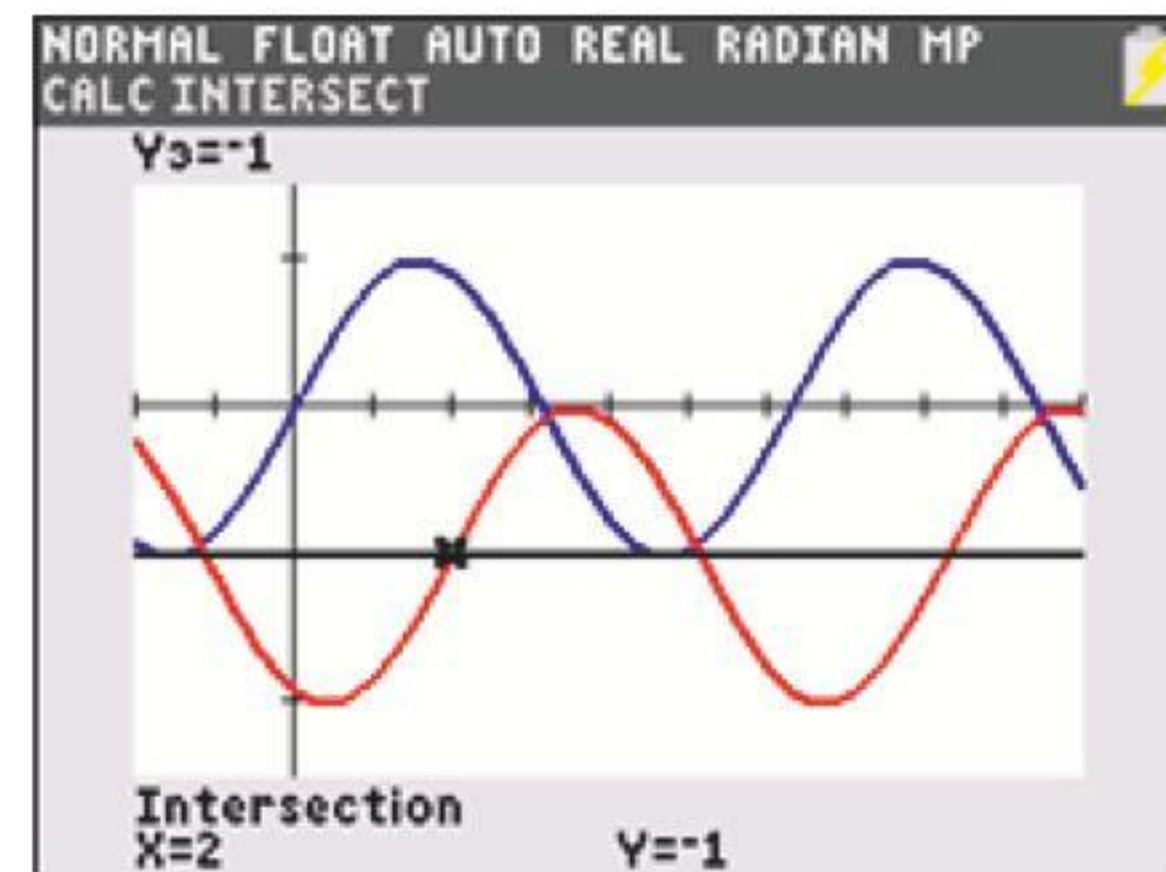
Oplossing

De grafiek van g ontstaat uit die van $f(x) = \sin(x)$ door een verticale verschuiving van 1 omlaag en een horizontale verschuiving van 2 naar rechts.

De evenwichtsstand is de lijn $y = -1$.

De grafiek van f gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 0$ en bij $x = 2\pi$.

Vanwege de verschuivingen van 2 naar rechts gaat de grafiek van g dus in de punten $(2, -1)$ en $(2\pi + 2, -1)$ stijgend door de evenwichtsstand.



- H 18** Geef bij de volgende functies de evenwichtsstand en de coördinaten van een drietal punten waarin de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

- a** $g(x) = 5 + \sin(x + 3)$
- b** $g(x) = -4 + \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$
- c** $g(x) = 5 - \sin(x - 0,3)$
- d** $g(x) = -4,75 + 4\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$

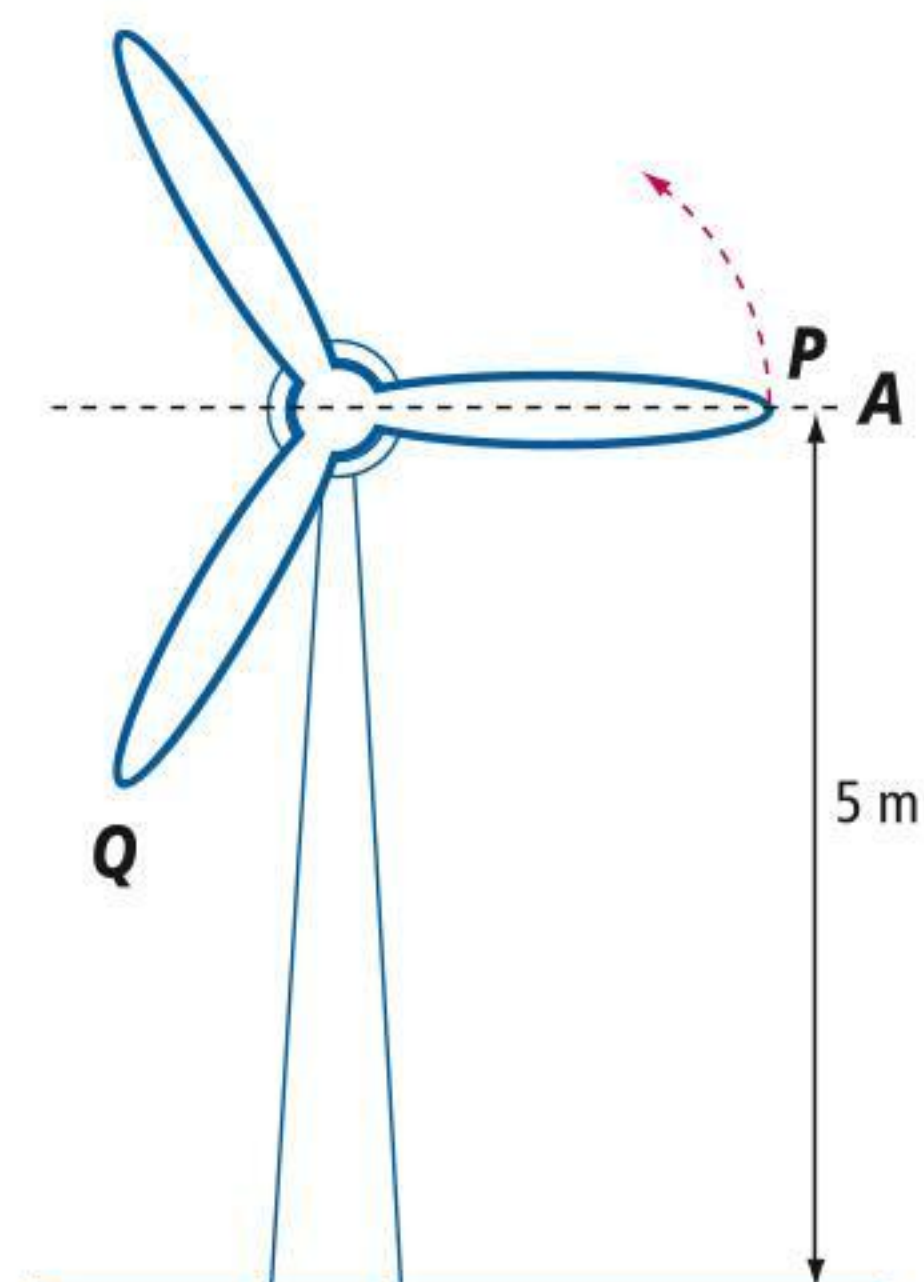
- 19a** De grafiek van f gaat in het punt $(4, 7)$ stijgend door de evenwichtsstand. Geef een functievoorschrift van de vorm $f(x) = d + \sin(x + c)$.
- b** Geef ook een functievoorschrift voor een grafiek die in het punt $(-\frac{1}{4}\pi, -5)$ stijgend door de evenwichtsstand gaat.

- 20** De hoeveelheid lucht in de longen is bij regelmatige ademhaling een periodiek verschijnsel. Een model hiervoor is $H = 1,2 + 0,7 \sin(1,25t)$ met t in seconden en H in liters.
- a** Hoe groot is de periode? Geef je antwoord in hele seconden.
- b** Hoeveel lucht blijft er bij het uitademen in de longen minimaal achter?
- c** Na het leveren van een inspanning is de ademfrequentie 1,5 keer zo snel en de maximale longinhoud is 2,4 liter geworden. De minimale longinhoud is gelijk gebleven. Geef een formule die hierbij past.

- 21** De waterhoogte op het wad kan op een bepaalde dag bij benadering beschreven worden met de functie $W(t) = 0,7 + 0,65 \cdot \sin(0,5t)$ met W in meters en t in uren. In deze formule komt $t = 0$ overeen met het tijdstip 0.00 uur.
- a** Wat is de maximale waterhoogte op die dag?
- b** Plot en teken de grafiek van de waterhoogte voor deze dag.
- c** Een schoolklas begint om 7.00 uur met wadlopen. Het duurt 5 uur om het wad over te steken. Er is geen gevaar zolang het water minder dan 60 cm hoog is. Bereken hoeveel minuten vertraging de leerlingen volgens de formule kunnen oplopen zonder in gevaar te komen?



- 22** De lengte van de wieken van de windmolen is 2 meter. Het middelpunt bevindt zich 5 meter boven de grond. De wieken draaien in 3 seconden rond. Op $t = 0$ zit punt P in de positie die hiernaast is getekend.



- a** Leg uit dat de formule $h = 2 \sin(\frac{2}{3}\pi t) + 5$ het verband geeft tussen de hoogte h in meter van het punt P ten opzichte van de grond en de tijd t in seconden.

- b** Geef een formule die het verband geeft tussen de hoogte in meter van het punt Q ten opzichte van de grond en de tijd in seconden.

- 23a** Geef de coördinaten van een punt van de grafiek van $f(x) = 7 - 5 \sin(3x - \pi)$ waarin deze stijgend door de evenwichtsstand gaat. Leg je antwoord uit.
- b** Geef een functievoorschrift van de vorm $f(x) = d + \sin(x + c)$ waarvan de grafiek in het punt $(\frac{1}{3}\pi, 2)$ dalend door de evenwichtsstand gaat. Leg je antwoord uit.

3-4

Sinusoïden

- 24a** Gegeven is de functie $g(x) = 3 \sin(2(x - 1)) + 4$.
Geef de amplitude, de evenwichtsstand en de periode.
- b** Geef de coördinaten van een punt waarin de grafiek van g stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Theorie

Periodieke grafieken met een formule van de vorm $y = d + a \sin(b(x - c))$ noem je **sinusoïden**.

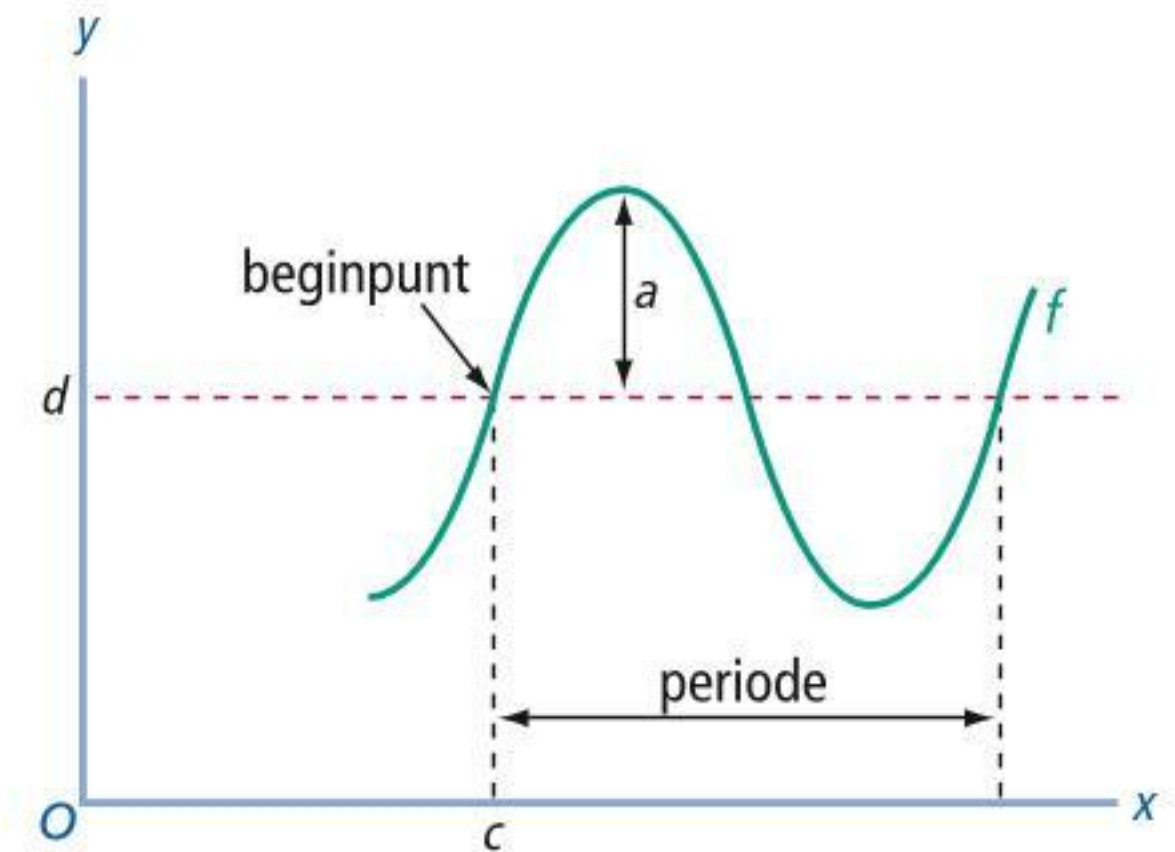
De betekenis van de getallen a , b , c en d voor de grafiek is:

- > De amplitude is a als $a > 0$ en de amplitude is $-a$ als $a < 0$.
- > De evenwichtsstand is de lijn $y = d$.
- > Met b bereken je de periode.

Voor het verband tussen b (met $b > 0$) en de periode geldt:

$$b = \frac{2\pi}{\text{periode}} \quad \text{of} \quad \text{periode} = \frac{2\pi}{b}$$

- > Het punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat noem je een **beginpunt**. Een beginpunt is bijvoorbeeld het punt (c, d) (als $a > 0$).



Voorbeeld

Gegeven is $y = -8 + 6 \sin\left(\frac{1}{2}(x + 4)\right)$.

Bepaal van de bijbehorende sinusoïde de amplitude, de periode, de evenwichtsstand en de coördinaten van een beginpunt.

Oplossing

$a = 6$, dus de amplitude is 6.

$b = \frac{1}{2}$, dus de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

$d = -8$, dus de evenwichtsstand is de lijn met vergelijking $y = -8$.

$c = -4$, dus een beginpunt is $(-4, -8)$.

- H 25** Bepaal van de volgende sinusoïden de amplitude, de periode, de evenwichtsstand en de coördinaten van een beginpunt.
- a** $y = 2 + 4 \sin\left(1\frac{1}{2}(x - 3)\right)$ **c** $y = -200 + 125 \sin(0,1\pi x)$
- b** $y = 3 + 2 \sin\left(4\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\right)$ **d** $y = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{3}\pi\left(x - \frac{1}{8}\pi\right)\right)$
- 26a** Leg uit dat het punt $(4, -3)$ geen beginpunt is van $f(x) = -3 - 2 \sin(x - 4)$.
- b** Geef de coördinaten van een beginpunt van f .
- c** Plot de grafiek van $g(x) = 5 + 8 \sin\left(2x + 1\frac{1}{2}\pi\right)$ en bereken de coördinaten van het beginpunt op het interval $[0, \pi]$.
- d** Verklaar je antwoord van opdracht c met behulp van het functievoorschrift $g(x)$.

- 27** De hoogte van een stip op de rand van het rad van fortuin hiernaast, dat tegen de wijzers van de klok in draait, wordt gegeven door $h = 1,3 + 0,7 \sin(\pi t)$. Hierin is t de tijd in seconden en h de hoogte in meters ten opzichte van de grond.
- In welke positie bevindt de stip zich op tijdstip $t = 0$?
 - Leg uit dat de maximale hoogte van de stip gelijk is aan 2 m.
 - Leg uit dat na 0,5 seconde het hoogste punt bereikt wordt.
 - Geef de minimale hoogte van de stip en alle tijdstippen waarop deze op het tijdsinterval $[0, 10]$ bereikt wordt.
 - Geef de coördinaten van de toppen van de grafiek van h op het tijdsinterval $[3, 6]$.



De y-coördinaten van de toppen van de sinusoiden met formule $y = d + a \sin(b(x - c))$ kun je bepalen met behulp van de evenwichtsstand en de amplitude. De toppen liggen vanwege de symmetrie halverwege twee opeenvolgende snijpunten met de evenwichtsstand.

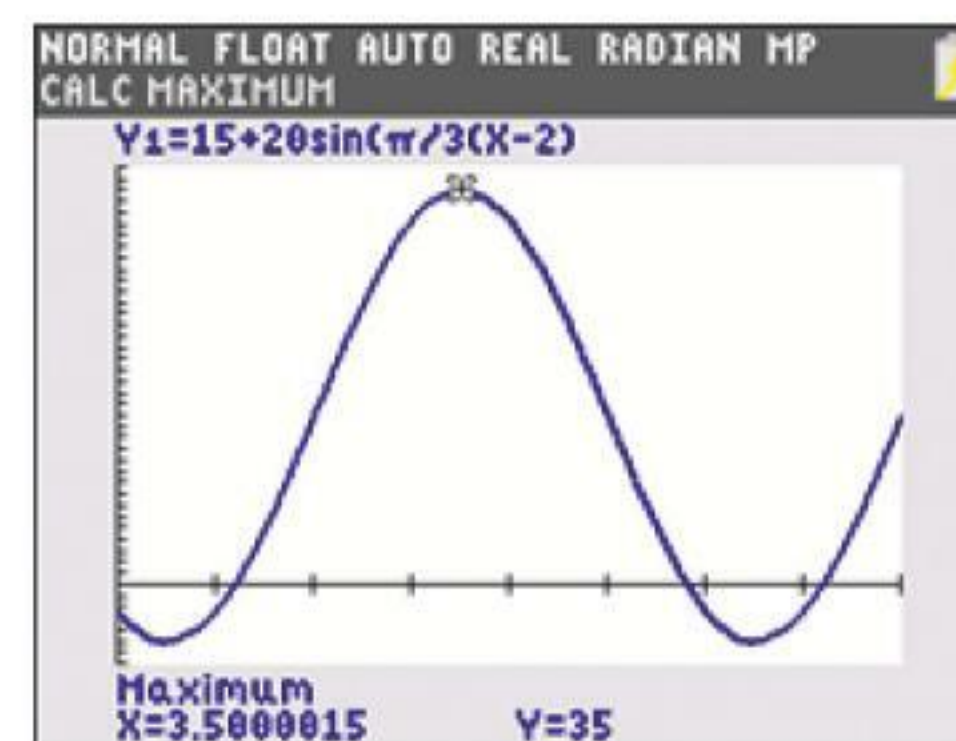
Voorbeeld

Bereken de coördinaten van twee opeenvolgende toppen van de sinusoiden $y = 15 + 20 \sin\left(\frac{1}{3}\pi(x - 2)\right)$.

Oplossing

De evenwichtsstand is 15 en de amplitude is 20, dus het maximum is gelijk aan 35. Het minimum is gelijk aan $15 - 20 = -5$.

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$, een beginpunt is $(2, 15)$ en de twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn dus $(5, 15)$ en $(8, 15)$. De toppen zitten halverwege deze drie punten en zijn dus $(3\frac{1}{2}, 35)$ en $(6\frac{1}{2}, -5)$.



- 28** Bereken de coördinaten van twee opeenvolgende toppen van de volgende sinusoiden.

- | | |
|----------------------------------|---|
| a $y = 3 \sin(2x) - 2$ | c $y = -42 + 28 \sin(0,2\pi(x + 3))$ |
| b $y = 6 + 8 \sin(\pi x)$ | d $y = 3,2 - 1,3 \sin(\pi x + \pi)$ |

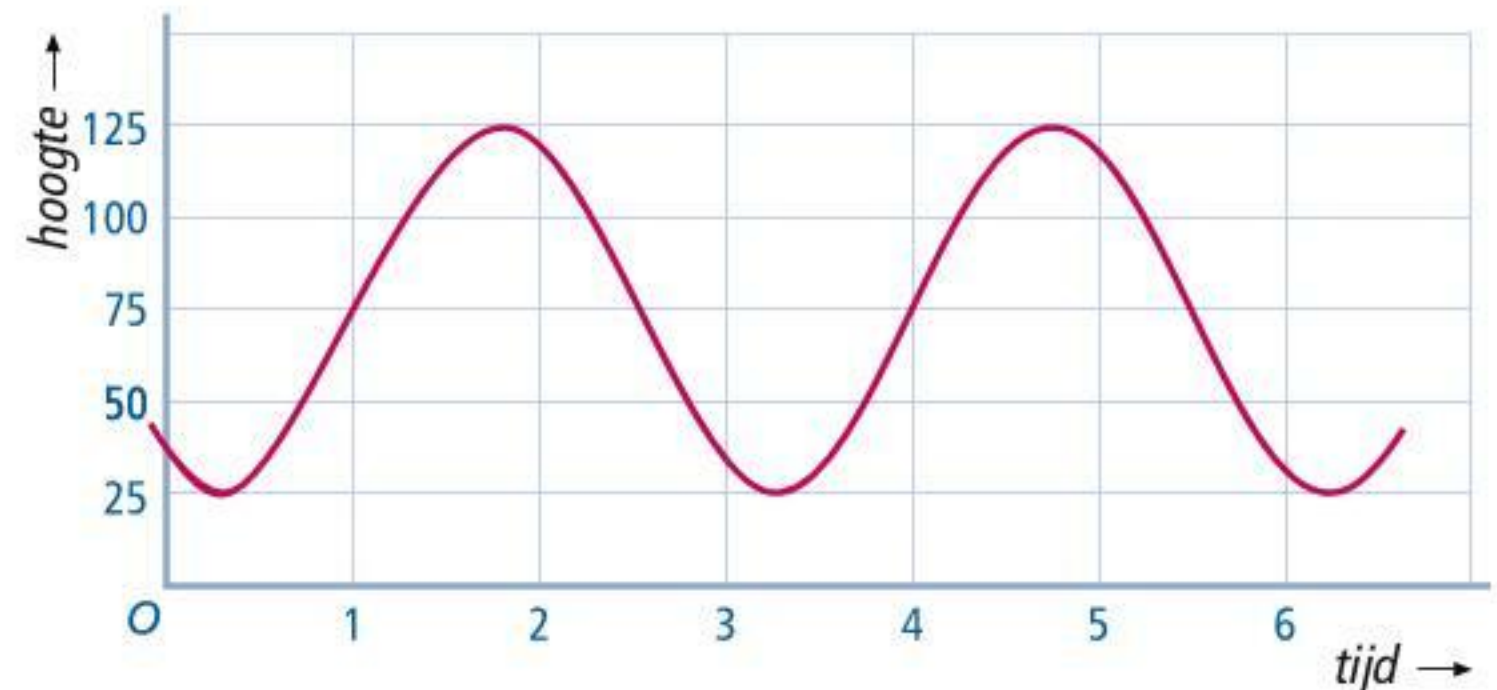
- 29** De daglengte is de tijdsduur tussen zonsopkomst en zonsondergang. Voor Madrid kan het verband tussen de daglengte D en het aantal dagen na 1 januari van een jaar benaderd worden met de formule $D = 12 + 2,7 \sin(0,0172(t - 80))$. Tijdstip $t = 0$ komt hierin overeen met 1 januari. Hierin is t de tijd in dagen en D de daglengte in uren.

- Leg aan de hand van de formule uit dat de periode een jaar is.
- Geef de maximale en minimale daglengte en de data waarop deze worden bereikt.
- Bereken de daglengte op 1 mei.
- Hoeveel dagen per jaar is de daglengte minder dan 10 uren?
- Geef de formule van de daglengte als de tijd na 1 januari niet in dagen maar in weken wordt gemeten.

3-5

Formules opstellen bij sinusoiden

- 30** De sinusoiden hiernaast geeft het verloop van de hoogte van het uiteinde van een rotorblad van een moderne windturbine bij een bepaalde windsnelheid.
- Lees uit de grafiek het maximum en het minimum af.
 - Hoe groot is de evenwichtswaarde d ?
 - Hoe groot is de amplitude a ?
 - Lees de periode af en bereken hiermee de waarde van b .
 - Geef de coördinaten van een beginpunt?
 - Geef een formule bij deze sinusoiden.



Aanpak

Hoe stel je een formule $y = d + a \sin(b(x - c))$ op bij een gegeven sinusoiden?

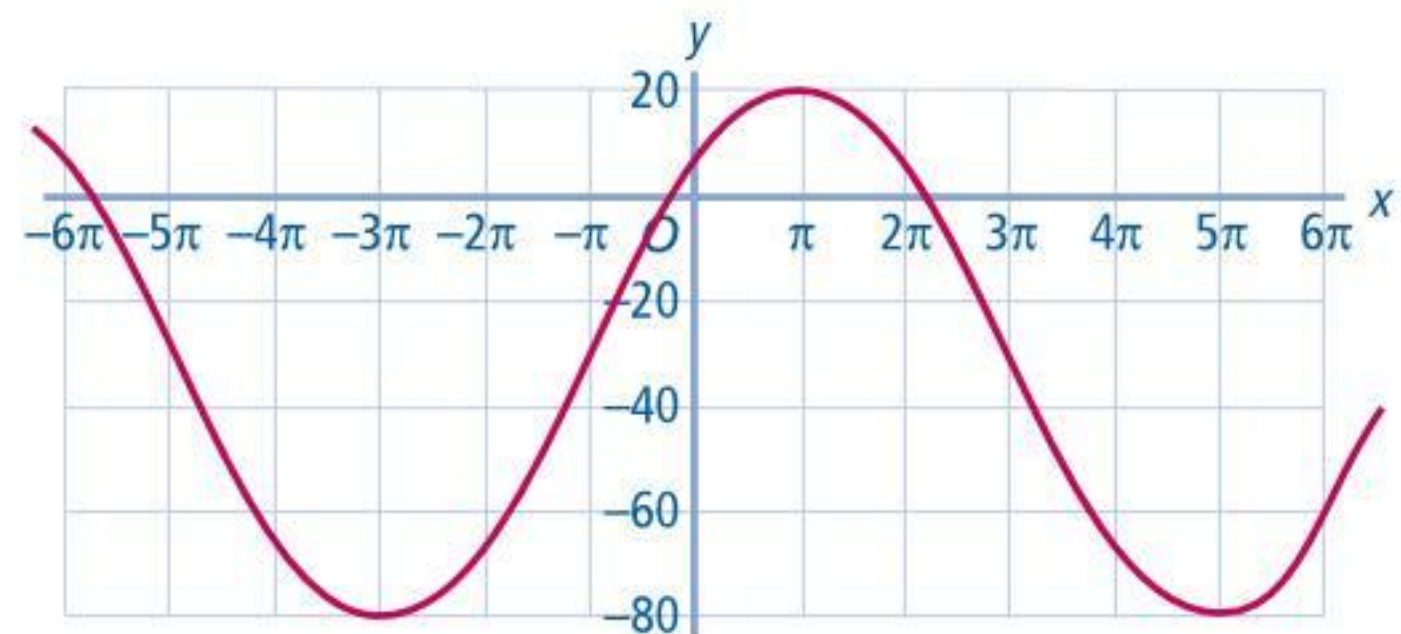
- Lees het maximum en het minimum af uit de sinusoiden.
- Bereken hiermee de evenwichtswaarde d en de amplitude a .
- Lees de periode af uit de sinusoiden en bereken b met $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- Lees een beginpunt van de sinusoiden af, de x -coördinaat hiervan is gelijk aan c .
- Schrijf de formule op.

Voorbeeld

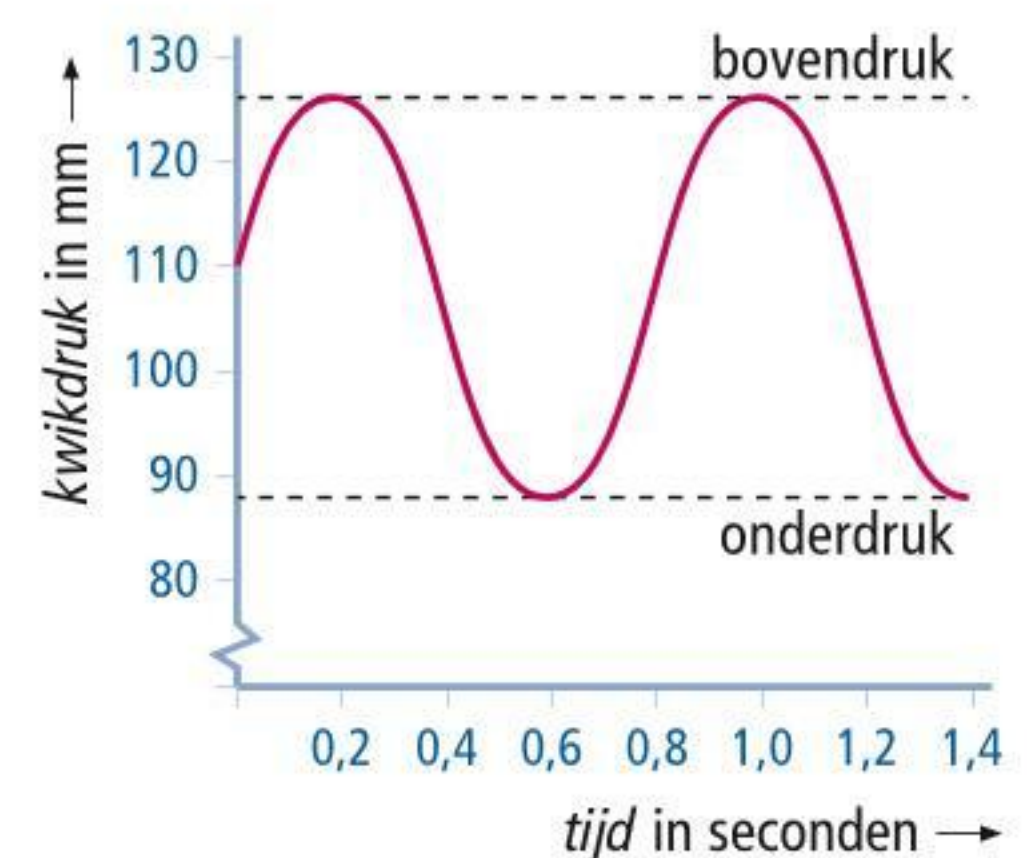
Hiernaast is een sinusoiden gegeven.
Stel de bijbehorende formule op.

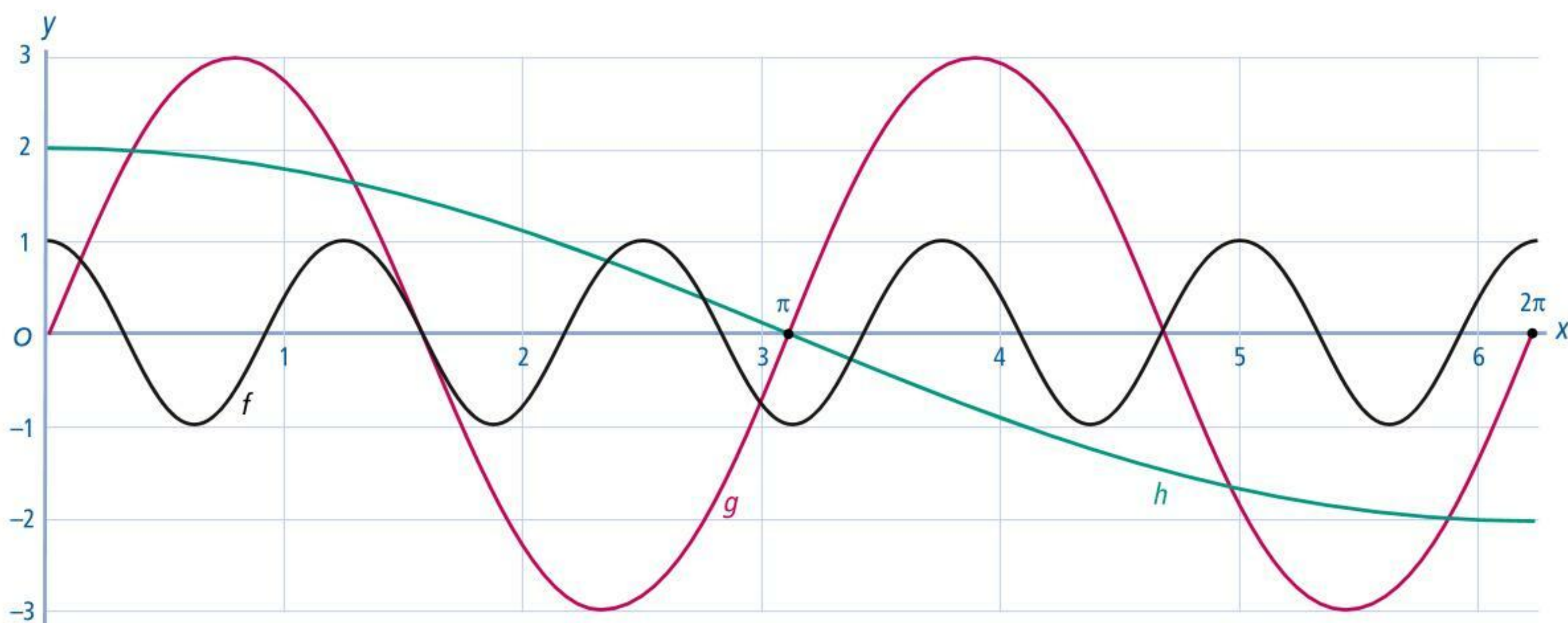
Oplossing

- Het maximum is 20 en het minimum is -80 .
- De evenwichtsstand is $\frac{20 + (-80)}{2} = -30$, dus $d = -30$.
De amplitude is het verschil tussen het maximum en de waarde van d , dus $a = 50$.
- Twee minima zitten bij $x = -3\pi$ en $x = 5\pi$.
De periode is dus 8π . Hieruit volgt $b = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$.
- Een beginpunt is $(-\pi, -30)$. Dus $c = -\pi$.
- Een formule is dus $y = -30 + 50 \sin\left(\frac{1}{4}(x + \pi)\right)$.



- 31** De grafiek hiernaast geeft een versimpeld model van de manier waarop de bloeddruk D van een mens verandert.
Stel een sinusformule op voor het verband tussen de bloeddruk D en de tijd t .

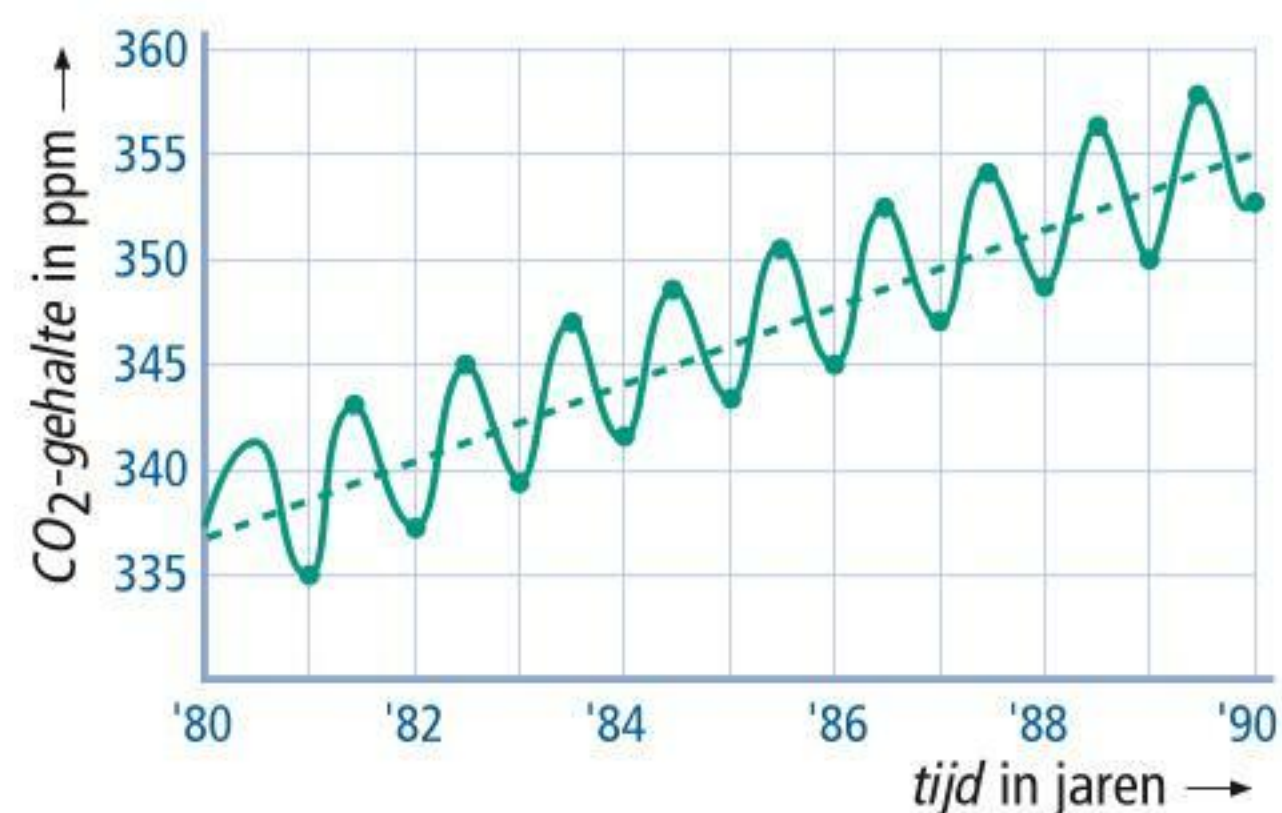




- 32** Hierboven staan de sinusoiden bij de functies f , g en h .
Stel functievoorschriften op voor f , g en h .
- 33** Stel een formule op voor de volgende sinusoiden.
- De periode is 16, een beginpunt is $(4, -12)$ en het maximum is 18.
 - Een beginpunt is $(0, 6)$ en het hier dichtstbijzijnde laagste punt naar rechts is $(3, 2)$.
 - Twee opeenvolgende toppen zijn $(5, 210)$ en $(17, -100)$.
- 34** Boven een houtopslag ligt een zogeheten golfplaat.
De voorkant van de plaat die je op de foto ziet is in werkelijkheid 98 cm breed en het hoogteverschil tussen het hoogste en laagste punt van een golf is 4,2 cm.
Breng een denkbeeldig assenstelsel aan met de y -as aan het begin van de golfplaat links en de x -as als evenwichtsstand van het golfpatroon. Dit golfpatroon heeft een vorm die overeenkomt met een sinusoid.



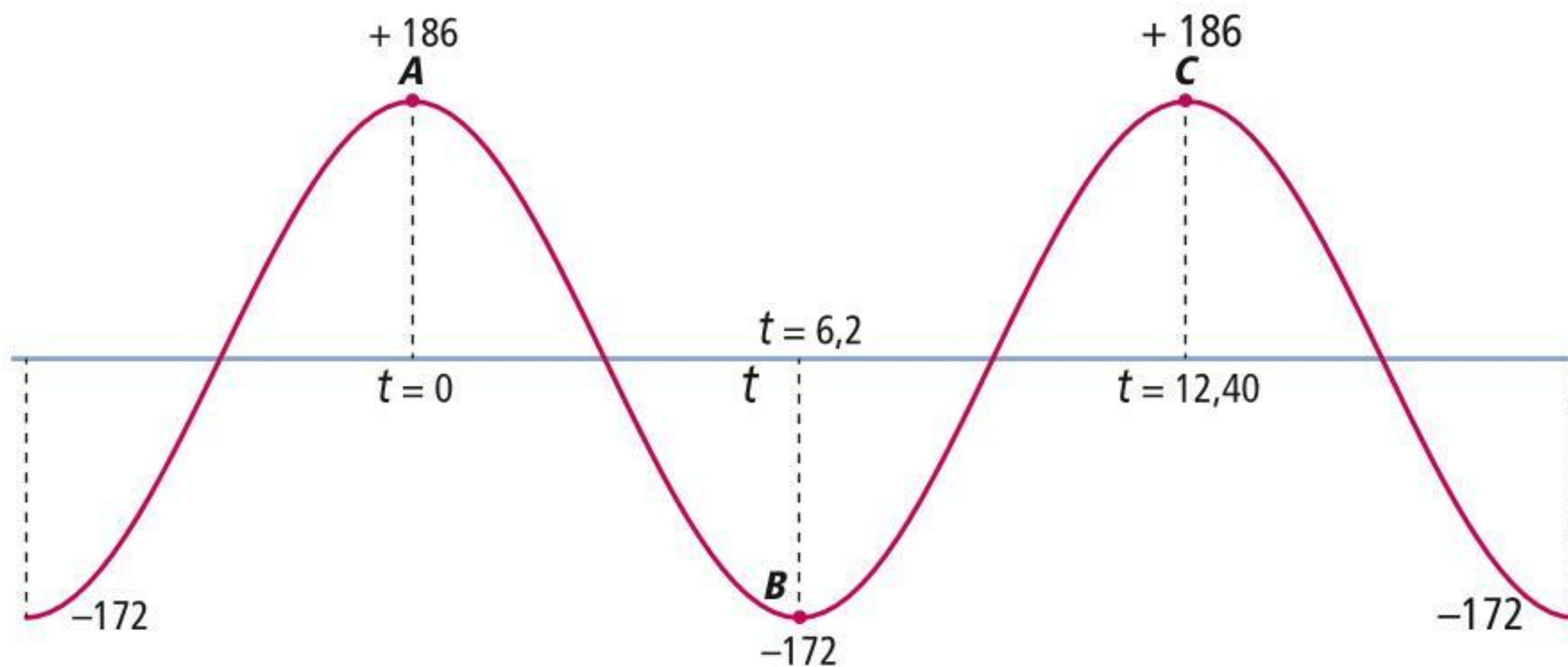
- 35** Hiernaast staat een grafiek van het CO_2 -gehalte op het noordelijk halfrond in de jaren 80 van de vorige eeuw. In deze grafiek geeft de stippellijn de trend aan die de stijging van het CO_2 -gehalte weergeeft. De stippellijn wordt beschreven door de formule $T = mt + n$ waarbij t de tijd is in jaren. Neem $t = 0$ op 1 januari 1980.
- Geef met behulp van de figuur een benadering van m en n .
 - De vorm van de schommeling ten opzichte van de stippellijn is te benaderen met de formule $S = a \sin(bt)$. Geef een benadering van de waarden van a en b .
 - Bij de gegeven grafiek hoort een formule van de vorm $C = T + S$. Stel dat het CO_2 -gehalte blijft toenemen volgens dit wiskundig model. Bereken in welk jaar en welke maand de concentratie voor het eerst hoger zal zijn dan 375 ppm.



Een CO_2 -gehalte van 340 ppm ('parts per million') geeft aan dat er 340 delen CO_2 is op een totaal van een miljoen atmosferdelen.

3-6

Gemengde opdrachten

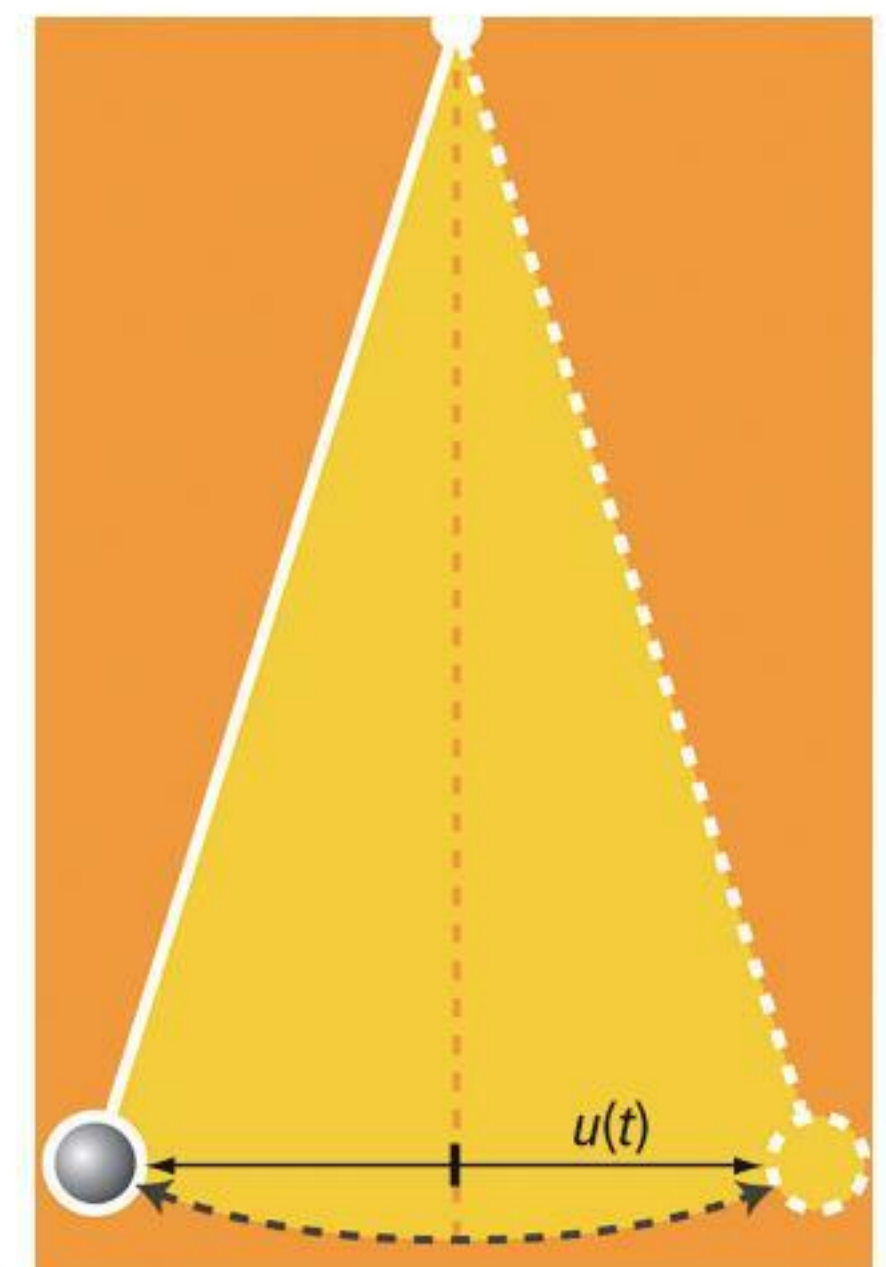


- 36** Van een Nederlandse kustplaats is hierboven de gemiddelde getijkromme getekend. Deze kromme is gebaseerd op gegevens over zowel de dagelijkse tijdstippen voor hoogwater en laagwater als de hoogten (in centimeters) ten opzichte van Normaal Amsterdams Peil (NAP). De tijd is in uren. Geef een formule die bij de getijkromme past. Druk de hoogte h uit in cm en de tijd t in uren.

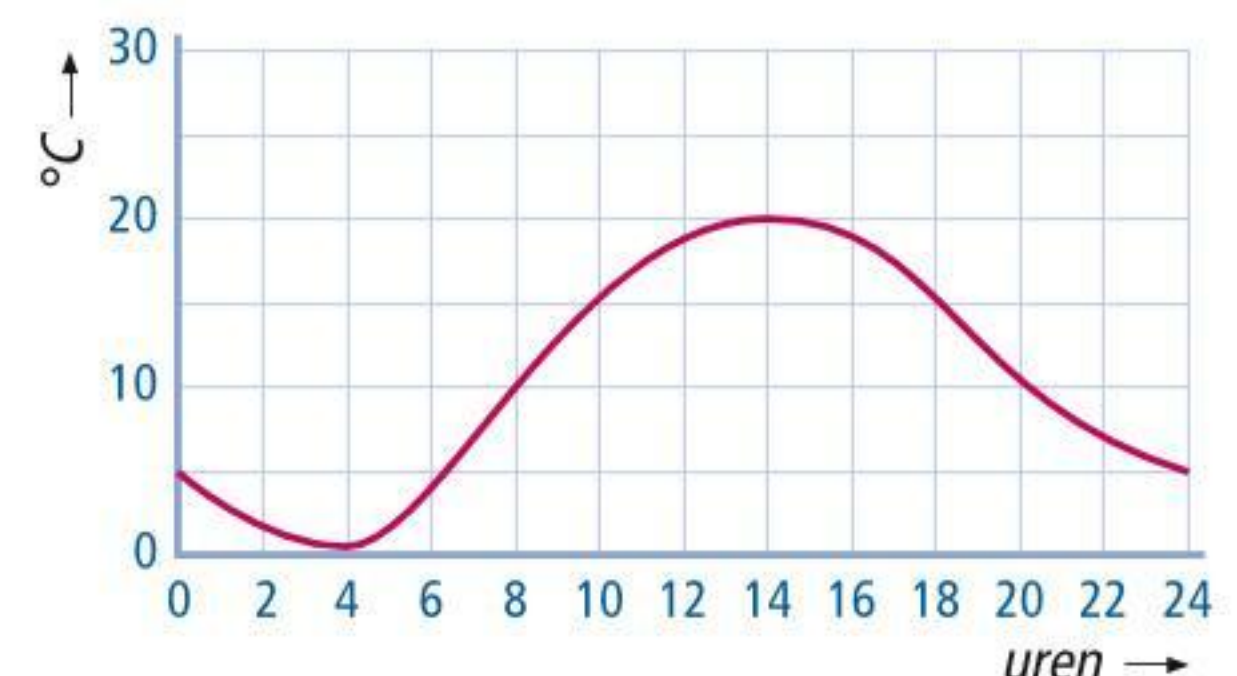
- 37** Aan een lange staaldraad is een gewichtje bevestigd. Dit gewichtje slingert naar links en rechts. De uitwijking ten opzichte van een verticale lijn wordt gegeven door de functie $u(t) = 8 \sin\left(\frac{2}{3} \pi t\right)$.

Hierbij is u de uitwijking in cm en t de tijd in seconden.

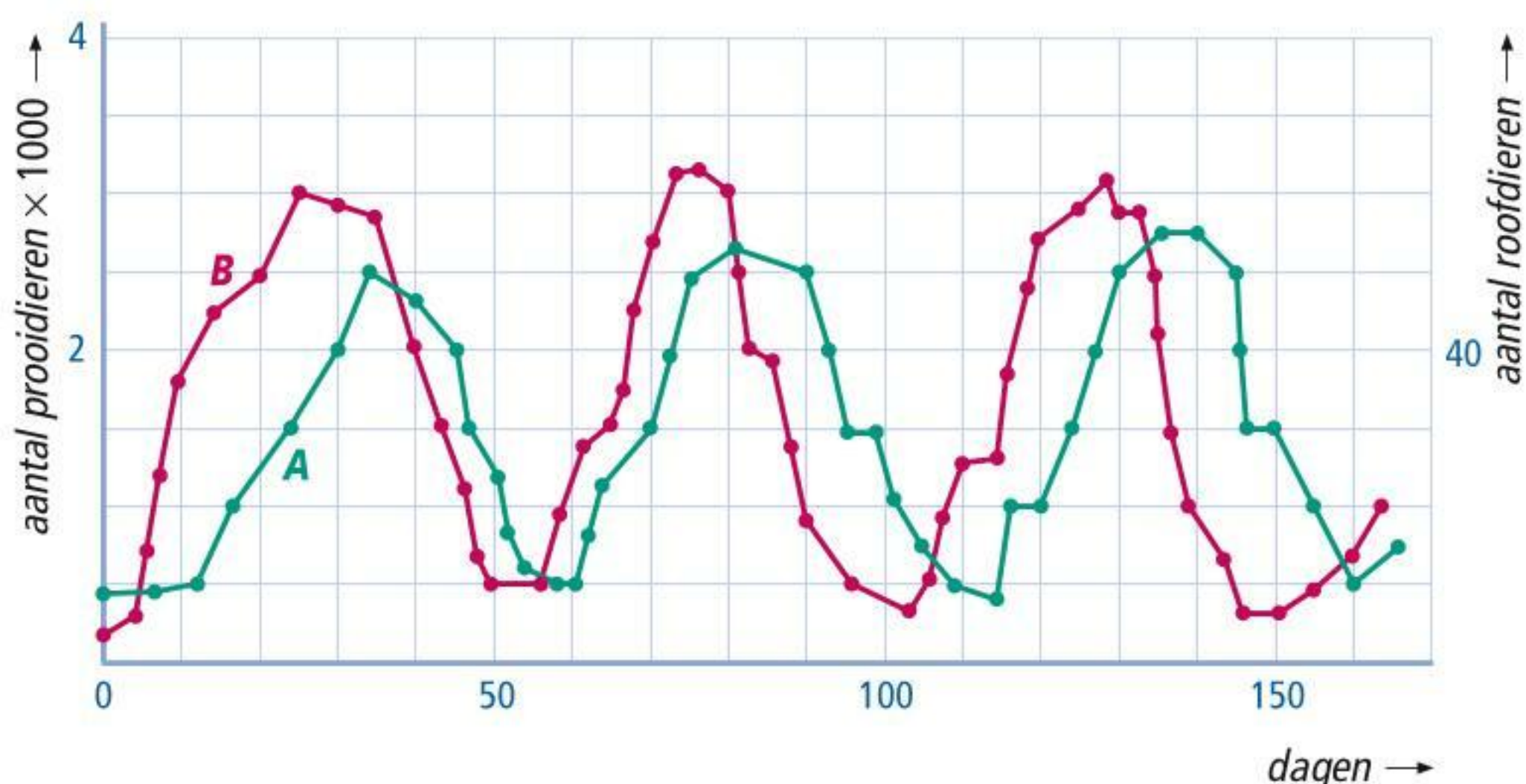
- Hoelang duurt één periode?
- Op welke tijdstippen gedurende de eerste zes seconden geldt $u(t) = 3$?
- Bereken het percentage van de tijd dat de uitwijking ten opzichte van de verticale lijn meer dan 6 cm is.



- 38** Hiernaast is een grafiek getekend die de temperatuur weergeeft op een voorjaarsdag.
- Teken in dezelfde figuur een sinusoïde die dezelfde periode en dezelfde toppen heeft als de getekende grafiek.
 - Geef een formule die bij jouw sinusoïde hoort.
 - Waarin wijkt jouw keuze het meest af van de werkelijke situatie?



39



In de natuur is er een verband tussen het aantal prooidieren en het aantal roofdieren in een gebied. Als er veel roofdieren in een gebied zijn, zal het aantal prooidieren sterk verminderen. Hierdoor ontstaat een voedseltekort voor de roofdieren. Het aantal roofdieren zal afnemen, zodat het aantal prooidieren weer zal toenemen.

Hierboven zijn in de grafieken de resultaten weergegeven van een onderzoek met prooidieren en roofdieren.

Het assenstelsel heeft twee verticale assen. De ene hoort bij de grafiek van de prooidieren en de andere bij die van de roofdieren.

- Waarom is ervoor gekozen om de grafieken in één assenstelsel te tekenen?
- Welke grafiek hoort bij prooidieren?
- Bij 37 dagen snijden de grafieken elkaar. Ben beweert dat er dan evenveel prooidieren als roofdieren zijn. Heeft hij gelijk?
- Geef een schatting van de periode en de amplitude bij elk van de grafieken.

- ✂ 40 Al tientallen jaren leeft bij het Naardermeer een kolonie Aalscholvers. In de grafiek hiernaast is voor de periode 1974-1986 het aantal broedparen weergegeven. Er is een schommeling van de aantallen te zien. Bovendien zit er een stijgende trend in. Deze trendlijn is hiernaast ook te zien. De ontwikkeling van de aantallen broedparen is in de figuur hiernaast benaderd met een modellijn.

Bij de modellijn kun je een formule opstellen van de vorm $N = p + q \cdot t + a \cdot \sin(b \cdot t)$.

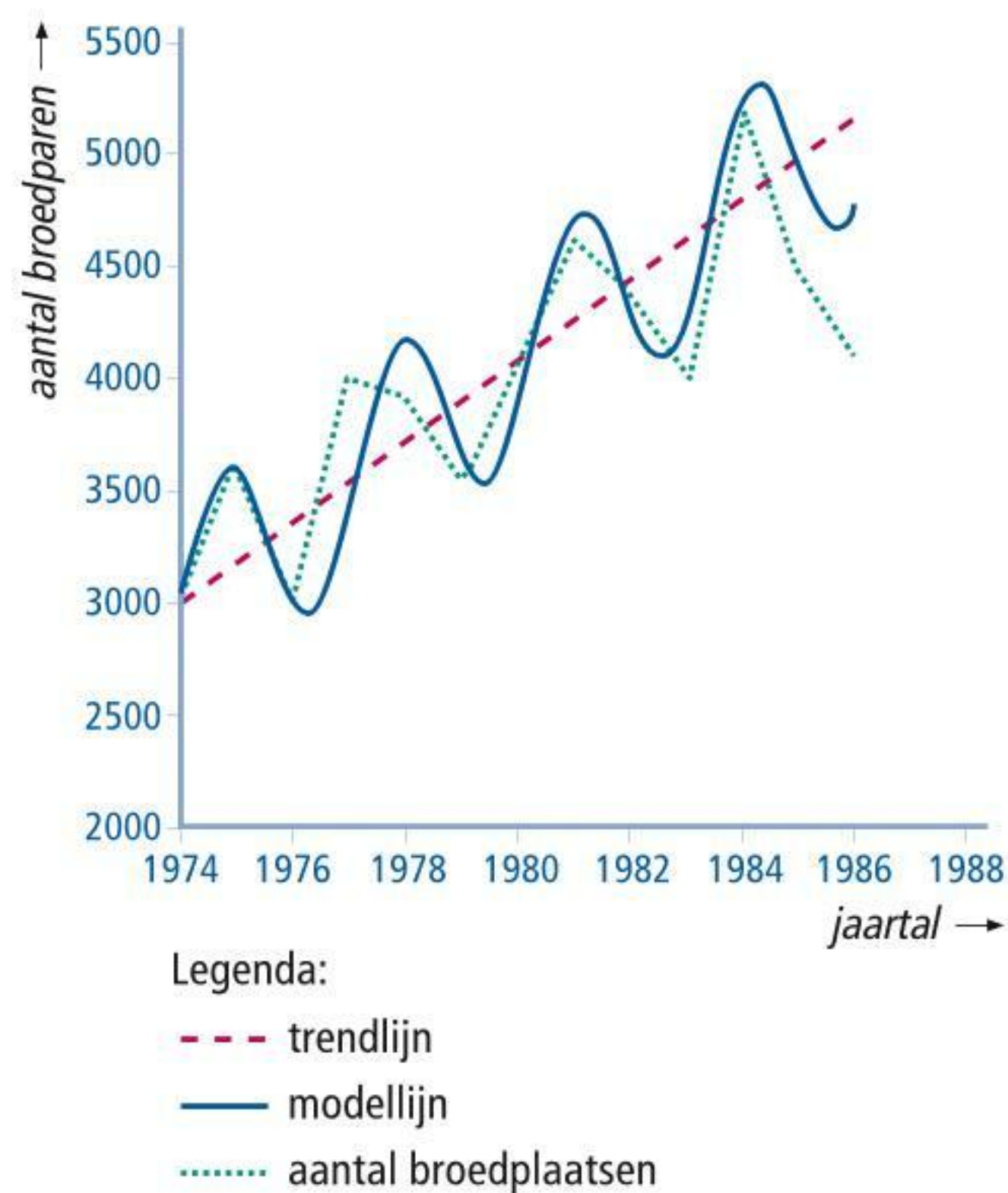
Hierin is t in jaren met $t = 0$ in 1974.

Het gedeelte $p + q \cdot t$ betekent dat de evenwichtsstand niet constant is, maar stijgt volgens een rechte lijn: de trendlijn.

De waarden van p , q , a en b in deze formule kun je met behulp van de figuur berekenen.

Bereken de waarden van p , q , a en b .

Ontleend aan CE vwo wiskunde A pilot 2012, tijdvak 1



Samenvatting

Sinusfunctie

Een punt P dat met een snelheid van 1 meter per seconde over een cirkel met straal 1 meter beweegt, is na 2π seconden terug in het beginpunt $(1, 0)$.

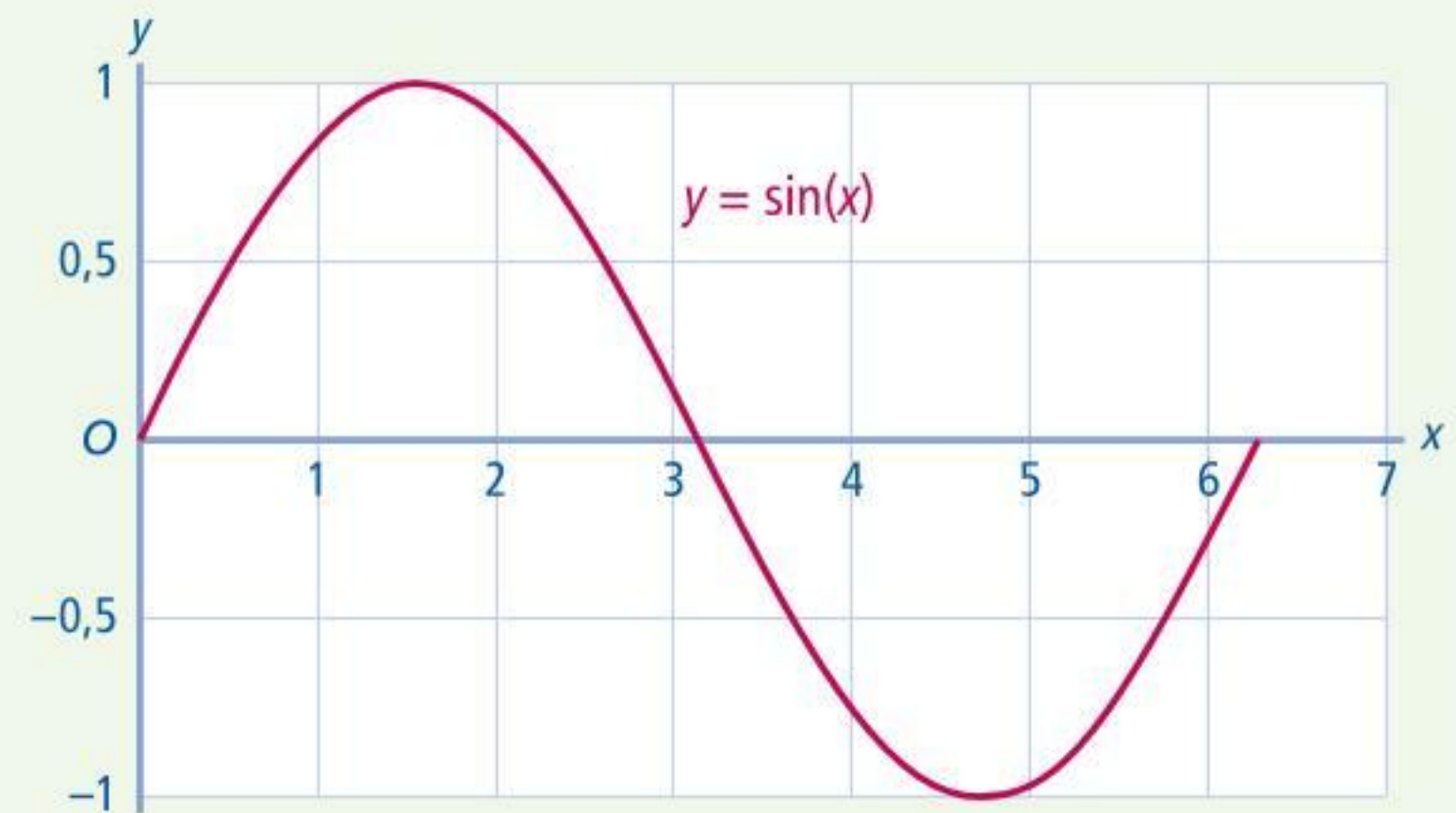
De hoogte van punt P na t seconden kun je berekenen met $\sin(t)$. De functie $f(t) = \sin(t)$ heet de sinusfunctie.

De evenwichtsstand van de grafiek van deze functie is de lijn $y = 0$. De amplitude, de grootste afwijking van de evenwichtsstand, is 1. De periode is 2π .

Onder andere in de punten $(0, 0)$ en $(2\pi, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand. Dit noem je beginpunten.

De verticale lijnen door de toppen zijn assen van symmetrie van de grafiek. De snijpunten van de grafiek met de x -as zijn punten van symmetrie.

Als je werkt met de sinusfunctie, moet je rekenmachine ingesteld zijn op radialen.



Uitrekken en inkrimpen

- De grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor a .

De grafiek wordt verticaal uitgerekt als $a > 1$ of $a < -1$ en wordt in elkaar gedrukt als $-1 < a < 1$.

Als a negatief is, dan wordt de grafiek bovendien in de x -as gespiegeld.

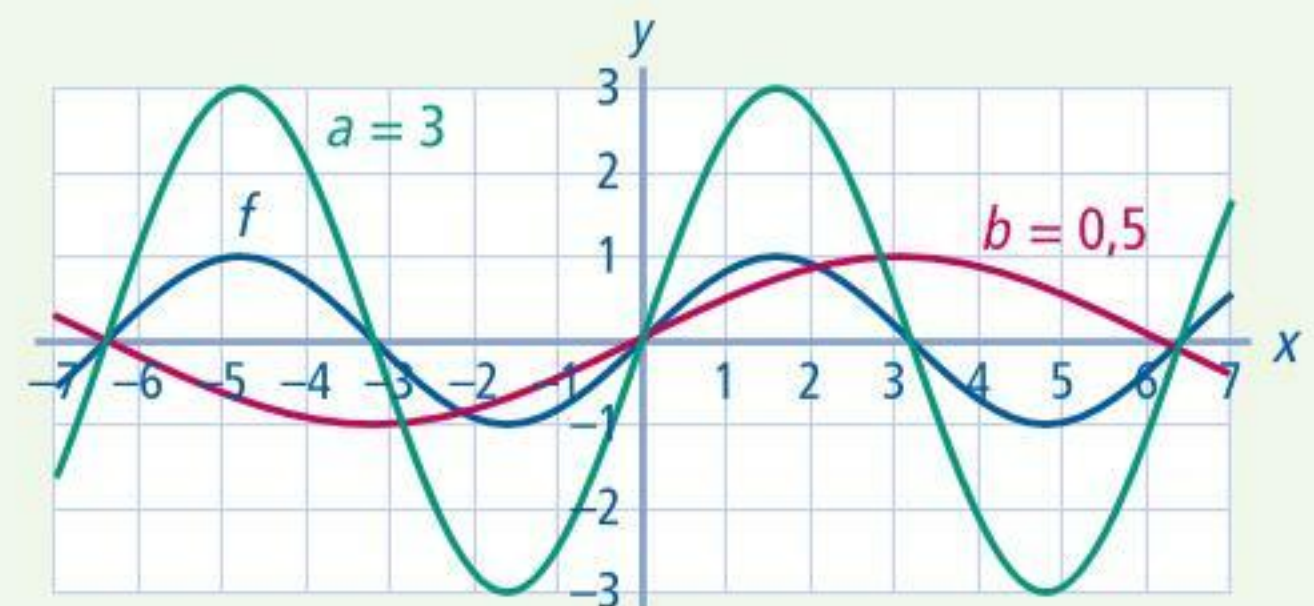
De amplitude van de functie $h(x) = a \cdot \sin(x)$ is gelijk aan a als a positief is en gelijk aan $-a$ als a negatief is.

- De grafiek van de functie $h(x) = \sin(bx)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as.

De grafiek wordt in horizontale richting uitgerekt als $0 < b < 1$.

De grafiek wordt in elkaar gedrukt als $b > 1$. Als het getal b negatief is, dan wordt de grafiek bovendien in de y -as gespiegeld.

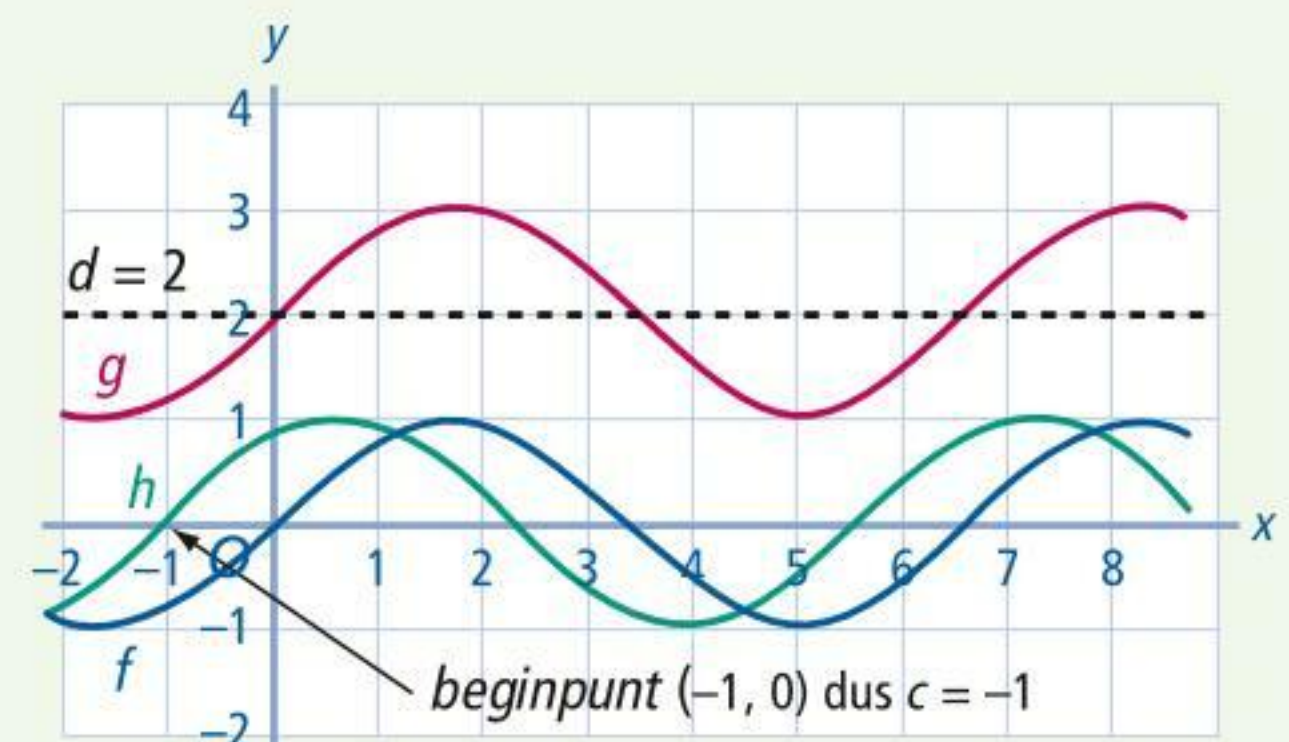
Als $b > 0$ geldt: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$ ofwel de periode $= \frac{2\pi}{b}$.



Verschuiven

- De grafiek van de functie $g(x) = d + \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een verticale verschuiving van d omhoog. De evenwichtsstand is in dat geval de lijn $y = d$.

- De grafiek van de functie $h(x) = \sin(x - c)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een horizontale verschuiving van c naar rechts.



Sinusoïden

Periodieke grafieken met een functievoorschrift of formule van de vorm $y = d + a \sin(b(x - c))$ heten sinusoiden. De betekenis van de getallen a , b , c en d voor de grafiek is:

- De amplitude is a als $a > 0$ en de amplitude is $-a$ als $a < 0$.
- De evenwichtsstand is de lijn $y = d$.
- Voor de periode geldt $\text{periode} = \frac{2\pi}{b}$ (met $b > 0$).
- Een beginpunt van de grafiek is een punt waarin de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat; als $a > 0$ is het punt (c, d) een beginpunt

Je kunt bij een functievoorschrift van een sinusoid de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en een beginpunt berekenen.

De evenwichtsstand, amplitude, periode en beginpunt kun je uit de formule van de sinusoid afleiden.

Voorbeeld

Bereken de periode, de evenwichtsstand, de amplitude en drie beginpunten van de sinusoid met formule $y = 28 + 24 \sin(\frac{1}{4}\pi(x - 3))$ op het interval $[0, 20]$.

Oplossing

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$, de evenwichtsstand is 28 en de amplitude is 24.

Een beginpunt is het punt $(3, 28)$.

Omdat de periode gelijk is aan 8, zijn de twee hierop volgende beginpunten $(11, 28)$ en $(19, 28)$.

Je kunt bij een gegeven sinusoid een functievoorschrift of formule opstellen

Door te letten op de kenmerken van een sinusoid kun je een functievoorschrift of formule vinden.

Voorbeeld

Geef het functievoorschrift van de hiernaast getekende sinusoid.

Oplossing

Het voorschrift heeft de vorm $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$.

Het maximum is 8, het minimum is -12.

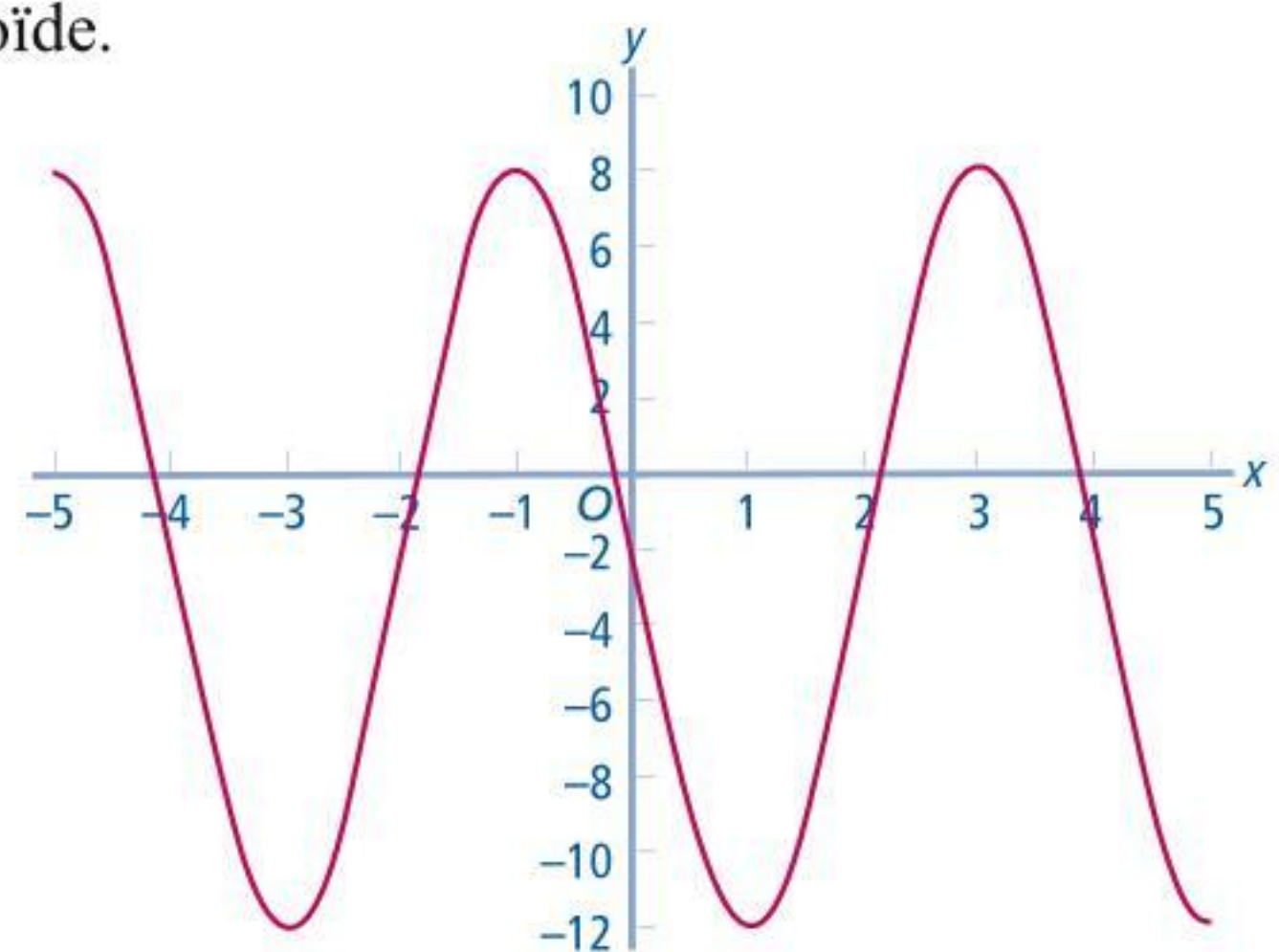
De evenwichtsstand d is dus -2

De amplitude a is $8 - (-2) = 10$.

De periode is 4, dus $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

Een punt op de evenwichtslijn waar een golf begint is $(-2, -2)$, dus $c = -2$.

Conclusie: $f(x) = -2 + 10 \sin(\frac{1}{2}\pi(x + 2))$.



Test jezelf

T-1 Leg met behulp van de eigenschappen van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ uit of de volgende punten wel of niet op deze grafiek liggen.

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| a $(5\pi, -1)$ | d $(18\pi, 1)$ |
| b $(17\pi, 0)$ | e $(28\frac{1}{2}\pi, 1)$ |
| c $(-5\frac{1}{2}\pi, 1)$ | f $(-236\frac{1}{2}\pi, 1)$ |

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-1.

T-2 Geef van de volgende functies de amplitude en de periode.

- a** $f(x) = 7 \sin(\frac{1}{4}x)$
- b** $f(x) = -\frac{3}{4} \sin(6x)$
- c** $f(x) = -380 \sin(5\pi x)$
- d** $f(x) = 0,11 \sin(\frac{5}{18}\pi x)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-2.

T-3 Geef bij de volgende functies de evenwichtsstand en de coördinaten van een drietal punten waarin de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

- | | |
|--|---|
| a $g(x) = -3 + \sin(x - 5)$ | c $g(x) = 8 - 5 \sin(x + 2,3)$ |
| b $g(x) = 7 + 3 \sin(x + \frac{3}{5}\pi)$ | d $g(x) = -2,7 - 1,6 \sin(x + 0,2\pi)$ |

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-3.

T-4 Bepaal van de volgende sinusoiden de amplitude, de periode, de evenwichtsstand en de coördinaten van een beginpunt.

- | | |
|---|--|
| a $y = -3 + 7 \sin(\frac{1}{2}(x + \frac{3}{4}\pi))$ | c $y = -0,23 + 0,65 \sin(0,4\pi x)$ |
| b $y = 7 + 3 \sin(4(x + 4))$ | d $y = -\frac{7}{12} + \frac{1}{3} \sin(\frac{1}{4}\pi(x + 4,5))$ |

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-4.

T-5 Iemand zit in een reuzenrad dat met een constante snelheid draait. Zijn hoogte ten opzichte van de grond wordt gegeven door de formule $H = 13 + 12 \sin(4\pi(t - 0,125))$.

Hierin is H de hoogte in meters en t de tijd in minuten.

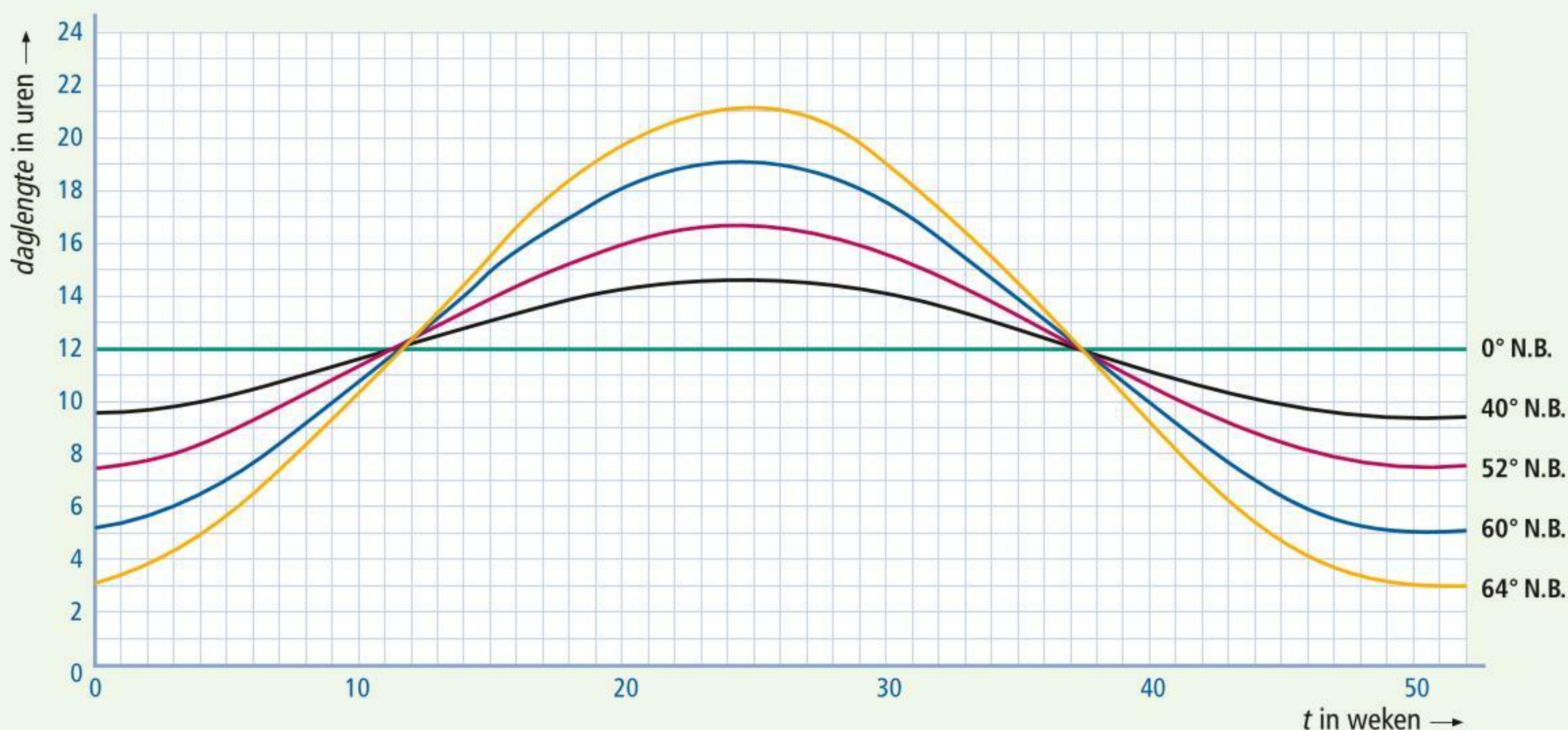
- a** In hoeveel seconden draait het rad precies één keer rond?
- b** Op welke hoogte stapt de persoon in?
- c** Hoe hoog komt de persoon maximaal?
- d** Bereken op welke hoogte de persoon zich 10 seconden na het instappen bevindt.
- e** Geef de formule als de tijd niet in minuten maar in seconden wordt gegeven.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-4.

- T-6** Hiernaast is een sinusöide gegeven.
- a** Bereken de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van de sinusöide.
 - b** Geef een formule bij de grafiek.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-5.*



- T-7** In de figuur is de daglengte weergegeven voor een plaats op de evenaar en voor vier plaatsen op het noordelijk halfrond. Op de horizontale as is de tijd t in weken uitgezet met $t = 0$ op 1 januari en op de verticale as de daglengte d in uren.



- a** Wat is de maximale daglengte op 60° NB en wanneer wordt deze bereikt?
- b** Voor welke waarden van t is de daglengte voor alle breedtegraden gelijk? Welke bijzondere dagen zijn dat?

Uitgaande van 52 weken in een jaar kun je de daglengte d benaderen met de formule $d = 12 + a \cdot \sin(0,1208 \cdot t)$ met t het aantal weken na 21 maart.

- c** Op welke dag neemt de daglengte het sterkst toe?
- d** Leg uit dat uit de formule volgt dat de periode 1 jaar is.
- e** Welke waarde van a geldt voor het midden van Nederland (52° NB)?
- f** Los op voor Nederland: $d = 16$. Wat is de praktische betekenis van het antwoord?
- g** Geef de formule voor de daglengte bij een plaats op 64° NB als de tijd t gemeten wordt in dagen en $t = 0$ op 1 januari wordt genomen.

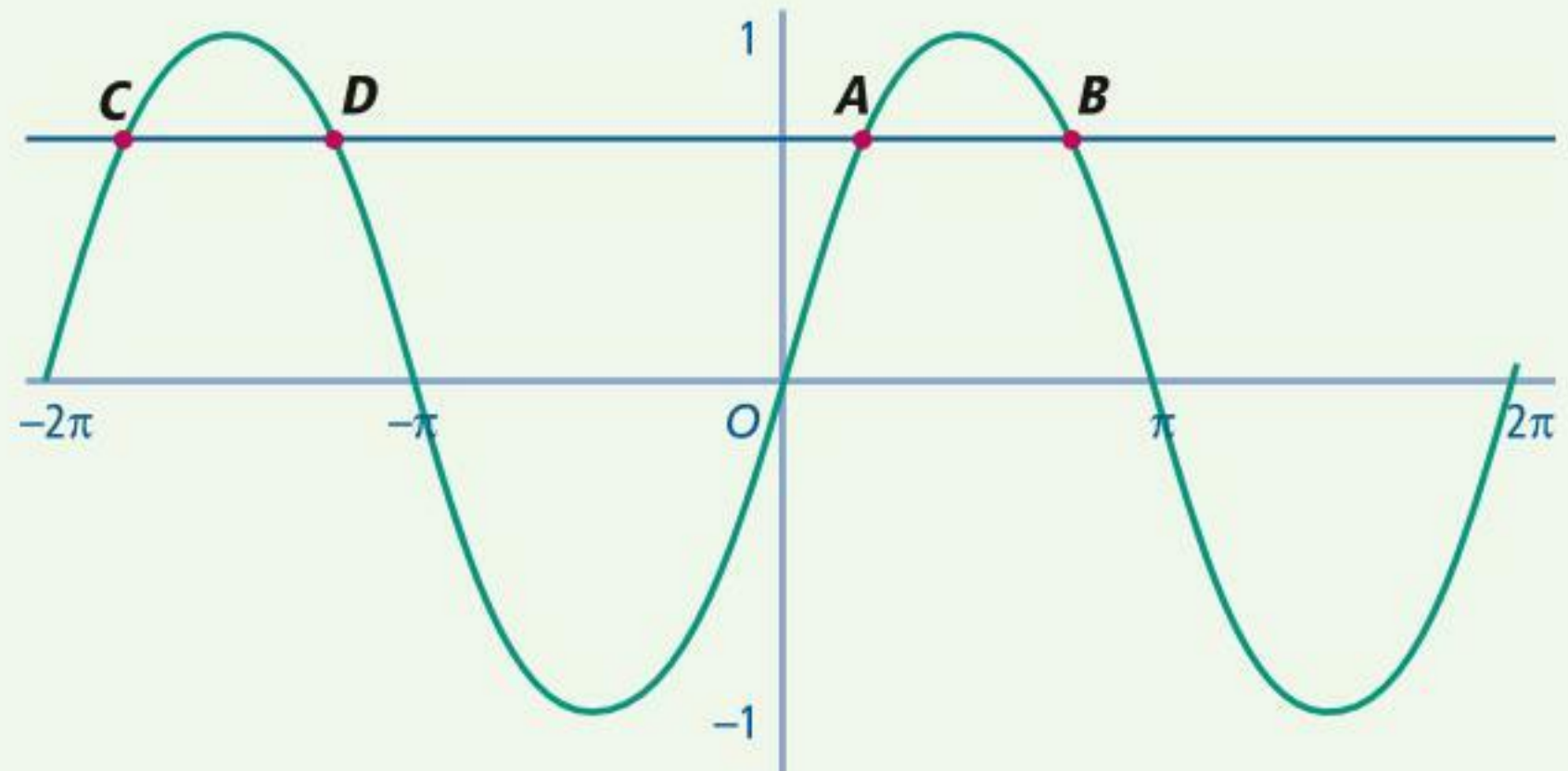
Extra oefening - Basis

- B-1** De grafiek van $y = \sin(x)$ en de lijn $y = 0,7$ snijden elkaar op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ in de punten A , B , C en D .

Het punt A heeft x -coördinaat $0,78$.

Geef met behulp van de eigenschappen van de sinusgrafiek de x -coördinaten van de punten B , C en D .

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-1.



- B-2** Geef van de volgende functies de amplitude en de periode en schets de grafiek.

a $f(x) = -3,4 \sin(1,5x)$

b $f(x) = 4 \sin(\pi x)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-2.

- B-3** Een formule die bij benadering de hoeveelheid lucht in de longen weergeeft tijdens het hardlopen, is $V = 2,3 + 1,2 \sin(1,1\pi t)$. Hierin is V de hoeveelheid lucht in de longen in liters en t de tijd in seconden.

a Hoelang duurt één ademhaling?

b Hoeveel lucht zit er maximaal in de longen? Geef drie tijdstippen waarop dat het geval is.

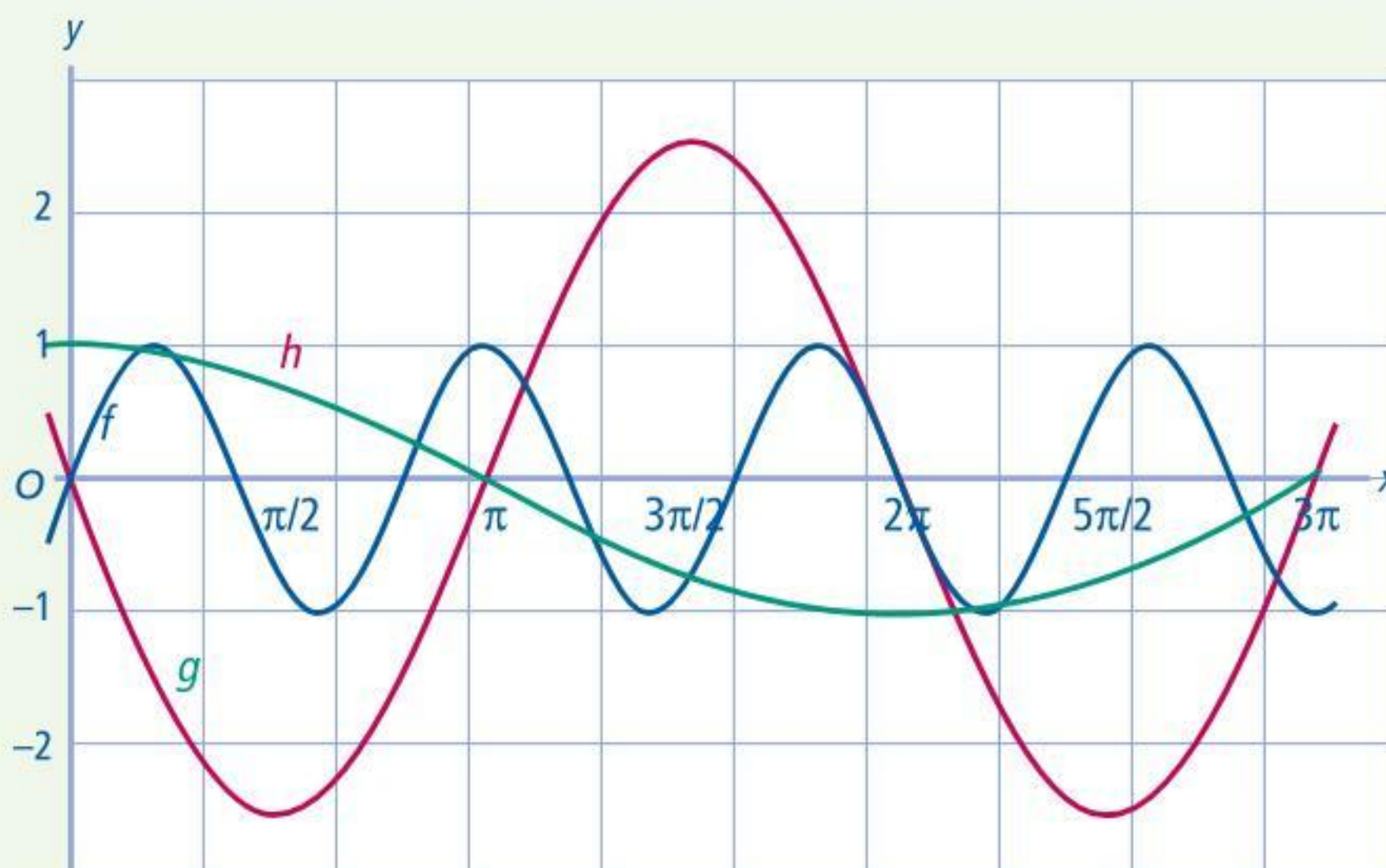
c Bereken gedurende hoeveel tijd per periode er minder dan 2 liter lucht in de longen zit.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-3.

- B-4** Een sinusöide heeft vergelijking $y = 9 + 5 \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\left(x - \frac{2}{3}\right)\right)$. Beredeneer wat de coördinaten zijn van de toppen op het interval $[0, 2]$.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-4.

- B-5** Hieronder zie je de sinusöiden f , g en h .

a Geef een formule bij de sinusöiden van f en van g .



b De sinusöide h wordt 2 naar links geschoven en 1,5 omhoog. Geef een formule bij de sinusöide die is ontstaan.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-5.

Extra oefening - Gemengd

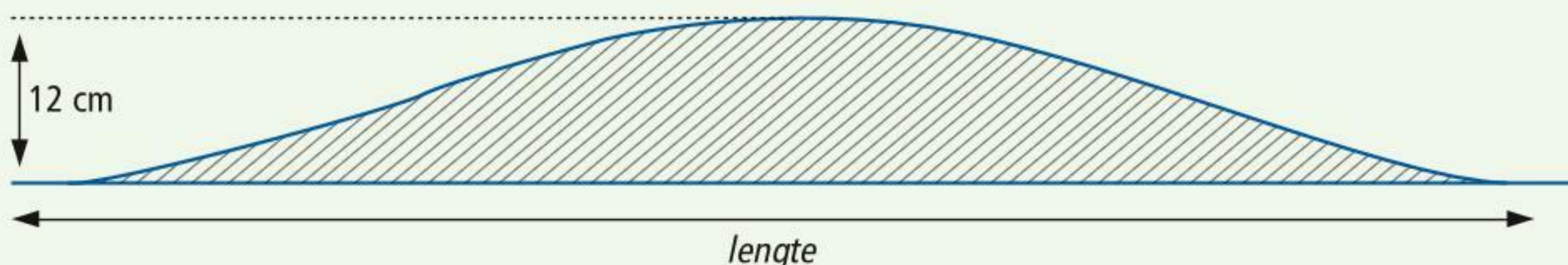
- G-1** De uitwijking van een trillende veer kan door een sinusfunctie worden benaderd. Bij een bepaalde veer kan de uitwijking u in centimeters na t seconden worden benaderd door de formule $u = 5 \sin(\pi t)$.
Beredeneer op welke tijdstippen gedurende de eerste 4 seconden van de trilling de uitwijking gelijk is aan 2,5 cm.



Hierboven is van 5 mei 2003 de getijdenkromme getekend van het K13A Platform dat voor de Nederlandse kust is gelegen. Hiernaast staat een aantal gegevens in een tabel. De waterstand kan redelijk goed beschreven worden door de formule $H = d + a \sin(b(t - c))$. Hierin is H de waterhoogte ten opzichte van het NAP in cm en t de tijd in uren na 00.00 uur op 5 mei 2003.

hoog en laagwater		
04.10	LW	-78 cm
10.14	HW	58 cm
16.30	LW	-76 cm
22.45	HW	45 cm

- a** Geef, met behulp van de gegevens uit de tabel en de grafiek, een benadering van de waarden van a , b , c en d .
- b** Bereken met de formule hoelang de waterstand tussen 6.00 uur en 16.00 uur boven 20 cm is gekomen. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.
- G-3** Het zijaanzicht van een verkeersdrempel heeft de vorm van een sinusoïde waarbij de volgende formule is opgesteld: $h = 0,06 + 0,06 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1)\right)$. Hierin is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.



- a** Bereken hoeveel meter de lengte van deze drempel is.
- b** De helling van de drempel is niet overall even groot. Hoeveel meter van het begin van de drempel ligt het eerste punt waar de drempel maximale helling heeft?

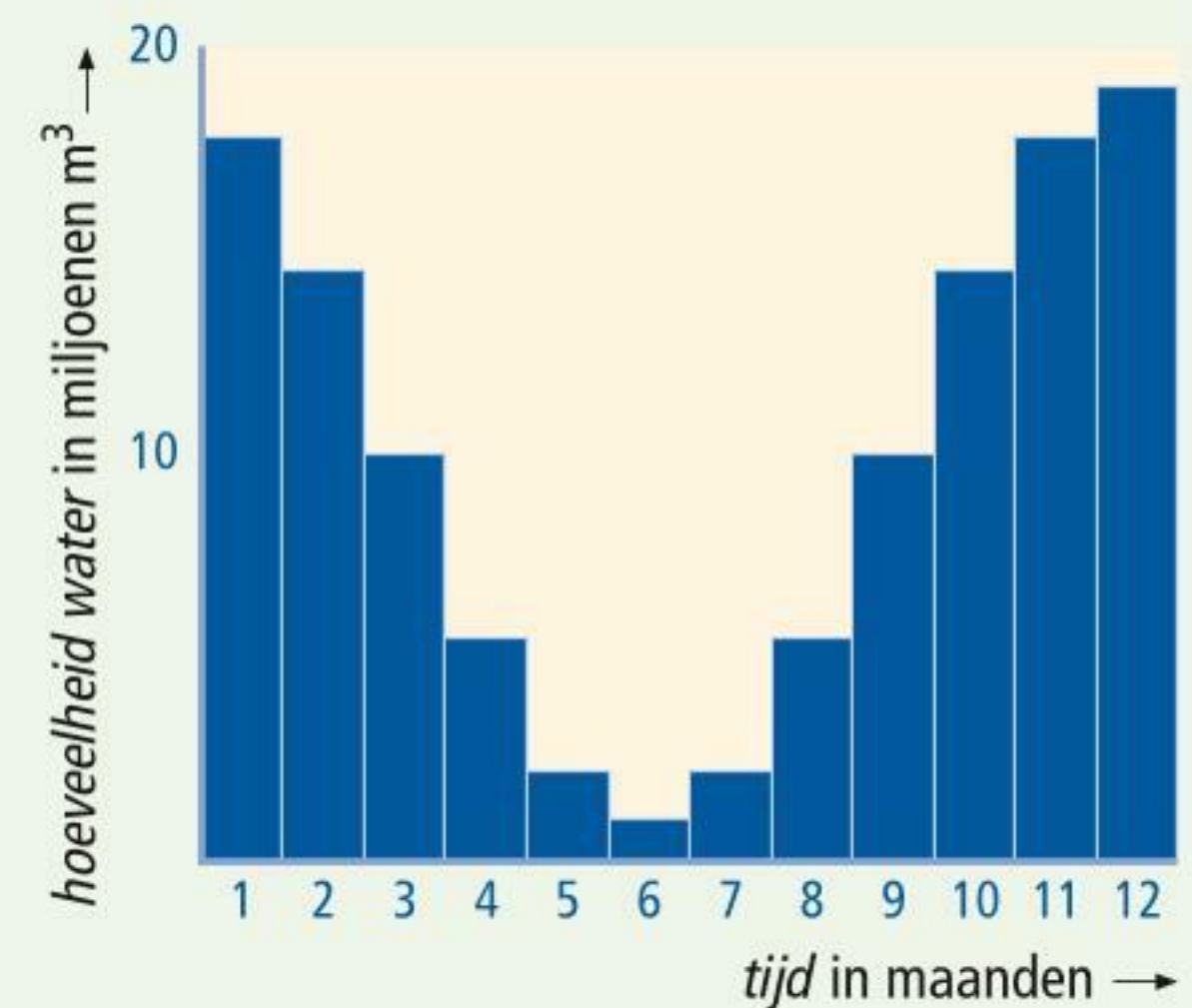
Uitdagende opdrachten

- U-1** Als de punt van de grote wijzer van de klok, die je hiernaast op de foto ziet, op zijn laagste punt zit, is hij 2,8 meter boven de grond. Op zijn hoogste punt is dat 3,6 meter. De kleine wijzer heeft een lengte die gelijk is aan de helft van de grote. Als je de hoogte van de uiteinden van de wijzers van de klok ten opzichte van grond uitzet tegen de tijd in uren, ontstaan twee sinusoiden.

- Stel formules op bij deze twee sinusoiden. Neem hierbij het tijdstip $t = 0$ op 00.00 uur.
- Hoe vaak passeert de grote wijzer de kleine wijzer gedurende een etmaal?

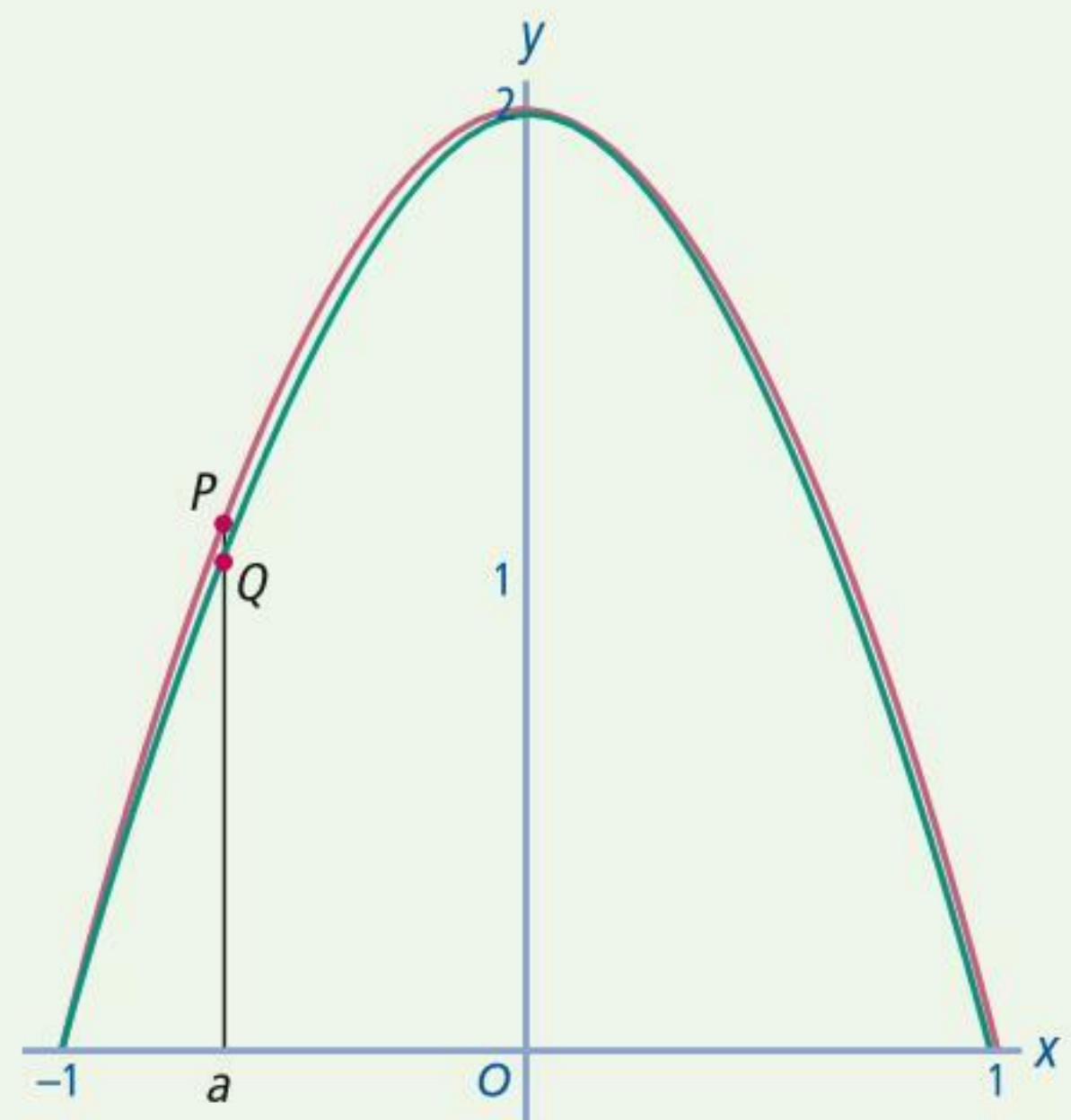


- U-2** De hoeveelheid regenwater die jaarlijks per maand in een gebied rond een bepaald dorp valt is gedurende een groot aantal jaren gemeten. Hiernaast is in een staafdiagram de gemiddelde hoeveelheid regen per maand weergegeven. De gemiddelde hoeveelheid regen per maand kan benaderd worden met de formule $r = 10 + 9 \sin\left(\frac{1}{6} \pi (t + 3)\right)$.



- Niet ver van dit dorp is een stuwmeer aangelegd. Van het regenwater uit het gebied rond het dorp bereikt 40% het meer één maand later. Geef een formule voor de hoeveelheid regenwater s die het stuwmeer maandelijks vanuit dit gebied bereikt.
- Welke hoeveelheid water is groter, de hoeveelheid neerslag in juni of de hoeveelheid regenwater die in juni het meer bereikt?

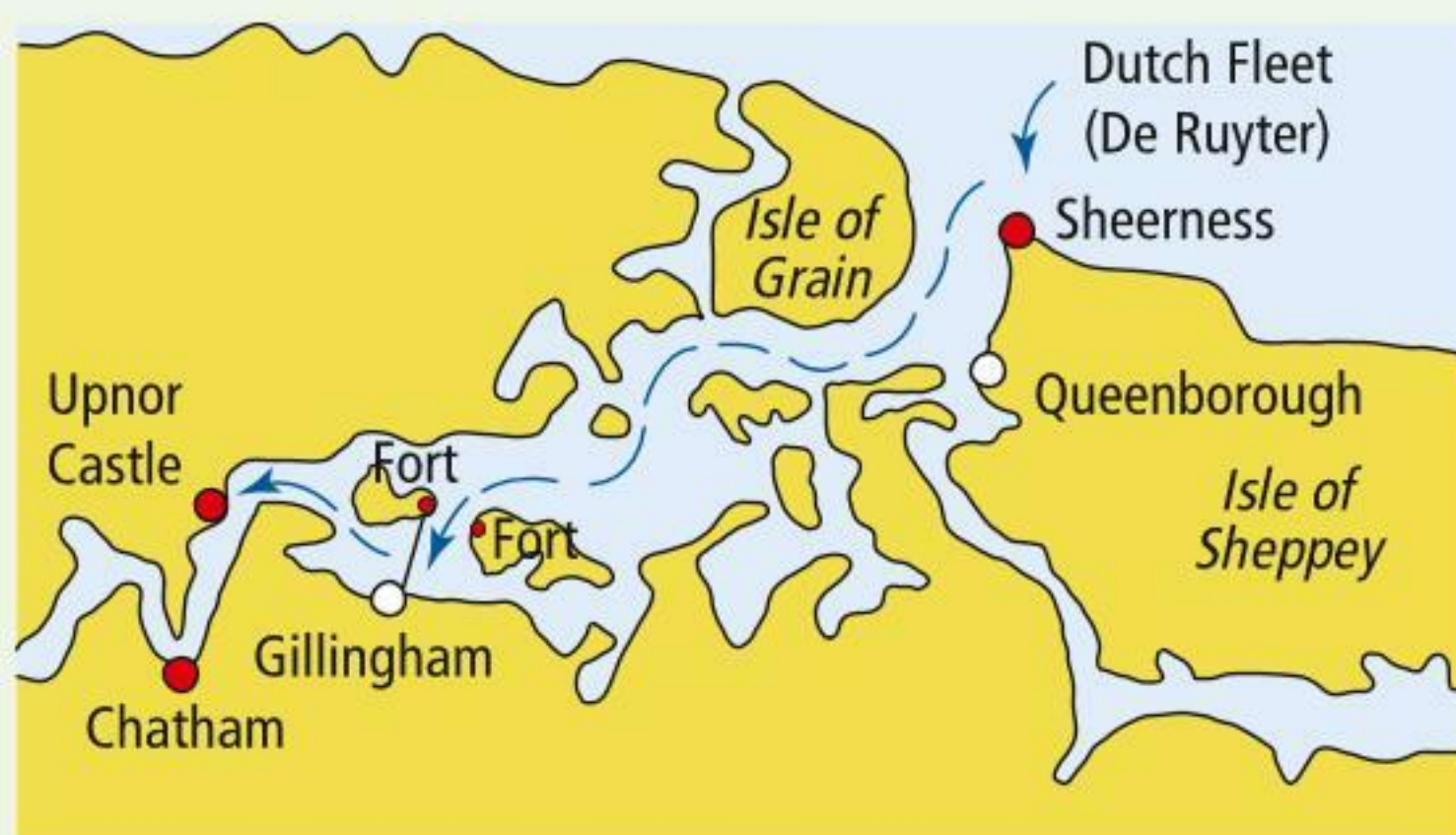
- U-3** Door de punten $(-1, 0)$, $(1, 0)$ en $(0, 2)$ gaat een parabool en een sinusoid met evenwichtsstand $y = 0$. Hiernaast zie je op het interval $[-1, 1]$ deze twee getekend. De beide figuren vallen vrijwel samen.



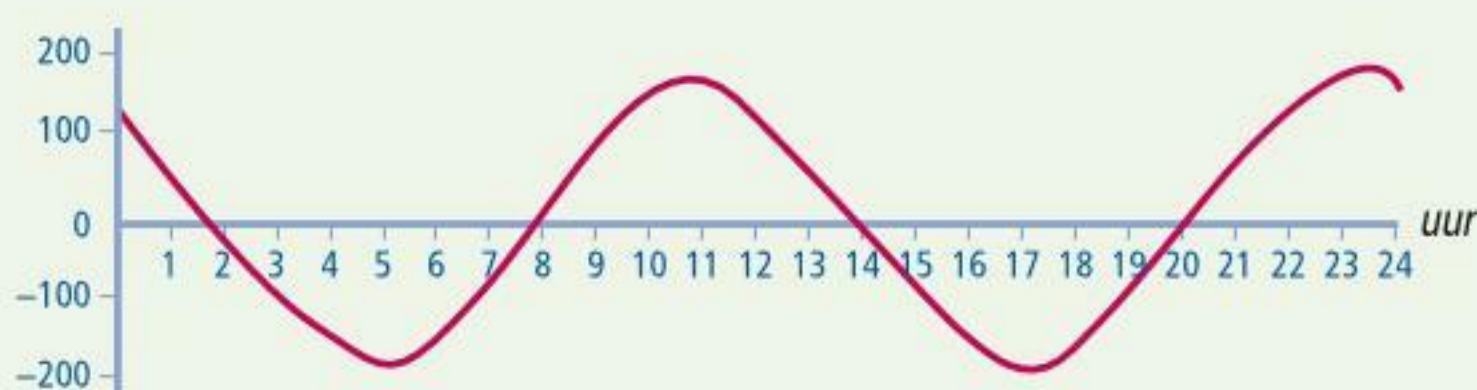
- De lijn $x = a$ snijdt de grafieken in de punten P en Q .
- Ligt punt P op de parabool of op de sinusoid?
 - Bij welke waarden van a is de afstand PQ het grootst?

Tocht naar Chatham

Vanaf 1665 waren Nederland en Engeland in oorlog. De vredesonderhandelingen in 1667 in Breda werden door de Engelsen vertraagd om te trachten zoveel mogelijk voordeel te halen. Doordat in 1665 Engeland getroffen werd door de pest en in 1666 Londen gedeeltelijk in de as werd gelegd door een grote brand, was de situatie van de Engelse staatskas slecht. De vloot werd daarom grotendeels 'op de wal gelegd', onder andere bij het plaatsje Chatham, gelegen aan de Medway, een zijrivier van de Thames. Bij Gillingham, in de buurt van Chatham, hadden de Engelsen een ketting over de rivier gespannen om eventuele aanvallers tegen te houden. Raadspensionaris Johan de Witt vatte het plan op om de Engelse vloot in de havens aan te vallen.



Op zondag 19 juni 1667 ging het Nederlandse eskader onder leiding van Michiel de Ruyter onder zeil. De volgende dag werd de monding van de Thames bereikt. De schepen moesten in de bochtige rivier naast zandbanken en windrichting vooral rekening houden met het getij. In de Noordzee geldt een dubbel daags getij. Twee maal per dag bereikt het water een hoogste stand en een laagste stand. De getijden in de Thames-delta waren toen al nauwkeurig in kaart gebracht. Hieronder staat de getijkromme van maandag 20 juni 1667.



