WISKUNDE B

VWO

5

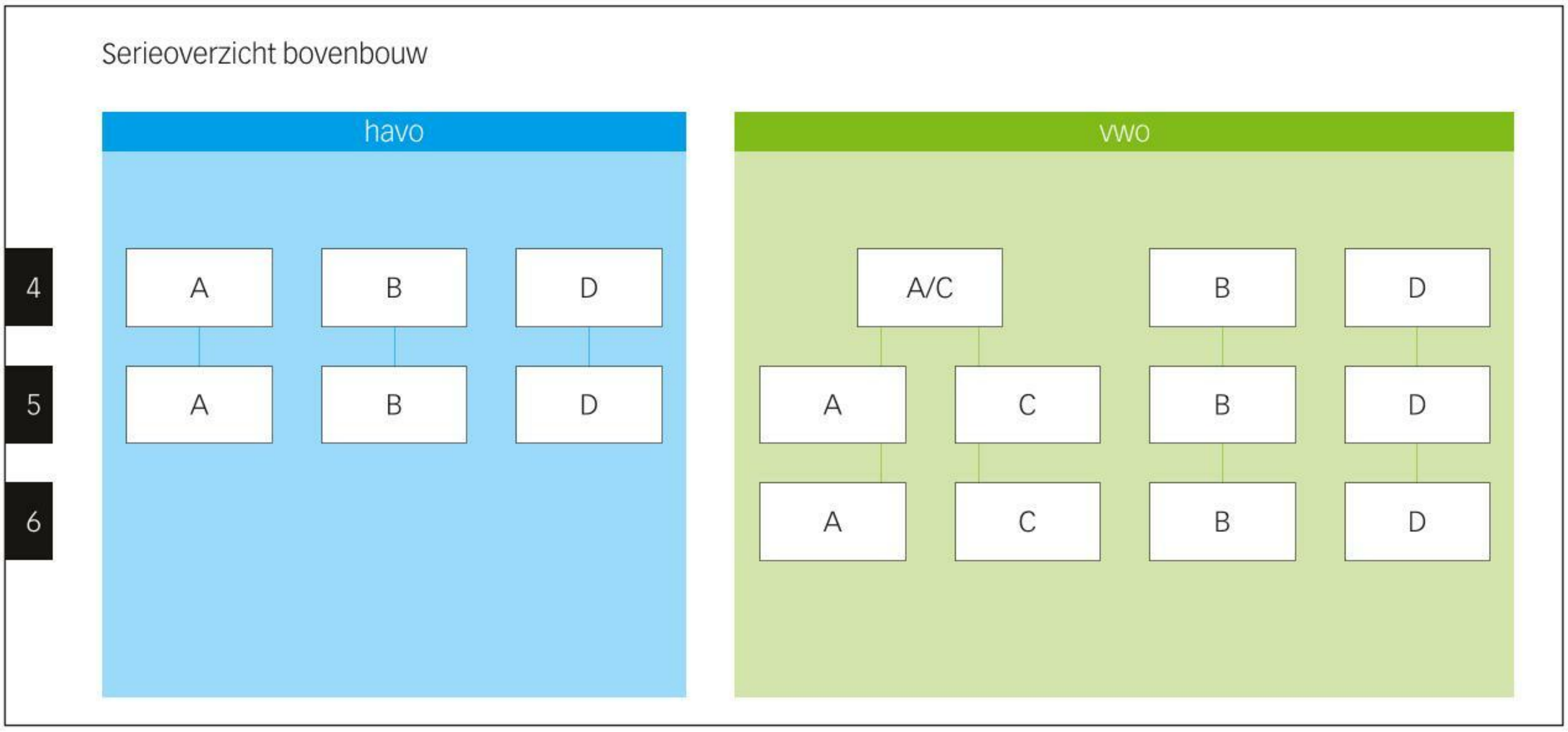
LEERBOEK

MODERNE WISKUNDE

Noordhoff Uitgevers

11e editie

Moderne Wiskunde
5 vwo B



MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189
FSC www.fsc.org

0 / 16

© 2016 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Houten, The Netherlands.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van (een) gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without prior written permission of the publisher.

ISBN 978-90-01-86191-9

11e editie

Moderne Wiskunde
5 vwo B

Harm Bakker
Bert Boon
Dick Bos
Ben van Dijk
Wim Doekes
Nenke Gietema
Sjeng Greefkens
Hielke Peereboom
Karoline van den Reek
Rindert Reijenga
Geertrui Schaberg
Ron Sinkeldam
Cornelia Wallien

Noordhoff Uitgevers Groningen

Inhoudsopgave

	Werken met Moderne Wiskunde	6
1	**Logaritmische functies**	10
	Voorkennis	12
1-1	Logaritmen	14
1-2	Logaritmen berekenen	16
1-3	Grafieken van logaritmische functies	18
1-4	Rekenregels voor logaritmen	20
1-5	Formules herleiden	22
1-6	Vergelijkingen en ongelijkheden	24
1-7	Gemengde opdrachten	26
	Samenvatting	28
	Test jezelf	30
	Extra oefening - Basis	32
	Extra oefening - Gemengd	33
	Uitdagende opdrachten	34
	Logaritmentafel	35
2	**Functies bewerken**	36
	Voorkennis	38
2-1	Transformaties	40
2-2	Absolute waarde	42
2-3	Inverse functies	44
2-4	Gelijkwaardige formules	46
2-5	Parameters	48
2-6	Gemengde opdrachten	50
	Samenvatting	52
	Test jezelf	54
	Extra oefening - Basis	56
	Extra oefening - Gemengd	57
	Uitdagende opdrachten	58
	Gevoelstemperatuur	59
	Vaardigheden 1	60
	Kwadraat afsplitsen	60
	Tweedegraadsfuncties	60
	Formules herleiden	61
	Differentiëren	62
	Meetkunde in driehoeken	63
	Goniometrie	63
	Redeneren met functies	64
	Som- en verschilfuncties	65
3	**Kettingregel**	66
	Voorkennis	68
3-1	Machtsfuncties differentiëren	70
3-2	Samengestelde functies	72
3-3	De kettingregel	74
3-4	Extreme waarden	76
3-5	Buigpunten	78
3-6	Gemengde opdrachten	80
	Samenvatting	82
	Test jezelf	84
	Extra oefening - Basis	86
	Extra oefening - Gemengd	87
	Uitdagende opdrachten	88
	Middelwaardestelling	89
4	**Integreren**	90
	Voorkennis	92
4-1	Oppervlakten benaderen	94
4-2	Hoofdstelling van de integraalrekening	96
4-3	Primitiveren	98
4-4	Integralen	100
4-5	Integraal en oppervlakte	102
4-6	Gemengde opdrachten	104
	Samenvatting	106
	Test jezelf	108
	Extra oefening - Basis	110
	Extra oefening - Gemengd	111
	Uitdagende opdrachten	112
	Oppervlakte onder een parabool	113
	Vaardigheden 2	114
	Vergelijkingen oplossen	114
	Transformaties	115
	Vergelijkingen van lijnen	116
	Lijnen en hoeken	117
	Rekenen met breuken	118
	Differentiëren	119

© Noordhoff Uitgevers bv

5 **Cirkels** 120
Voorkennis 122
5-1 Vergelijking van een cirkel 124
5-2 Snijden en raken 126
5-3 Snijdende cirkels 128
5-4 Afstand tot een cirkel 130
5-5 Ingeschreven en omgeschreven cirkel 132
5-6 Gemengde opdrachten 134
Samenvatting 136
Test jezelf 138
Extra oefening - Basis 140
Extra oefening - Gemengd 141
Uitdagende opdrachten 142
Sangaku 143

6 **Product- en quotiëntfuncties** 144
Voorkennis 146
6-1 Productfuncties 148
6-2 Quotiëntfuncties 150
6-3 Limieten en asymptoten 152
6-4 Productregel 154
6-5 Quotiëntregel 156
6-6 Gemengde opdrachten 158
Samenvatting 160
Test jezelf 162
Extra oefening - Basis 164
Extra oefening - Gemengd 165
Uitdagende opdrachten 166
Fileproblemen 167

Vaardigheden 3 168
Rekenen met machten en exponenten 168
Rekenen met wortels 168
Vergelijkingen oplossen 169
Logaritmen 170
Goniometrische vergelijkingen 171
Integreren 172
Asymptoten en limieten 173

7 **Meetkunde: rekenen of redeneren** 174
Voorkennis 176
7-1 Sinusregel 178
7-2 Cosinusregel 180
7-3 Stelling van Thales 182
7-4 Redeneren met cirkels 184
7-5 Algebraïsch of meetkundig 186
7-6 Gemengde opdrachten 188
Samenvatting 190
Test jezelf 192
Extra oefening - Basis 194
Extra oefening - Gemengd 195
Uitdagende opdrachten 196
De standaardmeter 197

8 **Goniometrische functies** 198
Voorkennis 200
8-1 Harmonische trillingen 202
8-2 Goniometrische formules 204
8-3 Vergelijkingen oplossen 206
8-4 Differentiëren 208
8-5 Integreren 210
8-6 Tangensfuncties 212
8-7 Gemengde opdrachten 214
Samenvatting 216
Test jezelf 218
Extra oefening - Basis 220
Extra oefening - Gemengd 221
Uitdagende opdrachten 222
Fourier 223

Vaardigheden 4 224
Differentiëren 224
Lijnen en cirkels 225
Sinus- en cosinusregel 226
Inverse functies 227
Redeneren met functies 228
Grafieken met lijn- en puntsymmetrie 229

Keuzeonderwerpen 231

9 **Matrices** 232
Praktische opdracht - Fractals 250
Praktische opdracht - Leibniz 254
Verdieping - Meetkundige bewijzen 258

Trefwoorden 262

© Noordhoff Uitgevers bv

Werken met Moderne Wiskunde

De 11e editie ligt voor u. Deze editie is geschreven op basis van het nieuwe examenprogramma.
Ook in deze editie zijn de twee belangrijkste kernwaarden: inzicht en structuur. Inzicht ontwikkelen en een duidelijke structuur gaan samen. Elke paragraaf start met een oriënterende opdracht, waarna de betreffende theorie wordt vastgelegd. De theorie gaat steeds vergezeld van een of meer volledig uitgewerkte voorbeelden. In het vervolg van een paragraaf wordt de theorie verwerkt en geoefend en daarna weer geïntegreerd in eerder verworven kennis. Hier en daar treft u een Wiskundige Denk Activiteit aan. Op deze manier leren leerlingen niet alleen de theorie te reproduceren, maar krijgen ze inzicht in hoe de wiskunde in elkaar steekt.

Verschillen tussen leerlingen zullen er altijd zijn. Moderne Wiskunde 11e editie houdt hier meer dan ooit rekening mee door een ruim aanbod van extra oefeningen, aan het eind van een hoofdstuk en ook in het hulpboek, enerzijds, en uitdagende opdrachten en keuzeonderwerpen anderzijds.

De leerlijn in Moderne Wiskunde is geschikt om zelfstandig mee te werken.Bij vrijwel iedere lesparagraaf zijn er paragraaf vervangende ICT-opdrachten. Deze bieden naast opdrachten ook theorie, voorbeelden en tips en hints om de stof beter te begrijpen.
Voor u is de ICT erop gericht om uw leerlingen extra inzicht in de stof te geven en om de voortgang van uw leerling (en klas) te volgen. De ICT stelt uw leerling in staat zich efficiënter voor te bereiden op zijn proefwerk, met behulp van de digitale oefentoets.

Leerboek

Het leerboek is opgedeeld in hoofdstukken, afgewisseld met onderdelen algebraïsche vaardigheden.
Aan het eind is een onderdeel met keuzeonderwerpen opgenomen.

Hoofdstuk

Voorkennis	Paragrafen	Samenvatting Test jezelf	Extra oefeningen bij het hoofdstuk	Uitdagende opdrachten Weetjes

Vaardigheden

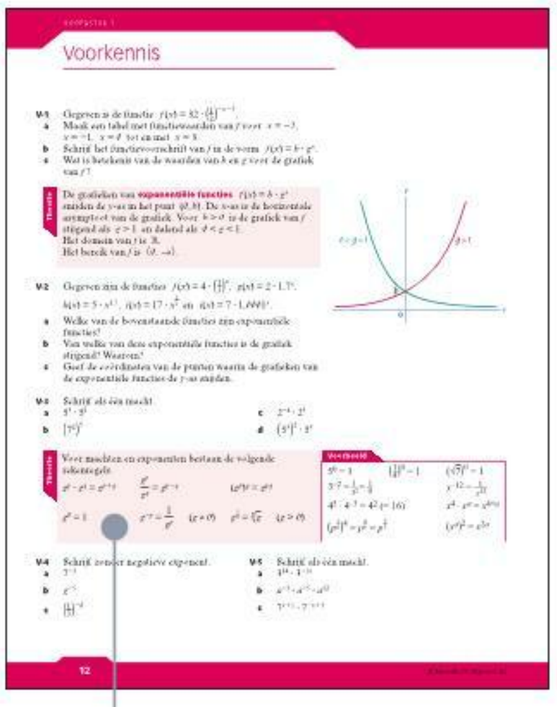
Oefening en uitleg van algebraïsche vaardigheden

Keuzeonderwerpen

Praktische opdracht

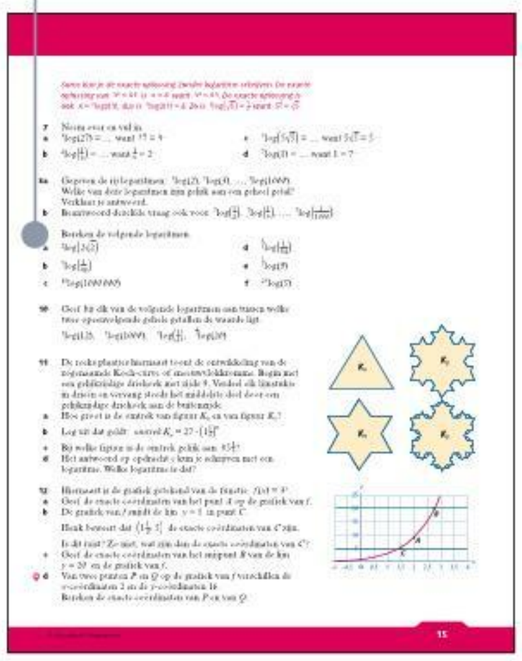
© Noordhoff Uitgevers bv

Werken met Moderne Wiskunde



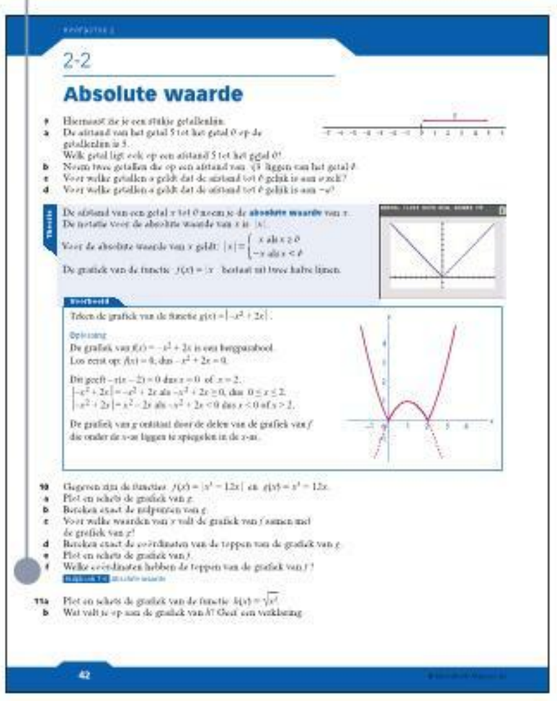
Met de voorkennisparagraaf aan het begin van ieder hoofdstuk haal je de benodigde voorkennis weer op.

Bij sommige opdrachten kun je nog meer oefenen in het hulpboek: H

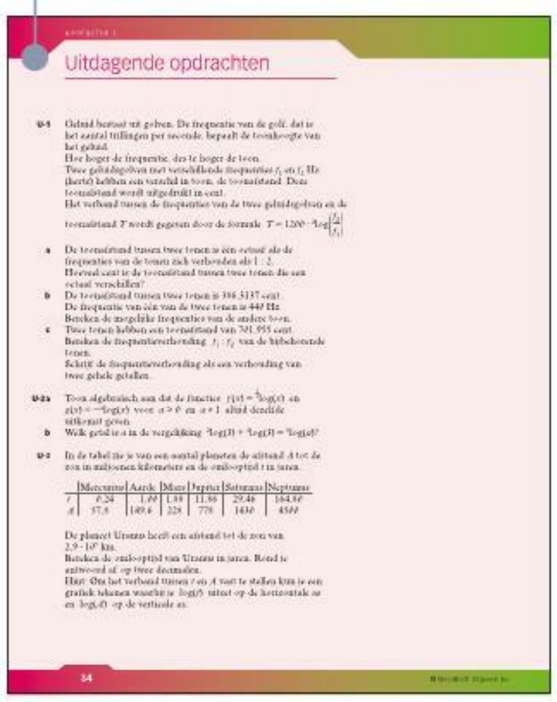


Per hoofdstuk staat aangegeven of de stof behoort tot het centraal examen, schoolexamen of keuzeonderwerpen.

In het leerboek vind je verwijzingen naar de instructie grafische rekenmachine in het hulpboek.



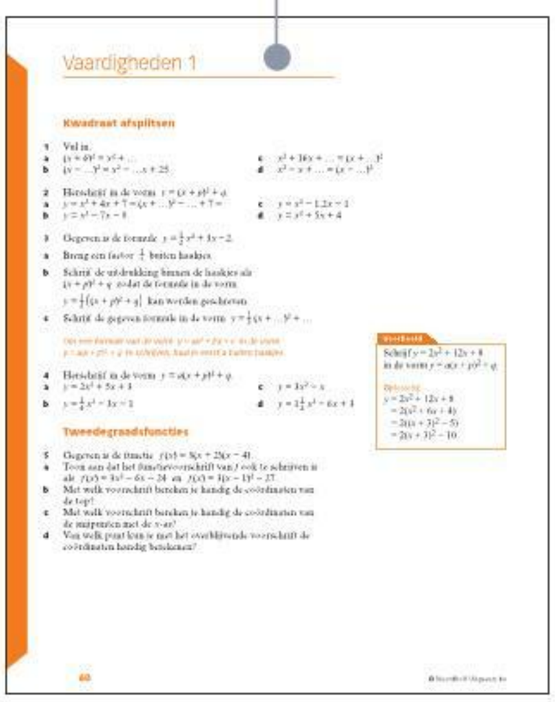
Bij deze opdrachten word je uitgedaagd iets verder te kijken dan je geleerd hebt.



Op deze bladzijde lees je over de geschiedenis of een toepassing van wiskunde.

© Noordhoff Uitgevers bv

In dit onderdeel leer je nieuwe vaardigheden en je onderhoudt de vaardigheden die je al geleerd hebt.


Vaardigheden 1

Kwadraat afsplitsen

1 Vul in.
a $(x+6)^2 = x^2 + \ldots$
b $(x-\ldots)^2 = x^2 - \ldots x + 25$
c $x^2 + 10x + \ldots = (x+\ldots)^2$
d $x^2 - x + \ldots = (x-\ldots)^2$

2 Herschrijf in de vorm $y = (x+p)^2 + q$.
a $y = x^2 + 4x + 7 = (x+\ldots)^2 - \ldots + 7 =$
b $y = x^2 - 7x - 8$
c $y = x^2 - 1{,}2x - 1$
d $y = x^2 + 5x + 4$

3 Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.
a Breng een factor $\frac{1}{2}$ buiten haakjes.
b Schrijf de uitdrukking binnen de haakjes als $(x+p)^2 + q$ zodat de formule in de vorm $y = \frac{1}{2}[(x+p)^2 + q]$ kan worden geschreven.
c Schrijf de gegeven formule in de vorm $y = \frac{1}{2}(x+\ldots)^2 + \ldots$

Als een formule van de vorm $y = ax^2 + px + c$ in de vorm $y = a(x+p)^2 + q$ is herschreven, heet dit vormen van kwadraten afsplitsen.

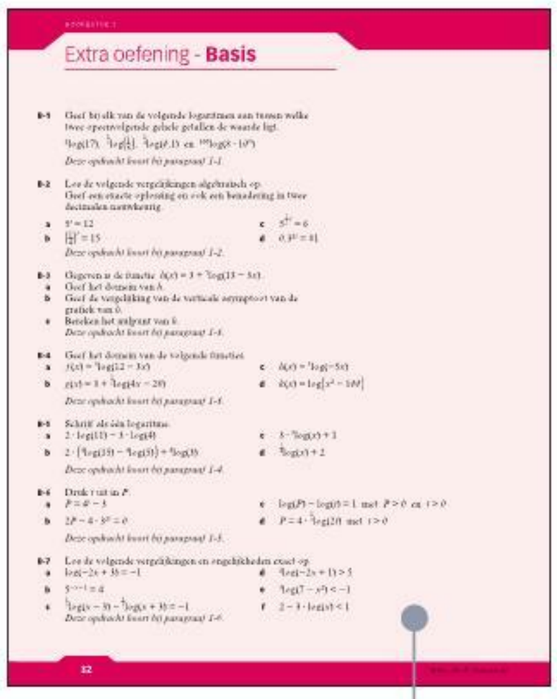
4 Herschrijf in de vorm $y = a(x+p)^2 + q$.
a $y = 2x^2 + 8x + 3$
b $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x - 1$
c $y = 3x^2 - x$
d $y = 3\frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$

Tweedegraadsfuncties

5 Gegeven is de functie $f(x) = 8x + 2x^2 - 41$.
a Toon aan dat het functievoorschrift van f ook te schrijven is als $f(x) = 8x^2 - 6x - 24$ en $f(x) = 8(x-1)^2 - 27$.
b Met welk voorschrift berekent je handig de coördinaten van de top?
c Met welk voorschrift berekent je handig de coördinaten van de snijpunten met de y-as?
d Van welk punt kun je met het overblijvende voorschrift de coördinaten handig berekenen?

Voorbeeld
Schrijf $y = 2x^2 + 12x + 8$ in de vorm $y = a(x+p)^2 + q$.
Oplossing
$y = 2x^2 + 12x + 8$
$= 2(x^2 + 6x + 4)$
$= 2((x+3)^2 - 5)$
$= 2(x+3)^2 - 10$

40


Extra oefening - **Basis**

B-1 Geef bij elk van de volgende logaritmen aan tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen de waarde ligt.
$^{9}\log(17)$, $^{3}\log\left(\frac{1}{2}\right)$, $^{5}\log(6{,}1)$ en $^{100}\log(8 \cdot 10^{6})$
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-1.

B-2 Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.
Geef een exacte oplossing en ook een benadering in twee decimalen nauwkeurig.
a $5^x = 12$
b $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 15$
c $5^{2x} = 6$
d $0{,}3^{x} = 81$
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-2.

B-3 Gegeven is de functie $h(x) = 3 + {}^{2}\log(13 - 5x)$.
a Geef het domein van h.
b Geef de vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van h.
c Bereken het snijpunt van h.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-3.

B-4 Geef het domein van de volgende functies.
a $f(x) = {}^{3}\log(12 - 3x)$
b $g(x) = 3 + {}^{2}\log(4x - 20)$
c $h(x) = {}^{3}\log(-5x)$
d $k(x) = \log\left[x^2 - 169\right]$
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-3.

B-5 Schrijf als één logaritme.
a $2 \cdot \log(13) - 3 \cdot \log(4)$
b $2 \cdot \left\{{}^{9}\log(35) - {}^{9}\log(5)\right\} + {}^{9}\log(3)$
c $5 \cdot {}^{9}\log(x) + 3$
d $^{9}\log(x) + 2$
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-4.

B-6 Druk t uit in P.
a $P = 4^{t} - 3$
b $2P - 4 \cdot 3^{t} = 0$
c $\log(P) - \log(t) = 1$ met $P > 0$ en $t > 0$
d $P = 4 \cdot {}^{3}\log(2t)$ met $t > 0$
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-5.

B-7 Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden exact op.
a $\log(-2x + 3) = -1$
b $5^{x-1} = 4$
c $^{\frac{1}{2}}\log(x - 1) - {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 1) = -1$
d $^{4}\log(-2x + 1) > 5$
e $^{3}\log(7 - x^3) < -1$
f $2 - 3 \cdot \log(x) < 1$
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-6.

12

Bij de Extra oefening herhaal je stof uit het boek.

Bij de Keuzeonderwerpen vind je praktische opdrachten.

Praktische opdracht

Fractals

Opbouw
1 Probleemstelling
2 Presentatievariaties
3 Plan maken
4 Plan uitvoeren
5 Conclusie

Probleemstelling
Figuren die zichzelf steeds herhalen en waarin je op verschillende schalen dezelfde basisvorm kunt ontdekken worden fractals genoemd. Naast fractale figuren in de natuur, zoals natuurlijke fractals vind, hou ontstaan fractals eigenlijk. En hoe zit het met de grootte van een steeds kleiner herhalend figuur: het hele stuk lijkt op te vullen?

1a Teken een rechthoek met een oppervlakte van 85 cm² en een omtrek van 24 cm.
b Verander de figuur zodanig dat de oppervlakte gelijk blijft maar de omtrek toenamt.
c Probeer de oppervlakte gelijk te houden, terwijl de omtrek 5× zo groot.
d Is het mogelijk om zoals figuren te tekenen, waarvan de omtrek onbegrensd blijft toenamen, terwijl oppervlakte niet boven een bepaalde waarde komt?

250

Hulpboek

Het hulpboek bevat de instructies voor de grafische rekenmachines, voorbeeld-proefwerken, werkbladen en antwoorden bij de opdrachten uit het leerboek en de voorbeeldproefwerken.

Hulpboek

- TI / Casio
- Meer oefenen
- Voorbeeld-proefwerken
- Werkbladen
- Aanpak praktische opdracht
- Antwoorden van de opdrachten in leerboek en hulpboek

Het leerboek heeft verwijzingen naar de rekenmachine voor de TI en de Casio

Bij ieder hoofdstuk vind je een voorbeeld-proefwerk met vaardighedenoverzicht, hints en antwoorden.

De herhalingssommen zijn extra bij sommige opdrachten uit het leerboek

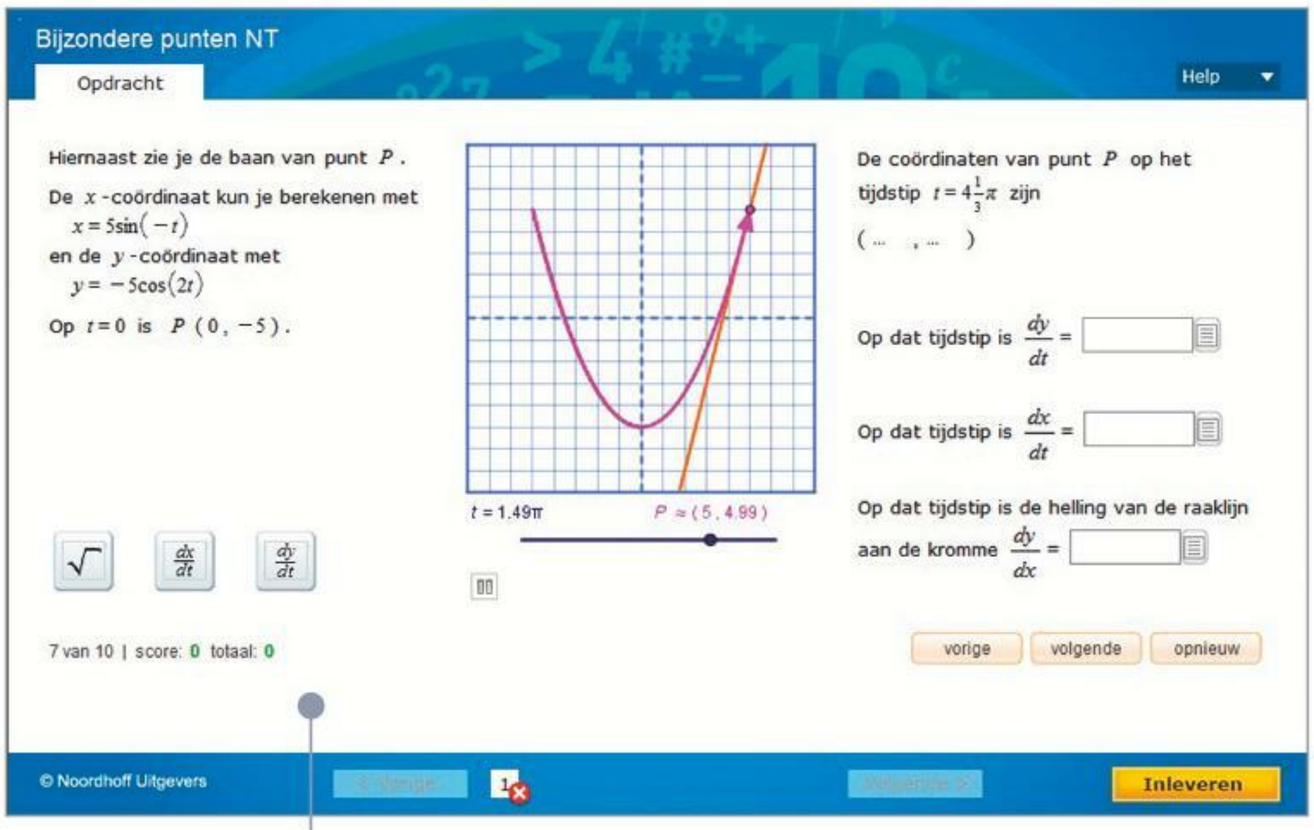
De antwoorden van de opdrachten van het leerboek en de voorbeeldproefwerken staan hier.

Uitwerkingen

Het uitwerkingenboek bevat de uitwerkingen van de opdrachten uit het leerboek en uit het hulpboek. Stap voor stap wordt uitgewerkt wat de oplossing is van de opdrachten.

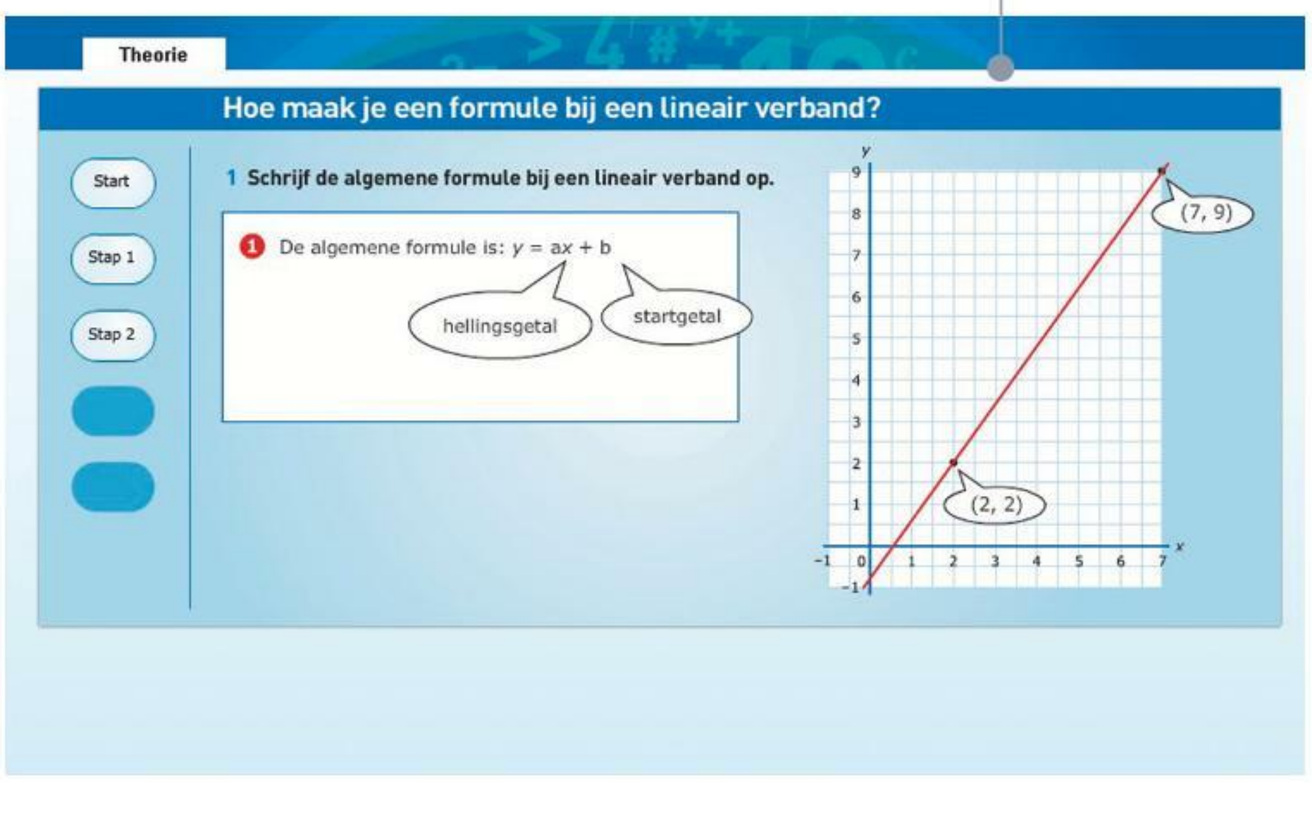
© Noordhoff Uitgevers bv

Werken met de ICT van Moderne Wiskunde



Bij vrijwel iedere paragraaf is een vervangende ICT-opdracht opgenomen. In deze opdracht staan ook tips en tussenvragen, die je helpen de stof beter te begrijpen.

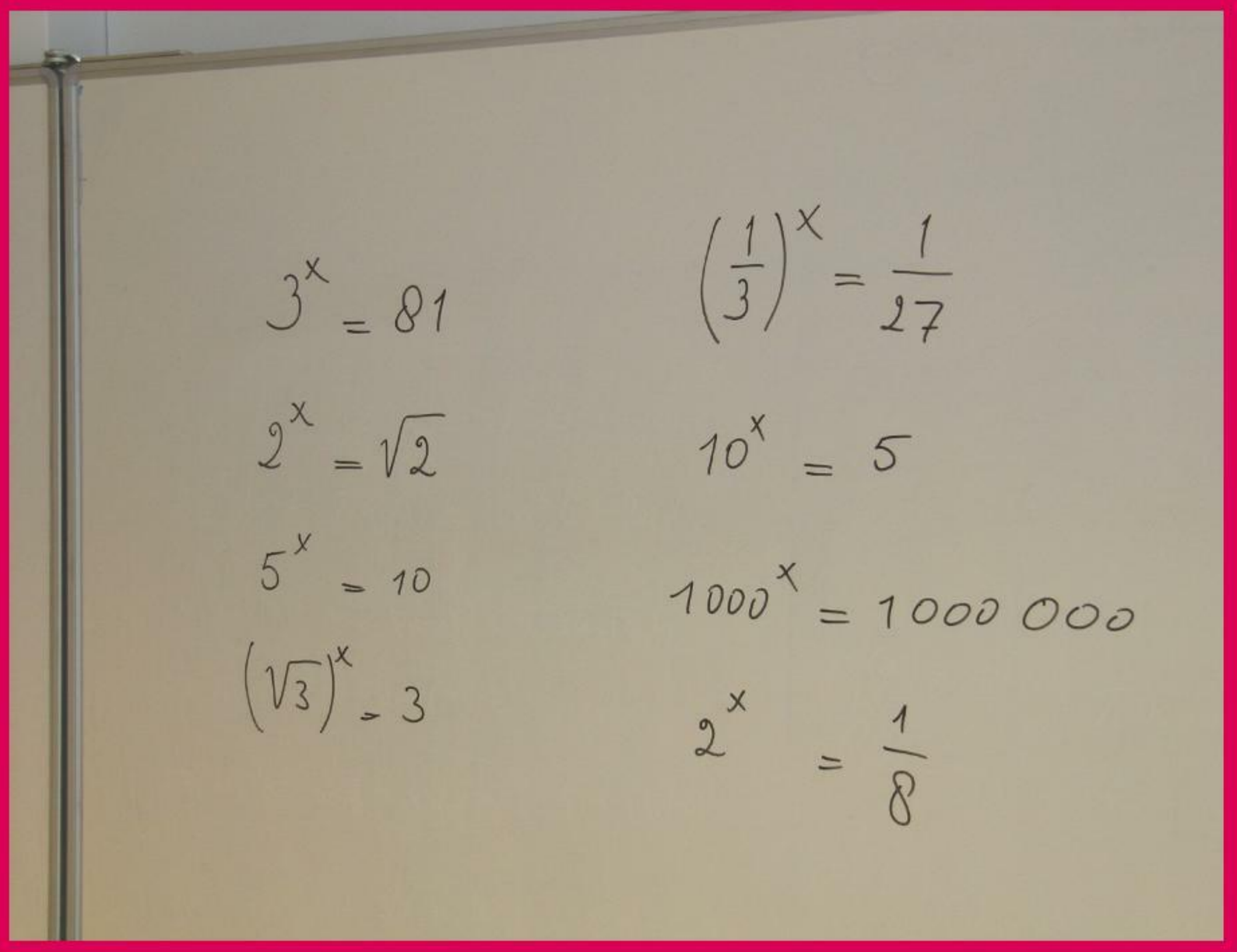
Veel opdrachten in de hoofdstukken worden ondersteund door een uitlegvideo of een aanpakanimatie. Hiermee kun je nog makkelijker en zelfstandiger werken met de ICT van Moderne Wiskunde.



Diagnose

Na ieder hoofdstuk kun je een Digitale Oefentoets maken. Deze helpt je om een proefwerk efficiënt voor te bereiden. Je krijgt inzicht in hoe je op paragraafniveau scoort en indien nodig krijg je meer uitleg en oefenstof aangeboden.

© Noordhoff Uitgevers bv



Vergelijkingen

De docent wiskunde schrijft een aantal exponentiële vergelijkingen op het bord.

Van welke vergelijkingen zie je direct een oplossing?
Wat is de oplossing?

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 1
Logaritmische functies

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	12
1-1	Logaritmen	14
1-2	Logaritmen berekenen	16
1-3	Grafieken van logaritmische functies	18
1-4	Rekenregels voor logaritmen	20
1-5	Formules herleiden	22
1-6	Vergelijkingen en ongelijkheden	24
1-7	Gemengde opdrachten	26
	Samenvatting	28
	Test jezelf	30
	Extra oefening - Basis	32
	Extra oefening - Gemengd	33
	Uitdagende opdrachten	34
	Logaritmentafel	35

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorkennis

V-1 Gegeven is de functie $f(x) = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-3}$.

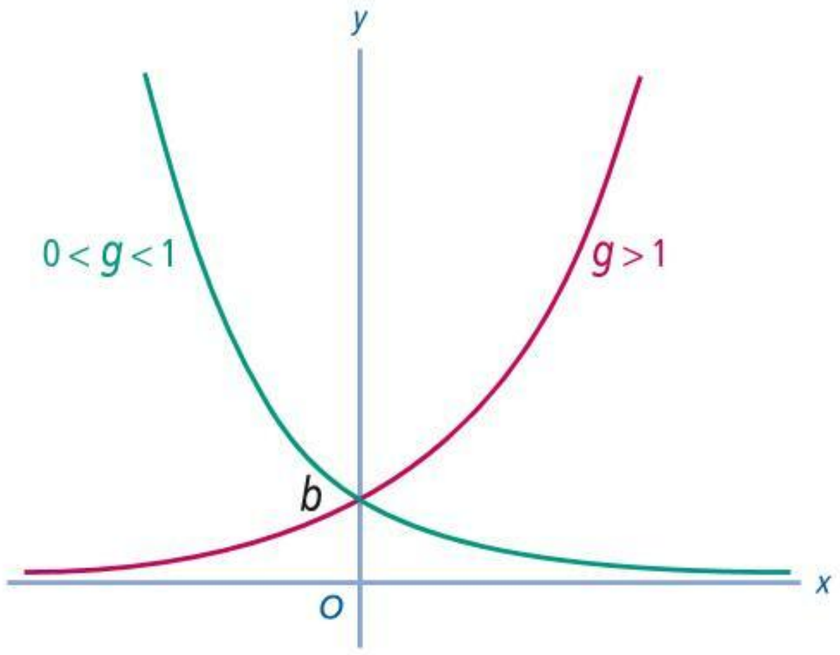
a Maak een tabel met functiewaarden van f voor $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ tot en met $x = 3$.

b Schrijf het functievoorschrift van f in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

c Wat is betekenis van de waarden van b en g voor de grafiek van f?

Theorie

De grafieken van **exponentiële functies** $f(x) = b \cdot g^x$ snijden de y-as in het punt $(0, b)$. De x-as is de horizontale asymptoot van de grafiek. Voor $b > 0$ is de grafiek van f stijgend als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.
Het domein van f is $\mathbb{R}$.
Het bereik van f is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.



V-2 Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x) = 2 \cdot 1{,}7^x$, $h(x) = 5 \cdot x^{1{,}7}$, $i(x) = 17 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ en $j(x) = 7 \cdot 1{,}0001^x$.

a Welke van de bovenstaande functies zijn exponentiële functies?

b Van welke van deze exponentiële functies is de grafiek stijgend? Waarom?

c Geef de coördinaten van de punten waarin de grafieken van de exponentiële functies de y-as snijden.

V-3 Schrijf als één macht.

a $5^3 \cdot 5^4$

b $\left(7^2\right)^5$

c $2^{-4} \cdot 2^3$

d $\left(5^3\right)^2 \cdot 5^5$

Theorie

Voor machten en exponenten bestaan de volgende rekenregels.

$g^p \cdot g^q = g^{p+q}$ $\qquad \frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$ $\qquad (g^p)^q = g^{pq}$

$g^0 = 1$ $\qquad g^{-p} = \frac{1}{g^p}$ $\quad (g \neq 0)$ $\qquad g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$ $\quad (g > 0)$

Voorbeeld

$5^0 = 1$ $\qquad \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$ $\qquad \left(\sqrt{7}\right)^0 = 1$

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $\qquad x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$

$4^5 \cdot 4^{-3} = 4^2 \ (= 16)$ $\qquad x^4 \cdot x^a = x^{4+a}$

$\left(p^{\frac{1}{6}}\right)^4 = p^{\frac{4}{6}} = p^{\frac{2}{3}}$ $\qquad \left(x^a\right)^2 = x^{2a}$

V-4 Schrijf zonder negatieve exponent.

a 7^{-3}

b g^{-5}

c $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

V-5 Schrijf als één macht.

a $3^{14} \cdot 3^{-16}$

b $a^{-3} \cdot a^{-5} \cdot a^{12}$

c $7^{x+1} \cdot 7^{-x+3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

V-6 Schrijf als één macht.

a $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5$

b $8\sqrt{2} \cdot 16\sqrt{2}$

c $\dfrac{\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{36}}{\sqrt{6}}$

d $\left(2^3 \cdot 2^4\right)^5$

e $\left(p^{-2}\right)^3 \cdot \left(p^3\right)^5$

f $\dfrac{a^2 \cdot a^7}{\left(a^3\right)^2}$

V-7a Toon met de rekenregels voor machten aan dat de functies $f(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$ en $g(x) = \frac{2}{3} \cdot 3^x$ gelijk zijn.

b Doe hetzelfde voor de functies $m(x) = 1{,}25 \cdot 0{,}8^{3-x}$ en $n(x) = 0{,}64 \cdot 1{,}25^x$.

V-8 Een groeiproces wordt beschreven door de formule $M = 5{,}625 \cdot 2{,}56^{0{,}5t+2}$ met t in uren.

a Bereken exact de beginhoeveelheid en de groeifactor per uur van dit groeiproces.

b Bereken de groeifactor per half uur. Rond af op twee decimalen.

Exponentiële vergelijkingen kun je soms algebraïsch oplossen. De getallen aan weerskanten van het gelijkteken moeten dan geschreven worden als machten van hetzelfde grondtal. Lukt dat niet, dan kun je de vergelijking met de rekenmachine oplossen.

Voorbeeld 1

Los exact op: $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 4$.

Oplossing

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 2$ (links en rechts : 2)

$(2^{-1})^{3x} = 2$ $(2^{-1} = \frac{1}{2})$

$2^{-3x} = 2^1$ $((g^p)^q = g^{pq})$

$-3x = 1$ (exponenten gelijkgesteld)

$x = -\frac{1}{3}$

Voorbeeld 2

Los op: $4 \cdot 3^{-\frac{1}{4}x} = 16$.

Oplossing

$3^{-\frac{1}{4}x} = 4$ (links en rechts : 4)

Het lukt niet om 4 als een macht van 3 te schrijven (evenmin om 3 als een macht van 4 te schrijven).
Met de rekenmachine:
$Y1 = 3^{-\frac{1}{4}x}$ en $Y2 = 4$
Venster: standaard
CALC intersect (TI) of G-Solve INTSECT (Casio)
oplossing $x \approx -5{,}05$.

V-9 Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $2^{1+5x} = 8$

b $5^{2t-8} = \frac{1}{25}$

c $3^{-t} = 9$

d $8 \cdot 4^p = 2$

e $6 \cdot 6^x = \frac{1}{6}$

f $5^{2t} \cdot 5^{3t} = 1$

V-10 Los de volgende vergelijkingen op. Rond je antwoorden af op twee decimalen.

a $3^{-x} = 5$

b $4 \cdot 2^{x+3} = 7$

c $5^{0{,}3x} = 1 + 2^{-x}$

d $-3x + 4 = -4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$

© Noordhoff Uitgevers bv

1-1

Logaritmen

1 Gegeven is de vergelijking $3^x = a$.
Voor $a = 1$ kun je de vergelijking exact oplossen, want $3^x = 1$ geeft $x = 0$.

a Voor welke gehele waarden van a tussen 1 en 10 kun je de vergelijking exact oplossen?

b Geef alle gehele waarden van a tussen 100 en 1000 waarvoor je de vergelijking exact kunt oplossen.

2 Gegeven is de vergelijking $2^x = 7$.

a Waarom kun je deze vergelijking niet exact oplossen?

b Toon aan dat voor de oplossing geldt: $2{,}80 < x < 2{,}81$.

c Benader de oplossing in vier decimalen nauwkeurig.

3 Welke van de volgende vergelijkingen kun je exact oplossen?
Los die vergelijkingen exact op.

a $2^x = 10$

b $3^x = 25$

c $10^x = \frac{1}{10}$

d $5^x = \sqrt{5}$

e $2^x = 256$

f $3^x = \frac{1}{36}$

4a Tussen welke gehele getallen ligt de oplossing van $3^x = 25$?

b Welk getal is groter: de oplossing van $3^x = 15$ of die van $6^x = 30$?

Theorie

De exacte oplossing van de vergelijking $g^x = a$ heet de **logaritme** van a voor het **grondtal** g. Je noteert deze oplossing als $x = {}^g\log(a)$. Je spreekt ${}^g\log(a)$ uit als '**g-log a**'.
Basisregel: Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ en omgekeerd: uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$.
Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.
Er geldt: ${}^g\log(1) = 0$ voor elke waarde van $g > 0$ (mits $g \neq 1$).

Voorbeeld

a Los op $4^x = 13$.

b Van welke exponentiële vergelijking is $x = {}^5\log(12)$ de oplossing?

Oplossing

a Uit $4^x = 13$ volgt $x = {}^4\log(13)$.

b $x = {}^5\log(12)$ is de oplossing van $5^x = 12$.

5 Los exact op, dus schrijf de oplossing als een logaritme.

a $7^x = 4$

b $7^x = 10$

c $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 13$

d $3^x = 14$

e $5^x = 100$

f $5^x = \frac{1}{2}$

6 Geef een exponentiële vergelijking bij de volgende oplossingen.

a $x = {}^3\log(5)$

b $x = {}^7\log\left(\frac{1}{2}\right)$

c $x = {}^{\frac{1}{2}}\log(7)$

d $x = 4$

e $x = -2$

f $x = {}^{0{,}1}\log(1000)$

© Noordhoff Uitgevers bv

Soms kun je de exacte oplossing zonder logaritme schrijven. De exacte oplossing van $3^x = 81$ is $x = 4$ want $3^4 = 81$. De exacte oplossing is ook $x = {}^3\log(81)$, dus is ${}^3\log(81) = 4$. Zo is ${}^5\log\left(\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}$ want $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

7 Neem over en vul in.

a ${}^3\log(27) = \ldots.$ want $27 = 3^{\cdots}$

b ${}^2\log\left(\frac{1}{8}\right) = \ldots.$ want $\frac{1}{8} = 2^{\cdots}$

c ${}^5\log\left(5\sqrt{5}\right) = \ldots.$ want $5\sqrt{5} = 5^{\cdots}$

d ${}^7\log(1) = \ldots.$ want $1 = 7^{\cdots}$

8a Gegeven de rij logaritmen: ${}^5\log(2)$, ${}^5\log(3)$, …, ${}^5\log(1000)$.
Welke van deze logaritmen zijn gelijk aan een geheel getal?
Verklaar je antwoord.

b Beantwoord dezelfde vraag ook voor ${}^7\log\left(\frac{1}{2}\right)$, ${}^7\log\left(\frac{1}{3}\right)$, …, ${}^7\log\left(\frac{1}{1000}\right)$.

H 9 Bereken de volgende logaritmen.

a ${}^2\log\left(2\sqrt{2}\right)$

b ${}^7\log\left(\frac{1}{49}\right)$

c ${}^{10}\log(1\,000\,000)$

d ${}^{\frac{1}{4}}\log\left(\frac{1}{64}\right)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log(9)$

f ${}^{25}\log(5)$

10 Geef bij elk van de volgende logaritmen aan tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen de waarde ligt.

${}^3\log(12)$, ${}^5\log(1000)$, ${}^5\log\left(\frac{1}{2}\right)$, ${}^{\frac{1}{5}}\log(20)$

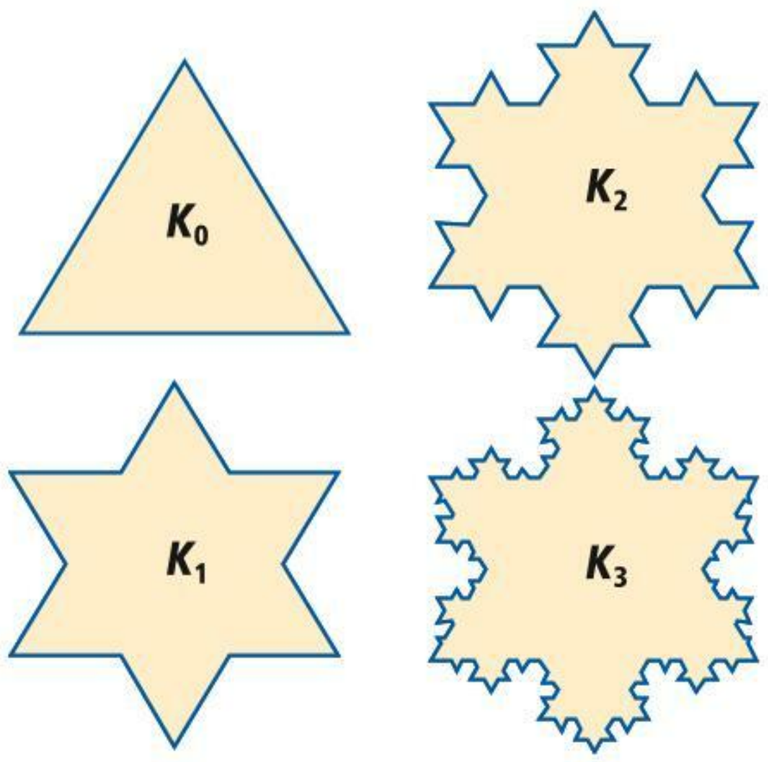
11 De reeks plaatjes hiernaast toont de ontwikkeling van de zogenaamde Koch-curve of sneeuwvlokkromme. Begin met een gelijkzijdige driehoek met zijde 9. Verdeel elk lijnstukje in drieën en vervang steeds het middelste deel door een gelijkzijdige driehoek aan de buitenzijde.

a Hoe groot is de omtrek van figuur K_0 en van figuur K_1?

b Leg uit dat geldt: $\textit{omtrek}\, K_n = 27 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^n$

c Bij welke figuur is de omtrek gelijk aan $85\frac{1}{3}$?

d Het antwoord op opdracht c kun je schrijven met een logaritme. Welke logaritme is dat?



12 Hiernaast is de grafiek getekend van de functie $f(x) = 3^x$.

a Geef de exacte coördinaten van het punt A op de grafiek van f.

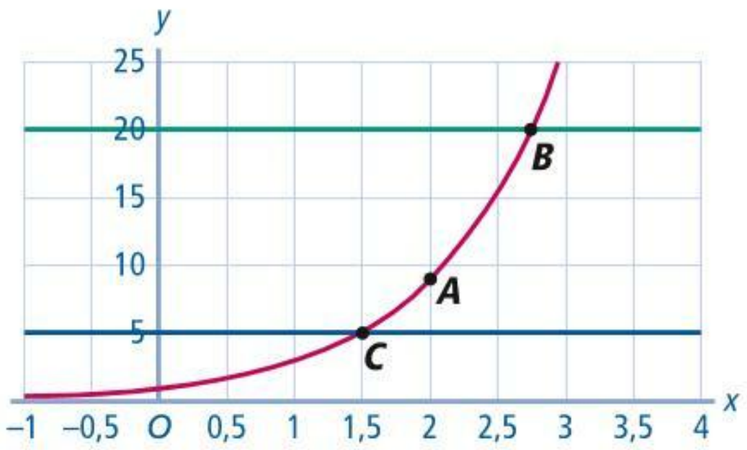
b De grafiek van f snijdt de lijn $y = 5$ in punt C.

Henk beweert dat $\left(1\frac{1}{2}, 5\right)$ de exacte coördinaten van C zijn.

Is dit juist? Zo niet, wat zijn dan de exacte coördinaten van C?

c Geef de exacte coördinaten van het snijpunt B van de lijn $y = 20$ en de grafiek van f.

d Van twee punten P en Q op de grafiek van f verschillen de x-coördinaten 2 en de y-coördinaten 16.
Bereken de exacte coördinaten van P en van Q.



© Noordhoff Uitgevers bv

1-2

Logaritmen berekenen

13a Zoek de log-toets op je rekenmachine en bereken log(2), log(5), log(10), log(25) en log(100).

b Voor welke waarde van x is $\log(x) = 3$?

c Waaruit blijkt dat 10 het grondtal van de log-toets op je rekenmachine is?

d Bereken $\log(1\,000\,000)$ en $\log(0{,}0001)$ en verklaar de uitkomsten.

Theorie

Op rekenmachines zit een log-toets. Op de meeste rekenmachines wordt daarbij het grondtal niet vermeld. Het grondtal bij deze logaritme is 10. Als ergens log(...) staat, wordt ${}^{10}\log(...)$ bedoeld.

Voorbeeld 1

Bereken log(0,01) en log(50), indien nodig afgerond op twee decimalen, en controleer je antwoorden.

Oplossing

Met de rekenmachine: $\log(0{,}01) = -2$;

controle $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

$\log(50) \approx 1{,}70$; controle $10^{1{,}70} \approx 50$.

Voorbeeld 2

Los $10^{5x} = 17$ exact op en geef ook een benadering in twee decimalen.

Oplossing

$10^{5x} = 17$ dus $5x = {}^{10}\log(17) = \log(17)$

dus $x = \frac{1}{5} \cdot \log(17)$

Op twee decimalen afgerond $x \approx 0{,}25$.

14a Bereken met je rekenmachine $\log(3)$, $\log\left(\frac{1}{1000}\right)$, $\log(1)$ en $\log(123\,456)$.

b Los $10^{2x} = 5$ exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

15 De exacte oplossing van $10^x = 5$ is $x = \log(5)$. Als je dit antwoord invult in de vergelijking $10^x = 5$ krijg je $10^{\log(5)} = 5$.

a Verklaar dat $10^{\log(4)} = 4$ en dat $10^{\log(7)} = 7$.

b Geef zonder de rekenmachine te gebruiken de uitkomsten van $10^{\log(564)}$, $10^{\log(0{,}1)}$ en $10^{\log(0{,}08)}$.

c Schrijf de getallen 14, 400 en 0,003 als een macht met grondtal 10.

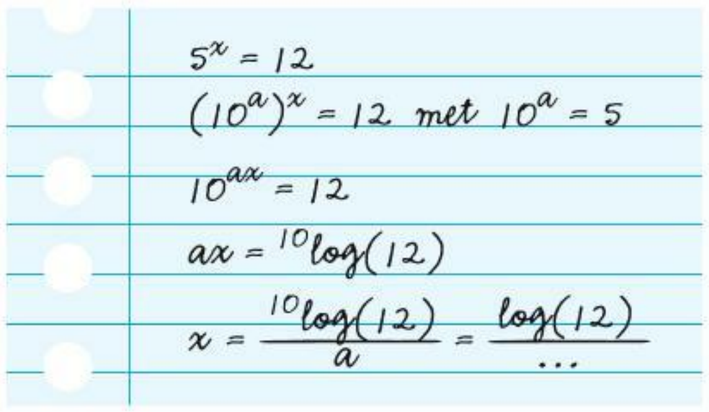
Logaritmen als ${}^4\log(20)$ kun je niet op elke rekenmachine rechtstreeks berekenen. In de volgende opdracht leid je een rekenregel af om zulke logaritmen te benaderen.

16 De oplossing van de vergelijking $5^x = 12$ is $x = {}^5\log(12)$.
De vergelijking $5^x = 12$ is te schrijven als $\left(10^a\right)^x = 12$ met $10^a = 5$.

a Schrijf a als een logaritme.

b Hiernaast is de vergelijking $5^x = 12$ bijna helemaal opgelost. Maak de berekening af. Geef je antwoord in twee decimalen.

c Waarom volgt uit deze berekening dat ${}^5\log(12) = \dfrac{\log(12)}{\log 5}$?



© Noordhoff Uitgevers bv

Met behulp van de rekenregel $^{g}\log(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(g)}$ *kun je elke logaritme met je rekenmachine berekenen.*

Voorbeeld 1

Bereken $^{7}\log(4)$ en $^{\frac{1}{2}}\log(0{,}7)$ in twee decimalen.

Oplossing

$$^{7}\log(4) = \frac{\log(4)}{\log(7)} \approx 0{,}71$$

$$^{\frac{1}{2}}\log(0{,}7) = \frac{\log(0{,}7)}{\log(\frac{1}{2})} \approx 0{,}51$$

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $5^t = 23$ exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

Oplossing

$5^t = 23$ dus $t = {}^{5}\log(23)$

Dit is het exacte antwoord. Een benadering in twee decimalen vind je met

$$t = \frac{\log(23)}{\log(5)} \approx 1{,}95.$$

H 17 Bereken de volgende logaritmen in twee decimalen nauwkeurig.

a $^{9}\log(35)$

b $^{\frac{1}{3}}\log(128)$

c $^{5}\log(10)$

d $^{4}\log\left(\frac{1}{13}\right)$

H 18 Los de vergelijkingen algebraïsch op. Geef een exacte oplossing en ook een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $15^x = 2$

b $10^x = 5$

c $4^{2x} = 6$

d $3^x = \sqrt{5}$

19 In opdracht 16 heb je de vergelijking $5^x = 12$ herleid tot $\left(10^a\right)^x = 12$ met $10^a = 5$.

a De vergelijking $5^x = 12$ is ook te schrijven als $\left(b^a\right)^x = 12$ met $b^a = 5$.

Schrijf a als een logaritme.

b Toon met de manier van opdracht 16 aan dat $^{5}\log(12) = \dfrac{^{b}\log(12)}{^{b}\log(5)}$

Theorie

Voor het rekenen met logaritmen geldt de rekenregel

$$^{g}\log(a) = \frac{^{b}\log(a)}{^{b}\log(g)} \quad (b > 0 \text{ en } b \neq 1).$$

Met deze regel kun je elke logaritme schrijven als een logaritme met een ander grondtal.

Voorbeeld

Bereken $^{9}\log(27)$ door op grondtal 3 over te gaan.

Oplossing

$$^{9}\log(27) = \frac{^{3}\log(27)}{^{3}\log(9)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

20a Vul in: $^{8}\log(128) = \dfrac{^{2}\log(\ldots)}{^{2}\log(\ldots)}$ en laat zien dat $^{8}\log(128) = 2\frac{1}{3}$.

b Bereken $^{4}\log(32)$ door op grondtal 2 over te gaan.

c Bereken $^{27}\log\left(9\sqrt{3}\right)$ door op grondtal 3 over te gaan.

d Bereken exact de waarde van p in $^{8}\log(5) = p \cdot {}^{2}\log(5)$.

e Bereken exact de waarde van a en van b in $^{3}\log(18) \cdot {}^{4}\log(3) = a \cdot {}^{2}\log(b)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

1-3

Grafieken van logaritmische functies

21 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^2\log(x)$.

a Neem over en vul in.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	...	...	...	...	...	...

b Vul ook de volgende tabel in.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	...	...	...	...	...	...

c Plot en schets de grafieken van f en g.

d In welke lijn moet je de grafiek van f spiegelen om de grafiek van g te krijgen?

e Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f en welke lijn is de asymptoot van de grafiek van g?

De grafiek van $g(x) = {}^2\log(x)$ kun je niet op elke rekenmachine direct plotten. Gebruik de rekenregel

$${}^2\log(x) = \frac{\log(x)}{\log(2)}$$

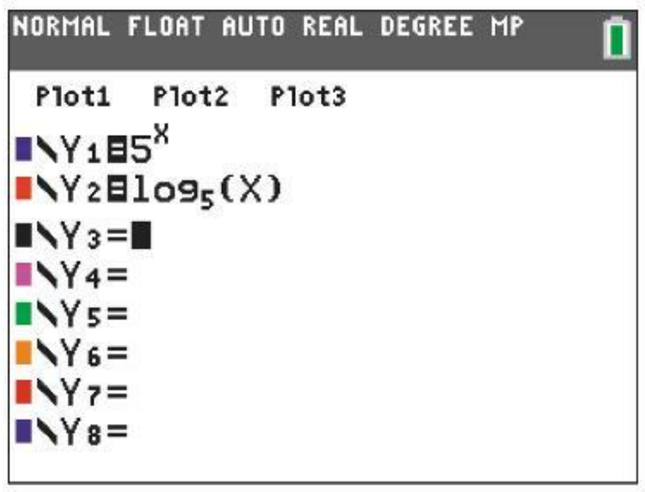
en voer in $Y_1 = \log(X) / \log(2)$

22a Plot en schets de grafieken van $f(x) = 5^x$ en $k(x) = {}^5\log(x)$.

b Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y-as. Geef ook de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van k met de x-as.

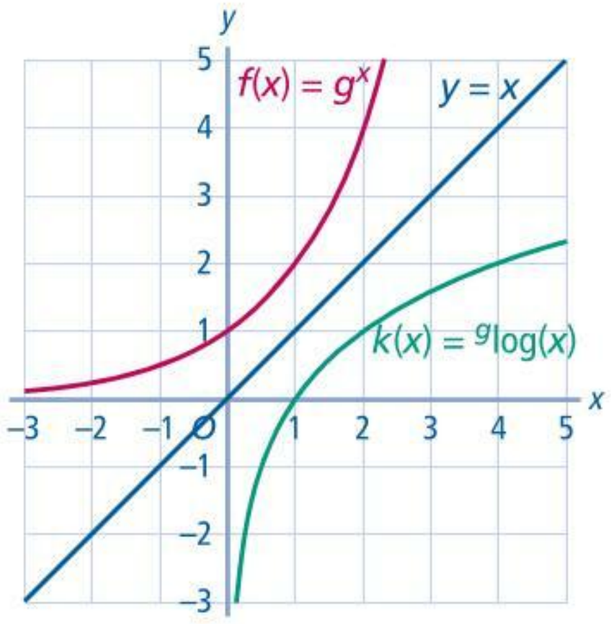
c Geef het domein en bereik van beide functies.

d Elk van deze grafieken heeft een asymptoot. Geef de vergelijking van elke asymptoot.



Theorie

De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.
Het domein van f is $\mathbb{R}$ en het domein van k is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
Het bereik van f is $\langle 0, \rightarrow \rangle$ en het bereik van k is $\mathbb{R}$.
De lijn $y = 0$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van f.
De lijn $x = 0$ is de verticale asymptoot van de grafiek van k.
De grafiek van f snijdt de y-as in $(0, 1)$ want $g^0 = 1$.
De grafiek van g snijdt de x-as in $(1, 0)$ want ${}^g\log(1) = 0$.



23 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{1,2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{0,8}\log(x)$.

a Plot de grafieken van f en g. Welk punt ligt op beide grafieken?

b De grafieken van h en k zijn de spiegelbeelden van de grafieken van f en g bij spiegelen in de lijn $y = x$. Geef de functievoorschriften van h en k.

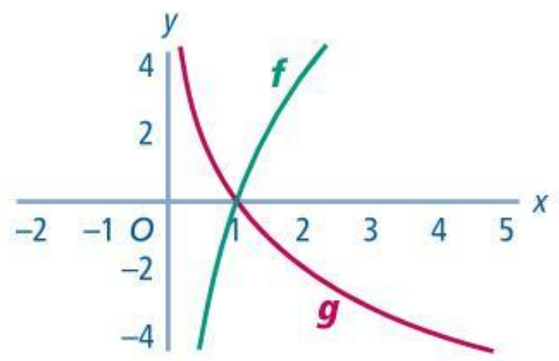
c Voor welke waarden van het grondtal g is de grafiek van de functie $k(x) = {}^g\log(x)$ stijgend en voor welke waarden van g is de grafiek dalend?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Voor de **grafiek van een logaritmische functie** geldt:
Het domein van de functie $k(x) = {}^g\log(x)$ is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
Het bereik is $\mathbb{R}$.
Het grondtal g is net als bij exponentiële functies altijd positief, maar niet gelijk aan 1.
Voor $0 < g < 1$ is de grafiek dalend en voor $g > 1$ stijgend.
De verticale asymptoot van de grafiek van $k(x) = {}^g\log(x)$ is de y-as ofwel de lijn $x = 0$.
Het snijpunt met de x-as is $(1, 0)$ want ${}^g\log(1) = 0$.

Voorbeeld



De grafiek van $f(x) = {}^{1,2}\log(x)$ is stijgend, want het grondtal is groter dan 1.
De grafiek van $g(x) = {}^{0,7}\log(x)$ is dalend, want het grondtal ligt tussen 0 en 1.

24 Gebruik de regel ${}^g\log(1) = 0$ om het nulpunt van de functie $f(x) = {}^6\log(8x - 3)$ exact te berekenen.

25 Gegeven is de functie $g(x) = {}^2\log(x + 3)$.

a Bereken het nulpunt van g.
b Hoe ontstaat de grafiek van g uit de grafiek van $f(x) = {}^2\log(x)$?
c Geef het domein van g.
d Voor welke waarden van x is $g(x) < 0$?
e Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van g?

Het domein van een functie $f(x) = {}^g\log(x + b)$ volgt uit $x + b > 0$, dus het domein is $\langle -b, \rightarrow \rangle$.
De verticale asymptoot heeft de vergelijking $x = -b$.

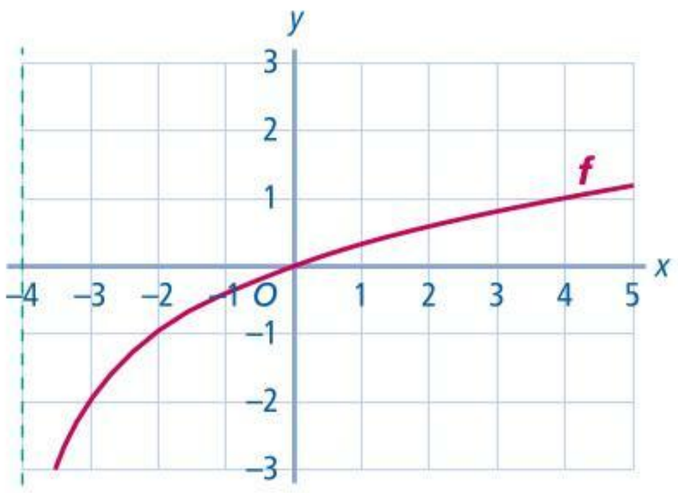
H 26 Bereken van de volgende functies het domein en geef een vergelijking van de verticale asymptoot.

a $f(x) = {}^3\log(x - 5)$
b $k(x) = {}^8\log(21 - 6x)$
c $h(x) = {}^2\log(2x + 9) - 11$
d $g(x) = 4 + {}^{0,5}\log(x - 7)$
e $m(x) = 3x - {}^{\frac{1}{2}}\log(-5x - 10)$
f $n(x) = (5x - 1) \cdot \log(1 - 5x)$

H 27 Gegeven is de functie $h(x) = -7 + {}^3\log(x^2 - 5)$.

a Plot en schets de grafiek van h.
b Geef het domein van h.
c Geef vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van h.

28 Hiernaast staat de grafiek van een functie $f(x) = p + {}^2\log(x + q)$.
Van de functie is gegeven dat de lijn $x = -4$ de asymptoot is van de grafiek van f en dat de grafiek door de oorsprong gaat.
Onderzoek met behulp van een berekening of het punt $(12, 2)$ op de grafiek van f ligt.



© Noordhoff Uitgevers bv

1-4

Rekenregels voor logaritmen

H 29a Geef zonder de rekenmachine te gebruiken de uitkomsten van $2^{{}^2\log(3)}$, $(0{,}3)^{{}^{0{,}3}\log(4)}$ en $a^{{}^a\log(3)}$.

$x = {}^3\log(2)$ is de oplossing van $3^x = 2$, dus $3^{{}^3\log(2)} = 2$.

b Omgekeerd geldt $4 = 6^{{}^6\log(4)}$ of ook $4 = (0{,}3)^{{}^{0{,}3}\log(4)}$. Zo kun je 4 schrijven als een macht van 6 en ook als een macht van 0,3. Schrijf op dezelfde manier het getal 7 als macht van 2, als macht van 12 en als macht van p.

30 Voor het rekenen met machten ken je rekenregels. Voor het rekenen met logaritmen bestaan ook rekenregels. Je kunt de rekenregels voor machten gebruiken om rekenregels voor logaritmen af te leiden.

a Bereken $2^{{}^2\log(3)}$, $2^{{}^2\log(7)}$ en $2^{{}^2\log(3)} \cdot 2^{{}^2\log(7)}$.

b Uit welke rekenregel voor machten volgt $2^{{}^2\log(3)} \cdot 2^{{}^2\log(7)} = 2^{{}^2\log(3)+{}^2\log(7)}$?

c Leg uit dat de opdrachten a en b volgt dat $2^{{}^2\log(3)+{}^2\log(7)} = 2^{{}^2\log(21)}$.

d Vul in: ${}^2\log(3) + {}^2\log(7) = {}^2\log(...)$.

e Vul in: ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(...)$.

f ${}^5\log(7) + {}^5\log(70) = {}^5\log(a)$. Welke waarde heeft a?

g Schrijf de vergelijking ${}^5\log(70) - {}^5\log(7) = {}^5\log(b)$ als een optelling en bereken de waarde van b.

h Schrijf $4 \cdot {}^3\log(2)$ als een optelling en toon aan: $4 \cdot {}^3\log(2) = {}^3\log(16)$.

Theorie

Voor het rekenen met logaritmen gelden de volgende **rekenregels**.

${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$ met $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$ en $b > 0$

${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$ met $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$ en $b > 0$

$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$ met $g > 0$, $g \neq 1$ en $a > 0$

$g^{{}^g\log(a)} = a$ met $g > 0$, $g \neq 1$ en $a > 0$

${}^g\log(a) = \frac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)}$ met $b > 0$

Voorbeeld 1

Schrijf als één logaritme: ${}^4\log(3) + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(36)$

Oplossing

${}^4\log(3) + {}^4\log\left(36^{\frac{1}{2}}\right)$

$= {}^4\log(3) + {}^4\log(6)$

$= {}^4\log(18)$

Voorbeeld 2

Schrijf als één logaritme: $2 \cdot {}^3\log(7x) - {}^3\log(7)$

Oplossing

$2 \cdot {}^3\log(7x) - {}^3\log(7) = {}^3\log(7x)^2 - {}^3\log(7)$

$= {}^3\log(49x^2) - {}^3\log(7) = {}^3\log\left(\frac{49x^2}{7}\right)$

$= {}^3\log(7x^2)$ met $x > 0$

© Noordhoff Uitgevers bv

H 31 Schrijf als één logaritme.

a $^{2}\log(7) + {}^{2}\log(3)$

b $^{7}\log(42) - {}^{7}\log(3) + {}^{7}\log(2)$

c $^{7}\log(42) - \left({}^{7}\log(3) + {}^{7}\log(2)\right)$

d $2 \cdot {}^{5}\log(4) + {}^{5}\log(a)$ met $a > 0$

e $^{5}\log(a) + {}^{5}\log(a + 1)$ met $a > 0$

f $3 \cdot {}^{0,5}\log(p) - {}^{0,5}\log\left(p^2\right)$ met $p > 0$

H 32 Gegeven zijn $f(x) = \log(x)$, $g(x) = \log(1000x)$ en $h(x) = \log(0{,}01x)$.

a Toon aan dat $g(x) = 3 + f(x)$.

b Toon aan dat $h(x) = -2 + f(x)$.

c Er geldt $h(x) = a + g(x)$.
Bereken de waarde van a.

d Schrijf $k(x) = 4 + f(x)$ als één logaritme.

e Schrijf $m(x) = 6 + {}^{2}\log(x)$ als één logaritme.

f Gegeven is verder de functie $n(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$.
Toon aan dat $n(x) = -f(x)$ voor elke waarde van x.

H 33a Tussen de variabelen R en S geldt het verband $4 \cdot \log(S) - 2 \cdot \log(R) = 1$.
Toon algebraïsch aan dat $S^4 = 10R^2$.

b Schrijf het volgende verband zonder logaritmen:
$^{2}\log(P) + 2 \cdot {}^{2}\log(Q) = -1$

34 Gegeven is het verband: $^{9}\log(K) + {}^{27}\log(M) = 2$.
Druk K uit in M. Schrijf het verband zonder logaritmen.

35 De snelwegen in Nederland zijn vooral asfaltbetonwegen. De meest voorkomende zijn de dichte asfaltbetonwegen (DAB-wegen) en de zeer open asfaltbetonwegen (ZOAB-wegen).

Voor beide soorten wegen is een formule op te stellen voor het verband tussen het geluidsniveau D in dB van het verkeer en de snelheid v in km per uur van het verkeer.
Voor een DAB-weg geldt de formule $D = 35{,}9 \cdot \log(v) + 4{,}1$.

a Bij welke snelheid op een DAB-weg is het geluidsniveau 75 dB?

b Toon met de rekenregels aan dat een verdubbeling van de snelheid altijd ongeveer 11 dB méér geeft.

Voor een ZOAB-weg geldt de formule $D = 28{,}1 \cdot \log(v) + 16{,}0$.

c Ga na bij welke snelheden van het verkeer een ZOAB-weg een lager geluidsniveau heeft dan een DAB-weg.

d Bereken algebraïsch bij welke snelheden van het verkeer het geluid op een ZOAB-weg meer dan 4 dB lager is dan op een DAB-weg. Geef je antwoord in gehele kilometers per uur.
(*Ontleend aan CE havo wiskunde B 2004, tijdvak 2*)

36 Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x^2)$ en $g(x) = 2 \cdot \log(x)$.
Zijn de functies f en g gelijk? Verklaar je antwoord.

© Noordhoff Uitgevers bv

1-5

Formules herleiden

H 37 Schrijf in de vorm $N(t) = b \cdot g^t$.

a $N(t) = 2^{3+t}$

b $N(t) = 15 \cdot 2^{t+4}$

c $N(t) = 3^{-2+3t}$

d $N(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-t}$

e $N(t) = 4^{\frac{1}{2}t-2}$

Voorbeeld

Schrijf $N(t) = 5 \cdot 3^{4t+2}$ in de vorm $N(t) = b \cdot g^t$.

Oplossing

$N(t) = 5 \cdot 3^{4t} \cdot 3^2$ (regel $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$)

$N(t) = 5 \cdot 9 \cdot (3^4)^t$ (regel $g^{ab} = (g^a)^b$)

$N(t) = 45 \cdot 81^t$

38 Een batterij verliest bij gebruik 4% van zijn lading per uur. De batterij is onbruikbaar als er minder dan 20% van de lading over is.

a Stel een formule op voor het percentage P van de lading na t uren gebruik.

b Bereken algebraïsch het aantal uren dat de batterij te gebruiken is.

c Bereken algebraïsch de tijdstippen in uren nauwkeurig waarop er tussen 50% en 30% van de oorspronkelijke lading over is.

d Toon aan dat je de tijd t uit kunt drukken in P door $t = {}^{0{,}96}\log\left(\frac{P}{100}\right)$.

Een logaritmische formule kun je herleiden tot een exponentiële formule. Omgekeerd kun je een logaritmische formule tot een exponentiële formule herleiden. Je gebruikt de basisregel: uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ en omgekeerd: uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $R = 2 + 3 \cdot 5^t$.
Druk t uit in R.

Oplossing

$2 + 3 \cdot 5^t = R$

$3 \cdot 5^t = R - 2$ (links en rechts – 2)

$5^t = \frac{1}{3}R - \frac{2}{3}$ (links en rechts : 3)

$t = {}^5\log\left(\frac{1}{3}R - \frac{2}{3}\right)$ ($g^x = a$ geeft $x = {}^g\log(a)$)

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $Z = 4 + {}^2\log(3a)$.
Druk a uit in Z.

Oplossing

$4 + {}^2\log(3a) = Z$

${}^2\log(3a) = Z - 4$ (links en rechts – 4)

$3a = 2^{Z-4}$ (${}^g\log(a) = x$ geeft $a = g^x$)

$a = \frac{1}{3} \cdot 2^{Z-4}$ (links en rechts : 3)

H 39 Druk t uit in N.

a $N = 3 \cdot 4^t$

b $N = -16 + 4 \cdot 5^t$

c $3N - 2 = \frac{1}{12} \cdot 4^t$

d $4N \cdot 6^t = 5$

e $7^{tN} = 10$

f $3^t = 9^N$

40 Gegeven is de formule $T = {}^4\log(2a)$.

a Laat zien dat je de formule kunt schrijven als $a = \frac{1}{2} \cdot 4^T$.

b Laat zien dat je de formule ook kunt schrijven als $a = 2^{2T-1}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

H 41 Druk p uit in q.

a $q = -2 + {}^5\log(p)$

b $q = 1 + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(p)$

c $q = \log(6p - 12)$

d $q = 1 - 3^{\frac{1}{2}p}$

e $2^p \cdot q = 1$

f $4q \cdot {}^3\log(p) = 8$

42a Gegeven is de functie $f(x) = 2 + {}^3\log(x + 5)$.
Het functievoorschrift van f is te herleiden tot de vorm $f(x) = {}^3\log(ax + b)$.
Bereken algebraïsch de waarde van a en van b.

b Herleid het functievoorschrift van $g(x) = -2 + {}^2\log(10 - x)$ tot de vorm $g(x) = {}^2\log(ax + b)$.

43 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^5\log(4x)$, $g(x) = 2 \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $h(x) = f(x) + g(x)$.
Toon algebraïsch aan dat $h(x) = 2 \cdot {}^5\log(2) - 3 \cdot {}^5\log(x)$.

H 44 Tussen de variabelen R en S bestaat het volgende verband: ${}^2\log(R) = 4{,}45 - 2{,}31S$.
Deze formule is ook te schrijven als $R = b \cdot g^S$.
Bereken algebraïsch de waarde van b en van g in twee decimalen nauwkeurig.

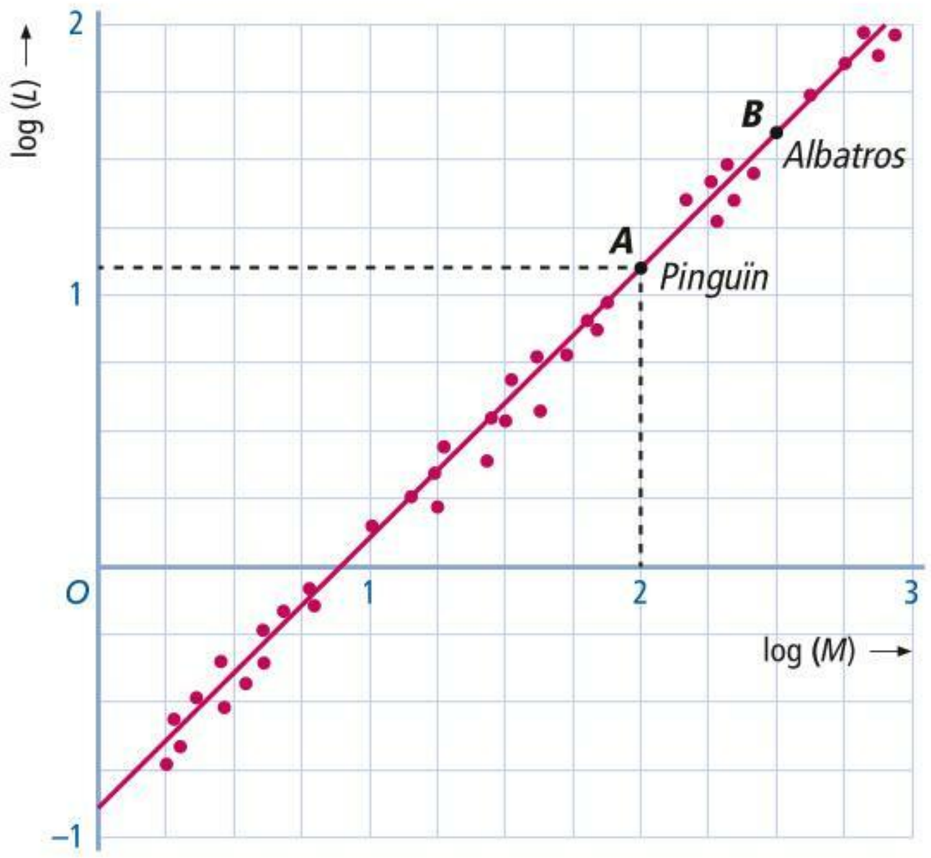
45 Als een ei wordt uitgebroed, verliest het embryo water gedurende het broeden. De massa van het ei noem je M. De hoeveelheid water die verloren gaat noem je L. In de grafiek hiernaast is het verband tussen $\log(M)$ en $\log(L)$ weergegeven.
De grafiek is gebaseerd op data die verkregen zijn van 65 soorten eieren. De meetpunten liggen min of meer op een rechte lijn. Zowel M als L zijn in grammen.

a Bij punt A horen de meetgegevens van de *pinguïn*. Hoeveel gram is de massa van een ei van de pinguïn en hoeveel gram bedraagt het waterverlies van het embryo?

b Ongeacht de lengte van broedtijd en de massa van het ei is het verlies aan water van het embryo ongeveer 13% van de massa van het ei.
Ga na of dit voor de *pinguïn* geldt.

c Klopt dit ook voor de *albatros* (punt B)?

d Een formule die bij de rechte lijn hoort is $\log(L) = 1{,}031 \cdot \log(M) - 0{,}885$.
Deze formule is ook te schrijven als $L = a \cdot M^b$.
Bereken algebraïsch de waarde van a en van b in drie decimalen.



© Noordhoff Uitgevers bv

1-6

Vergelijkingen en ongelijkheden

H 46 Los exact op.

a $^3\log(x) = \frac{1}{2}$ **c** $^5\log(x) = -2$ **e** $^6\log(x^3) = 4$

b $^{\frac{1}{2}}\log(x) = 3$ **d** $^4\log\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$ **f** $^3\log\left(\frac{1}{x^2}\right) = 2$

47 Gegeven is de vergelijking $^5\log(3x - 7) = 2$.

a Welke waarde heeft $3x - 7$ in deze vergelijking?

b Los de vergelijking exact op.

Theorie

Van de logaritmische vergelijking $^g\log(x) = c$ is $x = g^c$ de exacte oplossing. Met behulp van deze regel en de rekenregels voor logaritmen los je logaritmische vergelijkingen exact op.
Controleer altijd of je oplossing voldoet.
Omgekeerd is $c = {}^g\log(x)$ de exacte oplossing van $g^c = x$.

Voorbeeld 1

Los exact op: $^4\log(2x - 7) = 2\frac{1}{2}$

Oplossing

$2x - 7 = 4^{2\frac{1}{2}}$

$2x - 7 = 32$

$2x = 39$

$x = 19\frac{1}{2}$

Voorbeeld 2

Los exact op: $2^{1-3x} = 7$

Oplossing

$1 - 3x = {}^2\log(7)$

$-3x = -1 + {}^2\log(7)$

$x = \frac{1 - {}^2\log(7)}{3}$ $\left(= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(7)\right)$

Voorbeeld 3

Los exact op: $^2\log(x) + {}^2\log(x + 2) = 3$

Oplossing

$^2\log(x\,(x + 2)) = 3$

$x\,(x + 2) = 2^3$ geeft $x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x + 4)(x - 2) = 0$

$x = -4$ of $x = 2$

Bij $x = -4$ bestaan $^2\log(x)$ en $^2\log(x + 2)$ niet. De oplossing is $x = 2$.

H 48 Los exact op.

a $^3\log(2x - 3) = 4$

b $2^{-x+7} = 5$

c $\log(2x - 4) - \log(7) = 1$

d $^{\frac{1}{3}}\log(4x) - {}^{\frac{1}{3}}\log(6) = -2$

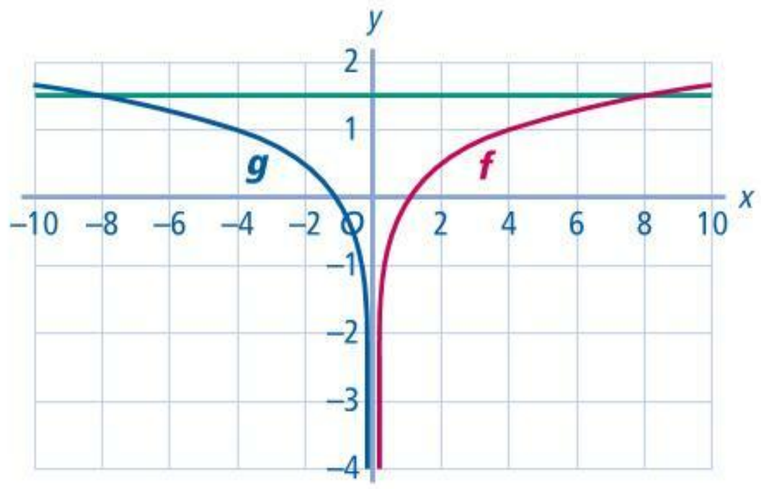
e $^2\log(x - 3) = 1 - {}^2\log(x + 3)$

f $^5\log\left(\frac{1}{x}\right) = 2 + {}^5\log(x)$

g $5^{4x+2} = 1000$

h $^3\log(5 - x) - {}^3\log(2x + 4) = 1$

49 Hiernaast zie je de grafieken van $f(x) = {}^4\log(x)$, $g(x) = {}^4\log(-x)$ en ook de lijn $y = 1\frac{1}{2}$.



a Geef het domein van f en het domein van g.

b Los exact op: $f(x) = 1\frac{1}{2}$

c Voor welke waarden van x geldt $f(x) < 1\frac{1}{2}$?

d Voor welke waarden van x is $g(x) < 1\frac{1}{2}$?

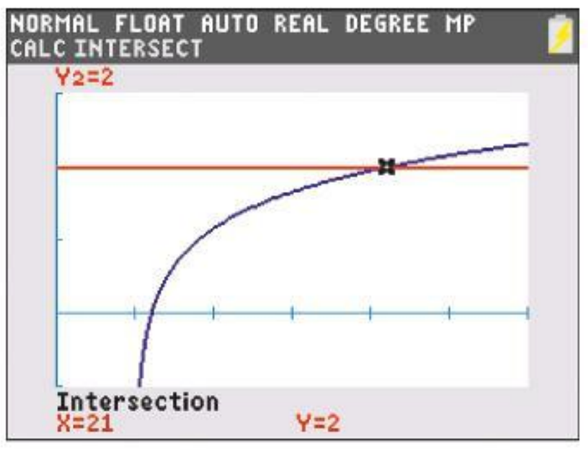
e Los exact op: $f(x) \leq -2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bij het oplossen van een ongelijkheid moet je eerst de bijbehorende vergelijking oplossen. Voor het trekken van de juiste conclusie over de oplossing van de ongelijkheid speelt ook het domein van de functie een belangrijke rol. Een plot van de grafieken kan daarbij helpen.

Voorbeeld

Los op: ${}^4\log(x-5) \le 2$



Oplossing

${}^4\log(x-5) = 2$

$x - 5 = 4^2 = 16$

$x = 21$

Hiernaast zie je een plot van de grafiek van $f(x) = {}^4\log(x-5)$ en $y = 2$.

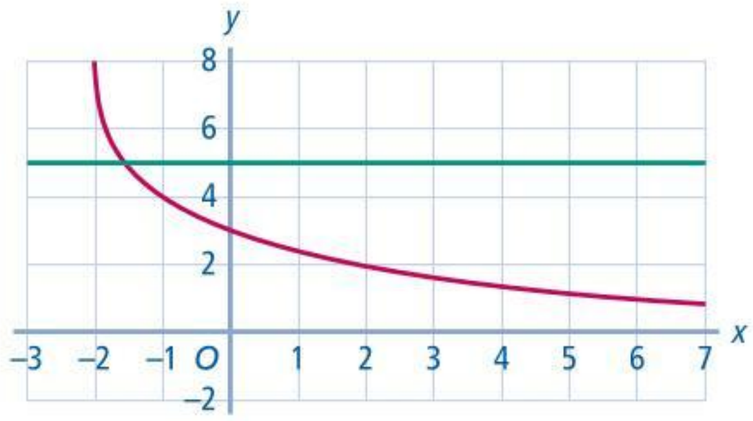
Het domein van f is $\langle 5, \rightarrow \rangle$.

De oplossing van de ongelijkheid ${}^4\log(x-5) \le 2$ is $\langle 5, 21]$.

H 50 Hiernaast is de grafiek getekend van $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x+2) + 4$ en de lijn $y = 5$.

a Geef het domein van f.

b Los exact op: $f(x) > 5$.



H 51 Los de volgende ongelijkheden exact op.

a ${}^2\log(2x+1) > 5$

b ${}^3\log(4-x) + {}^3\log(4+x) \le 2$

52 Bij een exponentieel groeiproces hoort de functie $A(t) = 600 \cdot (0{,}8)^t$.
De beginhoeveelheid is 600 en t is in uren.

a Bereken algebraïsch hoelang het duurt voordat die hoeveelheid is gehalveerd.

b Op een gegeven moment is de hoeveelheid gedaald tot 100.
Bereken hoelang het duurt totdat die hoeveelheid is afgenomen tot 50.

c Leg uit: De 'halveringstijd' is de oplossing van de vergelijking $(0{,}8)^t = 0{,}5$.

Theorie

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor g is de **verdubbelingstijd** de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$. De verdubbelingstijd is dus $t = {}^g\log(2)$.
De **halveringstijd** is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$.
De halveringstijd is dus $t = {}^g\log\left(\frac{1}{2}\right)$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(t) = 30 \cdot (0{,}6)^t$.
Voor welke waarde van t is $f(t) = 15$?

Oplossing

t is de halveringstijd bij een groeiproces met groeifactor 0,6, dus
$t = {}^{0{,}6}\log(0{,}5) \approx 1{,}357$.

53 Het volume van de stam van een spar neemt per jaar met gemiddeld 5% toe.

a Stel een vergelijking op waarmee je de verdubbelingstijd voor het volume kunt vinden.

b Benader deze verdubbelingstijd in hele jaren nauwkeurig.

c Na hoeveel jaar is het volume van de spar verachtvoudigd?

d Hoeveel keer past de verdubbelingstijd in een verachtvoudigingstijd?

© Noordhoff Uitgevers bv

1-7

Gemengde opdrachten

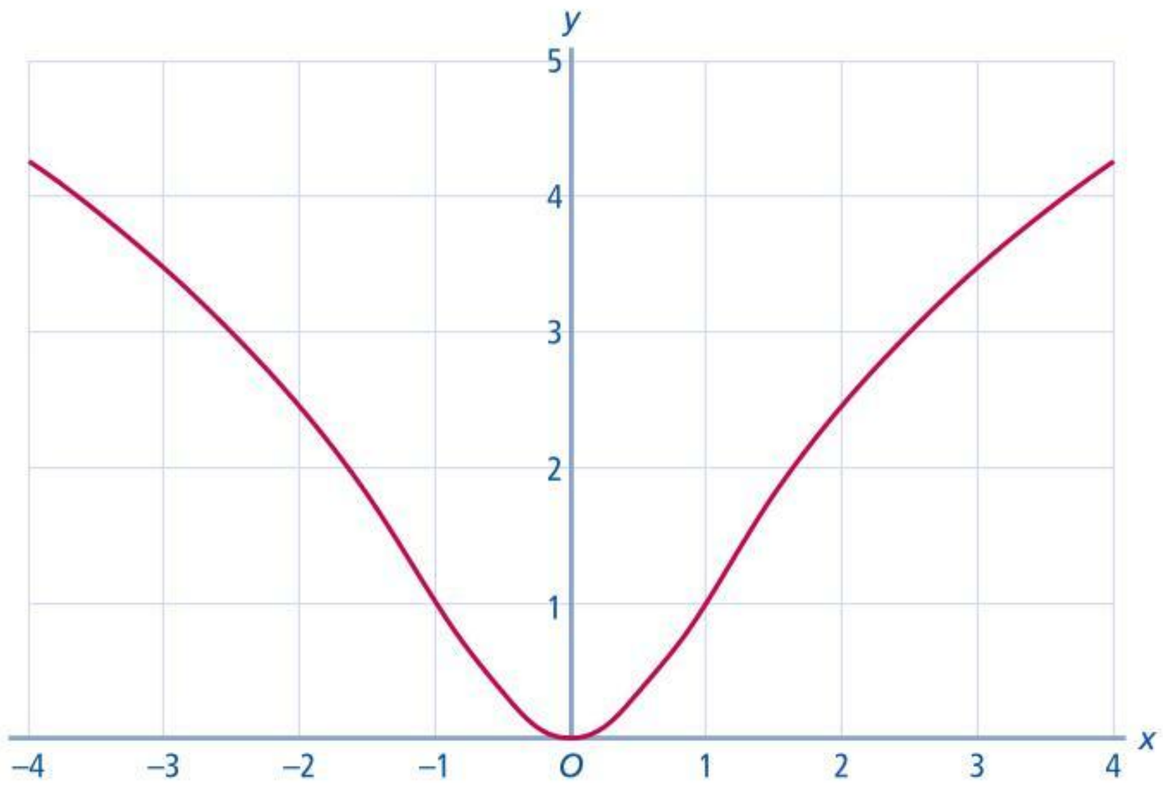
54 Hiernaast staat de grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(x^2 + 1)$.

a Leg uit dat $\mathbb{R}$ het domein van f is.

b Verklaar dat de oorsprong de top van de grafiek van f is.

c Heeft de grafiek van f asymptoten?
Zo ja, welke?
Zo nee, waarom niet?

d Los exact op: $f(x) = 6$.



55 Gegeven is de functie $f(x) = \log(x^2 - 6x + 8)$.

a Bereken het domein van f.

b Geef de asymptoten van f.

c Plot en schets de grafiek van f.

d Los exact op: $f(x) < 0$.

56 Iemand krijgt 100 mg geneesmiddel toegediend door inspuiting in het bloed.
Per dag wordt 40% van de aanwezige hoeveelheid afgebroken.
Na de halfwaardetijd t_h is nog precies de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid over.

a Schrijf t_h als logaritme en bereken t_h in uren nauwkeurig.

b Na hoeveel tijd is er nog 36 mg over?

c Zodra er nog maar 18 mg geneesmiddel in het bloed over is, moet er opnieuw ingespoten worden. Na hoeveel tijd gebeurt dat?

d Verklaar het verband tussen de antwoorden van de opdrachten a, b en c.

57 Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 4 \cdot {}^3\log(x)$.

a Het functievoorschrift van f kan worden geschreven in de vorm $f(x) = {}^3\log(px^q)$ met $x > 0$.
Bereken exact de waarde van p en van q.

b Los exact op: $f(x) = 7$.

c Gegeven is de functie $g(x) = 1 + {}^3\log(9x^2)$.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g.

58 Substitueer formule B in formule A en vereenvoudig het resultaat.

a A: $y = 4^t$ en B: $t = {}^4\log(3x)$

b A: $y = 4^t$ en B: $t = 2 \cdot {}^4\log(x)$

c A: $y = 9^t$ en B: $t = {}^3\log(x)$

d A: $y = {}^3\log(t)$ en B: $t = 3^{4x}$

e A: $y = {}^3\log(t)$ en B: $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

© Noordhoff Uitgevers bv

59 Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $16 \cdot 2^{x-6} = \sqrt{2}$

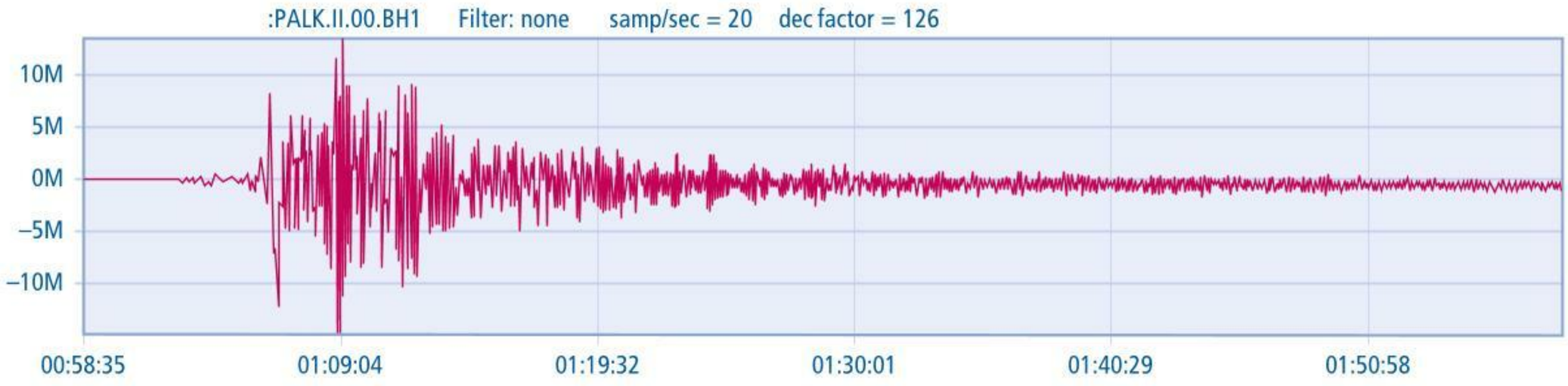
b $15 \cdot 3^{x+2} + 18 = 93$

c $1 - {}^{2}\log(4x + 1) = -4$

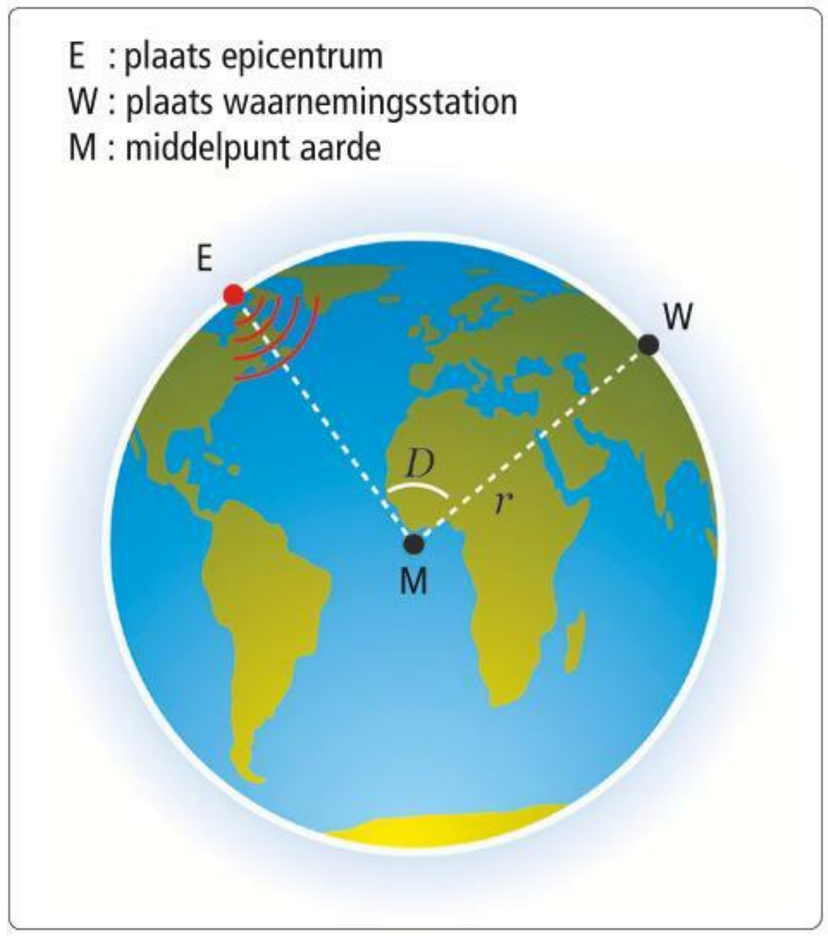
d ${}^{4}\log(2x) + {}^{4}\log(7) = 3$

e ${}^{4}\log(x - 1) - {}^{4}\log(x + 3) = -\frac{1}{2}$

f ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(x^2 - 2x\right) = -3$



60 Aardbevingen worden geregistreerd met een seismograaf, die de aardbevingsgolven weergeeft in een seismogram. Hierboven zie je daarvan een voorbeeld. De kracht van een aardbeving wordt meestal uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter.
Dat getal R bereken je met de formule
$R = \log(U) + 1{,}66 \cdot \log(D) + 3{,}08$. Hierin is U de grootste uitwijking in mm in het seismogram en D de grootte van de hoek tussen MW en ME in graden. Hiernaast zie je hoe die hoek wordt gemeten.



Neem voor de omtrek van de aarde 40 000 km.
De schaal van Richter is zo ontworpen, dat je nul krijgt bij een uitwijking van 0,001 mm in een waarnemingsstation op 100 km van het epicentrum.

a Bereken de hoek D die hoort bij een afstand van 100 km langs het aardoppervlak. Controleer daarna met een berekening, dat een uitwijking van 0,001 mm ongeveer $R = 0$ oplevert.

b Hoe verandert R als U tienmaal zo groot wordt?

In 2011 vond er een aardbeving plaats met een kracht van 9,0 op de schaal van Richter. Het epicentrum van deze aardbeving lag in Japan.

c Bereken de uitwijking in Nederland. De hoek tussen MW en ME is in dit geval ongeveer 84°.

De aardbeving in Japan is ook op veel andere plaatsen gevoeld. Hoewel U en D van plaats tot plaats verschilden, gaf de formule voor R steeds 9,0 als resultaat. Voor deze aardbeving gold dus $9{,}0 = \log(U) + 1{,}66 \cdot \log(D) + 3{,}08$.

d Toon aan dat dit verband ook in de vorm $D = p \cdot U^q$ geschreven kan worden en bereken p en q in twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Samenvatting

Logaritmen

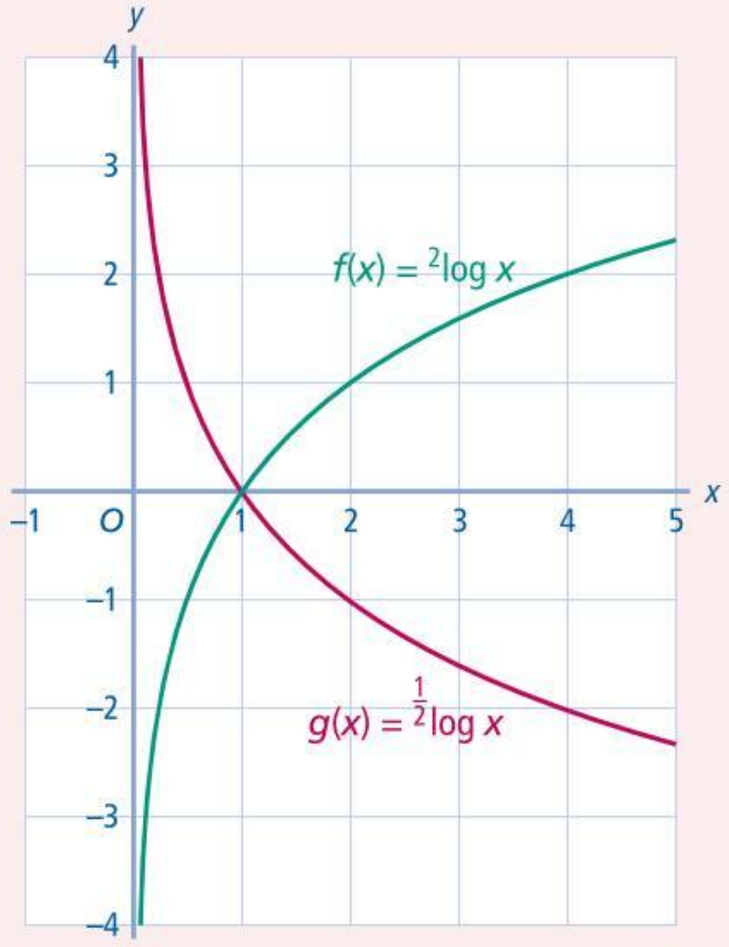
Met een logaritme kun je de exacte oplossing van een exponentiële vergelijking noteren. Zo is ${}^{4}\log(5)$ de exacte oplossing van $4^x = 5$.
De oplossing van $3^x = 13$ is een logaritme die je schrijft als ${}^{3}\log(13)$, dit is de logaritme van 13 voor het grondtal 3. Als geen grondtal wordt vermeld, is het grondtal 10. Dit is ook het grondtal bij de log-toets op je rekenmachine.

Logaritmische functies

Functies van de vorm $f(x) = {}^{g}\log(x)$ noem je logaritmische functies. Je kunt elke logaritmische functie

$f(x) = {}^{g}\log(x)$ schrijven als $f(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(g)}$

De functie f heeft als domein het interval $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
Het grondtal g is net als bij exponentiële functies altijd positief, maar niet gelijk aan 1.
De grafiek van $f(x) = {}^{g}\log(x)$ is het spiegelbeeld van de grafiek van $k(x) = g^x$ in de lijn $y = x$.
Voor $0 < g < 1$ is de grafiek dalend en voor $g > 1$ stijgend.
De verticale asymptoot van de grafiek van f is de y-as.
Het snijpunt met de x-as is $(1, 0)$ want ${}^{g}\log(1) = 0$.



Rekenregels voor logaritmen

Voor het rekenen met logaritmen gelden de volgende rekenregels.

${}^{g}\log(a) = \dfrac{{}^{b}\log(a)}{{}^{b}\log(g)}$ met $g > 0, g \neq 1, a > 0$ en $b > 0$

${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$ met $g > 0, g \neq 1, a > 0$ en $b > 0$

${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$ met $g > 0, g \neq 1, a > 0$ en $b > 0$

$p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^p)$ met $g > 0, g \neq 1$ en $a > 0$

$g^{{}^{g}\log(a)} = a$ met $g > 0, g \neq 1$ en $a > 0$

Verdubbelingstijd en halveringstijd

De verdubbelingstijd bij een exponentieel groeiproces is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen.
De halveringstijd is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(t) = 20 \cdot (1{,}06)^t$.
Voor welke waarde van t is $f(t) = 40$?

Oplossing

t is de verdubbelingstijd bij een groeiproces met groeifactor 1,06, dus $t = {}^{1{,}06}\log(2) \approx 11{,}896$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt formules met logaritmen en machten herleiden

Door gebruik te maken van de rekenregels voor logaritmen en machten kun je een formule met logaritmen herleiden tot een formule met machten. Ook kun je een formule met machten omzetten in een formule met logaritmen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $P = 7 + {}^3\log(5t)$.
Druk t uit in P.

Oplossing

$7 + {}^3\log(5t) = P$

${}^3\log(5t) = P - 7$ (links en rechts – 7)

$5t = 3^{P-7}$ (${}^g\log(a) = x$ geeft $a = g^x$)

$t = \frac{1}{5} \cdot 3^{P-7}$ (links en rechts : 5)

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $Q = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^t$.
Druk t uit in Q.

Oplossing

$4 - \left(\frac{1}{2}\right)^t = Q$

$-\left(\frac{1}{2}\right)^t = Q - 4$ (links en rechts – 4)

$\left(\frac{1}{2}\right)^t = 4 - Q$ (links en rechts × –1)

$t = {}^{\frac{1}{2}}\log(4 - Q)$ ($g^x = a$ geeft $x = {}^g\log(a)$)

Je kunt exponentiële en logaritmische vergelijkingen en ongelijkheden exact oplossen

Exponentiële en logaritmische vergelijkingen kun je soms exact oplossen door gebruik te maken van de rekenregels voor machten en logaritmen.

Voorbeeld 1

Los exact op: $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-3} = 10$.

Oplossing

$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-3} = 10$ geeft $5x - 3 = {}^{\frac{1}{2}}\log(10)$

$5x = 3 + {}^{\frac{1}{2}}\log(10)$ dus de oplossing is

$x = \dfrac{3 + {}^{\frac{1}{2}}\log(10)}{5}$ ofwel

$x = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(10)$

Voorbeeld 2

Los exact op:
${}^7\log(4 - 3x) = 2$.

Oplossing

${}^7\log(4 - 3x) = 2$

$4 - 3x = 7^2 = 49$

$-3x = 45$

$x = -15$

Voorbeeld 3

Los exact op:
$2 \cdot {}^3\log(x) = 1 + {}^3\log(x + 6)$.

Oplossing

$2 \cdot {}^3\log(x) = {}^3\log(3) + {}^3\log(x + 6)$

${}^3\log(x^2) = {}^3\log(3x + 18)$

$x^2 = 3x + 18$

$x^2 - 3x - 18 = 0$

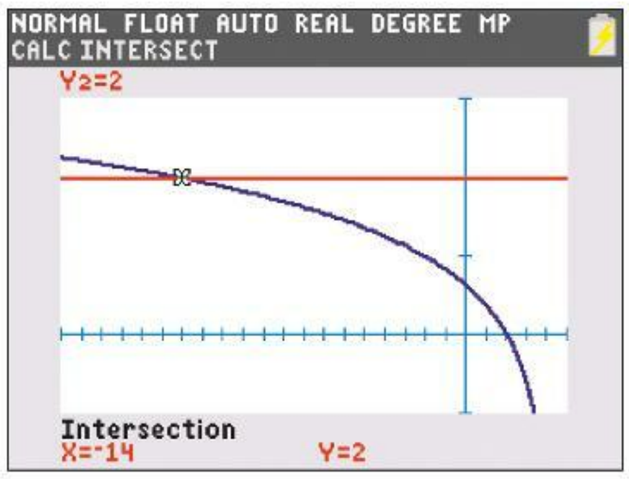
$(x - 6)(x + 3) = 0$

$x = 6$ of $x = -3$

De oplossing $x = -3$ voldoet niet.

Voorbeeld 4

Los exact op: ${}^3\log\left(2 - \frac{1}{2}x\right) \leq 2$.



Oplossing

${}^3\log\left(2 - \frac{1}{2}x\right) = 2$

$2 - \frac{1}{2}x = 3^2 = 9$

$-\frac{1}{2}x = 7$ dus $x = -14$

De verticale asymptoot is $x = 4$.

Het domein van $f(x) = {}^3\log\left(2 - \frac{1}{2}x\right)$ is $\langle \leftarrow, 4\rangle$.

Uit een plot van de grafieken volgt dat de oplossing van de ongelijkheid ${}^3\log\left(2 - \frac{1}{2}x\right) \leq 2$ gelijk is aan $[-14, 4\rangle$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Test jezelf

T-1a Geef de exacte oplossing van de vergelijking $1{,}7^t = 8{,}3$.

b Welke van de volgende logaritmen zijn gelijk aan een negatief geheel getal?

$^{2}\log(4)$, $^{\frac{1}{2}}\log(2)$, $^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{3}\right)$, $^{2}\log(1)$, $^{2}\log\left(\frac{1}{8}\right)$, $^{2}\log\left(\frac{1}{4}\right)$

c Bereken de volgende logaritmen zonder rekenmachine.

$^{3}\log\left(\sqrt{3}\right)$ $^{\frac{1}{5}}\log(125)$

$^{2}\log\left(\frac{1}{8}\right)$ $^{\frac{1}{3}}\log(1)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-1.

T-2 Los de vergelijkingen algebraïsch op. Geef een exacte oplossing en ook een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $7^t = 4$ **c** $3^{4k} = 5$

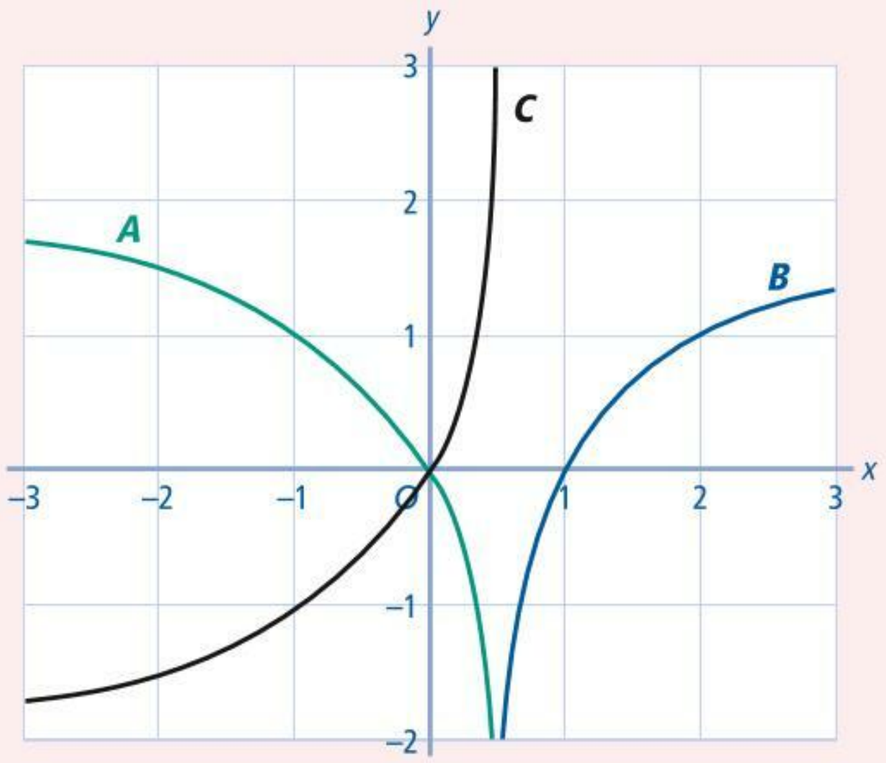
b $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 17$ **d** $\left(\frac{1}{5}\right)^p = 3\sqrt{2}$

e Bereken $^{\sqrt{125}}\log\left(\frac{1}{5}\right)$ door op grondtal 5 over te gaan.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-2.

T-3 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{3}\log(2x-1)$, $g(x) = {}^{3}\log(1-2x)$ en $h(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(1-2x)$.

De grafieken zijn hiernaast getekend.



a Waarom hebben alle drie grafieken dezelfde verticale asymptoot?

b Volgens de tekening hebben twee van de functies hetzelfde domein. Welke twee functies zijn dat?

c Geef aan welke grafiek bij welke functie hoort.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-3.

T-4 Schrijf als één logaritme.

a $^{24}\log(14) + {}^{24}\log(41)$

b $\log(2) - \log(12) + \log(8)$

c $^{5}\log(6) - \left({}^{5}\log\left(\frac{1}{12}\right) - {}^{5}\log(2)\right)$

d $^{2}\log(b) - {}^{2}\log(3)$ met $b > 0$

e $^{\frac{1}{2}}\log(p) + {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4p}\right)$ met $p > 0$

f $\frac{1}{2} \cdot {}^{5}\log\left(x^7\right) - 3 \cdot {}^{5}\log\left(\sqrt{x}\right)$ met $x > 0$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-4.

© Noordhoff Uitgevers bv

T-5 Druk t uit in R.

a $R = 4 - \frac{1}{2} \cdot 3^t$

b $R = 8 \cdot 2^{6-2t} + 24$

c $R = 2 - {}^3\log(2t)$

d $R = \frac{1}{4} \cdot {}^2\log(3t - 1)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-5.

T-6 Los algebraïsch op. Geef eerst de exacte oplossing en daarna zo nodig een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $0{,}36^{x-2} = 4{,}23$

b $3 - \log(x + 2) = 2\frac{1}{3}$

c ${}^2\log(x - 6) + {}^2\log(x) = 4$

d $2 \cdot {}^3\log(x) - {}^3\log(3x + 4) = 0$

e ${}^2\log(3x - 2) < 7$

f ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(8 - x^2\right) > -1$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-6.

T-7 Bij een exponentieel groeiproces hoort de formule $N = 1350 \cdot 1{,}08^t$ met t in jaren.

a Bereken bij dit groeiproces de verdubbelingstijd in jaren. Rond af op hele jaren.

b Op een bepaald moment is de hoeveelheid gelijk aan 15 000. Bereken hoeveel jaar het duurt totdat die hoeveelheid is toegenomen tot 60 000.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-6.

T-8 Gegeven zijn de functies $f(x) = -1 + {}^2\log(5x - 2)$ en $g(x) = {}^2\log(x^2)$.

a Plot en schets de grafieken van f en g.

b Geef een vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van f en van de grafiek van g.

c Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

d Geef de oplossing van de ongelijkheid $f(x) \geq g(x)$.

T-9 Gegeven is de functie $f(x) = {}^3\log\left(\frac{1}{3}x + 4\right)$.

a Bereken het domein van deze functie.

b Geef een vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van f.

c Het functievoorschrift van f kan worden geschreven als $f(x) = a + {}^3\log(x + b)$.
Toon dit aan en bereken de waarde van a en van b.

T-10 Op de grafiek van de functie $f(x) = {}^a\log(x + b) + c$ liggen de punten $(-1, 0)$ en $(1, 1)$.
De verticale asymptoot van f is de lijn $x = -3$.
Bereken exact de waarde van a, van b en van c.

© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Basis**

B-1 Geef bij elk van de volgende logaritmen aan tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen de waarde ligt.

$^{2}\log(17)$, $^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{6}\right)$, $^{\frac{1}{4}}\log(0{,}1)$ en $^{100}\log(8 \cdot 10^{9})$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-1.

B-2 Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.
Geef een exacte oplossing en ook een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $5^{t} = 12$

b $\left(\frac{1}{4}\right)^{t} = 15$

c $5^{\frac{1}{2}t} = 6$

d $0{,}3^{2t} = 81$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-2.

B-3 Gegeven is de functie $h(x) = 3 + {}^{7}\log(13 - 3x)$.

a Geef het domein van h.

b Geef de vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van h.

c Bereken het nulpunt van h.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-3.

B-4 Geef het domein van de volgende functies.

a $f(x) = {}^{3}\log(12 - 3x)$

b $g(x) = 3 + {}^{\frac{1}{2}}\log(4x - 28)$

c $h(x) = {}^{5}\log(-5x)$

d $k(x) = \log\left(x^{2} - 100\right)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-3.

B-5 Schrijf als één logaritme.

a $2 \cdot \log(11) - 3 \cdot \log(4)$

b $2 \cdot \left({}^{4}\log(15) - {}^{4}\log(5)\right) + {}^{4}\log(3)$

c $3 \cdot {}^{5}\log(x) + 1$

d $^{\frac{1}{4}}\log(x) + 2$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-4.

B-6 Druk t uit in P.

a $P = 4^{t} - 3$

b $2P - 4 \cdot 3^{2t} = 0$

c $\log(P) - \log(t) = 1$ met $P > 0$ en $t > 0$

d $P = 4 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(2t)$ met $t > 0$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-5.

B-7 Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden exact op.

a $\log(-2x + 3) = -1$

b $5^{-x+1} = 4$

c $^{\frac{1}{3}}\log(x - 3) - {}^{\frac{1}{3}}\log(x + 3) = -1$

d ${}^{2}\log(-2x + 1) > 5$

e ${}^{3}\log(7 - x^{2}) < -1$

f $2 - 3 \cdot \log(x) < 1$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-6.

© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Gemengd**

G-1 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^2\log(4 - 2x)$ en $g(x) = 2 + {}^2\log(x + 4)$.
Los exact op.

a $f(x) = g(x)$

b $f(x) \cdot g(x) = 0$

G-2 Gegeven is de functie $f(x) = {}^3\log(-27 + 12x - x^2)$.

a Bereken algebraïsch het domein van f.

b Bereken exact de maximale waarde die de functie $g(x) = -27 + 12x - x^2$ heeft.

c Bereken exact het maximum van de functie f.

G-3 Tussen de variabelen x en y bestaat het verband $\log(y) = 2 + 4{,}3 \cdot \log(x)$.
Herleid dit verband tot een verband waarin geen logaritmen voorkomen.

G-4 Van een bepaalde hoeveelheid radioactief materiaal is er een verband tussen de intensiteit I van de straling en de tijd t in dagen volgens de formule $\log(I) = -0{,}009t + 1$.
Het verband tussen I en t kan geschreven worden in de vorm $I = b \cdot g^t$.

a Toon dat aan en bereken de waarde van b en van g.

b Bereken na hoeveel dagen de intensiteit is gehalveerd.

G-5 Toon algebraïsch met substitutie aan dat $x = {}^2\log(18)$ een oplossing is van de vergelijking $2^x \cdot (x - 2 \cdot {}^2\log(3)) = 18$.

G-6a Laat met behulp van rekenregels zien dat ${}^6\log(5) = \dfrac{1}{{}^5\log(6)}$

b Toon met behulp van de rekenregels aan dat geldt:
${}^a\log(b) = \dfrac{1}{{}^b\log(a)}$ voor $a > 0$ en $b > 0$.

G-7 Voor de geluidssterkte D in decibel (dB) van een toongenerator geldt: $D = 10 \cdot \log\left(\dfrac{4{,}9 \cdot 10^5}{r^2}\right)$
Hierin is r de afstand in meters tot de generator.

a Bereken de geluidssterkte op de afstanden 5 m, 7 m, 10 m en 20 m.

b De formule is te herleiden tot de vorm $D = a + b \cdot \log(r)$, waarbij a en b constanten zijn.
Bereken de waarde van a en van b.

c Bereken algebraïsch op welke afstand de geluidssterkte gelijk is aan 0 dB.

© Noordhoff Uitgevers bv

Uitdagende opdrachten

U-1 Geluid bestaat uit golven. De frequentie van de golf, dat is het aantal trillingen per seconde, bepaalt de toonhoogte van het geluid.
Hoe hoger de frequentie, des te hoger de toon.
Twee geluidsgolven met verschillende frequenties f_1 en f_2 Hz (hertz) hebben een verschil in toon, de toonafstand. Deze toonafstand wordt uitgedrukt in cent.
Het verband tussen de frequenties van de twee geluidsgolven en de toonafstand T wordt gegeven door de formule $T = 1200 \cdot {}^2\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$

a De toonafstand tussen twee tonen is één octaaf als de frequenties van de tonen zich verhouden als 1 : 2.
Hoeveel cent is de toonafstand tussen twee tonen die een octaaf verschillen?

b De toonafstand tussen twee tonen is 386,3137 cent.
De frequentie van één van de twee tonen is 440 Hz.
Bereken de mogelijke frequenties van de andere toon.

c Twee tonen hebben een toonafstand van 701,955 cent.
Bereken de frequentieverhouding $f_1 : f_2$ van de bijbehorende tonen.
Schrijf de frequentieverhouding als een verhouding van twee gehele getallen.

