

WISKUNDE B

VWO

6

LEERBOEK

$\frac{1}{4}$

+

∞

MODERNE WISKUNDE

$\div$

=

a

x

c^2

b

c



Noordhoff Uitgevers

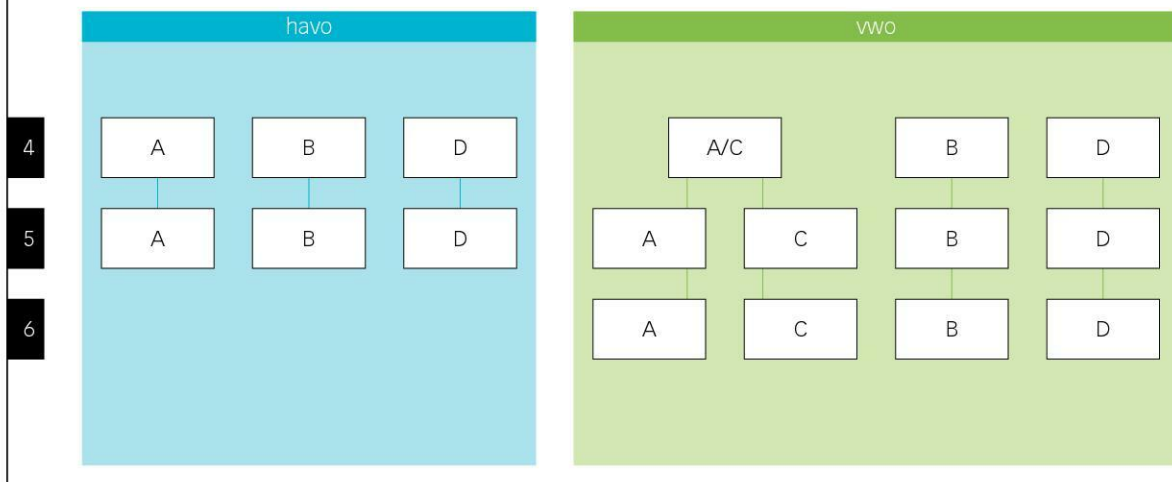


11e editie

Moderne Wiskunde

6 vwo B

Serieoverzicht bovenbouw



11e editie

Moderne Wiskunde

6 vwo B

Harm Bakker
Bert Boon
Dick Bos
Wim Doekes
Hielke Peereboom
Karoline van den Reek
Rindert Reijenga
Geertrui Schaberg
Ron Sinkeldam
Cornelia Wallien

Inhoudsopgave

1	Exponentiële en logaritmische functies	10	3	Bewegingsvergelijkingen	62
	Voorkennis	12		Voorkennis	64
1-1	Een ander grondtal	14	3-1	Bewegingsvergelijkingen	66
1-2	Het getal e	16	3-2	Bewegen langs een lijn of een cirkel	68
1-3	Natuurlijke logaritme	18	3-3	Periodieke bewegingen	70
1-4	Afgeleide functies	20	3-4	Snelheid en raaklijn	72
1-5	Primitieven	22	3-5	Versnelling	74
1-6	Gemengde opdrachten	24	3-6	Gemengde opdrachten	76
	Samenvatting	26		Samenvatting	78
	Test jezelf	28		Test jezelf	80
	Extra oefening - Basis	30		Extra oefening - Basis	82
	Extra oefening - Gemengd	31		Extra oefening - Gemengd	83
	Uitdagende opdrachten	32		Uitdagende opdrachten	84
	Hoe oud zijn historische vondsten?	33		Schroefbewegingen	85
2	Toepassingen van integreren	34	4	Goniometrische formules	86
	Voorkennis	36		Voorkennis	88
2-1	Integraal en oppervlakte	38	4-1	Somformules	90
2-2	Omwentelingslichamen	40	4-2	Herleiden	92
2-3	Wentelen om de y -as	42	4-3	Vergelijkingen	94
2-4	Variabele grenzen	44	4-4	Parametervoorstellingen	96
2-5	Gemengde opdrachten	46	4-5	Gemengde opdrachten	98
	Samenvatting	48		Samenvatting	100
	Test jezelf	50		Test jezelf	102
	Extra oefening - Basis	52		Extra oefening - Basis	104
	Extra oefening - Gemengd	53		Extra oefening - Gemengd	105
	Uitdagende opdrachten	54		Uitdagende opdrachten	106
	Tonregel van Kepler	55		Christiaan Huygens en de skatebaan	107
Vaardigheden 1		56	Vaardigheden 2		108
	Lijnen	56		Limieten en asymptoten	108
	Cirkels	58		Differentiëren	109
	Machtsverbanden	59		Integreren	110
	Goniometrische functies	60		Vergelijkingen en ongelijkheden	112

5	Functies onderzoeken	114
	Voorkennis	116
5-1	Functies met absolute waarden	118
5-2	Extreme waarden en buigpunten	120
5-3	Scheve asymptoten	122
5-4	Limieten en perforaties	124
5-5	Functies onderzoeken	126
5-6	Gemengde opdrachten	128
	Samenvatting	132
	Test jezelf	134
6	Afsluiting meetkunde	136
	Voorkennis	138
6-1	Bijzondere lijnen in een driehoek	140
6-2	Lijnen en cirkels	142
6-3	Afstanden en hoeken	144
6-4	Zwaartepunten	146
6-5	Gemengde opdrachten	148
	Samenvatting	152
	Test jezelf	154
	Vaardigheden 3	156
	Absolute waarde	156
	Tweedegraads functies	157
	Formules herleiden	158
	Inverse functies	160
	Transformaties	161

Examenvoorbereiding	162
Functies, grafieken en vergelijkingen	164
Differentiëren	178
Integreren	184
Exponentiële functies en logaritmische functies	190
Goniometrie	196
Meetkunde en vectoren	202
Lijnen en cirkels	211
Bewegingsvergelijkingen	225
Hints bij de examenopdrachten	230
Formuleblad	234
Examenwerkwoorden	235
Trefwoordenlijst	236

Werken met Moderne Wiskunde

De 11e editie ligt voor u. Deze editie is geschreven op basis van het nieuwe examenprogramma.

Ook in deze editie zijn de twee belangrijkste kernwaarden: inzicht en structuur. Inzicht ontwikkelen en een duidelijke structuur gaan samen. Elke paragraaf start met een oriënterende opdracht, waarna de betreffende theorie wordt vastgelegd. De theorie gaat steeds vergezeld van een of meer volledig uitgewerkte voorbeelden. In het vervolg van een paragraaf wordt de theorie verwerkt en geoefend en daarna weer geïntegreerd in eerder verworven kennis. Hier en daar treft u een Wiskunde Denk Activiteit aan. Op deze manier worden leerlingen gestimuleerd zelf na te denken wat bij een gegeven probleem een goede oplossingsmethode of strategie is.

Verschillen tussen leerlingen zullen er altijd zijn. Moderne Wiskunde 11e editie houdt hier meer dan ooit rekening mee door een ruim aanbod van extra oefeningen, enerzijds aan het eind van een hoofdstuk en ook in het hulpboek, en anderzijds uitdagende opdrachten en keuzeonderwerpen.

De leerlijn in Moderne Wiskunde is geschikt om zelfstandig mee te werken. Bij vrijwel iedere lesparagraaf zijn er paragraaf vervangende ICT-opdrachten. Deze bieden naast opdrachten ook theorie, voorbeelden en tips en hints om de stof beter te begrijpen.

Voor u is de ICT erop gericht om uw leerlingen extra inzicht in de stof te geven en om de voortgang van uw leerling (en klas) te volgen. De ICT stelt uw leerling in staat zich efficiënter voor te bereiden op zijn proefwerk, met behulp van de digitale oefentoets.

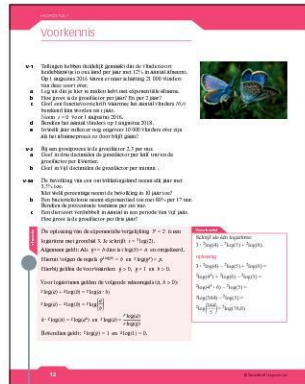
Leerboek

Het leerboek is opgedeeld in hoofdstukken, afgewisseld met onderdelen algebraïsche vaardigheden.

Aan het eind van het boek is een onderdeel Examenvoorbereiding opgenomen.

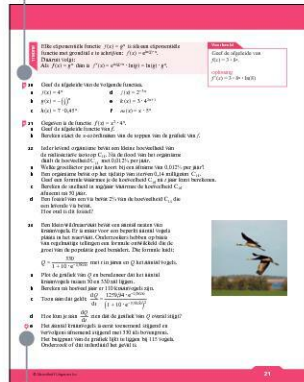


Werken met Moderne Wiskunde

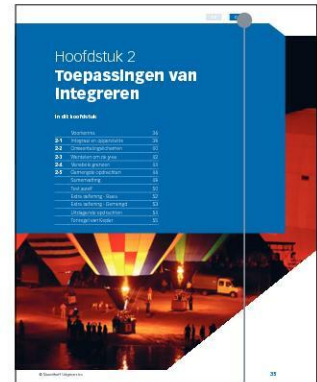


Met de voorkennisparagraaf aan het begin van ieder hoofdstuk haal je de benodigde voorkennis weer op.

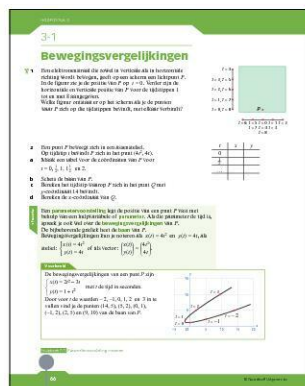
Bij sommige opdrachten kun je nog meer oefenen in het hulpboek:



Deze opdrachten vragen wat meer aandacht van je, maar moet je wel kunnen maken:

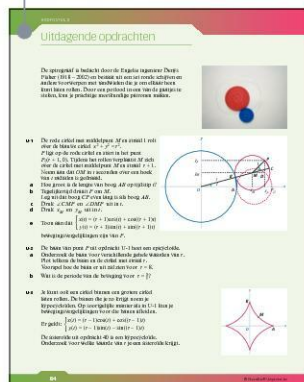
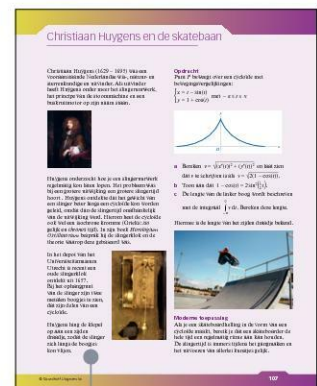


Per hoofdstuk staat aangegeven of de stof behoort tot het centraal examen, schoolexamen of keuzeonderwerpen.



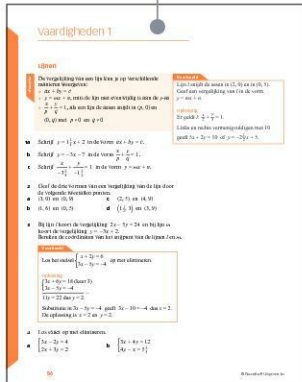
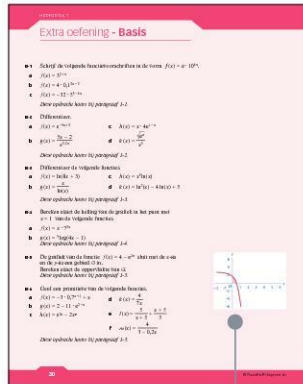
In het leerboek vind je verwijzingen naar de instructie grafische rekenmachine in het hulpboek.

Bij deze opdrachten word je uitgedaagd iets verder te kijken dan je geleerd hebt.



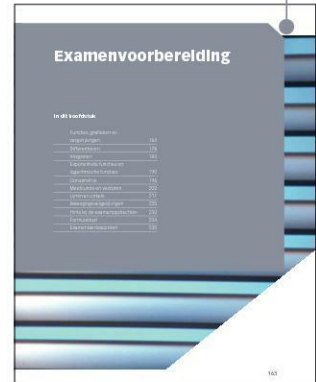
Op deze bladzijde lees je over de geschiedenis of een toepassing van wiskunde.

In dit onderdeel leer je nieuwe vaardigheden en je onderhoudt de vaardigheden die je al geleerd hebt.



Bij de Extra oefening herhaal je stof uit het boek.

Achterin dit boek vind je de Examenvoorbereiding.



Hulpboek

Het hulpboek bevat de instructies voor de grafische rekenmachines, herhalingssommen bij opdrachten uit het leerboek, voorbeeldproefwerken, werkbladen en antwoorden bij de opdrachten uit het leerboek en de voorbeeldproefwerken.



Uitwerkingen

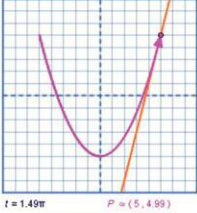
Het uitwerkingenboek bevat de uitwerkingen van de opdrachten uit het leerboek en uit het hulpboek. Stap voor stap wordt uitgewerkt wat de oplossing is van de opdrachten.

Werken met de ICT van Moderne Wiskunde

Bijzondere punten NT

Opdracht

Hiernaast zie je de baan van punt P .
De x -coördinaat kun je berekenen met
 $x = 5\sin(-t)$
en de y -coördinaat met
 $y = -5\cos(2t)$
Op $t = 0$ is $P(0, -5)$.



$t = 1.49\pi$ $P = (5, 4.99)$

De coördinaten van punt P op het tijdstip $t = 4\frac{1}{3}\pi$ zijn
(... , ...)

Op dat tijdstip is $\frac{dy}{dt} =$

Op dat tijdstip is $\frac{dx}{dt} =$

Op dat tijdstip is de helling van de raaklijn aan de kromme $\frac{dy}{dx} =$

7 van 10 | score: 0 | totaal: 0

© Noordhoff Uitgevers

[vorige](#) [volgende](#) [Inleveren](#)

Veel opdrachten in de hoofdstukken worden ondersteund door een uitlegvideo of een aanpakanimatie. Hiermee kun je nog makkelijker en zelfstandiger werken met de ICT van Moderne Wiskunde.

Bij vrijwel iedere paragraaf is een vervangende ICT-opdracht opgenomen. In deze opdracht staan ook tips en tussenvragen, die je helpen de stof beter te begrijpen.

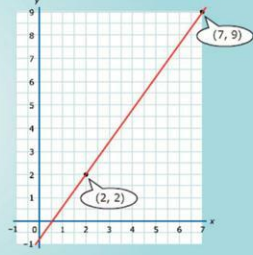
Theorie

Hoe maak je een formule bij een lineair verband?

1 Schrijf de algemene formule bij een lineair verband op.

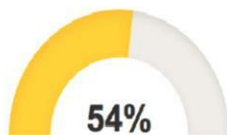
De algemene formule is: $y = ax + b$

hellingsgetal startgetal



Diagnose

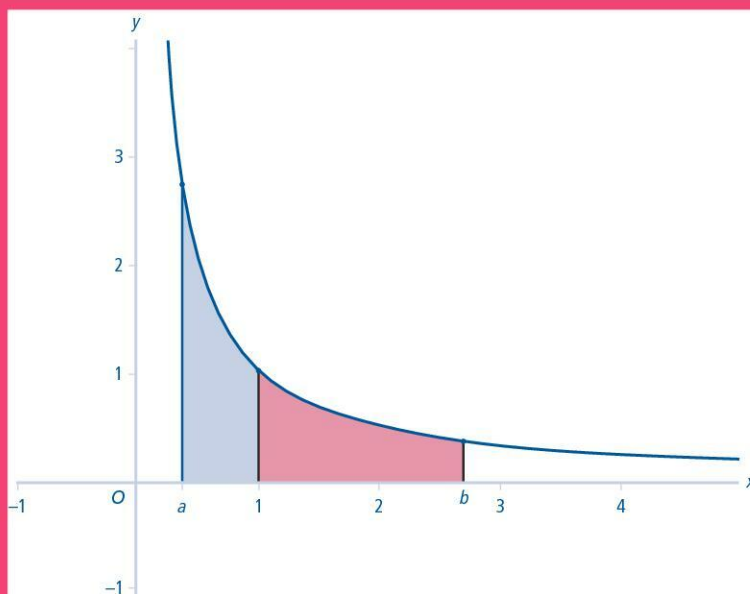
Totaalscore



Score per onderwerp



Na ieder hoofdstuk kun je een Digitale Oefentoets maken. Deze helpt je om een proefwerk efficiënt voor te bereiden. Je krijgt inzicht in hoe je op paragrafniveau scoort en indien nodig krijg je meer uitleg en oefenstof aangeboden.



De oppervlakte van een gebied

Hierboven staat de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$

De oppervlakte van elk gekleurd gebied is 1.

Bereken de waarden van a en b in drie decimalen.
Kun je een verband tussen a en b ontdekken?

Hoofdstuk 1

Exponentiële en logaritmische functies

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	12
1-1	Een ander grondtal	14
1-2	Het getal e	16
1-3	Natuurlijke logaritme	18
1-4	Afgeleide functies	20
1-5	Primitieven	22
1-6	Gemengde opdrachten	24
	Samenvatting	26
	Test jezelf	28
	Extra oefening - Basis	30
	Extra oefening - Gemengd	31
	Uitdagende opdrachten	32
	Hoe oud zijn historische vondsten?	33

Voorkennis

- V-1** Tellingen hebben duidelijk gemaakt dat de vlindersoort heideblauwtje in ons land per jaar met 12% in aantal afneemt. Op 1 augustus 2016 waren er naar schatting 21 000 vlinders van deze soort over.
- Leg uit dat je hier te maken hebt met exponentiële afname.
 - Hoe groot is de groeifactor per jaar? En per 2 jaar?
 - Geef een functievoorschrift waarmee het aantal vlinders $N(t)$ berekend kan worden na t jaar.
Neem $t = 0$ voor 1 augustus 2016.
 - Bereken het aantal vlinders op 1 augustus 2018.
 - In welk jaar zullen er nog ongeveer 10 000 vlinders over zijn als het afnameproces zo door blijft gaan?
- V-2** Bij een groeiproces is de groeifactor 2,3 per uur.
- Geef in drie decimalen de groeifactor per half uur en de groeifactor per kwartier.
 - Geef in vijf decimalen de groeifactor per minuut.
- V-3a** De bevolking van een ontwikkelingsland neemt elk jaar met 3,5% toe.
- Met welk percentage neemt de bevolking in 10 jaar toe?
- Een bacteriekolonie neemt exponentieel toe met 80% per 17 uur. Bereken de procentuele toename per zes uur.
 - Een diersoort verdubbelt in aantal in een periode van vijf jaar. Hoe groot is de groeifactor per drie jaar?



Theorie

De oplossing van de exponentiële vergelijking $3^t = 2$ is een logaritme met grondtal 3. Je schrijft $t = {}^3\log(2)$.

Algemeen geldt: Als $g^a = b$ dan is ${}^g\log(b) = a$ en omgekeerd.

Hieruit volgen de regels $g^{({}^g\log(b))} = b$ en ${}^g\log(g^p) = p$.

Hierbij gelden de voorwaarden: $g > 0$, $g \neq 1$ en $b > 0$.

Voor logaritmen gelden de volgende rekenregels ($a, b > 0$):

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$k \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^k) \text{ en } {}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$$

Bovendien geldt: ${}^g\log(g) = 1$ en ${}^g\log(1) = 0$.

Voorbeeld

Schrijf als één logaritme:

$$3 \cdot {}^2\log(4) - {}^2\log(5) + {}^2\log(6)$$

Oplossing

$$3 \cdot {}^2\log(4) - {}^2\log(5) + {}^2\log(6) =$$

$${}^2\log(4^3) + {}^2\log(6) - {}^2\log(5) =$$

$${}^2\log(4^3 \cdot 6) - {}^2\log(5) =$$

$${}^2\log(384) - {}^2\log(5) =$$

$${}^2\log\left(\frac{384}{5}\right) = {}^2\log(76,8)$$

V-4 Herleid de volgende uitdrukkingen tot één logaritme.

- a** ${}^3\log(8) + {}^3\log(5)$
- b** ${}^2\log(18) - {}^2\log(3)$
- c** ${}^3\log(6) + 2 \cdot {}^3\log(5)$
- d** $3 \cdot {}^3\log(4) - 2 \cdot {}^3\log(2)$

V-5 Bereken de volgende logaritmen exact.

- a** ${}^2\log\left(\frac{1}{4}\right)$
- b** ${}^{\frac{1}{2}}\log(4)$
- c** ${}^{\frac{1}{4}}\log\left(\frac{1}{2}\right)$
- d** ${}^2\log(4\sqrt{2})$
- e** ${}^{0,5}\log(0,25)$
- f** ${}^8\log(4)$

V-6 Los de volgende vergelijkingen exact op.

- a** $2^t = 3$
- b** $3^{2t-1} = 7$
- c** $1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t = 10$
- d** ${}^2\log(3x - 2) = 4$
- e** $\log(2x) - \log(x - 1) = \log(3)$
- f** $2 \cdot {}^3\log(x) + {}^3\log(4) = {}^3\log(3 - x)$

V-7 Gegeven is de functie $f(x) = {}^2\log(x)$.

- a** Plot en schets de grafiek van f .
- b** Geef de exacte y -coördinaat van de punten op de grafiek van f met de volgende x -coördinaten:
 $x = 8$, $x = 4$, $x = 2$, $x = 1$ en $x = \frac{1}{2}$.
- c** Spiegel de grafiek van f in de lijn $y = x$. Maak hierbij gebruik van de punten uit opdracht b.
- d** Geef het functievoorschrift bij de gespiegelde grafiek.

V-8 Er is een logaritmisch verband tussen de diameter D van een bepaalde boomsoort, gemeten op één meter boven de grond, en de hoogte H , beide in meters. Dat verband wordt beschreven door de formule $\log(D) = -2 + 1,5 \cdot \log(H)$.

- a** Welke hoogte hebben bomen met een diameter van 180 cm?
- b** Ga na of bomen met een tweemaal zo grote diameter ook twee maal zo hoog zijn.
- c** De formule van het logaritmische verband kun je ook schrijven in de vorm $D = p \cdot H^q$.
Bereken de waarde van p en van q .



1-1

Een ander grondtal

- 1 Gegeven is de functie $f(t) = 2^t$. In deze opdracht ga je het functievoorschrift herschrijven naar een exponentiële functie met grondtal 5.
- a Om het functievoorschrift $f(t) = 2^t$ te schrijven met grondtal 5, moet je 2 als macht van 5 schrijven. Los daartoe de vergelijking $2 = 5^a$ exact op.
- b Vul de gevonden waarde van a in bij het functievoorschrift $f(t) = (5^a)^t$ en werk de haakjes weg.

Aanpak

Hoe schrijf je de exponentiële functie $f(t) = b^t$ als een functie met grondtal g ?

- 1 Schrijf b als macht van g . Los daarvoor de vergelijking $g^a = b$ op. De oplossing is $a = {}^g\log(b)$.
- 2 Het functievoorschrift schrijf je als $f(t) = (g^{{}^g\log(b)})^t = g^{({}^g\log(b) \cdot t)}$.

Voorbeeld

Schrijf de functie $f(x) = 3^x$ met grondtal 10.

Oplossing

- 1 De vergelijking $10^a = 3$ heeft oplossing $a = {}^{10}\log(3) = \log(3)$.
- 2 $f(x) = 10^{x \cdot \log(3)} \approx 10^{0,48x}$

- 2 Gegeven zijn de functies $f(t) = 2 \cdot 5^t$, $h(t) = 4 \cdot 2,8^t$, $k(t) = 3 \cdot 0,75^t$ en $m(t) = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$.
 - a Leg uit dat je kunt schrijven $f(t) \approx 2 \cdot 0,5^{-2,32t}$.
 - b Schrijf de functie h in de vorm $h(t) = 4 \cdot 10^{at}$. Rond de waarde van a af op twee decimalen.
 - c Schrijf de functies k en m ook in de vorm $y = b \cdot 10^{at}$.
 - d Als je de exponentiële functie $f(t) = b \cdot g^t$ met $g \neq 10$ in de vorm $f(t) = b \cdot 10^{at}$ schrijft, krijg je soms een positieve waarde van a en soms een negatieve waarde van a . Bij welke waarden van g hoort een negatieve waarde van a ?

- H 3** Schrijf de volgende functievoorschriften in een vorm met grondtal 10. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- | | |
|---------------------------|----------------------------------|
| a $f(t) = 100^{2t}$ | c $h(s) = 0,7^{3s}$ |
| b $g(x) = 3 \cdot 2^{3x}$ | d $k(t) = 500 \cdot 1,95^{4t-1}$ |

- H 4** Gegeven is de familie van functies $f(t) = 2^{at+b}$. Bereken voor welke waarden van a en b de grafiek van f samenvalt met de grafiek van:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------|
| a $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ | c $y = 4,5 \cdot 0,6^t$ |
| b $y = 32 \cdot 5^t$ | d $y = 3^{1-2t}$ |

- 5 In de tabel hiernaast staat de olieproductie van de Verenigde Staten van 1950 tot 1975.
Neem aan dat er sprake was van exponentiële groei.
- a Bereken in twee decimalen de groeifactor per jaar.
- b Geef de bijbehorende functie $P(t) = b \cdot g^t$ met P in miljarden vaten en t in jaren, met $t = 0$ in het jaar 1950.
- c Bereken in één decimaal de verdubbelingstijd T , dat is de tijd waarin de olieproductie twee keer zo groot wordt.
- d Schrijf het functievoorschrift van P in de vorm $P(t) = b \cdot 2^{at}$.
- e Leg uit welk verband er bestaat tussen a en T .

jaar	aantal vaten ($\times 10^9$)
1950	1,0
1960	1,5
1965	1,8
1970	2,2
1975	2,7

- 6 Het gewicht van een zwangere vrouw neemt gedurende haar zwangerschap toe. Dit wordt voor een deel veroorzaakt door de gewichtstoename van de ongeboren baby en anderzijds door de eigen gewichtstoename. Bij benadering verloopt de gewichtstoename volgens de formule $G = 1450 \cdot 2^{0,1t-1,5}$.

Hierin is t de duur van de zwangerschap in weken en is G de gewichtstoename van de vrouw in grammen.

$t = 0$ komt overeen met het begin van de zwangerschap.

- a Een zwangerschap duurt gemiddeld 40 weken.
Bereken met hoeveel gram het gewicht van de vrouw halverwege deze periode is toegenomen.
- b Geef de formule voor de gewichtstoename waarbij de tijd in dagen wordt genomen.
- c Bereken na hoeveel weken het gewicht van de vrouw met 5 kg is toegenomen.
- d De gegeven formule is te herleiden tot de vorm $G = a \cdot g^t$.
Bereken de waarde van a en van g eerst exact en daarna in twee decimalen.



Een exponentiële functie $f(t) = g^{at+b}$ kun je schrijven als $f(t) = g^b \cdot (g^a)^t$ en dus ook als $f(t) = p \cdot q^t$ met $p = g^b$ en $q = g^a$.

- 7 Schrijf de volgende functievoorschriften in de vorm $f(t) = p \cdot q^t$.

- a $f(t) = 3^{-t+2}$ c $f(t) = 124 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-4t}$
- b $f(t) = 6^{3t-1}$ d $f(t) = \frac{4^{0,5t}}{2^{-3+t}}$

- 8 Van een exponentieel groeiproces is de verdubbelingstijd gelijk aan T uur. Het groeiproces voldoet aan de formule $N = 2^{at}$ met N het aantal en t de tijd in dagen.
Geef het verband tussen a en T weer in een formule.

1-2

Het getal e

- 9 Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$.
- a Maak op je rekenmachine tabellen van f en van de hellingfunctie van f .
- b Ga na dat de hellingfunctie zelf ook een exponentiële functie is met dezelfde groeifactor als f .
- c Ga na dat voor de hellingfunctie f' geldt:
 $f'(x) \approx 0,69 \cdot f(x) = 0,69 \cdot 2^x$.
- d Benader op dezelfde manier de functievoorschriften $g'(x)$ en $h'(x)$ in het geval $g(x) = 3^x$ en $h(x) = 0,7^x$.
- e Je hebt hierboven ontdekt dat voor de afgeleide van $f(x) = g^x$ geldt: $f'(x) = c_g \cdot g^x$. Hierin is c_g een constante die van het grondtal g afhangt.
 Bij welke grondtallen in deze opdracht is $c_g > 0$? En bij welke is $c_g < 0$?

- 10 Gegeven is de functie $f(x) = g^x$.
- a Toon aan dat het differentiequotiënt $\frac{f(x+0,001) - f(x)}{0,001}$ over het interval $[0; 0,001]$ te herleiden is tot $\frac{g^{0,001} - 1}{0,001} \cdot g^x$.
- b Neem tabel 1 over en geef steeds een benadering van de constante c_g in twee decimalen.
- c Vul ook tabel 2 in. Geef de waarde van g waarvoor geldt $c_g \approx 1$ in twee decimalen.
- d Wat betekent $c_g = 1$ voor de grafieken van f en f' ?

tabel 1

g	2	3	4	5	6	7
c_g	...	...	...	...	...	...

tabel 2

g	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2
c_g	...	...	...	...	...	...

Theorie

Voor de afgeleide van een exponentiële functie $f(x) = g^x$ geldt $f'(x) = c \cdot f(x)$ waarbij c een constante is. De constante c hangt af van het grondtal g en wordt daarom aangegeven met c_g .
 Er geldt $f'(x) = c_g \cdot g^x$ en $f'(0) = c_g \cdot g^0 = c_g$.
 Het grondtal van de exponentiële functie $f(x) = g^x$ waarvoor $c_g = 1$ wordt **e** genoemd en heet **het getal van Euler**.
 Er geldt: als $f(x) = e^x$ dan is $f'(x) = e^x$.

Voorbeeld

Geef de afgeleide van $f(x) = 2 \cdot 6^x$.

Oplossing

De afgeleide is $2 \cdot c_6 \cdot 6^x$ met

$$c_6 \approx \frac{6^{0,001} - 6^0}{0,001} \approx 1,79$$

$$\text{dus } f'(x) \approx 2 \cdot 1,79 \cdot 6^x = 3,58 \cdot 6^x.$$

- 11 Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot 0,4^x$.
 Bereken met behulp van $f'(x)$ de helling van de grafiek van f in het punt met $x = 2$.
 Rond je antwoord af op twee decimalen.

H 12 Differentieer de volgende functies.

- | | |
|----------------------------|--|
| a $f(x) = e^{3x}$ | d $f(x) = x^3 \cdot e^{x^2}$ |
| b $f(x) = e^{-2x}$ | e $f(x) = e^{\sin(2x)}$ |
| c $f(x) = e^{5-3x}$ | f $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$ |

Kettingregel:

$$f(x) = e^{3x-2}$$

$$f'(x) = e^{3x-2} \cdot 3 = \dots\dots\dots$$

13 Gegeven is de functie $f(x) = (2x + 4) \cdot e^{-x}$.

- a** Bereken exact de helling van de grafiek van f in het punt met $x = 0$.
- b** Bereken exact de extreme waarde van f .
- c** Plot en schets de grafiek van f . Geef het buigpunt aan in je schets.
- d** Bereken exact de coördinaten van het buigpunt.
- e** Stel op algebraïsche wijze een vergelijking van de raaklijn op aan de grafiek van f in het snijpunt met de y -as.

14 Onder bepaalde omstandigheden kan de luchtdruk p worden benaderd door de formule $p = 1000 \cdot e^{-0,14h}$ met p in hectopascal (hPa) en met h de hoogte in kilometers boven de zeespiegel. Een ballon bevindt zich op 1200 meter hoogte en stijgt met een snelheid van 1 meter per seconde.

- a** Neem de tijd t in seconden en druk h uit in t .
- b** Druk ook p uit in t .
- c** Bereken de snelheid in hPa per seconde waarmee de druk op de ballon afneemt, als deze op een hoogte van 1200 m is.

H 15 Los de volgende vergelijkingen exact op.

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| a $e^{3x-5} = e^2$ | d $e^{2x} - e^{x+2} = 0$ |
| b $2 - e^{2x} = 0$ | e $\frac{1}{e^{2x}} = e^{x+1}$ |
| c $(3x - 1)e^{x-1} = 0$ | f $\sqrt{e^{2x}} = e$ |

16 De grootte van een populatie fruitvliegjes wordt bij

benadering beschreven door de formule
$$N = \frac{75}{1 + 2 \cdot e^{-0,2t}}$$

waarbij t de tijd in dagen is.

- a** Met hoeveel vliegjes start de populatie op het tijdstip $t = 0$?
- b** Plot en schets de grafiek van N voor $0 \leq t \leq 15$.

c Geef de afgeleide $\frac{dN}{dt}$

d Met welke snelheid, uitgedrukt in vliegjes per dag, groeit de populatie op het tijdstip $t = 5$?

e Op welk tijdstip is de groeisnelheid maximaal?

- f** Tot het tijdstip dat je in opdracht e hebt berekend, groeit de populatie bij benadering exponentieel. Stel een exponentiële formule op voor de grootte van de populatie in deze periode.



1-3

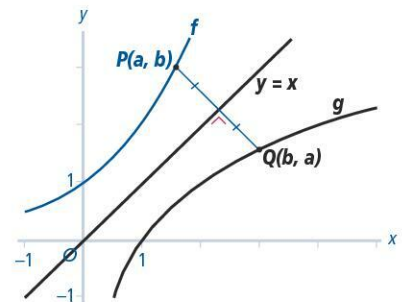
Natuurlijke logaritme

- 17a** Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = e^x$.
b Schets ook de beeldgrafiek van f na spiegeling in de lijn $y = x$.
c Het spiegelbeeld van de grafiek van f is de grafiek van een functie g . Geef de exacte coördinaten van drie punten op de grafiek van f en ook van het spiegelbeeld van elk van deze punten op de grafiek van g .
d Geef een vergelijking van elk van de asymptoten van de grafieken van f en g .
e Welk domein heeft de functie g ?

Theorie

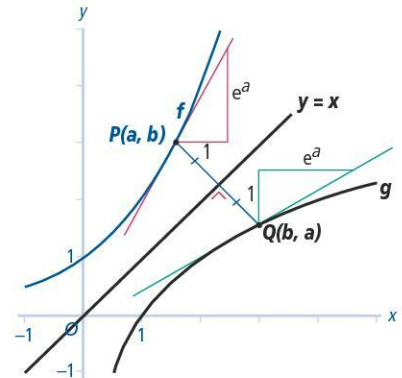
Het spiegelbeeld van de grafiek van $f(x) = e^x$ na spiegeling in de lijn $y = x$ is de grafiek van de logaritmische functie $g(x) = {}^e\log(x)$. Deze logaritme wordt de **natuurlijke logaritme** genoemd en wordt vaak afgekort tot **ln**. In plaats van ${}^e\log(x)$ schrijf je meestal $\ln(x)$.

Als je in de eerder gevonden regel $g^{e\log(x)} = x$ het grondtal g vervangt door het getal e krijg je $e^{\ln(x)} = x$.



- 18** Je gaat nu op zoek naar de afgeleide van $g(x) = \ln(x)$. Hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = e^x$ met de raaklijn aan de grafiek in het punt $P(a, b)$. Uit de tekening lees je af dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan e^a .
a Laat zien dat deze richtingscoëfficiënt in overeenstemming is met de afgeleide waarde van f in het punt P .
b Je ziet ook de grafiek van $g(x) = \ln(x)$.

Leg uit waarom geldt $g'(b) = \frac{1}{e^a}$



- c** Waarom is $e^a = b$?
d Wat volgt uit de opdrachten b en c voor het functievoorschrift van de afgeleide van $g(x) = \ln(x)$?

Theorie

Als $f(x) = \ln(x)$ dan is $f'(x) = \frac{1}{x}$

Voorbeeld

Differentieer
 $f(x) = 3 \ln(x + 2) - 5$.

Oplossing

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{3}{x+2}$$

- 19** Gegeven is de functie $g(x) = 4\ln(x) - 3$.
a Bereken $g'(2)$ exact.
b Bereken exact de coördinaten van het punt waarin de helling van de grafiek van g gelijk is aan $\frac{1}{2}$.

H 20 Differentieer de volgende functies.

- a** $f(x) = 2 - 5\ln(x)$ **e** $l(x) = \ln^2(x)$
b $g(x) = \ln(7x)$ **f** $m(x) = \ln(x^2)$
c $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ **g** $n(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$
d $k(x) = x \cdot \ln(x)$ **h** $p(x) = \ln(\ln(x))$

$\ln^2(x)$ is een andere schrijfwijze voor $(\ln(x))^2$.

21 Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(kx)$ en $g(x) = \ln(x)$ met $k \neq 0$.

- a** Toon aan dat de functievoorschriften van $f'(x)$ en $g'(x)$ hetzelfde zijn.
b Leg met behulp van de functievoorschriften $f(x) = \ln(kx)$ en $g(x) = \ln(x)$ uit waarom $f'(x)$ en $g'(x)$ hetzelfde zijn.

H 22 Los de volgende vergelijkingen exact op.

- a** $7 - 2\ln(x + 4) = 1$ **c** $\ln^2(x) - 4\ln(x) = 0$
b $\ln^2(5x - 2) = 9$ **d** $\ln(\ln(x)) = 2$

23 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{\ln(x)}{2 - \ln(x)}$

- a** Geef het domein van f .
b Voor welke waarden van x geldt $f(x) > 0$?
c Bereken exact de waarden van $f(e^{-5})$, $f(e^{-20})$ en $f(e^{-1000})$. Wat volgt uit deze uitkomsten voor de grafiek van f ?
d Geef de asymptoten van de grafiek van f .
e Beredeneer met behulp van $f'(x)$ dat f geen extreme waarden heeft.

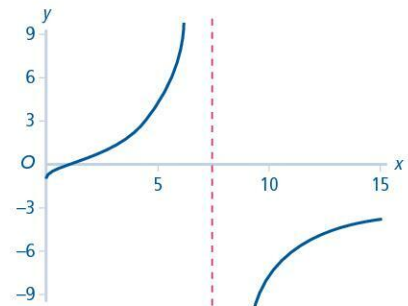
24 Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

- a** Bereken de x -coördinaat van de punten op de grafiek van f waar de helling $\frac{1}{2}$ is.
b In welk punt van de grafiek van f is de helling maximaal?

Met behulp van de rekenregel ${}^a\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$ kun je de functie $f(x) = {}^a\log(x)$ schrijven als een breuk met in de teller en noemer een natuurlijke logaritme: $f(x) = \frac{{}^e\log(x)}{{}^e\log(g)} = \frac{\ln(x)}{\ln(g)}$

25 Schrijf de volgende functies als een breuk met natuurlijke logaritmen in teller en noemer.

- a** $g(x) = \log(x^2 + 1)$
b $h(x) = {}^4\log\left(\frac{2}{x}\right)$



Voorbeeld

Schrijf de functie $f(x) = {}^5\log(x + 1)$ als een breuk met natuurlijke logaritmen in de teller en de noemer.

Oplossing

$$f(x) = \frac{\ln(x + 1)}{\ln(5)}$$

1-4

Afgeleide functies

- 26 De functie $f(x) = {}^2\log x$ kun je schrijven als $f(x) = \frac{{}^e\log(x)}{{}^e\log(2)} = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$

Stel een functievoorschrift op voor f' .

Theorie

De functie $f(x) = {}^g\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x)$ heeft als afgeleide de functie $f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$

- H 27 Differentieer de volgende functies.

- a $f(x) = {}^6\log(x)$
- b $f(x) = {}^2\log(x^2 + 1)$
- c $f(x) = {}^5\log(2x - 4)$
- d $f(x) = {}^3\log\left(\frac{2}{x}\right)$

- 28 Hiernaast staan de grafieken van de functies $f(x) = {}^2\log(5 - x)$ en $g(x) = 2 - {}^2\log(x)$.

- a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten A en B.
- b De grafieken van f en g worden tussen de punten A en B gesneden door de verticale lijn $x = p$. Deze lijn snijdt de grafiek van f in het punt $C(p, f(p))$ en de grafiek van g in het punt $D(p, g(p))$.
Druk de lengte van het lijnstuk CD uit in p .
- c Bereken exact voor welke waarde van p de lengte van het lijnstuk CD maximaal is.

- 29 Om de functie $f(x) = 3^x$ in de vorm $f(x) = e^{ax}$ te schrijven is het nodig de vergelijking $e^a = 3$ op te lossen.

- a Wat is de exacte waarde van a ?
- b Toon met opdracht a aan dat $f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$.
- c Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x-1}$.
Schrijf het functievoorschrift als een macht van e en differentieer de functie.
- d Doe hetzelfde voor de functie $g(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Voorbeeld

Differentieer de functie $f(x) = {}^3\log(x + 2)$.

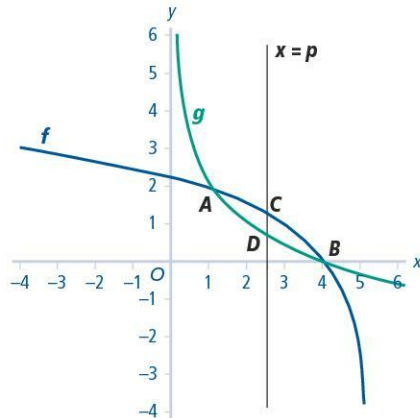
Oplossing

Je kunt schrijven

$$f(x) = \frac{\ln(x + 2)}{\ln(3)} = \frac{1}{\ln(3)} \cdot \ln(x + 2).$$

Hieruit volgt

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(3)} \cdot \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{(x + 2)\ln(3)}$$



Elke exponentiële functie $f(x) = g^x$ is als een exponentiële functie met grondtal e te schrijven: $f(x) = e^{\ln(g) \cdot x}$.

Daaruit volgt:

Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = e^{\ln(g) \cdot x} \cdot \ln(g) = \ln(g) \cdot g^x$.

Voorbeeld

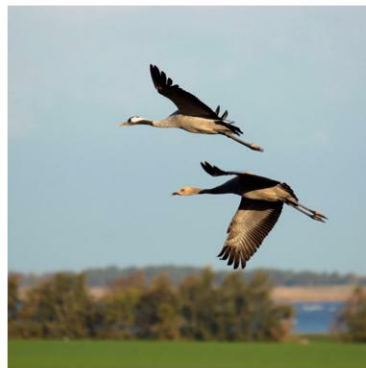
Geef de afgeleide van

$$f(x) = 3 \cdot 8^x.$$

Oplossing

$$f'(x) = 3 \cdot 8^x \cdot \ln(8)$$

- H 30** Geef de afgeleide van de volgende functies.
- | | |
|---|------------------------------------|
| a $f(x) = 4^x$ | d $j(x) = 2^{-3x}$ |
| b $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$ | e $k(x) = 3 \cdot 4^{2x+1}$ |
| c $h(x) = 7 \cdot 0,45^x$ | f $m(x) = x \cdot 5^x$ |
- H 31** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 \cdot 4^x$.
- a** Geef de afgeleide functie van f .
- b** Bereken exact de x -coördinaten van de toppen van de grafiek van f .
- 32** Ieder levend organisme bevat een kleine hoeveelheid van de radioactieve isotoop C_{14} . Na de dood van het organisme daalt de hoeveelheid C_{14} met 0,012% per jaar.
- a** Welke groeifactor per jaar hoort bij een afname van 0,012% per jaar?
- b** Een organisme bevat op het tijdstip van sterven 0,14 milligram C_{14} . Geef een formule waarmee je de hoeveelheid C_{14} na t jaar kunt berekenen.
- c** Bereken de snelheid in mg/jaar waarmee de hoeveelheid C_{14} afneemt na 50 jaar.
- d** Een fossiel van een vis bevat 2% van de hoeveelheid C_{14} die een levende vis bevat. Hoe oud is dit fossiel?
- 33** Een klein wildreservaat bevat een aantal nesten van kraanvogels. Er is maar voor een beperkt aantal vogels plaats in het reservaat. Onderzoekers hebben op basis van regelmatige tellingen een formule ontwikkeld die de groei van de populatie goed benadert. Die formule luidt:
- $$Q = \frac{330}{1 + 10 \cdot e^{-0,3818t}}$$
- met t in jaren en Q het aantal vogels.
- a** Plot de grafiek van Q en beredeneer dat het aantal kraanvogels tussen 30 en 330 zal liggen.
- b** Bereken na hoeveel jaar er 110 kraanvogels zijn.
- c** Toon aan dat geldt: $\frac{dQ}{dt} = \frac{1259,94 \cdot e^{-0,3818t}}{(1 + 10 \cdot e^{-0,3818t})^2}$
- d** Hoe kun je aan $\frac{dQ}{dt}$ zien dat de grafiek van Q overal stijgt?
- e** Het aantal kraanvogels is eerst toenemend stijgend en vervolgens afnemend stijgend met 330 als bovengrens. Het buigpunt van de grafiek lijkt te liggen bij 115 vogels. Onderzoek of dat inderdaad het geval is.



1-5

Primitieven

- 34** Gegeven zijn de functies $f_a(x) = e^{ax}$.
- Toon aan dat $F_a(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + C$ primitieve functies zijn van f_a .
 - Welke waarde heeft a als $f_a(x) = 2^{3x}$?
 - Geef een primitieve van $f_a(x) = 2^x$.
- 35** Gegeven is de functie $h(x) = \ln|x|$.
- Schrijf het functievoorschrift van h zonder absolute waarde-strepen.
 - Stel het functievoorschrift $h'(x)$ op voor $x > 0$.
 - Stel het functievoorschrift $h'(x)$ op voor $x < 0$.

Theorie

De primitieven van de functie $f(x) = e^x$ zijn de functies $F(x) = e^x + C$.

De primitieven van $f(x) = g^x$ zijn de functies

$$F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x + C.$$

De afgeleide van $h(x) = \ln|x|$ is $h'(x) = \frac{1}{x}$

De primitieven van $f(x) = \frac{1}{x}$ zijn de functies $F(x) = \ln|x| + C$.

Voorbeeld

Primitiveer de functies

$$f(x) = 8^x \text{ en } g(x) = \frac{8}{x}$$

Oplossing

De primitieven van f zijn de functies

$$F(x) = \frac{1}{\ln(8)} \cdot 8^x + C.$$

De functie g kun je schrijven als

$$g(x) = 8 \cdot \frac{1}{x}$$

De primitieven van g zijn de functies

$$G(x) = 8 \cdot \ln|x| + C.$$

- 36a** Differentieer de functies $f(x) = \ln(3x)$ en $g(x) = \ln(-5x)$.

- b** Beredeneer dat de primitieven van $f(x) = \frac{1}{x}$ de functies

$$F(x) = \ln|ax| + C \text{ zijn met } C \text{ een constante.}$$

-  **c** Waarom is de uitkomst van opdracht b niet in strijd met de theorie hierboven?

-  **37** Geef een primitieve van de volgende functies:

a $f(x) = 10^x$

d $k(x) = 12 \cdot 5^{7x}$

b $g(x) = \frac{-4}{x}$

e $l(x) = \frac{1}{3x^2}$

c $h(x) = \frac{3}{5x}$

f $m(x) = \frac{5}{2x-3}$

H 38 Geef een primitieve van de volgende functies.

- a** $f(x) = e^{-3x+5}$ **d** $f(x) = e^{2x}(1 - e^{-2x})$
b $f(x) = e^{\ln(x)}$ **e** $f(x) = 3^{2x-1} + x^3$
c $f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 4x}{2x^2}$ **f** $f(x) = \frac{3}{e^{x-4}}$

Is G een gebied ingesloten door de grafiek van een functie f , de grafiek van een functie g en de lijnen $x = a$ en $x = b$ ($a < b$) en ligt de grafiek van f boven die van g dan is de oppervlakte van G gelijk aan $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

39 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{8}{x+4}$

Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat ingesloten wordt door de x -as, de y -as, de grafiek van f en de lijn $x = 3$.

40 Gegeven is de functie $f(x) = 2e^{0,5x}$.

- a** Plot en schets de grafiek van f .
b A_p is de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = 0$ en $x = p$. Kies $p = 1$ en schets dit gebied in de figuur van opdracht a.
c Bereken de exacte waarde van A_1 .
d Bereken bij welke waarde van p de oppervlakte A_p gelijk is aan 16.
e Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de y -as, de grafiek van f en de lijn $y = 8$.

41 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{6x+13}{2x+5}$

Hiernaast zie je de grafiek van f .

- a** Laat zien dat het functievoorschrift van f te herleiden is tot

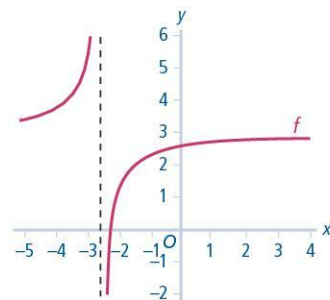
$$f(x) = 3 - \frac{2}{2x+5}$$

- b** De grafiek van f , de x -as en de y -as sluiten een gebied G in. Bereken exact de oppervlakte van G .

42 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$

- a** Plot en schets de grafiek van f .
b Toon aan dat de functie $F(x) = \ln^2(x)$ een primitieve is van f .
c Bereken exact $\int_1^e f(x)dx$.

- d** Onderzoek welke functie een primitieve is van $g(x) = \frac{\ln^5(x)}{x}$

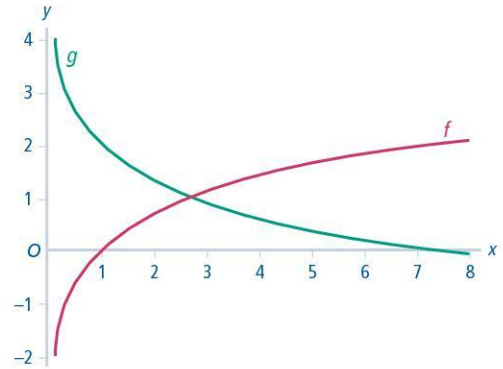


1-6

Gemengde opdrachten

43 Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x)$.

- a Rutger beweert dat de functie $h(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x)$ een primitieve van f is. Toon met differentiëren van h aan dat dit niet juist is.
- b Toon aan dat $F(x) = x \cdot \ln(x) - x$ wel een primitieve van f is.
- c In de figuur hiernaast zie je de grafieken van f en $g(x) = 2 - \ln(x)$. De grafieken van f en g sluiten met de x -as een gebied in. Bereken exact de oppervlakte van dit gebied.



44 Gegeven is de familie van functies

$$f_p(x) = 2p \ln(x) - 3x^2 \quad \text{met } p > 0.$$

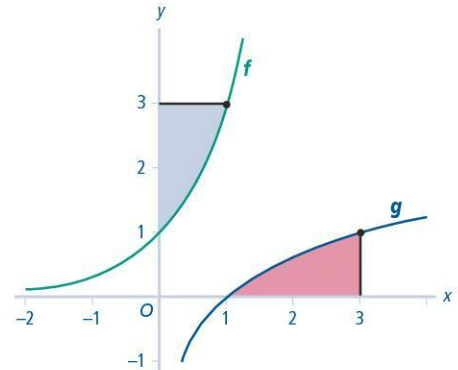
Verder is gegeven de functie $g(x) = -3x^2$.

- a Toon aan dat voor elke positieve waarde van p geldt: de grafiek van f_p snijdt de grafiek van g in het punt $(1, -3)$.
- b Bereken de helling van de raaklijn aan de grafiek van g in het punt $(1, -3)$.
- c In de situatie dat de raaklijnen aan de grafieken van f_p en g in het punt $(1, -3)$ loodrecht op elkaar staan geldt: $f'_p(1) \cdot g'(1) = -1$. Er is een waarde van p waarvoor dit het geval is. Bereken deze waarde van p .
- d Voor welke waarde van p ligt de top van de grafiek van f_p op de x -as?

45 Hiernaast zijn de grafieken getekend van de functies $f(x) = 3^x$ en $g(x) = {}^3\log(x)$.

- a Bereken de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = 1$.
- b Bereken de oppervlakte van het blauwe gebied.
- c Leg uit waarom de oppervlakte van het blauwe gebied en de oppervlakte van het rode gebied gelijk zijn.
- d Het vinden van een primitieve van g is in dit hoofdstuk niet behandeld.

Bereken op de manier van de opdrachten a, b en c exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van $h(x) = {}^2\log(x)$, de x -as en de lijn $x = 8$.



- 46** Tijdens een blikseminslag wordt het verloop van de stroomsterkte door een bliksemafleider gemeten. Dit verloop wordt redelijk benaderd door de formule $I = (4t - 3t^2) \cdot e^{-2t}$. Hierin is t de tijd in milliseconden en is I de stroomsterkte in mega-ampère.

De inslag duurt 0,8 milliseconden.

- a** Bereken exact de waarde van t waarvoor de stroomsterkte maximaal is.
- b** Hoe groot is de maximale stroomsterkte?
- c** Toon aan dat de functie $J(t) = \frac{1}{4} e^{-2t} (6t^2 - 2t - 1)$ een primitieve van I is.
- d** De hoeveelheid elektrische lading, uitgedrukt in coulomb, die gedurende de inslag door de bliksemafleider is gegaan,

is te berekenen met behulp van een integraal $\int I(t) dt$.

Stel deze integraal op en bereken de hoeveelheid lading die door de bliksemafleider is gegaan.

- 47** De grootte van de wereldbevolking voldoet bij benadering

aan het groeimodel: $W = \frac{L}{1 + (L - 1) \cdot g^t}$

Hierbij is:

W de wereldbevolking in miljarden;

t het aantal jaren na 1804;

g een constante met $0 < g < 1$ en

L de grenswaarde van de wereldbevolking in miljarden, dat is de waarde waar W op den duur naar toe zal groeien.

- a** Bereken de grootte van de wereldbevolking in 1804.
- b** Stel dat de grenswaarde van de wereldbevolking gelijk is aan 10 miljard. Bekend is dat in 1927 de wereldbevolking bestond uit 2 miljard mensen. Toon langs algebraïsche weg aan dat voor deze periode geldt: $g \approx 0,9934$.

Op een gegeven moment is de grootte van de wereldbevolking 4 miljard.

De groeisnelheid $\frac{dW}{dt}$ van de wereldbevolking is het grootst als

$$t = {}^g \log \left(\frac{1}{L - 1} \right).$$

- c** Toon aan dat voor die waarde van t geldt: $\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{4} L \cdot \ln(g)$.

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B1,2 2001, tijdvak 1)



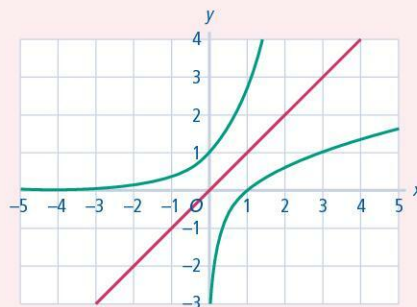
Samenvatting

Het getal e

Als $f(x) = e^x$ dan is $f'(x) = e^x$.

Het getal e is het getal van Euler en $e \approx 2,71828$.

De functie $f(x) = {}^e\log(x)$ schrijf je als $f(x) = \ln(x)$, de natuurlijke logaritme.



De grafieken van $y = e^x$ en $y = \ln(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

Een ander grondtal

Uit $a = g^{{}^g\log(a)}$ volgt $g = e^{\ln(g)}$ en dus $y = g^x = e^{x \ln(g)}$.

De laatste regel gebruik je om exponentiële functies met grondtal g te schrijven als functies met grondtal e.

$$\text{Ook is } y = {}^g\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)}$$

Deze regel gebruik je om logaritmische functies met grondtal g te herschrijven als functies met grondtal e.

Afgeleide functies

De afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies zijn:

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

$$h(x) = g^x \quad h'(x) = g^x \cdot \ln(g)$$

$$g(x) = \ln(x) \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$k(x) = {}^g\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} \quad k'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$$

Primitieven

De volgende primitieven gebruik je bij exponentiële en logaritmische functies:

$$f(x) = e^x \quad F(x) = e^x + C$$

$$h(x) = g^x \quad H(x) = \frac{g^x}{\ln(g)} + C$$

$$k(x) = \frac{1}{x} \quad K(x) = \ln|x| + C$$

Je kunt exponentiële en logaritmische functies differentiëren

Maak gebruik van de regels voor afgeleiden en pas zo nodig ook de kettingregel, de productregel en de quotiëntregel toe.

Voorbeeld 1

Differentieer $f(x) = 2e^{3x} \cdot 0,7^x$.

Oplossing

$$f'(x) = 2e^{3x} \cdot 3 \cdot 0,7^x + 2e^{3x} \cdot 0,7^x \cdot \ln(0,7)$$

Voorbeeld 2

Differentieer $g(x) = 2\log(7 - 3x) - x$.

Oplossing

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{7-3x} \cdot -3 \cdot \frac{1}{\ln(2)} - 1 \\ &= \frac{-3}{(7-3x) \cdot \ln(2)} - 1 \end{aligned}$$

Je kunt natuurlijke logaritmen en machten van e toepassen bij het primitiveren en berekenen van oppervlakten

Gebruik de regels voor het primitiveren van de vorige bladzijde en houd altijd rekening met de kettingregel.

Voorbeeld 1

Primitiveer de functies $f(x) = 6 \cdot 2^x + 1$ en $g(x) = -3e^{9-4x}$.

Oplossing

$$F(x) = 6 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{\ln(2)} + x + C$$

$$G(x) = -3e^{9-4x} \cdot -\frac{1}{4} + C = \frac{3}{4}e^{9-4x} + C$$

Voorbeeld 2

Geef een primitieve van $f(x) = \frac{6}{2x-1}$

Oplossing

Een primitieve is van de vorm

$$F(x) = k \cdot \ln|2x-1|.$$

$$F'(x) = k \cdot \frac{1}{2x-1} \cdot 2 = \frac{2k}{2x-1}$$

Uit $F'(x) = f(x)$ volgt $2k = 6$, dus $k = 3$.

$$F(x) = 3 \ln|2x-1|$$

Voorbeeld

Bereken de exacte oppervlakte van het gebied begrensd door de

grafiek van $f(x) = \frac{2}{3x+6}$, de lijnen $x = -1$ en $x = 1$ en de x-as.

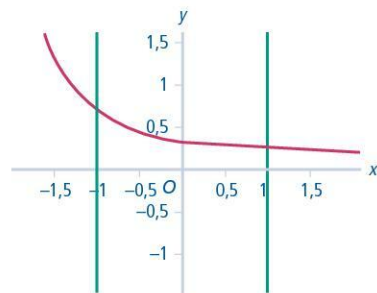
Oplossing

Probeer als primitieve $g(x) = k \cdot \ln|3x+6|$.

Dan is $g'(x) = \frac{3k}{3x+6}$ en dit is de primitieve van g als $3k = 2$.

Dit geeft $k = \frac{2}{3}$, dus $F(x) = \frac{2}{3} \cdot \ln|3x+6|$ is een primitieve van f .

De exacte oppervlakte is $\int_{-1}^1 \frac{2}{3x+6} dx = \left[\frac{2}{3} \cdot \ln|3x+6| \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \ln(9) - \frac{2}{3} \ln(3) = \frac{2}{3} \ln(3)$.



Test jezelf

T-1 De formule $B = 60 \cdot 1,169^t$ beschrijft de groei van een bevolking. Hierbij is t de tijd in perioden van 10 jaar; $t = 0$ komt overeen met 1 januari 1980.

B is de grootte van de bevolking in miljoenen.

a Schrijf de formule met grondtal 2.

b Benader de verdubbelingstijd in één decimaal nauwkeurig.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-1.

T-2 Differentieer.

a $f(x) = e^{0,5x+3}$

c $h(x) = \frac{3e^{2x}}{x}$

b $g(x) = x^3 \cdot e^{-x+3}$

d $k(x) = e^x \cdot e^{2x+1}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-2.

T-3 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = \ln(-2x)$

d $k(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(2 - 3x)$

b $g(x) = \ln(6 - 2x)$

e $l(x) = e^{-2x} \cdot (\ln(x))^2$

c $h(x) = (\ln(x) - 1)(\ln(x) - 2)$

f $m(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-3.

T-4 Differentieer de volgende functies.

a $h(x) = 3 \cdot 2^x$

d $k(x) = (\sqrt{5})^x$

b $g(x) = 3x - 2^{-x}$

e $l(x) = {}^3\log(3x^2)$

c $f(x) = 3^{1-2x}$

f $m(x) = x^2 \cdot {}^5\log(2x)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-4.

T-5 Primitiveer de volgende functies.

a $f(x) = e^{2x+1}$

d $k(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{x-1}$

b $g(x) = 3^{1-x}$

e $l(x) = \frac{3}{4x-9}$

c $h(x) = 1 - 2 \cdot 3^{-2x}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-5.

T-6 Los exact op.

a $e^{x^2} - e^{2x} = 0$

c $2\ln(2 - 4x) - 5 = 1$

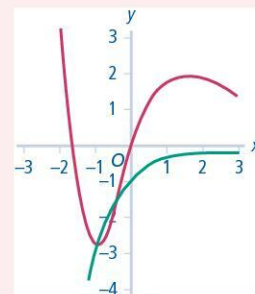
b $\frac{2 - e^{0,5x}}{e} = 1$

d $\frac{\ln^2(x)}{2 - \ln(x)} = 1$

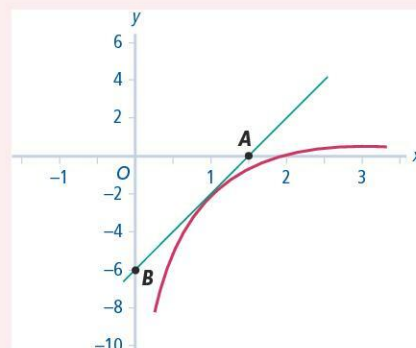
- T-7** Een satelliet gebruikt voor de energievoorziening onder andere een radioactieve brandstof. Van de energievoorziening neemt daardoor het vermogen P af volgens de formule $P = 40 \cdot e^{-0,006t}$, met P in watt en t in dagen.
- Bereken de groeifactor van het vermogen per dag.
 - Na hoeveel dagen is het vermogen gehalveerd?
 - Bereken de snelheid waarmee het vermogen afneemt na 100 dagen.



- T-8** De rode grafiek hiernaast hoort bij de functie $f(x) = (2x^2 + 3x)e^{-x}$.
- Bereken exact de nulpunten van f .
 - Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide van f .
 - Geef een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(0, 0)$.
 - Bereken exact de extreme waarden van f .
 - De groene grafiek hoort bij de functie $g(x) = -e^{-x}$. Bereken de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g . Rond je antwoord af op twee decimalen.



- T-9** Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = -2x + 6\ln(x)$.
- Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van f .
 - Bereken de coördinaten van het punt op de grafiek waarin de helling gelijk is aan 18.
 - De raaklijn aan de grafiek in het punt met x -coördinaat 1 snijdt de x -as in punt A en de y -as in punt B . Bereken de oppervlakte van driehoek OAB .



- T-10** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2 + 2\ln(x)}{x}$
- Bereken exact het nulpunt van f .
 - Geef een vergelijking van elk van de asymptoten van de grafiek van f .
 - Bereken exact de extreme waarde van f .
 - Toon aan dat $F(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x)$ een primitieve van f is.
 - Voor $p > 1$ is A_p de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = p$. Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte A_p gelijk is aan 15.

Extra oefening - Basis

B-1 Schrijf de volgende functievoorschriften in de vorm $f(x) = a \cdot 10^{bx}$.

- a** $f(x) = 3^{2+x}$
b $f(x) = 4 \cdot 0,1^{2x-3}$
c $f(x) = -32 \cdot 5^{3-6x}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-1.

B-2 Differentieer.

- a** $f(x) = e^{-3x+2}$ **c** $h(x) = x \cdot 4e^{1-x}$
b $g(x) = \frac{5x-2}{e^{0,2x}}$ **d** $k(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{x^3}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-2.

B-3 Differentieer de volgende functies.

- a** $f(x) = \ln(8x+3)$ **c** $h(x) = x^3 \ln(x)$
b $g(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ **d** $k(x) = \ln^2(x) - 4 \ln(x) + 5$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-3.

B-4 Bereken exact de helling van de grafiek in het punt met $x = 1$ van de volgende functies.

- a** $f(x) = x \cdot 7^{2x}$
b $g(x) = {}^3\log(4x-1)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-4.

B-5 De grafiek van de functie $f(x) = 4 - e^{2x}$ sluit met de x -as en de y -as een gebied G in.

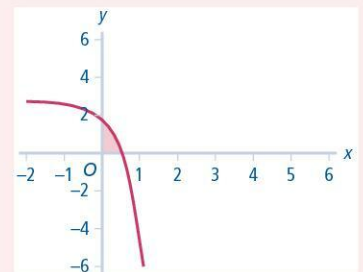
Bereken exact de oppervlakte van G .

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-5.

B-6 Geef een primitieve van de volgende functies.

- a** $f(x) = -3 \cdot 0,7^{x+1} + x$ **d** $k(x) = \frac{4}{7x}$
b $g(x) = 2 - 11 \cdot e^{2-x}$
c $h(x) = e^{2x} - 2x^e$ **e** $l(x) = \frac{5}{x+5} + \frac{x+5}{5}$
f $m(x) = \frac{4}{3 - 0,2x}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-5.

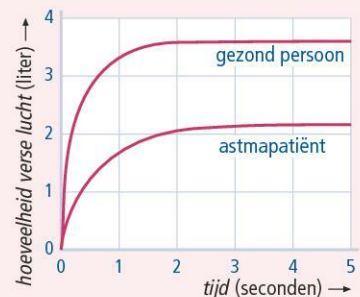


Extra oefening - Gemengd

- G-1** Gegeven is de functie $f(x) = 4x \cdot e^x$.
- a** Plot en schets de grafiek van f .
 - b** Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $O(0, 0)$.
 - c** Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van f .
 - d** Toon aan dat $F(x) = (4x - 4) \cdot e^x$ een primitieve van f is.
 - e** Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat ingesloten wordt door de x -as, de grafiek van f en de lijn $x = -3$.
 - f** De grafiek van f heeft twee snijpunten met de lijn $y = x$. Bereken exact de coördinaten van deze snijpunten.

- G-2** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3\ln(x) - 3}{x}$.
- a** Plot en schets de grafiek van f .
 - b** Bereken exact de x -coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
 - c** Bereken exact de extreme waarde van f .
 - d** Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f .

- G-3** Tijdens het inademen is de hoeveelheid verse lucht in de longen een functie van de tijd. Voor gezonde mensen gebruiken we het volgende model: $L = 3,6(1 - e^{-2,5t})$. Hierbij is L de hoeveelheid verse lucht in liters en t de tijd in seconden ($0 \leq t \leq 5$). De maximale hoeveelheid verse lucht in de longen van gezonde mensen is volgens dit model ongeveer 3,6 liter.
- a** Bereken na hoeveel seconden 90% van deze maximale hoeveelheid verse lucht is ingeademd.



Astma is een aandoening aan de luchtwegen. Bij astmapatiënten is de maximale hoeveelheid verse lucht in de longen kleiner en duurt het langer voordat dit maximum bereikt wordt. Voor astmapatiënten wordt het model $L_\alpha = \alpha \cdot 3,6(1 - e^{-2,5\alpha t})$ gebruikt.

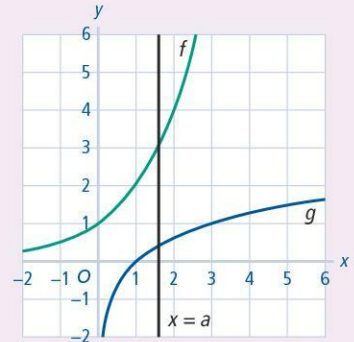
Hierbij is α een constante tussen 0 en 1 die afhankelijk is van de ernst van de astma.

De snelheid waarmee de hoeveelheid verse lucht toeneemt, is maximaal op het tijdstip $t = 0$.

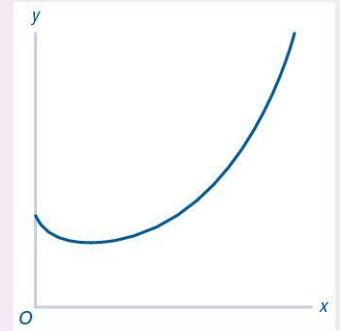
- b** Bereken voor welke waarde van α deze maximale snelheid gelijk is aan 4,5 liter per seconde.
(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B1,2 2005, tijdvak 1)

Uitdagende opdrachten

- U-1** Hiernaast zie je de grafieken van $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^3\log(x)$.
De lijn $x = a$ snijdt de grafieken van f en g respectievelijk in de punten A en B , waarbij A boven B ligt.
- Bereken met behulp van differentiëren bij welke waarde van a de lengte van lijnstuk AB minimaal is.
 - De lijn $y = b$ snijdt de grafieken van f en g respectievelijk in de punten C en D , waarbij D rechts van C ligt. Bereken met behulp van differentiëren bij welke waarde van b de lengte van lijnstuk CD minimaal is.



- U-2** De grafiek hiernaast hoort bij de functie $f(x) = x^x$.
- Bereken exact de coördinaten van de top.
Hint: schrijf $f(x) = x^x$ als $f(x) = e^{x \ln(x)}$.
 - Het domein van de functie is $\langle 0, \rightarrow \rangle$. Je ziet in de grafiek dat $f(x)$ niet naar 0 nadert als x naar 0 nadert. Onderzoek met je rekenmachine naar welke waarde $f(x)$ wel nadert als x naar 0 nadert.



- U-3** De primitieve van $f(x) = \ln(x)$ behoort niet tot de standaardprimitieven. Met wat gericht proberen kom je een heel eind om een primitieve van $f(x) = \ln(x)$ (maar ook van andere functies) te vinden.
- Schrijf $f(x) = \ln(x)$ als de productfunctie $f(x) = 1 \cdot \ln(x)$. De functie $u(x) = 1$ heeft als primitieve $U(x) = x$. Probeer als primitieve van f de functie $F(x) = x \ln(x)$. Laat zien dat $F'(x) = \ln(x) + 1$.
 - De afgeleide $F'(x) = \ln(x) + 1$ is niet gelijk aan $f(x) = \ln(x)$. Om het verschil '+1' weg te werken, trek je de primitieve van $v(x) = 1$ van $F(x) = x \ln(x)$ af. Toon aan dat $F(x) = x \ln(x) - x$ een primitieve is van $f(x) = \ln(x)$.
 - Een primitieve van de productfunctie $f(x) = 1 \cdot \ln(x)$ heb je hierboven gevonden door in eerste instantie slechts één factor te primitiveren om vervolgens te kijken of je met toevoeging van een term de primitieve kloppend kan krijgen. Zoek op deze manier een primitieve van $g(x) = 2x \cdot \ln(x)$.
 - De functie $h(x) = x \cdot e^x$ is het product van de twee functies $p(x) = x$ en $q(x) = e^x$, waarvan je beide een primitieve weet. Om de methode van hierboven te kunnen gebruiken heb je nu de keus welke factor je als eerste primeert. Geef een primitieve functie van $h(x) = x \cdot e^x$.

Hoe oud zijn historische vondsten?



In 1940 werd in een grot een groot aantal rotswandschilderingen ontdekt, één ervan zie je hierboven. Het is de rijkst beschilderde prehistorische grot die tot nu toe is ontdekt. De grot ligt bij de plaats Lascaux in het Franse departement Dordogne. Vlak na de vondst maakten archeologen een ruwe schatting dat de tekeningen 10 000 tot 20 000 jaar oud waren.

C¹⁴ dateringsmethode

Er was behoefte aan een methode waarmee de ouderdom van opgegraven voorwerpen en beenderen wordt bepaald. C¹⁴ is een radioactieve variant van koolstof, die ieder levend organisme bevat. Nadat het organisme is doodgegaan daalt de hoeveelheid C¹⁴ langzaam door radioactief verval. Na ongeveer 5730 jaar is er nog 50% van de oorspronkelijke hoeveelheid C¹⁴ over. De techniek werd in 1949 ontdekt door Willard Frank Libby en zijn collega's van de Universiteit van Chicago. In 1960 ontving Libby hiervoor de Nobelprijs voor de Scheikunde.

Opdracht

Je mag aannemen dat radioactief verval exponentieel verloopt. Gegeven is dat de halveringstijd 5730 jaar is. Uit $g^{5730} = \frac{1}{2}$ volgt dat de groefactor per jaar gelijk is aan $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}} \approx 0,99988$.

In 1950 is gemeten dat er nog circa 14,5% van de hoeveelheid C¹⁴ aanwezig was in houtskoollijnen van een van de tekeningen. Uit de vergelijking $0,99988^t = 0,145$ volgt $t = \frac{1}{0,99988} \log(0,145)$. Bereken hoe oud de tekening toen was.

Onbekende Da Vinci gevonden

Leonardo da Vinci (1452 - 1519) was een architect, uitvinder, filosoof, natuurkundige, anatomist, beeldhouwer, schrijver, schilder en componist uit Florence, Italië. In totaal worden vijftien schilderijen geheel of deels aan Da Vinci toegeschreven. Over zes werken zijn de meningen verdeeld.



In 2010 is in een Zwitserse bankkluis een schilderij (rechter afbeelding) opgedoken dat mogelijk door Leonardo da Vinci is gemaakt. Het is een portret van markiezin Isabella d'Este, die als begunstiger van de vrije kunsten een hoofdrolspeelster is in de Renaissance. In het Louvre hangt een tekening uit 1499 van deze dame (linker afbeelding) en er zijn brieven bekend waarin D'Este vraagt om een geschilderd portret.

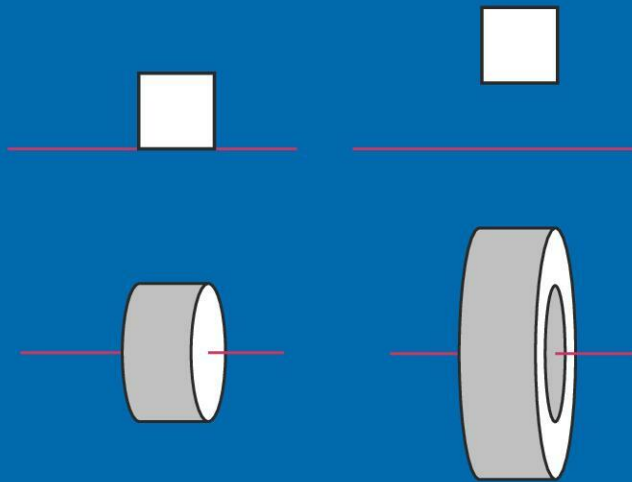
Heeft Da Vinci het portret geschilderd?

De argumenten vóór zijn: het gebruikte pigment is hetzelfde als dat in ander werk van Leonardo, precies volgens het recept dat Leonardo in zijn Traktaat van de schilderkunst voorschrijft. Toch is er twijfel. Het belangrijkste argument tegen: het is op doek. Al Leonardo's nog bekende werken zijn geschilderd op hout.

Opdracht

Er is gemeten dat aanwezige hoeveelheid C¹⁴ ligt tussen 93,56% en 95,73%.

- a Geef een datering van het schilderij.
- b Kan het schilderij toegeschreven worden aan Leonardo da Vinci?



Wentelen om een as

In de linker figuur staat een vierkant met zijde 1 op de x-as. Wentel je dat vierkant om de x-as, dan krijg je een cilinder. Schuif je het vierkant 1 omhoog en wentel je het dan om de x-as, dan krijg je een ring.

De inhoud van de ring is groter dan de inhoud van de cilinder.

Hoeveel keer zo groot?