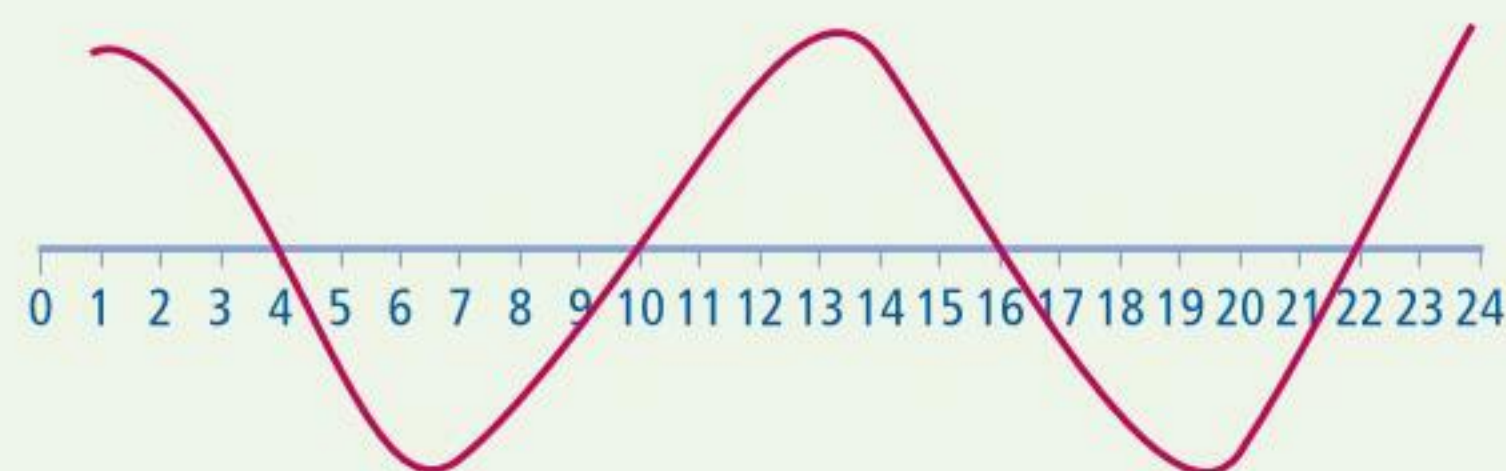
De grafiek geeft de diepte van het water aan ten opzichte van het gemiddelde zeeniveau, het N.A.P. (Normaal Amsterdams Peil). In de grafiek is dat de evenwichtsstand. Ook bij de laagste stand was er voldoende diepte om de rivier op te varen, mits de wind uit de goede richting kwam. Veel belangrijker was de getijdenstroom. Van middernacht tot iets na vijven daalde de waterstand en stroomde het water met grote snelheid naar zee. Ook al stond de wind goed, het was dan niet mogelijk om bij deze tegenstroom de rivier op te zeilen.

Opdracht

De vloot ging die middag weer onder zeil bij 'stil van laag'.

Wat betekent deze uitdrukking en op welk tijdstip zeilde het eskader de rivier op?

Hieronder staat de getijkromme van 22 juni 1667. In de loop van deze dag doorbrak kapitein Jan van Brakel met zijn schip 'De Vreede' de versperring bij Gillingham.



Opdracht

In welke periode kan hij dat gedaan hebben?

Na de doorbraak werden diverse Engelse schepen bij Upnor Castle veroverd. Op vrijdag 24 juni voer de Ruyter met zijn buit richting zee.

Opdracht

De getijkromme op deze dag verschilt niet veel met die van hierboven.

Gedurende welke perioden heeft hij die dag nut van het getij gehad?

Na de overwinning van de Ruyter werden de Engelse onderhandelaars in Breda veel soepeler en op 31 juli 1667 werd de vrede getekend.



Kraslot winstgevend?

Bij het kraslotenspel Contante Koe koop je een kraslot voor € 2,-. Je moet alle zes vakjes openkrassen. Bij elk vakje is de kans op een koe gelijk aan $\frac{1}{6}$. In de tabel hieronder staat het bedrag dat je krijgt uitbetaald bij het krassen van een aantal koeien.

<i>aantal koeien</i>	0	1	2	3	4	5	6
<i>bedrag in euro's</i>	0	1	2	5	25	250	25000

Jonneke beweert dat de kans dat je bij een lot iets krijgt uitbetaald groter is dan 60% en dat het dus voordelig is om veel van deze loten te kopen. Ben je het met haar eens?

Hoofdstuk 4

Toevalsvariabelen

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	86
4-1	Stochasten	88
4-2	Standaardafwijking van een stochast	90
4-3	Normale verdeling	92
4-4	Rekenregels voor stochasten	94
4-5	De $\sqrt{n}$ -wet	96
4-6	Gemengde opdrachten	98
	Samenvatting	100
	Test jezelf	102
	Extra oefening - Basis	104
	Extra oefening - Gemengd	105
	Uitdagende opdrachten	106
	Intelligentiequotiënt	107

Voorkennis

- V-1** Victor en Anton spelen geregeld een partij schaak tegen elkaar. Gemiddeld wint Victor zeven van de twintig partijen en Anton negen van de twintig partijen.
- Bereken de kans dat een partij eindigt in remise.
 - Bereken de kans dat Victor de eerstkomende vier partijen wint.
 - Bereken de kans dat Anton van de eerstkomende vijf partijen geen één weet te winnen.
 - Degene die een partij wint, krijgt 1 punt. Eindigt een partij in remise, dan krijgen beide spelers $\frac{1}{2}$ punt.

Bereken de kans dat beide spelers na drie partijen evenveel punten hebben.

Theorie

Bij een herhaald kansexperiment met steeds twee mogelijkheden kun je een rooster tekenen. De kans op een gebeurtenis die hoort bij een punt in het **rooster** bereken je door de kans op een route naar dat punt te vermenigvuldigen met het aantal routes.

Bij vragen over ‘hoogstens’, ‘minstens’, ‘meer dan’ of ‘minder dan’ kun je gebruik maken van de **complementregel**: $P(A) = 1 - P(\text{niet-}A)$.

Voorbeeld

Je werpt acht keer met een dobbelsteen.
Bereken de kans dat je drie keer een 4 gooit.

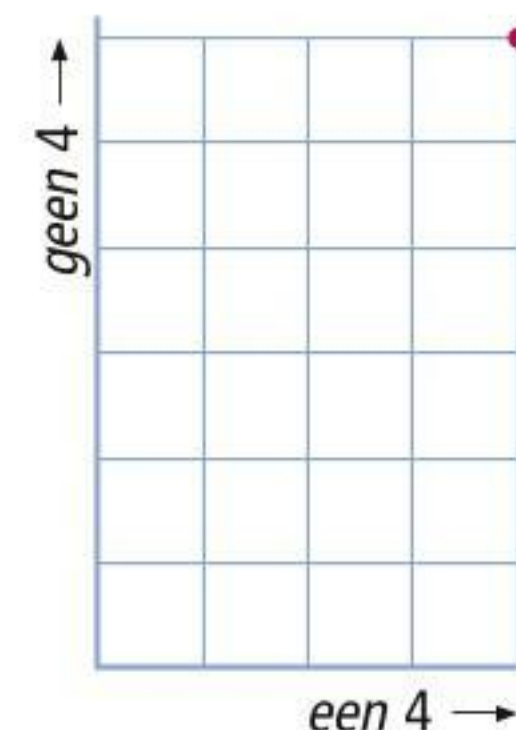
Oplossing

De gebeurtenis ‘drie keer een 4’ komt overeen met het punt (3, 5) in het rooster.

Het aantal routes naar dit punt is $\binom{8}{3} = 8 \text{ nCr } 3 = 56$.

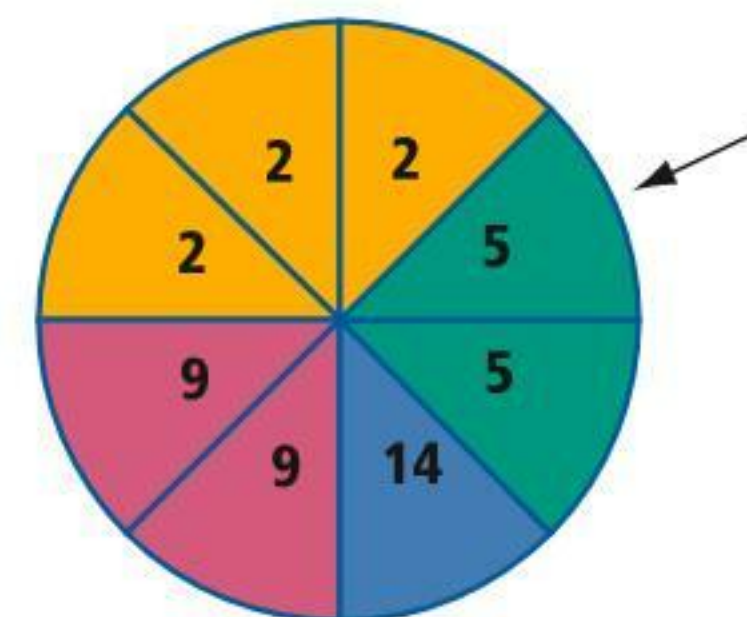
De kans op één van de routes naar dit punt is $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5$.

De gevraagde kans is $56 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,1042$.



- V-2** In een vaas zitten zeven rode en drie witte knikkers. Carolien trekt vijf keer een knikker uit de vaas en legt ze in volgorde van trekking naast elkaar op tafel.
- Bereken de kans op de uitkomst *Rood, Rood, Rood, Wit, Wit*.
 - Bereken het aantal mogelijke rijtjes met drie rode en twee witte knikkers.
 - Bereken de kans op drie rode en twee witte knikkers.
 - Bereken de kans op minstens één witte knikker.
- V-3** Jochum trekt uit de vaas van opdracht V-2 ook vijf keer een knikker, maar nu met terugleggen. Hij noteert na elke trekking de kleur van de getrokken knikker.
- Bereken de kans op de uitkomst *Rood, Rood, Rood, Wit, Wit*.
 - Bereken de kans dat hij drie rode en twee witte knikkers trekt.
 - Bereken de kans dat hij meer rode dan witte knikkers trekt.

- V-4** Een kanstol is verdeeld in acht even grote sectoren. In elke sector staat een getal. De tol wordt gedraaid; de uitslag is het getal dat wordt aangewezen.
- a** Een kansverdeling is een tabel met elke mogelijke uitslag en de bijbehorende kans.
Stel de kansverdeling op.
- b** Als je het experiment 1000 keer uitvoert, hoe vaak kun je dan de uitslag 14 verwachten?
- c** De verwachtingswaarde is de gemiddelde uitkomst die je kunt verwachten als je het experiment heel vaak uitvoert.
Bereken de verwachtingswaarde van de uitslag.



- V-5** Je gaat in de vakantie de bloemen van Jeroen verzorgen. Je hebt zijn sleutelbos met vier sleutels gekregen, maar je bent vergeten welke sleutel van de voordeur is. Je zult ze dus één voor één moeten proberen. Een sleutel die je eenmaal hebt geprobeerd, probeer je niet opnieuw.
- a** Stel een kansverdeling op van het aantal sleutels dat je moet proberen om de voordeur van het slot te krijgen.
- b** Bereken de verwachtingswaarde van het aantal sleutels dat je moet proberen.

- V-6** Iemand gooit met een kubusvormige dobbelsteen met de getallen 1 tot en met 6 en met een viervlaksdobbelsteen met de getallen 1 tot en met 4. Het aantal punten is de som van de geworpen getallen.
- a** Geef de mogelijke uitkomsten van dit experiment.
- b** Geef de kansverdeling van het aantal punten.
- c** Bereken de verwachtingswaarde van het aantal punten.



- V-7** Een aantal studenten heeft aan het begin van hun studie meegedaan aan een deficiëntietoets voor het vak wiskunde. Hiernaast staat bij elk cijfer x het aantal kandidaten f dat dat cijfer heeft gehaald.
- a** Bereken het aantal studenten dat aan de toets heeft meegedaan.
- b** Vul de derde kolom in en bereken het gemiddelde $\bar{x}$ van de behaalde cijfers.
- c** Vul de tabel verder in.
- d** Bereken het totaal van de laatste kolom en deel dat door het aantal deelnemers.
- e** De standaardafwijking is de wortel van het getal dat je bij opdracht d hebt uitgerekend.
Bereken de standaardafwijking.

x	f	$f \cdot x$	$(x - \bar{x})^2$	$f \cdot (x - \bar{x})^2$
4	11	44	...	...
5	23	...	...	...
6	67	...	...	...
7	56	...	...	...
8	21	...	...	...
9	7	...	...	...

4-1

Stochasten

- 1 Uit een vaas met vijf rode en acht blauwe knikkers worden zonder terugleggen drie knikkers gepakt. R is het aantal rode knikkers. In de tabel zie je de mogelijke uitkomsten u van R .
- a Ga met een berekening na dat $P(R = 1) = 0,4895$.
- b Vul de tabel verder in.
- c Bereken de verwachtingswaarde van het aantal rode knikkers in dit experiment.
- 2 Charlotte werpt met twee dobbelstenen. De som van de beide aantallen ogen noemt zij S .
- a Welke waarden kan S aannemen?
- b $P(S = 4)$ betekent: 'de kans dat de som van de ogen gelijk is aan 4'.
Reken na dat $P(S = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
- c Schrijf in woorden op wat wordt bedoeld met $P(S = 2)$ en bereken $P(S = 2)$.
- d Maak een tabel met alle mogelijke uitkomsten u van S en de bijbehorende kansen $P(S = u)$.

uitkomst u	0	1	2	3
$P(R = u)$	...	0,4895	...	...

Theorie

Een variabele waarvan de waarde afhangt van het toeval heet een **toevalsvariabele** of een **stochast**. De uitkomst van stochast X is een getal. Met $P(X = 2)$ wordt bedoeld de kans dat stochast X de waarde 2 aanneemt. Een overzicht met alle mogelijke waarden die een stochast kan aannemen en de bijbehorende kansen heet de **kansverdeling** van die stochast. De gemiddelde waarde van de stochast X die je mag verwachten als het experiment een groot aantal keren wordt herhaald, heet de **verwachtingswaarde** van X . Je noteert dit als $E(X)$.

Voorbeeld

Er wordt drie keer zonder terugleggen een bal getrokken uit een vaas met twee rode en drie witte ballen. De stochast X is het aantal rode ballen in de trekking.
Stel de kansverdeling van X op en bereken $E(X)$.

Oplossing

$$P(X = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{10}$$

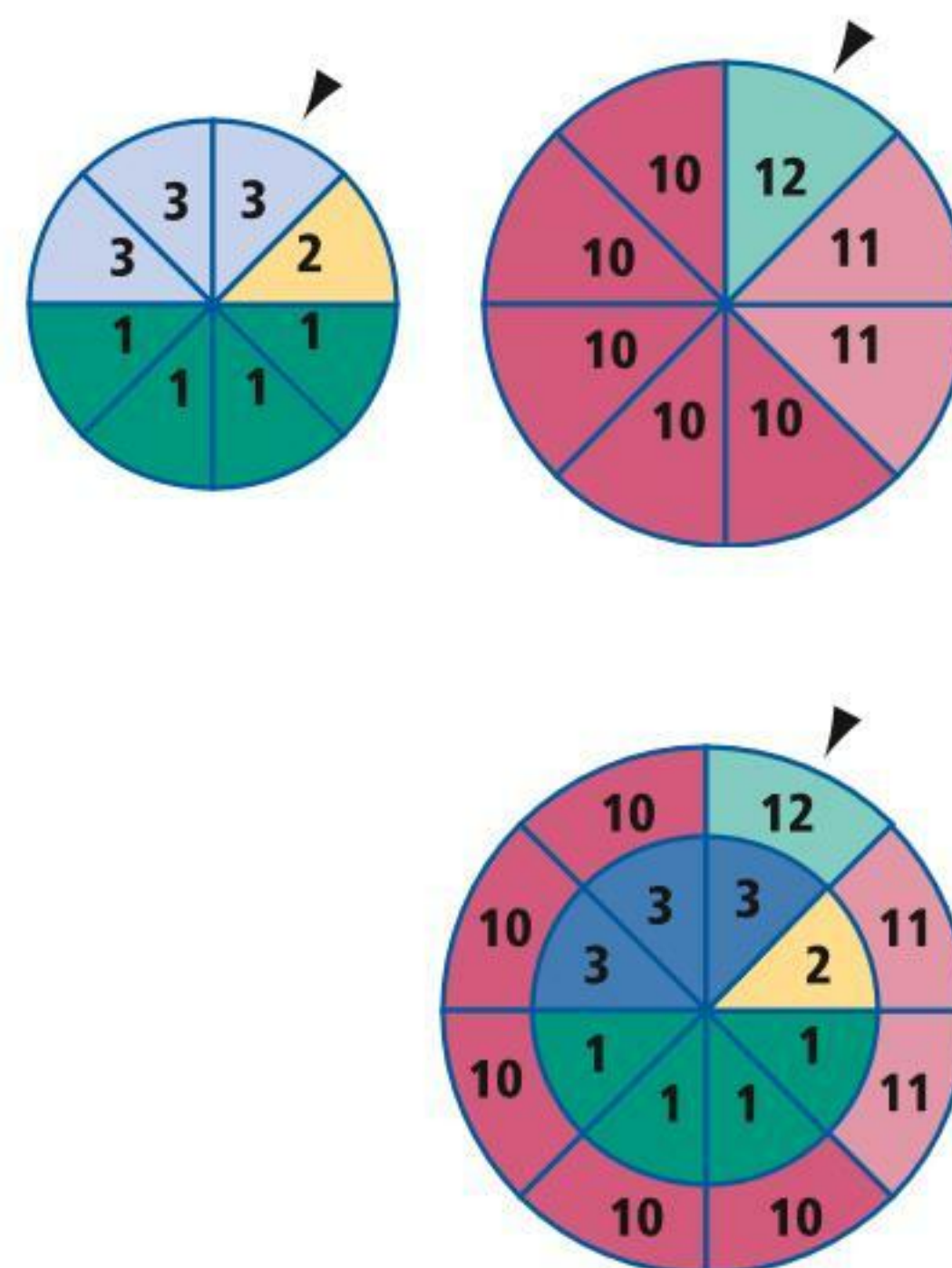
uitkomst u	0	1	2
$P(X = u)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,6 + 2 \times 0,3 = 1,2.$$

- H 3 In een vaas zitten 20 balletjes. Op elf van die balletjes staat het getal 100 gedrukt, op zes het getal 200, op twee het getal 500 en op één het getal 1000. Je trekt willekeurig een bal uit de vaas. De stochast X is het getal op het getrokken balletje.
- a Stel de kansverdeling van X op.
- b Bereken $E(X)$

- H 4** Er wordt met twee dobbelstenen gegooid.
De toevalsvariabele V is het verschil van de aantallen ogen.
- Beschrijf de gebeurtenis $V = 0$. Wat is de kans daarop?
 - Stel de kansverdeling van V op.
 - Bereken de verwachtingswaarde van V .

Een uitkomst of een aantal uitkomsten van een kansexperiment heet een gebeurtenis.



- 5** Hiernaast staan twee schijven getekend. Nadat de schijven zijn gedraaid, is stochast X de uitkomst van de linker schijf en stochast Y de uitkomst van de rechter schijf.
- Bereken $E(X)$ en $E(Y)$.
 - Bereken $P(X = 3)$, $P(Y = 10)$ en $P(X = 3 \text{ en } Y = 10)$.
 - Wat is het verband tussen de antwoorden bij opdracht b?
 - Bereken $P(X = 1)$, $P(Y = 11)$ en $P(X = 1 \text{ en } Y = 11)$.
 - Wat is het verband tussen de antwoorden bij opdracht d?
- 6** De schijven van opdracht 5 worden op elkaar gelijmd zoals hiernaast staat getekend. Na draaiing is stochast U de uitkomst van de kleine en stochast V de uitkomst van de grote schijf.
- Bereken $P(U = 3)$, $P(V = 10)$ en $P(U = 3 \text{ en } V = 10)$.
 - Geldt hier hetzelfde verband als bij opdracht 5c?
 - Bereken $P(U = 1)$, $P(V = 11)$ en $P(U = 1 \text{ en } V = 11)$.
 - Geldt hier hetzelfde verband als bij opdracht 5e?

Theorie

Twee gebeurtenissen A en B heten **onafhankelijk** als gebeurtenis B geen invloed heeft op de kans dat A gebeurt en omgekeerd. Voor onafhankelijke gebeurtenissen A en B geldt: $P(A \text{ en } B) = P(A) \cdot P(B)$. Gebeurtenissen die niet onafhankelijk zijn, heten **afhankelijk**.

Twee stochasten X en Y heten onafhankelijk als voor alle mogelijke uitkomsten a van X en b van Y geldt: $P(X = a \text{ en } Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b)$

- H 7** In het voorbeeld hiernaast is het trekken van een blauwe bal gebeurtenis D .
- Zijn de gebeurtenissen B en D onafhankelijk?
 - Zijn de gebeurtenissen C en D onafhankelijk?
- 8a** Hoe weet je dat in opdracht 5 de stochasten X en Y onafhankelijk zijn?
- b** Uit welke berekening bij opdracht 6 volgt dat de stochasten U en V afhankelijk zijn?
- 9** De linker schijf van opdracht 5 wordt twee keer gedraaid. De stochast S is de som en stochast P is het product van de twee uitkomsten. Ga na of S en P onafhankelijk zijn.

Voorbeeld

In een vaas zitten negen rode en zes blauwe genummerde ballen:
Rood: 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4.
Blauw: 1, 2, 2, 3, 3, 4.
Er wordt één bal getrokken.
Gebeurtenis A is: de bal is rood;
gebeurtenis B is: de bal heeft nummer 3;
gebeurtenis C is: de bal heeft nummer 2.
Ga na of de gebeurtenissen A en B onafhankelijk zijn. Ga dat ook na voor de gebeurtenissen A en C .

Oplossing

$$P(A) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; P(B) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}; P(A \text{ en } B) = \frac{3}{15}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{15}$$

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk.

$$P(A) = \frac{3}{5}; P(C) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}; P(A \text{ en } C) = \frac{1}{15}$$

$$P(A) \cdot P(C) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$$

$$P(A \text{ en } C) \neq P(A) \cdot P(C),$$

Gebeurtenissen A en C zijn afhankelijk.

Standaardafwijking van een stochast

- 10** Volgens het etiket zitten er 100 pepermuntjes in een doosje. In de praktijk blijkt dat gemiddeld wel te kloppen. Ook blijkt dat er afwijkingen voorkomen. Een steekproef van 200 doosjes leverde de volgende frequentieverdeling op.

<i>aantal pepermuntjes</i>	98	99	100	101	102	103
<i>frequentie</i>	4	9	175	8	3	1

- a** Toon aan dat het gemiddelde inderdaad gelijk is aan 100.
b Bereken de standaardafwijking.

Hulpboek 4-6: Centrum- en spreidingsmaten

- 11** Neem aan dat de steekproef van opdracht 10 representatief is geweest.
- a** Wat is de kans dat een willekeurig gekozen doosje 101 pepermuntjes bevat?
- b** Het aantal pepermuntjes in een verpakking kun je opvatten als een stochast X met de volgende kansverdeling.

u	98	99	100	101	102	103
$P(X = u)$	0,020	0,045	0,875	0,040	0,015	0,005

- Bereken $E(X)$.
- c** Bereken de standaardafwijking op de manier van opdracht 10, maar nu met de kansen in plaats van frequenties.
- d** Vergelijk $E(X)$ en de uitkomst van opdracht c met de uitkomsten bij opdracht 10. Waarom zijn deze gelijk?

Net zoals je bij een frequentieverdeling het gemiddelde kunt berekenen, zo kun je bij een kansverdeling de verwachtingswaarde berekenen. Op dezelfde manier als bij een frequentieverdeling kun je bij de kansverdeling van een stochast X een standaardafwijking berekenen. Dit noem je de **standaardafwijking van X** . Je noteert dit als $\sigma(X)$.

Voorbeeld

Bij het werpen met een dobbelsteen is stochast X het aantal geworpen ogen. Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

Oplossing

De verwachtingswaarde is $E(X) = 3,5$.
De standaardafwijking is $\sigma(X) \approx 1,71$.

L1	L2	L3	L4	L5
1	.16667	-----	-----	-----
2	.16667			
3	.16667			
4	.16667			
5	.16667			
6	.16667			
-----	-----			

$L_2(6) = 1/6$

1-Var Stats

$\bar{x}=3.5$
 $\Sigma x=3.5$
 $\Sigma x^2=15.1666667$
 $Sx=$
 $\sigma x=1.707825128$
 $n=1$
 $\min X=1$
 $\downarrow Q_1=2$

- 12** Je werpt drie keer met een zuivere munt. De toevalsvariabele K is het aantal keer dat je kop hebt geworpen.
- Stel de kansverdeling van K op.
 - Bereken $E(K)$ en $\sigma(K)$.
- 13** In een vaas zitten drie rode en tien witte ballen. Je trekt zonder terugleggen ballen uit de vaas tot je een witte bal hebt getrokken. De stochast X is het aantal ballen dat je trekt.
- Welke waarden kan X aannemen?
 - Bereken de kansverdeling van X .
 - Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X .
- 14** Bij een actie van een supermarkt krijg je na besteding van minstens € 25,- een kraslot, waarbij je drie vakjes moet openkrassen. Als je na het openkrassen drie plaatjes van een winkelwagentje hebt gekrast, krijg je € 100,-. Bij twee winkelwagentjes krijg je € 50,- en bij het krassen van één winkelwagentje krijg je € 10,-. De kans dat je een winkelwagentje krast is bij elk vakje 15%.
- Iemand krijgt een lot en gaat krassen.
- Bereken welk bedrag je naar verwachting per kraslot kunt verwachten.
 - Welke standaardafwijking hoort hierbij?
- 15** Bij de kanstollen zijn de stochasten X , Y en Z de uitkomsten van respectievelijk de eerste, de tweede en de derde tol.



1



2



3

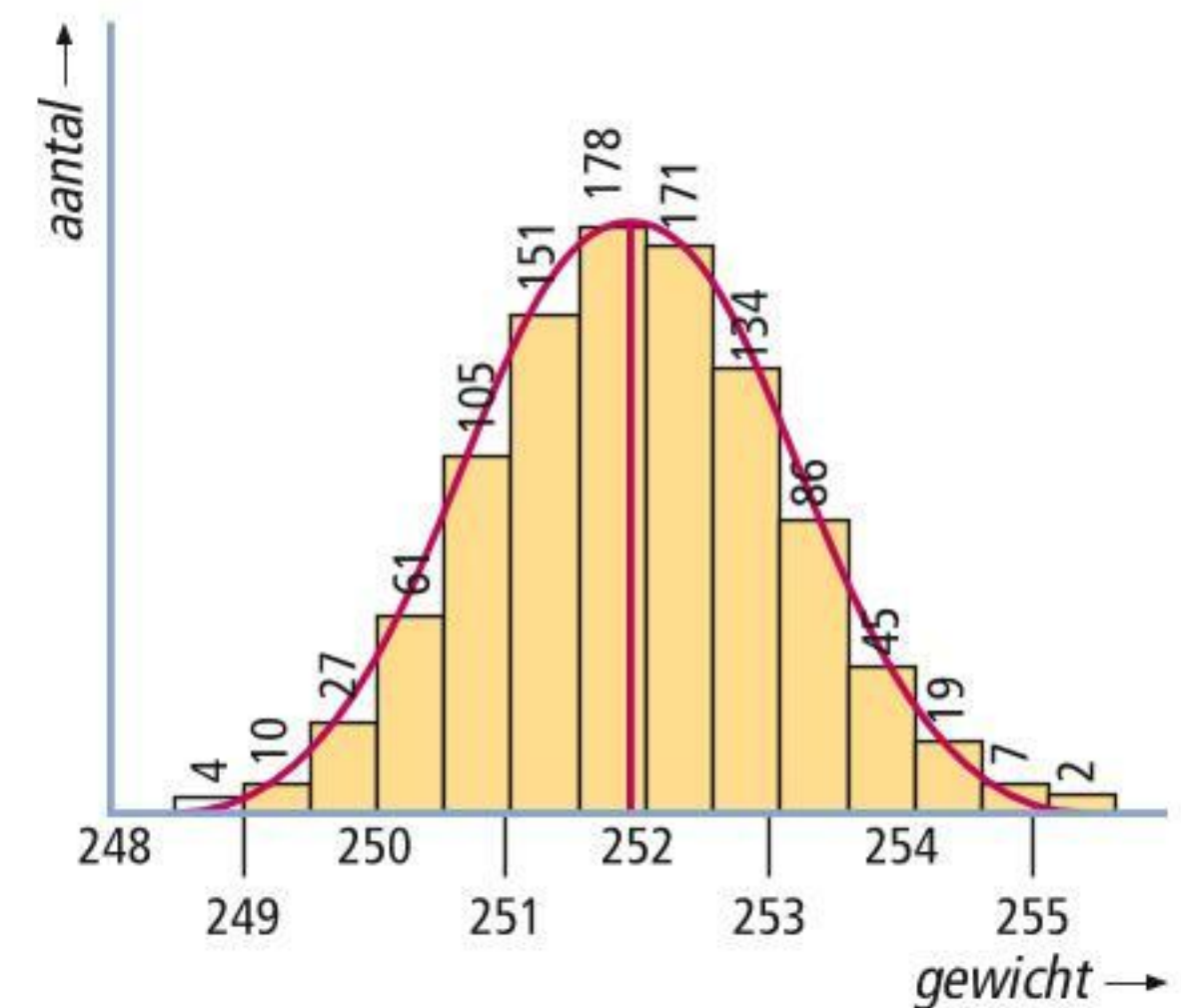
- Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
 - Welke waarden verwacht je voor $E(Y)$ en $\sigma(Y)$? Ga door berekening na of je vermoeden klopt.
 - Welke waarden verwacht je voor $E(Z)$ en $\sigma(Z)$? Ga door berekening na of je vermoeden klopt.
- 16** Je werpt met een zuivere munt zo vaak totdat je twee keer kop of drie keer munt hebt geworpen. De stochast X is het aantal daarvoor benodigde worpen. Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.



4-3

Normale verdeling

- 17** Bij een steekproef van 1000 zakjes geraspte kaas wordt de inhoud nauwkeurig gewogen. In het staafdiagram hiernaast zijn de meetwaarden verwerkt. Het gemiddelde gewicht $\bar{x}$ blijkt 251,9 gram te zijn en de standaardafwijking σ is 1,1 gram.
- Geef een schatting van het aantal zakjes met een gewicht tussen 250,8 en 251 gram.
 - Bereken bij hoeveel procent van de zakjes het gewicht ligt tussen $\bar{x} - \sigma$ en $\bar{x} + \sigma$.
 - Bereken de kans dat een willekeurig gekozen zakje een gewicht heeft tussen $\bar{x} - 2\sigma$ en $\bar{x} + 2\sigma$.
 - Hoe groot is de kans op een zakje met meer dan 253 gram kaas?
 - In de figuur is de best passende klokvorm getekend. Bij welk gewicht ligt de top van de grafiek?

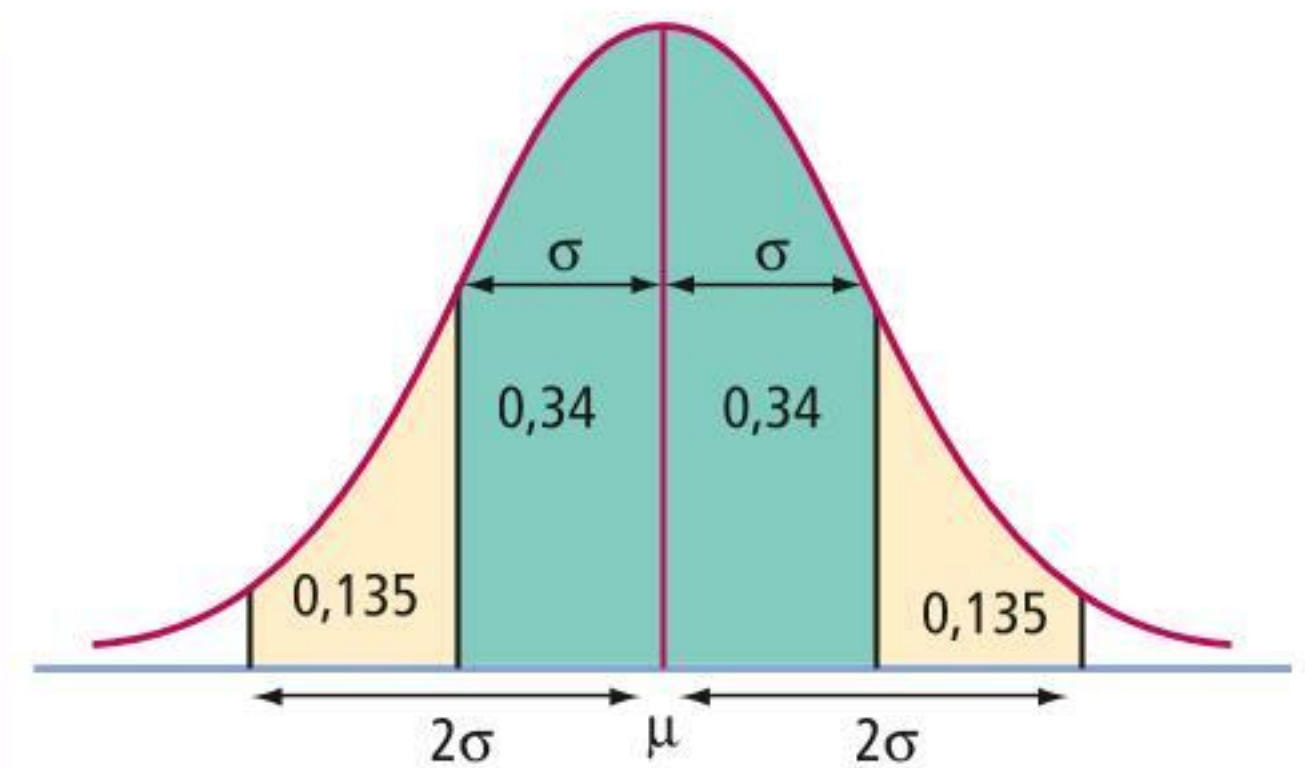


Theorie

De **normale verdeling** is een wiskundig model van de ideale klokvormige verdeling. De verdeling van een normaal verdeelde stochast X wordt volledig bepaald door twee **parameters**: de verwachtingswaarde $E(X) = \mu$ en de standaardafwijking $\sigma(X) = \sigma$.
Je noteert dat als: stochast X is $\text{Norm}(\mu, \sigma)$ -verdeeld.

Er gelden de volgende twee vuistregels:

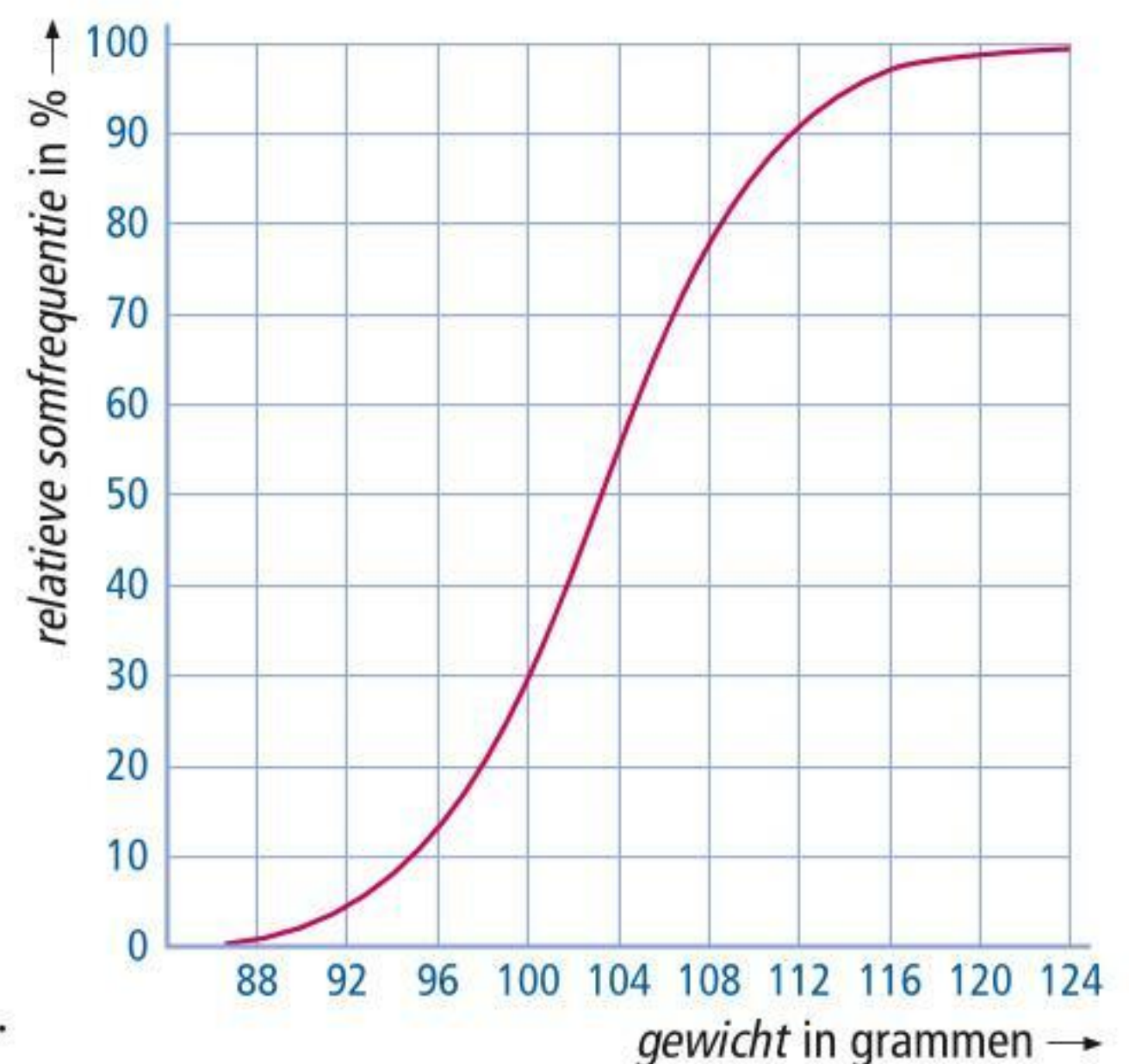
- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$



- 18** Uit een partij sinaasappels worden er willekeurig 250 gekozen en gewogen. Het resultaat van deze metingen staan in de tabel hiernaast.
- Het gewicht van een sinaasappel uit deze partij kun je opvatten als een toevalsvariabele X .
- Teken een staafdiagram bij de tabel.
 - Is het op grond van het staafdiagram redelijk om de kansverdeling van X te benaderen met normale verdeling?
 - Bereken met behulp van de klassenmiddens het gemiddelde en de standaardafwijking. Rond je antwoorden af op één decimaal.
 - Bereken $P(X > 127)$.
 - Bereken $P(X > 115)$.

gewicht	frequentie
[108, 112)	1
[112, 116)	7
[116, 120)	48
[120, 124)	95
[124, 128)	74
[128, 132)	23
[132, 136)	2

- 19** Olijven worden verkocht in potjes. Het uitlekgewicht in grammen van een willekeurig gekozen potje olijven is een stochast X . De stochast X is normaal verdeeld met $\mu = 164,2$ en $\sigma = 5,4$.
- Hoeveel gram olijven zit er minstens in de 2,5% zwaarste potjes?
 - Bij hoeveel procent van de potjes zit het uitlekgewicht tussen 159 en 169,8 gram?
 - Welke van de kansen is groter: $P(159 < X < 161,7)$ of $P(161,7 < X < 164,4)$? Motiveer je antwoord.
- 20** Een student heeft onderzoek gedaan naar het gewicht van Jonagold appels uit een boomgaard. Het resultaat heeft hij verwerkt in de somfrequentiepolygoon hiernaast. Het gewicht G van een Jonagold appel uit deze boomgaard kun je opvatten als een stochast die voldoet aan een normale verdeling.
- Lees uit de grafiek de waarde van $E(G)$ af.
 - Bereken met behulp van de grafiek $P(G < 100)$.
 - Bereken met behulp van de eerste vuistregel en de grafiek de waarde van $\sigma(G)$.
- 21** Op twee scholengemeenschappen in verschillende delen van het land is de lengte van de leerlingen in de brugklas gemeten. Stochast X is de lengte in cm van een brugklasser van school A. X is $\text{Norm}(153,0; 7,8)$ verdeeld. Stochast Y is de lengte in cm van een brugklasser van school B. Y is $\text{Norm}(154,5; 6,8)$ verdeeld.
- Bereken $P(X < 145,2)$.
 - Welke kans is groter: $P(X > 168,6)$ of $P(Y > 168,6)$? Leg je antwoord uit.
 - Van elke school worden willekeurig twee brugklassers gekozen. Bereken de kans dat deze vier leerlingen allemaal kleiner zijn dan het gemiddelde van de brugklassers van hun school.
 - Voor een kennisquiz worden op school B willekeurig vijf brugklassers gekozen. Welke kans is groter? De kans dat alle vijf brugklassers groter zijn dan 160 cm of de kans dat de gemiddelde lengte van de vijf brugklassers groter is dan 160 cm.
- 22** De Stichting Kijkonderzoek (SKO) is verantwoordelijk voor het onderzoek naar het kijkgedrag van de Nederlandse bevolking. Ze hebben onderzoek gedaan naar het kijkgedrag van kinderen tussen 8 en 12 jaar. Eén van de vragen was hoeveel tijd ze tussen 07.00 en 18.00 uur naar de televisie kijken. In een publicatie staat dat deze kijktijd redelijk normaal verdeeld is en dat ongeveer twee derde van deze kinderen tussen de 70 en 120 minuten overdag naar de televisie kijkt. Jordan trekt hieruit de conclusie dat het gemiddelde van deze kijktijd ongeveer 95 minuten is met een standaardafwijking van ongeveer 25 minuten. Hoe komt Jordan aan deze getallen? Leg uit dat hij geen gelijk hoeft te hebben.



4-4

Rekenregels voor stochasten

- 23** In een groot bedrijf zijn de maandsalarissen van het administratieve personeel Norm(1930, 420)-verdeeld. Bij het decembersalaris krijgt elk personeelslid op de administratie een extra beloning van 100 euro.
- a** Stochast S is het normale maandsalaris en stochast D het decembersalaris. Welk verband bestaat er tussen S en D ?
 - b** Welk verband is er tussen $E(S)$ en $E(D)$?
 - c** Leg uit waarom hier geldt: $\sigma(S) = \sigma(D)$.
 - d** Per januari krijgen alle personeelsleden op de administratie een salarisverhoging van 3%. Stochast J is het maandsalaris in januari. Welk verband is er tussen S en J ?
 - e** Welk verband is er tussen $E(S)$ en $E(J)$?
 - f** Waarom is $\sigma(J) = 1,03 \cdot \sigma(S)$?

Theorie

De waarde van een stochast X kan met een constante c worden verhoogd of met een constante c worden vermenigvuldigd. De verwachtingswaarde en de verwachte standaardafwijking wijzigen dan als volgt:

$$\begin{aligned} E(X + c) &= E(X) + c & E(c \cdot X) &= c \cdot E(X) \\ \sigma(X + c) &= \sigma(X) & \sigma(c \cdot X) &= c \cdot \sigma(X) \quad (c > 0) \end{aligned}$$

Voorbeeld

Van de stochast X is bekend dat $E(X) = 16,3$ en $\sigma(X) = 1,7$.
De stochasten Y en Z worden gegeven door $Y = X + 2,1$ en $Z = 5 \cdot X$.
Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van Y en Z .

Oplossing

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X + 2,1) = E(X) + 2,1 = 18,4 \\ \sigma(Y) &= \sigma(X + 2,1) = \sigma(X) = 1,7; \\ E(Z) &= E(5 \cdot X) = 5 \cdot E(X) = 81,5 \text{ en} \\ \sigma(Z) &= \sigma(5 \cdot X) = 5 \cdot \sigma(X) = 8,5. \end{aligned}$$

- 24** Bij een gokspelletje wordt aan de speler nul, één, vijf of tien euro uitgekeerd. Het uitgekeerde bedrag is de stochast U . De kansverdeling van U staat in de tabel hiernaast.
- a** Bereken $E(U)$ en $\sigma(U)$.
 - b** Om het spelletje te mogen spelen, moet de speler drie euro inleggen. De stochast W is de winst die de organisator per spelletje maakt. Wat is het verband tussen $E(U)$ en $E(W)$ en tussen $\sigma(U)$ en $\sigma(W)$?
 - c** Bereken $E(W)$ en $\sigma(W)$.

u	$P(U = u)$
0	0,4
1	0,3
5	0,2
10	0,1

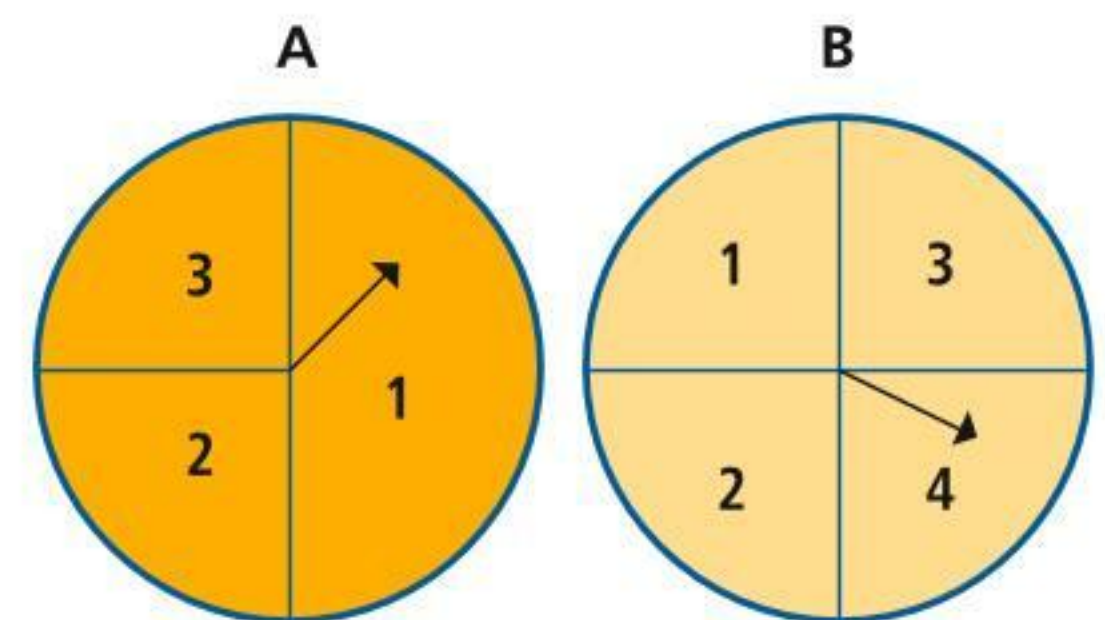
- 25** De temperatuur in graden Celsius in Los Angeles op een dag in augustus is een stochast C waarvoor geldt $E(C) = 25$ en $\sigma(C) = 2,5$.

In de Verenigde Staten meet men de temperatuur vaak in graden Fahrenheit. De in die eenheid gemeten temperatuur is een stochast F . Er geldt $F = 1,8 \cdot C + 32$.

Bereken $E(F)$ en $\sigma(F)$.

- 26** De kanstolletjes hiernaast worden gedraaid. Stochast X is de uitkomst van tolletje A; stochast Y is de uitkomst van tolletje B.

- Zijn X en Y afhankelijke of onafhankelijke stochasten?
- Bereken $E(X)$, $\sigma(X)$, $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.
- De stochast S is de som van beide uitkomsten, dus $S = X + Y$. Geef de kansverdeling van de stochast S .
- Bereken $E(S)$ en $\sigma(S)$.
- Druk $E(S)$ uit in $E(X)$ en $E(Y)$.
- Geldt ook $\sigma(S) = \sigma(X) + \sigma(Y)$?
- Bereken de kwadraten van $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ en $\sigma(S)$. Welk verband bestaat er tussen deze kwadraten?



Theorie

Als X en Y twee stochasten zijn dan geldt $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Als X en Y onafhankelijke stochasten zijn, dan geldt

$$\sigma(X + Y)^2 = \sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2 \text{ ofwel } \sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}.$$

Voorbeeld

Stochast X is normaal verdeeld met $\mu = 25$ en $\sigma = 3$.

Stochast Y is normaal verdeeld met $\mu = 12$ en $\sigma = 1$.

X en Y zijn onafhankelijk.

Bepaal μ en σ van stochast $Z = X + Y$.

Oplossing

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 25 + 12 = 37$$

$$\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} \approx 3,16$$

- H 27** Een discotheekeeigenaar heeft berekend dat het aantal liter cola dat op een avond verkocht wordt normaal verdeeld is met $\mu = 307$ en $\sigma = 31$.

Er wordt ook cola light verkocht en wel met $\mu = 65$ en $\sigma = 12$.

- De eigenaar vindt het voldoende om te weten hoeveel liter cola de middelste 68% van de avonden verkocht wordt. Tussen welke twee waarden schommelt deze vraag?
- Zelfde vraag maar nu voor cola light.
- Hoeveel liter verwacht de eigenaar dat er totaal aan cola (gewoon en light samen) wordt verkocht op een avond?
- Tussen welke twee waarden zal 68% van de totale colaconsumptie liggen?

4-5

De $\sqrt{n}$ -wet

- 28** Bij het werpen met één dobbelsteen is X het aantal ogen van de worp.
- a** Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X .
 - b** Er wordt met twee dobbelstenen geworpen, X_1 en X_2 zijn de aantallen ogen op de twee stenen.
Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $X_1 + X_2$.
 - c** Stochast S is de som van de ogen bij het werpen met drie dobbelstenen.
Bereken $E(S)$ en $\sigma(S)$.

Als je een experiment meerdere keren herhaalt, kun je met de rekenregels uit de vorige paragraaf de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som en van het gemiddelde van de uitkomsten berekenen.

- 29a** Als je met tien dobbelstenen tegelijk gooit, heb je te maken met tien gelijke stochasten: $X_1, X_2, \dots, X_{10}$.
Hoe groot is de verwachtingswaarde en standaardafwijking van elk van deze stochasten?
- b** De stochast S is de som van de ogen van de tien dobbelstenen, dus $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$. Bereken $E(S)$.
 - c** Neem over en vul in: $\sigma(S) = \sqrt{\sigma(X_1)^2 + \sigma(X_2)^2 + \dots + \sigma(X_{10})^2}$

$$= \sqrt{10 \cdot \sigma(X)^2} = \sqrt{\dots} \cdot \sqrt{\sigma(X)^2} = \sqrt{\dots} \cdot \sigma(X)$$
Bereken de standaarddeviatie van S .
 - d** Welk verband is er tussen de verwachtingswaarde van S en die van X ?
 - e** Wat is het verband tussen de standaardafwijking van S en die van X ?
- 30** Bij het werpen met twee dobbelstenen is stochast $\bar{X}$ het gemiddelde aantal ogen van de twee dobbelstenen.
- a** Ga na dat $P(\bar{X} = 4) = \frac{5}{36}$
 - b** Stel de kansverdeling van $\bar{X}$ op.
 - c** Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $\bar{X}$.
 - d** Welk verband is er tussen de verwachtingswaarde van $\bar{X}$ en die van X ?
En wat is het verband tussen de standaardafwijking van $\bar{X}$ en die van X ?

Theorie

Zijn $X_1, X_2, \dots, X_n$ onafhankelijke stochasten, elk met dezelfde kansverdeling als X , dan geldt de $\sqrt{n}$ -wet.

- > Voor de som $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ van de uitkomsten geldt:

$$E(S) = n \cdot E(X) \text{ en } \sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$$
- > Voor het gemiddelde $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ van de uitkomsten geldt:

$$E(\bar{X}) = E(X) \text{ en } \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

Voorbeeld

Een kansexperiment met uitkomst stochast X wordt 25 keer herhaald
 $E(X) = 534$ en $\sigma(X) = 43$
 S is de som van de uitkomsten.
 Bereken $E(S)$ en $\sigma(S)$.
 En bereken $E(\bar{X})$ en $\sigma(\bar{X})$.

Oplossing

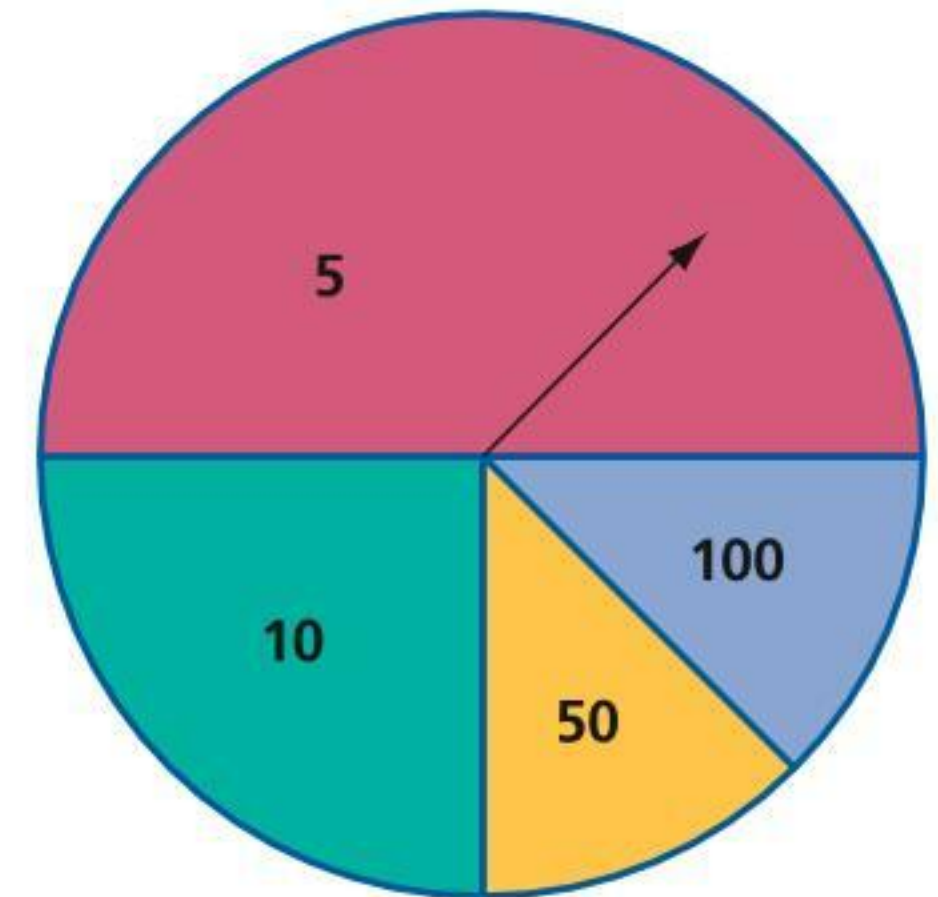
$$E(S) = 25 \times 534 = 13350$$

$$\sigma(S) = \sqrt{25} \cdot 43 = 215$$

$$E(\bar{X}) = 534$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{43}{\sqrt{25}} = 8,6$$

- H 31** De verwachtingswaarde van de uitkomst van de kanstol hiernaast is 23,75; de standaardafwijking is 32,19.
- Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som van de uitkomsten bij vijf keer draaien.
 - Bereken ook de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het gemiddelde van de uitkomsten bij vijf keer draaien.



- 32** Van pakken koffie is het gewicht X in grammen Norm(250, 6)-verdeeld.
 Bij een actie van de Macro koopt iemand tien pakken koffie.
 Stochast T is het gewicht van de tien pakken samen.
 Stochast $\bar{X}$ is het gemiddelde gewicht van de tien pakken.
- Bereken $E(T)$ en $\sigma(T)$.
 - Bereken ook $E(\bar{X})$ en $\sigma(\bar{X})$.

- 33** Een fabrikant vervaardigt kaarsen waarvan de brandduur normaal verdeeld is. Gemiddeld is de brandduur 4 uur, de standaardafwijking is 10 minuten. Hij verpakt de kaarsen in dozen van 25 stuks.
- Bereken de verwachte totale brandduur per doos en de standaardafwijking van de totale brandduur.
 - Bereken de standaardafwijking van de gemiddelde brandduur per kaars uit een doos van 25 stuks.
 - Hoelang branden de 2,5% langst brandende kaarsen van de fabrikant minimaal?



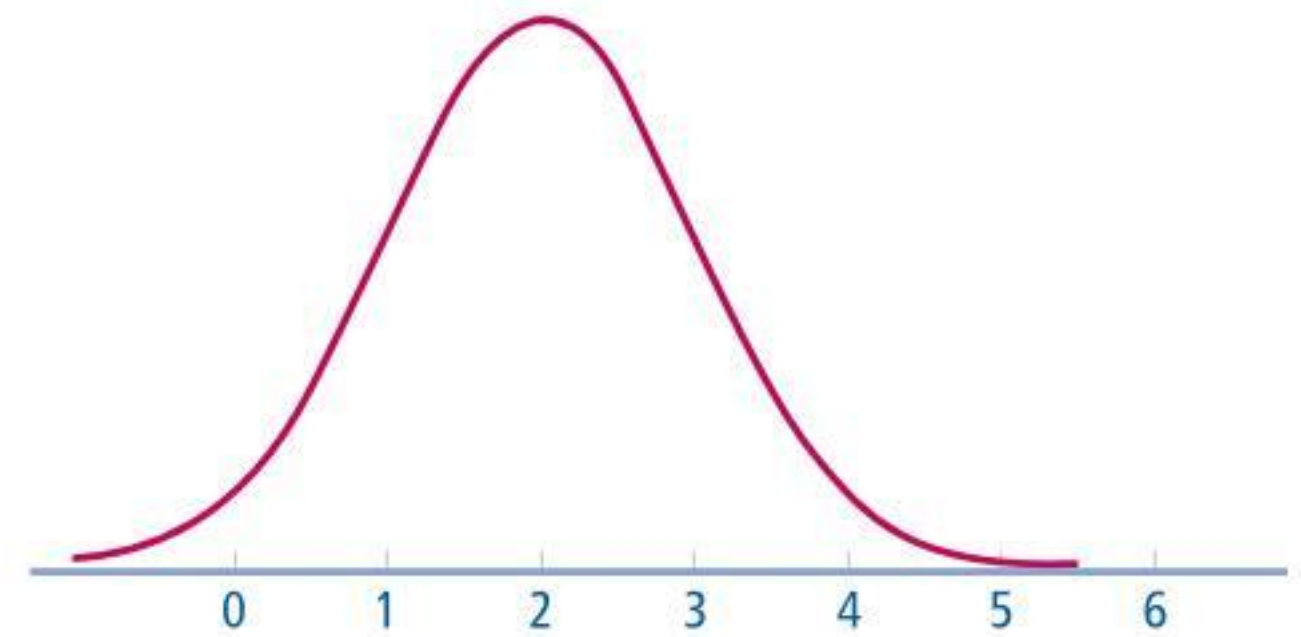
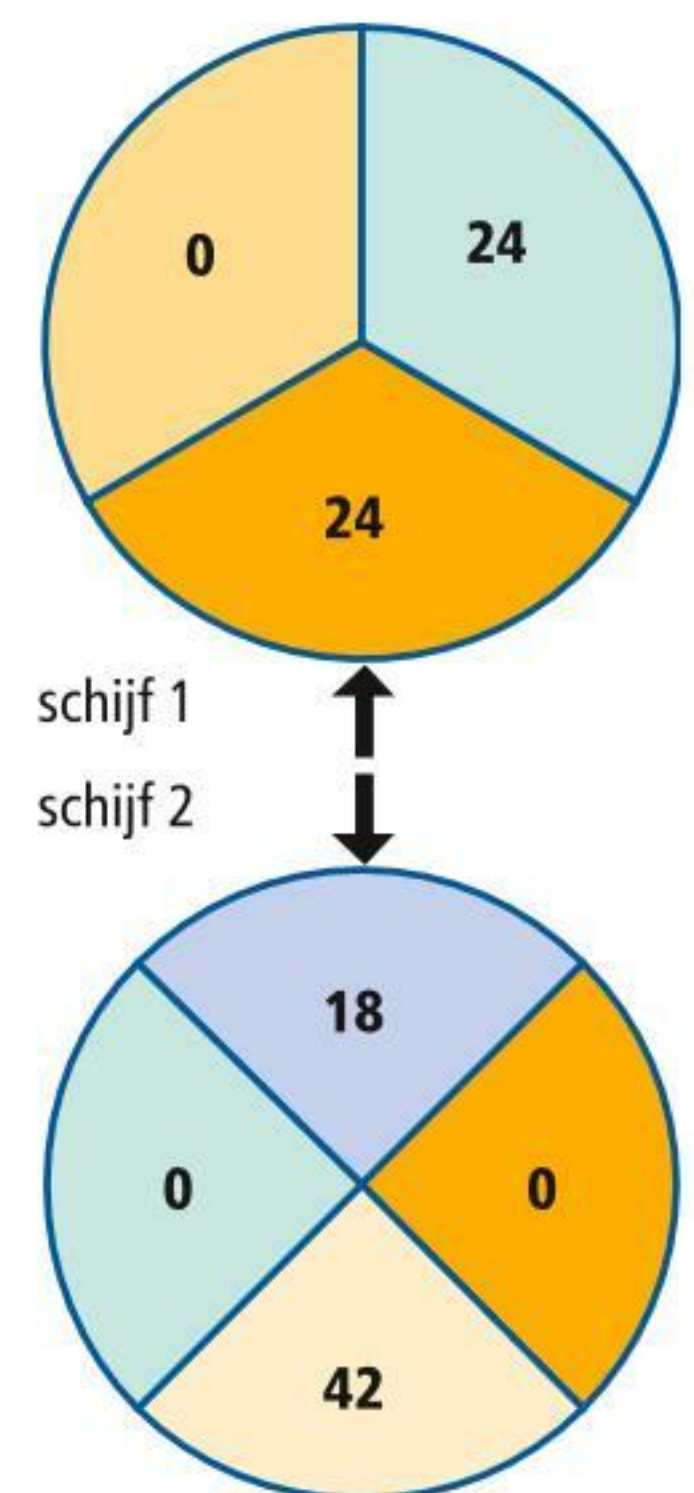
- 34** Een firma produceert klosjes garen. De lengte in meters van de draad op een klosje is Norm (504, 19)-verdeeld.
 De firma verpakt de klosjes in doosjes met een vast aantal.
- Bereken het kleinste aantal waarvoor geldt dat de standaardafwijking van de gemiddelde lengte van de draad van de klosjes in een doos kleiner is dan 2 meter.
 - Bij welk aantal klosjes geldt dat de standaardafwijking van de gemiddelde lengte van de draad met 90% is gereduceerd?

- ☀ 35** Stochast X is het resultaat van het werpen met een dobbelsteen.
 Bij het werpen met twee dobbelstenen zijn X_1 en X_2 achtereenvolgens de aantallen op de twee stenen.
 Leg uit wat het verschil is tussen $2X$ en $X_1 + X_2$.

4-6

Gemengde opdrachten

- 36** Hiernaast staat de grafiek van een kansverdeling met $\mu = 2$ en $\sigma = 1$. Een tweede kansverdeling heeft $\mu = 4$ en $\sigma = 2$.
- Ligt de top van de grafiek van de tweede kansverdeling hoger of lager dan die van de eerste?
 - Neem de grafiek over en schets hierin de grafiek van de tweede kansverdeling.
- 37** In een vaas zitten drie witte en twee rode balletjes. Uit deze vaas worden, zonder terugleggen, balletjes getrokken, totdat er geen rode balletjes meer in de vaas zitten. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal benodigde trekkingen.
- 38** Een gokspel gaat als volgt: een speler kiest één van de getallen 1 tot en met 6. Daarna wordt er drie keer met een dobbelsteen gegooid. Als het door de speler gekozen getal geen enkele keer verschijnt, betaalt hij 50 euro aan de spelleider. Verschijnt het gekozen getal één, twee of drie keer, dan krijgt de speler respectievelijk 50, 100 of 250 euro. De toevalsvariabele X is het aantal keer dat het gekozen getal in de worp voorkomt.
- Bereken de verwachtingswaarde van X .
 - Stel een kansverdeling voor de winst van de speler op.
 - Bereken de verwachte winst van de speler.
- 39** Iemand speelt het volgende spel. Twee schijven, zoals hiernaast zijn afgebeeld, worden onafhankelijk van elkaar aan het draaien gebracht. Zodra de schijven tot stilstand zijn gekomen wordt vastgesteld naar welke getallen de pijlen wijzen. Stochast X is de uitkomst van schijf 1; stochast Y is de uitkomst van schijf 2.
- Bereken $E(X)$ en $E(Y)$.
 - Bereken $\sigma(X)$ en $\sigma(Y)$.
 - De som van de uitkomsten van schijf 1 en 2 wordt aan de speler uitbetaald in euro's. Bereken de verwachte uitbetaling per spel en de standaardafwijking daarvan.
 - Een speler heeft €400,- op zak voordat hij met spelen start. Eén spel, het één keer laten draaien van de beide schijven, kost €32,-. Hij speelt het spel 10 keer. Hoeveel euro heeft hij naar verwachting na die 10 keer spelen op zak?



- 40** Twee kudde runderen zijn op de prairie van Texas door elkaar geraakt. De beide eigenaren Johnson en Jackson besluiten geen poging te doen de dieren weer uit elkaar te halen, omdat ze toch gebrandmerkt zijn en binnenkort voor de slacht weggaan.
- Elke week worden er 30 dieren gevangen en naar de veewagens afgevoerd. Het vangen en sorteren is in 95% van de gevallen in 50 tot 70 minuten geklaard. De overige 5% van de vang- en sorteertijden zijn gelijk verdeeld over langere en kortere vang- en sorteertijden.
- Bij de verrekening tussen Johnson en Jackson van de arbeidskosten van de eerste tien vangsten gaan zij ervan uit dat de totale werktijd $9\frac{1}{2}$ uur is.



- a** Veronderstel dat de vangtijd X normaal verdeeld is en bij elke vangst dezelfde verdeling heeft. Bereken de bijbehorende μ en σ .
- b** Welke verdeling heeft de stochast T van de totale werktijd van tien vangsten? Bereken ook voor stochast T de bijbehorende μ en σ , rond af op 5 minuten.
- c** Hoe groot is de kans dat de totale werktijd inderdaad maximaal $9\frac{1}{2}$ uur is? Gebruik de vuistregels.
- 41** De waardering van proefwerken met vierkeuzevragen is als volgt geregeld.
- 1** Per goed antwoord krijg je 1 punt.
 - 2** De score is de som S van alle punten.
 - 3** Het cijfer C wordt bepaald met de formule $C = \frac{10}{n} \cdot S$ met n het aantal vragen waaruit het proefwerk bestaat.
- a** Leg uit dat deze formule geschikt is om de score S om te rekenen naar een cijfer op een schaal van 0 tot en met 10.

Ga er in deze opdracht van uit dat alle vierkeuzevragen op de gok beantwoord worden en dat de som S en het cijfer C stochasten zijn.

- b** Stel dat het werk uit tien vragen bestaat ($n = 10$). Bereken $E(S)$ en $E(C)$.
- c** Bereken $E(S)$ en $E(C)$ voor $n = 20, 30$ en 40 . Zet de antwoorden in een tabel zoals hiernaast.
- d** Stel weer dat het werk maar uit tien vragen bestaat. Bereken $\sigma(S)$ en $\sigma(C)$.
- e** Vul ook de tweede tabel hiernaast in.
- f** De spreiding van de resultaten van de gokkers bij vierkeuzevragen hangt samen met het aantal gestelde vragen. Omschrijf het verband.

	aantal vragen			
	10	20	30	40
$E(S)$	...	...	...	...
$E(C)$	...	...	...	...

	aantal vragen			
	10	20	30	40
$\sigma(S)$	...	...	...	...
$\sigma(C)$	...	...	...	...

Samenvatting

Toevalsvariabele of stochast, kansverdeling, verwachtingswaarde

Een stochast of toevalsvariabele is een variabele waarvan de getalswaarde afhangt van het toeval. $P(X = 2)$ is de kans dat stochast X de waarde 2 aanneemt.

Een tabel met alle mogelijke waarden die een stochast kan aannemen en de bijbehorende kansen heet de kansverdeling van die stochast. De gemiddelde waarde van de stochast X die je mag verwachten als het experiment een groot aantal keren wordt herhaald, heet de verwachtingswaarde van X . Notatie: $E(X)$.

Voorbeeld

Gegeven is de kansverdeling van een stochast X :

u	10	12	18	25
$P(X = u)$	0,2	0,3	0,4	0,1

$$E(X) = 10 \cdot 0,2 + 12 \cdot 0,3 + 18 \cdot 0,4 + 25 \cdot 0,1 = 15,3$$

Onafhankelijke en afhankelijke gebeurtenissen

Twee gebeurtenissen A en B heten onafhankelijk als $P(A \text{ en } B) = P(A) \cdot P(B)$.

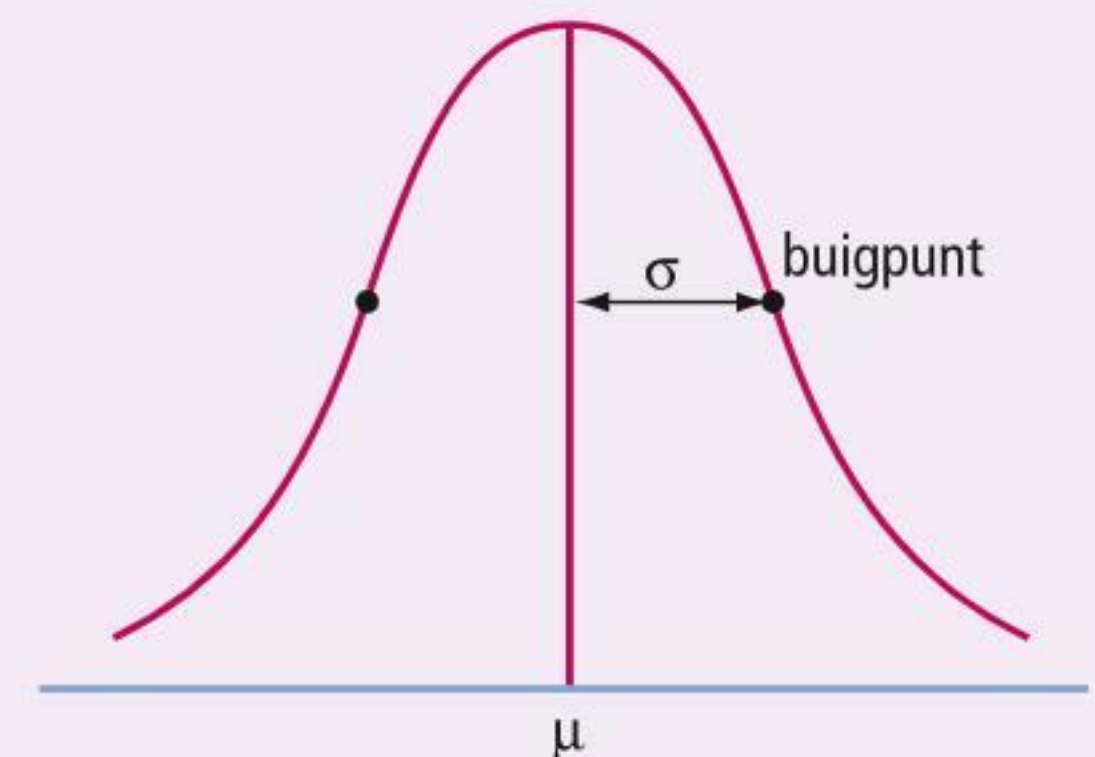
Twee stochasten X en Y heten onafhankelijk als voor alle mogelijke uitkomsten a van X en b van Y geldt $P(X = a \text{ en } Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b)$. Gebeurtenissen en stochasten die niet onafhankelijk zijn, heten afhankelijk.

Standaardafwijking, standaarddeviatie

Zoals je bij een frequentieverdeling een standaardafwijking of standaarddeviatie kunt berekenen, kun je bij een kansverdeling van een stochast de standaardafwijking van die stochast berekenen. Notatie: $\sigma(X)$.

Normale verdeling, parameters

De normale verdeling van een stochast X is een wiskundig model van de ideale klokvormige verdeling. De verdeling van X wordt bepaald door twee parameters: de verwachtingswaarde $E(X) = \mu$ en de standaardafwijking $\sigma(X) = \sigma$. Je noteert dat als: de stochast X is Norm(μ , σ)-verdeeld.



Rekenregels voor stochasten

$$E(X + c) = E(X) + c$$

$$E(X \cdot c) = c \cdot E(X)$$

$$\sigma(X + c) = \sigma(X)$$

$$\sigma(X \cdot c) = c \cdot \sigma(X)$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2} \quad (\text{als } X \text{ en } Y \text{ onafhankelijke stochasten zijn})$$

De $\sqrt{n}$ -wet

Voor de som S van n onafhankelijke stochasten $X_1, X_2, \dots, X_n$, elk met dezelfde kansverdeling als X geldt: $E(S) = n \cdot E(X)$ en $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$.

Voor het gemiddelde $\bar{X}$ geldt: $E(\bar{X}) = E(X)$ en $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

Je kunt de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een stochast berekenen

Om dit te berekenen moet je eerst een kansverdeling opstellen.

Voorbeeld

Trek aselekt zonder terugleggen na elkaar vier knikkers uit een vaas met drie rode en zeven witte knikkers. Stochast Y is het rangnummer van de trekking die de eerste witte knikker oplevert. Bereken $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.

Oplossing

kansverdeling van Y :

u	1	2	3	4
$P(Y=u)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$	$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{120}$	$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{7} = \frac{7}{120}$

Met de rekenmachine vind je bij deze kansverdeling $E(Y) = 1,375$ en $\sigma(Y) = 0,633$.

Je kunt de rekenregels voor stochasten toepassen

Bij het berekenen van de verwachtingswaarde en de standaardafwijking gebruik je de rekenregels voor stochasten.

Voorbeeld

Bij een worp met een gewone dobbelsteen is de verwachtingswaarde voor het aantal ogen 3,5 met $\sigma = 1,71$; bij een viervlaksdobbelsteen met 1, 2, 3 of 4 ogen is dat 2,5 met $\sigma = 1,12$. Bereken de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van het totaal aantal ogen bij een worp met beide dobbelstenen.

Oplossing

Noem S de som van het aantal gegooide ogen van beide dobbelstenen.

Toepassen van de rekenregels $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ en $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$ geeft:

$$E(S) = 3,5 + 2,5 = 6$$

$$\sigma(S) = \sqrt{1,71^2 + 1,12^2} = 2,04.$$

Je kunt de $\sqrt{n}$ -wet gebruiken

De $\sqrt{n}$ -wet gebruik je voor de verwachtingswaarde en standaardafwijking van de som en het gemiddelde van een aantal onafhankelijke stochasten met dezelfde verdeling.

Voorbeeld 1

Een kilopak suiker weegt gemiddeld 1,0 kg met $\sigma = 0,04$ kg.

Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking voor het totale gewicht van 48 pakken.

Oplossing

De verwachtingswaarde van het totale gewicht is $48 \cdot 1,0 = 48,0$ kg.

De standaardafwijking is $\sqrt{48} \cdot 0,04 \approx 0,277$ kg.

Voorbeeld 2

In een bakkerij worden bruine broden gebakken met een gemiddeld gewicht van 900 gram en een standaardafwijking van 30 gram.

Een supermarkt bestelt 50 bruine broden. Bereken de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van het gemiddelde gewicht van deze 50 broden.

Oplossing

Het gemiddeld gewicht blijft gelijk, dus 900 gram.

De standaardafwijking is verkleind met een factor $\sqrt{50}$.

$$\text{Dus } \sigma = \frac{30}{\sqrt{50}} \approx 4,2 \text{ gram.}$$

Test jezelf

- T-1** Joost gaat met drie vrienden Klaverjassen. Bij Klaverjassen worden van de 52 kaarten uit een volledig spel van elke soort alleen aas, heer, vrouw, boer, 10, 9, 8 en 7 gebruikt. Elk van de vier spelers krijgt acht kaarten. Stochast A is het aantal azen dat Joost krijgt, stochast B is het aantal boeren en stochast H is het aantal harten kaarten dat hij krijgt
- Welke waarden kan A aannemen?
 - Leg uit wat de gebeurtenis $A = 0$ betekent en bereken de kans $P(A = 0)$.
 - Bereken $P(B = 4)$.
 - Ga met een berekening na of de gebeurtenissen $A = 0$ en $B = 0$ onafhankelijk zijn.
 - Toon aan dat de stochasten A en H afhankelijk zijn.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-1.



- T-2** Een tijdschriftenkiosk verkoopt het dagblad Trouw. Het aantal exemplaren dat op een willekeurige zaterdag wordt gevraagd, kun je beschouwen als een stochast X waarvan de kansverdeling hieronder staat.

aantal gevraagde dagbladen x	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
$P(X = x)$	0,02	0,07	0,11	0,12	0,21	0,19	0,15	0,09	0,03	0,01

- De kioskhouders koopt elke zaterdag 40 exemplaren van Trouw in. Hoe groot is de kans dat hij niet aan de vraag kan voldoen?
 - Hoe groot zijn de verwachtingwaarde en de standaardafwijking van de vraag naar Trouw op een willekeurige zaterdag?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-2.
- T-3** Spaarlampen van het merk Lumi gaan gemiddeld 6000 uur mee. De brandduur B is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 400 uur. Op een dag wordt een partij van 800 spaarlampen door de fabriek geleverd.
- Schets een grafiek van de verdeling van B .
 - Schat hoeveel van de partij spaarlampen minder dan 5600 uur zullen branden.
 - Hoeveel lampen met een brandduur tussen 5200 uur en 6400 uur verwacht je?
 - Van spaarlampen van het merk Sol is de brandduur $\text{Norm}(5700, 200)$ -verdeeld.
Schets de grafiek van deze verdeling in de tekening van opdracht a.
 - Bij welk van de twee soorten lampen is de kans het grootst dat je een lamp treft die minder dan 5000 uur meegaat? Leg je antwoord uit.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-3

T-4 De toevalsvariabelen X en Y zijn onafhankelijk. Voor de stochast X geldt $\mu = 16$ en $\sigma = 3$; voor de stochast Y geldt $\mu = 19$ en $\sigma = 4$.

a Bereken μ en σ voor de stochast $Z = 4X - 7$.

b Bereken μ en σ voor de stochast $S = X + Y$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-4.

T-5 Een firma fabriceert openhaardblokken als alternatief voor echt openhaardhout. De brandduur van de blokken is gemiddeld 2 uur met een standaarddeviatie van 0,25 uur. De firma verpakt de openhaardblokken in dozen van 10 stuks.

a Bereken de verwachte totale brandduur per doos en de standaardafwijking hiervan.

b Bereken de standaardafwijking van de gemiddelde brandduur per blok voor dozen van 10 stuks.

c De firma overweegt ook grotere verpakkingen in de handel te brengen.

Hoeveel blokken moeten er in een verpakking worden opgenomen als je wilt bereiken dat de standaardafwijking van de gemiddelde brandduur per blok hoogstens 0,05 uur is?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-5.



T-6 Op de fancy fair probeert Joris met het volgende spel geld te verdienen voor het goede doel. In een vaas zitten drie balletjes, genummerd 1 tot en met 3. Om aan het spelletje mee te doen betaal je €2,-. De speler trekt zonder terugleggen één voor één de balletjes uit de vaas. Na de eerste trekking legt Joris één euro op een schoteltje. Bij elke volgende trekking geldt: als het getrokken nummer lager is dan het vorige, dan is het spel afgelopen en krijgt de speler het bedrag dat op het schoteltje ligt. Is het getrokken getal groter dan de vorige, dan verdubbelt Joris het bedrag op het schoteltje. Als de speler de balletjes trekt in de volgorde 1, 2, 3 dan betaalt Joris vier euro uit. De stochast U is het bedrag dat Joris aan de speler uitbetaalt.

a Welke waarden kan U aannemen?

b Stel de kansverdeling van U op.

c Bereken de verwachtingswaarde en standaardafwijking van U .

d Josephine speelt dit spel tien keer. De stochast W is haar totale winst in die tien spelletjes.

Bereken $E(W)$ en $\sigma(W)$.

T-7a Iemand tekent in één figuur twee grafieken: de grafiek van de lengten van vierjarige meisjes en de grafiek van de lengten van hun moeders.

Welk van deze twee grafieken zal een bredere klokvorm zijn?

b Om aan de Europese regels te voldoen, doen fabrikanten gemiddeld iets meer voedingsmiddelen in een verpakking dan er op het etiket staat vermeld.

Op het etiket van een pot pindakaas staat dat er 350 gram in zit. Het gewicht van de pindakaas in de pot is normaal verdeeld.

Welke kans is groter: de kans dat er in een pot pindakaas minder dan 350 gram zit of de kans dat er in zes potten pindakaas gemiddeld minder dan 350 gram zit. Leg je antwoord uit.

Extra oefening - Basis

- B-1** In een vaas zitten tien knikkers: vier witte, drie rode en drie blauwe. Er wordt zonder terugleggen vier keer een knikker uit de vaas getrokken. Stochast W is het aantal witte knikkers in de eerste twee trekkingen; stochast R is het aantal rode knikkers in de vier trekkingen.
- a** Beschrijf de gebeurtenis $W = 2$ en bereken $P(W = 2)$.
 - b** Welke waarden kan R aannemen?
 - c** Bereken $P(R = 0)$.
 - d** Ga na of de gebeurtenissen $W = 2$ en $R = 0$ onafhankelijk zijn.
Deze opgave hoort bij paragraaf 4-1.
- B-2** Sjoerd heeft per ongeluk twee lege batterijen in een doosje met vier volle batterijen gedaan. Hij heeft drie volle batterijen nodig. Een voor een neemt hij de batterijen uit de doos en test of ze vol zijn. Daar gaat hij mee door tot hij drie volle batterijen heeft opgespoord. Stochast X is het aantal tests dat hiervoor nodig is.
- a** Geef de kansverdeling van X .
 - b** Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$
Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-2.
- B-3** Een vulmachine vult halveliterflessen met bessensap. De inhoud H is normaal verdeeld met parameters $\mu = 50,5$ cL en $\sigma = 0,3$ cL.
- a** Hoeveel procent van de flessen bevat tussen de 50,2 cL en 50,8 cL sap?
 - b** Door de machine anders in te stellen, kan de gemiddelde inhoud worden veranderd. De standaardafwijking blijft gelijk. Hoogstens 2,5% van de flessen mag minder dan 50 cL sap bevatten. Op welke waarde moet het gemiddelde worden ingesteld?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-3.
- B-4** Voor stochast X geldt $E(X) = 4,3$ en $\sigma(X) = 0,4$; voor stochast Y geldt $E(Y) = 19,2$ en $\sigma(Y) = 7,1$.
- a** Bereken $E(3X + 2,2)$ en $\sigma(3X + 2,2)$.
 - b** Bereken $E(X + Y)$ en $\sigma(X + Y)$.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-4.
- B-5** Voor pakken suiker geldt dat het gemiddelde gewicht 1000 gram is met een standaardafwijking van 12 gram. Iemand koopt twintig pakken suiker. Noem het totale gewicht daarvan T .
- a** Leg uit dat $E(T) = 20000$.
 - b** Bereken $\sigma(T)$.
 - c** Het gemiddelde gewicht van de twintig pakken suiker is G . Bereken $E(G)$ en $\sigma(G)$.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-5

Extra oefening - Gemengd

- G-1** In een middelgrote plaats is zowel het zwembad als de sporthal aan renovatie toe, maar er zijn onvoldoende middelen om beide uit te voeren. Via een elektronische enquête is de bevolking gevraagd welke renovatie de voorkeur heeft. Bij het sluiten van de reactietermijn blijkt 58% voor de sporthal te kiezen. Neem aan dat de enquête een representatief beeld heeft gegeven en dat inderdaad 58% van de bevolking voor renovatie van de sporthal is. Een verslaggever van de regionale zender vraagt de volgende dag aan vijf willekeurige mensen naar hun reactie. Stochast X is het aantal ondervraagden dat voor renovatie van de sporthal is.
- a** Stel de kansverdeling van X op.
 - b** Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

De verslaggeefster van een plaatselijke krant vraagt tien willekeurige mensen naar hun reactie. Stochast Y is het aantal dat voor renovatie van de sporthal is.

- c** Bereken $E(Y)$ en $\sigma(Y)$ met behulp van je antwoord op opdracht b.
- G-2** Op een pakje thee staat dat er 100 gram thee in het pakje zit. Natuurlijk zullen niet alle pakjes thee precies 100 gram wegen. Bij een gewichtscontrole blijkt het gewicht van de pakjes $\text{Norm}(102,2; 3,2)$ -verdeeld, met het gewicht in grammen.
- a** In een doos zitten 80 pakjes thee.
Tussen welke twee waarden zit het gewicht van de middelste 68% van de pakjes thee in de doos?
 - b** Hoeveel gram thee verwacht je dat in de doos teveel wordt geleverd?
- G-3** Een bedrijf verwerkt en verpakt tulpenbollen en narcissenbollen. Het gewicht in grammen van tulpenbollen is $\text{Norm}(10; 1,5)$ -verdeeld. Het gewicht in grammen van narcissenbollen is $\text{Norm}(3,5; 0,7)$ -verdeeld. De bollen worden verpakt in zakken waarvan je het gewicht mag verwaarlozen.
- a** Een zak tulpenbollen bevat 100 bollen.
Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het totale gewicht van een zak met tulpenbollen.
 - b** Een zak narcissenbollen bevat 40 bollen.
Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het totale gewicht van een zak met narcisbollen.
 - c** In een doos worden vier zakken tulpenbollen en tien zakken narcissenbollen verpakt. Het gewicht van de doos zelf is weer te verwaarlozen.
Stochast G is het gewicht in grammen van de doos met zakken bollen.
Bereken $E(G)$ en $\sigma(G)$.



Uitdagende opdrachten

- U-1** Klaas en Menno spelen een spel met een zuivere munt. Bij kop wint Klaas; bij munt wint Menno. Na elke worp betaalt de verliezer een bedrag aan de winnaar. Dat bedrag is bij de eerste worp 1 euro en bij elke worp wordt dat bedrag verdubbeld.
- Ze beginnen elk spel met zes euro per persoon. Op het moment dat een van de spelers niet meer aan zijn betaalverplichting kan voldoen, is het spel afgelopen.
- Stochast X is het aantal keer dat de munt wordt geworpen voor het spel is afgelopen.
- Beredeneer dat X niet willekeurig groot kan worden.
 - Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
- U-2** Op het etiket van zakken zilvervliesrijst staat dat er 500 gram rijst in zit. Het gewicht is normaal verdeeld met een gemiddelde van 507 gram en een standaardafwijking van 9,5 gram.
- Volgens de voorschriften mag hoogstens 2,5% van de zakken een gewicht hebben dat kleiner is dan wat er op het etiket is vermeld.
- Leg uit dat niet aan de voorschriften is voldaan.
 - Door een aantal zakken samen in een doos te verpakken, kan er voor worden gezorgd dat in hoogstens 2,5% van de dozen het gemiddelde gewicht van een zak rijst minder is dan 500 gram.
- Bereken het minimaal aantal zakken dat per doos moet worden verpakt.
- U-3** Het spel DoubDel wordt gespeeld met vier dobbelstenen. Stochast X is het aantal verschillende waarden in een worp.
- Welke waarden kan X aannemen?
 - Ga met een berekening na dat $P(X = 3) = \frac{5}{9}$.
 - Bereken de verwachtingswaarde van X .
- Een speler mag met de vier dobbelstenen werpen. Als alle geworpen aantallen ogen verschillend zijn, dan is het spel afgelopen. De spelleider betaalt dan € 10,- uit. De dobbelstenen waarvan het aantal ogen meer dan één keer voorkomt worden weggenomen. Als er nu geen stenen meer over zijn, dan is het spel ook afgelopen.
- Als er nog dobbelstenen over zijn, dan mag de speler daar nog een keer mee werpen. Er gelden nu dezelfde regels als in de eerste worp, alleen wordt er in plaats van € 10,- nu € 20,- uitgekeerd.
- Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het uit te keren bedrag.



Intelligentiequotiënt

In 1904 kreeg de psycholoog Alfred Binet (1857-1911) een aanstelling van de Franse overheid om onderzoek te doen naar leerlingen die op school slecht presteerden. Binet maakte een test die hij bij Parijse scholieren afnam en die model staat voor hedendaagse intelligentietesten.



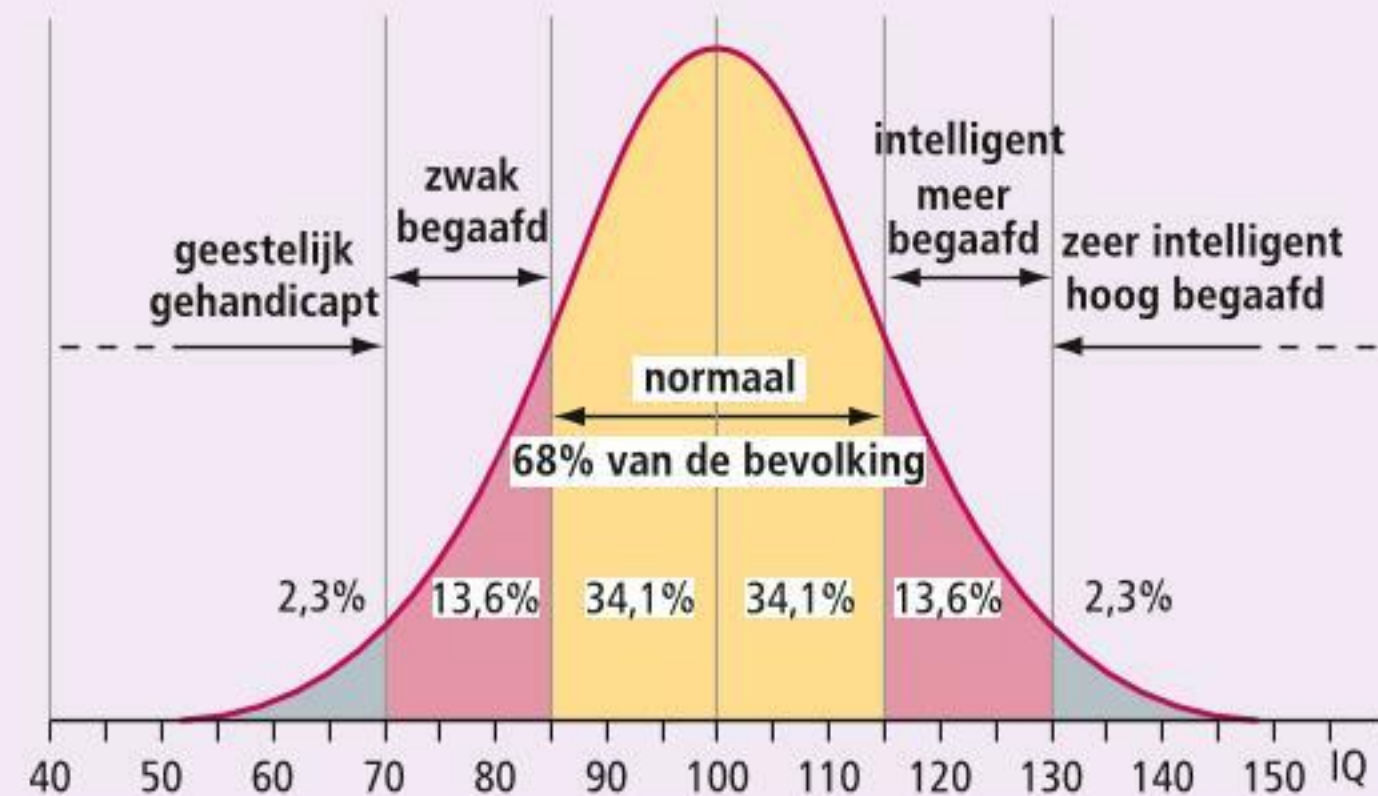
De Amerikaanse psycholoog Lewis Madison Terman (1877-1956) vervolmaakte deze test. Hij verbond er een score aan die de naam *intelligentiequotiënt* (IQ) kreeg.

$$IQ = \frac{\text{verstandelijke leeftijd}}{\text{werkelijke leeftijd}} \times 100$$

Bij een gemiddelde begaafdheid hoort $IQ = 100$. Voor volwassenen ging die berekening niet op, omdat intelligentie niet meer toeneemt vanaf het 18e levensjaar. Nieuwe testen waren nodig.

David Wechsler (1896-1981) ontwikkelde voor de leeftijden van 16 tot 85 de Wechsler Adult Intelligence Scale (WAIS) en voor de leeftijden van 6 tot 16 de Wechsler Intelligence Scale for Children (WISC). De vernieuwde versies van deze testen worden nog steeds gebruikt.

Bij deze testen worden aan goede antwoorden, punten toegekend. De behaalde score wordt vergeleken met die van mensen van dezelfde leeftijd, de zogenaamde normgroep. De gemiddelde score van deze groep wordt gelijk gesteld aan een IQ van 100. De huidige IQ testen meten dus eigenlijk de verhouding van het IQ van één persoon en het gemiddelde IQ van personen met dezelfde leeftijd. Het IQ is in iedere normgroep (leeftijdsgroep) normaal verdeeld met een gemiddelde van 100 en een standaarddeviatie van 15.



Opdracht

Welke van de volgende beweringen is waar?

- 1 Er zijn ongeveer evenveel mensen met een IQ van 80 als met een IQ van 120.
- 2 Iemand met een IQ van 150 is niet tweemaal zo slim als iemand met een IQ van 75.
- 3 Er zijn ongeveer 40 keer zoveel mensen met een IQ lager dan 130, dan er mensen zijn met een IQ hoger dan 130.

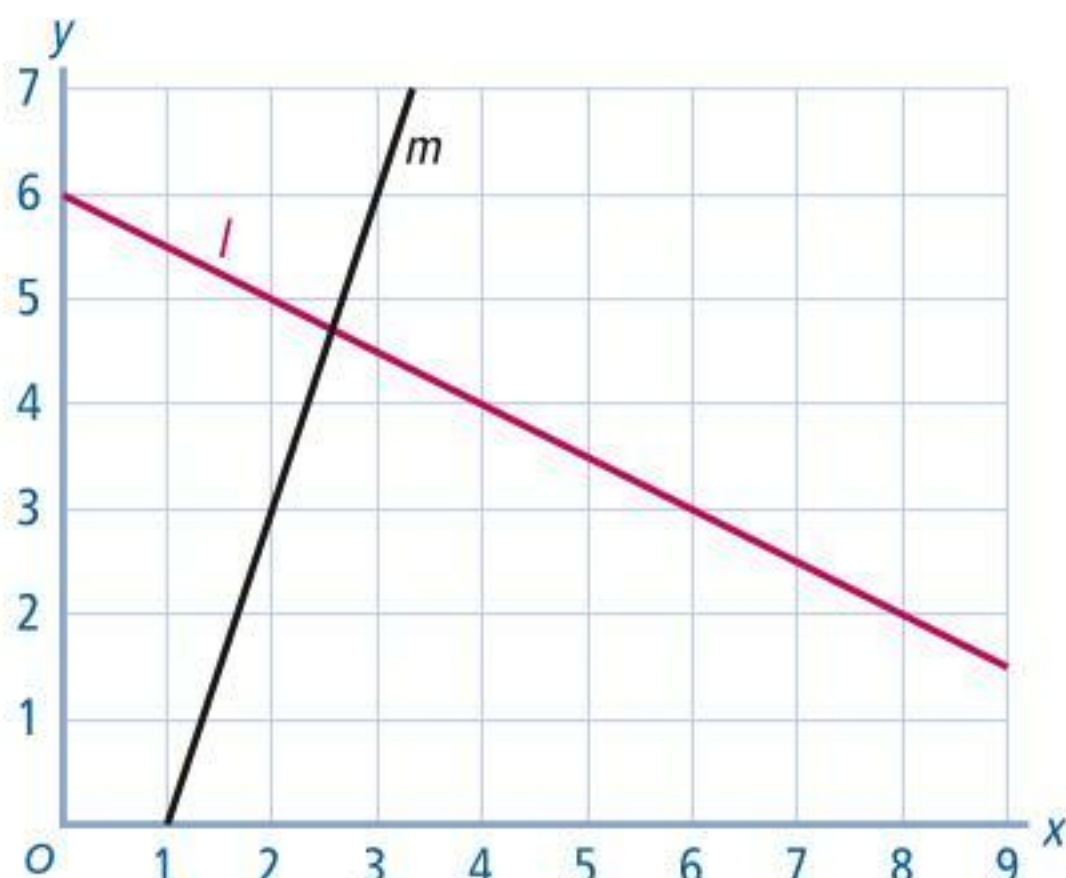
Intelligentietesten zijn erg populair omdat de intelligentie van een persoon eenvoudig te beoordelen lijkt. Toch zijn er kanttekeningen te maken. Zo is de test een momentopname: als een deelnemer slecht geslapen heeft of last heeft van faalangst, kan zijn score wel 10% lager uitvallen.

Opdracht

- a Er wordt algemeen aangenomen dat iemand met een universitaire opleiding behoort tot de 5% slimste mensen.
Geef een schatting voor het IQ van de groep van de 5% intelligentste mensen.
- b In Amerika is door het US Hoog Gerechtshof in 2002 bepaald dat misdadigers die ter dood waren veroordeeld niet mochten worden geëxecuteerd als zij geestelijk gehandicapt zijn. Het Hoog Gerechtshof van Florida gebruikt hiervoor de IQ-test en wil de veroordeelde laten executeren bij een IQ van meer dan 70. Mag je ervan uit gaan dat 2,5% van de misdadigers daar gebruik van kan maken?

Vaardigheden 2

Lineaire vergelijking opstellen



Lijn m gaat door de punten $(1, 0)$ en $(3, 6)$.

De richtingscoëfficiënt is $\frac{6-0}{3-1} = 3$.

De formule heeft de vorm $y = ax + b$.

$a = 3$ dus $y = 3x + b$

Lijn m gaat door $(1, 0)$ dus $0 = 3 \cdot 1 + b$

$b = \dots$

- 1a** Lijn l hierboven is de grafiek bij een lineaire formule. Lees het startgetal en de richtingscoëfficiënt van lijn l af.
- b** Geef een lineaire formule die bij lijn l past.
- c** Naast de grafiek zie je hoe je de richtingscoëfficiënt en startgetal van lijn m kunt berekenen. Maak deze berekening af en geef een formule bij lijn m .
- 2** Een lineaire formule noem je ook wel een lineaire vergelijking.
 - a** Lijn l gaat door de punten $A(5, 14)$ en $B(-5, 10)$. Stel een vergelijking op van lijn l .
 - b** Lijn k gaat door het punt $(120, -75)$ en is evenwijdig aan de lijn met vergelijking $y = -0,5x + 15$. Stel een vergelijking op van lijn k .
 - c** Lijn m gaat door $(2, -12)$ en is evenwijdig aan de y -as. Stel een vergelijking op van lijn m .
 - d** Lijn n gaat door $(2, -12)$ en is evenwijdig aan de x -as. Stel een vergelijking op van lijn n .
- 3** Stel een vergelijking op van de lijn die gaat door de punten:

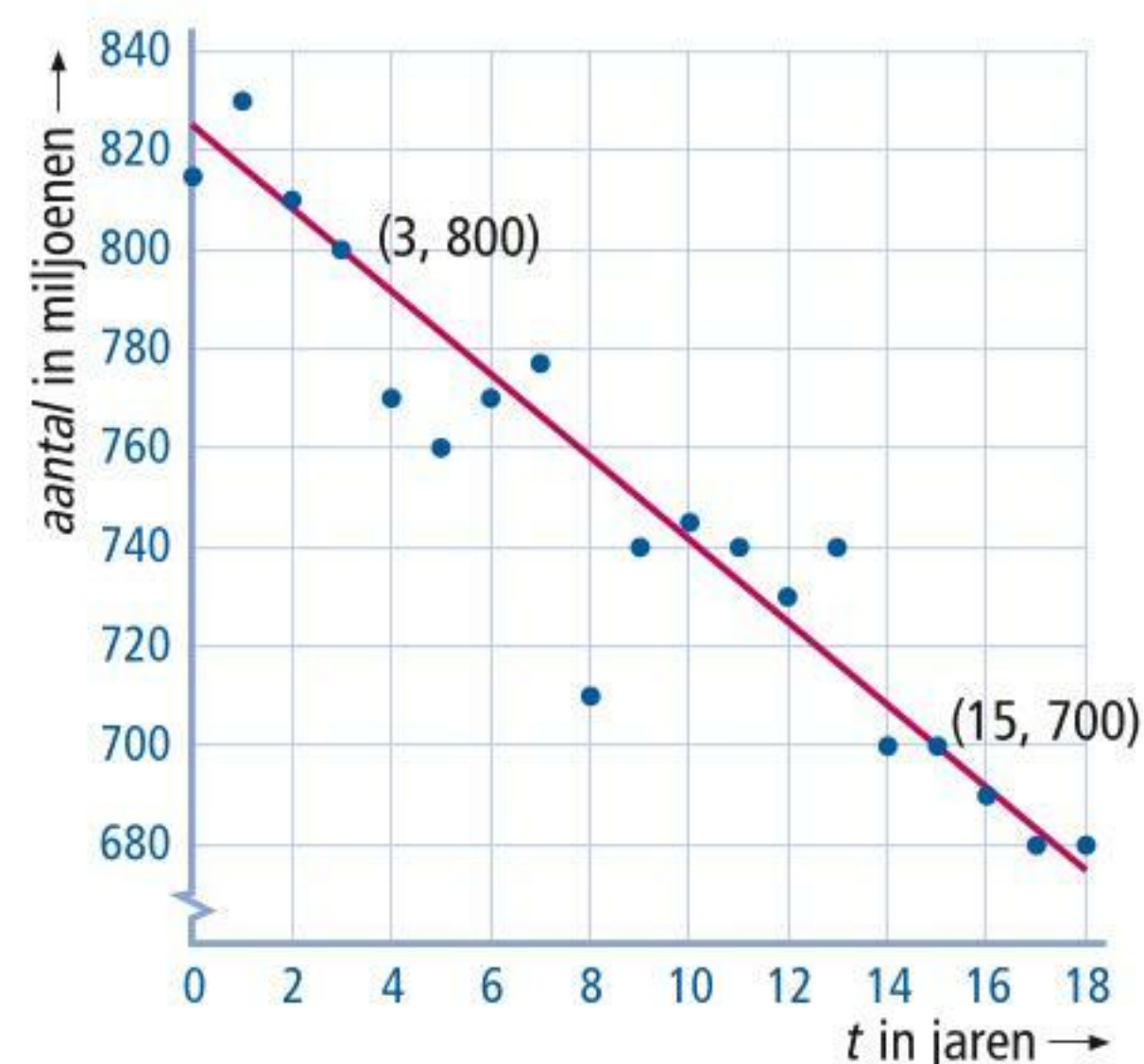
a $(2, 13)$ en $(0, -3)$	c $(-20, 7)$ en $(-20, 9)$
b $(-9, 13)$ en $(12, 13)$	d $(7, -1)$ en $(-3, 4)$
- 4** De stippen in de grafiek hiernaast geven het aantal ondervoede kinderen in de wereld in de periode 1990-2008. Hierin komt $t = 0$ overeen met het jaar 1990. Het aantal ondervoede kinderen neemt ruwweg lineair af en dit wordt weergegeven door de lijn die door twee aangegeven punten gaat.
 - a** Stel een formule op van deze lijn.
 - b** Bereken hoeveel procent het werkelijk aantal ondervoede kinderen in 1995 afweek van het aantal volgens de lijn.
 - c** Neem aan dat de daling zich voortzet volgens de lijn. In welk jaar zullen voor het eerst minder dan 580 miljoen kinderen ondervoed zijn?

$y = ax + b$ is de vergelijking van een lijn die niet evenwijdig is met de y -as.

Hierin is a de richtingscoëfficiënt en b het startgetal, dat is de waarde van y bij $x = 0$.

Een lijn evenwijdig aan de x -as heeft richtingscoëfficiënt 0 en dus is de vergelijking $y = b$.

Een lijn evenwijdig aan de y -as heeft als vergelijking $x = p$.



Groefactoren en percentages

Een populatie groeit ieder uur met factor 2. Er is dan sprake van een exponentieel verband tussen aantal en tijd met een groefactor van 2 per uur.

De groefactor per 3 uur is $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$.

De groefactor per $\frac{1}{2}$ uur is $2^{\frac{1}{2}}$, want $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$.

t in uren	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
N	1,6	...	3,2	6,4	...

$\times 2^{\frac{1}{2}} \quad \times 2^{\frac{1}{2}}$
 $\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

- 5 Bekijk het voorbeeld hierboven.
 - a Bereken de groefactor per 5 uur.
 - b Bereken de groefactor per $1\frac{1}{2}$ uur.
 - c Bereken de groefactor per drie kwartier.
- 6 Bij een groeiproces is de groefactor 1,2 per uur.
 - a Bereken de groefactor per half uur in drie decimalen.
 - b Bereken de groefactor per minuut in vijf decimalen.
 - c Bereken de groefactor per dag in één decimaal.

Een toename van 100% per tijdseenheid komt overeen met de groefactor 2, want $100\% + 100\% = 200\%$ en dat is $2 \cdot 100\%$.

Bij een afname van 8% per tijdseenheid is de groefactor 0,92 want $100\% - 8\% = 92\%$ en dat is $0,92 \cdot 100\%$.

Een groefactor van 1,05 komt overeen met een toename van 5% want $1,05 \cdot 100\% = 105\%$ en dat is een toename van 5%.

Voorbeeld

Bereken het groeipercentage per week bij een groeipercentage per dag van 2,3%.

Oplossing

Bij een groeipercentage van 2,3% per dag hoort een groefactor van 1,023 per dag.

Dit geeft een groefactor van $1,023^7 \approx 1,1725$ per week, dus een groeipercentage van 17,3% per week.

- 7 Bereken in de volgende gevallen het groeipercentage per dag.
- a Een afname van 1,7% per halve dag.
- b Een toename van 3% per uur.
- c Een afname van 8,7% per week.
- d Een afname van 0,02% per 10 minuten.
- e Een toename van 0,7% per uur

- 8 Iemand zet € 800,- op zijn spaarrekening tegen een rente van 1,5% per jaar.
- a Geef een formule waarmee je het bedrag B na t jaar kunt berekenen.
- b Bereken hoe groot het bedrag na 15 jaar is.

- 9 Bij een exponentieel groeiproces is de beginwaarde 45 en de verdubbelingstijd is 3,5 uur.
- Stel de bijbehorende formule op met de tijd t in uren.

- 10 Op een eiland groeit een konijnenpopulatie gedurende een periode exponentieel. Twee jaar na de start hiervan zijn er 218 konijnen en weer drie jaar later zijn het er 378.
- Stel de bijbehorende formule op met de tijd t in jaren.

$N = b \cdot g^t$ is de algemene vorm voor exponentieel groei. Hierin is b de beginhoeveelheid op tijdstip $t = 0$ en is g de groefactor.

Substitueren en herleiden

In een formule als $y = -2t + 8$ zeg je dat de variabele y is uitgedrukt in de variabele t . Je kunt ook zeggen y is geschreven als functie van t .

In een formule kun je een variabele vervangen door een getal of door een andere formule. Je noemt dit substitueren.

Het vereenvoedigen of herschrijven van een formule noemt je het herleiden van de formule.

Voorbeeld

Gegeven de formule $y = -2t + 8$.
Substitueer hierin de formule $t = -3x + 5$ en druk y uit in x .

Oplossing

$$\begin{aligned} y &= -2(-3x + 5) + 8 \\ y &= 6x - 10 + 8 \\ y &= 6x - 2 \end{aligned}$$

- 11** Substitueer formule A in formule B, druk q uit in p en herleid het resultaat zoveel mogelijk.
- a** A: $t = p + 2$ B: $q = 2t - 5$
b A: $x = p - 1$ B: $q = x^2 - 2x + 8$
c A: $k = 3 - 2p$ B: $q = 2k^2 - k + 7$
- 12** Gegeven is de formule $N = (1 - M)(0,5t + 2)$.
- a** Substitueer $M = 9$ en laat zien dat $N = -4t - 16$
- b** Toon aan dat de formule $N = -4t - 16$ te herleiden is tot $t = -\frac{1}{4}N - 4$.
- 13** Gegeven zijn de formules $y \cdot (3t - 7) = -12$ en $t + 2x = 1$.
- a** Herleid de formule $t + 2x = 1$ tot een vorm waarbij t wordt uitgedrukt in x .
b Substitueer het antwoord van opdracht a in de formule $y \cdot (3t - 7) = -12$ en herleid deze tot een vorm waarbij y wordt uitgedrukt in x .

Rekenen en herleiden met breuken

Breuken vermenigvuldig je met elkaar door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen. Breuken kun je vereenvoedigen door de teller en de noemer door hetzelfde getal te delen of met hetzelfde getal te vermenigvuldigen.

Voorbeeld

$$\frac{3p}{q} \cdot \frac{7q^2}{2p^3} = \frac{3p \cdot 7 \cdot \cancel{q} \cdot q}{\cancel{q} \cdot 2 \cdot p \cdot p \cdot p} = \frac{21q}{2p^2} \quad (q \neq 0)$$

Voorbeeld

$$5 \cdot \frac{7}{10} = \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{10} = \frac{5 \cdot 7}{1 \cdot 10} = \frac{\cancel{5} \cdot 7}{2 \cdot \cancel{5}} = \frac{7}{2}$$

- 14** Vermenigvuldig en vereenvoedig het antwoord.

a $3 \cdot \frac{5}{18}$ **c** $\frac{60p}{3p-9} \cdot \frac{p-3}{5}$
b $\frac{-12a^2}{b^3} \cdot \frac{7b}{6a}$ **d** $3q^7 \cdot \frac{2}{q^2} \cdot \frac{1}{12q^3}$

- 15** Hiernaast zie je hoe je de breuk $\frac{2}{\frac{3}{5}}$ kunt vereenvoedigen door teller en noemer te vermenigvuldigen met 5.
Vereenvoedig op een zelfde manier de breuken:

A $\frac{15}{\frac{2}{7}}$ **B** $\frac{-10t}{\frac{4t}{5}}$ **C** $\frac{2p+5}{\frac{2}{p}}$

Voorbeeld

$$\begin{aligned} \frac{2}{\frac{3}{5}} &= \frac{2 \times 5}{\frac{3}{5} \times 5} = \frac{10}{3} \\ \frac{5p}{\frac{2}{p}} &= \frac{5p \cdot p}{\frac{2}{p} \cdot p} = \frac{5p^2}{2} \quad (p \neq 0) \end{aligned}$$

Breuken kun je bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken door de noemers gelijknamig te maken.

16 Herleid de volgende formules tot één breuk.

a $k = \frac{6}{p} + \frac{1}{5}$

b $q = \frac{1}{a} - \frac{8}{a+5}$

c $T = \frac{b}{1-b} + \frac{3}{1+b}$

17 In de formule $t = \frac{8}{p-1}$ is t uitgedrukt in p .

Je kunt ook p uitdrukken in t . Hiernaast staat een begin.

Neem de berekening over en laat zien dat de formule te herleiden is tot $p = \frac{8}{t} + 1$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $A = \frac{4}{p} + \frac{3}{p+1}$

Herleid deze tot één breuk.

Oplossing

$$A = \frac{4}{p} + \frac{3}{p+1} = \frac{4(p+1)}{p(p+1)} + \frac{3p}{p(p+1)} = \frac{7p+4}{p^2+p}$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{8}{p-1} \\ t(p-1) &= 8 \quad (\text{links en rechts} \times (p-1)) \\ \dots &= \frac{8}{\dots} \quad (\text{links en rechts} : t) \\ p &= \dots \end{aligned}$$

18 Gegeven zijn de formules $L \cdot B = 30$ en $K = \frac{18547}{L} + 56,6L + \frac{5279}{B} + 90,8B$.

Druk K uit in L en herleid deze tot de vorm $K = a \cdot L + \frac{b}{L}$

Theorie

Een verband tussen de variabelen A , B en C kun je herleiden door links en rechts van het $=$ -teken te vermenigvuldigen met dezelfde factor of te delen door dezelfde factor.

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt dan $A = B \cdot C$ en ook $B = \frac{A}{C}$ met $B \neq 0$ en $C \neq 0$.

Voorbeeld 1

$$Q = \frac{8}{P} - 4$$

Druk P uit in Q .

Oplossing

$$Q + 4 = \frac{8}{P}$$

$$(Q + 4) \cdot P = 8$$

$$P = \frac{8}{Q+4}$$

Voorbeeld 2

$$Q = \frac{-2}{P-3,5}$$

Druk P uit in Q .

Oplossing

$$(P - 3,5) \cdot Q = -2$$

$$P - 3,5 = \frac{-2}{Q}$$

$$P = \frac{-2}{Q} + 3,5$$

Voorbeeld 3

$$Q = 5 + \frac{1}{\sqrt{P}} \quad \text{Druk } P \text{ uit in } Q.$$

Oplossing

$$Q - 5 = \frac{1}{\sqrt{P}} \quad \text{geeft } (Q - 5) \cdot \sqrt{P} = 1$$

$$\sqrt{P} = \frac{1}{Q-5}$$

$$P = \left(\frac{1}{Q-5}\right)^2 \quad (Q > 5)$$

19 Druk P uit in T .

a $T = 6 + \frac{1}{P}$

b $T = \frac{-8}{0,5P}$

c $T = \frac{-3}{4P+8}$

d $T \cdot (P + 3) = 11$

e $6 = \frac{T}{\sqrt{P}}$

f $T = 4 - \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{P}}$



Wereldbevolking

Van de aarde is ongeveer $1,49 \times 10^{14} \text{ m}^2$ land.

De wereldbevolking bestond in 2011 uit 7,1 miljard mensen.

De wereldbevolking groeit met 1,1% per jaar.

Als deze groei zo doorgaat, hoelang duurt het dan tot er maar 1 m^2 land per persoon is?



