

WISKUNDE A

VWO

6

LEERBOEK

$\frac{1}{4}$

MODERNE WISKUNDE

+

∞

$\div$

a

c^2

=

c

b

x



Noordhoff Uitgevers

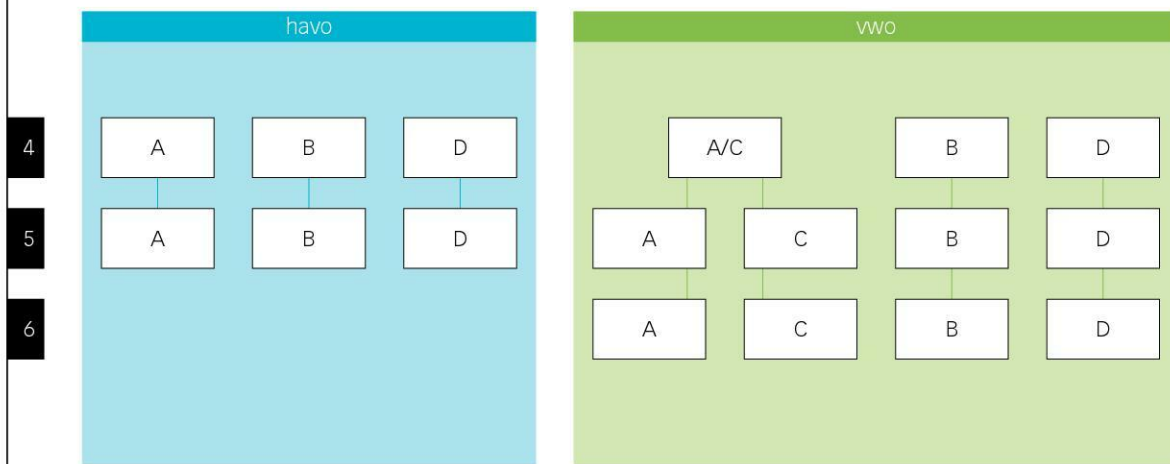


11e editie

Moderne Wiskunde

6 vwo A

Serieoverzicht bovenbouw



Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van (een) gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without prior written permission of the publisher.

11e editie

Moderne Wiskunde

6 vwo A

Harm Bakker
Bert Boon
Dick Bos
Wim Doekes
Hielke Peereboom
Karoline van den Reek
Rindert Reijenga
Geertrui Schaberg
Ron Sinkeldam
Cornelia Wallien

Inhoudsopgave

1	Normale verdelingen	10
	Voorkennis	12
1-1	Percentages berekenen	14
1-2	Grenswaarden berekenen	16
1-3	Gemiddelde en standaardafwijking berekenen	18
1-4	Normale verdelingen met discrete waarden	20
1-5	Gemengde opdrachten	22
	Samenvatting	24
	Test jezelf	26
	Extra oefening - Basis	28
	Extra oefening - Gemengd	29
	Uitdagende opdrachten	30
	Discriminatie: ja of nee?	31

2	Hypothese toetsen	32
	Voorkennis	34
2-1	Gelijk hebben en gelijk krijgen	36
2-2	Fouten van de eerste en de tweede soort	38
2-3	Toetsen op significantie	40
2-4	Eenzijdig binomiaal toetsen	42
2-5	De toets van het gemiddelde	44
2-6	Tweezijdig toetsen	46
2-7	Gemengde opdrachten	48
	Samenvatting	50
	Test jezelf	52
	Extra oefening - Basis	54
	Extra oefening - Gemengd	55
	Uitdagende opdrachten	56
	(On)nauwkeurigheid bij peilingen	57

Vaardigheden 1	58
Rijen	58
Formules herleiden	59
Rekenmachine	60
Logaritmische schaal	61
Combinatoriek	62

3	Functies bewerken	64
	Voorkennis	66
3-1	Grafieken verschuiven	68
3-2	Herschalen	70
3-3	Somfuncties en verschilfuncties	72
3-4	Productfuncties	74
3-5	Quotiëntfuncties	76
3-6	Gemengde opdrachten	78
	Samenvatting	80
	Test jezelf	82
	Extra oefening - Basis	84
	Extra oefening - Gemengd	85
	Uitdagende opdrachten	86
	Body Mass Index	87

4	Differentiëren	88
	Voorkennis	90
4-1	Kettingregel	92
4-2	Productregel	94
4-3	Quotiëntregel	96
4-4	Hellinggrafiek	98
4-5	Redeneren met de afgeleide	100
4-6	Gemengde opdrachten	102
	Samenvatting	104
	Test jezelf	106
	Extra oefening - Basis	108
	Extra oefening - Gemengd	109
	Uitdagende opdrachten	110
	Fileproblemen	111

Vaardigheden 2	112
Rijen	112
Formules herleiden	113
Sinusoïden	114
Combinatoriek	116
Onderzoeksopdrachten	118

5	Exponentiële en logaritmische functies	120
	Voorkennis	122
5-1	Exponentiële en logaritmische functies	124
5-2	Logaritmische schalen	126
5-3	Exponentiële functies differentiëren	128
5-4	Logaritmische functies differentiëren	130
5-5	Groeimodellen	132
5-6	Gemengde opdrachten	134
	Samenvatting	136
	Test jezelf	138
	Extra oefening - Basis	140
	Extra oefening - Gemengd	141
	Uitdagende opdrachten	142
	Hoe oud zijn historische vondsten?	143

6	Verbanden	144
	Voorkennis	146
6-1	Lineaire verbanden	148
6-2	Evenredig en omgekeerd evenredig	150
6-3	Formules opstellen	152
6-4	Redeneren met formules	154
6-5	Gemengde opdrachten	156
	Samenvatting	160
	Test jezelf	162

Vaardigheden 3	164
Logaritmische en exponentiële formules	164
Differentiëren	165
Rijen	167
Combinatoriek	168
Onderzoeksopdrachten	170

Examenvoorbereiding	172
Rekenen	174
Functies en grafieken	178
Lineaire functies en gebroken functies	186
Machtsfuncties, kwadratische functies en wortelfuncties	192
Exponentiële functies en logaritmische functies	198
Periodieke functies	206
Veranderingen en afgeleide functies	210
Rijen	216
Tellen	221
Hints bij de examenopdrachten	226
Overzicht formules	230
Examenwerkwoorden	231
Trefwoorden	232

Werken met Moderne Wiskunde

De 11e editie ligt voor u. Deze editie is geschreven op basis van het nieuwe examenprogramma.

Ook in deze editie zijn de twee belangrijkste kernwaarden: inzicht en structuur. Inzicht ontwikkelen en een duidelijke structuur gaan samen. Elke paragraaf start met een oriënterende opdracht, waarna de betreffende theorie wordt vastgelegd. De theorie gaat steeds vergezeld van een of meer volledig uitgewerkte voorbeelden. In het vervolg van een paragraaf wordt de theorie verwerkt en geoefend en daarna weer geïntegreerd in eerder verworven kennis. Hier en daar treft u een Wiskundige Denk Activiteit aan. Op deze manier leren leerlingen niet alleen de theorie te reproduceren, maar krijgen ze inzicht in hoe de wiskunde in elkaar steekt.

Verschillen tussen leerlingen zullen er altijd zijn. Moderne Wiskunde 11e editie houdt hier meer dan ooit rekening mee door een ruim aanbod van extra oefeningen, aan het eind van een hoofdstuk en ook in het hulpboek, enerzijds, en uitdagende opdrachten en keuzeonderwerpen anderzijds.

De leerlijn in Moderne Wiskunde is geschikt om zelfstandig mee te werken. Bij vrijwel iedere lesparagraaf zijn er paragraaf vervangende ICT-opdrachten. Deze bieden naast opdrachten ook theorie, voorbeelden en tips en hints om de stof beter te begrijpen.

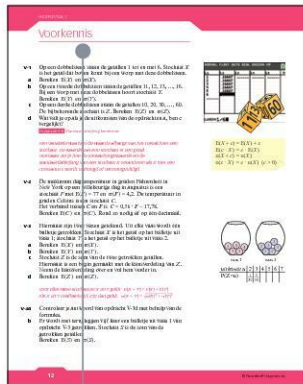
Voor u is de ICT erop gericht om uw leerlingen extra inzicht in de stof te geven en om de voortgang van uw leerling (en klas) te volgen. De ICT stelt uw leerling in staat zich efficiënter voor te bereiden op zijn proefwerk, met behulp van de digitale oefentoets.

Leerboek

Het leerboek is opgedeeld in hoofdstukken, afgewisseld met onderdelen algebraïsche vaardigheden.

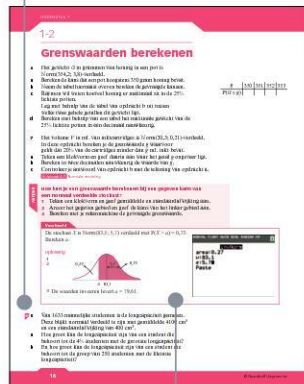


Werken met Moderne Wiskunde

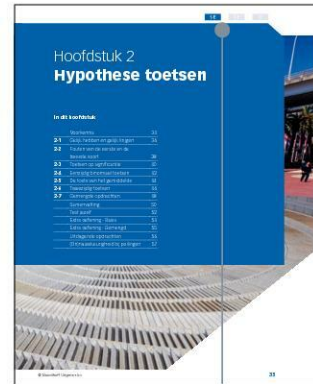


Met de voorkennisparagraaf aan het begin van ieder hoofdstuk haal je de benodigde voorkennis weer op.

Bij sommige opdrachten kun je nog meer oefenen in het hulpboek: 



In het leerboek vind je verwijzingen naar de instructie grafische rekenmachine in het hulpboek.

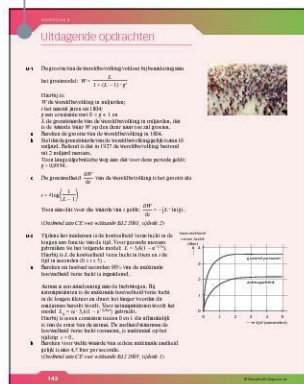
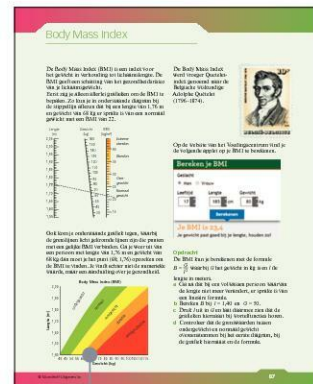


Per hoofdstuk staat aangegeven of de stof behoort tot het centraal examen, schoolexamen of keuzeonderwerpen.



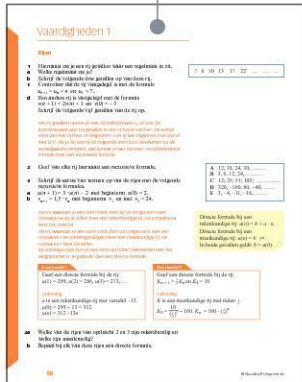
Deze opdrachten vragen wat meer aandacht van je, maar moet je wel kunnen maken: 

Bij deze opdrachten word je uitgedaagd iets verder te kijken dan je geleerd hebt.



Op deze bladzijde lees je over de geschiedenis of een toepassing van wiskunde.

In dit onderdeel leer je nieuwe vaardigheden en je onderhoudt de vaardigheden die je al geleerd hebt.



Bij de Extra oefening herhaal je stof uit het boek.

Achter in dit boek vind je de Examenvoorbereiding.



Hulpboek

Het hulpboek bevat de instructies voor de grafische rekenmachines, voorbeeldproefwerken, werkbladen en antwoorden bij de opdrachten uit het leerboek en de voorbeeldproefwerken.



Uitwerkingen

Het uitwerkingenboek bevat de uitwerkingen van de opdrachten uit het leerboek en uit het hulpboek. Stap voor stap wordt uitgewerkt wat de oplossing is van de opdrachten.

Werken met de ICT van Moderne Wiskunde

Standaardafwijking van een kansverdeling

Opdracht Theorie a $+$ $=$ C $\frac{1}{4}$ ∞ Help

Vraag 5 van 6 < Vorige Volgende >

Bij de kanstollen zijn de stochasten X , Y en Z de uitkomsten van respectievelijk de eerste, de tweede en de derde tol.

Bereken $E(X)$, rond waar nodig af op één decimaal:

Bereken $\sigma(X)$, rond waar nodig af op twee decimalen:

Bereken $E(Y)$ = en $\sigma(Y)$ =

Bereken $E(Z)$ = en $\sigma(Z)$ =

© Noordhoff Uitgevers C $\frac{1}{4}$ ∞ Afsluiten

Bij vrijwel iedere paragraaf is een vervangende ICT-opdracht opgenomen. In deze opdracht staan ook tips en tussenvragen, die je helpen de stof beter te begrijpen.

Veel opdrachten in de hoofdstukken worden ondersteund door een uitlegvideo of een aanpakanimatie. Hiermee kun je nog makkelijker en zelfstandiger werken met de ICT van Moderne Wiskunde.

Grenswaarden berekenen

Introductie
▶ Voorbeelden

☒ Oefening 1

andere opgave

Stochast X is Norm(10, 0.5) verdeeld.
 $P(X < a) = 0.633$. Bereken a in twee decimalen nauwkeurig.
 Bereken met je rekenmachine de gevraagde grenswaarde.
 $a = \text{invnorm}(0.633, 10, 0.5) = 10.17$

$O_{\text{links}} = 0.633$

9.5 10 10.5

a

© Noordhoff Uitgevers bv

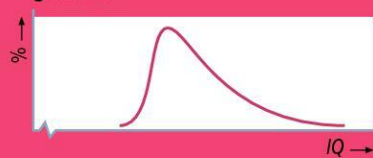
Diagnose



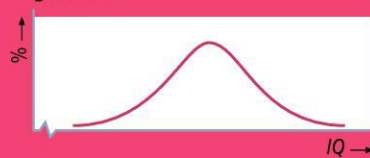
Na ieder hoofdstuk kun je een Digitale Oefentoets maken. Deze helpt je om een proefwerk efficiënt voor te bereiden. Je krijgt inzicht in hoe je op paragraafniveau scoort en indien nodig krijg je meer uitleg en oefenstof aangeboden.



grafiek 1



grafiek 2



Intelligentie

Op de openbare basisschool 'Margriet' en op het categorale gymnasium 'Delta' is van de leerlingen de intelligentie gemeten.

Het resultaat van de metingen is per school verwerkt in de bovenstaande grafieken.

Welke grafiek hoort bij welke school? Waarom?



Hoofdstuk 1

Normale verdelingen

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	12
1-1	Percentages berekenen	14
1-2	Grenswaarden berekenen	16
1-3	Gemiddelde en standaardafwijking berekenen	18
1-4	Normale verdelingen met discrete waarden	20
1-5	Gemengde opdrachten	22
	Samenvatting	24
	Test jezelf	26
	Extra oefening - Basis	28
	Extra oefening - Gemengd	29
	Uitdagende opdrachten	30
	Discriminatie: ja of nee?	31



Voorkennis

- V-1** Op een dobbelsteen staan de getallen 1 tot en met 6. Stochast X is het getal dat boven komt bij een worp met deze dobbelsteen.
- Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
 - Op een tweede dobbelsteen staan de getallen 11, 12, 13, ..., 16. Bij een worp met deze dobbelsteen hoort stochast Y . Bereken $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.
 - Op een derde dobbelsteen staan de getallen 10, 20, 30, ..., 60. De bijbehorende stochast is Z . Bereken $E(Z)$ en $\sigma(Z)$.
 - Wat valt je op als je de uitkomsten van de opdrachten a, b en c vergelijkt?

Hulpboek 4-6 Standaardafwijking berekenen

Een variabele waarvan de waarde afhangt van het toeval heet een stochast. De waarde van een stochast is een getal. Hiernaast zie je hoe de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een stochast X veranderen als X met een constante c wordt verhoogd of vermenigvuldigd.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP					
L1	L2	L3	L4	L5	2
1	.16667				
2	.16667				
3	.16667				
4	.16667				
5	.16667				
6	.16667				
L2(6)=1/6					

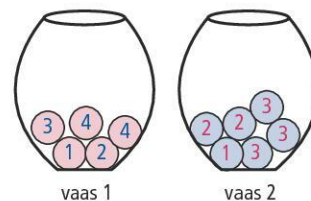


$$\begin{aligned} E(X + c) &= E(X) + c \\ E(c \cdot X) &= c \cdot E(X) \\ \sigma(X + c) &= \sigma(X) \\ \sigma(c \cdot X) &= c \cdot \sigma(X) \quad (c > 0) \end{aligned}$$

- V-2** De maximum dagtemperatuur in graden Fahrenheit in New York op een willekeurige dag in augustus is een stochast F met $E(F) = 77$ en $\sigma(F) = 4,2$. De temperatuur in graden Celsius is een stochast C . Het verband tussen C en F is $C = 0,56 \cdot F - 17,78$. Bereken $E(C)$ en $\sigma(C)$. Rond zo nodig af op één decimaal.

- V-3** Hiernaast zijn twee vazen getekend. Uit elke vaas wordt één balletje getrokken. Stochast X is het getal op het balletje uit vaas 1; stochast Y is het getal op het balletje uit vaas 2.

- Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
- Bereken $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.
- Stochast Z is de som van de twee getrokken getallen. Hiernaast is een begin gemaakt met de kansverdeling van Z . Neem de kansverdeling over en vul hem verder in.
- Bereken $E(Z)$ en $\sigma(Z)$.



uitkomst u	2	3	4	5	6	7
$P(Z=u)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{30}$				

*Voor elke twee stochasten X en Y geldt: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
 Als X en Y onafhankelijk zijn dan geldt: $\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$.*

- V-4a** Controleer je antwoord van opdracht V-3d met behulp van de formules.
- b** Er wordt met terugleggen vijf keer een balletje uit vaas 1 van opdracht V-3 getrokken. Stochast S is de som van de getrokken getallen. Bereken $E(S)$ en $\sigma(S)$.

Als $X_1, X_2, \dots, X_n$ onafhankelijke stochasten zijn, elk met dezelfde kansverdeling als stochast X , dan gelden voor de som $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

en het gemiddelde $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ de rekenregels hiernaast.

Deze eigenschappen heten de $\sqrt{n}$ -wet.

$$\begin{aligned} E(S) &= n \cdot E(X) \\ \sigma(S) &= \sqrt{n} \cdot \sigma(X) \\ E(\bar{X}) &= E(X) \\ \sigma(\bar{X}) &= \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Voorbeeld

Stochast X is de uitkomst van een kansexperiment.

Er geldt $E(X) = 25$ en $\sigma(X) = 3$.

Het experiment wordt 40 keer herhaald.

S is de som van de uitkomsten en

$\bar{X}$ is het gemiddelde van de uitkomsten.

Bereken $E(S)$, $\sigma(S)$, $E(\bar{X})$ en $\sigma(\bar{X})$.

Oplossing

$$E(S) = 40 \times 25 = 1000$$

$$\sigma(S) = \sqrt{40} \times 3 \approx 18,97$$

$$E(\bar{X}) = 25$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{3}{\sqrt{40}} \approx 0,47$$

- V-5** Een fabrikant verpakt zes luxe stukjes zeep in een geschenkdoozje. Het gewicht van een willekeurig stukje zeep uit de partij is een stochast Z met $E(Z) = 50$ gram en $\sigma(Z) = 0,3$ gram. Het gewicht van een leeg doosje is een stochast D met $E(D) = 30$ gram en $\sigma(D) = 0,2$ gram.

- Bereken $E(\bar{Z})$ en $\sigma(\bar{Z})$.
- Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het totale gewicht van een geschenkdoozje met zes stukjes zeep.

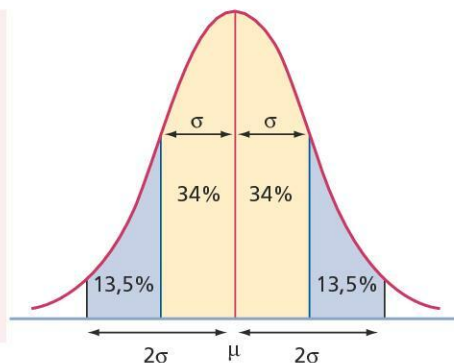
Theorie

De **normale verdeling** is een wiskundig model van de ideale klokvormige verdeling. De verdeling van een normaal verdeelde stochast X wordt volledig bepaald door twee **parameters**: de verwachtingswaarde $E(X) = \mu$ en de standaardafwijking $\sigma(X) = \sigma$.

Je noteert dat als: stochast X is Norm(μ , σ)-verdeeld.

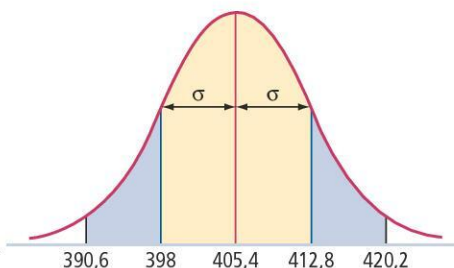
Er gelden de volgende twee vuistregels:

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$



- V-6** De inhoud X in grammen van blikjes kattenvoer is Norm($405,4$; $7,4$)-verdeeld.

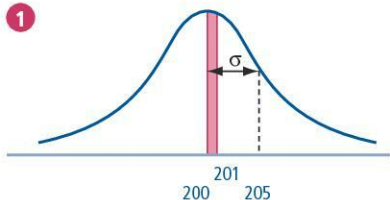
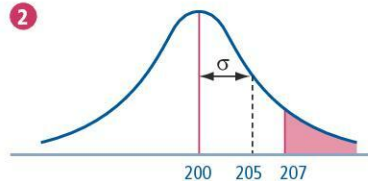
- Bereken $P(X < 398)$.
- Bereken $P(398 \leq X \leq 420,2)$.
- Welke kans is groter $P(405,4 \leq X \leq 409,1)$ of $P(409,1 \leq X \leq 412,8)$? Motiveer je antwoord.
- De blikjes kattenvoer zitten verpakt in dozen van twaalf stuks. De stochast T is het totale gewicht aan kattenvoer in zo'n doos. Bereken in één decimaal nauwkeurig $E(T)$ en $\sigma(T)$.



1-1

Percentages berekenen

- 1 Oploskoffie wordt verkocht in potten met een netto gewicht van 200 gram. De machine die de potten vult, doet echter niet steeds precies 200 gram in de pot. De ene keer wat meer, de andere keer wat minder. Via metingen is vastgesteld dat het gewicht in grammen $\text{Norm}(200; 5)$ verdeeld is.
 - a Schets de grafiek van de normale verdeling en geef daarin het gemiddelde, het gemiddelde plus de standaardafwijking en het gemiddelde min de standaardafwijking aan.
 - b Hoeveel procent van de potten oploskoffie zal een netto gewicht van meer dan 205 gram hebben?
 - c En hoeveel procent van de potten oploskoffie zal een te laag netto gewicht, dus minder dan 200 gram, hebben?
 - d Van zo'n 34% van de potten ligt het nettogewicht tussen 200 en 205 gram. Waarom zal niet 17% van de potten oploskoffie een netto gewicht hebben tussen 200 en 202,5 gram? Hoeveel procent zal het ongeveer wel zijn?
- 2 Het nettogewicht in grammen van de potten oploskoffie uit opdracht 1 is $\text{Norm}(200, 5)$ -verdeeld. Hieronder zie je tweemaal de bijbehorende klokvorm.



- a In figuur 1 ligt 34% tussen 200 en 205. Maak een schatting van het percentage dat tussen 200 en 201 ligt. Waarom is dat percentage niet gelijk aan $\frac{1}{5}$ van 34%?
- b Bereken met je rekenmachine, in twee decimalen nauwkeurig, hoeveel procent tussen 200 en 201 ligt.
- c Maak met behulp van figuur 2 een schatting van de kans dat een willekeurige pot koffie een netto gewicht heeft van meer dan 207 gram.
- d Bereken met je rekenmachine, in twee decimalen nauwkeurig, de kans dat een pot meer dan 207 gram oploskoffie bevat.