U-2a Toon algebraïsch aan dat de functies $f(x) = {}^{\frac{1}{a}}\log(x)$ en $g(x) = -{}^a\log(x)$ voor $a > 0$ en $a \neq 1$ altijd dezelfde uitkomst geven.

b Welk getal is a in de vergelijking ${}^2\log(3) + {}^4\log(3) = {}^8\log(a)$?

U-3 In de tabel zie je van een aantal planeten de afstand A tot de zon in miljoenen kilometers en de omlooptijd t in jaren.

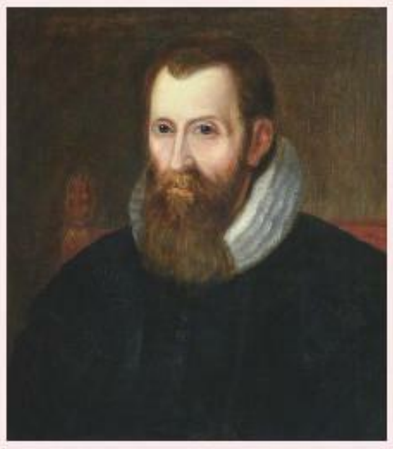
	Mercurius	Aarde	Mars	Jupiter	Saturnus	Neptunus
t	0,24	1,00	1,88	11,86	29,46	164,80
A	57,8	149,6	228	778	1430	4500

De planeet Uranus heeft een afstand tot de zon van $2{,}9 \cdot 10^9$ km.
Bereken de omlooptijd van Uranus in jaren. Rond je antwoord af op twee decimalen.
Hint: Om het verband tussen t en A vast te stellen kun je een grafiek tekenen waarbij je $\log(t)$ uitzet op de horizontale as en $\log(A)$ op de verticale as.

© Noordhoff Uitgevers bv

Logaritmentafel

Vermenigvuldigingen zoals 34×81 kun je ook zonder rekenmachine berekenen, maar bij $11{,}16 \times 10{,}94$ wordt dat heel wat meer werk. De rekenmachine kwam pas halverwege de zeventiger jaren van de vorige eeuw op scholen in gebruik. Hoe deden leerlingen deze berekening dan in de jaren ervoor?



John Napier (1550-1617) beschreef in 1614 in zijn boek *'Mirifici logarithmorum canonis descriptio'* hoe je getallen kunt vermenigvuldigen met behulp van logaritmen.

In de notatie die wij tegenwoordig gebruiken wordt de vermenigvuldiging $11{,}16 \times 10{,}94$ omgezet in
$^{10}\log(11{,}16 \times 10{,}94) = {}^{10}\log(11{,}16) + {}^{10}\log(10{,}94)$.
Maar hoe vind je de uitkomst van bijvoorbeeld $^{10}\log(11{,}16)$ zonder rekenmachine?
Op school gebruikten leerlingen tot in de zeventiger jaren hiervoor een zogenaamde *logaritmentafel*.

1000–1500 log *x*

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0348	0441	0445	0449
111	0543	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488
112	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527
113	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565

Uit de tabel volgt dat $^{10}\log(1{,}116) = 0{,}0477$.
Met behulp hiervan kun je bijvoorbeeld $^{10}\log(1116)$ en $^{10}\log(11{,}16)$ benaderen.
$^{10}\log(1116) = {}^{10}\log(1000 \times 1{,}116) =$
$^{10}\log(1000) + {}^{10}\log(1{,}116) = 3 + 0{,}0477 = 3{,}0477$ en
$^{10}\log(11{,}16) = {}^{10}\log(10 \times 1{,}116) = 1{,}0477$

Opdracht
Gebruik de tabel om na te gaan dat
$^{10}\log(11{,}16) + {}^{10}\log(10{,}94) = 2{,}0867$

Om $11{,}16 \times 10{,}94$ zonder rekenmachine uit te rekenen moet je weten van welke getal 2,0867 de logaritme is.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
120	0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824
121	0928	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860
122	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896
123	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931
124	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966
125	0969	0973	0976	098	0983	0986	0990	0993	0997	1000
126	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035
127	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069
128	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103
129	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136
130	1139	1143	1146	1149	1153	1156	1159	1163	1166	1169
131	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202

Volgens de tabel is $0{,}0867 = {}^{10}\log(1{,}221)$
$2{,}0867 = {}^{10}\log(100) + {}^{10}\log(1{,}221) = {}^{10}\log(112{,}1)$
Hieruit volgt dat $11{,}16 \times 10{,}94 \approx 122{,}1$

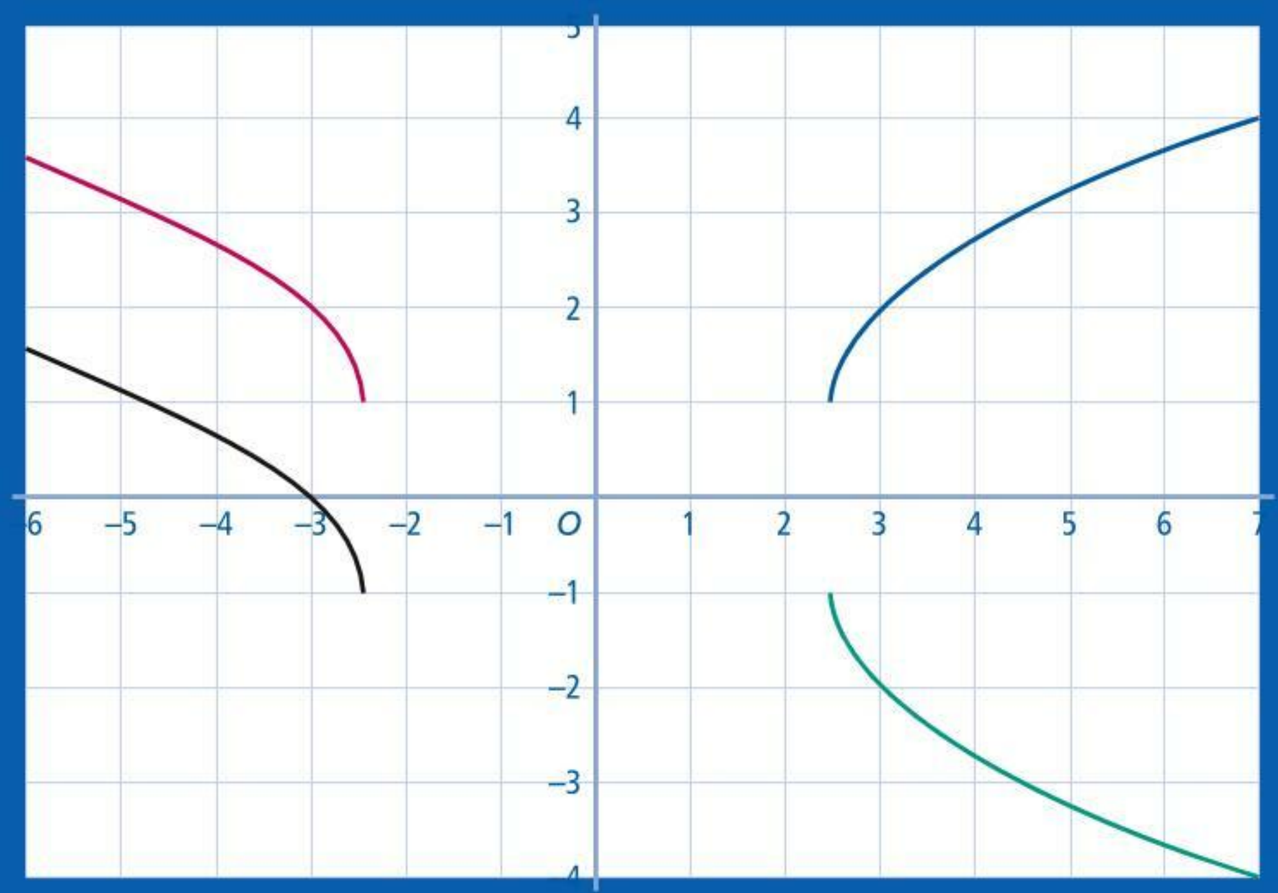
Opdracht
Benader met behulp van de tabellen.

a $10{,}98 \times 11{,}21$

b $\dfrac{11{,}21}{10{,}98}$

c $10{,}2^{1{,}1}$

© Noordhoff Uitgevers bv



Spiegelen en schuiven

Hierboven staan de grafieken van de functies $f(x) = 1 + \sqrt{2x - 5}$,

$g(x) = 1 + \sqrt{-2x - 5}$, $h(x) = -1 + \sqrt{-2x - 5}$ *en* $k(x) = -1 - \sqrt{2x - 5}$.

Welke grafiek hoort bij welke functie?
Hoe zijn de grafieken van g, h en k ontstaan uit de grafiek van f?

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 2
Functies bewerken

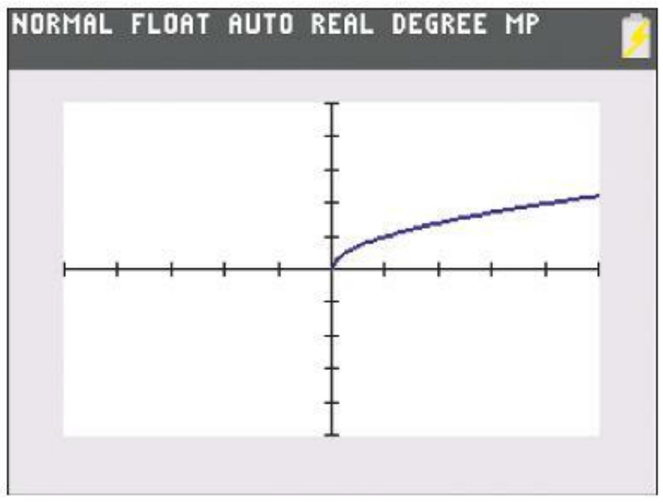
In dit hoofdstuk

	Voorkennis	38
2-1	Transformaties	40
2-2	Absolute waarde	42
2-3	Inverse functies	44
2-4	Gelijkwaardige formules	46
2-5	Parameters	48
2-6	Gemengde opdrachten	50
	Samenvatting	52
	Test jezelf	54
	Extra oefening - Basis	56
	Extra oefening - Gemengd	57
	Uitdagende opdrachten	58
	Gevoelstemperatuur	59

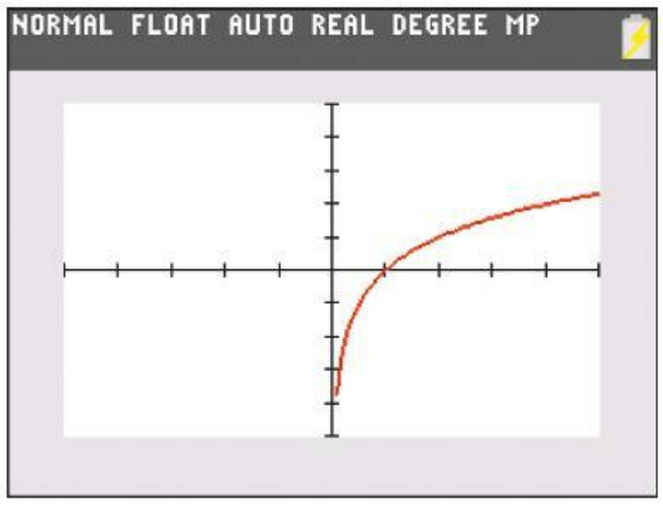
© Noordhoff Uitgevers bv

Voorkennis

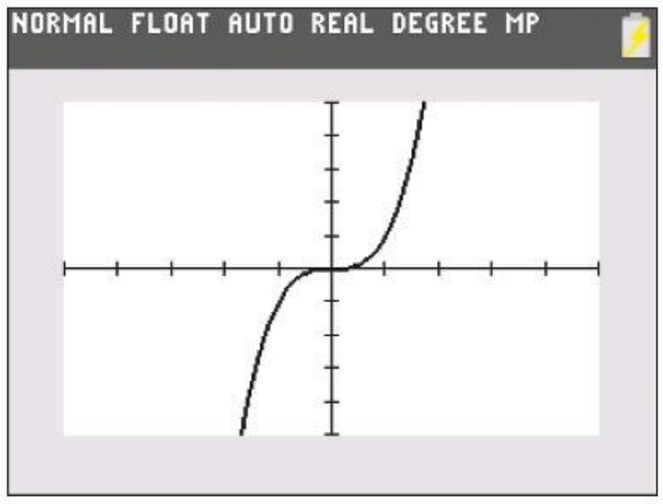
A



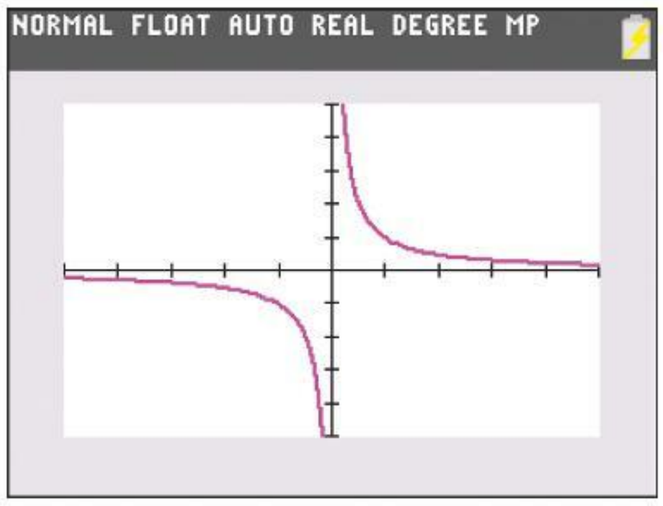
C



B



D



V-1 Hierboven zijn enkele grafieken geplot.
In alle gevallen is de vensterinstelling op beide assen van -5 tot 5.
Gegeven zijn de functies $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \cos(x)$,
$k(x) = {}^2\log(x)$, $m(x) = \frac{1}{x}$, $n(x) = \sin(x)$, $p(x) = x^2$,
$q(x) = x^3$ en $r(x) = 1$.
Geef voor elk van de plots aan welke van de gegeven functies hierbij hoort.

Theorie

De functies hieronder heten **standaardfuncties**.

$f(x) = c$	$f(x) = x$
$f(x) = x^2$	$f(x) = x^n$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$
$f(x) = g^x$	$f(x) = {}^g\log(x)$

V-2 Gegeven zijn de functies $f(x) = g^x$ en $h(x) = {}^g\log(x)$.

a Neem $g = 2$ en teken de grafieken van f en h in één assenstelsel.

b Neem nu $g = \frac{1}{3}$ en teken opnieuw de grafieken van f en h.

c Voor welke waarden van g zijn de grafieken van f en h stijgend?
En voor welke waarden van g zijn de grafieken dalend?

d Welk verband is er tussen de grafieken van f en h?

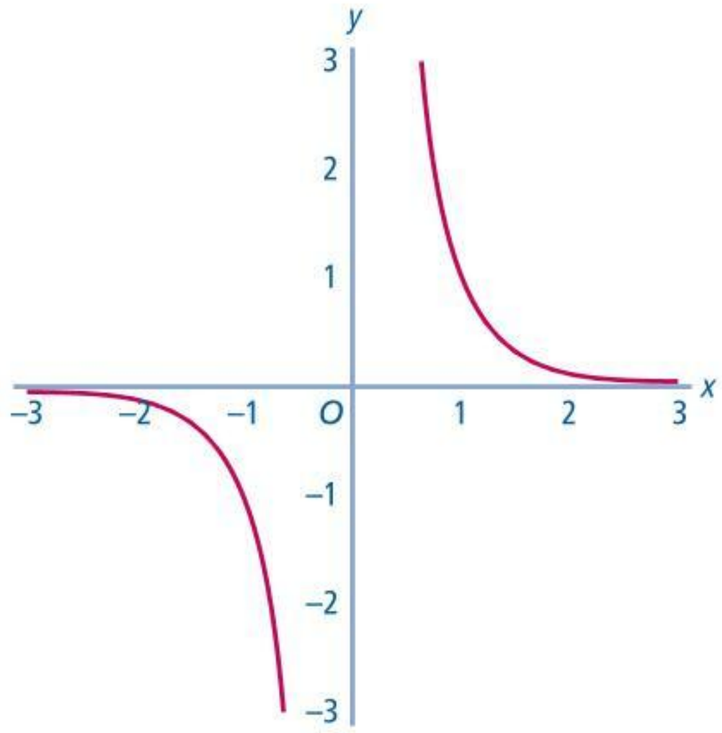
e Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f?
En welke lijn is de asymptoot van de grafiek van h?

© Noordhoff Uitgevers bv

V-3 Voor elke gehele waarde van n is gegeven de machtsfunctie $f_n(x) = x^n$.

a Teken de grafiek van f_n voor $n = 5$ en voor $n = -2$ en geef van beide functies het domein en het bereik.

b Hiernaast staat de grafiek van f_n voor een andere waarde van n.
De grafiek gaat door het punt $\left(2, \frac{1}{8}\right)$.
Welke waarde van n hoort bij deze grafiek?



c Er is een punt dat bij elke waarde van n op de grafiek van f_n ligt. Welke coördinaten heeft dat punt?

d Bij welke positieve waarden van n ligt de grafiek van f_n nergens onder de x-as?

e Zijn er waarden van n waarvoor de grafiek van f_n geheel boven de x-as ligt? Zo ja, welke waarden zijn dat?

V-4 Voor elke waarde van a is gegeven de functie $f_a(x) = ax^2 + 6x - 3$.

a Voor welke waarden van a is de grafiek van f_a een dalparabool?

b Voor welke waarde van a is f een lineaire functie?

c De grafiek van f_a gaat door het punt $(-2, 8)$.
Bereken de waarde van a.

V-5 Voor elke waarde van a is gegeven de functie $g_a(x) = \dfrac{12}{ax - 6}$

a De grafiek van g_a gaat door het punt $(8, 2)$.
Bereken de bijbehorende waarde van a.

b De grafiek van g_a heeft een verticale asymptoot $x = 1\frac{1}{2}$.
Bereken de bijbehorende waarde van a.

V-6 Voor elke waarde van p is gegeven de functie $h_p(x) = x^3 + px + 8$.

a De grafiek van h_p gaat door het punt $(4, 20)$.
Bereken de bijbehorende waarde van p.

b De helling van de grafiek van h_p in het punt met $x = -2$ is -3.
Bereken de bijbehorende waarde van p.

V-7 Gegeven zijn de functie $f(x) = x^2 - 6x$ en voor elke waarde van b de lijn l met vergelijking $y = 4x + b$.
Lijn l raakt de grafiek van f.
Bereken de bijbehorende waarde van b.

© Noordhoff Uitgevers bv

2-1

Transformaties

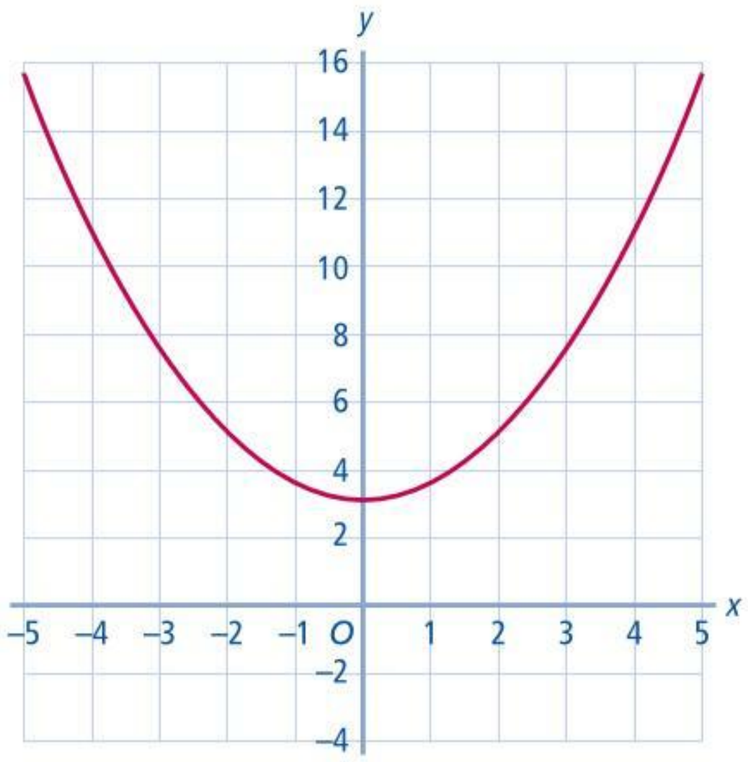
1 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

a De grafiek van f wordt 5 omlaag geschoven. Daardoor ontstaat de grafiek van de functie g.
Geef het functievoorschrift van g.

b De grafiek van f wordt 2 naar rechts geschoven.
Het resultaat is de grafiek van de functie h.
Geef het functievoorschrift van h.

c Door de grafiek van f ten opzichte van de x-as met 4 te vermenigvuldigen ontstaat de grafiek van de functie j.
Geef het functievoorschrift van j.

d Door de grafiek van f ten opzichte van de y-as met 2 te vermenigvuldigen ontstaat de grafiek van de functie k.
Geef het functievoorschrift van k.



2 Gegeven zijn $f(x) = 3\sin(x)$, $g(x) = \sin(3x)$ en $h(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

a Plot en schets de grafieken van f, g en h op het interval $[0, 2\pi]$.

b Hoe ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $k(x) = \sin(x)$?

c Beantwoord opdracht b ook voor de functies g en h.

Theorie

Op de grafiek van een functie f kun je een **transformatie** toepassen, bijvoorbeeld een verschuiving (translatie) of een spiegeling. De grafiek die ontstaat heet de **beeldgrafiek**.
Bij een **verticale translatie** van de grafiek over een afstand d omhoog ontstaat de grafiek van $g(x) = f(x) + d$.
Bij een **horizontale translatie** van de grafiek over een afstand c naar rechts ontstaat de grafiek van $g(x) = f(x - c)$.
Bij een **vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as** met factor a ontstaat de grafiek van $g(x) = a \cdot f(x)$.
Bij een **vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as** met factor b ontstaat de grafiek van $g(x) = f\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2 + \sqrt{x - 3}$.
Geef het functievoorschrift van de grafiek die ontstaat door de grafiek van f

a 7 naar links te schuiven.

b ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{4}$ te vermenigvuldigen.

Oplossing

a Vervang in het functievoorschrift x door $x + 7$. Dus $g(x) = f(x + 7)$
Het resultaat is $g(x) = 2 + \sqrt{x + 7 - 3}$
ofwel $g(x) = 2 + \sqrt{x + 4}$.

b Vervang in het functievoorschrift x door $4x$.
Dus $h(x) = f(4x)$
Het resultaat is $h(x) = 2 + \sqrt{4x - 3}$.

H 3 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^x$ en $g(x) = 4x - 5 + \sqrt{x}$.

a De grafiek van f wordt 4 naar links en 2 omhoog geschoven.
Geef een functievoorschrift van de beeldgrafiek.

b De grafiek van f wordt vermenigvuldigd met -2 ten opzichte van de x-as en daarna 4 omhoog geschoven.
Geef een functievoorschrift van de beeldgrafiek.

c De grafiek van g wordt vermenigvuldigd met 2 ten opzichte van de y-as.
Geef een functievoorschrift van de beeldgrafiek.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 Gegeven is de functie $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

a De grafiek van f wordt vermenigvuldigd met -1 ten opzichte van de x-as. Welk functievoorschrift hoort bij de beeldgrafiek?

b De grafiek van f wordt vermenigvuldigd met -1 ten opzichte van de y-as.
Welk functievoorschrift hoort bij de beeldgrafiek?

c Voer de opdrachten a en b ook uit voor de functie $g(x) = x^4$.

Theorie

Als de grafiek van een functie f wordt **gespiegeld in de x-as**, ontstaat de grafiek van de functie g met $g(x) = -f(x)$.
Als de grafiek van een functie f wordt **gespiegeld in de y-as**, ontstaat de grafiek van de functie g met $g(x) = f(-x)$.

5 De grafiek van de functie $f(x) = 3^x$ wordt gespiegeld in de x-as en daarna verschoven over de afstand 3 omhoog en 5 naar rechts.
Geef een functievoorschrift van de beeldgrafiek.

H 6 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.

a De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f te spiegelen in de x-as en daarna de translatie 3 omlaag toe te passen.
Geef het functievoorschrift van g.

b Krijg je hetzelfde antwoord als de volgorde van de twee transformaties wordt veranderd? Leg je antwoord uit.

7 Gegeven is de functie $f(x) = -1 + (2x - 1)^2$.

a Alya beweert dat je de grafiek van f krijgt als je de grafiek van $g(x) = (2x)^2$ één naar rechts en één omlaag verschuift.
Waarom is dit niet juist?

b Toon aan dat het functievoorschrift van f te schrijven is als $f(x) = -1 + 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van $f(x) = -1 + 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ uit die van $h(x) = x^2$?
Vermeld ook de volgorde waarin de transformaties moeten worden toegepast.

d Bij opdracht c zijn meerdere antwoorden mogelijk.
Geef een andere oplossing voor opdracht c.

H 8 Hieronder staan enkele functievoorschriften.
Noem bij elke functie de bijbehorende standaardfunctie en geef aan door welke transformaties de grafiek van de functie kan ontstaan uit de grafiek van de bijbehorende standaardfunctie. Geef duidelijk aan in welke volgorde deze transformaties moeten worden toegepast.

a $f(x) = 3 \cdot 2^{0,5x}$

b $s(x) = 12 + 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

c $h(x) = 8 + {}^{2}\log(x - 6)$

d $m(x) = (3x - 6)^2$

e $g(x) = 2 - \sqrt{\frac{1}{2}x - 10}$

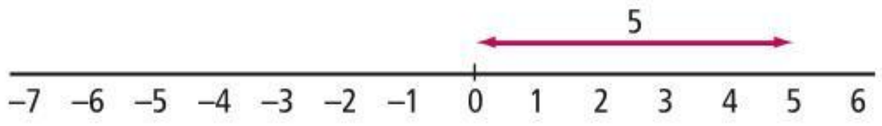
f $k(x) = \dfrac{12}{2x - 7}$

© Noordhoff Uitgevers bv

2-2

Absolute waarde

9 Hiernaast zie je een stukje getallenlijn.



a De afstand van het getal 5 tot het getal 0 op de getallenlijn is 5.
Welk getal ligt ook op een afstand 5 tot het getal 0?

b Noem twee getallen die op een afstand van $\sqrt{3}$ liggen van het getal 0.

c Voor welke getallen a geldt dat de afstand tot 0 gelijk is aan a zelf?

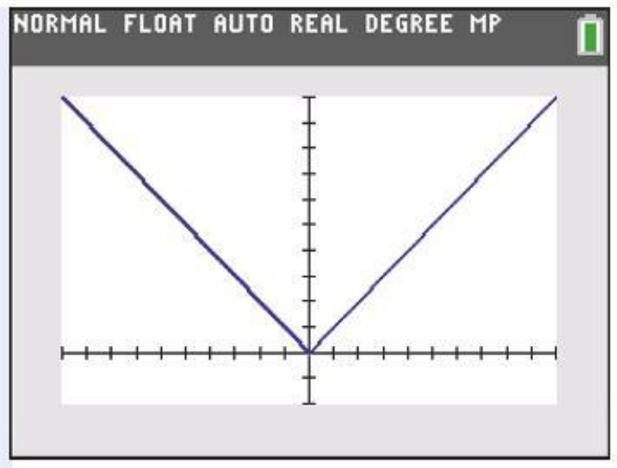
d Voor welke getallen a geldt dat de afstand tot 0 gelijk is aan $-a$?

Theorie

De afstand van een getal x tot 0 noem je de **absolute waarde** van x.
De notatie voor de absolute waarde van x is $|x|$.

Voor de absolute waarde van x geldt: $|x| = \begin{cases} x \text{ als } x \geq 0 \\ -x \text{ als } x < 0 \end{cases}$

De grafiek van de functie $f(x) = |x|$ bestaat uit twee halve lijnen.



Voorbeeld

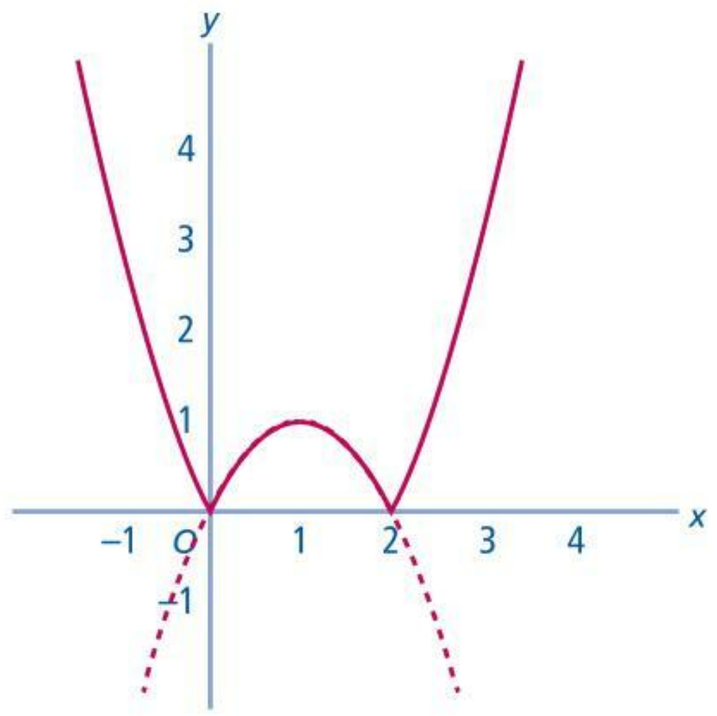
Teken de grafiek van de functie $g(x) = |-x^2 + 2x|$.

Oplossing

De grafiek van $f(x) = -x^2 + 2x$ is een bergparabool.
Los eerst op: $f(x) = 0$, dus $-x^2 + 2x = 0$.

Dit geeft $-x(x - 2) = 0$ dus $x = 0$ of $x = 2$.
$|-x^2 + 2x| = -x^2 + 2x$ als $-x^2 + 2x \geq 0$, dus $0 \leq x \leq 2$.
$|-x^2 + 2x| = x^2 - 2x$ als $-x^2 + 2x < 0$ dus $x < 0$ of $x > 2$.

De grafiek van g ontstaat door de delen van de grafiek van f die onder de x-as liggen te spiegelen in de x-as.



10 Gegeven zijn de functies $f(x) = |x^3 - 12x|$ en $g(x) = x^3 - 12x$.

a Plot en schets de grafiek van g.

b Bereken exact de nulpunten van g.

c Voor welke waarden van x valt de grafiek van f samen met de grafiek van g?

d Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van g.

e Plot en schets de grafiek van f.

f Welke coördinaten hebben de toppen van de grafiek van f?

Hulpboek 1-6 Absolute waarde

11a Plot en schets de grafiek van de functie $h(x) = \sqrt{x^2}$.

b Wat valt je op aan de grafiek van h? Geef een verklaring.

© Noordhoff Uitgevers bv

12 Gegeven is de functie $f(x) = |\sin(x)|$.

a Plot en schets de grafiek van f op het interval $[0, 4\pi]$.

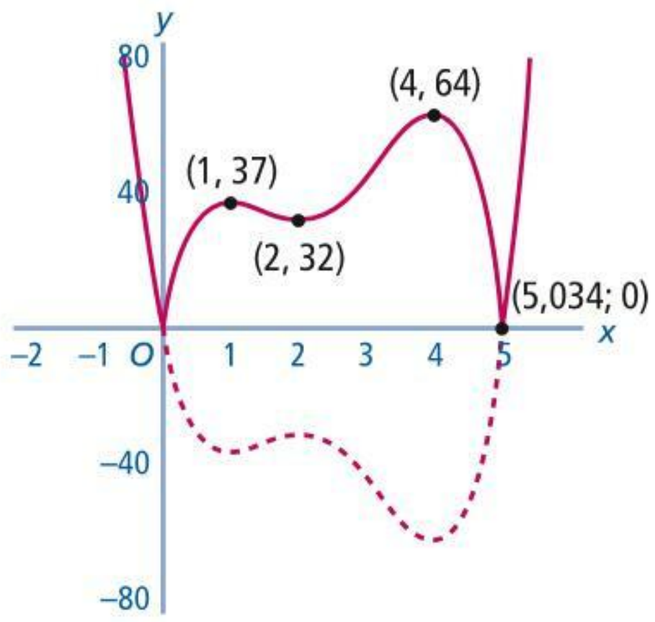
b Hoe groot is de periode van f?

c Geef alle extreme waarden van f op het gegeven interval.

De grafiek van een functie f met functievoorschrift $f(x) = |g(x)|$ ontstaat door de delen van de grafiek van g die onder de x-as liggen te spiegelen in de x-as. Daardoor zal in veel gevallen de grafiek van f een knik vertonen in de punten die op de x-as liggen. Functie f heeft een minimum in elk van de nulpunten van functie g.

Voorbeeld

Hiernaast staat de grafiek van $f(x) = |3x^4 - 28x^3 + 84x^2 - 96x|$.
Geef de nulpunten en de extreme waarden, zo nodig in drie decimalen.



Oplossing

De nulpunten zijn $x = 0$ en $x \approx 5{,}034$.
De extreme waarden zijn:
minimum $f(0) = 0$ en minimum $f(5{,}034) = 0$
maximum $f(1) = 37$ en maximum $f(4) = 64$
minimum $f(2) = 32$

H 13 Hiernaast staat de grafiek van de functie $f(x) = |-x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 - 26|$.

a Bereken exact de extreme waarden van de functie $g(x) = -x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 - 26$.

b Ga na dat $x = -2$ het nulpunt van g is.

c Schrijf het functievoorschrift van f zonder absolute waarde-strepen.

d Geef de extreme waarden van f.

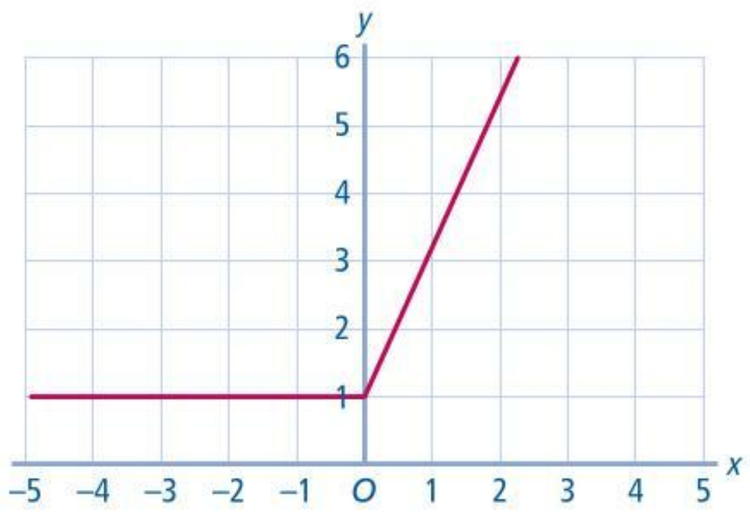
14 Gegeven is de functie $f(x) = |{}^2\log(x)|$.

a Plot en schets de grafiek van f.

b Welke extreme waarde heeft deze functie?

c Los exact op: $f(x) = 5$.

d Los ook exact op: $f(x) > 1\frac{1}{2}$.



15a Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = |x| - 2x$.

b Hiernaast is de grafiek van een functie g getekend.
Onderzoek welk functievoorschrift deze functie kan hebben.
Gebruik in je antwoord absolute waarde-strepen.

© Noordhoff Uitgevers bv

2-3

Inverse functies

16 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^x$ en $g(x) = {}^3\log(x)$.

a Neem de tabellen over en vul deze in.

x	-1	0	1	2
$f(x)$				

x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$g(x)$				

b Welke bijzonderheid zie je in de tabellen?

c Er geldt $f\left(2\frac{1}{2}\right) = 9\sqrt{3}$. Wat volgt hieruit voor de waarde van $g\left(9\sqrt{3}\right)$?

d Hoe liggen de grafieken van f en g ten opzichte van elkaar?

17 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x - 8$ en $g(x) = \frac{1}{2}x + 4$.
Er geldt $f(5) = 2$ en $g(2) = 5$.
Leg met behulp van de functievoorschriften van f en g uit dat geldt:
Als $f(a) = b$ dan is $g(b) = a$ voor elke waarde van a.

Theorie

De functies f en g heten **inverse functies** van elkaar als geldt: uit $f(a) = b$ volgt $g(b) = a$ (en omgekeerd), voor elk getal a uit het domein van f en voor elk getal b uit het domein van g.
Voor de inverse van een functie f gebruik je de notatie f^{inv}.
Verder geldt: Als het punt (a, b) op de grafiek van f ligt, dan ligt het punt (b, a) op de grafiek van f^{inv}. De grafieken van f en f^{inv} zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.
Bij het opstellen van een inverse functie maak je gebruik van **inverse bewerkingen**.

Voorbeelden van inverse bewerkingen

$+ 7$	en	$- 7$
$\times 3$	en	$: 3$
$(...)^2$	en	$\sqrt{...}$
$(...)^3$	en	$\sqrt[3]{...}$
$(...)^a$	en	$(...)^{\frac{1}{a}}$
$g^{\cdots}$	en	${}^g\log(...)$

18 Hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = (x - 2)^3$. De grafiek van f^{inv} krijg je door de grafiek van f te spiegelen in de lijn $y = x$.
De coördinaten van elk punt op de grafiek van f voldoen aan de vergelijking $y = (x - 2)^3$.

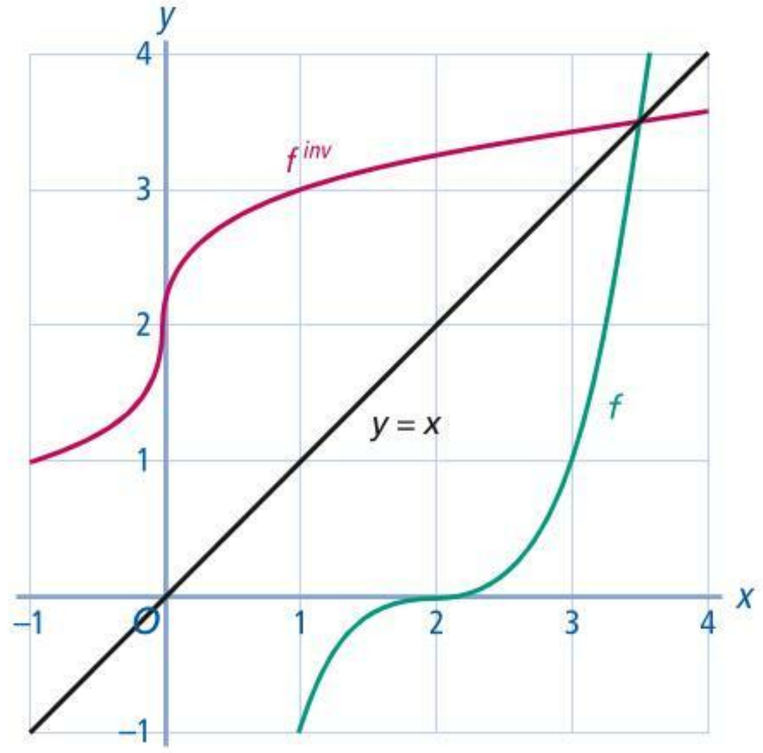
a Het punt $(3, 1)$ ligt op de grafiek van f. Welk punt is het beeldpunt van $(3, 1)$ bij spiegelen in de lijn $y = x$? Laat zien dat de coördinaten van dit beeldpunt voldoen aan de vergelijking $x = (y - 2)^3$.

b Beantwoord opdracht a ook voor het punt $(0, -8)$ op de grafiek van f.

c Leg uit dat de coördinaten van elk punt van de grafiek van f^{inv} voldoen aan de vergelijking $x = (y - 2)^3$.

d Herleid de vergelijking $x = (y - 2)^3$ tot $y = \sqrt[3]{x} + 2$.

e Schrijf het functievoorschrift van f^{inv} op.



© Noordhoff Uitgevers bv

Aanpak

Hoe stel je het functievoorschrift op van de inverse van een gegeven functie *f*?

1. Vervang het functievoorschrift door een vergelijking in y en x.
2. Vervang x door y en y door x.
3. Herleid de verkregen vergelijking naar een vorm waarin y is uitgedrukt in x.
4. Schrijf het resultaat als functievoorschrift.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = -1 + {}^3\log(2x - 5)$.
Geef het functievoorschrift van f^{inv}.

Oplossing

1 f: $y = -1 + {}^3\log(2x - 5)$
2 f^{inv}: $x = -1 + {}^3\log(2y - 5)$
3 ${}^3\log(2y - 5) = x + 1$
$2y - 5 = 3^{x+1}$
$2y = 3^{x+1} + 5$
$y = \frac{1}{2} \cdot 3^{x+1} + 2\frac{1}{2}$
4 $f^{inv}(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{x+1} + 2\frac{1}{2}$

19 Bekijk het voorbeeld hiernaast.

a Bereken $f(7)$ en vul het antwoord in bij $f^{inv}(x)$.
Komt er 7 uit?

b Gegeven is de functie $g(x) = 7 + {}^3\log(5x - 5)$.
Geef het functievoorschrift van g^{inv}.

H 20 Geef van de volgende functies het functievoorschrift van f^{inv}.

a $f(x) = 3x - 5$

b $f(x) = 2 + \sqrt[5]{x}$

c $f(x) = 2^x - 3$

d $f(x) = \dfrac{3}{x + 1}$

e $f(x) = 4 + {}^3\log(x)$

f $f(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$

g $f(x) = {}^2\log(5 + 2x)$

h $f(x) = 5 - \dfrac{10}{5x + 2}$

21 Gegeven is de functie $f(x) = (x + 2)^2$.

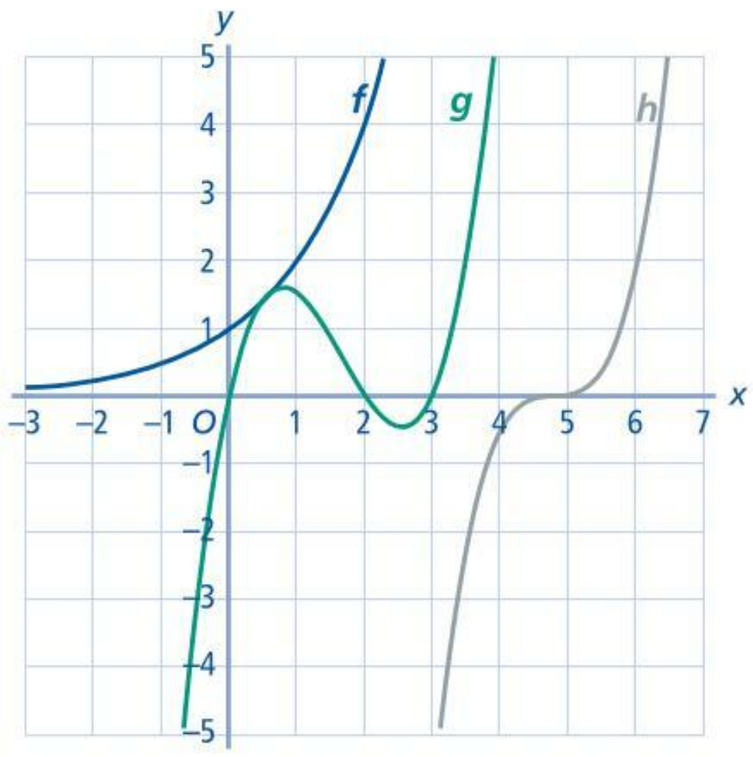
a Teken de grafiek van f en teken ook het spiegelbeeld van de grafiek bij spiegelen in de lijn $y = x$.

b Waarom kan de gespiegelde grafiek niet de grafiek van een functie zijn?

c De functie g is gedefinieerd als $g(x) = (x + 2)^2$ met $x \geq -2$.
Teken in een nieuwe figuur de grafiek van g en het spiegelbeeld van deze grafiek in de lijn $y = x$.

d Het spiegelbeeld dat je in opdracht c hebt getekend, is wél de grafiek van een inverse functie.
Stel het bijbehorende functievoorschrift op.

22 Hiernaast zie je de grafieken van de functies f, g en h.
Bij twee van de functies bestaat een inverse functie, bij één niet.
Bij welke functie bestaat er geen inverse functie?
Leg uit waarom dat zo is.



23 Het is mogelijk dat de inverse functie gelijk is aan de functie zelf.

a Wat weet je in dit geval van de grafiek van die functie?

b Geef minstens twee voorbeelden van lineaire functies die gelijk zijn aan hun eigen inverse functie.

© Noordhoff Uitgevers bv

2-4

Gelijkwaardige formules

24 Gegeven zijn de formules $y = 2 \cdot 3^x + 6$ en $x = {}^3\log\left(\frac{1}{2}y - 3\right)$.

a Controleer door invullen dat $x = 1$ en $y = 12$ aan beide formules voldoen.

b $x = 0$ en $y = 8$ voldoen aan de eerste formule.
Voldoen deze getallen ook aan de tweede formule?

c Laat zien dat de tweede formule te herleiden is tot de eerste.

Theorie

Als elke combinatie van waarden die aan de ene formule voldoet, ook aan een andere formule voldoet, dan heten die formules **gelijkwaardig** of **equivalent**.
Bij het herleiden van een formule ontstaat een gelijkwaardige formule. Bij herleiden gebruik je inverse bewerkingen. Je kunt ook een formule herleiden door links en rechts dezelfde bewerking toe te passen.

Voorbeeld

Herleid de formule $y = \frac{24}{2x - 5}$ tot een vorm waarbij x is uitgedrukt in y.

Oplossing

Uit $y = \frac{24}{2x - 5}$ volgt

$y(2x - 5) = 24$ links en rechts $\times (2x - 5)$

dus $2x - 5 = \frac{24}{y}$ links en rechts : y

$2x = 5 + \frac{24}{y}$ links en rechts + 5

dus $x = 2\frac{1}{2} + \frac{12}{y}$ links en rechts : 2

25 Leg uit dat de formule $2xy = 5y + 24$ gelijkwaardig is met de formules in het voorbeeld.

H 26 Herleid de volgende formules tot een vorm waarbij p is uitgedrukt in q.

a $2p + 3q = 12$

b $q = \frac{24p}{2p + 1}$

c $q + 3^p = 4$

d $p^3 + 2q = 5$

e $q = \frac{-7}{6 + \sqrt[4]{p}}$

f $q = \frac{5}{\sqrt{p + 3}}$

27 Voor het vermogen P van een apparaat geldt $P = I^2 \cdot R$.
Hierbij is I de stroomsterkte in ampère, R de weerstand in ohm en is P het vermogen in watt.

a Neem $I = 0{,}5$ en druk R uit in P.

b Neem $R = 20$ en druk I uit in P.
Je krijgt twee mogelijkheden. Zijn beide zinvol?

c Schrijf de formule in een vorm waarbij I is uitgedrukt in P en R.

28 De formule voor kinetische energie is $E = \frac{1}{2}mv^2$.
E is de energie in joule, m is de massa in kg en v is de snelheid in m/s.

a Druk m uit in de andere variabelen.

b Druk v uit in E en m.

c Neem $E = 50$ en druk v uit in m.

© Noordhoff Uitgevers bv

29 Gegeven is de formule $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$

a Neem $b = 50$ en druk v uit in f.

b Neem $f = 10$ en laat zien dat de formule te herleiden is tot $b = \frac{10v}{v - 10}$

30 Robert vaart met zijn kano een tocht van 10 km heen en 10 km terug over een rivier. De stroomsnelheid van de rivier is v km per uur en Robert vaart met een gemiddelde snelheid van 4 km per uur ten opzichte van het water. T is de totale tijd die hij over de tocht doet.

a Leg uit dat de volgende formule geldt: $T = \frac{10}{4 - v} + \frac{10}{4 + v}$

b Voor welke waarden van v kan met deze formule de totale vaartijd worden berekend?

c Herleid de formule tot een vorm met één breuk.

d Druk v uit in T voor $v \geq 0$.

31 Als een vloeistof een gesloten ruimte niet geheel opvult, dan verdampt een deel van de vloeistof. De damp oefent druk uit op de wanden van de gesloten ruimte: de dampdruk. De grootte van de dampdruk hangt af van de soort vloeistof en van de temperatuur in de gesloten ruimte. Voor de zeer vluchtige vloeistof aceton geldt voor het verband tussen de dampdruk P in bar en de temperatuur T in kelvin de formule:
$\log(P) = 4{,}1416 - \frac{1144}{T - 53{,}15}$ met $T > 53{,}15$.

a Het kookpunt van een vloeistof is de temperatuur waarbij de dampdruk precies 1 bar bedraagt.
Bereken op algebraïsche wijze het kookpunt van aceton.
Rond je antwoord af op een geheel aantal kelvin.

b Beredeneer aan de hand van de formule dat de dampdruk toeneemt als de temperatuur stijgt.

De vorm van de formule is universeel en staat sinds 1888 bekend als de vergelijking van Antoine. In de tijd dat Antoine de vergelijking opstelde, gebruikte men voor de dampdruk nog de eenheid mmHg (millimeter kwik) in plaats van bar. Voor de temperatuur gebruikte men de eenheid °C (graden Celsius) in plaats van kelvin.
Voor het verband tussen de dampdruk p in mmHg en de dampdruk P in bar geldt: $P = \frac{p}{750}$ en voor het verband tussen de temperatuur t in °C en de temperatuur T in kelvin geldt: $T = t + 273{,}15$.
De eerder genoemde formule voor de dampdruk van aceton kan men herschrijven tot een formule van de vorm: $\log(p) = a - \frac{1144}{t + b}$

c Bereken a en b. Rond de waarde van a af op twee decimalen en rond de waarde van b af op een geheel getal.
(*Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 1*)

© Noordhoff Uitgevers bv

2-5

Parameters

32 Voor elke waarde van p is gegeven de functie $g_p(x) = px + p + 1$.

a Teken de grafieken van g_3, van g_{-1} en van $g_{\frac{1}{2}}$.

b Welk punt ligt op de grafiek van elke functie g_p?
Toon met een berekening aan dat je antwoord juist is.

c Voor welke waarde van p gaat de grafiek van g_p door het punt $(3, 7)$?

d En voor welke waarde van p door $(10, 10)$?

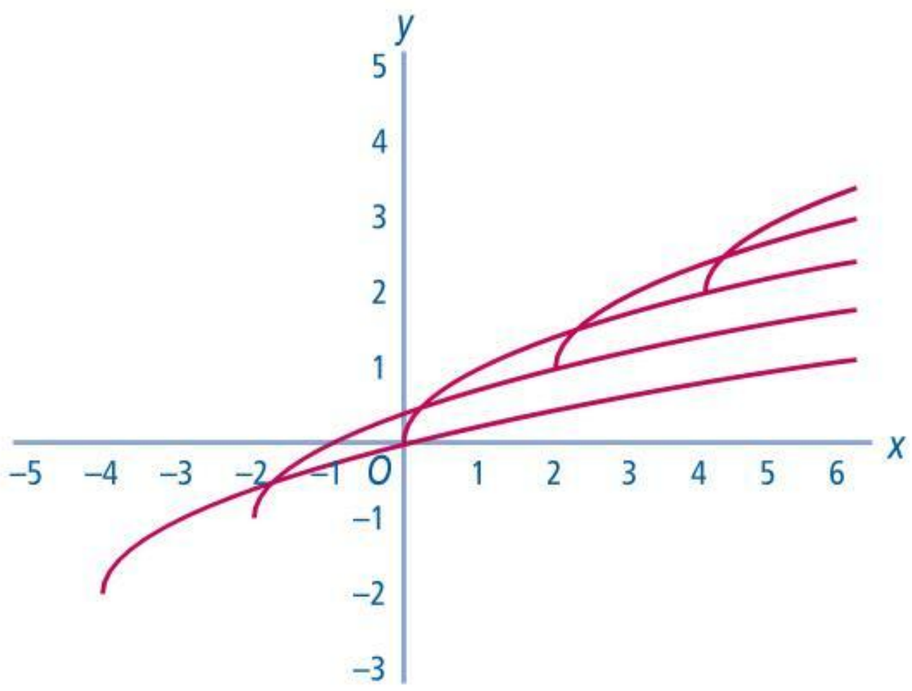
Hulpboek 2-4 Familie van functies

Theorie

Een verzameling van functies kan worden gedefinieerd door een **parameter** te gebruiken. Zo'n verzameling van functies heet een **familie van functies.** De familie van functies met parameter p noteer je als f_p. De bijbehorende grafieken vormen een **bundel van grafieken**. Vaak hebben alle grafieken van die bundel een bepaalde eigenschap, zoals:
- alle grafieken van de bundel gaan door één punt
- alle toppen van de grafieken liggen op een bepaalde lijn of een kromme.

Voorbeeld

De familie van functies f_p is gegeven door $f_p(x) = p + \sqrt{x - 2p}$. De randpunten van de grafieken lijken op een rechte lijn te liggen.
Toon dit aan en geef de vergelijking van die lijn.



Oplossing

De wortel bestaat alleen als $x \geq 2p$,
dus de x-coördinaat van het randpunt is $2p$.
$f_p(2p) = p$ dus het randpunt van f_p is $(2p, p)$.

$\begin{cases} x = 2p \\ y = p \end{cases}$ Elimineren van p geeft $x = 2y$ ofwel $y = \frac{1}{2}x$.
Alle randpunten op de lijn $y = \frac{1}{2}x$.

H 33 Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = x^2 - px$.

a Druk de nulpunten van f_p uit in p.

b Druk de coördinaten van de top van de grafiek van f_p uit in p.

c Toon aan dat de toppen van alle grafieken van deze familie van functies op de parabool met vergelijking $y = -x^2$ liggen.

34 Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = p + \sqrt{px + 4}$.

a Voor welke waarde van p gaat de grafiek van een functie f_p door het punt $(6, 6)$?

b Voor welke waarde van p is het domein van f_p gelijk aan $\langle \leftarrow, 3]$?

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f_8 uit de grafiek van f_4?

© Noordhoff Uitgevers bv

Functies die een som zijn van machtsfuncties $f(x) = ax^n$ met $n \geq 0$ en geheel, noem je veeltermfuncties. De graad van een veeltermfunctie is de hoogste macht van x. Zo is

- *$f(x) = 5x - 1$ een eerstegraadsfunctie,*
- *$g(x) = -6x^2 + 9x - 3$ een tweedegraadsfunctie,*
- *$h(x) = x^3 - 5x^2$ een derdegraadsfunctie enzovoort.*

H 35 Gegeven is de familie van functies
$f_{a,b}(x) = ax^4 + bx^3 + 5x^2 - 3x + 1$.

a Wat kun je over de waarde van a en van b zeggen in het geval $f_{a,b}$ een derdegraadsfunctie is?

b En wat in het geval $f_{a,b}$ een vierdegraadsfunctie is?

c Voor welke waarde van a en van b is $f_{a,b}$ een tweedegraadsfunctie?

d Door welk punt gaat de grafiek van $f_{a,b}$ voor elke waarde van a en b?

e De grafiek van $f_{a,b}$ gaat door de punten $(1, 2)$ en $(2, 23)$. Bereken exact de waarde van a en van b.

f De lijn l: $y = 3x + 7$ raakt de grafiek van $f_{a,b}$ in het punt met $x = -1$. Bereken exact de waarde van a en van b.

36 Gegeven is de familie van derdegraadsfuncties $f_a(x) = x^3 - ax$. Hiernaast staat de bijbehorende bundel grafieken.

a Controleer met een berekening dat de grafiek voor elke waarde van a door $(0, 0)$ gaat.

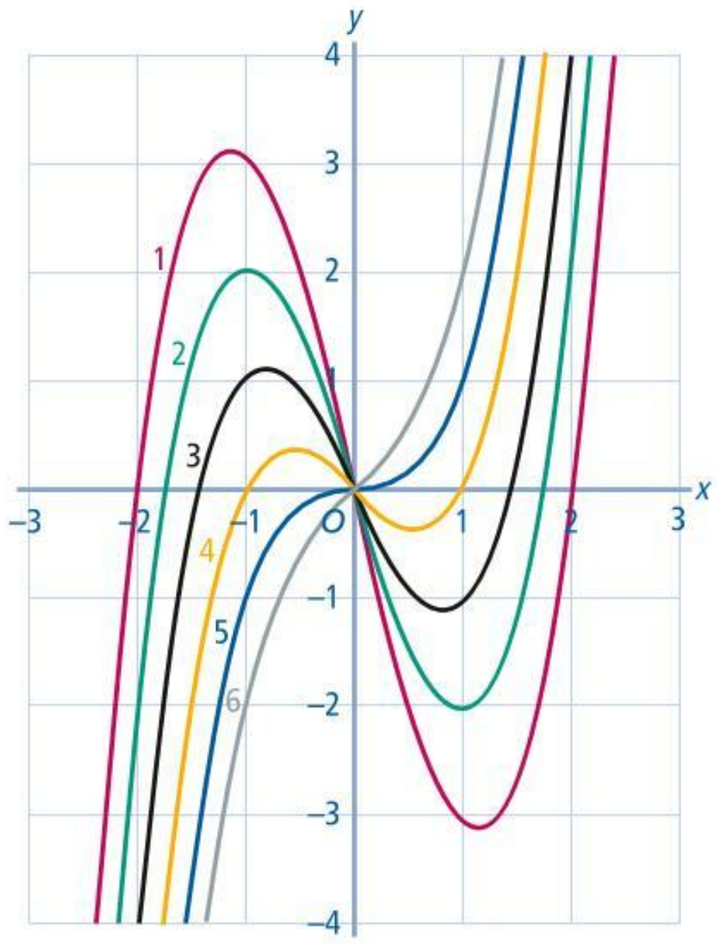
b Geef aan welke grafiek bij $a = 1$ hoort.

c Welke waarde van a hoort bij grafiek 1?

d Neem $a = 2$ en bereken de helling van de grafiek van f_2 in het punt P waarvoor geldt $x = 3$.

e In welk ander punt van de grafiek van f_2 is de helling gelijk aan de helling in punt P?

f Onderzoek met behulp van de afgeleide voor welke waarden van a de helling in $(0, 0)$ positief is.



37 Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = \sqrt{p - x^2}$.

a Schets de grafieken voor $p = 1$, $p = 2$, $p = 4$ en $p = 9$ in één assenstelsel.

b Geef het domein van de functies uit opdracht a.

c Druk het domein van f_p uit in p.

38 Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = {}^2\log(ax + 2)$.

a Voor welke waarde van a gaat de grafiek door het punt $(2, 4)$?

b Bereken a als de lijn $x = \frac{1}{7}$ de verticale asymptoot van de grafiek van f_a is.

c De grafiek van f_a ontstaat na een horizontale of verticale translatie van de grafiek van de functie $g(x) = {}^2\log\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Onderzoek welke waarde a in dit geval heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

2-6

Gemengde opdrachten

39 Gegeven is voor $c > 0$ de familie van functies $f_c(x) = \sqrt{cx - x^4}$. Hiernaast zijn de grafieken getekend voor $c = 5$ en $c = 27$.

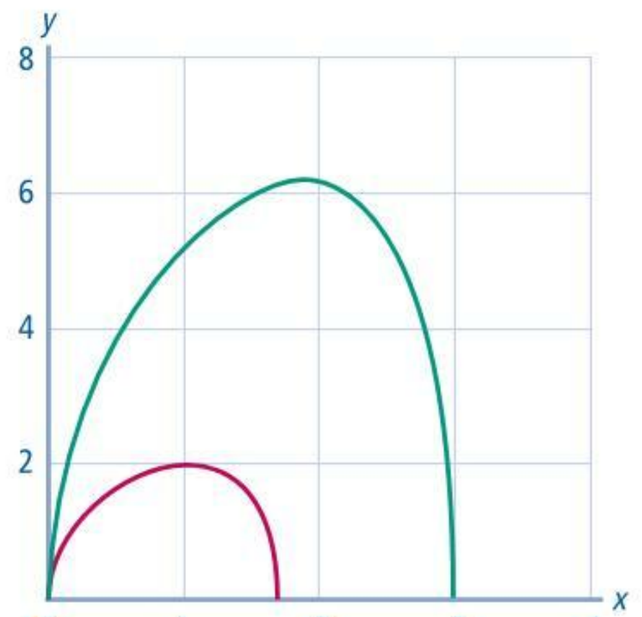
a Bereken exact de nulpunten van f_5.

b Druk het domein van f_c uit in c.

c Bereken exact de waarde van c waarvoor het domein van f_c gelijk is aan $[0, 4]$.

d De grafiek van f_4 snijdt de grafiek van de functie $g(x) = \sqrt{\frac{31}{8}x}$. Bereken exact de x-coördinaten van de snijpunten.

e De grafiek van f_c snijdt de grafiek van $h(x) = \sqrt{x}$ in de oorsprong en in een ander punt.
Druk de x-coördinaat van het tweede snijpunt uit in c.



40 Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = x + \frac{p}{x}$

Hiernaast staan de grafieken voor $p = 4$ en $p = -4$.

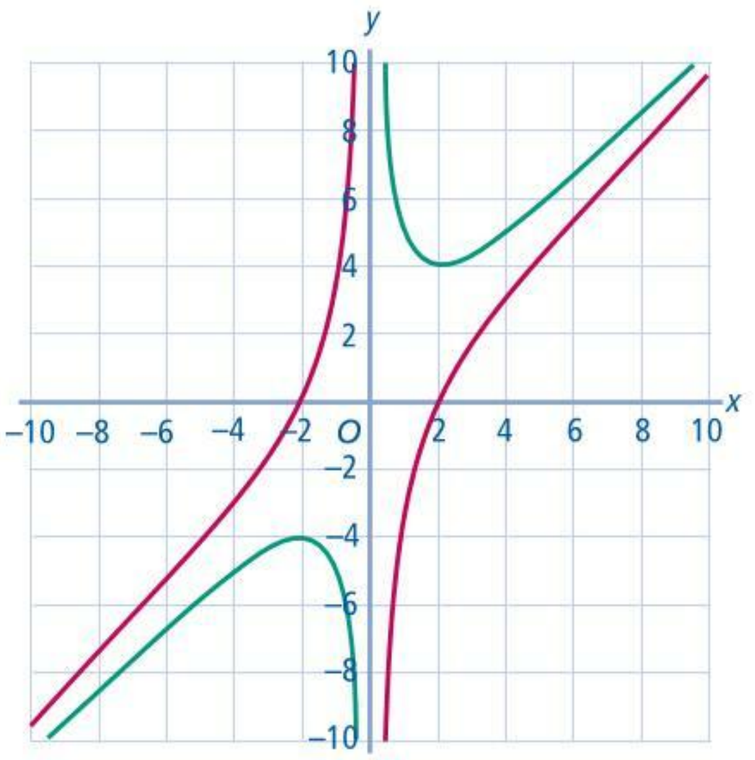
a Onderzoek welke waarde van de parameter p bij elke grafiek hoort.

b Teken in één assenstelsel de grafieken die horen bij $p = 1$ en bij $p = -1$.

c Schrijf het functievoorschrift van f_p als één breuk.

d Leg uit waarom je alleen voor negatieve waarden van p grafieken krijgt die twee snijpunten met de x-as hebben.

e Toon met een berekening aan dat voor positieve waarden van p de uiterste waarden gelijk zijn aan $-2\sqrt{p}$ en $2\sqrt{p}$.



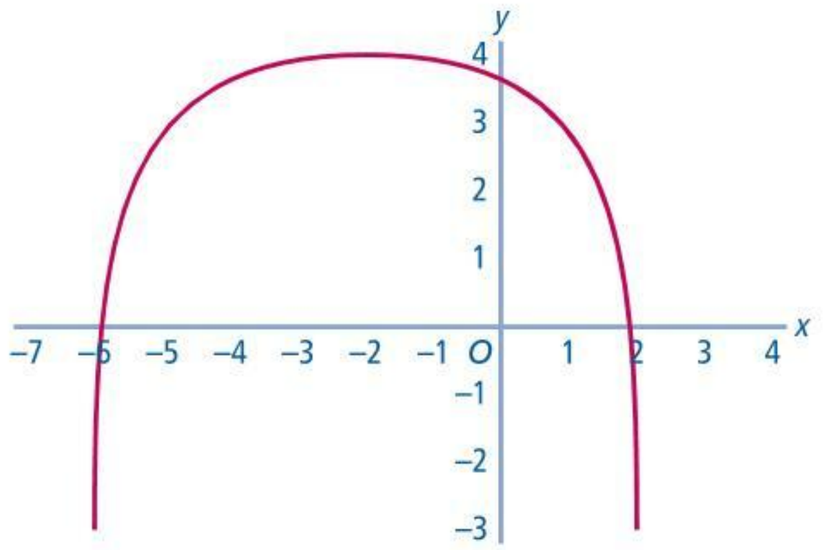
41 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(12 - 4x - x^2)$.

a Bereken exact het domein van f.

b Bereken exact het maximum van de functie $g(x) = 12 - 4x - x^2$.

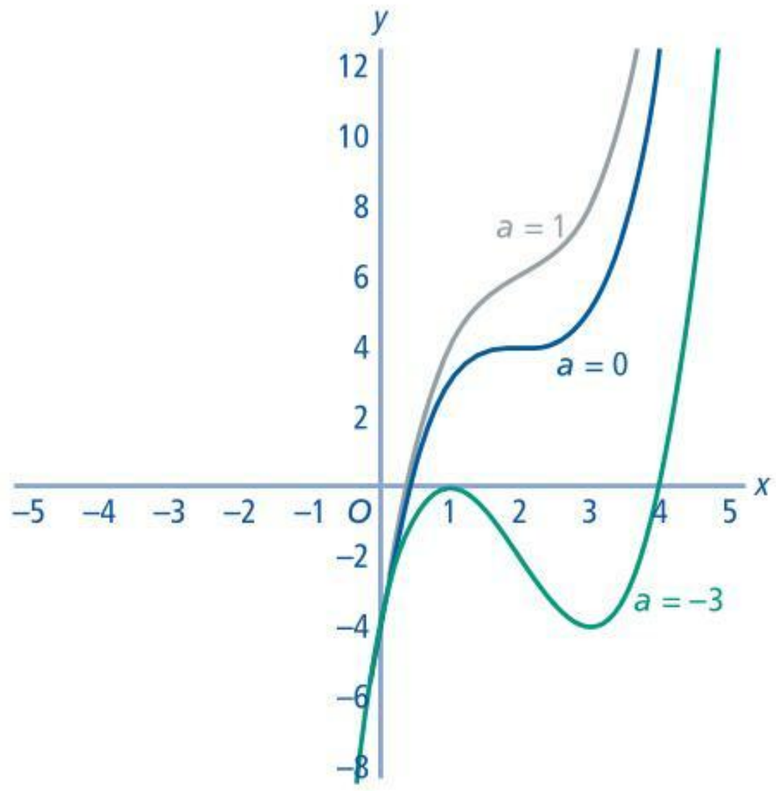
c Welk maximum heeft f?

d Een lijn met vergelijking $y = q$ snijdt de grafiek van f in de punten P en Q.
Onderzoek voor welke waarde van q geldt dat $PQ = 4$.



© Noordhoff Uitgevers bv

42 Voor elke waarde van a is gegeven de functie $f_a(x) = (x - 2)^3 + ax + 4$. Hiernaast zijn voor enkele waarden van a de bijbehorende grafieken getekend.



a De drie getekende grafieken gaan alle drie door het punt $(0, -4)$. Toon aan dat voor elke waarde van a de grafiek door $(0, -4)$ gaat.

b Neem $a = 0$.
Stel een functievoorschrift op van de inverse functie van f_0.

c Leg met behulp van de grafiek uit waarom f_{-3} geen inverse functie heeft.

d Neem $a = 1$ en leg met behulp van de afgeleide uit dat de grafiek van f_1 geen toppen heeft.

e Waarom volgt uit opdracht d dat f_1 wel een inverse heeft?

f Ga na voor welke waarden van a de functie f_a een inverse heeft.

43 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + |5x - 6|$.

a Voor welke waarden van x geldt $f(x) = -x^2 + 5x - 6$?

b Hoe schrijf je het functievoorschrift van f voor de overige waarden van x?

c Bereken de nulpunten van f.

d Bereken exact de extreme waarden van f.

44 De volgorde van de transformaties die op de grafiek van een functie worden toegepast is soms wel en soms niet van belang.
Ga uit van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ en stel voor de volgende gevallen voorbeelden op, waaruit je kunt opmaken of de volgorde van de twee transformaties invloed heeft op het resultaat.

a Twee translaties na elkaar.

b Een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as en een translatie omhoog of omlaag.

c Een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as en een translatie naar links of rechts.

d Een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as en een translatie naar links of rechts.

e Een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as en een translatie omhoog of omlaag.

45 Voor $a > 0$ en $a \neq 1$ is gegeven de functie $f_a(x) = {}^a\log(2x + 4)$.

a Bereken de waarde van a in het geval de grafiek van f_a door het punt $(3, 2)$ gaat.

b Neem $a = 3$ en stel een functievoorschrift op voor de inverse functie.

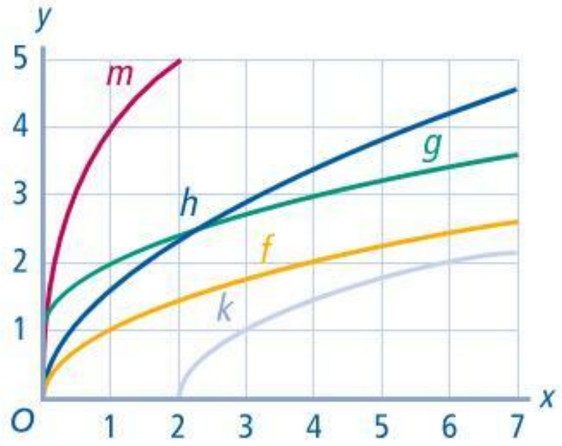
c Voor de functie g geldt: $g(x) = |f_3(x)|$.
Los exact op: $g(x) \geq 2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Samenvatting

Transformaties

Bij de verticale translatie van de grafiek van f over een afstand d omhoog ontstaat de grafiek van $g(x) = f(x) + d$.
Bij een horizontale translatie van de grafiek over een afstand c naar rechts ontstaat de grafiek van $g(x) = f(x - c)$.
Bij een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor a ontstaat de grafiek van $g(x) = a \cdot f(x)$.
Bij een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor b ontstaat de grafiek van $g(x) = f\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$.



$f(x) = \sqrt{x}$
$g(x) = 1 + \sqrt{x}$ $\quad k(x) = \sqrt{x - 2}$
$h(x) = \sqrt{3x}$ $\quad m(x) = 4\sqrt{x}$

Spiegelen in de x-as of de y-as

Als de grafiek van een functie f wordt gespiegeld in de x-as ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = -f(x)$.
Als de grafiek van een functie f wordt gespiegeld in de y-as ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = f(-x)$.

Inverse functies

De functies f en g zijn inverse functies van elkaar als geldt: Uit $f(a) = b$ volgt $g(b) = a$ (en omgekeerd), voor elk getal a uit het domein van f en voor elk getal b uit het domein van g.
Voor de inverse van een functie f gebruik je de notatie f^{inv}.
Als het punt (a, b) op de grafiek van f ligt, dan ligt het punt (b, a) op de grafiek van f^{inv}. De grafieken van f en f^{inv} zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

Voorbeelden van inverse functies

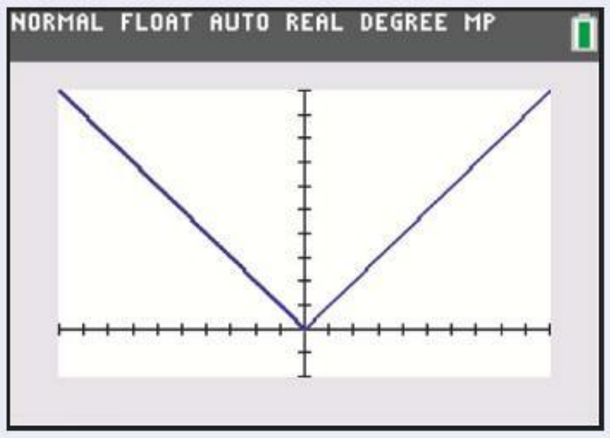
$f(x) = 2x + 6$ en $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$

$f(x) = \sqrt[3]{x - 7}$ en $g(x) = x^3 + 7$

Absolute waarde

Voor de absolute waarde $|x|$ geldt $|x| = \begin{cases} x \text{ als } x \geq 0 \\ -x \text{ als } x < 0 \end{cases}$

De grafiek van de functie $f(x) = |x|$ bestaat uit twee halve lijnen.



Gelijkwaardige formules

Twee formules zijn gelijkwaardig of equivalent als elke combinatie van waarden die aan de ene formule voldoet, ook voldoet bij de andere formule, en omgekeerd.

Familie van functies, bundel grafieken, parameter

Een verzameling of familie van functies kan worden gedefinieerd door een parameter te gebruiken. De familie van functies met parameter p noteer je als f_p. Bij een familie van functies hoort een bundel van grafieken.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt transformaties op een grafiek toepassen

Let vooral op de volgorde waarin de transformaties worden toegepast.

Voorbeeld

Door welke transformaties ontstaat de grafiek van $f(x) = (2x - 6)^2 - 4$ uit de grafiek van $g(x) = x^2$?

Oplossing

x^2 wordt $(x - 6)^2$: translatie 6 naar rechts
$(x - 6)^2$ wordt $(2x - 6)^2$: vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y-as.
$(2x - 6)^2$ wordt $(2x - 6)^2 - 4$: translatie 4 omlaag.

Je kunt het functievoorschrift van een inverse functie opstellen

Stel eerst vast uit welke schakels de oorspronkelijke functie bestaat.

Voorbeeld

Geef het functievoorschrift van de inverse functie van $f(x) = \sqrt[3]{x + 7}$.

Oplossing

1 f: $y = \sqrt[3]{2x + 7}$

2 f^{inv}: $x = \sqrt[3]{2y + 7}$

3 $x^3 = 2y + 7$
$x^3 - 7 = 2y$
$y = \frac{1}{2}x^3 - 3\frac{1}{2}$

4 $f^{inv}(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3\frac{1}{2}$

Je kunt een formule herleiden

Voer steeds links en rechts van het gelijkteken dezelfde bewerking uit.

Voorbeeld

Herleid de formule $xy - 4x = y - 3$ tot een vorm waarbij y is uitgedrukt in x.

Oplossing

Breng de termen met y naar links: $xy - y = 4x - 3$ (beide zijden $-y$ en $+ 4x$)

$y(x - 1) = 4x - 3$ en door beide zijden te delen door $x - 1$ krijg je $y = \dfrac{4x - 3}{x - 1}$

Je kunt eigenschappen van een bundel grafieken vinden

Het kan bijvoorbeeld gaan om een gemeenschappelijk punt of de ligging van de toppen.

Voorbeeld

Toon aan dat de toppen van de grafieken van $f_p(x) = -x^2 + 2px$ op de parabool $y = x^2$ liggen.

Oplossing

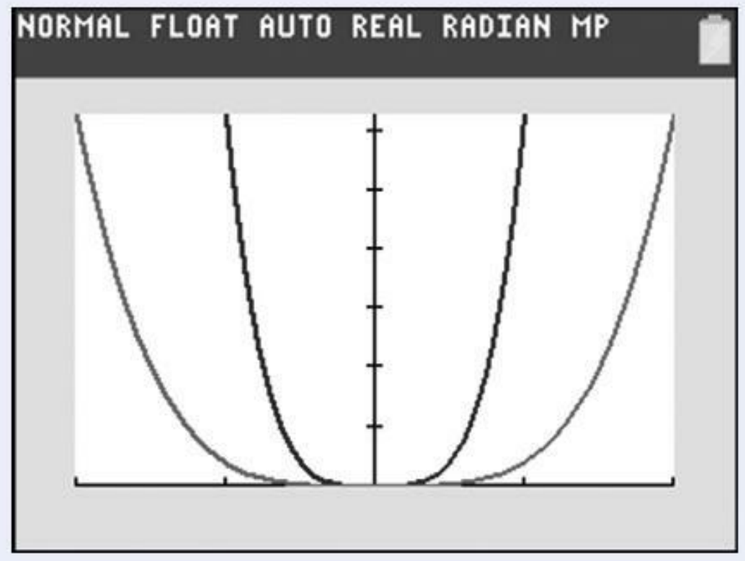
$f_p'(x) = -2x + 2p = 0$. Uit $-2x + 2p = 0$ volgt $x = p$.
$f_p(p) = -p^2 + 2p \cdot p = -p^2 + 2p^2 = p^2$ dus de toppen zijn (p, p^2).

$\begin{cases} x = p \\ y = p^2 \end{cases}$ Eliminatie van p geeft $y = x^2$, dus de toppen liggen op de parabool $y = x^2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Test jezelf

T-1 Hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = 100x^4$.



a De grafiek van f wordt vermenigvuldigd met factor 2 ten opzichte van de y-as.
Toon aan dat de beeldgrafiek bij de functie $g(x) = 6{,}25x^4$ hoort.

b Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as geeft dezelfde beeldgrafiek?

c De grafiek van f wordt ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigd.
Geef een bij de beeldgrafiek passend functievoorschrift.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-1.

T-2 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 7$.

a De grafiek van f wordt gespiegeld in de x-as en daarna 4 naar rechts geschoven.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

b Beantwoord opdracht a ook voor het geval de grafiek van f eerst 4 naar rechts wordt geschoven en daarna wordt gespiegeld in de y-as.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-1.

T-3 Gegeven zijn de functies $f(x) = |-x^3 + 12x|$ en $g(x) = 2x$.

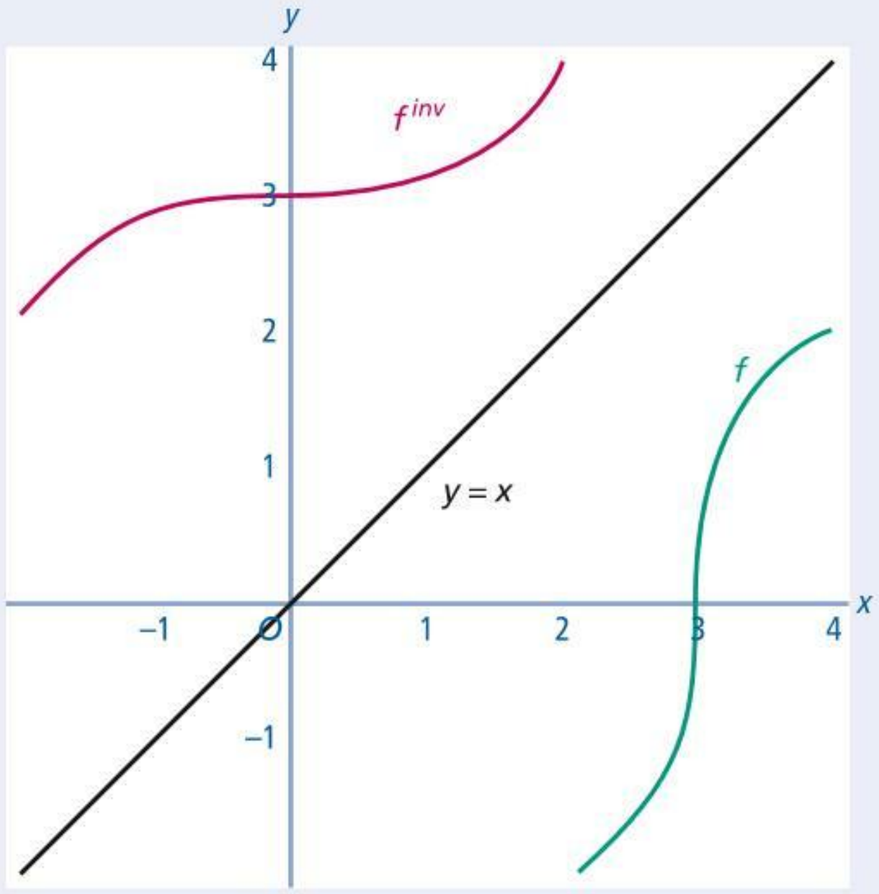
a Bereken exact de nulpunten van f.

b Plot en schets de grafieken van f en g in één figuur.

c Bereken exact de extreme waarden van f.

d Los exact op: $f(x) > g(x)$.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-2.

T-4 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt[3]{9x - 27}$.
De grafiek van f staat hiernaast.



a Stel het functievoorschrift van f^{inv} op.

b Als de grafiek van een functie f de lijn $y = x$ snijdt in een punt P, dan ligt P ook op de grafiek van f^{inv}.
Leg dit uit.

c Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en f^{inv} in twee decimalen nauwkeurig.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-3.

© Noordhoff Uitgevers bv

T-5 Gegeven is de formule $x^2y = 2x - y$.

a Herleid de formule tot een vorm waarbij y is uitgedrukt in x.

b Plot en schets de grafiek bij de formule uit opdracht a.

c Welke waarden kan x aannemen?

d Welke waarden kan y aannemen? Gebruik een plot van de grafiek.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-4.

T-6 Gegeven is de familie van functies

$f_p(x) = 2x + \frac{p}{x^2}$ met $p \neq 0$.

Hiernaast is voor drie waarden van p de grafiek van f_p getekend.

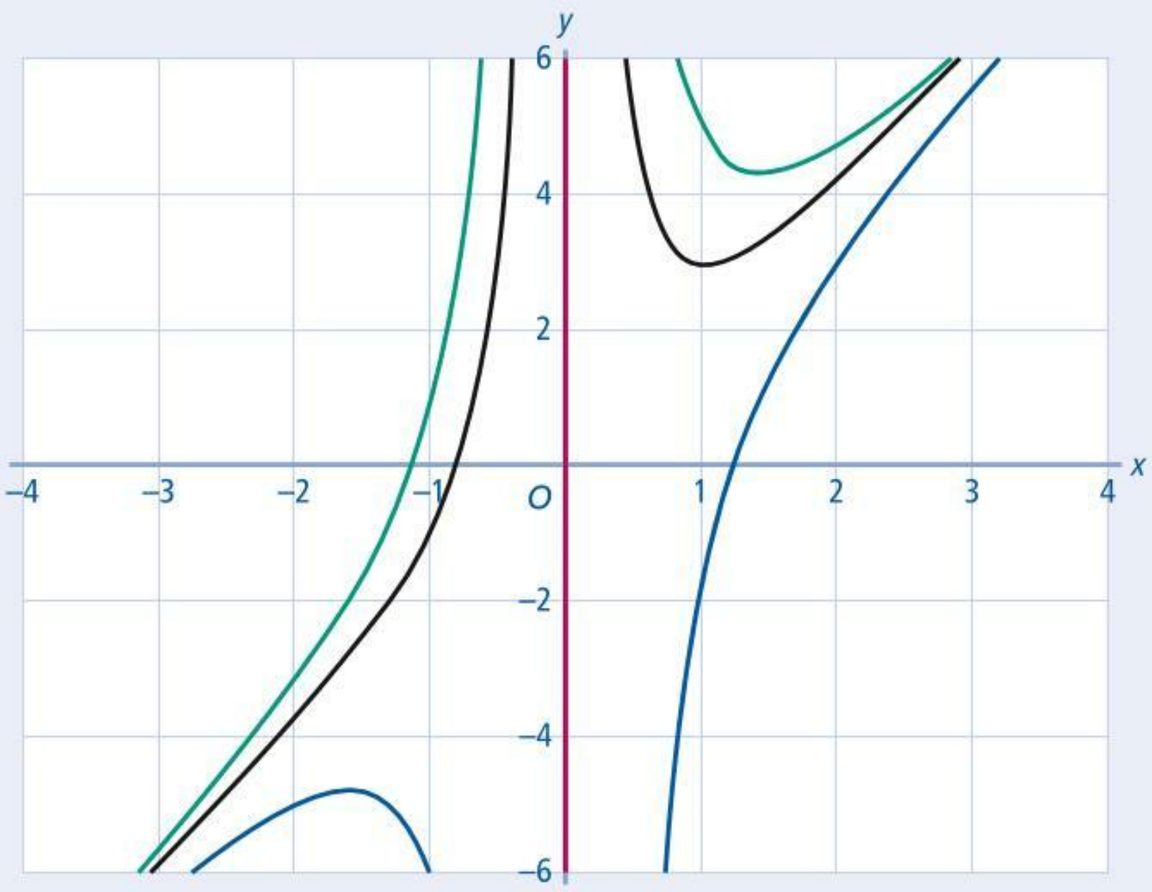
a Onderzoek welke waarden van p bij de getekende grafieken horen.

b Teken de grafieken van f_p voor $p = -1$ en $p = 6$.

c Voor welke waarden van p ligt de top van de grafiek links van de y-as?

d Toon aan dat de toppen van alle grafieken op de lijn met vergelijking $y = 3x$ liggen.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-5.

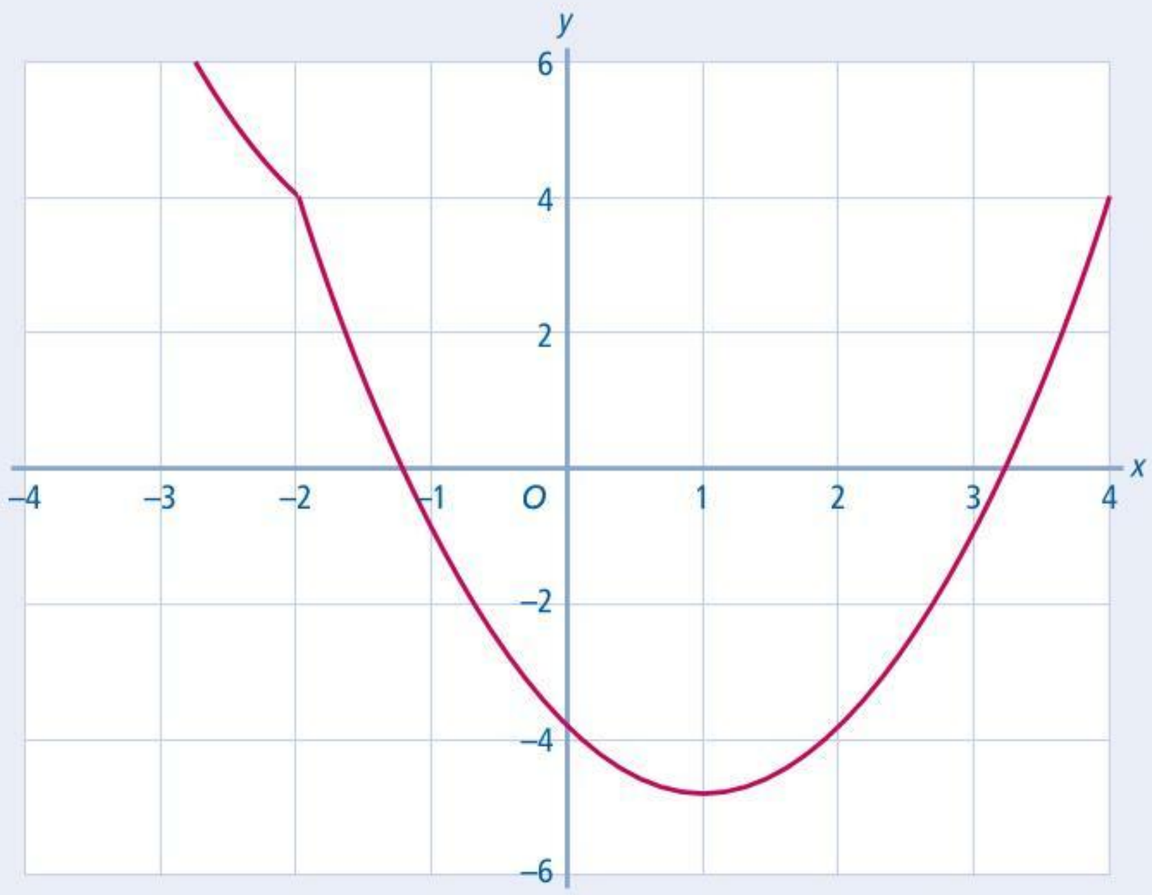


T-7 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = x^2 - |2x + a|$.

a Neem $a = 4$. Als je het functievoorschrift zonder absolute waarde-strepen schrijft, krijg je voor $x \geq -2$ en voor $x < -2$ verschillende vormen van het functievoorschrift.
Geef deze beide vormen van het functievoorschrift.

b Voor welke waarden van a gaat de grafiek van f_a door het punt $(6, 10)$?

c De grafiek hiernaast heeft een knik in het punt $(-2, 4)$.
De knikken van alle grafieken van de functies f_a liggen op een parabool.
Geef een vergelijking van die parabool.



T-8 Gegeven is de functie $f(x) = {}^3\log\left(\frac{27}{x+1}\right)$.

Toon aan dat het functievoorschrift van de inverse functie van f te schrijven is als $f^{inv}(x) = 3^{3-x} - 1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Basis**

B-1 Gegeven is de functie $f(x) = 4 + {}^2\log(3x - 9)$.

a Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van de functie $g(x) = {}^2\log(x)$?

b De grafiek van f wordt gespiegeld in de y-as en daarna 5 naar rechts geschoven. Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

c Beantwoord opdracht b ook voor het geval dat de transformaties in omgekeerde volgorde worden toegepast.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-1.

B-2 Gegeven is de functie $f(x) = |x\sqrt{x} - 6x|$.

a Bereken exact de nulpunten van f.

b Bereken exact de extreme waarden van f.

c Een lijn met vergelijking $y = q$ heeft drie gemeenschappelijke punten met de grafiek van f.
Welke waarden kan q hebben?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-2.

B-3 Stel bij de volgende functies het functievoorschrift op van de inverse functie.

a $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3 - 7\right)$

b $g(x) = 2^{x-4}$

c $h(x) = {}^3\log(5 - 2x)$

d $k(x) = \dfrac{1}{3x + 6}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-3.

B-4 Een route van 40 km wordt afgelegd met x km/u op de heenweg en y km/u op de terugweg. De gemiddelde snelheid over de heen- en terugweg is 100 km/u.

a Verklaar dat voor het verband tussen x en y moet gelden:
$\frac{80}{100} = \frac{40}{x} + \frac{40}{y}$

b Herleid de formule en druk y uit in x.

c Waarom kan x geen waarden kleiner of gelijk aan 50 aannemen?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-4.

B-5 Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = {}^2\log(x^2 + px + 4)$.

a Voor welke waarde van p gaat de grafiek van f_p door het punt $(2, 5)$?

b Voor welke waarde van p is de lijn $x = 3$ een verticale asymptoot van de grafiek van f_p?

c Alle grafieken van f_p gaan door één punt. Welk punt is dat?

d Voor welke waarden van p is $\mathbb{R}$ het domein van f_p?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-5.

© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Gemengd**

G-1 Gegeven is de functie $f(x) = {}^2\log|4x - 8|$.

a Geef het domein van f.

b Bereken exact de nulpunten van f.

c Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de lijn $y = 5$.

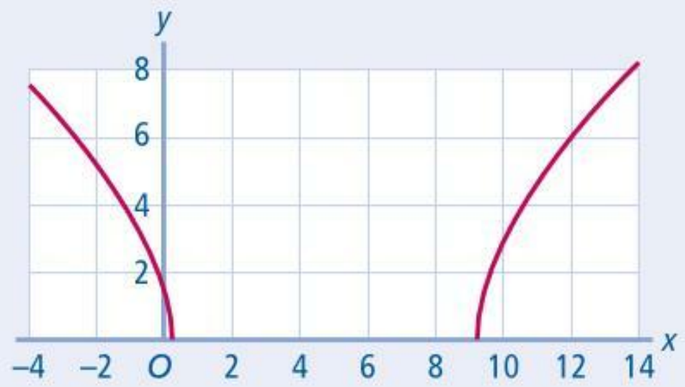
d Los op: $f(x) \geq 5$.

G-2 Gegeven is de familie van parabolen met vergelijking $y = ax - x^2$.

a Neem $a = 4$.
Bereken exact de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.

b De coördinaten van de toppen van al deze parabolen liggen ook weer op een parabool.
Stel op algebraïsche wijze een vergelijking op van deze parabool.

G-3 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 2}$.
De grafiek van f staat hiernaast.



a Toon aan dat het functievoorschrift van f ook geschreven kan worden als $f(x) = \sqrt{(x-4)^2 - 14}$.

b Bereken exact het domein van f.

c Waarom kan de functie bij dit domein geen inverse functie hebben?

d Als het domein van f beperkt wordt zodat alleen de rechter tak van de grafiek kan worden gebruikt, dan kan er wel een inverse functie worden gevonden.
Geef voor dit geval het functievoorschrift van de inverse functie.

G-4a Als voor een functie f geldt: $f(x) = |f(x)|$ voor alle waarden van x uit het domein van f, wat weet je dan over de grafiek van f?

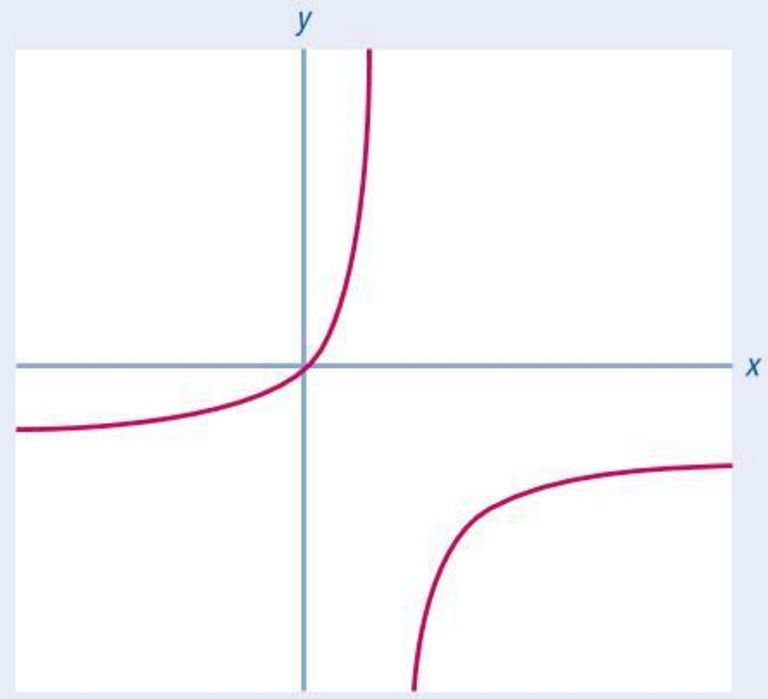
b Als voor een functie f geldt: $f(x) = f(-x)$ voor alle waarden van x uit het domein van f, wat weet je dan over de grafiek van f?

© Noordhoff Uitgevers bv

Uitdagende opdrachten

U-1 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{4x - 1}{1 - 0{,}1x}$

Op de x-as en y-as is de schaalverdeling verschillend.
Teken de schaalverdeling op beide assen.
Licht je werkwijze toe.



U-2 Voor elke waarde van a is gegeven de functie $f_a(x) = x(x^2 - a)$.

a Neem $a = 0$.
Plot de grafiek van f_0 en leg uit dat f_0 een inverse functie heeft.

b Onderzoek voor welke waarde(n) van a functie f geen inverse functie heeft.

U-3 Op een hyperbool met vergelijking $y = \dfrac{a}{x - b}$ worden achtereenvolgens de volgende transformaties toegepast:

- Translaties met 3 omhoog en 5 naar links.
- Vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 3.
- Vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{2}$.

Het resultaat is de hyperbool met vergelijking $y = 9\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$.
Bereken de waarde van a en van b.

U-4 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{1 - {}^2\log(x)}{{}^2\log(x)}$

a Onderzoek welke asymptoten de grafiek van f heeft.
Licht je antwoorden toe met behulp van het gegeven functievoorschrift.

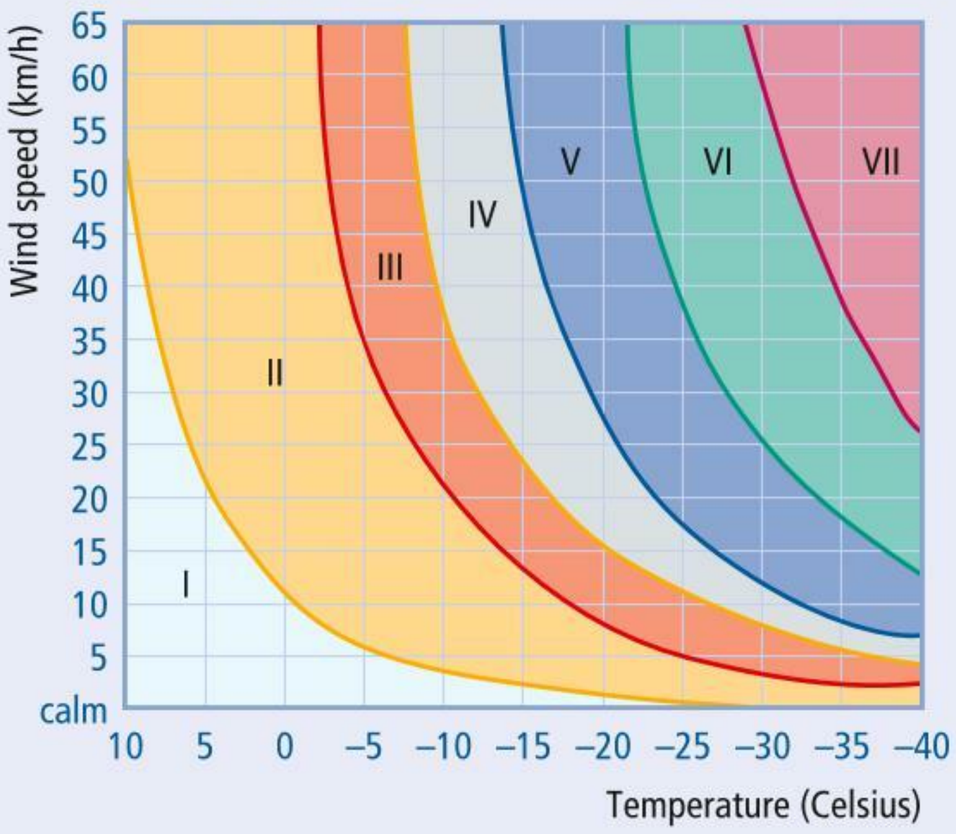
b Onderzoek het gedrag van de functie in de buurt van $x = 0$.

U-5 Onderzoek voor welke waarden van p de vergelijking $x^2 - |5x - 2| = p$ precies twee oplossingen heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

Gevoelstemperatuur

Als het waait, voelt het veel kouder aan dan de thermometer aangeeft. De temperatuur die je ervaart, wordt *gevoelstemperatuur* genoemd.
In onderstaande grafiek zijn punten met een gelijke gevoelstemperatuur verbonden door vloeiende lijnen. Langs de horizontale as staat de temperatuur in graden Celsius en langs de verticale as de windsnelheid in km/h. Zo kun je aflezen dat bij een windsnelheid van 30 km/h en een temperatuur van −25 °C, waarschuwingsniveau V van toepassing is. Terwijl bij een temperatuur van −25 °C en een windsnelheid van 5 km/h waarschuwingsniveau II geldt. De grafiek wordt gebruikt door het leger op Goose Bay Air Base, Canada voor kledingadviezen.



De waarschuwingsniveaus zijn:
I Aangenaam, gewone kleding
II Werken en reizen onaangenaam, dikke kleding.
III Werken en reizen gevaarlijk. Zware kleding.
IV Onbeschermde huid loopt gevaar te bevriezen bij langere blootstelling. Extra zware kleding.
V Onbeschermde huid bevriest direct. Meerdere lagen beschermende kleding verplicht.
Enzovoort.

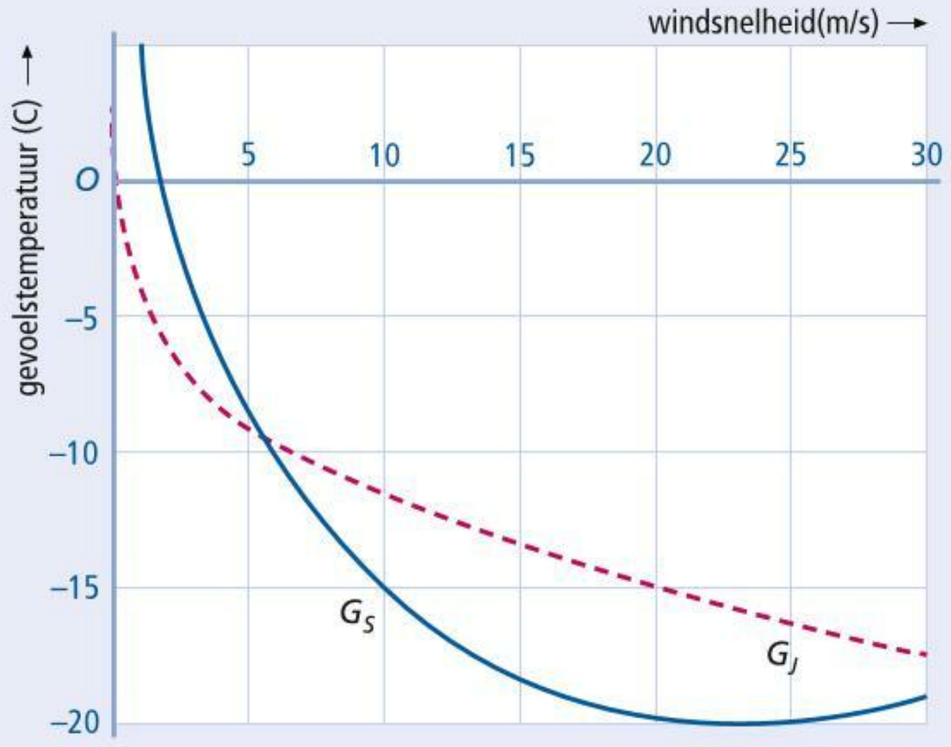
Formules voor de gevoelstemperatuur

Er zijn verschillende formules in omloop om de gevoelstemperatuur te berekenen.
De oudste methode is van de Amerikaanse onderzoekers Paul Siple en Charles Passel, ontwikkeld uit experimenten in 1939 tijdens de derde Poolexpeditie van Admiraal Byrd:
$G_S = 33 + (T - 33)(0{,}474 + 0{,}454\sqrt{W} - 0{,}0454W)$.

In 1948 stelde de meteoroloog Arnold Court een aangepaste formule op:
$G_C = 33 + (T - 33) \cdot (0{,}550 - 0{,}0454 \cdot W + 0{,}417 \cdot \sqrt{W})$
met temperatuur T in °C op 1,50 meter hoogte en windsnelheid W in m/s op 10 meter hoogte.
In april 2000 is de eerste 'Global International workshop on Windchill' (GIW) georganiseerd, om te komen tot een internationale standaard voor de '*wind chill equivalent temperature*'. Dit is
$G_J = 13{,}12 + 0{,}6215 \cdot T - 13{,}96 \cdot w + 0{,}4867 \cdot T \cdot w$
met $w = (3{,}6 \cdot W)^{0{,}16}$, de temperatuur T in °C op 1,50 meter hoogte en gemiddelde windsnelheid W m/s op 10 meter hoogte.

Opdracht

Om er achter te komen in hoeverre de formules van Siple & Passel en die van GIW van elkaar verschillen zijn de bijbehorende grafieken van de gevoelstemperatuur getekend bij een constante temperatuur van 0 °C.



a Laat zien dat de formule van Siple & Passel wordt $G_S = 17{,}358 - 14{,}982\sqrt{W} + 1{,}4982W$.
b Bij welke temperatuur is de formule van Siple & Passel niet meer realistisch?
Iets dergelijks geldt voor de formule van Court.
c Geef de formule G_J voor $T = 0$ °C.
d Bereken bij welke windsnelheid de formules voor $T = 0$ °C dezelfde gevoelstemperatuur geven.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheden 1

Kwadraat afsplitsen

1 Vul in.

a $(x + 6)^2 = x^2 + \ldots$

b $(x - \ldots)^2 = x^2 - \ldots x + 25$

c $x^2 + 16x + \ldots = (x + \ldots)^2$

d $x^2 - x + \ldots = (x - \ldots)^2$

2 Herschrijf in de vorm $y = (x + p)^2 + q$.

a $y = x^2 + 4x + 7 = (x + \ldots)^2 - \ldots + 7 =$

b $y = x^2 - 7x - 8$

c $y = x^2 - 1{,}2x - 1$

d $y = x^2 + 5x + 4$

3 Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

a Breng een factor $\frac{1}{2}$ buiten haakjes.

b Schrijf de uitdrukking binnen de haakjes als $(x + p)^2 + q$ zodat de formule in de vorm $y = \frac{1}{2}\left((x + p)^2 + q\right)$ kan worden geschreven.

c Schrijf de gegeven formule in de vorm $y = \frac{1}{2}(x + \ldots)^2 + \ldots$

Om een formule van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$ te schrijven, haal je eerst a buiten haakjes.

4 Herschrijf in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$.

a $y = 2x^2 + 5x + 3$

b $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x - 1$

c $y = 3x^2 - x$

d $y = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$

Voorbeeld

Schrijf $y = 2x^2 + 12x + 8$ in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$.

Oplossing

$y = 2x^2 + 12x + 8$
$= 2(x^2 + 6x + 4)$
$= 2((x + 3)^2 - 5)$
$= 2(x + 3)^2 - 10$

Tweedegraadsfuncties

5 Gegeven is de functie $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$.

a Toon aan dat het functievoorschrift van f ook te schrijven is als $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$ en $f(x) = 3(x - 1)^2 - 27$.

b Met welk voorschrift bereken je handig de coördinaten van de top?

c Met welk voorschrift bereken je handig de coördinaten van de snijpunten met de x-as?

d Van welk punt kun je met het overblijvende voorschrift de coördinaten handig berekenen?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

De grafiek van $f(x) = a(x - s)(x - t)$ snijdt de x-as in de punten $(s, 0)$ en $(t, 0)$. Met deze punten kun je de symmetrieas vinden en daarmee de coördinaten van de top.

De grafiek van $f(x) = a(x - p)^2 + q$ heeft top (p, q).

Voorbeelden

1 Bereken de coördinaten van de top van de parabool $y = -\frac{1}{2}(x - 1)(x - 5)$.

2 Bereken de nulpunten van de functie $f(x) = 2(x - 6)^2 - 8$.

Oplossing

1 De parabool snijdt de x-as in de punten $(1, 0)$ en $(5, 0)$.
De symmetrieas is de lijn $x = 3$.
Substitutie in de formule geeft
$y = -\frac{1}{2}(3 - 1)(3 - 5) = 2$.
De top is het punt $(3, 2)$.

2 $2(x - 6)^2 - 8 = 0$ geeft $(x - 6)^2 = 4$.
$x - 6 = 2$ of $x - 6 = -2$
$x = 8$ of $x = 4$
De snijpunten zijn $(4, 0)$ en $(8, 0)$.

6 Bereken voor de grafieken van de volgende functies de coördinaten van de snijpunten met de x-as en de coördinaten van de top.

a $f(x) = -6(x - 6)(x + 12)$
b $g(x) = 2(x + 1)^2 - 18$
c $h(x) = x^2 + 4x - 12$

Formules herleiden

7 Gegeven is de vergelijking $2x - 3y = 12$.
a Herleid de vergelijking tot de vorm $y = \ldots x + \ldots$.
b Herleid de vergelijking tot de vorm $x = \ldots$.

Theorie

In de formule $y = \frac{5}{x + 2}$ is y **uitgedrukt in** x.
Via een herleiding kun je x ook uitdrukken in y.
Bij het herleiden doe je, net als bij het oplossen van vergelijkingen, telkens links en rechts van het =-teken hetzelfde.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $y = \frac{5}{x + 2}$
Druk x uit in y.

Oplossing

$y(x + 2) = 5 \quad (\times(x + 2))$
$x + 2 = \frac{5}{y} \quad (: y)$
$x = \frac{5}{y} - 2 \quad (-2)$

8 Druk x uit in y.

a $10x + 5y = 12$
b $y = \frac{8}{x - 1}$
c $y = 2\sqrt{x - 10}$
d $y = {}^2\log(x + 6)$

9 Druk p uit in q.

a $pq + 2q = 4$
b $q = \frac{4}{2p + 5}$
c $q = \frac{4}{\sqrt{p + 2}}$
d $q = 3^{p+3} + 3$

10 Substitueer x en druk y uit in t.

a $y = 2x^2 - 3x + 1$ en $x = t + 1$
c $y = \log(x^2 - 4)$ en $x = 3t - 2$
b $y = x \cdot 2^{9-2x}$ en $x = t - 3$
d $y = \frac{\sqrt{2x - 4}}{2x}$ en $x = 0{,}5t^2 + 2$

© Noordhoff Uitgevers bv

Differentiëren

11 Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
a Geef het functievoorschrift van f'.
b Bereken de helling van de grafiek in het punt $P(3, 9)$.
c Stel een vergelijking op van de raaklijn in P.

Theorie

De afgeleide functie van $f(x) = x^n$ is $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
De afgeleide van $f(x) = ax + b$ is $f'(x) = a$.

Met de afgeleide functie bereken je de helling van de grafiek in een punt. Deze helling is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \frac{1}{3}x^3$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn l in het punt $P(3, -3)$ van de grafiek van f.

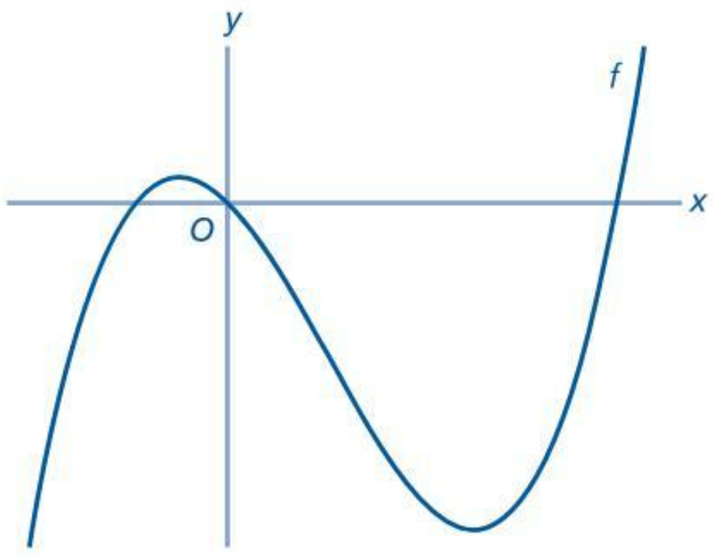
Oplossing

$f'(x) = 2 - x^2$, dus $f'(3) = -7$.
Een vergelijking van l is $y = -7x + b$.
Invullen van $(3, -3)$ geeft $-3 = -21 + b$, dus $b = 18$.
Een vergelijking van l is $y = -7x + 18$.

12 Differentieer.
a $g(x) = 5x^3 - 3x^5 + 3x + 5$
b $m(x) = (3x + 5)^2$
c $n(x) = (2x + 1)(3x^2 - 1)$

13 Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in het gegeven punt.
a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{1}{2}x^2 + 4x$ in het punt $(6, 6)$
b $g(x) = (2x - 5)^2 - 1$ in het punt $(3, 0)$
c $h(x) = x^{200} - x^{198}$ in het punt $(1, 0)$

14 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$.
a Bereken exact de nulpunten van f.
b Bereken exact de extreme waarden van f.
c Bereken exact de coördinaten van de punten waarin de helling van de grafiek gelijk is aan -5.



15 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 6x - 3$.
Lijn m met vergelijking $y = ax + b$ raakt de grafiek van f in het punt met x-coördinaat 2.
Bereken exact de waarde van a en van b.

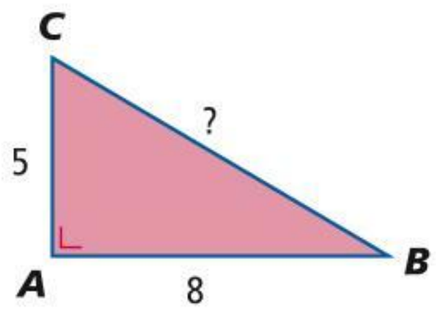
16 Lijn m: $y = 2x + p$ raakt de grafiek van $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$.
Bereken exact de coördinaten van het raakpunt en de waarde van p.

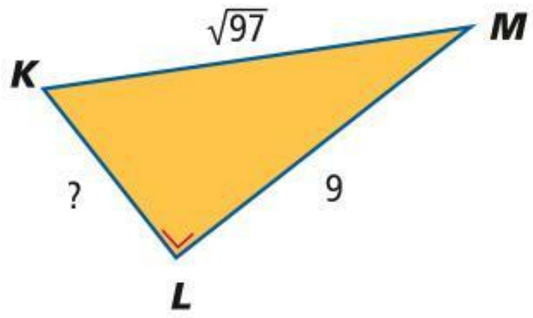
17 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = 4x^2 - 2x^4 + a$.
Bereken exact voor welke waarden van a de grafiek van f_a de x-as raakt.

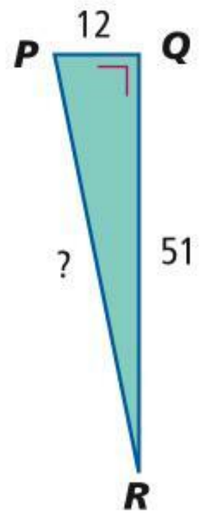
© Noordhoff Uitgevers bv

Meetkunde in driehoeken

18 Bereken van de driehoeken hieronder met behulp van de stelling van Pythagoras de exacte lengte van de zijde met het vraagteken.







19a Van een rechthoek $ABCD$ is gegeven dat $AB = 12$ en $AC = 15$.
Bereken de lengte van zijde BC.

b De lengte van de diagonalen van vierkant $KLMN$ is 10.
Bereken de oppervlakte van het vierkant.

c Van een ruit $PQRS$ is gegeven dat $PR = 12$ en $QS = 9$.
Bereken de lengte van de zijden van deze ruit.

20 In een driehoek ABC zijn enkele hoeken en zijden gegeven.
Bereken de gevraagde zijden of hoeken. Rond de lengten af op één decimaal en de hoeken op hele graden.

a Bereken AC en BC als $\angle A = 90°$, $\angle B = 47°$ en $AB = 9$.

b Bereken AB en BC als $\angle A = 22°$, $\angle B = 90°$ en $AC = 11$.

c Bereken AC, $\angle B$ en $\angle C$ als $\angle A = 90°$, $AB = 9$ en $BC = 14$.

d Bereken AC en BC als $\angle A = 23°$, $\angle C = 67°$ en $AB = 20$.

Goniometrie

21a Vul in de tabel hiernaast de exacte waarden in.

b Teken de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

c Beredeneer, zonder je rekenmachine te gebruiken, de exacte waarden van:

$\sin\left(137\frac{1}{2}\pi\right)$, $\sin\left(-1\frac{1}{4}\pi\right)$, $\sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right)$ en $\sin\left(-3\frac{2}{3}\pi\right)$.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$					
$\cos(x)$					

d Teken de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ op het interval $[-\pi, \pi]$.

e Beredeneer, zonder je rekenmachine te gebruiken, de exacte waarden van:

$\cos\left(-137\frac{1}{2}\pi\right)$, $\cos\left(3\frac{3}{4}\pi\right)$, $\cos\left(2\frac{2}{3}\pi\right)$ en $\cos\left(-1\frac{5}{6}\pi\right)$.

22 Los de volgende vergelijkingen op het gegeven interval exact op.

a $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$ op $[0, 16\pi]$

b $3\cos(2x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ op $[0, 2\pi]$

c $2\sin(x) = -\sqrt{3}$ op $[-6\pi, 0]$

d $\sin(6x) = -1$ op $[-\pi, \pi]$

© Noordhoff Uitgevers bv

Redeneren met functies

23 Schrijf van elke functie hieronder op of de grafiek stijgend of dalend is.

a $f(x) = 2^x$

b $g(x) = \sqrt{x}$

c $h(x) = -8x + 19$

d $k(x) = 0{,}5x$

e $l(x) = 0{,}75^x$

f $m(x) = x^{-1},\ x > 0$

g $n(x) = x^3$

h $p(x) = 200 \cdot 0{,}1^x$

i $q(x) = x^{-3},\ x > 0$

Van standaardfuncties weet je of de grafiek stijgend of dalend is. Van een grafiek die door transformaties te herleiden is uit de grafiek van een standaardfunctie is dat soms met redeneren vast te stellen.

Voorbeeld

Beredeneer of de grafiek van de functie $f(x) = (1 - 2x)^3$ stijgend of dalend is.

Oplossing

De grafiek van $y = x^3$ is stijgend, dus als x toeneemt, neemt x^3 ook toe en als x afneemt, neemt x^3 ook af.
Als x toeneemt, neemt $1 - 2x$ af, dus neemt $(1 - 2x)^3$ ook af.
De grafiek van f is dalend.

24 Beredeneer, zonder gebruik te maken van een plot, of de grafieken van de volgende functies stijgend of dalend zijn.

a $g(x) = x^3 - 7$

b $h(x) = 5x^3$

c $k(x) = -2x^3$

d $m(x) = (-x)^3$

e $n(x) = (2 - x)^3$

f $p(x) = -6(x - 4)^3$

25 Beredeneer of de grafieken van volgende functies stijgend of dalend zijn.

a $f(x) = 0,3 \cdot 2^x$

b $g(x) = 2 \cdot 0,3^x$

c $h(x) = 100 - 2^x$

d $k(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(-x)$

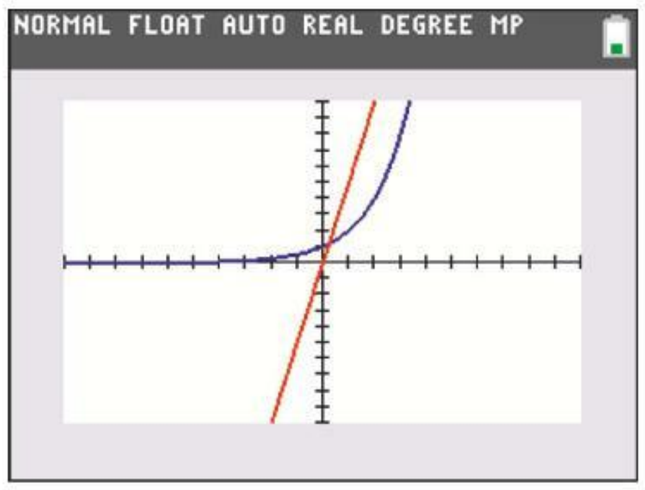
e $m(x) = \sqrt{8 - x}$

f $n(x) = 3 - {}^2\log(x)$

26 De plot hiernaast hoort bij de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 5x$.

a Bereken met je rekenmachine de coördinaten van het snijpunt dat je hiernaast ziet.

b Beredeneer dat de grafieken nog een snijpunt hebben. Maak daarbij gebruik van de begrippen toenemende stijging en constante stijging.



27 Beredeneer hoeveel oplossingen de volgende vergelijkingen hebben.

a $2\sqrt{2x + 1} = 3x$

b $\sqrt{x + 1} = 2 - x$

c $\frac{1}{x} = -3$

d $2^x = {}^2\log x$

e $0{,}5^x = \sqrt{x}$

f $\frac{1}{x^2 + 1} = 2$

28 Gegeven zijn de functies f, g, $s = f + g$, $v = f - g$ en $p = f \cdot g$. Onderzoek of de volgende uitspraken juist zijn. Indien een uitspraak niet juist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

a Als de grafieken van f en g stijgen, stijgt de grafiek van s.

b Als de grafieken van f en g stijgen, stijgt de grafiek van v.

c Als de grafieken van f en g stijgen, stijgt de grafiek van p.

© Noordhoff Uitgevers bv

Som- en verschilfuncties

Theorie

Het functievoorschrift van de **somfunctie** $f + g$ krijg je door de functievoorschriften van f en g bij elkaar op te tellen.
Het functievoorschrift van de **verschilfunctie** $f - g$ krijg je door het functievoorschrift van g af te trekken van het functievoorschrift van f.
Vaak is het nodig haakjes te gebruiken.

Voorbeeld

Geef de somfunctie $s = k + m$ en de verschilfunctie $v = k - m$ van de functies $k(x) = -x^2 + 2x$ en $m(x) = -4x + 2$.

Oplossing

$s(x) = (-x^2 + 2x) + (-4x + 2)$
$s(x) = -x^2 - 2x + 2$
$v(x) = (-x^2 + 2x) - (-4x + 2)$
$v(x) = -x^2 + 2x + 4x - 2$
$v(x) = -x^2 + 6x - 2$

29 Gegeven zijn $f(x) = -2x^2 - 3$ en $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$.

a Geef het functievoorschrift van de somfunctie $s = f + g$.

b Geef het functievoorschrift van de verschilfunctie $v = f - g$.

c Doe hetzelfde voor de verschilfunctie $w = g - f$.

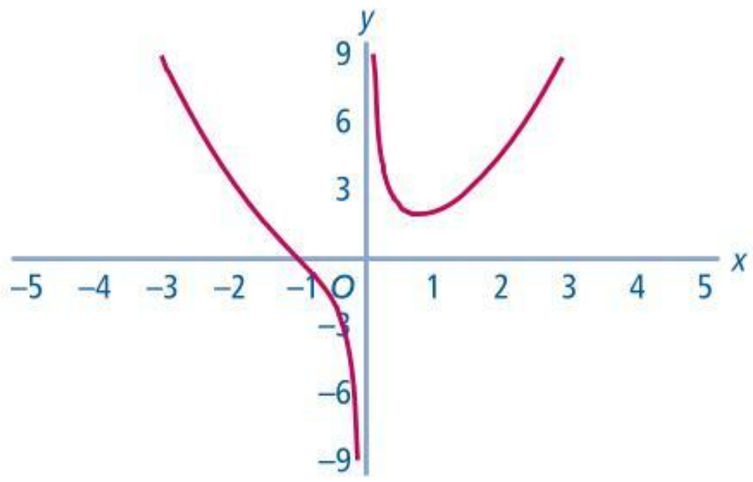
d Welke van de functies s, v en w is lineair?

30 Geef van de volgende functies de somfunctie $s = p + q$ en de verschilfunctie $v = p - q$ en geef het domein van s en v.

a $p(x) = \dfrac{1}{1+x}$ en $q(x) = \dfrac{1}{x}$, schrijf je antwoorden als één breuk.

b $p(x) = 2 \cdot \log(2x + 3)$ en $q(x) = 1 + \log(x)$, schrijf je antwoorden als één logaritme.

31 Hiernaast is de grafiek getekend van $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

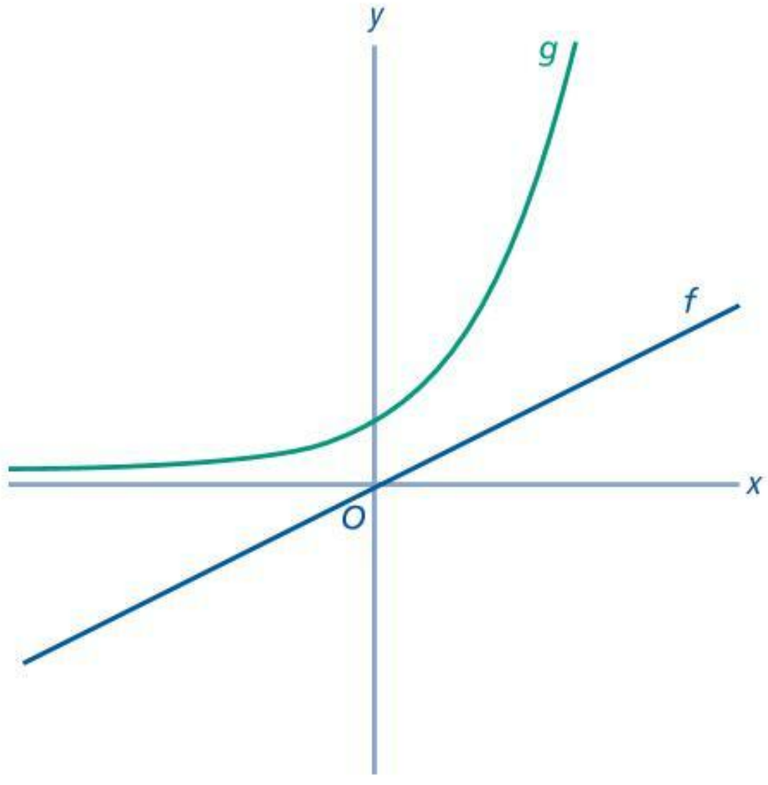


a Van welke standaardfuncties is f de somfunctie?

b In welk deel van het domein heeft de functie $p(x) = x^2$ de meeste invloed op de functie f? Waarom?

c En in welk deel heeft $q(x) = \dfrac{1}{x}$ de meeste invloed? Waarom?