Hoofdstuk 5

Logaritmische functies

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	114
5-1	Logaritmen	116
5-2	Logaritmen berekenen	118
5-3	Grafieken van logaritmische functies	120
5-4	Rekenregels voor logaritmen	122
5-5	Formules herleiden	124
5-6	Logaritmische schalen	126
5-7	Gemengde opdrachten	128
	Samenvatting	130
	Test jezelf	132
	Extra oefening - Basis	134
	Extra oefening - Gemengd	135
	Uitdagende opdrachten	136
	Logaritmentafel	137

Voorkennis

V-1 Schrijf als één macht.

a $5^3 \cdot 5^4$

b $(7^2)^5$

c $2^{-4} \cdot 2^3$

V-2 Schrijf zonder negatieve of gebroken exponent.

a 5^{-3}

b $7^{\frac{1}{2}}$

Theorie

Voor machten en exponenten bestaan de volgende rekenregels.

$$g^p \cdot g^q = g^{p+q}$$

$$\frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$$

$$(g^p)^q = g^{pq}$$

$$g^0 = 1$$

$$g^{-p} = \frac{1}{g^p} \quad (g \neq 0)$$

$$g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g} \quad (g > 0)$$

Voorbeeld

$$5^0 = 1$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$4^5 \cdot 4^{-3} = 4^2 (= 16)$$

$$(p^{\frac{1}{6}})^4 = p^{\frac{4}{6}} = p^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$$

$$x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$$

$$x^4 \cdot x^a = x^{4+a}$$

$$(x^a)^2 = x^{2a}$$

V-3 Schrijf zonder negatieve exponent.

a a^{-3}

b $\frac{1}{g^{-5}}$

c $\left(\frac{1}{m}\right)^{-2}$

V-4 Schrijf als één macht.

a $a^{-3} \cdot a^{-5} \cdot a^{12}$

b $\frac{w^{-2}}{w^{-5}}$

c $\frac{7^{x+3}}{7^{x-3}}$

V-5 De dagwaarde van een bepaald type auto neemt exponentieel af. In de tabel hiernaast is de waarde W in euro's na t jaar voor een aantal waarden van t af te lezen.

a Hoe kun je met behulp van de tabel berekenen dat de groeifactor van de waarde per jaar gelijk is aan 0,9?

b Vul de twee open plaatsen in de tabel in.

c Met hoeveel procent neemt de waarde per jaar af?

d Het verband tussen W en t is van de vorm $W = b \cdot g^t$. Welke getallen moeten voor b en g ingevuld worden?

e Bereken de groeifactor van de waarde per 10 jaar. Rond je antwoord af op drie decimalen.

f Met hoeveel procent neemt de waarde per 10 jaar af?

t in jaren	W in euro's
0	25 000
1	...
2	20 250
3	...
4	16 403
5	14 762

V-6 Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x) = 2 \cdot 1,7^x$,

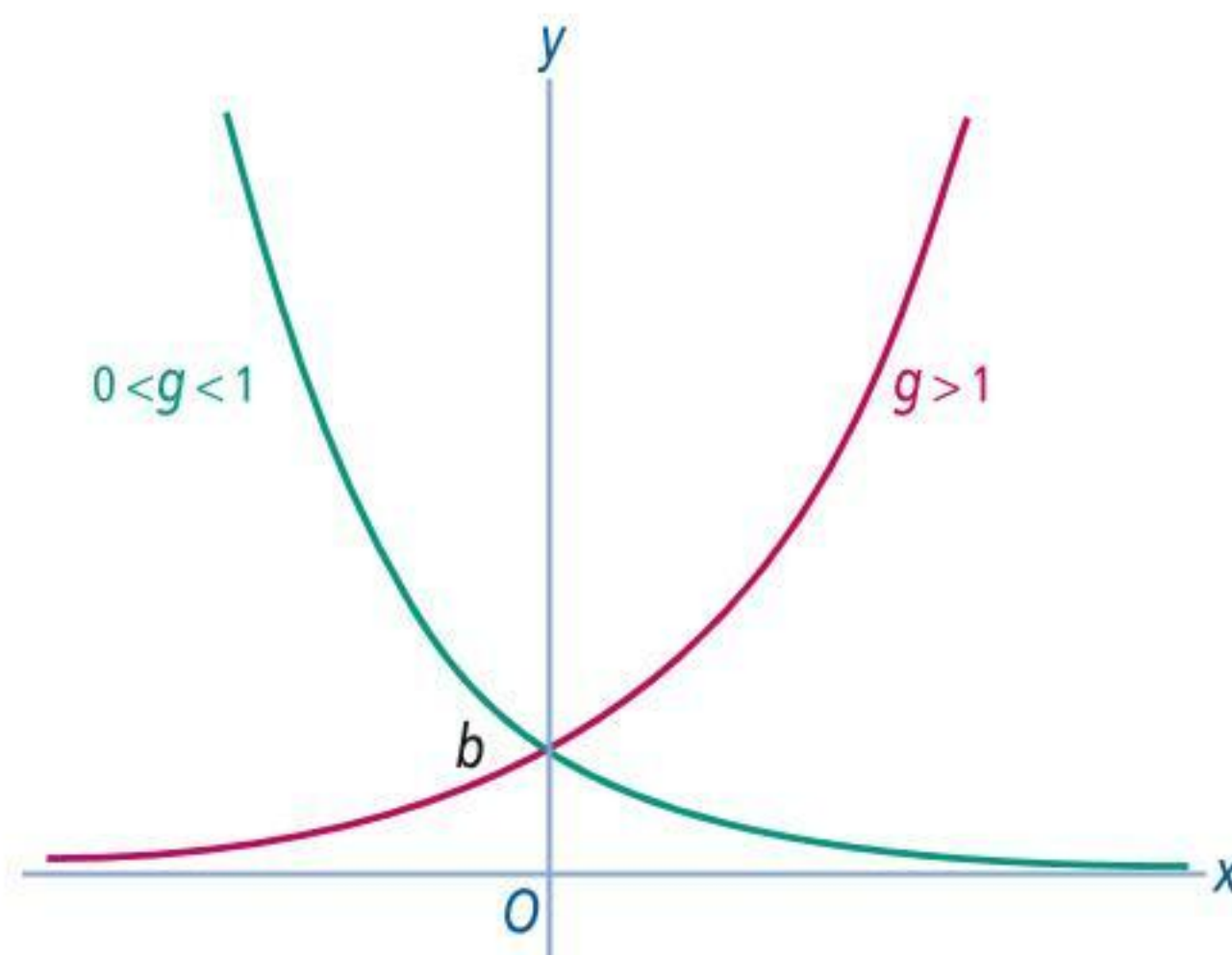
$$h(x) = 5 \cdot x^{1,7}, \quad i(x) = 17 \cdot x^{\frac{1}{2}} \quad \text{en} \quad j(x) = 7 \cdot 1,0001^x.$$

a Welke van de bovenstaande functies zijn exponentiële functies?

b Bij welke van deze exponentiële functies is de grafiek stijgend? Waarom?

c Geef de coördinaten van de punten waarin de grafieken van de exponentiële functies de y -as snijden.

De grafieken van **exponentiële functies** $f(x) = b \cdot g^x$ snijden de y -as in het punt $(0, b)$. De x -as is de horizontale asymptoot van de grafiek. Voor $b > 0$ is de grafiek van f stijgend als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.



- V-7** Stel voor de volgende situaties het bijbehorende functievoorschrift op.
- Bij een groeiproces is de hoeveelheid op tijdstip $t = 0$ gelijk aan 1720 en deze hoeveelheid neemt jaarlijks toe met 5,7%.
 - Een hoeveelheid neemt wekelijks af met 0,5%. Op 1 januari 2010 was de hoeveelheid 37 980.
 - Bij een exponentieel groeiproces neemt de hoeveelheid met 25% per dag toe. Na twee dagen is de hoeveelheid 12 500.
 - Van een exponentieel groeiproces is bekend dat de hoeveelheid op tijdstip $t = 2$ gelijk is aan 134 780. Op tijdstip $t = 5$ is de hoeveelheid gedaald tot 37 014.
- V-8** Een insectenpopulatie neemt toe met 6,3% per etmaal. Op 1 februari is het aantal insecten 14 800. Bij dit groeiproces hoort de formule $N = 14\,800 \cdot 1,063^t$ met t in dagen en $t = 0$ op 1 februari.
- Bereken het aantal insecten op 2 februari.
 - Bereken het aantal insecten op 29 januari.
 - Met hoeveel procent neemt het aantal insecten per week toe?
 - Bereken de procentuele toename per acht uur.
 - Bereken na hoeveel dagen het aantal insecten gegroeid is tot 50 000.
- V-9** Het aantal bacteriën in een kolonie verdubbelt elk uur. Op tijdstip $t = 0$ zijn er 1000 bacteriën.
- Stel de formule op waarmee het aantal bacteriën na t uur te berekenen is.
 - Bereken algebraïsch na hoeveel uur er 8000 bacteriën zijn.

Exponentiële vergelijkingen kun je met je rekenmachine oplossen. Soms kun je exponentiële vergelijkingen algebraïsch oplossen. Dat kan als het, eventueel na een vereenvoudiging, mogelijk is om de getallen links en rechts van het gelijkteken te schrijven als machten van hetzelfde grondtal.

- V-10** Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.
- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| a $3^x = 27$ | e $3^{-t} = 9$ |
| b $4^{2x} = 64$ | f $8 \cdot 4^p = 2$ |
| c $2^{1+5x} = 8$ | g $6 \cdot 6^x = \frac{1}{6}$ |
| d $5^{2t-8} = \frac{1}{25}$ | h $5^{2t} \cdot 5^{3t} = 1$ |

Voorbeeld

Los algebraïsch op: $6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 96$

Oplossing

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} &= 16 && \text{(links en rechts : 6)} \\ (2^{-1})^{3x} &= 2^4 \\ 2^{-3x} &= 2^4 \\ -3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{-3} = -1\frac{1}{3} \end{aligned}$$

5-1

Logaritmen

H 1 Los de volgende vergelijkingen exact op.

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| a $2^x = 4$ | d $5^x = \sqrt{5}$ |
| b $3^x = 27$ | e $2^x = 256$ |
| c $10^x = \frac{1}{10}$ | f $3^x = \frac{1}{9}$ |

- 2** Gegeven is de vergelijking $3^x = a$. Voor $a = 9$ kun je de vergelijking algebraïsch oplossen.
- a** Voor welke gehele waarden van a tussen 0 en 10 kun je de vergelijking $3^x = a$ algebraïsch oplossen?
- b** En voor welke gehele waarden van a tussen 100 en 1000 is dat het geval?
- 3** Gegeven is de vergelijking $2^x = 7$.
- a** Waarom kun je deze vergelijking niet exact oplossen?
- b** Toon aan dat voor de oplossing geldt: $2,80 < x < 2,81$
- c** Benader de oplossing in drie decimalen nauwkeurig.

	$3^x = 9$
	$3^x = 3^2$
	$x = 2$

Je weet dat de oplossing van $2^x = 7$ bestaat en een getal is dat iets kleiner is dan 2,81. Toch kun je de exacte oplossing niet beschrijven met de notaties die je tot nu toe kent. De naam die aan deze getallen wordt gegeven is logaritme. Zo is de oplossing van $2^x = 7$ de logaritme van 7 met grondtal 2.

- 4a** Tussen welke gehele getallen ligt de oplossing van de vergelijking $3^x = 25$?
- b** Vul in: de oplossing van de vergelijking $3^x = 25$ is de logaritme van ... met grondtal

Theorie

De exacte oplossing van de vergelijking $g^x = a$ heet de **logaritme** van a met **grondtal** g . Je noteert deze oplossing als $x = {}^g\log(a)$.
Je spreekt ${}^g\log(a)$ uit als '**g-log a**'.
De basisregel voor logaritmen: Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ en andersom uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$.
Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Voorbeeld

- a** Los op $4^x = 13$.
- b** Van welke exponentiële vergelijking is $x = {}^5\log(12)$ de oplossing?

Oplossing

- a** Uit $4^x = 13$ volgt $x = {}^4\log(13)$.
- b** $x = {}^5\log(12)$ is de oplossing van $5^x = 12$.

H 5 Los exact op.

- a** $7^x = 4$
- b** $7^x = 10$
- c** $5^x = 14$
- d** $5^x = 125$

6 Geef een exponentiële vergelijking bij de volgende oplossingen.

- a** $x = {}^3\log(5)$
- b** $x = {}^7\log\left(\frac{1}{2}\right)$
- c** $x = {}^3\log(81)$

Soms kun je de exacte oplossing zonder logaritme schrijven.

De exacte oplossing van $3^x = 81$ is ${}^3\log(81)$ maar ook 4, omdat $3^4 = 81$.

Dus is ${}^3\log(81) = 4$.

Op dezelfde manier kun je laten zien dat ${}^{10}\log(1\,000\,000) = 6$.

7 Neem over en vul in:

a ${}^3\log(27) = \dots$ want $27 = 3^{\dots}$

b ${}^2\log(32) = \dots$ want $32 = 2^{\dots}$

c ${}^5\log(5) = \dots$ want $5 = 5^{\dots}$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(1) = \dots$ want $1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\dots}$

8 Tussen welke twee gehele getallen ligt:

a ${}^3\log(12)$

b ${}^5\log(1000)$

c ${}^{10}\log(3790)$

d ${}^{\frac{1}{5}}\log(20)$

9 Bereken de volgende logaritmen.

a ${}^2\log(128)$

b ${}^7\log(1)$

c ${}^{10}\log(1\,000\,000)$

d ${}^{\frac{1}{4}}\log\left(\frac{1}{64}\right)$

e ${}^3\log\left(\frac{1}{9}\right)$

f ${}^{25}\log(5)$

10 Irene zet een bedrag van € 5.000,- op de bank tegen een rente van 4,7% per jaar.

a Geef de formule waarmee je kunt berekenen hoe groot het bedrag B in euro's is dat na t jaar op de bank staat.

b Leg uit dat je de tijd die nodig is om het bedrag te verdubbelen kunt berekenen door de vergelijking $1,047^t = 2$ op te lossen.

c Geef de exacte oplossing van deze vergelijking.

d Bereken met behulp van je rekenmachine in maanden nauwkeurig wanneer het bedrag op de bank verdubbeld is.

e Hoe kun je met het antwoord van opdracht d berekenen wanneer het bedrag acht keer zo veel is geworden?

11 Medicijnen worden in het lichaam opgenomen en daar afgebroken. Meestal neemt de werkzame hoeveelheid van zo'n middel exponentieel af.

De tekst hiernaast staat op de bijsluiter van het geneesmiddel Temazepam. Van dit middel is bekend dat elk uur 20% van de werkzame hoeveelheid afgebroken wordt.

a Hoe groot is de groeifactor per uur die hoort bij de hoeveelheid Z in milligrammen die nog in het lichaam aanwezig is?

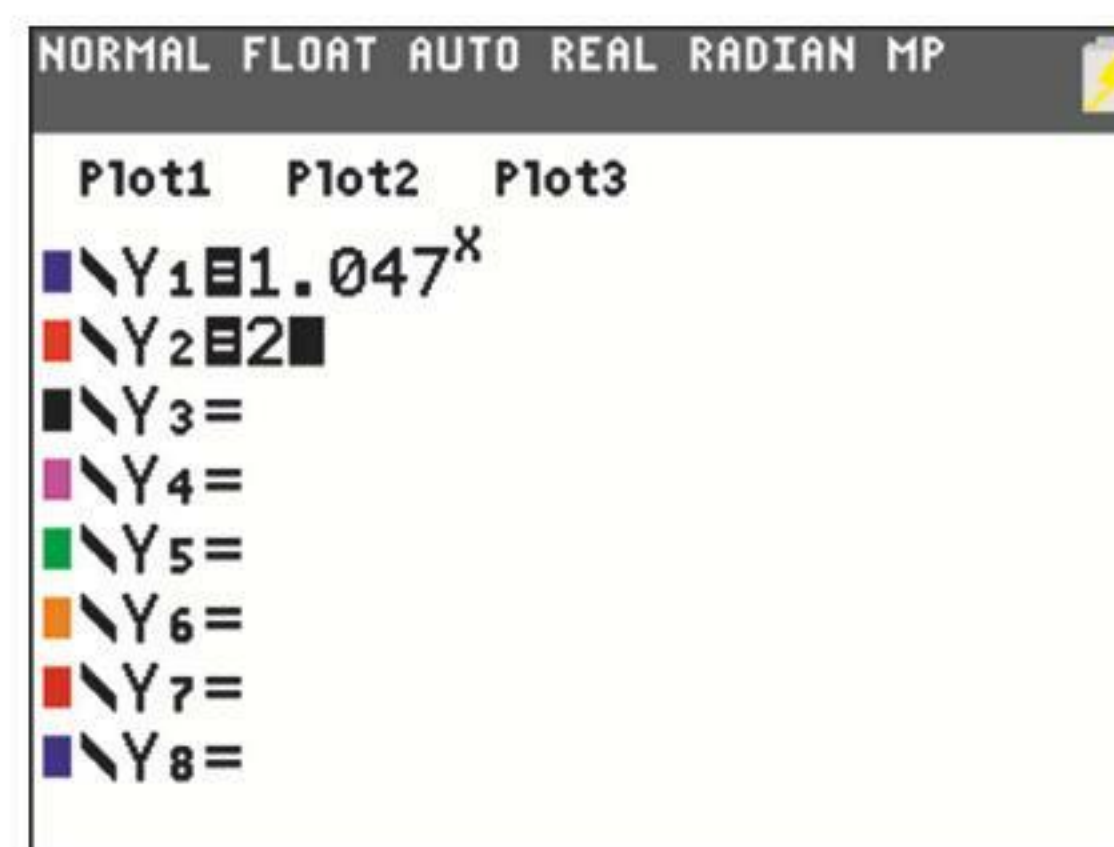
b Een formule voor Z is $Z = 50 \cdot 0,8^t$. Hoe groot is de hoeveelheid Temazepam op het tijdstip $t = 0$?

c Met behulp van welke vergelijking kun je uitrekenen wanneer nog maar de helft van het medicijn in het lichaam aanwezig is?

d Vereenvoudig deze vergelijking tot de vorm $0,8^t = \dots$

e Geef de exacte oplossing van deze vergelijking.

f Los de vergelijking van opdracht d op met behulp van je rekenmachine. Rond je antwoord af op twee decimalen.



Invloed op de rijvaardigheid en de bekwaamheid om machines te gebruiken

Temazepam kan het reactievermogen (rijvaardigheid, bedienen van machines, het beoordelen, goed waarnemen, nemen van de juiste beslissingen) en het functioneren van ledematen nadelig beïnvloeden door sufheid, geheugenverlies en spierverslapping. Pas daarom op met deelname aan het verkeer en het bedienen van machines.

5-2

Logaritmen berekenen

- 12a** Zoek de log-toets op je rekenmachine en bereken $\log(5)$, $\log(10)$, $\log(50)$, $\log(100)$ en $\log(1000)$.
- b** Waaruit blijkt dat 10 het grondtal van de log-toets op je rekenmachine is?
- c** Voor welke waarde van x is $\log(x) = 5$?
- d** Bereken $\log(1\,000\,000)$ en $\log(0,0001)$ en verklaar de uitkomsten.

Theorie

Op rekenmachines zit een log-toets. Op de meeste rekenmachines wordt daarbij het grondtal niet vermeld. Het grondtal bij deze logaritme is 10. Als ergens $\log(\dots)$ staat, wordt $^{10}\log(\dots)$ bedoeld.

Voorbeeld

Bereken $\log(0,01)$ en $\log(50)$, indien nodig afgerond op twee decimalen, en controleer je antwoorden.

Oplossing

Met de rekenmachine:

$$\log(0,01) = -2; \text{ controle } 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01.$$

$$\log(50) \approx 1,70; \text{ controle } 10^{1,70} \approx 50.$$

- 13** Bereken de volgende logaritmen.
- a** $\log(0,1)$
- b** $\log(1)$
- c** $\log(\sqrt{10})$
- 14** Los op en rond af op twee decimalen:
- a** $10^t = 7$
- b** $10^{t+3} = 8$
- c** $10^{1,2t-0,6} = 6,7$
- 15** Bij twee exponentiële groeiprocessen horen de formules $N = 2000 \cdot 10^t$ en $N = 1200 \cdot 15^t$. Hierbij is N het aantal en t de tijd in jaren.
- a** Leg uit dat je bij het eerste proces met de vergelijking $10^t = 2$ kunt uitrekenen na hoeveel jaar de beginhoeveelheid is verdubbeld.
- b** Los deze vergelijking op. Rond je antwoord af op twee decimalen.
- c** Met welke vergelijking kun je bij het tweede proces uitrekenen na hoeveel jaar de beginhoeveelheid is verdubbeld?
- d** Ga na dat de oplossing van deze vergelijking ongeveer 0,2650 is.

Logaritmen als $^{15}\log(2)$ kun je niet rechtstreeks op elke rekenmachine berekenen. In de volgende opdracht leid je een rekenregel af om zulke logaritmen te benaderen.

- 16** De oplossing van de vergelijking $15^t = 2$ is $t = ^{15}\log(2)$.
- a** De vergelijking $15^t = 2$ is te schrijven als $(10^p)^t = 2$ waarbij $10^p = 15$.
Schrijf p als een logaritme.
- b** Hiernaast is de vergelijking $15^t = 2$ bijna helemaal opgelost. Maak de berekening af door voor p het antwoord van opdracht a te substitueren. Rond t af op drie decimalen.
- c** Waarom volgt uit de berekening hiernaast $^{15}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(15)}$?

	$15^t = 2$
	$(10^p)^t = 2 \text{ met } 10^p = 15$
	$10^{p \cdot t} = 2$
	$p \cdot t = ^{10}\log(2)$
	$t = \frac{^{10}\log(2)}{p} = \frac{^{10}\log(2)}{\dots} \approx \dots$

Je kunt met behulp van de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$

met je rekenmachine elke logaritme berekenen.

Voorbeeld 1

Bereken ${}^7\log(4)$ en ${}^{\frac{1}{2}}\log(0,7)$ in twee decimalen nauwkeurig.

Oplossing

$${}^7\log(4) = \frac{\log(4)}{\log(7)} \approx 0,71$$

$${}^{\frac{1}{2}}\log(0,7) = \frac{\log(0,7)}{\log(\frac{1}{2})} \approx 0,51$$

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $5^t = 23$ exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

Oplossing

$$5^t = 23 \text{ dus } t = {}^5\log(23)$$

Dit is het exacte antwoord. Een benadering in twee decimalen vind je met

$$t = \frac{\log(23)}{\log(5)} \approx 1,95.$$

- H 17** Bereken de volgende logaritmen in twee decimalen nauwkeurig.

- a ${}^9\log(35)$
- b ${}^{\frac{1}{3}}\log(128)$
- c ${}^5\log(10)$
- d ${}^4\log(\frac{1}{13})$

- H 18** Los de vergelijkingen algebraïsch op. Geef een exacte oplossing en ook een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

- a $15^x = 2$
- b $10^x = 5$
- c $4^{2x} = 6$
- d $3^x = \sqrt{5}$

- 19** Bij een exponentieel groeiproces hoort de functie $A(t) = 600 \cdot (0,8)^t$ met t de tijd in uren. De beginhoeveelheid is 600.

- a Bereken algebraïsch hoelang het duurt voordat die hoeveelheid is gehalveerd.
- b Als de beginhoeveelheid geen 600 was geweest maar 100, bereken dan hoe lang het duurt tot die beginhoeveelheid is gehalveerd.
- c Leg uit: De 'halveringstijd' is de oplossing van de vergelijking $(0,8)^t = 0,5$.

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor g is de **verdubbelingstijd** de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$. De verdubbelingstijd is dus $t = {}^g\log(2)$.
De **halveringstijd** is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$.
De halveringstijd is dus $t = {}^g\log(\frac{1}{2})$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(t) = 30 \cdot (0,6)^t$. Bereken de halveringstijd.

Oplossing

De halveringstijd t bij een groeiproces met groeifactor 0,6 is

$$t = {}^{0,6}\log(0,5) = \frac{\log(0,5)}{\log(0,6)} \approx 1,357.$$

- H 20** Het volume van de stam van een spar neemt per jaar met gemiddeld 5% toe.

- a Stel een vergelijking op waarmee je de verdubbelingstijd voor het volume kunt vinden.
- b Benader deze verdubbelingstijd in hele jaren nauwkeurig.
- c Na hoeveel jaar is het volume van de spar verviervoudigd?
- d En met welke factor is het volume van de spar vermenigvuldigd na drie keer de verdubbelingstijd?

5-3

Grafieken van logaritmische functies

21a Plot en schets de grafieken van de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^2\log(x)$.

b Neem de beide tabellen hieronder over en vul ze in:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	...	...	...	...	...	...

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	...	...	...	...	...	...

c In welke lijn moet je de grafiek van f spiegelen om de grafiek van g te krijgen?

d Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f en welke lijn is de asymptoot van de grafiek van g ?

22a Plot en schets de grafieken van $f(x) = 5^x$ en $k(x) = {}^5\log(x)$.

b Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as. Geef ook de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van k met de x -as.

c Elk van deze grafieken heeft een asymptoot. Geef de vergelijking van elke asymptoot.

Theorie

De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

De lijn $y = 0$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van f .

De lijn $x = 0$ is de verticale asymptoot van de grafiek van k .

De grafiek van f snijdt de y -as in $(0, 1)$, want $g^0 = 1$.

De grafiek van g snijdt de x -as in $(1, 0)$ want ${}^g\log(1) = 0$.

23 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{1,2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{0,8}\log(x)$.

a Plot de grafieken van f en g . Welk punt ligt op beide grafieken?

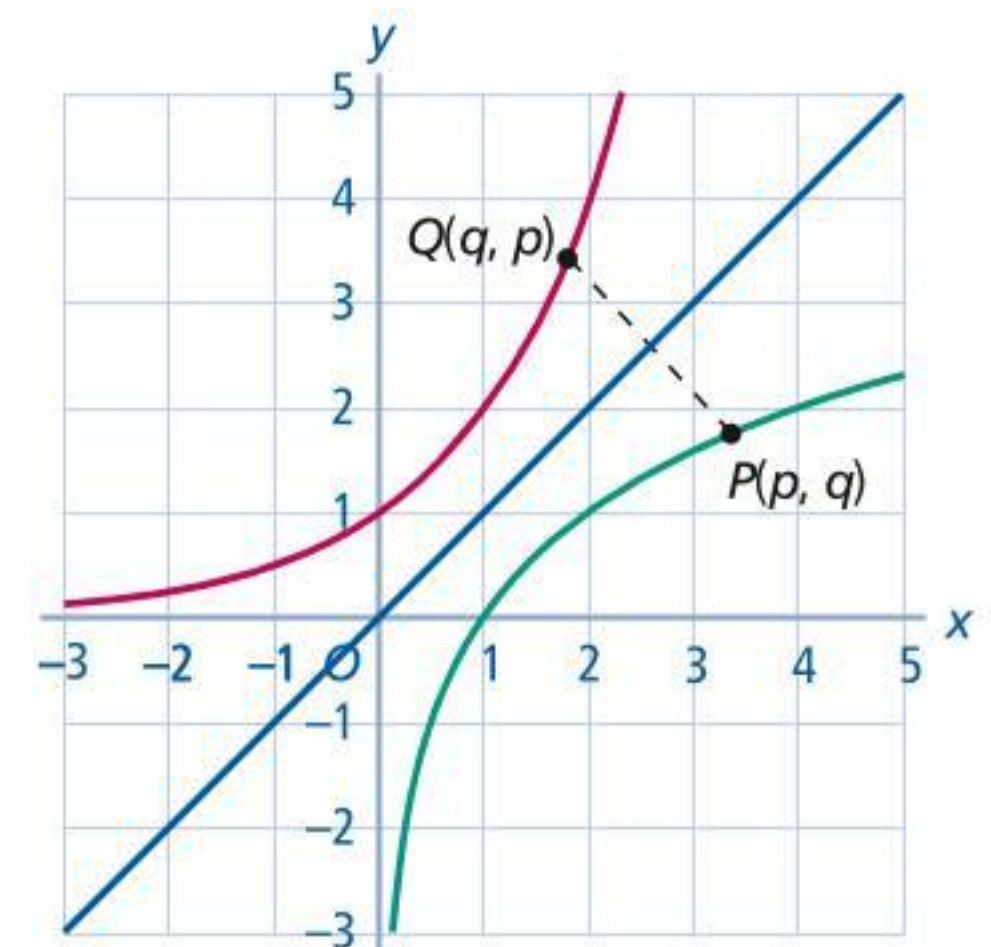
b De grafieken van h en k zijn de spiegelbeelden van de grafieken van f en g bij spiegelen in de lijn $y = x$. Geef de functievoorschriften van h en k .

c Voor welke waarden van het grondtal g is de grafiek van de functie $k(x) = {}^g\log(x)$ stijgend en voor welke waarden van g is de grafiek dalend?

De grafiek van $g(x) = {}^2\log(x)$ kun je niet op elke rekenmachine direct plotten. Gebruik de rekenregel

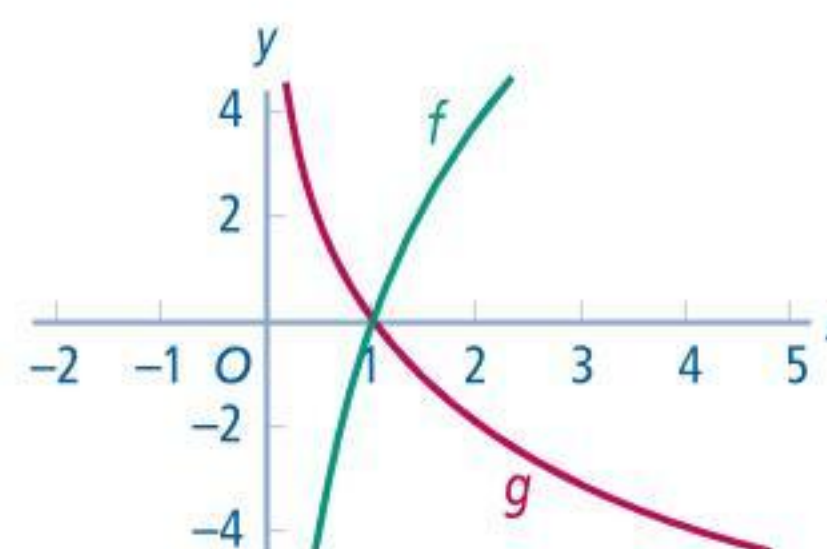
$${}^2\log(x) = \frac{\log(x)}{\log(2)}$$

en voer in $Y_1 = \log(X) / \log(2)$



Voor de **grafiek van een logaritmische functie** geldt:
 Het grondtal g is net als bij exponentiële functies altijd positief, maar niet gelijk aan 1.
 Voor $0 < g < 1$ is de grafiek dalend en voor $g > 1$ stijgend.
 De verticale asymptoot van de grafiek van $k(x) = {}^g\log(x)$ is de y -as ofwel de lijn $x = 0$.
 Het snijpunt met de x -as is $(1, 0)$ want ${}^g\log(1) = 0$.

Voorbeeld



De grafiek van $f(x) = {}^{1,2}\log(x)$ is stijgend, want het grondtal is groter dan 1.
 De grafiek van $g(x) = {}^{0,7}\log(x)$ is dalend, want het grondtal ligt tussen 0 en 1.

- H 24a** Plot en schets de grafieken van $f(x) = {}^2\log(x)$ en $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.
- Geef van beide grafieken de vergelijking van de asymptoot.
 - Geef de coördinaten van het snijpunt van beide grafieken.
 - Geef van beide functies het domein en het bereik.
 - In welke lijn moet je de grafiek van f spiegelen om de grafiek van g te krijgen?
 - Waarom volgt hieruit ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) = -{}^2\log(x)$?
- 25** De luchtdruk hangt af van de hoogte. Per kilometer stijging, is de luchtdruk 11,5% lager. De luchtdruk op zeeniveau (0 meter) is 1 atmosfeer.
- Stel een formule op bij het verband tussen de hoogte h in km en de luchtdruk P in atmosfeer.
 - Druk nu h uit in P .
 - Het menselijk lichaam kan nog voldoende zuurstof uit de lucht halen om goed te functioneren bij een luchtdruk van 0,51 atmosfeer. Wat is de grootste hoogte die voor mensen bewoonbaar is?
 - Tegenwoordig wordt de luchtdruk uitgedrukt in hectopascal, waarbij 1 atmosfeer = 1013 hectopascal. Hoe veranderen de formules bij de opdrachten a en b als P wordt uitgedrukt in hectopascal?
- 26** Hiernaast staat een tabel van exponentiële groeiprocessen met daarbij een schatting van de groeifactor en de bijbehorende verdubbelingstijd.
- Controleer met je rekenmachine enkele verdubbelingstijden.
 - Teken een grafiek bij deze tabel. Zet de groeifactor langs de horizontale as en de verdubbelingstijd langs de verticale as. Bedenk geschikte schaalverdelingen.
 - Hoe loopt de grafiek als de groeifactor heel dicht in de buurt van 1 komt? Leg uit hoe dat komt.
 - Schat met behulp van de grafiek de verdubbelingstijd van een verschijnsel met groeifactor 1,06. Controleer je antwoord met de rekenmachine.

	groeifactor	verdubbelingstijd
wetensch. tijdschriften in de wereld	1,03	23 jaar
voedseltekort in de wereld	1,05	14 jaar
echtscheidingen in Nederland	1,05	14 jaar
benzineverbruik in Nederland	1,07	10 jaar
energieverbruik in de westerse wereld	1,07	10 jaar
opname in psych. ziekenhuizen in Ned.	1,07	10 jaar
alcoholverbruik in Nederland	1,08	9 jaar
aluminiumverbruik in Nederland	1,08	9 jaar
onderzoekinst. voor vredesvraagstukken	1,08	9 jaar
wettelijk minimumloon in Nederland	1,09	8 jaar
werkende gehuwde vrouwen in Nederland	1,11	6 jaar
roofovervallen in Nederland	1,13	5 jaar
personenauto's in Nederland	1,13	5 jaar
doctoraal examens in de psych. in Ned.	1,16	4 jaar
computergebruik in Nederland	1,50	1,4 jaar

5-4

Rekenregels voor logaritmen

- 27a** Geef zonder de rekenmachine te gebruiken de uitkomsten van $2^{\log(3)}$, $(0,3)^{0,3\log(4)}$ en $a^{a\log(3)}$.
- b** Omgekeerd geldt $4 = 6^{\log(4)}$ of ook $4 = (0,3)^{0,3\log(4)}$. Zo kun je 4 schrijven als een macht van 6 en ook als een macht van 0,3. Schrijf op dezelfde manier het getal 7 als macht van 2, als macht van 12 en als macht van p .

Net als voor machten en exponenten geldt voor logaritmen een aantal rekenregels. Die regels worden afgeleid in deze paragraaf. Bij de afleiding gebruik je steeds de basisregel van logaritmen: $2^x = 5$ geeft $x = 2\log(5)$, maar ook het omgekeerde: $2\log(5) = x$ geeft $5 = 2^x$.

$x = {}^3\log(2)$ is de oplossing van $3^x = 2$, dus $3^{{}^3\log(2)} = 2$.

Basisregel

Uit $g^x = a$ volgt $x = {}^g\log(a)$.

Uit ${}^g\log(a) = x$ volgt $a = g^x$.

- 28** Hiernaast is een begin gemaakt met het bewijs dat ${}^2\log(3) + {}^2\log(7) = {}^2\log(3 \cdot 7) = {}^2\log(21)$.
- a** Vul in regel 3 op de puntjes een macht van 2 in.
- b** Leg uit dat uit stap 3 volgt: $p + q = {}^2\log(21)$
- c** Waarom heb je nu bewezen dat ${}^2\log(3) + {}^2\log(7) = {}^2\log(21)$?
- d** ${}^5\log(7) + {}^5\log(70) = {}^5\log(a)$. Welke waarde heeft a ?
- e** Schrijf de vergelijking ${}^5\log(70) - {}^5\log(7) = {}^5\log(b)$ als een optelling en bereken daarmee de waarde van b .
- f** Toon aan: $4 \cdot {}^3\log(2) = {}^3\log(2^4)$.

1. Stel ${}^2\log(3) = p$ en ${}^2\log(7) = q$

2. Dan geldt: $3 = 2^p$ en $7 = 2^q$

3. En $21 = 3 \cdot 7 = 2^p \cdot 2^q = \dots$

$4 \cdot a = a + a + a + a$

Theorie

Voor het rekenen met logaritmen gelden de volgende **rekenregels**.

${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$ met $g > 0, g \neq 1, a > 0$ en $b > 0$

${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$ met $g > 0, g \neq 1, a > 0$ en $b > 0$

$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$ met $g > 0, g \neq 1$ en $a > 0$

$g^{{}^g\log(a)} = a$ met $g > 0, g \neq 1$ en $a > 0$

Voorbeeld 1

Schrijf als één logaritme:

${}^4\log(3) + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(36)$

Oplossing

${}^4\log(3) + {}^4\log(36^{\frac{1}{2}})$
 $= {}^4\log(3) + {}^4\log(6)$
 $= {}^4\log(18)$

Voorbeeld 2

Schrijf als één logaritme:

$2 \cdot {}^3\log(7x) - {}^3\log(7)$

Oplossing

$2 \cdot {}^3\log(7x) - {}^3\log(7) = {}^3\log((7x)^2) - {}^3\log(7)$
 $= {}^3\log(49x^2) - {}^3\log(7) = {}^3\log\left(\frac{49x^2}{7}\right)$
 $= {}^3\log(7x^2) \quad \text{met } x > 0$

- H 29** Schrijf als één logaritme.
- a** ${}^2\log(7) + {}^2\log(3)$ **d** $2 + 3 \cdot {}^5\log(a)$ met $a > 0$
- b** ${}^7\log(42) - {}^7\log(3) + {}^7\log(x)$ met $x > 0$ **e** $6 \cdot {}^7\log(a) - {}^7\log(a) + 1$ met $a > 0$
- c** $3 \cdot {}^7\log(k) - ({}^7\log(k) - {}^7\log(3))$ met $k > 0$ **f** ${}^3\log(p^2) + 4 \cdot {}^3\log(p) + 1$ met $p > 0$
- 30** Er geldt: $-{}^2\log(9) + {}^2\log(18) = 1$
- a** Joost toont dat aan door gebruik te maken van de derde en de eerste rekenregel uit het theorieblok op de vorige pagina. Laat zien hoe Joost dat heeft gedaan.
- b** Jessika maakt op een handige manier gebruik van de tweede rekenregel. Hoe heeft zij de berekening uitgevoerd?
- 31** De snelwegen in Nederland zijn vooral asfaltbetonwegen. Voor deze wegen is de formule voor het verband tussen het geluidsniveau D in dB van het verkeer en de snelheid v in km/uur van het verkeer $D = 35,9 \cdot \log(v) + 4,1$.
- a** Bij welke snelheid is het geluidsniveau 75 dB?
- b** Toon met de rekenregels aan dat een verdubbeling van de snelheid ongeveer 11 dB méér geeft.
- 32a** Geef de exacte oplossing van $3^x = 15$.
- b** De vergelijking $3^x = 15$ kun je ook schrijven als $(b^a)^x = 15$ met $b^a = 3$. Schrijf a als een logaritme.
- c** Laat zien dat uit de vergelijkingen van opdracht b volgt dat $b^{ax} = 15$.
- d** Schrijf $a \cdot x$ als een logaritme.
- e** Laat zien dat uit opdracht b en d volgt dat ${}^3\log 15 = \frac{{}^b\log 15}{{}^b\log 3}$

Voor het berekenen van logaritmen op je rekenmachine gebruik

je de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$.

Deze rekenregel is een special geval van de algemene regel:

$${}^g\log(a) = \frac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)} \quad (b > 0).$$

Met deze regel kun je elke logaritme schrijven als een logaritme met een ander grondtal.

Voorbeeld

Bereken ${}^9\log(27)$ door op grondtal 3 over te gaan.

Oplossing

$${}^9\log(27) = \frac{{}^3\log(27)}{{}^3\log(9)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

- H 33a** Vul in: ${}^8\log(128) = \frac{{}^2\log(\dots)}{{}^2\log(\dots)}$ en laat zien dat ${}^8\log(128) = 2\frac{1}{3}$.
- b** Bereken ${}^4\log(32)$ door op grondtal 2 over te gaan.
- c** Bereken ${}^{27}\log(9)$ door op grondtal 3 over te gaan.
- d** Bereken algebraïsch ${}^{0,25}\log(0,125)$.

5-5

Formules herleiden

H 34 Schrijf in de vorm $N(t) = b \cdot g^t$.

- a** $N(t) = 2^{3+t}$ **d** $N(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-t}$
b $N(t) = 15 \cdot 2^{t+4}$ **e** $N(t) = 4^{\frac{1}{2}t-2}$
c $N(t) = 3^{-2+3t}$

Voorbeeld

Schrijf $N(t) = 5 \cdot 3^{4t+2}$ in de vorm $N(t) = b \cdot g^t$.

Oplossing

$$\begin{aligned} N(t) &= 5 \cdot 3^{4t} \cdot 3^2 && \text{(regel } g^{a+b} = g^a \cdot g^b) \\ N(t) &= 5 \cdot 9 \cdot (3^4)^t && \text{(regel } g^{ab} = (g^a)^b) \\ N(t) &= 45 \cdot 81^t \end{aligned}$$

35 Een batterij verliest bij gebruik per uur 4% van zijn lading.

De batterij is onbruikbaar als er minder dan 20% van de lading over is.

- a** Stel een formule op voor het percentage P van de lading na t uren gebruik.
b Bereken algebraïsch het aantal uren dat de batterij te gebruiken is.
c Bereken algebraïsch de tijdstippen in uren nauwkeurig waarop er tussen 50% en 30% van de oorspronkelijke lading over is.
d Toon aan dat je de formule van opdracht a kunt herleiden tot $t = {}^{0,96}\log\left(\frac{P}{100}\right)$.

Een exponentiële formule kun je herleiden tot een logaritmische formule en omgekeerd kun je een logaritmische formule herleiden tot een exponentiële formule.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $R = 2 + 3 \cdot 5^t$.
Druk t uit in R .

Oplossing

$$\begin{aligned} 2 + 3 \cdot 5^t &= R \\ 3 \cdot 5^t &= R - 2 && \text{(links en rechts } -2) \\ 5^t &= \frac{1}{3}R - \frac{2}{3} && \text{(links en rechts : 3)} \\ t &= {}^5\log\left(\frac{1}{3}R - \frac{2}{3}\right) && (g^x = a \text{ geeft } x = {}^g\log(a)) \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $Z = 4 + {}^2\log(3p)$.
Druk p uit in Z .

Oplossing

$$\begin{aligned} 4 + {}^2\log(3p) &= Z \\ {}^2\log(3p) &= Z - 4 && \text{(links en rechts } -4) \\ 3p &= 2^{Z-4} && ({}^g\log(a) = x \text{ geeft } a = g^x) \\ p &= \frac{1}{3} \cdot 2^{Z-4} && \text{(links en rechts : 3)} \end{aligned}$$

H 36 Druk t uit in N .

- a** $N = 3 \cdot 4^t$ **d** $3N - 2 = \frac{1}{12} \cdot 4^t$ **g** $4N \cdot 6^t = 5$
b $N = -16 + 4 \cdot 5^t$ **e** $N = 4 - 2 \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{2}t\right)$ **h** $7^{tN} = 10$
c $N = {}^6\log(t) - 2$ **f** $7 = N \cdot {}^3\log(t)$ **i** $3^t = 9^N$

37 Gegeven is de formule $T = {}^4\log(2a)$.

- a** Laat zien dat je de formule ook kunt schrijven als $a = \frac{1}{2} \cdot 4^T$.
b En ook als $a = 2^{2T-1}$.

- 38** Een populatie bacteriën verdubbelt zich per dag. Op het tijdstip $t = 0$ is het aantal bacteriën N gelijk aan 600.
- a** Geef een formule die bij dit groeiproces hoort. Neem de tijd t in dagen.
 - b** Geef een formule die t in N uitdrukt.
 - c** Na hoeveel dagen zijn er 30 000 bacteriën?
Geef eerst de exacte waarde en daarna een benadering in twee decimalen.
 - d** Hoeveel bacteriën zijn er op het tijdstip $t = {}^2\log(40)$?

- H 39a** Gegeven is de functie $f(x) = 2 + {}^3\log(x + 5)$.
Het functievoorschrift van f is te herleiden tot $f(x) = {}^3\log(ax + b)$.
Bereken algebraïsch de waarden van a en b .
- b** Herleid het functievoorschrift van $g(x) = -2 + {}^2\log(10 - x)$ tot de vorm $g(x) = {}^2\log(px + q)$.

- 40** Tussen de variabelen R en S bestaat het volgende verband:
 ${}^2\log(R) = 4,45 - 2,31S$.
Dit verband is ook te schrijven als $R = b \cdot g^S$.
Bereken algebraïsch de waarden van b en g in twee decimalen nauwkeurig.
- 41** Een kop thee wordt ingeschonken. De temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ van de thee in het kopje is te berekenen met de formule $T = 21 + 66 \cdot 0,9^t$. Hierbij is t de tijd in minuten met $t = 0$ op het moment van inschenken.
- a** Hoeveel graden was de temperatuur van de thee toen hij ingeschonken werd?
 - b** Hoeveel graden is de omgevingstemperatuur?
 - c** De tijd t kun je uitdrukken in de temperatuur T .
Toon aan dat je dan de formule $t = 39,8 + {}^{0,9}\log(T - 21)$ krijgt.
 - d** Thee is goed drinkbaar als de temperatuur tussen 35°C en 60°C ligt.
Bereken hoeveel minuten de thee goed drinkbaar is. Rond je antwoord af op een decimaal.

- 42** De volumeknop van een versterker kan gedraaid worden vanuit stand 0 naar stand 18. In stand 0 geeft de versterker geen geluid. In stand 18 geeft de versterker het maximale geluidsniveau.

Er geldt de volgende formule $P = a \cdot \log(x + 1)$. Hierin is x de stand van de volumeknop, P het percentage van het maximale geluidsniveau en a een constante.

Uit de gegevens valt af te leiden dat $a \approx 78$.

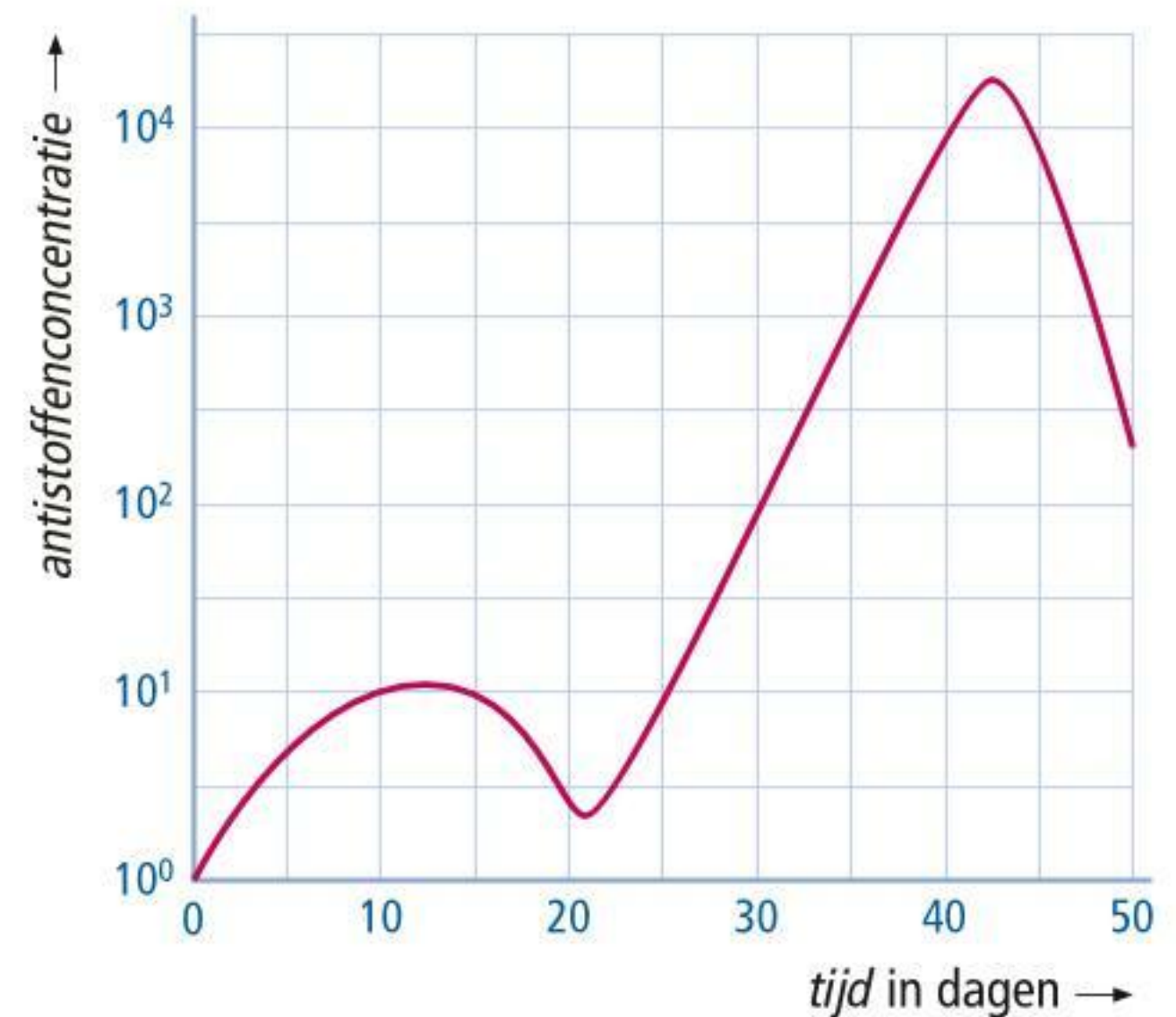
- a** Bereken a in drie decimalen nauwkeurig.
- b** De formule $P = 78 \cdot \log(x + 1)$ is te herleiden tot $x = 10^{n \cdot P} + m$.
Bereken n en m . Rond zo nodig af op drie decimalen.



5-6

Logaritmische schalen

- 43** Als een lichaamsvreemde stof het lichaam van een zoogdier binnendringt worden er antistoffen aangemaakt. In de grafiek zie je hoe het lichaam reageert als dit besmet wordt met een lichaamsvreemde stof. Het lichaam maakt eerst een hoeveelheid antistoffen aan, die daarna grotendeels weer verloren gaan. Bij een volgende besmetting maakt het lichaam snel een nog grotere hoeveelheid antistoffen aan.
- Lees af wanneer de concentratie 10, 100 en 1000 is.
 - Van dag 25 tot dag 40 is de grafiek een rechte lijn. Laat zien dat de antistoffenconcentratie elke 5 dagen met dezelfde factor vermenigvuldigd wordt.
 - Van wat voor soort groei is er in deze periode sprake?
 - Waarin verschillen de verdelingen van de horizontale en de verticale as?
 - De verdeling op de verticale as is niet lineair. Wat neemt er op de verticale as wel lineair toe?



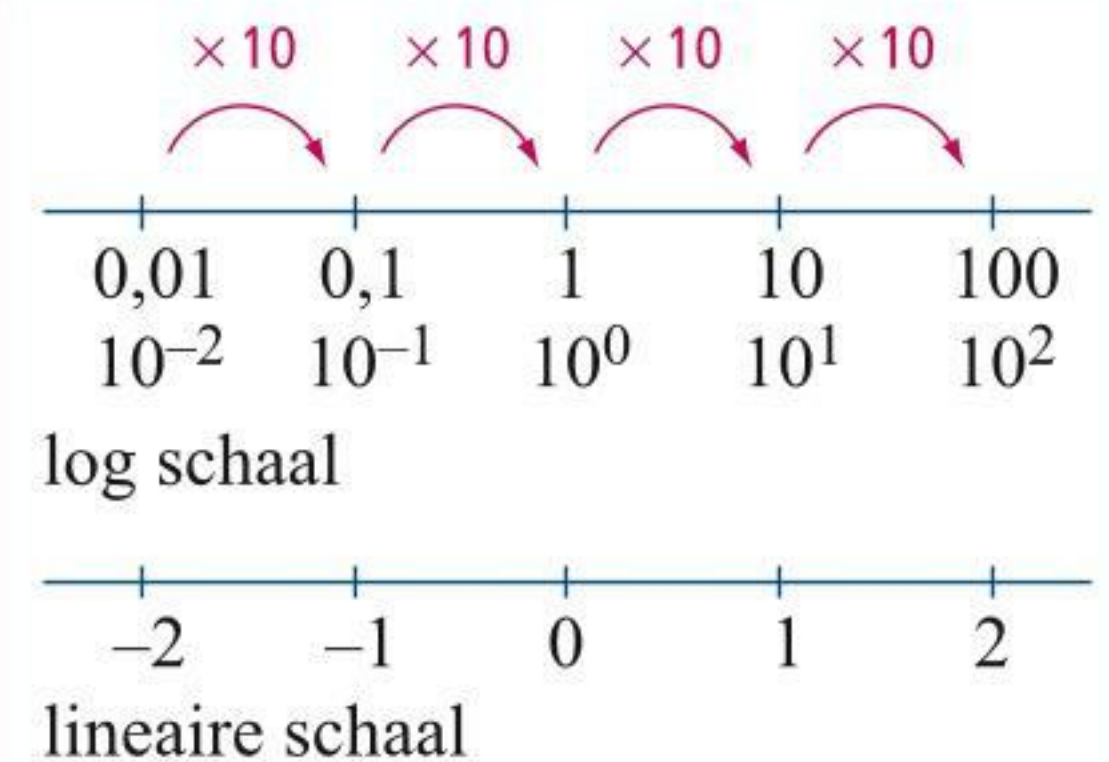
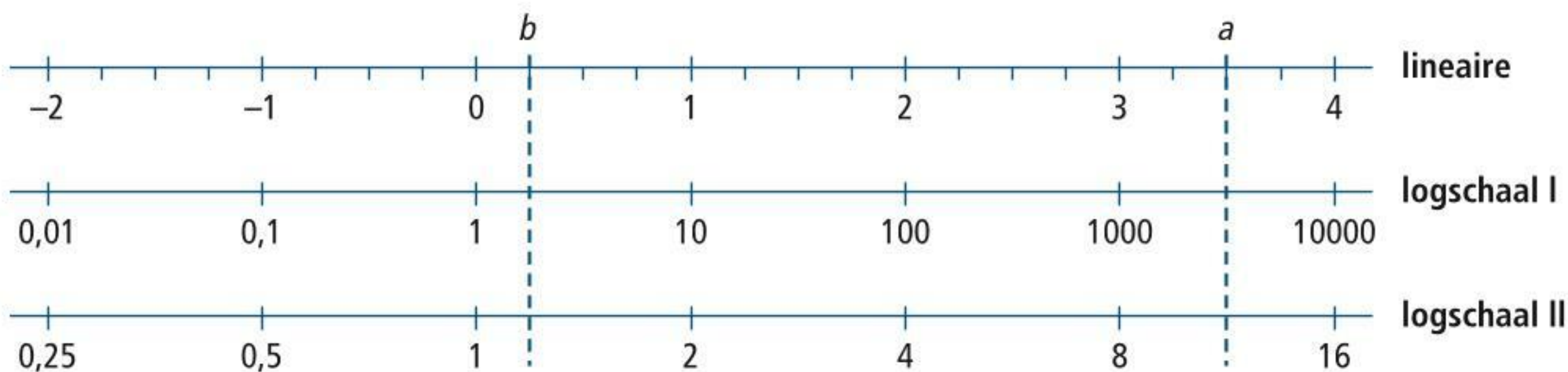
Theorie

Bij lineaire schaalverdelingen wordt bij gelijke stappen een vast getal opgeteld.

Een schaalverdeling waar bij gelijke stappen met een vast getal wordt vermenigvuldigd heet een **logaritmische schaal** of **logschaal**. Dat vaste getal is meestal 10.

Je gebruikt een logschaal als je zowel erg grote als erg kleine waarden in één grafiek moet verwerken.

Als een grafiek bij een logaritmische schaalverdeling een rechte lijn is, is het verband exponentieel.



- 44a** Welke getallen horen er bij a en b op de lineaire schaal?
- Schrijf de getallen van logaritmische schaal I als machten van 10 en de getallen van logaritmische schaal II als machten van 2.
 - Welke machten van 10 horen er bij a en b op de logaritmische schaal I? En welke machten van 2 op de logaritmische schaal II?
 - Geef de waarden die bij a en b horen op logaritmische schaal I. Schrijf de waarden als decimale getallen en rond daarbij af op twee decimalen.
 - Geef ook de waarden die bij a en b horen op logaritmische schaal II. Rond weer af op twee decimalen.

Hoe lees je af op een logschaal?

- 1 Stel vast met welke factor wordt vermenigvuldigd.
- 2 Schrijf de getallen langs de logschaal als machten van deze factor.
- 3 Lees af welke exponent bij het gezochte getal hoort.
- 4 Bereken de waarde van het gezochte getal.

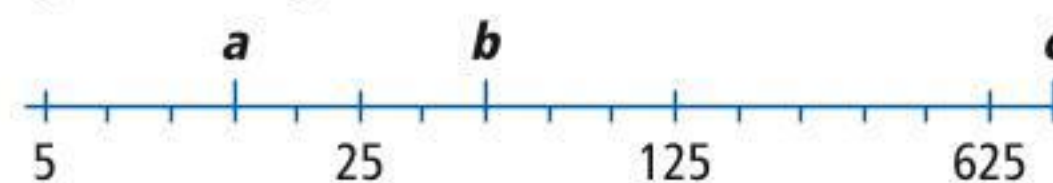
- 45a** Bereken de waarde van het getal b in het voorbeeld.
b Bereken ook de waarde van het getal c .
- 46a** Teken een schaalverdeling met machten van 10 dus 0,01; 0,1; 1; 10 en 100 op gelijke afstanden van elkaar.
b Bereken x als $10^x = 35$.
c Plaats het getal 35 op de schaalverdeling.
d Plaats ook de getallen 0,4 en 7 op de schaalverdeling.

- H 47** Voor een proef werd een kip bewaard in een koelkast die op 0°C is ingesteld en een andere kip in een koelkast die op 6°C is ingesteld. Er werd bijgehouden hoe het aantal bacteriën zich in de kippen ontwikkelde. De beginhoeveelheid bacteriën was bij beide kippen even groot. In de figuur hiernaast staat het resultaat van de proef met de kip in de koelkast van 0°C .
- a** Hoe kun je aan de grafiek zien dat het aantal bacteriën in de kip zich exponentieel ontwikkelde?
b Bij de grafiek hoort de formule $B = b \cdot g^t$, waarbij B het aantal bacteriën is en t de tijd in dagen. Bereken b en g . Rond verstandig af.
c Welke verdubbelingstijd hoort er bij de grafiek?
d Bij de kip in de koelkast van 6°C bleek het aantal bacteriën na 10 dagen 100 keer groter te zijn dan het aantal bacteriën van de kip in de koelkast van 0°C op datzelfde moment. Neem de grafiek hiernaast over en teken daarin de grafiek van het aantal bacteriën in de koelkast van 6°C .
e Geef ook een formule bij deze grafiek.

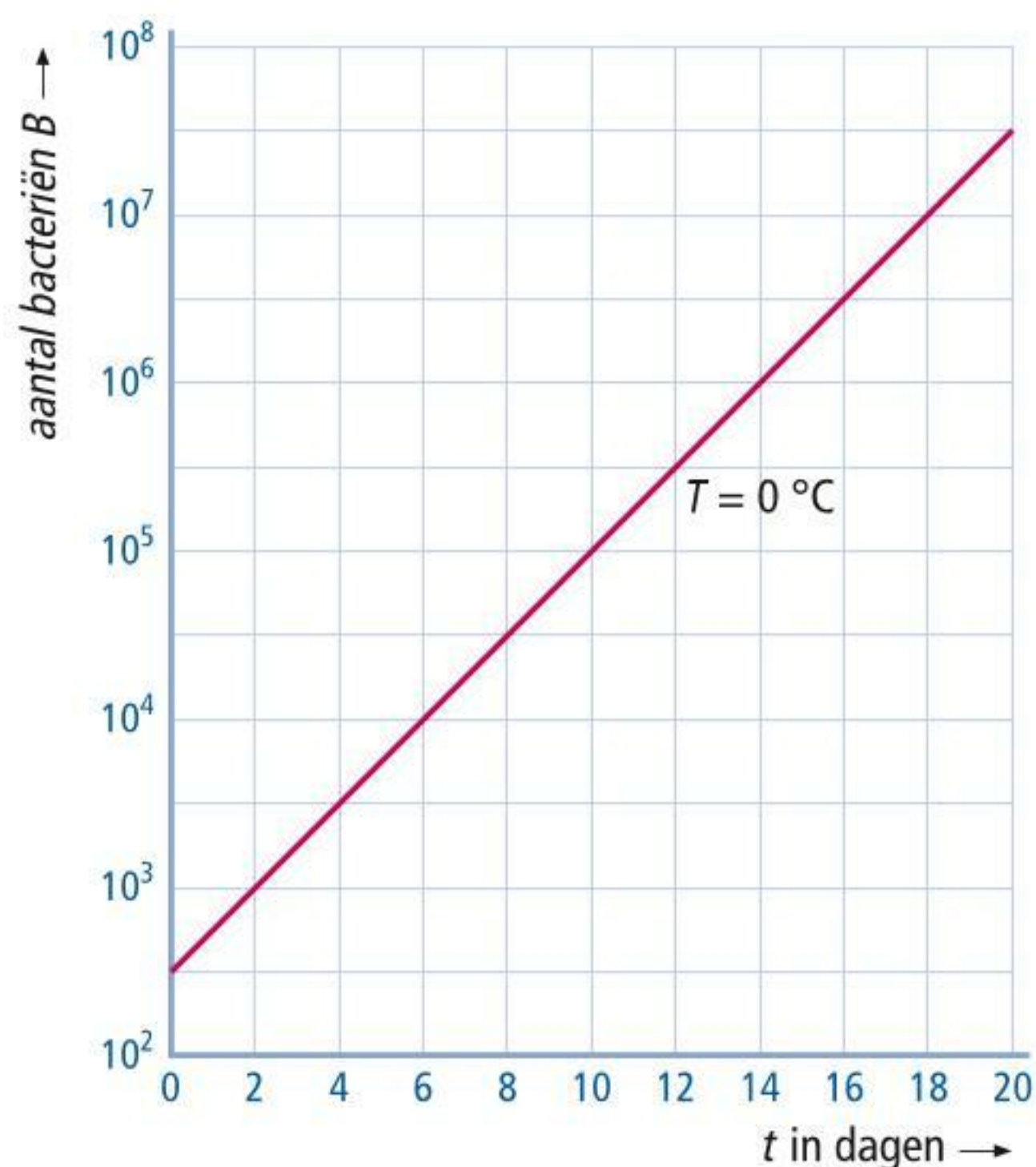
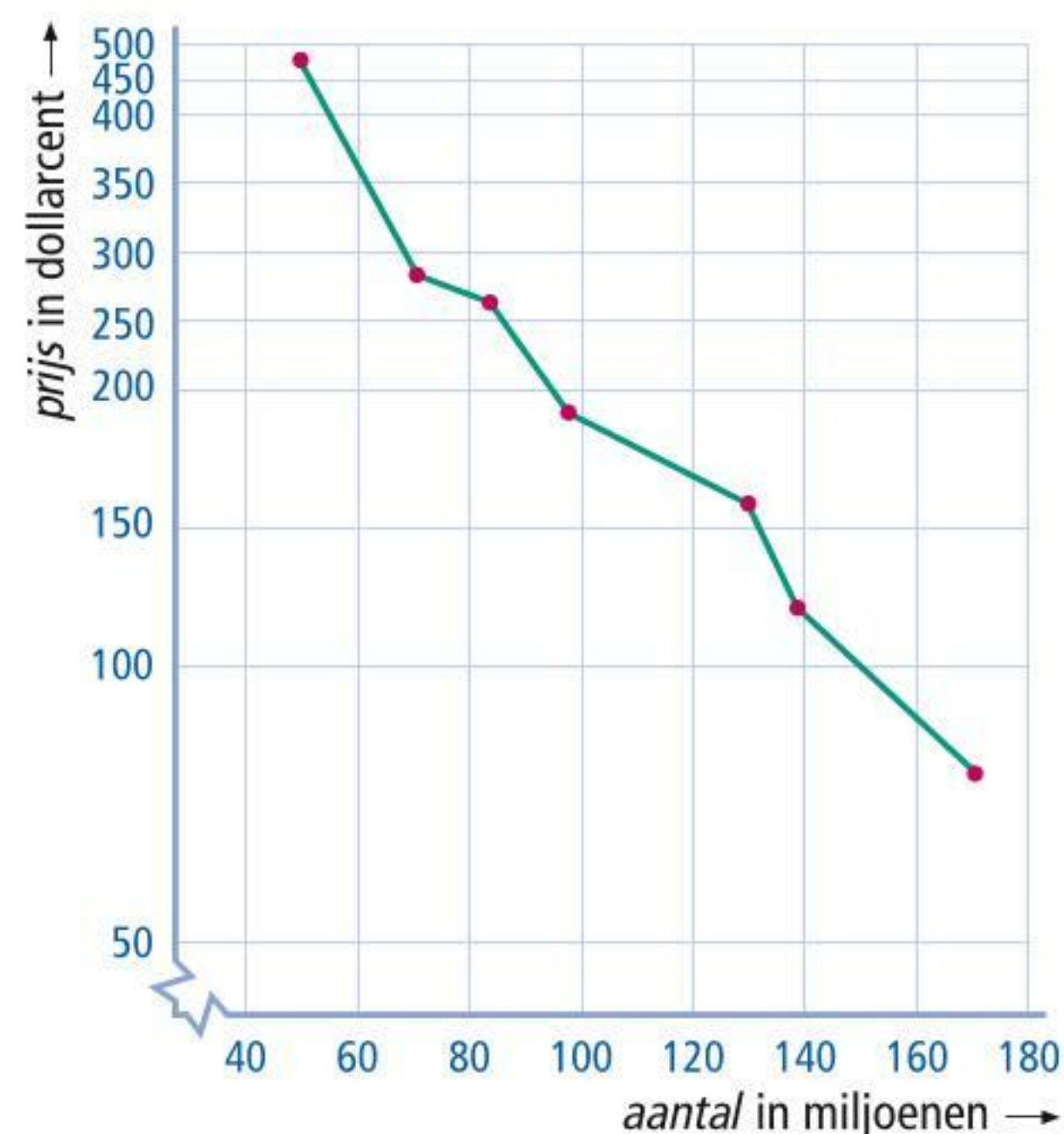
- 48** Twee studenten hebben het verband onderzocht tussen de jaarlijkse aanvoer van sinaasappels in Florida en de gemiddelde veilingprijzen voor die sinaasappels. De gegevens hebben ze verwerkt in de grafiek hiernaast.
- a** Meet de afstand tussen de getallen 50, 100, 200 en 400 op de verticale as. Waarom heeft de verticale as een logaritmische schaalverdeling?
b Waarom kun je er nu vanuit gaan dat het verband tussen de gemiddelde prijs (P) per kist in dollarcent en het aantal miljoenen kisten (A) vrijwel exponentieel zal zijn?
c Bereken de groeifactor van dit verband als je ervan uitgaat dat de grafiek een rechte lijn is door de punten (60, 400) en (150, 100).

Voorbeeld

Geef de waarde van het getal bij a op de getallenlijn.

**Oplossing**

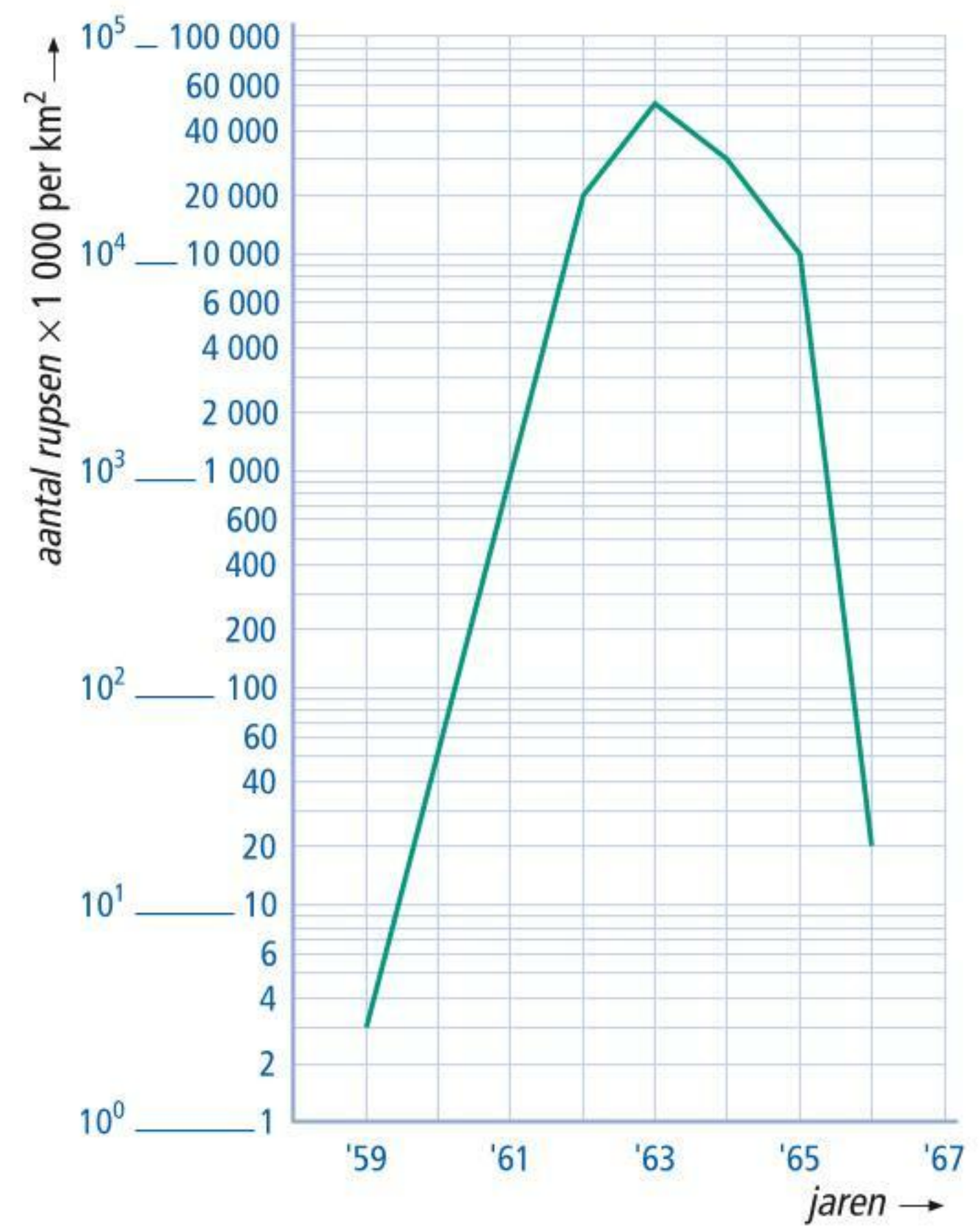
- 1 Er wordt met machten van 5 gewerkt.
- 2 Bij de schaal horen de machten 5^1 , 5^2 , 5^3 en 5^4 .
- 3 a ligt tussen 5^1 en 5^2 : $a = 5^{1\frac{3}{5}} = 5^{1,6}$
- 4 $a \approx 13,13$



5-7

Gemengde opdrachten

- 49** In de alpen worden de larixbossen van tijd tot tijd sterk aangetast door de rupsen van de grijze larixvlinder (*Zeiraphera griseana*). In de periode van 1959 tot 1966 registreerde een bioloog het verloop van een plaag. Hiernaast is met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling de grafiek van dat verloop getekend.
- a** In de eerste jaren na 1959 nam het aantal rupsen elk jaar toe. In welk jaar was deze toename, absoluut gezien, het grootst?
- b** Van 1959 tot 1962 loopt de grafiek rechtlijnig. Bereken voor deze periode de groeifactor per jaar.
- c** Hoe noem je de manier waarop het aantal rupsen groeit in de periode 1959 – 1962?
- 50** Los de volgende vergelijkingen exact op.
- a** $16 \cdot 2^{x-6} = \sqrt{2}$
- b** $15 \cdot 3^x = 75$
- c** $1 - {}^2\log(4x + 1) = -4$
- d** ${}^4\log(2x) + {}^4\log(7) = 3$
- e** $2 \cdot {}^5\log(3) + {}^5\log(6x - 4) = 2$
- 51** In de tabel zie je het totale energieverbruik E op aarde van 2002 tot en met 2007. De eenheid van het energieverbruik E is de energie die vrijkomt bij de verbranding van 1 ton olie.
- a** Laat zien dat er sprake is van exponentiële groei en bepaal de groeifactor per jaar voor het energieverbruik E . Rond je antwoord af op drie decimalen.
- b** Stel een formule op voor het energiegebruik E . Kies $t = 0$ in het jaar 2002.
- c** Bereken de verdubbelingstijd bij deze exponentiële groei.
- d** Neem de tabel over en vul de kolom voor $\log(E)$ in. Rond af op drie decimalen.
- e** Tussen $\log(E)$ en t bestaat een lineair verband van de vorm $\log(E) = at + b$. Bepaal de grootte van a en b .
- f** Gebruik het lineaire verband tussen $\log(E)$ en t om een voorspelling te doen over het energiegebruik in 2020.
- g** Laat zien hoe je de bij opdracht e gevonden formule stap voor stap kunt herleiden tot de formule die je bij opdracht b gevonden hebt. Waarin zit het verschil?



jaar	E	$\log(E)$
2002	45 843	...
2003	47 126	...
2004	48 446	...
2005	49 802	...
2006	51 197	...
2007	52 630	...

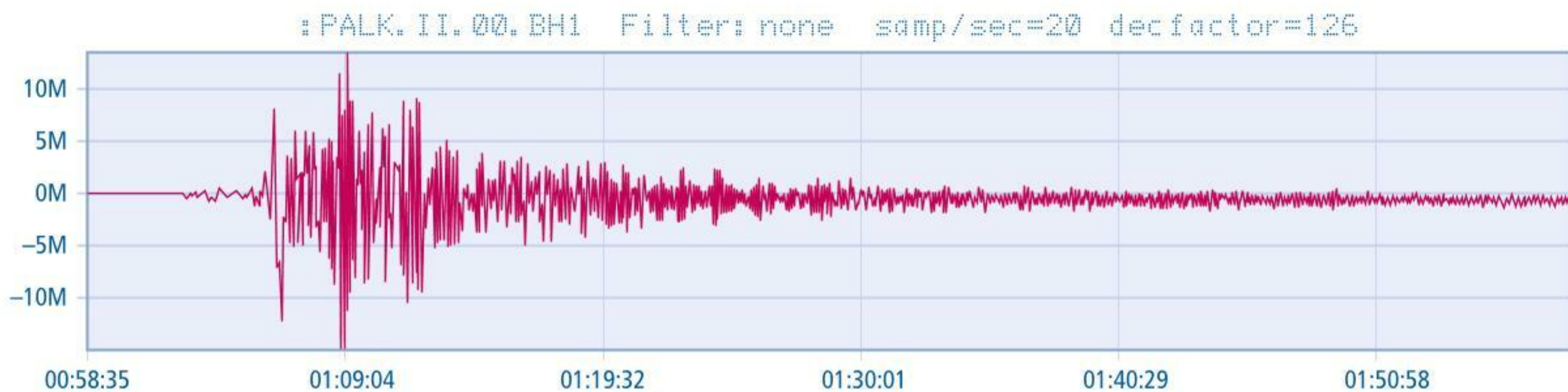
52 Herleid de volgende formules zo dat t wordt uitgedrukt in P .

a $P = 10^{2t-1}$

c $P = 7(1 - 2^t)$

b $P = 3 \cdot 7^{\log(t)}$

d $P = \frac{2 + 3 \cdot \log(t)}{5}$



53 Aardbevingen worden geregistreerd met een seismograaf, die de aardbevingsgolven weergeeft in een seismogram. Hierboven zie je daarvan een voorbeeld. De kracht van een aardbeving wordt meestal uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. Dat getal R bereken je met de formule $R = \log(U) + 1,66 \cdot \log(D) + 3,08$. Hierin is U de grootste uitwijking in mm in het seismogram en D de grootte van de hoek tussen MW en ME in graden. Punt M is het middelpunt van de aarde. Hiernaast zie je hoe die hoek wordt gemeten.

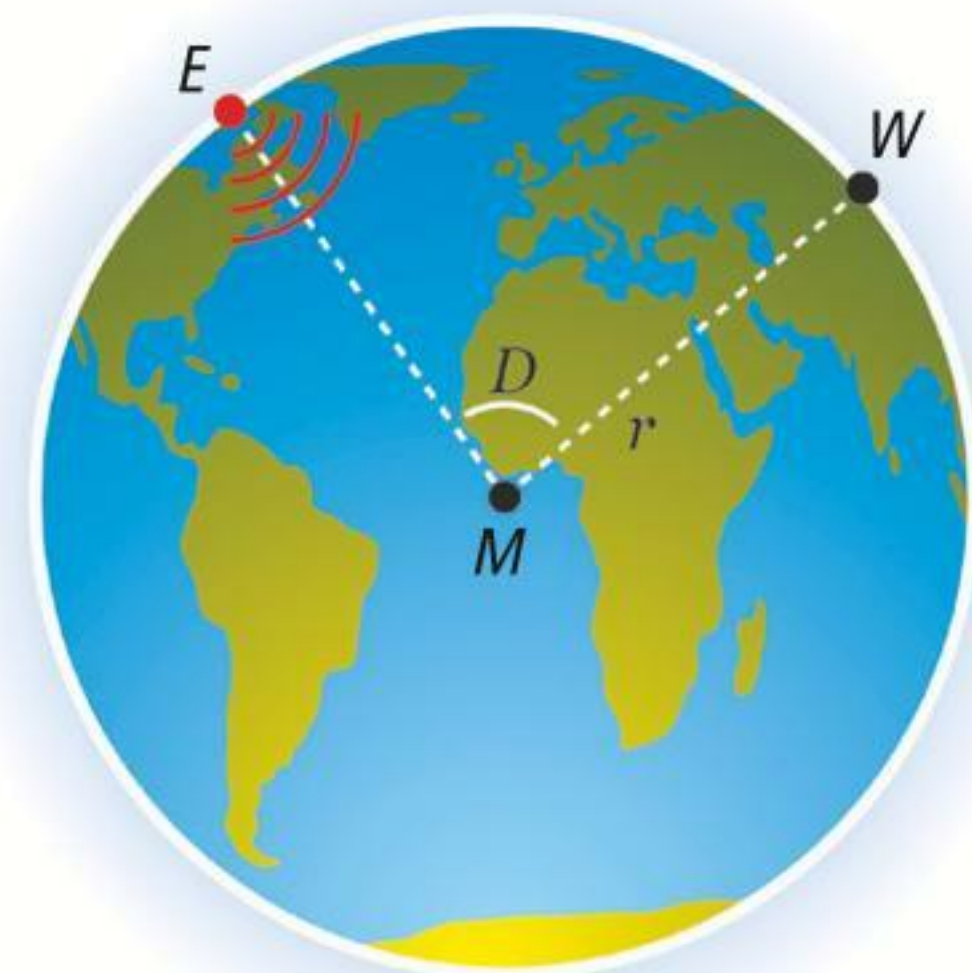
Neem voor de omtrek van de aarde 40 000 km.

De schaal van Richter is zo ontworpen, dat je nul krijgt bij een uitwijking van 0,001 mm op 100 km van het epicentrum.

a Bereken de hoek D die hoort bij een afstand van 100 km langs het aardoppervlak. Controleer daarna met een berekening, dat een uitwijking van 0,001 mm ongeveer $R = 0$ oplevert.

b Hoe verandert R als U tienmaal zo groot wordt?

E : plaats epicentrum
 W : plaats waarnemingsstation
 M : middelpunt aarde



In 2011 was er in Japan een aardbeving met een kracht van 9,0 op de schaal van Richter.

c Bereken de uitwijking in Nederland. De hoek tussen MW en ME is in dit geval ongeveer 84° .

De aardbeving in Japan is ook op veel andere plaatsen gevoeld. Hoewel U en D van plaats tot plaats verschilden gaf de formule voor R steeds 9,0 als resultaat. Voor deze aardbeving gold dus: $9,0 = \log(U) + 1,66 \cdot \log(D) + 3,08$.

☀ d Toon aan dat dit verband ook in de vorm $D = p \cdot U^q$ geschreven kan worden en bereken p en q in twee decimalen.

Samenvatting

Logaritmen

Een logaritme is de exacte oplossing van een exponentiële vergelijking.

Zo is ${}^4\log(5)$ de exacte oplossing van $4^x = 5$.

De oplossing van $3^x = 13$ is ${}^3\log(13)$, dit is de logaritme van 13 voor het grondtal 3. Als geen grondtal wordt vermeld, is het grondtal 10. Dit is ook het grondtal bij de log-toets op je rekenmachine.

De basisregel voor logaritmen: Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ en andersom uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$. Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

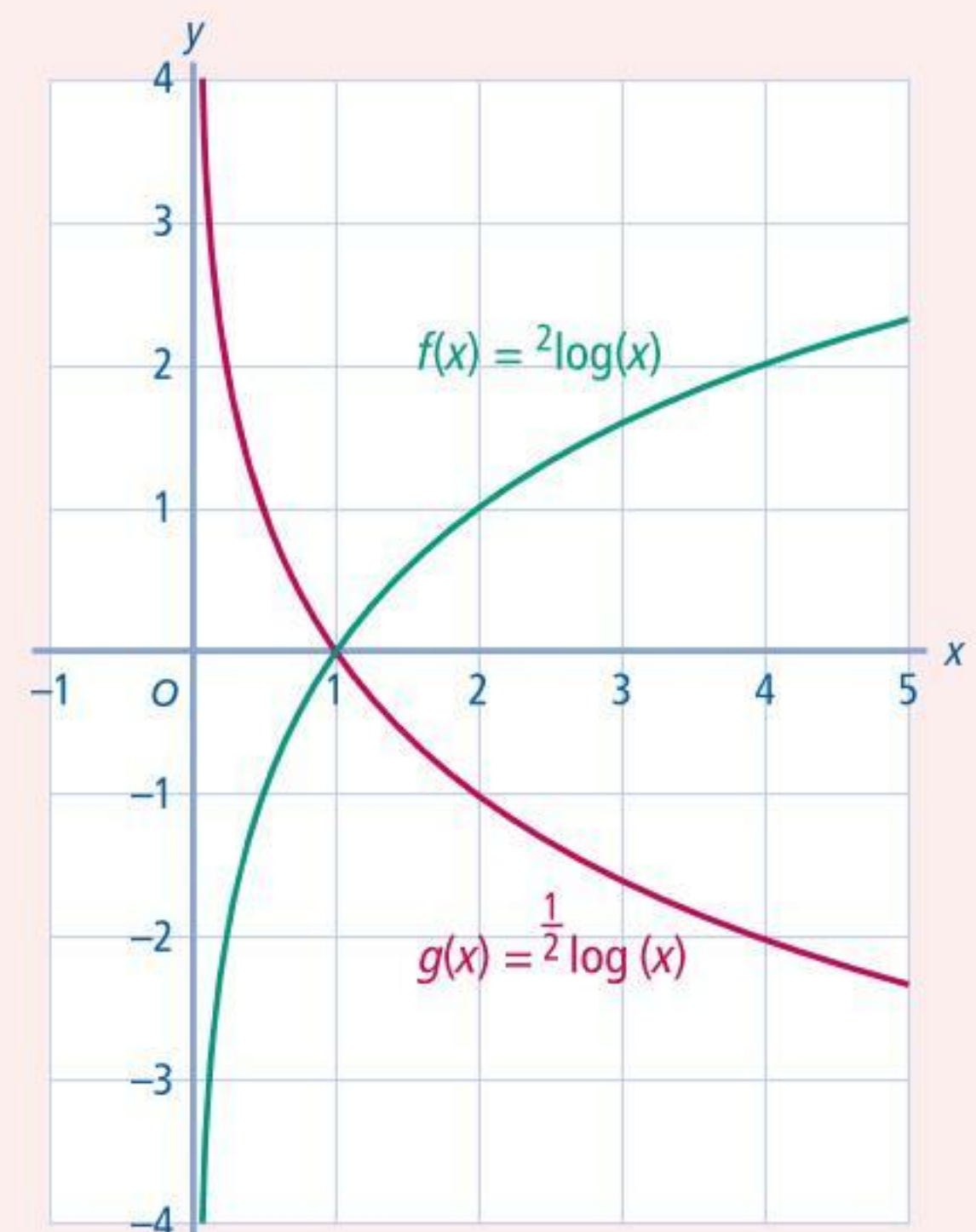
Logaritmische functies

Functies van de vorm $f(x) = {}^g\log(x)$ noem je logaritmische functies.

Voor $0 < g < 1$ is de grafiek dalend en voor $g > 1$ stijgend.

De verticale asymptoot van de grafiek van f is de y -as.

Het snijpunt met de x -as is $(1, 0)$, want ${}^g\log(1) = 0$.



Rekenregels voor logaritmen

Voor het rekenen met logaritmen gelden de volgende rekenregels.

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b) \quad \text{met } g > 0, g \neq 1, a > 0 \text{ en } b > 0$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{met } g > 0, g \neq 1, a > 0 \text{ en } b > 0$$

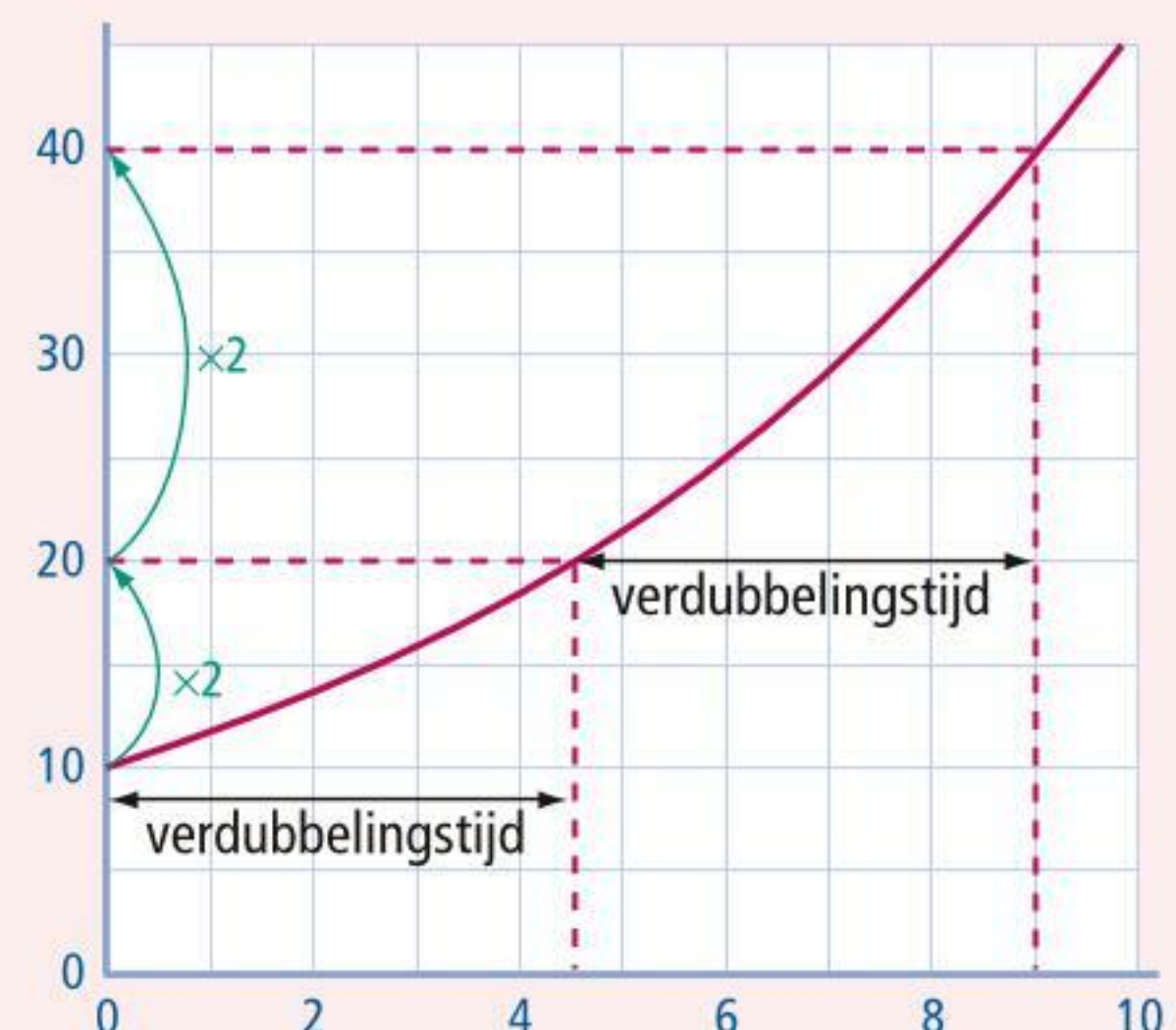
$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p) \quad \text{met } g > 0, g \neq 1 \text{ en } a > 0$$

$$g^{{}^g\log(a)} = a \quad \text{met } g > 0, g \neq 1 \text{ en } a > 0$$

$${}^g\log a = \frac{b \log a}{b \log g} \quad \text{met } g > 0, g \neq 1, b > 0, b \neq 1 \text{ en } a > 0$$

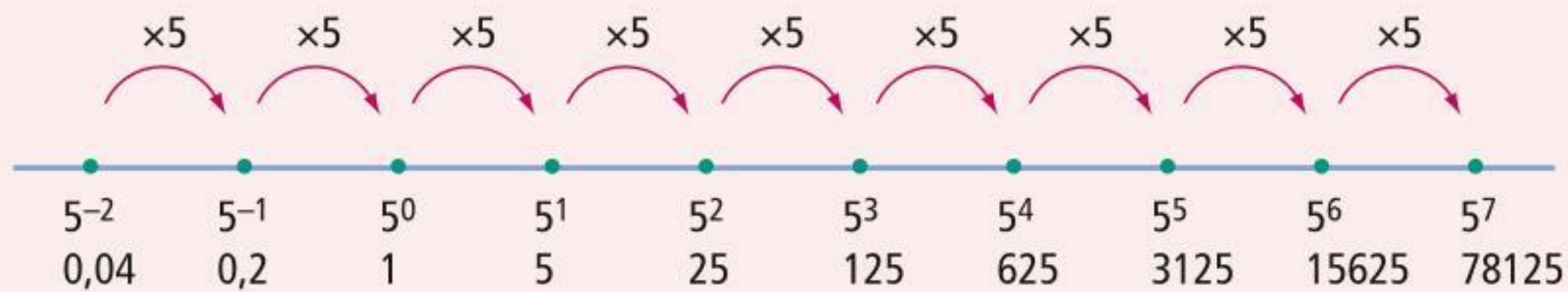
Verdubbelingstijd en halveringstijd

De verdubbelingstijd bij een exponentieel groeiproces is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen. De halveringstijd is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren.



Logaritmische schaal of logschaal

Een schaalverdeling waar bij gelijke stappen met een vast getal wordt vermenigvuldigd, heet een logaritmische schaal of logschaal.

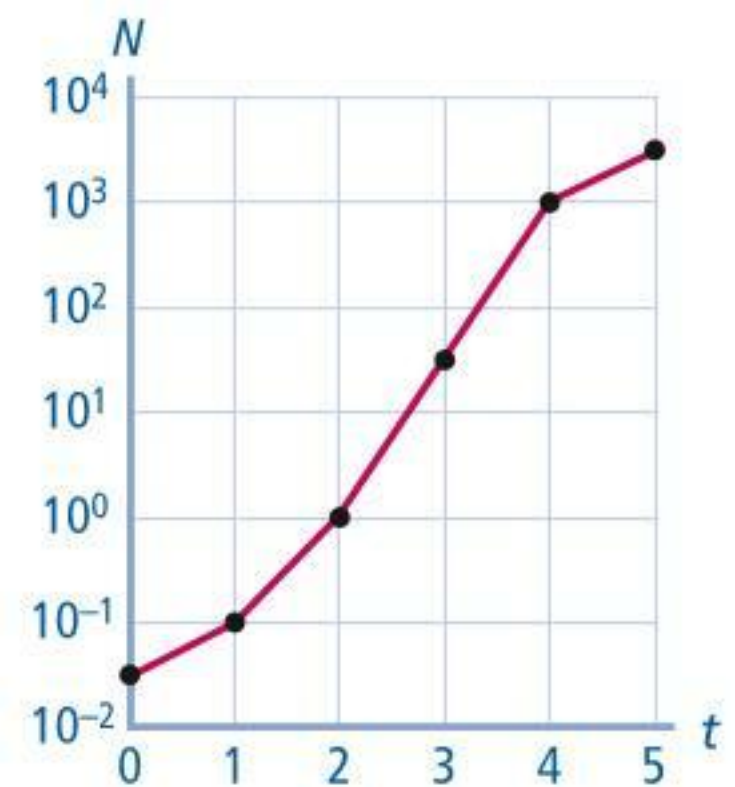


Je kunt met een logaritmische schaalverdeling werken

Als er hele grote en hele kleine waarden in een grafiek weergegeven moeten worden, dan wordt vaak een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

Voorbeeld

Hiernaast staat de grafiek van het verband tussen het aantal N en de tijd t . Wat is de kleinste en wat is de grootste waarde van N in de grafiek?



Oplossing

De kleinste waarde van N is $10^{-1,5} \approx 0,032$
en de grootste waarde van N is $10^{3,5} \approx 3162$

Je kunt de verdubbelingstijd en de halveringstijd bij een exponentieel groeiproces berekenen.

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor g is de verdubbelingstijd gelijk aan $^g\log(2)$ en is de halveringstijd gelijk aan $^g\log\left(\frac{1}{2}\right)$.

Voorbeeld

Bij een exponentieel groeiproces is de groeifactor 0,33 per dag. Bereken de halveringstijd in uren nauwkeurig.

Oplossing

De halveringstijd is

$$0,33\log(0,5) = \frac{\log(0,5)}{\log(0,33)} \approx 0,62521 \text{ dagen.}$$

De halveringstijd is dus $0,62521 \times 24 \approx 15$ uur.

Je kunt formules met logaritmen en machten herleiden

Door gebruik te maken van de rekenregels voor logaritmen en machten kun je een formule met logaritmen herleiden tot een formule met machten. Ook kun je een formule met machten omzetten in een formule met logaritmen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $P = 7 + {}^3\log(5t)$.
Druk t uit in P .

Oplossing

$$7 + {}^3\log(5t) = P$$

$${}^3\log(5t) = P - 7 \quad (\text{links en rechts } -7)$$

$$5t = 3^{P-7} \quad ({}^g\log(a) = x \text{ geeft } a = g^x)$$

$$t = \frac{1}{5} \cdot 3^{P-7} \quad (\text{links en rechts } : 5)$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $Q = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^t$.
Druk t uit in Q .

Oplossing

$$4 - \left(\frac{1}{2}\right)^t = Q$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^t = Q - 4 \quad (\text{links en rechts } -4)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^t = 4 - Q \quad (\text{links en rechts } \times -1)$$

$$t = {}^{\frac{1}{2}}\log(4 - Q) \quad (g^x = a \text{ geeft } x = {}^g\log(a))$$

Test jezelf

T-1a Geef de exacte oplossing van de vergelijking $1,7^t = 8,3$.

b Hieronder staat een rij van zeven logaritmen.
Welke zijn gelijk aan een negatief geheel getal?

$${}^2\log(4), {}^{\frac{1}{2}}\log(2), {}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{3}\right), {}^2\log(1), {}^2\log\left(\frac{1}{3}\right), {}^2\log\left(\frac{1}{4}\right)$$

c Bereken de volgende logaritmen zonder rekenmachine.

$${}^3\log(\sqrt{3}), {}^2\log\left(\frac{1}{8}\right), {}^{\frac{1}{5}}\log(125), {}^{\frac{1}{3}}\log(1)$$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-1.

T-2 Bereken t . Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $t = {}^3\log(8)$

d $\left(\frac{1}{2}\right)^t = 17$

b $t = {}^{\frac{1}{2}}\log(256)$

e $3^{4t} = 5$

c $7^t = 4$

f $1,05 \cdot 6^t = 0,504$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-2.

T-3 Bij een groeiproces hoort de formule $A(t) = 600 \cdot 0,8^t$ met t in jaren.

a Na hoeveel jaar is de beginhoeveelheid gehalveerd?

b Op een bepaald moment is de hoeveelheid gelijk aan 100.

Bereken hoeveel jaar het duurt totdat die hoeveelheid is afgenomen tot 50.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-2.

T-4 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(2x - 1)$,

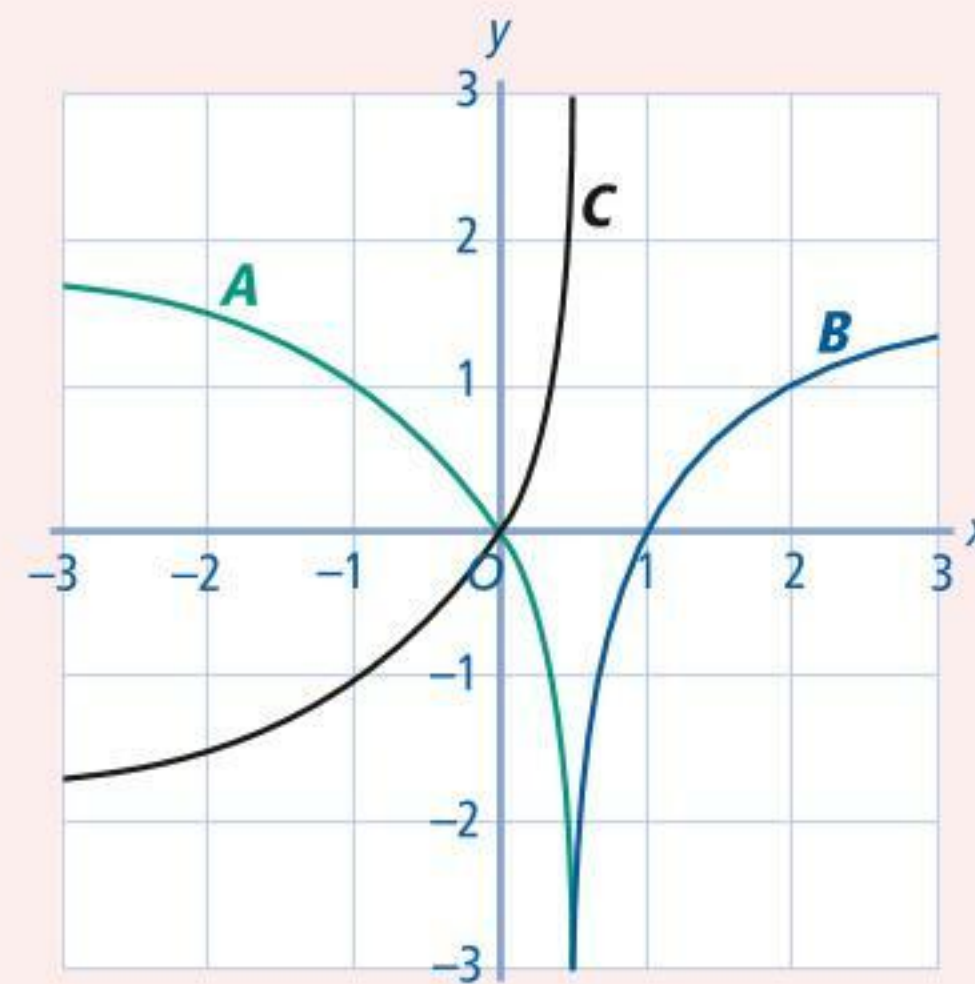
$$g(x) = {}^3\log(1 - 2x) \text{ en } h(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(1 - 2x).$$

De grafieken zijn hiernaast getekend.

a Waarom hebben alle drie grafieken dezelfde verticale asymptoot?

b Geef aan welke grafiek bij welke functie hoort.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-3.



T-5 Schrijf als één logaritme.

a ${}^{24}\log(14) + {}^{24}\log(41)$

b $\log(2) - \log(12) + \log(8)$

c ${}^5\log(6) - \left({}^5\log\left(\frac{1}{12}\right) - {}^5\log(2)\right)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-4.

d ${}^2\log(b) - {}^2\log(3)$ met $b > 0$

e ${}^{\frac{1}{2}}\log(p) + {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4p}\right)$ met $p > 0$

T-6 Gegeven is de functie $f(x) = {}^3\log(27x^2)$.

Toon dat aan dat voor $x > 0$ het functievoorschrift van f te schrijven is als

$$f(x) = 3 + 2 \cdot {}^3\log(x).$$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-5.

T-7 Druk t uit in R .

a $R = {}^7\log(2t)$

c $R = 4 - \frac{1}{2} \cdot 3^t$

b $R = 5 \cdot 3^t$

d $R = 2 - {}^3\log(t^2)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-5.



T-8 Hierboven is de grafiek getekend die de groei van de oppervlakte van waterplanten beschrijft in een groot meer. De oppervlakte O is jaarlijks gemeten. De resultaten staan in de grafiek.

a Neem onderstaande tabel over en vul in.

t in jaren	0	1	2	3	4	5	6	7	8
O in km^2	...	...	...	...	...	...	...	...	...

b Controleer met behulp van de tabel dat de groei eerst vrijwel exponentieel verloopt en daarna wordt afgeremd.

c Hoe is in de grafiek te zien dat de groei eerst vrijwel exponentieel verloopt?

d Stel een functievoorschrift op voor de groei in de eerste vijf jaar.

e Bepaal de grootte van het meer in km^2 .

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-6.

T-9 Levend materiaal, zoals plantaardig of dierlijk weefsel, bevat een geringe hoeveelheid van de radioactieve stof C14. Vanaf het sterftetijdstip van het organisme neemt deze radioactiviteit langzaam af. Bij de zogeheten C14-methode wordt aan de hand van de hoeveelheid radioactieve stof de ouderdom berekend. De formule hiervoor is $t = 5730 \cdot {}^{0,5}\log(10^6 \cdot C)$ met C de concentratie radioactieve stof in mg per kg gewicht, en t is het aantal jaren na het sterven.

a Bij een opgraving wordt een scheepswrak gevonden. Het wrak bevat $8 \cdot 10^{-7}$ mg C14 per kg.

Hoe oud is dit scheepswrak ongeveer?

b Schrijf het verband in de vorm $t = a + b \cdot {}^{0,5}\log(C)$. Geef de waarden van a en b in gehele getallen.

c Het verband tussen t en C kan ook geschreven worden in de vorm $C = p \cdot 0,5^{qt}$, waarin C is uitgedrukt in t .

Laat dat zien. Rond p en q verstandig af.



Extra oefening - Basis

B-1 Geef aan tussen welke twee gehele getallen elke logaritme ligt.

$${}^2\log(17), {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{6}\right), {}^{\frac{1}{4}}\log(0,1) \text{ en } {}^{100}\log(8 \cdot 10^9).$$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-1.

B-2 Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef een exacte oplossing en ook een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $5^t = 12$

c $5^{\frac{1}{2}t} = 6$

b $\left(\frac{1}{4}\right)^t = 15$

d $0,3^{2t} = 81$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-2.

B-3 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{0,5}\log(x)$ en $g(x) = {}^2\log(x - 4)$.

a Geef een vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van f en van die van g .

b Is de grafiek van f stijgend of dalend? En die van g ?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-3.

B-4 Schrijf als één logaritme.

a $2 \cdot \log(11) - 3 \cdot \log(4)$

c $3 \cdot {}^5\log(x) + 1$

b $2 \cdot ({}^4\log(15) - {}^4\log(5)) + {}^4\log(3)$

d ${}^{\frac{1}{4}}\log(x) + 2$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-4.

B-5 Druk t uit in P .

a $P = 4^t - 3$

c $\log(P) - \log(t) = 1$ met $P > 0$ en $t > 0$

b $2P - 4 \cdot 3^{2t} = 0$

d $P = 4 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(2t)$ met $t > 0$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-5.

B-6 Volgens de wet van Moore neemt het aantal transistors in de processor van een computer exponentieel toe. Deze wet is met een stippellijn in de figuur hiernaast aangegeven.

In 1972 had de 8008 processor ongeveer 2500 transistors en in 2008 waren dat er bij de Core i7 processor 730 miljoen.

a In het jaar 2000 kwam de Pentium 4 processor uit.

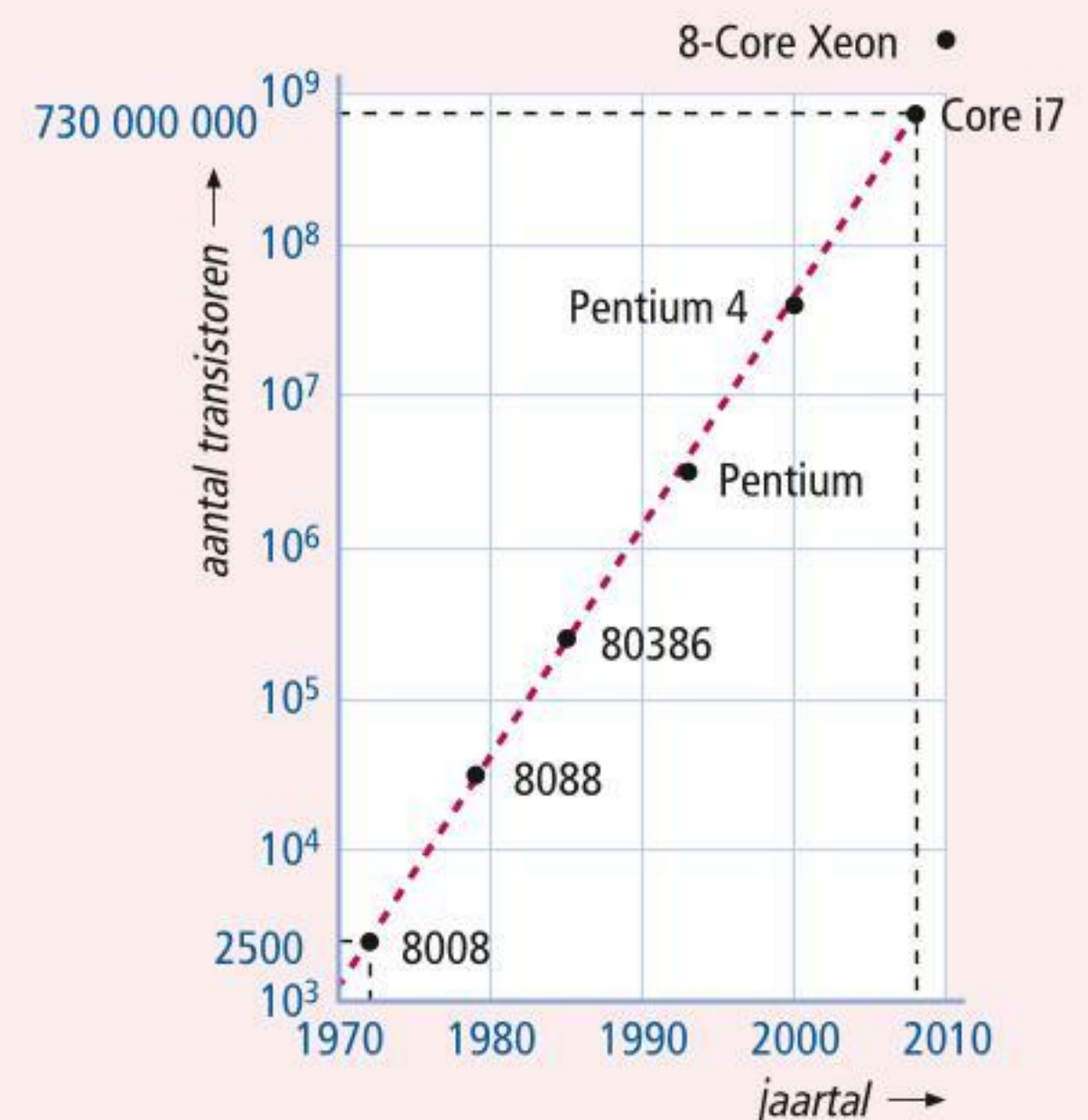
Schat aan de hand van de figuur hoeveel transistors er in een Pentium 4 processor zaten.

b Stel een formule op bij dit groeimodel. Neem t in jaren en kies $t = 0$ in 1972. Rond de groeifactor af op vier decimalen.

c Bereken de verdubbelingstijd van dit groeimodel.

d Bereken hoeveel procent de 8-Core Xeon processor uit 2010 met 2,3 miljard transistors van het groeimodel afwijkt.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-6.



Extra oefening - Gemengd

- G-1** De radioactieve stof Radium-228 heeft een halveringstijd van 6,6 jaar. De factor waarmee de straling per jaar vermenigvuldigd wordt is g .

- a** Leg uit dat $^g\log\left(\frac{1}{2}\right) = 6,6$.
- b** Laat zien dat hieruit volgt $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6,6}}$.
- c** Met hoeveel procent neemt de straling per jaar af?

- G-2** Bij het kweken van een langzaam groeiende bacteriesoort zijn op verschillende momenten tellingen uitgevoerd. In de tabel hieronder zie je de resultaten.

t	0	5	8	10	14
N	2500	9300	20 400	34 500	98 400
$\log(N)$	...	...	...	...	...

Hierin is N het aantal getelde bacteriën en t de tijd in dagen.

- a** Neem de tabel over en vul de rij voor $\log(N)$ in. Rond af op twee decimalen.
 - b** Maak bij de tabel een grafiek die het verband tussen t en $\log(N)$ weergeeft en trek door deze punten zo goed mogelijk een rechte lijn.
 - c** Wat betekent het voor het verband tussen N en t dat de punten in de grafiek op een rechte lijn liggen? Licht je antwoord toe.
 - d** Laat met een berekening zien dat geldt $N = 2500 \cdot 1,3^t$.
 - e** Bereken de waarde van t waarvoor $N = 25\,000$. Geef je antwoord zowel exact als afgerond op twee decimalen.
 - f** Schrijf t als functie van N en controleer daarmee je antwoord van opdracht e.
- G-3** Van een bepaalde hoeveelheid radioactief materiaal is er een verband tussen de intensiteit I van de straling en de tijd t in dagen volgens de formule $\log(I) = -0,009t + 1$. Het verband tussen I en t kan geschreven worden in de vorm $I = b \cdot g^t$.
- a** Toon dat aan en bereken de waarde van b en van g .
 - b** Bereken na hoeveel dagen de intensiteit is gehalveerd.
- G-4** Voor de geluidssterkte D in dB van een toongenerator geldt:

$$D = 10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{r^2}\right).$$

Hierin is r de afstand in meters tot de generator.

- a** Bereken de geluidssterkte op de afstanden 5 m, 7 m, 10 m en 20 m.
- b** De formule is te herleiden tot de vorm $D = a + b \cdot \log(r)$, waarbij a en b constanten zijn. Bereken de waarde van a en van b .
- c** Bereken op welke afstand de geluidssterkte gelijk is aan 0.

Uitdagende opdrachten

- U-1** Geluid bestaat uit golven. De frequentie in Hz (hertz) van een golf is het aantal trillingen per seconde. De frequentie bepaalt de toonhoogte van het geluid. Hoe hoger de frequentie, des te hoger de toon.
Twee geluidsgolven met verschillende frequenties f_1 en f_2 hebben een verschil in toon, de toonafstand. Deze toonafstand wordt uitgedrukt in cent.
Het verband tussen de frequenties van de twee geluidsgolven en de toonafstand T wordt gegeven door de formule:

$$T = 1200 \cdot {}^2\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

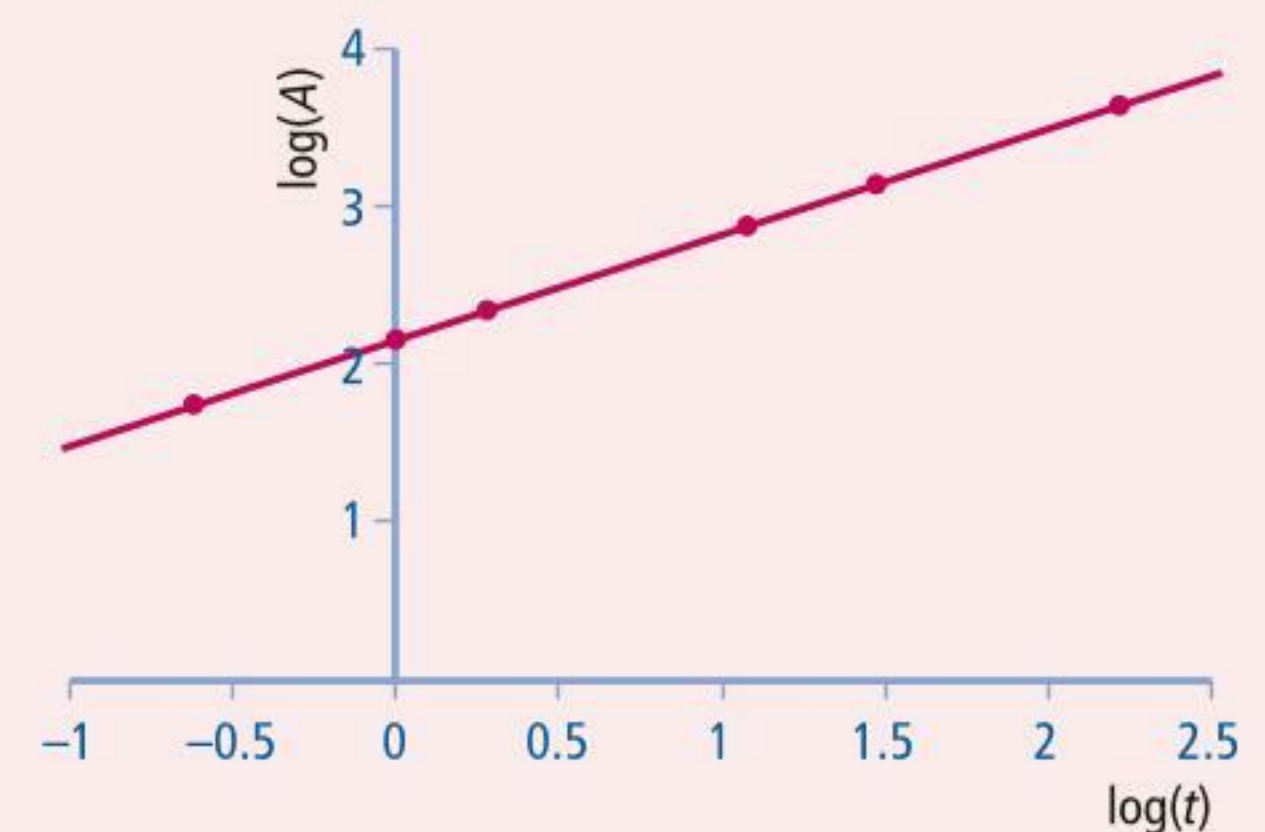
De **cent** is een logaritmische schaal om frequentieverhoudingen om te zetten in gemakkelijker te hanteren toonafstanden.
De maat werd rond 1870 ingevoerd door Alexander Ellis.