Hulpboek 4-7 Normale verdeling

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
DISTR DRAW
1:normalpdf(
2:normalcdf(
3:invNorm(
4:invT(
5:tpdf(
6:tcdf(
7:x^2pdf(
8:x^2cdf(
9:FPdf(
```

Hoe bereken je bij een normaal verdeelde stochast een percentage of kans?

- 1 Teken een klokvorm en geef het gemiddelde en de standaardafwijking aan.
- 2 Geef de grenzen aan en arceer het bedoelde gebied.
- 3 Bereken met je rekenmachine het gevraagde percentage of de gevraagde kans.

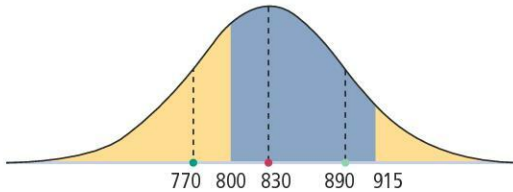
Voorbeeld

De jaarlijkse hoeveelheid neerslag in mm in een bepaalde polder is $\text{Norm}(830; 60)$ -verdeeld. In hoeveel procent van de jaren valt in die polder tussen de 800 en 915 mm neerslag?

Oplossing

1

2



- 3 Invoeren in de rekenmachine geeft 0,61317...
In ongeveer 61% van de jaren valt er tussen de 800 en 915 mm neerslag.



- 3 Bekijk de situatie van het voorbeeld. Je moet berekenen in hoeveel procent van de jaren de neerslag meer is dan 850 mm.
- a Leg uit dat het gebied onder de klokkromme geen bovengrens heeft.
- b Voer als bovengrens 10^{99} in en bereken het gevraagde percentage.
- c Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat in de polder in een willekeurig jaar minder dan 800 mm neerslag valt.

Als een gebied onder de klokvorm geen rechtergrens heeft, dan voer je als bovengrens het getal 10^{99} in. Heeft een gebied geen linker grens, dan neem je -10^{99} als ondergrens.

- 4 Bij het jaarlijks onderzoek van tweedeklassers constateert de schoolarts dat de lengte in cm van 14-jarige jongens $\text{Norm}(164; 7,2)$ -verdeeld is.
- a Bereken hoeveel procent van de 14-jarige jongens een lengte heeft tussen de 160 en 170 cm.
- b Bereken de kans dat een willekeurig gekozen jongen kleiner is dan 168,5 cm.
- c Hoeveel procent van de jongens heeft een lengte van meer dan 180 cm?
- d Bereken de kans dat twee willekeurige 14-jarige jongens beiden langer zijn dan 170 cm.
- e Een school heeft 342 jongens met een leeftijd van 14 jaar. Van hoeveel van deze jongens mag je verwachten dat ze niet langer zijn dan 150 cm?
- 5 Karen maakt kaarsen van bijenwas. Het gewicht in grammen van de kaarsen is $\text{Norm}(290; 17)$ -verdeeld.
- a Bereken de kans dat een kaars tussen de 275 en 300 gram weegt.
- b Bereken de kans dat een kaars meer dan 300 gram weegt.
- c Bereken de kans dat zes kaarsen elk meer dan 300 gram wegen.
- d Bereken de kans dat zes kaarsen samen meer dan 1800 gram wegen.
- e Joanne maakt kaarsenstandaards van ruw hout. Het gewicht van deze standaards is $\text{Norm}(185; 25)$ -verdeeld. Bereken de kans dat een kaarsenstandaard met een kaars samen tussen de 450 en 500 gram wegen.

1-2

Grenswaarden berekenen

- 6 Het gewicht G in grammen van honing in een pot is Norm(354,2; 3,8)-verdeeld.
- a Bereken de kans dat een pot hoogstens 350 gram honing bevat.
- b Neem de tabel hiernaast over en bereken de gevraagde kansen.
- c Raymon wil weten hoeveel honing er maximaal zit in de 25% lichtste potten.
Leg met behulp van de tabel van opdracht b uit tussen welke twee gehele getallen dit gewicht ligt.
- d Bereken met behulp van een tabel het maximale gewicht van de 25% lichtste potten in één decimaal nauwkeurig.
- 7 Het volume V in mL van inktcartridges is Norm(20,3; 0,21)-verdeeld. In deze opdracht bereken je de grenswaarde g waarvoor geldt dat 20% van de cartridges minder dan g mL inkt bevat.
- a Teken een klokvorm en geef daarin aan waar het getal g ongeveer ligt.
- b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de waarde van g .
- c Controleer je antwoord van opdracht b met de tekening van opdracht a.

g	350	351	352	353
$P(G \leq g)$				

Hulpboek 4-7 Normale verdeling

Aanpak

Hoe kun je een grenswaarde berekenen bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast?

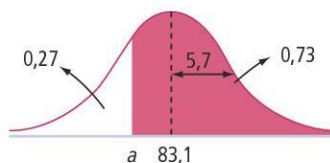
- 1 Teken een klokvorm en geef gemiddelde en standaardafwijking aan.
- 2 Arceer het gegeven gebied en geef de kans van het linker gebied aan.
- 3 Bereken met je rekenmachine de gevraagde grenswaarde.

Voorbeeld

De stochast X is Norm(83,1; 5,7) verdeeld met $P(X > a) = 0,73$. Bereken a .

Oplossing

- 1
- 2



- 3 De waarden invoeren levert $a = 79,61$.

NORMAL	Float	AUTO	REAL	RADIAN	MP
invNorm					
area:0.27					
μ :83.1					
σ :5.7					
Paste					

- 8 Van 1633 mannelijke studenten is de longcapaciteit gemeten. Deze blijkt normaal verdeeld te zijn met gemiddelde 4100 cm^3 en een standaardafwijking van 400 cm^3 .
- a Hoe groot kan de longcapaciteit zijn van een student die behoort tot de 4% studenten met de grootste longcapaciteit?
- b En hoe groot kan de longcapaciteit zijn van een student die behoort tot de groep van 250 studenten met de kleinste longcapaciteit?

- H 9** Het gewicht in grammen van een reep chocolade is Norm(100,3; 15,1)-verdeeld. Stochast Y is het gewicht van een willekeurig gekozen reep chocolade. Voor het gewicht g geldt: 23% van de repen heeft een gewicht kleiner dan g .
- Teken een klokvorm en geef daarin aan waar het getal g ongeveer ligt.
 - Bereken met je rekenmachine de waarde van g . Geef je antwoord in twee decimalen.

- 10** Elk jaar als de omtrek van een cirkel aan de orde komt, gaan de leerlingen van de tweede klas van een middelbare school de omtrek van een blikje opmeten. De resultaten van die metingen worden dan verwerkt in een frequentiepolygoon. Bij benadering levert dit een normale verdeling op. De leerlingen vinden uiteindelijk een gemiddelde gemeten omtrek van 19,15 cm met een standaardafwijking van 1,06 cm.
- Er zijn in totaal 182 leerlingen. Hoeveel leerlingen vinden een omtrek tussen 19,0 cm en 19,5 cm?
 - Tussen welke grenzen ligt de omtrek van de blikjes bij de 10% leerlingen die het dichtst bij de gemiddelde gemeten omtrek zitten?
 - De wiskundelerares laat de leerlingen waarvan de meting meer dan 2 cm van het gemiddelde afwijkt opnieuw meten. Schat het percentage leerlingen dat om die reden de meting minstens twee keer uitvoert.



- H 11** Een fabrikant levert pakken volle melk waarvan het vetgehalte in procenten Norm(3,50; 0,02)-verdeeld is.
- Wat geldt voor het vetgehalte van de 13% pakken volle melk met het hoogste vetgehalte?
 - En voor het vetgehalte van de 29% pakken volle melk met het laagste vetgehalte?
 - Tussen welke grenzen zit het vetgehalte van de middelste 80% pakken?
 - Joris koopt drie pakken volle melk. Bereken de kans dat alle drie de pakken een vetgehalte hebben van meer dan 3,51%.

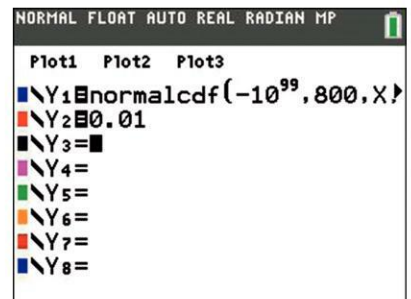
- 12** De stochast X is Norm(230,2; 17,1)-verdeeld. Voor de getallen p en q geldt $P(p \leq X \leq q) = 0,11$.
- Bereken p als $q = 219,4$.
 - Bereken q als $p = 219,4$.
 - Bereken p als geldt $q = p + 10$.

1-3

Gemiddelde en standaardafwijking berekenen

- 13** Een vulmachine vult flessen tomatenketchup. De inhoud V in millimeters is Norm(850, 38)-verdeeld. De flessen worden gecontroleerd voordat ze de fabriek verlaten. Flessen die minder dan 800 mL ketchup bevatten, worden opnieuw gevuld.
- a** Bereken hoeveel procent van de flessen opnieuw gevuld moet worden.
- b** De fabrikant besluit de gemiddelde hoeveelheid in elke fles zó te veranderen, dat 1% van de flessen minder dan 800 mL bevat.
Is het nieuwe gemiddelde hoger of lager dan 850 mL?
- c** Wordt aan de eis voldaan als de gemiddelde inhoud 900 mL is?
- d** Leg uit dat bij de eis dat 1% van de flessen minder dan 800 mL bevat de vergelijking $P(V < 800) = 0,01$ hoort.
- e** Bereken het gemiddelde waarbij aan de eis wordt voldaan. Geef je antwoord in mL nauwkeurig.

Hulpboek 4-7 Tabellen maken



Aanpak

Hoe bereken je een ontbrekende waarde bij de normale verdeling?

- 1 Definieer de stochast X .
- 2 Teken een klokvorm en geef daarin de bekende waarden aan.
- 3 Maak een schatting van de onbekende waarde.
- 4 Voer de gegevens in je rekenmachine in en bereken de ontbrekende waarde.

Bij opdrachten over de normale verdeling spelen vijf waarden een rol.

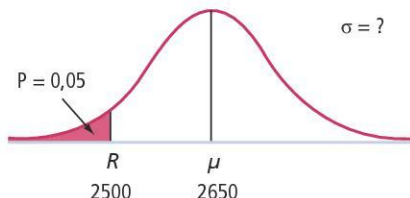
- de linker grenswaarde L ,
- de rechter grenswaarde R ,
- het gemiddelde μ ,
- de standaardafwijking σ ,
- de kans $P(L \leq X \leq R)$.

Voorbeeld

Het gewicht van zakken aardappelen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 2650 gram. Zo'n 5% van de zakken bevat minder dan 2500 gram. Bereken de standaardafwijking.

Oplossing

- 1 X : het gewicht van een zak aardappelen.
- 2

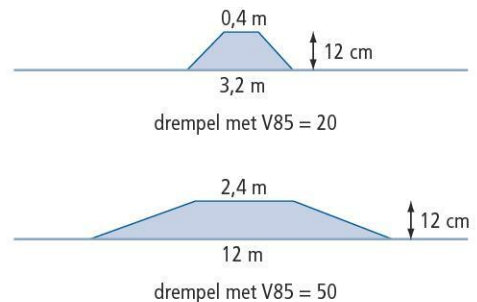


- 3 5% zit tussen 2,5% en 16%. Volgens de vuistregels ligt 2500 dan tussen $2650 - 2\sigma$ en $2650 - \sigma$. Dat betekent dat σ tussen 75 en 150 ligt.
- 4 De bekende waarden invoeren levert de onbekende waarde $\sigma = 91,2$.

- H 14** Een machine vult pakken waspoeder. De hoeveelheid poeder per pak is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 8 gram. De fabrikant wil dat hoogstens 5% van de pakken een vulgewicht heeft van minder dan de 1000 gram die op het etiket staat vermeld.
- Ga na of bij een gemiddelde van 1005 gram aan de 5%-eis wordt voldaan.
 - Bereken het minimale gemiddelde waarop de machine moet worden ingesteld om aan de 5%-eis te voldoen.
 - Veronderstel dat het gemiddelde ingesteld blijft op 1005 gram, maar dat het lukt om de standaardafwijking te veranderen. Leg uit of de standaardafwijking kleiner of groter moet worden dan 8 gram om aan de 5%-eis te voldoen.
 - Bereken de grootste standaardafwijking waarbij nog net aan de 5%-eis wordt voldaan.

- 15** Blikken limonadesiroop worden gevuld door een machine. Het volume van de siroop is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 4,3 mL.
- Bereken bij welk gemiddelde volume geldt dat 8% van de blikken minder dan 750 mL bevat.
 - Bereken de waarden van het gemiddelde waarbij het volume van de siroop in 90% van de blikken tussen 745 mL en 760 mL ligt.
 - Neem aan dat het gemiddelde wordt ingesteld op 750 mL en dat door betere afstelling de vulmachine nauwkeuriger kan werken. Bereken bij welke standaardafwijking geldt dat het volume van de siroop in 90% van de blikken tussen 745 mL en 760 mL ligt.

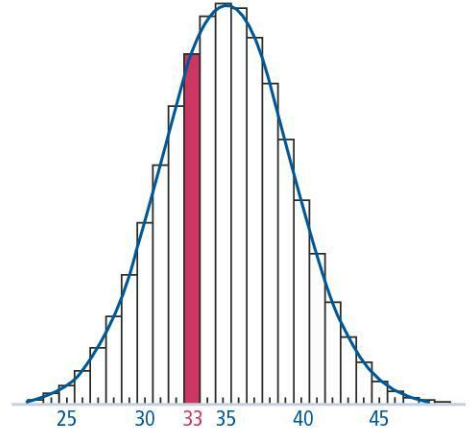
- 16** Verkeersdrempels zijn bedoeld om de snelheid van het verkeer te beïnvloeden. Afhankelijk van de gewenste snelheid worden de drempels steiler of minder steil gemaakt. De drempel met $V_{85} = 50$ is zo ontworpen dat 85% van de automobilisten de drempel passeert met een snelheid van minder dan 50 km/uur. In de praktijk blijkt dat de passeersnelheid bij een drempel normaal verdeeld is. Bij de drempel met $V_{85} = 50$ werd een gemiddelde passeersnelheid van 43,1 km/uur gevonden, met een standaardafwijking van 6,6 km/uur.
- Laat zien dat bij deze verdeling inderdaad 85% van de automobilisten niet harder dan 50 km/uur rijdt.
 - Voor een test zal de snelheid van 1200 automobilisten worden gemeten bij een drempel met $V_{85} = 50$. Bij hoeveel van deze 1200 metingen kan op grond van eerdere ervaringen een snelheid van meer dan 55 km/uur worden verwacht?
 - In een kinderrijke buurt worden verkeersdrempels met $V_{85} = 20$ aangebracht. De passeersnelheid is weer normaal verdeeld, maar met een kleinere spreiding: de standaardafwijking is 2,1 km/uur. Bereken de gemiddelde passeersnelheid bij dit type drempels. Geef je antwoord in km/uur in één decimaal nauwkeurig. (Ontleend aan CE havo wiskunde A 1990, tijdvak 1)



1-4

Normale verdelingen met discrete waarden

- 17** Van de planten in een kas met kerstomaten wordt het aantal vruchten geteld. De relatieve frequenties van het aantal kerstomaten staan in het staafdiagram hiernaast weergegeven.
- De stochast X is het aantal kerstomaten aan een plant.
- a** Leg uit dat X een discrete stochast is.
- b** Waarom kan de verdeling van X worden benaderd met een normale verdeling?
- c** Het gemiddelde van de stochast X is 35,2 met een standaardafwijking van 4,1.
- In de figuur is ook de klokvorm van de continue stochast Y getekend die Norm(35,2; 4,1)-verdeeld is. Het gekleurde staafje geeft de kans aan dat een plant 33 vruchten heeft.
- Leg uit dat, als je deze kans wilt benaderen met behulp van de stochast Y , dat je dan moet kiezen voor het gebied $[32,5; 33,5]$ onder de klokvorm.
- d** Bereken met behulp van de stochast Y de kans $P(X = 33)$.
- e** Hoe kun je $P(X = 39)$ benaderen? Bereken deze kans.
- f** Bereken met behulp van de stochast Y de kans $P(X \geq 39)$.
- g** Bereken $P(27 \leq X \leq 37)$.



Theorie

Als de verdeling van een discrete stochast X klokvormig is, dan kan de verdeling van X worden benaderd door de verdeling van de continue stochast Y die normaal verdeeld is met hetzelfde gemiddelde en dezelfde standaardafwijking als X .

Bij de berekening van kansen pas je de grenswaarden van Y zo aan, dat het gebied past bij de bedoelde waarden van X .

Deze aanpassing heet **continuïteitscorrectie**.

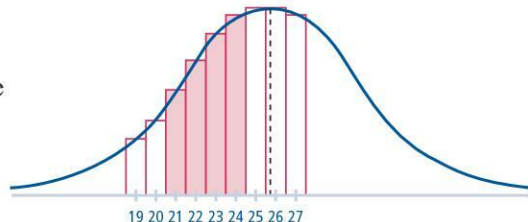
Voorbeeld

Het aantal bloemkolen dat een groenteman per dag verkoopt is Norm(25,8; 4,7)-verdeeld. Bereken de kans dat op een willekeurige dag meer dan 20 maar hoogstens 24 bloemkolen worden verkocht.

Oplossing

Het aantal bloemkolen X is een discrete stochast die benaderd kan worden door de continue stochast Y die Norm(25,8; 4,7) is verdeeld.

De gevraagde kans $P(20 < X \leq 24)$ benader je met $P(20,5 \leq Y < 24,5) = 0,2613$.

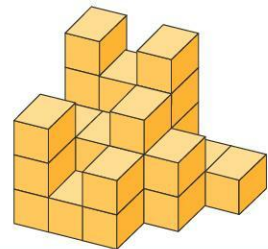


- H 18** Destochast X is Norm(75,3; 6,8)-verdeeld. Deze stochast kan alleen gehele waarden aannemen.
Bereken de volgende kansen in vier decimalen nauwkeurig.
- | | |
|-------------------------|------------------------------|
| a $P(X > 63)$ | d $P(X \geq 78)$ |
| b $P(X \leq 80)$ | e $P(65 < X < 85)$ |
| c $P(X > 72)$ | f $P(45 \leq X < 70)$ |
- H 19** Bij een bepaalde ranonkelsoort varieert het aantal kelkbladeren van 1 tot en met 9. Dit aantal A is Norm(4,99; 0,55)-verdeeld.
- Bereken de kans dat een willekeurige ranonkel hoogstens vier kelkbladeren heeft.
 - Een tuinderij neemt een aselechte steekproef van 150 exemplaren. Hoeveel ranonkels met zes kelkbladeren kun je in de steekproef verwachten?
 - Van hoeveel ranonkels in de steekproef verwacht je dat het aantal kelkbladeren minstens vier, maar hoogstens zeven is?
 - De ranonkels worden verkocht in boeketten van tien stuks. De stochast T is het totaal aantal kelkbladeren van de bloemen in het boeket. Bereken $E(T)$ en $\sigma(T)$.
 - Bereken de kans dat het totaal aantal kelkbladeren van de bloemen in een boeket precies 50 is.
- 20** Bij een onderzoek naar het ruimtelijk inzicht van leerlingen in leerjaar 2 moeten zij 30 vragen van oplopende moeilijkheidsgraad oplossen. Voor gymnasiumleerlingen is het aantal correct beantwoorde vragen normaal verdeeld met een gemiddelde van 19,3 en standaardafwijking van 2,7.
- Hoeveel procent van de leerlingen beantwoordt meer dan de helft van de vragen goed?
 - In klas G2c zitten 24 leerlingen. Bereken de kans dat al deze leerlingen meer dan de helft van de vragen correct beantwoordt.
- c** Bereken de kans dat de gemiddelde score van de leerlingen uit G2c groter is dan 20.
- d** Govert behoort tot de 10% best scorende leerlingen. Hoeveel vragen heeft hij minstens goed?
- 21** Stochast X is Norm(15,0; 2,3)-verdeeld en stochast Y is Norm(150; 23)-verdeeld.
- Neem eerst aan dat X en Y continue stochasten zijn. Bereken $P(X \geq 17)$ en $P(Y \geq 170)$.
 - Neem nu aan dat X en Y alleen gehele waarden aan kunnen nemen. Bereken $P(X \geq 17)$ en $P(Y \geq 170)$.



vraag 3

Het bouwwerk hieronder is gemaakt door kubussen te stapelen. Uit hoeveel kubussen bestaat het bouwwerk?



1-5

Gemengde opdrachten

- 22** Philip teelt diverse vruchten en maakt hier jam van. De potjes jam verkoopt hij in een stalletje aan de weg. Omdat Philip de jam in kleine hoeveelheden produceert, is er een vrij grote spreiding in het percentage vruchtenpulp. Het percentage vruchtenpulp in de aardbeienjam is normaal verdeeld met een gemiddelde van 38,7 en een standaardafwijking van 3,2. Jam mag volgens de Warenwet pas jam heten, als het voor minstens 35% uit vruchtenpulp of -moes bestaat.
- a** Bereken hoeveel procent van de potjes aardbeienjam eigenlijk geen jam mogen heten.
 - b** Als er minstens 45% vruchtenpulp in een potje zit, dan mag je het ‘extra jam’ noemen. Hoeveel procent van de potjes aardbeienjam zou Philip kunnen verkopen als ‘extra jam’?
 - c** Het percentage vruchtenpulp in de kruisbessenjam is normaal verdeeld met een gemiddelde van 37,3. Zo’n 9% van de potjes bevat minder dan het voorgeschreven minimaal percentage vruchtenpulp. Bereken de standaardafwijking.
- 23** De firma RAB verhuurt fietsen. Het verhuurbedrijf is elke dag open. De huurprijs is € 11,- per fiets per dag. Elke fiets, verhuurd of niet, kost de RAB € 2,- per dag aan vaste kosten. Als een fiets verhuurd wordt, komt daar per dag € 1,- aan kosten voor onderhoud en reparatie bij. RAB beschikt over 195 fietsen. Uit de administratie blijkt dat de vraag naar fietsen gemiddeld 186 per dag is met een standaardafwijking van 37.
- a** Toon aan dat op ongeveer 40% van de dagen ten minste één klant teleurgesteld moest worden omdat alle fietsen verhuurd zijn.
 - b** Als RAB één fiets meer zou hebben, dan zou dus op 40% van de dagen € 8,- meer winst behaald zijn en op 60% van de dagen € 2,- minder winst. Bereken de extra winst die RAB met deze 196-ste fiets dit jaar zou hebben gehaald. Ga uit van 365 dagen in een jaar.
 -  **c** Eén fiets erbij levert een hogere winst, maar te veel fietsen erbij is onverstandig. Onderzoek bij hoeveel extra fietsen RAB de meeste winst maakt.
- 24** Het netto gewicht in grammen van pakjes puddingpoeder is $\text{Norm}(100; 5)$ -verdeeld is. Het tarragewicht (het gewicht van een leeg pakje) is $\text{Norm}(6; 1,5)$ -verdeeld.
- a** Bereken μ en σ bij de verdeling van het brutogewicht.
 - b** Bereken de kans dat een willekeurig pakje puddingpoeder bruto meer dan 110 gram weegt.
 -  **c** De pakjes met pudding worden in dozen van 200 stuks verpakt. Een lege doos weegt gemiddeld 950 gram met een standaardafwijking van 90 gram. Bereken de kans dat een volle doos meer dan 22,5 kg weegt.

- 25** Vogels die hun voedsel in bomen en struiken zoeken, doen dat bij voorkeur op een specifieke hoogte. Gedurende een winter zijn in een bos voedselzoekende vogels geobserveerd. In de tabel staat de verdeling over verschillende hoogtes van 400 waarnemingen bij pimpelmezen.

hoogte in meters	< 2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	> 14
aantal waarnemingen	14	33	66	92	90	62	30	13

- a** Verwerk de gegevens in een staafdiagram en ga na of de waargenomen hoogtes bij benadering normaal verdeeld zijn.
- b** Schat uit je tekening bij opdracht a het gemiddelde en de standaardafwijking van de hoogtes bij pimpelmezen.

De hoogtes waarop boomklevers en glanskoppen werden waargenomen, waren ook normaal verdeeld. Per soort staan het gemiddelde en de standaardafwijking van deze hoogtes in meters, in onderstaande tabel vermeld.

soort	gemiddelde hoogte	standaardafwijking
boomklevers	10,0	4,0
glanskoppen	4,5	1,5



- c** Bereken hoeveel procent van de boomklevers hun voedsel zoeken op een hoogte van meer dan 12,0 meter.
- d** Bereken de kans dat van drie willekeurige boomklevers er twee hun voedsel zoeken op een hoogte van minder dan 9,0 meter en één boven de 9,0 meter.
- e** Vanaf een bepaalde hoogte h werd nog maar 10% van de boomklevers waargenomen. Bereken h .

Uit de gegevens kun je afleiden dat ongeveer 15% van de boomklevers werd waargenomen op een hoogte tussen 6,0 en 8,0 meter.

- f** Toon met een berekening aan dat bij glanskoppen ook ongeveer 15% werd waargenomen op een hoogte tussen 6,0 en 8,0 meter. (Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2002, tijdvak 1)

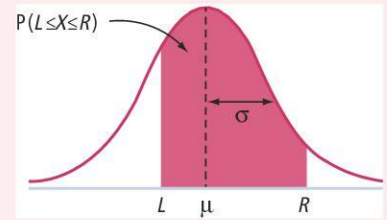
- 26** Om veilig te kunnen rijden is het nodig dat autobanden op tijd worden vervangen. In een Duits rapport staat dat de levensduur van banden van personenauto's varieert van 30 000 tot 100 000 km.
- a** Neem aan de levensduur normaal verdeeld is en dat de genoemde afstanden gelden voor de middelste 98% van de banden voor personenauto's. Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking.
- b** Neem aan dat de in opdracht a berekende waarden gelden voor de afstand die een auto kan rijden voordat de banden vervangen moeten worden. Een garage levert in een week zeven nieuwe auto's af. Bereken de kans dat deze auto's gemiddeld meer dan 60 000 km kunnen rijden voordat de banden vervangen moeten worden.

Samenvatting

Normale verdeling

De normale verdeling is een wiskundig model van de ideale klokvormige verdeling. Bij het rekenen met de normale verdeling spelen vijf waarden een rol:

- de linker grenswaarde L van het gebied onder de klokvorm,
- de rechter grenswaarde R van het gebied onder de klokvorm,
- het gemiddelde μ ,
- de standaardafwijking σ ,
- de kans $P(L \leq X \leq R)$.

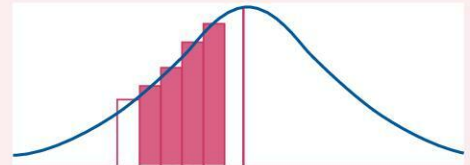


Als het gebied geen linker grens heeft, dan voer je -10^{99} in voor L in je rekenmachine; heeft het gebied geen rechter grens, dan neem je 10^{99} voor R .

Continuïteitscorrectie

Als je een discrete stochast X benadert met een continue stochast Y , dan moet je bij berekeningen de grenswaarden van Y zo kiezen dat het gebied past bij de bedoelde waarden van X .

Deze aanpassing heet continuïteitscorrectie.



Je kunt kansen of percentages berekenen bij een normaal verdeelde stochast

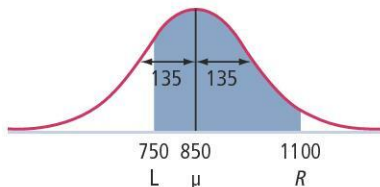
Geef in een schets van een klokvorm de gegeven waarden aan en arceer het gevraagde gebied.

Voorbeeld 1

De gemiddelde opbrengst van een aardappelplant van het ras Katrien is 850 gram met een standaardafwijking van 135 gram. Bereken de kans dat een willekeurig gekozen plant een opbrengst heeft tussen 750 en 1100 gram.

Oplossing

- 1
- 2



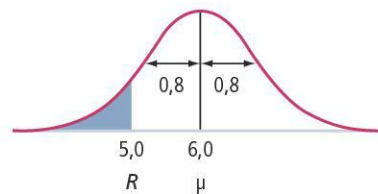
- 3 De waarden invoeren in de rekenmachine geeft de uitkomst 0,73855....
De kans is ongeveer 0,74.

Voorbeeld 2

Het gewicht in grammen van suiker in suikerzakjes is $\text{Norm}(6,0; 0,8)$ -verdeeld. Bereken hoeveel procent van de zakjes minder dan 5 gram suiker bevat.

Oplossing

- 1
- 2



- 3 De waarden invoeren in de rekenmachine geeft de uitkomst 0,1056...
Ongeveer 10,6 % van de zakjes bevat minder dan 5 gram suiker.

Je kunt bij een normaal verdeelde stochast grenswaarden berekenen

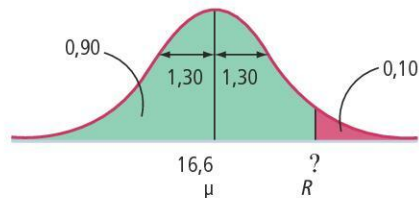
Geef in een schets van een klokvorm de gegeven waarden aan en geef de oppervlakte van het linker gebied aan.

Voorbeeld

De etmaaltemperatuur in augustus in De Bilt is gemiddeld $16,6^{\circ}\text{C}$ met een standaardafwijking van $1,30^{\circ}\text{C}$. Bereken welke gemiddelde temperaturen horen bij de 10% warmste augustusmaanden.

Oplossing

1
2



3 De bekende waarden invoeren geeft als grenswaarde is 18,27.
Bij de 10% warmste augustus maanden horen gemiddelden hoger dan $18,27^{\circ}\text{C}$.

Je kunt bij een normaal verdeelde stochast een onbekend gemiddelde of onbekende standaardafwijking berekenen

Maak eerst met behulp van een schets van een klokvorm een schatting van de gevraagde waarde. Voer de bekende waarden in en bereken met je rekenmachine de ontbrekende waarde.

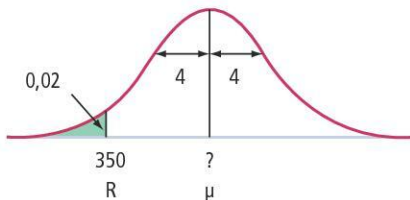
Voorbeeld

De hoeveelheid pindakaas is een pot normaal verdeeld met en standaardafwijking van 4 gram. Bereken het kleinste gemiddelde vulgewicht waarbij hoogstens 2% van de potten minder dan 350 gram bevat.

Oplossing

1 X : het vulgewicht van een pot pindakaas.

2



3 2% is iets minder dan 2,5%. Volgens de vuistregels ligt het gemiddelde dan in de buurt van $350 + 3 \cdot \sigma = 362$.

4 De bekende waarden invoeren geeft als gemiddelde 358,21 gram.

Je kunt een continuïteitscorrectie toepassen

Om een kans of een percentage te berekenen bij een normaal verdeelde stochast met alleen maar discrete waarden, pas je een correctie toe om de juiste grenswaarde te vinden.

Voorbeeld

Voor een van de tentamens in de opleiding tot apotheker is een kandidaat pas geslaagd, als alle opdrachten foutloos zijn gemaakt. Het aantal pogingen dat een kandidaat moet doen voor hij is geslaagd, is normaal verdeeld met een gemiddelde van 5,3 en een standaardafwijking van 2,1. Bereken het percentage kandidaten dat in hoogstens twee pogingen slaagt voor dit tentamen.

Oplossing

De stochast X : het aantal pogingen, is een discrete stochast die wordt benaderd door de continue stochast Y die $\text{Norm}(5,3;2,1)$ verdeeld is.

$$P(X \leq 2) = P(Y < 2,5) = 0,0912$$

Ongeveer 9% van de kandidaten slaagt in hoogstens twee pogingen.

Test jezelf

T-1 De zuurgraad van vloeistoffen wordt gemeten in pH. Bij mensen is de pH-waarde van het bloed Norm(7,4; 0,2)-verdeeld.

- a** Bereken het percentage mensen waarvan de pH-waarde van het bloed zit tussen 7,1 en 7,5.
- b** Bij hoeveel procent van de mensen zal het bloed een pH-waarde hebben van meer dan 7,35?
- c** Een groep van 67 mensen ondergaat een medische keuring. Hoeveel van deze mensen zullen een pH-waarde kleiner dan 7,25 hebben?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-1.

T-2 In een ziekenhuis is het duur om elke lamp die defect is, direct te vervangen. Het blijkt in de praktijk goedkoper te zijn om op een bepaald moment alle lampen, ook die het nog doen, tegelijk te vervangen.

De plafondlampen in de gangen van het ziekenhuis hebben een gemiddelde levensduur van 3500 uur met een standaardafwijking van 500 uur. De levensduur is normaal verdeeld.

- a** Hoe groot is de kans dat een lamp na 3000 uur defect is?
- b** De technische dienst wil de lampen gaan vervangen als 15% defect is. Bereken om de hoeveel tijd de lampen moeten worden vervangen.

- c** De directie overweegt om over te stappen op ledlampen. Deze lampen zijn veel duurder, maar ze hebben een levensduur van gemiddeld 30 000 uur met een standaardafwijking van 2500 uur. Vervanging is nodig als 10% van de lampen defect is.

Bereken hoeveel keer zo duur een ledlamp mag zijn opdat de vervangingskosten even hoog zijn als bij traditionele lampen.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-2.

T-3 Het gewicht in grammen van pennywafels is Norm(16,1; 0,8)-verdeeld.

- a** Bereken hoeveel procent van de pennywafels tussen de 15 en 16 gram weegt.
- b** Bereken de kans dat een willekeurig gekozen pennywafel meer dan 15 gram weegt.
- c** Pennywafels worden verkocht in pakjes van acht stuks. Op de verpakking staat dat de inhoud 125 gram is. Bereken de kans dat een willekeurig gekozen pakje met acht wafels minder dan de vermelde 125 gram weegt.
- d** Het gewicht in grammen van spritsen is Norm(21,7; 1,1)-verdeeld. Sonja neemt elke dag één pennywafel en twee spritsen mee naar school.

Bereken de kans dat ze minstens 60 gram aan koekjes bij zich heeft.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-1 en paragraaf 1-2.



T-4 Op kilopakken suiker treft men op het etiket de volgende tekst aan: '1000g e'. Deze e (van estimate) betekent dat de fabrikant zich bij het vullen van het pak onder andere heeft gehouden aan de volgende EU-norm: ten hoogste 2% van de kilopakken mag een ondergewicht hebben van meer dan 15 gram. Dat betekent dus dat minstens 98% van de pakken zwaarder moet zijn dan 985 gram.

Een fabrikant heeft een machine die pakken suiker vult met een gemiddelde van 1003 gram en een standaardafwijking van 12 gram. Het gewicht van de pakken suiker is normaal verdeeld.

- a** Voldoet deze fabrikant aan de EU-norm?
- b** De fabrikant wil weten op welk gemiddelde hij zijn machine moet instellen om aan de norm te voldoen. Bereken dat gemiddelde.
- c** De fabrikant van de pakken suiker besluit een nieuwe machine aan te schaffen die nauwkeuriger vult. Hij wil een zodanige standaardafwijking dat hij de machine kan instellen op een gemiddelde van 1003 gram. Bereken waaraan de standaardafwijking van de nieuwe machine moet voldoen.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-3.



e

De Europese Richtlijn over voorverpakte levensmiddelen is per 1 januari 2015 opgenomen in het Warenwetbesluit hoeveelheden voorverpakkingen.

T-5 De spiegelkarper heeft een erfelijk schubbenpatroon met schubben van verschillende grootte. Voor een bepaalde variëteit is het gemiddeld aantal schubben gelijk aan 82 met een standaardafwijking van 4.

Je kunt het aantal schubben beschouwen als normaal verdeeld.

- a** Bereken de kans dat een willekeurig exemplaar minder dan 75 schubben heeft.
- b** Bereken de kans op minstens 87 schubben bij een willekeurig exemplaar.
- c** Tussen welke aantallen ligt het aantal schubben van de middelste 95% van de populatie?
- d** Beneden welke grens ligt het aantal schubben van 90% van de populatie?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-4.



T-6 Een machine kan worden gebruikt om verpakkingen van verschillend volume te vullen. Het blijkt dat de standaardafwijking niet constant is, maar afhangt van het ingestelde vulgewicht volgens de formule $\sigma = 1,21 + 0,04 \cdot \mu$. Deze formule geldt voor ingestelde gewichten tussen 50 en 500 gram.

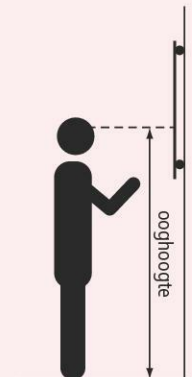
- a** De machine wordt ingesteld op 103 gram. Bereken hoeveel procent van de verpakkingen minder dan 100 gram bevat.
- b** Er moeten verpakkingen van 350 gram worden gevuld. Bereken het ingestelde vulgewicht waarvoor geldt dat 2% van de verpakkingen minder dan 350 gram bevat.

Extra oefening - Basis

- B-1** De inhoud van pakjes koffieroom is normaal verdeeld met een gemiddelde van 253 mL en een standaardafwijking van 1,5 mL. Op de pakjes staat dat de inhoud 250 mL is.
- a** Bereken de kans dat in een willekeurig gekozen pakje meer dan 250 mL room zit, maar minder dan 255 mL.
 - b** In hoeveel procent van de pakjes zit minder dan 250 mL?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-1.
- B-2** De lengte in centimeters van volwassen Nederlandse mannen is Norm(180,7; 7,1)-verdeeld.
- a** Van hoeveel procent van de volwassen Nederlandse mannen ligt de lengte tussen 180 en 190 cm? Rond af op hele procenten.
 - b** Een gangbare hoogte voor deuropeningen in Nederland is 203 cm. In Nederland wonen ruim 6,5 miljoen volwassen mannen. Bereken hoeveel mannen hun hoofd moeten buigen als ze door zo'n deur gaan. Rond af op duizendtallen.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-1.
- B-3** De lengte in centimeters van volwassen Nederlandse vrouwen is Norm(167,6; 6,5)-verdeeld. Bereken de minimale lengte van de 25% langste vrouwen van Nederland. Rond je antwoord af op hele centimeters.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-2.
- B-4** Het gewicht van broden is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 30 gram. De kans dat een willekeurig brood zwaarder is dan 850 gram, mag niet meer dan 1% zijn. Bereken het maximale gemiddelde gewicht van deze broden.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-3.
- B-5** De dikte van de pennen die een machine produceert, is normaal verdeeld met gemiddelde 6 mm. Pennen die dunner zijn dan 5,90 mm en pennen die dikker zijn dan 6,05 mm zijn onbruikbaar. De fabriek wil dat hoogstens 1% van de pennen onbruikbaar is. Bereken de maximaal toegestane waarde van de standaardafwijking.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-3.
- B-6** Het aantal dropjes in zakjes Simpsonsdrop is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde 47,2 en een standaardafwijking van 3,7.
- a** Bereken de kans dat in een willekeurig gekozen zakje 52 dropjes zitten.
 - b** Bereken de kans dat in een zakje minstens 50 dropjes zitten.
 - c** Liza koopt vijf zakjes Simpsonsdrop. Bereken de kans dat zij in totaal minstens 250 dropjes heeft.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-4.

Extra oefening - Gemengd

- G-1** Om goed in de spiegel te kunnen kijken, moet de spiegel zo zijn opgehangen dat de onderkant minstens 12 cm beneden de ooghoogte en de bovenkant minstens 12 cm boven de ooghoogte zit.
- De ooghoogte van volwassen mensen in Nederland is normaal verdeeld met een gemiddelde van 159,4 cm en een standaardafwijking van 9,0 cm.
- a** Een spiegel met een hoogte van 50 cm hangt met de onderkant 120 cm boven de vloer.
- Bereken voor hoeveel procent van de volwassen Nederlanders deze spiegel op een goede hoogte hangt.
- b** Bereken hoe hoog een spiegel minstens moet zijn opdat deze zo opgehangen kan worden dat hij voor de middelste 90% van de volwassen Nederlanders goed hangt.



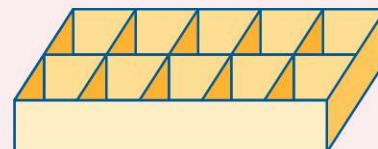
- G-2** Een bollenkweker heeft een grote partij bijzondere bollen die hij wil verpakken in rechthoekige dozen.

De bollen zijn nagenoeg bolvormig. De diameter van de bollen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 10 cm en een standaardafwijking van 0,8 cm.

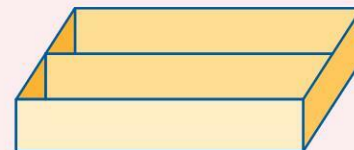
Er zijn twee typen doosjes om de bollen in te verpakken.

Een tekening van beide doosjes staat hiernaast.

Doos type 1 is 60 cm bij 24 cm bij 12 cm en is verdeeld in tien kubusvormige vakjes. Doos type 2 is 55 cm bij 24 cm bij 12 cm en is verdeeld in twee langwerpige vakken.



type 1



type 2

- a** Bereken de kans dat een willekeurig gekozen bloembol een diameter heeft die groter is dan 12 cm. Rond af op vier decimalen.
- b** Bereken de kans dat een willekeurig tiental bollen in een doos type 1 past. Rond weer af op vier decimalen.
- c** In doos type 2 moeten in beide vakjes telkens 5 bollen op een rij komen. Als je alleen let op de lengte van de rij, hoe groot is dan de kans dat een willekeurig vijftal bollen in een vakje van doos type 2 past?
- d** De bollenkweker wil dat de afmetingen van doos type 2 vrijwel geen belemmering vormen bij het verpakken van de bollen. Wat heeft dan meer zin: de lengte of de breedte van de doos vergroten? Licht je antwoord toe met een berekening.

Uitdagende opdrachten

- U-1** Een fabrikant vermeldt op het etiket van potten oploskoffie: inhoud ≥ 200 gram. Volgens de Europese Richtlijn over voorverpakte levensmiddelen mag hij dit op het etiket vermelden als hij onder andere voldoet aan de volgende twee voorwaarden:
- > hoogstens 2% van de potten bevat minder dan 191 gram;
 - > hoogstens 0,1% van de potten bevat minder dan 182 gram.
- De hoeveelheid oploskoffie in een pot is normaal verdeeld met een gemiddelde van μ gram en een standaardafwijking van σ gram.
- De fabrikant vraagt zich af bij welke waarden van μ en σ hij precies aan de twee voorwaarden voldoet. In deze opgave ga je deze waarden berekenen.
- De stochast X is het gewicht van de oploskoffie, dus X is $\text{Norm}(\mu, \sigma)$ -verdeeld.
- Uit bovenstaande volgt dat μ en σ moeten voldoen aan $P(X \leq 191) = 0,02$ en $P(X \leq 182) = 0,001$.
- a** Waarom zijn μ en σ niet te berekenen zoals je dat eerder hebt gedaan?
 - b** De stochast Z wordt gedefinieerd door $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.
Laat met berekeningen zien dat $E(Z) = 0$ en $\sigma(Z) = 1$.
 - c** Bereken de waarden van p en q die voldoen aan $P(Z \leq p) = 0,02$ en $P(Z \leq q) = 0,001$.
 - d** Laat door herleiden zien dat $\mu + p \cdot \sigma = 191$ en $\mu + q \cdot \sigma = 182$.
 - e** Bereken μ en σ elk in één decimaal nauwkeurig.
- U-2** Om kosten te besparen wil de wethouder van een plattelandsgemeente de straatverlichting op een groot aantal plaatsen een uur eerder uit doen. Hij schat dat 70% van de bevolking met dit plan instemt. Een actiegroep twijfelt hier aan en besluit een aantal inwoners naar hun mening te vragen. De stochast X is het aantal ondervraagden dat het plan van de wethouder steunt; de stochast $\hat{p}$ is het percentage ondervraagden dat instemt met het plan van de wethouder. Neem aan dat de wethouder gelijk heeft en dat er 200 mensen worden ondervraagd.
- a** Bereken $E(\hat{p})$ en $\sigma(\hat{p})$, zo nodig in vier decimalen.
 - b** Benader de verdeling van $\hat{p}$ met een normale verdeling en bereken tussen welke grenzen de middelste 90% van de verdeling zit.
 - c** Leg uit wat de betekenis is van het antwoord van opdracht b.
 - d** Is er reden om de schatting van de wethouder in twijfel te trekken als 65% van de ondervraagden instemt?
 - e** Beantwoord deze vragen ook voor 800 ondervraagde inwoners.

Als de stochast $X \sim \text{Bin}(n, p)$ is verdeeld, dan geldt
 $E(X) = n \cdot p$ en
 $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Discriminatie: ja of nee?



In 1972 spande een groep vrouwen een proces aan tegen een fabriek in Texas die apparaten voor airconditioning produceerde. Deze fabriek nam alleen nieuwe personeelsleden in dienst die langer waren dan 170,0 cm. De vrouwen waren bij hun sollicitatie afgewezen omdat ze niet aan deze eis voldeden. De advocaat van de vrouwen benadrukte het discriminerende karakter van deze voorwaarde door te stellen dat 91,0% van alle Amerikaanse vrouwen tussen de 18 en 65 jaar niet lang genoeg was om aangenomen te kunnen worden. Dit percentage ontleende hij aan een onderzoek van het Amerikaanse ministerie van volksgezondheid waaruit bleek dat de lengte van de vrouwen normaal verdeeld was met $\mu = 160,4$ cm.



Je kunt berekenen dat de bijbehorende standaardafwijking $\sigma \approx 7,2$ cm is.

De vertegenwoordiger van de fabriek bij het proces noemde het percentage van 91 sterk overdreven. Het door de tegenpartij aangehaalde onderzoek stamde uit 1948. De gemiddelde lengte was volgens hem in de periode 1948-1972 flink toegenomen. Hij ondersteunde zijn betoog met het resultaat van een recent onderzoek. In een aselechte steekproef van 1000 vrouwen tussen 18 en 65 jaar werd in 1972 bij 117 vrouwen een lengte gemeten van meer dan 172,6 cm.

Waar komt die 172,6 vandaan?

De groep Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar die langer zijn dan 170,0 cm noem je V . Voor de mediaan m van de lengte van de vrouwen van V geldt dat 50 % van de vrouwen uit V langer is dan m .

Dan is 4,5% procent van de totale groep vrouwen uit het onderzoek van 1948 was langer dan m . Uitgaande van $\mu = 160,4$ cm en $\sigma = 7,2$ cm vind je dan met de normale verdeling $m \approx 172,6$.

De advocaat van de vrouwen gaf toe dat het door hem aangehaalde onderzoek wat verouderd was en de gemiddelde lengte van de vrouwen waarschijnlijk wel was toegenomen. Hij bleef echter benadrukken dat ook in 1972 nog steeds een grote meerderheid van de Amerikaanse vrouwen op grond van hun lengte door het bedrijf zou worden afgewezen. Kreeg hij gelijk?

Opdracht

- Neem aan dat de standaardafwijking ongewijzigd is, dus $\sigma = 7,2$ cm. Ga na dat de gemiddelde lengte van de Amerikaanse vrouw volgens het onderzoek uit 1972 $\mu = 164$ cm is.
- Bereken het percentage Amerikaanse vrouwen in de genoemde leeftijdsgroep dat in 1972 niet lang genoeg was voor een functie bij de fabriek.



Volgens 40% van de mensen is Powerclean het beste wasmiddel.

Advertentietekst

*De advertentie hierboven bevat een bewering over een wasmiddel.
Van 1000 willekeurige mensen zijn 360 het met deze bewering eens.*

Wat vind je van deze advertentietekst?

Hoofdstuk 2

Hypothese toetsen

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	34
2-1	Gelijk hebben en gelijk krijgen	36
2-2	Fouten van de eerste en de tweede soort	38
2-3	Toetsen op significantie	40
2-4	Eenzijdig binomiaal toetsen	42
2-5	De toets van het gemiddelde	44
2-6	Tweezijdig toetsen	46
2-7	Gemengde opdrachten	48
	Samenvatting	50
	Test jezelf	52
	Extra oefening - Basis	54
	Extra oefening - Gemengd	55
	Uitdagende opdrachten	56
	(On)nauwkeurigheid bij peilingen	57



Voorkennis

- V-1a** Een beginnend schutter treft gemiddeld één op de vijf keer de roos. Hij schiet tien keer achter elkaar.
Hoe groot is de kans dat hij twee keer raak schiet?
- b** Na jaren training heeft hij zijn gemiddelde zo opgevoerd dat hij vier van de vijf keer raak schiet.
Hoe groot is de kans dat hij bij tien keer schieten vier keer mist?
- c** En hoe groot is de kans dat hij meer dan acht keer de roos treft?

Bij een kansexperiment met telkens twee mogelijke uitkomsten waarbij de kans op succes p gedurende een aantal herhalingen n niet verandert, hoort een binomiale verdeling. Je noteert deze verdeling als $\text{Bin}(n; p)$.

Voorbeeld

Bij het opblazen van ballonnen gaat 10% kapot. Je blaast vijftien ballonnen op.
Bereken de kans dat er twee kapot gaan.
Bereken ook de kans dat er minstens vijf kapot gaan.

Oplossing

Stochast X is het aantal ballonnen dat kapot gaat.
Dan is $X \sim \text{Bin}(15; 0,10)$ -verdeeld.

$$P(X=2) = \binom{15}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{13} = 0,2669$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 0,0127$$

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP	
<code>binompdf(15,0.1,2)</code>	<code>.266895912</code>
<code>1-binomcdf(15,0.1,4)</code>	<code>.0127204836</code>

- V-2** Stochast X is $\text{Bin}(20; \frac{1}{3})$ -verdeeld.
Bereken de volgende kansen. Rond af op vier decimalen.

- a** $P(X=11)$ **d** $P(X>5)$
b $P(X \leq 7)$ **e** $P(3 \leq X \leq 6)$
c $P(X < 7)$ **f** $P(2 \leq X < 8)$

Hulpboek 4-8 Binomiale verdeling

- V-3** Van alle mensen in Nederland draagt 7% contactlenzen.

- a** Hoe groot is de kans dat in een willekeurig groepje van vier mensen er precies één persoon is die contactlenzen draagt?
- b** Stochast X is het aantal contactlensdragers in een willekeurig groepje van vier mensen.
Vul de kansverdeling van X hiernaast in.

u	0	1	2	3	4
$P(X=u)$	...	...	...	...	...

- V-4a** Hoe vaak verwacht je dat je zes gooit bij 12 worpen met een dobbelsteen?
- b** Bereken de verwachtingswaarde van het aantal zessen bij 24 worpen.
- c** Bereken de kans op precies twee zessen bij 12 worpen met een dobbelsteen.
- d** Bereken de kans op precies vier zessen bij 24 worpen met een dobbelsteen.

V-5 Je gooit met vier dobbelstenen. Stochast X is het aantal zessen dat je gooit.

- a** Vul in: Stochast X is $\text{Bin}(\dots; \dots)$ -verdeeld.
- b** Neem de kansverdeling van X hiernaast over en vul hem verder in. Rond af op vier decimalen.
- c** De verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de kansverdeling kun je met behulp van je rekenmachine vinden door de tabel in te voeren.
Bereken in twee decimalen de verwachtingswaarde en de standaardafwijking.

Hulpboek 4-6 Centrum- en spreidingsmaten

u	$P(X = u)$
0	0,4823
1	...
2	0,1157
3	...
4	...
5	...

Als een stochast X binomiaal verdeeld is met parameters n en p dan geldt voor de verwachtingswaarde $E(X) = n \cdot p$ en voor de verwachte standaardafwijking $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Voorbeeld

Een stochast Q is $\text{Bin}(100; 0,18)$ -verdeeld. Bereken $E(Q)$ en $\sigma(Q)$.

Oplossing

$n = 100$, $p = 0,18$ en $1 - p = 0,82$

$E(Q) = 100 \times 0,18 = 18$

$\sigma(Q) = \sqrt{100 \times 0,18 \times 0,82} \approx 3,84$

V-6 Controleer je antwoorden van opdracht V-5c met de hierboven genoemde formules.

V-7a Een stochast Y is $\text{Bin}(2500; 0,8)$ -verdeeld. Bereken $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.

- b** Er wordt 20 keer met een munt gegooit. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal keer dat er kop gegooit wordt.
- c** Een toets met 100 vierkeuzevragen wordt volledig op de gok ingevuld. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal goed gegokte antwoorden.

V-8 Een bepaalde soort bloembollen wordt verkocht in dozen van 10 stuks en met de garantie dat ten minste 9 van de 10 bollen zullen ontkiemen. De fabrikant is er zeker van dat die garantie gegeven kan worden, omdat gemiddeld slechts 5% van de bollen niet ontkiemt.

- a** Hoe groot is de kans dat een willekeurige doos het gegarandeerde aantal ontkiemende bollen niet heeft?
- b** Hoe groot is die kans als ten minste 8 in plaats van ten minste 9 ontkiemende bollen worden gegarandeerd?

V-9 In 2012 was er veel discussie over het voortbestaan van de euro. Twee politici hebben verschil van mening over het percentage kiesgerechtigde Nederlanders dat af wil van de euro. Politicus A beweert bij hoog en bij laag dat dit 60% is, terwijl politicus B het op 45% houdt. Zij besluiten 20 willekeurig gekozen Nederlanders te ondervragen.

- a** Veronderstel dat A gelijk heeft. Hoe groot is de kans dat van de ondervraagde personen 45% of minder af wil van de euro?
- b** Neem aan dat B het bij het rechte eind heeft. Hoe groot is de kans dat minstens 60% van de ondervraagde personen van de euro af wil?



2-1

Gelijk hebben en gelijk krijgen

- 1 Een fruithandelaar biedt een partij van een paar duizend sinaasappels goedkoop aan. Hij beweert dat 15% een beschadiging heeft. Als deze bewering klopt, wil een groenteboer de partij wel kopen, maar als het percentage hoger is niet. Om na te gaan of de bewering klopt, neemt hij een steekproef van 40 sinaasappels uit de partij. Ga ervan uit dat de bewering van de fruithandelaar klopt. Noem het aantal sinaasappels in de steekproef met een beschadiging X .
 - a Leg uit dat X binomiaal verdeeld is en geef de bijbehorende parameters.
 - b Hoeveel sinaasappels met een beschadiging verwacht je in de steekproef?
 - c Wat zal de conclusie van de groenteboer zijn als hij vijf beschadigde sinaasappels aantreft in de steekproef?
 - d Welke conclusie zal de groenteboer waarschijnlijk trekken als $X = 15$?
 - e De groenteboer besluit het aanbod af te wijzen als hij negen of meer beschadigde sinaasappels aantreft in de steekproef. Bereken de kans dat hij ten onrechte het aanbod afwijst.

Theorie

Bij een **statistische toets** gaat het om te beslissen of een bepaalde veronderstelling of bewering over een populatie op grond van steekproefresultaten kan worden geaccepteerd of niet. Deze veronderstelling of bewering heet de **nulhypothese** H_0 . Het verwerpen van de nulhypothese betekent dat je een andere veronderstelling, de **alternatieve hypothese** H_1 , accepteert. Datgene wat in de steekproef gemeten of geteld wordt, heet de **toetsingsgrootte** X .

Voorbeeld

De eigenaar van een elektronicazaak beweert dat 5% van zijn klanten wel eens klaagt. Een ontevreden klant zegt dat het percentage hoger is. Ze besluiten tot een steekproef van 50 klanten om de bewering van de eigenaar te toetsen. Bij vier of meer klagers wordt de eigenaar in het ongelijk gesteld. Geef aan wat in deze situatie X , H_0 en H_1 zijn en bereken de kans dat de eigenaar gelijk heeft, maar geen gelijk krijgt.

Oplossing

De toetsingsgrootte X is het aantal klagende klanten in de steekproef van 50.
 De bewering van de eigenaar is de nulhypothese $H_0 : p = 0,05$.
 Het standpunt van de ontevreden klant is de alternatieve hypothese $H_1 : p > 0,05$.
 Als de eigenaar gelijk heeft, is $X \text{ Bin}(50; 0,05)$ -verdeeld.
 De gevraagde kans is $P(X \geq 4) = 0,2396$.

- 2 Beschrijf op de manier van het voorbeeld de toetsingsgrootte, de nulhypothese en de alternatieve hypothese bij opdracht 1.

- H 3** Volgens de directie van een grote bouwmarkt in Alkmaar komt 44% van de klanten uit omliggende plaatsen. De rest komt uit Alkmaar zelf. Een onderzoeker denkt dat er minder klanten uit omliggende plaatsen komen dan de directie beweert. Om de bewering van de directie te toetsen besluit deze onderzoeker een steekproef te nemen. Van de eerste honderd klanten telt hij hoeveel er buiten Alkmaar wonen.
- a** Geef aan wat X , H_0 en H_1 zijn.
 - b** Wat is de verdeling van X als je aanneemt dat de nulhypothese klopt?
 - c** Ga je de bewering van de directie verwerpen bij een klein aantal klanten van buiten Alkmaar of bij een groot aantal?
 - d** Het onderzoek levert op dat 30 van de 100 klanten buiten Alkmaar wonen. Ga ervan uit dat de bewering van de directie waar is. Bereken de kans dat hoogstens 30 klanten in de steekproef in de omliggende plaatsen wonen.
 - e** Ben je in de situatie van opdracht d geneigd om te directie gelijk te geven?

- 4** Louis is autoverkoper. Hij beweert dat 25% van de mensen die een nieuwe auto willen kopen overweegt om een hybride uitvoering aan te schaffen. Zijn collega Enzo denkt dat dit percentage echt lager is. Ze besluiten bij de eerstvolgende 50 klanten die belangstelling hebben voor een nieuwe auto bij te houden of ze overwegen een hybride te kopen. Als er minstens tien zijn met belangstelling voor een hybride krijgt Louis gelijk.
- a** Wat is de toetsingsgrootheid X ?
 - b** Geef de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
 - c** Bereken de kans dat Enzo ten onrechte gelijk krijgt.
 - d** Beantwoord opdracht c ook voor het geval de grens niet bij tien maar bij negen belangstellenden was gelegd.



- 5** Djoeke is docent biologie. Zij vermoedt dat in 20% van de BINAS-boekjes van de leerlingen opmerkingen zijn bijgeschreven. Haar collega Lisa, die scheikunde geeft, beweert dat er in wel 30% van de boekjes zaken zijn bijgeschreven. Ze besluiten een onderzoekje te doen. Degene die ongelijk krijgt, trakteert de ander op een etentje. Ze gaan in totaal de boekjes van 70 leerlingen controleren.
- a** Hoeveel boekjes met aantekeningen verwacht je als Djoeke gelijk heeft? En hoeveel als Lisa gelijk heeft?
 - b** Ze besluiten de grens in het midden te leggen: bij 17 of minder krijgt Djoeke gelijk; in de andere gevallen krijgt Lisa gelijk. Bereken de kans dat Djoeke gelijk krijgt in het geval dat Lisa gelijk heeft.
 - c** Bereken de kans dat Djoeke ten onrechte het etentje moet betalen.
 - d** Met welke van de twee vorige antwoorden kun je snel berekenen wat de kans is dat Djoeke terecht gelijk krijgt?
 - e** Lisa denkt eigenlijk dat in wel 35% van de boekjes aantekeningen staan. Was het niet verstandiger geweest dat tegen Djoeke te zeggen?

2-2

Fouten van de eerste en de tweede soort

- 6 Dagmar en Sandra hebben onenigheid over de zuiverheid van een dobbelsteen. Dagmar beweert dat de dobbelsteen zuiver is, maar Sandra heeft het idee dat de uitkomst zes te vaak voorkomt. Ze schat dat dit in 25% van de worpen het geval is. Ze besluiten tot een steekproef van 10 worpen waarbij X het aantal keren zes is en ze stellen de volgende hypothesen op:

$$H_0: p = \frac{1}{6} \text{ en } H_1: p = \frac{1}{4}.$$

Afgesproken wordt om H_0 te accepteren voor $X \leq 2$.

- a Neem aan dat H_0 waar is.
Bereken de kans dat H_0 geaccepteerd wordt.
- b Laat met een berekening zien dat de kans dat H_0 ten onrechte wordt verworpen, gelijk is aan 0,2248.
- c Bereken de kans dat H_0 wordt geaccepteerd terwijl H_1 waar is.

Theorie

Als je op grond van het resultaat van een steekproef besluit om H_0 te verwerpen, bestaat altijd de kans dat H_0 toch juist is. Je trekt dan een onjuiste conclusie. Je spreekt dan van een **fout van de eerste soort**.

De fout dat H_0 ten onrechte wordt geaccepteerd, heet een **fout van de tweede soort**.

Bij een beslissing naar aanleiding van de uitslag van een steekproef kunnen zich vier situaties voordoen. In het schema hieronder zijn deze situaties weergegeven.

	H_0 wordt geaccepteerd	H_0 wordt verworpen
H_0 is juist	juiste beslissing	fout van de eerste soort
H_1 is juist	fout van de tweede soort	juiste beslissing

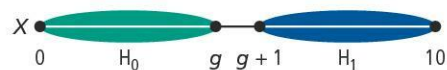
- 7 Bij opdracht 6 zijn de kansen op de vier verschillende situaties:

	H_0 wordt geaccepteerd	H_1 wordt verworpen
H_0 is juist	0,7752	0,2248
H_1 is juist	0,5256	0,4744

Sandra en Dagmar hadden ook kunnen afspreken om H_0 te accepteren bij hoogstens drie keer zes.

Geef een tabel, zoals hierboven, als H_0 geaccepteerd wordt bij $X \leq 3$.

- 8** De grootte van de kansen op een fout van de eerste en tweede soort hangt af van de keuze van een grenswaarde g . Je onderzoekt dit aan de hand van het experiment van Dagmar en Sandra van opdracht 6. Als $X \leq g$ krijgt Dagmar gelijk; bij $X > g$ krijgt Sandra gelijk.



- a** Leg uit waarom je bij een fout van de eerste soort rekent met $p = \frac{1}{6}$ en bij een fout van de tweede soort met $p = \frac{1}{4}$.
- b** Vul de tabel hiernaast verder in.
- c** Dagmar en Sandra moeten de waarde van g nog kiezen. Ze willen de kans op een fout van de eerste soort en de kans op een fout van de tweede soort beide zo klein mogelijk hebben. Laat aan de hand van de ingevulde tabel zien dat deze twee eisen met elkaar in strijd zijn.
- d** Ze beslissen om g zo te kiezen, dat de som van de kansen op onjuiste beslissingen minimaal is. Bepaal op grond hiervan de keuze van g .

	kans op een fout eerste soort	kans op een fout tweede soort	som
	$p = \frac{1}{6}$	$p = \frac{1}{4}$	
g	$P(X > g)$	$P(X \leq g)$	
1	...	...	...
2	0,2248	0,5256	0,7504
3	...	...	...
4	...	...	...
5	...	...	...
6	...	...	...

Een tabel zoals hierboven is met je rekenmachine snel te maken.

In opgave 8 heb je gezien dat als je de grenswaarde zo kiest dat de kans op een fout van de eerste soort klein wordt, de kans op een fout van de tweede soort juist groot wordt en omgekeerd. Bovendien is in de praktijk de kans op een fout van de tweede soort vaak niet te berekenen. Daarom wordt de grenswaarde zo gekozen dat de kans op een fout van de eerste soort zo dicht mogelijk bij, maar niet groter dan een van te voren afgesproken waarde ligt.

- 9a** Leg uit dat je bij een toets met $H_0: p = 0,3$ en $H_1: p < 0,3$ geen kans op een fout van de tweede soort kunt uitrekenen.
- b** En hoe zit dat bij een toets met $H_0: p = 0,3$ en $H_1: p > 0,3$?
- 10** Batterijen van hoortoestellen gaan lang mee. Op de verpakking van een bepaald type staat dat 90% van de batterijen een hoorapparaat minstens tien dagen goed laat functioneren. De indruk bestaat dat dit percentage lager is. Daarom wordt van 150 van deze batterijen nagegaan of ze inderdaad minstens tien dagen meegaan. Afgesproken wordt dat de kans op een fout van de eerste soort niet groter mag zijn dan 0,05.
- a** Geef H_0 , H_1 en de toetsingsgrootheid X .
- b** Bereken de kans op een fout van de eerste soort als H_0 wordt verworpen bij $X \leq 130$.
- c** Wordt in de situatie van opdracht b voldaan aan de afspraak?
- d** Laat zien dat wel wordt voldaan aan de afspraak als H_0 wordt verworpen bij $X \leq 125$.
- e** Voor welke waarde van g ligt $P(X \leq g)$ zo dicht mogelijk onder de afgesproken waarde van 0,05?

2-3

Toetsen op significantie

- 11** De politieke partij DPI (Democratische Partij voor Iedereen) beweert dat als er nu verkiezingen zouden zijn, 40% van de kiezers op hen zou stemmen. Een onderzoeksbureau denkt dat dit percentage lager ligt en doet een onderzoek met een steekproef van duizend kiesgerechtigden. Beschouw de bewering van DPI als H_0 en neem als toetsingsgrootte X het aantal kiezers in deze steekproef dat op DPI stemt.
- a** Wordt H_0 verworpen bij kleine of bij grote waarden van X ?
- b** Neem aan dat H_0 juist is. Dan is $X \sim \text{Bin}(1000; 0,4)$ -verdeeld. Maak met behulp van je rekenmachine een tabel met daarin de kansen op hoogstens 370, 371, ..., 380 DPI-stemmers in de steekproef.
- c** Je zoekt de grenswaarde g waarbij de kans $P(X \leq g)$ zo dicht mogelijk bij, maar niet groter is dan 0,05. Lees uit de tabel af voor welke waarde van g dit geldt.

Theorie

De waarden van de toetsingsgrootte X waarbij de nulhypothese wordt verworpen vormen het **kritieke gebied**.

Ga uit van de nulhypothese $H_0: p = p_0$.

Als $H_1: p < p_0$, dan wordt H_0 verworpen bij kleine waarden van X .

Het kritieke gebied K is dan van de vorm $K = \{0, 1, 2, \dots, g\}$.

Als $H_1: p > p_0$, dan wordt H_0 verworpen bij grote waarden van X .

Het kritieke gebied K is dan van de vorm $K = \{g, g + 1, \dots, n\}$, waarbij n de steekproefgrootte is.

De grens of grenzen van K worden bepaald door een vooraf gekozen **significantieniveau** α . Je kiest de grens zó, dat bij aanname van H_0 het gebied K zo groot mogelijk is terwijl $P(X \in K) \leq \alpha$.

Je zegt bij waarden van X in K dat de uitkomst van de steekproef **significant** afwijkt van wat je op grond van H_0 mag verwachten. Veel gekozen significantieniveaus zijn $\alpha = 0,10$, $\alpha = 0,05$ en $\alpha = 0,01$.

Voorbeeld

Gegeven is de toets met $H_0: p = 0,4$, $H_1: p < 0,4$; de steekproefgrootte is 75.

Als je ervan uitgaat dat H_0 juist is, is $X \sim \text{Bin}(75; 0,4)$ -verdeeld.

Bereken het kritieke gebied K bij een significantieniveau van $\alpha = 0,05$.

Oplossing

Omdat $H_1: p < 0,4$ is $K = \{0, 1, \dots, g\}$.

De waarde van g bereken je met $P(X \leq g) \leq 0,05$.

Maak met je rekenmachine een tabel met kansen van $P(X \leq g)$.

Uit deze tabel lees je af dat de grootste waarde van g met $P(X \leq g) \leq 0,05$ gelijk is aan 22, dus $K = \{0, 1, 2, 3, \dots, 22\}$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS + FOR Δ b1				
X	Y1			
19	.00564			
20	.01119			
21	.02088			
22	.03674			
23	.0611			
24	.09629			
25	.14415			
26	.2055			
27	.27974			
28	.36457			
29	.45624			
X=22				

12 Neem in het voorbeeld op de vorige bladzijde $H_1: p > 0,4$ en $n = 1000$.

a Leg uit waarom het kritieke gebied nu van de vorm $K = \{g, \dots, 1000\}$ is.

b Bereken de kans op een fout van de eerste soort als $g = 420$ wordt gekozen.

c Maak een tabel voor $g = 420, 421, \dots, 430$ en de kans $P(X \geq g)$.

d Kies als significantieniveau $\alpha = 0,05$.

Leg uit dat je de kleinste waarde van g moet hebben waarvoor $P(X \geq g) \leq 0,05$.

e Geef het kritieke gebied bij $\alpha = 0,05$.

f Bereken ook het kritieke gebied bij een significantieniveau van 0,02.

$$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g-1) \leq 0,05$$

 13a Gegeven zijn $H_0: p = 0,7$, $H_1: p < 0,7$ en $\alpha = 0,05$.

Onder H_0 is $X \text{ Bin}(30; 0,7)$ -verdeeld.

Bereken het kritieke gebied.

b Gegeven zijn $H_0: p = 0,25$, $H_1: p > 0,25$ en $\alpha = 0,10$.

Onder H_0 is $X \text{ Bin}(200; 0,25)$ -verdeeld.

Bereken het kritieke gebied.

 c Bij $H_0: p = \frac{2}{3}$, $H_1: p > \frac{2}{3}$ en $\alpha = 0,05$ wordt H_0 geaccepteerd als $0 \leq X \leq 35$.

Bereken de kleinst mogelijke waarde van de steekproefgrootte.

De zin:

‘Als je ervan uitgaat dat H_0 juist is, dan is $X \text{ Bin}(30; 0,7)$ -verdeeld.’

wordt vaak vervangen door

‘Onder H_0 is $X \text{ Bin}(30; 0,7)$ -verdeeld.’

14 Als een productieproces minder dan 90% eerste kwaliteit artikelen aflevert, moet het worden bijgesteld. Dit bijstellen is tijdrovend en kostbaar. Om te kunnen besluiten of bijstellen noodzakelijk is, wordt een steekproef van 40 exemplaren genomen. De toetsingsgrootte X is het aantal eerste kwaliteit artikelen in deze steekproef.

Je toetst hier $H_0: p = 0,90$ tegen $H_1: p < 0,90$.

Neem $\alpha = 0,05$. Bereken bij welke aantallen eerste kwaliteit artikelen in de steekproef er voldoende reden is om het proces bij te stellen.

Eigenlijk is in opdracht 14 de nulhypothese $H_0: p \geq 0,90$. Omdat p dan alle waarden vanaf 0,9 tot en met 1,0 kan aannemen, krijg je een verzameling van kritieke gebieden. Dat is erg ingewikkeld om mee te rekenen. Daarom wordt de nulhypothese altijd van de vorm $H_0: p = p_0$ gekozen.

15 Een therapeut beweert dat zijn methode om mensen te laten stoppen met roken heel effectief is: niet meer dan 15% van de deelnemers aan de cursus gaat binnen een jaar na het afronden van de cursus weer roken.

STIVORO, de stichting volksgezondheid en roken, denkt dat de methode minder effectief is en stelt een onderzoek in onder 120 mensen die ruim een jaar geleden de cursus hebben gevolgd.

Neem $\alpha = 0,10$. Bereken bij welke aantallen mensen die binnen een jaar toch weer zijn gaan roken STIVORO concludeert dat de uitslag significant afwijkt van wat de therapeut beweert.

2-4

Eenzijdig binomiaal toetsen

- 16** Een socioloog denkt dat 70% van de vrouwen die voor de eerste keer zwanger zijn, het geslacht van hun aanstaande kind hadden willen beïnvloeden als dat technisch zou kunnen. Een verloskundige denkt dat dit percentage kleiner is. Bij een kliniek wordt aan 227 vrouwen die voor het eerst zwanger zijn gevraagd of zij, als dat technisch had gekund, het geslacht van hun kindje hadden willen beïnvloeden.
- Formuleer de toetsingsgrootte X , H_0 en H_1 .
 - Bereken het kritieke gebied bij $\alpha = 0,05$.
 - Wat is bij $X = 150$ de conclusie?

Aanpak

Hoe voer je een statistische toets uit?

- Formuleer de toetsingsgrootte X .
- Stel de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1 op.
- Stel vast welke kansverdeling X heeft onder H_0 .
- Stel vast of er sprake is van een kritiek gebied $K = \{0, \dots, g\}$ of van $K = \{g, \dots, n\}$ waarbij n de steekproefgrootte is.
- Bereken de grenswaarde g van een zo groot mogelijke K met $P(X \in K) \leq \alpha$, waarbij α het gegeven significantieniveau is.
- Stel vast of H_0 bij het steekproefresultaat verworpen of geaccepteerd moet worden en beantwoord de vraag.

Voorbeeld

In een fabriek worden pakken met suiker gevuld. Hooguit 3% van de pakken mag minder suiker bevatten dan op het pak staat aangegeven. Ter controle wordt een steekproef van 150 pakken nagewogen. Hierbij worden 10 pakken aangetroffen met een te laag gewicht. Is dit met een significantieniveau van 1% te veel?

Oplossing

- X is het aantal te lichte pakken.
- $H_0 : p = 0,03$ en $H_1 : p > 0,03$
- Onder H_0 is $X \text{ Bin}(150; 0, 03)$ -verdeeld.
- K is van de vorm $K = \{g, \dots, 150\}$.
- $P(X \geq g) \leq 0,01$ ofwel $1 - P(X \leq g - 1) < 0,01$
Met een tabel op je rekenmachine vind je $g = 11$, dus $K = \{11, \dots, 150\}$.
- Het steekproefresultaat 10 zit in K , dus de nulhypothese wordt niet verworpen. Dat betekent dat er niet te veel lichte pakken zijn aangetroffen.

- 17** Wat zou in de fabriek uit het voorbeeld de conclusie zijn als in een steekproef van 300 pakken er 18 worden aangetroffen met een te licht gewicht?

- H 18** In een bepaald land heeft 42,4% van de inwoners bloedgroep A. Een onderzoeker heeft de indruk gekregen dat onder de lijdens aan een bepaalde maagziekte dit percentage hoger ligt. Hij doet onderzoek om zijn vermoeden te toetsen. In een aselechte steekproef van 238 lijdens aan de maagziekte blijken 117 personen bloedgroep A te hebben.
- a** Voer de statistische toets uit met een significantieniveau van 4%.
 - b** Is daarmee aangetoond dat er een verband is tussen bloedgroep en maagkwaal?

- 19** Bij een onlangs gestarte motorrijkschool zijn van de eerste 20 cursisten die de rijkschool heeft opgeleid, 17 de eerste keer meteen geslaagd voor hun praktijkexamen. De rijkschoolhouder vraagt zich af of dit significant beter is dan het landelijke slagingspercentage van 65,5%. Onderzoek of de rijkschoolhouder mag concluderen dat zijn rijkschool een significant beter resultaat heeft behaald, vergeleken met het landelijk gemiddelde. Gebruik hierbij het significantieniveau van 1%.
(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2007, tijdvak 1)



- 20** Gegeven is de toets met $H_0: p = 0,65$ en $H_1: p > 0,65$. Onder H_0 is de toetsingsgrootte X Bin(200;0,65)-verdeeld; het significantieniveau is 5%.
- a** Bereken $P(X \geq 143)$.
 - b** Bereken het kritieke gebied en ga na of bij een steekproefresultaat van $X = 143$ de bewering H_0 moet worden verworpen.
 - c** Leg uit hoe je op grond van het resultaat van opdracht a de conclusie van opdracht b al had kunnen trekken.

In opdracht 20a bereken je de kans op het steekproefresultaat of zelfs een overschrijding daarvan. Deze kans heet de overschrijdingskans. Op grond van de grootte van deze kans kun je ook concluderen of H_0 wel of niet moet worden verworpen. Is de overschrijdingskans kleiner dan α , dan wordt H_0 verworpen.

- 21** Bereken met behulp van de overschrijdingskans of bij een toets met $H_0: p = 0,4$, $H_1: p < 0,4$ en $n = 250$ op grond van een steekproefresultaat van $X = 88$ de nulhypothese kan worden geaccepteerd. Neem $\alpha = 0,05$.
- 22** In de krant stond dat twee op de drie vwo-leerlingen een halfjaar voor het eindexamen nog niet weet wat ze het volgend jaar willen gaan studeren. Het decanaat denkt dat deze schatting te hoog is en doet een steekproef onder vijftien leerlingen. Ze constateren dat negen van hen nog niet wisten welke studie ze volgend jaar gingen doen. Is dit aantal voldoende afwijkend om de bewering uit de krant in twijfel te trekken? Neem als significantieniveau $\alpha = 0,05$.

2-5

De toets van het gemiddelde

- 23** Accu's voor camera's, laptops en dergelijke worden steeds beter. In een advertentie staat dat de accu van een nieuw model laptop gemiddeld acht uur meegaat voordat hij moet worden opgeladen.

Bij navraag blijkt dat de fabrikant ervan uitgaat dat de gebruiksduur normaal verdeeld is met een gemiddelde van 8 uur en een standaardafwijking van 30 minuten. Een consumentenorganisatie twijfelt eraan of deze bewering wel klopt en test één accu.

Ga uit van $H_0: \mu = 480$, $H_1: \mu < 480$ en $\alpha = 0,05$. De toetsingsgrootte X is de gebruiksduur in minuten.

- Onder de nulhypothese is de toetsingsgrootte X normaal verdeeld.
Geef de parameters van deze normale verdeling.
- Leg uit dat je het kritieke gebied berekent met de vergelijking $P(X \leq g) = 0,05$ en bereken het kritieke gebied.
- De geteste accu blijkt 6 uur en 20 minuten mee te gaan. Welke conclusie trek je op grond hiervan over de bewering in de advertentie?



- 24** Om een meer betrouwbare uitspraak te kunnen doen over de gebruiksduur van de accu's van opdracht 23, neemt de consumentenorganisatie een steekproef van 20 accu's. De toetsingsgrootte is nu de gemiddelde gebruiksduur $\bar{X}$ van de 20 accu's uit de steekproef.
- Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
 - Onder de nulhypothese is $\bar{X}$ normaal verdeeld.
Geef de parameters van deze normale verdeling.
 - Bereken bij een significantieniveau van 5% het kritieke gebied.
 - De gebruiksduur van de 20 accu's blijkt 461 minuten te zijn. Is dit resultaat voldoende reden om de bewering in de advertentie te accepteren?

Als $X_1, X_2, \dots, X_n$
Norm(μ, σ)-verdeeld zijn,
dan is $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$
Norm($\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$)-verdeeld
en is $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$
Norm($n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma$)-verdeeld.

Theorie

De **toets van het gemiddelde** gaat over een stochast X die onder H_0 normaal verdeeld is met een gemiddelde μ en een standaardafwijking σ .

Bij steekproefgrootte n geldt: onder H_0 is het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ normaal verdeeld met gemiddelde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Voorbeeld

Het etiket van een limonadesiroop vermeldt een inhoud van 0,75 L. Na klachten dat er te weinig siroop in een fles zou zitten, blijkt bij een controle van een aselechte steekproef van 25 flessen dat de gemiddelde inhoud slechts 746 mL is.

Volgens de leverancier is de vulmachine ingesteld op 755 mL met een standaardafwijking van 10 mL. Geeft het steekproefresultaat bij een significantieniveau van 5% voldoende aanleiding om te twijfelen aan de bewering van de leverancier?

Oplossing

De stochast X is hier de gemiddelde inhoud in mL, $H_0 : \mu = 755$ en $H_1 : \mu < 755$.

Onder H_0 is de toetsingsgrootheid $\bar{X}$ Norm $(755; \frac{10}{\sqrt{25}})$ -verdeeld. Het kritieke gebied is $[0, g]$.

Met je rekenmachine vind je $g \approx 751,7$ dus $K = [0, 751,7]$.

De uitkomst van de steekproef valt binnen het kritieke gebied: er is dus aanleiding om te twijfelen aan de juistheid van de bewering van de leverancier.

- H 25** Chantal gebruikt haar auto uitsluitend om vier keer per week van haar huis naar haar werk en terug te rijden. Aan het eind van elke werkweek is de tank bijna leeg. Ze tankt dan bij het plaatselijke benzinestation de tank weer vol.
- Ze houdt nauwkeurig de gereden afstand en de getankte hoeveelheid benzine bij en berekent elke week het gemiddelde brandstofverbruik in liter per 100 kilometer. Dit blijkt normaal verdeeld met een gemiddelde van 5,41 liter met een standaardafwijking van 0,34 liter. Op aandrigen van een collega gaat ze over op benzine van een ander merk. Daarmee zou ze zuiniger moeten rijden.
- a** Benoem de toetsingsgrootheid, de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
 - b** Bereken bij $\alpha = 0,05$ het kritieke gebied.
 - c** De eerste week dat Chantal met nieuwe brandstof heeft gereden, is het gemiddelde verbruik 5,02 liter per 100 km.
Is deze uitslag aanleiding om te concluderen dat de benzine van het andere merk leidt tot een significant lager verbruik?
 - d** Na tien weken rijden met de andere benzine berekent ze het gemiddelde verbruik over deze periode. Dat blijkt 5,19 liter per 100 km te zijn.
Is deze uitslag aanleiding om te concluderen dat de benzine van het andere merk leidt tot een significant lager verbruik?
- 26** Een huisarts heeft elke werkdag twee uren gereserveerd voor een spreekuur. De ervaring heeft haar geleerd dat zij gemiddeld tien minuten voor een patiënt nodig heeft met een standaardafwijking van vier minuten. Neem aan dat de totale tijd T die de arts voor 60 patiënten nodig heeft, normaal verdeeld is met een gemiddelde van 600 minuten. In een week had de arts voor de 60 patiënten op haar spreekuur in totaal 654 minuten nodig. Dat is aanzienlijk meer dan de 600 minuten die ze zou verwachten.
- Onderzoek of deze gegevens voldoende aanleiding geven om de veronderstelde gemiddelde tijd van tien minuten te verhogen, bij een significantieniveau van 5%.
- (Ontleend aan CE vwo wiskunde B1 2004, tijdvak 2)

2-6

Tweezijdig toetsen

- 27 Om te onderzoeken of een beschadigd muntstuk van 1 euro zich nog wel als een zuivere munt gedraagt, wordt er veertig keer mee geworpen. X is het aantal keren kop. Stel dat bij deze euromunt de kans op kop gelijk is aan p .
- Wat je hier wilt toetsen is de zuiverheid van de euromunt: $H_0: p = 0,5$.