32 Hiernaast zie je de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{2}x$ en $g(x) = 2^x$.

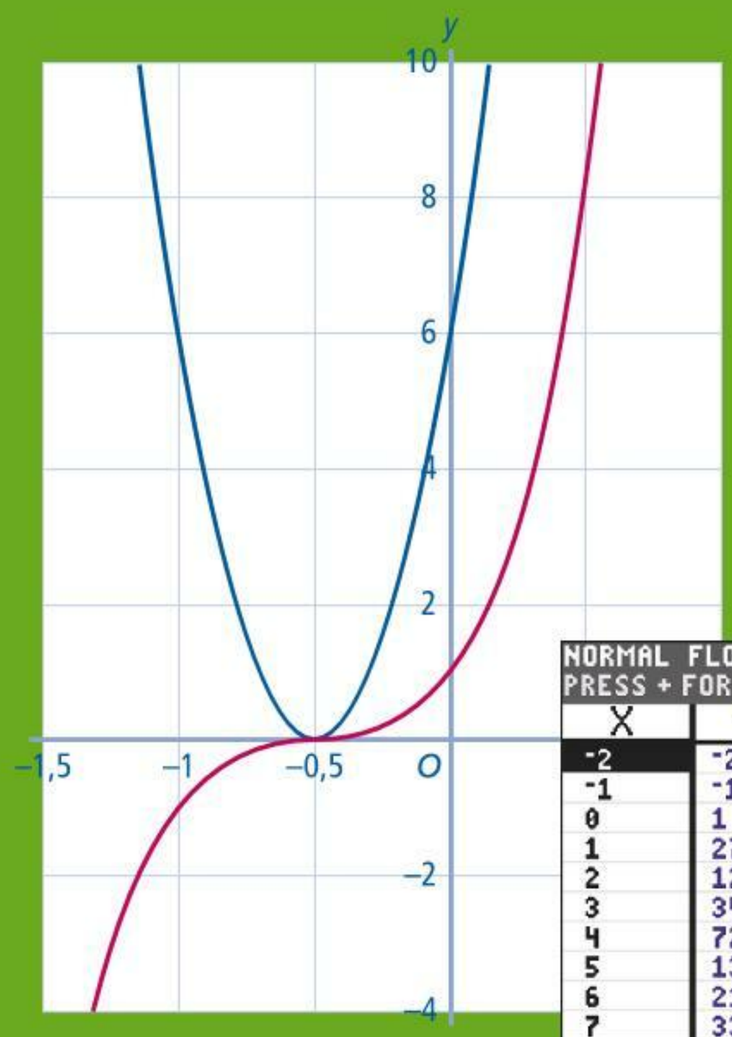


a Schets in deze figuur ook de grafiek van de functie $h = f + g$.

b In welk deel van het domein heeft f de meeste invloed op het gedrag van h? Waarom?

c De grafiek van de functie $k(x) = f(x) + g(-x)$ valt voor grote waarden van x praktisch samen met de grafiek van f. Verklaar dit.

© Noordhoff Uitgevers bv



NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN CL
PRESS + FOR △Tbl

X	Y1	Y2			
-2	-27	54			
-1	-1	6			
0	1	6			
1	27	54			
2	125	150			
3	343	294			
4	729	486			
5	1331	726			
6	2197	1014			
7	3375	1350			
8	4913	1734			

X= -2

Functie en afgeleide

Hierboven zie je de grafieken van de functie $f(x) = (2x + 1)^3$ ***en van de afgeleide van f.***
In de tabel staan de functiewaarden (Y1) en de hellingen (Y2).

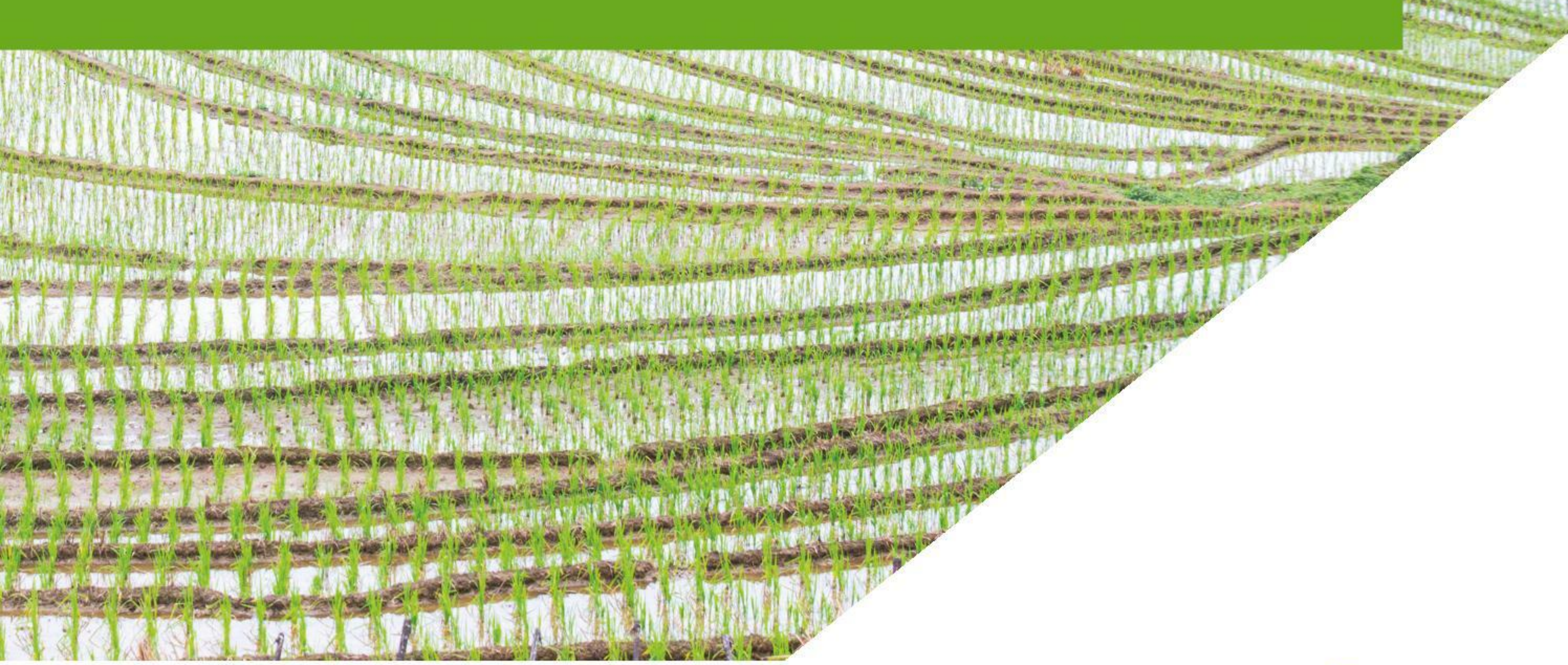
Is $g(x) = 3(2x + 1)^2$ de afgeleide van f? Zo nee, wat is het verband tussen de functie g en de afgeleide van f?

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 3
Kettingregel

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	68
3-1	Machtsfuncties differentiëren	70
3-2	Samengestelde functies	72
3-3	De kettingregel	74
3-4	Extreme waarden	76
3-5	Buigpunten	78
3-6	Gemengde opdrachten	80
	Samenvatting	82
	Test jezelf	84
	Extra oefening - Basis	86
	Extra oefening - Gemengd	87
	Uitdagende opdrachten	88
	Middelwaardestelling	89



© Noordhoff Uitgevers bv

Voorkennis

V-1 Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^2 + 3x$.
Je kunt de helling van de grafiek in een punt berekenen met de afgeleide.

a Differentieer f.

b Bereken met de afgeleide de helling van de grafiek van f in $P(2, 8)$.

V-2 Gegeven is de functie $g(x) = 5x^3 - 0{,}5x^2 - 7$.
Bereken exact de helling van de grafiek van g in het punt $Q\left(1, -2\frac{1}{2}\right)$.

Theorie

De **helling** van de grafiek van de functie f in een punt op de grafiek van f bereken je met de **afgeleide functie** van f.

De notatie voor de afgeleide functie is f' of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Het opstellen van de afgeleide functie heet **differentiëren**. Hierbij gelden de volgende regels:

$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = c$ (een constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = g(x) + c$	$f'(x) = g'(x)$
$f(x) = c \cdot g(x)$	$f'(x) = c \cdot g'(x)$
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$

De helling van de grafiek van een functie f in een punt $A(a, f(a))$ is de richtingscoëfficiënt van de **raaklijn** aan de grafiek van f in A en is gelijk aan $f'(a)$.

Voorbeeld

Differentieer.

$f(x) = x^5$	$f'(x) = 5x^4$
$h(p) = 3p^4 + 12$	$h'(p) = 3 \cdot 4p^3 = 12p^3$
$A = 7t^2 - 12t$	$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 7 \cdot 2t - 12 = 14t - 12$
$s = t^2(t + 1) = t^3 + t^2$	$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3t^2 + 2t$

V-3 Differentieer.
Werk zo nodig eerst de haakjes weg.

a $f(x) = x^{100}$

b $g(x) = 6x^3$

c $h(x) = x + 2$

d $l(x) = 2(x^4 - x^2 + 3)$

e $k(x) = 6x - 0{,}3x^{10}$

f $m(x) = x^2(3x - 2x^3)$

V-4 Stel een formule op voor $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.
Werk eerst de haakjes weg.

a $s = 3(t + 5)^2$

b $s = \frac{1}{3}(t^4 - 5)$

c $s = 25t^2 + (t - 2)^2$

d $s = (t^3 + 3)(2t - 3)$

e $s = (t + 2)(t^3 + 1)$

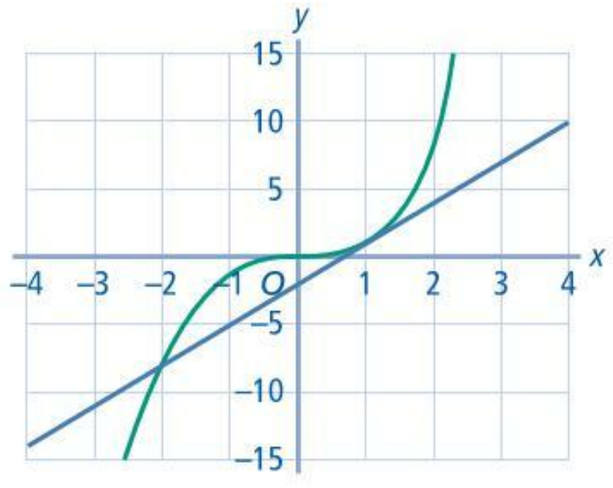
f $s = (1 - t)(1 + t + t^2)$

© Noordhoff Uitgevers bv

V-5 Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^3$.
In het punt $(1, 1)$ is de raaklijn aan de grafiek getekend.

a Bereken exact de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(1, 1)$.

b Bereken exact de coördinaten van de punten op de grafiek van f waar de helling gelijk is aan 6.



V-6 Gegeven is de functie $K(p) = -p^3 + 3p^2 + 7$.

a Los exact op: $K'(p) = 0$.

b Ga met een plot van de grafiek na of er bij de gevonden waarden van p sprake is van een minimum of een maximum van K.

c Bereken het maximum en het minimum van K.

V-7 Bereken met de afgeleide functie de eventuele maxima en minima van de volgende functies.

a $L(m) = -8m^2 + 16m - 3$

b $h(x) = x^3 + 4x^2 + 16x$

c $T(q) = -q^3 + 5q^2 - 3q$

d $w(r) = (3r - 4)^2 - 3r$

Aanpak

Hoe stel je een vergelijking van de raaklijn op in een punt *P* van de grafiek?

1. Bereken met behulp van de afgeleide functie de helling a in punt P van de grafiek.
2. Vul de waarde van a in bij de vergelijking $y = ax + b$.
3. Bereken b door de coördinaten van P in te vullen.
4. Schrijf de vergelijking van de raaklijn op.

V-8 Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt P.

a $f(x) = 0{,}5x^4 - 3$ en $P\left(1, -2\frac{1}{2}\right)$.

b $f(x) = -2x^3 - 0{,}25x^2 + 5$; de x-coördinaat van P is 2.

c $f(x) = (x^2 + 2)(x^2 - 1)$ en $P(2, 18)$.

V-9 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

a Bereken exact het maximum en het minimum van f.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek met de y-as.

c Controleer met een berekening dat de grafiek van f de x-as snijdt in het punt $A(-2, 0)$.

d Op de grafiek ligt een punt P zo, dat de raaklijnen in A en P aan de grafiek van f evenwijdig zijn.
Bereken de coördinaten van P.

© Noordhoff Uitgevers bv

3-1

Machtsfuncties differentiëren

1 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x}$

a Benader met het differentiequotiënt $\frac{f(2{,}001) - f(2)}{0{,}001}$ de helling van de grafiek van f in het punt $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

b Benader met een differentiequotiënt de helling van de grafiek van f in het punt $(-1, -1)$.

c De helling van de grafiek van f bereken je door in het differentiequotiënt $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ de waarde van Δx naar 0 te laten naderen. Je moet de teller van het differentiequotiënt eerst herleiden tot één breuk. Hiernaast staat een begin van deze herleiding. Maak deze herleiding af.

$f(x + \Delta x) - f(x) =$

$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \ldots$

d Gebruik deze herleiding om te laten zien dat $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ tot $-\frac{1}{x^2}$ nadert als Δx naar 0 nadert.

e Je kunt $f(x) = \frac{1}{x}$ ook schrijven als een machtsfunctie $f(x) = x^{-1}$.
Neem aan dat de regel hiernaast ook geldt voor negatieve exponenten.
Laat zien dat dan ook volgt dat $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

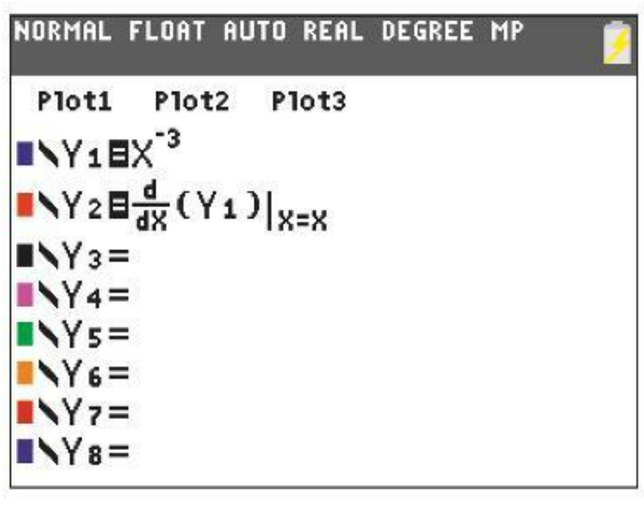
Als $f(x) = x^n$
dan $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

2a Het functievoorschrift van $g(x) = \frac{1}{x^3}$ kun je schrijven als $g(x) = x^{-3}$.
Hoe ziet volgens de regel naast opdracht 1e $g'(x)$ er uit?

b Maak met je rekenmachine een tabel met benaderingen van de hellingen van de grafiek van g voor $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.

c Maak ook een tabel bij de afgeleide functie die je bij opdracht a hebt gevonden. Komen de tabellen met elkaar overeen?

d Beantwoord de vragen bij de opdrachten a, b en c voor de functie $h(x) = x^{0,7}$.



Hulpboek 3-5 Hellingen

Theorie

De afgeleide functie van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van a.

Voorbeeld

Differentieer $g(t) = \frac{1}{t^4}$ en $h(q) = 4q^{0,6}$.

Oplossing

$g(t) = \frac{1}{t^4} = t^{-4}$ geeft $g'(t) = -4t^{-5}$, dus $g'(t) = -\frac{4}{t^5}$

$h(q) = 4q^{0,6}$ geeft $h'(q) = 2{,}4q^{-0,4}$, dus $h'(q) = \frac{2{,}4}{q^{0,4}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

H 3 Differentieer.

a $p(x) = -2x^{-2,8}$

b $f(x) = \frac{2}{x^6} + \frac{1}{3x^2}$

c $g(x) = \frac{x+1}{x^2}$

d $k(x) = \frac{x^3 + 4x - 3}{x^4}$

$\frac{x+1}{x^2} = \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

4 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.
Schrijf f als machtsfunctie en toon aan dat $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ook wortelfuncties zijn machtsfuncties. Om een wortelfunctie te differentiëren schrijf je deze eerst in de vorm $f(x) = c \cdot x^a$.
In het bijzonder geldt: als $f(x) = \sqrt{x}$ dan is $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Voorbeeld

Differentieer de functies $f(x) = x^3\sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt[4]{x}}$

Oplossing

$f(x) = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 3\frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}}$ of $f'(x) = 3\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}$

$g(x) = x^2 \times x^{-\frac{1}{4}} = x^{1\frac{3}{4}}$

$g'(x) = 1\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}}$ of $g'(x) = 1\frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3}$

5 Gegeven is de functie $f(t) = 4t^3 \cdot \frac{2}{\sqrt{t}}$

a Laat zien dat je het functievoorschrift van f kunt schrijven als $f(t) = 8t^{2\frac{1}{2}}$.

b Toon aan dat $f'(t) = 20t\sqrt{t}$.

H 6 Differentieer de volgende functies. Schrijf de afgeleide zonder gebroken of negatieve exponenten.

a $A(p) = \sqrt[5]{p} + 2\sqrt{p}$

b $k(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{4x}{\sqrt[4]{x}} + \frac{6}{x}$

c $f(x) = 5x^2\sqrt{x}$

d $R(k) = 2\sqrt{k} \cdot \sqrt[4]{k^3}$

e $h(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$

f $j(p) = 4p^2 - \frac{p\sqrt{p}}{p^3}$

7 Uit onderzoek blijkt dat de hoeveelheid energie die een parkiet per meter bij een bepaalde snelheid verbruikt, bij benadering berekend kan worden met de formule $D = \frac{6{,}0}{v^2} + 0{,}00050v^2 - 0{,}033$
met D het energieverbruik per meter in joule per meter (J/m) en v de snelheid in meter per seconde (m/s).

De snelheid waarbij het energieverbruik per meter minimaal is, heet de kruissnelheid. Om die kruissnelheid te berekenen is de afgeleide van D nodig.
Bereken deze kruissnelheid in m/s. Rond af op één decimaal.
(*Ontleend aan CE havo wiskunde B 2012, tijdvak 1*)

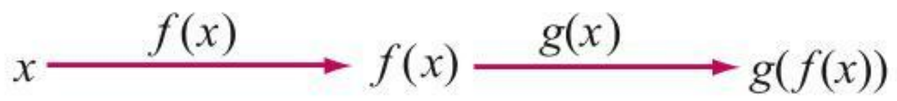
© Noordhoff Uitgevers bv

3-2

Samengestelde functies

8a Gegeven zijn de functies $f(x) = 4x - 2$ en $g(x) = 2^{\frac{1}{2}x}$.
Je berekent $g(f(3))$ door eerst $f(3)$ te berekenen en de uitkomst hiervan in de functie g in te vullen.
Ga na dat $g(f(3)) = 32$.

b Gegeven is de functie $k(x) = 2^{2x-1}$.
Laat zien dat $k(x) = g(f(x))$.



c Gegeven zijn de functies $p(x) = 2x + 1$ en $q(x) = \sin(x)$.
Geef het functievoorschrift van $r(x) = q(p(x))$.

d De functie $m(x) = \log(4x - 3)$ is te schrijven als $m(x) = w(v(x))$.
Geef functievoorschriften van v en w.

Theorie

Als $k(x)$ wordt berekend door eerst x in te vullen in de functie f en dat resultaat in te vullen in de functie g, dan heet de functie k een samenstelling van f en g.
In formule: $k(x) = g(f(x))$.
Een **samengestelde functie** heet ook wel een **kettingfunctie**.

Voorbeeld

De functie k is een kettingfunctie waarbij $k(x) = g(f(x))$.
Geef het functievoorschrift van k als $f(x) = x^3$ en $g(x) = \sqrt{x} + 2$

Oplossing
$k(x) = g(x^3) = \sqrt{x^3} + 2$

H 9 De functies k en h zijn kettingfuncties waarbij $k(x) = g(f(x))$ en $h(x) = f(g(x))$.
Geef de functievoorschriften van k en h als

a $f(x) = \log(x)$ en $g(x) = 4 - 2x$

b $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = 2x - 3$

c $f(x) = 3^x$ en $g(x) = \dfrac{3}{x}$

d $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^2\log(x)$

H 10 Gegeven zijn functies van de vorm $k(x) = g(f(x))$.
Geef mogelijke functievoorschriften van g en f.

a $k(x) = \sqrt{3x^2 - 5}$

b $k(x) = \dfrac{2}{3x^4 + 7}$

c $k(x) = \log(x^2 - 3x)$

d $k(x) = \dfrac{2}{\sin(x)}$

Voorbeeld

De functie $h(x) = \dfrac{5}{(3x^2 + 4)^3}$ is samengesteld uit de functies f en g met $h(x) = g(f(x))$.
Geef functievoorschriften voor f en g.

Oplossing
Kies $f(x) = 3x^2 + 4$ en $g(x) = \dfrac{5}{x^3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

11 Op de grafiek van de functie $k(x) = x^2$ ligt het punt $Q(2, 4)$. Bij de verschuiving van 2 naar rechts is de grafiek van de functie m het beeld van de grafiek van k en punt P het beeld van Q.

a Geef het functievoorschrift van m.

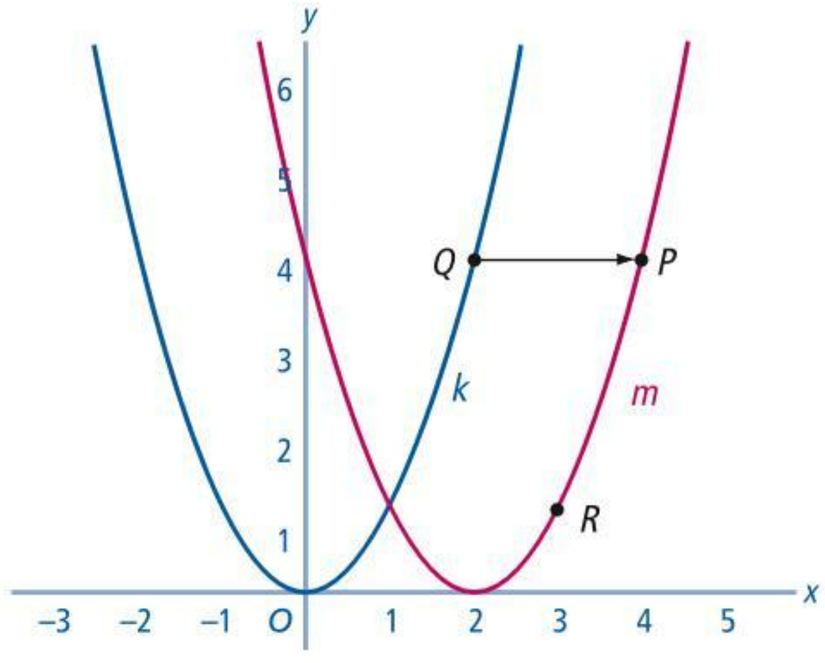
b Bereken exact de helling van de grafiek van k in Q. Waarom weet je nu de helling van de grafiek van m in P?

c Welke waarde van x moet je bij $k'(x)$ invullen om de helling in P te berekenen?

d Wat vul je in bij $k'(x)$ om de helling in het beeldpunt $R(3, 1)$ te berekenen? Vul in: hieruit volgt $m'(3) = k'(\ldots)$.

e Vul in: $m'(x) = k'(x - \ldots.)$.

f Geef het functievoorschrift van m'.



12 In de figuur zie je de grafiek van $k(x) = \sqrt{x}$ en $h(x) = \sqrt{4x}$. Op de grafiek van k ligt $Q(4, 2)$ en op de grafiek van h het punt $P(1, 2)$.
Bij een vermenigvuldiging met $\frac{1}{4}$ ten opzichte van de y-as is de grafiek van h het beeld van de grafiek van k en P het beeld van Q.

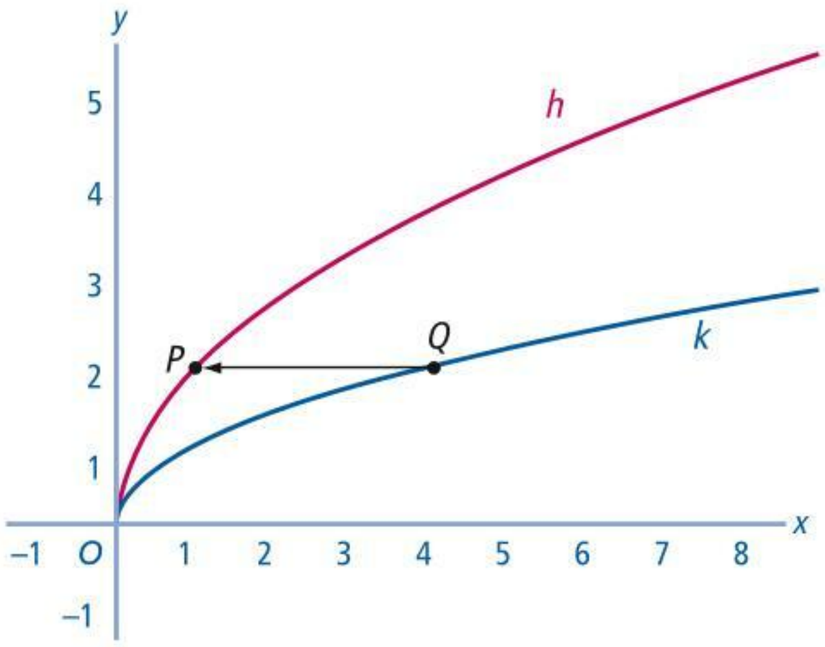
a De raaklijn in Q heeft als vergelijking $y = \frac{1}{4}x + 1$. Geef de vergelijking van het beeld van deze raaklijn bij vermenigvuldiging met $\frac{1}{4}$ ten opzichte van de y-as.

b Hoe groot is de helling in het beeldpunt P?

c Vul in: de helling in punt P = ... × de helling in punt Q, dus $h'(1) = \ldots \cdot k'(4)$.

d Vul in: $h'(x) = \ldots \cdot k'(..x)$.

e Geef het functievoorschrift van h'.



13 Geef met behulp van transformaties de functievoorschriften van de afgeleiden van de volgende functies.

a $f(x) = (x - 3)^5$

b $W = \sqrt{p + 7}$

c $f(x) = \dfrac{4}{x + 5}$

d $y = \sqrt{-x}$

e $f(x) = (x + 8)^4$

f $f(x) = \sqrt[3]{5x}$

g $f(x) = \dfrac{6}{x - 2}$

h $P = \dfrac{6}{4 - t}$

14 Gegeven is de functie $k(x) = -3 + \sqrt{5x}$. Op de grafiek van k liggen de punten $A\left(\frac{1}{5}, -2\right)$ en $B(5, 2)$.

a Geef een vergelijking van de lijn l door A en B.

b Bereken exact de coördinaten van het punt op de grafiek van k waarin de raaklijn aan de grafiek evenwijdig is met l.

© Noordhoff Uitgevers bv

3-3

De kettingregel

15 Bij het vullen van een waterreservoir gelden de formules $V = 2t + 50$ en $h = 2\sqrt{V}$.
t is de tijd in seconden, V het volume in liters en h de waterhoogte in cm.

a Bereken exact met welke snelheid het volume toeneemt in liters per seconde op $t = 10$.

b Druk h uit in t.

c Benader met behulp van een differentiequotiënt op een klein interval met welke snelheid de waterhoogte toeneemt op $t = 10$.

d In de opdrachten a en c heb je de waarde van $\frac{dV}{dt}$ en $\frac{dh}{dt}$ berekend voor $t = 10$. Op dat tijdstip geldt: $V = 70$.
Bereken $\frac{dh}{dV}$ voor $V = 70$.

e Laat zien dat voor $t = 10$ en $V = 70$ geldt: $\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV} \cdot \frac{dV}{dt}$

Theorie

De afgeleide van de kettingfunctie $k(x) = g(f(x))$ is de functie $\boldsymbol{k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$.
Deze regel heet de **kettingregel**.
Bij formules noteer je de kettingregel meestal met differentiaalquotiënten, bijvoorbeeld: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}$

Voorbeeld

Differentieer $k(x) = \sqrt{3x + 2}$.

Oplossing

De functie is te schrijven als
$k(x) = g(f(x))$ met $f(x) = 3x + 2$ en $g(x) = \sqrt{x}$.

$$k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x+2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$$

16 Gegeven is de functie $h(x) = (3x^2 + 3)^2$.
h is een functie van de vorm $h(x) = g(f(x))$.

a Geef de functies f en g waaruit h is samengesteld.

b Geef $f'(x)$ en $g'(x)$.

c Gebruik de kettingregel om $h'(x)$ te vinden.
Schrijf $h'(x)$ zonder haakjes en zo kort mogelijk.

d Geef een zo eenvoudig mogelijk functievoorschrift van h zonder haakjes.

e Differentieer de functie van opdracht d zonder gebruik te maken van de kettingregel en laat zien dat de antwoorden van c en d met elkaar in overeenstemming zijn.

$h(x) = (3x^2 + 3)^2$
$h(x) = (3x^2 + 3) \cdot (3x^2 + 3)$
$h(x) = \ldots$

© Noordhoff Uitgevers bv

Aanpak

Hoe vind je de afgeleide van een kettingfunctie?

1 Schrijf de functies op waaruit de kettingfunctie is samengesteld.
2 Differentieer de functie met de kettingregel.

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = (3x^2 - 2)^3$.

Oplossing

1 $f(x) = g(h(x))$ met
$h(x) = 3x^2 - 2$ en $g(x) = x^3$

2 $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$
$f'(x) = 3(3x^2 - 2)^2 \cdot 6x$
$f'(x) = 18x(3x^2 - 2)^2$

H 17 Differentieer.

a $f(x) = (3x^2 + 8)^4$

b $w(x) = (1 - 3x^3)^6$

c $s = (t^3 + 7)^3$

d $h(x) = (5x^{1,3} - 12)^7$

e $p = \left(2 - \sqrt{q}\right)^5$

f $k(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^3$

18 Gegeven is de functie $f(x) = (x^3 + 4x)^5$. Femke vindt voor de afgeleide: $f'(x) = 5(x^3 + 4x)^4(3x^2 + 4)$. Casper vindt: $f'(x) = 15x^2(x^3 + 4x)^4 + 4$.

a Wie heeft er gelijk?

b Wat heeft de ander verkeerd gedaan?

19 Differentieer.

a $f(x) = (x^2 + x + 311)^4$

b $g(x) = (3x^{2,7} - 19^{1,7})^3$

20 Differentieer.

a $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

b $g(x) = \frac{5}{(2x^3 - 4x)^2}$

c $h(x) = \frac{3}{(x + 4)^2 - 4}$

d $g(x) = \frac{-4}{(x^4 + 7x)^3}$

$\frac{1}{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{-1}$

21 Differentieer.

a $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

b $g(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$

c $y = \sqrt{2x^3 - 4x} + 5x$

d $g(x) = 4x - \sqrt{4x - 4x^4}$

$\sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$

H 22 Differentieer.

a $f(x) = (4x^3 - 6x)^4$

b $y = 12\sqrt{3x^4 - 2x}$

c $y = \frac{12}{\sqrt{3x^4 - 2}}$

d $A = (4t^{10} - 75)^8$

e $g(x) = (4 - 8x^2)^{1,25}$

f $p = \frac{6}{(3t^2 - 4t)^3}$

23 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{g(x)}$.

a Toon aan dat $f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

b Hebben f en f' hetzelfde domein?

© Noordhoff Uitgevers bv

3-4

Extreme waarden

24 Gegeven is de functie $g(x) = 2{,}4x^5 - 16x^3$.

a Los exact op $g'(x) = 0$.

b Plot de grafiek van g en ga na bij welke waarden van x de grafiek van g een top heeft.

c Bereken de y-coördinaat van een eventuele top en geef aan of het een minimum of maximum betreft.

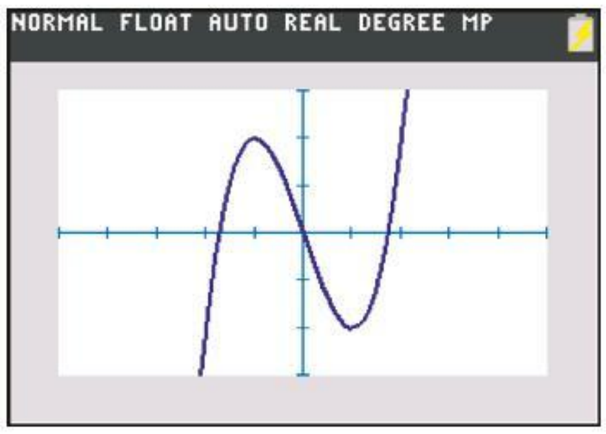
Aanpak

Hoe bereken je de extreme waarden van een functie f?

1 Los op $f'(x) = 0$.
2 Ga met een plot na of de grafiek van f bij de oplossingen van $f'(x) = 0$ een top heeft.
3 Bereken de y-coördinaat van een eventuele top. Geef aan of het een maximum of een minimum betreft.

Voorbeeld

Bereken de extreme waarden van de functie $f(x) = x^3 - 3x$.



Oplossing

1 $f'(x) = 3x^2 - 3$,
$f'(x) = 0$ geeft $x = -1$ of $x = 1$
2 Uit de figuur blijkt:
3 f heeft een maximum $f(-1) = 2$
f heeft een minimum $f(1) = -2$

H 25 Bereken exact de extreme waarden van de functie f.

a $f(x) = x^4 - 4x^2$

b $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$

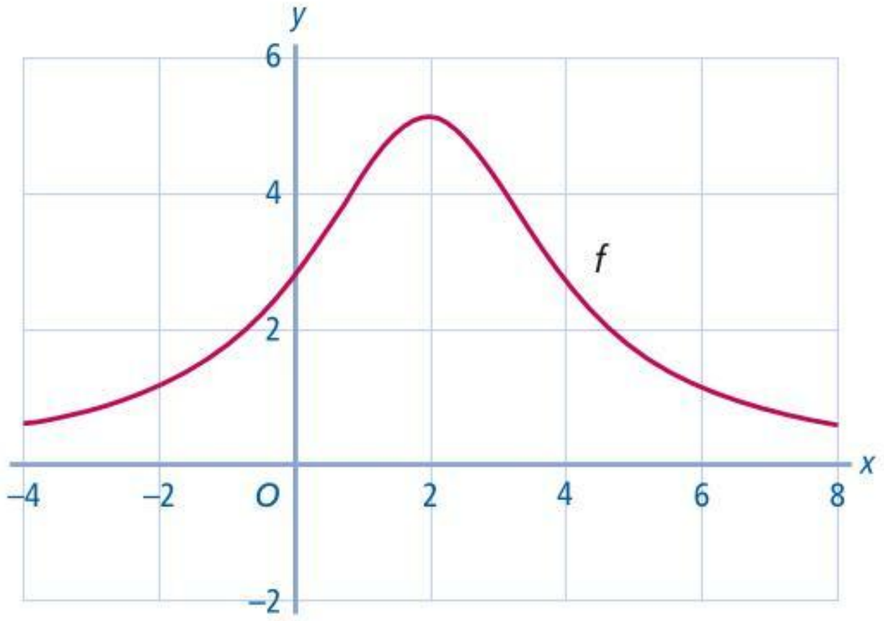
26 In de figuur zie je de grafiek van de functie

$$f(x) = \frac{20}{(x-2)^2 + 4}$$

a Leg uit hoe je aan het functievoorschrift kunt zien dat f een extreme waarde heeft.

b De grafiek suggereert dat f maar één extreme waarde heeft. Ga met behulp van de afgeleide na dat dit inderdaad het geval is.

c Bereken de extreme waarde van f.



© Noordhoff Uitgevers bv

27 Gegeven is de functie $h(x) = 1 + 2\sqrt{3 - 2x}$.

a Geef het domein en het bereik van h.

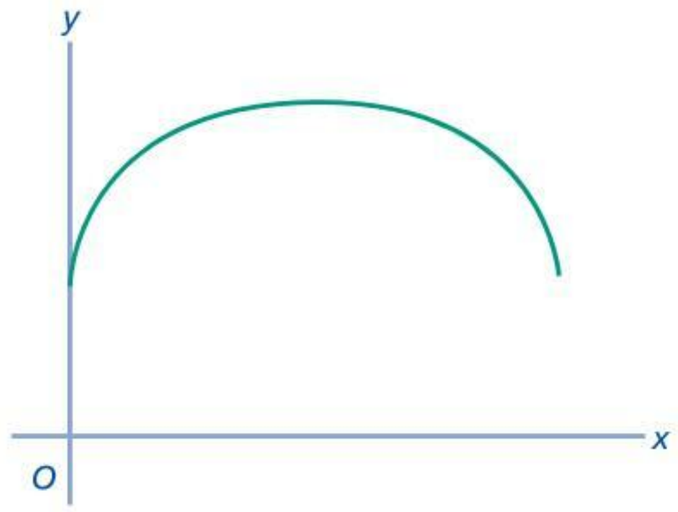
b Onderzoek of de vergelijking $h'(x) = 0$ oplossingen heeft.

c Ga met een plot na of h een extreme waarde heeft.

Als de grafiek van een functie een randpunt heeft, zoals bij een wortelfunctie, dan heeft die functie daar een (rand)maximum of (rand) minimum.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $h(x) = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{12x - 2x^2}$.
Bereken exact de extreme waarde van h.
Bereken ook exact de randextremen.



Oplossing

$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12 - 4x}{2\sqrt{12x - 2x^2}} = \frac{3 - x}{\sqrt{12x - 2x^2}}$

$h'(x) = 0$ geeft $x = 3$, $h(3) = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{18} = 2 + 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

h heeft een maximum $h(3) = 2 + 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Voor het domein van h geldt $12x - 2x^2 \geq 0$.

$2x(6 - x) = 0$ geeft randpunten $(0, 2)$ en $(6, 2)$.

h heeft randminima $h(0) = 2$ en $h(6) = 2$.

H 28 Bereken exact de extreme waarden van de volgende functies.
Vermeld ook eventuele randextremen.

a $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

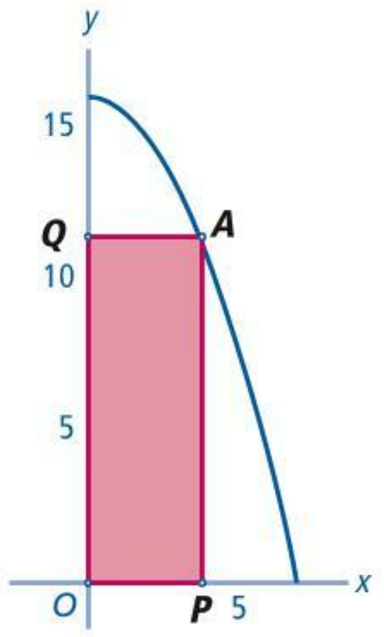
b $h(x) = (x^3 - 3x)^4$

c $g(x) = x^2 - 4x\sqrt{x}$

d $p(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 2}$

e $n(x) = 6x - 7$

f $q(x) = \frac{-5}{x^2 + 3}$

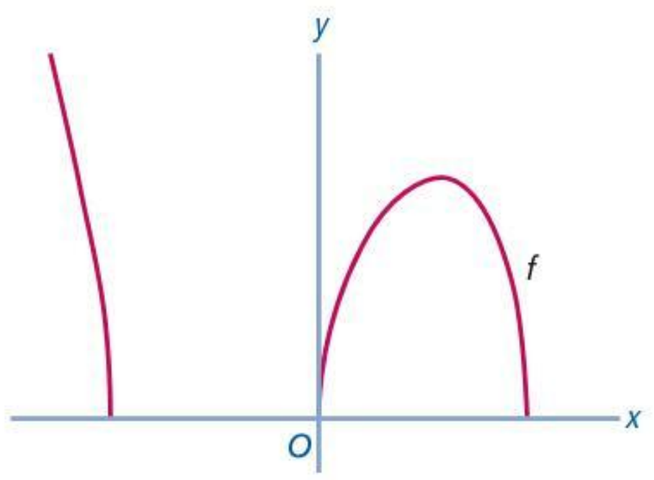


29 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 16$ met $x > 0$.
Op de grafiek van f wordt tussen de y-as en het snijpunt van de grafiek met de x-as een punt A gekozen.
De projecties van A op de x-as en y-as zijn de punten P en Q.
Bereken exact de maximale oppervlakte van rechthoek $OPAQ$.

30 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{12x - x^3}$.

a In de figuur zie je dat de grafiek een top heeft.
Bereken exact de coördinaten van de top.

b Bereken exact het domein van f.



© Noordhoff Uitgevers bv

3-5

Buigpunten

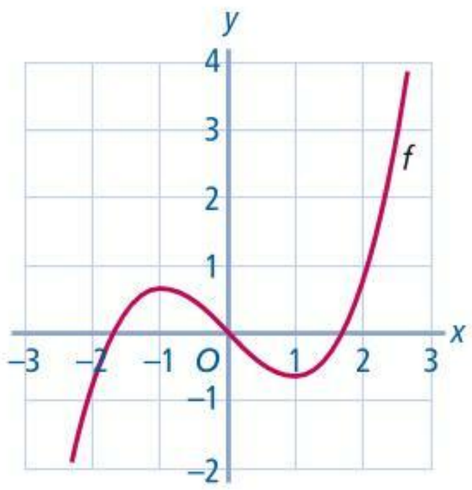
31 Hiernaast staan de grafiek en de hellinggrafiek van de functie f.

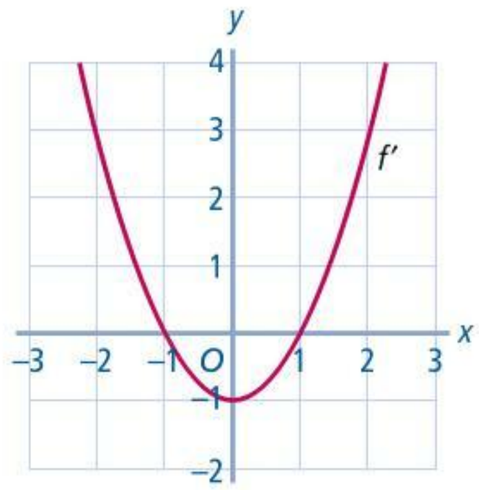
a Op het interval $\langle -1, 1\rangle$ daalt de grafiek. Hoe zie je dat in de grafiek van de afgeleide?

b Is de daling op het interval $\langle -1, 0\rangle$ toenemend of afnemend? Hoe zie je dat in de grafiek van f'?

c Welke soort daling vertoont de grafiek op het interval $\langle 0, 1\rangle$?

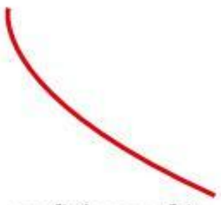
d Welke soort stijging vertoont de grafiek op het interval $\langle -2, -1\rangle$?





Theorie

De afgeleide functie f' geeft informatie over het stijgen en dalen van de grafiek van f.
Bij waarden van x waar $f'(x) > 0$, stijgt de grafiek van f.
Bij waarden van x waar $f'(x) < 0$, daalt de grafiek van f.
In het overzicht hiernaast zie je het verband tussen toenemende of afnemende stijging of daling van de grafiek van f en het stijgen of dalen van de grafiek van f'.

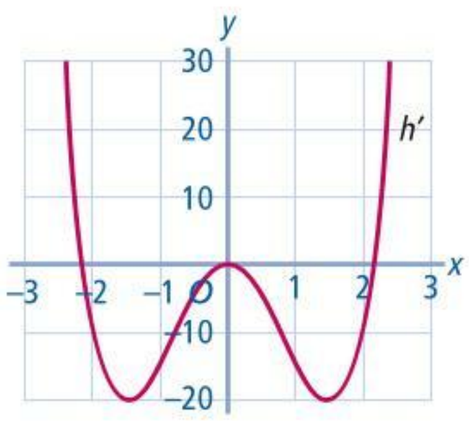
	grafiek van f' stijgt	grafiek van f' daalt
$f'(x) > 0$	grafiek van f is toenemend stijgend	grafiek van f is afnemend stijgend
$f'(x) < 0$	 grafiek van f is afnemend dalend	grafiek van f is toenemend dalend

H 32 In de figuur zie je de grafiek van de afgeleide van de functie h.
h' heeft extreme waarden bij $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$ en $x = \sqrt{2}$.

a Bij welke waarden van x is de grafiek van h afnemend dalend? En bij welke waarden toenemend dalend?

b Bij welke waarden van x gaat de grafiek van h over van toenemend dalend naar afnemend dalend?

c Maak een schets van de grafiek van h met $h(0) = 0$.



33 Gegeven is de functie $f(x) = x - 4\sqrt{x}$.

a Plot de grafiek van f en bereken exact de extreme waarde(n) van f.

b Toon met behulp van differentiëren aan dat de grafiek van f' stijgt voor $x > 0$.

c De grafiek van f is eerst dalend en daarna stijgend.
Is er hier sprake van afnemende of toenemende daling?
En is er sprake van afnemende of toenemende stijging?

© Noordhoff Uitgevers bv

34a Schets de grafiek van een functie f die overgaat van afnemende stijging naar toenemende stijging.

b Het punt waar de overgang plaatsvindt, noem je A. Leg uit dat f' een extreme waarde heeft voor de x-coördinaat van A.

c Teken de raaklijn in A aan de grafiek.

Theorie

Als de afgeleide functie een extreme waarde heeft, is er een punt op de grafiek waar de helling een maximale of minimale waarde heeft. Zo'n punt heet een **buigpunt**. Je berekent de extreme waarden van f' door f' te differentiëren.
De afgeleide van f' heet de **tweede afgeleide**. Je noteert de tweede afgeleide als f'' (f-dubbel accent).
Andere notaties zijn y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$ en $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.
Buigpunten vind je door $f''(x) = 0$ op te lossen en met een plot te onderzoeken of de grafiek voor die waarden van x een buigpunt heeft.
De raaklijn in het buigpunt heet ook wel de **buigraaklijn**.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van de functie $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 8x$.

Oplossing
$f'(x) = -3x^2 + 12x + 8$ en
$f''(x) = -6x + 12$
$f''(x) = 0$ voor $x = 2$.
In een plot van de grafiek zie je dat de grafiek bij $x = 2$ een buigpunt heeft.
$f(2) = -8 + 24 + 16 = 32$
Het buigpunt is $(2, 32)$.

35 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2$.

a Los exact op $f''(x) = 0$.

b Onderzoek met een plot of de grafiek voor de gevonden waarden van x buigpunten heeft.

c Bereken exact de coördinaten van de buigpunten.

d Beantwoord de opdrachten a en b voor de functie $f(x) = x^4$.

H 36 Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f.

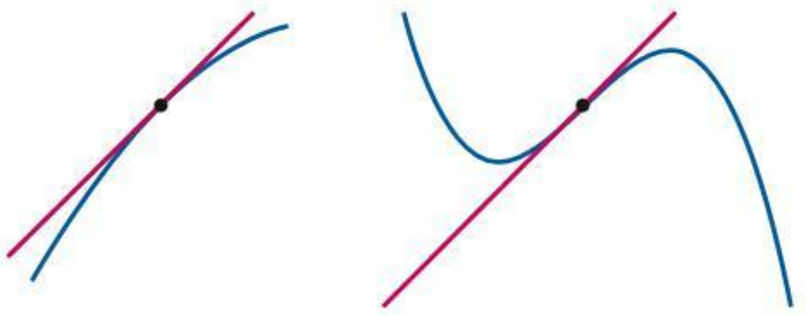
a $f(x) = x^4 - 4x^3$

b $f(x) = \frac{6x - 4}{x^2}$

c $f(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{12}x^4 - x^3$

d $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 5}{10x}$

Trek je een raaklijn aan de grafiek van een functie, dan zal de grafiek in het algemeen in de buurt van het raakpunt aan één kant van de raaklijn liggen. Een buigraaklijn ligt links en rechts van het buigpunt aan verschillende kanten van de grafiek.
De grafiek passeert als het ware de buigraaklijn.



37 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{54}x^4 - x^2$.

a Bereken exact de nulpunten van f.

b Bereken exact de extreme waarden van f.

c Stel van elke buigraaklijn een vergelijking op.

38 Een functie f heeft een extreme waarde $f(a)$; $f'(a) = 0$ en $f''(a) < 0$.
Is $f(a)$ een minimum of een maximum?

© Noordhoff Uitgevers bv

3-6

Gemengde opdrachten

39 Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = x^3 - 6x^2 + ax$.

a Voor elke waarde van a gaat de grafiek van f_a door $(0, 0)$. Toon dit aan.

b Toon aan dat de grafiek van f_a voor elke waarde van a een buigpunt heeft en druk de coördinaten van dit buigpunt uit in a.

c Laat zien dat de grafiek voor $a = 12$ een buigpunt met een horizontale raaklijn heeft.
Bereken exact de coördinaten van dit buigpunt.

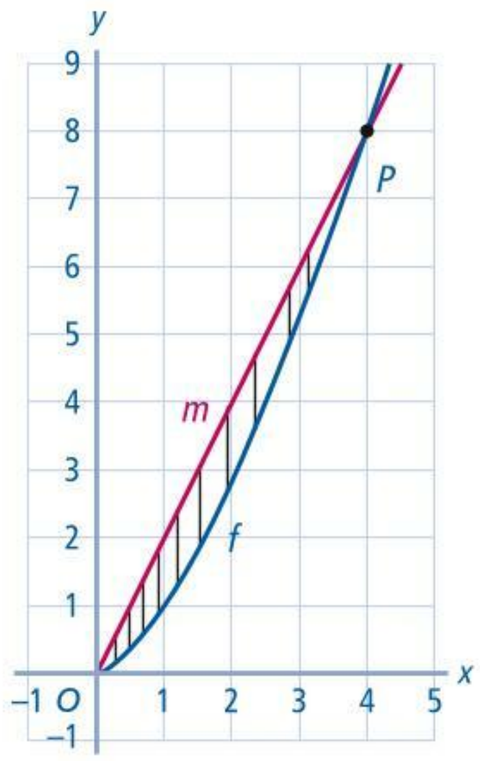
d Voor welke waarden van a heeft de grafiek geen horizontale raaklijn?

40 Op de grafiek van de functie $f(x) = x\sqrt{x}$ ligt een punt P.
m is de lijn door O en P. In het gebied begrensd door m en de grafiek van f zijn een aantal verticale lijnstukjes getekend.
De lengte van zo'n lijnstukje is een functie l van x.

a Kies voor P het punt $(4, 8)$ en geef het functievoorschrift van l.

b Bereken exact de maximale lengte van zo'n lijnstukje.

c Kies voor P het punt $\left(p, p\sqrt{p}\right)$ en bereken p voor het geval dat de maximale lengte van het lijnstukje gelijk is aan 4.



41 Gegeven is de functie $g(x) = -2 + 2\sqrt{3x^2 - 2x}$.

a Bereken exact het domein van g.

b Bereken de randextremen van g.

c De grafiek van g snijdt de x-as in de punten A en B.
Bereken exact de coördinaten van deze punten.

d Bereken exact de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van g in punt A.

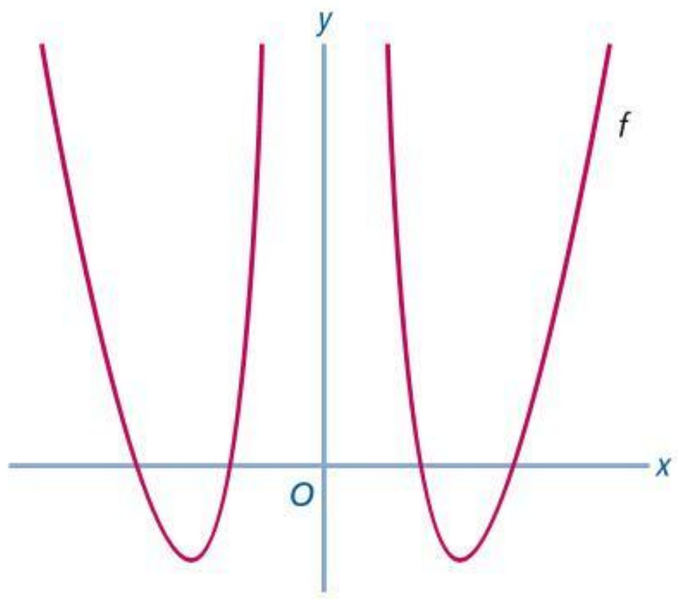
e Bereken ook exact de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van g in punt B.

f De raaklijnen aan de grafiek in g in de punten A en B snijden elkaar in punt C.
Bereken exact de coördinaten van punt C.

42 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2}$

a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x-as.

b Bereken exact de extreme waarden van f.



© Noordhoff Uitgevers bv

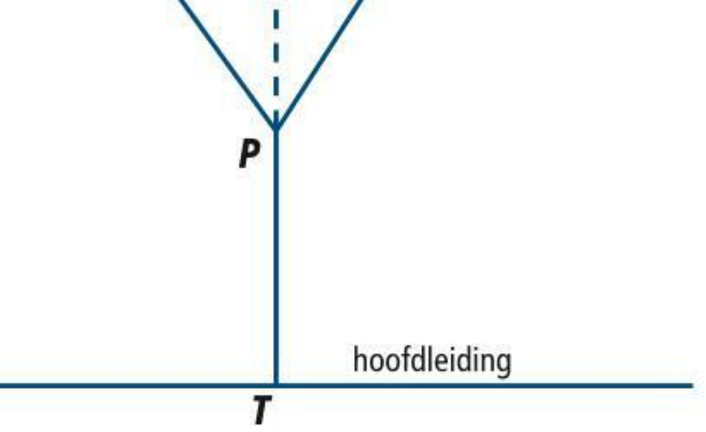
43 Gegeven is de familie van functies $f_{p,q}(x) = p(x + 2)^3 + q$.

a Bereken de waarde van p en van q als gegeven is dat de grafiek van $f_{p,q}$ door de punten $(0, 0)$ en $(-3, 18)$ gaat.

b Een lijn l met richtingscoëfficiënt -6 raakt de grafiek van een functie $f_{p,q}$ in het punt $(-4, 12)$.
Bereken de waarde van p en van q waarvoor dit het geval is en stel een vergelijking van l op.

c Toon aan dat de buigpunten van de grafieken van alle functies $f_{p,q}$ op een rechte lijn liggen en geef een vergelijking van deze lijn.

44 Hiernaast staan de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ en $g(x) = \dfrac{25}{\sqrt{x^2 + 9}}$. In het snijpunt P zijn de raaklijnen aan beide grafieken getekend.



a Controleer met een berekening dat de grafieken elkaar snijden in het punt $P(4, 5)$.

b Bereken exact de helling van beide grafieken in P.

c De raaklijnen in P aan beide grafieken sluiten samen met de y-as een driehoek in.
Bereken de oppervlakte van deze driehoek.

45 De huizen A en B moeten op de waterleiding worden aangesloten. De huizen liggen beide op 100 meter afstand van de hoofdleiding. In plaats van twee aftakkingen van de hoofdleiding, één naar A en één naar B, wordt gekozen voor een Y-verbinding: één aftakking bij T die zich bij P splitst in een tak naar A en een tak naar B. De punten P en T worden zo gekozen dat ze even ver van A als van B liggen.
De afstand in meters tussen A en B wordt a genoemd.
De afstand in meters tussen P en de lijn AB is x, waarbij $0 < x < 100$. De totale lengte in meters van de nieuw aan te leggen leidingen is l_a.

a Neem $a = 20$ en ga na dat $l_{20} = 100 - x + \sqrt{4x^2 + 400}$.

b Bereken algebraïsch voor welke waarde van x de totale lengte l_{20} minimaal is.

c Leid uit de gegevens af dat $l_a = 100 - x + \sqrt{4x^2 + a^2}$.

d Toon met behulp van differentiëren aan dat l_a minimaal is als geldt: $x = \dfrac{1}{\sqrt{12}}\,a$.

e Laat zien dat het minimum gelijk is aan $100 + \frac{1}{2}\,a\sqrt{3}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Samenvatting

Samengestelde functie, kettingfunctie

Als $k(x)$ wordt berekend door eerst x in te vullen in de functie f en het resultaat in te vullen in de functie g, dan heet de functie k een samenstelling van f en g. In formule: $k(x) = g(f(x))$.
Een samengestelde functie heet ook wel een kettingfunctie.

Voorbeeld

$f(x) = 4x^2 + 1$ en $g(x) = 2 + \sqrt{x}$
$k(x) = g(f(x)) = g(4x^2 + 1)$
$= 2 + \sqrt{4x^2 + 1}$

De kettingregel

De afgeleide van de kettingfunctie $k(x) = g(f(x))$ is de functie $k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.
Deze formule om de afgeleide te vinden heet de kettingregel.
De kettingregel kun je ook noteren als $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Maxima en minima, extreme waarden

Maximale en minimale functiewaarden heten extreme waarden.
Extreme waarden vind je door $f'(x) = 0$ op te lossen.
Als de grafiek van een functie f een randpunt heeft, zoals bij een wortelfunctie, dan heeft die functie voor die waarde van x daar een (rand)maximum of (rand)minimum.

Buigpunten

Een buigpunt is een punt op de grafiek van een functie f waar de helling een extreme waarde heeft. Je berekent de extreme waarden van f door f' te differentiëren. De afgeleide van f' heet de tweede afgeleide, notatie f'' (f-dubbel accent).
Een buigpunt vind je door $f''(x) = 0$ op te lossen.

$f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

Je kunt machtsfuncties met gebroken en negatieve exponenten differentiëren

De afgeleide van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van a.

Voorbeelden

functie/formule	afgeleide
$f(x) = x^{0,4}$	$f'(x) = 0,4x^{-0,6}$ of $f'(x) = \frac{2}{5x^{0,6}}$
$f(t) = 4t\sqrt{t}$ $(= 4t^{1\frac{1}{2}})$	$f'(t) = 4 \cdot 1\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}$ of $f'(t) = 6\sqrt{t}$
$P = \frac{1}{t^4}$ $(= t^{-4})$	$\frac{dP}{dt} = -4t^{-5}$ of $\frac{dP}{dt} = -\frac{4}{t^5}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt kettingfuncties differentiëren

Schrijf de functies op waaruit de kettingfunctie is samengesteld en pas de kettingregel toe om de afgeleide functie te vinden.

Voorbeeld

Differentieer de functie $h(x) = 2\sqrt{3x^4 - 5x}$

Oplossing

Neem $f(x) = 3x^4 - 5x$ en $g(x) = 2\sqrt{x}$

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}(12x^3 - 5) = \frac{12x^3 - 5}{\sqrt{3x^4 - 5x}}$$

Je kunt met de afgeleide functie de maxima en minima van een functie *f* berekenen

Je berekent de waarden van x waarvoor $f'(x) = 0$. Voor randextremen kijk je naar de rand van het domein. Met een plot ga je na of de functie een minimum of een maximum heeft.

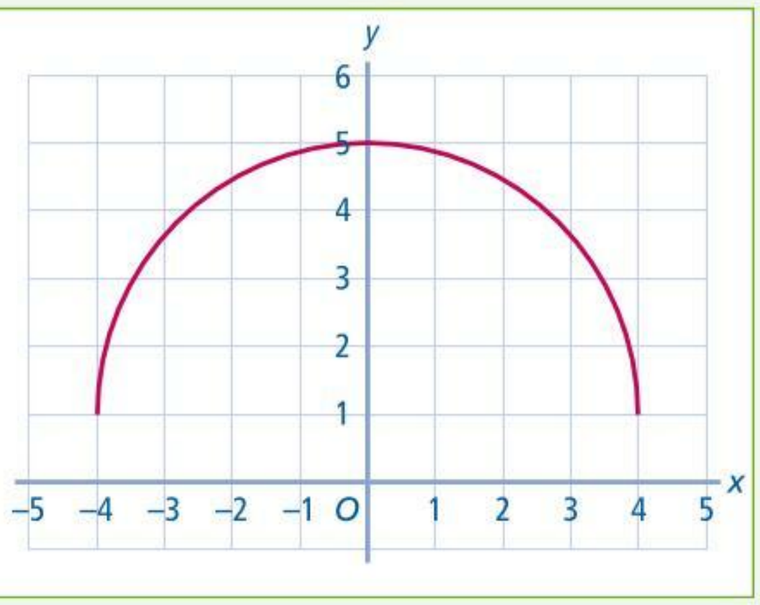
Voorbeeld

Bereken de extreme waarden (en ook de randextremen) van de functie $h(x) = \sqrt{16 - x^2} + 1$.

Oplossing

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}} \cdot -2x = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}; \; h'(x) = 0 \text{ voor } x = 0.$$

Met een plot zie je dat er een maximum $f(0) = 5$ is.
De grafiek van h heeft randpunten bij $x = -4$ en bij $x = 4$.
Het randminimum is $h(-4) = h(4) = 1$.



Je kunt met de tweede afgeleide de coördinaten van een buigpunt berekenen

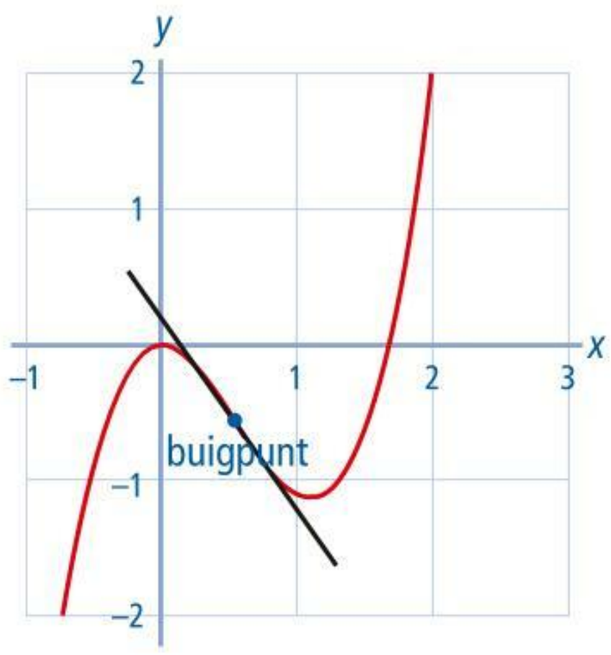
Je berekent de waarden van x waarvoor $f''(x) = 0$. Met een plot ga je na of de grafiek voor die x-waarden een buigpunt heeft.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.
Bereken exact de coördinaten van het buigpunt en stel een vergelijking op van de buigraaklijn.

Oplossing

$f'(x) = 6x^2 - 6x$ en $f''(x) = 12x - 6$.
$f''(x) = 0$ voor $x = \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$,
De plot geeft aan dat $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ een buigpunt is.
$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1\frac{1}{2}$, de raaklijn heeft vergelijking $y = -1\frac{1}{2}x + b$.
Invullen van $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ geeft $b = \frac{1}{4}$.
Een vergelijking van de buigraaklijn is $y = -1\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.



© Noordhoff Uitgevers bv

Test jezelf

T-1a Differentieer en schrijf de afgeleide zonder gebroken en negatieve exponenten.

A $g(x) = \dfrac{3x^2 + 5}{x^2}$ **B** $f(x) = 4x^3 + \sqrt{x}$

b Gegeven is de formule $h = \left(\sqrt{x} + x\right) \cdot (x - 1)$. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-1.

T-2 Gegeven zijn functies van de vorm $k(x) = g(f(x))$.
Geef mogelijke functievoorschriften van g en f.

a $k(x) = 3 + 2(4x - 9)^5$ **c** $k(x) = (2x - x^2)^{1{,}7}$

b $k(x) = \sqrt{6x - 3x^2} - 7$ **d** $k(x) = \dfrac{2}{(x^3 - 7)^4}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-2.

T-3 De functie k is een kettingfunctie: $k(x) = g(f(x))$.
Geef het functievoorschrift van k als

a $f(x) = 2^x$ en $g(x) = \log(x + 4)$

b $f(x) = 3x^2 - 5\frac{1}{3}$ en $g(x) = \cos(x)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-2.

T-4 Differentieer.

a $f(x) = (x - 3)^{10} + 2$ **c** $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ **e** $q(x) = \dfrac{2}{(x^3 - 7)^4}$

b $g(p) = (2 - p^2)^3$ **d** $k(x) = (2x - 3x^4)^2$ **f** $m(t) = 3 + 2(4t - 9)^5$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-3.

T-5 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$.

a Bereken exact de coördinaten van de punten op de grafiek van f waar de raaklijn horizontaal loopt.

b Onderzoek of er in de gevonden punten sprake is van een maximum, een minimum of geen van beide.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-4.

T-6 Gegeven is de functie $g(x) = \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{24}{x^2}$

a Geef het domein van g.

b Bereken exact de x-coördinaat van de top van de grafiek van g.

c Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van g.

d Stel een vergelijking op van de buigraaklijn.

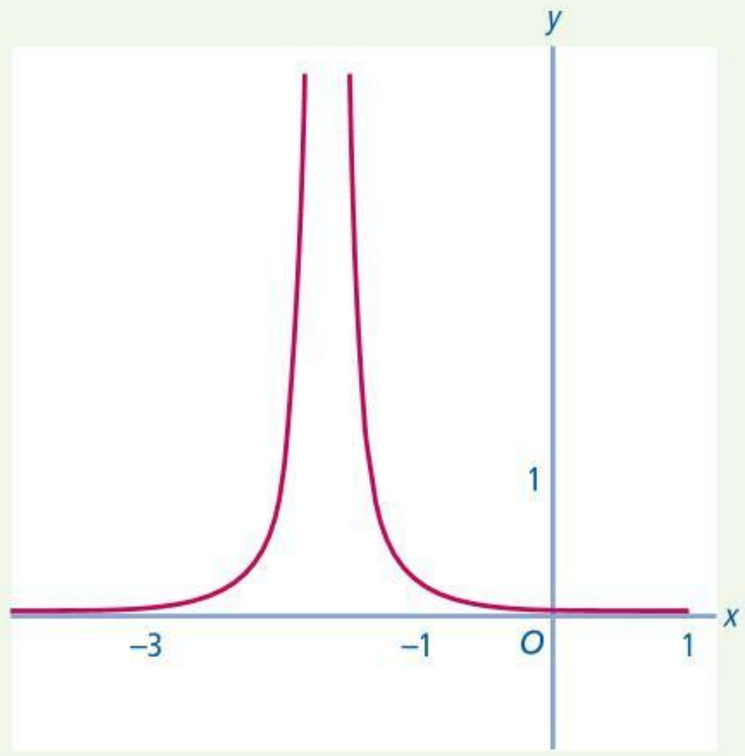
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-5.

© Noordhoff Uitgevers bv

T-7 In de figuur zie je de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1}{(3x+5)^2}$

a Toon aan dat $f'(x) = \dfrac{-6}{(3x+5)^3}$

b Punt $P\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ ligt op de grafiek van f.
De lijn $y = ax + b$ raakt de grafiek van f in P.
Bereken exact de waarde van a en van b.
(*Ontleend aan CE pilot havo wiskunde B 2014, tijdvak 1*)

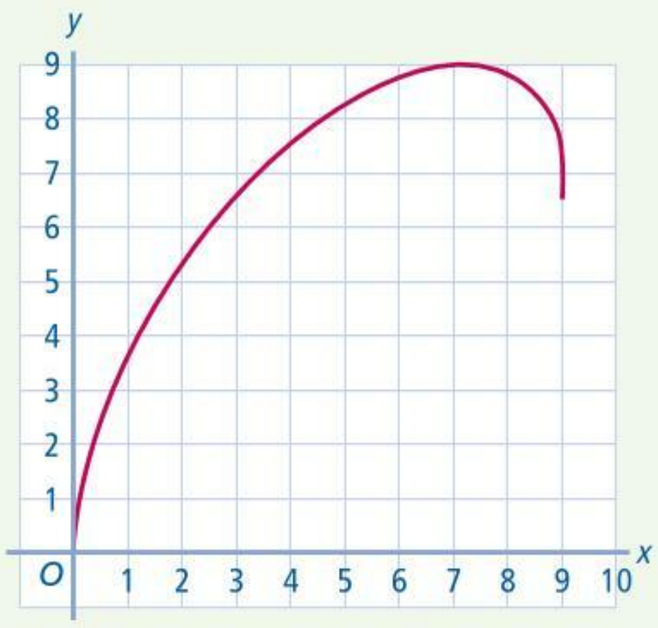


T-8 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{4}x + \sqrt{9x - x^2}$.

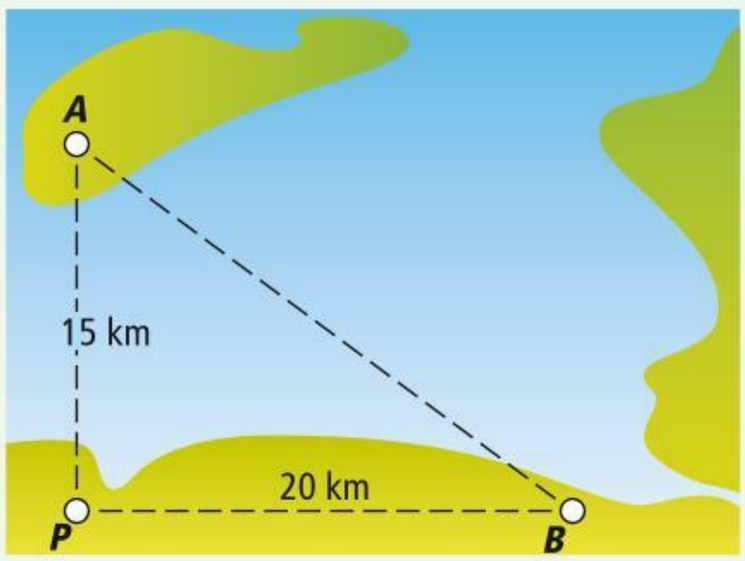
a Geef het domein van f.

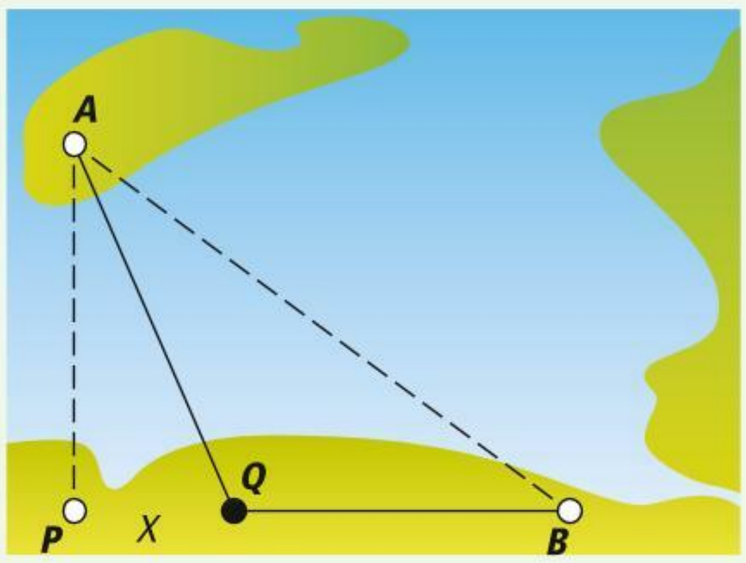
b Bereken exact de extreme waarden van f.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x-coördinaat $4\frac{1}{2}$.



T-9 Plaats A ligt op een eiland, plaats B op het vaste land.
Tussen de plaatsen A en B moet een kabel worden gelegd.





De aanlegkosten onder water bedragen € 1.000,- per km;
de aanlegkosten over land zijn € 400,- per km

a Bereken de kosten als de kabel rechtstreeks van A naar B wordt gelegd.

b Toon aan dat de kosten voor het traject A-P-B lager zijn.

Misschien ligt er tussen P en B een punt Q zodat de kosten over het traject A-Q-B nog lager zijn

c Noem $PQ = x$ (km) en toon aan dat de aanlegkosten K gegeven worden door de formule $K = 1000\sqrt{225 + x^2} + 400(20 - x)$.

d Bereken de afstand PQ waarvoor de aanlegkosten minimaal zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Basis**

B-1 Differentieer de volgende functies.

a $p(x) = 2\sqrt[3]{x}$

b $g(x) = 2\sqrt{x} + 5x^2$

c $k(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^6}$

d $f(x) = 5x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x}$

e $h(x) = \sqrt[3]{x} \cdot x^3$

f $k(x) = \dfrac{2}{x^{1,3}} - \dfrac{4}{x^{2,8}}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-1.

B-2 De functie $h(x) = \sqrt{x^4 - 3}$ heeft de vorm $h(x) = g(f(x))$.
Geef mogelijke functievoorschriften van f en g.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-2.

B-3 Differentieer de volgende functies en schrijf de afgeleide zonder gebroken en negatieve exponenten.

a $g(m) = (4m - 5)^3$

b $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2x - 0{,}5}}$

c $h(x) = \dfrac{4}{x^2 + 3}$

d $Q(p) = \sqrt{2p^3 - 25p}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-3.

B-4 Bereken bij welke waarden van x de afgeleide van de volgende functies gelijk is aan nul. Onderzoek of er bij deze waarden van x sprake is van een maximum, een minimum of geen van beide. Vermeld ook eventuele randextremen.

a $k(x) = \dfrac{3}{2x^2 - x}$

b $g(x) = 3 + 2\sqrt{4x - x^2}$

c $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2 - 2x}}$

d $f(x) = (x^2 - 2)^4$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-4.

B-5 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3$.

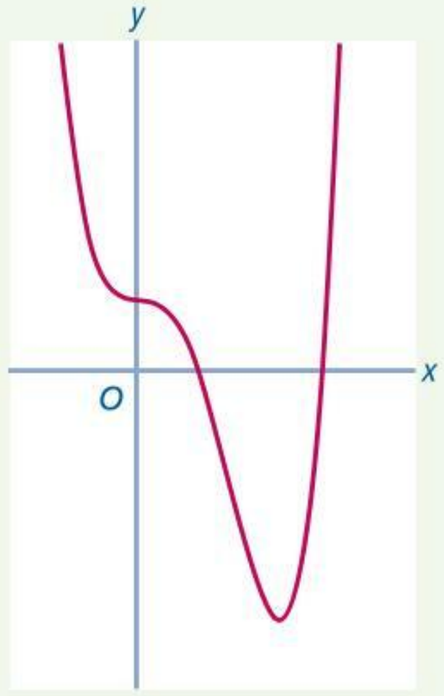
a Bereken de extreme waarde van f.

b Bereken de coördinaten van de buigpunten.

c Stel een vergelijking op van elke buigraaklijn.

d Voor welke waarden van x is de grafiek van f toenemend dalend?

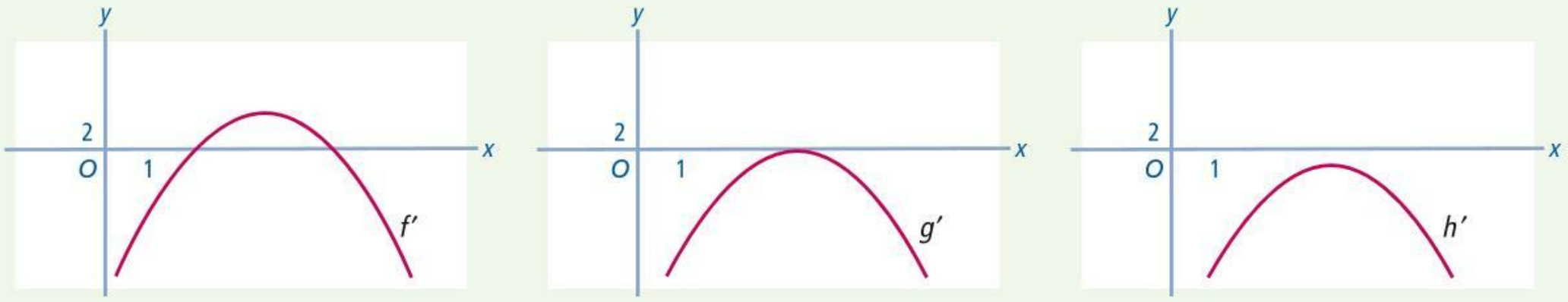
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-5.



© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Gemengd**

G-1



De functies f, g en h zijn derdegraadsfuncties. Hierboven staan de grafieken van f', g' en h'.
Schets een mogelijke grafiek van f, van g en van h.

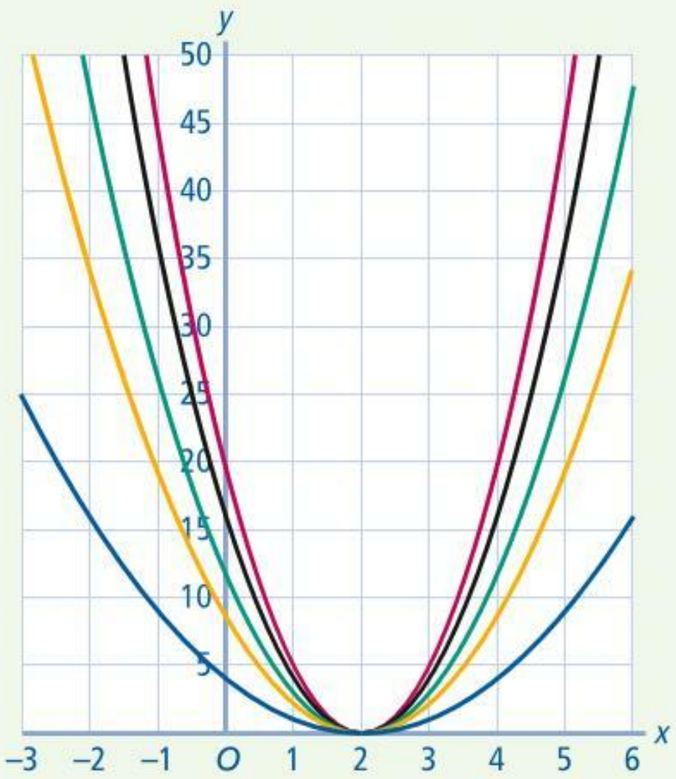
G-2 In de figuur zie je voor verschillende waarden van a de grafiek van de functie $f_a(x) = a(2 - x)^2$.

a Bereken exact voor welke waarde van a de helling in het punt van de grafiek van f_a met x-coördinaat 1 gelijk is aan -6.

b In welk punt van de grafiek van f_1 is de helling 1?

c In welk punt van de grafiek van f_4 is de helling 1?

d Toon aan dat voor elke $a \neq 0$ geldt:
Het punt op de grafiek van f_a waarin de helling van de grafiek van f_a gelijk is aan 1, ligt op de grafiek van de functie $k(x) = \frac{1}{2}x - 1$.



G-3 Gegeven zijn de functies $g_a(x) = \dfrac{1}{3x - a} - \dfrac{1}{(3x - a)^2}$

a Neem $a = 6$. Bij welke transformatie is de grafiek van g_6 het beeld van de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{(3x)^2}$?

b $g_a(4)$ is een extreme waarde van een functie g_a.
Bereken exact de waarde van a.

c De grafiek van een functie g_a heeft een buigpunt bij $x = 2$.
Bereken de waarde van a.

G-4 Differentieer de volgende functies.

a $g(x) = (8x - 4)^3 + 7$

b $p(t) = \dfrac{10}{(x - 5)^2 - 25}$

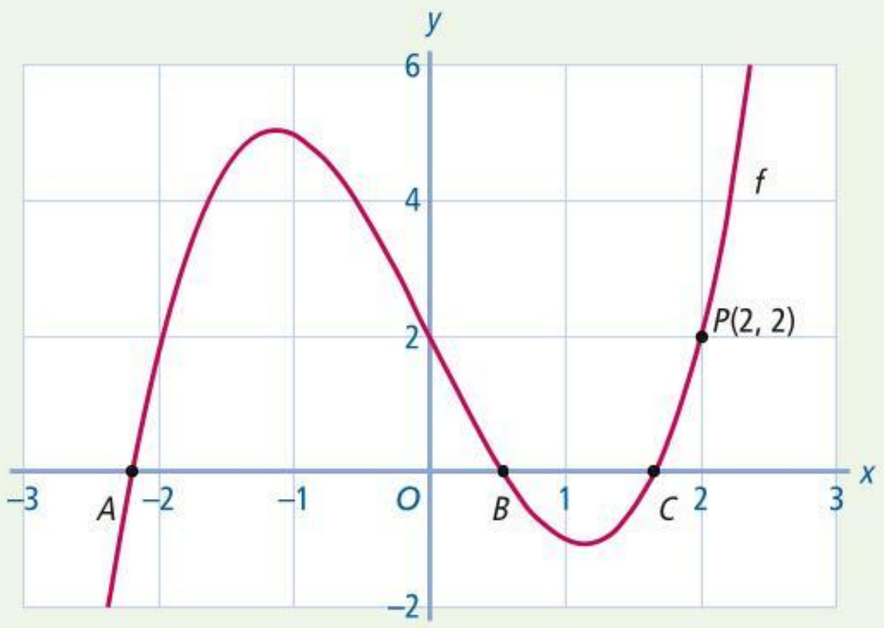
c $Q(p) = (3p + 2)\sqrt{3p + 2}$

d $g(p) = 2\sqrt{(4p)^3 - 7}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Uitdagende opdrachten

U-1 Grafische rekenmachines en computers worden geprogrammeerd om nulpunten van functies numeriek te benaderen. Een van de methodes die daarbij kan worden gebruikt, is de methode van Newton-Raphson.
Neem de functie $f(x) = x^3 - 4x + 2$.
De grafiek van de functie snijdt de x-as in de punten A, B en C. Om x_C te benaderen, kies je als startwaarde een geheel getal in de buurt van x_C.



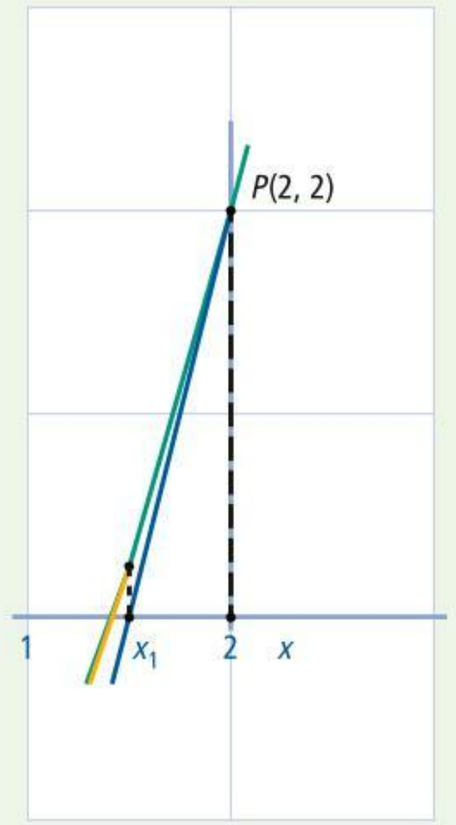
a Kies $x_0 = 2$. Bereken $f(2)$ en stel een vergelijking op van de (blauwe) raaklijn aan de grafiek van f in het punt $P(2, f(2))$.

b Bereken exact de x-coördinaat x_1 van het snijpunt van de raaklijn met de x-as. x_1 is een eerste benadering van x_C.

c Herhaal dit proces met x_1 als startwaarde. Je vindt x_2.

d Vergelijk x_2 met de decimale benadering van x_C van je rekenmachine (gebruik de zero-functie).

e Benader zo ook x_A en x_B.



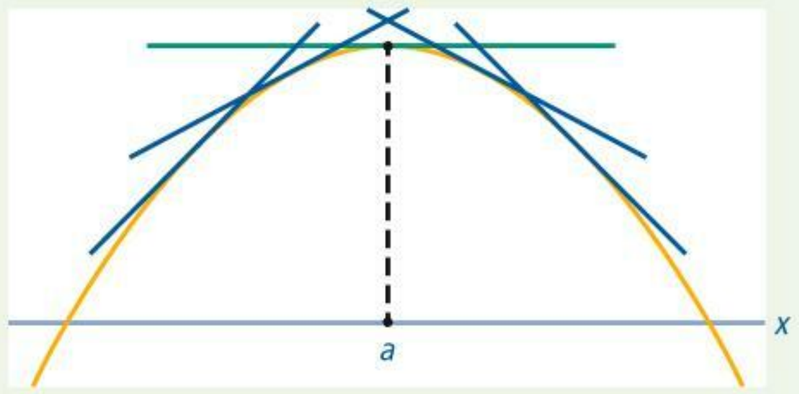
In toegepaste wiskunde wordt de aard van een extreem vaak bepaald met behulp van de tweede afgeleide. In de volgende opdracht ontdek je hoe dat gaat.

U-2a In de figuur zie je de grafiek van een functie f met een aantal stukjes raaklijn in de buurt van de top $(a, f(a))$.
Neemt de helling van de grafiek van f in de buurt van de top toe of af?

b Leg uit dat als de grafiek van f een top $(a, f(a))$ heeft en $f''(a) < 0$, $f(a)$ een maximum is van f.

c Beredeneer dat als de grafiek van f een top $(b, f(b))$ heeft en $f''(b) > 0$, $f(b)$ een minimum is van f.

d Beredeneer dat als $f''(c) = 0$ en $f'''(c) \neq 0$, de grafiek van f een buigpunt $(c, f(c))$ heeft.



f''' is de afgeleide van f'' en de derde afgeleide van f.

U-3 Gegeven is de functie $f(x) = 2x^5 - 5x^2$.

a Bereken de extreme waarden van f.

b Onderzoek met behulp van de tweede afgeleide voor iedere extreme waarde of het een minimum of maximum is.

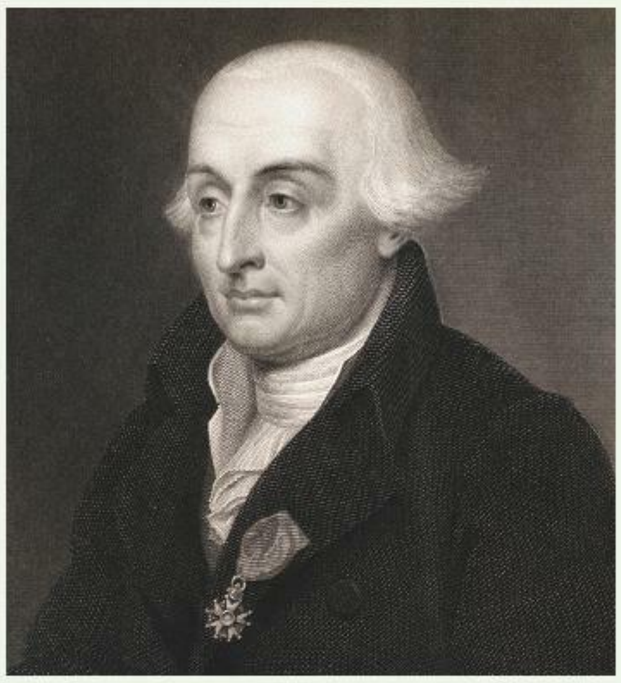
c Onderzoek met behulp van de derde afgeleide of de grafiek van f een buigpunt heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

Middelwaardestelling

Lagrange

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) was een wiskundige en astronoom van Italiaanse afkomst, die later in Frankrijk en Pruisen werkte. Hij ontwikkelde zich tot een van de grootste twee wiskundigen van de 18e eeuw (de andere was Euler). Hij werkte aan getaltheorie, differentiaalrekening, mechanica en astronomie. Hij formuleerde onder andere de middelwaardestelling.

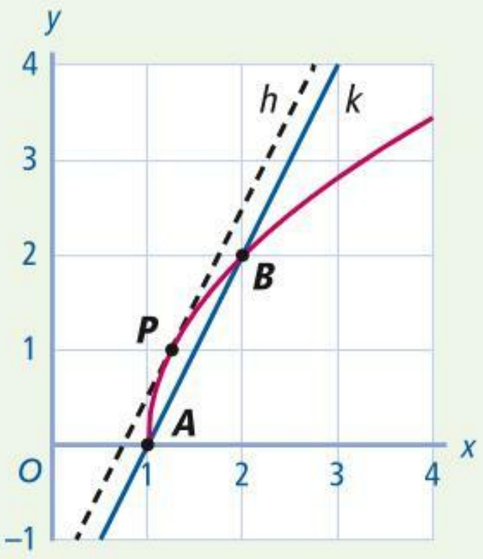


De middelwaardestelling houdt het volgende in

Twee punten A en B met x-coördinaten a en b liggen op de grafiek van functie f. Als de afgeleide f' op interval $\langle a, b\rangle$ bestaat, dan is er in dat interval een getal c zodat $f'(c)$ gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{x-1}$. Op de grafiek liggen de punten $A(1, 0)$ en $B(2, 2)$. De lijn door AB is de grafiek van $k(x) = 2x - 2$.



Als je de grafieken bekijkt, zijn er twee dingen die opvallen.

- Er is een punt P waarin de raaklijn evenwijdig is aan de lijn door A en B. Op het oog is $x_P = 1\frac{1}{4}$.
- Tussen de punten A en B zie je de verticale afstand tussen de grafiek van f en die van k eerst toenemen en daarna afnemen. Er is dus een punt waar de afstand maximaal is. Is dat ook punt P?

In de tabel hieronder met $Y1 = 2\sqrt{X-1}$, $Y2 = 2X - 2$ en $Y3 = Y1 - Y2$ zie je dat de maximale afstand bij $x = 1{,}25$ ligt.

NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP
PRESS + FOR △Tbl

X	Y1	Y2	Y3
1	0	0	0
1.125	.70711	.25	.45711
1.25	1	.5	.5
1.375	1.2247	.75	.47474
1.5	1.4142	1	.41421
1.625	1.5811	1.25	.33114
1.75	1.7321	1.5	.23205
1.875	1.8708	1.75	.12083
2	2	2	0
2.125	2.1213	2.25	-.1287
2.25	2.2361	2.5	-.2639

X=1.25

Is het toeval dat de afstand het grootst is bij $x = 1\frac{1}{4}$?
Dat ga je in de volgende opdracht onderzoeken.

Opdracht

a Los op $f'(x) = rc_{AB}$.

b Ga na dat de verticale afstand van een punt op de grafiek tot de lijn AB gegeven wordt door $g(x) = f(x) - k(x)$.

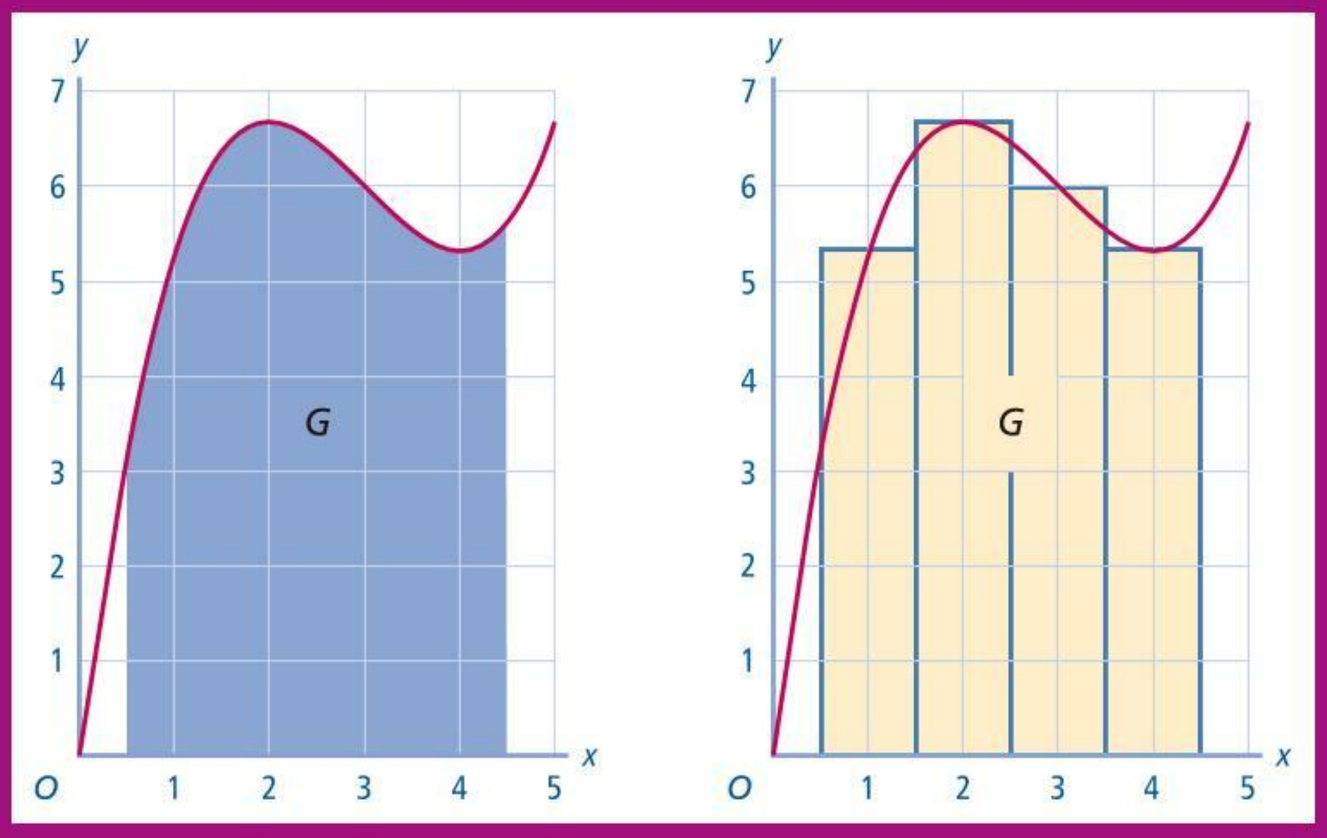
c Laat zien dat $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} - 2$.

d Heeft g een maximum of minimum?

e Leg uit: Het punt P waar de raaklijn evenwijdig is aan lijn AB, is ook het punt waar de verticale afstand van een punt op de grafiek tot de lijn AB het grootst is.

f Voer de opdrachten a tot en met e uit voor de functie $f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^3 + \frac{4}{3}$ op het interval $[2, 8]$.

© Noordhoff Uitgevers bv



Oppervlakte onder een grafiek

Het blauwe gebied G wordt begrensd door de lijnen $x = 0{,}5$ en $x = 4{,}5$, ***de grafiek van de functie*** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$ ***en de x-as. De oppervlakte van het gebied G kun je benaderen met behulp van verticale stroken met een breedte van 1.***

Hoe bereken je de totale oppervlakte van de gekleurde rechthoeken?
Hoe zou je de benadering van de oppervlakte van G kunnen verbeteren?

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 4
Integreren

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	92
4-1	Oppervlakten benaderen	94
4-2	Hoofdstelling van de integraalrekening	96
4-3	Primitiveren	98
4-4	Integralen	100
4-5	Integraal en oppervlakte	102
4-6	Gemengde opdrachten	104
	Samenvatting	106
	Test jezelf	108
	Extra oefening - Basis	110
	Extra oefening - Gemengd	111
	Uitdagende opdrachten	112
	Oppervlakte onder een parabool	113

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorkennis

V-1 Schrijf de volgende functievoorschriften in de vorm $f(x) = a \cdot x^n$.

a $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

b $f(x) = \dfrac{4}{5x}$

c $f(x) = 5x^2\sqrt{x}$

d $f(x) = \dfrac{1}{3x\sqrt{x}}$

V-2 Schrijf de volgende functievoorschriften als som van uitdrukkingen van de vorm $a \cdot x^n$.

a $f(x) = \dfrac{3x^4 - 5x^2 + 2x}{x}$

b $g(x) = \dfrac{x^4 + 8x^3 - 5x^2}{2x^3}$

c $h(x) = \dfrac{3(2x - 3)^3}{4x - 6}$

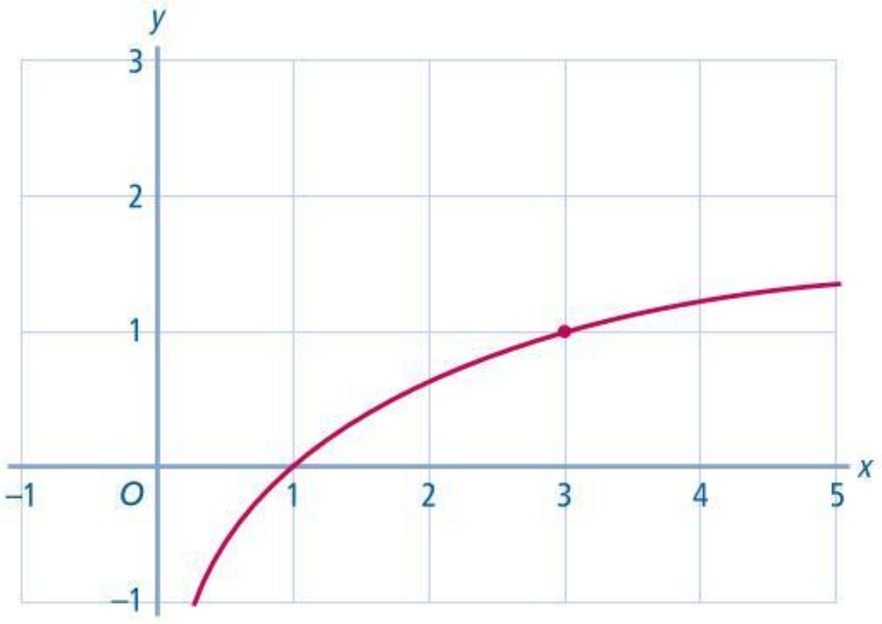
d $k(x) = \dfrac{2(x + 5)^2}{x^2}$

V-3a Gegeven zijn de functies $f(x) = (2x - 5)(2x + 1)$ en $g(x) = (2x - 2)^2$.
Laat met een berekening zien f en g dezelfde afgeleide hebben.

b Gegeven zijn de functies $h(x) = \dfrac{x}{2 - x}$ en $k(x) = 2(2 - x)^{-1}$.
Laat met een berekening zien dat er een constante c is waarvoor geldt: $h(x) - k(x) = c$.

c Wat weet je nu over $h'(x)$ en $k'(x)$?

V-4 Hiernaast staat de grafiek van de functie $f(x) = {}^3\log(x)$.
Je kunt de helling in een punt van deze grafiek benaderen door $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ over een klein interval te berekenen.



a Geef een benadering van de helling in het punt (3, 1) in vier decimalen door $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ over het interval $[3; 3,1]$ te berekenen.

b Herhaal opdracht a maar nu over de intervallen $[3; 3,01]$ en $[3; 3,001]$.

c Geef de helling in (3, 1) in twee decimalen.

Als in het differentiequotiënt $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ de waarde van Δx naar 0 nadert, dan gaat het differentiequotiënt over in het differentiaalquotiënt $\dfrac{dy}{dx}$ en dat is de exacte waarde van de helling in een punt van de grafiek.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \log(x)$.

Bereken $\frac{df}{dx}$ bij $x = 1$.

Oplossing

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{\log(1 + \Delta x) - \log(1)}{\Delta x} = \frac{\log(1 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$\Delta x = 0{,}1$ geeft $0{,}41392685\ldots$
$\Delta x = 0{,}01$ geeft $0{,}43213737\ldots$
$\Delta x = 0{,}001$ geeft $0{,}43407747\ldots$
$\Delta x = 0{,}0001$ geeft $0{,}43427276\ldots$

Zo doorgaand vind je $\frac{df}{dx} \approx 0{,}4343$.

V-5 Bereken van de volgende functies het differentiaalquotiënt $\frac{dy}{dx}$ bij $x = 4$.
Neem $\Delta x = 0{,}0001$ en geef je antwoord in vier decimalen.

a $f(x) = \log(x)$

b $g(x) = 1{,}2^x$

c $h(x) = x\sqrt{2x + 1}$

d $k(x) = \frac{x}{x + 1}$

V-6 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 3(2x - 5)^4$

b $h(x) = \frac{3}{5x + 1}$

c $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3 - 4x}$

d $k(x) = \frac{4}{3\sqrt{5x + 6}}$

V-7 Gegeven zijn de functies $f(x) = (2x^3 - 1)^2$ en $g(x) = 4(x^6 - x^3)$.

a Differentieer de functies f en g.

b Waarom moet gelden dat $g(x) = f(x) + c$ voor een constante c?

c Bereken de waarde van c.

V-8 Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van de volgende tweetallen functies.

a $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{1}{2}x$

b $f(x) = \frac{3}{x + 4}$ en $g(x) = x + 2$

c $f(x) = x^2 + 4$ en $g(x) = x + 6$

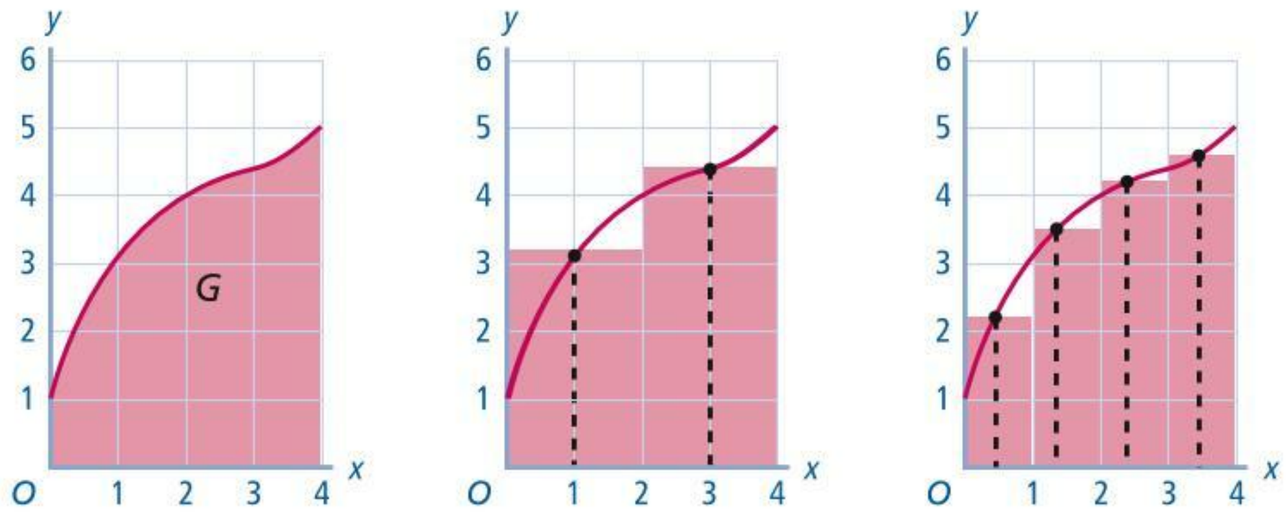
d $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$ en $g(x) = x^2 - 2$

© Noordhoff Uitgevers bv

4-1

Oppervlakten benaderen

1 Hieronder staat de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 3x + 1$.



Het gebied G wordt ingesloten door de x-as, de grafiek van f, de y-as en de lijn $x = 4$. Je gaat de oppervlakte van het gebied G benaderen met behulp van rechthoeken.

a Bereken exact de totale oppervlakte van de twee gekleurde rechthoeken in de tweede tekening.

b Bereken exact de totale oppervlakte van de vier gekleurde rechthoeken in de derde tekening.

c Wat is een betere benadering voor de oppervlakte van het gebied G, het antwoord van opdracht a of het antwoord van opdracht b?

d Hoe zou je de oppervlakte van het gebied G nog beter kunnen benaderen?

Theorie

De oppervlakte van het gebied tussen de x-as, de grafiek van een functie f en de lijnen $x = a$ en $x = b$ benader je door de oppervlakten van een aantal rechthoeken op te tellen.

- Verdeel het interval $[a, b]$ in kleinere deelintervallen met dezelfde breedte.
- Teken op elk deelinterval een rechthoek waarvan de hoogte de functiewaarde van het midden van het deelinterval is.
- Bereken de totale oppervlakte van de rechthoeken.

2 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 7x + 2$ op het interval $[1, 5]$.

a Benader de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x-as. Kies deelintervallen met lengte 2.

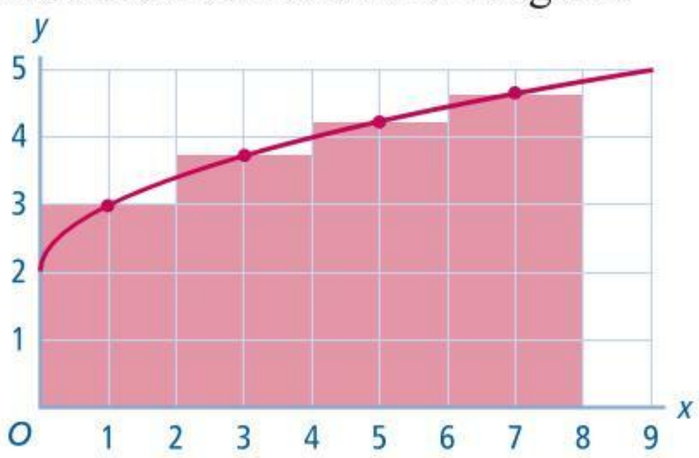
b Voer opdracht a nogmaals uit, maar neem nu deelintervallen met lengte $\frac{1}{2}$.

H 3 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{6}{2x - 1}$ op het interval $[1, 5]$.

Benader de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x-as. Kies deelintervallen met lengte 1.

Voorbeeld

Benader in twee decimalen de oppervlakte van het gebied tussen de x-as en de grafiek van de functie $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ op het interval $[0, 8]$ met deelintervallen met lengte 2.



Oplossing

De totale oppervlakte van de gekleurde rechthoeken is

$2 \cdot f(1) + 2 \cdot f(3) + 2 \cdot f(5) + 2 \cdot f(7)$

$= (f(1) + f(3) + f(5) + f(7)) \cdot 2 \approx 31{,}23.$

© Noordhoff Uitgevers bv

4 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ op het interval $[1, 5]$.

a Als het interval $[1, 5]$ wordt verdeeld in vier even brede deelintervallen, wat zijn dan de middens van het eerste deelinterval en van het laatste deelinterval?

b En als het interval $[1, 5]$ wordt verdeeld in tien deelintervallen?

c Leg uit dat $f(1{,}2) \cdot 0{,}4 + f(1{,}6) \cdot 0{,}4 + \ldots + f(4{,}8) \cdot 0{,}4$ een benadering is voor de oppervlakte van het gebied tussen de x-as en de grafiek van f.

d Bereken de uitkomst van uitdrukking in opdracht c.

5 Bekijk weer de functie $f(x) = -x^2 + 4x + 6$, maar nu op het interval $[1, 7]$.

a Bereken $(f(1{,}2) + f(1{,}6) + \ldots + f(6{,}8)) \cdot 0{,}4$.

b Plot en schets de grafiek van f en verklaar daarmee waarom het antwoord van opdracht a kleiner is dan het antwoord van opdracht 4d.

Theorie

Een **Riemann-som van de functie** f op het interval $[a, b]$ met n deelintervallen is de sommatie

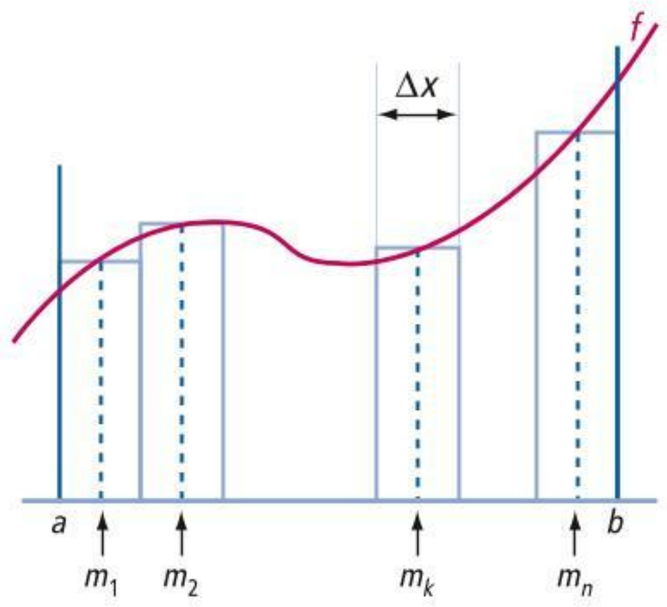
$$f(m_1) \cdot \Delta x + f(m_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(m_n) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(m_k) \cdot \Delta x$$

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ is de breedte van elk van de deelintervallen,

$m_1 = a + \frac{1}{2}\Delta x$ is het midden van het eerste deelinterval,

$m_n = b - \frac{1}{2}\Delta x$ is het midden van het laatste deelinterval.

$f(m_k)$ is de functiewaarde in het midden van het deelinterval met nummer k.



Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7$. Bereken een Riemann-som van f op het interval $[2, 5]$ met tien deelintervallen.

Oplossing

$\Delta x = \dfrac{5-2}{10} = 0{,}3$

Het eerste midden is $m_1 = 2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}3 = 2 + 0{,}15 = 2{,}15$;

het laatste midden is $m_{10} = 5 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}3 = 5 - 0{,}15 = 4{,}85$.

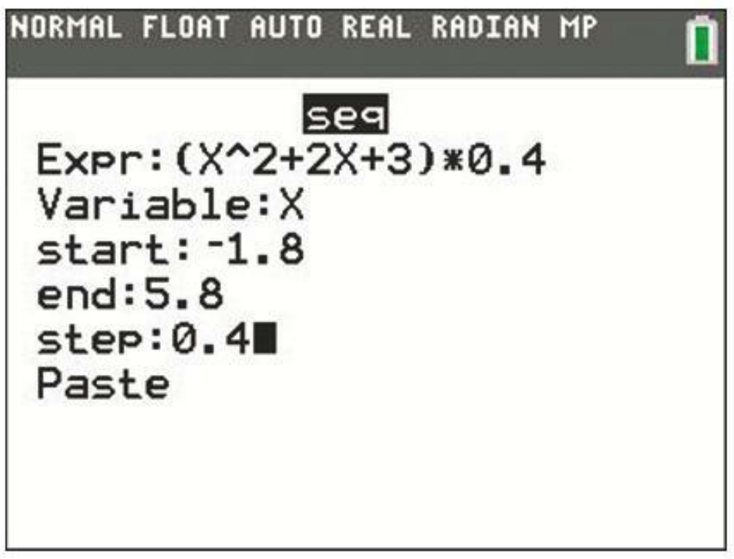
De Riemann-som is

$f(2{,}15) \cdot 0{,}3 + f(2{,}45) \cdot 0{,}3 + \ldots + f(4{,}85) \cdot 0{,}3 = 17{,}1$.

H 6a Bereken een Riemann-som van de functie $f(x) = x^2 + 2x + 3$ op het interval $[-2, 6]$ met 20 deelintervallen.

b Voer opdracht a nogmaals uit, maar nu met 100 deelintervallen.

Hulpboek 3-6 Riemann-som



7 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 8x$ op het interval $[2, 7]$.

a Bereken een Riemann-som van f met 20 deelintervallen.

b Waarom is het antwoord van opdracht a negatief?

© Noordhoff Uitgevers bv

4-2

Hoofdstelling van de integraalrekening

8 De functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$ zijn gegeven op het interval $[0, 3]$.

a Bereken Riemann-sommen van f met 10 intervallen, met 20 intervallen en met 100 intervallen.

b Naar welke waarde zullen deze Riemann-sommen naderen als het aantal deelintervallen onbegrensd toeneemt?

c Beantwoord de opdrachten a en b opnieuw, nu voor de functie g.

Theorie

Gegeven is een functie f op het interval $[a, b]$.

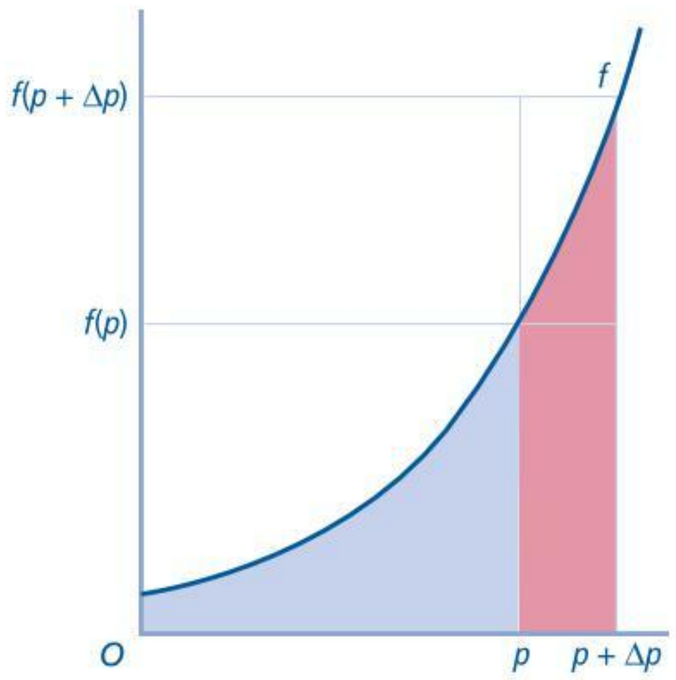
De **integraal** $\int_a^b f(x)\,dx$ is de exacte waarde waar de Riemann-sommen van f op het interval $[a, b]$ naar naderen als het aantal deelintervallen onbegrensd toeneemt.

9 In de figuur hiernaast is de grafiek van een functie f getekend. Met $F(p)$ wordt bedoeld de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de x-as, de grafiek van f en de lijnen $x = 0$ en $x = p$.

a Leg uit dat de oppervlakte van het rood gekleurde gebied gelijk is aan $\Delta F = F(p + \Delta p) - F(p)$.

b Je kunt de oppervlakte van het rode gebied insluiten door twee rechthoeken met breedte Δp. Leg uit dat geldt: $\Delta p \cdot f(p) \le \Delta F \le \Delta p \cdot f(p + \Delta p)$.

c Als je de uitdrukking van opdracht b deelt door Δp dan krijg je $f(p) \le \frac{\Delta F}{\Delta p} \le f(p + \Delta p)$.
Leg uit dat hieruit volgt: $F'(p) = f(p)$.



Als Δx steeds kleiner wordt gekozen, dan nadert $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ naar $f'(x)$.

10 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Voor $p \ge 0$ is $F(p)$ de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de x-as, de grafiek van f, de y-as en de lijn $x = p$.

a Leg uit: uit opdracht 9c volgt $F(p) = \frac{1}{6}p^3 + C$, waarbij C een constante is.

b Waarom moet gelden dat $F(0) = 0$? Bereken de constante C.

c Leg uit dat de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de x-as, de grafiek van f en de lijnen $x = 3$ en $x = 6$ gelijk is aan $F(6) - F(3)$.

d Leg uit dat uit opdracht c volgt: $\int_3^6 \frac{1}{2}x^2\,dx = F(6) - F(3)$.

e Bereken exact de integraal uit opdracht d.

© Noordhoff Uitgevers bv

Als $f(x) \geq 0$ voor $0 \leq x \leq p$ en $F(p)$ is de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de x-as, de y-as, de grafiek van f en de lijn $x = p$, dan geldt $F'(x) = f(x)$.

11 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 7x + 10$.

a Bereken Riemann-sommen van f op het interval $[1, 4]$ met 10 intervallen en met 100 intervallen.

b Bereken $\int_1^4 f(x)\,dx$.

c Laat zien dat de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3\frac{1}{2}x^2 + 10x$ voldoet aan $F'(x) = f(x)$.

d Laat met een berekening zien dat $\int_1^4 f(x)\,dx = F(4) - F(1)$.

Theorie

Het verband dat je in de vorige opdrachten hebt gevonden heet de **hoofdstelling van de integraalrekening**:
Als f een functie is op het interval $[a, b]$, dan geldt

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, waarbij $F'(x) = f(x)$.

$F(b) - F(a)$ wordt ook wel genoteerd als $[F(x)]_a^b$.
De uitdrukking $f(x)$ heet de **integrand** van de integraal.
F heet een **primitieve functie** van f. Het bepalen van een primitieve functie heet **primitiveren**. Bij het primitiveren van een functie f bereken je dus een functie F waarvan f de afgeleide functie is.

Voorbeeld

Bereken $\int_{-1}^{2}(x^3 - 2x + 5)\,dx$.

Oplossing
Een primitieve functie van $f(x) = x^3 - 2x + 5$ is
$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 5x$.
$F(-1) = \frac{1}{4} - 1 - 5 = -5\frac{3}{4}$;
$F(2) = 4 - 4 + 10 = 10$; dus
$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = [F(x)]_{-1}^{2} =$
$F(2) - F(-1) = 10 - \left(-5\frac{3}{4}\right) = 15\frac{3}{4}$.

H 12 Geef bij elk van de volgende functies een primitieve functie.

a $f(x) = 9x^2$
b $g(x) = 4x^3$
c $h(x) = 5$
d $k(x) = 15x^4$

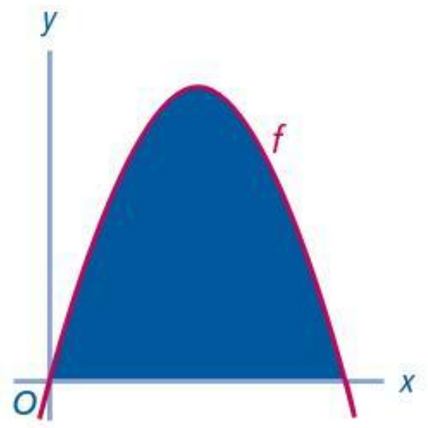
H 13a Bereken exact $\int_0^3 x^2\,dx$.

b Leg uit dat de functie $G(x) = \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x}$ een primitieve functie is van $g(x) = \sqrt{x}$.

c Bereken exact $\int_0^3 \sqrt{x}\,dx$.

d Vergelijk je antwoorden bij de opdrachten a en c met je antwoorden van opdracht 8.

H 14 Hiernaast staat de grafiek van de functie $f(x) = 6x - x^2$.
Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied.



© Noordhoff Uitgevers bv

4-3

Primitiveren

15a Toon aan dat $F(x) = \frac{1}{8}x^8$ een primitieve is van $f(x) = x^7$.

b Geef ook een primitieve functie van $g(x) = x^9$; controleer je antwoorden door te differentiëren.

16 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

a Schrijf het functievoorschrift van f als een machtsfunctie.

b Geef een primitieve functie van f.

c Schrijf je antwoord van opdracht b zonder negatieve exponenten.

Theorie

Een **primitieve functie van de machtsfunctie** $f(x) = x^p$ is $f(x) = \dfrac{1}{p+1}x^{p+1}$.
Deze regel geldt voor alle waarden van p behalve $p = -1$.

17 Waarom geldt de bovenstaande regel niet voor $p = -1$?

H 18 Stel een primitieve functie op van:

a $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

b $g(x) = 2x^2 + \dfrac{3}{x^4}$

c $h(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

d $k(x) = (x^2 - 2)^2$

19 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^5 + 3x^3 + 1}{x^3}$

a Schrijf het functievoorschrift als de som van machtsfuncties.

b Bereken $\int_1^3 f(x)\,dx$.

20 Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 6x + 3$.
Verder zijn gegeven $F_1(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ en $F_2(x) = (x+1)^3$.

a Toon aan dat zowel F_1 als F_2 een primitieve functie van f is.

b Toon aan dat het verschil tussen de functies F_1 en F_2 constant is.

c Bereken exact $[F_1(x)]_1^3$ en $[F_2(x)]_1^3$.

d Leg uit waarom je antwoorden bij opdracht c gelijk zijn.

e Schrijf nog drie andere primitieve functies van f op.

Voorbeeld

Geef een primitieve functie van

$$f(x) = \frac{x^3 + 6\sqrt{x}}{2x}$$

Oplossing

De functie f is te schrijven als

$$f(x) = \frac{x^3}{2x} + \frac{6\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2}x^2 + 3x^{-\frac{1}{2}}.$$

Een primitieve functie is

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 + 3 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}x^3 + 6\sqrt{x}.$$

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Een functie f heeft meerdere primitieve functies: Als F_1 een primitieve functie van f is, dan is voor elke waarde van C de functie $F_2(x) = F_1(x) + C$ ook een primitieve van f.

Voorbeeld

Stel de primitieve functies op van $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2$.

Oplossing

Een primitieve functie van f is $g(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x$.

De primitieve functies zijn dus $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$.

H 21 Geef de primitieve functies van

a $f(x) = 2x^4 + 4x^3 - x + 3$

b $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

c $h(x) = -x^5 + \frac{1}{3x^3} - 1$

d $k(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 5}{x^2}$

22 Gegeven is de functie $g(x) = (3x - 4)^{1\frac{1}{2}}$.

a Marjan probeert als primitieve $G(x) = c \cdot (3x - 4)^{2\frac{1}{2}}$.

Waarom zou zij die keuze gemaakt hebben?

b Geef de afgeleide $G'(x)$.

c Welke waarde moet c hebben zodat G een primitieve functie van g is?

d Geef de primitieven van g.

Aanpak

Hoe primitiveer je een functie van de vorm $f(x) = (a \cdot x + b)^p$?

1. Kies als primitieve $F(x) = c \cdot (a \cdot x + b)^{p+1}$.
2. Bereken $F'(x)$ door te differentiëren.
3. Bereken c zó dat $F'(x) = f(x)$.

Voorbeeld

Stel de primitieve functies op van $f(x) = 3 \cdot (3 - 2x)^5$.

Oplossing

Kies $F(x) = c \cdot (3 - 2x)^6$. Dan is
$F'(x) = 6 \cdot c \cdot (3 - 2x)^5 \cdot -2$
$= -12 \cdot c \cdot (3 - 2x)^5$
F is een primitieve van f als $-12c = 3$, dus als $c = -\frac{1}{4}$.
De primitieve functies zijn
$F(x) = -\frac{1}{4}(3 - 2x)^6 + C$.

H 23 Geef de primitieve functies van

a $f(x) = \left(\frac{1}{2}x + 7\right)^4$

b $g(x) = \frac{4}{(x + 2)^3}$

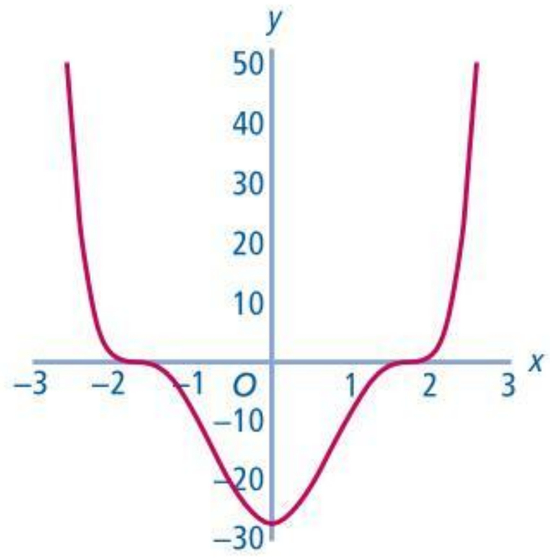
c $h(x) = \frac{2}{(1 - 6x)^3}$

d $k(x) = \sqrt{3x + 5}$

24 Gegeven is de functie $f(x) = 4(x^2 - 3)^2$.
Karel denkt dat er een waarde a is waarvoor de functie $K(x) = a \cdot (x^2 - 3)^3$ een primitieve is van f.
Hiernaast is voor $a = 1$ de grafiek van K getekend.

a Leg aan de hand van de grafiek uit dat er geen waarde van a bestaat waarvoor K een primitieve is van f.

b Bereken de primitieve functies van f.