Hoofdstuk 2

Toepassingen van integreren

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	36
2-1	Integraal en oppervlakte	38
2-2	Omwentelingslichamen	40
2-3	Wentelen om de y -as	42
2-4	Variabele grenzen	44
2-5	Gemengde opdrachten	46
	Samenvatting	48
	Test jezelf	50
	Extra oefening - Basis	52
	Extra oefening - Gemengd	53
	Uitdagende opdrachten	54
	Tonregel van Kepler	55



Voorkennis

V-1 Geef een primitieve van de volgende functies.

a $f(x) = x^3 - 3x$

b $g(x) = \sin(x) - 3\cos(x)$

c $h(x) = \frac{1}{2x}$

d $k(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

e $m(x) = 3^x + x^3$

V-2a Gegeven is de functie $f(x) = 2x\sqrt{x}$.
Schrijf het functievoorschrift in de vorm $f(x) = c \cdot x^p$ en geef een primitieve van f .

b Geef een primitieve van de functie $g(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$

V-3 Geef een primitieve van deze functies.

a $f(x) = e^{7x+1}$

b $f(x) = \cos(3x - 4)$

c $f(x) = \sqrt[5]{5x + 1}$

d $f(x) = \frac{1}{4x} + 4\sin(4x)$

e $f(x) = 3^{2x+1} + (3x + 1)^{-3}$

f $f(x) = \frac{1}{2x - 4}$

De hoofdstelling van de integraalrekening luidt:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ waarbij } F'(x) = f(x).$$

functie	primitieven
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
$f(x) = g^x$	$F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x + c$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$

Voorbeeld

Geef een primitieve van $f(x) = x\sqrt[3]{x}$.

Oplossing

$$f(x) = x \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$$

Een primitieve is

$$F(x) = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}x^{2\frac{1}{3}} = \frac{3}{7}x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}.$$

Voorbeeld

Geef een primitieve van $f(x) = \frac{3}{(2x - 4)^2}$

Oplossing

$$f(x) = 3(2x - 4)^{-2}$$

Kies $F(x) = a(2x - 4)^{-1}$.

$$F'(x) = -2a(2x - 4)^{-2}, \text{ dus } a = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Een primitieve is } F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x - 4} = -\frac{3}{4x - 8}$$

V-4 Bereken exact.

a $\int_1^e \frac{2}{x} dx$

b $\int_0^{\pi} 2 \sin(3x) dx$

c $\int_0^3 (x^3 - x^2) dx$

d $\int_0^{\pi} (\sin(2x) + \cos(x)) dx$

V-5 Bereken de volgende integralen in twee decimalen.

a $\int_0^1 4\sqrt{1-x^2} dx$

b $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) dx$

De functies f en g heten inverse functies van elkaar als voor elk getal a uit het domein van f en voor elk getal b uit het domein van g geldt: uit $f(a) = b$ volgt $g(b) = a$ (en omgekeerd). Voor de inverse van een functie f gebruik je de notatie f^{inv} . Als het punt (a, b) op de grafiek van f ligt, dan ligt het punt (b, a) op de grafiek van f^{inv} . De grafieken van f en f^{inv} zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

V-6 Geef van de volgende functies het functievoorschrift van de inverse functie.

a $f(x) = \frac{1}{x+1}$

b $f(x) = e^{2x+1}$

c $f(x) = \ln(x+3)$

d $f(x) = \sqrt{3x-2}$

Voorbeeld

Bereken exact $\int_1^4 e^{2x+1} dx$.

Oplossing

Een primitieve van $f(x) = e^{2x+1}$ is

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1}.$$

$$\int_1^4 e^{2x+1} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x+1} \right]_1^4 = \frac{1}{2} e^9 - \frac{1}{2} e^3$$

Met je rekenmachine kun je integralen benaderen. Bijvoorbeeld als er geen exact antwoord wordt gevraagd of als je van de integrand geen primitieve kunt opstellen.

Voorbeeld

Gegeven $f(x) = \ln(2x-1)$.

Geef een functievoorschrift van f^{inv} .

Oplossing

Bij f hoort de formule $y = \ln(2x-1)$.

Bij f^{inv} hoort de formule $x = \ln(2y-1)$.

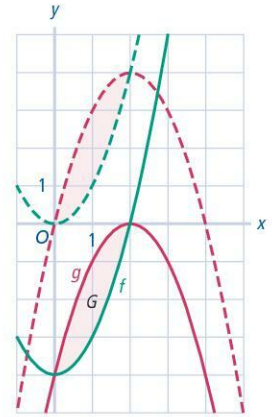
Hieruit volgt $2y-1 = e^x$, dus $y = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2}$

en $f^{inv}(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2}$.

2-1

Integraal en oppervlakte

- 1** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 4$ en $g(x) = -x^2 + 4x - 4$. De grafieken sluiten een gebied G in. Om de oppervlakte van G te berekenen, kun je de grafieken zo verschuiven, dat G boven de x -as komt te liggen.
- a** Schuif de grafieken 4 omhoog en geef functievoorschriften bij de nieuwe grafieken.
- b** Bereken de oppervlakte van G .
- c** Toon aan dat $\int_0^2 ((g(x) + 4) - (f(x) + 4)) dx = \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx$.

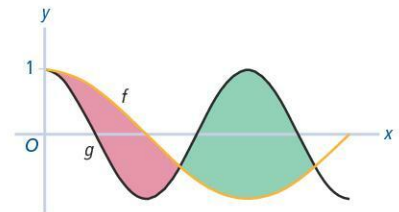


Bij het berekenen van de oppervlakte van een gebied dat is ingesloten door de grafieken van twee functies f en g , speelt alleen de onderlinge ligging van de grafieken een rol en niet de ligging ten opzichte van de x -as.

Zijn a en b de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g en ligt de grafiek van f boven de grafiek van g , dan bereken je de oppervlakte met de integraal $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

Soms is het nodig een gebied in meerdere gebieden op te splitsen.

- H 2a** De grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = x^2 - 3\frac{1}{2}x$ snijden elkaar in de punten $(0, 0)$ en $(4, 2)$. Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g .
- b** Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van $h(x) = e^{2x}$, de y -as en de lijn $y = e^2$.
- 3** De grafieken van de functies $f(x) = \cos(x)$ en $g(x) = \cos(2x)$ sluiten op het interval $[0, 1\frac{1}{3}\pi]$ twee gebieden in.
- a** Bereken exact de oppervlakte van elk gebied.
- b** Bereken exact $\int_0^{1\frac{1}{3}\pi} (\cos(x) - \cos(2x)) dx$.
- c** Wat is het verband tussen deze uitkomst en de oppervlakten van de twee gebieden?
- 4** Bereken de oppervlakte van het gebied, ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$, de y -as en de lijn $y = 4$.



Voorbeeld

De grafieken van de functies $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$ en $h(x) = 1$ sluiten drie gebieden in.

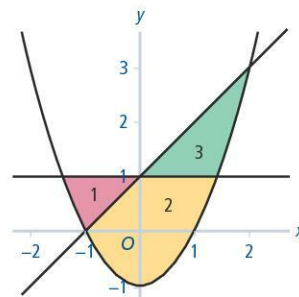
Bereken exact de oppervlakte van de gebieden 2 en 3 samen.

Oplossing

De grafieken van f en g snijden elkaar bij $x = -1$ en $x = 2$.

De oppervlakte is $\int_{-1}^2 ((x+1) - (x^2-1)) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx =$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^2 = 3\frac{1}{3} - -1\frac{1}{6} = 4\frac{1}{2}.$$

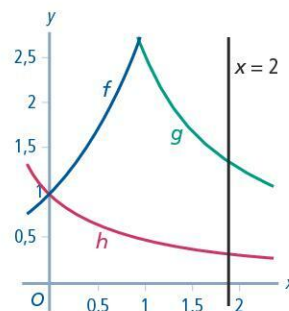


5 Kijk naar de figuur uit het voorbeeld hierboven en bereken exact:

- de oppervlakte van gebied 3.
- de oppervlakte van gebied 2 (maak gebruik van het resultaat uit het voorbeeld).
- de oppervlakte van gebied 1.

6 Gegeven zijn de functies $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{e}{x}$ en $h(x) = \frac{1}{x+1}$

- Bereken exact de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafieken van f , g en h en de lijn $x = 2$.
- Geef je antwoord ook in twee decimalen.



7 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$

- G is het gebied ingesloten door de grafieken van f en g en de lijn $x = 2$. H is het gebied ingesloten door de grafieken van f en g en de lijn $y = 2$. Onderzoek met een berekening of G en H een even grote oppervlakte hebben.
- Bereken de kleinste gehele waarde van a waarvoor de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafieken van f en g en de lijn $x = a$ ($a > 1$) groter dan 3 is.

8 Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x)$.

- Toon aan dat de functie $F(x) = x \ln(x) - x$ een primitieve van f is.
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied, ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = e^2$.
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied, ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = \frac{1}{e}$.

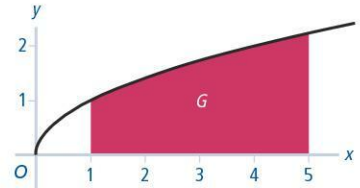
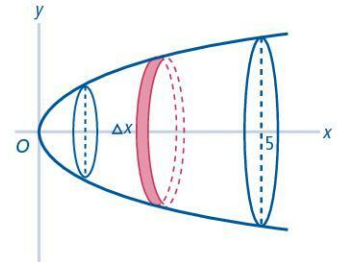
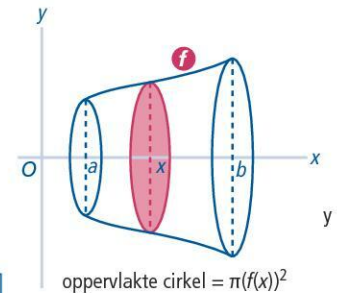
2-2

Omwentelingslichamen

- 9 In de figuur hiernaast is G het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ en de lijnen $x = 1$ en $x = 5$. Dit gebied wordt om de x -as gewenteld. Er ontstaat dan een ruimtelijke figuur.
- a Elk punt op de grafiek van f doorloopt bij deze omwenteling een cirkel.
Geef voor $x = 2$ de straal en de oppervlakte van deze cirkel.
- b Leg uit dat voor elke waarde van x de oppervlakte van de bijbehorende cirkel gelijk is aan $g(x) = \pi(f(x))^2$.
- c De inhoud van de ruimtelijke figuur kun je benaderen met de inhoud van cilinders met hoogte Δx .
De inhoud van zo'n cilinder is dan $\pi(f(x))^2 \cdot \Delta x$.
Als je Δx naar 0 laat naderen dan geeft de som van alle cilinders de exacte inhoud van de kegel.

Leg uit dat de exacte inhoud gelijk is aan $\int_1^5 \pi(f(x))^2 dx$.

- d Bereken exact de inhoud van de ruimtelijke figuur.



Theorie

Als je een gebied, ingesloten door de grafiek van een functie f , de x -as en de lijnen $x = a$ en $x = b$, om de x -as wentelt, ontstaat een **omwentelingslichaam**.

De inhoud van dit lichaam bereken je met de integraal

$$\int_a^b \pi(f(x))^2 dx \quad \text{of} \quad \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Voorbeeld

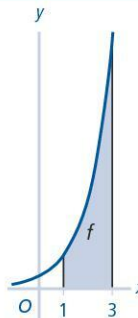
Het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = e^x$ en de lijnen $x = 1$ en $x = 3$ wordt gewenteld om de x -as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

Oplossing

$$\pi \int_1^3 (f(x))^2 dx = \pi \int_1^3 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_1^3 = \frac{1}{2} \pi (e^6 - e^2)$$

De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\frac{1}{2} \pi (e^6 - e^2).$$



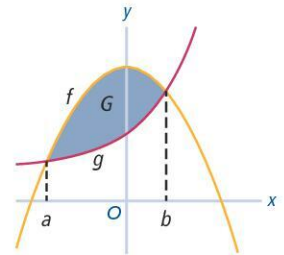
- H 10** Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied G te wentelen om de x -as. G is het gebied ingesloten door
- de grafiek van $h(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, de x -as en de lijnen $x = 0$ en $x = 3$.
 - de grafiek van $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$, de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = 6$.
 - de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{16x - x^3}$ voor $x \geq 0$ en de x -as.
- 11** De grafieken van $f(x) = 4x - x^2$ en $g(x) = x$ sluiten een gebied G in. Dit gebied wordt gewenteld om de x -as.
- Met welk van de integralen hiernaast kun je de inhoud van dit omwentelingslichaam berekenen?
 - Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

$$\pi \int_0^3 (f(x) - g(x))^2 dx$$

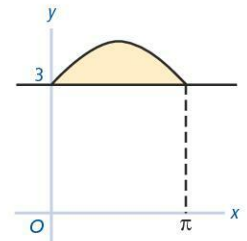
$$\pi \int_0^3 (f(x))^2 - (g(x))^2 dx$$

Een gebied G , dat geheel boven de x -as ligt, wordt ingesloten door de grafieken van de functies f en g , waarbij de grafiek van f boven de grafiek van g ligt. De inhoud van het lichaam dat ontstaat door G om de x -as te wentelen kun je berekenen met

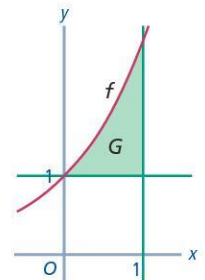
$\pi \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$ of met $\pi \int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \int_a^b (g(x))^2 dx$, waarin a en b de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn.



- H 12** Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied G te wentelen om de x -as. G is het gebied ingesloten door
- de grafiek van $f(x) = 2\sqrt{x}$ en de lijn $y = x$.
 - de grafiek van $g(x) = \frac{4}{x}$ en de lijn $y = 5 - x$.
- 13** Gegeven is de functie $g(x) = \sin(x) + 3$ op het interval $[0, \pi]$.
- Toon aan dat de functie $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)$ een primitieve is van $f(x) = \sin^2(x)$.
 - Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied ingesloten door de grafiek van g en de lijn $y = 3$ te wentelen om de x -as.



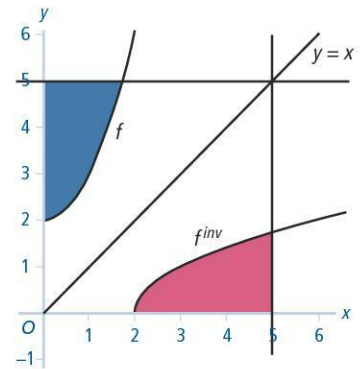
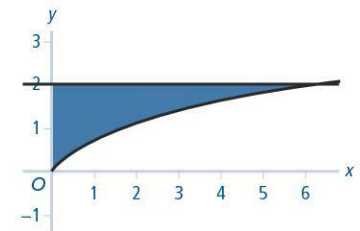
- H 14** Het gebied G wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = e^x$, de lijn $x = 1$ en de lijn $y = 1$. Het gebied wordt gewenteld om de lijn $y = 1$.
- Hoe moet je het gebied G verschuiven, zodat je om de x -as kunt wentelen?
 - Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.
 - Bereken ook exact de inhoud van het lichaam dat ontstaat door G om de x -as te wentelen.



2-3

Wentelen om de y-as

- 15** Gegeven zijn de functie $f(x) = x^2 + 2$ en de lijn $y = 5$. Als je het blauwe gebied om de y-as wentelt ontstaat er een omwentelingslichaam. Je kunt de inhoud hiervan berekenen door het gebied te spiegelen in de lijn $y = x$ en daarna het rode gebied te wentelen om de x-as. De inhoud van het nieuwe omwentelingslichaam bij wentelen om de x-as en het oorspronkelijke omwentelingslichaam zijn gelijk.
- a** Welke functie hoort bij het spiegelbeeld van de grafiek van f ?
b Stel de integraal op waarmee de inhoud van het omwentelingslichaam kunt berekenen.
c Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.
- 16** Door het gebied begrensd door de grafiek van $f(x) = \ln(x + 1)$, de y-as en de lijn $y = 2$ te wentelen om de y-as ontstaat een omwentelingslichaam L . Door de grafiek van f^{inv} te wentelen om de x-as ontstaat een omwentelingslichaam met een even grote inhoud als L .
- a** Geef het functievoorschrift van f^{inv} .
b Geef het interval waarover je f^{inv} integreert.
c Bereken de inhoud van L .



Aanpak

Hoe bereken je de inhoud van een omwentelingslichaam bij wentelen om de y-as?

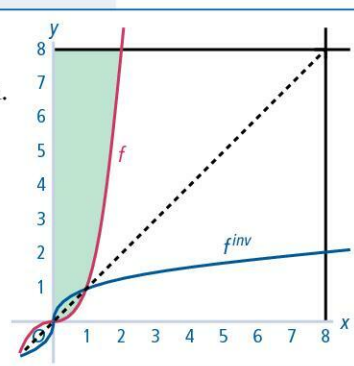
- 1 Stel het functievoorschrift van de inverse functie op.
- 2 Stel het interval waarover je integreert vast.
- 3 Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam bij wentelen van de inverse functie om de x-as.

Voorbeeld

Het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = x^3$, de y-as en de lijn $y = 8$ wordt gewenteld om de y-as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

Oplossing

- 1 $f^{inv}(x) = \sqrt[3]{x}$
- 2 Het integratie-interval is $[0, 8]$.
- 3 $\pi \int_0^8 (\sqrt[3]{x})^2 dx = \pi \int_0^8 x^{\frac{2}{3}} dx = \pi \left[\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right]_0^8 = 19\frac{1}{5}\pi$



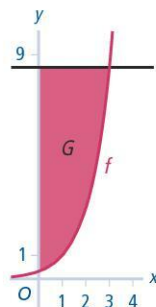
- 17a** G is het gebied ingesloten door de grafiek van de functie $h(x) = \sqrt{x-1}$, de x -as, de y -as en de lijn $y = 5$.

Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als G wordt gewenteld om de y -as.

- b** Het gebied ingesloten door de grafiek van de functie $k(x) = \ln(x)$, de x -as en de lijn $x = e$ wordt gewenteld om de y -as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

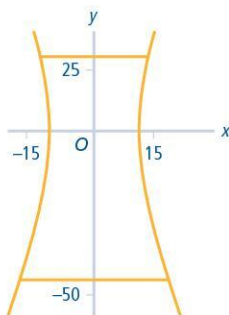
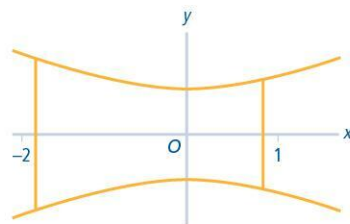
- 18** Gegeven is de functie $f(x) = 3^{x-1}$. Het gebied G wordt ingesloten door de grafiek van f , de y -as en de lijn $y = 9$.

- a** Bereken in twee decimalen de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als je G wentelt om de y -as.
b Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als je G wentelt om de x -as.



- 19** G is het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = x$ en $g(x) = x^2$. Onderzoek wanneer je het omwentelingslichaam met de grootste inhoud krijgt, bij wentelen van G om de x -as of bij wentelen van G om de y -as.

- 20** Een koeltoren bij een elektriciteitscentrale heeft de vorm van een *omwentelingshyperboloïde*. In het model (middelste figuur) is de vergelijking van de hyperbool $25x^2 - 4y^2 = 75^2$ met x en y in meters.



Om het rekenwerk te vereenvoudigen, werk je met een schaal 1 : 25.

De vergelijking van de hyperbool wordt dan $25x^2 - 4y^2 = 9$.

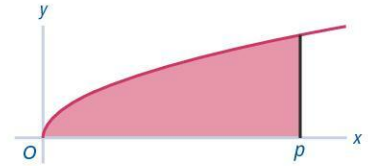
- a** Om de inhoud uit te rekenen spiegel je de hyperbool in de lijn $y = x$. Toon aan dat de bovenste tak van de hyperbool de grafiek is van de functie $f(x) = \frac{1}{5}\sqrt{4x^2 + 9}$.

- b** Bereken exact de inhoud van de koeltoren in m^3 .

2-4

Variabele grenzen

- 21** A_p is de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$, de x -as en de lijn $x = p$ met $p > 0$.
- a** Geef een formule waarmee je A_p uitdrukt in p .
- b** Los exact op $A_p = 18$.



Als in een integraal een boven- of ondergrens p variabel is, dan is de integraal te schrijven als een functie van die grens. Zo is bijvoorbeeld

$$\int_1^p f(x) dx = F(p) - F(1) \text{ een functie } g \text{ van } p: g(p) = F(p) - F(1).$$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{e^x}$

$g(p)$ is de oppervlakte van het gebied ingesloten door de lijnen $x = 1$, $x = p$, de grafiek van f en de x -as.
Geef een functievoorschrift van $g(p)$.

Oplossing

Een primitieve van f is $F(x) = -\frac{1}{e^x}$

$$g(p) = \int_1^p \frac{1}{e^x} dx = \left[-\frac{1}{e^x} \right]_1^p = -\frac{1}{e^p} + \frac{1}{e}$$

- H 22** In de integraal $\int_0^a \cos(x) dx$ met $0 < a \leq 2\pi$ is de bovengrens a variabel.

Bereken exact voor welke waarden van a geldt dat $\int_0^a \cos(x) dx = 1$.

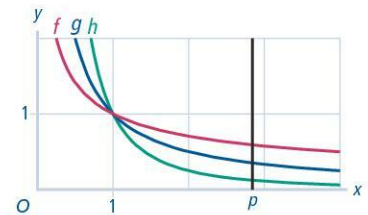
- 23** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ en $h(x) = \frac{1}{x^2}$

- a** Bereken exact $\int_1^{10} f(x) dx$, $\int_1^{10} g(x) dx$ en $\int_1^{10} h(x) dx$.

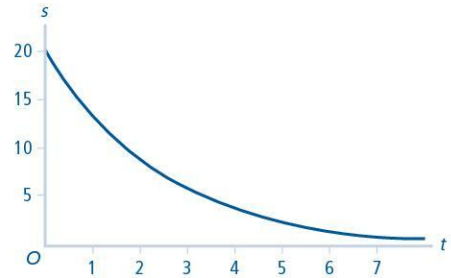
- b** Op het interval $[1, p]$ met $p > 1$ is $A(p)$ de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x -as, $B(p)$ is de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van g en de x -as en $C(p)$ is de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van h en de x -as.

Geef functievoorschriften van A , B en C als functies van p .

- c** Bereken exact de waarde van p waarvoor $A(p) = 10$.
- d** Bereken algebraïsch de waarde van p waarvoor $B(p) = 10$. Rond af op een geheel getal.
- e** Toon aan dat voor elke p geldt: $C(p) < 1$.



- 24** Bij een chemisch proces wordt een hoeveelheid van de stof cyclopropano omgezet in propeen. Hiernaast is de grafiek getekend van de snelheid waarmee het proces plaatsvindt als functie van de tijd. Hierin is s de snelheid in mol per liter per seconde en t is de tijd in seconden. In dit geval geldt $s = 20e^{-0,4t}$.



- a** De hoeveelheid cyclopropano in mol die na p seconden is omgezet is te schrijven als $g(p) = \int_0^p s \, dt$.

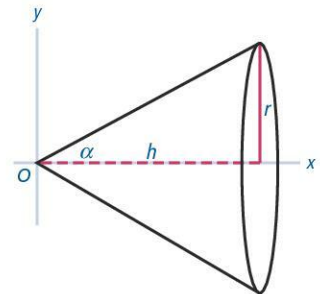
Geef een functievoorschrift van g en toon aan dat er uiteindelijk 50 mol cyclopropano wordt omgezet.

- b** Na hoeveel seconden is de helft van deze hoeveelheid cyclopropano omgezet?
Rond af op één decimaal.

- 25a** Een kegel ontstaat door een lijn l te wentelen om een as. In een kegel met hoogte h en straal grondcirkel r is een assenstelsel aangebracht met de top in de oorsprong, het grondvlak evenwijdig met de y -as en de hoogte langs de x -as.

- a** Stel een vergelijking op van de lijn door O en het punt (h, r) .
b Druk de inhoud van de kegel uit in r en h .
c Voor een bepaalde kegel geldt dat de hoek tussen l en de x -as gelijk is aan 30° .

Druk de inhoud van deze kegel uit in h .

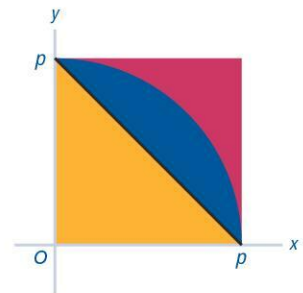


- 26** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x -as wordt gewenteld om de x -as.

- a** Welke vorm heeft dit omwentelingslichaam?
b Druk de inhoud van het omwentelingslichaam uit in r .
c Stel een integraal op waarmee je een formule voor de inhoud van een cilinder met straal r en hoogte h kunt afleiden.

-  **27** Een vierkant met zijde p is door een diagonaal en een kwart cirkel verdeeld in drie gebieden.

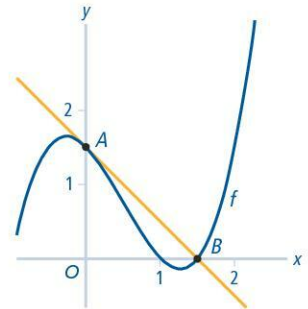
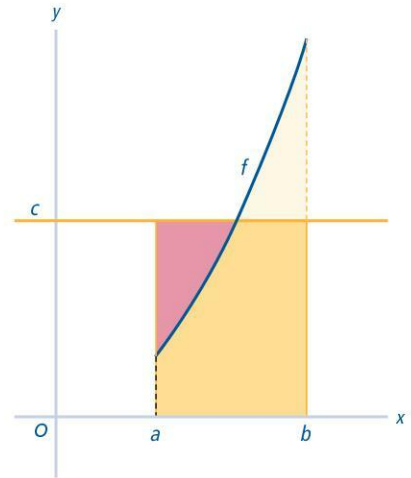
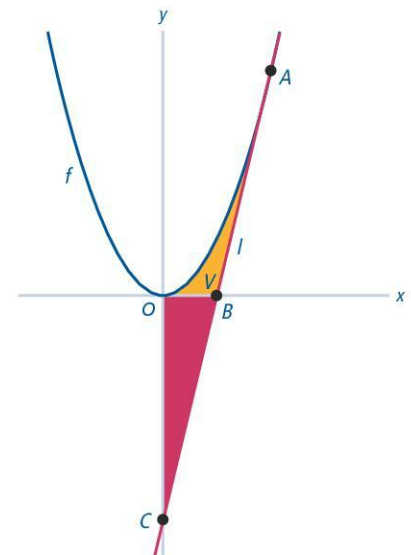
Toon met behulp van integralen aan dat de inhoud van de drie omwentelingslichamen die ontstaan door elk van de drie gebieden om de x -as te wentelen aan elkaar gelijk zijn.



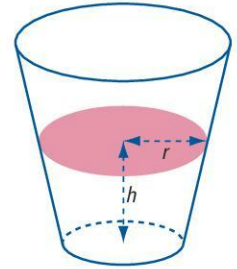
2-5

Gemengde opdrachten

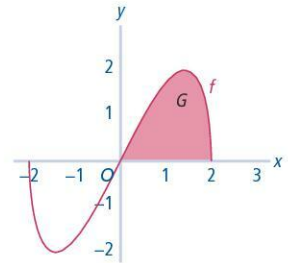
- 28a** Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2})$.
 Lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $A(0, 1\frac{1}{2})$.
 Lijn l en de grafiek van f snijden elk de x -as in punt $B(1\frac{1}{2}, 0)$.
 Toon dit aan.
- b** De grafiek van f verdeelt $\triangle AOB$ in twee delen.
 Toon met een berekening aan dat de oppervlakte van het linkerdeel tweemaal zo groot is als de oppervlakte van het rechterdeel.
(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 2)
- 29** Voor een functie f met functiewaarden die groter dan of gelijk aan nul zijn op een interval $[a, b]$, wordt de gemiddelde functiewaarde c op $[a, b]$ als volgt gedefinieerd: Er is een constante functie g met $g(x) = c$ waarvoor geldt dat de oppervlakte onder de grafiek van f even groot is als de oppervlakte onder de grafiek van g op het interval $[a, b]$.
- a** Leg uit dat moet gelden: $(b - a)c = \int_a^b f(x) dx$.
- b** Bereken exact de gemiddelde functiewaarde van de functie $f(x) = 1 + \sin(\frac{1}{4}x)$ op het interval $[0, 4\pi]$.
- c** Bereken p als de gemiddelde functiewaarde van $g(x) = \sqrt{p - x}$ op het interval $[0, p]$ gelijk is aan 6.
- 30** Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
 Lijn l raakt de grafiek van f in het punt A .
 B is het snijpunt van l met de x -as.
 C is het snijpunt van l met de y -as.
 V is het vlakdeel ingesloten door de x -as, de grafiek van f en lijn l .
- a** Bereken de oppervlakte van V als $A(3, 9)$.
 Laat vervolgens zien dat $\text{Opp}(\triangle OBC) : \text{Opp}(V) = 3 : 1$.
- b** V_p is oppervlakte van het vlakdeel V voor $x_A = p$.
 Druk de coördinaten van A , B en C uit in p .
- c** Toon aan dat voor elke waarde van p geldt: $\text{Opp}(\triangle OBC) : \text{Opp}(V_p) = 3 : 1$.



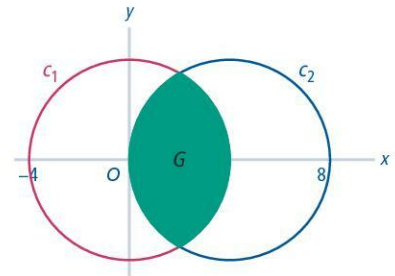
- 31** De emmer hiernaast is 40 cm hoog. De straal van de bodem is 10 cm, de straal van de bovenkant is 20 cm.
Je kunt de emmer opvatten als een omwentelingslichaam door een geschikte lijn te wentelen om de x -as.
- a** Bereken exact de inhoud van de emmer.
b Geef je antwoord ook in hele liters.



- 32** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$. G is het gebied, ingesloten door de grafiek van f en de positieve x -as.
- a** Toon aan dat de functie $F(x) = -\frac{1}{3}(4-x^2)\sqrt{4-x^2}$ een primitieve van f is.
b Bereken exact de oppervlakte van G .
c Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als je G om de x -as wentelt.



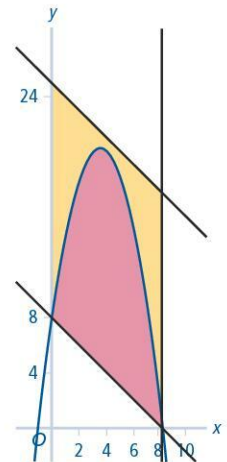
- 33** De cirkels $c_1: x^2 + y^2 = 16$ en $c_2: (x-4)^2 + y^2 = 16$ sluiten een gebied G in.
- a** De halve cirkels boven de x -as zijn op te vatten als de grafieken van de functies f en g .
Het functievoorschrift van f is $f(x) = \sqrt{16-x^2}$.
Toon aan dat $g(x) = \sqrt{8x-x^2}$ het functievoorschrift van g is.
- b** Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door G te wentelen om de x -as.
c Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door G te wentelen om de y -as, in twee decimalen.



- 34** Gegeven is de functie $f(x) = {}^3\log(x)$. Ook zonder dat je een primitieve van f kent, kun je de integraal $\int_9^{81} f(x) dx$ toch exact berekenen door gebruik te maken van f^{inv} .

Maak een schets en bereken exact $\int_9^{81} f(x) dx$.

- 35** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 7x + 8$.
- a** Toon aan dat de lijn $y = 24 - x$ de grafiek van f raakt.
b De lijnen $x = 0$, $x = 8$, $y = 8 - x$ en de lijn $y = b - x$ met $b \geq 24$ sluiten een gebied in dat door de grafiek van f in twee delen met gelijke oppervlakte wordt verdeeld.
Bereken exact de waarde van b .



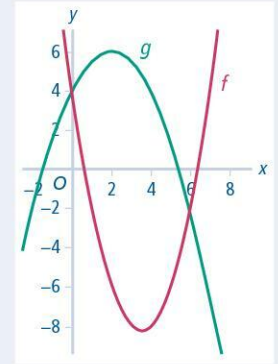
Samenvatting

Oppervlakte

Om de oppervlakte van een gebied ingesloten door de grafieken van functies te berekenen, gebruik je integralen. Je gebruikt de x -coördinaten van de snijpunten als grenzen. De oppervlakte van het door de grafieken van f en g

ingesloten gebied hiernaast is $\int_0^6 (g(x) - f(x)) \, dx$.

Let op de onderlinge ligging van de grafieken. De ligging van de grafieken ten opzichte van de x -as speelt geen rol. Splits zo nodig het gebied in meerdere deelgebieden.



Omwentelingslichamen

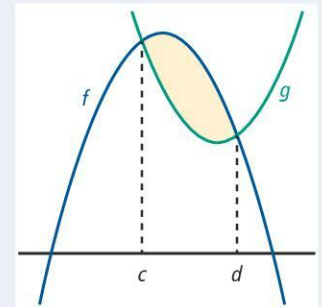
Een omwentelingslichaam ontstaat als je een gebied wentelt om een as.

Als het gebied, ingesloten door de grafiek van een functie f , de lijnen $x = a$, $x = b$ en de x -as, wordt gewenteld om de x -as,

bereken je de inhoud van dit lichaam met $\pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$.

Als een gebied, dat wordt begrensd wordt door de grafieken van twee functies f en g om de x -as wordt gewenteld, bereken je de inhoud van het omwentelingslichaam met de integraal

$$\pi \int_c^d ((f(x))^2 - (g(x))^2) \, dx \quad \text{of met} \quad \pi \int_c^d (f(x))^2 \, dx - \pi \int_c^d (g(x))^2 \, dx.$$



Als je een gebied wentelt om de y -as, dan kun je de inhoud van het omwentelingslichaam berekenen door het gebied te spiegelen in de lijn $y = x$ en dan te wentelen om de x -as. Je gebruikt dan de inverse functie.

Variabele grenzen

Je kunt een integraal met variabele bovengrens p schrijven

als functie van p , bijvoorbeeld $g(p) = \int_2^p f(x) \, dx = F(p) - F(2)$.

Je kunt exact de oppervlakte berekenen van een gebied, ingesloten door grafieken

Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken. Let op de onderlinge ligging van de grafieken en stel de integraal op.

Voorbeeld

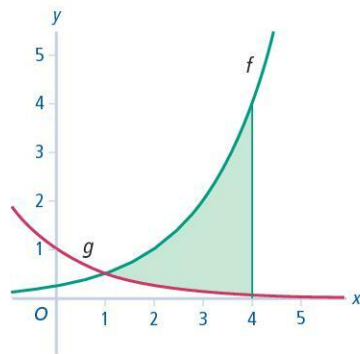
Bereken exact de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafieken van $f(x) = 2^{x-2}$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en de lijn $x = 4$.

Oplossing

Voor het snijpunt geldt $2^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ dus $x = 1$.

$$\int_1^4 (2^{x-2} - 2^{-x}) dx = \left[\frac{2^{x-2}}{\ln(2)} + \frac{2^{-x}}{\ln(2)} \right]_1^4 = \frac{4 + \frac{1}{16} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\ln(2)}$$

De oppervlakte is $3 \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\ln(2)}$



Je kunt de inhoud van een omwentelingslichaam berekenen

Bij wentelen van een gebied om de y -as spiegel je het gebied in de lijn $y = x$ en gebruik je inverse functies.

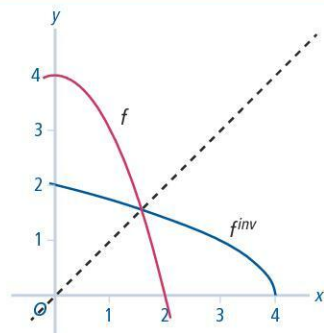
Voorbeeld

Het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = 4 - x^2$ en de beide assen wordt gewenteld om de y -as. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam.

Oplossing

$f^{inv}(x) = \sqrt{4-x}$ met $0 \leq x \leq 4$. De inhoud is

$$\pi \int_0^4 (\sqrt{4-x})^2 dx = \pi \int_0^4 (4-x) dx = \pi \left[4x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = \pi(8-0) = 8\pi.$$



Je kunt een integraal met een variabele grens schrijven als een functie van die grens

Primitiveer en gebruik de hoofdstelling van de integraalrekening. Vereenvoudig het functievoorschrift.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $g(p) = \int_e^p \frac{4}{x} dx$ met $p > e$.

Los exact op $g(p) = 8$.

Oplossing

$$g(p) = [4 \ln(x)]_e^p = 4 \ln(p) - 4$$

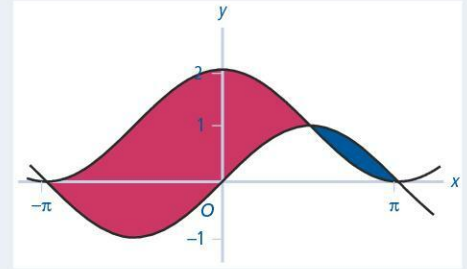
$4 \ln(p) - 4 = 8$ geeft $\ln(p) = 3$, dus $p = e^3$.

Test jezelf

- T-1** Hiernaast staan de grafieken van de functies $f(x) = \sin(x)$ en $h(x) = 1 + \cos(x)$, die elkaar snijden bij $x = -\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = \pi$.

De grafieken sluiten een rood en een blauw gebied in. Bereken exact de oppervlakte van elk van deze twee gebieden.

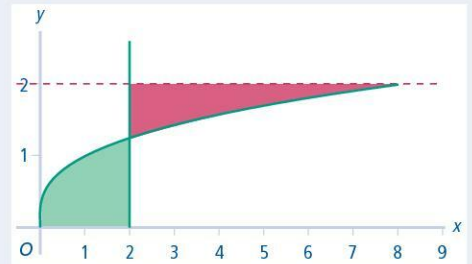
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-1.



- T-2** A_p is het vlakdeel, ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt[3]{x}$, de x -as en de lijn $x = p$.

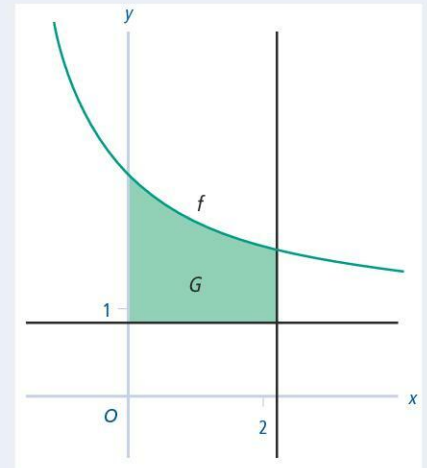
B_p is het vlakdeel, ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $y = 2$ en $x = p$.

- Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door A_2 om de x -as te wentelen.
 - Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door B_4 om de x -as te wentelen.
 - A_p en B_p worden beide gewenteld om de x -as. Bereken exact de waarde van p waarvoor beide omwentelingslichamen dezelfde inhoud hebben.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-2.*



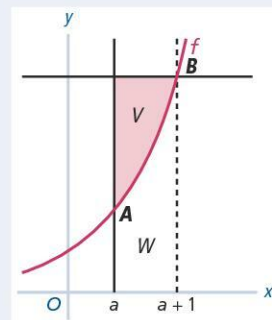
- T-3** Hiernaast staat de grafiek van de functie $f(x) = 1 + \frac{4}{x+2}$. G is het gebied ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $x = 0$, $x = 2$ en $y = 1$.

- Laat zien dat $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \frac{4}{x-1}$
 - Bereken exact de inhoud van het lichaam dat ontstaat als je G wentelt om de y -as.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-3.*

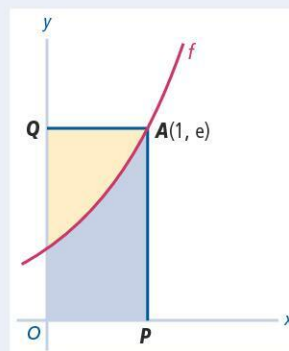


- T-4** De grafiek van de functie $g(x) = \frac{4}{x+3}$, de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = a$ sluiten een gebied in. Als je het gebied wentelt om de x -as ontstaat een omwentelingslichaam met inhoud I_a .
- Bereken exact I_4 .
 - Schrijf I_a als functie van a .
 - Los exact op $I_a = 2\pi$.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-4.*

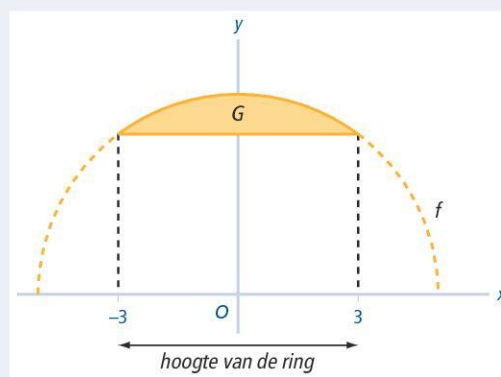
- T-5** Gegeven is de functie $f(x) = e^x$. Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = a$ en $x_B = a + 1$. In de figuur is een gebied V ingesloten door de grafiek van f , de verticale lijn door A en de horizontale lijn door B .
- Bereken exact de waarde van a waarvoor de oppervlakte van V gelijk is aan 3.
 - W is het gebied ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de lijn $x = a$ en de lijn $x = a + 1$. Toon aan dat de verhouding tussen de oppervlakte van W en de oppervlakte van V onafhankelijk is van a .



- De punten P en Q zijn de loodrechte projecties van $A(1, e)$ op respectievelijk de x -as en de y -as. De rechthoek $OPAQ$ wordt door de grafiek van f in twee stukken verdeeld. Beide stukken worden gewenteld om de x -as.
- Bereken exact het verschil tussen de inhouden van de omwentelingslichamen.



- T-6** Gegeven is de bol met middelpunt O en straal 5. De bol wordt horizontaal doorboord door een cilinder zo, dat de overblijvende ring een hoogte 6 heeft. De ring is het omwentelingslichaam van het gebied G tussen de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ en de lijn $y = p$.
- Bereken p exact.
 - Bereken exact de inhoud van de ring.
 - Kies nu de straal r van de bol variabel met $r > 3$, de hoogte van de ring blijft 6. Toon aan dat de inhoud van de ring niet verandert.

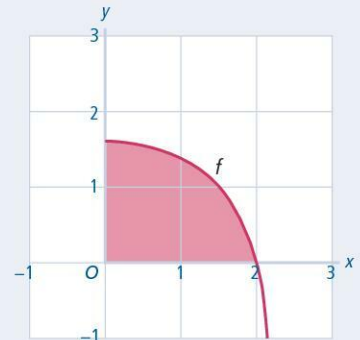


Extra oefening - Basis

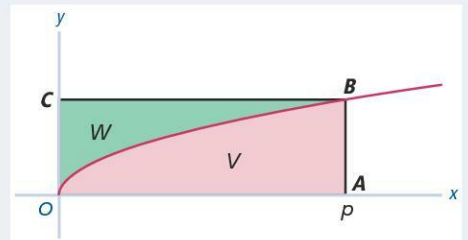
- B-1** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 4$ en $g(x) = \sqrt{5x + 10}$.
- Plot en schets de grafieken van f en g .
 - Lees de coördinaten van de snijpunten af en controleer deze met een berekening.
 - Stel een integraal op waarmee je de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g kunt berekenen.
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g .
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-1.

- B-2** Gegeven is de functie $f(x) = 4\sqrt{x} - x$.
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.
 - Het gebied uit opdracht a wordt gewenteld om de x -as. Hierdoor ontstaat het omwentelingslichaam A . Stel de integraal op waarmee je exact de inhoud van A kunt berekenen.
 - Bereken exact de inhoud van A .
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-2.

- B-3** Voor $x \geq 0$ is gegeven is de functie $f(x) = \ln(5 - x^2)$. G is het gebied ingesloten door de grafiek van f en de beide assen. G wordt gewenteld om de y -as.
- Spiegel de grafiek van f in de lijn $y = x$ en geef het functievoorschrift van f^{inv} .
 - Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam met behulp van f^{inv} .
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-3.



- B-4** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$. De lijn $x = p$ snijdt de x -as in A en de grafiek van f in B . De lijn door B evenwijdig aan de x -as snijdt de y -as in C . De grafiek van f verdeelt rechthoek $OABC$ in twee gebieden V en W .
- Toon aan dat de oppervlakte van V twee keer zo groot is als de oppervlakte van W .
 - Beide gebieden worden gewenteld om de x as. Toon aan beide omwentelingslichamen dezelfde inhoud hebben.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-4.



Extra oefening - Gemengd

- G-1** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ op het interval $[0, \infty)$.

G is het gebied ingesloten door de grafiek van f en de lijn $m: y = \frac{2}{5}x$.

- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn m en de grafiek van f .
- $F(x) = c \cdot \ln(x^2 + 1)$ is een primitieve van f . Bereken exact c en de oppervlakte van G .

- G-2** Gegeven is de functie $f(x) = e^x$.

- De raaklijn l in het punt $P(2, e^2)$ snijdt de x -as in het punt A . Bereken de x -coördinaat van A .
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied G dat wordt ingesloten door de beide assen, de grafiek van f en l .

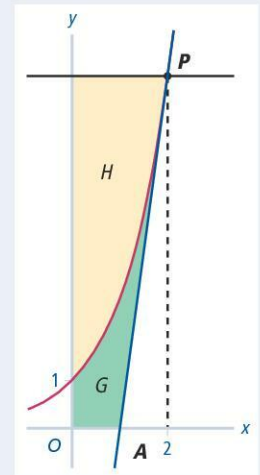
H is het gebied ingesloten door de grafiek van f , de y -as en de lijn $y = e^2$.

- Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als H wordt gewenteld om de x -as.

Het gebied H wordt gewenteld om de y -as.

Om de inhoud van het omwentelingslichaam te berekenen heb je een primitieve van $g(x) = (\ln(x))^2$ nodig.

- Toon aan dat $G(x) = x \cdot (\ln(x))^2 - 2x \cdot \ln(x) + 2x$ een primitieve van g is.
- Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

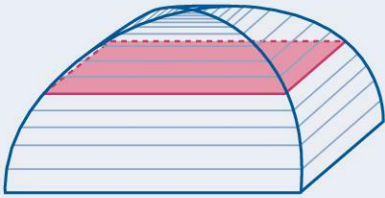


- G-3** De Spaanse architect Antoni Gaudi (1852-1926) maakte in zijn ontwerpen veel gebruik van de *kettinglijn*. De kettinglijn is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

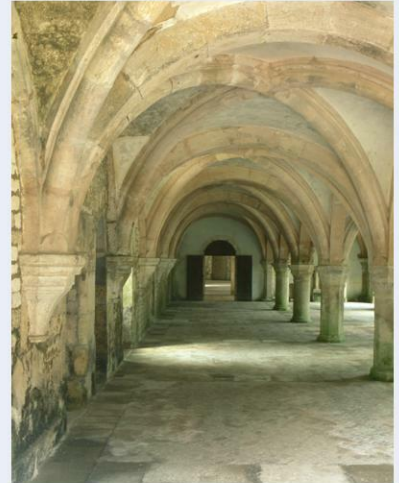
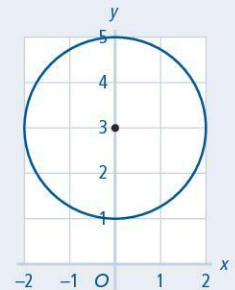
- Plot de grafiek van $g(x) = 10 - f(x)$.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as. Rond af op een geheel getal.
- Gebruik de in b gevonden waarden en bereken algebraïsch de oppervlakte van het gebied, ingesloten door de grafiek van g en de x -as. Rond het antwoord af op een geheel getal.
- De kettinglijn lijkt erg op een parabool. Plot in hetzelfde scherm de parabool $y = 9 - x^2$.
- Bereken het verschil tussen het antwoord op opdracht c en de exacte oppervlakte van het gebied tussen de parabool en de x -as.



Uitdagende opdrachten



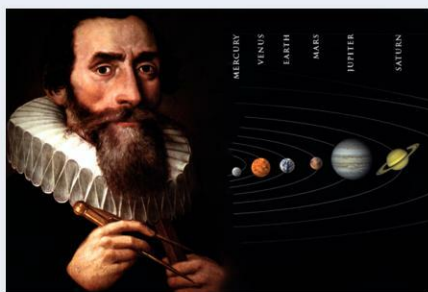
- U-1** Een kruisgewelf kun je opvatten als het gemeenschappelijk deel van twee even grote halve cilinders, waarvan de assen elkaar loodrecht snijden. Het bedoelde kruisgewelf heeft een vierkant grondvlak van 12 bij 12 meter. De horizontale doorsneden zijn ook vierkanten.
- a** Druk de oppervlakte O van een doorsnede op hoogte h uit in h .
- b** Leg uit dat de inhoud van het kruisgewelf gelijk is aan $\int_0^R O \, dh$, met R de straal van de halve cilinders.
- c** Bereken exact de inhoud van het kruisgewelf.
- U-2** Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + (y - 3)^2 = 4$. De bovenste helft van de cirkel is de grafiek van $f(x) = 3 + \sqrt{4 - x^2}$.
- a** Geef het functievoorschrift van de functie g die bij de onderste helft van de cirkel hoort.
- b** De cirkel wordt gewenteld om de x -as. Er ontstaat dan een omwentelingslichaam met de vorm van een donut met als inhoud:
- $$\pi \int_{-2}^2 ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$$
- Toon aan dat $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 12\sqrt{4 - x^2}$.
- c** $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx$ is de oppervlakte van een halve cirkel met straal 2. Gebruik dit en het resultaat van opdracht b om aan te tonen dat de inhoud van de donut gelijk is aan $24\pi^2$.
- d** De cirkel $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ ($R \geq r$) wordt gewenteld om de x -as. Het omwentelingslichaam dat ontstaat heet een *torus*. Laat zien dat de inhoud van de torus gelijk is aan
- $$2\pi \int_0^r ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx = 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 2\pi R \cdot \pi r^2.$$



*Is M het middelpunt van de cirkel die gewenteld wordt, dan geldt dus:
inhoud torus = lengte van de baan van M $\times$ oppervlakte van de cirkel.*

Tonregel van Kepler

Johannes Kepler (1571 – 1630) was een Duitse astronoom en wis- en natuurkundige, die vooral bekend werd vanwege de berekening van de planeetbewegingen en de daarover geformuleerde wetten. Kepler trouwde in 1613 voor de tweede keer. Hij bestelde vaten wijn voor de bruiloft, maar twijfelde aan de juistheid van de methode van de wijnhandelaar om de inhoud van het vat en dus de prijs van de wijn te bepalen. Daarom zocht Kepler een formule om het volume van een wijnvat te berekenen



De tonregel van Kepler

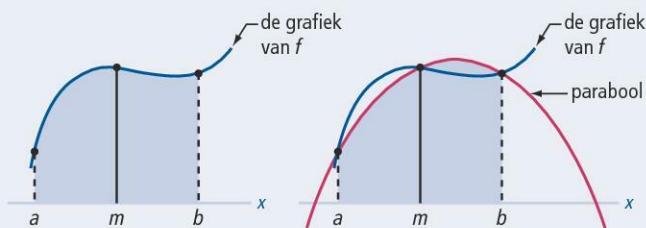
luidt: $I = \frac{1}{6}h(G + 4 \cdot M + B)$

waarbij I de inhoud is, h de hoogte van de ton, G , M en B de oppervlakte van grondvlak, doorsnede halverwege en bovenvlak. Zie de afbeelding.

Hoe kom je aan zo'n formule? Waarom $4 \cdot M$?



De tonregel vind je terug in de *regel van Simpson*. Thomas Simpson (1710 – 1761) benadert de oppervlakte onder de grafiek van een functie f op het interval $[a, b]$ met de oppervlakte van een parabool die gaat door drie punten van de grafiek van f die horen bij a , m en b , met $m = \frac{1}{2}(a + b)$, het midden van het interval $[a, b]$.



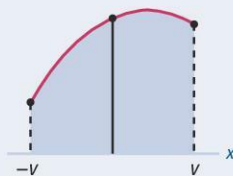
De regel van Simson luidt:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}(b-a)(f(a) + 4 \cdot f(m) + f(b))$$

In de opdrachten ga je de regel van Simpson bewijzen. Om het rekenwerk te vereenvoudigen, kies $a = -v$ en $b = v$. Dan is $b - a = 2v$ en $m = 0$.

Neem voor de parabool de functie

$$g(x) = px^2 + qx + r.$$



Opdracht

a Toon aan: $\int_{-v}^v g(x)dx = \frac{2}{3}pv^3 + 2rv.$

b Uit $g(v) = f(v)$ volgt $pv^2 + qv + r = f(v).$

Wat volgt uit $g(-v) = f(-v)$?

c Laat zien dat $p = \frac{f(v) + f(-v) - 2r}{2v^2}$

d Ga na dat uit $g(0) = f(0)$ volgt $r = f(0).$

e Toon aan:

$$\int_{-v}^v g(x)dx = \frac{1}{3}v[f(v) + f(-v) + 4 \cdot f(0)]$$

f Maak het bewijs van de regel van Simpson af.

g Leid de tonregel af uit de regel van Simpson.

h De binnenmaten van de ton zijn: $h = 90$ cm, diameter boven en ondervlak 50 cm en omtrek halverwege 188 cm. Bereken de inhoud van de ton.

Vaardigheden 1

Lijnen

Theorie

De vergelijking van een lijn kun je op verschillende manieren weergeven:

- > $ax + by = c$
- > $y = mx + n$, mits de lijn niet evenwijdig is aan de y -as
- > $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, als een lijn de assen snijdt in $(p, 0)$ en $(0, q)$ met $p \neq 0$ en $q \neq 0$

Voorbeeld

Lijn l snijdt de assen in $(2, 0)$ en in $(0, 5)$.
Geef een vergelijking van l in de vorm $y = mx + n$.

Oplossing

Er geldt $l: \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$.

Links en rechts vermenigvuldigen met 10 geeft $5x + 2y = 10$ of $y = -2\frac{1}{2}x + 5$.

- 1a** Schrijf $y = 1\frac{1}{4}x + 2$ in de vorm $ax + by = c$.
- b** Schrijf $y = -3x - 7$ in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
- c** Schrijf $\frac{x}{-3\frac{1}{3}} + \frac{y}{-1\frac{1}{2}} = 1$ in de vorm $y = mx + n$.
- 2** Geef de drie vormen van een vergelijking van de lijn door de volgende tweetallen punten.
- a** $(3, 0)$ en $(0, 9)$ **c** $(2, 5)$ en $(4, 9)$
- b** $(1, 6)$ en $(0, 5)$ **d** $(1\frac{1}{2}, 3)$ en $(3, 9)$
- 3** Bij lijn l hoort de vergelijking $2x - 5y = 24$ en bij lijn m hoort de vergelijking $y = -3x + 2$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m .

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - 5y = -4 \end{cases}$ op met elimineren.

Oplossing

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 3x + 6y = 18 \text{ (keer 3)} \\ 3x - 5y = -4 \end{cases} \\ \hline 11y = 22 \text{ dus } y = 2. \end{array}$$

Substitutie in $3x - 5y = -4$ geeft $3x - 10 = -4$ dus $x = 2$.
De oplossing is $x = 2$ en $y = 2$.

- 4** Los exact op met elimineren.
- a** $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 4y - x = 5\frac{1}{3} \end{cases}$

Je kunt bij het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen uitkomen op een vergelijking van de vorm $0 \cdot x = a$.

Als $a = 0$, dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen en vallen de bijbehorende lijnen samen. Het stelsel heet dan **afhankelijk**.

Als $a \neq 0$ dan heeft het stelsel géén oplossing en zijn de bijbehorende lijnen evenwijdig. Het stelsel heet dan **strijdig**.

$0 \cdot x = 0$
oneindig veel
oplossingen



$0 \cdot x = a$ met $a \neq 0$
géén oplossingen



- 5 Onderzoek voor welke waarden van p , q en r de volgende stelsels strijdig of afhankelijk zijn.

a $\begin{cases} x - py = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b $\begin{cases} qx + 3y = 4 \\ 3y = 3x + 7 \end{cases}$ c $\begin{cases} rx + 3y = 1\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} - y \end{cases}$

- 6 Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de volgende lijnen.

a $6x - y = 8$ en $4y + 6x = 12$

b $y = \frac{1}{3}x + 2$ en $2y + 5x = 1$

c $\frac{x}{-1} - \frac{y}{2\frac{1}{2}} = 1$ en $\frac{x}{-6} - \frac{y}{3} = 1$

Voorbeeld

Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen $l: x + 2y = 10$ en $m: 3x - y = 9$.

Oplossing

Voor de richtingshoek α van l geldt: $\tan(\alpha) = -\frac{1}{2}$.

Voor de richtingshoek β van m geldt: $\tan(\beta) = 3$.

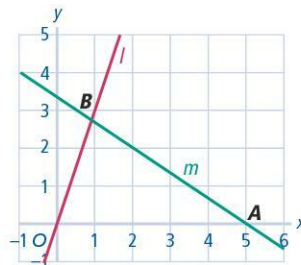
Dus is $\alpha \approx -26,6^\circ$ en is $\beta \approx 71,6^\circ$.

Het verschil tussen de richtingshoeken is $71,6^\circ + 26,6^\circ = 98,2^\circ$.

De scherpe hoek tussen l en m is $180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$.

- 7 De lijnen l en m vormen samen met de x -as een driehoek. Bereken de grootte van de hoeken van deze driehoek OAB in graden nauwkeurig.

Als voor twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$, dan staan k en l **loodrecht** op elkaar. Het omgekeerde is ook waar.



- 8a Gegeven zijn lijn $l: 4x - 10y = 5$ en punt $P(1, 2)$. Stel een vergelijking op van loodlijn m door P op lijn l .

- b Gegeven zijn de lijnen $l: \frac{x}{-2} + \frac{y}{3\frac{1}{2}} = 1$ en $m: 4x + 7y = 14$.

Toon aan dat de lijnen l en m loodrecht op elkaar staan.

- c Op lijn $n: 2x - \frac{1}{3}y = 3$ liggen de punten $P(2, 3)$ en $Q(-2, -21)$.

Stel een vergelijking op van de lijn die door het midden van lijnstuk PQ gaat en loodrecht op n staat.

Cirkels

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel berekenen met behulp van substitutie. Schrijf daartoe de vergelijking van de lijn in de vorm $y = \dots$ of $x = \dots$.

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van twee cirkels berekenen door de vergelijkingen van de cirkels van elkaar af te trekken. Zo vind je de vergelijking van de lijn door de snijpunten.

9 Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van cirkel c en lijn l .

a $c: x^2 + y^2 = 13$ en $l: y = x - 1$

b $c: x^2 + y^2 = 2$ en $l: 3y + 2x = 5$

c $c: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 30$ en $l: 2x - y = 5$

10 Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de cirkels c_1 en c_2 .

a $c_1: x^2 + y^2 - 2y = \frac{1}{4}$ en $c_2: x^2 + y^2 = y + 2x + 1\frac{1}{4}$

b $c_1: x^2 + y^2 = 1 - 2x$ en $c_2: x^2 + y^2 = -x + 3$

Voorbeeld

Bereken de afstand tussen de lijn $l: y = -x + 2$ en de cirkel $c: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$

Oplossing

m is de loodlijn uit M op l .

De vergelijking van m heeft de vorm $y = x + b$.

Substitutie van $M(-1, 1)$ geeft $b = 2$,

dus $m: y = x + 2$.

Het snijpunt P van l en m is $(0, 2)$.

$PM = \sqrt{2}$ en $r = \frac{1}{2}$ geeft $d(l, c) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

11 Bereken exact $d(l, c)$.

a $l: 4y + 2x = -12$ en $c: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

b $l: 2x + y = 40$ en $c: x^2 + y^2 = 25$

c $l: 4x + 3y + 9 = 0$ en $c: x^2 + y^2 - 2x - 8y + 11 = 0$

12 Punt P ligt op cirkel c . Stel voor de volgende situaties een vergelijking op van de raaklijn in P aan c .

a $c: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$ en $P(3, 2)$

b $c: x^2 + y^2 - x + 6y - 7 = 0$ en $P(1, 1)$

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de raaklijn l in punt $P(3, 5)$ aan de cirkel $x^2 + y^2 = 34$.

Oplossing

Het middelpunt van de cirkel is $O(0, 0)$.

De richtingscoëfficiënt van OP is $\frac{5}{3}$.

De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{3}{5}$.

P ligt op l . Een vergelijking van l is

$$y = -\frac{3}{5}x + 6\frac{4}{5}.$$

Machtsverbanden

- 13** In de tabel hiernaast is een aantal meetresultaten gegeven. Neem aan dat de bijbehorende formule de vorm $N = c \cdot t^a$ heeft.
- a** Kies geschikte waarden voor t en N en bereken daarmee de waarde van c .
- b** Bereken exact de waarde van a .
- c** Welke waarde heeft N bij $t = 17$? Rond je antwoord af op een geheel getal.
- 14a** Gegeven is dat l recht evenredig is met k , dus $l = a \cdot k$. De bijbehorende grafiek gaat door het punt $(10, 25)$. Bereken a .
- b** Als k vier keer zo groot wordt, wat weet je dan over l ?
- c** p is recht evenredig met q^2 , dus $p = a \cdot q^2$. De grafiek gaat door $(5, 100)$. Bereken a .
- d** Als q vier keer zo groot wordt, wat gebeurt er dan met p ?

t	1	4	7	16
N	36	203,65	409,9	1152

Theorie

Als voor twee variabelen P en Q geldt dat Q **evenredig** is met P^a , dan is er een machtsverband tussen P en Q van de vorm $Q = c \cdot P^a$. Er geldt: als de variabele P een factor k keer zo groot wordt, dan wordt de variabele Q een factor k^a keer zo groot. Bij gegeven waarden van P en Q kun je de waarde van a en van de **evenredigheidsconstante** c berekenen.

- 15a** p is evenredig met k^3 . Bij $k = 2$ is $p = 12$. Stel een formule op voor het verband tussen p en k .
- b** De grafiek van een machtsverband $y = c \cdot x^a$ gaat door de punten $(2, 48)$ en $(4, 768)$. Bereken a en c .
- 16** Bij experimenten met het opwekken van elektriciteit door middel van windmolens is onderzocht hoe het door de windmolens geleverde vermogen P afhangt van de lengte L van de wieken en van de windsnelheid v (bij gelijke luchtdichtheid). Bij een bepaald type windmolens bleek het opgewekte vermogen P (in W) evenredig te zijn met het kwadraat van de lengte van de wieken L (in m) en met de derdemacht van de windsnelheid v (in m/s).
- a** Stel voor een windmolen die $P = 6 \cdot 10^5$ W levert bij $L = 20$ m en $v = 12$ m/s het machtsverband op.
- b** Bereken met hoeveel procent het geleverde vermogen van een windmolen afneemt als de windsnelheid afneemt met 20%.

Voorbeeld

De grafiek van een machtsverband $y = c \cdot x^a$ gaat door de punten $(2, 40)$ en $(3, 135)$. Bereken a en c .

Oplossing

$x = 2$ en $y = 40$ geeft $40 = c \cdot 2^a$.
 $x = 3$ en $y = 135$ geeft $135 = c \cdot 3^a$.

Delen geeft $\frac{40}{135} = \frac{c \cdot 2^a}{c \cdot 3^a}$ en uit

$$\frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^a \text{ volgt } a = 3.$$

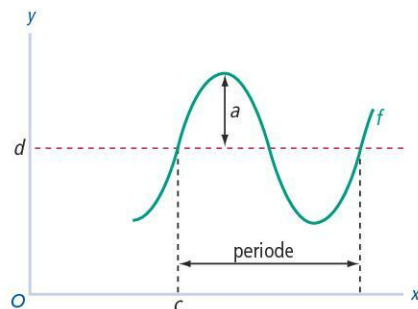
Punt $(2, 40)$ invullen in $y = c \cdot x^3$ geeft $40 = c \cdot 2^3$ en dus $c = 5$.

Goniometrische functies

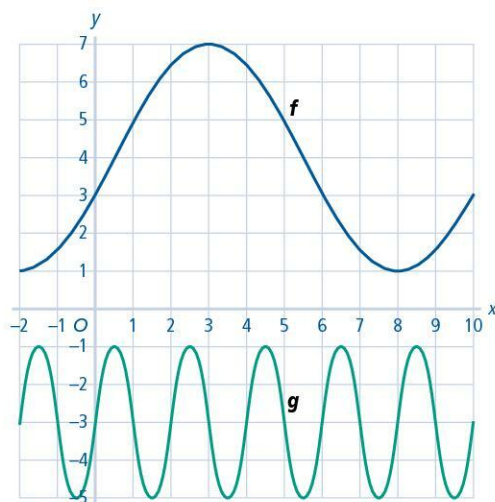
Theorie

Sinusoïden zijn grafieken van functies van de vorm $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ of $g(x) = d + a \cos(b(x - c))$.

- > de amplitude is $|a|$
- > de periode is $\frac{2\pi}{b}$
- > er is een verschuiving c naar rechts
- > de evenwichtsstand is $y = d$



- 17** De sinusoïde hiernaast is een grafiek van een functie $f(x) = d + a \cos(b(x - c))$.
- Lees het maximum en minimum af en gebruik deze waarden om d en a te berekenen.
 - Hoe kun je in de grafiek zien dat $c = 3$?
 - Geef een functievoorschrift van f .
 - Bij de andere sinusoïde past een functievoorschrift van de vorm $g(x) = d + a \sin(b(x - c))$. Bereken waarden van a , b , c en d .



Theorie

De **afgeleiden van de sinus- en cosinusfunctie**:

Als $f(x) = \sin(x)$ dan is $f'(x) = \cos(x)$.

Als $g(x) = \cos(x)$ dan is $g'(x) = -\sin(x)$.

De **primitieven** van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ zijn $F(x) = -\cos(x) + C$ en $G(x) = \sin(x) + C$.

- 18** Differentieer.

- | | |
|---|---|
| a $l(x) = 2,5 \sin\left(\frac{4}{5}x\right)$ | d $p(x) = 3x^4 \cdot \cos(3x)$ |
| b $f(x) = \frac{1}{2} \cos^2(2x)$ | e $r(x) = \frac{\sin(x)}{6 - 2 \cos(x)}$ |
| c $g(x) = \frac{3}{\cos(2x)}$ | f $f(x) = \frac{2 \cos\left(\frac{1}{3}x\right)}{3 \sin\left(\frac{1}{4}x\right)}$ |

- 19** Gegeven is de functie $f(x) = 5 \cos(x) - 4 \cos^5(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$. Bereken exact de extreme waarden van f .

Voorbeeld

Differentieer $h(x) = 3 \cos^3(4x)$.

Oplossing

Schrijf $h(x) = 3(\cos(4x))^3$.

Door tweemaal de kettingregel toe te passen vind je

$$h'(x) = 9(\cos(4x))^2 \cdot -\sin(4x) \cdot 4$$

$$\text{dus } h'(x) = -36 \cos^2(4x) \cdot \sin(4x)$$

20 Geef een primitieve van de volgende functies.

- a** $f(x) = \cos(3x) - 2 \sin(2x)$
- b** $g(x) = 3 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 5 \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$
- c** $h(x) = 5\pi - 3\pi \sin(2\pi x)$

21 Bereken in de volgende gevallen exact de waarde van a .

- a** $M(x) = a \cdot \cos^2(x)$ is een primitieve van $m(x) = 3 \sin(x) \cdot \cos(x)$.
- b** $Q(x) = \frac{a}{\cos^2(2x)}$ is een primitieve van $q(x) = \frac{\sin(2x)}{2 \cos^3(2x)}$

Voorbeeld

Geef een primitieve van $f(x) = 3 \cos(4x)$.

Oplossing

Neem aan dat $F(x) = a \cdot \sin(4x)$ dan geldt

$$F'(x) = a \cdot \cos(4x) \cdot 4 = 4a \cdot \cos(4x).$$

Omdat $F'(x) = f(x)$ geldt $4a = 3$ dus $a = \frac{3}{4}$.

Een primitieve is $F(x) = \frac{3}{4} \sin(4x)$.

Bij het oplossen van goniometrische vergelijkingen kun je gebruik maken van de volgende regels:

Uit $\sin(A) = \sin(B)$ volgt $A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = \pi - B + k \cdot 2\pi$

Uit $\cos(A) = \cos(B)$ volgt $A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = -B + k \cdot 2\pi$

Uit $\tan(A) = \tan(B)$ volgt $A = B + k \cdot \pi$.

Uit $p \sin(A) = q \cos(A)$ volgt $\tan(A) = \frac{q}{p}$

Voorbeeld 1

Los exact op: $\sin(3x) = \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$.

Oplossing

$$3x = x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of}$$

$$3x = \pi - \left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + k \cdot 2\pi$$

$$2x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = -x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \quad \text{of } 4x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \quad \text{of } x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Voorbeeld 2

Los exact op: $2 \sin(2x) = 2\sqrt{3} \cos(2x)$.

Oplossing

$$\sin(2x) = \sqrt{3} \cos(2x) \text{ geeft } \tan(2x) = \sqrt{3}.$$

$$\tan(2x) = \sqrt{3} = \tan\left(\frac{1}{3}\pi\right)$$

$$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

22 Los exact op.

a $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

b $\tan\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \tan(3x)$

c $\sin(3\pi - \pi x) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$

d $\tan^2(x) = 3$

e $-7 \cos(4x) = 7 \sin(4x)$

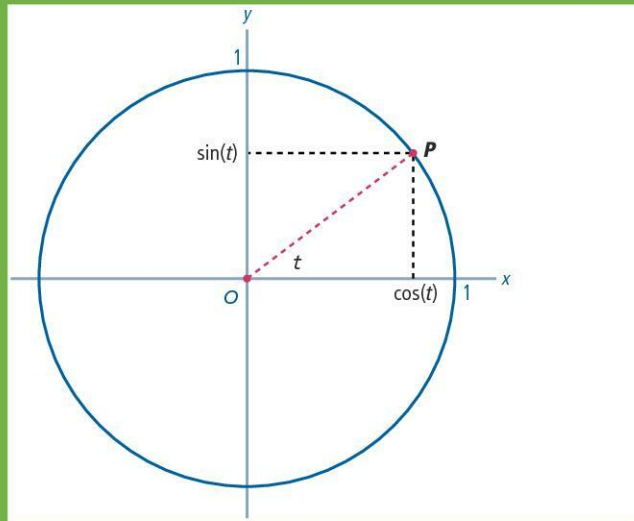
f $\sqrt{3} \sin(x - \pi) = \cos(x - \pi)$

23 Los exact op.

a $\frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{4}x\right) + 1 = \cos^2\left(\frac{1}{4}x\right)$

b $3 \cos(x) - 2 \sin^2(x) = -3$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$



Beweging over een cirkel

Een punt P beweegt zich over de eenheidscirkel met een snelheid van 1 rad per sec. Op tijdstip t heeft P de coördinaten $(\cos(t), \sin(t))$.

Hoe ziet de baan van een punt Q eruit dat op tijdstip t de coördinaten $(3\cos(t), 2\sin(t))$ heeft?

Hoofdstuk 3

Bewegingsvergelijkingen

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	64
3-1	Bewegingsvergelijkingen	66
3-2	Bewegen langs een lijn of een cirkel	68
3-3	Periodieke bewegingen	70
3-4	Snelheid en raaklijn	72
3-5	Versnelling	74
3-6	Gemengde opdrachten	76
	Samenvatting	78
	Test jezelf	80
	Extra oefening - Basis	82
	Extra oefening - Gemengd	83
	Uitdagende opdrachten	84
	Schroefbewegingen	85

Voorkennis

- V-1** In een assenstelsel zijn gegeven de punten $A(-1, 3)$, $B(2, 1)$ en $C(1, -1)$.
- a** Punt D is het beeld van C bij verschuiving over de vector $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
Punt E is het beeld van C bij verschuiving over de vector $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.
Bereken de coördinaten van de punten D en E .
- b** Bereken de lengte van de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DE}$.

Theorie

Een verplaatsing van A naar B kun je weergeven met de **vector** $\overrightarrow{AB}$. In een assenstelsel kun je vectoren beschrijven met behulp van **kentallen**. In de tekening is $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

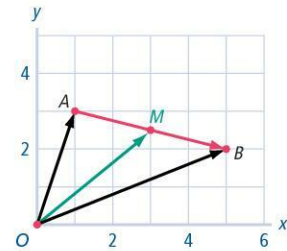
$$\text{Er geldt } \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + q_1 \\ p_2 + q_2 \end{pmatrix} \text{ en } k \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot p_1 \\ k \cdot p_2 \end{pmatrix}$$

met k een reëel getal.

De **lengte van vector** $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ is $|\vec{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$.

Een vector die in de oorsprong begint, heet een **plaatsvector**. Zijn A en B de eindpunten van de plaatsvectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, dan geldt $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$. Voor de plaatsvector $\vec{m}$ van het midden M van lijnstuk AB geldt: $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

Voorbeeld



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- V-2** $A(-3, 4)$, $B(6, 5)$ en $C(-6, 0)$ zijn de eindpunten van de plaatsvectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$. P , Q en R zijn de middens van de zijden AB , BC en CA .
- a** Bereken de kentallen van $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ en $\overrightarrow{CA}$.
- b** Bereken exact de lengte van de zijden van driehoek ABC .
- c** Bereken met behulp van vectoren de coördinaten van P , Q en R .
- d** Laat met een berekening zien dat $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.
- V-3** Gegeven zijn de punten $A(-1, 3)$ en $B(2, 1)$.
Teken in een assenstelsel de volgende plaatsvectoren.
- a** $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$ en $\vec{e} = \vec{a} + 3\vec{b}$
- b** $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}$ en $\vec{r} = \vec{a} - 3\vec{b}$
- c** Wat kun je zeggen over de ligging van de eindpunten van de getekende plaatsvectoren?

V-4 Voor elke waarde van λ is gegeven de plaatsvector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- a** Teken de eindpunten van de plaatsvectoren voor $\lambda = -1, 0, 1, 2$ en 3 .
- b** Stel een vergelijking op van de lijn door deze eindpunten.
- c** Ligt het punt $(99, 52)$ op deze lijn? En het punt $(-99, -46)$?
- d** In welk punt snijdt de lijn de x -as? En de y -as?

Theorie

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ is een **vectorvoorstelling** van een lijn.

De plaatsvector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een **steunvector** en de vector $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ is een **richtingsvector** van de lijn. λ heet een **parameter**.

V-5 Gegeven zijn de punten $C(-3, 4)$ en $D(5, -2)$.

- a** Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l door C en D .
- b** Op l ligt een punt P met y -coördinaat 100 . Bereken de x -coördinaat van P .
- c** Op l ligt een punt Q met gelijke coördinaten. Bereken de coördinaten van Q .
- d** Bereken de coördinaten van het punt R op l waarvan de y -coördinaat 70 groter is dan de x -coördinaat.

Theorie

De **hoek α tussen twee vectoren** kun je berekenen met de

$$\text{formule } \cos(\alpha) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

De vectoren $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ staan loodrecht op elkaar.

V-6 Bereken in de volgende gevallen de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$.

- a** $A(7, -1)$ en $B(5, 5)$
- b** $A(7, -1)$ en $B(-5, 5)$
- c** $A(9, 3)$ en $B(1, -3)$
- d** $A(-3, 4)$ en $B(3, -4)$

V-7 Gegeven zijn de punten $A(4, 0)$, $B(0, 6)$ en $C(-3, 4)$.

- a** Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l door de punten A en B .
- b** Stel een vectorvoorstelling op van de lijn m door C loodrecht op l .
- c** Stel een vectorvoorstelling op van de middelloodlijn van lijnstuk AC .

Voorbeeld

Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door $P(12, 20)$ en $Q(18, 11)$.

Oplossing

$\vec{P} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix}$ is een steunvector.