- a** Twee tonen verschillen één octaaf als de frequenties van de tonen zich verhouden als 1 : 2.
Hoeveel cent is de toonafstand tussen twee tonen die een octaaf verschillen?
- b** Emmy slaat de A op de piano aan. Deze toon heeft een frequentie van 440 Hz. Daarna slaat ze een toon aan op een afstand van 386 cent.
Bereken de mogelijke frequenties van deze toon.
- c** Twee tonen hebben een toonafstand van 702 cent.
Bereken de frequentieverhouding $f_1 : f_2$ van de bijbehorende tonen.
- U-2** In de tabel zie je van een aantal planeten de afstand A tot de zon in miljoenen kilometers en de omlooptijd t in jaren.

	Mercurius	Aarde	Mars	Jupiter	Saturnus	Neptunus
t	0,24	1,00	1,88	11,86	29,46	164,80
A	57,8	149,6	228	778	1430	4500

Bij de tabel is de grafiek hiernaast gemaakt, waarbij $\log(A)$ is uitgezet tegen $\log(t)$.

- a** Blijkbaar bestaat tussen $\log(A)$ en $\log(t)$ een lineair verband. Geef een formule van dit lineaire verband.
- b** Schrijf dit verband in de vorm $A = p \cdot t^q$.
- U-3** Toon algebraïsch aan dat de formules $y = \frac{1}{a}\log(x)$ en $y = -a\log(x)$ gelijkwaardige formules zijn voor $a > 0$ en $a \neq 1$.



Logaritmentafel

Hoewel je vermenigvuldigingen zoals 34×81 ook zonder rekenmachine kunt berekenen, wordt dat bij $11,16 \times 10,94$ heel wat meer werk. De rekenmachine kwam echter pas begin tachtiger jaren van de vorige eeuw op scholen in zwang. Hoe deden leerlingen deze berekening dan in de jaren ervoor?



John Napier (1550-1617) beschreef in 1614 in zijn boek 'Mirifici logarithmorum canonis descriptio' hoe je getallen kunt vermenigvuldigen met behulp van logaritmen.

In de notatie die wij tegenwoordig gebruiken wordt de vermenigvuldiging $11,16 \times 10,94$ omgezet in ${}^{10}\log(11,16 \times 10,94) = {}^{10}\log(11,16) + {}^{10}\log(10,94)$. Maar hoe vind je de uitkomst van bijvoorbeeld ${}^{10}\log(11,16)$ zonder rekenmachine?

Op school gebruikten leerlingen in de zeventiger jaren hiervoor een zogenaamde logaritmentafel.

1000-1500		log x									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039	
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082	
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124	
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166	
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208	
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249	
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0280	
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330	
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370	
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410	
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449	
111	0543	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488	
112	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527	
113	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565	

Uit de tabel volgt dat ${}^{10}\log(1,116) = 0,0477$.

Met behulp hiervan kun je bijvoorbeeld

${}^{10}\log(1116)$ en ${}^{10}\log(11,16)$ benaderen.

$${}^{10}\log(1116) = {}^{10}\log(1000 \times 1,116) =$$

$${}^{10}\log(1000) + {}^{10}\log(1,116) = 3 + 0,0477 = 3,0477$$

$$\text{en } {}^{10}\log(11,16) = {}^{10}\log(10 \times 1,116) = 1,0477$$

Opdracht

Gebruik de tabel om na te gaan dat

$${}^{10}\log(11,16) + {}^{10}\log(10,94) = 2,0867$$

Om $11,16 \times 10,94$ zonder rekenmachine uit te rekenen moet je weten van welk getal 2,0867 de logaritme is.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
120	0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824
121	0928	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860
122	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896
123	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931
124	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966
125	0969	0973	0976	098	0983	0986	0990	0993	0997	1000
126	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035
127	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069
128	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103
129	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136
130	1139	1143	1146	1149	1153	1156	1159	1163	1166	1169
131	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202

Volgens de tabel is $0,0867 = {}^{10}\log(1,221)$

$$2,0867 = {}^{10}\log(100) + {}^{10}\log(1,221) = {}^{10}\log(112,1)$$

Hieruit volgt dat $11,16 \times 10,94 \approx 122,1$

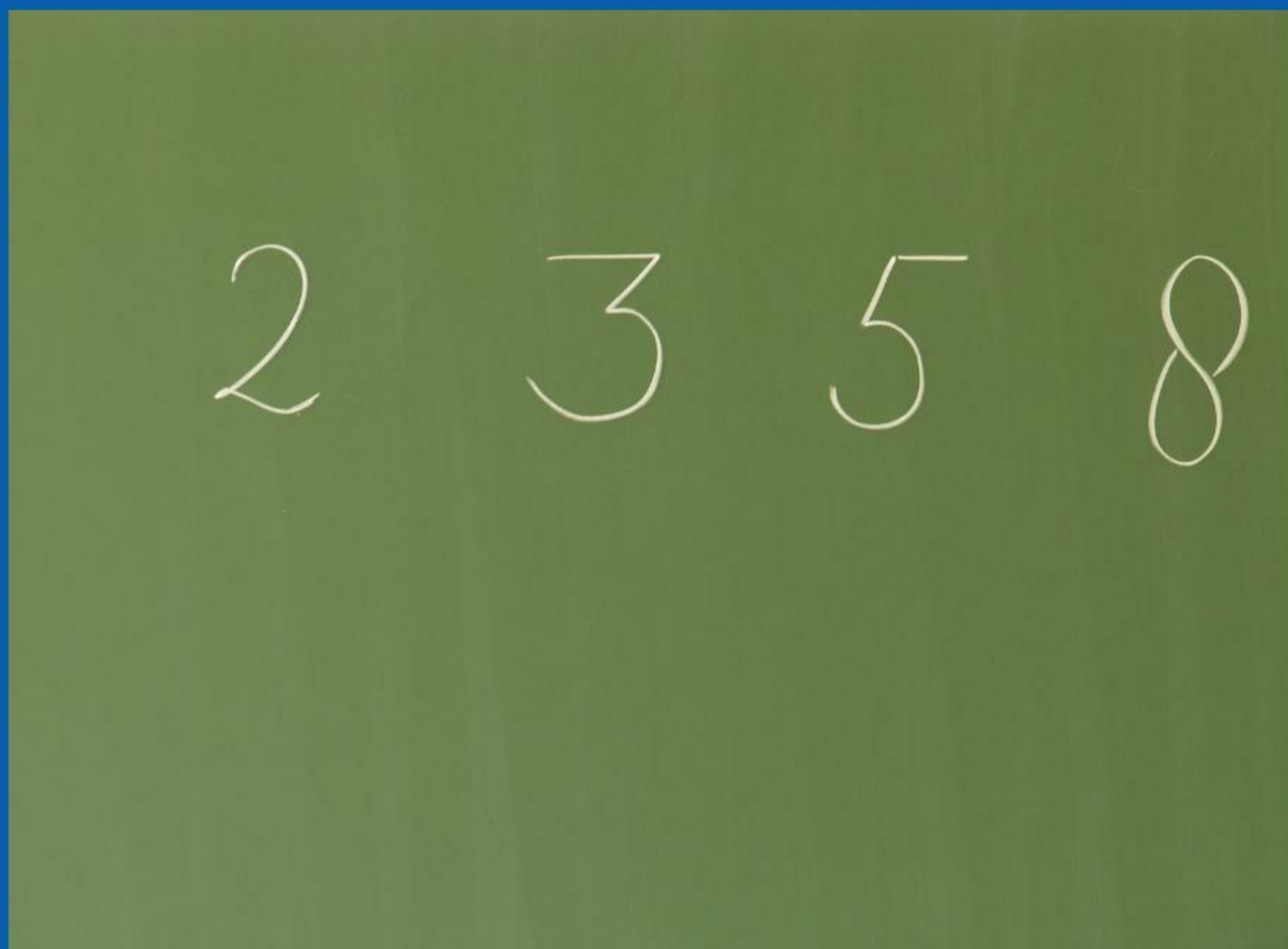
Opdracht

Benader met behulp van de tabellen:

$$10,98 \times 11,21$$

$$\frac{11,21}{10,98}$$

$$10,2^{1,1}$$



Getallen op een rij

In deze rij getallen zit regelmaat.

Wat is het 10e getal? Zijn er meer mogelijkheden?



Hoofdstuk 6

Rijen en recursie

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	140
6-1	Recursieve formules	142
6-2	Tijdgrafieken	144
6-3	Directe formules	146
6-4	Som van een rekenkundige rij	148
6-5	Som van een meetkundige rij	150
6-6	Gemengde opdrachten	152
	Samenvatting	154
	Test jezelf	156
	Extra oefening - Basis	158
	Extra Oefening - Gemengd	159
	Uitdagende opdrachten	160
	Fibonacci	161



Voorkennis

V-1 De tabel hieronder hoort bij een lineair verband.

x	2	3	4	5	6	7	8
y	19	23	27	31	35	39	43

- Hoe zie je aan de tabel dat deze bij een lineair verband hoort?
- Welke waarde heeft y bij $x = 10$? En bij $x = 11$?
- Waarom heb je de bijbehorende lineaire formule niet nodig om de waarde van y bij $x = 10$ te berekenen?
- Waarom is het wel handig om de lineaire formule te hebben als je de waarde van y wilt berekenen bij $x = 82,7$?
- Beredeneer met behulp van de tabel welke waarde y heeft bij $x = 0$.
- Stel een lineaire formule op die bij de tabel past.
- Bereken de waarde van y bij $x = 20$ en bij $x = 82,7$.

Theorie

Een verband tussen x en y is een **lineair verband** als het volgende geldt: Als de waarde van x met een vast getal toeneemt, dan neemt de waarde van y ook met een vast getal toe. De toename van y kan positief of negatief zijn. Bij een lineair verband tussen de variabelen x en y hoort de formule $y = ax + b$. Hierin is a het **hellingsgetal** of de **richtingscoëfficiënt** en is b het **startgetal**. Het startgetal is de waarde van y bij $x = 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de tabel

x	2	6	10	14	18
y	15	13	11	9	7

Geef de formule bij de tabel en bereken de waarde van y bij $x = 36$.

Oplossing

Als in de tabel x met 4 toeneemt, neemt y met 2 af.
Dus als x met 1 toeneemt, neemt y met $\frac{1}{2}$ af.
Dus de richtingscoëfficiënt is $-\frac{1}{2}$.
Bij $x = 0$ is $y = 15 - 2 \times -\frac{1}{2} = 16$.
De formule bij de tabel is $y = -\frac{1}{2}x + 16$.
Bij $x = 36$ is $y = -\frac{1}{2} \times 36 + 16 = -2$.

V-2 De drie tabellen hieronder horen elk bij een lineair verband. Stel bij elke tabel een passende formule op en bereken bij elke tabel de waarde van p bij $t = 12$, bij $t = 20$ en bij $t = 64,3$.

A

t	7	8	9	10	11
p	9	11	13	15	17

B

t	2	4	6	8	10
p	120	115	110	105	100

C

t	3	4	5	6	7
p	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0

V-3 De tabel hieronder hoort bij een exponentieel verband.

x	3	4	5	6	7	8	9
y	64	80	100	125	156,25	195,31	244,14

- Hoe zie je aan de tabel dat deze bij een exponentieel verband hoort?
- Welke waarde heeft y bij $x = 10$? En bij $x = 12$? Rond af op twee decimalen.
- Waarom heb je niet de bijbehorende exponentiële formule nodig om de waarde van y bij $x = 10$ te berekenen?
- Waarom is het wel handig om de exponentiële formule te hebben als je de waarde van y wilt berekenen bij $x = 25$?
- Stel een exponentiële formule op die bij de tabel past.
- Bereken y bij $x = 25$ en bij $x = 19,3$. Rond af op twee decimalen.

Theorie

Een verband tussen x en y is een **exponentieel verband** als het volgende geldt: Als de waarde van x met een vast getal toeneemt, dan wordt de waarde van y steeds met dezelfde factor vermenigvuldigd. Bij een exponentieel verband tussen de variabelen x en y hoort de formule $y = b \cdot g^x$. Hierin is g de **groefactor** en b de **beginwaarde**. De beginwaarde is de waarde van y bij $x = 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de tabel

x	3	4	5	6	7
y	3125	3750	4500	5400	6480

Geef de formule bij de tabel en bereken de waarde van y bij $x = 35$.

Oplossing

$3750 : 3125 = 1,2$; $4500 : 3750 = 1,2$; $5400 : 4500 = 1,2$ en $6480 : 5400 = 1,2$.

Als in de tabel x met 1 toeneemt, wordt y steeds met 1,2 vermenigvuldigd. Dus de groefactor is 1,2.

Bij $x = 0$ is $y = 3125 : 1,2^3 \approx 1808,45$.

De formule bij de tabel is $y = 1808,45 \cdot 1,2^x$.

Bij $x = 35$ is $y = 1808,45 \cdot 1,2^{35} \approx 1\,068\,194$.

V-4 De drie tabellen hieronder horen elk bij een exponentieel verband. Bereken bij elke tabel de waarde van p bij $t = 12$, bij $t = 15$ en bij $t = 8,3$.

A

t	0	1	2	3	4
p	10	11	12,1	13,31	14,641

B

t	7	8	9	10	11
p	48	96	192	384	768

C

t	6	7	8	9	10
p	1024	256	64	16	4

V-5 Hieronder staan drie tabellen.

- Ga bij elk van de drie tabellen na of er sprake kan zijn van een lineair verband, een exponentieel verband of geen van beide.
- Geef bij elke tabel de waarde van y bij $x = 12$.

A

x	2	3	4	5	6
y	90	81	72,9	65,61	59,05

B

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	1	0	0	1	3	6	10

C

x	5	6	7	8	9
y	-1,5	1	3,5	6	8,5

6-1

Recursieve formules

- 1** Hiernaast zie je twee rijen getallen.
- a** Welke regelmaat zie je in de eerste rij getallen?
- b** Schrijf van de eerste rij de volgende twee getallen op.
- c** Van de tweede rij vind je het volgende getal door het voorafgaande getal in de rij met 3 te vermenigvuldigen en van het resultaat 7 af te trekken.
Reken na dat de gegeven getallen kloppen met deze regel.
- d** Bereken van de tweede rij de volgende twee getallen.

	3, 4, 6, 9, 13, ..., ...
	4, 5, 8, 17, ..., ...

Als er in een rij getallen een regelmaat zit, kun je deze regelmaat vaak met een formule beschrijven. In zo'n formule noem je het volgende getal de nieuwe waarde en het voorafgaande getal de oude waarde.

- 2** Hiernaast zie je drie rijen.
- a** Een woordformule die past bij de eerste rij is
 $\text{nieuwe waarde} = 2 \cdot \text{oude waarde} + 1$.
Met deze formule kun je dus stap voor stap de volgende getallen berekenen.
Bereken van de eerste rij het 5e en het 6e getal.
- b** Beschrijf de regelmaat die je ziet in de tweede rij.
- c** Geef bij de tweede rij een woordformule en bereken daarmee het 5e en het 6e getal van de rij.
- d** Maak opdracht c ook voor de derde rij.
- 3a** Van een rij getallen is het eerste getal 100. De woordformule bij deze rij is
 $\text{nieuwe waarde} = 0,8 \cdot \text{oude waarde} + 30$.
Bereken het 2e, 3e en 4e getal van deze rij.
- b** Van een rij getallen is het eerste getal 46. De woordformule bij deze rij is
 $\text{nieuwe waarde} = 1,5 \cdot (\text{oude waarde} - 10)$.
Bereken het 2e, 3e, 4e en 5e getal van deze rij.

	2, 5, 11, 23, ..., ...
	800, 400, 200, 100, ..., ...
	4, 10, 22, 46, ..., ...

Theorie

Bij veel getallenrijen kun je de volgende waarde berekenen uit de voorafgaande waarde(n) met een formule. Dit heet **recursie** en de bijbehorende formule heet een **recursieve formule**.

Een opeenvolging van getallen heet een **rij** en de getallen in de rij heten de **termen** van de rij. De termen van een rij noteer je met de **indexnotatie**: $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ of met de **functienotatie**: $u(0), u(1), u(2), \dots, u(n), \dots$

De getallen $0, 1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n, n+1$, zijn de **rangnummers** van de rij. Het rangnummer is een geheel getal en nooit negatief. Een rij u kan beginnen met $u(0)$ of met $u(1)$. De eerste term van een rij heet de **beginterm**.

Voorbeeld

Gegeven is de rij $u(0) = 3$, $u(1) = -6$, $u(2) = 12$, $u(3) = -24$, $u(4) = 48$, $u(5) = -96$, ...

Bereken de volgende twee termen van deze rij en geef een recursieve formule voor de rij u .

Oplossing

Je krijgt de volgende term door de voorgaande met -2 te vermenigvuldigen.

$$u(6) = -2 \cdot u(5) = -2 \cdot -96 = 192$$

$$u(7) = -2 \cdot u(6) = -2 \cdot 192 = -384$$

Een recursieve formule in woorden is *nieuwe waarde* = $-2 \cdot$ *oude waarde*.

H 4 Gegeven is de rij 3, 6, 9, 12, 15, ...

- a** Bereken de volgende twee termen van de rij.
- b** Geef een recursieve formule in woorden bij deze rij.
- c** Dezelfde opdracht voor de rij 5, 20, 80, 320,

5 Bij een rij hoort de recursieve formule *nieuwe waarde* = $2 \cdot$ *oude waarde* + 1. Bereken $u(7)$ en $u(8)$ als gegeven is dat $u(6) = 7$.

Als in een recursieve formule de oude waarde gelijk is aan $u(n)$, dan is de nieuwe waarde gelijk aan $u(n + 1)$. De recursieve formule uit opdracht 5 schrijf je dan als $u(n + 1) = 2 \cdot u(n) + 1$.

- 6a** Bereken van de rij uit het voorbeeld de termen u_4 , u_5 en u_6 .
- b** Verander de beginterm in het voorbeeld in $u_0 = 8$. Bereken de termen u_1 tot en met u_4 .

H 7 Schrijf de eerste vier termen op van de rijen met de volgende recursieve formules.

a $u(n + 1) = 10 \cdot u(n) + 4$ met beginterm $u(0) = 2$.

b $u(n + 1) = \frac{1}{2}u(n)$ met beginterm $u(1) = 34$.

c $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 3$ met beginterm $u_0 = -\frac{1}{2}$.

8 In het begin van 2010 ($t = 0$) wordt het aantal ratten in een gebied op 1400 geschat. Elk jaar breidt de populatie zich met 40% uit. Door een rattenvanger worden er elk jaar zo'n 400 ratten gevangen. Neem aan dat de ratten jaarlijks na de uitbreiding worden gevangen.

- a** Bereken het aantal ratten in het begin van 2011 en 2012.
- b** Beschrijf de groei van het aantal ratten met een recursieve formule.
- c** Bereken het aantal ratten in het begin van 2016.
- d** In 2016 wordt een extra rattenvanger aangetrokken, omdat het aantal ratten steeds groter wordt. Samen vangen ze nu twee keer zoveel ratten. Wat wordt de recursieve formule in dit geval?
- e** Bereken het aantal ratten in 2018.

Voorbeeld

Een rij is gedefinieerd door

$$u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 5 \text{ en } u_0 = 4.$$

Bereken de termen u_0 tot en met u_3 .

Oplossing

Een bijbehorende woordformule is:

$$\textit{nieuwe waarde} = 3 \cdot \textit{oude waarde} - 5$$

$$u_0 = 4$$

$$u_1 = 3 \cdot u_0 - 5 = 3 \cdot 4 - 5 = 7$$

$$u_2 = 3 \cdot u_1 - 5 = 3 \cdot 7 - 5 = 16$$

$$u_3 = 3 \cdot u_2 - 5 = 3 \cdot 16 - 5 = 43$$

6-2

Tijdgrafieken

- 9** Gegeven is de recursieve formule $u(n+1) = 1,05 \cdot u(n) + 10$ met $u(0) = 80$.
- a** Bereken $u(1)$ tot en met $u(4)$.
- b** De recursieve formule $u(n+1) = 1,05 \cdot u(n) + 10$ is ook te schrijven als $u(n) = 1,05 \cdot u(n-1) + 10$.
Laat zien dat je voor $u(1)$ tot en met $u(4)$ dezelfde waarden krijgt als bij opdracht a.
- c** Hiernaast zie je hoe de recursieve formule $u(n) = 1,05 \cdot u(n-1) + 10$ met $u(0) = 80$ in een rekenmachine is ingevoerd. Hoe dat er precies op jouw rekenmachine uit ziet hangt af van het type rekenmachine dat je hebt.
Maak op je rekenmachine een tabel van de rij.
- d** Vanaf welk rangnummer is de bijbehorende term groter dan 1000?

Hulpboek 5-1 en 5-2 Rijen en recursie

*Een recursieve formule kan beginnen met $u(n+1)$ maar ook met $u(n)$.
Als je in bijvoorbeeld de woordformule 'nieuwe waarde = $1,3 \cdot$ oude waarde' voor de nieuwe waarde $u(n+1)$ neemt, dan hoort $u(n)$ bij de oude waarde.
Neem je $u(n)$ voor de nieuwe waarde, dan hoort $u(n-1)$ bij de oude waarde.*

- H 10** Schrijf de volgende recursieve formules in de vorm $u(n) = \dots$
- a** $u(n+1) = 2 \cdot u(n) + 24$
- b** $u(n+1) = 80 - 1,4 \cdot u(n)$
- c** $u(n+1) = u(n) \cdot (u(n) + 0,25)$
- 11** Gegeven is de recursieve formule $u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 24$ met $u_0 = 10$.
Ga met een tabel op je rekenmachine na vanaf welk rangnummer de bijbehorende term groter is dan 100 000.
- H 12** In opdracht 8 heb je een recursieve formule opgesteld voor de groei van een rattenpopulatie. Hiernaast is de recursieve formule ingevoerd op een rekenmachine.
- a** Maak op je rekenmachine een tabel van de rij.
Lees af na hoeveel jaar er voor het eerst meer dan 3000 ratten zijn.
- b** Je kunt ook een grafiek plotten met daarin het aantal ratten afhankelijk van de tijd.
Plot de grafiek van het aantal ratten voor $t = 0$ tot en met $t = 10$.
Welke instelling moet je voor het venster nemen om de grafiek goed in beeld te krijgen?

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=1.05u(n-1)+10
u(nMin)=80
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
w(nMin)=
```

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=1.4u(n-1)-400
u(nMin)=1400
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
w(nMin)=
```


Een ontwikkeling in de tijd die door een rij wordt beschreven, kun je weergeven in een **tijdgrafiek**. Hierin wordt het verband tussen de tijd en de bijbehorende waarde van de rij weergegeven.

De grafiek bestaat uit losse punten, omdat de rangnummers van de rij gehele getallen zijn.

Voorbeeld

De recursieve formule

$$A_{t+1} = 1,2 \cdot A_t - 60 \text{ met } A_0 = 400$$

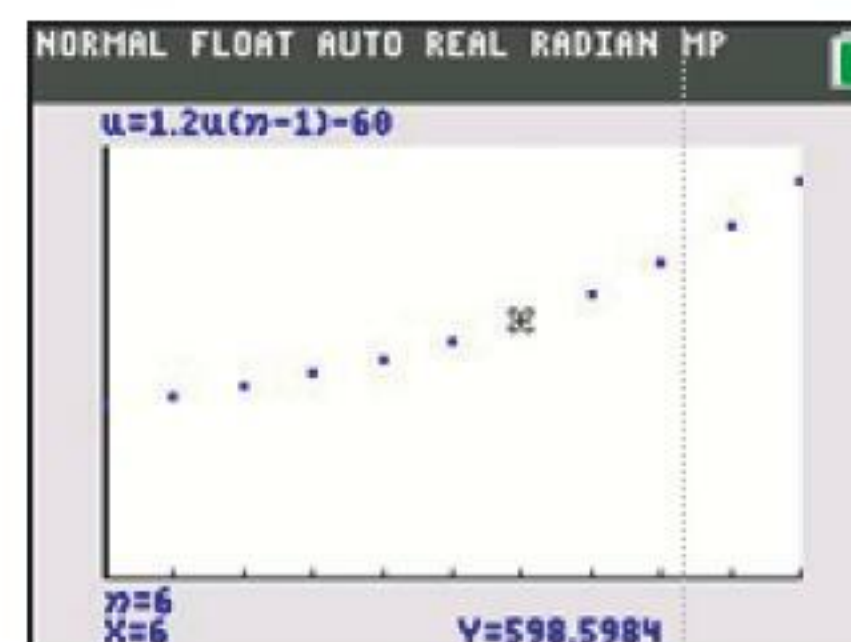
beschrijft het aantal individuen A in een populatie na t jaar.

Vanaf welk tijdstip zijn er meer dan 550 individuen?

Oplossing

Voer $u(n) = 1.2u(n-1) - 60$ in je rekenmachine in. Met een tabel of een grafiek vind je dat vanaf $t = 6$ geldt $A(t) > 550$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS + FOR ΔTbl				
n	$u(n)$			
0	400			
1	420			
2	444			
3	472.8			
4	507.36			
5	548.83			
6	598.6			
7	658.32			
8	729.98			
9	815.98			
10	919.17			
$n=6$				



- 13** Meneer Koop heeft € 10.000,- op de bank. De rente op zijn rekening is 1,7%. Elk jaar, nadat de rente is bijgeschreven, haalt hij € 300,- van zijn rekening. Bij deze situatie hoort de recursieve formule $K(t+1) = a \cdot K(t) - b$ met $K(0) = 10\,000$.
- Welke waarden van a en b passen bij deze situatie?
 - Voer de recursieve formule in op je rekenmachine. Welk bedrag staat er na 10 jaar op de rekening van meneer Koop?
 - Plot en schets de grafiek die de ontwikkeling van het kapitaal weergeeft voor de eerste 10 jaar. Waarom moet je hier een puntgrafiek tekenen?
 - Welk bedrag staat er na 10 jaar op de rekening als meneer Koop elk jaar € 100,- van de bank zou halen in plaats van € 300,-?
- 14** In een productiebos staan 12 000 bomen. Elk jaar worden er bomen gekapt en nieuwe bomen bijgeplant. Het aantal bomen B in de loop van de tijd wordt beschreven door de recursieve formule $B(t+1) = 0,8 \cdot B(t) + 3\,000$ met $B(0) = 12\,000$.
- Geef de betekenis van de getallen 3 000 en 0,8.
 - Plot de grafiek en beschrijf de ontwikkeling van het aantal bomen in de komende 50 jaar.
 - Maak een schets van de grafiek die ontstaat als er per jaar 3 500 bomen worden bijgeplant. Hoeveel bomen staan er op den duur in het bos?
 -  Ga weer uit van een jaarlijkse aanplant van 3 500 bomen. Bereken het kappercentage waarbij het bos op den duur uit 25 000 bomen bestaat.



6-3

Directe formules

- 15 Hiernaast staan zes rijen.
- a Beschrijf de regelmaat in elk van deze rijen.
- b Bereken de volgende drie termen van elke rij.

A: 12, 17, 22, 27, 32, ...

B: 100, 50, 25, $12\frac{1}{2}$, ...

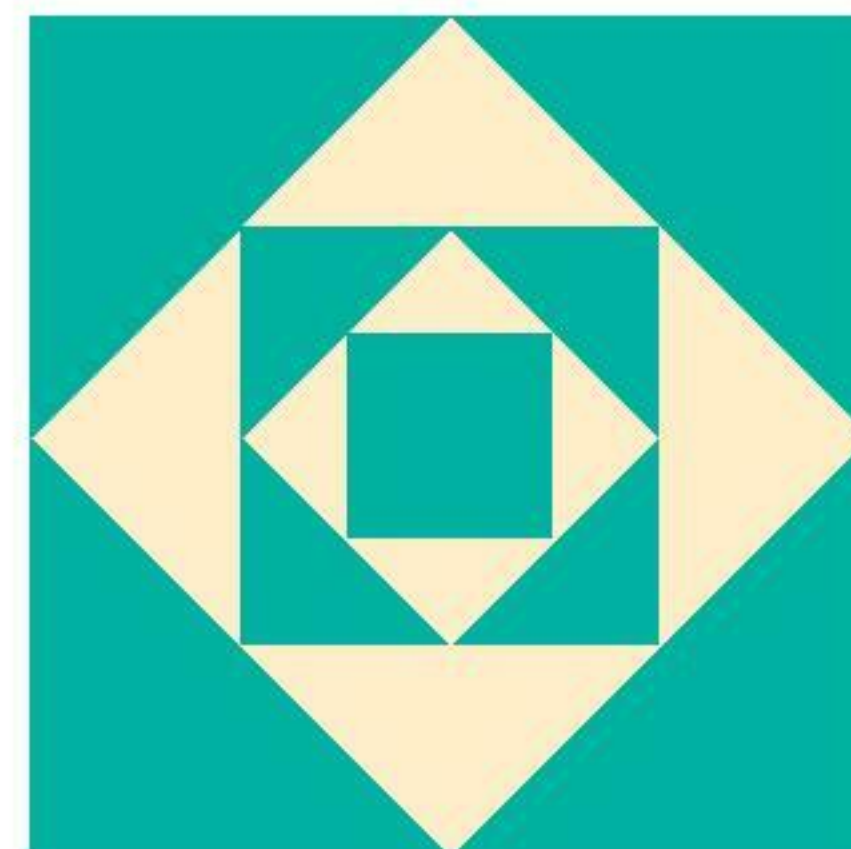
C: 1, 3, 6, 10, 15, ...

D: 3, 6, 12, 24, 48, ...

E: 2, 7, 22, 67, ...

F: 20, 17, 14, 11, ...

- 16 Hiernaast zie je afwisselend groene en gele vierkanten. Het grootste vierkant is 8 bij 8. De oppervlakten van de vierkanten, van groot naar klein, vormen een rij getallen $u(1), u(2), u(3), u(4), \dots$ met $u(1) = 64$.
- a Leg uit dat het grootste gele vierkant half zo groot is als het grootste groene vierkant.
- b Geef de eerste drie termen van de rij.
- c Geef een recursieve formule waarmee je een volgende term uit de rij kunt berekenen.
- d Ga na vanaf welk rangnummer de oppervlakten kleiner zijn dan 0,001.
- 17 Jasper maakt een tabel bij de oppervlakte van de vierkanten.
- a Leg uit dat er een exponentiële formule hoort bij deze tabel.
- b Hoe groot is $u(0)$?
- c Leg uit dat voor de oppervlakte van het vierkant met rangnummer n geldt: $u(n) = 128 \cdot (0,5)^n$.
- d Bereken de oppervlakte van het vierkant met rangnummer 12.



n	0	1	2	3	4
$u(n)$	...	64	32	16	8

Theorie

Bij sommige rijen kun je de waarde van een term $u(n)$ direct berekenen met het rangnummer n , zonder gebruik te maken van voorgaande termen.
Je gebruikt dan een **directe formule**.

Voorbeeld 1

Gegeven is de rij u met recursieve formule $u(n+1) = 3 \cdot u(n)$ en beginterm $u(0) = 10$.
Geef een directe formule voor $u(n)$.

Oplossing

Elke volgende term is 3 keer zo groot als de voorgaande. Je begint bij $u(0) = 10$.
 $u(n)$ berekenen je door 10 n keer met 3 te vermenigvuldigen, dus $u(n) = 10 \cdot 3^n$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de rij v met recursieve formule $v(n+1) = v(n) + 6$ en beginterm $v(1) = -5$.
Geef een directe formule voor $u(n)$.

Oplossing

Elke volgende term bereken je door 6 op te tellen bij de voorgaande term.
Om $v(n)$ te berekenen tel je n keer 6 op bij $v(0)$, $v(0) = v(1) - 6 = -5 - 6 = -11$,
dus $v(n) = -11 + 6 \cdot n$.

- 18 Geef van de volgende rijen een directe formule.
- a $u(n+1) = u(n) + 4$ met $u(0) = 7$
- b $u_{n+1} = u_n - 5$ met $u_1 = 200$

- 19 Bij de geboorte van Teun openen zijn opa en oma een spaarrekening voor hem. Ze zetten er € 500,- op. Teun krijgt het eindbedrag op zijn achttiende verjaardag. De bank geeft een vaste rente van 2,3% per jaar. De bedragen die na n jaar sparen op de rekening staan, vormen een rij B .
- Geef de recursieve formule. Hoe groot is $B(0)$?
 - Geef de directe formule voor $B(n)$.
 - Hoeveel krijgt Teun op zijn achttiende verjaardag?

Theorie

Een rij waarvan je een term vindt door bij de vorige term een constante a op te tellen heet een **rekenkundige rij**.
De constante a heet het **verschil** van de rekenkundige rij.
De recursieve formule is $u(n+1) = u(n) + a$ met $u(0) = b$ als eerste term; de directe formule is $u(n) = b + a \cdot n$.
Een rij waarvan je een term vindt door de vorige term met een constante r te vermenigvuldigen heet een **meetkundige rij**.
De factor r heet de **reden** van de meetkundige rij.
De recursieve formule is $u(n+1) = r \cdot u(n)$ met $u(0) = b$ als beginwaarde; de directe formule is $u(n) = b \cdot r^n$.

Voorbeeld 1

Geef een recursieve formule en een directe formule bij de rij: $u(0) = 23$, $u(1) = 25$, $u(2) = 27$, $u(3) = 29$, ...

Oplossing

u is een rekenkundige rij met verschil 2.
 $u(n+1) = u(n) + 2$ met $u(0) = 23$.
Om $u(n)$ te berekenen tel je n keer 2 op bij $u(0)$,
dus $u(n) = 23 + 2n$.

Voorbeeld 2

Geef een recursieve formule en een directe formule bij de rij: $v(1) = 54$, $v(2) = 18$, $v(3) = 6$, $v(4) = 2$, ...

Oplossing

v is een meetkundige rij met $r = \frac{1}{3}$.
 $v(n+1) = \frac{1}{3} v(n)$ met $v(0) = 3 \cdot 54 = 162$.
Om $v(n)$ te berekenen vermenigvuldig je $v(0)$ n keer met $\frac{1}{3}$, dus $v(n) = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

- 20a Welke rijen uit opdracht 15 zijn rekenkundige rijen?
Geef bij elke rekenkundige rij de grootte van het verschil.
- b Welke rijen uit opdracht 15 zijn meetkundige rijen?
Geef bij elke meetkundige rij de grootte van de reden.
- c Geef een recursieve formule en een directe formule voor de rekenkundige en meetkundige rijen uit opdracht 15.
Geef het eerste getal in de rij rangnummer 0.

- H 21 Gegeven is de rij u met de recursieve formules $u_{n+1} = u_n + 4$ en $u_3 = 27$.

- Bereken u_0 en geef een directe formule.
- Gegeven is de rij $v_{n+1} = 5 \cdot v_n$ met $v_3 = 500$.
Geef een directe formule voor v_n .

- ☀ 22 Van een rij is gegeven $u(1) = 72$ en $u(4) = 243$.
- Geef een recursieve formule en een directe formule als u een rekenkundige rij is.
 - Geef een recursieve formule en een directe formule als u een meetkundige rij is.

Bij het opstellen van een directe formule bij een rekenkundige of een meetkundige rij heb je $u(0)$ nodig.
Als die niet gegeven is, moet je die eerst berekenen.

6-4

Som van een rekenkundige rij

23 De rij u is gegeven door de directe formule $u(n) = 2n + 1$.

$u(0)$	$u(1)$	$u(2)$	$u(3)$	$u(4)$	$u(5)$
1	3	...	...	...	...

a Vul de tabel hiernaast verder in.

b Bereken $u(0) + u(1) + \dots + u(5)$.

c Hoeveel termen heb je bij elkaar opgeteld?

d Hoeveel termen moet je optellen om $u(4) + u(5) + \dots + u(11)$ te berekenen?

Theorie

De **som van de termen** $u(p)$ tot en met $u(q)$ noteer

je als $\sum_{k=p}^q u(k) = u(p) + u(p+1) + \dots + u(q)$

Het symbool $\sum$ (de Griekse letter sigma) staat voor som.

Let op: het aantal op te tellen termen is $q - (p - 1)$.

Voorbeeld

Gegeven is de rij $u(n) = n^2 + 1$.

Bereken $\sum_{k=3}^8 u(k)$.

Oplossing

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^8 u(k) &= u(3) + u(4) + \dots + u(8) \\ &= 10 + 17 + 26 + 37 + 50 + 65 = 205 \end{aligned}$$

24 Gegeven is de rij $u(n) = 3n + 1$.

a Bereken $\sum_{k=1}^5 u(k) = u(1) + u(2) + \dots + u(5)$.

b Uit hoeveel termen bestaat de som $\sum_{k=13}^{150} u(k)$?

25 Gegeven is de rij $u(n) = 3n + 4$.

a Waarom is deze rij een rekenkundige rij?

b Uit hoeveel termen bestaat de som $\sum_{k=0}^7 u(k)$?

c Hiernaast zie je hoe je op een handige manier de som

$\sum_{k=0}^7 u(k)$ kunt uitrekenen. Leg uit dat geldt: $\sum_{k=0}^7 u(k) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 29$.

d Leg op dezelfde manier uit dat $\sum_{k=5}^{15} u(k) = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (u(5) + u(15))$.

e Bereken de som uit opdracht d.

$$s = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25$$

$$s = \frac{25 + 22 + 19 + 16 + 13 + 10 + 7 + 4}{29 + 29 + 29 + 29 + 29 + 29 + 29 + 29} +$$

Theorie

Bij een **rekenkundige rij** geldt voor de **som** van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$:

$$\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eersteterm} + \text{laatsteterm})$$

Voorbeeld

Gegeven is de rij $u(n) = 5n + 3$.

Bereken $\sum_{k=4}^{24} u(n)$.

Oplossing

De rij u is een rekenkundige rij.

Het aantal op te tellen termen is $24 - 3 = 21$

De eerste term is $u(4) = 23$;

de laatste term is $u(24) = 123$.

De som is $\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot (23 + 123) = 1533$.

26 Gegeven is de rij met directe formule $u(n) = 1,5n + 100$.

a Hoeveel termen moet je bij elkaar optellen om $u(0) + u(1) + u(2) + \dots + u(80)$ te berekenen?

b Bereken $u(0) + u(1) + u(2) + \dots + u(80)$.

H 27 Bereken de volgende sommen.

- a** $\sum_{k=0}^{11} (2k + 5)$ **c** $\sum_{k=5}^{19} (0,5k - 3)$
b $4 + 7 + 10 + \dots + 100$ **d** $100 + 93 + 86 + 79 + \dots + 16$

28 Luc vindt dat hij te weinig zakgeld krijgt. In januari 2015 kreeg hij vijf euro per maand. Zijn moeder spreekt met hem af dat zijn zakgeld maandelijks met € 0,50 verhoogd wordt. Zo krijgt hij in februari 2015 € 5,50, in maart 2015 € 6,- enzovoort.

- a** Leg uit dat de maandelijkse bedragen een rekenkundige rij vormen.
b Geef voor de maandelijkse bedragen een recursieve formule en ook een directe formule.
c Bereken hoeveel Luc in totaal aan zakgeld heeft gekregen in de jaren 2015 en 2016.

29 Gegeven is de rij $u(n) = 2n - 5$.

Bereken $\sum_{k=0}^0 u(k)$, $\sum_{k=0}^1 u(k)$, $\sum_{k=0}^2 u(k)$, $\sum_{k=0}^3 u(k)$, $\sum_{k=0}^4 u(k)$ en $\sum_{k=0}^5 u(k)$.

Theorie

Bij een rij $u(n)$ vormen de uitkomsten $s(0) = \sum_{k=0}^0 u(k)$,

$$s(1) = \sum_{k=0}^1 u(k), s(2) = \sum_{k=0}^2 u(k), \dots, s(n) = \sum_{k=0}^n u(k)$$

ook weer een rij getallen.

Deze rij getallen noem je de **somrij** s , vastgelegd door

$$s(n) = \sum_{k=p}^n u(k) \text{ waarbij } u(p) \text{ de eerste term van de rij is.}$$

Voorbeeld

Gegeven is de rij u met recursieve formule $u(n+1) = n \cdot u(n)$ en beginterm $u(1) = 3$.

De rij s is de somrij van de rij u . Bereken $s(1)$ tot en met $s(4)$.

Oplossing

$$s(1) = u(1) = 3$$

$$s(2) = u(1) + u(2) = 3 + 3 = 6$$

$$s(3) = s(2) + u(3) = 6 + 6 = 12$$

$$s(4) = s(3) + u(4) = 12 + 18 = 30$$

30 Gegeven is de rij $u(n) = 4n + 3$. De rij s wordt gegeven

$$\text{door } s(n) = \sum_{k=0}^n u(k).$$

- a** Bereken $s(0)$ tot en met $s(4)$.
b Bereken $s(50)$.
c Laat zien dat $\sum_{k=0}^n u(k) = \frac{1}{2}(n+1)(4n+6)$.

31 Gegeven is de rij u met recursieve formule $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$ en met beginterm $u_0 = 6$. De rij s is de somrij van de rij u .

- a** Geef een directe formule voor u_n .
b Geef een directe formule voor s_n .
c Bereken de kleinste waarde van n waarvoor $s(n) > 1000$.

32 De rij s is de somrij van een rekenkundige rij u . De rij s heeft als directe formule $s(n) = n^2 + 22n + 21$. Geef een recursieve formule en een directe formule voor de rij u .

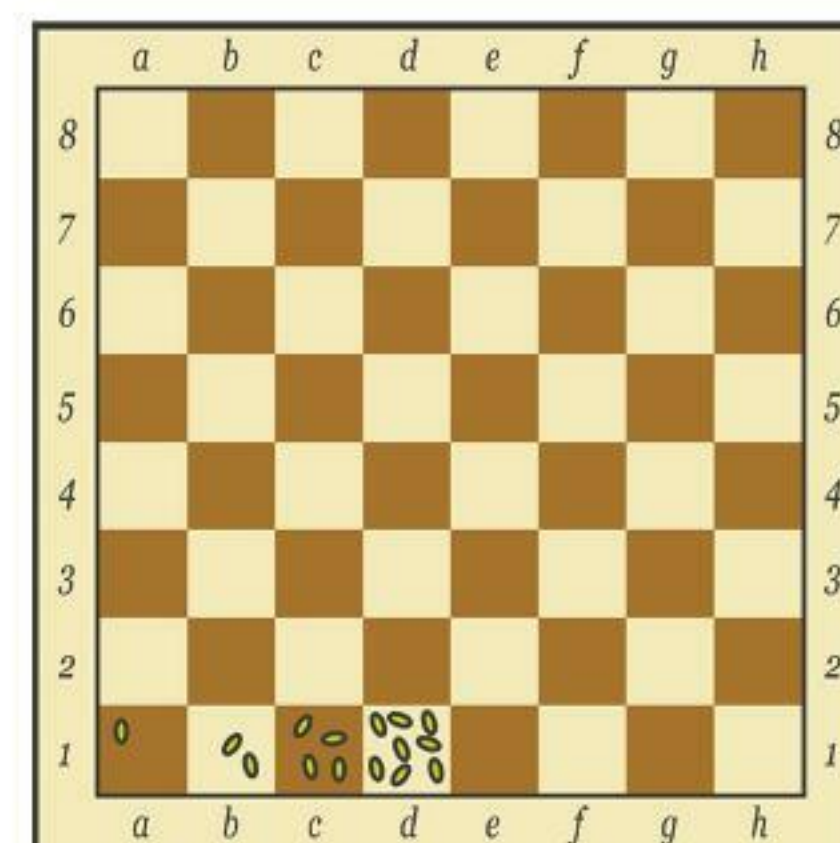
6-5

Som van een meetkundige rij

- 33** Volgens een legende mocht de bedenker van het schaakspel, Sissa ben Dahir, een beloning kiezen van de Indiase koning Shirham. Hij vroeg om graankorrels op zijn schaakbord te leggen: één op het eerste veld, twee op het tweede, vier op het derde, acht op het vierde, enzovoort.

De aantallen graankorrels van elk veld vormen een meetkundige rij u : $u(1) = 1$, $u(2) = 2$, $u(3) = 4$,

Geef een directe formule voor $u(n)$ en bereken het aantal korrels voor het 64^e veld.



- 34** De som van de graankorrels van alle 64 velden kun je berekenen met handig rekenwerk.

De rij s is de somrij van de rij u uit opdracht 33.

- a** Leg uit dat voor de som van alle graankorrels geldt:

$$s(64) = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63}$$

- b** Hiernaast staat op de tweede regel de som van de 64 termen $s(64)$ en op de eerste regel $2 \cdot s(64)$.

Ga na dat de eerste rij inderdaad het dubbele is van de tweede rij.

- c** De twee regels worden van elkaar afgetrokken. Ga na dat je overhoudt: $s(64) = 2^{64} - 1$.

$2 \cdot s(64)$	$=$	$2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63} + 2^{64}$
$s(64)$	$=$	$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63}$
<hr/>		
$2 \cdot s(64) - s(64)$	$=$	$-1 + 2^{64}$

- 35** Je kunt voor elke meetkundige rij de som van opeenvolgende termen berekenen op de manier van de vorige opdracht.

Ga uit van de rij $u(n) = b \cdot r^n$.

Hiernaast staan onder elkaar:

- > De som van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$, vermenigvuldigd met r .
- > De som van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$.
- > De twee regels van elkaar afgetrokken.

- a** Waarom is het hier handig om te vermenigvuldigen met r ?

- b** Laat zien dat uit de laatste regel volgt: $\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{b \cdot r^{q+1} - b \cdot r^p}{r - 1}$

- c** Waarom is de formule uit opdracht b gelijkwaardig met de

formule $\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{u(q+1) - u(p)}{r - 1}$?

- d** Bereken $\sum_{k=3}^{30} u(k)$ als $u(n) = 2 \cdot 1,05^n$. Rond af op twee decimalen.

$r \cdot s$	$=$	$b \cdot r^{p+1} + b \cdot r^{p+2} + \dots + b \cdot r^q + b \cdot r^{q+1}$
s	$=$	$b \cdot r^p + b \cdot r^{p+1} + b \cdot r^{p+2} + \dots + b \cdot r^q$
<hr/>		
$r \cdot s - s$	$=$	$-b \cdot r^p + b \cdot r^{q+1}$

Bij een **meetkundige rij** u met $u(n) = b \cdot r^n$ geldt voor de **som** van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$:

$$\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{\text{eerstvolgende term} - \text{eerste term}}{r - 1} = \frac{u(q+1) - u(p)}{r - 1}$$

- H 36** Bereken en rond je antwoord zo nodig af op vier decimalen.

a $\sum_{k=0}^{11} 3 \cdot (1,2)^k$ **c** $3 + 6 + 12 + \dots + 768$

b $\sum_{k=5}^{11} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ **d** $4 + 2 + 1 + \dots + \frac{1}{32}$

- 37** Gegeven is de rij u met directe formule $u(n) = 20 \cdot 1,1^n$.
De rij s is de somrij van de rij u met als eerste term $u(0)$.
- a** Bereken $s(4)$.
b Toon aan dat $s(n)$ is te herleiden is tot $s(n) = 200 \cdot 1,1^{n+1} - 200$.
c Bereken vanaf welke waarde van n geldt: $s(n) > 1000$.

-  **38** De rij s wordt gegeven door de recursieve formule $s(n+1) = 3 \cdot s(n) + 5$.
De rij s is de somrij van de rij u met eerste term $u(0) = 5$.
Geef een directe formule voor $u(n)$ en bereken daaruit een directe formule voor de rij s .

- 39** Gegeven is de rij $u(n) = 7 + 5n$.
- a** Bereken de termen van de rij u met de rangnummers $0, 1, 2, \dots, 6$.
b Bereken bij de getallen uit opdracht a steeds het verschil tussen twee opeenvolgende termen. Wat voor soort rij vormen deze verschillen?
c Beantwoord opdracht a en opdracht b ook voor de rij $w(n) = 5 \cdot 3^n$.

Bij elke rij u kun je ook de **verschilrij** v maken met $v(n) = u(n+1) - u(n)$.
Als u een rekenkundige rij is, dan is v een constante rij.
Als u een meetkundige rij is, dan is v ook een meetkundige rij met dezelfde reden als u .

- H 40** Geef bij de volgende rijen een directe formule voor de verschilrij.

a $u(n) = 11 + 1,3n$ **c** $u(n+1) = 0,7 \cdot u(n)$

b $u(n) = 12 \cdot 1,5^n$ **d** $u(n) = n^2$

-  **41** De rij u heeft als recursieve formule $u(n+1) = u(n) + 2n + 3$ met $u(0) = 9$.
- a** Geef een directe formule voor de verschilrij v .
b Bereken een directe formule voor de somrij van v .
c Geef een directe formule voor $u(n)$.

Voorbeeld

Gegeven is de meetkundige rij
 $16, 24, 36, 54, \dots$
Bereken de som van de eerste tien termen.

Oplossing

De reden is $r = 1,5$ en $u(0) = 16$, dus
een directe formule voor de rij u is
 $u(n) = 16 \cdot 1,5^n$.

De som van de eerste tien termen is

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^9 u(k) &= \frac{u(10) - u(0)}{1,5 - 1} \\ &= \frac{16 \cdot 1,5^{10} - 16}{0,5} \approx 1813,28 \end{aligned}$$

Voorbeeld

Gegeven is de rij $u(n) = 6 \cdot 2,5^n$.
Bereken een directe formule voor de
verschilrij v van u .

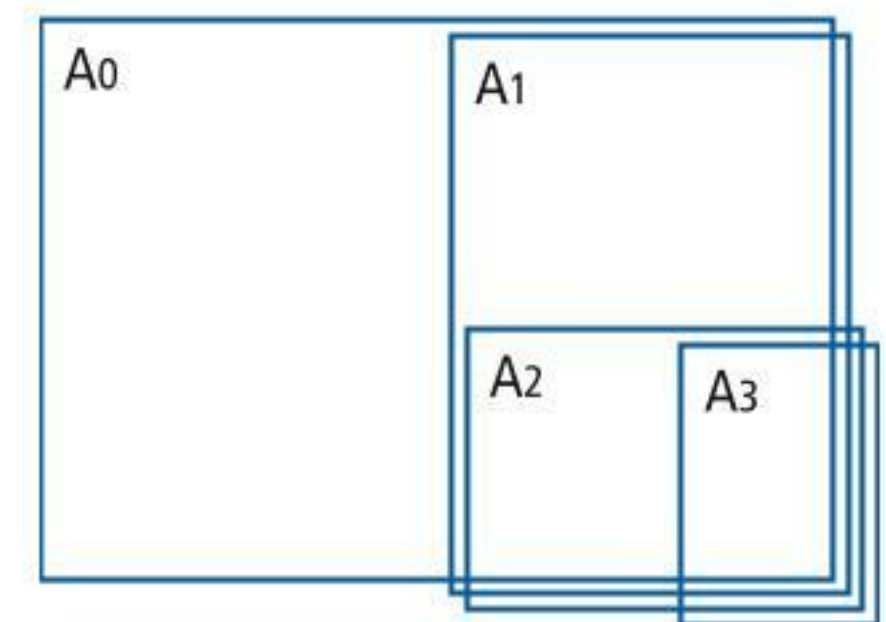
Oplossing

$v(0) = u(1) - u(0) = 15 - 6 = 9$.
 v is een meetkundige rij met dezelfde
reden als u , dus $v(n) = 9 \cdot 2,5^n$.

6-6

Gemengde opdrachten

- 42** A4 is een gebruikelijk papierformaat. Dit formaat is één van de formaten uit een serie: A0, A1, A2, A3, A4, A5,
De oppervlakte van elk volgend formaat is de helft van de vorige. Het grootste formaat A0 heeft een oppervlakte van 1 m^2 .
- Bereken de oppervlakte van A1, A2 en A3.
 - Geef een recursieve formule voor de oppervlakte $A(n)$.
 - Geef ook een directe formule.
 - Bereken de oppervlakte van A8.
- 43** Ga na of de volgende rijen rekenkundig of meetkundig zijn. Geef een recursieve formule en een directe formule en bereken steeds de tiende term.
- | | |
|------------------------------|--|
| a 54, 18, 6, 2, ... | d 0,3; 0,33; 0,363; 0,3993; ... |
| b 1, 4, 7, 10, ... | e 9; 7,5; 6; 4,5; ... |
| c 40, 36, 32, 28, ... | f 1, -1, 1, -1, ... |
- 44** In het jaar 2000 wist het *I love you*-virus het internet in enkele dagen grotendeels plat te leggen. Via e-mail werd een bericht verspreid met als onderwerp: *I love you*. Bij openen van een bijlage in het bericht werd het bericht (met bijlage) automatisch doorgezonden naar alle adressen in de adreslijst van de ontvanger. Bovendien werden belangrijke bestanden op de harde schijf gewist. Stel dat er gemiddeld 50 personen op een adreslijst staan. Zodra het bericht is ontvangen in een computer, noemen we die computer 'besmet'.
- Leg uit dat het aantal besmette computers verloopt volgens de rij 50, 2500, 125 000, ... en geef een directe formule voor deze rij.
 - In de eerste stap werden er 50 computers besmet. Hoeveel computers waren er in totaal besmet na vijf stappen? Wat klopt er niet aan deze uitkomst?
 - Gelukkig werden veel mensen al na een paar dagen gewaarschuwd, zodat zij het bericht onmiddellijk verwijderden. In een groot bedrijf werden op de tweede dag na de eerste besmetting 12 computers besmet. Op de vijfde dag waren dat er 96. Ga ervan uit dat de verspreiding per dag verloopt volgens een meetkundige rij. Geef een recursieve formule voor deze verspreiding en een directe formule.
- 45** Op het briefje staan de eerste zeven termen van de rij van Fibonacci. Om een volgende term te berekenen, heb je twee voorgangers nodig.
- Zoek uit hoe en bereken de volgende drie termen van de rij.
 - Beschrijf deze rij met een recursieve formule.



$w_1 = 1, w_2 = 1, w_3 = 2$
$w_4 = 3, w_5 = 5, w_6 = 8,$
$w_7 = 13, \dots$

- 46** Aan het begin van een vergadering geven alle aanwezigen elkaar een hand. Op een bepaald moment zijn er vier mensen binnen die elkaar allemaal de hand hebben geschud.
- a** Leg uit dat er zes handdrukken zijn gegeven.
 - b** Nummer 5 komt binnen en geeft alle aanwezigen een hand. Hoeveel handdrukken geeft nummer 5?
 - c** Hoeveel handdrukken zijn er nu in totaal gegeven?
 - d** Neem de tabel hieronder over en maak hem verder af.

<i>aantal mensen</i>	2	3	4	5	6	7
<i>aantal handdrukken</i>	1	3	6	...	...	...

- d** Bij een vergadering met 25 personen worden 300 handdrukken gegeven. Hoeveel handdrukken worden er gegeven bij een vergadering met 26 personen?
- e** Merk op dat de rij a van de aantallen handdrukken, met $a(0) = 1$, $a(1) = 3$, $a(2) = 6$, $a(3) = 10$, ... geen rekenkundige en ook geen meetkundige rij is. Hiernaast zie je dat de rij a de somrij is van een rekenkundige rij.
- f** Bereken het aantal handdrukken bij een vergadering met 50 personen.

$a(0) = 1$
$a(1) = 1 + 2 = 3$
$a(2) = 1 + 2 + 3 = 6$
$a(3) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

- 47** Michiel en Sandra hebben een huis gekocht. Om deze aankoop te financieren, hebben ze een lening van € 150.000 bij de bank afgesloten. Ieder jaar betalen ze een vaste rente van 4,2% over de schuld. Daarnaast moet de lening in 20 jaar worden afgelost.
- a** Ga er eerst van uit dat ze aan het eind van ieder jaar de rente betalen plus steeds hetzelfde bedrag aan aflossing. Bereken de grootte van deze aflossing.
 - b** Bereken de rente die ze moeten betalen over het eerste jaar.
 - c** Bereken de rente die ze moeten betalen over het tweede jaar.
 - d** Bereken het totale bedrag aan rente dat ze in 20 jaar moeten betalen.



Ze kunnen de lening ook aflossen door ieder jaar een vast bedrag te betalen. Een deel van dit bedrag is dan de verschuldigde rente; de rest van het bedrag is aflossing. Ga ervan uit dat ze aan het eind van elk jaar € 10.000 aan de bank betalen.

- e** Bereken de schuld aan het begin van het tweede en aan het begin van het derde jaar.
- f** De schuld na n jaar is $S(n)$. Geef een recursieve formule voor $S(n)$.
- g** Bereken met de rekenmachine hoe groot de schuld na 20 jaar nog is.
- h** Bereken in euro's nauwkeurig het jaarlijkse bedrag waarbij na 20 jaar de schuld precies is afgelost.
- i** Bereken in deze situatie ook het totale bedrag dat ze in 20 jaar aan rente betalen.

Samenvatting

Rij, term en rangnummer, beginterm

Een rij bestaat uit een serie getallen. De getallen uit een rij heten termen. Je noteert de termen met een indexnotatie:

$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, \dots$ of met een functienotatie:
 $u(0), u(1), u(2), u(3), \dots, u(n-1), u(n), u(n+1), \dots$

Hierbij zijn $0, 1, 2, 3, \dots, n$ de rangnummers.

Een rij u kan beginnen met $u(0)$ of met $u(1)$. De eerste term van een rij heet de beginterm.

Recursieve formule, beginterm en directe formule

Bij een rij getallen kun je een term $u(n+1)$ vaak berekenen met behulp van de voorgaande term $u(n)$. Dit heet recursie.

De recursieve formule geeft aan hoe je $u(n+1)$ uit $u(n)$ berekent. Bij een recursieve formule moet je ook één van de termen weten; meestal is de beginterm gegeven.

Met een directe formule kun je direct de waarde van een term berekenen als je het rangnummer weet.

Voorbeeld

Gegeven is de recursieve formule
 $u(n+1) = 3 \cdot u(n) - 5$ met beginterm
 $u(0) = 5$.
 De volgende twee termen zijn
 $u(1) = 3 \cdot 5 - 5 = 10$ en
 $u(2) = 3 \cdot 10 - 5 = 25$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de rijen u en w met de directe formules $u_n = 3 \cdot n^2 + 2$ en $w_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.
 De termen met rangnummer 10 in deze rijen zijn: $u_{10} = 3 \cdot 10^2 + 2 = 302$
 $w_{10} = 3 \cdot 2^{10-1} = 1536$

Rekenkundige rij en verschil

Bij een rekenkundige rij vind je een term uit de voorgaande term door daarbij een constante a op te tellen:

$$u(n+1) = u(n) + a.$$

Het getal a heet het verschil van de rekenkundige rij.

Als $u(0) = b$ wordt de directe formule $u(n) = b + a \cdot n$.

Voorbeeld

5, 9, 13, ... is een rekenkundige rij.
 Het verschil is 4.
 Een recursieve formule voor de rij is
 $u(n+1) = u(n) + 4$ met $u(0) = 5$.
 Een directe formule is $u(n) = 5 + 4n$.

Meetkundige rij en reden

Bij een meetkundige rij vind je een term door de voorgaande term te vermenigvuldigen met een constante:

$$u(n+1) = r \cdot u(n)$$

Het getal r heet de reden van de meetkundige rij.

Als $u(0) = b$ wordt de directe formule: $u(n) = b \cdot r^n$

2, 6, 18, 54, ... is een meetkundige rij met reden 3.
 Een recursieve formule voor de rij is
 $u_{n+1} = 3 \cdot u_n$ met $u_0 = 2$.
 Een directe formule is $u_n = 2 \cdot 3^n$.

Som van rij, somrij, verschilrij

De som van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$ noteer je als

$$\sum_{k=p}^q u(k) = u(p) + u(p+1) + \dots + u(q)$$

De rij $s(0), s(1), s(2), \dots$ met $s(n) = \sum_{k=p}^n u(k)$ heet de somrij van een rij $u(n)$

Bij een rij u is wordt de verschilrij v vastgelegd door $v(n) = u(n+1) - u(n)$.

Als u een rekenkundige rij is, dan is v een constante rij; als u een

meetkundige rij is, dan is v ook een meetkundige rij met dezelfde reden als u .

Je kunt een tijdgrafiek tekenen

Bij rijen die ontwikkelingen in de tijd beschrijven noem je de bijbehorende grafiek een tijdgrafiek.

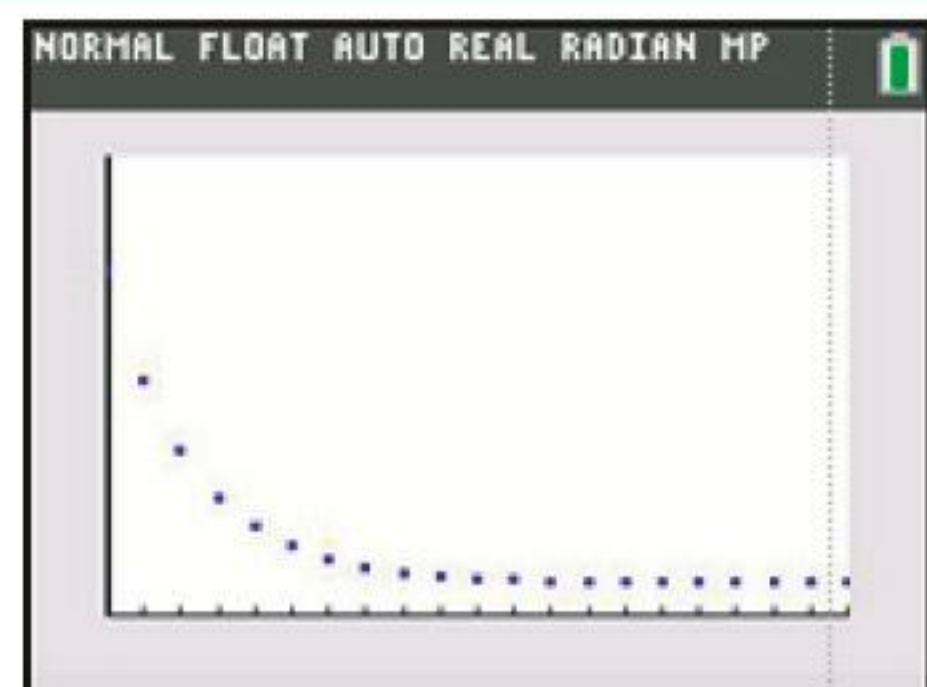
Voorbeeld

De formule $A(t+1) = 0,65 A(t) + 25$ met $A(0) = 750$ geeft aan hoe een populatie met de tijd verandert. Plot de grafiek bij deze formule.

Oplossing

Voer de recursieve formule in je rekenmachine in en plot de grafiek.

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian HP
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
'u(n)=0.65u(n-1)+25
u(nMin)=750
'v(n)=
v(nMin)=
'w(n)=
w(nMin)=
```



Je kunt de som van een rekenkundige rij berekenen

Bij een rekenkundige rij geldt voor de som van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$

$$\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$$

Om de termen te kunnen berekenen is het handig als je beschikt over een directe formule van de rij.

Je kunt de som van een meetkundige rij berekenen

Bij een meetkundige rij $u(n) = b \cdot r^n$ geldt voor de som van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$

$$\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{\text{eerstvolgende term} - \text{eerste term}}{\text{reden} - 1} = \frac{u(q+1) - u(p)}{\text{reden} - 1}$$

Voorbeeld

Bereken $u(3) + u(4) + \dots + u(14)$ voor de rij $u(n) = 5 \cdot 1,6^n$.

Oplossing

De reden van deze rij is 1,6.

$$\sum_{k=3}^{14} u(k) = \frac{u(15) - u(3)}{1,6 - 1} = \frac{5 \cdot 1,6^{15} - 5 \cdot 1,6^3}{0,6} \approx 9573,55$$

Voorbeeld

Bereken $u(3) + u(4) + \dots + u(14)$ voor de rij $u(n) = 4n - 7$.

Oplossing

Het aantal termen is $14 - (3 - 1) = 12$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{14} u(k) &= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (u(3) + u(14)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (5 + 49) = 324 \end{aligned}$$

Test jezelf

- T-1** Hieronder staan drie rijen getallen.
A 200, 202, 204, 206, ...
B 200, 300, 450, 675, ...
C 200, 100, 50, 25, ...
a Geef de volgende twee termen van elke rij.
b Geef bij elk van de drie rijen getallen de recursieve formule.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-1.
- T-2** Een medicijnkuur werkt als volgt: na inname van een dosis van 60 mg neem je om de 12 uur een vaste dosis. Elke 12 uur verdwijnt vervolgens een bepaald percentage van het medicijn uit het lichaam. De hoeveelheid medicijn in het lichaam wordt beschreven door de recursieve formule $M(t+1) = 120 + 0,7 \cdot M(t)$ met $M(0) = 60$.
a Hoe groot is de vaste dosis die je elke 12 uur neemt?
b Welke percentage verdwijnt elke 12 uur uit het lichaam?
c Plot een tijdgrafiek en beschrijf de ontwikkeling van de hoeveelheid medicijn in het lichaam in de eerste 10 dagen.
d Het medicijn is pas goed werkzaam als er 350 mg in het lichaam zit. Na hoeveel dagen is dat zo?
e Het lichaam mag niet meer dan 400 mg bevatten. Onderzoek of op enig moment deze hoeveelheid overschreden wordt.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-2.
- T-3** Ga na of de volgende rijen rekenkundig, meetkundig of geen van beide zijn. Geef in geval van een rekenkundige of meetkundige rij een directe formule.
a 162, 54, 18, 6, ...
b 12; 10,5; 9; 7,5; ...
c -2, 1, 6, 13, 22, 33, ...
d 1024, 1280, 1600, 2000, ...
e -10; -6,8; -3,6; -0,4; ...
Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-3.
- T-4** Stijn krijgt vanaf 1 januari 2015 per maand € 10,- zakgeld. Zijn ouders verhogen dit bedrag elk kwartaal met € 1,-.
a Waarom vormen de bedragen die Stijn per maand aan zakgeld krijgt geen rekenkundige rij?
b Geef een directe formule voor de bedragen die Stijn per kwartaal aan zakgeld krijgt.
c Stijn spaart de helft van zijn zakgeld. Bereken hoeveel hij op 31 december 2020 heeft gespaard.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-4.

- T-5** Gegeven is de meetkundige rij u : 1,25; 2,5; 5; ...
- Geef van deze rij een recursieve formule en een directe formule.
 - Wat is de eerste term in deze rij die groter is dan 1 miljoen?
 - Bereken van deze rij de som van de eerste 15 termen.
 - Geef een directe formule voor de somrij $\sum_{k=0}^n u_k$.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-5.*
- T-6** In een visvijver groeit het aantal vissen door de natuurlijke aanwas jaarlijks met 10%. Door de sportvissers worden er jaarlijks 75 vissen gevangen. Op 1 januari 2010 werden er 450 vissen geteld in deze vijver.
- Een recursieve formule voor het aantal vissen A na t jaren is $A(n+1) = a \cdot A(n) + b$.
Geef de waarden van a en b in deze formule.
 - Bereken het aantal vissen na 1 jaar, na 2 jaar en na 3 jaar.
 - Als er nog minder dan 200 vissen geteld worden in de vijver, wordt er een visverbod ingesteld.
Ga na in welk jaar het visverbod ingesteld wordt.
- T-7** Bij een rij getallen hoort de recursieve formule $u(n+1) = 0,75 \cdot u(n) + 80$ met $u(0) = 320$.
- Bereken het 2e, 3e en 4e getal van deze rij.
 - Wat valt je op aan de rij getallen van opdracht a? Leg aan de hand van de recursieve formule uit wat er aan de hand is met deze rij.
- T-8** Gegeven zijn de rijen
 u_n : 2; 0,2; 0,02; 0,002; ...
 v_n : 480, 430, 380, 330, ...
- Bereken $\sum_{k=0}^8 u_k$.
 - Bereken $\sum_{k=0}^{20} v_k$.
 - Bereken $\sum_{k=11}^{20} v_k$.
- T-9** In 2001 bevonden zich in de Barentssee 760 zeerobben. Door geboorte bedraagt de jaarlijkse groei van dat aantal 12%. Met recursie kun je nu voorspellen wat de invloed van de jacht op de grootte van de populatie is. Stel dat men elk jaar 110 zeerobben vangt.
- Bereken het aantal zeerobben in 2002 en 2003.
 - Geef een recursieve formule van deze groei en laat met behulp van een grafiek of een tabel zien dat het aantal zeerobben voortdurend afneemt.
 - Wil men de populatie behouden, dan moet een vangstquotum worden ingesteld. Dat wil zeggen een maximum aantal zeerobben dat jaarlijks gevangen mag worden. Onderzoek de groei van de populatie als er jaarlijks 80 zeerobben gevangen worden.
 - Is er een toegestane vangstgrootte waarbij het aantal zeerobben constant of nog net groeiend is? Zo ja, hoe groot is dat vangstquotum?



Extra oefening - Basis

- B-1a** Schrijf de eerste vier termen op van de rijen met de volgende recursieve formules.
 $u(n+1) = 2 \cdot u(n) - 4$ met $u(0) = 3$.
 $K_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot K_n + 1$ met $K_0 = 20$
 $p(n+1) = (p(n))^2 - p(n)$ met $p(0) = 2$.
- b** Gegeven is de rij 64, -32, 16, -8, ...
 Geef een recursieve formule bij deze rij. Neem $u(0) = 64$.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-1.
- B-2** In de Japanse Zee wordt op walvissen gejaagd. De populatie neemt daardoor af, maar aan de andere kant neemt de populatie weer toe omdat er jongen worden geboren. Het aantal walvissen A na t jaar wordt beschreven door $A(t+1) = 1,1 \cdot A(t) - 30$ met $A(0) = 230$.
 De tellingen vinden één keer per jaar plaats. Het aantal walvissen is een geheel getal.
- a** Geef de betekenis van de getallen 30, 230 en 1,1 voor de walvispopulatie.
b Plot en schets een tijdgrafiek van het voorspelde aantal walvissen voor de eerstkomende 15 jaar.
c Geef een schets van de grafiek die ontstaat als er per jaar 20 walvissen zouden worden gevangen.
d Onderzoek bij welk jaarlijks vangstquotum de walvispopulatie stabiel blijft.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-2.
- B-3** Ga van de volgende rijen na of er sprake is van een rekenkundige rij of een meetkundige rij, of van geen van beide.
 Geef bij een rekenkundige rij het verschil en bij een meetkundige rij de reden.
 Geef ook bij elke rekenkundige en meetkundige rij de 10^e term.
- a** 72, 24, 8, ...
b 0,3; 0,03; 0,003; 0,0003, ...
c 111, 114, 117, 120, ...
d 1; 0,98; 0,9604; 0,941192; ...
e 23, 14, 8, 5, ...
f 1, -2, 4, -8, ...
Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-3.
- B-4** Bereken $s(20)$ voor de volgende rekenkundige rijen.
a $u(n+1) = u(n) + 1,5$ met $u(0) = 6$.
b 15, 13, 11, ...
c 10, 20, 30, ...
Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-4.
- B-5** Bereken $s(15)$ voor de volgende meetkundige rijen.
a $u(n+1) = 0,5 \cdot u(n)$ met $u(0) = 2048$.
b 1, 4, 16, ...
c $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$
Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-5

Extra oefening - Gemengd

G-1 Het aantal stippen in de figuren hiernaast vormt een rij.

- a** Teken de vijfde figuur in deze rij.
- b** Geef de recursieve formule die bij deze rij hoort. Neem voor $u(0)$ het aantal stippen dat bij figuur 1 hoort.
- c** Hoeveel stippen heeft de vijfentwintigste figuur?
- d** Iemand heeft de eerste 25 figuren uit deze rij getekend. Hoeveel stippen heeft hij in het totaal gezet?

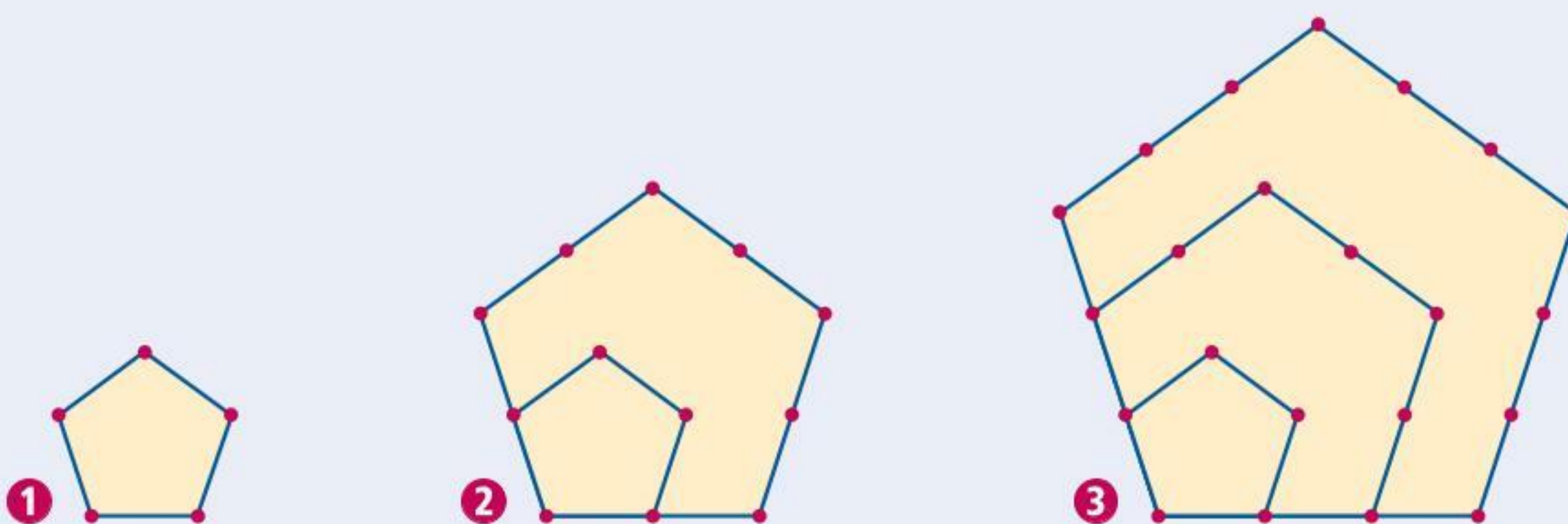


G-2 In 2001 leefden op de Veluwe 8500 wilde zwijnen. Jaarlijks zorgt voortplanting voor een groei van 15%. Omdat het grote aantal wilde zwijnen voor veel overlast zorgt, worden er per jaar 1400 wilde zwijnen afgeschoten. Met recursie kun je voorspellen wat de invloed van het afschieten is op de grootte van de populatie.

- a** Bereken het aantal wilde zwijnen in 2002 en 2003.
- b** Geef een recursieve formule van deze groei.
- c** Onderzoek met de tabelfunctie wat er uiteindelijk met de populatie gebeurt.
- d** Onderzoek de groei van de populatie als er jaarlijks 1100 wilde zwijnen afgeschoten worden.
- e** Bij welk aantal af te schieten wilde zwijnen blijft de populatie constant?

G-3 Bereken van de onderstaande rijen de som van de eerste 25 termen.

- a** 2, 5, 8, 11, ...
- b** $4\frac{1}{2}$, 4, $3\frac{1}{2}$, 3, ...
- c** 4, 8, 16, 32, ...
- d** 1000, 500, 250, 125, ...



G-4 Hierboven zie je een tekening van de zogenaamde vijfhoeksgetallen. De aantallen punten in de opeenvolgende figuren vormen een rij u .

- a** Teken de volgende figuur.
- b** Uit hoeveel punten zou de figuur met nummer 0 moeten bestaan?
- c** Schrijf de eerste zes vijfhoeksgetallen op.
- d** Het aantal punten dat er iedere stap bijkomt vormt een rekenkundige rij. Geef de directe formule voor deze rij
- e** Toon aan dat de directe formule voor de rij u is $u(n) = 1,5n^2 + 2,5n + 1$.

Uitdagende opdrachten

- U-1** De Top2000 is een radioprogramma dat was bedoeld om de overgang van de twintigste naar de eenentwintigste eeuw op te luisteren met de 2000 beste platen ooit gemaakt. Inmiddels is het een jaarlijks terugkerend programma geworden.



Gedurende een week in november kunnen luisteraars hun tien meest favoriete nummers opgeven. Op grond van de uitgebrachte stemmen wordt de ranglijst samengesteld, die vanaf eerste kerstdag tot de jaarwisseling op volgorde wordt uitgezonden.

- a** Op de site van NPO Radio 2 staat dat een nummer minstens 150 stemmen binnen moet halen om in de lijst te komen. Neem aan dat elk van de 2000 uitgezonden nummers een ander aantal stemmen heeft gekregen. Bereken hoeveel stemmen er dan minstens zijn uitgebracht.

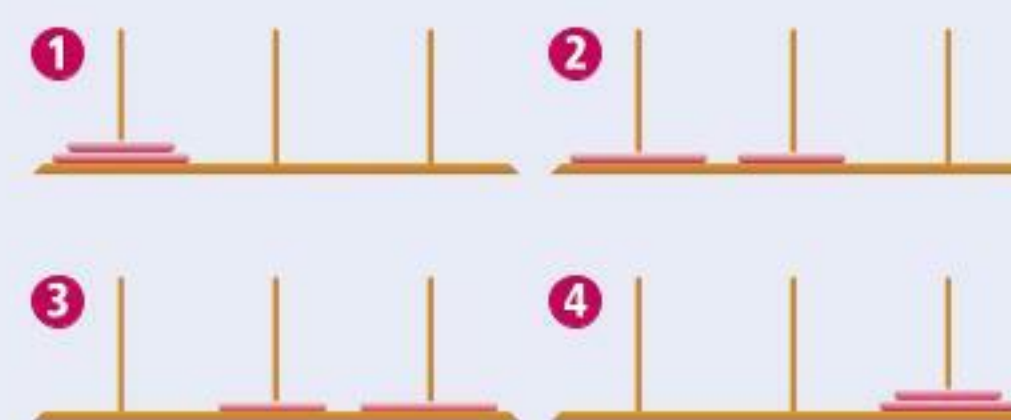
NPO Radio 2 wil de aantallen uitgebrachte stemmen niet vrijgeven. Neem aan dat het aantal stemmen $u(n)$ dat op nummer n van de lijst is uitgebracht voldoet aan de recursieve formule $u(n) = u(n-1) - 2001 + n$

- b** Bereken hoeveel stemmen nummer 1 meer heeft gehaald dan nummer 100.

- U-2** Het spel 'Torens van Hanoi' bestaat uit een aantal schijven van verschillende grootte. De schijven hebben elk een gat en staan in de begintoestand om de linker van drie staafjes. De kunst is om met zo weinig mogelijk zetten een stapel op één van de andere staafjes te maken. Er mag altijd slechts één schijf worden verplaatst naar een ander staafje en er mag nooit een grotere schijf op een kleinere schijf worden geplaatst.



- a** Hiernaast kun je zien hoe je een stapel van twee schijven kunt verplaatsen. Er zijn dan in totaal drie zetten nodig. Hoeveel zetten zijn er nodig als je uitgaat van drie schijven?
- b** Noem het aantal zetten dat nodig is bij n schijven $Z(n)$. Leg uit dat $Z(n+1) = 2 \cdot Z(n) + 1$.
- c** Neem de tabel hiernaast over en vul deze verder in.
- d** Geef met behulp van de rij van de verschillen een directe formule voor de rij $Z(n)$.
- e** Stel dat het verplaatsen van een schijf gemiddeld één seconde duurt. Hoeveel jaar heb je dan nodig om 64 schijven op bovenstaande manier te verplaatsen?



aantal schijven n	1	2	3	4	5
aantal zetten $Z(n)$	1	3	7		
verschil $Z(n) - Z(n-1)$	1	2	4		

- U-3** Twee populaties dieren die in hetzelfde gebied leven beïnvloeden elkaar. De recursieve formules hiernaast laten zien hoe je uit de aantallen dieren in periode t de aantallen in periode $t+1$ kunt berekenen. Bereken a_{1000} en b_{1000} .

$$a_{t+1} = \frac{4}{5} \cdot a_t - \frac{7}{5} \cdot b_t + 1000$$

$$b_{t+1} = \frac{3}{5} \cdot a_t - \frac{1}{5} \cdot b_t - 500$$

$$\text{met } a_0 = 2000 \text{ en } b_0 = 525.$$

Fibonacci



Leonardo van Pisa, beter bekend als Fibonacci (=zoon van Bonacci), werd in 1170 geboren in Pisa. Fibonacci komt van 'filius Bonacci', wat 'zoon van Bonacci' betekende. Zijn vader was Guilielmo Bonacci. Leonardo groeide op in Bugia (Noord-Afrika) waar zijn vader diplomaat was.



Hij leerde wiskunde in Bugia en reisde veel rond met zijn vader waarbij hij de wiskundige kennis van landen zoals Egypte, Syrië, Griekenland, Sicilië en de Provence (Frankrijk) bestudeerde. Hij leerde onder andere werken met de Indische symbolen voor getallen: 0, 1, 2, ..., 9 en hun positiestelsel.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

• ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

Fibonacci realiseerde zich dat het rekenen met de Indische cijfers veel sneller gaat dan met getallen in Romeinse cijfers, waarvoor vrijwel altijd een abacus (telraam) werd gebruikt.



Omstreeks 1200 keerde Fibonacci terug naar Pisa, daar schreef hij een aantal boeken over wiskunde. Zijn belangrijkste werk was de Liber Abaci (1202) een leerboek over het rekenen met Indische cijfers.

Fibonacci is beroemd geworden door de naar hem genoemde rij: 1, 1, 2, 3, 5, ... waarbij je de volgende term vindt door de twee vorige op te tellen, notatie $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, met $F_1 = F_2 = 1$. Fibonacci introduceert de rij met een raadsel over konijnen, waarbij het gaat over het aantal nakomelingen.

Opdracht

- Schrijf de eerste 15 termen op van de rij van Fibonacci.
- Het derde en het zesde getal uit de rij is even, klopt dat ook voor het 9e en 12e getal?
- Als je van twee opeenvolgende getallen uit de rij de kwadraten optelt krijg je weer een getal uit de rij. Controleer dat voor een aantal paren.

Vaardigheden 3

Formules herleiden

- 1** Schrijf de volgende formules zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $y = (p + 4)(p - 5)$

b $q = (t - 5)(6 - 3t)$

c $m = 3n^2 + 6n(2n + 5)$

d $K = -7x - 4(3x - 2)$

e $A = 18k - (17 - 5k)$

f $T = 5r + 3r(2r + 2)$

- 2** Herleid de volgende vergelijkingen naar de vorm $y = ax + b$.

a $9x + 2y - 10 = 0$

b $5x = 4y + 9$

c $0,4x + 1,2y = 8$

d $5(x - 2) + 2y = 15 + 8y$

e $3x + 7y = 12 - 4x + 5y$

f $1\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 2\frac{1}{4}$

In de formule als $K = 500 - B \cdot Q$ is de variabele K uitgedrukt in B en Q . Door substitutie en herleiden kun je Q uitdrukken in K .

- 3** Gegeven de formule $K = 500 - B \cdot Q^3$ uit het voorbeeld hiernaast.

a Schrijf B als functie van K als je weet dat $Q = 2$.

b Substitueer in de formule $K = 100$ en druk B uit in Q .

- 4** Gegeven de formules $K = p \cdot q$ en $q = -2p + 8$. Druk K uit in q .

- 5** Druk y uit in v .

a $y \cdot v = 3$

b $\frac{y}{v} = 2$

c $\frac{9v}{y} = 15$

d $2y(v + 6) = -2$

e $\frac{3v - 9}{y + 1} = 3$

f $\frac{y}{y - 1} = v$

Voorbeeld

Gegeven $K = 500 - B \cdot Q^3$.

Schrijf Q functie van K , als je weet dat $B = 75$.

Oplossing

$$500 - 75 \cdot Q^3 = K \text{ en dus } -75 \cdot Q^3 = K - 500$$

$$Q^3 = \frac{K - 500}{-75} = -\frac{1}{75}K + 6\frac{2}{3}$$

$$\text{Hieruit volgt } Q = \left(-\frac{1}{75}K + 6\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Redeneren met gebroken formules

- 6** In de volgende formules stelt t de tijd voor en P een hoeveelheid. Beredeneer met de formule naar welke waarde P op den duur nadert.

a $P = 40 + 10 \cdot 0,5^t$

b $P = 560 - 13 \cdot 0,95^t$

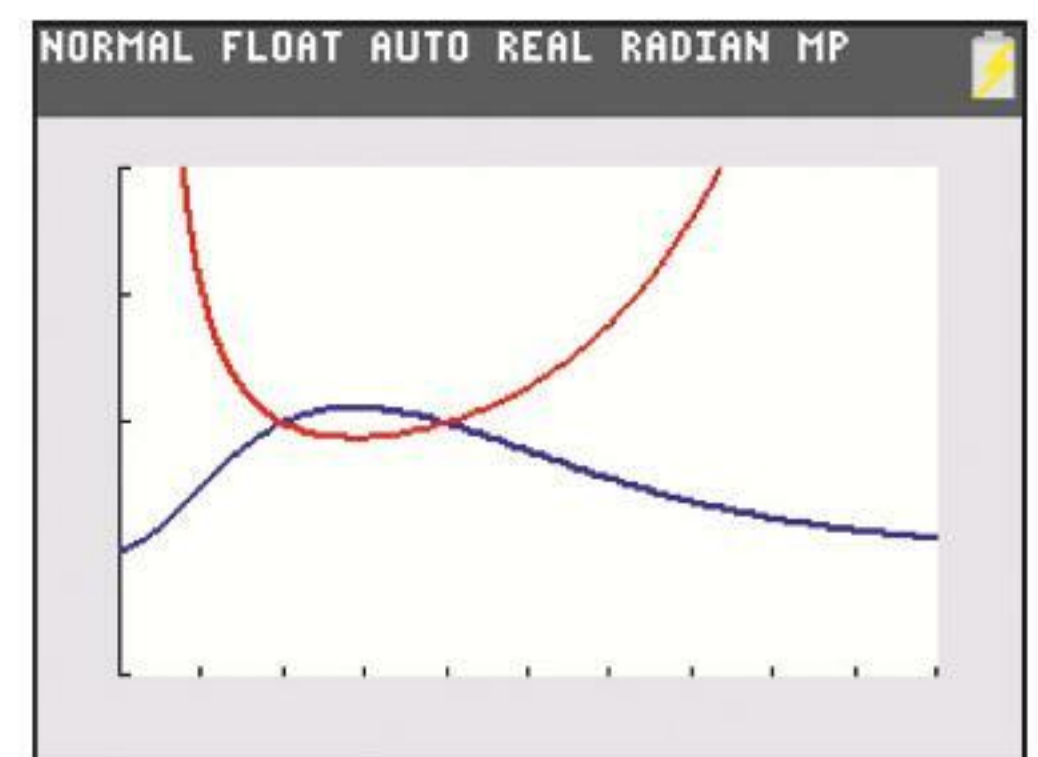
c $P = 200 - \frac{10}{5 + 0,3^t}$

d $P = 250(2 - 65 \cdot 1,5^{-t})$

e $P = 750 + 12(5 \cdot 0,2^{t+3} - 10)$

f $P = 1000 - \frac{235}{3,5 + 1,2^t}$

- 7** Een slager haalt een stuk vlees uit de vriescel en legt het in de koelcel. Vanaf dat moment neemt de temperatuur van het vlees toe. De temperatuur T in graden Celsius van het vlees t uur nadat het vlees in de koelcel is gelegd is te berekenen met de formule $T = 6 - \frac{24}{\sqrt{3t + 1}}$
- Wat was de temperatuur van het vlees op het moment dat het in de koelcel werd gelegd?
 - Bereken de temperatuur van het vlees 10 uur nadat het in de koelcel is gelegd. Rond je antwoord af op één decimaal.
 - Bereken na hoeveel uur de temperatuur van het vlees 0°C is.
 - Leg uit dat de temperatuur T bij toenemende waarden van t zal blijven stijgen.
 - Leg uit hoe je aan de formule kunt zien dat de temperatuur van de koelcel 6°C is.
- 8** Een kippenboer mest haantjes van een bepaald ras voor de slacht. Voor de gewichtstoename van haantjes van dat ras geldt de formule $G = \frac{10\,000}{4 + 200 \cdot 0,4^t}$. Hierbij is G het gewicht in grammen en t de tijd in weken.
- Leg uit hoe je uit de formule kunt afleiden dat de grafiek van G stijgend is bij toenemende t .
 - Plot de grafiek van G voor de eerste tien weken en onderzoek in welke week de gewichtstoename van dit ras het grootst is.
 - Als de boer doorgaat met mesten, dan zullen de kippen niet onbegrensd in gewicht blijven toenemen. Welke grenswaarde is er voor het gewicht van de kippen van dit ras? Leg uit hoe je aan je antwoord gekomen bent.
- 9** Gegeven zijn de functies $t(x) = x^2$ en $n(x) = 2^x$ met $x \geq 0$.
- Bepaal met je rekenmachine de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van de functies t en n .
 - Een van de twee functies stijgt op den duur veel sneller dan de andere functie. Welke functie is dat?
 - Functie B is gedefinieerd door $B(x) = \frac{t(x)}{n(x)} + 5$ met $x \geq 0$.
Beredeneer met behulp van het antwoord van opdracht a dat de grafiek van B door de punten $(2, 6)$ en $(4, 6)$ gaat.
 - Hiernaast staat een plot van twee grafieken op het interval $[1, 7]$. Een van beide grafieken is de grafiek van B . Beredeneer met behulp van het antwoord van opdracht b welke van de twee de grafiek van functie B is.



Differentiëren

- 10** Gegeven is de functie $A(p) = 6\sqrt{p} - 2p - 1$.
- Bereken de gemiddelde toename van A over het interval $[1, 9]$.
 - Bereken het differentiequotiënt van A over het interval $[0, 4]$.
 - Benader de helling in het punt $(1, 3)$ door de gemiddelde verandering van A te berekenen over het interval $[1; 1,001]$.

- 11** Gegeven is de functie $p(t) = (t^3 - 4) \cdot 2^t$.
- Hiernaast zie je een tabel met hellingen van de grafiek van p . Waarom kun je uit deze tabel afleiden dat de grafiek een top heeft voor een waarde van t tussen -5 en -4 ?
 - Waarom volgt uit de tabel hiernaast dat de grafiek nog minstens één top heeft?

Hulpboek 3-5: Hellingen

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS + FOR Δ Tb1				
X	Y2			
-7	-.7306			
-6	-.6952			
-5	-.4505			
-4	.05412			
-3	.68905			
-2	.92056			
-1	-.2329			
0	-2.773			
1	1.8411			
2	59.09			
3	343.54			
X = -7				

Theorie

Voor het differentiëren van een functie gelden de volgende regels.

- > als $f(x) = x^n$ dan is $f'(x) = nx^{n-1}$
- > als $g(x) = f(x) + c$ dan is $g'(x) = f'(x)$
- > als $g(x) = c \cdot f(x)$ dan is $g'(x) = c \cdot f'(x)$
- > als $s(x) = f(x) + g(x)$ dan is $s'(x) = f'(x) + g'(x)$

- 12** Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 5x^3 + 7x - 2$

d $R(m) = 4(6m - 3)^2$

b $Q(t) = 12 - 6t + 8t^4$

e $K(p) = 2 - 0,8p$

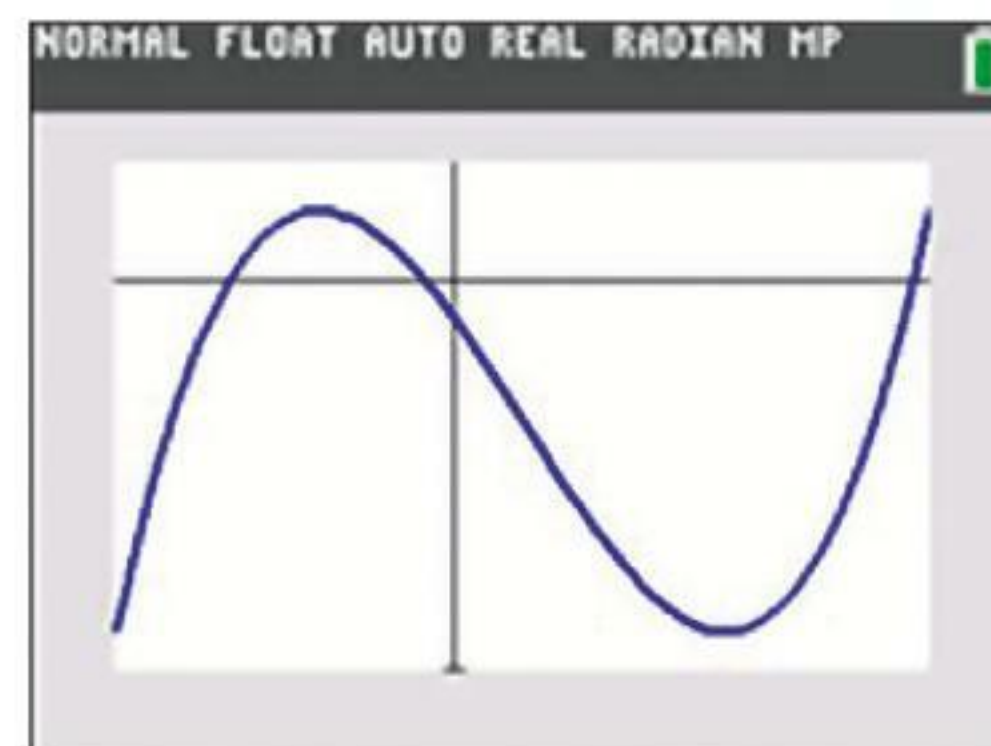
c $p(t) = -t(5t - 1)$

f $Q(w) = (4w - 1)(w^5 + 4w)$

- 13** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x$.

- Geef het functievoorschrift van f' en bereken de waarden van x waarbij $f'(x)$ gelijk is aan 0.
- Bereken de extreme waarden van functie f .
- Hoe kun je aan het voorschrift van de afgeleide zien dat de grafiek van f stijgt voor $x > 3$?
- Op welk interval daalt de grafiek van f ?
- Gebruik de afgeleide om uit te leggen dat de grafiek van f het sterkst daalt bij $x = 0$.

- 14** Hiernaast zie je een plot bij de formule $C = t^3 - 3t^2 - 24t - 10$. Bereken de coördinaten van de toppen met behulp van de afgeleide $\frac{dC}{dt}$

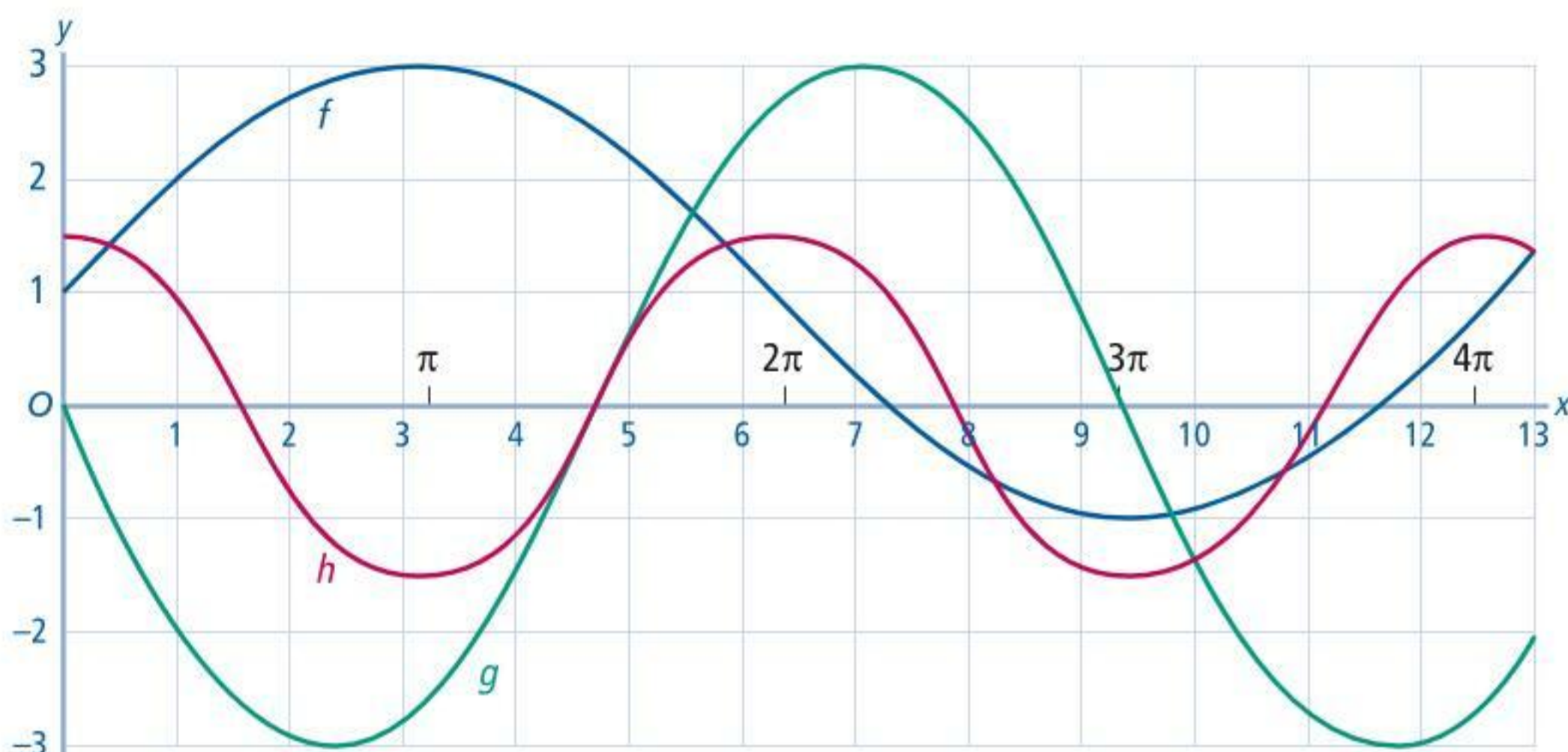


Periodieke functies

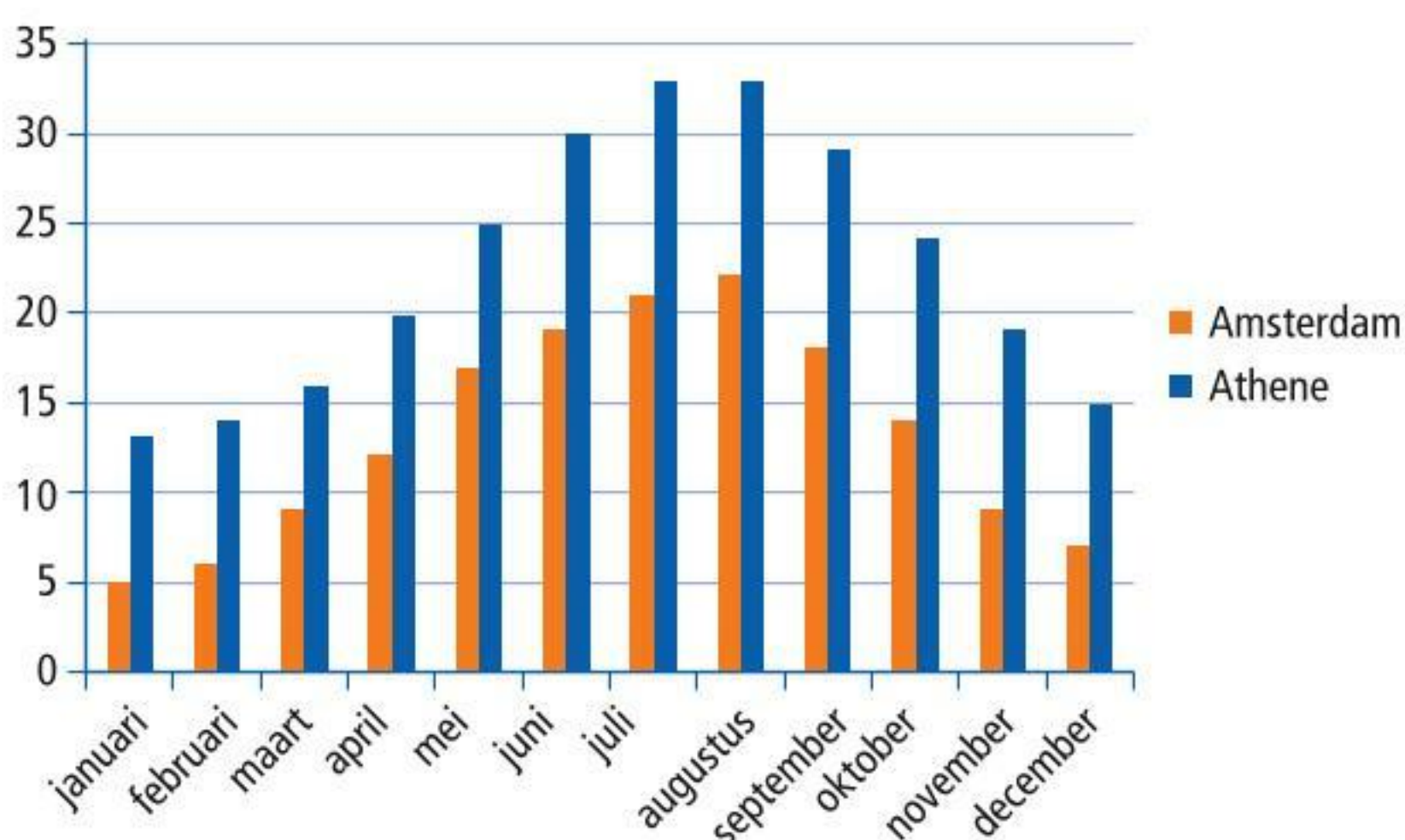
- 15** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 \sin(4x)$, $g(x) = 3,5 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ en $h(x) = 0,1 \sin\left(\frac{2}{5}\pi x\right)$.

Geef van elke functie de amplitude en de periode.

- 16** De grafieken hieronder horen bij de periodieke functies f , g en h .



- a** Bepaal de periode, de amplitude en de evenwichtsstand bij elk van deze grafieken.
- b** Stel functievoorschriften op voor f , g en h .
- 17** In het staafdiagram worden de gemiddelde maximum temperaturen in Athene vergeleken met Amsterdam. (bronnen: KNMI en Hellenic National Meteorological Service). Ernaast zie je een tekening van een benadering van deze gegevens met behulp van twee sinusfuncties. De gemiddelde maandtemperaturen uit het staafdiagram zijn in de tekening overgenomen.



- a** Stel de voorschriften op van de twee sinusfuncties.
- b** De gemiddelde maandtemperatuur van Amsterdam in november lijkt nogal wat af te wijken van het sinusmodel. Bereken hoeveel procent het model afwijkt van het gemeten gemiddelde.
- c** Bereken met behulp van de sinusvormige modellen de gemiddelde maximum temperaturen in Athene en in Amsterdam op 30 juni. Rond je antwoorden af op één decimaal.

Systematisch tellen

Aanpak

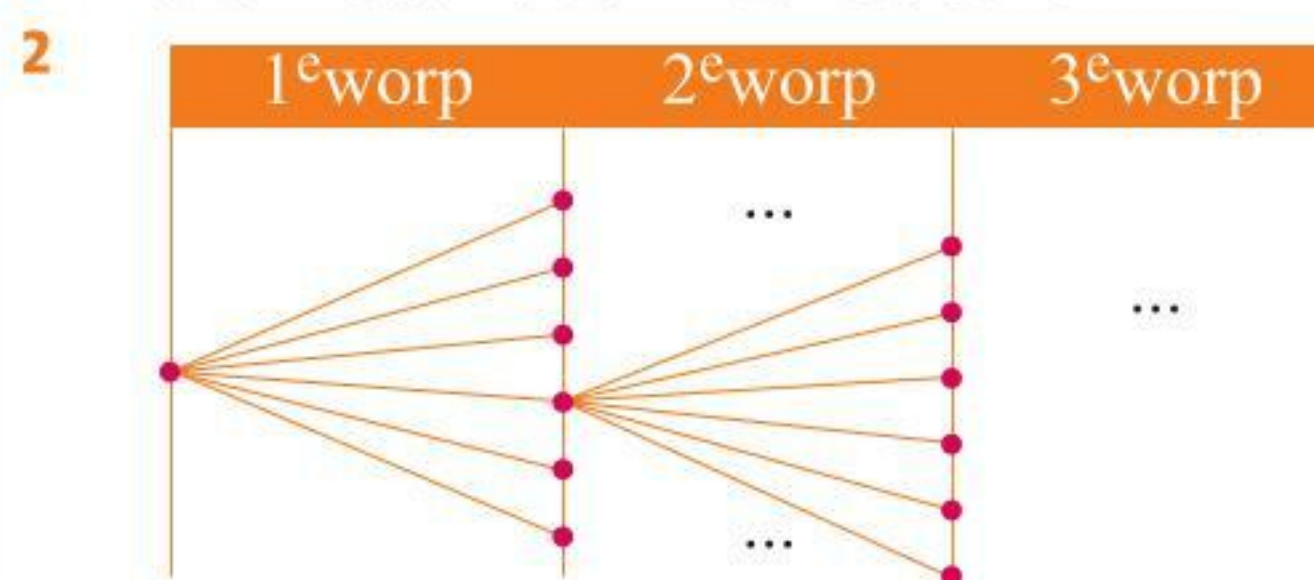
Hoe pak je een telprobleem aan?

- 1 Ga na of je als telmodel een boomdiagram, een rooster of een wegendiagram, schema of tabel kunt maken:
 - > Kun je gebruik maken van een boomdiagram met faculteiten of is een machtsboom het juiste middel?
 - > Als je te maken hebt met de keus tussen twee alternatieven met vaste aantallen per alternatief, dan is een rooster een handig telmodel om te gebruiken.
- 2 Teken zo nodig de boom of het rooster of een deel ervan.
- 3 Bereken het aantal mogelijkheden. Je maakt gebruik van
 - > faculteiten bij faculteitsbomen
 - > permutaties
 - > machten bij machtsbomen
 - > combinaties bij roosters.

Voorbeeld

Je gooit 15 keer met een dobbelsteen en noteert steeds het aantal ogen van de worp. Zo ontstaat een rijtje van 15 getallen. Hoeveel verschillende rijtjes uitkomsten zijn er mogelijk?

1 Het telmodel is een machtsboom.



3 Er zijn 6^{15} rijtjes mogelijk.

- 18a** Een rode bal, een blauwe bal en een gele bal worden op een rij op tafel gelegd. Bereken het aantal verschillende rijtjes dat je op deze manier op tafel kunt leggen.
- b** In een bak zitten vijf zwarte en vijf witte ballen. Uit de bak worden drie ballen gehaald die op een rij op tafel worden gelegd. Bereken het aantal verschillende rijtjes dat je op deze manier op tafel kunt leggen.
- 19** Uit de bak met vijf rode, vijf blauwe en vijf gele ballen worden drie ballen getrokken.
- a** Hoeveel verschillende rijtjes zijn er in totaal mogelijk?
- b** Met RRB wordt een rijtje met eerst twee rode ballen en dan een blauwe bal bedoeld. Schrijf op deze manier alle mogelijke rijtjes op waarin precies twee rode ballen voorkomen.
- c** Leg uit dat er twaalf verschillende rijtjes mogelijk zijn waarin één rode bal voorkomt.
- d** Gebruik de antwoorden op opdracht 19b en c om het aantal verschillende rijtjes te berekenen waarin minstens één rode bal voorkomt?
- 20** Deze opdracht gaat nog steeds over de bak met ballen van opdracht 19. Er worden weer drie ballen op een rijtje gelegd.
- a** Hoeveel verschillende rijtjes zijn er mogelijk als er in het rijtje alleen gele of blauwe ballen voor mogen komen?
- b** Verklaar dat je het antwoord op opdracht 19d ook had kunnen vinden door van het antwoord op opdracht 18a het antwoord op opdracht 20a af te trekken.

- 21** In een bak zitten twee zwarte en vijf witte ballen. Er worden vier ballen uitgehaald en op een rij op tafel gelegd.
- a** Hilde zegt: ‘Elke bal kan zwart of wit zijn, dus er kunnen $2^4 = 16$ verschillende rijtjes op tafel gelegd worden.’.
Leg uit welke denkfout Hilde maakt.
- b** Onderzoek hoeveel verschillende rijtjes van vier ballen er nu op tafel gelegd kunnen worden.
- 22** Een stapeltje kaarten bestaat uit ruiten twee tot en met ruiten zeven. Een tweede stapeltje bestaat uit harten twee tot en met harten zeven.
- a** Van elk stapeltje wordt één kaart afgenomen.
Hoeveel verschillende tweetallen kaarten kun je op die manier krijgen?
- b** De getallen op de kaart worden bij elkaar opgeteld. Om de uitkomsten te noteren kun je gebruik maken van een schema. Hiernaast is daarmee een begin gemaakt.
Welke uitkomst komt het meest voor in het schema? En hoeveel keer komt deze uitkomst voor?
- c** Bij hoeveel tweetallen is de som van de getallen op de twee kaarten groter dan negen?
- d** Je kunt ook op het verschil van de twee getallen op de kaarten letten. Welk verschil komt het meeste voor? Hoe vaak is dat?
- 23** Er wordt gegooid met een viervlaksdobbelsteen (1 tot en met 4), een zesvlaksdobbelsteen (1 tot en met 6) en een achthoeksdobbelsteen (1 tot en met 8).
- De gegooide getallen worden genoteerd. Zo is hiernaast de worp genoteerd waarbij met de viervlaksdobbelsteen 4, met de zesvlaksdobbelsteen 5 en met de achthoeksdobbelsteen 3 werd gegooid.
- a** Hoeveel verschillende worpen zijn er in totaal mogelijk?
- b** De geworpen getallen worden bij elkaar opgeteld en de uitkomst wordt genoteerd.
Waarom kun je bij het noteren van de verschillende uitkomsten geen gebruik maken van een schema als bij opdracht 22b?
- c** Welke uitkomsten zijn in dit geval mogelijk?
- d** Hoeveel verschillende worpen zijn er waarvan de som van de getallen gelijk is aan 4?
- e** Hoeveel verschillende worpen zijn er waarvan de som van de getallen gelijk is aan 17?
- f** Onderzoek hoeveel worpen er mogelijk zijn waarvan de som van de getallen gelijk is aan 8.



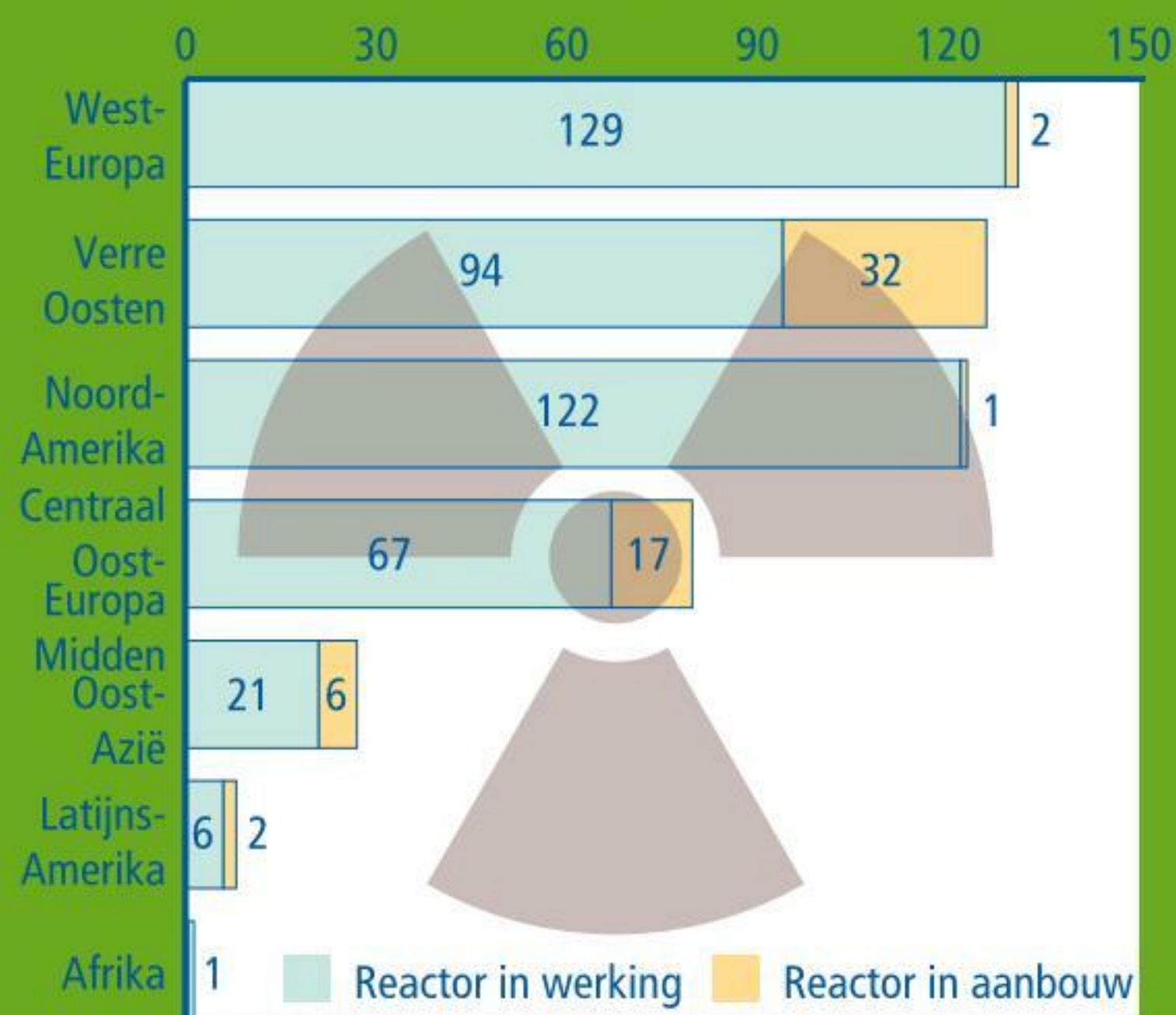
	2	3	4	5	...
2	4	5	...	...	...
3	5	...	...	...	...
4	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...





4	5	3
...	...	...
...	...	...

Aantal kernreactoren voor energieopwekking wereldwijd op 26 augustus 2010



Wat is de kans op een kernramp?

Risico-experts hebben berekend dat de kans dat in een kerncentrale een ongeluk gebeurt, ongeveer gelijk is aan eens in de 100 000 jaar. Er zijn 441 kernreactoren over de hele wereld. (bron: NRC, 29 april 2011)

Hoe zou je de kans op een kernongeval kunnen berekenen?
In veertig jaar tijd zijn er drie grote ongelukken gebeurd.
Wat zou je hieruit kunnen concluderen?

Hoofdstuk 7

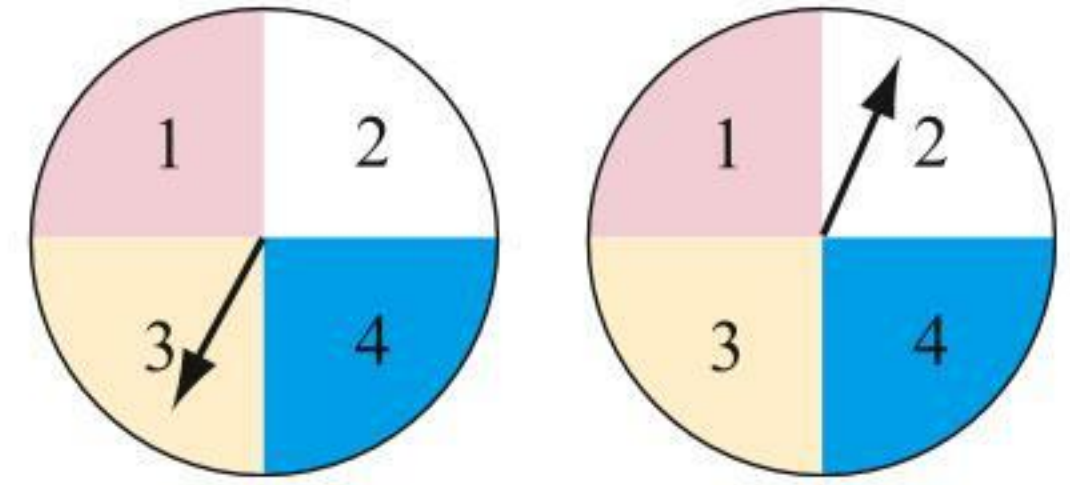
De binomiale verdeling

In dit hoofdstuk

	Voorkennis:	170
7-1	Binomiale verdelingen	172
7-2	Werken met binomiale verdelingen	174
7-3	Cumulatieve kansen	176
7-4	Verwachtingswaarde en standaardafwijking	178
7-5	Gemengde opdrachten	180
	Samenvatting	182
	Test jezelf	184
	Extra oefening - Basis	186
	Extra oefening - Gemengd	187
	Uitdagende opdrachten	188
	Het bord van Galton	189

Voorkennis

- V-1** Hiernaast zie je twee tolletjes. De tolletjes hebben vier gelijke delen. Elk tolletje wordt één keer gedraaid. De uitkomst S is de som van de door de pijlen aangegeven getallen op de tolletjes. In de figuur hiernaast is $S = 5$.
- a** Hiernaast zie je een schema bij de uitkomsten op de tolletjes. Neem het schema over en vul het verder in.
- b** Hoe groot is de kans dat $S = 2$?
- c** Hoe groot is de kans op uitkomst 5?
- d** Waarom is $P(S = 4)$ groter dan $P(S = 2)$?
- e** Bereken de kans dat $P(S \geq 5)$.



+	1	2	3	4
1	...	3	...	...
2	...	...	5	...
3	...	...	6	...
4	...	...	...	...

- V-2** Je gooit met vier geldstukken.
- a** Leg uit dat de kans op vier keer kop gelijk is aan $\frac{1}{16}$.
- b** Hoe groot is de kans dat je met de eerste drie geldstukken kop en met het vierde geldstuk munt gooit?
- c** Hoeveel verschillende rijtjes zijn er met drie keer kop en één keer munt?
- d** Bereken de kans op drie keer kop en één keer munt.

Theorie

Een variabele waarvan de waarde afhangt van het toeval heet **toevalsvariabele** of **stochast**. De uitkomst van een stochast is altijd een getal. Met $P(X = 2)$ wordt bedoeld de kans dat stochast X de waarde 2 aanneemt. Een overzicht van de mogelijke waarden van X met de bijbehorende kansen heet de **kansverdeling** van stochast X . Bij een kansverdeling is de som van de kansen gelijk aan 1.

De **verwachtingswaarde** van stochast X is de gemiddelde waarde van X die je mag verwachten bij een groot aantal herhalingen van het experiment. De notatie van de verwachtingswaarde van X is $E(X)$.

Voorbeeld

Je gooit met drie dobbelstenen. Stochast X is het aantal vieren. Geef een kansverdeling van X .

Oplossing

X kan de waarden 0, 1, 2 en 3 aannemen

$$P(X = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{75}{216}$$

u	0	1	2	3
$P(X = u)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$$\text{Som van de kansen is } \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = 1$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 3 \cdot \frac{1}{216} = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$$

- V-3a** In het voorbeeld hierboven zie je dat

$$P(X = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3.$$

Verklaar deze berekening.

- b** Controleer met een berekening de overige kansen in het voorbeeld.

- V-4** In een vaas zitten vier rode en zes blauwe balletjes. Je trekt met terugleggen drie balletjes uit de vaas. Stochast B is het aantal blauwe balletjes.

- a** Geef de kansverdeling van B .
- b** Bereken $E(B)$.

- V-5** Een vaas bevat twaalf rode en acht witte knikkers. Je trekt met terugleggen vijf knikkers uit de vaas.
- Veronderstel dat je het rijtje 'w r w r w' hebt getrokken, in deze volgorde. Laat met een berekening zien dat de kans op deze gebeurtenis gelijk is aan 0,02304.
 - Hoe groot is de kans op het rijtje 'w w w r r'?
 - Leg uit hoe je in het rooster hiernaast kunt zien dat er 10 rijtjes zijn met drie witte en twee rode knikkers.
 - Leg zonder berekening uit waarom $\binom{5}{2}$ gelijk is aan $\binom{5}{3}$.
 - Bereken de kans op drie witte en twee rode knikkers als ze in elke volgorde getrokken mogen worden.
 - Hoe groot is de kans op twee witte en drie rode knikkers?

1	5	15	35	70
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

Je kunt het aantal rijtjes met drie witte en twee rode knikkers ook berekenen met het aantal combinaties van 2 uit 5, ofwel $\binom{5}{2} = 10$.

- V-6** Je trekt vijf keer met terugleggen een knikker uit de vaas van de vorige opdracht. Stochast X is het aantal rode knikkers in de trekking.
- Bereken $P(X = 4)$ in vier decimalen nauwkeurig.
 - Geef de kansverdeling van X . Rond de kansen af op vier decimalen.
 - Hoe groot is de kans op hoogstens vier rode knikkers?

Bij vragen over 'minstens', 'hoogstens', 'meer dan' en 'minder dan' is het soms handiger om eerst de complementaire kans te berekenen, dat is de kans op 'de rest'.

- V-7** Bij een verloting worden er 15 loten in een hoed gedaan. Op vier loten staat een kruis. Op de andere elf loten staat niets. Loten met een kruis leveren een prijs op. Alle 15 loten worden verkocht en Burak koopt drie loten.
- Bereken de kans dat Burak geen enkele prijs wint.
 - Bereken de kans dat Burak precies één prijs wint.
 - Bereken de kans dat Burak minstens één prijs wint.

- V-8** Toepen is een kaartspel waarin van de vier kleuren schoppen, ruiten, harten en klaveren alleen de kaarten met Heer, Vrouw, Boer, Aas en de cijfers 7, 8, 9 en 10 meedoen. De 10 is de kaart met de hoogste waarde. Elke deelnemer krijgt vier kaarten. Stochast K is het aantal kaarten met een 10 in het eerste stapeltje van vier.
- Laat met een berekening zien dat $P(K = 0)$, afgerond op vijf decimalen, gelijk is aan 0,56938.
 - Bereken de kans dat bij het eerste stapeltje ten minste één kaart met een 10 zit.
 - Bereken $P(K = 2)$.
 - Bereken de verwachtingswaarde van K .

Voorbeeld

Je gooit met twee dobbelstenen en je let op de som van de ogen. Bereken $P(\text{hoogstens } 10 \text{ ogen})$.

Oplossing

Er zijn in totaal $6 \times 6 = 36$ uitkomsten. Met de uitkomsten (5, 6), (6, 5) en (6, 6) gooi je meer dan 10 ogen.

$$P(\text{meer dan } 10 \text{ ogen}) = \frac{3}{36} \text{ dus}$$

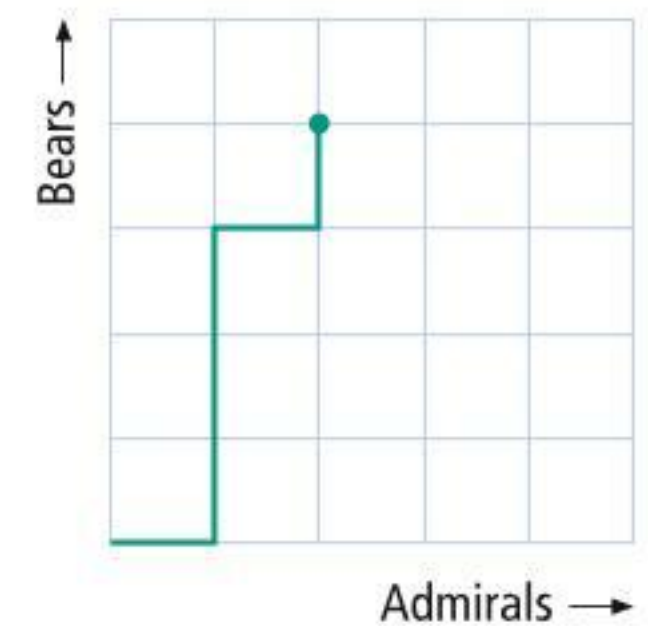
$$P(\text{hoogstens } 10 \text{ ogen}) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$



7-1

Binomiale verdelingen

- 1 In het rooster is een serie van zes wedstrijden tussen twee honkbalteams, de Admirals en de Bears, weergegeven. Bij elke wedstrijd is er een winnaar; gelijkspel is niet mogelijk. Als de teams even sterk zijn, dan is de kans dat een team een wedstrijd wint gelijk aan 0,5. De kans op de serie ABBBAB is dan gelijk aan: $0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = (0,5)^6$.
 - a Bereken de kans op de serie BBABAB.
 - b Neem nu aan dat de kans dat de Admirals een wedstrijd winnen gelijk is aan 0,6 en de kans dat de Bears winnen dus 0,4. Hoe groot is dan de kans op de serie BBABAB? En op de serie ABBBAB?
 - c Op hoeveel manieren kan de eindstand 3-3 bereikt worden?
 - d Hoe groot is de kans op deze eindstand?
- 2 Johan gooit vijf maal met een dobbelsteen. Hij telt daarbij het aantal keer dat hij een zes gooit.
 - a Hoe kun je bij dit experiment een rooster te tekenen? Wat zet je bij de assen?
 - b Hoeveel uitkomsten zijn er waarbij je twee keer een zes gooit en drie keer géén zes?
 - c Hoe groot is de kans dat Johan de eerste twee keer wel en de laatste drie keer géén zes gooit?
 - d Bereken de kans dat Johan bij de vijf worpen met de dobbelsteen precies twee keer een zes gooit.



Theorie

Een kansexperiment met maar twee mogelijke uitkomsten heet een **Bernoulli-experiment**. De twee mogelijke uitkomsten noem je succes (s) en mislukking (m). Veel kansexperimenten kun je opvatten als het herhaald uitvoeren van hetzelfde Bernoulli-experiment. Je krijgt dan als uitkomst een rij van de vorm s, m, m, m, s, s, ..., m. De kans op een succes blijft bij iedere trekking gelijk. Stochast X telt het aantal successen. Bij n experimenten kan X de waarden 0, 1, 2, ..., n aannemen. De kansverdeling van stochast X heet een **binomiale verdeling**. De kansverdeling van een binomiaal verdeelde stochast X is vastgelegd door het aantal herhalingen van het experiment n en de kans p op succes van het experiment. Hierbij heten n en p de **parameters** van de binomiale verdeling. Een binomiale verdeling met parameters n en p noteer je als $\text{Bin}(n; p)$.

Voorbeeld

Maaïke speelt tegen Daan een schaakwedstrijd van zeven partijen. De kans dat zij een partij wint, is 0,6. Hoe groot is de kans dat ze vijf partijen wint?

Oplossing

Stochast W is het aantal winstpartijen. W heeft een binomiale verdeling met de parameters $n = 7$ en $p = 0,6$.
 $P(w w w w w v v) = 0,6^5 \times 0,4^2$.
 Er zijn $\binom{7}{5} = 21$ manieren waarop Maaïke vijf partijen kan winnen. De gevraagde kans is dus
 $21 \times 0,6^5 \times 0,4^2 = 0,2613$.

- H 3** Sabine heeft haar proefwerk Frans niet goed kunnen leren. Het gevolg is dat ze van acht vierkeuzevragen het antwoord moet gokken. X is het aantal vragen dat ze goed gokt.
- a** Waarom is de kansverdeling van X binomiaal verdeeld?
 - b** Noem het juist beantwoorden van een vraag een succes. Geef de kans op succes en de kans op mislukking.
 - c** Hoe groot is de kans dat ze drie van de acht keer succes heeft?
 - d** Kim heeft het proefwerk beter geleerd en hoeft maar vijf vragen te gokken. Hoe groot is de kans dat zij slechts één vraag fout gokt?

- 4** Uit vazen met rode en witte ballen worden steekproeven van drie ballen genomen. De ene keer met terugleggen en de andere keer zonder terugleggen. De aantallen rode en witte ballen in de vazen zijn verschillend, maar de verhouding van de aantallen rode en witte ballen is steeds hetzelfde.

vaas	aantal ballen		P($X = 2$)	
	rood	wit	met terugleggen	zonder terugleggen
A	4	6		
B	40	60		
C	400	600		

- X is het aantal rode ballen in de steekproef.
- a** Bereken in alle gevallen de kans op twee rode ballen en vul de tabel in. Rond af op vier decimalen.
- b** Vergelijk de resultaten. Welke conclusie kun je nu trekken?

Bij een grote populatie verandert de samenstelling van de populatie nauwelijks als er zonder terugleggen een kleine steekproef uit getrokken wordt. Je mag de trekking dan opvatten als een trekking met terugleggen.

Als het in de steekproef bovendien gaat om twee mogelijke uitkomsten (succes-mislukking), mag je een binomiale verdeling gebruiken.

- H 5** In een doos zitten 250 lampjes, waarvan er 20 defect zijn. Nico neemt drie keer zonder terugleggen een lamp uit de doos.
- a** Waarom is het aantal defecte lampen niet binomiaal verdeeld?
 - b** Stochast X is het aantal defecte lampen. Verklaar waarom je de verdeling van X goed kunt benaderen met een binomiale verdeling.
 - c** Geef de kansverdeling van X .
- H 6** Ga van de volgende experimenten na of er een binomiale verdeling bij kan horen. Formuleer in die gevallen stochast X en geef zo mogelijk de bij de verdeling behorende waarden van n en p .
- a** Het maken van een vierkeuzetoets Russisch, bestaande uit twintig vragen, door een kandidaat die deze taal totaal niet kent.
 - b** Het kiezen van zes leerlingen uit een klas met tien meisjes en twaalf jongens waarbij je let op het aantal jongens.
 - c** Het kiezen van zes leerlingen uit een school met 1020 meisjes en 1105 jongens waarbij je let op het aantal jongens.
 - d** Het trekken zonder teruglegging van zes knikkers uit een vaas met vijf rode en vijftien blauwe knikkers.

7-2

Werken met binomiale verdelingen

- 7** Een medicijn geeft een genezingskans van 75%. Dit medicijn wordt toegediend aan zes patiënten. Stochast X is het aantal genezen patiënten.
- a** Bereken $P(X = 6)$.
- b** Bereken de kans dat geen enkele patiënt geneest.
- c** Bereken de kans dat de eerste twee patiënten wel en de laatste vier niet genezen.
- d** Bereken het aantal mogelijke volgorden van twee successen en vier mislukkingen.
- e** De kans dat er precies twee van de zes patiënten genezen kun je noteren als
- $$P(X = 2) = \binom{6}{2} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25^4$$
- Leg de notatie uit en bereken de kans.

Theorie

Als stochast X binomiaal verdeeld is, noteer je dat als X is $\text{Bin}(n; p)$ -verdeeld.

Hierin is n is het aantal herhalingen en is p de kans op succes.

$X = k$ is de gebeurtenis van het optreden van k successen.

Deze gebeurtenis heeft $\binom{n}{k}$ mogelijke uitkomsten.

De coëfficiënten $\binom{n}{k}$ heten ook wel **binomiaalcoëfficiënten**.

De kans op precies k successen en $n - k$ mislukkingen is:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Voorbeeld

Je vult dertig vierkeuzevragen op de gok in. Bereken de kans op tien goede antwoorden.

Oplossing

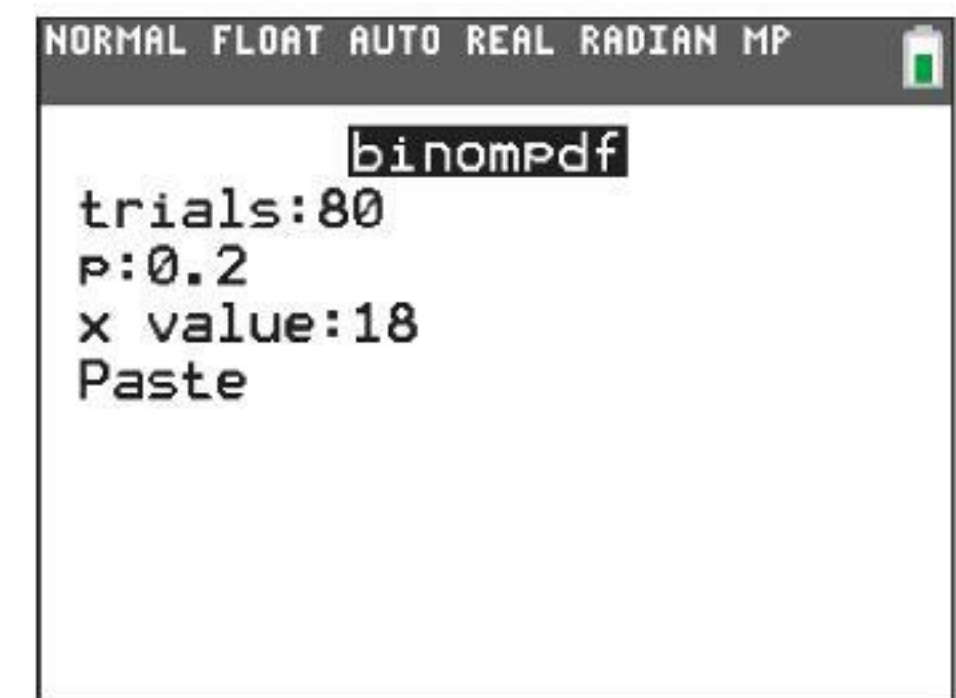
Stochast X : aantal goed
 X is $\text{Bin}(30; 0,25)$ -verdeeld
 Kans op 10 goed:

$$P(X=10) = \binom{30}{10} \cdot 0,25^{10} \cdot 0,75^{20} \approx 0,0909$$

- 8** In Nederland is ongeveer 8% van de mannen kleurenblind. In een groep van 30 willekeurig aangewezen mannen is stochast X het aantal kleurenblinde mannen.
- a** Bereken $P(X = 4)$.
- b** Bereken de kans dat niemand in de groep kleurenblind is.
- c** Bereken de kans dat er vijf kleurenblinde mannen in de groep zitten.
- H 9** Je gooit vijf maal met een dobbelsteen. Stochast X is het aantal keren dat je een 2 gooit.
- a** Geef de waarden van n en p die bij de verdeling van X horen.
- b** Hoe groot is $P(X = 4)$?
- c** Bereken $P(X = 2)$ en $P(X = 3)$.

Op je rekenmachine zit een optie waarmee je de kansen bij een binomiale kansverdeling in één keer kunt berekenen. Daarbij is het van belang dat je de waarden in de juiste volgorde invoert op je rekenmachine. Hiernaast zie je hoe je de kans op 18 keer succes bij een experiment met $n = 80$ herhalingen en de kans $p = 0,2$ op succes kunt berekenen.

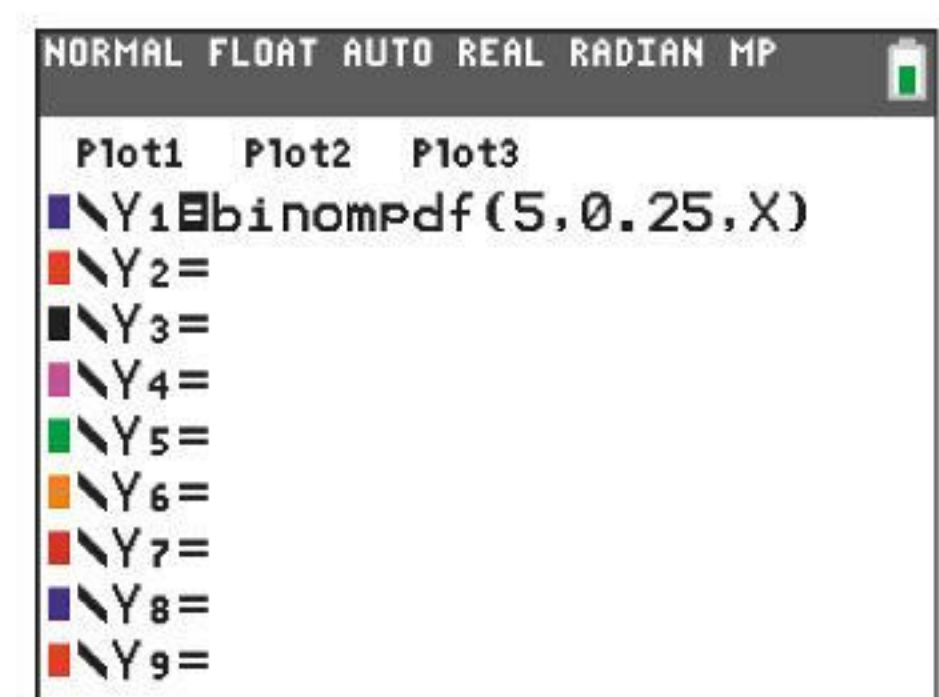
Hulpboek 4-8 Binomiale kansen berekenen



- H 10** Stochast X is $\text{Bin}(13; 0,65)$ -verdeeld.
- Bereken $P(X = 5)$ en $P(X = 13)$ met behulp van de formule.
 - Controleer je antwoorden van opdracht a door de parameters n en p en het aantal successen in te voeren in je rekenmachine.

- H 11** Je vult een test van vijf vierkeuzevragen op de gok in. Per vraag is steeds één van de vier antwoorden goed.
- Formuleer de stochast X en geef de bijbehorende parameters van de verdeling van X .
 - Bereken de kans op drie goede antwoorden.
 - Maak op je rekenmachine een tabel met de kansen van stochast X en vul de kansverdeling hieronder in.

$X = u$	0	1	2	3	4	5
$P(X = u)$	...	...	...	...	...	...



- 12** De Oosterscheldedam is een pijlerdam die bestaat uit een serie van 62 gigantische schuiven, die bij zware storm worden neergelaten. Als de schuiven zijn neergelaten, fungeert deze dam als stormvloedkering. Normaal staan de schuiven open zodat het getijde op de Oosterschelde blijft bestaan. Elk van de schuiven wordt, onafhankelijk van de andere schuiven, door een computer bestuurd. De stormvloedkering werkt alleen als alle 62 schuiven zijn neergelaten. Neem aan dat een schuif één op de honderd keer weigert en vat het neerlaten van de 62 schuiven op als een toevalsexperiment.
- Formuleer een binomiaal verdeelde stochast X en geef de parameters n en p .
 - Bereken de kans dat geen enkele schuif weigert.
 - De bouwers gaan ervan uit dat een schuif 1 op de 10 000 keer weigert.
Hoe groot is de kans dat geen van de 62 schuiven weigert?
 - Hoe groot is de kans op twee weigerende schuiven?
 - Is het voor de berekening van de kansen van belang dat de schuiven onafhankelijk bestuurd worden? Verklaar je antwoord.
- 13** Stochast X is $\text{Bin}(10; 0,8)$ -verdeeld.
Bereken bij welke waarden van a geldt: $P(X = a) \geq 0,2$.



7-3

Cumulatieve kansen

- 14** Je gooit vijf keer met een dobbelsteen.
- a** Bereken de kans op hoogstens twee worpen met zes ogen.
 - b** Hoe groot is de kans dat je hoogstens vier keer een zes gooit?
 - c** Bereken de kans dat je minstens één keer een zes gooit.

Theorie

Als X Bin(n, p)-verdeeld is, dan is

$$P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = k)$$

$P(X \leq k)$ noem je een **cumulatieve binomiale kans**.

Andere voorbeelden van cumulatieve kansen zijn $P(X < k)$ en $P(X \geq k)$.

Voorbeeld

Stochast X is Bin(8; 0,2)-verdeeld
Bereken $P(X \leq 2)$ en $P(X \geq 3)$.

Oplossing

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &\approx 0,1678 + 0,3355 + 0,2936 \\ &= 0,7969 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &\approx 1 - 0,7969 = 0,2031 \end{aligned}$$

- 15a** Bereken bij het voorbeeld hiernaast $P(X \leq 4)$.
- b** En hoe groot is $P(X > 4)$?
- 16** Stochast X is Bin(10; 0,25)-verdeeld.
- a** Bereken $P(X \leq 3)$.
 - b** In de tabel hiernaast staan de cumulatieve kansen bij de verdeling Bin(10; 0,25).
Controleer hiermee je antwoorden bij opdracht a.
 - c** Hoe groot is $P(X \leq 5)$? En hoe groot is $P(X \leq 4)$?
 - d** Bereken $P(X \leq 5) - P(X \leq 4)$ en geef de betekenis van het antwoord.
 - e** Bereken met behulp van de tabel de gebeurtenis $P(X \geq 3)$.
 - f** De kansen op hoogstens 8 of hoogstens 9 successen zijn niet even groot.
Waarom geeft de tabel wel dezelfde waarden?
 - g** En waarom is de kans op hoogstens 10 successen precies 1?

k	$P(X \leq k)$
0	0,0563
1	0,2440
2	0,5256
3	0,7759
4	0,9219
5	0,9803
6	0,9965
7	0,9996
8	1,0000
9	1,0000
10	1

Met je rekenmachine kun je bij een binomiale verdeling cumulatieve kansen van de vorm $P(X \leq k)$ berekenen.

Soms moet je een gevraagde cumulatieve kans eerst omwerken naar de vorm $P(X \leq k)$ voordat je de rekenmachine kunt gebruiken.
Hiernaast zie je dat $P(X \leq 2) = 0,90112$ bij $n = 6$ en $p = 0,2$,
Dus $P(X \geq 3) = 1 - 0,90112 = 0,09888$.

- 17** Stochast X is Bin(14; 0,35)-verdeeld.
- a** Bereken $P(X \leq 6)$.
 - b** En hoe groot is $P(X \geq 7)$?
 - c** Bereken $P(X \geq 9)$.

Hulpboek 4.8: Binomiale verdeling

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP	
binomcdf(6,0.2,2)	.90112

- 18** Vijftig personen nemen deel aan een cursus ‘Stoppen met roken’. Gemiddeld is 30% van de deelnemers aan die cursus succesvol. Dit houdt in dat ze na de cursus minstens een jaar niet roken. Stochast X is het aantal succesvolle deelnemers.
- a** Geef de waarden van n en p van de verdeling van X .
 - b** Hoe groot is de kans dat hoogstens 15 deelnemers succesvol zijn?
 - c** Bereken de kans dat meer dan 15 deelnemers succesvol zijn.

Aanpak

Hoe bereken je een cumulatieve kans bij een binomiale verdeling?

- 1** Formuleer stochast X en stel de parameters n en p vast.
- 2** Schrijf de gevraagde kans zo nodig als verschil van cumulatieve binomiale kansen.
- 3** Voer op je rekenmachine de cumulatieve binomiale kans(en) in, met de parameters n en p en het aantal successen.
- 4** Bereken de gevraagde kans.

Voorbeeld

Bereken de kans dat je bij tien keer gooien met een muntstuk vaker dan drie, maar hooguit zeven keer kop gooit.

Oplossing

X is het aantal keer dat je kop gooit, X is $\text{Bin}(10; 0,5)$ -verdeeld
 $P(3 < X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 3)$. De kans is 0,7734.

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
binomcdf(10,0.5,7)-binomcdf(10,0.5,3)
.....7734375.....
```