Waarom is dit geen linkszijdig of rechtszijdig toetsingsprobleem?
 - Formuleer de alternatieve hypothese H_1 .
 - Leg uit dat het kritieke gebied uit twee intervallen bestaat.
 - H_0 wordt verworpen bij $X \leq 14$ en bij $X \geq 26$.
Bereken de kans op een fout van de eerste soort.

Theorie

Als de nulhypothese $H_0: p = p_0$ moet worden getoetst tegen de alternatieve hypothese $H_1: p \neq p_0$, dan heet de toets **tweezijdig**.

Je verworpt dan H_0 voor 'te grote' uitkomsten van de toetsingsgrootte X (rechter interval) maar ook voor 'te kleine' uitkomsten van X (linker interval).

Het significantieniveau waarmee je toetst, wordt over beide zijden gelijk verdeeld. Zowel het linker als het rechter interval wordt dus berekend met $\frac{1}{2}\alpha$.

Voorbeeld

Bereken het kritieke gebied bij de toets met $H_0: p = 0,4$, $H_1: p \neq 0,4$, $n = 80$ en $\alpha = 0,05$.

Oplossing

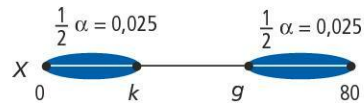
Het kritieke gebied bestaat uit $\{0, \dots, k\}$ en $\{g, \dots, 80\}$ met $P(X \leq k) \leq 0,025$ en $P(X \geq g) \leq 0,025$.

Hiernaast staat een deel van de tabel van de cumulatieve kansverdeling van X .

Hieruit blijkt dat $k = 23$.

Uit $P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g-1) \leq 0,025$ volgt met een soortgelijke tabel $g = 42$.

Het kritieke gebied bestaat dus uit $\{0, 1, 2, \dots, 23\}$ en $\{42, 43, \dots, 80\}$.



NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP					
PRESS + FOR Δ Tbl					
X	Y1				
20	.00356				
21	.00718				
22	.01365				
23	.02453				
24	.04175				
25	.06746				
26	.10373				
27	.15209				
28	.21311				
29	.28606				
30	.36873				
X=23					

- 28 Bereken het kritieke gebied bij de toets met $H_0: p = 0,65$, $H_1: p \neq 0,65$, $n = 150$ en $\alpha = 0,10$.

- H 29** Volgens de wet van Mendel zou bij een kruising van twee bepaalde planten 75% van de nakomelingen uit planten bestaan met paarse bloemen en 25% uit planten met roze bloemen. Een bioloog wil dit met een toets onderzoeken. Hij bekijkt 76 planten die voortgekomen zijn uit de kruising. Bereken bij welke aantallen planten met roze bloemen hij concludeert dat de wet van Mendel ook hier geldt. Neem een significantieniveau van 10%.



- 30** Voor een bepaald chemisch proces worden twee stoffen A en B gemengd in de verhouding 1: 4. Beide stoffen bestaan uit grove korrels. Ter controle van deze mengverhouding wordt van tijd tot tijd aselekt een steekproef van het mengsel genomen en daarin worden de korrels van beide stoffen geteld.
- a** Leg uit waarom er hier sprake is van een tweezijdige toets.
- b** In een aselekte steekproef blijken 43 korrels van stof A en 114 korrels van stof B aanwezig te zijn. Bereken met significantieniveau $\alpha = 0,05$ of op grond van dit resultaat geconcludeerd kan worden dat de mengverhouding niet goed is.
- c** Om wat gemakkelijker te kunnen beslissen gaat men als volgt te werk: er worden aselekt 120 korrels gekozen en de aantallen korrels van stof A en stof B worden geteld. Bij welke aantallen korrels van stof B in deze aselekte steekproef van 120 wordt de mengverhouding goedgekeurd? Kies weer $\alpha = 0,05$.
- 31** Aan de nauwkeurigheid van elektronische onderdelen worden hoge eisen gesteld. Als de feitelijke waarde te veel afwijkt van de gespecificeerde waarde, dan werkt de schakeling waarin het onderdeel is opgenomen niet naar behoren. Bij een correcte instelling van een machine die weerstanden maakt, hebben de geproduceerde weerstanden gemiddeld de opgegeven waarde en is de standaardafwijking 0,5% van de opgegeven waarde. Elk uur wordt er een steekproef van 30 weerstanden uit de productie genomen. Als de gemiddelde waarde in deze steekproef bij $\alpha = 0,03$ significant afwijkt van de opgegeven waarden, dan wordt de machine stilgelegd en opnieuw afgesteld.
- a** Bereken het kritieke gebied als weerstanden met een opgegeven waarde van 4700 ohm worden geproduceerd.
- b** Bij de productie van weerstanden van 12000 ohm worden in drie achtereenvolgende uren de volgende gemiddelden vastgesteld.

uur	1	2	3
gemiddelde weerstand in ohm	12019,1	12011,6	12012,8

Laat zien dat op grond van deze meetresultaten in geen enkel uur reden is geweest om de machine opnieuw af te stellen.

- c** Neem nu de resultaten van de drie uren samen. Wijkt het gemiddelde nu significant af van de opgegeven waarde?

Gemengde opdrachten

- 32** Bij een onderzoek naar de invloed van alcohol op het rijgedrag dronken honderd proefpersonen in vijf minuten tijd twee glazen bier. Na een kwartier kregen ze de opdracht een bepaald traject te rijden en zich steeds aan de maximumsnelheden te houden. Van ‘alcoholvrije’ proefautomobilisten is uit een groot aantal proefritten bekend dat zij dit traject met deze opdracht afleggen met een gemiddelde snelheid van 82,3 km/uur met een standaardafwijking van 3,8 km/uur. Van de honderd proefpersonen bleken er 46 het traject af te leggen met een gemiddelde snelheid van meer dan 82,3 km/uur. De anderen reden gemiddeld langzamer dan 82,3 km/uur.
- a** Leg uit dat, als je ervan uit gaat dat alcohol geen invloed heeft op het rijgedrag, er een kans van 50% is dat een proefpersoon gemiddeld harder dan 82,3 km per uur zal rijden.
 - b** Verschilt het aantal 46 op 5%-niveau significant van de helft?
 - c** De honderd automobilisten reden het traject gemiddeld met een snelheid van 83,1 km/uur. Neem aan dat de standaardafwijking nog steeds 3,8 km/uur is. Welke conclusie kun je nu trekken?
- 33** In verband met de grotere uitstoot van fijnstof en kooldioxide van oudere auto's en vrachtwagens die op diesel rijden, is het college van burgemeester en wethouders van plan om in de binnenstad een milieuzone in te stellen. Dat betekent dat deze voertuigen geen toegang meer hebben tot een deel van de binnenstad. Het college schat dat 70% van de bewoners en van de geregelde bezoekers van de binnenstad dit voornemen steunen. Een automobiellclub die tegen het voorstel is, houdt een aselechte steekproef onder 500 meerderjarigen. Er blijken 337 voorstanders te zijn.
- a** Is deze uitslag bij een significantieniveau van 5% een significante afwijking van de inschatting van het college?
 - b** Het bestuur van de winkeliersvereniging denkt dat 60% van haar leden tegen het voorstel van de gemeente zal zijn. Als dit inderdaad zo is, dan zullen ze door middel van een juridische procedure proberen de plannen tegen te houden. Zij houden een kort vooronderzoek onder 40 leden. Bereken bij welke uitslagen van het vooronderzoek het bestuur geen verder onderzoek zal doen, omdat het aantal tegenstanders significant kleiner is dan de verwachte 60%. Neem $\alpha = 0,10$.
- 34** Gegeven zijnde hypothesen $H_0: \mu = 7,3$ met $\sigma = 1,5$ en $H_1: \mu = 11,7$ met $\sigma = 2,8$. Het kritieke gebied is $K: X \geq g$.
- a** Kies $g = 9,61$ en bereken de kans op een fout van de eerste soort.
 - b** Bereken bij $g = 9,61$ ook de kans op een fout van de tweede soort.
 - c** Bereken in twee decimalen de waarde van g waarbij de som van de kansen op een fout van de eerste soort en een fout van de tweede soort minimaal is.

- 35** Een schoolleider heeft van de afgelopen 15 jaar bij de eindrapporten van de leerlingen in klas 3 havo/vwo de aantallen onvoldoendes voor de vakken Duits en Frans opgezocht en genoteerd in de tabel hieronder.

Jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Duits	8	5	6	7	9	6	7	4	8	8	3	5	7	7	9
Frans	11	7	5	5	8	7	6	8	5	7	8	4	5	3	7

De schoolleider vraagt zich af of uit deze gegevens valt op te maken of het ene vak moeilijker is dan het andere vak. Met een zogeheten tekentoets kun je vaststellen of er verschil is. Als beide vakken even moeilijk zijn, is de kans dat bij Duits meer onvoldoendes zijn dan bij Frans gelijk aan 0,5. Als de beide vakken niet even moeilijk zijn, is deze kans ongelijk aan 0,5.

Je toetst nu $H_0 : p = 0,5$ tegen $H_1 : p \neq 0,5$.

X is het aantal jaren dat bij Duits meer onvoldoendes zijn dan bij Frans.

X is onder H_0 binomiaal verdeeld.

- Noteer onder elke kolom een $+$ -teken als het aantal onvoldoendes op Duits hoger is, een $-$ -teken als het aantal onvoldoendes op Frans hoger is.
- Bereken met $\alpha = 0,10$ het kritieke gebied.
- Kun je nu concluderen dat het ene vak moeilijker is dan het andere?

- 36** Voor een beschermd broedgebied van wadvogels geldt dat het aantal nesten per hectare (1 hectare = 10 000 m²) bij benadering normaal verdeeld is met gemiddelde 143 en standaarddeviatie 19.

Bij wijze van proef wordt het gebied opengesteld voor wandelaars. In het broedseizoen worden op vier stukken terrein in dit gebied gemiddeld 129 nesten per ha geteld. Is dit aantal bij een significantieniveau van 10% aanleiding om te veronderstellen dat de openstelling een negatieve invloed heeft op de broedintensiteit?



- 37** De lichaamslengte van 17-jarige jongens is Norm(176,0; 6,0)-verdeeld.

Voor 17-jarige meisjes geldt dat hun lengte normaal verdeeld is met $\mu = 174,0$ cm en $\sigma = 6,0$ cm. Een statisticus heeft een lijst van n metingen, allemaal van jongens of allemaal van meisjes, helaas staat dat er niet bij.

Om uit te maken of het een jongenslijst dan wel een meisjeslijst betreft, doet de statisticus het volgende:

Is het gemiddelde van de lijst groter dan 175,0 cm, dan besluit hij dat het een jongenslijst is. Is het gemiddelde van de lijst kleiner dan 175,0 cm, dan besluit de statisticus tot een meisjeslijst.

- Neem $n = 25$. Bereken de kans dat de statisticus besluit dat het een jongenslijst is, terwijl het in werkelijkheid een meisjeslijst was.
- Neem weer $n = 25$. Bereken de kans dat de statisticus ten onrechte besluit dat het een meisjeslijst is.
- Onderzoek hoe groot n minstens moet zijn opdat de beide kansen uit de opdrachten a en b kleiner blijven dan 1 procent.

Samenvatting

Statistische toets, nulhypothese en alternatieve hypothese, toetsingsgrootheid, fout van de eerste en van de tweede soort

Bij een statistische toets gaat het om te beslissen of een bepaalde veronderstelling of bewering over een populatie op grond van steekproefresultaten kan worden geaccepteerd of niet. Deze veronderstelling heet de nulhypothese H_0 . Het verwerpen van de nulhypothese betekent dat je een andere veronderstelling, de alternatieve hypothese H_1 , accepteert.

Datgene wat in de steekproef geteld of gemeten wordt heet de toetsingsgrootheid.

Wanneer H_0 ten onrechte wordt verworpen, spreek je van een fout van de eerste soort; de fout dat H_0 ten onrechte wordt geaccepteerd heet een fout van de tweede soort.

Kritiek gebied, significantieniveau, significant afwijken

De waarden van de toetsingsgrootheid X waarvoor H_0 wordt verworpen, vormen het kritieke gebied K . Ga uit van de nulhypothese $H_0: p = p_0$.

Als $H_1: p < p_0$, dan wordt H_0 verworpen bij kleine waarden van X . Het kritieke gebied is dan van de vorm $K = \{0, 1, 2, \dots, g\}$.

Als $H_1: p > p_0$, dan wordt H_0 verworpen bij grote waarden van X . Het kritieke gebied is dan van de vorm $K = \{g, \dots, n\}$ waarbij n de steekproefgrootte is.

De grens of grenzen van K worden bepaald door een vooraf gekozen significantieniveau α . Je kiest de grens zó, dat bij aannahme van H_0 het gebied K zo groot mogelijk is terwijl $P(X \text{ in } K) \leq \alpha$.

Je zegt bij waarden van X in K dat de uitkomst significant afwijkt van wat je op grond van H_0 mag verwachten.

Voorbeeld

De docent Engels beweert dat de verdeling van de antwoorden A, B, C en D bij vierkeuzetoetsen ongeveer gelijk is. Karlijn denkt dat het antwoord C in meer dan in 25% van de gevallen het juiste antwoord is. Ze bekijken drie toetsen met in totaal 83 vragen. Daarin is 25 keer C het juiste antwoord.

Ga na of je bij deze uitslag kunt concluderen dat C significant vaker het juiste antwoord is. Kies $\alpha = 0,05$.

Oplossing

- 1 De toetsingsgrootheid X is het aantal opdrachten met C als juiste antwoord.
- 2 $H_0: p = 0,25$ en $H_1: p > 0,25$.
- 3 Onder H_0 is $X \text{ Bin}(83; 0,25)$ -verdeeld.
- 4 K is van de vorm $\{g, \dots, 83\}$.
- 5 $P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g - 1) \leq 0,05$ geeft $g = 27$.
- 6 De uitslag 25 zit niet in het kritieke gebied, dus C komt niet significant vaker voor.

Tweezijdige toets

Een tweezijdige toets is een toets met $H_0: p = p_0$ en $H_1: p \neq p_0$ of met $H_0: \mu = \mu_0$ en $H_1: \mu \neq \mu_0$. Het kritieke gebied bestaat dan uit een linkerdeel en een rechterdeel. Het significantieniveau wordt gelijk over deze twee delen verdeeld.

Je kunt een binomiale toets opstellen en uitvoeren

Stel vast wat H_0 en H_1 zijn en bereken het kritieke gebied.

Voorbeeld

Iemand twijfelt aan de zuiverheid van een dobbelsteen en werpt 75 keer met de dobbelsteen om dat te onderzoeken. Ze gooit tien keer een 6.
Is er met $\alpha = 0,05$ voldoende reden voor twijfel?

Oplossing

De toetsingsgrootte X is het aantal keer dat 6 gegooit wordt.

$H_0: p = \frac{1}{6}$ en $H_1: p \neq \frac{1}{6}$; onder H_0 is $X \sim \text{Bin}\left(75, \frac{1}{6}\right)$ -verdeeld.

Er is sprake van een tweezijdige toets. De grens k van het linkerdeel van het kritieke gebied K wordt bepaald door $P(X \leq k) \leq \frac{1}{2}\alpha$. Met een tabel op je rekenmachine vind je $k = 6$.

De grens g van het rechterdeel van het kritieke gebied is $g = 20$.

H_0 wordt niet verworpen want het steekproefresultaat $X = 10$ zit niet in K .

Er is dus niet voldoende reden om te twijfelen aan de zuiverheid van de dobbelsteen.

Je kunt een toets van het gemiddelde opstellen en uitvoeren

Stel de nulhypothese en de alternatieve hypothese op. Bereken

de standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bij het steekproefgemiddelde,

bereken het kritieke gebied en trek je conclusie.

Voorbeeld

Op zakjes puddingpoeder staat dat er 100 gram puddingpoeder in zit. De vulmachine in de fabriek staat volgens de productie leider ingesteld op 100,5 gram. De machine vult de zakjes met een standaardafwijking van 3 gram. In een steekproef van 50 zakjes vindt men een gemiddeld gewicht van 99,75 gram.

Is er met een significantieniveau van 5% voldoende reden om te twijfelen aan de instelling van de vulmachine?

Oplossing

X is het gemiddelde gewicht en er wordt getoetst $H_0: \mu = 100,5$ tegen $H_1: \mu < 100,5$.

Onder H_0 is $X \sim \text{Norm}\left(100,5; \frac{3}{\sqrt{50}}\right)$ -verdeeld.

De grens g van het kritieke gebied K vind je met $P(X \leq g) \leq \alpha$ ofwel $P(X \leq g) \leq 0,05$.

Met de rekenmachine geeft dit $g = 99,8$, zodat $K = [0; 99,8]$. Het steekproefresultaat zit in K .

Er is dus voldoende reden om te twijfelen aan de instelling van de vulmachine.

Test jezelf

- T-1** In hotel De Horne wordt bij het ontbijt wit brood en bruin brood geserveerd. Men gaat ervan uit dat 80% van de gasten de voorkeur geeft aan wit brood. Omdat er de laatste tijd een aantal keren een tekort aan bruin brood was, besluit men te onderzoeken of deze 80% nog wel klopt. Er wordt aan 50 aselekt gekozen gasten gevraagd waaraan zij de voorkeur geven: wit of bruin. De toetsingsgrootheid X is hier het aantal personen in de steekproef met een voorkeur voor wit brood.
- Formuleer de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1 .
 - Welke kansverdeling heeft X onder de aanname dat H_0 juist is?
 - Waarom is er bij een steekproefuitkomst van 42 liefhebbers van wit brood geen aanleiding om het aandeel wit brood naar beneden bij te stellen?
 - Hoe groot is de kans op $X \leq 35$ er van uit gaand dat 80% de voorkeur geeft aan wit brood?
 - Er wordt afgesproken dat er minder wit brood zal worden geserveerd als in een steekproef van 80 gasten hooguit 60 de voorkeur geven aan wit brood. Bereken de kans dat ten onrechte minder wit brood zal worden geserveerd.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-1.*



- T-2a** Gegeven is een toets met $H_0: p = \frac{1}{3}$ en $H_1: p = 0,7$, $n = 40$. De nulhypothese wordt verworpen als het steekproefresultaat 19 of groter is. Bereken de kans op een fout van de eerste soort en de kans op een fout van de tweede soort.
- b** Bereken hoe de grens van het kritieke gebied gekozen moet worden zodat de som van de kansen op fouten van de eerste en tweede soort minimaal is.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-2.*
- T-3** Een fabrikant garandeert dat minstens 94% van de door hem geleverde producten voldoet. Om dit te controleren telt een consument in een aselechte steekproef van 100 producten het aantal ondeugdelijke exemplaren. De toetsingsgrootheid X is het aantal ondeugdelijke producten in de steekproef.
- Formuleer bij deze situatie H_0 en H_1 .
 - Wie krijgt gelijk in het geval H_0 verworpen wordt?
 - Bereken het kritieke gebied als $\alpha = 0,05$.
 - Neem aan dat de consument acht ondeugdelijke exemplaren in de steekproef aantreft. Wat zal de conclusie zijn bij dit steekproefresultaat?
 - Wordt H_0 verworpen als $X = 9$ bij $\alpha = 0,05$? En bij $\alpha = 0,10$?
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-3.*

- T-4** Golfballen van een bepaalde kwaliteit worden getest met een slagmachine. De ballen mogen maximaal twee meter minder of twee meter meer dan een bepaalde afstand afleggen. Als er geen storingen in het productieproces zijn opgetreden, is 90% van de geproduceerde ballen goed. Wekelijks wordt er een steekproef van 140 ballen getest. Als te veel ballen moeten worden afgekeurd, wordt de hele weekproductie gecontroleerd. In een bepaalde week bleken in de steekproef 23 ballen niet goed te zijn.
- a** Is hier sprake van een eenzijdige of een tweezijdige toets?
 - b** Stel de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1 op.
 - c** Neem $\alpha = 0,05$. Is het resultaat reden genoeg om actie te ondernemen?
 - d** Van de 23 ballen die in eerste instantie zijn afgekeurd, blijken 18 ballen niet ver genoeg en 4 te ver geslagen te zijn. Wat verandert aan de toets en aan de conclusie als alleen ballen die niet ver genoeg komen worden afgekeurd?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-4.
- T-5** In 1977 werden 100 000 18-jarige dienstplichtige soldaten gekeurd. Hun lengte bleek normaal verdeeld te zijn met een gemiddelde van 180,1 cm en standaardafwijking van 7,2 cm. Een onderzoeker van het Ministerie van Defensie, die moet adviseren over de maten van de uniformkleding, vermoedt dat de gemiddelde lengte van mannelijke 18-jarigen is toegenomen. In een aselechte steekproef van 16 jonge mannen blijkt de gemiddelde lengte 182,6 cm te zijn.
- a** Formuleer zo nauwkeurig mogelijk bij deze situatie een statistische toets.
 - b** Is het gevonden resultaat op 4%-niveau wel of niet significant?
 - c** Natuurlijk is een steekproefgrootte van 16 klein. Stel dat je een steekproefgrootte n hebt, waarbij het gemiddelde 182,6 is. Hoe groot moet n minstens zijn om te concluderen dat deze uitslag significant afwijkt?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-5.
- T-6** Er wordt aangenomen dat $\frac{1}{12}$ deel van de Nederlandse bevolking in de maand mei jarig is. Iemand twijfelt daaraan en denkt dat het ook wel eens een kleiner of groter deel kan zijn.
- a** Geef de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1 .
 - b** In een steekproef van tachtig mensen blijken elf mensen in mei jarig te zijn. Is dat voldoende reden om te twijfelen aan het uitgangspunt bij een significantieniveau van 10%?
 - c** En als slechts twee mensen uit de steekproef in mei jarig zijn?
 - d** Er wordt een nieuwe steekproef genomen van 140 mensen. Bij welke aantallen jarigen in mei in deze steekproef wordt niet getwijfeld aan de bewering dat $\frac{1}{12}$ deel van de Nederlanders in de maand mei jarig is? Neem weer $\alpha = 0,10$.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-6.



Extra oefening - Basis

- B-1** Volgens een uitkeringsinstantie ontvangt 10% van hun cliënten ten onrechte een uitkering. Een politieke groepering denkt dat dit percentage hoger ligt. Er wordt een nauwkeurig onderzoek gedaan van 400 dossiers. Bij 50 of meer onterechte uitkeringen wordt de uitkeringsinstantie in het ongelijk gesteld.
- Wat is de toetsingsgrootte?
 - Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
 - Bereken de kans dat de uitkeringsinstantie ten onrechte ongelijk krijgt.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-1.
- B-2** Herman denkt dat de weerman van het journaal in 80% van de gevallen gelijk krijgt, als hij aankondigt dat het de volgende dag de hele dag droog zal blijven. Joël denkt dat dat maar in 50% van de gevallen zo is.
Ze besluiten voor de komende 15 dagen waarop droog weer wordt aangekondigd, bij te houden of het de volgende dag droog is of niet. Als dat op minstens tien dagen het geval is, krijgt Herman gelijk, anders Joël.
Neem de bewering van Herman als nulhypothese en de bewering van Joël als alternatieve hypothese.
- Bereken de kans op een fout van de eerste soort.
 - Bereken de som van de kansen op een fout van de eerste en tweede soort.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-2.
- B-3** Psoriasis is een chronische huidaandoening die bij ongeveer 2% van de bevolking voorkomt. Een dermatoloog vermoedt dat bij indianen psoriasis minder vaak voorkomt. Er wordt een steekproef gedaan onder 1000 indianen. Hiervan blijken zeven personen te lijden aan psoriasis.
- Formuleer de toetsingsgrootte, H_0 en H_1 .
 - Bereken het kritieke gebied bij een significantieniveau van 5%.
 - Geeft deze uitslag voldoende reden om de dermatoloog gelijk te geven?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-3 en 2-4.
- B-4** Kuipjes margarine worden volgens de fabrikant gevuld met een gemiddelde van 250,5 gram en een standaardafwijking van 2,5 gram. Bij een steekproef van 100 kuipjes werd een gemiddeld gewicht van 249,5 gram gemeten.
Geeft deze uitslag bij een significantieniveau van 1% aanleiding om aan het opgegeven gemiddelde te twijfelen?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-5.
- B-5** Bij 300 keer gooien met een 12-vlaksdobbelsteen let je op het aantal keer 8. Bij welke aantallen 8 mag je aannemen dat de kans op een 8 niet $\frac{1}{12}$ is? Neem $\alpha = 0,05$.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-6.



Extra oefening - Gemengd

- G-1** Bij wiskunde-eindexamens werd vroeger de score van elke kandidaat uitgedrukt in een geheel aantal punten, met een minimum van 10 en een maximum van 100. Volgens het Cito was bij het Centraal Schriftelijk Eindexamen vwo wiskunde A in 1987 het landelijk gemiddelde van de scores van alle kandidaten 61,8 punten, met een standaarddeviatie van 17,1 punten.
- a** Hoewel de verdeling van de scores van die tienduizenden kandidaten wel veel gelijkenis vertoont met de normale verdeling is er toch een verschil.
Welk verschil is dit?
- b** De gelijkenis is niettemin zo sterk dat je bij berekeningen mag doen alsof de scores normaal verdeeld zijn. Op school A deden 25 kandidaten aan dit examen mee. Hun gemiddelde score was 67,1 punten. Is de gemiddelde score op school A significant hoger dan het landelijk gemiddelde? Neem een significantieniveau van 5%.
- c** Neem aan dat precies 25% van alle kandidaten een onvoldoende cijfer kreeg. Op school B deden 50 kandidaten aan dit examen mee, waarvan 18 een onvoldoende cijfer kregen. Is het percentage onvoldoendes op school B significant hoger dan het landelijke percentage? Neem weer een significantieniveau van 5%.
- G-2** In het krantenartikel hiernaast wordt gesproken over lesuitval.
Neem voor de beantwoording van de volgende vragen aan dat
- het aantal lessen dat per klas uitvalt normaal verdeeld is;
 - de percentages in het artikel ook gelden voor de lesuitval per klas;
- Een klas heeft officieel ongeveer 1040 klokuren les per jaar. Volgens het krantenartikel vallen daarvan gemiddeld ongeveer 104 klokuren uit en is de kans dat er 208 of meer klokuren uitvallen gelijk aan 5%.
- a** Toon aan dat de standaarddeviatie afgerond 63 klokuren is.
- b** Een vader klaagt op de ouderavond bij de schoolleiding over de enorme hoeveelheid lesuitval die zijn dochter in het schooljaar 08/09 heeft meegemaakt. Er zijn 150 van de 1040 klokuren uitgevallen.
Is het, statistisch gezien, terecht dat de vader klaagt over het uitvallen van zoveel lessen? Neem als significantieniveau 10%.
- c** Op een school is ook het aantal uren lesuitval in opdracht van de inspectie geturfd. Hiernaast zijn de cijfers van het jaar 08/09. Is het percentage lesuitval op die school een afspiegeling van het landelijk beeld of wijkt die school in dit opzicht significant af? Neem daarbij een significantieniveau van 10%.

Het Algemeen Dagblad 3-2-2009

Een op de tien lessen in het voortgezet onderwijs valt uit

DEN HAAG - In het voortgezet onderwijs valt gemiddeld bijna één op de tien lessen uit. Tussen scholen doen zich grote verschillen voor. De uitval is bij één op de twintig scholen zelfs 20 procent of meer.

39 klassen
totaal officieel 40 560 klokuren
totaal lesuitval 4380 klokuren

Uitdagende opdrachten

- U-1** Er bestaat al lang discussie of het dagelijks slikken van een dosis vitamine C de kans op een verkoudheid verlaagt of niet. Om nogmaals te onderzoeken of er een effect is, wordt een groep mensen gevraagd om vanaf 1 november dagelijks een aantal tabletten te slikken. Een aantal deelnemers krijgt vitamine C-tabletten; de anderen krijgen een placebo, dat wil zeggen tabletten zonder werkzame stoffen. Op 1 maart moeten ze aangeven of ze in de afgelopen periode verkouden zijn geweest. De resultaten van dit onderzoek staan in de volgende tabel.

	<i>verkouden</i>	<i>niet verkouden</i>
<i>vitamine C</i>	302	105
<i>placebo</i>	335	76

Ga na of op grond van deze uitslag de veronderstelling dat het slikken van vitamine C helpt bij het voorkomen van verkoudheid kan worden aangenomen. Kies als significantieniveau $\alpha = 0,05$.

- U-2** Deze opdracht gaat over een eenzijdige binomiale toets met steeds $H_0: p = 0,25$, $H_1: p > 0,25$ en $\alpha = 0,05$.
- a** Laat meteen berekening zien dat bij $n = 20$ het kritieke gebied gelijk is aan $K = \{9, 10, \dots, 20\}$ en bereken de kans op een fout van de eerste soort.
- b** Leg uit waarom je geen kans op een fout van de tweede soort kunt uitrekenen.
- c** De alternatieve hypothese noemt geen concrete succeskans, alleen dat deze groter is dan 0,25. Neem aan dat de werkelijke succeskans 0,40 is. Bereken in deze situatie de kans dat H_1 terecht wordt geaccepteerd.

De kans dat H_1 terecht wordt geaccepteerd, heet het onderscheidingsvermogen van de toets. Deze kans hangt af van de werkelijke succeskans q en wordt genoteerd als $\gamma(q)$. In opdracht c heb je dus $\gamma(0,40)$ berekend.

- d** Vul de tabel hieronder in en teken de grafiek van γ .

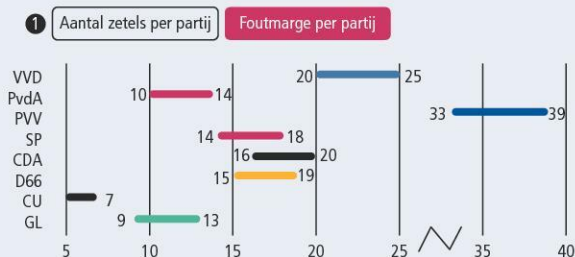
q	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,80	0,90	1,00
$\gamma(q)$													

- e** Neem nu achtereenvolgens $n = 50$ en $n = 100$. Bereken eerst het kritieke gebied en teken de grafiek van γ in dezelfde figuur.
- f** Hoe sneller de grafiek van γ stijgt, hoe beter de toets. Leg dit uit.

(On)nauwkeurigheid bij peilingen

De eerste Peilingwijzer van 2016 laat nauwelijks verschuivingen zien in de politieke voorkeur van de Nederlanders. De PVV blijft het goed doen. De partij van Geert Wilders is met 33 tot 39 Tweede Kamerzetels veruit de grootste, maar is sinds eind november niet verder gestegen. In de Peilingwijzer staat de VVD tweede met 20 tot 25 zetels. Zie de afbeelding hieronder

Peilingwijzer van 9 januari 2016



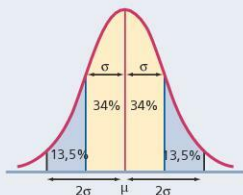
Peilingen hebben een foutmarge omdat maar een beperkt aantal personen wordt ondervraagd. De foutmarge is afhankelijk van de steekproefgrootte en het percentage kiezers voor een partij.

Wat zegt de statistiek hierover?

Je hebt al kennis gemaakt met beschrijvende statistiek en kansrekening.

Het derde gebied is de mathematische statistiek, waarbij een parameter bestudeerd wordt aan de hand van gegevens die met een steekproef verzameld zijn. Het toetsen van hypothesen is daar een voorbeeld van. Ook het schatten van een parameter is een methode uit de mathematische statistiek. Dan wordt op grond van de waarnemingen in de steekproef een interval gegeven voor de onbekende parameter.

Je maakt gebruik van één van de vuistregels: $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$



Het interval $\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma$ is het zogenoemde 95% betrouwbaarheidsinterval.

Meestal zie je alleen het aantal zetels dat de partij zou krijgen als er nu verkiezingen zouden zijn of een percentage kiezers.

Voor de VVD zou dat in de gegeven peiling betekenen dat ze 22,5 zetels zouden krijgen van de 150 Kamerzetels ofwel dat $\frac{22,5}{150} \times 100\% = 15\%$ van de ondervraagden op de VVD zou stemmen.

Als je alleen kijkt naar de VVD-stemmers, dan kun je deze peiling opvatten als een Bernoulli experiment met als uitkomsten VVD of een andere partij, met succeskans $p = 0,15$. Het aantal deelnemers van de steekproef is n . Omdat n klein is ten opzichte van de totale populatie mag de binomiale verdeling gebruikt worden. Ook is een benadering met de normale verdeling toegestaan als de steekproefomvang groot genoeg is. Met $\mu = E(X) = p$,

$$\sigma = \frac{\sigma_{bin}}{n} = \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \text{ en } n = 2000$$

vind je $\mu - 2\sigma = 0,1343$ en $\mu + 2\sigma = 0,1660$.

Dus het betrouwbaarheidsinterval is

$$0,1343 < X < 0,1660.$$

Omgerekend naar kamerzetels $20 \leq Z \leq 25$.

Omgekeerd kan met de gegevens van de afbeelding de steekproefomvang uitgerekend worden. De afwijking vanuit het midden van het interval is a.

$$\text{Uit } a = 2\sigma = 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \text{ volgt } n = \frac{4p(1-p)}{a^2}.$$

Uit de gegevens van de VVD volgt $a = \frac{2,5}{150} = \frac{1}{60}$ en

$$n = \frac{4 \cdot 0,15 \cdot 0,85}{\left(\frac{1}{60}\right)^2} = 1836. \text{ Het verschil met 2000 is}$$

veroorzaakt door afrondingen.

Opdracht

- Controleer dat de getekende intervallen bij de PvdA, PVV en CU 95% betrouwbaarheidsintervallen zijn.
- Bij de PVV is $a = \frac{3}{150} = 0,02$ en $p = \frac{36}{150} = 0,24$.

Bereken de steekproefomvang n .

Vaardigheden 1

Rijen

- 1 Hiernaast zie je een rij getallen waar een regelmaat in zit.
 - a Welke regelmaat zie je?
 - b Schrijf de volgende drie getallen op van deze rij.
 - c Controleer dat de rij vastgelegd is met de formule $u_{n+1} = u_n + n$ en $u_1 = 7$.
 - d Een andere rij is vastgelegd met de formule $v(n+1) = 2v(n) + 1$ en $v(0) = -3$. Schrijf de volgende vijf getallen van de rij op.

7	8	10	13	17	22	...	...	...
---	---	----	----	----	----	-----	-----	-----

Een rij getallen noteer je met de indexnotatie u_n of met de functienotatie $u(n)$. De getallen in een rij heten termen. De eerste term van een rij heet de beginterm. Een rij kan beginnen met $u(0)$ of met $u(1)$. Als je bij een rij de volgende term kunt berekenen uit de voorgaande term(en), dan spreek je van recursie. De bijbehorende formule heet een recursieve formule.

- 2 Geef van elke rij hiernaast een recursieve formule.
- 3 Schrijf de eerste vier termen op van de rijen met de volgende recursieve formules.
 - a $u(n+1) = 3 \cdot u(n) - 2$ met beginterm $u(0) = 2$.
 - b $v_{n+1} = 1,5 \cdot v_n$ met beginterm v_1 en met $v_2 = 24$.

- | | |
|---|---------------------------|
| A | 12, 18, 24, 30, |
| B | 3, 6, 12, 24, |
| C | 12; 25; 51; 103; |
| D | 320, -160, 80, -40, |
| E | 3, -4, -11, -18, |

Een rij waarvan je een term vindt door bij de vorige term een constante a op te tellen heet een rekenkundige rij. De constante a heet het verschil.

Een rij waarvan je een term vindt door de vorige term met een constante r te vermenigvuldigen heet een meetkundige rij. De constante r heet de reden.

Bij sommige rijen kun je een term $u(n)$ direct berekenen met het rangnummer n . Je gebruikt dan een directe formule.

Directe formule bij een rekenkundige rij: $u(n) = b + a \cdot n$.
Directe formule bij een meetkundige rij: $u(n) = b \cdot r^n$.
In beide gevallen geldt: $b = u(0)$.

Voorbeeld 1

Geef een directe formule bij de rij:
 $u(1) = 299$, $u(2) = 286$, $u(3) = 273$,

Oplossing

u is een rekenkundige rij met verschil -13 .
 $u(0) = 299 + 13 = 312$
 $u(n) = 312 - 13n$

Voorbeeld 2

Geef een directe formule bij de rij:
 $K_{n+1} = \frac{1}{2}K_n$ en $K_4 = 10$

Oplossing

K is een meetkundige rij met reden $\frac{1}{2}$.
 $K_0 = \frac{10}{(\frac{1}{2})^4} = 160$. $K_n = 160 \cdot (\frac{1}{2})^n$

- 4a Welke van de rijen van opdracht 2 en 3 zijn rekenkundig en welke zijn meetkundig?
- b Bepaal bij elk van deze rijen een directe formule.

10a Gegeven is de formule $B = \frac{3P \cdot R + 56}{2R}$

Substitueer $R = 4$ en herleid de formule tot de vorm $B = a \cdot P + b$.

b Gegeven is de formule $2' \cdot x = y \cdot t^2 + 3t$.
Neem $t = 3$ en druk y uit in x .

11 Gegeven is de formule
 $r = 3d + \sqrt{t + 24} - 8$.

a Neem $t = 25$ en druk d uit in r .

b Neem $r = 0$ en druk t uit in d .

c Substitueer $d = 1 - 2r$ en druk r uit in t .

Rekenmachine

Je kunt met je rekenmachine toppen bepalen en snijpunten berekenen. Als je de rekenmachine gebruikt, geef je aan hoe je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij neem je de volgende onderdelen op: de invoer, de vensterinstelling en de gebruikte opties.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 2 + 7\sqrt{x+2}$.
Bereken de coördinaten van de top van de grafiek en bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de lijn $y = 4$.
Rond je antwoorden af op twee decimalen.

Oplossing

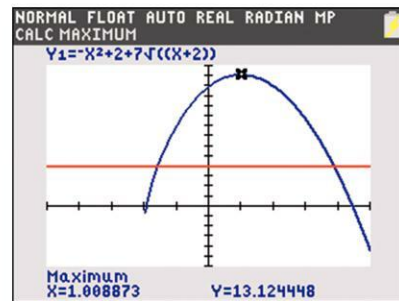
Invoer: $Y1 = -x^2 + 2 + 7\sqrt{x+2}$ en $Y2 = 4$

Venster:

Xmin = -5, Xmax = 5, Ymin = -6, Ymax = 14

Optie: maximum. De top is (1,01;13,12).

Optie: intersect. De snijpunten zijn (-1,58; 4) en (3,87;4).



12 Gegeven is de functie $A(p) = (2p - 75)(3p + 81)$.

a De snijpunten van de grafiek van $A(p)$ met de p -as kun je zonder rekenmachine berekenen.

Laat zien hoe en geef de coördinaten van de snijpunten.

b Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van $A(p)$.

c Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van $A(p)$ met de lijn $A(p) = 1000$. Rond je antwoord af op één decimaal.

13 Los de volgende vergelijkingen op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $3\sqrt{4x-1} = 5$

c $p - 4 = p^3 - 3p$

b $\frac{12}{\sqrt{7-2x}} = 4$

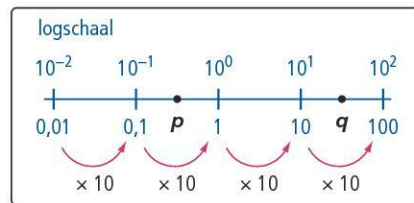
d $\frac{2x}{x^2+5} = \frac{1}{3}$

14 Welke van de vergelijkingen uit opdracht 13 kun je ook zonder rekenmachine oplossen? Laat zien hoe.

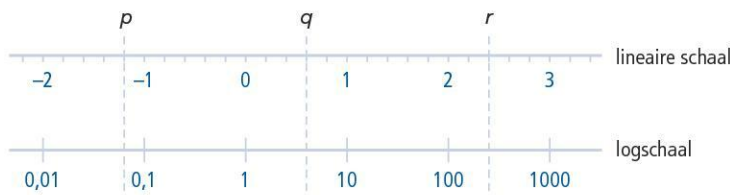
Logaritmische schaal

- 15 Hiernaast zie je een logaritmische schaalverdeling.
 p is het getal precies midden tussen 0,1 en 1.
 q is het getal precies tussen 10 en 100.
a Bereken in twee decimalen nauwkeurig de waarden van p en q .
b Hoe kun je het getal q uit p afleiden?

Bij een lineaire schaalverdeling wordt bij gelijke stappen een vast getal opgeteld. Bij een logaritmische schaalverdeling of logschaal wordt bij gelijke stappen met een vast getal vermenigvuldigd.



- 16 Hieronder zie je een lineaire schaal en een logschaal.
 Bereken de getallen die horen bij p , q en r bij zowel de lineaire als de logschaal. Rond indien nodig af op twee decimalen.



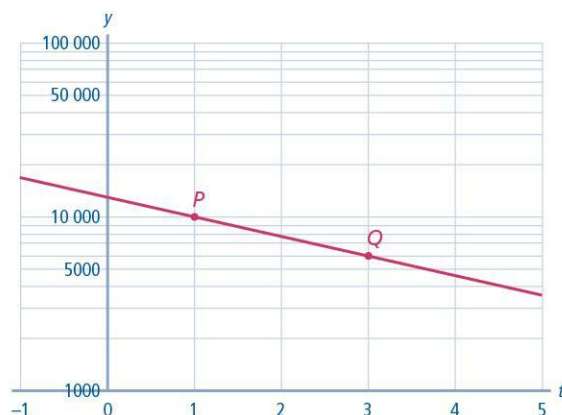
- 17 Op onderstaande logschaal zijn de getallen 1, 2, 3 en 10 weergegeven.



- a** Leg uit hoe de plaats van het getal 2 is gevonden.
b Bereken wat op de plaats van de stippen moet staan en controleer of het getal 3 op de juiste plaats staat.
c Neem bovenstaande logschaal over en zet daarin de getallen 4 tot en met 9 op de juiste plaats.

- 18 Hiernaast is de grafiek getekend bij het verband tussen t en y in een assenstelsel, waarvan de y -as een logschaal is. De grafiek gaat door de punten $P(1, 9600)$ en $Q(3, 6144)$.

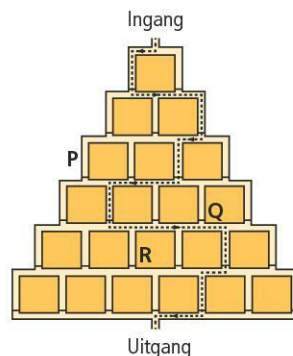
- a** Waarom is dit de grafiek van een exponentieel verband?
b Bereken de groeifactor die hoort bij dit exponentiële verband.
c Stel de formule op bij het verband tussen t en y .
d De grafiek van een andere formule gaat door $(1, 50\,000)$ en is evenwijdig aan de grafiek door de punten P en Q .
 Wat zegt dat over de groeifactor?
e Geef de formule bij deze grafiek.



Combinatoriek

*Het oplossen van een telprobleem vereist een systematische aanpak.
Dat kan met behulp van een boomdiagram, een wegendigram of
door de mogelijkheden op een overzichtelijke manier weer te geven.*

- 19** Een spel speelkaarten bestaat uit 52 kaarten. Er zijn vier ‘kleuren’: ruiten, harten, schoppen en klaveren. Elke kleur telt dertien kaarten: aas, 2, 3, 4, ..., 10, boer, vrouw, heer. Je trekt één voor één drie kaarten uit het kaartspel en legt die open voor je neer. Zo ontstaat een rijtje. Met een boomdiagram kun je uitzoeken hoeveel verschillende rijtjes je zo kunt maken, waarbij je alleen let op de kleuren.
- a** Hoeveel verschillende rijtjes zijn er mogelijk?
- b** In een rijtje van drie kaarten zijn precies twee ruiten. Hoeveel van dergelijke rijtjes kun je maken?
- c** Het antwoord van opdracht b kun je ook vinden door de mogelijkheden systematisch op te schrijven, bijvoorbeeld zo:
RRS RRK RRH RSR R..R R..R SRR enz.
Bepaal op deze manier het aantal mogelijke rijtjes.
- 20** Een sportdag bestaat uit drie ronden. Bij elke ronde moet iedereen uit één sport kiezen. Je hebt de keuze uit basketbal, handbal, volleybal of trefbal. Zo ontstaat een dagprogramma met drie gekozen sporten. De vraag is hoeveel verschillende dagprogramma's er mogelijk zijn.
- a** Hoeveel verschillende dagprogramma's zijn er met drie verschillende sporten?
- b** Hoeveel verschillende dagprogramma's zijn er als je ook een sport meer dan één keer kunt kiezen?
- 21** Bij onderzoek naar intelligentie van ratten wordt soms gebruik gemaakt van een gangenstelsel. In elk van de verticaal getekende gangen zit een klapdeurtje, dat slechts in één richting kan worden gepasseerd. Dat verhindert dat een rat terug naar ‘boven’ kan lopen. Een rat kan langs een groot aantal routes van ingang naar uitgang lopen. In de figuur is een voorbeeld getekend. Hoeveel verschillende routes er zijn van ingang naar uitgang?
- 22** In een doosje zitten vijf batterijen, waarvan je weet dat er drie vol zijn (V) en twee leeg (L). Door de batterijen één voor één te proberen in een zaklantaarn wil je de lege batterijen vinden. Een mogelijke volgorde waarbij je de twee lege gevonden hebt is LVL. Onderzoek hoeveel verschillende volgorden mogelijk zijn om de twee lege batterijen te vinden.
- 23** Je gooit één keer met een rode, een blauwe en een gele dobbelsteen. De som van de aantallen ogen is 6. Op hoeveel verschillende manieren kun je een totaal aantal ogen 6 krijgen?



- 24** Robert zet de vijf boeken die hij bij vijf verschillende vakken gebruikt op een boekenplank. Hij vraagt zich af op hoeveel volgordes dit kan. Bereken het aantal volgordes waarop de boeken op de plank gezet kunnen worden.

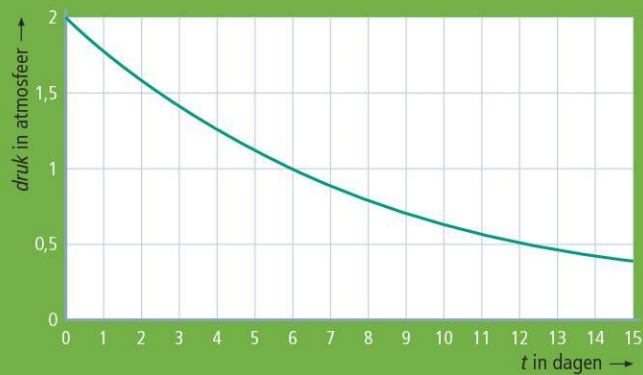
Het aantal volgordes waarop bijvoorbeeld 6 verschillende voorwerpen gerangschikt kunnen worden is $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Dit product heet 6 faculteit. Notatie $6! = 720$.

- 25** Acht vrienden, Johan, Siebren, Mohammed, Peter, Igor, Herman, Gerrit en Amir gaan een dag op stap. Ze hebben een Volkswagenbusje gehuurd waar precies acht personen in mogen. Alle acht zijn ze in bezit van een rijbewijs.
- a** Op hoeveel manieren kunnen ze plaatsnemen in de bus?
- b** Uit hun midden kiezen ze een chauffeur, iemand die de pot beheert en een woordvoerder. Hiervoor zijn drie verschillende personen nodig. Op hoeveel manieren kunnen zij zo'n drietal samenstellen?

Een ander woord voor volgorde of rangschikking is permutatie. Een permutatie van 4 uit 9 is een rangschikking van een viertal dat je kiest uit negen verschillende dingen: een eerste, een tweede, een derde en een vierde. Het aantal permutaties van 4 uit 9 is $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

- 26** Op de foto zie je een stad van keramiek gemaakt door de kunstenares Elly van de Merwe. De huisjes zijn in 3 rijen geplaatst. Er zijn 13 huisjes in het kunstwerk zelf en er is nog 1 reservehuisje. De voorste rij heeft 4 posities om huisjes te plaatsen, de middelste rij heeft 5 posities en de achterste weer 4 posities. De opstelling van de huisjes kan veranderd worden. Je kunt daarbij de huisjes op de voorste rij en de huisjes op de middelste rij willekeurig verwisselen. De huisjes op de achterste rij kunnen alleen onderling verwisseld worden. Het reservehuisje past alleen op de voorste twee rijen. Bereken hoeveel opstellingen er mogelijk zijn met de 14 verschillende huisjes. (Ontleend aan CE wiskunde vwo A -pilot 2014, tijdvak 1)





Lekke band

Er is een punaise in de achterband van de fiets van Erik terecht gekomen. Zijn band loopt hierdoor langzaam leeg, zoals je in de grafiek hierboven kunt zien.

Klaas krijgt precies twee dagen later ook een punaise in zijn achterband. Hoe ziet de grafiek van zijn leeglopende achterband eruit als je die in de figuur hierboven zou tekenen? En hoe als het op dat moment geen punaise maar een spijker was geweest, waardoor de band van Klaas twee keer zo snel leegloopt?

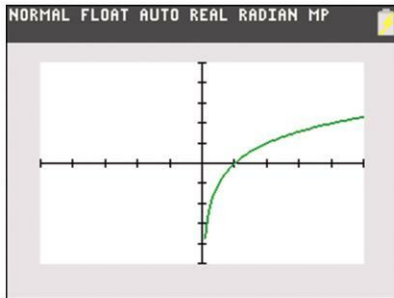
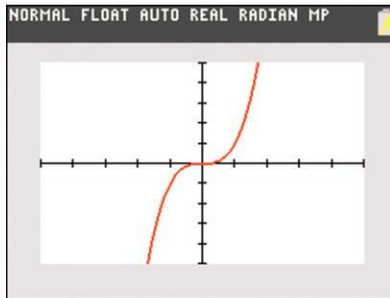
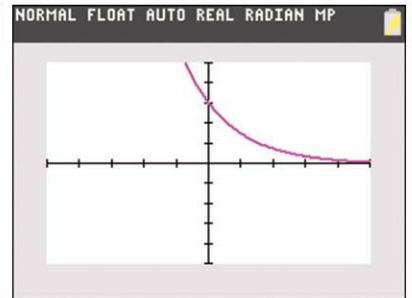
Hoofdstuk 3

Functies bewerken

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	66
3-1	Grafieken verschuiven	68
3-2	Herschalen	70
3-3	Somfuncties en verschilfuncties	72
3-4	Productfuncties	74
3-5	Quotiëntfuncties	76
3-6	Gemengde opdrachten	78
	Samenvatting	80
	Test jezelf	82
	Extra oefening - Basis	84
	Extra oefening - Gemengd	85
	Uitdagende opdrachten	86
	Body Mass Index	87

Voorkennis

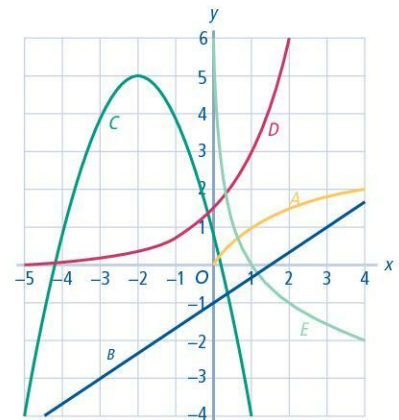


- V-1** Hierboven zie je plots van een drietal grafieken op het interval $[-5, 5]$. Geef voor elk van de grafieken aan welke van de volgende functies erbij hoort: $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $k(x) = {}^2\log(x)$, $p(x) = x^2$ en $q(x) = x^3$.

Theorie

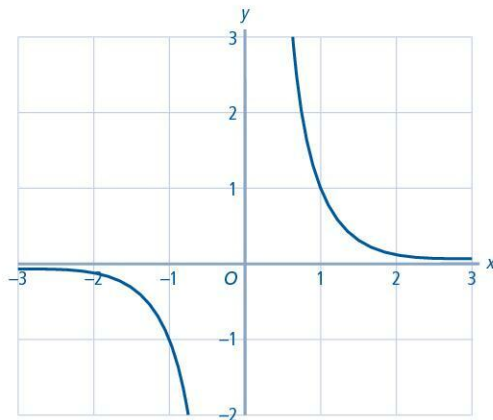
Hieronder staat een opsomming van de soorten functies die je eerder hebt gehad. In de eenvoudigste vorm heten ze **standaardfuncties**.

lineaire functie: $f(x) = ax + b$
 kwadratische functie: $f(x) = ax^2 + bx + c$
 machtsfunctie: $f(x) = a \cdot x^n$ met n geheel of gebroken
 sinusfunctie: $f(x) = \sin(x)$
 exponentiële functie: $f(x) = b \cdot g^x$ met $g > 0$ en $g \neq 1$
 logaritmische functie: $f(x) = {}^g\log(x)$ met $g > 0$ en $g \neq 1$
 Je kunt de grafieken van de standaardfuncties herkennen aan karakteristieke eigenschappen zoals: maximum, minimum, (constant, toenemend of afnemend) stijgen of dalen, snijpunten met de x -as en met de y -as, toppen, en eventuele asymptoten.



- V-2** In de figuur naast de theorie zie je vijf grafieken, elk horend bij één van de hierboven genoemde standaardfuncties.
- Van welke standaardfunctie zie je geen grafiek in de figuur?
 - Geef bij elk van de grafieken A, B, C, D en E aan van welke soort functie het een grafiek is.
- V-3** Gegeven zijn de functies $f(x) = g^x$ en $h(x) = {}^g\log(x)$.
- Kies $g = 2$ en teken de grafieken van f en h in één assenstelsel.
 - Kies $g = \frac{1}{3}$ en teken in een nieuw assenstelsel weer de grafieken van f en h .
 - Voor welke waarden van g zijn de grafieken van f en h stijgend? En voor welke waarden van g zijn de grafieken dalend?

- V-4** Gegeven is de machtsfunctie $f(x) = a \cdot x^n$.
- a** Neem $a = 1$. Plot en schets de grafiek van f voor $n = 5$ en voor $n = -2$ en geef van beide functies aan of hun grafiek toenemend of afnemend stijgend of dalend is.
- b** Hiernaast staat de grafiek van f voor $a = 1$. De grafiek gaat door het punt $(2, \frac{1}{8})$.
Welke waarde van n hoort bij deze grafiek?
- c** Door welk punt gaat de grafiek van f bij $a = 1$ voor elke waarde van n ?
- d** Plot en schets de grafiek van f voor $a = -2$ en $n = 0,7$.
- e** De grafiek van f gaat door de punten $(1, 4)$ en $(3, 8)$.
Welke waarde van a volgt uit het gegeven dat de grafiek door het punt $(1, 4)$ gaat?
- f** Bereken voor de grafiek van opdracht e de bijbehorende waarde van n .



- V-5a** Plot en schets de grafiek van $f(x) = 7 + 3\sin(x - \frac{1}{3}\pi)$.
- b** De grafiek van f is periodiek. Hoe groot is de periode?
- c** Geef de amplitude en de evenwichtsstand.
- d** In welk punt gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand?

Theorie

Periodieke grafieken met een functievoorschrift of formule van de vorm $y = d + a\sin(b(x - c))$ noemt men **sinusoïden**.

De betekenis van de getallen a , b , c en d voor de grafiek is:

> De amplitude is a als $a > 0$ en de amplitude is $-a$ als $a < 0$.

> De evenwichtsstand is de lijn $y = d$.

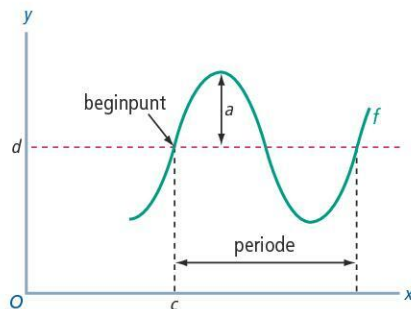
> Met b bereken je de periode.

Voor het verband tussen b (met $b > 0$) en de periode geldt:

$$b = \frac{2\pi}{\text{periode}} \quad \text{of} \quad \text{periode} = \frac{2\pi}{b}.$$

> Als $a > 0$, is een beginpunt bijvoorbeeld het punt (c, d) .

Een beginpunt is een punt waarin de sinusoïde stijgend door de evenwichtsstand gaat.

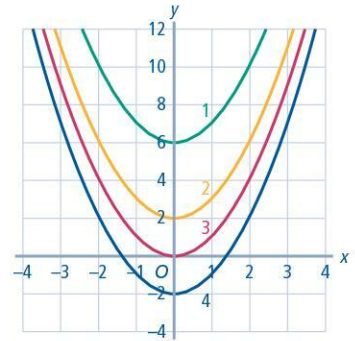


- V-6** Geef van de sinusoïden bij de gegeven formules de evenwichtsstand, amplitude, periode en de coördinaten van een beginpunt.
- a** $y = 3 + 8\sin(\frac{2}{3}(x - \frac{2}{3}\pi))$
- b** $y = 0,3\sin(5\pi(x + 0,3)) - 0,1$
- c** $y = -75 - 95\sin(10\pi(x + 0,15))$

3-1

Grafieken verschuiven

- 1 Gegeven zijn de functies $s(x) = x^2$ en $v(x) = x^2 + 6$.
 - a Welke van de grafieken hiernaast hoort bij functie s ? En welke grafiek bij functie v ?
 - b Beschrijf hoe de grafiek van v ontstaat uit de grafiek van s .
 - c Hoe zijn de twee overgebleven grafieken ontstaan uit de grafiek van functie s ?
 - d Geef bij beide overgebleven grafieken een functievoorschrift.
 - e Gegeven is het functievoorschrift $f(x) = x^2 + a$. De top van de grafiek bij functie f is het punt $(0, 12)$. Welke waarde van a past bij deze functie?
- 2 Op 1 juli 2013 zet Suzy € 75,- op een spaarrekening met een rente van 2% per jaar. Het saldo van Suzy wordt beschreven door $S = 75 \cdot 1,02^t$ waarbij t het aantal jaren is na 1 juli 2013. Jarno, de broer van Suzy zet precies vijf jaar later ook € 75,- op een spaarrekening met dezelfde rente.
 - a Op welk tijdstip heeft Jarno hetzelfde saldo op zijn spaarrekening als het saldo van Suzy op 1 juli 2019?
 - b De formule $S = 75 \cdot 1,02^{t-a}$ beschrijft zijn saldo, waarbij t het aantal jaren na 1 juli 2013 is. Hoe groot is de waarde van a ?

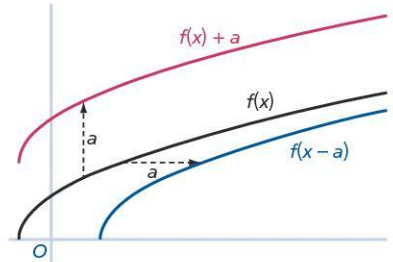


Theorie

Een grafiek kun je verschuiven. De grafiek die hierdoor ontstaat, heet de **beeldgrafiek**.

Als je de grafiek van f met a eenheden omhoog schuift, geldt voor de functie g van de beeldgrafiek: $g(x) = f(x) + a$.

Als je de grafiek van f met a eenheden naar rechts schuift, geldt voor de functie h van de beeldgrafiek: $h(x) = f(x - a)$. Een verschuiving heet ook wel een **translatie**.

**Voorbeeld 1**

De grafiek van de functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ wordt 2 naar links en 7 omlaag verschoven. Geef het functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek.

Oplossing

Trek van de functiewaarden 7 af en vervang x door $x + 2$.

Je krijgt dan $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 7$.

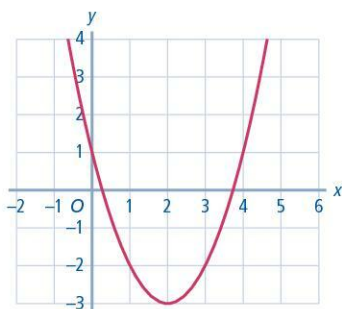
Voorbeeld 2

Geef het functievoorschrift $q(x)$ van de beeldgrafiek na een translatie van de grafiek van de functie $p(x) = {}^3\log(x)$ met 4 naar rechts en 5 omhoog.

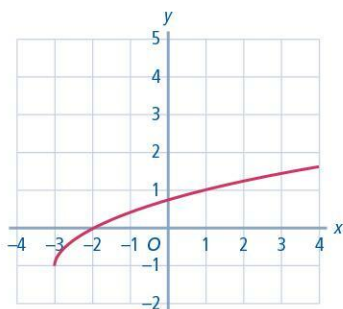
Oplossing

Tel bij de functiewaarden 5 op en vervang x door $x - 4$.

Je krijgt dan $q(x) = {}^3\log(x - 4) + 5$.



1



2

H 3a Door welke translaties is grafiek 1 uit een standaardgrafiek ontstaan?

b Geef een functievoorschrift bij grafiek 1.

c Grafiek 2 is ontstaan door een horizontale en een verticale translatie toe te passen op de grafiek van $g(x) = \sqrt{x}$. Welke twee translaties zijn dat?

d Geef het bij grafiek 2 passende functievoorschrift.

H 4a Gegeven is de functie $k(x) = 25 + {}^2\log(x - 17)$.

Door welke twee translaties is de grafiek bij de functie k ontstaan uit de grafiek van de standaardfunctie $f(x) = {}^2\log(x)$?

b Gegeven is de functie $m(x) = -7 + 0,5^{x+6}$.

Door welke twee translaties is de grafiek bij de functie m ontstaan uit de grafiek van de standaardfunctie $f(x) = 0,5^x$?

H 5 Op een sinusoïde met formule $y = 4 + 11\sin(x - 2)$ wordt een translatie van 3 omlaag en een translatie van 5 naar links toegepast. Geef de formule van de beeldgrafiek.

6 Hiernaast zie de grafieken van de functies f en g .

a Je kunt de grafiek van g zien als een verticale verschuiving van de grafiek van f .

Welke verticale verschuiving?

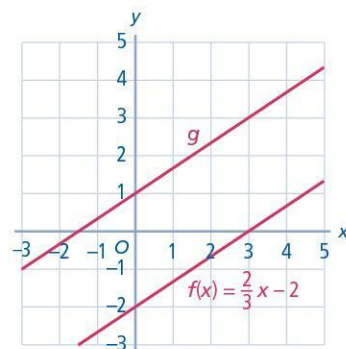
b Geef het functievoorschrift $g(x)$.

c Je kunt de grafiek van g ook zien als een horizontale verschuiving van de grafiek van f .

Welke horizontale verschuiving?

d Geef met behulp van deze horizontale verschuiving het functievoorschrift $g(x)$.

e Laat zien dat het functievoorschrift dat je gevonden hebt bij opdracht d gelijk is aan het functievoorschrift bij opdracht b.



7 Op de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ wordt een horizontale en een verticale translatie toegepast zodat de beeldgrafiek door het punt $(7, 1)$ gaat. Bij de beeldgrafiek hoort een functievoorschrift van de vorm

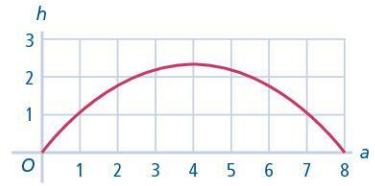
$g(x) = q + \sqrt{x - p}$.

Geef minstens drie verschillende tweetallen van waarden van p en q .

3-2

Herschalen

- 8 In de figuur hiernaast zie je de baan van een bal in een assenstelsel weergegeven.
De hoogte h van de bal is in meters. De horizontale afstand a is ook in meters.
Het verband tussen h en a wordt gegeven door de formule $h = -0,15a^2 + 1,2a$.
- a Bereken h als $a = 5$.
- b In plaats van de hoogte h uit te drukken in meters, kun je de hoogte ook uitdrukken in cm. De hoogte van de bal in cm is H .
Bereken H als $a = 5$.
- c Druk H uit in h en leg uit dat de formule waarbij je H uitdrukt in a , dan wordt: $H = 100 \cdot (-0,15a^2 + 1,2a)$.
- d In plaats van de horizontale afstand a uit te drukken in meters, kun je deze ook uitdrukken in dm. De horizontale afstand in dm is A .
Wat is de waarde van A als $a = 2$?
- e Druk a uit in A .
- f Leg uit dat formule waarbij h wordt uitgedrukt in A , dan wordt: $h = -0,0015A^2 + 0,12A$.



Theorie

Het aanpassen van een formule waarin de eenheid van één of meer variabelen wordt veranderd heet **herschalen**.

> Als bij de formule $y = f(x)$ bij de variabele y de eenheid k keer zo groot wordt, dan geldt voor de nieuwe variabele A :
 $A = k \cdot y$

De formule wordt $A = k \cdot f(x)$;

> Als bij de formule $y = f(x)$ bij de variabele x de eenheid k keer zo groot wordt, dan geldt voor de nieuwe variabele a :

$$a = k \cdot x \text{ ofwel } x = \frac{1}{k} \cdot a;$$

De formule wordt $y = f(\frac{1}{k} \cdot a)$.

- 9 Met behulp van de oorspronkelijke formule van het voorbeeld kun je narekenen dat $g = 5$ als $t = 3$.
Ga na dat de nieuwe formule $G = 0,096d - 0,007$ hiermee in overeenstemming is.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $g = 4t - 7$ met de tijd t in uren en het gewicht g in grammen.

Geef de formule die het gewicht G in kg uitdrukt in de tijd d in dagen.

Oplossing

> Omdat 1 gram gelijk is aan 0,001 kg, wordt de eenheid bij de variabele gewicht 0,001 keer zo groot.

$$G = 0,001 \cdot g$$

$$G = 0,001(4t - 7)$$

> Omdat 1 uur gelijk is aan $\frac{1}{24}$ dag wordt de eenheid bij de variabele tijd $\frac{1}{24}$ keer zo groot.

$$d = \frac{1}{24} \cdot t \text{ ofwel}$$

$$d = \frac{1}{24} \cdot t \text{ ofwel } t = 24 \cdot d.$$

$t = 24 \cdot d$ invullen geeft

$$G = 0,001 \cdot (4 \cdot (24 \cdot d) - 7) \text{ en na vereenvoudigen } G = 0,096d - 0,007.$$

- H 10a** Gegeven is $O = 2\sqrt{5x + 10}$. De variabele O is de oppervlakte in cm^2 . Geef de formule waarbij de oppervlakte A wordt uitgedrukt in m^2 .
- b** Gegeven is $T = 3 + 5\sin(\pi(m - 1))$. Hierin is T de temperatuur in $^\circ\text{C}$ en m de tijd in maanden. Stel de formule op waarbij T wordt uitgedrukt in de tijd q in jaren.
- c** Gegeven is de formule $P = 3a^2 - 4$. Hierin is P het gewicht in pond (1 pond = 500 gram) en a de lengte in dm. Stel de formule op die het gewicht K in kg uitdrukt in de lengte b in cm.

- H 11** Een batterij van een smartphone die stand-by staat, ontladst bij benadering volgens de formule $V = 3,31 + \frac{21}{t - 148}$

Hierin is de spanning V in volt en is t de tijd in uur.

- a** Bereken de spanning van een volle batterij.
- b** Bereken hoe lang het duurt tot de spanning is afgenomen tot 1 volt.
- c** Geef de formule als de tijd s in minuten wordt gegeven en de spanning W in mV (1 volt = 1000 mV).

- 12** Bij een stemvork die in trilling wordt gebracht, maken de uiteinden zeer snelle heen en weer gaande bewegingen rond de evenwichtsstand. Deze brengen de lucht in trilling, wat wij vervolgens als geluid horen. Met een zogeheten oscilloscoop kun je het trillingspatroon van een stemvork in beeld brengen.

Bij een bepaalde stemvork hoort de formule $u = 0,4 \cdot \sin(0,44\pi t)$, waarbij t de tijd is in milliseconde en u de uitwijking van een uiteinde van de stemvork in millimeter.

Bij de gegeven stemvork wil men de tijd in seconden weergeven en de uitwijking in cm.

Stel de formule op die hierbij past.



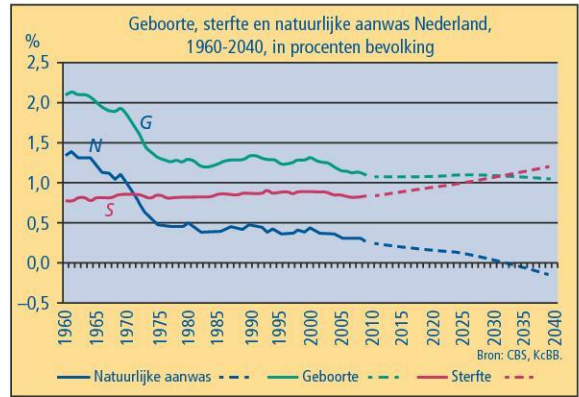
- 13** De hoeveelheid draaggas van luchtballon A kun je berekenen met de formule $A = 1000 \cdot 0,995^t$, met t in dagen en A in m^3 .
- a** Ballon B verliest zijn draaggas twee keer zo snel als ballon A en heeft op tijdstip $t = 0$ ook 1000 m^3 draaggas. Bereken na hoeveel dagen de hoeveelheid draaggas in ballon B even veel is als die in ballon A na 4 dagen.
- b** Leg uit dat de formule bij de hoeveelheid draaggas bij ballon B gelijk is aan $B = 1000 \cdot 0,995^{2t}$.
- c** Ballon C verliest zijn draaggas drie keer zo langzaam als ballon A. Geef een formule C bij ballon C.
- d** Geef de formule bij ballon A waarbij de hoeveelheid draaggas uitgedrukt is in w , de tijd in weken.



3-3

Somfuncties en verschilfuncties

- 14 Hiernaast zie je in de figuur drie grafieken.
- Leg uit dat geldt $N = G - S$.
 - Beschrijf hoe je de grafiek van N kan tekenen als je die van G en S al hebt.
 - Leg uit wat de betekenis is van het snijpunt van de rode en blauwe grafiek.
 - Wat betekent het dat de grafiek van N op den duur onder de nullijn lijkt te komen?
 - Vanaf 2010, het jaar waarin deze grafiek werd gepresenteerd, zijn de grafieken gestippeld. Voor de grafiek van S hoort bij benadering de formule $S = 0,85 + 0,0071 \cdot t$ en bij die van G hoort $G = 1,1 - 0,0017 \cdot t$. In deze formules zijn S en G in procenten van de bevolking en is t het aantal jaren na 2010. Geef de formule bij het gestippelde deel van de grafiek van N .



Theorie

Het functievoorschrift van de **somfunctie** s van twee functies f en g ontstaat door de functievoorschriften van f en g op te tellen. De somfunctie s is $s(x) = f(x) + g(x)$. De bijbehorende grafiek heet de **somgrafiek**. De **verschilfunctie** v is $v(x) = f(x) - g(x)$. De grafiek hierbij heet de **verschilgrafiek**.

Voorbeeld

$f(t) = 3t - 6$ en $g(t) = 2 + 4t - t^2$
 Het functievoorschrift van de verschilfunctie $v = f - g$ is
 $v(t) = (3t - 6) - (2 + 4t - t^2)$
 $v(t) = 3t - 6 - 2 - 4t + t^2$
 $v(t) = t^2 - t - 8$

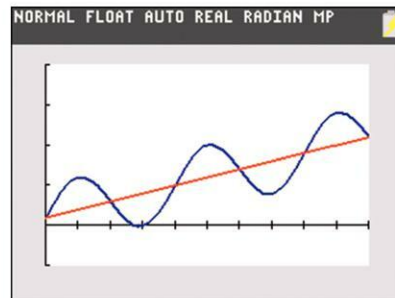
- H 15 Stel de formule op van de somformules $s = h + k$ en van de verschilformules $v = h - k$. Vereenvoudig deze formules zoveel mogelijk.
- $h = 3m^2 - 4m + 9$ en $k = 7 + 10m$
 - $h = 2 + 6p - \frac{3}{p}$ en $k = 3 - 5p + \frac{2}{p}$
 - $h = \frac{2}{3}a(a - 1)$ en $k = (0,8a - 2)(2a + 5)$
 - $h = t^2 - \frac{4}{t^2}$ en $k = \frac{2}{t^3} - 0,7t^2$
- H 16 Bij de verkoop van een bepaald product geldt voor de totale opbrengst TO de formule $TO = 30q - \frac{1}{2}q^2$, waarbij q het aantal verkochte eenheden is. De totale kosten zijn $TK = 54 + q^2$, waarbij q het aantal geproduceerde eenheden van dit product is. Voor de totale winst TW die gemaakt wordt bij de verkoop van q eenheden geldt $TW = TO - TK$.
- Stel de formule op van de totale winst, uitgedrukt in q .
 - Er wordt alleen winst gemaakt als $TW > 0$. Bereken bij welke waarden van q dit het geval is.
 - Bereken de maximale winst. Bij hoeveel eenheden wordt dit bereikt?

- 17** Bij de productie van een bepaald artikel geldt de kostenfunctie $TK(q) = -0,295q^2 + 28q + 463$ en de opbrengstfunctie $TO(q) = -\frac{1}{9}q^3 + 273q$.

In deze formules is q het aantal per week geproduceerde artikelen in duizendtallen en zijn TK en TO in euro.

- a** De winst TW wordt gegeven door $TW(q) = TO(q) - TK(q)$. Bereken de maximale winst die gemaakt kan worden en bij welk aantal geproduceerde artikelen dit het geval is.
- b** Onder de marginale kosten MK verstaat men in de economie de toename van de kosten als het aantal geproduceerde artikelen met één toeneemt.
Leg uit dat de marginale kostenfunctie MK dus gegeven wordt door $MK(q) = TK(q + 0,001) - TK(q)$.
- c** Bereken de marginale kosten bij een productie van 3000 artikelen.

- 18** Gegeven zijn de functies $f(x) = x + 1$ en $g(x) = 4\sin(\frac{1}{2}\pi x)$. Voor de somfunctie s geldt $s(x) = f(x) + g(x)$. Hiernaast zijn de grafieken van f en s op het interval $[0, 10]$ in één scherm geplot.
- a** Hoe groot is de periode van g ?
 - b** Waarom is de grafiek van s niet periodiek?
 - c** Hoe groot is de maximale afwijking van de grafiek van s ten opzichte van die van f ?



In opdracht 18 is een somfunctie ontstaan door een lineaire en een sinus functie op te tellen met als resultaat een functievoorschrift van de vorm $s(x) = ax + b + c\sin(d(x - e))$. De grafiek hiervan is een grafiek die slingert om de lijn met vergelijking $y = ax + b$. Deze lijn heet hier een trendlijn.

- 19** Gegeven is $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + 2\sin(\frac{1}{3}\pi x)$.
- a** Teken de bijbehorende trendlijn op het interval $[0, 12]$.
 - b** Bereken op dit interval de x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met zijn trendlijn.
 - c** Schets de grafiek van f op het interval $[0, 12]$.
- 20** Veroorzakers van verkeersongevallen, waar de politie aan te pas komt, kun je in twee groepen verdelen: de groep personen onder 25 jaar en de groep van personen van 25 jaar en ouder. Elk jaar wordt bepaald hoeveel procent van de verkeersongevallen door elk van deze twee groepen wordt veroorzaakt. De percentages van de afgelopen 15 jaar kun je in een assenstelsel verwerken tot twee grafieken: grafiek O die past bij de percentages van de groep personen onder 25 jaar en grafiek B die past bij de percentages van de groep personen van 25 jaar en ouder. Beschrijf hoe de somgrafiek er uit ziet.

3-4

Productfuncties

- 21** Een fruithandelaar verkoopt mandarijnen. De winst w in euro die hij maakt op een verkocht netje mandarijnen hangt af van de prijs volgens de formule $w = 0,6p - 0,9$. Hierin is p de prijs van een netje mandarijnen in euro.
- a** Hoeveel moet een netje mandarijnen minimaal kosten om geen verlies te lijden?
- b** Het aantal netjes mandarijnen a dat hij op een dag verkoopt hangt ook af van de prijs p in euro, en wel volgens de formule $a = 188 - 30p$.
Bereken het aantal netjes dat hij op een dag verkoopt bij een prijs van € 1,90.
- c** Bereken hoeveel winst de fruithandelaar in de situatie van opdracht b maakt.
- d** Leg uit dat je de totale winst TW die de fruithandelaar op een dag maakt bij de verkoop van netjes mandarijnen, kunt berekenen met de formule $TW = (188 - 30p)(0,6p - 0,9)$.
- e** De fruithandelaar maakt geen winst en geen verlies als $(188 - 30p)(0,6p - 0,9) = 0$.
Bij welke prijzen per netje maakt hij geen winst en geen verlies?
- f** Onderzoek bij welke prijs zijn winst maximaal is. Hoe groot is die winst?

Theorie

Een functie van de vorm $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ heet een **productfunctie**.

De waarden van x waarvoor $p(x) = 0$, kun je berekenen door de vergelijkingen $f(x) = 0$ en $g(x) = 0$ op te lossen. Dit is een toepassing van de regel: uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.

Voorbeeld

Bereken van de productfunctie $p(x) = (4x - 18) \cdot (4 - \sqrt{x})$ de waarden van x waarvoor $p(x) = 0$.

Oplossing

$p(x) = 0$ als $4x - 18 = 0$ of $4 - \sqrt{x} = 0$
Hieruit volgt $4x = 18$ of $\sqrt{x} = 4$.
Dus $x = 4\frac{1}{2}$ of $x = 16$

- H 22** Bereken op de manier van het voorbeeld de waarden van x waarvoor $f(x) = 0$.
- a** $f(x) = (2x - 5) \cdot (7 + 3\frac{1}{2}x)$
- b** $f(x) = (2x + 23) \cdot (2^x - 8)$
- c** $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (6x - 40)$
- 23** Gegeven is de productfunctie $f(x) = (x + 1) \cdot \sqrt{9 - x}$.
- a** Plot en schets de grafiek van f .
- b** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de beide assen.
- c** Bereken het maximum van f .

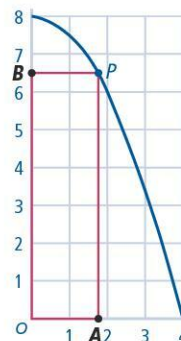
- 24** Gegeven is op het interval $[0, 4]$ de grafiek van de functie $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$.

Het punt P ligt op de grafiek van f en de punten A en B liggen op de assen zodat vierhoek $OAPB$ een rechthoek is.

- a** De oppervlakte van rechthoek $OAPB$ hangt af van de ligging van punt P .

Leg uit dat je de oppervlakte kunt berekenen met de formule $A = x \cdot \left(8 - \frac{1}{2}x^2\right)$.

- b** Bereken de maximale oppervlakte van rechthoek $OAPB$.



- 25** Van een stuk karton van 20 cm bij 40 cm worden in de hoeken vierkantjes van x cm bij x cm afgeknipt. Van het overblijvende deel wordt een doosje gevouwen.

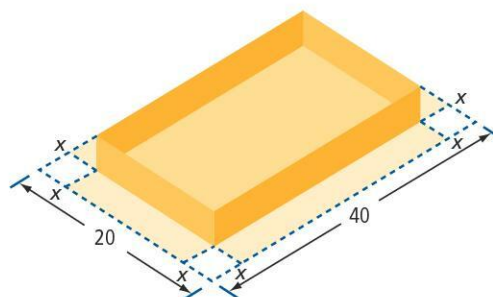
- a** Voor welke waarden van x kun je op deze manier een doosje maken?

- b** Leg uit waarom de inhoud I in cm^3 van zo'n doosje berekend kan worden met de formule $I = x(20 - 2x)(40 - 2x)$.

- c** Benader met je rekenmachine de waarde van x waarbij de inhoud maximaal is. Rond af op twee decimalen.

- d** Werk in de formule $I = x(20 - 2x)(40 - 2x)$ de haakjes weg en stel de formule op van de afgeleide I' .

- e** Controleer je antwoord van opdracht c met behulp van I' .



- 26** In Portugal vind je op veel plekken grote velden met zonnepanelen. Het aantal zonnepanelen op een veld van 5000 m^2 is afhankelijk van de oppervlakte x in m^2 per paneel. De prijs p in euro's per zonnepaneel is afhankelijk van de oppervlakte x in m^2 . Het aantal zonnepanelen q kun je berekenen met de formule $q = 5000 \cdot x^{-1}$. De prijs p , in euro, per zonnepaneel kun je berekenen met de formule $p = 250 + 30x^2$.

- a** Hoeveel kosten de zonnepanelen per stuk als de oppervlakte per paneel 2 m^2 is? En hoeveel als de oppervlakte 5 m^2 is?

- b** Hoe hoog zijn de totale kosten als het veld van 5000 m^2 bedekt wordt met zonnepanelen van 2 m^2 ? En hoe hoog bij zonnepanelen van 5 m^2 ?

- c** Geef een formule voor de totale kosten TK van de zonnepanelen uitgedrukt in x .

- d** Zijn er waarden van x waarvoor geldt $TK = 0$?

- e** Bereken met behulp van de afgeleide van TK bij welke oppervlakte per paneel de totale kosten minimaal zijn.

- f** Hoe groot zijn de totale kosten dan en hoeveel zonnepanelen zijn er nodig?



Quotientenfunkties

- 27** Op de marketingafdeling van een fabriek wordt op basis van onderzoek gekeken naar de opbrengst van pas op de markt gebrachte artikelen. Van één van deze artikelen hangt de opbrengst O in euro's samen met het aantal verkochte exemplaren q volgens de formule $O = \frac{20\,000q}{q + 500}$.
- a** Waarom heeft de formule in deze situatie geen betekenis voor $q < 0$?
 - b** Bij welke waarde van q is de opbrengst gelijk aan nul?
 - c** Bereken bij welke waarde van q de opbrengst gelijk is aan 10 000 euro.
 - d** Maak op je rekenmachine een tabel met stapgrootte 1000 en onderzoek hiermee naar welke waarde de opbrengst nadert bij een alsmaar toenemend aantal verkochte exemplaren.
 - e** Schets nu voor $q \geq 0$ de grafiek die bij deze formule hoort.

Een functie van de vorm $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ heet een **quotiëntfunctie**.

Bij grote waarden van x kunnen de functiewaarden steeds dichterbij naderen naar een **grenswaarde**.
In zo'n situatie heeft de grafiek van q een horizontale asymptoot.
Bij de waarde van x waar de grafiek van de functie $q(x)$ de x -as snijdt geldt $q(x) = 0$. Deze vergelijking los je op door $f(x) = 0$ op te lossen.

Voorbeeld

Onderzoek of voor grote waarden van q de waarden van $B = \frac{20q - 150}{4q + 3}$ een grenswaarde hebben en bereken voor welke waarde van q geldt dat $B = 0$.

Oplossing

Maak op je rekenmachine een tabel met stapgrootte 1000.

q	1000	2000	3000
B	4,96	4,98	4,99

De grenswaarde is dus 5.
 $B = 0$ als $20q - 150 = 0$
 Hieruit volgt $q = 7,5$.

H 28 Bereken de grenswaarde en de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as.

$$\mathbf{a} \quad M = \frac{4t}{t-1} \qquad \mathbf{c} \quad M = \frac{100b-25}{2b+4}$$

b $M = \frac{2p+5}{p}$ **d** $M = \frac{3m+200}{0.1m^2+2}$

- 29a** Berekeneer tot welke waarde $\frac{6}{p}$ nadert als p steeds groter wordt.

- b** Beredeneer naar welke grenswaarde de formule $y = 4 + \frac{6}{p}$ nadert.

- c** Leg uit dat je op deze manier niet kunt beredeneren wat de grenswaarde is van $y = \frac{3p+6}{1\frac{1}{2}p}$.

- d** Hiernaast zie je een herleiding van de formule van opdracht c.

Welke grenswaarde heeft de formule $y = \frac{3p+6}{1\frac{1}{2}p}$?

$$y = \frac{3x+6}{\frac{1}{2}x}$$
$$y = \frac{3x}{\frac{1}{2}x} + \frac{6}{\frac{1}{2}x}$$
$$y = 2 + \frac{4}{x}$$

Soms kun je bij een quotiëntfunctie met redeneren een eventuele grenswaarde bepalen. Vaak is het hierbij nodig dat de formule eerst herleid wordt tot een andere vorm.

Voorbeeld

Beredeneer wat de grenswaarde is van $L = \frac{2q^2 + 4q}{7q^2}$.

Oplossing

Spplits de breuk in twee termen: $L = \frac{2q^2}{7q^2} + \frac{4q}{7q^2}$. Deze twee termen vereenvoudigen geeft $L = \frac{2}{7} + \frac{4}{7q}$.

Omdat $\frac{4}{7q}$ tot de waarde 0 nadert voor grote waarden van q , is de grenswaarde van L gelijk aan $\frac{2}{7}$.

H 30 Bepaal met redeneren de grenswaarde.

a $W = \frac{11 + p}{0,2p}$

c $N = \frac{-2q^{0,5} + 4q^{1,1} + 6}{2q^{1,1}}$

b $P(k) = \frac{6k^2 + 10k - 2}{2k^2}$

d $A = 12 - \frac{40}{(3t - 1)^2}$

31 Een schaatsenfabriek heeft een nieuw type klapschaats ontwikkeld. De gemiddelde productiekosten per paar schaatsen hangen af van het geproduceerde aantal q .

Met de formule $GK = \frac{200q + 12000}{2q}$ kun je de gemiddelde

productiekosten in euro's per paar schaatsen berekenen.

a Voor welke waarde van q geldt $GK = 0$? Waarom is deze waarde van q niet van belang voor de producent?

b Herleid de gegeven formule tot de vorm $GK = a + \frac{b}{q}$

c Beredeneer wat de grenswaarde is van de gemiddelde kosten.

d Beredeneer dat de gemiddelde kosten GK afnemen als q groter wordt.

e Stel de formule op van de totale kosten bij een geproduceerd aantal q .

32 De snelheid van een voetgangersstroom in een gang hangt onder andere af van de loopruimte die per voetganger beschikbaar is. Voor een bepaalde gang geldt bij benadering het volgende verband:

$$V = \frac{80M - 30}{M + 0,04}$$

Hierin is V de snelheid van de voetgangersstroom in

meter per minuut en M het aantal beschikbare m^2 per voetganger.

a Bij hoeveel m^2 per voetganger komt de voetgangersstroom tot stilstand?

b Tot welke snelheid nadert V als elke voetganger een onbeperkte bewegingsruimte heeft?

c Stel de formule op als de snelheid S wordt gemeten in m/s.



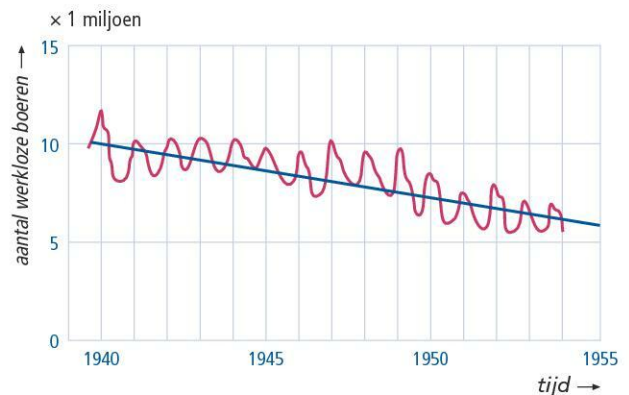
3-6

Gemengde opdrachten

- 33** In 1961 werd de eerste computerchip ontwikkeld, een elektronische schakeling die bestaat uit transistoren. Deze eerste chip bestond uit vier transistoren. Het aantal transistoren per chip is sindsdien per twee jaar ongeveer verdubbeld.
- a** Leg uit dat de formule $A = 4 \cdot 2^{0,5t}$ hierbij past. Hierin is A het aantal transistoren en t het aantal jaren na 1961.
- b** Bereken hoeveel transistoren volgens deze formule een chip in 2015 bevat.
- c** Bereken hoeveel jaar nodig is om het aantal transistors 1000 keer zo groot te maken.
- d** Geef de formule als het aantal transistoren wordt gegeven in miljarden en de tijd in weken. Ga hierbij uit van 52 weken per jaar.
- 34** De lijn k met vergelijking $y = 2x - 3$ wordt over vijf eenheden naar links verschoven. De beeldgrafiek van k kun je ook krijgen door op k een verticale verschuiving toe te passen. Onderzoek over hoeveel eenheden dan verschoven moet worden.
- 35** Gegeven is de productfunctie f door $f(x) = 2^{-0,1x} \cdot 10\sin(\pi x)$.
- a** Plot de grafiek van f op het interval $[0, 20]$.
- b** De grafiek van f slingert om de x -as met een steeds kleiner wordende uitwijking. Verklaar dit verschijnsel met behulp van het functievoorschrift van f .
- c** Onderzoek wat de kleinste waarde is van x waarbij een top van de grafiek van f voor het eerst een afstand tot de x -as heeft die kleiner is dan 0,1.
- d** Verander het functievoorschrift zodat de grafiek om de x -as slingert met een steeds groter wordende uitwijking.