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

dus een vectorvoorstelling van de

lijn door P en Q is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Voorbeeld

Bereken de hoek α tussen de

vectoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Oplossing

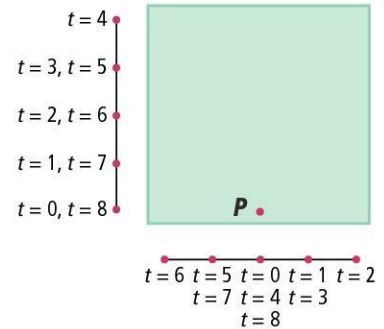
$$\cos(\alpha) = \frac{-1 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{50}}$$

$$\alpha \approx 82^\circ$$

3-1

Bewegingsvergelijkingen

- ✂ 1 Een elektronenstraal die zowel in verticale als in horizontale richting wordt bewogen, geeft op een scherm een lichtpunt P . In de figuur zie je de positie van P op $t = 0$. Verder zijn de horizontale en verticale positie van P voor de tijdstippen 1 tot en met 8 aangegeven. Welke figuur ontstaat er op het scherm als je de punten waar P zich op die tijdstippen bevindt, met elkaar verbindt?



- 2 Een punt P beweegt zich in een assenstelsel. Op tijdstip t bevindt P zich in het punt $(4t^2, 4t)$.
- a Maak een tabel voor de coördinaten van P voor $t = 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}$ en 2 .
- b Schets de baan van P .
- c Bereken het tijdstip waarop P zich in het punt Q met y -coördinaat 14 bevindt.
- d Bereken de x -coördinaat van Q .

t	x	y
0		
$\frac{1}{2}$		
...		

Theorie

Een **parametervoorstelling** legt de positie van een punt P vast met behulp van een hulpvariabele of **parameter**. Als die parameter de tijd is, spreek je ook wel over de **bewegingsvergelijkingen** van P .

De bijbehorende grafiek heet de **baan** van P .

Bewegingsvergelijkingen kun je noteren als $x(t) = 4t^2$ en $y(t) = 4t$, als

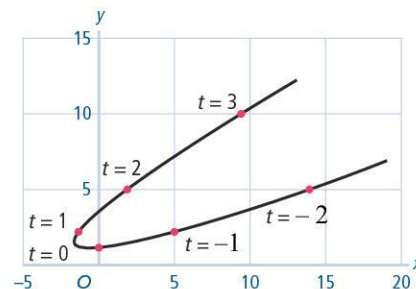
stelsel: $\begin{cases} x(t) = 4t^2 \\ y(t) = 4t \end{cases}$ of als vector: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t^2 \\ 4t \end{pmatrix}$.

Voorbeeld

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 - 3t \\ y(t) = 1 + t^2 \end{cases} \quad \text{met } t \text{ de tijd in seconden.}$$

Door voor t de waarden $-2, -1, 0, 1, 2$ en 3 in te vullen vind je de punten $(14, 5)$, $(5, 2)$, $(0, 1)$, $(-1, 2)$, $(2, 5)$ en $(9, 10)$ van de baan van P .



- 3 De baan van het punt P in het voorbeeld snijdt de y -as behalve in $(0, 1)$ nog een keer.

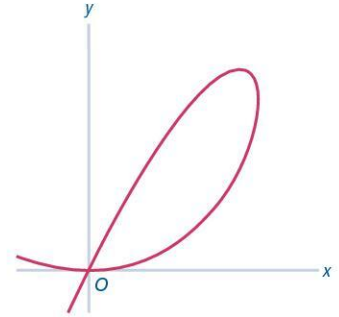
Bereken exact het tijdstip waarop dat gebeurt en de coördinaten van dat punt.

- 4 Voor de beweging van een punt $P(x, y)$ geldt:

$$x(t) = -t^2 + 6t \text{ en } y(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2.$$

In de figuur zie je een deel van de baan van P .

- a Op welke tijdstippen bevindt P zich in O ?
b Bereken het tijdstip waarop x een maximum heeft. In welk punt bevindt P zich dan?
c Bereken de tijdstippen waarop y een extreme waarde heeft. Welke punten van de baan horen daarbij?
d Als P de getekende lus doorloopt, is op zeker moment de afstand van P tot de beide assen gelijk. In welke punten (buiten de oorsprong) bevindt P zich dan?



Theorie

De **toppen** van de baan van een punt $P(x(t), y(t))$ vind je door na te gaan in welke punten x of y een extreme waarde heeft.

Daartoe bereken je de waarde(n) van t waarvoor $x'(t) = 0$ of $y'(t) = 0$.

Is $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dan heeft de baan een horizontale raaklijn.

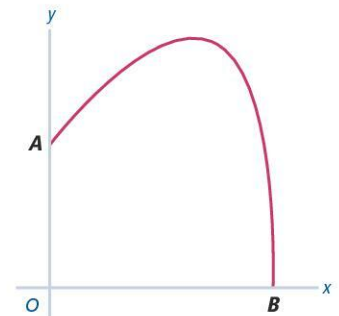
Is $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dan heeft de baan een verticale raaklijn.

In plaats van $x'(t)$ en $y'(t)$ worden ook de notaties $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ gebruikt.

- 5 Een punt P gaat van punt A op de y -as naar punt B op de x -as. De bewegingsvergelijkingen van P zijn gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = 5t - \frac{1}{3}t^2 \\ y(t) = 6t + 12 - t^2 \end{cases}$$

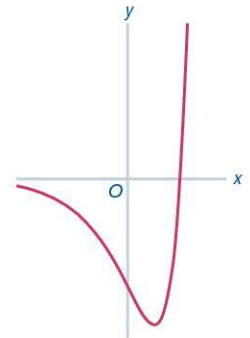
- a Bereken exact de coördinaten van A .
b Bereken in één decimaal de x -coördinaat van B .
c Bereken exact de coördinaten van de punten waar de baan een horizontale of verticale raaklijn heeft.



- 6 De baan van een punt P heeft parametervoorstelling:

$$x(t) = \ln(t) \text{ en } y(t) = t^2 - 4t \text{ met } t > 0.$$

- a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan met de x -as en de y -as.
b Bereken exact de coördinaten van het laagste punt van de baan.
c De grafiek lijkt voor $x \rightarrow -\infty$ de x -as als asymptoot te hebben. Waarnaar moet je t laten naderen, zodat $x \rightarrow -\infty$? Naar welke waarde nadert y in dat geval?
d De lijn $y = -3$ snijdt de baan in de punten A en B . Bereken exact AB .



3-2

Bewegen langs een lijn of een cirkel

- 7** Bereken voor elk van de volgende gevallen de coördinaten van enkele punten van de baan van punt $P(x(t), y(t))$, noteer deze coördinaten in de tabel en teken de baan.

a $x(t) = 5t$ en $y(t) = 2t$ voor $0 \leq t \leq 10$

b $x(t) = \frac{1}{2}t$ en $y(t) = 12 - 2t$ voor $0 \leq t \leq 6$

c
$$\begin{cases} x(t) = 2 + 1\frac{1}{2}t \\ y(t) = \frac{1}{4}t \end{cases} \text{ voor } 0 \leq t \leq 10$$

t	x	y
0		
...		
...		
...		

- 8** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = -1 + 3t$ en $y(t) = 4 - t$.
- a** Bereken de coördinaten van P voor $-5 \leq t \leq 5$ en teken de baan van P .
- b** De tekening lijkt een rechte lijn te zijn. Druk t uit in y en substitueer t in de vergelijking van x .
- c** Stel een vergelijking op van de baan van P in x en y .

- 9** Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen van twee punten P en Q .

Voor P geldt $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en voor Q geldt $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a** Laat zien dat de banen van P en Q samenvallen.
- b** Er is een verschil in snelheid waarmee P en Q de baan doorlopen. Hoe verhouden zich de snelheden van P en Q ?
- c** Wat verandert er aan de beweging van Q als je de richtingsvector vereenvoudigt?

De baan met een parametervoorstelling waarin zowel $x(t)$ als $y(t)$ lineaire functies van de tijd t zijn, is (een deel van) een rechte lijn. Een vergelijking van de vorm $y = ax + b$ krijg je door bijvoorbeeld t uit te drukken in x en dan te substitueren in de vergelijking van y .

H 10 De bewegingsvergelijkingen van P zijn $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

- a** Teken de plaats van P voor $t = 0, 6, 12$ en 18 .
- b** Stel een vergelijking op in x en y van de baan van P .

- 11** Een punt P beweegt zich over de lijn $3x - 4y + 8 = 0$. Op $t = 0$ bevindt P zich in het punt $(0, 2)$ en op $t = 12$ in het punt $(24, 20)$. Geef een parametervoorstelling van de baan van P met t als parameter.

- 12** De beweging van een punt P wordt gegeven door $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$
- a** Teken in een assenstelsel de plaats van P voor $t = 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi, \dots, 2\pi$.
- b** Welke vorm heeft de baan van P ?
- c** Toon aan dat $x^2 + y^2 = 1$ een vergelijking van de baan van P is.

De bewegingsvergelijkingen van een punt Q zijn $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$.

- d** Teken in een assenstelsel de plaats van Q voor $t = 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi, \dots, 2\pi$.
- e** Omschrijf de baan van Q .

Theorie

De baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen

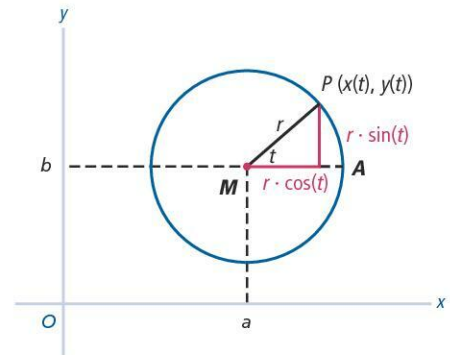
$$\begin{cases} x(t) = a + r\cos(t) \\ y(t) = b + r\sin(t) \end{cases}$$

is een cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r .

Uit de parametervoorstelling kun je een vergelijking van de cirkel als volgt afleiden:

$$r\cos(t) = x - a \text{ en } r\sin(t) = y - b, \text{ dus}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = r^2 \cdot 1 = r^2.$$



- 13** De bewegingsvergelijkingen van een punt R zijn: $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$
- a** Toon aan dat de baan van R een cirkel is.
- b** Waarin verschilt de beweging van R met die van P uit opdracht 12?
- c** Beantwoord de opdrachten a en b ook voor het punt S met bewegingsvergelijkingen $x(t) = \sin(t)$ en $y(t) = \cos(t)$.

- H 14** Stel een vergelijking in x en y op van de baan van een punt P met de volgende bewegingsvergelijkingen.

- a** $x(t) = 4 + 2\cos(t)$ en $y(t) = -3 + 2\sin(t)$
- b** $x(t) = 6\sin(t)$ en $y(t) = 6 + 6\cos(t)$

- H 15** De baan van een punt P heeft vergelijking $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 15$. Geef een mogelijke parametervoorstelling van de baan van P .

- 16** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$x(t) = 5 - 3\cos\left(2t + \frac{1}{2}\pi\right) \text{ en } y(t) = 1 + 3\sin\left(2t + \frac{1}{2}\pi\right).$$

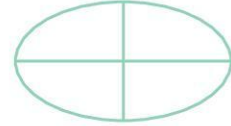
- a** Stel een vergelijking in x en y op van de baan van P .
- b** De beweging start op $t = 0$. In welk punt bevindt P zich dan?
- c** Op welk tijdstip heeft P precies een halve cirkelboog doorlopen?

3-3

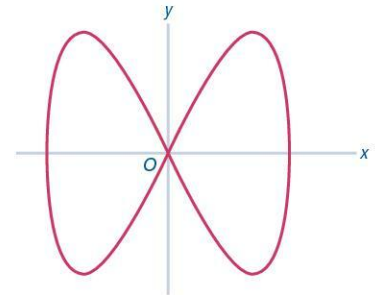
Periodieke bewegingen

- 17** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = 4\cos(t) - 2$ en $y(t) = 3\sin(t) + 3$.
- a** Toon aan dat $-6 \leq x(t) \leq 2$ en $0 \leq y(t) \leq 6$.
- b** De baan past dus binnen een rechthoek met zijden 8 en 6. Teken deze rechthoek en schets daarin aan de hand van een plot de baan van P .
- c** Welke coördinaten heeft het middelpunt?
- d** Bereken exact de snijpunten van de baan met de lijn $y = 1\frac{1}{2}$.
- e** Druk $\cos(t)$ uit in x en druk $\sin(t)$ uit in y en geef met behulp van de formule $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ een vergelijking van de baan van P .
- f** Verandert de baan van P als je t vervangt door $\frac{1}{2}t$?
- g** Wat verandert er aan de beweging van P ?
- 18** Geef een parametervoorstelling van de ellips met middelpunt $M(3, 0)$, een horizontale as met lengte 10 en een verticale as met lengte 6.
- 19** Hiernaast zie je de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen $x(t) = \cos(\frac{1}{3}\pi t)$ en $y(t) = \sin(\frac{2}{3}\pi t)$ met t in seconden. De beweging start op $t = 0$.
- a** Bereken de periode van x en de periode van y .
- b** Na hoeveel seconden heeft P de baan één keer doorlopen?

De baan van opdracht 17 is een ellips.



Een ellips heeft twee symmetrieassen: een korte en een lange.



Theorie

Zijn x en y periodieke functies en is ook de beweging van punt $P(x, y)$ periodiek, dan is de **periode** van die beweging gelijk aan het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van de periodes van x en y .

Voorbeeld

Punt P heeft bewegingsvergelijkingen $x(t) = \sin(\frac{1}{3}\pi t)$ en $y(t) = \sin(\frac{2}{5}\pi t)$ met t in seconden. Bereken exact de periode van de beweging van punt P .

Oplossing

De periode van x is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$; veelvouden zijn: 6, 12, 18, 24, 30,

De periode van y is 5; veelvouden zijn: 5, 10, 15, 20, 25, 30,
Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud is 30.
In 30 seconden heeft P de baan één keer doorlopen.

- 20a** Plot de baan van P uit het voorbeeld. Neem $0 \leq t \leq 30$ en stapgrootte 0,1.

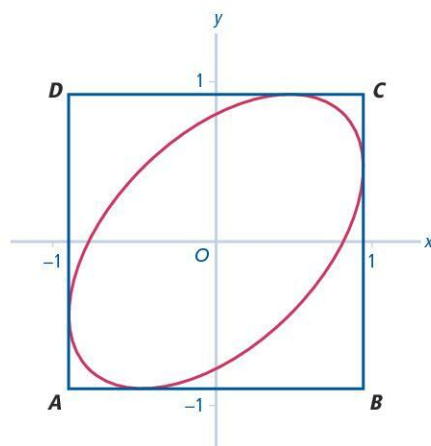
De bewegingsvergelijkingen van een punt Q zijn
$$\begin{cases} x(t) = \sin(5t) \\ y(t) = \sin(6t) \end{cases}$$

- b** Bereken de periode van de beweging van Q en plot de baan met dezelfde stapgrootte van t .
- c** Bereken in gehelen nauwkeurig de verhouding van de perioden van de beweging van P en de beweging van Q .
- d** Een punt R doorloopt dezelfde baan als P maar de periode van R is de helft van de periode van P . Geef de bewegingsvergelijkingen van R .

- H 21** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right) \end{cases}$$

- a** Leg uit dat de baan van P precies in vierkant $ABCD$ past, met $A(-1, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 1)$ en $D(-1, 1)$.
- b** Bereken exact en zonder te differentiëren de coördinaten van de punten waar de baan een horizontale of verticale raaklijn heeft.
- c** Toon aan dat de punten $E\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en $F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ op de baan van P liggen.
- d** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan van P met de y -as.



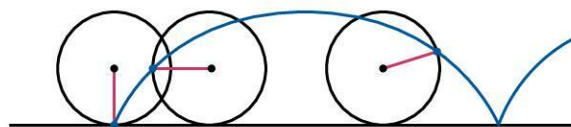
- 22** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn
$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(t) \\ y(t) = 2\sin(3t) \end{cases}$$

- a** Welke waarden kunnen $x(t)$ en $y(t)$ aannemen?
- b** Bereken exact de periode van de beweging.
- c** Bereken door gebruik te maken van het antwoord op opdracht a exact de coördinaten van de punten waarin de raaklijn aan de baan evenwijdig is met één van de assen.

- 23** Als je fietst, beschrijft een punt P op de buitenband de baan die hier is afgebeeld. Die baan heet een *cycloïde*.

De bewegingsvergelijkingen van P zijn $x(t) = rt - r\sin(t)$ en $y(t) = r - r\cos(t)$ met r de straal van de cirkel in cm en t de tijd in seconden.

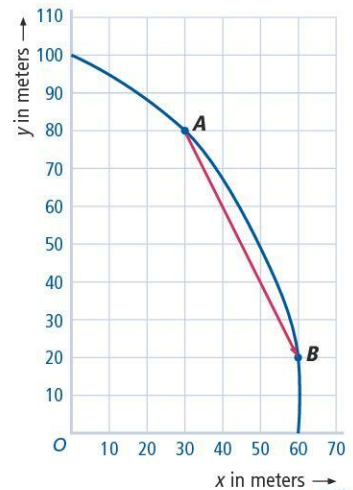
- a** Neem $r = 35$ en plot minstens twee periodes van de baan.
- b** Hoewel x geen periodieke functie is, is de baan wel periodiek. Bereken exact de periode van de baan.
- c** Bereken de snelheid van de fiets in km/u.
- d** In werkelijkheid rijdt de fietser 15 keer zo snel. Welke bewegingsvergelijkingen horen daar bij?



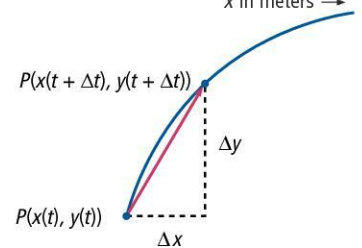
3-4

Snelheid en raaklijn

- 24 Een bal wordt vanaf een 100 meter hoge toren geworpen. De bewegingsvergelijkingen zijn $x(t) = 15t$ en $y(t) = 100 - 5t^2$ met t in seconden en $x(t)$ en $y(t)$ in meter. Op $t = 2$ is de bal in $A(30, 80)$ en op $t = 4$ in $B(60, 20)$.
- Over welke vector heeft de bal zich in die twee seconden verplaatst?
 - Bereken de vector van de *gemiddelde* verplaatsing per seconde over het tijdsinterval $[2, 4]$.
 - Bereken ook de vector bij de gemiddelde verplaatsing per seconde over de tijdsintervallen $[2, 3]$, $[2; 2,1]$ en $[2, 2,01]$.
 - Deze vectoren benaderen de snelheidsvector op $t = 2$. Wat zal de snelheidsvector $\vec{v}$ op $t = 2$ zijn?
 - Bereken de lengte van $\vec{v}$.
 - Geef de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A .



- 25 Als de tijd t toeneemt met Δt , verplaatst het punt $P(x(t), y(t))$ zich naar het punt $P(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$. x en y nemen dan toe met $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ en $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$.
- Druk de verplaatsingsvector van P uit in Δx en Δy .
 - Over welke vector vindt de gemiddelde verplaatsing per tijdseenheid plaats?
 - Beredeneer dat de snelheidsvector $\vec{v}$ gelijk is aan $\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.
 - Druk de lengte van $\vec{v}$ uit in $x'(t)$ en $y'(t)$.



Theorie

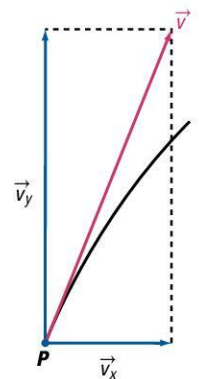
Is t de tijd, dan is de **snelheidsvector** van een punt $P(x(t), y(t))$ de vector $\vec{v}$ met beginpunt P . De snelheidsvector ligt op de lijn die in P raakt aan de baan.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y'(t) \end{pmatrix} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

De snelheid in de x -richting is $v_x = x'(t)$;
de snelheid in de y -richting is $v_y = y'(t)$

De **(baan)snelheid** van P is $v = |\vec{v}| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P aan de baan is $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ mits $x'(t) \neq 0$.



Voorbeeld

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = t^2 - 1$ en $y(t) = t^3 - 3t$.
Bereken de coördinaten en de snelheid van P op $t = 2$.

Oplossing

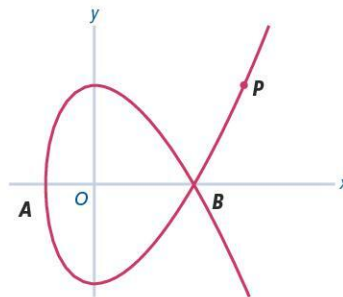
$$x(2) = 3 \text{ en } y(2) = 2,$$

dus P bevindt zich in het punt $(3, 2)$.

$$x'(t) = 2t, \text{ dus } v_x = x'(2) = 4;$$

$$y'(t) = 3t^2 - 3, \text{ dus } v_y = y'(2) = 9;$$

$$v = \sqrt{16 + 81} = \sqrt{97} \approx 9,85.$$



H 26 In het voorbeeld passeert P de x -as één keer in A en twee keer in B .

- Bereken exact de tijdstippen waarop dat gebeurt.
- Bereken exact de coördinaten van A en B .
- Bereken exact de snelheidsvectoren van P op die tijdstippen.
- Bereken in graden de hoek die de snelheidsvectoren in B maken met de x -as.
- Bereken exact de snelheden waarmee P de x -as passeert.
- Bereken exact op welke tijdstippen de snelheidsvector evenwijdig is aan de x -as. In welke punten bevindt P zich dan?

27 Een punt P heeft bewegingsvergelijkingen $x(t) = 2t^2 - 3t$ en $y(t) = 1 + t^2$.

Een punt A ligt op de baan van P . De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A aan de baan van P is gelijk aan -1 .
Stel een vergelijking op van deze raaklijn.

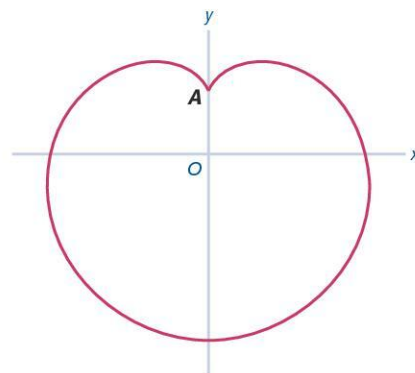
28 Punt P heeft bewegingsvergelijkingen $x(t) = 4\cos(t)$ en $y(t) = 4\sin(t)$.
Punt Q heeft bewegingsvergelijkingen $x(t) = 4\cos(t)$ en $y(t) = 6\sin(t)$.

- Welke vorm heeft de baan van P ? En die van Q ?
- Toon aan dat de snelheid van P constant is.
-  Bereken exact de minimale en maximale snelheid van Q .

29 De *cardioïde* (hartkromme) hiernaast is de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen $x(t) = 2\sin(t) + \sin(2t)$ en $y(t) = -2\cos(t) - \cos(2t)$.
 A is het punt van de baan op de positieve y -as.

- Bereken de periode van de beweging.
- Plot de grafieken van x en y op het tijdsinterval $[0, 2\pi]$ en ga na welke waarden $x(t)$ en $y(t)$ kunnen aannemen.
- Op welk tijdstip zal P zich in A bevinden?
- Bereken exact de snelheid van P in A .
- Op $t = \frac{1}{2}\pi$ bevindt P zich in punt B .

Stel een vergelijking op van de raaklijn in B aan de baan van P .



3-5

Versnelling

- 30** De bewegingsvergelijkingen van een bal die vanaf een 80 meter hoge toren wordt geworpen, zijn $x(t) = 9t$ en $y(t) = 80 - 5t^2$ met t in seconden en $x(t)$ en $y(t)$ in meters.
- a** Geef een formule voor de snelheid v van de bal.
- b** Bereken de snelheid waarmee de bal de grond treft.
- c** De versnelling in de x -richting is gelijk aan $x''(t)$. Hoe groot is deze versnelling? Wat is de betekenis van dat antwoord?
- d** Stel een formule op voor de versnelling in de y -richting.
- e** Bereken $\frac{dv}{dt}$ voor $t = 2$ en voor $t = 4$.

Volgens de eerste wet van Newton is een voorwerp waarop geen kracht wordt uitgeoefend in rust of voert het een eenparige rechtlijnige beweging uit: de snelheidsvector is $\vec{0}$ of heeft op elk moment dezelfde richting en grootte.

Theorie

Verandert de snelheidsvector van richting of grootte, dan is er sprake van een versnelling. Voor een punt $P(x(t), y(t))$ is de **versnellingsvector** $\vec{a} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$.

De verandering van de baansnelheid heet de **(baan)versnelling** en is gelijk aan $\frac{dv}{dt}$, waarin $v = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

Voorbeeld

Een punt P beweegt zich over een ellips met bewegingsvergelijkingen $x(t) = 2 \cos(t)$ en $y(t) = \sin(t)$. Geef een formule voor de baanversnelling.

Oplossing

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ dus de snelheid van P is $v = \sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)}$.

De baanversnelling is $\frac{dv}{dt} = \frac{8\sin(t)\cos(t) - 2\cos(t)\sin(t)}{2\sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)}} = \frac{3\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)}}$

- ✂ 31 De ellips uit het voorbeeld is ook op het werkblad getekend.

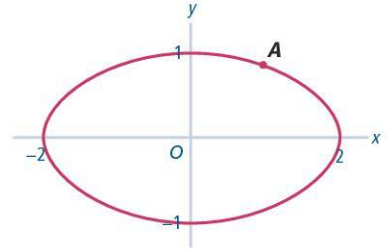
P bevindt op $t = \frac{1}{3}\pi$ in punt A .

- a Teken met beginpunt A de snelheidsvector in A .
- b Teken met beginpunt A de versnellingsvector in A .
- c Bereken exact de baanversnelling in A .

De bewegingsvergelijkingen van een punt Q zijn

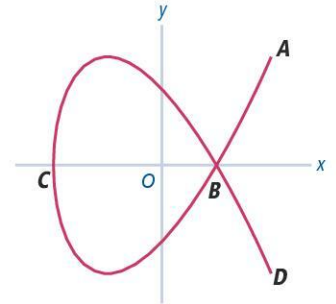
$$x(t) = 2\cos(t) \text{ en } y(t) = 2\sin(t).$$

- d Teken de baan van Q en maak de opdrachten a, b, en c voor Q .



- H 32 De baan van het punt $P(\cos(2t), \cos(3t))$ met $0 \leq t \leq \pi$ snijdt de x -as in de punten B en C .

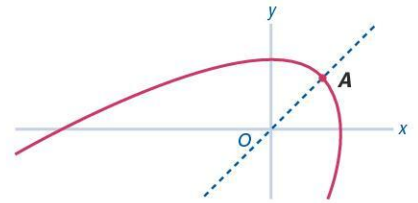
- a In welk punt start de beweging? En waar eindigt de beweging?
- b Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan met de assen.
- c Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan waar de raaklijn aan de baan evenwijdig is met de x -as of de y -as.
- d Toon aan dat de baan symmetrisch is in de x -as.
- e Toon met een berekening aan dat de snelheid van P in B groter is dan in C .
- f Bereken exact de baanversnelling van P in C .



- 33 Punt P heeft bewegingsvergelijkingen
$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t \\ y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2 \end{cases}$$

Lijn $l: y = x$ snijdt de baan van P in punt A .

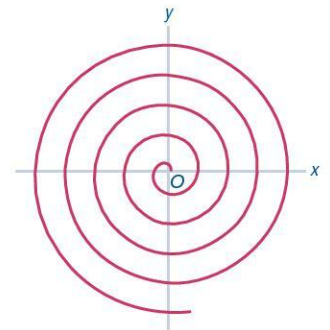
- a Toon aan dat de raaklijn in A loodrecht op l staat.
- b Toon aan dat de baanversnelling in A gelijk is aan 0. Wat betekent dat voor de snelheid van P in A ?



- 34 Punt P heeft bewegingsvergelijkingen $x(t) = t\cos(t)$ en $y(t) = t\sin(t)$ met $t \geq 0$.

De baan van P heet de *spiraal van Archimedes*.

- a Bereken exact de waarden van t waarvoor P zich op de x -as bevindt.
- b Bereken exact de waarden van t waarvoor P zich op de y -as bevindt.
- c Toon aan dat $v = \sqrt{1 + t^2}$.
- d Leid een formule af voor de baanversnelling.

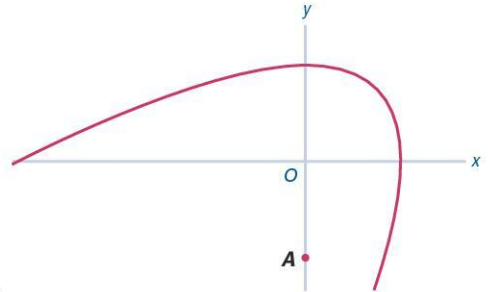


- ☀ 35 De baan van punt P in opdracht 34 met t in seconden wordt zo gewijzigd, dat P vanaf $t = 0$ elke seconde door een roosterpunt op één van de assen gaat. Geef de bijbehorende parametervoorstelling.

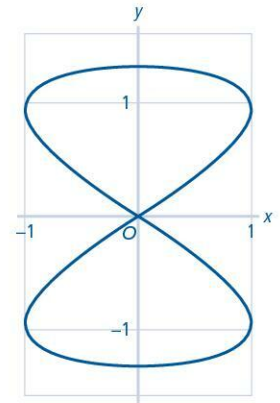
3-6

Gemengde opdrachten

- 36** Een punt P heeft bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 4t - t^2 \\ y(t) = 4 - t^2 \end{cases}$
- Bereken exact de coördinaten van snijpunten van de baan met de assen.
 - Bereken exact de coördinaten van de punten op de baan waar de raaklijn aan de baan evenwijdig is met één van de assen.
 - Bereken exact de coördinaten van het punt van de baan waarvoor de afstand van P tot het punt $A(0, -4)$ minimaal is.
 - Toon aan dat de coördinaten van de punten van de baan voldoen aan de vergelijking $(x - y)^2 + 8x + 8y = 48$.



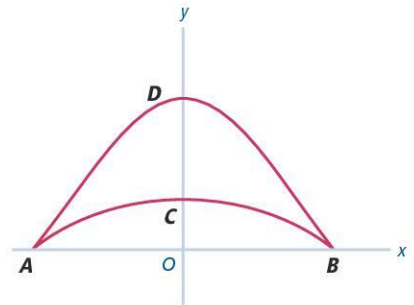
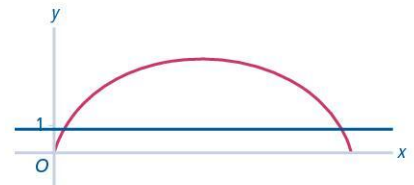
- 37** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = \cos(\frac{1}{3}\pi t)$ en $y(t) = \sin(\frac{1}{6}\pi t) + \cos(\frac{1}{6}\pi t)$ met $0 \leq t \leq 12$.
- Bereken exact op welke tijdstippen P zich in O bevindt.
 - Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt.



- 38** De bewegingsvergelijkingen van punt P zijn $\begin{cases} x(t) = 3\cos(t) \\ y(t) = \frac{3\sin^2(t)}{2 - \sin(t)} \end{cases}$

De baan van P heeft met de x -as de punten A en B gemeen en met de y -as de punten C en D .

- Bereken exact de coördinaten van de punten A , B , C en D .
 - Toon aan dat de raaklijnen in C en D aan de baan evenwijdig zijn met de x -as.
 - Bereken exact de snelheid van P in C en in D .
- 39** Punt P beweegt zich over de cycloïde met bewegingsvergelijkingen $x(t) = 2t - 2\sin(t)$ en $y(t) = 2 - 2\cos(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- Toon aan dat voor de snelheid v geldt: $v = \sqrt{8 - 8\cos(t)}$.
 - Bereken exact de maximale snelheid van P en de coördinaten van het punt waarin die snelheid wordt bereikt.
 - Bereken exact de x -coördinaten van de punten waar de baan de lijn $y = 1$ snijdt.

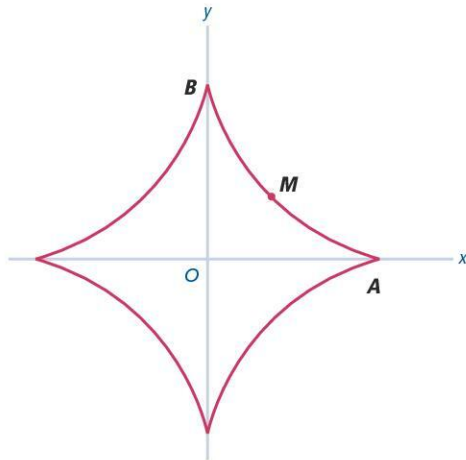


- 40 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos^3\left(\frac{1}{6}\pi t\right) \\ y(t) = 4\sin^3\left(\frac{1}{6}\pi t\right) \end{cases} \text{ met } t \geq 0 \text{ in seconden.}$$

De baan heet een *asteroïde* of *sterkromme*.

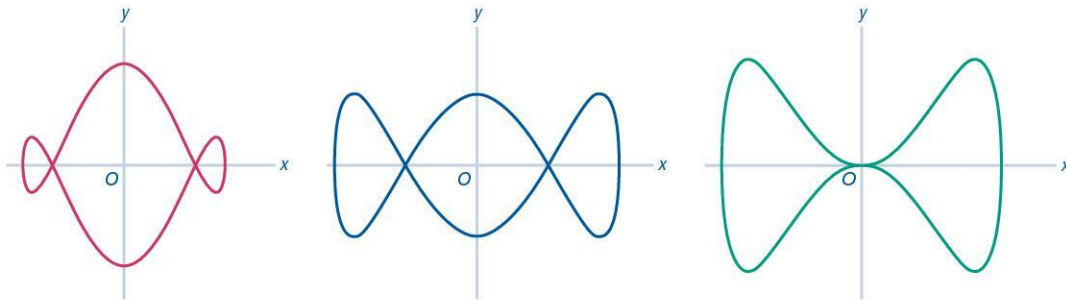
- Welke waarden kunnen $x(t)$ en $y(t)$ aannemen?
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten met de assen.
- In hoeveel seconden legt P de baan één keer af?
- In welk punt start de beweging? En op welk tijdstip passeert P punt B voor de eerste keer?
- Op welk tijdstip zal P zich voor het eerst in het midden M van boog AB bevinden?
- Stel een vergelijking op van de raaklijn in M aan de baan.



- 41 Kijk nog eens naar de asteroïde in opdracht 40.

- Toon aan, dat voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P aan de baan geldt: $\frac{dy}{dx} = -\tan\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$.
- Toon aan dat voor de snelheid van P geldt: $v = \left|2\pi \sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right)\cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right)\right|$.
- Bereken exact de snelheid van P in de snijpunten met de assen.
- Bereken exact de baanversnelling van P in de snijpunten met de assen.

- 42 Voor elke waarde van a zijn de bewegingsvergelijkingen van punt P gegeven door $x(t) = 2\cos(t)$ en $y(t) = 4\sin^3(t) - a\sin(t)$. Hieronder zijn de banen voor $a = 2$, $a = 3$ en $a = 4$ getekend.



- Bereken in gehele graden de hoek waaronder de baan voor $a = 2$ zichzelf snijdt.
- Bereken exact voor welke waarden van a de baan vier punten gemeenschappelijk heeft met de x -as.

Samenvatting

Parametervoorstelling, bewegingsvergelijkingen, baan

Een parametervoorstelling legt de positie van een punt P in een assenstelsel vast met behulp van een hulpvariabele of parameter. Als die parameter de tijd is, spreek je ook wel over de bewegingsvergelijkingen van P .

De bijbehorende grafiek heet de baan van P .

Toppen, horizontale en verticale raaklijn

De toppen van de baan van een punt $P(x(t), y(t))$ vind je door na te gaan in welke punten x of y een extreme waarde heeft.

Daartoe bereken je de waarde(n) van t waarvoor $x'(t) = 0$ of $y'(t) = 0$.

Is $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dan heeft de baan een horizontale raaklijn.

Is $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dan heeft de baan een verticale raaklijn.

Lijnen en cirkels

De baan met een parametervoorstelling waarin zowel $x(t)$ als $y(t)$ lineaire functies van de tijd t zijn, is (een deel van) een rechte lijn.

De baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = a + r \cos(t) \\ y(t) = b + r \sin(t) \end{cases}$$

is een cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r .

Snelheid, versnelling en raaklijn

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ is de snelheidsvector van punt $P(x(t), y(t))$.

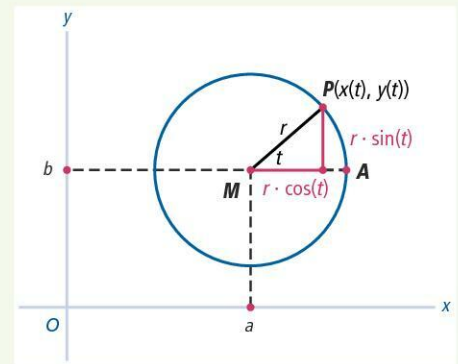
$x'(t)$ is de snelheid in de x -richting; $y'(t)$ is de snelheid in de y -richting.

De snelheidsvector $\vec{v}$ raakt in P aan de baan van P .

De (baan)snelheid van P is $v = |\vec{v}| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ is de versnellingsvector van P .

De baanversnelling van P is gelijk aan $\frac{dv}{dt}$.



Je kunt de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan berekenen en de coördinaten van punten waarin de raaklijn horizontaal of verticaal is

Je berekent de helling in een punt met $\frac{y'(t)}{x'(t)}$

Voorbeeld

De bewegingsvergelijkingen van P zijn $x(t) = 2 - 3\sin(t)$ en $y(t) = 5 \cos(2t)$. Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan in het punt met $t = \frac{1}{6}\pi$ en de coördinaten van de punten met een horizontale raaklijn.

Oplossing

$$x'(t) = -3\cos(t) \text{ en } y'(t) = -5\sin(2t) \cdot 2 = -10\sin(2t)$$

$$x'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -1\frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en } y'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -5\sqrt{3}; \text{ de richtingscoëfficiënt op } t = \frac{1}{6}\pi \text{ is } \frac{-5\sqrt{3}}{-1\frac{1}{2}\sqrt{3}} = 3\frac{1}{3}.$$

Horizontale raaklijn: $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus $\sin(2t) = 0$; $2t = k \cdot \pi$, dus $t = k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

Omdat moet gelden $x'(t) \neq 0$, is de raaklijn horizontaal als $t = k \cdot \pi$.

Er is alleen een horizontale raaklijn in het punt $(2, 5)$.

Je kunt de periode van een periodieke beweging berekenen

De periode van een periodieke beweging van een punt $P(x, y)$, waarbij x en y periodieke functies zijn, is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van de periodes van x en y .

Voorbeeld

Bereken exact de periode van de beweging van het punt $P(\sin(t), \sin(\frac{3}{5}t))$ met t in seconden.

Oplossing

De periode van x is 2π ; veelvouden zijn: $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, \dots$

De periode van y is $\frac{2\pi}{\frac{3}{5}} = 3\frac{1}{3}\pi$; veelvouden zijn: $3\frac{1}{3}\pi, 6\frac{2}{3}\pi, 10\pi, \dots$

Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud is 10π ; de periode is 10π seconden.

Je kunt de (baan)snelheid en de (baan)versnelling van een punt berekenen

De (baan)snelheid is $v(t) = |\vec{v}| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ en de

baanversnelling is de afgeleide $v'(t)$ van de baansnelheid.

Voorbeeld

Punt P heeft bewegingsvergelijkingen $x(t) = t^2 + 1$ en $y(t) = 3t + t^3$.

Bereken exact de snelheid en de baanversnelling van P op $t = 1$.

Oplossing

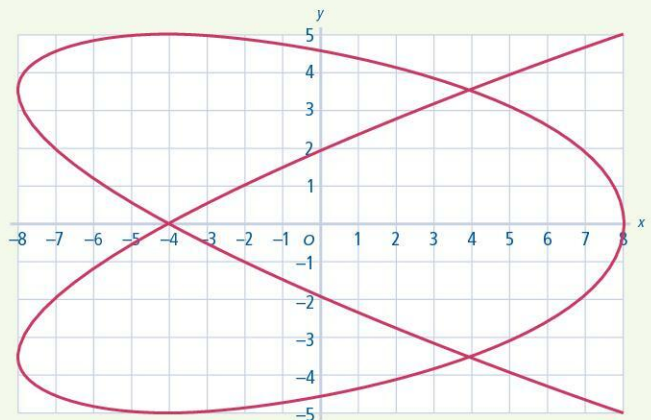
$$x'(t) = 2t \text{ en } y'(t) = 3 + 3t^2; \quad x'(1) = 2 \text{ en } y'(1) = 6, \text{ dus } v = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}.$$

$$v = \sqrt{(2t)^2 + (3 + 3t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 9 + 18t^2 + 9t^4} = \sqrt{9t^4 + 22t^2 + 9}$$

$$\text{De baanversnelling is } \frac{dv}{dt} = \frac{36t^3 + 44t}{2\sqrt{9t^4 + 22t^2 + 9}}; \text{ op } t = 1 \text{ geldt } \frac{dv}{dt} = \frac{80}{2\sqrt{40}} = \sqrt{40}.$$

Test jezelf

- T-1** De bewegingsvergelijkingen van P zijn $\begin{cases} x(t) = t^2 - 3t \\ y(t) = 6t - t^2 \end{cases}$
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de baan met de assen.
 - Bereken de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn aan de baan evenwijdig is aan de x -as of de y -as.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-1.
- T-2** De bewegingsvergelijkingen van P zijn $x(t) = 4 + 3t$ en $y(t) = 6 - 2t$.
- Geef een vectorvoorstelling en een vergelijking van de baan van P .
Een punt Q heeft bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 4 + 3 \sin(t) \\ y(t) = 6 - 2 \sin(t) \end{cases}$
 - Toon aan dat de baan van Q samenvalt met een deel van de baan van P .
 - Bereken de coördinaten van de eindpunten van de baan van Q .
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-2.
- T-3** Punt P heeft bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 5 \cos(\pi t) - 3 \\ y(t) = 5 \sin(\pi t) \end{cases}$
met t in seconden.
- De beweging start op $t = 0$. In welk punt bevindt P zich dan?
 - In hoeveel seconden heeft P de baan één keer doorlopen?
 - Stel een vergelijking in x en y op van de baan van P .
 - Een punt Q beweegt zich over dezelfde baan als P , maar de snelheid van Q is de helft van de snelheid van P .
Geef mogelijke bewegingsvergelijkingen van Q .
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-2.
- T-4** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = 8 \cos(4t)$ en $y(t) = 5 \sin(3t)$ met $t \geq 0$.
- In welk punt start de beweging?
 - Wat is de periode van de beweging?
 - Op $t = \frac{1}{3}$ bevindt P zich in punt A .
Bereken exact de coördinaten van A .
 - Bereken exact de helling van de baan van P in A .
 - De punten $B(8, 5)$ en $C(8, -5)$ zijn 'keerpunten'.
Bereken exact de waarde van t waarop P zich voor het eerst in B bevindt.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-3.



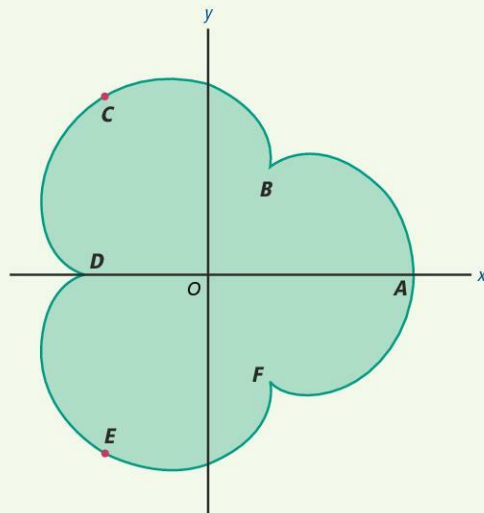
T-5 Een punt P beweegt zich over de rand van een soort klaverblaadje. De bewegingsvergelijkingen zijn

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos(t) + \cos(4t) \\ y(t) = 4\sin(t) + \sin(4t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

De baan van P is draaisymmetrisch met draaipunt O en draaihoek van 120° .

- a** In welk punt bevindt P zich op tijdstip $t = 0$?
- b** Hoe groot is de periode van de beweging?
- c** Welke waarden van t horen bij de punten C en E ?
- d** Welke waarden van t horen bij de punten D , B en F ?
- e** Controleer met een berekening dat $BE = AD$.
- f** Bereken de snelheid van P in A en in D .

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-4.



T-6 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

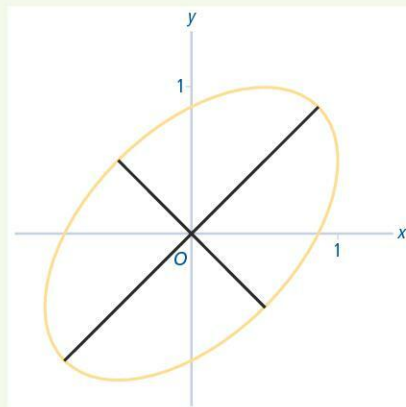
$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right) \end{cases}$$

- a** De baan is een ellips. De eindpunten van de assen van de ellips worden bereikt op de tijdstippen $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $1\frac{1}{6}\pi$ en $1\frac{2}{3}\pi$.

Bereken exact de lengte van de beide assen.

- b** Toon met een berekening aan dat de baanversnelling in de eindpunten van de assen gelijk is aan 0.
- c** Bereken exact de snelheid van P in de eindpunten van de assen.

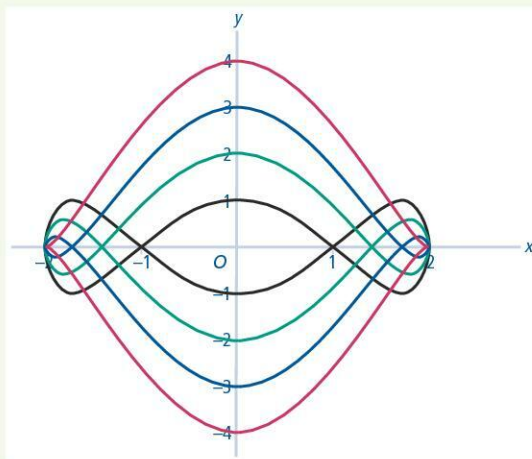
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-5.



T-7 Voor vier verschillende waarden van a zie je hiernaast de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 4\sin^3(t) - a\sin(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- a** Bereken voor $a = 1$ exact de coördinaten van de snijpunten van de baan met de assen.
- b** Bereken exact de waarde van a waarvoor de baan door de punten $(1, 0)$ en $(-1, 0)$ gaat.
- c** Bereken de waarde van a waarvoor de baan de x -as in O raakt.



Extra oefening - Basis

B-1 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$x(t) = 6t - t^2 \quad \text{en} \quad y(t) = 2t^2 - \frac{1}{3}t^3 \quad \text{met } t \text{ in seconden.}$$

- a** Maak een tabel voor $-2 \leq t \leq 8$.
- b** Bereken exact het tijdstip waarop x maximaal is. Welk punt van de baan hoort daarbij?
- c** Bereken exact de tijdstippen waarop de raaklijn aan de baan evenwijdig is aan de x -as en bereken de coördinaten van de bijbehorende punten.
- d** Teken de baan aan de hand van de gevonden gegevens.
- e** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan met de lijn $y = x$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-1.

B-2 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn
$$\begin{cases} x(t) = 3 + \cos(t) \\ y(t) = 1 + 3\cos(t) \end{cases}$$

- a** De baan van P is een deel van een rechte lijn. Stel een vergelijking op van die lijn en bereken exact de coördinaten van de eindpunten van de baan.
- b** Punt Q beweegt zich over een cirkel met bewegingsvergelijkingen $x(t) = 4 + 3\cos(t)$ en $y(t) = 2 - 3\sin(t)$. Stel een vergelijking van de cirkel op.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-2.

B-3 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn
$$\begin{cases} x(t) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right) \\ y(t) = \sin\left(\frac{1}{a}\pi t\right) \end{cases}$$

Bereken exact de periode van de beweging voor $a = 1, 2, 3$ en 4 .

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-3.

B-4 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$x(t) = 5\cos(t) \quad \text{en} \quad y(t) = 5\sin\left(2t - \frac{2}{3}\pi\right).$$

- a** Bereken exact de periode van de beweging.
- b** De lijn $x = 2\frac{1}{2}$ snijdt de baan achtereenvolgens in A en in B .

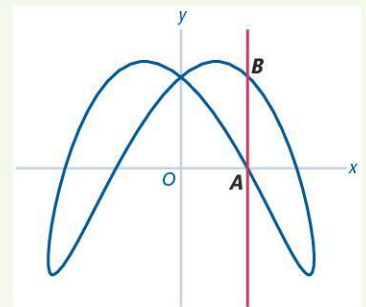
Toon algebraïsch aan dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A twee maal zo groot is als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in B .

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-4.

B-5 Gegeven is de baan van punt P als beschreven in opdracht B-1.

Bereken exact de baanversnelling op tijdstip $t = 0$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-5.

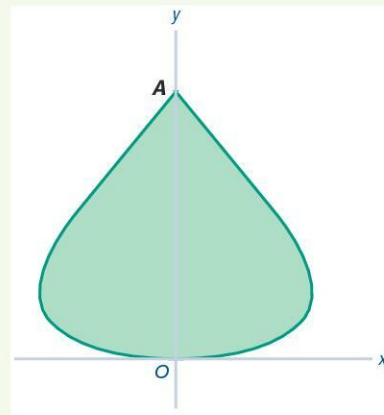


Extra oefening - Gemengd

G-1 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = 5 \sin(t) \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad \text{met } -\pi \leq t \leq \pi.$$

- a** Bereken exact de coördinaten van de punten waarin de raaklijn aan de baan evenwijdig is aan de y -as.
- b** Bewijs dat de baan symmetrisch is in de y -as.
- c** De beweging start op $t = -\pi$ in punt A . Bereken exact de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in aan de baan bij vertrek van P uit A .
- d** Bereken ook exact de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan bij aankomst van P in A .
- e** Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in O .



G-2 $\begin{cases} x(t) = 3 + \sin(t) \\ y(t) = 2 - \cos(t) \end{cases}$ en $\begin{cases} x(t) = -2 + 2 \sin(t) \\ y(t) = -1 + 3 \cos(t) \end{cases}$ zijn

parametervoorstellingen die horen bij de bewegingen van respectievelijk de punten P en Q .

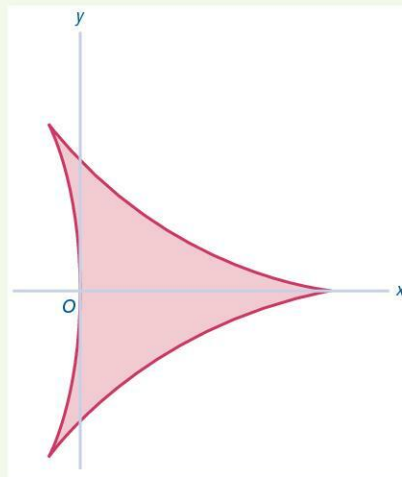
- a** Toon aan dat de baan van P een cirkel is en de baan van Q een ellips.
- b** Stel van beide banen een vergelijking op.
- c** Als P en Q hun baan doorlopen, doorloopt het midden M van lijnstuk PQ ook een baan.

Bereken exact de coördinaten van M op $t = 0$ en $t = \frac{1}{2}\pi$.

- d** Stel bewegingsvergelijkingen op voor punt M .
- e** Beschrijf de baan die M doorloopt.

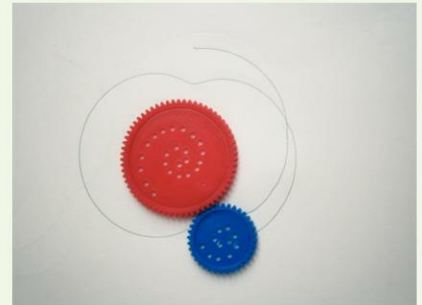
G-3 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = \cos^2(t) + \cos(t)$ en $y(t) = \sin(t)(1 - \cos(t))$.

- a** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan met de assen.
- b** Bereken exact de coördinaten van de punten waarin de snelheid gelijk is aan 0, dus waar geldt $x'(t) = 0$ en $y'(t) = 0$.



Uitdagende opdrachten

De spirograaf is bedacht door de Engelse ingenieur Denys Fisher (1918 – 2002) en bestaat uit een set ronde schijven en andere voorwerpen met tandwielen die je om elkaar heen kunt laten rollen. Door een potlood in een van de gaatjes te steken, kun je prachtige meetkundige patronen maken.

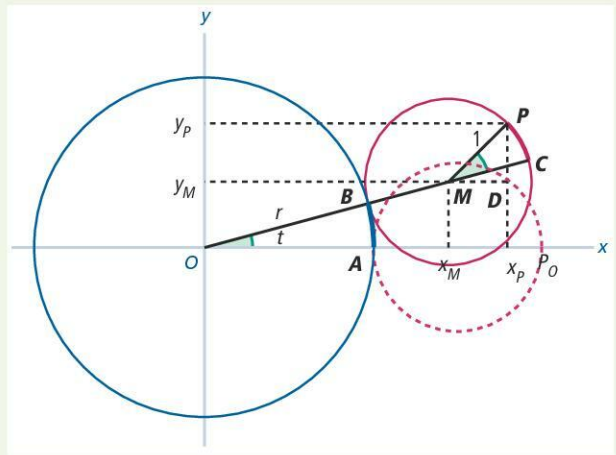


- U-1** De rode cirkel met middelpunt M en straal 1 rolt over de blauwe cirkel $x^2 + y^2 = r^2$. P ligt op de rode cirkel en start in het punt $P_0(r+1, 0)$. Tijdens het rollen verplaatst M zich over de cirkel met middelpunt M en straal $r+1$. Neem aan dat OM in t seconden over een hoek van t radialen is gedraaid.

- a** Hoe groot is de lengte van boog AB op tijdstip t ?
b Tegelijkertijd draait P om M .
 Leg uit dat boog CP even lang is als boog AB .
c Druk $\angle CMP$ en $\angle DMP$ uit in t .
d Druk x_M en y_M uit in t .

- e** Toon aan dat
$$\begin{cases} x(t) = (r+1)\cos(t) + \cos((r+1)t) \\ y(t) = (r+1)\sin(t) + \sin((r+1)t) \end{cases}$$

bewegingsvergelijkingen zijn van P .

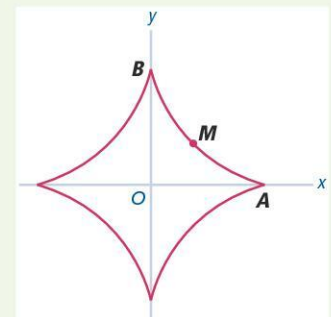


- U-2** De baan van punt P uit opdracht U-1 heet een epicycloïde.
a Onderzoek de baan voor verschillende gehele waarden van r .
 Plot telkens de baan en de cirkel met straal r .
 Voorspel hoe de baan er uit zal zien voor $r = 8$.
b Wat is de periode van de beweging voor $r = \frac{5}{3}$?

- U-3** Je kunt ook een cirkel binnen een grotere cirkel laten rollen. De banen die je zo krijgt noem je hypocycloïden. Op soortgelijke manier als in U-1 kun je bewegingsvergelijkingen voor die banen afleiden.

Er geldt:
$$\begin{cases} x(t) = (r-1)\cos(t) + \cos((r-1)t) \\ y(t) = (r-1)\sin(t) - \sin((r-1)t) \end{cases}$$

De asteroïde uit opdracht 40 is een hypocycloïde. Onderzoek voor welke waarde van r je een asteroïde krijgt.



Schroefbewegingen

Een **helix** (meervoud helices; van het Griekse *élix* gedraaid) of **schroeflijn** is een speciale vorm van een drie-dimensionale spiraal-achtige figuur met een constante straal.
Bekende toepassingen van de helix zijn de leuning van een wenteltrap, de veer van een balpen en de kurkentrekker.

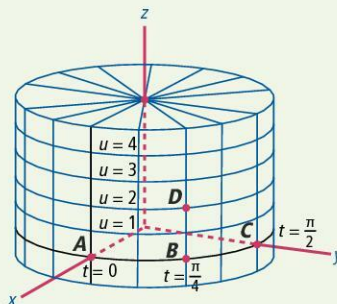


De spiraal van een goede kurkentrekker is open, er kan een lucifer in gestoken worden. Rechts staat de uitvinding van Archimedes (287-212 v. Chr.) waarmee vloeistoffen of poeders kunnen worden getransporteerd. Wat is de achterliggende wiskunde?

Als je een lijn l wentelt om een evenwijdige as, dan beschrijft l een cilinder. Als tegelijkertijd een punt P op l naar boven beweegt, dan doorloopt P op de cilinder een schroeflijn.

De bewegingsvergelijkingen van een punt $P(x, y, z)$ op een cilinder met diameter 8 zijn:

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos(t) \\ y(t) = 4\sin(t) \\ z(t) = u \end{cases}$$



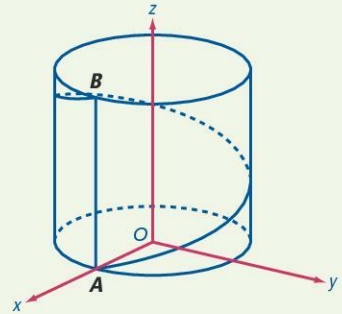
Opdracht

- Ga na dat P zich in op $t = 0$ bevindt in $A(4, 0, 0)$ en op $t = \frac{\pi}{2}$ in $C(0, 4, 0)$.
- Geef de coördinaten van punt D .

De bewegingsvergelijkingen van een punt P op een schroeflijn op de cilinder zijn:

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos(t) \\ y(t) = 4\sin(t) \\ z(t) = \frac{5}{2\pi}t \end{cases}$$

Hiernaast is één wenteling getekend.



Opdracht

- Hoe lang duurt een omwenteling?
- De spoed van de schroeflijn is de afstand tussen twee windingen gemeten in de richting van de as van de cilinder waar hij op ligt. Anders geformuleerd: de spoed is het verschil in hoogte tussen het beginpunt en het eindpunt van één omwenteling. Hoe groot is de spoed van deze schroeflijn?
- Eén omwenteling is te tekenen als diagonaal van een opengeklapte cilindermantel. Zo'n cilindermantel is een rechthoek van $2\pi r$ bij h . Vul de juiste waarden voor r en h in en bereken de lengte van de kromme.
- De (baan)snelheid van P is

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

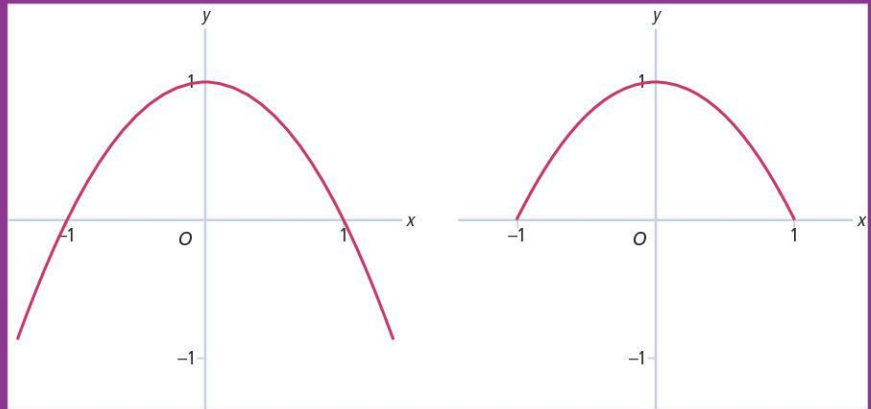
Bereken de lengte van de kromme met $\int_0^{2\pi} v dt$

en ga na dat dit dezelfde uitkomst oplevert.

De dubbele helix



Links de DNA-dubbele helix, rechts wenteltrap in het Vaticaanse museum in de vorm van een dubbele helix.



Dezelfde grafieken?

*Hierboven staat links de grafiek van de functie $f(x) = 1 - x^2$.
De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = \cos(t)$ en $y(t) = \sin^2(t)$. Rechts staat de baan van punt P .*

*De baan van punt P valt gedeeltelijk samen met de parabool.
Hoe zou je dit kunnen bewijzen?*

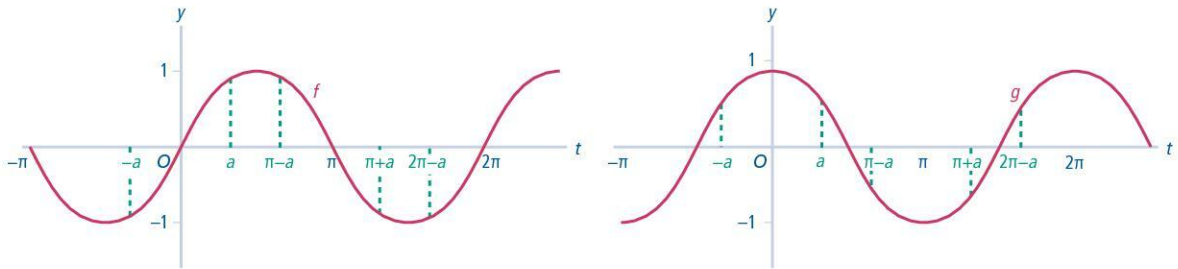
Hoofdstuk 4

Goniometrische formules

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	88
4-1	Somformules	90
4-2	Herleiden	92
4-3	Vergelijkingen	94
4-4	Parametervoorstellingen	96
4-5	Gemengde opdrachten	98
	Samenvatting	100
	Test jezelf	102
	Extra oefening - Basis	104
	Extra oefening - Gemengd	105
	Uitdagende opdrachten	106
	Christiaan Huijgens en de skatebaan	107

Voorkennis



- V-1** Hierboven staan de grafieken van de functies $f(t) = \sin(t)$ en $g(t) = \cos(t)$. Op de horizontale as zijn de getallen $-a$, a , $\pi - a$, $\pi + a$ en $2\pi - a$ aangegeven.
- Welke symmetrieassen heeft de grafiek van f ?
 - En welke symmetrieassen heeft de grafiek van g ?
 - Wat is juist: $\sin(-a) = \sin(a)$ of $\sin(-a) = -\sin(a)$?
 - Geldt $\cos(\pi - a) = \cos(a)$ of $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$?
 - Welk verband is er tussen $\sin(\pi + a)$ en $\sin(a)$?
 - Plot in één figuur de grafieken van $h(t) = \cos(\pi + t)$ en $k(t) = \cos(t)$. Wat blijkt?

Theorie

Goniometrische formules

- | | |
|---|---|
| > $\sin(-x) = -\sin(x)$ | $\cos(-x) = \cos(x)$ |
| > $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ | $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ |
| > $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ | $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ |
| > $\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(x)$ | $\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \sin(x)$ |
| > $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ | $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ |

Ook geldt $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Voorbeeld

Schrijf $f(x) = \sin(5\pi - x)$ zo eenvoudig mogelijk.

Oplossing

$$f(x) = \sin(5\pi - x) = \sin(3\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

- V-2** Herleid de volgende functievoorschriften tot $\sin(t)$, $\cos(t)$, $-\sin(t)$ of $-\cos(t)$.
- $f(t) = \sin(7\pi + t)$
 - $g(t) = \cos(-2\pi - t)$
 - $h(t) = \sin(-3\pi - t)$
 - $k(t) = \cos(-t - 23\pi)$
- V-3** Gebruik de goniometrische formules en schrijf
- $\cos\left(\frac{1}{3}\pi + x\right)$ in de vorm $\sin(px + q)$.
 - $\sin\left(x - 2\frac{1}{4}\pi\right)$ in de vorm $\cos(px + q)$.
 - $-\sin\left(-\frac{1}{3}\pi + 2x\right)$ in de vorm $\cos(px + q)$.

De oplossingen van de vergelijking $\sin(A) = \sin(B)$ vind je met $A = B + k \cdot 2\pi$ en $A = \pi - B + k \cdot 2\pi$.

De oplossingen van $\cos(A) = \cos(B)$ vind je met $A = B + k \cdot 2\pi$ en $A = -B + k \cdot 2\pi$.

De oplossingen van $\tan(A) = \tan(B)$ vind je met $A = B + k \cdot \pi$.

Voorbeeld 1

Los exact op $\sin(3x) = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi - x\right)$.

Oplossing

$$3x = 1\frac{1}{2}\pi - x + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 3x = \pi - \left(1\frac{1}{2}\pi - x\right) + k \cdot 2\pi$$

$$4x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 2x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \quad \text{of} \quad x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $\cos(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ exact op.

Oplossing

$$\cos(3x) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$$

$$3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 3x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \quad \text{of} \quad x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

V-4 Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ **c** $\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = -\sqrt{3}$

b $\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}$ **d** $2\sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right) = -1$

V-5 Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\cos(\pi - x) = \cos(2x)$ **c** $\cos(4x) = \cos\left(3\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)\right)$

b $\sin(2x) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi - x\right)$ **d** $\tan(4x) = \tan\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$

Vergelijkingen die termen met $\sin^2(x)$ of $\cos^2(x)$ bevatten, kun je vaak met een substitutie of met ontbinden aanpakken.

Daarbij gebruik je soms de formule $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

V-6 Los exact op.

a $4\cos^2(x) - 2\cos(x) = 2$

b $\frac{1}{2} \cdot \cos^2(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos(x) + 1$

c $2\sin^2(x) - 2\cos^2(x) = 0$

d $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

e $6\sin(x) + 3 = -3\sin^2(x)$

Voorbeeld

Los exact op: $-2\cos^2(x) + 3\sin(x) = -3$.

Oplossing

Er geldt: $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, dus je kunt de vergelijking schrijven als $-2(1 - \sin^2(x)) + 3\sin(x) = -3$.

$$-2 + 2\sin^2(x) + 3\sin(x) = -3$$

$$2\sin^2(x) + 3\sin(x) + 1 = 0$$

Stel $\sin(x) = p$, de vergelijking wordt $2p^2 + 3p + 1 = 0$.

Met de *abc*-formule volgt $p = -1$ of $p = -\frac{1}{2}$.

Dus $\sin(x) = -1$ of $\sin(x) = -\frac{1}{2}$.

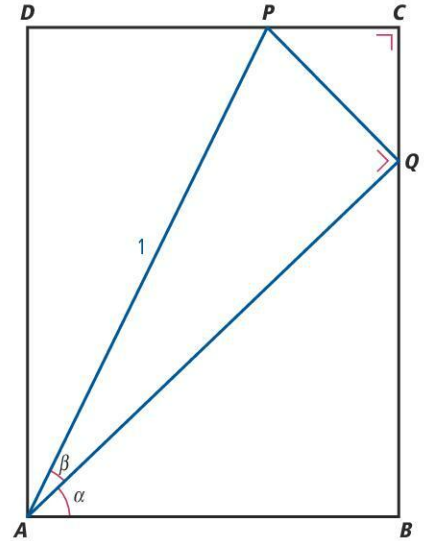
$$x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

4-1

Somformules

- 1 Op rechthoek $ABCD$ zijn de punten P en Q zo gekozen dat $\angle AQP = 90^\circ$, $AP = 1$, $\angle BAQ = \alpha$ en $\angle PAQ = \beta$.
- a Leg uit dat $\angle PQC$ gelijk is aan α .
- b Leg uit dat $\angle APD$ gelijk is aan $\alpha + \beta$.
- c Neem onderstaande tabel over en vul de ontbrekende lijnstukken in.

$\triangle APQ$	$\triangle ABQ$	$\triangle PCQ$	$\triangle APD$
$\cos(\beta) = \frac{AQ}{AP}$	$\cos(\alpha) = \frac{AB}{AQ}$	$\cos(\alpha) = \frac{PC}{PQ}$	$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AD}{AP}$
$\sin(\beta) = \frac{PQ}{AP}$	$\sin(\alpha) = \frac{BQ}{AQ}$	$\sin(\alpha) = \frac{CQ}{PQ}$	$\sin(\alpha + \beta) = \frac{PD}{AP}$



- d In de rechthoek geldt $AD = BQ + QC$.
Leg uit met de tabel dat hieruit volgt:
 $\sin(\alpha + \beta) = AQ \cdot \sin(\alpha) + PQ \cdot \cos(\alpha)$
- e Gebruik het resultaat van opdracht d om $\sin(\alpha + \beta)$ uit te drukken in $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\beta)$ en $\cos(\beta)$.
- f In de rechthoek geldt $PD = AB - PC$.
Druk ook $\cos(\alpha + \beta)$ uit in $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\beta)$ en $\cos(\beta)$.

Theorie

Voor goniometrische functies gelden de zogenaamde **somformules**.

- > $\sin(t + u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u)$
- > $\cos(t + u) = \cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u)$

Door u te vervangen door $-u$ kun je ook de **verschilformules** voor goniometrische functies afleiden:

- > $\sin(t - u) = \sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u)$
- > $\cos(t - u) = \cos(t) \cdot \cos(u) + \sin(t) \cdot \sin(u)$

Voorbeeld

Bereken exact $\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)$.

Oplossing

Gebruik de somformule voor de sinus met $t = \frac{1}{4}\pi$ en $u = \frac{1}{3}\pi$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right) &= \sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{2} + \frac{1}{4} \sqrt{6}\end{aligned}$$

- 2 Bereken exact.

- a $\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right) = \dots$
- b $\cos\left(\frac{1}{12}\pi\right)$

3 Gebruik de somformules en schrijf zo eenvoudig mogelijk.

a $\sin(2t) = \sin(t + t) = \dots$

b $\cos(2t) = \cos(t + t) = \dots$

4 Gebruik de formule $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ om te laten zien dat uit de formule $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ volgt dat $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ en ook dat $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.

Theorie

De volgende formules heten **verdubbelingsformules**.

> $\sin(2t) = 2\sin(t) \cdot \cos(t)$

> $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ of

$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ of

$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$

5 Hiernaast zie je hoe een begin is gemaakt met het oplossen van de vergelijking $\sin(2t) = 2\cos(t)$.

a Neem dit begin over en los de vergelijking exact op met t in het interval $[0, 2\pi]$.

b Los op dezelfde manier exact op: $\sin(2t) = 2\sin(t)$ met t uit $[0, \pi]$.

6 Los exact op met t uit het interval $[0, 2\pi]$.

a $2\sin(t) \cdot \cos(t) = -\frac{1}{2}$

b $\sin^2(t) - \cos^2(t) = 1$

7 Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x)$ op het interval $[0, \pi]$. De oppervlakte tussen de grafiek van f en de x -as wordt

berekend met de integraal $\int_0^{\pi} \sin^2(x) \, dx$.

a Toon aan dat $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

b Geef een primitieve van $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ en bereken

daarmee exact $\int_0^{\pi} \sin^2(x) \, dx$.

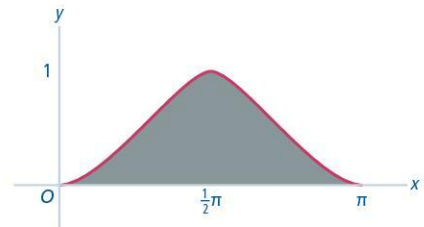
c Bereken exact $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2(x) \, dx$.

8a Bereken exact $\sin\left(\frac{1}{8}\pi\right)$.

Gebruik daarbij de formule $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.

b Bereken exact $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$.

$\sin(2t) = 2\cos(t)$
 $2\sin(t) \cdot \cos(t) = 2\cos(t)$
 $2\sin(t) \cdot \cos(t) - 2\cos(t) = 0$
 $2\cos(t) \cdot (\dots - \dots) = 0$
 $\cos(t) = 0$ of



4-2

Herleiden

- 9 Gegeven zijn de functies $f(x) = (1 - \sin(x))(1 + \sin(x))$ en $g(x) = \cos^2(x)$.
- a Plot de grafieken van f en g . Wat vermoed je?
- b Schrijf het functievoorschrift van f zonder haakjes.
- c Waarom weet je nu zeker dat voor elke waarde van x geldt: $f(x) = g(x)$?

Met een plot kun je het vermoeden krijgen dat twee functies gelijkwaardig zijn. Je geeft een bewijs door met formules aan te tonen dat je de functievoorschriften van de twee functies tot dezelfde vorm kunt herleiden.

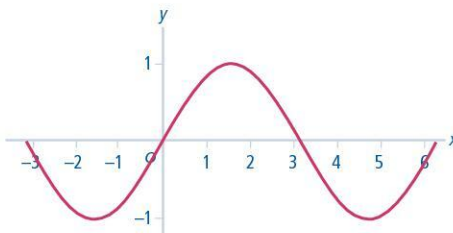
Voorbeeld

Hiernaast staat de grafiek van $h(x) = \sin^3(x) + \sin(x) \cdot \cos^2(x)$.
Toon aan dat de grafiek van h samenvalt met de grafiek van $k(x) = \sin(x)$.

Oplossing

$$\begin{aligned} h(x) &= \sin^3(x) + \sin(x) \cdot \cos^2(x) \\ &= \sin(x) \cdot (\sin^2(x) + \cos^2(x)) \\ &= \sin(x) \cdot 1 = \sin(x) = k(x) \end{aligned}$$

Dus de grafieken van h en k vallen samen.



- H 10 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(3x)$ en $g(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.
- a Plot de grafieken van f en g . Vallen de grafieken samen?
- b Schrijf $\sin(3x)$ als $\sin(2x + x)$ en pas een somformule toe op $\sin(2x + x)$.
- c Gebruik nu de verdubbelingsformules om aan te tonen dat $f(x)$ en $g(x)$ gelijkwaardig zijn.
- d Toon aan dat de grafiek van $f(x) = \sin(3x)$ puntsymmetrisch is in de oorsprong.
- e Maak een formule voor $\cos(3x)$ waarin alleen $\cos(x)$ en machten van $\cos(x)$ voorkomen.
- 11a Ga met plotten na of $\sin(4t) = 4\sin(t) \cdot \cos(t)$ geldt voor elke waarde van t .
- b Toon aan dat $\sin(4t) = \sin(2t + 2t) = \dots = 4\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \cos(2t)$.
- c Toon ook aan dat $\sin(8t) = 8\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \cos(2t) \cdot \cos(4t)$.

- 12** Gegeven zijn de functies $f(x) = \cos^4(x) - \sin^4(x)$ en $g(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
- a** Plot de grafieken van beide functies. Vallen deze grafieken samen?
- b** Toon aan dat $\cos^4(x) - \sin^4(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

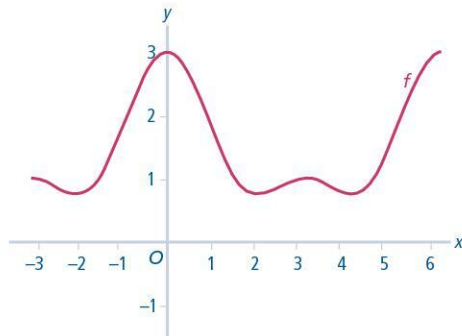
H 13 Toon aan.

- a** $(\cos(t) - \sin(t))^2 = 1 - \sin(2t)$
- b** $\sin^4(2x) = 16\cos^4(x) - 32\cos^6(x) + 16\cos^8(x)$

- 14** Gegeven zijn de functies $f(x) = 1 + \cos(x) + \cos^2(x)$ en $g(x) = 1 - \cos(x)$.

De grafiek van de functie f staat hiernaast.

- a** Toon met een berekening aan dat de grafiek van f geen enkel punt gemeenschappelijk heeft met de x -as.
- b** Voor de productfunctie p geldt: $p(x) = f(x) \cdot g(x)$. Schrijf het functievoorschrift van p zonder haakjes.
- c** Verklaar uit het functievoorschrift van p dat de grafiek van p de x -as raakt.

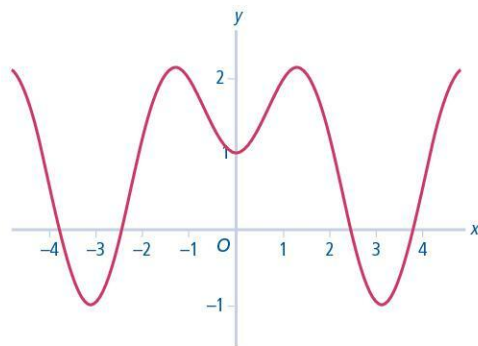


- 15** Bereken de volgende integralen exact.