- H 19** Stochast X is $\text{Bin}(30; 0,7)$ -verdeeld. Bereken de volgende kansen.

 - a** $P(X \leq 11)$
 - b** $P(X \geq 23)$
 - c** $P(17 < X < 25)$
 - d** $P(9 \leq X \leq 19)$
 - e** $P(X > 21)$
 - f** $P(7 \leq X < 15)$

H 20 Ga ervan uit dat er gemiddeld evenveel meisjes als jongens worden geboren. Gedurende een etmaal worden er in een ziekenhuis twintig kinderen geboren.

 - a** Bereken de kans dat er meer jongens dan meisjes geboren worden.
 - b** Bereken de kans op minstens 14 jongens.
 - c** Bij de eerste tien geborenen zijn negen jongens. Hoe groot is de kans dat ook het elfde kind een jongen is?
- 21** Op de veiling wordt een partij van ongeveer 1000 sinaasappels aangeboden. Van de aangeboden sinaasappels is 20% zuur. Een groenteman wil op de veiling deze sinaasappels kopen. Hij proeft er 10. Stochast X is het aantal zure sinaasappels dat de groenteman aantreft.
- a** Leg uit waarom X niet binomiaal verdeeld is.
 - b** Waarom kun je de kansverdeling van X wel benaderen met een binomiale verdeling? Geef de bijbehorende parameters.
 - c** Bereken de kans dat er minder dan twee van de tien sinaasappels zuur zijn.
 - d** Hoe groot is de kans dat de groenteman meer dan drie zure sinaasappels aantreft?
 - e** Bereken de kans dat de eerste vijf sinaasappels die hij proeft niet zuur zijn en dat hij in totaal minstens twee zure sinaasappels aantreft.



© Noordhoff Uitgevers bv

- H 25** Van alle fietsen in Nederland is 60% voorzien van handremmen. Bij een controle worden twintig fietsers aangehouden.
- a** Hoeveel van deze fietsers zullen naar verwachting gebruik maken van een terugtraprem? En hoe groot is de standaardafwijking?
 - b** Bereken de kans dat de meerderheid van de gecontroleerde fietsers gebruik maakt van handremmen.
- 26** Gemiddeld haalt 58% van de eerstejaarsstudenten aan een hbo opleiding het eerste jaar in één jaar. In een groep aan deze hbo-opleiding zitten vijftig eerstejaarsstudenten.
- a** Bereken de kans dat dertig studenten het eerste jaar in één jaar halen.
 - b** Bereken de kans dat het aantal gezakten uit de groep kleiner is dan het verwachte aantal.
 - c** Bereken de kans dat het aantal geslaagden minder dan één keer de standaardafwijking afwijkt van het verwachte aantal.
- H 27** Bij de productie van speelgoedauto's is de kans op een fabricagefout 10%.
- a** Een winkelier bestelt 500 speelgoedauto's. Er heeft geen controle op de speelgoedauto's plaatsgevonden, dus ook defecte auto's verlaten de fabriek. Hoeveel defecte auto's verwacht je dat de winkelier zal aantreffen?
 - b** Bereken de standaardafwijking.
 - c** Bereken de kans dat het aantal defecte auto's in een zending meer is dan het verwachte aantal plus één keer de standaardafwijking.
- 28** De minister beweert dat slechts 15% van de wiskundedocenten tegen het verplicht stellen van het vak wiskunde is. De vakbond denkt dat dit percentage veel hoger is. In een bliksemonderzoek wordt een aselechte steekproef van vijftig wiskundedocenten genomen.
- a** Waarom mag je hier gebruik maken van een binomiale verdeling?
 - b** Neem aan dat de minister gelijk heeft. Hoeveel tegenstanders van verplichting verwacht je dan? En hoe groot is de standaardafwijking?
 - c** De vakbond besluit een grootschalig onderzoek in te stellen als de steekproef van vijftig docenten te veel tegenstanders bevat. Bereken de kans op minstens acht tegenstanders in de steekproef als de minister gelijk heeft.
 - d** Zou jij bij acht tegenstanders in de steekproef de minister gelijk geven? Licht je antwoord toe.
 - e** De vakbond wil een grootschalig onderzoek starten als het aantal tegenstanders in de steekproef duidelijk groter is dan door de minister verwacht wordt. Stochast X is het aantal tegenstanders in de steekproef. Het aantal tegenstanders a in de steekproef moet zo groot zijn dat de kans dat er minstens a tegenstanders in de steekproef voorkomen kleiner is dan 10%. Hierbij wordt er van uit gegaan dat de minister gelijk heeft. Onderzoek bij welke aantallen tegenstanders de vakbond een grootschalig onderzoek start.



7-5

Gemengde opdrachten

- 29** Bij een loterij worden wekelijks honderd loten verkocht. De loten kosten twee euro per stuk. Er is een eerste prijs van vijftig euro en er zijn twee tweede prijzen van vijftien euro te winnen. Per lot kun je maar één prijs winnen.
- Klazien koopt één lot.
Wat is winstverwachting van Klazien?
 - Janneke koopt vijf weken lang elke week een lot.
Bereken de kans dat ze twee keer een prijs wint.
 - Hoe groot is de kans dat Janneke na vijf weken winst heeft gemaakt?
- 30** Rechtshandige softbalspelers dragen een linker handschoen. Zodoende kunnen ze met hun linkerhand een bal vangen en met de rechter gooien. Bij linkshandige spelers is dit andersom.
Ongeveer 10% van de Nederlandse bevolking is linkshandig en heeft dus een rechterhandschoen nodig bij softbal. Een docent lichamelijke opvoeding heeft twee rechterhandschoenen en achttien linker.
- Een brugklas van twintig leerlingen krijgt een les softbal.
Elke leerling heeft dan een handschoen nodig.
Hoe groot is de kans dat de docent te weinig rechterhandschoenen heeft?
 - Bereken de kans dat minstens één leerling uit een klas van twintig leerlingen met een verkeerde handschoen moet softballen.
 - Neem aan dat alle klassen op de school van deze docent bestaan uit twintig leerlingen. De docent geeft op een dag aan acht klassen les.
Hoe vaak kan hij een tekort aan een bepaalde soort handschoen verwachten?
 - Hoe groot is de kans uit opdracht b in een klas met negentien leerlingen?
- 31** Een lottoformulier bestaat uit blokken met de getallen 1 tot en met 45.
- Een deelnemer kruist per blok zes getallen aan. Bij de wekelijkse trekking worden er zes getallen getrokken. Iemand die al die getallen in één blok had voorspeld, wint de jackpot. Tim kruist in één blok de getallen 4, 12, 22, 26, 33 en 41 aan.
- Toon aan dat de kans dat Tim de jackpot wint 0,000 000 12 is.
 - Per week worden er, door alle deelnemers samen, drie miljoen blokken ingevuld.
Ga na dat de kans, dat de jackpot op één of meer blokken valt, ongeveer 0,3023 is.
 - Bereken de kans dat de jackpot in twintig opeenvolgende weken ten minste twaalf keer gewonnen wordt.
 - De jackpot is in de afgelopen twaalf weken niet gevallen.
Toon aan dat de kans daarop ongeveer 0,0133 is.
 - Tim vindt een kans van 0,0133 zo klein, dat volgens hem de jackpot deze week zeker zal vallen. Ben je het met Tim eens?
Zo niet, wat is dan de kans dat de jackpot deze week valt?

Lotto 37 15 45

1 KIES PER LOT (€2) 6 GETALLEN OF KRUIS SNELSPEL AAN

SNELSPEL	LOT 1 €2	LOT 2 €2	LOT 3 €2
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32
33	34	35	36
37	38	39	40
41	42	43	44
45			

140063 Inleg €1 Ja Nee

- 32** Een supermarkt heeft een ‘weggeef-actie’. Voor elke twintig euro die je besteedt, ontvang je een enveloppe. De helft van alle enveloppen bevat een waardebon. Bij inlevering van vijf waardebonnen ontvang je een cadeaubon ter waarde van tien euro. De vraag is hoeveel je moet besteden, zodat de kans op minstens vijf waardebonnen groter dan 0,95 wordt.
Kies als stochast X het aantal waardebonnen en neem $p = 0,5$.
- a** Ga na dat de vraag is vanaf welke waarde van n geldt: $P(X \geq 5) \geq 0,95$.
 - b** Leg uit dat de ongelijkheid uit opdracht a dezelfde uitkomst heeft als de ongelijkheid $P(X \leq 4) \leq 0,05$.
 - c** Maak een tabel met $P(X \leq 4)$ voor verschillende waarden van n .
 - d** Hoeveel enveloppen heb je minstens nodig? Welk bedrag moet je dus minstens besteden?
- 33** Een leugendetector geeft aan of iemand sterk emotioneel reageert op een vraag. Bij 90% van de gestelde vragen geeft de detector het correct aan. Een verdachte ondergaat een test die uit twaalf onderdelen bestaat. Een schuldige verdachte zou bij elk onderdeel een reactie te zien moeten geven.
- a** Bij een onderdeel worden aan de verdachte foto’s voorgelegd, waaronder die van het slachtoffer. Neem aan dat de verdachte schuldig is. Hoe groot is de kans dat de leugendetector de reactie aangeeft?
 - b** Als de verdachte niet schuldig is, hoe groot is dan de kans dat bij de hele test de leugendetector ergens toch een reactie aangeeft?
 - c** Bepaal de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal keer dat de detector, bij een onschuldige verdachte, toch een reactie geeft.
 - d** Bereken ook de verwachtingswaarde en de standaardafwijking bij een schuldige verdachte.
- 34** Een leliekweker biedt bollen van leliesoort *Lilium Rubrum* aan. De bollen worden verpakt in dozen van 50 en van 100 stuks en op de doos staat een (bloei)garantie van 90%. Iemand koopt zo’n doos met 50 leliebollen. Het volgend voorjaar bloeien er hiervan slechts 40. Dit valt de koper tegen. Hij had zeker 45 bloeiende bollen verwacht. Het maakt verschil hoe de ‘garantie’ wordt uitgelegd. Wordt er bedoeld dat minstens 90% van alle bollen tot bloei komt of dat elke bol een kans van 0,90 heeft te gaan bloeien? Navraag door de consumentenbond maakt duidelijk dat de handelaar bedoelt dat elke bol een kans van 0,90 heeft om te gaan bloeien. Ga ervan uit dat de bloeikans inderdaad 0,90 is.
- a** Bereken de kans dat van een doos van 50 bollen precies 45 bollen gaan bloeien.
 - b** Een bedrijf koopt een doos met 50 en een doos met 100 bollen. Bij welke van de twee dozen is de kans dat minstens 90% van de bollen gaat bloeien het grootst?
 -  **c** Een ander bedrijf koopt vijf dozen met 50 bollen. Bereken de kans dat er van vier van de vijf dozen minstens 45 bollen tot bloei komen.



Samenvatting

Bernoulli-experiment, binomiale verdeling

Een Bernoulli-experiment is een kansexperiment met maar twee mogelijke uitkomsten. De twee uitkomsten of alternatieven noem je succes (s) en mislukking (m).

De kansverdeling die hoort bij stochast X die het aantal successen telt als je hetzelfde Bernoulli-experiment herhaald uitvoert, heet een binomiale verdeling. De kansverdeling van een binomiaal verdeelde stochast is vastgelegd door de parameters n en p . Hierbij is n het aantal herhalingen en is p de kans op succes. De succeskans blijft steeds gelijk.

Notatie: X is $\text{Bin}(n; p)$ -verdeeld.

Cumulatieve binomiale kans

Als X $\text{Bin}(n; p)$ -verdeeld is, dan is

$$P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = k).$$

$P(X \leq k)$ noem je een cumulatieve binomiale kans.

Je kunt de kans op k successen van een binomiaal verdeelde stochast berekenen

De kans op k successen bij een $\text{Bin}(n; p)$ -verdeelde stochast X is

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Voorbeeld

Barend heeft bij boogschieten een kans 0,6 om raak te schieten. Hoe groot is de kans dat hij bij tien keer schieten acht keer raak schiet?

Oplossing

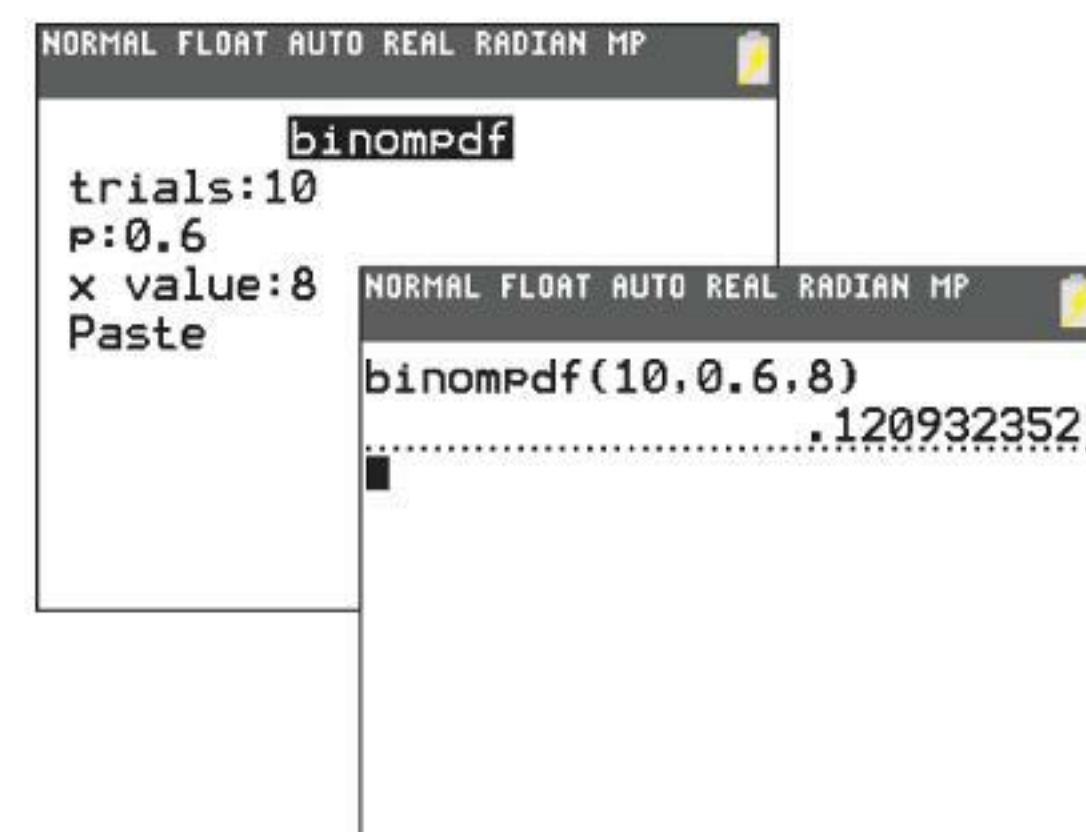
Stochast X telt het aantal keren raak.

X is binomiaal verdeeld, want het betreft een herhaling van steeds hetzelfde Bernoulli-experiment met raak en mis.

$n = 10$ en $p = 0,6$ dus stochast X is $\text{Bin}(10; 0,6)$ -verdeeld.

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot 0,6^8 \cdot 0,4^2 \approx 45 \cdot 0,0027 \approx 0,1209$$

Of met de rekenmachine:



Je kunt cumulatieve kansen berekenen

Bij het berekenen van de kans op hoogstens k successen bij een $\text{Bin}(n; p)$ -verdeelde stochast X kun je de rekenmachine gebruiken.

Voorbeeld

Gerrit heeft 15% kans om bij bowlen een strike te gooien. Bereken de kans dat hij hoogstens twee van de vijf keer een strike gooit.

Oplossing

Stochast X telt het aantal strikes. X is $\text{Bin}(5; 0,15)$ -verdeeld.

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &\approx 0,4437 + 0,3915 + 0,1382 \approx 0,9734 \end{aligned}$$



Je kunt met cumulatieve binomiale kansen rekenen

Je kunt een kans vaak berekenen door hem te schrijven in een vorm met cumulatieve kansen. Je kunt daarbij de regel gebruiken dat de som van de kansen 1 is.

Voorbeeld

Bij de productie van pakken suiker blijkt 4% van de pakken ondergewicht te hebben. De fabrikant laat een steekproef van 80 pakken uitvoeren en telt het aantal pakken met ondergewicht.

- a** Bereken de kans op meer dan vijf pakken met ondergewicht.
- b** Bereken de kans op minstens vijf pakken met ondergewicht.
- c** Bereken de kans op meer dan twee, maar minder dan tien pakken met ondergewicht.

Oplossing

Stochast X telt het aantal pakken met ondergewicht. X is $\text{Bin}(80; 0,04)$ -verdeeld.

- a** $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$
 $P(X \leq 5) \approx 0,8988$
dus $P(X > 5) \approx 1 - 0,8988 = 0,1012$
- b** $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0,7836 = 0,2164$
- c** $P(2 < X < 10) = P(X \leq 9) - P(X \leq 2)$
 $\approx 0,9987 - 0,3748 = 0,6239$

Je kunt de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een binomiale verdeelde stochast berekenen

Een formule voor de verwachtingswaarde van een $\text{Bin}(n; p)$ -verdeelde stochast is $E(X) = n \cdot p$. De standaardafwijking bereken je met de formule $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Voorbeeld

De kans op een blessure bij topvolleybal is per persoon en per wedstrijd 7%. Er worden 40 wedstrijden per jaar gespeeld. 26 topsporters hebben een verzekering bij een verzekeringsmaatschappij afgesloten. Hoeveel claims kan de maatschappij per jaar verwachten?

Oplossing

De 26 sporters spelen per jaar $40 \cdot 26 = 1040$ wedstrijden. Stochast B is het aantal claims per jaar. Veronderstel dat B binomiaal verdeeld is. Dan is $n = 1040$ en $p = 0,07$. De verwachtingswaarde is $E(B) = 1040 \cdot 0,07 = 72,8$ blessures. De standaardafwijking is $\sigma(B) = \sqrt{1040 \cdot 0,07 \cdot 0,93} \approx 8,2$ blessures.

Test jezelf

- T-1** De kans op een blessure als je een jaar lang sport, is ongeveer 0,15. Je gaat voor zes jaar na hoe het met de blessures kan gaan.
- Teken een rooster voor zes jaar. Zet langs de horizontale as 'wel blessure' en langs de verticale as 'geen blessure'.
 - Om welk punt uit het roosterdiagram gaat het bij het uitrekenen van de kans dat je in de helft van de jaren geen blessure oploopt?
 - Bereken de gevraagde kans.
 - Hoe groot is het verschil tussen de kans dat je in twee van de zes jaar wel een blessure oploopt en de kans dat je in twee van de zes jaar geen blessure oploopt?
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-1.*
- T-2** Bij de productie van monitoren is de kans op één of meer defecte pixels 8%.
- Bereken de kans dat in een productie van 15 monitoren er drie zijn met één of meer defecte pixels.
 - Stochast X is het aantal monitoren met defecte pixels. Geef de bijbehorende parameters van de verdeling van X .
 - Maak met je rekenmachine een kansverdeling van stochast X .
 - Bij welke waarden van a is $P(X \geq a) \leq 0,01$?
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-2.*
- T-3** Stochast Y is $\text{Bin}(25, \frac{1}{3})$ -verdeeld. Bereken de volgende kansen.
- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| a $P(Y \leq 8)$ | d $P(5 < Y \leq 14)$ |
| b $P(Y < 5)$ | e $P(Y > 10)$ |
| c $P(Y \geq 15)$ | f $P(9 \leq Y < 11)$ |
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-3.*
- T-4** Tim gooit vijf keer met een geldstuk en noteert het aantal keren kop. Het is een bijzonder geldstuk, want er geldt $P(\text{munt}) = 0,45$ en $P(\text{kop}) = 0,55$. De stochast K is het aantal keren kop.
- Waarom hoort bij K een binomiale kansverdeling?
 - Geef de kansverdeling van K .
 - Bereken $P(K \leq 2)$.
 - Bereken de kans dat Tim meer dan drie keer munt gooit.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-3.*



- T-5** Een lerares biologie geeft een multiple choice-proefwerk met twintig vierkeuzevragen. Ze besluit dat één fout een halve punt kost. Noem het aantal goed beantwoorde vragen X .
- a** Bereken $E(X)$ voor iemand die alle vragen gokt.
 - b** Bereken de kans dat een pure gokker precies een zes haalt.
 - c** Bereken de kans dat iemand die alle vragen gokt, minstens een zes haalt.
 - d** De toets wordt door 124 leerlingen gemaakt, die allen elke vraag gokken. Hoe groot is de verwachtingswaarde van het aantal leerlingen dat een zes of meer scoort?
 - e** Hoe groot is de kans dat het aantal goed beantwoorde vragen van een gokker niet meer dan één keer de standaardafwijking afwijkt van de verwachtingswaarde?
 - f** Welk cijfer mag je verwachten als je vijf vragen zeker weet en de rest gokt?
 - g** Judith heeft haar proefwerk niet geleerd, maar weet nog zoveel, dat ze bij elke vraag slechts tussen twee mogelijkheden hoeft te gokken. Hoe groot is de kans dat Judith minstens een zes haalt?
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-4.*
- T-6** Tom en Harry spelen een spel. Volgens de spelregels moeten ze 25 keer achter elkaar met een dobbelsteen gooien. Bij elke worp met een even aantal ogen krijgt Tom een punt, bij een oneven aantal ogen krijgt Harry een punt. Wie na afloop de meeste punten heeft, wint de pot. In de pot zit 30 euro.
- a** Bereken de kans dat, na 12 keer gooien, Tom acht punten heeft en Harry vier.
 - b** Nadat ze 12 keer gegooid hebben, besluiten ze om te stoppen en de pot te verdelen. Op dat moment heeft Tom acht punten en Harry vier. Tom stelt voor de pot te verdelen in de verhouding van het aantal punten dat ieder heeft behaald. Hoeveel euro krijgt elk dan?
 - c** Hoeveel euro zou ieder krijgen als ze de pot verdelen in de verhouding van de kans die elk heeft om te winnen?
 - d** Welke verdeling vind je eerlijker?
- T-7a** Ard beweert dat 75% van de Nederlanders kan fietsen. Stel dat Ard gelijk heeft. Hoeveel personen kunnen naar verwachting fietsen bij een aselechte steekproef van twintig personen?
- b** Gert beweert dat slechts 40% van de Nederlanders kan fietsen. Stel dat Gert gelijk heeft. Bereken de kans dat er minstens acht en hoogstens veertien personen uit een aselechte steekproef van twintig kunnen fietsen.
 - c** Ard en Gert willen door een aselechte steekproef van 20 personen uitmaken wie gelijk heeft. De afspraak is dat bij minder dan 12 fietsers Gert gelijk krijgt; anders krijgt Ard gelijk. Stel dat Ard gelijk heeft. Hoe groot is de kans dat Gert gelijk krijgt?
 - d** Bereken de kans dat Ard ten onrechte gelijk krijgt.
- T-8a** Wanneer geeft herhaald trekken van knikkers uit een vaas aanleiding tot een binomiaal verdeelde stochast?
- b** Een vaas heeft rode en witte knikkers. Waarom kun je soms bij trekken zonder terugleggen de kansverdeling van het aantal rode knikkers benaderen met die van een binomiale verdeling?



Extra oefening - Basis

- B-1** De kans dat een basketballer een vrije worp mist is 25%.
Deze speler mag tijdens een wedstrijd tien vrije worpen nemen.
- a** Wat neem je hier als stochast X ? Geef ook de parameters.
 - b** Bereken de kans dat de speler drie keer mist.
 - c** Bereken de kans dat hij acht keer scoort.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-1.*
- B-2** Uit verkeerstellingen van de laatste jaren blijkt dat 80% van de automobilisten zich op snelwegen aan de maximumsnelheid houdt. Bij een controle wordt de snelheid van vijf automobilisten gemeten. Stochast X is het aantal automobilisten dat bij deze controle te snel rijdt.
- a** Geef de bijbehorende parameters.
 - b** Bereken de kans dat twee automobilisten te snel rijden.
 - c** Maak een kansverdeling van X .
 - d** Hoe groot is de kans op minstens twee snelheidsovertreders?
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-2.*
- B-3** De stochast X is $\text{Bin}(13; 0,6)$ -verdeeld. Bereken:
- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| a $P(X > 4)$ | d $P(2 \leq X < 7)$ |
| b $P(X = 6)$ | e $P(X < 10)$ |
| c $P(4 < X < 8)$ | f $P(X > 0)$ |
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-3.*
- B-4** Je gooit met tien dobbelstenen en je let op het aantal zessen dat je gooit.
- a** Bereken de kans op geen enkele zes.
 - b** Bereken de kans op precies één zes.
 - c** Bereken de kans op hoogstens drie zessen.
 - d** Bereken de kans op meer dan één zes.
 - e** Bereken de kans op minstens drie zessen
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-3.*
- B-5** Tijdens de uitverkoop heeft een winkelier rode en blauwe paraplu's in de aanbieding. Uit ervaring weet men dat gemiddeld 60% van de kopers een rode paraplu neemt, de rest kiest de blauwe. Op een regenachtige dag worden 100 kopers van een paraplu verwacht.
- a** Hoeveel rode paraplu's zullen naar verwachting worden verkocht?
 - b** Hoe groot is de kans dat precies 60 klanten een rode paraplu willen?
 - c** Bereken de kans dat er meer blauwe dan rode paraplu's worden verkocht.
 - d** Bereken de kans dat er meer rode dan blauwe paraplu's worden verkocht.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-4.*

Extra oefening - Gemengd

- G-1** Neem aan dat 30% van de vrouwen in Nederland rookt. Aan 20 willekeurige vrouwen wordt gevraagd of ze roken.
- a** Formuleer een stochast X en geef de bijbehorende parameters.
 - b** Bereken de kans dat er minder dan negen vrouwen uit die groep roken.
 - c** Bereken de kans dat er meer dan vier vrouwen uit die groep roken.
 - d** Hoe groot is de kans dat het percentage rokende vrouwen in deze groep ligt tussen de 20% en 45%?
 - e** In een textielbedrijf werken 100 vrouwen. De directie maakt het bedrijf rookvrij. Ze is bereid om een extra kantine voor rokers in te richten als er ten minste 25 rokers zijn.
Hoe groot is de kans dat er inderdaad zo'n kantine ingericht wordt?
- G-2** In een vaas liggen 10 witte en 15 rode knikkers. Je haalt in één keer vijf knikkers uit de vaas. De stochast Y is het aantal getrokken rode knikkers.
- a** Leg uit waarom de stochast Y niet binomiaal verdeeld is.
 - b** Bereken $P(Y = 5)$.
 - c** Bereken $P(Y < 4)$.
- In een andere vaas liggen 500 witte en 750 rode knikkers. Je haalt weer in één keer vijf knikkers uit de vaas. De stochast X is het aantal getrokken rode knikkers.
- d** Waarom kun je de kansverdeling van X benaderen met een binomiale verdeling?
 - e** Geef de kansverdeling van X .
 - f** Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
 - g** Bereken de kans dat je meer dan twee, maar hoogstens vier witte knikkers trekt.
- G-3** Voor een horecabeurs worden 300 restaurateurs uitgenodigd. Zij zullen als aandenken allen een kurkentrekker met inscriptie ontvangen. Aangezien gemiddeld 2% van de bevolking linkshandig is, overwegen de organisatoren zes kurkentrekkers voor linkshandigen en 294 gewone kurkentrekkers te bestellen.
- a** Bereken de kans dat men aan zes kurkentrekkers voor linkshandigen precies genoeg heeft.
 - b** Bereken de kans dat men met zes kurkentrekkers voor linkshandigen wel voldoende heeft, maar dat men te weinig gewone kurkentrekkers heeft.
 - c** Men bestelt 300 gewone kurkentrekkers en a kurkentrekkers voor linkshandigen. Met de 300 gewone kurkentrekkers heeft men in ieder geval voldoende kurkentrekkers voor de rechtshandigen onder de deelnemers. Men wil ook zó veel kurkentrekkers voor linkshandigen bestellen dat de kans dat ze er daar onvoldoende van hebben, wel erg klein is. Hoe groot moet a zijn opdat de kans dat men te weinig kurkentrekkers voor linkshandige heeft kleiner is dan 5%?

Uitdagende opdrachten



- U-1** Het bestuur van de stichting van vrienden van een Nederlands beroepsorkest organiseert jaarlijks een concert voor de vrienden. In de concertzaal is plaats voor 900 bezoekers. Het bestuur zit met een dilemma: hoeveel vrienden kunnen ze uitnodigen? Enerzijds is het inefficiënt als er veel stoelen leeg blijven; anderzijds is het vervelend als er meer vrienden komen dan er stoelen zijn. Het is bekend dat de respons op een uitnodiging ongeveer 60% is. Het bestuur besluit om precies zoveel mensen uit te nodigen dat de kans dat er meer mensen komen dan er plaatsen zijn, kleiner is dan één procent.
- Bereken het aantal mensen dat het bestuur uitnodigt voor het concert.
 - Hoeveel stoelen zullen er naar verwachting leeg blijven bij dat aantal uitnodigingen?
 - Het bestuur betreurt het dat er toch nog zoveel stoelen leeg blijven. Het volgende jaar besluiten zij een andere brief te sturen om de verwachte respons p te verhogen. Om te voorkomen dat er dan te veel mensen komen nodigen ze 1200 vrienden uit. Ook dan mag de kans dat er meer mensen komen dan er stoelen zijn, niet groter zijn dan één procent. Onderzoek of het aantal stoelen dat naar verwachting leeg staat afneemt.
- U-2** Gegeven is een kansexperiment met drie mogelijke uitkomsten 1, 2 en 3 die optreden met respectievelijke kansen p_1, p_2 en p_3 . Er worden n onafhankelijke uitvoeringen van het kansexperiment gedaan. De stochast X_i geeft het aantal keren dat uitkomst i optreedt voor $i = 1, 2, 3$.
- Wat kun je concluderen over de som van de kansen p_i ?
 - Toon aan dat $P(X_1 = k \text{ en } X_2 = l) = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l} \cdot p_1^k \cdot p_2^l \cdot p_3^{n-k-l}$.
- U-3** In een suikerfabriek worden machinaal kilopakken suiker gevuld. Het minimaal toegestane gewicht van een pak suiker is 980 gram. Lichtere pakken worden machinaal verwijderd. Door een wat onzuivere afstelling van de sorteermachine wordt af en toe een te licht pak doorgelaten. Hierdoor heeft 0,5% van de pakken een lager gewicht dan toegestaan. De pakken suiker worden verpakt in dozen van vijftig stuks. Als een keuringsdienst in een doos een te licht pak aantreft, wordt de gehele doos afgekeurd. Op een dag worden van twintig dozen alle pakken gecontroleerd. Van hoeveel dozen kun je verwachten dat ze worden afgekeurd?

Het bord van Galton

Francis Galton (1822 – 1911) was een Brits statisticus, antropoloog en ontdekkingsreiziger. Hij was een halve neef van de dertien jaar oudere Charles Darwin. Hij wordt gezien als vader van de Eugenetica, de wetenschap om rassen te verbeteren. Op jonge leeftijd kreeg Galton van Darwin het advies dat hij “de wiskunde ter hand moest nemen gelijk een huis dat in brand staat”.



In de jaren 90 van de negentiende eeuw publiceerde hij boeken over vingerafdrukken. Daarin beschreef Galton een aantal vaste patronen in vingerafdrukken en bedacht hij een systeem van classificatie, dat nu nog gebruikt wordt. Hij gaf ook een schatting van de kans dat twee personen dezelfde vingerafdruk hebben.

Op 27 februari 1874 sprak Francis Galton op de *Royal Institution* in Londen over statistiek en kansrekening. Hij had een vernuftig apparaat meegebracht: een bord met een aantal rijen spijkertjes onder elkaar. Midden boven de spijkertjes zat een trechter waardoor loden kogeltjes naar beneden vielen. Onderaan werden de kogeltjes opgevangen in bakjes. Wanneer Galton een grote hoeveelheid kogeltjes door de trechter liet vallen, verdeelden ze zich op een karakteristieke wijze over de bakjes.

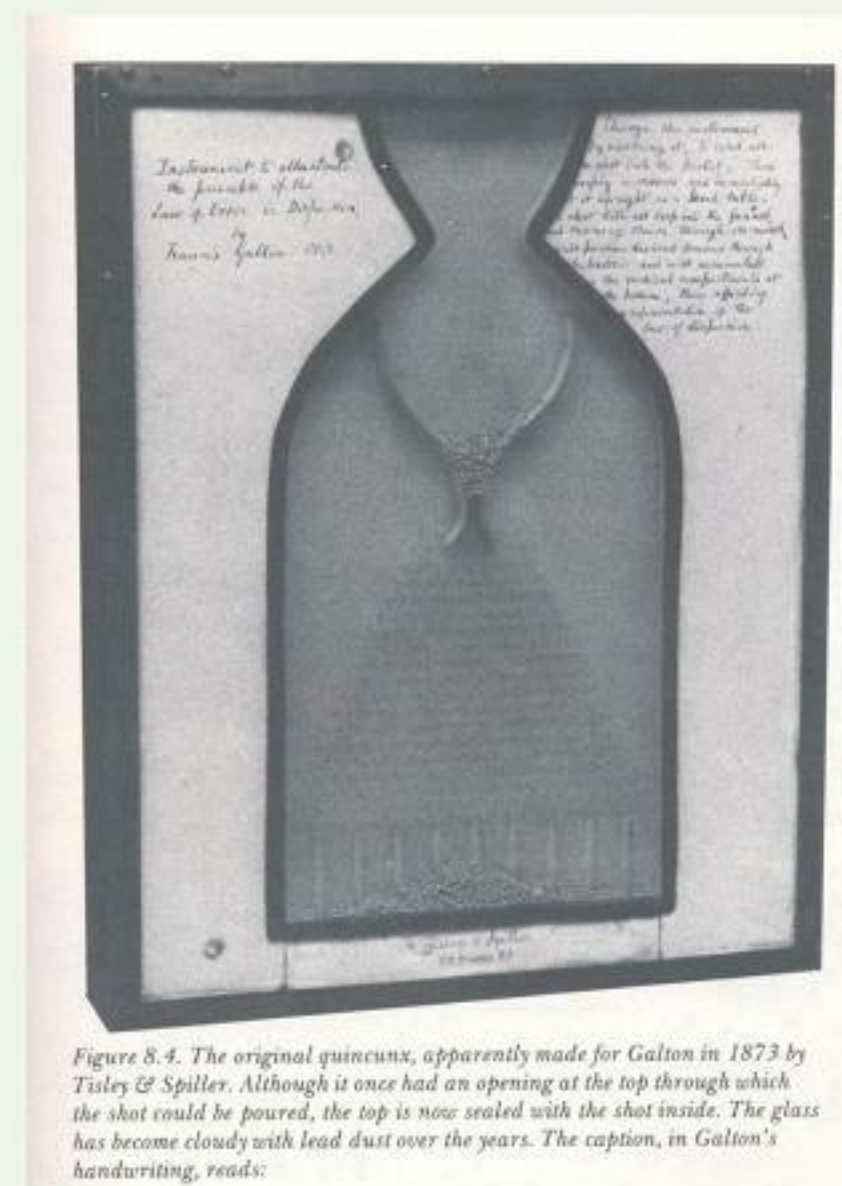
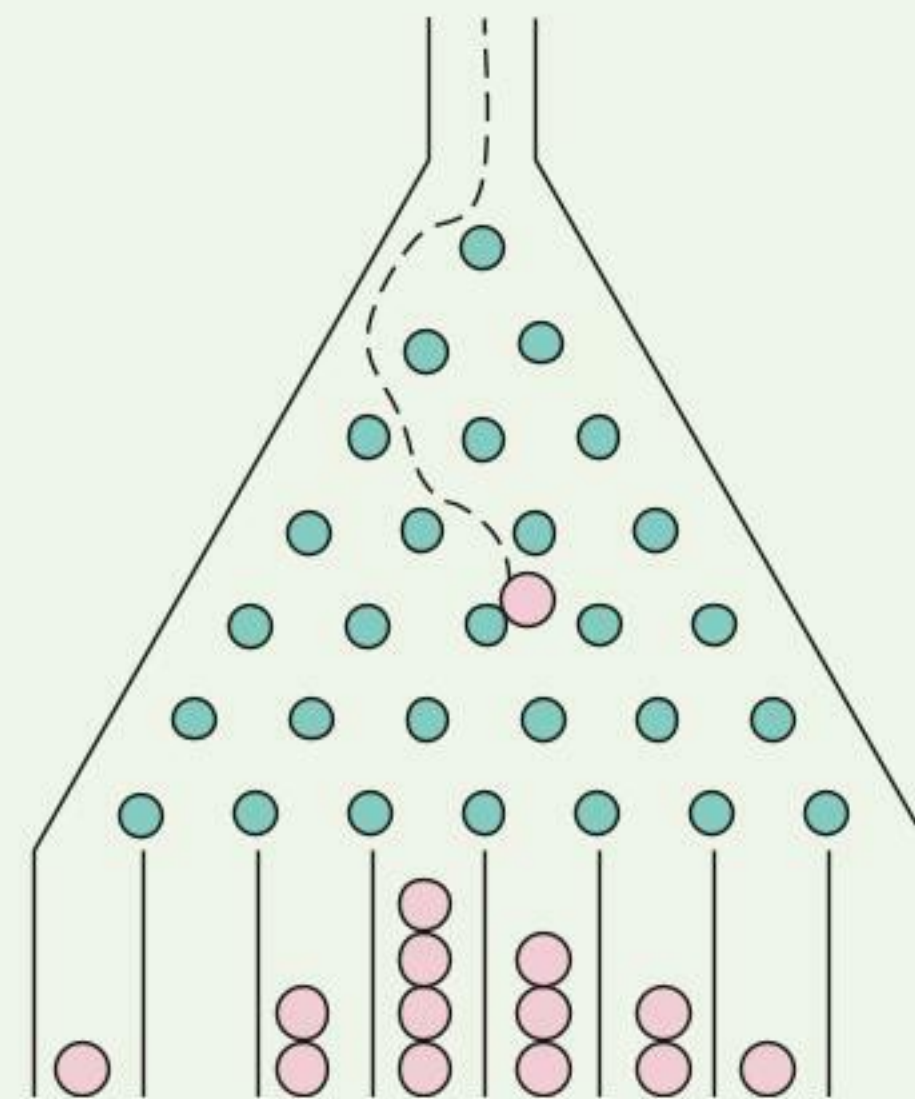


Figure 8.4. The original quincunx, apparently made for Galton in 1873 by Tisley & Spiller. Although it once had an opening at the top through which the shot could be poured, the top is now sealed with the shot inside. The glass has become cloudy with lead dust over the years. The caption, in Galton's handwriting, reads:

In de afbeelding hierboven zie je dit bord. Hiermee illustreerde Galton de normale verdeling en de standaarddeviatie. In het plaatje hieronder staat een vereenvoudigde versie van het bord van Galton.



Opdracht

- Leg uit dat de route die de kogeltjes volgen hetzelfde patroon heeft als de route in het wegendiaagram.
- Hoe groot is de kans dat een balletje in het linker bakje terecht komt?
- De verdeling die ontstaat heeft een relatie met de driehoek van Pascal. Licht dat toe.
- Leg uit waarom de verdeling die ontstaat op het bord niet de normale verdeling is.
- Welke verdeling is het wel? Licht je antwoord toe.



Positief of negatief?

Vaak neemt het aantal verkochte artikelen q toe als de prijs p van het artikel afneemt. Dan is $\frac{\Delta q}{\Delta p} < 0$.

De winst w neemt over het algemeen toe als het aantal verkochte artikelen toeneemt. In dat geval is $\frac{\Delta w}{\Delta q} > 0$.

Wat kun je nu zeggen over de toename van de winst bij een toename van de prijs, dus over $\frac{\Delta w}{\Delta p}$?

Hoofdstuk 8

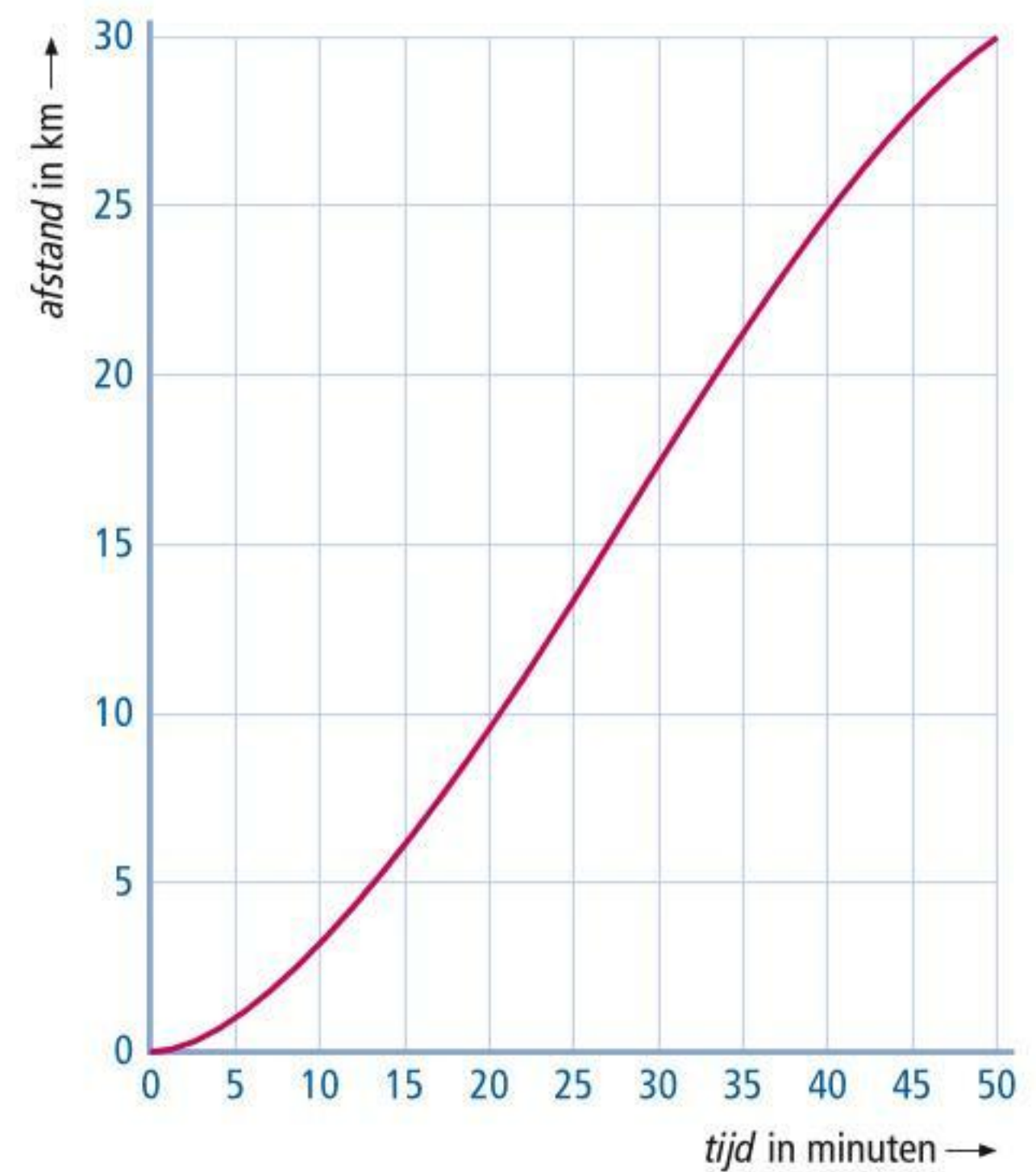
Samengestelde functies

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	192
8-1	Machtsfuncties	194
8-2	Machtsfuncties differentiëren	196
8-3	Wortelfuncties en gebroken functies	198
8-4	Kettingfuncties	200
8-5	Kettingfuncties differentiëren	202
8-6	Redeneren met de afgeleide	204
8-7	Gemengde opdrachten	206
	Samenvatting	208
	Test jezelf	210
	Extra oefening - Basis	212
	Extra oefening - Gemengd	213
	Uitdagende opdrachten	214
	Middelwaardestelling	215

Voorkennis

- V-1** In een wielerronde is een tijdrif van 30 km gereden. Van de tijdrif van Marian is een tijd-afstandgrafiek gemaakt.
- Hoe kun je zien dat Marian niet met een constante snelheid heeft gereden?
 - Met welke gemiddelde snelheid in km per minuut reed Marian de tijdrif? En in km per uur?
 - En met welke gemiddelde snelheid in km per uur reed ze de eerste 10 minuten?
 - Benader met een raaklijn de snelheid van Marian op het tijdstip $t = 10$. Geef je antwoord in km per uur.
 - Bij de grafiek hoort de formule $S = -0,0003t^3 + 0,025t^2 + 0,1t$. Bereken met deze formule de gemiddelde snelheid op de intervallen $[10, 15]$, $[10, 11]$, $[10; 10,1]$ en $[10; 10,001]$.
 - Welke snelheid heeft Marian op $t = 10$ volgens de formule? Geef je antwoord in km per uur.



Theorie

De **helling** van de grafiek van een functie f in een punt $A(a, f(a))$ is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de **raaklijn** in A .

Je kunt deze helling benaderen:

> door de raaklijn te tekenen en de richtingscoëfficiënt te berekenen.

> door het **differentiequotiënt** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ over een klein interval

zoals $[a, b] = [a, a + 0,001]$ te berekenen.

In een tijd-afstand grafiek is de helling gelijk aan de snelheid.

- V-2** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x+1}$.
- Bereken de helling in het punt $(0, 1)$ en in het punt $(3, 2)$.
 - Hiernaast zie je een tabel van de functiewaarden (Y1) en de hellingen (Y2).
Vergelijk je antwoorden van opdracht a met de tabel.
 - Maak zelf een tabel en zoek uit bij welke waarden van x de helling van de grafiek van f kleiner is dan 0,1.

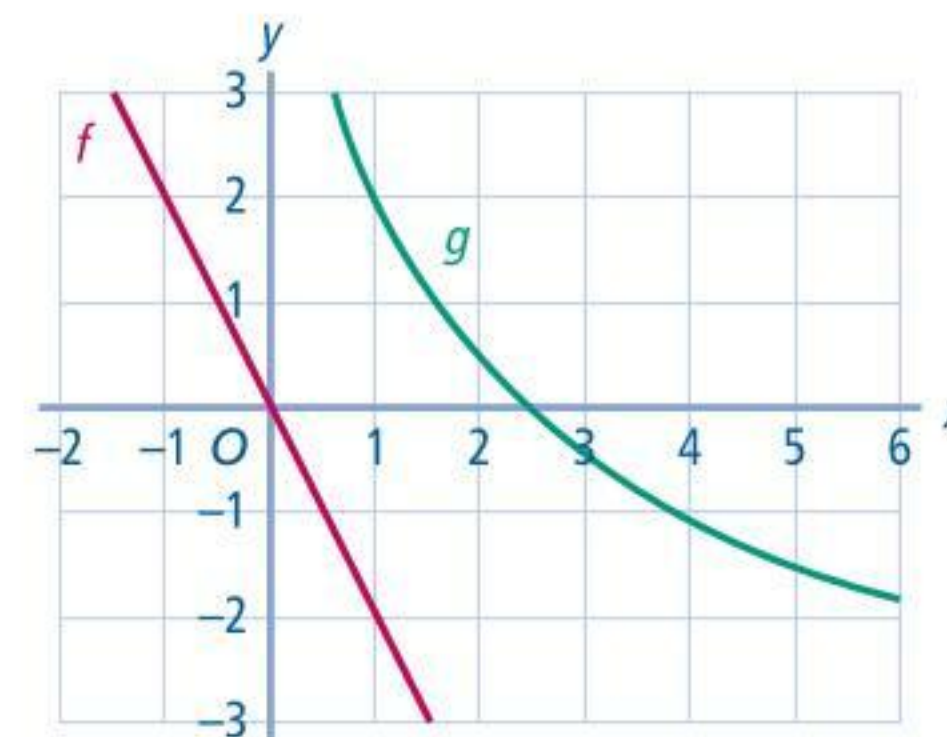
Hulpboek 3-5: Hellingen

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS + FOR Δ Tb1				
X	Y1	Y2		
0	1	.5		
1	1.4142	.35355		
2	1.7321	.28868		
3	2	.25		
4	2.2361	.22361		
5	2.4495	.20412		
6	2.6458	.18898		
7	2.8284	.17678		
8	3	.16667		
9	3.1623	.15811		
10	3.3166	.15076		

X=0

- V-3** Gegeven is de functie $f(x) = x - 2^x$.
- Bereken de gemiddelde toename over het interval $[-2, 2]$.
 - Benader, in twee decimalen nauwkeurig, de helling van de grafiek van f in punt P waarvoor geldt $x = -1$.
 - Benader, in twee decimalen nauwkeurig, de coördinaten van de top van de grafiek van f .

- V-4** Hiernaast zijn de grafieken getekend van $f(x) = -2x$ en $g(x) = 2 - 5 \cdot \log(x)$.
- Hoe groot is de helling in elk punt van de grafiek van f ?
 - Benader, in twee decimalen nauwkeurig, de helling van de grafiek van g in het punt waarvoor geldt $x = 3$.
 - Benader, in één decimaal nauwkeurig, de waarde van x waarvoor de grafieken van f en g even steil lopen.



Theorie

Bij een functie f hoort vaak een tweede functie waarmee je de helling in een punt van de grafiek van f exact kunt berekenen. Die functie heet **de afgeleide functie** van f .

De notatie voor de afgeleide functie is f' of $\frac{df}{dx}$.

Het berekenen van de afgeleide functie heet **differentiëren**. Hierbij gelden de volgende regels:

- | | |
|------------------------------|---------------------------|
| $> f(x) = x^n$ | $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ |
| $> f(x) = c$ (een constante) | $f'(x) = 0$ |
| $> g(x) = f(x) + c$ | $g'(x) = f'(x)$ |
| $> g(x) = c \cdot f(x)$ | $g'(x) = c \cdot f'(x)$ |
| $> s(x) = f(x) + g(x)$ | $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ |

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^2(x^2 - x)$. Bereken de helling in punt $P(-3, 108)$ van de grafiek van f .

Oplossing

$$f(x) = x^4 - x^3 \quad (\text{haakjes weggewerkt})$$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 \quad (\text{gedifferentieerd})$$

$$f'(-3) = -135$$

De helling in P is -135 .

- V-5** Bereken de afgeleide van de volgende functies.

a $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

d $s(q) = (3q - 5)(3q + 5)$

b $g(t) = -3t - 7$

e $T(t) = (t^3 - 3t)(t^2 + t)$

c $h(p) = 4x^5 - 3$

f $A(x) = 3x^6(4 - 2x^2)$

Bij de x -waarden waar $f'(x)$ gelijk is aan 0, loopt de raaklijn aan de grafiek van f horizontaal. Met behulp van een plot kun je vaststellen of de functie in dat punt een maximum, een minimum of geen van beide heeft.

- V-6** Gegeven is de functie $f(x) = -16x + \frac{1}{2}x^4$.

a Bereken $f'(x)$.

b Bij welke waarde van x is $f'(x) = 0$?

c Bereken de uiterste waarde van f .

d Is deze uiterste waarde een maximum of een minimum?

- V-7** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x$.

a Bereken $f'(x)$.

b Bij welke waarden van x is $f'(x) = 0$?

c Plot de grafiek van f . Bij welke waarden van x is $f'(x) < 0$?

d Beredeneer met behulp van $f'(x)$ dat f een minimum heeft bij $x = 2$.

8-1

Machtsfuncties

- 1** In een frisdrankfabriek in Groningen wordt limonadesiroop geproduceerd. Voor het verband tussen de hoeveelheid geproduceerde siroop q in liters en de kosten TK in euro's geldt $TK = 25q^{0,64}$. Voor de opbrengst TO in euro's geldt $TO = 78q^{0,5}$.
- a** Bereken de kosten TK bij een productie van 500 liter.
- b** Bereken de extra kosten als de productie stijgt van 500 naar 501 liter.
- c** Bereken ook de extra opbrengst als de productie stijgt van 500 naar 501 liter.
- d** Op grond van de antwoorden van opdracht b en c besluit de directie de productie op te voeren.
Leg uit op grond waarvan men deze beslissing neemt.
- e** De winst is het verschil tussen de opbrengst en de kosten.
Geef de formule TW voor de winst in euro's.
- f** Plot de grafiek bij de formule TW .
Bij welk aantal liters is de winst maximaal? En hoe groot is deze winst?
- 2a** Plot en schets de grafieken van $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{0,5}$ en $h(x) = x^{-2}$.
- b** Gegeven zijn verder de functies $r(x) = \frac{1}{x^2}$ en $p(x) = \sqrt{x}$.
Welke van deze functies is gelijk aan g en welke is gelijk aan h ?
- c** Voor welke waarden van x is de grafiek van h dalend?
- d** Beredeneer met behulp van het functievoorschrift van h dat voor elke $x \neq 0$ geldt dat $h(x) > 0$.

Theorie

Functies van de vorm $f(x) = c \cdot x^a$ heten **machtsfuncties**.
De exponent a kan ook negatief of gebroken zijn.
De regels voor het rekenen met machten kun je gebruiken bij het rekenen en herschrijven van machtsfuncties met negatieve en gebroken exponenten.

Voorbeeld

Rekenregels voor machten

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b}$$

$$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b} \quad (g \neq 0)$$

$$(g^a)^b = g^{a \cdot b} \quad (g \neq 0)$$

$$g^0 = 1 \quad (g \neq 0)$$

$$g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g} \quad (g \geq 0)$$

- 3a** Gegeven is de functie $j(x) = x^{-5}$.
Geef een functievoorschrift voor j waarin geen negatieve exponent voorkomt.
- b** Schrijf $p(x) = x^{-3,2} \cdot x^{-4,3}$ in de vorm $p(x) = x^a$.
- c** $k(x) = 4(x^{-2})^{-4}$ is voor $x > 0$ te schrijven als $k(x) = 4x^b$.
Welke waarde heeft b ?
- d** Schrijf de functievoorschriften $f(x) = x^{-2} \cdot x^{\frac{2}{3}}$ en $h(x) = x^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x^2}$ als machtsfuncties.

$\sqrt{5}$ is een exacte oplossing van de vergelijking $x^2 = 5$. Er geldt $(\sqrt{5})^2 = 5$. Ook de oplossing van $x^3 = 5$ kun je in een wortelvorm schrijven: $x = \sqrt[3]{5}$. Er geldt $(\sqrt[3]{5})^3 = 5$. Je noemt dit de derdemachtswortel uit 5. Net als $\sqrt{g} = g^{\frac{1}{2}}$ geldt $\sqrt[3]{g} = g^{\frac{1}{3}}$. Zo is $\sqrt[4]{g} = g^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[5]{g} = g^{\frac{1}{5}}$ enzovoorts.

H 4 Schrijf de volgende functies in de vorm $p(x) = x^a$.

- | | |
|---|---|
| a $p(x) = \sqrt[7]{x}$ | c $p(x) = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[5]{x}$ |
| b $p(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ | d $p(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x}$ |

H 5 Herleid de volgende formules tot de vorm $q = a \cdot P^b$.

- | | |
|--|--|
| a $q = (P^{-3})^{\frac{1}{0,25}}$ | c $q = (4P^{16})^{-0,125} \cdot (3P)^2$ |
| b $q = (4,2 \cdot P^{-3,7})^{-3,2}$ | d $q = (2\sqrt[3]{P})^3 \cdot 4P^{\frac{1}{3}}$ |

H 6 Hiernaast zie je hoe je de vergelijking $5x^{0,17} = 10$ algebraïsch kunt oplossen.

- a** Los op deze manier de volgende vergelijkingen op. Geef ook een benadering van het antwoord in twee decimalen.

- A** $3x^5 = -10$
B $4 + 3x^{3,7} = 12$
C $5x^{-0,7} = 20$

- b** Waarom heeft de vergelijking $3x^6 = -1$ geen oplossingen?

H 7 Hieronder is telkens een verband tussen u en v gegeven. Schrijf u in de vorm $u = a \cdot v^b$. Rond a en b indien nodig af op twee decimalen.

- | | |
|---|---|
| a $u \cdot v = 5$ | d $\sqrt[3]{u} \cdot v^{-2} = 2$ |
| b $\frac{u}{\sqrt[4]{v}} = 7,35$ | e $(u^{\frac{1}{3}} \cdot v^{2,6})^3 = 27$ |
| c $u \cdot v^{4,1} = 12,3$ | f $-u^3 + 8v^{-3} = 0$ |

8 Biologen hebben gemeten hoeveel zuurstof een zoogdier nodig heeft om één kilometer af te leggen. Ze vonden voor het verband de formule $Z = 0,4 \cdot L^{0,67}$. Hierbij is L het lichaamsgewicht in kilogrammen en Z het aantal milliliter zuurstof dat verbruikt wordt per kilometer.

- a** Een olifant weegt 4500 kilogram. Bereken Z .
b Hoeveel milliliter zuurstof heeft een hond van 40 kg nodig om een afstand van 7 kilometer af te leggen?
c Druk L uit in Z en maak een schatting van het gewicht van een walvis die 1,2 liter zuurstof per kilometer verbruikt.

$$\begin{aligned} 5x^{0,17} &= 10 \\ x^{0,17} &= 2 \\ x &= 2^{\frac{1}{0,17}} \text{ (exact)} \\ x &\approx 58,99 \text{ (benaderd)} \end{aligned}$$



8-2

Machtsfuncties differentiëren

- 9 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x}$
- a Bereken met je rekenmachine de helling van f bij $x = 1$, $x = 2$ en $x = 3$.
- b Je kunt $f(x) = \frac{1}{x}$ ook schrijven als een machtsfunctie $f(x) = x^{-1}$.

Laat zien dat als de regel hiernaast ook geldt voor negatieve exponenten, de afgeleide functie $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ is.

Als $f(x) = x^n$
dan $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

- c Controleer of de uitkomsten van opdracht a hiermee overeenstemmen.
- 10a Maak met je rekenmachine een tabel van de hellingen van de functie $g(x) = \frac{2}{x^3}$ bij $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.
- b Je kunt $g(x) = \frac{2}{x^3}$ ook schrijven als $g(x) = 2x^{-3}$.

Hoe ziet volgens de regel naast opdracht 9 de afgeleide $\frac{dg}{dx}$ er dan uit?

- c Bereken met de afgeleide functie die je bij opdracht b hebt gevonden de hellingen van g bij $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.
Komen de hellingen overeen met de waarden die je in opdracht a hebt gevonden?

Je hebt gezien dat de regel voor het berekenen van de afgeleide geldt voor machten met negatieve exponenten. In de volgende opdracht ga je na of deze regel ook geldt als de exponent een breuk is.

- 11 Gegeven is de functie $h(x) = x^{0,7}$.
Met de rekenmachine is een tabel van de functiewaarden (Y1) en de hellingen (Y2) van de functie g gemaakt.
- a Wat wordt volgens de regel naast opdracht 9 de afgeleide $h'(x)$?
- b Bereken met de afgeleide functie $h'(x)$ die je bij opdracht b hebt gevonden de hellingen bij $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.
- c Kan de functie van opdracht a de afgeleide van h zijn?

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP					
PRESS + FOR Δ b1					
X	Y1	Y2			
0	1	.5			
1	1.4142	.35355			
2	1.7321	.28868			
3	2	.25			
4	2.2361	.22361			
5	2.4495	.20412			
6	2.6458	.18898			
7	2.8284	.17678			
8	3	.16667			
9	3.1623	.15811			
10	3.3166	.15076			
X=0					

Theorie

De afgeleide functie van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van $a \neq 0$.

Dit betekent dat a ook een negatief getal of een breuk kan zijn.

Voorbeeld

Bereken de afgeleide van de functies $g(t) = \frac{1}{t^4}$ en $h(q) = 4q^{0,6}$.

Oplossing

$$g(t) = \frac{1}{t^4} = t^{-4} \text{ geeft } g'(t) = -4t^{-5} \left(= \frac{-4}{t^5} \right)$$

$$h(q) = 4q^{0,6} \text{ geeft } h'(q) = 2,4q^{-0,4} \left(= \frac{2,4}{q^{0,4}} \right)$$

- 12** Bereken de afgeleide van de volgende functies.
- a** $f(x) = x^{1,9}$ **c** $A = -10g^{10,3} + g^{-1}$
- b** $K = 0,5q^2 + 3q^{-1}$ **d** $N = 2,4p^{-3,4} - 67$

- 13a** Schrijf de functie $f(x) = \sqrt{x}$ als een machtsfunctie.
- b** Laat zien dat $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- c** Schrijf ook de functie $g(x) = \frac{1}{x^2}$ als een machtsfunctie.
- d** Laat zien dat $g'(x) = -\frac{2}{x^3}$

- 14** Herleid de volgende functies op de manier van het voorbeeld hiernaast en bereken daarna de afgeleide.

- a** $S(p) = 3\sqrt{p}$ **d** $TW = 4q^{0,3} + 2q^3\sqrt{q}$
- b** $g(d) = \frac{5}{d^3} + d^{2,5}$ **e** $A = 4p^{0,5} - \frac{3}{p^2}$
- c** $T(p) = \frac{1}{2\sqrt{p}} + 3p$ **f** $K = t^2\sqrt{t} + \frac{1}{t^3}$

- 15** Een fabrikant levert babyvoeding in poedervorm tegen de prijs van € 30,- per kg. Voor het verband tussen de hoeveelheid geproduceerde babyvoeding q in kg en de kosten TK in euro's geldt $TK = 100 + q^{1,6}$.

- a** Bereken de winst van de fabrikant bij een levering van 75 kg.
- b** Maak een formule voor de winst TW .
- c** Bereken met behulp van de afgeleide voor welke waarde van q de winst maximaal is.

- 16** Een bedrijf wil een magazijn neerzetten met een oppervlakte van 1125 m^2 . Vóór het magazijn komt een strook van 20 meter parkeerruimte, en langs twee zijden nog een groenstrook van 5 meter.

- a** Neem voor de lengte AB van het magazijn x meter en voor de breedte van het magazijn y meter. Schrijf een formule op die het verband tussen x en y weergeeft en toon daarmee aan dat de oppervlakte van de benodigde

grond is te berekenen met de formule $O = 5x + 1250 + \frac{28\,125}{x}$.

- b** Bereken algebraïsch de minimale afmetingen van het stuk grond.

Voorbeeld

$$f(x) = x\sqrt{x} + \frac{2}{x^3}$$

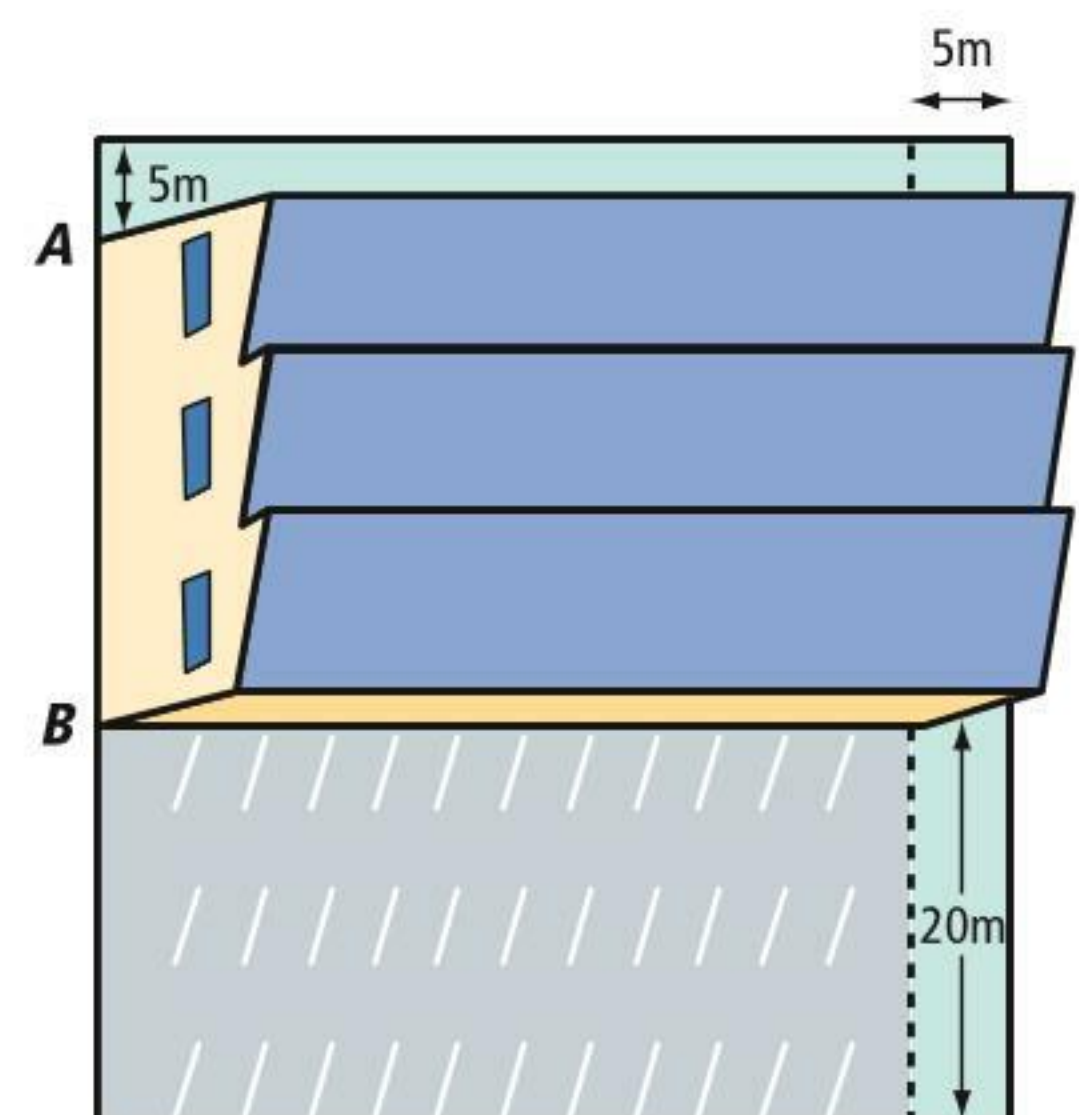
Bereken de afgeleide.

Oplossing

$$f(x) = x^{1\frac{1}{2}} + 2x^{-3}$$

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6x^{-4} \text{ of}$$

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{6}{x^4}$$



8-3

Wortelfuncties en gebroken functies

- 17** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x + 5} - 4$.
- Plot de grafiek van f en lees de coördinaten van het randpunt van de grafiek af.
 - Hoe kun je de coördinaten van het randpunt berekenen met het functievoorschrift?
 - Geef, zonder te plotten, de coördinaten van het randpunt van de grafiek van de functie $g(x) = 3\sqrt{\frac{1}{2}x - 6} + \frac{1}{3}$.

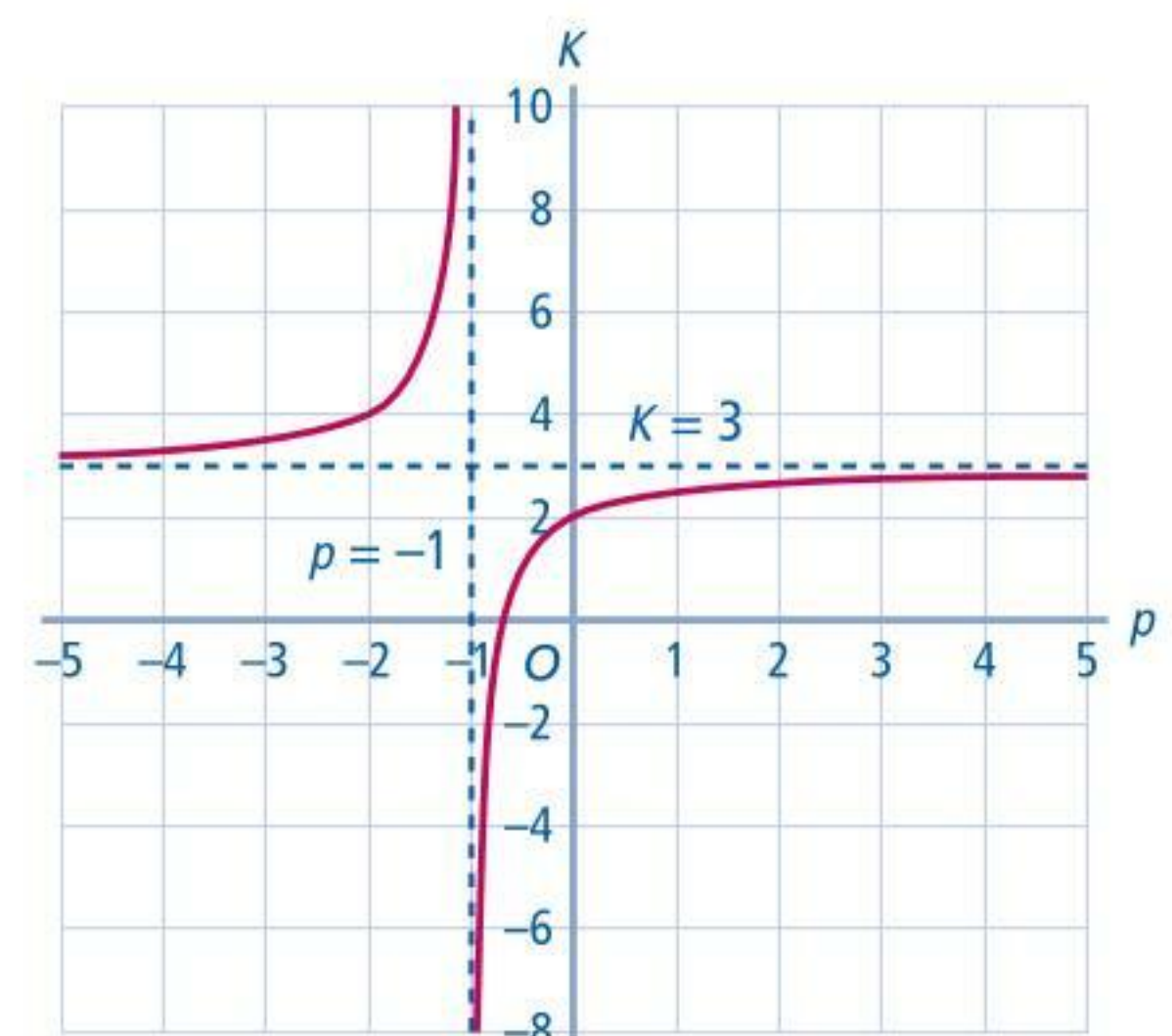
Als er een variabele onder het wortelteken in een functie voorkomt, kan de grafiek één of meer randpunten hebben. Je kunt deze randpunten vinden door te berekenen voor welke waarde(n) van x de uitdrukking onder het wortelteken gelijk is aan nul.

- 18** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 - \sqrt{3x + 1}$ en $g(x) = -4 + \sqrt{39 - 4x}$.
- Geef de coördinaten van de randpunten van de grafieken van f en g .
 - Beredeneer dat het maximum van f gelijk is aan 3.
 - Wat is de uiterste waarde van g ?
Is dit een minimum of een maximum?
- 19** Een schoonmaakbedrijf berekent de kosten voor het schoonmaken van ramen met de formule $P = 1,30 + \frac{50}{A + 1}$. Hierin is A het aantal ramen en P de prijs per raam in euro's.
- Hoeveel moet je betalen per raam als je vier ramen laat schoonmaken?
 - En hoeveel moet je per raam betalen bij het schoonmaken van 400 ramen?
 - Bereken ook het totaalbedrag bij het schoonmaken van 4 en van 400 ramen.
 - Bij een groot kantoor kost de schoonmaak van de ramen € 2,55 per raam. Hoeveel ramen heeft dit kantoor?
 - Hoe kun je aan de formule zien dat de prijs per raam nooit minder dan € 1,30 wordt?

De grafiek van de functie $K = 3 - \frac{1}{p + 1}$ bestaat uit twee

takken. Als p steeds grotere waarden aanneemt dan nadert de grafiek van K de lijn $K = 3$. Deze lijn heet de horizontale asymptoot van de grafiek van K .

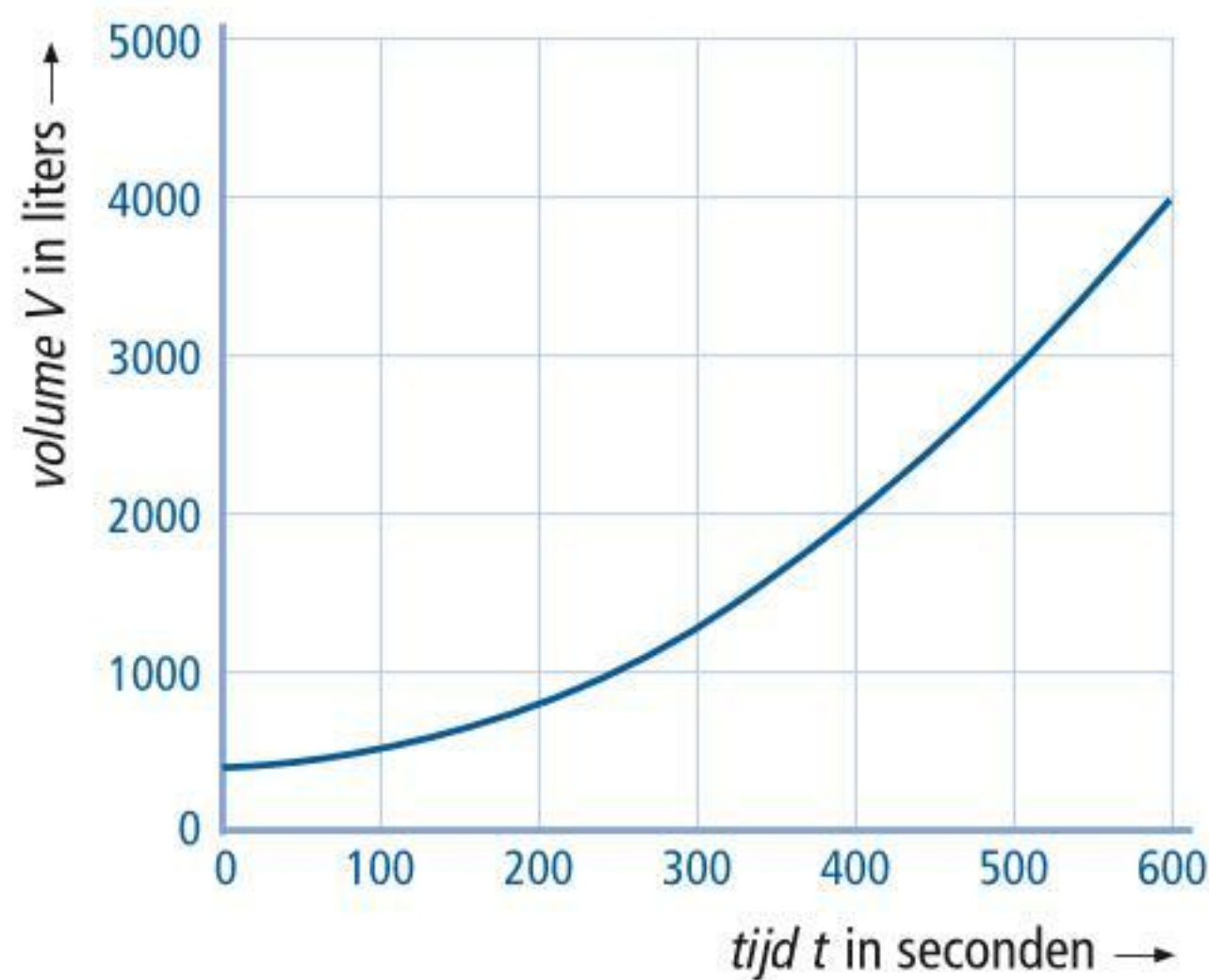
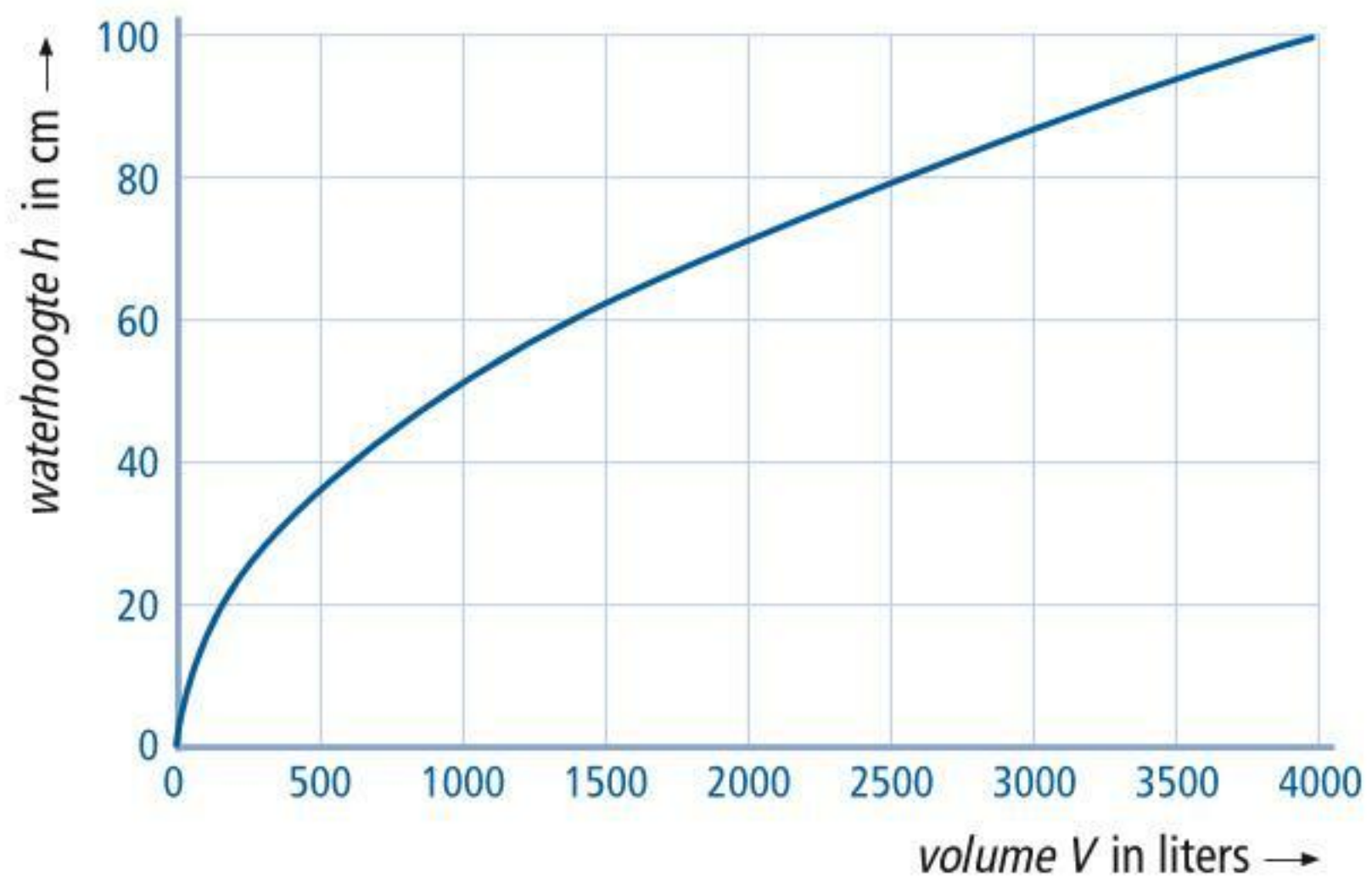
De verticale lijn met vergelijking $p = -1$ heet de verticale asymptoot van de grafiek van K .



- 20** Gegeven is de functie $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$
- a** Plot en schets de grafiek van f .
 - b** Voor welke waarde van x heeft de grafiek een verticale asymptoot? Hoe kun je dit aan het functievoorschrift zien?
 - c** Welke lijn is de horizontale asymptoot van de grafiek van f ?
- 21** Het schoonmaakbedrijf uit opdracht 19 berekent de kosten voor het schoonmaken van vloeren met de formule $P = 13,4 + \frac{12,2}{A}$. Hierin is P de prijs in euro's per m² vloeroppervlak per jaar en is A de oppervlakte in duizenden m².
- a** Bereken de kosten voor een vloeroppervlakte van 2000 m².
 -  **b** Beredeneer met de formule dat de kosten per m² per jaar nooit lager zijn dan € 13,40.
 - c** Wat gebeurt er met de kosten per m² als de vloeroppervlakte klein is?
- 22** Men gaat er vaak van uit dat de geluidssnelheid in lucht 340 meter per seconde is. Dat is niet helemaal waar. In werkelijkheid hangt de snelheid van het geluid af van de temperatuur en de windsnelheid. Bij windstil weer wordt het verband bij benadering weergegeven door de formule $V = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273}}$
- Hierbij is V de snelheid van het geluid in meters per seconde bij een temperatuur van T graden Celsius.
- In de twintigste eeuw varieerde de temperatuur in Nederland van $-27,4$ °C tot $38,6$ °C. Neem aan dat de temperaturen gemeten zijn bij windstil weer.
- a** Bereken het verschil van de geluidssnelheden bij deze twee temperaturen.
- Ga bij de volgende opdrachten steeds uit van een temperatuur van 15 °C op 0 km hoogte.
- In de atmosfeer neemt de temperatuur tot op 10 km hoogte lineair af tot -50 °C volgens de formule $T = 15 - 6,5h$. Hierbij is h de hoogte in kilometers.
- b** Laat zien dat je door substitutie van $T = 15 - 6,5h$ de formule $V = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273}}$ kunt herleiden tot $V = 331 \cdot \sqrt{1,0549 - 0,0238h}$.
 - c** Bereken op welke hoogte de geluidssnelheid volgens de formule gelijk is aan 320 meter per seconde.
- Een grote afstand moet met een passagiersvliegtuig snel afgelegd kunnen worden. Dat kan alleen als het vliegtuig hoog vliegt omdat dan de luchtweerstand klein is. Voor passagiersvliegtuigen zoals de Boeing 747 mag de snelheid echter hoogstens 90% van de geluidssnelheid zijn. Een Boeing 747 wil een snelheid maken van 975 km per uur (= 270,8 m/s).
-  **d** Onderzoek tot op welke hoogte dit vliegtuig kan vliegen. Geef het antwoord in kilometers afgerond op één decimaal.
Ontleend aan CE havo wiskunde B1 2004, tijdvak 1

8-4

Kettingfuncties



- 23** In een reservoir kan 4000 liter water. Het reservoir, waar al 400 liter water in staat, wordt gevuld. In de linker grafiek zie je het verband tussen het volume V en de tijd t . Uit de grafiek blijkt dat de vulsnelheid niet constant is. Het functievoorschrift bij deze grafiek is $V(t) = 0,01t^2 + 400$.

In de rechtergrafiek zie je het verband tussen de waterhoogte h en het volume V . Dit verband hangt samen met de vorm van het reservoir. Hierbij luidt het functievoorschrift $h(V) = \sqrt{2,5 \cdot V}$.

- a** Hoeveel liter water zit er in het reservoir op $t = 0$?
Wat is op dat tijdstip de waterhoogte?
 - b** Op welk tijdstip staat het water ongeveer 80 cm hoog?
 - c** Bereken de gemiddelde vulsnelheid in liters per seconde over het hele vulproces.
 - d** Bereken de gemiddelde vulsnelheid gedurende de eerste 100 seconden. Doe dat ook voor de laatste 100 seconden.
 - e** Laat zien dat de waterhoogte bij het vullen gemiddeld toeneemt met ongeveer 0,02 cm per liter.
- 24a** Met behulp van de antwoorden op de opdrachten c en e uit de vorige opdracht kun je de gemiddelde stijgsnelheid (in cm per seconde) berekenen. Leg dat uit.
- b** Hoe groot is die gemiddelde stijgsnelheid?
 - c** Is de gemiddelde stijgsnelheid gedurende de eerste 100 seconden groter of kleiner dan gedurende de laatste 100 seconden van het vulproces?
 - d** Om de gemiddelde stijgsnelheid te berekenen kun je ook de functie $h(t) = \sqrt{2,5 \cdot (0,01t^2 + 400)}$ gebruiken. Laat zien hoe je deze functie kunt opbouwen met de functies van opdracht 23.
 - e** Bereken ook met het functievoorschrift $h(t)$ de gemiddelde stijgsnelheid gedurende de eerste 100 seconden en gedurende de laatste 100 seconden.

