

MODERNE WISKUNDE

A



Noordhoff

$$h = 4,9 t^2$$

12e editie

Moderne Wiskunde

havo A deel 1

Serieoverzicht Tweede Fase

	havo		vwo		
klas 4	A 1	B 1	AC 1		B 1
	A 2	B 2	AC 2		B 2
klas 5	A 3	B 3			
			A 3	C 3	B 3
klas 6			A 4	C 4	B 4

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication

ISBN 978-90-01-89225-8

12e editie

Moderne Wiskunde

havo A deel 1

Harm Bakker
Bert Boon
Dick Bos
Ferdi Doddema
Wim Doekes
Gerben van der Hoek
Ilse de Jong
Boris Nolte
Gerard van Proosdij
Rindert Reijenga
Geertrui Schaberg
Ron Sinkeldam
Carolijn Tacken

1 Rekenen 10

- Voorkennis 12
- 1.1 Verhoudingen 14
- 1.2 Rekenen met breuken 18
- 1.3 Breuken en decimale getallen 22
- 1.4 Procenten 26
- 1.5 Tijden 30
- 1.6 Standaardvorm 34
- 1.7 Gemengde opdrachten 38
 - Onderzoeksopdrachten 39
 - Samenvatting 40
 - Test jezelf 44
 - Extra oefening 46

De grafische rekenmachine 48

2 Verbanden 54

- Voorkennis 56
- 2.1 Lineaire verbanden 58
- 2.2 Herleiden van formules 62
- 2.3 Recht evenredig en omgekeerd evenredig 66
- 2.4 Stijgen en dalen 70
- 2.5 Vergelijkingen 74
- 2.6 Ongelijkheden 78
- 2.7 Gemengde opdrachten 82
 - Onderzoeksopdrachten 83
 - Samenvatting 84
 - Test jezelf 88
 - Extra oefening 90

Vaardigheden 1 92

- Rekenvolgorde 94
- Oplossen van vergelijkingen 94
- Rekenen met exponenten 96
- Standaardvorm 97

3 Statistische vraagstellingen 98

- Voorkennis 100
- 3.1 Wat is statistiek? 102
- 3.2 Statistische variabelen 106
- 3.3 Data weergeven 110
- 3.4 Variabelen vergelijken 114
- 3.5 Groepen vergelijken 118
- 3.6 Gemengde opdrachten 122
 - Onderzoeksopdrachten 123
 - Samenvatting 124
 - Test jezelf 128
 - Extra oefening 130

4 Systematisch tellen 132

- Voorkennis 134
- 4.1 Mogelijkheden tellen 136
- 4.2 Machtsbomen en faculteitsbomen 140
- 4.3 Permutaties 144
- 4.4 Routes in een rooster 148
- 4.5 Combinaties 152
- 4.6 Het goede telmodel kiezen 156
- 4.7 Gemengde opdrachten 160
 - Onderzoeksopdrachten 161
 - Samenvatting 162
 - Test jezelf 166
 - Extra oefening 168

Vaardigheden 2 170

- Rekenen met breuken 172
- Breuken en decimale getallen 172
- Formules herleiden 173
- Telproblemen 174
- Lineaire formules opstellen 175

5 Lineaire en exponentiële groei 176

- Voorkennis 178
- 5.1 Lineaire groei 180
- 5.2 Exponentiële groei 184
- 5.3 Exponentiële formules opstellen 188
- 5.4 Andere tijdseenheden 192
- 5.5 Negatieve exponenten 196
- 5.6 Gemengde opdrachten 200
- Onderzoeksopdrachten 201
- Samenvatting 202
- Test jezelf 206
- Extra oefening 208

6 Grafieken en vergelijkingen 210

- Voorkennis 212
- 6.1 Grafieken tekenen 214
- 6.2 Tabellen en grafieken gebruiken 218
- 6.3 Vergelijkingen van lijnen 222
- 6.4 Halflakken 226
- 6.5 Gebieden in een assenstelsel 230
- 6.6 Gemengde opdrachten 234
- Onderzoeksopdrachten 235
- Samenvatting 236
- Test jezelf 240
- Extra oefening 242