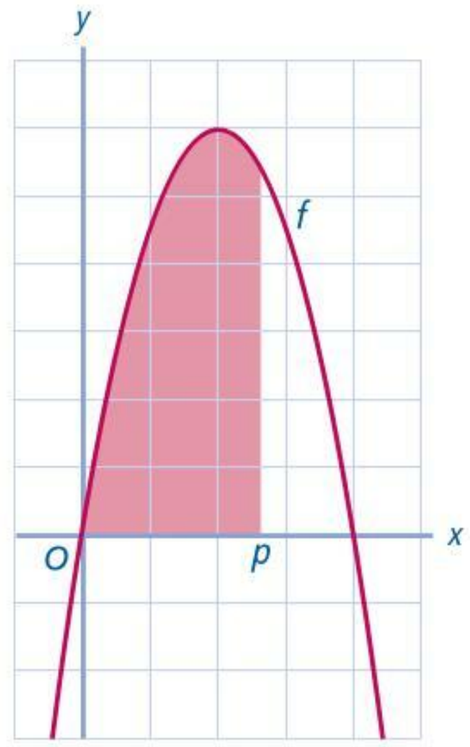


© Noordhoff Uitgevers bv

4-4

Integralen

25 Hiernaast is de grafiek van de functie $f(x) = 1\frac{1}{2}x(4 - x)$ getekend. Verder is gegeven de functie $F(x) = \frac{1}{2}x^2(6 - x)$.



Het gekleurde gebied wordt ingesloten door de x-as, de grafiek van f en de lijn $x = p$.

a Leg uit dat de oppervlakte van het gekleurde gebied gelijk is aan $F(p)$.

b Bereken $F(p)$ voor de waarden $p = 2, 3, 4, 5$.

c Hoe kun je aan de grafiek van f zien dat $F(5) < F(4)$?

d Leg uit wat het betekent dat $F(6) = 0$.

H 26 Bereken exact de volgende integralen.

a $\int_0^3 (x^2 - 3x + 2)\,dx$

b $\int_1^5 (4x - 9)\,dx$

c $\int_4^9 x\sqrt{x}\,dx$

d $\int_1^4 \left(\frac{1}{2}x - \sqrt{x}\right)dx$

e $\int_1^3 \frac{6}{5x^3}\,dx$

f $\int_0^4 2\sqrt{9 - 2x}\,dx$

27a Bereken de integralen $\int_1^3 3x^2\,dx$, $\int_3^6 3x^2\,dx$ en $\int_1^6 3x^2\,dx$.

b Welk verband bestaat er tussen de antwoorden van opdracht a? Verklaar dit met een schets.

c Welk verband bestaat er tussen de integralen $\int_2^4 x^3\,dx$ en $\int_2^4 8x^3\,dx$?

28a Bereken de integralen $\int_1^3 3x^2\,dx$, $\int_1^3 2x\,dx$ en $\int_1^3 (3x^2 + 2x)\,dx$.

b Welk verband bestaat er tussen de antwoorden van opdracht a?

Aanpak

Rekenregels voor integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx$$

Voorbeeld

Bereken

$$\int_{-1}^2 (x^3 - 7x^2)\,dx + \int_{-1}^2 (3x^3 + x^2)\,dx.$$

Oplossing

Je kunt herleiden tot één integraal:

$$\int_{-1}^2 (4x^3 - 6x^2)\,dx = [x^4 - 2x^3]_{-1}^2 = -3$$

© Noordhoff Uitgevers bv

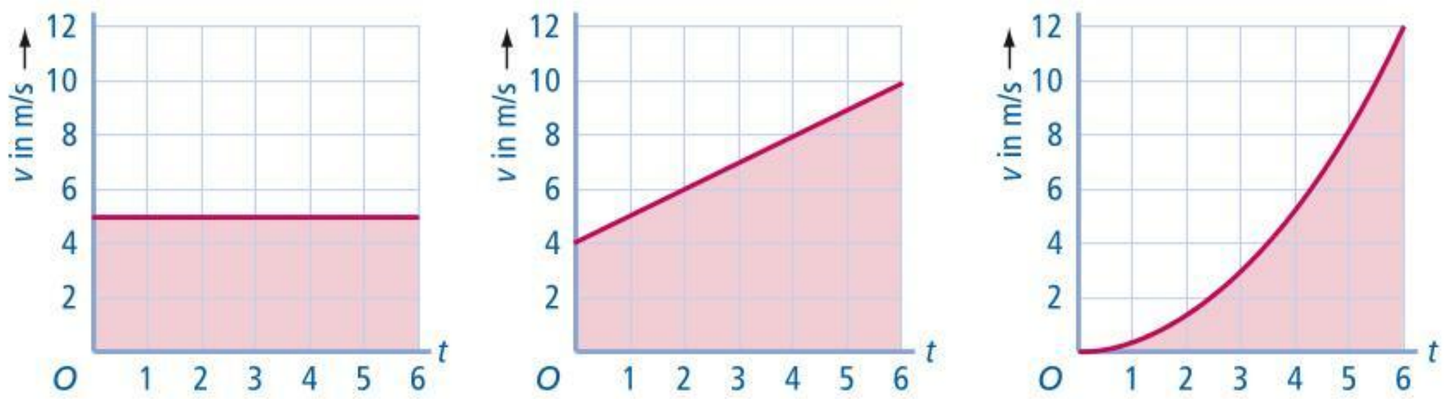
H 29 Bereken exact.

a $\int_{-2}^{1} (x^2 - 2)\,dx + \int_{1}^{3} (x^2 - 2)\,dx$

b $\int_{1}^{11} \left(2 + \frac{4}{x^2}\right) dx - \int_{4}^{11} \left(2 + \frac{4}{x^2}\right) dx$

c $\int_{2}^{5} \left(x + \frac{1}{x}\right) dx + \int_{2}^{5} \left(x - \frac{1}{x}\right) dx$

30 Hieronder staan de snelheidsgrafieken van drie bewegende voorwerpen getekend. De tijd is gemeten in seconden en de snelheid in m/s.



a Het voorwerp bij de eerste grafiek beweegt met een constante snelheid.
Leg uit dat de afgelegde afstand tussen $t = 0$ en $t = 6$ overeenkomt met de oppervlakte onder de snelheidsgrafiek.

b Bereken bij de tweede grafiek de gemiddelde snelheid van het voorwerp tussen $t = 0$ en $t = 6$.

c Ga met een berekening na dat ook voor het tweede voorwerp geldt: de afgelegde afstand is gelijk aan de oppervlakte onder de snelheidsgrafiek.

d Leg uit dat ook bij de derde grafiek geldt: de afgelegde afstand is gelijk aan de oppervlakte onder de grafiek.

e Bij de derde grafiek hoort de formule $v = \frac{1}{3}t^2$.

Bereken voor het derde voorwerp de afgelegde afstand tussen $t = 0$ en $t = 6$.

31a Bereken exact $\int_{0}^{3} (2x + 1)\,dx$.

b Sander denkt dat $\int_{0}^{3} (2x + 1)^2\,dx = 144$. Hoe zou hij aan dit antwoord komen?

c Ga met een berekening na of Sander gelijk heeft.

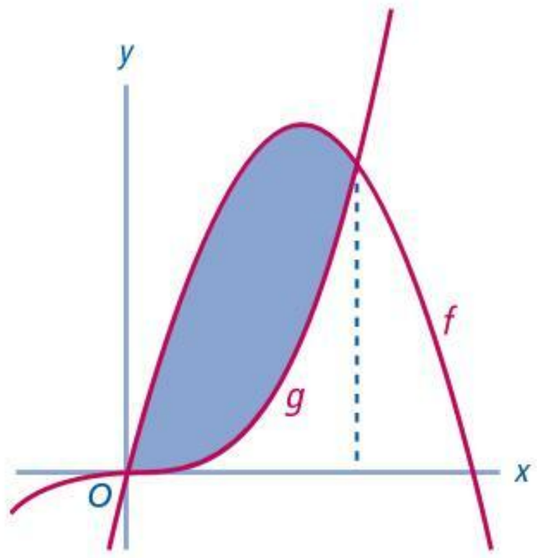
d Bereken exact $\int_{0}^{3} \sqrt{2x + 1}\,dx$.

© Noordhoff Uitgevers bv

4-5

Integraal en oppervlakte

32 Hiernaast zijn de grafieken getekend van de functies $f(x) = 6x - 2x^2$ en $g(x) = \frac{1}{2}x^3$.



a Ga na dat de grafieken van f en g elkaar snijden voor $x = 0$ en voor $x = 2$.

b Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de x-as, de grafiek van f en de lijn $x = 2$.

c Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de x-as, de grafiek van g en de lijn $x = 2$.

d Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied.

e Leg uit dat je de oppervlakte van het gekleurde gebied ook kunt berekenen met de integraal $\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx$.

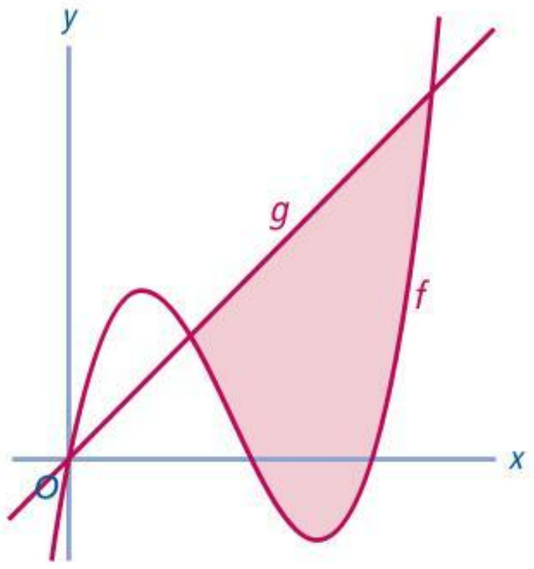
Aanpak

Hoe bereken je de oppervlakte van een gebied dat door de grafieken van twee functies wordt ingesloten?

1 Plot de grafieken en bereken de x-coördinaten van de snijpunten van beide grafieken.
2 Stel één of meer integralen op die de oppervlakte weergeven. Let daarbij op de onderlinge ligging van de grafieken.
3 Bereken de integraal of de integralen en geef de oppervlakte.

Voorbeeld

De grafieken van de functies $f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$ en $g(x) = 3x$ sluiten het gebied in dat in de tekening hiernaast is gekleurd.
Bereken exact de oppervlakte van dat gebied.



Oplossing

1 De oplossingen van $f(x) = g(x)$ zijn $x = 0$, $x = 2$ en $x = 6$.
2 Tussen $x = 2$ en $x = 6$ ligt de grafiek van g boven de grafiek van f.
De oppervlakte wordt berekend met $\int_2^6 (g(x) - f(x))\,dx$.
3 $\int_2^6 (-x^3 + 8x^2 - 12x)dx = [-\frac{1}{4}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 6x^2]_2^6 = 42\frac{2}{3}$, dus de oppervlakte is $42\frac{2}{3}$.

33a Bekijk de functies in het voorbeeld.
Bereken exact de totale oppervlakte van de gebieden die door de twee grafieken worden ingesloten.

b Bereken $\int_0^6 (g(x) - f(x))\,dx$. Wat is de betekenis van de uitkomst?

© Noordhoff Uitgevers bv

34 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$ en $g(x) = 3 - \sqrt{x + 1}$.
De grafieken snijden elkaar in de punten $(-1, 3)$ en $(3, 1)$.
Bereken exact de totale oppervlakte van de twee gebieden die door de beide grafieken worden ingesloten.

H 35 Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = x^3 + 6x$ en $g(x) = -x^3 + 4x^2 + 12x$.

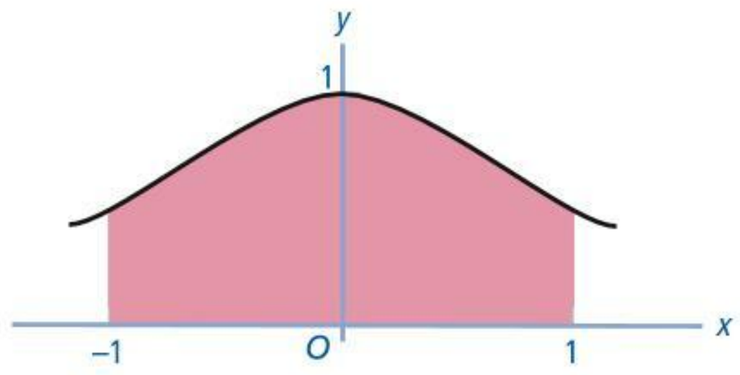
Als je een functie (nog) niet kunt primitiveren, dan kun je de integraal met je rekenmachine benaderen. Daarover gaan de volgende opdrachten.

36 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

In de tekening hiernaast is een gebied gekleurd.

a Stel een integraal op om de oppervlakte van dat gebied uit te rekenen.

b De integraal van opdracht a kun je met je rekenmachine benaderen.
Bereken deze integraal. Rond je antwoord af op twee decimalen.



Hulpboek 3-7 Oppervlakte en integralen

H 37 Bereken de volgende integralen in twee decimalen nauwkeurig.

a $\int_{-1}^{4} \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3}\, dx$

b $\int_{-3}^{3} {}^2\log(x^2 + 1)\, dx$

c $\int_{1}^{9} \dfrac{15}{x + 2\sqrt{x}}\, dx$

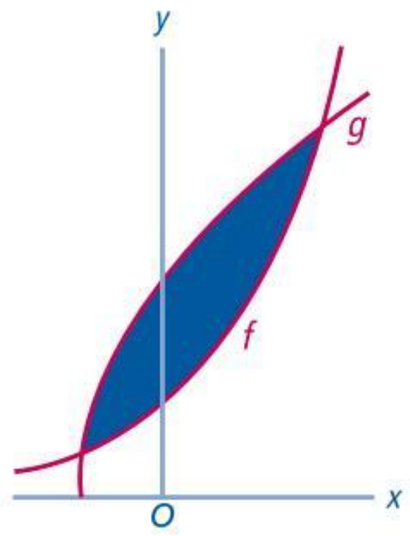
d $\int_{-5}^{5} (2^x - 2^{-x})\, dx$

H 38 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 \cdot 2^x$ en $g(x) = \sqrt{21x + 22}$.

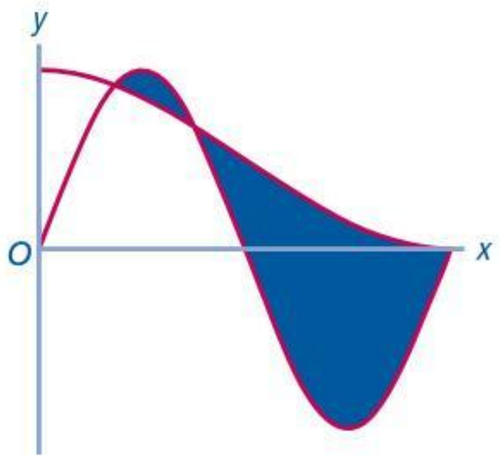
a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

b De grafieken van f en g sluiten een gebied in.
Stel een integraal op om de oppervlakte van dit gebied uit te rekenen.

c Benader de integraal van opdracht b in twee decimalen nauwkeurig.



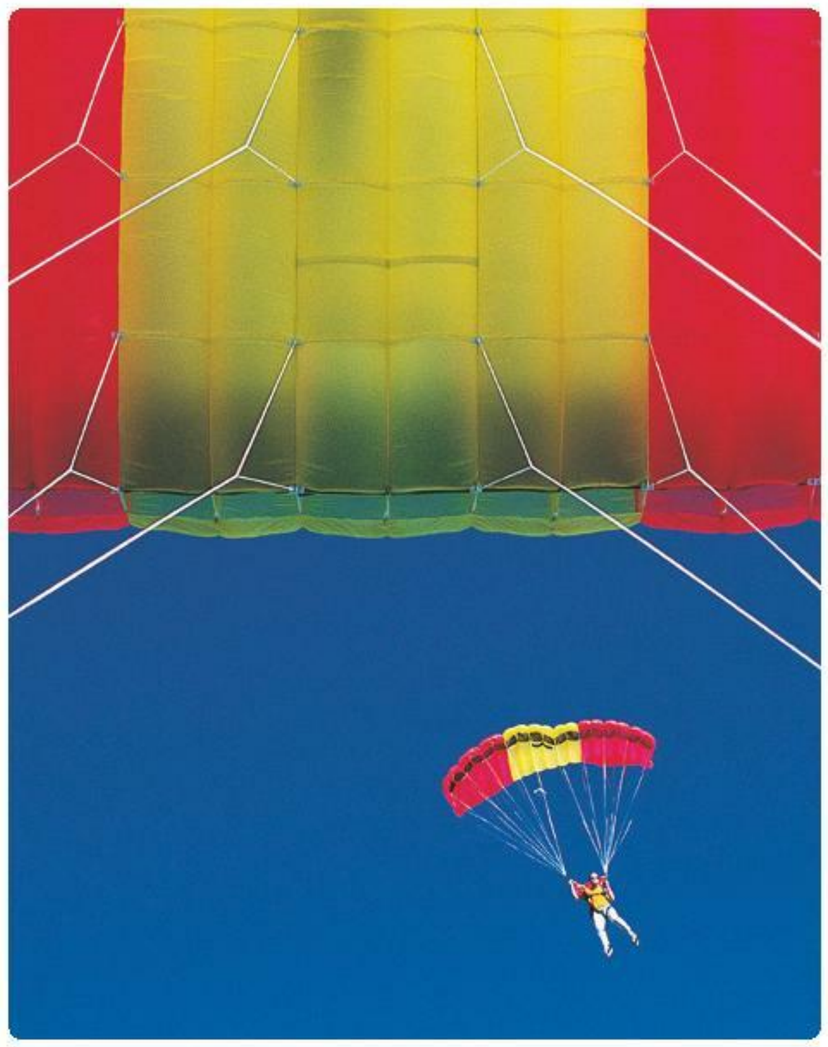
39 Op het interval $[0, \pi]$ zijn gegeven de functies $f(x) = 2\sin(2x)$ en $g(x) = 1 + \cos(x)$.
Bereken in twee decimalen de totale oppervlakte van de gebieden die worden ingesloten door de grafieken van f en g.



© Noordhoff Uitgevers bv

4-6

Gemengde opdrachten



40 Een parachutiste springt uit een vliegtuig. De eerste vijf seconden maakt zij een vrije val. Dan opent ze de parachute.
Hierdoor neemt haar valsnelheid evenredig af tot zij zes seconden later een valsnelheid van 4 meter per seconde heeft bereikt. Hierna blijft haar snelheid nog gedurende 70 seconden constant, waarna zij met die snelheid veilig op de grond landt.
Neem de tijd t in seconden met $t = 0$ als tijdstip waarop zij uit het vliegtuig springt.

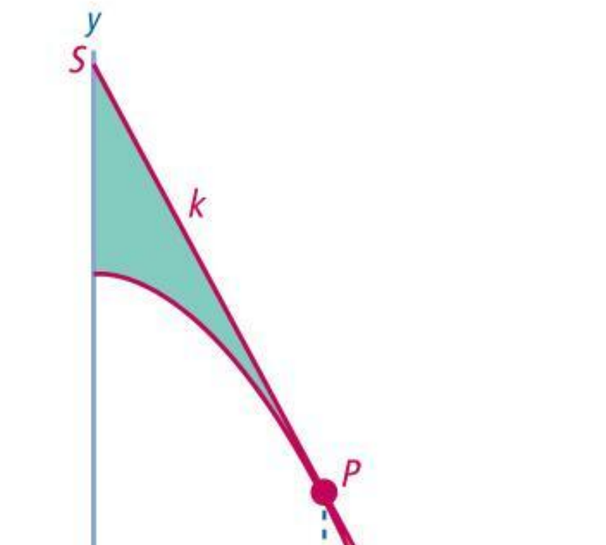
a Gedurende de vrije val wordt de snelheid gegeven door $v(t) = 9{,}8t$ met v in meters per seconde.
De afstand die tijdens de vrije val is afgelegd kun je berekenen met de integraal $\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t$. Bereken deze afstand.

b Met hoeveel meter per seconde neemt de valsnelheid af na het openen van de parachute?

c Geef het voorschrift voor v als functie van t voor $5 \le t \le 11$.

d Welke afstand legt de parachutiste af tijdens de eerste zes seconden na de opening van haar parachute?

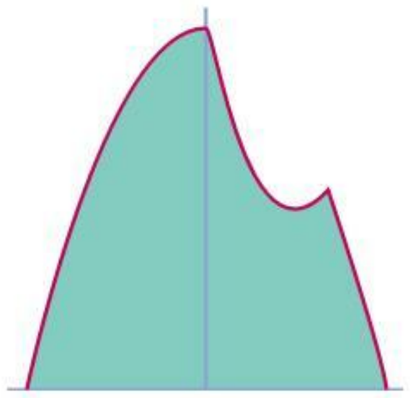
e Op welke hoogte sprong de parachutiste uit het vliegtuig?



41 Op het interval $[0, 2]$ is gegeven de functie $f(x) = 4 - x^2$.
Op de grafiek van f ligt het punt P met x-coördinaat 1.
De lijn k raakt de grafiek van f in P en k snijdt de y-as in het punt S.
Het gebied G wordt ingesloten door de y-as, de grafiek van f en de lijn k.

a Stel een vergelijking op van de lijn k.

b Bereken exact de oppervlakte van het gebied G.



42 Het gebied hiernaast wordt ingesloten door de x-as en door delen van de grafieken van de functies $f(x) = 18 - \frac{1}{2}x^2$ en $g(x) = x^2 - 6x + 18$.

a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

b Stel integralen op waarmee je de oppervlakte van het gebied kunt berekenen.

c Bereken exact de oppervlakte van het gebied.

© Noordhoff Uitgevers bv

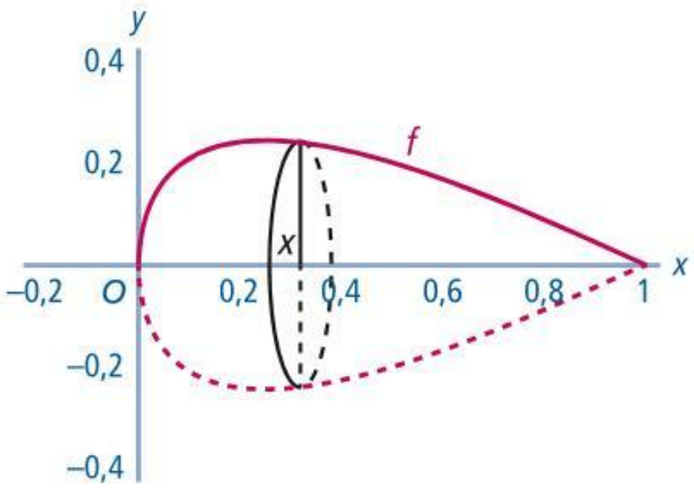
43 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^4 + 2x^3 + x^2}$

a Laat met een berekening zien dat de noemer van $f(x)$ geschreven kan worden als $x^2(x + 1)^2$.

b Laat algebraïsch zien dat het functievoorschrift van f geschreven kan worden als $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x + 1)^2}$

c Bereken exact $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x + 1}{x^4 + 2x^3 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

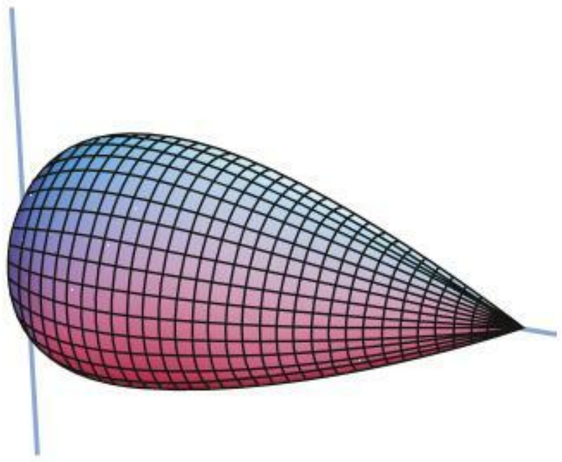
44 Op het interval $[0, 1]$ is gegeven de functie $f(x) = \sqrt{x} - x$.
Het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as wordt $360°$ gewenteld om de x-as. Er ontstaat dan een ruimtelijke figuur. In deze opdracht ga je de inhoud hiervan berekenen.
Zoals je aan het begin van dit hoofdstuk de oppervlakte van een gebied hebt benaderd met behulp van rechthoeken, zo kun je de inhoud van de ruimtelijke figuur benaderen met behulp van cilinders. Je verdeelt het interval in een aantal even brede deelintervallen. De breedte van het deelinterval is de hoogte van de cilinder; de functiewaarde in het midden van het deelinterval is de straal van de cilinder.



a Benader de inhoud met behulp van vijf deelintervallen met lengte $0{,}2$.

b Ga nu uit van n deelintervallen met breedte $\Delta x = \dfrac{1}{n}$.

Leg uit dat de inhoud wordt benaderd door de Riemann-som $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \pi(f(m_i))^2 \cdot \Delta x$, waarbij m_i het midden is van het deelinterval met nummer i.



De inhoud van een cilinder met straal r en hoogte h is $\pi \cdot r^2 \cdot h$.

c Benader de inhoud met behulp van 20 deelintervallen.

d Leg uit dat je de inhoud exact uit kunt rekenen met de integraal $\displaystyle\int_0^1 \pi\left(x - 2x\sqrt{x} + x^2\right)\mathrm{d}x$.

e Bereken exact de inhoud van de ruimtelijke figuur.

Op het interval $[0, 12]$ is gegeven de functie $g(x) = \frac{1}{3}x$.

f Welke soort ruimtelijke figuur ontstaat er als de grafiek van g over $360°$ om de x-as wordt gewenteld?

g Bereken met behulp van een integraal de inhoud van deze ruimtelijke figuur.

h Bereken de inhoud ook op een meetkundige manier.
Kloppen de antwoorden met elkaar?

© Noordhoff Uitgevers bv

Samenvatting

Riemann-som

Een Riemann-som van de functie f op het interval $[a, b]$ met n deelintervallen is de sommatie

$$f(m_1) \cdot \Delta x + f(m_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(m_n) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(m_k) \cdot \Delta x.$$

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ is de breedte van elk van de deelintervallen,

$m_1 = a + \frac{1}{2}\Delta x$ is het midden van het eerste deelinterval;

$m_n = b - \frac{1}{2}\Delta x$ is het midden van het laatste deelinterval.

$f(m_k)$ is de functiewaarde in het midden van het deelinterval met nummer k.

Voorbeeld

Bereken de Riemann-som van de functie $f(x) = x \cdot \sqrt{x+1}$ op het interval $[-1, 3]$ met 20 deelintervallen.

Oplossing

$\Delta x = \frac{3 - -1}{20} = 0{,}2$;
het eerste midden is
$m_1 = -1 + 0{,}1 = -0{,}9$ en het laatste midden is $m_{20} = 3 - 0{,}1 = 2{,}9$.
De Riemann-som is
$f(-0,9) \cdot 0{,}2 + \ldots + f(2{,}9) \cdot 0{,}2 = 37{,}3$.

Integraal en oppervlakte

De integraal $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ is de exacte waarde waar de Riemann-sommen van f op het interval $[a, b]$ naar naderen als het aantal deelintervallen onbegrensd toeneemt. Het berekenen van $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ heet integreren en de functie $f(x)$ is de integrand.

Als $f(x) \geq 0$ voor $a \leq x \leq b$, dan is $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de x-as, de grafiek van f en de lijnen $x = a$ en $x = b$.

Primitieve functie, hoofdstelling van de integraalrekening

De functie F heet een primitieve functie van de functie f als geldt $F'(x) = f(x)$. Het berekenen van een primitieve functie heet primitiveren.
Als f een functie is op het interval $[a, b]$ en F is een primitieve van f, dan geldt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Rekenregels voor integralen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x$$

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt een integraal exact uitrekenen

Om de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ uit te rekenen bereken je eerst een primitieve F van de integrand $f(x)$. De waarde van de integraal is $F(b) - F(a)$.

Voorbeeld

Bereken $\int_{-2}^{3}(6x^2 - 1)\,dx$.

Oplossing

$F(x) = 2x^3 - x$ is een primitieve dus

$\int_{-2}^{3}(6x^2 - 1)\,dx = [2x^3 - x]_{-2}^{3} = (54 - 3) - (-16 + 2) = 65.$

Je kunt machtsfuncties primitiveren

Gebruik de volgende regel.
Als $f(x) = x^n$ $(n \neq -1)$ dan is voor elke waarde van C de functie $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ een primitieve van f.

Voorbeeld

Geef de primitieve functies van $f(x) = 10x \cdot \sqrt{x}$.

Oplossing

De functie f is te schrijven als $f(x) = 10x^{1\frac{1}{2}}$.
De primitieven zijn dan de functies

$F(x) = \frac{10}{2\frac{1}{2}} \cdot x^{2\frac{1}{2}} + C = 4x^2 \cdot \sqrt{x} + C.$

Je kunt functies van de vorm $f(x) = (a \cdot x + b)^p$ primitiveren

Probeer als primitieve functie $F(x) = c \cdot (a \cdot x + b)^{p+1}$ en bereken $F'(x)$.
Bereken vervolgens de waarde van c waarvoor geldt: $F'(x) = f(x)$.

Voorbeeld

Geef de primitieve functies van $f(x) = (3 - 4x)^5$.

Oplossing

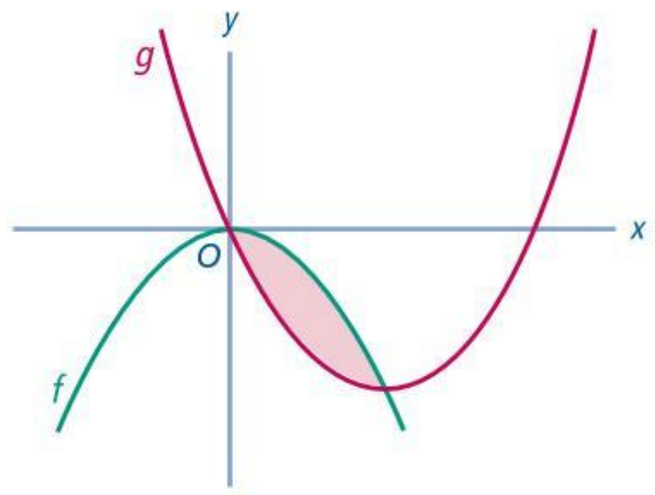
Probeer als primitieve $F(x) = c(3 - 4x)^6$.
$F'(x) = c \cdot 6 \cdot (3 - 4x)^5 \cdot -4 = -24c \cdot (3 - 4x)^5$
Daaruit volgt dat $-24c = 1$, dus $c = -\frac{1}{24}$.
De primitieve functies zijn $F(x) = -\frac{1}{24}(3 - 4x)^6 + C$.

Je kunt de oppervlakte tussen twee grafieken exact berekenen

Maak een schets van de grafieken en geef het gebied aan waarvan je de oppervlakte moet berekenen. Bereken exact de snijpunten van de grafieken en stel de integraal of de integralen op.

Voorbeeld

Bereken de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = -x^2$ en $g(x) = x^2 - 4x$.



Oplossing

Los op: $-x^2 = x^2 - 4x$ dit geeft $-2x^2 + 4x = 0$.
Ontbinden: $-2x\,(x - 2) = 0$ dus $x = 0$ of $x = 2$.
De gevraagde oppervlakte is

$\int_0^2(-x^2 - (x^2 - 4x))\,dx = \int_0^2(-2x^2 + 4x)\,dx = [-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2]_0^2 = 2\frac{2}{3}.$

© Noordhoff Uitgevers bv

Test jezelf

T-1 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7}$ op het interval $[0, 6]$.
Hiernaast is de grafiek van f getekend.

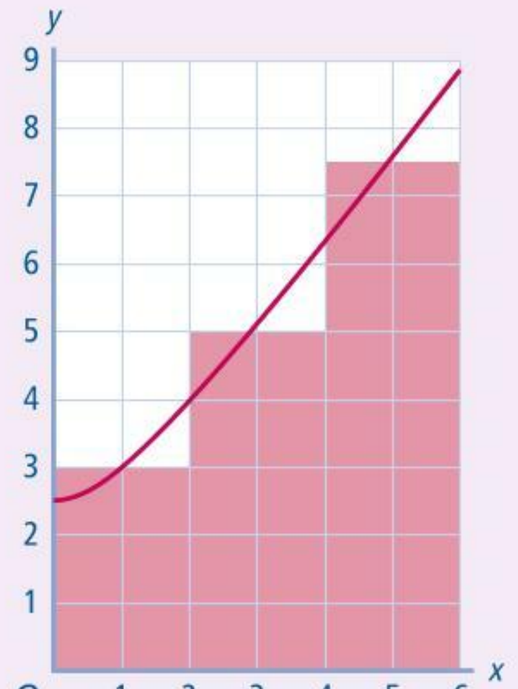
a Leg uit dat de oppervlakte van het gekleurde gebied kan worden berekend met een Riemann-som van de functie f.

b Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied.

c Wat is het midden van het eerste deelinterval als je de Riemann-som van f uitrekent met 60 deelintervallen?

d Bereken de Riemann-som van de functie f met 60 deelintervallen.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-1.



T-2 Bereken exact de volgende integralen.

a $\int_{-3}^{3} 2x^2 \, dx$

b $\int_{1}^{5} (3x - 5) \, dx$

c $\int_{-7}^{7} (x^5 - 7x + 1) \, dx$

d $\int_{0}^{5} (x^2 + 3)^2 \, dx$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-2.

T-3 Geef de primitieven van de volgende functies.

a $f(x) = -2x^2 + \frac{1}{3x^3}$

b $g(x) = x\sqrt{x} + 3x^2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

c $h(x) = 2(5x - 3)^3$

d $k(x) = \frac{6}{\sqrt{4x + 1}}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-3.

T-4 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{x^4 - x - 1}{x^2 + 1}$ en $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

a Plot en schets de grafiek van de functie g.

b Leg uit hoe je aan de grafiek van g kunt zien dat $\int_{-1}^{1} g(x) \, dx = 0$.

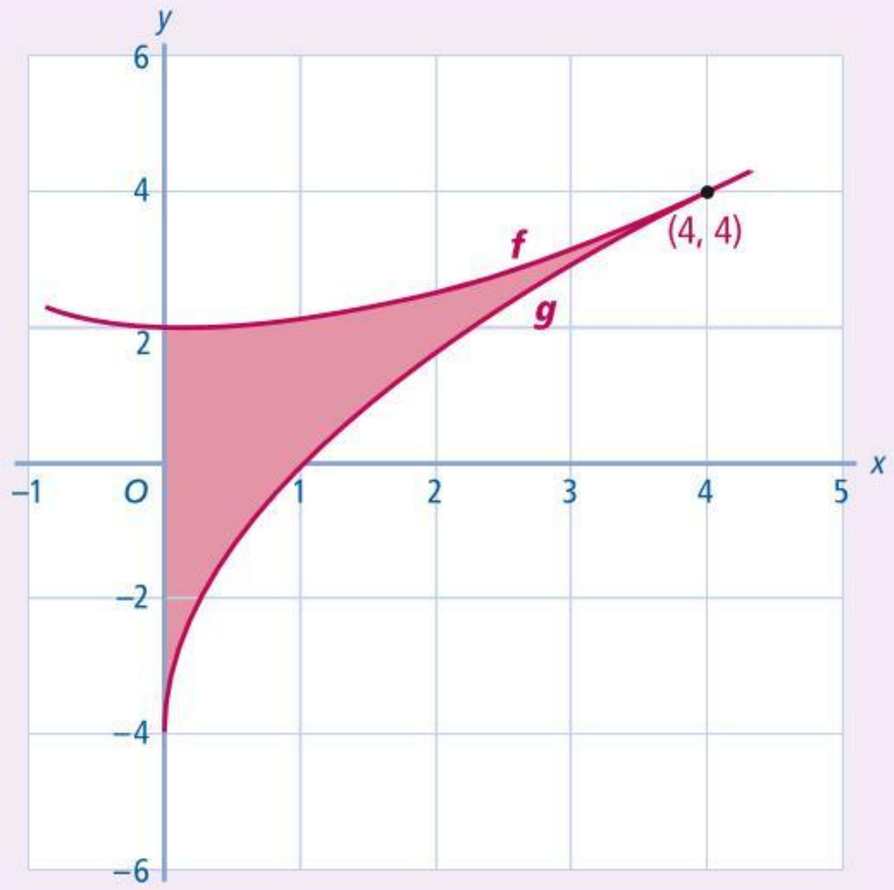
c Laat met een berekening zien dat $f(x) + g(x) = x^2 - 1$.

d Bereken $\int_{-1}^{1} (f(x) + g(x)) \, dx$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-4.

© Noordhoff Uitgevers bv

T-5 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + 2$ en $g(x) = 4\sqrt{x} - 4$.
De grafieken van deze functies raken elkaar in het punt (4, 4).
Bereken exact de oppervlakte van het aangegeven gebied dat wordt ingesloten door beide grafieken en de y-as.
Deze opgave hoort bij paragraaf 4-5.



T-6 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{6}{x + \sqrt{x}}$ en

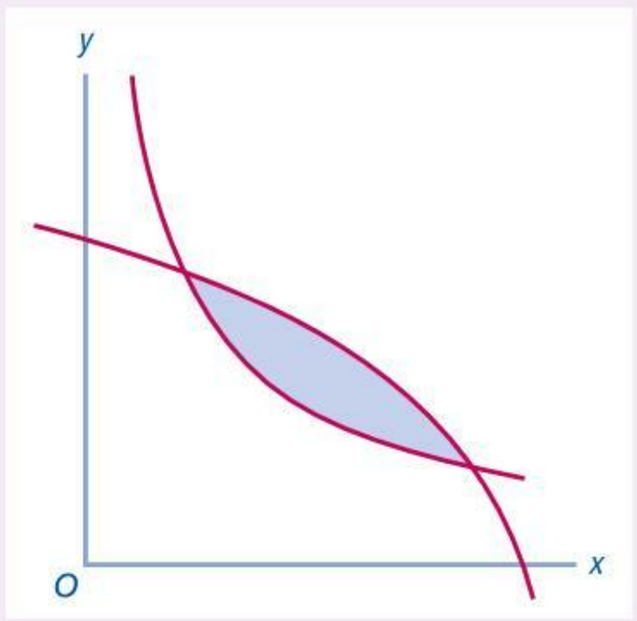
$g(x) = 1 + {}^2\log(5 - x)$.

a Laat met berekeningen zien dat de grafieken van f en g elkaar snijden voor $x = 1$ en voor $x = 4$.

b De grafieken van f en g sluiten een gebied in.
Stel een integraal op om de oppervlakte van dit gebied uit te rekenen.

c Benader de integraal van opdracht b in twee decimalen nauwkeurig.

Deze opgave hoort bij paragraaf 4-5.



T-7 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{8x - 6}{x^3}$ en $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$

a Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g.

b Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door beide grafieken en de lijn $x = 4$.

c Het gebied begrensd door de lijnen $x = 1$, $x = a$ met $a > 1$, de grafiek van f en de x-as wordt door de grafiek van g verdeeld in twee delen met gelijke oppervlakte.
Bereken a.

© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Basis**

B-1 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{6}{x+1}$ op het interval $[0, 6]$.

a Plot en schets de grafiek van f.

b Bereken exact een Riemann-som van f met drie deelintervallen.

c Bereken in twee decimalen een Riemann-som van f met zes deelintervallen.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-1.

B-2 Bereken exact.

a $\int_0^3 (2x + 3)\,dx$

b $\int_{-2}^3 (3x^2 + 4x)\,dx$

c $\int_{-2}^2 (-x + 6x^3)\,dx$

d $\int_1^4 (12x^5 - 8x^3)\,dx$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 2.

B-3 Geef een primitieve van de volgende functies.

a $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$

b $g(x) = 4x(2x - 5)^2$

c $h(x) = \dfrac{4}{(2x-5)\sqrt{2x-5}}$

d $k(x) = 3\sqrt{5 - 2x}$

e $l(x) = \left(\dfrac{1}{2x+1}\right)^3$

f $m(x) = \dfrac{x-2}{x^3}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-3.

B-4 Bereken exact.

a $\int_{-2}^3 \left(\dfrac{6}{\sqrt{2x+5}} + \sqrt{2x+5}\right) dx + \int_3^{10} \left(\dfrac{6}{\sqrt{2x+5}} + \sqrt{2x+5}\right) dx$

b $\int_1^3 \left(x + \sqrt{x^2+3}\right) dx - \int_1^3 \left(x^2 + \sqrt{x^2+3}\right) dx$

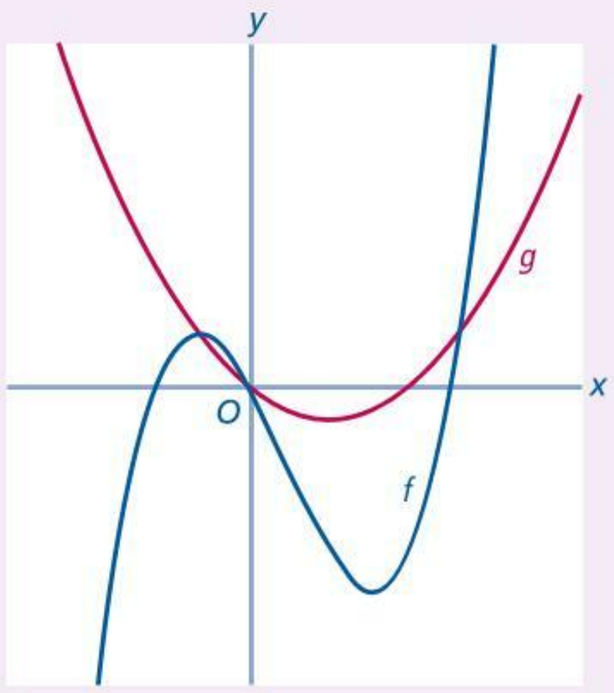
Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-4.

B-5 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x$ en $g(x) = x^2 - 3x$.

a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

b De grafieken van f en g sluiten twee gebieden in.
Bereken exact de oppervlakte van elk van de gebieden.

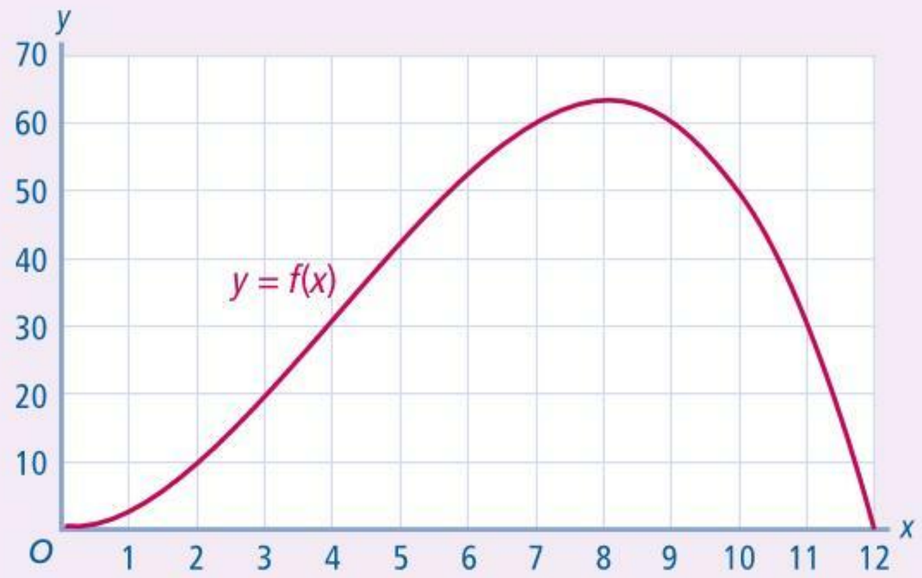
Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-5.



© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Gemengd**

G-1 Hiernaast staat de grafiek van de functie $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{4}x^3$ op het interval $[0, 12]$.



a Het gebied G wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.
Bereken exact de oppervlakte van G.

Gegeven is de familie van functies $g_a(x) = ax(x - 12)$.

b Laat zien dat elke functie g_a dezelfde nulpunten heeft als functie f.

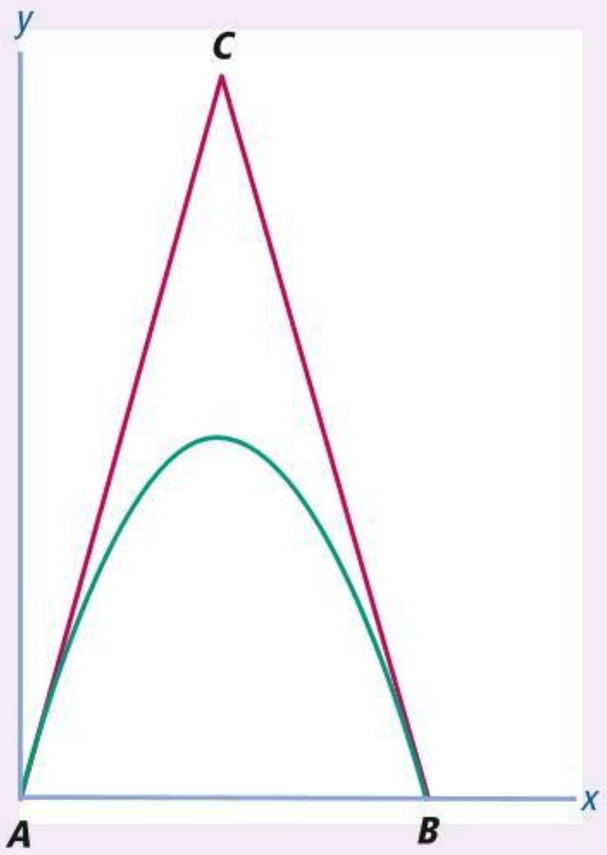
c Het gebied H wordt ingesloten door de grafiek van g_a en de x-as.
Bereken exact de positieve waarde van a waarvoor de oppervlakte van H gelijk is aan de oppervlakte van G.

d Bereken exact voor welke negatieve waarde van a de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafieken van f en g_a gelijk is aan de oppervlakte van het gebied G.

G-2 Gegeven is de familie van functies $f_b(x) = -x^2 + bx$ met $b \neq 0$.
De oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f_b en de x-as hangt af van de waarde van b.

a Bereken deze oppervlakte exact voor het geval dat $b = 1$.

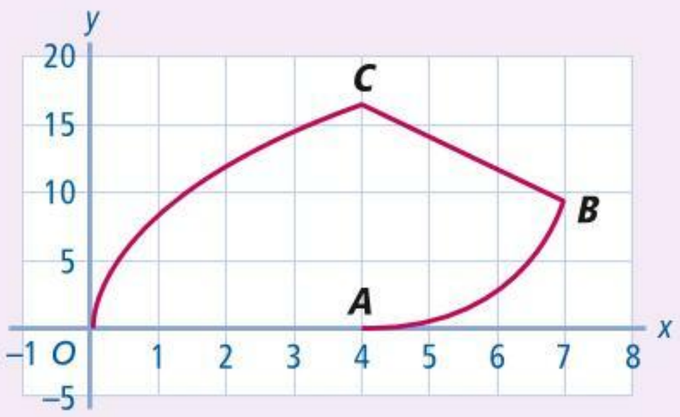
b Bereken exact voor welke waarde van b de oppervlakte van het gebied gelijk is aan 36.



De grafiek van een functie f_b snijdt de x-as in de punten $A(0, 0)$ en $B(b, 0)$.
In de punten A en B zijn de raaklijnen aan de grafiek van f getekend. Deze raaklijnen snijden elkaar in het punt C.

c De driehoek ABC wordt door de parabool verdeeld in twee gebieden. De verhouding van de oppervlakten van deze gebieden is onafhankelijk van de gekozen waarde van b.
Toon dit aan.

G-3 Gegeven zijn de punten $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(7, 9)$ en $C(4, 16)$. Het hiernaast getekende gebied wordt ingesloten door de twee lijnstukken OA en BC en delen van de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{3}(x - 4)^3$ en $g(x) = 8\sqrt{x}$.



a Stel integralen op waarmee je de oppervlakte van het ingesloten gebied kunt berekenen.

b Bereken exact de oppervlakte van het ingesloten gebied.

© Noordhoff Uitgevers bv

Uitdagende opdrachten

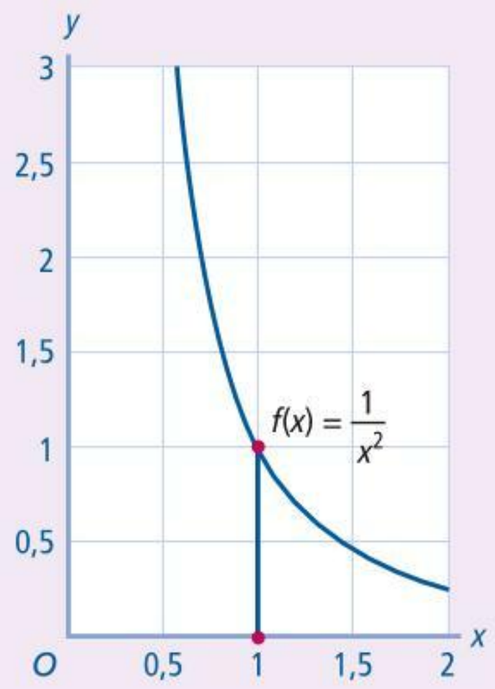
U-1 Geef een primitieve van de volgende functies.

a $f(x) = (1 + x^2)^5 \cdot 2x$

b $g(x) = x^2 \cdot \sqrt{1 + x^3}$

c $h(x) = \dfrac{x}{(1 + x^2)^3}$

U-2 Hiernaast staat de grafiek van $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ voor $x > 0$.



a Bereken de oppervlakte van het gebied ingesloten door de x-as, de grafiek van f en de lijnen $x = 1$ en $x = 5$.

b Het gebied G wordt ingesloten door de x-as, de grafiek van f en de lijnen $x = 1$ en $x = k$ met $k > 1$.
Druk de oppervlakte van G uit in k.

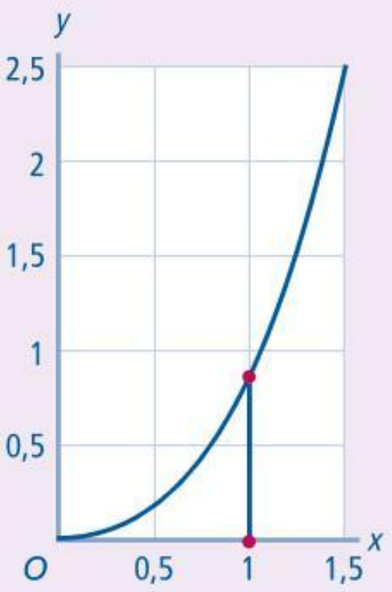
c Je kunt de waarde van k onbeperkt laten toenemen.
Neemt dan de oppervlakte van het gebied G ook onbeperkt toe? Of is er een bovengrens?

d Het gebied H wordt ingesloten door de x-as, de grafiek van f en de lijnen $x = 1$ en $x = k$ met $0 < k < 1$.
Druk de oppervlakte van H uit in k.

e Je kunt de waarde van k onbeperkt dicht bij 0 nemen.
Neemt dan de oppervlakte van het gebied H ook onbeperkt toe? Of is er een bovengrens?

f Bereken de kleinste gehele waarde van $k > 1$ waarvoor
$\int_{k}^{k+1} f(x)dx < 0{,}0002$.

U-3 Hiernaast staat de grafiek van $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$.



a Beredeneer dat $\int_{0}^{1} x^2 \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{3}$.

b Beredeneer dat $\int_{0}^{1,5} x^2 \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x < 1\frac{1}{8}$.

c Bereken in twee decimalen de waarde van k met $0 < k < 2$,
waarvoor geldt $\int_{0}^{k} x^2 \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

U-4 Bereken op meetkundige wijze $\int_{0}^{2} \left(2x + \sqrt{4 - x^2}\right)\mathrm{d}x$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Oppervlakte onder een parabool

Archimedes

Archimedes van Syracuse (287– 212 v.Chr.) was een Oud-Griekse wiskundige, natuurkundige, ingenieur, uitvinder en sterrenkundige.

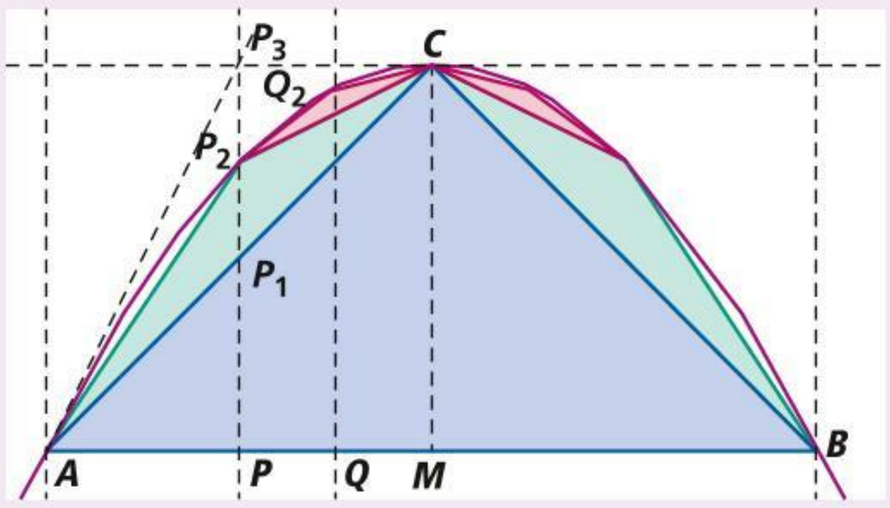
Archimedes legde de fundamenten voor de vloeistofleer, de mechanica en hij gaf een verklaring voor het principe van de hefboom. Hij wordt gezien als de ontwerper en constructeur van de naar hem vernoemde *schroef van Archimedes* die ook getekend staat op de afbeelding hierboven.

De oppervlakte onder de boog van een parabool

In 1906 werd in een klooster te Constantinopel een Grieks handschrift gevonden uit de 10e eeuw n.Chr.
Dit handschrift bevatte onder andere een brief aan Eratosthenes (276–194 v.Chr.). Archimedes schrijft daarin onder meer dat *een segment van een parabool 4/3 is van de driehoek, die dezelfde grondlijn en dezelfde hoogte heeft.*
Archimedes introduceerde hiermee de zogenaamde uitputtingsmethode voor het berekenen van de oppervlakte onder de boog van een parabool .
Anders dan bij de Riemannsom waarbij rechthoekjes worden gebruikt, wordt hier de oppervlakte opgevuld met driehoekjes.

Hierna ga je onderzoeken in hoeverre de bewering van Archimedes klopt.
In de afbeelding hiernaast van parabool p ligt de top in C, is CM de symmetrieas en is P het midden van AM. De lijn PP_3 snijdt AC in punt P_1 en p in P_2.
Dan is P_1 het midden van PP_3, vanwege gelijkvormige driehoeken.

Ook blijkt P_2 het midden van P_1P_3 te zijn, wat je kunt nagaan met een algebraïsche berekening.



Dan gelden de volgende beweringen.

$opp\triangle P_1P_2C = \frac{1}{2}\, opp\triangle P_1P_3C$ (halve basis)

$opp\triangle AP_1P_2 = \frac{1}{2}\, opp\triangle AP_1P_3 = \frac{1}{2}\, opp\triangle APP_1$ (idem)

$opp\triangle APP_1 = \frac{1}{4}\, \triangle AMC$ (gelijkvormigheid)

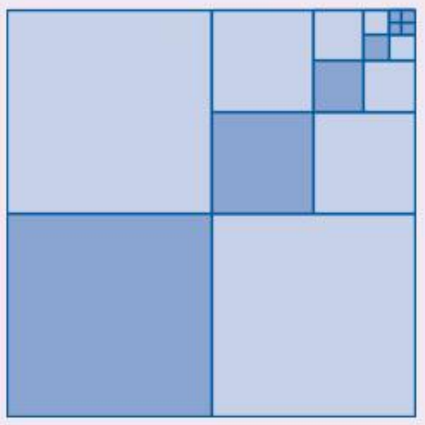
Opdracht

Noem D de oppervlakte van driehoek ABC.
Volgens Archimedes is de oppervlakte onder de parabool dan $\frac{4}{3}D$.

a Laat zien dat geldt $opp\triangle ACP_2 = \frac{1}{8}\, opp\triangle ABC$.

b Op dezelfde manier vind je dat
$opp\triangle P_2CQ_2 = \frac{1}{8}\, opp\triangle ACP_2$.
Leg uit de oppervlakte ingesloten door de parabool en het lijnstuk AB geschreven kan worden als $D + 2 \cdot \frac{1}{8}D + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}D + \ldots$

c Gebruik de figuur hiernaast om uit te leggen dat
$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots = \frac{1}{3}$



d Laat zien dat
$D + 2 \cdot \frac{1}{8}D + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}D + \ldots = \frac{4}{3}D$.

e Kies bij de parabool de functie $f(x) = k^2 - x^2$.
Om te laten zien dat P_2 is het midden van P_1P_3 vul je $x = -\frac{1}{2}k$ in. Druk P_2P_3 uit in k.

f Druk $opp\triangle ABC$ uit in k en bereken $\int_{-k}^{k} f(x)\mathrm{d}x$.
Formuleer je conclusie.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheden 2

Vergelijkingen oplossen

Theorie

Een wortelvergelijking vereenvoudig je tot de vorm $\sqrt{A} = B$.
Vervolgens gebruik je de regel: uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$
mits $B \geq 0$.

Voorbeeld

Los exact op.

$2x - \sqrt{x-3} = x + 5$

Oplossing

$x - 5 = \sqrt{x-3}$
$x^2 - 10x + 25 = x - 3$
$x^2 - 11x + 28 = 0$
$(x-7)(x-4) = 0$
$x = 4$ of $x = 7$
De waarde $x = 4$ voldoet niet,
want invullen geeft $8 - 1 = 9$.
De oplossing $x = 7$ voldoet wel.

1 Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\sqrt{x+2} = x$

b $\sqrt{x+2} = x - 4$

c $\frac{3\sqrt{x}}{2} = x$

d $3\sqrt{x} - x = 2$

e $3\sqrt{x+2} - 2 = -x$

f $\frac{5}{2\sqrt{x}} = 3x$

Theorie

Een gebroken vergelijking vereenvoudig je tot een vorm waarin je één van de volgende regels kunt gebruiken:

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$.

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

Voorbeeld

Los exact op.

$\frac{3x-5}{x-5} = \frac{4x}{x+3}$

Oplossing

$\frac{3x-5}{x-1} = \frac{4x}{x+3}$
$(3x-5)(x+3) = 4x(x-1)$
$3x^2 + 4x - 15 = 4x^2 - 4x$
$x^2 - 8x + 15 = 0$
$(x-3)(x-5) = 0$
$x = 3$ of $x = 5$
Beide oplossingen voldoen.

2 Los algebraïsch op.

a $\frac{2x}{x+1} = \frac{1}{6x}$

b $\frac{x^2+1}{x^2-1} = 5$

c $\frac{2}{x-1} = \frac{4x}{x+2}$

d $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 3$

e $\frac{2^x - 3}{2^x + 1} = \frac{-1}{2^x}$

f $\frac{3-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 1 = 0$

3 Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden exact op.

a $3x^4 - 6x^3 = 9x^2$

b $(2 \cdot {}^2\log(x) + 3)^2 = 25$

c $(3x+7)(2x-1) = -12$

d $3^{2x-1} = 81$

e $3x^2 - 7x < 10$

f $x^2 \geq 20 - x^4$

g $x\sqrt{x} - 7\sqrt{x} \geq 0$

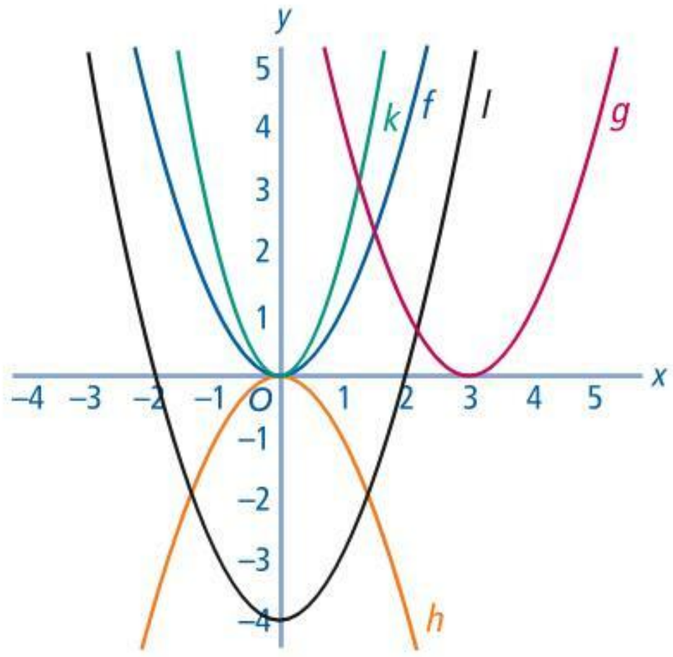
h $2x - 28 \leq \sqrt{x}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Transformaties

4 In het assenstelsel hiernaast zijn vijf grafieken getekend.
- Bij de grafiek van f hoort de functie $f(x) = x^2$.
- De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door een translatie van 3 naar rechts.
- De grafiek van h ontstaat uit de grafiek van f door een spiegeling in de x-as.
- De grafiek van k ontstaat uit de grafiek van f door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor 2.
- De grafiek van l ontstaat uit de grafiek van f door een translatie van 4 omlaag.

Geef van elke functie een functievoorschrift.



Theorie

Bij een **transformatie** van de grafiek van een functie f is de beeldgrafiek de grafiek van een functie g. Je krijgt het functievoorschrift van g als volgt:
- bij een translatie van p naar rechts: $g(x) = f(x - p)$
- bij een translatie van p omhoog: $g(x) = f(x) + p$
- bij een spiegeling in de x-as: $g(x) = -f(x)$
- bij een spiegeling in de y-as: $g(x) = f(-x)$
- bij een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor a: $g(x) = a \cdot f(x)$
- bij een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor b: $g(x) = f\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$

5 Stel bij de volgende transformaties een functievoorschrift op bij het beeld van de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$.

a Spiegeling in de y-as, gevolgd door een translatie 3 naar links.

b Translatie 5 omhoog, gevolgd door spiegeling in de x-as.

c Vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor 3, gevolgd door een translatie 4 naar rechts.

d Translatie 4 naar rechts, gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor 3.

6 Geef bij de volgende functies aan door welke transformaties (en in welke volgorde) de bijbehorende grafiek kan ontstaan uit de grafiek van de standaardfunctie f.

a $g(x) = 4(x + 1)^2 - 3$ en $f(x) = x^2$

b $g(x) = 5 - \sqrt{3 - x}$ en $f(x) = \sqrt{x}$

c $g(x) = \log(3x - 6)$ en $f(x) = \log(x)$

© Noordhoff Uitgevers bv

Vergelijkingen van lijnen

Theorie

Een vergelijking van een lijn kun je op verschillende manieren weaergeven.

- Een vergelijking van een lijn kun je schrijven als $ax + by = c$.
- Als de lijn niet evenwijdig is aan de verticale as, kun je de vergelijking ook schrijven als $y = mx + n$.
- Als een lijn de assen snijdt in $(p, 0)$ en $(0, q)$ met $p \neq 0$ én $q \neq 0$, dan kun je de vergelijking schrijven als $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Voorbeeld

Lijn l snijdt de assen in $(-4, 0)$ en in $(0, 8)$.

Geef een vergelijking van l in de vorm $y = mx + n$.

Oplossing

Er geldt l: $\frac{x}{-4} + \frac{y}{8} = 1$.

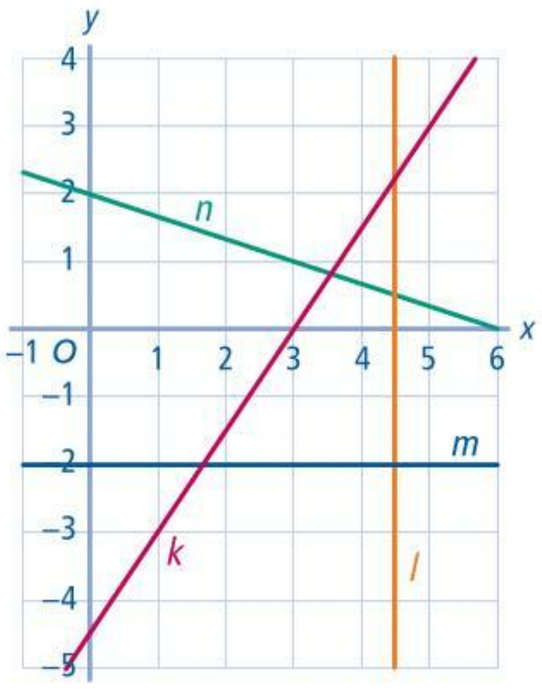
Links en rechts vermenigvuldigen met 8 geeft $-2x + y = 8$, dus $y = 2x + 8$.

7a Schrijf $y = \frac{3}{4}x - 5$ in de vorm $ax + by = c$.

b Schrijf $y = -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

c Schrijf $\frac{x}{-5} + \frac{y}{4} = 1$ in de vorm $y = mx + n$.

8 Geef een vergelijking bij elk van de lijnen in het assenstelsel hiernaast. Kies steeds de meest geschikte vorm.



9 Geef de drie vormen van een vergelijking van een lijn door elk van de volgende tweetallen punten.

a $(5, 0)$ en $(0, 20)$

b $(-1, 8)$ en $(1, 4)$

c $(-3, 0)$ en $(2, 25)$

d $(-2, -6)$ en $(5, -27)$

10 Gegeven zijn de lijnen m: $y = 2x + 1$ en n: $3y + x = -11$.

a Schrijf een vergelijking van lijn n in de vorm $y = ax + b$.

b Teken de lijnen m en n in één assenstelsel.

c Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van m en n.

11 Los de volgende stelsels vergelijkingen exact op.

a $\begin{cases} -2x + y = -3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

b $\begin{cases} -3u + \frac{1}{2}v = -9 \\ \frac{1}{3}u - \frac{1}{18}v = 1 \end{cases}$

c $\begin{cases} 5y = -x + 2 \\ 6y = -x + 3 \end{cases}$

d $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -8x + 4y = -4 \end{cases}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Lijnen en hoeken

12 Gegeven zijn de lijnen m: $y + 2 = 3x$ en l: $4y + 8x = 2$.

a Teken m en l in één assenstelsel.

b Bereken van beide lijnen de richtingshoek.

c Bereken de grootte van de twee verschillende hoeken die de lijnen met elkaar maken.

Twee snijdende lijnen maken vier hoeken met elkaar die twee aan twee gelijk zijn.
Met de hoek tussen twee lijnen wordt bedoeld de scherpe of rechte hoek die de lijnen met elkaar maken.

13 Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de volgende paren lijnen.

a $2x - \frac{1}{3}y = 2\frac{2}{3}$ en $3y + 4\frac{1}{2}x = 9$

b $\frac{y}{2} - \frac{x}{5} = 1$ en $6y + 10x = 3$

Voorbeeld

Bereken de richtingshoek van lijn l met vergelijking $3x - 5y = 0$.

Oplossing

$3x - 5y = 0$ kun je herleiden tot $y = \frac{3}{5}x$.

De richtingscoëfficiënt van l is dus $\frac{3}{5}$.

Uit $\tan(\alpha) = \frac{3}{5}$ volgt $\alpha \approx 31°$.

De richtingshoek is $31°$.

Theorie

Als twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 loodrecht op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$.
Het omgekeerde geldt ook: als voor twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$, dan staan k en l loodrecht op elkaar.

14a Gegeven zijn lijn l: $x + y = 3$ en punt $P(-1, 2)$.
Toon aan dat de lijn met vergelijking $y = x + 3$ door punt P gaat en loodrecht op l staat.

b Op lijn m: $3x - \frac{1}{4}y = 1$ liggen de punten $Q(3, 32)$ en $R(-1, 16)$.
Stel een vergelijking op van de lijn door het midden van lijnstuk QR loodrecht op m.

15a Gegeven zijn lijn l: $4x - 2y = 3$ en punt $P(-3, 1)$.
Stel een vergelijking op van loodlijn n door punt P op lijn l.

b Gegeven zijn lijn m: $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$ en punt $Q(5, 3)$.
Stel een vergelijking op van de lijn n door punt Q die loodrecht staat op lijn m.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de loodlijn door $P(2, 5)$ op lijn l: $2x + 3y = 7$.

Oplossing

De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{2}{3}$.
Als m de richtingscoëfficiënt van de loodlijn is, dan is $-\frac{2}{3}$. $m = -1$, dus $m = 1\frac{1}{2}$.
Een vergelijking is dus $y = 1\frac{1}{2}x + b$.
Substitutie van $P(2, 5)$ geeft $5 = 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b$, dus $b = 2$.
Een vergelijking van de loodlijn is $y = 1\frac{1}{2}x + 2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Rekenen met breuken

Theorie

Breuken kun je bij elkaar **optellen** en van elkaar **aftrekken** als ze gelijknamig zijn. Bij ongelijknamige breuken maak je eerst de noemers gelijk: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

Breuken kun je met elkaar **vermenigvuldigen** door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

Bij het **vereenvoudigen** van breuken kun je de teller en de noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigen of door hetzelfde getal delen.

Voorbeeld

Herleid tot één breuk: $\frac{x}{x+2}+\frac{2x}{x-1}$

Oplossing

Als je de breuken gelijknamig maakt wordt de noemer $(x+2)\,(x-1)$.

$$\frac{x}{x+2}+\frac{2x}{x-1}=$$

$$\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}+\frac{2x(x+2)}{(x+2)(x-1)}=$$

$$\frac{x(x-1)+2x(x+2)}{(x+2)(x-1)}=\frac{3x^2+3x}{(x+2)(x-1)}$$

16 Herleid tot één breuk.

a $\frac{x+2}{x^2}+\frac{2}{x-1}$

b $\frac{x-1}{x+4}-\frac{x+4}{x-1}$

c $\frac{1}{2x-1}+\frac{2x+1}{x+1}$

d $\frac{-x^3}{2x-1}+\frac{2x^2+1}{4}$

17 Herleid tot één breuk.

a $\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}$

b $\frac{-x}{x-2}+3$

c $\frac{x}{x+1}-x$

d $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

18 Schrijf als één breuk en vereenvoudig zoveel mogelijk.

a $\frac{-2x^2}{5}\cdot\frac{10}{3x}$

b $\frac{5}{3x}\cdot-\frac{-1}{3}x$

c $3x\cdot\frac{-2}{x}\cdot-\frac{3}{4}$

d $-x^2\cdot\frac{-1}{x^3}$

Voorbeeld

Schrijf als één breuk en vereenvoudig zo mogelijk: $-\frac{2}{3}x\cdot\frac{6}{x^3}$

Oplossing

$$-\frac{2}{3}x\cdot\frac{6}{x^3}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{6}{x^3}=$$

$$\frac{-2x}{3}\cdot\frac{6}{x^3}=\frac{-12x}{3x^3}=\frac{-4}{x^2}$$

19 Schrijf de volgende formules zonder haakjes en vereenvoudig de formule zoveel mogelijk.

a $y=\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2$

b $y=-2x^3\left(\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x}-1\right)$

c $y=\frac{1}{3}x\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)$

d $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$
$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

© Noordhoff Uitgevers bv

Differentiëren

Theorie

Voor het differentiëren van functies gelden de volgende regels.

$f(x) = x^a$	$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$
$g(x) = f(x) + c$	$g'(x) = f'(x)$
$g(x) = c \cdot f(x)$	$g'(x) = c \cdot f'(x)$
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$

De kettingregel:

$k(x) = g(f(x))$	$k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

20 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 - x + 8$

b $M(a) = 4 + a - \sqrt{6 - a}$

c $f(x) = (5x - 9)^3$

d $q(x) = \dfrac{1}{6 + 7x}$

e $l(s) = s^3(s^2 + 4)$

f $w(p) = p^2\sqrt{p}$

g $V(p) = 4\sqrt{6p + 8}$

h $B(u) = \dfrac{6}{u} - \dfrac{1}{u^6} - 6u$

21 Bereken exact de helling van de grafieken van de volgende functies in het gegeven punt.

a $f(x) = 5\sqrt{4x - 11}$ in $(5, 15)$

b $g(x) = \dfrac{36}{x^2}$ in $(-2, 9)$

c $h(x) = \dfrac{4}{3x + 2}$ in $(-1, -4)$

22 Stel in de volgende situaties met behulp van de afgeleide een vergelijking van de raaklijn op.

a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 7\frac{1}{2}x$ in het punt $(3, 9)$

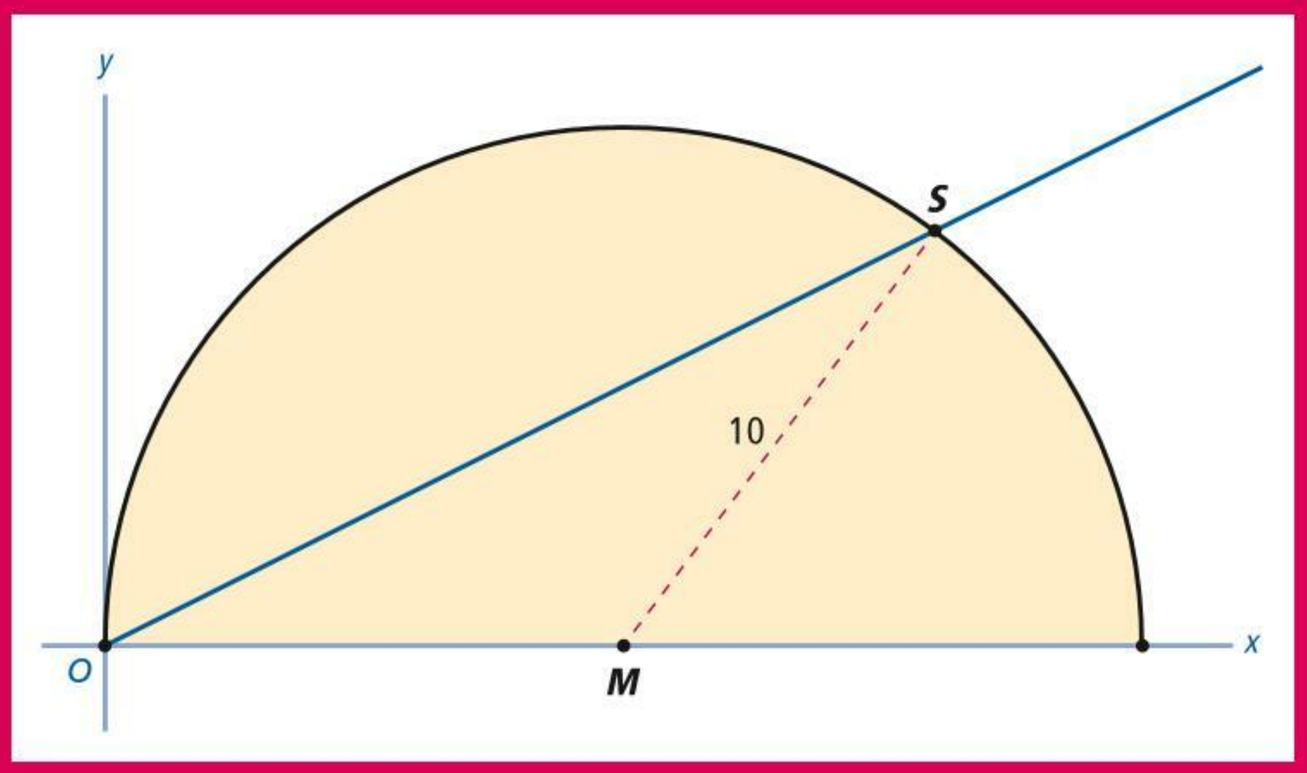
b $g(x) = \dfrac{5x^3 + 1}{x^2}$ in het punt $\left(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right)$

c $h(x) = 3x - 1 + \sqrt{6x + 3}$ in het punt $(1, 5)$

23 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = 8x^3 - 6x^2 + a$.
Bereken exact voor welke waarden van a de grafiek van f_a de x-as raakt.

24 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ en $g_a(x) = 3x + a$.
Voor welke waarden van a raakt de grafiek van g_a de grafiek van f?
Geef voor de waarden van a ook de coördinaten van het raakpunt.

© Noordhoff Uitgevers bv



Cirkels en formules

In een assenstelsel snijdt de lijn $y = \frac{1}{2}x$ de halve cirkel met straal 10 in de oorsprong en in een punt S.

Kun je de coördinaten van S berekenen?

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 5
Cirkels

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	122
5-1	Vergelijking van een cirkel	124
5-2	Snijden en raken	126
5-3	Snijdende cirkels	128
5-4	Afstand tot een cirkel	130
5-5	Ingeschreven en omgeschreven cirkel	132
5-6	Gemengde opdrachten	134
	Samenvatting	136
	Test jezelf	138
	Extra oefening - Basis	140
	Extra oefening - Gemengd	141
	Uitdagende opdrachten	142
	Sangaku	143

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorkennis

V-1 Gegeven is de lijn met vergelijking $3x + 4y = 12$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten met de assen.

b Schrijf de vergelijking in de vorm $ax + by = 1$.

c Hoe kun je in deze vergelijking de snijpunten met de assen herkennen?

d Schrijf de vergelijking in de vorm $y = mx + n$.

Theorie

De vergelijking van een lijn l kun je op verschillende manieren weergeven.

- in de vorm $ax + by = c$, met a, b en c gehele getallen.
  Als $a = 0$ is l evenwijdig met de x-as,
  als $b = 0$ is l evenwijdig met de y-as.
- in de vorm $y = mx + n$, mits l niet evenwijdig is aan de y-as.
- in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, als l de assen snijdt in $(p, 0)$ en $(0, q)$ met $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

Voorbeeld

Lijn l gaat door de punten $(-6, 0)$ en $(0, 2)$.
Schrijf de vergelijking van l in de vorm $y = mx + n$.

Oplossing

Er geldt l: $\frac{x}{-6} + \frac{y}{2} = 1$.
Links en rechts vermenigvuldigen met 6 geeft $-x + 3y = 6$, dus $y = \frac{1}{3}x + 2$.

V-2a Schrijf $y = -1\frac{1}{5}x + 3$ in de vorm $ax + by = c$.

b Schrijf $y = -\frac{2}{5}x + 10$ in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

c Schrijf $\frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 1$ in de vorm $y = mx + n$.

V-3 Los de volgende stelsels vergelijkingen op.
Gebruik substitutie of eliminatie.

a $\begin{cases} 5x - 7y = 50 \\ 4x + 3y = -3 \end{cases}$

b $\begin{cases} 5x - 4y = 7 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$

c $\begin{cases} 4x - 2y = 7 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

d $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 8x - 5y = -8 \end{cases}$

e $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ \frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1 \end{cases}$

f $\begin{cases} 1\frac{1}{2}x - 4y = 10 \\ \frac{3}{4}x + y = 2 \end{cases}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Om de hoek tussen twee lijnen te berekenen maak je eerst een schets.
Vervolgens bereken je de richtingscoëfficiënten en de richtingshoeken.
Ten slotte gebruik je de schets om de gevraagde hoek te bepalen.

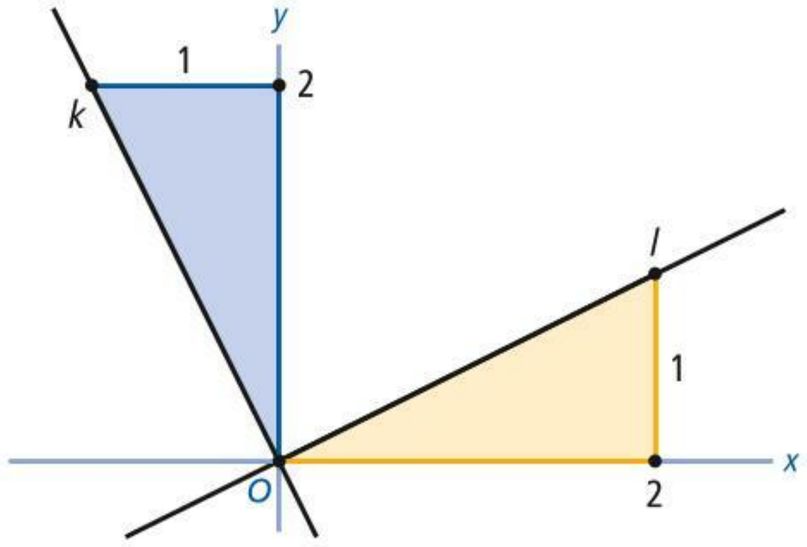
V-4 Bereken de hoek tussen de lijnen l en m in graden nauwkeurig.

a l: $y = 4x - 5$ en m: $2y - 3x = 4$

b l: $2x - 4y = 1$ en m: $y = -3x + 6$

c l: $3y - 2x = 4$ en m: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -1$

V-5 Gegeven is lijn l: $y = \frac{1}{2}x$. Bij een draaiing van 90° om de oorsprong is lijn k het beeld van l.
Stel een vergelijking op van k.



Theorie

Als twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 **loodrecht** op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$.
Het omgekeerde is ook waar:
Als voor twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$, dan staan k en l loodrecht op elkaar.

V-6 Onderzoek of de lijnen k en l loodrecht op elkaar staan.

a k: $2x + 5y = 6$ en l: $y = 2\frac{1}{2}x - 3$

b k: $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ en l: $4x - 5y = 12$

c k: $y = 2x - 3$ en l: $x - 2y = 1$

V-7a Stel een vergelijking op van de lijn l door punt $P(3, -4)$ loodrecht op lijn k: $y = 1\frac{1}{2}x + 3$.

b Stel een vergelijking op van de lijn l door punt $P(-2, 8)$ loodrecht op lijn k: $3x - 8y = 9$.
Schrijf de vergelijking in de vorm $ax + by = c$.

c Gegeven zijn de punten $A(-2, 7)$ en $B(6, 1)$.
Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van lijnstuk AB.

De afstand van een punt P tot een lijn l vind je door de loodlijn door P te snijden met l. Is Q het snijpunt, dan is de afstand van P tot l gelijk aan PQ.

V-8 Bereken exact de afstand van punt P tot lijn l.

a $P(3, -11)$ en l: $y = x$

b $P(-1, 5)$ en l: $3x + 4y = 13$

De afstand tussen twee punten $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$ is
$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

5-1

Vergelijking van een cirkel

1 In een assenstelsel zie je de cirkel met middelpunt $M(4, 2)$ en straal 4. Op de cirkel ligt het punt $P(x, y)$.

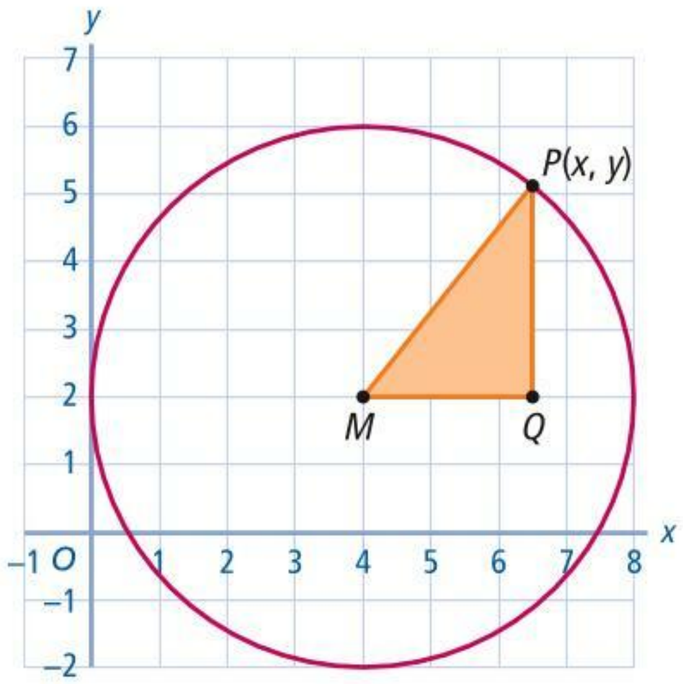
a Leg uit dat geldt $MQ = x - 4$ of $MQ = 4 - x$.

b Druk PQ uit in y.

c Druk MP^2 uit in x en y.

d Toon aan dat de coördinaten van P voldoen aan de vergelijking $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

e Geef een vergelijking van de beeldcirkel bij een translatie 3 naar links en 1 omhoog.



Theorie

Bij de cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r hoort de vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, ook wel de **middelpuntsvergelijking** van de cirkel genoemd.

Voorbeeld

Geef de middelpuntsvergelijking van cirkel c met middelpunt $(-2, 1)$ en straal $3\sqrt{2}$.

Oplossing

De middelpuntsvergelijking van cirkel c is $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2$ ofwel $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 18$.

H 2 Gegeven zijn de punten $A(-1, -3)$ en $B(4, -2)$. Cirkel c heeft middelpunt B en gaat door A.

a Geef de middelpuntsvergelijking van c.

b Toon met een berekening aan dat punt $C(3, 3)$ op cirkel c ligt.

c Cirkel d gaat door de hoekpunten van $\triangle ABC$. Laat met een berekening zien dat $D(1, 0)$ het middelpunt van cirkel d is.

d Geef de middelpuntsvergelijking van cirkel d.

3 Gegeven is cirkel c: $(x - 3)^2 + y^2 = 9$.

a Geef het middelpunt en de straal van c.

b Stel een vergelijking op van de beeldcirkel van c bij spiegelen in de y-as.

c Cirkel d is gelijkvormig met cirkel c met factor 2 en heeft als middelpunt het punt $(6, 0)$. Geef de middelpuntsvergelijking van cirkel d.

4 Een cirkel met straal $\sqrt{65}$ en het middelpunt op een van beide assen gaat door het punt $(7, 8)$.

a Hoeveel cirkels voldoen aan deze voorwaarden?

b Stel de middelpuntsvergelijking op van elke mogelijke cirkel.

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Gegeven is cirkel c: $(x-4)^2+(y+1)^2=26$.

a Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van c.

b Toon aan dat de vergelijking te schrijven is als $x^2+y^2-8x+2y=9$.

Voor een vergelijking van een cirkel zijn twee notaties gebruikelijk. De eerste is in de vorm van een middelpuntsvergelijking $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. De tweede is in de vorm $x^2+y^2+px+qy+s=0$. In opdracht 5 heb je de eerste vorm omgewerkt naar de tweede vorm, in opdracht 6 leer je hoe je de tweede vorm kunt herleiden naar een middelpuntsvergelijking.

6 Gegeven is cirkel c: $x^2+y^2-8x+2y+12=0$.
Om de middelpuntsvergelijking te vinden, ga je kwadraat afsplitsen. Zet eerst de termen met een factor x bij elkaar en de termen met een factor y: $x^2-8x+y^2+2y+12=0$.

a Hiernaast is een begin gemaakt met de herleiding tot de middelpuntsvergelijking. Maak de herleiding af.

b Schrijf de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel op.

$x^2-8x+y^2+2y+12=0$

$(x-\ldots)^2-\ldots+(y+\ldots)^2-\ldots+12=0$

$(x-\ldots)^2+(y+\ldots)^2=\ldots$

Theorie

Door twee keer **kwadraat afsplitsen** toe te passen op de vergelijking $x^2+y^2+px+qy+s=0$ kun je de vergelijking herleiden tot de middelpuntsvergelijking.

H 7 Herleid tot een middelpuntsvergelijking en bereken de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel.

a $x^2+y^2+4y=9$

b $x^2+y^2-10x-24y=0$

c $x^2+y^2-3x-y+\frac{1}{2}=0$

d $x^2+y^2-2\sqrt{3}\cdot x+4\sqrt{2}\cdot y+4=0$

Voorbeeld

Herleid $x^2+y^2-16x+12y+75=0$ tot een middelpuntsvergelijking.

Oplossing

$x^2-16x=(x-8)^2-64$ en

$y^2+12y=(y+6)^2-36$

De vergelijking kan herschreven worden als

$(x-8)^2-64+(y+6)^2-36+75=0$.

Een middelpuntsvergelijking is dus $(x-8)^2+(y+6)^2=25$.

8 De cirkel met vergelijking $x^2+y^2+2ax+2by=0$ gaat behalve door de oorsprong ook nog door de punten $P(1, 5)$ en $Q(6, 4)$.

a Controleer dat de cirkel door de oorsprong gaat.

b Bereken a en b.

c Bereken exact de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel.

9a Waarom hoort bij de vergelijking $x^2+y^2-4x-20y+108=0$ geen cirkel?

b Toon aan dat de vergelijking $x^2+y^2+px+qy+s=0$ alleen dan de vergelijking van een cirkel is als $p^2+q^2>4s$.

© Noordhoff Uitgevers bv

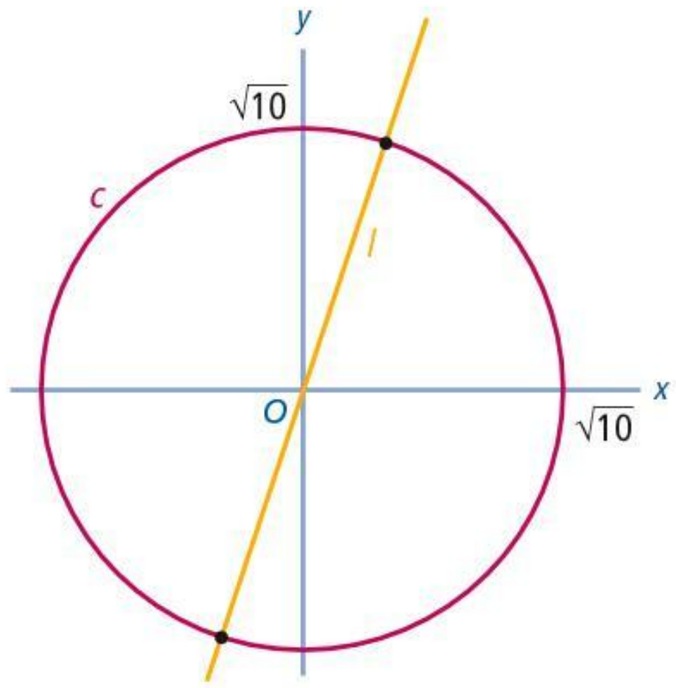
5-2

Snijden en raken

10 Lijn l: $y = 3x$ snijdt cirkel c: $x^2 + y^2 = 10$ in twee punten.

a Substitueer $y = 3x$ in de vergelijking van c en bereken van elk snijpunt de x-coördinaat.

b Bereken met behulp van de vergelijking van l de y-coördinaten van de snijpunten.



11 De lijn m: $x + 2y = 1$ snijdt cirkel c: $x^2 + y^2 = 10$ in twee punten.

a Schrijf de vergelijking van lijn m in de vorm $x = \ldots$.

b Gebruik deze vorm om de coördinaten van de snijpunten van m en c te berekenen.

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel berekenen met behulp van substitutie. Schrijf daartoe de vergelijking van de lijn in de vorm $y = \ldots$ of $x = \ldots$
Een cirkel en een lijn kunnen twee, één of geen snijpunten hebben. De kwadratische vergelijking waarmee je de coördinaten van de snijpunten uitrekent, heeft dan twee, één of geen oplossingen. Met behulp van de discriminant stel je het aantal oplossingen vast.

H 12 Bereken de coördinaten van de snijpunten van cirkel c en lijn l.

a c: $x^2 + y^2 = 20$ en l: $y = x + 2$

b c: $x^2 + y^2 = 5$ en l: $2y + x = 5$

c c: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 80$ en l: $3y + x = 15$

13 Gegeven zijn cirkel c: $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ en lijn l: $y = px$.

a Laat zien dat substitutie van $y = px$ in $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ de vergelijking $(p^2 + 1)x^2 - 10x + 16 = 0$ oplevert.

b Deze vergelijking heeft precies één oplossing als de discriminant gelijk is aan 0.
Bereken exact de waarden van p waarvoor dit het geval is.

c Bereken exact voor elk van de gevonden waarden van p de coördinaten van het gemeenschappelijke punt R van c en l.

d Toon aan dat in beide gevallen de straal naar R loodrecht op lijn l staat.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn l: $y - 3x = 1$ en de cirkel c: $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Oplossing
Substitutie van $y = 3x + 1$ geeft:
$(x + 1)^2 + (3x - 2)^2 = 25$
$x^2 + 2x + 1 + 9x^2 - 12x + 4 = 25$
$10x^2 - 10x - 20 = 0$
$x^2 - x - 2 = 0$, dus $(x + 1)(x - 2) = 0$
$x = -1$ of $x = 2$
Invullen in $y = 3x + 1$ geeft
$y = -2$ of $y = 7$.
Snijpunten : $(-1, -2)$ en $(2, 7)$.

Theorie

Als een lijn l en een cirkel c precies één punt R gemeenschappelijk hebben, dan is l de **raaklijn** in R aan c. Punt R het **raakpunt**.

D* < 0: *geen oplossingen
D* = 0: *één oplossing
D* > 0: *twee oplossingen

© Noordhoff Uitgevers bv

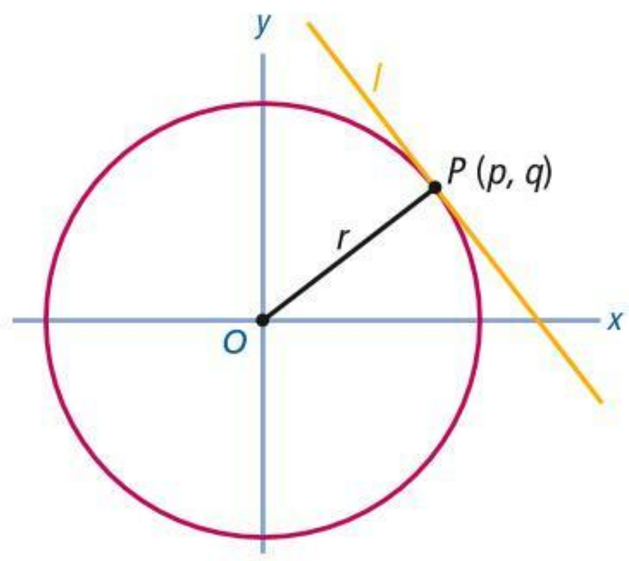
Raaklijn
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

14 Om de raaklijnstelling te bewijzen breng je een assenstelsel aan met de oorsprong in het middelpunt van de cirkel. l is de raaklijn in $P(p, q)$ aan de cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal r.

a Leg uit dat je de cirkel kunt opvatten als een combinatie van de grafieken van $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ en $g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$.

b Bereken met differentiëren de helling van de grafiek van f in punt $P(p, q)$ en toon aan dat de helling gelijk is aan $-\frac{p}{q}$.
Ga na dat dit ook klopt als P op de grafiek van g ligt.

c Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn OP en toon aan dat $OP \perp l$.



Aanpak

Hoe stel je een vergelijking op van een raaklijn *l* in een gegeven punt *P* van een cirkel met middelpunt *M*?

1. Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn door M en P.
2. Gebruik de raaklijnstelling om de richtingscoëfficiënt a van l te berekenen.
3. Vul de coördinaten van P in bij $y = ax + b$ om b te berekenen.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de raaklijn l in punt $P(3, 4)$ van de cirkel $x^2 + y^2 = 25$.

Oplossing

1. Het middelpunt van de cirkel is $O(0, 0)$.
   De richtingscoëfficiënt van OP is $\frac{4}{3}$.
2. De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{3}{4}$.
3. P ligt op l. Een vergelijking van l is $y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$.

H 15 Punt P ligt op cirkel c. Stel voor de volgende situaties een vergelijking op van de raaklijn in P aan c.

a c: $x^2 + y^2 = 10$ en $P(-1, 3)$

b c: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 10$ en $P(5, -4)$

c c: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$ en $P(2, 1)$

16 Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(4, 3)$ en straal $\sqrt{5}$. De lijn door M met richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ snijdt c in de punten P en Q.

a Stel een vergelijking op van c.

b Bereken exact de coördinaten van P en Q.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn in P.

d Stel een vergelijking op van de raaklijn in Q.

H 17 Gebruik de methode van opdracht 13 om te onderzoeken voor welke waarden van m de lijn $y = mx$ raakt aan de cirkel $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 13$.

18 Gegeven is punt $P(0, -4)$ en cirkel c: $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 15$.
Een vergelijking van een lijn met richtingscoëfficiënt m door P is $y = mx - 4$.

a Onderzoek voor welke waarden van m de lijn $y = mx - 4$ raakt aan c.

b Stel een vergelijking op van elk van de raaklijnen door P aan c.

© Noordhoff Uitgevers bv

5-3

Snijdende cirkels

19 De cirkels c_1: $(x-7)^2+y^2=49$ en c_2: $x^2+y^2=24$ snijden elkaar in de punten A en B.

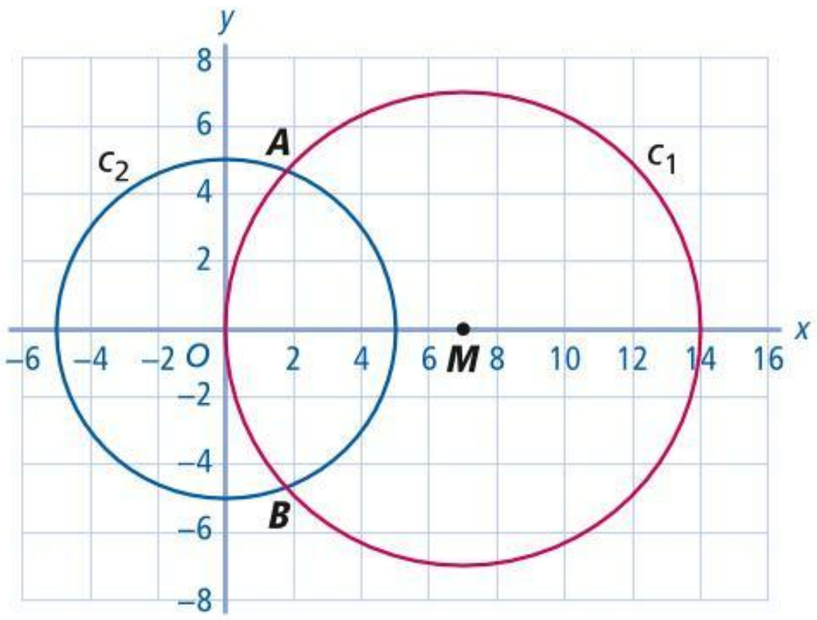
a Om de coördinaten van A en B te berekenen los je het stelsel

$$\begin{cases}(x-7)^2+y^2=49\\ x^2+y^2=24\end{cases}$$ op.

Werk de haakjes weg en elimineer x^2+y^2 door de vergelijkingen van elkaar af te trekken.

b Je vindt de vergelijking van een lijn. Welke lijn is dat?

c Snijd de lijn met één van de cirkels en geef de coördinaten van A en B.



Aanpak

Hoe bereken je de coördinaten van de snijpunten van twee cirkels?

1. Elimineer x^2+y^2 door de vergelijkingen van de cirkels van elkaar af te trekken. Zo vind je de vergelijking van de lijn door de snijpunten.
2. Bereken de coördinaten van de snijpunten van deze lijn met één van de cirkels.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkels
c_1: $x^2+y^2=25$ en
c_2: $x^2+y^2-12x-6y+35=0$.

Oplossing

1. Elimineren van x^2+y^2 geeft de vergelijking $60-12x-6y=0$ ofwel $y=-2x+10$.
2. Substitutie in $x^2+y^2=25$ geeft:
   $x^2-8x+15=0$
   $(x-3)(x-5)=0$

De snijpunten zijn (5, 0) en (3, 4).

H 20 Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkels c_1 en c_2.

a c_1: $x^2+y^2=13$ en c_2: $x^2+y^2=4x+1$

b c_1: $x^2+y^2=50$ en c_2: $x^2+y^2-6x-18y+70=0$

c c_1: $(x-1)^2+y^2=1$ en c_2: $(x-4)^2+y^2=2$

21 Gegeven zijn de cirkels c_1: $x^2+y^2=10$ en c_2: $x^2+y^2+30=12x+4y$.

a Laat met een berekening zien dat de cirkels precies één punt gemeenschappelijk hebben. Noem dat punt P.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn l in P aan c_1.

c Laat zien dat l ook raakt aan c_2.

d Toon aan dat l loodrecht staat op de lijn door de middelpunten van de cirkels.

Rakende cirkels
De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.

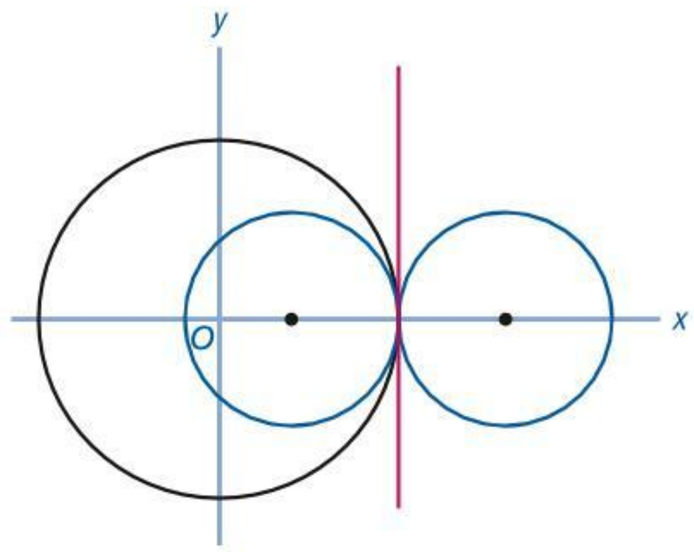
22 Bewijs de stelling meetkundig met behulp van de raaklijnstelling.

© Noordhoff Uitgevers bv

23 In een assenstelsel is cirkel c: $x^2 + y^2 = 25$ getekend. Twee cirkels met straal 3 raken c in het punt $(5, 0)$, de ene *inwendig* en de andere *uitwendig*.

a Stel een vergelijking op van elk van beide cirkels.

b Stel ook een vergelijking op van elke cirkel met straal $2\frac{1}{2}$ die c raakt in het punt $(4, 3)$.



24 Teken in een assenstelsel cirkel c: $x^2 + y^2 = 16$ en punt $P(-5, 0)$. De raaklijnen uit P aan c raken de cirkel in de punten A en B.

a Bereken exact PA en PB.

b A en B liggen ook op de cirkel met middelpunt P en straal PA. Stel een vergelijking op van deze cirkel.

c Bereken exact de coördinaten van A en van B.

d Stel een vergelijking op van elk van de raaklijnen uit P aan c.

Aanpak

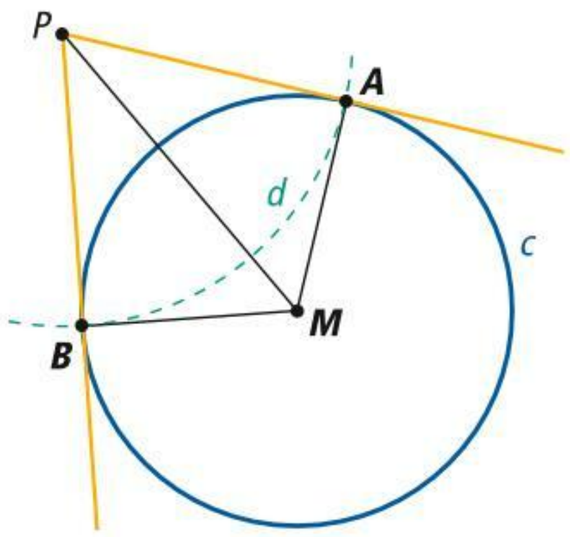
Hoe stel je vergelijkingen op van de raaklijnen aan een cirkel met middelpunt *M* vanuit een punt *P* buiten die cirkel?

1 De raakpunten A en B liggen op de cirkel d met middelpunt P en straal PA. Bereken MP en bereken PA met de stelling van Pythagoras in $\triangle PMA$.

2 Stel een vergelijking op van cirkel d.

3 Bereken de coördinaten van de punten A en B.

4 Stel vergelijkingen op van de lijnen PA en PB.



Voorbeeld

Stel vergelijkingen op van de raaklijnen uit het punt $P(-6, 18)$ aan de cirkel c: $x^2 + y^2 = 36$.

Oplossing

1 Het middelpunt is O. $OP = \sqrt{(-6)^2 + 18^2} = \sqrt{360}$

Is A een raakpunt, dan is $PA = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{360 - 36} = \sqrt{324}$.

2 d: $(x + 6)^2 + (y - 18)^2 = 324$

3 Snijden van de cirkels geeft snijlijn l: $x - 3y = -6$ en snijpunten $A(-6, 0)$ en $B(4{,}8;\ 3{,}6)$.

4 Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $x = -6$ en $4x + 3y = 30$.

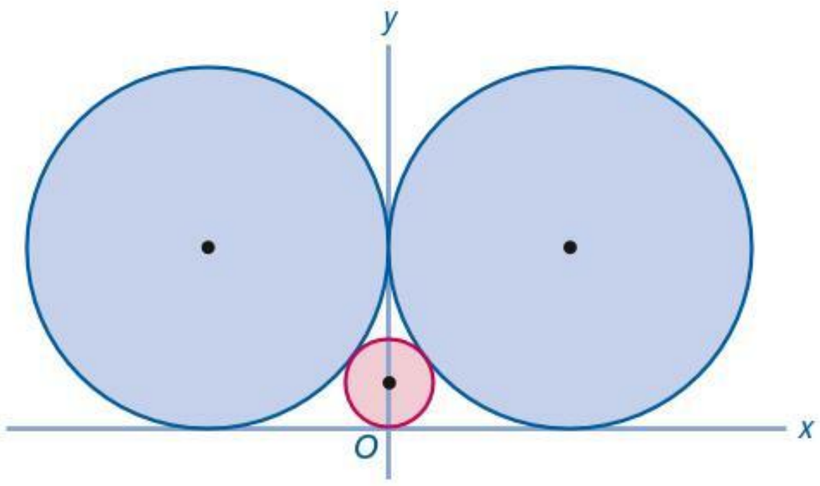
H 25 Stel vergelijkingen op van de raaklijnen door P aan cirkel c.

a $P(-6, 2)$ en c: $x^2 + y^2 = 20$

b $P(0, -4)$ en c: $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 15$

c $P\left(6\frac{1}{2}, 13\right)$ en c: $x^2 + y^2 = 65$

26 Gegeven zijn de cirkels $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ en $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.
Stel een vergelijking op van de cirkel die raakt aan beide gegeven cirkels en de x-as.



© Noordhoff Uitgevers bv

5-4

Afstand tot een cirkel

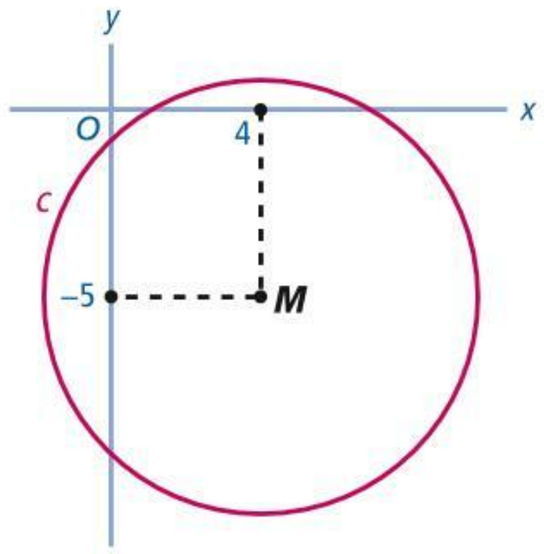
27 Gegeven is cirkel c: $(x-4)^2+(y+5)^2=34$.

a Ligt punt $A(1, 0)$ op de cirkel?

b Hoe zie je met behulp van de vergelijking van c dat punt $B(-1, -1)$ buiten de cirkel ligt?

c Ga met behulp van de vergelijking na of de cirkel nul, één of twee punten gemeenschappelijk heeft met de lijn $x = 10$.

d Bereken exact voor welke waarden van d het punt $D(1, d)$ binnen de cirkel ligt.



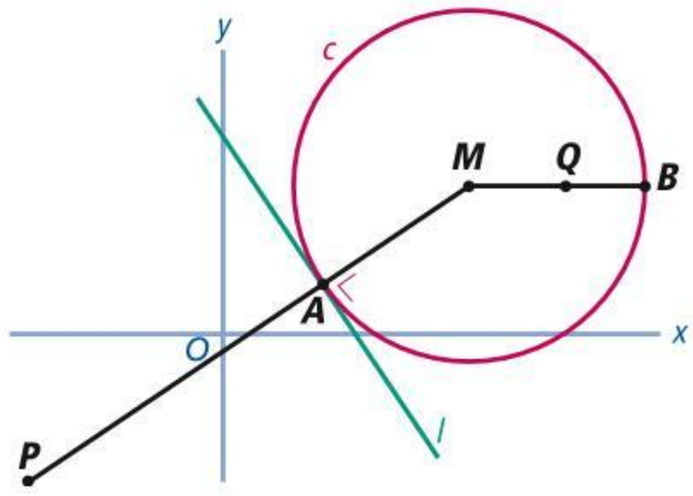
28 Hiernaast is cirkel c: $(x-5)^2+(y-3)^2=13$ met middelpunt M getekend. P is het punt $(-4, -3)$ en lijnstuk PM snijdt c in punt A. Lijn l is de raaklijn in punt A aan c.

a Waarom is PA het kortste verbindingslijnstuk van P en l?

b Bereken PM exact.

c Welk lijnstuk in de tekening is het kortste verbindingslijnstuk van P en c? Bereken exact de lengte van dat lijnstuk.

d Bereken exact de lengte van het kortste verbindingslijnstuk van het punt $Q(7, 3)$ en c.

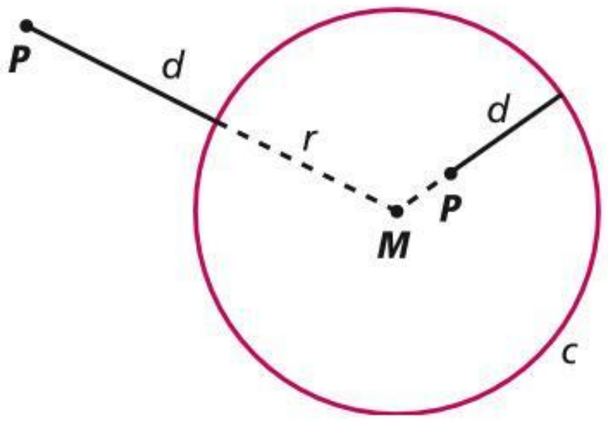


Theorie

De **afstand tussen twee meetkundige figuren** is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen die figuren. Voor die afstand gebruik je de letter d, bijvoorbeeld $d(P, c)$ voor de afstand van een punt P tot de cirkel c.

Is c een cirkel met middelpunt M en straal r, dan geldt:

- $d(P, c) = PM - r$ als P buiten de cirkel ligt;
- $d(P, c) = 0$ als P op de cirkel ligt;
- $d(P, c) = r - PM$ als P binnen de cirkel ligt.



H 29 Onderzoek in de volgende gevallen of het punt P binnen of buiten de cirkel c ligt en bereken $d(P, c)$ exact.

a $P(7, -2)$ en c: $(x+5)^2+(y-3)^2=25$

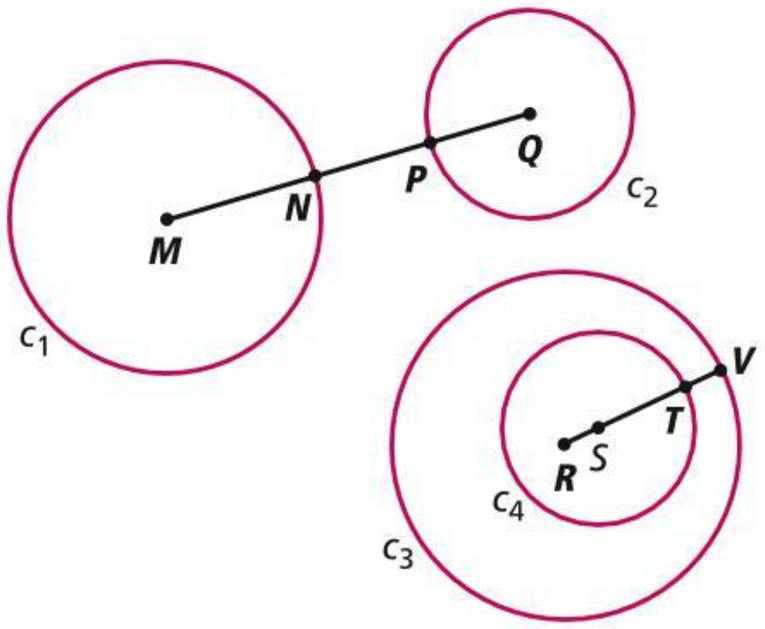
b $P(-3, 4)$ en c: $(x+5)^2+(y-3)^2=25$

c $P(-1, -6)$ en c: $(x-3)^2+(y+3)^2=289$

30 Gegeven zijn de cirkels c_1, c_2, c_3 en c_4 met de respectievelijke middelpunten M, Q, R en S.

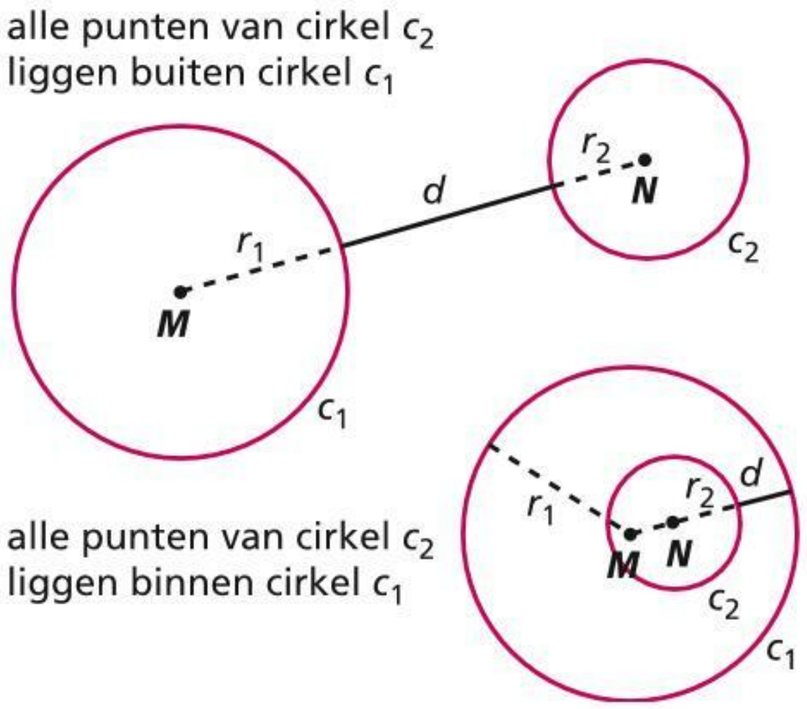
a Welk lijnstuk geeft de afstand aan tussen de cirkels c_1 en c_2?

b Welk lijnstuk geeft de afstand aan tussen de cirkels c_3 en c_4?



© Noordhoff Uitgevers bv

Om de afstand tussen twee cirkels te berekenen, gebruik je de lijn door de middelpunten van de cirkels. Snijden of raken de cirkels elkaar, dan is de afstand 0. Snijden de cirkels elkaar niet, dan liggen zij geheel buiten elkaar of de ene cirkel ligt binnen de andere. In de figuur hiernaast zie je dat de afstand in het eerste geval gelijk is aan $d(c_1, c_2) = MN - r_1 - r_2$ en in het tweede geval aan $d(c_1, c_2) = r_1 - MN - r_2$.



H 31 Teken de cirkels c_1 en c_2 en bereken $d(c_1, c_2)$.

a c_1: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 18$ en c_2: $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 8$

b c_1: $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 6$ en c_2: $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$

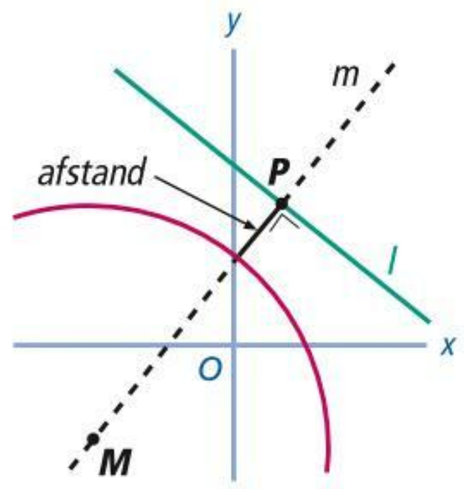
32 Gegeven is cirkel c_1: $x^2 + y^2 = 24y - 119$.
Van de cirkel c_2 is de straal 3 en ligt het middelpunt op de x-as.
Er geldt: $d(c_1, c_2) = 4$.
Stel een vergelijking op van c_2.

33 Gegeven zijn de cirkel c: $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ met middelpunt M en de lijn l: $4x + 5y = 19$.

a Stel een vergelijking op van loodlijn m door M op l.

b P is het snijpunt van l en m.
Verklaar waarom $PM - 5$ de afstand is tussen l en c.

c Bereken exact $d(l, c)$.



Aanpak

Hoe bereken je de afstand *d* tussen een lijn *l* en een cirkel *c*?

1 Stel de vergelijking op van de loodlijn m uit het middelpunt M van c op l.

2 Bereken de coördinaten van het snijpunt P van l en m.

3 $d(l, c) = PM - r$ als $PM > r$
$d(l, c) = 0$ als $PM \leq r$

Voorbeeld

Bereken de afstand d tussen de lijn l: $y = -x + 3$ en de cirkel c: $(x + 1)^2 + y^2 = 5$.

Oplossing

1 Loodlijn m heeft de vorm $y = x + b$.
Substitutie van $M(-1, 0)$ geeft $b = 1$.
Dus m: $y = x + 1$.

2 Het snijpunt P van l en m is $(1, 2)$.

3 $PM = \sqrt{8}$ en $r = \sqrt{5}$
$d(l, c) = \sqrt{8} - \sqrt{5}$

H 34 Bereken exact $d(l, c)$.

a l: $4x + 3y + 9 = 0$ en c: $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 6$

b l: $4x + 3y = 50$ en c: $x^2 + y^2 = 16$

c l: $y = 5x$ en c: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$

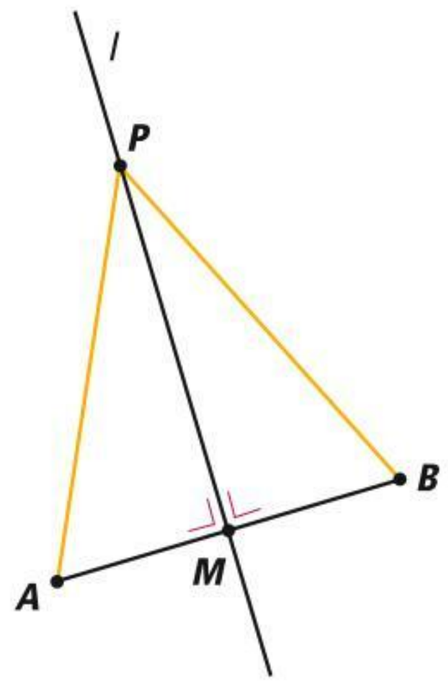
35 Gegeven is cirkel c: $x^2 + y^2 = 4$ en punt $D(-5, 0)$.
Stel een vergelijking op van elke lijn door D die afstand 1 heeft tot c.

© Noordhoff Uitgevers bv

5-5

Ingeschreven en omgeschreven cirkel

36 In de figuur ligt punt P op de middelloodlijn van lijnstuk AB.
a Toon met de stelling van Pythagoras aan dat $PA = PB$.
b Teken een lijnstuk AB. Voor een punt Q geldt $QA = QB$.
De loodlijn uit Q snijdt lijnstuk AB in een punt R.
Toon aan dat R het midden is van lijnstuk AB.



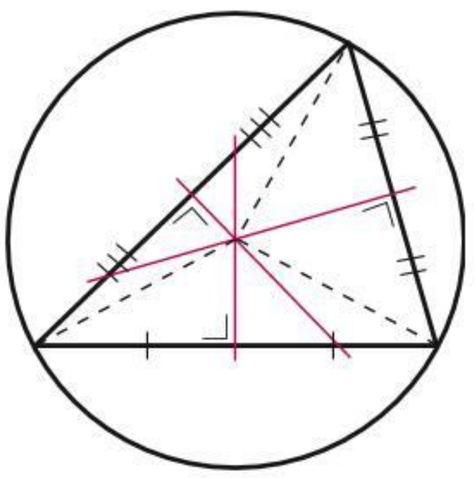
Elk punt van de middelloodlijn van een lijnstuk AB heeft gelijke afstanden tot A en B. Ook het omgekeerde geldt: elk punt dat gelijke afstanden heeft tot de punten A en B, ligt op de middelloodlijn van lijnstuk AB.

37a Teken $\triangle ABC$ met $A(-1, -2)$, $B(5, -2)$ en $C(3, 2)$.
b Stel vergelijkingen op van de middelloodlijnen l en m van de zijden AB en AC en bereken de coördinaten van het snijpunt M van l en m.
c Beredeneer dat M ook op de middelloodlijn van zijde BC ligt.
d Stel een vergelijking op van de cirkel door A, B en C.

Theorie

De cirkel die door de hoekpunten van een driehoek gaat, heet de **omgeschreven cirkel** van die driehoek. Het middelpunt is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden.

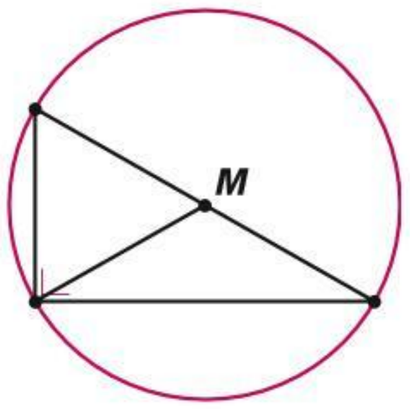
omgeschreven cirkel



H 38 Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.
a De coördinaten zijn $A(-1, -1)$, $B(5, -1)$ en $C(1, 3)$.
b De coördinaten zijn $A(1, -3)$, $B(-3, 5)$ en $C(4, 6)$.

39 Gegeven is een rechthoekige $\triangle OAB$ met $A(2a, 0)$, $B(0, 2b)$.
M is het midden van zijde BC.
Laat met een berekening zien dat $AM = BM = OM$.

Rechthoekige driehoek
Van een rechthoekige driehoek is het midden van de langste zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel.



40a Gegeven zijn de punten $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $D(3, 4)$ en $E(-4, 3)$.
a Toon aan dat $AD \perp BD$ en $AE \perp BE$.
b Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel c van $\triangle ABC$.
c Waarom ligt E ook op c?
d De lijnen AD en BE snijden elkaar in punt S en de lijnen AE en BD snijden elkaar in punt C.
Bereken exact de coördinaten van S en C.
e Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van vierhoek $ESDC$.

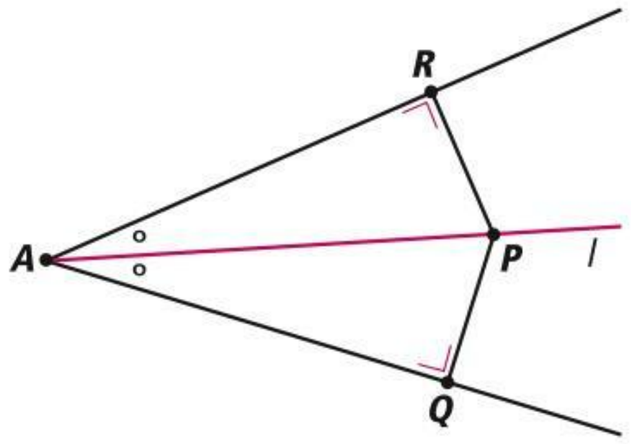
© Noordhoff Uitgevers bv

41 In de figuur is P een punt op de deellijn van hoek A.
De punten Q en R liggen op de benen van de hoek, $PQ \perp AQ$ en $PR \perp AR$.

a Laat zien dat $PQ = AP \cdot \sin(\angle PAQ)$.

b Toon aan dat $PQ = PR$.

c Teken een hoek A en een punt K dat gelijke afstanden heeft tot de benen van hoek A en toon aan dat K op de deellijn van hoek A ligt.