Functionen kun je aaneenschakelen. Je krijgt dan een **kettingfunctie**. Andersom kun je een kettingfunctie in eenvoudigere schakels ontleden.

Voorbeeld

De functie $f(t) = 2\sqrt{5t^2 + 4}$ is opgebouwd uit de schakels $u = 5t^2 + 4$ en $y = 2\sqrt{u}$

- H 25a** Gegeven zijn de schakels $u = 0,5 + t$ en $y = \frac{1}{u}$.
Geef het functievoorschrift $f(t)$.
- b** De functie $g(t)$ ontstaat uit de schakels $u = \frac{1}{t}$ en $y = 0,5 + u$.
Geef het functievoorschrift van g .
- 26** Schrijf voor elk van de volgende drie functies de schakels op waaruit de functie is samengesteld.
 $k(q) = \sqrt{2^q + 19}$, $s(t) = 0,7 \cdot (3t + 6)^2$ en $w(x) = \frac{3}{2x - 5}$
- H 27** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{-0,3x}$ en $g(x) = -0,3 \cdot 2^x$.
- a** Schrijf de schakels op waaruit de functie f is samengesteld.
- b** Uit welke schakels is de functie g samengesteld?
- H 28a** Welke functie $f(t)$ ontstaat uit de samenstelling van de schakels $u = 2 \cdot (0,75)^t$ en $y = \frac{4}{1 + 3u}$?
- b** Beredeneer met de schakels dat $y = 4$ asymptoot is van de grafiek van f .
- 29a** Uit welke schakels is $g(t) = \sqrt{16 + \frac{1}{4t}}$ samengesteld?
- b** Gebruik de schakels om aan te tonen dat $y = 4$ asymptoot is van de grafiek van g .
- 30** Gewicht, volume, lengte en huidoppervlakte van dieren hangen met elkaar samen. Biologen gebruiken vuistregels voor deze verbanden. Voor een antilopensoort geldt voor het gewicht G (in kg), het volume V (in dm^3), de lengte L (in dm) en de huidoppervlakte O (in dm^2):
 $G = 0,2 \cdot V$, $V = 0,1 \cdot L^3$ en $O = 2 \cdot L^2$
- a** Een pasgeboren antilope heeft een lengte van 60 cm.
Hoe groot is de huidoppervlakte?
- b** Bereken het gewicht van dit jong.
- c** Stel een formule op waarbij het gewicht G van een antilope wordt uitgedrukt in de lichaamslengte L .
- d** Een volwassen mannetje weegt 80 kilo.
Bereken de huidoppervlakte.

8-5

Kettingfuncties differentiëren

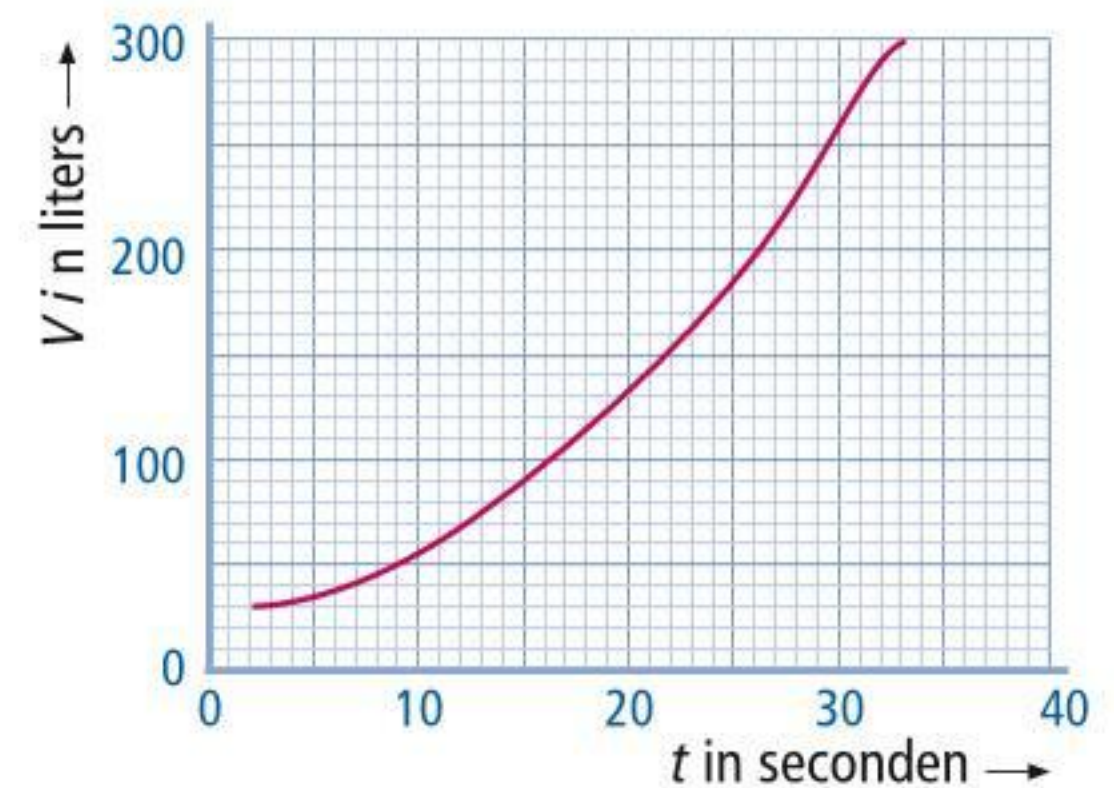
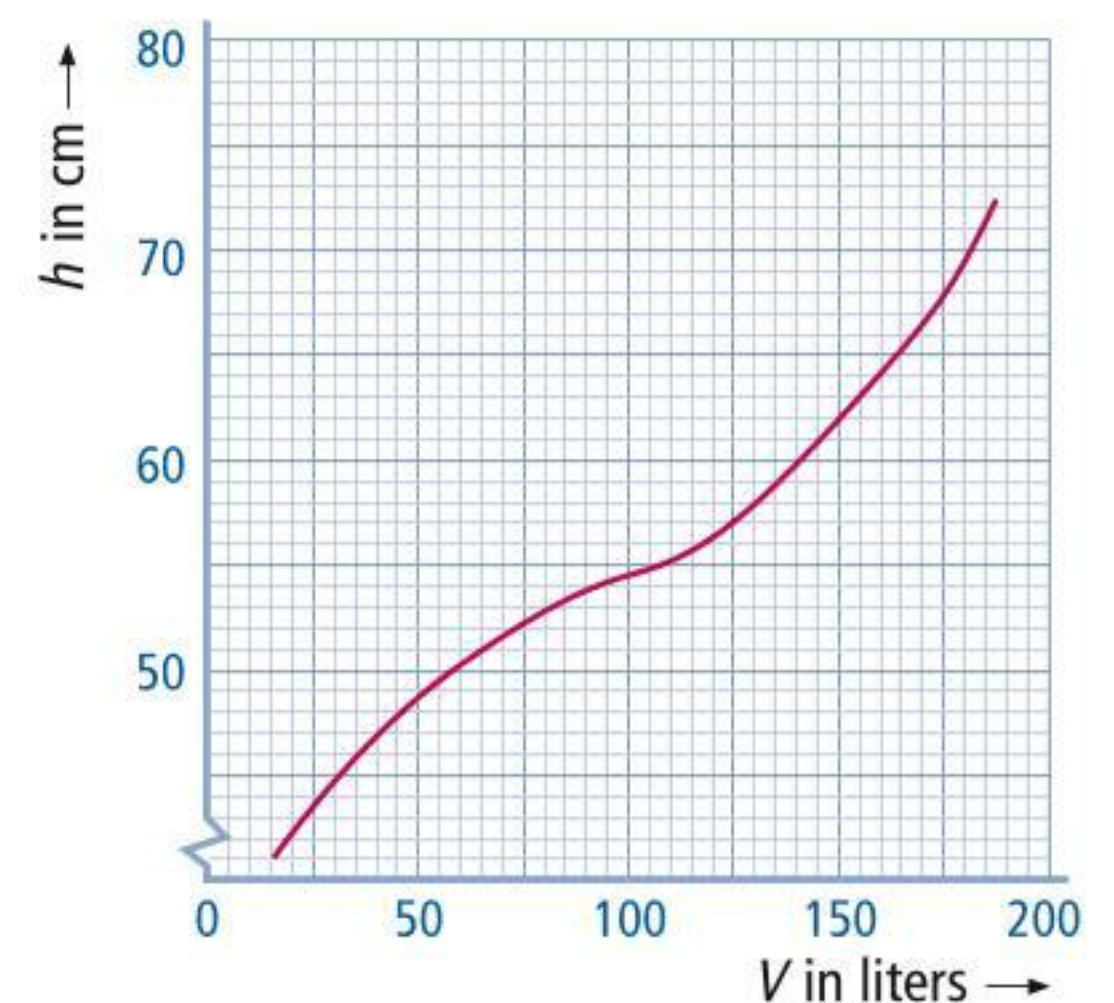
31 Hiernaast staan de grafieken die het verband aangeven tussen *tijd*, *volume* en *hoogte* bij het vullen van een reservoir.

- a** Hoe groot is $\frac{\Delta V}{\Delta t}$, de gemiddelde vulsnelheid in liters per seconde, gedurende het tijdsinterval $[10, 20]$?
- b** Hoe groot is $\frac{\Delta h}{\Delta V}$, de gemiddelde verandering van de hoogte in cm per liter, gedurende dat tijdsinterval?
- c** Hoe groot is $\frac{\Delta h}{\Delta t}$, de gemiddelde stijgsnelheid in cm per seconde, gedurende dat tijdsinterval?
- d** Leg uit dat geldt: $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta h}{\Delta V}$

Ga na dat de eenheden in deze formulering kloppen.

32 Bij het vullen van een ander reservoir gelden de formules $V(t) = t^2 + 50$ en $h(V) = 2\sqrt{V}$ met t in seconden, V in liters en h in cm.

- a** Maak de opdrachten 31a, b en c voor dit reservoir.
- b** Met behulp van een klein interval, bijvoorbeeld $[10; 10,001]$, kun je een schatting maken van de stijgsnelheid van het water op $t = 10$. Bereken de stijgsnelheid van het water op $t = 10$.
- c** Laat zien dat je de stijgsnelheid van het water op $t = 10$ ook kunt berekenen door de waarden van de afgeleiden van V en h bij $t = 10$ te vermenigvuldigen.



Theorie

Je vindt de afgeleide van een kettingfunctie door de afgeleiden van de afzonderlijke schakels met elkaar te vermenigvuldigen.

In formulevorm: $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}$

Deze manier om de afgeleide te vinden heet de **kettingregel**.

33 Gegeven is de functie $f(x) = (2 - 3x)^4$.

- a** Geef de schakels waaruit de functie f is samengesteld.
- b** Bereken de afgeleide van de afzonderlijke schakels.
- c** Bereken $f'(x)$ door de afgeleiden van u en y met elkaar te vermenigvuldigen. Schrijf $f'(x)$ als functie van x .

Hoe bereken je de afgeleide van een kettingfunctie?

- 1 Schrijf de schakels op waaruit de functie is samengesteld.
- 2 Bereken de afgeleide van elke schakel.
- 3 Vermenigvuldig de afgeleiden van de afzonderlijke schakels.
- 4 Schrijf het resultaat als een functie van één variabele.

Voorbeeld

Bereken de afgeleide van de functie

$$f(x) = (2x - 7)^2$$

Oplossing

$$1 \quad u = 2x - 7 \quad \text{en} \quad y = u^2$$

$$2 \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad \text{en} \quad \frac{dy}{du} = 2u$$

$$3 \quad \text{Dan is} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du} = 2 \cdot 2u = 4u \quad \text{ofwel}$$

$$4 \quad f'(x) = 4 \cdot (2x - 7) = 8x - 28$$

H 34 Differentieer met behulp van de kettingregel de volgende functies.

- a $w(x) = (1 - 3x)^4$
- b $h(x) = 2(3x^2 + 8)^{1,5}$
- c $g(x) = (x^3 + 7x)^3$
- d $p(x) = 4(2 - x)^{-5}$

35 Hiernaast is een begin gemaakt met het berekenen van de afgeleide van de wortelfunctie $A(x) = \sqrt{x^3 + 4x}$.

- a Neem de berekening hiernaast over en maak deze verder af.
- b Gegeven is de functie $h(x) = \sqrt{10 - 10x^2}$.

Laat zien dat $h'(x) = \frac{-10x}{\sqrt{10 - 10x^2}}$ de afgeleide is van functie h .

$$\begin{aligned} A(x) &= \sqrt{x^3 + 4x} \\ u &= x^3 + 4x \quad \text{en} \quad y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \\ \frac{du}{dx} &= 3x^2 + 4 \quad \text{en} \quad \frac{dy}{du} = \dots \\ A'(x) &= \dots \end{aligned}$$

36 Rob en Nynke zijn op zoek naar de afgeleide van $f(x) = \frac{5}{(2x^3 + 4)^2}$

Rob schrijft de schakels $y = 5 \cdot (2u + 4)^{-2}$ en $u = x^3$ op. Nynke beschrijft de functie met de schakels $y = 5 \cdot u^{-2}$ en $u = 2x^3 + 4$.

- a Waarom is de manier van Rob onhandig voor het vinden van de afgeleide?
- b Toon algebraïsch aan dat $f'(x) = \frac{-60x^2}{(2x^3 + 4)^3}$

H 37 Differentieer de volgende functies.

- a $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$
- b $g(x) = \frac{3}{9 - 2x}$
- c $h(x) = \frac{-6}{(x^2 + 5)^3}$
- d $i(x) = (1 + \sqrt{3x})^2$
- e $j(x) = 4x + \frac{-2}{(4 - 2x)^2}$
- f $k(x) = \sqrt{2x - 2} + \frac{3}{2x - 2}$

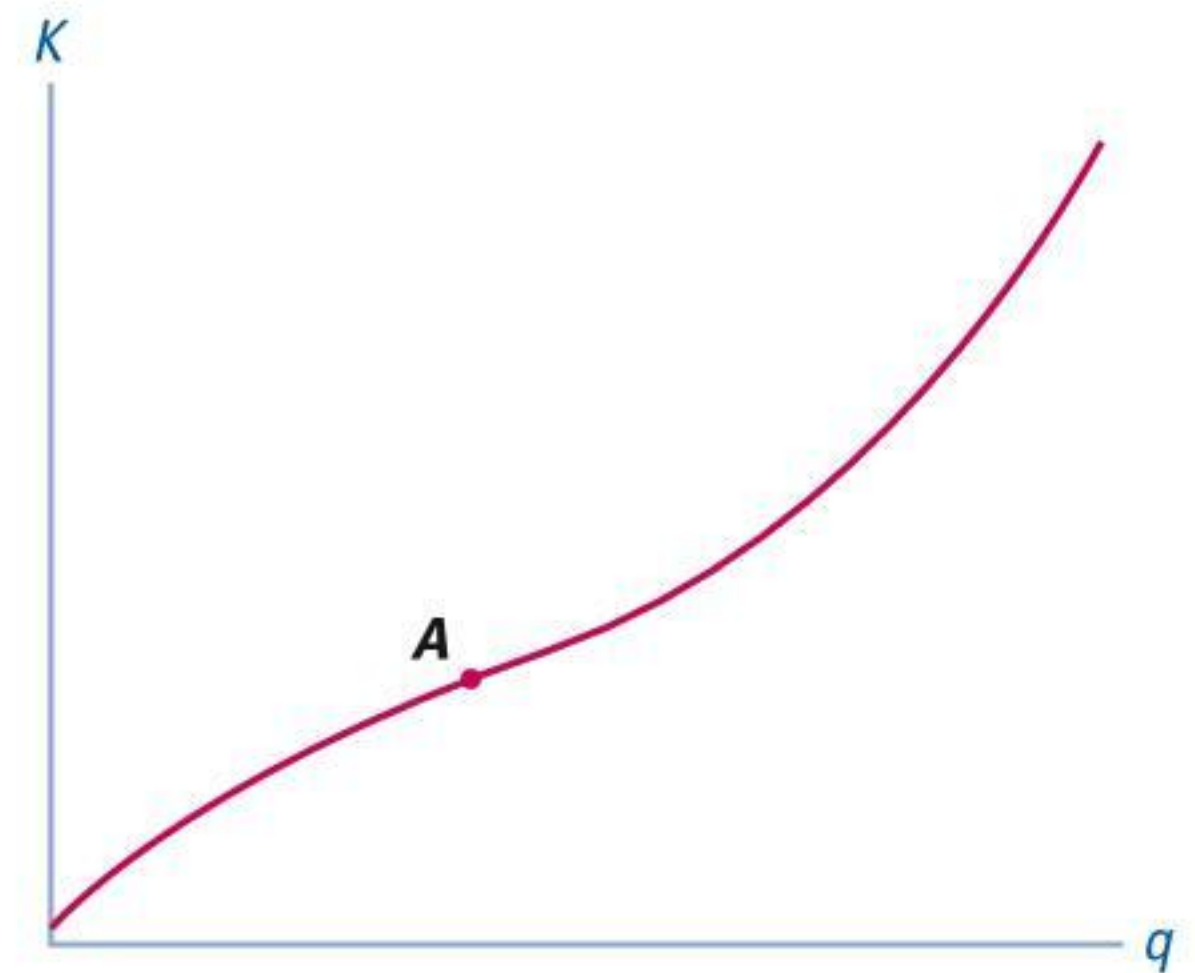
38 De waterhoogte in een waterton wordt beschreven door de formule $H = \sqrt{-2t^2 + 210t + 900}$ met H in cm en t in dagen.

Hoe snel stijgt het water als de waterhoogte voor het eerst 60 cm hoog is?

8-6

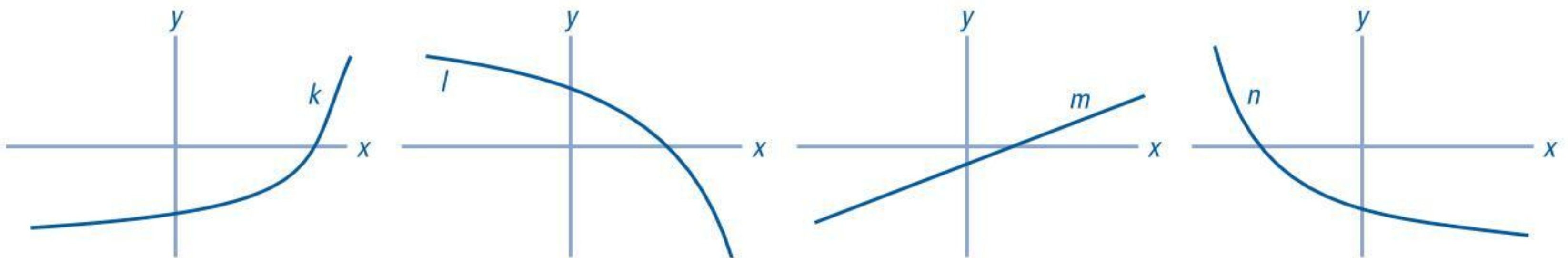
Redeneren met de afgeleide

- 39** Een fabrikant gebruikt voor de kosten van het maken van een product de functie $K(q)$. Hiernaast is de grafiek van deze functie getekend. Hierbij is K in euro's en q in eenheden van het product. Hiernaast staat een deel van de grafiek van K .

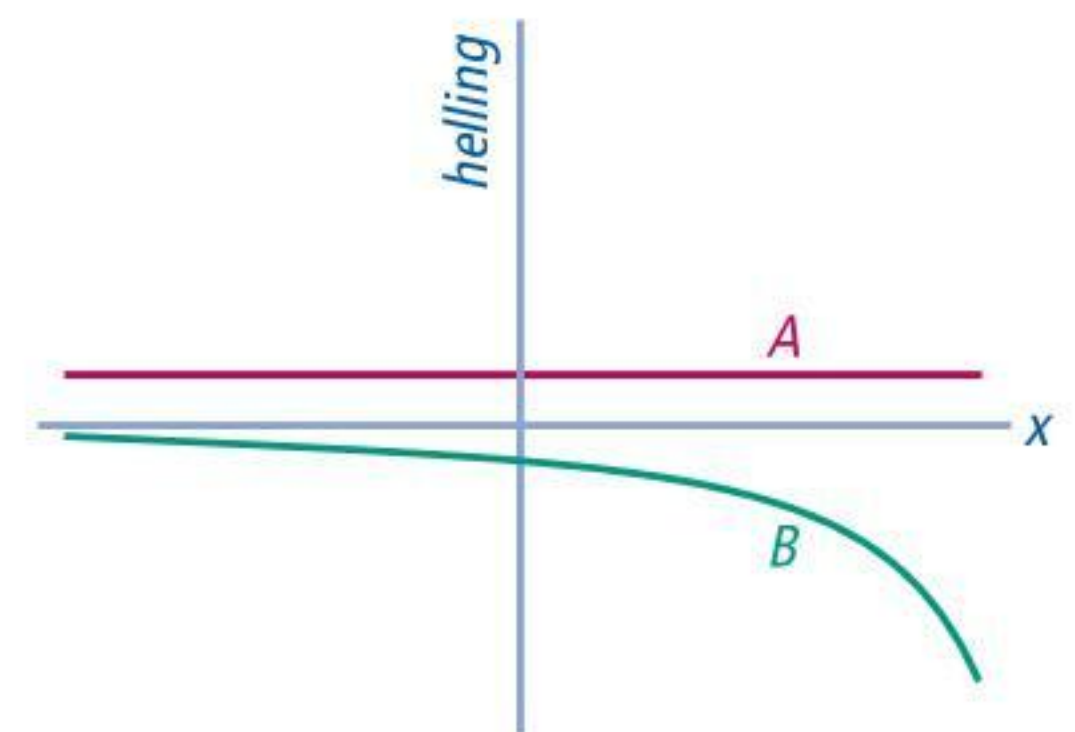


- a** Je ziet dat het getekende deel van de grafiek stijgend is. Wat kun je zeggen over de afgeleide $K'(q)$ voor de waarden van q op dit deel?
- b** De stijging van de grafiek verloopt tot punt A anders dan na punt A . Op welk deel is de grafiek van $K(q)$ toenemend stijgend?
- c** Beschrijf de stijging op het andere deel.

- 40** Hieronder zijn de grafieken van de functies k , l , m en n geschetst.

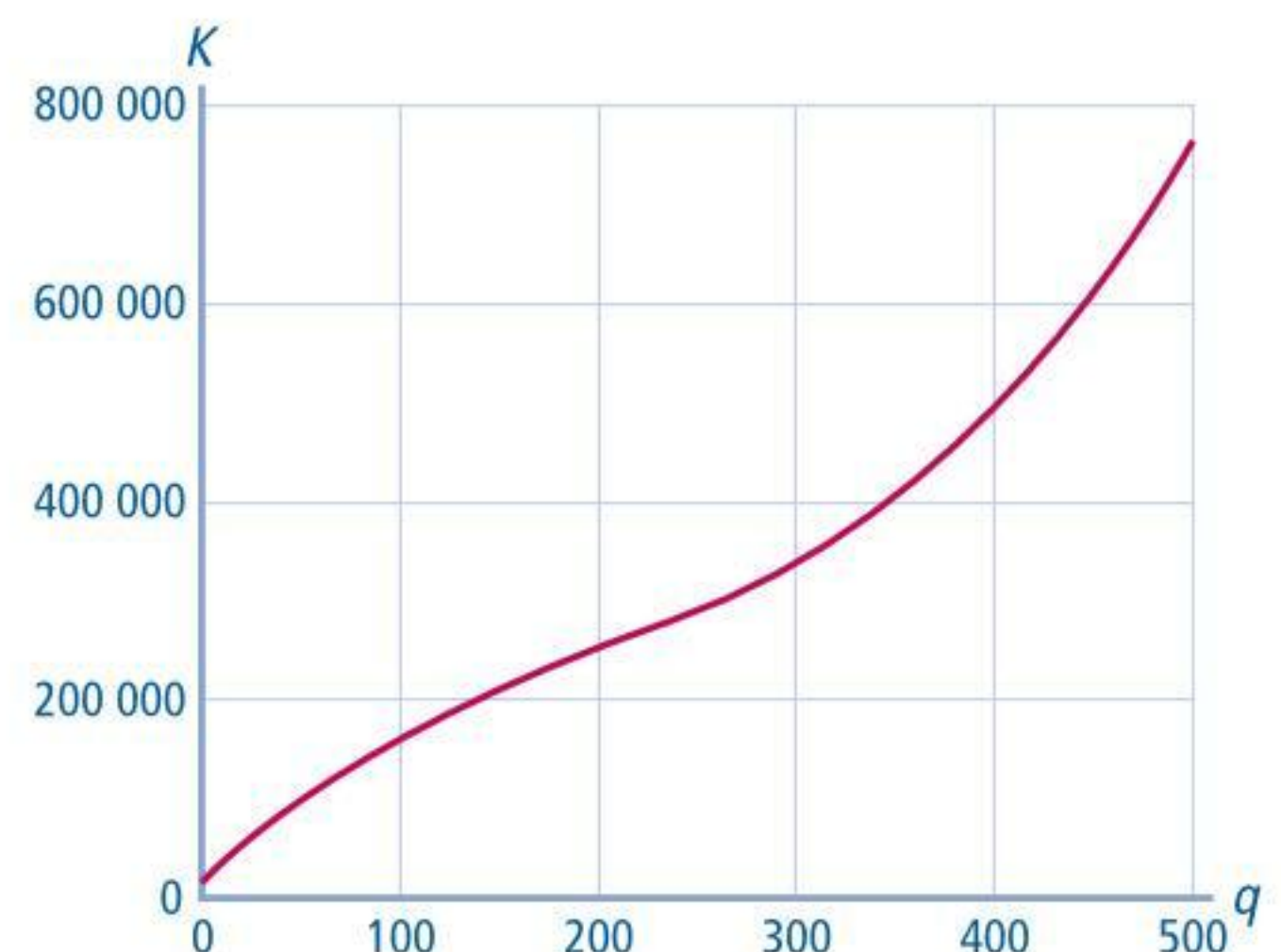


- a** Bij welke grafiek is er sprake van een afnemende daling?
- b** Bij welke grafiek is er sprake van een constante stijging? En bij welke grafiek is er sprake van een toenemende stijging?
- c** Geef bij de overgebleven grafiek aan op welke manier deze stijgt of daalt.
- d** Bij een functie p hoort een steeds langzamer stijgende grafiek. Maak een schets van de grafiek van functie p .
- e** Bij de functies k , l , m en n kun je schetsen maken van de bijbehorende afgeleide functies. Van welke functie is grafiek A hiernaast de grafiek van de afgeleide functie? En van welke functie is grafiek B de grafiek van de afgeleide functie?
- f** Schets ook bij de twee overige functies de grafiek van de afgeleide functie.



- 41** De kostenformule die bij de grafiek van opdracht 39 hoort is $K(q) = 0,01q^3 - 6q^2 + 2000q + 10000$.

- a** Bereken $K'(q)$ en toon aan dat $K'(q) > 0$.
- b** Schets de grafiek van $K'(q)$. Hoe kun je aan de grafiek van $K'(q)$ zien op welk interval de grafiek van K toenemend stijgend is?
- c** Voor welke waarde van q is de stijging het kleinst?
- d** Hoe groot is deze minimale stijging? Welke betekenis heeft dit voor de kosten K ?



Met behulp van de afgeleide kun je vaststellen of een grafiek van een functie stijgt of daalt. Met behulp van diezelfde afgeleide kun je ook vaststellen of die stijging of daling toenemend of afnemend is.

Als de grafiek van f stijgt, dan zijn de waarden van f' positief.

Als de grafiek van f daalt, dan zijn de waarden van f' negatief.

Als de grafiek van f toenemend stijgend is, dan is $f'(x) > 0$ en neemt $f'(x)$ toe.

Als de grafiek van f afnemend stijgend is, dan is $f'(x) > 0$ en neemt $f'(x)$ af.

Als de grafiek van f afnemend dalend is, dan is $f'(x) < 0$ en neemt $f'(x)$ toe.

Als de grafiek van f toenemend dalend is, dan is $f'(x) < 0$ en neemt $f'(x)$ af.

Voorbeeld

Gegeven is de functie

$$K(q) = 10^{-6} \cdot q^3 - 3 \cdot 10^{-3} \cdot q^2 + 5q + 1000.$$

Bij welke waarde van q gaat de grafiek van K van afnemend stijgend over in toenemend stijgend?

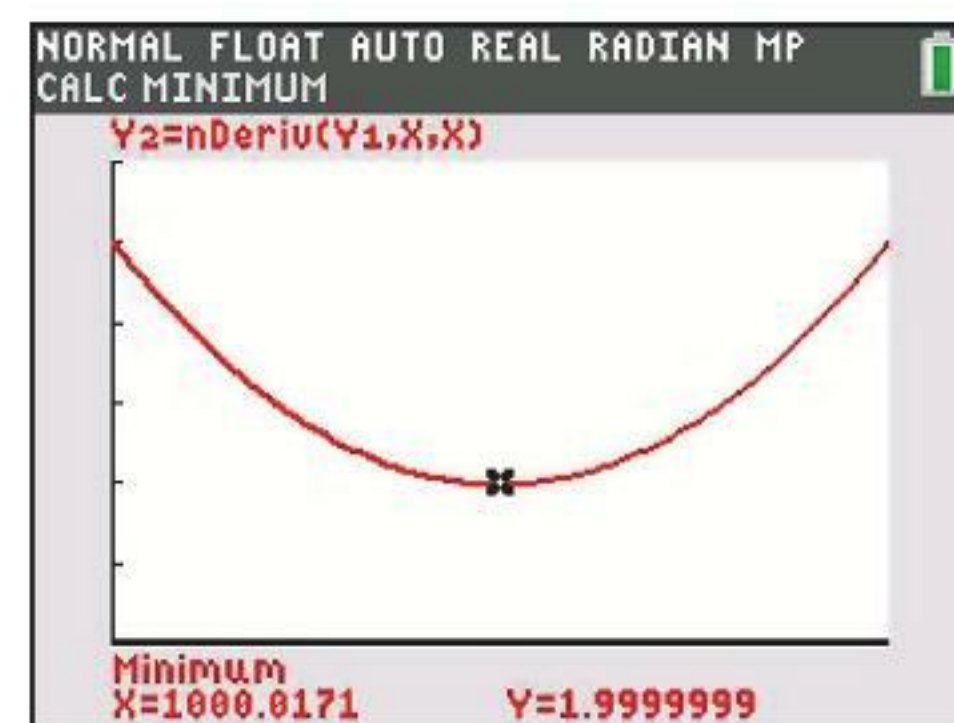
Oplossing

$$K'(q) = 3 \cdot 10^{-6} \cdot q^2 - 6 \cdot 10^{-3} \cdot q + 5$$

In de plot van K' hiernaast zie je dat de afgeleide positief is. De grafiek van K stijgt.

De grafiek van K' heeft een minimum bij $q = 1000$.

Dus bij $q = 1000$ gaat de grafiek van K van afnemend stijgend over in toenemend stijgend.



42 Gegeven is de functie $K(x) = \frac{1}{2}x + \frac{8 \cdot 10^8}{x}$ met $x > 0$.

- a** Bereken $K'(x)$.
- b** Voor welke waarde van x is K minimaal?
- c** Vanaf deze waarde van x neemt K weer toe.
Is deze toename toenemend stijgend of afnemend stijgend.
Gebruik $K'(x)$ om je bewering aan te tonen.

43 Een tuinder heeft een waterreservoir om bij gebrek aan regenwater de planten water te kunnen geven. Voor een bepaalde periode kun je de inhoud van het reservoir berekenen met de formule $I = \frac{120}{(0,05t + 1)^2}$, waarin I de inhoud is in m^3 en t de tijd in dagen.

- a** Hoe kun je aan de formule zien dat de inhoud afneemt?
- b** Beredeneer dat de inhoud van het reservoir steeds langzamer afneemt.

8-7

Gemengde opdrachten

44 Differentieer de volgende functies.

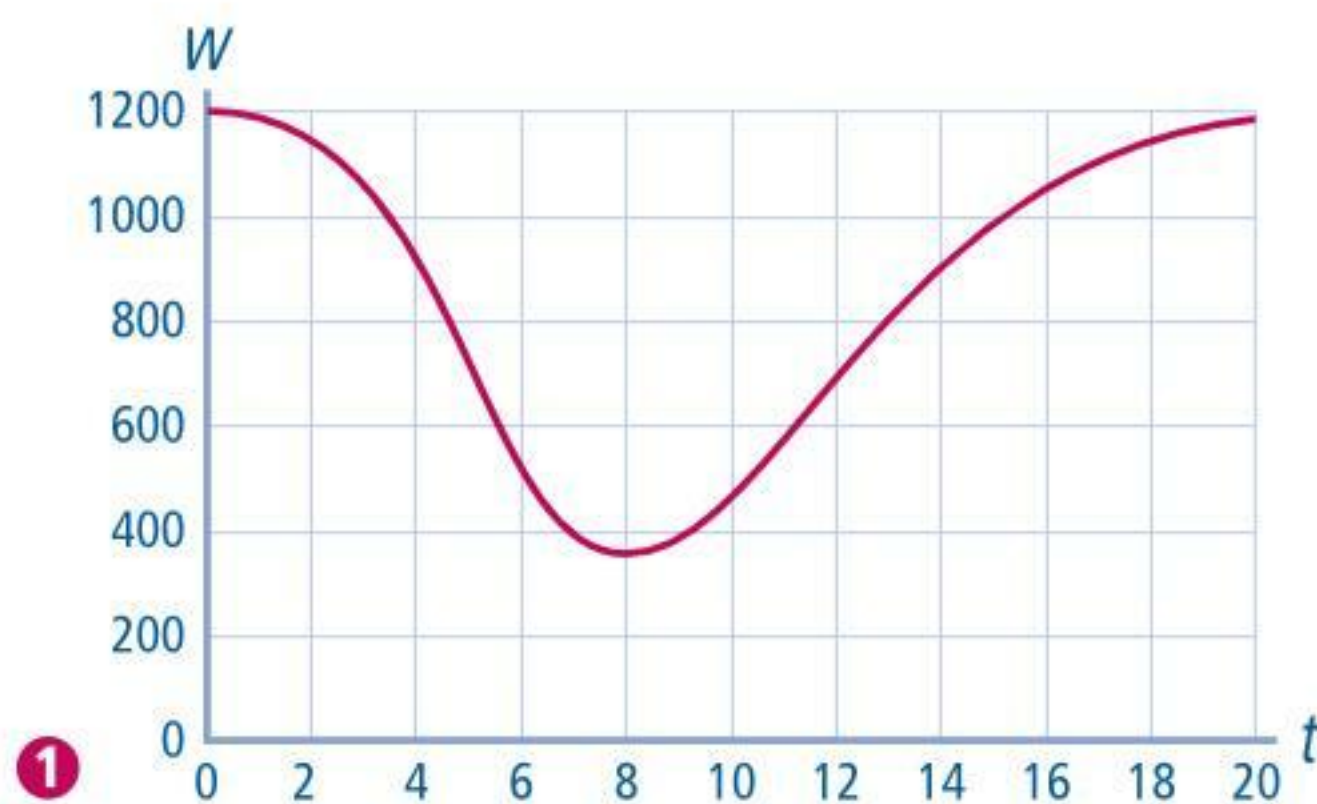
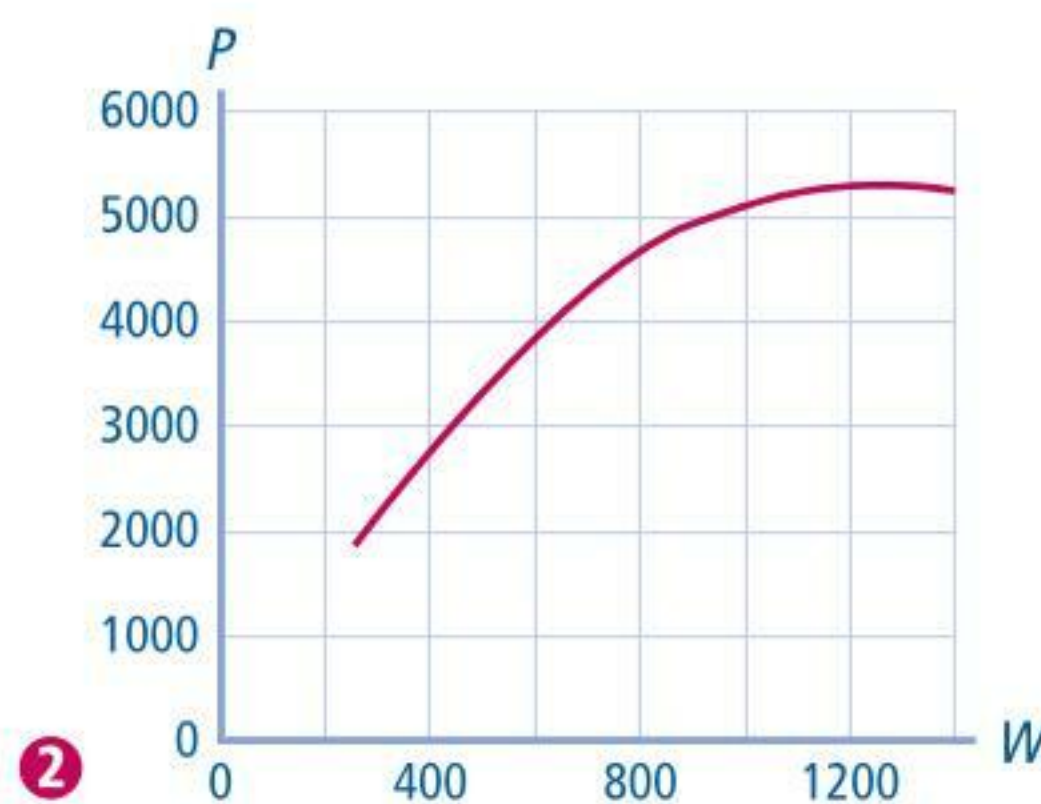
a $f(t) = t \cdot \sqrt{4t} \cdot \sqrt[3]{t}$

c $Z(a) = (2a + \sqrt{4a})^2$

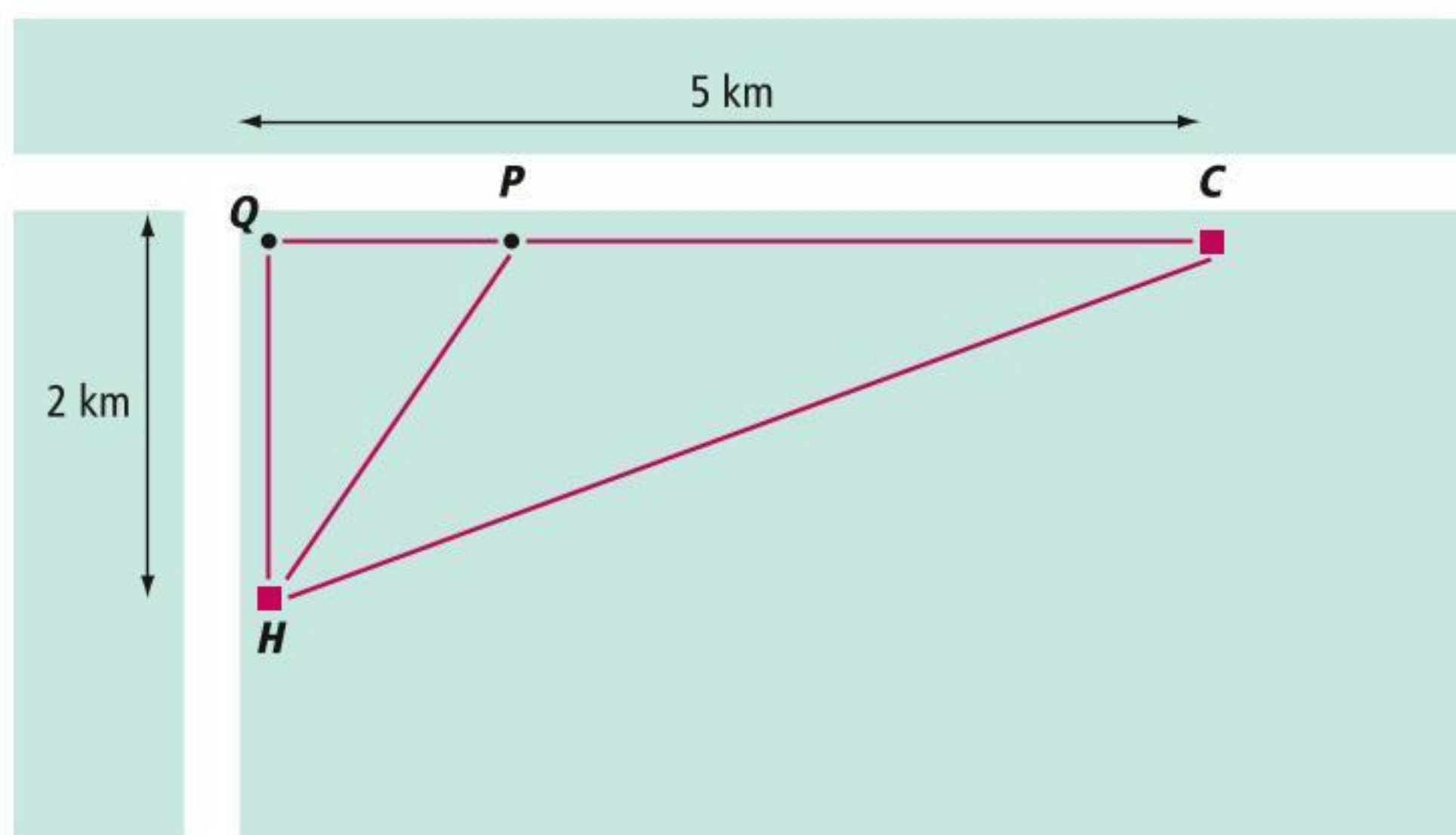
b $A(p) = \sqrt{3p+1} + \frac{1}{\sqrt{3p+1}}$

d $Q(q) = 7q^2 + \frac{1}{2q^2+3}$

45 In een fabriek werken ongeveer 1200 mensen. Ten gevolge van een griep epidemie had het bedrijf veel ziekteverzuim. In grafiek 1 staat het aantal nog aanwezige werknemers W uitgezet tegen de tijd t in dagen.



- a** Op welke dag ongeveer nam het ziekteverzuim het sterkst toe?
- b** De directie beschikte ook over gegevens aangaande de productie P als functie van het aantal aanwezige werknemers W . Deze gegevens staan in grafiek 2. Waarom was de directie de eerste dagen niet verontrust?
- c** Hoeveel veranderde de productie tussen $t = 10$ en $t = 11$?
- d** Geef met behulp van figuur 1 een schatting van $\frac{dW}{dt}$ op $t = 6$.
- e** Geef ook een schatting van $\frac{dP}{dW}$ en van $\frac{dP}{dt}$ op $t = 6$.
- 46** Door onderzoek is vastgesteld dat de hoeveelheid melk die een koe geeft, beïnvloed kan worden door een preparaat aan het voer toe te voegen. Er is een formule opgesteld die goed past bij de metingen die in het onderzoek zijn verricht. Als er dagelijks g gram ($g \leq 15$) van het preparaat aan het voer wordt toegevoegd, is de extra hoeveelheid melk in liters die een koe per keer geeft $M = 2,94 \cdot g^{0,67} - g$.
- a** Bereken $\frac{dM}{dg}$
- b** Bereken met behulp van $\frac{dM}{dg}$ de hoeveelheid preparaat g die de grootste mogelijke opbrengst oplevert.
- c** Een wettelijke bepaling beperkt de maximale dagelijkse hoeveelheid preparaat tot 6 gram. Bereken de gevolgen voor de melkproductie.



- 47** In een bos is onlangs een huis H gebouwd. Uiteraard wil de bewoner van dit huis elektriciteit in zijn woning. Daarom moet naar dit huis vanaf de elektriciteitscentrale C een leiding worden aangelegd. Deze leiding kan langs verschillende trajecten worden aangelegd.
- > In zijn geheel langs de weg, dus volgens route CQH .
 - > In zijn geheel door het bos, dus volgens route CH .
 - > Deels langs de weg en deels door het bos: volgens route CPH .
- Langs de weg is het aanleggen van de leiding wat goedkoper dan wanneer dat door het bos gebeurt. De kosten langs de weg zijn € 20,- per meter. Door het bos zijn de kosten € 25,- per meter.
- a** Bereken welke oplossing goedkoper is: geheel door het bos of geheel langs de weg.
 - b** De leiding kan ook gedeeltelijk langs de weg en gedeeltelijk door het bos worden aangelegd, dus volgens route CPH . Bereken de aanlegkosten in het geval PQ gelijk is aan één kilometer.
 - c** Neem nu de afstand PQ in meters als variabele x . De aanlegkosten AK zijn dan een functie van x . Toon aan dat voor de aanlegkosten de volgende formule geldt:

$$AK = 100\,000 - 20x + 25 \cdot \sqrt{x^2 + 4\,000\,000}$$
 Hierbij is AK in euro's en x in meters.
 - d** Bereken met behulp van de afgeleide voor welke waarde van x de aanlegkosten AK zo laag mogelijk zijn.
 - e** Plot de grafiek van AK en controleer of het bij opdracht e gevonden antwoord inderdaad de minimale aanlegkosten oplevert.
 - f** Hoeveel meter leiding moet er gelegd worden? Hoeveel bedragen de minimale aanlegkosten?



Samenvatting

Machtsfuncties

Functies van de vorm $f(x) = c \cdot x^a$ heten voor $a \neq 0$ machtsfuncties.

De afgeleide functie van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van $a \neq 0$.

Voorbeeld

Bereken de afgeleide functies.

$$f(x) = x^{3,56} \quad f'(x) = 3,56x^{2,56}$$

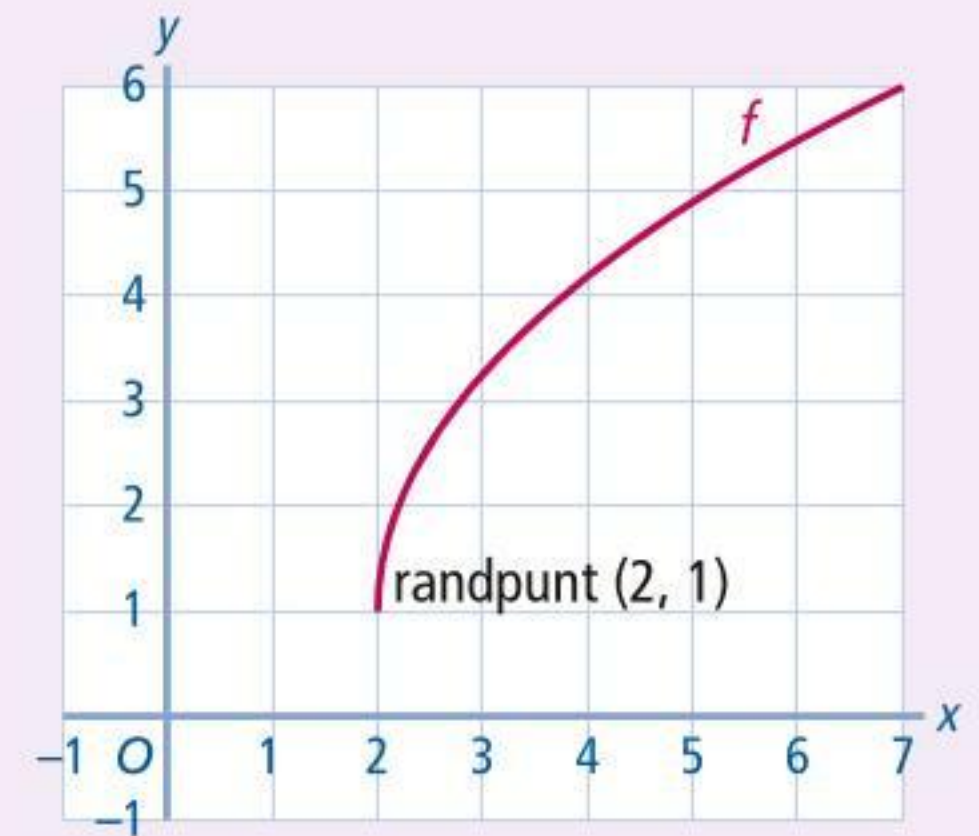
$$g(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4} \quad g'(x) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

$$h(x) = 6x \cdot \sqrt[3]{x} = 6x^{1\frac{1}{3}} \quad h'(x) = 8x^{\frac{1}{3}} = 8\sqrt[3]{x}$$

Wortelfuncties

Voorbeelden van wortelfuncties zijn $f(x) = 1 + \sqrt{5x - 10}$ en $g(x) = 3\sqrt{x^3 - 4}$. De grafiek van een wortelfunctie kan één of meerdere randpunten hebben.

De grafiek van functie f heeft randpunt $(2, 1)$.



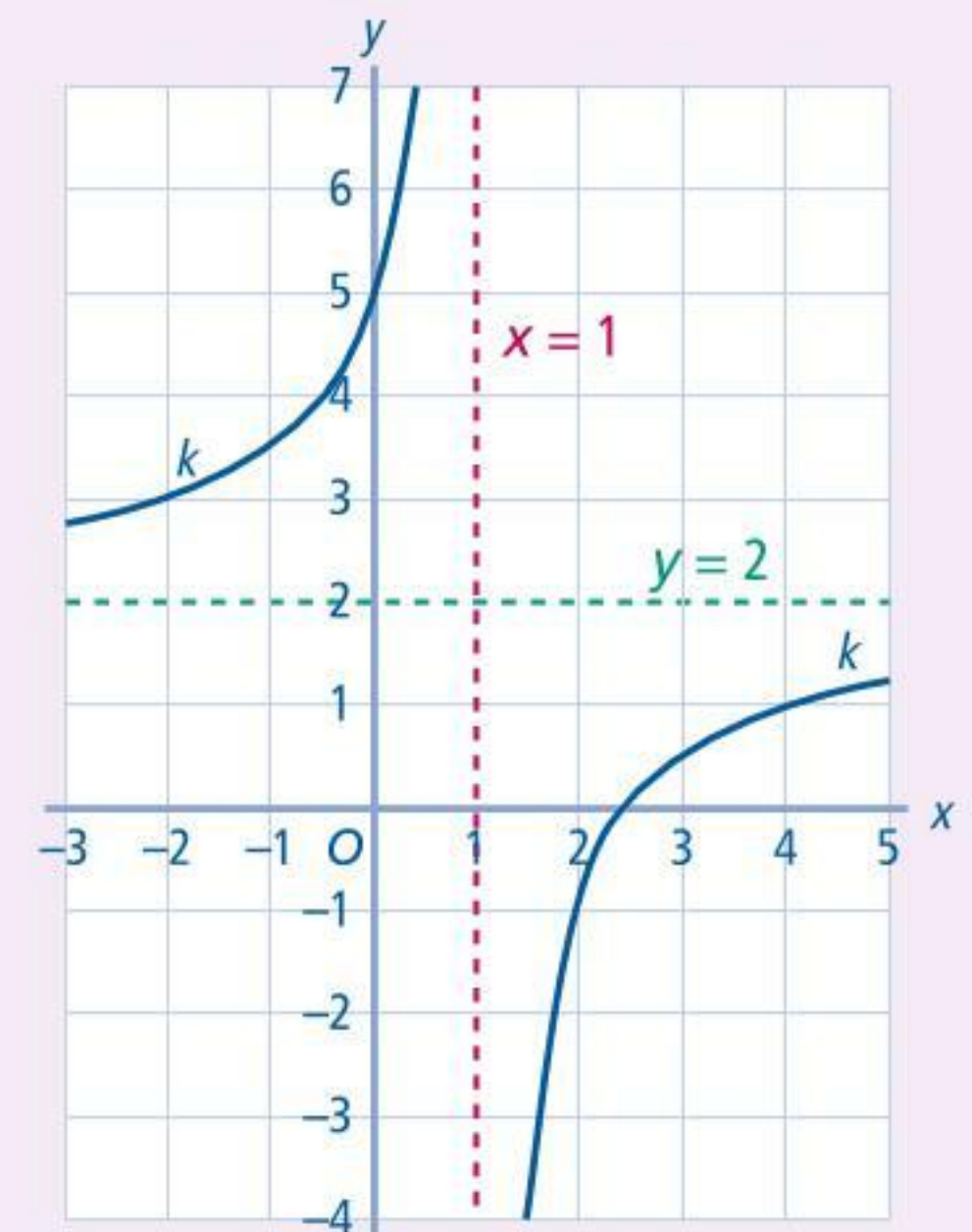
Gebroken functies

Voorbeelden van gebroken functies zijn $k(x) = 2 - \frac{3}{x-1}$ en

$l(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$. De grafiek van een gebroken functie kan een

horizontale en een verticale asymptoot hebben.

De grafiek van functie k heeft een horizontale asymptoot $y = 2$ en een verticale asymptoot $x = 1$.



Kettingfuncties en kettingregel

Als twee of meer functies na elkaar worden toegepast dan is er sprake van een kettingfunctie. De afzonderlijke functies vormen de schakels.

Je vindt de afgeleide van een kettingfunctie door de afgeleiden van de afzonderlijke schakels waaruit de functie is samengesteld, met elkaar te vermenigvuldigen.

In formulevorm: $\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dy}{du}$

Deze formule om de afgeleide te vinden heet de kettingregel.

De functie $f(t) = \frac{4}{(5t-7)^3}$ is opgebouwd uit de schakels $u = 5t - 7$ en $y = \frac{4}{u^3}$

Je kunt kettingfuncties differentiëren

De afgeleide van een kettingfunctie vind je door de afgeleiden van de afzonderlijke schakels met elkaar te vermenigvuldigen.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie $f(t) = \frac{2}{t^2 - 4}$.

Oplossing

1 $u = t^2 - 4$ en $y = \frac{2}{u} = 2u^{-1}$

2 $\frac{du}{dt} = 2t$ en $\frac{dy}{du} = -2 \cdot u^{-2}$

3 $\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dy}{du} = 2t \cdot -2u^{-2}$

4 $f'(t) = 2t \cdot -2(t^2 - 4)^{-2}$

$$f'(t) = -4t(t^2 - 4)^{-2}$$

Je kunt dit ook schrijven als $f'(t) = \frac{-4t}{(t^2 - 4)^2}$

Voorbeeld 2

Differentieer de functie $P(q) = 3\sqrt{q^3 - 4}$.

Oplossing

1 $u = q^3 - 4$ en $P = 3\sqrt{u} = 3u^{\frac{1}{2}}$

2 $\frac{du}{dq} = 3q^2$ en $\frac{dP}{du} = 3 \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$

3 $\frac{dP}{dq} = \frac{du}{dq} \cdot \frac{dP}{du} = 3q^2 \cdot 1\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$

4 $P'(q) = 3q^2 \cdot 1\frac{1}{2} (q^3 - 4)^{-\frac{1}{2}}$

$$P'(q) = \frac{9}{2} q^2 (q^3 - 4)^{-\frac{1}{2}}$$

Je kunt dit ook schrijven als $P'(q) = \frac{9q^2}{2\sqrt{q^3 - 4}}$

Je kunt uitspraken doen over de mate van stijging of daling van de grafiek van een functie met behulp van de afgeleide

Als de grafiek van f toenemend stijgend is, dan is $f'(x) > 0$ en neemt $f'(x)$ toe.

Als de grafiek van f afnemend stijgend is, dan is $f'(x) > 0$ en neemt $f'(x)$ af.

Als de grafiek van f afnemend dalend is, dan is $f'(x) < 0$ en neemt $f'(x)$ toe.

Als de grafiek van f toenemend dalend is, dan is $f'(x) < 0$ en neemt $f'(x)$ af.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 0,01x^3 - 0,39x^2 + 3,15x + 22$.

Bereken met behulp van de afgeleide bij welke waarden van x de grafiek van f afnemend dalend en bij welke waarden van x de grafiek van f toenemend dalend is.

Oplossing

$$f'(x) = 0,03x^2 - 0,78x + 3,15$$

Hiernaast staat een plot van f' .

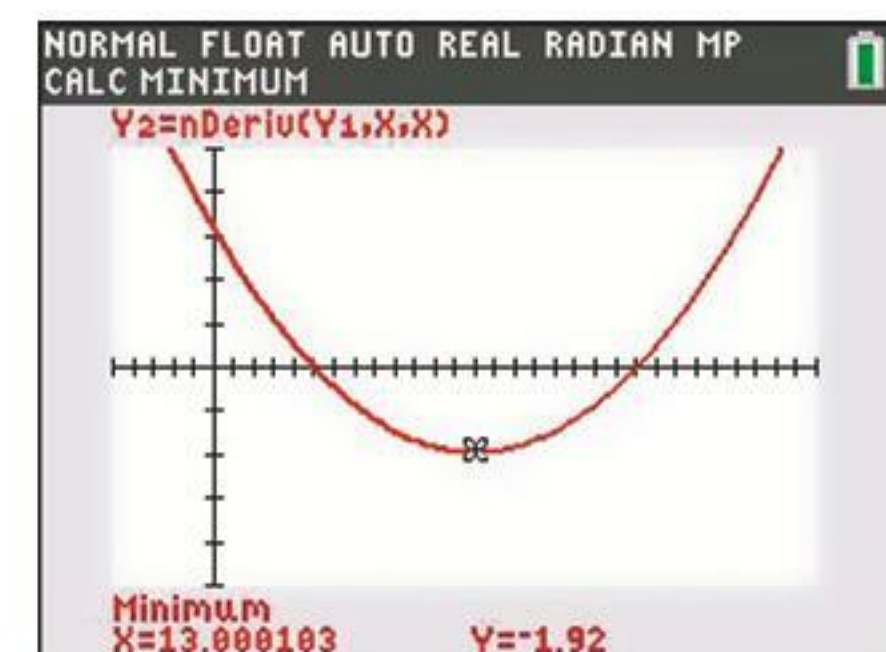
Tussen $x = 5$ en $x = 21$ is $f'(x) < 0$.

Dus tussen $x = 5$ en $x = 21$ daalt de grafiek van f .

De grafiek van f' heeft een minimum bij $x = 13$.

Tussen $x = 5$ en $x = 13$ is de grafiek van f toenemend dalend.

Tussen $x = 13$ en $x = 21$ is de grafiek van f afnemend dalend.



Test jezelf

T-1 Schrijf de volgende functies in de vorm $f(x) = b \cdot x^a$.

a $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{5}}$

c $f(x) = 6x \cdot \frac{1,5}{\sqrt[5]{x}}$

b $f(x) = (4x^{-12})^{-\frac{1}{2}}$

d $f(x) = (0,125 \cdot x^{2,4})^{-\frac{1}{3}}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-1.

T-2 Hieronder is telkens het verband tussen u en v gegeven. Schrijf deze verbanden in de vorm $u = a \cdot v^b$. Rond a en b indien nodig af op twee decimalen.

a $u \cdot v = \frac{1}{3}$

d $u^{-3} \cdot v^{-5} = 7,3$

b $\frac{u}{v} = 5$

e $(u^{\frac{1}{5}} \cdot v^{15})^{\frac{1}{5}} = 1$

c $135 \cdot u \cdot v^2 = 4$

f $-2u^3 + (3v)^{-3} = 0$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-1.

T-3 Bereken de afgeleide van de volgende functies.

a $f(x) = 4x^{-3} - 2x^{\frac{1}{2}}$

c $f(x) = x^3 \sqrt{x}$

b $f(x) = x(x^{1,3} + x^{-2})$

d $f(x) = \frac{1}{x^2} + 5x$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-2.

T-4 Onderzoekers hebben een aantal insecten in een afgesloten ruimte gebracht. Het aantal insecten blijkt redelijk benaderd te kunnen worden met de functie

$$N(t) = 1500 - \frac{600}{2 + 3t}. \text{ Hierin is } N \text{ het aantal insecten en } t \text{ de tijd in dagen.}$$

a Hoeveel insecten hebben de onderzoekers in de afgesloten ruimte gebracht?

b Neemt het aantal insecten volgens het functievoorschrift toe?

Licht je antwoord toe.

c Bereken na hoeveel dagen het aantal insecten meer dan 1490 is.

d Hoeveel insecten zijn er op den duur in de afgesloten ruimte?

Licht je antwoord toe.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-3.

T-5 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{4 - 2,7^{-x}}$.

a Uit welke schakels is $f(x)$ samengesteld?

b Beredeneer met behulp van de schakels dat $f(x)$ op den duur tot 2 nadert.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-4.

T-6 Geef de afgeleide van de volgende functies.

a $h(t) = (2t + 3)^4$

d $f(x) = 2(x^2 + 10)^2$

b $K(p) = \sqrt{2 - 5p}$

e $g(t) = \sqrt{3t^4 + 4t}$

c $w(q) = \frac{2}{3q + 6}$

f $h(p) = \frac{3}{2(p - 1)}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-5.

T-7 Gegeven is de functie $g(t) = \frac{1000}{t + 8} - \frac{5000}{(t + 8)^2} + 8$.

- a** Naar welke waarde daalt de grafiek van g op den duur?
Licht je antwoord toe met behulp van het functievoorschrift.
- b** Bereken $g'(t)$.
- c** Onderzoek met behulp van $g'(t)$ vanaf welke waarde van t de grafiek van g afnemend daalt.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-6.

T-8 Op de marketingafdeling van een fabriek wordt een onderzoek gedaan naar de opbrengst van pas op de markt gebrachte artikelen.
Voor het verband tussen het aantal verkochte artikelen q en de opbrengst TO

$$\text{geldt } TO = 20000 - \frac{10^7}{q + 500}$$

- a** Bereken voor welke waarde van q de opbrengst gelijk is aan 10 000 euro.
- b** Bereken de afgeleide functie van TO .
- c** Gebruik de afgeleide om aan te tonen dat bij een opbrengst van 10 000 euro de opbrengst nog niet maximaal is.
- d** Onderzoek of er in deze situatie een aantal artikelen bestaat waarvoor de opbrengst maximaal is.

T-9 Een blok ijs heeft de vorm van een kubus met ribbe 10 cm. Het blok ijs wordt op een plek gezet waar het ijs gelijkmatig begint te smelten. Neem aan dat het blok ijs hierbij steeds de vorm van een kubus blijft houden. Verder gaat het smelten in een zodanig tempo dat de ribben per minuut een halve millimeter korter worden.

- a** Hoe groot is de lengte van een ribbe na zes minuten?
Hoe groot is het volume van het blok ijs na die tijd?
- b** Geef een formule voor het verband tussen de lengte r van een ribbe in mm en de tijd t in minuten.
- c** Geef een formule voor het verband tussen het volume V in mm^3 en de tijd t in minuten.
- d** Geef een formule voor de snelheid waarmee het volume V van het blok ijs verandert na t minuten.
- e** Op welk tijdstip verandert het volume V drie keer zo langzaam als bij het begin van het smeltproces?



Extra oefening - Basis

B-1 Schrijf de volgende functies in de vorm $f(x) = b \cdot x^a$. Rond b eventueel af op twee decimalen.

a $f(x) = x^{-3} \cdot x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{-\frac{3}{5}}$

c $f(x) = (0,12 \cdot x^{4,3})^{-3}$

b $f(x) = \left(3x^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{4}{5}}$

d $f(x) = \left(\frac{1}{12} x^{\frac{1}{12}}\right)^{-0,25}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-1.

B-2 Bereken de afgeleide van de volgende functies.

a $f(x) = 2x^3 - 7x^{-3}$

c $f(x) = x^{3,5}\sqrt{x}$

b $f(x) = x^6 \left(x^{-0,6} + \frac{1}{x} \right)$

d $f(x) = \frac{7}{x^3} + 3x^2$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-2.

B-3 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{7x - 56} - 4$ en $g(x) = \frac{1}{7x - 56} - 4$.

a Geef de coördinaten van het randpunt van de grafiek van f .

b Is dit punt ook een randpunt van de grafiek van g ? Licht je antwoord toe.

c Wat gebeurt er met de functiewaarde van f en met die van g als de waarde van x steeds groter wordt?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-3.

B-4 Gegeven is de functie $f(t) = \frac{1}{4 - t^{-2}}$

a Uit welke schakels is $f(t)$ samengesteld?

b Beredeneer met behulp van de schakels dat $f(t)$ op den duur naar $\frac{1}{4}$ nadert.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-4.

B-5 Geef de afgeleide van de volgende functies.

a $p(t) = (-7t - 5)^6$

c $f(x) = -(x^5 - 1)^2$

b $Z(p) = \sqrt{\frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{6}p^2}$

d $f(p) = \frac{-5}{\frac{1}{2}p - 4}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-5.

B-6 Gegeven is de functie $g(t) = 0,000013t^3 - 0,078t^2 + 200t + 30000$.
Onderzoek met behulp van $g'(t)$ bij welke waarde van t de grafiek van g overgaat van afnemend stijgend in toenemend stijgend.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-6.

Extra oefening - Gemengd

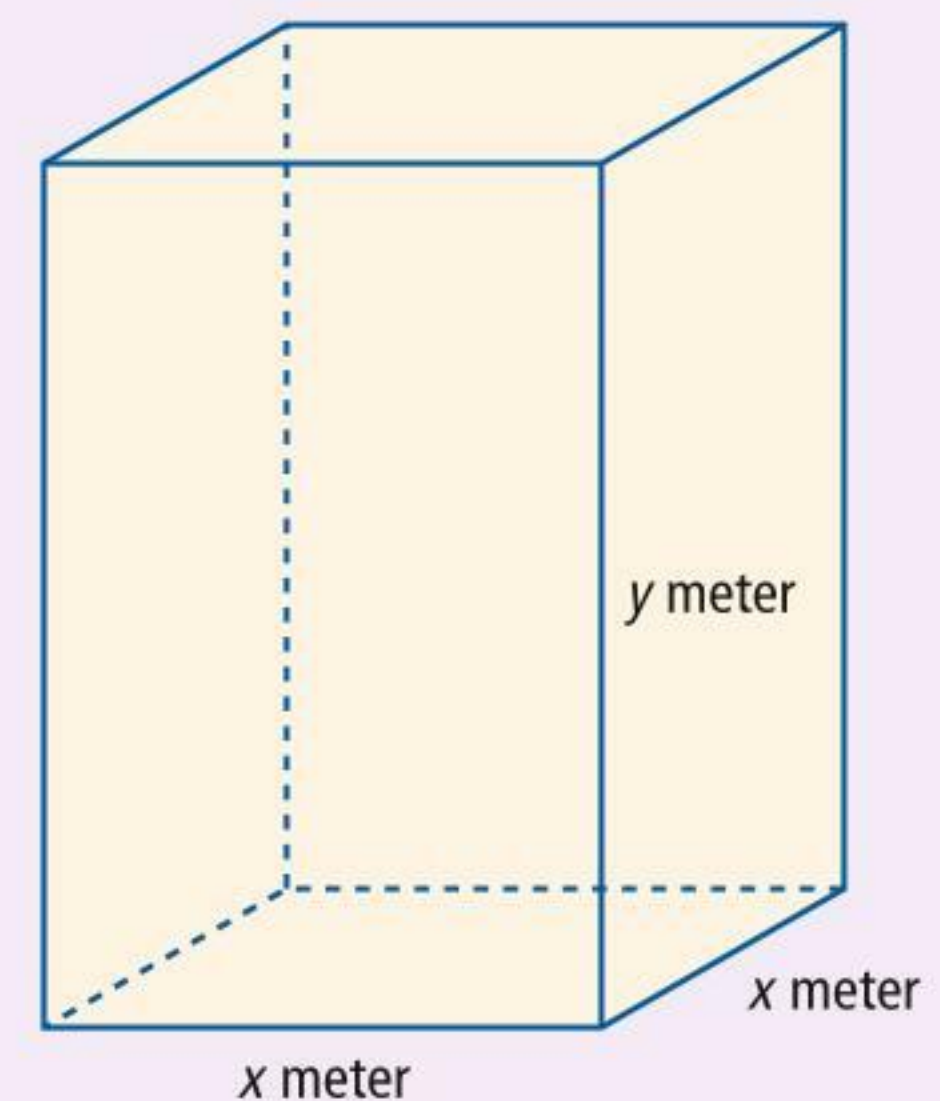
- G-1** Een timmerman krijgt de opdracht een kist zonder deksel te maken. De vierkante bodem bestaat uit materiaal dat € 36,- per m² kost. De zijanten worden begroot op € 27,- per m². De totale kosten die aan materiaal mogen worden uitgegeven zijn maximaal € 432,-.

- a** Schrijf de kosten van de bodem als functie van x .
- b** Druk de kosten van de vier zijanten samen uit in x en y .
- c** Als de totale kosten € 432,- zijn, geldt voor het verband

tussen x en y de formule $y = \frac{12 - x^2}{3x}$. Toon dat aan.

- d** Toon aan dat je de inhoud van de kist kunt berekenen met de functie $I(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$.

- e** Bereken $I'(x)$.
- f** Bij welke afmetingen is de inhoud maximaal? Bereken de maximale inhoud.
- g** De waarde van x neemt toe van 0 tot 2. Beredeneer dat de inhoud van de kist dan afnemend stijgend is.



- G-2** Bij het verteren van voedsel spelen colibacteriën een belangrijke rol. Zij komen voor in de darmen. In laboratoria wordt veel onderzoek gedaan naar de groei van populaties van colibacteriën. Daarbij gebruikt men een kweekvloeistof waarmee men de omstandigheden zoals die in de darmen voorkomen, zoveel mogelijk nabootst. Bij constante temperatuur blijken deze populaties exponentieel te groeien. Men meet de verdubbelingstijd (V), dat is de tijd in uren die het experiment moet duren om twee keer zoveel bacteriën te krijgen. Uit waarnemingen blijkt dat V afhangt van de ingestelde temperatuur (T) in graden Celsius. In de figuur hiernaast is het resultaat van de waarnemingen in beeld gebracht.

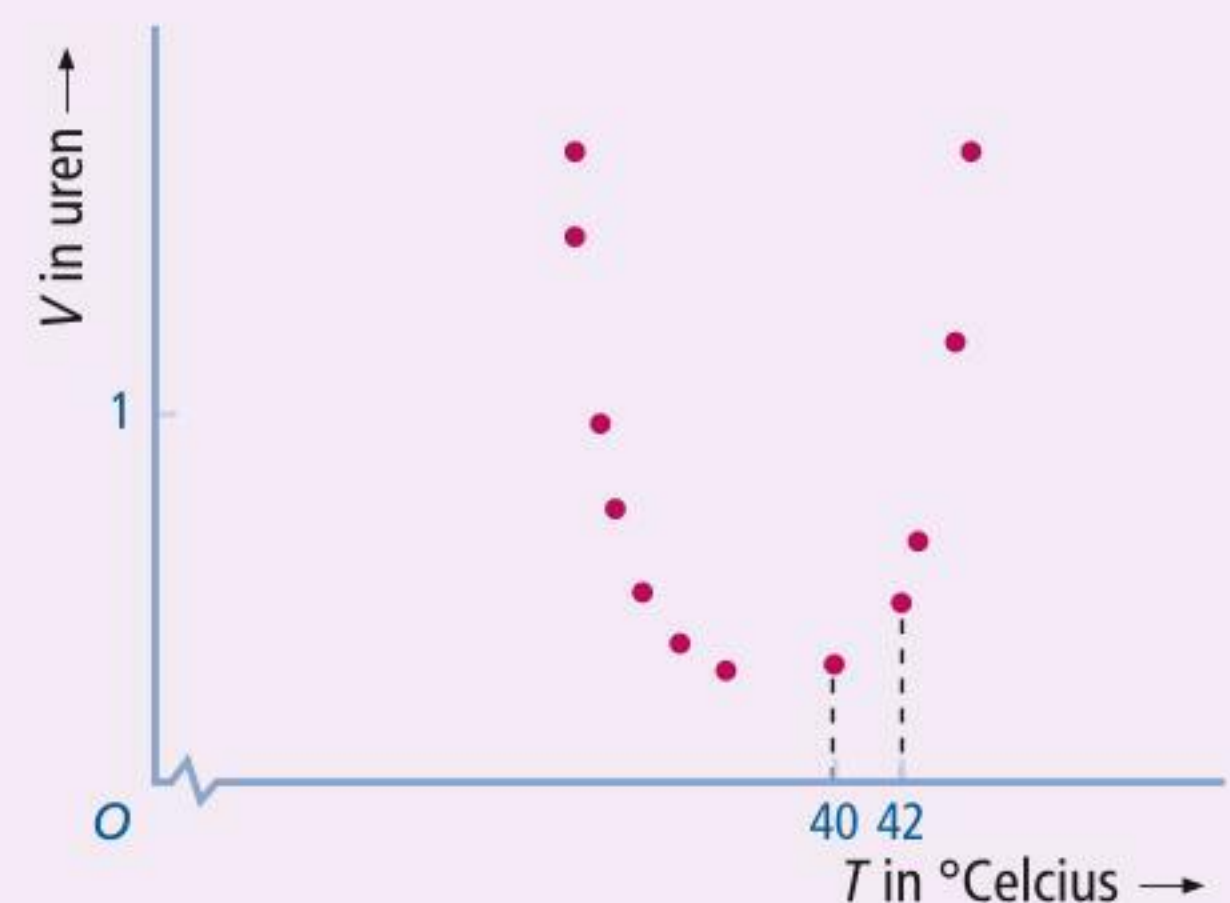
- a** Is de groei van de populatie bij 42 °C sterker dan de groei bij 40 °C? Licht je antwoord toe met behulp van de figuur.
- b** Binnen het temperatuurgebied waarin de waarnemingen zijn gedaan, blijkt men het verband tussen T en V redelijk te

kunnen benaderen met de formule: $V = \frac{16,9}{-T^2 + 75T - 1350}$

Bereken $V'(T)$.

- c** Bereken met behulp van $V'(T)$ bij welke temperatuur de groei volgens de formule het sterkst is.

Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 1994, tijdvak 1



Uitdagende opdrachten

U-1 Een bedrijf produceert USB-sticks. De calculatieafdeling van het bedrijf heeft de volgende formule opgesteld voor de productiekosten K in duizenden euro's bij een productie van q duizend USB-sticks: $K = \frac{1}{6} q^3 - 2q^2 + 10q$

- a** Onderzoek met behulp van de afgeleide voor welke waarden van q de grafiek van K afnemend stijgend.
- b** De USB-sticks worden voor € 6,50 per stuk aan de detailhandel verkocht. Bereken de maximale winst die volgens de calculatieafdeling behaald kan worden met de productie van de USB-sticks.

U-2 Door een technische storing in de airconditioning van een groot gebouw neemt het zuurstofgehalte tijdelijk af. De technische staf heeft voor het verloop van het zuurstofgehalte het volgende model

$$\text{opgesteld. } Z = 200 - 2000(3t + 10)^{-1} + 20000(3t - 10)^{-2}.$$

Hierin is t de tijd in minuten, gerekend vanaf het moment dat de stroomstoring begon, en is Z het aantal cm^3 zuurstof per liter lucht op het tijdstip t . Op het tijdstip $t = 0$ is het zuurstofniveau normaal.

- a** Na verloop van tijd nadert het zuurstofgehalte weer tot het normale niveau. Toon aan dat het model hiermee in overeenstemming is.
- b** Beredeneer dat het zuurstofgehalte vanaf het moment van de stroomstoring direct begint te dalen.
- c** Laat zien dat de afgeleide van Z te schrijven is in de vorm

$$Z' = 6000 \cdot \frac{3t - 10}{(3t + 10)^3} \text{ en bereken het tijdstip waarop het zuurstofgehalte}$$

volgens het model minimaal is.

U-3 De meeste roofdieren proberen iedere dag hun voedsel zo snel mogelijk te vangen. Deze opdracht gaat over het wiskundig model dat daarbij gemaakt kan worden. In dat model geeft de opbrengstfunctie het verband tussen de hoeveelheid voedsel r en de tijd t in uren die nodig is om die hoeveelheid voedsel te vangen. De hoeveelheid voedsel r wordt uitgedrukt in energie-eenheden (ee).

Een bepaalde roofdiersoort is 1 uur onderweg naar zijn jachtgebied (een half uur heen en een half uur terug). Voor deze roofdieren is de opbrengstfunctie gegeven door de formule $r = 4\sqrt{t - 1}$ als $t > 1$.

Deze opbrengstfunctie heeft voor $t > 1$ de volgende twee eigenschappen:

- > een langere tijd levert altijd een hogere opbrengst op;
- > de toename van de opbrengst wordt steeds geringer naarmate t groter wordt.

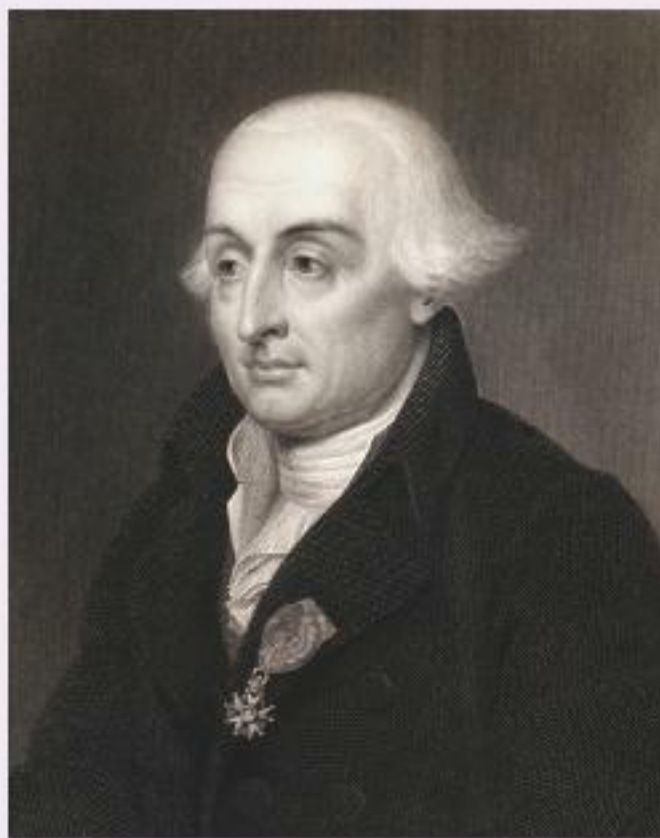
Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de opbrengstfunctie aan beide eigenschappen voldoet.

Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2006, tijdvak 1

Middelwaardestelling

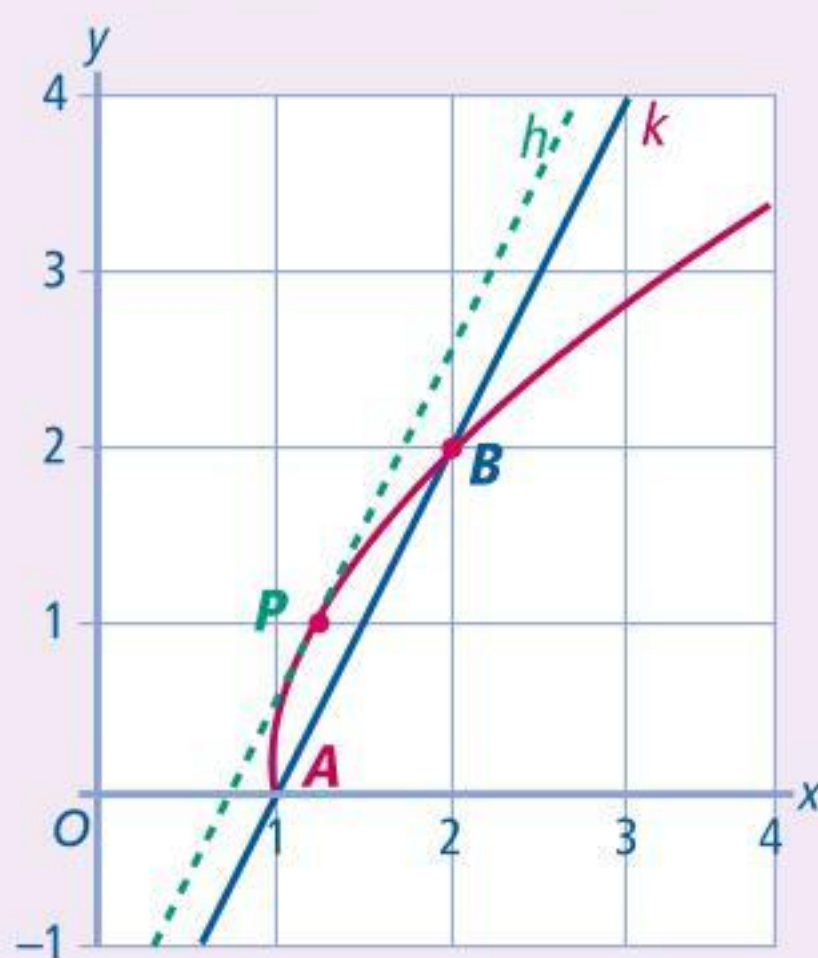
Lagrange

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) was een wiskundige en astronoom, geboren in Turijn met een Franse vader. Hij werkte later in Frankrijk en Pruisen. Hij ontwikkelde zich tot een van de grootste twee wiskundigen van de 18e eeuw (samen met Euler). Hij werkte onder andere aan getaltheorie, differentiaalrekening, mechanica en astronomie. Hij formuleerde de middelwaardestelling.



De middelwaardestelling houdt het volgende in:

Als twee punten A en B op de grafiek van een differentieerbare functie f liggen, ligt er tussen A en B een punt P op de grafiek waarin de raaklijn aan de grafiek evenwijdig is met de lijn AB .



Hierboven is de grafiek getekend van de functie $f(x) = 2\sqrt{x-1}$. Op de grafiek liggen de punten $A(1, 0)$ en $B(2, 2)$. De lijn door AB is de grafiek van $k(x) = 2x - 2$. Als je de grafieken hierboven bekijkt, zijn er twee dingen die opvallen.

- > Er is een punt P waarin de raaklijn evenwijdig is aan de lijn door A en B . Zo te zien is $P(1,25; 1)$.
- > Tussen de punten A en B zie je de verticale afstand tussen de grafiek van f en die van k eerst toenemen en daarna afnemen. Er is dus een punt waar de afstand maximaal is. Is dat ook punt P ?

In de tabel hieronder vind je de functies f en k en hun verschil $f - k$ en kun je zien dat de maximale afstand bij $x = 1,25$ ligt.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS + FOR Δ Tb1				
X	Y1	Y2	Y3	
1	0	0	0	
1.125	.70711	.25	.45711	
1.25	1	.5	.5	
1.375	1.2247	.75	.47474	
1.5	1.4142	1	.41421	
1.625	1.5811	1.25	.33114	
1.75	1.7321	1.5	.23205	
1.875	1.8708	1.75	.12083	
2	2	2	0	
2.125	2.1213	2.25	-.1287	
2.25	2.2361	2.5	-.2639	
X=1.25				

Is het toeval dat de afstand het grootst is bij $x = 1,25$?

Dat ga je in de volgende opdracht onderzoeken en dan heb je meteen het punt P gevonden, waar de middelwaardestelling van spreekt.

Opdracht

- Gegeven $f(x) = 2\sqrt{x-1}$ en $k(x) = 2x - 2$. Los op $f'(x) = 2$.
- Ga na dat de verticale afstand van een punt op de grafiek tot de lijn AB gegeven wordt door $g(x) = f(x) - k(x)$.
- Laat zien dat $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 2$.
- Heeft g een maximum of minimum?
- Leg uit: Het punt P waar de raaklijn evenwijdig is aan lijn AB , is ook het punt waar de verticale afstand van een punt op de grafiek tot de lijn AB het grootst is.

Vaardigheden 4

Exponentiële- en logaritmische verbanden herleiden

Voor het rekenen met logaritmen gelden de rekenregels hiernaast. Bij deze regels is $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$ en $b > 0$. Soms is het nodig om een getal eerst als een logaritme te schrijven. Zo kun je bijvoorbeeld 3 schrijven als ${}^2\log(2^3) = {}^2\log(8)$ maar ook als ${}^5\log(5^3) = {}^5\log(125)$.

$$1 \quad {}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$$2 \quad {}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$3 \quad p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

Voorbeeld 1

Schrijf als één logaritme $4 + 2 \cdot {}^3\log(5)$.

Oplossing

$$4 + 2 \cdot {}^3\log(5) =$$

$${}^3\log(3^4) + 2 \cdot {}^3\log(5) = 4 = {}^3\log(3^4)$$

$${}^3\log(81) + {}^3\log(5^2) = \quad (\text{regel 3})$$

$${}^3\log(81) + {}^3\log(25) =$$

$${}^3\log(81 \cdot 25) = \quad (\text{regel 1})$$

$${}^3\log(2025)$$

Voorbeeld 2

Schrijf als één logaritme ${}^4\log(2x + 1) - \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(x)$.

Oplossing

$${}^4\log(2x + 1) - \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(x) =$$

$${}^4\log(2x + 1) - {}^4\log\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \quad (\text{regel 3})$$

$${}^4\log(2x + 1) - {}^4\log(\sqrt{x}) =$$

$${}^4\log\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{x}}\right) \quad (\text{regel 2})$$

- 1 Schrijf als één logaritme en vereenvoudig, indien mogelijk, het antwoord.
 - a $2 - 4 \cdot {}^5\log(3)$
 - b $1 - \log(2) + \log(5)$
 - c $2 \cdot {}^5\log(3) + {}^5\log(2)$
 - d $\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(16) - {}^3\log(12)$
 - e $2 \cdot {}^4\log(x) - \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(x)$
 - f $\log(2a - 1) + \log(a + 6)$
 - g ${}^7\log(4k - 6) - 3 \cdot {}^7\log(k)$
 - h $3 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(P) - {}^{\frac{1}{2}}\log(\sqrt{P}) - 3$
- 2a Gegeven is de functie $f(x) = -1 + \log(3x - 2)$. Herleid het functievoorschrift van de functie f tot de vorm $f(x) = \log(ax + b)$.
 - b Herleid het functievoorschrift van $g(x) = -3 + {}^2\log(8x^4)$ tot de vorm $g(x) = a \cdot {}^2\log(x)$.
 - c Herleid het functievoorschrift van $h(x) = 1 + 2 \cdot \log(x) - \log(x^4 + 5)$ tot een functievoorschrift van de vorm $h(x) = \log(\dots)$.

3 Bij asfaltbetonwegen met dicht asfaltbeton (DAB-wegen) geldt voor het verband tussen de snelheid v (in km/u) van het verkeer en het geluidsniveau D (in decibel) van het verkeer bij benadering de volgende formule: $D = 4 + 36 \cdot \log(v)$.

- a** In een bebouwde kom is de maximaal toegestane verkeerssnelheid 50 km/u. Bereken het maximale geluidsniveau in de bebouwde kom.
b Bij welke snelheid is het geluidsniveau 75 dB?
c Herleid de gegeven formule tot de vorm $D = \log(a \cdot v^b)$.

4 Schrijf in de vorm $N(t) = b \cdot g^t$.

- a** $N(t) = 3^{3+2t}$ **d** $N(t) = 4^{-2-t}$
b $N(t) = 2 \cdot 9^{\frac{1}{2}t}$ **e** $N(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-3t}$
c $N(t) = 5 \cdot 3^{t-2}$ **f** $N(t) = 16^{\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}}$

- 5a** Gegeven zijn de formules $u = 6 \cdot (0,6)^t$ en $v = 7,2 \cdot (0,6)^{t-1}$. Laat algebraïsch zien dat geldt: $v = 2u$.
b Gegeven zijn de formules $S = 10^{0,4t+2}$ en $U = p \cdot 10^{0,4t}$. Bereken de waarde van p waarbij geldt dat voor elke waarde van t geldt dat: $S = 4U$.

Voorbeeld

Schrijf $N(t) = 4 \cdot 5^{-2t+3}$ in de vorm $N(t) = b \cdot g^t$.

Oplossing

$$\begin{aligned} N(t) &= 4 \cdot 5^{-2t} \cdot 5^3 \quad (\text{regel } g^{a+b} = g^a \cdot g^b) \\ &= 4 \cdot 5^3 \cdot (5^{-2})^t \quad (\text{regel } g^{a \cdot b} = (g^a)^b) \\ &= 500 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^t \quad (\text{regel } g^{-a} = \frac{1}{g^a}) \end{aligned}$$

Naast de rekenregels gebruik je soms de hoofdeigenschap van logaritmen: uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$ en omgekeerd. Deze gebruik je bijvoorbeeld om een formule met logaritmen te herleiden naar een formule met exponenten of andersom.

Voorbeeld 1

$$y = \frac{1}{5} \cdot 2^{x-4}, \text{ druk } x \text{ uit in } y.$$

Oplossing

$$\begin{aligned} 2^{x-4} &= 5y \\ x - 4 &= {}^2\log(5y) \\ x &= 4 + {}^2\log(5y) \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

$$y = 4 - {}^3\log(5x), \text{ druk } x \text{ uit in } y.$$

Oplossing

$$\begin{aligned} {}^3\log(5x) &= 4 - y \\ 5x &= 3^{4-y} \\ x &= \frac{1}{5} \cdot 3^{4-y} \end{aligned}$$

6 Druk x uit in y .

- a** $y = 3 \cdot 5^{x+2}$ **d** $y = 2 + 5 \cdot \log\left(\frac{1}{2}x\right)$
b $y = 3 \cdot {}^5\log(x+2)$ **e** $y = -12 + 15 \cdot 7^{2x-1}$
c $y = -1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **f** $y = -4,5 + 1,6 \cdot {}^7\log(4x-3)$

7 Tussen de variabelen S en T bestaat het volgende logaritmische verband: ${}^2\log(2S) = 3 - {}^2\log(3T)$.

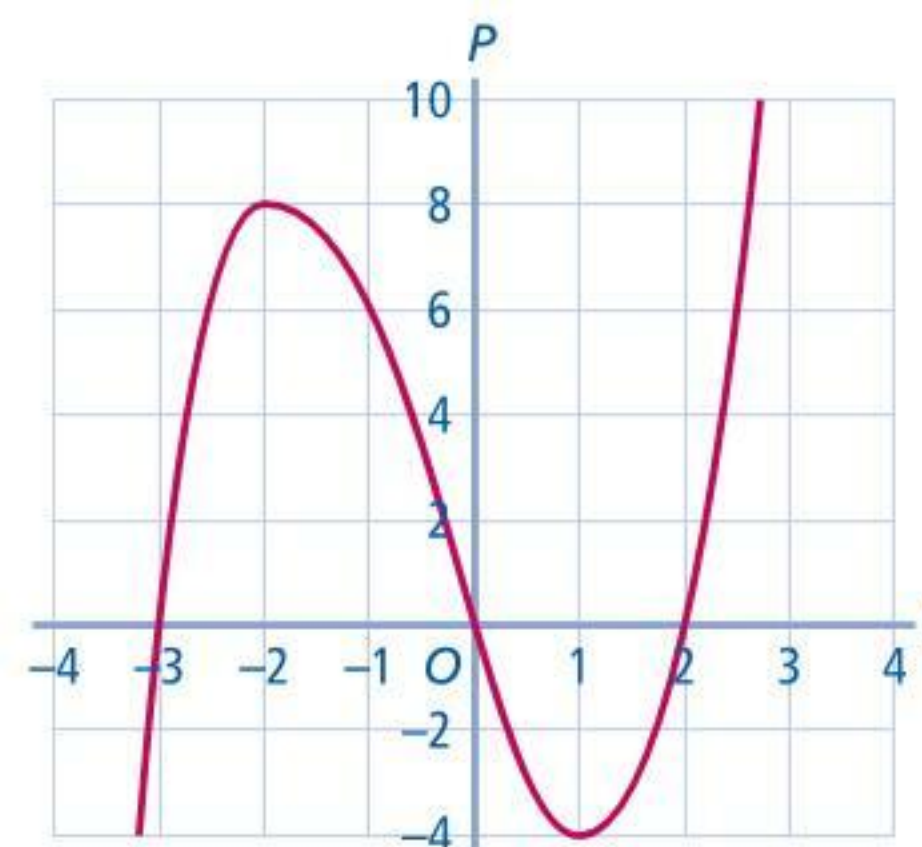
- a** Herleid de gegeven formule tot de vorm ${}^2\log(\dots) = 3$.
b De formule die je opdracht a gevonden hebt, is ook te schrijven als $S \cdot T = a$. Bereken algebraïsch de waarde van a .

Redeneren met exponentiele en logaritmische verbanden

- 8** Gegeven is de formule $P = 4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$.
- a** Beredeneer tot welke waarde P nadert als t steeds groter wordt.
- b** Leg uit dat P steeds groter wordt als t steeds kleiner wordt.
- c** Onderzoek het gedrag van $Q = 4 - 3 \cdot 2^t$ als t steeds groter wordt en als t steeds kleiner wordt.
- 9** Gegeven is de formule $Z = 4,6 - 3,7 \cdot \log(t)$.
- a** Welke waarden kan t aannemen?
- b** Leg uit wat er gebeurt met Z als t steeds dichterbij 0 nadert?
- c** Beredeneer of de grafiek die bij dit verband hoort stijgend of dalend is.
- 10** In een meer van 50 hectare groeit een waterplant. De oppervlakte A die door de plant wordt ingenomen wordt weergegeven door de formule $A = \frac{50}{1 + 4 \cdot 1,04^{-2t}}$.
- Hierin is A de oppervlakte in hectare die na t weken is begroeid.
- a** Hoe groot is de begroeide oppervlakte na vier weken?
- b** Beredeneer met behulp van de formule dat de grafiek van A stijgend is.
- c** Bereken na hoeveel weken 25 hectare van het meer begroeid is.
- d** Beredeneer met de formule dat de oppervlakte op den duur 50 hectare nadert.

Differentiëren

- 11** Differentieer de volgende functies.
- a** $f(x) = 30x + 5x^7 - 30$
- b** $A(t) = 0,001t^{100} - 100 + 0,01t$
- c** $K(q) = 2(-q + 1) + q$
- 12** Differentieer:
- a** $f(p) = (p - 3)^2$
- b** $W(z) = (z^2 - 4)(z^2 + 4)$
- c** $T(t) = (t^3 - 4)^5$
- 13a** $A = \sqrt{8t^2 + 6}$; bepaal $\frac{dA}{dt}$.
- b** $W = \frac{3}{s^4}$; bepaal $\frac{dW}{ds}$.
- c** $H = 5(3 - \sqrt{p})^6$; bepaal $\frac{dH}{dp}$.
- d** $G = \frac{7}{2\sqrt{h+2}}$; bepaal $\frac{dG}{dh}$.
- 14** Hiernaast is de grafiek getekend van $P(t) = t^3 + t^2 - 6t$.
- a** Stel de vergelijking op van de raaklijn in het punt A van de grafiek met $t = 1$.
- b** Bereken met behulp van de afgeleide functie bij welke waarden van t de grafiek van P een top heeft. Rond je antwoord af op twee decimalen.
- c** Bereken met behulp van de afgeleide voor welke waarden van t de helling gelijk is aan 2.

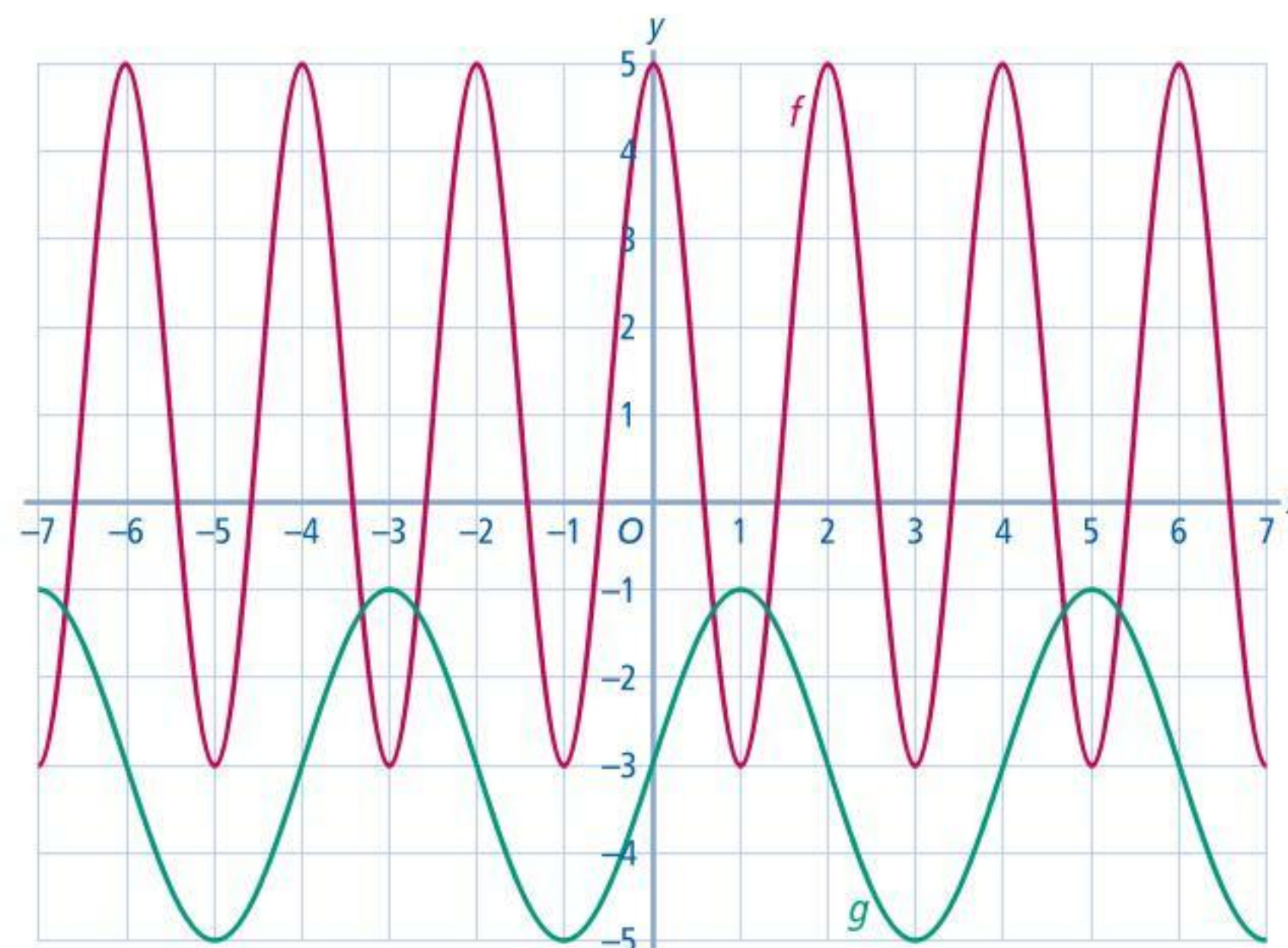


Periodieke functies

15 Gegeven zijn de grafieken van de functies f en g .

a Geef van elk van deze grafieken de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.

b Stel de functievoorschriften op van f en g .



16 Geef de periode, amplitude en evenwichtsstand van de grafieken die bij de volgende formules horen.

a $A = 8 - 3 \sin(4(t + 3))$

b $B = 200 + 450 \sin(\pi k)$

c $C = 0,3 \sin(4 - 0,1x) - 0,2$

17a Van de functie $f(x) = a \sin(bx)$ is de amplitude 5 en de periode $\frac{3}{4}\pi$.

Bereken a en b .

b Van een sinusoïde liggen de toppen op $(\frac{1}{4}\pi, -3)$ en $(\frac{3}{4}\pi, 3)$. Geef een passend functievoorschrift.

18 Gegeven is de grafiek van $f(x) = \sin(\frac{1}{3}x)$ op het interval $[-25, 25]$.

a Geef de periode en de amplitude.

b Voor welke waarden van x geldt op het gegeven interval dat $f(x) = -1$?

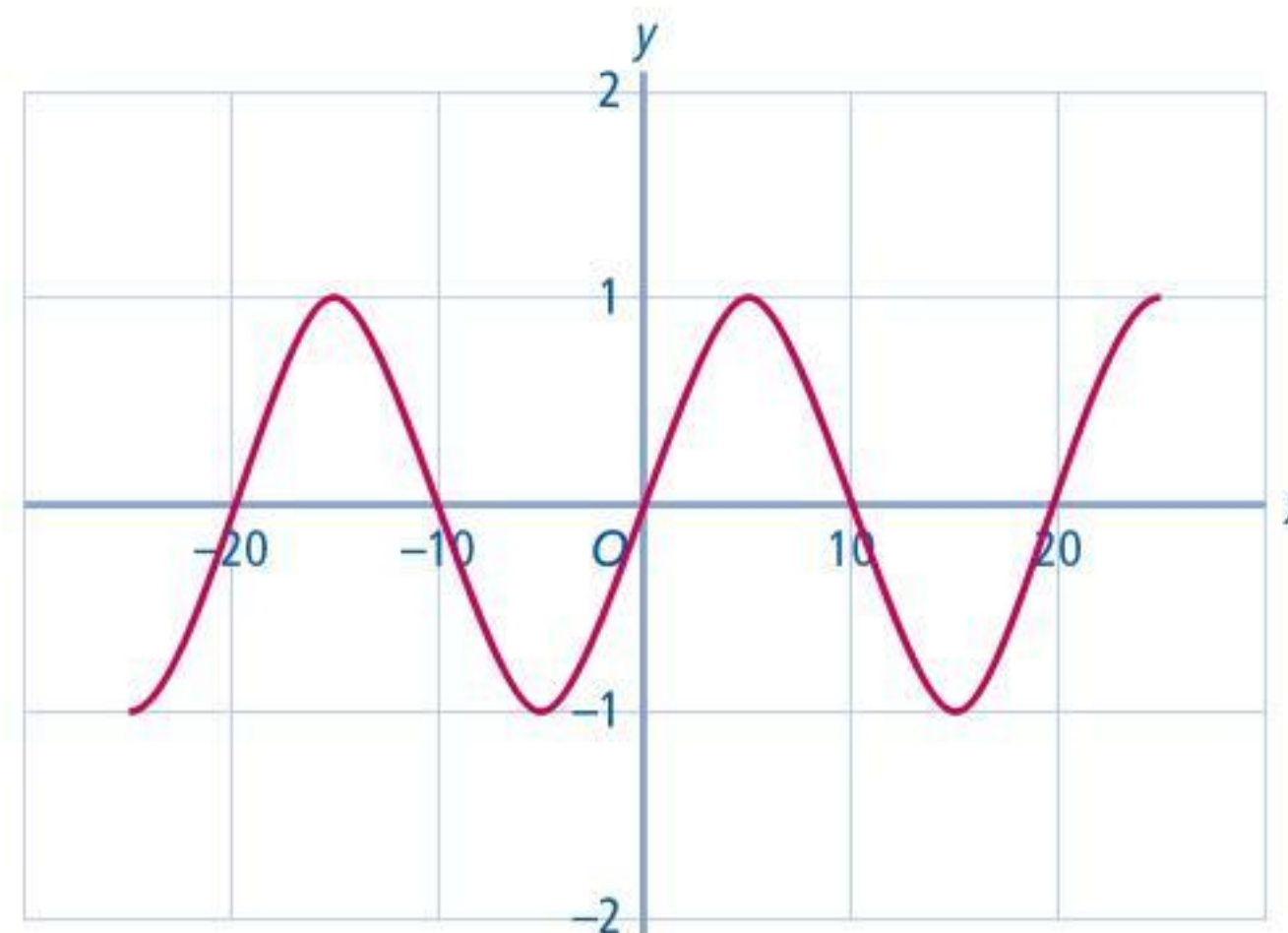
c De grafiek van f wordt ten opzichte van de y -as vermenigvuldigd met 3.

Bij deze nieuwe grafiek hoort de functie g .

Geef een voorschrift van g .

d De grafiek van f wordt 2 naar rechts verschoven.

Geef een passend functievoorschrift bij deze nieuwe grafiek.



19 De hoeveelheid lucht in de longen is bij een regelmatige ademhaling een periodiek verschijnsel waarvoor bij een persoon bij benadering de volgende formule geldt: $V = 2,5 + 1,8 \sin(0,4\pi t)$. Hierin is t in seconden en V in liters.

a Bereken hoeveel lucht zich in de longen bevindt als $t = 3$.

b Hoe vaak wordt volgens deze formule in één minuut in- en uitgeademd?

c Bereken op welke tijdstippen tussen 0 en 10 seconden er zich precies 3 liter lucht in de longen bevindt.

d Bij elke ademhaling is enige tijd minder dan één liter lucht in de longen.

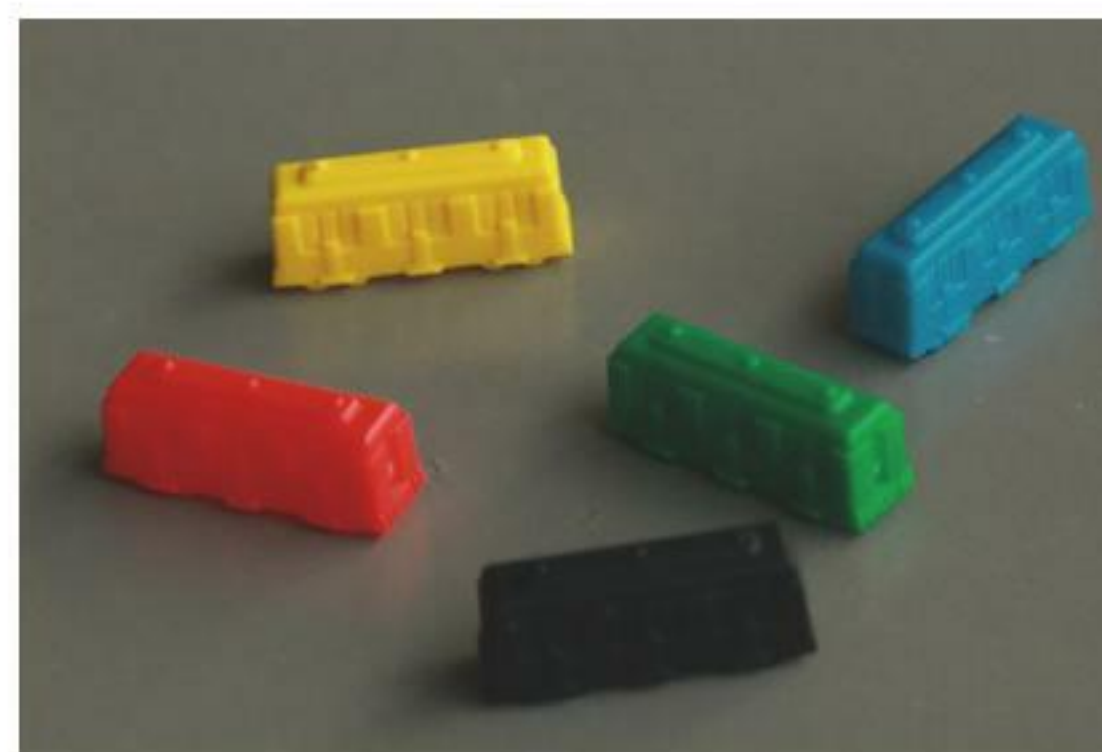
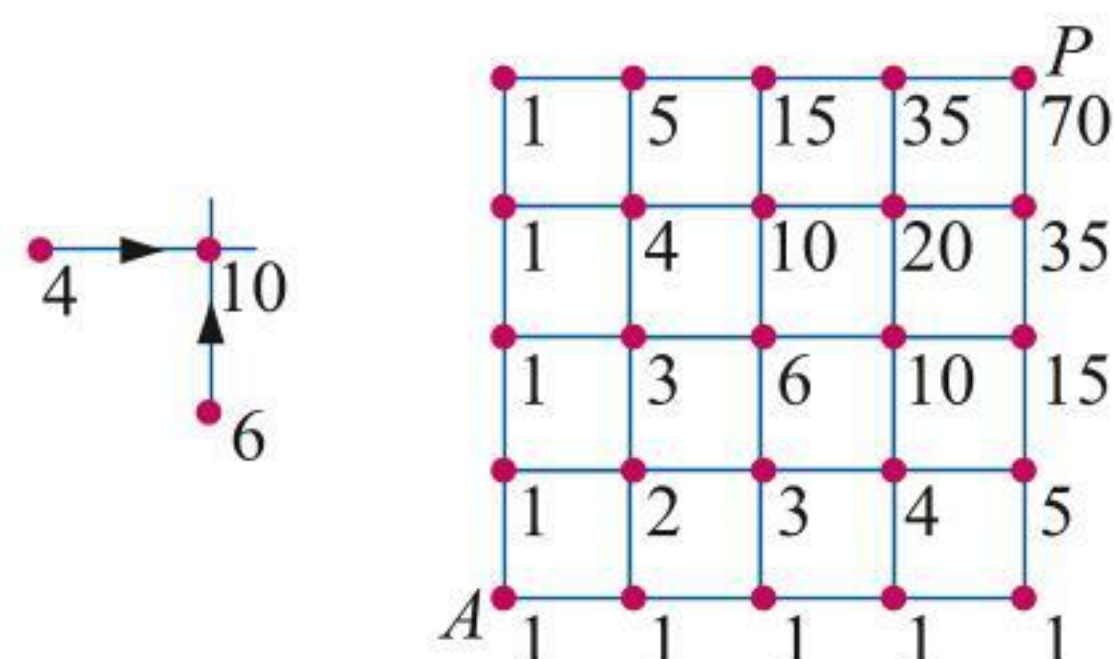
Bereken hoeveel seconden dit het geval is.

Systematisch tellen

Een faculteitsboom is een boomdiagram waarin na elk keuzemoment het aantal takken één minder wordt.
Bij een machtsboom blijft bij elk keuzemoment het aantal takken gelijk.

- 20** Bij het bordspel Ticket to ride horen vijf kleuren treintjes: blauw, rood, groen, geel en zwart.
- a** Het spel wordt gespeeld met vijf spelers A, B, C, D en E. Elke speler krijgt een kleur toebedeeld. Een mogelijke verdeling van de kleuren over de spelers A t/m E is bijvoorbeeld:
rood – groen – geel – blauw – zwart.
Bereken het aantal verschillende rijtjes van de vijf kleuren.
- b** Van elke kleur zijn 45 treintjes. Sietze stopt ze in een zak en pakt er blindelings eentje uit. Hij noteert de kleur en stopt het treintje terug in de zak. Hij doet dit in totaal acht keer. Een rijtje dat op deze manier kan ontstaan is bijvoorbeeld: bl-zw-ro-ro-ge-gr-bl-ro.
Hoeveel verschillende rijtjes kunnen op deze manier ontstaan?
- 21** Er wordt acht keer gegooid met een dobbelsteen, met als resultaat drie keer een even en vijf keer een oneven aantal ogen. Een mogelijke volgorde hierbij is e-o-o-e-o-o-o-e.
- a** Schrijf twee andere volgordes op.
- b** Je kunt een volgorde ook aangeven met een route in een rooster waarbij het gooien van een even aantal een stap naar rechts inhoudt en het gooien van een oneven aantal met een stap omhoog. In welk roosterpunt eindigt elke route uit opdracht a als je begint in het punt (0,0) ?
- c** In de figuur hiernaast kun je zien hoe het aantal routes is geteld met vier stappen naar rechts en vier stappen omhoog. Bereken op deze manier het aantal mogelijke volgordes van drie keer ‘even’ en vijf keer ‘oneven’.

Het aantal mogelijkheden om zes verschillende voorwerpen op volgorde te zetten is $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.
Bij het tien keer gooien met een munt zijn er $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{10} = 1024$ mogelijke uitkomsten.



Theorie

Een **combinatie** van 3 uit 10 is een keuze van een drietal uit een tiental: drie wel kiezen en zeven niet kiezen.
Een rooster is een geschikt telmodel om het aantal mogelijke drietallen te berekenen want drie kiezen uit tien komt overeen met: het aantal manieren om in een rooster drie stappen naar rechts en zeven stappen omhoog te doen.
Het totaal aantal mogelijke routes in een rooster vanuit (0, 0) naar (3, 7) wordt in de wiskunde genoteerd als $\binom{10}{3}$.
Dit getal kun je met je rekenmachine berekenen.

Voorbeeld

In een bak liggen 17 balletjes, genummerd van 1 tot en met 17. Je pakt zes balletjes uit de bak. Hoeveel mogelijke zestallen zijn er?

Oplossing

Je pakt 6 balletjes wel en 11 niet. Het aantal combinaties van 6 uit 17 is het aantal kortste routes in een rooster van (0,0) naar (6,11) en is gelijk aan

$\binom{17}{6}$. De rekenmachine geeft 12376.

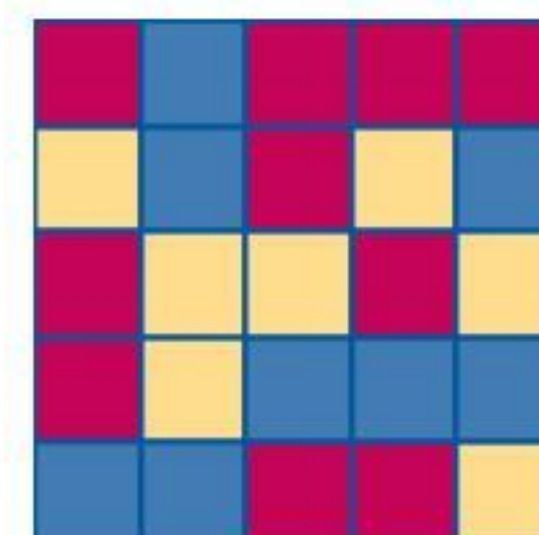
- 22a** Een korfbalwedstrijd heeft een einduitslag van $18 - 16$.
Bereken het aantal mogelijke scoreverlopen van $0 - 0$ naar deze eindstand.
- b** Iemand legt negen rode en zes witte knikkers naast elkaar voor zich neer.
Hoeveel verschillende rijtjes kan hij op deze manier maken?
- c** Een docent kiest willekeurig een groep van vier leerlingen uit een klas van 24 leerlingen.
Bereken het aantal verschillende mogelijke viertallen.
- d** De klas van 24 leerlingen wordt verdeeld in drie groepen, één van zeven, één van acht en één van negen leerlingen.