- 36** De werkloosheid onder de Amerikaanse boerenbevolking voor de periode 1940-1955 is hiernaast in beeld gebracht. De trendlijn is eveneens getekend.
- a** Een formule van de vorm $N = a \cdot t + b + \sin(ct)$ benadert het verloop van de werkloosheid redelijk, waarbij t het aantal jaren na 1940 is en N het aantal werkloze boeren in miljoenen. Leg uit dat $a \approx -\frac{4}{15}$, $b = 10$ en $c = 2\pi$.
- b** Geef de formule als N in duizendtallen wordt weergegeven en de tijd t in maanden.

De formule uit opdracht 33a staat bekend onder de naam 'de wet van Moore'.

Genoemd naar Gordon Moore die in 1961 betrokken was bij de ontwikkeling van de eerste chip. Hij deed in 1965 de voorspelling dat het aantal transistoren per chip ongeveer elke twee jaar verdubbeld zou zijn.



- 37** In de jaren vijftig deed de Amerikaan D.L. Gerlough onderzoek naar de voetgangersveiligheid van wegen. Als er veel verkeer over een weg gaat, is er voor voetgangers weinig gelegenheid om veilig over te steken. Daarom stelde Gerlough de zogenaamde “veilige norm” op. Een weg voldoet aan deze veilige norm wanneer er zich gemiddeld elke minuut een gelegenheid voordoet om veilig over te steken. Dat lukt alleen als het aantal auto’s dat per uur passeert onder een maximum blijft. Dit maximum geven we hier aan met $N_{\max}$ en is afhankelijk van de breedte van de weg.

Gerlough kwam tot de volgende formule:

$$N_{\max} = \frac{8289,3}{B} (1,778 - \log(B))$$

In deze formule is B de breedte van de weg in meters.

Vanzelfsprekend is deze formule een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model kunnen we enig inzicht krijgen in de veiligheid bij de aanleg van wegen.

- a** Bereken vanaf welke breedte van een weg sowieso geen veilige oversteek mogelijk is.
- b** Over een weg passeren in de spits 800 auto’s per uur. Bereken in decimeters nauwkeurig hoe breed deze weg ten hoogste mag zijn zonder dat de veilige norm wordt overschreden.

Bij een brede weg duurt het oversteken langer dan bij een smalle weg. Voor wegen die voldoen aan de veilige norm betekent dit dat er bij een brede weg per uur minder auto’s mogen passeren dan bij een smalle weg. De grafiek van $N_{\max}$ moet dus dalend zijn. De formule voor $N_{\max}$ moet hiermee in overeenstemming zijn.

- c** Leg uit hoe je uitsluitend aan de hand van de formule voor $N_{\max}$ -dus zonder gebruik te maken van je rekenmachine- kunt beredeneren dat hier sprake is van een dalende functie.

Een weg die voldoet aan de veilige norm wordt 0,50 meter breder gemaakt. Volgens de formule neemt $N_{\max}$ daardoor met 126 af.

- d** Onderzoek hoe breed de weg oorspronkelijk was. Geef je antwoord in decimeters nauwkeurig.
(Ontleend aan CE vwo A12 2005, tijdvak 1)



Samenvatting

Translaties en beeldgrafiek

Een grafiek kun je verschuiven. De grafiek die hierdoor ontstaat, heet de beeldgrafiek.

Als je de grafiek van f met a eenheden omhoog schuift, geldt voor de functie g van de beeldgrafiek: $g(x) = f(x) + a$

Als je de grafiek van f met a eenheden naar rechts schuift, geldt voor de functie h van de beeldgrafiek: $h(x) = f(x - a)$

Een verschuiving heet ook wel een translatie.

Herschalen

Soms wordt de eenheid langs de as(sen) bij een gegeven grafiek veranderd terwijl de grafiek hetzelfde blijft. Dit heet herschalen.



$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ g(x) &= 1 + \sqrt{x} \\ k(x) &= \sqrt{x-2} \end{aligned}$$

Som-en verschilfunctie, som-en verschilgrafiek

Het functievoorschrift van de somfunctie s van twee functies f en g is $s(x) = f(x) + g(x)$.

De bijbehorende grafiek heet de somgrafiek.

Het functievoorschrift van de verschilfunctie v is $v(x) = f(x) - g(x)$.

De grafiek hierbij heet de verschilgrafiek.

Voorbeeld

Is $f(x) = x^2 - 2x + 3$ en $g(x) = 7x - 5$, dan is
 $f(x) + g(x) = x^2 - 2x + 3 + 7x - 5 = x^2 + 5x - 2$ en
 $f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 3 - (7x - 5) = x^2 - 9x + 8$

Product-en quotiëntfunctie, grenswaarde

Een functie van de vorm $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ heet een productfunctie.

Een functie van de vorm $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ heet een quotiëntfunctie.

Functiewaarden van quotiëntfuncties kunnen voor grote waarden van x naderen naar een grenswaarde. In zo'n situatie heeft de grafiek van q een horizontale asymptoot.

Je kunt de formule opstellen van een beeldgrafiek die na verschuivingen ontstaat uit een gegeven grafiek

Als je de grafiek van f met a eenheden omhoog schuift, geldt voor de functie g van de beeldgrafiek: $g(x) = f(x) + a$.

Als je de grafiek van f met a eenheden naar rechts schuift, geldt voor de functie h van de beeldgrafiek: $h(x) = f(x - a)$.

Voorbeeld

De grafiek van $y = {}^2\log(x + 3)$ wordt 2 naar links en 5 omlaag verschoven.

Stel de formule op van de beeldgrafiek.

Oplossing

De regels toepassen geeft

$$y = {}^2\log(x + 3 + 2) - 5 \text{ ofwel}$$

$$y = {}^2\log(x + 5) - 5$$

Je kunt de formule opstellen bij een gegeven grafiek na een herschalen

Als bij de formule $y = f(x)$ van de variabele y de eenheid k keer zo groot wordt, dan wordt de formule $A = k \cdot f(x)$.

Als bij de formule $y = f(x)$ van de variabele x de eenheid k keer zo groot wordt, dan geldt de formule $y = f\left(\frac{1}{k} \cdot a\right)$.

Voorbeeld

In de formule $T = 6a^2$ is T de tijd in weken en a de afstand in meter.
Geef de formule als de tijd S in dagen en de afstand b in cm wordt gegeven.

Oplossing

Omdat een week gelijk is aan 7 dagen, geldt $S = 7 \cdot T$

Omdat 1 m gelijk is aan 100 cm, geldt $b = 100 \cdot a$ ofwel $a = 0,01b$.

De formule wordt dan $S = 7 \cdot 6(0,01b)^2$. Herleiden geeft $S = 42 \cdot (0,01b)^2$ ofwel $S = 0,0042 \cdot b^2$.

Controle: $a = 2$ (m) invullen in $T = 6a^2$ geeft $T = 24$ weken en dit is gelijk aan 168 dagen.

$b = 200$ (cm) invullen in $S = 0,0042 \cdot b^2$ geeft $S = 168$ dagen. Het klopt dus.

Je kunt de waarden van x berekenen waarvoor de grafiek van een productfunctie of quotiëntfunctie de x -as snijdt

Er geldt: $g(x) \cdot h(x) = 0$ als $g(x) = 0$ of $h(x) = 0$ en $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ als $f(x) = 0$.

Voorbeeld 1

Bereken de waarden van x waarvoor de grafiek van $f(x) = (2x - 10) \cdot \sqrt{6x - 9}$ de x -as snijdt.

Oplossing

$2x - 10 = 0$ geeft $x = 5$.

$\sqrt{6x - 9} = 0$ geeft $x = 1\frac{1}{2}$.

De gevraagde x -waarden zijn $x = 5$ en

$x = 1\frac{1}{2}$.

Voorbeeld 2

Bereken de waarde van x waarvoor de grafiek van

$g(x) = \frac{2x^3 - x - 4}{4x + 3}$ de x -as snijdt.

Oplossing

$g(x) = 0$ als $2x^3 - x - 4 = 0$.

Deze vergelijking oplossen met de rekenmachine.

Dit geeft $x \approx 1,39$.

De gevraagde x -waarde is $x = 1,39$.

Je kunt met behulp van redeneren de grenswaarde van een quotiëntfunctie bepalen

Vaak is het nodig om het functievoorschrift eerst te herleiden.

Voorbeeld 1

Bepaal met behulp van redeneren de grenswaarde van de

functie $f(x) = \frac{5x^2 - 3x}{2x^2}$.

Oplossing

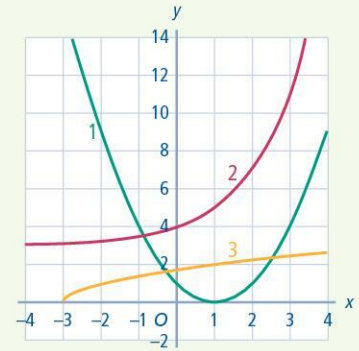
De formule herleiden door de breuk te splitsen en daarna te

vereenvoudigen geeft $f(x) = \frac{5x^2}{2x^2} - \frac{3x}{2x^2} = 2\frac{1}{2} - \frac{3}{2x}$.

Omdat $\frac{3}{2x}$ tot 0 nadert bij steeds groter wordende waarden van x , is de grenswaarde van f gelijk aan $2\frac{1}{2}$.

Test jezelf

- T-1a** Grafiek 1 is door een verschuiving ontstaan uit de grafiek van de standaardfunctie $f(x) = x^2$.
Stel het functievoorschrift op bij grafiek 1.
- b** Grafiek 2 is door een verschuiving ontstaan uit de grafiek van de standaardfunctie $f(x) = 2^x$.
Stel het functievoorschrift op bij grafiek 2.
- c** Grafiek 3 is door een verschuiving ontstaan uit de grafiek van de standaardfunctie $f(x) = \sqrt{x}$.
Stel het functievoorschrift op bij grafiek 3.
- d** De grafiek van de functie $f(x) = x^3$ wordt vier naar links en twee omlaag verschoven.
Gaat de beeldgrafiek door het punt $(2, 8)$? Licht je antwoord toe.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-1.



- T-2** Jaap roeit een rivier 700 meter stroomopwaarts en vervolgens dezelfde afstand weer terug. De snelheid van Jaap ten opzichte van het water is 2 meter per seconde. De tijd T in seconden die Jaap nodig heeft voor zijn kanotocht, wordt

gegeven door de formule $T = \frac{700}{2 - v} + \frac{700}{2 + v}$. In deze formule

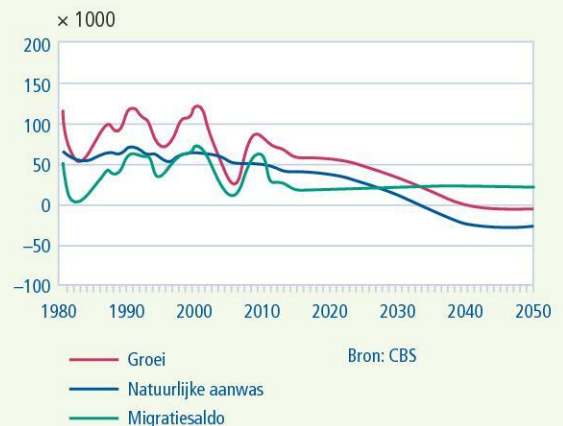
is v de stroomsnelheid van de rivier in meter per seconde.

- a** Bereken de benodigde tijd als de stroomsnelheid 0,1 meter per seconde is.
- b** Bereken stroomsnelheid als de tijd die voor de roeitocht nodig is, gelijk is aan 15 minuten.
- c** Er vindt een herschaling plaats zodat de tijd in minuten en de stroomsnelheid en de snelheid ten opzichte van het water in km/uur wordt weergegeven.

Geef de nieuwe formule die de benodigde tijd uitdrukt in de stroomsnelheid.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-2.

- T-3** De grafieken hiernaast gaan over de groei van de Nederlandse bevolking.
- a** Welke grafiek is een somgrafiek?
- b** Hoe kun je zien dat er tussen 2000 en 2010 een fout in de grafieken zit?
- c** De grafiek voor de groei kun je tussen 2010 en 2040 benaderen met een lineaire trendlijn. Stel een formule op voor deze trendlijn.
- d** Hoe groot is de groei volgens deze trendlijn in 2050?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-3.



- T-4** Gegeven is de productfunctie $f(x) = (x - 4)(x^2 - 1)$.
- a** Bereken de waarden van x waarvoor de grafiek van f de x -as snijdt.
 - b** Plot en schets de grafiek van f .
 - c** Bereken de extreme waarden van f .
 - d** Voer de opdrachten a, b en c ook uit voor de functie $g(x) = (x - 6)\sqrt{100 - x^2}$
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-4.

- T-5** De kostprijs van een product hangt mede af van de hoeveelheid die geproduceerd wordt. Als andere factoren buiten beschouwing worden gelaten, geldt voor de kostprijs K per product in euro en het aantal producten q bij

benadering het volgende verband:
$$K = \frac{38q + 157}{6q + 18}$$

- a** Bereken tot welke grenswaarde de kostprijs nadert als het aantal producten erg groot wordt.
- b** De gegeven formule kan herleid worden tot de vorm

$$K = 6\frac{1}{3} + \frac{43}{6q + 18}$$

Beredeneer hoe groot de grenswaarde bij deze formule is.

- c** Leg uit waarom de grafiek van K de horizontale as niet snijdt.
- d** Geef de formule van de totale productiekosten TK uitgedrukt in q .
- e** Leg uit dat de formule van TK geen grenswaarde heeft.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-5.

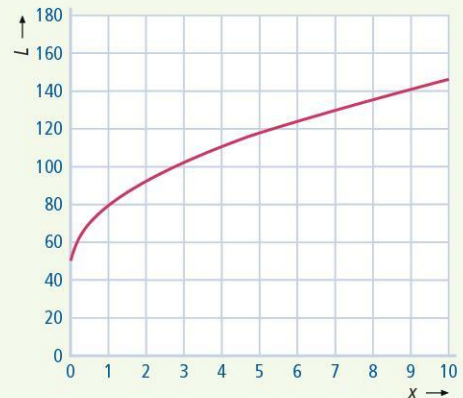
- T-6** Gegeven is de functie $f(x) = \sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + 3$.
Met behulp van welke verschuivingen ontstaat de grafiek van f uit die van de standaardfunctie $y = \sin(x)$?

- T-7** Uit onderzoeksgegevens blijkt dat het verband tussen de gemiddelde lengte en leeftijd van jongetjes van nul tot tien jaar kan worden weergegeven in de grafiek hiernaast. Een formule die hierbij past is $L = a + b\sqrt{x}$ waarbij L de gemiddelde lengte in cm is en x de leeftijd in jaren.

- a** Onderzoek hoe groot de waarden van a en b zijn. Licht je antwoorden toe.
- b** Omdat iemand vooral geïnteresseerd is in dit verband in de eerste maanden na de geboorte wordt de leeftijd s gegeven in maanden.

Geef de formule die L uitdrukt in s .

(Ontleend aan de syllabus vwo wiskunde A 2018)



Extra oefening - Basis

- B-1** Gegeven is de formule $P = 4 + {}^2\log(m - 9)$.
- a** Door welke verschuivingen ontstaat de grafiek van P uit die van de standaardfunctie $y = {}^2\log(m)$?
- b** De grafiek van P wordt 5 naar links verschoven. Geef de formule bij de beeldgrafiek.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-1.

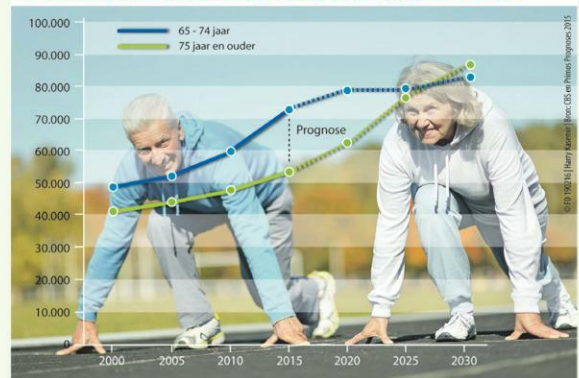
- B-2** De grafiek van de formule $G = 3,8(r^2 + 7r)$, met het gewicht G in kg en het volume r in dm^3 , wordt herschaald zodat het gewicht in pond (1 pond = 500 gram) en het volume in m^3 wordt gegeven. Geef de nieuwe formule die het gewicht uitdrukt in het volume.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-2.

- B-3** In de grafieken hiernaast zie je de ontwikkeling van het aantal inwoners in Friesland van 65 jaar en ouder.
- a** Teken de somgrafiek.
- b** Geef de betekenis van deze somgrafiek.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-3.

- B-4** Gegeven zijn de productfuncties $f(x) = (5x - 9) \cdot (2 - 0,5x^2)$ en $g(x) = (x - 4) \cdot \log(2x - 1)$.
- a** Plot en schets de grafiek van f .
- b** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de beide assen.
- c** Bereken de uiterste waarde(n) van f .
- d** Maak de opdrachten a, b en c ook voor functie g .
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-4.

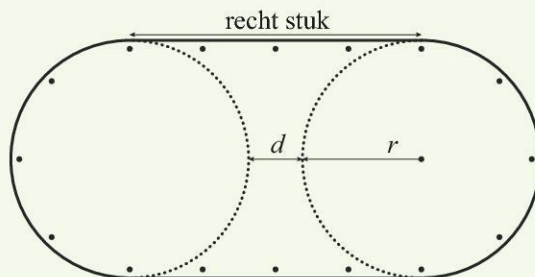
- B-5** In een land wordt jaarlijks 5 miljoen ton afval verwerkt. Men wil vanaf 2010 deze hoeveelheid verminderen tot 1,75 miljoen ton in het jaar 2030. Een rekenmodel dat gebruikt wordt, is de formule $A = 1,5 + \frac{490}{93t + 140}$, hierbij is A het aantal miljoenen ton afval per jaar en t is de tijd in jaren met $t = 0$ in 2010.
- a** Ga met de formule na of het beoogde doel bereikt wordt.
- b** Beredeneer met behulp van de formule dat de hoeveelheid afval jaarlijks afneemt.
- c** Beredeneer met behulp van de formule hoe groot de grenswaarde is van A .
Wordt op den duur de doelstelling van 1,75 miljoen ton per jaar gehaald?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-5.

Ontwikkeling aantal Friese senioren 2000-2015 en prognose tot 2030



Extra oefening - Gemengd

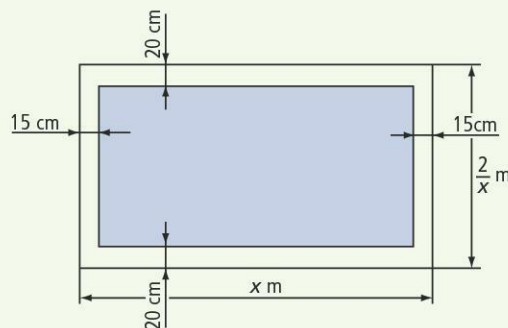
- G-1** Indoorbanen, bijvoorbeeld bij atletiek, bestaan uit twee rechte stukken en twee bochten. De bochten zijn twee even grote halve cirkels. De lengte van zo'n atletiekbahn wordt bepaald door de straal r van de uitgezette cirkels en de afstand d tussen de cirkels met r en d in meter. De cirkels overlappen elkaar niet. De verhouding tussen de totale lengte van de rechte stukken en de totale lengte van de bochten in de baan is erg belangrijk. Deze verhouding V is afhankelijk van de straal r van de cirkels en de afstand d tussen de cirkels.



Er geldt: $V = \frac{2r + d}{3,14 \cdot r}$.

- a** Laat met een berekening zien dat bij een straal van 21,5 meter en een afstand van 2 meter tussen de cirkels, deze verhouding ongeveer $\frac{2}{3}$ is.
- b** Als de verhouding V gelijk is aan $\frac{3}{4}$ dan geldt voor het verband tussen r en d een formule van de vorm $r = c \cdot d$. Bereken de waarde van c .
- c** Leg uit dat de waarde van V altijd groter is dan 0,6369. (Ontleend aan CE havo wiskunde A, 2012, tijdvak 2)

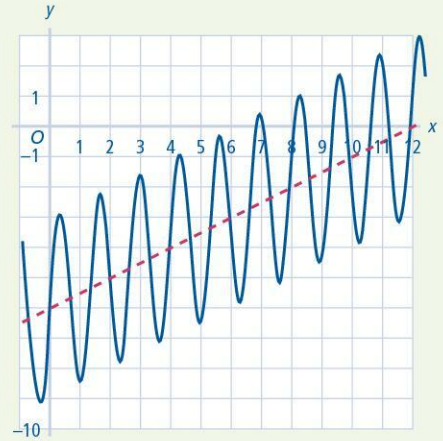
- G-2** Een poster heeft een oppervlakte van 2 m^2 . Aan de boven- en onderkant komen onbedrukte randen van 20 cm, terwijl aan de linker- en rechterzijkant onbedrukte randen van 15 cm moeten komen. In deze opdracht onderzoek je bij welke afmetingen van de poster de oppervlakte van het bedrukte gedeelte maximaal is. Stel de breedte (in meter) van de poster gelijk aan x . Zie de figuur hiernaast.



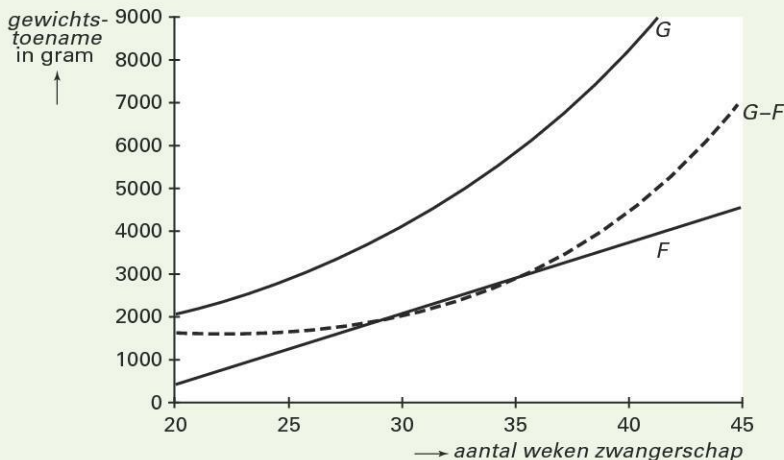
- a** Leg uit dat de hoogte van de poster gelijk is aan $\frac{2}{x}$.
- b** Leg uit dat de oppervlakte O , in m^2 , van het bedrukte gedeelte berekend kan worden met de productfunctie $O = (x - 0,3) \cdot \left(\frac{2}{x} - 0,4\right)$.
- c** Plot en schets de grafiek van O .
- d** Welk deel van de grafiek is in deze situatie realistisch? Bereken welke waarden van x bij dit deel horen.
- e** Bereken de maximale oppervlakte van het bedrukte deel van de poster.

Uitdagende opdrachten

- U-1a** Geef de vergelijking van de rode trendlijn in de figuur hiernaast.
- b** Stel het functievoorschrift op van de bij de blauwe grafiek horende functie.



- U-2** Tussen B en m bestaat een verband dat beschreven kan worden met de formule $B^2 - 1 = \frac{84m - 60}{16m}$.
- Bereken hoe groot de grenswaarde is van B als m steeds groter wordt.
- U-3** Tijdens de zwangerschap van een vrouw zijn de gewichtstoename G van de moeder en het gewicht F van het ongeboren kind door de vrouwenarts bijgehouden. In de figuur hieronder zie je de grafieken van G en F en met een stippellijn is de verschilgrafiek $G - F$ getekend.



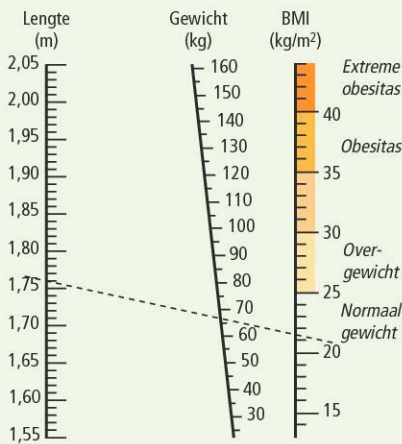
Het is gebleken dat bij de grafiek van G een exponentieel verband hoort en bij de grafiek van F een lineair verband.

- a** De grafiek van F en de verschilgrafiek snijden elkaar voor twee waarden van t . Op deze twee tijdstippen geldt dat G twee keer zo groot is als F .
Bereken dit zonder deze snijpunten met behulp van de formules uit te rekenen.
- b** Noem t de duur van de zwangerschap in weken.
Stel een formule op bij de verschilgrafiek $G - F$.
(Ontleend aan CE havo wiskunde B12 2006, tijdvak 2)

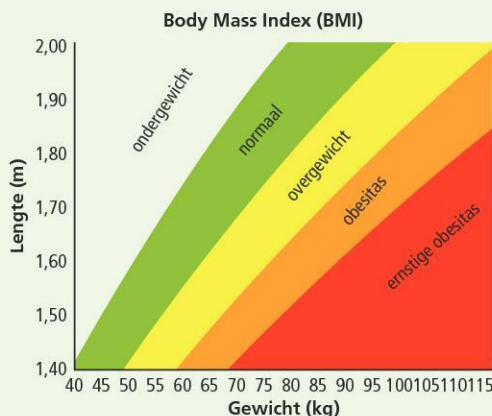
Body Mass Index

De Body Mass Index (BMI) is een index voor het gewicht in verhouding tot lichaamslengte. De BMI geeft een schatting van het gezondheidsrisico van je lichaamsgewicht.

Eerst zag je alleen allerlei grafieken om de BMI te bepalen. Zo kun je in onderstaande diagram bij de stippellijn aflezen dat bij een lengte van 1,76 m en gewicht van 68 kg er sprake is van een normaal gewicht met een BMI van 22.



Ook kom je onderstaande grafiek tegen, waarbij de grenslijnen licht gekromde lijnen zijn die punten met een gelijke BMI verbinden. Ga je weer uit van een persoon met lengte van 1,76 m en gewicht van 68 kg dan moet je het punt (68; 1,76) opzoeken om de BMI te vinden. Je vindt echter niet de numerieke waarde, maar een aanduiding over je gezondheid.



De Body Mass Index werd vroeger Quetelet-index genoemd naar de Belgische wiskundige Adolphe Quételet (1796–1874).



Op de website van het Voedingscentrum vind je de volgende applet op je BMI te berekenen.

Bereken je BMI

Geslacht
☒ Man ☐ Vrouw

Leeftijd **Lengte** cm **Gewicht** kg

Berekenen

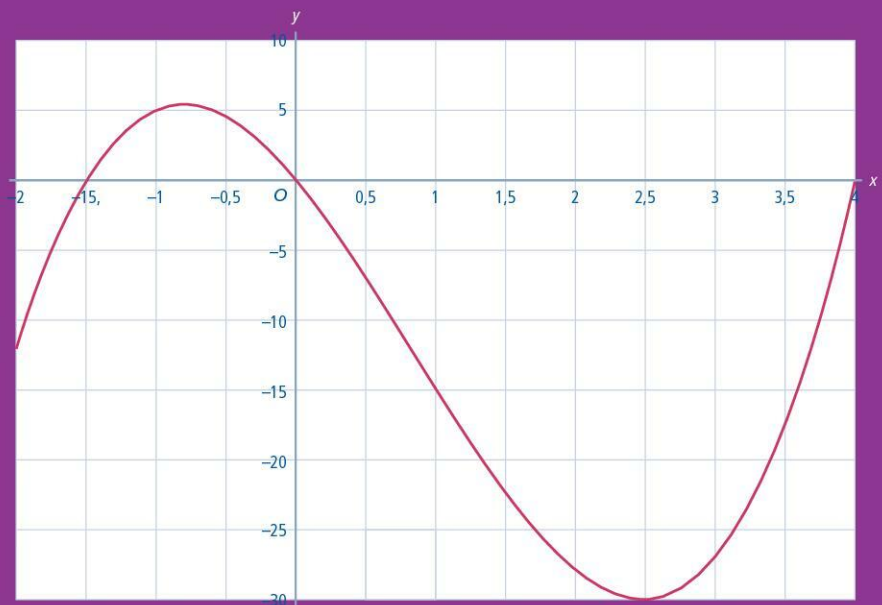
Je BMI is 23,4
 Je gewicht past goed bij je lengte, houden zo!

Opdracht

De BMI kun je berekenen met de formule

$B = \frac{G}{l^2}$ waarbij G het gewicht in kg is en l de lengte in meters.

- Ga na dat bij een volwassen persoon waarvan de lengte niet meer verandert, er sprake is van een lineaire formule.
- Bereken B bij $l = 1,40$ en $G = 50$.
- Druk l uit in G en laat daarmee zien dat de grafieken hiernaast bij wortelfuncties horen.
- Controleer dat de grenswaarden tussen ondergewicht en normaal gewicht overeenstemmen bij het eerste diagram, bij de grafiek hiernaast en de formule.



Functie en afgeleide

Hierboven zie je de grafiek van de functie $f(x) = (x^2 - 4x)(2x + 3)$

Volgens Peter is $f'(x) = (2x - 4) \cdot 2$ de afgeleide van f .

Hoe komt Peter aan deze afgeleide? Waarom kan dit niet de juiste afgeleide van f zijn?

Hoofdstuk 4

Differentiëren

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	90
4-1	Kettingregel	92
4-2	Productregel	94
4-3	Quotiëntregel	96
4-4	Hellinggrafiek	98
4-5	Redeneren met de afgeleide	100
4-6	Gemengde opdrachten	102
	Samenvatting	104
	Test jezelf	106
	Extra oefening - Basis	108
	Extra oefening - Gemengd	109
	Uitdagende opdrachten	110
	Fileproblemen	111



Voorkennis

Theorie

Voor het rekenen en herschrijven van **machtsfuncties**

$f(x) = c \cdot x^a$ met negatieve en gebroken exponenten gebruik je de volgende rekenregels:

$$> g^a \cdot g^b = g^{a+b} \quad > g^0 = 1 \quad (g \neq 0)$$

$$> (g^a)^b = g^{a \cdot b} \quad > g^{-n} = \frac{1}{g^n} \quad (g \neq 0)$$

$$> (g \cdot h)^a = g^a \cdot h^a \quad > g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g} \quad (n \neq 0)$$

$$> \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b} \quad (g \neq 0)$$

Voorbeeld

Schrijf de functie $f(x) = \frac{24}{(4\sqrt[3]{x})^2}$ als een machtsfunctie.

Oplossing

$$f(x) = \frac{24}{(4 \cdot x^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{24}{16 \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{24}{16} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$f(x) = 1\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

V-1 Schrijf de volgende functies in de vorm $f(x) = c \cdot x^a$.

a $g(x) = \frac{4}{x^3}$

c $i(x) = (-2x)^4$

e $k(x) = \frac{5}{15x^4}$

b $h(x) = \frac{3}{x^2} \cdot \sqrt{x}$

d $j(x) = (3x^{-2})^3$

f $l(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot \sqrt[5]{32x}$

V-2 Herleid de volgende formule tot de vorm $q = a \cdot P^b$.
 $q = (9P^8)^{-0,25} \cdot (4P)^3$

Theorie

Het opstellen van de formule van een afgeleide functie heet **differentiëren**.

De afgeleide van de machtsfunctie $y = f(x) = c \cdot x^a$ is $f'(x) = c \cdot a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van $a \neq 0$. Een andere, ook veel gebruikte notatie voor de

afgeleide, is $\frac{dy}{dx} = c \cdot a \cdot x^{a-1}$.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie $f(x) = \frac{3}{2x^4} - 4x^5$.

Oplossing

Schrijf f als de som van machtsfuncties.

$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^4} - 4x^5 = \frac{1}{2}x^{-4} - 4x^5$$

$$f'(x) = -4 \cdot \frac{1}{2}x^{-5} - 4 \cdot 5x^4$$

$$\text{Dit kun je herleiden tot } f'(x) = -\frac{6}{x^5} - 20x^4.$$

Voorbeeld 2

$K = 2\frac{1}{2}t^2\sqrt{t}$. Bepaal $\frac{dK}{dt}$.

Oplossing

Schrijf K als een machtsfunctie.

$$K = 2\frac{1}{2}t^2 \cdot t^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}t^{2\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dK}{dt} = 6\frac{1}{4} \cdot t^{\frac{1}{2}}, \text{ ofwel } \frac{dK}{dt} = 6\frac{1}{4} \cdot t\sqrt{t}$$

V-3 Differentieer de volgende functies

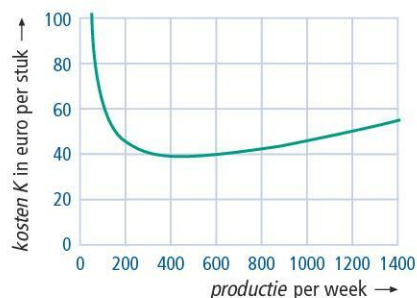
a $g(x) = -3x^{0,7} \cdot 2x^{1,3}$ **c** $TK = q^{-0,5} + \frac{15}{3q^2}$

b $h(d) = \frac{4}{3\sqrt[3]{d}} - d^2\sqrt{d}$ **d** $A = 5\sqrt{p} \cdot \sqrt[4]{p^3}$

V-4 In de grafiek kun je aflezen hoe de kosten per ledlamp afhangen van de grootte van de productie. Zo zie je bijvoorbeeld dat bij een productie van 200 stuks de kosten per ledlamp 45 euro bedragen. Een model voor het verband tussen de variabelen K (kosten per stuk) en q (productie per week) wordt gegeven door

$$K = 0,025q + 15 + \frac{5000}{q}$$

- a** Als je in plaats van 200 lampen, één lamp meer produceert, nemen de kosten K dan toe of af? Bereken die toe- of afname.
- b** Hoeveel is dat per extra geproduceerde lamp?
- c** Teken de raaklijn aan de grafiek in het punt $(200, 45)$ en bepaal van die lijn de richtingscoëfficiënt.
- d** Bereken $\frac{dK}{dq}$ en daarmee de afgeleide waarde bij $q = 200$.
- e** Leg uit waarom de antwoorden bij b, c en d (vrijwel) gelijk zijn.



Theorie

De helling van de grafiek van een functie f in een punt $A(a, f(a))$ is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de **raaklijn** in A . Je kunt deze helling berekenen.

- > door een raaklijn in punt A aan de grafiek te tekenen en daarvan de richtingscoëfficiënt te bepalen. Deze methode is niet erg nauwkeurig en gebruik je als je geen formule bij de grafiek hebt.
- > door de **gemiddelde verandering** over een klein interval te berekenen.

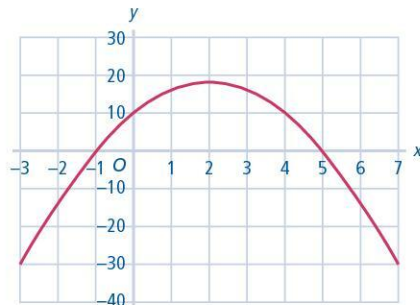
Je berekent $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ over het interval $[a, b]$. Dit wordt ook wel het

differentiequotiënt genoemd. Hoe kleiner het interval, des te nauwkeuriger de helling.

- > door indien mogelijk de afgeleide waarde in punt A te berekenen.

V-5 Hiernaast zie je de grafiek van een functie f . In deze opdracht bepaal je op drie manieren de helling van de grafiek van f in het punt $P(5, 0)$.

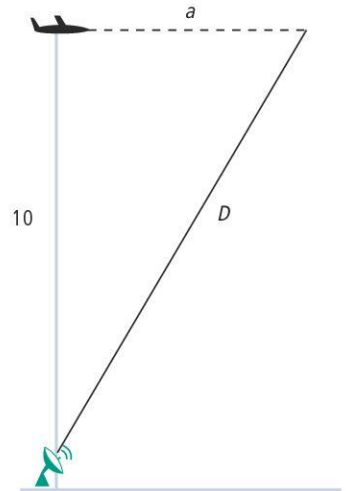
- a** Met behulp van het tekenen van een raaklijn in punt P .
- b** Met behulp van het differentiequotiënt over het interval $[5; 5,001]$ als gegeven is dat $f(x) = 2(5 - x)(x + 1)$.
- c** Met behulp van de afgeleide functie van f .



4-1

Kettingregel

- 1** Een vliegtuig bevindt zich op een gegeven moment op 10 km hoogte en recht boven een radarstation. Het vliegtuig heeft een constante snelheid van 630 km per uur. Het vliegtuig vliegt horizontaal. De afstand tot het radarstation wordt steeds groter.
Hoe ver het vliegtuig zich van het radarstation bevindt, hangt af van hoe ver het vliegtuig in horizontale richting heeft gevlogen. Er geldt: $D = \sqrt{100 + a^2}$. Hierin is D de afstand in km van het vliegtuig tot het radarstation, als het vliegtuig a kilometer verder heeft gevlogen in horizontale richting.
- a** Toon aan dat deze formule juist is.
- b** Bereken de afstand van het vliegtuig tot het radarstation 10 seconden na het moment dat hij zich recht boven het radarstation bevond.
- c** De afstand die het vliegtuig aflegt, hangt af van de tijd t . Leg uit dat voor de afgelegde afstand a in km, t seconden nadat het vliegtuig zich recht boven het radarstation bevond de formule $a = 0,175 \cdot t$ geldt.
- d** Schrijf de afstand D als functie van t .



Theorie

Functies kun je aaneenschakelen. Je krijgt dan een **kettingfunctie**. Andersom kun je een kettingfunctie in eenvoudiger schakels ontleden.

Voorbeeld 1

De functie $f(u) = 255 \cdot u^{-2}$ en de functie $u(x) = 3 - 5x$ kun je aaneenschakelen tot de functie $f(x) = 255 \cdot (3 - 5x)^{-2}$.

Voorbeeld 2

De functie $k(t) = 3\sqrt{4 - t^2}$ is opgebouwd uit de schakels $u = 4 - t^2$ en $y = 3\sqrt{u}$.

- H 2a** Geef de functie $f(t)$ die ontstaat door de functies $f(u) = \frac{3}{1 + 4u}$ en $u(t) = 2 - \frac{1}{2}t^2$ aaneen te schakelen.
- b** Uit welke schakels is de functie $k(t) = 5^{t^2-1}$ opgebouwd?
- c** Gegeven zijn de schakels $u(x) = 2x - 1$ en $f(u) = \sqrt{3u + 3}$. Geef de formule van $f(x)$.
- 3** Schrijf voor elk van de volgende drie functies de schakels op waaruit de functie is samengesteld.
- $K(q) = \sqrt{5 - 2q}$ $v(t) = 2^{1-3t}$ $s(x) = \sin(\pi(x - 2))$

De formule van de afgeleide van een kettingfunctie vind je met de **kettingregel**. Je berekent de afgeleide door de afgeleiden van de afzonderlijke schakels met elkaar te vermenigvuldigen.

In formulevorm: $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}$

Voorbeeld 1

Differentieer de functie
 $k(x) = (-3x + 5)^4$.

Oplossing

De afzonderlijke schakels zijn

$$u = -3x + 5 \text{ en } y = u^4.$$

$$\text{Dus } u' = -3 \text{ en } y' = 4u^3,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du} = -3 \cdot 4u^3 = -12u^3$$

ofwel

$$k'(x) = -12(-3x + 5)^3$$

Voorbeeld 2

$$K = \frac{3}{\sqrt{250-7p}}. \text{ Stel de formule op van } \frac{dK}{dp}.$$

Oplossing

Schrijf K als samengestelde machtsfunctie $K = 3(250 - 7p)^{-\frac{1}{2}}$.
 De schakels waaruit de kettingfunctie K is opgebouwd, zijn

$$u = 250 - 7p \text{ en } y = 3u^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{du}{dp} = -7 \text{ en } \frac{dy}{du} = -\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}}, \text{ dus}$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{du}{dp} \cdot \frac{dy}{du} = -7 \cdot -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} \text{ ofwel}$$

$$\frac{dK}{dp} = 10 \frac{1}{2} (250 - 7p)^{-\frac{3}{2}}.$$

H 4 Differentieer de volgende functies.

a $w(x) = 7(3 - x)^{-0,6}$ **c** $Q(p) = \frac{3}{(p^2 - p)^2}$

b $A(s) = \sqrt{5 - 2s^2}$ **d** $h(t) = (3t - 1)\sqrt{3t - 1}$

- 5** De meeste roofdieren proberen iedere dag hun voedsel zo snel mogelijk te vangen. Naarmate meer voedsel is gevangen, wordt het vaak moeilijker om nog nieuw voedsel te vangen. Soms moet een roofdier zich eerst verplaatsen naar hun voedselgebied voordat ze met de jacht kunnen beginnen. In een wiskundig model dat deze situatie beschrijft, geeft de opbrengstfunctie het verband aan tussen de hoeveelheid voedsel (de voedselopbrengst) en de tijd die nodig is om die hoeveelheid voedsel te vangen. Voor een roofdier dat eerst 2 uur onderweg is, geldt: $r = 4\sqrt{0,5t - 1}$ voor $t > 2$.

De voedselopbrengst r wordt uitgedrukt in ee (energie-eenheden) en de tijd t in uren.

De opbrengstfunctie r heeft voor $t > 2$ twee eigenschappen:

- > een langere tijd levert een hogere opbrengst op
- > de toename van de opbrengst wordt steeds geringer naarmate t groter wordt.

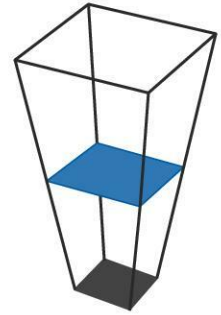
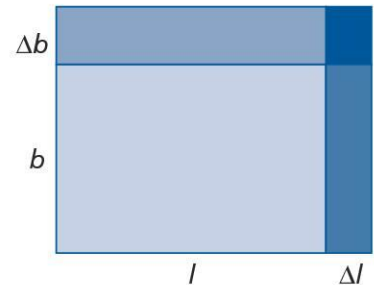
Geef de formule van de afgeleide van r en verklaar met behulp van een schets van de grafiek van deze afgeleide, de twee bovenstaande eigenschappen.

4-2

Productregel

- 6** Gegeven is de functie $p(x) = x^2(1 - x)$. Met een rekenmachine is de tabel gemaakt die hiernaast staat. Voor een aantal waarden van x zie je de bijbehorende functiewaarden $p(x)$ en de afgeleide waarden $p'(x)$.
- a** Willem berekent de formule van de afgeleide $p'(x)$ als volgt: Die van x^2 is $2x$ en die van $(1 - x)$ is -1 , dus $p'(x) = 2x \cdot -1 = -2x$. Ga met behulp van de tabel na dat deze formule niet juist is.
- b** Paula werkt in het functievoorschrift van p de haakjes weg en berekent daarna $p'(x)$. Welke formule vindt Paula?
- c** Ga na dat je met de formule van de afgeleide van Paula voor alle waarden van x in de tabel de juiste waarde van de afgeleide vindt.
- 7** In een vaas is de vorm van het wateroppervlak rechthoekig. De afmetingen van deze rechthoek hangen af van hoe hoog het water staat. De breedte b en de lengte l in centimeter van het wateroppervlak kun je berekenen met de formules $b = 20 + 0,5h$ en $l = 20 + 0,0125h^2$. Hierin is h de hoogte van het water in cm. De vaas is 40 cm hoog. De oppervlakte A van het wateroppervlak in cm^2 is dus $A = b \cdot l = (20 + 0,5h) \cdot (20 + 0,0125h^2)$.
- a** Bereken de toename van de oppervlakte als de hoogte toeneemt van 10 tot 13 cm.
- b** Met hoeveel cm^2 neemt de oppervlakte van de rechthoek gemiddeld per cm hoogteverschil toe, als de hoogte toeneemt van 10 tot 13 cm?
- c** Met hoeveel cm^2 neemt de oppervlakte van de rechthoek gemiddeld per cm hoogteverschil toe, als de hoogte toeneemt van 10 tot 10,1 cm?
- d** Hiernaast is de rechthoek getekend bij hoogte h en ook bij hoogte $h + \Delta h$. De toename van de lengte en van de breedte zijn aangegeven met Δl en Δb . Beredeneer met behulp van de figuur dat voor ΔA , de toename van de oppervlakte, geldt: $\Delta A = \Delta l \cdot b + l \cdot \Delta b + \Delta l \cdot \Delta b$.
- e** Hiernaast zie je de formule waarmee je de gemiddelde verandering van de oppervlakte kunt berekenen. Waarom is de laatste term, als je de gemiddelde verandering van de oppervlakte berekent over een heel klein interval, te verwaarlozen?
- f** Leg uit dat je de verandering van het wateroppervlak bij hoogte h kunt berekenen met de formule $A' = l' \cdot b + l \cdot b'$.
- g** Laat met algebra zien dat geldt $A' = 0,01875h^2 + 0,5h + 10$

x	$p(x)$	$p'(x)$
-3	36	-33
0	0	0
1	0	-1
2	-4	-8
5	-100	-65



$$\frac{\Delta A}{\Delta h} = \frac{\Delta l \cdot b}{\Delta h} + \frac{l \cdot \Delta b}{\Delta h} + \frac{\Delta l \cdot \Delta b}{\Delta h}$$

Als je voor Δh een heel klein getal kiest, nadert $\frac{\Delta A}{\Delta h}$ tot $\frac{dA}{dh}$ wat je ook kunt schrijven als A' .

Een functie van de vorm $p(x) = g(x) \cdot h(x)$ heet een **productfunctie**.

Een productfunctie differentieer je met de **productregel**
 $p'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$.

- 8 Bereken met de productregel de afgeleide functie.

a $f(x) = x^3(x^2 - 1)$
 b $k(t) = 2t(t^{-1} + 3t)$
 c $P(x) = (x^2 - 3x)(2x + 5)$
 d $l(q) = (2q - 7)(3 - 5q^2)$

- H 9 Gegeven is de functie $f(x) = (3x + 5)^2$.
 Je kunt deze functie op drie manieren differentiëren.

- a Schrijf $f(x)$ eerst zonder haakjes en laat zien dat je dan krijgt: $f'(x) = 18x + 30$.
 b Gebruik de kettingregel en laat zien dat je zo dezelfde formule van de afgeleide krijgt.
 c Laat zien dat je met de productregel ook $f'(x) = 18x + 30$ vindt.

Bij het differentiëren van de productfunctie $p(x) = g(x) \cdot h(x)$ gebruik je de productregel. Voor het differentiëren van g of van h heb je soms ook nog de kettingregel nodig.

- H 10 Differentieer de volgende functies.

a $r(s) = s^2(3s - 5)^3$ d $l(d) = (2d + 5)(4 - d)^2$
 b $N(t) = 3t(4t + 1)^5$ e $k(b) = 2b^3\left(\frac{1}{2}b + 1\right)^4$
 c $P(n) = 2n^3\sqrt{3 + n}$ f $f(x) = (2x + 1)\sqrt{4 - x}$

Voorbeeld

Bereken de afgeleide functie van
 $TK(q) = (q^2 + 1)(q^2 + 2q - 3)$.

Oplossing

TK is het product van

$g(q) = q^2 + 1$ en $h(q) = q^2 + 2q - 3$ met

$g'(q) = 2q$ en $h'(q) = 2q + 2$

en dus:

$TK'(q) = 2q(q^2 + 2q - 3) + (q^2 + 1)(2q + 2)$

$TK'(q) = 2q^3 + 4q^2 - 6q + 2q^3 + 2q^2 + 2q + 2$

$TK'(q) = 4q^3 + 6q^2 - 4q + 2$

Voorbeeld

Bereken de afgeleide functie van
 $f(x) = 4x^2(3x + 8)^4$.

Oplossing

f is het product van

$g(x) = 4x^2$ en $h(x) = (3x + 8)^4$

met $g'(x) = 8x$ en (met de kettingregel)

$h'(x) = 4(3x + 8)^3 \cdot 3$

ofwel $h'(x) = 12(3x + 8)^3$

en $f'(x) = 8x(3x + 8)^4 + 48x^2(3x + 8)^3$

- 11 Een actiegroep wil posters laten drukken om 100 m^2 te kunnen beplakken. Noem x de oppervlakte per poster in m^2 . Dan geldt voor het aantal te drukken posters q de formule $q = 100x^{-1}$.
 De prijs p in euro's per poster is ook afhankelijk van de oppervlakte x in m^2 . Voor het verband tussen p en x geldt de formule $p = 10 + 5x^2$.
- a Hoeveel kost het drukken van de posters als de oppervlakte per poster 1 m^2 is? En bij een oppervlakte van 4 m^2 ?
 b Geef een formule voor de totale kosten van het drukwerk TK uitgedrukt in x .
 c Bereken met behulp van de afgeleide van TK bij welke oppervlakte per poster, de totale kosten minimaal zijn.
 d Hoeveel posters worden er gedrukt en hoe groot zijn de totale kosten?



4-3

Quotiëntregel

- 12 Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{4x+3}{2x-7}$

Mary differentieert de functie f als volgt:

De afgeleide van $4x+3$ is 4, de afgeleide van $2x-7$ is 2,

$$\text{dus } f'(x) = \frac{4}{2} = 2.$$

Leg met behulp van de grafiek van f uit waarom deze afgeleide niet goed kan zijn.

- 13 De functie uit opdracht 12 kun je ook schrijven als de productfunctie $f(x) = (4x+3) \cdot (2x-7)^{-1}$.

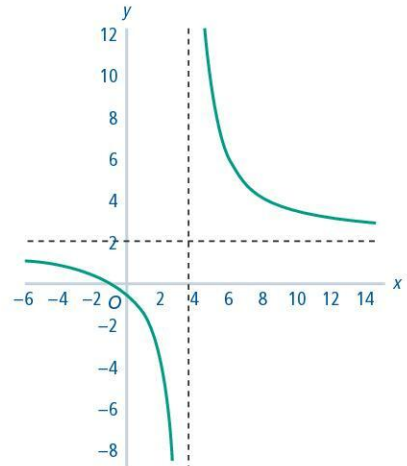
- a Laat met de product- en kettingregel zien dat

$$f'(x) = \frac{4}{2x-7} - \frac{2(4x+3)}{(2x-7)^2}$$

- b Leg uit dat dit gelijk is aan $f'(x) = \frac{4(2x-7)}{(2x-7)^2} - \frac{2(4x+3)}{(2x-7)^2}$ en laat

met algebra zien dat $f'(x)$ te herleiden is tot $f'(x) = \frac{-34}{(2x-7)^2}$

- c Voor elke waarde van $x \neq 3,5$ is $f'(x)$ negatief. Hoe zie je dit in de formule van de afgeleide f' en hoe zie je dit terug aan de grafiek van f ?



Theorie

Een functie van de vorm $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heet een **quotiëntfunctie**.

Een quotiëntfunctie differentieer je met de **quotiëntregel**

$$q'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Voorbeeld

Bereken de afgeleide van $g(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$.

Oplossing

De functie g is het quotiënt van $t(x) = x^2+3$ en $n(x) = x+1$ met $t'(x) = 2x$ en $n'(x) = 1$ en dus

$$g'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

- 14 Differentieer met de quotiëntregel de functie f uit opdracht 12.

- 15 Gegeven de formule $A = \frac{2}{1-p}$

- a Stel een formule op van A' met behulp van de quotiëntregel.
b Schrijf de formule als $A = 2(1-p)^{-1}$ en differentieer deze met behulp van de kettingregel.

H 16 Differentieer de functie $f(x) = \frac{5x}{2-x^2}$ en toon aan dat $f'(x) = \frac{10+5x^2}{(2-x^2)^2}$

H 17 Stel een formule op van $\frac{dA}{dp}$ bij de volgende functies.

a $A = \frac{3p(p+4)}{2p}$

c $A = \frac{6p-2p^2}{p+15}$

e $A = \frac{1}{\sqrt{2-p}}$

b $A = \frac{1}{p+3}$

d $A = \frac{3p^2-5}{9}$

f $A = \frac{(4p+5)^3}{p}$

- 18** Bij de aanleg van een dijk wordt voor het storten van betonblokken gebruik gemaakt van helikopters. De heli pikt telkens drie betonblokken van de voorraad op, vliegt daarmee naar de dijk, levert de blokken hangend op de juiste plaats af en vliegt terug. De kosten hiervan hangen af van het aantal blokken A dat per uur moet worden verwerkt. Bij een vliegafstand van ruim een kilometer geldt voor de kosten K bij benadering de formule

$$K = \frac{172A + 2752}{200 - A} \text{ met } 30 < A < 80 \text{ en } K \text{ de kosten in}$$

euro's per uur.

- a** Onderzoek met een plot of de kosten bij een hoger werktempo, waarbij meer blokken per uur worden afgeleverd, toenemen of afnemen.
b Hoe blijkt uit de formule voor de kosten K dat een hoger werktempo meer kosten met zich meebrengt?
c Onderzoek met behulp van de formule van de afgeleide of de kosten bij $A = 70$ twee keer zo snel stijgen als bij $A = 35$.

- 19** Een patiënt krijgt een geneesmiddel toegediend door een injectie in een spier. De concentratie van dit geneesmiddel in het bloed bereikt na enige tijd een maximum en neemt daarna geleidelijk af. Deze concentratie C

in mg/liter voldoet vrij goed aan de formule $C = \frac{8t}{t^2 + 4}$ met t in uren en $0 \leq t \leq 24$.

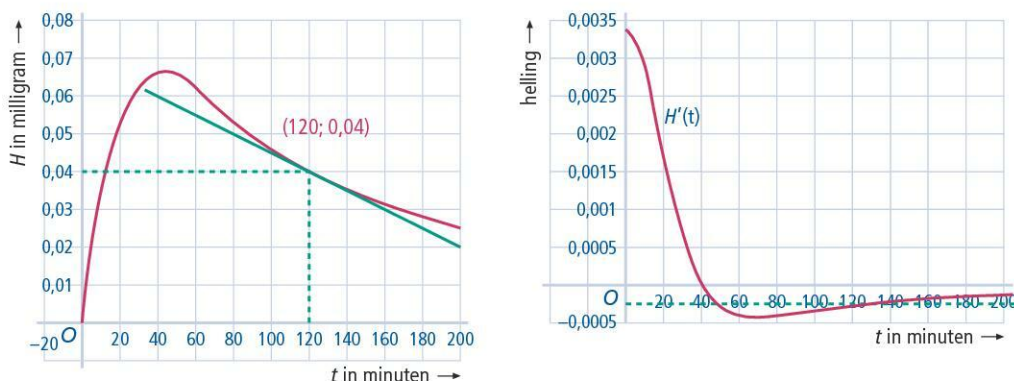
- a** Bereken met behulp van de formule van de afgeleide na hoeveel uren de concentratie in het bloed maximaal is.
b Hoe groot is de snelheid waarmee het geneesmiddel in het bloed wordt opgenomen op het moment van injecteren?
c En met welke snelheid neemt de concentratie af na 5 uur?
d Plot de grafiek van C en geef de betekenis van de grenswaarde van de grafiek.
e Na hoeveel uur moet er een tweede injectie worden gegeven om te zorgen dat de concentratie ten minste 1 mg/liter blijft?



4-4

Hellinggrafiek

- 20** De hoeveelheid werkzame stof in een geneesmiddel wordt door het bloed opgenomen. Tegelijkertijd begint ook de afbraak van het werkzame middel. Het verband tussen de hoeveelheid H in milligram en de tijd t in minuten na inname, kun je beschrijven met een formule. Zowel de grafiek van H als de hellinggrafiek van H zijn hieronder gegeven.

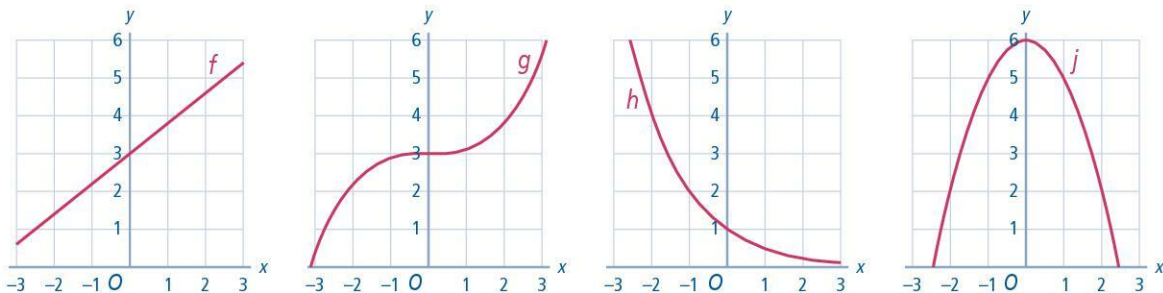


- a** Na 40 minuten is de hoeveelheid werkzame stof maximaal. Welke waarde heeft de hellinggrafiek na 40 minuten?
- b** Je leest af dat de hoeveelheid werkzame stof in het bloed na 120 minuten gelijk is aan 0,04 mg. In het bijbehorende punt is een deel van de raaklijn getekend. Je kunt in de rechter grafiek aflezen dat $H'(120) = -0,00025$. Ga in de grafiek van H na dat $-0,00025$ de helling is in het punt $(120, 0.04)$.
- c** Hoe groot is de snelheid waarmee de hoeveelheid werkzame stof in het bloed afneemt 60 minuten na de inname van het geneesmiddel.
- 21** Het gaat in deze opdracht ook over de opname en afbraak van de werkzame stof in een geneesmiddel in het bloed van opdracht 20.
- a** Leg uit hoe je aan de grafiek van H' kunt zien dat de grafiek van H op het interval $\langle 0, 40 \rangle$ afnemend stijgend is.
- b** Ga na dat de grafiek van H' op het interval $\langle 40, 70 \rangle$ onder de x-as ligt en dat de functiewaarden van H' steeds kleiner worden. Leg uit dat uit deze twee kenmerken volgt dat de grafiek van H op het interval $\langle 40, 70 \rangle$ toenemend dalend is.
- c** Op het interval $\langle 70, \rightarrow \rangle$ is de grafiek van H afnemend dalend. Uit welke twee kenmerken van de afgeleide functie H' op het interval $\langle 70, \rightarrow \rangle$ had je dit kunnen concluderen?

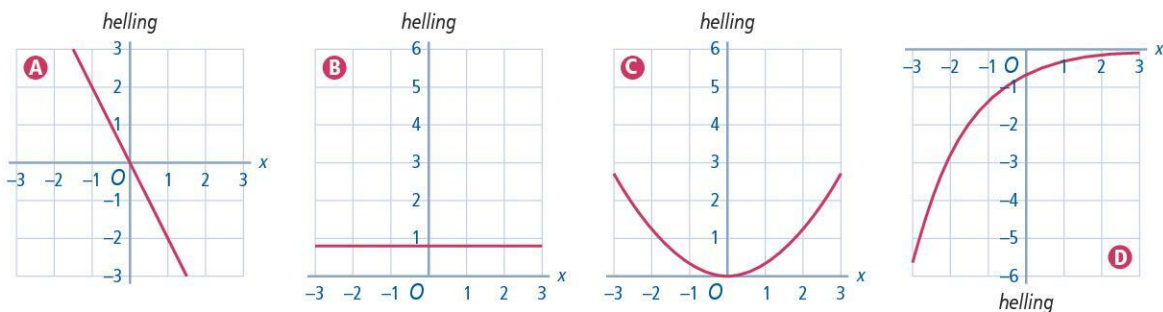
Met behulp van de hellinggrafiek van een functie $f(x)$ kun je een beeld krijgen van het verloop van de grafiek van deze functie.

- > Als de hellinggrafiek van f boven de x -as ligt en toeneemt, dan wel afneemt, is de grafiek van f respectievelijk toenemend, dan wel afnemend stijgend.
- > Als de hellinggrafiek van f onder de x -as ligt en toeneemt dan wel afneemt, is de grafiek van f respectievelijk afnemend, dan wel toenemend dalend.
- > Als de hellinggrafiek de x -as snijdt, heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn.

H 22 Hieronder zie je van vier functies f , g , h en j de grafiek.



- a Geef bij elke grafiek aan van wat voor soort stijging en/of daling er sprake is.
- b Hieronder zie je vier hellinggrafieken.



Elk van deze hellinggrafieken hoort bij een van de grafieken hierboven. Beredeneer welke hellinggrafiek bij welke functie hoort.

- c De grafieken van de functies f en g schuiven 3 eenheden omhoog. Leg uit welke invloed dat heeft op hun hellinggrafieken.
 - d De grafieken van de functies h en j schuiven 3 eenheden naar links. Leg uit welke invloed dat heeft op hun hellinggrafieken.
- 23** Voor een bedrijf waar plastics worden geproduceerd, gebruikt men de volgende formule voor het berekenen van de jaarlijkse kosten: $K = 25000 \cdot P^{0,62}$. Hierin is K in dollars en P de productie in tonnen per jaar.
- a Bereken de kosten bij een productie van 125 ton.
 - b Bereken met behulp van differentiëren de waarde van K' als $P = 125$.
 - c Geef de betekenis van de uitkomst van opdracht b.
 - d Schets de hellinggrafiek van K en verklaar daarmee dat de kosten bij een lage productie veel sneller toenemen dan bij een hoge productie.

4-5

Redeneren met de afgeleide

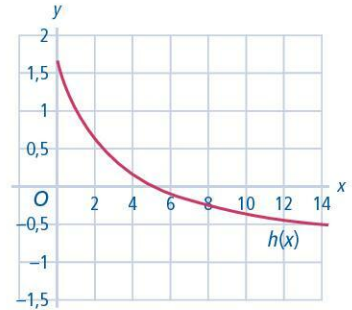
- 24** Hiernaast zie je voor $x > 0$ de grafiek van de functie

$$h(x) = \frac{5-x}{x+3}.$$

- a** Differentieer deze functie en toon aan dat je de afgeleide kunt

herleiden tot $h'(x) = \frac{-8}{(x+3)^2}.$

- b** Beredeneer met behulp van deze afgeleide functie dat de grafiek van h afnemend dalend is.



Met behulp van de afgeleide van een functie kun je beredeneren hoe het verloop van de grafiek van de functie is.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 6x^{0,67}$ voor $x > 0$.

Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de grafiek van de functie afnemend stijgend is.

Oplossing

$$f'(x) = 6 \cdot 0,67x^{-0,33} = 4,02x^{-0,33} = \frac{4,02}{x^{0,33}}$$

$f'(x)$ is voor elke waarde van $x > 0$ positief, dus de grafiek van f is stijgend.

Als x toeneemt, wordt $x^{0,33}$ groter en $\frac{4,02}{x^{0,33}}$ dus kleiner.

Hieruit volgt dat de grafiek van f afnemend stijgend is.

- H 25** De functie $f(x) = 1250x^{-0,35}$ is voor $x > 0$ een afnemend dalende functie.

Beredeneer dit met behulp van de afgeleide functie.

- H 26a** Differentieer de functie $g(x) = x\sqrt{6-x}$ en toon aan dat je de

afgeleide kunt herleiden tot $g'(x) = \frac{6 - 1\frac{1}{2}x}{\sqrt{6-x}}.$

- b** Beredeneer met een plot van de afgeleide dat de grafiek van g voor $x < 4$ afnemend stijgend is.

- H 27** Gegeven de formule $V = 0,2 + \frac{T-20}{82T-17400}$, voor $T < 200$.

Toon met behulp van $\frac{dV}{dT}$ aan dat V steeds sterker daalt bij toenemende T .

- 28** Het aantal reigers in een natuurgebied is de afgelopen 60 jaar behoorlijk toegenomen. Biologen hebben een model opgesteld waarmee het aantal reigers in de afgelopen jaren kan worden berekend: $A = 0,0007(1,5t + 5)^3 + 124,9$. Hierin is A het aantal reigers t jaren na 1955.

Het aantal reigers groeide in de eerste jaren vrij langzaam. Pas na enige tijd nam het aantal snel toe. In de hele periode van 60 jaar is er sprake geweest van een toenemende stijging van de aantallen reigers.

- Bepaal de afgeleide A' en beredeneer hoe je aan de formule van de afgeleide van A kunt zien dat er sprake is geweest van een toenemende stijging.
- Bereken vanaf welk jaar de groei van het aantal reigers groter was dan 10 reigers per jaar.



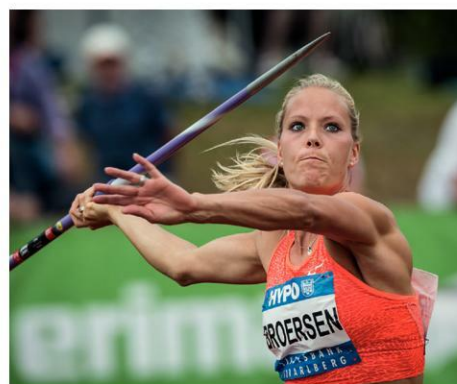
- 29** Als het druk is in een tunnel, is de loopsnelheid van de voetgangers laag. De loopsnelheid hangt af van de ruimte die er per voetganger beschikbaar is. Onderzoekers hebben vastgesteld dat de (gemiddelde) loopsnelheid V in meter per

minuut kan worden berekend met de formule $V = 87 - \frac{26}{R}$.

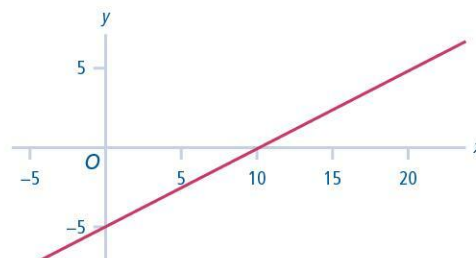
Hierin is R het aantal vierkante meter dat een voetganger gemiddeld in de tunnel heeft.

Als er maar weinig mensen in de tunnel zijn, lopen ze sneller.

- Beredeneer dit aan de hand van de formule van V .
 - Beredeneer dit ook aan de hand van de formule van V' .
- 30** De zevenkamp is een atletiekwedstrijd bij vrouwen. De prestaties per onderdeel worden omgerekend naar punten. De punten bij de 200 meter hardlopen worden berekend met de formule $P = 4,99087(42,5 - x)^{1,81}$ met x de tijd in seconden.
- Hoeveel punten krijgt een atlete als ze de 200 meter in een tijd van 23,49 seconden aflegt?
 - Onderzoek met behulp van een schets van de hellinggrafiek of P toenemend stijgend, toenemend dalend, afnemend stijgend of afnemend dalend is. Neem de tijd x tussen 0 en 42,5 seconden.
 - Vier atletes lopen de 200 meter in respectievelijk 24, 25, 34 en 35 seconden. Het verschil in puntenaantal is bij de twee snelste lopers groter dan bij de twee langzaamste lopers. Beredeneer dit met behulp van de grafiek van P .



-  **31** Hiernaast zie je een hellinggrafiek van een functie h . Bedenk drie mogelijke formules voor h .



4-6

Gemengde opdrachten

32 Differentieer de volgende functies.

a $f(t) = t \cdot \sqrt{4t} \cdot \sqrt[3]{t}$ **c** $l(n) = \sqrt{2n-1} \cdot (3n+2)$

b $Q(q) = 7q^2 + \frac{q}{2q^2+3}$ **d** $Z(a) = (2a + \sqrt{4a})^2$

33 Op de marketingafdeling van een fabriek doet men onderzoek naar de opbrengst van pas op de markt gebrachte artikelen. Van één van deze artikelen zou het verband tussen de opbrengst TO in euro's en het aantal verkochte exemplaren

q gegeven worden door de formule $TO = \frac{20000q}{q+500}$.

a Bereken bij welke waarde van q de opbrengst gelijk is aan 10 000 euro.

b Stel de formule op van $\frac{dTO}{dq}$.

c Gebruik een schets van de hellinggrafiek van TO om aan te tonen dat bij een opbrengst van 10 000 euro de opbrengst nog niet maximaal is.

 **d** Beredeneer met behulp van de schets van de hellinggrafiek dat de opbrengst naar een grenswaarde nadert.

e Hoe groot is die grenswaarde?



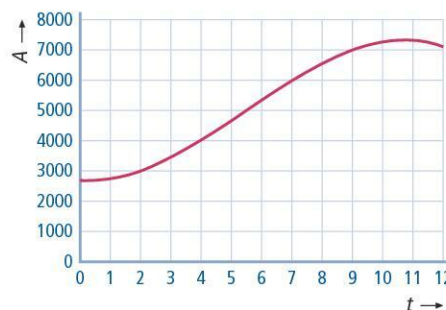
 **34** Biologen hebben tussen 2002 en 2007 elk jaar een schatting gemaakt van het aantal zeehonden in de hele Waddenzee. Daarbij is het volgende wiskundige model gemaakt: $A = -8,3t^3 + 137t^2 - 80t + 2695$ waarmee het aantal zeehonden A op tijdstip t goed kan worden geschat. Hierbij is t in jaren en $t = 0$ het jaar 2002. Men nam aan dat dit model zeker tot het jaar 2014 een goede voorspelling zou geven. Hiernaast zie je de grafiek van A op het interval $[0, 12]$.

a Bereken de door het model voorspelde toename van het aantal zeehonden per jaar tussen 2002 en 2014.

b Bereken de gemiddelde toename van het aantal zeehonden per jaar tussen 2002 en 2014.

 **c** In sommige jaren nam het aantal zeehonden sneller toe dan het gemiddelde, in andere jaren minder snel. Bepaal met behulp van de grafiek in welke jaren dit aantal sneller toenam dan de gemiddelde toename per jaar. Leg uit hoe je dit doet.

d De grafiek van A is eerst toenemend stijgend en daarna afnemend stijgend. Bereken met behulp van de afgeleide van A in welk jaar de grafiek van A overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.



- 35 Een tuinder heeft een waterreservoir om bij gebrek aan regenwater de planten water te kunnen geven. Voor een bepaalde periode kun je de inhoud van het reservoir

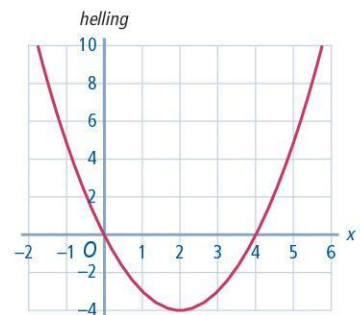
berekenen met de formule $I = \frac{120}{(0,05t + 1)^2}$, waarin

I de inhoud is in m^3 en t de tijd in dagen.

- a Hoe kun je aan de formule zien dat de inhoud afneemt?
b De inhoud van het reservoir neemt steeds langzamer af. Toon dit aan met behulp van de afgeleide.

- 36 Hiernaast zie je de hellinggrafiek van de functie f . Hieronder staat een aantal uitspraken over f . Ga bij elke uitspraak na of deze waar is, niet waar is of dat je niet kunt weten of deze waar is. Geeft steeds een toelichting.

- 1 De grafiek van f heeft een minimum bij $x = 2$.
- 2 De functie f heeft één nulpunt.
- 3 De grafiek van f is een parabool.
- 4 De grafiek van f heeft een top bij $x = 0$ en bij $x = 4$.
- 5 De grafiek daalt het snelst bij $x = 2$.



- 37 De waterhoogte in een waterton wordt beschreven door de formule $H = \sqrt{-2t^2 + 210t + 900}$ met H in cm en t in dagen.

- a Bereken na hoeveel dagen de waterton leeg is.
b Stel de formule op van $\frac{dH}{dt}$
c Bereken met behulp van de afgeleide na hoeveel dagen de waterhoogte maximaal is.

- 38 Het aantal auto's dat per minuut een bepaald punt passeert, hangt af van de snelheid van de auto's. Daarbij wordt rekening gehouden met de afstand die de auto's onderling moeten houden. Omdat er bij een hogere snelheid een langere remweg is, moeten auto's bij hogere snelheid een grotere afstand houden. Het aantal auto's A dat per minuut een bepaald punt passeert

kan worden berekend met behulp van $A = \frac{1680v}{400 + v^2}$

Hierin is v de snelheid in km per uur.

- a Er passeert een file. Alle auto's rijden met een snelheid van 40 km per uur. Ze houden precies de onderlinge afstand die nodig is. De file duurt 15 minuten. Hoeveel auto's passeren er in die tijd?
b Stel de formule op van de afgeleide van A en bereken daarmee bij welke snelheid het aantal passerende auto's per minuut zo groot mogelijk is.
c Hoeveel auto's passeren in dat geval per minuut?



Samenvatting

Kettingfunctie en kettingregel

Functies kun je aaneenschakelen. Je krijgt dan een kettingfunctie. De afgeleide van een kettingfunctie bereken je met de kettingregel. Dat doe je door de afgeleiden van de afzonderlijke schakels met elkaar te vermenigvuldigen.

In formulevorm: $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}$

Productfunctie en productregel

Een functie van de vorm $p(x) = g(x) \cdot h(x)$ heet een productfunctie. Een productfunctie differentieer je met de productregel $p'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$.

Quotiëntfunctie en quotiëntregel

Een functie van de vorm $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heet een quotiëntfunctie.

Een quotiëntfunctie differentieer je met de quotiëntregel

$$q'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Je kunt een kettingfunctie, productfunctie en een quotiëntfunctie differentiëren

Hierbij gebruik je de ketting-, de product- of de quotiëntregel. Soms gebruik je meer dan één van deze regels bij het bepalen van een afgeleide.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie $f(x) = (2x + 4)^4 \cdot x^3$.

Oplossing

$$g(x) = (2x + 4)^4 \text{ en } h(x) = x^3$$

$g(x)$ is een kettingfunctie met de schakels $u = 2x + 4$ en $y = u^4$. De afgeleiden van de schakels zijn $u' = 2$ en $y' = 4u^3$.

$$g'(x) = 8(2x + 4)^3 \text{ en } h'(x) = 3x^2$$

Met de productregel vind je

$$f'(x) = 8(2x + 4)^3 \cdot x^3 + (2x + 4)^4 \cdot 3x^2 \text{ ofwel}$$

$$f'(x) = 8x^3 (2x + 4)^3 + 3x^2 (2x + 4)^4$$

Voorbeeld 2

Differentieer de functie $g(x) = \frac{x-3}{x^3+1}$.

Oplossing

$$t(x) = x - 3 \text{ en } n(x) = x^3 + 1$$

$$t'(x) = 1 \text{ en } n'(x) = 3x^2$$

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (x^3 + 1) - (x - 3) \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x^3 + 1 - 3x^3 + 9x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2x^3 + 9x^2 + 1}{(x^3 + 1)^2}$$

Je kunt een hellinggrafiek van een functie f gebruiken om een beeld te krijgen van het verloop van de grafiek van f

Je gebruikt het boven of het onder de x -as liggen van de hellinggrafiek en het stijgen of dalen van de hellinggrafiek.

Voorbeeld

Hiernaast zie je de hellinggrafiek van een functie f .

Bij welke waarden van x is de grafiek van f toenemend stijgend?

Bij welke waarden van x is de grafiek van f afnemend dalend?

Bij welke waarde van x heeft de grafiek van f een minimum?

Oplossing

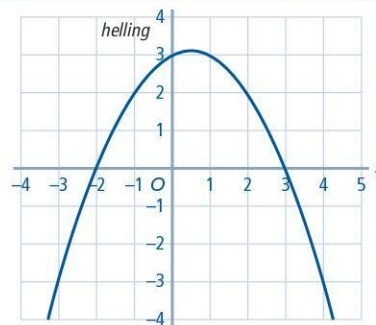
Op het interval $\langle -2, \frac{1}{2} \rangle$ ligt de hellinggrafiek van f boven de x -as en neemt toe, dus de grafiek van f is hier toenemend stijgend.

Op het interval $\langle \frac{1}{2}, 3 \rangle$ ligt de hellinggrafiek van f onder de x -as en neemt toe, dus de grafiek van f is hier afnemend dalend.

De hellinggrafiek snijdt de x -as bij $x = -2$ en $x = 3$.

Voor $x < -2$ daalt de grafiek van f en voor $x > 3$ stijgt de grafiek van f .

Bij $x = \frac{1}{2}$ heeft de grafiek van f een minimum.



Je kunt redeneren met de afgeleide van een formule.

Daarbij kijk je naar de structuur van de afgeleide en als deze bijvoorbeeld negatief is, dan nemen de functiewaarden af. Als de afgeleide positief is en toeneemt, stijgt de grafiek van de gewone functie en gaat steeds steiler lopen.

Voorbeeld

Ron fietst regelmatig de Afsluitdijk op en neer. Deze is 32 kilometer lang. Meestal waait het. Veronderstel dat hij altijd wind mee heeft op de heenweg en wind tegen op de terugweg.

Met de formule $T = \frac{1536}{576 - w^2}$ kun je zijn totale reistijd T in uren berekenen voor elke windsnelheid w kleiner dan 24 km per uur.

a Wat is zijn gemiddelde snelheid als er geen wind staat?

b Beredeneer met de afgeleide van T dat de totale reistijd toeneemt als w toeneemt.

Oplossing

a Als $w = 0$ dan geldt dat zijn totale reistijd T gelijk is aan $2\frac{2}{3}$ uur. In die tijd heeft hij 64 km afgelegd. Zijn gemiddelde snelheid was dus 24 km per uur.

b $T = 1536 \cdot (576 - w^2)^{-1}$, dus $\frac{dT}{dw} = -1536 \cdot (576 - w^2)^{-2} \cdot -2w = \frac{3072w}{(576 - w^2)^2}$

Voor elke waarde van $w > 0$ is de afgeleide positief. Dat betekent dat de grafiek van T stijgend is. Met andere woorden: als w toeneemt, neemt de totale reistijd T ook toe.

Test jezelf

T-1 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = \sqrt{7-5x}$ **c** $A(t) = (3t-5)^{-0,2}$

b $k(t) = (4-5t)^3$ **d** $n(a) = (1-3a)^{1\frac{1}{2}}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-1.

T-2 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = (2x-3)(x^2+2x)$ **c** $A(t) = (t^3+2t)(3t-5)$

b $p(x) = 2x^2(4-5x)^3$ **d** $n(a) = (a-1)\sqrt{a-1}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-2.

T-3 Bepaal $\frac{dA}{dx}$ van de volgende formules.

a $A = \frac{(2x-1)^4}{x+3}$

c $A = \frac{4}{x^2+3}$

e $A = \frac{x}{x^2+3x}$

b $A = \frac{x^3-2x}{1+x}$

d $A = \frac{x^3+2}{x^2}$

f $A = \frac{3-2x}{\sqrt{3x+5}}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-3.

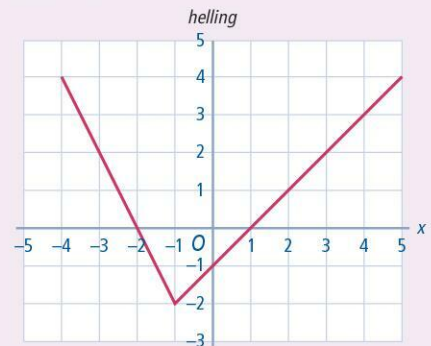
T-4 Gegeven is een functie f . Hiernaast zie je de hellinggrafiek van f .

a Op welk interval is de grafiek van f toenemend dalend?

b Op welk interval is de grafiek van f afnemend stijgend?

c Hoeveel toppen heeft de grafiek van f ? Noteer van elke top de bijbehorende x -coördinaat.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-4.



T-5 Hiernaast is de grafiek van de functie $g(t) = \frac{2}{1-t^2}$ getekend.

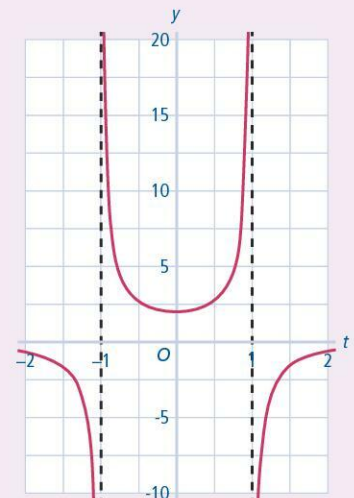
a Stel een functievoorschrift op van de afgeleide functie.

b Beredeneer met $g'(t)$ dat de grafiek van g tussen -1 en 0 afnemend dalend is.

c Beredeneer dat g een extreme waarde heeft bij $t = 0$ en bereken deze extreme waarde.

d Beredeneer met behulp van de afgeleide dat g afnemend stijgend is voor $t > 1$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-5.



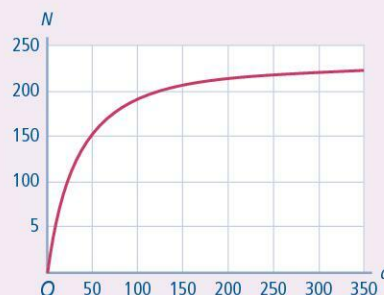
- T-6** Bert zwemt in een rivier 500 meter stroomopwaarts en vervolgens dezelfde afstand weer terug.
De snelheid van Bert ten opzichte van het water is 1,5 m/s.
Stel de stroomsnelheid van de rivier op v m/s.
- a** Toon aan dat de tijd die Bert nodig heeft voor de heenweg gelijk is aan $\frac{500}{1,5 - v}$ seconden.
- b** Druk de tijd t die Bert voor de hele tocht nodig heeft uit in v .
- c** Bereken de benodigde tijd als de snelheid van het water 0,15 m/s is.
- d** Toon met behulp van de afgeleide aan dat Bert het snelst heen en terug zou zijn bij stilstaand water.



- T-7** Voor basisscholen bestaat een opheffingsnorm. Als het aantal leerlingen op een school onder de opheffingsnorm zakt, dan moet de school worden opgeheven.
De opheffingsnorm is gebaseerd op de leerlingendichtheid d , dat is het aantal basisschoolleerlingen per km^2 in de gemeente.
De opheffingsnorm N kan dan berekend worden met de

$$\text{formule } N = \frac{240d}{28 + d}$$

Hiernaast is de grafiek getekend die het verband tussen N en d weergeeft.



- a** In de tabel hiernaast zie je gegevens uit 1992 van de gemeenten Groningen en Haren.

Bereken voor beide gemeenten de opheffingsnorm.

- b** Als er een gemeentelijke herindeling zou komen waarbij de gemeenten Groningen en Haren samen één gemeente worden, verandert voor deze nieuw gevormde gemeente de opheffingsnorm.

Voor welke van de twee gemeenten heeft dit nadelige gevolgen?

- c** Stel de formule op van de afgeleide N' .
- d** Plot en schets de hellinggrafiek van N en laat hiermee zien dat de grafiek van N afnemend stijgend is.
- e** De grafiek van N , die je hierboven ziet, heeft een horizontale asymptoot. Welke lijn is dat? Welke betekenis heeft deze asymptoot voor de opheffingsnorm?

- f** In de discussie over de opheffingsnorm stelt iemand:
De gemeenten met een grote leerlingendichtheid zijn bevoordeeld.

Als de norm niet gehaald wordt, kunnen een paar extra leerlingen de school redden, maar in gemeenten met een geringe leerlingendichtheid kan dat de situatie nog ongunstiger maken.

Onderzoek of deze uitspraak klopt.

	oppervlakte gemeente in km^2	aantal basisschool- leerlingen
Groningen	80	14 000
Haren	46	1 800

Extra oefening - Basis

B-1 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 3(1 - 3x)^2$ **b** $h(x) = (x^2 - 1)^{2\frac{1}{2}}$

c $Q(p) = p + \sqrt{9p^2 + 900}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-1.

B-2 Bereken $\frac{dy}{dx}$ van de volgende formules.

a $y = 5x^2\sqrt{x^2 - 1}$ **b** $y = x\sqrt{9x^2 + 900}$

c $y = (3x - 4)^3 \cdot (7 - 2x)^4$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-2.

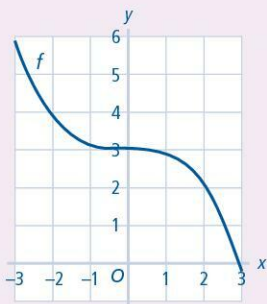
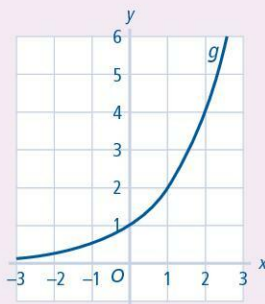
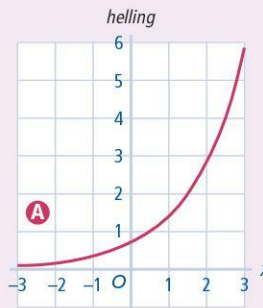
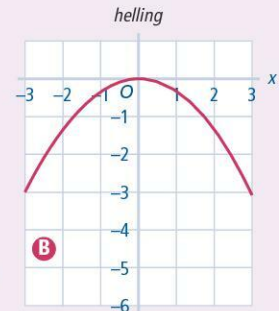
B-3 Bepaal de afgeleide van de volgende functies.

a $f(t) = \frac{4 - t}{2t + 1}$ **b** $A(b) = \frac{100b - 110}{b^2}$

c $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-3.

B-4 Hieronder zie je van de functies f en g de grafiek en daarnaast hun hellinggrafieken A en B .



a Beschrijf bij de grafieken f en g van wat voor soort stijging en/of daling er sprake is.

b Beredeneer welke hellinggrafiek bij welke functie hoort.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-4.

B-5 Een schoonmaakbedrijf berekent de prijs per m^2 voor het schoonmaken

van een vloer met de formule $G = \frac{75}{x - 5} + 15,8$

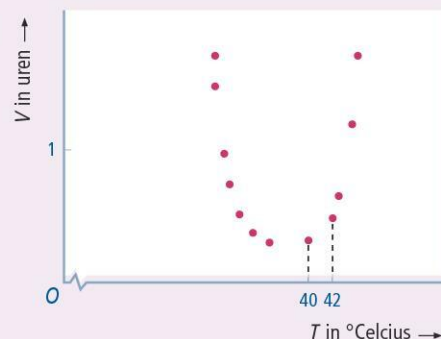
Hierin is G de prijs in euro en x het aantal m^2 vloeroppervlak. De minimale grootte van een vloer moet $10 m^2$ zijn.

Toon met behulp van de afgeleide van G aan dat de prijs per m^2 steeds minder sterk daalt bij toenemende grootte van een vloeroppervlak.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-5.

Extra oefening - Gemengd

- G-1** Bij het verteren van voedsel spelen colibacteriën een belangrijke rol. Zij komen voor in de darmen. In laboratoria wordt veel onderzoek gedaan naar de groei van populaties van colibacteriën. Daarbij gebruikt men een kweekvloeistof waarmee men de omstandigheden zoals die in de darmen voorkomen, zoveel mogelijk nabootst. Bij constante temperatuur blijken deze populaties exponentieel te groeien. Men meet de verdubbelingstijd V , dat is de tijd in uren die het experiment moet duren om twee keer zoveel bacteriën te krijgen. Uit waarnemingen blijkt dat V afhangt van de ingestelde temperatuur T in graden Celsius. In de figuur hiernaast staat het resultaat van de waarnemingen.



- a** Is de groei van de populatie bij 42 °C sterker dan de groei bij 40 °C? Licht je antwoord toe met behulp van de figuur.
b Binnen het temperatuurgebied waarin de waarnemingen zijn gedaan, blijkt men het verband tussen T en V redelijk te kunnen benaderen met de formule:

$$V = \frac{16,9}{-T^2 + 75T - 1350}$$

Stel een formule op van $\frac{dV}{dT}$

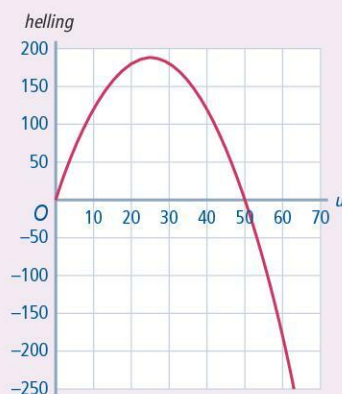
- c** Bereken met behulp van $\frac{dV}{dT}$ bij welke temperatuur de groei volgens de formule het sterkst is.
(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 1994 tijdvak 1)

- G-2** Voor de winst per maand in euro's van een bedrijf is een winstfunctie W gegeven. De winst is afhankelijk van het uurtarief u in euro's. Hiernaast zie je de hellinggrafiek van W .

- a** Op welk interval neemt de winst W toe?
b Bij welke waarde van u is de winst maximaal?
 Leg je antwoord uit.
c Bij welke waarde van u gaat de grafiek van W van toenemende stijging over naar afnemende stijging?

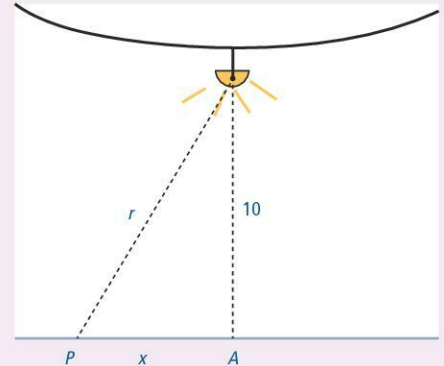
- G-3** Gegeven is een winstfunctie $W(q) = \frac{180q}{(0,5q + 1)^2}$ met W in honderden euro's en q in honderdtallen.

- a** Maak een plot en schets van de grafiek van W .
b Bereken $W'(q)$.
c Bereken $W'(4)$. Welke betekenis heeft de uitkomst?
d Voor welke waarde van q is de winst maximaal?
e Bereken de maximale winst.



Uitdagende opdrachten

- U-1** Een belangrijke eis die aan wegverlichting gesteld wordt, is dat er overal voldoende licht is langs de te verlichten weg. Om aan te geven hoe licht het op een bepaalde plaats is, gebruikt men het begrip ‘verlichtingssterkte’, gemeten in lux. Zo is het op een bewolkte dag ongeveer 1000 lux en is de verlichtingssterkte in een kantoor ongeveer 500 lux. Voor het berekenen van de verlichtingssterkte bij één lamp gebruikt men het volgende model. Uitgangspunt is een lamp die op 10 meter hoogte boven een wegdek hangt en waarvan het licht zich in alle richtingen naar beneden kan verspreiden.



In een punt P op het wegdek met afstand r meter tot de lamp geldt $S = 100\,000 \cdot r^{-3}$. Hierin is S de verlichtingssterkte in P .

- a** Beredeneer met behulp van de formule dat bij grotere waarden van r een kleinere verlichtingssterkte hoort.

Punt A bevindt zich recht onder de lamp, x is de afstand in meters tussen punt A en punt P .

- b** Bereken de verlichtingssterkte in punt P als punt P zich op 3,5 meter vanaf punt A bevindt.
c Bereken x als de verlichtingssterkte in P de helft is van die in A . Geef je antwoord in decimeters nauwkeurig.
d Toon aan dat S uitgedrukt in x geschreven kan worden als:

$$S = \frac{100\,000}{(x^2 + 100)\sqrt{x^2 + 100}}$$

- e** De grafiek van S als formule van x is eerst toenemend dalend, maar vanaf een bepaalde waarde van x afnemend dalend.

Bereken $\frac{dS}{dx}$ en bepaal daarmee deze waarde van x .

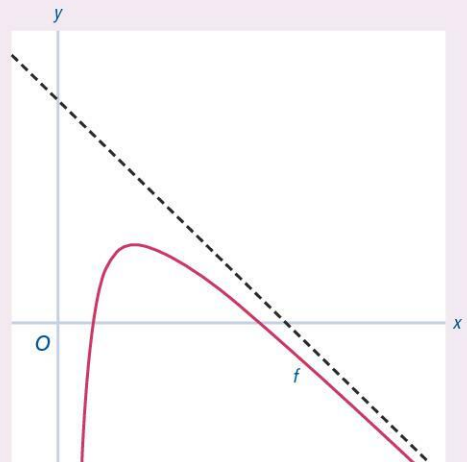
- U-2** Hiernaast is voor $x > 1$ de grafiek geplot van de functie

$$f(x) = \frac{-x^2 + 21x - 56}{x - 1}$$

- a** Differentieer de functie f en toon aan dat je deze kunt herleiden

$$\text{tot } f'(x) = -1 + \frac{36}{(x-1)^2}$$

- b** Bereken $f'(8)$ en leg met behulp van je antwoord uit of de x -coördinaat van de top van de grafiek van f kleiner of groter is dan 8.



Fileproblemen

Files kunnen door verschillende omstandigheden ontstaan. Wegwerkzaamheden, een ongeluk of de drukte na afloop van een voetbalwedstrijd kunnen bijvoorbeeld de oorzaak zijn van het ontstaan van een file.



De laatste jaren zijn door de overheid maatregelen genomen om het aantal files en de lengte ervan terug te brengen.

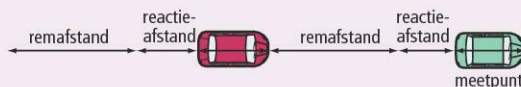
Top 10 files in 2013 (zwaarte = km × minuten)			
	weg	Traject van - naar	zwaarte
1	A20	Hoek van Holland - Gouda	218,848
2	A16	Breda - Rotterdam	137,826
3	A13	Rijswijk - Rotterdam	136,076
4	A50	Arnhem - Eindhoven	135,518
5	A20	Hoek van Holland - Gouda	126,291
6	A15	Rozenburg - Ridderkerk	115,479
7	A27	Gorinchem - Breda	110,377
8	A1	Amsterdam - Apeldoorn	109,438
9	A1	Apeldoorn - Amsterdam	89,125
10	A8	Zaandam - Amsterdam	83,131
Publieksrapportage Rijkswegennet 20 januari 2014			

De automobilist die in een file terechtkomt, wil er zo snel mogelijk weer uit komen.

Ook de verkeerspolitie wil dat een file zo snel mogelijk weer oplost. Zij wil dat bereiken door de maximumsnelheid aan te passen, zodat een vlotte doorstroming op gang wordt gehouden. De maximumsnelheid wordt aangegeven met borden boven de weg en hangt af van het aantal auto's dat per minuut een meetpunt passeert.

Om een model te maken met formules voor de doorstroming gebruik je de volgende aannamen:

- Alle auto's rijden met dezelfde snelheid V in km per uur.
- De onderlinge afstand A (in m) tussen alle auto's is gelijk aan de stopafstand S (in m).
- Alle auto's zijn gemiddeld 4 meter lang.
- De remafstand W (in m) is $0,0075V^2$.
- De reactietijd is 0,3 seconde.
- De reactieafstand (in m) is de afstand afgelegd tijdens de reactietijd.



Opdracht

De doorstroming D is het aantal auto's dat per minuut een meetpunt passeert.

a Leg uit dat geldt:

$$\text{doorstroming} = \frac{\text{snelheid in meters per minuut}}{4 + \text{reactieafstand} + \text{remafstand}}$$

b Laat zien dat je dit kunt herleiden tot de

$$\text{formule } D = \frac{1000V}{240 + 5V + 0,45V^2}$$

c Bereken met de afgeleide bij welke snelheid de doorstroming maximaal is.

d Hoeveel auto's passeren in dat geval per minuut een meetpunt?

e Is de gevonden oplossing realistisch?

Zo niet, welke van de aannamen is volgens jou het minst realistisch?

f Neem aan dat de auto's gemiddeld niet 4 m maar 6 m lang zijn.

Wordt de maximale doorstroming dan groter of kleiner?

Vaardigheden 2

Rijen

- 1** In januari 2017 krijgt Petra € 50,- kleedgeld per maand en elke volgende maand krijgt ze er € 1,50 bij. Het bedrag aan kleedgeld dat ze ontvangt kun je met een rij $u(n)$ beschrijven, waarbij $u(0) = 50$ het kleedgeld is dat ze in januari krijgt en n het aantal maanden na januari 2017.
- a** Geef een recursieve formule en een directe formule voor de rij $u(n)$.
- b** De rij $u(n)$ is een rekenkundige rij. Waarom?
- c** Bereken het totale bedrag aan kleedgeld dat zij in het eerste half jaar van 2017 ontvangt.
- d** Gerdine krijgt in januari 2017 ook € 50,- kleedgeld en zij krijgt elke volgende maand 2% erbij. Het bedrag aan kleedgeld dat zij krijgt, kun je beschrijven met de meetkundige rij met recursieve formule $v(n+1) = (n) \cdot 1,02$ waarbij $v(0) = 50$.
Geef een directe formule voor deze rij.

Bij een rekenkundige rij geldt voor de som van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$:

$$\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$$

Bij een meetkundige rij met reden r geldt voor de som van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$:

$$\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{\text{eerstvolgende term} - \text{eerste term}}{r - 1}$$

Het aantal termen van $u(p)$ tot en met $u(q)$ is $q - (p - 1)$.

Voorbeeld 1

Gegeven is de rekenkundige rij u : 16; 14,5; 13..., met $u(1) = 16$.

Bereken de som van de 7e tot en met de 21e term.

Oplossing

Het verschil is $-1,5$, dus $u(0) = 17,5$.

Een directe formule voor de rij is $u(n) = 17,5 - 1,5 \cdot n$.

$u(7) = 7$ en $u(21) = -14$.

De 7e tot en met de 21e term zijn 15 termen.

De gevraagde som is

$$\sum_{k=7}^{21} u(k) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (7 + (-14)) = -52,5.$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de rij $v(n) = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Bereken $\sum_{k=3}^9 v(k)$.

Oplossing

v is een meetkundige rij met reden $\frac{1}{2}$.

De gevraagde som is

$$\sum_{k=3}^9 v(k) = \frac{v(10) - v(3)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - 128}{-\frac{1}{2}} = 254.$$

- 2** Bereken met behulp van de formules voor zowel Petra als Gerdine uit opdracht 1, het totale bedrag dat zij in 2017 aan kleedgeld zullen ontvangen.

- 3** Van een rekenkundige rij is gegeven dat $u_2 = -269$ en $u_{120} = 85$.
- a** Bereken u_1 en u_{100} .
- b** Geef de recursieve formule en de directe formule voor de rij u_n .
- c** Bereken $\sum_{k=1}^{20} u_k$.
- 4** Van een meetkundige rij is gegeven dat $u_2 = 135$ en $u_5 = 3645$.
- a** Bereken u_1 en u_{10} .
- b** Geef de recursieve formule en de directe formule voor de rij u_n .
- c** Bereken $\sum_{k=2}^9 u_k$.
- 5** Nico zet 1500 euro op een bankrekening bij een rente van 2% per jaar. Hij gaat ervan uit dat het rentepercentage in de komende 20 jaar niet wijzigt.
- a** Noem v_n de hoeveelheid rente die wordt bijgeschreven na n jaar. Bereken, v_1 , v_2 en v_3 .
- b** Toon aan dat v een meetkundige rij is. Geef de directe formule van v_n .
- c** De totale hoeveelheid rente na 20 jaar kun je berekenen door de rentes die Nico elk jaar ontvangt bij elkaar op te tellen. Hoeveel rente heeft Nico ontvangen na 20 jaar?
- d** Een andere manier om de hoeveelheid rente te berekenen over 20 jaar, is $1500 \cdot 1,02^{20} - 1500$. Toon aan dat je hiermee hetzelfde bedrag krijgt als in opdracht c.

Formules herleiden

- 6** Druk K uit in t .
- a** $t = \frac{1}{2}(6K - 5)$ **d** $t(2K - 1) = 3t + 6$
- b** $3(K - 5) + 2t = 6 - 4(t - 3)$ **e** $2t - 7 = (K - 3)^3$
- c** $(t + 5)(2K - 3) = 8$ **f** $t = \sqrt{3K + 1}$
- 7** Gegeven zijn de formules $Y = 5K^{0,7}L^{0,6}$ en $L = K^{0,5}$.
- a** Druk Y uit in K .
- b** Druk K uit in L en druk Y uit in L .
- 8** Druk y uit in x en vereenvoudig het resultaat.
- a** $y = t^2 - 2t - 7$ en $t = x - 2$
- b** $y = t^2 - 4$ en $t = \sqrt{x + 1}$
- c** $\frac{2y}{2t + 6} = 4$ en $3x + t = 2$.

Voorbeeld

Herleid de volgende formule tot een vorm met één breuk.

$$y = \frac{3}{x} - \frac{5}{x+2} + 2$$

Oplossing

y is de som van drie breuken: $y = \frac{3}{x} + \frac{-5}{x+2} + \frac{2}{1}$

Eerst de noemers gelijknamig maken.

$$y = \frac{3 \cdot (x+2)}{x \cdot (x+2)} + \frac{-5 \cdot x}{x \cdot (x+2)} + \frac{2 \cdot x(x+2)}{x \cdot (x+2)}$$

Daarna haakjes in de teller wegwerken en gelijksoortige termen

$$\text{samennemen: } y = \frac{3x + 6 - 5x + 2x^2 + 4x}{x(x+2)} = \frac{2x^2 + 2x + 6}{x(x+2)}$$

9 Herleid de volgende functies tot een vorm met één breuk.

a $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