Vaardigheden 3 244

- Meten 246
- Verhoudingen en procenten 247
- Formules herleiden 248
- Exponentieel verband 249

Keuzeonderwerpen 250

**Data bewerken en presenteren
in Excel** 252

**Praktische opdracht | Statistisch
onderzoek** 258

Trefwoorden 262

Moderne Wiskunde

havo A deel 1

Hoe werkt Moderne Wiskunde

Aan het begin van de paragraaf staan de **Leerdoelen**. Deze geven richting aan je werk. In de **Samenvatting** komen de leerdoelen weer terug.

Er zijn drie **leerroutes**. Voel je je niet zo vertrouwd met het onderwerp van de paragraaf kies je de **Ondersteunende route**. Voor wat extra moeilijke opgaven kies je de **Uitdagende route**.

Een **W** verwijst naar de werkbladen in het **Hulpboek**.

Voor havo 4 en 5 zijn er **3 delen** met in totaal **14 hoofdstukken**. Na twee hoofdstukken volgt een blok met **Vaardigheden**. In deel 3 staat ook de **Examenvoorbereiding**.

1.4 Routes in een rooster

Je leert

• hoe je een rooster kunt gebruiken om telproblemen op te lossen

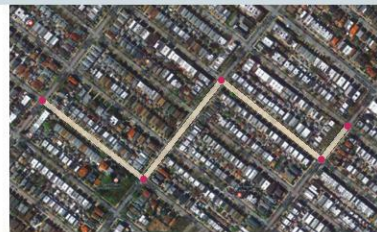
Leerroutes

- ondersteunend: 23–24–025–26–27–28–029–30
- doorlopend: 23–24–25–26–27–28–29–30
- uitdagend: 23–24–25–26–27–29–30–U6

Hiernaast zie je een stukje van de plattegrond van New York.

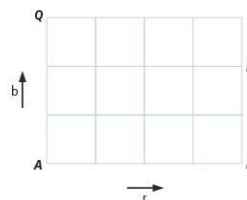
Donald staat op de kruising van 10th Ave en 80th Street (links). Hij moet naar de kruising van 12th Ave en 76th Street (rechts). Met de lijn is een mogelijke route weergegeven.

• Op hoeveel manieren kan Donald zonder omweg naar de kruising van de 10th Ave en 76th Street lopen?



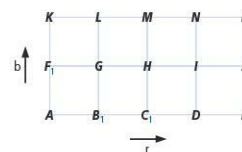
23 In de tekening hiernaast ga je het aantal mogelijke kortste routes tellen van het punt A naar het punt P via de roosterlijnen. Op ieder kruispunt van roosterlijnen heb je de keus uit rechtsaf (r) of naar boven (b). De route die via punt E loopt kun je beschrijven met rrrrb.

- Neem de tekening over en teken daarin de route rrrrb.
- Schrijf nog enkele routes van punt A naar punt P op.
- Hoe kun je zonder te tekenen zien dat de route brrrb niet uitkomt in punt P ?
- Leg uit waarom geen van de gevraagde routes via punt Q gaat.



24 Het aantal kortste routes van A naar P kun je berekenen door bij elk kruispunt het aantal kortste routes van A naar dat kruispunt te noteren.

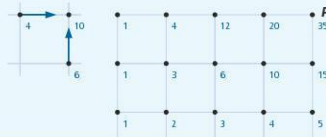
- Leg uit dat je de punten B , C en F maar op één manier kunt bereiken.
- Welke andere punten kun je maar op één manier bereiken? Noteer bij al deze punten het getal 1.
- Leg uit dat je het punt G op twee manieren kunt bereiken en noteer het getal 2 bij het punt G .
- Het punt H kun je bereiken via punt C (op één manier) of via punt G (op twee manieren). Op hoeveel manieren kun je dus in punt H komen? Noteer dit aantal bij punt H .
- Welk getal noteer je bij punt L ?
- M bereik je vanuit H of L . Hoe bereken je uit de getallen bij H en L het aantal mogelijke kortste routes naar M ?
- Noteer bij alle punten het aantal kortste routes vanuit A .
- Hoeveel kortste routes zijn er van A naar P ?