Leg uit dat je op $\binom{24}{7} \cdot \binom{17}{8} \cdot 1$ manieren de klas in deze drie groepen kunt verdelen.

- e** Bereken het aantal mogelijkheden om dezelfde klas te verdelen in een groep van zes, een groep van acht en een groep van tien leerlingen.
- 23** Bart heeft elf geldstukken in zijn portemonnee, die uit elf verschillende eurolanden afkomstig zijn.
- a** Bart beweert dat hij deze elf geldstukken op meer dan één miljoen manieren op een rijtje voor zich neer kan leggen. Of kop of munt boven komt te liggen doet er niet toe.
Laat met een berekening zien dat Bart gelijk heeft.
- b** De elf geldstukken bestaan uit drie van 50 eurocent, twee van 20 eurocent, vijf van 10 eurocent en één van 5 eurocent.
Bart pakt eerst één geldstuk van 50 eurocent, dan eentje van 20 eurocent, vervolgens eentje van 10 eurocent en tenslotte eentje van 5 eurocent. Hij legt de gepakte geldstukken in de volgorde waarin hij ze heeft getrokken, voor zich op een rijtje neer.
Bereken hoeveel verschillende rijtjes op deze manier kunnen ontstaan.
- c** Bart pakt in één greep drie van de vijf 10 eurocent geldstukken.
Bereken het aantal verschillende mogelijke drietallen.
- d** Bart pakt twee geldstukken van gelijke waarde.
Laat met een berekening zien dat er 14 verschillende tweetallen mogelijk zijn.
- e** Bart pakt drie, van waarde verschillende, geldstukken.
Bereken hoeveel verschillende drietallen mogelijk zijn.



- 24** De 25 leerlingen van een brugklas gaan een kunstwerk maken.
Iedere leerling verft een vierkant bordje in de kleur rood, geel of blauw.
Daarna worden de bordjes samengevoegd tot één groot vierkant.
Hiernaast zie je een voorbeeld van een mogelijk kunstwerk dat op deze manier kan ontstaan.
- a** Hoeveel verschillende kunstwerken kunnen de leerlingen maken?
- b** Door de leerlingen zijn acht rode bordjes gemaakt, zeven gele en tien blauwe. Daarvan kun je een kunstwerk te maken zoals in het voorbeeld hiernaast.
Hoeveel verschillende kunstwerken zijn er mogelijk met deze aantallen rode, gele en blauwe bordjes?





Keuzeonderwerpen



Hoofdstuk 9 - Perspectief
224



Praktische opdracht - Wereldrecords
242



Data bewerken en presenteren in Excel
246



Praktische opdracht -Bevolkingsonderzoek
252



Schijn bedriegt

De werkelijkheid lijkt op een foto, tekening of schilderij soms anders dan je denkt. Zo zijn de personen op de foto (die niet bewerkt is) in werkelijkheid ongeveer even groot.

Wat zou hier aan de hand kunnen zijn?

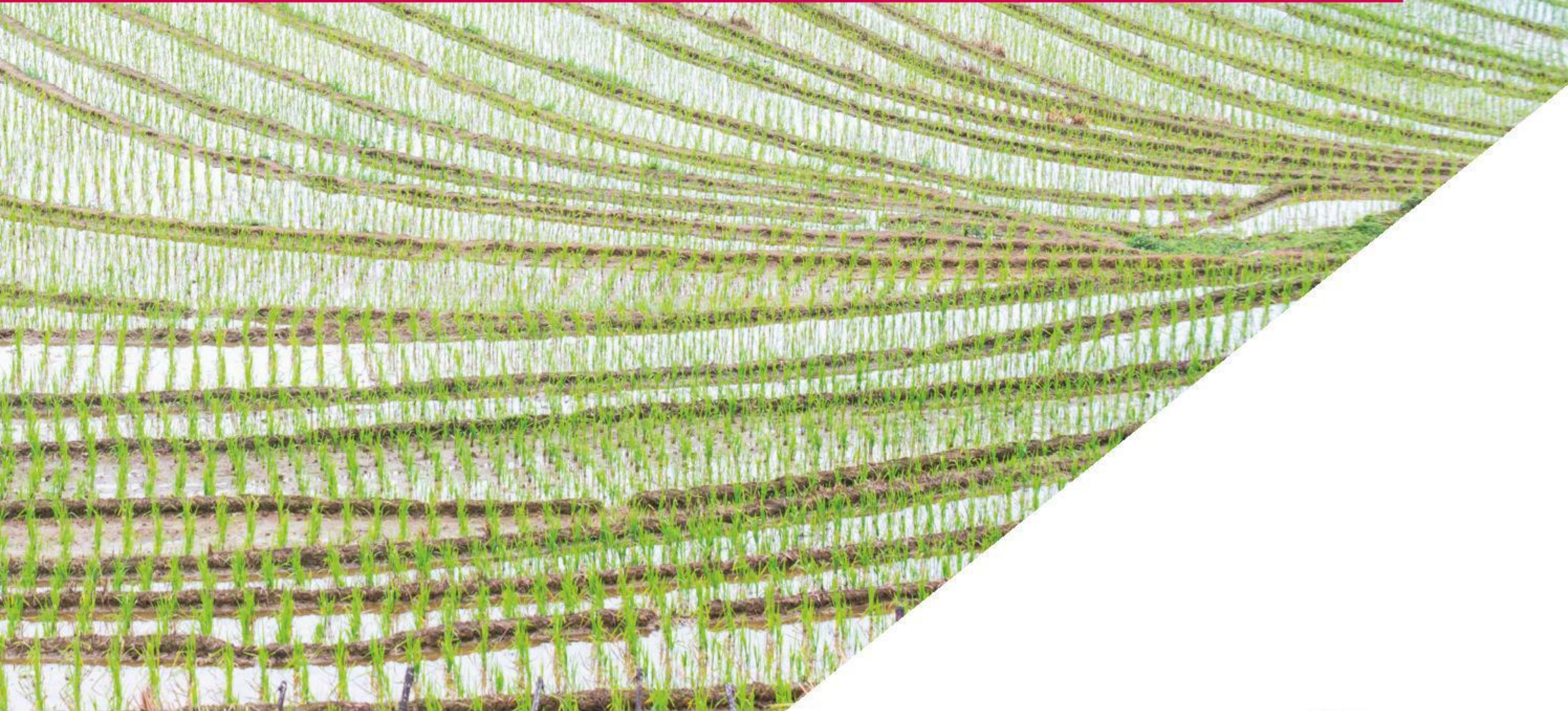


Hoofdstuk 9

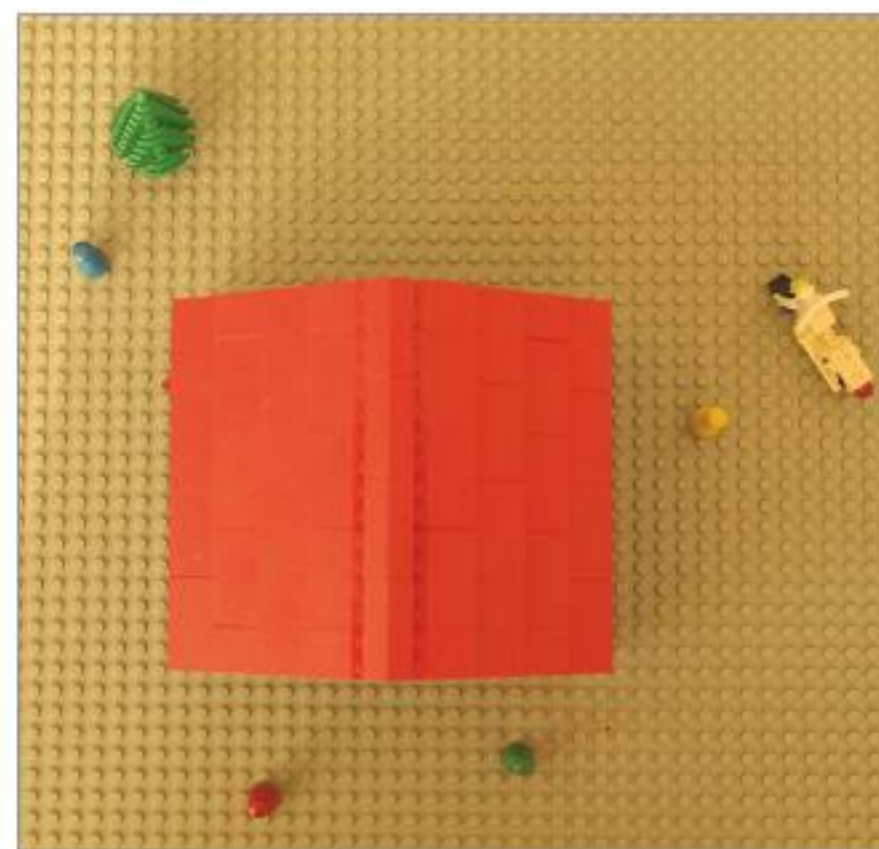
Perspectief

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	226
9-1	Centrale projectie	228
9-2	Perspectief	230
9-3	Eenpuntsperspectief	232
9-4	Tekenen in eenpuntsperspectief	234
9-5	Gemengde opdrachten	236
	Samenvatting	238
	Test jezelf	240



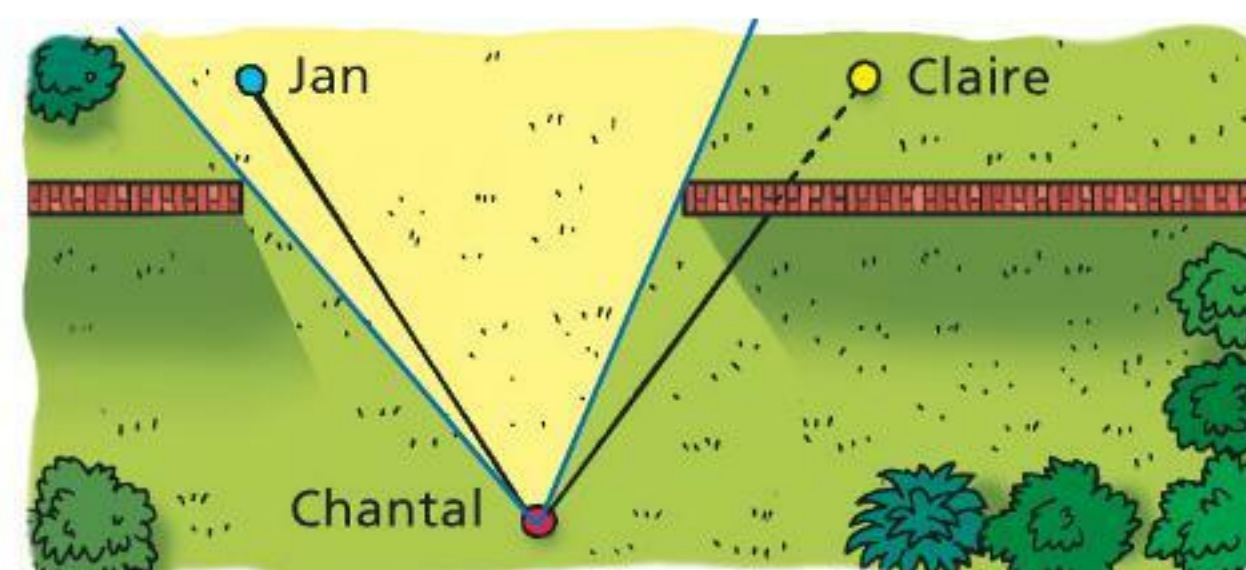
Voorkennis



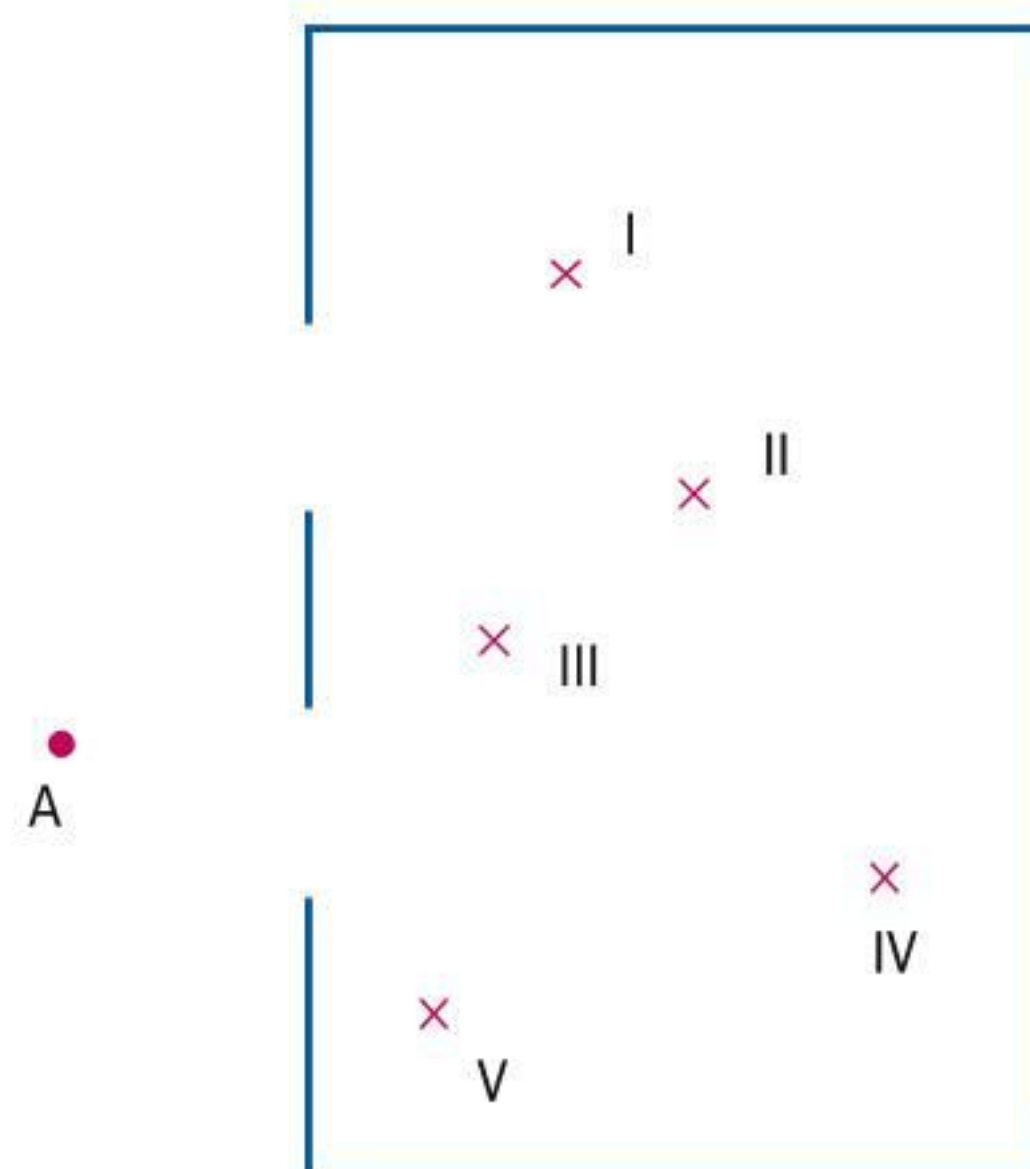
- V-1** In de foto's hierboven zie je een viertal pionnetjes rondom een lego huisje.
De pionnetjes stellen personen voor.
- Of de gele en groene persoon elkaar kunnen zien, kun je op grond van de linker foto niet met zekerheid concluderen. De rechterfoto, die van boven is genomen verschaft meer duidelijkheid.
Kunnen de gele en groene persoon elkaar zien?
 - Kunnen rode en blauwe persoon elkaar zien?
 - Door wie kan de motor geheel of gedeeltelijk gezien worden?

Theorie

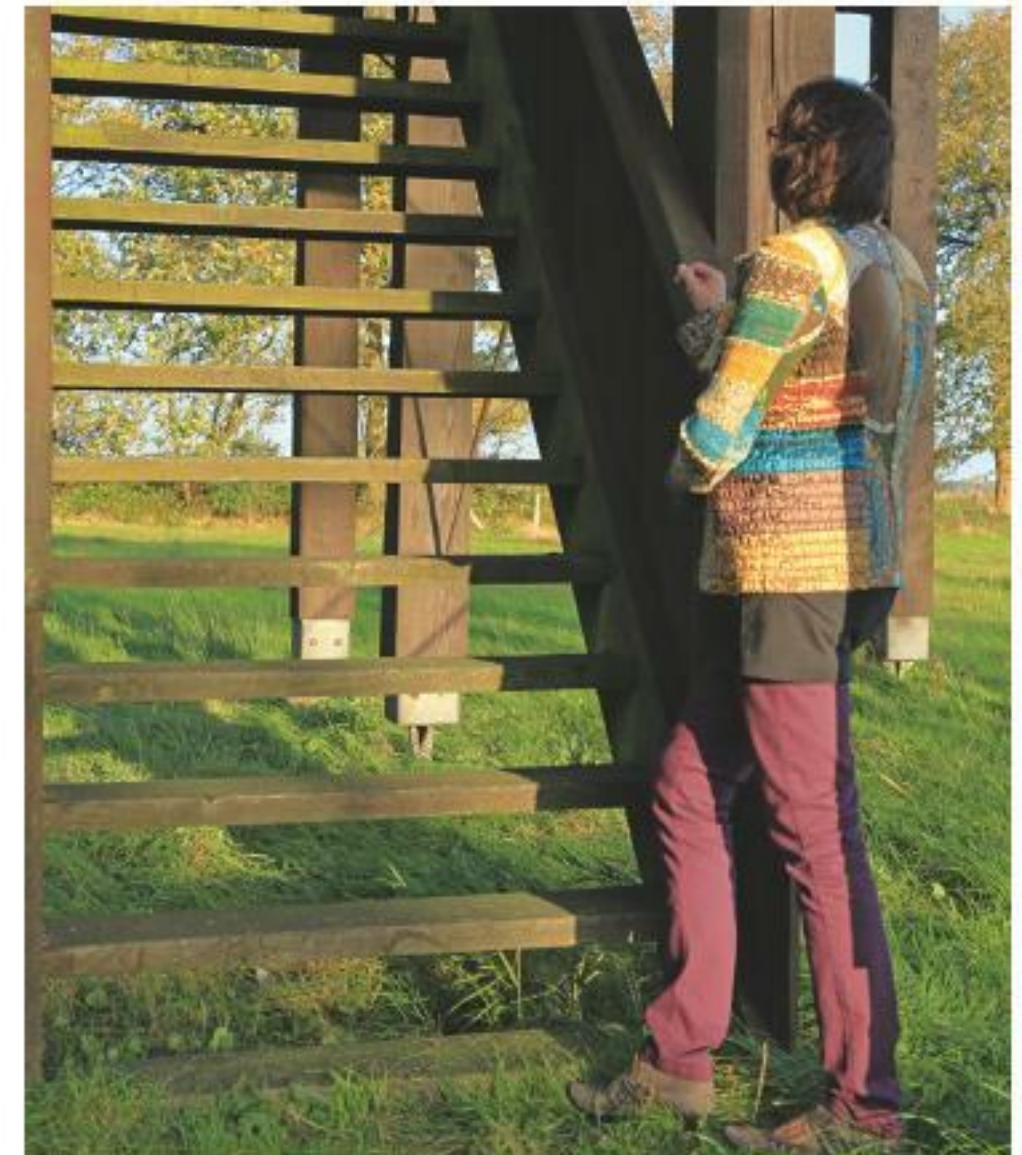
Een **kijklijn** is een lijn waarlangs je kijkt. Om vast te stellen of iemand een object kan zien, kun je in een bovenaanzicht een lijn trekken van die persoon naar het object. In de tekening hiernaast zie je dat Chantal wel Jan kan zien. Omdat de kijklijn van Chantal naar Claire wordt onderbroken door een muurtje, kan Chantal niet Claire zien. Met behulp van kijklijnen kun je een gebied aangeven dat je kunt zien. Het gele gebied in de tekening hiernaast is het gebied dat Chantal tussen de muurtjes door kan zien.



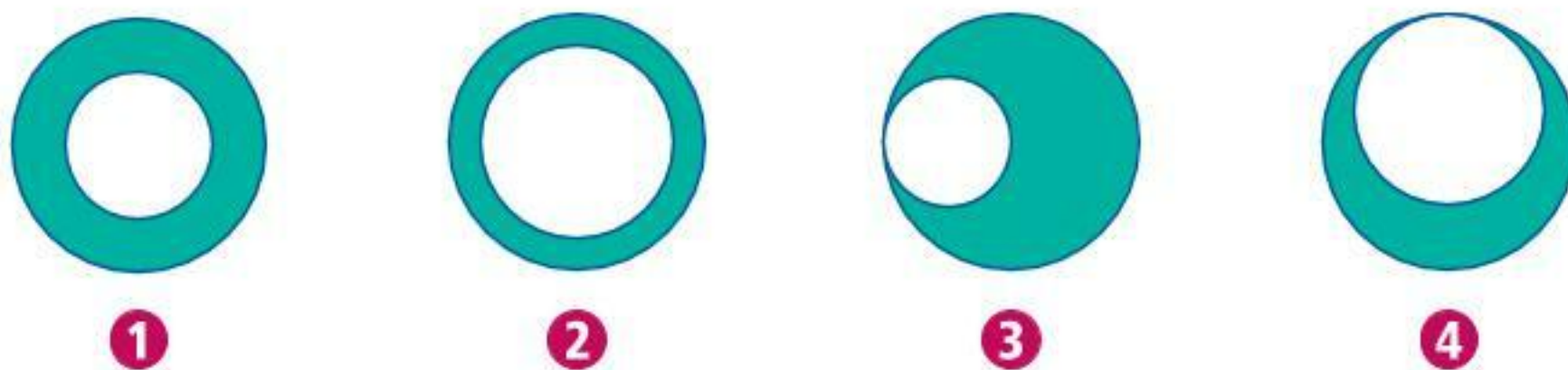
- V-2** Persoon A staat voor een gebouw met twee ramen. In het gebouw staan de objecten I tot en met V.
- Kan persoon A het object I zien? Welke objecten ziet A niet?
 - Arceer het gebied binnen het gebouw dat A niet kan zien.
 - Arceer het gebied buiten het gebouw waar A zou kunnen staan om zowel object I als II te kunnen zien.
 - Arceer het gebied buiten het gebouw waar A zou kunnen staan om zowel object I als V niet te kunnen zien.



- V-3a** Op de hoogte van welke traprede bevond zich de lens, ook wel het oog van de camera genoemd, bij het maken van de foto hiernaast? Licht je antwoord toe.
- b** Maak een schatting van de hoogte van de lens van de camera ten opzichte van de grond bij deze foto leg uit hoe je aan het antwoord komt.



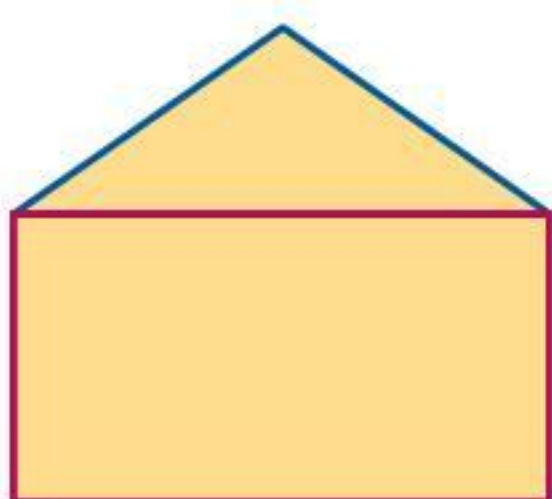
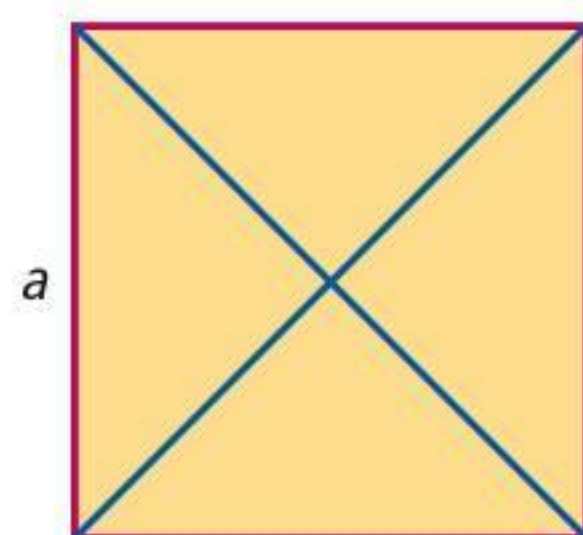
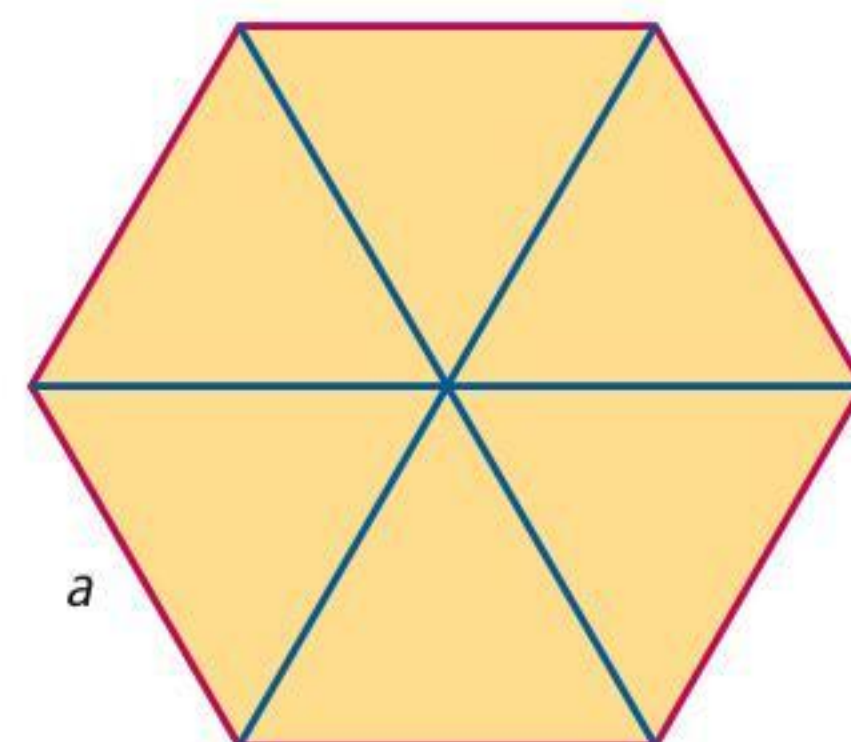
- V-4** Op de foto zie je een aantal ronde buizen.
- a** Waar ongeveer bevond zich de lens van de camera? Licht je antwoord toe.
- b** Je kunt de lichtopening aan het eind van de buis op verschillende manieren ten opzichte van de voorkant zien. Hieronder zie je in een viertal situaties vier manieren.



In welk van de situaties 1 en 2 bevindt het oog zich op grotere afstand van de opening?

- c** Beschrijf waar in situatie 3 het oog zich bevindt ten opzichte van de buis.
- d** En waar in situatie 4?

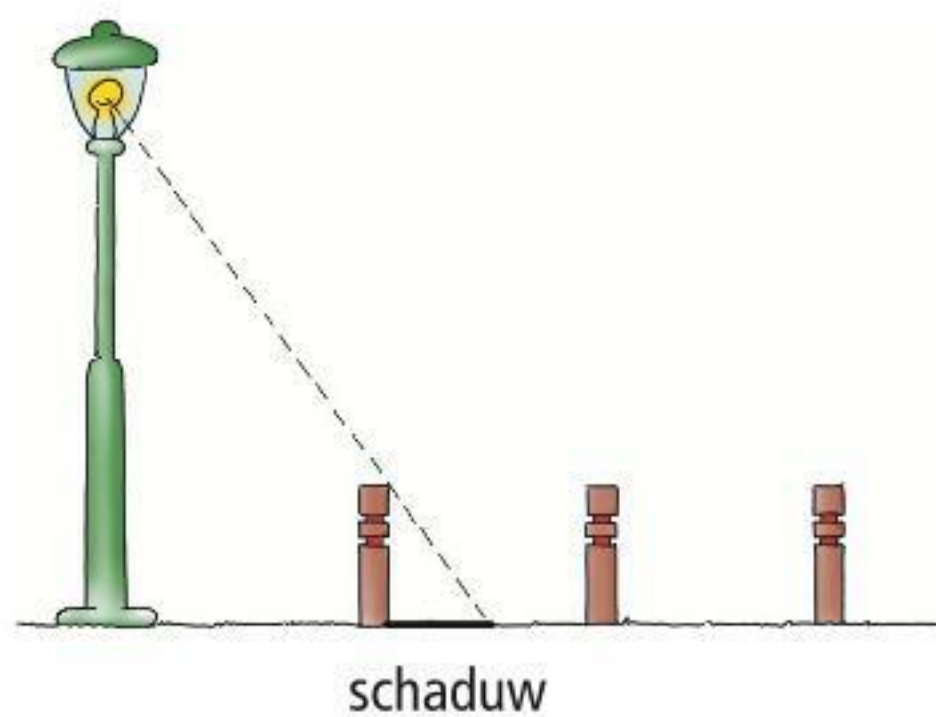
- V-5** In de linker figuur hieronder staat een zijaanzicht van een tuinhuisje. Aan dit zijaanzicht kun je niet zien of het tuinhuisje vierhoekig of zeshoekig is.



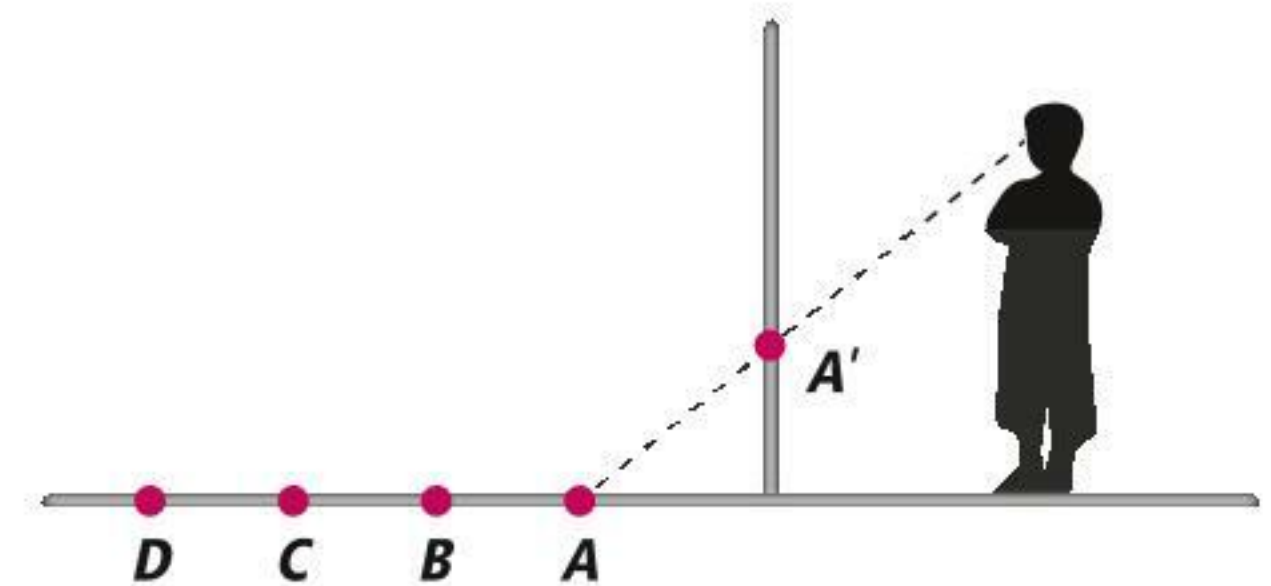
- a** In de middelste figuur zie je het bovenaanzicht bij een vierhoekig tuinhuisje. Arceer in dit bovenaanzicht het gebied waar een fotograaf moet staan om op een foto alleen muur a te zien.
- b** Arceer ook in het bovenaanzicht van het zeshoekig tuinhuisje het gebied waar een fotograaf moet staan om op een foto alleen muur a te zien.

9-1

Centrale projectie

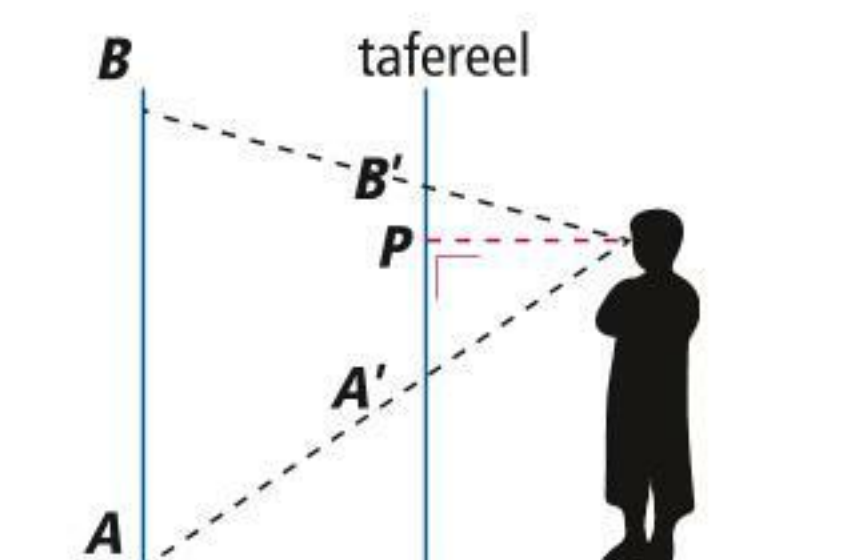


- 1** Drie even hoge paaltjes worden 's nachts door een lantaarn beschenen. In de linker tekening is in een vooraanzicht het schaduwbeeld van één paaltje getekend.
- Teken in dit vooraanzicht het schaduwbeeld van de andere twee paaltjes.
 - Zijn de schaduwen van alle drie paaltjes even lang?
 - In de rechter tekening zie je een schijnwerper in de buurt van twee palen. In het vooraanzicht is het schaduwbeeld van de eerste paal getekend. Teken in het vooraanzicht de lamp op de juiste hoogte.
 - Teken ook het schaduwbeeld van de tweede paal.
- 2** Johan staat voor een raam en kijkt naar een viertal stenen die op gelijke afstand van elkaar liggen. Piet tekent met een viltstift op het raam zoals Johan de stenen ziet. Hiernaast zie je een zijaanzicht van de situatie waarin de stenen aangegeven zijn door de punten A , B , C en D .
- De plek van steen A op het raam is al getekend, het punt A' . Teken de plek van de stenen B , C en D op het raam.
 - De punten A , B , C en D liggen op gelijke afstanden van elkaar. Hoe zit dat met de punten A' , B' , C' en D' ?
 - Teken de lijn vanuit het oog van Johan loodrecht op het raam. Het snijpunt van deze lijn met het raam is punt P . Leg uit dat, hoever een punt ook ligt, Johan dit punt altijd onder het punt P ziet.



Voorbeeld

Hieronder zie je in een zijaanzicht het beeld $A'B'$ van een paal AB op het tafereel. P is het oogpunt.



Theorie

Het schaduwbeeld bij lamplicht en het tekenen van een voorwerp op een glasplaat zoals dat in opdracht 2 gebeurt, zijn voorbeelden van **centrale projectie**.

De lamp is het **centrale punt** of het **oog**.

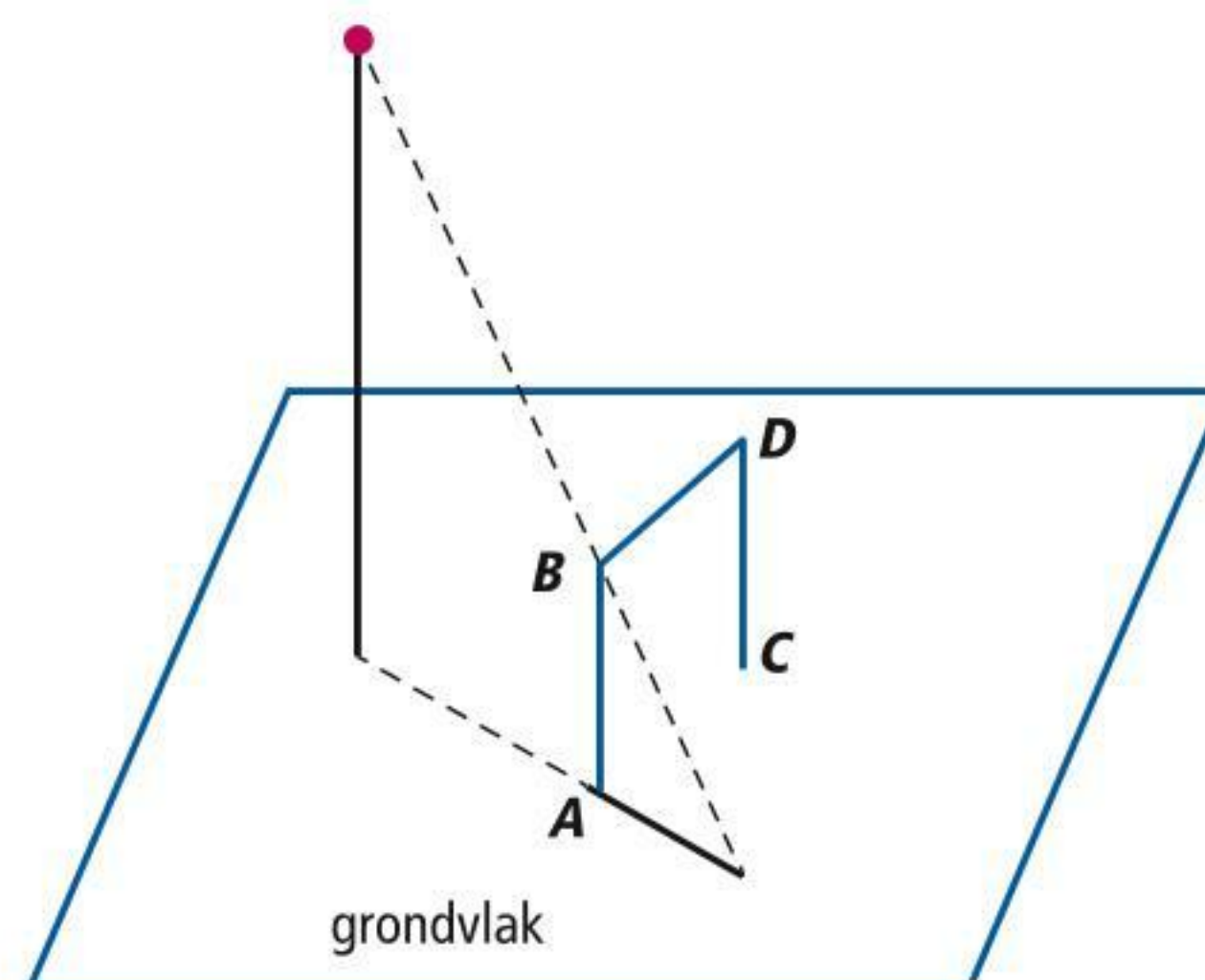
De glasplaat staat tussen het oog en het voorwerp en wordt het **tafereel** of **tekenvlak** genoemd. De loodrechte projectie van het oog op het tafereel heet het **oogpunt**. De tekening die op het tafereel ontstaat, heet het **beeld**. Het beeld is hoe het oog het voorwerp waarneemt.

- 3** Wordt het beeld $A'B'$ in het voorbeeld twee keer zo groot als de afstand van het oog tot het tafereel twee keer zo groot wordt? Leg je antwoord uit met een tekening.

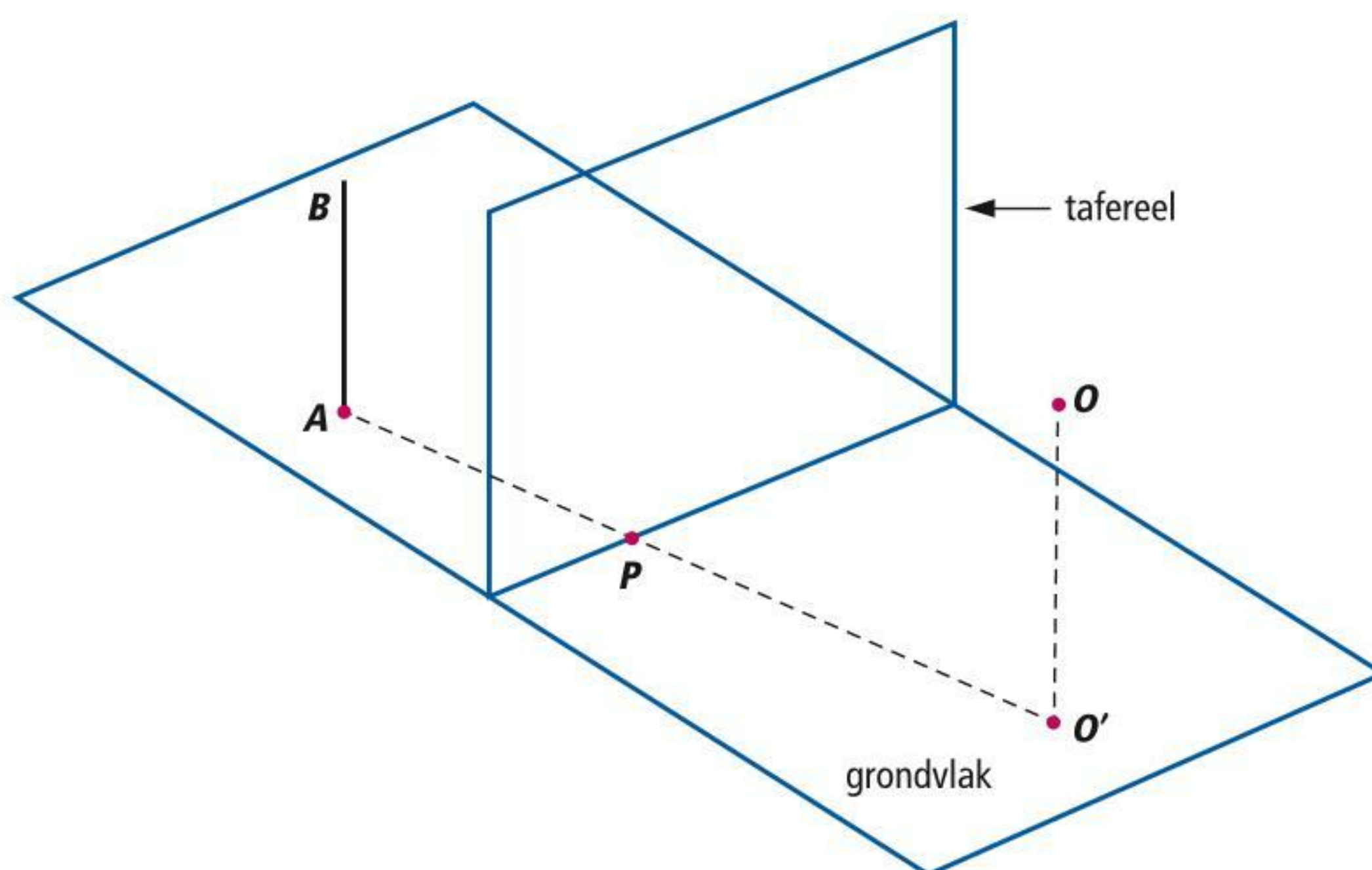
- 4** Een hekje staat in de buurt van een lantaarn. De twee staanders AB en CD van het hekje zijn even lang en staan verticaal.

Hiernaast zie je een tekening van de situatie waarin het schaduwbeeld van staander AB al is getekend.

- a** Beschrijf hoe het schaduwbeeld van punt B is bepaald.
b Teken op de zelfde manier de schaduw van staander CD .
c Teken ook het schaduwbeeld van BD .
d Zijn BD en zijn schaduwbeeld even lang?



- 5** Hieronder zie je een tafereel loodrecht op het grondvlak. Punt O is het oog en het punt O' is het punt op de grond zodat OO' evenwijdig is met AB en met het tafereel. Het snijpunt van de zogeheten grondlijn $O'A$ met het tafereel is het punt P . In deze opdracht ga je het beeld van AB op het tafereel tekenen.

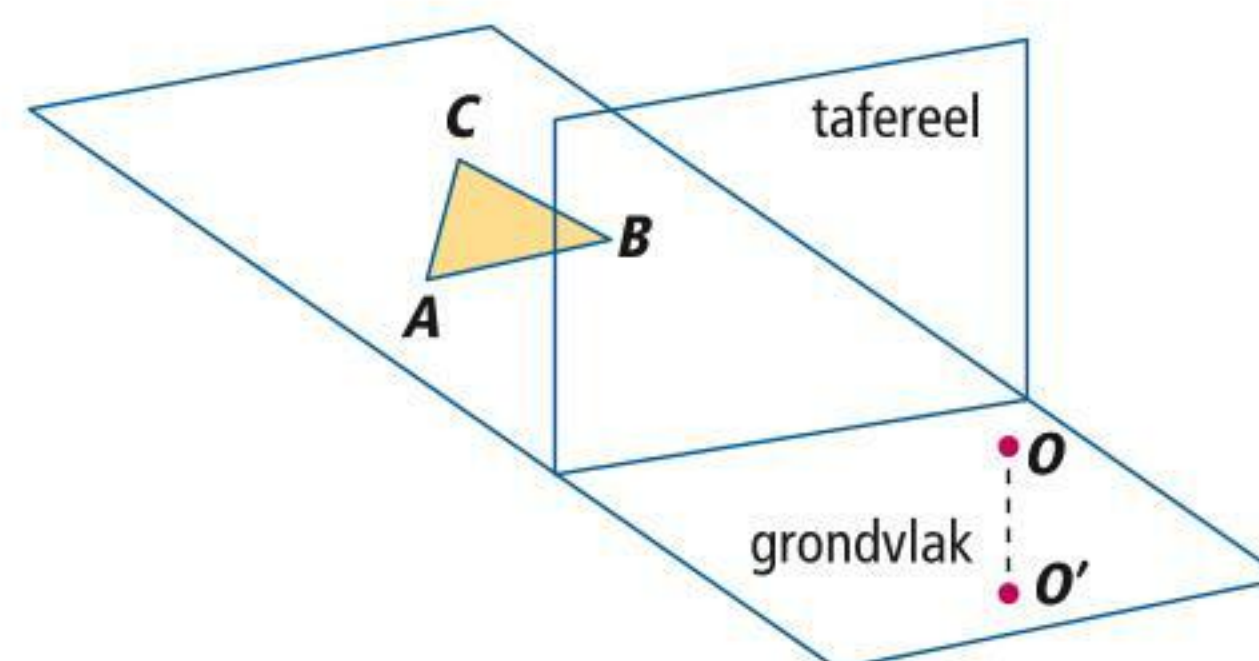


- a** Het punt A' , het beeld van A , ligt op de kijklijn OA . Waarom ligt het beeld van A ook op de lijn door P , loodrecht op het grondvlak?
b Teken nu de punten A' , B' en het beeld van AB .

- 6** Hierboven is gegeven het driehoekige bord ABC waarvan het beeld op het tafereel moet worden getekend. De drie punten A , B en C liggen in het grondvlak. Teken het beeld van de driehoek ABC op het tafereel.

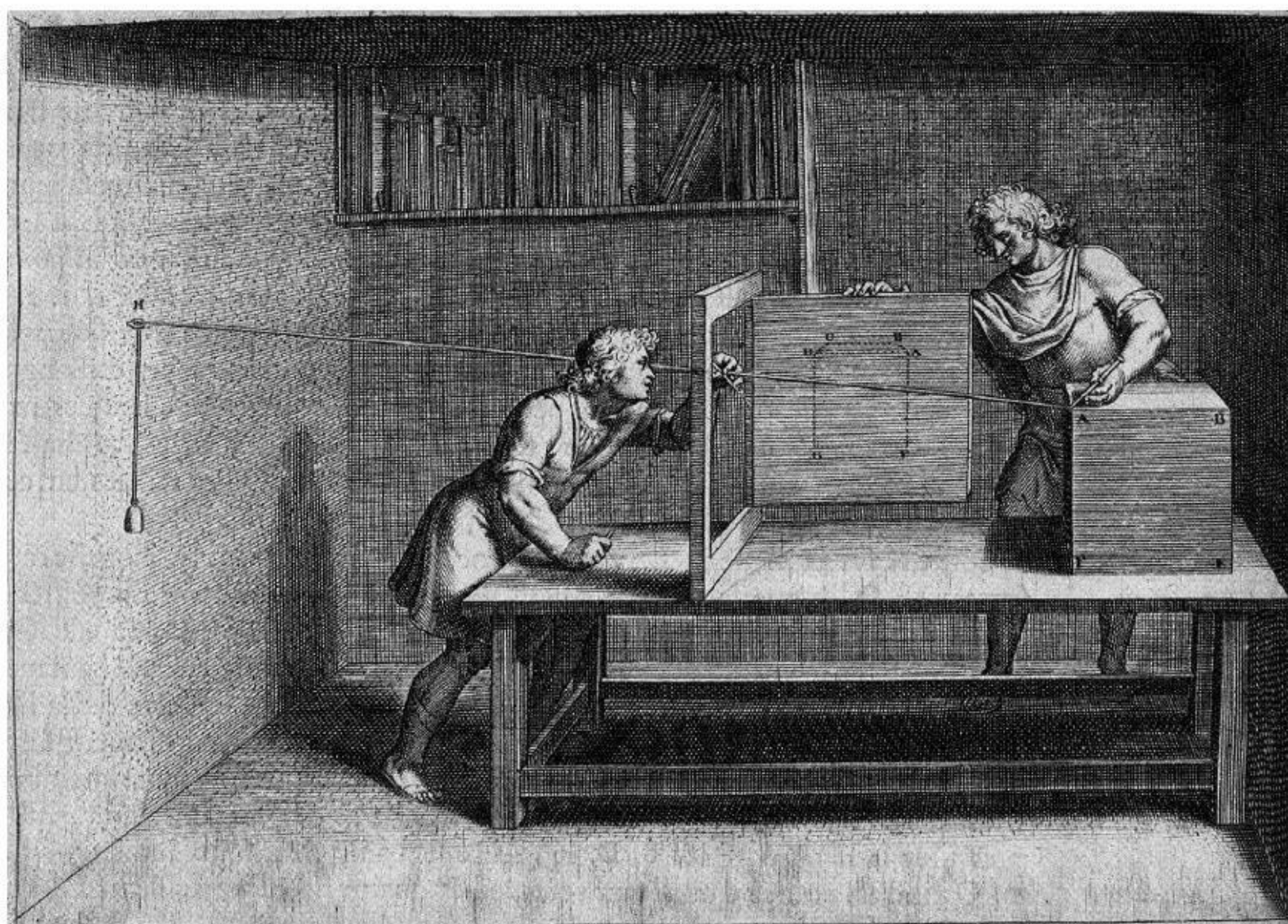
- 7** Deze opdracht gaat ook over het driehoekige bord ABC . Maar nu liggen de punten A en B in het grondvlak en is het driehoekige bord ABC evenwijdig met het tafereel.

- a** Teken het beeld $A'B'C'$ van driehoek ABC op het tafereel.
b Welke zijden van driehoek $A'B'C'$ zijn evenwijdig met een zijde van driehoek ABC ?

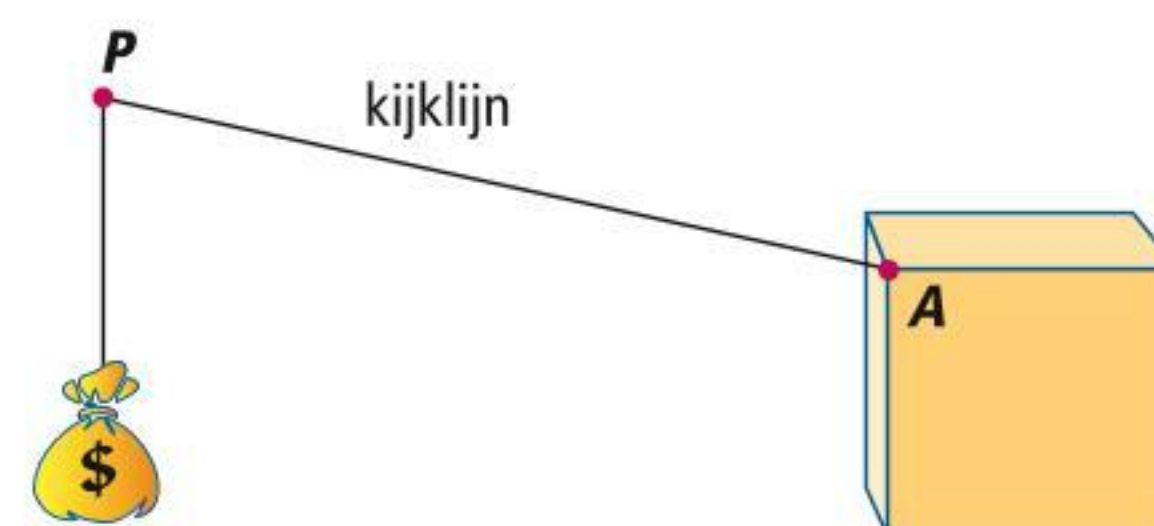


9-2

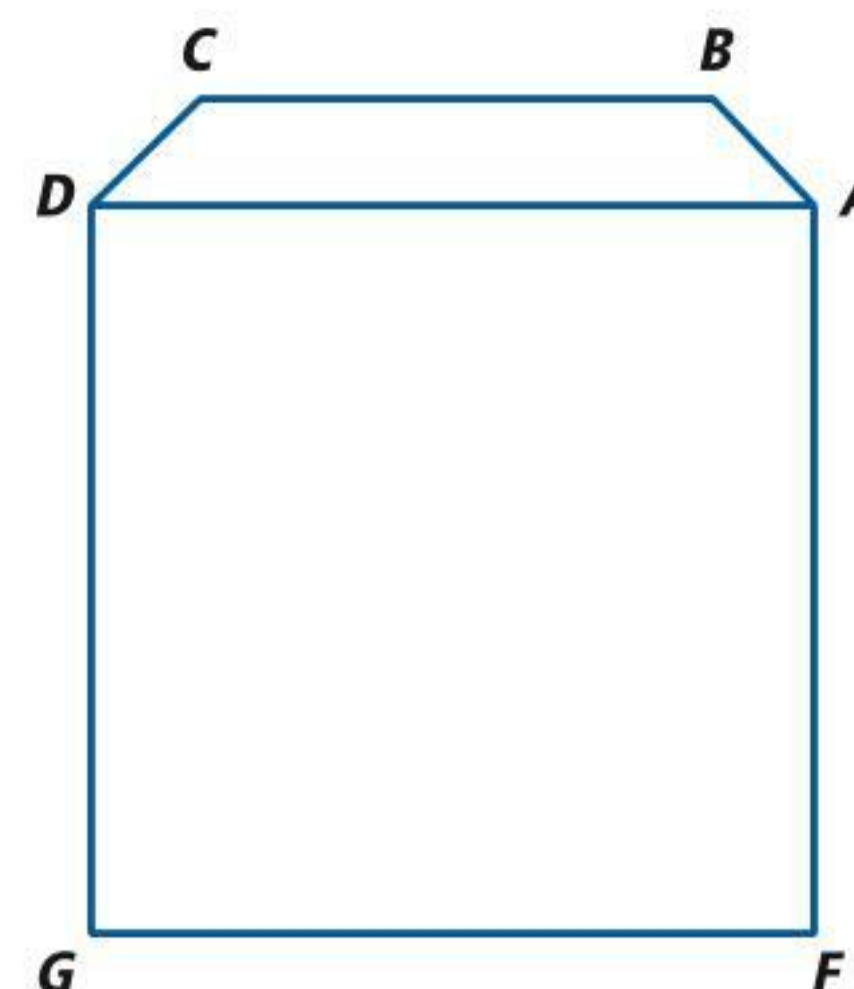
Perspectief



In bovenstaande prent van Simon de Caes (1576-1626) zie je hoe een kubus op een tafereel getekend wordt. Er is een touw gespannen van een punt P aan de muur naar een hoekpunt van de kubus. Dit punt P is het centrale punt van waaruit de kubus wordt bekeken. Wordt het touw met punt A verbonden, dan is het touw als het ware de kijklijn van punt P naar punt A . De man links legt vast waar het punt A van de kubus op het tafereel komt. Na het terugdraaien van het tafereel kan het punt worden ingetekend.



- ✂ 8 In de prent van Simon de Caes is een gedeelte van de kubus al op het tafereel getekend. Deze tekening zie je hiernaast.
- Controleer of de letters in de tekening hiernaast overeenkomen met de letters bij de hoekpunten van de kubus op de prent.
 - De voorkant $AFGD$ van de kubus is op het tafereel ook weer een vierkant omdat het vlak $AFGD$ evenwijdig is met het tafereel.
Waarom is de achterkant $BCHE$ ook evenwijdig aan het tafereel en wat is dus de vorm hiervan in de tekening?
 - Teken nu met stippellijnen de achterkant $BCHE$.
 - Verleng met dun getekende lijnen de ribben DC en AB tot ze elkaar snijden. Noem dat snijpunt V .
 - Verleng de ribben GH en FE .
Controleer dat die ook door het punt V gaan.



- ✂ 9 Hiernaast zie je een tekening van een archiefkast. De archiefkast heeft de vorm van een balk. Bij de zichtbare hoekpunten zijn letters geplaatst.
- a De voorkant van de archiefkast in de tekening heeft dezelfde vorm als in werkelijkheid. Geldt dat ook voor de bovenkant?
 - b Wat valt je op als je naar de vloertegels kijkt die in werkelijkheid allemaal even grote vierkanten zijn?
 - c De lijnen EH en FG zijn in werkelijkheid evenwijdig maar in de tekening niet. Verleng EH en FG en teken hun snijpunt V .
 - d Ga na dat BC na verlenging ook door punt V gaat.



Theorie

Een tekening zoals die in de prent van Simon de Caes wordt gemaakt, heet een **perspectieftekening**. Een perspectieftekening is een manier om een ruimtelijk object te tekenen zoals je het in werkelijkheid ook kunt zien. Foto's zijn altijd in perspectief waarbij de lens van de camera het oog is.

- > In een perspectieftekening worden objecten die in werkelijkheid even groot zijn maar zich op ongelijke afstand van het oog bevinden niet even groot afgebeeld. Het object dat verder weg ligt wordt kleiner afgebeeld.
- > Vlakdelen die evenwijdig zijn aan het tafereel hebben in de tekening dezelfde vorm als in werkelijkheid.
- > Lijnen die in werkelijkheid evenwijdig zijn, maar die niet evenwijdig zijn aan het tekenvlak, snijden in een perspectieftekening elkaar, eventueel na verlenging, in een zogeheten **verdwijnpunt**, ook wel **vluchtpunt** genoemd.

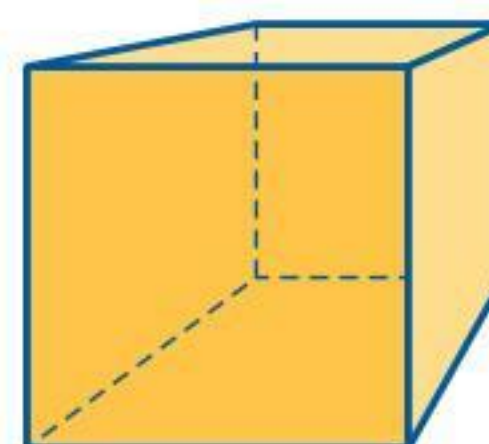
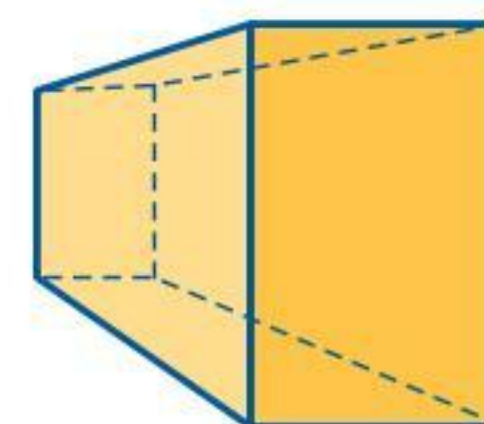
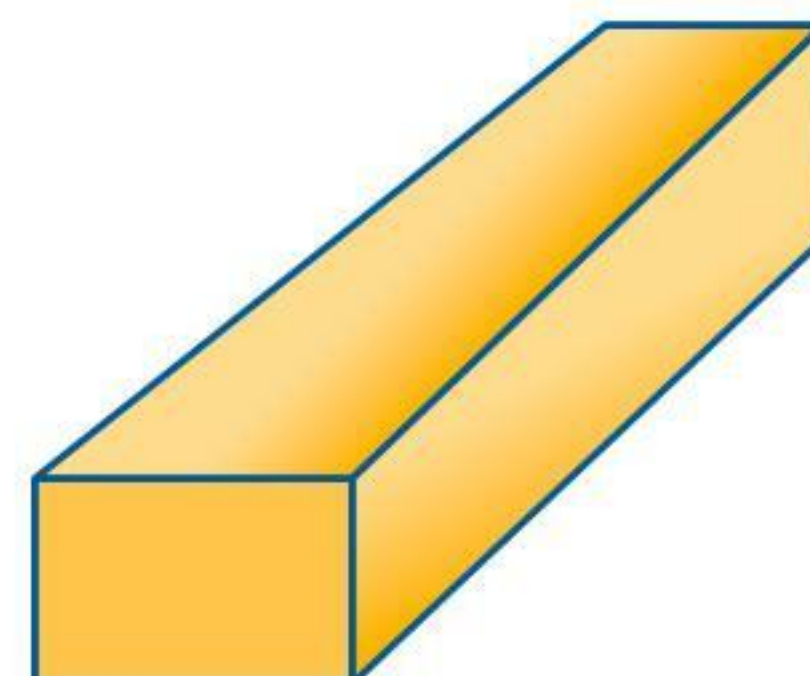
- 10 De breedte van de archiefkast uit opdracht 9 is op de foto groter dan de diepte van de archiefkast. Hoe kan je aan de tegels zien dat in werkelijkheid de breedte juist kleiner is dan de diepte?

- ✂ 11 Teken in de twee perspectieftekeningen van de balken hiernaast het verdwijnpunt.

- ✂ 12 De tekening van de balk hiernaast lijkt een perspectieftekening. Laat zien dat het niet het geval is.

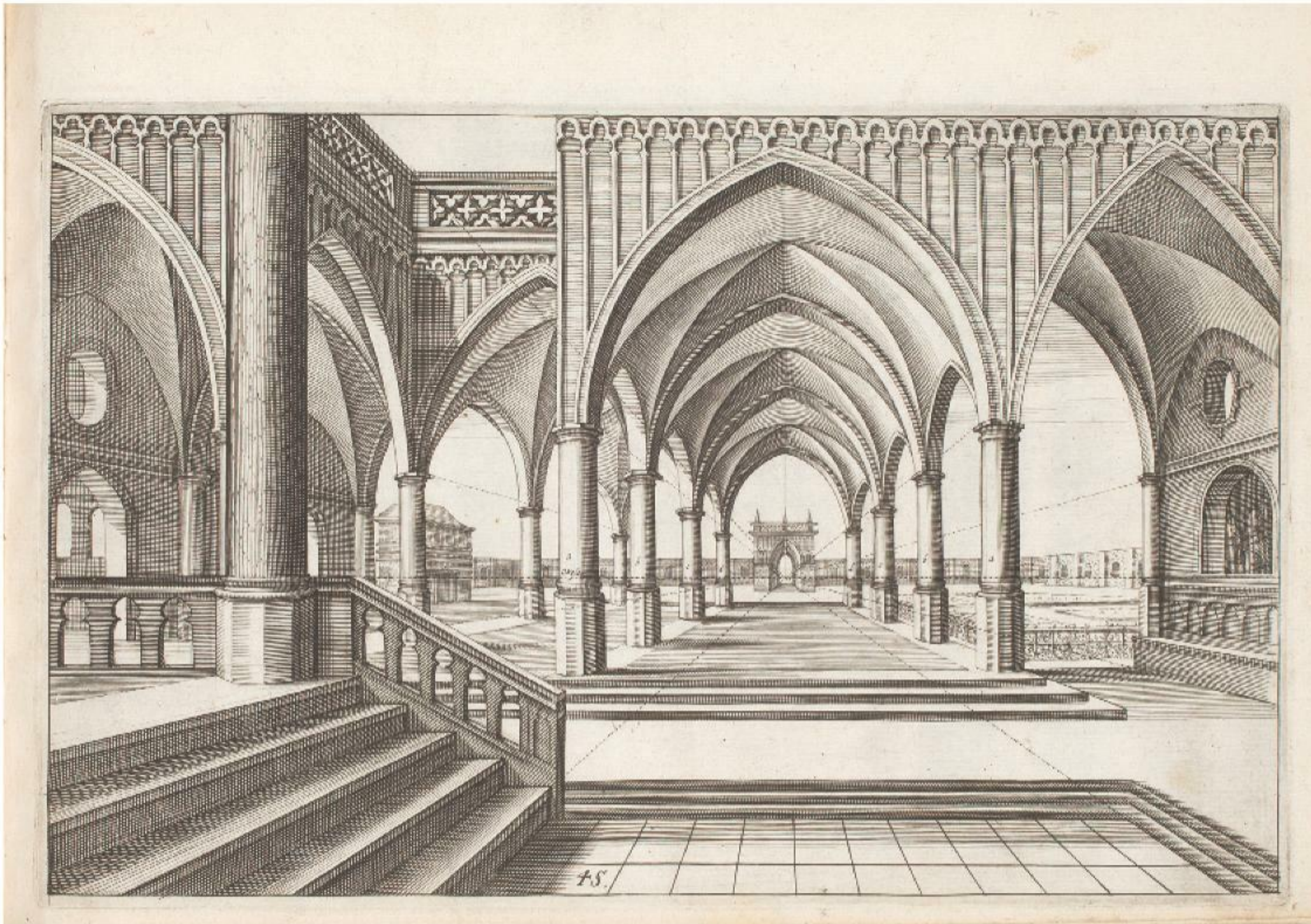


De spoorrails, die in werkelijkheid evenwijdig lopen, snijden elkaar op de foto in één punt, het verdwijnpunt.



9-3

Eenpuntperspectief



- ✂ 13 Hierboven zie je een perspectieftekening van de Nederlandse architect en ingenieur Hans Vredeman de Vries (1527-1607). Iemand heeft hierin een aantal stippellijnen getekend met hetzelfde verdwijnpunt. Teken nog twee stippellijnen met hetzelfde verdwijnpunt.

Theorie

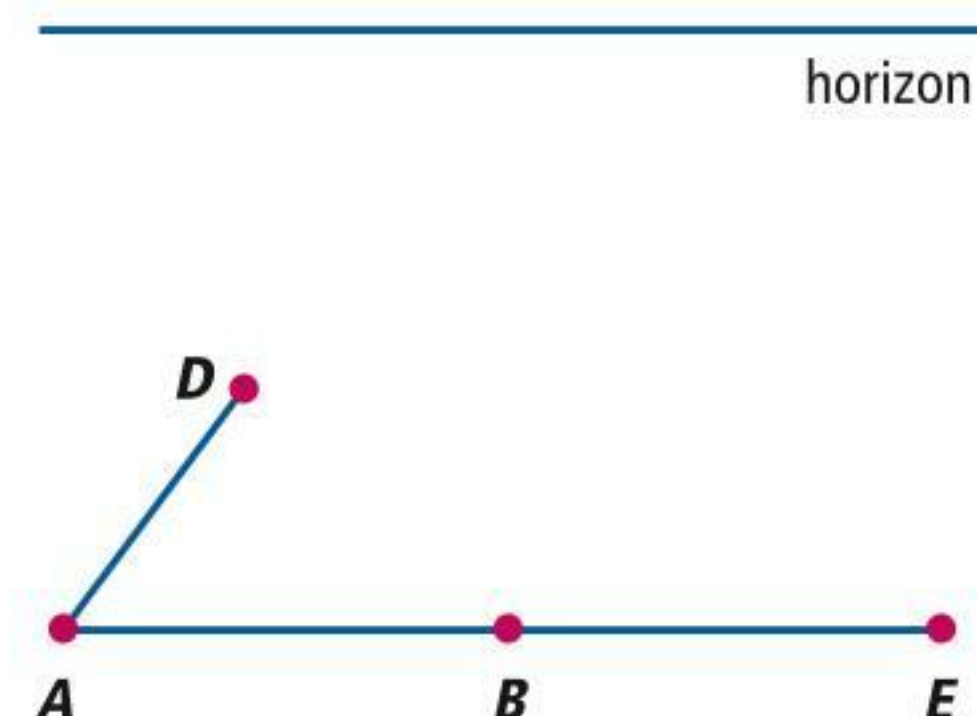
De tekening bij opdracht 13 heeft **eenpuntperspectief**. Veel schilders uit de 15e eeuw hebben dit in hun schilderijen toegepast.

De breedte, hoogte en diepte van een object heten de **hoofdrichtingen** van het object. Bij eenpuntperspectief zijn twee hoofdrichtingen evenwijdig aan het tafereel, de andere hoofdrichting staat loodrecht op het tafereel. Alle lijnen loodrecht op het tafereel hebben hetzelfde verdwijnpunt.

De horizontale lijn door het verdwijnpunt heet de **horizon**.

- 14a Is in de tekening van Hans Vredeman de Vries hierboven de horizon al getekend?
- b Geef van elk van de drie hoofdrichtingen in deze tekening twee voorbeelden.

- 15** Hiernaast is een begin gemaakt met een tekening in eenpuntperspectief van een tweetal gelijke, naast elkaar liggende rechthoekige vloertegels. Van de linker tegel met hoekpunten A , B , C en D zijn drie hoekpunten gegeven. Van de rechter tegel met hoekpunten B , E , F en C zijn de hoekpunten B en E gegeven.
- Teken met behulp van de lijn door de punten A en D vluchtpunt V .
 - Waarom gaan de lijnen BC en EF ook door V ?
 - Welke zijden van de tegels zijn evenwijdig aan de horizon?
 - Gebruik het voorgaande om de tekening van deze twee tegels af te maken.
 - Teken een derde, even grote tegel, er aan de rechterkant bij.

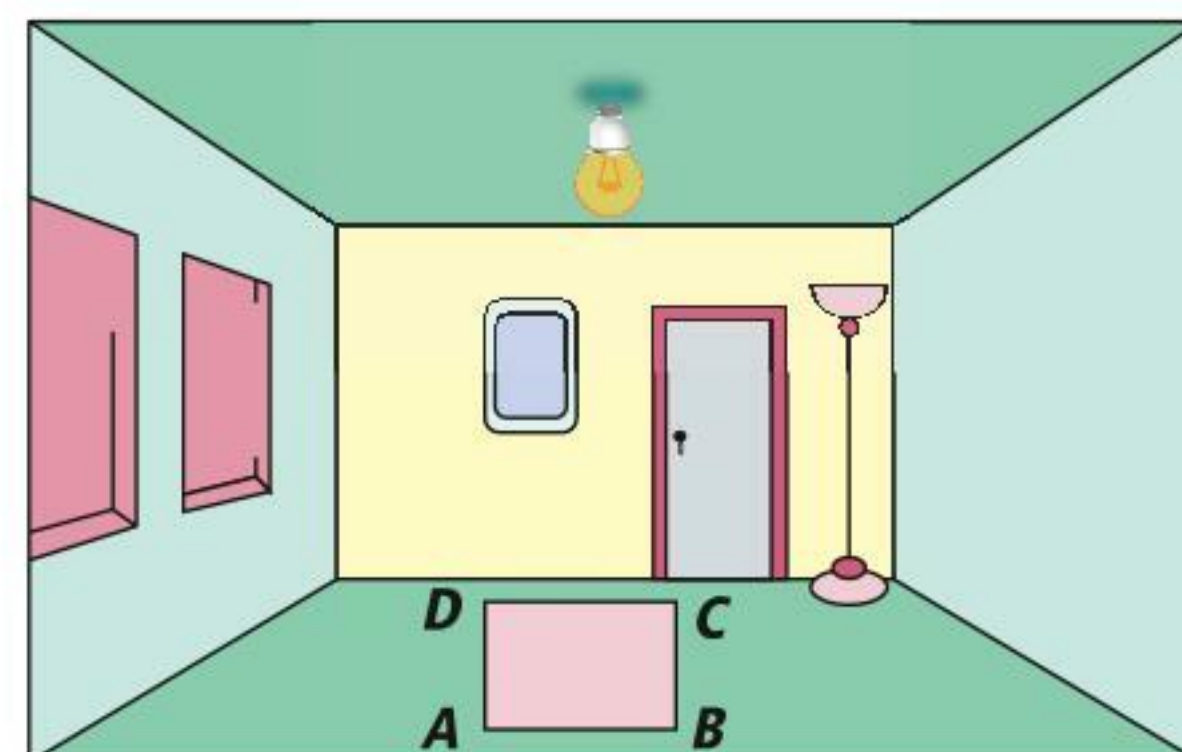


- 16** Deze opdracht gaat ook over de tekening uit opdracht 15.
- Hoe is in werkelijkheid de onderlinge ligging van de diagonalen AC en BF ?
 - Deze diagonalen zijn geen hoofdrichting. Teken deze diagonalen, verleng ze en ga na dat ze elkaar op de horizon snijden.
 - Snijden de diagonalen BD en EC elkaar na verlenging ook op de horizon?
 - Teken, uitsluitend door gebruik te maken van de eigenschap van de diagonalen, een vierde, even grote tegel, er aan de linkerkant bij.



- 17** Hierboven zie je twee kindertekeningen en een schilderij van Vincent van Gogh. Ga na of de regels voor het eenpuntperspectief correct zijn toegepast. Geef aan waarom wel of waarom niet.

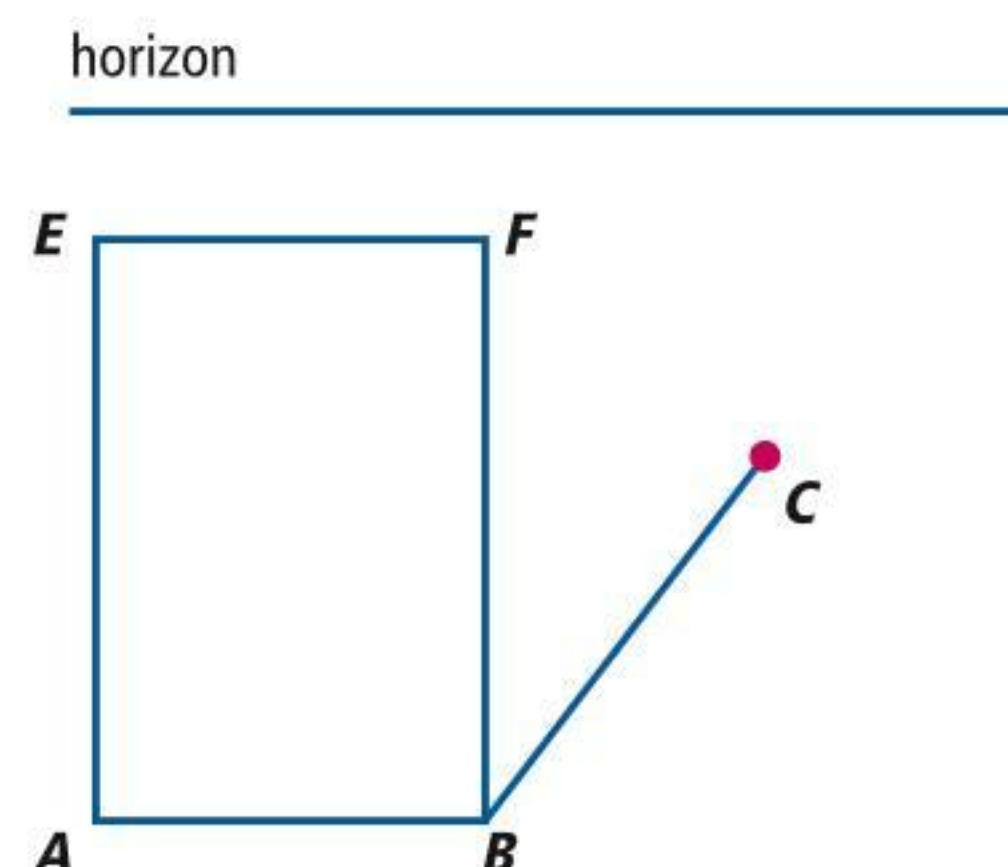
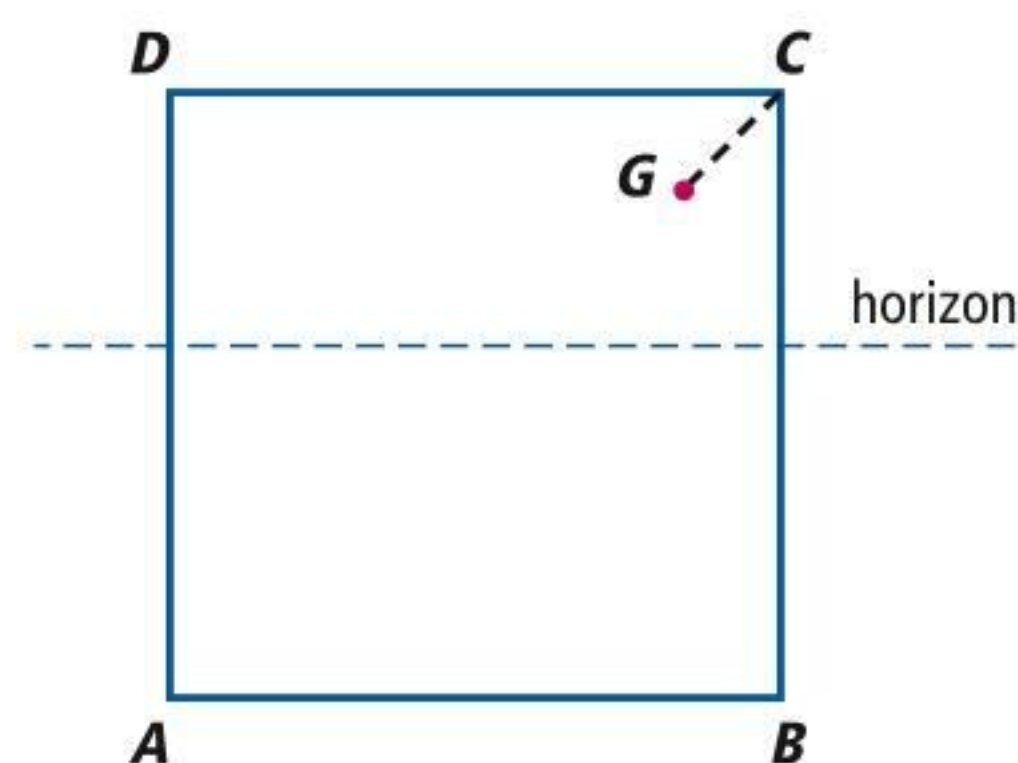
- 18** Gegeven is een eenpuntperspectief tekening van een kamer. Er is ook een rechthoek $ABCD$ getekend.
- Teken de horizon.
 - Rechthoek $ABCD$ stelt de lijst van een schilderij voor en is evenwijdig aan het tafereel met zijde AB op de grond. De lijst wordt tegen de achterste wand gezet. Past de lijst onder het raam? Leg je antwoord uit.
 - Geef een schatting in dm op welke hoogte het oog van de tekenaar zich ongeveer bevindt. Leg je antwoord uit.



9-4

Tekenen in eenpuntperspectief

- 19** Hiernaast staat deel van een eenpuntperspectief tekening van een balk $ABCD.EFGH$. Het voorvlak $ABFE$ is evenwijdig aan het tafereel.
- In deze opdracht ga je deze perspectieftekening afmaken.
- Teken het vluchtpunt V van BC .
 - Punt V is ook het vluchtpunt van de zijden die evenwijdig zijn aan BC ; namelijk de zijden AD , FG en EH . Teken met dunne lijntjes FV , AV en EV .
 - Welke zijde van het achtervlak is in de tekening evenwijdig aan BF ?
 - Teken nu punt G .
 - Welke zijde van het achtervlak is in de tekening evenwijdig aan AB ? Teken nu punt D .
 - Maak de perspectieftekening van de balk af.



Aanpak

Hoe maak je een eenpuntperspectief tekening van een object?

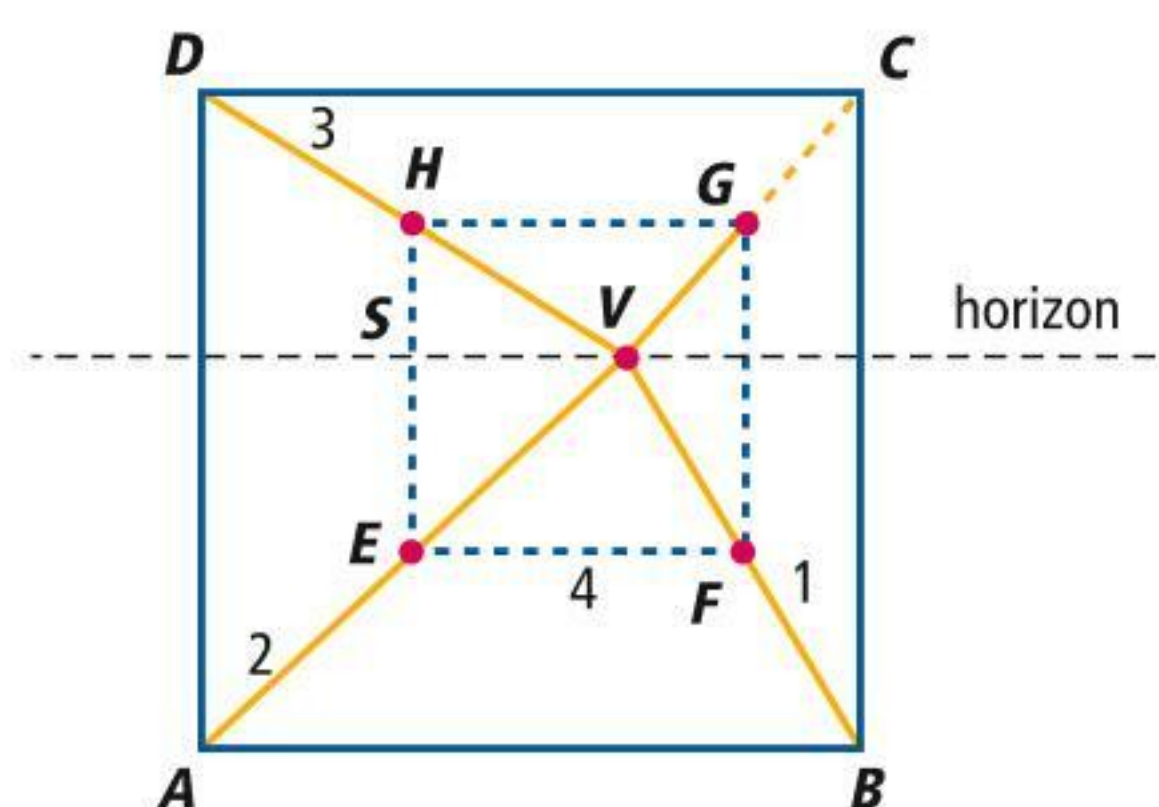
- Teken het verdwijnpunt V .
- Verbind de overige gegeven hoekpunten met V .
- Gebruik evenwijdigheid van ribben met het (verticale) tafereel om de positie van de ontbrekende hoekpunten te bepalen.
- Teken de nog ontbrekende lijnstukken om de perspectieftekening af te maken.

Voorbeeld

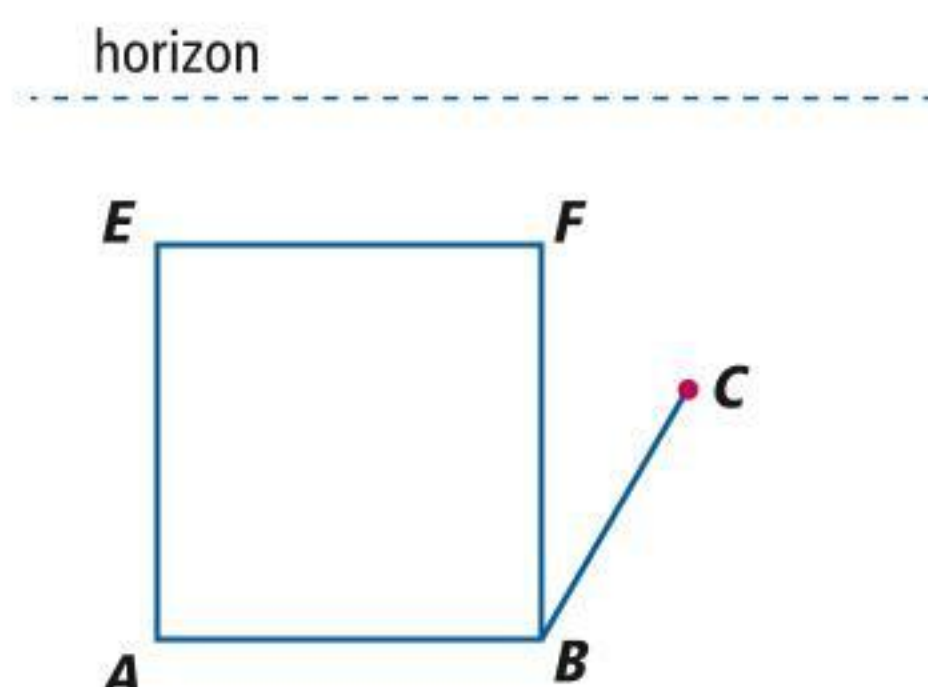
Maak de eenpuntperspectief tekening van de balk met voorvlak $ABCD$ en achtervlak $EFGH$ hierboven af.

Oplossing

- Verleng CG tot aan de horizon; het snijpunt is V .
- Teken de lijnen 1, 2 en 3
- Teken de lijn door G evenwijdig aan BC ; het snijpunt met BV is punt F .
Teken ten slotte lijn 4 om het punt E te bepalen en lijn 5 om punt H te bepalen.
- Maak de perspectieftekening af met het tekenen van de achterkant $EFGH$ en de lijnstukken BE , DH en HG .

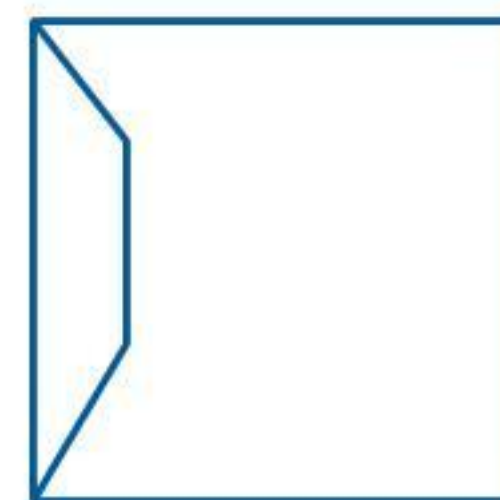


- 20** Hiernaast is een begin gemaakt van een eenpuntperspectief tekening van een kubus $ABCD.EFGH$.
- Maak deze tekening af.
 - Teken een evengrote kubus er boven op.



- ✂ 21 Hiernaast is een begin gemaakt van een eenpuntperspectief tekening van een vitrinekastje.

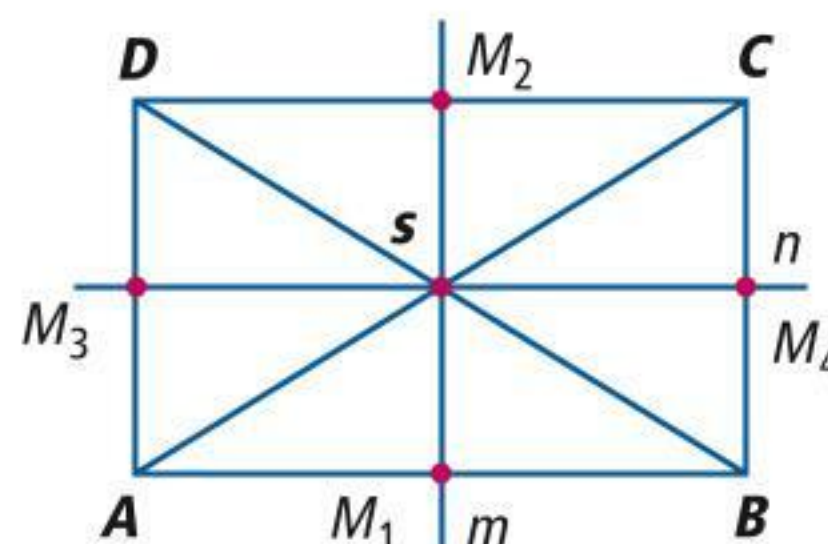
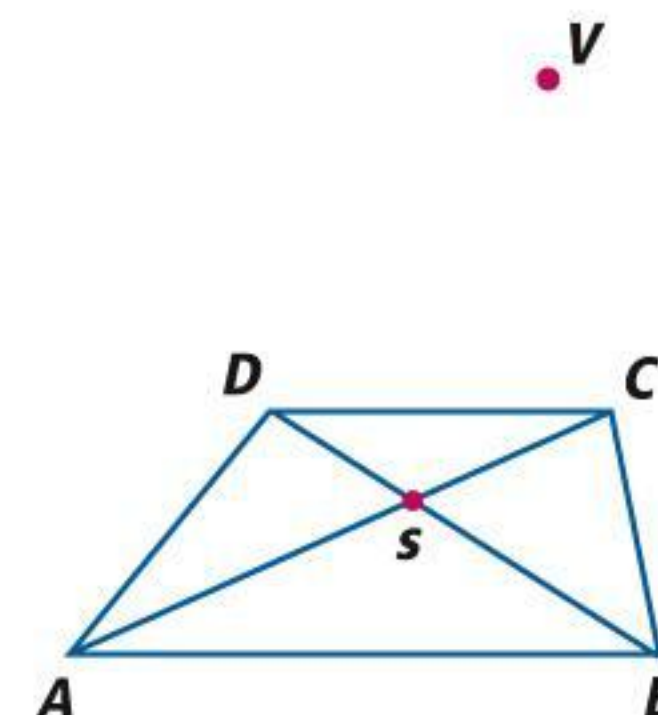
- Maak deze tekening af.
- Teken een even groot vitrinekastje er aan de rechterkant tegenaan.



- ✂ 22 Hiernaast staat links een bovenaanzicht en rechts een eenpuntperspectief tekening van rechthoek $ABCD$. Punt V is het vluchtpunt. De diagonalen AC en BD hebben snijpunt S .

In de linker tekening is lijn m de lijn door S die evenwijdig loopt met AD en BC . Deze lijn snijdt de zijden AB en CD in de middens M_1 en M_2 .

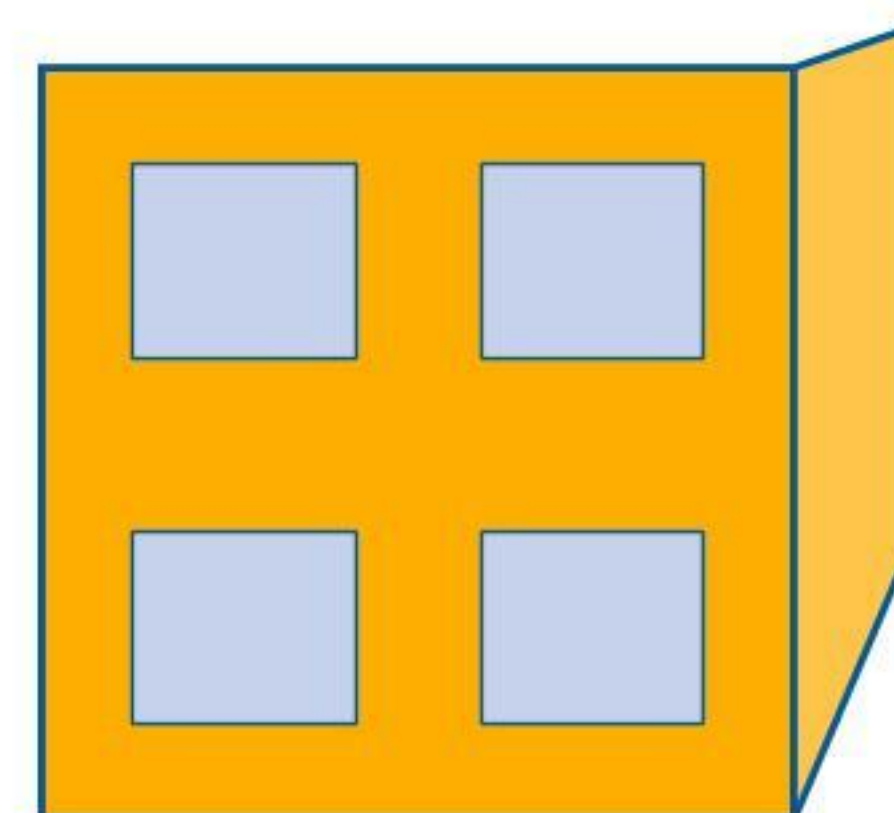
- Leg uit waarom lijn m in de perspectieftekening door S en V gaat.
- Teken met behulp van lijn m in de perspectieftekening de punten M_1 en M_2 .
- Controleer met behulp van meten dat $AM_1 = BM_1$ en dat $DM_2 = CM_2$.
- Lijn n is de lijn door S die evenwijdig loopt met AB en CD . Deze lijn snijdt de zijden AD en BC in de middens M_3 en M_4 . Teken lijn n in de perspectieftekening en ook de punten M_3 en M_4 .
- Controleer met behulp van meten dat in de perspectieftekening AM_3 en DM_3 niet even lang zijn.



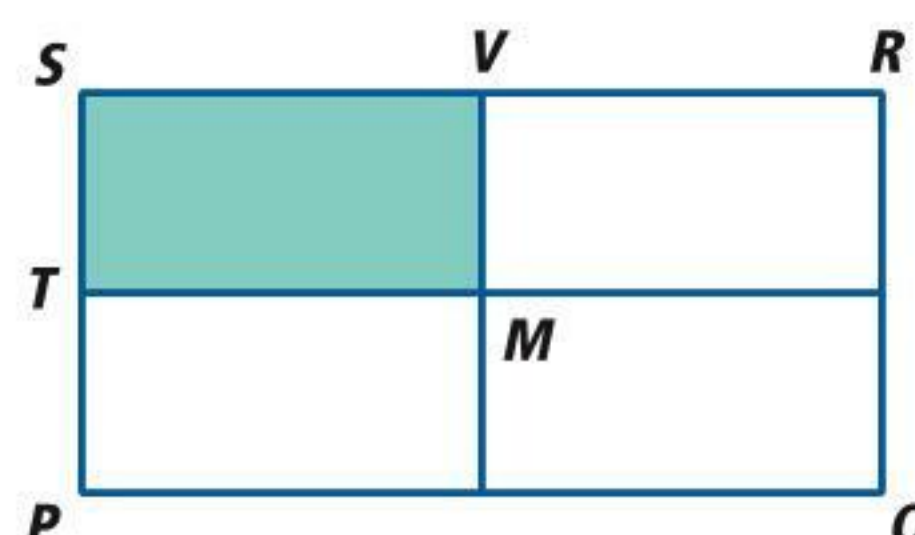
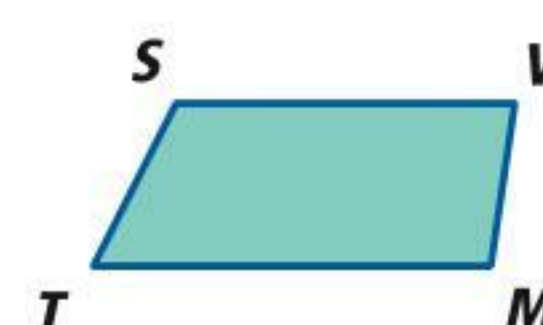
Middens van lijnstukken die evenwijdig lopen met het tafereel zijn in een perspectieftekening ook weer het echte midden. Middens van lijnstukken die loodrecht op het tafereel zijn bepaal je met behulp van diagonalen en een lijn evenwijdig aan de horizon die door het snijpunt van de diagonalen gaat.

- ✂ 23 Hiernaast zie je een eenpuntperspectief tekening van een flat van twee verdiepingen hoog en twee appartementen breed. Alle appartementen zijn even groot en hebben even grote ramen.

- Teken het dak van deze flat.
- Op de voorgevel komt midden tussen de appartementen een horizontale sierstrip en een verticale regenpijp. Teken de regenpijp en de sierstrip.
- De horizontale sierstrip loopt door over de rechter zijgevel. Op het midden van de zijgevel komt ook een regenpijp. Teken de regenpijp en de sierstrip.



- ☀✂ 24 Hiernaast zie je een patroon van vier gelijke rechthoeken. Van rechthoek $TMVS$ is een eenpuntperspectief tekening getekend. Teken de andere rechthoeken in deze tekening er bij.



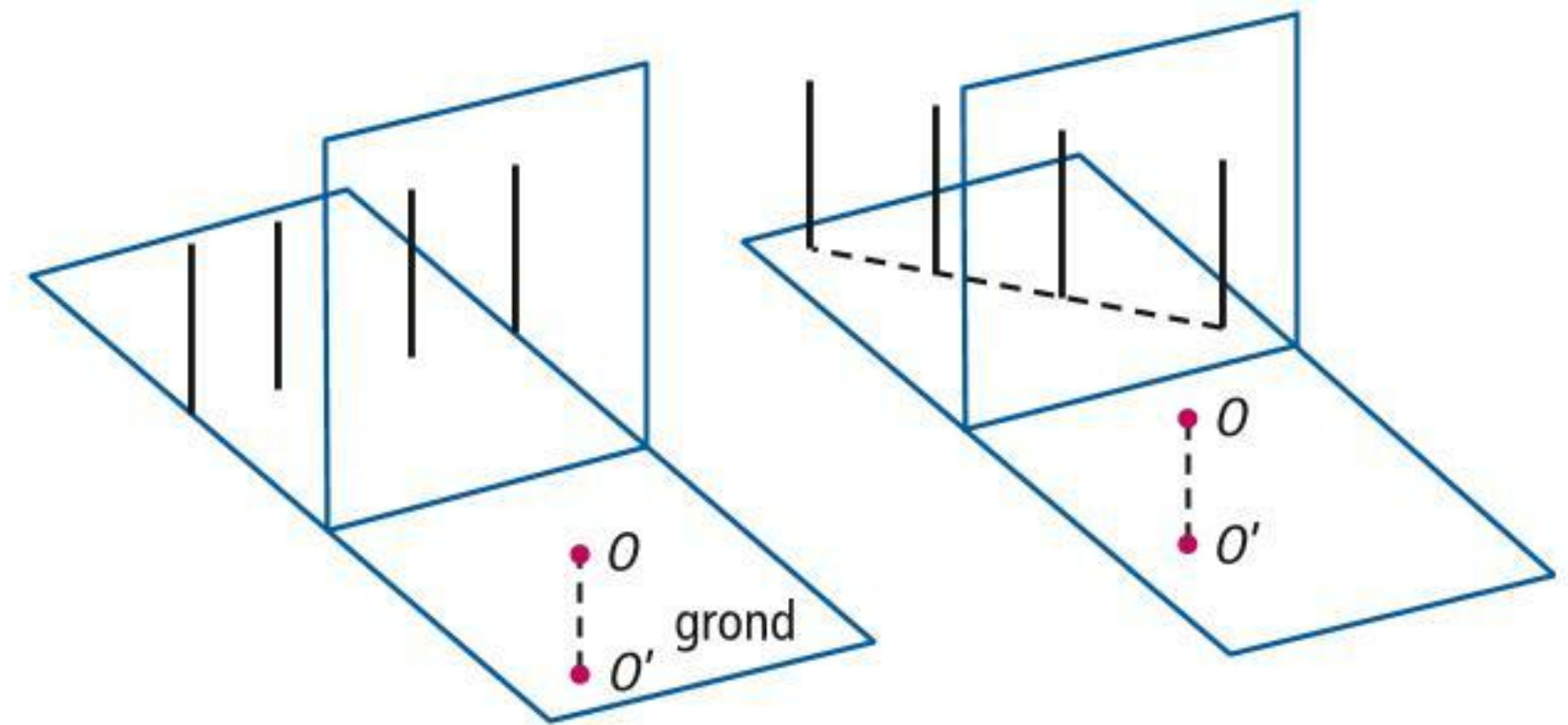
9-5

Gemengde opdrachten

- 25** Van een begin van een eenpuntperspectief tekening van een vierkant $ABCD$ is zijde AB getekend, evenals de horizon met daarop de punten P en Q .
Punt Q is het verdwijnpunt van de hoofdrichting en punt P is het verdwijnpunt van diagonaal BD .
Maak de perspectieftekening van het vierkant $ABCD$ af.
- b** Teken een vierkant $BEFC$ naast vierkant $ABCD$.
- c** Teken een vierkant $GHBA$ voor vierkant $ABCD$.

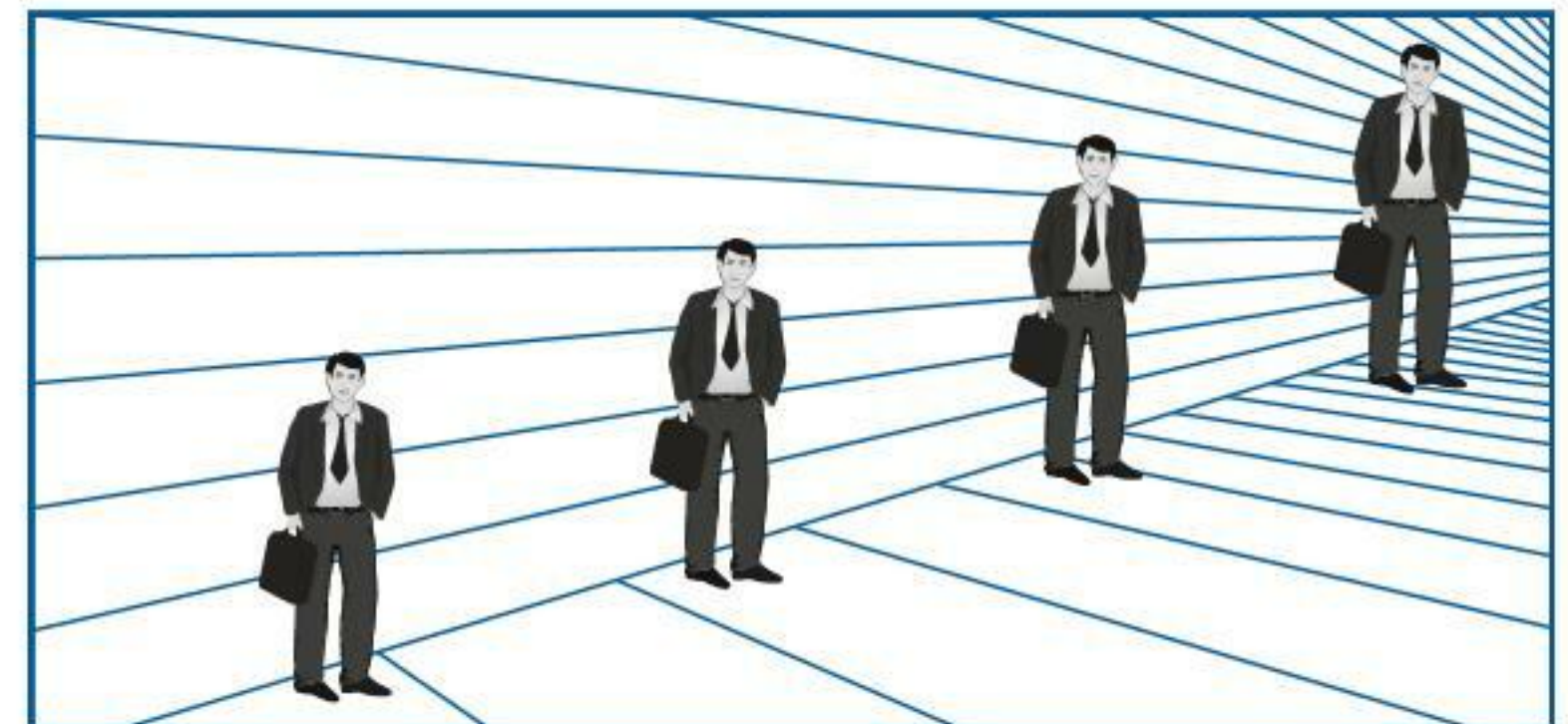


- 26** In de linker figuur staan op de grond vier even hoge paaltjes naast elkaar.
- a** Theo staat voor een glazen plaat en kijkt naar de paaltjes, die zich alle vier even ver van de glazen plaat bevinden. In de tekening is O het oog van Theo en is O' de loodrechte projectie van O op het grondvlak.
Teken op de glazen plaat het beeld van de paaltjes zoals Theo ze ziet.

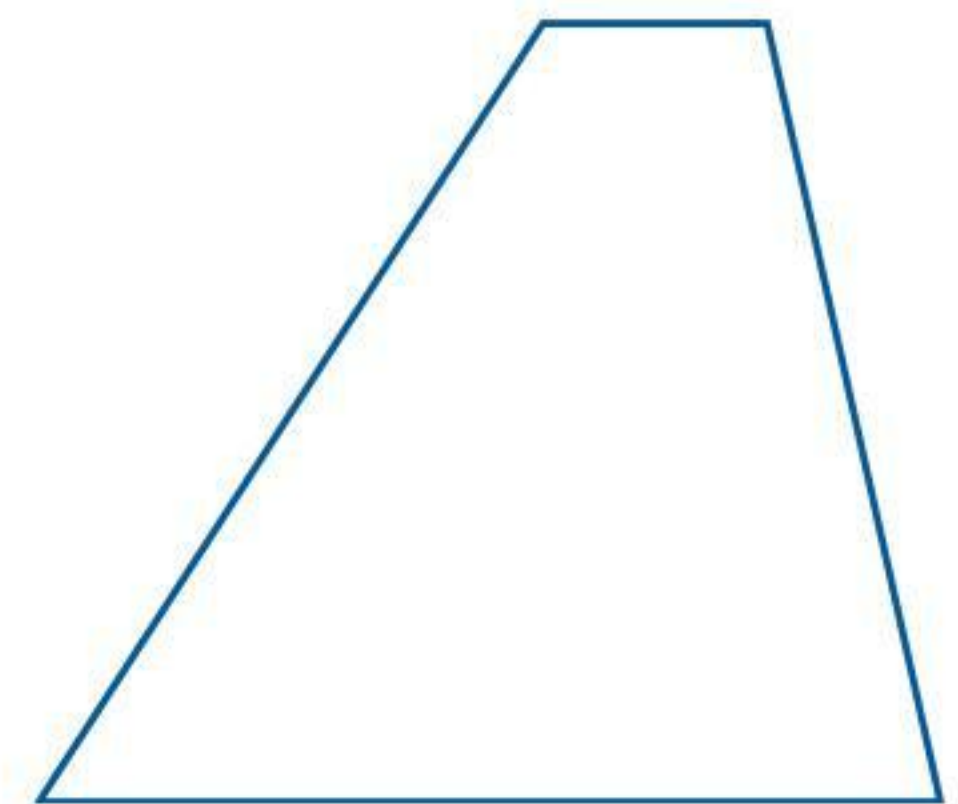


- b** In de rechter figuur staan de vier evenhoge paaltjes wel in een rechte lijn maar niet meer op gelijke afstanden van de glazen plaat.
Teken op de glazen plaat weer het beeld van de paaltjes zoals Theo ze ziet.

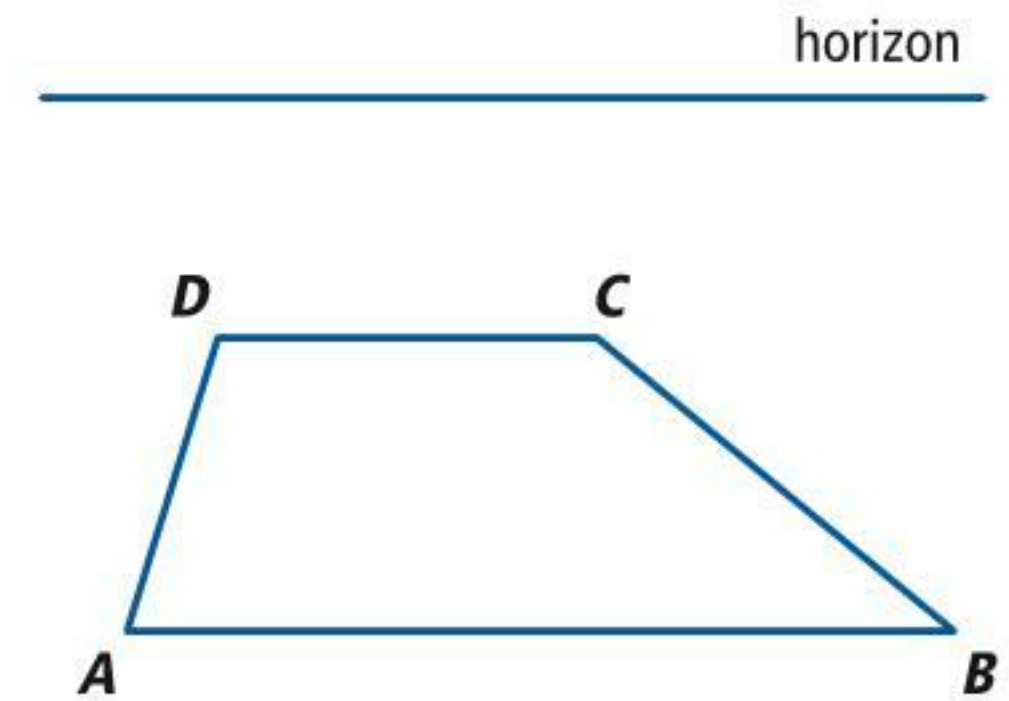
- 27** De lijnen op de wand in de perspectieftekening hiernaast zijn in werkelijkheid evenwijdig.
- a** De meest rechtse man lijkt groter dan de meest linkse.
Meet dat na. Wat is de oorzaak van de vertekening?
- b** Stel dat de twee genoemde mannen in werkelijkheid even groot zijn.
Hoeveel mm zou de rechterfiguur op de tekening dan moeten zijn?
- c** Stel dat de twee linker mannen op de juiste grootte getekend zijn. De meest linkse man is ongeveer 1,65 m.
Bereken de lengte van de tweede man.



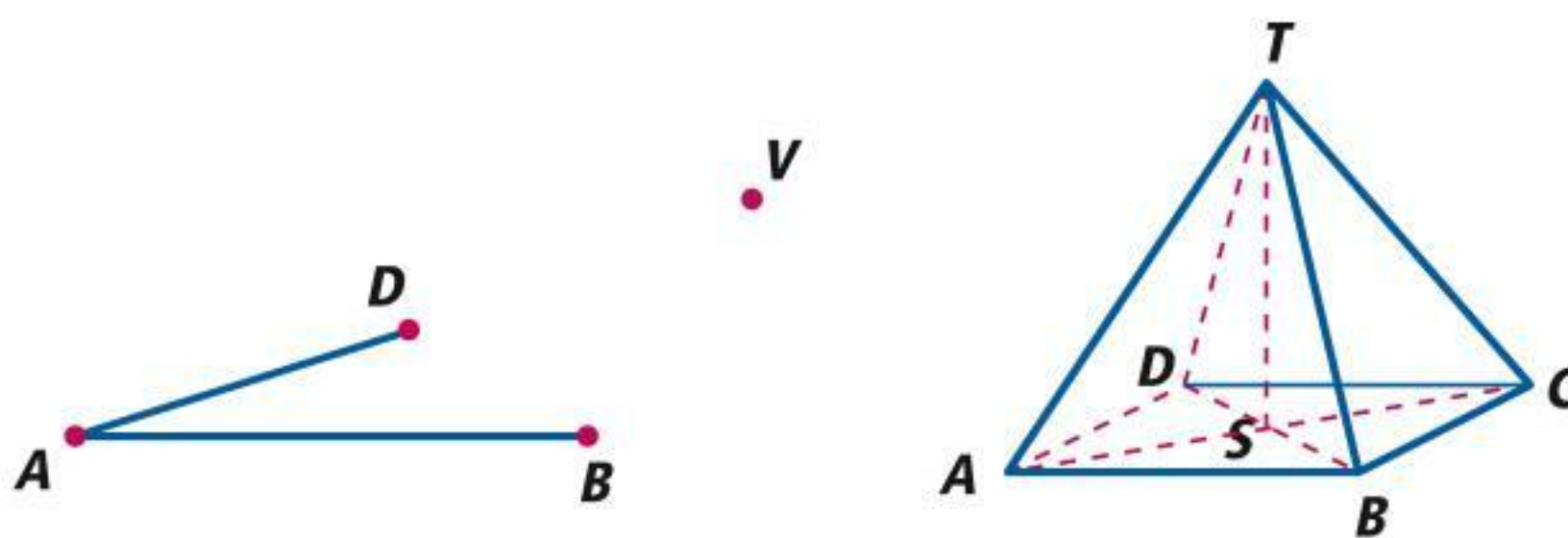
- 28** In de figuur hiernaast zie je een rechthoek in eenpuntperspectief.
Verdeel deze rechthoek in vier achter elkaar liggende, gelijke rechthoeken.