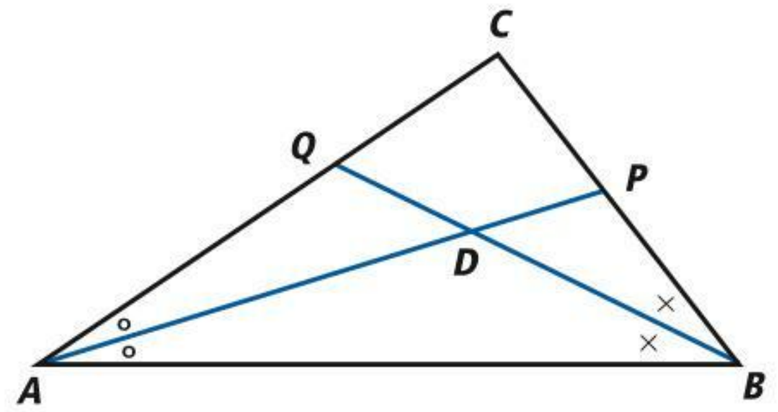


Elk punt van de deellijn van een hoek heeft gelijke afstanden tot de benen van de hoek en andersom: elk punt dat gelijke afstanden heeft tot de benen van een hoek, ligt op de deellijn van die hoek.

42 In $\triangle ABC$ zijn de deellijnen AP en BQ getekend.
Het snijpunt van de deellijnen is punt D.

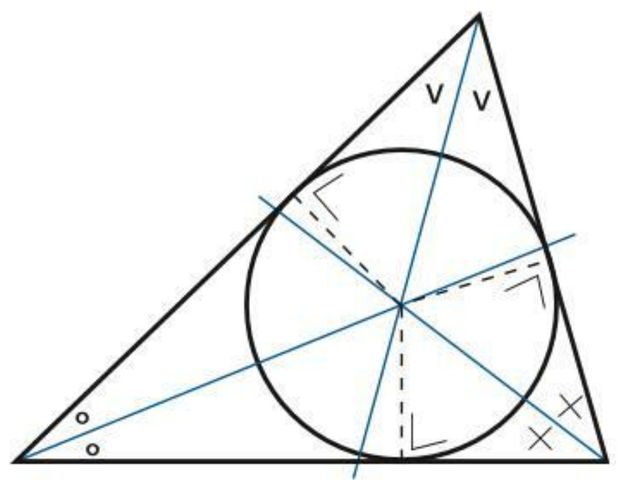
a Waarom ligt D ook op de deellijn van hoek C?

b Verklaar waarom D het middelpunt is van een cirkel die raakt aan de zijden van $\triangle ABC$.



Theorie

Een ander woord voor deellijn is **bissectrice**.
De cirkel die aan de drie zijden van een driehoek raakt, heet de **ingeschreven cirkel** van die driehoek. Het middelpunt is het snijpunt van de bissectrices van de hoeken. De straal is de afstand van het middelpunt tot de zijden.



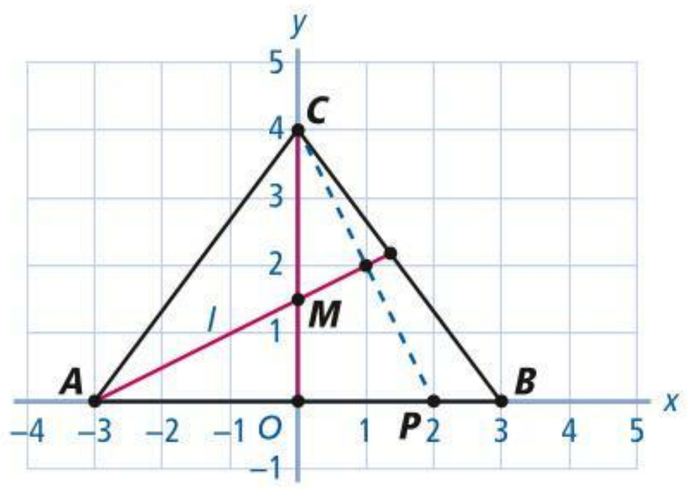
43 Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ en $C(0, 4)$.

a Kies een punt P op AB, zodat $AP = AC$.

b Leg uit dat de loodlijn uit A op lijnstuk PC de bissectrice is van hoek A.

c Bereken exact de coördinaten van het snijpunt M van de bissectrices van hoek A en hoek C.

d Stel een vergelijking op van de ingeschreven cirkel.



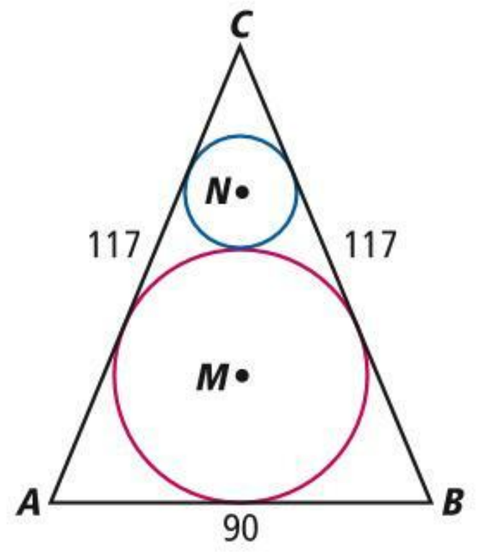
44 Van $\triangle ABC$ is $AC = BC = 117$ en $AB = 90$.
De ingeschreven cirkel heeft middelpunt M en straal r.

a Druk de oppervlakte van de driehoeken ABM, BCM en ACM uit in r.

b Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$.

c Bereken r met behulp van je antwoorden op opdracht a en b.

d De cirkel met middelpunt N raakt aan twee zijden van $\triangle ABC$ en aan de ingeschreven cirkel.
Bereken exact de straal van deze cirkel.



45 De cirkel met middelpunt M en straal 5 is de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ met $AB = AC = 8$.
Maak een schets van deze situatie en bereken exact BC.

© Noordhoff Uitgevers bv

5-6

Gemengde opdrachten

46 Hiernaast is een deel getekend van de cirkel met middelpunt $M(-1, 3)$, die door punt $A(3, -1)$ gaat.

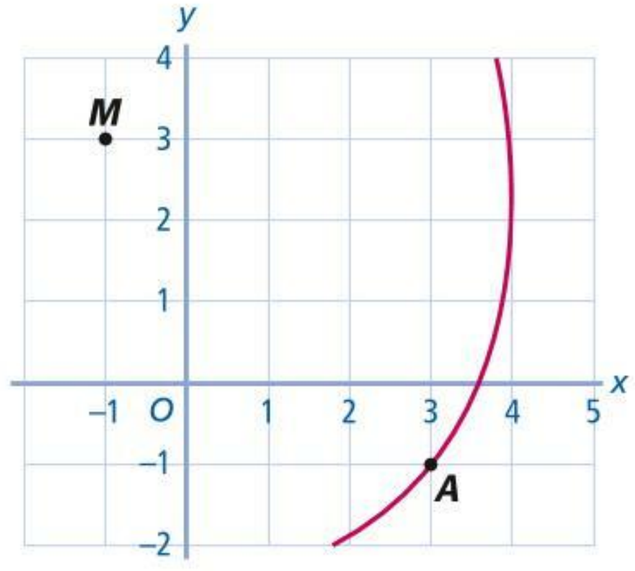
a Geef de middelpuntsvergelijking van de cirkel.

b Bij spiegeling in de y-as is A' het beeld van A. Ligt A' binnen, buiten of op de cirkel? Verklaar je antwoord.

c Bij spiegeling in punt M is A'' het beeld van A. Ligt A'' binnen, buiten of op de cirkel? Waarom?

d Onderzoek of punt $B\left(-1 + 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{5}\right)$ binnen, buiten of op de cirkel ligt.

e Stel een vergelijking op van de raaklijn in A aan de cirkel.



47 Gegeven zijn de lijnen k: $y = 1\frac{1}{3}x$, l: $4x - 3y + 25 = 0$ en m: $x - 7y + 25 = 0$.

a Toon aan dat k en l evenwijdig zijn.

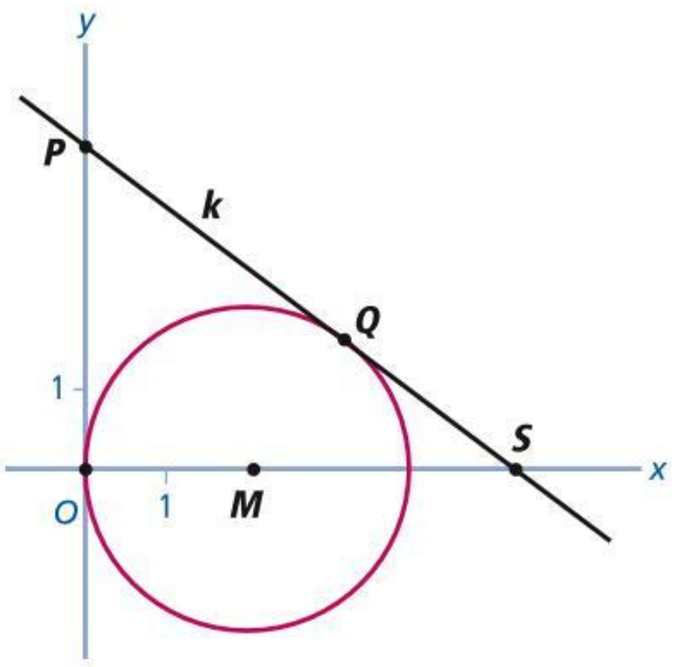
b Bereken $d(k, l)$ exact.

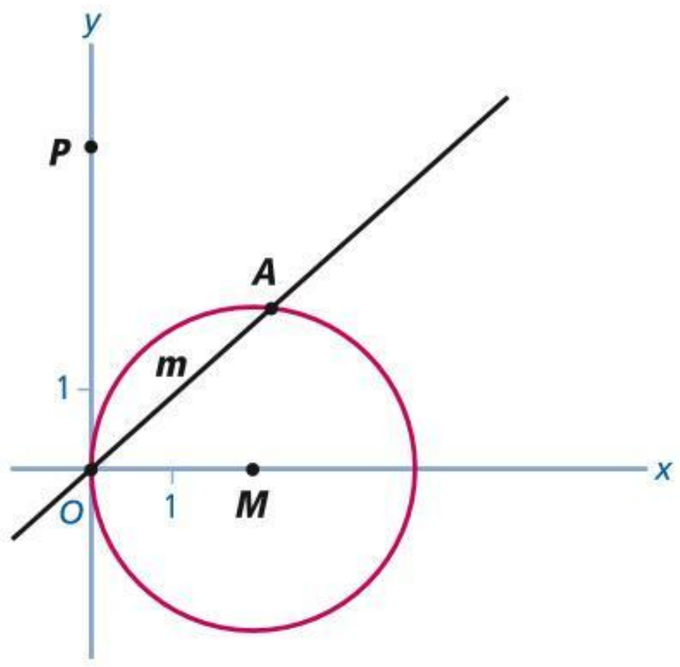
c Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van m met k en l.

d Stel de middelpuntsvergelijking op van de cirkel waarvan het middelpunt op m ligt en die raakt aan k en l.

48 Gegeven is de cirkel met middelpunt $M(2, 0)$ en straal 2. De niet-verticale lijn k gaat door het punt $P(0, 4)$, raakt de cirkel in het punt Q en snijdt de positieve x-as in S. Zie de linker figuur hieronder.

a Bereken de coördinaten van S exact.





De lijn m met vergelijking $y = px$ met $p > 0$ snijdt de cirkel behalve in O ook nog in een punt A, zodanig dat $OA = 3$. Zie de rechter figuur.

b Bereken exact de waarde van p.

(*Ontleend aan het CE* vwo *wiskunde B pilot 2012, tijdvak 1*)

© Noordhoff Uitgevers bv

49a Snijden de bissectrices van de hoeken van een vierkant elkaar in één punt?

b Heeft elk vierkant een ingeschreven cirkel?

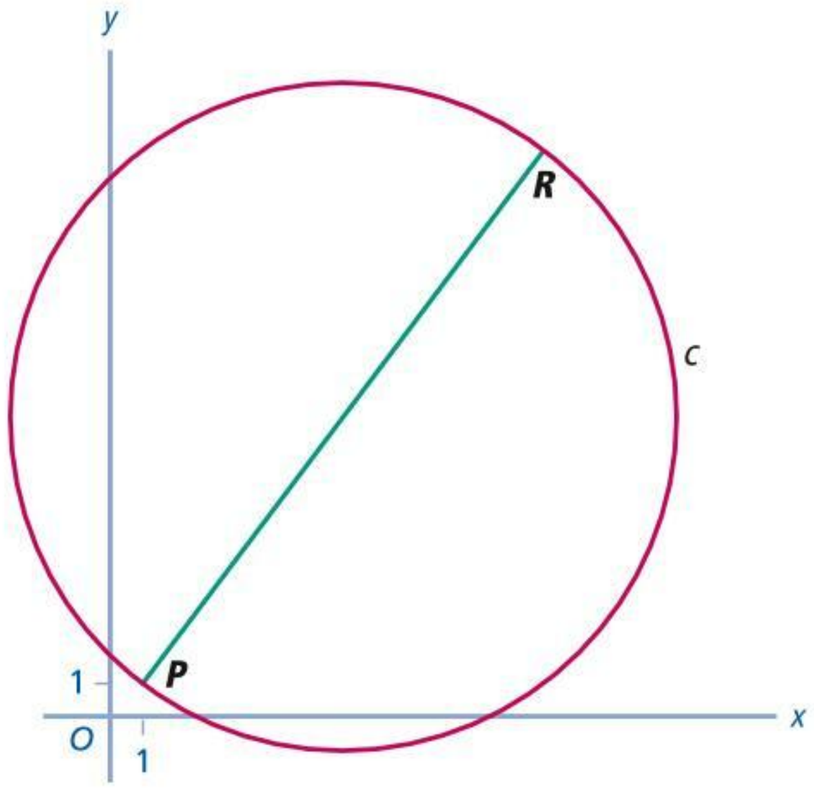
c Snijden de middelloodlijnen van de zijden van elk vierkant elkaar in één punt?

d Waarom heeft elk vierkant een omgeschreven cirkel?

e Ga na of elke ruit een omgeschreven en/of een ingeschreven cirkel heeft.

f Doe hetzelfde voor elk parallellogram, elke vlieger en elke rechthoek.

50 Gegeven zijn de punten $P(1, 1)$ en $R(13, 17)$.
Lijnstuk PR is een middellijn van cirkel c.
Zie de figuur hiernaast.
Een vergelijking van c is $(x - 7)^2 + (y - 9)^2 = 100$.

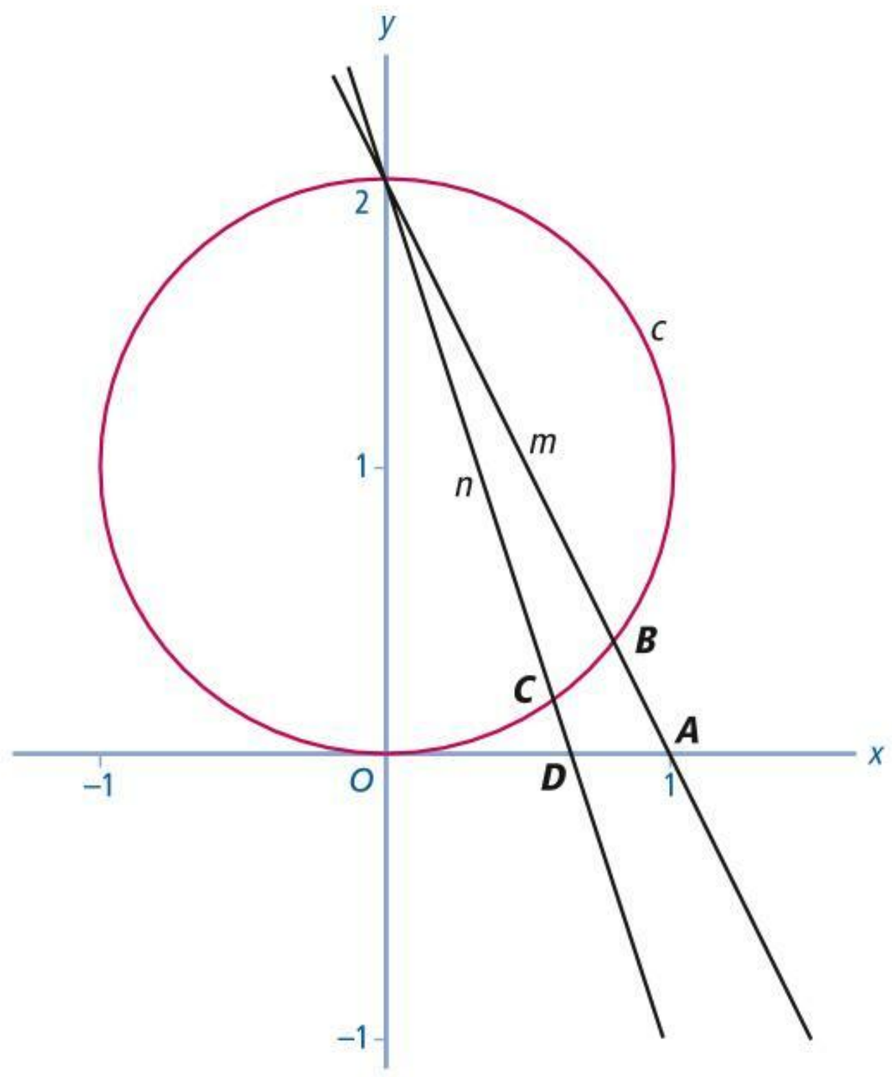


a Toon dit aan.

b Punt S ligt op de cirkel en heeft dezelfde x-coördinaat als punt P. Lijn l gaat door S en staat loodrecht op lijnstuk PR.
Lijn l heeft als vergelijking $y = -\frac{3}{4}x + 17\frac{3}{4}$.
Toon dit aan.

c Punt Q ligt zo op cirkel c, dat vierhoek $PQRS$ symmetrisch is ten opzichte van diagonaal PR.
Bereken de coördinaten van punt Q exact.
(*Ontleend aan het CE havo wiskunde B pilot 2011, tijdvak 2*)

51 Gegeven zijn cirkel c: $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ en de lijnen m: $y = -2x + 2$ en n: $y = -3x + 2$. m snijdt de x-as in punt A en cirkel c in $(0, 2)$ en punt B; n snijdt de x-as in punt D en cirkel c in $(0, 2)$ en punt C.



a Toon aan dat B het punt $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$ is.

b Voor A, C en D geldt:
$A(1, 0)$, $C\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ en $D\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.
Toon aan dat A, B, C en D op één cirkel liggen.
(*Ontleend aan het CE* vwo *wiskunde B pilot 2012, tijdvak 2*)

© Noordhoff Uitgevers bv

Samenvatting

Vergelijking van een cirkel

De middelpuntsvergelijking van de cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r is $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Werk je de haakjes weg, dan krijg je een vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$.

Raaklijn en raakpunt

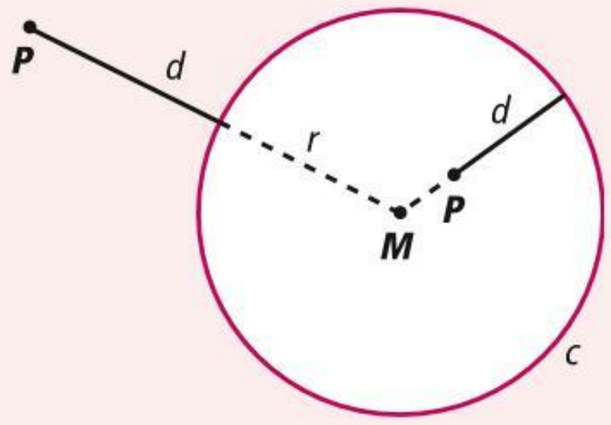
Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die precies één punt gemeenschappelijk heeft met die cirkel.
Het gemeenschappelijke punt heet het raakpunt.
Er zijn twee stellingen over raken:

- Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt (*raaklijn*).
- De raaklijn in het gemeenschappelijke punt van twee rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten (*rakende cirkels*).

De afstand van een punt tot een cirkel

De afstand tussen twee figuren is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen die figuren.
Voor de afstand $\mathrm{d}(P, c)$ van een punt P tot een cirkel c met middelpunt M en straal r geldt:

- $\mathrm{d}(P, c) = PM - r$ als P buiten de cirkel ligt;
- $\mathrm{d}(P, c) = 0$ als P op de cirkel ligt;
- $\mathrm{d}(P, c) = r - PM$ als P binnen de cirkel ligt.



Ingeschreven en omgeschreven cirkel

De ingeschreven cirkel van een driehoek raakt aan de zijden van de driehoek. Het middelpunt is het snijpunt van de bissectrices van de hoeken van de driehoek.
De omgeschreven cirkel van een driehoek gaat door de hoekpunten van de driehoek. Het middelpunt is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van de driehoek.
Voor een rechthoekige driehoek geldt de volgende stelling:
Van een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel (*rechthoekige driehoek*).

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van twee cirkels en van een lijn en een cirkel berekenen

Door uit de cirkelvergelijkingen $x^2 + y^2$ te elimineren vind je een vergelijking van de lijn door de snijpunten. Schrijf de vergelijking van de lijn in de vorm $y = \ldots$ of $x = \ldots$ en substitueer deze vergelijking in de vergelijking van een van de cirkels.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkels c: $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0$ en d: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 80 = 0$.

Oplossing

Trek de vergelijkingen van elkaar af: $6x - 12y + 90 = 0$ dus $x = 2y - 15$.
Substitutie van $x = 2y - 15$ in de eerste vergelijking geeft:
$(2y - 15)^2 + y^2 + 4(2y - 15) - 8y + 10 = 0$
Haakjes wegwerken:
$4y^2 - 60y + 225 + y^2 + 8y - 60 - 8y + 10 = 0$ ofwel $5y^2 - 60y + 175 = 0$
$y^2 - 12y + 35 = 0$ geeft $(y - 5)(y - 7) = 0$, dus $y = 5$ of $y = 7$
Invullen in $x = 2y - 15$ geeft $x = -5$ of $x = -1$. De snijpunten zijn $(-5, 5)$ en $(-1, 7)$.

Je kunt de vergelijking van een raaklijn door een gegeven punt *P* (op of buiten de cirkel) aan een cirkel met middelpunt *M* en straal *r* opstellen

Ligt het punt op de cirkel, dan gebruik je dat de raaklijn loodrecht staat op de straal naar het raakpunt.
Ligt het punt buiten de cirkel, dan gebruik je dat de raakpunten liggen op de cirkel met middelpunt P en straal $\sqrt{PM^2 - r^2}$.

Voorbeeld

Stel vergelijkingen op van de raaklijnen uit het punt $P(-1, 7)$ aan de cirkel c: $x^2 + y^2 = 25$.

Oplossing

Het middelpunt is O. $OP = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50}$.
De raakpunten liggen op de cirkel d: $(x + 1)^2 + (y - 7)^2 = 50 - 25 = 25$.
Snijden van de cirkels geeft snijlijn l: $x - 7y = -25$ en snijpunten $A(-4, 3)$ en $B(3, 4)$.
Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = 1\frac{1}{3}x + 8\frac{1}{3}$ en $y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}$.

Je kunt de afstand d(l, c) tussen een lijn *l* en een cirkel *c* berekenen

Bereken de coördinaten van het snijpunt P van l en de lijn m door het middelpunt van de cirkel loodrecht op l.
Als l buiten de cirkel ligt, is $\mathrm{d}(l, c) = PM - r$.

Voorbeeld

Bereken de afstand tussen lijn l: $y = 3x + 16$ en cirkel c: $x^2 + (y - 1)^2 = 10$.

Oplossing

Lijn m door $M(0, 1)$ loodrecht op l: $y = -\frac{1}{3}x + 1$; snijpunt met l: $P\left(-4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$.

$$PM = \sqrt{(-4\tfrac{1}{2} - 0)^2 + (2\tfrac{1}{2} - 1)^2} = \sqrt{22\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{90}{4}} = \tfrac{3}{2}\sqrt{10}$$

$$\mathrm{d}(l, c) = PM - r = 1\tfrac{1}{2}\sqrt{10} - \sqrt{10} = \tfrac{1}{2}\sqrt{10}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

Test jezelf

T-1a Een cirkel heeft middelpunt $(-2, 7)$ en straal $2\sqrt{3}$.
Stel de middelpuntsvergelijking van de cirkel op.

b Een cirkel heeft als vergelijking $x^2 + y^2 - 4y = 10$.
Bereken exact de coördinaten van het middelpunt van de cirkel en de straal.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-1.

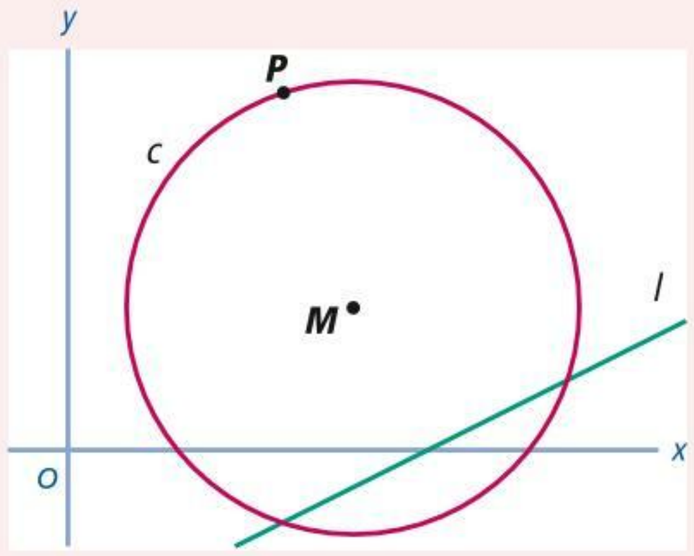
T-2 Gegeven zijn cirkel c: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 10$ en lijn l: $x - 2y = 5$. Op cirkel c ligt punt $P(3, 5)$.

a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van lijn l en cirkel c.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn in punt P aan cirkel c.

c De lijn met vergelijking $y = px$ raakt aan cirkel c.
Bereken exact de waarde van p.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-2.



T-3 Gegeven zijn punt $P(10, 8)$ en de cirkels c_1: $x^2 + y^2 = 4x$ en c_2: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 17$.

a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de cirkels.

b Stel vergelijkingen op van de raaklijnen uit P aan c_2.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-3.

T-4 Gegeven zijn cirkel c_1: $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$ en de punten $R(8, 1)$ en $S(1, -1)$.

a Bereken de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel.

b Bereken exact de afstand van punt R tot de cirkel.

c Bereken exact de afstand van punt S tot de cirkel.

d Bereken exact de afstand van cirkel c_1 tot cirkel c_2 met vergelijking $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-4.

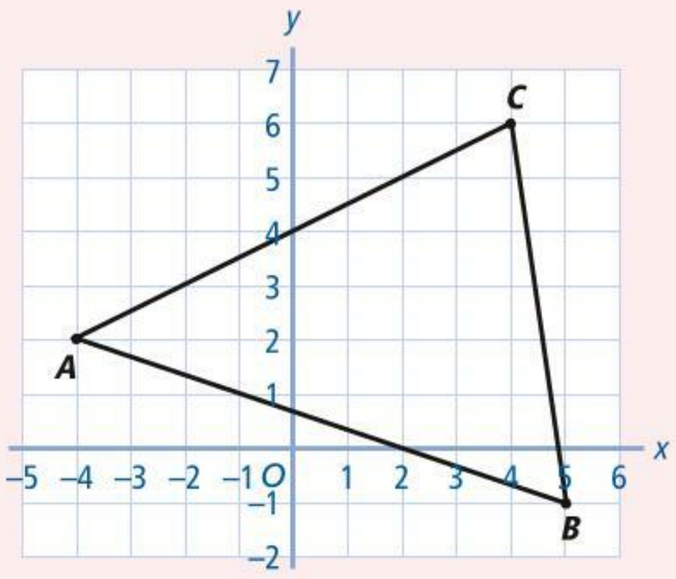
T-5 In een assenstelsel is driehoek ABC getekend met $A(-4, 2)$, $B(5, -1)$ en $C(4, 6)$.

a Bereken exact de lengte van de zijden.

b Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van $\triangle ABC$.

c Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-5.



© Noordhoff Uitgevers bv

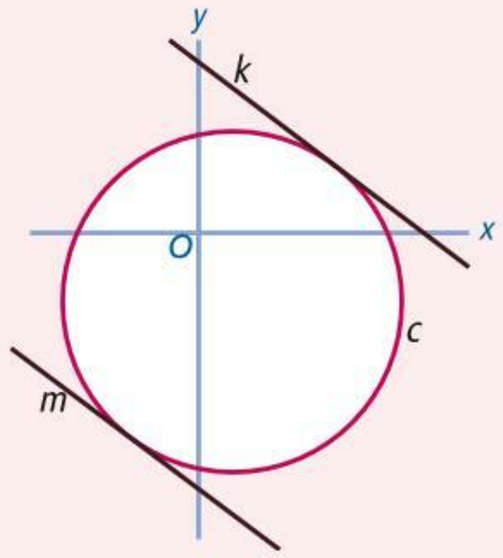
T-6 In een assenstelsel is gegeven $\triangle OAB$ met $A(8, 0)$ en $B(0, 6)$.

a Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van $\triangle OAB$.

b Toon aan dat punt $I(2, 2)$ gelijke afstanden heeft tot de zijden van de driehoek.

c Stel een vergelijking op van de ingeschreven cirkel van $\triangle OAB$.

T-7 Hiernaast zijn getekend cirkel c: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ en lijn k: $y = -\frac{3}{4}x + 5$.

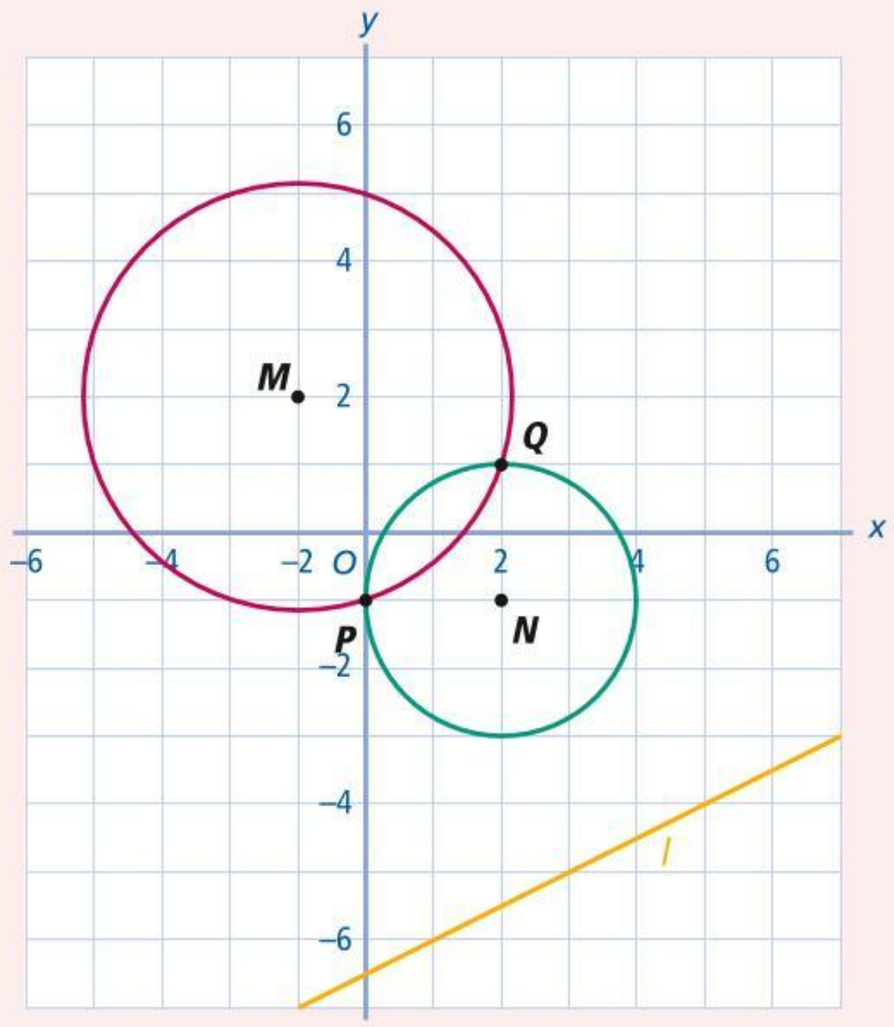


a Toon met behulp van een berekening aan dat lijn k aan cirkel c raakt.

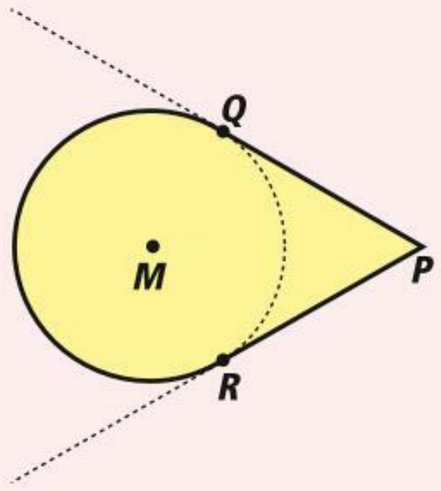
b Bereken exact de coördinaten van het raakpunt.

c Er is een raaklijn m aan de cirkel die evenwijdig loopt met lijn k.
Stel een vergelijking op van deze lijn.

T-8 Gegeven zijn lijn l: $x - 2y = 13$ en de cirkels
c_1: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ en
c_2: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$.
De cirkels snijden elkaar in de punten P en Q.
Stel een vergelijking op van de cirkel door P en Q waarvan het middelpunt op l ligt.



T-9 In de figuur hiernaast ligt punt P op afstand 4 van de cirkel met middelpunt M en straal 4. Vanuit P zijn de raaklijnen aan de cirkel getekend.
Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied.
Geef ook een benadering in één decimaal nauwkeurig.



© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Basis**

B-1a Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(-3, 2)$ en straal $\sqrt{17}$.

b Bepaal van de cirkel met vergelijking $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 0$ de coördinaten van het middelpunt en de straal.

c Waarom hoort er geen cirkel bij de vergelijking $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 15 = 0$?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-1.

B-2 Gegeven zijn cirkel c: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 17$ en lijn l: $3x + 5y = 18$.

a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van c en l.

b Punt $P(-2, -2)$ ligt op de cirkel.
Stel een vergelijking op van de raaklijn in punt P aan cirkel c.

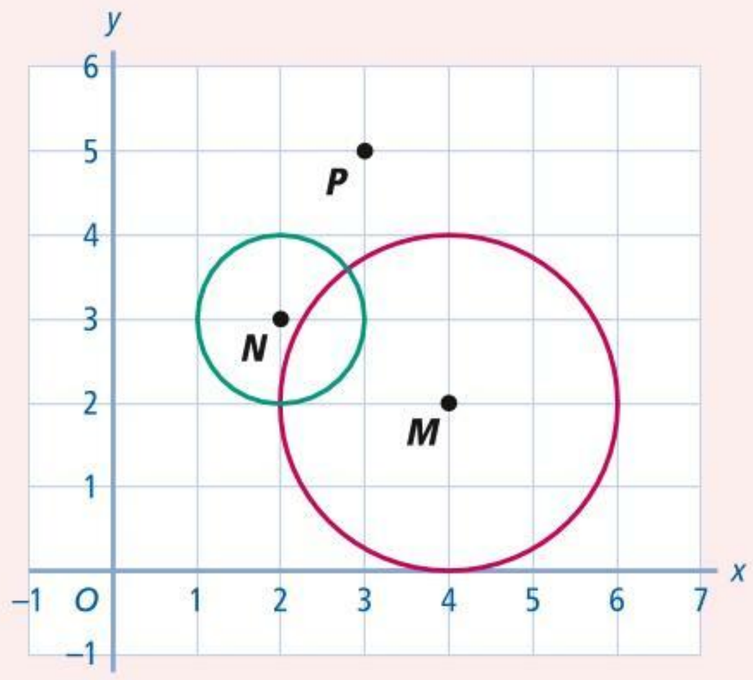
Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-2.

B-3 Gegeven zijn cirkel c_1 met middelpunt $M(4, 2)$ en straal 2 en cirkel c_2 met middelpunt $N(2, 3)$ en straal 1.

a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van c_1 en c_2.

b Stel een vergelijking op van elk van de raaklijnen uit punt $P(3, 5)$ aan c_2.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-3.



B-4 Gegeven zijn de cirkels c_1: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 18$ en c_2: $x^2 + y^2 + 16x - 8y + 8 = 0$.

a Bereken exact de afstand van punt $P(-4, 5)$ tot cirkel c_1.

b Bereken exact de afstand van punt $Q(-2, 4)$ tot cirkel c_2.

c Bereken exact de afstand van lijn l: $y = x + 3$ tot cirkel c_1.

d Bereken exact de afstand tussen de cirkels c_1 en c_2.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-4.

B-5 Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(0, 6)$, $B(-12, 0)$ en $C(3, -5)$.
Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-5.

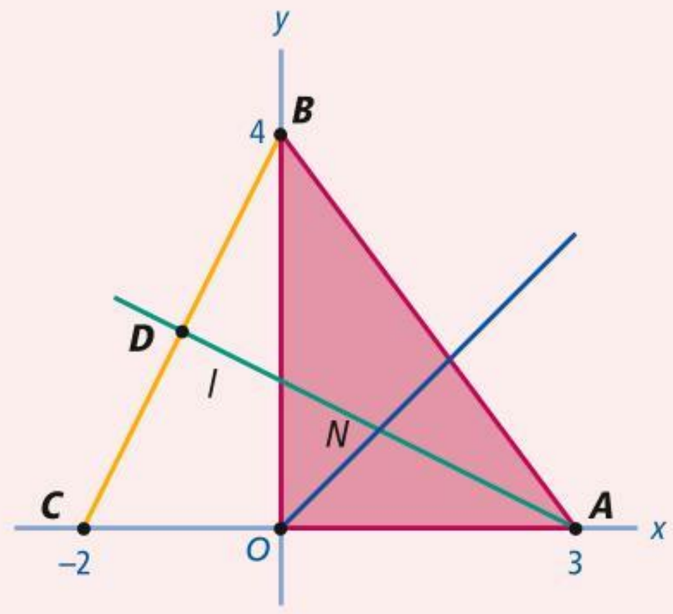
B-6 Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(3, 0)$ en $B(0, 4)$ en punt $C(-2, 0)$.
De loodlijn l uit A op lijnstuk BC snijdt lijnstuk BC in punt D.

a Leg uit dat l de bissectrice is van hoek A.

b In $\triangle OAB$ snijden de bissectrices van de hoeken O en A elkaar in punt N.
Bereken de coördinaten van N.

c Stel een vergelijking op van de ingeschreven cirkel van $\triangle OAB$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-5.



© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Gemengd**

G-1 Gegeven zijn lijn l: $-3x + 4y + 27 = 0$ en cirkel c: $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 4$.

a Teken l en c in een assenstelsel.

b Toon aan dat de afstand tussen lijn l en cirkel c gelijk is aan 2.

G-2 Gegeven is cirkel c met vergelijking $x^2 - 4x + y^2 - 4y = 0$.

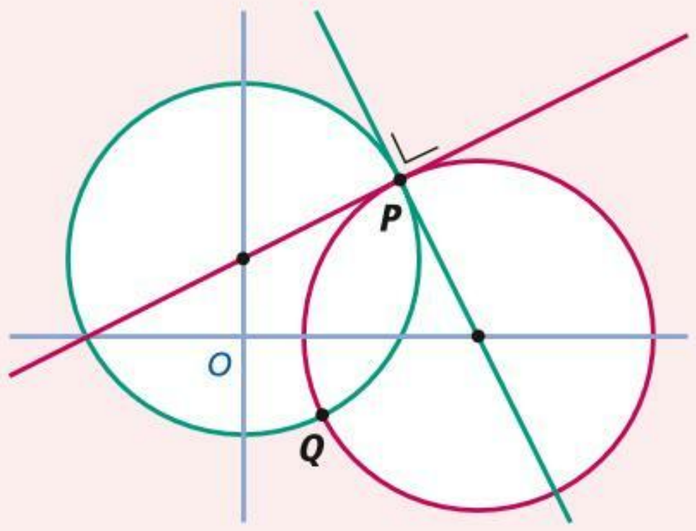
a Bereken exact de x-coördinaten van de twee punten op de cirkel waarvan de y-coördinaat gelijk is aan 4.

b Punt $A(2, 0)$ vormt samen met de twee punten uit opdracht a een driehoek.
Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van die driehoek.

G-3 Gegeven zijn de cirkels c_1: $x^2 + y^2 = 6x - 4$ en c_2: $x^2 + y^2 = 2y + 4$

a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten P en Q van de twee cirkels.

b Toon aan dat de cirkels elkaar in P loodrecht snijden, dat wil zeggen dat de raaklijnen in P aan beide cirkels loodrecht op elkaar staan.



G-4 Gegeven zijn lijn l: $y = -\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$ en cirkel c: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$.

a Bereken exact de afstand tussen lijn l en cirkel c.

b Er is nog een lijn die evenwijdig is met lijn l en die dezelfde afstand tot cirkel c heeft als lijn l.
Stel een vergelijking op van die lijn.

G-5a Teken driehoek OAB met $A(14, 0)$ en $B(5, 12)$.

b Toon aan dat het punt $I(6, 4)$ het middelpunt is van de ingeschreven cirkel van $\triangle OAB$.

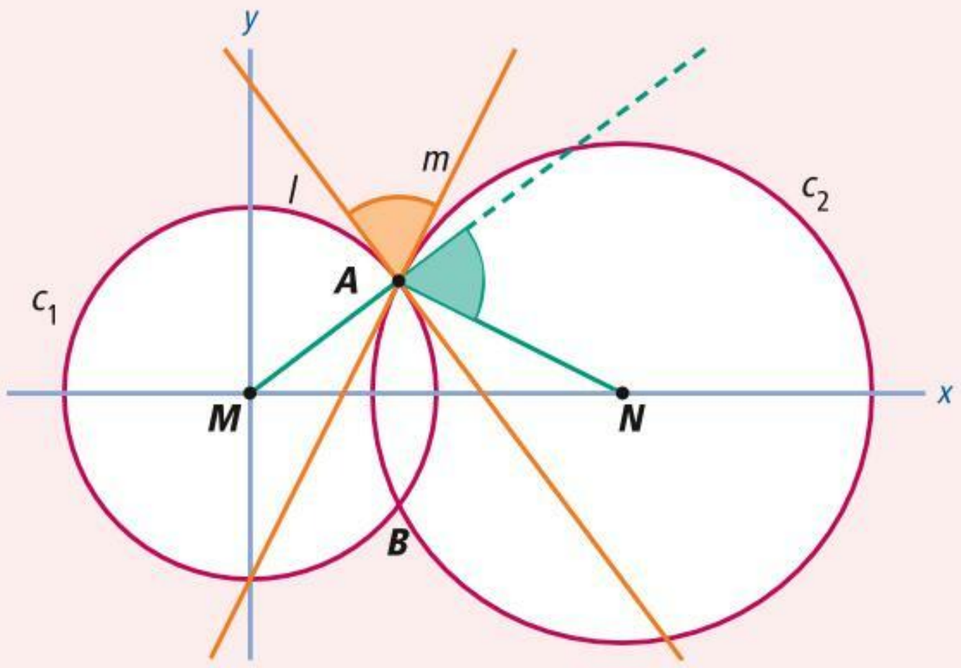
c Stel een vergelijking op van deze ingeschreven cirkel.

G-6 Cirkel c_1: $x^2 + y^2 = 25$ met middelpunt M en cirkel c_2: $(x - 10)^2 + y^2 = 45$ met middelpunt N snijden elkaar in de punten A en B.
l en m zijn de raaklijnen in A aan c_1 en c_2.

a Bereken de coördinaten van de punten A en B.

b Beredeneer dat $\angle(l, m) = \angle(MA, NA)$.

c Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen l en m.



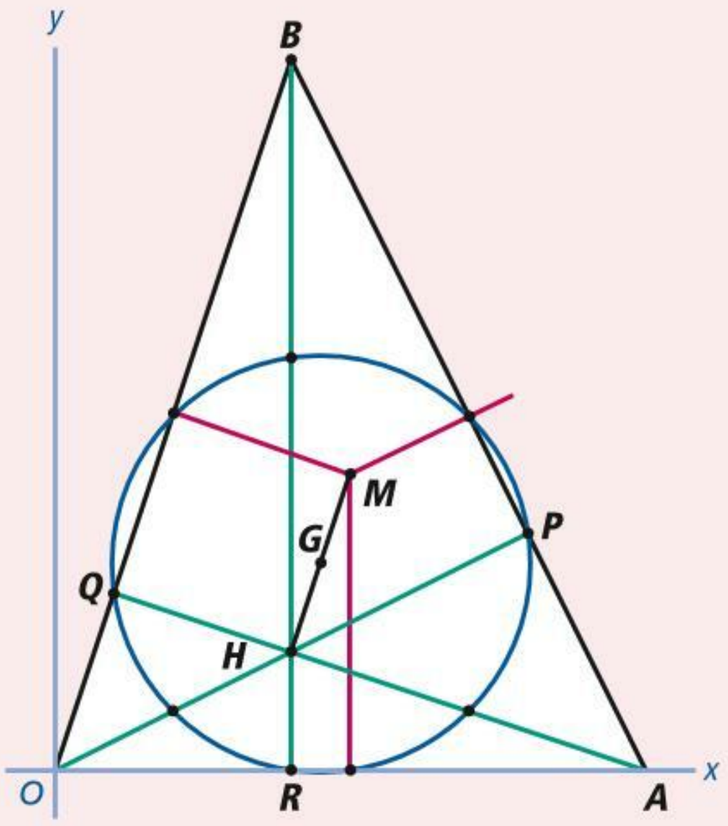
© Noordhoff Uitgevers bv

Uitdagende opdrachten

U-1 *De negenpuntscirkel van Feuerbach bestaat voor elke driehoek en is genoemd naar de Duitse wiskundige Karl Wilhelm Feuerbach (1800 – 1834).*
Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(10, 0)$ en $B(4, 12)$.

a De hoogtelijnen OP, AQ en BR snijden elkaar in het punt H.
Bereken exact de coördinaten van H.

b De (rode) middelloodlijnen van de zijden van $\triangle OAB$ snijden elkaar in het punt M.
Bereken exact de coördinaten van M.



Punt G is het midden van lijnstuk HM.

c Toon aan dat de middens van de zijden van $\triangle OAB$ op een cirkel met middelpunt G liggen.

d Toon aan dat de straal van deze cirkel de helft is van de straal van de omgeschreven cirkel van $\triangle OAB$.

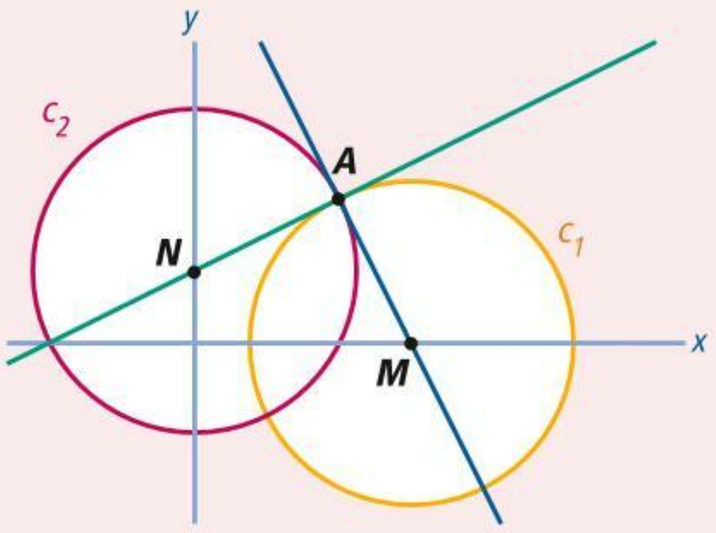
e Toon aan P, Q en R ook op deze cirkel liggen.

f Toon aan dat de middens van de lijnstukken OH, AH en BH op deze cirkel liggen.

U-2 Gegeven zijn de cirkels c_1: $x^2 + y^2 = 12x - 16$ met middelpunt M en c_2: $x^2 + y^2 = 4y + 16$ met middelpunt N.
Het punt A is een snijpunt van c_1 en c_2.

a Toon aan dat de cirkels elkaar in A loodrecht snijden, dat wil zeggen dat de raaklijnen in A aan beide cirkels loodrecht op elkaar staan.

b Beredeneer dat de raaklijn in A aan c_1 door het middelpunt van c_2 gaat en de raaklijn in A aan c_2 door het middelpunt van c_1.



c Welke relatie bestaat er tussen NA, MA en MN?

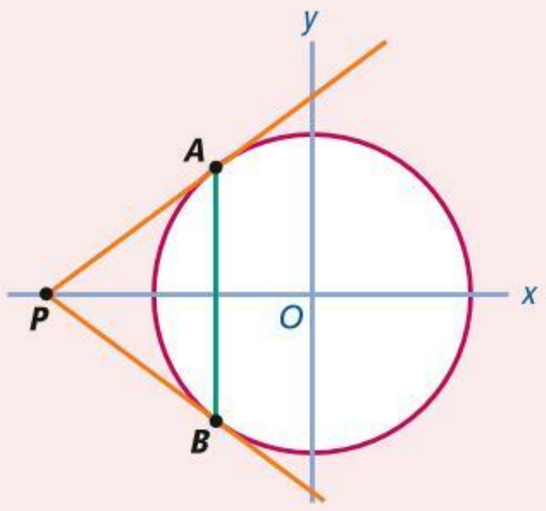
d Geef aan hoe je kunt nagaan of twee cirkels elkaar loodrecht snijden zonder richtingscoëfficiënten te berekenen.

e Onderzoek of de cirkels c_1: $x^2 + y^2 = 10$ en c_2: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$ elkaar loodrecht snijden.

U-3 In de figuur is cirkel c: $x^2 + y^2 = 25$ getekend met daarop het punt $A(-3, 4)$. De raaklijn in A aan c snijdt de x-as in punt P.
De loodlijn door A op de lijn PO snijdt c in punt B.

a Toon aan dat de lijn PB de cirkel raakt.

b Op de lijnen PA en PB liggen de punten C en D zo, dat $\triangle PCD$ gelijkvormig is met $\triangle PAB$ met factor p.
Bereken exact de waarde van p waarvoor c de ingeschreven cirkel is van $\triangle PCD$.

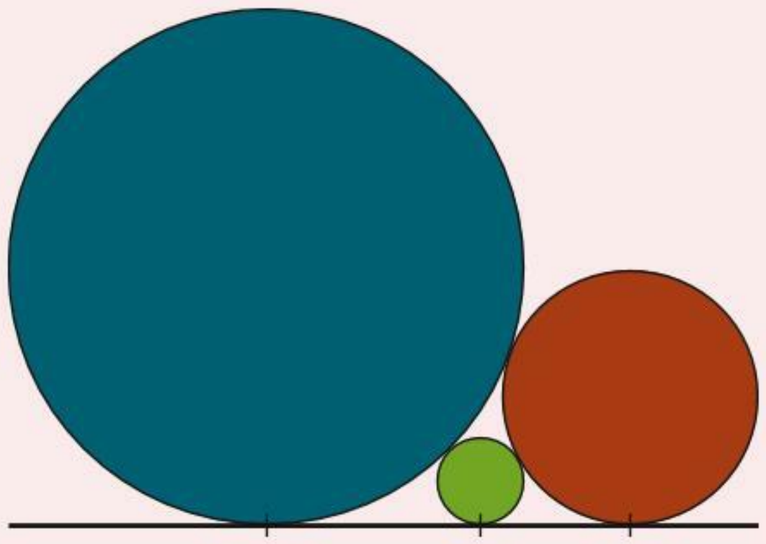


© Noordhoff Uitgevers bv

Sangaku

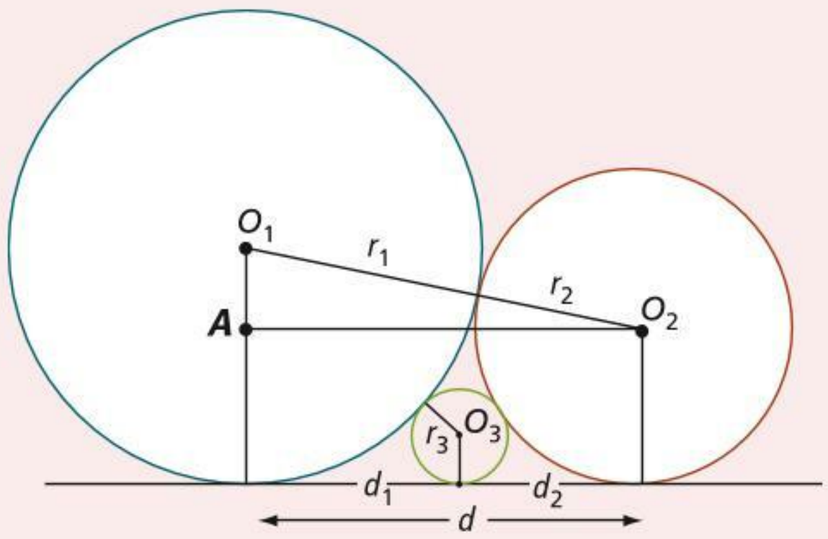
Van 1639 tot 1854 was Japan volkomen geïsoleerd van de Westerse wereld. Er was alleen contact met Japan via de Nederlandse handelspost op het eilandje Dejima, bij Nagasaki.
Gedurende deze periode van isolement bloeide een soort eigen wiskunde op. Zowel kooplieden, boeren als samoerai ontwierpen diverse gevarieerde meetkundige problemen en losten deze op.
Deze problemen met de door hen zelf gevonden antwoorden zetten ze op houten panelen, die onder de daken van religieuze gebouwen werden opgehangen.
Uitwerkingen werden niet gegeven.
Deze zogenaamde Sangaku kunnen een eer voor de geesten geweest zijn, maar ook een uitdaging voor anderen.
Sangaku zijn in heel Japan te vinden. Hieronder zie je twee Sangaku's die in Kyoto gevonden zijn.
Het is een vergroting van een deel van het paneel boven aan deze pagina.

Bij veel van deze meetkundige problemen spelen cirkels een rol.
Het probleem hieronder komt van een paneel uit 1824, dat gevonden is in de provincie Gunma.



Drie verschillende cirkels raken elkaar en hebben één gemeenschappelijke raaklijn.
De vraag is wat het verband is tussen de drie stralen van deze cirkels.

Opdracht



In driehoek O_1O_2A is $O_1O_2 = r_1 + r_2$.

a Druk O_1A uit in r_1 en r_2.

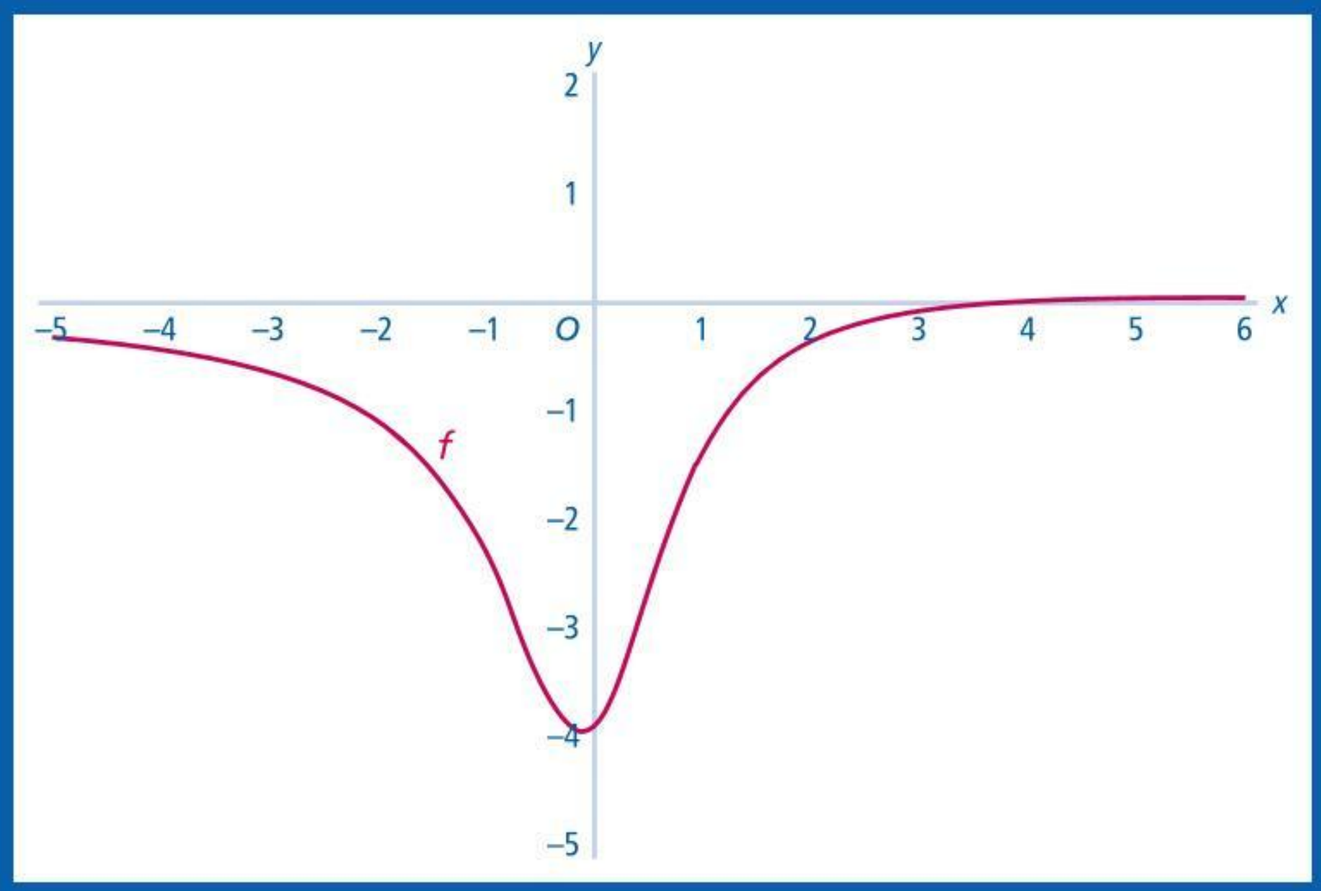
b Toon aan dat $d = 2 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}$.

Op dezelfde manier kun je aantonen dat
$d_1 = 2 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_3}$ en $d_2 = 2 \cdot \sqrt{r_2 \cdot r_3}$.

c Toon aan dat uit $d = d_1 + d_2$ volgt:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

© Noordhoff Uitgevers bv



Grafiek

Hierboven zie je de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2+1}$

Harmen zegt dat $f'(x) = \dfrac{1}{2x}$. Hoe komt hij hierbij?

Kun je met behulp van de grafiek nagaan of hij gelijk heeft?

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 6
Product- en quotiëntfuncties

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	146
6-1	Productfuncties	148
6-2	Quotiëntfuncties	150
6-3	Limieten en asymptoten	152
6-4	Productregel	154
6-5	Quotiëntregel	156
6-6	Gemengde opdrachten	158
	Samenvatting	160
	Test jezelf	162
	Extra oefening - Basis	164
	Extra oefening - Gemengd	165
	Uitdagende opdrachten	166
	Fileproblemen	167

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorkennis

Theorie

Bij het differentiëren maak je gebruik van de volgende regels.

Als $f(x) = x^a$ dan is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$.

Als $f(x) = c \cdot g(x)$ waarbij c een constante is, dan is $f'(x) = c \cdot g'(x)$.

Als $f(x) = g(x) + c$ waarbij c een constante is, dan is $f'(x) = g'(x)$.

Als $s(x) = f(x) + g(x)$ dan is $s'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Als $v(x) = f(x) - g(x)$ dan is $v'(x) = f'(x) - g'(x)$.

De kettingregel: als $k(x) = g(f(x))$ dan is $k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Soms is het nodig om het functievoorschrift te herleiden voordat je kunt differentiëren.

Voorbeeld 1

Bepaal de afgeleide functie van

$f(x) = 2x^3 + \frac{3}{x^2}$

Oplossing

Het functievoorschrift is te herleiden tot

$f(x) = 2x^3 + 3 \cdot x^{-2}$

$f'(x) = 6x^2 - 6x^{-3}$ ofwel $f'(x) = 6x^2 - \frac{6}{x^3}$

Voorbeeld 2

Bepaal de afgeleide functie van $k(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$.

Oplossing

$k(x) = (x^3 - 2x)^{\frac{1}{2}}$

$k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 - 2)$

$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 - 2x}} \cdot (3x^2 - 2)$ ofwel $k'(x) = \frac{3x^2 - 2}{2\sqrt{x^3 - 2x}}$

V-1 Differentieer. Schrijf het antwoord zonder negatieve en gebroken exponenten.

a $f(x) = 11 + 6x^{11} - \frac{11}{x^7}$

b $g(x) = -4\sqrt[5]{x^3} + 5^3$

c $m(x) = \frac{-4}{(2x-5)^2}$

d $n(x) = \frac{1}{3}x^3\left(3 - \frac{1}{x}\right)$

Het is handig als je van de volgende functies de afgeleide uit het hoofd kent:

als $f(x) = \sqrt{x}$ *dan is* $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *en als* $f(x) = \frac{1}{x}$ *dan is* $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

V-2 Differentieer.

a $k(x) = 6\sqrt{3x - 4}$

b $l(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 20}$

c $p(x) = \left(x + \frac{4}{x}\right)(1 + 4x)$

d $q(x) = \frac{7}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt[7]{x}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

V-3a Bereken exact de helling van de grafiek van $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x}$ in het punt $(1, -1)$.

b Bereken exact de coördinaten van het punt op de grafiek van $g(x) = x - 10\sqrt{x}$ waarin de helling gelijk is aan 0.

Aanpak

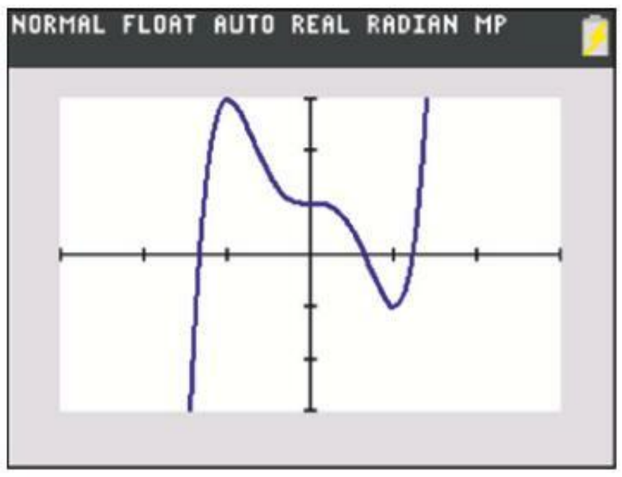
Hoe bereken je de extreme waarden van een functie *f*?

1. Geef het functievoorschrift van f'.
2. Los op $f'(x) = 0$.
3. Ga met een plot na of de grafiek van f bij de oplossingen van $f'(x) = 0$ een top heeft.
4. Bereken de y-coördinaat van een eventuele top. Geef aan of het een maximum of een minimum betreft.

Voorbeeld

Bereken exact de extreme waarden van $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$.

Oplossing

1. $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$
2. $f'(x) = 0$ geeft $15x^2(x^2 - 1) = 0$
   Dus $x = 0$, $x = -1$ of $x = 1$
3. 

4. $f(-1) = 3$ is een maximum en $f(1) = -1$ is een minimum.
   Bij $x = 0$ heeft de grafiek een buigpunt.

V-4 Bereken exact de extreme waarden van de volgende functies. Geef aan of het een maximum of een minimum betreft.

a $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

b $g(x) = 2 - (3x - 4)^4$

c $h(x) = (x - 1) \cdot (x - 3)^2$

d $k(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 20}$

V-5 Gegeven is de functie $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 2$.

a Bereken exact de x-coördinaten van de punten op de grafiek van f waarin de helling gelijk is aan 0.

b Ga met een plot van f na dat er bij één van de twee punten die je bij opdracht a hebt gevonden, sprake is van een extreme waarde en bij het andere punt niet. Is de extreme waarde een maximum of een minimum?

V-6 Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 6x)^a$ met a een positief geheel getal.

a Toon met behulp van differentiëren aan dat voor elke waarde van a de helling van de grafiek van f in het punt met x-coördinaat 3 gelijk is aan 0.

b De grafiek van f_a heeft in het punt met x-coördinaat 8 een helling die gelijk is aan 3.
Bereken voor welke waarde van a dit het geval is. Rond je antwoord af op twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

6-1

Productfuncties

1 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x + 4}$.
a Geef het domein van f.
b Plot en schets de grafiek van f.
c Bereken exact de nulpunten van f. Gebruik daarbij de regel:
Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.

Theorie

Een functie van de vorm $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ heet een **productfunctie**. De nulpunten van f kun je berekenen door op te lossen: $p(x) = 0$ of $q(x) = 0$.

Voorbeeld

Bereken exact de nulpunten van $f(x) = \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)(x^3 - 7)$.

Oplossing

$1 - \frac{4}{x^2} = 0$ of $x^3 - 7 = 0$.

Dit geeft $x^2 = 4$ of $x^3 = 7$.

De nulpunten van f zijn $x = 2$, $x = -2$ en $x = \sqrt[3]{7}$.

H 2 Bereken exact de nulpunten van de volgende functies.
a $f(x) = (2x + 1)(x^3 - 8)$
b $g(x) = (x^2 - 9x + 14)(x^2 + 2x - 4)$
c $h(x) = \left(\frac{2}{5}x - 3\right)\sqrt{3x - 8}$
d $k(x) = (x^2 + 3)\sqrt{3 - x^2}$

3 Gegeven is de functie $f(x) = (3x - 12)\sqrt{2 - x}$.
Bij de opdracht om de nulpunten van f te berekenen, reageert Frederike met:
'Dat kun je in één keer opschrijven, $x = 4$ en $x = 2$.'
Welke fout maakt Frederike?

Bij het oplossen van vergelijkingen waarin een wortelvorm voorkomt, moet je controleren of de oplossingen voldoen.

4 Gegeven is de familie van productfuncties $f_p(x) = (x^2 - p)\sqrt{2x + 4}$.
a Bereken exact de nulpunten van f_9.
b Bereken de waarde van p waarvoor $x = 6$ een nulpunt is.
c Bereken exact de nulpunten in het geval $p = 1$.
d Het aantal nulpunten van f_p hangt af van de waarde van p.
Onderzoek welke verschillende aantallen nulpunten f_p heeft en welke waarde(n) van p daarbij horen.

5 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3$ en $g(x) = x^p$.
De grafiek van de functie $f(x) = x^3$ is overal stijgend.
Voor welke gehele waarden van p is de grafiek van de productfunctie $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ overal stijgend? Leg je antwoord uit.

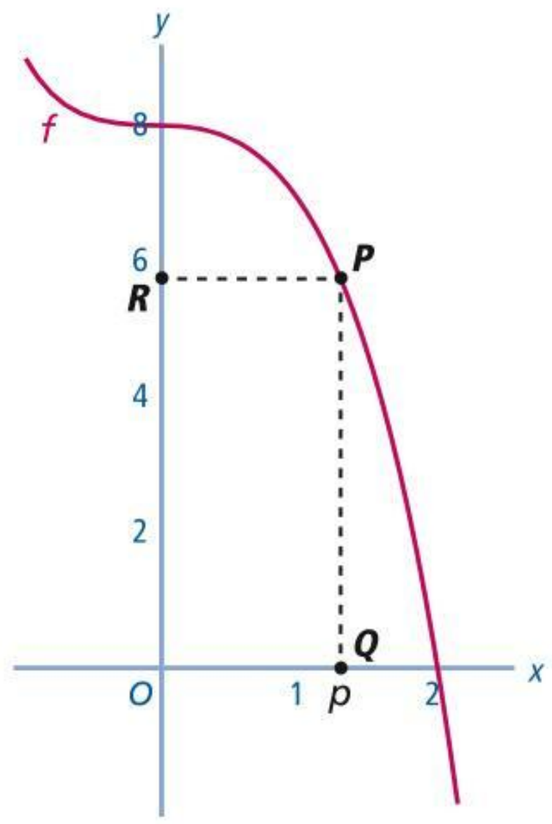
© Noordhoff Uitgevers bv

6 Gegeven is de functie $f(x) = 8 - x^3$. Op de grafiek van f ligt een punt $P(p, f(p))$ met $0 < p < 2$. Door vanuit punt P loodlijnen neer te laten op de x-as en de y-as, ontstaat een rechthoek $OQPR$.

a Bereken de oppervlakte van $OQPR$ in het geval $p = 1\frac{1}{2}$.

b De oppervlakte A van rechthoek $PQOR$ hangt af van de ligging van het punt P, dus van de waarde van p.
Leg uit dat $A(p) = 8p - p^4$.

c Bereken exact de maximale oppervlakte van rechthoek $OQPR$.



7 Gegeven is de functie $f(x) = (x - 2)(x + 3)$.
Het functievoorschrift is het product van de factoren $x - 2$ en $x + 3$.

a Is de factor $x - 2$ positief of negatief in het geval $x < -3$?
En hoe zit dat bij de factor $x + 3$?

b Maak opdracht a opnieuw in het geval $-3 < x < 2$ en in het geval $x > 2$.

c Bij welke waarden van x is $f(x) > 0$? En bij welke waarden van x is $f(x) < 0$?

d Schets de grafiek van f zonder je rekenmachine te gebruiken.

Het functievoorschrift van een productfunctie is het product van twee of meer factoren. Door na te gaan bij welke waarden van x de afzonderlijke factoren positief of negatief zijn, kun je beredeneren waar de functiewaarden positief zijn en waar de functiewaarden negatief zijn.

H 8 Gegeven is de functie $g(x) = x(x - 4)(x + 7)$.

a Het functievoorschrift is het product van een aantal factoren.
Welke factoren zijn dat?

b Is de factor $x - 4$ positief of negatief in het geval $x > 4$?
En hoe zit dat bij de factoren x en $x + 7$?

c Maak opdracht b opnieuw in het geval $0 < x < 4$, in het geval $-7 < x < 0$ en in het geval $x < -7$.

d Bij welke waarden van x is $g(x) > 0$? En bij welke waarden van x is $g(x) < 0$?

e Schets de grafiek van g zonder je rekenmachine te gebruiken.

9 Gegeven is de functie $f(x) = (1 - x)(x^2 + 3x - 4)$.

a Bereken de nulpunten van f. Hoeveel nulpunten heeft f?

b Geef op een getallenlijn de nulpunten van f aan. Geef tussen de nulpunten aan of de functiewaarde positief of negatief is.

c Schets de grafiek van f zonder je rekenmachine te gebruiken.

© Noordhoff Uitgevers bv

6-2

Quotiëntfuncties

10 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{3x - 6}{x - 4}$

a Plot en schets de grafiek van f.
b Bij welke waarde van x bestaat de functie f niet?
c Maak een tabel van functiewaarden, waarbij je $x = 0$ als startwaarde en 1 als stapgrootte neemt.
Bij welke waarde van x geldt $f(x) = 0$?
d Bereken voor de waarde van x uit opdracht c de waarde van de teller en de waarde van de noemer.

Theorie

Een functie van de vorm $f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ heet een **quotiëntfunctie**.
Een quotiëntfunctie f is niet gedefinieerd als $n(x) = 0$ en heeft een nulpunt als $t(x) = 0$ én $n(x) \neq 0$.

H 11 Bereken de nulpunten van de volgende functies.

a $f(x) = \dfrac{7x - 3}{3 - 6x}$

b $g(x) = \dfrac{3x + 2}{9 - x^2}$

c $h(x) = \dfrac{4}{2x - 7}$

d $k(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x^2 + 1}$

e $l(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x + 2}$

f $m(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 3x}$

12a Plot en schets de grafiek van $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 4}$
b Hoeveel nulpunten heeft f?
c Los de vergelijking $x^2 + 5x - 14 = 0$ op.
d De aantallen oplossingen bij de opdrachten a en b verschillen van elkaar. Verklaar dit verschil.

13a Plot en schets de grafiek van $f(x) = \dfrac{3x - 6}{x - 4}$
b Geef het domein van f.
c Geef een vergelijking van de verticale asymptoot.
d Maak een tabel van functiewaarden, waarbij je $x = 0$ als startwaarde en 100 als stapgrootte neemt.
e Wat valt je op in de tabel bij positieve waarden van x ver van nul?
f Geldt dit ook voor negatieve waarden van x ver van nul?
g Geef een vergelijking van de horizontale asymptoot.

© Noordhoff Uitgevers bv

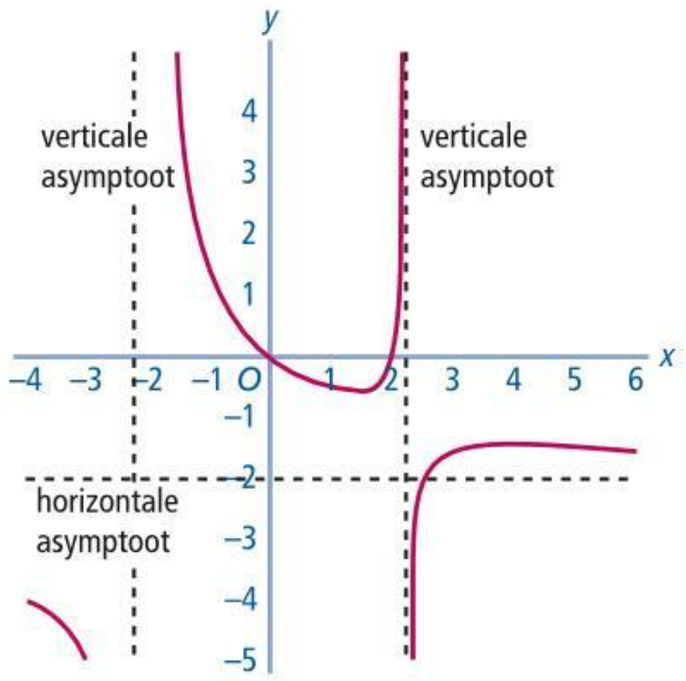
Theorie

Grafieken van quotiëntfuncties kunnen **asymptoten** hebben. Dat zijn lijnen waar de grafiek willekeurig dicht bij komt.

De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ heeft een **verticale asymptoot** $x = a$ als geldt $n(a) = 0$ én $t(a) \neq 0$.

De grafiek van f heeft een **horizontale asymptoot** $y = c$ als voor x-waarden ver van 0 de waarde van $f(x)$ nadert tot een constante c.

Een grafiek kan meerdere asymptoten hebben.



Voorbeeld

Geef vergelijkingen van de verticale en horizontale asymptoten van de grafiek van $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{5 - x^2}$

Oplossing

Voor de verticale asymptoot moet je oplossen $n(x) = 0$, dit geeft $5 - x^2 = 0$. Hieruit volgt $x = -\sqrt{5}$ en $x = \sqrt{5}$. Voor deze waarden van x is de teller niet gelijk aan nul.

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -\sqrt{5}$ en $x = \sqrt{5}$.

Via een tabel op je rekenmachine krijg je $f(100) \approx -1{,}961$, $f(1000) \approx -1{,}996$ en $f(-1000) \approx -2{,}004$.

Dit geeft het vermoeden dat de grafiek van f een horizontale asymptoot $y = -2$ heeft.

De grafiek van f staat hierboven.

H 14 Stel bij de grafiek van de functies uit opdracht 11 vergelijkingen op van de verticale en horizontale asymptoten.

15 Plot de grafiek van de volgende functies en stel vergelijkingen op van de verticale en horizontale asymptoten.

a $f(x) = \dfrac{3 + x}{\sqrt{x - 4}}$

b $g(x) = \dfrac{7}{2^x}$

c $h(x) = \dfrac{^2\log(x)}{x}$

d $k(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

16 Als iemand in koud water terecht komt, daalt zijn lichaamstemperatuur. Als de lichaamstemperatuur gedaald is tot 30 °C ontstaat een levensbedreigende situatie. De overlevingstijd R is de tijd die verstrijkt tussen het te water raken en het bereiken van een lichaamstemperatuur van 30 °C. Daarvoor geldt de formule: $R = 15 + \dfrac{7{,}2}{0{,}0785 - 0{,}0034T}$ met $R > 0$ en $T \geq 5$.

Hierin is R de overlevingstijd in minuten en T de watertemperatuur in °C.

a Bereken algebraïsch de watertemperatuur waarbij de overlevingstijd 5,0 uur is. Rond af op gehele graden.

b De grafiek van R heeft een verticale asymptoot.
Bereken de waarde van T die bij de verticale asymptoot hoort.

c Leg uit wat de betekenis van de verticale asymptoot is voor de situatie van de te water geraakte persoon.

(*Ontleend aan CE havo wiskunde B 2011, tijdvak 1*)

© Noordhoff Uitgevers bv

6-3

Limieten en asymptoten

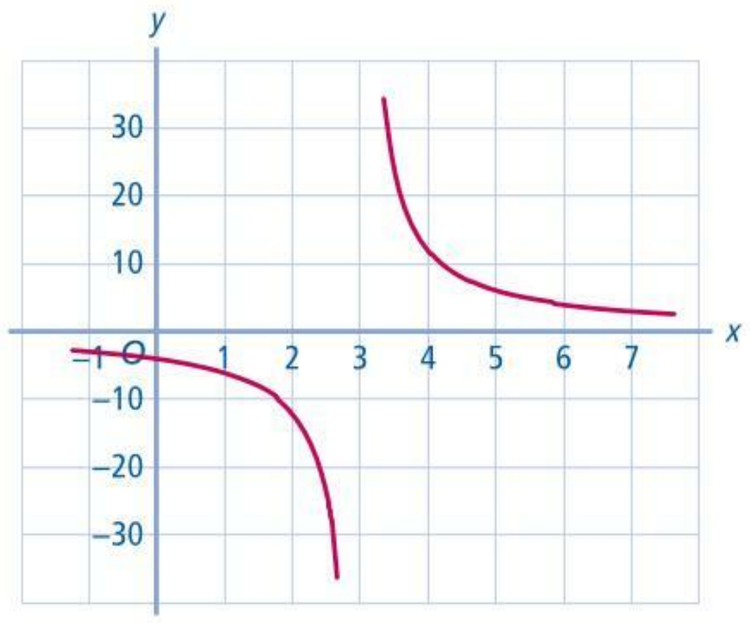
In de vorige paragraaf heb je geleerd hoe je vergelijkingen van de verticale en horizontale asymptoot opstelt. In deze paragraaf leer je de bijbehorende wiskundige notatie.

17 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{12}{x-3}$

a Maak een tabel met startgetal 2,5 en stapgrootte 0,01.
Wat valt je op aan de uitkomsten van f in de buurt van $x = 3$?

b Geef een vergelijking van de verticale asymptoot.

c Geef een vergelijking van de horizontale asymptoot.



Theorie

De wiskundige notatie voor 'x ver van 0' is $x \to \infty$ als $x > 0$ en $x \to -\infty$ als $x < 0$. Het symbool ∞ betekent 'oneindig'.
Bij een verticale asymptoot $x = a$ geldt: als x naar a nadert, dan nadert $f(x)$ naar ∞ of $-\infty$.
Dit noteer je als $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ of $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

In woorden: de **limiet** van f als x naar a nadert, is oneindig of min oneindig.
Bij een horizontale asymptoot $y = c$ geldt: als x naar ∞ of $-\infty$ nadert, dan nadert $f(x)$ naar c.
Dit noteer je als $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$ of $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$.

In woorden: de **limiet** van f als x naar oneindig of min oneindig nadert, is gelijk aan c.

H 18 Gegeven is een functie f. Leg uit wat de volgende limieten betekenen voor de grafiek van f.

a $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$

b $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -3$

c $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = -\infty$

d $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 7$

19a Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Benader $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ met een tabel.

b Gegeven zijn de functies $g_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$

Benader $\lim\limits_{x \to \infty} g_n(x)$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} g_n(x)$ met een tabel voor $n = 2$, $n = 3$ en $n = 4$.

c Veranderen de antwoorden bij opdracht b als $g_n(x) = \dfrac{c}{x^n}$?

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{5}{x^2}$

Benader $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ met een tabel.

Oplossing

x	1	10	50	100
$f(x)$	5	0,05	0,002	0,0005

$f(x)$ nadert naar 0, dus $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

De limieten $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c}{x^n}=0$ *en* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{c}{x^n}=0$ *(*$n>0$*) zijn standaardlimieten.*

Deze standaardlimieten gebruik je om limieten exact te berekenen.

20 Gegeven is de functie $f(x)=\dfrac{5x-7}{7x+8}$

a Benader $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ en $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ met een tabel.

b Leg uit dat voor $x\neq 0$ het functievoorschrift te herleiden is tot $f(x)=\dfrac{5-\frac{7}{x}}{7+\frac{8}{x}}$

c Bereken exact $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ en $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ met behulp van een standaardlimiet.

d Geef een vergelijking van de horizontale asymptoot.

Als bij een quotiëntfunctie f de teller en noemer beide veeltermfuncties zijn, dan kun je het functievoorschrift herleiden tot een vorm waarmee $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ *en* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ *exact te berekenen zijn. Deel daarvoor teller en noemer door de hoogste macht van x die in de noemer voorkomt.*

H 21 Stel op de manier van het voorbeeld een vergelijking op van de horizontale asymptoot van de grafiek van de volgende functies.

a $f(x)=\dfrac{11x-6}{5x+2}$

b $g(x)=\dfrac{5-6x}{5x+3}$

c $h(x)=\dfrac{3x^2-4x+2}{4x^2-10}$

d $k(x)=\dfrac{2x^2+9x}{12-3x^3}$

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot van de grafiek van

$f(x)=\dfrac{4x-9x^2}{5x^2-3}$

Oplossing

Teller en noemer delen door x^2

geeft $f(x)=\dfrac{\frac{4}{x}-9}{5-\frac{3}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{4}{x}-9}{5-\frac{3}{x^2}}=\dfrac{0-9}{5-0}=-1\frac{4}{5}$ en

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{4}{x}-9}{5-\frac{3}{x^2}}=\dfrac{0-9}{5-0}=-1\frac{4}{5}$

De horizontale asymptoot is $y=-1\frac{4}{5}$.

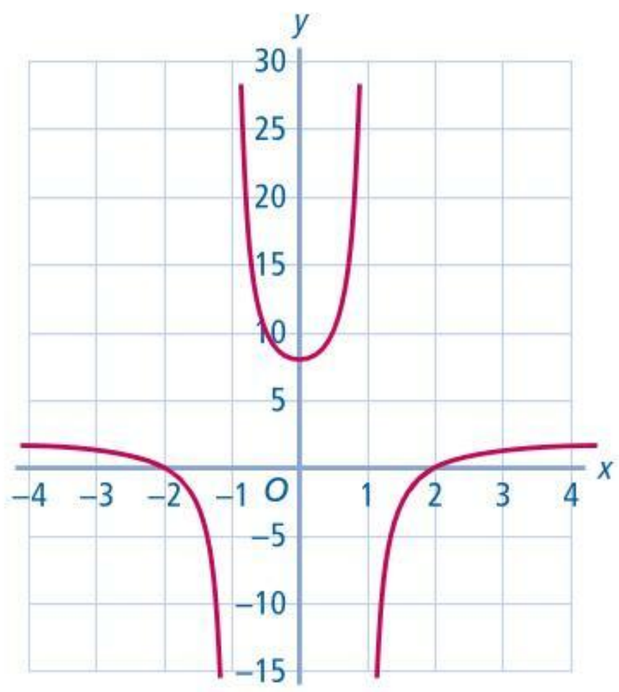
22 Hiernaast staat de grafiek van de functie $f(x)=2+\dfrac{6}{1-x^2}$

a Geef het domein van f.

b Herleid het functievoorschrift van f tot $f(x)=\dfrac{-2x^2+8}{1-x^2}$

c Geef een vergelijking van de horizontale asymptoot.

d Met welk functievoorschrift bereken je de nulpunten van f? Voer deze berekening uit.



© Noordhoff Uitgevers bv

6-4

Productregel

23 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 \cdot 2x$.

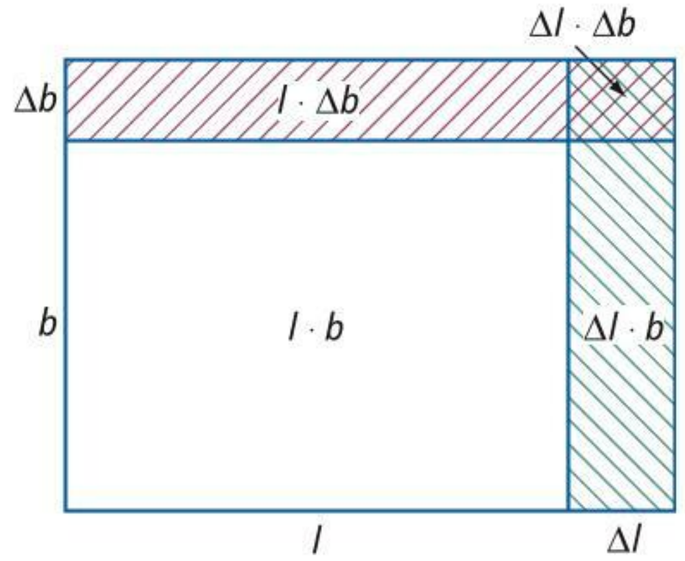
a Plot en schets de grafiek van f.

b Floris vindt als afgeleide: $f'(x) = 3x^2 \cdot 2 = 6x^2$.
Hoe denk je dat hij aan dit antwoord is gekomen?

c Beredeneer dat het antwoord van Floris niet juist is.

d Laat zien dat voor de afgeleide geldt: $f'(x) = 8x^3$.

24 Gegeven is de functie $f(x) = p(x) \cdot q(x)$. Als je $l = p(x)$ en $b = q(x)$ neemt, dan stelt $f(x)$ de oppervlakte O voor van een rechthoek met lengte l en breedte b.
Neemt l toe met Δl en b met Δb dan stelt het product $(l + \Delta l)(b + \Delta b)$ de oppervlakte voor van de volledige rechthoek in de figuur hiernaast.



a De oppervlakte O van de rechthoek neemt toe met ΔO.
Controleer met behulp van de figuur dat
$\Delta O = \Delta l \cdot b + l \cdot \Delta b + \Delta l \cdot \Delta b$.

b Deel links en rechts door Δx en ga na dat je het resultaat kunt herleiden tot $\frac{\Delta O}{\Delta x} = \frac{\Delta l}{\Delta x} \cdot b + l \cdot \frac{\Delta b}{\Delta x} + \Delta x \cdot \frac{\Delta l}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta b}{\Delta x}$

c Vervang l, b, en O door de functies p, q en f. Ga na dat je krijgt
$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta p(x)}{\Delta x} \cdot q(x) + p(x) \cdot \frac{\Delta q(x)}{\Delta x} + \Delta x \cdot \frac{\Delta p(x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta q(x)}{\Delta x}$

d Als je Δx tot 0 laat naderen, dan gaat de laatste term naar 0.
Waarom?

e Ga na dat je krijgt $f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$.

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$

Theorie

Een productfunctie $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ differentieer je met de **productregel**: $f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$.

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = (2 - x^2)(1 + x^3)$.

Oplossing
$p(x) = 2 - x^2$ en $p'(x) = -2x$
$q(x) = 1 + x^3$ en $q'(x) = 3x^2$
dus $f'(x) = -2x \cdot (1 + x^3) + (2 - x^2) \cdot 3x^2$

H 25 Differentieer met de productregel en schrijf het resultaat zo eenvoudig mogelijk.

a $f(x) = (4x^3 + 3)(x^5 - 5)$

b $g(x) = (1 + x + x^2)(x^3 - 7)$

c $h(x) = (3x^2 + 5x)(6x^2 - 9x)$

d $k(x) = (4 - 7x)(x^4 - 5x^2)$

e $l(x) = (4x^2 - 10) \cdot \sqrt{x}$

© Noordhoff Uitgevers bv

26 Gegeven is de functie $f(x) = (2x - 1)(3x + 2)^4$.
Bij het berekenen van de afgeleide van f heb je niet alleen de productregel, maar ook de kettingregel nodig.

a Hiernaast is een begin gemaakt met berekenen van de afgeleide van f.
Maak deze berekening af.

b Differentieer op dezelfde manier $g(x) = (3x - 1)^3(5x^2 + 8)$ en $h(x) = (7x - 4)\sqrt{3 - x}$.

$f(x) = (2x - 1)(5x + 2)^4$
$p(x) = 2x - 1$ en $p'(x) = 2$
$q(x) = (5x + 2)^4$ en
$q'(x) = 4(5x + 2)^3 \cdot 5$
$= 20(5x + 2)^3$
$f'(x) = \ldots$

H 27 Differentieer de volgende functies. Herleiden is niet nodig.

a $f(x) = (3x^2 - 6)\sqrt{2 - x}$

b $g(x) = (x^2 + 1) \cdot \dfrac{5}{x^3 - 4}$

c $k(x) = \left(1 - 3\sqrt{x}\right)^2 \cdot \left(6 + \sqrt{2x}\right)$

d $h(x) = \left(4 - \dfrac{1}{x^4}\right) \cdot \sqrt{2x + 6}$

28 Gegeven is de functie $K(p) = p^2(p + 3)^4$.

a Toon aan dat $K'(p) = 2p(p + 3)^4 + 4p^2(p + 3)^3$.

b Hiernaast is een begin gemaakt met het herleiden van $K'(p)$.
Maak deze herleiding af en laat zien dat $K'(p) = (6p^2 + 6p)(p + 3)^3$.

c Los exact op: $K'(p) = 0$.

$K'(p) = 2p(p + 3)^4 + 4p^2(p + 3)^3$
$K'(p) = 2p(p + 3)(p + 3)^3 + 4p^2(p + 3)^3$
$K'(p) = (2p^2 + 6p)(p + 3)^3 + 4p^2(p + 3)^3$
$K'(p) = (2p^2 + \ldots + \ldots)(p + 3)^3$

29 Schrijf de volgende functies als product van twee factoren.

a $g(x) = 4(x - 7)^3 + 5x(x - 7)^3$

b $h(x) = 2(2x + 1)^3 - 5(2x + 1)^2$

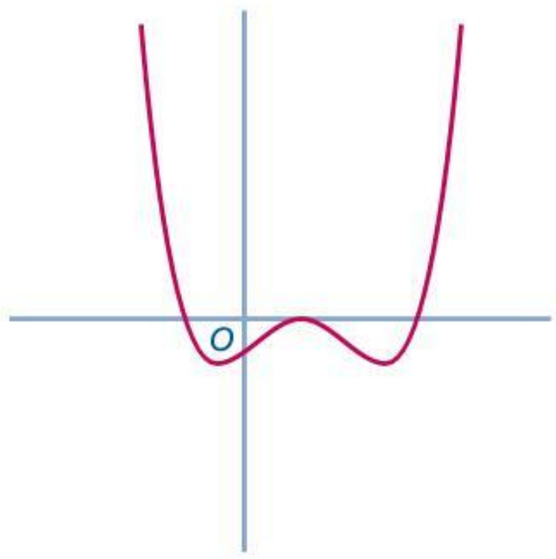
c $k(x) = 2x(x^2 - 1) - 5(x^2 - 1)^2$

30 Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 8x + 12)$.

a Bereken exact de nulpunten van f.

b Differentieer f en laat zien dat het functievoorschrift van f' te herleiden is tot $f'(x) = 4(x - 2)(x^2 - 4x - 4)$.

c Bereken exact de x-coördinaten van de punten van de grafiek van f waarin de raaklijn evenwijdig is aan de x-as.



31 De functie f is gegeven door $f(x) = p(x) \cdot q(x) \cdot r(x)$.
Toon aan:
$f'(x) = p'(x) \cdot q(x) \cdot r(x) + p(x) \cdot q'(x) \cdot r(x) + p(x) \cdot q(x) \cdot r'(x)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

6-5

Quotiëntregel

32 Om de afgeleide van de functie $f(x) = \frac{x^2 + 2}{1 + 2x}$ te vinden, kun je het functievoorschrift schrijven als $f(x) = (x^2 + 2)(1 + 2x)^{-1}$ en vervolgens differentiëren met de productregel en de kettingregel.

a Differentieer f op deze manier.

b Laat zien dat je het functievoorschrift van f' kunt herleiden tot $f'(x) = \frac{2x(1 + 2x) - (x^2 + 2) \cdot 2}{(1 + 2x)^2}$

33 Een quotiëntfunctie heeft de vorm $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ of kortweg $f = \frac{t}{n}$

a Schrijf $f = t \cdot n^{-1}$ en laat met product- en kettingregel zien dat $f' = \frac{t'}{n} - \frac{t \cdot n'}{n^2}$

b Laat zien dat het resultaat van opdracht a te schrijven is als $f' = \frac{t' \cdot n - t \cdot n'}{n^2}$

c Ga na dat het functievoorschrift van f' in opdracht 32b in overeenstemming is met de regel in opdracht 33b.

Theorie

Een quotiëntfunctie $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ differentieer je met de **quotiëntregel**:

$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$ of kortweg $f' = \frac{t' \cdot n - t \cdot n'}{n^2}$

H 34 Differentieer de volgende quotiëntfuncties. Herleid de teller van $f'(x)$ zoals in het voorbeeld hiernaast.

a $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

b $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

c $f(x) = \frac{x^3 + 5x}{4 - x^2}$

d $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{1 + x - 2x^2}$

Gebruik haakjes waar dat nodig is. De teller werk je zo ver mogelijk uit, het kwadraat in de noemer hoef je in het algemeen niet uit te werken.

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 + 1}$

Oplossing

$t(x) = 3x$ en $t'(x) = 3$,

$n(x) = x^2 + 1$ en $n'(x) = 2x$,

dus $f'(x) = \frac{3 \cdot (x^2 + 1) - (3x - 2) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$

Dit is te herleiden tot

$f'(x) = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2}$

dus $f'(x) = \frac{3 + 4x - 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

35 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{4x + 3}{x - 2}$

Toon met behulp van de afgeleide functie aan dat op de grafiek van f geen punten liggen waarin de helling gelijk is aan 0.

H 36 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$

De grafiek van f staat hiernaast.

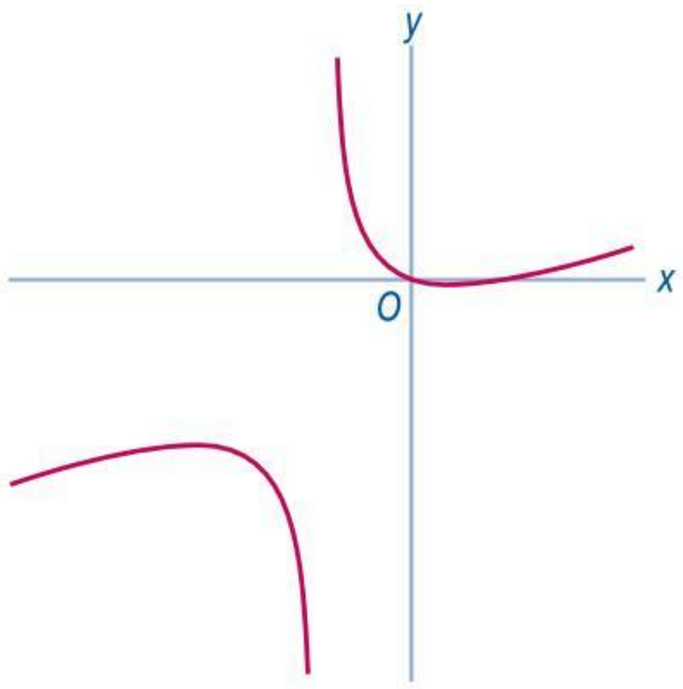
a Bereken de nulpunten van f.

b Geef een vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van f.

c Differentieer de functie f.

d Bereken de exacte waarde van de helling van de grafiek van f in het punt $O(0, 0)$.

e Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.



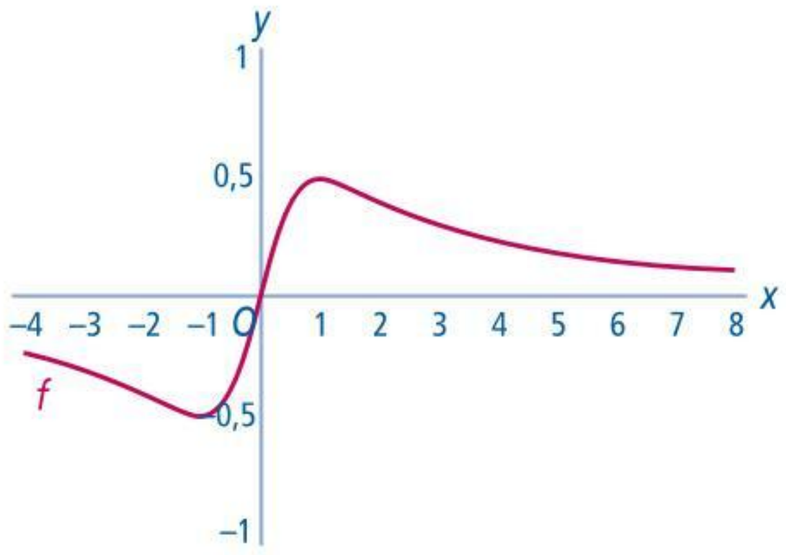
37 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

a Toon aan dat $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$

b Bereken exact de extreme waarden van f.

c Schrijf $f'(x)$ als productfunctie en geef met behulp van de productregel een functievoorschrift van f''.

d Bereken de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f.



38 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x}$

a Plot en schets de grafiek van f.

b Geef het domein van f.

c Laat met behulp van differentiëren zien dat voor de afgeleide van f geldt: $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{2\sqrt{x + 1}} - \sqrt{x + 1}}{x^2}$

d Toon aan dat $f'(x)$ te herleiden is tot $f'(x) = \dfrac{-x - 2}{2x^2\sqrt{x + 1}}$

e Beredeneer met behulp van de afgeleide functie dat de grafiek van f op beide delen van het domein dalend is.

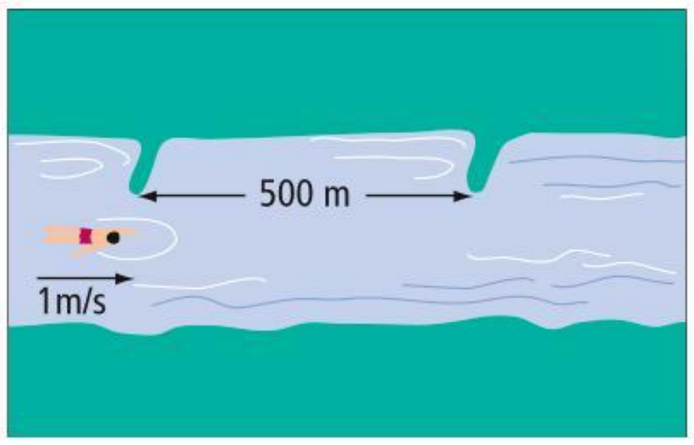
© Noordhoff Uitgevers bv

6-6

Gemengde opdrachten

39 In een rivier liggen twee kribben 500 meter uit elkaar.
Een krib is een korte dam haaks op de rivieroever.
Kjell zwemt stroomopwaarts van krib naar krib en weer terug. Zijn zwemsnelheid is 1 m/s.
In deze opdracht onderzoek je of Kjell sneller in stilstaand water heen en terug kan zwemmen dan in stromend water.

a Stel de stroomsnelheid van het water op v (m/s) met $0 \le v < 1$.
Leg uit dat je de tijd T die Kjell voor de hele tocht nodig heeft, kunt berekenen met de formule $T = \frac{500}{1-v} + \frac{500}{1+v}$



b Toon met behulp van de afgeleide $\frac{dT}{dv}$ aan dat Kjell het snelst heen en terug zal zijn in stilstaand water.

40a Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$

b Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek.

41 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + 3x}$ en $g(x) = 3 - \frac{9}{x}$

a Laat zien dat je het functievoorschrift van f kunt herleiden tot dat van g.

b De herleiding in opdracht a is niet voor alle waarden van x mogelijk, dus er is toch een verschil tussen de functies f en g.
Welk verschil is er tussen de grafieken van f en g?

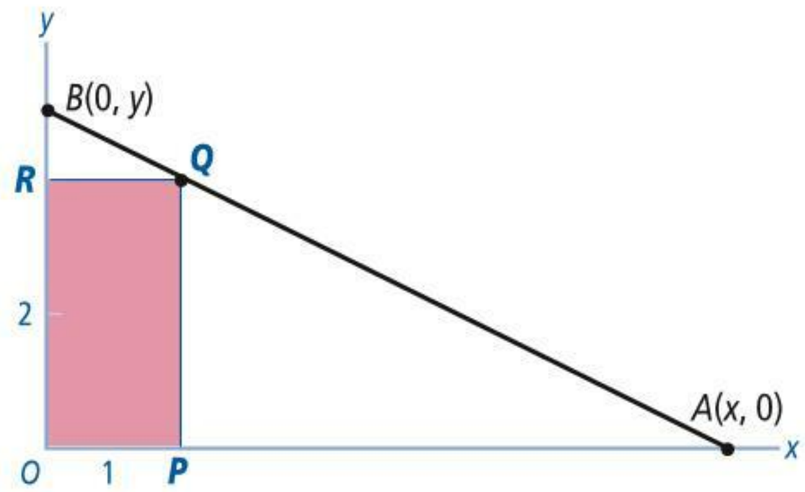
42 Bereken van onderstaande functies de limieten van de functie voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$ door de teller en noemer te delen door de hoogste macht van x die in de noemer voorkomt.
Geef een vergelijking van elke horizontale asymptoot.

a $f(x) = \frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}$

b $g(x) = \sqrt{\frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

43 In de figuur hiernaast zie je rechthoek $OPQR$ met $OP = 1$ en $OR = 2$. Lijnstuk AB met $A(a, 0)$ en $B(0, b)$, waarbij $a \geq 1$ en $b \geq 2$, gaat door Q.



a Toon met behulp van gelijkvormige driehoeken aan dat $b = 2 + \dfrac{2}{a-1}$

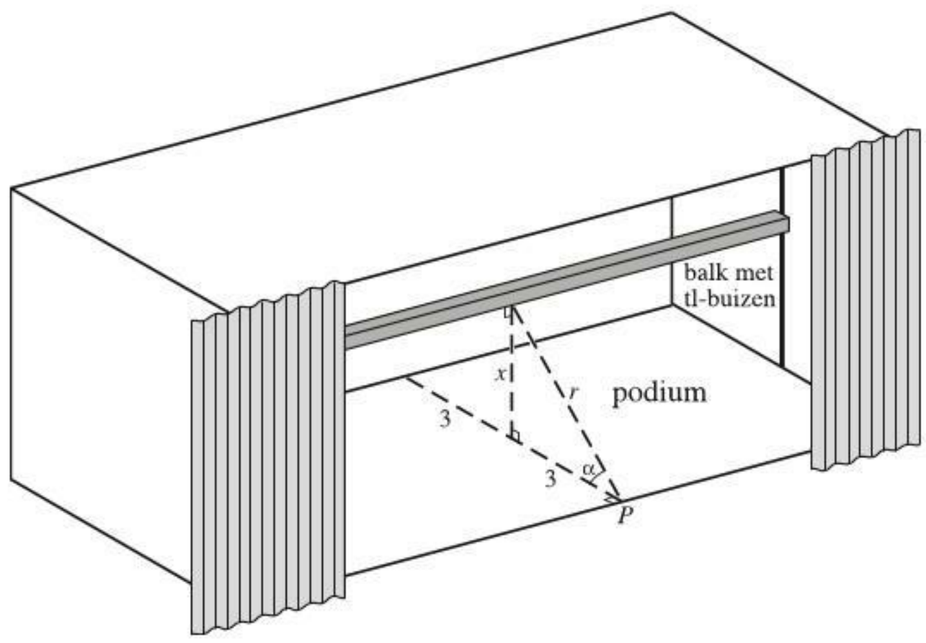
b Welke asymptoten heeft de grafiek van de functie $f(x) = 2 + \dfrac{2}{x-1}$ en hoe zie je die in de figuur terug?

c Toon aan dat voor de oppervlakte S van driehoek OAB geldt: $S = \dfrac{a^2}{a-1}$

d Leg met behulp van de figuur uit dat de oppervlakte van driehoek OAB een minimale waarde moet hebben.

e Bereken met behulp van $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a}$ de coördinaten van punt A en punt B die bij de minimale oppervlakte horen.

44 Van een podium is de afstand van de voorkant tot de achterkant 6 meter. Midden boven het podium hangt een balk met tl-buizen. De afstand van punt P tot de balk is r meter, de hoogte van de balk boven het podium is x meter en de hoek die het kortste verbindingslijnstuk van de balk en punt P met het podium maakt is α radialen. De verlichtingssterkte op het podium in punt P noemen we V (in lux). Voor deze balk met tl-buizen geldt: $V = 650 \cdot \dfrac{1}{r} \cdot \sin(\alpha)$.



Er geldt $V = \dfrac{650x}{9 + x^2}$

a Toon aan dat deze formule juist is.

De balk met tl-buizen kan omhoog gehesen worden: de hoogte kan variëren van 2,0 tot 5,0 meter.
De verlichtingssterkte op het podium in punt P moet minimaal 100 lux zijn.

b Bereken langs algebraïsche weg op welke hoogten de balk mag hangen.

Er is een hoogte van de balk waarbij V maximaal is.

c Bereken deze hoogte langs algebraïsche weg.
(*Ontleend aan CE vwo wiskunde B12 2007, tijdvak 1*)

© Noordhoff Uitgevers bv

Samenvatting

Productfunctie, quotiëntfunctie

Een functie van de vorm $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ heet een productfunctie.
De nulpunten van f vind je door op te lossen:
$p(x) = 0$ of $q(x) = 0$.

Een functie van de vorm $f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ heet een quotiëntfunctie.

Een quotiëntfunctie f is niet gedefinieerd als $n(x) = 0$
en heeft een nulpunt als $t(x) = 0$ en $n(x) \neq 0$.

Limieten, asymptoten

Grafieken van quotiëntfuncties kunnen asymptoten hebben, dit zijn lijnen waar de grafiek willekeurig dicht bij komt.
De wiskundige notatie voor 'x ver van 0' is $x \to \infty$ als $x > 0$ en $x \to -\infty$ als $x < 0$. Het symbool ∞ betekent 'oneindig'.

De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ heeft een verticale asymptoot $x = a$ als geldt $n(a) = 0$ en $t(a) \neq 0$.
Bij een verticale asymptoot $x = a$ geldt: als x naar a nadert, dan nadert $f(x)$ naar ∞ of $-\infty$.

Dit noteer je als $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ of $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

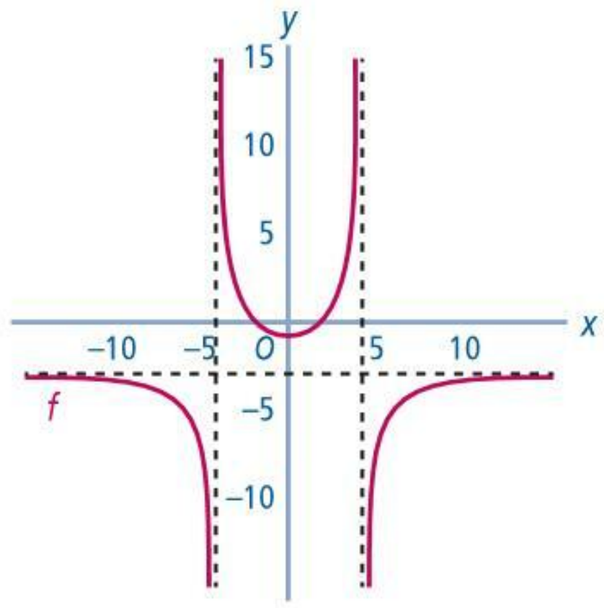
Dit noem je de limiet van f als x naar a nadert.
De grafiek van f heeft een horizontale asymptoot $y = c$ als voor x-waarden ver van 0 de waarde van $f(x)$ tot een constante c nadert.
Bij een horizontale asymptoot $y = c$ geldt: als x naar ∞ of $-\infty$ nadert, dan nadert $f(x)$ naar c.

Dit noteer je als $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$ of $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$.

Dit noem je de limiet van f als x naar ∞ of $-\infty$ nadert.
Een grafiek kan meerdere asymptoten hebben.

Voorbeeld

De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{16 - x^2}$ heeft drie asymptoten.
De lijnen $x = 4$ en $x = -4$ zijn verticale asymptoten en de lijn $y = -3$ is een horizontale asymptoot.



Productregel, quotiëntregel

Een productfunctie $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ differentieer je met de productregel $f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$.

Een quotiëntfunctie $f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ differentieer je met de quotiëntregel

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2} \text{ of korter } f' = \frac{t' \cdot n - t \cdot n'}{n^2}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt productfuncties en quotiëntfuncties differentiëren

Met behulp van de differentieerregels kun je productfuncties en quotiëntfuncties differentiëren.

Voorbeeld 1

Differentieer $f(x) = x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x - 5\right)^4$ en schrijf $f'(x)$ als een product.

Oplossing

$p(x) = x^2$ en $p'(x) = 2x$

$q(x) = \left(\frac{1}{2}x - 5\right)^4$ en

$q'(x) = 4\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = 2\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^3$

$f'(x) = 2x\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^4 + x^2 \cdot 2\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^3$

$f'(x) = 2x\left(\frac{1}{2}x - 5\right)\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^3 + 2x^2\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^3$

$f'(x) = (x^2 - 10x + 2x^2)\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^3$

$f'(x) = (3x^2 - 10x)\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^3$

Voorbeeld 2

Differentieer $f(x) = \dfrac{2 - x}{5x + 2}$

Oplossing

$t(x) = 2 - x$ en $t'(x) = -1$

$n(x) = 5x + 2$ en $n'(x) = 5$

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (5x + 2) - (2 - x) \cdot 5}{(5x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-5x - 2 - 10 + 5x}{(5x + 2)^2} = \frac{-12}{(5x + 2)^2}$$

Je kunt vergelijkingen van asymptoten opstellen

Verticale asymptoten bij quotiëntfuncties vind je door de nulpunten van de noemer te berekenen. De teller moet dan voor de gevonden waarde(n) van x ongelijk aan nul zijn.
Voor horizontale asymptoten bereken je exact de limieten van de functie voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$. Bij quotiëntfuncties waarbij teller en noemer veeltermfuncties zijn, herleid je het functievoorschrift door teller en noemer te delen door de hoogste macht van x die in de noemer voorkomt.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 8}$

Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van f.

Oplossing

De nulpunten van de noemer zijn $x = -2$ en $x = 2$. Voor deze waarden van x is de teller ongelijk aan nul, dus de verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -2$ en $x = 2$.

Teller en noemer delen door x^2 geeft $f(x) = \dfrac{1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{8}{x^2}}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{3}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2} \text{ en } \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{8}{x^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{1}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Test jezelf

T-1a Bereken exact de nulpunten van $f(x) = (2x - 5)\sqrt{12x - x^2}$.
b Plot en schets de grafiek van f.
c Bereken exact de nulpunten van $g(x) = (2x + 5)\sqrt{12x - x^2}$.
d Controleer het antwoord bij opdracht c met een plot.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-1.

T-2 Bereken van de volgende functies de nulpunten en stel vergelijkingen op van de asymptoten van de bijbehorende grafieken.

a $f(x) = \dfrac{3x + 6}{2 - 5x}$

b $g(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 6}$

c $h(x) = \dfrac{8x + 3x^2}{x^3 - 8}$

d $k(x) = 5 - \dfrac{3}{x + 1} + \dfrac{2}{x}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-2.

T-3a Plot en schets de grafiek van $f(x) = \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x - 3}$
b Herleid het functievoorschrift van f tot één breuk.
c Stel vergelijkingen op van de verticale asymptoten van de grafiek van f.
d Bereken $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot van de grafiek van f.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-3.

T-4 Differentieer met de productregel en schrijf het resultaat zo eenvoudig mogelijk.

a $f(x) = (12 - 8x)(x^3 - 5x)$

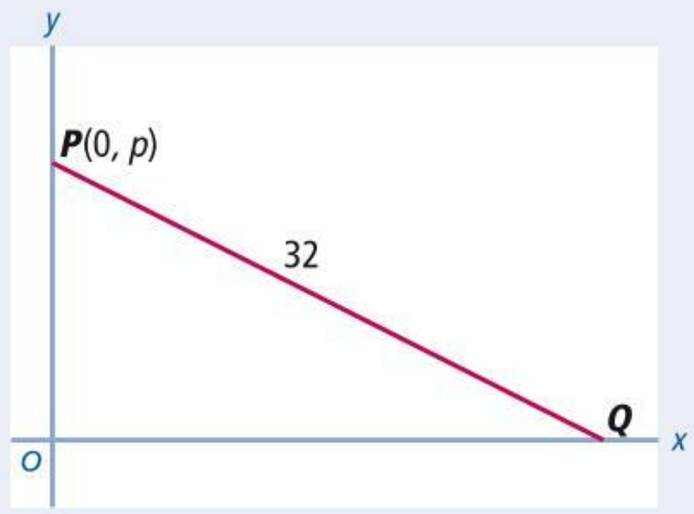
b $g(x) = (x + 2)^2(x - 5)$

c $h(x) = (2 - 9x)\sqrt{x + 7}$

d $k(x) = \left(6 - 2\sqrt{x}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-4.

T-5 In de figuur hiernaast zie je op de y-as een punt $P(0, p)$ met $p > 0$. Op de positieve x-as ligt een punt Q zodat $PQ = 32$.
a Druk de lengte van OQ uit in p.
b Welke waarden kan p aannemen?
c De oppervlakte A van driehoek OPQ is een functie van p. Geef het functievoorschrift $A(p)$.
d Bereken met differentiëren de maximale oppervlakte van driehoek OPQ.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-4.



© Noordhoff Uitgevers bv

T-6 Differentieer de volgende functies.
Schrijf de teller zo eenvoudig mogelijk.

a $f(x) = \dfrac{8x - 3}{5 - x}$

b $h(x) = \dfrac{4 + x + x^2}{x - x^2}$

c $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{2x}$

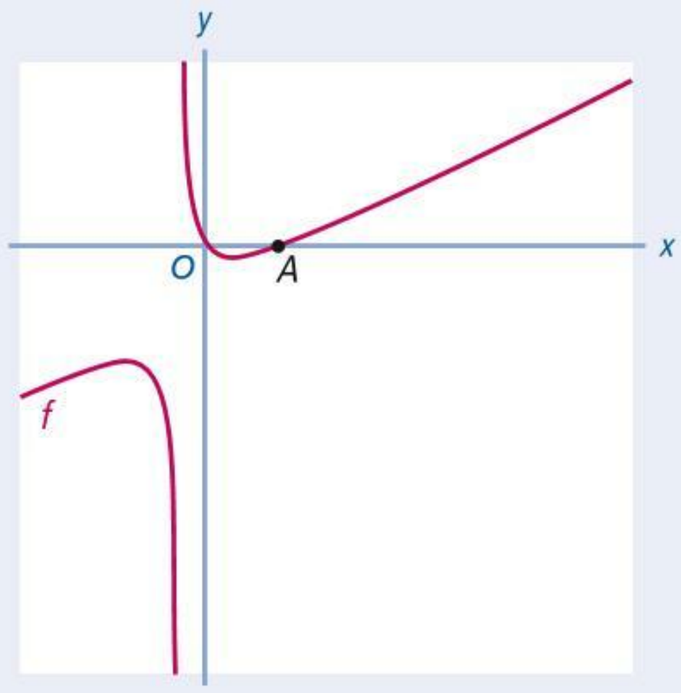
d $k(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3 - 1}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-5.

T-7 Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 15x}{x + 5}$

a Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

b De grafiek van f snijdt de x-as in de oorsprong en in het punt A.
Stel een vergelijking op van de raaklijn in het punt A.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-5.



T-8 Bij een scheikundige reactie ontstaat een hoeveelheid eindproduct, uitgedrukt in mol. De ontstane hoeveelheid na t minuten wordt gegeven met de formule $C = \dfrac{6t}{3t + 2}$
met C in mol en t in minuten.

a Bereken hoe groot de hoeveelheid eindproduct op den duur wordt.

b Geef een formule voor de reactiesnelheid in mol per minuut.

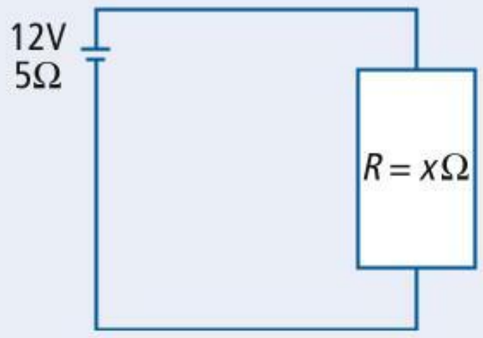
c Hoe groot wordt deze reactiesnelheid op den duur?

T-9 Een elektrisch circuit bestaat uit een spanningsbron van 12 volt met een inwendige weerstand van 5 ohm en een uitwendige weerstand van x ohm. Voor de stroomsterkte I in ampère geldt bij spanning V in volt en weerstand R in ohm de wet:

$$V = I \times (R_{inwendig} + R_{uitwendig})$$

Voor het vermogen P in watt in het circuit geldt:

$$P = I^2 \times R_{uitwendig}$$



a Toon aan dat in het circuit hiernaast moet gelden: $I = \dfrac{12}{x + 5}$

b Geef een formule die het vermogen P uitdrukt in x.

c Geef de formule voor $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ en bereken hiermee het maximale vermogen en de bijbehorende grootte van de uitwendige weerstand.

© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Basis**

B-1 Bereken exact de nulpunten van de volgende productfuncties.

a $f(x) = x^4(3x - 9)$

b $g(t) = (t^2 - 8t)(t^4 + 6t)$

c $h(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)\sqrt{4x + 10}$

d $k(s) = \sqrt{16 - s^2} \cdot \sqrt{3s + 7}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-1.

B-2 Bereken exact de nulpunten van de volgende quotiëntfuncties en stel vergelijkingen op van de verticale asymptoten van de bijbehorende grafieken.

a $f(x) = \frac{3x - 7}{2 - x^2}$

b $g(t) = \frac{1 - t - t^2}{t^2 + 1}$

c $h(s) = \frac{s^3 - 4s}{15 - 3s^2}$

d $k(m) = \frac{-3}{m} + \frac{2m + 1}{m - 1}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-2.

B-3 Bereken exact $\lim_{x \to \infty} f(x)$ en $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ en stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot van de grafiek van de volgende functies.

a $f(x) = \frac{15x + 7}{3 - 6x}$

b $f(x) = \frac{5x^2 - 16}{6x^3 + 8x}$

c $f(x) = \frac{4x^2 + 4x - 12}{3x^2 - 10x}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-3.

B-4 De functie f is gegeven door $f(x) = (5x^2 + 20)(20 - x^2)$.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b Plot en schets de grafiek van f.

c Voer de opdrachten a en b ook uit voor $g(x) = 3x\sqrt{12 - 2x}$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-4.

B-5 Differentieer de volgende functies. Schrijf de teller zo eenvoudig mogelijk.

a $f(x) = \frac{3x - 7}{2 - x^2}$

b $h(m) = \frac{2m + 1}{7m - 1}$

c $g(t) = \frac{1 - t - t^2}{t^2 + 1}$

d $k(s) = \frac{s^3 - 4s}{15 - 3s^2}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-5.

© Noordhoff Uitgevers bv

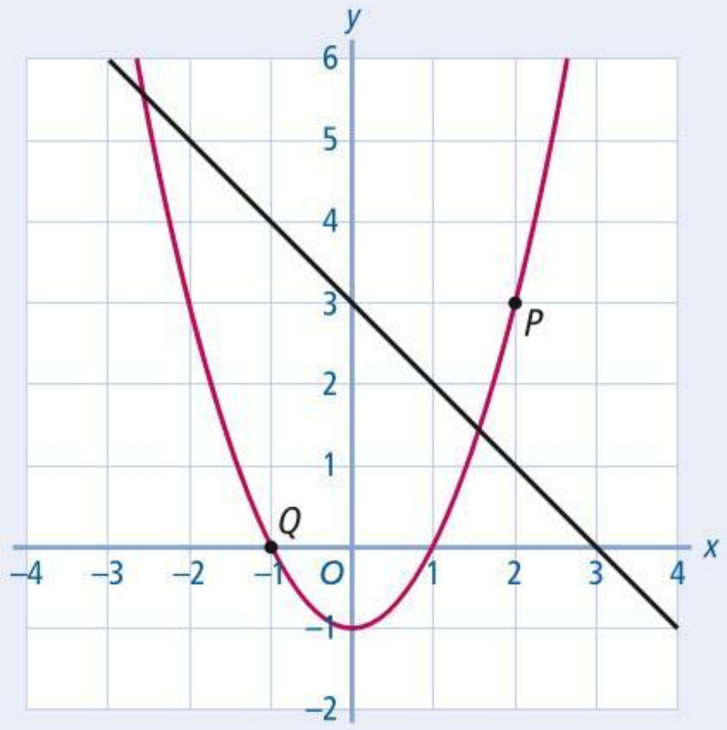
Extra oefening - **Gemengd**

G-1 Hiernaast zijn de grafieken van de functies $f(x) = x^2 - 1$ en $g(x) = 3 - x$ getekend. Op de grafiek van f ligt het punt $P(2, 3)$ en op de grafiek van g ligt het punt $Q(-1, 0)$.

a De productfunctie h is gegeven door $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.
Leg uit dat de grafiek van h ook door het punt Q gaat.

b Leg uit dat de grafiek van h ook door het punt P gaat.

c Schets de grafiek van h met behulp van de figuur hiernaast zonder deze eerst te plotten. Controleer daarna je schets met een plot.



G-2 Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + ax + a}$

a Plot en schets de grafiek van f_4.

b De grafiek van f_4 snijdt de horizontale asymptoot in een punt P.
Bereken exact de coördinaten van P.

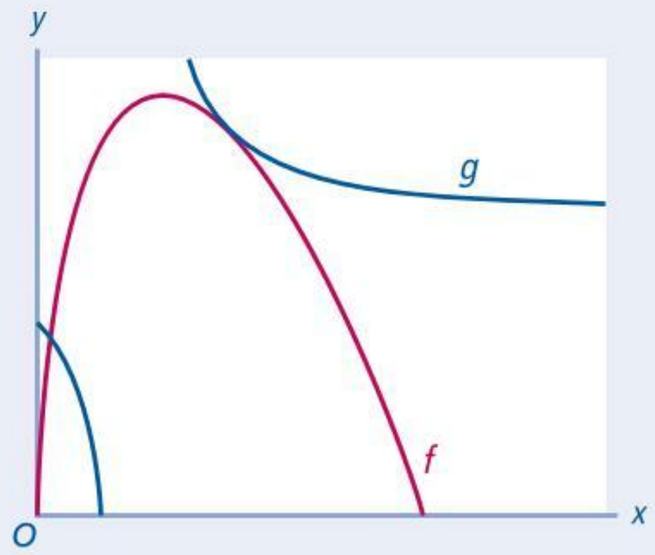
c Beredeneer dat f_4 een maximum heeft. Beredeneer ook dat de grafiek van f_4 een buigpunt heeft.

d Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f_4.

e Voor welke waarde(n) van a heeft de grafiek van f_a geen verticale asymptoot?