Elk hoofdstuk begint met een paragraaf **Voorkennis**. Met deze paragraaf haal je de benodigde voorkennis op.

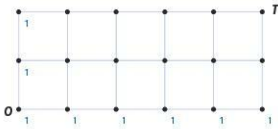
Hoe bereken je het aantal kortste routes in een rooster?

- 1 Noteer bij elk punt dat maar op één manier is te bereiken het getal 1.
- 2 Stel voor elk ander punt vast wat de voorgaande punten zijn en tel de bijbehorende aantallen bij elkaar op.

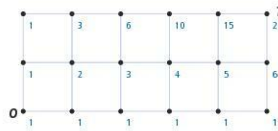


Voorbeeld

Bereken het aantal kortste routes van $O(0, 0)$ naar $T(5, 2)$.



Oplossing



Het aantal kortste routes van O naar T is 21

In een Paragraaf staan **theorie-** en **aanpakvlak-**
ken met uitgewerkte
voorbeelden.

Een **H** bij een opdracht geeft aan dat er bij die opdracht meer oefenstof is voor als je extra wilt oefenen. Die opdrachten staan in het **Hulpboek**.

Ondersteunende route → maak opdracht 025

- 25 a Bereken het aantal kortste routes van $O(0, 0)$ naar $P(5, 3)$.
 b Bereken het aantal kortste routes van $O(0, 0)$ naar $Q(2, 4)$.
 c Om het aantal kortste routes te berekenen van $R(3, 1)$ naar $S(6, 6)$, begint je rooster met getallen in punt R .
 Bereken het aantal kortste routes van $R(3, 1)$ naar $S(6, 6)$.
 d Bereken het aantal kortste routes van $U(1, 4)$ naar $V(7, 0)$.

- 26** De voetbalwedstrijd tussen de amateurclubs Rapido en Broekster Boys eindigde in 4 – 3 voor Rapido. In deze opdracht bereken je met een rooster het aantal mogelijke scoreverlopen die tot deze eindstand leiden.
- H**
- a Het scoreverloop waarbij Rapido eerst twee keer scoort, daarna Broekster Boys drie keer en Rapido tot slot twee keer, geef je aan met rrrbbrr.
 - Teken een rooster met daarin dit scoreverloop.
 - b Geef in het rooster de route aan die overeenkomt met het scoreverloop waarbij de clubs om en om een doelpunt scoren.
 - c Bereken het aantal mogelijke scoreverlopen die leiden tot de eindstand 4 – 3.

Met de **Samenvatting** kun je de onderwerpen van het hoofdstuk nog eens goed doornemen en kijken of je de leerdoelen hebt gehaald.

De **Test jezelf** is een soort oefenproefwerk. Met deze opdrachten test je je kennis en je vaardigheden met betrekking tot de onderwerpen in dit hoofdstuk.

Moderne Wiskunde online bevat alle opdrachten en aanvullende opdrachten. De verwijzing naar **Ondersteunende** en **Uitdagen** de opdrachten gaat automatisch. Bij de **theorie** is vaak een video of animatie.

Wat zijn Wiskundige Denk Activiteiten?

Bij het vak Wiskunde leer je veel verschillende methoden om een opdracht aan te pakken. Na de noodzakelijke oefening wordt elke methode een routine, je weet precies welke stappen je moet zetten. Er zijn echter ook veel situaties waarbij het helemaal niet meteen duidelijk is, welke aanpak je moet gebruiken. Daarvoor is de naam Wiskundige Denk Activiteiten bedacht, verder afgekort als WDA. Je kunt niet spreken van één soort WDA, er wordt een onderscheid gemaakt tussen een aantal verschillende aspecten.