- a** $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{2\pi} (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \, dx$
- b** $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 4 \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx$

- H 16** Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = 2\sin^2(x) + \cos(x)$. Bewijs dat de grafiek lijnsymmetrisch is in de y -as.

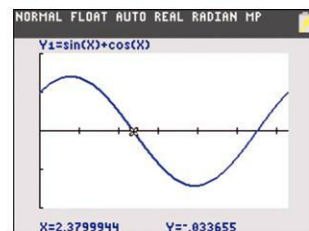
- 17** Als $t = \sin(x) + \cos(x)$ toon dan aan dat $\sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{t^2 - 1}{2}$



- 18** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Hiernaast zie je een plot van de grafiek. Het vermoeden is dat de grafiek puntsymmetrisch is in het punt $(\frac{3}{4}\pi, 0)$. Om dat vermoeden te bewijzen

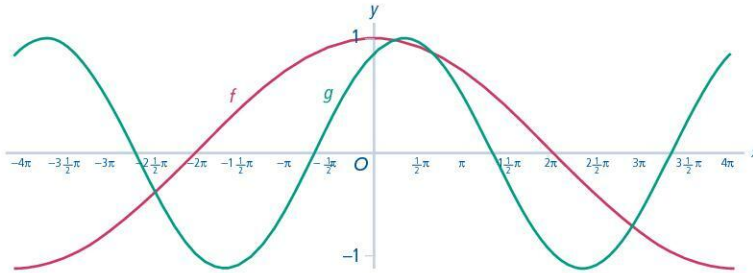
verschuif je de grafiek eerst $\frac{3}{4}\pi$ naar links.

- a** Geef een functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek.
- b** Toon aan dat de grafiek van g puntsymmetrisch is in de oorsprong.
- c** Waarom heb je nu bewezen dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in het punt $(\frac{3}{4}\pi, 0)$?



4-3

Vergelijkingen



- 19** Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = \cos\left(\frac{1}{4}x\right)$ en $g(x) = \cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$ op het interval $[-4\pi, 4\pi]$.

Bereken exact de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g op dit interval.

$$\cos(A) = \cos(B)$$

$$A = B + k \cdot 2\pi \text{ en } A = -B + k \cdot 2\pi$$

- 20** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(2x)$ en $g(x) = \sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

Bereken exact de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g op dit interval.

$$\sin(A) = \sin(B)$$

$$A = B + k \cdot 2\pi \text{ en } A = \pi - B + k \cdot 2\pi$$

- 21** Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\sqrt{3}\sin(x) = \cos(x)$ **c** $2\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = -2\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$
b $\sin(3x) = -\cos(3x)$

$$p \sin(A) = q \cos(A) \text{ geeft } \frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{q}{p}$$

en dus $\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{q}{p}$

- 22** Gegeven is de vergelijking $\sin(2x) = \cos(3x)$.

a Waarom kun je de vergelijking niet exact oplossen met de tangens?

b Door de formule $\cos(A) = \sin\left(A + \frac{1}{2}\pi\right)$ te gebruiken kun je de vergelijking van opdracht a exact oplossen.

Schrijf de vergelijking als $\sin(2x) = \sin\left(3x + \frac{1}{2}\pi\right)$ en los deze op.

Theorie

De vergelijking $\sin(A) = \cos(B)$ los je op door deze te schrijven als $\sin(A) = \sin\left(B + \frac{1}{2}\pi\right)$.

Voorbeeld

Los exact op: $\sin(3x) = \cos(\pi - x)$

Oplossing

$$\sin(3x) = \sin\left(\pi - x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$3x = \frac{1}{2}\pi - x + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 3x = \pi - \left(\frac{1}{2}\pi - x\right) + k \cdot 2\pi$$

$$4x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 2x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \quad \text{of} \quad x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

- H 23** Los de volgende vergelijkingen exact op.

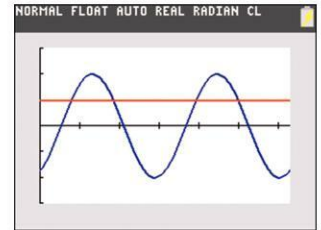
a $\sin\left(\frac{1}{4}\pi - x\right) = \cos(2x)$
b $\cos(x + \pi) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - 2x\right)$
c $\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$
d $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(-x - \frac{1}{2}\pi\right)$

H 24 Los de volgende vergelijkingen exact op.

- a $2 \sin(2x) \cos(x) = 0$
- b $\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$
- c $4 \sin^4(x) + 5 \cos^2(x) - 4 = 0$

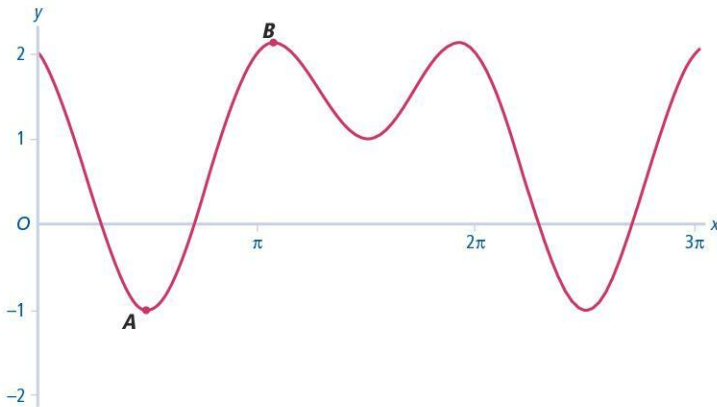
H 25 Hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$ en de lijn $y = 1$ op het interval $[0, 2\pi]$.

- a Los exact op: $2 \sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$ met x in $[0, 2\pi]$.
- b Voor welke waarden van x uit $[0, 2\pi]$ geldt $f(x) > 1$?
- c Los exact op: $f(x) \leq -\sqrt{2}$ op het interval $[0, 2\pi]$.



26 Los de volgende ongelijkheden op het interval $[0, 2\pi]$ exact op.

- a $2 \cos\left(3\left(x + \frac{1}{5}\pi\right)\right) + 2 > 1$
- b $\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi\right) < \frac{1}{2}\sqrt{2}$



27 Hierboven zie je de grafiek van de functie $f(x) = 2 \cos^2(x) - \sin(x)$ op het interval $[0, 3\pi]$.

- a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
- b Los exact op: $2 \cos^2(x) - \sin(x) \geq 1$.
- c Bereken algebraïsch de coördinaten van de toppen A en B. Rond zo nodig af op twee decimalen.

28 Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

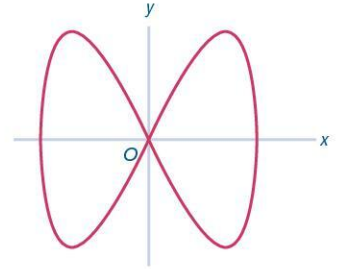
- a Plot en schets de grafiek van f .
- b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$.
- c Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = \pi$.

4-4

Parametervoorstellingen

De verdubbelingsformules worden veel toegepast bij herleiden, bij het exact oplossen van vergelijkingen en bij het exact berekenen van integralen.

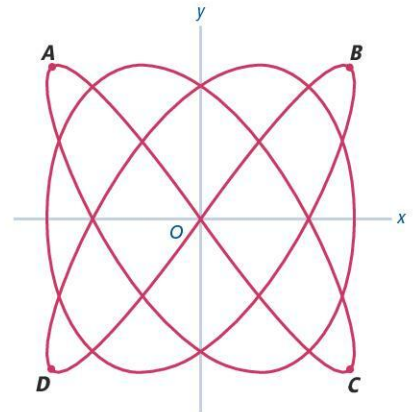
- 29** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = \cos(t)$ en $y(t) = \sin(at)$.
- Welke waarden kunnen $x(t)$ en $y(t)$ aannemen?
 - Neem $a = 2$. Hiernaast zie je de baan van P in dat geval. Bereken exact de waarden van $x(t)$ waarvoor $y(t)$ minimaal is.
 - Neem $a = 3$. Plot de baan van P en bereken exact de coördinaten van de punten waarin de baan een horizontale of verticale raaklijn heeft.



- 30** Gegeven is de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 3 \sin(2t) \\ y(t) = 2 \cos(3t) \end{cases}$
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de baan met de assen.
 - Bereken algebraïsch, met t in het interval $[0, 2\pi]$, de coördinaten van de punten waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan van P gelijk is aan 1.

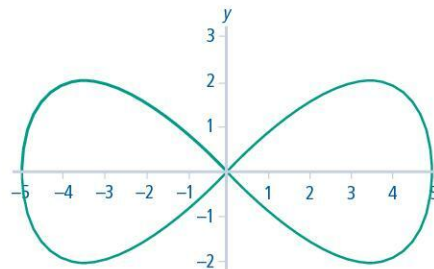
De baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = a \cos(pt) \\ y(t) = b \sin(qt) \end{cases}$ heet een figuur van Lissajous, genoemd naar de Franse natuurkundige Jules Antoine Lissajous (1822 – 1880).

- 31** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi t\right)$ en $y(t) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi t\right)$. De beweging start op $t = 0$.
- Bereken exact de periode p van de beweging.
 - Bereken exact de coördinaten van de punten waarin de raaklijn aan de baan evenwijdig is aan de y -as.
 - Toon aan dat voor elke waarde van t het punt $(x(12 - t), y(12 - t))$ het spiegelbeeld is van het punt $(x(t), y(t))$ bij spiegeling in de oorsprong.



- H 32** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = 2 \cos^2(t)$ en $y(t) = 1 - 2 \cos(2t)$.
- Plot de baan van P en geef een vergelijking van de rechte lijn waar de baan op ligt.
 - Voor welke waarden van x valt de baan van punt P samen met de lijn?

- 33** Gegeven is de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = -5 \cos(t) \\ y(t) = 2 \sin(2t) \end{cases}$
- a** Door de oorsprong gaan twee raaklijnen aan de baan. Geef van elk van die raaklijnen een vergelijking.
- b** Bereken algebraïsch de baansnelheid van een punt P op het moment dat het punt de oorsprong passeert.



- 34** De baan van een punt P wordt bepaald door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 3 \sin(\pi t) \\ y(t) = 5 \sin(\frac{2}{3}\pi t) \end{cases}$
- a** Plot en schets de baan van punt P .
- b** De baan snijdt binnen één periode de y -as zes keer. Bereken onder welke hoeken de baan de y -as snijdt.
- c** Bereken de coördinaten van de punten waarvoor geldt $\frac{dx}{dt} = 0$.
- d** Bereken de snelheid van P in deze punten.

- 35** Gegeven is de parametervoorstelling

$$K: \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

- a** De lijn met vergelijking $y = x$ snijdt K in drie punten. Bereken exact de coördinaten van deze punten.
- b** Toon met behulp van de formules aan dat de figuur lijnsymmetrisch is in de x -as.
- c** Toon met behulp van de formules aan dat de figuur puntsymmetrisch is in de oorsprong.

Voorbeeld

Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de lijn $y = x$ met $K: \begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$

Oplossing

$$\sin(t) = \cos(2t)$$

$$\sin(t) = 1 - 2 \sin^2(t) \text{ geeft } \sin^2(t) + \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{1}{2} = 0$$

$$(\sin(t) + 1)(\sin(t) - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\sin(t) = -1 \text{ of } \sin(t) = \frac{1}{2}$$

$$t = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

De snijpunten zijn $(-1, -1)$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

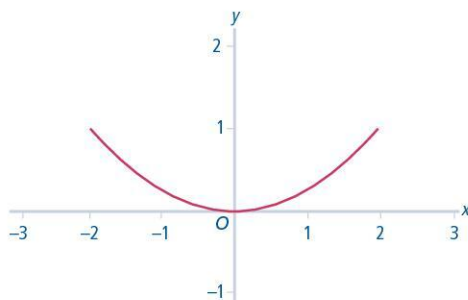
- 36** Gegeven is de baan van een punt P met

$$\text{bewegingsvergelijkingen } \begin{cases} x(t) = 2 \sin(t) \\ y(t) = \sin^2(t) \end{cases}$$

met t in het interval $[0, 2\pi]$.

De baan lijkt een deel van een parabool te zijn.

- a** Toon aan dat dit inderdaad het geval is door $x = 2\sin(t)$ en $y = \sin^2(t)$ in te vullen in de vergelijking $y = \frac{1}{4}x^2$.
- b** Welk domein moet je bij het functievoorschrift van de parabool kiezen zodat de parabool en de baan van punt P precies samenvallen?



4-5

Gemengde opdrachten

37 Los de volgende vergelijkingen exact op.

- a** $3 \sin^2(x) - \sqrt{3} \sin(x) \cos(x) = 0$
- b** $\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) + \sin(2x) = 0$
- c** $\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = -\cos(x)$
- d** $2 \cos^2(2x) + (\sqrt{3} + 2) \cos(2x) + \sqrt{3} = 0$

38 Gegeven is de baan van een punt P met

$$\text{bewegingsvergelijkingen } \begin{cases} x(t) = 2 \sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) \\ y(t) = \sin(t) + \cos(t) \end{cases}$$

- a** Laat algebraïsch zien dat $x = \sqrt{2} \cdot (\sin(t) - \cos(t))$.
- b** Laat algebraïsch zien dat $y^2 = 1 + \sin(2t)$.
- c** Toon aan dat alle punten van de baan van punt P op de ellips met vergelijking $x^2 + 2y^2 = 4$ liggen.

39 Gegeven de parametervoorstelling $K_a: \begin{cases} x(t) = a + a^2 \cdot \cos^2(t) \\ y(t) = \frac{2}{\cos(t)} \end{cases}$

- a** Plot en schets K_1 .
- b** K_1 bestaat uit twee ‘takken’.
Bereken de coördinaten van de eindpunten van deze takken.
- c** Elk van de twee takken is de grafiek van een functie.
Leid uit de parametervoorstelling functievoorschriften af van deze functies.
- d** Voor welke waarden van a geldt: de ‘eindpunten’ van K_a zijn $(6, 2)$ en $(6, -2)$?

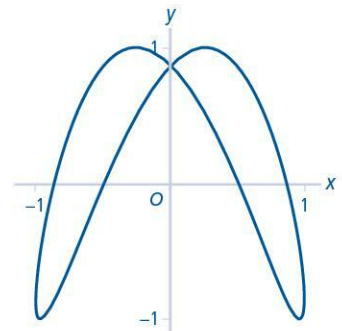
40 De baan van een punt P wordt bepaald door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin\left(2t + \frac{1}{3}\pi\right) \end{cases}$$

- a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de baan met de x -as.

Punt P passeert de y -as steeds met dezelfde snelheid.

- b** Bereken de exacte waarde van deze snelheid.
(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B1,2 2003, tijdvak 2)



- 41 Een figuur met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \text{ heet een asteroïde.}$$

- a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de asteroïde met de lijn $y = x$.

Met behulp van de integraal $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$

kan de lengte van het deel van de baan dat wordt doorlopen van $t = 0$ tot $t = \frac{1}{2}\pi$ worden berekend.

- b De uitdrukking $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ kan worden herleid tot $3|\sin(t) \cdot \cos(t)|$.

Bewijs dat deze herleiding juist is.

- c Bereken exact de lengte van dit deel van de baan.

- 42 De eindpunten van de wijzers van een uurwerk maken een beweging die je kunt beschrijven met behulp van bewegingsvergelijkingen.

Daarvoor wordt een assenstelsel aangebracht:

- met de oorsprong in het draaipunt van de wijzers,
- de positieve x -as door '3 uur',
- de positieve y -as door '12 uur'
- en met de cm als eenheid.

De tijd t wordt in uren gerekend, vanaf 0:00 uur.

De bewegingsvergelijkingen van de eindpunten van de wijzers zijn:

$$\text{grote wijzer: } \begin{cases} x(t) = 3 \sin(2\pi t) \\ y(t) = 3 \cos(2\pi t) \end{cases}$$

$$\text{kleine wijzer: } \begin{cases} x(t) = 2 \sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right) \\ y(t) = 2 \cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right) \end{cases}$$

- a Teken in één figuur op ware grootte de banen van de eindpunten van de wijzers en geef daarin de wijzers aan op het tijdstip $t = 1, 3$. Licht je werkwijze toe.

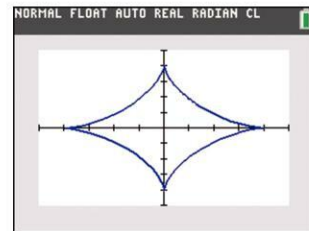
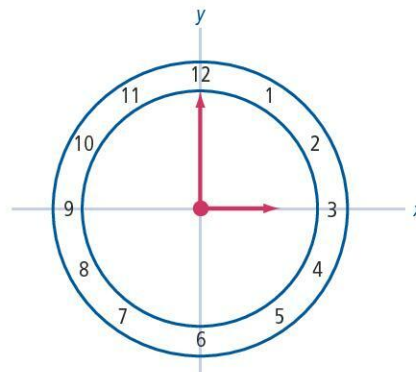
- b Op het tijdstip $t = 0$ liggen de wijzers over elkaar heen. Bereken het eerste tijdstip na $t = 0$ waarop dit weer het geval is.

- c De (rechtstreekse) afstand tussen de eindpunten van de wijzers verandert voortdurend.

Toon aan dat deze afstand op tijdstip t gelijk is aan $\sqrt{13 - 12\cos\left(\frac{11}{6}\pi t\right)}$.

- d Bereken het eerste tijdstip na $t = 0$ waarop de eindpunten van de wijzers, samen met de oorsprong, een gelijkbenige driehoek vormen.

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B1 2004, tijdvak 2)



Samenvatting

Som- en verschilformules

De volgende gelijkheden worden de som- en verschilformules genoemd.

Je kunt ze gebruiken bij het herleiden van sinus- of cosinusfuncties.

- > $\sin(t + u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u)$
- > $\cos(t + u) = \cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u)$
- > $\sin(t - u) = \sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u)$
- > $\cos(t - u) = \cos(t) \cdot \cos(u) + \sin(t) \cdot \sin(u)$

Verdubbelingsformules

Uit de somformules kun je de verdubbelingsformules afleiden.

- > $\sin(2t) = 2 \sin(t) \cdot \cos(t)$
- > $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ of
 $\cos(2t) = 2 \cos^2(t) - 1$ of
 $\cos(2t) = 1 - 2 \sin^2(t)$

Je kunt de som- en verschilformules gebruiken bij het herleiden van functievoorschriften

Door een herleiding kun je voorschriften of formules vereenvoudigen of aantonen dat twee formules gelijkwaardig zijn.

Je kunt vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = \cos(B)$ oplossen

Bij het oplossen van goniometrische vergelijkingen kun je gebruik maken van de regel:

uit $\sin(A) = \cos(B)$ volgt $\sin(A) = \sin\left(B + \frac{1}{2}\pi\right)$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie

$$g(x) = \cos^2(x) - \cos^2(x) \cdot \sin^2(x)$$

Toon aan dat de grafiek van g samenvalt met de grafiek van functie $f(x) = \cos^4(x)$.

Oplossing

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos^2(x) \cdot (1 - \sin^2(x)) \\ &= \cos^2(x) \cdot \cos^2(x) \\ &= \cos^4(x) \end{aligned}$$

Voorbeeld

Los exact op: $\sin(2x) = \cos\left(x + 1\frac{1}{4}\pi\right)$

Oplossing

$$\sin(2x) = \cos\left(x + 1\frac{1}{4}\pi\right)$$

$$\sin(2x) = \sin\left(x + 1\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$2x = x + 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \pi - \left(x + 1\frac{3}{4}\pi\right) + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 3x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Je kunt verdubbelingsformules gebruiken

De verdubbelingsformules gebruik je bij herleiden, bij het exact oplossen van vergelijkingen en bij het berekenen van integralen.

Voorbeeld 1

Geef een primitieve van $f(x) = \cos^2(x)$.

Oplossing

Uit $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ volgt

$$2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$$

$$\text{dus } \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

Een primitieve van f is dus

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x).$$

Voorbeeld 2

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = \sin(2t)$ en $y(t) = 2\cos^2(t)$.

Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan van punt P met de lijn $y = x$.

Oplossing

$$\sin(2t) = 2\cos^2(t)$$

$$2\sin(t) \cos(t) = 2\cos^2(t) \text{ geeft } \sin(t) \cos(t) - \cos^2(t) = 0$$

$$\cos(t) (\sin(t) - \cos(t)) = 0$$

$$\cos(t) = 0 \text{ of } \sin(t) = \cos(t)$$

$$\cos(t) = 0 \text{ of } \tan(t) = 1$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ of } t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

De snijpunten zijn $(0, 0)$ en $(1, 1)$.

Je kunt rekenen met bewegingsvergelijkingen van de vorm

$x(t) = a \cos(pt)$ en $y(t) = b \sin(qt)$

Voorbeeld

Gegeven is de baan van een punt P met

$$\text{bewegingsvoorstellungen } \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(4t) \end{cases}$$

Door de oorsprong gaat een stijgende raaklijn aan de baan van punt P .

Bereken de hoek die deze raaklijn maakt met de x -as.

Oplossing

$$\text{Uit } \cos(t) = 0 \text{ en } \sin(4t) = 0 \text{ volgt } t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi.$$

Bij $t = \frac{1}{2}\pi$ gaat de baan dalend door $(0, 0)$.

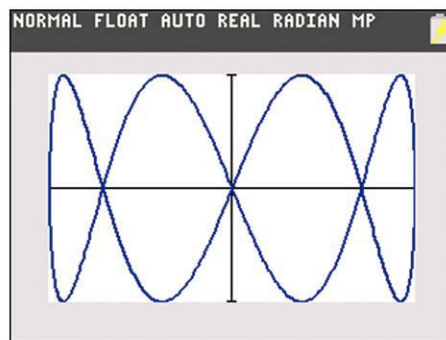
Bij $t = 1\frac{1}{2}\pi$ gaat de baan stijgend door $(0, 0)$.

$$x'(t) = -\sin(t) \text{ en } y'(t) = \cos(4t) \cdot 4 = 4\cos(4t).$$

$$x'(1\frac{1}{2}\pi) = 1 \text{ en } y'(1\frac{1}{2}\pi) = 4$$

De helling bij $t = 1\frac{1}{2}\pi$ is $\frac{4}{1} = 4$.

De hoek met x -as is 76° .



Test jezelf

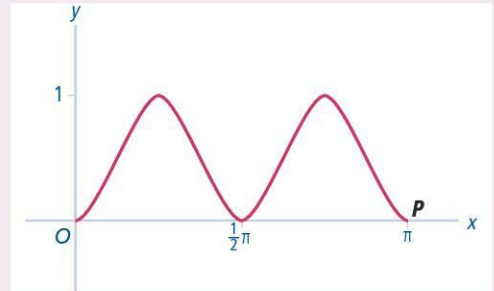
- T-1** Gegeven is de functie $f(x) = \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$ op het interval $[0, 2\pi]$.
- Schrijf het functievoorschrift van f zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk met behulp van de som- en verschilformules.
 - Los exact op: $\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) = \sin(2x)$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-1.

- T-2** Hiernaast staat de grafiek van $f(x) = \sin^2(2x)$.

- Toon aan dat $\sin^2(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)$.
- Geef een primitieve van $f(x) = \sin^2(2x)$.
- Bereken exact $\int_0^{\pi} \sin^2(2x) dx$.

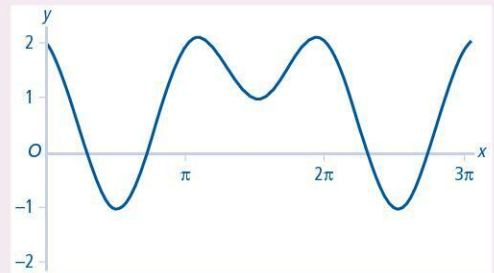
Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-1.



- T-3** Gegeven is de functie $f(x) = (\sin(x) + \sin(4x))^2 + (\cos(x) + \cos(4x))^2$.
- Het functievoorschrift van f is te schrijven als $f(x) = 2 + 2\cos(3x)$. Toon aan dat dit juist is.
 - Bewijs dat de grafiek symmetrisch is in de y -as.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-2.*

- T-4** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 2\cos^2(x) - \sin(x)$ op het interval $[0, 3\pi]$.
De grafiek lijkt symmetrisch te zijn in de lijn $x = 1\frac{1}{2}\pi$.
- Verschuif de grafiek van f over een afstand $1\frac{1}{2}\pi$ naar links en stel een functievoorschrift $g(x)$ op van de beeldgrafiek.
 - Toon aan dat de grafiek van g symmetrisch is in de y -as.
 - Waarom heb je nu bewezen dat de grafiek van f symmetrisch is in de lijn $x = 1\frac{1}{2}\pi$?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-2.



- T-5** Los exact op voor $0 \leq x \leq 2\pi$.
- $\sin\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$
 - $\cos(2x) - 2\sin^2(x) < 0$
 - $6 \cdot \sin\left(1\frac{1}{2}\pi + x\right) = 2\sqrt{3} \cdot \cos\left(1\frac{1}{2}\pi + x\right)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-3.

T-6 Gegeven is de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = -3 \sin(2t) \\ y(t) = 2 \cos\left(3\left(t + \frac{5}{6}\pi\right)\right) \end{cases}$$

- a** Welke waarden kunnen x en y aannemen?
- b** Plot en schets de baan van punt P .
- c** De baan van punt P snijdt zichzelf onder andere in drie punten met y -coördinaat 0. Bereken exact de x -coördinaten van deze punten.
- d** Stel op algebraïsche wijze een vergelijking op van elke raaklijn aan de baan in de oorsprong.
- e** De lijn $y = \frac{2}{3}x$ snijdt de baan van punt P in vijf punten.

Bereken de coördinaten van de snijpunten. Rond zo nodig af op twee decimalen.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-4.

T-7a Gegeven is de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 2 \sin(t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$$

Toon aan dat de baan een deel van de parabool $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ is.

b Gegeven is de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

Toon aan dat alle punten van de baan van punt P op de grafiek met vergelijking $y^2 = 4x^2 - 4x^4$ liggen.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-4.

T-8 Op het interval $[0, 2\pi]$ zijn gegeven de functies $f_n(x) = 1 + \sin^2(x) + \cos(nx)$, waarbij n een positief geheel getal is.

Hiernaast staat de grafiek van f_2 .

Deze grafiek lijkt op een sinusoïde.

Er geldt inderdaad $f_2(x) = a + b \sin c(x - d)$.

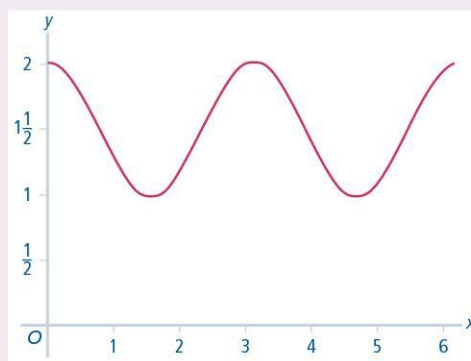
a Geef een mogelijke combinatie van waarden voor a , b , c en d en toon aan dat deze juist zijn.

b Het functievoorschrift van f_4 is te schrijven als

$$f_4(x) = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \cos(4x).$$

Toon aan dat dit juist is.

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B1 2004, tijdvak 1)



Extra oefening - Basis

B-1 Gegeven is de functie

$$f(x) = 4\sin^2(x) \cdot \cos^6(x) - 8\sin^4(x) \cdot \cos^4(x) + 4\sin^6(x) \cdot \cos^2(x).$$

a Toon aan dat $f(x)$ geschreven kan worden als

$$f(x) = \sin^2(2x) \cdot \cos^2(2x).$$

b Bewijs dat $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin^2(4x)$.

c Bereken exact $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} f(x) \, dx$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-1.

B-2 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x) - \sin^3(x)$ en

$$g(x) = \sin(x) \cdot \cos^2(x).$$

Toon door middel van een herleiding aan dat $f(x) = g(x)$ voor alle waarden van x .

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-2.

B-3 Los exact op voor $0 \leq t \leq 2\pi$.

a $2\sin(t) \cdot \cos(t) = \frac{1}{2}$

b $2\cos^2(t) - 2\sin^2(t) = 1$

c $\sin\left(1\frac{1}{2}\pi + t\right) \leq \cos(3t)$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-3.

B-4 Gegeven is de parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = 4\sin^2(t) \\ y(t) = 4\cos(t) \end{cases}$ met t in het interval $[0, 2\pi]$.

De baan is een deel van een liggende parabool.

Toon aan dat voor alle punten op de baan geldt: $x = 4 - \frac{1}{4}y^2$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-4.

B-5 Voor elke waarde van a zijn de bewegingsvergelijkingen van

een punt P gegeven door $\begin{cases} x(t) = 1 + \cos(t) \\ y(t) = 3 + \cos(t - a) \end{cases}$

a Voor $a = 0$ is de baan van punt P een deel van een rechte lijn. Geef een vergelijking van die lijn.

b Ook voor $a = \pi$ is de baan een deel van een rechte lijn. Geef een vergelijking van deze lijn en laat op algebraïsche wijze zien dat elk punt van de baan op deze lijn ligt.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-4.

Extra oefening - Gemengd

G-1 Toon aan dat de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \cos(4t) \end{cases}$$

voldoet aan de vergelijking $y = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

G-2 Gegeven is baan van een punt P met bewegingsvoorstellingen

$$\begin{cases} x(t) = 2 + \frac{1}{2} \sin(2t) \\ y(t) = 4 \sin^2(t) \cdot \cos^2(t) \end{cases}$$

- Plot de baan en bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de baan met de x -as.
- Laat zien dat de baan van punt P op de een deel van de grafiek van de functie $p(x) = (2x - 4)^2$ ligt.
- Door een beperkt domein bij de functie p te kiezen, vallen de grafiek van p en de baan precies samen. Welk domein is dat?

G-3 Binnen een cirkel met straal 4 bekijk je gebieden die bestaan uit een rechthoek (met de hoekpunten op de cirkel), aan de rechterkant aangevuld met een cirkelsegment. Zo'n gebied heeft dan de vorm van een rechthoek met een buik. Zie figuur 1.

In figuur 2 is het gebied verdeeld in twee cirkelsectoren, beide met een middelpuntshoek van t radialen, en zes gelijke rechthoekige driehoeken. Deze driehoeken hebben ook een hoek met grootte t radialen.

De oppervlakte O van het gebied is een functie van t ,

met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$.

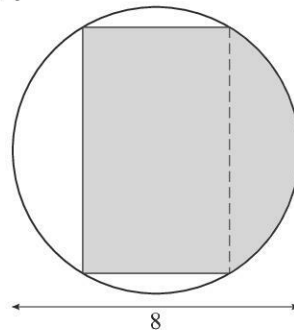
Er geldt: $O(t) = 16t + 24 \cdot \sin(2t)$.

a Toon de juistheid van deze formule aan.

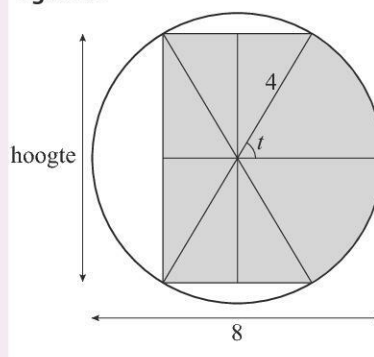
Bij een bepaalde hoogte is de oppervlakte O maximaal.

b Bereken de exacte waarde van deze hoogte.
(Ontleend aan examen vwo B1,2 2009, tijdvak 2)

figuur 1



figuur 2



Uitdagende opdrachten

U-1 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ en $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

a Plot de baan van P met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases} \text{ met } -5 < t < 5.$$

b Toon aan dat voor de punten op de baan van P geldt $x^2 - y^2 = 1$.

Hoewel de functies f en g niet op goniometrische functies lijken, hebben ze zoveel eigenschappen met de functies van de sinus en de cosinus gemeen, dat ze een verwante naam hebben gekregen:

de functie f heet de cosinus hyperbolicus, kortweg $f(x) = \cosh(x)$ en g de sinus hyperbolicus, $g(x) = \sinh(x)$.

De bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \cosh(t) \\ y(t) = \sinh(t) \end{cases}$ beschrijven

een cirkel, die van $\begin{cases} x(t) = \cosh(t) \\ y(t) = \sinh(t) \end{cases}$ een hyperbool.

c Toon aan: $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

d Leid zelf een soortgelijke formule af voor $\cosh(x + y)$.

e Differentieer $f(x) = \cosh(x)$ en $g(x) = \sinh(x)$.

f Geef ook een primitieve voor f en voor g .



U-2a Toon aan dat de baan van een punt P met

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right) \end{cases}$$

voldoet aan de vergelijking $4x^2 + 4y^2 - 4xy = 3$.

De baan van punt P beschrijft een ellips (blauwe baan).

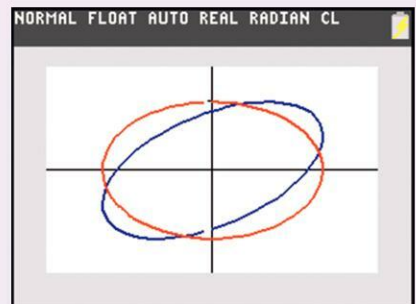
Een ellips heeft een lange en een korte as.

b Bereken de lengte van de lange as en van de korte as van de ellips.

De oppervlakte van een ellips kun je berekenen met de formule: $O = \pi \cdot \frac{1}{2} \text{ korte as} \cdot \frac{1}{2} \text{ lange as}$

c In de plot zie je naast de ellips ook de eenheidscirkel (rode baan).

Heeft de ellips de grootste oppervlakte of de eenheidscirkel?



Christiaan Huygens en de skatebaan

Christiaan Huygens (1629 – 1695) was een vooraanstaande Nederlandse wis-, natuur- en sterrenkundige en uitvinder. Als uitvinder heeft Huygens onder meer het slingeruurwerk, het principe van de stoommachine en een buskruitmotor op zijn naam staan.



Huygens onderzocht hoe je een slingeruurwerk regelmatig kon laten lopen. Het probleem was bij een grotere uitwijking een grotere slingertijd hoort. Huygens ontdekte dat het gewicht van een slinger beter langs een cycloïde kon worden geleid, omdat dan de slingertijd onafhankelijk van de uitwijking werd. Hierom heet de cycloïde ook wel een isochrone kromme (Grieks: *iso* gelijk en *chronos* tijd). In zijn boek *Horologium Oscillatorium* besprak hij de slingerklok en de theorie waarop deze gebaseerd was.

In het depot van het Universiteitsmuseum Utrecht is recent een oude slingerklok ontdekt uit 1657. Bij het ophangpunt van de slinger zijn twee metalen boogjes te zien, dat zijn delen van een cycloïde.

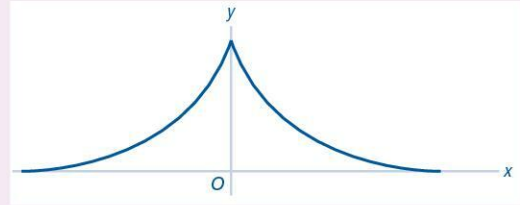
Huygens hing de klepel op aan een zijden draadje, zodat de slinger zich langs de boogjes kon vlijen.



Opdracht

Punt P beweegt over een cycloïde met bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 + \cos(t) \end{cases} \quad \text{met } -\pi \leq t \leq \pi$$



- a Bereken $v = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ en laat zien dat v te schrijven is als $v = \sqrt{2(1 - \cos(t))}$.
- b Toon aan dat $1 - \cos(t) = 2\sin^2(\frac{1}{2}t)$.
- c De lengte van de linker boog wordt beschreven met de integraal $\int_{-\pi}^0 v \, dt$. Bereken deze lengte.

Hiermee is de lengte van het zijden draadje bekend.



Moderne toepassing

Als je een skateboardhelling in de vorm van een cycloïde maakt, bereik je dat een skateboarder de hele tijd een regelmatig ritme aan kan houden. De slingertijd is immers tijdens het gangmaken en het uitvoeren van allerlei kunstjes gelijk.

Vaardigheden 2

Limieten en asymptoten

Als bij een quotiëntfunctie f de teller en noemer beide veeltermfuncties zijn, dan kun je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ exact berekenen. Deel daarvoor teller en noemer door de hoogste macht van x die in de noemer voorkomt. Gebruik vervolgens de standaardlimieten $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^n} = 0$ ($n > 0$).

1 Bereken exact de volgende limieten.

a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 3}{1 - x}$

d $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 6)(x^2 - 3)}{x^2(8 - 5x^2)}$

b $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 4x^2 - 1}{2x^3 + x^4}$

e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x} + 1}$

c $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(3x^2 - 4x + 1)}{8x^3 + x\sqrt{x}}$

f $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2(8 - 2x)^2}{9x - 2x^4}$

Voorbeeld

Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 12x^2}{5x^2 + 4}$

Oplossing

Deel elke term in de teller en noemer door x^2 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 12x^2}{5x^2 + 4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x} - 12}{5 + \frac{4}{x^2}} = \\ &= \frac{0 - 12}{5 + 0} = \frac{-12}{5} = -2\frac{2}{5} \end{aligned}$$

Theorie

De grafiek van een functie f heeft een **horizontale asymptoot** $y = c$ als $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ en/of $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heeft een **verticale asymptoot** $x = a$ als geldt $n(a) = 0$ én $t(a) \neq 0$.

Een grafiek kan meerdere asymptoten hebben.

2 Hiernaast is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{3x^2 - 81}{x^2 - 16}$ geplot.

a Bereken exact de nulpunten van f .

b De grafiek heeft twee verticale asymptoten. Geef van beide asymptoten een vergelijking.

c Bereken exact $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ en stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot.

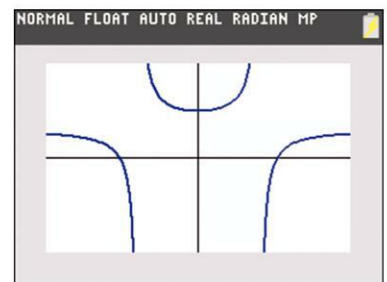
3 Gegeven is de functie $g(x) = \frac{2e^x - e^{-x}}{e^x - 1}$

a Bereken exact de nulpunten van g .

b Stel een vergelijking op van de verticale asymptoot.

c Bereken exact $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

d Welke conclusie kun je uit opdracht c trekken over de horizontale asymptoot van de grafiek?



Differentiëren

Theorie

Afgeleiden van standaardfuncties:

machtsfunctie	$f(x) = x^a$	$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$
sinusfunctie	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
cosinusfunctie	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
tangensfunctie	$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
exponentiële functie	$f(x) = g^x$	$f'(x) = \ln(g) \cdot g^x$
als $g = e$	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
logaritmische functie	$f(x) = {}^g \log(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$
als $g = e$	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Voorbeeld

Geef de afgeleide van

$$f(x) = 8x^2 \sqrt{x} \text{ en } g(x) = \frac{10}{x^5}$$

Oplossing

$$f(x) = 8x^{2\frac{1}{2}} \text{ dus } f'(x) = 8 \cdot 2\frac{1}{2} x^{1\frac{1}{2}}$$

$$\text{ofwel } f'(x) = 20x\sqrt{x}$$

$$g(x) = 10x^{-5} \text{ dus } g'(x) = -50x^{-6}$$

$$\text{ofwel } g'(x) = \frac{-50}{x^6}$$

4 Differentieer.

a $f(x) = 8x^2 \cdot \sqrt[5]{x}$

e $f(x) = 8e^x + e$

b $f(x) = \frac{6}{x^3} + 5$

f $f(x) = \frac{-2}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}$

c $f(x) = 5 - 3\cos(x)$

g $f(x) = 4 \cdot {}^2 \log(x)$

d $f(x) = 2 - \frac{1}{3} \ln(x)$

h $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot 0,3^x$

Theorie

Bij differentiëren maak je gebruik van de volgende regels.

somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$f(x) = p(x) \cdot q(x)$	$f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$
quotiëntregel	$f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$	$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = g(f(x))$	$k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

5 Differentieer.

a $g(x) = x^2 \cdot \tan(3x)$

e $g(x) = \sin(2x) \cdot \cos(3x)$

b $g(x) = x \ln(5x) + x$

f $g(x) = \sqrt[3]{10x^2 + 7} - \frac{1}{2} \sqrt{x}$

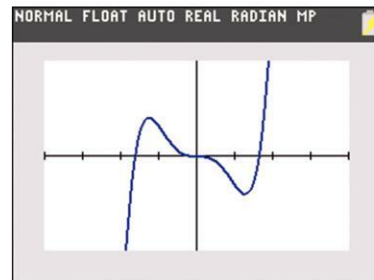
c $g(x) = \frac{3x+1}{x^2-4}$

g $g(x) = \frac{\sin(4x)}{1 + \cos(4x)}$

d $g(x) = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}$

h $g(x) = x^2 \cdot {}^4 \log(3x+6)$

- 6 Hiernaast is de grafiek van $f(x) = 3x^5 - 20x^3$ geplot.
- a Bereken exact de nulpunten van f .
- b De grafiek heeft twee toppen.
Bereken exact de coördinaten van elk van de toppen.
- c De grafiek heeft drie buigpunten.
Een van de buigpunten heeft coördinaten $(\sqrt{2}, -28\sqrt{2})$.
Toon dit op algebraïsche wijze aan.
- d Bereken exact de coördinaten van elk van de andere buigpunten.
- 7 Gegeven is de functie $h(x) = (3x - 2x^2) \cdot e^{-x}$.
- a Bereken exact de nulpunten van h .
- b Bereken exact de extreme waarden van h .
- c Bereken algebraïsch, in twee decimalen, de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van h .
- d De raaklijn aan de grafiek van h in de oorsprong snijdt de horizontale as onder een hoek van α graden.
Bereken α . Rond af op hele graden.
- 8 Op het interval $[-\pi, 3\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x)$.
- a Bereken exact de nulpunten van f .
- b Bereken exact de coördinaten van de punten op de grafiek van f met een horizontale raaklijn.
- c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in $(\pi, 0)$.



Integreren

Theorie

Primitieven van standaardfuncties:

machtsfunctie $f(x) = x^a$ met $a \neq -1$ $F(x) = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c$

als $a = -1$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $F(x) = \ln|x| + c$

sinusfunctie $f(x) = \sin(x)$ $F(x) = -\cos(x) + c$

cosinusfunctie $f(x) = \cos(x)$ $F(x) = \sin(x) + c$

exponentiële functie $f(x) = g^x$ $F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x + c$

als $g = e$ $f(x) = e^x$ $F(x) = e^x + c$

Voorbeeld

Geef een primitieve van $f(x) = 12(3x - 7)^5$.

Oplossing

Kies $F(x) = a(3x - 7)^6$. Dan is $F'(x) = 6a(3x - 7)^5 \cdot 3$
ofwel $F'(x) = 18a(3x - 7)^5$.

F is een primitieve van f als $18a = 12$, dus als $a = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Een primitieve functie van f is $F(x) = \frac{2}{3}(3x - 7)^6$.

9 Geef een primitieve functie.

a $f(x) = \frac{-15}{5x+7}$

d $f(x) = \frac{28}{(4x-8)^3}$

b $f(x) = 6e - 2e^{2x-13}$

e $f(x) = 25 \cdot 2^{3x-1}$

c $f(x) = 5 \sin\left(3\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

f $f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 3}{2x^2}$

10 Bereken exact.

a $\int_1^4 x\sqrt{x} \, dx$

d $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (e^{2x} + e) \, dx$

b $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^0 2 \sin(3x) \, dx$

e $\int_0^2 \sqrt[3]{13x+1} \, dx$

c $\int_e^{e^2} \left(\frac{4}{x} + x\right) \, dx$

f $\int_1^e \left(\frac{6x^3 + 4x^2 + 3x - 1}{x^2}\right) \, dx$

11 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^x$ en $g(x) = 4\sqrt{2x} + 1$. Noem V het vlakdeel dat begrensd wordt door de grafieken van f en g .

a Ga na dat de grafieken van f en g elkaar snijden in de punten $(0, 1)$ en $(2, 9)$.

b Bereken exact de oppervlakte van V .

c Vlakdeel V wordt gewenteld om de x -as. Bereken algebraïsch de inhoud van het omwentelingslichaam. Rond je antwoord af op twee decimalen.

12 Bereken met je rekenmachine. Rond af op twee decimalen.

a $\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \tan(x) \, dx$

c $\int_1^e \ln(x^2 + 3) \, dx$

b $\int_0^5 \sqrt{3x^2 + 1} \, dx$

d $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \cdot \sin(x) \, dx$

13 Gegeven is de grafiek van $f(x) = 2 \ln(x)$. Het gebied G wordt begrensd door de x -as, de grafiek van f en de lijn $x = e^2$.

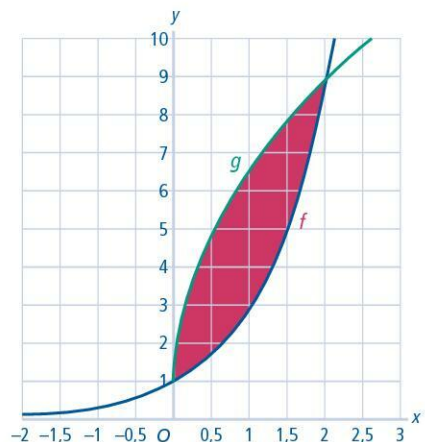
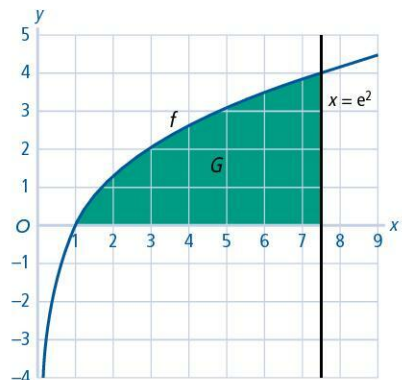
a Toon aan dat $F(x) = 2x \ln(x) - 2x$ een primitieve is van f .

b Bereken exact de oppervlakte van G .

c G wordt gewenteld om de y -as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

d De functie h wordt gedefinieerd door $h(p) = \int_1^p 2 \ln(x) \, dx$.

Bereken in twee decimalen de waarde van p waarvoor $h(p) = 100$.



Vergelijkingen en ongelijkheden

14 Los exact op.

a $12 - 2(3q - 4) = 4$

b $4 - 3(k - 2) = 3 - 5k$

c $3p + 5(6 - 1,2p) = 0$

d $2,3y - 5(5,3 - 2y) = 1,7y$

15 Los de stelsels vergelijkingen exact op.

a $\begin{cases} 3a + 2b = 14 \\ -2a + b = 7 \end{cases}$

c $\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ 5x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$

b $\begin{cases} 0,1p - 1,3q = 2,4 \\ 0,4p + 2q = 2,4 \end{cases}$

d $\begin{cases} x^2 + 5y + 4 = 0 \\ 3x^2 + 2y^2 = 80 \end{cases}$

Bij het oplossen van vergelijkingen met machten let je op het type vergelijking.

> Als de onbekende in het grondtal staat, dan heb je te maken met een machtsvergelijking.

> Als de onbekende in de exponent staat, dan heb je te maken met een exponentiële vergelijking.

16 Los exact op.

a $4 \cdot 3^{2x} = 24$

b $12 \cdot 2^{3-5x} + 8 = 32$

c $3x^{-5} = 96$

d $5 \cdot 4^{-x+1} - 35 = 0$

e $10 - \left(\frac{1}{2}x\right)^5 = -34$

f $\frac{1}{2}x^8 + 12 = 15$

17 Los exact op.

a ${}^3\log(x) + {}^3\log(7) = 2$

b $\frac{1}{2}\log(x-4) - \frac{1}{2}\log(x) = -1$

c $6 - {}^3\log(x+5) = 4$

d ${}^4\log(2x+1) + 2 \cdot {}^4\log(3) = 1\frac{1}{2} + {}^4\log(9x)$

18 Los exact op.

a $x^2(2^x - 1) = 36(2^x - 1)$

b $({}^3\log(4x-1) + 2)^2 = 16$

c $(x^3 + 2)^2 = (3 - 2x^3)^2$

d $(\ln(x) + 5)^2(x-1) = 16(x-1)$

Voorbeeld

Los exact op: $8 \cdot x^6 = 24$ en $8 \cdot 6^x = 24$

Oplossing

$8 \cdot x^6 = 24$

machtsvergelijking

$x^6 = 3$

$x = \sqrt[6]{3}$ of $x = -\sqrt[6]{3}$

$8 \cdot 6^x = 24$

exponentiële
vergelijking

$6^x = 3$

$x = {}^6\log(3)$

Uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $g^b = a$ en omgekeerd.

${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$

${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$

$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$

Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$

Uit $A^2 = B^2$ volgt $A = B$ of $A = -B$

Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$

19 Los exact op.

a $5 + \sqrt{3x - 10} = 8$

b $4x + \sqrt{x} = 2x + 6$

c $\sqrt{8 - 4x} = 4x + 4$

d $4x - 3\sqrt{6 + x} = 2x - 7$

20 Los exact op.

a $\frac{-27}{x-4} = 9x$

b $\frac{5}{2-3^x} = \frac{6}{3^x}$

c $1 + \frac{3}{x^4 + 1} = x^4$

d $\frac{x}{x+5} = \frac{4}{x} - 3$

21 Gegeven is de vergelijking $4^x - 2^x - 12 = 0$.

a Leg uit waarom met de substitutie $2^x = t$ de vergelijking te herschrijven is tot de vergelijking $t^2 - t - 12 = 0$.

b Los de vergelijking $t^2 - t - 12 = 0$ op.

c Geef de oplossing van de vergelijking $4^x - 2^x - 12 = 0$.

d Los op dezelfde manier op $9^x - 3^{x+1} = 18$.

In een aantal gevallen kun je het oplossen van een vergelijking eenvoudiger maken door een geschikte substitutie te gebruiken.

22 Los exact op door een substitutie te gebruiken.

a $\frac{2}{^3\log(x)} + 1 = ^3\log(x)$

b $\left(\frac{2a-1}{a+1}\right)^2 = \frac{2a-1}{a+1} + 2$

c $4(4^x + 1)^2 + 25 = 25(4^x + 1)$

d $2 \cdot \frac{e^x - 1}{e^x - e} = \left(\frac{e^x - 1}{e^x - e}\right)^2$

23 Gegeven is de functie $f(x) = 4^{2x} + 4^{x+2} + 4$.

a Los exact op: $f(x) = 516$.

b Geef het bereik van de functie f .

Bij het exact oplossen van een ongelijkheid los je eerst de bijbehorende vergelijking exact op. Vervolgens lees je uit een schets of plot van de grafieken de oplossing van de ongelijkheid af.

24 Los de ongelijkheden exact op.

a $\frac{x+1}{x-3} < 2$

b $^4\log(x^2 - 1) < 1\frac{1}{2}$

c $\frac{3}{\sqrt{2x+4}} > 1$

d $^2\log(x) + ^2\log(x+2) \leq 3$

Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$ mits $B \geq 0$.

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

Voorbeeld

Los op: $\frac{2}{x+4} + \frac{3}{(x+4)^2} = 8$

Oplossing

Vervang $\frac{1}{x+4}$ door q .

Dan volgt $2q + 3q^2 = 8$.

$$3q^2 + 2q - 8 = 0$$

Met de *abc*-formule vind je

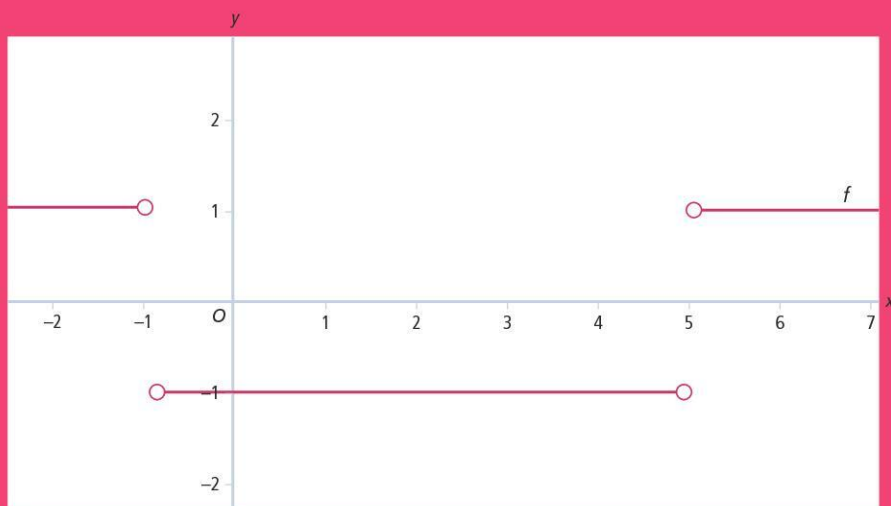
$$q = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6}$$

$$q = \frac{4}{3} \text{ of } q = -2.$$

$$\text{Dus } \frac{1}{x+4} = \frac{4}{3} \text{ of } \frac{1}{x+4} = -2.$$

$$x+4 = \frac{3}{4} \text{ of } x+4 = -\frac{1}{2}$$

$$x = -3\frac{1}{4} \text{ of } x = -4\frac{1}{2}$$



Een grafiek met sprongen

Hierboven staat de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{|x^2 - 4x - 5|}$

De grafiek van f maakt op twee plaatsen een sprong.
Kun je verklaren waarom de grafiek er zo uit ziet?

Hoofdstuk 5

Functies onderzoeken

In dit hoofdstuk

	Voorkennis	116
5-1	Functies met absolute waarden	118
5-2	Extreme waarden en buigpunten	120
5-3	Scheve asymptoten	122
5-4	Limieten en perforaties	124
5-5	Functies onderzoeken	126
5-5	Gemengde opdrachten	128
	Samenvatting	132
	Test jezelf	134

Voorkennis

V-1 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 3}$ en $g(x) = \frac{3x - 4}{2x - 1}$

- a** Geef het domein van f en het domein van g .
- b** Bereken de nulpunten van f en van g .
- c** Geef een vergelijking van elk van de asymptoten van de grafieken van f en g .

Theorie

Grafieken van gebroken functies of quotiëntfuncties kunnen **asymptoten** hebben. Dat zijn lijnen waar de grafiek willekeurig dicht bij komt.

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{t(x)}{n(t)}$ heeft een

verticale asymptoot $x = a$ als geldt $n(a) = 0$ én $t(a) \neq 0$.

De grafiek van f heeft een **horizontale asymptoot** $y = c$ als voor x -waarden ver van 0 de waarde van $f(x)$ nadert tot een constante c . Een grafiek kan meerdere asymptoten hebben.

Voorbeeld

Geef een vergelijking van elk van de asymptoten van de grafiek van de functie

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x^2 - 4}$$

Oplossing

Als je steeds grotere waarden voor x invult, nadert de uitkomst tot 3, dus de horizontale asymptoot is $y = 3$. De noemer is 0 als $x = -2$ of $x = 2$ en de teller is nooit gelijk aan 0, dus de verticale asymptoten zijn $x = -2$ en $x = 2$.

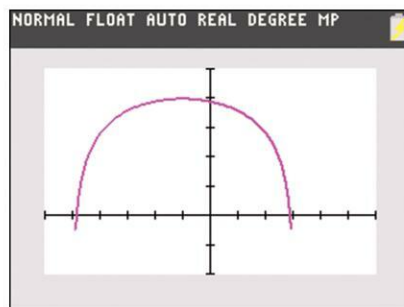
V-2 Geef het domein, de nulpunten en alle asymptoten van de grafieken van de volgende functies.

- a** $f(x) = \frac{2x + 7}{3x - 1}$
- b** $g(x) = \frac{1 - x^2}{2x - x^2}$
- c** $h(x) = \frac{x}{7 + x^2}$
- d** $k(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}$

V-3 Hiernaast staat een plot van de grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(15 - 2x - x^2)$.

- a** Geef het domein van deze functie.
- b** Leg uit waarom de grafiek twee verticale asymptoten heeft en geef vergelijkingen van de asymptoten.
- c** Geef ook het maximum van f en de bijbehorende waarde van x .

Niet alleen grafieken van gebroken functies kunnen asymptoten hebben. Ook bij de grafieken van exponentiële, logaritmische en tangensfuncties kunnen asymptoten voorkomen.



V-4 Geef een vergelijking van elke asymptoot van de grafieken van deze functies.

- a** $f(x) = 2e^{3x-1}$
- b** $g(x) = \ln(10 - 4x)$
- c** $h(x) = \frac{1}{2^{-x} - 1}$
- d** $q(x) = \tan\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right)$ met $-\pi < x < \pi$

Als bij een quotiëntfunctie f de teller en de noemer beide veeltermfuncties zijn, dan kun je het functievoorschrift herleiden tot een vorm waarmee $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ exact te berekenen zijn. Deel daartoe teller en noemer door de hoogste macht van x die in de noemer voorkomt. Gebruik vervolgens de standaardlimieten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C}{x^n} = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{C}{x^n} = 0 \quad (n > 0).$$

- V-5** Bereken met behulp van limieten de vergelijking van de horizontale asymptoot van de grafieken van de volgende functies.

a $f(x) = \frac{12 - 3x}{x^2 - 5}$

c $h(x) = \frac{(2x - 1)^2}{2x^2 - 1}$

b $g(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 6x - 8}$

d $k(x) = \frac{x(3x - 2)}{(x - 1)^2}$

- V-6** Gegeven is de functie $f(x) = -3 + \frac{2 - x^2}{x^2 - 4}$

- a** Geef vergelijkingen van de verticale asymptoten van de grafiek van f .

- b** Toon aan dat het functievoorschrift kan worden

geschreven als $f(x) = \frac{-4x^2 + 14}{x^2 - 4}$

- c** Bereken exact de nulpunten van f .

- d** Geef een vergelijking van de horizontale asymptoot en noteer de bijbehorende limiet.

- V-7a** Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = \left| \frac{1}{2}x - 3 \right|$.

- b** Voor welke waarden van x geldt $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$?

- c** Geef een functievoorschrift zonder absolute waarde-strepen voor de overige waarden van x .

- V-8** Gegeven is de functie $g(x) = \left| \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 \right|$.

- a** Plot en schets de grafiek van g .

- b** Voor welke waarden van x geldt $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$?

- c** Hoe groot is het maximum van g en voor welke waarde van x wordt dit maximum bereikt?

- d** Voor welke waarden van x heeft g een minimum en hoe groot is dit minimum?

Voorbeeld

Bereken met behulp van limieten de horizontale asymptoot van de

grafiek van de functie $f(x) = \frac{2x^2}{\frac{1}{2}x^2 - 8}$

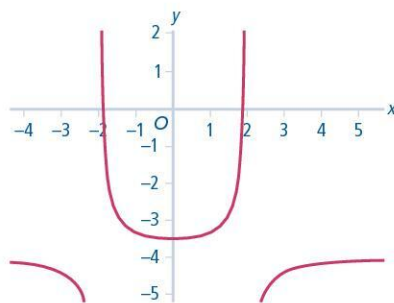
Oplossing

$$f(x) = \frac{2}{\frac{1}{2} - \frac{8}{x^2}} \quad (\text{teller en noemer : } x^2)$$

$$\text{dus } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{\frac{1}{2} - 0} = 4 \text{ en}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2}{\frac{1}{2} - 0} = 4.$$

De horizontale asymptoot is $y = 4$.



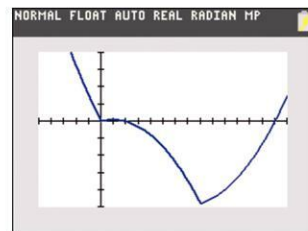
Voor de absolute waarde van x geldt:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

5-1

Functies met absolute waarden

- 1 Gegeven is de functie $g(x) = 2x - |3x| + 5$.
 - a Schrijf het functievoorschrift van g voor $x \geq 0$ zo eenvoudig mogelijk.
 - b Doe hetzelfde voor $x < 0$.
 - c Plot en schets de grafiek van g .
 - d Bij $x = 0$ vertoont de grafiek een knik.
Geef de richtingscoëfficiënt van het deel van de grafiek links van de knik en van het deel rechts van de knik.
 - e Wat is het maximum van de functie g ?
- 2 Hiernaast staat de grafiek van de functie $g(x) = |\frac{1}{2}x^2 - 4x| - 3x$.
 - a Voor welke waarden van x geldt $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7x$?
 - b Voor welke waarden van x geldt $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$?



Aanpak

Hoe schrijf je een functievoorschrift zonder absolute waarde-strepen?

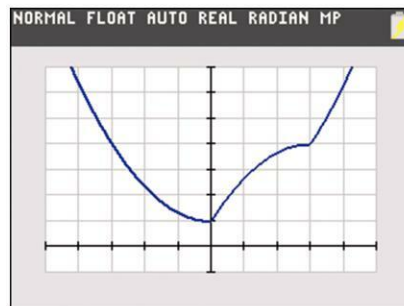
- 1 Onderzoek voor welke waarden de uitdrukking tussen de absolute waarde-strepen positief en voor welke waarden de uitdrukking negatief is.
- 2 Voor het gedeelte van het domein waar de uitdrukking tussen de strepen positief of gelijk aan nul is, vervang je de strepen door haakjes. Schrijf daarna het functievoorschrift zo eenvoudig mogelijk.
- 3 Voor het gedeelte van het domein waar de uitdrukking tussen de strepen negatief is doe je hetzelfde, maar moet je eerst de uitdrukking tussen de strepen veranderen in het tegengestelde.

Voorbeeld

Schrijf het functievoorschrift $f(x) = x + 1 + |\frac{1}{3}x^2 - x|$ zonder absolute waarde-strepen.

Oplossing

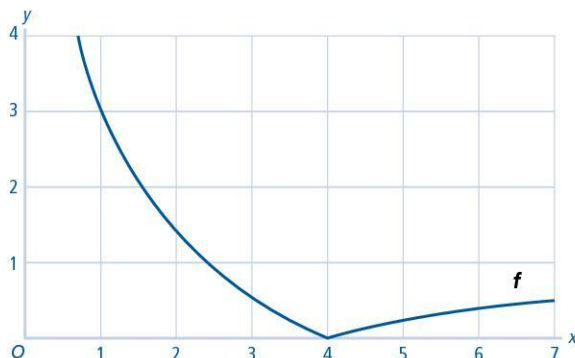
- 1 $\frac{1}{3}x^2 - x = \frac{1}{3}x(x - 3) = 0$ als $x = 0$ of $x = 3$.
 $\frac{1}{3}x^2 - x \geq 0$ als $x \leq 0$ of $x \geq 3$
 en $\frac{1}{3}x^2 - x < 0$ als $0 < x < 3$.
- 2 Als $x \leq 0$ of $x \geq 3$ geldt
 $f(x) = x + 1 + (\frac{1}{3}x^2 - x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$.
- 3 Als $0 < x < 3$ geldt
 $f(x) = x + 1 + (-\frac{1}{3}x^2 + x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$
 dus $f(x) = x + 1 + -\frac{1}{3}x^2 + x = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$.



- 3** Gegeven is de functie $f(x) = 2x|x - 3| + 1$.
- a** Plot en schets de grafiek van f .
- b** Schrijf het functievoorschrift van f zonder absolute waarde-strepen.
- c** Voer de opdrachten a en b nogmaals uit, nu voor de functie $g(x) = |x^3 - 2x^2 - 8x| - 2$.

- 4** Hiernaast staat de grafiek van $f(x) = \frac{|x - 4|}{\sqrt{x}}$

- a** Schrijf het functievoorschrift van f zonder absolute waarde-strepen.
- b** Geef het minimum van f .
- c** De grafiek van f bestaat uit twee delen. Geef de afgeleide voor elk van deze delen.
- d** Bewijs met behulp van de afgeleide functie dat de twee delen van de grafiek van f bij $x = 4$ verschillende raaklijnen hebben.

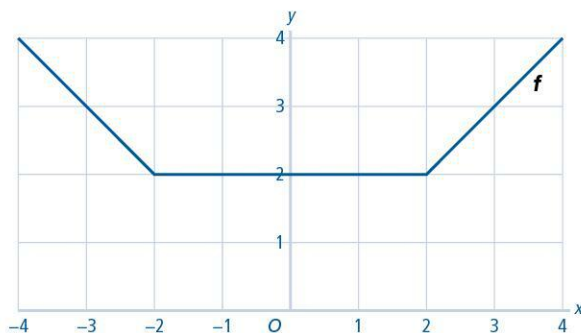


Als de grafiek van een functie f een knik vertoont in het punt met $x = a$, dan kun je de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan de twee delen van de grafiek bij $x = a$ berekenen. Zijn die twee richtingscoëfficiënten verschillend van teken, dan is er een extreme waarde voor $x = a$.

- 5** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - |1\frac{1}{3}x^2 - 4x|$.
- a** De grafiek van f vertoont een knik bij $x = 0$. Bereken de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan de beide delen van de grafiek in dit punt.
- b** Er is nog een punt waar de grafiek van f een knik vertoont. Bereken de coördinaten van dit punt en geef de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan elk van de twee delen van de grafiek in dit punt.

- 6a** Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = |2x - 1| + |x - 3|$.
- b** In welke punten heeft de grafiek van f een knik?
- c** De grafiek van f bestaat uit drie delen van rechte lijnen. Schrijf het functievoorschrift van f voor elk van deze drie delen zonder absolute waarde-strepen en vermeld op welk deel van het domein elk van deze functievoorschriften geldt.
- d** Bereken de extreme waarde(n) van de functie f .

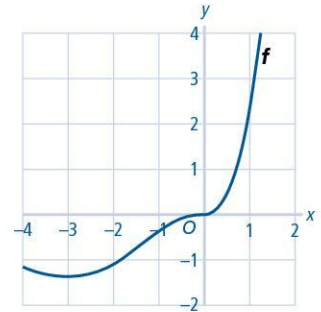
-  **7** Hiernaast staat de grafiek van de functie $f(x) = |ax + b| + |ax - b|$. a en b zijn positieve getallen. Bereken de waarde van a en de waarde van b .



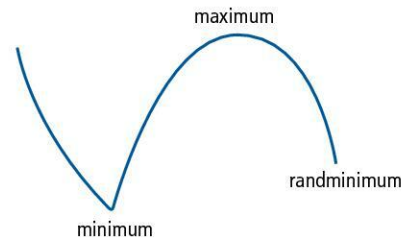
5-2

Extreme waarden en buigpunten

- 8 Hiernaast staat de grafiek van de functie $f(x) = x^3 e^x$.
- a Los exact op $f'(x) = 0$.
- b Hoort bij elke oplossing van $f'(x) = 0$ een extreme waarde van f ? Verklaar je antwoord.
- c Los exact op $f''(x) = 0$.
- d Welke betekenis hebben de oplossingen van opdracht c voor de grafiek van f ?
- 9a Plot en schets de grafieken van $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en $g(x) = |x|$.
- b Waarom kun je $f'(0)$ en $g'(0)$ niet berekenen?
- c Wat is de minimale waarde die f en g kunnen aannemen?

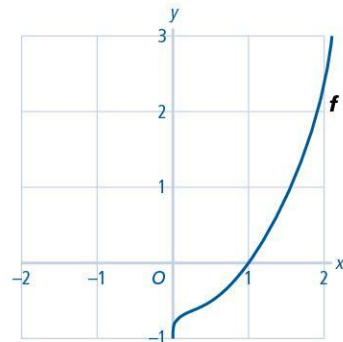
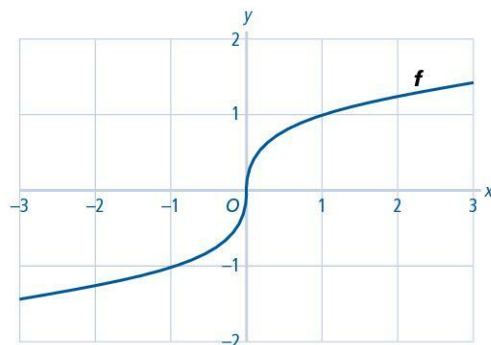


Als de grafiek van een functie overgaat van stijgen naar dalen dan heeft de functie een maximum. Als de grafiek overgaat van dalen in stijgen dan heeft de functie een minimum. Extreme waarden kun je vinden door te onderzoeken waar de grafiek een horizontale raaklijn heeft, maar je kunt extreme waarden ook vinden aan de rand van een domein of bij een waarde van x waarvoor de grafiek een knik heeft of een verticale raaklijn.



- 10 Gegeven is de functie $f(x) = x + \sqrt{4 - 3x^2}$.
- a Geef het domein van f .
- b Plot en schets de grafiek van f .
- c Geef het functievoorschrift $f'(x)$.
- d Bereken exact de extreme waarden van f .
- 11 Gegeven is de functie $f(x) = 3x - x\sqrt{x}$.
- a Plot en schets de grafiek van f .
- b Bereken exact de extreme waarden van f .
- c Stel vergelijkingen op van de raaklijnen in de snijpunten van de grafiek met de x -as.
- d Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de lijnen van opdracht c.
- 12 Op het interval $[-\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$ zijn gegeven de functies $f(x) = \sin(x) + |\sin(x)|$ en $g(x) = \sin(x) + |\cos(x)|$.
- a Plot en schets de grafiek van f en g in één figuur.
- b Bereken exact de extreme waarden van de functie f .
- c Bereken exact de extreme waarden van de functie g .

- 13** Gegeven is de functie $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.
- a** Stel de functievoorschriften op van $f'(x)$ en $f''(x)$.
 - b** Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f .
- 14** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{\ln(x)}{1 - \ln(x)}$
- a** Plot en schets de grafiek van f en geef het domein van f .
 - b** Onderzoek met je rekenmachine tot welke waarde $f(x)$ nadert als x steeds dichterbij 0 wordt gekozen.
 - c** De grafiek van f heeft twee asymptoten. Geef een vergelijking van elk van de asymptoten.
 - d** Toon met de afgeleide aan dat de functie f geen extreme waarden heeft.
 - e** Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f .
- 15** Hiernaast staat de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
- a** Stel de functievoorschriften op van $f'(x)$ en $f''(x)$.
 - b** De grafiek van f gaat door het punt $(0, 0)$. Wat kun je zeggen over de raaklijn in dit punt?
 - c** Leg uit waarom $(0, 0)$ een buigpunt van de grafiek is.
 - d** Wat kun je zeggen over $f''(0)$?



De grafiek van een functie f heeft een buigpunt als de grafiek overgaat van afnemend stijgend (dalend) naar toenemend stijgend (dalend) of andersom. Het is mogelijk dat er een buigpunt is hoewel $f''(x) = 0$ geen oplossing heeft. Omgekeerd geldt ook dat de oplossingen van $f''(x) = 0$ niet altijd bij een buigpunt horen.

- 16** Gegeven is de functie $f(x) = x^5 - 5x^4$.
- a** Bereken exact de extreme waarden van f .
 - b** Los exact op: $f''(x) = 0$.
 - c** Slechts één van de twee oplossingen die je in opdracht b vindt, hoort bij een buigpunt. Leg dit uit met behulp van een plot van f' .
- 17** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt[3]{x-1}$.
- a** Toon aan dat $f'(x) = \frac{4x-3}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$
 - b** Bereken exact de x -coördinaat van elk buigpunt van de grafiek van f .

5-3

Scheve asymptoten

- 18 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{3}{x+2}$ en $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.
- Plot en schets de grafieken van f en g in één figuur.
 - Als $x \rightarrow \infty$ en als $x \rightarrow -\infty$ nadert de grafiek van f tot de grafiek van g . Geef hiervoor een verklaring.
- 19 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 10}{x + 2}$ en $g(x) = x + 3$.
- Toon algebraïsch aan dat $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x + 2}$
 - Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x))$.
 - De grafiek van f nadert voor $x \rightarrow \infty$ en $x \rightarrow -\infty$ tot een rechte lijn. Geef een vergelijking van deze lijn.

Theorie

Als het verschil tussen de functiewaarden van een functie f en een lineaire functie $g(x) = ax + b$ naar nul nadert als $x \rightarrow \infty$ of $x \rightarrow -\infty$, dan is de lijn met vergelijking $y = ax + b$ een **scheve asymptoot** van de grafiek van f . In dit geval moet dus gelden: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ of $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

Voorbeeld

Toon aan dat $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ de vergelijking is van de scheve asymptoot van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1}{x - 1}$

Oplossing

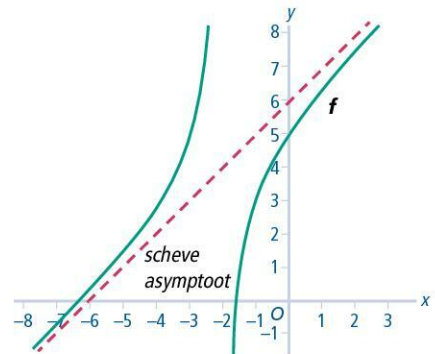
Bereken $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1}{x - 1} - \frac{\left(\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}\right)(x - 1)}{x - 1} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}\right)}{x - 1} = \frac{3\frac{1}{2}}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\frac{1}{2}}{x - 1} = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\frac{1}{2}}{x - 1} = 0 \text{ dus}$$

$y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ is de vergelijking van de scheve asymptoot.



20a Toon aan dat de lijn met vergelijking $y = 3x - 16$ de scheve asymptoot is van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 11}{x + 3}$

b Voer dezelfde opdracht uit voor de lijn met vergelijking

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \text{ en de functie } g(x) = \frac{15 - x^2}{2x + 3}$$

In de volgende opdracht leer je een manier om zelf de scheve asymptoot te vinden. Daarbij gebruik je de afgeleide van de functie.

21 De functie $f(x) = \frac{x^2 + 5\frac{1}{2}x + 4}{2x - 1}$ heeft een scheve

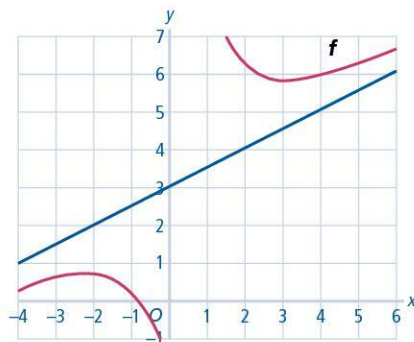
asymptoot met vergelijking $y = ax + b$.

a Bepaal $f'(x)$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$.

b Waarom moet gelden $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = a$?

c Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$ en verklaar dat het resultaat gelijk is aan b .

d Geef een vergelijking van de scheve asymptoot.



Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de scheve asymptoot van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 1}{x + 2}$

Oplossing

$$f'(x) = \frac{(6x + 5)(x + 2) - (3x^2 + 5x + 1) \cdot 1}{(x + 2)^2} = \frac{3x^2 + 12x + 9}{x^2 + 4x + 4}, \text{ dus } \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{3 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 5x + 1}{x + 2} - \frac{3x(x + 2)}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -1$$

dus een vergelijking van de scheve asymptoot is $y = 3x - 1$.

Opmerking: alle limieten in dit voorbeeld gelden ook voor $x \rightarrow -\infty$.

22 Bepaal de vergelijking van de scheve asymptoot van de grafieken van de volgende functies.

a $f(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$

b $g(x) = \frac{x^2 + 5x - 3}{x + 4}$

c $h(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$

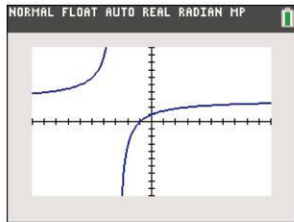
23 Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \ln(x)$.

a Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$.

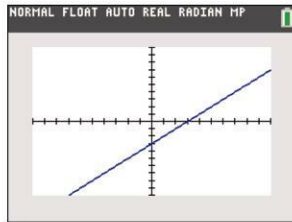
b Ga na of de grafiek van f een scheve asymptoot heeft.