G-3 Hiernaast zie je de grafieken van de functies

$$f(x) = (4 - x)\sqrt{2x} \text{ en } g(x) = \frac{3x - 2}{x - 1}$$



a Ga na dat de twee grafieken het punt met $x = 2$ gemeenschappelijk hebben.

b Het lijkt alsof de hellingen van de twee grafieken in $x = 2$ gelijk zijn.
Onderzoek met behulp van differentiëren of dat het geval is.

© Noordhoff Uitgevers bv

Uitdagende opdrachten

U-1 Bereken van onderstaande functies $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ en $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ en geef vergelijkingen van de horizontale asymptoten.

a $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

b $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

U-2 De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{2x^2+x-2}{x-1}$ heeft twee asymptoten: een verticale en een 'scheve'.
In deze opdracht zoek je een vergelijking van de scheve asymptoot l.

a Eerst kijk je naar de richtingscoëfficiënt van l.
De helling van de grafiek van f benadert op den duur de helling van lijn l.
Leg uit dat de richtingscoëfficiënt van l gelijk is aan $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

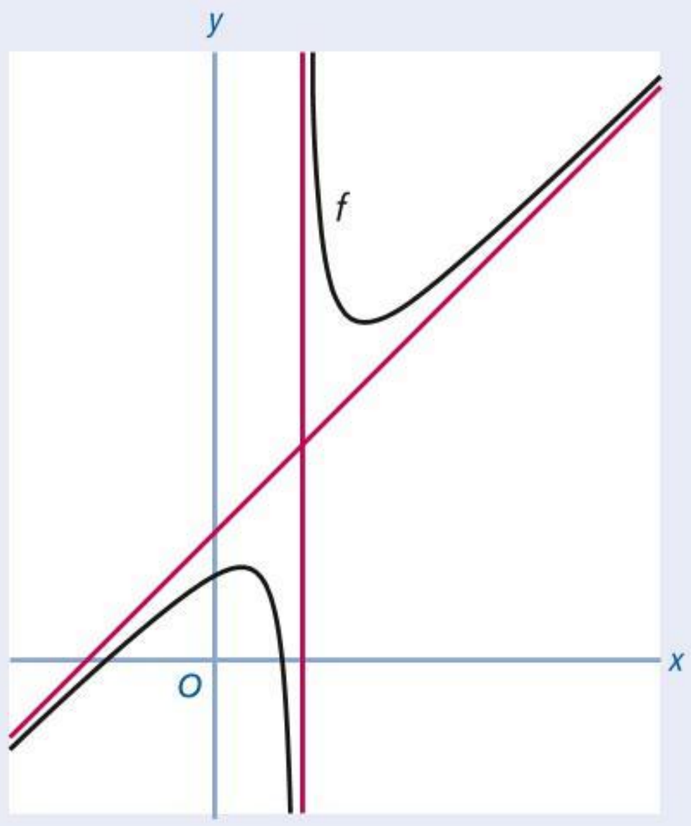
b Bereken deze limiet.

De vergelijking van l is van de vorm $y = ax + b$ met $a = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

Op den duur valt de grafiek van f vrijwel samen met lijn l.

c Leg uit dat moet gelden $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0$.

d Je kunt deze limiet herschrijven tot $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$.
Bereken b en geef een vergelijking van de asymptoot.



U-3 De grafiek van een derdegraadsfunctie f snijdt de lijn $y = 1$ drie keer en wel in de punten met $x = -1$, $x = 2$ en $x = 4$.
De grafiek gaat tevens door het punt $O(0, 0)$.
Stel een functievoorschrift op van f. Stel hiervoor eerst een functievoorschrift op van $g(x) = f(x) - 1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Fileproblemen

Files kunnen door verschillende omstandigheden ontstaan. Wegwerkzaamheden, een ongeluk of de drukte na afloop van een voetbalwedstrijd kunnen bijvoorbeeld de oorzaak zijn van het ontstaan van een file.

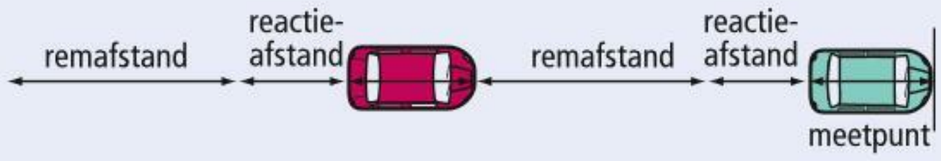
De laatste jaren zijn door de overheid maatregelen genomen om het aantal files en de lengte ervan terug te brengen.

Top 10 files in 2013 (zwaarte = km x minuten)			
	weg	**Traject van - naar**	**zwaarte**
1	A20	Hoek van Holland - Gouda	218,848
2	A16	Breda - Rotterdam	137,826
3	A13	Rijswijk - Rotterdam	136,076
4	A50	Arnhem - Eindhoven	135,518
5	A20	Hoek van Holland - Gouda	126,291
6	A15	Rozenburg - Ridderkerk	115,479
7	A27	Gorinchem - Breda	110,377
8	A1	Amsterdam - Apeldoorn	109,438
9	A1	Apeldoorn - Amsterdam	89,125
10	A8	Zaandam - Amsterdam	83,131
Publieksrapportage Rijkswegennet 20 januari 2014			

De automobilist die in een file terechtkomt, wil er zo snel mogelijk weer uit komen.

Ook de verkeerspolitie wil dat een file zo snel mogelijk weer oplost. Zij wil dat bereiken door de maximumsnelheid aan te passen, zodat een vlotte doorstroming op gang wordt gehouden. De maximumsnelheid wordt aangegeven met borden boven de weg en hangt af van het aantal auto's dat per minuut een meetpunt passeert.

Om een model te maken met formules voor de doorstroming gebruik je de volgende aannamen:
- Alle auto's rijden met dezelfde snelheid V in km/h.
- De onderlinge afstand A (in m) tussen alle auto's is gelijk aan de stopafstand S (in m).
- Alle auto's zijn gemiddeld 4 meter lang.
- De remafstand W (in m) is $0{,}0075V^2$.
- De reactietijd is 0,3 seconde.
- De reactieafstand (in m) is de afstand afgelegd tijdens de reactietijd.



Opdracht

De doorstroming D is het aantal auto's dat per minuut een meetpunt passeert.

a Leg uit dat geldt:

$$doorstroming = \frac{snelheid \text{ in meters per minuut}}{4 + reactieafstand + remafstand}$$

b Laat zien dat je dit kunt herleiden tot de formule $D = \dfrac{1000V}{240 + 5V + 0{,}45V^2}$

c Bereken met de afgeleide bij welke snelheid de doorstroming maximaal is.

d Hoeveel auto's passeren in dat geval per minuut een meetpunt?

e Is de gevonden oplossing realistisch? Zo niet, welke van de aannamen is volgens jou het minst realistisch?

f Neem aan dat de auto's gemiddeld niet 4 m maar 6 m lang zijn. Wordt de maximale doorstroming dan groter of kleiner?

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheden 3

Rekenen met machten en exponenten

1 Schrijf de volgende formules in de vorm $y = b \cdot g^x$.

a $y = 12 \cdot 3^{2-x}$

b $y = 6^{1-2x}$

c $y = \frac{1}{2} \cdot 2^{-2x+5}$

d $y = 4 \cdot 9^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$

2 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $y = (3^t - 2)^2$

b $y = (4^x + 3)(4^{-x} - 2)$

c $y = 5^{3p}\left(5^{\frac{1}{2}p} - 5^{-p}\right)$

d $y = (8^{3p} + 3)(8^p - p)$

3 Herleid en schrijf in de vorm $y = b \cdot x^a$.

a $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot 2\sqrt{x}$

b $y = \left(-\frac{1}{2}x\right)^3 \cdot \left(\sqrt[5]{x^3}\right)^2$

c $y = \frac{(3x)^2}{2\sqrt[4]{x}}$

d $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$

e $y = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{2 \cdot (2x)^2}}\right)^3$

f $y = \left(\sqrt{3x}\right)^3 \cdot (-2)^{-3}$

$g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ $\quad g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$

$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ $\quad g^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{g^m}$

$(g^a)^b = g^{a \cdot b}$ $\quad (p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$

$g^{-n} = \frac{1}{g^n}$ $\quad \left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p^a}{q^a}$

$g^0 = 1$

Rekenen met wortels

Theorie

Bij het rekenen met wortelvormen gelden de volgende eigenschappen:

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ met $a \geq 0$ en $b \geq 0$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ met $a \geq 0$ en $b > 0$

4 Herleid en schrijf in de vorm $b \cdot \sqrt{a}$, met a een zo klein mogelijk positief geheel getal.

a $\frac{3}{\sqrt{2}}$

b $\sqrt{1875}$

c $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^4$

d $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

e $\sqrt{2048}$

f $\frac{6}{\sqrt{3}}$

5 Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

a $y = \frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{\sqrt{x}}$

b $y = x^2\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\left(\sqrt{3}x\right)^2}$

Voorbeeld

Herleid $\sqrt{\frac{4}{3}}$ en schrijf in de vorm $b \cdot \sqrt{a}$.

Oplossing

$\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Vergelijkingen oplossen

Theorie

Een wortelvergelijking vereenvoudig je tot de vorm $\sqrt{A} = B$.
Je gebruikt de regel: uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$ mits $B \geq 0$.

6 Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$

b $\dfrac{3}{\sqrt{2x + 4}} = 2$

c $2\sqrt{x} = \sqrt{2x}$

d $\sqrt{6 + \sqrt{x}} = 4$

e $\dfrac{2 + x}{\sqrt{x}} = 3$

f $\sqrt{x^2 + 2x} = x + 2$

7 De volgende vergelijkingen kun je oplossen met behulp van een substitutie.

a Los $2\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x + 3\right) - 60 = 0$ op met behulp van de substitutie $\frac{1}{2}x + 3 = t$.

b Los $5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 6 = 0$ op met behulp van de substitutie $5^x = t$.

8 Los exact op met behulp van een substitutie.

a $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b $\left(1 + \frac{1}{3}x\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{3}x\right) - 2 = 0$

c $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{8}{x} + 15 = 0$

d $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{x} + 14 = 0$

e $-6^{-2x} + \frac{37}{6} \cdot 6^{-x} - 1 = 0$

f $\dfrac{25}{4a^2} + \dfrac{10}{a} + 4 = 0$

Theorie

Bij vergelijkingen van de vorm $A \cdot B = 0$, $A^2 = B^2$ of $A \cdot B = A \cdot C$ gebruik je de volgende regels:
Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.
Uit $A^2 = B^2$ volgt $A = B$ of $A = -B$.
Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$.

9 Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $6(x - 21)(x + 13) = 0$

b $x^2(x - 9) = 3x^2$

c $3(5x - 2)^2 = 48$

d $\left(x^{\frac{1}{6}} - 5\right)\left(3x^5 - 21\right)(4 - x) = 0$

e $(x - 9)^2 = (2x + 3)^2$

f $3(x^4 - 9) = (x^4 - 9)^2$

10 Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\dfrac{1}{|x + 1|} = \dfrac{2}{3}$

b $|-x^3 + 1| = 12$

c $|x^2 - 5x| = 6$

d $|4x - x\sqrt{x}| = x$

© Noordhoff Uitgevers bv

Logaritmen

11 Schrijf als één logaritme.

a $3 \cdot {}^3\log(2) + {}^3\log(4)$

b ${}^7\log(126) + 2 \cdot {}^7\log(3) - {}^7\log(81)$

c $3 \cdot \log(2) + 2 \cdot \log(4) - 4$

d $3 \cdot \log(2) + 3 \cdot \log(5) - \frac{1}{2} \cdot \log(25)$

$^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$

$^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$

$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$

$g^{{}^g\log(a)} = a$

12 Toon aan dat de volgende beweringen juist zijn.

a ${}^2\log\left(\frac{12}{\sqrt{2}}\right) = 1\frac{1}{2} + {}^2\log(3)$

b ${}^2\log(3) \cdot {}^3\log(4) \cdot {}^4\log(5) \cdot {}^5\log(2) = 1$

c $(1 - {}^9\log(3)) \cdot (1 + {}^9\log(3)) = \frac{3}{4}$

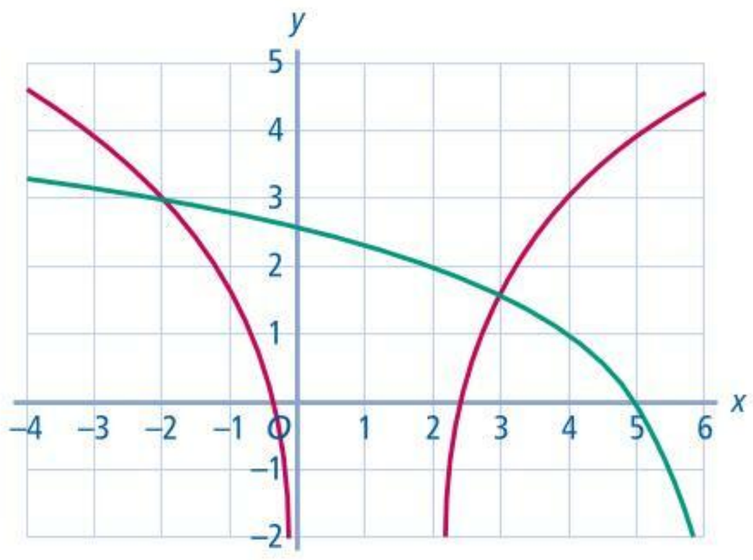
13 Hiernaast zie je de grafieken van de functies $f(x) = {}^2\log(x^2 - 2x)$ en $g(x) = {}^2\log(6 - x)$.

a Schrijf het domein van elke functie in de intervalnotatie.

b Bereken exact de nulpunten van f.

c Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

d Los exact op: $f(x) < g(x)$.



14 Druk x uit in y.

a $y = 3 \cdot {}^2\log(x)$

b $y = 1 + {}^2\log(x - 2)$

c $y = {}^3\log\left(\frac{x - 4}{5}\right)$

15 Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $2 - {}^3\log(2x + 1) = 3$

b ${}^2\log(4 + x) + {}^2\log(4 - x) = 3$

16 Gegeven is de functie $f(x) = 2 - {}^3\log\left(\frac{2x - 1}{3}\right)$.

a Geef het domein van f.

b Toon aan dat $f(x) = {}^3\log\left(\frac{27}{2x - 1}\right)$.

c Bereken exact het nulpunt van f.

d Los exact op: $f(x) > 0$.

Voorbeeld

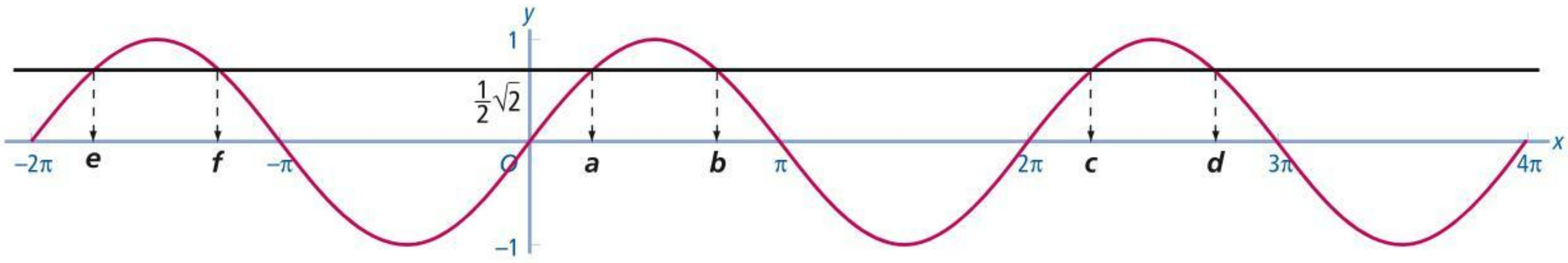
Toon aan dat uit $y = 2 - {}^3\log\left(\frac{1}{2}x\right)$ volgt dat $x = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^y$.

Oplossing

$${}^3\log\left(\frac{1}{2}x\right) = 2 - y$$
$$\frac{1}{2}x = 3^{2-y}$$
$$x = 2 \cdot 3^{2-y}$$
$$x = 2 \cdot 3^2 \cdot 3^{-y}$$
$$x = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^y$$

© Noordhoff Uitgevers bv

Goniometrische vergelijkingen



x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

17 Hierboven zie je op het interval $[-2\pi, 4\pi]$ de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ met daarin de lijn $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

a Geef de oplossing a van de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ op het interval $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$.

b Schrijf alle oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ op het gegeven interval op.

18 Los exact op voor $0 \le t \le 2\pi$.

a $\sin(t) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $\cos(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c $2\cos(t) + 1 = 0$

d $\sin(t) \cdot \cos(t) = 0$

19 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(3x)$.

a Geef de periode van f.

b Geef de oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$ op het interval $[0, 2\pi]$.

c Leid uit het antwoord bij opdracht b de oplossingen af van de vergelijking $f(x) = \frac{1}{2}$ op het interval $[0, 2\pi]$.

20 Los exact op voor $-\pi \le t \le 3\pi$.

a $\sin(2t) = -1$

b $\cos\left(\frac{1}{4}t\right) - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$

c $2\sin(3t) = \sqrt{3}$

d $-10\cos(4t) = 5$

21 Los de volgende vergelijkingen exact op het gegeven interval op.

a $6\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 3\sqrt{2}$ op $[0, 3\pi]$

b $1 + \sin(3x) = 1\frac{1}{2}$ op $[-\pi, \pi]$

c $5\sin(2x) = 2\frac{1}{2}\sqrt{3}$ op $[-\pi, 2\pi]$

22 Los de volgende vergelijkingen op het gegeven interval op.

a $\cos(x) = 0{,}43$ op $[0, 2\pi]$

b $2\cos(x) + 2{,}3 = 1{,}5$ op $[0, 3\pi]$

Voorbeeld

Los de vergelijking $\cos(3x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ op $[0, \pi]$ exact op.

Oplossing

$\cos(3x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft

$3x = \frac{3}{4}\pi$ of $2\frac{3}{4}\pi$ of $4\frac{3}{4}\pi$ of ...

en $3x = 1\frac{1}{4}\pi$ of $3\frac{1}{4}\pi$ of $5\frac{1}{4}\pi$ of ...

dus $x = \frac{1}{4}\pi$ of $\frac{11}{12}\pi$ of $\frac{19}{12}\pi$ of ...

en $x = \frac{5}{12}\pi$ of $\frac{13}{12}\pi$ of $\frac{21}{12}\pi$ of ...

Op $[0, \pi]$ zijn de oplossingen:

$x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = \frac{5}{12}\pi$ of $x = \frac{11}{12}\pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Integreren

Theorie

De **integraal** van een functie f over het interval $[a, b]$ is gelijk aan

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, waarbij $F'(x) = f(x)$.

$F(b) - F(a)$ wordt ook wel genoteerd als $[F(x)]_a^b$.

23 Bereken exact de volgende integralen.

a $\int_1^{11} (x^3 - 6x)\,\mathrm{d}x$

b $\int_1^4 \left(\frac{x^4 + 3x^2 + 5}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

c $\int_1^{16} \left(2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

d $\int_{-3}^{1} \left(\sqrt[3]{x^2} + 3x^4\right)\mathrm{d}x$

24 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ en $g(x) = -4x^2 + 7x - 3$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

b De grafieken van f en g sluiten twee gebieden in.
Bereken exact de oppervlakte van elk van de twee gebieden.

25 Bereken exact de volgende integralen.

a $\int_3^4 \left(\frac{5}{x-2}\right)^3 \mathrm{d}x$

b $\int_2^6 \left(5x + 9\right)\mathrm{d}x$

c $\int_{-2}^{3} \left(2 - 3x\right)^2 \mathrm{d}x$

d $\int_{-1}^{3} \left(\frac{4}{\sqrt{2x+3}}\right)\mathrm{d}x$

Aanpak

Rekenregels voor integralen

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

$\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x$

Voorbeeld

Bereken exact

$\int_{-2}^{2} (x^2 + 4x)\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{2} (x^3 - 2x)\,\mathrm{d}x.$

Oplossing

Je kunt herleiden tot één integraal:

$\int_{-2}^{2} (x^3 + x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{-2}^{2} = 5\frac{1}{3}$

26 Bereken exact.

a $\int_{-3}^{0} \left(x^4 - 3\right)\mathrm{d}x + \int_0^2 \left(x^4 - 3\right)\mathrm{d}x$

b $\int_1^{14} \left(\frac{1}{2x} - x\right)\mathrm{d}x - \int_1^{14} \left(\frac{1}{2x} + x\right)\mathrm{d}x$

c $\int_5^7 \left(-x^2 + 2x + 7\right)\mathrm{d}x + \int_5^7 \left(3x + 7\right)\mathrm{d}x$

© Noordhoff Uitgevers bv

Asymptoten en limieten

De limiet van een gebroken functie voor $x \to \infty$ vind je meestal door teller en noemer te delen door de hoogste macht van x in de noemer.

27 Bereken de volgende limieten.

a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-5}{2-5x}$

b $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+7}{x^2+7x}$

c $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x^3}{3-5\cdot x^3}$

d $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{4x^2+8}{1+x^2}}$

Theorie

Als voor de limiet van een functie f geldt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ of $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ dan is de lijn $y = b$ een **horizontale asymptoot** van de grafiek van f.
Als voor de waarde $x = a$ de noemer van een gebroken functie gelijk is aan 0, terwijl de teller niet gelijk is aan 0, dan is de lijn $x = a$ een **verticale asymptoot** van de grafiek van f.

28 Noteer de bijbehorende limieten en geef de horizontale en verticale asymptoten van de volgende functies.

a $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+2}$

b $g(x) = \dfrac{x-3x^2}{7+6x-x^2}$

c $p(x) = \dfrac{12x^2-4x}{x^2+4x+3}$

d $h(x) = \dfrac{-2x^2-3x}{x^2+2x+5}$

e $k(x) = 5 + \dfrac{12x}{9-x^2}$

f $q(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{6-3\sqrt{x}}$

Voorbeeld

Bepaal alle asymptoten van de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{7x^2-3x-5}{2x^2-8}$

Oplossing

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{7-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{2-\frac{8}{x^2}} = \frac{7}{2} = 3\tfrac{1}{2}$$

dus $y = 3\frac{1}{2}$ is de horizontale asymptoot.
De noemer van $f(x)$ is gelijk aan 0 als $x = 2$ of $x = -2$ (controleer dat de teller ongelijk is aan 0).
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $x = -2$.

29 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(3x-12)$ en $g(x) = {}^3\log(x)$.

a Schrijf de transformaties op die je op de grafiek van g moet toepassen om de grafiek van f te laten ontstaan.

b Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f.

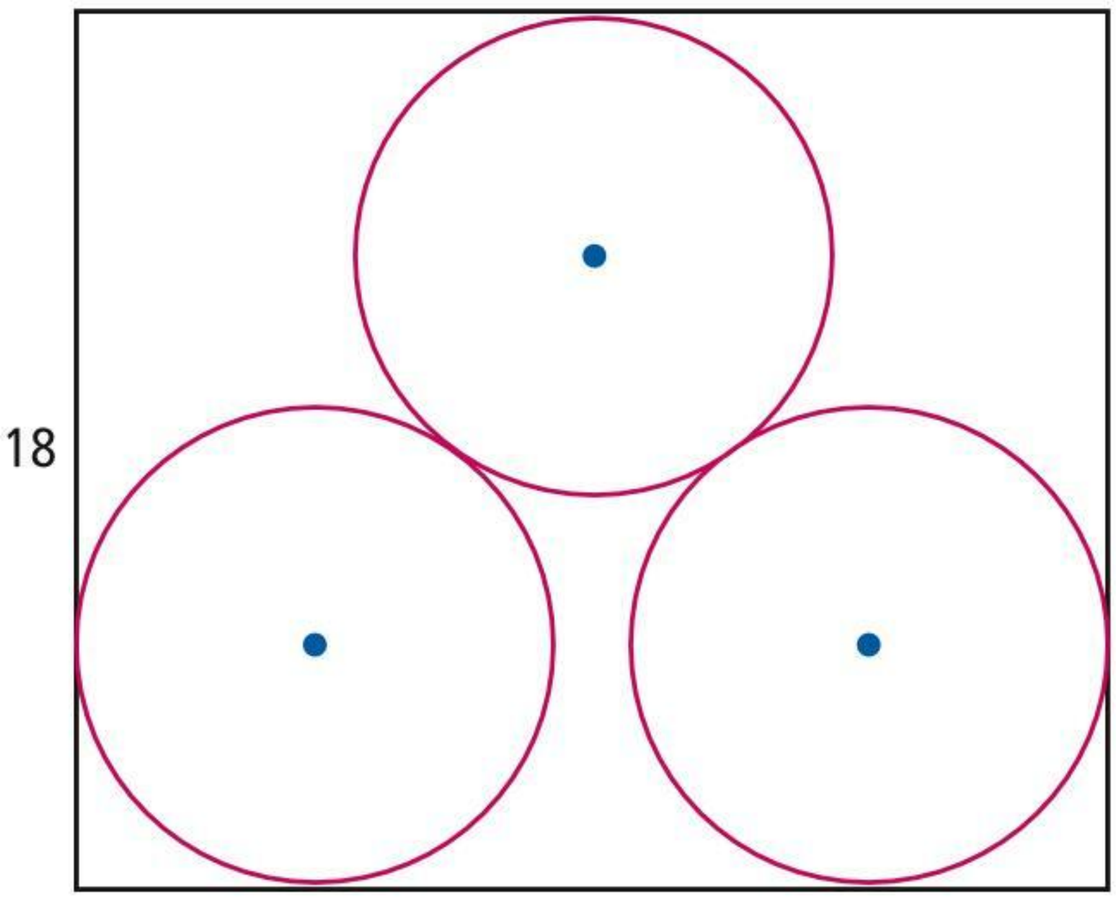
c Voer de opdrachten a en b ook uit voor de functies $f(x) = -3 + 4^{2x}$ en $g(x) = 4^x$.

30 Beredeneer met behulp van het functievoorschrift tot welke waarde A op den duur nadert.

a $A(t) = \dfrac{10}{t+4} - \dfrac{50}{(t+4)^2} - 6$

b $A(t) = \dfrac{500}{2+35\cdot 0{,}65^t}$

© Noordhoff Uitgevers bv



Hoe groot is de straal?
In een rechthoek passen precies drie even grote cirkels. De zijden van de rechthoek zijn 22 en 18.

Bereken de straal van de cirkels.

© Noordhoff Uitgevers bv

SE CE

Hoofdstuk 7
Meetkunde: rekenen of redeneren

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	176
7-1	Sinusregel	178
7-2	Cosinusregel	180
7-3	Stelling van Thales	182
7-4	Redeneren met cirkels	184
7-5	Algebraïsch of meetkundig	186
7-6	Gemengde opdrachten	188
	Samenvatting	190
	Test jezelf	192
	Extra oefening - Basis	194
	Extra oefening - Gemengd	195
	Uitdagende opdrachten	196
	De standaardmeter	197

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorkennis

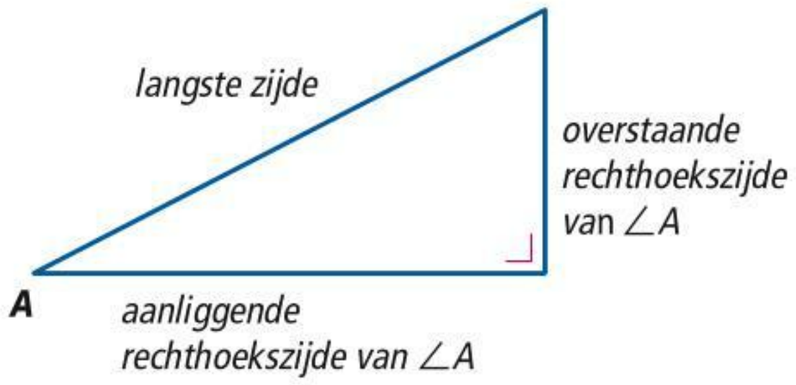
Theorie

In een rechthoekige driehoek kun je de goniometrische verhoudingen **sinus**, **cosinus** en **tangens** gebruiken:

$$\sin(\angle A) = \frac{\textit{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\textit{langste zijde}}$$

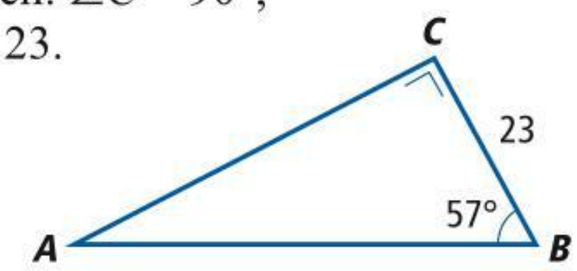
$$\cos(\angle A) = \frac{\textit{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}{\textit{langste zijde}}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{\textit{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\textit{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}$$



Voorbeeld 1

In $\triangle ABC$ is gegeven: $\angle C = 90°$, $\angle B = 57°$ en $BC = 23$.



Bereken in één decimaal AC en BC.

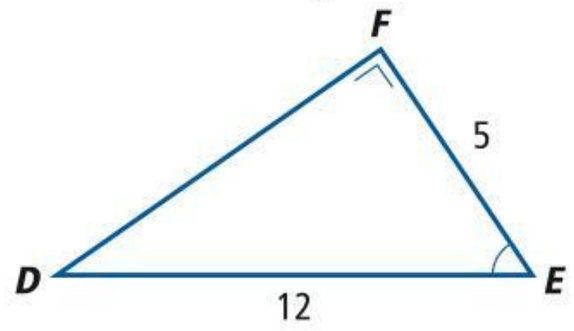
Oplossing

$\tan(57°) = \frac{AC}{23}$ dus $AC = 23 \cdot \tan(57°) \approx 35{,}4$.

$\cos(57°) = \frac{23}{AB}$ dus $AB = \frac{23}{\cos(57°)} \approx 42{,}2$.

Voorbeeld 2

In $\triangle DEF$ is $\angle F = 90°$, $DE = 12$ en $EF = 5$.
Bereken in hele graden $\angle D$ en $\angle E$.



Oplossing

$\sin(\angle D) = \frac{5}{12}$ dus $\angle D \approx 25°$ en

$\angle E \approx 180° - 90° - 25° = 65°$.

V-1 Bereken in één decimaal de lengte van de onbekende zijde en in hele graden de grootte van de scherpe hoeken.

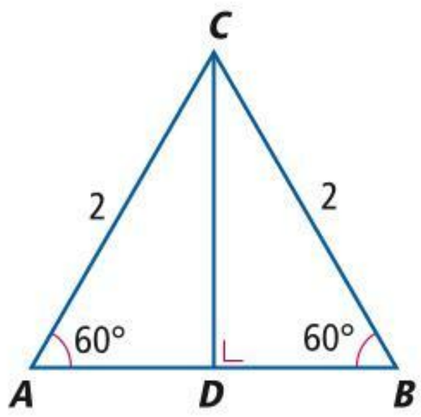
a $\triangle ABC$ met $\angle A = 90°$, $AB = 13$ en $BC = 14$

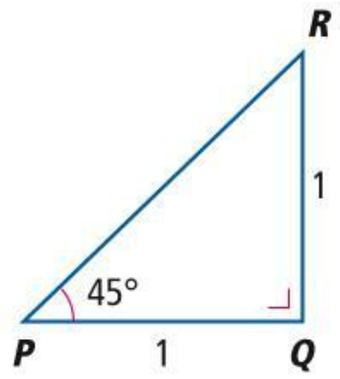
b $\triangle DEF$ met $\angle F = 90°$, $DE = 13$ en $EF = 5$

c $\triangle PQR$ met $\angle R = 90°$, $\angle Q = 57°$ en $PR = 16$

V-2 Neem de tabel over en vul die met uitsluitend exacte waarden verder in.
Gebruik eventueel de gelijkzijdige driehoek ABC en de gelijkbenige rechthoekige driehoek PQR hiernaast.

graden	0	30	45	60	90
sinus	0	…	…	…	…
cosinus	1	…	…	…	…





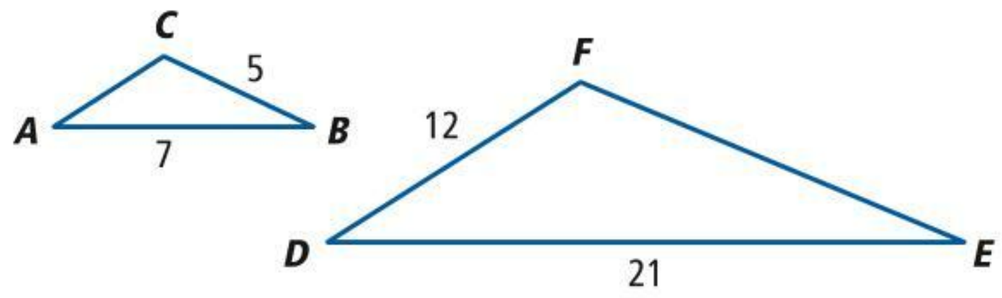
© Noordhoff Uitgevers bv

V-3 In de figuur hiernaast is $\triangle DEF$ een vergroting van $\triangle ABC$.

a Wat kun je zeggen over de hoeken van beide driehoeken?

b Bereken de factor van vergroting.

c Bereken AC en EF.



Theorie

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als je kunt aantonen dat aan één van de twee volgende voorwaarden is voldaan.

- De overeenkomstige hoeken zijn gelijk.
- De overeenkomstige zijden zijn met dezelfde factor vermenigvuldigd.

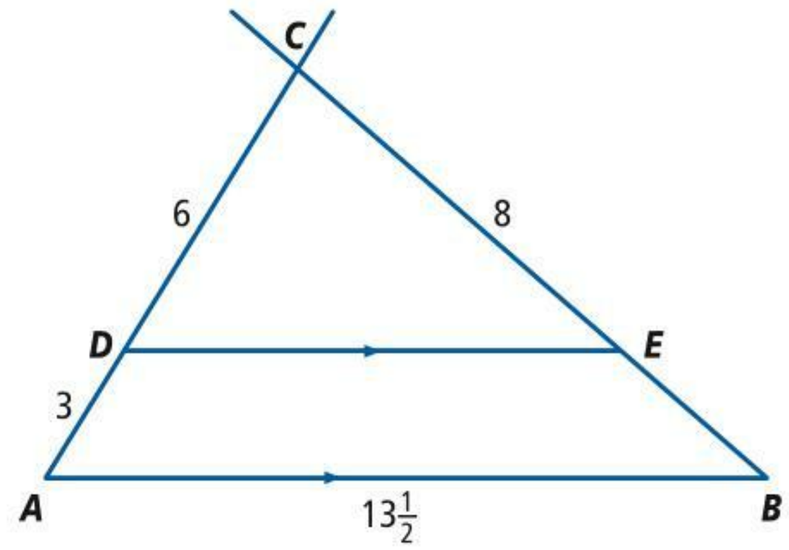
Voor gelijkvormige figuren gebruik je het teken ~.

V-4 In de figuur hiernaast is $AD = 3$, $DC = 6$, $CE = 8$ en $AB = 13\frac{1}{2}$. Ook is $AB \,//\, DE$.

a Leg uit waarom de driehoeken ABC en DEC gelijkvormig zijn.

b Zet de zijden van de driehoeken in een verhoudingstabel en bereken daarmee DE en BC.

c Hoe lang is lijnstuk BE?

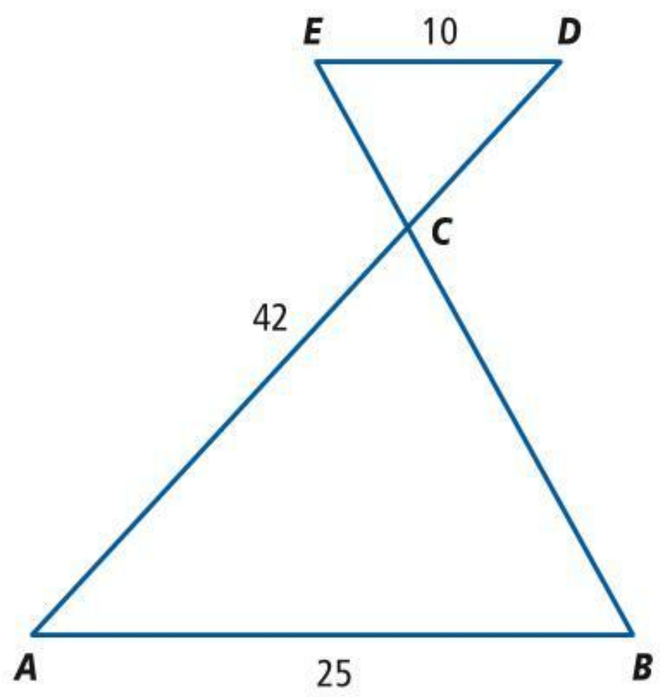


V-5 In de tekening hiernaast is ED evenwijdig aan AB. De totale lengte van AD is 42, maar van de twee delen AC en CD weet je de lengte niet. Er zijn verschillende methoden om AC te berekenen.

a Leg uit waarom de driehoeken ABC en DEC gelijkvormig zijn.

b Manier 1: Stel $AC = x$, dan geldt $CD = 42 - x$.
Maak een verhoudingstabel en bereken daarmee x.

c Manier 2: De verhouding tussen de lengten van de zijden van de driehoeken is gelijk aan $AB : DE$.
Geef deze verhouding, verdeel AD volgens deze verhouding en bereken AC.



V-6a Teken een cirkel met middelpunt M en kies willekeurig twee punten A en B op de cirkel. Teken ook lijnstuk AB.

b Waarom ligt M op de middelloodlijn van AB?

c Teken een cirkel met middelpunt N en kies twee punten C en D op de cirkel. Teken ook lijnstuk CD.

d Op CD ligt een punt Q met $\angle DQN = 90°$.
Toon aan dat het punt Q op de bissectrice van $\angle CND$ ligt.

V-7a Teken in een gelijkbenige driehoek ABC met $\angle A = \angle B$ de hoogtelijnen AD en BE.

b Toon aan dat de driehoeken ABD en BAE gelijkvormig zijn en geef de gelijkvormigheidsfactor.

c Noem de in de tekening voorkomende paren lijnstukken met gelijke lengte.

© Noordhoff Uitgevers bv

7-1

Sinusregel

1 Gegeven $\triangle PQR$ met $\angle P = 64°$, $PR = 12$ en $QR = 15$.
RS is de hoogtelijn vanuit hoekpunt R.

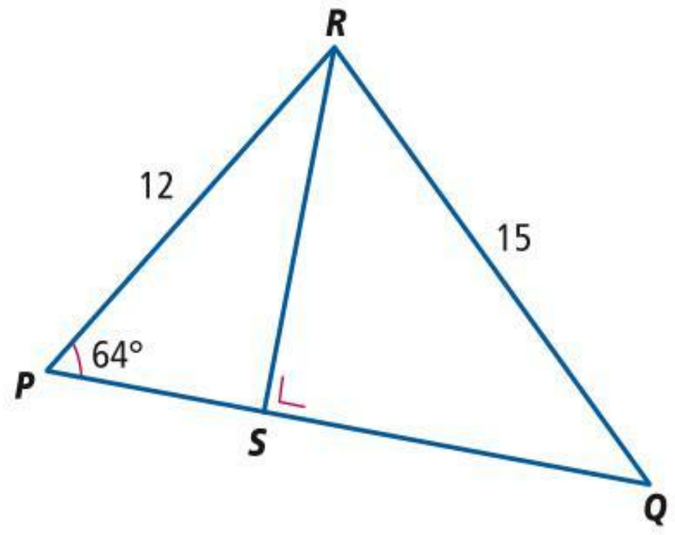
a Bereken de lengte van de hoogtelijn RS.

b Bereken $\angle Q$ en $\angle PRQ$.

c Bereken PS, QS en PQ.

d Controleer dat bij benadering geldt

$$\frac{PQ}{\sin(\angle R)} = \frac{QR}{\sin(\angle P)} = \frac{PR}{\sin(\angle Q)}$$



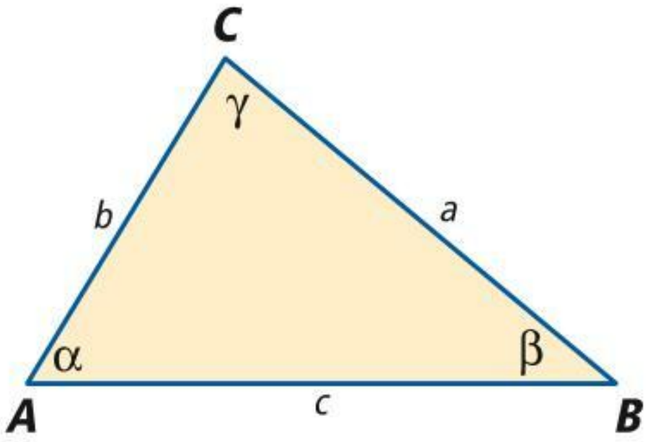
2a Teken een willekeurige driehoek ABC zoals hiernaast en zet de letters α, β, γ, a, b en c op de juiste plaats.

b Teken ook de hoogtelijn CD in deze driehoek.

c De lengte van lijnstuk CD is h.
Leg uit dat $h = b \cdot \sin(\alpha)$ en $h = a \cdot \sin(\beta)$.

d Verklaar dat uit opdracht c volgt: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$

e Welke hoogtelijn heb je nodig om op dezelfde manier als in opdracht d te bewijzen dat $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$?



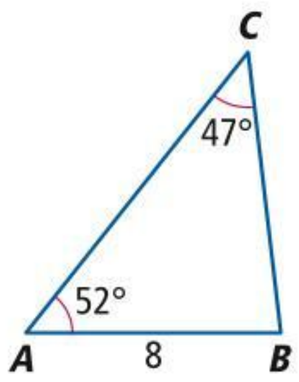
In $\triangle ABC$ is $\angle A = \alpha$ en noem je a de lengte van de zijde tegenover hoekpunt A. Evenzo is $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$ en zijn b en c de lengten van de zijden tegenover deze hoeken.

Theorie

In elke driehoek geldt de **sinusregel**:
Als α, β, γ de hoeken zijn van een driehoek en de lengten van de tegenoverliggende zijden zijn a, b en c, dan geldt $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Voorbeeld

In $\triangle ABC$ geldt $AB = 8$, $\alpha = 52°$ en $\gamma = 47°$.
Bereken a en b.



Oplossing

Uit $\frac{a}{\sin(52°)} = \frac{8}{\sin(47°)}$ volgt $a = \frac{8}{\sin(47°)} \cdot \sin(52°) \approx 8{,}6$.

Verder is $\beta = 180° - 52° - 47° = 81°$.

Uit $\frac{b}{\sin(81°)} = \frac{8}{\sin(47°)}$ volgt $b = \frac{8}{\sin(47°)} \cdot \sin(81°) \approx 10{,}8$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Rond in de opdrachten lengten af op één decimaal en hoeken op hele graden.

H 3 Bereken in de volgende gevallen de lengte van de onbekende zijden en de grootte van de hoeken van $\triangle ABC$.

a $a = 5,\ \alpha = 49°$ en $\beta = 88°$

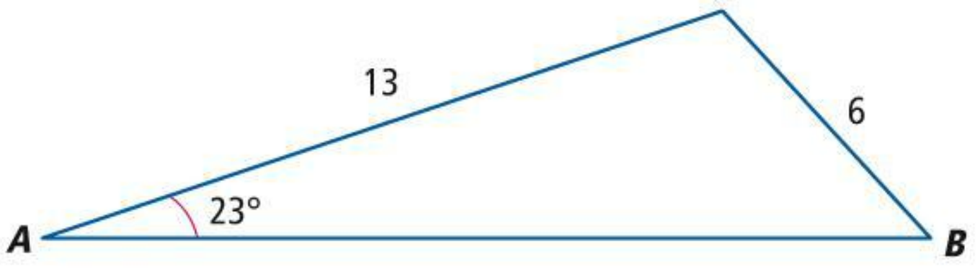
b $\alpha = 100°,\ \beta = 42°$ en $b = 3{,}4$

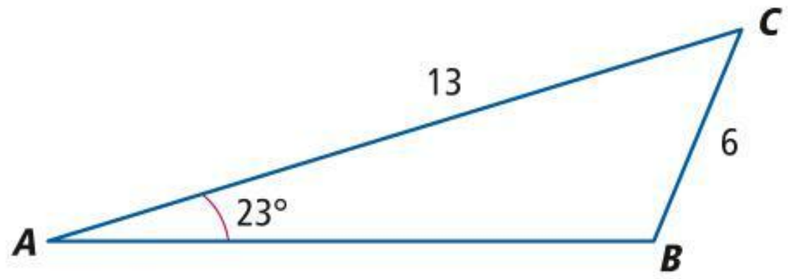
c $b = 45,\ \alpha = 67°$ en $\gamma = 53°$

d $a = 6,\ c = 8$ en $\beta = 48°$

e $a = 12,\ c = 14$ en $\gamma = 33°$

Je kunt de sinusregel alleen gebruiken als ten minste één zijde en de tegenoverliggende hoek beide gegeven zijn.





4 Hierboven staan twee driehoeken ABC.
In beide driehoeken geldt $\angle A = 23°,\ AC = 13$ en $BC = 6$.

a Bereken in beide driehoeken $\sin(\angle B)$.

b Bereken $\angle B$ voor de linker driehoek.

c Blijkbaar is er een stompe hoek, waarvoor de waarde van de sinus gelijk is aan die van de scherpe hoek in de linker driehoek. Ga met je rekenmachine na dat dit klopt als de scherpe hoek en de stompe hoek samen 180° zijn.

d Hoe groot is $\angle B$ in de rechter driehoek?

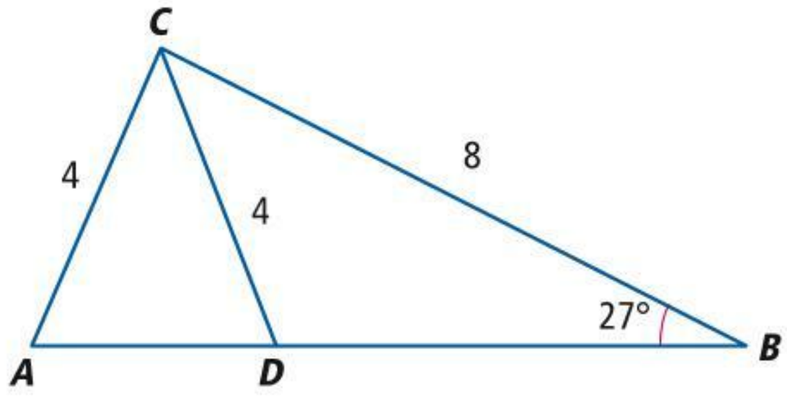
De sinus van een stompe hoek α is gelijk aan de sinus van de scherpe hoek $180° - \alpha$. Daarom zijn er in sommige gevallen twee oplossingen mogelijk bij het rekenen met de sinusregel.

H 5 Hiernaast staat driehoek ABC met $BC = 8,\ AC = 4$ en $\angle B = 27°$.
Punt D ligt op AB met $CD = 4$.

a Bereken $\angle BDC$.

b Bereken de overige hoeken van deze figuur.

c Bereken AD en BD.



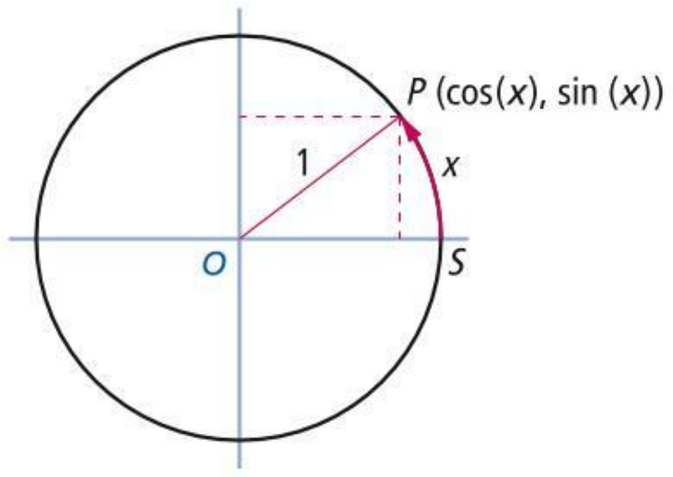
6 Gegeven zijn twee driehoeken:
$\triangle ABC$ met $\angle A = 30°,\ AC = 12$ en $BC = 10$,
$\triangle DEF$ met $\angle D = 30°,\ DF = 12$ en $EF = 6$.
Eén van deze driehoeken is door deze gegevens vastgelegd, voor de andere driehoek zijn er twee mogelijkheden.
Toon dit aan met tekeningen en berekeningen.

© Noordhoff Uitgevers bv

7-2

Cosinusregel

7 De sinus- en cosinusfunctie worden gedefinieerd met behulp van de eenheidscirkel. Als de cirkelboog SP lengte x heeft, dan zijn de coördinaten van P gelijk aan $\cos(x)$ en $\sin(x)$. Verklaar met behulp van deze gegevens dat $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$ geldt voor elke waarde van x.



Theorie

Voor elke waarde van x geldt: $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$.

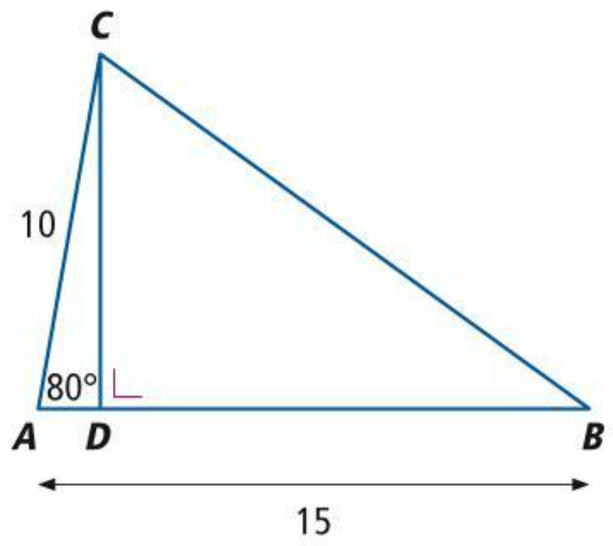
Je kunt dit ook schrijven als $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

8 In $\triangle ABC$ is $AC = 10$, $AB = 15$ en $\angle CAB = 80°$.
De driehoek wordt door de hoogtelijn CD in twee rechthoekige driehoeken opgedeeld.
Met een aantal tussenstappen ga je BC berekenen.

a Bereken CD met behulp van de sinus.

b Bereken AD en BD.

c Bereken BC in $\triangle BDC$.

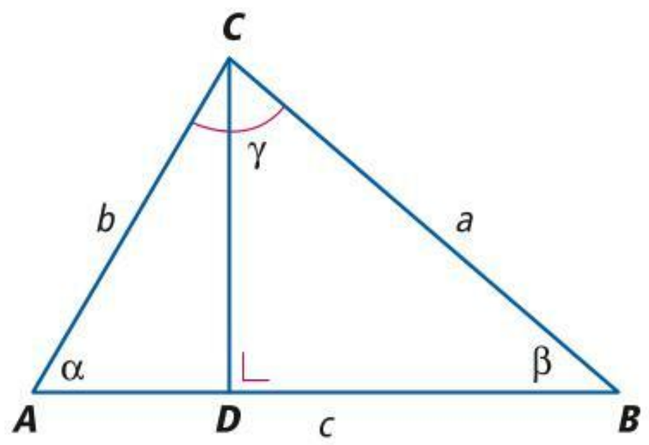


9 In $\triangle ABC$ zijn de lengten van de zijden aangegeven met a, b en c en de hoeken met α, β en γ. CD is de hoogtelijn uit punt C.
Als de zijden b, c en hoek α bekend zijn, dan kun je een formule opstellen om a te berekenen.

a Leg uit waarom $CD = b \cdot \sin(\alpha)$ en $BD = c - b \cdot \cos(\alpha)$.

b In $\triangle BCD$ geldt $BC^2 = CD^2 + BD^2$.
Gebruik opdracht a om aan te tonen dat
$a^2 = b^2 \cdot \sin^2(\alpha) + b^2 \cdot \cos^2(\alpha) - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) + c^2$.

c Omdat $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ kun je het resultaat van opdracht b schrijven als $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$.
Laat dat zien.



Theorie

In een driehoek kun je een zijde berekenen als je de andere zijden en de tegenoverliggende hoek kent.
De regel die je gebruikt heet de **cosinusregel**.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$

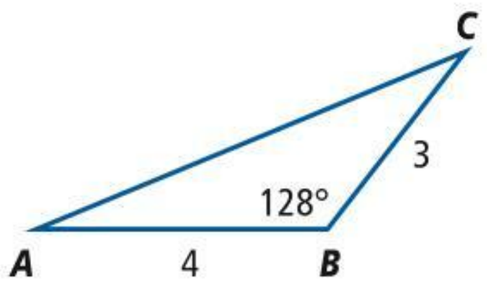
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$

Je kunt deze formules ook gebruiken om de grootte van de hoeken te berekenen als je van een driehoek de lengte van alle drie zijden kent.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld 1

Gegeven is de driehoek ABC met $a = 3$, $c = 4$ en $\angle B = 128°$. Bereken AC.



Oplossing

Zijde b is onbekend. Gebruik de cosinusregel:

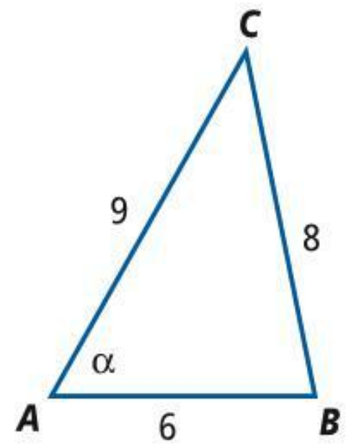
$b^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos(128°)$

$= 25 - 24 \cdot \cos(128°) \approx 39{,}78$

Daaruit volgt $b \approx 6{,}3$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de driehoek ABC met $a = 8$, $b = 9$ en $c = 6$. Bereken α.



Oplossing

Gebruik de cosinusregel:

$64 = 81 + 36 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \cos(\alpha)$

$108 \cdot \cos(\alpha) = 81 + 36 - 64 = 53$ dus $\cos(\alpha) = \frac{53}{108}$

Daaruit volgt $\alpha \approx 61°$.

H **10a** Van $\triangle ABC$ is gegeven: $AB = 15$, $AC = 19$ en $\angle A = 39°$.
Maak een schets en bereken BC.

b Van $\triangle PQR$ is gegeven: $PQ = 35$, $PR = 13$ en $\angle P = 125°$.
Bereken QR.

c $\triangle KLM$ heeft zijden $KL = 15$, $LM = 18$ en $KM = 12$.
Bereken $\angle L$ en $\angle M$.

11 Gegeven is $\triangle DEF$ met $DE = 9$, $EF = 14$ en $DF = 8$.

a Bereken $\angle F$ met de cosinusregel.

b Bereken $\angle E$ met de sinusregel.

c Laat met de cosinusregel zien dat $\cos(\angle D)$ een negatief getal is.

d Bereken $\angle D$ en controleer of de som van de drie hoeken gelijk is aan 180°.

De cosinus van een stompe hoek is negatief.

De cosinus van een hoek α en de cosinus van de hoek $180° - \alpha$ zijn elkaars tegengestelde. Dus $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

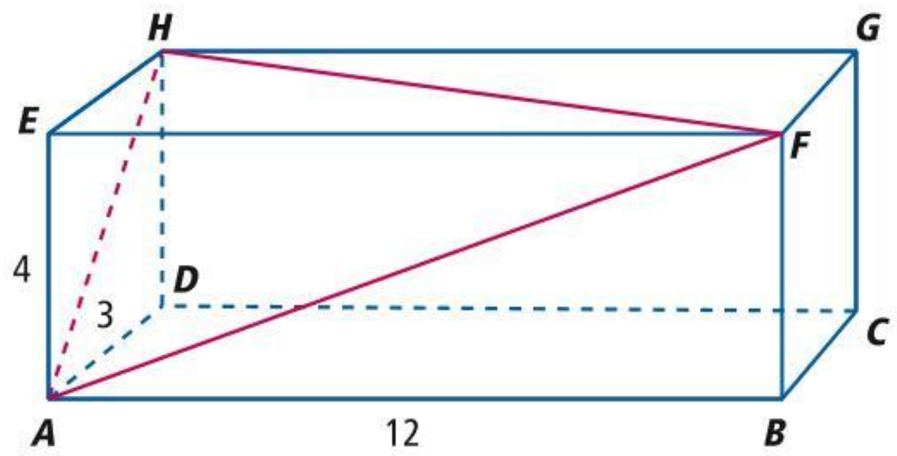
$\cos(50°) = 0{,}6427 \ldots$

$\cos(130°) = -0{,}6427 \ldots$

H **12** Gegeven is de balk $ABCD.EFGH$ met $AD = 3$, $AB = 12$ en $AE = 4$.

a Bereken AH, AF en FH.

b Bereken de grootte van de hoeken van driehoek AFH.



13 Bereken de lengte van de zwaartelijn CD in driehoek ABC met zijden $a = 21$, $b = 17$ en $c = 28$.

☼ **14** $\triangle ABC$ heeft zijden $a = 33$, $b = 56$ en $c = 65$.

a Bereken γ.

b Welke bijzonderheid heeft driehoek ABC?

c De stelling van Pythagoras is eigenlijk een bijzonder geval van de cosinusregel. Leg uit waarom dat zo is.

© Noordhoff Uitgevers bv

7-3

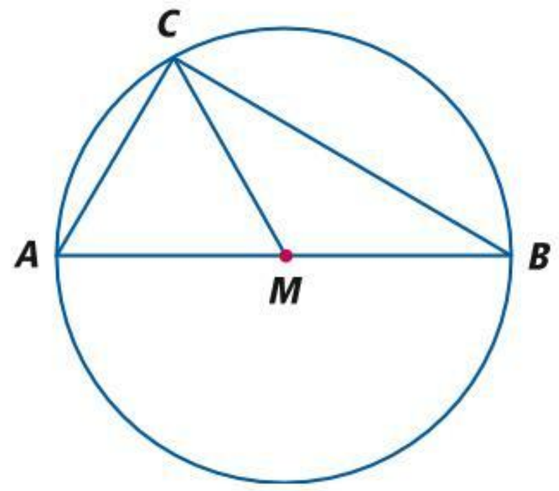
Stelling van Thales

15 In de figuur hiernaast is AB een middellijn van een cirkel met middelpunt M.

a Veronderstel dat $\angle BAC = 54°$.
Bereken de overige hoeken van $\triangle ABC$.

b Veronderstel dat $\angle ABC = 40°$.
Toon aan dat $\angle ACB = 90°$.

c Stel $\angle A = \alpha$ en $\angle B = \beta$
Toon aan dat $\angle ACB = 90°$.

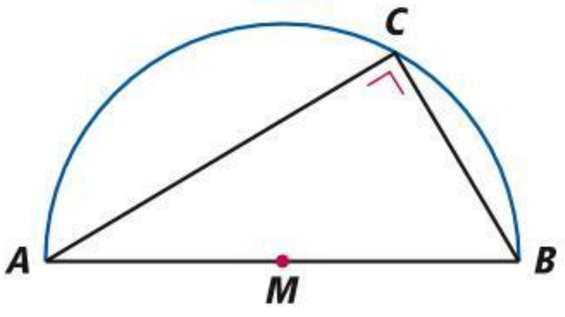


16a Teken een driehoek ABC met $\angle C = 90°$ en vul deze aan met het punt D tot de rechthoek $ADBC$.

b Teken ook de diagonaal CD met midden M.

c Welke eigenschappen ken je over de diagonalen van een rechthoek?

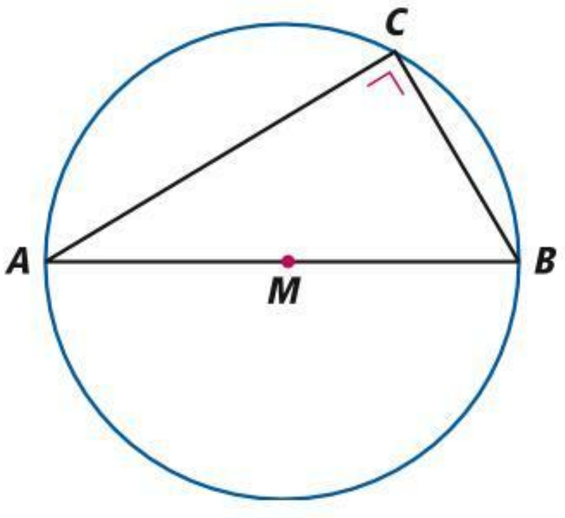
d Waarom volgt uit het antwoord van opdracht c dat C op de cirkel met middellijn AB moet liggen?

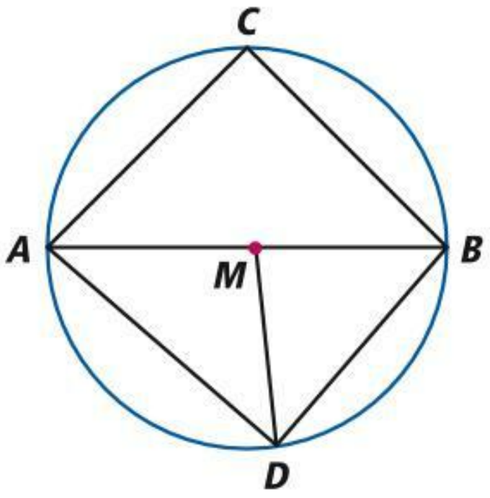


In de vorige opdrachten heb je de volgende stellingen bewezen.

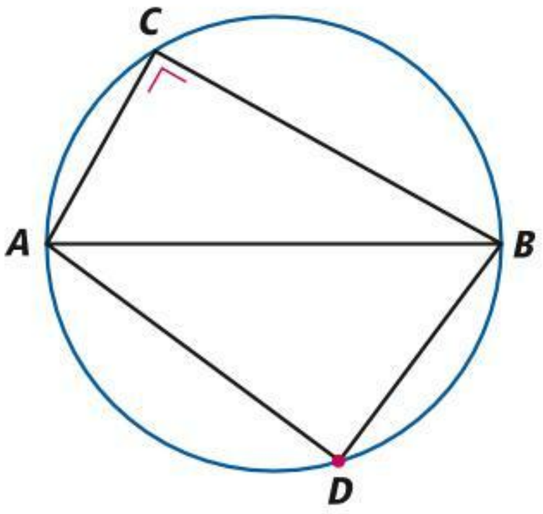
Stelling van Thales
Een driehoek waarvan een zijde de middellijn van de omgeschreven cirkel is, is rechthoekig.

Omgekeerde stelling van Thales
Van een rechthoekige driehoek is het midden van de langste zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel.





17 In de figuur hierboven is een cirkel met middellijn AB en middelpunt M getekend.
De punten C en D liggen aan verschillende kanten van lijnstuk AB. Er geldt $AC = BC$ en $\angle BAD = 35°$.
Bereken alle hoeken die in de figuur voorkomen.



H 18 Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met $\angle C = 90°$.
Het punt D ligt op de omgeschreven cirkel van driehoek ABC, aan de andere kant van lijnstuk AB.
Toon aan dat $\angle DAC + \angle DBC = 180°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

In sommige opdrachten moet je meetkundig redeneren. Dat doe je bijvoorbeeld door met gelijkvormigheid te werken of door gebruik maken van stellingen. Als je in een redenering een stelling gebruikt, noem je de naam van die stelling. In een aantal gevallen wordt er een berekening gevraagd. Dan kun je gebruik maken van bijvoorbeeld gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, de sinusregel of de cosinusregel.

19 In driehoek ABC zijn de hoogtelijnen getekend.

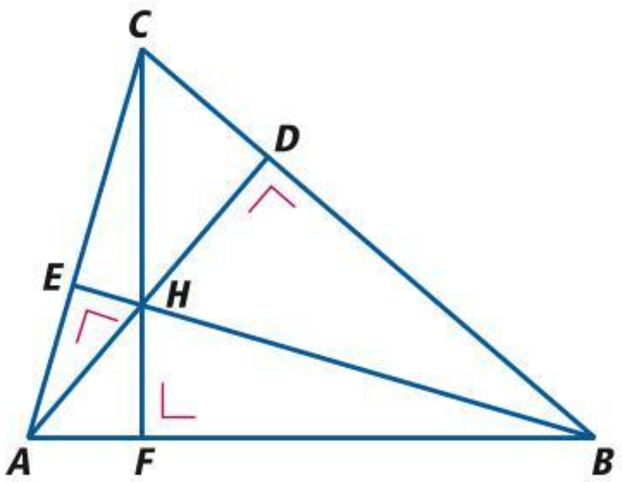
a Toon aan dat de punten B, D, H en F op een cirkel liggen.

b Toon aan dat de punten A, B, D en E op een cirkel liggen.

c Waar ligt het middelpunt van de cirkel door A, B, D en E?

d Noem nog vier vierhoeken in de figuur waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen.

e Onderzoek of de beweringen in de opdrachten a en b ook gelden als hoek A stomp is.



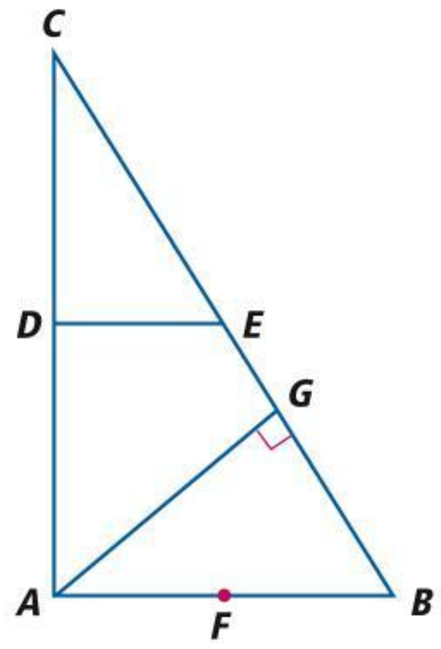
20 Hiernaast is een driehoek ABC met $\angle BAC = 90°$ getekend. De punten D, E en F zijn de middens van de zijden waarop ze liggen. Verder is AG een hoogtelijn.

a Waarom is $DE // AB$?

b Welke vorm heeft vierhoek $ADEF$? Waarom?

c Waarom is er precies één cirkel mogelijk door de vijf punten A, D, E, G en F?

d Waar ligt het middelpunt van deze cirkel?

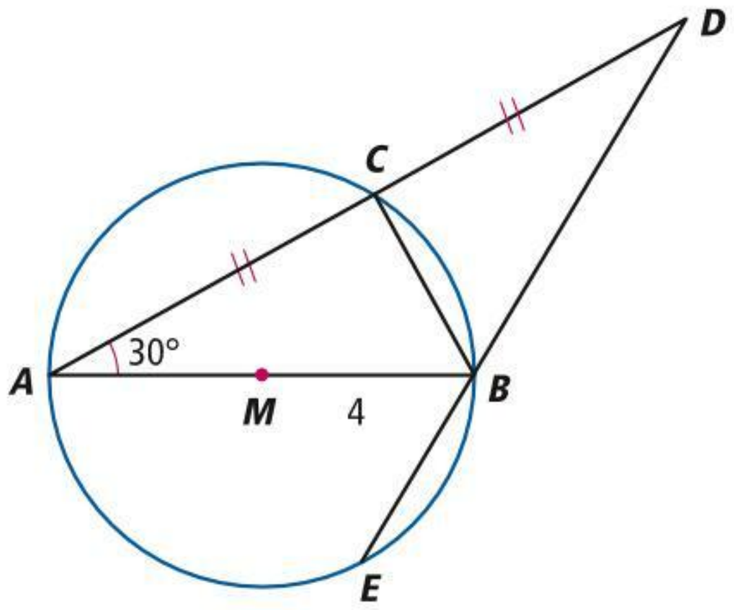


21 Het lijnstuk AB is een middellijn van een cirkel met middelpunt M en straal 4. Op de cirkel ligt het punt C met $\angle BAC = 30°$. Punt D ligt op het verlengde van AC met $AC = CD$.
De lijn DB snijdt de cirkel in E.

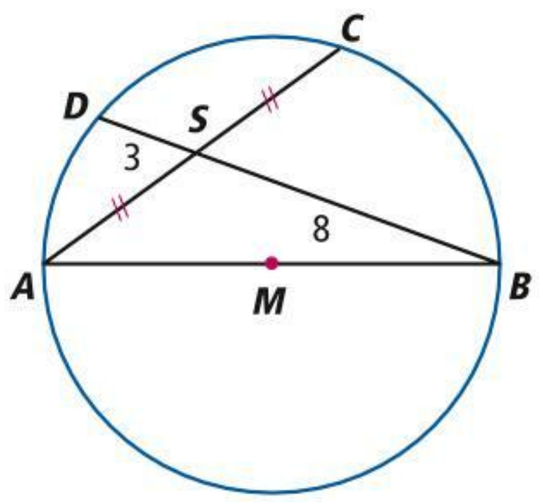
a Bereken exact AC.

b Bereken exact DB.

c Toon aan dat $BE = BC$.



22 Gegeven is een cirkel met middelpunt M en middellijn AB. De punten C en D liggen op de cirkel waarbij lijnstuk BD door het midden S van lijnstuk AC gaat.
Verder is $BS = 8$ en is $DS = 3$.
Bereken exact de straal van de cirkel.



© Noordhoff Uitgevers bv

7-4

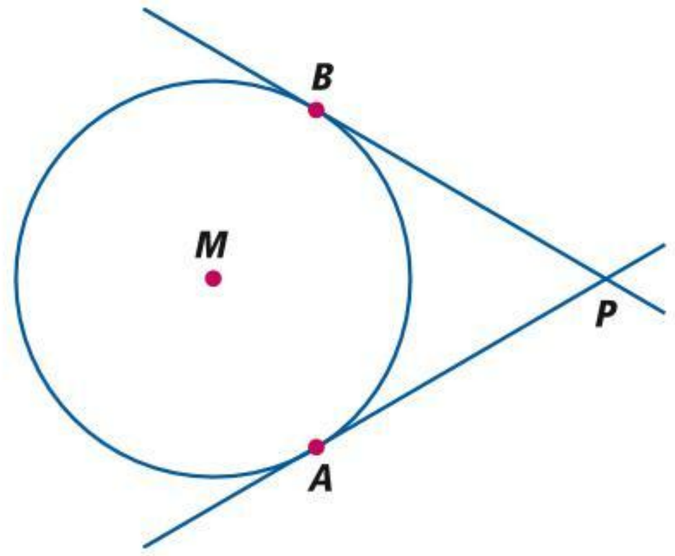
Redeneren met cirkels

23a Teken in een assenstelsel de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0$.

b Bereken de afstand van het middelpunt tot de oorsprong.

c Teken vanuit de oorsprong de beide raaklijnen aan de cirkel en bereken met de stelling van Pythagoras de afstand van de oorsprong tot de raakpunten.

24 Gegeven is een cirkel met een punt P buiten de cirkel. De raaklijnen uit punt P aan de cirkel raken de cirkel in de punten A en B.



a Neem de figuur over en teken ook PM, MA en MB.

b Bewijs dat de raaklijnstukken PA en PB even lang zijn.

c Waarom is lijn PM de deellijn van $\angle APB$?

d Waarom geldt $\angle PAB = \angle PBA$?

De volgende stellingen over raaklijnen aan een cirkel moet je kennen en kunnen gebruiken.

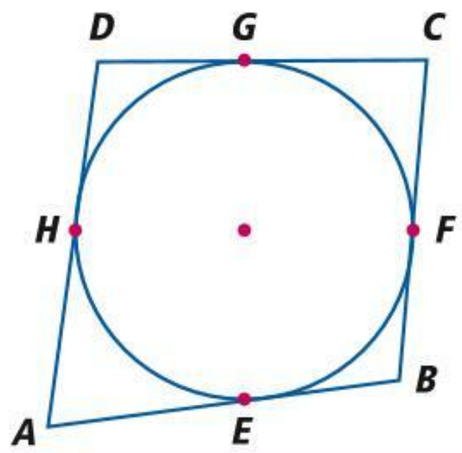
Raaklijnstukken
Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.

Raaklijn aan cirkel
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Rakende cirkels
De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.

Voorbeeld

De zijden van vierhoek $ABCD$ raken aan een cirkel.
Bewijs dat $AB + CD = AD + BC$.



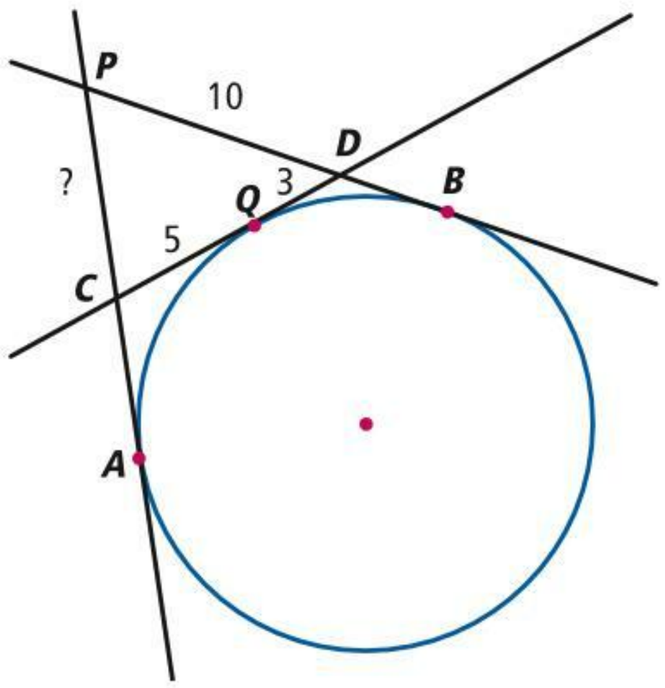
Oplossing

$AE = AH$, $BE = BF$, $HD = DG$ en $CG = CF$ (raaklijnstukken)

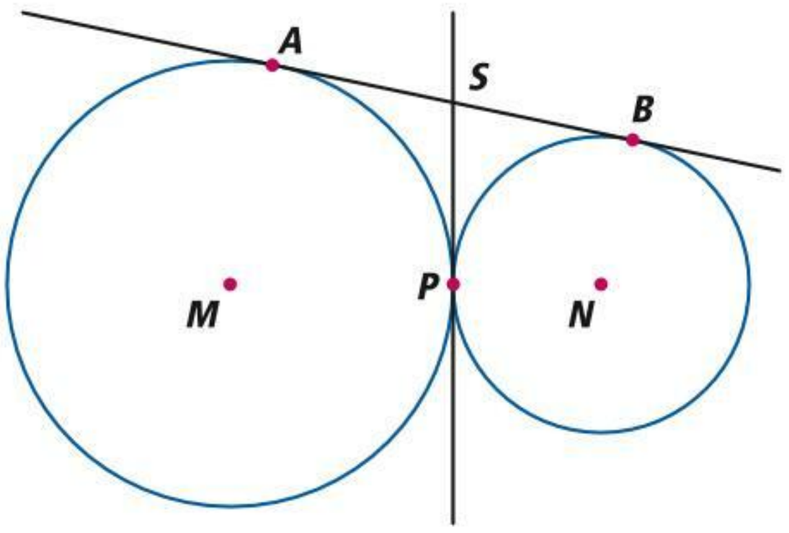
$AB + CD = AE + EB + DG + CG =$
$AH + BF + DH + CF =$
$AH + DH + BF + CF = AD + BC$

H 25 Vanuit een punt P buiten een cirkel met middelpunt M en straal 5 worden de beide raaklijnen PA en PB getekend.
Er geldt $\angle APB = 60°$.
Bereken PA en PM.

© Noordhoff Uitgevers bv



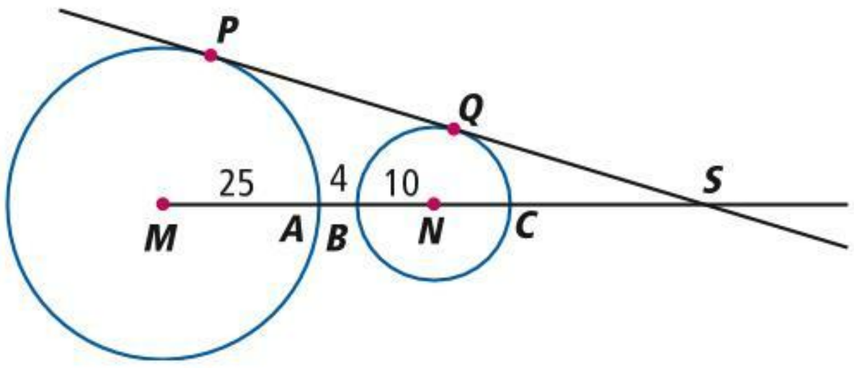
H 26 In de figuur hierboven zijn vanuit punt P de raaklijnen PA en PB getekend.
Lijn CD raakt de cirkel in Q.
Daarbij is $CQ = 5$, $DQ = 3$ en $PD = 10$.
Bereken PC.

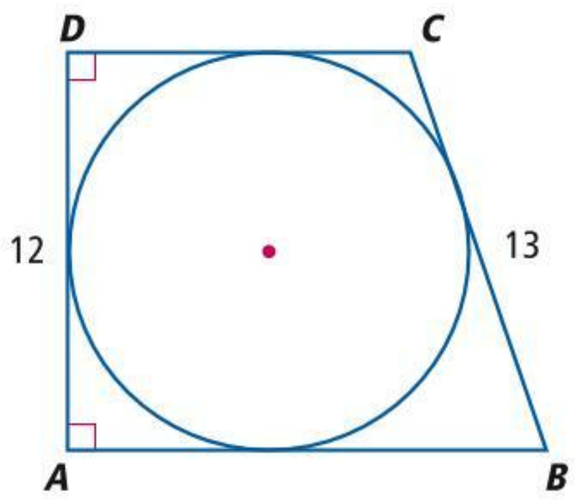


27 In de figuur hierboven raken de cirkels elkaar in punt P. De raaklijn in P snijdt de gemeenschappelijke raaklijn AB in S.
a Waarom geldt $MA \parallel NB$?
b Toon aan dat S het midden is van lijnstuk AB.
c Toon aan dat $\angle MSN = 90°$.

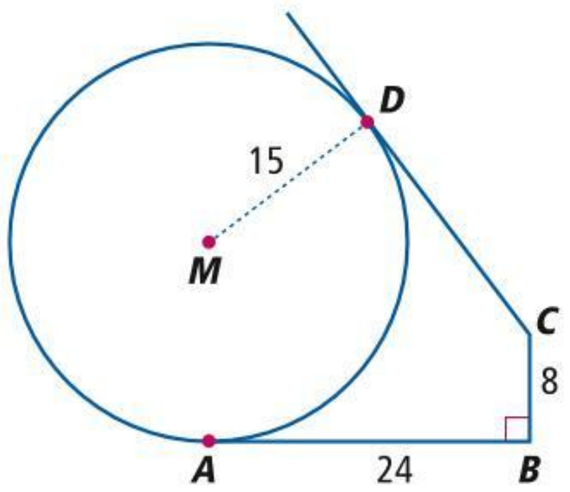
Soms heb je bij een meetkundig bewijs of een berekening een hulplijn nodig. Daarbij kun je denken aan een lijnstuk zoals een diagonaal, een loodlijn, een lijn evenwijdig aan een gegeven lijn of een straal of middellijn in een cirkel.

H 28 In de figuur hiernaast is lijn PQ een gemeenschappelijke raaklijn aan de cirkels. Punt S ligt op het verlengde van lijn MN. Gegeven is dat $MA = 25$, $NB = 10$ en $AB = 4$.
Gebruik dat $MP \parallel NQ$ om QS en PQ te berekenen.





29 Hierboven is het trapezium $ABCD$ met ingeschreven cirkel getekend. Daarbij is $\angle A = \angle D = 90°$, $AD = 12$ en $BC = 13$.
In deze opdracht bereken je AB en CD.
a Toon aan dat $AB + CD = 25$.
b Gebruik de loodlijn CP uit C op zijde AB en bereken BP.
c Bereken AB en CD.



30 In de figuur hierboven zijn AB en CD raaklijnen aan de cirkel met middelpunt M en straal 15. Verder is $AB = 24$, $BC = 8$ en is $\angle ABC = 90°$.
Bereken CD.

© Noordhoff Uitgevers bv

7-5

Algebraïsch of meetkundig

31 In de figuur is ABC een rechthoekige driehoek.
Een cirkel met middelpunt M op BC raakt de zijden AB en AC.
Verder is $AB = 21$ en is $AC = 28$. In deze opdracht ga je op drie manieren de straal van deze cirkel berekenen.

a Waarom moet M op de bissectrice van $\angle BAC$ liggen?

b Kies lijn AB als x-as en lijn AC als y-as en geef vergelijkingen van de lijnen AM en BC.

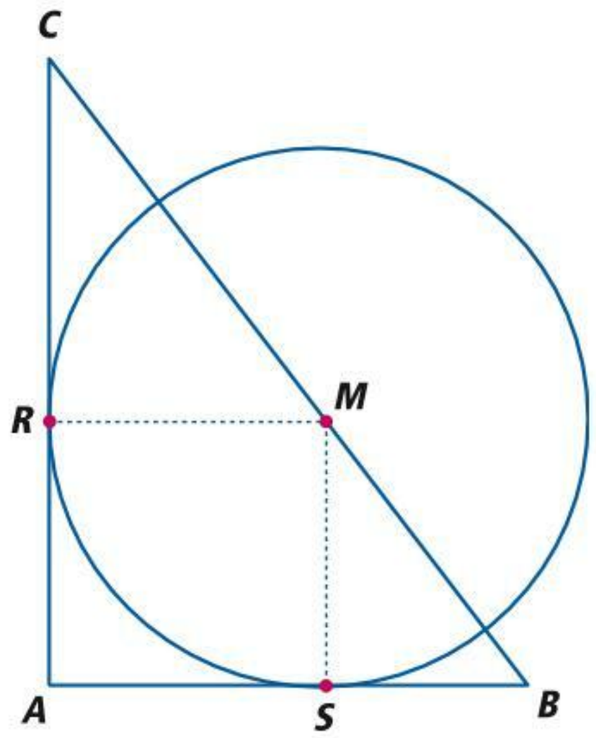
c Bereken de coördinaten van M en geef de straal van de cirkel.

d Je kunt het ook als volgt aanpakken:
Noem de straal van de cirkel r en druk de lijnstukken AR, CR, AS en BS uit in r.

e Gebruik gelijkvormigheid en bereken r.

f Er is nog een andere aanpak mogelijk.
Druk de oppervlakte van $\triangle ABM$ en $\triangle ACM$ uit in r.

g Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$ en vervolgens r.



In sommige gevallen kun je een probleem op meer manieren aanpakken.

- *Meetkundig: met stellingen, gelijkvormigheid, verhoudingen, gelijke hoeken, evenwijdigheid, Pythagoras, oppervlakte, sinusregel of cosinusregel.*
- *Algebraïsch: in een assenstelsel met vergelijkingen van lijnen en cirkels.*

Probeer vooraf te bedenken welke manier het meest geschikt is.

Voorbeeld

Twee cirkels raken elkaar in punt A.
Op de cirkel met middelpunt M ligt punt P.
De raaklijn in P is evenwijdig aan lijn MN.
De raaklijn snijdt de cirkel met middelpunt N in de punten S en. Zie de figuur naast opdracht 32.
Bereken PS en ST.

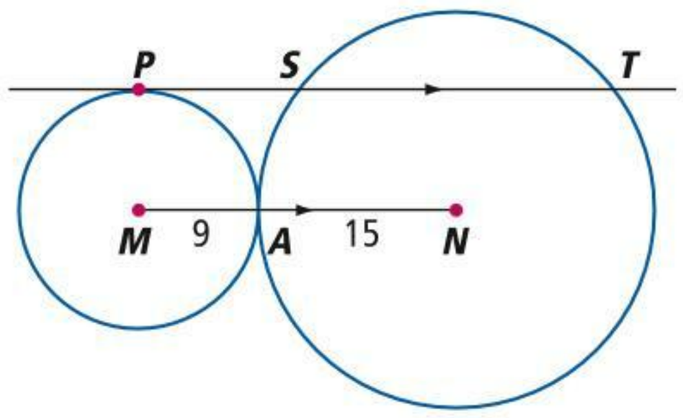
Oplossing

Kies $A(0, 0)$ en lijn PT: $y = 9$.

$y = 9$ invullen in $(x - 15)^2 + y^2 = 225$ geeft $x_S = 3$ en $x_T = 27$.

Dus is $PS = 9 + 3 = 12$ en $ST = 27 - 3 = 24$.

32 In het voorbeeld kun je ook kiezen voor een andere aanpak: laat punt Q het midden zijn van lijnstuk ST.
Bedenk dat $NQ = 9$ en bereken ST en PS.



H 33 Gegeven is cirkel c: $x^2 + y^2 = 169$ en op c het punt $R(5, -12)$.
De raaklijn in R aan c snijdt de raaklijnen $x = -13$ en $x = 13$ in de punten P en Q.

a Bereken de coördinaten van P en Q en bewijs dat $\angle POQ = 90°$.

b Bewijs nogmaals dat $\angle POQ = 90°$ door het meetkundig aan te pakken. Maak daarbij gebruik van de lijnen PO en QO.

© Noordhoff Uitgevers bv

34a Teken een gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 12 en teken de zwaartelijnen AD en CE, die elkaar snijden in punt Z.

b Kies een assenstelsel zo dat $A(-6, 0)$, $B(6, 0)$ en $E(0, 0)$. Bereken exact de coördinaten van de punten C en D.

c Bereken de coördinaten van punt F, het midden van het lijnstuk CZ.

d Toon aan dat $\angle EDF = 90°$.

e Waarom geldt voor elke gelijkzijdige driehoek dat $\angle EDF = 90°$?

f Bewijs ook meetkundig dat $\angle EDF = 90°$ door gebruik te maken van een eigenschap omtrent de ligging van Z op de zwaartelijnen.

Als je in een figuur een eigenschap hebt bewezen over de grootte van een hoek of een gelijkheid van lijnstukken, dan geldt deze eigenschap ook in een figuur die hieraan gelijkvormig is.

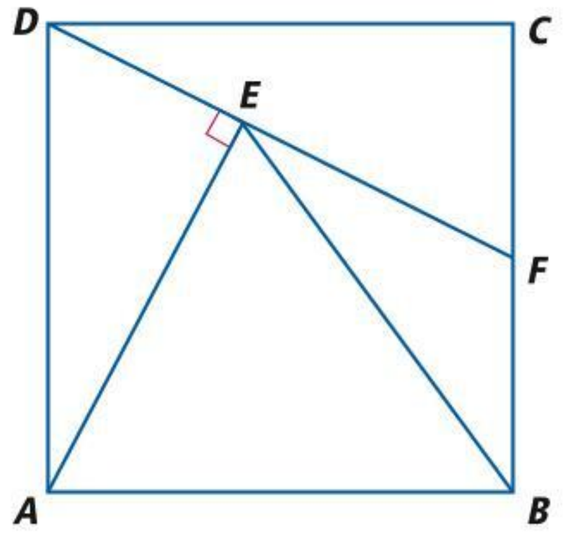
35 In het vierkant $ABCD$ is F het midden van BC en is E de loodrechte projectie van A op DF.
In deze opdracht bewijs je dat $BE = AB$.

a Kies een assenstelsel, neem $AB = 6$ en laat met een berekening zien dat $BE = 6$.

b Voor een meetkundig bewijs gebruik je hulplijn AF.
Waarom gaat er één cirkel door de punten A, B, F en E?
Waar ligt het middelpunt M?

c De cirkel door A, B, F en E snijdt AD in G en lijn BG snijdt AE in S.
Waarom is G het midden van AD en is $AS = SE$?

d Toon aan dat de driehoeken ABS en EBS elkaars spiegelbeeld zijn en dat $BE = AB$.



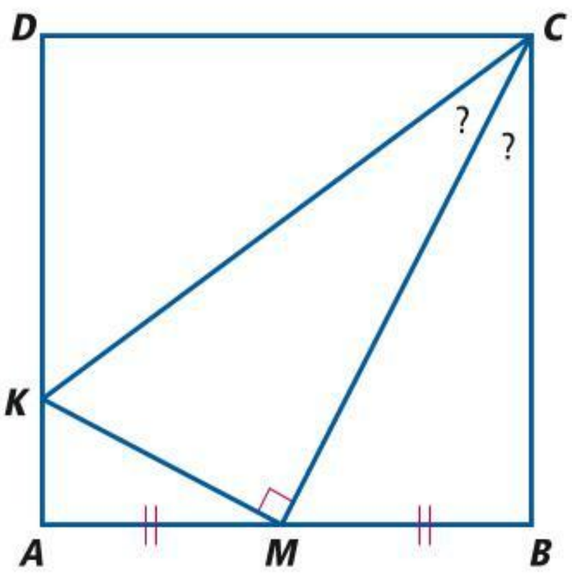
36 Hiernaast is een vierkant $ABCD$ getekend. Punt M is het midden van zijde AB. Punt K ligt op zijde AD zodat $\angle CMK = 90°$. Je gaat bewijzen dat $\angle BCM = \angle MCK$.

a Kies $M(0, 0)$ en een lengte voor AB.
Geef vergelijkingen van de lijnen MC en MK.

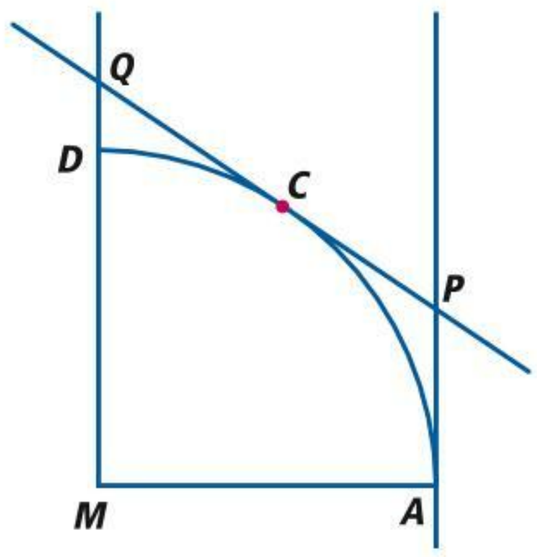
b Bereken de coördinaten van de punten B, C en K.

c Bewijs dat $\angle BCM = \angle MCK$.

d Bewijs ook meetkundig dat $\angle BCM = \angle MCK$ (bijvoorbeeld door lijn KM te snijden met lijn CB en te werken met driehoeken die elkaars spiegelbeeld zijn).



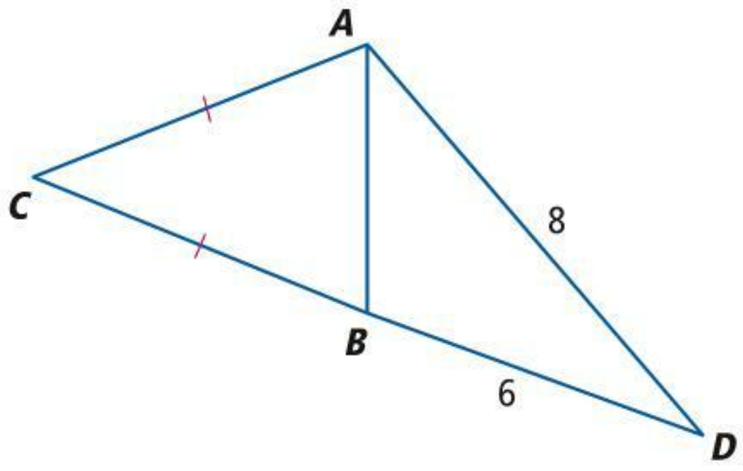
37 In de figuur is een kwart van de cirkel $x^2 + y^2 = 25$ getekend. De raaklijn in een punt C aan de cirkel snijdt het verlengde van MD in Q en de raaklijn in A aan de cirkel in P.
Kies een geschikte aanpak en bewijs dat $MQ = PQ$.



© Noordhoff Uitgevers bv

7-6

Gemengde opdrachten



38 In de figuur hierboven is driehoek ABC gelijkbenig. Punt D ligt op het verlengde van CB met $BD = 6$.
Verder is $AD = 8$ en is $\angle CAD = 103°$.

a Bereken in één decimaal AC.

b Bereken in één decimaal AB.

40 In $\triangle ABC$ geldt $\angle A = 2 \cdot \angle B$.
De loodlijn uit C snijdt zijde AB in punt D.
Op het verlengde van zijde CA ligt punt P zo dat $AP = AD$.
Lijn PD snijdt zijde BC in punt S.

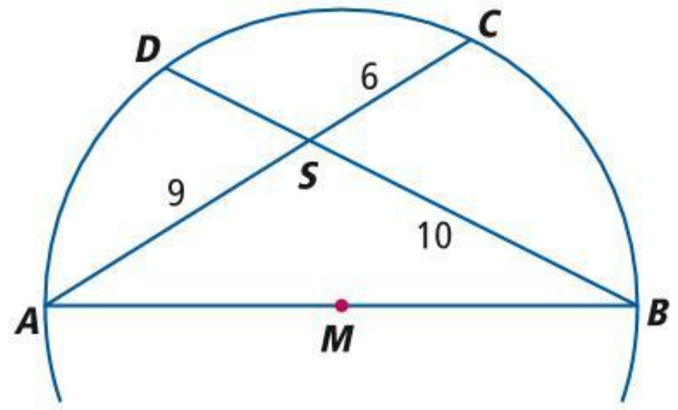
a Toon aan dat $\angle PDA = \angle B$.

b Toon aan dat punt S het middelpunt is van de omgeschreven cirkel van driehoek DBC.

41 De cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M en N raken elkaar in punt A.
Lijn l is de raaklijn in punt B aan c_1. De loodlijn op l door het middelpunt van c_2 snijdt l in punt D en cirkel c_2 in de punten E en F.

a Waarom liggen de punten M, N en A op één lijn?

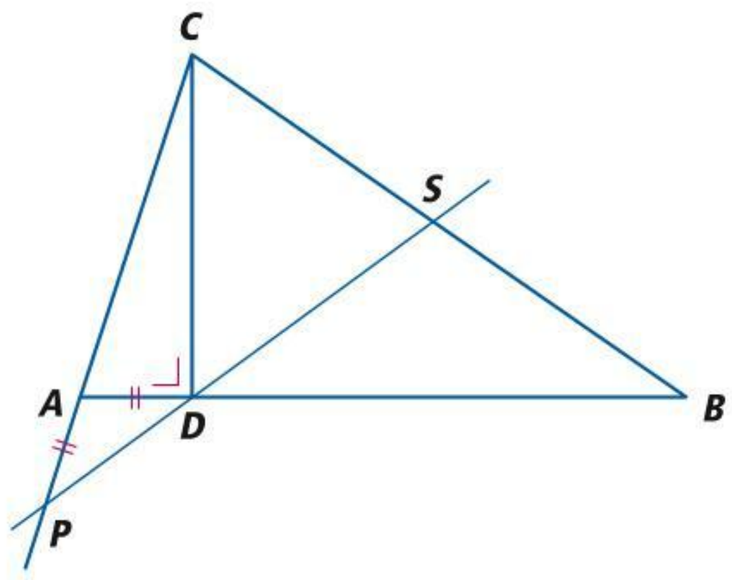
b Toon aan dat punt F op lijn BA ligt.

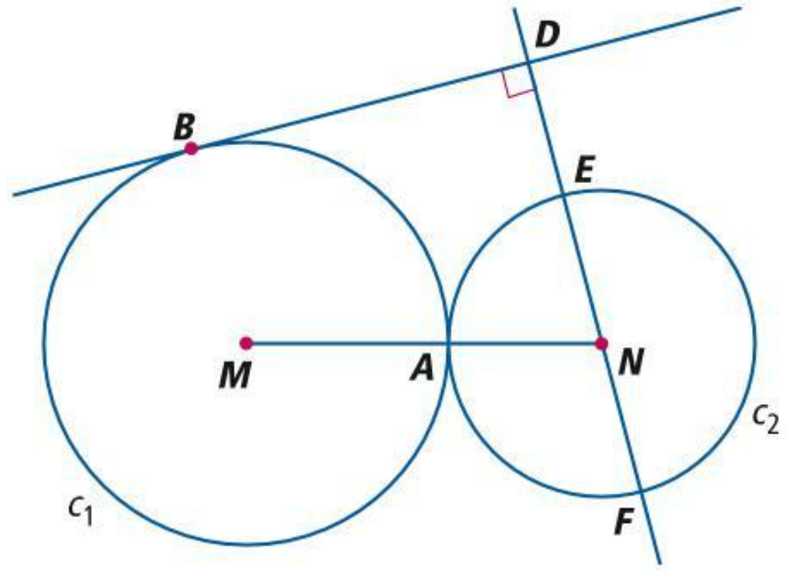


39 In een cirkel met middelpunt M is lijnstuk AB een middellijn. De lijnstukken AC en BD snijden elkaar in S.
Gegeven is $AS = 9$, $SC = 6$ en $BS = 10$.

a Bereken exact DS.

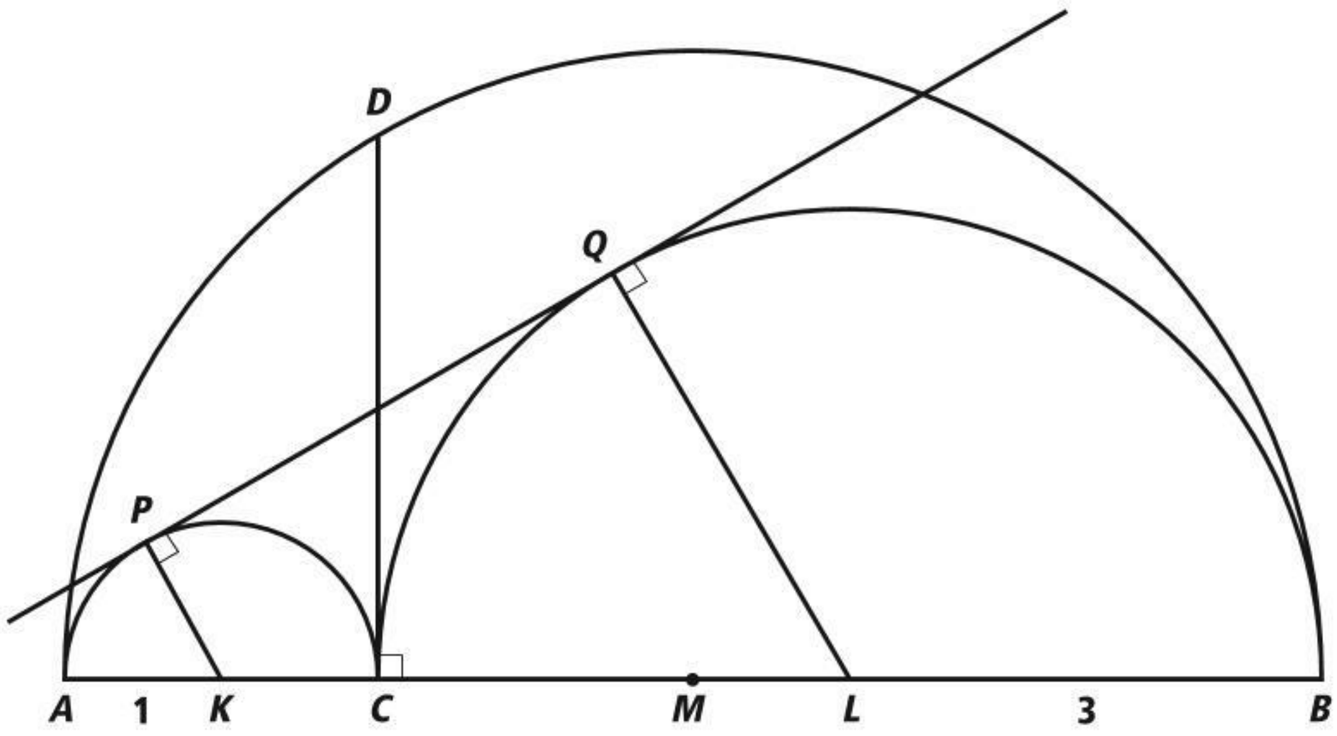
b Bereken exact de straal van de cirkel.



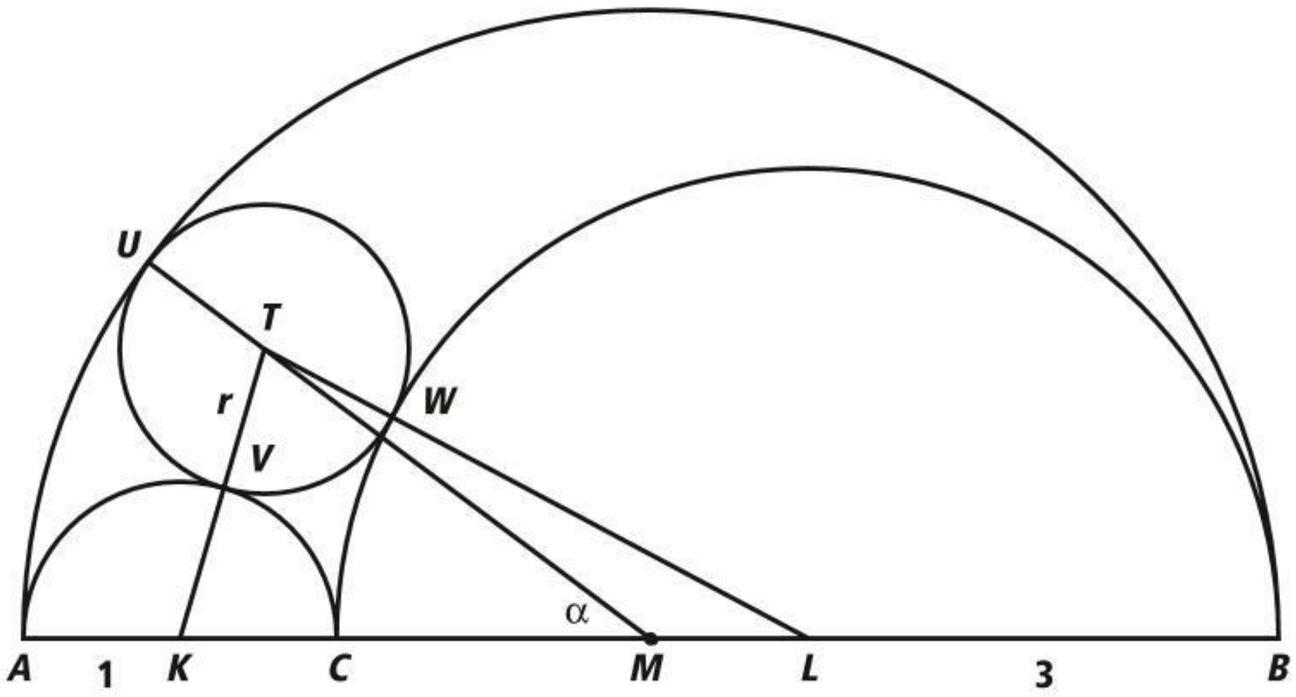


© Noordhoff Uitgevers bv

42 AB is een middellijn in een halve cirkel met middelpunt M en straal 4.
Op lijnstuk AB ligt punt C zo dat $AC = 2$.
AC en CB zijn middellijnen van twee halve cirkels met stralen 1 en 3.
De bijbehorende middelpunten zijn K en L.
De lijn door C loodrecht op AB snijdt de grootste cirkel in D.
Lijn PQ is de gemeenschappelijke raaklijn aan de binnenste halve cirkels, waarbij P en Q de raakpunten zijn.



a Toon aan dat CD en PQ exact even lang zijn.



Tussen de drie halve cirkels past precies één cirkel met middelpunt T en straal r die raakt aan elk van de drie gegeven cirkels.
De raakpunten zijn U, V en W.

b Noem $\angle TMK = \alpha$ en toon aan dat geldt: $\cos(\alpha) = \dfrac{12 - 5r}{12 - 3r}$

Toepassen van de cosinusregel in driehoek MLT geeft bovendien $\cos(\alpha) = \dfrac{7r - 4}{4 - r}$

c Bereken exact met behulp van beide uitdrukkingen voor $\cos(\alpha)$ de waarde van r.
(*Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2012, tijdvak 2*)

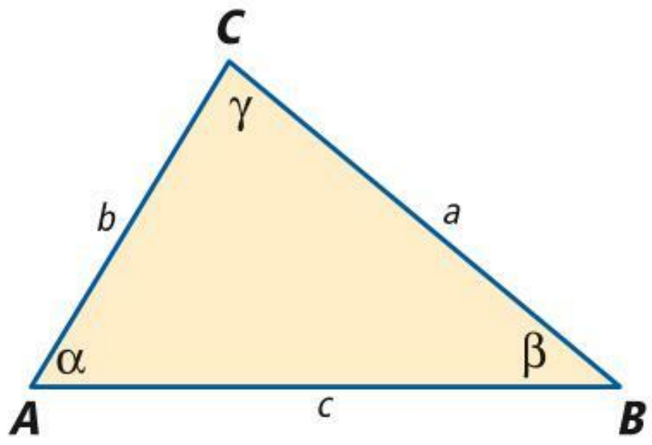
© Noordhoff Uitgevers bv

Samenvatting

Sinusregel

In driehoeken geldt de sinusregel:
Als α, β, γ de hoeken zijn van een driehoek en de lengten van de tegenoverliggende zijden zijn a, b en c, dan geldt:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$



In $\triangle ABC$ is $\angle A = \alpha$ en noem je a de lengte van de zijde tegenover hoekpunt A.
Evenzo is $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$ en zijn b en c de lengten van de zijden tegenover deze hoeken.

Cosinusregel

In een driehoek kun je een zijde berekenen als je de andere zijden en de tegenoverliggende hoek kent. De regel die je gebruikt, heet de cosinusregel.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

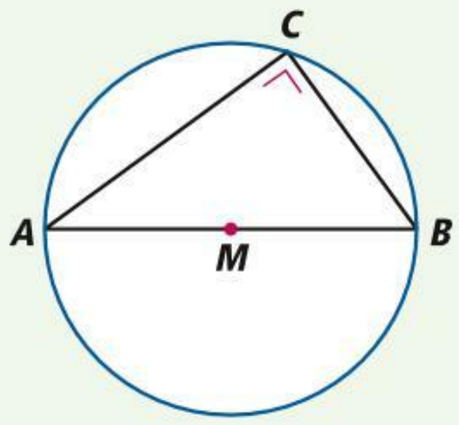
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Je kunt deze formules ook gebruiken om in een driehoek de grootte van de hoeken te berekenen als je de lengte van alle zijden kent.

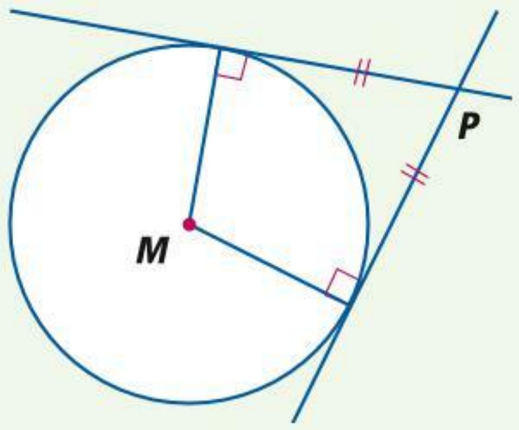
Stellingen

Thales
Een driehoek waarvan een zijde de middellijn van de omgeschreven cirkel is, is rechthoekig.



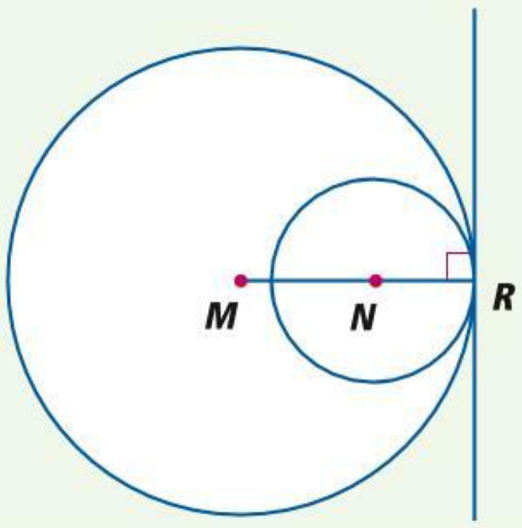
Omgekeerde stelling van Thales
Van een rechthoekige driehoek is het midden van de langste zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

Raaklijnstukken
Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.



Raaklijn aan cirkel
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Rakende cirkels
De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.



© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt de sinusregel en de cosinusregel toepassen

- Bij de sinusregel moet ten minste één hoek en de lengte van de tegenoverliggende zijde bekend zijn.
- Bij de cosinusregel moeten twee zijden en de ingesloten hoek bekend zijn om de derde zijde te berekenen.
- Bij de cosinusregel moeten de drie zijden bekend zijn om hoeken te berekenen.

Voorbeeld 1

Van een scherphoekige $\triangle ABC$ is gegeven: $\angle C = 65°$, $AB = 7$ en $AC = 4$.
Bereken de grootte van de andere hoeken van deze driehoek.

Oplossing

$\frac{7}{\sin(65°)} = \frac{4}{\sin(\angle B)}$ dus $\sin(\angle B) = \frac{4 \sin(65°)}{7} \approx 0{,}518$ dus $\angle B \approx 31°$ en $\angle A \approx 180° - 31° - 65° = 84°$.

Voorbeeld 2

Van $\triangle ABC$ is gegeven: $a = 5$, $c = 7$ en $\beta = 122°$.
Bereken b.

Oplossing

$b^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(122°) \approx$
$25 + 49 - -37{,}09 = 111{,}09$
dus $b \approx \sqrt{111{,}09} \approx 10{,}5$.

Voorbeeld 3

Van $\triangle ABC$ is gegeven: $a = 5$, $b = 7$ en $c = 9$. Bereken α.

Oplossing

$5^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos(\alpha)$

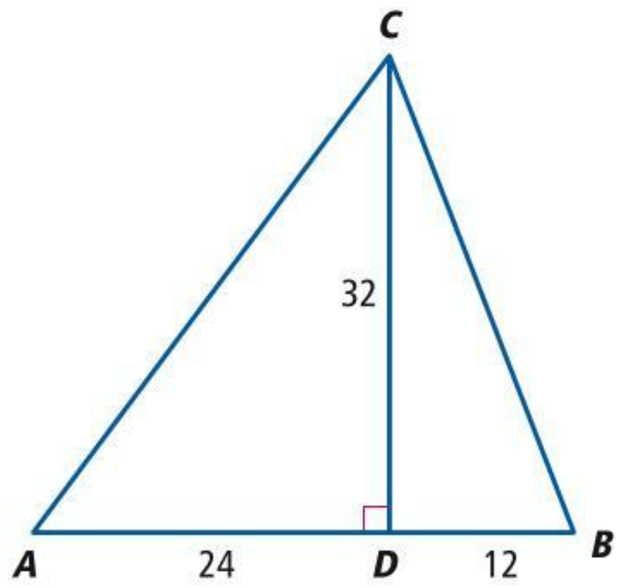
$\cos(\alpha) = \frac{105}{126} \approx 0{,}8333$ dus $\alpha \approx 34°$.

Je kunt een probleem meetkundig of algebraïsch aanpakken

Meetkundig: maak gebruik van stellingen, gelijkvormigheid, verhoudingen, Pythagoras, sinus- en cosinusregel, eigenschappen.
Algebraïsch: maak gebruik van een assenstelsel, coördinaten en vergelijkingen.

Voorbeeld

Gegeven is driehoek ABC met hoogtelijn $CD = 32$, $AD = 24$ en $DB = 12$.
Bereken de straal van de cirkel door de punten A en B met middelpunt M op AC.



Oplossing

Kies als x-as lijn AB en als y-as lijn CD.
Dan is $A(-24, 0)$, $B(12, 0)$ en $C(0, 32)$ en ligt M op de lijn $x = -6$. Lijn AC heeft vergelijking $y = \frac{4}{3}x + 32$.
Lijn AC snijden met $x = -6$ geeft $y = \frac{4}{3} \cdot -6 + 32 = 24$.
Dus is $M(-6, 24)$ en is de straal van de cirkel gelijk aan
$AM = \sqrt{(-24 - -6)^2 + (0 - 24)^2} = \sqrt{900} = 30$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Test jezelf

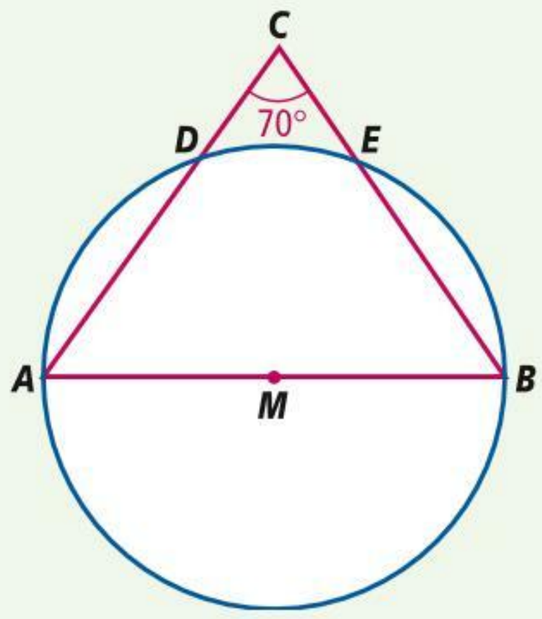
In alle opdrachten geldt:
rond lengten af op één decimaal en hoeken op hele graden.

T-1 Van driehoek PQR is gegeven: $\angle P = 83°$, $PQ = 7$ en $QR = 12$.
Bereken $\angle R$, $\angle Q$ en PR.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-1.

T-2a Van driehoek ABC is gegeven: $AB = 23$, $AC = 17$ en $\angle A = 56°$.
Bereken BC.

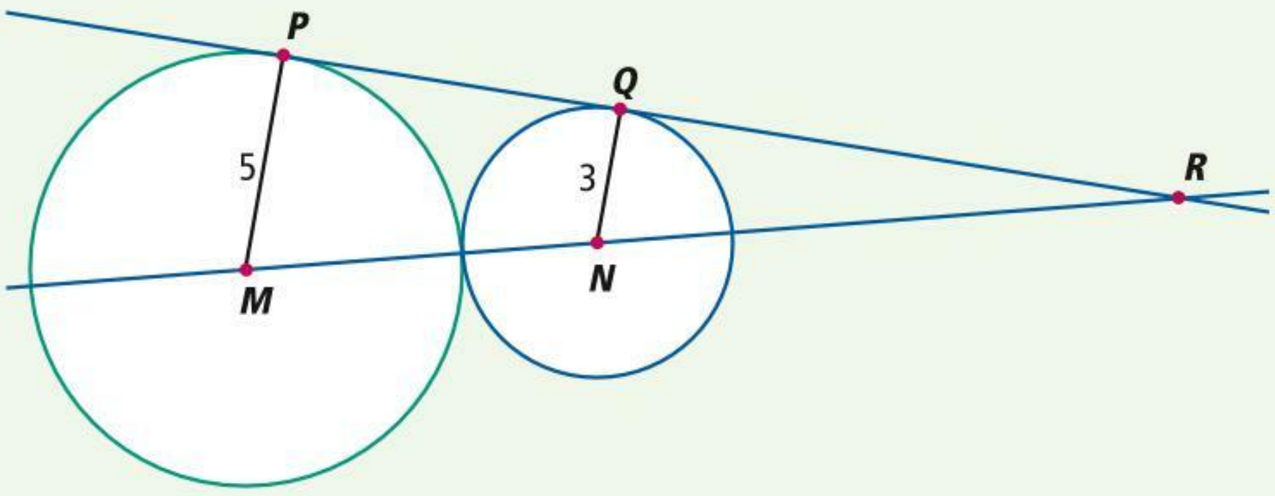
b In driehoek PQR geldt $PQ = 13$, $QR = 9$ en $PR = 20$.
Bereken de grootte van de hoeken van deze driehoek.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-2.

T-3 In de tekening hiernaast is driehoek ABC gelijkbenig met $\angle C = 70°$. De zijde AB is een middellijn van de cirkel met middelpunt M.



a Bereken $\angle ABC$.
b Bereken $\angle CAE$.
c Neem nu $\angle C = \alpha$.
Welke eis moet je aan α stellen zodat punt C buiten de cirkel met middellijn AB ligt?
d Druk de hoeken van vierhoek $AMEC$ uit in α.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-3.

T-4



Twee cirkels met middelpunten M en N raken elkaar.
De straal van de cirkel met middelpunt M is 5 en de straal van de andere cirkel is 3.
Lijn MN snijdt de gemeenschappelijke raaklijn PQ in punt R.
a Bereken exact PQ.
b Bereken exact RQ.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-4.

© Noordhoff Uitgevers bv

T-5 Gegeven is een cirkel met de raaklijnen in de punten D, F en G. De raaklijnen in D en F snijden elkaar loodrecht in punt A en de raaklijnen in F en G snijden elkaar loodrecht in punt B.
Lijn BD snijdt behalve in punt D de cirkel ook in punt S.
Punt E is de loodrechte projectie van punt A op lijnstuk BD.
In deze opdracht ga je met algebra bewijzen dat $DE = BS$.

a Neem 4 als straal van de cirkel en kies $A(0, 0)$.
Geef de coördinaten van de punten B, D, F en G.

b Stel een vergelijking op van lijn BD.

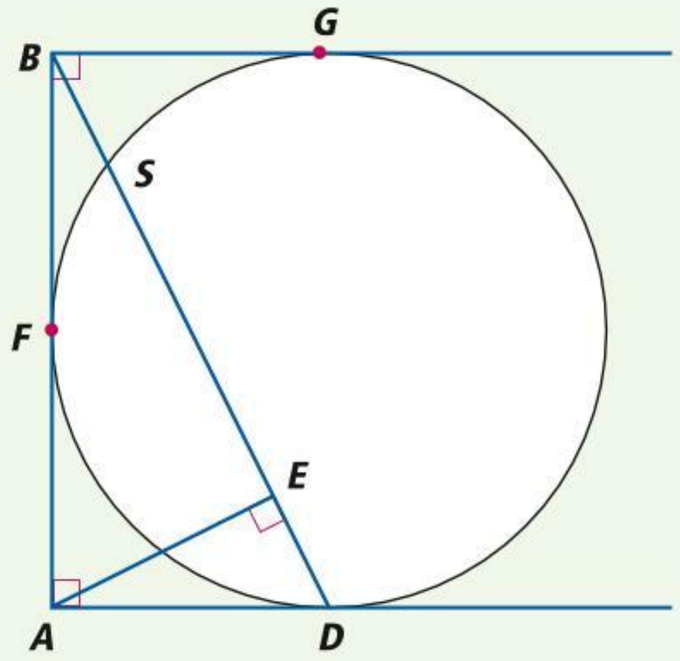
c Bereken de coördinaten van punt E.

d Bereken de coördinaten van punt S.

e Laat zien dat $DE = BS$.

f Waarom geldt $DE = BS$ ook als je voor de straal van de cirkel een andere waarde dan 4 had genomen?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-5.



T-6 Je kunt het probleem van de vorige opdracht ook meetkundig aanpakken. Daartoe heb je om te beginnen gelijke hoeken nodig.

a Welke hoeken in de figuur zijn gelijk?

b Teken hulplijn GS en geef $\angle GSD$.

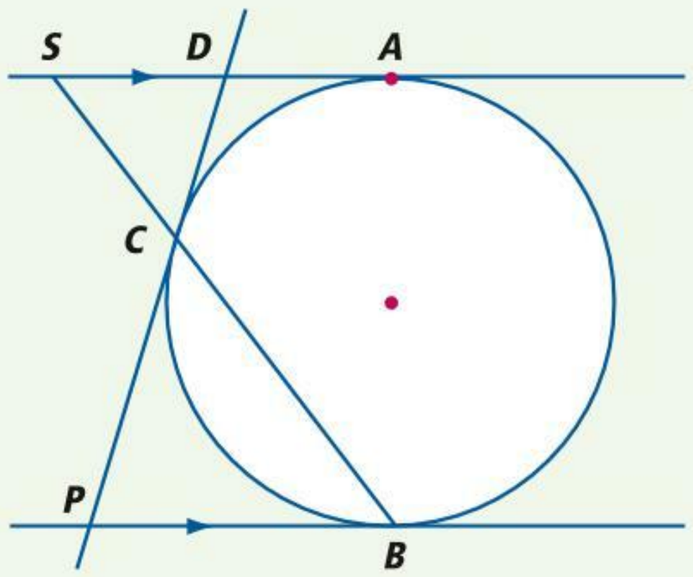
c Geef de gelijke hoeken nadat je ook hulplijn DG hebt getekend.

d Waarom is $AE = GS$?

e Laat zien dat $DE = BS$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-5.

T-7 Aan een cirkel zijn in de punten A en B twee evenwijdige raaklijnen l en m getekend.
Door een punt C op de cirkel wordt lijn BC getekend.
Het snijpunt van BC met lijn l is punt S.
De raaklijn in C aan de cirkel snijdt de lijnen l en m achtereenvolgens in de punten D en P.
Toon aan dat D het midden is van lijnstuk SA.

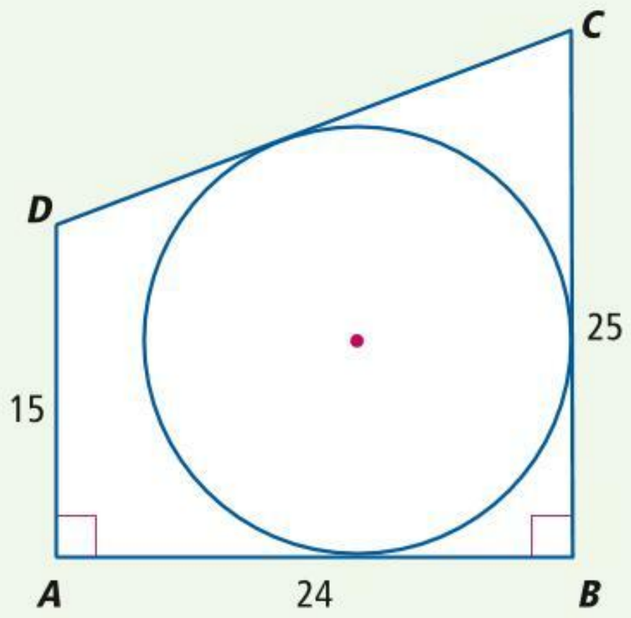


T-8 Van vierhoek $ABCD$ raken de zijden AB, BC en CD een cirkel. Verder geldt $\angle A = \angle B = 90°$, is $AB = 24$, $BC = 25$ en is $AD = 15$. Je gaat in deze opdracht de straal van de cirkel berekenen.

a Verleng de zijden AB en CD tot ze elkaar snijden in een punt S.

b Bereken AS en SD.

c Bereken exact de straal van de cirkel. Maak daarbij gebruik van het feit dat de cirkel de ingeschreven cirkel is van driehoek SBC.



© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Basis**

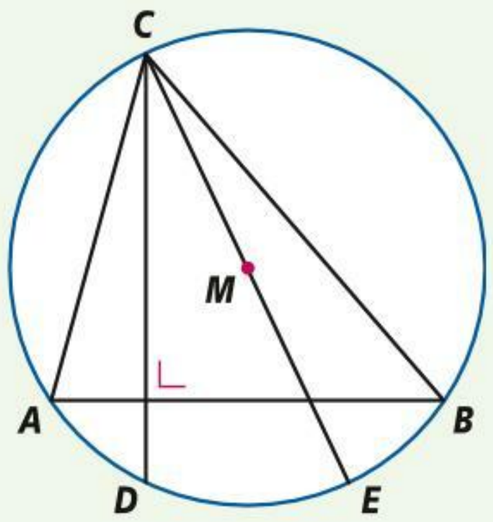
B-1a Van $\triangle ABC$ is gegeven $AB = 22$, $\angle B = 12°$ en $\angle C = 82°$.
Bereken AC en BC.

b Van $\triangle DEF$ is gegeven $DE = 14$, $\angle D = 21°$ en $EF = 7$.
Er zijn twee driehoeken die aan deze gegevens voldoen.
Bereken van elk van deze driehoeken $\angle E$ en $\angle F$.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-1.