- *Probleem oplossen en analytisch denken*
Hiermee wordt bedoeld dat je gaat uitzoeken hoe een probleem in elkaar zit en welke stappen er nodig zijn om het probleem op te lossen. In de boeken vind je dit onder andere terug in de onderzoeksopdrachten.
- *Modelleren en algebraïseren*
Soms wordt een probleem in woorden omschreven. Door te modelleren en algebraïseren ga je het probleem in wiskunde vertalen. Daarbij moet je geschikte variabelen kiezen en verbanden tussen die variabelen in de vorm van vergelijkingen kunnen opstellen. Ook dit aspect speelt met name een rol in de onderzoeksopdrachten.
- *Ordenen en structureren*
Hiermee wordt bedoeld dat je inzicht krijgt in overeenkomsten tussen figuren, verschillende soorten vergelijkingen en dergelijke. In de boeken vind je dit aspect terug in veel intro-opdrachten.

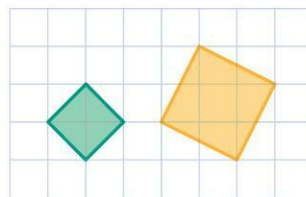
Voorbeeld

Een cilindervormig literblik heeft een inhoud van 1L of 1000 cm^3 . Bij welke keuze van de straal en de hoogte is er het minste materiaal nodig om het blik te maken?

Voorbeeld

Eric en Mariëlle zijn de ouders van Kevin en Pascal. Eric is twee jaar ouder dan Mariëlle en Kevin is twee jaar ouder dan Pascal. Kevin is geboren toen Mariëlle 28 jaar oud was. Het totaal van hun leeftijden is precies 100 jaar. Hoe oud zijn Eric, Mariëlle, Kevin en Pascal?

Voorbeeld



De hoekpunten van deze vierkantjes zijn roosterpunten en de oppervlakten zijn 2 en 5.

Ga van alle getallen 1 tot en met 50 na of je vierkanten kunt tekenen met die oppervlakte en roosterpunten als hoekpunten.

Zijn er ook getallen waarbij het op meer dan één manier mogelijk is?

– *Formules manipuleren*

Met het herschrijven van formules, het uitdrukken van een variabele in andere variabelen of het invullen van een formule in een andere formule heb je al vaker ervaring opgedaan. Belangrijk is daarbij, dat je begrijpt hoe een formule is opgebouwd.

Aan dit aspect wordt aandacht besteed in tal van opdrachten.

– *Abstraheren*

Iets abstract maken is een belangrijk onderdeel van de wiskunde, maar lastig te omschrijven. Je abstraheert zodra je een praktisch probleem vertaalt in wiskundige formules of vergelijkingen. Dit aspect vind je vooral terug in praktische toepassingen. Ook bij het aanleren van nieuwe wiskundige begrippen speelt dit een rol.

– *Logisch redeneren en bewijzen*

Dit aspect komt naar voren bij vragen naar een verklaring of bewijs. Je leert bij veel onderdelen van de wiskunde iets aan te tonen met behulp van een redenering met logische stappen. Je vindt dit in de boeken terug bij allerlei vragen met de formulering ‘leg uit’, ‘toon aan’ of ‘bewijs dat’.

Voorbeeld

Laat zien dat je het functievoorschrift $f(x) = x(x - 1)(x + 2) - x^3 + 1$ kunt herleiden tot $f(x) = (x - 1)^2$.

Voorbeeld

Bij veel bijeenkomsten begroeten alle aanwezigen elkaar met een handdruk. Bij twee aanwezigen is er één handdruk, bij drie aanwezigen drie en bij vier aanwezigen zes.

Kun je dit lijstje uitbreiden en vervolgens een formule opstellen voor het aantal handdrukken h als er n aanwezigen zijn?

Voorbeeld

Een getal is deelbaar door 9, als de som van de cijfers van dat getal deelbaar is door 9.

Bewijs deze regel.



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

Bij wiskunde is rekenen een belangrijke vaardigheid. In de onderbouw is daar op verschillende manieren aandacht voor geweest.

In dit hoofdstuk wordt dit herhaald en uitgebreid. Bij de verhoudingstabel wordt het kruisproduct geïntroduceerd. Breuken en decimale getallen worden met elkaar in verband gebracht en ook het rekenen met procenten komt aan de orde. Het berekenen van de gemiddelde snelheid en het gebruik van de standaardvorm komen terug. De rekenvaardigheden worden toegepast bij opdrachten met contexten.