d $j(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$

b $g(x) = 3 - \frac{2}{x}$

e $k(x) = 2\sqrt{x-1} + \frac{5}{\sqrt{x-1}}$

c $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{4} + \frac{2}{x-1}$

f $m(x) = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}$

Sinusoïden

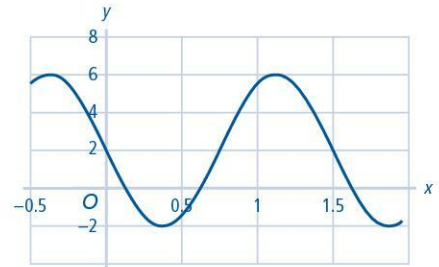
10 Hiernaast is een sinusoïde getekend. Gebruik deze grafiek bij de beantwoording van de volgende vragen.

a Geef de vergelijking van de evenwichtslijn.

b Hoe groot is de amplitude?

c Hoe groot is de periode?

d Geef de coördinaten van een punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtslijn gaat.



Een sinusoïde is een periodieke grafiek met een formule van de vorm $y = d + a \sin(b(x - c))$. De betekenis van de getallen a , b , c en d is:

> De amplitude is a als $a > 0$ en de amplitude is $-a$ als $a < 0$

> De evenwichtslijn is de lijn $y = d$

> De periode is $\frac{2\pi}{b}$

> De grafiek gaat in het punt (c, d) stijgend door de evenwichtslijn.

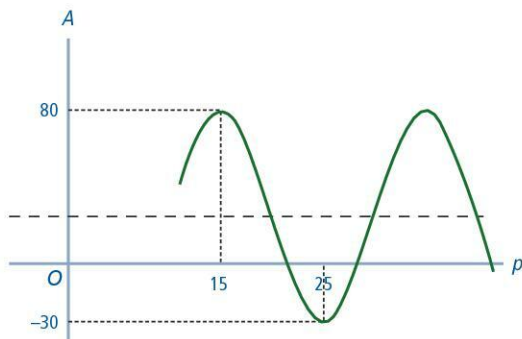
Dit punt wordt 'beginpunt' genoemd.

11a Geef een formule voor de sinusoïde uit opdracht 10.

b Leg uit dat de grafiek in opdracht 10 ook kan worden beschreven door $y = 2 - 4 \sin\left(\frac{4}{3}\pi x\right)$.

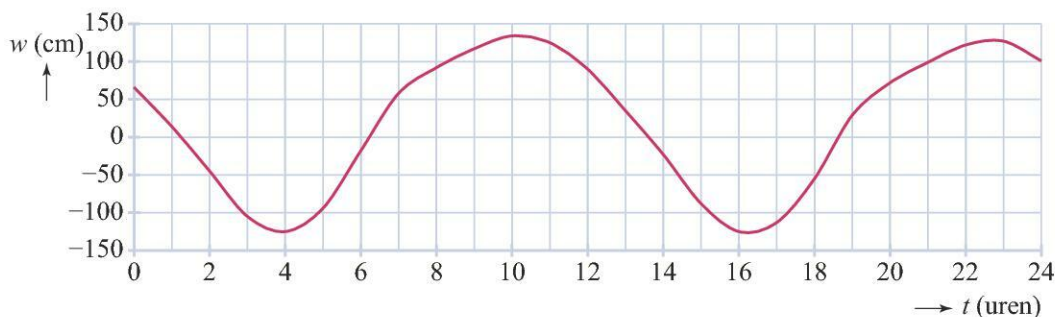
c Beredeneer wat de coördinaten zijn van de toppen op het interval $[0; 1,5]$.

12a Geef een formule van de sinusoiden hieronder.



b Bereken met behulp van symmetrie en periodicititeit de coördinaten van de eerste top waarvoor geldt $p > 100$.

13 Rijkswaterstaat publiceert voor een aantal plaatsen langs de Nederlandse kust de verwachte waterstanden. Deze worden met behulp van een wiskundig model berekend op basis van meetgegevens over een lange periode daarvoor. De grafiek hieronder geeft de verwachte waterstand op 14 november 2012 voor Schiermonnikoog.



Met de formule $w = 4 + 128\sin(0,51(t + 5,4))$ kunnen de waarden in de grafiek worden benaderd.

Hierin is w de waterstand in cm en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0:00 uur.

Het tijdstip van de maximale waterstand 's avonds verschilt volgens de formule met dat in de grafiek.

Bereken hoeveel minuten dat verschil is.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2014, tijdvak 1)

Combinatoriek

- 14** Vijf vriendinnen, Petra, Ineke, Hanneke, Gerlinde en Ans willen een feest. Uit hun midden kiezen ze een drietal dat samen het feest gaat organiseren. Ans vraagt zich af hoeveel verschillende drietallen er geselecteerd kunnen worden. Ze probeert het antwoord te vinden met een systematische aanpak.
- Op een stukje papier schrijft ze de namen en daaronder het rijtje w w w n n. Dat betekent in dit geval dat ze als eerste drietal Petra, Ineke en Hanneke heeft geselecteerd. De w staat voor 'wel kiezen' en de n voor 'niet kiezen'.
- a** Welk drietal heeft ze in de volgende rij geselecteerd?
- b** Onderzoek hoeveel verschillende drietallen in totaal geselecteerd kunnen worden.

P	I	H	G	A
w	w	w	n	n
w	w	n	w	n
...	...	...	...	...

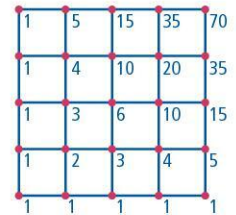
Een combinatie van 3 uit 7 is een keuze van een drietal uit een zevental: drie wel kiezen en vier niet kiezen.

Een rooster is een geschikt telmodel om het aantal mogelijke drietallen te berekenen want drie kiezen uit zeven komt overeen met het aantal manieren om in een rooster drie stappen naar rechts en vier stappen omhoog te doen.

Een route in een rooster vanuit (0, 0) naar (3, 4) bestaat uit zeven stappen waarvan drie naar rechts en vier omhoog.

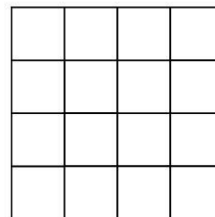
Het totaal aantal mogelijke routes noteer je als $\binom{7}{3}$.

Dit getal kun je met je rekenmachine berekenen.



- 15a** In een vaas zitten 12 witte en 3 rode ballen. Je pakt de ballen er één voor één uit en legt ze naast elkaar neer. Een mogelijk rijtje dat zo ontstaat is w w w w w r r w w w w w w r. Hoeveel verschillende rijtjes kunnen zo ontstaan?
- b** Je gooit 10 keer met een muntstuk. Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er met vijf keer kop en vijf keer munt?
- c** Aan twee tafels zijn respectievelijk drie en vier vrije plaatsen. Op hoeveel manieren kun je zeven gasten verdelen in groepen van drie en vier?
- d** 25 leerlingen gaan met drie busjes naar een excursie. In het eerste en tweede busjes kunnen negen leerlingen, in het derde kunnen zeven leerlingen mee. Op hoeveel manieren kun je de leerlingen in groepen van negen, negen en zeven verdelen?
- 16** In een kamer zijn acht lampen die onafhankelijk van elkaar aangedaan kunnen worden. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er
- a** om precies vijf lampen aan te doen?
- b** om minstens vijf lampen aan te doen?

- 17** Bereken het aantal mogelijkheden om dit 4×4 -bord te verven.
- a** Als elk veld naar vrije keus zwart of wit geverfd wordt.
 - b** Als 8 velden zwart en 8 velden wit geverfd worden.
 - c** Als 2 velden wit, 4 zwart en 10 rood geverfd worden.
 - d** Als elk veld met een andere kleur geverfd wordt, waarbij uit 20 kleuren gekozen mag worden.



- 18** Negen toeristen moeten over een gele, een rode en een blauwe boot worden verdeeld.
Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er, als
- a** in elke boot drie personen komen.
 - b** in elke boot minstens 2 en hoogstens 4 personen komen.
 - c** geen enkele boot leeg is.

- 19** Een groot kerkorgel telt soms wel enkele duizenden orgelpijpen. De pijpen zijn gegroepeerd in registers. Zo'n register is een rij van ruim 50 pijpen van verschillende lengte. Een aantal registers is hiernaast afgebeeld. Elk register onderscheidt zich van andere registers door vorm en materiaal van de pijpen. Elk register klinkt daardoor anders. Hilde gaat naar de muziekschool voor orgelles. Daar speelt ze op een orgel dat één toetsenbord heeft en 16 registers. Als alle registers op 'aan' staan, komt er bij het indrukken van een toets geluid uit 16 orgelpijpen. Voordat Hilde gaat spelen, moet ze eerst kiezen welk(e) register(s) ze 'aan' wil hebben. Zo'n keuze heet een registratie. Zet ze bijvoorbeeld alleen de registers 3, 7 en 13 op 'aan' dan zal bij het indrukken van een toets maar uit drie pijpen geluid komen. In de les mag ze één, twee of drie registers aanzetten. Anders hebben anderen last van het geluid.



<i>Pijpen van</i>	<i>gekoppeld aan toetsenbord</i>
registers 1 t/m 16	I
registers 17 t/m 31	II
registers 32 t/m 45	III

- a** Bereken uit hoeveel verschillende registraties ze in de les kan kiezen.
- b** Haar leraar is organist in een kerk met een groot orgel. Dat orgel heeft 45 registers en drie toetsenborden, aangeduid met I, II en III. In de tabel hiernaast lees je af aan welke toetsenborden de verschillende registers gekoppeld zijn. Hilde mag voor één keer op dit kerkorgel spelen. Omdat ze nog niet op meer dan één toetsenbord tegelijk kan spelen, moet ze eerst het toetsenbord kiezen waarop ze zal gaan spelen. Daarna nog de registratie bij het gekozen toetsenbord.
Van haar leraar mag ze helemaal vrij kiezen, geluidsoverlast is nu geen probleem.
Bereken uit hoeveel registraties ze kan kiezen.
(*Ontleend aan CE vwo wiskunde A 1995, tijdvak 2*)

Onderzoeksopdrachten

De opdrachten op deze twee bladzijden bevatten een hoeveelheid informatie in de vorm van getallen of formules, gevolgd door één vraag.

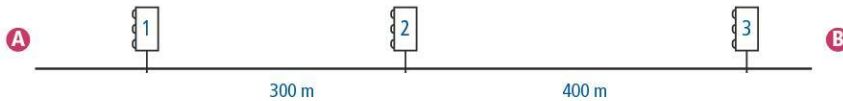
Op het Centraal Examen kun je ook dergelijke vragen verwachten.

- 0-1** Arthur, Bea, Cheriël, Diny en Erik doen mee aan een verloting.
In een bak liggen twaalf kaartjes met de nummers 1 tot en met 12. Ze mogen allemaal twee kaartjes trekken.
Om het spannend te maken zeggen ze wat de som is van de twee kaartjes die ze getrokken hebben:
Arthur zegt 11, Bea 4, Cheriël 16, Diny 7 en Erik 19
Onderzoek welke kaartjes iedereen heeft getrokken.
- 0-2** In grote steden is de metro vaak het snelste vervoermiddel. Hilbrand zit in metrolijn 7. Hij is bij het beginpunt opgestapt en is onderweg naar het eindpunt, 18 kilometer verder. Op de metrostations ziet hij geregeld een metro die de andere kant op rijdt. Hij vraagt zich af hoeveel metrotreinen op een gegeven moment minimaal nodig zijn om de dienst van lijn 7 te kunnen onderhouden.
Om deze vraag te beantwoorden maak je een wiskundig model. In dat model rijdt elke vijf minuten een trein van beginpunt naar eindpunt en van eindpunt naar beginpunt. Een trein die op het eindpunt aankomt, wacht twee minuten alvorens weer te vertrekken. Een trein die bij het beginpunt aankomt, wacht drie minuten voordat hij weer vertrekt. De gemiddelde snelheid van elke trein (dat is inclusief het stoppen bij de haltes) bedraagt 54 kilometer per uur. Onderzoek hoeveel metrotreinen onderweg zijn op het moment dat Hilbrand zich deze vraag stelt.



O-3 Groene zone

Op een weg tussen A en B staan achter elkaar drie werkende verkeerslichten. Alle drie verkeerslichten hebben een even grote tijd groen licht (maar niet per se op hetzelfde moment). De afstand tussen verkeerslicht 1 en verkeerslicht 2 is 300 meter en tussen verkeerslichten 2 en 3 zit 400 meter. Zie onderstaande figuur.



De bedoeling is dat een zogenoemde groene zone ingesteld wordt op deze weg. Bij die groene zone wordt ervoor gezorgd dat een auto die met een snelheid van 50 km/u over deze weg van A naar B rijdt, bij alle verkeerslichten groen heeft.

Onderzoek hoe de lichten afgesteld moeten zijn om die groene zone te realiseren.

(Ontleend aan het Voorbeeldexamen Havo A)

O-4 Voetbalcompetitie

De eindstand van de Nederlandse voetbalcompetitie van het seizoen 2008–2009 staat in onderstaande tabel.

tabel

plaats	ploeg	punten	plaats	ploeg	punt en
1	AZ	80	10	Vitesse	43
2	FC Twente	69	11	NEC	42
3	Ajax	68	12	Willem II	37
4	PSV	65	13	Sparta Rotterdam	35
5	SC Heerenveen	60	14	ADO Den Haag	32
6	FC Groningen	56	15	Heracles Almelo	32
7	Feyenoord	45	16	Roda JC	30
8	NAC Breda	45	17	De Graafschap	30
9	FC Utrecht	44	18	FC Volendam	29

De 18 ploegen hebben een hele competitie tegen elkaar gespeeld, dat betekent dat elke ploeg tegen elke andere ploeg een thuiswedstrijd en een uitwedstrijd heeft gespeeld.

Voor een overwinning krijgt een ploeg 3 punten, voor een gelijkspel 1 punt en voor een verliespartij geen punten.

Onderzoek hoeveel wedstrijden in deze competitie zijn geëindigd in een gelijkspel.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2014, tijdvak 1)



Radioactieferval

In de grafieken hierboven zie je hoe bij de radioactieve elementen Cesium-134 en Kobalt-60 de radioactiviteit afneemt. De tijd waarin de hoeveelheid radioactiviteit van het element halveert heet de halfwaardetijd.

Welk element heeft de grootste halfwaardetijd en hoeveel keer zolang is die halfwaardetijd dan de halfwaardetijd van het andere element?

Hoofdstuk 5

Exponentiële en logaritmische functies

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	122
5-1	Exponentiële en logaritmische functies	124
5-2	Logaritmische schalen	126
5-3	Exponentiële functies differentiëren	128
5-4	Logaritmische functies differentiëren	130
5-5	Groeimodellen	132
5-6	Gemengde opdrachten	134
	Samenvatting	136
	Test jezelf	138
	Extra oefening - Basis	140
	Extra oefening - Gemengd	141
	Uitdagende opdrachten	142
	Hoe oud zijn historische vondsten?	143

Voorkennis

- V-1** In een gebied was in het begin van deze eeuw sprake van een konijnenplaag. In 2000 werden vossen uitgezet om het aantal konijnen te laten afnemen. Vanaf dat tijdstip hebben biologen gedurende vijf achtereenvolgende jaren op 1 juli het aantal konijnen geteld. In de tabel vind je het resultaat.
- a** Elk jaar wordt het aantal konijnen met ongeveer hetzelfde getal vermenigvuldigd. Bereken dat getal in twee decimalen.
- b** Neem aan dat de afname op dezelfde manier is doorgegaan. Hoeveel konijnen waren er in 2005? En in 2006?
- c** In welk jaar waren in het gebied voor het eerst minder dan 200 konijnen?

jaar	aantal konijnen
2000	1200
2001	1020
2002	870
2003	740
2004	630

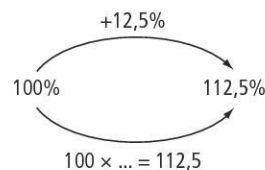
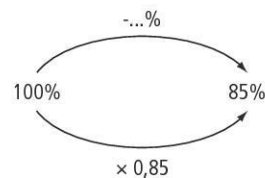
Het getal waarmee je een oude hoeveelheid moet vermenigvuldigen om een nieuwe hoeveelheid te krijgen heet de factor.

Er geldt: nieuwe hoeveelheid = factor $\times$ oude hoeveelheid.

Bij een exponentieel groeiproces is deze factor constant en heet de groeifactor.

- V-2** Bereken telkens de factor waarmee je het oude aantal moet vermenigvuldigen om het nieuwe aantal te krijgen.
- a** Het aantal leerlingen van een school is afgenomen van 1480 tot 1332.
- b** Het gewicht van een varken is toegenomen van 105 tot 125 kg.
- c** De lengte van Gerrit is met 14 cm toegenomen tot 188 cm.

- V-3** Bereken in de volgende gevallen de groeifactor.
- a** De toename is 12,5%. **d** De afname is 20%.
- b** De toename is 8%. **e** De afname is 1,3%.
- c** De toename is 0,3%. **f** De afname is 0,16%.



- V-4** Welke procentuele toename of afname hoort bij de volgende groeifactoren?
- a** 0,85 **d** 0,1
- b** 1,36 **e** 1,205
- c** 0,99 **f** 0,805
- V-5** In 2014 zijn in een land 6,47 miljoen auto's. In de jaren voor 2014 is het aantal auto's jaarlijks toegenomen met 4,2%. De verwachting is dat het aantal auto's in de jaren na 2014 elk jaar met hetzelfde percentage toeneemt.
- a** Leg uit waarom je het aantal auto's kunt berekenen met de formule $A = 6,47 \cdot 1,042^t$. Hierin is A het aantal auto's in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2014.
- b** Bereken in welk jaar het aantal auto's volgens de formule gelijk is aan 10 miljoen.

Exponentiële vergelijkingen zoals $7 \cdot 2,3^x = 20$ kun je met je rekenmachine oplossen, maar ook met logaritmen.

Uit $g^x = a$ volgt $x = {}^g\log(a)$
 Uit ${}^g\log(a) = x$ volgt $a = g^x$

Voorbeeld 1

Los op $7 \cdot 2,3^x = 20$.

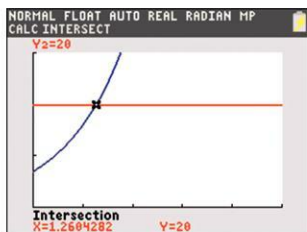
Oplossing

$$Y_1 = 7 \cdot 2,3^x$$

$$Y_2 = 20$$

intersect,

geeft $x \approx 1,26$.



Voorbeeld 2

Los op met logaritmen $7 \cdot 2,3^x = 20$.

Oplossing

$$2,3^x = \frac{20}{7}$$

$$x = {}^{2,3}\log\left(\frac{20}{7}\right) \quad (\text{exacte oplossing})$$

$$x = \frac{\log\left(\frac{20}{7}\right)}{\log(2,3)} \approx 1,26 \quad (\text{benadering})$$

V-6 Gegeven is de functie $N(t) = 26 \cdot 1,69^t$.

a Is de grafiek van N stijgend of dalend? Leg uit hoe je dat aan het functievoorschrift kunt zien.

b Gebruik logaritmen om de volgende vergelijkingen op te lossen.

1 $26 \cdot 1,69^t = 750$

2 $26 \cdot 1,69^t = 0,075$

V-7 Los de volgende vergelijkingen op. Geef een exacte oplossing en een benadering in twee decimalen.

a $2^x = 15$

c $0,65^{2x} = 3$

b $3 \cdot 1,2^x = 21$

d $3,8 \cdot 2,5^{x+1} + 4 = 20$

Bij het rekenen met logaritmen kun je gebruik maken van rekenregels. Voor $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$ en $b > 0$ gelden de rekenregels hiernaast.

Voorbeelden

$$\frac{1}{2} \cdot {}^5\log(100) =$$

$$3 + {}^5\log(x) =$$

$${}^5\log(100^{\frac{1}{2}}) = {}^5\log(10)$$

$${}^5\log(5^3) + {}^5\log(x) = {}^5\log(125x)$$

$${}^g\log(g) = 1 \text{ en } {}^g\log(1) = 0$$

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

$${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$$

V-8 Schrijf als één logaritme.

a ${}^3\log(10) + {}^3\log(7)$

d ${}^3\log(15) - \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(25)$

b ${}^5\log(a) + 3 \cdot {}^5\log(2)$

e $3 \cdot {}^2\log(a) + {}^2\log(5a)$

c $2 \cdot {}^7\log(b) - {}^7\log(5)$

f $5 + 4 \cdot {}^2\log(k)$

V-9 Los de volgende vergelijkingen op zoals hiernaast.

a $5 - {}^2\log(x) = 4$

c ${}^3\log(2x) + {}^3\log(5) = 2$

b ${}^7\log(2a) = 1$

d $2 \cdot \log(b) - \log(5) = 1$

$${}^4\log(2a) = 3$$

$$2a = 4^3$$

$$2a = 64$$

$$a = 32$$

5-1

Exponentiële en logaritmische functies

- 1 Het totaal aantal huishoudens in Nederland zal naar verwachting exponentieel groeien van 7,2 miljoen in 2008 naar 8,0 miljoen in 2050.
- a Bereken de groeifactor van het aantal huishoudens over deze periode van 42 jaar.
- b Bereken de groeifactor per jaar.
- c Met hoeveel procent groeit het aantal huishoudens per jaar?
- d Stel een formule op voor het verband tussen het aantal huishoudens N en de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ in 2008.
- e Bereken het verwachte aantal huishoudens in 2040.

Theorie

Bij een **exponentieel groeiproces** $N = b \cdot g^t$ wordt de hoeveelheid N per tijdseenheid steeds met dezelfde factor vermenigvuldigd. Deze factor heet de **groeifactor** g .

De hoeveelheid op tijdstip $t = 0$ is de **beginhoeveelheid** b .

Voor het rekenen met groeifactoren geldt:

Als g de groeifactor per tijdseenheid is, dan is g^n de groeifactor over n tijdseenheden

Voorbeelden

De groeifactor per uur is 0,8.
Bereken de groeifactor per dag en per kwartier.
Met welke percentages neemt de hoeveelheid per dag en per kwartier af?

Oplossing

Groeifactoren:

per dag: $0,8^{24} \approx 0,0047$,

per kwartier: $0,8^{\frac{1}{4}} \approx 0,946$.

Afnamepercentages:

per dag: $(1 - 0,0047) \cdot 100\% = 99,53\%$,

per kwartier: $(1 - 0,946) \cdot 100\% = 5,4\%$.

- 2 Een hoeveelheid neemt elk kwartaal toe met 14%.
 - a Hoe groot is de groeifactor per kwartaal?
 - b Bereken de groeifactor per jaar, per half jaar en per maand.
 - c Bereken ook de bijbehorende groeipercentsages.
 - d Bereken na hoeveel maanden de hoeveelheid is verdubbeld.
- 3a Hiernaast zie je hoe Krista de formule $P = 3 \cdot 1,2^{2k}$ herleidt waarbij ze k uitdrukt in P .
Maak deze herleiding af.
- b Herleid de formule $A = 0,5 \cdot 3^{q+1}$ tot $q = -1 + {}^3\log(2A)$.
- c Gegeven is de formule $w = 2 \cdot 3^{0,5n} - 4$.
Druk n uit in w .
- 4 Druk bij de volgende formules t uit in N .
 - a $N = 3 \cdot 2^t$
 - b $N = 0,2 \cdot 4^{t-3}$
 - c $N = 5 + 4 \cdot 0,8^{t+2}$
 - d $N = {}^5\log(t)$
 - e $N = 5 \cdot {}^3\log(2t)$
 - f $N = {}^2\log(3t + 2)$

	Krista
	$p = 3 \cdot 1,2^{2k}$
	$3 \cdot 1,2^{2k} = p$
	$1,2^{2k} = \frac{1}{3}p$
	$2k = \dots \log(\frac{1}{3}p)$
	$k = \dots$

Functies waarin de vorm $^g\log(x)$ voorkomt heten **logaritmische functies**. Het **grondtal** g is net als bij exponentiële functies altijd positief maar ongelijk aan 1. Voor $0 < g < 1$ is de grafiek dalend en voor $g > 1$ stijgend. De grafiek van de functie $f(x) = ^g\log(x)$ heeft de lijn $x = 0$ als verticale asymptoot.

Met $\log(x)$ wordt $^{10}\log(x)$ bedoeld.

Voorbeeld

Geef de verticale asymptoot en de coördinaten van het snijpunt met de x -as van de grafiek bij de formule $N = 1 + ^2\log(x - 1,5)$.

Oplossing

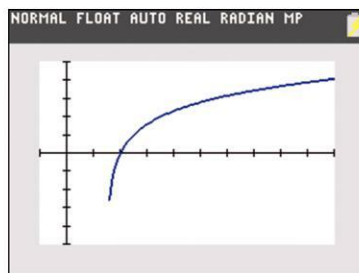
De grafiek heeft een asymptoot als $x - 1,5 = 0$ dus $x = 1,5$.

De grafiek heeft een snijpunt met de x -as als

$$1 + ^2\log(x - 1,5) = 0 \text{ ofwel } ^2\log(x - 1,5) = -1.$$

Hieruit volgt $x - 1,5 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, dus $x = 2$.

Het snijpunt met de x -as is het punt $(2, 0)$.



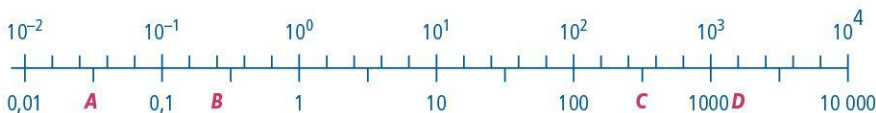
- 5 Bij het begin van een brand lopen de temperaturen in de brandhaard heel snel op. Die kun je bij een 'standaardbrand' berekenen met de formule $T = 345 \cdot \log(8t + 1) + T_0$. Hierin is T de temperatuur, t minuten na het begin van de brand en T_0 de temperatuur op het tijdstip dat de brand uitbrak. De temperatuurstijging is dus $T - T_0$.
 - a Laat met een berekening zien dat uit de formule voor $t = 0$ volgt dat $T = T_0$.
 - b Bereken na hoeveel minuten de temperatuurstijging 500 graden is.
 - c Na hoeveel minuten is de temperatuur met 800 graden opgelopen?

- 6 Daglicht wordt door water geabsorbeerd, zodat de lichtsterke onder water snel afneemt. In een meer met vrij helder water kun je het percentage daglicht benaderen met de formule $P = 100 \cdot 0,75^d$. Hierin is P het percentage daglicht en d de diepte in meters.
 - a Bereken met behulp van een logaritme de diepte waarop de hoeveelheid daglicht gehalveerd is.
 - b Op welke diepte is nog een kwart van de hoeveelheid daglicht aanwezig?
 - c Herleid de gegeven formule zodat d wordt uitgedrukt in P .
 - d Een bioloog heeft onderzoek gedaan naar het voorkomen van algen. Een formule die past bij het aantal algen A per cm^3 is $A = 60 + 2 \cdot 0,9 \log(d)$. Laat met algebra zien dat je deze formule kunt schrijven als $A = 0,9 \log(0,0018d^2)$.
 - e Hoeveel procent van het daglicht hebben de algen minimaal nodig om te kunnen overleven?



5-2

Logaritmische schalen

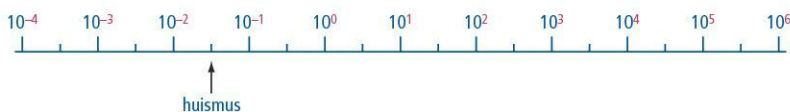


- 7** De getallenlijn hierboven heeft een logaritmische schaalverdeling.
- a** Waaraan kun je dat zien, dat de schaalverdeling niet lineair is? Wat neemt bij de getallenlijn hierboven wel lineair toe?
- b** Getal A ligt precies in het midden tussen 10^{-2} en 10^{-1} , dus A is $10^{-1,5}$. Bereken A in drie decimalen.
- c** Vul in: $B = 10^{\dots}$ en laat zien dat B , afgerond op twee decimalen, gelijk is aan 0,25.
- d** Bereken de getallen die bij C en D moeten staan.

- 8** In de tabel staan van een aantal dieren het gemiddeld gewicht.
- a** Hoeveel keer zwaarder is een olifant vergeleken met de huismus?

dieren	gewicht in kg	gewicht 10^a kg
huisvlieg	0,00015	...
huismus	0,032	$10^{-1,5}$
kip	1,5	...
leeuw	180	...
olifant	3200	...
blauwe vinvis	150 000	...

- b** Waarom is het niet mogelijk om alle gewichten overzichtelijk op een lineaire getallenlijn te tekenen?
- c** Ga na dat je het gewicht van de huismus kunt schrijven als $10^{-1,5}$ kg.
- d** Als je het gewicht van de kip als macht van 10 wilt schrijven moet je de vergelijking $10^a = 1,5$ oplossen.
Vul in: $a = \dots \log(\dots) \approx \dots$
- e** Neem de tabel over en schrijf in de derde kolom de gewichten als machten van 10.
- f** Op onderstaande getallenlijn met een logaritmische schaalverdeling kun je de gewichten wel overzichtelijk plaatsen.
Neem de getallenlijn over en zet de namen van de andere dieren op de juiste plaats er bij.



Aanpak

Hoe geef je een getal a aan op een logschaal?

- Schrijf de getallen op de logschaal als machten van 10.
- Schrijf het getal a als macht van 10 door de vergelijking $10^b = a$ op te lossen.
- Geef het getal 10^b aan op de logschaal.

Voorbeeld

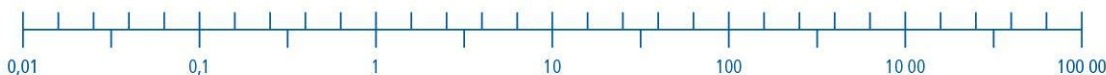
Geef het getal 243 aan op een logschaal.

Oplossing

1

2 $10^b = 243$ geeft $b = \log(243) \approx 2,4$.

3 $10^{2,4}$ ligt op $\frac{4}{10}$ deel tussen 10^2 en 10^3 .



- 9a** Teken op de gegeven logschaal de getallen 0,8 en 7
b Teken ook op deze logschaal de getallen 3008 en 5600.

10a Van het verband tussen twee variabelen y en t is een grafiek getekend.

- a** Leg uit dat de schaalverdeling op de y -as een logaritmisch schaalverdeling is.
b De grafiek is een rechte lijn.
 Neem de tabel hieronder over en vul de y -coördinaten in van de overeenkomstige punten op de grafiek.

t	-4	-2	0	2	3
A	0,3	3	...	...	...

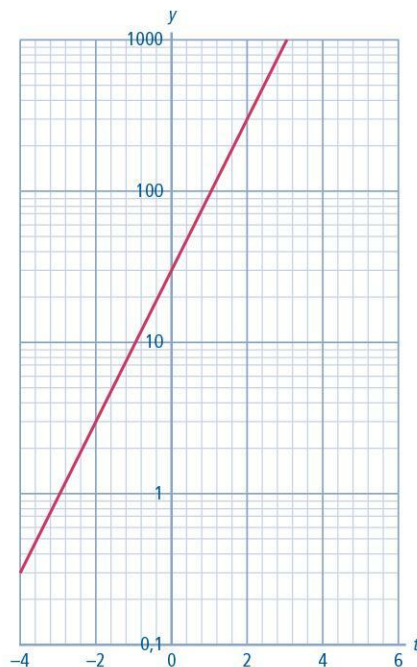
- c** Toon aan dat er een exponentieel verband is tussen y en t en geef een formule waarbij y is uitgedrukt in t .
d Maak een tabel bij de formule $B = 400 \cdot 0,2^t$ en teken de grafiek bij deze formule in hetzelfde assenstelsel.
e Teken in hetzelfde assenstelsel de grafieken bij de formules: $C = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$ en $D(t) = 0,4 \cdot 5^t$

Een schaalverdeling waar bij gelijke stappen met een vast getal wordt vermenigvuldigd heet een logaritmische schaal of logschaal..

Dat vaste getal is meestal 10.

Je gebruikt een logschaal als je zowel erg grote als erg kleine waarden in één grafiek moet verwerken.

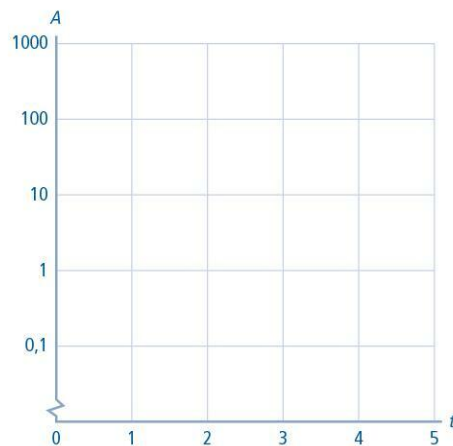
Als een grafiek bij een logaritmische schaalverdeling op de verticale as een rechte lijn is, is het verband exponentieel.



- 11** Bij een aanvaring verloor een olietanker een groot deel van de lading. Om 10 uur 's morgens ($t = 0$) had de uitgestroomde olie een oppervlakte van $0,12 \text{ km}^2$. De oppervlakte A werd elk uur drie keer zo groot.

t in uren	0	1	2	3	4	5	6
oppervlakte A in km^2	0,12	0,36	1,08	...	...	...	...

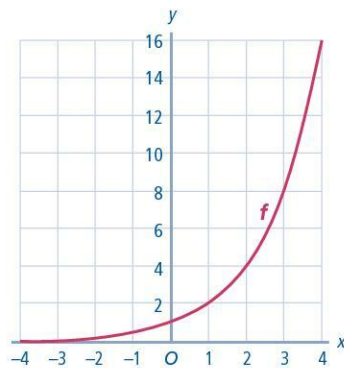
- a** Neem de tabel over en vul die verder in.
b Bereken op welk tijdstip de oppervlakte 10 km^2 was. Rond je antwoord af op een geheel aantal minuten.
c Teken de grafiek van A in het assenstelsel hiernaast.
d Lees uit de grafiek af hoe groot de oppervlakte om half negen 's morgens was.



5-3

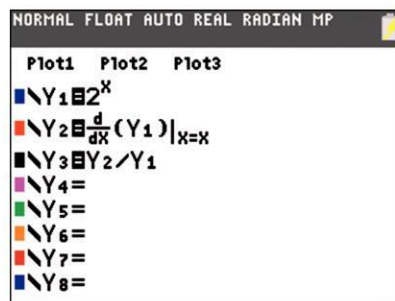
Exponentiële functies differentiëren

- 12a** Differentieer de functies $g(x) = x^3$ en $h(x) = 2x^4 - 7$.
- b** Hiernaast staat de grafiek van $f(x) = 2^x$.
Anne zegt: 'Als ik de regel voor het differentiëren van machtsfuncties toepas op $f(x) = 2^x$ krijg ik $f'(x) = x \cdot 2^{x-1}$. Bereken de waarde van de afgeleide van Anne in het punt met $x = 0$.
- c** Leg uit dat dit niet kan kloppen.



- 13a** Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = 2^x$ en de grafiek van de bijbehorende hellingen in één figuur.
- b** Maak een tabel van de hellingen en ga na dat ook hier sprake is van exponentiële groei. Hoe groot is de groeifactor?
- c** Maak een tabel op je rekenmachine van $\frac{Y_2}{Y_1}$.
Waaruit blijkt dat $f'(x)$ evenredig is met $f(x)$?
- d** Geef een functievoorschrift van de afgeleide functie $f'(x)$.
- e** Laat zien dat voor de afgeleide van $g(x) = 3^x$ geldt $g'(x) \approx 1,10 \cdot 3^x$.

Hulpboek 3-5 | Hellingen



- 14a** Gebruik je rekenmachine om de tabel hiernaast in te vullen.
- b** Er is een getal a waarvoor geldt dat de afgeleide van $f(x) = a^x$ gelijk is aan $f'(x) = 1 \cdot a^x$.
Gebruik de tabel van opdracht a om een schatting te geven van de grootte van a .
- c** Bepaal de afgeleide van $f(x) = 2,6^x$ en voor $f(x) = 2,7^x$.
Wat kun je nu zeggen over de waarde van a ?
- d** Bereken in twee decimalen de waarde van a waarvoor geldt dat de afgeleide van $f(x) = a^x$ gelijk is aan $f'(x) = 1 \cdot a^x$.

functie f	afgeleide f'
$f(x) = 1,5^x$	...
$f(x) = 2^x$	$f'(x) = 0,69 \cdot 2^x$
$f(x) = 2,5^x$	...
$f(x) = 2,8^x$	...
$f(x) = 3^x$	$f'(x) = 1,10 \cdot 3^x$
$f(x) = 4^x$	...

Theorie

Voor de **afgeleide functie van een exponentiële functie** geldt:
Als $f(x) = a^x$ dan is $f'(x) = \text{constante} \cdot a^x$.
Er is één waarde van a waarvoor geldt dat de constante gelijk is aan 1.
Die waarde heet **het getal van Euler**, je noteert dit met **e**.
Het getal e is bij benadering gelijk aan 2,72.
Er geldt dus: als $f(x) = e^x$, dan is $f'(x) = e^x$.

Voorbeeld 1

Geef de afgeleide van $y = 3 \cdot e^x + 5$.

Oplossing

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot e^x.$$

Voorbeeld 2

Geef de afgeleide van $g(p) = p^2 \cdot e^p$.

Oplossing

g is een productfunctie.

Met de productregel:

$$g'(p) = 2p \cdot e^p + p^2 \cdot e^p.$$

Voorbeeld 3

Gegeven is $K = e^{5p+6}$. Geef $\frac{dK}{dp}$.

Oplossing

K is een kettingfunctie met

$$K = e^g \text{ en } g = 5p + 6.$$

$$\frac{dK}{dg} = e^g \text{ en } \frac{dg}{dp} = 5$$

$$K' = \frac{dg}{dp} \cdot \frac{dK}{dg} = 5 \cdot e^g \text{ ofwel } \frac{dK}{dp} = 5e^{5p+6}$$

15 Differentieer de volgende functies.

a $h(t) = 4 \cdot e^t - 70$

c $B(x) = 15 \cdot e^{-2x}$

b $f(x) = e^{4x-8}$

d $W(p) = -12p \cdot e^{2p+4}$

16a Laat zien dat de afgeleide van $f(x) = e^{ax}$ is $f'(x) = a \cdot e^{ax}$.

b Je kunt $f(x) = 2^x$ schrijven als $f(x) = e^{ax}$.

Toon aan dat $a = {}^e\log(2)$.

c Toon aan dat voor de afgeleide van $f(x) = 2^x$ geldt $f'(x) \approx 0,69 \cdot 2^x$.

d Bereken op dezelfde manier de afgeleide van $h(x) = 5^x$.

Theorie

De afgeleide functie van $f(x) = a^x$ is $f'(x) = {}^e\log(a) \cdot a^x$. Een andere, meer gebruikte, notatie voor ${}^e\log(a)$ is $\ln(a)$, de **natuurlijke logaritme** van a .

Er geldt dus: als $f(x) = a^x$ dan is $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.

Op de rekenmachine kun je de natuurlijke logaritme benaderen met de LN-knop.

Voorbeeld

Geef de afgeleide van $g(p) = 100 \cdot 0,93^p$.

Oplossing

$$g'(p) = 100 \cdot \ln(0,93) \cdot 0,93^p \approx -7,26 \cdot 0,93^p$$

H 17 Differentieer de volgende functies.

a $g(t) = 300 \cdot 1,75^t$

c $H(x) = 45 \cdot 3^{4x+6}$

b $W(n) = 5,05 \cdot 0,86^n + 90$

d $K(q) = 12 \cdot q^{1,65}$

H 18 Een satelliet gebruikt voor de energievoorziening onder andere een radioactieve brandstof. Hiervan neemt het vermogen P af volgens de formule $P = 40 \cdot e^{-0,006t}$, met P in watt en t in dagen.

a Bereken de groeifactor per dag.

b Na hoeveel dagen is het vermogen gehalveerd?

c Bepaal de formule van de afgeleide P' .

d Bereken de snelheid waarmee het vermogen afneemt na 100 dagen.

☀ 19 Voor de functie $f(x) = e^x$ geldt dat de afgeleide gelijk is aan de functie zelf.

Geef ten minste drie functies die deze eigenschap ook hebben.

5-4

Logaritmische functies differentiëren

- 20** Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x)$.
- a** Plot en schets de grafiek van f .
- b** Maak een tabel met hellingen van de grafiek van f en vul de tabel hiernaast in.
- c** Laat zien dat $f'(x)$ omgekeerd evenredig is met x .
- d** Welk functievoorschrift van $f'(x)$ volgt uit opdracht c?

x	0,5	1	2	5	10
$f'(x)$	...	...	...	...	...

x en $f'(x)$ zijn omgekeerd evenredig als geldt:
 $x \cdot f'(x) = \text{constant}$.

Je hebt bij opdracht 20 gezien dat $f'(x) = \frac{1}{x}$ de afgeleide is van $f(x) = \ln(x)$. In de volgende opdracht ga je onderzoeken wat de afgeleide is van logaritmische functies met andere grondtallen.

- 21** Gegeven is de functie $g(x) = {}^2\log(x)$.
- a** Toon aan dat je ${}^2\log(x)$ kunt schrijven als $\frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x)$.
- b** Leg uit dat de afgeleide van g is $g'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{x}$.
- c** Geef de afgeleide van de functie $h(x) = {}^3\log(x)$.

$${}^p\log(q) = \frac{{}^g\log(q)}{{}^g\log(p)}$$

Theorie

Voor de **afgeleide van de logaritmische functie** met grondtal

g geldt: Als $f(x) = {}^g\log(x)$ dan is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g) \cdot x}$

Voorbeeld 1

Bereken de afgeleide van $f(x) = {}^{0,6}\log(x)$.

Oplossing

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(0,6)} \cdot \frac{1}{x} \approx -\frac{1}{0,51 x}$$

Voorbeeld 2

Differentieer de functie $N(x) = 6 + {}^8\log(4x^2 + 9x)$.

Oplossing

Met de kettingregel:

$$u = 4x^2 + 9x \text{ en } y = 6 + {}^8\log(u)$$

$$\frac{du}{dx} = 8x + 9 \text{ en } \frac{dy}{du} = \frac{1}{\ln(8)} \cdot \frac{1}{u}$$

$$N'(x) = (8x + 9) \cdot \frac{1}{\ln(8) \cdot u} \approx \frac{8x + 9}{2,08 \cdot (4x^2 + 9x)}$$

- H 22** Differentieer de volgende functies.

- a** $T(a) = \ln(2a + 5)$ **d** $K(p) = {}^{0,9}\log(p)$
- b** $G(q) = 5 \cdot \ln(3q)$ **e** $W(q) = 5q^2 + 6 \cdot {}^{1,5}\log(q)$
- c** $h(x) = {}^3\log(x + 1)$ **f** $D(w) = 4 \cdot {}^{0,5}\log(12w)$

- 23** Leg uit dat de afgeleide van $f(x) = \ln(a \cdot x)$ gelijk is aan de afgeleide van $g(x) = \ln(x)$.

24 Stel de formule op van de afgeleide van de volgende formules.

a $K = e^s \cdot \log(3s)$

d $T = 2x \cdot e^{3x-7}$

b $H = 150 + {}^{1,06}\log(23t + 240)$

e $G = x \cdot \ln(12x + 7)$

c $N = \frac{w+2}{\ln(w)}$

f $P = \frac{5}{\ln(2q) + 3}$

25 Gegeven is de functie $f(x) = 4 \cdot {}^2\log(2x - 1)$.

a Stel het functievoorschrift op van $f'(x)$.

b Bereken met behulp van de afgeleide de helling van de grafiek van f in het punt $(4,5; 12)$ in één decimaal nauwkeurig.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met $x = 4,5$.

d Bereken in welk punt van de grafiek van f de helling gelijk is aan 2.

H 26 Bij een test van oplaadbare batterijen laat Max een speelgoedautootje onafgebroken rijden.

Het eerste uur rijdt het autootje met een constante snelheid van 6 kilometer per uur. Daarna neemt de snelheid af doordat de batterij leeg raakt.

Het verband tussen de afgelegde afstand s in kilometers en de tijd t in uren wordt voor $t \geq 1$ gegeven door $s = 6 + 13,8 \cdot \log(t)$.

a Hoeveel km heeft het autootje afgelegd in de periode tussen $t = 1$ en $t = 2$?

b En hoeveel kilometer wordt in het derde uur afgelegd?

c Welke snelheid heeft het autootje nog na vijf uur?

Hoeveel km heeft het autootje dan afgelegd?

d Na hoeveel uur is de snelheid gedaald tot onder 1 km per uur?

27 De lawaaioverlast die je van een snelweg ondervindt, is afhankelijk van de afstand die je tot de snelweg hebt en ook van de snelheid van het verkeer.

De formule die het gemiddelde lawaainiveau van de snelweg benadert is $L = 89,5 - 9,9 \cdot \log(a \cdot v) + 0,16v - 0,03a$.

Hierin is a de afstand tot de snelweg in meters en v de gemiddelde snelheid van het verkeer op de snelweg in kilometer per uur.

a Neem $v = 80$.

Laat met behulp van de afgeleide zien dat de lawaaioverlast afneemt als de afstand tot de snelweg groter wordt.

b Bewoners van woningen dichtbij de snelweg ondervinden vooral veel overlast bij hoge en zeer lage gemiddelde snelheden van het verkeer.

Een huis staat 100 meter van de snelweg.

Onderzoek bij welke gemiddelde snelheid van het verkeer het gemiddelde lawaainiveau bij deze woning minimaal is.

(Ontleend aan CE VWO wiskunde A 1995, tijdvak 1)



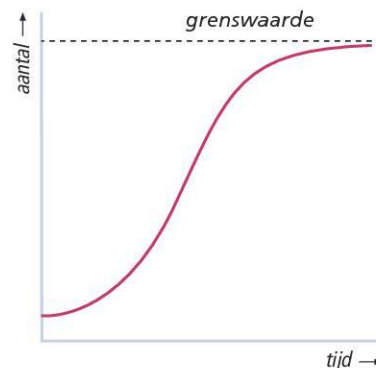
5-5

Groeimodellen

- 28 Bij een chemisch proces kun je de concentratie C van de stof die bij dit proces ontstaat, benaderen met de formule $C = 500 - 500 \cdot 0,96^t$. In deze formule is C in mol/dm³ en t in minuten.
- Beredeneer naar welke waarde de concentratie C nadert.
 - Bereken op welk moment de concentratie gelijk is aan 250 mol/dm³.
 - Bereken met welke snelheid de concentratie op dat moment verandert.
- H 29 Het aantal vliegjes N in een afgesloten ruimte kan benaderd worden met de formule $N = \frac{1000}{1 + 9 \cdot e^{-0,1t}}$. In deze formule is t het aantal dagen vanaf het begin van de proef.
- Ga met behulp van een tabel na dat tijdens de eerste vijf dagen de groei van het aantal vliegjes vrijwel exponentieel is.
 - Beredeneer met de formule tot welk maximum het aantal vliegjes nadert.
 - Toon aan dat de afgeleide gelijk is aan $\frac{dN}{dt} = \frac{900e^{-0,1t}}{(1 + 9e^{-0,1t})^2}$
 - Op welke dag is het aantal vliegjes volgens de formule het meest toegenomen?

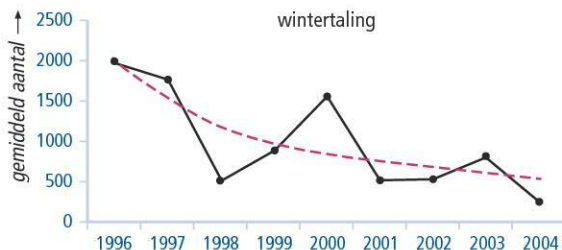
Theorie

Om de ontwikkeling van een populatie of een proces te beschrijven gebruik je een **wiskundig model**. Als de omvang van een populatie op den duur een vaste waarde nadert, is er sprake van begrensde groei. De grafiek hiernaast geeft een veel voorkomend verloop van begrensde groei weer. Eerst neemt de populatie steeds sneller toe, maar vanaf een bepaald moment neemt de populatie steeds langzamer toe en nadert een maximale waarde.



- 30 Marja heeft gedurende 10 jaar een schatting gemaakt van het aantal konijnen in een duingebied. Na 2010 blijft het aantal konijnen ongeveer gelijk.
- Ga na dat het verschil van het aantal konijnen ten opzichte van 2010 bij benadering exponentieel afneemt.
 - Bij deze tabel heeft Marja een formule opgesteld van de vorm $A = a - b \cdot g^t$. Hierin is t de tijd in jaren na 2000 en A het aantal konijnen. Leg uit dat in deze formule geldt $a = 850$.
 - Welke waarde heeft b ?
 - Geef een formule voor A en van de afgeleide van A .
 - Hoe kun je aan de afgeleide zien dat het aantal konijnen steeds langzamer toeneemt?

jaar	aantal A	verschil
2000	200	650
2001	485	365
2002	645	205
2003	735	...
2004	785	...
2005	815	...
2006	830	...
2007	840	...
2008	845	...
2009	850	...
2010	850	...



- 31** Een bioloog heeft gedurende een aantal jaren het aantal wintertalingen geteld in het natuurgebied de Oostvaardersplassen. De rode stippellijn geeft de dalende trend van het aantal aan. Een formule waarmee je het aantal volgens deze trendlijn kunt benaderen is $A = 2000 - 500 \cdot \ln(2t + 1)$, met t het aantal jaren na 1996.

- a** In welk jaar zullen er volgens deze formule geen wintertalingen meer zijn in de Oostvaardersplassen?
b Waarin verschilt de grafiek van formule A met de aantallen die geteld zijn door de bioloog?

- c** Een formule waarmee je het verloop van de populatie beter kan beschrijven is $A = 1800 - 500\ln(2t + 1) + 0,8' \cdot 500\sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right)$.

Waarom is het deel $0,8' \cdot 500\sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right)$ aan de formule toegevoegd?

- 32** In 2014 en 2015 was er een ebola epidemie in West-Afrika. Deze epidemie heeft veel mensen het leven gekost. In 2014 was sprake van een exponentiële toename van het aantal besmettingsgevallen. Hiernaast zie je een grafiek die door de WHO (World Health Organisation) is gemaakt.

Volgens een onderzoeker is het aantal besmettingsgevallen N gedurende de eerste maanden te benaderen met de formule $N = 4,85 \cdot e^{0,027t}$. Hierin is t het aantal dagen na 1 januari 2014.

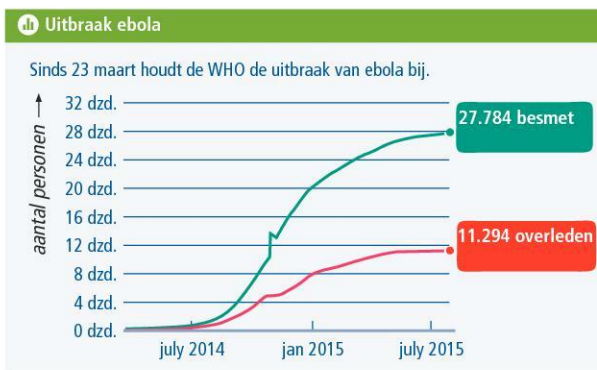
- a** Met hoeveel procent neemt het aantal besmettingsgevallen per maand toe volgens deze formule?
b Tot welke maand is deze formule bruikbaar?
c Op het hoogtepunt van de epidemie kwamen er ongeveer 200 besmettingsgevallen per dag bij. Wanneer was dit het geval?

- d** Bij de grafiek past een formule van de vorm $N(t) = \frac{a}{1 + c \cdot e^{-bt}}$

Leg uit dat in deze formule geldt $a = 28000$ en $c = 5600$.

- e** Half oktober was het aantal besmette mensen ongeveer 10000. Laat met een berekening zien dat $b = -0,0277$.

- f** Stel een formule op bij het aantal overleden mensen.



5-6

Gemengde opdrachten

33 Geef de afgeleide van de volgende formules.

a $K = 2x + 7 \cdot e^{(2x+1)}$

d $T = 3e \cdot e^{2x}$

b $P = 5q^2 \cdot 5 \log(3q)$

e $Q = 5 - 1,3 \cdot 4^{p+1}$

c $b = \frac{3}{7 + 4 \cdot 2^a}$

f $W = \frac{2v}{\ln(v)}$

34 De pony van Alice heeft een veulen gekregen. Aanvankelijk blijkt elke maand het veulen zo'n 12% in gewicht toe te nemen. Bij de geboorte woog het dier 56 kg.

a Bereken het gewicht van het veulen na tien maanden.

b Stel dat het veulen na tien maanden hetzelfde gewicht bereikt als in opdracht a, maar dat het gewicht in die tien maanden lineair was toegenomen.

Bereken voor deze situatie de gewichtstoename per maand.

c Geef voor beide modellen de formule.

d Bereken met behulp van de afgeleiden het moment waarop de groeisnelheid van het gewicht van het veulen voor beide modellen even groot is.

35 De snelwegen in Nederland zijn voornamelijk asfaltbetonwegen. De meest voorkomende zijn de dichte asfaltbetonweg (DAB-wegen) en de zeer open asfaltbetonwegen (ZOAB-wegen). Er is een verband tussen de snelheid van het verkeer en het geluidsniveau D van het verkeer. Dit verband wordt voor een ZOAB-weg gegeven door de formule $D = 28 \cdot \log(v) + 16$. Hierbij is v de snelheid in km/uur en D het geluidsniveau in dB (decibel).

Een geluidsniveau van 20 dB of lager kun je niet meer horen.

Een geluidswal vermindert het geluidsniveau met ongeveer 43 dB.

a Bereken bij welke snelheid van het verkeer de bewoners achter de geluidswal iets van het verkeer op een ZOAB-weg beginnen te horen.

Voor DAB-wegen geldt voor het verband tussen v en D bij benadering de formule $D = 36 \cdot \log(v) + 4$.

b Bij welke snelheid is het geluidsniveau op een ZOAB-weg gelijk aan die op een DAB-weg?

c Bereken bij welke snelheden van het verkeer het geluidsniveau op een ZOAB-weg meer dan 3 dB lager is dan op een DAB-weg.

d Met hoeveel dB neemt het geluidsniveau op ZOAB-wegen toe als de snelheid van 40 km/uur tot 80 km/uur toeneemt?

e Met behulp van de rekenregel $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ kun je aantonen dat het geluidsniveau bij DAB-wegen bij verdubbeling van de snelheid met ongeveer 10,8 dB toeneemt.

Toon dit aan.

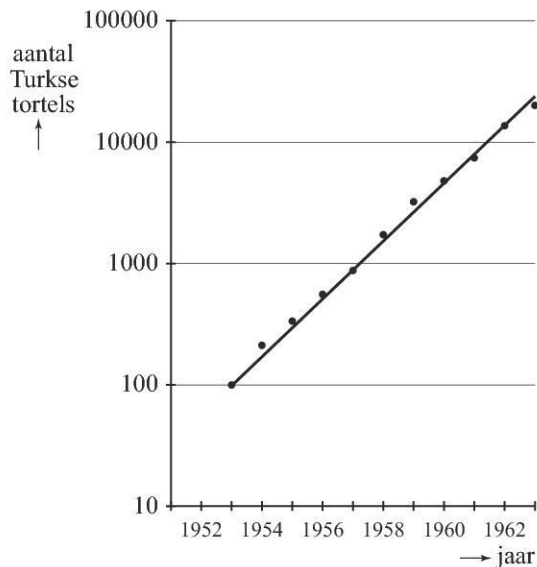
(Ontleend aan *CE havo wiskunde B1 2004, tijdvak 2*)

- 36** Een Turkse tortel is een soort duif. In 1950 werden ze voor het eerst in Nederland gezien. In de figuur hiernaast zie je de groei van het aantal Turkse tortels in Nederland gedurende de periode 1953 tot en met 1963.

Een formule voor het aantal Turkse tortels N in Nederland gedurende deze jaren is:
 $N = 100 \cdot 1,73^t$ met t de tijd in jaren en $t = 0$ in 1953.

- a** Toon met behulp van de grafiek aan dat de formule $N = 100 \cdot 1,73^t$ juist is.
b Het aantal tortels groeide in de eerste jaren vrij langzaam. Pas na enige tijd was de groeisnelheid groter dan 1000 tortels per jaar. Bereken met behulp van de afgeleide N' in welk jaar de groeisnelheid van het aantal Turkse tortels groter was dan 1000 tortels per jaar.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2013, tijdvak 2)



- 37** Bij een proef met fruitvliegjes neemt het aantal in de eerste weken exponentieel toe. Bij een praktische opdracht tellen leerlingen uit 5vwo na twee weken 140 fruitvliegjes en na vijf weken 1065 fruitvliegjes.
a Bij deze gegevens is een exponentiële formule te maken voor het aantal fruitvliegjes F na t weken. Geef deze formule. Licht je antwoord toe.

In een kweekruimte kan het aantal fruitvliegjes niet onbeperkt toenemen. Het maximale aantal fruitvliegjes is afhankelijk van de grootte van de kweekruimte.

Een ander experiment, dat werd gestart op 10 november 2011, werd in een kleinere kweekruimte uitgevoerd.

Bij het vervolg van deze opgave gaan we uit van de volgende formule die

het aantal fruitvliegjes bij dit experiment beschrijft: $F = \frac{340}{1 + 54 \cdot e^{-0,24t}}$

Hierin is t de tijd in dagen na 10 november 2011 en F het aantal fruitvliegjes.

- b** Welke aantallen fruitvliegjes zijn volgens bovenstaande formule in de kweekruimte mogelijk? Licht je antwoord toe.
c Fruitvliegjes zijn met een beetje etherdamp gemakkelijk te verdoven waarna je ze kan tellen en met een loep bestuderen. Op de dag dat het aantal fruitvliegjes het snelst toeneemt, wil Boris ze verdoven.

Toon aan dat de afgeleide van F gelijk is aan $\frac{dF}{dt} = \frac{4406,4 \cdot e^{-0,24t}}{(1 + 54 \cdot e^{-0,24t})^2}$

- d** Bereken met behulp van deze afgeleide op welke datum het aantal fruitvliegjes het snelst toeneemt
 (Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 2)

Samenvatting

Exponentiële en logaritmische formules, groeifactoren

Bij een exponentieel groeiproces $N(t) = b \cdot g^t$ wordt de hoeveelheid per tijdseenheid steeds met dezelfde factor vermenigvuldigd. Deze factor heet de groeifactor g .

Voor het rekenen met groeifactoren geldt: als g de groeifactor per tijdseenheid is, dan is g^n de groeifactor over n tijdseenheden.

Functies van de vorm $P(x) = {}^g\log(x)$ heten logaritmische functies.

Het grondtal g is bij exponentiële functies en logaritmische functies positief maar ongelijk aan 1. Voor $0 < g < 1$ zijn de grafieken dalend en voor $g > 1$ zijn ze stijgend.

Voorbeeld 1

Het aantal bladluizen groeit exponentieel. De verdubbelingstijd is 6 dagen. Bereken de groeifactor per dag en per week.

Oplossing

De groeifactor per 6 dagen is 2.

De groeifactor per dag $2^{\frac{1}{6}} \approx 1,12$.

De groeifactor per week is $\left(2^{\frac{1}{6}}\right)^7 \approx 2,24$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $A = 2,5 \cdot 0,9^{p+1}$. Herleid de formule en druk p uit in A .

Oplossing

$$A = 2,5 \cdot 0,9^{p+1}$$

$$0,9^{p+1} = \frac{A}{2,5} = 0,4A$$

$$p+1 = {}^{0,9}\log(0,4A)$$

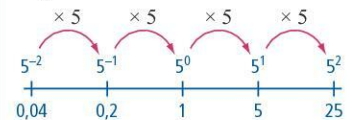
$$p = {}^{0,9}\log(0,4A) - 1$$

Logaritmische schaalverdeling

Bij lineaire schaalverdelingen wordt bij gelijke stappen een vast getal opgeteld. Een schaalverdeling waar bij gelijke stappen met een vast getal wordt vermenigvuldigd, heet een logaritmische schaalverdeling of kortweg een logschaal.

Voorbeeld

logaritmisch:



Het getal van Euler en de natuurlijke logaritme

Er bestaat een getal e zo dat de functie $f(x) = e^x$ zichzelf als afgeleide heeft, dat wil dus zeggen $f'(x) = e^x$. Dat getal heet het getal van Euler en is bij benadering gelijk aan 2,72.

De logaritme met grondtal e wordt de natuurlijke logaritme genoemd. In plaats van de notatie ${}^e\log(a)$ gebruik je meestal $\ln(a)$.

Wiskundig model

Om de ontwikkeling van een populatie of een proces te beschrijven gebruik je een wiskundig model. Als de omvang van een populatie op den duur een vaste waarde nadert, is sprake van begrensde groei.

Je kunt een logaritmische schaalverdeling gebruiken

De grafiek van een exponentiële functie in een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling is een rechte lijn.

Voorbeeld

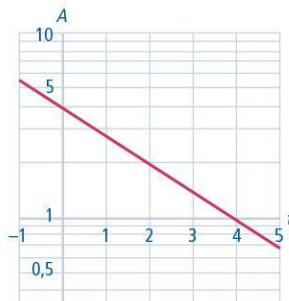
Teken de grafiek van $A = 4 \cdot 0,7^t$ in een assenstelsel met op de verticale as een logschaal.

Oplossing

Bij $t = 0$ is $A = 4 \cdot 0,7^0 = 4$.

Het snijpunt met de horizontale as bereken je met de vergelijking $4 \cdot 0,7^t = 1$.

Dus $0,7^t = 0,25$ ofwel $t = {}^{0,7}\log(0,25) \approx 3,9$.



Je kunt exponentiële functies differentiëren

De afgeleide van $f(x) = a^x$ is $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.

Voorbeeld 1

Geef de afgeleide van $K = 3$.

Oplossing

K is een kettingfunctie met $g = 2t + 1$ en

$$K = 3 \cdot e^g.$$

$$g' = 2 \text{ en } K' = 3 \cdot e^g$$

$$K' = 2 \cdot 3 \cdot e^g \text{ ofwel } K' = 6 \cdot e^{2t+1}$$

Voorbeeld 2

Geef de afgeleide van $Q(p) = 45p^2 \cdot 3^p$.

Oplossing

Q is een productfunctie, dus met de productregel:

$$Q'(p) = 90p \cdot 3^p + 45p^2 \cdot \ln(3) \cdot 3^p$$

$$Q'(p) = p \cdot 3^p (90 + 45p \cdot \ln(3))$$

Je kunt logaritmische functies differentiëren

De afgeleide van $y = \ln(x)$ is $y' = \frac{1}{x}$.

De afgeleide van $f(x) = {}^g\log(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$.

Voorbeeld 1

Geef de afgeleide van $W = \frac{\ln(p)}{p}$

Oplossing

W is een quotiëntfunctie, dus met de quotiëntregel:

$$W' = \frac{\frac{1}{p} \cdot p - \ln(p) \cdot 1}{p^2} \text{ ofwel } W' = \frac{1 - \ln(p)}{p^2}$$

Voorbeeld 2

Geef de afgeleide van $y = {}^3\log(2x - 1)$.

Oplossing

y is een kettingfunctie, dus met de kettingregel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2x - 1) \cdot \ln(3)} \cdot 2 = \frac{2}{(2x - 1) \cdot \ln(3)}$$

Test jezelf

T-1 Druk bij de volgende formules t uit in A .

a $A = 3^t$

b $A = 100 \cdot 0,7^t$

c $A = \frac{20}{1 + 2^t}$

d $A = 10 \cdot {}^3\log(t)$

e $A = \frac{1}{2}\log(t - 1) - 2$

f $A = 4 - 5 \cdot {}^4\log(t)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-1.

T-2 Vier soorten bacteriën zijn op kweek gezet. Elke dag is van deze soorten het aantal bacteriën geteld. Het resultaat van soort 1 en soort 2 staat in de figuur hiernaast.

a Waarom kun je de conclusie trekken dat het aantal exponentieel groeit?

b Geef de formule voor het aantal bacteriën N van soort 1.

c Bereken de verdubbelingstijd van soort 2.

d Op het tijdstip $t = 0$ zijn er 500 bacteriën van soort 3. Het aantal N neemt toe met 60% per dag. Teken de grafiek bij het aantal N .

e Van een vierde soort zijn op tijdstip $t = 3$ evenveel bacteriën als van soort 2. De groefactor voor het aantal bacteriën bij deze soort is even groot als die bij soort 1. Teken de grafiek bij het aantal van soort 4.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-2.



T-3 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 3 \cdot 1,08^x$

b $T(n) = 345 - 12 \cdot 0,89^n$

c $G(q) = (q + 1) \cdot e^{3q+2}$

d $H(x) = 0,0012 + 0,41 \cdot 1,09^x$

e $h(t) = 10(20 + 3^{0,3t})$

f $T(b) = \frac{3}{2b + 5 \cdot e^{-0,4b}}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-3.

T-4 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = {}^5\log(x)$

b $g(z) = 200 \cdot \log(z) - 500$

c $T(q) = -10 \cdot {}^6\log(1 - 2q)$

d $n(t) = {}^2\log(10t)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-4.

- T-5** Op een veld met zonnebloemen is de gemiddelde hoogte van de zonnebloemen op verschillende tijdstippen na het ontkiemen bijgehouden. De formule die de gemiddelde hoogte van de zonnebloemen op dit veld redelijk benadert, is

$$H = \frac{256}{1 + 25 \cdot 0,497^t}$$

In deze formule is H de hoogte in cm en t de tijd in weken.

- Leg uit dat de gemiddelde hoogte van de zonnebloemen maximaal 256 is.
 - Laat zien dat vanaf de 8e tot de 13e week het verschil met de maximale waarde exponentieel afneemt.
 - Stel de formule op van de afgeleide H' .
 - Na hoeveel weken groeien de zonnebloemen het snelst?
 - Hoe groot is de maximale groeisnelheid?
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-5.*



- T-6** Bij de fabricage van een product is de gemiddelde opbrengst $GO = 9,2 \cdot \log(2q + 1)$ en zijn de gemiddelde kosten $GK = 2\sqrt{q}$. In deze formules is q het aantal producten dat in een bepaalde tijd geproduceerd wordt en zijn GO en GK in euro.

- Geef een formule voor de gemiddelde winst GW .
- Bereken met behulp van de afgeleide bij welk aantal producten de gemiddelde winst maximaal is.
- Bereken hoe groot de maximale gemiddelde winst is.

- T-7** Een tank met een volume van 200 liter is gevuld met een chemische vloeistof, die men wil verwijderen door spoelen met water. Via een buis voert men water met een vaste snelheid de tank binnen.

Het water vermengt zich met de chemische vloeistof en de verdunde vloeistof wordt met dezelfde snelheid afgevoerd via een andere buis. Per minuut vermindert de hoeveelheid chemische vloeistof met 70%.

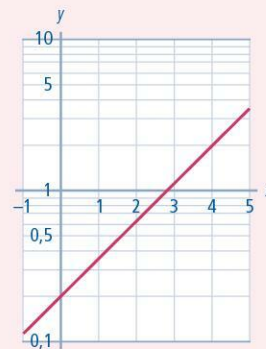
- Hoeveel liter chemische vloeistof bevat het mengsel in de tank na drie minuten?
- Stel de formule op voor de nog aanwezige hoeveelheid chemische vloeistof C uitgedrukt in het aantal minuten m .
- Met welke snelheid neemt de aanwezige hoeveelheid chemische vloeistof af na precies één minuut?
- Bereken na hoeveel seconden de afnamesnelheid van de hoeveelheid chemische vloeistof één liter per minuut is.



Extra oefening - Basis

- B-1** Op 1 juni 2010 is 15 gram van het radioactieve element Strontium-90 vrijgekomen. Strontium-90 heeft een halfwaardetijd van 28 jaar.
- Hoe groot is de groeifactor per jaar? Geef je antwoord in vier decimalen.
 - Met de formule $S = 15 \cdot 0,976^t$ kun je de hoeveelheid Strontium-28 berekenen. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 juni 2010. Bereken na hoeveel jaar nog 1 gram van het Strontium-28 aanwezig is.
 - Herleid de gegeven formule zo dat je t uitdrukt in S .
Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-1.

- B-2** Hiernaast is de grafiek van een rechte lijn m getekend in een assenstelsel. De schaalverdeling op de y -as is logaritmisch.
- Ga na dat de grafiek door de punten $(0; 0,2)$ en $(4; 2)$ gaat.
 - Vul in: Als x met 4 toeneemt, wordt y met ... vermenigvuldigd.
 - Met welk getal wordt y vermenigvuldigd als x met 1 toeneemt?
 - De formule van m is van de vorm $y = b \cdot g^x$. Bereken b en g . Geef je antwoorden in twee decimalen.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-2.



- B-3** Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = e^{-3x+2}$

c $h(x) = x \cdot 4e^{1-x}$

b $g(x) = \frac{5^x - 2}{3}$

d $k(x) = \frac{2 \cdot e^x}{x^3}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-3.

- B-4** Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = \ln(8x + 3)$

c $h(x) = x^3 \cdot 2 \log(x)$

b $g(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

d $k(x) = \log(x^2) - 4 \cdot \log(x)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-4.

- B-5** Een klein wildreservaat bevat een aantal nesten van kraanvogels. Onderzoekers hebben op basis van regelmatige tellingen een formule ontwikkeld die de groei van de populatie goed benadert. Die formule

is $Q = \frac{330}{1 + 10 \cdot e^{-0,3818t}}$ met t in jaren en Q het aantal kraanvogels.

- Bereken na hoeveel jaar er 110 kraanvogels zijn.
- Toon aan dat geldt: $\frac{dQ}{dt} = \frac{1259,94 \cdot e^{-0,3818t}}{(1 + 10 \cdot e^{-0,3818t})^2}$
- Hoe kun je aan $\frac{dQ}{dt}$ zien dat de grafiek van Q stijgt?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-5.

Extra oefening - Gemengd

G-1 Op een eiland zijn de aantallen A van een diersoort sinds 2010 bijgehouden. In de tabel zie je de aantallen.

- a** Teken in een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling, de grafiek van het aantal A in de periode $t = 0$ tot en met $t = 7$ met t in jaren en $t = 0$ het jaar 2010.
- b** Geef een formule die het aantal A na t jaar redelijk goed benadert.
- c** Het aantal van een andere diersoort neemt in dezelfde periode jaarlijks met 30% toe. In 2010 waren er 3400 dieren van deze soort. Geef de formule die het aantal dieren B van deze soort uitdrukt in t en teken de grafiek van B in het assenstelsel waarin ook de grafiek van A getekend is.
- d** Lees in je grafiek af op welk tijdstip van beide soorten evenveel dieren zijn.
- e** Bereken in welk jaar zal gelden $B = 40\,000$ in het geval dat de jaarlijkse groei van 30% aanhoudt.

jaar	aantal A
2010	9984
2011	5484
2012	3066
2013	1689
2014	946
2015	520
2016	295

G-2 In 1977 troffen onderzoekers in een dorpje in Limburg een kleine groep ransuilen aan. Vanaf dat moment heeft men ze nauwgezet gevolgd. Daaruit bleek onder andere dat ransuilen vroeg in het voorjaar broeden en dat de jongen al half juni kunnen vliegen. Uit tellingen die steeds eind juni plaats vonden, bleek dat de populatie in omvang toenam. De onderzoekers zetten de aantallen uit in een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling en tekenden vervolgens een zo goed mogelijk passende rechte lijn door de meetpunten. Hiernaast zie je het resultaat.

- a** Geef een formule waarmee het aantal ransuilen R kan worden berekend t jaar na 1977 en bereken het percentage waarmee het aantal ransuilen jaarlijks toenam.
- b** Eind juni 1991 telde men 205 ransuilen. Toon met een berekening aan dat dit minder is dan volgens bovenstaande groei mocht worden verwacht.



Biologen gaven hiervoor de verklaring dat de door ransuilen gebruikte broedplaatsen altijd slechts in beperkte mate aanwezig zijn.

Een onderzoeker dacht het aantal ransuilen vanaf 1989 goed te kunnen voorspellen met de formule $R = a - b \cdot 0,6^t$. Hierbij is R het aantal ransuilen en t het aantal jaren na eind juni 1989. Hij koos a en b zo dat de formule 178 ransuilen opleverde voor 1989 en 205 ransuilen voor 1991.

- c** Bereken de waarden van a en b afgerond op twee decimalen.
- d** Bij R is sprake van afnemende stijging. Toon dit aan met behulp van R' .

Uitdagende opdrachten

- U-1** De grootte van de wereldbevolking voldoet bij benadering aan

het groeimodel:
$$W = \frac{L}{1 + (L - 1) \cdot g^t}$$

Hierbij is:

W de wereldbevolking in miljarden;

t het aantal jaren na 1804;

g een constante met $0 < g < 1$ en

L de grenswaarde van de wereldbevolking in miljarden, dat is de waarde waar W op den duur naar toe zal groeien.

- a** Bereken de grootte van de wereldbevolking in 1804.

- b** Stel dat de grenswaarde van de wereldbevolking gelijk is aan 10 miljard. Bekend is dat in 1927 de wereldbevolking bestond uit 2 miljard mensen.

Toon langs algebraïsche weg aan dat voor deze periode geldt:

$$g \approx 0,9934.$$

- c** De groeisnelheid $\frac{dW}{dt}$ van de wereldbevolking is het grootst als

$$t = {}^g \log \left(\frac{1}{L - 1} \right)$$

Toon aan dat voor die waarde van t geldt: $\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{4}L \cdot \ln(g)$.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B12 2001, tijdvak 2)

- U-2** Tijdens het inademen is de hoeveelheid verse lucht in de longen een functie van de tijd. Voor gezonde mensen gebruiken we het volgende model: $L = 3,6(1 - e^{-2,5t})$. Hierbij is L de hoeveelheid verse lucht in liters en t de tijd in seconden ($0 \leq t \leq 5$).

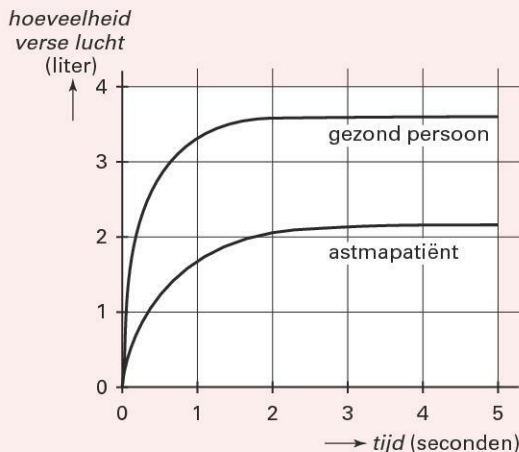
- a** Bereken na hoeveel seconden 90% van de maximale hoeveelheid verse lucht is ingeademd.

Astma is een aandoening aan de luchtwegen. Bij astmapatiënten is de maximale hoeveelheid verse lucht in de longen kleiner en duurt het langer voordat dit maximum bereikt wordt. Voor astmapatiënten wordt het model $L_\alpha = \alpha \cdot 3,6(1 - e^{-2,5\alpha t})$ gebruikt.

Hierbij is α een constante tussen 0 en 1 die afhankelijk is van de ernst van de astma. De snelheid waarmee de hoeveelheid verse lucht toeneemt, is maximaal op het tijdstip $t = 0$.

- b** Bereken voor welke waarde van α deze maximale snelheid gelijk is aan 4,5 liter per seconde.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B12 2005, tijdvak 1)



Hoe oud zijn historische vondsten?



In 1940 werd in een grot een groot aantal rotswandschilderingen ontdekt, één ervan zie je hierboven. Het is de rijkst beschilderde prehistorische grot die tot nu toe is ontdekt. De grot ligt bij de plaats Lascaux in het Franse departement Dordogne. Vlak na de vondst maakten archeologen een ruwe schatting dat de tekeningen 10 000 tot 20 000 jaar oud waren.

C¹⁴ dateringsmethode

Er ontstond behoefte aan een methode waarmee de ouderdom van opgegraven voorwerpen en beenderen nauwkeuriger kon worden bepaald. C¹⁴ is een radioactieve variant van koolstof, dat ieder levend organisme bevat. Nadat het organisme is doodgegaan, daalt de hoeveelheid C¹⁴ langzaam door radioactief verval. Na ongeveer 5730 jaar is er nog 50% van de oorspronkelijke hoeveelheid C¹⁴ over. De techniek werd in 1949 ontdekt door Willard Frank Libby en zijn collega's van de Universiteit van Chicago. In 1960 ontving Libby hiervoor de Nobelprijs voor de Scheikunde.

Opdracht

Je mag aannemen dat radioactief verval exponentieel verloopt. Als de halveringstijd 5730 jaar is, geldt $\log\left(\frac{1}{2}\right) = -5730$. Je kunt met je rekenmachine berekenen dat de groeifactor per jaar dan gelijk is aan $g \approx 0,99988$. In 1950 is gemeten dat er nog circa 14,5% van de hoeveelheid C¹⁴ aanwezig was in houtskoollijnen van één van de tekeningen. Uit de vergelijking $0,99988^t = 0,145$ volgt $t = \frac{\log(0,145)}{\log(0,99988)}$. Bereken hoe oud de tekening toen was.

Onbekende Da Vinci gevonden

Leonardo da Vinci (1452 - 1519) was een architect, uitvinder, filosoof, natuurkundige, anatomist, beeldhouwer, schrijver, schilder en componist uit Florence, Italië. In totaal worden vijftien schilderijen geheel of deels aan Da Vinci toegeschreven. Over zes werken zijn de meningen verdeeld.



In 2010 is in een Zwitserse bankkluis een schilderij (rechter afbeelding) opgedoken dat mogelijk door Leonardo da Vinci is gemaakt. Het is een portret van markiezin Isabella d'Este, die als begunstiger van de vrije kunsten een hoofdrolspeelster is in de Renaissance. In het Louvre hangt een tekening uit 1499 van deze dame (linker afbeelding) en er zijn brieven bekend waarin D'Este vraagt om een geschilderd portret.

Heeft Da Vinci het portret geschilderd?

De argumenten hiervoor zijn: het gebruikte pigment is hetzelfde als dat in ander werk van Leonardo, precies volgens recept dat Leonardo in zijn Traktaat van de schilderkunst voorschrijft. Toch is er twijfel. Het belangrijkste argument tegen: het is op doek. Al Leonardo's nog bekende werken zijn geschilderd op hout.

Opdracht

Er is gemeten dat aanwezige hoeveelheid C¹⁴ ligt tussen 93,56% en 95,73%.

- a Geef een datering van het schilderij.
- b Kan het schilderij toegeschreven worden aan Leonardo da Vinci?

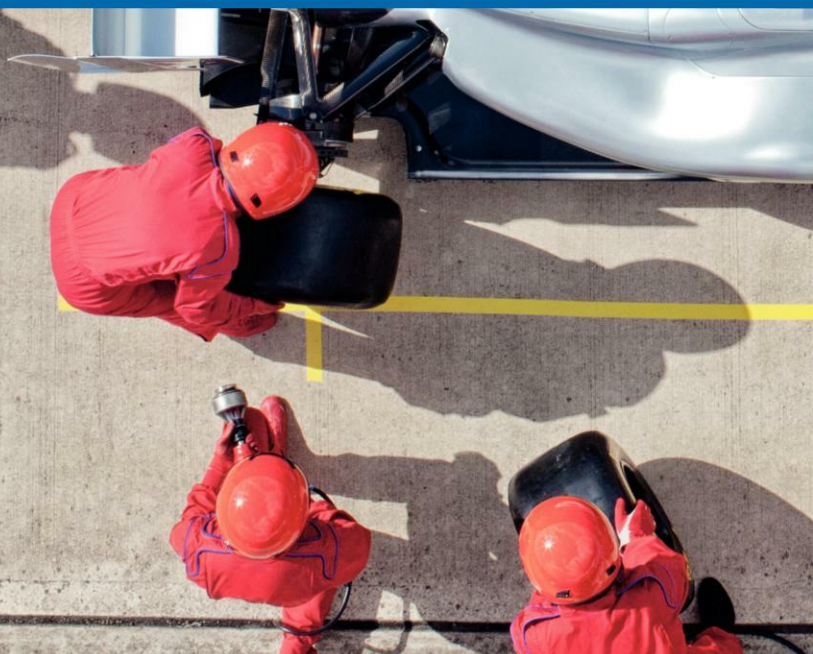


Hangglider

Een vliegend voorwerp heeft een bepaalde snelheid v nodig om in de lucht te blijven. De factoren die hierbij een rol spelen zijn het gewicht G en het vleugeloppervlak S .

Hierbij bestaat bij benadering het volgende verband: $v = \sqrt{\frac{G}{0,03675 \cdot S}}$

Wat is het gevolg voor de benodigde snelheid als het vleugeloppervlak twee keer zo groot wordt?



Hoofdstuk 6

Verbanden

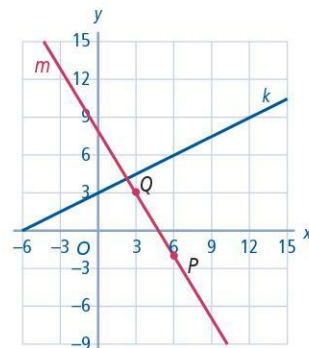
In dit hoofdstuk

	Voorkennis	146
6-1	Lineaire verbanden	148
6-2	Evenredig en omgekeerd	
	evenredig	150
6-3	Formules opstellen	152
6-4	Redeneren met formules	154
6-5	Gemengde opdrachten	156
	Samenvatting	160
	Test jezelf	162



Voorkennis

- V-1** Gegeven is een lijn k met formule $y = \frac{1}{2}x + 3$.
- Hoe zie je de getallen $\frac{1}{2}$ en 3 terug in de tekening?
 - Verder is gegeven een lijn m die door de punten $P(6, -2)$ en $Q(3, 3)$ gaat. De formule die bij lijn m hoort, is ook van de vorm $y = ax + b$.
Laat met een berekening zien dat $a = -\frac{5}{3}$.
 - Gebruik de coördinaten van P of Q om aan te tonen dat $b = 8$.



Aanpak

Hoe stel je een formule op voor een lijn door twee gegeven punten?

- Schrijf de algemene vorm van een lineaire formule op.
- Bereken de richtingscoëfficiënt:

$$\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{\text{toename tweede coördinaat}}{\text{toename eerste coördinaat}}$$

- Vul de richtingscoëfficiënt in bij de algemene formule.
- Bereken het startgetal door de coördinaten van één van de gegeven punten in te vullen.
- Schrijf de lineaire formule op.

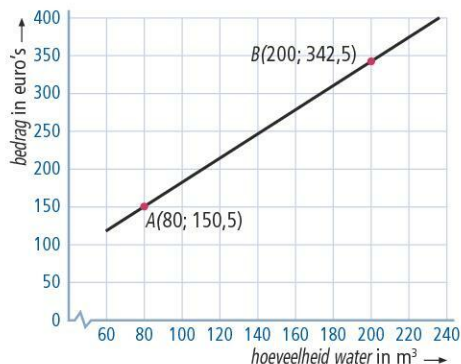
Voorbeeld

Stel een formule op voor de lijn door de punten $A(12, 4)$ en $B(-6, 0)$.

Oplossing

- $y = ax + b$
- $a = \frac{4-0}{12-(-6)} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$
- $y = \frac{2}{9}x + b$
- De coördinaten van A invullen geeft:
 $4 = \frac{2}{9} \cdot 12 + b$
 $4 = 2\frac{2}{3} + b$, dus $b = 1\frac{1}{3}$.
- De formule is $y = \frac{2}{9}x + 1\frac{1}{3}$.

- V-2** Stel formules op van de volgende lijnen.
- Lijn p gaat door $A(8, 1)$ en $B(-2, 6)$.
 - Lijn q gaat door $C(-28, 10)$ en $D(20, 46)$.
 - Lijn r gaat door $A(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$ en $B(\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2})$.
- V-3** In de grafiek hiernaast zie je het verband tussen de hoeveelheid water in m^3 die een huishouden gebruikt en de jaarlijkse kosten hiervan in euro's.
- Waarom is hier sprake van een lineair verband?
 - Geef een formule voor het verband tussen het waterverbruik w in m^3 en het te betalen bedrag b in euro's.
 - Bij een ander waterbedrijf betaalt gezin Alders voor 129 m^3 een bedrag van € 192,25, terwijl gezin Boelens € 211,85 betaalt voor 143 m^3 .
Stel de formule op waarmee je bij dit waterbedrijf de kosten kunt berekenen van het jaarverbruik.



Niet altijd lijkt een formule op het eerste gezicht op een formule van een lineair verband. Na herleiden blijkt dit soms toch wel het geval te zijn.

Voorbeeld

Herleid de formule $y = 3(2 - \frac{1}{2}x) + \frac{2x+3}{4}$ tot de vorm $y = a \cdot x + b$.

Oplossing

$$y = 6 - 1\frac{1}{2}x + \frac{2x}{4} + \frac{3}{4} \quad (\text{haakjes weg en breuk gesplitst})$$

$$y = 6 - 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \quad (\text{vereenvoudigd})$$

$$y = -x + 6\frac{3}{4} \quad (\text{gelijksoortige termen samen genomen})$$

V-4 Herleid de volgende formules tot de vorm $y = a \cdot x + b$.

a $y = 5(3x - 1) - 3(x + 2)$

b $y = x^2 - (x + 3)(x + 7)$

c $y = (0,2x - 0,7)(10x - 1) - 2x^2$

d $y = \frac{5x-7}{30} - \frac{x}{3} - 3x$

e $y = (x-8)(2x-3) - \frac{6x^2+4}{3}$

Bij het herleiden van machtsformules en exponentiele formules gebruik je vaak de rekenregels voor machten in het schema hieronder.

Rekenregels voor machten

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b} \quad g^0 = 1 \quad (g \neq 0)$$

$$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b} \quad (g \neq 0) \quad g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g} \quad (g \geq 0)$$

$$(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$$

$$(g^a)^b = g^{a \cdot b} \quad (g \geq 0) \quad \left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p^a}{q^a} \quad (q \neq 0)$$

$$g^{-n} = \frac{1}{g^n} \quad (g \neq 0)$$

Voorbeeld

Herleid de formule $y = \frac{5x^{4,2}}{4(x^{1,3})^2}$ tot de vorm $y = c \cdot x^n$.

Oplossing

$$y = \frac{5x^{4,2}}{4(x^{1,3})^2} = \frac{5x^{4,2}}{4x^{2,6}} = 1,25x^{1,6}$$

V-5 Gebruik de rekenregels voor machten om de volgende formules te herleiden tot de vorm $y = c \cdot x^n$

a $y = 5x^3 \cdot -2x^{1,3}$

b $y = \frac{4,8x^{3,7}}{3x^{-1,4}}$

c $y = 6\sqrt{x} \cdot (0,8x^{2,1})^3$

d $y = \sqrt[5]{x^6} \cdot (2x^{4,2} \cdot 0,4x^{-1,8})^2$

V-6 Gebruik de rekenregels voor machten om de volgende formules te herleiden tot de vorm $y = b \cdot g^x$.

a $y = 7 \cdot 5^{x+1}$

b $y = \frac{5 \cdot 2^x}{8 \cdot 0,5^x}$

c $y = 7 \cdot 2^{-2} \cdot 8^x \cdot 32^{0,1}$

d $y = 6 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3} \cdot 9^x$

6-1

Lineaire verbanden

A

x	1	2	3	5	8
y	2	5	8	11	14

B

x	4	5	6	7	10
y	9,5	11	12,5	14	18,5

C

x	1	3	4	6	18
y	36	12	9	6	2

- 1 Geef bij elke tabel hierboven aan of er sprake kan zijn van een lineair verband tussen de variabelen x en y . Leg uit waarom wel of waarom niet.

Theorie

Bij een **lineair verband** tussen twee variabelen is sprake van een constante toename of constante afname. Een lineair verband kun je op verschillende manieren herkennen.

- De grafiek is een rechte lijn.
- In een tabel en in een grafiek is er bij gelijke stappen altijd dezelfde toename.
- Uit de tekst kun je opmaken dat de toename bij gelijke stappen altijd dezelfde is.

Bestaat tussen de variabelen x en y een lineair verband, dan is de **lineaire formule** $y = a \cdot x + b$.

Je zegt ook wel dat dit de **vergelijking** is van de bijbehorende rechte lijn.

Hierbij is b het startgetal en a de richtingscoëfficiënt.

Voorbeeld

Bij een verband tussen p en q hoort de formule $6p + 4q = 17$.

Leg uit waarom het verband lineair is.

Oplossing

Schrijf de gegeven formule in de vorm

$$q = a \cdot p + b.$$

$$4q = -6p + 17 \quad (\text{links en rechts } -6p)$$

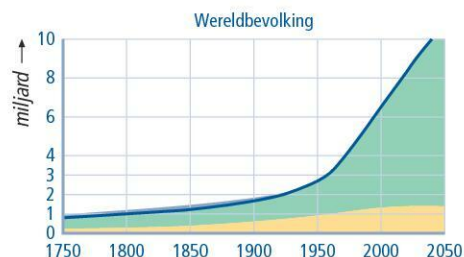
$$q = -1,5p + 4,25 \quad (\text{links en rechts : 4})$$

Dus is het verband lineair.

Als p steeds met 1 toeneemt, neemt q steeds met $1\frac{1}{2}$ af.

- 2 Herleid de volgende lineaire formules tot de vorm $q = a \cdot p + b$.
- a** $0,1q - p = 13$
- b** $p = 1\frac{1}{2}q - 16$
- c** $18 - 3p + 24q = 0$
- 3 Bij welke van de volgende verbanden is sprake van een lineair verband? Leg uit waarom wel of waarom niet.
- a** De hoogte van de gasrekening en het gasverbruik.
- b** De afgelegde afstand en de tijd bij een constante snelheid.
- c** De huurprijs en de tijd bij een jaarlijkse huurverhoging van 4,5%.
- d** De omtrek en de zijde van een vierkant.
- e** De oppervlakte en de straal van een cirkel.
- 4 Volgens het rapport *Smakelijk weten* van het CBS is het gemiddelde gewicht van de volwassen Nederlandse vrouw in de periode 1981 – 2011 gestegen van 65 naar 70 kilo.
- Als je aanneemt dat deze toename gelijkmatig is geweest, is er sprake van een lineair verband tussen de variabelen tijd in jaren en gemiddeld gewicht in kg.
- a** Noem deze variabelen t en G en stel de formule op van dit lineaire verband.
- b** Bereken in welk jaar volgens de formule het gemiddeld gewicht 66,5 kg was.

- 5 In de grafiek hiernaast zie je hoe de omvang van de wereldbevolking gegroeid is vanaf 1750.
- a Tussen 1800 en 1850 is de wereldbevolking toegenomen van 900 naar 1175 miljoen mensen. Deze groei lijkt volgens de grafiek lineair te zijn.
Hoe groot is de toename per jaar van de wereldbevolking tussen 1800 en 1850?
- b Hoe groot was de omvang van de wereldbevolking in 1834?
- c In de periode 1960-2010 groeide de wereldbevolking van 3 naar 7 miljard. Bij het tekenen van de grafiek is aangenomen dat de wereldbevolking tot 2040 op dezelfde manier blijft doorgroeien.
Gebruik deze aanname om de omvang van de wereldbevolking in 2025 te berekenen.



Theorie

Interpoleren is een tussen gelegen waarde bepalen. Soms kun je een dergelijke waarde uit een gegeven grafiek aflezen. Je kunt zo'n tussengelegen waarde ook berekenen door uit te gaan van een constante toe- of afname. Dit heet **lineair interpoleren**.

Extrapoleren is een buiten een gegeven tabel of grafiek gelegen waarde bepalen. Je kunt die waarde berekenen door uit te gaan van een verdere constante toe- of afname. Dit heet **lineair extrapoleren**.

Voorbeeld

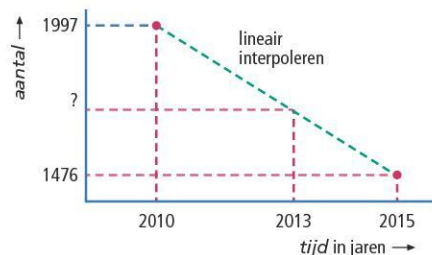
Gegeven is een grafiek waarin je aantallen kunt aflezen bij de jaren 2010 en 2015.
Bereken met lineair interpoleren het aantal in 2013.
Bereken met lineair extrapoleren het aantal in 2020.

Oplossing

De afname per jaar is gelijk aan $\frac{1476 - 1997}{5} = -104,2$.

In 2013 is het aantal dus $1997 + 3 \times -104,2 \approx 1684$.

In 2020 zal dit aantal dan gelijk zijn aan $1997 + 10 \times -104,2 = 955$.



- 6 Het aantal eenouder gezinnen is de laatste 15 jaar gestaag toegenomen.
In het jaar 2000 waren er ongeveer 385 000 eenouder gezinnen, in het jaar 2015 was dat aantal opgelopen tot circa 490 000.
- a Bereken met lineair interpoleren het aantal eenouder gezinnen in 2008.
- b Bereken met lineair extrapoleren het aantal eenouder gezinnen in 2025.
- 7 Waarom kun je bij opdracht 5 met de gegevens van 1900 en 2000 met lineair interpoleren niet de omvang van de wereldbevolking in 1960 schatten?
- 8 De vinex-wijk Amersfoort-Vathorst heeft op 1 januari 2016 ongeveer 23 duizend bewoners. Met lineair extrapoleren komt de prognose voor het aantal bewoners op 1 januari 2025 op ongeveer 30 duizend.
Bepaal het aantal bewoners op 1 januari 2010.

6-2

Evenredig en omgekeerd evenredig



- 9 Sander heeft een foto met een breedte van 9 cm en een hoogte van 13 cm. Hij maakt een vergroting met een breedte van 45 cm.
- Hoeveel cm is de hoogte van de vergroting?
 - Als je de breedte acht keer zo groot maakt, hoeveel keer zo groot wordt dan de hoogte?
 - Tussen de breedte b en de hoogte h bestaat een verband dat je kunt beschrijven door een formule van de vorm $h = \dots \cdot b$. Welk getal moet op de stippen staan?
 - Teken de grafiek bij deze formule.

- 10 De tabel hoort bij rechthoeken met een oppervlakte van 24 cm^2 .

lengte in cm	0,1	0,5	1	...	96
breedte in cm	...	...	24	4	...

- Neem de tabel over en vul deze verder in.
- Als je de breedte zes keer zo groot maakt, hoeveel keer zo groot wordt dan de lengte?