B-2a Van $\triangle KLM$ is gegeven $\angle K = 47°$, $KL = 13$ en $KM = 15$.
Bereken ML.

b Van $\triangle STU$ is gegeven $ST = 17$, $TU = 8$ en $SU = 10$.
Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle STU$.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-2.

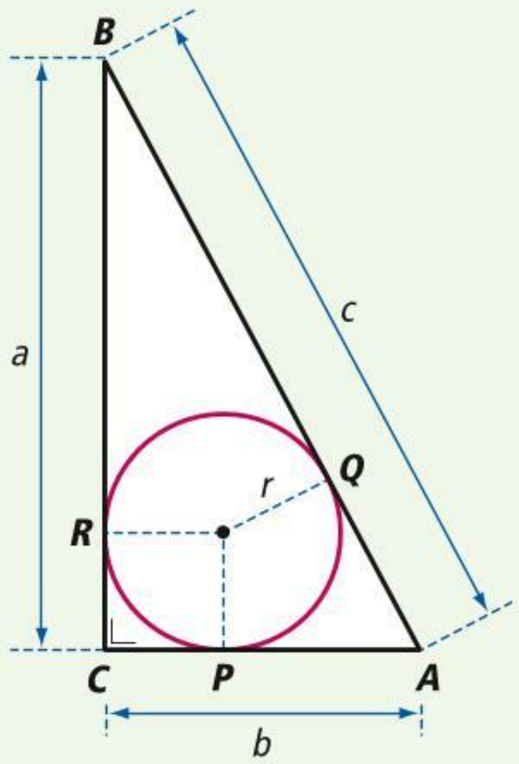
B-3 Gegeven is een driehoek ABC. De omgeschreven cirkel heeft middelpunt M. De hoogtelijn uit C snijdt de cirkel in punt D en de lijn CM snijdt de cirkel in punt E.
Toon aan dat $DE \parallel AB$.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-3.



B-4 Van een rechthoekige driehoek zijn a en b de lengten van de rechthoekszijden. Verder is c de lengte van de langste zijde en is de straal van de ingeschreven cirkel gelijk aan r.

a Laat zien dat $c = a + b - 2r$.

b Van een rechthoekige driehoek is de lengte van één rechthoekszijde gelijk aan 4 en is de lengte van de langste zijde gelijk aan 6.
Bereken exact de straal van de ingeschreven cirkel.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-4.

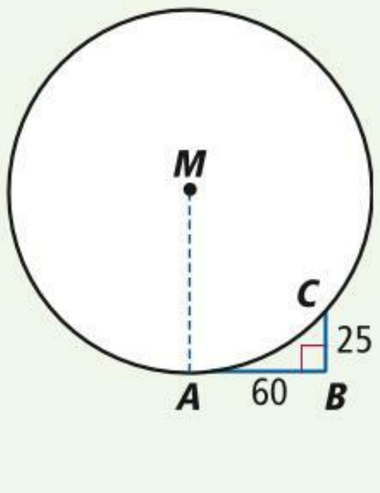


B-5 Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC.
Een cirkel met middelpunt M raakt in A aan lijn AB.
$AB = 60$ en $BC = 25$. Ook is $AB \perp BC$.

a Kies $A(0, 0)$ in een geschikt assenstelsel en bereken exact de straal van de cirkel.

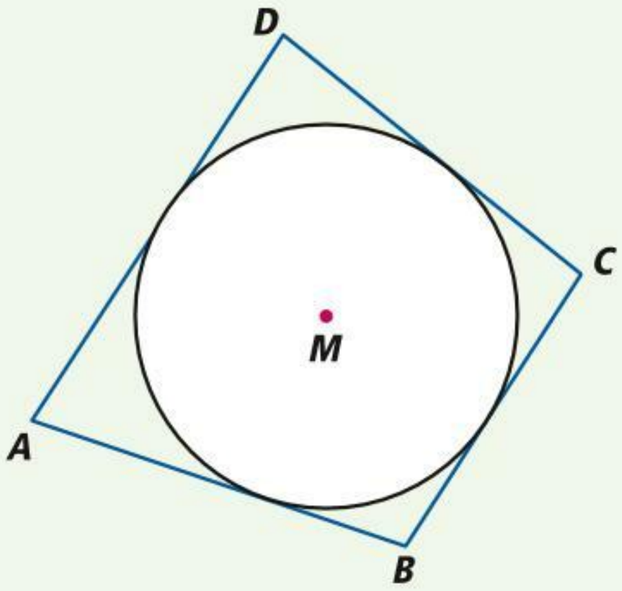
b Een andere aanpak is: teken middellijn AD en vervolgens DC.

c Gebruik gelijkvormige driehoeken om de straal van de cirkel te berekenen.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 7-5.

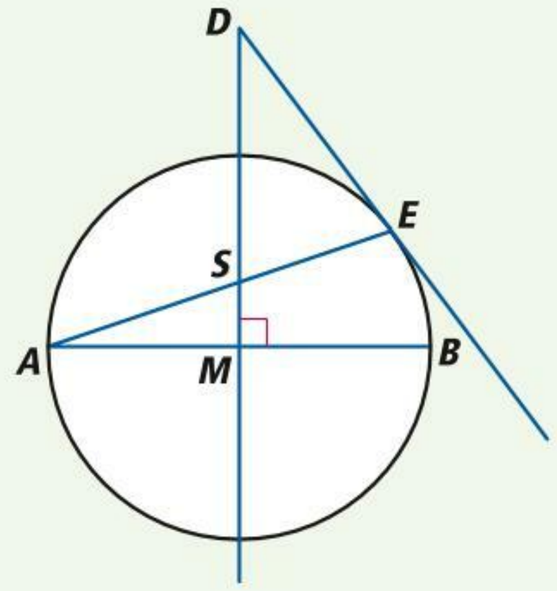


© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Gemengd**

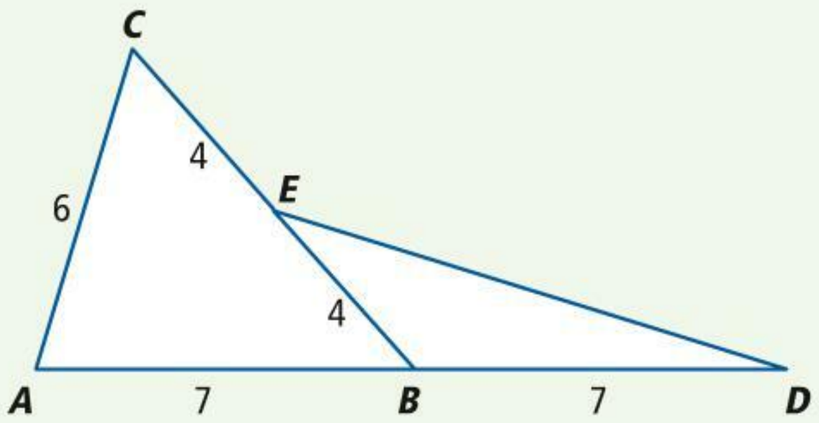


G-1 De hierboven getekende vierhoek $ABCD$ is een raaklijnenvierhoek.
Toon aan dat de straal van de ingeschreven cirkel gelijk is aan de oppervlakte van $ABCD$ gedeeld door de halve omtrek.

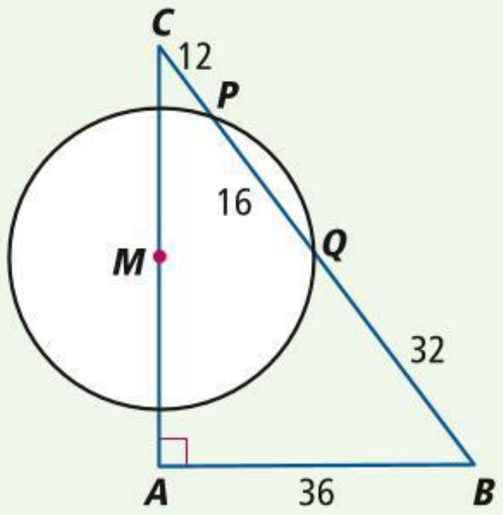


G-2 In een cirkel met middelpunt M is lijnstuk AB een middellijn. Punt D ligt buiten de cirkel op de lijn door M loodrecht op lijnstuk AB. Vanuit D is raaklijn DE aan de cirkel getekend.
De lijn AE snijdt MD in het punt S. Gebruik hulplijnen en toon aan dat $DS = DE$.

G-3 Gegeven is driehoek ABC. Zijde AB wordt verlengd met $BD = AB = 7$.
Verder is $BE = CE = 4$ en is $AC = 6$.
Bereken exact DE.



G-4 Op zijde AC van de rechthoekige driehoek ABC ligt het middelpunt M van een cirkel.
Zijde BC snijdt de cirkel in de punten P en Q.
In de figuur staan verschillende afmetingen.
Teken een hulplijn en gebruik gelijkvormigheid om exact de straal van de cirkel te berekenen.



G-5 Gegeven is driehoek ABC met zijden $AB = 9$, $BC = 8$ en $AC = 7$.
Je gaat exact de lengte van zwaartelijn AD berekenen.

a Teken driehoek ABC met zwaartelijn AD.

b Pas de cosinusregel toe in driehoek ABD met als hoek $\angle B$.

c Pas weer de cosinusregel toe met $\angle B$ maar nu in driehoek ABC.

d Elimineer de termen met $\cos(\angle B)$ en bereken exact AD.

© Noordhoff Uitgevers bv

Uitdagende opdrachten

U-1 In deze opdracht ga je met de cosinusregel aantonen dat $x^2c = a^2p + b^2q - cpq$.
Deze regel heet de stelling van Stewart.
(Matthew Stewart, 1717-1785)

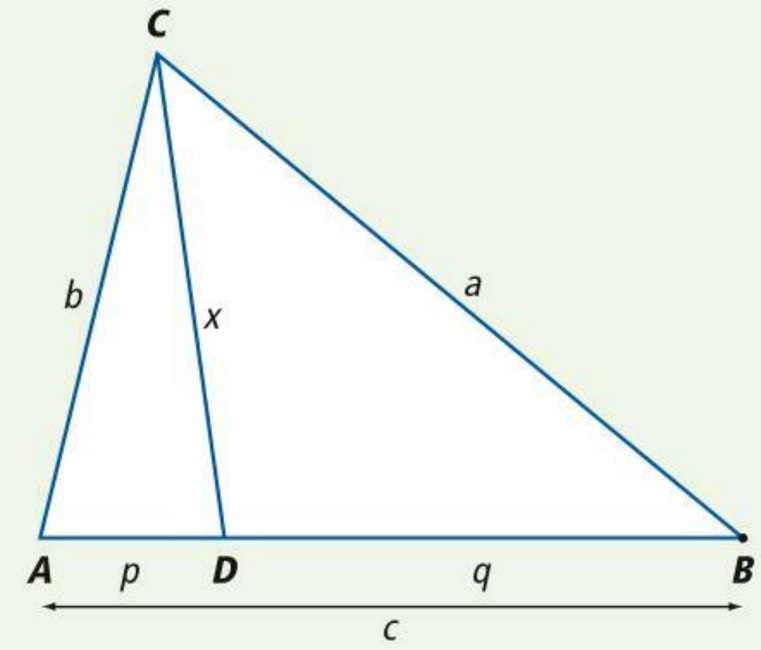
a Druk $\cos(\angle A)$ uit in a, b en c.

b Druk x^2 uit in b, p en $\cos(\angle A)$.

c Gebruik dat $p + q = c$ en voltooi het bewijs van de stelling van Stewart.

d Laat lijnstuk CD een zwaartelijn zijn met $CD = z$.

Laat zien dat $z^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$.



U-2 In deze opdracht ga je formules voor de straal R van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ afleiden.
In de figuur is $\triangle ABC$ met omgeschreven cirkel getekend.
Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is punt M, het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden.
De driehoek wordt door de stralen AM, BM en CM in drie gelijkbenige driehoeken verdeeld.

a Waarom geldt $\angle M_1 = 90° - \gamma$?

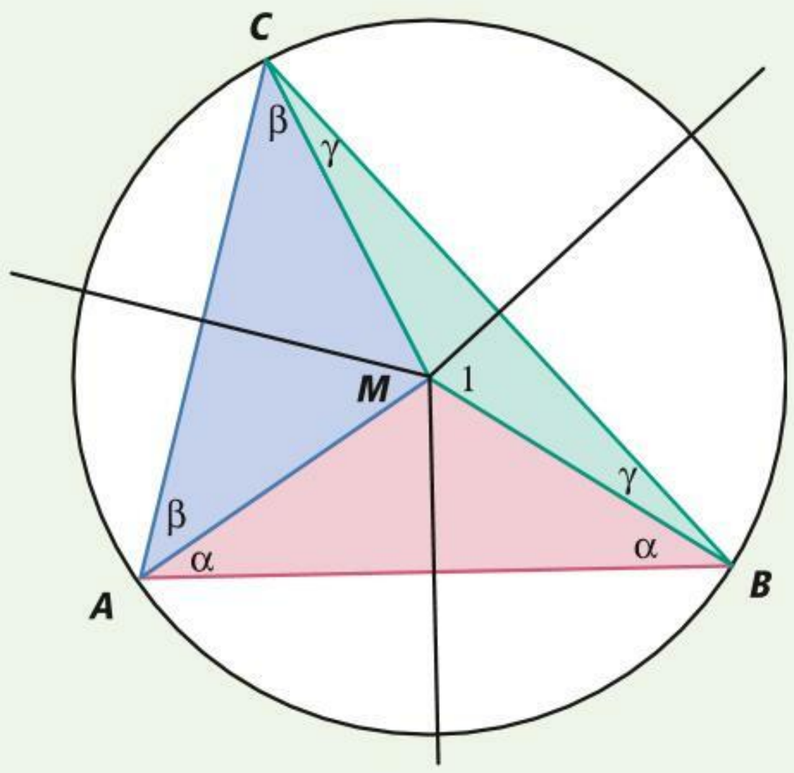
b Toon aan dat $\angle M_1 = \alpha + \beta = \angle A$.

c Druk $\sin(\angle A)$ uit in a en R.

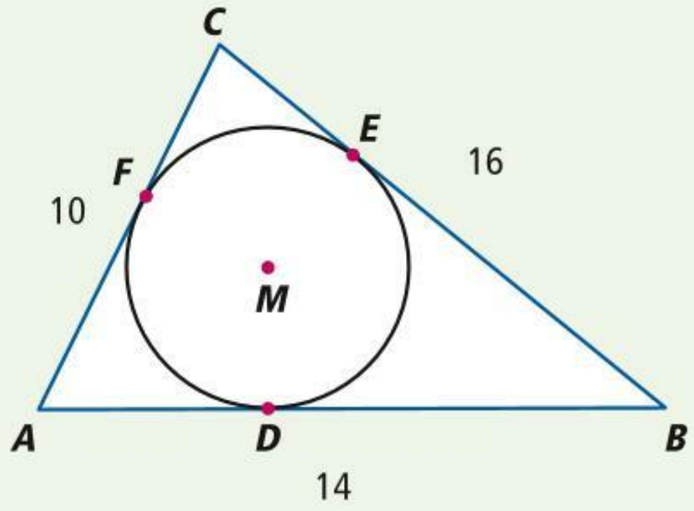
d Laat zien dat $R = \dfrac{a}{2\sin(\angle A)}$

e Bedenk dat voor de oppervlakte O van een driehoek geldt $O = \frac{1}{2}bc\sin(\angle A)$ en laat zien dat $R = \dfrac{abc}{4O}$

f Gegeven zijn de punten $A(0, 0)$, $B(14, 0)$ en $C(5, 12)$.
Bereken de straal van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.



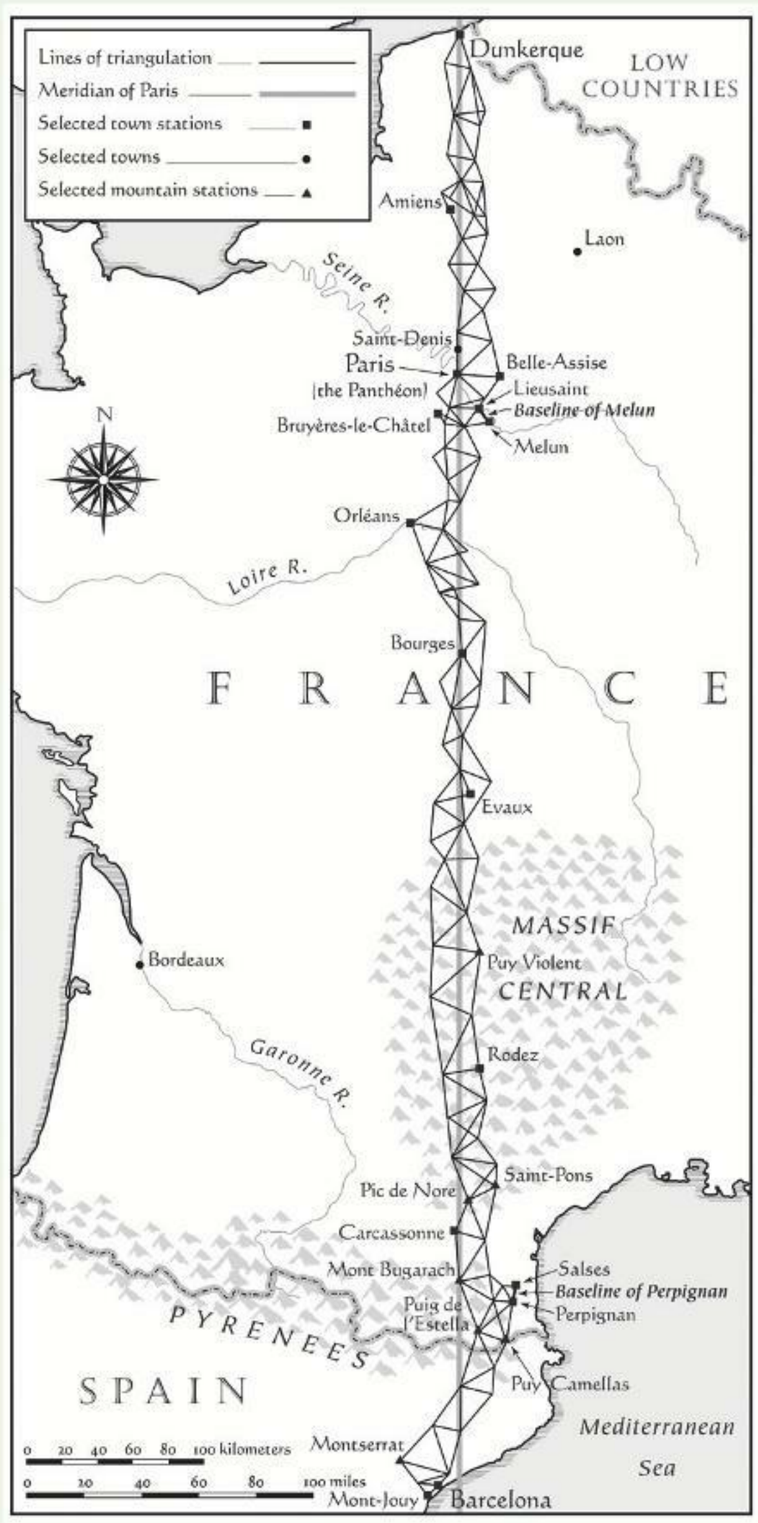
U-3 Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 14$, $BC = 16$ en $AC = 10$.
De ingeschreven cirkel raakt in D, E en F aan de zijden van de driehoek.
Bereken exact AD, BE en CF.



© Noordhoff Uitgevers bv

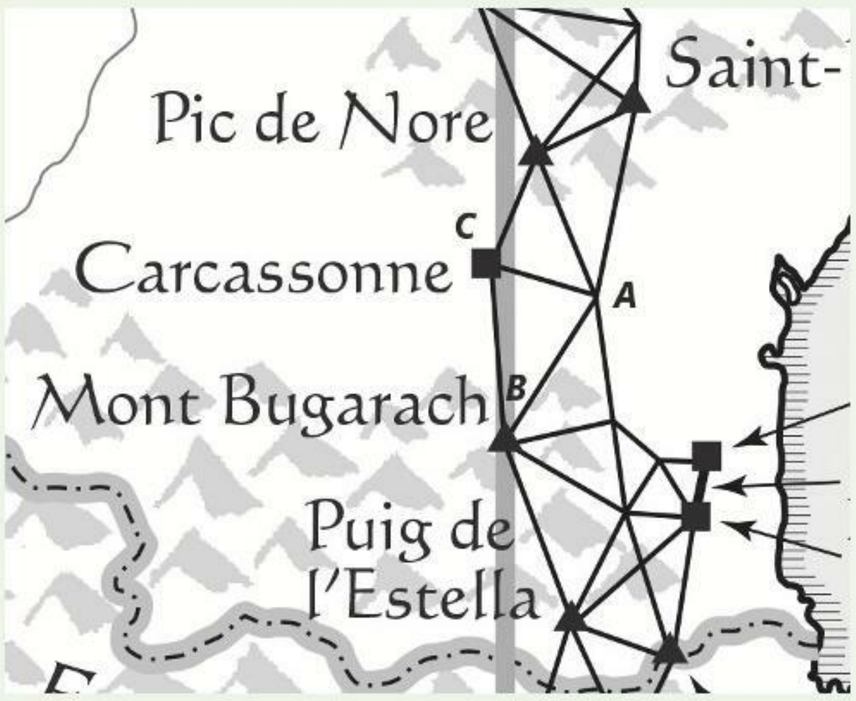
De standaardmeter

In de beginjaren van de Franse Revolutie verklaarde een team van wetenschappers dat de meter één tienmiljoenste van de afstand van de noordpool tot de evenaar zou moeten zijn. In 1792 vertrokken de Franse wetenschappers, Méchain en Delambre met een bijzondere taak: het meten van het deel van de meridiaan tussen Duinkerken en Barcelona. Hun hoop was dat ooit iedereen dezelfde standaardmaat zou gaan gebruiken: de meter.



Om de afstand van Duinkerken tot Barcelona te bepalen, pasten Méchain en Delambre de methode van driehoeksmeting toe. Daarbij maak je gebruik van de eigenschap dat een driehoek volledig bepaald is als één zijde en de aanliggende hoeken bekend zijn. Daarna wordt de sinusregel gebruikt om de andere zijden te berekenen.

De voornaamste taak van Méchain en Delambre was het meten van hoeken met de repetitiecirkel (zie afbeelding) en de onderlinge afstand tussen goed waarneembare punten. Zo gebruikten ze bijvoorbeeld de kerktoren van het hoog gelegen stadje Carcassonne en de berg Mont Bugarach (1230 meter).



Opdracht

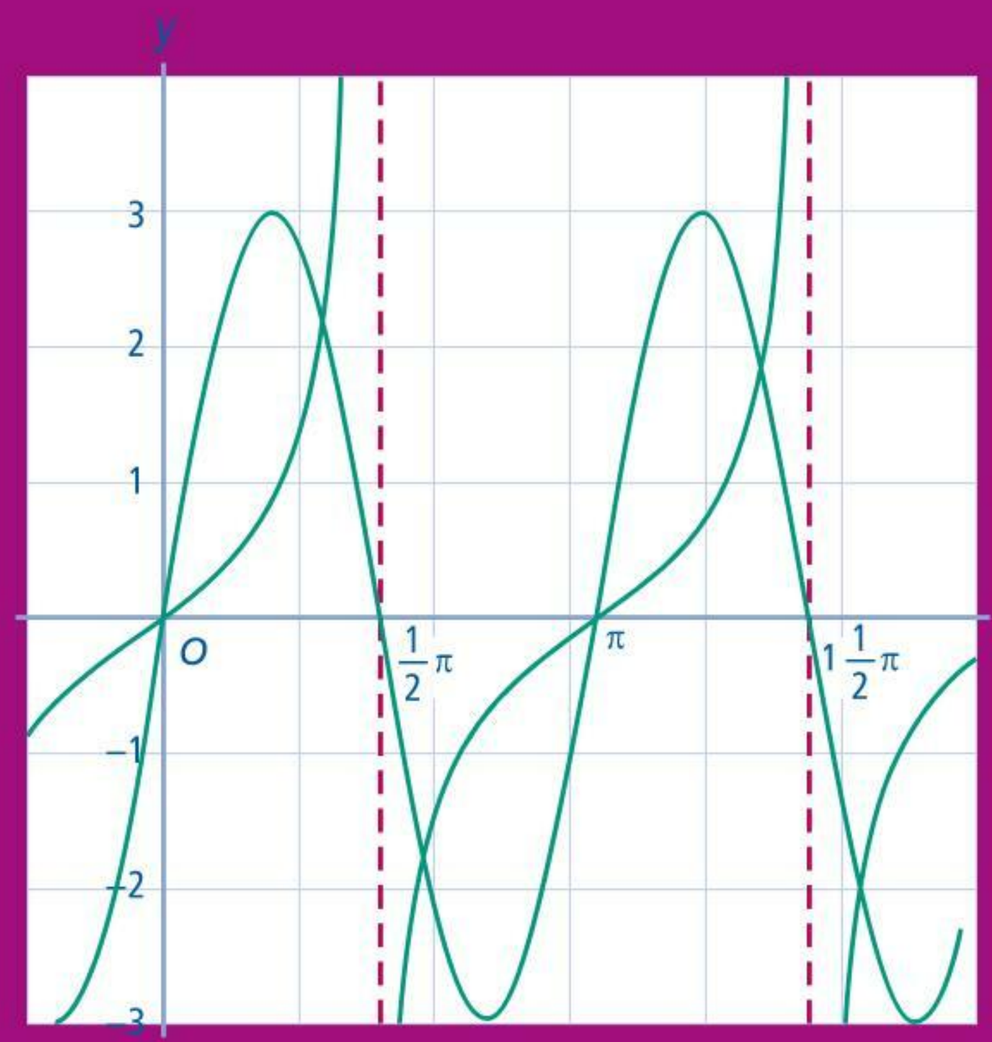
Als je de kaart met de driehoeksmeting vergroot, zie je Carcassonne en Mont Bugarach aangegeven en een derde plaats, aangeduid met de letter A.
Je kunt meten dat $\angle ACB \approx 72°$ en $\angle CBA \approx 36°$.

a Zoek uit welke plaats A moet zijn, gebruik een atlas of Googlemaps.

b Tussen Carcassonne en A dat een uitzichtpunt is, ligt een deel van het lange afstandspad GR 36, dat ook in die tijd een verbinding was. De afstand hemelsbreed is circa 21,6 km. Bereken met de sinusregel de afstanden CB en AB.

Méchain en Delambre presenteerden hun meetgegevens pas in 1799. In Parijs ligt een platina staaf: dat is de meter.
In het SI-stelsel is de meter de eenheid voor lengte en is sinds 1983 gedefinieerd als de afstand die licht in $\frac{1}{299\,792\,458}$ seconde in vacuüm aflegt.

© Noordhoff Uitgevers bv



Combinaties met sinus en cosinus

Hierboven staan de grafieken van de functies

$f(x) = 6\sin(x) \cdot \cos(x)$ *en* $g(x) = \frac{2\sin(x)}{3\cos(x)}$

Geef aan welk functievoorschrift bij welke grafiek past.
Waaraan kun je dat zien?
Geef een verklaring voor het asymptotisch gedrag van de functie g.

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 8
Goniometrische functies

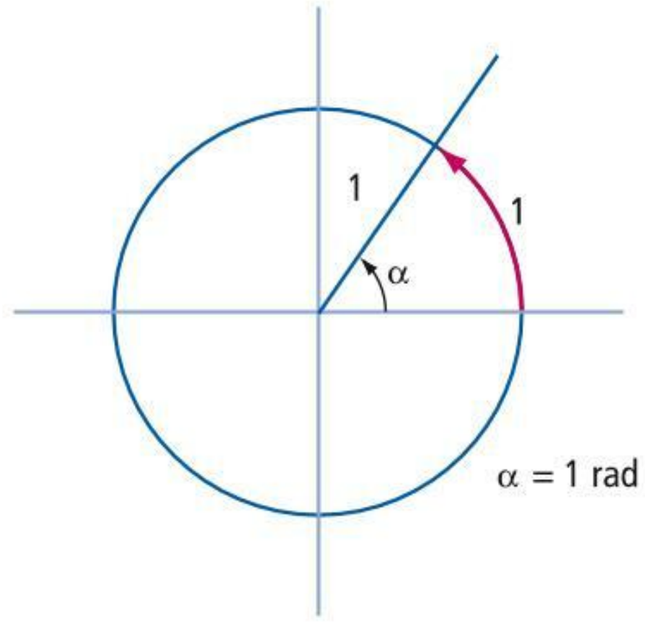
In dit hoofdstuk

	Voorkennis	200
8-1	Harmonische trillingen	202
8-2	Goniometrische formules	204
8-3	Vergelijkingen oplossen	206
8-4	Differentiëren	208
8-5	Integreren	210
8-6	Tangensfuncties	212
8-7	Gemengde opdrachten	214
	Samenvatting	216
	Test jezelf	218
	Extra oefening - Basis	220
	Extra oefening - Gemengd	221
	Uitdagende opdrachten	222
	Fourier	223

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorkennis

V-1 Bij het werken met goniometrische functies gebruik je radialen als hoekmaat. In de figuur hiernaast is een hoek van 1 radiaal weergegeven. Voor het omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd is het handig om gebruik te maken van een verhoudingstabel.
Ga altijd uit van het gegeven: $180° = \pi$ radialen.
Neem de tabel over en vul die verder in.



graden	0	30	…	60	90	120	135	…	180
radialen	…	…	$\frac{1}{4}\pi$	…	…	…	…	$\frac{5}{6}\pi$	π

V-2 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.
- **a** Plot en schets de grafiek van f op $[-\pi, 3\pi]$.
- **b** Geef de exacte nulpunten van f.
- **c** Los exact op: $f(x) = 1$.
- **d** Doe hetzelfde voor: $f(x) = -1$.
- **e** Hoe groot is de periode van f?

V-3 Gegeven is de functie $g(x) = \cos(2x)$.
- **a** Plot en schets de grafiek van g op $[-\pi, \pi]$.
- **b** Geef de exacte nulpunten van g.
- **c** Los exact op: $g(x) = 1$.
- **d** Doe hetzelfde voor: $g(x) = -1$.
- **e** Hoe groot is de periode van g?

V-4 Leg met behulp van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ of $g(x) = \cos(x)$ uit dat:

- **a** $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$
- **b** $\cos\left(-1\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(1\frac{1}{4}\pi\right)$
- **c** $\sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$
- **d** $\cos\left(1\frac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)$
- **e** $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)$
- **f** $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)$

Voor enkele waarden van x moet je de exacte waarde van sin(x) en cos(x) kennen.
Met behulp van symmetrie en periodiciteit kun je dan voor verschillende andere waarden van x ook de exacte waarde van sin(x) en cos(x) vinden.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

V-5 Geef de exacte waarde van:

- **a** $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right)$
- **b** $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)$
- **c** $\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)$
- **d** $\cos\left(-1\frac{2}{3}\pi\right)$
- **e** $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$
- **f** $\cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right)$
- **g** $\sin\left(-1\frac{1}{6}\pi\right)$
- **h** $\sin\left(1\frac{3}{4}\pi\right)$

© Noordhoff Uitgevers bv

V-6a Plot de grafieken van de functies $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 3\sin(x)$ en $h(x) = \sin(3x)$.
Door welke transformaties kun je de grafieken van g en h uit die van f laten ontstaan?

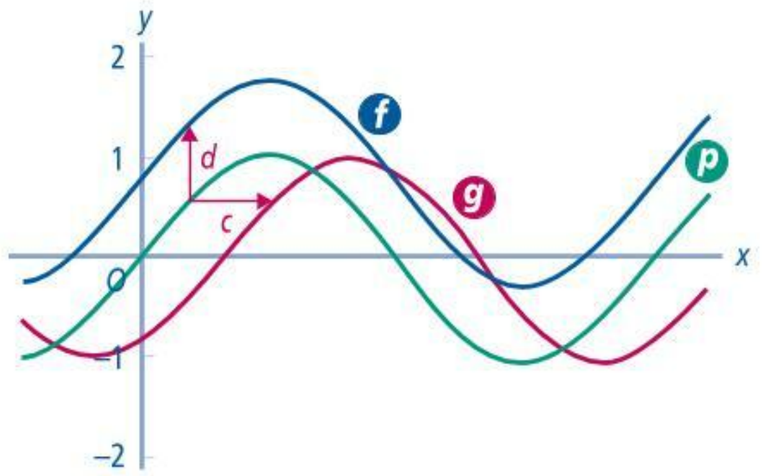
b Plot in één assenstelsel de grafieken van de functies $k(x) = \cos(x)$, $m(x) = 2 + \cos(x)$ en $n(x) = \cos(x + 2)$.
Door welke transformaties kunnen de grafieken van m en n uit die van k ontstaan?

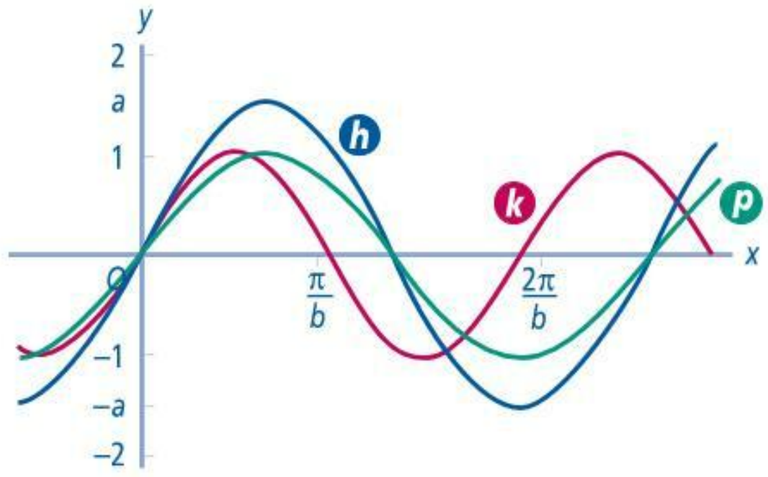
Theorie

De grafieken van $p(x) = \sin(x)$ en $q(x) = \cos(x)$ hebben amplitude 1, periode 2π en evenwichtsstand $y = 0$.
Door de grafiek van $p(x) = \sin(x)$ te verschuiven of te vermenigvuldigen kun je de grafieken van de volgende functies krijgen:

- $f(x) = d + \sin(x)$ verschuiving d eenheden omhoog
- $g(x) = \sin(x - c)$ verschuiving c eenheden naar rechts
- $h(x) = a\sin(x)$ vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor a
- $k(x) = \sin(bx)$ vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{b}$. Voor de periode geldt $periode = \frac{2\pi}{b}$ mits $b > 0$.

Alle grafieken die zo ontstaan heten sinusoïden.
Bij elke sinusoïde hoort een functievoorschrift van de vorm $f(x) = a\sin(b(x - c)) + d$ of $f(x) = a\cos(b(x - c)) + d$.





V-7 Geef aan hoe de grafieken van de volgende functies kunnen ontstaan uit de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ en geef bij elke functie de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van de bijbehorende grafiek.

a $g(x) = \cos(6x)$
b $h(x) = -\cos(x + 0{,}22)$
c $m(x) = \sqrt{5} \cdot \cos(4\pi x)$
d $n(x) = 1 - 2\cos(x)$

Vergelijkingen van de vorm $\sin(bx) = p$ of $\cos(bx) = p$ los je exact op door gebruik te maken van de waarden in de tabel met de exacte waarden.

V-8 Los exact op op het interval $[0, 2\pi]$.

a $\sin(5x) = 1$
b $\cos(4x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
c $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
d $\cos(6x) = -1$

V-9 Los exact op op het interval $[-\pi, 3\pi]$.

a $4\cos(2x) = 2\sqrt{3}$
b $1\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{3}{4}$
c $\cos\left(1\frac{1}{2}x\right) = 0$
d $6\sin(2x) = 3$

Voorbeeld

Los op $\cos(3x) = \frac{1}{2}$ op het interval $[0, \pi]$.

Oplossing

$\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

dus $3x = \frac{1}{3}\pi$ of $2\frac{1}{3}\pi$ of $4\frac{1}{3}\pi$ ...

of $3x = -\frac{1}{3}\pi$ of $1\frac{2}{3}\pi$ of $3\frac{2}{3}\pi$ ...

dus $x = \frac{1}{9}\pi$ of $x = \frac{7}{9}\pi$ of $x = \frac{13}{9}\pi$ ....

of $x = -\frac{1}{9}\pi$ of $x = \frac{5}{9}\pi$ of $x = \frac{11}{9}\pi$ ....

De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn $x = \frac{1}{9}\pi$, $x = \frac{7}{9}\pi$ en $x = \frac{5}{9}\pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

8-1

Harmonische trillingen

1 Een stemvork geeft een toon met frequentie 440 hertz, dat wil zeggen 440 trillingen per seconde. Voor de trilling van de uiteinden van de stemvork geldt $u = \sin(880\pi t)$, met de uitwijking u in mm en de tijd t in seconden.

a Geef de periode van u.

b Wat is het verband tussen de periode en de frequentie?

c Geef een formule voor de uitwijking van een stemvork met een toon van 600 hertz.

Theorie

Als de grafiek van een trilling een sinusoïde is, dan is er sprake van een **harmonische trilling**.
Bij trillingen wordt naast de **trillingstijd** T of de periode vaak gesproken over de **frequentie**, dat wil zeggen het aantal trillingen per tijdseenheid. De eenheid voor het aantal trillingen per seconde is hertz (Hz).
Als T de tijd is die nodig is voor één trillingsbeweging, dan voldoet de uitwijking u aan een formule van de vorm $u = a\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$. Hierin is a de amplitude.
Voor de periode T en frequentie f geldt: $f = \frac{1}{T}$

Voorbeeld

Geef de amplitude, de periode en de frequentie van een trilling die voldoet aan $u = 2\sin(10\pi t)$ met u in cm en t in seconden.

Oplossing

De amplitude is 2 cm. Voor de periode T geldt $T = \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5}$ seconde dus $f = 5$ hertz.

H 2 Bereken de amplitude, de periode en de frequentie van de harmonische trillingen die voldoen aan de volgende formules. De tijdseenheid t is in seconden en de uitwijking u is in mm.

a $u = \sin(500\pi t)$

b $u = 0{,}02\cos(300t)$

c $u = \cos(256\pi t)$

d $u = 9\sin(12\pi(t - 2))$

3 Gegeven is de harmonische trilling met formule $u = 6\sin(4t)$.
Hierin is u uitgedrukt in mm en t in seconden.

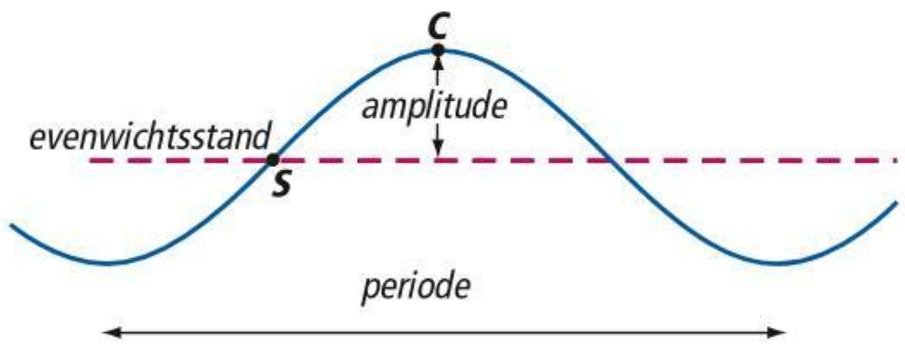
a Van deze trilling wordt de frequentie verdubbeld.
Hoe verandert de formule?

b Van de oorspronkelijke trilling wordt de frequentie met 50% verhoogd.
Geef van deze trilling een formule.

4 Het menselijk oor kan slechts tonen horen waarvan de frequenties liggen tussen 20 en 20 000 hertz.
Neem aan dat voor zo'n trilling geldt: $u = \sin(bt)$.
Welke positieve waarden van b horen hierbij?

© Noordhoff Uitgevers bv

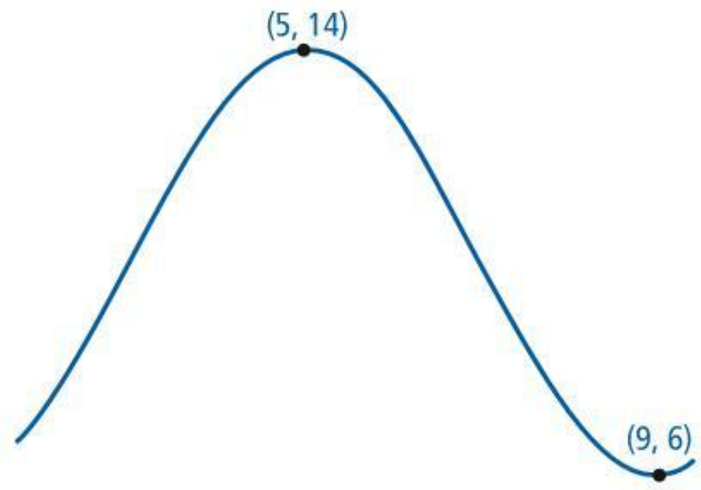
Bij het opstellen van een functievoorschrift bij een gegeven sinusoïde moet je letten op de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en een beginpunt van één periode. Het functievoorschrift heeft de vorm $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$ *of* $f(x) = d + a\cos(b(x - c))$. *De evenwichtsstand is* $y = d$, *de amplitude is* a, $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$ *en* c *is de x-coördinaat van een beginpunt (als* $a > 0$*).*



S: beginpunt sinus C: beginpunt cosinus

Voorbeeld

Een sinusoïde heeft als toppen (5, 14) en (9, 6).
Stel een passend functievoorschrift op.



Oplossing

De evenwichtsstand is $y = \frac{1}{2}(14 + 6) = 10$ en
de amplitude is $14 - 10 = 4$.
De halve periode is $9 - 5 = 4$, dus de periode is 8.
Je kunt het punt (5, 14) als het beginpunt bij een cosinusfunctie gebruiken.
In de functie $f(x) = d + a\cos(b(x - c))$ geldt dus
$d = 10$, $a = 4$, $b = \frac{2\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi$ en $c = 5$.

$f(x) = 10 + 4\cos\left(\frac{1}{4}\pi(x - 5)\right)$

5 Stel een sinusfunctie op bij de sinusoïde van het voorbeeld.

6 Stel in de volgende gevallen een passend functievoorschrift op.

a Twee opeenvolgende toppen van een sinusoïde zijn (−7, 14) en (1, 13).

b Van een sinusoïde is het punt (−5, 2) een top, is de periode 12 en is de evenwichtsstand $y = -2$.

7 Bij een harmonische trilling is de maximale uitwijking 7 cm en de frequentie is 20 per seconde.
Stel een functievoorschrift op voor de uitwijking u als functie van de tijd t.

8a Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

b De grafiek van f blijkt een sinusoïde te zijn.
Geef een functievoorschrift voor f in de vorm $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$.
Geef de waarden van a, b, c en d in twee decimalen.

c Voer de opdrachten a en b ook uit voor de functie $g(x) = \sin(x) - \cos(x)$.

d Als je een sinusfunctie verandert in een cosinusfunctie, welke gevolgen heeft dat voor de waarden van a, b, c en d in $f(x) = d + a\cos(b(x - c))$?

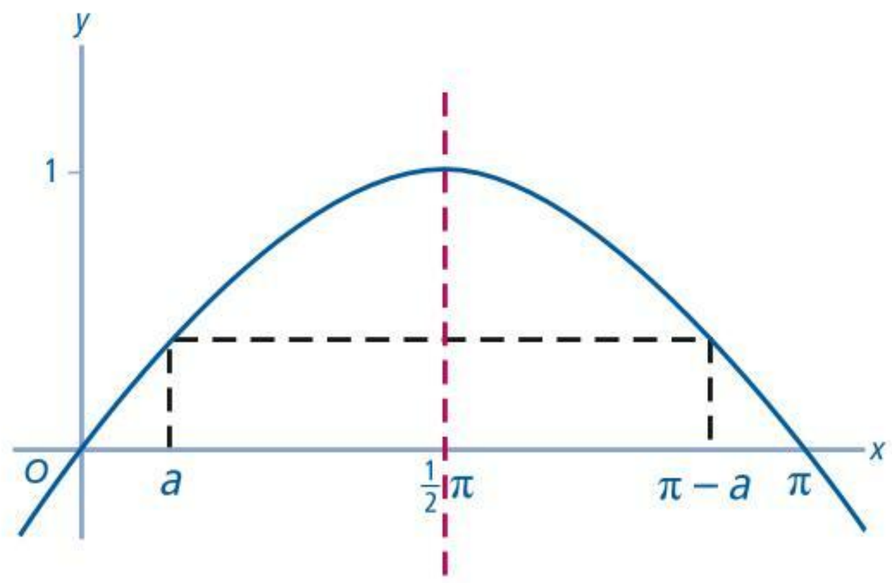
© Noordhoff Uitgevers bv

8-2

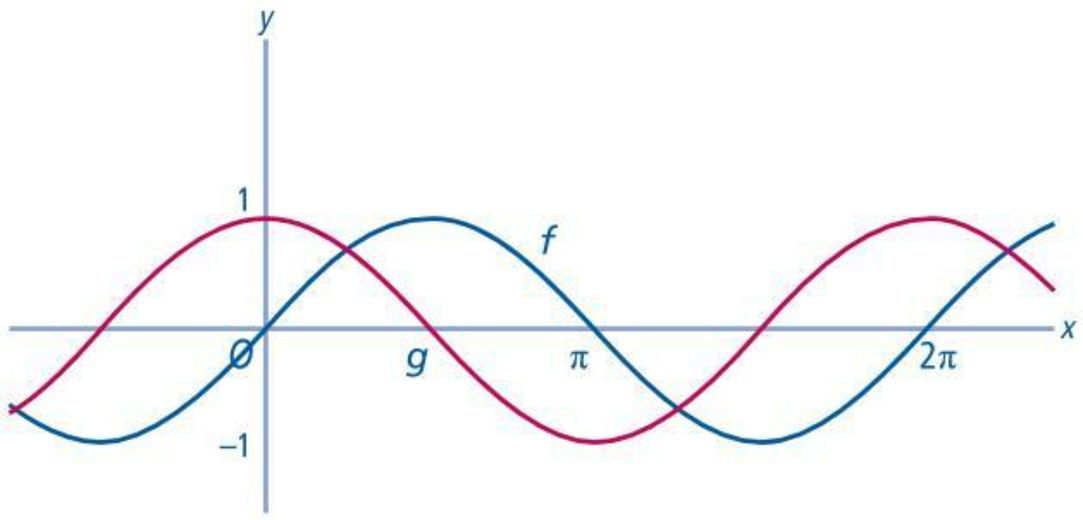
Goniometrische formules

9a Plot de grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \sin(x + \pi)$.
b Geef het verband tussen $\sin(x)$ en $\sin(x + \pi)$.
c Onderzoek het verband tussen $\cos(x)$ en $\cos(x + \pi)$.

10 Hiernaast staat de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[0, \pi]$.
a Leg met behulp van de tekening uit dat $\sin(\pi - a) = \sin(a)$ voor elke waarde van a.
b Maak een schets van de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ op het interval $[-\pi, 2\pi]$.
c Geldt de formule van opdracht a ook als je sinus vervangt door cosinus?
d Leg uit dat $\cos(-a) = \cos(a)$ voor elke waarde van a.



11 Hiernaast staan de grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$.
a Door welke translatie gaat de grafiek van g over in de grafiek van f?
b Uit opdracht a volgt dat $\sin(a) = \cos(a \ldots\ldots)$ voor elke waarde van a.
Wat moet er op de puntjes worden ingevuld?
c Leg uit dat $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ voor elke waarde van x.



Theorie

Goniometrische formules

$\sin(-x) = -\sin(x)$ $\quad\quad$ $\cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ $\quad\quad$ $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ $\quad\quad$ $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ $\quad\quad$ $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Voor elke waarde van x geldt: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Voorbeeld

Schrijf $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$ in de vorm $\cos(px + q)$.

Oplossing

Gebruik de formule $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ en vervang x door $2x - \frac{1}{3}\pi$:

$\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) - \frac{1}{2}\pi\right) =$

$\cos\left(2x - \frac{5}{6}\pi\right)$

12 Voor een even functie geldt $f(-a) = f(a)$ voor elke waarde van a. Voor een oneven functie geldt $f(-a) = -f(a)$ voor elke waarde van a.
a Is $f(x) = \sin(x)$ een even of een oneven functie of geen van beide?
b Beantwoord deze vraag ook voor $g(x) = \cos(x)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

H 13 Gebruik de goniometrische formules en schrijf

a $\sin\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)$ in de vorm $\cos(px+q)$.

b $\cos\left(1\frac{1}{3}\pi-x\right)$ in de vorm $\sin(px+q)$.

c $-\cos\left(2x-\frac{1}{3}\pi\right)$ in de vorm $\sin(px+q)$.

d $-\sin\left(2\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)\right)$ in de vorm $\cos(px+q)$.

De formule $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ gebruik je om de exacte waarde van $\cos(x)$ te berekenen, als de waarde van $\sin(x)$ bekend is, of andersom.

Voorbeeld

Bereken exact de waarden van $\cos(x)$ als $\sin(x)=-\frac{1}{3}$

Oplossing

Invullen van $\sin(x)=-\frac{1}{3}$ in $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ geeft $\frac{1}{9}+\cos^2(x)=1$.

Uit $\cos^2(x)=\frac{8}{9}$ volgt $\cos(x)=\sqrt{\frac{8}{9}}$ of $\cos(x)=-\sqrt{\frac{8}{9}}$

Je kunt $\sqrt{\frac{8}{9}}$ eventueel herleiden: $\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$,

dus $\cos(x)=\frac{2}{3}\sqrt{2}$ of $\cos(x)=-\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

H 14 Bereken exact de waarden van $\sin(x)$ of $\cos(x)$ als:

a $\sin(x)=\frac{2}{5}$

b $\cos(x)=-\frac{7}{25}$

c $\cos(x)=-\frac{1}{3}\sqrt{5}$

d $\sin(x)=\frac{1}{4}\sqrt{15}$

15 Gegeven is de functie $f(x)=2\sin(x)\cos(x)$.

a Plot de grafiek van f en geef de amplitude en de periode van f.

b De grafiek van f lijkt een sinusoïde te zijn.
Stel hiervoor een functievoorschrift $g(x)$ op waarin alleen de sinus voorkomt.

c Als je vermoedt dat twee functies f en g dezelfde grafiek hebben is het handig om de grafiek van $f-g$ te plotten. Waarom?

d Ga met behulp van opdracht c na of de grafieken van f en g samenvallen.

16a Onderzoek op de manier van opdracht 15 of de grafieken van de functies $v(x)=\sin^2(x)-\cos^2(x)$ en $w(x)=-\cos(2x)$ samenvallen.

b Stel een functievoorschrift op voor v waarin alleen een sinus voorkomt.

17 De grafiek van $f(x)=\sin\left(x-\frac{1}{3}\pi\right)$ wordt gespiegeld in de x-as, daarna π naar rechts verschoven en ten slotte met twee vermenigvuldigd ten opzichte van de y-as.

a De beeldgrafiek is de grafiek van de functie g.
Geef een functievoorschrift van g.

b Schrijf dit voorschrift in de vorm $g(x)=a\cos(b(x-c))+d$.

© Noordhoff Uitgevers bv

8-3

Vergelijkingen oplossen

18a Los exact op $2\sin(2x) = 1$ op het interval $[0, 2\pi]$.

b De oplossing van $2\sin(2x) = 1$ op $\mathbb{R}$ bestaat uit twee rijen van getallen.
Geef de eerste vier positieve getallen van elke rij oplossingen.

De notatie voor een oneindige rij oplossingen met periode π is $x = a + k \cdot \pi$.
Bij deze notatie is k een geheel getal.

19 Gegeven is de vergelijking $\sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

a Omdat $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ bereken je één rij oplossingen met
$2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.
Laat zien dat hieruit volgt $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$.

b De andere rij oplossingen volgt uit $2x - \frac{1}{6}\pi = \pi - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.
Verklaar dit en bereken de andere rij oplossingen.

20 Gegeven is $\cos(a) = \cos(b)$.
Leg uit dat hieruit volgt dat $a = b + k \cdot 2\pi$ of $a = -b + k \cdot 2\pi$.

Theorie

De oplossingen van de vergelijking $\sin(A) = \sin(B)$ vind je met
$A = B + k \cdot 2\pi$ en $A = \pi - B + k \cdot 2\pi$.

De oplossingen van $\cos(A) = \cos(B)$ vind je met
$A = B + k \cdot 2\pi$ en $A = -B + k \cdot 2\pi$.

Voorbeeld 1

Los exact op: $\sin(3x) = \sin(2x + \pi)$

Oplossing
$\sin(3x) = \sin(2x + \pi)$
$3x = 2x + \pi + k \cdot 2\pi$ of
$3x = \pi - (2x + \pi) + k \cdot 2\pi$
$x = \pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = -2x + k \cdot 2\pi$
$x = \pi + k \cdot 2\pi$ of $5x = k \cdot 2\pi$
$x = \pi + k \cdot 2\pi$ of $x = k \cdot \frac{2}{5}\pi$

Voorbeeld 2

Los exact op: $\cos(3x) = \cos(\pi - x)$.

Oplossing
$\cos(3x) = \cos(\pi - x)$
$3x = \pi - x + k \cdot 2\pi$ of $3x = -\pi + x + k \cdot 2\pi$
$4x = \pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = -\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ of $x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

H 21 Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $\sin(2x) = \sin(3x)$

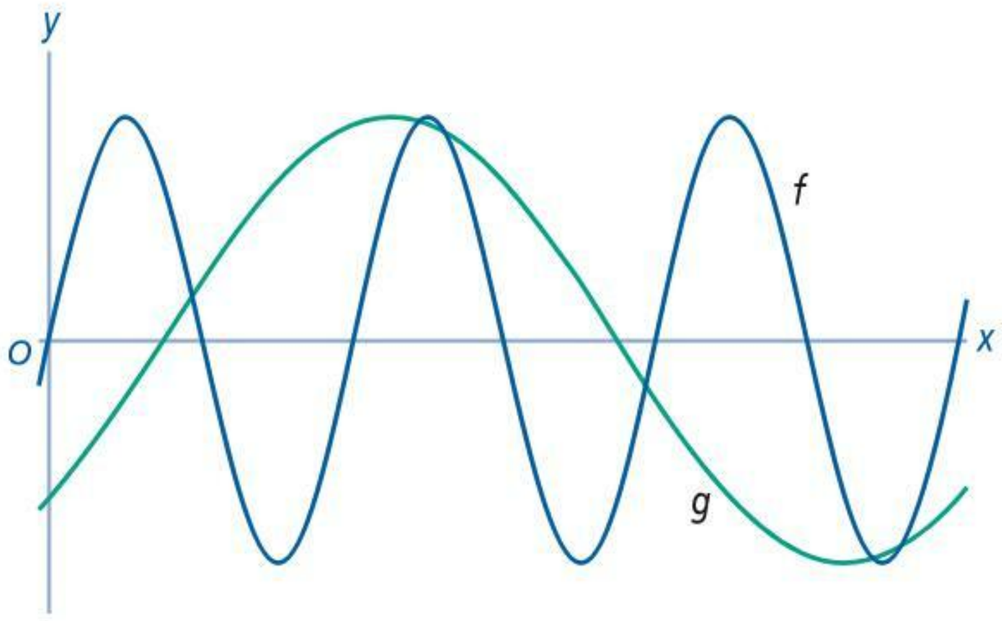
c $\sin(4x - \pi) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

d $\cos\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

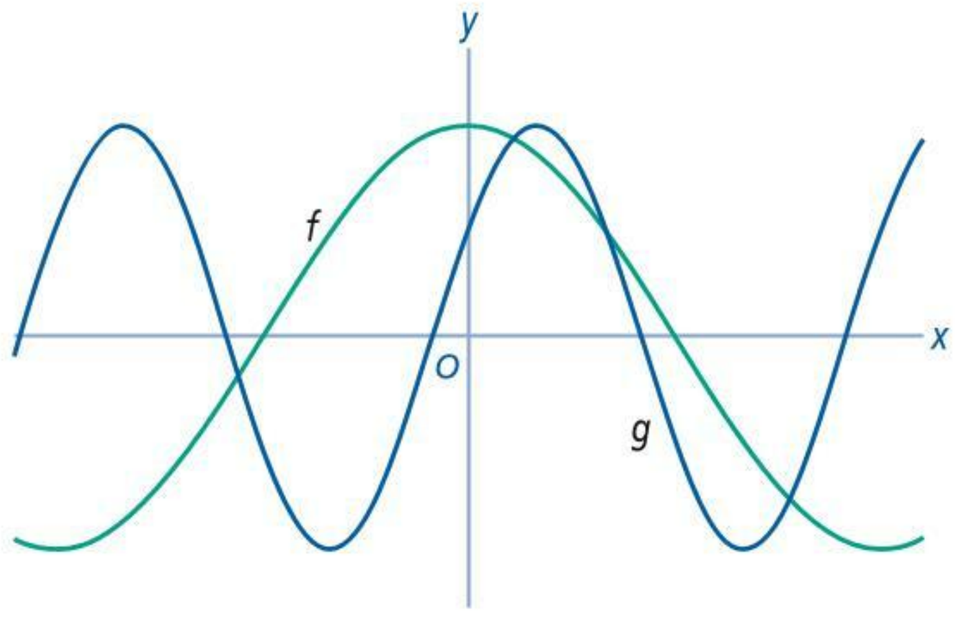
e $\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$

f $\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right) = \cos(3\pi - \pi x)$

© Noordhoff Uitgevers bv



22 Hierboven staan de grafieken van $f(x) = \sin(3x)$ en $g(x) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$ op het interval $[0, 2\pi]$.
Bereken exact de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g op dit interval.



23 Gegeven zijn de functies $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ en $g(x) = \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.
Bereken exact de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g op dit interval.

Vergelijkingen die termen met $\sin^2(x)$ of $\cos^2(x)$ bevatten kun je soms met een substitutie of ontbinden aanpakken. Verder moet je in sommige gevallen gebruik maken van $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ om dergelijke vergelijkingen op te lossen.

H 24 Los exact op.

a $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$

b $\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = 0$

c $\sin^2(2x) - \sin(2x) - 2 = 0$

d $3\cos(x) - 2\sin^2(x) = 0$

e $\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

H 25 Als er een min-teken vóór een sinus of cosinus staat, kun je gebruik maken van de formules $-\sin(x) = \sin(x + \pi)$ of $-\cos(x) = \cos(x + \pi)$.
Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\sin(x) = -\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

b $\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = -\cos(3x)$

Voorbeeld

Los op $2\sin^2(x) + 3\cos(x) = 3$.

Oplossing
Omdat $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ herleid je de vergelijking tot:
$2 - 2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 3 = 0$
$-2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 1 = 0$
$2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$
Stel $\cos(x) = p$, de vergelijking wordt $2p^2 - 3p + 1 = 0$.
Met de *abc*-formule volgt $p = 1$ of $p = \frac{1}{2}$.
$\cos(x) = 1$ geeft $x = 0 + k \cdot 2\pi$
en $\cos(x) = \frac{1}{2}$ geeft
$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

8-4

Differentiëren

26 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$.

a Bij welke waarden van x is de helling gelijk aan 0?

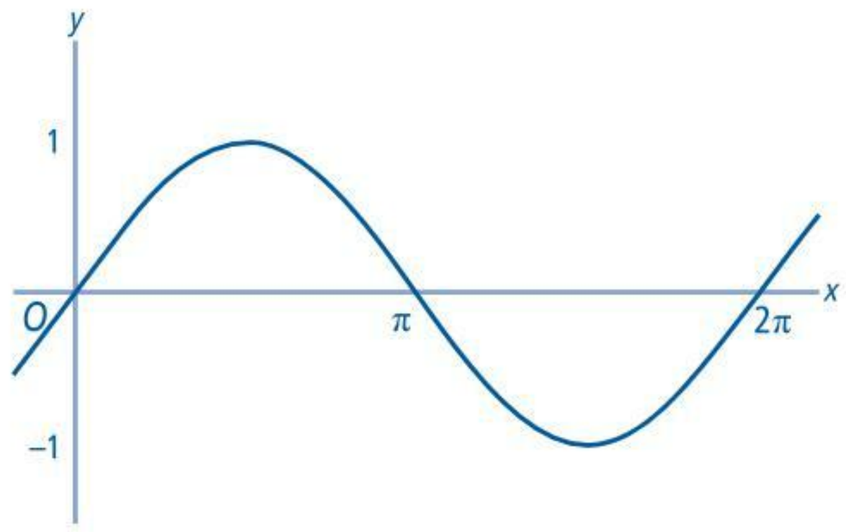
b Benader $f'(0)$ met je rekenmachine.

c Schets de grafiek van f' op het interval $[0, 2\pi]$.

d Wat is vermoedelijk het functievoorschrift van f'?

e Je krijgt de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ door de grafiek van f over een afstand $\frac{1}{2}\pi$ naar links te schuiven.

Maak hiervan gebruik om de afgeleide functie van g te vinden.



Theorie

De **afgeleiden van de sinus- en cosinusfunctie**:

Als $f(x) = \sin(x)$ dan is $f'(x) = \cos(x)$.

Als $g(x) = \cos(x)$ dan is $g'(x) = -\sin(x)$.

Voorbeeld

Bereken de afgeleide van $f(x) = -3\cos(x)$, $g(x) = 2\sin(5x)$ en $h(x) = \cos^3(x)$

Oplossing

$f'(x) = -3 \cdot -\sin(x) = 3\sin(x)$

Met de kettingregel volgt:
$g'(x) = 2\cos(5x) \cdot 5 = 10\cos(5x)$.

Schrijf $h(x) = (\cos(x))^3$.
Met de kettingregel vind je
$h'(x) = 3(\cos(x))^2 \cdot -\sin(x)$
dus $h'(x) = -3\cos^2(x) \cdot \sin(x)$.

27 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 5\cos(x)$

b $k(x) = x - \cos(x)$

c $l(x) = 3\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

d $m(x) = \sin^2(x)$

H 28 Differentieer.

a $f(x) = \frac{1}{2}\cos^2(x)$

b $g(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

c $p(x) = x^2 \cdot \sin(2x)$

d $r(t) = \dfrac{2\cos(t)}{1 + 3\sin(t)}$

29 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\cos(3x)}{\sin(3x)}$

Laat zien dat $f'(x) = \dfrac{-3}{\left(\sin(3x)\right)^2}$

30 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin^2(x)$ en $g(x) = \cos^2(x)$.

a Differentieer de functies f en g.
Welk verband is er tussen $f'(x)$ en $g'(x)$?

b Bereken de afgeleide van $s(x) = f(x) + g(x)$.
Verklaar het resultaat met behulp van de regel $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

c Bereken ook de afgeleide van $v(x) = f(x) - g(x)$.

d Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van v op het interval $[0, 2\pi]$.

© Noordhoff Uitgevers bv

31 Tijdens de ademhaling verandert de luchtdruk in de longen. Voor een persoon in rust is het volgende model een redelijke benadering: $p(t) = -20 \sin(0{,}4\pi t)$ met t in seconden en p de luchtdruk.

a Bereken de periode van deze functie.

b Bereken $p'(1)$.
Ademt de persoon op het tijdstip $t = 1$ in of uit?

c Hoe groot is de maximale snelheid waarmee de luchtdruk toeneemt of afneemt? Op welke tijdstippen komt dit voor?

32 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

a Plot de grafiek van f en los op: $f(x) = 0$.

b Bereken de tweede afgeleide van f en plot de grafiek van f''.

c Los de vergelijking $f''(x) = 0$ op.

d Voor de functie f geldt: $f''(x) = -f(x)$.
Ga na of deze eigenschap voor alle functies g met $g(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$ geldt.

H 33 Gegeven is de functie $f(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

a Plot en schets de grafiek van f.

b Bereken exact de extreme waarden van f.

c De functie is gelijk aan de functie $g(x) = \sin(bx)$.
Welke waarde heeft b?

34 Gegeven is de familie van functies $f_{a,b}(x) = a\sin(bx)$ en de lijn l: $y = 3x$.

a Lijn l raakt de grafiek van $f_{a,b}$ in het punt $(0, 0)$.
Wat weet je nu over de waarden van a en b?

b Geef de waarden van a en b als bovendien gegeven is dat het maximum van $f_{a,b}$ gelijk is aan 5.

35 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sin^3(x)$.

a Plot en schets de grafiek van f op het interval $[0, 2\pi]$.

b Bereken exact de extreme waarden van f.

c Toon aan dat de punten waarin de grafiek van f de x-as snijdt tevens buigpunten van de grafiek zijn.

d Laat met een berekening zien, dat de grafiek van f ook buigpunten heeft voor de waarden van x waarvoor geldt $\cos^2 x = \frac{1}{3}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

8-5

Integreren

36 Gegeven is de functie $f(x) = \cos(3x)$.

a Toon aan dat $g(x) = \sin(3x)$ geen primitieve van f is.

b Voor welke waarde van p is $h(x) = p\sin(3x)$ wél een primitieve van f?

Theorie

De primitieven van $f(x) = \sin(px)$ en $g(x) = \cos(px)$ zijn $F(x) = -\frac{1}{p}\cos(px) + C$ en $G(x) = \frac{1}{p}\sin(px) + C$.

Voorbeeld

Geef de primitieven van $f(x) = 2\sin(5x)$ en $g(x) = 3\cos(2x)$.

Oplossing

Neem aan dat $F(x) = a \cdot \cos(5x)$ dan geldt
$F'(x) = a \cdot -\sin(5x) \cdot 5 = -5a \cdot \sin(5x)$.
Omdat $F'(x) = f(x)$ geldt $-5a = 2$ dus $a = -\frac{2}{5}$
De primitieven zijn $F(x) = -\frac{2}{5}\cos(5x) + C$.
Uit $G(x) = a\sin(2x)$ volgt
$g(x) = G'(x) = a \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 2a \cdot \cos(2x)$
$2a = 3$ dus $a = 1\frac{1}{2}$
$G(x) = 1\frac{1}{2}\sin(2x) + C$

H 37 Geef de primitieven van de volgende functies.

a $f(x) = \sin(x) + \cos(2x)$

b $g(x) = \sin(2x) - \cos(3x)$

c $h(x) = 2 - 3\sin(4x)$

d $k(x) = -3\sin(5x) + 4\cos(2x)$

38 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.

a Bereken exact $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$, $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ en $\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx$.

b Geef met behulp van de grafiek een verklaring voor het verband tussen de antwoorden bij opdracht a.

c De lijn $y = \frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f op het interval $[0, 2\pi]$ in twee punten.
Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{2}$ en de grafiek van f.

H 39 Primitiveer de volgende functies.

a $f(x) = 1\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

b $g(x) = 2 - 3\cos(4 - 2x)$

c $h(x) = \pi\sin(2\pi x)$

d $l(x) = 3\sin(4x) + \cos(\pi - x)$

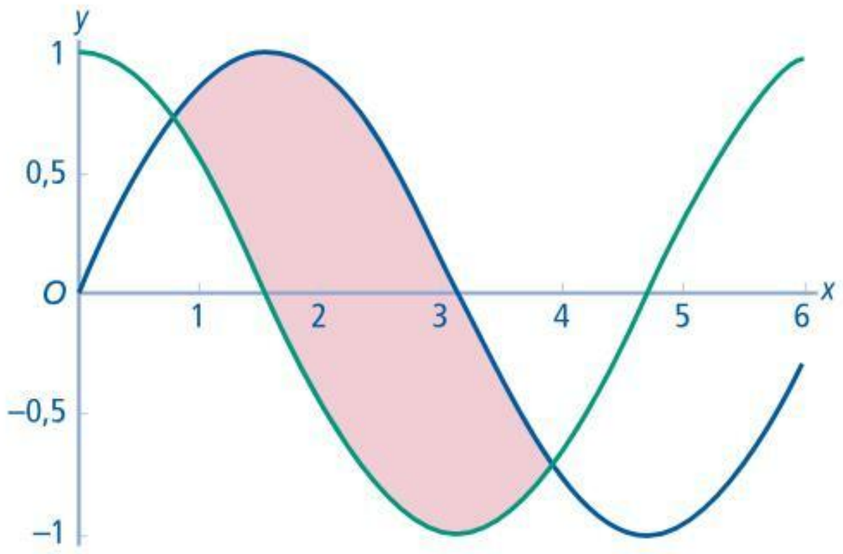
40 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$.
Toon aan dat $f(x) = \left(\sin(x)\right)^2$ en $G(x) = -\left(\cos(x)\right)^2$ beide primitieve functies van f zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

41 Hiernaast staan de grafieken van de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

a Geef de exacte coördinaten van de beide snijpunten van deze grafieken.

b Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g.



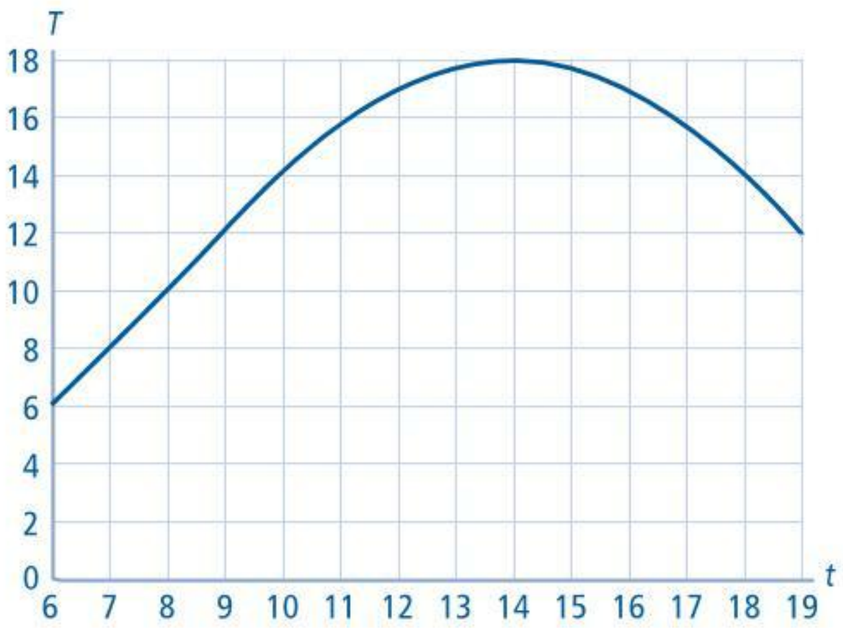
42 Gegeven is de formule $T = 10 + 8\cos\left(\frac{\pi}{12}(t - 14)\right)$.

a Toon aan dat T maximaal is als $t = 14$.

b Bereken algebraïsch de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de lijnen $t = 6$ en $t = 18$, de grafiek van T en de t-as.

c De oppervlakte die je in opdracht b hebt berekend, is gelijk aan de oppervlakte van een rechthoek die wordt ingesloten door de lijnen $t = 6$ en $t = 18$, de t-as en de horizontale lijn $T = C$, waarbij C een constante is.
Bereken C.

d Welke betekenis heeft het getal C in deze situatie?



43 Gegeven zijn de functies $g_p(x) = \sin(px)$, met p geheel en positief.
Voor welke waarden van p geldt $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} g_p(x)\,dx = 0$?

44 Bereken in de volgende gevallen exact de waarde van a.

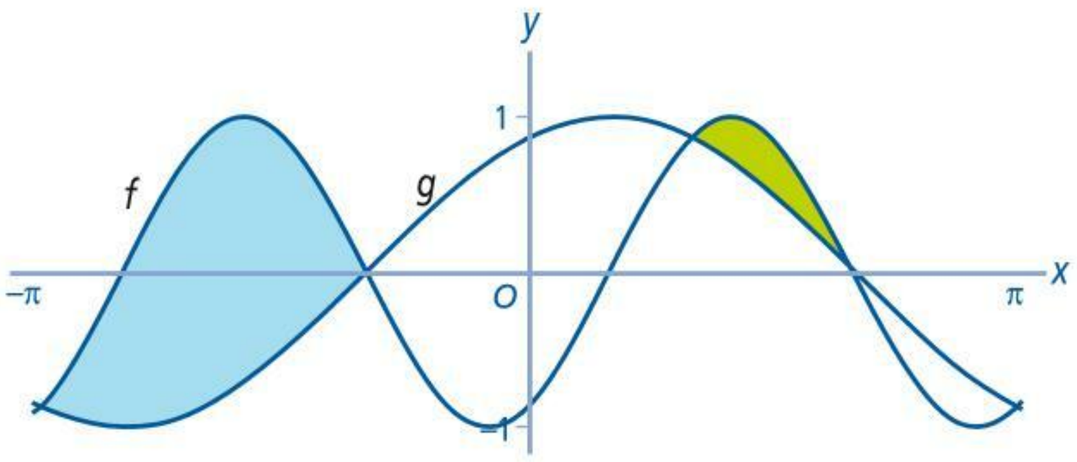
a $M(x) = a \cdot \cos^3(x)$ is een primitieve van $m(x) = 3\sin(x) \cdot \cos^2(x)$.

b $Q(x) = \frac{a}{\sin^2(2x)}$ is een primitieve van $q(x) = \frac{4\cos(2x)}{3\sin^3(2x)}$

45 Gegeven zijn de functies $f(x) = \cos\left(2x - \frac{5}{6}\pi\right)$ en $g(x) = \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$.

a Los exact op $f(x) = g(x)$ op het interval $[-\pi, \pi]$.

b Bereken exact de oppervlakte van elk van de gekleurde gebieden die door de grafieken van f en g worden ingesloten.



© Noordhoff Uitgevers bv

8-6

Tangensfuncties

46a Plot en schets de grafiek van $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ op het interval $[-\pi, \pi]$.

b Verklaar met behulp van het functievoorschrift dat de grafiek van f verticale asymptoten heeft. Geef de vergelijkingen van de asymptoten.

c Geef de nulpunten en de periode van f.

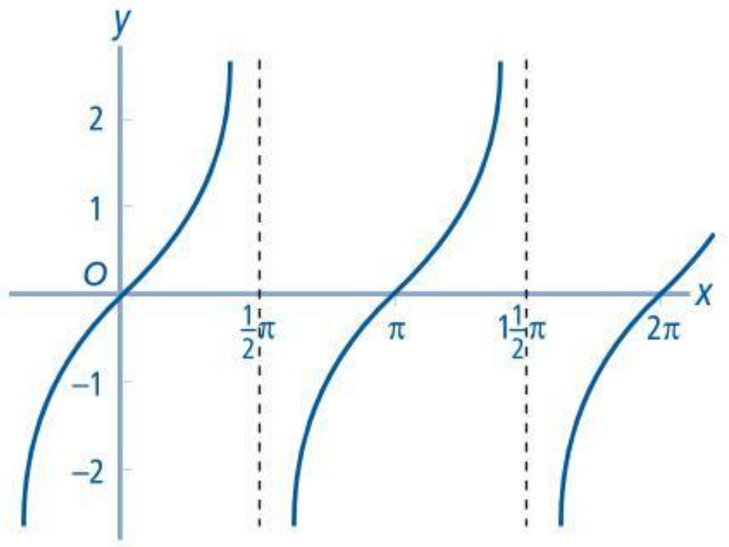
Theorie

De functie $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ heet de **tangensfunctie**.

Je schrijft deze functie als $f(x) = \tan(x)$.

Voor de tangensfunctie geldt:

- De nulpunten zijn dezelfde als die van de sinusfunctie.
- De periode is gelijk aan π.
- De grafiek heeft verticale asymptoten als $\cos(x) = 0$, verticale asymptoten zijn $x = .., -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, ...$ dus $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ met k geheel.
- De grafiek is puntsymmetrisch in onder andere $(0, 0)$.



47a Je weet dat $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ en $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Toon aan dat $\tan\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

b Je kent nog enkele andere exacte waarden van de sinus en de cosinus. Gebruik deze om de tabel hiernaast in te vullen.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\tan(x)$	…	…	…	…	…

48 Toon met behulp van de periode of de symmetrie van de grafiek van $y = \tan(x)$ aan dat de volgende formules juist zijn.

a $\tan(-x) = -\tan(x)$

b $\tan(\pi + x) = \tan(x)$

H 49 Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \tan(x)$.

a Plot en schets de grafiek van f op het interval $[-\pi, \pi]$.

b Geef alle oplossingen van $f(x) = 4$ op $[-\pi, \pi]$.

c Los exact op: $f(x) \leq 0$ op $[-\pi, \pi]$.

50a Bereken met de quotiëntregel de afgeleide van $f(x) = \tan(x)$.

b Toon aan dat geldt $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en laat zien dat ook geldt $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

c Welke waarden kan deze afgeleide aannemen?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

De oplossingen van vergelijkingen van de vorm $\tan(A) = \tan(B)$ vind je met $A = B + k \cdot \pi$.

Als $f(x) = \tan(x)$, dan is $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

Voorbeeld

Los exact op $\tan(3x) = \tan\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

Oplossing

$\tan(A) = \tan(B)$
met $A = 3x$ en $B = x + \frac{1}{2}\pi$ geeft
$\tan(3x) = \tan\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$
$3x = x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

H 51 Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\tan\left(-\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{3}$

b $\tan(2x) = \tan\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$

c $\tan^2(x) = 1$

d $\tan(2x) = -\tan\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

e $2\cos(x) = 3\tan(x)$

H 52 Differentieer.

a $f(x) = 2\tan(3x)$

b $g(x) = \frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{2}\pi - 2x\right)$

c $h(x) = \sin(x) \cdot \tan(x)$

53 Gegeven is de functie $f(x) = \tan\left(\frac{1}{4}\pi x^2\right)$.

a Laat zien dat het punt $P(1, 1)$ op de grafiek van f ligt.

b Geef een vergelijking van de raaklijn in $P(1, 1)$ aan de grafiek van f.

Bij het oplossen van vergelijkingen met de vorm $p\sin(A) = q\cos(A)$ kun je de tangens gebruiken.

54 Los exact op.

a $4\sin(3x) = -4\cos(3x)$

b $3\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{3}\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$

c $\sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$

Voorbeeld

Los op $6\sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right) = 2\sqrt{3}\cos\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right)$.

Oplossing

$\sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}\cos\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right)$
$\dfrac{\sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right)}{\cos\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right)} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\tan\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \tan\left(\frac{1}{6}\pi\right)$
$3x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$
$3x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$
$x = \frac{5}{36}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$

55 De functies $f_a(x) = a \cdot \sin(x)$ en $g(x) = \tan(x)$ zijn gegeven op het interval $\left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$.

Vul de volgende tabel in.
Licht je antwoord toe.

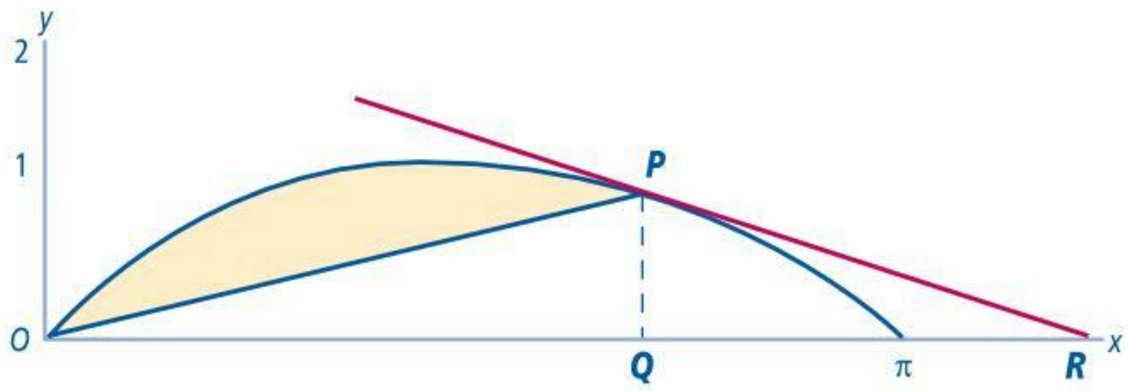
aantal oplossingen van $f_a(x) = g(x)$	0	1	2	3	meer dan 3
waarden van a					

© Noordhoff Uitgevers bv

8-7

Gemengde opdrachten

56 Hiernaast staat de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[0, \pi]$. Op de grafiek van f ligt het punt P met x-coördinaat $1\frac{4}{5}$.



De projectie van P op de x-as is het punt Q. De raaklijn in P aan de grafiek van f snijdt de x-as in R.

a Bereken met een integraal de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn OP. Geef je antwoord in twee decimalen.

b Het punt $P(p, \sin(p))$ ligt op de grafiek van f met $\frac{1}{2}\pi \le p \le \pi$.

Leg uit dat $y = (x - p) \cdot \cos(p) + \sin(p)$ een vergelijking is van de raaklijn in P aan de grafiek van f.

c Laat zien dat de x-coördinaat van R gelijk is aan $p - \tan(p)$.

57 Gegeven is de functie $f_a(x) = \tan^2(x) - a \cdot \tan(x)$ op het interval $\left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$.

a Neem $a = \sqrt{3}$ en plot en schets de grafiek van $f_{\sqrt{3}}$.

b Bereken exact de nulpunten van $f_{\sqrt{3}}$.

c Geef het functievoorschrift van f'_a.

d Bereken exact voor welke waarden van a de functie f_a een extreme waarde -1 heeft.

58 Gegeven is de functie $f(x) = 2x \cdot \sin(x)$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.

a Plot en schets de grafiek van f.

b Bereken exact de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van de grafiek van f en de lijn met vergelijking $y = x$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.

c Bereken $f'(2)$.

d De grafiek van f heeft een top in de buurt van $x = 2$. Leg met behulp van het antwoord van opdracht c uit, of deze top links of rechts van de lijn $x = 2$ ligt.

e Toon aan dat $F(x) = -2x \cdot \cos(x) + 2\sin(x)$ een primitieve van f is en bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as tussen $x = 0$ en $x = \pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

59a Van een getal x uit het interval $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ is gegeven dat $3\sin(x) = \cos(x)$.
Bereken exact de waarden van $\sin(x)$ en $\cos(x)$.

b Los onderstaande vergelijkingen exact op op het interval $[0, 2\pi]$.

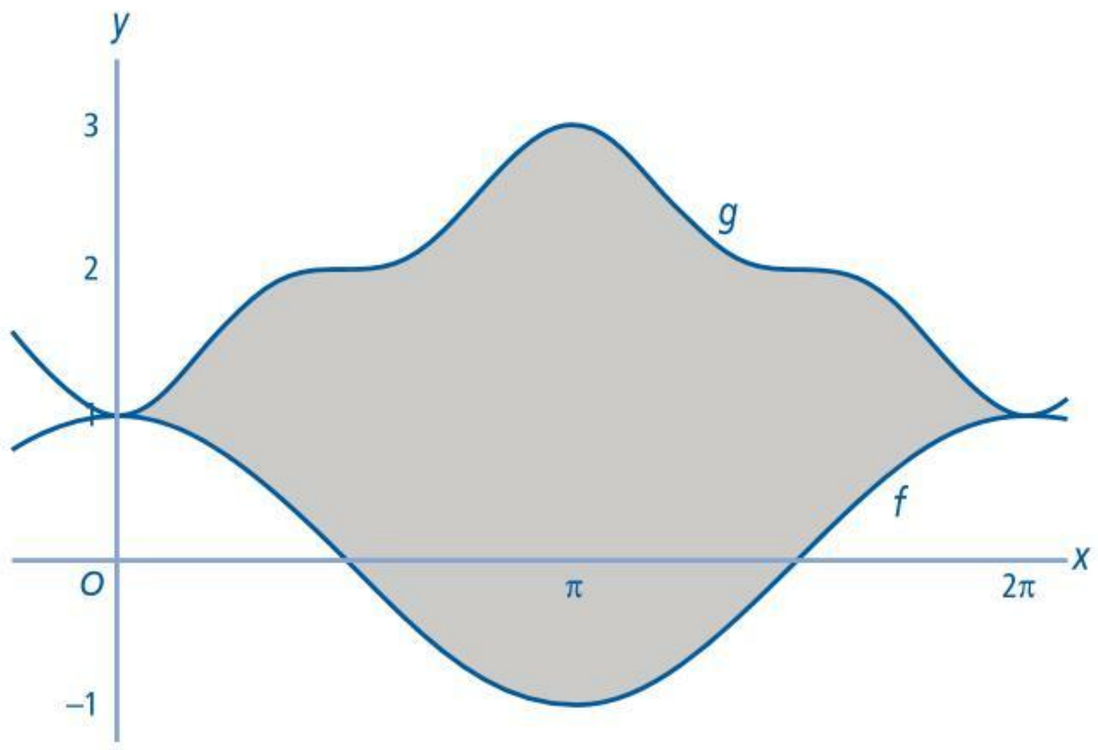
A $2\sin^3(x) - \sin x = 0$ **B** $\dfrac{1}{\cos(x)} + \tan(x) = 2\cos(x)$

60 Gegeven zijn de functies $f(x) = \cos(x)$ en $g(x) = 2 - \cos^3(x)$.

a Toon aan dat de grafieken van f en g elkaar raken in de punten met $x = 0 + k \cdot 2\pi$.

b Toon aan dat $H(x) = \sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x)$ een primitieve is van de functie $h(x) = \cos^3(x)$.

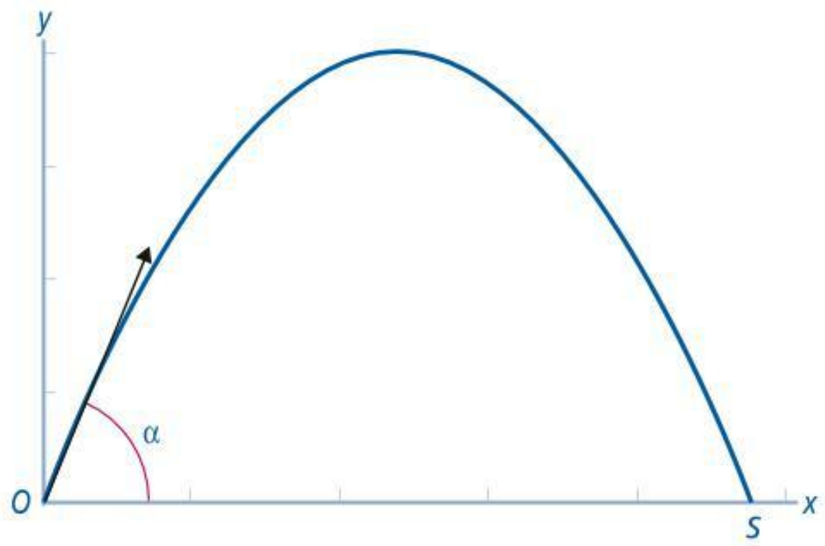
c Bereken de oppervlakte van het gebied dat tussen $x = 0$ en $x = 2\pi$ wordt ingesloten door de grafieken van f en g.



61 Hiernaast is in een assenstelsel de baan getekend van een voorwerp dat met een snelheid van 50 m/s wordt weggeschoten onder een hoek α met de horizontale richting. Voor α geldt: $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$.

Na t seconden is het voorwerp in het punt (x, y) gekomen. Hiervoor gelden de formules
$x = 50t\cos(\alpha)$ en $y = -5t^2 + 50t\sin(\alpha)$.

a Na hoeveel seconden komt het voorwerp weer op de grond, als gegeven is dat $\alpha = \frac{1}{3}\pi$?
Hoeveel meter heeft het voorwerp dan afgelegd in horizontale richting?



In de volgende opdrachten is α een willekeurige hoek.
Als het voorwerp weer op de grond komt heeft het s meter in horizontale richting afgelegd.
Het is mogelijk om s uit te drukken in α.

b Laat zien dat de tijd die verloopt tussen het wegschieten van het voorwerp en het weer neerkomen op de grond voldoet aan $t = 10\sin(\alpha)$.

c Stel een formule op voor het verband tussen s en α.

d Voor welke waarde van α is s maximaal?
Geef de maximale waarde van s.

© Noordhoff Uitgevers bv

Samenvatting

Harmonische trilling, trillingstijd en frequentie

Als de grafiek van een trilling een sinusoïde is, dan is er sprake van een harmonische trilling. De frequentie van een periodieke functie is het aantal perioden per tijdseenheid. De eenheid voor het aantal trillingen per seconde is hertz (Hz).

Bij een harmonische trilling is de formule voor de uitwijking u te schrijven als $u = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$

a is de amplitude, T is de periode en voor de frequentie f geldt: $f = \frac{1}{T}$

Goniometrische formules

$\sin(-x) = -\sin(x)$ $\quad$ $\cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ $\quad$ $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ $\quad$ $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

$\sin(\pi - x) = \sin(x)$ $\quad$ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ $\quad$ $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

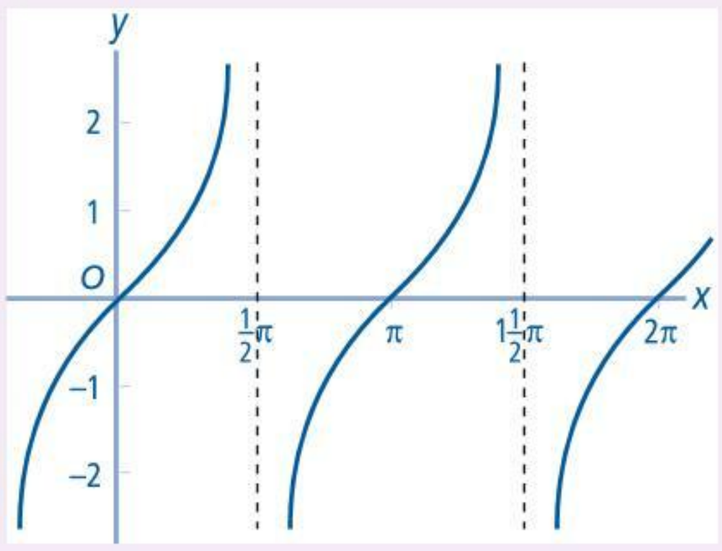
Tangensfunctie

Voor de tangensfunctie geldt $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

De periode van deze functie is π.

De exacte oplossingen van $\tan(A) = \tan(B)$ volgen uit $A = B + k \cdot \pi$.



Exacte oplossingen van sin(*A*) = sin(*B*) en van cos(*A*) = cos(*B*)

De oplossingen van $\sin(A) = \sin(B)$ volgen uit $A = B + k \cdot 2\pi$ en $A = \pi - B + k \cdot 2\pi$.

De oplossingen van $\cos(A) = \cos(B)$ volgen uit $A = B + k \cdot 2\pi$ en $A = -B + k \cdot 2\pi$.

exacte waarden van sin, cos en tan

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Afgeleide en primitieve functies

functie	*afgeleide*	*primitieven*
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
$g(x) = \sin(ax)$	$g'(x) = a\cos(ax)$	$G(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$
$h(x) = \cos(x)$	$h'(x) = -\sin(x)$	$H(x) = \sin(x) + C$
$k(x) = \cos(ax)$	$k'(x) = -a\sin(ax)$	$K(x) = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$
$m(x) = \tan(x)$	$m'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt vergelijkingen met sinus of cosinus oplossen

Eventueel herschrijf je de vergelijking eerst in de vorm $\sin(A) = \sin(B)$ of $\cos(A) = \cos(B)$ door gebruik te maken van goniometrische formules.

Voorbeeld

Los de vergelijking $\sin\left(3x + \frac{1}{4}\pi\right) = \sin(2x)$ exact op op het interval $[0, 2\pi]$.

Oplossing

Gebruik de regel: Uit $\sin(A) = \sin(B)$ volgt $A = B + k \cdot 2\pi$ en $A = \pi - B + k \cdot 2\pi$.

$3x + \frac{1}{4}\pi = 2x + k \cdot 2\pi$ of $3x + \frac{1}{4}\pi = \pi - 2x + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $5x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{3}{20}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn:

$x = 1\frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{3}{20}\pi$, $x = \frac{11}{20}\pi$, $x = \frac{19}{20}\pi$, $x = 1\frac{7}{20}\pi$ (en $x = 1\frac{15}{20}\pi = 1\frac{3}{4}\pi$, maar die is al gevonden)

Je kunt van goniometrische functies differentiëren en primitiveren

Denk aan het gebruik van de kettingregel, zowel bij het differentiëren als bij het primitiveren.

Voorbeeld 1

Geef de afgeleide van $f(x) = \sin^2(3x) + \dfrac{1}{\cos(2x)}$

Oplossing

Schrijf eerst $f(x) = (\sin(3x))^2 + (\cos(2x))^{-1}$.

$f'(x) = 2\sin(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3 + -1(\cos(2x))^{-2} \cdot -\sin(2x) \cdot 2$

$f'(x) = 6\sin(3x) \cdot \cos(3x) + \dfrac{2\sin(2x)}{\cos^2(2x)}$

Voorbeeld 2

Geef de primitieven van $g(x) = 2\cos(3x)$.

Oplossing

$G(x) = 2 \cdot \frac{1}{3}\sin(3x) + C$,

dus $G(x) = \frac{2}{3}\sin(3x) + C$.

Je kunt vergelijkingen met de tangens oplossen

Uit $\tan(A) = \tan(B)$ volgt $A = B + k \cdot \pi$.

Voorbeeld

Los exact op $\tan\left(3x + \frac{1}{3}\pi\right) = -\sqrt{3}$ op het interval $[-\pi, \pi]$.

Oplossing

$\tan\left(3x + \frac{1}{3}\pi\right) = \tan\left(-\frac{1}{3}\pi\right)$ want $-\sqrt{3} = -\tan\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \tan\left(-\frac{1}{3}\pi\right)$

$3x + \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

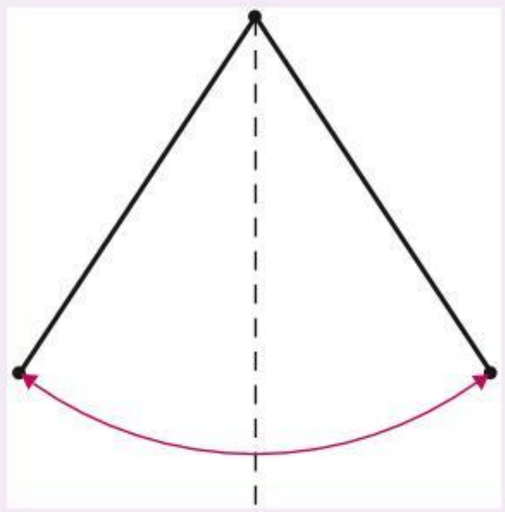
$3x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$ dus $x = -\frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$

De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn $-\frac{8}{9}\pi$, $-\frac{5}{9}\pi$, $-\frac{2}{9}\pi$, $\frac{1}{9}\pi$, $\frac{4}{9}\pi$ en $\frac{7}{9}\pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Test jezelf

T-1 Een slinger wordt op tijdstip $t = 0$ in een uiterste stand losgelaten. De uitwijking u van de slinger ten opzichte van de evenwichtsstand na t seconden wordt gegeven door $u = 2{,}5 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(t + 1)\right)$, met u in centimeters en t in seconden.



a Bereken de periode van deze slingerbeweging.

b Een andere slinger heeft frequentie 3 Hz en een maximale uitwijking van 2 cm. De uitwijking is maximaal bij $t = 0$. Geef een formule voor de uitwijking w van deze slinger.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-1.

T-2 De grafiek van een functie f is een sinusoïde met periode 4, amplitude 0,3 en evenwichtsstand $y = -0{,}5$.
Een functie $g(x) = \sin(bx)$ heeft dezelfde periode als f.
Als de grafiek van g één kwart periode naar rechts wordt verschoven, hebben de functies f en g maxima en minima voor dezelfde waarden van x.

a Geef een functievoorschrift van g.

b Maak een schets van de grafiek van f.

c Geef een functievoorschrift van f.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-1.

T-3a Schrijf het functievoorschrift van $f(x) = -\cos\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right)$ in de vorm $f(x) = \sin(px + q)$.

b Bereken exact de waarden van $\cos(x)$ als $\sin(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

c Bereken exact de waarden van $\sin(x)$ als $\cos(x) = \frac{2}{5}\sqrt{3}$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-2.

T-4 Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\cos\left(2x + \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) = \sin(-4x)$

c $\cos(2x) = \cos\left(1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x\right)$

d $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$

e $2\sin^2(2x) + 3\sin(2x) = 2$

f $4\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 1 + 4\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-3.

T-5 Bereken de afgeleide van de volgende functies.

a $f(x) = 2\sin(3(x - 0{,}25\pi))$

b $g(x) = x - \cos(5 - 2x)$

c $h(x) = 0{,}5\sin^4(3x)$

d $k(x) = \dfrac{3}{\cos^2(5x)}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-4.

© Noordhoff Uitgevers bv

T-6 Bereken exact de volgende integralen.

a $\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} (2\sin(x) - \cos(x))\,dx$

b $\int_{0}^{1\frac{1}{4}\pi} (2 + x + 2\sin(4x))\,dx$

c $\int_{1}^{2} \left(\sin(\pi x) - 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi x\right)\right) dx$

d $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} (2\sin(x) - \sin(2x))\,dx$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-5.

T-7 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ en $g(x) = \tan(x)$.

a Plot en schets de grafiek van f op het interval $[0, 2\pi]$.

b Geef de exacte nulpunten en de periode van f.

c Geef de exacte vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f.

d Los op: $f(x) = 2$ voor $0 \le x \le 2\pi$.

e Los exact op: $f(x) \le 1$ voor $0 \le x \le 2\pi$.

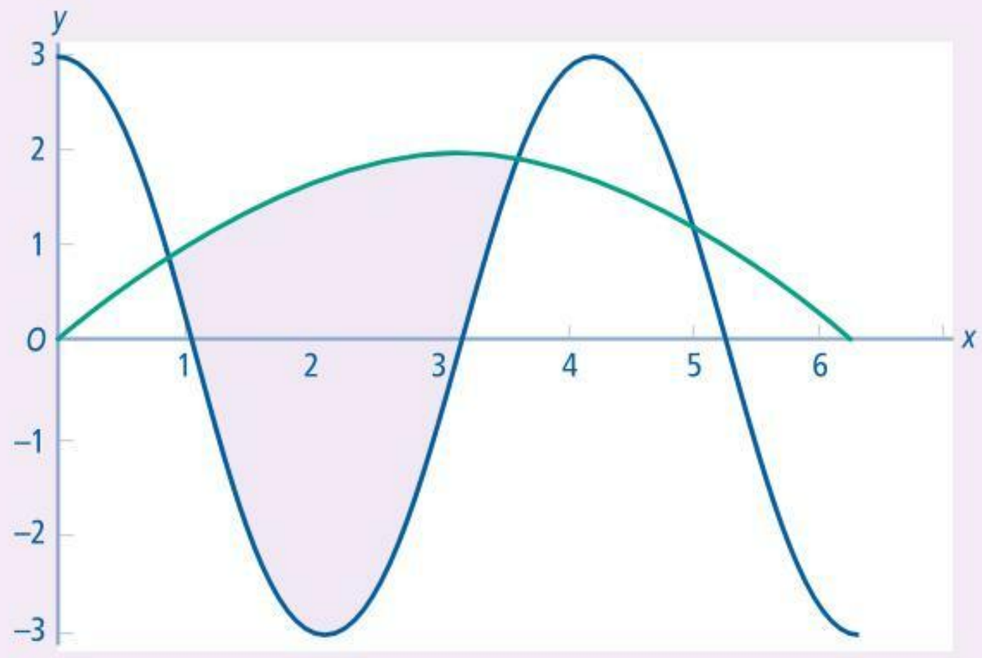
f Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van $h(x) = f(x) + g(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-6.

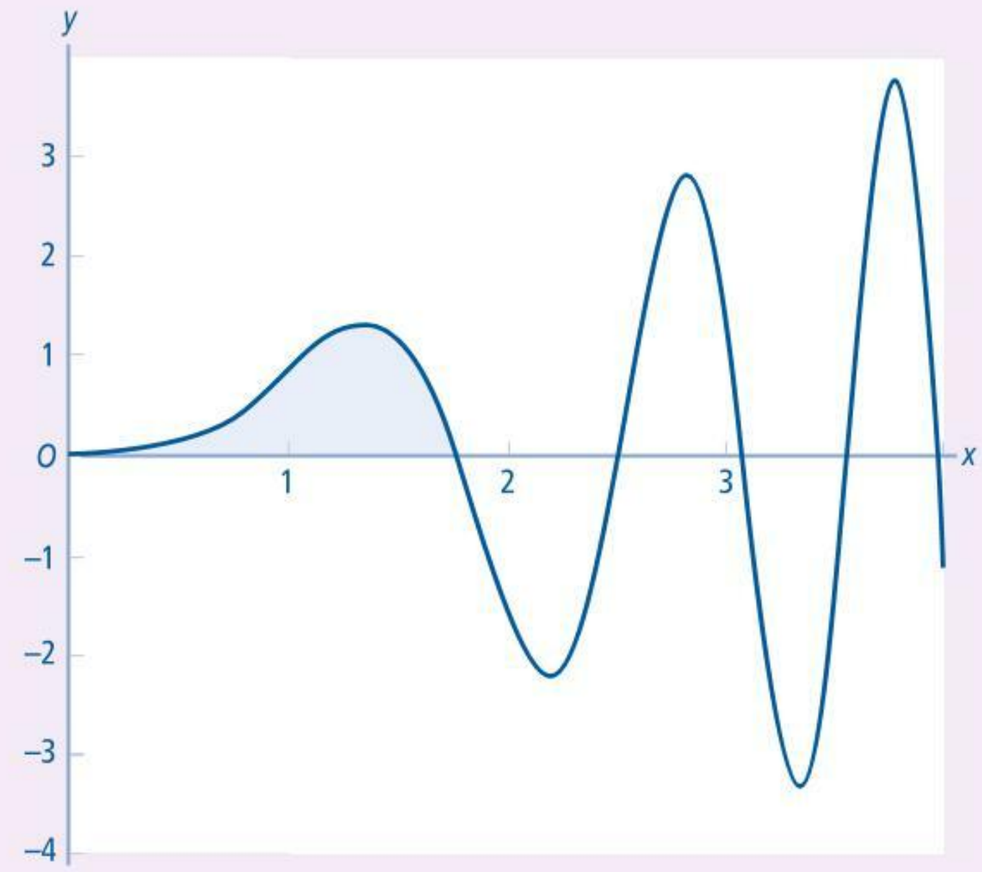
T-8 Hiernaast staan de grafieken van de functies $f(x) = 3\cos\left(1\frac{1}{2}x\right)$ en $g(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

a Los op $f(x) = g(x)$ op $[0, 2\pi]$. Rond af op twee decimalen.

b Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van het gekleurde gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g.
Rond je antwoord af op twee decimalen.



T-9 Hiernaast staat de grafiek van $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$.
Een primitieve van f heeft de vorm $F(x) = p \cdot \cos(x^2)$.
Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde vlakdeel.



T-10 Gegeven is de functie $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Gebruik een redenering, zonder te plotten, om uit te zoeken hoeveel nulpunten deze functie heeft op het interval $[0{,}05; 1]$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Basis**

B-1 Stel in de volgende gevallen een functievoorschrift op.

a Een trilling heeft een amplitude 0,7 en een frequentie 200, de evenwichtsstand is $y = 2{,}5$ en de uitwijking op $t = 0$ is maximaal.

b De grafiek van een functie is een sinusoïde met drie opeenvolgende toppen $(5, 14)$, $(8, 8)$ en $(11, 14)$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-1.

B-2 Herleid de volgende uitdrukkingen. Kies voor het antwoord uit $\sin(x)$, $-\sin(x)$, $\cos(x)$ of $-\cos(x)$.

a $\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$

b $\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

c $\sin\left(1\frac{1}{2}\pi - x\right)$

d $\cos\left(1\frac{1}{2}\pi + x\right)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-2.

B-3 Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\sin(x) = \sin\left(2x + \frac{3}{4}\pi\right)$

b $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - 3x\right) = \cos(2x)$

c $2\sin^2(x) = 5\cos(x) - 1$

d $-\sin(2x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-3.

B-4 Differentieer.

a $f(x) = -3x + 5\cos(0{,}2x)$

b $g(x) = 3 - 21\sin(\pi(1 - x))$

c $h(x) = (1 + \cos(4x))^3$

d $k(x) = \dfrac{2}{3\cos(4x)}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-4.

B-5 Bereken exact.

a $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \left(3\cos(2x)\right) \mathrm{d}x$

b $\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} \left(4\sin(2x) + \cos(3x)\right) \mathrm{d}x$

c $\int_{0}^{1\frac{1}{2}\pi} \left(2\sin(x) + \cos(x) + 2\right) \mathrm{d}x$

d $\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \left(2\sin(x) + 3\cos(2x) - 4\sin(3x)\right) \mathrm{d}x$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-5.

B-6 Gegeven is de functie $f(x) = 1 - \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.

a Plot en teken de grafiek van f.

b Los exact op $f(x) = 2$.

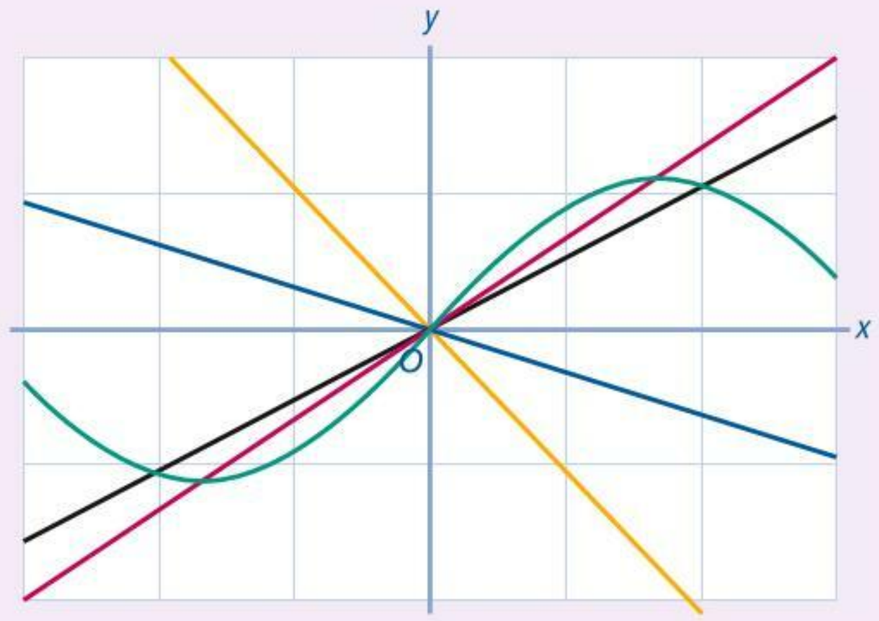
c Los exact op $f(x) \geq 0$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-6.

© Noordhoff Uitgevers bv

Extra oefening - **Gemengd**

G-1 Gegeven zijn de functie $f(x) = \sin(x)$ en de bundel van lijnen $y = ax$. Hiernaast is de grafiek van f getekend met een aantal lijnen uit de bundel.



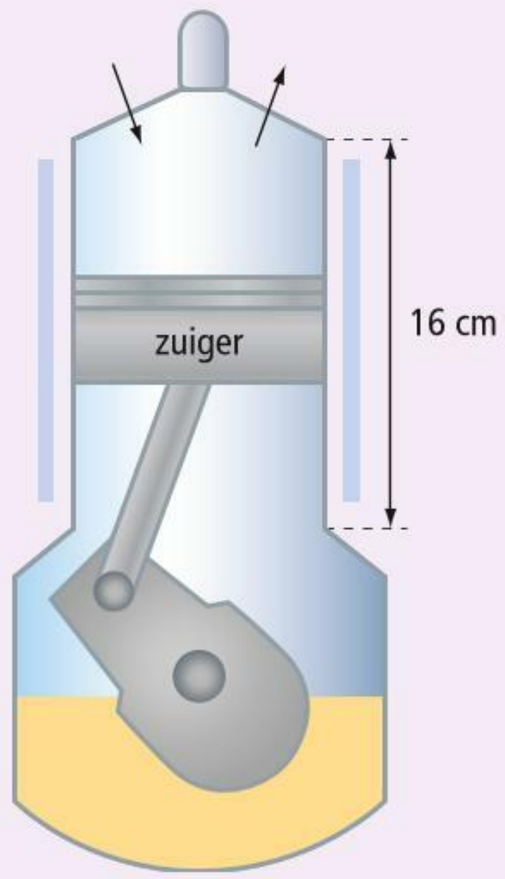
a Welke lijn uit de bundel $y = ax$ raakt de grafiek van f in $(0, 0)$?

b Onderzoek voor welke waarden van a de grafiek van f één snijpunt heeft met de lijn $y = ax$.

c Is er een waarde van a waarvoor er twee snijpunten zijn? Leg je antwoord uit.

d Eén van de lijnen $y = ax$ snijdt de grafiek van f in het punt met $x = \frac{1}{2}\pi$.
Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door deze lijn, de x-as en de grafiek van f.

G-2 Een bromfietsmotor heeft meestal één cilinder waarin de zuiger op en neer beweegt. De zuiger brengt de aandrijfas in beweging. Het verschil tussen de hoogste en de laagste stand van de zuiger is 16 cm. De aandrijfas maakt 100 omwentelingen per minuut.
De hoogte van de zuiger in cm ten opzichte van de laagste stand kun je beschrijven met een sinusfunctie.
Op $t = 0$ bevindt de zuiger zich 4 cm boven het laagste punt en beweegt op dat tijdstip omhoog.



a Leg uit dat voor de hoogte van de zuiger geldt

$h = 8 + 8\sin\left(\frac{2\pi}{0{,}6}(t - 0{,}05)\right)$ met t in seconden.

b Bereken $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ voor $t = 5$.

c Wat is de praktische betekenis van het antwoord op opdracht b?

d Hoe groot is de maximale snelheid waarmee de zuiger omhoog beweegt?

G-3 Gegeven is de functie $f(x) = \big(1 - \sin(x)\big) \cdot \cos(x)$.

a Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek op het interval $[-\pi, \pi]$.

b Toon aan dat voor de x-coördinaat van de buigpunten van de grafiek van f geldt $\cos(x) = 0$ of $\cos(x) = \frac{1}{4}\sqrt{15}$ of $\cos(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$.

c Toon aan dat $F(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\cos^2(x)$ een primitieve van f is.

d Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

© Noordhoff Uitgevers bv

Uitdagende opdrachten

U-1 Gegeven zijn de functies $f_{a,b}(x) = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x)$.

a Plot en schets de grafiek van $f_{1,1}$.

b Bereken exact de extreme waarden van $f_{1,1}$ op het interval $[0, 2\pi]$.

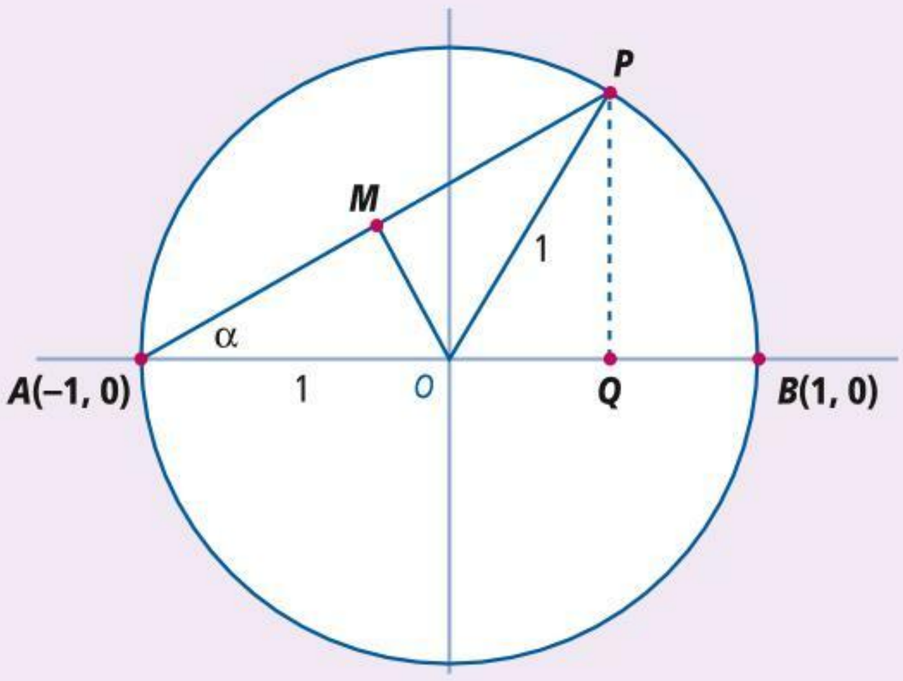
c Toon aan dat $f_{a,b}$ extreme waarden heeft als $\tan(x) = \frac{a}{b}$

d Gebruik de formule $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ om aan te tonen dat voor dezelfde waarden van x geldt $\sin(x) = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ en $\cos(x) = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

e Toon aan dat $\sqrt{a^2 + b^2}$ het maximum is van $f_{a,b}$.

Er bestaan ook formules waarmee sin(2x) en cos(2x) kunnen worden uitgedrukt in sin(x) en/of cos(x). Hierover gaan de opdrachten U-2 en U-3. Deze formules worden in klas 6 verder behandeld.

U-2 De formules $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ en $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$ kun je als volgt bewijzen.
In de figuur hiernaast is $A(-1, 0)$ en is $B(1, 0)$.
Punt P ligt op de eenheidscirkel met $\angle OAP = \alpha$.
Punt Q is de projectie van P op de x-as en punt M is het midden van AP, dus OM staat loodrecht op AP.



a Laat zien dat $\angle BOP = 2\alpha$ en $AP = 2\cos(\alpha)$.

b Gebruik $\triangle AQP$ om $\sin(2\alpha)$ en $\cos(2\alpha)$ uit te drukken in α.

c Toon aan dat $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ en $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$.

d Gebruik het resultaat van opdracht c en de formule $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ om aan te tonen dat $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ en $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$.

e Toon aan dat $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

U-3a Gebruik de formules uit opdracht U-2 om $\sin\left(\frac{1}{8}\pi\right)$, $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$ en $\tan\left(\frac{1}{8}\pi\right)$ exact te berekenen.

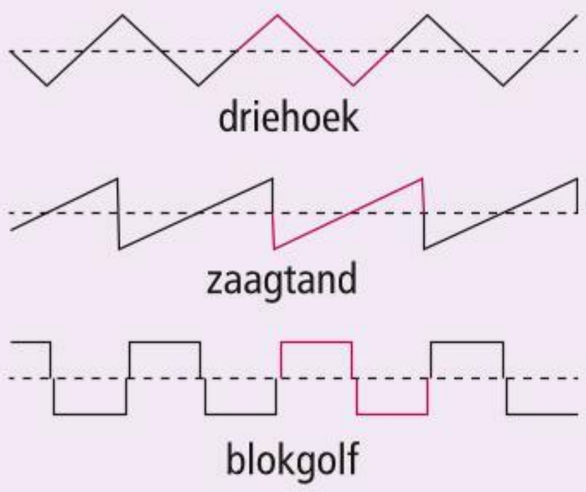
b Bereken de exacte waarden van $\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)$, $\cos\left(\frac{1}{12}\pi\right)$ en $\tan\left(\frac{1}{12}\pi\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

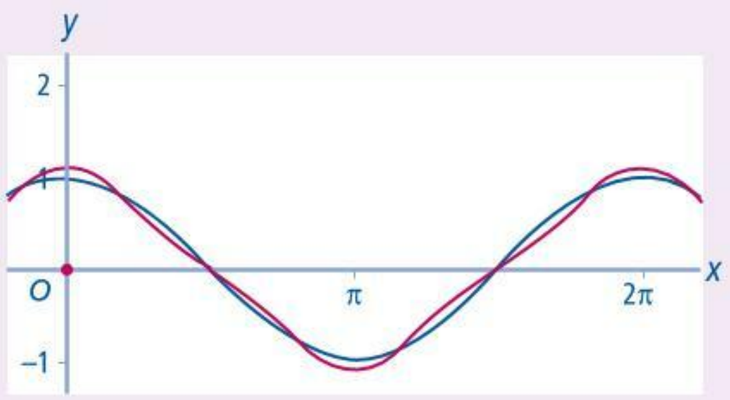
Fourier

Sinus en cosinus worden gebruikt als wiskundig model voor periodieke verschijnselen.
De Franse wiskundige Joseph Fourier (1768 – 1830) publiceerde in 1822 een baanbrekend boek over warmtetheorie: *Théorie analytique de la chaleur*.

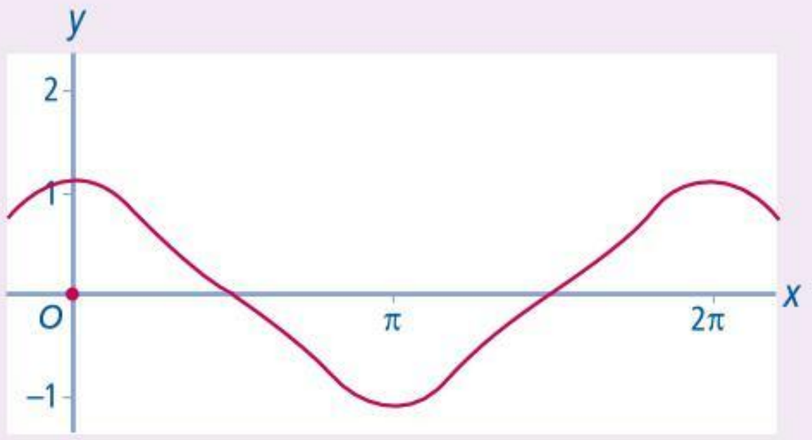
Daarbij ontwikkelde hij een methode om periodieke functies zoals de driehoeksgolf, de zaagtand en de blokgolf te benaderen met een (oneindige) som van sinussen en/of cosinussen.



In de afbeelding hieronder staan de grafieken van $f(x) = \cos(x)$ en $g(x) = \cos(x) + \frac{1}{9}\cos(3x)$.

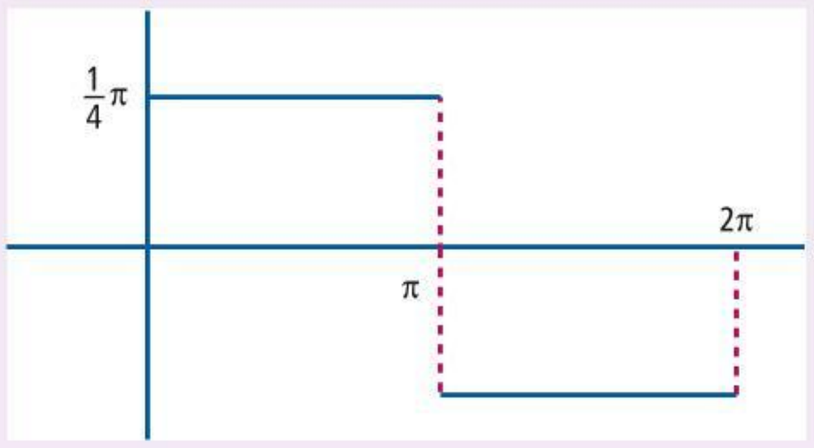


Je ziet dat de grafiek van g de driehoeksgolf al aardig benadert.
De benadering wordt beter als je er nog een term aan toevoegt:
$h(x) = \cos(x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{25}\cos(5x)$.



Opdracht
Bij de *blokgolf* hieronder hoort de functie

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi \text{ als } 0 < t < \pi \\ -\frac{1}{4}\pi \text{ als } \pi < t < 2\pi \end{cases} \text{ met periode } 2\pi.$$



a Plot de lijn $y = \frac{1}{4}\pi$ en in hetzelfde scherm de grafieken van de functies:
$y = \sin(t)$,
$y = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t)$ en
$y = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \frac{1}{7}\sin(7t)$

b Hoe meer termen van de vorm $\frac{1}{2n+1}\sin\big((2n+1)t\big)$ je toevoegt, des te nauwkeuriger wordt je benadering.
Voeg nog twee termen toe en plot de grafiek.

Opdracht
De grafiek van de functie $g(t) = \sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \frac{1}{4}\sin(4t)$ is een benadering van een *zaagtand* grafiek. Daarbij hoort op het interval $\langle -\pi, \pi \rangle$ de functie $f(t) = \frac{1}{2}t$.

a Plot de grafieken van f en g in één figuur.

b Breid het functievoorschrift van g uit met nog een aantal termen en geef met behulp van die uitbreiding van g een benadering van $\frac{1}{4}\pi = f\left(\frac{1}{2}\pi\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheden 4

Differentiëren

Voor het differentiëren van functies gelden de regels die hiernaast staan.

1 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 5x^4 - 4x^5 + 20$

b $g(x) = \frac{3}{x^2} + 4x\sqrt{x}$

c $h(x) = (2 - 2x) \cdot \cos(x)$

d $k(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\frac{1}{2}x - 1}$

e $m(x) = 3x + \sqrt{4x - x^2}$

f $n(x) = x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

g $p(x) = \frac{1 - \sin(2x)}{1 + \sin(2x)}$

h $q(x) = \frac{2}{\cos(5x)}$

2 Bereken exact de extreme waarden van de volgende functies.

a $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 1$

b $g(x) = \frac{1 - x}{3 + x^2}$

c $h(x) = \sqrt{-x^4 + 4x^2 + 5}$

d $k(x) = 2\cos^3(x) - 3\cos(x)$ op het interval $[-\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$.

3 Geef de extreme waarden van de volgende functies.

a $f(x) = |-x^3 + 6x^2 - 9x|$

b $g(x) = |-6x + 2x\sqrt{x}|$

4 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 9x$ en $g(x) = x^2 + 9x + p$.

a Neem $p = -5$ en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g in het punt met x-coördinaat -1.

b Voor welke waarden van x geldt $f'(x) = g'(x)$?

c Voor welke waarden van p raken de grafieken van f en g elkaar?

Voorbeeld

machtsfuncties $f(x) = x^a$
$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

somregel $s(x) = f(x) + g(x)$
$s'(x) = f'(x) + g'(x)$

productregel $f(x) = p(x) \cdot q(x)$
$f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$

quotiëntregel $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$
$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

kettingregel $k(x) = g(f(x))$
$k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

sinusfunctie $f(x) = \sin(x)$
$f'(x) = \cos(x)$

cosinusfunctie $f(x) = \cos(x)$
$f'(x) = -\sin(x)$

© Noordhoff Uitgevers bv

Lijnen en cirkels

5 Gegeven is lijn l door de punten $A(2, -5)$ en $B(-3, 2)$.

a Bereken de richtingscoëfficiënt van lijn l.

b Geef een vergelijking van lijn l in de vorm $y = mx + n$.

c Geef ook een vergelijking van lijn l in de vorm $ax + by = c$, waarbij a, b en c gehele getallen zijn.

Theorie

Een **vergelijking van een lijn** kan worden gegeven in de vorm $y = mx + n$ of in de vorm $ax + by = c$.
Een **vergelijking van een cirkel** met middelpunt (p, q) en straal r is $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.
Twee lijnen met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 staan loodrecht op elkaar als $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Voorbeeld

Een lijn l gaat door de punten $(3, -2)$ en $(8, 7)$. Geef een vergelijking van l in de vorm $ax + by = c$.

Oplossing

De richtingscoëfficient van l is $\frac{7 - -2}{8 - 3} = \frac{9}{5}$ dus $y = \frac{9}{5}x + n$.
Door invullen van $(3, -2)$ vind je $-2 = \frac{9}{5} \cdot 3 + n$ dus $n = -\frac{37}{5}$.
Uit $y = \frac{9}{5}x - \frac{37}{5}$ volgt $9x - 5y = 37$.