Ook in havo 5 is er een hoofdstuk waar rekenen centraal staat.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 43
- *Ordenen en structureren* opdracht 55
- *Abstraheren* opdracht 17



V1 Vereenvoudig de breuken.

a $\frac{6}{8}$

b $\frac{30}{36}$

c $\frac{12}{18}$

d $\frac{14}{49}$

e $\frac{24}{27}$

f $\frac{24}{28}$

g $\frac{125}{175}$

h $\frac{63}{81}$

V2 a Bereken $\frac{1}{3} \times 6$.

b Bereken ook $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

c Bereken en vereenvoudig het antwoord: $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$

Theorie

Breuken kun je met elkaar **vermenigvuldigen** door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen.

Breuken kun je **vereenvoudigen** door de teller en de noemer door hetzelfde getal te delen.

$$\frac{3}{7} \begin{array}{l} \leftarrow \text{teller} \\ \leftarrow \text{noemer} \end{array}$$

Voorbeeld 1

$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{7} =$$

$$\frac{1 \times 3}{4 \times 7} = \frac{3}{28}$$

Voorbeeld 2

$$5 \times \frac{3}{8} =$$

Schrijf 5 als de breuk $\frac{5}{1}$

$$\frac{5}{1} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{8} = 1 \frac{7}{8}$$

Voorbeeld 3

$$\frac{2}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{72}$$

Deel de teller en noemer door 6.

$$\frac{6}{72} = \frac{1}{12}$$

V3 Bereken en noteer alle tussenstappen.

a $\frac{5}{6} \times \frac{3}{7}$

b $\frac{1}{2} \times \frac{1}{7}$

c $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

d $\frac{4}{7} \times \frac{3}{8}$

e $4 \times \frac{1}{11}$

f $\frac{3}{5} \times \frac{10}{11}$

g $\frac{2}{3} \times \frac{6}{7}$

h $12 \times \frac{3}{20}$

V4 Een bedrijf exporteert 16 miljoen bloembollen. Drie kwart van de export gaat naar landen buiten Europa, waarvan de helft naar de Verenigde Staten. Van de export naar Europese landen gaat de helft naar Duitsland en één kwart naar Frankrijk.

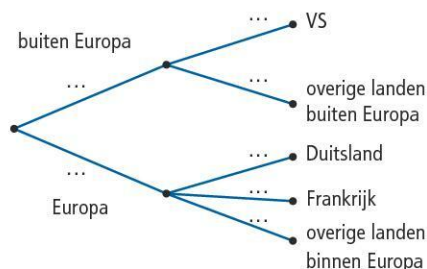
W

a Zet bij het schema de juiste breuken.

b Welk deel van de totale export gaat naar Frankrijk?

c Hoeveel bloembollen gaan er naar Duitsland?

d Welk deel van de totale export gaat naar de Verenigde Staten?



Theorie

Voor de volgorde van berekeningen gelden de volgende regels:

- eerst berekenen wat tussen haakjes staat
- dan machtsverheffen
- dan vermenigvuldigen en delen van links naar rechts
- dan optellen van links naar rechts.

Voorbeeld

$$5 + (1 + 2 \times 3) \times 2^3 =$$

$$5 + (1 + 6) \times 2^3 =$$

$$5 + 7 \times 2^3 =$$

$$5 + 7 \times 8 =$$

$$5 + 56 = 61$$

V5 Bereken en noteer alle tussenstappen.

a $4 + 3 \times 2^2$

f $(24 + 6) : 5 + 1$

b $(4 + 3) \times 2^2$

g $7 + 2^2$

c $4 + (3 \times 2)^2$

h $(3 - 2^3 : 4) \times 5$

d $(4 + 3 \times 2)^2$

i $1 + 2 \times 3 + 10 : 5$

e $6 - (4^2 - 3) \times 2$

j $36 : 3 + 36 : 4 + 36 : 6$

V6 Roy en zijn broer Tim bezorgen samen reclamefolders. Roy bezorgt meer folders dan Tim. Ze hebben afgesproken dat ze de inkomsten verdelen in de verhouding 7 : 3, dus van elke € 10,- krijgt Roy € 7,- en Tim € 3,-.