- Tussen de breedte b en de lengte l bestaat een verband met een formule van de vorm $b \cdot l = \dots$ ofwel $b = \frac{\dots}{l}$.

Welk getal moet op de stippen staan?

Theorie

Twee variabelen heten **recht evenredig** als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig,

of kortweg **evenredig** met x . Er geldt $\frac{y}{x} = c$, maar ook $y = c \cdot x$.

De constante c heet de **evenredigheidsconstante**.

Je herkent een evenredig verband in een tabel, als van de twee getallen in elke kolom de verhouding dezelfde is. De grafiek bij een evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.

Twee variabelen heten **omgekeerd evenredig** als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, wordt de andere variabele k keer zo klein. Zijn de variabelen x en y , dan geldt

$$x \cdot y = c \quad \text{ofwel} \quad y = \frac{c}{x} \quad \text{ofwel} \quad x = \frac{c}{y}.$$

Je herkent een omgekeerd evenredig verband in een tabel als het product van de variabelen in elke kolom steeds hetzelfde is.

Voorbeeld 1

k	2,1	3,9	12	60
M	0,7	1,3	4	20

M en k zijn evenredig want er geldt steeds dat $M = \frac{1}{3} \cdot k$.

De evenredigheidsconstante is $\frac{1}{3}$.

De grafiek is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{3}$.

Voorbeeld 2

W	$\frac{1}{6}$	2	5	10
t	3	0,25	0,1	0,05

W en t zijn omgekeerd evenredig want er geldt steeds $W \cdot t = 0,5$.

Ook geldt $W = \frac{0,5}{t}$ of $t = \frac{0,5}{W}$.

- 11** Ga na of in de volgende situaties sprake is van een evenredig verband, een omgekeerd evenredig verband of geen van beiden.
- a** Het verband tussen het aantal personen a en het bedrag B dat elk persoon krijgt als ze € 200,- zo onder elkaar verdelen dat iedereen even veel krijgt.
 - b** Het verband tussen de omtrek O en de straal r van een cirkel.
 - c** Het verband tussen de lengte van ribbe r en de inhoud I van een kubus.
 - d** Het verband tussen de tijd t en de gemiddelde snelheid v als een afstand van 80 km moet worden afgelegd.
 - e** Het verband tussen de prijs P_i van een product inclusief btw en de prijs P_e van het product exclusief btw.

- 12** Als een wandelaar met constante snelheid loopt is de staplengte steeds even groot. Uit onderzoek is gebleken dat tussen staplengte en stapfrequentie, het aantal stappen per tijdseenheid, een evenredigheidsverband bestaat.

Voor mannen geldt bij benadering $\frac{n}{S} = 140$, waarbij n het aantal

stappen per minuut is en S de staplengte in meters.

- a** Simon wandelt 150 meter in 100 seconden in 187 stappen.
Laat met berekeningen zien dat de formule in dit geval klopt.
- b** Sietse heeft een staplengte van 85 cm.
Bereken zijn snelheid in km/uur.
- c** Laat zien dat voor de snelheid v van een mannelijke wandelaar de volgende formule geldt: $v = 8,4 \cdot S^2$ waarbij v in km/uur is.
(Ontleend aan het CE havo wiskunde A 1995, tijdvak 2)

Bij de formule $v = 8,4 \cdot S^2$ zeg je ook wel dat v evenredig is met het kwadraat van S . Op de zelfde manier kun je bij de formule $A \cdot p^3 = 6,13$ zeggen dat A omgekeerd evenredig is met p^3 .

- 13** Bij een bepaalde boomsoort is bij benadering de diameter d van de stam van omgekeerd evenredig met een macht van zijn hoogte h . De formule

die hierbij hoort is het verband $d = \frac{270}{h^{1,54}}$. Hierbij zijn d en h beide in meter.

- a** Bereken de hoogte als de diameter 90 cm is.
- b** Hoeveel keer zo groot wordt h als d twee keer zo groot wordt?

-  **14** Bij een bepaald type windmolen is het geleverde vermogen P (in kW) evenredig met de derde macht van de windsnelheid v (in m/s) en eveneens evenredig met het kwadraat van de wikkellengte L (in m).

De volgende formule geldt: $P = 0,000197 \cdot v^3 \cdot L^2$.

Een windmolen van dit type levert een vermogen van 1400 kW. De benodigde windsnelheid is dan evenredig met een macht van L .

Bereken de exponent van deze macht en bereken de evenredigheidsconstante.



6-3

Formules opstellen

- 15** Een bioloog heeft bij een aantal dieren het skeletgewicht S en het lichaamsgewicht M bepaald, beide in kg. De resultaten staan in de tabel hiernaast. Hij vraagt zich af of er een verband bestaat tussen S en M en zo ja, of je dit met een formule kunt benaderen.
- a** Leg met behulp van de tabel uit dat tussen S en M geen lineair verband bestaat.
- b** Laat met berekeningen zien dat er ook geen exponentieel verband bestaat tussen S en M .
- c** Een derde mogelijkheid is dat er een machtsverband $M = p \cdot S^q$ tussen M en S bestaat. In de tabel zie je dat bij $S = 1$ geldt $M = 12,1$.
Laat met behulp van deze waarden zien dat hieruit volgt dat $p = 12,1$.
- d** Waarom kun je met $S = 1$ en $M = 12,1$ wel de waarde van p berekenen en met bijvoorbeeld $S = 2,9$ en $M = 31,2$ niet?
- e** Vul $p = 12,1$ in de formule $M = p \cdot S^q$ in en bereken met behulp van de twee getallen in de onderste rij van de tabel de waarde van q in drie decimalen nauwkeurig.
- f** Geef de formule voor M uitgedrukt in S .
- g** Maak een tabel bij de formule van opdracht f en vergelijk deze met de gegeven tabel.
Kun je nu concluderen dat het verband tussen S en M inderdaad redelijk te benaderen is met een machtsverband?

S	M
1,0	12,1
2,2	24,2
2,9	30,8
3,6	37,2
5,4	53,1

Soms is het mogelijk om een verband tussen twee grootheden te beschrijven met een machtsverband. In dat geval kun je met behulp van nadere gegevens, in bijvoorbeeld een tabel, de bijbehorende formule opstellen.

- 16** In de tabel hieronder is een aantal meetresultaten gegeven.
Neem aan dat de bijbehorende formule de vorm $y = c \cdot x^n$ heeft.

x	1	3	4	8
y	5	29	46	140

- a** Bereken de waarde van c .
- b** Benader de waarde van n in twee decimalen en geef de formule.

Voorbeeld

Van de machtsformule $B = c \cdot A^n$ is de tabel hieronder gegeven.

A	1	3	7
B	4	20,8	74,1

Bereken de waarden van c en n .

Oplossing

Uit $A = 1$ en $B = 4$ volgt $4 = c \cdot 1^n$ dus $c = 4$.

Vervolgens volgt uit punt (7; 74,1) dat

$$74,1 = 4 \cdot 7^n.$$

$$7^n = \frac{74,1}{4}$$

$$n = 7 \log\left(\frac{74,1}{4}\right) \approx 1,50$$

- 17** Als je een tabel hebt met slechts twee meetresultaten, zijn heel veel verschillende bijpassende formules mogelijk.
- a** Stel een passende lineaire formule op bij de tabelwaarden.
 - b** Stel een passende exponentiële formule op bij de tabelwaarden.
 - c** Stel een passende machtsformule op bij de tabelwaarden.

K	D
1	4
6	17

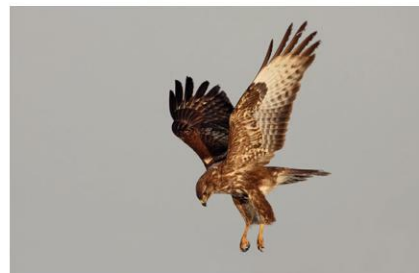
- 18** Voor het verband tussen A en t geldt een formule van de vorm $A = \frac{c}{1 + k \cdot 1,2^t}$. Hierin zijn c en k constanten.
- a** Gegeven is dat de grafiek van A door het punt $(0, 10)$ gaat. Laat zien dat hieruit volgt dat $c = 10(1 + k)$.
 - b** Verder is gegeven dat bij $t = 2$ de waarde $A = 8$ hoort. Wat volgt hieruit voor het verband tussen c en k ?
 - c** Bereken de waarden van c en k .
 - d** Leg met behulp van de formule uit dat de grafiek van A dalend is.
 - e** Hoe groot is de grenswaarde van A ?

- 19** Een onderzoeker is op zoek naar een formule die het verband zou kunnen beschrijven tussen t en T . Een aantal gegevens staat in de tabel hiernaast. Na veel proberen denkt hij dat het een formule van de vorm $T = \frac{a}{t + c} + b$ zou kunnen zijn.

t	T
0	18
5	12
10	10
15	9
20	8,4
200	6,3
2000	6,03
20000	6,003

- a** De tabel suggereert dat T een grenswaarde 6 heeft. Waarom volgt hieruit dat $b = 6$?
- b** Vul $t = 0$ en $T = 18$ in de formule in. Laat zien dat hieruit volgt dat $a = 12c$.
- c** Vul $t = 20$ en $T = 8,4$ in de formule in. Welk verband krijg je nu tussen a en c ?
- d** Vul $a = 12c$ in het verband van opdracht d in en bereken met je rekenmachine de waarde van c . Hoe groot is dus de waarde van a ?
- e** Maak een tabel bij de formule die je gevonden hebt en controleer of deze past bij de gegeven tabel.

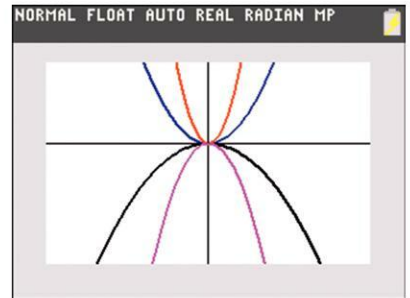
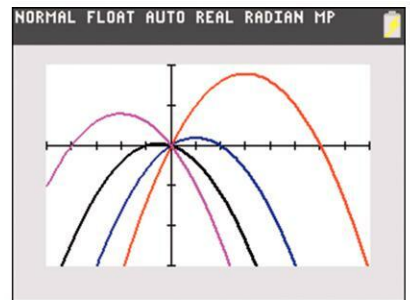
-  **20** Een onderzoeksteam heeft gedurende een aantal jaren het aantal roofvogels in een gebied geteld. Op grond van deze tellingen heeft men de formule van de vorm $R = a - b \cdot 0,6^t$ opgesteld. Hierbij is R het aantal roofvogels en t het aantal jaren na 2010. In 2010 telde met 348 roofvogels en in 2014 telde men 504 roofvogels. Met behulp van deze twee gegevens kun je twee vergelijkingen opstellen. Bereken met deze vergelijkingen de waarden van a en b afgerond op twee decimalen.



6-4

Redeneren met formules

- 21** Hiernaast zijn de grafieken geplot bij de formule $y = c \cdot x^2$ voor $c = 1$, $c = 4$, $c = -\frac{1}{2}$ en $c = -2$.
- Leg uit welke grafiek bij welke waarde van c hoort.
 - Beschrijf hoe de vorm van de grafiek verandert voor $c > 0$ als de waarde van c toeneemt.
 - Bereken voor welke waarde van c de grafiek door het punt $(-3, 10)$ gaat.
- 22** Gegeven is de formule $y = -x \cdot (x - p)$. Hiernaast zijn de bijbehorende grafieken geplot voor $p = 2$, $p = 6$, $p = -1$ en $p = -4$.
- Welke waarde van p hoort bij de blauwe grafiek? En welke waarde van p hoort bij de roze grafiek?
 - Voor elke waarde van p snijdt de grafiek de x -as in $(0, 0)$. Wat gebeurt er met de waarde van p als het tweede snijpunt met de x -as steeds verder weg komt te liggen?
 - Beredeneer voor welke waarde van p de grafiek een top heeft bij $x = 5$ en bereken de y -coördinaat van de top.



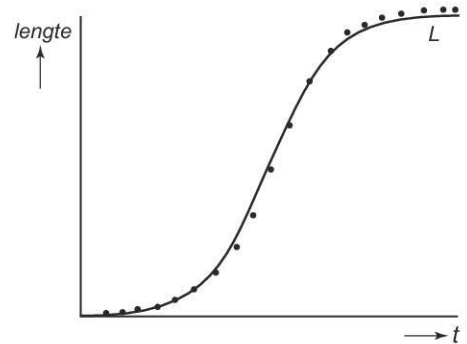
In een formule kom je naast de variabelen soms nog andere letters tegen die verschillende waarden kunnen hebben. Die kunnen gevolgen hebben voor bijvoorbeeld de bijbehorende grafiek. Met redeneren, algebra en met je rekenmachine kun je nagaan wat deze gevolgen zijn.

- 23** Voor $p > 0$ is tussen A en x een verband met formule $A = \frac{2x - p}{p \cdot x}$
- Bereken voor welke waarde van p de bijbehorende grafiek door het punt met $x = 1$ en $A = 4$ gaat.
 - Plot in één figuur de grafiek van A voor $p = 1$ en voor $p = 2$.
 - Onderzoek wat de grenswaarden zijn van A voor $p = 1$ en voor $p = 2$.
 - Laat zien dat je de formule $A = \frac{2x - p}{p \cdot x}$ kunt herleiden tot $A = \frac{2}{p} - \frac{1}{x}$ en beredeneer dat A voor elke waarde van $p > 0$ een grenswaarde heeft.
 - Voor welke waarde van p is de grenswaarde van A gelijk aan $3\frac{1}{3}$?
 - Beredeneer met de formule dat de grafiek van A voor elke waarde van $p > 0$ stijgend is voor $x > 0$.
 - Beredeneer met behulp van de formule van de afgeleide dat de grafiek van A voor $x > 0$ afnemend stijgend is.

- 24** Bij veel vormen van groei in de economie en in de natuur heeft de bijbehorende grafiek de vorm van een zogeheten *S-kromme*. Hiernaast zie je een grafiek van de groei van een zonnebloem. Gedurende twintig weken is elke week de lengte gemeten. Het resultaat van deze metingen is in de figuur hiernaast met stippen weergegeven. In de figuur zie je ook een grafiek getekend die de groei van deze zonnebloem goed benadert.

Bij die grafiek hoort de formule
$$L = \frac{400}{1 + 399 \cdot (0,55)^t}$$

waarin L de lengte van de zonnebloem in centimeters is en t de tijd in weken vanaf het begin van de metingen.



- a** In de figuur kun je zien dat L nadert naar een grenswaarde. Beredeneer met behulp van de formule hoe groot deze grenswaarde is.
-  **b** Een ander groeiproces wordt beschreven door de formule
- $$G = \frac{540}{4 + 86 \cdot e^{c \cdot t}}$$
- c** Beredeneer voor $c > 0$ hoe groot de grenswaarde van G is.
-  **c** Beredeneer ook voor $c < 0$ hoe groot de grenswaarde van G is.

- 25** Om na te gaan of een wielrenner een bepaalde snelheid kan halen kijkt men naar het vermogen van de wielrenner. Het vermogen is de energie die de wielrenner per seconde levert. Men gebruikt vaak de volgende formule $P = (k \cdot v^2 + 4) \cdot v$. Hierin is v de snelheid in meter per seconde, P is het vermogen in watt en k is een getal dat persoonsgebonden is maar onder andere ook te maken heeft met de luchtweerstand.
- a** Daan is wielrenner en hij weet dat hij een vermogen kan leveren van 190 watt en daarmee op zijn huidige fiets een snelheid van 9,2 meter per seconde kan halen. Leid uit de gegevens af dat bij hem geldt dat $k \approx 0,2$.
- b** Leg met behulp van de formule uit wat het effect van een kleinere k -waarde is op het te leveren vermogen om een bepaalde snelheid te halen.
- c** Met behulp van training kan Daan zijn vermogen verhogen tot 250 watt. Bereken welke snelheid in km per uur hij kan halen.
- d** Met behulp van een nieuwe fiets en nieuwe fietskleding kan Daan zijn k -waarde met 25 % verlagen. Onderzoek met hoeveel procent zijn maximaal haalbare snelheid toeneemt.



6-5

Gemengde opdrachten

- 26** Veel mensen maken zich zorgen over hun gewicht. Een veel gebruikte methode voor het bepalen van je eventuele onder- of overgewicht maakt gebruik van de Body Mass Index (BMI). Dit is een maat die afhangt van je gewicht en je lengte.

Voor de BMI geldt de volgende formule: $BMI = \frac{g}{l^2}$.

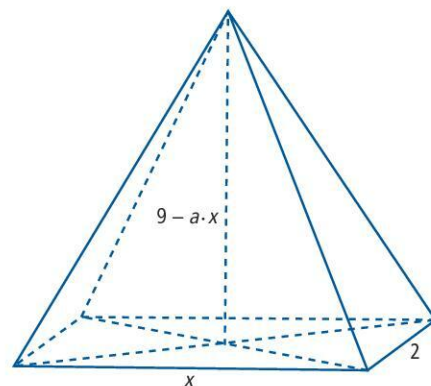
Hierin is g het gewicht in kg en l de lengte in meters.

- a** Marian is 163 cm lang en heeft een gezond gewicht. Tussen welke twee waarden ligt het gewicht van Marian?
- b** Bij een gegeven lengte kun je de formule voor BMI schrijven als $BMI = c \cdot g$. Bereken c bij $l = 1,7$; bij $l = 1,8$ en bij $l = 1,9$.
- c** Teken de grafieken bij de formules van opdracht c in één assenstelsel.
- d** Geef in de figuur van opdracht c bij deze lengten het gezonde gewicht aan.

- 27** Voor de inhoud van een piramide geldt de formule:

$$I = \frac{1}{3} \cdot \text{oppervlakte grondvlak} \cdot \text{hoogte}.$$

In deze opdracht gaat het over een piramide met een rechthoekig grondvlak met een breedte van 2 dm en een lengte van x dm. De hoogte van de piramide is gelijk is aan $h = 9 - a \cdot x$ waarbij a een constante is.



- a** Voor de inhoud van deze piramide geldt de formule:

$$I = 6x - \frac{2}{3}ax^2$$

Toon dit aan door deze formule af te leiden uit de gegevens.

- b** Neem $a = 2$ en bereken voor welke waarde van x de piramide de grootste inhoud heeft.
- c** De waarde van x waarvoor de inhoud van de piramide maximaal is, noemen we x_{MAX} . Deze is niet steeds dezelfde, maar hangt af van de waarde van a . Teken in een assenstelsel de grafiek van het verband tussen x_{MAX} en a .

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2015, tijdvak 1)

- 28** Tussen K en p bestaat een verband met de formule

$$K = \frac{11,8p + 9,44}{2,36} - 0,25p + 3,95 - 0,12(2 - 30p).$$

- a** Toon aan dat het verband tussen K en p lineair is.
- b** Tussen G en p bestaat een lineair verband met de formule $3p = 5G - 6$. Bereken met algebra voor welke waarde van p de waarden van K en G gelijk zijn.

	BMI
ondergewicht	≤ 20
gezond gewicht	$\langle 20, 25]$
te hoog gewicht	$\langle 25, 30]$
overgewicht	> 30

- 29** Facebook is een sociaalnetwerksite, opgericht door Mark Zuckerberg in februari 2004. In september 2006 kreeg iedereen vanaf 13 jaar, waar ook ter wereld, de mogelijkheid om zich te registreren en actief gebruik te gaan maken van de site. Het aantal actieve gebruikers steeg de eerste jaren spectaculair. In de maanden na 1 juli 2009 groeide het aantal actieve gebruikers niet meer zo explosief maar bij benadering lineair, van 244 miljoen op 1 juli 2009 tot 493 miljoen op 1 augustus 2010. Er werd in 2011 voorspeld dat de groei zich op deze manier zou voortzetten.

- a** Bereken hiermee het aantal actieve gebruikers op 1 december 2013.

Het bleek erg optimistisch om aan te nemen dat de groei zich lineair voortzet. Al in 2011 voorspelden sommigen dat de groei verder zou afnemen. In de figuur hiernaast zie je een grafiek die bij deze voorspelling past. Bij deze grafiek hoort de formule

$$A = \frac{4500}{5 + 310 \cdot 0.926^t}.$$

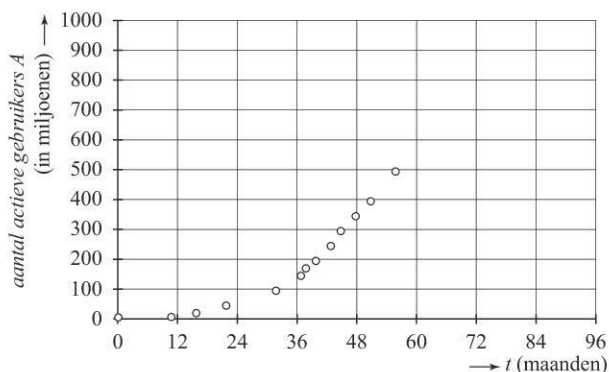
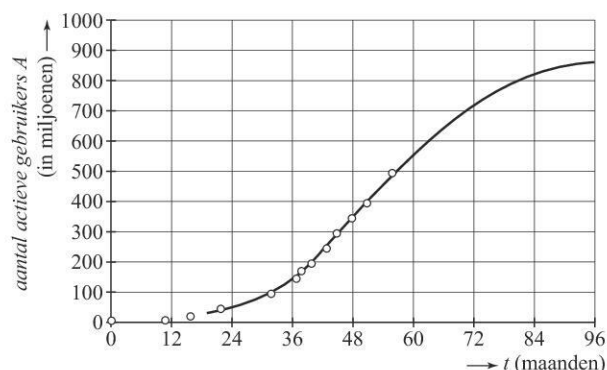
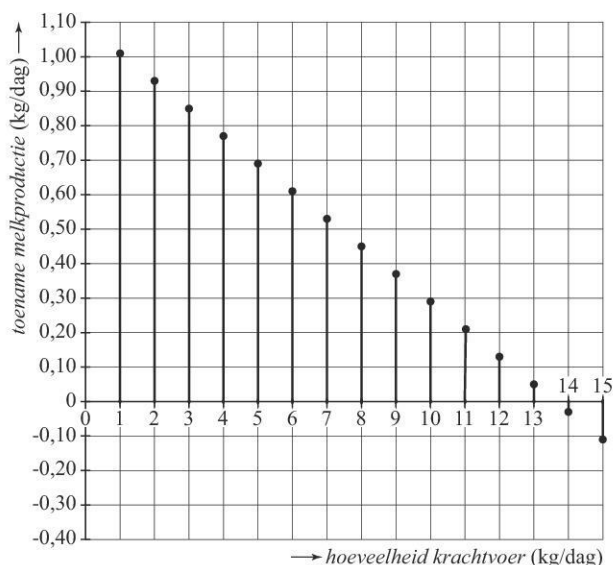
Hierin is A het aantal

actieve gebruikers in miljoenen en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 december 2005.

- b** Bereken in welk jaar volgens de formule voor het eerst meer dan 730 miljoen actieve gebruikers zijn.
- c** Beredeneer dat volgens de formule het aantal actieve gebruikers blijft stijgen.
- d** Beredeneer met behulp van de formule hoe groot de grenswaarde van A is.
(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2015, tijdvak 1)

- 30** In het toenamendiagram hiernaast kun je zien hoe de toename van de melkproductie van een koe afhangt van de toegediende hoeveelheid krachtvoer.

- a** Vanaf welke hoeveelheid krachtvoer per dag neemt de melkproductie per dag niet meer toe?
- b** Bereken met behulp van lineair extrapoleren met hoeveel de melkproductie afneemt als de hoeveelheid krachtvoer per dag verhoogd wordt van 18 kg naar 19 kg.



- 31** Door zout toe te voegen aan water bevriest het water bij een lagere temperatuur dan bij 0°C . Door zout te strooien smelten sneeuw en ijs bij een temperatuur lager dan 0°C .

De vriespundaling V is het aantal graden dat het vriespunt van water lager wordt dan 0°C .

Deze waarde van V kan worden berekend met de formule

$$V = 3,72 \cdot \frac{D}{58,5 \cdot H}$$

in gram/m^2 en H is de hoeveelheid neerslag (water, sneeuw, hagel) in kg/m^2 die gevallen is.

- a** Bij $0,2 \text{ kg}$ sneeuw per m^2 wordt zout gestrooid in een dosering van $15 \text{ gram}/\text{m}^2$.

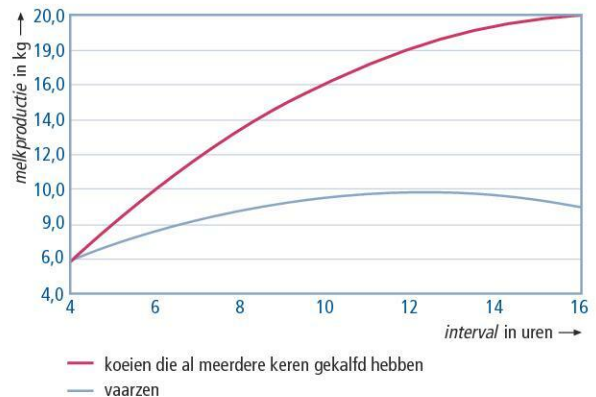
Laat met behulp van de formule zien dat het vriespunt dan daalt tot beneden -2°C .

- b** Bij elke waarde van H is V evenredig met D .
Laat dit met algebra zien en bereken voor $H = 0,2$ de evenredigheidsconstante in twee decimalen.

-  **c** Men wil een vriespundaling van 4 graden Celsius bereiken.
Bereken hoeveel procent de dosering moet zijn van de hoeveelheid neerslag.

- 32** De melkproductie van een koe hangt onder andere af van de lengte van het tijdsinterval tussen twee opvolgende tijdstippen waarop een koe wordt gemolken. In de twee grafieken in de figuur hiernaast is te zien dat er een groot verschil is tussen jonge koeien die nog maar één keer gekalfd hebben (vaars) en koeien die al meerdere keren gekalfd hebben.

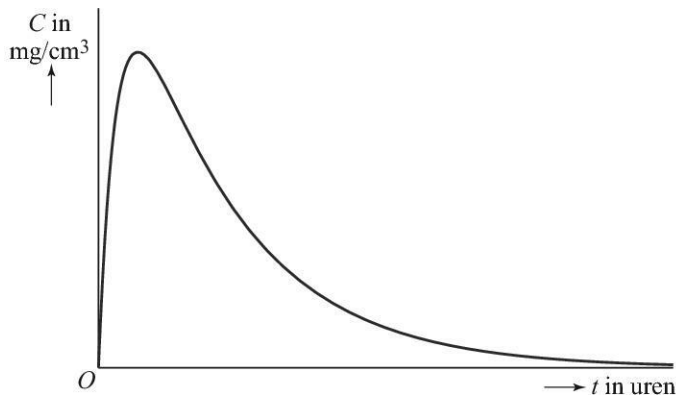
- a** Hoeveel liter melk geeft een koe die al meerdere keren gekalfd heeft en om de 10 uur gemolken wordt per dag meer dan een vaars die om de 10 uur gemolken wordt?



De grafiek bij de melkproductie van een vaars lijkt de vorm van een bergparabool te hebben. Een formule van de vorm $M = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ past hier dus bij waarbij M de melkproductie per melkbeurt in kg is en t de lengte van het tijdsinterval tussen twee melkbeurten in uren is.

- b** Ga je er vanuit dat deze grafiek een top heeft bij een tijdsinterval van 12 uur, dan kun je met behulp van de afgeleide M' aantonen dat $b = -24a$.
Toon dit aan.
- c** Gebruik het gegeven dat de grafiek door het punt $(4, 6)$ gaat en dat $b = -24a$ om aan te tonen dat $c = 80a + 6$.
- d** Gebruik de coördinaten van de top $(12; 9,8)$ om de waarde van a te berekenen.
- e** Plot de grafiek van de gevonden formule en controleer of deze bij benadering overeen komt met de gegeven grafiek.

- 33** Hooikoorts is een vervelende allergische aandoening waar veel mensen last van hebben. PharmaCie brengt een nieuw medicijn tegen hooikoorts op de markt. Het nieuwe medicijn van PharmaCie wordt in pilvorm verkocht. Als een patiënt klachten krijgt, neemt hij een pil. De werkzame stof komt dan via de maag en de darm in de bloedbaan terecht. De hoeveelheid werkzame stof in de bloedbaan stijgt eerst en neemt daarna af omdat het door het lichaam wordt afgebroken. De concentratie van de werkzame stof in de bloedbaan noemen we C . In de figuur hieronder zie je een schets van de grafiek van C .



Een onderzoeker van PharmaCie stelt de volgende formule op die dit

verloop redelijk benadert: $C_1 = \frac{16t}{190t^2 + 160}$

Hierin is C_1 de concentratie werkzame stof in mg/cm^3 en t de tijd in uren na het innemen van de pil.

- a** Bereken met behulp van de afgeleide van C_1 na hoeveel minuten, gerekend vanaf het moment dat de pil is ingenomen, de concentratie werkzame stof maximaal is.

Een andere onderzoeker stelt een geheel andere formule op voor het verband tussen de tijd na het innemen van de pil en de concentratie werkzame stof: $C_2 = 0,13(e^{-0,65t} - e^{-3,9t})$.

Hierin is C_2 de concentratie werkzame stof in mg/cm^3 en t weer de tijd in uren na het innemen van de pil.

- b** Laat met berekeningen zien dat bij beide formules op het moment van innemen van de pil de concentratie werkzame stof gelijk is aan nul.
c Naast $t = 0$ is er nog een waarde van t waarvoor de concentratie werkzame stof bij beide formules dezelfde is.
 Bereken deze waarde van t . Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Aan de gegeven schets van de grafiek is te zien dat de werkzame stof na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed verdwenen is. Met een redenering kun je aantonen dat elk van beide formules dit proces beschrijft.

- d** Beredeneer aan de hand van de formules van C_1 en C_2 dat de werkzame stof volgens beide formules na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed is verdwenen. (Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 1)

Samenvatting

Lineaire formules

Een formule voor een lineair verband tussen de variabelen x en y is de lineaire formule $y = ax + b$.
Hierbij is b het startgetal, dat is de waarde van y bij $x = 0$.
 a is het hellingsgetal of richtingscoëfficiënt, dat is de toename van y als x met 1 toeneemt.

Een lineair verband kun je op verschillende manieren herkennen:

- > De grafiek is een rechte lijn;
- > In een tabel en in een grafiek is er bij gelijke stappen altijd dezelfde toename;
- > Uit de tekst kun je opmaken dat de toename bij gelijke stappen altijd dezelfde is.

Recht evenredig, evenredigheidsconstante en omgekeerd evenredig

Twee variabelen heten recht evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

Zijn de variabelen x en y , dan geldt $y = c \cdot x$, ofwel $\frac{y}{x} = c$.

De constante c heet de evenredigheidsconstante.

Je herkent een evenredig verband in een tabel, als van de twee getallen in elke kolom de verhouding dezelfde is. De grafiek bij een evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.

Twee variabelen heten omgekeerd evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, wordt de andere variabele k keer zo klein.

Zijn de variabelen x en y , dan geldt $x \cdot y = c$ ofwel $y = \frac{c}{x}$ ofwel $x = \frac{c}{y}$.

Je herkent een omgekeerd evenredig verband in een tabel als het product van de variabelen in elke kolom steeds hetzelfde is.

Voorbeeld 1

G	2	5	10	40
W	3	7,5	15	60

G en W zijn evenredig want er geldt steeds $W = 1,5 \cdot G$.

De evenredigheidsconstante is 1,5.

De bijbehorende grafiek is een rechte lijn door $(0, 0)$ met richtingscoëfficiënt 1,5.

Voorbeeld

Bij een verband tussen p en q hoort de formule $5K = 1\frac{1}{2} - \frac{7t}{2}$.

Toon aan dat het verband lineair is.

Oplossing

Schrijf de gegeven formule in de vorm $K = a \cdot t + b$.

$$10K = 3 - 7t$$

$$K = -0,7t + 0,3$$

Dus is het verband lineair.

Voorbeeld 2

a	0,5	1	2	10
k	6	3	1,5	0,3

a en k zijn omgekeerd evenredig want er geldt steeds $a \cdot k = 3$.

Ook geldt $a = \frac{3}{k}$ of $k = \frac{3}{a}$.

Je kunt lineair interpoleren en extrapoleren

Bij lineair interpoleren wordt aangenomen dat de grafiek tussen twee bekende punten lineair is.

Bij lineair extrapoleren ga je uit van een verdere constante toe- of afname.

Voorbeeld

In 1990 had de gemeente Almere ongeveer 71 duizend inwoners. In het jaar 2005 was dat toegenomen tot ongeveer 173 duizend. Schat met lineair interpoleren het aantal inwoners in 1993.

Oplossing

De toename per jaar tussen 1990 en 1995 is gelijk aan $(173 - 71) : 5 = 6,8$ duizend inwoners. In 1993 had Almere dus ongeveer $71 + 3 \times 6,8 = 91,4$ duizend inwoners.

Je kunt bij een tabel een formule opstellen

Je gaat eerst na welk verband bij de tabel hoort: een lineair, een exponentieel of een machtsverband.

Voorbeeld 1

Stel een exponentiële formule op bij de volgende tabel.

t	2	5	8	11
F	10,0	17,9	32,1	57,5

Oplossing

$\frac{17,9}{10} = 1,79$, $\frac{32,1}{17,9} \approx 1,79$ en $\frac{57,5}{32,1} \approx 1,79$, dus bij

gelijke toenames van t wordt F steeds met ongeveer 1,79 vermenigvuldigd.

De groeifactor is $1,79^{\frac{1}{3}} \approx 1,21$.

Hieruit volgt dat de beginwaarde gelijk is aan $10 \cdot 1,21^{-2} \approx 6,8$.

De formule bij de tabel is dus $F = 6,8 \cdot 1,21^t$.

Voorbeeld 2

Bij de volgende tabel past bij benadering een machtsverband met een formule van de vorm $M = c \cdot k^a$. Bereken c en a .

k	1	4	9	15
M	24	56	92	125

Oplossing

Invullen van $k = 1$ en $M = 24$ geeft $24 = c \cdot 1^a$.

Hieruit volgt $c = 24$ zodat $M = 24 \cdot k^a$.

Vervolgens $k = 15$ en $M = 125$ invullen in $M = 24 \cdot k^a$ geeft $125 = 24 \cdot 15^a$.

Hieruit volgt $15^a = \frac{125}{24} \approx 5,2083$, dus

$a = {}^{15}\log(5,2083) \approx 0,61$.

De formule wordt dus bij benadering

$M = 24 \cdot k^{0,61}$.

Je kunt redeneren met formules

Door redeneren kun je nagaan welke eigenschappen de grafiek bij een gegeven formule heeft.

Voorbeeld

Beredeneer dat de grafiek bij de formule $K = 18 + \frac{19}{2 + {}^3\log(A+4)}$ dalend is en dat K een grenswaarde 18 heeft.

Oplossing

Als A groter wordt, wordt ${}^3\log(A+4)$ ook groter en dus wordt 19 gedeeld door een steeds groter wordend getal. De waarde van de breuk wordt dus kleiner. Dus de grafiek van K daalt.

Als A heel groot wordt, wordt de noemer heel groot en nadert de breuk tot 0.

Dus is de grenswaarde van K gelijk aan 18.

Test jezelf

T-1

Hierboven zie je een figuur met een grafiek die hoort bij het verband tussen het gemiddeld gewicht en de leeftijd van kinderen tot vijf jaar. Vanaf een leeftijd van twee jaar loopt deze grafiek vrijwel rechtlijnig. Bereken met lineair extrapoleren het gemiddeld gewicht van een kind van $6\frac{1}{2}$ jaar.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-1.

T-2

Bij een bepaalde fotoprinter kun je fotopapier van het formaat 10 x 15 cm aanschaffen samen met inktcartridges. De fabrikant verpakt twee sets van 18 vellen fotopapier samen met één inktcartridge. Je kunt ook verpakkingen met vier sets van 18 vellen samen met twee cartridges kopen maar ook verpakkingen met zes sets fotopapier en drie inktcartridges enzovoorts.

- Leg uit dat het verband tussen het aantal sets fotopapier en het aantal inktcartridges recht evenredig is.
- Noem het aantal inktcartridges c en het aantal sets fotopapier f . Druk f uit in c en geef de evenredigheidsconstante.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-2.

T-3

Er wordt een tijdrit van 36 km gehouden voor amateur wielrenners. Het gaat er om wie deze afstand in de kortste tijd kan overbruggen.

- Maarten won deze tijdrit met een gemiddelde snelheid van 45 km/u. Hoelang doet hij over de tijdrit?
 - De gemiddelde snelheid in km per uur over deze tijdrit is v en t is de tijd die de wielrenner nodig had voor de tijdrit. Leg uit dat tussen v en t een omgekeerd evenredig verband bestaat en geef een bijbehorende formule.
 - Nico fietste met een gemiddelde snelheid die $\frac{2}{3}$ keer zo groot is als die van Maarten. Hoeveel keer zo veel tijd had hij nodig dan Maarten?
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-2.*

- T-4** In de tabel hiernaast staat voor enkele planeten de afstand tot de zon A in miljoenen kilometers en de omwentelingstijd rond de zon T in dagen.

Het verband tussen T en A heeft de vorm $T = 0,2 \cdot A^p$.

- a** Bereken de waarde van p in één decimaal nauwkeurig.
- b** Bereken met de formule de afstand van de aarde tot de zon.
- c** Hoeveel keer zo groot wordt T als A twee maal zo groot wordt? Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-3.

Planeet	A	T
Jupiter	778	4329
Saturnus	1427	10753
Uranus	2870	30660
Neptunus	4497	60150
Pluto	5907	90670

- T-5** Een groeimodel dat de gewichtstoename van courgettes bij

$$\text{benadering weergeeft is } G = \frac{1900}{1,3 + 62 \cdot 0,68^t}$$

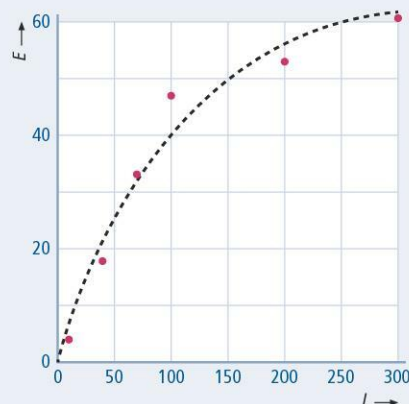
Hierin is G het gemiddeld gewicht van courgettes in gram en t de tijd, gerekend in weken vanaf het moment dat de courgettes een gewicht van 30 gram hebben.

- a** Laat met een berekening zien dat de formule inderdaad een startgewicht van ongeveer 30 gram geeft.
- b** Beredeneer hoe uit de formule volgt dat het gewicht toeneemt in de tijd.
- c** Beredeneer met behulp van de formule hoe groot de grenswaarde van het gewicht van courgettes ongeveer is. Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-4.



- T-6** Larven die grote schade toebrengen aan gewassen kunnen milieuvriendelijk bestreden worden met sluipwespen. Een sluipwesp legt een eitje in de larve waardoor de larve uiteindelijk dood gaat. Een onderzoeker wilde weten hoeveel larven één sluipwesp maximaal per dag kan bestrijden. Om dit te onderzoeken werd één sluipwesp in een grote afgesloten ruimte met larven gezet. Na één dag werd geteld hoeveel larven er in totaal in de ruimte waren. Dit aantal noem je L . Ook werd geteld hoeveel larven een eitje bevatten. Dit aantal noem je E . Het experiment werd zes maal uitgevoerd. De resultaten (stippen) zie je in de figuur hiernaast. Bij 100 larven blijken er 46 te zijn met een eitje.

- a** Hoe kun je in de figuur zien dat het verband tussen E en L voor de waarden van L van 0 tot 100 recht evenredig is?
- b** Geef een formule voor het verband tussen E en L voor de waarden van L van 0 tot 100.
- c** Het verband tussen E en L kan voor grotere waarden van L beter benaderd worden door de formule $E = 64 \cdot (1 - 0,6^{0,02L})$. Hoeveel procent wijkt het aantal volgens deze formule bij $L = 100$ af van het aantal wat je kunt aflezen in de grafiek?
- d** Volgens de formule kan het aantal larven met eitjes E niet boven een bepaalde grenswaarde uitkomen. Beredeneer hoe groot deze grenswaarde is. (Ontleend aan CE havo wiskunde B 2009, tijdvak 2)



Vaardigheden 3

Logaritmische en exponentiële formules

${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$
 ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$
 ${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$
uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$
en omgekeerd.

1 Schrijf als één logaritme.

a $3 + {}^2\log(5)$

b $2 \cdot {}^3\log(x) + {}^3\log(x-1)$

c $2 \cdot {}^6\log(2x) - {}^6\log(4x) + 1$

d $\log(100x + 200) - \log(x + 2)$

2a Laat zien dat de formule $u = 0,5 \cdot 3^p$ te herleiden is tot $p = {}^3\log(2u)$.

b Laat zien dat de formule $p = {}^{0,65}\log\left(\frac{1-u}{2}\right)$ te herleiden is

tot $u = 1 - 2 \cdot 0,65^p$

c Gegeven is de formule $p = {}^{1,2}\log(10u - 250)$.
Druk u uit in p .

3 Druk t uit in N .

a $N = \frac{3}{1 + 2^t}$

b $N = \frac{24}{2 + 0,5 \cdot 3^t}$

4 Gegeven is de formule $P = 8K + {}^2\log(W) + 40$.

a Neem $W = 1024$ en druk K uit in P .

b Neem $K = 25$ en druk W uit in P .

c Neem $P = 50$ en druk W uit in K .

5 Gegeven is de formule $L = \frac{300}{1 + 299 \cdot 0,65^t}$

a Leg uit waarom $0,65^t$ naar 0 nadert als de waarde van t alsmaar toeneemt.

b Leg uit tot welke waarde $1 + 299 \cdot 0,65^t$ op den duur nadert.

c Bereken hoe groot de grenswaarde van L is.

6 Bereken bij de volgende formules hoe groot de grenswaarde is.

a $U = 3 + 21 \cdot 0,43^p$

b $G = \frac{14}{2 + 3 \cdot {}^{0,5}\log(x)}$

c $E = 64(1 - 0,6^{0,02L})$

d $F = 2 + 0,6^{\frac{1}{L}}$

- 7** Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van vliegvelden veel geluidsoverlast. De geluidsbelasting B (de hoeveelheid geluid) op een plaats in de buurt van een vliegveld hangt af van het aantal vliegtuigen N dat per jaar passeert en van het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig L . Voor het verband tussen L , N en B geldt de formule $B = 20 \cdot \log(N) + \frac{4}{3}L - 157$.
- a** In een bepaald jaar is het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig gelijk aan 76 en de geluidsbelasting op een plek in de buurt van een vliegveld 53,3.
Bereken het aantal vliegtuigen dat in dat jaar deze plek passeert.
- b** Stel dat het aantal vliegtuigen dat passeert, verdubbelt en dat het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig gelijk blijft. Met hoeveel neemt B toe als N verdubbelt?
- c** Voor $B = 53,3$ is het verband tussen N en L gegeven door de formule $53,3 = 20 \cdot \log(N) + \frac{4}{3}L - 157$.
Druk L uit in N .
- d** Vanwege milieuwetgeving is de maximale geluidsbelasting gelijk aan 45.
Het maximaal toegestane aantal vliegtuigen bij deze geluidbelasting is afhankelijk van het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig.
Laat zien dat voor het verband tussen N en L de volgende formule geldt: $N = 1,259 \cdot 10^{10} \cdot 0,858^L$.
- e** Door technologische ontwikkelingen neemt het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig in 20 jaar tijd af van 76 naar 70. Bereken hoeveel vliegtuigen er méér mogen vliegen bij een gelijkblijvende geluidsbelasting van $B = 45$.
(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2003, tijdvak 2)

Differentiëren

Hieronder staat een overzicht van de formules die je kunt gebruiken bij het differentiëren. Dit overzicht staat ook op een pagina Formules van het Centraal Examen.

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

- 8** Gegeven is de functie $f(x) = 4\sqrt{x} - \frac{1}{2}x$.
- a** Bereken de gemiddelde toename van f als x toeneemt van $x = 1$ tot $x = 4$.
- b** Bereken het differentiequotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ over het interval $[0, 1]$.
- c** Bepaal het functievoorschrift van $f'(x)$.
- d** Beredeneer met behulp van de afgeleide dat functie f dalend is voor $x > 16$.
- 9** Differentieer de volgende functies en vereenvoudig je antwoord.
- a** $f(x) = 0,64x^{2,75} - 3,75x^{0,12}$ **e** $j(x) = (x^2 - 3x) \cdot \sqrt{x}$
- b** $g(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2}$ **f** $l(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{3x + 7}$
- c** $h(x) = (2x^2 + 7x - 4)(5 - 3x)$ **g** $q(x) = 8 + 3 \cdot e^{4x}$
- d** $k(x) = (3x^2 - 5)^4$ **h** $w(x) = 10^{-x} + 10^{2x}$
- 10a** Toon aan dat de afgeleide van de functie $N(t) = \frac{2500}{2 + 5 \cdot 0,837^t}$ gelijk is aan $N'(t) = \frac{2224 \cdot 0,837^t}{(2 + 5 \cdot 0,837^t)^2}$
- b** Differentieer de functie $g(x) = (2x - 1)\ln(x)$.
- 11a** Gegeven is de formule $y = \log(x) + 3$.
Stel de formule op voor $\frac{dy}{dx}$
- b** Gegeven is de formule $P = \frac{15,6}{G} - 22,8$.
Stel de formule op voor $\frac{dP}{dG}$
- 12** De directie van een vervoersmaatschappij heeft onderzoek laten doen naar het verband tussen de jaarlijkse winst en het aantal passagiers. Voor de gemiddelde winst GW in euro per passagier kan het volgende model worden gebruikt: $GW = -0,125q + 10 - \frac{150}{q}$. Hierin is q het aantal passagiers in miljoenen per jaar. De formule geldt voor $10 \leq q \leq 50$.
- a** In 2015 werden 25 miljoen passagiers vervoerd.
Bereken de gemiddelde winst per passagier in 2015.
- b** Bereken ook de totale winst in 2015.
- c** Toon aan dat je met de formule $TW = -0,125q^2 + 10q - 150$ de totale winst in miljoen euro in een jaar kunt berekenen.
- d** Bereken bij welk aantal passagiers maximale totale winst wordt bereikt.
Hoe groot is die maximale winst?

Rijen

- 13** Hiernaast staat een plaatje van een amfitheater. Het theater heeft 58 oplopende toeschouwerrijen. De bovenste rij heeft plaats voor 456 toeschouwers. Op elke volgende rij is het aantal zitplaatsen telkens 6 minder.
- a** Bereken het aantal zitplaatsen op de onderste rij.
 - b** Ga met een berekening na of in dit theater plaats is voor 16 000 mensen.
- 14** Abe is een fanatieke hardloper. Voor de sponsorloop die zijn school organiseert om geld in te zamelen voor een goed doel, heeft hij een schema gemaakt. Hij gaat ervan uit dat hij rustig begint en elke ronde steeds 2 seconden sneller loopt dan de voorgaande ronde. De eerste ronde loopt hij in 150 seconden, over de tweede ronde doet hij dus 148 seconden, enzovoort. Voor de rondetijden geldt de volgende formule $t(n) = 152 - 2n$. Hierin is $t(n)$ de tijd in seconden voor ronde n . De totale tijd $T(n)$ die Abe over n ronden doet, wordt weergegeven door de formule: $T(n) = 151n - n^2$.
- a** Toon aan dat de formule voor $T(n)$ juist is.
 - b** De sponsorloop duurt 30 minuten.
Bereken hoeveel volledige ronden Abe in die tijd kan afleggen.
 - c** Abe wordt gesponsord door zijn ouders. Voor zijn eerste ronde geven zij slechts 0,01 euro, maar elke volgende ronde geven zij twee keer zoveel als voor de voorafgaande ronde. Het bedrag in euro's dat hij krijgt in de n -de ronde, kun je berekenen met de formule $b_n = 0,005 \cdot 2^n$.
Toon aan dat de formule voor b_n juist is.
 - d** Bereken hoeveel geld zijn ouders betalen als Abe na 10 ronden stopt.
- 15** Aan het einde van elke maand moet een drogisterijketen tandpasta inkopen bij de groothandel. Om een schatting te maken van het aantal in te kopen tubes wordt het volgende model gebruikt: neem het gemiddelde van de verkoop in de twee voorafgaande maanden.
- a** In januari zijn 5200 tubes verkocht en in februari 4000 tubes. Bereken hoeveel tubes tandpasta in maart worden ingekocht.
 - b** Als je aanneemt dat de schatting steeds de werkelijke verkoop in die maand is, kun je met dit model ook de verkoop van de volgende maanden uitrekenen. In een formule: $V(n+2) = \frac{1}{2}V(n+1) + \frac{1}{2}V(n)$ met $V(0) = 5200$ en $V(1) = 4000$. Hierin is $V(n)$ het aantal verkochte tubes tandpasta n maanden na januari.
Bereken hoeveel tubes tandpasta volgens dit model in juli worden verkocht.
 - c** Als je met dit model een groot aantal maanden doorrekent, verandert het aantal tubes tandpasta niet meer.
Bereken na hoeveel maanden dit voor het eerst het geval is.



Combinatoriek

- 16** In Nederland zijn ongeveer 24,7 miljoen bankpassen in omloop. Elke bankpas is beveiligd met een pincode bestaande uit vier cijfers, elk te kiezen uit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9. Daarbij mag een cijfer vaker voorkomen.
- a** Hoeveel verschillende pincodes bestaan er?
 - b** Ga ervan uit dat alle pincodes even vaak voorkomen. Hoeveel bankpassen hebben naar verwachting dezelfde pincode als jouw bankpas?
 - c** Tom is zijn pincode vergeten. Hij weet nog wel dat er één 4 en verder alleen het cijfer 6 in voorkomt. Bij de bank heeft hij drie pogingen om zijn pincode in te toetsen. Indien de code de derde keer weer fout is, wordt zijn pas geblokkeerd. Heeft Tom genoeg mogelijkheden om er zeker van te zijn dat zijn pas niet geblokkeerd wordt?
 - d** Hoeveel pincodes kun je maken waarin zowel het cijfer 2 als het cijfer 5 ten minste één keer voorkomt?



Je kunt op verschillende manieren een telprobleem oplossen.

> door alle mogelijkheden systematisch uit te schrijven of

> door gebruik te maken van een (deel van) een boomdiagram, een rooster, een wegendiagram, schema of tabel.

Soms moet je deelresultaten combineren.

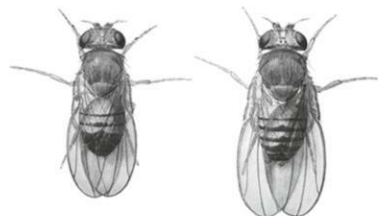
- 17** Een gezelschap van vier mannen en vier vrouwen heeft zojuist met elkaar gedineerd. Nu moeten drie personen aangewezen worden die de afwas zullen doen.
Bereken het aantal mogelijke drietallen met twee mannen en één vrouw.
- 18** Je gooit met een viervlaksdobbelsteen (1 tot en met 4) en een zesvlaksdobbelsteen (1 tot en met 6). Je noteert de som van de aantallen ogen.
- a** Op hoeveel manieren kun je het resultaat 8 krijgen?
 - b** Om de uitkomsten te noteren kun je gebruik maken van een schema. Hiernaast is daarmee een begin gemaakt. Hoeveel uitkomsten hebben als resultaat 5 of groter?
 - c** Stel je berekent het verschil tussen de aantallen ogen die je gegooit hebt. Daarbij trek je het kleinste aantal van het grootste aantal af. Bij een gelijk aantal ogen is het verschil 0. Welk verschil komt het meest voor?
 - d** Welk verschil komt het minst vaak voor?
- 19** Je gooit met drie gewone dobbelstenen, een rode, een gele en een zwarte en telt de aantallen ogen bij elkaar op.
Bereken het aantal verschillende mogelijkheden om het resultaat 15 te krijgen.

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	..	..	..
4	..	..	..	..
5	..	..	..	..
6	..	..	..	..

- 20** Een pas onafhankelijk geworden land moet een vlag kiezen. De vlag bestaat uit drie horizontale banen, die elk een kleur krijgen. Daarbij kan gekozen worden uit de kleuren geel, blauw en zwart. Twee banen met dezelfde kleur mogen niet aan elkaar grenzen. Bereken hoeveel verschillende vlaggen mogelijk zijn.



- 21** Bij praktische opdrachten voor het vak biologie over kruisingen wordt vaak gebruik gemaakt van fruitvliegjes (*Drosophila melanogaster*). Deze fruitvliegjes zijn namelijk makkelijk te kweken en de ontwikkeling van ei tot fruitvliegje duurt maar negen dagen. Men kan dus in zeer korte tijd veel generaties kweken. Bovendien is een aantal eigenschappen van fruitvliegjes goed zichtbaar: oogkleur (rood/zwart), vleugelvorm (kort/lang) en huidskleur (donker/geel). Een fruitvliegje met zwarte oogkleur, korte vleugels en een gele huidskleur wordt getypeerd als: z-k-g.



- a** Op basis van deze eigenschappen zijn er acht typen mannetjes en acht typen vrouwtjes. Leg dit uit.
- b** Voor een kruisingsexperiment moeten vier fruitvliegjes, twee mannelijke en twee vrouwelijke, in een kweekruimte worden geplaatst. Hierbij gelden twee eisen:
- > De twee mannelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.
 - > De twee vrouwelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.

Bereken hoeveel verschillende samenstellingen in de kweekruimte mogelijk zijn.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 2)

- 22** Een planoloog wil graag weten op grond van welke eigenschappen de bewoners de straten van hun wijk beoordelen. Als onderdeel van zijn onderzoek legt hij een aantal proefpersonen groepjes van drie straten voor. Hij vraagt hen bij elk groepje aan te wijzen welke twee van de drie straten het meest op elkaar lijken. Het onderzoek heeft betrekking op 10 straten, voor het gemak A, B, C, D, E, F, G, H, K, L genoemd. Hieruit worden alle mogelijke groepjes van drie straten gevormd en elk groepje wordt in alfabetische volgorde op een kaartje geschreven. Hiernaast zie je drie voorbeelden.

D	D	A
F	H	C
G	K	D

- a** Bereken hoeveel kaartjes er nodig zijn.
- b** Op hoeveel kaartjes komt straat A voor?
- c** Op hoeveel kaartjes komen de straten A en B samen voor?
- d** Een proefpersoon is bereid om bij alle kaartjes zijn keuze van twee straten te maken. Onderzoek of het mogelijk is dat hij 7 keer voor de straten AB, 7 keer voor de straten AC en 7 keer voor de straten AD kiest.
- (Ontleend aan CE havo wiskunde A 1990, tijdvak 1)

Onderzoeksopdrachten

De opdrachten op deze twee bladzijden bevatten een hoeveelheid informatie in de vorm van getallen of formules, gevolgd door één vraag.

Op het Centraal Examen kun je ook dergelijke vragen verwachten.

0-1 Benzineverbruik

Op het bedieningspaneel van haar auto kan mevrouw Hendriks haar benzineverbruik aflezen. Het benzineverbruik wordt aangegeven met een getal. Dat getal stelt voor het gemiddelde benzineverbruik in liters per 100 km. In haar auto wordt dit op elk moment weergegeven over de laatst gereden 5000 km.

Mevrouw Hendriks gebruikt haar auto voornamelijk voor woonwerkverkeer. Daarbij is haar gemiddelde verbruik altijd 8,6 liter benzine per 100 km.

Mevrouw Hendriks ging in het voorjaar van 2014 voor het eerst met haar auto op vakantie. Bij haar vertrek stond de kilometerteller op 36 712 km en de benzineverbruikmeter op 8,6. Bij haar thuiskomst van vakantie stond de teller op 37 712 en de benzineverbruikmeter op 8,1.

“Deze vakantie heb ik heel wat zuiniger gereden dan over de kilometers 31 712 – 32 712” merkt ze op. “Ik vraag me af hoeveel zuiniger.”

Onderzoek hoeveel lager het gemiddelde benzineverbruik per 100 km in deze vakantie was in vergelijking met het gemiddelde benzineverbruik over de kilometers 31 712 – 32 712. Geef een duidelijke toelichting.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2015, tijdvak 2)

0-2 Bij de tienkamp in de atletiek krijgt een deelnemer punten voor elk onderdeel.

Bij het hoogspringen bij de mannen gaat dat volgens de formule $P_{\text{hoog}} = 0,8465 \cdot (h - 75)^{1,42}$ met P_{hoog} het aantal punten en h de hoogte in centimeter.

Eelco mag twee keer springen. Bij de tweede keer springt hij 4 cm hoger dan bij de eerste keer. Zijn puntenaantal neemt met 37 toe.

Onderzoek hoe hoog Eelco de eerste keer sprong.



0-3 Vaatwasser

Martin heeft een nieuwe vaatwasser gekocht. Bij de aflevering vertelde de monteur het volgende:
‘Ik gebruik thuis altijd het korte programma in plaats van het normale programma, want dat is goedkoper. Je moet de vaat dan wel even met de hand voorspoelen, dat kost je ongeveer 10 liter per keer en dat water wordt met gas verwarmd. In de vaatwasser wordt het water met elektriciteit verwarmd en dat is duurder. Gebruik daarom zoveel mogelijk het korte programma.’

In de onderstaande tabel zie je enkele gegevens over het verbruik van de vaatwasser, afkomstig uit de handleiding.

programma	normaal programma	kort programma
programmaduur in minuten	155	60
vermogen in kW (kilowatt)	0,58	1,00
waterverbruik in liters	15	10

Behalve met gegevens uit deze tabel moet Martin rekening houden met de 10 liter water die hij volgens de monteur bij het voorspoelen moet gebruiken. Martin moet dus een schatting maken van de kosten aan water en het verwarmen daarvan bij het voorspoelen.

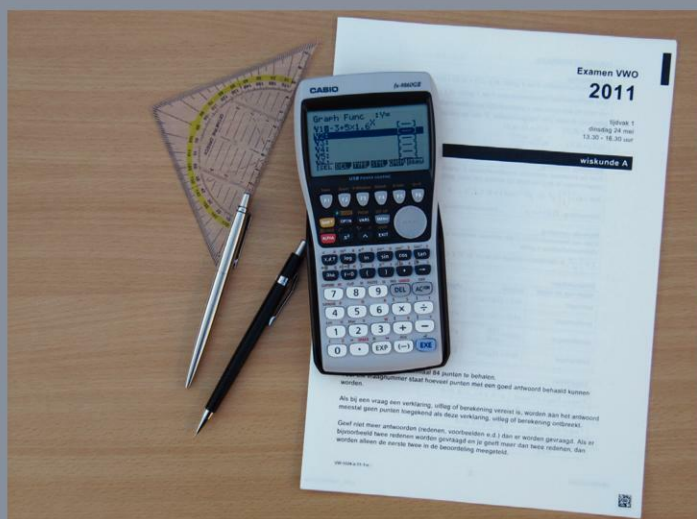
Martin heeft verder de volgende informatie verzameld:

- > Water kost 1,22 euro per m³.
- > Gas kost 0,54 euro per m³.
- > De hoeveelheid energie die een apparaat met een vermogen van 1 kW in 1 uur verbruikt, noemen we 1 kWh (kilowattuur); een apparaat met een vermogen van 0,2 kW gebruikt in 0,5 uur dus $0,2 \cdot 0,5 = 0,10$ kWh.
- > Elektriciteit kost 0,22 euro per kilowattuur (kWh).

Als Martin voorspoelt, gaan we ervan uit dat hij 1280 m³ gas per jaar verbruikt. Driekwart daarvan gaat op aan verwarming. De rest wordt gebruikt voor het verwarmen van water voor het bad en de douche, het voorspoelen, enzovoort. Martin schat dat hij voor het met de hand voorspoelen circa 10% van die rest gaat gebruiken.

Onderzoek hoe groot het prijsverschil per vaatwasbeurt is tussen het normale programma en het korte programma met voorspoelen en geef met argumenten aan wat je vindt van de opmerking van de monteur.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot, 2013 tijdvak 1)



Examen wiskunde A

In dit hoofdstuk vind je een overzicht van de stof voor het examen wiskunde A. In elke paragraaf komt een aantal onderwerpen aan bod, telkens gevolgd door één of meer korte opdrachten. Elke paragraaf sluit af met examenopdrachten die aansluiten op de stof in de paragraaf. De examenopdrachten zijn veelal uit recente examens afkomstig. Vaak betreft het een deel van een opdracht uit een examen. Op het examen gaat een opdracht meestal over meerdere onderwerpen. Bij elke examenopdracht staat de verwijzing naar een hint. De lijst met hints staat aan het eind van dit hoofdstuk. Gebruik een hint alleen als je niet weet hoe je de opdracht moet beginnen.

Hoe goed ben jij voorbereid op het examen?

Examenvoorbereiding

In dit hoofdstuk

Rekenen	174
.....	
Functies en grafieken	178
.....	
Lineaire functies en gebroken functies	186
.....	
Machtsfuncties, kwadratische functies	
en wortelfuncties	192
.....	
Exponentiële functies en logaritmische	
functies	198
.....	
Periodieke functies	206
.....	
Veranderingen en afgeleide functies	210
.....	
Rijen	216
.....	
Tellen	221
.....	
Hints bij de examenopdrachten	226
.....	
Overzicht formules	230
.....	
Examenwerkwoorden	231
.....	

Rekenen

Breuken

Je kunt breuken optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en vereenvoudigen.

Ook kun je een deel van een hoeveelheid uitrekenen.

- 1** Bereken en vereenvoudig indien mogelijk je antwoord.

a $\frac{7}{9} \times \frac{3a}{5}$

c $\frac{13}{28} + \frac{6}{7}$

b $\frac{2a}{9} - \frac{8a}{27}$

d $\frac{4 + 8a}{2}$

- 2** Bereken.

a $\frac{6}{25}$ deel van 650

c $\frac{13}{125}$ deel van 50 000

b $\frac{4}{9}$ deel van 81 000

d $\frac{2}{17}$ deel van 8585

Voorbeelden

$$\frac{3}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$$

$$\frac{2p}{5} + \frac{3p}{10} = \frac{4p}{10} + \frac{3p}{10} = \frac{7p}{10}$$

$$\frac{24a + 14}{6} = \frac{24a}{6} + \frac{14}{6} = 4a + 2\frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{8} \text{ deel van } 600 \text{ is } 0,625 \times 600 = 375$$

$$\frac{1}{7} \text{ deel van } 924 \text{ is } 924 : 7 = 132$$

$$\frac{6}{7} \text{ deel van } 924 \text{ is } 6 \times 132 = 792$$

Procenten en verhoudingen

Bij het rekenen met procenten kun je een verhoudingstabel gebruiken.

Voorbeeld 1

Op een school zijn 42 docenten ouder dan 55 jaar, dat is 35% van alle docenten op die school. Hoeveel docenten heeft die school?

Oplossing

aantal docenten	42	...
percentage	35	100

$$42 \times 100 : 35 = 120$$

De school heeft 120 docenten.

Voorbeeld 2

Het aantal leden van een sportclub is met 35 afgenomen tot 724. Bereken met hoeveel procent het ledenaantal is afgenomen.

Oplossing

Voor de afname had de club $724 + 35 = 759$ leden.

aantal leden	759	35
percentage	100	...

$$35 \times 100 : 759 \approx 4,6$$

De afname is ongeveer 4,6%.

- 3a** Van een bevolking is 24% jonger dan 25 jaar, dat zijn 1,35 miljoen mensen. Bereken uit hoeveel mensen de totale bevolking bestaat.

- b** De waarde van het aandeel Ahold is in één dag gestegen met 5% tot € 10,07.

Bereken de waarde van het aandeel een dag eerder.

- c** De verhouding jongens : meisjes in een klas met 28 leerlingen is 4 : 3. Bereken het aantal meisjes.

- d** In een bak met 84 ballen is de verhouding rood : blauw : wit gelijk aan 8 : 7 : 6.

Er zitten geen andere ballen in de bak dan rode, witte en blauwe.

Bereken het aantal rode ballen.

Bij een verhouding 4 : 3
neem je $\frac{4}{7}$ deel en $\frac{3}{7}$ deel.

Tijden

Voor het weergeven van tijden gebruik je een aparte notatie.

3.14,6 minuten betekent 3 minuten en 14,6 seconden.

Je noteert dit ook wel als 3:14,6 minuten.

3.14.25 uur betekent 3 uur, 14 minuten en 25 seconden.

Voor het berekenen van een gemiddelde snelheid reken je de totale tijd eerst om naar uren, minuten of seconden.

Vervolgens gebruik je een verhoudingstabel.

- 4a** Karl loopt een marathon in 2.45.21 uur.
Een marathon is 42 km en 195 m.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in km/u.
- b** Geef de snelheid van Karl uit opdracht a ook in m/s.
- c** José rijdt elke dag 43,6 km naar haar werk. Zonder files rijdt ze die afstand met een gemiddelde snelheid van 82,5 km/u.
Bereken hoelang ze onderweg is. Rond af op hele minuten.

Eenheden

Bij het maken van opdrachten moet je goed op de eenheden letten. Bij een formule moet worden aangegeven voor welke eenheden die formule geldt. Soms moet je bij opdrachten gegevens eerst omrekenen naar andere eenheden.

- 5** Om het water in een vijver mooi helder te krijgen kun je een middel tegen algen gebruiken. Op de verpakking hiervan staat: 'Eén week lang dagelijks 5 mL per m³ aan het water toevoegen'. Het gewicht van 1 mL is 1 gram.
Een vijver is 5 meter lang, 3 meter breed en 50 cm diep.
- a** Hoeveel liter is de inhoud van de vijver?
- b** Hoeveel kilo van het middel tegen de algen is nodig?
- c** Het middel tegen algen wordt verkocht in flessen met een inhoud van een halve liter.
Hoeveel flessen heb je nodig?

Examenopdrachten

6 Marathonloopsters

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2010, tijdvak 1)

De Olympische hardloepwedstrijd met de grootste lengte is de marathon: ruim 42 kilometer, om precies te zijn 42 195 meter. De prestatie van een loopster geeft men in krantenberichten meestal weer door de tijd waarin de marathon is afgelegd, maar een even duidelijke maat is de gemiddelde snelheid over het gehele parcours. Dit noemen we kortweg de snelheid.

Deze snelheid drukken we uit in m/s (meters per seconde).

Een marathonloopster legt de marathon af in 2 uur, 43 minuten en 32 seconden.

Bereken haar snelheid in m/s.

Hint 1

Voorbeeld

Merlijn fietst een afstand van 120 km in 8.15.24 uur. Bereken zijn gemiddelde snelheid in km per uur.

Oplossing

8.15.24 uur betekent:

8 uur, 15 minuten en 24 seconden. Dat is
 $8 \times 3600 + 15 \times 60 + 24 = 29\,724$ seconden.

afstand in km	120	...
tijd in seconden	29 724	3600

$$3600 \times 120 : 29\,724 \approx 14,53$$

Zijn gemiddelde snelheid is ongeveer
14,5 km per uur.

1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm
1 m² = 100 dm² = 10 000 cm²
1 m³ = 1000 dm³ = 1000 000 cm³
1 dm³ = 1 liter = 100 cl = 1000 ml
1 kg = 1000 gram = 1 000 000 mg

7 Containers

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2009, tijdvak 2)

Nederland verscheept jaarlijks veel goederen naar het buitenland. Dit gebeurt grotendeels met grote zeeschepen die zijn uitgerust voor containervervoer. Het vervoer met containers is nog niet zo oud. Pas in de jaren zestig van de vorige eeuw kwam in Rotterdam het eerste schip vol containers binnen. Daarna is het containervervoer steeds belangrijker geworden. Het aantal containers dat wordt geladen en gelost (ook wel containeroverslag genoemd) is in de haven van Rotterdam sinds 1983 met 130% toegenomen tot ongeveer 4 054 000 containers in 2002. Bereken hoeveel containers in 1983 geladen en gelost werden in de haven van Rotterdam.

Hint 2

8 Wind mee, wind tegen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2014, tijdvak 2)

Op de site buienradar.nl kun je verschillende weerkaarten bekijken. De kaarten bevatten actuele weergegevens zoals temperatuur, windkracht en windrichting. In de figuur hiernaast zie je de windkaart van Nederland op maandag 11 maart 2013 om 20:40 uur. Deze kaart is gebaseerd op gegevens van KNMI-meetstations die over Nederland zijn verspreid. Deze meetstations geven elke 10 minuten een nieuwe waarneming af. In Nederland zijn er 53 officiële KNMI-meetstations.

- a Bereken hoeveel waarnemingen elke dag in totaal door de officiële meetstations aan het KNMI worden doorgegeven.

Hint 3

Als je in de ochtend van huis naar school fietst en in de middag terugfietst, kan de wind invloed hebben op je totale reistijd. Hoe dat zit, onderzoeken we in de rest van deze opgave.

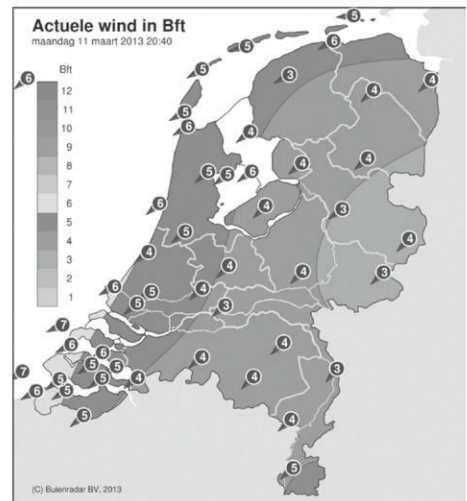
Sylvia woont 10 km van school. Zij fietst elke schooldag. We gaan ervan uit dat als er geen wind is, haar snelheid constant 20 km/u is. Haar totale reistijd is op zo'n schooldag dus 1 uur.

Meestal waait het echter. We veronderstellen dat Sylvia altijd wind mee heeft op de heenweg en wind tegen op de terugweg en dat de wind de hele dag constant is. Dan is Sylvia's snelheid op de heenweg $20 + w$ km/u en op de terugweg $20 - w$ km/u. Hierbij geldt $0 \leq w \leq 20$.

Op een dag geldt $w = 5$ en Sylvia's totale reistijd is die dag langer dan 1 uur.

- b Bereken hoeveel minuten haar totale reistijd die dag langer is dan 1 uur.

Hint 4



9 Taalonderzoek

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2015, tijdvak 2)

In 2013 was er een onderzoek naar de woordenschat van mensen in Nederland en Vlaanderen. Iedereen kon meedoen met het onderzoek door een test te doen op internet. Bij deze test kreeg een deelnemer 100 willekeurig gekozen woorden te zien uit een lijst van 50 000 bestaande Nederlandse woorden en 20 000 door de onderzoekers verzonden ‘nepwoorden’. Van elk woord moest worden aangegeven of het een bestaand woord is of niet. Na afloop van de test wordt een score toegekend. Hiervoor wordt berekend:

- het percentage bestaande woorden dat de deelnemer (terecht) als bestaand aanmerkt; dit percentage, afgerond op gehele, noemt men A ;
- het percentage nepwoorden dat de deelnemer (ten onrechte) als bestaand aanmerkt; dit percentage, afgerond op gehele, noemt men B .

Vervolgens geldt: $score = A - B$.

Marieke heeft een test gedaan. In haar test van 100 woorden zaten 37 nepwoorden.

Marieke heeft van de bestaande woorden in de test er 56 herkend. Van de 37 nepwoorden heeft ze er 5 ten onrechte als bestaand bestempeld.

- a** Laat met een berekening zien dat Marieke een score van 75 had voor de test.

Hint 5

Eind oktober 2013 was de test 572 146 keer gemaakt door 368 798 verschillende deelnemers. Er waren dus (flink wat) deelnemers die de test meer dan eens gedaan hadden. Uit onderzoek bleek dat de deelnemers in drie groepen verdeeld konden worden:

- de proevers: deze deelnemers maakten de test één keer;
- de ambitieuzen: deze deelnemers maakten de test 2–10 keer;
- de doorzetters: deze deelnemers maakten de test meer dan 10 keer.

De verdeling van deze groepen over het totaal aantal deelnemers was: proevers 76%, ambitieuzen 21% en doorzetters 3%.

Uit deze gegevens blijkt dat het gemiddeld aantal keren dat de ambitieuzen de test deden, minder dan 3 was.

- b** Bereken hoe groot dit gemiddeld aantal keren ten hoogste kan zijn. Rond je antwoord af op één decimaal.

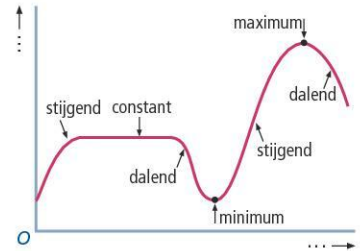
Hint 6

Functies en grafieken

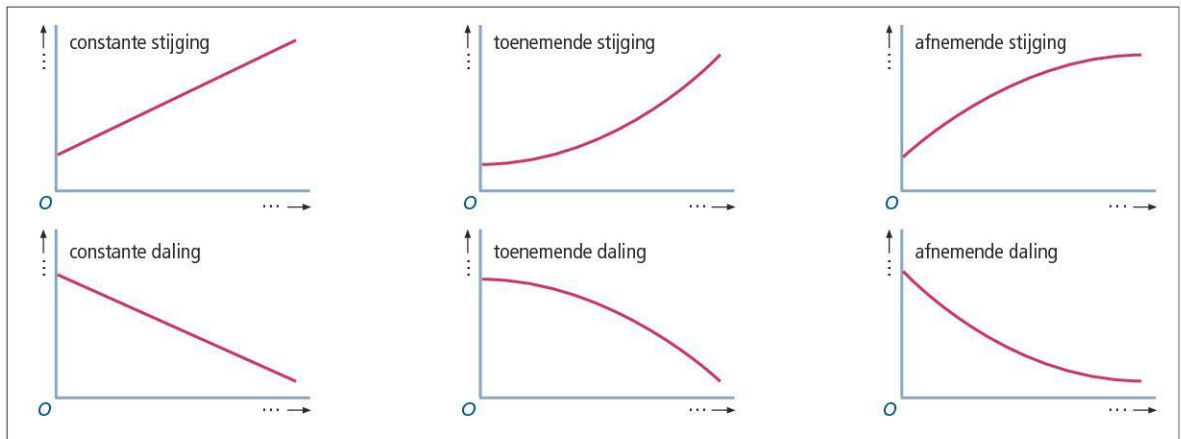
Stijgen en dalen, maximum en minimum

Als een grafiek van een functie stijgt en vervolgens daalt, heeft de functie een maximum. Als de grafiek daalt en vervolgens stijgt, heeft de functie een minimum. Punten van de grafiek waarbij sprake is van een maximum of minimum van een grafiek noem je toppen.

Maximale en minimale functiewaarden heten uiterste waarden of extreme waarden.



Een grafiek kan op verschillende manieren stijgen of dalen. Hieronder zie je de zes verschillende manieren.



10a Geef voor het deel van de grafiek hiernaast tussen A en B aan van welk soort stijgen of dalen er sprake is.

b Geef ook bij elk van de andere delen van de grafiek aan van welk soort stijgen of dalen er sprake is.

11a Geef van de volgende functies aan op welke manier de bijbehorende grafiek stijgt of daalt.

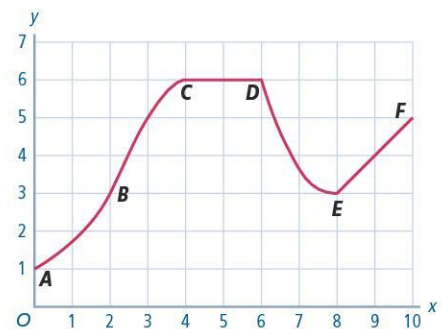
A $f(x) = 5 - 2x$

B $K(p) = 1,7^p - 5$

C $g(t) = \log(2x) - 12$

D $A(n) = 10 \cdot 0,8^n$

b Beschrijf het verloop van de grafiek van de functie $W(q) = -q^2 + 3q$



Grafieken aflezen, interpoleren en extrapoleren

Bij het aflezen van waarden uit grafieken hou je rekening met de eenheden die bij de getallen op de assen horen. Het vinden van een tussenliggende waarde in een tabel of grafiek heet interpoleren. Als de grafiek bij een tabel op een bepaald gedeelte vrijwel een rechte lijn is, dan kun je de tussenliggende waarden schatten met lineair interpoleren.

Het vinden van een verder gelegen waarde in een tabel of grafiek heet extrapoleren. Bij extrapoleren moet je de ontwikkeling van de grafiek of tabel zo goed mogelijk volgen.

Voorbeeld

<i>tijd in jaren</i>	2004	2007	2011
<i>aantal mannen</i>	1523	1796	2160

Bereken met lineair interpoleren het aantal mannen in 2010.

Oplossing

De toename tussen 2007 en 2011 is 364 mannen, in vier jaar.

Dat is $364 : 4 = 91$ mannen per jaar.

In 2010 waren er naar schatting

$$1796 + 3 \times 91 = 2069 \text{ mannen.}$$

- 12** De ontwikkeling van een vrucht wordt onderzocht. Daarvoor is de vrucht een aantal keer gewogen. In de tabel staan de resultaten.

<i>t in weken</i>	8	13	17	21
<i>g in grammen</i>	38	68	88	104

- a** Bereken met lineair interpoleren het gewicht van de vrucht op $t = 11$.
b Neem aan dat het gewicht van de vrucht in de weken na $t = 21$ met dezelfde snelheid toeneemt als in de vier weken daarvoor. Bereken met extrapoleren het gewicht van de vrucht op tijdstip $t = 26$.

Grenswaarden

Voor het bepalen van een grenswaarde van een functie kijk je hoe de functiewaarde verandert als je steeds grotere waarden bij de functie invult.

Bij een grenswaarde verandert de functiewaarde dan nauwelijks meer. Ook kun je soms door redeneren met de formule deze grenswaarde berekenen.

Voorbeeld

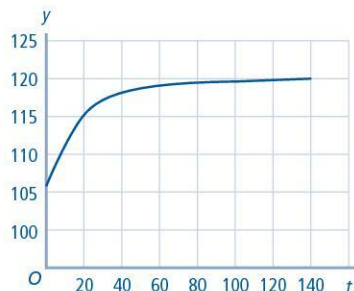
Bereken welke grenswaarde de functie $f(x) = 120 - 14 \cdot 0,95^x$ heeft.

Oplossing

Als je voor x steeds grotere waarden invult, nadert $0,95^x$ naar 0, want de groeifactor 0,95 is kleiner dan 1.

Dan nadert $14 \cdot 0,95^x$ ook naar 0, en dus nadert $120 - 14 \cdot 0,95^x$ naar $120 - 0 = 120$.

De grenswaarde is 120.



- 13** Bereken of de volgende functies een grenswaarde hebben. Geef, indien van toepassing, deze grenswaarde.
- a** $k(x) = 25 + 16 \cdot 0,45^x$ **c** $h(x) = 1 - {}^3\log(x - 4)$
- b** $k(a) = 585 - \frac{300}{a^2}$ **d** $P(t) = 145 \cdot (5 - 10 \cdot 0,25^t)$

Formules met meer variabelen

Bij een formule met meer dan twee variabelen kun je de waarde van één variabele pas uitrekenen als je de waarde van alle andere variabelen kent.

- 14** Gegeven is de formule $T = 0,15P + 6,2U - 10$
- a** Bereken P als $T = 18,1$ en $U = 4$.
b Bereken U als $T = 24,71$ en $P = 8,2$.
- 15** Gegeven is de formule $X = \frac{4Y - 3Z + 4}{2P}$
- a** Bereken X als $Y = 3$, $Z = 2$ en $P = 5$.
b Bereken Y als $X = 16$, $Z = -2$ en $P = 0,5$.
c Bereken Z als $X = 4$, $Y = 10$ en $P = 2,5$.
d Bereken P als $X = 12$, $Y = 3,5$ en $Z = 4$.
- 16** Gegeven is de formule $K = b\sqrt{x - 2} + 7$.
 De grafiek van K gaat door het punt $(6, 8)$.
 Bereken de waarde van b .

Uitdrukken in, als functie schrijven van

Bij de formule $q = -3p + 22$ is q uitgedrukt in p . Een dergelijke formule is handig om bij waarden van p de bijbehorende waarden van q uit te rekenen.

Door p uit te drukken in q krijg je een formule waarmee je bij waarden van q de bijbehorende waarden van p uit kunt rekenen.

In plaats van 'druk q uit in p ' zeg je ook wel 'schrijf q als functie van p '.

Voorbeeld 1

Herleid $q = -3p + 22$ zodat p uitgedrukt wordt in q .

Oplossing

$$-3p + 22 = q \quad (\text{links en rechts verwisseld})$$

$$-3p = q - 22 \quad (\text{links en rechts } -22)$$

$$p = \frac{q - 22}{-3} \quad (\text{links en rechts : } -3)$$

$$\text{ofwel } p = -\frac{1}{3}q + 7\frac{1}{3}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is $2p + 3q - 5r = 12$.

Neem $r = 0,6$ en schrijf p als functie van q .

Oplossing

$$2p + 3q - 5 \times 0,6 = 12 \quad (r = 0,6 \text{ ingevuld})$$

$$2p + 3q = 15 \quad (\text{links en rechts } +3)$$

$$2p = -3q + 15 \quad (\text{links en rechts } -3q)$$

$$p = -1\frac{1}{2}q + 7\frac{1}{2} \quad (\text{links en rechts : } 2)$$

- 17** Gegeven is de formule $N = -2,5Q + 1,5R + 6P$.
- a** Neem $N = 10$ en $Q = 2$ en druk P uit in R .
b Neem $N = 0$ en $R = 10$ en druk Q uit in P .
c Neem $P = Q$ en $R = 6$ en druk N uit in Q .
d Neem $N = R$ en $Q = 18$ en druk R uit in P .

Substitueren

In formules met meer variabelen moet je naast getallen soms ook andere formules substitueren. De ontstane formule is dan vaak te vereenvoudigen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $T = 13A + 5AB + \frac{10A + 3}{C}$

Gegeven is verder dat $B = 2$ en $C = 5$.

Schrijf de formule in de vorm $T = pA + q$.

Oplissing

$$T = 13A + 5 \cdot A \cdot 2 + \frac{10A + 3}{5}$$

$$T = 13A + 10A + \frac{10A}{5} + \frac{3}{5}$$

$$T = 23A + 2A + 0,6$$

$$T = 25A + 0,6$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $T = 2,5A - 14B + 6BC$

Gegeven is verder dat $B = 0,5$ en $C = 2A + 1$.

Schrijf de formule in de vorm $T = pA + q$.

Oplissing

$$T = 2,5A - 14 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5 \cdot (2A + 1)$$

$$T = 2,5A - 7 + 6A + 3$$

$$T = 8,5A - 4$$

- 18 Gegeven is de formule $p = 4r + \frac{3rq + 2t}{q}$. Verder is gegeven $q = 5$ en $t = 7$.

Schrijf de formule in de vorm $p = ar + b$.

- 19 Voor het verband tussen de variabelen P , x , y en z gelden de

formules $P = \frac{35x + 17y}{x + 4y - z}$, $x \cdot y = 10$ en $z = 2x - 3$.

Stel een formule op die P uitdrukt in x .

Functievoorschriften optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen

Je kunt een nieuwe functievoorschrift opstellen door twee functies op te tellen ($f(x) + g(x)$), af te trekken ($f(x) - g(x)$), te vermenigvuldigen

($f(x) \cdot g(x)$), te delen ($\frac{f(x)}{g(x)}$) of samen te stellen ($g(f(x))$).

- 20 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x - 5$ en $g(x) = -3x + 4$.

- a Geef functievoorschriften van $S(x) = f(x) + g(x)$,

$$V(x) = f(x) - g(x), P(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ en } Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Vereenvoudig deze functievoorschriften.

- b Bij welke van de nieuwe functies is sprake van een constante stijging?

- c Voor welke waarde van x geeft de functie Q geen functiewaarde?

- d Heeft de functie Q ook een grenswaarde? Zo ja, welke?

- e Gegeven is $R(x) = f(g(x))$.

Laat zien dat je $R(x)$ kunt schrijven als $R(x) = -6x + 3$.

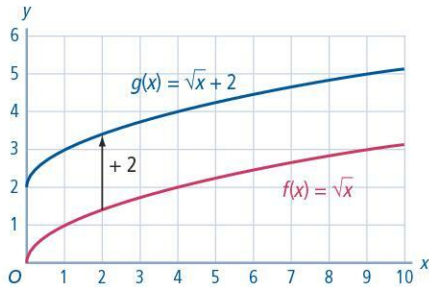
- f Onderzoek met algebra of $R(x) = f(g(x))$ dezelfde functie is als

$T(x) = g(f(x))$.

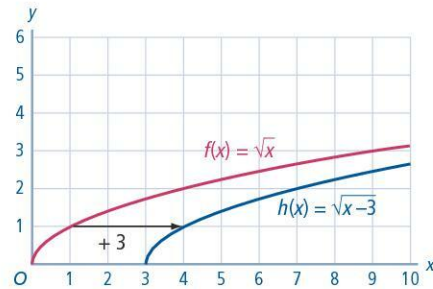
Transformaties, herschalen

Transformaties zijn bewerkingen van grafieken. De grafiek die na een transformatie ontstaat heet de beeldgrafiek.

> Grafieken kun je horizontaal en verticaal verschuiven. Een ander woord voor verschuiving is translatie.



Verschuiving 2 omhoog.



Verschuiving 3 rechts.

> Soms wordt in een formule de eenheid van één of meer variabelen veranderd. Dit heet herschalen en hierbij hoort een aangepaste formule met andere variabelen.

Voorbeeld

Het gewicht van een kubus van berkenhout kun je berekenen met de formule $g = 0,66 \cdot z^3$. In deze formule is g het gewicht in grammen en z de lengte van de zijden in cm. Geef een formule waarbij het gewicht g is uitgedrukt in de lengte van de zijden Z in dm.

Oplissing

De eenheid dm is 10 keer zo groot dus $z = 10 \cdot Z$.

De formule wordt $g = 0,66 \cdot (10 \cdot Z)^3$ ofwel $g = 660 \cdot Z^3$.

21 Hiernaast zie je twee grafieken.

a De grafiek van functie h is ontstaan door de grafiek van $f(x) = x^2$ horizontaal te verschuiven.

Geef een passend functievoorschrift bij grafiek h .

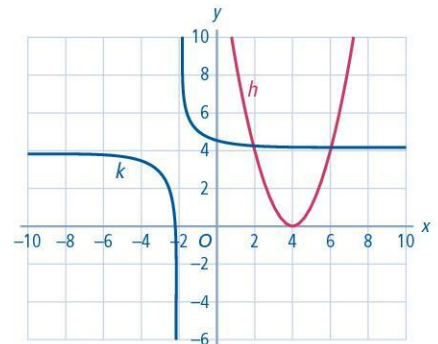
b De grafiek van functie k is ontstaan door de grafiek van $g(x) = \frac{1}{x}$ zowel horizontaal als verticaal te verschuiven.

Geef een passend functievoorschrift bij grafiek k .

22 De gemiddelde snelheid over een schaatswedstrijd van 10 km kun je berekenen met de formule $G = \frac{10000}{s}$. Hierin is G de gemiddelde snelheid in meters per seconde en s de tijd in seconden.

a Geef een formule waarbij je G uitdrukt in de tijd m in minuten.

b Geef een formule waarbij je de gemiddelde snelheid g in km per uur uitdrukt in s .



De rekenmachine

Bij berekeningen mag en kun je in veel gevallen je rekenmachine gebruiken.

Je krijgt dan in het algemeen geen exacte antwoorden maar benaderingen.

Je kunt met je rekenmachine:

- grafieken plotten en tabellen maken
- de toppen van een grafiek vinden
- de snijpunten van grafieken vinden
- de snijpunten van een grafiek met de assen vinden
- vergelijkingen oplossen
- de helling van een grafiek in een punt benaderen
- een hellinggrafiek plotten

Bij gebruik van je rekenmachine geef je aan hoe je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij neem je de volgende onderdelen op: Invoer en de gebruikte Opties.

- 23** Gegeven is de formule $y = 4x^{0,7} + 25x$.
- a** Maak op je rekenmachine een tabel bij deze formule. Neem stapgrootte 1.
Bij welke waarde van x is de uitkomst gelijk aan 637?
- b** Verklein de stapgrootte in de tabel naar 0,1.
Bij welke x -waarde is de uitkomst 102,5?
- 24a** Los de vergelijking $120 - 84 \cdot 0,95^P = 100 - 0,5P$ op.
Rond je antwoord af op twee decimalen.
- b** Bereken het maximum van de functie $K(t) = 120 - 84 \cdot 0,95^t - 0,5t$.
Rond je antwoord af op twee decimalen.

Examenopdrachten

25 Marathonloopsters

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2010, tijdvak 1)

Elmer Sterken van de Rijksuniversiteit Groningen heeft onderzoek gedaan naar het verband tussen de snelheid van Amerikaanse marathonloopsters en hun leeftijden. De figuur hiernaast is afkomstig uit het rapport dat hij daarover geschreven heeft. In de figuur is voor iedere leeftijd weergegeven de hoogste snelheid ooit gelopen door een Amerikaanse (zie de 'zigzaglijn'). De geregistreerde leeftijden lopen van 6 tot en met 90 jaar.

De 'zigzaglijn' is in de figuur benaderd door de grafiek met de formule $v = 2,836 \cdot x^{0,665} - 1,390 \cdot x^{0,818}$.

Hierin is v de hoogste snelheid in m/s van marathonloopsters met een leeftijd van x jaar.

Petra loopt vaker een marathon en hoopt binnenkort de marathon binnen 3 uur te volbrengen. Petra is 52 jaar.

Kan een 52-jarige marathonloopster volgens dit model de marathon binnen 3 uur lopen? Licht je antwoord toe.

Hint 7

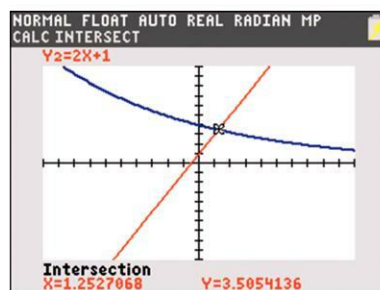
Voorbeeld

Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij de formules $A = 4 \cdot 0,9^t$ en $A = 2t + 1$.

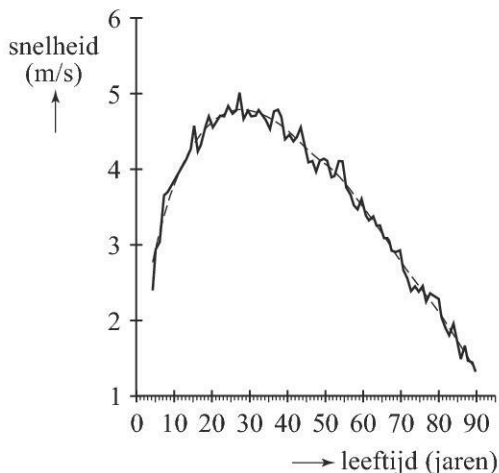
Oplossing

INVOER: $Y1 = 4 \cdot 0,9^X$ en
 $Y2 = 2X + 1$

OPTIE: CALC, intersect (TI)
G_Solv, ISCT (Casio)



Op het scherm van je rekenmachine kun je aflezen dat het snijpunt is (1,25; 3,51).



26 Keramiek

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2014, tijdvak 1)

De maximale opwarmingsnelheid waarmee de temperatuur in een oven kan stijgen, hangt onder andere af van de temperatuur van de oven. Hoe heter de oven wordt, hoe meer warmte hij af zal staan aan de omgeving waardoor de temperatuur steeds langzamer kan stijgen.