5-4

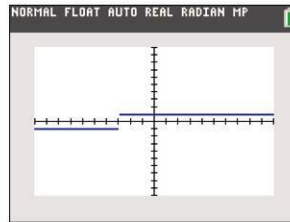
Limieten en perforaties



f



g



h

- 24 Je ziet de grafieken van $f(x) = 1 + \frac{2x}{x+3}$, $g(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ en $h(x) = \frac{|x+3|}{x+3}$

Het domein van elk van deze functies is $\mathbb{R}$ met $x \neq -3$.

- a Wat gebeurt er met de waarde van $f(x)$ als x van de rechterkant tot -3 nadert? En als x van de linkerkant tot -3 nadert?
- b Beantwoord dezelfde vragen voor de functies g en h .

Theorie

Als een functiewaarde van een functie f niet bestaat voor $x = a$, kun je vaak wel iets zeggen over het gedrag van f als x tot a nadert. Je moet daarbij soms onderscheid maken tussen 'x daalt naar a ' en 'x stijgt naar a '. De notaties daarvoor zijn $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ en $\lim_{x \uparrow a} f(x)$. In die gevallen spreek je

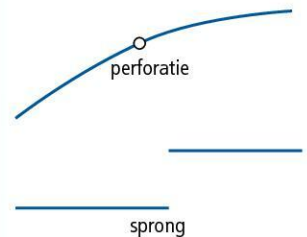
van de **rechterlimiet** $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ en de **linkerlimiet** $\lim_{x \uparrow a} f(x)$.

Als $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty$ (of $-\infty$) en/of $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \infty$ (of $-\infty$), dan heeft

de grafiek van f een verticale asymptoot $x = a$.

Als de linker- en rechterlimiet beide niet ∞ of $-\infty$ zijn, dan zijn er twee mogelijkheden:

- Als $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x)$, terwijl $f(a)$ niet bestaat dan heeft de grafiek van f een **perforatie** bij $x = a$.
- Als $\lim_{x \uparrow a} f(x) \neq \lim_{x \downarrow a} f(x)$, dan heeft de grafiek van f een **sprong** bij $x = a$.



Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$

Onderzoek het gedrag van de grafiek van f bij $x = 1$.

Oplossing

$$f(x) = \frac{2x(x-1)}{x-1} \text{ dus } f(x) = 2x \text{ mits } x \neq 1$$

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = 2 \text{ en } \lim_{x \downarrow 1} f(x) = 2.$$

De grafiek heeft perforatie (1, 2).

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $g(x) = \frac{x|x-1|}{x^2-1}$

Onderzoek het gedrag van de grafiek van g bij $x = 1$.

Oplossing

$$g(x) = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1} \text{ als } x > 1 \text{ en}$$

$$g(x) = \frac{x(-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-x}{x+1} \text{ als } x < 1$$

$$\lim_{x \downarrow 1} g(x) = \frac{1}{2} \text{ en } \lim_{x \uparrow 1} g(x) = -\frac{1}{2}$$

De grafiek heeft een sprong bij $x = 1$.

25a Bereken $\lim_{x \uparrow 5} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow 5} f(x)$ voor de functie $f(x) = \frac{|x^2 - 25|}{x - 5}$

b Bereken $\lim_{x \uparrow 5} g(x)$ en $\lim_{x \downarrow 5} g(x)$ voor de functie $g(x) = \frac{2x - 10}{|x - 5|}$

c Hebben de grafieken van f en g bij $x = 5$ een verticale asymptoot, een perforatie of een sprong?

26 Onderzoek of de grafieken van de volgende functies een verticale asymptoot hebben, een perforatie of een sprong.

a $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 - 2}$ **c** $h(x) = \frac{2x - 1}{4x^2 - 2x}$

b $g(x) = \frac{x^2 - 5x - 6}{x - 3}$ **d** $k(x) = \frac{2x^2 - 8x}{|x - 4|}$

27a Bereken $\lim_{x \uparrow 1} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow 1} f(x)$ voor de functie $f(x) = 2e^{\frac{1}{x-1}}$.

Welke bijzonderheid volgt hieruit voor de grafiek van f ?

b Bereken $\lim_{x \uparrow -2} g(x)$ en $\lim_{x \downarrow -2} g(x)$ voor de functie $g(x) = \frac{x + |x + 2|}{x + 2}$

Welke bijzonderheid volgt hieruit voor de grafiek van g ?

28 De grafieken van de volgende functies hebben een perforatie. Bereken de coördinaten van dit punt en verklaar steeds je antwoord.

a $f(x) = \frac{3x + 18}{x^2 - 3x - 54}$

b $g(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{e^x - 2}$

c $h(x) = \frac{2x^2 + 2x - 12}{3x - 6}$

d $k(x) = \cos(x) \cdot \tan(x)$ op het interval $\langle -\pi, \pi \rangle$

 **29** Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x - a}$

Onderzoek voor welke waarden van a de grafiek van f_a

- een verticale asymptoot heeft
- een scheve asymptoot heeft
- een perforatie heeft.

5-5

Functies onderzoeken

- 30 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$
- Toon met behulp van $f'(x)$ aan dat f geen extreme waarden heeft.
 - Toon met behulp van $f''(x)$ aan dat $(0, 0)$ het buigpunt is van de grafiek van f .
 - De grafiek van f heeft twee verschillende horizontale asymptoten. Toon dit aan met behulp van limieten.
 - Toon aan dat $f(-p) = -f(p)$ voor elke waarde van p . Wat betekent dit voor de grafiek van f ?

Theorie

Je kunt de grafiek van elke willekeurige functie plotten met je rekenmachine. Daarmee krijg je een beeld van het verloop van de grafiek. Aspecten van functies die je met behulp van wiskundige technieken kunt vaststellen of bewijzen zijn onder andere:

- Het domein bepalen, met name bij gebroken functies, wortelfuncties en logaritmische functies.
- Nulpunten berekenen door het oplossen van de vergelijking $f(x) = 0$.
- Extreme waarden berekenen, vaak met behulp van differentiëren, maar ook bij een knik in de grafiek of als er sprake is van een randextreem.
- Asymptoten opsporen en aantonen met behulp van limieten.
- Aantonen dat de grafiek van een functie symmetrisch is in de y -as als geldt $f(-x) = f(x)$
in de oorsprong als geldt $f(-x) = -f(x)$.

Voorbeeld

Bereken exact de extreme waarden van de functie $f(x) = \sqrt{-16 + 17x^2 - x^4}$ en toon aan dat de grafiek symmetrisch is in de y -as.

Oplossing

$-16 + 17x^2 - x^4 = -(x^2 - 1)(x^2 - 16)$ dus de nulpunten zijn $x = 1$, $x = -1$, $x = 4$ en $x = -4$.

Het domein is $[-4, -1] \cup [1, 4]$.

$$f'(x) = \frac{34x - 4x^3}{2\sqrt{-16 + 17x^2 - x^4}}$$

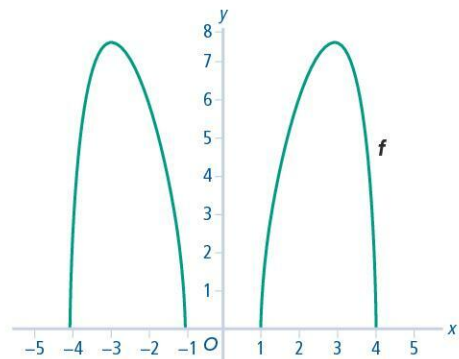
$f'(x) = 0$ geeft $x = 0$ of $x = \sqrt{8\frac{1}{2}}$ of $x = -\sqrt{8\frac{1}{2}}$

Maxima: $f(-\sqrt{8\frac{1}{2}}) = f(\sqrt{8\frac{1}{2}}) = 7\frac{1}{2}$

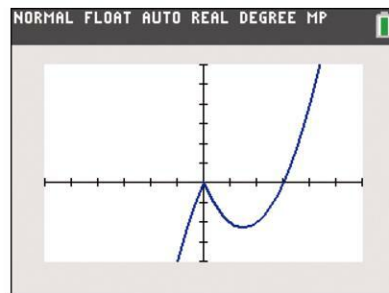
Randminima: $f(-4) = f(-1) = f(1) = f(4) = 0$

Voor elke waarde van x geldt: $(-x)^2 = x^2$ en $(-x)^4 = x^4$,

waaruit volgt $f(-x) = f(x)$, dus de grafiek is symmetrisch in de y -as.



- 31** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x)$.
- a** Bereken exact de nulpunten van f .
 - b** Bereken exact de extreme waarden van f .
 - c** Toon aan dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in de oorsprong.
- 32** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt[3]{4x - x^2}$.
- a** Wat is het domein van deze functie? Verklaar je antwoord.
 - b** Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van f .
 - c** Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan de grafiek van f in de snijpunten met de x -as.
 - d** Toon aan dat $f(2 - p) = f(2 + p)$ voor elke waarde van p .
 - e** Welke symmetrie volgt uit de bewering in opdracht d voor de grafiek van f ?
- 33** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = p \cdot e^x - x - 1$.
- a** Voor welke waarden van p heeft de functie f_p geen extreme waarde?
 - b** Voor welke waarde van p raakt de grafiek van f_p de x -as?
 - c** Toon aan dat de grafieken van alle functies f_p dezelfde scheve asymptoot hebben en stel een vergelijking op van deze asymptoot.
 - d** Toon aan dat de grafiek van een functie f_p geen buigpunt kan hebben.
- 34** Voor elke waarde van p is gegeven de functie $f_p(x) = -2x + \ln(e^x - p)$.
- a** Voor welke waarden van p is $\mathbb{R}$ het domein van f_p ?
 - b** Toon aan dat de functie f_e een maximum heeft bij $x = 1 + \ln(2)$.
 - c** De grafiek van f_p is een rechte lijn als $p = 0$. Geef hiervoor een bewijs.
 - d** Voor alle waarden van $p \neq 0$ is de lijn met vergelijking $y = -x$ een scheve asymptoot van de grafiek van f_p . Toon dit aan.
- 35** Gegeven is de functie $f(x) = |x|(x - 3)$. Onderzoek met behulp van berekeningen voor welke waarden van p een lijn met vergelijking $y = px$ respectievelijk één, twee of drie punten gemeenschappelijk heeft met de grafiek van f .

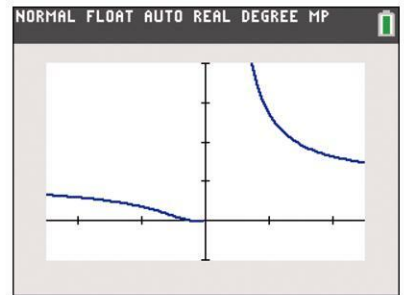


5-6

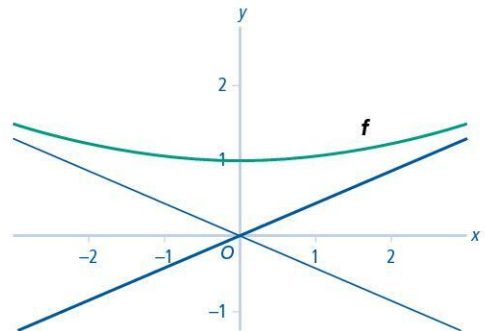
Gemengde opdrachten

- 36** Gegeven zijn de functies $f_a(x) = e^x - ax$.
- a** Voor welke waarden van a heeft de grafiek van een functie f_a een top?
Druk de coördinaten van de top uit in a .
 - b** Voor welke waarde van a ligt de top van de grafiek op de y -as?
 - c** Voor welke waarde van a raakt de grafiek van een functie f_a de x -as?
Toon de juistheid van je antwoord aan met een berekening.

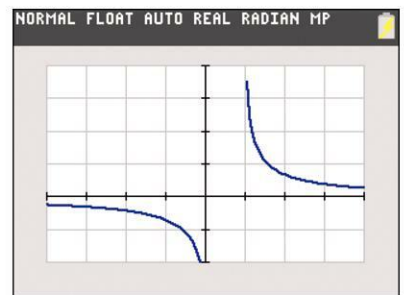
- 37** Gegeven is de functie $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
- a** Wat gebeurt er met de waarden van $\frac{1}{x}$ als x daalt naar 0?
En als x stijgt naar 0?
 - b** Bereken $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$ en $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$.



- 38** Hiernaast staat de grafiek van $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x(e^x + 1)}{e^x - 1}$
- a** Toon aan dat de lijn $y = \frac{1}{2}x$ een scheve asymptoot van de grafiek van f is.
 - b** Toon aan dat de grafiek van f symmetrisch is in de y -as.
 - c** De noemer van het functievoorschrift is 0 als je $x = 0$ invult.
Waarom kun je hier niet concluderen dat $x = 0$ een verticale asymptoot van de grafiek van f is?



- 39** Gegeven is de functie $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$
- a** Toon aan dat het domein van f bestaat uit de intervallen $\langle \leftarrow, 0 \rangle$ en $\langle 1, \rightarrow \rangle$.
 - b** Toon aan dat de functie f geen nulpunten heeft.
 - c** Toon aan dat f geen extreme waarden heeft.
 - d** Bereken $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow 1} f(x)$.
 - e** Stel een vergelijking op van elke asymptoot van de grafiek van f .



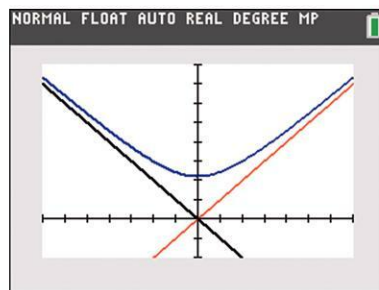
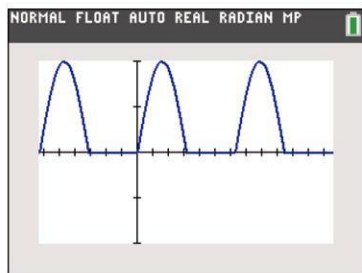
- 40 In de plot staan de grafiek van $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ en de lijnen met vergelijking $y = x$ en $y = -x$. Om aan te tonen dat $y = x$ een scheve asymptoot is moet je bewijzen dat $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0$.

a Je kunt deze limiet berekenen door $f(x) - x$ te

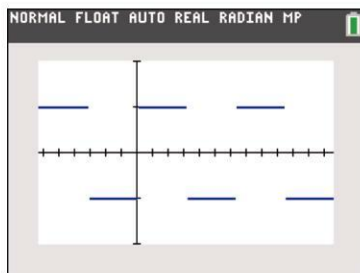
vermenigvuldigen met de breuk $\frac{\sqrt{x^2 + 5} + x}{\sqrt{x^2 + 5} + x}$

Werk deze vermenigvuldiging uit en bereken de limiet.

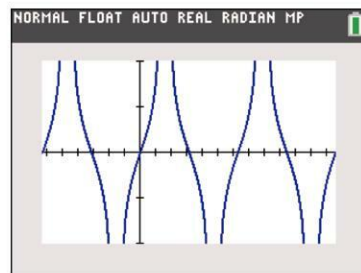
b Toon ook aan dat $y = -x$ een scheve asymptoot van de grafiek van f is.



f



g



h

- 41 Hierboven staan plots van de grafieken van

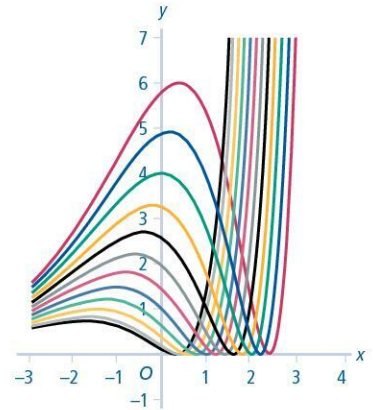
$$f(x) = |\sin(x)| + \sin(x), \quad g(x) = \frac{\sin(x)}{|\sin(x)|} \quad \text{en} \quad h(x) = \frac{\sin(x)}{|\cos(x)|}$$

- a Bereken exact met maximum van f .
b Bij welke waarden van x heeft de grafiek van g een sprong?
c Voor welke waarden van x geldt: $h(x) = \tan(x)$?
d Toon aan dat de grafieken van g en van h puntsymmetrisch zijn in $(0, 0)$.

- 42 Gegeven is de functie $g(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$

- a Leg zonder berekeningen uit waarom de grafiek van g geheel boven de x -as ligt.
b Bereken exact het maximum van de functie g .
c Toon aan dat de grafiek van de functie g symmetrisch is in de y -as.
d Verder is gegeven de functie $f(x) = e^{-x}$.
Bewijs dat $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

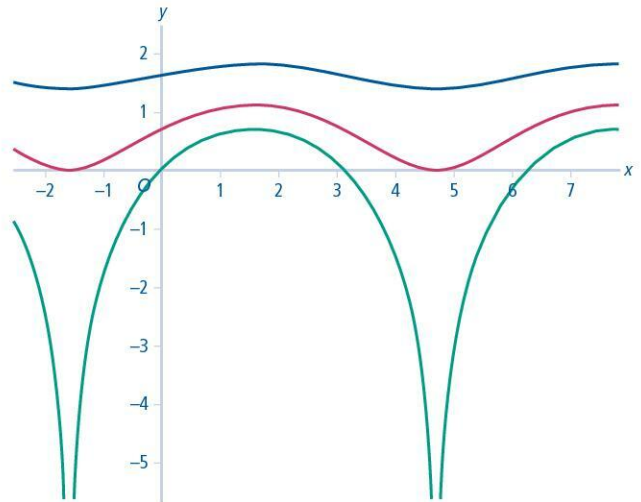
- 43** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = (x - p)^2 \cdot e^x$. Hiernaast is van een aantal functies uit deze familie de grafiek getekend.
- a** Geef het functievoorschrift $f'_p(x)$.
 - b** Bereken voor welke waarden van p een top van de grafiek van f_p op de y -as ligt.
 - c** Druk de coördinaten van de toppen uit in p .
 - d** Toon aan dat alle toppen van de bundel grafieken die bij een maximum horen, op de grafiek van de functie $g(x) = 4e^x$ liggen.

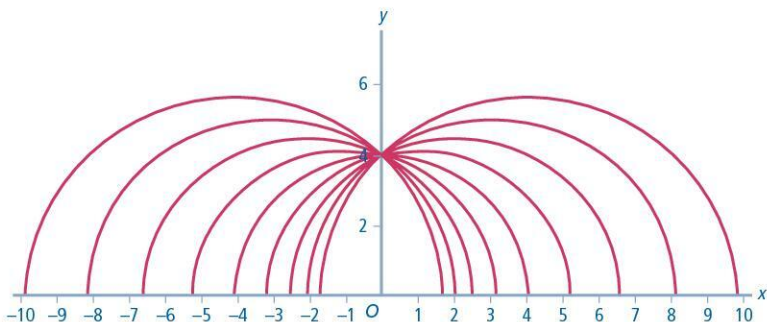


- 44** Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \frac{(x - a)(x - 9a)}{x - 10a}$
- a** Hoe ziet de grafiek van f_a er uit als $a = 0$? Verklaar je antwoord.
 - b** Als $a \neq 0$ heeft de grafiek van een functie f_a altijd twee toppen. Druk de coördinaten van deze toppen uit in a .
 - c** De toppen liggen op twee rechte lijnen. Geef een vergelijking van elk van deze lijnen.

- 45** Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \ln(a + \sin(x))$. Voor enkele waarden van a zijn de grafieken van f_a hiernaast getekend.

- a** Bereken exact de extreme waarden van $f_{\frac{1}{2}}$.
- b** Voor welke waarde van a raakt de grafiek van f_a de x -as? Verklaar je antwoord.
- c** Voor welke waarden van a is $f_a(x)$ voor geen enkele waarde van x gedefinieerd?
- d** Voor welke waarden van a heeft de grafiek van f_a verticale asymptoten?
- e** Voor welke waarden van a heeft de grafiek van f_a buigpunten?



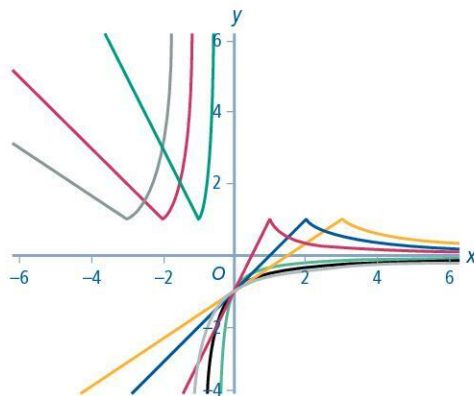


- 46** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = \sqrt{16 + px - x^2}$. Voor een aantal waarden van p is de grafiek hierboven getekend.
- a** Toon aan dat de grafiek van f_0 een halve cirkel is door te bewijzen dat de afstand van elk punt A op deze grafiek tot de oorsprong gelijk is aan 4.
 - b** Voor elke waarde van p is de grafiek van f_p een halve cirkel. Toon aan dat $M\left(\frac{1}{2}p, 0\right)$ het middelpunt van die halve cirkel is.
 - c** Bereken exact het domein van f_6 .
 - d** Voor welke waarde van p is het interval $[-1, 16]$ het domein van f_p ?
 - e** Bewijs dat de toppen van de grafieken van alle functies f_p op de grafiek van de functie $g(x) = \sqrt{16 + x^2}$ liggen.

- 47** Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \frac{x - |x - a|}{x + |x - a|}$ met $a \neq 0$.

De grafiek van f_a is hiernaast getekend voor $a = -3, -2, -1, 1, 2$ en 3 .

- a** Toon aan dat als $x < a$ de grafiek van f_a een rechte lijn is.
- b** Druk de vergelijking van de verticale asymptoot van een functie f_a uit in a .
- c** De grafiek van een functie f_a vertoont een knik. Toon aan dat deze knik op de lijn met vergelijking $y = 1$ ligt.
- d** Een punt $P(p, q)$ met $p > 0$ ligt op de grafiek van een functie f_a . Toon aan dat $q \leq 1$.



Samenvatting

Functies met absolute waarden

Als in een functievoorschrift een absolute waarde voorkomt, dan kan dat functievoorschrift op meerdere manieren worden geschreven. Daartoe moet je onderzoeken op welk gedeelte van het domein de uitdrukking tussen de absolute waarde-strepen positief en op welk gedeelte het negatief is.

Voorbeeld

Geef beide vormen van het functievoorschrift van $f(x) = x|9 - x^2|$.

Oplossing

$$9 - x^2 \geq 0 \text{ als } -3 \leq x \leq 3 \text{ dus } f(x) = 9x - x^3$$

$$9 - x^2 < 0 \text{ als } x < -3 \text{ of } x > 3 \text{ dus } f(x) = -9x + x^3$$

Extreme waarden en buigpunten

Extreme waarden en buigpunten gaan niet altijd samen met nulpunten van de afgeleide respectievelijk de tweede afgeleide.

Extreme waarden kunnen ook voorkomen aan de rand van een domein, als de grafiek een knik vertoont of bij een verticale raaklijn.

Bij buigpunten met een verticale buigraaklijn bestaat de tweede afgeleide niet in dat punt.

Scheve asymptoten

Naast horizontale of verticale asymptoten kunnen grafieken van functies ook één of twee scheve asymptoten hebben.

De lijn met vergelijking $y = ax + b$ is een scheve asymptoot van de grafiek van f als geldt: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ of

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$. Je kunt een scheve asymptoot

opsporen door $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ of $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$ te berekenen.

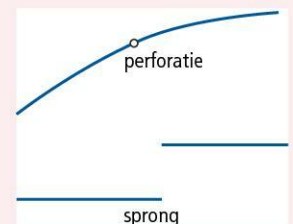


Linker- en rechterlimiet, perforatie en sprong

In sommige gevallen maakt het voor een limiet uit, of de waarde van x daalt of stijgt naar de waarde a . Je spreekt dan van een linkerlimiet of een rechterlimiet van de functie. De notaties hiervoor zijn $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow a} f(x)$.

Als $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ beide bestaan, kunnen zich twee bijzondere gevallen voordoen:

- Als $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x)$ terwijl $f(a)$ niet is gedefinieerd, dan heeft de grafiek van f een perforatie.
- Als er een waarde van a is waarvoor $\lim_{x \uparrow a} f(x) \neq \lim_{x \downarrow a} f(x)$ dan heeft de grafiek van f een sprong.



Je kunt een vergelijking van een scheve asymptoot opstellen

Bereken eerst $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = a$ en vervolgens $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de scheve asymptoot van grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

Oplossing

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - x^2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x}{4x^2 - 4x + 1} \text{ en } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x}{4x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - 0}{4 - 0 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \frac{1}{2}x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x-1} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x-1} - \frac{x^2 - \frac{1}{2}x}{2x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}x}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{4}$$

dus een vergelijking van de scheve asymptoot is $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

Opmerking: de limieten voor $x \rightarrow -\infty$ zijn hetzelfde.

Je kunt linker- en rechterlimieten berekenen, en onderzoeken of de grafiek van een functie een verticale asymptoot, een sprong of perforatie heeft

Onderzoek de functie bij de waarden van x waarvoor geen functiewaarde bestaat.

Voorbeeld 1

Bereken $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$

voor de functie $f(x) = e^{\frac{x}{4} + \frac{1}{x}}$

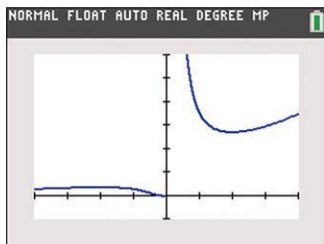
Oplossing

$f(x)$ bestaat niet als $x = 0$.

$$\lim_{x \uparrow 0} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \right) = -\infty \text{ dus } \lim_{x \uparrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \right) = \infty \text{ dus } \lim_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$$

De y -as is een verticale asymptoot van de grafiek.



Voorbeeld 2

Bereken de perforatie(s) van de grafiek

van de functie $f(x) = \frac{2x^2 - 10x - 12}{x^2 - 36}$

Oplossing

$f(x)$ bestaat niet als $x = 6$ of $x = -6$.

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 5x - 6)}{x^2 - 36} = \frac{2(x+1)(x-6)}{(x+6)(x-6)} = \frac{2(x+1)}{x+6}$$

mits $x \neq 6$

$$\lim_{x \uparrow 6} f(x) = \lim_{x \downarrow 6} f(x) = \frac{2 \cdot 7}{12} = 1\frac{1}{6},$$

de perforatie is $(6, 1\frac{1}{6})$.

$$\lim_{x \uparrow -6} f(x) = \infty \text{ en } \lim_{x \downarrow -6} f(x) = -\infty,$$

dus $x = -6$ is een verticale asymptoot van de grafiek van f .

Test jezelf

- T-1** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - |2x + 1|$.
- a** Schrijf het functievoorschrift van f zonder absolute waarde-strepen.
 - b** Bereken exact de nulpunten van f .
 - c** Bereken de extreme waarden van f .
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-1.*

- T-2** Gegeven is de functie $f(x) = |x + 2|\sqrt{x^2 + 1}$.
De grafiek van f heeft een knik.
Bereken de coördinaten van dit punt en geef de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan beide takken van de grafiek in dit punt.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-1.

- T-3** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 6x + 9}$ en $g(x) = \sqrt[3]{2x - 10}$.
- a** Bereken exact de extreme waarde van f .
 - b** Toon aan dat de grafiek van g een buigpunt heeft.
 - c** Bereken de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van g en geef een vergelijking van de buigraaklijn.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-2.*

- T-4a** Toon aan dat de lijn met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}$ de scheve asymptoot is van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 6}{2x - 1}$

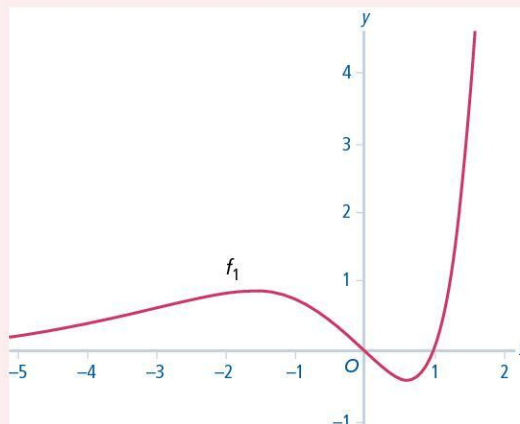
- b** Stel een vergelijking op van de scheve asymptoot van de grafiek van de functie $g(x) = \frac{1 - 3x + x^2}{x + 5}$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-3.

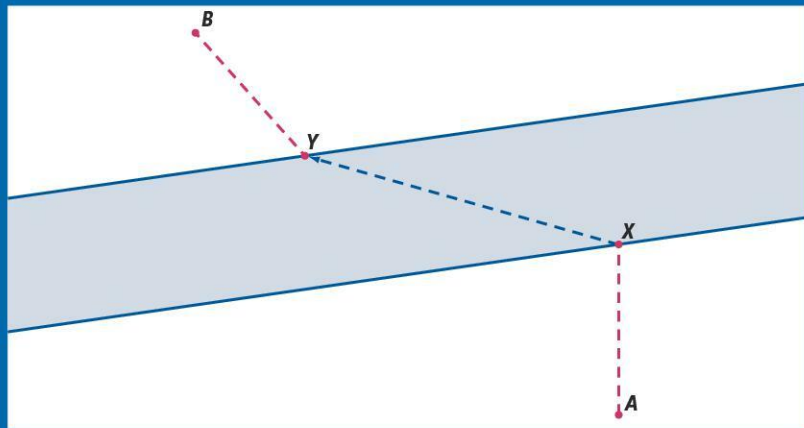
-  **T-5** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x|x + 3|}{2x^2 - 18}$

Onderzoek met behulp van berekeningen of de grafiek van f een sprong, een verticale asymptoot of een perforatie heeft.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-4.

- T-6** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = (x^2 - p)x e^x$.
De grafiek van f_1 staat hiernaast.
- a** Bereken exact de extreme waarden van f_1 .
 - b** Bereken exact de x -coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f_1 .
 - c** Er is een waarde van p waarbij de functie f_p een extreme waarde heeft bij $x = 1$.
Bereken deze waarde van p .
 - d** Toon met behulp van de tweede afgeleide van f_p aan dat de grafiek van f_p voor elke waarde van p twee buigpunten heeft.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 5-5.



- T-7** Gegeven is de functie $f(x) = 4x + 1 + \frac{12}{e^x + 1}$
- a** Toon met behulp van de afgeleide functie aan dat de functie f geen extreme waarde heeft.
 - b** Toon met behulp van limieten aan dat de grafiek van f twee verschillende scheve asymptoten heeft en stel een vergelijking op van elk van deze asymptoten.
- T-8** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 12}$.
- a** Bereken exact de nulpunten van f .
 - b** Geef het domein van f .
 - c** Stel het functievoorschrift op van de functie $g(x) = f(x - 4)$ en schrijf dat functievoorschrift zo eenvoudig mogelijk.
 - d** Welke symmetrie heeft de grafiek van g ?
 - e** Welke symmetrie heeft de grafiek van f ?
- T-9** Gegeven is de functie $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$
- a** Geef het domein van g .
 - b** Leg uit waarom je het functievoorschrift van g voor $x > -1$ kunt schrijven als $g(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1}}$
 - c** Laat met behulp van een limiet zien, dat $y = 1$ een horizontale asymptoot van de grafiek van g is.
 - d** De grafiek van g heeft een tweede horizontale asymptoot. Stel een vergelijking op van deze asymptoot.
 - e** Bereken exact de extreme waarde van g .



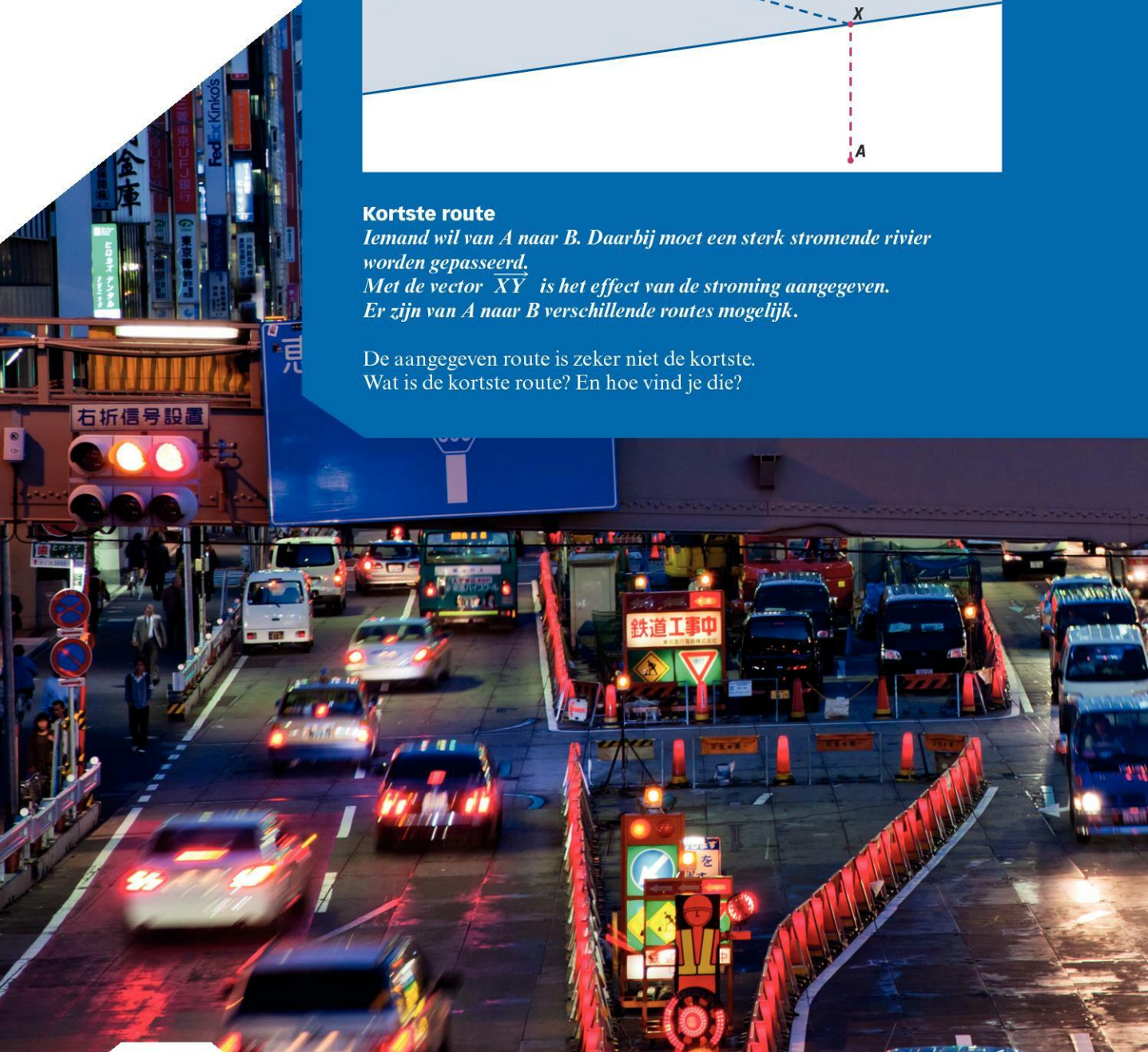
Kortste route

Iemand wil van A naar B. Daarbij moet een sterk stromende rivier worden gepasseerd.

Met de vector $\overrightarrow{XY}$ is het effect van de stroming aangegeven.

Er zijn van A naar B verschillende routes mogelijk.

De aangegeven route is zeker niet de kortste.
Wat is de kortste route? En hoe vind je die?



Hoofdstuk 6

Afsluiting meetkunde

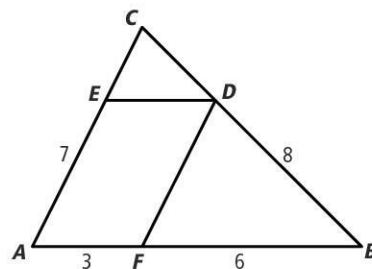
In dit hoofdstuk

	Voorkennis	138
6-1	Bijzondere lijnen in een driehoek	140
6-2	Lijnen en cirkels	142
6-3	Afstanden en hoeken	144
6-4	Zwaartepunten	146
6-5	Gemengde opdrachten	148
	Samenvatting	152
	Test jezelf	154



Voorkennis

- V-1** Op de zijden van $\triangle ABC$ liggen de punten D , E en F , met $AF = 3$, $FB = 6$, $BC = 8$ en $AC = 7$. De lijnstukken ED en DF zijn evenwijdig aan de zijden van $\triangle ABC$.
- a** Bereken de lengten van de zijden van driehoek EDC .
- b** De driehoeken ABC en FBD zijn gelijkvormig. Hoe groot is de vergrotingsfactor?



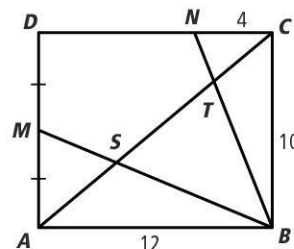
Theorie

Twee driehoeken zijn **gelijkvormig** als je kunt aantonen dat aan één van de twee volgende voorwaarden is voldaan.

- > De overeenkomstige hoeken zijn gelijk.
- > De overeenkomstige zijden zijn met dezelfde factor vermenigvuldigd.

Voor gelijkvormige figuren gebruik je het teken $\sim$.

- V-2** Van twee gelijkbenige driehoeken ABC en DEF zijn de top hoeken gelijk. Bewijs dat $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
- V-3** Gegeven is rechthoek $ABCD$ met $AB = 12$ en $BC = 10$. Het midden van AD is punt M en op zijde DC ligt punt N met $CN = 4$. Lijnstuk BM snijdt de diagonaal AC in punt S en lijnstuk BN snijdt diagonaal AC in punt T .
- a** Bereken exact BS .
- b** Bereken exact AT .



Theorie

In elke driehoek geldt de **sinusregel**:

Als α , β , γ de hoeken zijn van een driehoek en de lengten van de tegenoverliggende zijden zijn a , b en c , dan geldt

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

In een driehoek kun je de lengte van een zijde berekenen als je de andere zijden en de tegenoverliggende hoek kent.

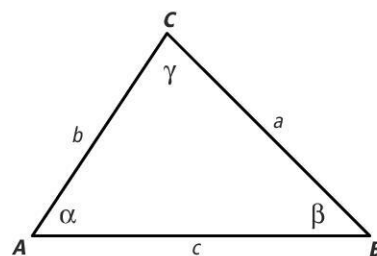
De regel die je daarvoor gebruikt heet de **cosinusregel**.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Je kunt de cosinusregel ook gebruiken om hoeken te berekenen als je van een driehoek alle zijden kent.



V-4 Maak een tekening en bereken de onbekende zijden en hoeken van driehoek ABC .

- a** $a = 6$, $\alpha = 50^\circ$ en $\gamma = 80^\circ$
- b** $a = 12$, $b = 7$ en $c = 6$
- c** $b = 45$, $\alpha = 60^\circ$ en $\beta = 56^\circ$
- d** $a = 8$, $c = 9$ en $\beta = 45^\circ$

V-5 Van driehoek ABC met zwaartelijn CD is gegeven:
 $AB = 8$, $AC = 6$ en $\angle A = 50^\circ$.

- a** Bereken in twee decimalen BC .
- b** Bereken in gehele graden $\angle B$.
- c** Bereken in twee decimalen CD .

Voor het berekenen van de hoek φ tussen twee vectoren $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$

kun je de formule $\cos(\varphi) = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|}$ gebruiken.

Voorbeeld

Bereken in gehele graden $\angle(l, m)$ van de lijnen $l: y = 3x - 4$ en $m: y = -x + 5$.

Oplossing

Richtingsvectoren van l en m zijn respectievelijk $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Dan is } \cos(\angle \vec{r}_l, \vec{r}_m) = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{-2}{\sqrt{20}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \approx 117^\circ, \text{ dus } \angle(l, m) = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$$

V-6 Bereken in gehele graden de hoek tussen de lijnen l en m .

- a** $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- b** $l: y = 4x - 3$ en $m: y = -3x + 4$
- c** $l: 2x - 3y = 6$ en $m: 3x + 6y = 2$
- d** $l: \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ en $m: \frac{x}{3} - \frac{y}{12} = 1$

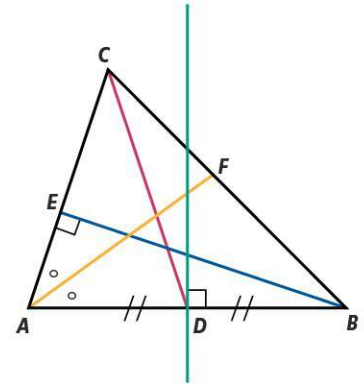
V-7 Gegeven zijn de lijnen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a** Toon aan dat het snijpunt van l en m op de y -as ligt.
- b** Bereken in gehele graden de hoek tussen l en m .

6-1

Bijzondere lijnen in een driehoek

- 1 In driehoek ABC hiernaast zijn verschillende bijzondere lijnen getekend.
Geef de naam van elk van de gekleurde lijnen.
- 2 Gegeven is een driehoek ABC . Het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden AB en BC is punt M .
 - a Wat kun je zeggen over de afstanden AM en BM ?
 - b Wat weet je van BM en CM ?
 - c Waarom is $AM = CM$?
 - d Leg uit waarom de middelloodlijnen van de zijden van driehoek ABC door één punt gaan.
- 3 Gegeven zijn de punten $A(3, -1)$, $B(5, 3)$ en $C(-5, -1)$.
 - a Geef vergelijkingen van de middelloodlijnen van de zijden van $\triangle ABC$.
 - b Bewijs door een berekening dat de middelloodlijnen elkaar in één punt snijden.



Je kunt een bewijs met behulp van een redenering of met een berekening geven. Dit is afhankelijk van de gegeven situatie en de vraag.

- Meetkundig: met stellingen, gelijkvormigheid, verhoudingen, gelijke hoeken, evenwijdigheid, de stelling van Pythagoras, oppervlakte, sinusregel of cosinusregel.

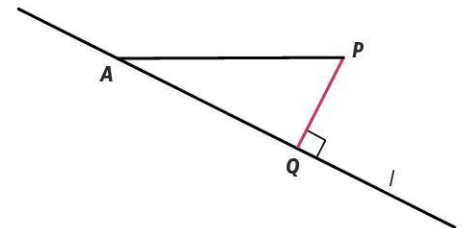
- Algebraïsch: in een assenstelsel met vectorvoorstellingen of vergelijkingen.

Daartoe moet je soms zelf een assenstelsel kiezen.

Bedenk vooraf welke manier het meest geschikt is.

- 4a Teken een driehoek ABC en de bissectrices AD en BE .
- b Leg uit waarom het snijpunt van de bissectrices AD en BE ook op de bissectrice van hoek C ligt.
- c Welke conclusie kun je trekken omtrent de bissectrices?
- 5 Gegeven lijn $l: 2x + 3y = 24$ en punt $P(3, -1)$. In deze opdracht bereken je $d(P, l) = PQ$, de afstand van P tot l . Kies $A(0, 8)$ op l . Dan is $PQ = PA \cdot \cos(\angle P)$.
 - a Toon aan dat $PA = \sqrt{90}$.
 - b Geef richtingsvectoren van de lijnen PA en PQ .

Elk punt op de bissectrice van een hoek heeft gelijke afstanden tot de benen van die hoek en omgekeerd.



- c Toon aan dat $\cos(\angle P) = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{13}} = \frac{21}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{13}}$
- d Leg uit dat $d(P, l) = PQ = \frac{21}{\sqrt{13}}$

- 6 Je kunt met de aanpak van de vorige opdracht een formule voor de afstand PQ van punt $P(p, q)$ tot lijn $l: ax + by + c = 0$ afleiden. Laat $A(r, s)$ op lijn l liggen.

a Gebruik $PQ = PA \cdot \cos(\angle P)$ en de formule $\cos(\varphi) = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|}$

en toon aan dat $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- b Verklaar de absolute waarde in de formule.

Theorie

De afstand van een punt $P(p, q)$ tot een lijn l met vergelijking $ax + by + c = 0$ kun je berekenen

met de formule $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- 7 Bereken $d(P, l)$ in de volgende gevallen.

a $P(7, -3)$ en $l: y = 2x - 4$

b $P(-4, 2)$ en $l: x - 3y + 6 = 0$

c $P(-1, 6)$ en $l: x + y = 5$

d $P(0, 0)$ en $l: \frac{x}{5} + \frac{y}{12} = 1$

- 8 Gegeven zijn de lijnen $l: 4x - 3y + 12 = 0$ en $m: 5x + 12y = 60$.

Punt $P(p, q)$ ligt op een bissectrice van de hoeken die l en m met elkaar maken.

- a Druk de afstand van P tot l uit in p en q .
b Druk de afstand van P tot m uit in p en q .
c Gebruik dat $d(P, l) = d(P, m)$ en stel vergelijkingen op van de beide bissectrices.

- 9 In driehoek ABC zijn de drie hoogtelijnen getekend. Je gaat in deze opdracht bewijzen dat ze elkaar in één punt snijden. Daartoe is driehoek DEF met zijden evenwijdig aan de zijden van driehoek ABC getekend.

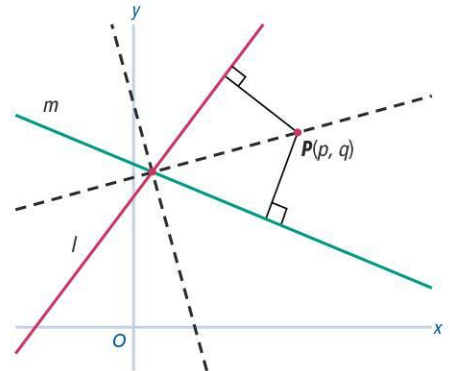
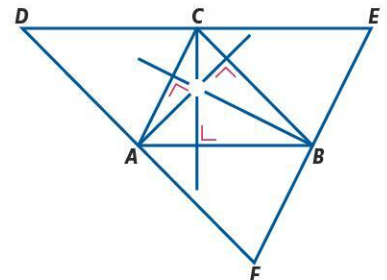
- a Wat voor figuren zijn de vierhoeken $ABCD$ en $ABEC$?
b Beredeneer dat $DC = CE$.
c Welke bijzondere lijn is de hoogtelijn uit C in driehoek DEF ?
d Beredeneer dat de drie hoogtelijnen van driehoek ABC door één punt gaan.
e Gegeven zijn de punten $A(-4, 0)$, $B(8, 0)$ en $C(0, 6)$. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de hoogtelijnen van $\triangle ABC$.

Voorbeeld

Bereken de afstand van het punt $P(-3, 4)$ tot de lijn $l: 5x - 2y = 6$.

Oplossing

$$d(P, l) = \frac{|5 \cdot (-3) - 2 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$$



6-2

Lijnen en cirkels

- 10 Hiernaast is een begin gemaakt met het berekenen van het snijpunt van

lijn $l: 3x + 4y = 38$ en lijn $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Voltooi de berekening en bereken het snijpunt van beide lijnen.

	Voor elk punt van m geldt
	$x = 4 + \lambda$ en $y = 2 - 3\lambda$.
	Substitutie in $3x + 4y = 38$ geeft
	$3(4 + \lambda) + 4(2 - 3\lambda) = 38$.
	

- 11a Bereken exact, met behulp van substitutie, de coördinaten van de snijpunten van lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ met cirkel

$$c: x^2 + y^2 - 4x - 6y = 7.$$

- b Lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ raakt aan cirkel $c: x^2 + (y + 3)^2 = 17$.

Bereken exact voor welke waarde van p dit het geval is.

Je kunt bij problemen met raaklijnen aan cirkels gebruik maken van de eigenschap dat een raaklijn één gemeenschappelijk punt heeft met de cirkel.

Bij een berekening krijg je een tweedegraads vergelijking waarvan de discriminant D gelijk aan 0 moet zijn.

In een aantal gevallen kun je gebruik maken van de raaklijnstelling.

Raaklijnstelling

Een raaklijn staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Voorbeeld

Stel vergelijkingen op van de raaklijnen met richtingscoëfficiënt 3 aan de cirkel $x^2 + y^2 = 10$.

Oplossing

$$y = 3x + b \text{ invullen in } x^2 + y^2 = 10 \text{ geeft } x^2 + (3x + b)^2 = 10.$$

$$\text{Dit geeft } 10x^2 + 6bx + b^2 - 10 = 0.$$

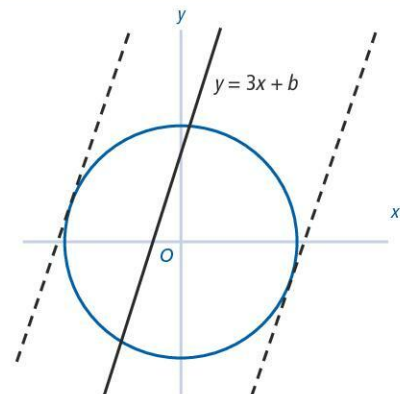
$$\text{Raken dus moet } D = (6b)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (b^2 - 10) = 0.$$

$$36b^2 - 40b^2 + 400 = 0 \text{ ofwel } -4b^2 = -400$$

$$b^2 = 100$$

$$b = -10 \text{ of } b = 10$$

De raaklijnen zijn $y = 3x - 10$ en $y = 3x + 10$.



- 12** Hiernaast zijn de raaklijnen door het punt $(8, -2)$ aan de cirkel $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$ getekend.

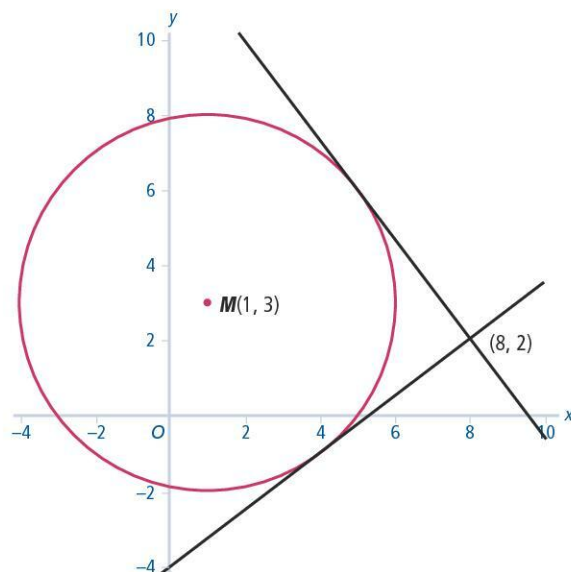
a De raaklijnen voldoen aan een vectorvoorstelling

van de vorm $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Waarom kun je ook zeggen dat de raaklijnen voldoen aan een vectorvoorstelling van de vorm

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}?$$

- b** Druk x en y uit in m en λ .
c Stel vergelijkingen op van deze raaklijnen.
d Bereken de coördinaten van de beide raakpunten.



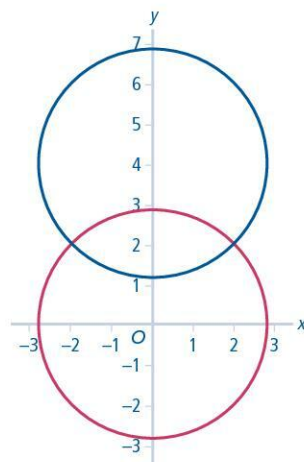
- 13** Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de cirkel $c: x^2 + y^2 = 20$ in het punt $P(4, 2)$.

- 14** Het middelpunt van cirkel c ligt op de x -as. Cirkel c raakt lijn $l: 2x + 3y = 17$ in het punt $R(4, 3)$.

- a** Maak een schets bij deze gegevens.
b Stel de middelpuntsvergelijking op van c .

- 15** Gegeven zijn de cirkels $c_1: x^2 + y^2 = 8$ en $c_2: x^2 + y^2 - 8y + 8 = 0$.

- a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van c_1 en c_2 .
b Toon aan dat de lijn door de beide snijpunten de lijn door de beide middelpunten loodrecht snijdt.
c Toon aan dat de raaklijnen in de beide snijpunten van c_1 en c_2 elkaar loodrecht snijden.



- 16** Van cirkel c ligt het middelpunt op de lijn $l: 2x - 3y = 11$. Op de cirkel liggen de punten $A(3, 6)$ en $B(-3, -2)$.

- a** Maak een schets bij deze gegevens.
b Stel de middelpuntsvergelijking op van cirkel c .

- 17** Van cirkel c is gegeven dat het middelpunt op de y -as ligt en dat lijn $l: y = 0,5x$ een raaklijn is. Verder ligt het punt $P(-8, 14)$ op c .

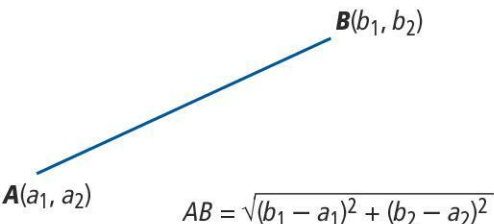
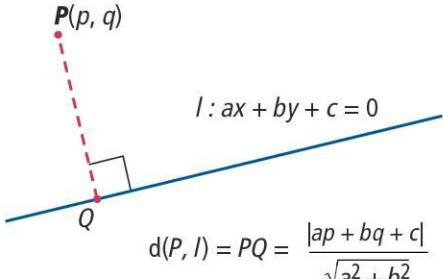
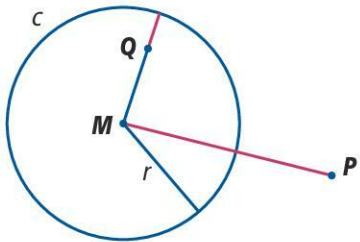
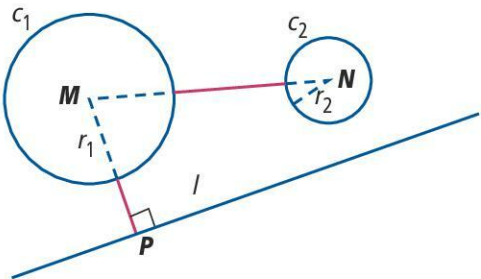
- a** Maak een schets bij deze gegevens.
b Stel een middelpuntsvergelijking op van elke mogelijke cirkel c .

6-3

Afstanden en hoeken

- 18** Gegeven zijn de cirkels $c_1 : (x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 16$ en $c_2 : (x - 15)^2 + (y - 14)^2 = 25$.
- a** Bereken exact de afstand tussen de beide middelpunten.
- b** Bereken exact de afstand tussen de beide cirkels.

Hieronder zie je voor verschillende situaties hoe je de afstand kunt berekenen. Realiseer je steeds met welke situatie je te maken hebt. Maak een schets bij elke opdracht.

Twee punten	Punt en lijn
 $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$	 $d(P, l) = PQ = \frac{ ap + bq + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$
Punt en cirkel	Twee cirkels
 $d(Q, c) = r - MQ \quad d(P, c) = MP - r$	 $d(l, c_1) = PM - r_1 \quad d(c_1, c_2) = MN - r_1 - r_2$

- 19** Bereken exact $d(P, c)$ of $d(l, c)$.
- a** $P(4, 7)$ en $c : x^2 + y^2 + 4x + 8y = 5$
- b** $l : 2x - 3y = 6$ en $c : x^2 + y^2 + 4x = 0$
- c** $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $c : x^2 + y^2 + 14x + 8y = 125$
- 20** Gegeven de punten $A(1, 0)$ en $B(7, 0)$.
- a** Toon aan dat voor het punt $P(9, 4)$ geldt: $AP = 2 \cdot BP$.
- b** Er zijn nog meer punten P waarvoor geldt $AP = 2 \cdot BP$. Stel $P(x, y)$ en geef een vergelijking in x en y waaraan de coördinaten van de punten P met eigenschap $AP = 2 \cdot BP$ voldoen.

Voorbeeld

Gegeven is punt $P(1, 7)$. Op lijn $l: y = 2x - 5$ ligt een punt S met de eigenschap dat het midden van PS op lijn $m: y = x + 2$ ligt. Bereken de coördinaten van S .

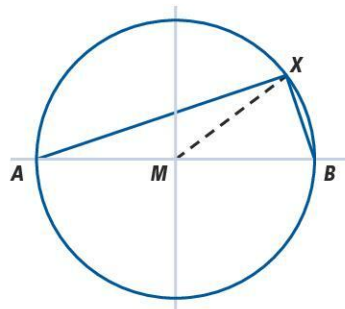
Oplossing

Stel $S(p, q)$. Omdat S op lijn l ligt geldt $q = 2p - 5$ dus $S(p, 2p - 5)$.

Voor het midden M van PS geldt $M\left(\frac{p+1}{2}, \frac{7+2p-5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, p+1\right)$.

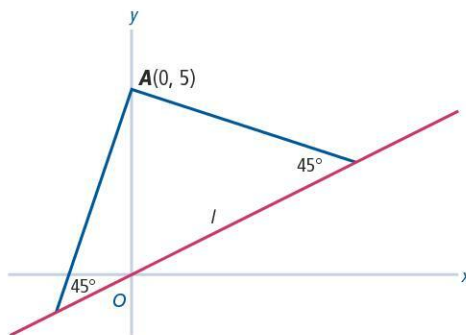
Omdat M op lijn m ligt geldt $p+1 = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} + 2$ ofwel $p = 3$. Dus is $S(3, 1)$.

- 21** Bereken de coördinaten van de punten P op lijn $l: 2x + y = 10$, die gelijke afstanden hebben tot de lijnen $m: y = 2x - 1$ en $n: x + 2y = 3$.
- 22** Punt A ligt op de lijn $2x + y + 8 = 0$ en ligt tevens tweemaal zover van punt $B(6, 0)$ als van punt $C(0, -3)$. Bereken de coördinaten van A .
- 23** In een cirkel met straal r en middelpunt M is AB een middellijn. Op de cirkel ligt, verschillend van A en B , een punt X . Kies $A(-r, 0)$ en $B(r, 0)$.
- a** Stel het punt $X(p, q)$ ligt op de cirkel. Laat met het inproduct zien dat $AX \perp BX$ voor elk punt $X(p, q)$. Ook met meetkunde kun je bewijzen dat $\angle AXB = 90^\circ$.
- b** Toon aan dat $\angle AXB = \angle MAX + \angle MBX$.
- c** Laat zien dat uit opdracht b volgt: $\angle AXB = 90^\circ$.
- 24** Gegeven zijn de punten $A(1, 4)$ en $B(5, 7)$. Op de lijn $y = x$ ligt een punt $P(p, p)$ met $\angle APB = 90^\circ$. Bereken de coördinaten van P .



- 25** Gegeven zijn lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en punt $A(0, 5)$.

Lijn $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ maakt een hoek van 45° met lijn l . Bereken exact de waarde van a .



6-4

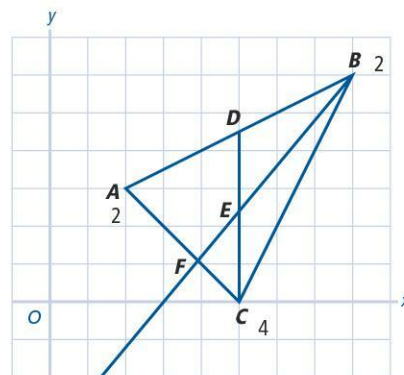
Zwaartepunten

Als zich in de punten $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de massa's $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$

bevinden met zwaartepunt Z , dan is $\vec{Z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2 + \frac{m_3}{m} \cdot \vec{a}_3 + \dots + \frac{m_n}{m} \cdot \vec{a}_n$,

waarbij $m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$.

- 26** Gegeven zijn de punten $A(2, 4)$, $B(6, -4)$ en $C(10, 12)$.
In deze punten bevinden zich achtereenvolgens massa's ter grootte van 3, 6 en 9.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van de massa's in A , B en C .
- 27** Gegeven zijn de punten $A(2, 3)$, $B(8, 6)$ en $C(5, 0)$.
De respectievelijke massa's in deze punten zijn 2, 2 en 4.
- Het zwaartepunt van de massa's in A en B is D .
Geef de coördinaten van D .
 - Het zwaartepunt van de massa's in A , B en C is E .
Geef de coördinaten van E .
 - De lijn door B en E snijdt zijde AC in F .
Bereken de coördinaten van F .
 - Lijn AB heeft vergelijking $y = \frac{1}{2}x + 2$. Punt B wordt over deze lijn verplaatst.
Laat zien dat het snijpunt F van BE met AC niet verandert.

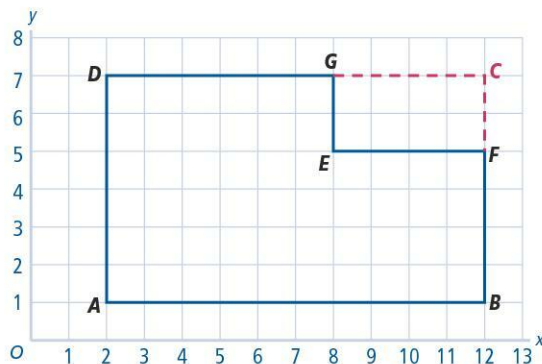


De zwaartelijnen van een driehoek ABC gaan door één punt: het zwaartepunt. De zwaartelijnen worden door het zwaartepunt Z verdeeld in de verhouding $1 : 2$.

Er geldt $x_Z = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ en $y_Z = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$.

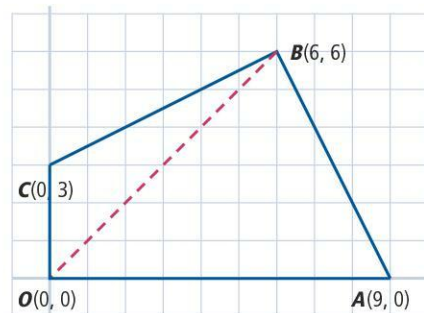
- 28** Van driehoek ABC is gegeven dat de lengte van zwaartelijn CD gelijk is aan $1\frac{1}{2} \cdot AB$.
- Teken een driehoek ABC met de eigenschap dat zwaartelijn $CD = 1\frac{1}{2} \cdot AB$.
 - Teken ook de zwaartelijnen AE en BF .
 - Bewijs dat $AE \perp BF$.
 - Toon aan dat ook de omkering geldt: uit $AE \perp BF$ volgt $CD = 1\frac{1}{2} \cdot AB$.
- 29** Gegeven zijn de lijnen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Het snijpunt van de lijnen l en m is $S(0, 2)$. Punt $P(5, 6)$ is het zwaartepunt van driehoek ABS waarbij A op lijn l en B op lijn m ligt.
Bereken exact de coördinaten van A en van B .

- 30** Gegeven in een assenstelsel is rechthoek $ABCD$ met zijden 10 en 6. Uit deze rechthoek is rechthoek $EF CG$ met zijden 2 en 4 weggelaten.
- Verdeel veelhoek $ABFEGD$ in twee of drie rechthoeken en bereken van elke rechthoek het zwaartepunt, dat is het snijpunt van de diagonalen.
 - Bereken de oppervlakte van elke rechthoek.
 - Je kunt een systeem van puntmassa's maken door elke rechthoek te vervangen door een puntmassa in het zwaartepunt van die rechthoek. De grootte van zo'n puntmassa komt dan overeen met de oppervlakte van die rechthoek. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z van dit systeem.



Je kunt het zwaartepunt of massamiddelpunt van een veelhoek vinden door de veelhoek te verdelen in rechthoeken of driehoeken. Door de zwaartepunten van de driehoeken en de rechthoeken op te vatten als puntmassa's kun je het zwaartepunt vinden. Als massa neem je de oppervlakte van de driehoek of rechthoek.

- 31** Gegeven in een assenstelsel is vierhoek $OABC$.
- Bereken de coördinaten van de zwaartepunten van de driehoeken OAB en OBC .
 - Bereken de oppervlakte van elk van de driehoeken OAB en OBC .
 - Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van vierhoek $OABC$.
- 32a** Teken vierhoek $OABC$ met $O(0, 0)$, $A(9, 0)$, $B(6, 9)$ en $C(0, 6)$.
- Teken de zwaartepunten D en E van de driehoeken OAC en ABC .
 - Waarom moet het zwaartepunt Z van vierhoek $OABC$ op lijn DE liggen?
 - Teken de zwaartepunten F en G van de driehoeken OAB en OBC .
 - Teken het zwaartepunt Z van vierhoek $OABC$.
- 33** Gegeven is zeshoek $OABCDE$ met $O(0, 0)$, $A(9, 0)$, $B(9, 3)$, $C(6, 3)$, $D(6, 12)$ en $E(0, 12)$.
- Teken zeshoek $OABCDE$. Je krijgt een L-vormige figuur.
 - Verdeel de figuur in twee rechthoeken en teken van elke rechthoek het zwaartepunt.
 - Maak een andere verdeling in twee rechthoeken en teken weer de zwaartepunten.
 - Construeer het zwaartepunt van deze zeshoek.



6-5

Gemengde opdrachten

- 34 Gegeven zijn in blauw de cirkels

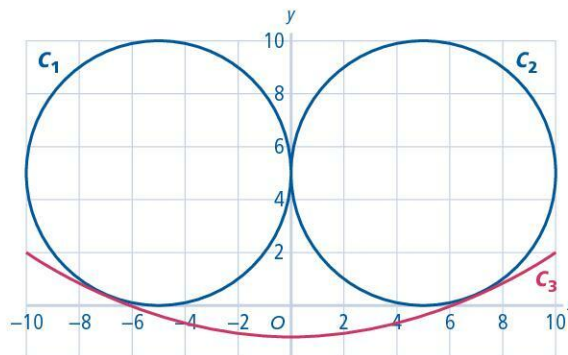
$$c_1: (x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25 \text{ en}$$

$$c_2: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

De cirkels c_1 en c_2 raken inwendig aan de rode cirkel c_3 . Ook ligt het punt $(0, -1)$ op c_3 .

Je gaat in deze opdracht de coördinaten van het middelpunt van c_3 berekenen.

- Stel de coördinaten van het middelpunt zijn $(0, q)$ en de straal is R .
Geef de middelpuntsvergelijking uitgedrukt in q en R .
- Gebruik dat het punt $(0, -1)$ op c_3 ligt en druk R uit in q .
- Druk de afstand tussen de middelpunten van c_2 en c_3 uit in q en R .
- Gebruik de gevonden resultaten en bereken q .

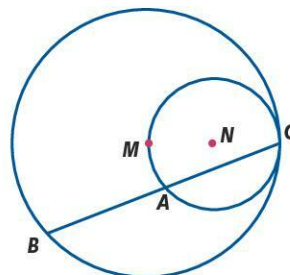


- 35 In de figuur zijn twee cirkels getekend die elkaar raken in C . Het middelpunt M van de grote cirkel ligt op de kleine cirkel met middelpunt N .

Op de cirkel met middelpunt M ligt een punt B .

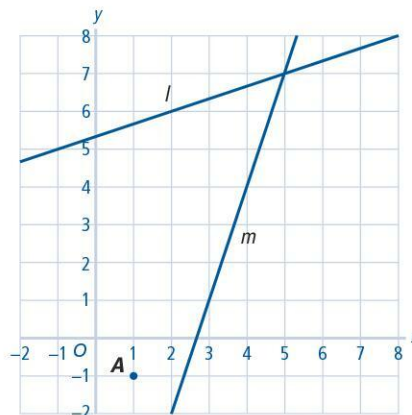
Lijnstuk BC snijdt de kleinste cirkel in A .

- Waarom is MC een middellijn van de kleinste cirkel?
- Bewijs dat $AB = AC$.

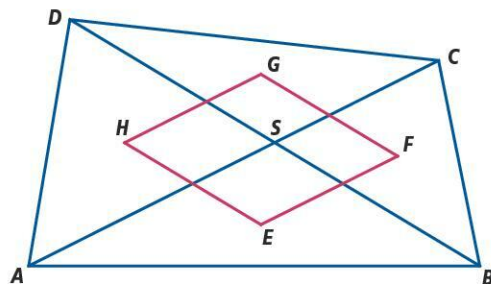


- 36 Cirkel c gaat door de punten $A(6, 8)$ en $B(0, -10)$ en raakt aan de lijn $3x + 4y = 60$.
Geef de middelpuntsvergelijking van cirkel c .

- 37 Hiernaast zijn de lijnen $l: x - 3y + 16 = 0$ en $m: 3x - y - 8 = 0$ getekend. In de figuur is ook het punt $A(1, -1)$ getekend.
- Geef vergelijkingen van de bissectrices van de hoeken gevormd door l en m .
 - Stel de middelpuntsvergelijkingen op van de cirkels die aan de lijnen l en m raken en door het punt $A(1, -1)$ gaan.



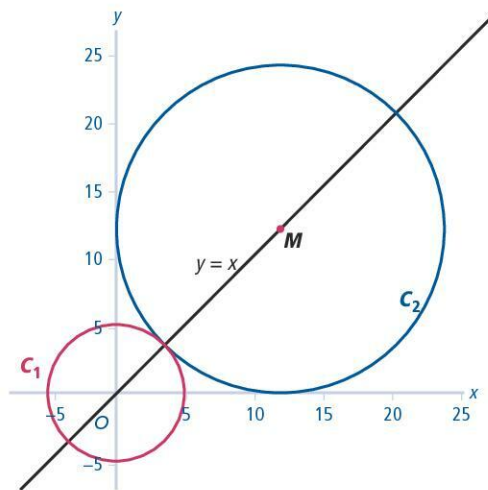
- 38** Hiernaast is een willekeurige vierhoek $ABCD$ getekend. De diagonalen AC en BD snijden elkaar in punt S .
De punten E, F, G en H zijn de zwaartepunten van respectievelijk de driehoeken ABS, BCS, CDS en ADS .
- Druk de vier zwaartepunten uit in de vectoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ en $\vec{s}$, de plaatsvectoren die bij de punten A, B, C, D en S horen.
 - Toon aan dat vierhoek $EFGH$ een parallellogram is.
 - Toon aan dat de zijden van $EFGH$ twee aan twee evenwijdig zijn aan de diagonalen van vierhoek $ABCD$.
 - Welk deel is de oppervlakte van $EFGH$ van vierhoek $ABCD$?



- 39a** Er zijn twee cirkels die door het punt $(4, 2)$ gaan en die raken aan de beide assen.
Geef de middelpuntsvergelijkingen van de beide cirkels.
- b** l en m zijn de raaklijnen in het punt $(4, 2)$ aan de cirkels die je in opdracht a hebt gevonden.
Toon aan dat $O(0, 0)$ gelijke afstanden heeft tot l en m .

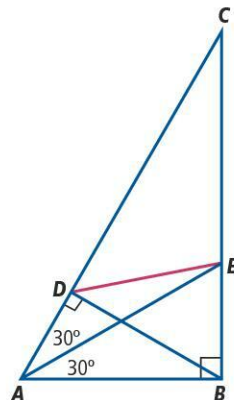
- 40** Gegeven zijn de cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 25$ en $c_2 : (x - 12)^2 + (y - 12)^2 = 144$.
De cirkels c_1 en c_2 raken inwendig aan cirkel c_3 waarvan het middelpunt op de lijn met vergelijking $y = x$ ligt.

- In de figuur zijn c_1 en c_2 getekend.
- Bereken exact de straal van c_3 .
 - Bereken exact de coördinaten van het middelpunt van c_3 .

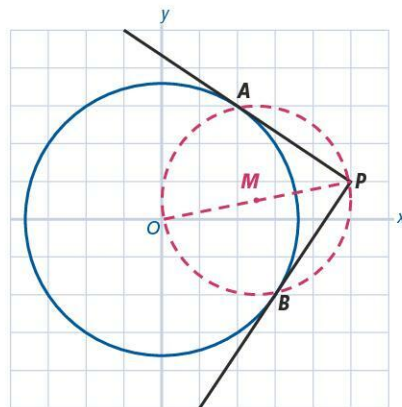


- 41a** Teken een driehoek ABC met de hoogtelijnen AE, CD en BF .
- Teken in driehoek ABC een assenstelsel als volgt: kies AB als x -as en de hoogtelijn CD als y -as.
 - Neem $A(-a, 0)$, $B(b, 0)$ en $C(0, c)$.
Geef vectorvoorstellingen van de lijnen AE en BF .
 - Toon met een berekening aan dat de lijnen AE en BF elkaar snijden in een punt van de y -as.

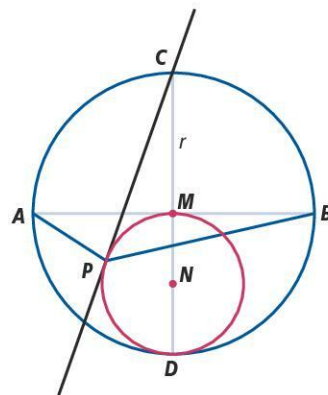
- 42** Hiernaast staat een rechthoekige driehoek ABC .
 BD is de hoogtelijn vanuit B op de langste zijde.
 Bissectrice AE verdeelt hoek A in twee hoeken van elk 30° .
 Je gaat bewijzen dat de oppervlakte van driehoek DEC de helft is van de oppervlakte van driehoek ABC .
- Kies een assenstelsel waarbij $B(0, 0)$ en $A(-a, 0)$.
 Druk de coördinaten van C uit in a .
 - Druk ook de coördinaten van E uit in a .
 - Druk de coördinaten van D uit in a .
 - Druk de oppervlakte van driehoek DEC uit in a .
 - Toon aan dat de oppervlakte van driehoek DEC de helft is van de oppervlakte van driehoek ABC .



- 43** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 = 13$ en het punt $P(5, 1)$.
 De raaklijnen vanuit P raken de cirkel in de punten A en B .
- De punten A en B liggen op de cirkel met middelpunt M , het midden van OP .
 Leg uit waarom en bereken de straal van deze cirkel.
 - Stel vergelijkingen op van de raaklijnen PA en PB .
 - Bereken PA .
 - Bereken de coördinaten van de punten A en B .
 - Bereken de hoek die de beide raaklijnen met elkaar maken.



- 44** In de figuur hiernaast is een cirkel met middelpunt M en middellijnen AB en CD getekend. De middellijnen AB en CD staan loodrecht op elkaar.
 Vanuit C is een raaklijn aan de cirkel met middelpunt N en middellijn MD getekend.
 Het raakpunt is punt P .
 In deze opdracht ga je $\angle APB$ berekenen.
- Kies een assenstelsel en druk de coördinaten van A, B, C, D en N uit in r , de straal van de cirkel met middelpunt M .
 - Bereken exact de coördinaten van het punt P , uitgedrukt in r .
 - Toon aan dat $\angle APB = 135^\circ$.
- 45** Je kunt het probleem van opdracht 44 ook meetkundig aanpakken.
- Toon aan dat $CA = CP = CB = r\sqrt{2}$.
 - Gebruik dat de driehoeken CAP en CPB gelijkbenig zijn om aan te tonen dat $\angle APB = 135^\circ$.



46 Gegeven is cirkel $c : x^2 + y^2 = 68$.

a De lijn $y = 2$ snijdt de cirkel in de punten A en B .

Op het lijnstuk AB ligt het punt C met $AC = \frac{2}{3} AB$.

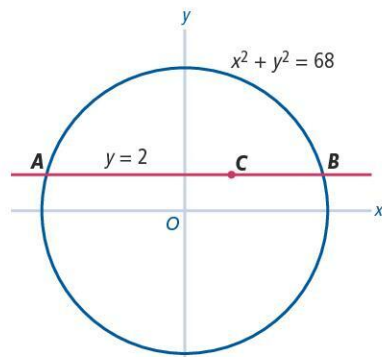
Bereken exact de coördinaten van C .

b De familie van lijnen $y = p$ snijdt cirkel c in de punten A_p en B_p .

Op lijnstuk $A_p B_p$ ligt het punt C_p met $A_p C_p = \frac{2}{3} A_p B_p$.

Druk de coördinaten van C_p uit in p .

c Toon aan dat de punten C_p voldoen aan de vergelijking $9x^2 + y^2 = 68$.