6 Geef vergelijkingen van de volgende lijnen in de vorm $ax + by = c$, met a, b en c geheel.

a Lijn l door $(2, 5)$ en evenwijdig aan de lijn $y = 1\frac{1}{2}x$.

b Lijn m door $(4, -3)$ en loodrecht op de lijn $y = 4\frac{1}{2}x$.

c Lijn p door $(0, 5)$ en $(-8, 1)$.

7 Bereken de coördinaten van het middelpunt en de straal van de volgende cirkels.

a $x^2 + 12x + y^2 + 5y = 0$

b $x^2 + y^2 - x + 3y + 2\frac{1}{4} = 0$

c $x^2 - 4y = 8x - y^2$

Voorbeeld

Gegeven is de vergelijking $x^2 + y^2 - 6x + 7y = 0$.
Laat zien dat deze vergelijking bij een cirkel hoort en bereken de coördinaten van het middelpunt en de straal.

Oplossing

Herschrijf de vergelijking door kwadraatafsplitsen:
$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 7y + 12\frac{1}{4} = 21\frac{1}{4}$
$(x - 3)^2 + (y + 3\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$
Het middelpunt is $\left(3, -3\frac{1}{2}\right)$ en de straal is $\sqrt{21\frac{1}{4}}$.

8 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijn en de cirkel.

a Lijn l: $y = 2x - 1$ en cirkel c: $x^2 + y^2 - 3y - 19 = 0$

b Lijn l: $x + 7y = 3$ en cirkel c: $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

c Lijn l: $y = x + 2$ en cirkel c: $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 74 = 0$

9 Gegeven zijn cirkel c met vergelijking $x^2 + 7x + y^2 + 5y = 0$ en punt $P(1, 8)$.
Bereken $\mathrm{d}(P, c)$.

10 Lijn q raakt cirkel c: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ in het snijpunt van c met de positieve y-as.
Stel een vergelijking van q op.

© Noordhoff Uitgevers bv

Sinus- en cosinusregel

Theorie

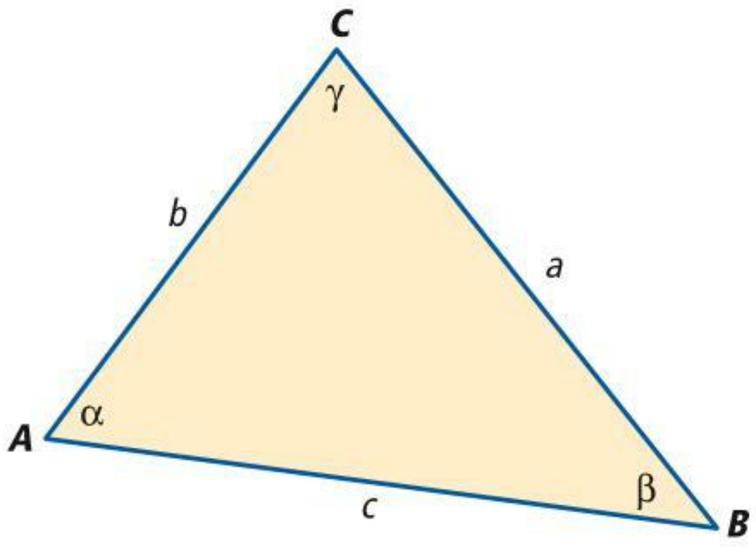
In een driehoek ABC met zijden a, b en c en hoeken α, β en γ

gelden de **sinusregel**: $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$

en de **cosinusregel**: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

of $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$

of $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$



Voorbeeld

In $\triangle ABC$ geldt $a = 15$, $c = 13$ en $\gamma = 58°$.
Bereken de overige zijde en hoeken in deze driehoek.

Oplossing

$\dfrac{15}{\sin(\alpha)} = \dfrac{18}{\sin(58°)}$ geeft $\sin(\alpha) \approx 0{,}9785$ dus $\alpha \approx 78°$ en

$\beta \approx 180 - 58 - 78 = 44°$.

$b^2 \approx 15^2 + 13^2 - 2 \cdot 15 \cdot 13 \cdot \cos(44°) \approx 113{,}46$ dus $b \approx 10{,}7$.

11 Bereken de onbekende zijde(n) in de volgende driehoeken.
Rond je antwoorden af op één decimaal.

a $\triangle ABC$ met $a = 5$, $b = 6$ en $\gamma = 67°$

b $\triangle ABC$ met $b = 10$, $c = 13$ en $\alpha = 22°$

c $\triangle ABC$ met $a = 8$, $b = 11$ en $\beta = 56°$

d $\triangle ABC$ met $\beta = 55°$, $\gamma = 61°$ en $c = 23$

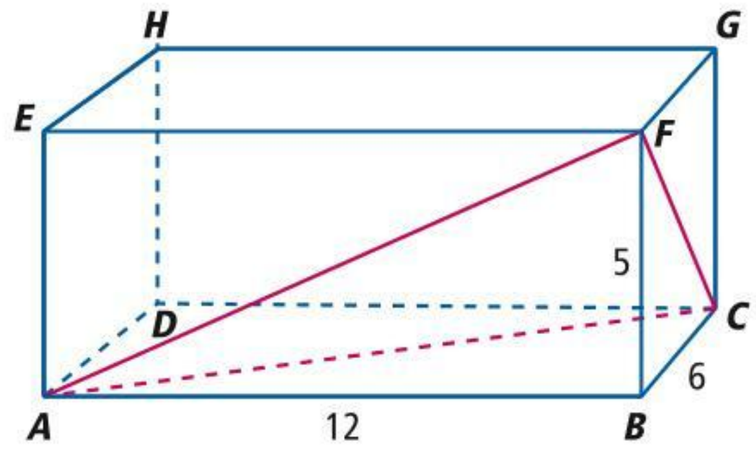
12 Bereken de hoeken in de volgende driehoeken.
Geef je antwoorden in hele graden nauwkeurig.

a $\triangle ABC$ met $a = 10$, $b = 13$ en $c = 17$

b $\triangle ABC$ met $a = 33$, $b = 65$ en $c = 56$

c $\triangle ABC$ met $a = 7$, $b = 9$ en $c = 14$

13 Van de balk $ABCD.EFGH$ is gegeven: $AB = 12$, $BC = 6$ en $BF = 5$.
Bereken de grootte van de hoeken van driehoek ACF.



14 Een vlieger $ABCD$ heeft twee zijden met lengte 13 en twee zijden met lengte 15.
De lengte van één van de diagonalen is 24.
De vlieger kan twee verschillende vormen hebben.
Bereken voor beide vormen de lengte van de andere diagonaal.

© Noordhoff Uitgevers bv

Inverse functies

15 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{12}{4x - 1}$ en $g(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{4}$

a Toon aan dat $f(4) = \frac{4}{5}$ en $g\left(\frac{4}{5}\right) = 4$.

b Toon aan dat $f\big(g(x)\big) = x$ en $g\big(f(x)\big) = x$ als $x \neq 0$.

c Welk verband bestaat er tussen de functies f en g?

Aanpak

Hoe stel je het functievoorschrift op van de inverse van een gegeven functie *f*?

1. Vervang het functievoorschrift door een vergelijking in y en x.
2. Vervang x door y en y door x.
3. Herleid de verkregen vergelijking naar een vorm waarin y is uitgedrukt in x.
4. Schrijf het resultaat als functievoorschrift.

Voorbeeld

Stel het functievoorschrift op van de inverse van $f(x) = {}^3\log(2x - 7)$.

Oplossing

1. $y = {}^3\log(2x - 7)$
2. $x = {}^3\log(2y - 7)$
3. $2y - 7 = 3^x$
   $2y = 7 + 3^x$
   $y = \frac{1}{2}(7 + 3^x)$
4. $f^{inv}(x) = \frac{1}{2}(7 + 3^x)$ of
   $f^{inv}(x) = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^x$

16 Stel het functievoorschrift op van de inverse van de volgende functies.

a $f(x) = 12 - 5x$

b $g(x) = 1 + (2x - 7)^3$

c $h(x) = \dfrac{20}{x - 4}$

d $k(x) = 8 + 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

e $p(x) = \frac{1}{5} \cdot 2^{3x-1}$

17 Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \sqrt{12 - x}$.

a Geef het domein en het bereik van f.

b Geef het functievoorschrift van f^{inv} met domein en bereik.

c Voer de opdrachten a en b ook uit voor de functie $g(x) = 1 + \sqrt[4]{2x - 6}$.

d Doe hetzelfde voor de functie $h(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{1 - x}}$

18 Hiernaast staat de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1 - 3^x}{2 + 3^x}$

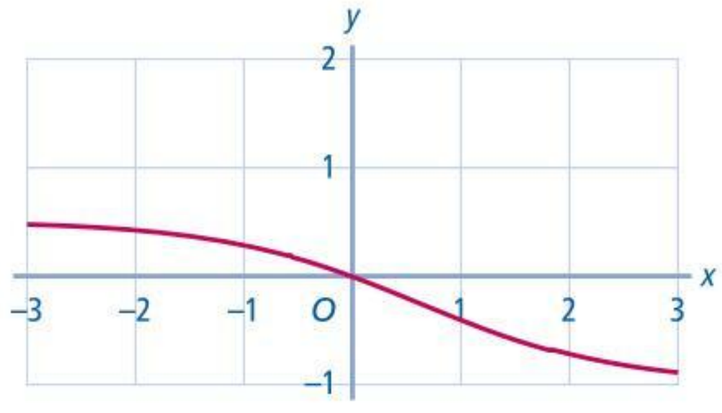
a Geef het domein van f.

b Waarom kun je uit de grafiek van f concluderen, dat f een inverse functie moet hebben?

c Stel een functievoorschrift op van f^{inv}.

d Geef het domein van de inverse functie van f.

e Welk verband is er tussen het domein van de inverse functie en de grafiek van f?



© Noordhoff Uitgevers bv

Redeneren met functies

Soms kun je conclusies trekken over het stijgen of dalen van de grafiek van een functie, zonder dat je de afgeleide nodig hebt.

19 Gegeven is de functie $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(15 - 2x)$.

a Geef het domein van de functie f.

b Is de grafiek van $g(x) = 15 - 2x$ stijgend of dalend?

c Is de grafiek van $h(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ stijgend of dalend?

d Welke conclusie kun je nu over grafiek van f trekken?

20 Gegeven is de functie $h(x) = \dfrac{1 + 2^x}{4 + 3 \cdot 2^x}$

a Leg uit dat $h(x) > 0$ voor alle waarden van x.

b De functie k is gedefinieerd door $k(x) = \dfrac{1}{h(x)}$

Toon aan dat $k(x) = 3 + \dfrac{1}{1 + 2^x}$

c Leg met behulp van het functievoorschrift van k uit dat de grafiek van k dalend is.

d Welke conclusie kun je trekken over het stijgen of dalen van de grafiek van h?

21 In opdracht 20 heb je de functie $h(x) = \dfrac{1 + 2^x}{4 + 3 \cdot 2^x}$ bekeken.

a Waarom heeft de grafiek van h geen verticale asymptoot?

b Wat gebeurt er met 2^x als $x \to -\infty$?
Welke conclusie kun je hieruit trekken?

c Je kunt het functievoorschrift van h herleiden door teller en noemer beide te delen door 2^x.
Hoe ziet het functievoorschrift er dan uit?

d Gebruik het nieuwe functievoorschrift om $\lim\limits_{x \to \infty} h(x)$ te berekenen.

e Welke asymptoten heeft de grafiek van h?

22 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \dfrac{2x^2 + 8x + 11}{px^2 + 4x + 5}$

a Toon aan dat $f_1(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$

b Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f_1.

c Voor welke waarde van p is de lijn $y = 5$ de horizontale asymptoot van de grafiek van f_p?

d Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f_p geen verticale asymptoten?

© Noordhoff Uitgevers bv

Grafieken met lijn- en puntsymmetrie

23 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{4x}{4 + x^2}$

a Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

b Hoe liggen de toppen ten opzichte van de oorsprong?

Theorie

De grafiek van een functie f is **lijnsymmetrisch** in de y-as als geldt: $f(-x) = f(x)$ voor elke waarde van x uit het domein van f.
Als voor een functie f geldt: $f(-x) = -f(x)$ voor elke waarde van x uit het domein van f, dan is de grafiek van f **puntsymmetrisch** ten opzichte van de oorsprong (0, 0).

24 Geef bij elk van de volgende functies aan, of de bijbehorende grafiek lijnsymmetrisch is in de y-as, puntsymmetrisch in de oorsprong of geen van beide.
Verklaar je antwoord met een berekening of een redenering.

a $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$

b $g(x) = \dfrac{1 - 2x}{1 + x^2}$

c $h(x) = {}^2\log(1 + x^2)$

d $k(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{3x}$

e $p(x) = \cos^2(x) + 2\cos(x)$

f $q(x) = \dfrac{\tan(x^2 + 1)}{\tan(x)}$

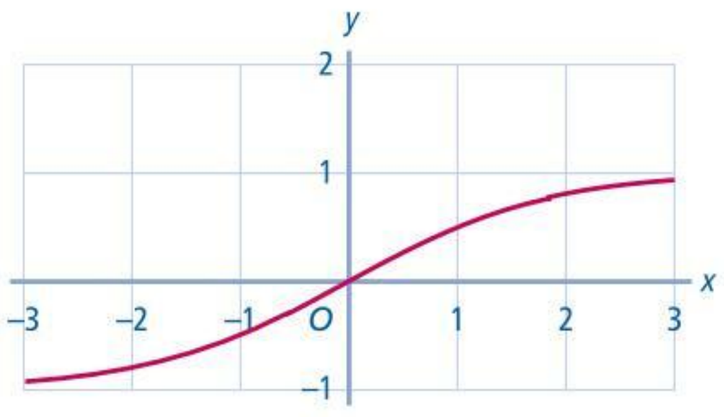
g $r(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$

h $s(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$

25 Hiernaast staat de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1 - 3^{-x}}{1 + 3^{-x}}$

De grafiek lijkt puntsymmetrisch te zijn in de oorsprong.

Toon aan dat dit inderdaad het geval is.



Er zijn ook functies waarvan de grafiek symmetrisch is in de lijn $y = x$. Daarover gaat opdracht 26.

26 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \dfrac{3x + p}{x - 3}$

a Plot en schets de grafiek van de functie f_{-8}.

b De grafiek van f_{-8} lijkt symmetrisch te zijn in de lijn $y = x$.
Welke conclusie zou je dan kunnen trekken over de inverse functie van f_{-8}?

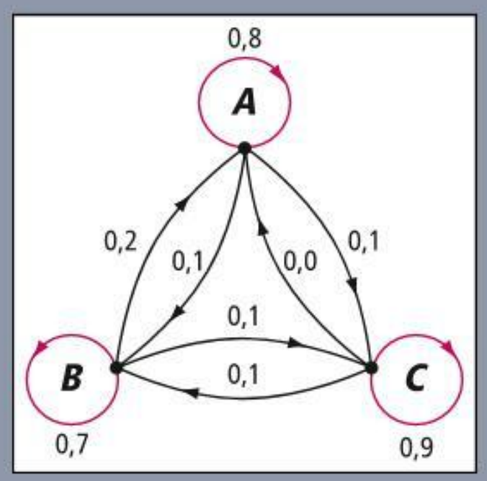
c Bewijs dat deze conclusie juist is.

d Toon aan dat deze eigenschap geldt voor alle functies f_p, mits $p \neq -9$.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

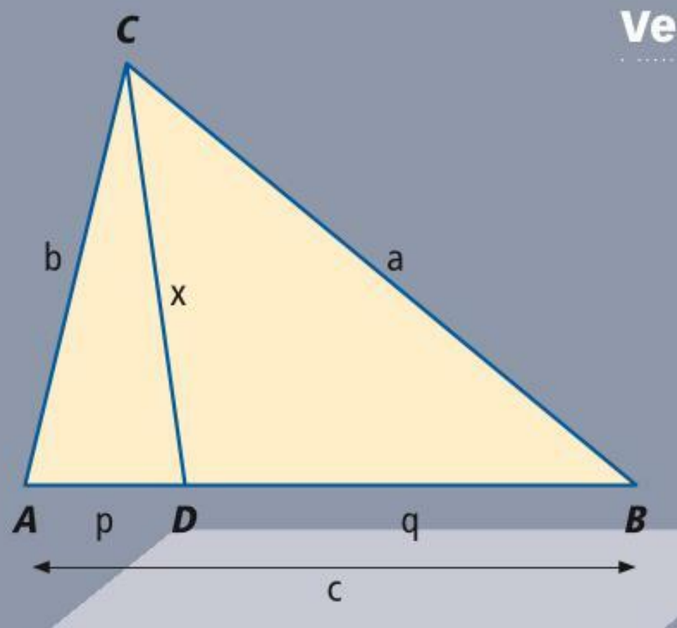
Keuzeonderwerpen



Hoofdstuk 9 *Matrices* 232

Praktisch opdracht - *Fractals* 250

Praktische opdracht - *Leibnitz* 254



Verdieping - *Meetkundige bewijzen* 258

© Noordhoff Uitgevers bv

Verhuizing

Op een eiland wonen 800 mensen, verdeeld over de twee dorpen Oosthoek en Westkaap.
In 2013 verhuisde 20% van de inwoners van Oosthoek naar Westkaap, terwijl maar 5% van de inwoners van Westkaap naar Oosthoek verhuisde.

Onderzoek of je uit het voorgaande mag concluderen dat het inwonertal van Westkaap in 2014 is toegenomen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 9
Matrices

In dit hoofdstuk

9-1	Matrices	234
9-2	Matrices vermenigvuldigen	236
9-3	De inverse matrix	238
9-4	Populatieontwikkelingen	240
9-5	Lesliematrices	242
9-6	Gemengde opdrachten	244
	Samenvatting	246
	Test jezelf	248

© Noordhoff Uitgevers bv

9-1

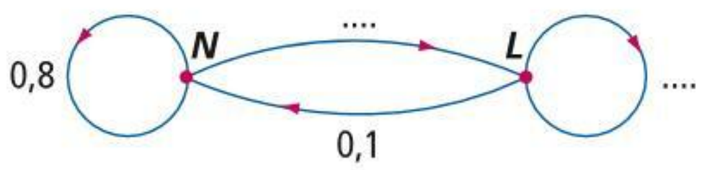
Matrices

1 Uit onderzoek van een frisdrankfabrikant blijkt dat 20% van de consumenten van normale frisdrank het volgende jaar is overgestapt op de lightversie en dat 80% nog steeds normale frisdrank drinkt. Bij de gebruikers van de lightversie is 10% het volgende jaar overgestapt op normale frisdrank en gebruikt 90% nog steeds de lightversie.
Deze gegevens kunnen overzichtelijk weergegeven worden in een tekening.

a Neem de tekening over en vul de ontbrekende waarden in.

b Van de onderzoeksgroep drinken 400 consumenten de normale frisdrank en 100 de lightversie.
Ga na dat een jaar later nog 330 consumenten de normale frisdrank drinken.

c Hoeveel consumenten drinken weer een jaar later de normale frisdrank?



2 Een onderzoeker heeft enkele jaren de gegevens over de migratie van het platteland P naar de stad S en omgekeerd verzameld. Hij komt tot het hiernaast getekende model voor de jaarlijkse migratie.

a De onderzoeker houdt in zijn model geen rekening met geboorte, sterfte, immigratie en emigratie.
Waaraan zie je dat?

b In het begin van 2014 woonden er 60 000 mensen in de stad en 40 000 op het platteland.
Bereken aan de hand van het model van de onderzoeker de verdeling van de mensen over de stad en het platteland een jaar later.

c Een dergelijk model kun je ook met een vierkant schema met getallen weergeven.
Neem het schema hiernaast over en vul de ontbrekende getallen in.

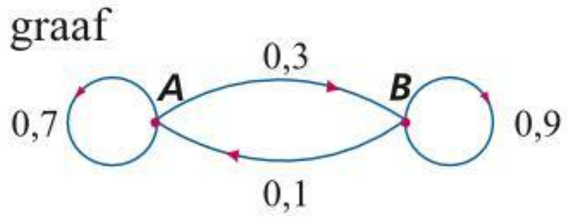
van

naar	P	S
P	0,92	…
S	0,08	…

Theorie

Een tekening waarin de gegevens overzichtelijk worden weergegeven zoals bij de opdrachten 1 en 2 heet een **graaf**.
Diezelfde gegevens kunnen ook worden weergegeven met behulp van een rechthoekig schema met getallen. Een dergelijk schema heet een **matrix**.
De getallen in een matrix zijn gerangschikt in rijen en kolommen. De **afmetingen** van een matrix geef je door eerst het aantal rijen en daarna het aantal kolommen te noemen.
Een ***p* bij *q* matrix** heeft p rijen en q kolommen.
Bij een vierkante matrix is het aantal rijen gelijk aan het aantal kolommen.

graaf



vierkante 2 bij 2 matrix

van

naar	A	B	
A	0, 7	0, 1	← rij
B	0, 3	0, 9	
		↑	
		kolom	

© Noordhoff Uitgevers bv

3 Een supermarktketen heeft van een bepaald product drie varianten in de stelling staan: het merkproduct (M), het huismerk (H) en het budgetmerk (B).
Klanten die de ene week het ene merk kopen kunnen de volgende week overgestapt zijn op één van de twee andere.
Marktonderzoek heeft de matrix hiernaast opgeleverd. In deze matrix worden de wekelijkse overgangen van het ene merk naar het andere weergegeven.

		van M	van H	van B
naar	M	0,85	0,10	0,05
naar	H	0,10	0,70	0,15
naar	B	0,05	0,20	0,80

a Hoeveel procent van de kopers van het budgetmerk stapt is een week later overgestapt op het huismerk? En hoeveel procent heeft de omgekeerde overstap gemaakt?

b Teken de graaf bij deze matrix.

c Van 100 klanten kochten in een bepaalde week 30 mensen het merkproduct, 40 het huismerk en 30 het budgetmerk. Bereken met behulp van de matrix de verdeling van de 100 klanten over de drie producten een week later.

Theorie

Matrices zoals bij de opdrachten 2 en 3 worden **overgangsmatrices** genoemd.
De getallen in een overgangsmatrix geven aan welk deel van een categorie na een bepaalde periode nog steeds in die categorie zit en welk deel is overgegaan naar een andere categorie.
Overgangsmatrices worden gebruikt om de verdeling van de populatie over de verschillende categorieën in een volgende periode te vinden.

4 Muskusratten worden niet ouder dan 3 jaar. Ze kunnen heel veel jongen voortbrengen. Gemiddeld krijgen 10 nuljarigen per jaar 6 jongen, 10 éénjarigen 35 jongen, 10 tweejarigen 24 jongen en 10 driejarigen 12 jongen.
Slechts de helft van het aantal jongen is een jaar later nog in leven.
Van de één- en tweejarigen wordt 60% een jaar ouder.

		van 0	van 1	van 2	van 3
naar	0	0,6	…	…	…
naar	1	0,5	0	0	0
naar	2	0	…	0	0
naar	3	0	0	…	0

a Verklaar de getallen 0,6 en 0,5 in de matrix.

b Vul de matrix verder in.

c Ga uit van 100 nuljarige ratten. Bereken hoeveel er drie jaar oud worden.

5 Voor waterratten geldt de jaarlijkse overgangsmatrix hiernaast.De rechter matrix geeft aan hoe de 1450 waterratten van de beginpopulatie over de verschillende leeftijdsklassen verdeeld zijn.

	0	1	2	3
0	0, 5	2	1, 5	1
1	0, 3	0	0	0
2	0	0, 4	0	0
3	0	0	0, 2	0

0	1000
1	300
2	100
3	50

$0,5 \cdot 1000 + 2 \cdot 300 + 1,5 \cdot 100 + 1 \cdot 50 = 1300$

a De getallen van de bovenste rij van de overgangsmatrix worden vermenigvuldigd met de getallen uit de matrix van de beginpopulatie en de uitkomsten worden bij elkaar opgeteld.
Wat is de betekenis van het getal 1300?

b Welk getal krijg je als je de getallen van de tweede rij van de overgangsmatrix op dezelfde manier vermenigvuldigt met de rechter matrix? Wat is de betekenis van dit getal?

c Geef de verdeling van de populatie over de verschillende leeftijdsklassen één jaar later.

© Noordhoff Uitgevers bv

9-2

Matrices vermenigvuldigen

6 Hiernaast staat de migratiematrix M van opdracht 2.
In matrix B is de verdeling van de bevolking over de stad en het platteland aan het begin van 2014 weergegeven.

a Hoe kun je met behulp van matrix M en matrix B het aantal plattelandsbewoners aan het begin van 2015 berekenen?

b Bereken de verdeling van de bevolking over de stad en het platteland aan het begin van 2015. Noteer je antwoord in de vorm van matrix C.

$$\text{naar}\ \begin{matrix} \\ P \\ S \end{matrix}\overset{\text{van}}{\begin{pmatrix} P & S \\ 0{,}92 & 0{,}02 \\ 0{,}08 & 0{,}98 \end{pmatrix}} = M \qquad \begin{matrix} 2014 \\ P \\ S \end{matrix}\begin{pmatrix} 40\,000 \\ 60\,000 \end{pmatrix} = B$$

$$\begin{matrix} 2015 \\ P \\ S \end{matrix}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = C$$

Een berekening zoals bij opdracht 6b wordt de vermenigvuldiging van de matrices M en B genoemd.
Je noteert deze vermenigvuldiging kort als $M \times B = C$.

7

$$\text{naar}\ \begin{matrix} \\ \text{N9} \\ \text{N99} \\ \text{N250} \end{matrix}\overset{\text{van}}{\begin{pmatrix} \text{N9} & \text{N99} & \text{N250} \\ 0{,}01 & 0{,}48 & 0{,}80 \\ 0{,}10 & 0{,}00 & 0{,}18 \\ 0{,}89 & 0{,}52 & 0{,}02 \end{pmatrix}} = V \qquad \begin{matrix} \\ \text{N9} \\ \text{N99} \\ \text{N250} \end{matrix}\overset{\text{vr}\quad\text{za}}{\begin{pmatrix} 15\,000 & 7\,000 \\ 4\,000 & 2\,000 \\ 16\,000 & 6\,000 \end{pmatrix}} = A$$

Bij een verkeersknooppunt komen drie wegen samen: de N9, de N99 en de N250. Matrix V geeft aan hoe de verkeersstromen zich over het knooppunt verdelen. Zo geeft het getal 0,80 rechtsboven in de matrix aan dat 80% van het verkeer dat via de N250 bij het knooppunt arriveert, het knooppunt via de N9 weer verlaat.
Matrix A geeft de aantallen voertuigen die in een bepaalde week op vrijdag en zaterdag bij het knooppunt aankwamen. Zo geeft het getal 7 000 in deze matrix aan dat er op zaterdag 7 000 voertuigen via de N9 aankwamen bij het knooppunt.

a Welke berekening levert het getal 14 870 op?

b Welke betekenis heeft het getal 14 870 hier?

c Wat is de betekenis van het getal 1780?

d Neem het schema over en vul het schema verder in.

$V \times A$	$\begin{pmatrix} 15\,000 & 7\,000 \\ 4\,000 & 2\,000 \\ 16\,000 & 6\,000 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}48 & 0{,}80 \\ 0{,}10 & 0{,}00 & 0{,}18 \\ 0{,}89 & 0{,}52 & 0{,}02 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14\,870 & \dots \\ \dots & 1\,780 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

8 Xavi heeft de matrices V en A in het schema verwisseld.
Je zou dan de vermenigvuldiging $A \times V$ moeten krijgen.

a Leg uit waarom het nu niet mogelijk is om de getallen in een rij van de linker matrix te vermenigvuldigen met de overeenkomstige getallen in een kolom van de rechter matrix.

b Leg uit aan welke voorwaarde de matrices A en B moeten voldoen om de vermenigvuldiging $A \times B$ mogelijk te maken.

c En aan welke voorwaarde moeten de matrices A en B voldoen om de vermenigvuldiging $B \times A$ mogelijk te maken?

$A \times V$	$\begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}48 & 0{,}80 \\ 0{,}10 & 0{,}00 & 0{,}18 \\ 0{,}89 & 0{,}52 & 0{,}02 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 15\,000 & 7\,000 \\ 4\,000 & 2\,000 \\ 16\,000 & 6\,000 \end{pmatrix}$	

© Noordhoff Uitgevers bv

9 Gegeven zijn de matrices:

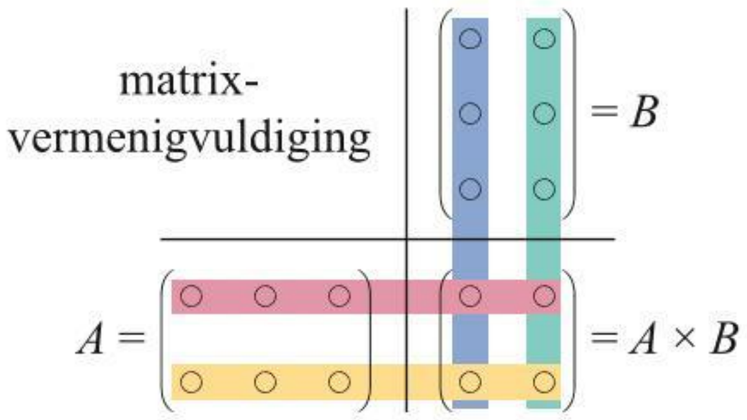
$$A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad C = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

a Bereken $A \times B$, $B \times A$, $B \times C$ en $C \times B$.

b Bij het vermenigvuldigen van getallen geldt de eigenschap dat $a \cdot b = b \cdot a$ voor elk paar getallen a en b.
Geldt deze eigenschap ook bij een matrixvermenigvuldiging?

Theorie

Je kunt matrix A vermenigvuldigen met matrix B als het aantal getallen in een rij van matrix A gelijk is aan het aantal getallen in een kolom van matrix B.
Bij de **matrixvermenigvuldiging** $A \times B$ vermenigvuldig je telkens de getallen uit een rij van matrix A met de getallen uit een kolom van matrix B en tel je de uitkomsten bij elkaar op.
In het algemeen geldt dat $A \times B \neq B \times A$.



10 Bereken zo mogelijk. Gebruik een schema zoals hiernaast.

a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 100 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 100 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

d $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

11 Bereken de vermenigvuldigingen van opdracht 10 ook met je rekenmachine.

Hulpboek 6-3 Matrices vermenigvuldigen

12 Hiernaast staan de matrices A, B en D.

a Bereken $A \times D$, $D \times A$, $B \times D$ en $D \times B$.

b Bij het vermenigvuldigen van getallen geldt $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
Welke matrix neemt in opdracht a de rol van het getal 1 over?

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Theorie

Een vierkante n bij n matrix die op de hoofddiagonaal uitsluitend uit enen bestaat en voor het overige uit nullen, is de **eenheidsmatrix** I_n.
Voor elke n bij n matrix A geldt $A \times I_n = I_n \times A = A$.

Voorbeeld

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

13a Gegeven zijn de matrices V en I_3 hiernaast.
Laat zien dat $V \times I_3 = I_3 \times V = V$.

b Bereken $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c Waarom kun je de vermenigvuldigingen in opdracht b niet omkeren?

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

9-3

De inverse matrix

14 Een basisschool met 200 leerlingen hield tijdens een griepepidemie het aantal zieke leerlingen bij. Matrix V beschrijft de veranderingen in de aantallen gezonde (G) en zieke leerlingen (Z) per dag. In matrix B zie je dat er op 8 januari 155 gezonde en 45 zieke leerlingen waren.

$$V = \begin{matrix} \\ G \\ Z \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} G & Z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} \\ G \\ Z \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} \text{8 jan} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 155 \\ 45 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

a Bereken de aantallen gezonde en zieke leerlingen op 9 januari.

b Om te weten hoeveel leerlingen op 7 januari ziek waren, moet je terugrekenen. In matrix A is g het aantal gezonde leerlingen op 7 januari en is z het aantal zieke leerlingen op 7 januari.

$$A = \begin{matrix} \\ G \\ Z \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} \text{7 jan} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} g \\ z \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Laat zien dat uit de vermenigvuldiging $V \times A = B$ het stelsel hiernaast af te leiden is.

$$\begin{cases} 0{,}8g + 0{,}6z = 155 \\ 0{,}2g + 0{,}4z = 45 \end{cases}$$

c Bereken de aantallen gezonde en zieke leerlingen op 7 januari.

In de volgende opdracht ga je op zoek naar de matrix waarmee je kunt berekenen hoeveel gezonde en hoeveel zieke leerlingen er één dag eerder waren.

15 Matrix V is weer de matrix uit opdracht 14.

Stel dat $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de matrix is waarmee het aantal gezonde en zieke leerlingen één dag eerder te berekenen is.

a Laat zien dat de stelsels hiernaast uit de vermenigvuldiging $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zijn af te leiden.

$$\begin{cases} 0{,}8a + 0{,}2b = 1 \\ 0{,}6a + 0{,}4b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}8c + 0{,}2d = 0 \\ 0{,}6c + 0{,}4d = 1 \end{cases}$$

b Bereken a, b, c en d en stel matrix W op.

c Controleer of de vermenigvuldiging van matrix W met matrix B uit opdracht 14 het antwoord van opdracht 14c oplevert.

Theorie

De **inverse matrix** A^{-1} van een overgangsmatrix A is de matrix waarmee je de verdeling van de populatie in de vorige periode kunt berekenen.
Als A en A^{-1} vierkante n bij n matrices zijn dan geldt $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_n$.

Voorbeeld

$$\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix} A \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}75 \\ 0{,}2 & 0{,}25 \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \begin{matrix} 2013 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 2014 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 235 \\ 65 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix} A^{-1} \\ \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \begin{matrix} 2014 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 235 \\ 65 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 2013 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

16a Controleer de vermenigvuldigingen uit het voorbeeld met behulp van je rekenmachine.

b Controleer met je rekenmachine dat voor de matrices A en A^{-1} uit het voorbeeld geldt: $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_2$.

Hulpboek 6-5 Inverse matrix

© Noordhoff Uitgevers bv

17 In een woonwijk zijn drie elkaar beconcurrerende supermarkten A, B en C gevestigd. Er is onderzocht hoe trouw klanten blijven aan een supermarkt.
In de overgangsmatrix S zie je de veranderingen per maand en in matrix V staan de aantallen klanten begin oktober.

$$S = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array} \qquad V = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{okt} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4500 \\ 5600 \\ 3900 \end{pmatrix} \end{array}$$

a Bereken hoeveel klanten elk van de drie supermarkten begin november zal hebben.
b Bereken hoeveel klanten elk van de drie supermarkten begin december zal hebben.
c Hoeveel klanten had elk van de drie supermarkten begin september?

18 Bereken de inverse matrix.

a $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

19 Gegeven zijn de matrices $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ en $N = \begin{pmatrix} \dfrac{s}{ps-qr} & \dfrac{-q}{ps-qr} \\ \dfrac{-r}{ps-qr} & \dfrac{p}{ps-qr} \end{pmatrix}$.

a Toon algebraïsch aan dat $M \times N = I_2$.
b Welk conclusie kun je trekken uit de berekening van opdracht a?
c Uit matrix N kun je afleiden dat matrix M niet voor alle waarden van p, q, r en s een inverse heeft.
Aan welke voorwaarde moeten p, q, r en s voldoen opdat matrix M een inverse heeft?

20 Van een keversoort is bekend dat de helft van de nuljarige kevers hun eerste verjaardag overleeft, een kwart van de eenjarigen overleeft hun tweede verjaardag en geen enkele kever wordt drie jaar oud. Elke éénjarige kever produceert gemiddeld één nakomeling en elke tweejarige gemiddeld twee nakomelingen.

Bij deze gegevens past de matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$.

Stel de inverse van M is de matrix $M^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

Gebruik het product $M \cdot M^{-1} = I_3$ om de grootte van a_1 tot en met c_3 algebraïsch te berekenen en geef de inverse matrix M^{-1} van matrix M.

© Noordhoff Uitgevers bv

9-4

Populatieontwikkelingen

21 Al tientallen jaren is Het Nieuwsblad (N) de lokale krant. Sinds een paar jaar is er een concurrent: De Koerier (K). Matrix M beschrijft de jaarlijkse overgang van abonnees van Het Nieuwsblad naar De Koerier en andersom. Matrix B geeft de aantallen abonnementen op beide kranten op 1-1-2013.

$$M = \begin{matrix} \\ N \\ K \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} N & K \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}95 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} \\ N \\ K \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} \text{1-1-2013} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 12\,000 \\ 3\,000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

a Hoe kun je aan matrix M zien dat het totaal aantal abonnees op beide kranten samen niet verandert?

b Bereken met behulp van matrixvermenigvuldiging de verdeling van de abonnees over de twee kranten na 1, 2, 3 en 4 jaar.

c Het aantal abonnees van De Koerier groeit. Is deze groei constant, toenemend of afnemend?

22a Ga uit van de matrix M van opdracht 21 en bereken M^2 en M^3.

b Bereken $M^2 \times B$, $M^3 \times B$ en vergelijk de uitkomsten met die van opdracht 21b.

c Wat is blijkbaar de betekenis van matrices M^2 en M^3?

Hulpboek 6-4 Machten van matrices

Theorie

Als matrix M wordt gebruikt om de populatieverdeling in een volgende periode te vinden, dan kun je met matrix M^n de populatieverdeling na n perioden berekenen.

Voorbeeld

M en B zijn de matrices die gegeven zijn bij opdracht 21. Bereken $M^5 \times B$ en geef de betekenis van de uitkomst.

Oplossing

$$M^5 \times B \approx \begin{pmatrix} 8106 \\ 6896 \end{pmatrix}$$

Dat betekent dat na vijf jaar Het Nieuwsblad 8106 en De Koerier 6894 abonnees heeft.

23 Deze opdracht gaat weer over de matrices M en B van opdracht 21.

a Bereken $M^{10} \times B$, $M^{20} \times B$, $M^{30} \times B$ en $M^{40} \times B$.

b Wat is de betekenis van de uitkomsten bij opdracht a?

c Verwacht je dat de Koerier het Nieuwsblad helemaal zal verdrijven?

d Stel je voor dat op een bepaald moment de verdeling van de abonnees wordt weergegeven door de matrix

$$C = \begin{matrix} \\ N \\ K \end{matrix}\begin{matrix} \\ \begin{pmatrix} 5\,000 \\ 10\,000 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Bereken $M \times C$, $M^2 \times C$ en $M^{10} \times C$.

e Wat vertellen deze berekeningen over de verdeling van de abonnees vanaf het moment dat Het Nieuwsblad 5000 en De Koerier 10 000 abonnees heeft?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Als de verdeling A van een populatie na vermenigvuldiging met de overgangsmatrix M niet meer verandert, dus als $M \times A = A$, dan heet de verdeling **stabiel**.

Voorbeeld

Gegeven is de overgangsmatrix

$M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ en de verdeling $V = \begin{pmatrix} 750 \\ 2250 \end{pmatrix}$

Toon aan dat V een stabiele verdeling is.

Oplossing

$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 750 \\ 2250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 750 \\ 2250 \end{pmatrix}$,

dus verdeling V is stabiel.

24 Deze opdracht gaat over de matrix M en de verdeling V uit het voorbeeld.

a Reken met je rekenmachine na dat verdeling V inderdaad stabiel is.

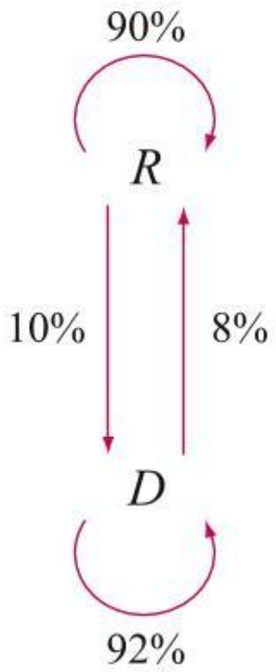
b Stel er is nog een stabiele verdeling $W = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Toon aan dat uit $M \times W = W$ de voorwaarde $q = 3p$ volgt.

c Controleer dat verdeling V aan deze voorwaarde voldoet.

d Geef een voorbeeld van een andere stabiele verdeling bij matrix M.

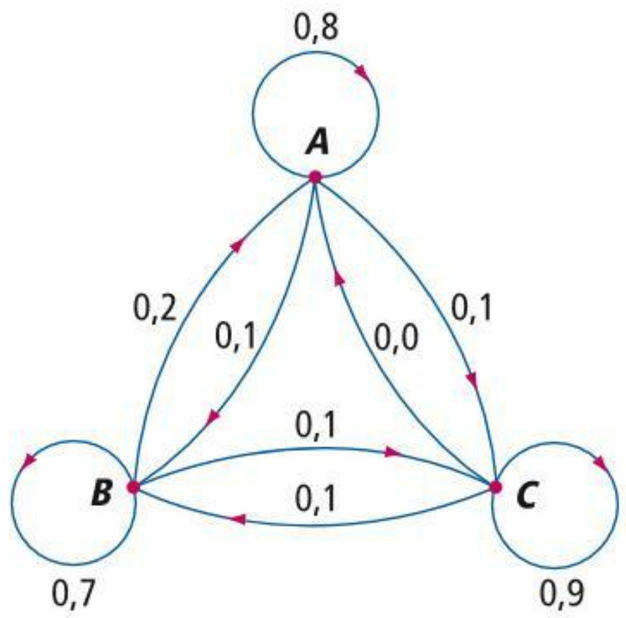
25 Van een Amerikaans provinciestadje is het aantal kiesgerechtigden vrijwel constant gelijk aan 144 000. De lokale politicoloog heeft onderzoek gedaan naar het stemgedrag van de inwoners. De jaarlijkse overgangskansen voor de politieke voorkeur voor de republikeinse of de democratische partij staan in de graaf hiernaast.



a r_n en d_n zijn de aantallen republikeinen en democraten in het stadje in jaar n.
Leg uit dat $r_{n+1} = 0{,}08d_n + 0{,}9r_n$ en druk d_{n+1} uit in r_n en d_n.

b Ga ervan uit dat de aantallen republikeinen en democraten na n jaar stabiliseren tot r en d. Dan geldt $r_{n+1} = r_n = r$ en $d_{n+1} = d_n = d$.
Gebruik de vergelijkingen uit opdracht a en het gegeven dat er in totaal 144 000 kiesgerechtigden zijn om r en d te berekenen.

26 Op een eiland liggen drie dorpen A, B en C. In de graaf hiernaast staan de migratiestromen tussen de dorpen. Men wil onderzoeken welke verdeling van de bevolking over de drie dorpen stabiel is.



a Stel de overgangsmatrix M op.

b Ga uit van de verdeling $S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en laat zien dat uit $M \times S = S$ volgt $b = a$ en $c = 2a$.

c Geef de stabiele verdeling als de bevolking van het eiland uit 10 000 mensen bestaat.

© Noordhoff Uitgevers bv

9-5

Lesliematrices

27 Op een eiland komt een bepaald soort planteneter voor die niet ouder wordt dan 4 jaar. Een bioloog heeft begin 2012 en begin 2013 de aantallen dieren in de vier leeftijdsgroepen geteld.
De dieren uit de vier leeftijdsgroepen van begin 2012 brachten in dat jaar respectievelijk 2500, 9600, 2200 en 450 jongen voort.

leeftijd	begin 2012	begin 2013
0	12500	14750
1	6400	7500
2	2750	3200
3	900	1100

a Hoe is het aantal van 14 750 nuljarige dieren aan het begin van 2013 uit de aantallen jongen hierboven af te leiden?

b Met behulp van welke gegevens is het getal 0,2 linksboven in matrix M te berekenen? Vul de rest van de getallen van de eerste rij van matrix M in.

c Met behulp van welke gegevens is het getal 0,6 in de tweede rij van de matrix te berekenen? Vul matrix M verder in.

$$M = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Theorie

Matrices waarin overleving en geboorte worden samengevat worden **populatievoorspellingsmatrices** of **Lesliematrices** genoemd.
In een Lesliematrix staan in de bovenste rij de geboortecijfers g_n per leeftijdsklasse. De getallen onder de hoofddiagonaal geven de overgangskansen o_n van de ene leeftijdsklasse naar de volgende.

$$L = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{n-1} & g_n \\ o_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & o_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & o_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

g = geboortecijfer
o = overgangskans

28 Een diersoort wordt niet ouder dan 2 jaar. Met de Lesliematrix L hiernaast is de verdeling van de dieren over de leeftijdsklassen voor het volgende jaar te berekenen.
Begin 2015 zijn er 800 nuljarigen, 950 eenjarigen en 450 tweejarigen.

$$L = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a Bereken met een matrixvermenigvuldiging de verdeling van de dieren over de leeftijdsklassen begin 2016.

b Bereken het totaal aantal dieren begin 2018.

29 Deze opdracht gaat over de diersoort en de Lesliematrix uit opdracht 28.

a Verklaar waarom je met $0{,}2 + 0{,}8 \times 0{,}9 + 0{,}8 \times 0{,}5 \times 0{,}2$ het gemiddeld aantal nakomelingen gedurende het leven per dier kunt berekenen en bereken de uitkomst.

b Wat betekent dit gemiddelde aantal nakomelingen gedurende het leven per dier voor de ontwikkeling van de totale populatie?

c De totale populatie van de diersoort bestaat uit 2200 dieren. Bereken met de matrix V hiernaast en $L \times V = V$ voor welke waarden van a, b en c de populatieverdeling stabiel is.

$$V = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{array} \text{ met } a + b + c = 2200$$

© Noordhoff Uitgevers bv

30 In matrix L_1 is het geboortecijfer van de tweejarigen in matrix L uit opdracht 28 omlaag gegaan van 0,2 naar 0,1.

a Wat betekent dit voor het gemiddeld aantal nakomelingen gedurende het leven van één dier? En voor de ontwikkeling van de populatie?

b Ga uit van een populatie van 2200 dieren: 1000 nuljarige, 800 eenjarige en 400 tweejarige en bereken de grootte van de totale populatie in de eerstvolgende vijf jaren.

c Bereken de groeifactor voor de totale populatie per jaar.

$$L_1 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

31 In matrix L_2 is het geboortecijfer van de tweejarigen van matrix L uit opdracht 28 gestegen naar 0,3.

a Bereken het gemiddelde aantal nakomelingen gedurende het leven per dier.

b Ga weer uit van de beginpopulatie van opdracht 30b en bereken de grootte van de totale populatie de eerste vijf jaren.

c De grootte van de totale populatie is te beschrijven met een formule van de vorm $V = b \cdot g^t$.
Bereken b en g. Rond zo nodig af op twee decimalen.

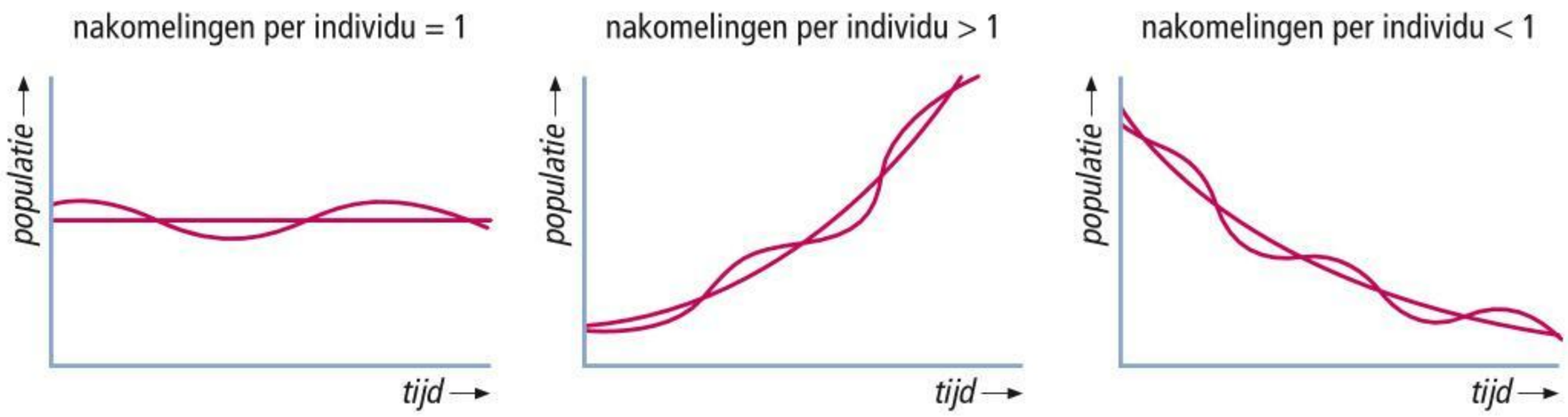
$$L_2 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

32a Onderzoek hoe volgens matrix L van opdracht 28 de grootte van de totale populatie zich de eerste vijf jaar ontwikkelt bij een beginpopulatie van 1000 nuljarige, 500 eenjarige en 100 tweejarige dieren.

b Doe hetzelfde voor de matrices L_1 en L_2 van de opdrachten 30 en 31.

Theorie

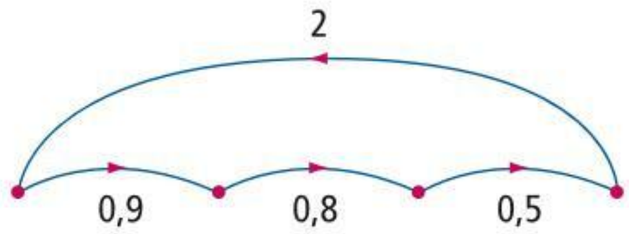
Als het gemiddeld aantal nakomelingen gedurende het leven per individu van de populatie gelijk is aan 1 dan is een stabiele verdeling van de populatie mogelijk. Afhankelijk van de beginverdeling van de populatie is de grootte van de totale populatie constant of slingert hij rond een constante waarde.



33 Het geboortecijfer en de overlevingskansen van een vogelpopulatie die in vier leeftijdsklassen is verdeeld, staan in de graaf hiernaast.

a Stel een Lesliematrix L op voor deze populatie en leg uit dat deze populatie op den duur zal uitsterven.

b Hoe groot moet het geboortecijfer minstens zijn, opdat de totale populatie niet uitsterft? Rond af op één decimaal.



34 Hiernaast is een populatievoorspellingsmatrix P gegeven. Verder is gegeven dat de populatiegrootte gelijk is aan 790 en dat de verdeling van de populatie over de drie leeftijdsgroepen stabiel is. Bereken het geboortecijfer p en de verdeling van de populatie over de drie leeftijdsgroepen.

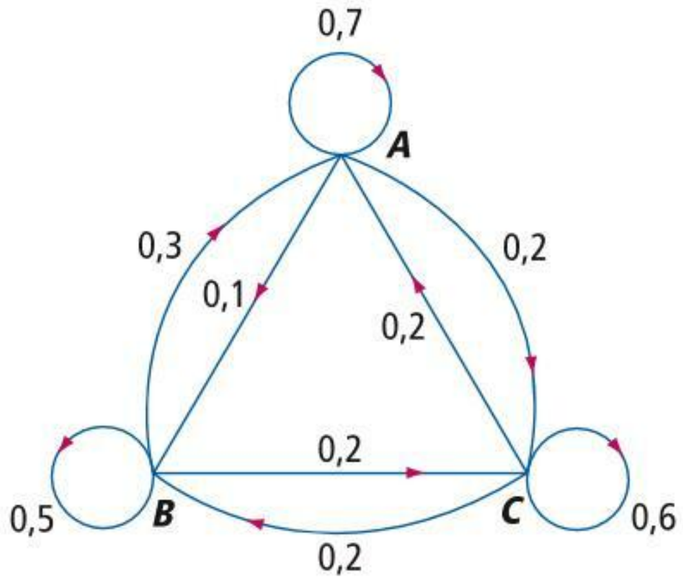
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

9-6

Gemengde opdrachten

35 Het autoverhuurbedrijf Rent-a-Car heeft op een eiland op drie plaatsen auto's gestationeerd. Auto's die in één van die plaatsen worden gehuurd kunnen in elk van de drie plaatsen weer worden ingeleverd. In de graaf zie je de overgangskansen.



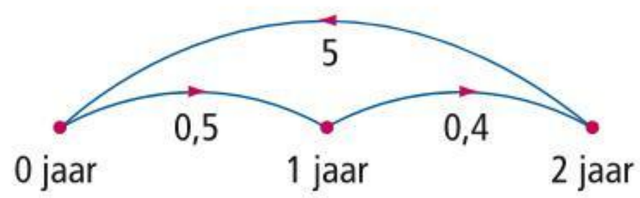
a Stel de overgangsmatrix M op.

b Rent-a-Car heeft 90 auto's om te verhuren, in elke plaats 30. Op een dag worden alle auto's één keer verhuurd en 's avonds terugbezorgd. Welke verdeling over de plaatsen verwacht je aan het eind van de dag?

c Bereken ook de verdeling van de gehele aantallen auto's over de verschillende plaatsen na twee, drie, vier, vijf en zes dagen.

d Na hoeveel dagen verandert de verdeling over de verschillende plaatsen niet meer?

36 Van een diersoort zijn de overlevingskansen per leeftijdsgroep en het geboortecijfer weergegeven in de graaf hiernaast. In een bepaald jaar zijn er 1200 nuljarige, 350 eenjarige en 150 tweejarige dieren.



a Stel de Lesliematrix L op bij deze graaf.

b Hoe groot is het gemiddeld aantal nakomelingen per dier tijdens zijn leven?

c Teken een grafiek van het totale aantal dieren voor een periode van zes jaar.

d Bereken M^3 en verklaar daarmee dat elke populatieverdeling gelijk is aan die van drie jaar eerder.

37 Het geboortecijfer van de diersoort uit opdracht 36 verandert van 5 in 4.

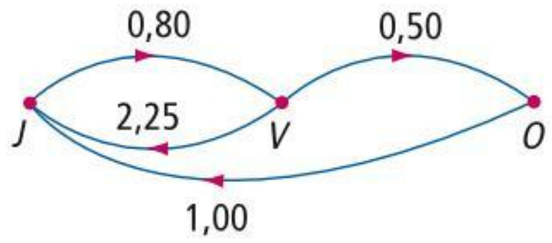
a Hoe groot is in deze situatie het gemiddeld aantal nakomelingen per dier tijdens zijn leven?

b Ga weer uit van de beginpopulatie uit opdracht 36 en teken de grafiek van het totale aantal dieren voor een periode van zes jaar.

c Gebruik de derde macht van de bij deze opdracht behorende Lesliematrix om de ontwikkeling van de populatieverdeling in de loop van de tijd te beschrijven.

d Beantwoord de vragen bij opdracht a, b en c ook voor het geboortecijfer 6.

38 Een diersoort is ingedeeld in drie leeftijdsklassen van vijf jaar. Geen enkel dier wordt ouder dan 15 jaar. De graaf hiernaast beschrijft de populatieontwikkeling van deze diersoort.



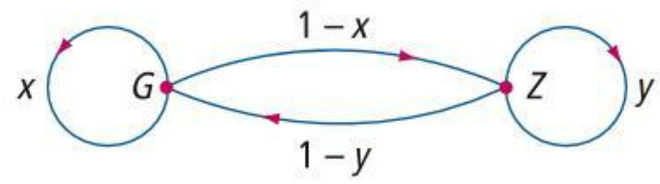
a Waarom zal deze populatie in aantal steeds meer toenemen?

b Door veranderingen in het milieu worden beide overlevingskansen met hetzelfde percentage verlaagd. De populatie stabiliseert daardoor op den duur. Bereken met welk percentage de overlevingskansen afnemen.

© Noordhoff Uitgevers bv

39 Een nieuw griepvirus grijpt razendsnel om zich heen.
Van een onderzoeksgroep van 1000 mensen wordt wekelijks nagegaan of ze deze griep hebben of niet. In het schema hiernaast zie je het resultaat.
Het onderzoeksteam veronderstelt dat met een graaf zoals hiernaast de verdeling van het aantal gezonde en zieke mensen over de onderzoeksgroep te berekenen is.

	19 nov	26 nov	3 dec
gezond	804	782	769
ziek	196	218	231



a Gebruik de onderzoeksgegevens om x en y te berekenen. Rond af op één decimaal.

b Bereken met de inverse matrix de verdeling gezond/ziek in de onderzoeksgroep in de weken voor 19 november en laat zien dat de epidemie op 29 oktober nog niet was uitgebroken.

c Onderzoek welke stabiele verdeling tussen gezonde en zieke mensen er op den duur in de onderzoeksgroep zal ontstaan.

40 Een bioloog heeft in een natuurgebied de populatie van een beschermde salamandersoort bestudeerd. Hij verdeelde de dieren in vier leeftijdsklassen van één jaar en stelde op grond van zijn ervaringen de Lesliematrix L hiernaast op.
Op 1 januari 2014 zijn in de vier leeftijdsklassen van jong naar oud de volgende aantallen geteld: 410, 160, 95 en 100.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

a Bereken voor de volgende vier jaren het totale aantal dieren zoals dat zich volgens de Lesliematrix zal ontwikkelen.

b Bereken L^4 en gebruik het resultaat om onder woorden te brengen hoe de populatie zich zal ontwikkelen.

c Het totale aantal dieren N is een exponentiële functie van de tijd t in eenheden van vier jaar met $t = 0$ op 1 januari 2014. Geef een functievoorschrift van deze functie.

41 In een dierentuin wil men in een groot terrarium de salamandersoort uit opdracht 40 houden. Men wil niet veel meer dan 500 salamanders in het terrarium houden. Dat wil men bereiken door elk jaar een deel van de eieren te vernietigen. Verder wil men de populatie zo samenstellen dat de verdeling stabiel is.

a Hoeveel procent van de eieren zal jaarlijks vernietigd moeten worden?

b Uit hoeveel salamanders zal de hele populatie moeten bestaan en hoe moeten de salamanders over de verschillende leeftijdsklassen verdeeld zijn?

42 Gegeven zijn de matrices $K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$ en $M = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

a Neem over en vul in: $K \times L = \begin{pmatrix} ak + bm & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$

b Laat zien dat $K \times (L \times M) = \begin{pmatrix} (ak + bm)p + (al + bn)q \\ (ck + dm)p + (cl + dn)q \end{pmatrix}$

c Toon aan dat als $K \times (L \times M) = M$, dat daar dan uit volgt $K \times L = I_2$

© Noordhoff Uitgevers bv

Samenvatting

Matrix

Een matrix is een rechthoekig schema met getallen tussen twee haken. Een p bij q matrix heeft p rijen en q kolommen.
Een schematische tekening waarin diezelfde getallen worden weergegeven heet een graaf.

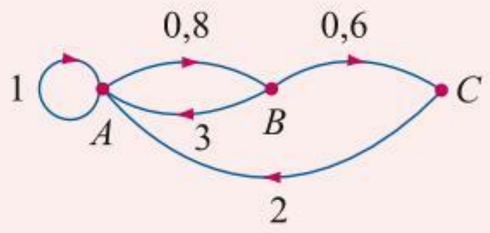
3 bij 3 matrix

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

rij

kolom

graaf



Overgangsmatrices

Matrices waarbij de getallen aangeven welk deel van de ene categorie van de populatie in een bepaalde periode overgaat in de andere categorie worden overgangsmatrices genoemd.
Overgangsmatrices worden gebruikt om de populatieverdeling in een volgende periode te vinden.

Voorbeeld

De overgangsmatrix hiernaast geeft aan dat een periode later $\frac{7}{10}$ deel van categorie A weer in categorie A zit, $\frac{2}{10}$ deel van categorie B in categorie A zit, $\frac{3}{10}$ deel van categorie A in categorie B zit en $\frac{8}{10}$ deel van categorie B weer in categorie B zit.

$$\text{naar}\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Machten van overgangsmatrices

Als matrix M wordt gebruikt om de populatieverdeling in een volgende periode te vinden, dan kan matrix M^n worden gebruikt om de populatieverdeling na n perioden te berekenen.

Voorbeeld

Een diersoort wordt niet ouder dan 3 jaar.
Matrix B geeft de beginsituatie en
matrix M is de overgangsmatrix per jaar.

$$B = \begin{array}{r} 0-1 \\ 1-2 \\ 2-3 \end{array}\begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 3{,}2 & 1{,}6 \\ 1{,}28 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}4 \end{pmatrix} \qquad M^3 \times B = \begin{pmatrix} 720 \\ 316 \\ 160 \end{pmatrix}$$

Drie jaar later zijn er 720 nuljarige dieren, 316 eenjarige dieren en 160 tweejarige dieren.

Eenheidsmatrix, inverse matrix

Een vierkante n bij n matrix die op de hoofddiagonaal uitsluitend uit enen bestaat en voor het overige uit nullen, is de eenheidsmatrix I_n.
Voor elke n bij n matrix A geldt $A \times I_n = A$ of $I_n \times A = A$.
De inverse matrix A^{-1} van een overgangsmatrix A is de matrix waarmee je de verdeling van de populatie in de vorige periode kunt berekenen.
De vermenigvuldigingen $A \times A^{-1}$ als $A^{-1} \times A$ leveren beide de eenheidsmatrix op.

Voorbeeld

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}75 \\ 0{,}2 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ -4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

© Noordhoff Uitgevers bv

Stabiele verdeling

Als de verdeling van een populatie na vermenigvuldiging met de overgangsmatrix M niet meer verandert, dan heet de verdeling stabiel.

Voorbeeld

Laat zien dat beginverdeling B onder invloed van overgangsmatrix M uiteindelijk convergeert naar een stabiele verdeling. Geef deze verdeling.

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Oplossing

$$M^{50} \times B = \begin{pmatrix} 250 \\ 100 \end{pmatrix} \text{ en } M \times \begin{pmatrix} 250 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 100 \end{pmatrix}, \text{ dus } \begin{pmatrix} 250 \\ 100 \end{pmatrix} \text{ is een stabiele verdeling van de populatie.}$$

Populatievoorspellingsmatrix, Lesliematrix

Matrices waarin overleving en geboorte worden samengevat worden populatievoorspellingsmatrices of Lesliematrices genoemd. In de bovenste rij staan de geboortecijfers g_n per leeftijdsgroep en in de overige rijen de overgangskansen o_n van de ene leeftijdsgroep naar de volgende.

$$L = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \\ o_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & o_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & o_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & o_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Je kunt algebraïsch het product $A \times B$ van twee matrices A en B berekenen

Vermenigvuldig de getallen in elke rij van matrix A met de overeenkomstige getallen in de kolommen van matrix B en tel op.

Je kunt met het gemiddeld aantal nakomelingen per individu een voorspelling doen over de ontwikkeling van de populatie op de lange duur

Als het gemiddeld aantal nakomelingen gedurende het leven per individu van de populatie gelijk is aan 1, dan is de populatie stabiel, dan kan de populatie stabiel worden of dan is er sprake van periodiciteit.

Voorbeeld

$$A \times B \quad \begin{pmatrix} 200 & 250 \\ 150 & 100 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 235 & 250 \\ 115 & 100 \end{pmatrix} = A \times B$$

$0{,}8 \cdot 200 + 0{,}5 \cdot 150 = 235$

Voorbeeld

De ontwikkeling van een populatie per jaar wordt beschreven door de Lesliematrix hiernaast. De populatie bestaat uit 560 nuljarigen, 1850 eenjarigen en 1200 tweejarigen. Bereken de populatieverdeling een jaar later en onderzoek hoe de populatie zich op de lange duur zal ontwikkelen.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$$

Oplossing

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 560 \\ 1850 \\ 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4900 \\ 224 \\ 370 \end{pmatrix}$$

Een jaar later zijn er 4900 nuljarigen, 224 eenjarigen en 370 tweejarigen.
Het gemiddeld aantal nakomelingen gedurende het leven per individu is gelijk aan $0{,}4 \cdot 2 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}9$. Dit aantal is kleiner dan 1, dus de populatie zal op de lange duur uitsterven.

© Noordhoff Uitgevers bv

Test jezelf

T-1 In een dorp zijn twee concurrerende tankstations. Het verloop tussen beide tankstations is nogal groot. Hiernaast is dat verloop beschreven. In het dorp maken 300 mensen gebruik van de 'Witte Pomp' en 300 van 'Quick Tank'.

a Maak een overgangsmatrix bij deze situatie.

b Hoeveel mensen zullen er na 1 maand tanken bij de 'Witte Pomp'? En hoeveel na twee maanden?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-1.

Concurrentieslag

In ons dorp heerst een hevige concurrentiestrijd op het bezinefront. Aangelokt door stuntprijzen laat elke maand de helft van de klanten van Quick Tank de tank bij de Witte Pomp volgooien. Quick Tank voert een actie met spaarzegels waardoor ze elke maand 25% van de klanten van de Witte Pomp weet te krijgen.

T-2 Gegeven zijn de matrices K, L en M.

$$K = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

a Bereken $K \times L$, $L \times K$ en $K \times M$.

b Waarom is de vermenigvuldiging $M \times K$ niet mogelijk?

c Geef van de vermenigvuldigingen $M \times I_2$, $M \times I_3$, $I_2 \times M$ en $I_3 \times M$ aan welke mogelijk zijn en welke niet. Geef van de mogelijke vermenigvuldigingen ook de uitkomst.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-2.

T-3 In een wildpark is in 2000 een aantal stinkdieren uitgezet. Stinkdieren kunnen maximaal 15 jaar oud worden. Een bioloog onderscheidt drie leeftijdsklassen van elk 5 jaar: jonge, volwassen en oude stinkdieren. Hiernaast staat de matrix die de ontwikkeling van deze diersoort per 5 jaar weergeeft.

$$S = \begin{array}{c} \\ j \\ v \\ o \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} j & v & o \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

In 2010 heeft de bioloog het aantal stinkdieren in de drie leeftijdsklassen geteld. Het resultaat staat in de tabel hiernaast.

	2000	2005	2010	2025
j	…	…	61	…
v	…	…	30	…
o	…	…	30	…

a Bereken met behulp van matrix S de aantallen stinkdieren in de drie leeftijdsklassen in 2025.

b Gebruik de inverse matrix S^{-1} om de aantallen stinkdieren in de drie leeftijdsklassen in 2005 te berekenen.

c Bereken de aantallen stinkdieren in de drie leeftijdsklassen die in 2000 in het park zijn uitgezet.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-3.

T-4 Een populatie bestaat uit 740 dieren die verdeeld zijn over drie leeftijdsklassen. De jaarlijkse ontwikkeling van de populatie wordt gegeven door matrix M. Matrix B stelt een willekeurige verdeling van de populatie voor.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2{,}5 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$$

Gebruik matrix B en bereken met behulp van de vermenigvuldiging $M \times B = B$ bij welke verdeling over de drie leeftijdsklassen er sprake is van een stabiele verdeling.

$$B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ met } a + b + c = 740$$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-4.

© Noordhoff Uitgevers bv

T-5 In de matrix hiernaast staan gegevens over de klanten van een drietal supermarkten. In verband met gewijzigde openingstijden, waarbij supermarkten ook 's avonds open kunnen zijn, is het voor een aantal klanten aantrekkelijk om van supermarkt te veranderen. In de matrix zie je bijvoorbeeld dat 7,3% van de klanten van supermarkt I een maand later klant is geworden van supermarkt II.

$$M = \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}801 & 0{,}001 & 0{,}001 \\ 0{,}073 & 0{,}920 & 0{,}001 \\ 0{,}126 & 0{,}079 & 0{,}998 \end{pmatrix} \end{array}$$

a Verklaar met behulp van de matrix dat minder dan 20% van het totaal aantal klanten een maand later van supermarkt is veranderd, maar dat je niet kunt berekenen hoe groot dat percentage precies is.

b Voordat de winkeltijden werden veranderd, hadden supermarkt I, II en III respectievelijk 1000, 3000 en 12 200 klanten. Bereken het aantal klanten van elke supermarkt één maand later.

c Ontstaat er op de lange duur een stabiele verhouding in het aantal klanten van de drie supermarkten, als de gegevens van de matrix ook voor elke volgend maand kloppen ? Zo ja, geef dan de stabiele verdeling van de klanten over de drie supermarkten.

d Is het waarschijnlijk deze stabiele verdeling bereikt zal worden? Motiveer je antwoord.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-4.

T-6 Bij een diersoort worden drie leeftijdsklassen van één jaar onderscheiden: jong, volwassen en oud.
De kans dat een jong dier volwassen wordt, is $\frac{1}{2}$ en de kans dat een volwassen dier oud wordt, is $\frac{1}{4}$.

De volwassen dieren brengen per individu drie keer zoveel jongen voort als de jonge en de oude dieren brengen twee keer zoveel jongen voort als de jonge dieren.

a Stel dat het geboortecijfer voor de jonge dieren 0,3 is. Stel de bijbehorende Lesliematrix op en geef aan hoe de totale populatie zich in de loop van de tijd zal ontwikkelen.

b Beantwoord bovenstaande opdracht ook voor een geboortecijfer 0,4 voor de jonge dieren.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-5.

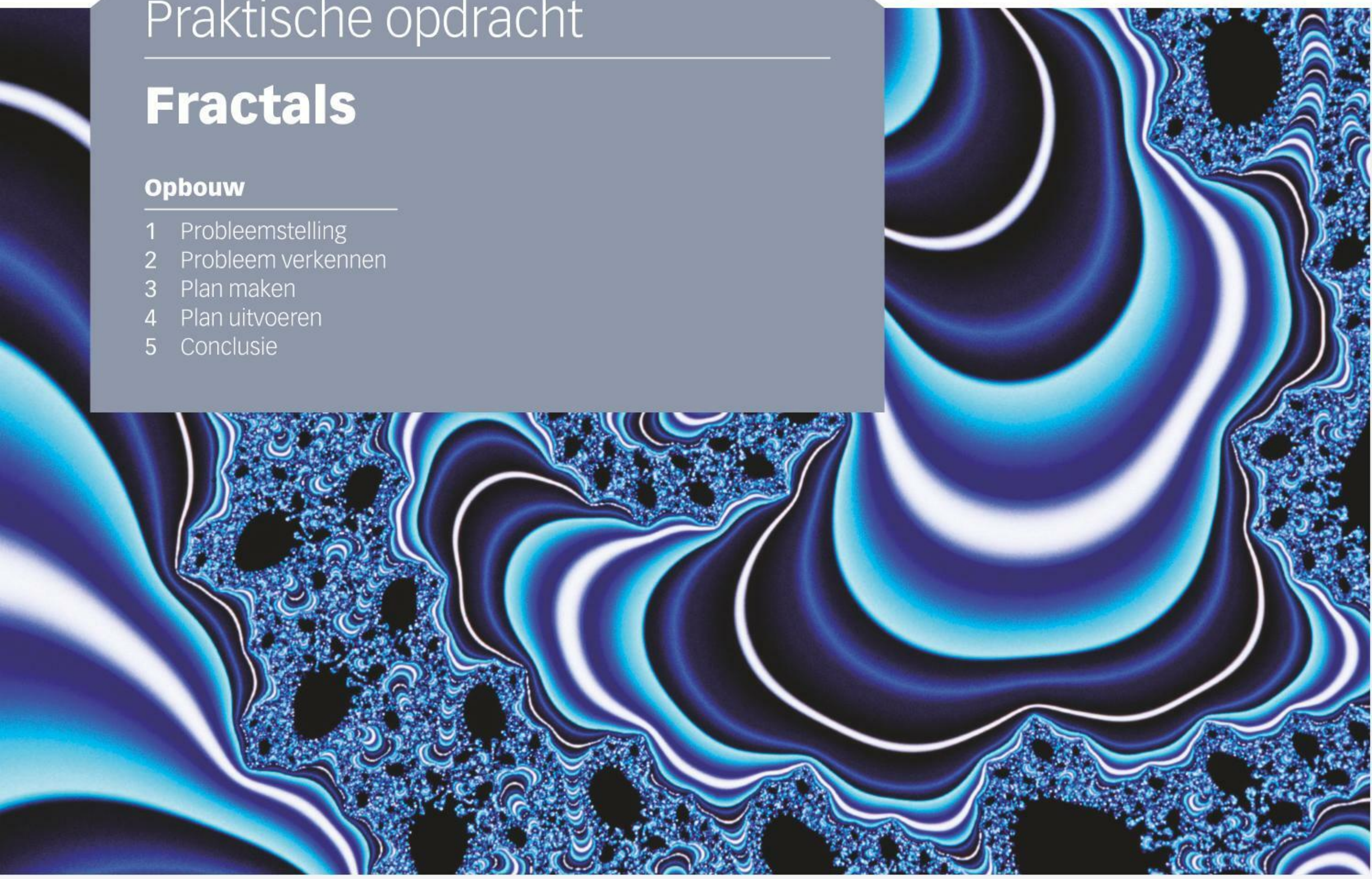
© Noordhoff Uitgevers bv

Praktische opdracht

Fractals

Opbouw

1 Probleemstelling
2 Probleem verkennen
3 Plan maken
4 Plan uitvoeren
5 Conclusie



Probleemstelling

Figuren die zichzelf steeds herhalen en waarin je op verschillende schalen dezelfde basisvorm kunt ontdekken worden fractals genoemd. Naast fractale lijnen en fractale figuren komen ook ruimtelijke fractals voor. Hoe ontstaan fractals eigenlijk? En hoe zit het met de dimensie van een steeds sterker kronkelende lijn die het hele vlak lijkt op te vullen?

1a Teken een rechthoek met een oppervlakte van 35 cm^2 en een omtrek van 24 cm.

b Verander de figuur zodanig dat de oppervlakte gelijk blijft maar de omtrek toeneemt.

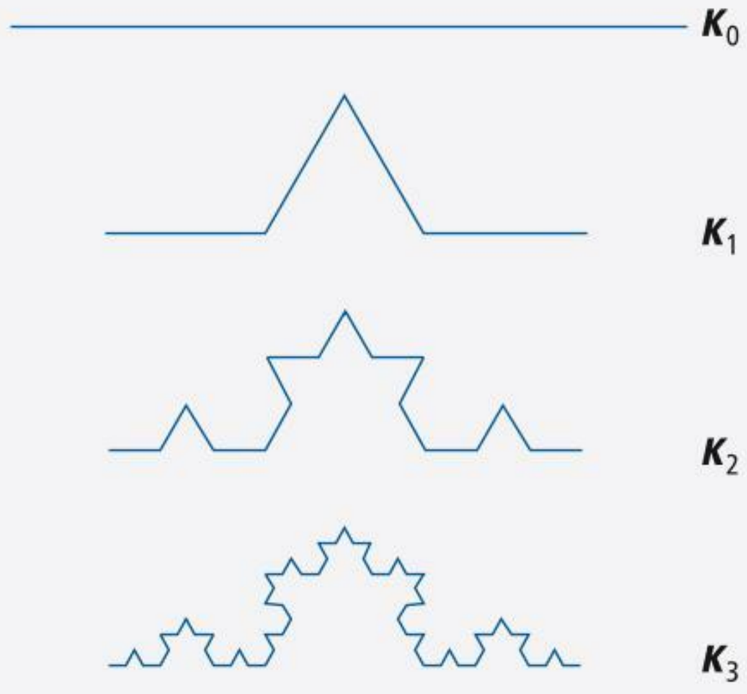
c Probeer de oppervlakte gelijk te houden, terwijl de omtrek 56 cm wordt.

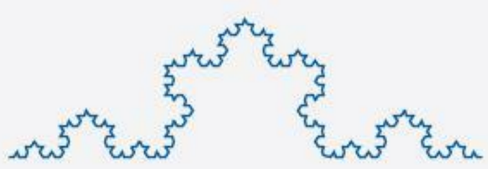
d Is het mogelijk een reeks figuren te tekenen, waarvan de omtrek onbegrensd blijft toenemen, terwijl oppervlakte niet boven een bepaalde waarde komt?

© Noordhoff Uitgevers bv

Probleem verkennen

Door een simpele bouwregel herhaald toe te passen, kun je een ingewikkelde figuur laten ontstaan. Op deze bladzijden zie je bijvoorbeeld hoe een lijnstuk K_0 in drie gelijke stukken wordt verdeeld. Het middelste gedeelte wordt weggelaten en vervangen door twee nieuwe lijnstukken, die met het weggelaten lijnstukje een gelijkzijdige driehoek vormen. De nieuwe figuur heet K_1. Op de vier lijnstukken van K_1 wordt de bouwregel opnieuw toegepast, het resultaat is figuur K_2. Als je dit proces blijft herhalen krijg je een figuur die Kochkromme of Kochfractal wordt genoemd.

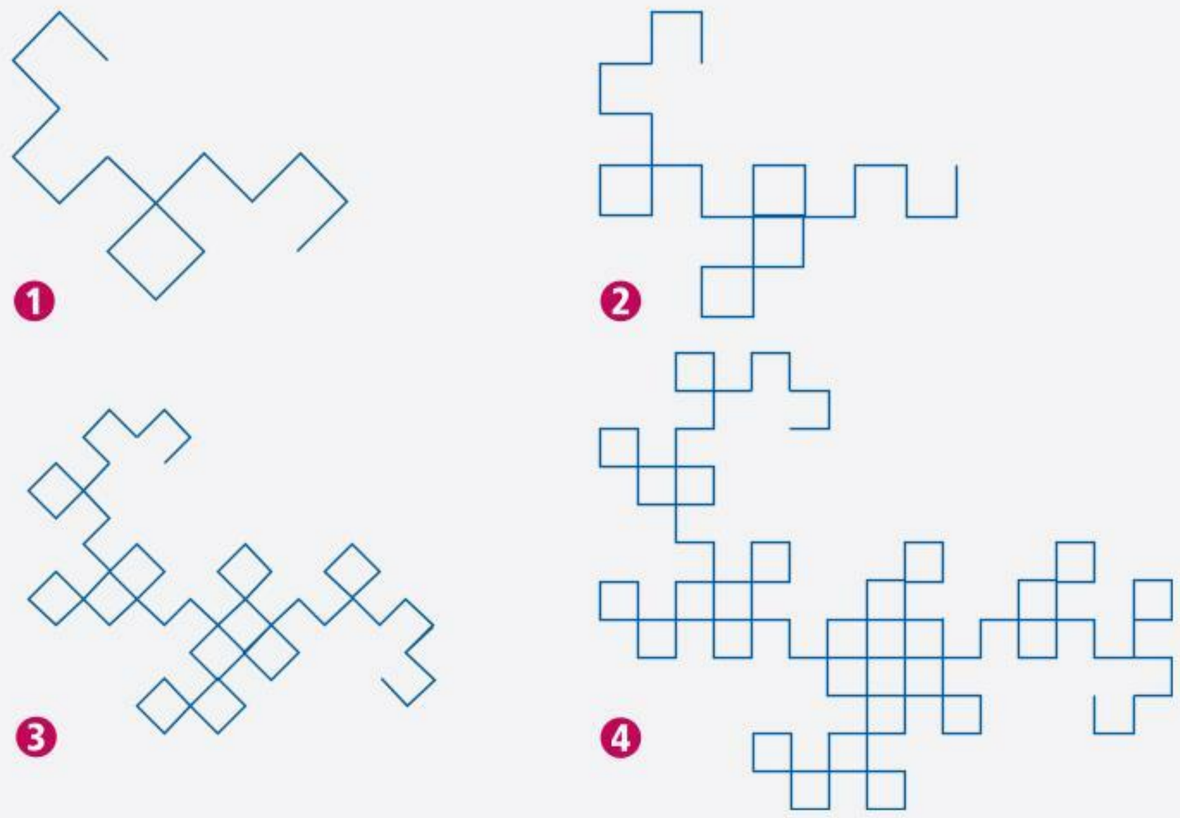




2 Neem aan dat K_0 de lengte 1 heeft.
a Bereken de lengten van K_1 tot en met K_4.
b Druk de lengte van K_n uit in n.

3 Door de bouwregel toe te passen op een gelijkzijdige driehoek ontstaat het zogenaamde Koch-eiland.
a Teken enkele fasen in het ontstaan van dit eiland.
b Verklaar dat dit eiland een oneindig lange omtrek heeft, maar dat de oppervlakte niet oneindig groot is.

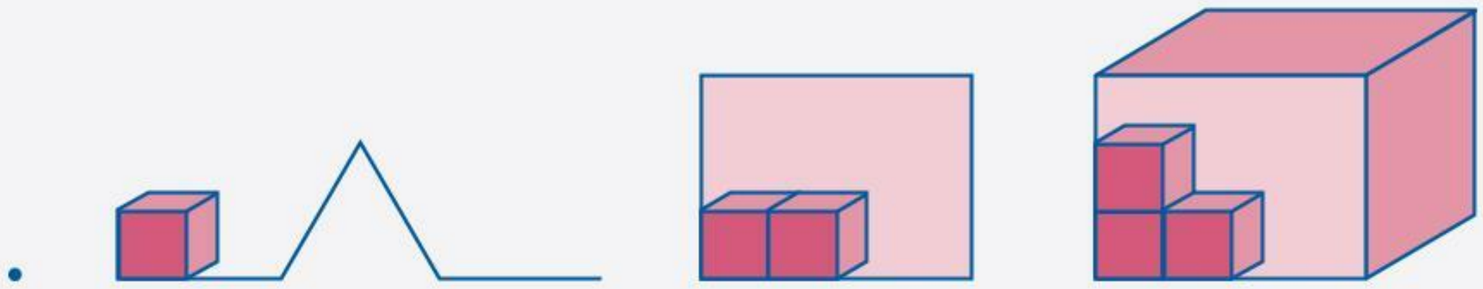
4 Een bekende fractal is de draakkromme, waarvan een afbeelding op de linker bladzijde staat. Hiernaast zie je enkele tussenfasen bij het ontstaan van deze kromme. Als je de bouwregel steeds opnieuw blijft toepassen krijg je een figuur die enigszins op een Chinese draak lijkt.
Probeer te omschrijven wat de bouwregel bij de draakkromme is.



Plan maken

Het begrip dimensie kun je omschrijven als de mate waarin een figuur het vlak of de ruimte opvult. Het is gebruikelijk om een punt, een lijn, een vlakke figuur en een ruimtelijke figuur respectievelijk de dimensies 0, 1, 2 en 3 te geven. Voor fractals heb je een nauwkeuriger omschrijving van het begrip dimensie nodig.

© Noordhoff Uitgevers bv



5 Hierboven zie je een punt, een lijnfiguur, een vlakke figuur en een ruimtelijke figuur. Je kunt ze overdekken, dat wil zeggen bedekken of opvullen, bijvoorbeeld met een aantal kubusjes.

a Hoeveel rode kubusjes heb je nodig om elke figuur te overdekken? En hoeveel blauwe?

b Als de ribbe van een kubus gehalveerd wordt, heb je dan altijd ook twee keer zoveel kubusjes nodig? Zo nee, hoeveel dan wel?

c En als de ribbe van een kubus vijf keer zo klein is?

6 Ga uit van een lijnstuk met lengte 1, een vierkant met zijde 1 en een kubus met ribbe 1.
De lengte van de ribbe van de kubusjes, die gebruikt worden om een figuur te overdekken, wordt r genoemd.
Vul de tabel in en laat zien dat de dimensie overeenkomt met de exponent van de macht van r.

aantal dekkubusjes

r	*punt*	*lijn*	*vlak*	*lichaam*
1	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$1 = 2^{\cdots}$	$2 = 2^{\cdots}$	$4 = 2^{\cdots}$	$\ldots = 2^{\cdots}$
$\frac{1}{3}$	$1 = \ldots$	$3 = \ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\frac{1}{a}$	$1 = a^{\cdots}$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Plan uitvoeren

Uit de tabel blijkt dat het aantal kubussen dat nodig is voor overdekking van een figuur evenredig is met de factor waarmee de ribbe van de kubus wordt verkleind. Er geldt daarom: $n = c \cdot k^d$.
In deze formule is n het aantal kubusjes voor overdekking, is k de verkleiningsfactor en is d de dimensie.
Hiernaast is de formule omgewerkt.

$$n = c \cdot k^d$$
$$\log(n) = \log(c) + d \cdot \log(k)$$
$$d = \frac{\log(n) - \log(c)}{\log(k)}$$
$$d = \frac{\log(n)}{\log(k)} - \frac{\log(c)}{\log(k)}$$

7a Schrijf bij de omrekening van de formule voor elke stap op, welke rekenregels toegepast zijn.

b Als de kubusjes steeds kleiner worden, zal de factor k en dus ook $\log(k)$ steeds verder toenemen.
Beredeneer dat de formule dan overgaat in $d = \frac{\log(n)}{\log(k)}$

© Noordhoff Uitgevers bv

8a Ga met behulp van de tabel hiernaast na, dat een lijnstuk met lengte 4 de dimensie 1 heeft.

b Maak ook zo'n tabel om na te gaan dat een rechthoek met oppervlakte 3 de dimensie 2 heeft.

c Waarom doen de lengte van de lijn en de grootte van de rechthoek er in feite niet toe?

r	k	n	$\frac{\log(n)}{\log(k)}$
1	1	4	1
$\frac{1}{2}$	2	$8 = 4^{\cdots}$	1
…	…	…	…
$\frac{1}{\alpha}$	…	…	…

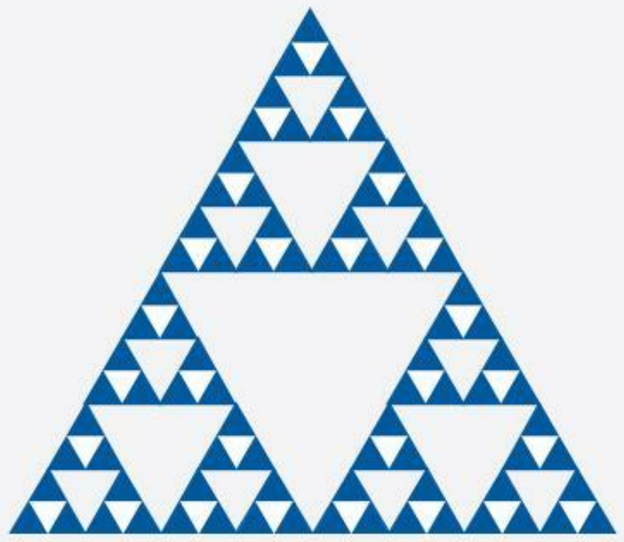
9 Maak een tabel als in de vorige opdracht die bij de Koch-kromme hoort. Laat zien dat de dimensie ongeveer 1,26 is.

10 Onderzoek ook de dimensie van de draakkromme of van een andere fractal.

Conclusies

Maak een duidelijk verslag van je werkzaamheden, voorzien van illustraties en toelichting. Maak voor de lezer duidelijk wat er aan de hand is met de oppervlakte en de omtrek van een Koch-kromme en beschrijf het begrip dimensie. Laat zien wat je over een andere fractal te weten bent gekomen.

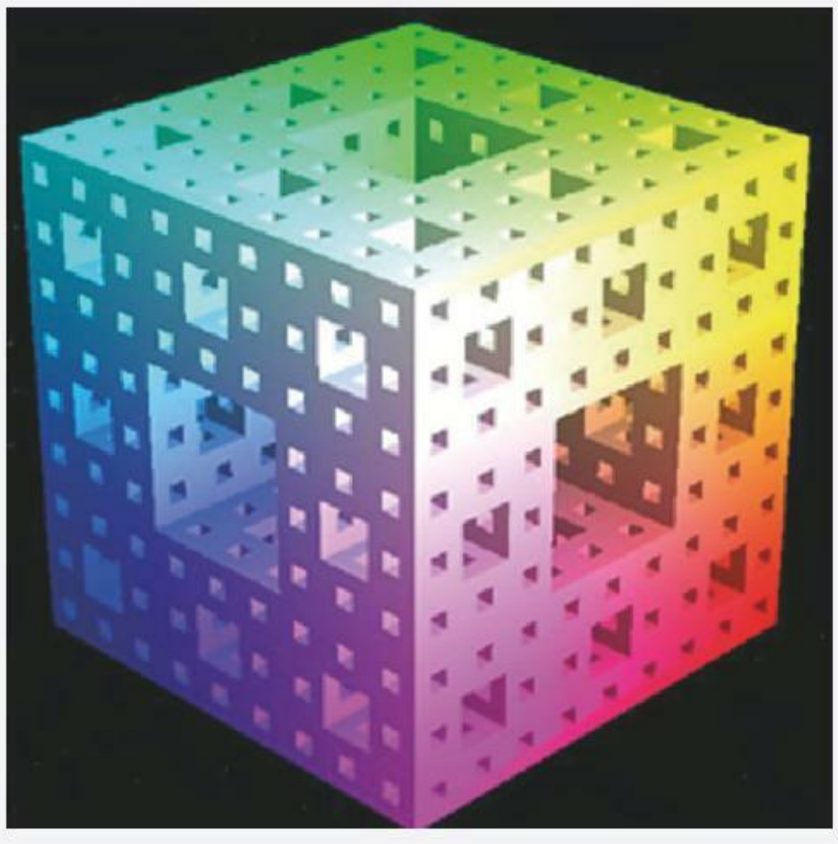
Suggesties voor vervolg



> De figuur die hierboven ontstaat heet 'De zeef van Sierpinski'.
> Bedenk hoe de bouwregel voor de zeef luidt.
> Voor de overdekking van de zeef kun je in plaats van kubusjes beter regelmatige viervlakjes (driezijdige piramides) met ribbe 1 gebruiken.
> Maak een tabel en bereken daarmee de dimensie van de zeef.

> Hiernaast zie je de 'Ruimtelijke spons' van Menger.
> Probeer van deze spons de bouwregel op te sporen en bereken daarmee de dimensie van de spons.

> Zoek in bibliotheek, mediatheek of op internet naar andere voorbeelden van fractals. Omschrijf de bouwregel van zulke figuren en probeer de dimensie te berekenen.



© Noordhoff Uitgevers bv

Leibniz

Opbouw

1 Probleemstelling
2 Probleem verkennen
3 Plan maken
4 Plan uitvoeren
5 Conclusie

Probleemstelling

In 1684 publiceerde de Duitser Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) een artikel in het tijdschrift Acta eruditorum (verhandelingen van geleerden).
Het artikel staat bekend als ‘Nova Methodus’ (de nieuwe methode). Het behandelde een algemene methode voor wat je nu differentiëren noemt.
In de loop van de zeventiende eeuw waren in allerlei afzonderlijke gevallen problemen van maxima en raaklijnen opgelost, maar een algemene aanpak ontbrak nog. Behalve Leibniz had ook de Engelsman Isaac Newton (1642–1727) een algemene methode voor differentiëren uitgedacht. Leibniz was echter de eerste die zijn vondst publiceerde.
In dit onderzoek wordt uitgezocht hoe het differentiëren er bij Leibniz uitzag en wat de belangrijkste verschillen zijn met de hedendaagse benadering.

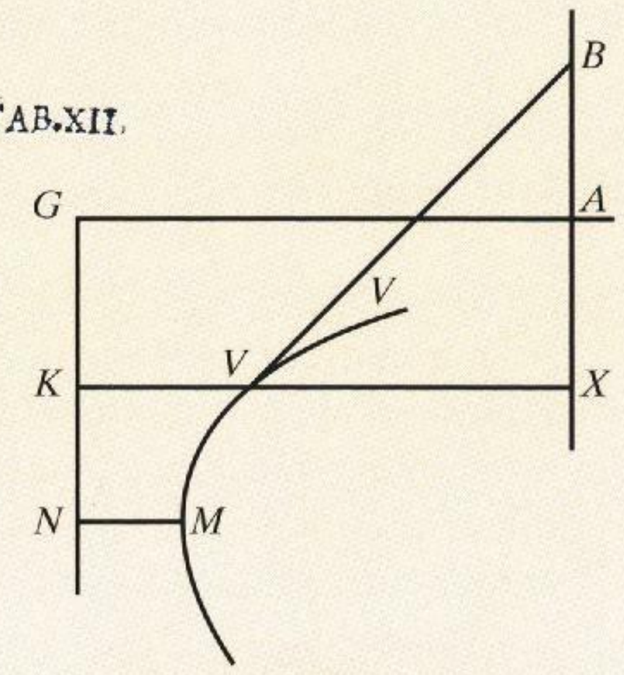
© Noordhoff Uitgevers bv

MENSIS OCTOBRIS A. M DC LXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.

SIt axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, *v*, *w*, *y*, *z*; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur *x*. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut *v* (vel *w*, vel *y*, vel *z*) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur d*v* (vel d*w*, vel d*y* vel d*z*) sive differentia ipsarum *v* (vel ipsarum *w*, aut *y*, aut *z*) His positis calculi regulæ erunt tales:

TAB. XII.



Probleem verkennen

Hierboven staat een fragment van 'Nova Methodus' en de bijbehorende figuur. Hieronder staat een vertaling van de eerste twee alinea's. De oorspronkelijke tekst gaat over vier krommen, in de vertaling is dat teruggebracht tot één.

Nieuwe methode voor maxima en minima, alsmede raaklijnen, die noch door gebroken noch door irrationele hoeveelheden gehinderd wordt, en een buitengewone rekenwijze ervoor, door G.G.L.

Gegeven de as AX en een kromme VV waarvan de ordinaat VX, loodrecht op de as, *v* wordt genoemd; en eveneens AX afgesneden van de as, *x* genoemd. Laat *VB* de raaklijn zijn, die de as snijdt in het punt *B*. Nu wordt een willekeurig gekozen lijnstuk dx genoemd, en het lijnstuk dat tot dx staat zoals *v* tot XB, wordt dv genoemd, oftewel het verschil van deze *v*. Als dit aangenomen wordt zullen de rekenregels de volgende zijn: Als a een gegeven constante hoeveelheid is, dan zal da gelijk aan zijn *O*, en *d*(ax) gelijk aan adx.
Als $y = v$ (ofwel, de ordinaat van elke kromme YY is gelijk aan elke overeenkomende ordinaat van de kromme VV), dan is $dy = dv$. Nu de optelling en aftrekking: als $z - y + w + x =$ v dan is $d(z - y + w + x)$, ofwel dv, gelijk aan $dz - dy + dw + dx$. Vermenigvuldiging: $dxv = xdv + vdx$, ofwel stel $y = xv$ dan wordt $dy = xdv + vdx$. Het maakt niet uit of we de formule zoals xv nemen, of de haar vervangende letter zoals *y*. Opgemerkt dient te worden dat *x* en dx in deze rekenwijze op dezelfde manier behandeld worden als *y* en dy of iedere andere onbepaalde letter met haar differentiaal. Opgemerkt dient ook te worden dan we niet altijd terug mogen werken van een vergelijking van een differentiaal tenzij met behoedzaamheid, waarover elders gesproken zal worden. Nu Deling: dv/y of (als $z = v/y$) $dz = (\pm vdy \pm ydv)/yy$

© Noordhoff Uitgevers bv

1 Leibniz gebruikte andere woorden en notaties bij grafieken dan tegenwoordig gebruikelijk is.
Lees de eerste alinea van de vertaling.

a Welke lijn is de x-as in de tekening?
Is er ook een y-as getekend?

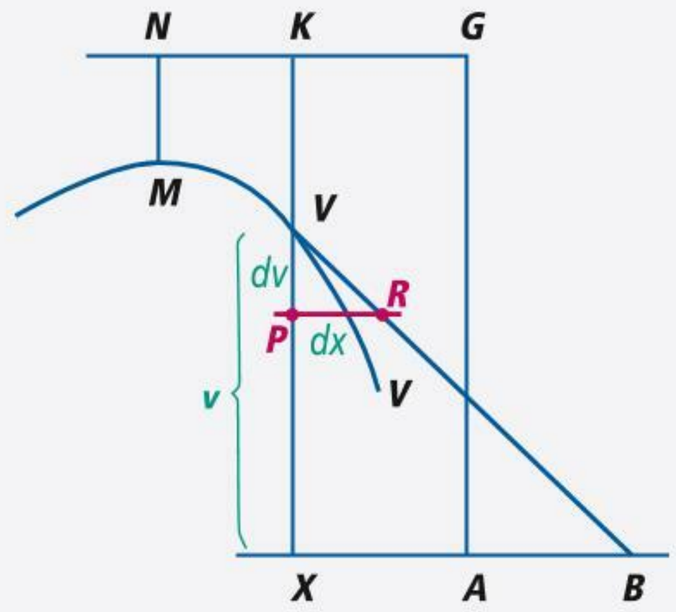
b Hoe heten tegenwoordig de lijnstukken die Leibniz met 'ordinaten' aanduidt?

c Welke lijnstuk is de x-coördinaat van punt V?

d Waar zou jij de y-as tekenen?

Plan maken en plan uitvoeren

Hiernaast staat de kromme VV, maar nu met de x-as horizontaal.
De letters waarmee Leibniz de lijnstukken benoemt, zijn aangegeven en ook het 'willekeurige' lijnstukje dx en het bijbehorende lijnstukje dv.
Je vindt dv met behulp van het snijpunt B van de raaklijn met de x-as. Er geldt dv/dx = v/XB.
De driehoeken VRP en VBX zijn gelijkvormig.
Wanneer het differentiequotiënt dv/dx bekend is, kun je de raaklijn tekenen.



2 Leibniz definieert het differentiaalquotiënt anders dan je tegenwoordig zou doen.

a Leibniz noemt dv 'het verschil van deze'.
Zoek in de Latijnse tekst het woord dat hij voor het verschil gebruikt.

b Je bent gewend om het differentiaalquotiënt in punt V te benaderen door een punt R op de grafiek te nemen en VR kleiner te maken.
Leibniz daarentegen kiest een punt R op de raaklijn.
Maak een schets waarin je de raaklijn tekent met behulp van het punt R op de grafiek en vergelijk dat met de raaklijn zoals Leibniz die tekent.
Hoe moet je dx kiezen zodat de verschillen bijna geheel verdwijnen?

c Welke problemen krijg je met de aanpak van Leibniz wanneer je de helling van de raaklijn in het punt M op de kromme VV wilt benaderen?

Leibniz legt hier niet uit hoe je de raaklijn VB aan de kromme VV vindt. Daarvoor is zijn 'nieuwe methode' bedoeld. Die geeft een aantal regels om dv/dx te berekenen, waarbij v verschillende 'functies' kunnen zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

3 Een differentiaal van Leibniz lijkt op een afgeleide zoals je die tegenwoordig berekent, maar deze twee begrippen zijn niet helemaal identiek.

a Zoek uit welke regels Leibniz geeft voor sommen en verschillen van twee functies. Pas de regels van Leibniz toe om $\mathrm{d}(3x + 5)$ te berekenen.

b Wanneer je x^2 opvat als $x \cdot x$ kun je met Leibniz' regel voor vermenigvuldiging de differentiaal berekenen.
Bereken $\mathrm{d}(x^2)$ op die manier.

c Stel $f(x) = x^2 - 4x + 4$ en bereken $f'(x)$.
Laat vervolgens zien dat: $\mathrm{d}(x^2 - 4x + 4) = f'(x)\,\mathrm{d}x$

d Hoe kun je de afgeleide vinden wanneer je met de methode van Leibniz een differentiaal berekend hebt?

e Wat bedoelt Leibniz met de laatste opmerking voor de regel voor deling? Geef een voorbeeld.

4 Hieronder staat nog een fragment uit 'Nova Methodus' van Leibniz.
Hierin geeft Leibniz de regels voor machten (*potentia*) en wortels (*radices*).
Geef dit fragment weer in moderne wiskundetaal.

Potentiæ d X^a, æqu. a. $X^{a-1}\,\mathrm{d}x$, exempli gratia d, X^3 æqu. $3X^2\,\mathrm{d}x$

d $\frac{1}{X^a}$ æqu. $-\frac{a\,\mathrm{d}x}{X^{a+1}}$ ex gr. si w sit æqu. $\frac{1}{X^3}$ fiet d w æqu. $-\frac{3\,\mathrm{d}x.}{X^4}$

Radices: d, $\sqrt[b]{X^a}$, æqu. $\frac{a}{b}\sqrt[b]{X^{a-b}}$ (Hinc d $\sqrt[2]{y}$ æqu. $\frac{\mathrm{d}y,}{2\sqrt[2]{y}}$

nam eo casu a est 1, & b est 2; ergo $\frac{a}{b}\sqrt[b]{X^{a-b}}$ est $\frac{1}{2}\sqrt[2]{Y^{-1}}$ jam Y^{-1} idem

est quod $\frac{1}{y,}$ ex natura exponentium progressionis Geometricæ, &

$\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ est $\frac{1}{\sqrt[2]{Y}}$) d $\frac{1.}{\sqrt[b]{X^a}}$ æqu $\frac{-b\,\mathrm{d}x}{a\sqrt[b]{X^{b-a}}}$.

Suggestie voor vervolg

Zoek op internet een tekst waarin Isaac Newton uitlegt hoe hij de afgeleide van een functie bepaalt. Hij gebruikt daarbij 'fluxies' waarmee hij bedoelt: hele kleine veranderingen van de x en de y.
Van welke 'functie' bepaalt Newton in het voorbeeld de afgeleide, en wat is die afgeleide? Hoe zou Leibniz deze afgeleide noteren? Noem de belangrijkste verschillen tussen de aanpak van Leibniz en die van Newton.

© Noordhoff Uitgevers bv

Verdieping - Meetkundige bewijzen

In deze Verdieping komen enkele stellingen over hoogtelijn, zwaartelijn en bissectrice aan de orde. De bewijzen van deze stellingen geven je een beeld van de verschillende technieken die bij het opstellen van een bewijs gebruikt kunnen worden.

De stelling van Viviani

1a Teken een vierkant $ABCD$ en kies een willekeurig punt P binnen dit vierkant.
Je kunt een stelling formuleren over het verband tussen de omtrek van het vierkant en de som van de afstanden van P tot de vier zijden van $ABCD$.
Formuleer en bewijs deze stelling.

b Geldt deze stelling ook voor een rechthoek? En voor een ruit?

2a Teken een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van 10 cm.

b Bereken exact de hoogte van deze driehoek en geef vervolgens een benadering in één decimaal nauwkeurig.

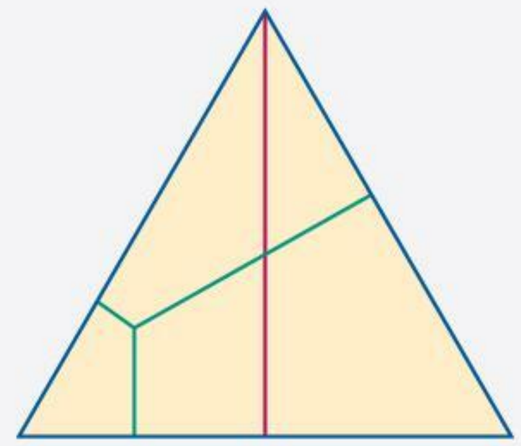
c Kies vier verschillende punten P, Q, R en S binnen de driehoek, meet de afstand van elk van deze punten tot de drie zijden en vul de tabel hiernaast in.

	P	Q	R	S
afstand tot AB				
afstand tot AC				
afstand tot BC				
totaal				

d Welk vermoeden volgt er uit de resultaten van de opdrachten b en c?

Theorie

Stelling van Viviani: In elke gelijkzijdige driehoek geldt het volgende:
De som van de kortste afstanden van een willekeurig punt binnen de driehoek tot de drie zijden is gelijk aan de hoogte van de driehoek.
Het bewijs van de stelling van Viviani is niet erg ingewikkeld en berust op het gebruik van oppervlakten.



3a Kies een willekeurig punt P binnen een gelijkzijdige driehoek ABC en verdeel driehoek ABC in de driehoeken ABP, BCP en ACP.

b Teken de projecties van P op de drie zijden van driehoek ABC en noem deze punten Q, R en S.

c Leg uit dat geldt: $\textit{oppervlakte}\ ABP = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PQ$.

d Geef ook een formule voor de oppervlakte van driehoek BCP en voor de oppervlakte van driehoek ACP.

e De oppervlakte van de driehoeken ABP, BCP en ACP samen is gelijk aan de oppervlakte van driehoek ABC.
Toon aan dat hieruit volgt:
$PQ + PR + PS = \textit{hoogte van driehoek}\ ABC$.

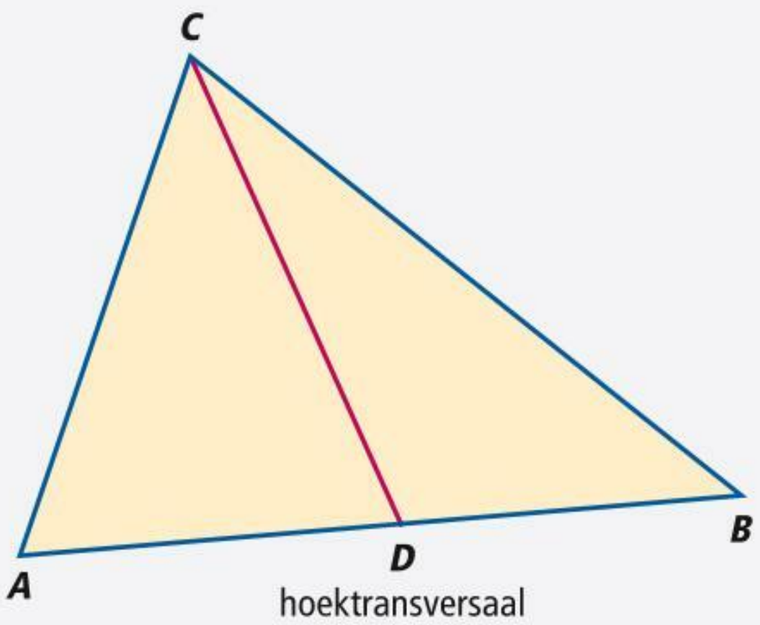
Vincenzo Viviani (1622–1703) was een Italiaanse wis- en natuurkundige, die leefde en werkte in Florence.
Hij was een leerling van Torricelli en Galileï. Hij deed onder andere experimenten om de snelheid van het geluid te meten.

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoektransversaal

Theorie

Een lijnstuk dat begint in een hoekpunt van een driehoek en eindigt op de tegenoverliggende zijde heet een **hoektransversaal**.



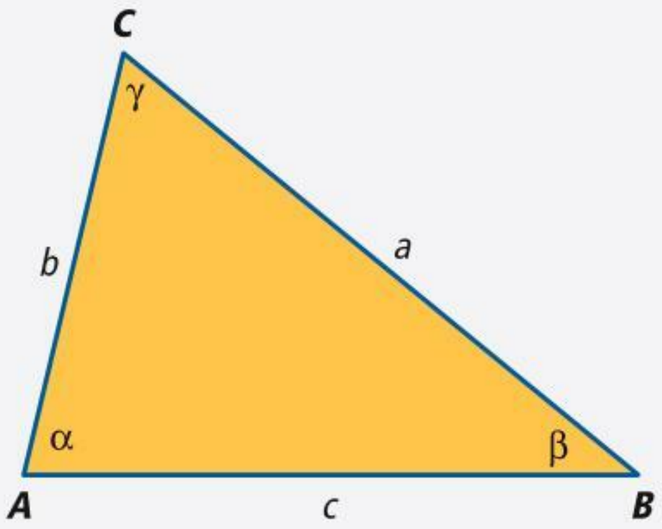
hoektransversaal

In de volgende opdrachten zal een formule worden afgeleid waarmee je de lengte van een hoektransversaal kunt berekenen. Voor het bewijs van die formule is de cosinusregel nodig. Voor een willekeurige driehoek ABC geldt:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$



4a Van een driehoek ABC is gegeven $b = 4$, $c = 5$ en $\angle C = 42°$. Bereken met behulp van de cosinusregel a in één decimaal.

b Maak opdracht a opnieuw, maar neem nu $b = 4$, $c = 5$ en $\angle C = 142°$.

5 De cosinusregel kun je ook gebruiken om de hoeken van een driehoek te berekenen, als je de lengte van de drie zijden kent.

a Bereken de hoeken van een driehoek met zijden 6, 7 en 8.

b Bereken de hoeken van een driehoek met zijden 5, 17 en 18.

c Bereken de hoeken van een driehoek met zijden 10, 24 en 26.

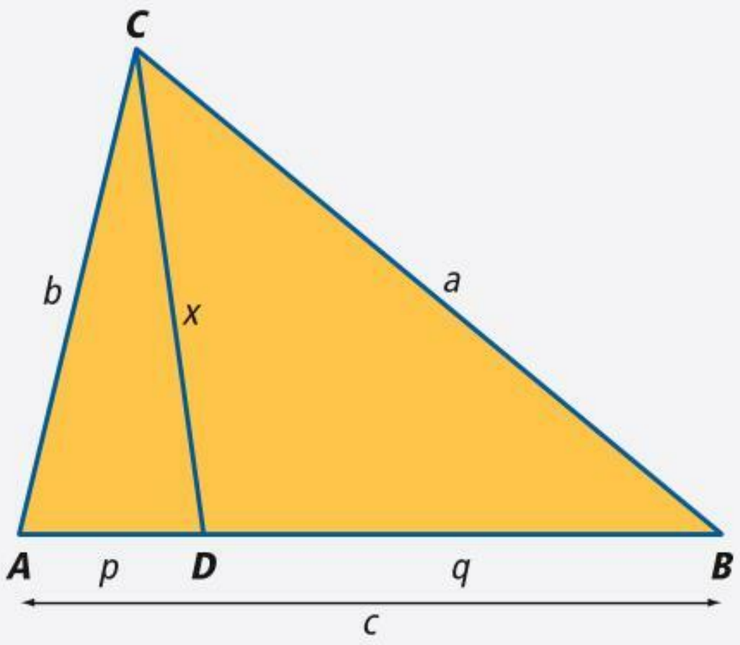
6 De stelling van Pythagoras is te beschouwen als een bijzonder geval van de cosinusregel.
Leg dit uit.

© Noordhoff Uitgevers bv

De stelling van Stewart

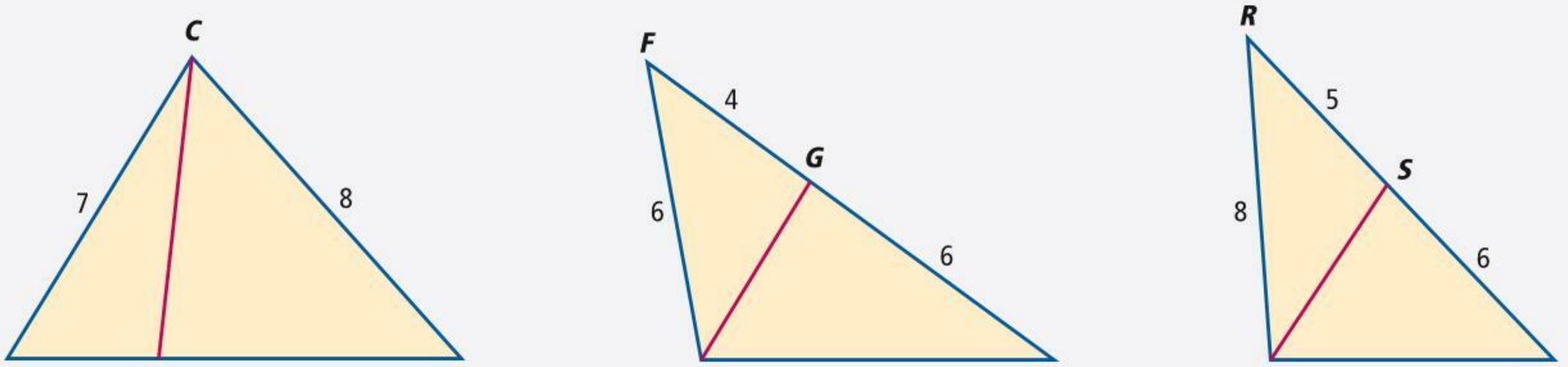
Theorie

Als in een driehoek ABC met zijden a, b en c de transversaal CD wordt getekend en deze transversaal verdeelt de zijde AB in stukken met lengte p en q, dan is de lengte x van deze transversaal te berekenen met de formule $x^2c = a^2p + b^2q - cpq$.
Deze regel staat bekend als de **stelling van Stewart**.
Voor het bewijs van de stelling van Stewart moet je de cosinusregel gebruiken.



7a Druk met behulp van de cosinusregel x uit in b, p en $\cos(\alpha)$.
b Pas de cosinusregel ook toe op driehoek ABC en druk $\cos(\alpha)$ uit in a, b en c.
c Substitueer het resultaat van opdracht b in het resultaat van opdracht a.
d Gebruik $p + q = c$ en voltooi het bewijs van de stelling van Stewart.

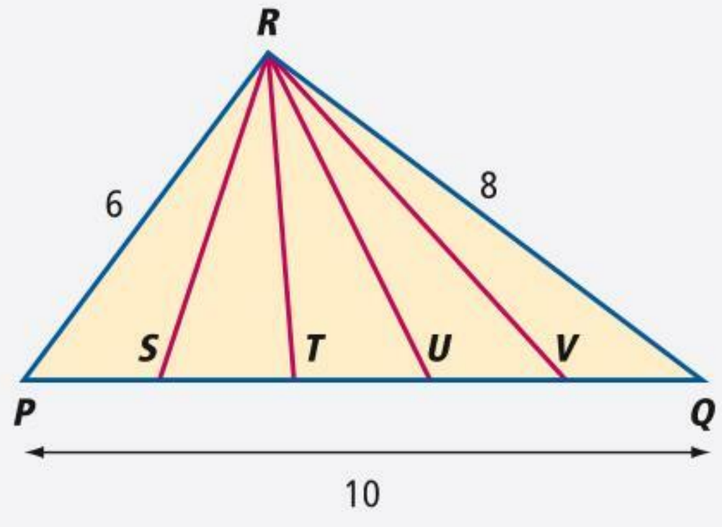
Matthew Stewart (1717–1785) was de zoon van een Schotse predikant. Hij studeerde in Glasgow en bestudeerde met name de meetkunde uit de Griekse oudheid. Hij werd zelf ook predikant, maar werd later toch professor in de wiskunde aan de Universiteit in Edinburgh.



8 Bereken de lengte van de transversaal in de tekeningen hierboven.

9 Bereken de hoogte van een gelijkzijdige driehoek met zijde 2 door gebruik te maken van de stelling van Stewart.

10 Voor een stalen dakconstructie is een rechthoekige driehoek PQR gemaakt met $PQ = 10$ m, $PR = 6$ m en $QR = 8$ m.
De punten S, T, U en V verdelen zijde PQ in gelijke afstanden. Om de constructie te verstevigen moeten er verbindingen worden gemaakt vanuit R naar de punten S, T, U en V.
Bereken de totale lengte van deze vier verbindingen.



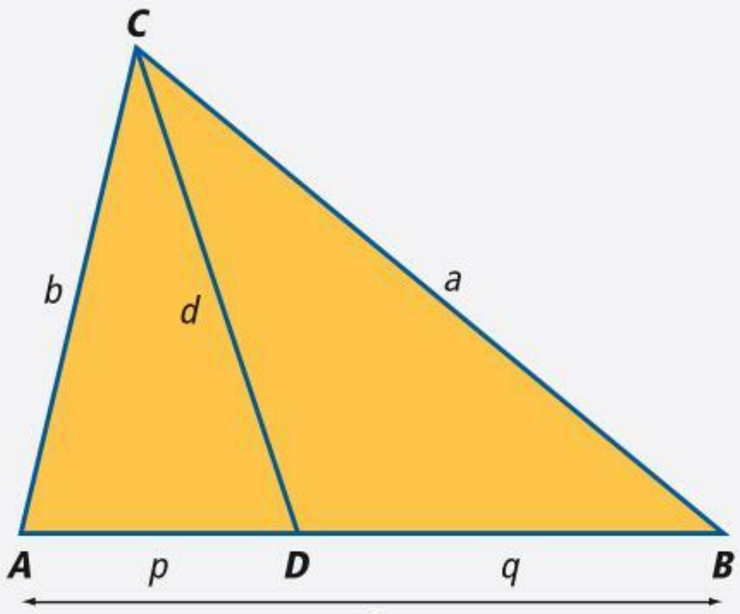
© Noordhoff Uitgevers bv

Lengte van bissectrice en zwaartelijn

Theorie

De **bissectriceregel**: Elke bissectrice in een driehoek verdeelt de tegenoverliggende zijde in stukken die zich verhouden als de aanliggende zijden.

De bissectriceregel kun je bewijzen door op het verlengde van de bissectrice CD een punt E te kiezen, waarvoor geldt: BE = BC = a.



$p : q = b : a$

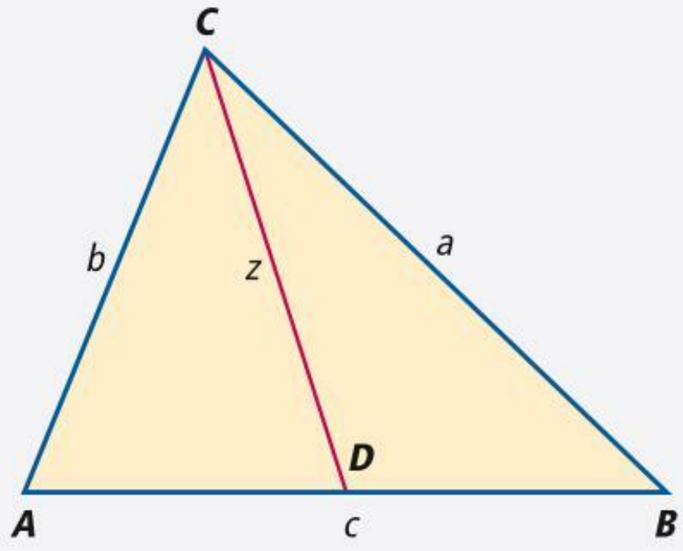
11a Teken driehoek ABC met de punten D en E.
b Waarom zijn BE en AC evenwijdig?
c Welke driehoeken in de figuur zijn gelijkvormig? Bewijs deze gelijkvormigheid.
d Voltooi het bewijs van de bissectriceregel.

12 Gegeven driehoek ABC met $AB = 6$, $AC = 7$ en $BC = 8$.
a De bissectrice vanuit C verdeelt zijde AB in twee stukken. Bereken de lengte van deze twee stukken.
b Bereken de lengte van CD.

13 Door de bissectriceregel toe te passen kun je een algemene regel opstellen voor de lengte van de bissectrice.
a Waarom volgt uit de bissectriceregel dat $ap = bq$?
b Als d_c de lengte van de bissectrice uit hoekpunt C is, dan luidt de Stelling van Stewart: $d_c^2 \cdot c = a^2p + b^2q - cpq$. Uit opdracht a volgt dat je ap kunt vervangen door bq en andersom. Doe dit en toon aan dat je de formule kunt herleiden tot $d_c^2 = ab - pq$.

14 Gegeven is driehoek PQR met $PQ = 10$, $QR = 9$ en $PR = 8$. Bereken de lengte van de bissectrice uit hoekpunt P.

15 Als CD de zwaartelijn is in een driehoek ABC, dan geldt $p = q = \frac{1}{2}c$.
a Toon aan dat de lengte z_c van de zwaartelijn uit hoekpunt C kan worden berekend met de formule $z_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$.
b Toon met de formule aan dat de kortste zwaartelijn altijd naar het midden van de langste zijde loopt.



16 Bereken de lengte van de drie zwaartelijnen in een driehoek met zijden 6, 7 en 9.

© Noordhoff Uitgevers bv

Trefwoorden

A
absolute waarde 42
afgeleide functie 68
afgeleide van sinus en cosinus 208
afmetingen van een matrix 236
afstand 130
asymptoot 151

B
beeldgrafiek 40
bissectrice 133
bissectriceregel 261
breuken optellen en aftrekken 118
breuken vermenigvuldigen 118
buigpunt 79
buigraaklijn 79
bundel grafieken 48

C
cosinus 176
cosinusregel 180, 228

D
differentiëren 68

E
exponentiële functie 13
eenheidsmatrix 239
equivalente formules 46
exacte waarden sin en cos 200
extreme waarden 76

F
familie van functies 48
frequentie 202

G
gelijkvormigheid 177
gelijkwaardige formules 46
goniometrische formules 204
graaf 236
grafiek van een logaritmische functie 19
grondtal 14

H
halveringstijd 25
harmonische trilling 202
helling 68
hoektransversaal 259
hoofdstelling integraalrekening 110
horizontale asymptoot 40, 151, 173

I
ingeschreven cirkel 133
integraal 109, 172
integrand 110
inverse bewerking 44
inverse functie 44
inverse matrix 238

K
kwadraat afsplitsen 60, 125
kettingfunctie 72
kettingregel 74

L
Lesliematrix 242
limiet 152
lijnsymmetrie 229
loodrecht 123
logaritme 14
logaritmische formules herleiden 22
logaritmische vergelijking 24

M
machten van matrices 240
matrix 234
matrixvermenigvuldiging 237
middelpuntsvergelijking 124

O
omgeschreven cirkel 132
overgangsmatrix 235

P
parameter 48
populatievoorspellingsmatrix 241
primitieve functie 110
primitieven van sin en cos 210
primitieve van een machtsfunctie 111
primitieve van sinus en cosinus 210
primitiveren 110
productfunctie 148
productregel 154
puntsymmetrie 229

Q
quotiëntfunctie 150
quotiëntregel 156

R
raaklijn 68, 126
raaklijn aan cirkel (stelling) 128, 184

© Noordhoff Uitgevers bv

raaklijnstukken (stelling) 184
raakpunt 126
rakende cirkels (stelling) 128
randmaximum 77
randminimum 77
rechthoekige driehoek (stelling) 132
rekenregels voor integralen 113, 172
rekenregels voor logaritmen 20
Riemann-som 108

S
samengestelde afbeelding 72
sinus 176
sinusregel 178, 226
somfunctie 65
spiegelen in de x-as 41
spiegelen in de y-as 41
stabiele verdeling 241
standaardfuncties 38
standaardlimiet 153
Stewart, stelling van - 260

T
tangens 176
tangensfunctie 212
Thales (stelling) 182
transformatie 40, 115
trillingstijd 202
tweede afgeleide 79

U
uitdrukken in 61

V
veeltermfuncties 49
verdubbelingstijd 25
vergelijking van een lijn 116, 122, 225
vergelijking van een cirkel 225
vermenigvuldigen t.o.v. de x-as 40
vermenigvuldiging t.o.v. de y-as 40
verschilfunctie 65
verticale transformatie 40
verticale asymptoot 151, 173
Viviani, stelling van - 258

© Noordhoff Uitgevers bv

Colofon

Vormgeving omslag de C, Amsterdam/Wormer
Foto omslag Edwin Walvisch, Haarlem
Vormgeving binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer
Technisch tekenwerk Integra Software Services Pvt. Ltd., India
Illustraties Bert Hollander i.o.v. Haasart illustraties
Beeldresearch B en U International Picture Service, Amsterdam

Fotoverantwoording
Ron Sinkeldam, Hierden: p. 10
iStockphoto: p. 10-11, 66-67, 90-91, 120-121, 144-145, 198-199, 232-233
Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 21, 158, 223, 249
(c) Royal Observatory Edinburgh: p. 35
Dreamstime: p. 36-37, 174-175
Imageselect, Wassenaar: p. 89, 232
Digital Vision: p. 104
Wikimedia Commons: p. 113, 231 mo, 254 o
Geertrui Schaberg, Mildam: p. 143 (2x)
Nationale Beeldbank, Amsterdam: p. 167
Reporters, Haarlem: p. 197 rb
Chris S. Robinson: p. 197 l, ro
Shutterstock: p. 209
Corbis: p. 231 mb, 250, 254 b
Clifford A. Pickover, www.pickover.com: p. 253
Bridgeman Art Library, Londen: p. 258

© Noordhoff Uitgevers bv

WISKUNDE B

VWO

5

LEERBOEK

Moderne Wiskunde is meer dan dit boek.

De boeken, het digitale lesmateriaal en het docentenmateriaal vormen samen het complete pakket van de methode Moderne Wiskunde.

Werken met tablet, laptop, boek of digibord, op school of thuis: met Moderne Wiskunde is alles mogelijk.

Veel plezier met Moderne Wiskunde!

Noordhoff Uitgevers

Noordhoff Uitgevers

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-86191-9

9 789001 861919