De formule die hierbij hoort, is de volgende: $v = 0,197 + \frac{T - 20}{8,16T - 17360}$

Hierin is v de maximale opwarmingsnelheid van de oven in $^{\circ}\text{C}$ per seconde en T de temperatuur van de oven in $^{\circ}\text{C}$.

Bij een bepaalde temperatuur van de oven zal deze niet verder opwarmen. Dat is de maximale temperatuur die met deze oven bereikt kan worden. Bereken met behulp van de formule van v deze maximale temperatuur.

Hint 8

27 Inkomen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2010, tijdvak 1)

Het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek) besteedt elk jaar aandacht aan de verdeling van de inkomens van huishoudens in Nederland. In de tabel is voor het jaar 2004 weergegeven hoeveel huishoudens in een bepaalde inkomensklasse zaten.

besteedbaar inkomen in euro's	aantal huishoudens in duizendtallen
0 – 10 000	490
10 000 – 20 000	2057
20 000 – 30 000	1777
30 000 – 40 000	1309
40 000 – 50 000	687
50 000 – 70 000	460
meer dan 70 000	197

Met lineair interpoleren kun je een schatting maken van het percentage huishoudens met een besteedbaar inkomen van ten hoogste 27 000 euro. Schat dat percentage huishoudens met behulp van lineair interpoleren.

Hint 9

28 Vakanties

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2007, tijdvak 2)

Uit het onderzoek 'Consumer's Choice of Channels' van Deloitte bleek dat in 2004 in Nederland de helft van alle reizen via internet was geboekt. In 2003 was dit nog maar 35%. Mede op grond van deze uitkomsten heeft men een formule opgesteld, die het percentage internetboekingen goed benadert.

Deze formule ziet er als volgt uit: $P = \frac{222}{3 + 43 \cdot (0,43)^t}$

In deze formule is t in jaren, waarbij $t = 0$ overeenkomt met het jaar 2000. P is het percentage van alle vakanties dat in dat jaar is geboekt via internet. Onderzoek hoeveel procent van de vakanties volgens de formule voor P op den duur via internet zal worden geboekt.

Hint 10

29 Behendigheid

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 1)

In Nederland wordt er verschil gemaakt tussen kansspelen en behendigheidsspelen. Een spel als roulette, waarbij de speler geen enkele invloed kan uitoefenen op het verloop van het spel (en dus ook niet op zijn winst-/verlieskansen) is duidelijk een kansspel. Een spel als schaken echter waarbij een speler zijn winst-/verlieskansen zelf kan beïnvloeden door oefening is natuurlijk een behendigheidsspel. Er zijn echter ook verschillende spelen waarbij niet meteen vast te stellen is om welke categorie het gaat.

Zo kun je je bij pokeren afvragen of dit een kansspel of een behendigheidsspel is. De onderzoekers Borm en Van der Genugten hebben een methode ontwikkeld om bij elk spel dit onderscheid te maken. Daartoe hebben ze enkele begrippen gedefinieerd:

- het **toevalseffect** TE
- het **leereffect** LE

Het toevalseffect is een getal dat uitdrukt in welke mate het toeval een rol speelt bij het spel: het toevalseffect is groot als het toeval een grote rol speelt. Het leereffect is een getal dat aangeeft in hoeverre een grotere ervaring helpt bij het spelen van het spel: het leereffect is groter naarmate de ervaring een grotere bijdrage levert aan de uitkomst van het spel. Beide getallen, toevalseffect TE en leereffect LE , zijn (natuurlijk) nooit negatief. Ze zijn ook nooit beide tegelijkertijd 0.

Eerst kijken we naar een formule die Borm en Van der Genugten gemaakt hebben met die twee begrippen. Deze formule ziet er als volgt uit:

$$B = \frac{LE}{LE + TE}$$

Het getal B dat met deze formule wordt berekend, noemen de onderzoekers het **behendigheidsniveau**. Ook al weten we nu nog niet hoe TE en LE bepaald worden, toch kunnen we wel iets zeggen over de mogelijke waarde van het getal B .

1. B is nooit negatief;
2. B is ten hoogste 1;
3. Als twee spelen hetzelfde positieve leereffect hebben, is B groter bij het spel met het kleinere toevalseffect;
4. Als twee spelen hetzelfde positieve toevalseffect hebben, is B groter bij het spel met het grotere leereffect.

- a** Laat met behulp van de formule en de omschrijvingen van TE en LE zien dat de bovenstaande beweringen 1, 2 en 3 juist zijn.

Hint 11

- b** Toon aan de formule voor B ook geschreven kan worden als

$$B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$$

Hint 12

- c** Leg met behulp van $B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$ uit dat de vierde bewering juist is.

Hint 13

Lineaire functies en gebroken functies

Lineair verband

Bij een lineair verband tussen twee variabelen is er sprake van een constante toename of constante afname. Je herkent een lineair verband aan:

- De grafiek is een rechte lijn.
- In een tabel en in een grafiek is er bij gelijke stappen altijd dezelfde toename.
- Uit de tekst kun je opmaken dat de toename bij gelijke stappen altijd dezelfde is.

Bij een lineair verband hoort een lineaire formule van de vorm $y = ax + b$.

Hierin is a het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende grafiek en is b het startgetal, dat is de waarde van y als $x = 0$.

Een functie van de vorm $f(x) = ax + b$ heet een eerstegraads functie.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $k = 0,23t + 5,65$ met k de kosten in euro's en t de tijd in minuten.

Met hoeveel euro nemen de kosten per minuut toe?

En hoeveel bedragen de vaste kosten?

Oplossing

De kosten nemen met 0,23 euro per minuut toe.

De vaste kosten bedragen 5,65 euro.

Voorbeeld 2

Kan deze tabel bij een lineair verband horen?

t	4	5	6	10	13
k	17	19,5	22	32	39,5

Oplossing

Tussen $t = 4$ en $t = 5$ is de toename 2,5 en tussen $t = 5$ en $t = 6$ ook.

Tussen $t = 6$ en $t = 10$ is de toename 10, dat is 2,5 per stap van 1. Tussen $t = 10$ en $t = 13$ is de toename 7,5, dat is 2,5 per stap van 1.

De tabel kan dus bij een lineair verband horen.

30a Ga na of bij de tabel hiernaast een lineair verband kan horen.

b Bij een lineair verband tussen de variabelen A en B geldt, bij $A = 18$ hoort $B = 670$ en bij $A = 23$ hoort $B = 520$.

Bereken de waarde van B bij $A = 44$.

p	10	50	75	90	100
A	10	90	140	170	190

Lineaire formules opstellen

Je kunt in de volgende gevallen een lineaire formule opstellen:

- Bij de beschrijving van een lineair verband.
- Bij een gegeven tabel.
- Bij een gegeven rechte lijn.
- Bij twee gegeven punten van de grafiek.

Voorbeeld

Stel bij de rechte lijn hiernaast een formule op.

Oplossing

Tussen $t = 5$ en $t = 8$ neemt P met 30 af, dat is een afname van 10 per eenheid. De richtingscoëfficiënt is dus -10 .

De formule wordt dus $P = -10t + b$.

Invullen $(5, 70)$ geeft $70 = -10 \times 5 + b$, dus $b = 120$.

Een formule is $P = -10t + 120$ of ook $P = 120 - 10t$.



31 Stel een formule op voor het verband tussen K en a dat door de grafiek hiernaast gegeven is.

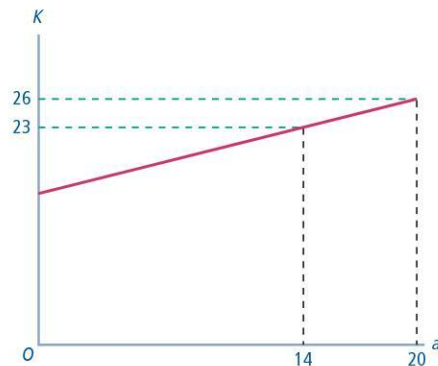
32 De grafiek die het verband tussen x en y weergeeft is een rechte lijn door de punten $(150, 18)$ en $(200, 13)$. Geef een lineaire formule voor het verband tussen x en y .

33 Stel een lineaire formule op voor het verband tussen x en y bij de lijn door de twee gegeven punten.

- a $(0, 6)$ en $(8, 0)$
- b $(5, 12)$ en $(11, 33)$
- c $(100, 5)$ en $(30, 30)$
- d $(0,7; 1,3)$ en $(3,5; -5,7)$

34 Een crèche berekent een maandelijkse ouderbijdrage, die afhangt van het maandinkomen van de ouders. Het verband tussen de bijdrage en het inkomen is lineair. Bij een maandinkomen van € 1800,- bedraagt de bijdrage € 430,- en bij een maandinkomen van € 4000,- is dat € 650,-.

- a Bereken de maandelijkse bijdrage bij een maandinkomen van € 2700,-.
- b Stel een formule op voor het verband tussen de bijdrage B in euro's en het inkomen I , ook in euro's.



Recht evenredig verband

Als bij een lineair verband tussen de variabelen x en y de grafiek door de oorsprong gaat en dus het startgetal b gelijk is aan 0, dan is er sprake van een recht evenredig verband tussen de variabelen x en y . De bijbehorende tabel is dan een verhoudingstabel.

Bij een recht evenredig verband tussen x en y is de formule dus $y = a \cdot x$ en er geldt dat bij een vermenigvuldiging van x met bijvoorbeeld drie, ook y drie keer zo groot wordt.

35 Ga na bij welke van de tabellen hieronder sprake is van een recht evenredig verband. Geef bij elke tabel een passende formule.

A

x	3	4	5	6	7
y	18	20	22	24	26

B

a	10	20	30	40	50
P	23	46	69	92	115

C

t	4	8	11	15	24
N	5	10	13,75	18,75	30

36 Van de variabelen A en t is gegeven dat A recht evenredig is met t . Vul de tabel hieronder verder in.

t	2	3	5	...	10
A	...	7,5	...	20	...

Lineaire vergelijkingen oplossen en herleiden

Lineaire vergelijkingen los je op door links en rechts van het $=$ -teken dezelfde bewerking te doen. Daarmee vereenvoudig je de vergelijking zo ver, dat de onbekende nog maar aan één kant van het $=$ -teken staat.

- 37** Los de volgende vergelijkingen op.

a $-3x + 12 = 5x + 28$

b $0,7p - 6p + 1,3 = 1,2(4 - 5p)$

c $225t = -25t + 10(13t + 18)$

d $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} = 2 - \frac{9}{10}x$

- 38** Herleid de volgende vergelijkingen waarbij je p uitdrukt in q .

a $q = -0,2p + 1,3$

b $3p + 12q = 16 - p$

c $13p - 4(q + 2) = q$

d $0,3q + 1,2p - 4,8 = 0$

Omgekeerd evenredig verband

Twee variabelen x en y heten omgekeerd evenredig als bij een vermenigvuldiging van x met bijvoorbeeld drie de variabele y drie keer zo klein wordt.

Je herkent een omgekeerd evenredig verband als het product van de variabelen x en y constant is.

De formule is van de vorm $x \cdot y = c$ waarbij c een constante.

De formule kun je ook in andere vormen schrijven, namelijk

als $y = \frac{c}{x}$ of als $x = \frac{c}{y}$.

- 39** Ga na bij welke van de tabellen hieronder sprake is van een omgekeerd evenredig verband. Geef bij elke tabel een passende formule.

A

x	2	3	4	6	18
y	27	18	13,5	9	3

B

a	10	20	30	40	50
P	2	4	6	8	10

C

t	2	4	6	8	10
N	8	4	0	-4	-8

- 40** Van de variabelen A en t is gegeven dat A omgekeerd evenredig is met t .

Vul de tabel hieronder verder in.

t	...	2	3	5	10
A	20	...	8	...	...

Let op!

Lineaire vergelijkingen moet je bij het Centraal Examen zonder rekenmachine op kunnen lossen. Bij alle andere vergelijkingen mag je altijd de rekenmachine gebruiken.

Voorbeeld

Geef een formule voor het verband tussen p en q .

p	0,5	10	15	20	24
q	360	18	12	9	7,5

Oplossing

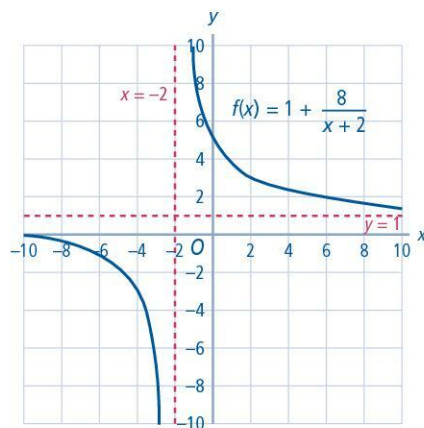
Het product van de variabelen is in deze tabel telkens 180.

Formule: $p \cdot q = 180$ of

$$q = \frac{180}{p} \text{ of } p = \frac{180}{q}$$

Quotiëntfuncties

De grafiek bij de quotiëntfunctie $f(x) = 1 + \frac{8}{x+2}$ bestaat uit twee takken. Bij $x = -2$ heeft functie f geen functiewaarde. Deze functie heeft grenswaarde $y = 1$.



- 41 Onderzoek of de onderstaande quotiëntfuncties een grenswaarde hebben.

a $f(x) = \frac{5x-8}{2x+6}$

c $h(x) = \frac{3x-9}{x^2+8}$

b $g(x) = 4 + \frac{x}{x-3}$

d $l(x) = 5 + \frac{4}{x^2-9}$

Formules met breuken herleiden

Formules en vergelijkingen met breuken vereenvoudig je tot een vorm waarin je één van de volgende regels kunt gebruiken:

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ en $B = \frac{A}{C}$ mits $B \neq 0$ en $C \neq 0$.

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $p = \frac{2}{1+q} + 5$.

Herleid de formule waarbij je q uitdrukt in p .

Oplossing

$$p - 5 = \frac{2}{1+q}$$

(links en rechts $- 5$)

$$(p - 5)(1 + q) = 2$$

(links en rechts $\times (1 + q)$)

$$1 + q = \frac{2}{p - 5}$$

(links en rechts $: (p - 5)$)

$$q = \frac{2}{p - 5} - 1$$

(links en rechts $- 1$)

- 42 Herleid de formules zodat je b uitdrukt in a .

a $3a = \frac{6}{2b+4}$

c $\frac{5}{a+4} = \frac{2}{b-4}$

b $\frac{b+5}{a-5} = a-1$

d $\frac{7a-3b}{b+8} = \frac{4}{3}$

- 43 Schrijf de volgende formules tot één breuk.

a $K = \frac{3}{p} + \frac{p+1}{p}$

d $d = \frac{3}{N+1} - \frac{1}{N}$

b $a = \frac{2}{n} - \frac{3}{2n}$

e $Q = \frac{5}{p+1} - \frac{2}{p-1}$

c $T = \frac{t+1}{2t} + \frac{1}{4t}$

f $k = \frac{q+2}{q} - \frac{1}{q-5}$

$$\begin{aligned} N &= \frac{2}{b} + \frac{3}{b+1} = \\ \frac{2(b+1)}{b(b+1)} + \frac{3b}{b(b+1)} &= \\ \frac{2(b+1) + 3b}{b(b+1)} &= \frac{5b+2}{b(b+1)} \end{aligned}$$

Examenopdrachten

44 Waardepunten

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2012, tijdvak 1)

De verpakkingen van Douwe Egberts koffie zijn voorzien van punten die je kunt sparen. Met deze punten kun je bepaalde producten kopen.

Op de website van Douwe Egberts (DE) stond tot 2009 het volgende:

- per artikel zijn je eerste 100 punten € 1,50 waard; je moet dan wel betalen met minimaal 100 punten;
 - daarna zijn per artikel iedere 100 punten € 0,50 waard;
 - betalen met iedere combinatie van punten en geld mag altijd.
- Bij DE kost een gebaksbordje € 9,30 en een taartplateau € 46,50. Marieke wil graag 6 gebaksbordjes en een taartplateau kopen. Ze heeft 12 000 waardepunten en wil zo min mogelijk euro's bijbetalen.

- a** Bereken hoeveel euro's Marieke moet bijbetalen.

Hint 14

Op de website staat ook een puntencalculator. Deze calculator geeft per artikel aan hoeveel euro's je punten waard zijn. Je moet dan wel minstens 100 punten hebben. De calculator maakt gebruik van de lineaire formule:

$W = 1 + 0,005p$. In deze formule is p het aantal punten (met $p \geq 100$) en W de waarde in euro's.

- b** Leid deze formule af uit bovenstaande voorwaarden.

Hint 15

45 RSI

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2011, tijdvak 2)

Beursanalisten geven op verschillende manieren aan hoe de waarde van een aandeel zich ontwikkelt. Daarvoor gebruiken ze zogenoemde indicatoren.

De Amerikaan J. Welles introduceerde in 1978 een indicator die bekend staat onder de naam *RSI*, de relatieve sterkte-index.

Om de *RSI* van een aandeel te berekenen, bereken je eerst de relatieve

sterkte: $r = \frac{\text{totale winst}}{\text{totale verlies}}$ en daarna *RSI* met de formule $RSI = 100 - \frac{100}{1 + r}$

Edward vindt de formule $RSI = 100 - \frac{100}{1 + r}$ onhandig. Je kunt de

formule van *RSI* zo herleiden dat deze direct afhangt van de totale winst TW en het totale verlies TV van het aandeel als je gebruik maakt van $r = \frac{TW}{TV}$

Als je dat doet, ziet de formule er als volgt uit: $RSI = 100 - \frac{100}{1 + \frac{TW}{TV}}$

Herleid deze formule tot $RSI = \frac{\dots}{TV + TW}$

Hint 16

Voorbeeld



Kop en schotel van hierboven kosten samen € 5,-.

Je kunt deze kop en schotel dan kopen voor € 5,- of gratis meenemen voor 800 punten.

Ook kun je 400 punten inleveren en nog € 2,- bijbetalen.

46 Aandelen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2008, tijdvak 1)

Veel mensen beleggen in aandelen. Daarvoor geven ze een opdracht aan een zogenoemde 'broker'. Die regelt bij een opdracht de aankoop (of de verkoop) van de door de klant gewenste aandelen. Voor het uitvoeren van een opdracht brengt de broker kosten in rekening.

Broker Haag hanteert voor een opdracht een tarief volgens de formule $K = 0,0045 \cdot w + 4$

Hierbij is K de kosten in euro en w de totale waarde van de aandelen in euro op het moment van aankoop of verkoop.

De klant moet echter altijd ten minste € 12,- voor een opdracht betalen.

Een klant koopt via Haag 150 aandelen ABN die per stuk € 19,18 kosten. Een tijd later is de waarde van deze aandelen gestegen naar € 21,44 per stuk. De klant neemt het besluit alle aandelen via Haag te verkopen. Voor de berekening van zijn winst houdt de klant rekening met de kosten van aankoop en verkoop.

- a Bereken hoeveel winst de klant heeft behaald op de aandelen ABN.

Hint 17

Handelaar Van der Meulen is ook een broker. Hij hanteert als tarief:

$$K = 0,004 \cdot w + 7$$

Hierbij is K weer de kosten in euro en w de totale waarde van de aandelen in euro op het moment van aankoop of verkoop.

De klant betaalt bij Van der Meulen per opdracht nooit meer dan € 46,-.

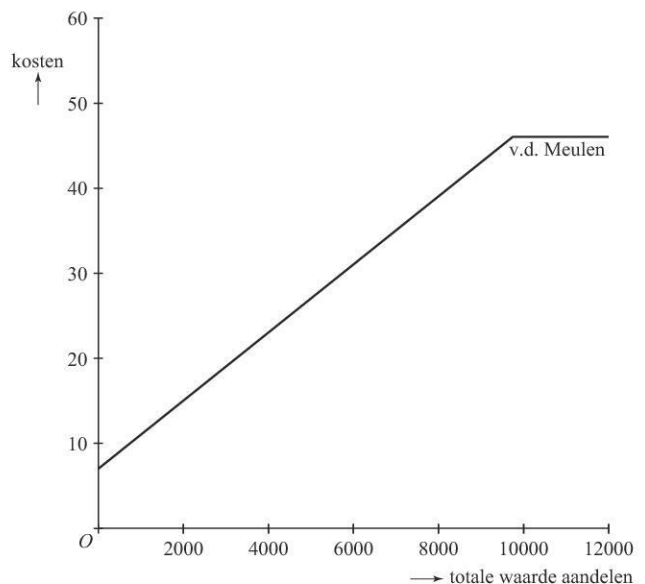
Als de totale waarde van de aandelen hoog genoeg is, nemen de kosten die Van der Meulen in rekening brengt, niet verder meer toe.

- b Bereken hoe groot de totale waarde van de aandelen dan ten minste moet zijn.

Hint 18

Als een klant een aandelenopdracht wil plaatsen waarvan de totale waarde behoorlijk groot is, kan hij dat beter doen bij Van der Meulen dan bij Haag. Immers, bij Van der Meulen is hij nooit meer kwijt dan € 46,-. In veel andere gevallen is Haag echter goedkoper.

Hiernaast is een grafiek getekend van het verband tussen de totale waarde van de aandelen en de kosten daarvan bij aankoop bij Van der Meulen.



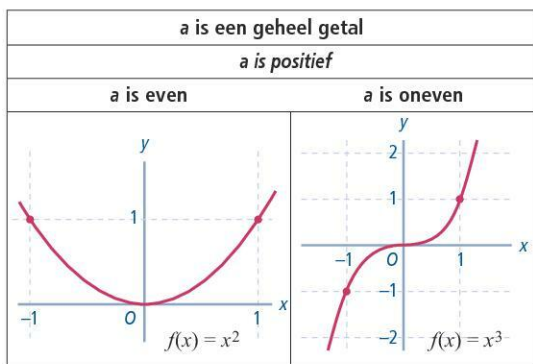
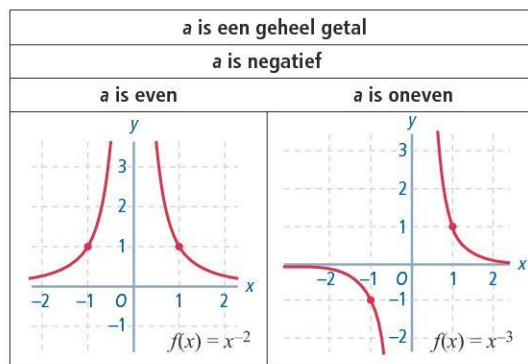
- c Onderzoek bij welke totale aandelenwaarden de klant met zijn opdracht goedkoper uit is bij Haag dan bij Van der Meulen. Gebruik hierbij de figuur.

Hint 19

Machtsfuncties, kwadratische functies en wortelfuncties

Machtsfuncties

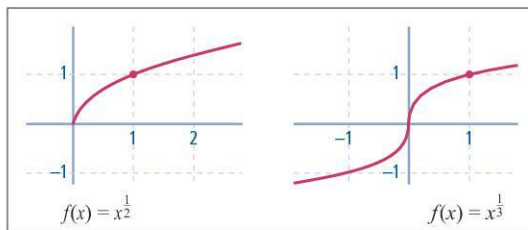
Functies van de vorm $f(x) = x^a$, met a een willekeurig getal heten machtsfuncties. Het hangt van de waarde van a af welke vorm de bijbehorende grafiek heeft. Je kunt de volgende gevallen onderscheiden.



Functie $f(x) = x^{-n}$ kun je schrijven als $f(x) = \frac{1}{x^n}$

Als $a = \frac{1}{2}$ is $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ een wortelfunctie, want $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.
Verder is $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ en $x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$.

Functies van de vorm $f(x) = x^{3,5}$ en $g(x) = x^{0,8}$ onderzoek je met je rekenmachine.



47 Gegeven zijn de functies

$$f(x) = x^8, g(x) = x^{-3}, h(x) = x^7 \text{ en } k(x) = x^{\frac{1}{4}}.$$

- Bij welke van deze functies heeft de grafiek een symmetrieas? Controleer je antwoord eventueel met een plot van de grafiek.
- Welke van de grafieken gaan door het punt $(1, 1)$? En welke door $(-1, -1)$?
- Hoeveel snijpunten hebben elk van de grafieken met de lijn $y = 4$? En hoeveel snijpunten heeft elk van de grafieken met de lijn $y = -2$?
- Onderzoek met je rekenmachine hoeveel snijpunten de grafiek van $m(x) = x^{1,75}$ heeft met de lijn $y = 18$.

Kwadratische functies

Functies van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ heten kwadratische of tweedegraadsfuncties. De bijbehorende grafiek is een parabool. Voor $a > 0$ is de grafiek een dalparabool, voor $a < 0$ een bergparabool.

- 48 Hieronder staan vier functies. Onderzoek met algebra van elke functie of de bijbehorende grafiek een parabool is en zo ja, of het een dalparabool of een bergparabool betreft.
- a $f(x) = 3x(1 - x) + 2x^2$ c $i(x) = 8x^2 + 4x(x - 1)^2$
b $g(x) = (4x + 3)(2x - 1) + (7 - 3x)(x + 1)$ d $j(x) = x(8x + 3)^2 - 8x^3$
- 49 Gegeven is de functie $f(x) = 0,5x^2 + 3,2x - 7$
- a Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f .
b Bereken de snijpunten van de grafiek van f met de assen.
c De grafiek van f wordt 3 omhoog en 2 naar rechts geschoven. Geef de coördinaten van de top van de beeldgrafiek.

Wortel functies

Een functie waarbij in het functievoorschrift de variabele onder de wortel voorkomt heet een wortelfunctie. Een wortelvergelijking vereenvoudig je tot de vorm $\sqrt{A} = B$ door links en rechts van het $=$ -teken dezelfde bewerking uit te voeren. Vervolgens gebruik je de regel: Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$.

Voor het rekenen met wortels kun je de volgende rekenregels gebruiken:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{met } a \geq 0 \text{ en } b \geq 0.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{met } a \geq 0 \text{ en } b > 0.$$

Voorbeeld 1

Vereenvoudig de formule

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{x^2 + 1}{4}}$$

Oplossing

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

Voorbeeld 2

Gegeven is $2 \cdot \sqrt[3]{a} + 1 = b$, druk a uit in b .

Oplossing

$$2 \cdot \sqrt[3]{a} = b - 1$$

$$\sqrt[3]{a} = \frac{b - 1}{2}$$

$$a = \frac{(b - 1)^3}{2^3} \quad \text{ofwel} \quad a = \frac{1}{8}(b - 1)^3$$

- 50 Hieronder staan twee rijtjes formules. Elke formule uit het linker rijtje is te herleiden tot een van de formules uit het rechter rijtje. Toon dat aan en geef aan welke formules bij elkaar passen.
- A: $y = \sqrt{16x + 48}$ D: $y = 8 + \sqrt{1\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x}$
B: $y = 8 + 6\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + x - 9}$ E: $y = 4\sqrt{x + 3}$
C: $y = \frac{24 + \sqrt{12 - 6x}}{3}$ F: $y = 8 + 3\sqrt{x^2 + 4x - 36}$

51 Herleid de volgende formules zodat je b uitdrukt in a .

- a** $a = 0,5\sqrt[3]{b}$
b $2 \cdot \sqrt[5]{b+2} = 4a$
c $a+4 = 0,4\sqrt{b}$
d $3\sqrt{a} = 4\sqrt{a} - 2b$
e $\sqrt{2b+3} = 4a$

Rekenen met machten

Voor het rekenen met machten kun je de volgende rekenregels gebruiken:

$$\begin{aligned} g^a \cdot g^b &= g^{a+b} & g^0 &= 1 \quad (\text{voor } g \neq 0) \\ \frac{g^a}{g^b} &= g^{a-b} \quad (\text{voor } g \neq 0) & g^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{g} \quad (\text{voor } g \geq 0) \\ (g^a)^b &= g^{a \cdot b} \quad (\text{voor } g \geq 0) & g^{-n} &= \frac{1}{g^n} \quad (\text{voor } g > 0) \end{aligned}$$

Voorbeeld 1

Schrijf $(a^3 \cdot a^{0,5})^4$ als één macht.

Oplossing

$$(a^3 \cdot a^{0,5})^4 = (a^{3,5})^4 = a^{14}$$

Voorbeeld 2

Vereenvoudig $\sqrt{2,25 \cdot x^2}$

Oplossing

$$\sqrt{2,25 \cdot x^2} = \sqrt{2,25} \cdot \sqrt{x^2} = 1,5x$$

52 Vereenvoudig de volgende functievoorschriften.

- a** $h(x) = x^3 \cdot x^2 \cdot x$ **e** $K(x) = 4x^{2,5} \cdot 2x^{-0,6} \cdot x^{3,1}$
b $p(t) = \frac{3t^2 \cdot t^4}{t^3}$ **f** $M(a) = \frac{4a^2 \cdot a + 6a^{3,2}}{2a \cdot a^{1,2}}$
c $q(r) = r\sqrt{r} \cdot r^5$ **g** $T(u) = 4\sqrt{u} \cdot 3u \cdot \frac{1}{2}u^{-1}$
d $L(m) = 2m^2(4m^3 + 2m)$ **h** $v(r) = 5r^{0,2}(2r^{2,1} - 4r^{6,8})$

Herleiden met machten

Bij het herleiden van formules met machten gebruik je de rekenregels.

Verder maak je gebruik van de regel: als $x^a = c$, dan is $x = c^{\frac{1}{a}}$

53 Herleid de volgende vergelijkingen zodat je p uitdrukt in K .

- a** $0,2 \cdot p^5 + 8 = K$ **d** $15 + p^{-\frac{1}{2}} = K$
b $K - 6 \cdot p^4 = 27$ **e** $2 \cdot \sqrt[3]{p} - 4K = 10$
c $13p^{0,7} - 65K = 0$ **f** $K = \sqrt[4]{2p+1}$

Voorbeeld

Gegeven $5 \cdot k^{0,25} + 8 = p$
 Druk k uit in p .

Oplossing

$$5 \cdot k^{0,25} = p - 8$$

$$k^{0,25} = \frac{p-8}{5}$$

$$k = \left(\frac{p-8}{5}\right)^4$$

54 Vereenvoudig zo ver mogelijk.

a $Q = \sqrt{25p^2}$

d $t = 3\sqrt{2k} \cdot \sqrt{18k}$

b $R = (2 \cdot q)^3$

e $b = \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^4 \cdot \sqrt{16a^2}$

c $y = \frac{(0,5x)^2}{x}$

f $g = \sqrt{\frac{d^2}{9}} \cdot (d \cdot 3)^2$

Examenopdrachten

55 De valkparkiet

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2013, tijdvak 2)

Er wordt veel onderzoek gedaan naar het verband tussen het vermogen (het energieverbruik per seconde) en de vliegsnelheid bij vogels. Onderzoek heeft uitgewezen dat de grafiek van het verband tussen de vliegsnelheid en het vermogen U-vormig is. Dat wil zeggen: vliegen met lage of hoge snelheid kost veel vermogen, terwijl vliegen met een snelheid daartussenin minder vermogen kost. In de figuur is dit verband voor valkparkieten en duiven weergegeven.

Dit onderzoek toont bij valkparkieten een bij benadering kwadratisch verband aan tussen de vliegsnelheid en het vermogen. Voor valkparkieten geldt de volgende formule: $V = 0,19s^2 - 8,71s + 169,72$. Hierbij is V het vermogen in Watt en s de snelheid in km per uur.

- a Bereken met behulp van de formule bij welke snelheden het vermogen V van een valkparkiet 120 watt is.

Hint 20

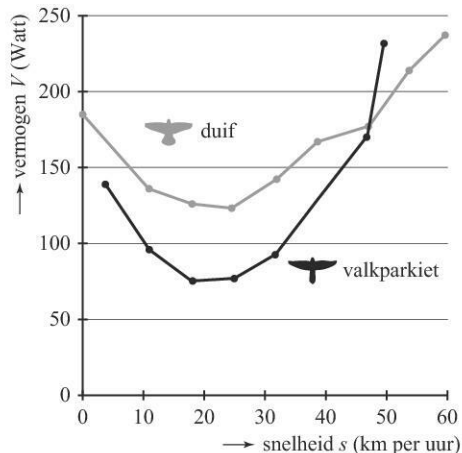
Ook bij duiven kunnen we een formule opstellen voor het verband tussen s en V . In de figuur kunnen we aflezen dat duiven bij een snelheid van 8 km per uur en bij een snelheid van 34 km per uur een vermogen van 150 Watt ontwikkelen.

Voor duiven is het verband tussen de vliegsnelheid en het vermogen dan van de vorm: $V = p \cdot (s - 8)(s - 34) + 150$. Ook hier is V het vermogen in Watt en s de snelheid in km per uur.

Het is bekend dat duiven die stil in de lucht hangen ($s = 0$) een vermogen van 185 Watt ontwikkelen. Met dit gegeven kunnen we nu de constante p berekenen.

- b Bereken p en herschrijf de formule in de vorm $V = as^2 + bs + c$.

Hint 21



56 Lichaamsoppervlak

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2013, tijdvak 1)

De buitenkant van je lichaam is je lichaamsoppervlak.

	lichaamsoppervlakte in % van de totale oppervlakte			
leeftijd	hoofd	romp	armen en handen	benen en voeten
1,5 jaar	16,2	34,0	18,15	31,65
17,5 jaar	8,1	32,1	21,0	38,8

Bij jonge kinderen is het hoofd ten opzichte van de rest van het lichaam relatief groot. Als kinderen ouder worden, groeien de armen en handen en de benen en voeten sneller dan de rest van het lichaam. Het aandeel van armen en handen in de lichaamsoppervlakte is voor kinderen in de periode van 1,5 jaar tot 17,5 jaar gestegen van 18,15 % naar 21,0 %. Ook het aandeel van de benen en voeten is in die 16 jaar groter geworden.

- a Onderzoek of de relatieve toename van het aandeel van armen en handen groter is dan de relatieve toename van het aandeel van benen en voeten.

Hint 22

Er zijn formules waarmee we de lichaamsoppervlakte kunnen berekenen.

Voor volwassen vrouwen is de volgende formule de meest gebruikte formule:

$$S_{\text{Dubois}} = 0,007184 \cdot L^{0,725} \cdot M^{0,425} \quad (\text{formule van Dubois})$$

In deze formule is S_{Dubois} de lichaamsoppervlakte in m^2 , L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

Als een lichaam groter wordt, dan zal de lichaamsoppervlakte ook groter worden. Kunnen we dit ook zien aan de formule van Dubois? Hoe zit het bijvoorbeeld als alle lengtematen (lengte, breedte, hoogte) van een lichaam 2 keer zo groot worden? Bij een kubus wordt in dat geval de oppervlakte 4 keer en het volume 8 keer zo groot. Wordt de uitkomst van de formule van Dubois dan ook 4 keer zo groot? Hiertoe vergelijken we $S_{\text{Dubois}} = 0,007184 \cdot (2L)^{0,725} \cdot (8M)^{0,425}$ met $S_{\text{Dubois}} = 0,007184 \cdot L^{0,725} \cdot M^{0,425}$. We gaan er hierbij van uit dat het lichaamsgewicht (M) evenredig is met het volume.

- b Toon met behulp van deze formules (zonder getallenvoorbeelden) aan dat de formule van Dubois inderdaad bij verdubbeling van lengtematen een verviervoudiging van de lichaamsoppervlakte S_{Dubois} oplevert.

Hint 23

Voor het berekenen van de lichaamsoppervlakte bij kinderen worden vooral de volgende twee formules gebruikt:

$$S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\frac{1}{3600}} \cdot L \cdot M \quad (\text{formule van Mosteller})$$

$$S_{\text{Haycock}} = 0,024265 \cdot L^{0,3964} \cdot M^{0,5378} \quad (\text{formule van Haycock})$$

Ook in deze formules is S de lichaamsoppervlakte in m^2 , L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

Om de formules beter met elkaar te kunnen vergelijken is het handig om de formule van Mosteller in dezelfde vorm te schrijven als de formule van Haycock.

- c Schrijf de formule van Mosteller in de vorm $S = c \cdot L^a \cdot M^b$ en licht toe hoe je je antwoord gevonden hebt.

Hint 24

57 Schroefas

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 1)

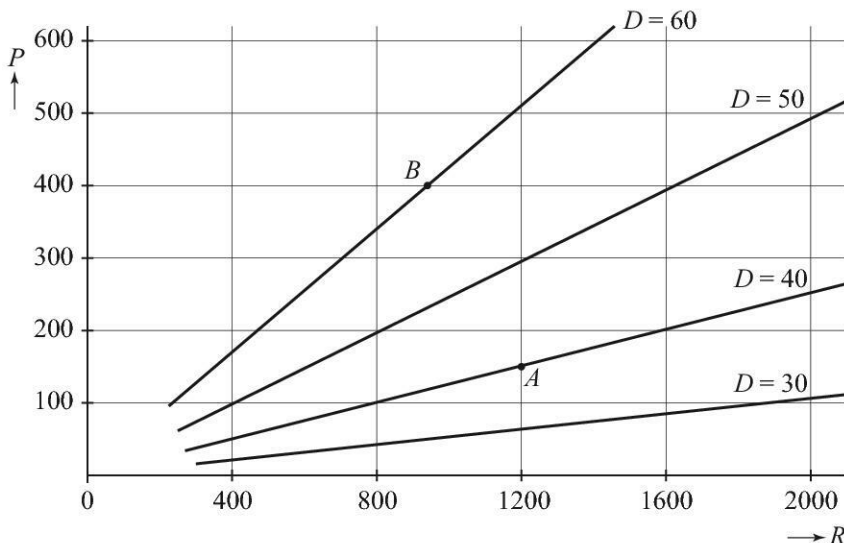
Lloyd's is een organisatie die zich bezighoudt met het opstellen van regels voor de controle op de zeewaardigheid van schepen. Volgens een van deze regels moet de diameter D van de schroefas voldoen aan

de volgende formule: $D = 79,78 \sqrt[3]{\frac{P}{R}}$

In deze formule is D uitgedrukt in mm, het vermogen P uitgedrukt in pk en het toerental R in toeren per minuut.

We gaan uit van een asdiameter van 30 mm.

In een tijdschrift dat gaat over aandrijfsystemen kun je de figuur hieronder tegenkomen. In deze figuur zie je voor enkele waarden van D het verband getekend tussen de bijbehorende waarden van P en R .



In zo'n figuur kan elk aandrijfsysteem met een punt worden weergegeven. Zo hoort het punt A bij het aandrijfsysteem met waarden (1200, 150, 40). In de figuur is punt B aangegeven. Bij dit aandrijfsysteem is het vermogen goed af te lezen. De waarde van het toerental is echter niet nauwkeurig af te lezen, maar met behulp van de formule kunnen we deze wel berekenen.

- a** Bereken met behulp van de formule het toerental dat bij dit aandrijfsysteem hoort.

Hint 25

In enkele gevallen komt het voor dat de asdiameter al bekend is, bijvoorbeeld wanneer alleen de motor moet worden vervangen. Dan

is het handig om de formule $D = 79,78 \sqrt[3]{\frac{P}{R}}$ anders te schrijven.

We gaan uit van een asdiameter van 30 mm.

- b** Herschrijf de formule hierboven zo dat je een formule krijgt waarin P uitgedrukt wordt in R .

Hint 26

Exponentiële functies en logaritmische functies

Exponentieel verband, exponentiële formule

Bij een exponentieel verband tussen een hoeveelheid en de tijd wordt per tijdseenheid de hoeveelheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd.

Een exponentieel verband herken je aan:

- In een tabel wordt bij gelijke tijdseenheden de hoeveelheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
- Uit de tekst kun je opmaken dat bij gelijke tijdseenheden er bij de hoeveelheid een vast percentage bij komt of van af gaat.
- Uit de tekst kun je opmaken dat bij gelijke tijdseenheden de hoeveelheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd wordt.

Bij een exponentieel verband tussen de variabelen x en y hoort de exponentiële formule $y = b \cdot g^x$.

Hierin is b de beginwaarde, dat is de waarde van y voor $x = 0$.

g is de groeifactor, dat is de factor waarmee je de waarde van y moet vermenigvuldigen als x met 1 toeneemt.

Voorbeeld 1

Bij een groeiproces hoort de formule $N = 350 \cdot 0,89^t$ met N het aantal in miljoenen en t de tijd in jaren. Met hoeveel procent neemt het aantal jaarlijks toe of af?

Oplossing

De groeifactor is 0,89. Per jaar wordt het aantal dus met 0,89 vermenigvuldigd.

Van elke 100% blijft er dan na een jaar $0,89 \times 100 = 89\%$ over.

Het aantal neemt jaarlijks met $100\% - 89\% = 11\%$ af.

Voorbeeld 2

Controleer of de waarden uit onderstaande tabel bij een exponentieel verband kunnen horen.

t	0	1	4	6	7
N	100	150	506	1139	1709

Oplossing

$\frac{150}{100} = 1,5$, dus als er sprake is van een exponentieel verband, dan is de groeifactor 1,5.

Met groeifactor 1,5 bereken je de waarden bij de overige waarden van t .

$t = 4$ geeft $100 \cdot 1,5^4 \approx 506$, klopt,

$t = 6$ geeft $100 \cdot 1,5^6 \approx 1139$, klopt,

$t = 7$ geeft $100 \cdot 1,5^7 \approx 1709$, klopt.

Er kan sprake zijn van een exponentieel verband.

- 58 Het aantal werklozen in een land klopt redelijk met de formule $P = 275 \cdot 1,075^t$. Hierin is P het aantal werklozen in duizenden en de tijd t in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2010.
- Hoeveel werklozen waren er op 1 januari 2010?
 - Neemt het aantal werklozen toe of af? Hoe zie je dat aan de formule?
 - Met hoeveel procent neemt het aantal werklozen toe of af per maand?
 - Hoeveel werklozen waren er op 1 mei 2010?
 - En op 1 december 2009?
- 59 Ga na of bij de tabel hiernaast sprake kan zijn van een exponentieel verband tussen p en q .

p	0	1	2	3	4	5
q	288	216	162	121,5	91,1	68,3

Rekenen met groeifactoren

Als g de groeifactor per tijdseenheid is, dan is g^n de groeifactor per n tijdseenheden.

Evenzo is $g^{\frac{1}{n}}$ de groeifactor voor een n -de deel van die tijdseenheid.

Zo is $g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g}$ de groeifactor voor de halve tijdseenheid.

Voorbeeld 1

De groeifactor per week is 1,35.
Geef de groeifactor per dag, per uur en per 18 dagen.

Oplossing

De groeifactor per dag is $(1,35)^{\frac{1}{7}} \approx 1,044$.

De groeifactor per uur is $(1,35)^{\frac{1}{168}} \approx 1,002$.

De groeifactor per 18 dagen is $(1,35)^{\frac{18}{7}} \approx 2,163$.

Voorbeeld 2

Een populatie neemt jaarlijks met 15% in aantal af. Bereken met hoeveel procent de populatie per 20 jaar afneemt.

Oplossing

De groeifactor per jaar is 0,85.

De groeifactor per 20 jaar is $(0,85)^{20} \approx 0,039$.

Na 20 jaar is er nog $100 \times 0,039 = 3,9\%$ over.

Per 20 jaar is de afname $100 - 3,9 = 96,1\%$.

- 60 Bij een groeiproses is 1,28 de groeifactor per uur. Rond je antwoorden bij de volgende opdrachten verstandig af.
- a Hoe groot is de groeifactor per dag?
 - b Hoe groot is de groeifactor per kwartier?
 - c Hoe groot is de groeifactor per vijf minuten?
 - d Hoe groot is de groeifactor per 13 minuten?

- 61 Een populatie neemt al geruime tijd met 2,5 % per 10 jaar toe. Rond bij de volgende opdrachten je antwoord af op één decimaal.
- a Bereken de procentuele toename per 5 jaar.
 - b Bereken de procentuele toename per jaar.
 - c Bereken de procentuele toename per 25 jaar.
 - d Bereken de procentuele toename per eeuw.

Exponentiële formules opstellen

Bij exponentiële groei met b als beginhoeveelheid en g als groeifactor per tijdseenheid hoort de exponentiële formule $N = b \cdot g^t$. De waarde van de groeifactor is afhankelijk van de gekozen tijdseenheid.

Voorbeeld

Het aantal auto's in een land neemt per drie jaar met 18% toe.
Op 1 januari 2008 waren er 6,8 miljoen auto's in dat land.
Geef een formule voor het aantal auto's N in miljoenen. Neem de tijd t in jaren.

Oplossing

De groeifactor per 3 jaar is 1,18, dus de groeifactor per jaar is $1,18^{\frac{1}{3}} \approx 1,057$.

Een formule voor het aantal auto's is $N = 6,8 \cdot 1,057^t$ met N in miljoenen en t in jaren.

- 62 Stel in de volgende gevallen een formule op voor het verband tussen het aantal N en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2010.
- a In 2010 woonden in een stad 180 000 mensen en dat aantal neemt jaarlijks met 2,6 % af.
 - b In 2010 produceerde een land 12 miljoen vaten olie. De productie neemt elk half jaar met 10 % toe.
 - c Het aantal gebruikers van een tablet verdubbelt elke vier jaar. In 2010 waren er vijf miljoen gebruikers.

Voorbeeld 1

Schrijf als één logaritme:

$$3 \cdot {}^5\log(2) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(9) + 3$$

Oplossing

$$3 \cdot {}^5\log(2) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(9) + {}^5\log(5^3) =$$

$${}^5\log(2^3) + {}^5\log(9^{\frac{1}{2}}) + {}^5\log(125) =$$

$${}^5\log(8) + {}^5\log(3) + {}^5\log(125) = {}^5\log(3000)$$

Voorbeeld 2

Schrijf als één logaritme:

$${}^4\log(3+p) + 2 \cdot {}^4\log(5p) \text{ met } p > 0$$

Oplossing

$${}^4\log(3+p) + 2 \cdot {}^4\log(5p) =$$

$${}^4\log(3+p) + {}^4\log(25p^2) =$$

$${}^4\log(25p^2(3+p)) =$$

$${}^4\log(75p^2 + 25p^3)$$

66 Schrijf als één logaritme.

a ${}^5\log(4) + {}^5\log(8)$

b ${}^2\log(36) - {}^2\log(9) + {}^2\log(5)$

c $\frac{1}{2} \cdot {}^5\log(49) + 2 \cdot {}^5\log(3)$

d $2 + {}^6\log(x) \text{ met } x > 0$

e $-2 \cdot {}^3\log(0,1) + {}^3\log(a) \text{ met } a > 0$

f $-3 + 2 \cdot {}^4\log(9p) \text{ met } p > 0$

g ${}^8\log(2a) + {}^8\log(a+3) \text{ met } a > 0$

h $4 \cdot {}^{0,1}\log(x) - {}^{0,1}\log(x^2) \text{ met } x > 0$

Rekenregels gebruiken

Je kent de rekenregels voor het rekenen met machten. Deze rekenregels zijn nodig bij het herleiden van exponentiële en logaritmische formules.

Voorbeeld 1

Gegeven is

$${}^3\log(p-2) + 2 = q + 5.$$

Druk p uit in q .

Oplossing

$${}^3\log(p-2) = q + 3$$

$$p-2 = 3^{q+3}$$

$$p = 3^{q+3} + 2$$

Voorbeeld 2Gegeven is $2^a \cdot 8^b = 5$.Herleid tot de vorm $b = p \cdot a + q$.

Oplossing

$$2^a \cdot 2^{3b} = 5$$

$$2^{a+3b} = 5$$

$$a+3b = {}^2\log(5)$$

$$3b = -a + {}^2\log(5)$$

$$b = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(5)$$

67 Druk b uit in a .

a ${}^4\log(b+5) = a$

b $a + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(b) = 5$

c ${}^2\log(a) + {}^2\log(b) = 3$

d $2 \cdot 5^b = 100a + 30$

e $3^{a+4b} = 243$

f $3^a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^b = 9$

68 Herleid tot de vorm $b = p \cdot a + q$.

a $2^{2a-b} = 8$

c $9^a \cdot (\sqrt{3})^b = \frac{1}{3}$

b $5^{a+3} \cdot 5^b = 1$

d $2^a \cdot 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^b \cdot 4^a$

Grafieken van exponentiële en logaritmische functies

De grafiek van de exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ ($b > 0$) is stijgend als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.

Omdat $g^0 = 1$ voor elke waarde van g , en dus $f(0) = b$, gaat de grafiek van f door $(0, b)$ op de verticale as.

De grafiek die hoort bij de functie f heeft de x -as als horizontale asymptoot.

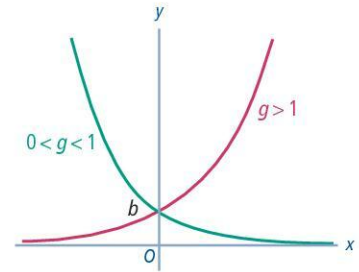
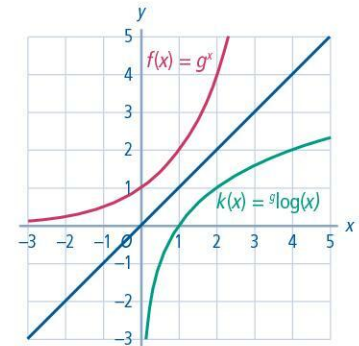
De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

De functie $k(x) = {}^g\log(x)$ heeft alleen functiewaarden als $x > 0$ en het grondtal g is net als bij exponentiële functies altijd positief, maar niet gelijk aan 1.

Voor $0 < g < 1$ is de grafiek dalend en voor $g > 1$ stijgend.

Verder heeft de grafiek van $k(x) = {}^g\log(x)$ de lijn $x = 0$, dus de y -as, als verticale asymptoot.

Het snijpunt met de x -as is $(1, 0)$, want ${}^g\log(1) = 0$ voor elke waarde van g .



- 69a** Bereken of de grafiek van $m(x) = -20 + 150 \cdot 0,63^x$ stijgend of dalend is voor elke waarde van x .
- b** De grafiek van $f(x) = {}^2\log(x)$ is stijgend voor $x > 0$. Leg uit dat de grafiek van $g(x) = {}^2\log(x + 10)$ stijgend is voor $x > -10$.
- c** Bereken of de grafiek van $h(x) = 120 - {}^2\log(x + 10)$ stijgend of dalend is voor $x > -10$.

Machten van e en natuurlijke logaritmen

Een bijzonder grondtal is het getal $e \approx 2,718281828...$

Voor de functie $f(x) = e^x$ geldt $f'(x) = e^x$.

De logaritme met grondtal e wordt genoteerd als $\ln(x)$.

$$N = e^t \text{ dus } t = \ln(N)$$

- 70a** Schrijf de functie $y = 3 \cdot 2^x$ in de vorm $y = b \cdot e^{ax}$. Rond indien nodig de waarden van a en b af op drie decimalen.
- b** Schrijf de functies hiernaast in de vorm $N = b \cdot e^{at}$.
- c** Toon aan dat je de formule $N = 0,2 \cdot e^{t+1}$ kunt herleiden tot $t = \ln(5N) - 1$
- 71** Gegeven is de formule $M = 4 - 3 \cdot \ln\left(2 - \frac{1}{2}t\right)$.
- a** Bij welke waarde van t geldt $M = 0$?
- b** Herleid de formule zodat t wordt uitgedrukt in M .

$$\begin{aligned} N &= 3 \cdot e^{2t+2} \\ N &= \frac{1}{e} \cdot e^{5t+2} \\ N &= e^t \cdot e^{t+1} \end{aligned}$$

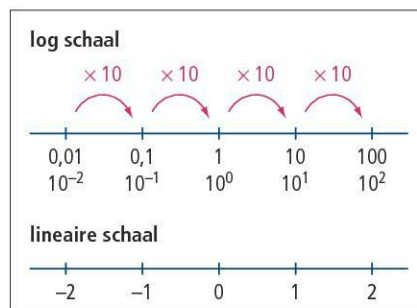
Werken met logaritmische schalen

Bij lineaire schaalverdelingen wordt bij gelijke stappen een vast getal opgeteld.

Een schaalverdeling waar bij gelijke stappen met een vast getal wordt vermenigvuldigd, heet een logaritmische schaal of logschaal. Dat vaste getal is meestal 10.

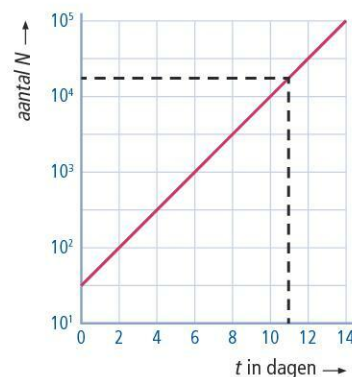
Je gebruikt een logschaal als je zowel erg grote als erg kleine waarden in één assenstelsel moet verwerken.

Als een grafiek in een assenstelsel met een logaritmische schaalverdeling op de verticale as een rechte lijn is, is het bijbehorende verband exponentieel.



- 72** De grafiek hiernaast gaat over het verband tussen een aantal N en de tijd t in dagen.

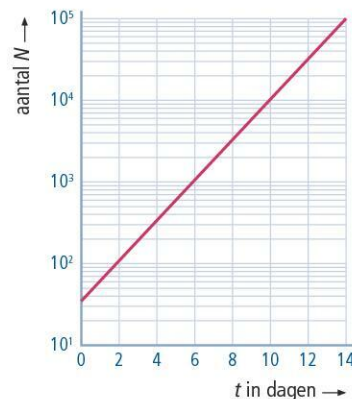
- In de grafiek hiernaast zie je dat als $t = 11$ dat $N = 10^{4,25}$. Hoe groot is N ? Rond je antwoord af op helen.
- Hoe groot is N als $t = 12$?
- Hoe groot is N als $t = 0$?
- Hoe groot is N als $t = 5$?
- Hoe groot is t als $N = 10^{6,5}$?
- Hoe groot is t als $N = 50\,000$?
- Bij de grafiek hoort de formule $N = b \cdot g^t$, waarbij N het aantal is en t de tijd in dagen. Bereken b en g . Rond verstandig af.
- Bereken N als $t = 22,4$.
- Bereken t als $N = 5,3 \cdot 10^{10}$.



- 73** Hiernaast staat de grafiek van opdracht 72 nogmaals.

Op de verticale as kun je nu direct de waarde van N aflezen.

- Lees af bij welke waarde van t , ongeveer, geldt dat $N = 2000$.
- En bij welke waarde van t is N gelijk aan 600?
- Hoe groot is N als $t = 13$?



Examenopdrachten

74 Bevingen in Japan

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2015, tijdvak 1)

De Amerikaan Richter gebruikte de maximale uitwijking in een seismogram om de magnitude (kracht) van een beving te bepalen. Een vereenvoudigde versie van de formule die hij daarbij gebruikte is: $M = \log(A) + 3$.

In deze formule is M de magnitude en A de maximale uitwijking in mm.

Uit de formule blijkt, dat als de maximale uitwijking A tien keer zo groot wordt, de magnitude met 1 eenheid toeneemt.

Toon aan met behulp van de rekenregels voor logaritmen dat $\log(10A) + 3$ altijd 1 groter is dan $\log(A) + 3$.

Hint 27

75 Touchscreens

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2014, tijdvak 2)

Bij het ontwerpen van touchscreens (aanraakschermen) voor moderne media als tablets en mobiele telefoons besteedt men veel aandacht aan het gebruiksgemak. Gebruikers willen immers snel kunnen navigeren. De tijd die je nodig hebt om in een menu de juiste knop te vinden, hangt mede af van het aantal knoppen in het menu. Volgens de psycholoog Hick kun je deze benodigde tijd T berekenen met de formule: $T(n) = b \cdot \ln(n + 1)$.

Hierbij is T de tijd in seconden, n het aantal knoppen in het menu en b een positieve constante die afhangt van de behendigheid van de gebruiker.

Sommige gebruikers vinden een menu met veel knoppen onoverzichtelijk.

Daarom deelt men een menu soms op in submenu's met minder knoppen.

Als er bijvoorbeeld totaal 18 knoppen zijn, kan de ontwerper ervoor kiezen om:

- methode I: één menu van 18 knoppen te maken
- methode II: een menu met 3 knoppen te maken, waarbij na elk van de 3 mogelijke keuzes weer een submenu met 6 knoppen verschijnt.

De gebruiker wint hiermee overzichtelijkheid want hij weet nu precies in welk submenu hij moet zoeken, maar hij verliest tijd omdat hij twee keer (in een menu) de juiste knop moet zien te vinden.

Als $b = 1,4$ duurt het keuzeproces bij methode II minstens 0,5 seconde langer dan bij methode I.

- a** Toon met behulp van de formule voor $T(n)$ aan dat dit juist is.

Hint 28

Uit de formule volgt dat één menu met alle knoppen altijd sneller werkt dan een opdeling in submenu's. Dus: één menu met $p \cdot q$ knoppen is altijd sneller dan een hoofdmenu met p knoppen gevolgd door p submenu's met elk q knoppen.

- b** Neem $b = 1$ en toon aan dat $T(p) + T(q)$ altijd groter is dan $T(p \cdot q)$.

Hint 29

76 Archeologie

(Ontleend aan CE vwo pilot wiskunde A 2013, tijdvak 2)

In de archeologie gebruikt men de C14-methode bij het vaststellen van de historische leeftijd (ouderdom) van bepaalde vondsten. Deze methode werd in 1949 ontwikkeld door de Amerikaanse scheikundige Libby, die hiervoor de Nobelprijs gekregen heeft. Volgens de theorie neemt de radioactiviteit van dood organisch materiaal exponentieel af en daarom kun je door radioactiviteit te meten bepalen hoe oud een voorwerp is.

In deze opgave gaan we uit van de formule: $N = 12,5 \cdot 0,999878^t$.

Hierin is N de gemeten radioactiviteit van het voorwerp in cpm per gram en t is de historische leeftijd volgens de C14-methode van het voorwerp in jaren.

De formule $N = 12,5 \cdot 0,999878^t$ kan herschreven worden tot de formule $N = 12,5 \cdot e^{at}$

Bereken a in 6 decimalen nauwkeurig.

Hint 30

77 Grondstofverbruik

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2003, tijdvak 1)

Ongeveer 30 jaar geleden verscheen het 'Rapport van de Club van Rome'.

Het rapport vermeldt dat begin 1970 de voorraad koper 313 miljoen ton

was en dat in 1970 het jaarverbruik van koper 8,7 miljoen ton bedroeg.

De *levensduur* van de voorraad van een grondstof is het aantal jaren vanaf begin 1970 totdat de voorraad van deze grondstof is uitgeput. Daarbij gaan we ervan uit dat er in de tussentijd geen nieuwe voorraden worden ontdekt.

Zo is volgens het rapport de levensduur van de voorraad chroom 420 jaar, wanneer je aanneemt dat het jaarlijks verbruik van chroom steeds even groot is als in 1970, namelijk 1,9 miljoen ton.

Als we aannemen dat in de jaren na 1970 ook het jaarlijks verbruik van koper steeds even groot is als dat in 1970, dan is de levensduur van de voorraad chroom veel groter dan die van de voorraad koper.

- a Hoeveel keer zo groot is dan de levensduur van de voorraad chroom, vergeleken met die van de voorraad koper? Licht je antwoord toe met een berekening.

Hint 31

In werkelijkheid was er ook destijds al sprake van een toenemende vraag naar grondstoffen. In het rapport heeft men hier aandacht aan besteed.

Zo veronderstelde men dat vanaf 1970 het verbruik van koper jaarlijks zou groeien met 5,8% en het verbruik van chroom jaarlijks met 3,3%.

- b Bereken in dat geval vanaf welk jaar het jaarverbruik van koper minstens 6 keer zo groot is als dat van chroom.

Hint 32

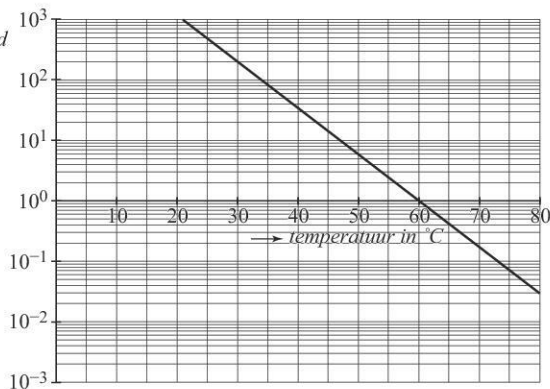
78 Honing

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2008, tijdvak 1)

De kwaliteit van honing hangt onder andere af van de concentratie van het enzym diastase: hoe meer diastase, hoe beter de kwaliteit van de honing. De concentratie van diastase in honing wordt aangeduid met het diastase-getal.

Door het bewaren van honing gaat er diastase verloren en neemt dus het diastase-getal af. De snelheid waarmee dat gebeurt, hangt af van de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard. Een maat waarmee de afname van het diastase-getal kan worden weergegeven, is de zogeheten halfwaardetijd. Dat is de tijd waarin het diastase-getal wordt gehalveerd.

halfwaardetijd
in dagen



- a Wat is beter: honing bewaren bij een lage temperatuur of bij een hoge temperatuur? Licht je antwoord toe en maak daarbij gebruik van de grafiek.

Hint 33

Een bepaald type honing heeft bij winning diastase-getal 28. Deze honing wordt gedurende 3 jaar bewaard bij een temperatuur van 25 °C. We gaan ervan uit dat de afname van het diastase-getal exponentieel verloopt.

- b Laat met behulp van de grafiek zien dat het diastase-getal van deze honing na 3 jaar lager is dan 8.

Hint 34

Periodieke functies

Sinusoïden

Periodieke grafieken met een formule van de vorm

$f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ heten sinusoïden.

De betekenis van de getallen a , b , c en d voor de grafiek is:

> De amplitude is a als $a > 0$ en de amplitude is $-a$ als $a < 0$.

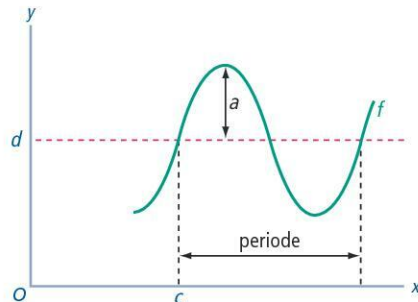
> De evenwichtsstand is de lijn $y = d$.

> Met b bereken je de periode.

Voor het verband tussen b (met $b > 0$) en de periode geldt:

$$b = \frac{2\pi}{\text{periode}} \quad \text{of} \quad \text{periode} = \frac{2\pi}{b}.$$

> Het punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, noem je een beginpunt. Een beginpunt is bijvoorbeeld het punt (c, d) (als $a > 0$).



- 79** Geef de amplitude, de evenwichtsstand, de periode en een beginpunt.

a $f(x) = 3 \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$

b $h(x) = -10 + 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

c $k(x) = -3 - 2 \sin(\pi(x - 1))$

- 80** Gegeven is $f(x) = 1,5 + 3 \sin(2x)$. Bereken met behulp van het functievoorschrift het maximum en het minimum en voor welke waarden van x deze bereikt worden op het interval $[0, 2\pi]$.

Symmetrie gebruiken

Bij het bepalen van bijzondere punten van een sinusoïde kun je gebruik maken van de symmetrie en de periode.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(0,35 \cdot x)$.

Bereken op het interval $[0, 50]$ waar de grafiek van f een maximum heeft en waar de daling van de grafiek het grootst is.

Oplossing

De grafiek van de functie heeft een periode van

$$\frac{2\pi}{0,35} \approx 18 \quad \text{en het punt } (0, 0) \text{ is een beginpunt.}$$

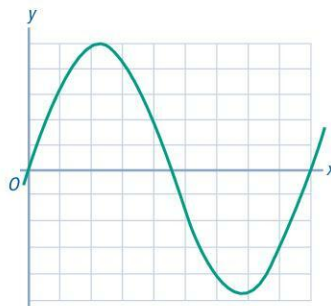
Het maximum ligt bij $\frac{1}{4}$ van de periode, dus bij $\frac{1}{4} \times 18 = 4\frac{1}{2}$.

Het volgende maximum ligt bij $4\frac{1}{2} + 18 = 22\frac{1}{2}$ en het daaropvolgende bij $22\frac{1}{2} + 18 = 40\frac{1}{2}$.

De daling en stijging is maximaal bij de evenwichtsstand.

De grafiek gaat bij $\frac{1}{2} \times 18 = 9$, bij $9 + 18 = 27$ en bij

$27 + 18 = 45$ dalend door de evenwichtsstand.



- 81** De getijdebeweging (eb en vloed) is op een dag bij benadering te benaderen met de formule $H = -10 + 70 \cdot \sin(0,5t)$. Hierbij is H de waterhoogte in cm boven NAP en t de tijd in uren met $t = 0$ gerekend vanaf 00.00 uur.
- Bereken de periode in minuten nauwkeurig.
 - Leg uit dat de waterhoogte volgens de formule om 3.08 uur maximaal is.
 - Op welk tijdstip is die dag de waterhoogte weer maximaal?
 - Hoe laat zal de volgende dag de waterhoogte weer maximaal zijn?
 - Geef twee tijdstippen waarop de waterhoogte het snelste toeneemt.

Een formule $y = d + a \cdot \sin(b(x - c))$ opstellen bij een sinusoïde

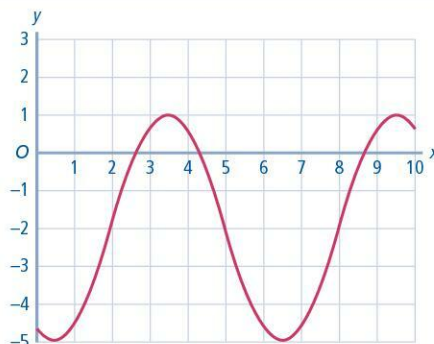
- Lees uit de grafiek het maximum en het minimum af.
- Bereken hiermee de evenwichtswaarde d en amplitude a .
- Lees uit de grafiek de periode en een beginpunt af.
- Bereken met $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$ de waarde van b en met de x -coördinaat van het afgelezen beginpunt de waarde van c .
- Schrijf de formule op.

Voorbeeld

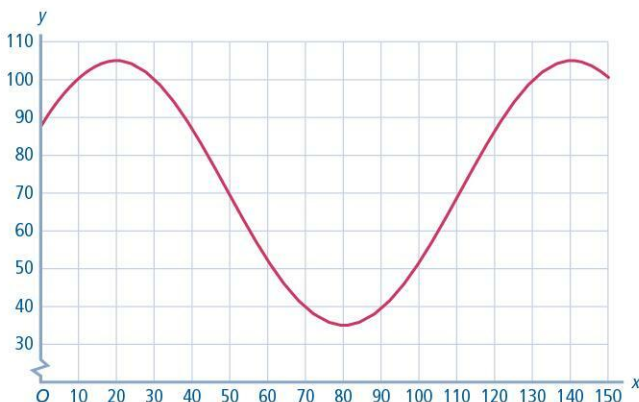
Geef een formule van de vorm $y = p + q \sin(r(x - t))$ bij de hiernaast getekende grafiek.

Oplossing

- maximum = 1, minimum is -5.
- $p = \frac{1}{2} \cdot (-5 + 1) = -2$ en $q = 1 - (-2) = 3$.
- periode is $8 - 2 = 6$ en een beginpunt is $(2, -2)$.
- $r = \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$ en $t = 2$.
- $y = -2 + 3\sin(\frac{1}{3}\pi(x - 2))$.



- 82a** Geef bij de grafiek hieronder een passend functievoorschrift.



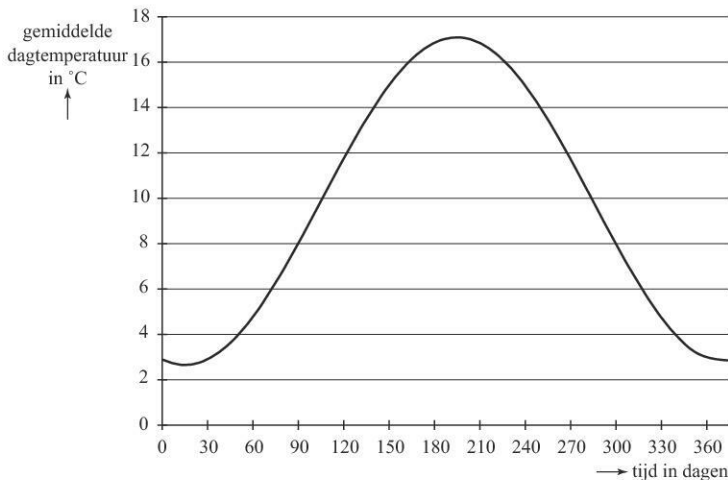
- Geef nog twee waarden van x waarbij de grafiek hierboven een maximum heeft.
- Geef twee waarden van x waarbij de stijging van de grafiek maximaal is.

Examenopdrachten

83 Zomer in Ukkel

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2013, tijdvak 2)

Een Belgische onderzoeker houdt zich bezig met modellen voor het temperatuurverloop. Hij bekeek daarvoor de historische gegevens van het weerstation in Ukkel (België). Zie onderstaande figuur.



De vloeiende lijn geeft de gemiddelde dagtemperatuur per dag aan en is ontstaan uit gemiddelden van de dagtemperatuur, gemeten over verschillende jaren. De gemiddelde dagtemperatuur is maximaal $17,1^{\circ}\text{C}$ en minimaal $2,6^{\circ}\text{C}$. De vloeiende lijn laat zich redelijk goed beschrijven door een sinusoïde. Een algemene formule voor een sinusoïde is bijvoorbeeld:

$$T = a + b\sin(c(t - d))$$

De onderzoeker beschreef de vloeiende lijn met de volgende formule:

$$T = 9,85 + 7,25\sin(0,0172(t - 106)).$$

Hierin is T de gemiddelde dagtemperatuur in $^{\circ}\text{C}$, t de tijd in dagen en $t = 0$ op 1 januari.

- a** Laat zien hoe de waarden van a , b , c en d uit de figuur volgen.

Hint 35

- b** Bereken met behulp van de formule voor welke waarde van t de gemiddelde dagtemperatuur het hoogst is.

Hint 36

Een onderzoeker vraagt zich af: als de aarde opwarmt, hoeveel aangename zomerse dagen levert dat extra op in Ukkel?

Een dag met een gemiddelde dagtemperatuur van ten minste 16°C is een aangename zomerse dag. Dat komt volgens het model beschreven met de formule: $T = 9,85 + 7,25\sin(0,0172(t - 106))$ jaarlijks 65 keer voor. Als door de opwarming van de aarde de gemiddelde dagtemperatuur in Ukkel elke dag twee graden hoger is, moet het model worden aangepast en verandert de formule.

- c** Maak een nieuwe formule en bereken daarmee hoeveel extra aangename zomerse dagen deze twee graden temperatuurstijging zou opleveren.

Hint 37

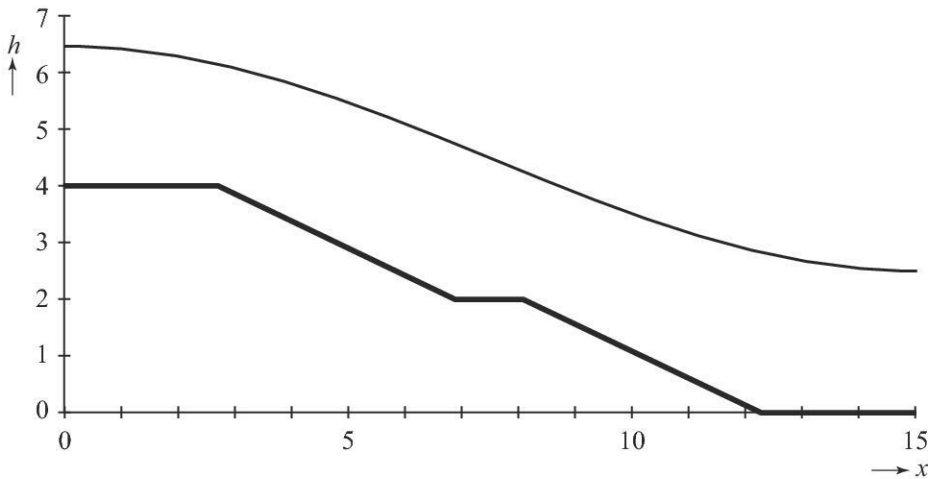
84 Station Amersfoort

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2015, tijdvak 1)

Op het station van Amersfoort is een trap naar het perron voorzien van een overkapping. De onderkant van de overkapping (op de foto met een donkere lijn aangegeven) heeft de vorm van (een deel van) een sinusoïde.

In de figuur hieronder zie je een model van het zijaanzicht van de overkapping en van de trap naar het perron.

Hierin is h de hoogte ten opzichte van het perron en x de horizontale afstand tot het hoogste punt van de overkapping, beide in meters.



In de figuur is het hoogste punt van de sinusode $(0; 6,46)$ en het laagste punt $(15; 2,48)$. We kunnen voor deze sinusoïde een formule opstellen van de vorm: $h = a + b \cdot \sin(c(x + 7,5))$. Hierbij geldt: $a \approx 4,5$, $b \approx 2,0$ en $c \approx 0,2$.

- a** Bereken met behulp van het hoogste en het laagste punt van de sinusoïde de waarden van de constanten a , b en c in twee decimalen nauwkeurig.

Hint 38

In de figuur is de trap weergegeven met lijnstukken: van $(0; 4)$ via $(2,7; 4)$, $(6,9; 2)$, $(8,1; 2)$ en $(12,3; 0)$ naar $(15; 0)$. We houden dus geen rekening met het feit dat de trap gedeeltelijk uit traptreden bestaat. Door de gemiddelde hoogte van zowel de trap als van de overkapping te bepalen, kunnen we het verschil hiertussen berekenen.

- b** Bereken dit verschil.

Hint 39

In de figuur lijkt het dat de afdalende delen van de trap steiler zijn dan de maximale daling van de overkapping.

Met behulp van de formule $h = 4,5 + 2,0 \sin(0,2(x + 7,5))$ en de beschrijving van de trap kan voor iedere waarde van x het hoogteverschil tussen de overkapping en de trap berekend worden.

- c** Onderzoek of er een waarde van x is, waar het hoogteverschil kleiner is dan 2,35 meter.

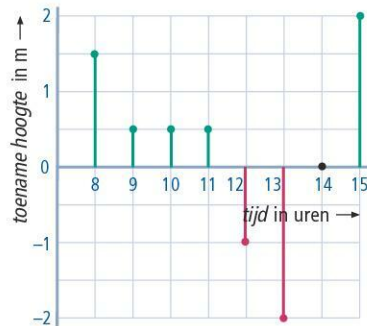
Hint 40

Veranderingen en afgeleide functies

Toenamediagrammen

In een toenamediagram kun je toe- en afnamen zichtbaar maken. Bij toenamen worden de staafjes omhoog getekend, bij afnamen omlaag. De grafiek hiernaast is een toenamediagram.

- 85** In het toenamediagram zie je dat de waterhoogte tussen 7 uur en 8 uur gestegen is met 1,5 m.
- a** Lees af op ongeveer welk tijdstip de waterhoogte een maximum bereikt.
- b** Gedurende welke periode stijgt de waterhoogte lineair?
- c** Om 07.00 uur is de waterhoogte 3 m.
Hoe hoog staat het water om 13.00 uur? Leg je antwoord uit.



Differentiequotiënt

Om veranderingen aan te geven wordt vaak het symbool Δ (delta) gebruikt. Een verandering van x geef je aan met Δx . Bij functie $f(x)$ hoort bij elke toename Δx een toename Δy of $\Delta f(x)$ van de functiewaarde.

De gemiddelde verandering van een functie f over het

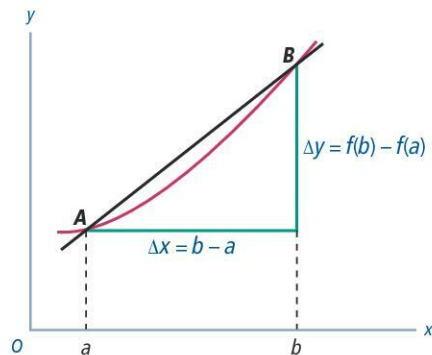
interval $[a, b]$ is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, dit heet het

differentiequotiënt van f over het interval $[a, b]$.

Het differentiequotiënt van f over het interval $[a, b]$ is

- > de gemiddelde verandering van de functiewaarde over dat interval;
- > de richtingscoëfficiënt van de lijn door het beginpunt en het eindpunt van de grafiek van f op dat interval.

- 86** De afstand die een bepaald voertuig aflegt voldoet aan de functie $s(t) = 40 \cdot 1,3^t$ met t in minuten en s in meter. Bereken de gemiddelde snelheid in meter per seconde van dit voertuig tussen $t = 3$ en $t = 6$.



Helling van een grafiek in een punt

De helling van een grafiek in een punt P is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn die de grafiek raakt in punt P . Deze lijn heet de raaklijn.

De helling in een punt kun je benaderen door de gemiddelde verandering over een klein interval te berekenen. Hoe kleiner het interval, hoe beter die benadering is.

In een tijd-afstand situatie is de helling gelijk aan de snelheid.

Voorbeeld

Benader de helling van de grafiek van $f(x) = 2x$ in het punt $(3, 8)$.

Oplossing

Over het interval $[3; 3,001]$ is

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{2^{3,001} - 2^3}{3,001 - 3} \approx 5,547.$$

De helling is ongeveer 5,55.

- 87 Hiernaast zijn de grafieken geplot van de functies

$$f(x) = \sqrt{3x+6} \text{ en } g(x) = \frac{1}{4}x^2.$$

De grafieken lijken bij $x = 1$ even steil te lopen.

Benader voor beide functies de helling van de grafiek bij $x = 1$ en controleer daarmee of de grafieken bij $x = 1$ even steil lopen.

Afgeleide functies en differentiëren

Bij een functie f hoort vaak een tweede functie waarmee je de helling in een punt van de grafiek van f kunt berekenen. Die functie heet de afgeleide functie van f . De notatie voor

de afgeleide functie is f' (spreek uit als f -accent) of $\frac{df(x)}{dx}$.

Het berekenen van de afgeleide functie heet differentiëren.

De afgeleiden van de standaardfuncties zijn:

$$\begin{aligned} > f(x) = x^a & f'(x) = a \cdot x^{a-1} \\ > f(x) = c \text{ (een constante)} & f'(x) = 0 \\ > f(x) = e^x & f'(x) = e^x \\ > f(x) = a^x & f'(x) = \ln(a) \cdot a^x \end{aligned}$$

$$> f(x) = {}^a\log(x) \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

$$\begin{aligned} > g(x) = f(x) + c & g'(x) = f'(x) \\ > g(x) = c \cdot f(x) & g'(x) = c \cdot f'(x) \end{aligned}$$

Bij het differentiëren van functies gebruik je de volgende regels:

$$\begin{aligned} > s(x) = f(x) + g(x) & s'(x) = f'(x) + g'(x) & \text{(somregel)} \\ > k(x) = f(g(x)) & k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ of } \frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} & \text{(kettingregel)} \\ > p(x) = f(x) \cdot g(x) & p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) & \text{(productregel)} \\ > q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} & q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} & \text{(quotiëntregel)} \end{aligned}$$

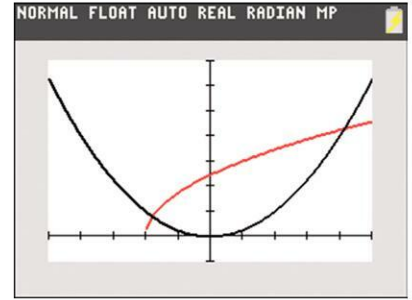
Deze regels zijn bij het CE gegeven op een pagina Formules van het opgavenblad.

- 88 Differentieer de volgende functies.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \quad g(x) &= 8x(x-7) & \mathbf{d} \quad j(x) &= (7x^2+1) \cdot \sqrt{x-9} \\ \mathbf{b} \quad h(x) &= \sqrt{16-0,5x} & \mathbf{e} \quad m(x) &= (5x^{2,4}+4)^3 \\ \mathbf{c} \quad k(x) &= 5x^{7,2} + \frac{3}{x^2} & \mathbf{f} \quad z(x) &= \frac{7x-4}{2x^2+3} \end{aligned}$$

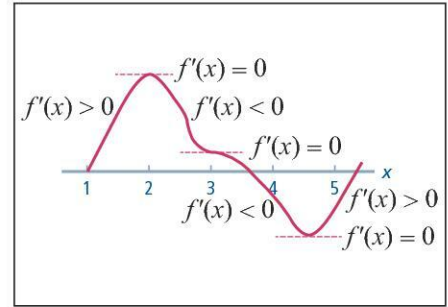
- 89 Differentieer de volgende functies.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \quad p(x) &= 3 \cdot e^x & \mathbf{d} \quad q(x) &= 7 \cdot e^{5x-3} \\ \mathbf{b} \quad d(x) &= x^2 \cdot 2^x & \mathbf{e} \quad a(x) &= 2,4 \cdot {}^2\log(5x-2) \\ \mathbf{c} \quad e(x) &= \frac{1}{2 \cdot \log(x)} & \mathbf{f} \quad g(x) &= \frac{2x+1}{3+6 \cdot 1,2^x} \end{aligned}$$



Redeneren met de afgeleide

Met behulp van de afgeleide kun je vaststellen of een grafiek van een functie een top heeft en of de grafiek stijgt of daalt. Met behulp van diezelfde afgeleide kun je ook vaststellen of die stijging of daling toenemend of afnemend is.



Als $f'(x) = 0$ dan heeft f een extreme waarde.

Als de grafiek van f stijgt, dan zijn de waarden van f' positief.

Als de grafiek van f daalt, dan zijn de waarden van f' negatief.

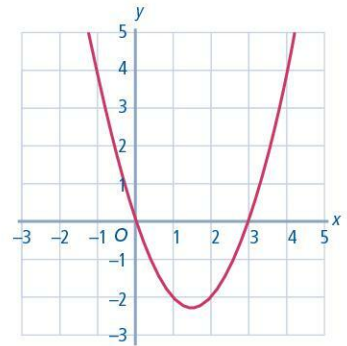
Als de grafiek van f toenemend stijgend is, dan is $f'(x) > 0$ en neemt $f'(x)$ toe.

Als de grafiek van f afnemend stijgend is, dan is $f'(x) > 0$ en neemt $f'(x)$ af.

Als de grafiek van f afnemend dalend is, dan is $f'(x) < 0$ en neemt $f'(x)$ toe.

Als de grafiek van f toenemend dalend is, dan is $f'(x) < 0$ en neemt $f'(x)$ af.

- 90** Hiernaast zie je de grafiek van de afgeleide $f'(x)$.
- a** Bij welke waarden van x heeft de grafiek van f een extreme waarde?
- b** Geef van deze extreme waarden aan of het een maximum of een minimum is.
- c** Op welk interval is de grafiek van f afnemend stijgend?
- d** Geef voor het interval $[0, 1\frac{1}{2}]$ aan van welk soort stijgen of dalen er sprake is.



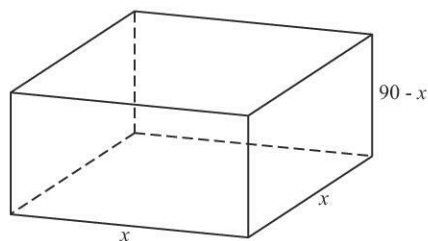
- 91a** Bereken met behulp van de afgeleide de coördinaten van de toppen van de grafiek van de functie $f(x) = (x^2 + 3x)^2$.
- b** Bereken de helling van de grafiek van f in het punt $(1, 16)$.
- 92** Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de volgende beweringen kloppen.
- a** De grafiek van $T = 2p^3 + 3p^2 - 5$ heeft een top bij $p = 0$ en een top bij $p = -1$.
- b** De grafiek van $N(t) = 15 + 32\sqrt{5t - 10}$ is afnemend stijgend voor $t > 2$.
- c** De grafiek van $p(x) = \frac{12x - 13}{4x - 5}$ is afnemend dalend voor $x > 1\frac{1}{4}$.
- 93** Gebruik een plot van de afgeleide om hiermee na te gaan of de volgende beweringen kunnen kloppen.
- a** De grafiek van $A = 5 + {}^{1,7}\log(3,5t + 1)$ is afnemend stijgend.
- b** De grafiek van $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ gaat bij $x = 2$ over van toenemend dalend in afnemend dalend.

Examenopdrachten

94 Pakketshop

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2010, tijdvak 2)

Voor het volume V (in cm^3) van het pakket hiernaast geldt de formule: $V = 90x^2 - x^3$, hierbij is x in cm.



- a Bereken met behulp van differentiëren het maximale volume van het pakket.

Hint 41

Voor pakketten van een vergelijkbare vorm geldt voor het volume de formule: $V = ax^2 - x^3$. Hierin is a de som van de lengtes van de kortste en de langste zijde.

Hierbij is een formule voor het maximale volume te maken.

- b Toon aan dat $V_{\max} = \frac{4}{27}a^3$ een formule is voor het maximale volume.

Hint 42

95 Zeemonsters

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2009, tijdvak 2)

Op basis van gegevens over het aantal ontdekte zeemonsters in verschillende

jaren stelde de bioloog Paxton het volgende model op: $P = \frac{264t - 476657}{t - 1767}$

In deze formule is P het aantal soorten dat tot en met het jaar t bekend is. Met dit model kon hij een schatting maken van het aantal ontdekte soorten tot en met een zeker jaar t . Het aantal bekende soorten neemt toe. Het model van Paxton moet dus een grafiek opleveren die altijd stijgt. Stel de formule op voor de afgeleide van P en toon met behulp daarvan aan dat de grafiek van P altijd stijgt.

Hint 43

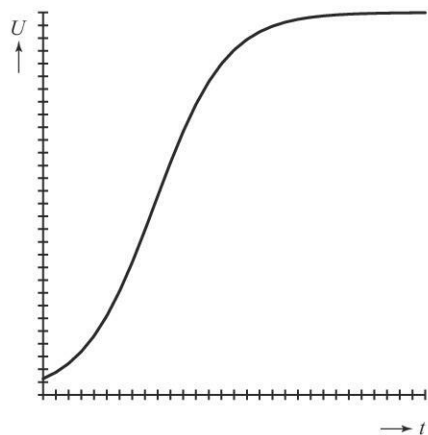
96 De bevolking van Oeganda

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2014, tijdvak 1)

Een model voor de groei van de bevolking van Oeganda is:

$$U = \frac{300}{1 + 22,8 \cdot 0,965^t}$$

Hierbij is U het aantal inwoners van Oeganda in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1980. In de figuur kun je zien dat dit model een grenswaarde voorspelt voor de bevolkingsomvang van Oeganda. De horizontale as loopt van 1980 tot 2280.



- a Beredeneer, zonder getallen in de formule in te vullen, welke grenswaarde bij dit model hoort.

Hint 44

- b Toon aan dat voor de afgeleide van U geldt: $\frac{dU}{dt} = \frac{244 \cdot 0,965^t}{(1 + 22,8 \cdot 0,965^t)^2}$

Hint 45

- c Onderzoek met behulp van deze afgeleide in welk jaar de bevolking van Oeganda volgens het model het snelst toeneemt.

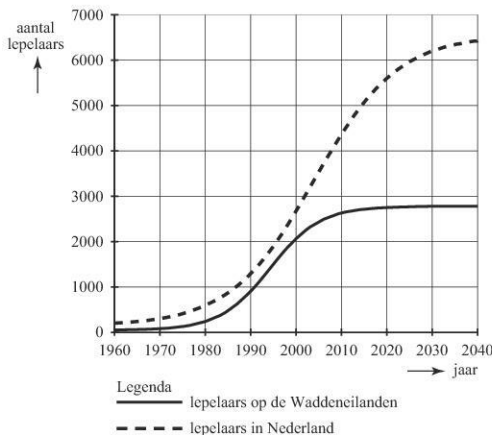
Hint 46

97 Lepelaars

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2015, tijdvak 2)

Een lepelaar is een vogel met een lepelvormige snavel die in Nederland onder andere op de Waddeneilanden voorkomt.

In de figuur zie je dat zowel het totale aantal lepelaars in Nederland als het aantal op de Waddeneilanden in de periode 1980 tot 2000 is toegenomen.



In de periode 1980-2000 groeide het aantal lepelaars op de Waddeneilanden bij benadering exponentieel. In 1980 waren er ongeveer 200 lepelaars op de Waddeneilanden en in 2000 ongeveer 2100. Op basis van deze gegevens kun je een formule opstellen voor deze exponentiële groei. Met deze formule is het aantal lepelaars op de Waddeneilanden in 2010 te voorspellen.

- a** Stel deze formule op en bereken het verschil tussen het aantal lepelaars op de Waddeneilanden in 2010 volgens deze formule en volgens het model in de figuur. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Hint 47

Een betere benadering voor het aantal lepelaars op de

Waddeneilanden geeft de volgende formule:
$$N = \frac{2780}{1 + 12,9 \cdot 0,834^t}$$

Hierin is N het aantal lepelaars en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 maart 1980. De grafiek van N is eerst toenemend stijgend en daarna afnemend stijgend.

- b** Toon aan dat de afgeleide van N gelijk is aan $N' = \frac{6510 \cdot 0,834^t}{(1 + 12,9 \cdot 0,834^t)^2}$ en

bereken vervolgens met behulp van deze afgeleide in welk jaar de grafiek van N overgaat van een toenemende stijging naar een afnemende stijging.

Hint 48

Volgens de bovenstaande formule van N nadert het aantal lepelaars op de Waddeneilanden op den duur de grenswaarde 2780.

- c** Leg uit hoe die grenswaarde uit deze formule volgt en bereken in welk jaar het aantal lepelaars op de Waddeneilanden volgens deze formule voor het eerst minder dan 5% verschilt van de grenswaarde.

Hint 49

98 Marathonloopsters

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2010, tijdvak 1)

Elmer Sterken van de Rijksuniversiteit Groningen heeft onderzoek gedaan naar het verband tussen de snelheid van Amerikaanse marathonloopsters en hun leeftijden.

Het verband tussen de hoogste snelheid v in m/s van marathonloopsters en hun leeftijd x in jaren kan benaderd worden door de formule $v = 2,836 \cdot x^{0,665} - 1,390 \cdot x^{0,818}$

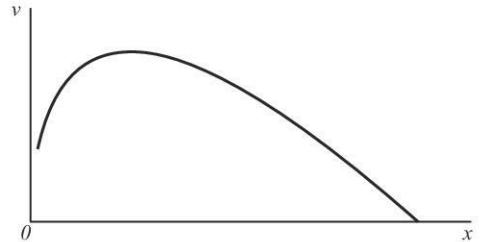
Hiernaast is de grafiek van v weergegeven.

De grafiek van v heeft een maximum.

Volgens het model is er dus blijkbaar een leeftijd waarop marathonloopsters (gemiddeld) het beste presteren.

Stel de afgeleide van v op en bereken hiermee deze leeftijd.

Hint 50



99 Boomgroei

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2010, tijdvak 1)

Naar de groei van bomen is veel onderzoek gedaan. Dat heeft geleid tot een goed inzicht in het verband tussen de hoogte van een boom en de leeftijd van die boom. In de bosbouw wordt voor veel bomen de te verwachten hoogte berekend met de formule van Chapman-Richards: $h = a(1 - b^t)^c$

Hierin is h de hoogte van een boom in meters en t de leeftijd in jaren.

De waarden van de getallen a , b en c hangen af van de soort boom.

Het verband tussen de hoogte en de leeftijd van de zomereik wordt gegeven door de formule: $h = 39,143(1 - 0,9867^t)^{0,96667}$, die van de Amerikaans eik door $h = 29,026(1 - 0,9790^t)^{0,80820}$.

- a De zomereik wordt op den duur veel groter dan de Amerikaanse eik, maar in de eerste levensjaren groeit de Amerikaanse eik veel sneller.

Toon door berekening aan dat volgens de formule van Chapman-Richards de Amerikaanse eik in het vierde levensjaar ruim 20 cm méér groeit dan de zomereik.

Hint 51

Elke boom groeit, maar die groei gaat steeds langzamer. We kunnen dit nagaan met behulp van de afgeleide van h . Dat gaan we hier doen voor de zomereik.

- b Toon aan dat de afgeleide voor de zomereik gelijk is aan

$$h' = \frac{0,507 \cdot 0,9867^t}{(1 - 0,9867^t)^{0,03333}}$$

Hint 52

Aan de vorm van deze afgeleide kun je door redeneren, dus zonder berekeningen uit te voeren, zien dat de zomereik steeds groeit en dat die groei steeds langzamer gaat.

- c Laat zien (door een redenering) hoe uit de formule van de afgeleide volgt dat de zomereik steeds groeit en dat deze groei steeds langzamer gaat.

Hint 53

Rijen

Recursieve formule

Bij veel getallenrijen kun je de volgende waarde berekenen uit de voorafgaande waarde(n) met een formule. Dit heet recursie en de bijbehorende formule heet een recursieve formule.

De termen van een rij noteer je als $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ of $u(0), u(1), u(2), \dots, u(n)$. Een rij u kan beginnen met $u(0)$ of met $u(1)$. De eerste term van een rij heet de beginterm.

Voorbeeld

Van een rij u is gegeven: $u(0) = 3, u(1) = -6, u(2) = 12, u(3) = -24, u(4) = 48, u(5) = -96, \dots$
Bereken de volgende twee termen van de rij en geef een recursieve formule van de rij u .

Oplossing

Je krijgt de volgende term door de voorgaande term met -2 te vermenigvuldigen.

$$u(6) = -2 \cdot u(5) = -2 \cdot -96 = 192$$

$$u(7) = -2 \cdot u(6) = -2 \cdot 192 = -384$$

Een recursieve formule bij deze rij is $u(n) = -2 \cdot u(n-1)$ met $u(0) = 3$.

- 100a** Gegeven is de rij 34, 29, 24, 19.
Bereken de volgende vier termen van deze rij.
- b** Gegeven is de rij 400, -200, 100, -50.
Bereken de volgende vier termen van deze rij.
- c** Geef de termen u_1 tot en met u_5 bij de rij $u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 4$ met $u_0 = 3$.
- d** Geef ook de termen u_1 tot en met u_5 bij de rij $u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 4$ met $u_0 = 2$.
- 101** Gegeven is de recursieve formule $u(n+1) = 12 + 0,6 \cdot u(n)$ met $u(0) = 50$.
- a** Maak een tabel en een grafiek bij deze formule.
- b** Naar welke grenswaarde naderen de termen van de rij?

Directe formule, rekenkundige en meetkundige rijen

Een rij waarvan je een term vindt door bij de vorige term een constante a op te tellen heet een rekenkundige rij.

De bijbehorende recursieve formule is $u(n+1) = u(n) + a$ met $u(0) = b$ als eerste term. Bij een rekenkundige rij kun je de waarde van een term $u(n)$ direct berekenen met het rangnummer n met de directe formule $u(n) = b + a \cdot n$.

Een rij waarvan je een term vindt door de vorige term met een constante r te vermenigvuldigen heet een meetkundige rij waarbij r de reden van de rij heet.

De recursieve formule is $u(n+1) = r \cdot u(n)$ met $u(0) = b$ als beginwaarde.

Bij een meetkundige rij kun je de waarde van een term $u(n)$ direct berekenen met het rangnummer n met de directe formule $u(n) = b \cdot r^n$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
▀:u(n)=12+0.6(u(n-1))
u(nMin)=50
▀:v(n)=
v(nMin)=
▀:w(n)=
w(nMin)=
```