47 Hiernaast is de grafiek van de functie $f(x) = 2x^2 - 4x$ getekend.

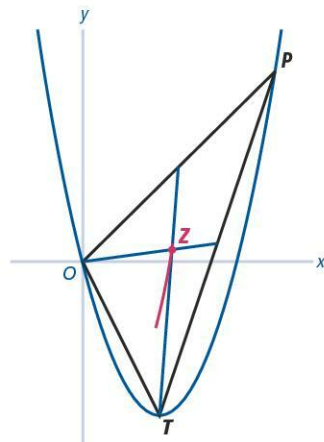
Dit is een parabool met top $T(1, -2)$.

In deze opdracht onderzoek je de ligging van de zwaartepunten Z van de driehoeken OTP als het punt $P(p, f(p))$ de parabool doorloopt.

a Druk de coördinaten van P uit in p .

b Druk de coördinaten x_Z en y_Z van het zwaartepunt Z van driehoek OTP uit in p .

c Geef een vergelijking van de figuur waarop de punten Z liggen.



48 Hiernaast is cirkel $c : (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 50$ getekend.

Op cirkel c liggen de punten $A(-3, 1)$ en $B(11, 1)$.

Ook punt $C(x_C, y_C)$ ligt op de cirkel. In deze opdracht onderzoek je de ligging van de zwaartepunten Z van de driehoeken ABC als C over de cirkel wordt verplaatst.

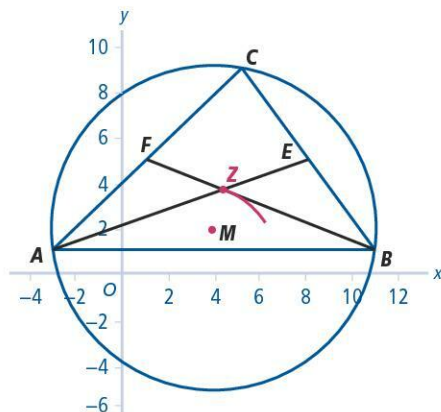
In de figuur is een stukje van de baan van Z getekend.

a Druk de coördinaten van het zwaartepunt $Z(x_Z, y_Z)$ uit in x_C en y_C .

b Druk x_C en y_C uit in x_Z en y_Z .

c Gebruik dat $C(x_C, y_C)$ op de cirkel ligt om een vergelijking in x_Z en y_Z te krijgen en toon aan dat de punten Z op een cirkel liggen.

d Stel een vergelijking op van de baan van de zwaartepunten van driehoek BCD met $D(-1, -3)$.



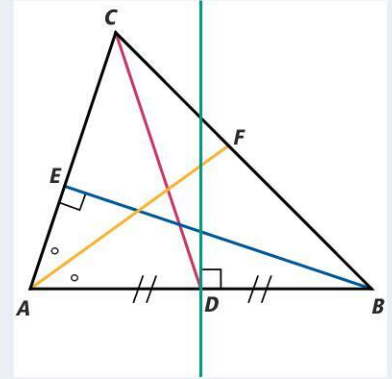
Samenvatting

Bijzondere lijnen

Een driehoek heeft een aantal bijzondere lijnen: bissectrices of deellijnen, zwaartelijnen, hoogtelijnen en middelloodlijnen.

Eigenschappen bijzondere lijnen

- > Een punt op de bissectrice van een hoek heeft gelijke afstanden tot de benen van die hoek. Ook het omgekeerde geldt: als een punt gelijke afstanden heeft tot de benen van een hoek, dan ligt dat punt op de bissectrice van die hoek.
- > De bissectrices van een driehoek gaan door één punt: het middelpunt van de ingeschreven cirkel.
- > De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.
- > De zwaartelijnen gaan door één punt, het zwaartepunt.
- > Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijnen in de verhouding 1 : 2.
- > De middelloodlijnen van de zijden een driehoek gaan door één punt: het middelpunt van de omgeschreven cirkel.



Formules voor afstanden

Met $d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ bereken je de afstand tussen de punten $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$.

Met $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ bereken je de afstand

van punt $P(p, q)$ tot lijn $l: ax + by + c = 0$.

Raaklijnstelling

Een raaklijn staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Zwaartepunt

Als zich in de punten $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de massa's $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ bevinden met zwaartepunt Z , dan is

$$\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2 + \frac{m_3}{m} \cdot \vec{a}_3 + \dots + \frac{m_n}{m} \cdot \vec{a}_n, \text{ waarbij}$$

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n.$$

Voorbeeld

Bereken de afstand van het punt $P(2, 3)$ tot

$$\text{lijn } l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Oplossing

Een vergelijking van l is $3x + 4y = 22$.

$$d(P, l) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 22|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$$

Je kunt de coördinaten berekenen van een punt dat voldoet aan een aantal eigenschappen

Het punt noem je voorlopig $S(p, q)$. Met behulp van de gegeven eigenschappen leid je vergelijkingen af en bereken je p en q .

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de punten op de lijn $l: y = x + 2$ met gelijke afstanden tot de x -as en het punt $Q(8, 4)$.

Oplossing

Stel $S(p, q)$. Omdat S op lijn l ligt, geldt $S(p, p + 2)$.

Dan is $d(S, x\text{-as}) = |p + 2|$ en $d(S, Q) = \sqrt{(8 - p)^2 + (4 - (p + 2))^2}$.

Dus geldt $|p + 2| = \sqrt{(8 - p)^2 + (2 - p)^2}$. Na kwadrateren en herleiden geeft dit $p^2 - 24p + 64 = 0$. Met de abc -formule vind je $p = 12 + 4\sqrt{5}$ of $p = 12 - 4\sqrt{5}$.

Dus $S_1(12 - 4\sqrt{5}, 14 - 4\sqrt{5})$ en $S_2(12 + 4\sqrt{5}, 14 + 4\sqrt{5})$.

Je kunt vergelijkingen of vectorvoorstellingen van raaklijnen aan een cirkel opstellen

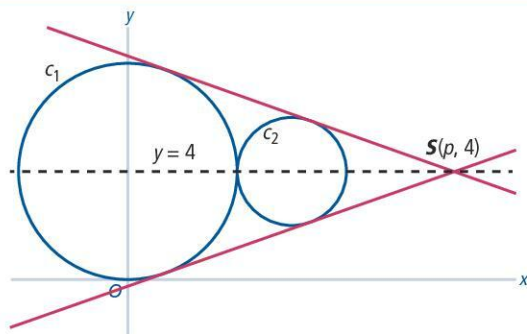
- Gebruik dat de straal naar het raakpunt loodrecht op de raaklijn staat.
- Gebruik dat de afstand van het middelpunt tot de raaklijn gelijk is aan de straal.
- Gebruik dat een raaklijn precies één punt met de cirkel gemeenschappelijk heeft.

Voorbeeld

Gegeven zijn de cirkels $c_1: x^2 + (y - 4)^2 = 16$

en $c_2: (x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 4$.

Stel vergelijkingen van de gemeenschappelijke raaklijnen aan deze cirkels op.



Oplossing

De raaklijnen snijden elkaar op de lijn door de beide middelpunten dus in $S(p, 4)$.

De raaklijnen voldoen aan de vergelijking $l: y = a \cdot (x - p) + 4$ ofwel $a \cdot (x - p) - y + 4 = 0$

Uit $d((0, 4), l) = 4$ en $d((6, 4), l) = 2$ volgt $\frac{|a(0 - p) - 4 + 4|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$ én $\frac{|a(6 - p) - 4 + 4|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$.

Dit geeft $|-ap| = 2|6a - ap|$ ofwel $|-p| = 2|6 - p|$ want $a \neq 0$.

Dan is $p = 12 - 2p$ of $-p = 12 - 2p$. Dit geeft $p = 4$ of $p = 12$.

$p = 12$ geeft $|-12a| = 4\sqrt{a^2 + 1}$ ofwel $|3a| = \sqrt{a^2 + 1}$. Daaruit volgt $a = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ of $a = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

De uitwendige raaklijnen zijn $y = \frac{1}{4}x\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4$ en $y = -\frac{1}{4}x\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4$.

Bij $p = 4$ hoort de inwendige raaklijn $x = 4$.

Test jezelf

T-1 Gegeven is driehoek ABC met $A(2, 1)$, $B(8, 3)$ en $C(4, 7)$. Zwaartelij AD snijdt hoogtelijn BE in punt S .

- a** Bereken de coördinaten van S .
 - b** Bereken de afstand van C tot zijde AB .
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-1.*

T-2 Gegeven is lijn $l: 6x + 8y = 26$.

- a** Bereken exact de afstand van $O(0, 0)$ tot l .
 - b** Er zijn twee punten op de x -as met afstand 4 tot lijn l . Bereken de coördinaten van de beide punten.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-1.*

T-3 Gegeven is cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$.

- a** Stel een vergelijking op van de raaklijn in $(-2, 9)$ aan cirkel c .
 - b** Stel vergelijkingen op van de raaklijnen uit $(5, 0)$ aan cirkel c .
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-2.*

T-4 Cirkel c gaat door $(0, 0)$ en snijdt de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 16 = 0$ in het punt $(2, 2)$ loodrecht.

- a** Welke eigenschap hebben twee cirkels die elkaar loodrecht snijden?
 - b** Stel de middelpuntsvergelijking op van cirkel c .
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-2.*

T-5 Gegeven is lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

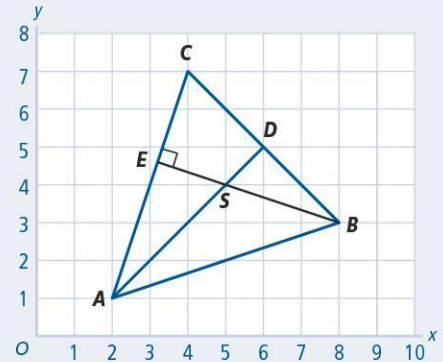
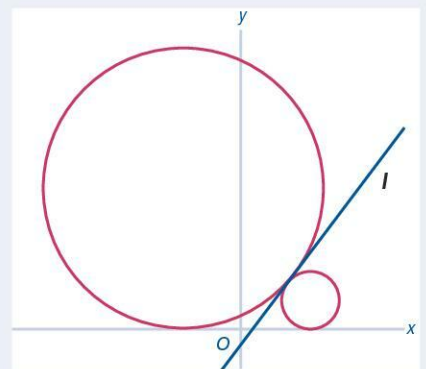
Er zijn twee cirkels c_1 en c_2 die de x -as raken en in het punt $(1, 1)$ ook lijn l raken.

Stel de middelpuntsvergelijkingen op van c_1 en c_2 .

Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-2.

T-6 Bereken de afstand van lijn $l: 4x + 3y = 72$ tot cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-3.



T-7 Lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ snijdt cirkel $c: x^2 + y^2 = 10$

in de punten A en B .

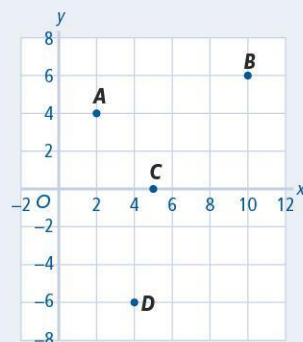
- a** Bereken de coördinaten van A en B .
- b** Bereken in gehele graden de hoek die de beide raaklijnen in A en B met elkaar maken.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-3.

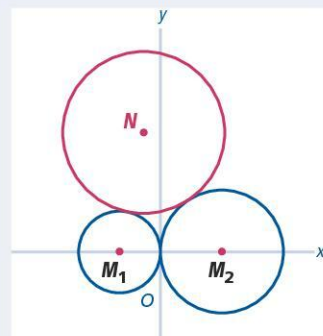
T-8 Gegeven zijn de punten $A(2, 4)$, $B(10, 6)$, $C(5, 0)$ en $D(4, -6)$.
In deze punten bevinden zich achtereenvolgens puntmassa's ter grootte van 2, 3, 1 en k .

- a** Neem $k = 4$ en bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z .
- b** Bereken de waarde van k waarvoor het zwaartepunt op de x -as ligt.
- c** Bereken voor welke gehele waarden van k de afstand van het zwaartepunt tot C kleiner is dan 2.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 6-4.

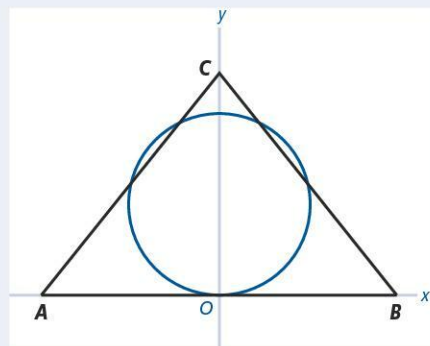


T-9 Gegeven zijn de cirkel met middelpunt $M_1(-2, 0)$ en straal 2 en de cirkel met middelpunt $M_2(3, 0)$ en straal 3. Een cirkel met straal 4 en middelpunt N in het tweede kwadrant raakt aan de gegeven cirkels. Bereken de coördinaten van punt N .



T-10 Gegeven driehoek ABC met $A(-8, 0)$, $B(8, 0)$ en $C(0, 10)$. Cirkel c gaat door de middens van de zijden van deze driehoek.

- a** Geef de middelpuntsvergelijking van c .
- b** Punt H is het snijpunt van de hoogtelijnen van driehoek ABC . Toon aan dat cirkel c door het midden van CH gaat.



Vaardigheden 3

Absolute waarde

Theorie

De afstand van een getal x tot 0 noem je de **absolute waarde** van x .

De notatie voor de absolute waarde van x is $|x|$.

Voor de absolute waarde van x geldt: $|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = |x^3 - 4x|$ en $g(x) = x$.
Los exact op $f(x) = g(x)$.

Oplossing

$$|x^3 - 4x| = x$$

$$x^3 - 4x = x \text{ of } -(x^3 - 4x) = x$$

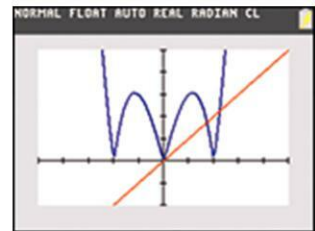
$$x^3 - 5x = 0 \text{ of } -x^3 + 3x = 0$$

$$x(x^2 - 5) = 0 \text{ of } -x(x^2 - 3) = 0$$

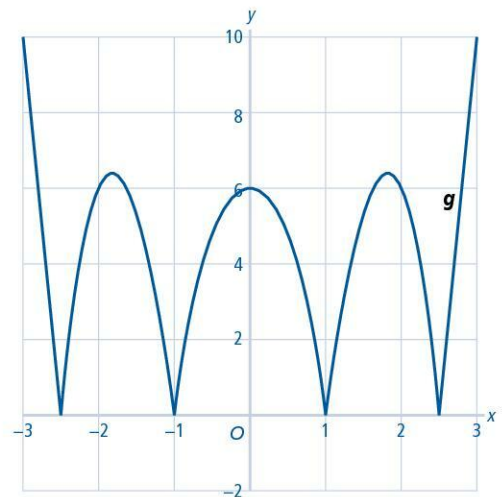
$$x = 0 \text{ of } x^2 = 5 \text{ of } x = 0 \text{ of } x^2 = 3$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\sqrt{5} \text{ of } x = \sqrt{5} \text{ of } x = -\sqrt{3} \text{ of } x = \sqrt{3}$$

In de plot zie je dat de oplossingen die voldoen zijn: $x = 0$ of $x = \sqrt{3}$ of $x = \sqrt{5}$.



- 1** Los exact op.
- a** $|x^2 - 3x| = 2$ **c** $|^4 \log(x)| = \frac{1}{2}$
- b** $|x^2 + 2x - 3| = 2x$ **d** $|\frac{1}{2}x - 1| = -\frac{1}{2}x + 2$
- 2** Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6$.
- a** Los exact op: $f(x) = 0$.
- b** Bereken exact de extreme waarden van f .
- c** Hiernaast staat de grafiek van de functie $g(x) = |x^4 - 7x^2 + 6|$.
Geef de extreme waarden van g .
- d** Los exact op: $g(x) + f(x) = 0$.
- 3** Gegeven zijn de functie $f(x) = |x^2 + 4x + 3|$
en de lijnen $y = c$.
Voor welke waarde(n) van c snijdt de lijn $y = c$
de grafiek van f in drie punten?



Tweedegraads functies

Om een formule van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$ te schrijven, haal je eerst a buiten haakjes.

- 4** Herschrijf in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$.
- a** $y = x^2 - 12x - 4$
- b** $y = 2x^2 + 4x + 3$
- c** $y = 3x^2 - 6x$
- d** $y = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$
- 5** Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$.
- a** Toon aan dat het functievoorschrift van f ook te schrijven is als $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$ en als $f(x) = 3(x - 1)^2 - 27$.
- b** Met welk voorschrift bereken je handig de coördinaten van de top?
- c** Met welk voorschrift bereken je handig de coördinaten van de snijpunten met de x -as?
- d** Van welk punt kun je met het overblijvende voorschrift de coördinaten handig berekenen?

Voorbeeld

Schrijf $y = 2x^2 + 12x + 8$ in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$.

Oplossing

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 + 12x + 8 \\&= 2(x^2 + 6x + 4) \\&= 2((x + 3)^2 - 5) \\&= 2(x + 3)^2 - 10\end{aligned}$$

Theorie

Het functievoorschrift van een tweedegraads functie kan in drie vormen worden gegeven:

- > $f(x) = ax^2 + bx + c$. Het snijpunt met de y -as is $(0, c)$.
- > $f(x) = a(x - s)(x - t)$. De grafiek snijdt de x -as in de punten $(s, 0)$ en $(t, 0)$. Met deze punten kun je de symmetrieas vinden en daarmee de coördinaten van de top.
- > $f(x) = a(x - p)^2 + q$. De coördinaten van de top zijn (p, q) .

- 6** Bereken voor de grafieken van de volgende functies de coördinaten van de snijpunten met de x -as en de coördinaten van de top.
- a** $f(x) = -6(x - 6)(x + 12)$
- b** $g(x) = 2(x + 1)^2 - 18$
- c** $h(x) = x^2 + 4x - 12$
- 7** De grafiek van een tweedegraads functie f heeft als top $(2, -3)$ en gaat door het punt $(5, 6)$. Bereken exact $f(0)$.

Formules herleiden

8 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a} & y = (2^t + 1)^2 \\ \mathbf{b} & y = (3^{2x} - 4)(3^{-2x} + 2) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{c} & y = 4^{2p} (4^{\frac{1}{3}p} - 4^{-3p}) \\ \mathbf{d} & y = (7^{2p} + p)(7^{3p} - 6) \end{array}$$

9 Herleid en schrijf in de vorm $y = b \cdot x^a$.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a} & y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot 3\sqrt{x} \\ \mathbf{b} & y = (-2x)^3 \cdot (\sqrt[3]{x^4})^3 \\ \mathbf{c} & y = \frac{(\frac{1}{2}x)^3}{4\sqrt[3]{x}} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{d} & y = \frac{4}{\sqrt[5]{x}} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} \\ \mathbf{e} & y = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{2 \cdot (2x)^2}} \right)^3 \\ \mathbf{f} & y = (\sqrt{5x})^4 \cdot (-2x)^{-3} \end{array}$$

10 Schrijf als één logaritme.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a} & f(x) = 2 \cdot {}^3\log(x) + {}^3\log(3x) \\ \mathbf{b} & f(x) = {}^7\log(x-3) + 2 \cdot {}^7\log(x) - 2 \\ \mathbf{c} & f(x) = 5 \cdot \log(x) + 2 \cdot \log(3x) - \frac{1}{2} \cdot \log(x^4) \\ \mathbf{d} & f(x) = 3 \cdot \log(2x) + 2 \cdot \log(4+x) - 1 \end{array}$$

11 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x}$

Toon aan dat je het functievoorschrift van f kunt schrijven

$$\text{als } f(x) = \frac{5x-3}{x(x-1)}$$

12 Schrijf bij de volgende functies het functievoorschrift als één breuk.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a} & f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+3} \\ \mathbf{b} & g(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{x+3} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{c} & h(x) = \frac{\sin(x)}{x} - \frac{2x}{\cos(x)} \\ \mathbf{d} & k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x\sqrt{x}} \end{array}$$

13 Herleid en schrijf in de vorm $y = a \cdot \sqrt{bx}$.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a} & y = \sqrt{\frac{1}{9}x} + \sqrt{121x} \\ \mathbf{b} & y = \sqrt{27x} - \sqrt{75x} \\ \mathbf{c} & y = 2\sqrt{18x} + \frac{1}{2}\sqrt{288x} \end{array}$$

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

$$g^{{}^g\log(a)} = a$$

Voorbeeld

Gegeven is de formule $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + q$.

Teken bij de formule een grafiek met q op de horizontale as en p op de verticale as.

Oplossing

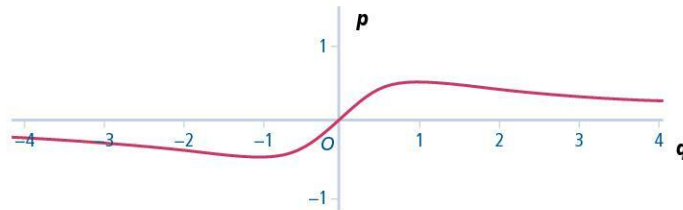
Om de gevraagde grafiek te tekenen druk je eerst p uit in q .

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + q$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{q^2}{q}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1 + q^2}{q}$$

$$p = \frac{q}{1 + q^2}$$



- 14** Teken bij de volgende formules een grafiek met q op de horizontale as en p op de verticale as. Druk daartoe eerst p uit in q .

a $2pq = p + q$

c $4p^3 = q - 6$

b $\sqrt{p} + q = 4$

d $e^p = \sqrt{q}$

- 15** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 2x$.
De grafiek van f wordt gespiegeld in de lijn $y = x$.

- a** Laat zien dat bij de beeldgrafiek de formule $x = (y - 1)^2 - 1$ hoort.
b Waarom is de beeldgrafiek niet de grafiek van een functie?

Als y een functie is van x dan hoort bij elke waarde van x uit het domein van f precies één waarde van y . Deze waarde wordt genoteerd als $f(x)$.

- 16a** Bij welke van de volgende verbanden is y niet te schrijven als functie van x ?

1 $\sqrt{xy} = x$

3 $x - 3 = y^2 - 4y + 4$

2 $x + 1 = \frac{2}{y(x - 1)}$

4 $x = {}^3\log\left(\frac{y - 2}{7}\right)$

- b** Druk bij de overige verbanden y uit in x .

- 17** Gegeven zijn de formules $p = \frac{t + 4}{t + 3}$ en $t = 2 - \frac{1}{2}s$.

a Laat zien dat uit $p = \frac{t + 4}{t + 3}$ volgt dat $p - 1 = \frac{1}{t + 3}$

- b** Druk s uit in p .

- c** Voor welke waarde van p geldt $s = 3$?

Inverse functies

Een functie f heeft een inverse functie f^{inv} als voor elke waarde a uit het domein van f en elke waarde b uit het domein van f^{inv} geldt: als $f(a) = b$ dan $f^{\text{inv}}(b) = a$.

De grafieken van f en f^{inv} zijn elkaars beeldgrafiek bij spiegelen in de lijn $y = x$.

- 18** Geef van de volgende functies het functievoorschrift van de inverse functie.

a $f(x) = \frac{2}{3x-6}$

b $f(x) = 2^{3x+2}$

c $f(x) = {}^2\log(2 + 3x^3)$

d $f(x) = \frac{4}{\ln(2x+4)} + 3$

e $f(x) = e^{2x+4}$

f $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x$

- 19a** Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
Waarom kun je bij deze functie geen inverse functie opstellen?
- b** Gegeven is de functie $g(x) = x^3 - x$.
Deze functie heeft extreme waarden bij $x = 1$ en $x = -1$.
Leg uit dat hieruit volgt dat de functie g geen inverse heeft.

- 20** Van de functie $f(x) = \ln(x)$ heb je niet geleerd wat een primitieve is. Toch kun je de integraal $\int_1^e \ln(x) dx$ exact berekenen. Daar gaat deze opdracht over.

De integraal $\int_1^e \ln(x) dx$ is gelijk aan de oppervlakte van het groene vlakdeel in de figuur hiernaast.

- a** Spiegel de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ in de lijn $y = x$.
Geef het functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek.
- b** Het rode vlakdeel is het spiegelbeeld van het groene vlakdeel bij spiegelen in de lijn $y = x$.
Schrijf de integraal op waarmee je de oppervlakte van het rode vlakdeel kunt berekenen.
- c** Bereken exact de oppervlakte van het rode vlakdeel.
- d** Hoe groot is dus de exacte waarde van $\int_1^e \ln(x) dx$?

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = \sqrt[5]{3-2x}$.
Geef het functievoorschrift van f^{inv} .

Oplossing

1 $f: y = \sqrt[5]{3-2x}$

2 $f^{\text{inv}}: x = \sqrt[5]{3-2y}$

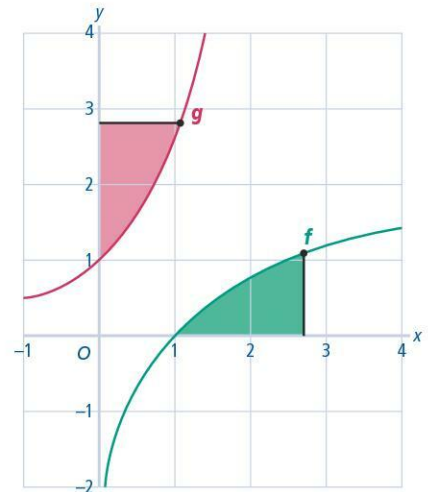
3 $x = \sqrt[5]{3-2y}$

$x^5 = 3 - 2y$

$2y = 3 - x^5$

$y = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^5$

4 $f^{\text{inv}}(x) = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^5$

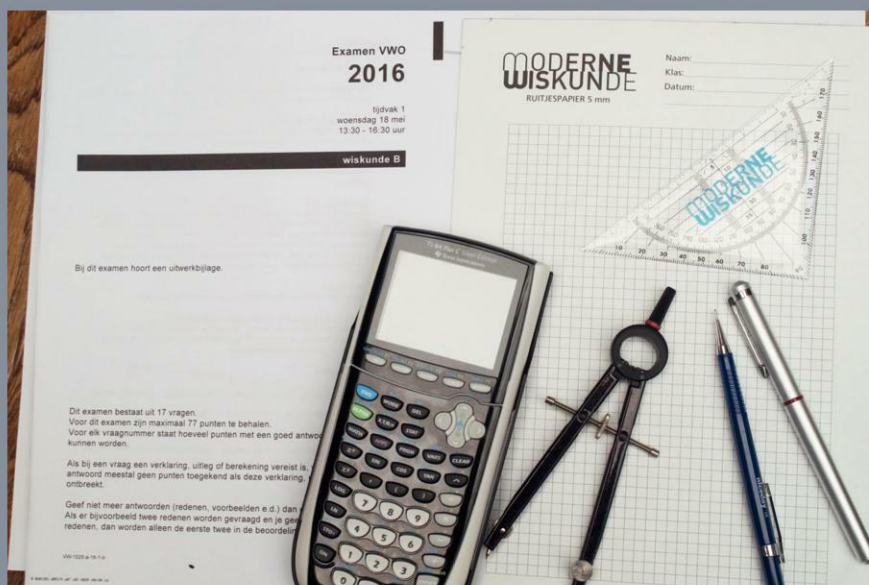


Transformaties

Bij een **transformatie** van de grafiek van een functie f is de beeldgrafiek de grafiek van een functie g . Je krijgt het functievoorschrift van g als volgt:

- > bij een translatie van p naar rechts: $g(x) = f(x - p)$
- > bij een translatie van p omhoog: $g(x) = f(x) + p$
- > bij een spiegeling in de x -as: $g(x) = -f(x)$
- > bij een spiegeling in de y -as: $g(x) = f(-x)$
- > bij een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor a :
 $g(x) = a \cdot f(x)$
- > bij een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor b :
 $g(x) = f\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$

- 21a** Stel bij de volgende transformaties een functievoorschrift op bij het beeld van de grafiek van $f(x) = x^3 - 2x$.
Translatie 3 naar links, gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 2, gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor 4.
- b** Stel bij de volgende transformaties een functievoorschrift op bij het beeld van de grafiek van $f(x) = {}^2\log(x)$.
Een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor 4, gevolgd door een translatie 3 naar links, gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 2.
- 22** Op de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ worden de translaties 3 naar rechts en 2 omlaag toegepast. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie g . Leg uit dat de grafiek van g puntsymmetrisch is in het punt $(3, -2)$.
- 23** Hieronder staan enkele functievoorschriften.
Geef aan door welke transformaties de grafiek van de functie kan ontstaan uit de grafiek van de bijbehorende standaardfunctie. Geef duidelijk aan in welke volgorde de transformaties moeten worden toegepast.
- a** $f(x) = 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}x}$
- b** $h(x) = 6 + {}^4\log(4 - x)$
- c** $k(x) = \frac{3}{12 + 4x}$
- d** $g(x) = -\sqrt{5x - 20} + 6$



Examen wiskunde B

In dit hoofdstuk vind je een overzicht van de stof voor het examen wiskunde B. In elke paragraaf komt een aantal onderwerpen aan bod, telkens gevolgd door een of meerdere korte oefeningen. Elke paragraaf sluit af met examenopdrachten die aansluiten op de stof in de paragraaf. Deze examenopdrachten zijn veelal uit recente examens afkomstig. Vaak betreft het een deel van een opdracht uit een examen. Op het examen gaat een opdracht meestal over meerdere onderwerpen. Bij elke examenopdracht staat de verwijzing naar een hint. De lijst met hints staat aan het eind van dit hoofdstuk. Gebruik een hint alleen als je niet weet hoe je de opdracht moet beginnen.

Hoe goed ben jij voorbereid op het examen?

Examenvoorbereiding

In dit hoofdstuk

Functies, grafieken en vergelijkingen

Domein en bereik

Alle waarden van x waarvoor een functiewaarde $f(x)$ bestaat, vormen samen het domein van de functie. Alle functiewaarden die kunnen voorkomen, vormen het bereik van de functie.

Voorbeeld

Geef het domein en het bereik van de functie $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ in intervalnotatie.

Oplossing

$\sqrt{x^2 - 1}$ bestaat voor $x^2 - 1 \geq 0$ dus het domein is $x \leq -1$ of $x \geq 1$ ofwel $D_f = \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup [1, \rightarrow \rangle$.

Voor elke waarde van x is $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$ en $\sqrt{x^2 - 1}$ kan willekeurig groot worden. Dus het bereik is $y \geq 0$ ofwel $B_f = [0, \rightarrow \rangle$.

1 Geef het domein en het bereik van de volgende functies in intervalnotatie.

a $f(x) = 10 + \sqrt{6x - 4}$

c $h(x) = 4 + {}^3\log(9 - x^2)$

b $g(x) = 4(x - 3)^2 - 8$

d $k(x) = -1 + \frac{5}{x^2 - 2x - 3}$

Maak zo nodig een plot om een indruk te krijgen van het verloop van de grafiek.

Limieten

De wiskundige notatie voor 'x ver van 0' is $x \rightarrow \infty$ als $x > 0$ en $x \rightarrow -\infty$ als $x < 0$. Het symbool ∞ betekent 'oneindig'.

Notatie: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Er gelden de volgende standaardlimieten:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \quad (n \text{ geheel en } n > 0).$$

Als een functie f geen waarde heeft voor $x = a$, kun je vaak wel iets zeggen over het gedrag van f in de buurt van $x = a$. Je kunt daarbij onderscheid maken tussen 'x daalt naar a ' en 'x stijgt naar a '.

Notatie: $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ (rechterlimiet) en $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ (linkerlimiet)

Voorbeeld 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-100}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 6x^{-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0,02}{x^8} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 250x^{-100} = 0$$

Voorbeeld 2

$$\lim_{x \downarrow 3} \frac{5}{x - 3} = \infty$$

$$\lim_{x \uparrow 3} \frac{5}{x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \uparrow 2} \frac{4x(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \uparrow 2} 4x = 8$$

Als bij een quotiëntfunctie f de teller en noemer beide veeltermfuncties zijn, dan kun je het functievoorschrift herleiden tot een vorm waarmee $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

exact te berekenen zijn. Deel daarvoor teller en noemer door de hoogste macht van x die in de noemer voorkomt. Gebruik vervolgens standaardlimieten.

2 Bereken exact de volgende limieten.

$$\begin{array}{ll} \text{a} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x - 7}{4 - 8x} \\ \text{b} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^4 - 3x^2 + 2}{6x^3 - x^4} \\ \text{c} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x(4x^2 + x - 10)}{5x^4 + 2x} \\ \text{d} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x + 3)(3x^2 + 5)}{x^2(1 - 3x)} \\ \text{e} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x^2 + 1} \\ \text{f} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^2 + 4x)^2}{12x - 3x^4} \end{array}$$

Asymptoten en perforaties

Een asymptoot van een grafiek is een lijn waar de grafiek op den duur willekeurig dicht bij komt. Je kunt de grafiek van een functie onderzoeken op horizontale, verticale en scheve asymptoten.

- Horizontale asymptoot

De grafiek van een functie f heeft een horizontale asymptoot $y = c$ als $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ en/of $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$.

- Verticale asymptoot

De grafiek van een functie f heeft een verticale asymptoot $x = a$ als $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \infty$ of $\lim_{x \uparrow a} f(x) = -\infty$ en/of $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty$ of $\lim_{x \downarrow a} f(x) = -\infty$.

De grafiek van de gebroken functie $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heeft een verticale asymptoot $x = a$ als geldt $n(a) = 0$ én $t(a) \neq 0$.

- Scheve asymptoot

De grafiek van een functie f heeft een scheve asymptoot $y = ax + b$ als $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ met $a = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ en/of $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ met $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$.

- Perforatie

De grafiek van een functie f heeft een perforatie bij $x = a$ als $f(a)$ niet bestaat en $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \uparrow a} f(x) = c$.

De perforatie is het punt (a, c) .

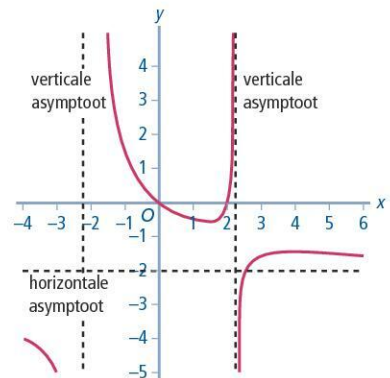
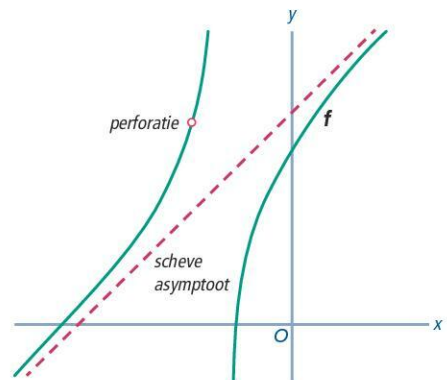
Voorbeeld

Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 10x^2}{8x^2 + 4x^3}$

Oplossing

Deel elke term in de teller en noemer door x^3 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 10x^2}{8x^2 + 4x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{10}{x}}{\frac{8}{x} + 4} \\ &= \frac{2 - 0}{0 + 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Voorbeeld 1

Stel vergelijkingen op van de asymptoten van

de grafiek van $f(x) = -3 + \frac{1}{\sqrt{10-5x}}$

Oplissing

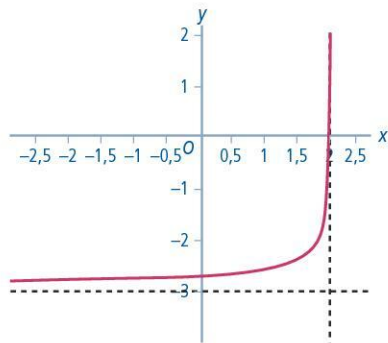
Het domein van f is $\langle -\infty, 2 \rangle$.

$$\lim_{x \uparrow 2} \left(-3 + \frac{1}{\sqrt{10-5x}} \right) = \infty, \text{ dus}$$

de verticale asymptoot is $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-3 + \frac{1}{\sqrt{10-5x}} \right) = -3 + 0 = -3, \text{ dus}$$

de horizontale asymptoot is $y = -3$.

**Voorbeeld 2**

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4x + 3}$

Onderzoek de grafiek van f op scheve asymptoten en op perforaties.

Oplissing

$$f(x) = \frac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-3)} \text{ dus } f(x) = \frac{x(x+1)}{(x-3)} \text{ voor } x \neq 1.$$

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \frac{2}{-2} = -1 \text{ en } \lim_{x \downarrow 1} f(x) = \frac{2}{-2} = -1 \text{ dus de grafiek van } f \text{ heeft een perforatie } (1, -1).$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 3} \text{ geeft } f'(x) = \frac{x^2 - 6x - 3}{x^2 - 6x + 9} \text{ dus } \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \frac{1 - 0 - 0}{1 - 0 + 0} = 1 \text{ (en ook } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 1).$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x}{x - 3} - \frac{x(x-3)}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{1 - \frac{3}{x}} \right) = \frac{4}{1 - 0} = 4$$

De grafiek heeft een scheve asymptoot met vergelijking $y = x + 4$.

3 Geef van de volgende functies aan of de bijbehorende grafiek asymptoten heeft. Schrijf, indien van toepassing, een vergelijking op van elke asymptoot.

a $f(x) = x^2 + 4$

c $h(x) = 25 + 16 \cdot 0,45^x$

b $g(x) = \frac{5x^2 + 1}{3x^2 - 6x}$

d $k(x) = \frac{1}{|x| + 1}$

4 De grafieken van de volgende functies hebben een scheve asymptoot. Stel een vergelijking op van de scheve asymptoot.

a $f(x) = 3x + 1 + \frac{4}{x-1}$

b $g(x) = \frac{2x^2 + 5x - 1}{x + 4}$

- 5 De grafieken van de volgende functies hebben één of meer perforaties. Geef de coördinaten van elke perforatie en verklaar steeds je antwoord.

a $f(x) = \frac{5x - 20}{x^2 - 3x - 4}$

c $k(x) = \frac{e^{2x} - 5e^x + 4}{e^x - 1}$

b $h(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 6x + 8}$

d $m(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^3 - 9x}$

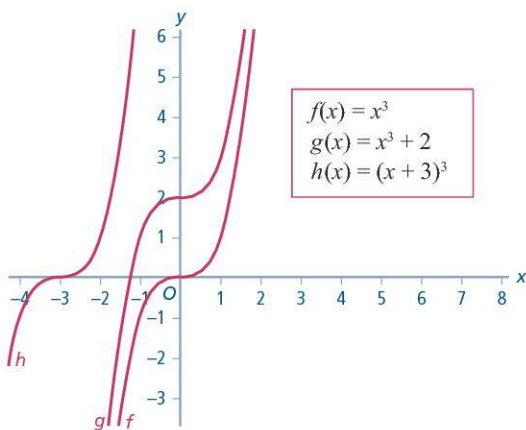
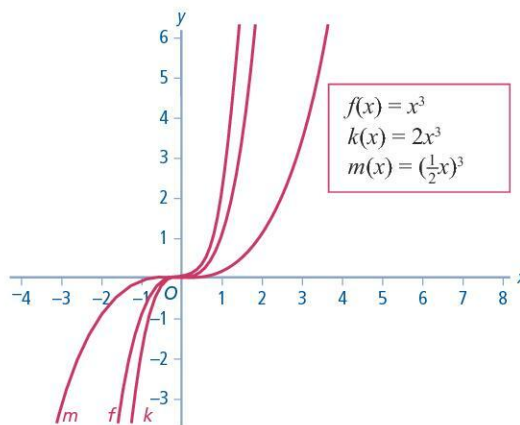
Transformaties

De grafiek van een functie kun je verschuiven of vermenigvuldigen. Daarbij verandert het functievoorschrift.

De grafiek van functie g ontstaat uit de grafiek van functie f door:

- > verschuiving over een afstand d omhoog: $g(x) = f(x) + d$
- > verschuiving over een afstand c naar rechts: $g(x) = f(x - c)$
- > vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met factor a :
 $g(x) = a \cdot f(x)$. Als $a = -1$ wordt de grafiek gespiegeld in de x -as.
- > vermenigvuldiging met factor b ten opzichte van de y -as:

$g(x) = f\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$. Als $b = -1$ wordt de grafiek gespiegeld in de y -as.



Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 3 + 2^{x+4}$.

De grafiek van f wordt vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met 2,5 en vervolgens over een afstand 6 naar rechts verschoven.

Geef een functievoorschrift van de beeldgrafiek.

Oplossing

Voor de beeldgrafiek geldt $g(x) = 2,5 \cdot f(x - 6)$

dus $g(x) = 2,5(3 + 2^{(x-6)+4})$

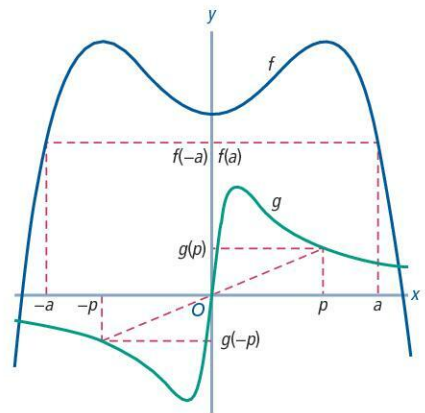
ofwel $g(x) = 7,5 + 2,5 \cdot 2^{x-2}$.

- 6 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 6x + 1$.
Geef in de volgende gevallen het functievoorschrift van de beeldgrafiek.
- a De grafiek van f wordt eerst over een afstand 4 omhoog verschoven en vervolgens ten opzichte van de y -as vermenigvuldigd met 0,5.
- b De grafiek van f wordt eerst over een afstand 3 naar rechts verschoven en vervolgens ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd met -4 .
- c De grafiek van f wordt eerst vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met 2 en vervolgens over een afstand 7 omlaag verschoven.

Symmetrie van grafieken

De grafiek van een functie f is lijnsymmetrisch in de y -as, als voor elke waarde van p geldt: $f(-p) = f(p)$.

De grafiek van een functie g is puntsymmetrisch in de oorsprong, als voor elke waarde van p geldt: $g(-p) = -g(p)$.



- 7 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^4 + \frac{3}{8 - 6x^2}$ en $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.
- a Toon aan dat de grafiek van f symmetrisch is in de y -as.
- b Een plot van de grafiek van g doet vermoeden dat deze grafiek symmetrisch is in het punt $(2, 0)$.
Verschuif de grafiek van g over een afstand 2 naar links en stel een functievoorschrift bij de beeldgrafiek op.
- c Toon aan dat de beeldgrafiek van g puntsymmetrisch is in de oorsprong en doe daarmee een uitspraak over de symmetrie van de grafiek van g .

Soorten functies

- > Lineaire functies of eerstegraadsfuncties:

$$f(x) = ax + b.$$

a is de helling of de richtingscoëfficiënt.

De grafiek gaat door $(0, b)$.

- > Machtsfuncties: $f(x) = x^a$.

Bij gehele waarden van a geldt: Als a even is, is de grafiek symmetrisch in de y -as.

Als a oneven is, dan is de grafiek puntsymmetrisch in de oorsprong.

- > Kwadratische functies of tweedegraadsfuncties: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

De grafiek is een parabool.

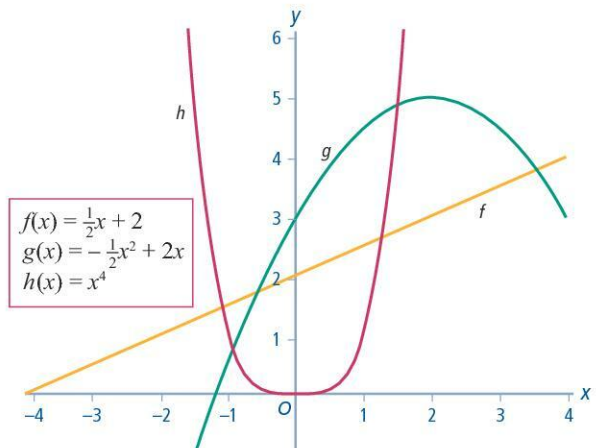
Van een kwadratische functie ken je drie vormen van het functievoorschrift:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, de grafiek snijdt de y -as in $(0, c)$.

$f(x) = a(x - p)^2 + q$, de grafiek heeft als top (p, q) .

$f(x) = a(x - s)(x - t)$, de grafiek snijdt de x -as in $(s, 0)$ en $(t, 0)$.

Je kunt elk van de drie vormen herleiden naar een van de andere vormen.



- > Gebroken functies: $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$

De functie heeft een nulpunt als $t(x) = 0$ en $n(x) \neq 0$.

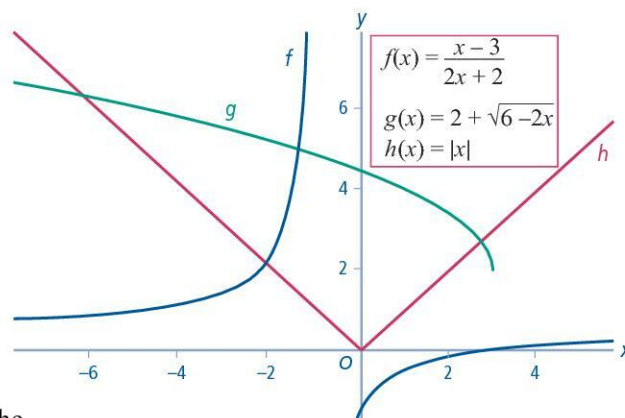
De grafiek heeft een verticale asymptoot als $n(x) = 0$ en $t(x) \neq 0$

- > Wortelfuncties: $f(x) = \sqrt{g(x)}$.
Het domein bestaat uit de waarden van x waarvoor geldt: $g(x) \geq 0$.

- > Absolute waarde functie $f(x) = |g(x)|$.

Daarbij geldt $|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{als } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{als } g(x) < 0 \end{cases}$

- > Exponentiële, logaritmische en goniometrische functies worden verderop apart behandeld.



- 8** Herschrijf in de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

a $f(x) = x^2 + 8x - 17$ **c** $f(x) = -x^2 - 15x + 18$

b $f(x) = 3x^2 + 12x + 20$ **d** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 24$

- 9** Bereken van de grafieken van de volgende functies exact de coördinaten van de snijpunten met de assen en de coördinaten van de top.

a $f(x) = 2(x - 8)(x + 2)$

b $g(x) = -3(x + 4)^2 + 15$

c $h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 12$

- 10a** Gegeven is de functie $g(x) = 5 - \sqrt{3x - 8}$.
Bepaal op algebraïsche wijze het domein van de deze functie.

- b** Dezelfde opdracht voor de functies $h(x) = 3\sqrt{x^2 - 15}$ en $k(x) = 12 + 6\sqrt{x^2 + 15}$.

- 11** Gegeven is de functie $m(x) = \frac{10}{1 + x^2}$

- a** Geef het bereik van deze functie.

- b** Dezelfde opdracht voor de functies $n(x) = 2\sqrt{x^2 + 5}$ en $p(x) = 30 - 6\sqrt{4 - 9x}$.

- 12** De grafiek van de machtsfunctie $h(x) = a \cdot x^b$ gaat door de punten $(2, 96)$ en $(-1, -3)$.
Bereken op algebraïsche wijze de waarde van a en van b .

- 13a** Van de variabelen p , q en r is gegeven:
- > p is evenredig met de wortel van q en het kwadraat van r .
 - > Als $q = 64$ en $r = \frac{1}{2}$ is $p = 16$.

Stel een formule op voor het verband tussen p , q en r .

- b** Van de variabelen m , t en w is gegeven:
- > m is evenredig met de derde macht van t en omgekeerd evenredig met het kwadraat van w .
 - > Als $t = 10$ en $w = 5$ is $m = 20$.
- Stel een formule op voor het verband tussen m , t en w .

Vergelijkingen

Lineaire vergelijkingen los je op door de term met de onbekende aan één kant van het $=$ -teken te brengen en de term die alleen een getal bevat aan de andere kant.

Kwadratische vergelijkingen los je op door:

- Het gebruiken van één van de regels hiernaast.
- Ontbinden in factoren.
- De abc -formule.

Bij vergelijkingen met breuken moet je vaak eerst de linkerkant en/of de rechterkant van een vergelijking herleiden tot één breuk. Verder kun je de regels hiernaast toepassen.

Als P (recht) evenredig is met Q , dan is $P = c \cdot Q$.

Als P evenredig is met een macht van Q , dan is $P = c \cdot Q^n$.

Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$

Uit $A^2 = B^2$ volgt $A = B$ of $A = -B$

Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$

mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

Voorbeeld 1

Los exact op: $(2x + 1)^2 = 6$

Oplossing

$$(2x + 1)^2 = (\sqrt{6})^2 \text{ dus}$$

$$2x + 1 = \sqrt{6} \text{ of } 2x + 1 = -\sqrt{6}$$

$$2x = -1 + \sqrt{6} \text{ of } 2x = -1 - \sqrt{6}$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6} \text{ of } x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

Voorbeeld 2

Los exact op: $x^5 - 4x^2 = 0$

Oplossing

$$x^5 - 4x^2 = x^2(x^3 - 4) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ of } x^3 - 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^3 = 4$$

$$\text{dus } x = 0 \text{ of } x = \sqrt[3]{4}$$

Voorbeeld 3

Los exact op:

$$\frac{6}{x+3} + \frac{2x}{x+1} = 2\frac{1}{2}$$

Oplossing

$$\frac{6(x+1)}{(x+3)(x+1)} + \frac{2x(x+3)}{(x+1)(x+3)} = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{2x^2 + 12x + 6}{x^2 + 4x + 3} = \frac{5}{2}$$

$$4x^2 + 24x + 12 = 5x^2 + 20x + 15$$

$$0 = x^2 - 4x + 3$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 3$$

Vaak staat er bij een vergelijking dat deze exact of algebraïsch moet worden opgelost. Alleen als dat niet is vermeld, mag je de vergelijking met de rekenmachine oplossen.

- 14 Los indien mogelijk exact op. Als dat niet mogelijk is, geef dan een oplossing in twee decimalen.

a $4x^3 - 7x^2 = -3x$ d $(2x - 3)(x^2 - 3x + 2) = (x - 2)^2$
 b $(-3x + 5)^2 = 16x^2$ e $\frac{1}{2}x^4 + x = 0$
 c $\frac{12}{x+1} - \frac{2x}{x-3} = -3$ f $\frac{2x-3}{x+2} = \frac{3-2x}{3x+8}$

Wortelvergelijkingen

Een wortelvergelijking vereenvoudig je tot de vorm $\sqrt{A} = B$ door links en rechts van het $=$ -teken dezelfde bewerkingen uit te voeren. Vervolgens gebruik je de regel: Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$.

Door het kwadrateren kunnen er oplossingen bij komen die niet voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking. Controleer daarom bij wortelvergelijkingen altijd de oplossingen door deze in te vullen bij de oorspronkelijke vergelijking.

- 15 Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $4 + \sqrt{1 - 2x} = 7$ d $-x + \sqrt{x^2 - 3} = 3$
 b $4x + \sqrt{1 - 2x} = 1$ e $6 - \sqrt{x} = \sqrt{x + 6}$
 c $-1 + \sqrt{x^2 + 7} = x$ f $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{7x - x^2}$

Ongelijkheden

Bij het oplossen van ongelijkheden los je eerst de bijbehorende vergelijking op. Vervolgens gebruik je een schets of een plot waaruit je de oplossing van de ongelijkheid kunt aflezen. Houd vooral rekening met het domein van de functies die in de ongelijkheid voorkomen!

Voorbeeld

Los exact op: $\frac{12}{x-1} \geq \frac{1}{2}x + 2$

Oplossing

$$\frac{12}{x-1} = \frac{1}{2}x + 2 \text{ geeft } 12 = (x-1)\left(\frac{1}{2}x + 2\right) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2.$$

$$\text{dus } \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 14 = 0 \text{ of } x^2 + x - 28 = 0,$$

$$\text{ontbinden: } (x+7)(x-4) = 0 \text{ dus } x = -7 \text{ of } x = 4.$$

De oplossing van de ongelijkheid is $x \leq -7$ of $1 < x \leq 4$
 of in intervalnotatie $\langle \leftarrow, -7 \rangle \cup \langle 1, 4 \rangle$.

Voorbeeld

Los exact op:

$$-2 + \sqrt{4x-1} = -2x + 6.$$

Oplossing

$$\sqrt{4x-1} = -2x + 8$$

$$4x-1 = (-2x+8)^2$$

$$4x-1 = 4x^2 - 32x + 64$$

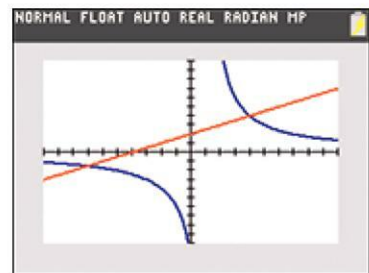
$$4x^2 - 36x + 65 = 0$$

Met de abc -formule vind je

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ of } x = 6\frac{1}{2}.$$

Controle: $x = 6\frac{1}{2}$ voldoet niet.

De oplossing is $x = 2\frac{1}{2}$.



- 16 Los de volgende ongelijkheden exact op.

a $3x - 4 \leq 2\frac{1}{3}x + 5$ c $x^3 - 2x^2 \geq 8x$
 b $|x^2 - 5x| > \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$ d $1 + \sqrt{6-x} < \frac{1}{2}x + 2$

Uitdrukken in, schrijven als functie van

In de formule $q = -3p + 22$ is q uitgedrukt in p .

Een dergelijke formule is handig om bij waarden van p de bijbehorende waarden van q te berekenen.

Door p uit te drukken in q krijg je een formule waarmee je bij waarden van q de bijbehorende waarden van p kunt berekenen.

In plaats van 'druk q uit in p ' zeg je ook wel 'schrijf q als functie van p '.

- 17** Herleid de vergelijkingen waarbij je p uitdrukt in q .

a $q = -0,2p + 1,3$

b $3p + 12q = 16 - p$

c $\frac{2p-3}{8p} = \frac{4q+5}{7}$

d $13p - 4(q+2) = pq$

e $0,3q + 1,2pq - 4,5 = 0$

f $\frac{7q-3p}{p+8} = \frac{4}{3}$

Substitutie

In een formule kun je een variabele vervangen door een getal of een andere formule. Je noemt dit substitueren.

Na het substitueren vereenvoudig je indien mogelijk de ontstane formule.

- 18** Gegeven zijn telkens twee vergelijkingen. Druk a uit in p en vereenvoudig het resultaat.

a $a + 3b = 6$ en $b = 8 - 2p$

b $\frac{a}{b} = 10 + 3b$ en $b = 5p + 1$

c $2b + 3ab = 20$ en $b = 6p$

d $b - a = b^2$ en $b = p - 1$

Voorbeeld

Herleid de vergelijking $\frac{2q}{8q+1} = \frac{p}{p-1}$

waarbij je p uitdrukt in q .

Oplossing

$$p(8q+1) = 2q(p-1) \quad (\text{kruislings vermenigvuldigd})$$

$$8pq + p = 2pq - 2q \quad (\text{haakjes weggewerkt})$$

$$6pq + p = -2q \quad (\text{vereenvoudigd})$$

$$p(6q+1) = -2q \quad (p \text{ buiten haakjes})$$

$$p = \frac{-2q}{6q+1} \quad (: (6q+1))$$

Voorbeeld

Gegeven zijn de vergelijkingen $ab^2 - 3b = -2a$ en $b = 3p$.

Druk a uit in p .

Oplossing

$$a \cdot (3p)^2 - 3 \cdot 3p = -2a \quad (\text{substitutie van } b = 3p)$$

$$9ap^2 - 9p = -2a \quad (\text{vereenvoudigd})$$

$$9ap^2 + 2a = 9p \quad (\text{links en rechts } + 2a \text{ en } + 9p)$$

$$a(9p^2 + 2) = 9p \quad (a \text{ buiten haakjes gehaald})$$

$$a = \frac{9p}{9p^2 + 2} \quad (\text{links en rechts : } (9p^2 + 2))$$

Inverse functies en inverse bewerkingen

De functies f en g heten inverse functies van elkaar als geldt: uit $f(a) = b$ volgt $g(b) = a$ (en omgekeerd), voor elk getal a uit het domein van f en voor elk getal b uit het domein van g .

Voor de inverse van een functie f gebruik je de notatie f^{inv} .

De grafieken van f en f^{inv} zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

Voorbeeld

Geef de inverse functie van $f(x) = 3 - 2x^3$.

Oplossing

$$f: \quad y = 3 - 2x^3$$

$$f^{inv}: \quad x = 3 - 2y^3$$

$$2y^3 = 3 - x$$

$$y^3 = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \quad \text{ofwel} \quad y = \sqrt[3]{1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x}$$

De inverse functie van f is $f^{inv}(x) = \sqrt[3]{1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x}$.

19 Geef de inverse functie.

a $f(x) = -2 + 4x$

c $h(x) = 2 + \sqrt[3]{4 - x}$

b $g(x) = \frac{12}{3x - 2}$

d $k(x) = \frac{5x - 1}{2x + 3}$

Rekenregels gebruiken

Je kent de rekenregels voor het rekenen met machten en met wortels. Soms heb je die rekenregels nodig bij het herleiden van formules en vergelijkingen.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b} \quad \frac{1}{g^n} = g^{-n}$$
$$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b} \quad g^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{g^p}$$
$$(g^a)^b = g^{ab} \quad g^0 = 1$$

Voorbeeld 1

Gegeven is de vergelijking $p^2q = \frac{\sqrt{p^7}}{p\sqrt{q}}$

voor $p > 0$ en $q > 0$.

Druk p uit in q en schrijf het resultaat zo eenvoudig mogelijk.

Oplossing

$$p^3 q \sqrt{q} = p^{\frac{7}{2}}$$

$$q\sqrt{q} = p^{\frac{7}{2}-3}$$

$$q^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}}$$

$$q^3 = p \quad \text{ofwel} \quad p = q^3$$

Voorbeeld 2

Laat zien dat de vergelijking

$$3\sqrt{4a} + \sqrt{9a} - 4 = b$$

te herleiden is tot $a = \left(\frac{1}{9}b + \frac{4}{9}\right)^2$.

Oplossing

$$3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{a} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{a} = b + 4$$

$$6\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = b + 4$$

$$9\sqrt{a} = b + 4$$

$$\sqrt{a} = \frac{1}{9}b + \frac{4}{9}$$

$$a = \left(\frac{1}{9}b + \frac{4}{9}\right)^2$$

20 Druk b uit in a .

a $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = 25$

c $a + 4 = 0,4b^2 \cdot \sqrt[6]{b} \cdot \sqrt[3]{b}$

b $2ab^3 + 1 = 5$

d $3\sqrt{a} + \sqrt{16a} - 2b = 0$

21 Laat zien dat formule A te herleiden is tot formule B.

a A: $(4q - 3)^{\frac{1}{2}} = p$ en B: $q = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{p^2}$

b A: $(q - 6) \cdot \sqrt[5]{2p} = 1$ en B: $p = \frac{1}{2(q - 6)^5}$

22 Herleid tot de vorm $b = p \cdot a + q$.

a $9^a \cdot (\sqrt{3})^b = \frac{1}{3}$

c $\frac{1}{2}\sqrt{b} - \sqrt{a + 3} = 0$

b $2^a \cdot 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^b \cdot 4^a$

d $\sqrt{3a} - 2\sqrt{b} = 0$

Examenopdrachten

23 Lijn door perforatie

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2012, tijdvak 1)

De functie f_b wordt gegeven door: $f_b(x) = \frac{x - b}{x^2 - b^2}$ met $x \neq -b$ en $x \neq b$.

Voor elke waarde van $b \neq 0$ heeft de grafiek van f_b een perforatie.

Bereken exact de waarde(n) van b waarvoor deze perforatie op de lijn met vergelijking $y = 4x + 1$ ligt.

Hint 1

24 Eerste- en derdegraadsfunctie

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 2)

De functies f en g zijn gegeven door

$$f(x) = (x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2}) \text{ en } g(x) = -x + 1\frac{1}{2}.$$

De functie h is gegeven door $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

Bereken exact de coördinaten van de perforatie van de grafiek van h en stel vergelijkingen op van de asymptoten.

Hint 2

25 Een gebroken functie en zijn inverse

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2014, tijdvak 2)

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = 4 - \frac{4}{x+1}$ en $g(x) = \frac{x}{4-x}$

De functie g is de inverse van f .

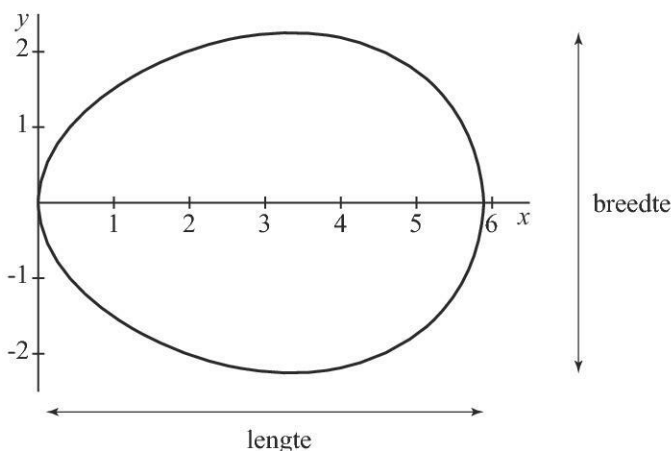
Bewijs dit.

Hint 3

26 Een eivorm

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 1)

De functie f gegeven door $f(x) = \frac{1}{6}\sqrt{87x - 3x^2 - 2x^3}$. In de figuur is de grafiek van f getekend en ook het spiegelbeeld hiervan in de x -as. De twee grafieken vormen samen een figuur die lijkt op de doorsnede van een ei.



Op de x -as en de y -as is de eenheid 1 cm. In de figuur is aangegeven wat bedoeld wordt met de lengte en de breedte van het ei.

De lengte van het ei is ongeveer 5,9 cm.

Bereken op algebraïsche wijze de lengte van het ei in cm.

Rond je antwoord af op twee decimalen.

Hint 4

27 Verticale verbindingslijnstukken

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B 2011, tijdvak 2)

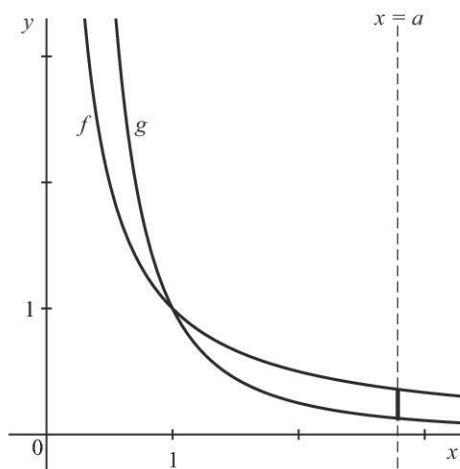
De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ met $x > 0$.

De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt $(1, 1)$.

Voor $a > 1$ bekijken we bij $x = a$ het verticale verbindingslijnstuk tussen de grafieken van f en g .

Bereken op algebraïsche wijze de exacte waarden van a waarvoor de lengte van het verticale verbindingslijnstuk $\frac{1}{6}$ is.

Hint 5



28 Stuiterende bal

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2015, tijdvak 2)

Een bal wordt vanaf een bepaalde hoogte boven een vloer losgelaten en begint vervolgens te stuiteren. In deze opgave bekijken we een wiskundig model van deze situatie.

Op het moment van loslaten bevindt de onderkant van de bal zich h_0 meter boven de vloer. De maximale hoogte van de onderkant van de bal tussen twee keer stuiteren noemen we de **stuithoogte**. De stuithoogte na de eerste keer stuiteren noemen we h_1 , die na de tweede keer stuiteren h_2 , enzovoorts.

Aan de linkerkant van de figuur is de bal getekend op verschillende stuithoogtes. Rechts daarvan is de hoogte h van de stuiterende bal (in meters) uitgezet tegen de tijd t (in seconden).

In deze opgave gaan we ervan uit dat de verhouding tussen twee opeenvolgende stuithoogtes constant is, dus $h_1 : h_0$ is gelijk aan $h_2 : h_1$ enzovoorts. Deze verhouding noemen we a .

Voor de stuithoogte na n keer stuiteren geldt dan:

$$h_n = h_0 \cdot a^n$$

De waarde van a hangt af van het soort bal.

- a** Bereken de waarde van a voor een bal waarvan na 7 keer stuiteren de stuithoogte 5 keer zo klein is als de hoogte waarop de bal is losgelaten.

Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Hint 6

De hoogte van de onderkant van de bal tussen twee opeenvolgende keren stuiteren is een functie van de tijd. De grafiek van deze functie is een bergparabool. De tijd in seconden tussen de n -de en de $(n+1)$ -ste keer stuiteren noemen we de **stuittijd** T_n . In de figuur zijn drie stuittijden aangegeven.

De stuittijd T_n kan worden uitgedrukt in de

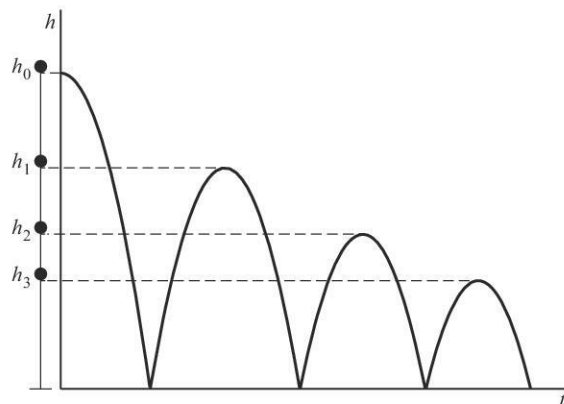
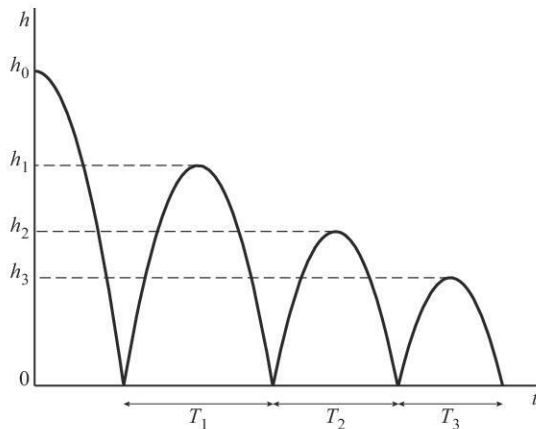
stuithoogte h_n . Er geldt: $T_n = 2 \cdot \sqrt{\frac{h_n}{4,9}}$

Een bal wordt losgelaten vanaf hoogte h_0 .

De stuittijd T_1 is 1,11 seconden en de stuittijd T_4 is 0,68 seconden.

- b** Bereken h_0 . Geef je antwoord in decimeters nauwkeurig.

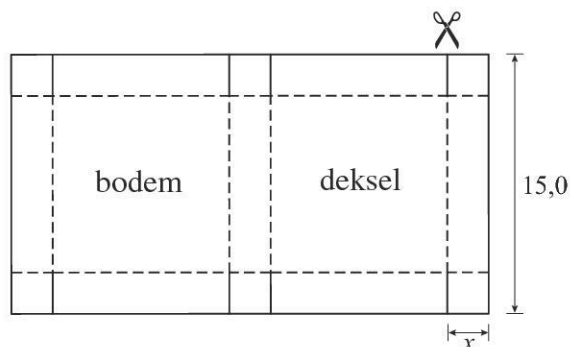
Hint 7



29 Dozen met een vaste inhoud

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B1,2 2008, tijdvak 2)

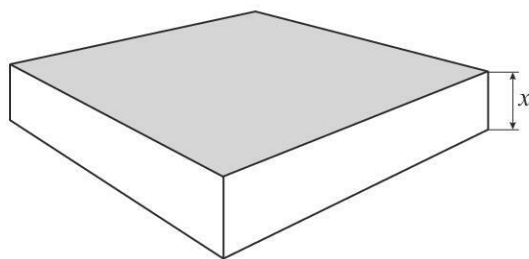
Uit een lange strook karton met een breedte van 15,0 dm worden dozen gemaakt met vierkante bodem en deksel en rechthoekige zijanten. Daartoe wordt het karton verknipt in rechthoeken waarvan de breedte gelijk is aan 15,0 dm en de lengte afhangt van de gewenste hoogte van de doos.



We noemen de hoogte van de doos in dm x . De inhoud van de doos moet 100 dm^3 zijn.

- a** Bereken bij welke lengtes van de kartonnen rechthoek dit het geval is. Geef je antwoord in dm, afgerond op één decimaal.

Hint 8



Er zijn ook stroken karton te verkrijgen met een andere breedte dan 15,0 dm. De breedte van het stuk karton in dm noemen we b . Zie de figuur hiernaast. We kijken in het vervolg van deze opgave steeds naar dozen waarvoor geldt:

- de bodem en het deksel zijn vierkant,
- de vier zijvlakken zijn rechthoekig,
- de inhoud is 100 dm^3 .

Er geldt: $(b - 2x)^2 = \frac{100}{x}$

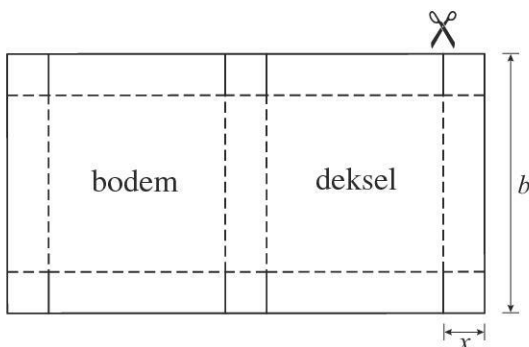
- b** Toon aan dat deze formule juist is.

Hint 9

Uit deze formule volgt dat $b = 2x + \frac{10}{\sqrt{x}}$

De oppervlakte A van de kartonnen rechthoek waaruit de doos gemaakt wordt, is afhankelijk van x .

Er geldt $A = 6x^2 + 70\sqrt{x} + \frac{200}{x}$



- c** Toon aan dat deze formule juist is.

Hint 10

Er zijn dozen (doos 1 en doos 2) die aan de specificaties voldoen en waarvoor geldt:

- doos 2 is vier keer zo hoog als doos 1 (dus voor de hoogtes x_1 en x_2 van doos 1 en doos 2 geldt $x_2 = 4 \cdot x_1$) en
- voor doos 1 en doos 2 is evenveel karton nodig (dus voor de benodigde oppervlaktes A_1 en A_2 van de kartonnen rechthoeken waaruit doos 1 en doos 2 gemaakt worden geldt $A_1 = A_2$).

- d** Bereken x_1 . Geef je antwoord in dm, afgerond op twee decimalen.

Hint 11

Differentiëren

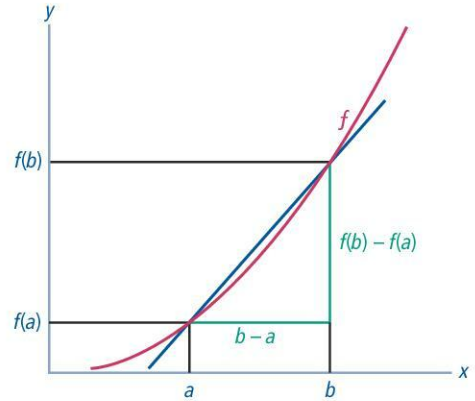
Differentiequotiënt en afgeleide functie

Om veranderingen aan te geven gebruik je het symbool Δ (delta).

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ is de gemiddelde verandering van de

functie f over een interval $[a, b]$ en heet een differentiequotiënt.

De helling van een grafiek van een functie f in het punt $(a, f(a))$ kun je benaderen door het differentiequotiënt op een heel klein interval te berekenen.



- 30** Benader de helling van de grafiek van de functie $f(x) = 2^x + x$ in het punt $(1, 3)$ met een differentiequotiënt op een klein interval. Geef je antwoord in twee decimalen.

De functie waarmee je de hellingen van de grafiek van een functie f berekent, noem je de hellingfunctie van f .

De bijbehorende grafiek heet de hellinggrafiek.

De hellingfunctie heet de afgeleide functie f' .

Het functievoorschrift van f' stel je op door te differentiëren.

Regels voor het differentiëren

Als $h(x) = f(x) + c$ dan is $h'(x) = f'(x)$.

Als $h(x) = c \cdot f(x)$ dan is $h'(x) = c \cdot f'(x)$.

Somregel: als $s(x) = f(x) + g(x)$ dan is $s'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Kettingregel: als $k(x) = f(g(x))$ dan is $k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Productregel: als $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ dan is $f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$.

Quotiëntregel: als $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$, dan is

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

functie	afgeleide
$f(x) = x^a$	$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

Handig om te onthouden:

$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Voorbeeld 1

Differentieer de functie $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$

Oplossing

De functie differentieer je met de quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2 + 1) - (2x - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \text{ ofwel}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 6x + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $k(x) = (x^2 - 4x)^3$. Geef $k'(x)$.

Oplossing

De functie is een kettingfunctie met als schakels $f(x) = x^3$ en $g(x) = x^2 - 4x$.

Er geldt:

$$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3(x^2 - 4x)^2(2x - 4)$$

- 31** Differentieer de volgende functies.
Je hoeft het resultaat niet te herleiden.

a $f(x) = 2x^2 - 8\sqrt{x}$	e $m(x) = 1 - x + 2x^3$
b $g(x) = \frac{-5}{3x^4}$	f $n(x) = 2 + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{6}{x^2} - \frac{1}{2x^3}$
c $h(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{2}{x^3}$	g $p(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^4}$
d $k(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{x - 1}$	h $q(x) = (x - 2)^5 \sqrt{x^2 - 5x}$

Stijgen en dalen, maximum en minimum, buigpunten

Als een grafiek stijgt en vervolgens daalt, heeft de functie een maximum.

Als de grafiek daalt en vervolgens stijgt, heeft de functie een minimum.

Maximale en minimale functiewaarden heten extreme waarden.

Als de afgeleide van een functie positief is en toeneemt, dan is de tweede afgeleide ook positief en de grafiek van de functie is toenemend stijgend.

$f'(a) > 0$ en $f''(a) > 0$: de grafiek van f is bij $x = a$ toenemend stijgend.

$f'(a) > 0$ en $f''(a) < 0$: de grafiek van f is bij $x = a$ afnemend stijgend.

$f'(a) < 0$ en $f''(a) > 0$: de grafiek van f is bij $x = a$ afnemend dalend.

$f'(a) < 0$ en $f''(a) < 0$: de grafiek van f is bij $x = a$ toenemend dalend.

Een buigpunt ligt op de plaats waar de grafiek overgaat van toenemend naar afnemend stijgend respectievelijk dalend of andersom. In een buigpunt bereikt de helling van een grafiek een extreme waarde. Je vindt een buigpunt door $f''(x) = 0$ op te lossen en met een plot te controleren of de grafiek voor die waarde van x een buigpunt heeft.

Voorbeeld

Bereken exact de extreme waarden en de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van de functie

$$f(x) = x^3 - 4\frac{1}{2}x^2 - 12x + 5.$$

Oplossing

$$f'(x) = 3x^2 - 9x - 12 = 3(x^2 - 3x - 4) = 3(x + 1)(x - 4)$$

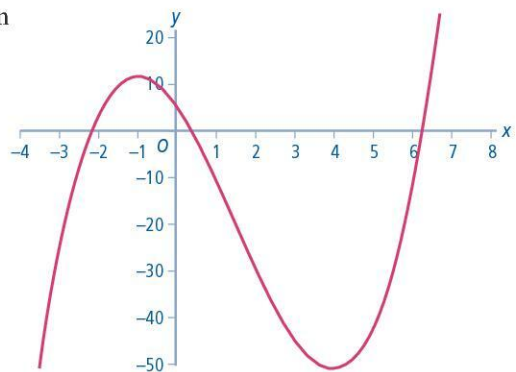
dus $f'(x) = 0$ als $x = -1$ of $x = 4$.