- ✂ 29 Gegeven is een eenpuntperspectief tekening van rechthoek $ABCD$ met verdwijnpunt V .
- Teken rechthoek $ABCD$ als het verdwijnpunt over de horizon twee cm naar rechts wordt verplaatst.
 - Beschrijf hoe de gegeven eenpuntperspectief tekening van rechthoek $ABCD$ verandert, als zijde AB van rechthoek $ABCD$ evenwijdig aan de horizon naar voren wordt verplaatst.



- ☀✂ 30 Gegeven is een piramide $T. ABCD$ met een vierkant grondvlak $ABCD$. De top T ligt recht boven het punt S waarbij S het snijpunt is van de diagonalen AC en BD . Verder is gegeven dat $TS = AB$.



Hierboven zie je een begin van een eenpuntperspectief tekening van de piramide $T. ABCD$ met verdwijnpunt V .

- Waarom is in de perspectieftekening TS korter dan AB ?
- Maak de perspectieftekening van piramide $T. ABCD$ af.

- ✂ 31 De werken van Tommaso Masaccio behoren tot de vroege renaissance. Zijn werk zou later dat van latere kunstenaars zoals Sandro Botticelli en Michelangelo beïnvloeden. Masaccio wordt beschouwd als de eerste belangrijke Italiaanse meester van de 15e eeuw, van belang vanwege de manier waarop hij de personages in zijn schilderijen afbeeldde, en vanwege het gebruik van het licht in zijn werken. Het meeste belang wordt echter gehecht aan het gebruik van het perspectief, waarmee hij een radicale ommezwaai in de Florentijnse schilderkunst teweegbracht. Op het fresco van de *De Heilige Drie-eenheid* in de Santa Maria Novella in Florence (geschilderd tussen 1425 en 1428) zijn de Vader, de Zoon en de Heilige Geest afgebeeld onder een zogeheten tongewelf met Maria en Johannes onder het kruis. De gehele opbouw van het werk geeft een illusie van ruimtelijkheid waarvoor de schilder een perspectiefsysteem met slechts één verdwijnpunt heeft gebruikt.
- Noem een aantal elementen in de opbouw van het schilderij dat de ruimtelijkheid versterkt.

Volgens sommige wetenschappers maakte Masaccio foutief gebruik van het eenpuntperspectief.

- Onderzoek of deze wetenschappers wel of geen gelijk hebben.



Samenvatting

Centrale projectie, oogpunt, tafereel, beeld

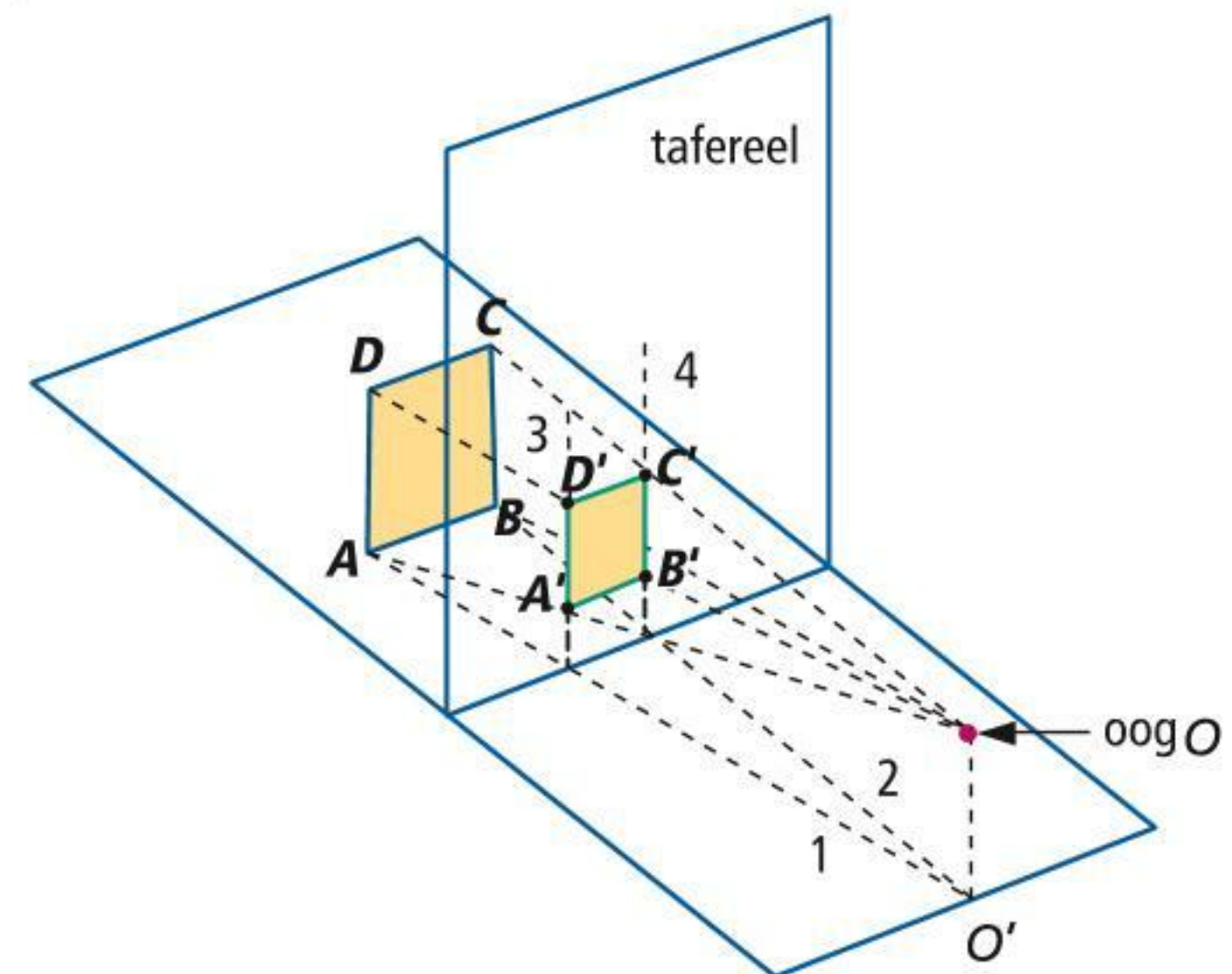
Het schaduwbeeld bij lamplicht en het tekenen van een voorwerp op een glasplaat zijn voorbeelden van centrale projectie. De lamp en het oog zijn het centrale punt.

De glasplaat tussen het oog en het voorwerp wordt het tafereel of tekenvlak genoemd. De loodrechte projectie van het oog op het tafereel heet het oogpunt.

De tekening die op het tafereel ontstaat, heet het beeld. Het beeld is hoe het oog het voorwerp waarneemt.

Voorbeeld

Hieronder zie je hoe een rechthoek $ABCD$, evenwijdig aan het tafereel, door het oog op het tafereel wordt gezien. De nummering van de hulplijnen geeft aan in welke volgorde deze zijn getekend.



Perspectieftekening, verdwijnpunt

Een perspectieftekening is een manier om een ruimtelijk object te tekenen zoals je het in werkelijkheid ziet. Foto's zijn altijd in perspectief, waarbij de lens van de camera het oog is. In een perspectieftekening worden objecten die in werkelijkheid even groot zijn maar zich op ongelijke afstand van het oog bevinden niet even groot afgebeeld. Het object dat verder weg ligt, wordt kleiner afgebeeld.

Vlakdelen die evenwijdig zijn aan het tekenvlak zie je in dezelfde vorm als die in werkelijkheid.

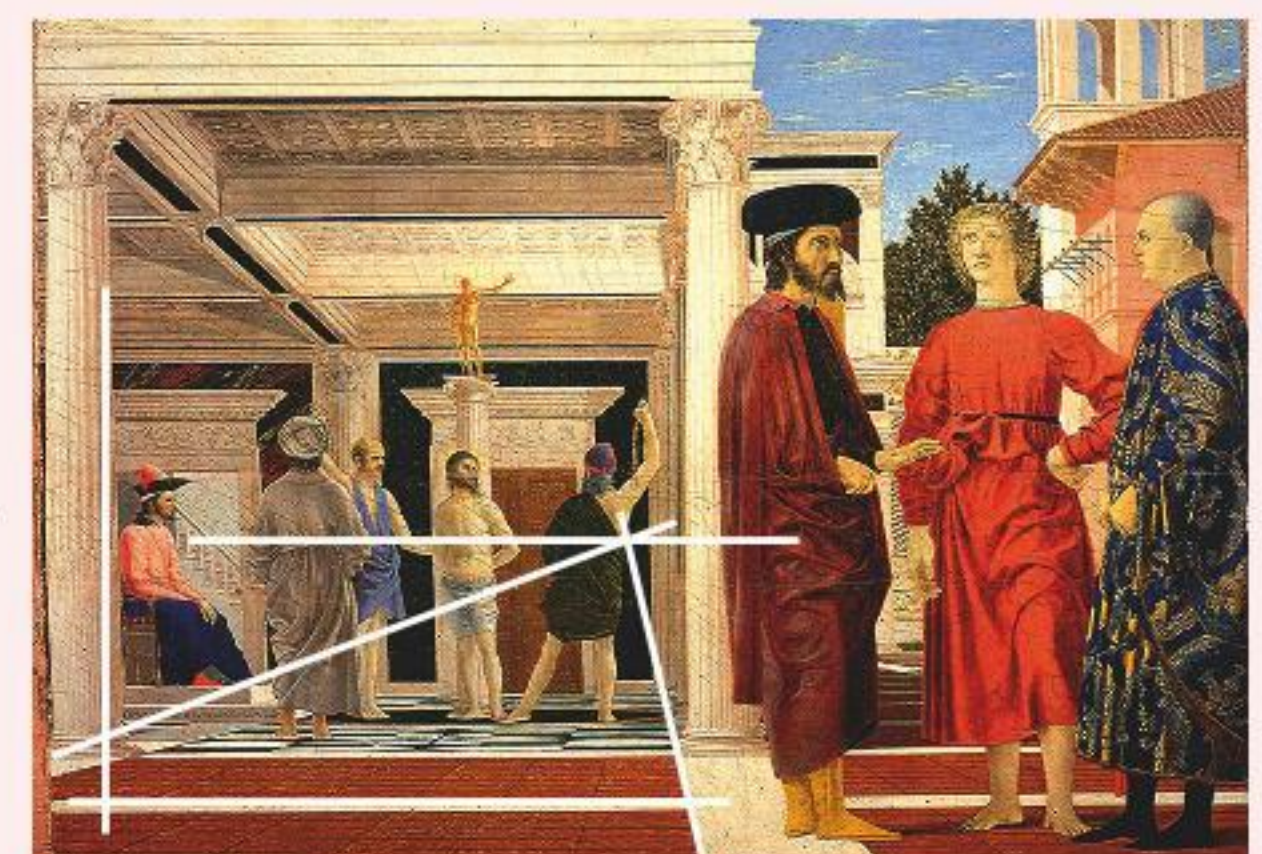
Lijnen die in werkelijkheid evenwijdig zijn, maar die niet evenwijdig zijn aan het tekenvlak, snijden in een perspectieftekening elkaar, eventueel na verlenging, in een zogeheten verdwijnpunt ook wel vluchtpunt genoemd.

Eenpuntperspectief, hoofdrichtingen, horizon

Het schilderij hiernaast van Piero della Francesca (ca. 1460), De geseling van Christus, heeft eenpuntperspectief.

De breedte, hoogte en diepte van een object heten de hoofdrichtingen van het object. In het schilderij zijn de twee hoofdrichtingen aangegeven die evenwijdig aan het tafereel zijn. De andere hoofdrichting staat loodrecht op het tafereel.

Twee lijnen die evenwijdig zijn aan deze derde hoofdrichting zijn in het schilderij aangegeven. Het snijpunt van deze lijnen is het verdwijnpunt. De horizontale lijn door het verdwijnpunt heet de horizon en is in het schilderij eveneens aangegeven.



Je kunt nagaan of in een tekening of schilderij de regels voor het tekenen in eenpuntperspectief correct zijn toegepast

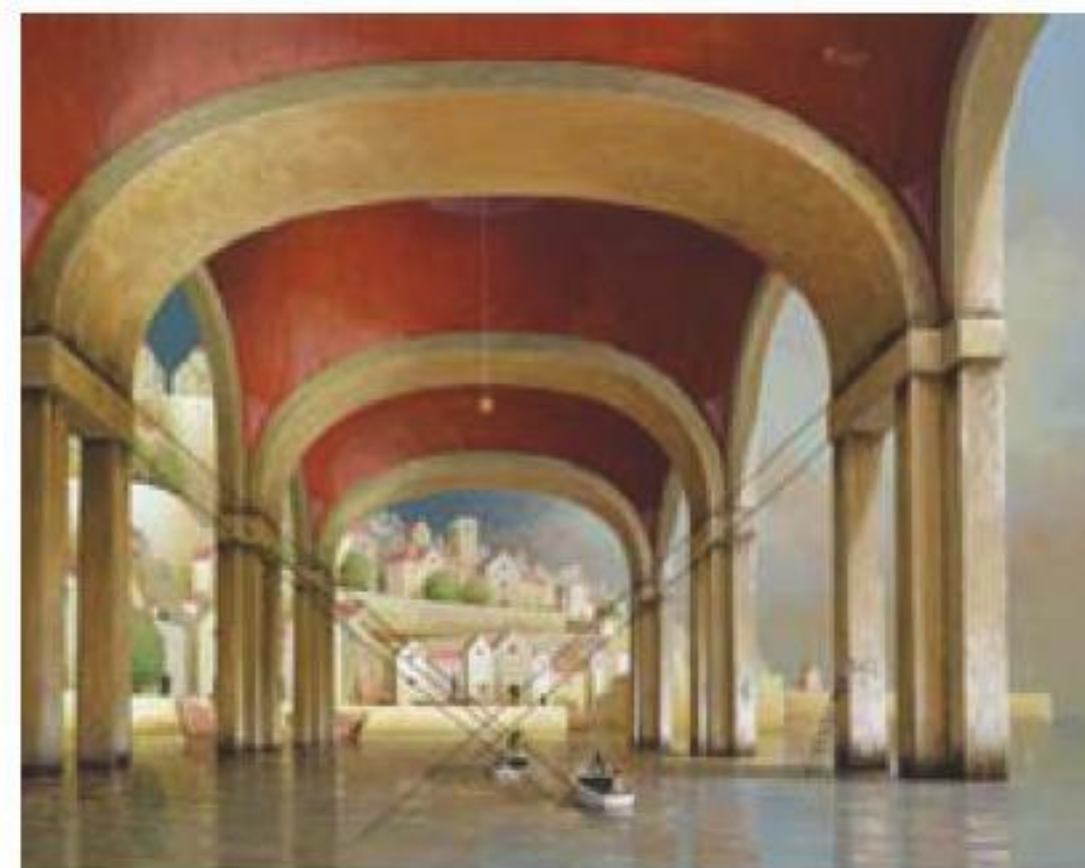
Ga na of twee hoofdrichtingen evenwijdig zijn met het tafereel en alle lijnen die evenwijdig zijn aan de derde hoofdrichting één verdwijnpunt hebben.

Voorbeeld

Ga na dat het schilderij van de Nederlandse schilder Michiel Schrijver hiernaast niet correct in eenpuntperspectief is gemaakt.

Oplossing

Je kunt nagaan dat twee van de drie hoofdrichtingen (verticaal en horizontaal) evenwijdig zijn met het tafereel. De lijnen die evenwijdig zijn met de derde hoofdrichting zouden elkaar in één punt (het verdwijnpunt) moeten snijden. Dat is niet het geval, dus wordt niet aan alle regels van het eenpuntperspectief voldaan.



Je kunt een eenpuntperspectief tekening maken

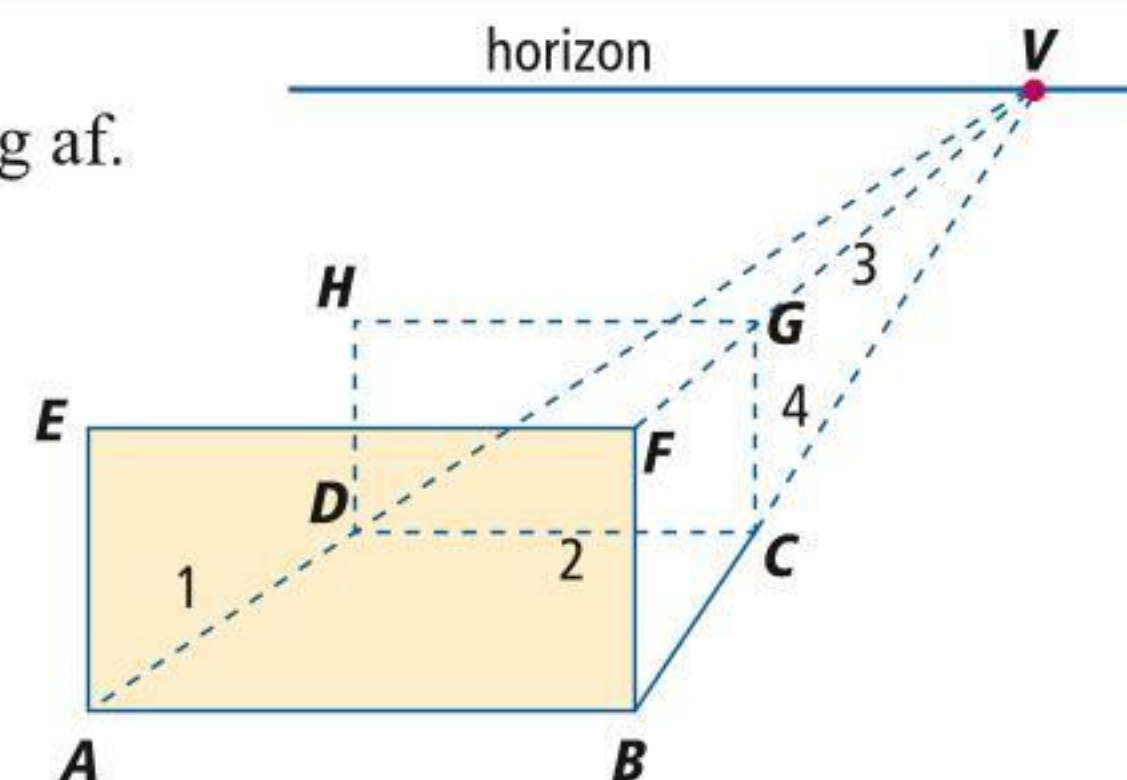
Bij het tekenen maak je gebruik van het verdwijnpunt en evenwijdigheid aan het tekenvlak.

Voorbeeld

Van een eenpuntperspectief tekening van de balk $ABCD$. $EFGH$ hiernaast zijn de zijden AB , BC en BF gegeven. Maak deze tekening af.

Oplossing

Verleng BC tot de horizon; dit geeft het verdwijnpunt V . De rechthoek $ABFE$ zie je in deze tekening als een rechthoek. De punten A , B en F zijn gegeven, dus kun je punt E tekenen. Door achtereenvolgens de stippellijnen 1 tot en met 4 te tekenen ontstaan de punten D en G . De rechthoek $DCGH$ zie je in deze tekening weer als een rechthoek, dus kun je het punt H tekenen. Door de ontbrekende ribben te tekenen maak je de perspectieftekening af.

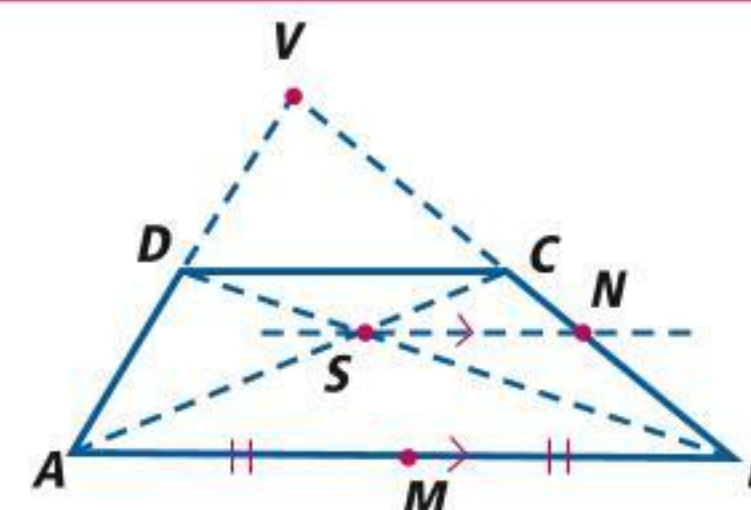


Je kunt in een perspectieftekening het midden van een zijde bepalen

Je maakt gebruik van de diagonalen van een rechthoek om het midden te vinden van een zijde die niet evenwijdig is met het tafereel.

Voorbeeld

Gegeven is een eenpuntperspectief tekening van een rechthoek $ABCD$. Omdat AB evenwijdig is met tafereel, kun je het midden M van AB via meten bepalen; $AM = BM$. Zijde BC is niet evenwijdig aan het tafereel. Teken de diagonalen AC en BD en hun snijpunt S . De lijn door S , evenwijdig aan AB , snijdt BC in N . Punt N is het midden van BC .



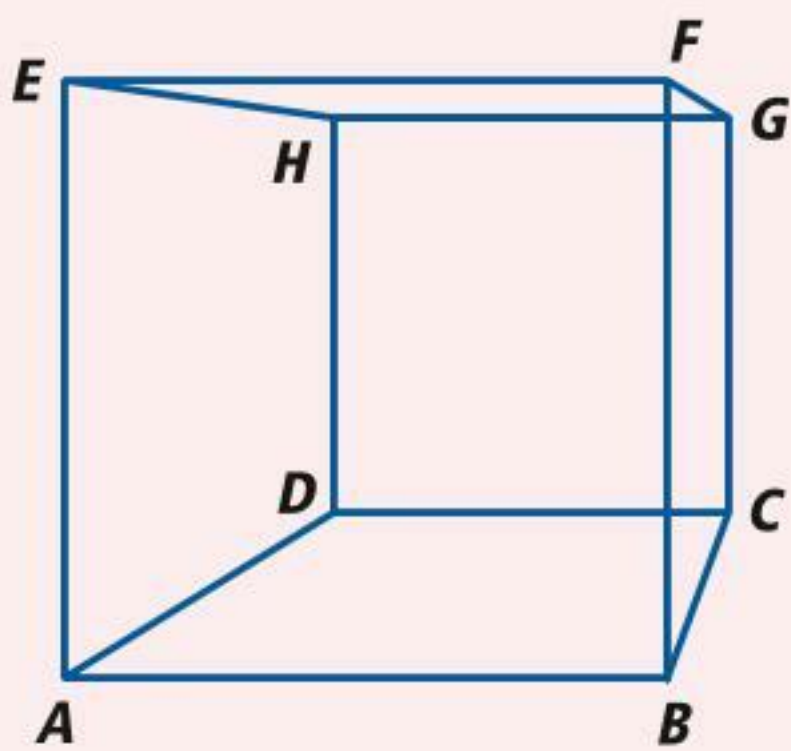
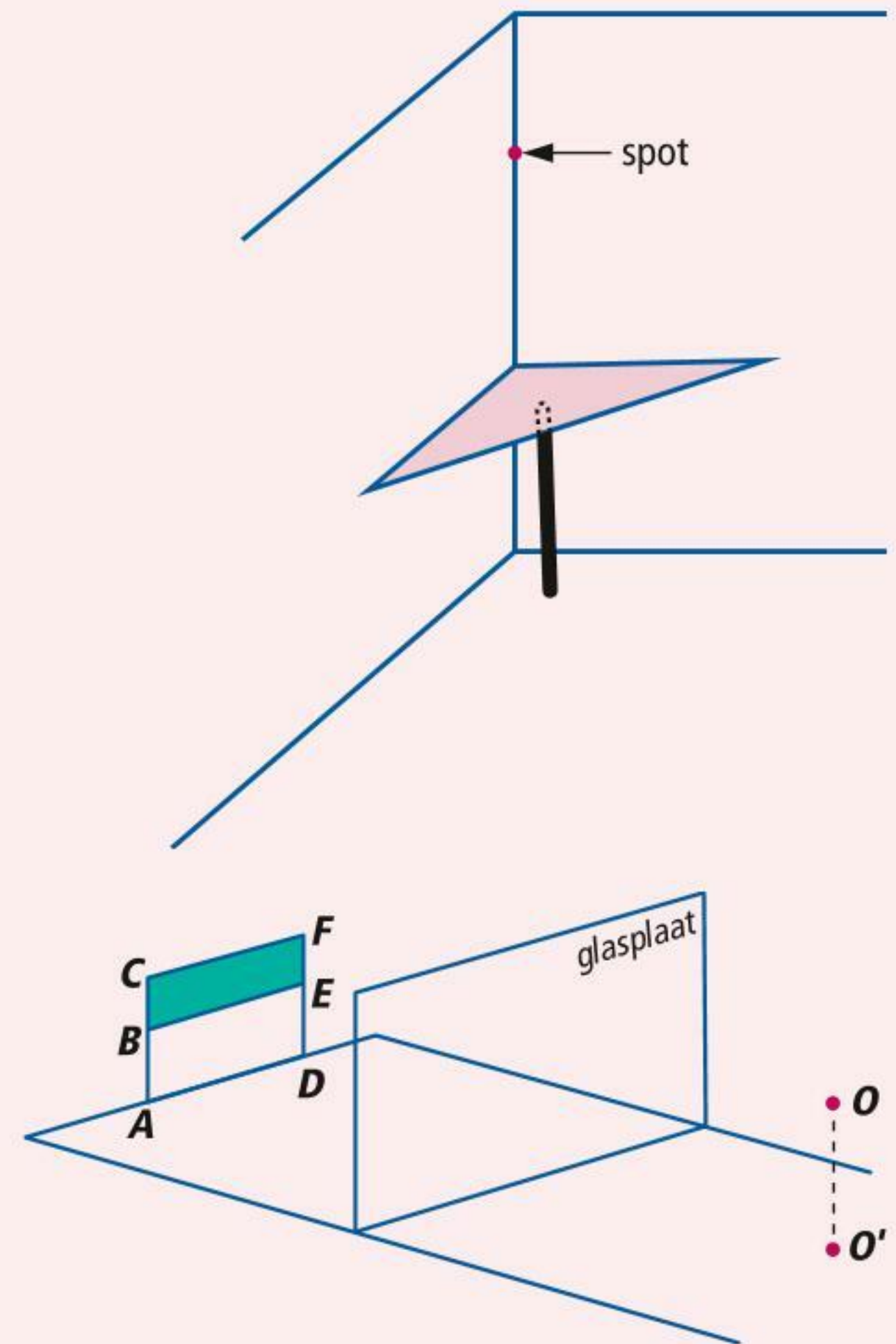
Test jezelf

- T-1** In de hoek van een kamer staat een bijzettafeltje. Het blad hiervan heeft de vorm van een rechthoekige, gelijkbenige driehoek. In de hoek is een spot opgehangen. Deze spot geeft een schaduw van het tafelblad op de vloer.
- Teken deze schaduw op de vloer.
 - Als de spot lager wordt opgehangen, wat is dan het gevolg voor de schaduw?
 - Onderzoek in de tekening van opdracht a of de spot op een hoogte kan worden gehangen zodat de afmetingen van de schaduw het $\frac{2}{3}$ deel zijn van die in opdracht a. Leg je antwoord uit.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-1.

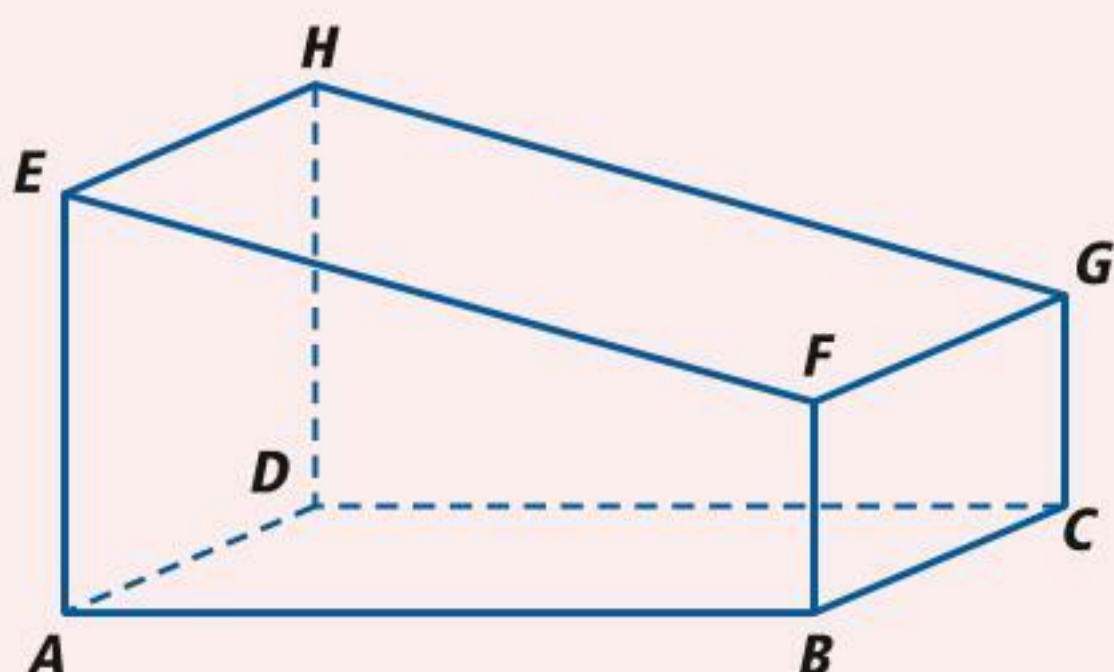
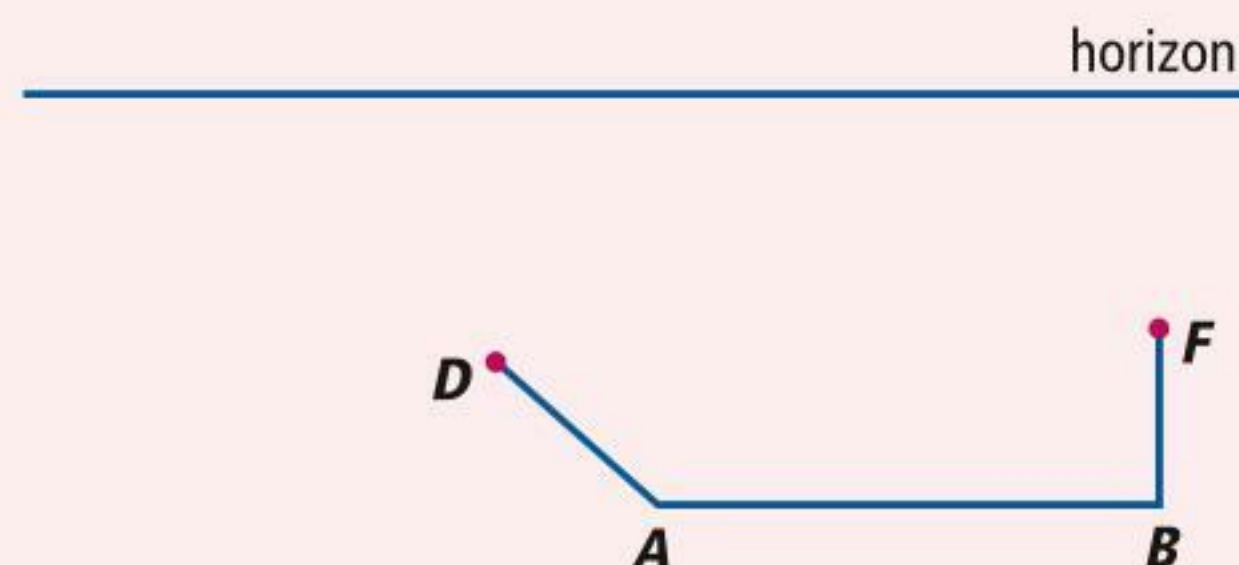
- T-2** In de tekening hiernaast kijk je met je oog in O door een glasplaat naar een spandoek, aangegeven met $BCFE$. Het spandoek staat evenwijdig aan de verticale glasplaat en is bevestigd aan twee palen, in de tekening aangegeven met AC en DF .
- Teken het beeld van het spandoek op de glasplaat.
 - Hoe verandert het beeld op de glasplaat als het spandoek verder van de glasplaat wordt geplaatst?
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-1.*

- T-3** Hieronder staat een eenpuntperspectief tekening van een draadmodel van kubus $ABCD.EFGH$. Teken het verdwijnpunt en de horizon.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-2.*



- T-4** Hieronder is een tekening van Hans Vredeman de Vries gegeven.
- Teken van elk van de drie hoofdrichtingen twee lijnen.
 - Ga na of de regels van het eenpuntperspectief correct zijn toegepast.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-3.*





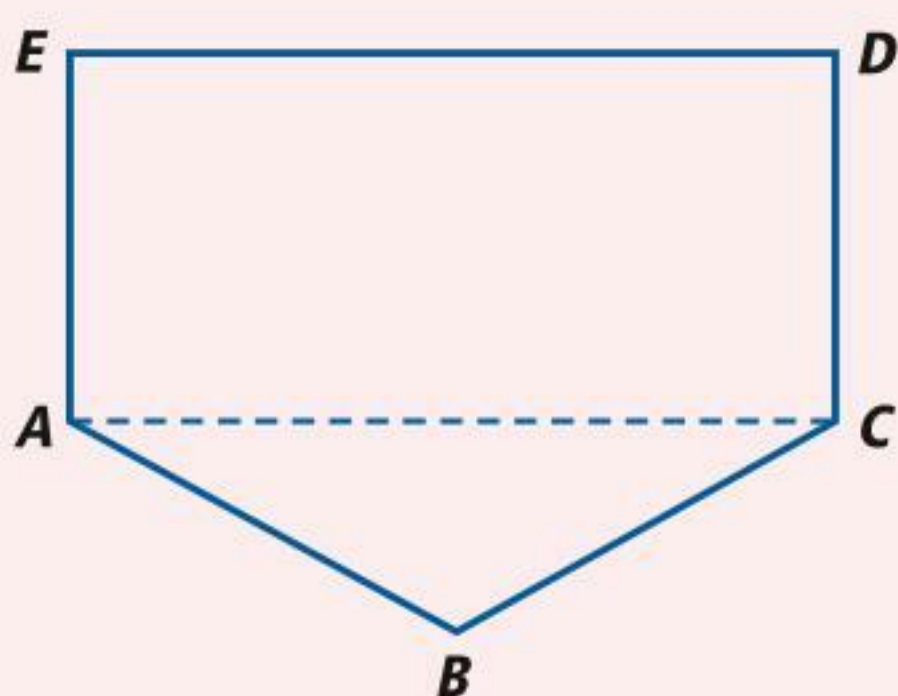
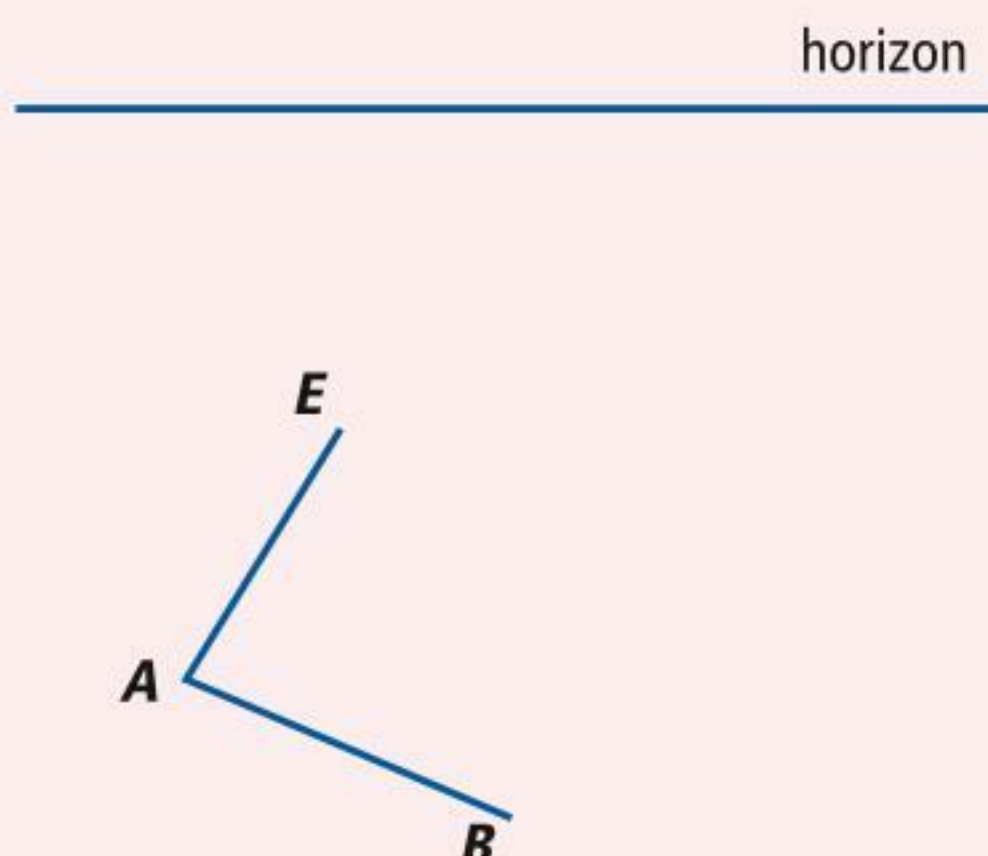
- T-5** Gegeven is een scheef afgeknotte balk $ABCD.EFGH$. Zijde AE is twee keer zo lang als zijde BF . In de tekening rechts is een begin gemaakt met een eenpuntperspectief tekening van de gegeven afgeknotte balk.

- Maak deze tekening af.
- Teken het midden M van EF en het midden N van AD .
- Teken in de figuur van opdracht a een balk $BPQC.FRSG$ waarvan geldt dat BF even lang is als BP .

Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-4.

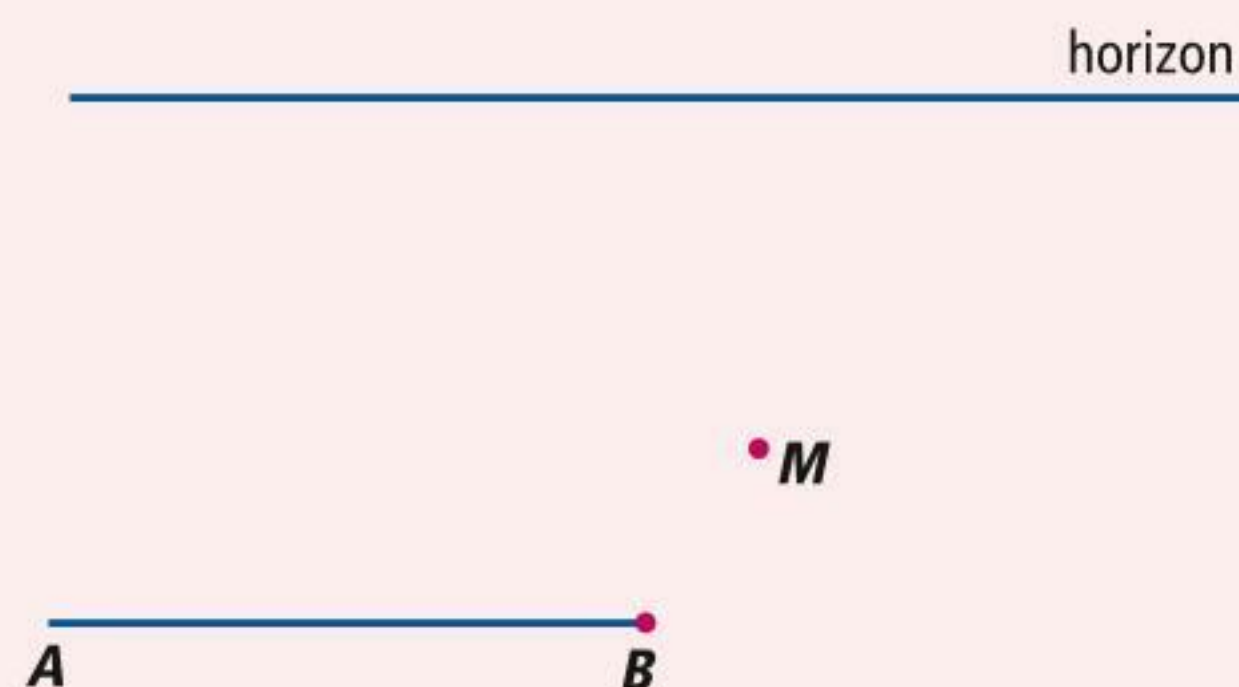
- T-6** Hieronder is een vijfhoek $ABCDE$ gegeven. Het deel $ACDE$ is een rechthoek en driehoek ABC is gelijkbenig met $BA = BC$.

Naast de vijfhoek is een begin gemaakt met een eenpuntperspectief tekening. De zijde ED en de diagonaal AC lopen evenwijdig aan de horizon. De zijden AE en CD staan loodrecht op de horizon.



- Maak deze perspectieftekening af.
- Teken in de perspectieftekening het midden van zijde AE

- T-7** Van een eenpuntperspectief tekening van een rechthoek $ABCD$ is zijde AB gegeven en het midden M van zijde BC . Maak deze perspectieftekening af.



Praktische opdracht

Wereldrecords

Benodigheden

Excel

Planning

10 slu

Opbouw

- 1 Probleemstelling
- 2 Probleem verkennen
- 3 Plan maken
- 4 Plan uitvoeren
- 5 Conclusie



Probleemstelling

Topsport is een jacht op wereldrecords geworden. Het kan steeds sneller, verder en beter.

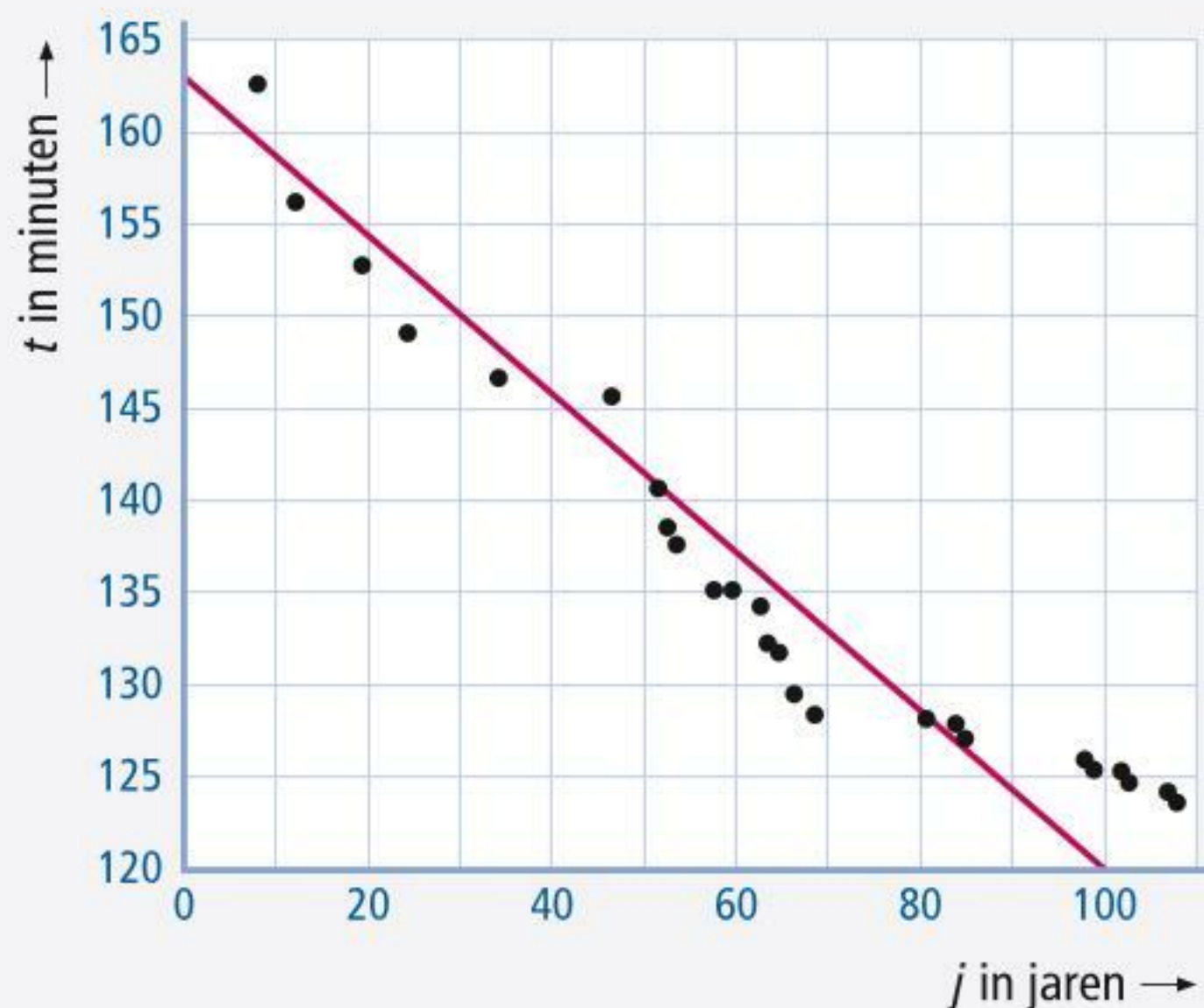
Zijn er dan geen grenzen aan de prestaties?

Natuurlijk wel, want het is onmogelijk de 100 meter in bijvoorbeeld 1 seconde te lopen. En het menselijk heupgewricht overleeft een sprong van 15 meter niet. De vraag is dus waar de grenzen liggen en wanneer die bereikt zullen worden. Misschien kan de wiskunde bij het voorspellen een handje helpen.

Probleem verkennen

Om het probleem te verkennen ga je eerst de gegevens analyseren. Een handig hulpmiddel hierbij is een grafische weergave van de gegevens.

- 1** De marathon is een hardloopwedstrijd over een afstand van 42,195 km.
Over een periode van ongeveer honderd jaar zijn de wereldrecordhouders bekend. Hiernaast staan de wereldrecords uit de periode van 1909 tot en met 2014.
 - a** In de tabel hiernaast zijn de gelopen tijden omgezet in minuten. In 2014 liep Dennis Kimetto de marathon in 2 uur 2 minuten en 57 seconden. Controleer dat deze tijd overeenkomt met die in de tabel.
 - b** In hoeveel uren, minuten en seconden liep Frederick Barret in 1909 de marathon?
 - c** Met welke gemiddelde snelheid in kilometer per uur liep Frederick Barret de marathon in 1909? En met welke gemiddelde snelheid liep Dennis Kimetto de marathon in 2014?



jaar	tijd (min.)	atleet
1909	162,52	Frederick Barrett
1913	156,11	Alexis Ahlgren
1920	152,6	Hannes Kolehmainen
1925	149,03	Albert Michelsen
1935	146,7	Sohn Kee-chung
1947	145,65	Suh Yun-Bok
1952	140,7	Jim Peters
1953	138,58	Jim Peters
1954	137,66	Jim Peters
1958	135,28	Sergej Popov
1960	135,27	Abebe Bikila
1963	134,47	Leonard Edelen
1964	132,2	Abebe Bikila
1965	132	Mono Shigematsu
1967	129,62	Derek Clayton
1969	128,57	Derek Clayton
1981	128,3	Robert de Castella
1984	128,08	Steve Jones
1985	127,2	Carlos Lopes
1998	126,08	Ronaldo da Costa
1999	125,7	Khalid Khannouchi
2002	125,63	Khalid Khannouchi
2003	124,92	Paul Tergat
2007	124,43	Haile Gebrselassie
2008	123,98	Haile Gebrselassie
2011	123,63	Patrick Makao
2013	123,38	Wilson Kipsang
2014	122,95	Dennis Kimetto

- 2** In de grafiek hierboven zijn de gegevens uit de tabel weergegeven. Hierbij is j de tijd in jaren met $j = 0$ in 1900 en t de tijd op de marathon in minuten.
De punten uit de tabel liggen bij benadering op een rechte lijn. Dit noem je een trendlijn.
 - a** Leg uit dat het verbinden van de punten geen betekenis heeft.
 - b** Gebruik de schuifknoppen om de trendlijn zo goed mogelijk bij de gegevens aan te passen.
Welke formule hoort bij jouw trendlijn?
 - c** Waarom kan het verband tussen de tijd van het wereldrecord en het jaartal niet lineair zijn?
 - d** Welke soorten verbanden komen wel in aanmerking?

Plan maken en plan uitvoeren

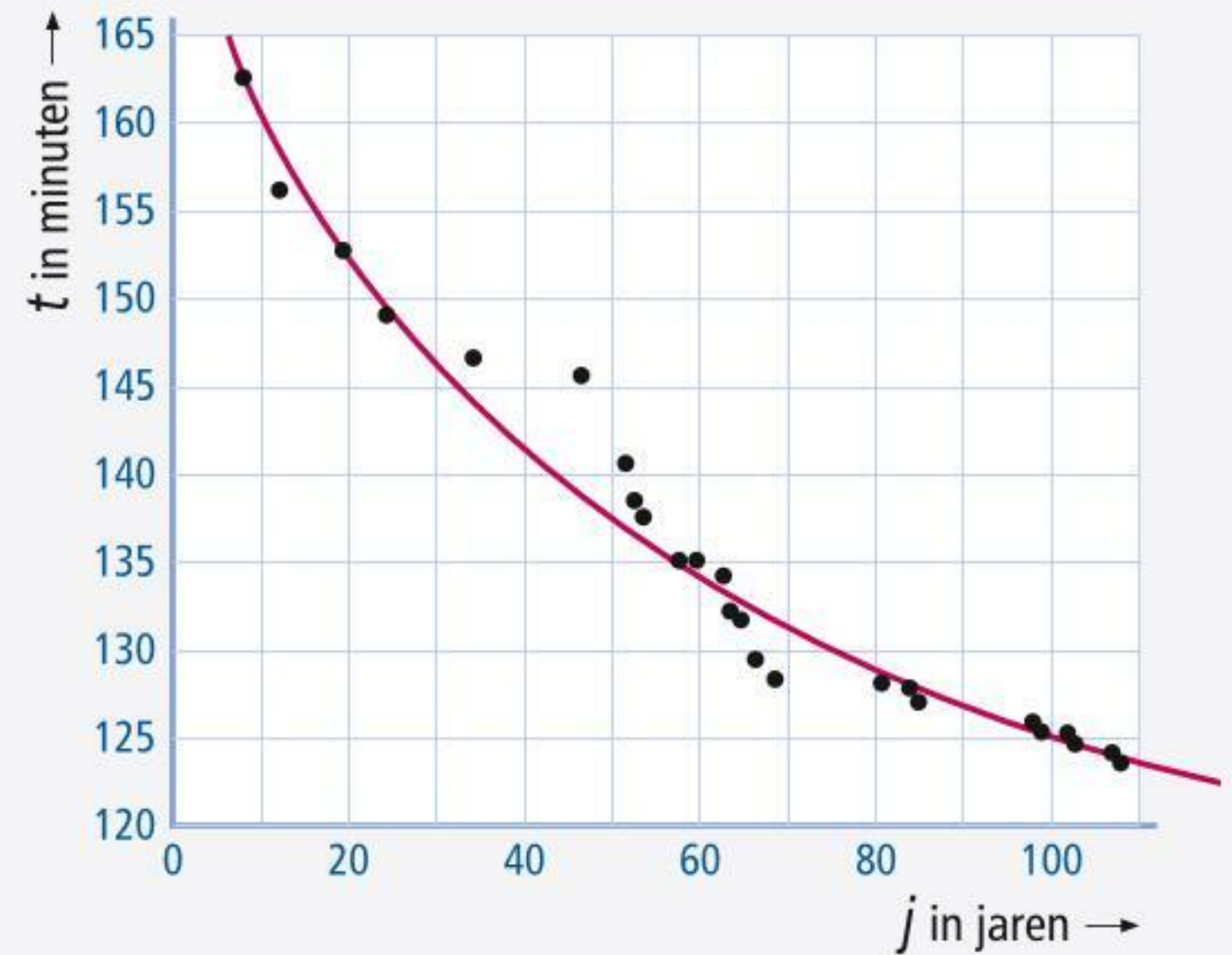
Als je de grafiek van de punten uit de tabel wilt benaderen met een wiskundig model, dan komen alleen grafieken met een horizontale asymptoot in aanmerking. Dit is zo omdat je er vanuit gaat dat er een grens is aan het wereldrecord op de marathon. Door de formule bij de grafiek ligt de (wiskundige) grens van het wereldrecord vast.

Gebroken functies en de exponentiële functies hebben een horizontale asymptoot. Deze zijn dus te gebruiken bij een wiskundig model bij de ontwikkeling van wereldrecords.

- 3** De formule bij de getekende grafiek heeft de vorm

$$t = \frac{a}{b \cdot j + 1} + c.$$

Hierbij is j de tijd in jaren met $j = 0$ in het jaar 1900 en t de tijd op de marathon in minuten.



- a** Hoe kun je aan de formule zien dat de bijbehorende grafiek een horizontale asymptoot heeft?
 - b** Onderzoek wat de invloed van het getal a is op de vorm van de grafiek van t . Doe dat ook voor de parameters b en c .
 - c** Stel met de schuifknoppen de parameters a , b , en c zo in dat het model zo goed mogelijk bij de punten uit de tabel past.
Welke formule hoort er bij het model dat je gevonden hebt?
 - d** Geef de formule van de horizontale asymptoot bij het model dat je gevonden hebt.
 - e** Welke grens voor het wereldrecord op de marathon volgt hieruit?
- 4a** Een waarde uit de tabel die veel lijkt af te wijken van het wiskundig model is de marathon die Suh Yun-Bok in 1947 gelopen heeft.
Bereken hoeveel procent de waarde van jouw wiskundig model van opdracht 3 afwijkt van de werkelijke waarde.
- b** De eerste marathon werd in 1896 in Athene gelopen door Spiridon Louis in 2 uur 58 minuten en 50 seconden.
Hoeveel procent wijkt jouw wiskundig model nu af van de werkelijke waarde?
- 5** Een andere formule die in aanmerking komt is een formule waarin de tijden exponentieel afnemen en waarvan de grafiek nadert naar een horizontale asymptoot.
Neem daarvoor de formule $t = a \cdot b^j + c$.
- a** Onderzoek net zo als bij opdracht 3b de invloed van a , b en c op de vorm van de grafiek van t .
 - b** Stel de parameters a , b en c zo in dat de grafiek van t zo goed mogelijk bij de puntengrafiek past.
Welke formule heb je nu gevonden?
 - c** Verschilt de grens die je nu voor het wereldrecord vindt veel van die bij opdracht 3?
 - d** Onderzoek weer hoeveel procent de tijden van je model uit opdracht 5 afwijken van de tijden van Suh Yun-Bok en Spiridon Louis.

- 6a** Bereken voor de modellen van opdracht 3 en opdracht 5 in welk jaar voor het eerst een marathon onder de twee uur gelopen wordt.
- b** Aan welke van de twee gevonden modellen geef je de voorkeur? Waarom?
- 7** Het laatste wereldrecord uit de tabel werd op 28 september 2008 in Berlijn gelopen door de Ethiopiër Haile Gebrselassie.
Ga na of het wereldrecord op de marathon na 2008 nog gebroken is.
Ga na of je op grond van deze nieuwe gegevens je grafieken en formules nog moet aanpassen.

Conclusie

Maak in je eigen woorden een kort verslag van de wijze waarop de probleemstelling in de vorige opdrachten is aangepakt.
Schrijf kort de conclusies op.

Suggesties voor vervolg

- c** > In de tabel vind je de wereldrecords op de 500 m schaatsen vanaf 1970. Ga na of de tabel nog aangevuld kan worden met nieuwe wereldrecords.
Bij deze gegevens lijkt het lineaire model het best te passen. Als de wereldrecords worden gesplitst in de periode van 1970 tot 1990 en vanaf 1990 tot nu, dan passen het gebroken en het exponentiële model beter bij de gegevens. Bepaal voor beide perioden zo nauwkeurig mogelijk de grens voor de wereldrecords.
Wat is de verklaring voor het verschil tussen die twee grenzen?
- > Bij veel sporten moet de grens voor het wereldrecord in de loop van de tijd onder invloed van technische ontwikkelingen bijgesteld worden.
Denk bijvoorbeeld aan polsstokhoogspringen. Eerst werd er gesprongen met houten stokken, daarna met bamboestokken, gevolgd door aluminium stokken en nu met kunststofstokken. De sprongen die nu gemaakt worden, waren onmogelijk met de houten stokken.
Kies een sport en onderzoek bij die sport of de grens voor de wereldrecords in de loop der tijd één of meerdere malen bijgesteld moest worden. Geef voor elke bijstelling aan welke ontwikkeling die bijstelling noodzakelijk maakte.
- > Je kunt ook de grafische rekenmachine gebruiken om de recordgrens bij een bepaalde sport te onderzoeken.
Gebruik de lijsten in je rekenmachine om de wereldrecords in te voeren.
Stel vervolgens een formule op waarmee je de puntengrafiek van de wereldrecords zo goed mogelijk benadert. Je kunt hierbij denken aan de formules zoals die bij de marathon gebruikt werden.



Data bewerken en presenteren in Excel

De leerlingen uit 4 havo van een school hebben de vragenlijst hiernaast ingevuld. De resultaten zijn ingevoerd in een Excelwerkblad.

- 1a** Het Excelwerkblad met de gegevens de leerlingen bestaat uit vakjes die cellen genoemd worden. Elke cel wordt met behulp van één of meer letters en een getal aangeduid. In de kolomkoppen A1 tot en met H1 staan de namen van de statistische variabelen waarvan gegevens zijn verzameld.
- a** Wat is het gewicht van leerling 21?
- b** Geef de betekenis van het getal in cel H10.

Je selecteert een cel door er met de muis op te klikken. Als je vervolgens de Shifttoets ingedrukt houdt en op de pijltoetsen drukt, selecteer je meerdere cellen. Een selectie van meerdere cellen wordt een bereik genoemd. Hiernaast is het bereik B2 : D3 geselecteerd. Het bereik B2 : D3 kun je ook selecteren door in het naamvak B2 : D3 te typen en op **Enter** te drukken.

- 2a** Typ in het naamvak A1 : H155 en druk op **Enter**. Klik in het tabblad **Start** bij **Stijlen** op **Opmaken als tabel** en kies een tabelstijl. Druk in het popupvenster dat verschijnt op **OK**.
- b** Excel beschouwt het bereik A1 : H155 nu als een tabel met gegevens. In de cellen met de kolomnamen staan nu knopjes. Daarmee kun je de gegevens sorteren. Hoe lang is de grootste leerling? En hoe lang is de kortste?

Enquête 4 havo

Wat is je geslacht? m / v*

Wat is je leeftijd?

Wat is je lengte in centimeter?

Wat is je gewicht in kilogram?

Welk profiel heb je?

Wat is je gemiddeld cijfer over je profielvakken?

Ga je met plezier naar school?
1 nee 2 weinig 3 neutraal 4 behoorlijk 5 veel*

* Omcirkel wat van toepassing is.

	A	B	C	D	E
1	leerling	geslacht	leeftijd	gewicht	lengte
2	1	m	15	70	190
3	2	m	15	55	170
4	3	m	16	60	170

naamvak

B2:D3					
	A	B	C	D	E
1	leerling	geslacht	leeftijd	gewicht	lengte

A	B	C	D	E
leerling	geslacht	leeftijd	gewicht	lengte
1	m	15	70	190

☒ (Alles selecteren)

☐ m

☒ v

- 3** Met behulp van de knopjes kun je de gegevens ook filteren.
- a** Druk op het knopje naast geslacht en klik op het vinkje bij de letter **m**. Je ziet nu alleen nog gegevens over meisjes in de tabel en op het knopje verschijnt een filtersymbool.
- b** Controleer met behulp van filters dat er acht 15-jarige meisjes zijn met een lengte van 168 cm.
- c** Zet de filters stuk voor stuk weer uit door telkens een vinkje te zetten bij **Alles selecteren**. Het filtersymbool mag op geen enkel knopje meer voorkomen.
- 4a** Selecteer weer het bereik A1 : H155 zoals bij opdracht 2a. Klik in het tabblad **Formules** bij **Gedefinieerde namen** op **Maken o.b.v. selectie**, en druk op **OK**.
- b** Selecteer de gegevens over de lengte van de leerlingen door in het naamvak **lengte** te typen en op **Enter** te drukken.

Door het definiëren van namen ben je in het vervolg in staat om veel simpeler bereiken in te voeren. In plaats van **D2 : D155** kun je nu **gewicht** typen.

Een = -teken in een cel geeft aan dat er een functie of een berekening volgt.

- 5a** Typ in cel A156 = aantal (leerling) en druk op **Enter**. Wat is de betekenis van het getal dat verschijnt?
- b** Typ in cel B156 = aantal (geslacht) en druk op **Enter**. Lees de beschrijving van de functie **AANTAL(b)** hiernaast. Waarom krijg je het getal 0 als resultaat?
- c** Pas de formule in cel B156 als volgt aan = aantalarg (geslacht).
- d** Tel ook het aantal niet-lege cellen in de overige kolommen. Waarom zijn niet alle berekende aantallen gelijk aan elkaar?

Je gaat nu een nieuw werkblad openen voor berekeningen en grafieken bij de data op blad 1. Daarmee voorkom je dat je per ongeluk gegevens wist of verandert.

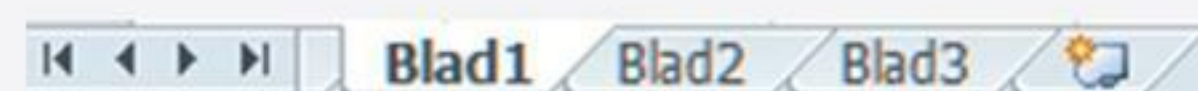
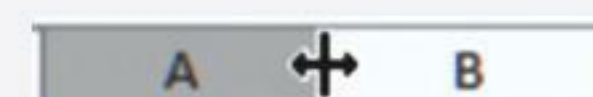
- 6a** Open een nieuw werkblad door linksonder op **Blad2** te klikken.
- b** Typ in het bereik B1 : D1 achtereenvolgens lengte, gewicht, leeftijd en in het bereik A2 : A4 minimum, maximum, gemiddelde.
Pas de breedte van de kolom A aan door te dubbelklikken op de grens tussen de twee kolomaanduidingen A en B.
- c** Typ in cel B2 = min (lengte), in cel B3 = max (lengte) en in cel B4 = gemiddelde (lengte).
- d** Het heeft weinig zin om een gemiddelde lengte in meer dan één decimaal weer te geven.
Klik met de rechter muisknop op cel B4, kies bij **Celeigenschappen** voor **Getal** en stel het aantal decimalen in op 1.
- e** Bereken op dezelfde manier in het bereik C2 : C4 het minimale, het maximale en het gemiddelde gewicht van de groep leerlingen. Stel de weergave van het gemiddelde gewicht weer in op één decimaal.
- f** Bereken ook de minimale, de maximale en de gemiddelde leeftijd in het bereik D2 : D4.

Begrippen die je kent uit de vorige leerjaren, zoals modus, mediaan, eerste en derde kwartiel, spreidingsbreedte, de kwartielen Q_1 en Q_3 , zijn in Excel gemakkelijk te berekenen.

- 7a** Typ in het bereik A5 : A8 achtereenvolgens modus, mediaan, Q_1 , Q_3 .
- b** Typ in cel B5 = modus (lengte), in cel B6 = mediaan (lengte), in cel B7 = kwartiel (lengte;1) en in cel B8 = kwartiel (lengte;3).
- c** Vul de tabel verder in voor het gewicht en de leeftijd.

De functie **AANTAL(b)** telt het aantal cellen in bereik b waar een getal in staat.

De functie **AANTALARG(b)** telt het aantal niet-lege cellen in bereik b .



Met de functies **MIN(b)**, **MAX(b)** en **GEMIDDELDE(b)** kun je de minimale, de maximale en de gemiddelde waarde van bereik b berekenen.

Met de functie **MODUS(b)** bereken je de modus en met de functie **MEDIAAN(b)** van de getallen in het bereik b .

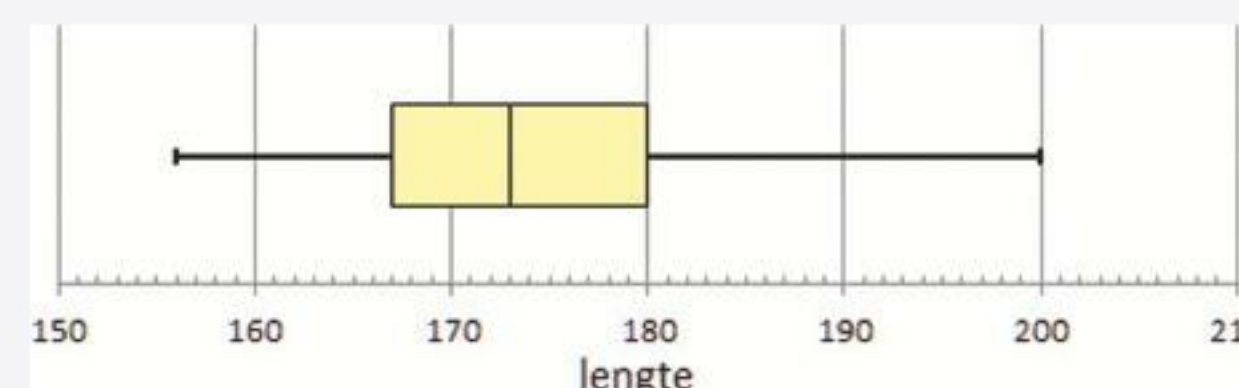
Met **KWARTIEL(b;1)** en **KWARTIEL(b;3)** bereken je het eerste en derde kwartiel

- 8a** Typ in cel A9 spreidingsbreedte en in cel A10 kwartielfstand. Pas de breedte van kolom A weer aan.
- b** Bereken de spreidingsbreedte van de lengte van de leerlingen door in cel B9 = B3 – B2 te typen.
- c** Bereken de kwartielfstand van de lengte van de leerlingen door in cel B10 door = B8 – B7 te typen.
- d** Bereken ook de spreidingsbreedte en de kwartielfstand van het gewicht en de leeftijd van de leerlingen.

Met de gegevens uit de tabel naast opdracht 8 kun je zelf bij elk van de variabelen lengte, gewicht en leeftijd een boxplot tekenen.

In Excel is dat niet eenvoudig. Als je dat toch wilt kun je op het Internet beschrijvingen of filmpjes vinden die laten zien hoe je dat moet doen.

	lengte	gewicht	leeftijd
minimum	156	40	14
maximum	200	90	17
gemiddelde	174,0	60,6	15,4
modus	168	55	15
mediaan	173	59	15
Q1	167	55	15
Q3	180	65	16
spreidingsbreedte	44	50	3
kwartielfstand	13	10	1

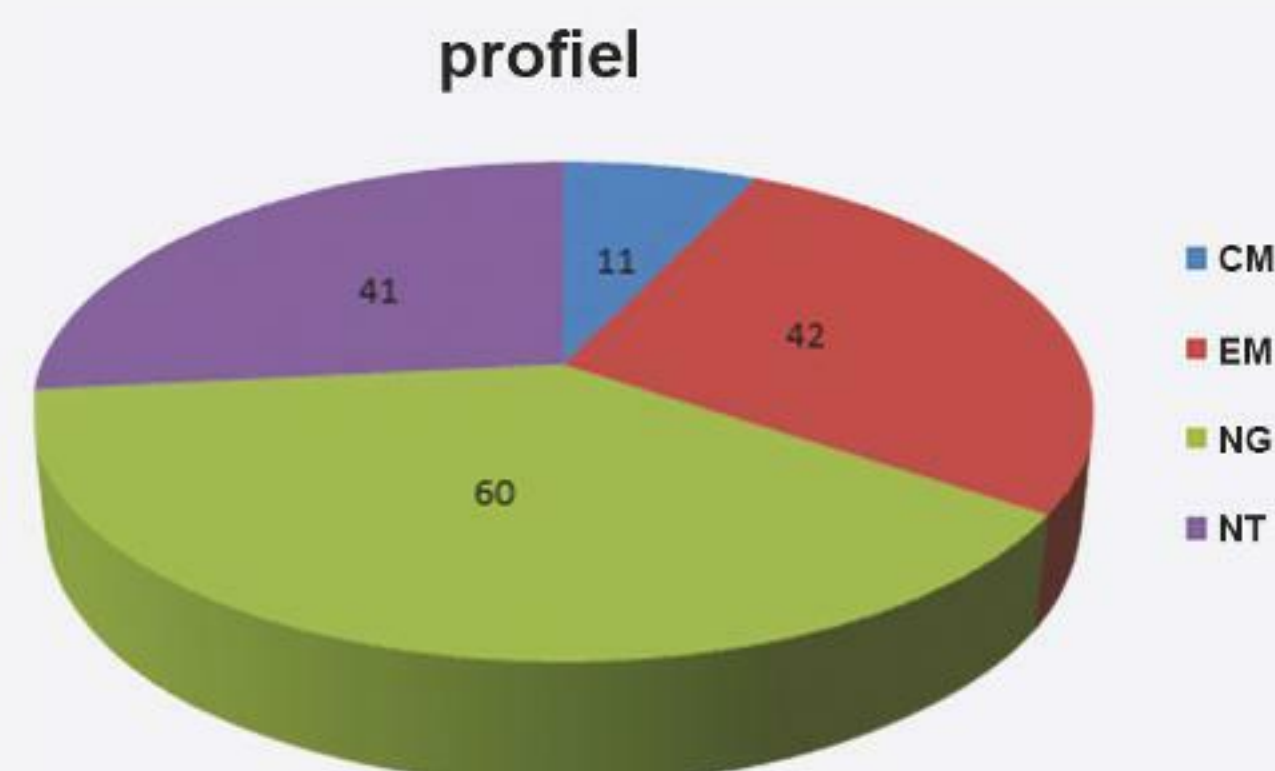


- 9a** Typ in de cellen A12 en B12 achtereenvolgens profiel, aantal en in het bereik A13 : A16 de profielen CM, EM, NG en NT.
- b** Typ in cel B13 = aantal.als (profiel; "CM").
- c** Bereken op dezelfde manier de aantallen leerlingen met de profielen EM, NG en NT.

Met de functie **AANTAL.ALS(b; c)** bereken je van bereik *b* het aantal cellen dat voldoet aan criterium *c*. Het criterium *c* moet tussen dubbele aanhalingsteken gezet worden.

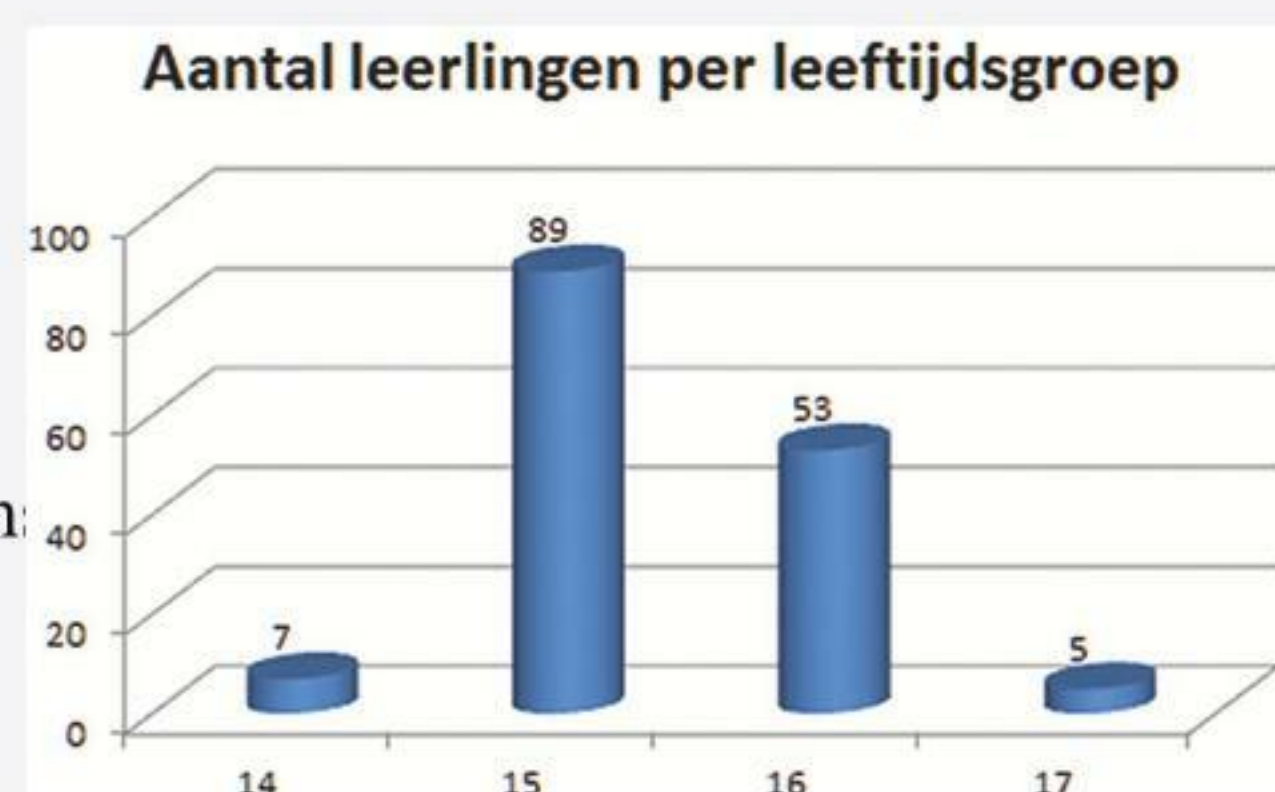
Met Excel kun je mooie diagrammen maken. Die diagrammen kun je in een verslag in Word plaatsen met behulp van kopiëren (Ctrl-c) en plakken (Ctrl-v).

- 10a** Selecteer het bereik A12 : B16. Klik op het tabblad **Invoegen** bij de categorie **Grafieken** op **Cirkel** en kies een soort cirkeldiagram.
- b** Maak het diagram zoals hiernaast op met behulp van de tabbladen **Ontwerpen**, **Indeling** en **Opmaak** van **Hulpmiddelen voor grafieken**.



- 11a** Typ in de cellen A18 en B18 leeftijd en aantal en in het bereik A19 : A22 de leeftijden 14, 15, 16 en 17.
- b** Vul de waarden in het bereik B19 : B22 in met behulp van de functie **AANTAL.ALS()**.
- c** Selecteer het bereik B18 : B22, klik op het tabblad **Invoegen** bij **Grafieken** op **Kolom**, kies bij **Cilinder** voor **Gegroepeerde cilinder**.
- d** Bij de horizontale as staan nog niet de juiste getallen. Klik met de rechter muisknop ergens binnen het grafiekgebied en kies voor **Gegevens selecteren**. Druk bij **Horizontale aslabels** op **Bewerken**, selecteer in je werkblad het bereik A19 : A22 en druk twee keer op **OK**.
- e** Verwijder de legenda (aantal) door erop te klikken en vervolgens op **Del** te drukken.
- f** Pas de grafiektitel aan.

Selecteer als je een staafdiagram of een lijndiagram wilt maken alléén de kolommen met de aantallen (of de frequenties)!



Met de functie AANTAL.ALS(b; c) kun je aan één bereik één criterium opleggen, maar als je bijvoorbeeld wilt weten hoeveel jongens kleiner zijn dan 175 cm dan heb je de meer dan één bereik en meer dan één criterium nodig.

- 12a** Typ in het bereik A24 : C24 achtereenvolgens lengte kleiner dan, m, v en in het bereik A25 : A30 155, 165, 175, 185, 195 en 205.
- b** Typ in cel B25 = aantallen.als (lengte; "<155"; geslacht; "m")
- c** Bereken op dezelfde manier de aantallen jongens in het bereik B26 : B30.
- d** Bereken ook de bijbehorende aantallen meisjes in het bereik C25 : C30.

Het is lastig om de aantallen jongens en meisjes die kleiner zijn dan bijvoorbeeld 185 cm te vergelijken, omdat de totale aantallen jongens (69) en meisjes (85) verschillend zijn. Dan is het handig om over te gaan op percentages.

Met de functie AANTALLEN.ALS($b_1; c_1; b_2; c_2; \dots$) kun je zoveel bereiken en bijbehorende criteria gebruiken als nodig is.

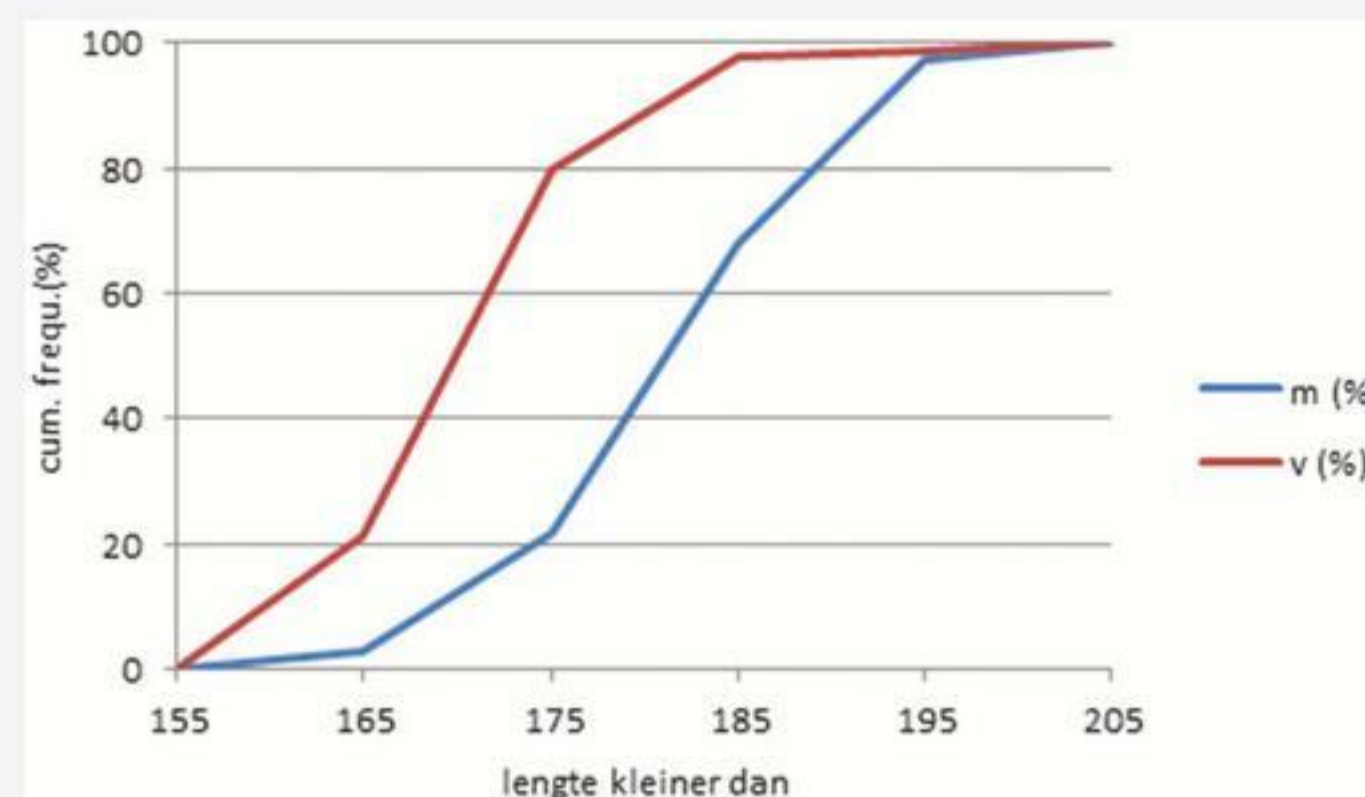
lengte kleiner dan	m	v
155	0	0
165	2	18
175	15	68
185	47	83
195	67	84
205	69	85

- 13a** Typ in het bereik A32 : C32 achtereenvolgens lengte kleiner dan, m (%), v (%) en kopieer de inhoud van het bereik A25 : A30 naar het bereik A33 : A38.
- b** Typ in de cel B33 = B25 / 69 * 100 en stel de weergave van de cel in op een geheel getal.
- c** Bereken op dezelfde manier de overige percentages jongens en meisjes.

- 14a** Selecteer het bereik A32 : C38. Kies in het tabblad Invoegen bij de categorie Grafieken voor Spreiding en kies Spreiding met rechte lijnen.
- b** Klik met de rechter muisknop op één van de getallen bij de horizontale as en kies in het popupvenster voor As opmaken. Stel de as in zoals boven de grafiek is aangegeven.
- c** Stel de verticale as in met vast minimum 0, vast maximum 100 en vaste primaire eenheid 20.
- d** Klik in Hulpmiddelen voor grafieken bij Indeling op Astitels, zet bij de horizontale as de titel lengte kleiner dan en zet bij de verticale as de titel cum. frequ.(%).

Met behulp van de gegevens uit de tabel bij opdracht 14 is eenvoudig een klassenindeling te maken.

Minimum:	☐ Automatisch	☒ Vast	155,1
Maximum:	☐ Automatisch	☒ Vast	205,1
Primaire eenheid:	☐ Automatisch	☒ Vast	10,0
Secundaire eenheid:	☒ Automatisch	☐ Vast	2,0



- 15a** Typ in het bereik A40 : C40 achtereenvolgens: lengte, m, v en in het bereik A41 : A45 de klassen 155 - < 165, 165 - < 175, ..., 195 - < 205.
- b** Typ in cel B33 = B26 - B25.
- c** Bereken op dezelfde manier de frequenties voor de overige klassen.

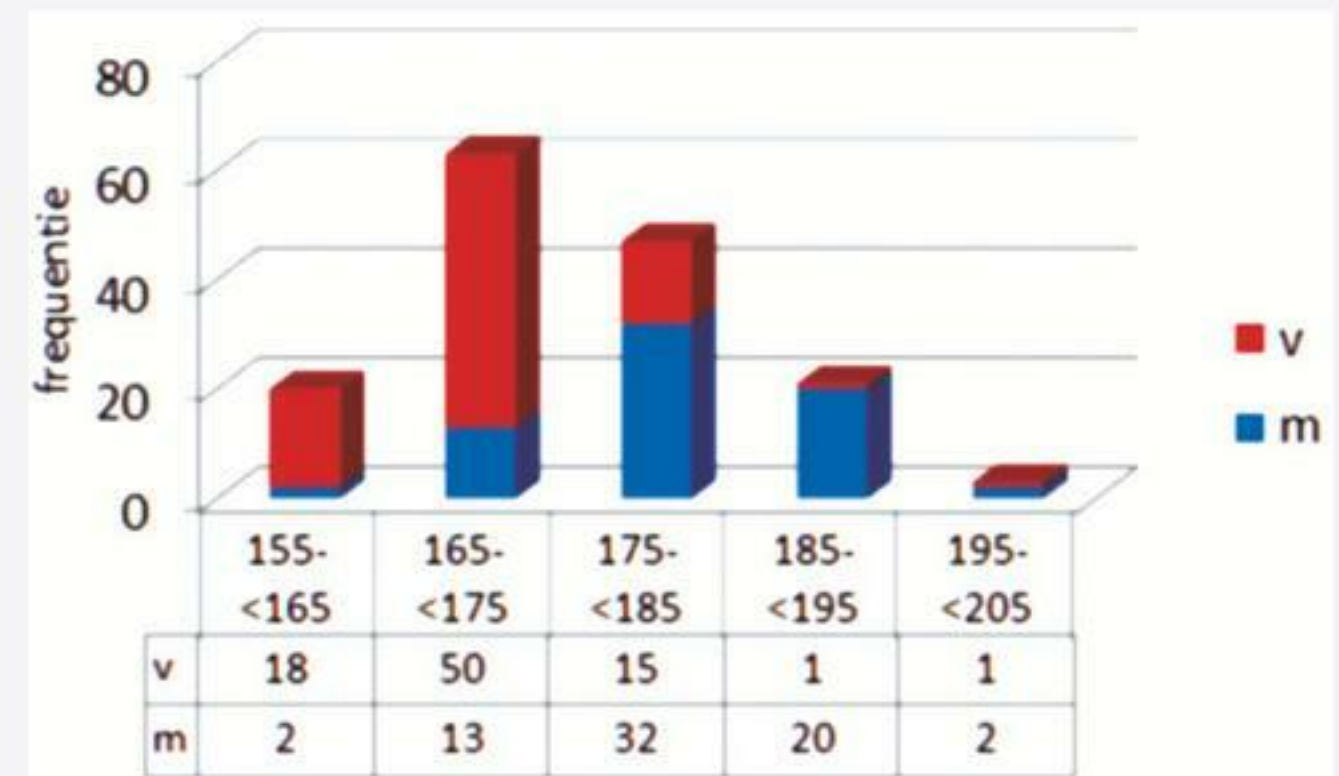
lengte	m	v
155-<165	2	18
165-<175	13	50
175-<185	32	15
185-<195	20	1
195-<205	2	1

- 16a** Selecteer het bereik A40 : C45. Kies in het tabblad **Invoegen** bij de categorie **Grafieken** voor **Kolom** en kies voor **Gestapelde kolom in 3D**.

- b** Maak het diagram op met behulp van het tabblad **Ontwerpen** van **Hulpmiddelen voor grafieken**.

In de volgende opdrachten ga je op grond van de gegevens over de 4 havo leerlingen antwoord geven op vragen als:

- Halen de jongens gemiddeld hogere cijfers dan de meisjes?.
- Halen leerlingen die met plezier naar school gaan gemiddeld hogere cijfers?



- 17a** Open een nieuw werkblad door linksonder op Blad3 te klikken en typ in de cellen B1 en C1 achtereenvolgens **m**, **v** en in cel A2 gemiddeld cijfer. Pas de breedte van kolom A aan de tekst aan.
- b** Typ in cel B2 = gemiddelde als (geslacht; “m”; cijfgem). Stel de weergave van de cel in op één decimaal.
- c** Bereken ook het gemiddelde cijfer van de meisjes.
- d** Is er een duidelijk verschil tussen de gemiddelde cijfers van de jongens en de meisjes?

Met de functie

GEMIDDELDE.ALS(b_1 ; c_1 ; b) kun je het gemiddelde van de getallen uit het bereik b berekenen die voldoen aan het criterium c_1 voor het bereik b_1 .

- 18a** Typ in cel B4 gemiddeld cijfer. Selecteer het bereik B4 : C4 en druk in het tabblad **Start** bij **Uitlijning** op de knop **Samenvoegen en centreren**.
- b** Typ in het bereik A5 : C5 mate van plezier, **m**, **v** en in het bereik A6 : A10 de cijfers 1 tot en met 5.
- c** Stel de weergave van het bereik B6 : C10 in op één decimaal en typ in cel B6 = gemiddelden.als (cijfgem; geslacht; “m”; plezier; “1”)
- d** Vul de rest van de tabel in.
- e** Is er bij de jongens of bij de meisjes een verband te constateren tussen de mate waarin ze met plezier naar school gaan en de gemiddelde cijfers?

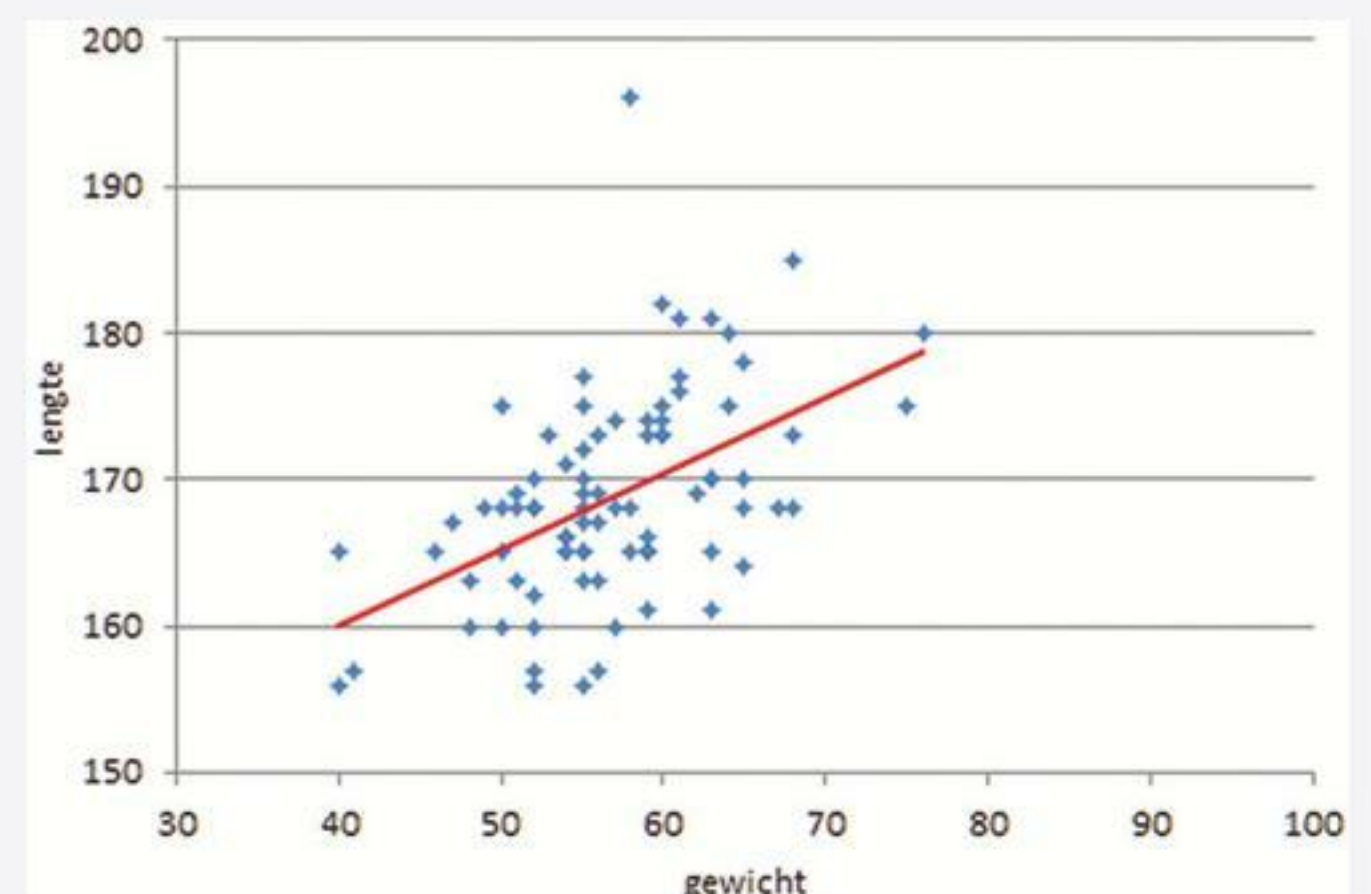
Natuurlijk is er een verband tussen het gewicht en de lengte van de leerlingen: een lange leerling zal over het algemeen zwaarder zijn dan een korte leerling. Dat verband is in de tabel met gegevens niet goed te zien.

Bij meer criteria en bereiken gebruik je de functie

GEMIDDELDE.ALS(b ; b_1 ; c_1 ; ...). Hierbij is b het bereik waarvan het gemiddelde berekend moet worden. Je kunt de rij bereiken en criteria zo lang maken als nodig is.

mate van plezier	gemiddeld cijfer	
	m	v
1	7,2	7,5
2	7,2	7,5
3	7,4	7,4
4	7,3	7,3
5	7,1	7,1

- 19a** Selecteer cel A11, selecteer het tabblad **Invoegen** en kies bij de categorie **Grafieken** voor **Spreiding** en **Spreiding met alleen markeringen**.
- b** Klik met de rechtermuisknop binnen het grafiekgebied en kies voor **Gegevens selecteren**. Typ in het vak **Gegevensbereik van de grafiek** het bereik gewicht: lengte en druk op **OK**.
- c** Stel de assen in zoals in de afbeelding hiernaast.



- 20a** Breng een lijn in de figuur aan door op het tabblad **Indeling** van **Hulpmiddelen voor grafieken** te drukken op **Trendlijn** en te kiezen voor **Lineaire trendlijn**.
- b** De trendlijn geeft de beste benadering voor het verband tussen het gewicht en de lengte van de leerlingen.
Wat betekent het voor een leerling als zijn stip in het spreidingsdiagram op de trendlijn ligt?
- c** Licht de stip van een leerling met overgewicht (meer dan het gemiddelde gewicht bij zijn lengte) onder of boven de trendlijn?

Volgens een artikel in het NRC van 7-8-2013 heeft 15% van de jongeren overgewicht. Een maat die gebruikt wordt om te berekenen of iemand overgewicht heeft is de Body Mass Index (BMI). De onderstaande tabel geeft de BMI-grenzen voor jongens en meisjes uit de 4 havo klassen.

$$BMI = \frac{\text{gewicht}}{\text{lengte}^2} \text{ met het gewicht in kilogram en de lengte in meter.}$$

BMI	ernstig ondergewicht	ondergewicht	gezond gewicht	overgewicht	ernstig overgewicht
M	< 15,1	15,1 – < 17,5	17,5 – < 23,9	23,9 – < 28,9	≥ 28,9
V	< 15,5	15,5 – < 17,9	17,9 – < 24,4	24,4 – < 29,4	≥ 29,4

- 21a** Ga naar het werkblad met de gegevens door linksonder op Blad1 te klikken en typ in cel I1 **BMI**.
- b** Typ in cel I2 **= gewicht / (lengte / 100)^2** en druk op **Enter**. Stel de weergave van de cellen in op één decimaal.
- c** Selecteer het bereik I1 : I155 en voeg de naam in met behulp van **Maken o.b.v. selectie** op het tabblad **Formules**.
- d** Sorteert de gegevens op grootte van de BMI van laag naar hoog.
Verwijder de twee BMI-waarden waar 0,0 staat.
Waarom is dat nodig?

Het ^-teken wordt in Excel gebruikt om machten te typen.
In Excel typ je 3^5 in plaats van 3⁵.

- 22a** Ga weer terug naar Blad3 en typ in het bereik A12 : F12 achtereenvolgens in **BMI**, **ernstig onder-gewicht**, **onder-gewicht**, **gezond gewicht**, **over-gewicht** en **ernstig over-gewicht**.
- b** Typ in de cellen A13 en A14 **m** en **v**.
- c** Typ in cel B13 **= aantallen.als (geslacht; “m”; BMI; “<15,1”)**.
- d** In cel C13 komt te staan **= aantallen.als (geslacht; “m”; BMI; “> = 15,1”; BMI; “<17,5”)**
- e** Vul de rest van de tabel in.
- f** Is overgewicht een belangrijk probleem bij deze groep 4 havo leerlingen? Wat dan wel?

Let op de verbindingstreepjes!
Die zijn nodig om de lange woorden op de juiste manier af te breken.
Bij **Celeigenschappen** moet er dan wel op het tabblad **Uitlijning** een vinkje bij **Terugloop** staan.

Praktische opdracht

Statistisch onderzoek

Benodigheden

- > Een programma waarin je de gegevens van het onderzoek kunt verwerken.
- > Een tekstverwerkingsprogramma waarmee je het bijbehorende artikel kunt schrijven.

Opbouw

- 1 Inleiding
- 2 Probleemstelling
- 3 Probleem verkennen
- 4 Plan maken
- 5 Plan uitvoeren
- 6 Conclusie



Inleiding

In artikelen, tijdschriften en kranten kom je vaak uitspraken tegen die gebaseerd zijn op statistisch onderzoek. Hoe dat statistisch onderzoek is uitgevoerd, kun je uit dat artikel vaak niet opmaken. Het komt zelfs voor dat de uitspraken helemaal niet gebaseerd zijn op een statistisch onderzoek, maar alleen de mening van de schrijver vertegenwoordigen.

- 1** Het artikel '15 procent van de jongeren heeft overgewicht' komt uit de NRC. Lees het artikel door.
- a** Waarom mag je ervan uitgaan dat de uitspraak '15 procent van de jongeren heeft overgewicht' gebaseerd is op gedegen statistisch onderzoek?
- b** Wat was bij dit onderzoek de populatie?
- c** Waarom mogen we in dit geval aannemen dat niet de gehele populatie onderzocht is maar dat de conclusie gebaseerd is op een steekproef?
- d** Omdat het onderzoek door het CBS is uitgevoerd, mag je aannemen dat de steekproef voldoende groot, aselekt en representatief was.
Vertel in je eigen woorden wat met aselekt en representatief wordt bedoeld.

15 procent van de jongeren heeft overgewicht

Ongeveer 15 procent van de jongeren tussen de 2 en 25 jaar kampt met overgewicht. Jongeren in huishoudens met een lager inkomen hebben bovendien vaker overgewicht, blijkt uit onderzoek van het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) over het jaar 2012.

3 procent van de jongeren had in 2012 last van ernstig overgewicht. De overgewichtscijfers zijn daarmee al een paar jaar stabiel. Ook in 2010 leed rond de 15 procent van de ondervraagde kinderen en tieners tot 25 jaar aan overgewicht, het ernstige overgewicht lag toen op 3,4 procent.

Opvallend is dat van de groep tussen 18 en 25 jaar bijna 20 procent te zwaar is. In de groep tussen 2 en 18 jaar ligt dat aantal beduidend lager: tussen de 12 en 13 procent. Bij de groep extreem overgewicht ligt de piek juist bij de jongste kinderen tussen 2 en 9 jaar: 3,6 procent lijdt eraan.



Muziekles maakt jonge kinderen slimmer

Jonge kinderen die muziekles krijgen, ontwikkelen een beter geheugen dan leeftijdgenootjes die hiervan verstoken zijn. Dit blijkt uit een Canadees onderzoek dat vandaag is gepubliceerd in het neurologische vakblad Brain. De Canadese wetenschappers onderzochten een jaar lang twaalf kinderen tussen de vier en zes jaar oud. De helft van hen was recent gestart met muziekles (vijf kregen vioolles, één pianoles) op een Suzuki muziekschool, de anderen hadden geen muziekles. De kinderen ondergingen binnen een jaar vier maal een muziek- en een geheugen-test. Degenen die gedurende het jaar muziekles kregen, scoorden beter op beide tests. Volgens de onderzoekers komt dit omdat muziekles invloed heeft op de manier waarop de hersenen informatie verwerken en opslaan.

- 2 Het artikel 'Muziekles maakt jonge kinderen slimmer' werd gepubliceerd in het weekblad Elsevier. Als je uitgaat van de titel vormden 'jonge kinderen' de populatie van het onderzoek en was de onderzochte groep een steekproef.
 - a Hoe groot was de steekproef bij dit onderzoek?
 - b Is op basis van het artikel na te gaan of er sprake was van een aselechte en representatieve steekproef?
 - c Geef je mening over dit onderzoek en de conclusie die eruit getrokken is.

Probleemstelling

De bedoeling is dat je een statistisch onderzoek uitvoert. Het onderzoek en de conclusies die je eraan verbindt, publiceer je in de vorm van een artikel. Als titel van het artikel gebruik je de belangrijkste conclusie uit je onderzoek.

De meeste statistische onderzoeken beginnen met een onderzoeksvraag.

Mogelijke onderzoeksvragen zijn:

- Ontbijten leerlingen voordat ze naar school gaan?
- Lezen jongeren de krant?
- Komt overgewicht of ondergewicht veel voor onder jongeren?
- Zijn gezonde snacks in de kantine populairder dan minder gezonde snacks?
- Is drankgebruik onder jongeren een groot probleem?
- Gaat gamen ten koste van schoolprestaties?
- Hoe maken leerlingen gebruik van sociale media?

- 3 Bedenk een onderzoeksvraag voor je eigen statistisch onderzoek.

Probleem verkennen

Bij het kiezen van een onderwerp moet je opletten dat je niet teveel hooi op je vork neemt. Het statistisch onderzoek dat je gaat doen moet haalbaar zijn.

De vraag 'Hoe maken leerlingen gebruik van sociale media?' is een voorbeeld van een onderzoeksvraag die een veel te groot gebied bestrijkt.



Deelvragen zouden kunnen zijn:

- Welke sociale media zijn populair?
- Hoeveel tijd wordt er gemiddeld besteed aan de sociale media?
- Is er verschil in populariteit van de verschillende sociale media tussen de diverse afdelingen van de school?
- Is er een verschil te ontdekken in de tijd die besteed wordt aan sociale media tussen de leerlingen met een maatschappijprofiel en leerlingen met een natuurprofiel?

Elke deelvraag zou het onderwerp van een statistisch onderzoek voor deze praktische opdracht kunnen zijn. Bij alle vier de deelvragen is het mogelijk om een eenvoudige vragenlijst te bedenken voor het verkrijgen van de data. Bij de eerste deelvraag zou dat bijvoorbeeld een lijst kunnen zijn waarop elke deelnemer aan het onderzoek kan aankruisen van welke sociale media hij of zij gebruik maakt.

- 4** Ga na of het probleem dat jij zou willen onderzoeken haalbaar is. Het is daarbij handig om te bedenken welke vragen je zou moeten stellen om de data voor je onderzoek te verzamelen.

Plan maken

Stel je hebt gekozen voor de onderzoeksvraag: 'Is er een verschil te ontdekken in de tijd die besteed wordt aan sociale media tussen de leerlingen met een maatschappijprofiel en leerlingen met een natuurprofiel?'.
Je zult je vervolgens moeten afvragen wat de

onderzoekspopulatie zal zijn. Kies je als populatie de 4 havo leerlingen van je school, dan is het misschien niet eens nodig om een steekproef te gebruiken, maar kun je de gehele populatie bij het onderzoek betrekken.



- 5a** Bedenk wat de populatie bij jouw statistisch onderzoek is.
b Kun je de gehele populatie bij het onderzoek betrekken of ga je werken met een steekproef?
c Als je werkt met een steekproef, bedenk dan hoe je de steekproef gaat samenstellen.

De volgende stap is het opstellen van een invul- of vragenlijst. Bedenk daarbij dat

- de vragen van belang moeten zijn voor je onderzoek;
- de vragen moeten kort en duidelijk zijn;
- de antwoorden op de vragen moeten goed verwerkbaar zijn.

- 6** Bij de vraag 'Hoeveel tijd wordt er gemiddeld besteed aan de sociale media?' hebben Pieterjan en Lois allebei een voorstel gedaan wat zij hun klasgenoten willen voorleggen. Wat vind jij het beste voorstel? Vertel er duidelijk bij waarom je dat vindt.

Pieterjan:

Hoeveel tijd besteed jij aan sociale media? uur

Lois:

Omcirkel hoeveel tijd jij gemiddeld per dag besteedt aan sociale media.

0 - 1 uur	1 - 2 uur	2 - 3 uur
3 - 4 uur	4 - 5 uur	> 5 uur

Zowel bij Pieterjan als bij Lois ontbreekt er iets. Het moet voor de deelnemers wel duidelijk zijn wat er onder sociale media verstaan wordt!

- 7a** Zoek op het Internet op wat onder sociale media wordt verstaan.
 - b** Stel een invullijst op die kort, duidelijk en goed verwerkbaar is.
- 8** Stel een vragenlijst of invullijst op bij het onderwerp dat jij gekozen hebt voor deze praktische opdracht.

Plan uitvoeren

Nu wordt het tijd om je onderzoek daadwerkelijk uit te voeren.

- 9a** Stel zo nodig de steekproef voor je onderzoek samen.
Is je steekproef aselekt? Is de steekproef representatief voor de populatie?
Is de steekproef groot genoeg?
- b** Verzamel de data.
- c** Verwerk de data. Gebruik daarvoor een geschikt programma.

Conclusie

Het laatste deel van je onderzoek is het trekken van conclusies op grond van de data.

- 10a** Verwerk de gegevens op zo'n manier dat je de onderzoeksvraag kunt beantwoorden.
- b** Trek één of meer conclusies uit je onderzoek.
- c** Schrijf een artikel waarbij je de belangrijkste conclusie uit je onderzoek als titel gebruikt. Begin je artikel met een beschrijving van de opzet van je onderzoek. Geef daarna een verslag over de uitvoering van je onderzoek. Vergeet niet om te vermelden tegen welke problemen je aangelopen bent tijdens je onderzoek. Geef aan welke conclusies je uit je onderzoek hebt getrokken en op grond waarvan je dat gedaan hebt.
- d** Illustreer je artikel met tabellen en diagrammen.

Suggesties voor vervolg

De conclusies die je uit je onderzoek getrokken hebt, hebben alleen betrekking op de bijbehorende populatie. Het kan zijn dat deze conclusies ook gelden voor een grotere populatie. Daarvoor moet je je afvragen of jouw steekproef ook representatief is voor die grotere populatie. Je zult de argumenten daarvoor dan in je artikel moeten vermelden.

Vaak is het zo dat statistisch onderzoek niet oplevert wat de onderzoeker gehoopt had te vinden. Wel is het zo dat elk statistisch onderzoek altijd weer nieuwe onderzoeksvragen oproept. Je zou de vragen die jouw onderzoek oplevert ook in je artikel kunnen vermelden.



Trefwoorden

- A** absoluut 34
afgeleide functie 193
afhankelijke gebeurtenissen 89, 100
afhankelijke stochasten 89, 100
algemene vorm van een sinusoïde 72
amplitude 62, 76
aselect 44, 49
- B** balansmethode 14
beeld 228, 238
beginpunt 70, 72, 76
beginterm van een rij 142
beginwaarde 141
Bernoulli-experiment 172, 182
binomiaalcoëfficiënten 174
binomiale verdeling 172, 182
- C** centrale projectie 228, 238
centrale punt 228, 238
centrummaat 34
combinatie 220
complementregel 86
continue variabele 39, 48
cumulatieve binomiale kans 175, 182
- D** differentiequotiënt 192
differentiëren 164, 193, 218
directe formule 146
discrete variabele 39, 48
- E** eenpuntperspectief 232, 238
evenwichtslijn 62
evenwichtsstand 62, 76
exponentieel verband 141
exponentiële functie 114
- F** formules herleiden 109, 124, 162, 216
frequentieverdeling 36, 48
functienotatie 142
- G** gebroken formule 162
gebroken functie 198, 208
gebroken vergelijking 17, 24
gemiddelde 34, 41
grafieken van logaritmische functies 120
groeifactor 109, 141
grondtal van een logaritme 116
- H** halveringstijd 119, 130
helling van een grafiek 192
hellingsgetal 140
hoofdrichting 232, 238
horizon 232, 238
horizontale verschuiving 68, 76
- I** indexnotatie 142
interkwartielafstand 35
- K** kansverdeling 88, 100, 170
kettingfunctie 201, 208
kettingregel 202, 208
kijklijn 226
klokvormige verdeling 36, 48
kwalitatieve variabele 34
kwantitatieve variabele 34
- L** lineair verband 140
lineaire vergelijking 108
logaritme 116, 130
logaritme berekenen 118, 119
logaritmische functie 130
logaritmische schaal 126, 131
logschaal 126, 131
- M** machtsformule 24
machtsfunctie 20, 57, 194, 208
mediaan 34
meertoppige verdeling 36, 48
meetkundige rij 147
modus 34
- N** normaal verdeelde variabele 41, 48
normale verdeling 41, 48, 92, 100
- O** onafhankelijke gebeurtenissen 89, 100
onafhankelijke stochasten 89, 100
oog 228, 238
oogpunt 228, 238
- P** parameters 92, 100, 172, 182
percentage 109
periode 62
periodieke functie 165, 218
periodieke grafieken 62
perspectieftekening 231, 238

- R** raaklijn 192
rangnummer 142
recursie 142
recursieve formule 142
reden van een meetkundige rij 147
rekenkundige rij 147
rekenregels voor differentiëren 164, 193
rekenregels voor logaritmen 122, 130, 216
rekenregels voor machten 56, 114
rekenregels voor stochasten 94, 95, 100
relatief 34
representatief 44, 49
richtingscoëfficiënt 140
rooster 86
- S** scheve verdeling 36, 48
simuleren 44
sinusfunctie 64, 65, 76
sinusoïde 70, 77
som van een meetkundige rij 151
som van een rekenkundige rij 148
som van termen 148
somregel voor stochasten 95, 100
somrij 149
spreidingsbreedte 35
spreidingsmaat 35
staart (van een verdeling) 36, 48
standaardafwijking 35, 41, 90, 100, 178, 183
standaarddeviatie 35, 100
startgetal 140
steekproef 44, 49
- steekproefgrootte 44, 49
stochast 88, 100, 170
substitueren 15, 24, 109
systematisch tellen 166, 220
- T** tafereel 228, 238
tekenvlak 228, 238
termen van een rij 142
tijdgrafiek 145
toevalsvariabele 88, 100, 170
- U** uitschieter 36, 48
uniforme verdeling 36, 48
- V** verdubbelingstijd 119, 130
verdwijnpunt 231, 238
vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as 66, 76
vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as 67, 76
verschil bij een rekenkundige rij 147
verschilrij 151
verticale verschuiving 68, 76
verwachtingswaarde 88, 100, 170, 178, 183
vluchtpunt 231, 238
vuistregels 41, 43, 48
- W** wortel n -wet 96, 100
wortelfunctie 198, 208
wortelvergelijking 18, 24

Colofon

Vormgeving omslag de C, Amsterdam/Wormer

Foto omslag Edwin Walvisch, Haarlem

Vormgeving binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer

Technisch tekenwerk Integra Software Services Pvt. Ltd., India

Illustraties Bert Hollander i.o.v. Haasart illustraties

Beeldresearch B en U International Picture Service, Amsterdam

Fotoverantwoording

Dreamstime: p. 10-11, 51

Shutterstock: p. 10, 16, 29, 38, 106, 125, 160 o, 181, 184, 195, 252, 253 o, 254, 255

Carillonnl / Wikipedia: p. 14

Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 17, 27, 35, 42, 133, 153, 161 l, 175, 178,
179, 185, 188, 207, 237, 238, 242

Getty Images: p. 21

Imageselect, Wassenaar: p. 23, 39, 177, 215, 239, 253 b

Wikimedia Commons: p. 31, 107 (2x), 161 r, 240

iStockphoto: p. 32-33, 60-61, 84-85, 112-113, 138-139, 190-191, 224-225

Corbis: p. 40, 54 r, 145, 157, 233 r

Nationale Beeldbank, Amsterdam: p. 47, 112

Literary Digest: p. 54 l

ANP Photo, Rijswijk: p. 55, 97, 160 b, 223 mb, 223 o, 245

Fotolia: p. 67

WFA / Novum Nieuws, Amsterdam: p. 69

Hielke Peereboom, Nieuwehorne: p. 73, 82, 91, 220, 223 b, 224, 226 (2x),
227 (2x), 231

Visual Photo Design / B en U, Amsterdam: p. 87, 211

Photo Disc: p. 99

Angel Photography, Amsterdam: p. 102, 103, 171, 180

Tuincentrum Koeman, www.tuincentrumkoeman.nl: p. 105 (2x)

(c) Royal Observatory Edinburgh: p. 137

Ron Sinkeldam, Hierden: p. 138

OJO Images: p. 168-169

National Portrait Gallery, London: p. 189 l

Salomon de Caus / *La perspective avec la raison des ombres et miroirs* / printed
by John Norton, Londen 1612: p. 230

Koninklijke Bibliotheek, Den Haag: p. 232

www.ikkrijgthuisonderwijs.nl/perspectief-tekenen: p. 233 l

Jacqueline Bredenoord, <http://tekenenenzo.blogspot.com>: p. 233 m

WISKUNDE A

VWO

5

LEERBOEK

Moderne Wiskunde is meer dan dit boek.

De boeken, het digitale lesmateriaal en het docentenmateriaal vormen samen het complete pakket van de methode Moderne Wiskunde.

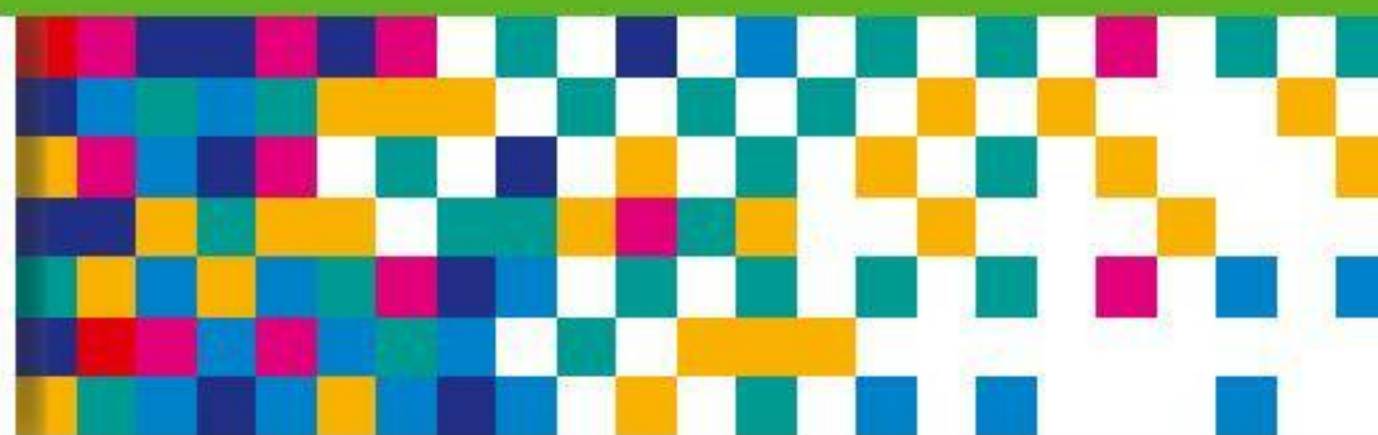
Werken met tablet, laptop, boek of digibord, op school of thuis: met Moderne Wiskunde is alles mogelijk.

Veel plezier met Moderne Wiskunde!

Noordhoff Uitgevers



Noordhoff Uitgevers



www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-86181-0



9 789001 861810