Voorbeeld 1

Geef een recursieve formule en een directe formule bij de rij: $u(0) = 23$, $u(1) = 25$, $u(2) = 27$, $u(3) = 29$, ...

Oplossing

u is een rekenkundige rij met $a = 2$.

$u(n+1) = u(n) + 2$ met $u(0) = 23$.

Om $u(n)$ te berekenen tel je n keer 2 op bij $u(0)$, dus $u(n) = 23 + 2n$.

Voorbeeld 2

Geef een recursieve formule en een directe formule bij de rij: $v(1) = 54$, $v(2) = 18$, $v(3) = 6$, $v(4) = 2$, ...

Oplossing

v is een meetkundige rij met $r = \frac{1}{3}$.

$v(n+1) = \frac{1}{3} \cdot v(n)$ met $v(0) = 3 \cdot 54 = 162$.

Om $v(n)$ te berekenen vermenigvuldig je $v(0)$

n keer met $\frac{1}{3}$, dus $v(n) = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

102 Gegeven zijn de rijen:

A: 14, 9, 4, -1, ..., ...

C: 3, 7, 15, 31, ..., ...

B: $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32, ..., ...

D: 10; 12; 14,4; 17,28; ...; ...

- a Welke rijen zijn rekenkundig? En welke rijen zijn meetkundig?
- b Geef de recursie formules bij de gegeven rijen.
- c Geef bij de rekenkundige rijen en bij de meetkundige rijen de directe formules.

Som van een rekenkundige rij

Bij een rekenkundige rij bereken je de som van de termen $u(p)$ tot en met

$u(q)$ met de formule $\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$.

Bij een rij $u(n)$ vormen de uitkomsten $s(0) = \sum_{k=0}^0 u(k)$, $s(1) = \sum_{k=0}^1 u(k)$,

$s(2) = \sum_{k=0}^2 u(k)$, ..., $s(n) = \sum_{k=0}^n u(k)$ ook weer een rij getallen.

Deze rij getallen noem je de somrij s , vastgelegd door

$s(n) = \sum_{k=p}^n u(k)$ waarbij $u(p)$ de eerste term van deze rij is.

Voorbeeld 1

Gegeven is de rij u met recursieve formule $u(n+1) = n \cdot u(n)$ en beginterm $u(1) = 3$.
De rij s is de somrij van de rij u .
Bereken $s(1)$ tot en met $s(4)$.

Oplossing

$$s(1) = u(1) = 3$$

$$s(2) = u(1) + u(2) = 3 + 3 = 6$$

$$s(3) = s(2) + u(3) = 6 + 6 = 12$$

$$s(4) = s(3) + u(4) = 12 + 18 = 30$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de rij $u_n = 5n + 3$.

Bereken $\sum_{k=4}^{23} u(n)$.

Oplossing

De rij u is een rekenkundige rij.

Het aantal op te tellen termen is $23 - 3 = 20$

De eerste term is $u_4 = 23$;

de laatste term is $u_{23} = 118$.

De som is $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (23 + 118) = 1410$.

- 103a** Bereken $\sum_{n=3}^{15} (2n + 5)$
- b** Gegeven $u(n) = u(n-1) - 10$ met $u(0) = 48$.
Bereken $s(10)$.
- c** Bereken $12 + 15 + 18 + \dots + 102$.
- 104** Gegeven is de rij $u_n = -2n + 15$. De rij s wordt gegeven door $s_n = \sum_{k=0}^n u(k)$.
- a** Bereken s_0, s_1, s_2 en s_{20} .
- b** Laat zien dat $s_n = \sum_{k=0}^n u(k) = \frac{1}{2}(n+1)(-2n+30)$.

Som van een meetkundige rij

Bij een meetkundige rij u met $u(n) = b \cdot r^n$ geldt voor de som van de termen

$$u(p) \text{ tot en met } u(q): \sum_{k=p}^q u(k) = \frac{\text{eerstvolgende term} - \text{eerste term}}{r - 1} = \frac{u(q+1) - u(p)}{r - 1}$$

Voorbeeld

Gegeven is de meetkundige rij u met als eerste vier termen 16, 24, 36, 54,
Bereken de som van de eerste tien termen.

Oplissing

De reden is $r = 1,5$ en $u(0) = 16$, dus een directe formule voor de rij u is $u(n) = 16 \cdot 1,5^n$.

De som van de eerste tien termen is $\sum_{k=0}^9 u(k) = \frac{u(10) - u(0)}{1,5 - 1} = \frac{16 \cdot 1,5^{10} - 16}{1,5 - 1} \approx 1813,28$.

- 105** Bereken en rond je antwoord zo nodig af op drie decimalen.
- a** $0,1 + 0,5 + 2,5 + 12,5 + \dots + 39062,5$
- b** $\sum_{k=2}^{12} 18 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$
- c** $\sum_{k=0}^{15} (1,3)^k$
- 106** Gegeven is de rij $u(n) = 100 \cdot 0,9^n$.
- a** Laat zien dat $s(n) = \sum_{k=0}^n u(k) = 1000 - 900 \cdot 0,9^n$.
- b** Wat is de grenswaarde van $s(n)$?

Examenopdrachten

107 Muziek op cd's

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2014, tijdvak 2)

De verkoop van cd's is de laatste jaren sterk aan het dalen. Een belangrijke reden van deze terugloop is de mogelijkheid om muziek te downloaden van het internet.

We zoeken een model waarmee we de toekomstige downloadverkoop kunnen beschrijven. Een model dat redelijk past bij de gegevens tot nu

toe wordt gegeven door de formule: $D(n) = \frac{19,0}{1 + 26,14 \cdot 0,73^n}$

Hierin is $D(n)$ het aantal downloadverkopen in miljoenen in jaar n , met $n = 0$ is het jaar 2008.

Een model dat de toekomstige cd-verkoop beschrijft is het volgende: $C(n) = 0,91 \cdot C(n-1)$ met $C(0) = 18,0$.

Hierbij is $C(n)$ het aantal verkochte cd's in miljoenen in jaar n , met $n = 1$ is het jaar 2009. Dus er zijn 18 miljoen cd's verkocht in 2008.

Bepaal in welk jaar het aantal verkochte cd's voor het eerst kleiner is dan het aantal downloadverkopen.

Hint 54

108 Vierkanten

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2013, tijdvak 1)

De getallen in het vierkant hiernaast zijn zó gerangschikt dat, als je alle getallen in een rij bij elkaar optelt, dit steeds hetzelfde getal oplevert: het magische getal. Ook als je alle getallen in een kolom bij elkaar optelt, komt ditzelfde magische getal er uit. het magische getal is hier 12.

Op een vierkant van 25 bij 25 komen alle getallen van 0 tot en met 624 precies één keer voor.

Het magische getal kan men berekenen door alle getallen van 0 tot en met 624 bij elkaar op te tellen en de uitkomst vervolgens te delen door het aantal rijen: elke rij moet immers bij optellen hetzelfde getal opleveren.

Voor de som van de getallen geldt de volgende formule:

$$\text{som} = 0,5 \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$$

- a Bereken met behulp van de bovenstaande formule het magische getal van het vierkant.

Hint 55

In het algemeen geldt voor een vierkant van p bij p getallen waarin elk getal van 0 tot en met $p^2 - 1$ precies één keer voorkomt, de volgende formule voor het magische getal: $\text{magisch getal} = 0,5 \cdot p(p^2 - 1)$

Deze formule voor het magische getal is af te leiden door te bedenken dat het magische getal gelijk is aan de som van alle getallen in het kunstwerk gedeeld door het aantal rijen.

- b Toon, zonder getallenvoorbeelden, aan dat de formule voor het magische getal juist is. Gebruik daarbij voor het berekenen van de som van de getallen de formule $\text{som} = 0,5 \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$.

Hint 56

5	0	7
6	4	2
1	8	3

109 Een tegen honderd

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2015, tijdvak 2)

Eén tegen honderd is een populair televisiespelletje. Een kandidaat speelt tegen 100 tegenspelers. Er wordt een vraag gesteld die eerst door alle tegenspelers via een kastje beantwoord wordt. Daarna beantwoordt de kandidaat de vraag. Is zijn antwoord goed, dan krijgt hij een bedrag voor elke tegenspeler die de vraag fout beantwoordde. Deze tegenspelers doen daarna niet meer mee. Zij zijn ‘weggespeeld’. Het spel gaat verder met de overige spelers met de volgende ronde: er wordt weer een vraag gesteld. Dit gaat door tot de kandidaat een fout antwoord geeft of er geen tegenspelers meer over zijn. Bij iedere vraag geldt het volgende: het bedrag dat per weggespeelde speler door de kandidaat tijdens de betreffende ronde gewonnen wordt, is gelijk aan € 50 000 gedeeld door het aantal nog meespelende tegenspelers. Dus als er nog 50 tegenspelers over zijn, is elke tegenspeler € 1000 waard. Zijn er dan 6 die het antwoord fout hebben, dan voegt de kandidaat € 6000 toe aan zijn totaalbedrag en speelt hij verder tegen de overige 44 spelers. Alle berekende bedragen worden voortdurend op gehele euro's afgerond. We gaan er in deze opgave van uit dat de kandidaat op alle vragen het goede antwoord weet en we zien af van andere regels van het spel.

- a** Bereken hoeveel een kandidaat in totaal wint als hij in vijf rondes elke keer 20 tegenspelers wegsteelt.

Hint 57

Het lukt de kandidaten niet vaak alle tegenstanders weg te spelen. Maar als ze winnen, blijken ze altijd minstens € 50 000 te winnen.

- b** Leg uit waarom een winnaar altijd minstens € 50 000 wint.

Hint 58

Door per ronde steeds één speler weg te spelen, wint de kandidaat het maximale bedrag. In de tabel zie je hoe het totaalbedrag bij dit spelverloop oploopt. Ook hierbij zijn alle bedragen steeds tussentijds op hele euro's afgerond.

ronde n	1	2	3	4	5	6
aantal spelers bij begin van ronde	100	99	98	...	...	...
waarde van de in deze ronde weggespeelde speler	500	505	510	...	...	...
totaal bedrag B_n na ronde n	500	1005	1515	...	...	...

- c** Bereken het totaalbedrag na ronde 6.

Hint 59

B_n is het totaalbedrag na ronde n als de kandidaat in elke ronde één speler heeft weggespeeld.

- d** Stel een recursieve formule op voor het totaalbedrag B_n na ronde n en bereken daarmee het maximale bedrag dat de kandidaat kan winnen. Aan het afronden hoeft in de formule geen aandacht te worden besteed.

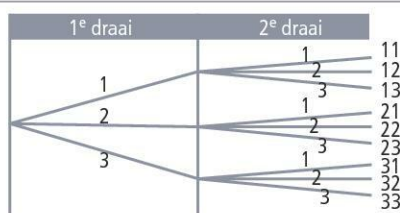
Hint 60

Boomdiagrammen

Een boomdiagram is een manier om alle mogelijkheden bij een telprobleem overzichtelijk weer te geven.

Voorbeeld

Een kanstol is verdeeld in drie gelijke gebieden met de cijfers 1, 2 en 3. Maak een boomdiagram met alle mogelijkheden bij twee keer draaien.



- 110** De schaker Kasparov speelt een wedstrijd tegen een computer. Bij deze wedstrijd worden drie schaakpartijen gespeeld. In geval van winst krijgt de winnaar één punt. Bij een remise krijgen beiden een halve punt.
- Onderzoek met behulp van een boomdiagram op hoeveel manieren de wedstrijd kan verlopen.
 - Stel dat de wedstrijd eindigt in de stand 2-1 voor Kasparov. Op hoeveel manieren kan deze uitslag tot stand komen?
- 111** Je hebt de letters S, P, E, L en D.
- Hoeveel (onzin)woorden van vijf letters kun je maken als je elke letter maar één keer mag gebruiken?
 - En hoeveel (onzin)woorden van vijf letters kun je maken als je elke letter meerdere keren mag gebruiken?
- 112** In een vaas zitten twee rode, twee groene en twee witte knikkers. Mieke pakt zonder terugleggen knikkers uit de vaas. Ze stopt met pakken zodra ze twee knikkers van dezelfde kleur heeft. Hoeveel verschillende trekkingen zijn er om twee knikkers met dezelfde kleur te pakken?

Roosters

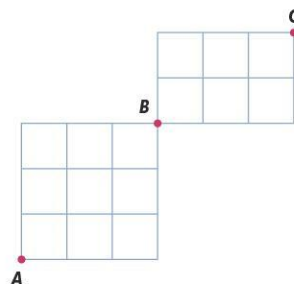
Een rooster is een handig model voor telproblemen waarbij je steeds uit twee mogelijkheden (voor of tegen, winst of verlies) moet kiezen.

Het aantal verschillende routes naar een punt kun je vinden met behulp van het aantal routes naar de voorafgaande punten.

Het aantal verschillende kortste routes van punt O naar punt P in het rooster hiernaast is 35. Elk van deze routes bestaat uit zeven stappen, vier naar rechts en drie naar boven.



- 113a** Hoeveel kortste routes zijn er van punt *A* naar punt *B*?
b En hoeveel kortste routes zijn er van punt *A*, via punt *B*, naar punt *C*?
- 114a** Hoeveel verschillende scoreverlopen zijn mogelijk bij een voetbalwedstrijd die eindigt in 5-3?
b Bijeen gezinssamenstelling kun je letten op de volgorde waarop jongens en meisjes geboren worden. Hoeveel verschillende gezinssamenstellingen zijn er mogelijk bij gezinnen met drie meisjes en drie jongens?



Permutaties en combinaties

Een permutatie van 3 uit 10 is een rangschikking van een drietal dat je kiest uit tien verschillende dingen: een eerste, een tweede en een derde.

Het aantal permutaties van 3 uit 10 is gelijk aan $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Een combinatie van 3 uit 10 is een keuze van drie uit tien:

drie wel en zeven niet. Het aantal combinaties is $\binom{10}{3} = 120$.

Een rooster is een geschikt telmodel om het aantal mogelijke drietallen te berekenen. Bij een combinatie van 3 uit 10 ga je in een rooster drie stappen naar rechts en zeven omhoog (of drie omhoog en zeven naar rechts).

Op je rekenmachine:

Het aantal permutaties van 3 uit 10 is
 $10 \text{ nPr } 3 = 720$

Het aantal combinaties van 3 uit 10 is
 $10 \text{ nCr } 3 = 120$

Voorbeeld

Je hebt acht films in huis en met een groep vrienden wil je twee films gaan bekijken. Samen kies je er twee uit. Hoeveel tweetallen zijn mogelijk?

Oplossing

Het gaat om de keuze van twee van de acht films. De volgorde van kiezen is niet van belang, want het gaat erom welk tweetal bekeken gaat worden.

Er zijn daarom $\binom{8}{2} = 28$ tweetallen mogelijk.

- 115** Joyce heeft op haar verjaardag tien cd's gekregen.
a Bereken het aantal mogelijkheden waarop zij deze cd's naast elkaar in haar kast kan zetten.
b Hoeveel mogelijkheden zijn er om een top drie samen te stellen uit deze tien cd's?
c Joyce heeft nog plaats voor vier cd's op haar mp-3 speler. Hoeveel mogelijkheden zijn er om vier cd's te selecteren?
- 116a** Boer Gerrit heeft 26 schapen. Hij wil tien schapen in de stal brengen. Bereken het aantal mogelijkheden om een groep van tien schapen samen te stellen.
b Boer Gerrit heeft 14 witte en 12 zwarte schapen. Hij besluit vijf witte schapen en vijf zwarte schapen in de stal te brengen. Hoeveel verschillende mogelijkheden heeft hij om een groep met vijf witte en vijf zwarte schapen samen te stellen voor de stal?

- 117a** Bij een sportdag zijn voor 12 jongens, vier rode, vier blauwe en vier groene shirtjes beschikbaar.
Bereken het aantal mogelijkheden waarop je de shirtjes kunt verdelen.
- b** Voor de zwemestafette is uit de groep van 12 jongens één jongen nodig voor de vrije slag, één voor de vlinderslag, één voor de rugslag en één voor de schoolslag.
Hoeveel mogelijkheden zijn er om het estafetteteam samen te stellen?

Examenopdrachten

118 Bingo

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2009, tijdvak 2)

Bingo is een populair kansspel. Om te spelen moet een speler een Bingokaart kopen. Deze kaart bevat 5 rijen en 5 kolommen met willekeurige getallen. In het midden van de kaart is geen getal aanwezig. Hiernaast zie je een voorbeeld van een Bingokaart.

De kolom onder de letter **B** bevat 5 getallen uit de reeks 1 tot en met 15. De kolom onder de letter **I** bevat 5 getallen uit de reeks 16 tot en met 30. De kolom onder de letter **N** bevat 4 getallen uit de reeks 31 tot en met 45. De kolom onder de letter **G** bevat 5 getallen uit de reeks 46 tot en met 60. De kolom onder de letter **O** bevat 5 getallen uit de reeks 61 tot en met 75.

Elk getal komt niet vaker dan één keer per Bingokaart voor.

Op elke Bingokaart staan dus 24 verschillende getallen. In elke kolom staan de getallen niet noodzakelijk op volgorde van grootte. Dus als je in de Bingokaart bijvoorbeeld de getallen 4 en 11 verwisselt, krijg je een andere Bingokaart.

- a** Toon aan dat er ongeveer $5,5 \cdot 10^{26}$ verschillende Bingokaarten mogelijk zijn.

Hint 61

Bij Bingo heeft de spelleider een bak met daarin 75 balletjes waarop de getallen 1 tot en met 75 staan. Tijdens een spel Bingo wordt telkens een balletje getrokken. Het getal op dat balletje wordt aan de spelers hardop voorgelezen. Als dat getal op een Bingokaart van een speler staat, kan de speler dat getal doorstrepen. Het getrokken balletje wordt niet teruggedaan in de bak. Zodra een speler alle 24 getallen op een kaart heeft doorgestreept, mag hij 'BINGO!' roepen. De speler die als eerste 'BINGO!' roept, wint een prijs. Dan is het spel afgelopen en kan een nieuw spel beginnen.

Voor het spel maakt het dus niet uit hoe de getallen in de kolommen staan. Hiernaast zie je een Bingokaart die is ontstaan door de getallen in elke kolom van kaart 1 in een andere volgorde te zetten. De speler met deze kaart kan op precies hetzelfde moment 'BINGO!' roepen als de speler met kaart 1. We zeggen daarom dat kaart 2 niet **wezenlijk** verschilt van de kaart 1.

- b** Bereken hoeveel verschillende Bingokaarten er kunnen bestaan die **wezenlijk** van elkaar verschillen.

Hint 62

B	I	N	G	O
4	18	32	48	71
11	25	45	54	62
13	19		51	67
8	24	39	49	74
1	27	36	59	63

kaart 1

B	I	N	G	O
11	18	39	49	74
4	25	45	51	67
1	19		54	63
8	27	32	48	71
13	24	36	59	62

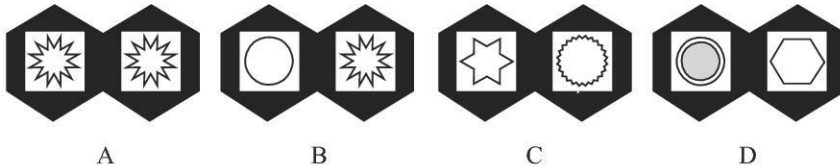
kaart 2

119 Genius

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2008, tijdvak 2)

Genius is een bordspel voor 1 tot en met 4 spelers. Tijdens het spel moeten de spelers tegels op het speelveld plaatsen. Een tegel heeft de vorm van twee zeshoeken die met een zijde aan elkaar vast zitten. Deze tegels zitten in een zak. Op elke tegel staan twee symbolen. Dat kunnen twee dezelfde symbolen of twee verschillende symbolen zijn.

Er zijn zes verschillende symbolen: 12-puntige ster, cirkel, 6-puntige ster, zon, gevulde cirkel en zeshoek. Hieronder zijn vier tegels afgebeeld.



Elke mogelijke tegel met twee dezelfde symbolen komt 5 keer voor. Tegel A in de figuur hierboven komt dus 5 keer voor.

Elke mogelijke tegel met twee verschillende symbolen komt 6 keer voor. Dus bijvoorbeeld de tegel met een cirkel en een 12-puntige ster (tegel B hierboven) komt 6 keer voor.

Bereken het totale aantal tegels dat bij Genius wordt gebruikt.

Hint 63

120 Muziek op cd's

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2014, tijdvak 2)

Om muziek digitaal op een cd op te kunnen slaan worden geluidstrillingen omgezet in getallen. Elk getal wordt vervolgens weergegeven als een rijtje nullen en enen.

Een rijtje van acht bits, dus acht keer een 0 of een 1, heet een byte. Het getal 18 bijvoorbeeld wordt daarbij weergegeven als 00010010.

- a Bereken hoeveel verschillende rijtjes van 8 bits er mogelijk zijn.

Hint 64

Voor veel muziek is het gebruikelijk om een seconde muziek vast te leggen in 44 100 rijtjes van 16 bits (van 2 bytes dus). Voor stereomuziek wordt het aantal rijtjes nog verdubbeld omdat er zowel voor de linker- als voor de rechterluidspreker een rijtje wordt vastgelegd.

De opslagcapaciteit van een cd is 783 megabyte (MB), waarbij we ervan uitgaan dat 1 megabyte 1 000 000 bytes is.

- b Bereken hoeveel minuten stereomuziek in theorie op een cd kan worden opgeslagen.

Hint 65

Om rijtjes van 8 bits op een cd te zetten, vormt men elk rijtje van 8 bits om tot een code van 14 bits. Dit vermindert de foutgevoeligheid. Een voorbeeld van zo'n code van 14 bits is 10010010000000.

Aan deze codes wordt de eis gesteld dat tussen twee enen minstens twee nullen staan. Een code als 00101000000100 kan dus niet als code voorkomen omdat er tussen de eerste twee enen slechts één nul staat. Door deze eis kan een code maximaal vijf enen bevatten.

- c Leg uit waarom een code niet zes enen kan bevatten.

Hint 66

121 Puzzelstukjes

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 2)

Op de foto hiernaast zie je enkele puzzelstukjes van een legpuzzel van Europa.

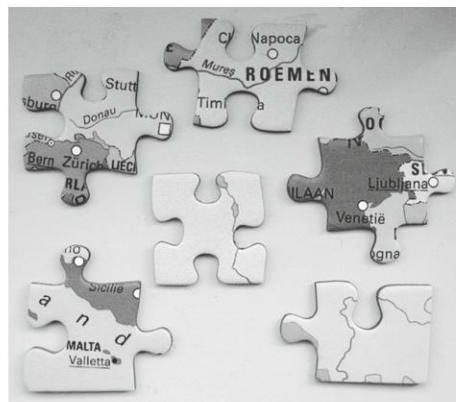
Als je aan een puzzel begint, kan je besluiten om de puzzelstukjes eerst op soort te selecteren: de hoekstukjes, de randstukjes en alle andere stukjes.

Deze soorten kunnen verschillende vormen hebben.

Om te onderzoeken hoeveel verschillende vormen er eigenlijk zijn, voeren we een aantal regels in:

- We beschouwen de puzzelstukjes als vierkantjes;
- Een zijde kan recht zijn of met een inkeping of met een uitstulping;
- Bij een hoekstukje heb je twee aan elkaar grenzende rechte zijden (zie het stukje rechtsonder op de foto), bij een randstukje is één zijde recht (zie het stukje linksonder op de foto) en bij de overige puzzelstukjes is er geen enkele zijde recht;
- Twee stukjes hebben een gelijke vorm als ze door draaiing (over een kwart, halve of driekwartslag) in elkaar overgaan. De twee puzzelstukjes linksboven en midden boven op de foto hebben beide twee inkepingen en twee uitstulpingen maar zijn toch verschillend van vorm;
- Stukjes die alleen door op de kop te leggen en niet door draaiing in elkaar over kunnen gaan, noemen we wel verschillend van vorm aangezien er op de achterkant niet de kaart van Europa staat. Bereken hoeveel verschillende vormen er in het totaal volgens bovenstaande regels zijn.

Hint 67



122 Tricoda

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2013, tijdvak 2)

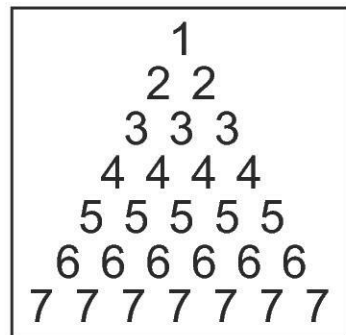
Het familiespel Tricoda is uitgeroepen tot Speelgoed van het jaar 2010. Het spel Tricoda bestaat uit 28 stenen. Het cijfer 1 komt één keer voor, het cijfer 2 twee keer, het cijfer 3 drie keer en zo verder tot en met het cijfer 7, dat zeven keer voorkomt. Zie de figuur hiernaast.

Elke speler krijgt drie stenen, die op een standaard worden geplaatst, waarbij de volgorde niet van belang is. De drie stenen vormen zo een cijfertrio. De stenen staan zo op de standaards, dat elke speler wel de cijfertrio's van de andere spelers ziet, maar zijn eigen cijfertrio niet. Zie foto.

Om het spel te winnen moet je, met behulp van vragenkaartjes, beredeneren welke drie getallen op je eigen standaard staan.

Bereken het aantal mogelijke verschillende cijfertrio's dat een speler bij de start van het spel kan krijgen.

Hint 68



Hints bij de examenopdrachten

- 1 Druk eerst de tijd van de marathonloopster uit in seconden.
- 2 Met hoeveel procent komt het aantal containers in 2002 overeen?
- 3 Hoe vaak worden per dag waarnemingen afgegeven?
- 4 Hoelang doet Sylvia over de heenweg?
- 5 Bereken de waarde van A en B .
- 6 Ga ervan uit dat de doorzetter de test precies 11 keer gedaan hebben.
- 7 Hoe kun je de hoogste snelheid van een 52-jarige marathonloopster berekenen?
- 8 Welke waarde heeft v als de oven niet meer verder opwarmt? Geef de bijbehorende vergelijking. Deze vergelijking kun je met algebra maar ook met de rekenmachine oplossen.
- 9 Welk deel van het aantal huishoudens in de klasse 20 000-30 000 heeft een inkomen onder de 27 000 euro?
- 10 Je moet onderzoeken wat met de waarde van P gebeurt als t steeds groter wordt.
- 11 Bedenk dat TE en LE nooit negatief zijn.
- 12 Je kunt 1 schrijven als $\frac{LE + TE}{LE + TE}$
- 13 Hoe verandert de breuk $\frac{TE}{LE + TE}$ als TE constant is en LE groter wordt?
- 14 Hoe vaak kan Marieke gebruik maken van de regel dat de eerste 100 punten per product € 1,50 waard zijn?
- 15 Hoeveel waarde heeft één punt nadat je de eerste 100 punten gebruikt hebt?
- 16 Vereenvoudig eerst de breuk door teller en noemer met dezelfde factor te vermenigvuldigen. Welke factor moet je daarvoor kiezen?
- 17 Winst bereken je door van de opbrengst de kosten af te trekken. Bereken eerst de opbrengst.
- 18 Welke vergelijking kun je hier opstellen?

- 19 Van der Meulen hanteert een maximumprijs. Haag hanteert een minimumprijs. Schets de grafiek van Haag bij die van Van der Meulen.
- 20 Welke vergelijking hoort bij deze opdracht?
- 21 Stel eerst de vergelijking op waarmee je p kunt berekenen.
- 22 Met hoeveel procent is het aandeel van armen en benen toegenomen?
- 23 Maak gebruik van de rekenregel $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
- 24 Maak gebruik van de regel $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.
- 25 Welke vergelijking hoort bij deze opdracht?
- 26 Welke variabele kun je vervangen door 30?
- 27 Gebruik de rekenregel ${}^g\log(a \cdot b) = {}^g\log(a) + {}^g\log(b)$.
- 28 Bij methode II kun je de formule $T(n) = b \cdot \ln(n + 1)$ gebruiken.
- 29 Gebruik hier een rekenregel voor logaritmen.
- 30 Bedenk dat $e^{at} = (e^a)^t$.
- 31 Zet de gegevens op een rij: hoeveel koper was er in 1970, hoeveel wordt er jaarlijks verbruikt, dus hoe groot is de levensduur? En hoe zit dat voor chroom?
- 32 Stel een formule op voor het jaarverbruik van koper en ook een voor dat van chroom. Welke vergelijking kun je opstellen waarbij de formule voor het jaarverbruik van koper zes keer zo groot is als die van chroom?
- 33 Een hogere temperatuur geeft een lagere halfwaardetijd van het diastase-getal. Is dat goed of slecht voor de honing?
- 34 Lees bij 25 °C af hoe groot de halfwaardetijd is van het diastase-getal. Hoe breng je die halfwaardetijd in verband met de gegeven 3 jaar?
- 35 De waarden voor a , b en c kun je berekenen met behulp van de gegevens in de tekst. De waarde voor d kun je aflezen in de grafiek.
- 36 Bedenk dat een maximum steeds een kwart periode na een beginpunt optreedt.
- 37 Wat gebeurt er met de grafiek van T en hoe zie je dat terug in de formule?

- 38 Hoe bereken je de evenwichtsstand en de amplitude met behulp van het minimum en het maximum? En welk deel van de periode ligt tussen de punten waar het minimum en het maximum wordt bereikt?
- 39 Welke waarde van de formule van h geeft de gemiddelde waarde van de overkapping?
- 40 Welke punten komen in aanmerking om te berekenen waar dit verschil het kleinst is?
- 41 Hoe kun je de afgeleide functie gebruiken om het maximum uit te rekenen?
- 42 Druk de waarde van x waarvoor de afgeleide van $V = ax^2 - x^3$ gelijk is aan 0 uit in a .
- 43 Voor het differentiëren heb je in dit geval de quotiëntregel nodig.
- 44 Naar welke waarde nadert $0,965^t$ als t steeds groter wordt?
- 45 Gebruik bij het differentiëren de quotiëntregel.
- 46 Wat weet je van $\frac{dU}{dt}$ in het jaar waar de toename van de bevolking maximaal is?
- 47 Hoe groot is de groeifactor per jaar?
- 48 Wat weet je van de afgeleide in het punt waar een toenemende stijging overgaat in een afnemende stijging?
- 49 Bij welk aantal is het verschil 5 %? En welke vergelijking kun je daarbij opstellen?
- 50 Welke waarde heeft $v'(x)$? Je mag de bijbehorende vergelijking met de rekenmachine oplossen.
- 51 Bedenk dat het vierde levensjaar loopt van $t = 3$ tot $t = 4$.
- 52 Bedenk dat je hier de kettingregel nodig hebt.
- 53 Wat betekent het voor de afgeleide dat de hoogte blijft toenemen? En wat betekent het voor de afgeleide dat die toename steeds kleiner wordt?
- 54 Maak een tabel op je rekenmachine.
- 55 Hoeveel termen heeft de rij van 0 tot en met 624? Hoeveel rijen heeft het vierkant?

- 56 Hoe groot is het aantal termen van een vierkant van p bij p getallen?
- 57 Hoeveel leveren de eerste 20 spelers op? En de volgende 20?
- 58 Hoeveel levert de laatst weggespeelde speler op?
- 59 Bereken per speler de opbrengst.
- 60 Hoeveel levert een weggespeelde speler op nadat er n spelers zijn weggespeeld?
- 61 Hoeveel rijtjes getallen kun je maken in de kolom onder letter B? En hoeveel in de kolommen onder de andere letters?
- 62 De volgorde van de getallen in een kolom is nu niet van belang. Hoeveel rijtjes kun je in dit geval maken in de kolom onder letter B?
- 63 Bereken eerst het aantal tegels met twee dezelfde symbolen en vervolgens het aantal tegels met twee verschillende symbolen.
- 64 Hoeveel mogelijkheden heb je per bit?
- 65 Hoeveel bytes zijn nodig voor één seconde stereomuziek?
- 66 Hoeveel nullen zijn nodig als je met een 1 begint?
- 67 Splits het probleem op in hoekstukjes, randstukjes en middenstukjes.
- 68 Hoeveel trio's zijn mogelijk met drie gelijke cijfers? Hoeveel met twee verschillende cijfers? En hoeveel met drie verschillende cijfers?

OVERZICHT FORMULES

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log \frac{a}{b}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g\log a^p = p \cdot {}^g\log a$	$g > 0, g \neq 1, a > 0$
${}^g\log a = \frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0, p \neq 1$

EXAMENWERKWOORDEN

aantonen	Een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
afleiden (van een formule)	Een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van een formule blijkt. In het algemeen geldt dat de formule controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
aflezen	Het antwoord is voldoende.
bepalen	De wijze waarop het antwoord gevonden wordt is vrij; een toelichting is vereist.
berekenen	De wijze van berekenen is vrij; een toelichting is vereist.
beredeneren	Een redenering waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.
herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven in een gelijkwaardige vorm.
onderzoeken	De aanpak is vrij, een toelichting is vereist.
oplossen	De wijze van oplossen is vrij; een toelichting is vereist.
schatten	De wijze van schatten is vrij; een toelichting is vereist.
schetsen van een grafiek	Een schets van een grafiek moet voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen van de grafiek bevatten.
tekenen van een grafiek	Een tekening van een grafiek moet, naast een assenstelsel met een schaalverdeling, de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen van de grafiek bevatten. De tekening van de grafiek moet nauwkeurig zijn.

Trefwoorden

- A** afgeleide exponentiële functie 128, 137
afgeleide functie 90, 211
afgeleide logaritmische functie 130, 137
alternatieve hypothese 36, 50
- B** beeldgrafiek 68, 80
beginhoeveelheid 124
binomiale verdeling 34
boomdiagram 221
breuken 174
- C** combinatie 116, 222
combinatoriek 62, 116, 168
continuïteitscorrectie 20, 24
- D** differentiequotient 91, 210
differentiëren 90, 165, 211
directe formule 58, 216
- E** e 128, 202
eenheden 175
evenredig 150
evenredigheidsconstante 150, 160
exponentiële formules 124, 136, 164, 198
extrapoleren 149, 179
- F** factor 122
formules herleiden 59, 113
formules opstellen 152, 161
fout van de 1e en 2e soort 38, 50
- G** gemiddelde verandering 91
getal van Euler 128, 136, 202
grenswaarde 76, 80, 179
groefactor 124, 136
grondtal 125
- H** halveringstijd 200
helling van een grafiek 210
hellinggrafiek 99, 105
herleiden 59, 113, 188, 189, 194
herschalen 70, 80, 182
- I** interpoleren 149, 179
- K** kettingfunctie 92, 104
kettingregel 93, 104
kritieke gebied 40, 50
kwadratische functies 193
- L** lineair extrapoleren 149, 161
lineair interpoleren 149, 161
lineair verband 148, 186
lineaire formule 148, 160, 186
logaritmische functie 125, 136, 164
logaritmische
schaalverdeling 61, 126, 136, 203
- M** machtsfuncties 90, 192
meetkundige rij 58, 216
- N** natuurlijke logaritme 129, 136, 202
normale verdeling 13, 24
nulhypothese 36, 50
- O** omgekeerd evenredig 150, 160, 188
onderzoeksopdrachten 118, 170
- P** parameters 13
permutatie 63, 222
procenten 174
productfunctie 74, 80, 95
productregel 95, 104
- Q** quotiëntfunctie 76, 80, 96, 189
quotiëntregel 96, 104
- R** raaklijn 91
recht evenredig 150, 160, 187
recursieve formule 58, 216
redeneren met de afgeleide 100, 105, 212
redeneren met formules 81, 154, 161
rekenkundige rij 58, 216
rekenmachine 60
rekenregels voor logaritmen 123, 200
rekenregels voor machten 147, 194
rijen 58, 112, 167
rooster 221

- S**
 - significant 40, 50
 - significantieniveau 40, 50
 - sinusoïden 67, 114, 206
 - som van een meetkundige rij 112, 218
 - som van een rekenkundige rij 112, 217
 - somfunctie 72, 80
 - somgrafiek 72, 80
 - standaardafwijking 12, 35
 - standaardfuncties 66
 - statistische toets 36, 50
 - substitueren 181
 - symmetrie 206
- T**
 - tijden 175
 - toenamediagram 210
- toets van het gemiddelde 44, 50
 - toetsingsgrootheid 36, 50
 - translatie 68, 80, 182
 - tweezijdige toets 46, 51
- U**
 - uitdrukken in 180
- V**
 - verdubbelingstijd 200
 - vergelijking 148
 - verschilfunctie 72, 80
 - verschilgrafiek 72, 80
 - verwachtingswaarde 35
- W**
 - wiskundig model 132, 136
 - wortelfuncties 193

Colofon

Vormgeving omslag de C, Amsterdam/Wormer

Foto omslag Edwin Walvisch, Haarlem

Vormgeving binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer

Technisch tekenwerk Integra Software Services Pvt. Ltd., India

Illustraties Bert Hollander i.o.v. Haasart illustraties

Beeldresearch B en U International Picture Service, Amsterdam

Fotoverantwoording

Nikada | iStock.com: p. 10-11, 120-121

Nationale Beeldbank, Amsterdam: p. 17, 43, 53, 111

Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 19, 23, 37, 75, 79, 95, 97, 101 o, 103 b, o,
107, 131, 143 l, 153, 170

iStockphoto: p. 21, 31 b, o, 71 b, 101 b, 117, 125, 133, 139, 142, 151, 163

MM Fotografie, Amsterdam: p. 26 (2×), 27 b, 44, 63 b, 83

Buiten-Beeld, Nijkerk: p. 27, 49

mikulas1 | iStock.com: p. 32-33

Shutterstock: p. 32 inzet, 52, 54, 71, 102, 144 inzet, 167

ANP Photo, Rijswijk: p. 35, 77, 168

Hielke Peereboom, Nieuwehorne: p. 47, 118, 150

andrearoad | iStock.com: p. 64-65

CITO: CE vwo A, 2014-I: p. 63 o

Friesch Dagblad, Leeuwarden: p. 84

Birgit Berger / B en U, Amsterdam: p. 87

Roma_ | iStock.com: p. 88-89

Getty Images: p. 143 r (2×), 155

CaiaImage | iStock.com: p. 144-145

CITO: CE vwo A pilot, 2013-2: p. 169, 225 (2×)

Photo Disc: p. 172-173

Wim Doekes, Hoorn: p. 172 inzet

CITO: CE vwo A, 2012-1: p. 190

CITO: CE pilot vwo A, 2015-2: p. 214

WISKUNDE A

VWO

6

LEERBOEK

Moderne Wiskunde is meer dan dit boek.

De boeken, het digitale lesmateriaal en het docentenmateriaal vormen samen het complete pakket van de methode Moderne Wiskunde.

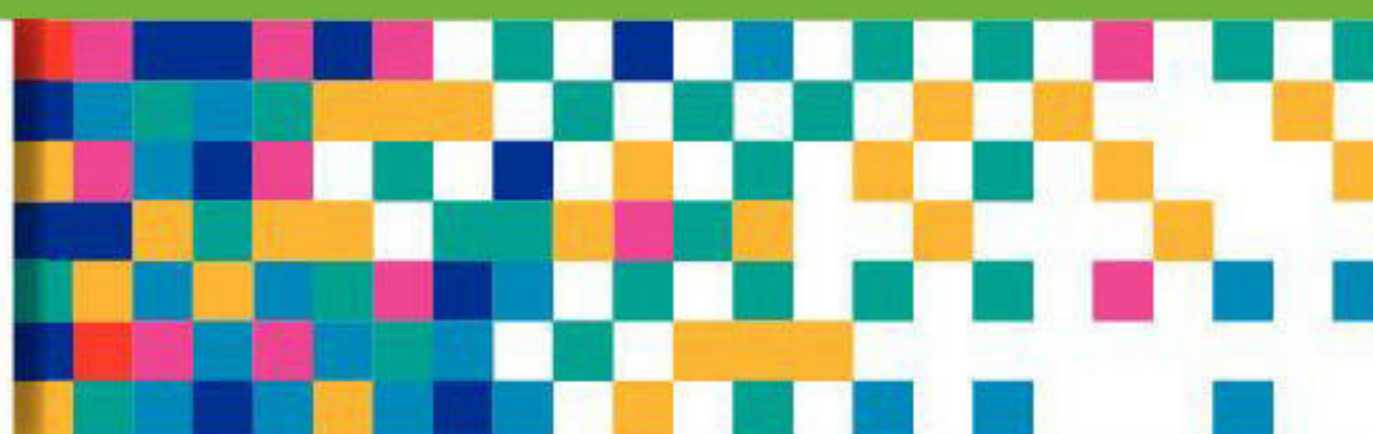
Werken met tablet, laptop, boek of digibord, op school of thuis: met Moderne Wiskunde is alles mogelijk.

Veel plezier met Moderne Wiskunde!

Noordhoff Uitgevers



Noordhoff Uitgevers



www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-86207-7



9 789001 862077