Uit de grafiek blijkt dat de extremen zijn:

maximum $f(-1) = 11\frac{1}{2}$ en minimum $f(4) = -51$.

$$f''(x) = 6x - 9, \text{ dus } f''(x) = 0 \text{ als } x = 1\frac{1}{2}.$$

Het buigpunt is $(1\frac{1}{2}, -19\frac{3}{4})$.



- 32** Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.
- a** Op welke interval is de grafiek van f toenemend stijgend?
- b** Bereken de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van g .

Raaklijn aan een grafiek, twee grafieken raken elkaar

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ is gelijk aan $f'(a)$.

De grafieken van twee functies f en g raken elkaar in (a, b) als geldt:

$$f'(a) = g'(a) \text{ en } f(a) = g(a) = b.$$

Voorbeeld

Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + p$ en de functie $g(x) = 7x$.

Bereken exact de waarden van p waarvoor de grafiek van de functie f_p raakt aan de grafiek van g .

Oplossing

$$f'_p(x) = x^2 - 2 \text{ en } g'(x) = 7. \text{ Uit } f'_p(x) = g'(x) \text{ volgt } x^2 - 2 = 7 \text{ dus } x^2 = 9.$$

Hieruit volgt $x = -3$ of $x = 3$.

$$\text{Uit } f_p(-3) = g(-3) \text{ volgt } -9 + 6 + p = -21 \text{ dus } p = -18.$$

$$\text{Uit } f_p(3) = g(3) \text{ volgt } 9 - 6 + p = 21 \text{ dus } p = 18.$$

De grafieken raken elkaar als $p = -18$ of $p = 18$.

- 33** Gegeven is de functie $g(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$
- a** Plot en schets de grafiek van g en toon algebraïsch aan dat de functie geen nulpunten heeft.
 - b** Op de grafiek van g ligt het punt $P(4, 17)$.
Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de raaklijn in P aan de grafiek van g .
 - c** Bereken exact de coördinaten van de punten van de grafiek van g waarin de raaklijn horizontaal loopt.
- 34** Gegeven zijn de functies $f_a(x) = x + 6\sqrt{2x + a}$.
Er is een waarde van a waarvoor de grafiek van f_a raakt aan de lijn met vergelijking $y = 3x + 19$.
Bereken exact deze waarde van a .
- 35** Gegeven zijn de functies $f_a(x) = 3x + \frac{a}{x}$ met $a > 0$.
Er is een waarde van a waarvoor de extreme waarde van $f_a(x)$ gelijk is aan 18.
Bereken exact deze waarde van a .

Examenopdrachten

36 Eerste- en derdegraadsfunctie

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 2)

De functies f en g zijn gegeven door

$$f(x) = (x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2}) \text{ en } g(x) = -x + 1\frac{1}{2}.$$

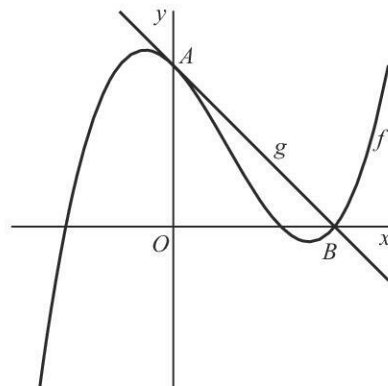
De grafieken van f en g snijden beide de y -as in het punt

$$A(0, 1\frac{1}{2}) \text{ en de } x\text{-as in het punt } B(1\frac{1}{2}, 0).$$

De grafiek van g raakt in punt A aan de grafiek van f .

Toon dit aan met behulp van differentiëren.

Hint 12



37 Driehoek bij een vierdegraadsfunctie

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 1)

Voor elke positieve waarde van p is de functie f_p gegeven

$$\text{door } f_p(x) = 2x^2 - px^4.$$

De grafiek van f_p heeft de y -as als symmetrieas.

Verder heeft deze grafiek drie toppen: het punt $O(0, 0)$

en de punten A en B . Zie de figuur.

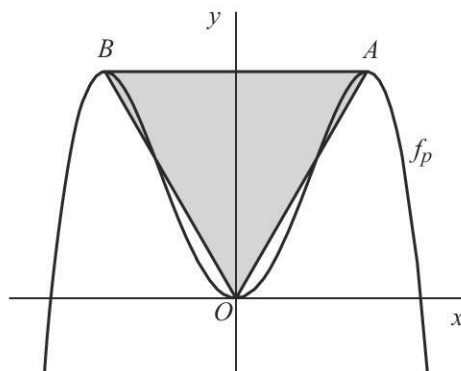
Deze drie punten zijn de hoekpunten van driehoek OAB , waarbij de coördinaten van de punten A en B afhankelijk zijn van de waarde van p .

Driehoek OAB is in de figuur grijs gemaakt.

Er is één waarde van p waarbij de lengte van lijnstuk OA gelijk is aan de lengte van lijnstuk AB .

Bereken exact deze waarde van p .

Hint 13



38 Raaklijn door perforatie

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2012, tijdvak 2)

De functie f wordt gegeven door:

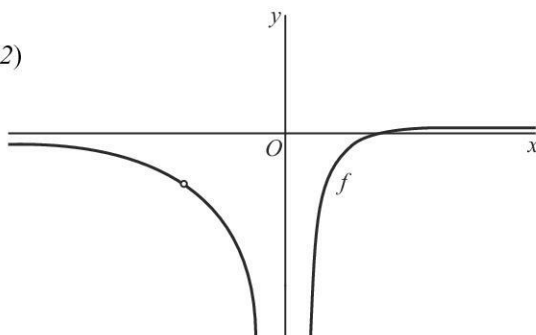
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2} \text{ met } x \neq -2 \text{ en } x \neq 0$$

De grafiek van f heeft een perforatie. In de figuur is de grafiek van f met de perforatie getekend.

De raaklijn aan de grafiek in het snijpunt van de grafiek met de x -as gaat door de perforatie.

Toon dit aan door middel van differentiëren.

Hint 14



39 Verzadigingsgraad van hemoglobine

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 2)

Zuurstof wordt in het menselijk lichaam getransporteerd door de hemoglobine in het bloed. De zuurstof wordt in de longen aan de hemoglobine gebonden en in de weefsels weer afgegeven. Het percentage van de hemoglobine dat zuurstof aan zich bindt, wordt de **verzadigingsgraad van hemoglobine** genoemd. Deze verzadigingsgraad hangt af van de **partiële zuurstofdruk**; dit is het deel van de totale luchtdruk in de longen dat veroorzaakt wordt door de zuurstof.

In 1910 heeft de fysioloog Hill gevonden dat onder bepaalde omstandigheden het verband tussen de partiële zuurstofdruk p en de verzadigingsgraad v van hemoglobine

kan worden benaderd met de formule:
$$v = \frac{100p^3}{p^3 + 25000}$$

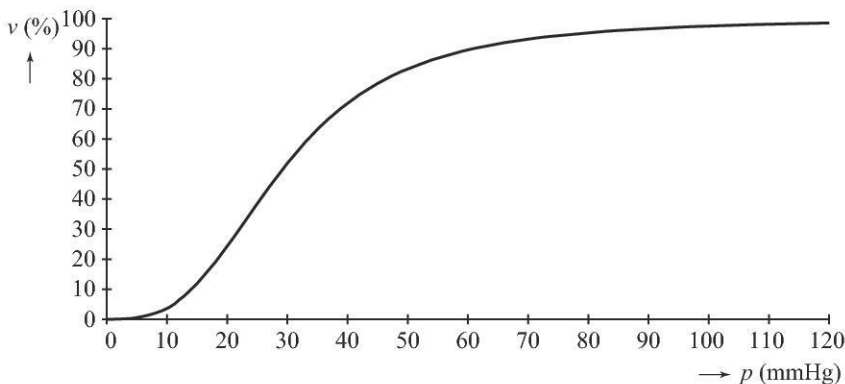
Hierin is:

v de verzadigingsgraad van hemoglobine in procenten en p de partiële zuurstofdruk in mmHg (millimeter kwik, de toen gebruikte eenheid voor druk).

- a** Bereken de partiële zuurstofdruk als de verzadigingsgraad van hemoglobine 75% is. Rond je antwoord af op een geheel aantal mmHg.

Hint 15

In de figuur is de grafiek getekend van v als functie van p volgens de benaderingsformule van Hill.



- b** Bereken met behulp van de afgeleide functie van v voor welke waarde van p de grafiek het steilst is. Rond je antwoord af op een gehele waarde.

Hint 16

Hill vond zijn formule doordat hij ontdekte dat $\frac{v}{100-v}$ evenredig is met p^3 .

De evenredigheidsconstante is $4 \cdot 10^{-5}$. Dat wil zeggen: $\frac{v}{100-v} = 0,00004p^3$

- c** Herleid de formule $\frac{v}{100-v} = 0,00004p^3$ tot de formule $v = \frac{100p^3}{p^3 + 25000}$

Hint 17

40 Tussen twee grafieken

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B 2011, tijdvak 1)

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{1-x}$.

Hiernaast zijn op het interval $[0, 1]$ de grafiek van f en de lijn $y = x$ getekend.

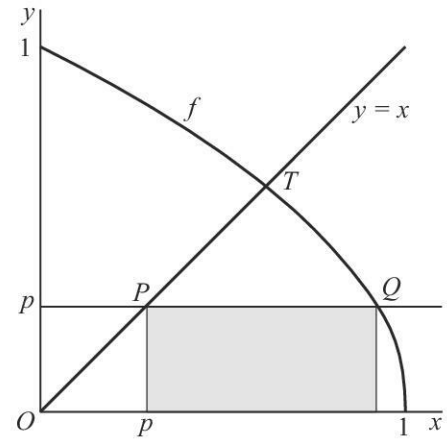
De grafiek van f en de lijn $y = x$ snijden elkaar in het punt T .

Op de lijn $y = x$ ligt tussen $O(0, 0)$ en T een punt $P(p, p)$.

De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van f in het punt Q .

De rechthoek waarvan PQ een zijde is en waarvan de tegenoverliggende zijde op de x -as ligt, is in de figuur voor een waarde van p grijs gemaakt.

De x -coördinaat van Q is $1 - p^2$.



Er is een waarde van p waarvoor de oppervlakte van de rechthoek maximaal is.

Bereken exact deze waarde van p .

Hint 18

41 Horizontale verbindingslijnstukken

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B 2011, tijdvak 2)

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$ en

$g(x) = \frac{1}{x^2}$ met $x > 0$. De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt $(1, 1)$.

Voor $b > 1$ bekijken we bij $y = b$ het horizontale verbindingslijnstuk tussen de grafieken van f en g .

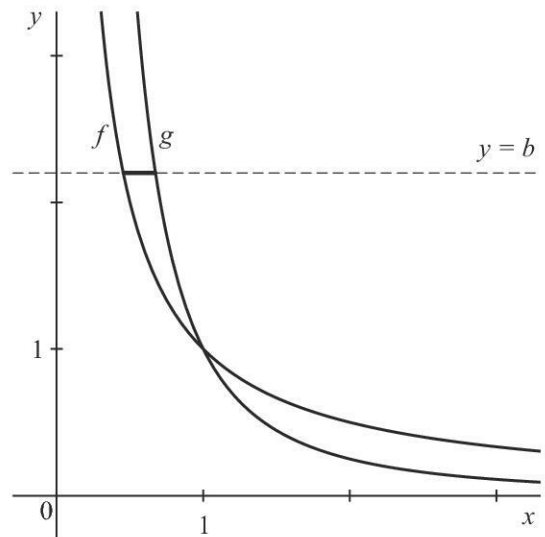
Zie de figuur.

De x -coördinaten van de eindpunten van dit

verbindingslijnstuk zijn respectievelijk $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{\sqrt{b}}$

Voor een zekere waarde van b is de lengte van dit lijnstuk maximaal.

Bereken met behulp van differentiëren de maximale lengte van het horizontale verbindingslijnstuk.



Hint 19

Integreren

Integraal en de hoofdstelling van de integraalrekening

Als de grafiek van een functie f op het interval $[a, b]$ boven de x -as ligt, dan is de exacte oppervlakte tussen de grafiek

van f en de x -as op het interval $[a, b]$ gelijk aan $\int_a^b f(x) dx$.

Dit is de integraal van f op het interval $[a, b]$.

De functie f heet de integrand.

De hoofdstelling van de integraalrekening luidt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ waarbij } F'(x) = f(x).$$

F heet een primitieve functie van f .

In plaats van $F(b) - F(a)$ wordt vaak $[F(x)]_a^b$ genoteerd.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = (x - 6)(2 - x)$.

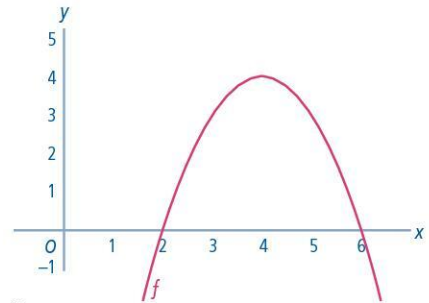
Bereken exact $\int_2^6 f(x) dx$ en leg uit wat de betekenis is.

Oplossing

$$\int_2^6 (x - 6)(2 - x) dx = \int_2^6 (-x^2 + 8x - 12) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x\right]_2^6 = (-72 + 144 - 72) - \left(-\frac{2}{3} + 16 - 24\right) = 10\frac{2}{3}.$$

De oppervlakte, ingesloten tussen de grafiek van f en de x -as, is $10\frac{2}{3}$.



Variabele grenzen

Als in een integraal een boven- of ondergrens p variabel is, dan is de integraal te schrijven als een functie van p .

$$g(p) = \int_a^p f(x) dx = [F(x)]_a^p = F(p) - F(a)$$

Primitieve van een machtsfunctie

De primitieven van $f(x) = x^n$ zijn $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ met $n \neq -1$.

Als $n = -1$ geldt: $F(x) = \ln |x| + C$.

Rekenregels voor integralen

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx \qquad \int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx$$

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx$$

42 Stel een primitieve op van de volgende functies.

a $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 5x - 1$ **d** $k(x) = (7x + 1)^5$

b $g(x) = 2\sqrt{x}$ **e** $m(x) = x^2(x^3 - 1)$

c $h(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$ **f** $n(x) = \frac{2x + 1}{x^3}$

43a Gegeven is de functie $f(x) = 3x\sqrt{x^2 + 1}$.
Controleer door middel van differentiëren dat de functie

$$F(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} \text{ een primitieve functie is van } f.$$

b Dezelfde opdracht als opdracht a voor de functies

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^5} \text{ en } F(x) = \frac{-1}{8(x^2 - 1)^4}$$

c Bereken voor welke waarde van a de functie
 $G(x) = a(x^2 + 6x + 1)^4$ een primitieve is van de functie
 $g(x) = (x + 3)(x^2 + 6x + 1)^3$.

Berekenen van de oppervlakte van een gebied

Voor het exact berekenen van de oppervlakte van een gebied, dat wordt ingesloten door de grafieken van twee functies is het nodig dat je de x -coördinaten van eventuele snijpunten exact berekent en dat je de onderlinge ligging van de grafieken weet.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ en $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$.

Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g .

Oplossing

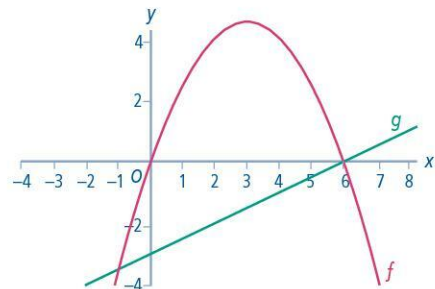
Eerst de snijpunten berekenen: $-\frac{1}{2}x^2 + 3x = \frac{1}{2}x - 3$.

Uit $-\frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}x + 3 = 0$ volgt $x^2 - 5x - 6 = 0$.

Uit $(x - 6)(x + 1) = 0$ volgt $x = -1$ of $x = 6$.

De oppervlakte is gelijk aan

$$\int_{-1}^6 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \left(\frac{1}{2}x - 3 \right) \right) dx = \int_{-1}^6 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}x + 3 \right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{4}x^2 + 3x \right]_{-1}^6 = (-36 + 45 + 18) - \left(-\frac{1}{6} + 1\frac{1}{4} - 3 \right) = 28\frac{7}{12}$$



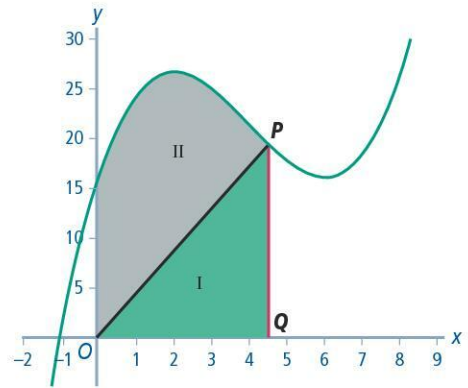
- 44** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ en $h(x) = 4x - 1\frac{1}{2}x^2$.
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x -as op het interval $[2, 8]$.
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van h en de x -as.
 - Door de grafieken van f en h worden twee gebieden ingesloten. Bereken exact de oppervlakte van elk van deze gebieden.

- 45** De grafieken van de functies $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{1}{4}x^2$ sluiten een gebied V in.
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
 - Bereken exact de oppervlakte van V .

- 46** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 16$ en $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

De grafiek van f staat hiernaast.

- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g en schets vervolgens de grafieken van f en g op het interval $[-2, 10]$.
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat rechts van de y -as ligt en wordt ingesloten door de grafiek van f , de grafiek van g en de y -as.
- Op de grafiek van f ligt een punt $P(p, f(p))$ met $2 < p < 6$. Punt Q is de projectie van P op de x -as. Druk de oppervlakte van driehoek OPQ uit in p .
- Bereken de waarde van p waarvoor geldt dat de oppervlakten van I en II gelijk zijn.

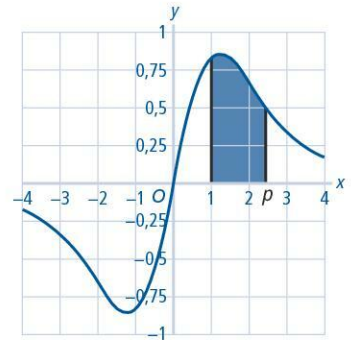


- 47** Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{20x}{(x^2 + 4)^2}$

- Toon aan dat $F(x) = \frac{-10}{x^2 + 4}$ een primitieve is van f .

De functie A wordt gedefinieerd door $A(p) = \int_1^p \frac{20x}{(x^2 + 4)^2} dx$, met $p > 1$.

- Bereken exact $A(4)$.
- Bereken exact de waarde van p waarvoor $A(p) = 1\frac{9}{10}$.
- Leg uit waarom de grafiek van A stijgend is voor elke waarde van $p > 1$.



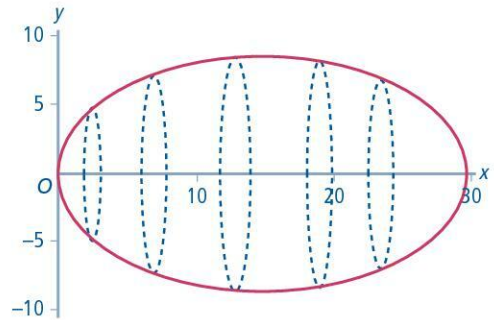
Inhoudsberekeningen

Een omwentelingslichaam ontstaat wanneer een gebied, ingesloten door de grafiek van een functie f , de x -as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ wordt gewenteld om de x -as. De inhoud I van dat omwentelingslichaam is dan gelijk aan

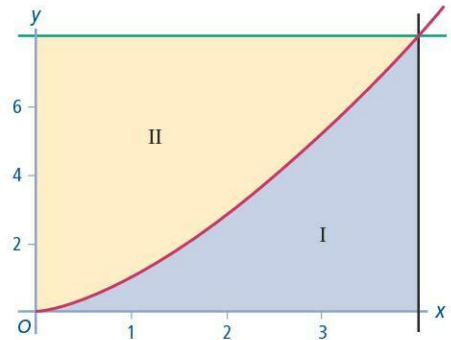
$$I = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx \quad \text{of} \quad I = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Als een gebied om de y -as wordt gewenteld, spiegel je het gebied in de lijn $y = x$ en daarna wentel je het gespiegelde gebied om de x -as. Daarbij gebruik je de inverse functie.

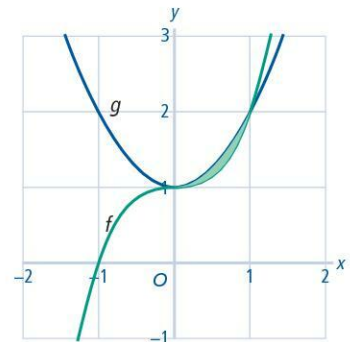
- 48** Een ellips wordt om de x -as gewenteld waardoor een lichaam ontstaat dat de vorm van rugbybal heeft. De lengte van dit omwentelingslichaam is 30 cm. De bovenste helft van de ellips voldoet aan de formule $y = 0,564\sqrt{x(30-x)}$ met x en y in cm en $x = 0$ aan de linkerzijde van het lichaam. Bereken de inhoud van dit lichaam in cm^3 .



- 49** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x}$ met domein $[0, 4]$. Hiernaast is de grafiek van f getekend met de lijnen $y = 8$ en $x = 4$. Als het gebied I om de y -as wordt gewenteld, ontstaat het omwentelingslichaam R . Als het gebied II om de x -as wordt gewenteld, ontstaat het omwentelingslichaam G .
- a** Bereken de inhoud van beide omwentelingslichamen.
- b** Als gebied I wordt gewenteld om de x -as, ontstaat het omwentelingslichaam A . Als gebied II om de y -as wordt gewenteld, ontstaat het omwentelingslichaam B . Bereken het verschil in inhoud tussen A en B .



- 50** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 + 1$ en $g(x) = x^2 + 1$. Het gebied dat ingesloten wordt door de grafieken van f en g noem je V .
- a** Bereken exact de coördinaten van de punten waarin de grafieken elkaar snijden.
- b** Het gebied V wordt gewenteld om de x -as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat daarbij ontstaat.



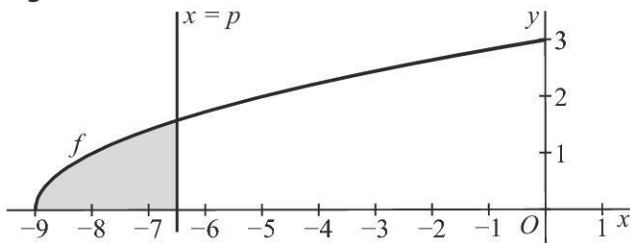
Examenopdrachten

51 Het achtste deel

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2015, tijdvak 2)

Op het domein $[-9, 0]$ is de functie f gegeven door $f(x) = \sqrt{x+9}$. In figuur 1 is de grafiek van f getekend en een lijn met vergelijking $x = p$ met $-9 < p \leq 0$. Het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en deze lijn is met grijs aangegeven.

figuur 1



De oppervlakte van het grijze gebied noemen we A . De waarde van A hangt af van de waarde van p . Er geldt:

$$A(p) = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}.$$

- a Bewijs dat $A(p) = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$.

Hint 20

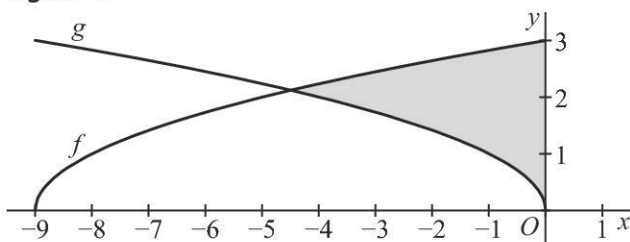
Er is een waarde van p waarvoor $A(p)$ het achtste deel is van de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de y -as.

- b Bereken exact deze waarde van p .

Hint 21

De grafiek van f wordt gespiegeld in de y -as. Het spiegelbeeld van de grafiek van f wordt vervolgens 9 naar links verschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . Zie figuur 2.

figuur 2



In figuur 2 is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f , de grafiek van g en de y -as grijs gemaakt. Dit vlakdeel wordt gewenteld om de x -as.

- c Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

Hint 22

52 Wortelfuncties

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2015, tijdvak 1)

In de figuur zijn de grafieken getekend van de functies f en g gegeven door $f(x) = \sqrt{x}$ en

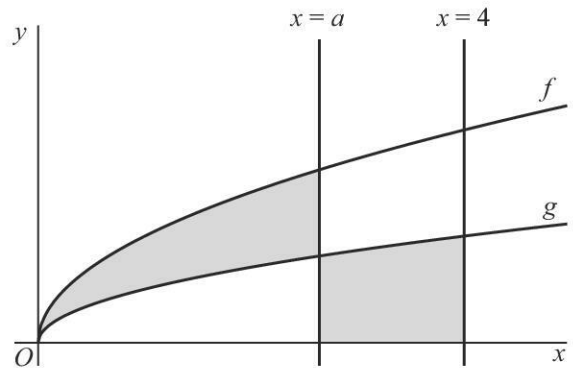
$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Verder zijn de lijnen getekend met vergelijkingen $x = a$ en $x = 4$, met $0 < a < 4$.

In de figuur zijn twee vlakdelen grijs gemaakt. Het ene grijze vlakdeel wordt begrensd door de grafieken van f en g en de lijn met vergelijking $x = a$.

Het andere grijze vlakdeel wordt begrensd door de grafiek van g , de x -as en de lijnen met vergelijkingen $x = a$ en $x = 4$.

Bereken exact voor welke waarde van a deze vlakdelen gelijke oppervlakte hebben.

Hint 23



53 Een gebroken functie en zijn inverse

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2014, tijdvak 2)

De functies f en g zijn gegeven door

$$f(x) = 4 - \frac{4}{x+1} \quad \text{en} \quad g(x) = \frac{x}{4-x}$$

De functie g is de inverse van f .

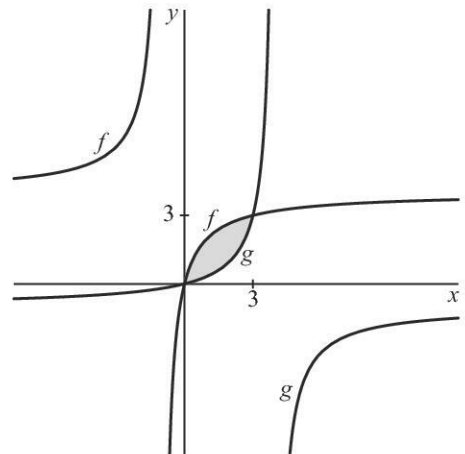
In de figuur zijn de grafieken van f en g weergegeven.

De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten $(0, 0)$ en $(3, 3)$. De grafieken sluiten een vlakdeel in.

Dit vlakdeel is in de figuur grijs gemaakt.

Bereken exact de oppervlakte van dit vlakdeel.

Hint 24



54 Tussen twee grafieken

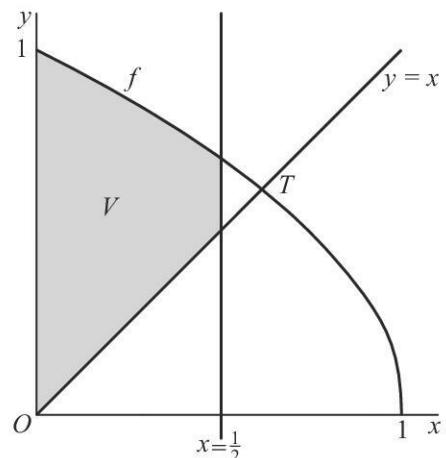
(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B 2011, tijdvak 2)

Het gebied V wordt begrensd door de grafiek van

$f(x) = \sqrt{1-x}$, de y -as, de lijn $y = x$ en de lijn $x = \frac{1}{2}$.

Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat wanneer V om de x -as wordt gewenteld.

Hint 25



Exponentiële functies en logaritmische functies

Exponentiële functies

Exponentiële functies hebben een functievoorschrift van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Rekenregels voor machten

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b}$$

$$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$$

$$(g^a)^b = g^{a \cdot b}$$

Verder geldt:

$$g^0 = 1$$

$$g^{-1} = \frac{1}{g} \text{ en } g^{-n} = \frac{1}{g^n}$$

$$g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g} \text{ en } g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$$

Logaritmen

De logaritme van a voor het grondtal g is de exacte oplossing van de vergelijking $g^x = a$.
Je noteert deze oplossing als $x = {}^g\log(a)$.

Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$.

Uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$.

Rekenregels voor logaritmen

(voor $g > 0$, $g \neq 1$ en $a > 0$ en $b > 0$)

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

$$g^{{}^g\log(a)} = a$$

$${}^g\log(a) = \frac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)}$$

Verder geldt:

$${}^g\log(1) = 0$$

$${}^g\log(g) = 1$$

$${}^g\log(\sqrt{g}) = \frac{1}{2}$$

$${}^g\log(g^n) = n$$

Voorbeeld 1

Schrijf als één logaritme:

$$3 \cdot {}^5\log(2) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(9)$$

Oplossing

$$3 \cdot {}^5\log(2) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(9)$$

$${}^5\log(2^3) + {}^5\log(9^{\frac{1}{2}}) =$$

$${}^5\log(8) + {}^5\log(3) = {}^5\log(24)$$

Voorbeeld 2

Schrijf als één logaritme:

$${}^4\log(3+p) + 2 \cdot {}^4\log(5p) \text{ met } p > 0$$

Oplossing

$${}^4\log(3+p) + 2 \cdot {}^4\log(5p) =$$

$${}^4\log(3+p) + {}^4\log(25p^2) =$$

$${}^4\log(25p^2(3+p)) =$$

$${}^4\log(75p^2 + 25p^3)$$

55 Schrijf als één logaritme.

a ${}^2\log(36) - {}^2\log(9) + {}^2\log(5)$

b $\frac{1}{2} \cdot {}^5\log(49) + 2 \cdot {}^5\log(3)$

c $2 + {}^6\log(x)$

d $-3 + 2 \cdot {}^4\log(9p)$

e ${}^8\log(2a) + {}^8\log(a+3)$

f $4 \cdot {}^{0,1}\log(x) - {}^{0,1}\log(x^2)$

Voorbeeld 1

Gegeven is ${}^3\log(p) + 2 \cdot {}^3\log(5) = q + 1$.
Druk p uit in q .

Oplossing

$${}^3\log(p) + {}^3\log(25) = q + 1$$

$${}^3\log(25p) = q + 1$$

$$25p = 3^{q+1}$$

$$p = \frac{1}{25} \cdot 3^{q+1}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = -1 + {}^2\log(3x+8)$.
Stel het voorschrift op van de inverse functie f^{inv} .

Oplossing

$$f: y = -1 + {}^2\log(3x+8)$$

$$f^{inv}: x = -1 + {}^2\log(3y+8)$$

$$x+1 = {}^2\log(3y+8) \text{ ofwel } 2^{x+1} = 3y+8$$

$$3y = 2^{x+1} - 8 \text{ ofwel } y = \frac{1}{3}(2^{x+1} - 8)$$

$$\text{De inverse functie is } f^{inv}(x) = \frac{1}{3}(-8 + 2^{x+1}).$$

56 Druk b uit in a .

a ${}^2\log(a) + {}^2\log(b) = 3$

b $a + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(b) = 5$

c $a + 4 = 2b^2\sqrt{b}$

d $3\sqrt{a} + \sqrt{16a} - 2b = 0$

57 Stel een functievoorschrift op van de inverse functie.

a $f(x) = {}^2\log(18-3x)$

c $h(x) = 2 \cdot 3^{5-x}$

b $g(x) = -2 + {}^3\log(2x-1)$

d $k(x) = 10 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

Exponentiële en logaritmische vergelijkingen

Sommige exponentiële vergelijkingen kun je exact oplossen door de linker- en rechterkant van de vergelijking te schrijven als machten met hetzelfde grondtal. Je gebruikt de regels voor het rekenen met machten.

Andere exponentiële vergelijkingen en ook logaritmische vergelijkingen los je exact op door de definitie van een logaritme toe te passen.

Voorbeeld 1

Los exact op: $9 \cdot 3^{x+4} = 3\sqrt{3}$

Oplossing

$$3^2 \cdot 3^{x+4} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{x+6} = 3^{1\frac{1}{2}}$$

$$x = -4\frac{1}{2}$$

Voorbeeld 2

Los exact op: $4 \cdot 5^{x-3} = 24$

Oplossing

$$5^{x-3} = 6$$

$$x-3 = {}^5\log(6)$$

$$x = 3 + {}^5\log(6)$$

Voorbeeld 3

Los exact op:
 $1 + {}^4\log(2x-6) = 0$

Oplossing

$${}^4\log(2x-6) = -1$$

$$2x-6 = 4^{-1}$$

$$2x-6 = \frac{1}{4}$$

$$2x = 6\frac{1}{4} \text{ dus } x = 3\frac{1}{8}$$

58 Los exact op.

a $8 \cdot 4^{x+2} = 1$

d $2 + 5 \cdot 7^{4x} = 17$

b $\frac{1}{25} \cdot 5^{x+3} = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$

e $6 - {}^3\log(x+4) = 5\frac{1}{2}$

c $3^{2x+1} = 7$

f $3 \cdot {}^4\log(x-4) = 6$

Machten van e en natuurlijke logaritmen

Een bijzonder grondtal is het getal $e \approx 2,718281828\dots$

Voor de functie $f(x) = e^x$ geldt $f'(x) = e^x$.

De logaritme met grondtal e wordt genoteerd als $\ln(x)$.

Voor de functie $f(x) = \ln(x)$ geldt $f'(x) = \frac{1}{x}$

59 Los exact op.

a $\ln(2x-1) = 3$

c $\sqrt{\ln(x)} = 1\frac{1}{2}$

b $2e^{5-x} = 3$

d $e^{2-x^3} = 4$

60 Druk a uit in b.

a $b = 3e^{2a-1}$

c $b = \ln(2a) + \ln(3a)$

b $b = 2\ln(a-5)$

d $b = e^{3a+1}$

Voorbeeld

Los exact op: $5e^{2x+3} = 8$

Oplossing

$$e^{2x+3} = 1\frac{3}{5} \quad \text{dus } 2x+3 = \ln(1\frac{3}{5})$$

$$2x = -3 + \ln(1\frac{3}{5})$$

$$x = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(1\frac{3}{5})$$

Afgeleiden en primitieven van exponentiële en logaritmische functies

functie	afgeleide	primitieve
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = g^x$	$f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$	$F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x + C$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	-
$f(x) = {}^g\log(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x}$	-
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$F(x) = \ln x + C$

61 Differentieer.

a $f(x) = {}^2\log(3x + 5)$

d $h(x) = x \ln^2(x)$

b $g(t) = 1500 \cdot 0,94^t$

e $k(x) = 3^{x^2+1}$

c $s(u) = \frac{2}{1 - \ln(u)}$

f $j(t) = \frac{250}{1 + 15 \cdot e^{-0,18t}}$

62 Geef een primitieve functie.

a $f(x) = 5e^{3x+2}$

c $h(x) = 1\frac{1}{2} \cdot 3^{5-x}$

b $g(x) = \frac{2x-1}{x^2}$

d $k(x) = \frac{12}{3x-5}$

63 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 4) \cdot e^x$.

a Plot en schets de grafiek van f .

b Bereken exact de nulpunten van f .

c Welke asymptoot heeft de grafiek van f ?

d Los exact op: $f'(x) = 0$.

e Benader vervolgens de extreme waarden van f in twee decimalen.

f De functie $F(x) = (x^2 + bx + c) \cdot e^x$ is een primitieve van f .
Bereken de waarde van b en van c .

g Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt
ingesloten door de grafiek van f en de x -as.

64 Een medicijn wordt in het spierweefsel van een patiënt
geïnjecteerd. De concentratie C van het middel in mg
per liter bloed kan worden benaderd met de formule
 $C(t) = 160(e^{-0,2t} - e^{-t})$ met t de tijd in uren na de injectie.

a Toon door differentiëren aan dat de concentratie meteen na
het injecteren van het medicijn gaat stijgen.

b $t_{\max}$ is het tijdstip waarop de concentratie maximaal is.
Bereken exact de waarde van $t_{\max}$.

Examenopdrachten

65 **Onafhankelijk van a**

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2012, tijdvak 1)

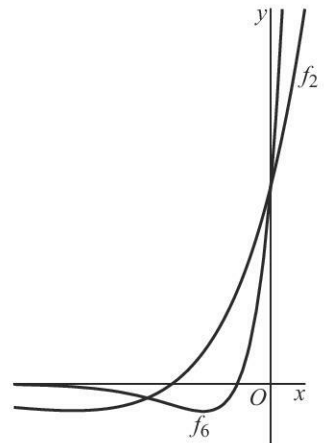
Voor elke waarde van a ($a > 0$) is een functie gegeven door
 $f_a(x) = (1 + ax) \cdot e^{ax}$.

In de figuur zijn de grafieken van f_2 en f_6 weergegeven.

Voor elke waarde van a ($a > 0$) heeft de grafiek van f_a een
punt P_a met een horizontale raaklijn.

Toon aan dat al deze punten P_a op één lijn liggen.

Hint 26



66 Logaritmen en vierde macht

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B 2010, tijdvak 1)

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = 4 \cdot \ln(x)$ en $g(x) = (\ln(x))^4$ met $x > 0$.

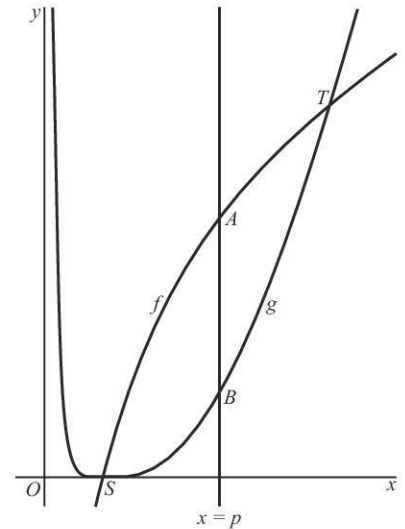
Een lijn $x = p$ snijdt tussen S en T de grafiek van f in A en de grafiek van g in B . Zie de figuur.

Er is een waarde van p waarvoor de lengte van lijnstuk AB maximaal is.

Bereken exact de maximale lengte van AB .

Schrijf je antwoord zo eenvoudig mogelijk.

Hint 27

**67 Vermenigvuldigen in horizontale en verticale richting**

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 2)

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$

Voor elke waarde van c is de functie g_c gegeven door $g_c(x) = \frac{c + \ln(x)}{x}$

De grafiek van f wordt ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd met e , het grondtal van de natuurlijke logaritme. Vervolgens wordt de zo

verkregen grafiek ten opzichte van de y -as vermenigvuldigd met $\frac{1}{e}$.

Hierdoor ontstaat de grafiek van g_c voor een waarde van c .

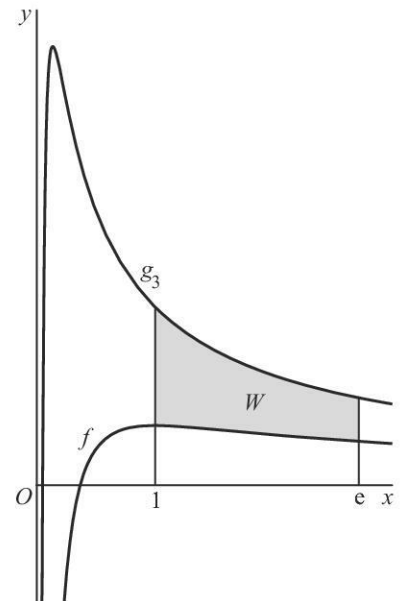
a Bereken exact deze waarde van c .

Hint 28

In de figuur is de grafiek van g_3 getekend. Ook de grafiek van f is in de figuur getekend. W is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g_3 en de lijnen met vergelijking $x = 1$ en $x = e$.

b Bereken exact de oppervlakte van W .

Hint 29



68 Een exponentiële functie

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B 2010, tijdvak 2)

In de eerste figuur is voor $x \geq 0$ de grafiek getekend

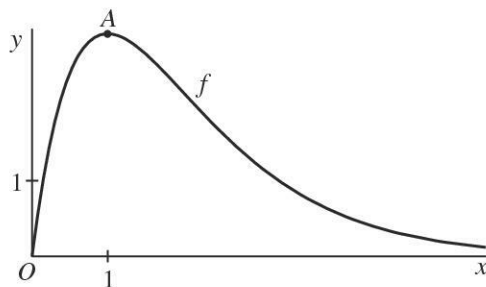
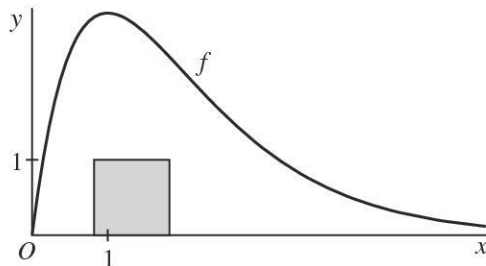
van de functie f die gegeven is door $f(x) = \frac{8x}{e^x}$

- a** Deze grafiek heeft één top, die we A noemen. Bereken exact de x -coördinaat van A .

Hint 30

- b** Zoals je in de tweede figuur ziet, past een vierkant met zijde 1 waarvan één zijde op de x -as ligt, ruimschoots in het gebied tussen de grafiek van f en de x -as. Onderzoek met een berekening of een vierkant met zijde 2 waarvan één zijde op de x -as ligt, ook nog in dit gebied past.

Hint 31



We bekijken nu voor positieve waarden van n , met $n \neq 1$

de functie g_n die is gegeven door $g_n(x) = \frac{8nx}{e^{nx}}$

De grafieken van g_n snijden de grafiek van f in het punt $(0, 0)$.

Ook is er voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$ nog een ander snijpunt.

In de tabel staat voor enkele waarden van n de x -coördinaat van dit andere snijpunt.

Voor de vier waarden van n uit de tabel geldt:

n	2	3	4	5
x_{snijpunt}	$\ln(2)$	$\frac{1}{2}\ln(3)$	$\frac{1}{3}\ln(4)$	$\frac{1}{4}\ln(5)$

$$x_{\text{snijpunt}} = \frac{1}{n-1} \ln(n).$$

Hieruit ontstaat het vermoeden dat deze formule voor x_{snijpunt} klopt voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$.

- c** Toon aan dat dit vermoeden juist is.

Hint 32

In de figuur hiernaast zijn de grafieken getekend van f en

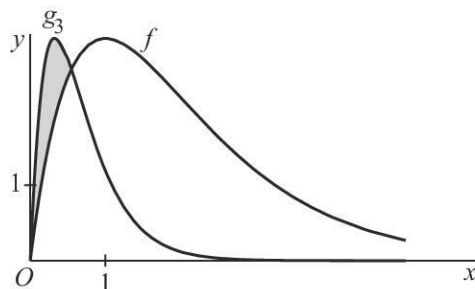
de functie g_3 , gegeven door $g_3(x) = \frac{24x}{e^{3x}}$

De grafieken van f en g_3 sluiten een vlakdeel in.

Dit vlakdeel is in de figuur grijs gemaakt.

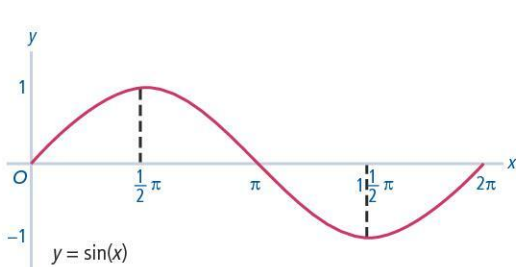
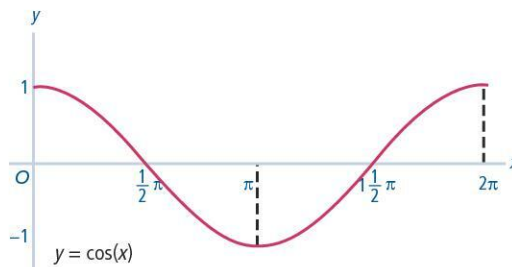
- d** Bereken de oppervlakte van dit vlakdeel.

Hint 33



Goniometrie

Goniometrische functies



Hierboven staan de grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$. Beide grafieken zijn sinusoiden, en x wordt gegeven in radialen. De periode van beide functies is 2π .

Symmetrie-eigenschappen, bijvoorbeeld:

$$\sin(\pi - t) = \sin(t)$$

$$\cos(\pi - t) = -\cos(t)$$

$$\sin(t) = \cos\left(t - \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\sin(\pi + t) = -\sin(t)$$

$$\cos(\pi + t) = -\cos(t)$$

$$\cos(t) = \sin\left(t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\sin(-t) = -\sin(t)$$

$$\cos(-t) = \cos(t)$$

Ook geldt: $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

De functie $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ heet de tangensfunctie.

De tangensfunctie heeft periode π . De grafiek heeft verticale asymptoten $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ met k geheel.

Exacte waarden

In de tabel hiernaast staan voor $x = 0$, $x = \frac{1}{6}\pi$,

$x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = \frac{1}{2}\pi$ de exacte waarden

van $\sin(x)$, $\cos(x)$ en $\tan(x)$.

Bij het exact berekenen van functiewaarden of het oplossen van vergelijkingen gebruik je deze waarden, vaak in combinatie met symmetrie-eigenschappen.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

69 Bereken exact.

a $\sin\left(23\frac{1}{2}\pi\right)$

d $\sin\left(1\frac{2}{3}\pi\right)$

b $\cos\left(3\frac{3}{4}\pi\right)$

e $\cos\left(7\frac{1}{6}\pi\right)$

c $\tan\left(-2\frac{3}{4}\pi\right)$

f $\cos\left(-3\frac{2}{3}\pi\right)$

70 Los exact op voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

a $2 \sin(x) = -\sqrt{3}$ **c** $1 + 2 \sin(x) = 0$

b $\sin(x) + \cos(x) = 0$ **d** $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$

Functievoorschrift bij een sinusoid

Bij elke sinusoid kan een functievoorschrift worden opgesteld van de vorm $g(x) = d + a \sin(b(x - c))$. De evenwichtsstand is

de lijn $y = d$, de amplitude is $|a|$, de periode p is $p = \frac{2\pi}{b}$ en er is een verschuiving van c naar rechts.

71 Van een sinusoid zijn drie opeenvolgende toppen gegeven: $A(5, 8)$, $B(9, 16)$ en $C(13, 8)$.

a Stel een bijpassende sinusfunctie op.

b Stel een bijpassende cosinusfunctie op.

Vergelijkingen met sinus, cosinus en tangens

De oplossingen van de vergelijking $\sin(A) = \sin(B)$ zijn:

$A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = \pi - B + k \cdot 2\pi$ met k geheel.

De oplossingen van de vergelijking $\cos(A) = \cos(B)$ zijn:

$A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = -B + k \cdot 2\pi$ met k geheel.

De oplossingen van de vergelijking $\tan(A) = \tan(B)$ zijn:

$A = B + k \cdot \pi$ met k geheel.

De vergelijking $\sin(A) = \cos(B)$ los je op door gebruik je

maken van de eigenschap $\sin(A) = \cos\left(A - \frac{1}{2}\pi\right)$ zodat je de

vergelijking kunt herleiden tot $\cos\left(A - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(B)$.

Voorbeeld

Los exact op voor $0 \leq x \leq 2\pi$: $\sin(2x) = \cos(3x)$.

Oplossing

$\sin(2x) = \cos(2x - \frac{1}{2}\pi)$ dus wordt de vergelijking $\cos(2x - \frac{1}{2}\pi) = \cos(3x)$.

$$2x - \frac{1}{2}\pi = 3x + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 2x - \frac{1}{2}\pi = -3x + k \cdot 2\pi$$

$$-\frac{1}{2}\pi = x + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 5x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$$

De oplossingen zijn: $x = \frac{1}{10}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{9}{10}\pi$, $x = 1\frac{3}{10}\pi$ en $x = 1\frac{7}{10}\pi$.

72 Los exact op voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

a $\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $2 \cos(3x) = 1$

c $\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \cos(3x)$

d $\sin(3x) = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

e $2 \sin^2(x) = 1$

f $2 \cos^2(x) - \sin(x) = 1$

g $\tan(2x) = \tan\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

h $\sqrt{3} \cdot \sin(2x) = 3 \cos(2x)$

Afgeleiden en primitieven

De afgeleide van $h(x) = \sin(x)$ is $h'(x) = \cos(x)$.

De afgeleide van $k(x) = \cos(x)$ is $k'(x) = -\sin(x)$.

De afgeleide van $m(x) = \tan(x)$ is $m'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

De primitieven van $f(x) = \sin(x)$ zijn $F(x) = -\cos(x) + C$.

De primitieven van $g(x) = \cos(x)$ zijn $G(x) = \sin(x) + C$.

73 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 3 \sin(2x)$

d $k(x) = \tan(3x^2 + 2)$

b $g(x) = 3 \cos^2(x)$

e $m(x) = \ln(2 + \sin(4x))$

c $h(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)}$

f $n(x) = \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$

74 Geef een primitieve van de volgende functies.

a $f(x) = 3 \sin(2x)$

c $h(x) = 4 - 3 \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

b $g(x) = 3 \cos\left(\frac{1}{3}\pi - x\right)$

d $k(x) = 2x - 5 \sin(6 - 3x)$

Som en verschilformules

$$\sin(u + v) = \sin(u) \cdot \cos(v) + \cos(u) \cdot \sin(v)$$

$$\sin(u - v) = \sin(u) \cdot \cos(v) - \cos(u) \cdot \sin(v)$$

$$\cos(u + v) = \cos(u) \cdot \cos(v) - \sin(u) \cdot \sin(v)$$

$$\cos(u - v) = \cos(u) \cdot \cos(v) + \sin(u) \cdot \sin(v)$$

Verdubbelingsformules

$$\sin(2t) = 2 \sin(t) \cdot \cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2(t) - 1$$

$$\cos(2t) = 1 - 2 \sin^2(t)$$

Voorbeeld

Druk $\sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$ uit in $\sin(x)$ en/of $\cos(x)$.

Oplossing

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right) &= \sin(x) \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + \cos(x) \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) \\ &= \sin(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \cos(x) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) \end{aligned}$$

De acht formules
hiernaast worden op het
Centraal Examen gegeven.

75 Druk uit in $\sin(x)$ of $\cos(x)$.

a $\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

c $\cos\left(1\frac{1}{2}\pi - x\right)$

b $\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$

d $\sin\left(x + 1\frac{1}{4}\pi\right)$

76 Gegeven is de functie $f(x) = 4 \sin(x) \cdot \cos^3(x) - 4 \sin^3(x) \cdot \cos(x)$.

a Toon aan dat $f(x)$ geschreven kan worden als $f(x) = 2 \sin(2x) \cdot \cos(2x)$.

b Bewijs dat $f(x) = \sin(4x)$.

c Bereken exact $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{8}\pi} f(x) \, dx$.

Examenopdrachten

77 Gebroken goniometrische functie

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2014, tijdvak 1)

De functie f_a is gegeven door: $f_a(x) = \frac{\sin(ax)}{1 - 2\cos(ax)}$ (met $a \neq 0$)

- a** Bereken exact voor welke waarden van a de lijn met vergelijking $x = \pi$ een verticale asymptoot is van de grafiek van f_a .

Hint 34

- b** Bewijs dat de grafiek van f_2 puntsymmetrisch is in het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

Hint 35

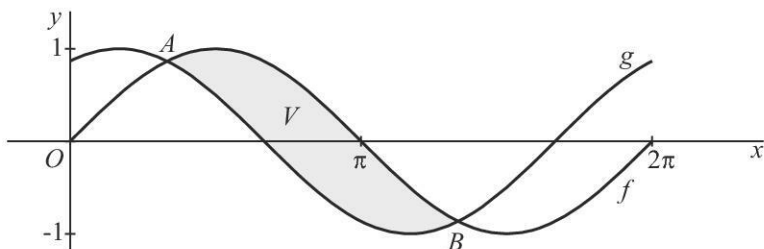
78 Tussen twee sinusgrafieken

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2012, tijdvak 1)

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$.

Hieronder zijn de grafieken van f en g getekend op het domein $[0, 2\pi]$.

De grafieken van f en g snijden elkaar op dit domein bij $x = \frac{1}{3}\pi$ in het punt A en bij $x = \frac{4}{3}\pi$ in het punt B . Zie de figuur.



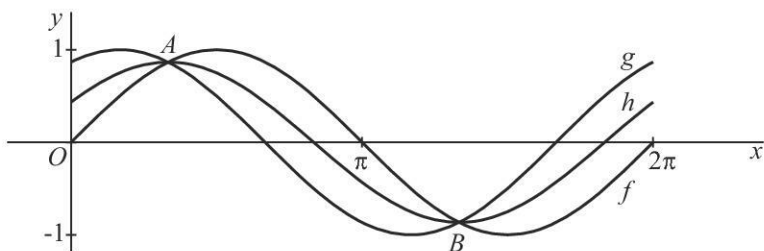
V is het vlakdeel dat ingesloten wordt door de grafieken van f en g .

- a** Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van V .

Hint 36

De functie h is gegeven door $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x))$. In de figuur hieronder

zijn de grafieken van f , g en h getekend op het domein $[0, 2\pi]$.



- b** Bereken exacte waarden van a en b zo dat $\frac{1}{2}(f(x) + g(x))$ te herleiden is tot $a \cdot \sin(x + b)$.

Hint 37

79 Goniometrische functies

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B 2011, tijdvak 1)

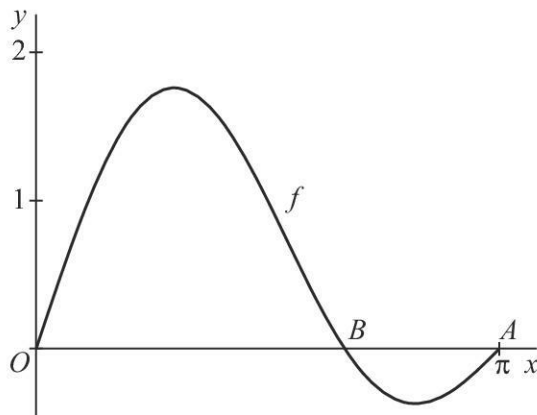
De functie f is gegeven door $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$ op het domein $[0, \pi]$.

In de figuur hiernaast is de grafiek van f getekend.

Deze grafiek snijdt de x -as tussen $O(0, 0)$ en $A(\pi, 0)$ in het punt B .

- a** Bereken exact de x -coördinaat van punt B .

Hint 38



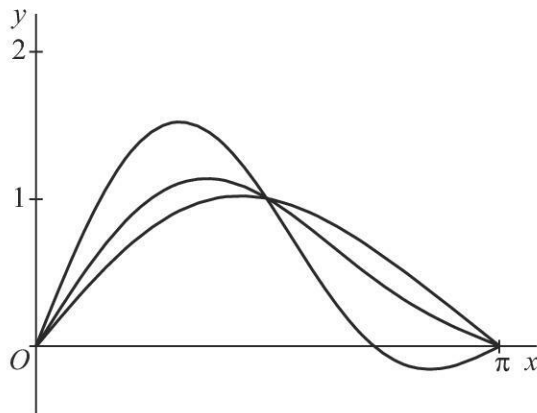
Voor elke positieve waarde van a is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \sin(x) + a \cdot \sin(2x)$ op het domein $[0, \pi]$.

In de figuur hiernaast is voor enkele waarden van a de grafiek van f_a getekend.

Voor een bepaalde waarde van a heeft de grafiek van f_a twee toppen en is de x -coördinaat van een van deze toppen $\frac{5}{6}\pi$.

- b** Bereken in twee decimalen de x -coördinaat van de andere top bij deze waarde van a .

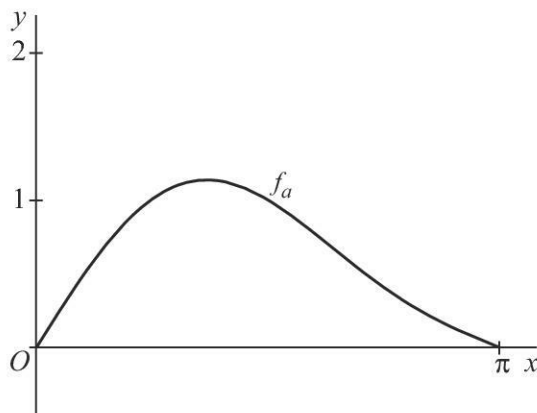
Hint 39



Voor elke waarde van a waarvoor geldt $0 < a < \frac{1}{2}$ ligt de grafiek van f_a tussen $(0, 0)$ en $(\pi, 0)$ geheel boven de x -as. In de figuur hiernaast is een dergelijke grafiek getekend.

- c** Toon aan dat de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van f_a en de x -as, onafhankelijk is van a .

Hint 40



80 Rechthoeken bij een kwart cirkel

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B 2010, tijdvak 2)

In een rechthoekig assenstelsel Oxy bekijken we het deel van de eenheidscirkel dat in het eerste kwadrant ligt.

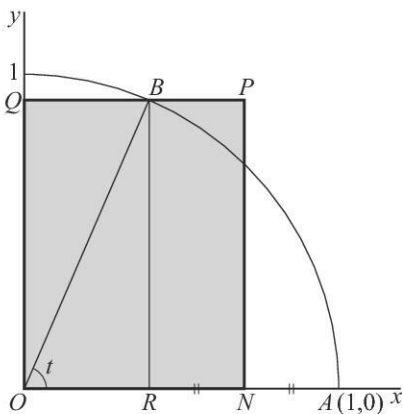
Het snijpunt met de x -as is $A(1, 0)$. Op de kwartcirkel ligt een willekeurig punt $B(\cos(t), \sin(t))$ met $\angle AOB = t$ rad en

$0 < t < \frac{1}{2}\pi$. Punt R is de loodrechte projectie van B op de x -as.

We maken nu twee rechthoeken:

- I. Een rechthoek $ONPQ$, waarbij N het midden van AR is en P en Q op dezelfde hoogte als B liggen.
 $OQ = \sin(t)$ en $ON = \frac{1}{2}(1 + \cos(t))$.
 Zie figuur 1.
 De oppervlakte van deze rechthoek noemen we $V(t)$.

figuur 1



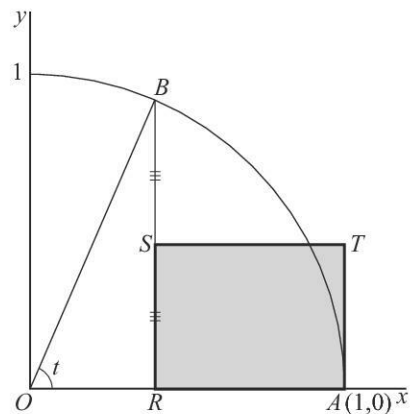
- II. Een rechthoek $ATSR$, waarbij S het midden van BR is.

$$RS = \frac{1}{2}\sin(t) \text{ en } RA = 1 - \cos(t).$$

Zie figuur 2.

De oppervlakte van deze rechthoek noemen we $W(t)$.

figuur 2



- a** Bereken exact de waarde van t waarvoor $V(t) = 3 \cdot W(t)$.

Hint 41

De bovengenoemde rechthoeken zijn gelijkvormig als de verhouding van de zijden van de ene rechthoek gelijk is aan de verhouding van de zijden van de andere rechthoek.

Hiervoor zijn twee mogelijkheden: $\frac{ON}{OQ} = \frac{RS}{RA}$ of $\frac{ON}{OQ} = \frac{RA}{RS}$

- b** Toon aan dat voor elke waarde van t met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ geldt: $\frac{ON}{OQ} = \frac{RS}{RA}$

Hint 42

Er is een waarde van t (met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$) waarvoor geldt dat $\frac{ON}{OQ} = \frac{RA}{RS}$

Voor deze waarde van t zijn beide rechthoeken vierkant.

- c** Bereken van beide vierkanten exact de zijde voor deze waarde van t .

Hint 43

Meetkunde en vectoren

Driehoeken

In elke driehoek zijn de drie hoeken samen 180° .

In een rechthoekige driehoek is één hoek 90° .

In een scherphoekige driehoek zijn alle hoeken scherp, dus minder dan 90° .

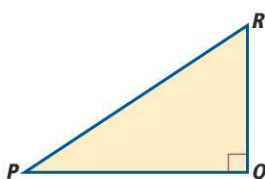
In een stomphoekige driehoek is één hoek stomp, dus meer dan 90° .

Een driehoek met twee gelijke zijden noem je een gelijkbenige driehoek.

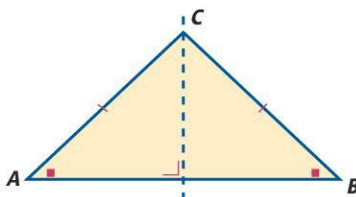
In een gelijkbenige driehoek zijn de twee basishoeken even groot.

Een driehoek met drie gelijke zijden noem je een gelijkzijdige driehoek.

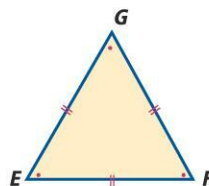
In een gelijkzijdige driehoek zijn de drie hoeken even groot, namelijk elk 60° .



$\angle Q = 90^\circ$
rechthoekige driehoek

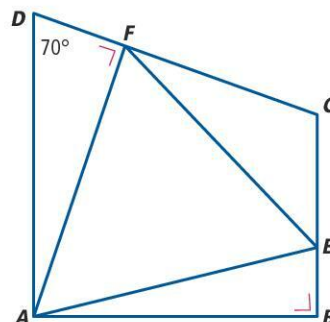


$AC = BC$ en $\angle A = \angle B$
gelijkbenige driehoek



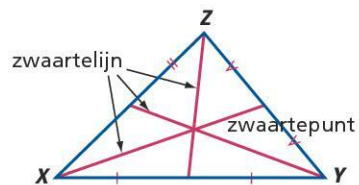
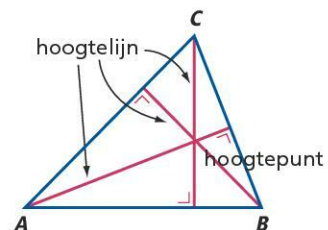
$EF = FG = EG$ en $\angle E = \angle F = \angle G = 60^\circ$
gelijkzijdige driehoek

- 81 In de figuur hiernaast geldt:
 $\triangle ABE$ en $\triangle AFD$ zijn rechthoekig en $\triangle AEF$ is gelijkzijdig.
 Verder is $\angle D = 70^\circ$ en is $\angle BAD = 90^\circ$.
 Bereken de grootte van alle overige hoeken in deze figuur.

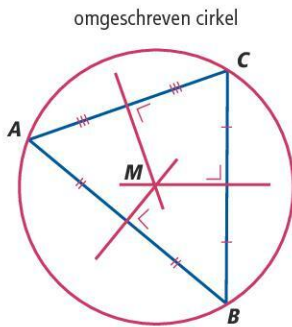
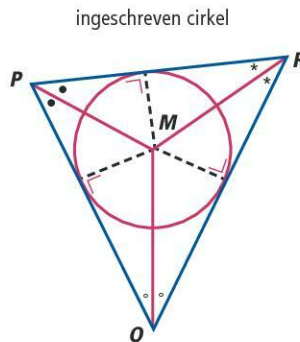


Bijzondere lijnen in driehoeken

- > Een zwaartelijn in een driehoek is een lijnstuk dat een hoekpunt verbindt met het midden van de zijde er tegenover. De drie zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in het zwaartepunt van de driehoek. Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijnen in stukken die zich verhouden als 2 : 1.
- > Een hoogtelijn uit een hoekpunt in een driehoek is een loodlijn uit een hoekpunt naar de tegenoverliggende zijde. De drie hoogtelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt.
- > Een deellijn of bissectrice van een hoek is een lijn die een hoek in twee gelijke hoeken verdeelt. De drie deellijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt.



- > De middelloodlijn van een lijnstuk AB is de lijn die door het midden van het lijnstuk AB gaat en er loodrecht op staat. De drie middelloodlijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt.
- > De omgeschreven cirkel van een driehoek is de cirkel door de hoekpunten van de driehoek. Het middelpunt M van de cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van de driehoek.



- > De ingeschreven cirkel van een driehoek is de cirkel die raakt aan de zijden van de driehoek. Het middelpunt M van die cirkel is het snijpunt van de deellijnen van de hoeken van de driehoek. De straal van de cirkel is gelijk aan de afstand van punt M tot de zijden.

- 82** Gegeven zijn de punten $A(1, 1)$, $B(9, 3)$ en $C(2, 8)$.
- Teken $\triangle ABC$ in een assenstelsel en teken het zwaartepunt Z van de driehoek.
 - Bereken exact de lengte van de zwaartelijn uit punt A en daarmee de exacte lengte van AZ .
 - Teken in een nieuw assenstelsel opnieuw $\triangle ABC$ en teken de omgeschreven cirkel van de driehoek.
 - Teken in een nieuw assenstelsel opnieuw $\triangle ABC$ en teken de ingeschreven cirkel van de driehoek.

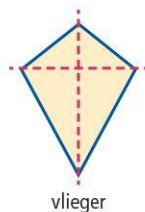
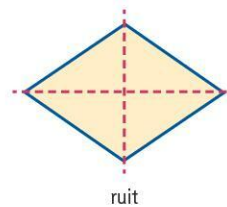
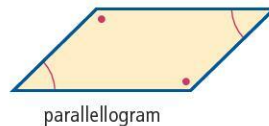
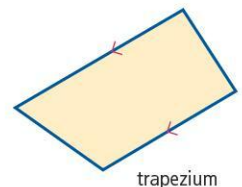
Vierhoeken

Een vierhoek waarvan een diagonaal symmetrieas is, heet een vlieger.

Een vierhoek waarvan beide diagonalen symmetrieassen zijn, heet een ruit.

Een vierhoek die draaisymmetrisch is over 180° , heet een parallellogram. Van een parallellogram zijn de tegenover elkaar liggende zijden evenwijdig en even lang.

Een vierhoek waarvan twee zijden evenwijdig lopen, heet een trapezium.



- 83** Zeg van de volgende beweringen of ze waar zijn of niet waar. Licht toe.
- Elke ruit is een vlieger, maar een vlieger hoeft geen ruit te zijn.
 - Een rechthoek is een parallellogram waarvan alle vier hoeken even groot zijn.
 - Een ruit waarvan de hoeken recht zijn, is een vierkant.
 - Een trapezium kan alleen een vlieger zijn als het een ruit is.

Berekeningen in driehoeken

Om berekeningen te maken in driehoekige figuren kun je gebruik maken van:

- > Gelijkvormige figuren: Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze een vergroting (of verkleining) zijn van elkaar. In een gelijkvormige driehoek zijn de overeenkomstige hoeken even groot en er is een vaste verhouding tussen de overeenkomstige zijden. Bij berekeningen met gelijkvormige driehoeken kun je gebruik maken van een verhoudingstabel.
- > Stelling van Pythagoras: in de rechthoekige driehoek hiernaast geldt

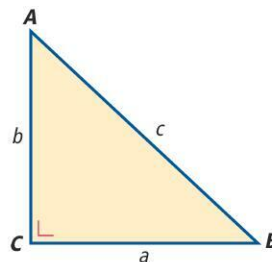
$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ dus } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- > Goniometrische verhoudingen: in een rechthoekige driehoek geldt

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{langste zijde}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}{\text{langste zijde}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A} = \frac{a}{b}$$

**Voorbeeld**

In het trapezium hiernaast zijn AB en CD evenwijdig en is $\angle DCB = 90^\circ$.

Bereken $\angle CAB$ en de lengte van AC , BD , DS en BS .

Oplossing

Omdat $AB \parallel CD$ geldt $\angle ABC = 90^\circ$.

In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle CAB) = \frac{3}{6}$ dus $\angle CAB \approx 27^\circ$.

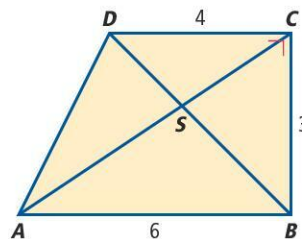
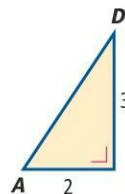
Teken vanuit D een loodlijn op AB , zie de tweede figuur.

$$AC = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} \text{ of } 3\sqrt{5}$$

$$BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\triangle ABS \sim \triangle CDS \text{ dus } DS : BS = CD : AB = 2 : 3.$$

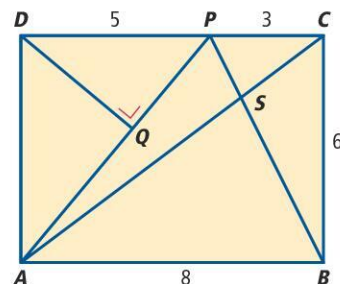
$$\text{Daaruit volgt } DS = \frac{2}{5} \cdot DB = 2 \text{ en } BS = \frac{3}{5} \cdot DB = 3.$$



84 Bereken in de figuur van het voorbeeld hierboven:

- a** AS exact
- b** CS exact
- c** $\angle DBA$ afgerond op hele graden
- d** $\angle BSC$ afgerond op hele graden

- 85 Hiernaast staat de rechthoek $ABCD$ met $AB = 8$ en $BC = 6$. Op zijde DC ligt punt P zodat $DP = 5$ en $PC = 3$.
- Toon met een berekening aan dat de exacte lengte van BP gelijk is aan $3\sqrt{5}$.
 - Bereken AP exact.
 - Bereken AS exact.
 - Toon met een berekening aan dat de exacte lengte van DQ gelijk is aan $\frac{30}{61}\sqrt{61}$.
 - Bereken $\angle PAD$. Rond af op hele graden.
 - Bereken $\angle DPQ$. Rond af op hele graden.
 - Bereken $\angle ASP$. Rond af op hele graden.



Sinus- en cosinusregel

In elke driehoek geldt de sinusregel:

Als α, β, γ de hoeken zijn van een driehoek en de lengten van de tegenoverliggende zijden zijn a, b en c , dan geldt:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Om de sinusregel te kunnen gebruiken moet je ten minste de lengte van één zijde en de grootte van de tegenoverliggende hoek weten.

In elke driehoek geldt de cosinusregel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

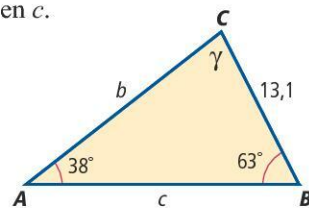
Je kunt met de cosinusregel een lengte van een onbekende zijde berekenen als je de lengte van de andere zijden en de grootte van de tegenoverliggende hoek kent. Je kunt met de cosinusregel ook de grootte van de hoeken berekenen als je van een driehoek de lengte van alle drie zijden kent.

- 86 Bereken in de volgende gevallen de onbekende zijden en hoeken van $\triangle ABC$. Rond lengtes af op één decimaal en hoeken op hele graden.
- $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 75^\circ$ en $c = 8,2$
 - $\alpha = 45^\circ$, $a = 15$ en $b = 18,3$
 - $\beta = 30^\circ$, $a = 9,3$ en $c = 5,7$
 - $\alpha = 35^\circ$, $\gamma = 100^\circ$ en $b = 12,5$
 - $\angle A = 120^\circ$, $AB = 4,1$ en $AC = 8,3$
 - $\angle A = 120^\circ$, $AB = 4,1$ en $BC = 8,3$

Voorbeeld 1

Bereken b en c .

Oplossing



$$\gamma = 180^\circ - 63^\circ - 38^\circ = 79^\circ$$

$$\frac{13,1}{\sin(38^\circ)} = \frac{b}{\sin(63^\circ)} = \frac{c}{\sin(79^\circ)}$$

$$b = \frac{13,1 \cdot \sin(63^\circ)}{\sin(38^\circ)} \approx 19,0$$

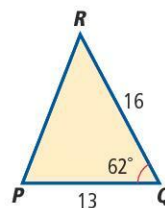
$$c = \frac{13,1 \cdot \sin(79^\circ)}{\sin(38^\circ)} \approx 20,9$$

Voorbeeld 2

Van $\triangle PQR$ is gegeven $QR = 16$, $PQ = 13$ en $\angle Q = 62^\circ$.

Bereken PR .

Oplossing
een schets:



$$PR^2 = 16^2 + 13^2 - 2 \cdot 16 \cdot 13 \cdot \cos(62^\circ)$$

$$PR^2 \approx 229,70$$

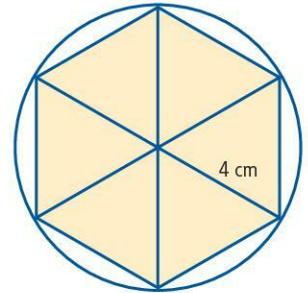
$$\text{dus } PR \approx \sqrt{229,70} \approx 15,2.$$

Oppervlakte

Bij het berekenen van de oppervlakte gebruik je de formules:

figuur	oppervlakte A	formule
rechthoek	$A = \text{ lengte} \times \text{ breedte}$	$A = l \cdot b$
driehoek	$A = \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte}$	$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$
vierkant	$A = \text{zijde} \times \text{zijde}$	$A = z^2$
parallellogram	$A = \text{basis} \times \text{hoogte}$	$A = b \cdot h$
cirkel	$A = \pi \times \text{straal} \times \text{straal}$	$A = \pi \cdot r^2$

- 87** Van de regelmatige zeshoek hiernaast liggen de hoekpunten op een cirkel met straal 4 cm.
Bereken hoeveel procent van de oppervlakte van de cirkel door de zeshoek wordt bedekt. Rond af op één decimaal.

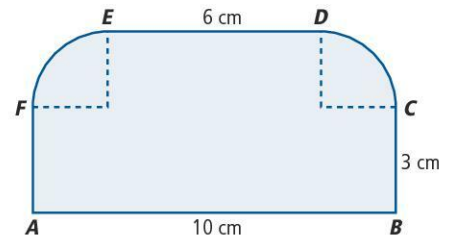


- 88** Deze opdracht gaat over de figuur naast opdracht 85.

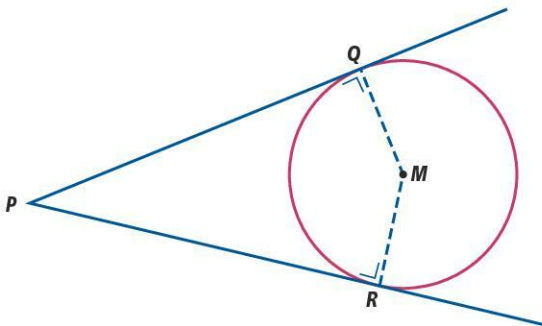
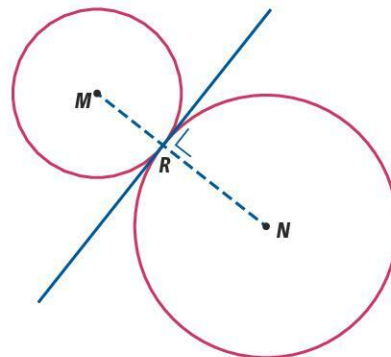
- Bereken de oppervlakte van vierhoek $ABCP$.
- Bereken de oppervlakte van driehoek APC .
- Bereken de oppervlakte van driehoek ABS .
- Bereken de oppervlakte van vierhoek $ASPD$.

- 89** De figuur hiernaast is ontstaan door van een rechthoek twee hoeken af te ronden.

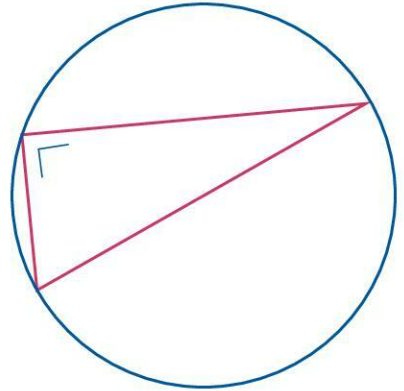
- Bereken de omtrek van de figuur in cm. Rond je antwoord af op één decimaal.
- Bereken de oppervlakte van de figuur in cm^2 . Rond af op hele cm^2 .

**Stellingen over cirkels**

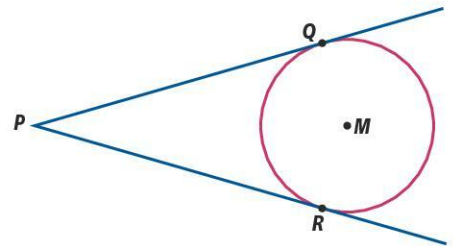
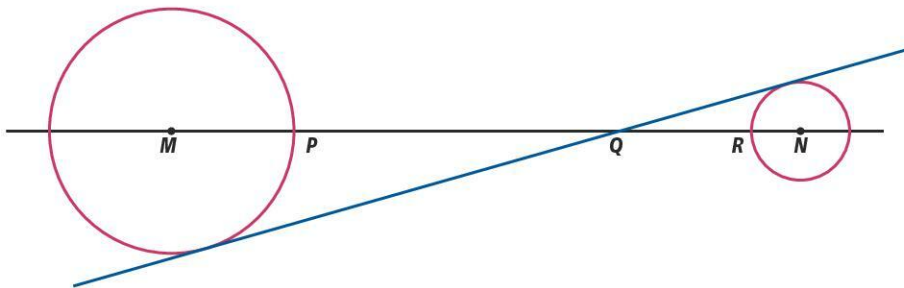
- Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.
- Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.
- De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindinglijn van de twee middelpunten.



- Een driehoek waarvan een zijde de middellijn van de omschreven cirkel is, is rechthoekig. (Stelling van Thales)
- Van een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omschreven cirkel (omgekeerde stelling van Thales).



- 90** Vanuit een punt P zijn de raaklijnen getekend aan een cirkel met middelpunt M .
De raakpunten zijn Q en R .
Toon aan dat de punten P , Q , M en R op de cirkel met middellijn MP liggen.



- 91** De linker cirkel in de tekening hierboven heeft straal 8.
De rechter cirkel heeft straal 3.
De afstand PR tussen de twee cirkels is 22.
De blauwe lijn raakt beide cirkels.
Bereken de lengte van PQ en van QR .

Vectoren

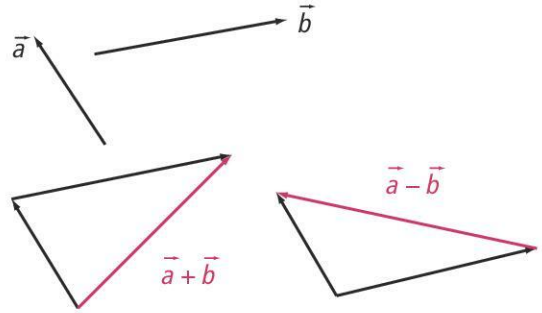
Met een vector wordt een verplaatsing aangegeven, bijvoorbeeld $\overrightarrow{AB}$ is de vector met beginpunt A en eindpunt B . Een vector kan worden ook aangegeven met een kleine letter, bijvoorbeeld $\vec{a}$.

De somvector $\vec{a} + \vec{b}$ krijg je door deze twee vectoren kop aan staart te leggen.

De verschilvector $\vec{a} - \vec{b}$ is de som van $\vec{a}$ en $-\vec{b}$, de tegengestelde vector van $\vec{b}$.

De som van $\vec{a}$ en $-\vec{a}$ is de nulvector $\vec{0}$.

De lengte van een vector wordt aangegeven met $|\overrightarrow{AB}|$ of $|\vec{a}|$.



- 92 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
Neem de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ over en teken in dezelfde figuur de vectoren $2\vec{a} + \vec{b}$ en $\vec{a} - 3\vec{b}$.



Vectoren en kentallen, inproduct

Vectoren in een assenstelsel kun je beschrijven met behulp van

kentallen. De vector $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ betekent: 3 naar links en 5 omhoog.

Voor de lengte van de vector $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ geldt $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Een vector die in de oorsprong begint heet een plaatsvector.

Je kunt vectoren als volgt optellen of met een getal vermenigvuldigen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \text{ en } k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Het inwendig product of inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b}$ van de

vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ is gelijk aan

$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$ en ook gelijk aan $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

α is de hoek tussen de vectoren, deze hoek kun

je berekenen met $\cos(\alpha) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

- 93 Gegeven zijn de punten $A(-3, 7)$, $B(5, 1)$ en $C(10, 4)$.
Bereken de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de punten $A(-2, 5)$, $B(7, 3)$ en $C(3, 6)$. Bereken $\angle ACB$ in hele graden.

Oplossing

$$\angle ACB = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}), \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Voor de hoek α tussen $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CB}$ geldt:

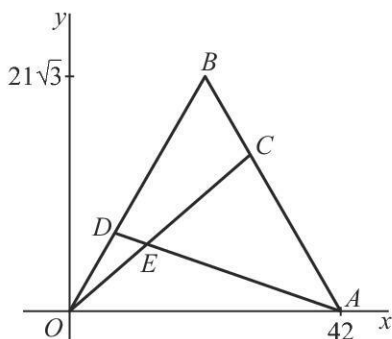
$$\cos(\alpha) = \frac{-5 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{25}} = \frac{-17}{5\sqrt{26}} \approx -0,6668$$

$$\angle ACB = \alpha \approx 132^\circ$$

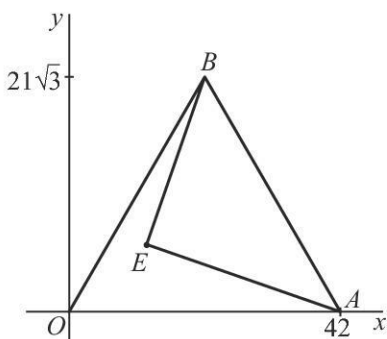
Examenopdrachten

- 94 Loodrecht**
(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2015, tijdvak 1)

figuur 1



figuur 2



Gegeven zijn de punten O , A en B met coördinaten $O(0, 0)$, $A(42, 0)$ en $B(21, 21\sqrt{3})$. Driehoek OAB is gelijkzijdig. Op zijde AB ligt punt C zo, dat $AC = \frac{2}{3} \cdot AB$ en op zijde BO ligt punt D zo, dat $BD = \frac{2}{3} \cdot BO$. Punt E is het snijpunt van de lijnstukken OC en AD . Zie figuur 1.

- a** Punt E heeft coördinaten $E(12, 6\sqrt{3})$.
Laat met exacte berekeningen zien dat de x -coördinaat van E inderdaad gelijk is aan 12.
- b** In figuur 2 is opnieuw driehoek OAB getekend, nu met de lijnstukken AE en BE .
Bewijs dat $\angle AEB = 90^\circ$.

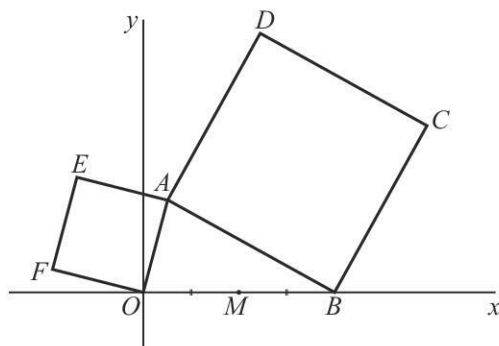
Hint 44

Hint 45

- 95 Twee vierkanten tegen een driehoek**
(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 2)

Voor positieve waarden van p en q is gegeven de driehoek OAB met $O(0, 0)$, $A(p, q)$ en $B(2, 0)$. Tegen de zijden OA en OB liggen de vierkanten $OAEF$ en $ABCD$. Deze vierkanten liggen buiten driehoek OAB . Het midden van lijnstuk OB is punt M . In de figuur is een mogelijke

situatie weergegeven. Er geldt: $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix}$.



- a** Toon dit aan.

Hint 46

Verder geldt: $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} p-q \\ p+q \end{pmatrix}$.

- b** Toon aan dat de lijn MA loodrecht staat op de lijn ED .

Hint 47

96 Cirkels in een driehoek

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2014, tijdvak 1)

Als vanuit een punt A buiten een cirkel de twee raaklijnen aan die cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van A tot de twee raakpunten P en Q even groot. In figuur 1 geldt dus $AP = AQ$.

Deze eigenschap mag je in deze opdracht gebruiken.

Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met rechthoekszijden $AB = 4$ en $BC = 3$. De ingeschreven cirkel van driehoek ABC raakt de zijden van de driehoek in P , Q en R . M is het middelpunt van deze cirkel. Zie figuur 2.

De straal van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC is 1.

a Bewijs dit.

Hint 48

Tussen de ingeschreven cirkel en de zijden AB en AC van de driehoek wordt een tweede cirkel met middelpunt N getekend. Deze tweede cirkel raakt de zijde AB in U , de ingeschreven cirkel in V en de zijde AC in W . De punten M , N en A liggen dus op één lijn. De straal NU van de tweede cirkel is r . De loodrechte projectie van N op MP is T . Zie figuur 3.

Er geldt $AU = 3r$.

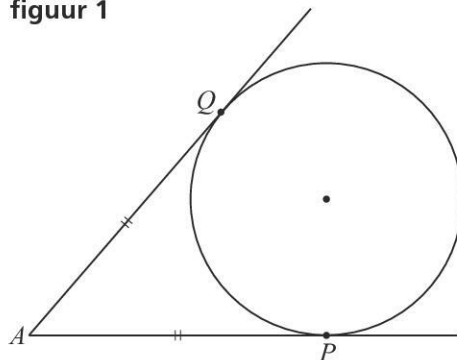
b Bewijs dit.

Hint 49

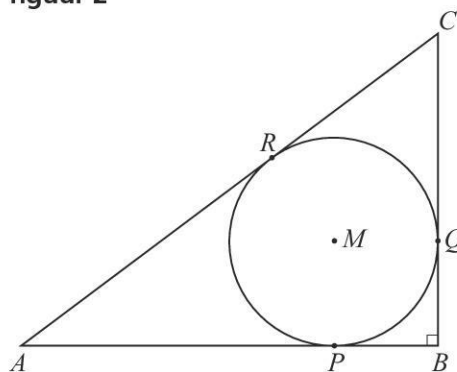
c Bereken r . Rond je antwoord af op twee decimalen.

Hint 50

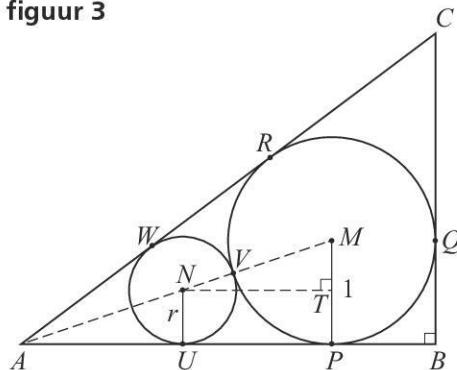
figuur 1



figuur 2



figuur 3



Vergelijkingen van lijnen

Lijnen kun je op verschillende manieren met vergelijkingen weergeven.

- > Een vergelijking van een lijn kun je schrijven in de vorm $ax + by = c$.
- > Als de lijn niet evenwijdig is aan de verticale as, kun je de vergelijking ook schrijven als $y = mx + n$ waarbij m de richtingscoëfficiënt en n het startgetal is.

Als voor twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$, dan staan k en l loodrecht op elkaar.

Het omgekeerde is ook waar:

Als twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 loodrecht op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$.

- > Een lijn die de assen snijdt in de punten $(p, 0)$ en $(0, q)$ met $p \neq 0$ en $q \neq 0$ heeft een vergelijking

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

- > De vergelijking van een horizontale lijn is $y = c$ en de vergelijking van een verticale lijn is $x = c$.

97 Gegeven zijn de vier lijnen:

$$l: y = -3x + 5 \quad r: 3x + 6y = -5$$

$$k: 10x - 5y = 7 \quad s: 3x + y = 10$$

- a** Schrijf de vergelijkingen van de lijnen k en r in de vorm $y = mx + n$.
- b** Schrijf de vergelijking van l en s in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
- c** Onderzoek welke van deze lijnen loodrecht op elkaar staan.

98 Gegeven is punt $P(4, -3)$ en lijn $l: 8x - 4y = 7$.

- a** Geef de richtingscoëfficiënt van een lijn die loodrecht op l staat.
- b** Geef een vergelijking van de loodlijn uit P op l .

Voorbeeld

Gegeven zijn lijn l met vergelijking $y = -1\frac{3}{5}x + 8$ en lijn m met vergelijking $10x - 16y = -3$.
Toon aan dat $l \perp m$.

Oplossing

$$10x - 16y = -3 \text{ geeft } -16y = 10x - 3 \text{ ofwel } y = \frac{5}{8}x + \frac{3}{16}.$$

De richtingscoëfficiënt van l is $-1\frac{3}{5}$.

De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{5}{8}$.

$$-1\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} = -\frac{8}{5} \cdot \frac{5}{8} = -1 \text{ dus } l \perp m.$$

Vectorvoorstelling van een lijn

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ heet een vectorvoorstelling van een lijn, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een steunvector en $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ is een richtingsvector van de lijn. Voor elke waarde van de parameter λ wijst de vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ een punt van de lijn aan. Een vectorvoorstelling heet ook wel een parametervoorstelling.

De vector $\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ staat loodrecht op de lijn en heet een normaalvector van de lijn. $qx - py = c$ is een vergelijking van de lijn.

- 99** Gegeven is de lijn m met vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

- a** Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van m met de x -as.
b Geef een normaalvector van m en stel een vergelijking van m op.

Afstand tot een lijn

Om de afstand van een punt P tot een lijn l te berekenen, stel je eerst een vergelijking op van de loodlijn door punt P op lijn l . Vervolgens bereken je de coördinaten van het snijpunt Q van de loodlijn met lijn l . De lengte van lijnstuk PQ is de gevraagde afstand. De notatie voor deze afstand is $d(P, l)$. De afstand tussen twee punten $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$ kun je berekenen met de formule $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

De afstand tussen twee evenwijdige lijnen is de afstand van een willekeurig punt op de ene lijn tot de andere lijn.

Als $ax + by + c = 0$ de vergelijking van een lijn l is, dan kan je de afstand van het punt $P(p, q)$ tot de lijn l

ook berekenen met de formule $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- 100a** Bereken exact de afstand van het punt $P(0, 9)$ tot de lijn $l: 2x - 3y = -1$.
b Bereken exact de afstand tussen de evenwijdige lijnen $m: y = 3x - 2$ en $n: 3x - y = -2$.

Voorbeeld

Stel een vectorvoorstelling, een normaalvector en een vergelijking op van de lijn door de punten $A(6, -1)$ en $B(-2, 5)$.

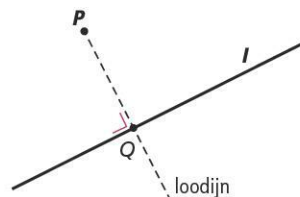
Oplossing

Een richtingsvector is $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Een normaalvector is $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus een

vergelijking is $3x + 4y = c$. Door invullen van de coördinaten van A of van B vind je de vergelijking $3x + 4y = 14$.

**Voorbeeld**

Bereken exact de afstand van het punt $P(3, -1)$ tot de lijn $l: y = \frac{1}{2}x - 7$.

Oplossing

De vergelijking van l kan worden herleid tot $1\frac{1}{2}x - y = 7$ of $3x - 2y - 14 = 0$.

$$d(P, l) = \frac{|3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) - 14|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

101 Gegeven zijn de lijnen l en m met vergelijkingen $8x - y = 34$ en $4x + 7y = 2$.

a Bereken de coördinaten van het snijpunt van l en m .

b Een punt $P(p, q)$ ligt op gelijke afstand van de lijnen l en m .

Leg uit dat moet gelden $|8p - q - 34| = |4p + 7q - 2|$.

c De vergelijking in opdracht b kan worden herleid tot twee lineaire vergelijkingen. Welke meetkundige eigenschap hebben deze lijnen?

d Geef de vergelijkingen van de twee lijnen en toon aan dat de lijnen loodrecht op elkaar staan.

Hoek tussen twee lijnen

Twee snijdende lijnen maken vier hoeken met elkaar die twee aan twee gelijk zijn. Met de hoek tussen twee lijnen wordt bedoeld de scherpe of rechte hoek die de lijnen met elkaar maken.

> De hoek tussen twee snijdende lijnen bereken je door middel van het inproduct van de beide richtingsvectoren.

102 Bereken de hoek tussen de volgende paren lijnen in hele graden.

a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b $6y + x = 1$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

c $y = -2x + 8$ en $x = 2y - 8$

Stelsel lineaire vergelijkingen

Bij het oplossen van een stelsel vergelijkingen kun je gebruik maken van

> herleiden van vergelijkingen en substitutie

> eliminatie van één van de variabelen

De oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen geeft de coördinaten van het snijpunt van de lijnen die bij de vergelijkingen horen.

Voorbeeld 1

Los op: $\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Oplossing

Uit $x - y = 1$ volgt $x = y + 1$.

Substitutie in de eerste vergelijking geeft:

$$5(y + 1) - 2y = 8$$

$$5y + 5 - 2y = 8$$

$$3y = 3$$

$$y = 1 \quad \text{Invullen in } x - y = 1 \text{ geeft}$$

$$x - 1 = 1, \text{ dus } x = 2.$$

De oplossing is $x = 2$ en $y = 1$.

Voorbeeld

Bereken de hoek tussen de lijnen met vergelijkingen $y = 2x - 8$ en $y = 4 - x$.

Oplossing

De richtingsvectoren zijn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Voor de hoek α tussen de vectoren geldt

$$\cos(\alpha) = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot -1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} \approx -0,316$$

dus $\alpha \approx 108^\circ$.

De scherpe hoek tussen de lijnen is $180 - 108 = 72^\circ$.

Voorbeeld 2

Los op: $\begin{cases} 4x - 3y = 34 \\ 3x + y = 19 \end{cases}$

Oplossing

$$\begin{cases} 4x - 3y = 34 \\ 9x + 3y = 57 \end{cases} \quad (\text{tweede vergelijking} \times 3)$$

$$\hline 13x = 91 \quad (\text{vergelijkingen opgeteld})$$

$$x = 7$$

$$13x = 91 \quad (\text{vergelijkingen opgeteld})$$

$$x = 7$$

$$\text{Invullen: } 21 + y = 19 \text{ dus } y = -2.$$

- > Je kunt bij het oplossen van een stelsel vergelijkingen uitkomen op een vergelijking van de vorm $0 \cdot x = a$ (of $0 \cdot y = a$).

Als $a = 0$, dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen en vallen de bijbehorende lijnen samen. Zo'n stelsel heet een afhankelijk stelsel.

Als $a \neq 0$ dan heeft het stelsel géén oplossingen en zijn de bijbehorende lijnen evenwijdig. Zo'n stelsel heet een strijdig stelsel.

$0 \cdot x = 0$
oneindig veel
oplossingen



$0 \cdot x = a$ met $a \neq 0$
géén oplossingen



- 103** Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

a
$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 9x - 2y = 13 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 7a + 3b = -10 \\ a = \frac{1}{2}b - 7 \end{cases}$$

- 104** Onderzoek het aantal oplossingen bij elk van de volgende stelsels.

a
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5(x - 1) = 2(x - y) \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} y = 1\frac{3}{4}x - 7 \\ x = \frac{4}{7}y + 4 \end{cases}$$

d
$$\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

- 105** Gegeven is het stelsel vergelijkingen
$$\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ 5x + py + q = 0 \end{cases}$$

- a** Voor welke waarden van p en q is dit stelsel afhankelijk?
b Voor welke waarden van p en q is dit stelsel strijdig?

Vergelijkingen van cirkels

De vergelijking van een cirkel kan worden gegeven in de vorm van de middelpuntsvergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Hierin is (a, b) het middelpunt van de cirkel en is r de straal.

De vergelijking van een cirkel kan ook worden gegeven in de vorm $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$.

Door twee keer kwadraat afsplitsen toe te passen op

$x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ kun je de middelpuntsvergelijking krijgen.

Voorbeeld

Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 10$.

Bereken de straal en de coördinaten van het middelpunt van de cirkel.

Oplossing

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y = 10$$

$$(x + 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 = 10 \quad (\text{twee kwadraten afgesplitst})$$

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 35$$

De straal van de cirkel is $\sqrt{35}$ en het middelpunt is $(-4, 3)$.

- 106** Bereken van de volgende cirkels de straal en de coördinaten van het middelpunt.
- a** $(x + 4)^2 + y^2 = 25$
 - b** $(x - 12)^2 + y^2 - 8y = 0$
 - c** $x^2 + y^2 + 10x + 4y = 1$
 - d** $x^2 + y^2 - 5x - 7y = 10$
 - e** Waarom is $x^2 + y^2 + 5x - 6y + 16 = 0$ geen vergelijking van een cirkel?

Snijpunten van een lijn met een cirkel

Om de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel te berekenen maak je gebruik van substitutie. Je kunt kiezen of je bij de vergelijking van de lijn y in x uitdrukt of x in y uitdrukt, maar je kunt ook werken met een vectorvoorstelling van de lijn.

Voorbeeld

Gegeven zijn de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 14x - 4y + 33 = 0$ en de lijn met vergelijking $x - 2y = 3$. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn en de cirkel.

Oplossing

$x - 2y = 3$ geeft $y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$.

Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Substitutie van $x = 3 + 2\lambda$ en $y = \lambda$ geeft

$$(3 + 2\lambda)^2 + \lambda^2 - 14(3 + 2\lambda) - 4\lambda + 33 = 0$$

$$9 + 12\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^2 - 42 - 28\lambda - 4\lambda + 33 = 0$$

$$5\lambda^2 - 20\lambda = 0$$

$$5\lambda(\lambda - 4) = 0 \text{ dus } \lambda = 0 \text{ of } \lambda = 4$$

De snijpunten zijn $(3, 0)$ en $(11, 4)$.

- 107** Bereken de coördinaten van de snijpunten van cirkel c en lijn l .
- a** $c: (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 40$ en $l: x = -3$
 - b** $c: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$ en $l: x + 5y = 1$
 - c** $c: x^2 + y^2 = 9$ en $l: y = x + 3$
- 108** Gegeven zijn de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ en de lijn met vergelijking $y = 2x + 3$. Toon met een berekening aan dat de lijn en de cirkel geen punt gemeenschappelijk hebben.

Snijpunten van twee cirkels

Als je de snijpunten van twee cirkels moet berekenen, trek je de vergelijkingen van de twee cirkels van elkaar af. Het resultaat is de vergelijking van de lijn die door de beide snijpunten gaat. Vervolgens bereken je de snijpunten van deze lijn met één van beide cirkels.

- 109** Bereken exact de snijpunten van de cirkels c_1 en c_2 .

a $c_1: x^2 - 8x + y^2 - 12y - 22 = 0$ en

$c_2: x^2 - 14x + y^2 + 24y + 8 = 0$

b $c_1: (x + 3)^2 + (y - 12)^2 = 100$ en

$c_2: (x - 1)^2 + y^2 = 20$

Voorbeeld

Bereken de snijpunten van de cirkels

$c_1: x^2 + (y - 4)^2 = 17$ en $c_2: (x - 10)^2 + (y + 2)^2 = 85$.

Oplissing

$c_1: x^2 + y^2 - 8y + 16 = 17$ of $x^2 + y^2 - 8y = 1$

$c_2: x^2 - 20x + 100 + y^2 + 4y + 4 = 85$ of

$x^2 - 20x + y^2 + 4y = -19$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8y = 1 \\ x^2 + y^2 - 20x + 4y = -19 \end{cases}$$

Vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft

$20x - 12y = 20$. De lijn door de snijpunten is

$20x - 12y = 20$ of $5x - 3y = 5$,

en in vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Substitutie in c_1 geeft $(1 + 3\lambda)^2 + (5\lambda - 4)^2 = 17$

en daaruit volgt $34\lambda^2 - 34\lambda = 0$ dus $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$.

De snijpunten zijn $(1, 0)$ en $(4, 5)$.

Raaklijn aan een cirkel

De raaklijn aan een cirkel in R staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Deze eigenschap kun je gebruiken om een vergelijking van de raaklijn in een gegeven punt van een cirkel te vinden.

Voorbeeld

Gegeven is cirkel c met vergelijking $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 29$ en punt $P(2, 3)$ op de cirkel. Geef een vergelijking van de raaklijn in P aan cirkel c .

Oplissing

Het middelpunt M van de cirkel is $(-3, 1)$. De lijn MP heeft richtingscoëfficiënt $\frac{3-1}{2-(-3)} = \frac{2}{5}$.

De raaklijn in P heeft richtingscoëfficiënt $-2\frac{1}{2}$, want $\frac{2}{5} \cdot -2\frac{1}{2} = -1$.

$x = 2$ en $y = 3$ invullen bij $y = -2\frac{1}{2}x + b$ geeft $3 = -2\frac{1}{2} \times 2 + b$ ofwel $b = 8$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -2\frac{1}{2}x + 8$.

Om te controleren of een gegeven lijn een gegeven cirkel raakt, kun je gebruik maken van de eigenschap dat een kwadratische vergelijking één oplossing heeft als de discriminant $D = b^2 - 4ac$ gelijk is aan 0.

Voorbeeld

Gegeven is cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 45 = 0$ en de lijn $l: y = ax$. Bereken algebraïsch voor welke waarden van a lijn l cirkel c raakt.

Oplossing

$$x^2 + (ax)^2 - 4x - 8ax + 45 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 + (-8a - 4)x + 45 = 0$$

$$D = (-8a - 4)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 45 = -116a^2 + 224a + 16$$

$$D = 0 \text{ als } -116a^2 + 224a + 16 = 0$$

De abc -formule geeft vervolgens $a = 2$ of $a = -\frac{2}{29}$.

- 110** Geef een vergelijking van de raaklijn aan c in het punt P op de cirkel.

a $c: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ en $P(-1, 2)$

b $c: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$ en $P(5, 5)$

- 111** Hiernaast zie je cirkel c met vergelijking $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ en lijn l met vergelijking $3x + 2y = 23$.

De lijn lijkt de cirkel te raken.

Ga met een berekening na of lijn l cirkel c raakt, snijdt of dat ze geen enkel punt gemeenschappelijk hebben.

- 112** In de tekening van opdracht 111 zie je ook nog lijn k met vergelijking $x - y = 8$. Cirkel c wordt vergroot zodat de vergrote cirkel de lijn k raakt. Het middelpunt van de cirkel verandert daarbij niet.

Bereken exact de straal van de vergrote cirkel.

- 113** Gegeven is cirkel c met vergelijking $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 20$ en lijn l met vergelijking $y = ax$. Bereken de waarden van a waarvoor lijn l cirkel c raakt.

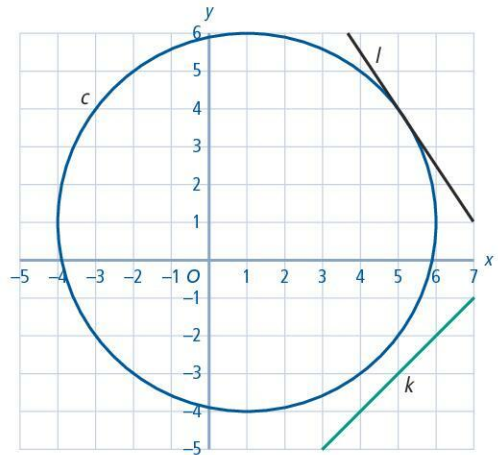
- 114** Gegeven is cirkel c_1 met middelpunt $M(5, 3)$ en straal $\sqrt{52}$.

a Stel een vergelijking van c_1 op.

b Vanuit het punt $P(-5, 1)$ worden de raaklijnen aan c_1 getekend. Leg uit waarom de raakpunten A en B op de cirkel c_2 met middellijn PM liggen.

c Geef een vergelijking van cirkel c_2 .

d Bereken de coördinaten van de punten A en B en geef een vergelijking van elk van de twee raaklijnen.



Om de vergelijkingen te vinden van de raaklijnen aan een cirkel vanuit een punt P buiten de cirkel maak je gebruik van de stelling van Thales:

- De raakpunten A en B liggen op de cirkel d met middelpunt P en straal PA . Bereken MP en bereken PA , waarbij je gebruik maakt van het feit dat $\triangle PMA$ rechthoekig is.
- Stel een vergelijking op van cirkel d .
- Bereken de coördinaten van de punten A en B .
- Stel vergelijkingen op van de lijnen PA en PB .

Voorbeeld

Stel vergelijkingen op van de raaklijnen uit het punt $P(-1, -1)$ aan cirkel $c_1: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$.

Oplossing

Cirkel c heeft middelpunt $M(3, 1)$ en $r = \sqrt{10}$.

$PM = \sqrt{20}$, dus de afstand van P tot een raakpunt A is gelijk aan $PA = \sqrt{((\sqrt{20})^2 - (\sqrt{10})^2)} = \sqrt{10}$.

De cirkel c_2 met middelpunt P en straal PA is $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$ of $x^2 + 2x + y^2 + 2y - 8 = 0$.

Uit de vergelijkingen van c_1 en c_2 volgt een vergelijking van de lijn door de twee snijpunten:

$-8x - 4y + 8 = 0$ of $y = -2x + 2$.

Substitutie in c_1 geeft $x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 4x + 1 = 10$

dus $5x^2 - 10x = 0$ en daaruit volgt $x = 0$ of $x = 2$.

De raakpunten zijn $A(0, 2)$ en $B(2, -2)$.

De raaklijnen zijn $PA: y = 3x + 2$ en $PB: y = -\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$.

115a Stel vergelijkingen op van de raaklijn uit punt $O(0, 0)$ aan de cirkel $c: (x-5)^2 + (y-5)^2 = 10$.

b Stel vergelijkingen op van de raaklijn uit punt $P(12, -2)$ aan de cirkel $c: (x-1)^2 + y^2 = 25$.

Afstand van een punt tot een cirkel en tussen twee cirkels

De afstand d van een punt P tot een cirkel met middelpunt M en straal r , is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk van dat punt met de cirkel.

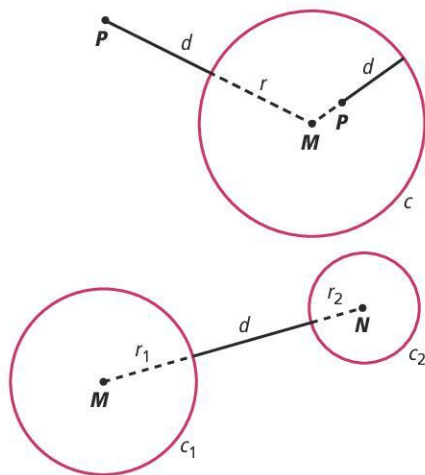
> $d = PM - r$ als P buiten de cirkel ligt;

> $d = r - PM$ als P binnen de cirkel ligt.

De afstand tussen twee cirkels is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen die twee cirkels.

> $d = MN - (r_1 + r_2)$ als alle punten van cirkel c_2 buiten cirkel c_1 liggen;

> $d = r_1 - (MN + r_2)$ als alle punten van cirkel c_2 binnen cirkel c_1 liggen.



- 116** Bereken exact de afstand van punt Q tot cirkel c .
- a** $Q(2, 10)$ en $c: (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 20$
- b** $Q(9, 8)$ en $c: x^2 + y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$
- 117** De cirkels c_1 en c_2 zijn gegeven door de vergelijkingen:
 $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ en $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 8$.
 Bereken exact de afstand tussen de cirkels c_1 en c_2 .

Afstand van een lijn tot een cirkel

Voor de afstand tussen een lijn l en een cirkel c stel je eerst het middelpunt M en de straal r van de cirkel vast. Vervolgens bereken je afstand $d(M, l)$. De gevraagde afstand is gelijk aan $d(M, l) - r$, mits $d(M, l) > r$.

Voorbeeld

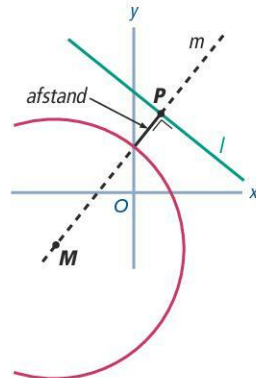
Gegeven is cirkel $c: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ en lijn $l: y = -x + 5$. Bereken de afstand tussen lijn l en cirkel c .

Oplossing

Het middelpunt M van de cirkel is $(1, -2)$ en de straal is $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$$l: x + y - 5 = 0 \quad \text{dus} \quad d(M, l) = \frac{|1 + (-2) - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

De gevraagde afstand is $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.



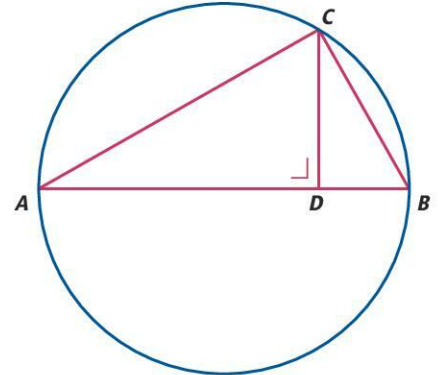
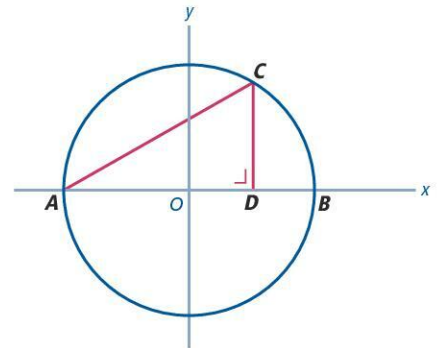
- 118** Bereken exact de afstand tussen cirkel c en lijn l .
- a** $c: x^2 + y^2 = 20$ en $l: x + 2y = 15$
- b** $c: (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$ en $l: y = \frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}$
- 119** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + 6x + y^2 - 8y - 75 = 0$ en de lijnen l_p met vergelijking $y = 2x + p$.
- a** Voor welke waarde van p gaat de lijn l_p door het middelpunt van de cirkel?
- b** Bereken exact de waarden van p , waarvoor de afstand tussen c en l_p gelijk is aan 5.

Meetkundig of analytisch

Bij sommige meetkundige problemen kun je kiezen tussen een aanpak met redeneren of een aanpak met coördinaten en vectoren.

De volgende twee opdrachten gaan over dezelfde stelling.

- 120** In de cirkel hiernaast is AB een middellijn en is AC een koorde. De loodlijn uit C op AB snijdt middellijn AB in punt D .
 Voor deze situatie geldt de volgende stelling:
Als een koorde en een middellijn in een cirkel een gemeenschappelijk eindpunt hebben, dan is het kwadraat van die koorde gelijk aan het product van de middellijn en de projectie van de koorde op die middellijn
 Er moet dus gelden: $AC^2 = AB \cdot AD$.
 Je kunt dit bewijzen door gebruik te maken van gelijkvormige driehoeken.
- Welke gelijkvormige driehoeken komen voor in de figuur?
 - Geef het bewijs van de stelling.
- 121** Een aanpak met coördinaten voor het bewijs van de stelling in opdracht 120 is als volgt:
 Ga uit van een cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal r .
 Kies een willekeurig punt $C(p, q)$ op de cirkel.
- Welk verband is er tussen p , q en r ?
 - Druk AB , AD en AC uit in p , q en r .
 - Gebruik de antwoorden bij de opdrachten a en b om de stelling te bewijzen.



Zwaartepunten

Voor een systeem van puntmassa's $m_1, m_2, \dots, m_n$ die zich bevinden in de punten $A_1, A_2, \dots, A_n$, vind je het zwaartepunt Z door

$$\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2 + \dots + \frac{m_n}{m} \cdot \vec{a}_n$$

waarbij $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

Voorbeeld

In de punten $A(-2, 5)$, $B(7, 3)$ en $C(1, 7)$ bevinden respectievelijk zich puntmassa's $m_1 = 3$, $m_2 = 5$ en $m_3 = 6$. Bereken exact de coördinaten van het zwaartepunt Z .

Oplossing

$$\vec{z} = \frac{3}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{5}{14} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{6}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{14} \\ \frac{72}{14} \end{pmatrix}$$

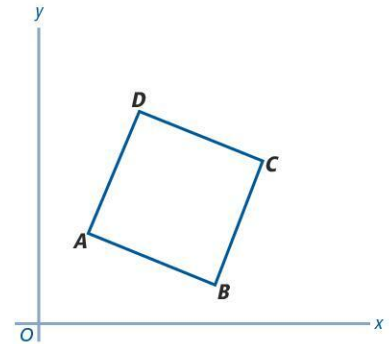
dus het zwaartepunt is $Z\left(2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{7}\right)$.

- 122** In een assenstelsel ligt het vierkant $ABCD$ met $A(1, 3)$ en $B(5, 1)$.

a Bereken de coördinaten van C en van D .

In de punten A, B, C en D bevinden zich de puntmassa's m_1, m_2, m_3 en m_4 .

- b** Stel $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$ en $m_4 = 6$. Bereken exact de coördinaten van het zwaartepunt Z .
- c** Bereken m_4 als gegeven is dat $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ en het zwaartepunt is $Z\left(3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right)$.



Zwaartepunt van een driehoek

De zwaartelijnen van een driehoek ABC gaan door één punt: het zwaartepunt. De zwaartelijnen worden door het zwaartepunt Z verdeeld in de verhouding $1 : 2$.

Er geldt $x_Z = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ en $y_Z = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$.

- 123** Gegeven zijn de punten $A(5, 2)$, $B(8, -2)$ en $C(11, 9)$
- a** Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z van $\triangle ABC$.
- b** De zwaartelijijn uit C snijdt zijde AB in punt S . Bereken exact CS en CZ .
- 124** Gegeven zijn de punten $A(0, 6)$ en $B(4, 0)$. Verder is gegeven een punt $C(p, 9)$. Z is het zwaartepunt van driehoek ABC .
- a** Toon aan dat Z voor elke waarde van p op dezelfde lijn ligt en geef een vergelijking van die lijn.
- b** Bereken exact de waarden van p waarvoor geldt: $CZ = 6\frac{2}{3}$.

Examenopdrachten

125 Oppervlakte van een vierhoek*(Ontleend aan de syllabus vwo wiskunde B 2017)*

In een assenstelsel snijdt de lijn m de x -as in punt $A(a, 0)$ en de y -as in punt $B(0, b)$. Hierbij is $a > 0$ en $b > 0$.

- a** Laat zien dat $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ een vergelijking van m is.

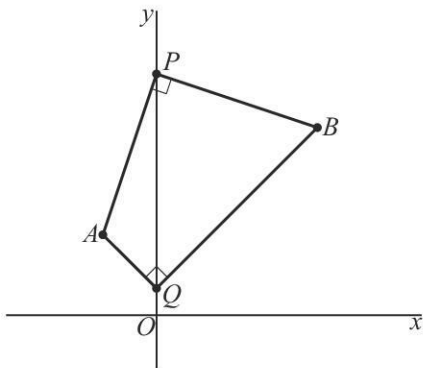
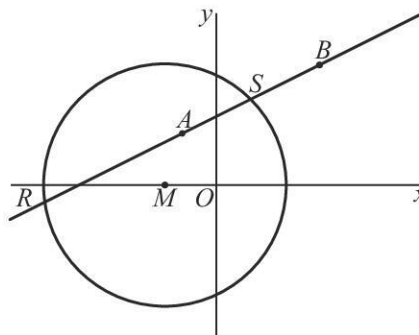
Hint 51

Het punt $O(0, 0)$ wordt gespiegeld in de lijn m . Het spiegelbeeld van O is het punt P . De oppervlakte van vierhoek $OAPB$ is gelijk aan ab . De oppervlakte van de rechthoek waarvan de zijden even lang zijn en evenwijdig met de diagonalen van $OAPB$ zijn is derhalve $2ab$. Dit is meetkundig te bewijzen.

In vraag b wordt gevraagd dit algebraïsch te bewijzen.

- b** Bewijs algebraïsch dat dit inderdaad zo is: $OP \cdot AB = 2ab$.

Hint 52

126 Twee punten*(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2015, tijdvak 2)*

Gegeven zijn de punten $A(-2, 3)$ en $B(6, 7)$. In de linker figuur hierboven zijn op de y -as de punten P en Q getekend waarvoor geldt dat $\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$.

- a** Bereken exact de coördinaten van P en Q .

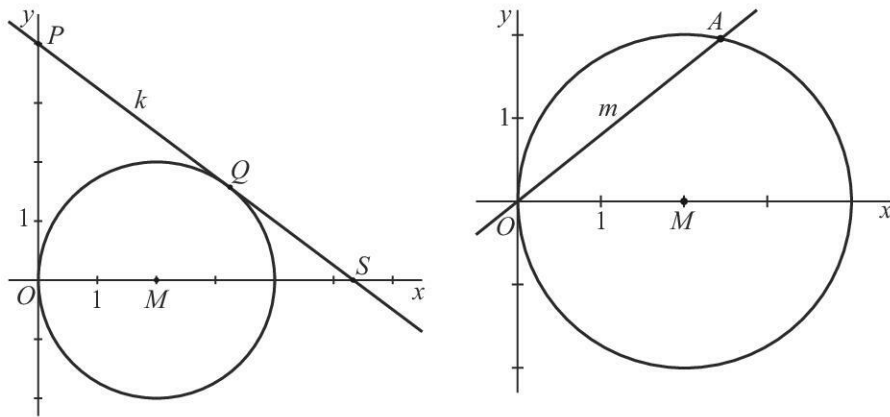
Hint 53

- b** In de rechter figuur is de lijn door A en B getekend. Ook is een cirkel getekend met middelpunt $M(-3, 0)$. Deze cirkel snijdt de lijn door A en B in de punten R en S met $RS = 6\sqrt{5}$. Bereken exact de straal van de cirkel.

Hint 54

127 Lijn en cirkel

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2012, tijdvak 1)



Gegeven is de cirkel met middelpunt $M(2, 0)$ en straal 2.
De niet-verticale lijn k gaat door het punt $P(0, 4)$, raakt de cirkel in het punt Q en snijdt de positieve x -as in het punt S .
Zie de linker figuur.

- a** Bereken exact de x -coördinaat van S .

Hint 55

- b** De lijn m met vergelijking $y = px$ met $p > 0$ snijdt de cirkel behalve in O in een punt A , zodanig dat $OA = 3$.

Zie de rechter figuur.

Bereken exact de waarde van p .

Hint 56

128 Raakcirkel en raaklijnen

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 2)

Gegeven zijn de cirkel c_1 met vergelijking $x^2 + y^2 = 9$ en de cirkel c_2 met vergelijking $(x - 15)^2 + y^2 = 144$. Zie de figuur hiernaast.

Cirkel c_3 met middelpunt op de positieve y -as raakt de beide cirkels c_1 en c_2 .

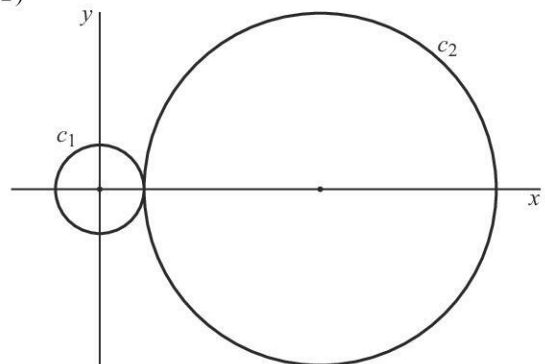
- a** Stel een vergelijking op van c_3 .

Hint 57

De cirkels c_1 en c_2 hebben drie gemeenschappelijke raaklijnen.

- b** Stel van elk van deze gemeenschappelijke raaklijnen een vergelijking op.

Hint 58



129 Ingesloten cirkel

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2014, tijdvak 2)

Gegeven is de cirkel c met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1. Verder is gegeven het punt $A(a, 0)$ met $a > 1$.

Er zijn twee lijnen door A die aan c raken.

De raakpunten zijn B en C . De twee raaklijnen en cirkel c sluiten een cirkel d in. Cirkel d raakt de twee lijnen in D en E en cirkel c in $(1, 0)$.

Cirkel d heeft middelpunt M .

Zie de figuur hiernaast.

Driehoek AMD en driehoek AOB zijn gelijkvormig.

Voor de straal r van cirkel d geldt $r = \frac{a-1}{a+1}$

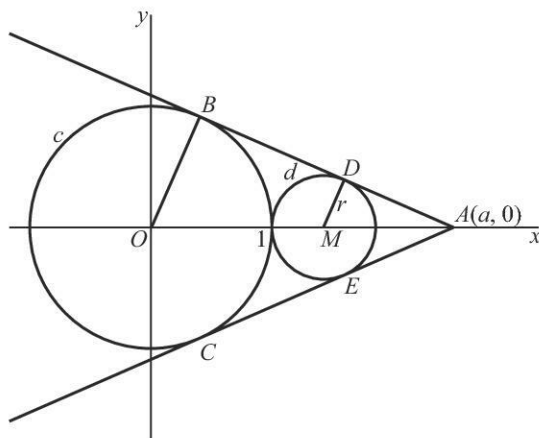
- a** Bewijs dat $r = \frac{a-1}{a+1}$

Hint 59

Er is een waarde van a waarvoor vierhoek $OCAB$ een vierkant is. In dat geval kan de straal van cirkel d geschreven worden als $r = p + q\sqrt{2}$ waarbij p en q gehele getallen zijn.

- b** Bereken exact de waarden van p en q .

Hint 60

**✂ 130 Zwaartepunt**

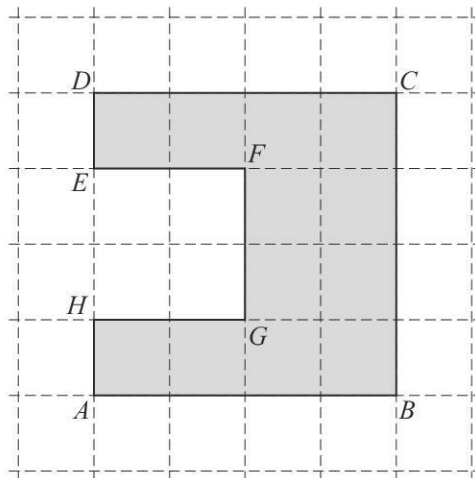
(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 1)

Gegeven is een veelhoek $ABCDEFGH$. Deze veelhoek is ontstaan door uit vierkant $ABCD$ met zijde 4, het vierkant $HGFE$ met zijde 2 weg te laten. Hierbij liggen E en H beide op AD met $AH = DE$. Zie de figuur.

Om het zwaartepunt van deze veelhoek te vinden, kan de veelhoek bijvoorbeeld worden verdeeld in drie rechthoeken die vervolgens worden opgevat als drie puntmassa's. Het zwaartepunt van deze drie puntmassa's valt dan samen met het zwaartepunt van de veelhoek.

Teken in de figuur op het werkblad met behulp van vectoren de plaats van het zwaartepunt van de veelhoek. Licht je werkwijze toe.

Hint 61



Bewegingsvergelijkingen

Bewegingsvergelijkingen

De beweging van een punt in het platte vlak kan worden beschreven

met bewegingsvergelijkingen van de vorm
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Als f en g beide lineaire functies van t zijn, dan beweegt het punt langs een rechte lijn.

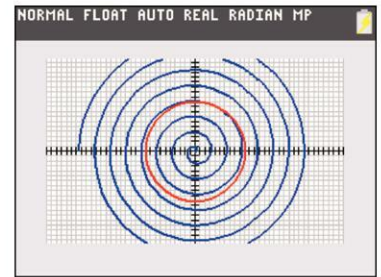
Voor een cirkel gelden de bewegingsvergelijkingen
$$\begin{cases} x(t) = a + r \cdot \cos(pt) \\ y(t) = b + r \cdot \sin(pt) \end{cases}$$

In plaats van de bewegingsvergelijkingen van een bewegend punt wordt ook wel gesproken over de parametervoorstelling van de baan.

- 131** Stel bewegingsvergelijkingen op voor een cirkel met middelpunt $(-3, 5)$ en straal 4.

- 132** De spiraal hiernaast is de baan van een punt met

bewegingsvergelijkingen
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} t \cdot \cos(t) \\ y(t) = \frac{1}{2} t \cdot \sin(t) \end{cases} \text{ en } 0 \leq t \leq 15\pi.$$



- a** De afstand tussen twee opeenvolgende snijpunten van de baan met de positieve x -as is steeds gelijk. Bereken de exacte waarde van deze afstand.
- b** Voor welke waarde van t doorsnijdt de baan van P de cirkel met straal 10?

Snelheid en versnelling

De snelheidsvector van een punt met

bewegingsvergelijkingen
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$
 is gelijk

aan $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$ en $|\vec{v}|$ heet de (baan)snelheid.

De versnellingsvector is $\begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix}$ en de afgeleide

van $|\vec{v}|$ is de (baan)versnelling.

Voorbeeld

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(t) \\ y(t) = 2\cos(3t) \end{cases} \text{ met } t \geq 0.$$

Bereken exact de snelheidsvector, de versnellingsvector, de baansnelheid en de baanversnelling op het tijdstip $t = \frac{1}{2}\pi$.

Oplossing

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 6\cos(3t) \end{pmatrix} \text{ en } \vec{a} = \begin{pmatrix} -3\cos(t) \\ -18\sin(3t) \end{pmatrix}$$

De baansnelheid $|\vec{v}| = \sqrt{9\sin^2(t) + 36\cos^2(3t)}$ en de versnelling is

$$v'(t) = \frac{18\sin(t) \cdot \cos(t) - 216\cos(3t) \cdot \sin(3t)}{2\sqrt{9\sin^2(t) + 36\cos^2(3t)}}$$

$$\text{Als } t = \frac{1}{2}\pi \text{ geldt } \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix},$$

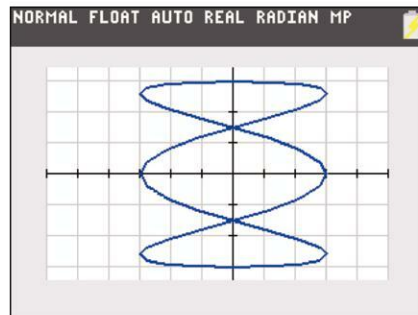
de snelheid is $\sqrt{9} = 3$ en de versnelling is 0.

- 133** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = 3 \cos(3t) \\ y(t) = -3 \sin(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Hiernaast zie je de baan van het punt P geplot.

- a** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan met de y -as.
b In het eerste kwadrant ligt een punt op de baan, waar de raaklijn verticaal is. Bereken exact de coördinaten van dit punt.
c Bereken exact de waarden van t waarvoor de baan de lijn met vergelijking $y = x$ snijdt.



- 134** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases} \text{ met } t \geq 0.$$

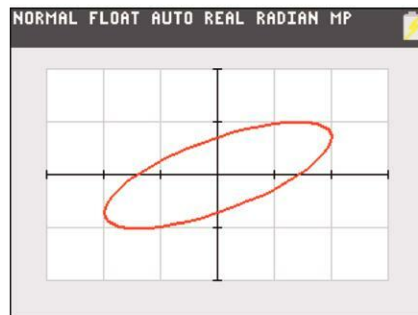
Bereken exact de snelheidsvector, de versnellingsvector, de baansnelheid en de baanversnelling op het tijdstip $t = 3$.

- 135** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) \\ y(t) = \cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Hiernaast zie je de baan van het punt P geplot.

- a** Bereken exact de snelheidsvector en de baansnelheid in het punt waar de baan van P de positieve y -as snijdt.
b Bereken exact de baanversnelling op het tijdstip $t = \pi$.



- 136** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = 3 \cos(t) \\ y(t) = 4 \sin(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- a** Bereken de hoek die de versnellingsvector op het tijdstip $t = \frac{1}{6}\pi$ maakt met de positieve x -as. Rond je antwoord af op hele graden.
b Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling op het tijdstip $t = \frac{1}{6}\pi$.
c Bereken exact de maximale waarde van de baansnelheid.
d Bereken exact de waarde(n) van t waarvoor geldt $OP = \sqrt{12\frac{1}{2}}$.

Examenopdrachten

✂ 137 Cirkels en lijnstuk

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2015, tijdvak 1)

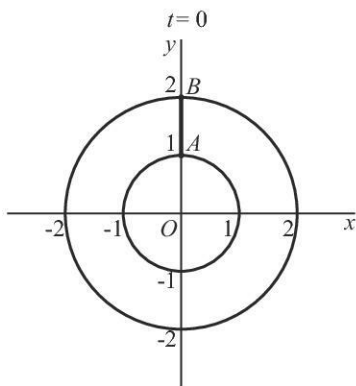
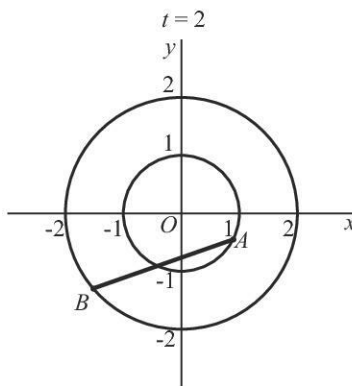
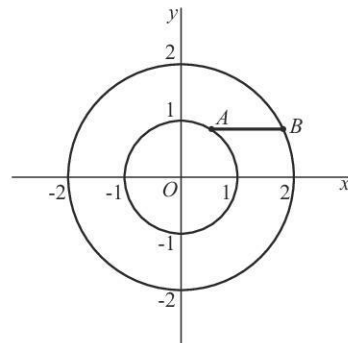
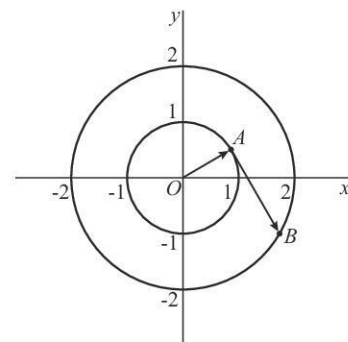
Over de cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal 1 beweegt een punt A

met bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$

Over de cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal 2 beweegt een punt B

met bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 2 \sin(2t) \\ y(t) = 2 \cos(2t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$

In de figuren hieronder zijn de twee cirkels en het lijnstuk AB getekend voor de tijdstippen $t = 0$ en $t = 2$.



- a** Op de tijdstippen waarop B zich op de x -as bevindt, bevindt A zich op de lijn met vergelijking $y = x$ of op de lijn met vergelijking $y = -x$.
Bewijs dit.

Hint 62

- b** In de figuur hiernaast is het lijnstuk AB getekend op een tijdstip waarop het horizontaal is en boven de x -as ligt. Er zijn twee tijdstippen waarop het lijnstuk AB horizontaal is en onder de x -as ligt. Bereken voor één van deze tijdstippen de coördinaten van A , afgerond op één decimaal, en teken het bijbehorende lijnstuk AB in de figuur op het werkblad.

Hint 63

- c** Op het interval $\langle 0, \pi \rangle$ is er één tijdstip waarop lijnstuk AB raakt aan de kleinste cirkel. Zie de figuur hiernaast. Op dit tijdstip staat de vector $\overrightarrow{AB}$ loodrecht op de vector $\overrightarrow{OA}$.

Bereken exact dit tijdstip.

Hint 64

138 Tussen twee bewegende punten

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2014, tijdvak 2)

Over de eenheidscirkel bewegen twee punten A en B . Beide punten bevinden zich op tijdstip $t = 0$ in het punt $(1, 0)$. Ze bewegen met constante snelheid, waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B .

De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn respectievelijk:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

Voor $t \neq k \cdot \pi$ met k geheel, vallen de punten A en B niet samen en zijn ze de eindpunten van de koorde AB .

In de figuur is de situatie getekend voor $t = \frac{1}{5}\pi$.

Lijnstuk $A'B'$ is de loodrechte projectie van koorde AB op de x -as. De lengte van $A'B'$ verandert voortdurend tijdens de beweging.

- a** Bereken de maximale lengte van $A'B'$.
Rond je antwoord af op twee decimalen.

Hint 65

Tijdens de beweging verandert ook de richtingscoëfficiënt van de koorde AB . Deze richtingscoëfficiënt noemen we a .

Voor elk tijdstip t , waarbij $t \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi$ met k geheel, geldt:

$$(1) \quad a = -\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$$

Deze formule kan bewezen worden met behulp van de volgende goniometrische formules:

$$(2) \quad \sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \text{ voor elke waarde van } p \text{ en } q$$

$$(3) \quad \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ voor elke waarde van } p \text{ en } q$$

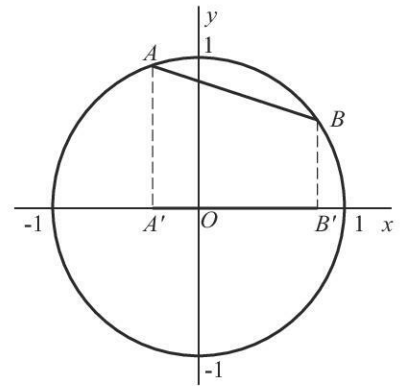
- b** Bewijs formule (1) met behulp van de formules (2) en (3).

Hint 66

Lijn l is de lijn met vergelijking $y = -x$. Er zijn vier waarden van t , met $0 < t < 2\pi$, waarvoor koorde AB evenwijdig is met l .

- c** Bereken exact deze vier waarden.

Hint 67



139 Een hartvormige kromme

(Ontleend aan het CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 2)

Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ wordt de beweging van een punt P beschreven door de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

In figuur 1 is de baan van P getekend.

Voor $t = 0$ en voor $t = 2\pi$ bevindt P zich in $(1, 0)$.

- a** Bereken exact de maximale snelheid van P .

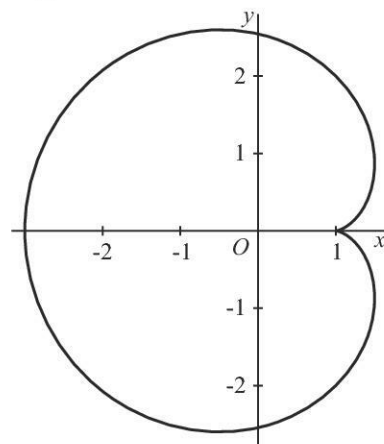
Hint 68

- b** De lijn met vergelijking $x = 1$ snijdt de baan van P behalve in het punt $(1, 0)$ ook in de punten $(1, a)$ en $(1, -a)$ met $a > 0$. Zie figuur 2.

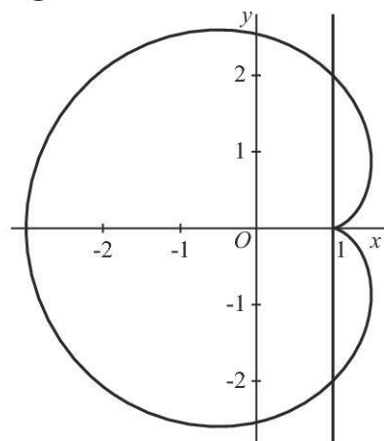
Bereken exact de waarde van a .

Hint 69

figuur 1



figuur 2



Hints bij de examenopdrachten

- 1 Druk de coördinaten van de perforatie uit in b en vul deze coördinaten in de vergelijking $y = 4x + 1$ in.
- 2 Haal bij het functievoorschrift $g(x)$ de factor -1 buiten haakjes en vereenvoudig $h(x)$.
- 3 Stel een functievoorschrift voor de inverse van f op en herleid het voorschrift tot één breuk.
- 4 Los op: $f(x) = 0$.
- 5 De verticale afstand is $f(a) - g(a)$ of $g(a) - f(a)$.
- 6 Uit $h_7 = \frac{1}{5} \cdot h_0$ volgt $a^7 = \frac{1}{5}$. Los deze vergelijking op.
- 7 Met $T_1 = 1,11$ bereken je h_1 en met $T_4 = 0,68$ bereken je h_4 . Met h_1 en h_4 kun je h_0 berekenen.
- 8 Lengte en breedte zijn gelijk en beide $15 - 2x$. Druk hiermee de inhoud uit in x en los de vergelijking die je krijgt op met je rekenmachine.
- 9 Bedenk hoe de breedte en lengte van de doos van b en x afhangen.
- 10 Bedenk dat $A = b(2b - x)$, substitueer $b = 2x + \frac{10}{\sqrt{x}}$ in deze vergelijking en herleid de uitdrukking die je hierdoor krijgt.
- 11 In de formule voor A_2 kun je x_2 vervangen door $4x_1$. Los de vergelijking $A_1 = A_2$ daarna op met je rekenmachine.
- 12 In het raakpunt moet gelden: $f(x) = g(x)$ én $f'(x) = g'(x)$.
- 13 Druk de coördinaten van A en B uit in p . Druk vervolgens OA en AB uit in p en los op: $OA = AB$.
- 14 Stel een vergelijking op van de raaklijn in het snijpunt met de x -as en vul daar de coördinaten van de perforatie in.
- 15 Er wordt geen algebraïsche oplossing gevraagd, dus je mag de vergelijking $v = 75$ ook met je rekenmachine oplossen.
- 16 Gebruik de quotiëntregel om $\frac{dv}{dp}$ op te stellen. Vervolgens bepaal je het maximum van $\frac{dv}{dp}$. Dat mag je ook met je rekenmachine doen.

- 17 Vermenigvuldig links en rechts met $100 - v$ en werk de haakjes weg.
- 18 Druk breedte en hoogte van de rechthoek uit in p en bereken met behulp van differentiëren de exacte waarde van p waarvoor de oppervlakte maximaal is.
- 19 De lengte van het verbindingslijnstuk is het verschil tussen $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{\sqrt{b}}$.
- 20 Druk de integraal $\int_{-9}^p f(x) \, dx$ uit in p .
- 21 Bereken $A(0)$ en los exact op: $A(p) = \frac{1}{8} \cdot A(0)$.
- 22 Stel het functievoorschrift van $g(x) = f(-(x + 9))$ op en los op $f(x) = g(x)$.
Of gebruik de symmetrie van de figuur.
Bereken vervolgens $\pi \int (f(x))^2 \, dx - \pi \int (g(x))^2 \, dx$.
- 23 Druk de oppervlakte van het linker gebied uit in a en ook de oppervlakte van het rechter gebied.
- 24 Het plaatje is symmetrisch in de lijn $y = x$. Daardoor heb je geen primitieve van de functie g nodig.
- 25 Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de grafiek van f om de x -as te wentelen. Trek hier de inhoud van de kegel van af.
- 26 Druk de coördinaten van P_a uit in a en laat zien dat er een lineair verband bestaat tussen deze coördinaten.
- 27 De lengte van AB is gelijk aan de verschilfunctie.
- 28 Stel een functievoorschrift op van $g(x) = e \cdot f(ex)$ en herleid dat tot de vorm $g_c(x) = \frac{c + \ln(x)}{x}$.
- 29 Vereenvoudig het functievoorschrift van $g_3(x) - f(x)$.
- 30 Gebruik de quotiëntregel en los op: $f'(x) = 0$.
- 31 Los op: $f(x) = 2$ (met je rekenmachine) en onderzoek of het verschil tussen de oplossingen groter of kleiner is dan 2.
- 32 Los exact op $g_n(x) = f(x)$ en druk de oplossing uit in n .
- 33 Bereken de integraal van de verschilfunctie met je rekenmachine. Gebruik voor het rechter snijpunt het resultaat van opdracht c.
- 34 De grafiek van f heeft een verticale asymptoot $x = \pi$ als $1 - 2\cos(a \cdot \pi) = 0$ mits $\sin(a \cdot \pi) \neq 0$.

- 35** Toon aan dat $f\left(\frac{1}{2}\pi + p\right) = -f\left(\frac{1}{2}\pi - p\right)$ voor elke waarde van p .
Gebruik daarbij de symmetrie-eigenschappen van $\sin(x)$ en $\cos(x)$.
- 36** Bereken de integraal van $f(x) - g(x)$ tussen de grenzen $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = \frac{4}{3}\pi$.
- 37** Toon aan dat bij $x = \frac{1}{3}\pi$ de functie h maximaal is en gebruik $h\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ om de waarde van a te berekenen. Gebruik vervolgens een ander punt van de grafiek van h om b te berekenen.
- 38** Los exact op: $\sin(2x) = -\sin(x) = \sin(-x)$.
- 39** Differentieer f_a en los a op uit $f'_a\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 0$. Je mag de oplossing benaderen met de rekenmachine.
- 40** Stel de integraal op en laat zien dat de uitkomst onafhankelijk van a is.
- 41** Druk breedte, hoogte en oppervlakte van beide rechthoeken uit in t .
- 42** Druk alle lengten uit in t , gebruik kruisproducten en zoek een formule waarmee je het gevraagde kunt aantonen.
- 43** Gebruik kruisproducten en bereken welke waarde $\cos(t)$ moet hebben. De waarde van t heb je niet nodig; je moet de waarde van $\sin(t)$ berekenen.
- 44** Bereken de coördinaten van C en van D en stel vectorvoorstellingen op van de lijnen OC en AD .
- 45** Het inproduct van twee vectoren moet gelijk aan 0 zijn.
- 46** Gebruik dat $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$ en dat $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$.
- 47** Gebruik dat $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE}$ en gebruik het inproduct.
- 48** Gebruik dat $AP = 4 - r$, $CQ = 3 - r$ en $AC = AP + CQ$.
- 49** De driehoeken AUN en APM zijn gelijkvormig.
- 50** Gebruik het feit dat de lengten van de zijden van driehoek NTM $3 - 3r$, $1 - r$ en $1 + r$ zijn.
- 51** Controleer dit door invullen.
- 52** Druk de afstand van O tot de lijn m , dit is de helft van OP , uit in a en b .
- 53** De punten P en Q liggen op de cirkel met middellijn AB .

- 54 Bereken eerst $d(M, AB)$. De projectie van M op AB is M' . Dan is M' het midden van RS en $MM'S$ is een rechthoekige driehoek. Bereken MS met de stelling van Pythagoras.
- 55 De afstand van M tot de lijn k moet gelijk zijn aan de straal van de cirkel. Stel de x -coördinaat van punt S gelijk aan p , stel een vergelijking op van lijn k en gebruik de afstandsformule.
- 56 De projectie van M op de lijn door O en A is M' . Dan is M' het midden van OA en OMM' is een rechthoekige driehoek. Bereken MM' en gebruik de afstandsformule voor de afstand van M tot m .
- 57 Stel het middelpunt van de nieuwe cirkel is N en van de oorspronkelijke cirkels M_1 respectievelijk M_2 . Dan moet gelden: $d(N, c_1) = d(N, c_2)$ en dus $NM_1 - r_1 = NM_2 - r_2$.
- 58 Eén raaklijn is verticaal. De stralen naar de raakpunten op de andere raaklijnen zijn evenwijdig. Maak gebruik van gelijkvormige driehoeken.
- 59 Bedenk dat $MA = a - 1 - r$ en gebruik de gelijkvormige driehoeken.
- 60 Als $OCAB$ een vierkant is met zijde 1, dan is $OA = \sqrt{2}$.
- 61 Verdeel de vierhoek in drie rechthoeken met gelijke oppervlakte. Het snijpunt van de diagonalen is het zwaartepunt van een rechthoek.
- 62 Los de vergelijking $y(t) = 2 \cos(2t) = 0$ op.
- 63 Los op $\cos(t) = 2 \cos(2t)$.
- 64 Druk de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{AB}$ uit in t en gebruik het feit dat het inproduct gelijk moet zijn aan 0.
- 65 De lengte van $A'B'$ is gelijk aan $|x_A - x_B|$. Bereken hiervan het maximum. Er wordt geen algebraïsche berekening gevraagd.
- 66 De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{\sin(3t) - \sin(t)}{\cos(3t) - \cos(t)}$
- 67 De waarde van a moet gelijk zijn aan -1 .
- 68 Differentieer $x(t)$ en $y(t)$ en druk de baansnelheid uit in t . Bij de verdere herleiding heb je één van de som/verschilformules nodig.
- 69 Los op: $x(t) = 1$ en gebruik één van de formules voor $\cos(2t)$.

Formuleblad

De volgende lijst formules wordt afgedrukt op bladzijde 2 van het examen.

Goniometrie

$$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

$$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$

$$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

$$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

Examenwerkwoorden

Als in een examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, geldt de betekenis die hieraan in deze lijst is gegeven.

aantonen	Een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
afleiden (van een formule)	Een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van een formule blijkt. In het algemeen geldt dat de formule controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
aflezen	Het antwoord is voldoende.
algebraïsch	Stap voor stap, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen benaderd opgeschreven worden.
bepalen	De wijze waarop het antwoord gevonden wordt is vrij; een toelichting is vereist.
berekenen	De wijze van berekenen is vrij; een toelichting is vereist. De toevoeging 'algebraïsch' of 'exact' legt beperkingen op aan de wijze van berekenen.
beredeneren	Een redenering waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.
bewijzen	Een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
exact	Stap voor stap, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; de antwoorden mogen niet benaderd worden.
herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven in een gelijkwaardige vorm. De toevoeging 'algebraïsch' of 'exact' legt beperkingen op aan de wijze van onderzoeken.
onderzoeken	De aanpak is vrij, een toelichting is vereist.
oplossen	De wijze van oplossen is vrij; een toelichting is vereist. De toevoeging 'algebraïsch' of 'exact' legt beperkingen op aan de wijze van onderzoeken.
schatten	De wijze van schatten is vrij; een toelichting is vereist.
schetsen van een grafiek	Een schets van een grafiek moet voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen van de grafiek bevatten.
tekenen van een grafiek	Een tekening van een grafiek moet, naast een assenstelsel met een schaalverdeling, de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen van de grafiek bevatten. De tekening van de grafiek moet nauwkeurig zijn.

Trefwoordenlijst

- A** Afgeleide 178
Afgeleide van exponentiële functies 21
Afgeleide van logaritmen 20
Afstandsformule 141
Afstand tot een cirkel 218
Afstand tot een lijn 212
Afstand tussen twee cirkels 218
Afstand van een lijn tot een cirkel 219
Asymptoten 165
- B** Baan 66
Baansnelheid 72
Baanversnelling 74
Bereik 164
Bewegingsvergelijkingen 66, 225
Bijzondere lijnen in driehoeken 202
Buigpunten 121, 179
- C** Cosinusregel 205
- D** Differentiequotiënt 178
Domein 164
Driehoeken 202
- E** e 16
Exponentiële functies 190
Extreme waarden 120
- G** Getal van Euler 16
Goniometrische functies 196
- H** Hoek tussen twee lijnen 213
- I** Ingeschreven cirkel 203
Inproduct 208
Integraal 184
Inverse functies 173
- K** Kentallen 208
- L** Limieten 164
Linkerlimiet 124
Logaritmen 190
- N** Natuurlijke logaritme 18
- O** Omgeschreven cirkel 203
Omwentelingslichaam 40, 187
Ongelijkheden 171
Oppervlakte berekenen 38, 48, 185
- P** Parameter 66
Parametervoorstelling 66
Perforatie 124
Periode van een beweging 70
Primitieve 184
Primitieven van exponentiële functies 22
- R** Raaklijn aan een cirkel 216
Raaklijn aan een grafiek 180
Rechterlimiet 124
Regels voor het differentiëren 178
Rekenregels voor integralen 185
- S** Scheve asymptoot 122
Sinusregel 205
Snelheid 72
Snelheidsvector 72
Snijpunten van lijn en cirkel 215
Snijpunten van twee cirkels 216
Somformules 90
Soorten functies 168
Sprong 124
Stellingen over cirkels 206
Stelsel lineaire vergelijkingen 213
Substitutie 172
Symmetrie van grafieken 168
- T** Toppen van een baan 67
Transformaties 167

- U** Uitdrukken in 172
- V** Variabele grenzen 44
 Vectoren 208
 Vectorvoorstelling van een lijn 212
 Verdubbelingsformules 91
 Vergelijkingen 170
 Vergelijking van een cirkel 214
 Vergelijking van een lijn 211
 Verschilformules 90
 Versnelling 74
 Versnellingsvector 74
 Vierhoeken 203
- W** Wentelen om de y -as 42
 Wortelvergelijkingen 171
- Z** Zwaartepunt 146, 221
 Zwaartepunt van een driehoek 221

Colofon

Vormgeving omslag de C, Amsterdam/Wormer
Foto omslag Edwin Walvisch, Haarlem
Vormgeving binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer
Technisch tekenwerk Integra Software Services Pvt. Ltd., India
Illustraties Bert Hollander i.o.v. Haasart illustraties
Beeldresearch B en U International Picture Service, Amsterdam

Fotoverantwoording
andrearoad | iStock.com: p. 10-11
Image Select, Wassenaar: p.12, 15, 17, 54o, 85rb, 85o
Hielke Peereboom, Nieuwehorne: p. 13
Hollandse Hoogte: p. 21, 33l, 43
Photodisc: p. 25, 162-163
CASC: p. 29
Getty Images: p. 33r (2x)
Nobiliar | iStock.com: p. 34-35
Wim Doekes, Hoorn: p. 53, 84, 162
Loek Polders / B en U, Amsterdam: p. 54b
Wikimedia Commons: p. 55b, 107lb, 107lo
iStock: p. 55o, 85lb
Maxim Shebeko | Dreamstime.com: p. 62-63
Dimitris66 | iStock.com: p. 86-87
Shutterstock: p. 107ro
Tanachot Srijam | Shutterstock: p. 114-115
Nikada | iStock.com: p. 136-137

WISKUNDE B

VWO

6

LEERBOEK

Moderne Wiskunde is meer dan dit boek.

De boeken, het digitale lesmateriaal en het docentenmateriaal vormen samen het complete pakket van de methode Moderne Wiskunde.

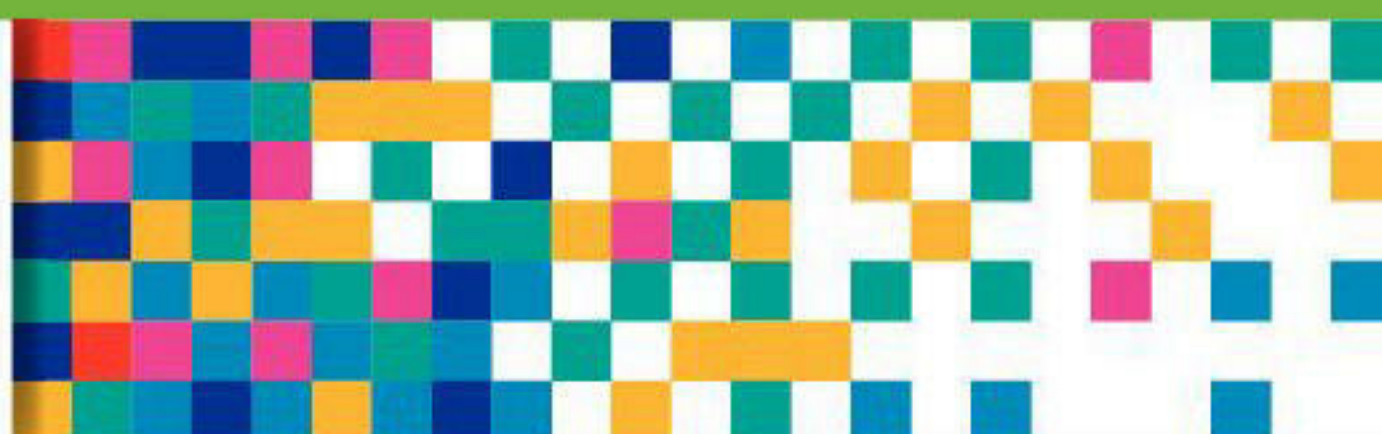
Werken met tablet, laptop, boek of digibord, op school of thuis: met Moderne Wiskunde is alles mogelijk.

Veel plezier met Moderne Wiskunde!

Noordhoff Uitgevers



Noordhoff Uitgevers



www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-86215-2



9 789001 862152