- a** Hoeveel krijgt ieder als ze samen € 80,- hebben verdiend?
- b** In een week hebben Roy en Tim samen € 95,- verdiend. Bereken hoeveel ieder krijgt.

Aanpak

Hoe verdeel je een hoeveelheid in een bepaalde verhouding?

- 1** Kijk hoeveel gelijke delen er in totaal zijn.
- 2** Bereken de waarde van één van de gelijke delen.
- 3** Bereken de verdeling.

Voorbeeld

Verdeel € 5.796,- in de verhouding 2 : 3 : 7.

Oplossing

- 1** Er zijn $2 + 3 + 7 = 12$ gelijke delen.
- 2** Elk deel is $5796 : 12 = € 483,-$.
- 3** De verdeling is:
 $2 \times € 483,- = € 966,-$
 $3 \times € 483,- = € 1.449,-$
 $7 \times € 483,- = € 3.381,-$

- V7**
- a** Verdeel 200 m^2 in de verhouding 3 : 5.
 - b** Verdeel 2299 kg in de verhouding 9 : 10.
 - c** Verdeel € 720,- in de verhouding 3 : 5 : 8.
 - d** Verdeel 4480 liter in de verhouding 1 : 4 : 9.

V8 Boris, Colin en Derrick gaan met zijn drieën een hek om een grote tuin plaatsen. Het hek is in totaal 250 meter lang. Boris plaatst 110 meter, Colin 75 meter en Derrick 65 meter. Het verdiende geld wordt verdeeld naar de hoeveelheid werk die ieder doet. Boris krijgt € 422,40.

- a** Hoeveel krijgen ze samen?
- b** Bereken hoeveel Colin en Derrick krijgen.

1.1 Verhoudingen

Je leert

- hoe je met een verhoudingstabel rekent

Leerroutes

- ondersteunend: 1-2-03-4-05-5-6-7
- doorlopend: 1-2-3-4-5-6-7-8
- uitdagend: 1-3-4-5-6-7-8-U1

Eén meloen kost in Japan 4800 Yen. Eén Yen is ongeveer 0,9 eurocent. In Nederland kost een meloen ongeveer € 1,80.

- Hoeveel keer duurder zijn deze meloenen dan de meloenen in Nederland?



1 De tabel is een verhoudingstabel.

x	12	2	15	48	...	480
y	42	...	...	...	140	...

Diagram showing multiplication and division relationships between the numbers in the table.

- Vul bij de pijltjes onder, boven en naast de tabel de juiste getallen in.
- Vul de tabel verder in.

2 Vul de verhoudingstabellen verder in.

a	p	3	4	...	200	0,5	...	70
	q	18	...	45	...	...	1260	...

b	s	0,3	2	10	15	48	...	250
	a	6	...	...	...	...	140	...

Ondersteunende route → maak opdracht 03

3 De druiven kosten € 2,95 per kg.

- Hoeveel euro moet je betalen voor 860 gram?
- En hoeveel moet je betalen voor 1340 gram?
- Jose heeft voor € 1,85 druiven gekocht. Hoeveel gram druiven heeft ze gekocht?

gewicht in grammen	...	...	...
bedrag in euro's	...	...	...

- 4 Op een bus verf van 10 liter staat dat je er 50 m² mee kunt verven. In de verhoudingstabel zie je hoeveel vierkante meter je kunt verven met een bepaald aantal liters.

aantal liters	10	5	1	17,5	...
oppervlakte in m ²	50	25	5	87,5	...

Diagram showing arrows indicating the relationships between the values in the table. Red arrows show multiplication (e.g., 10 to 5, 5 to 1, 1 to 17,5) and blue arrows show division (e.g., 50 to 25, 25 to 5, 5 to 87,5). A large red arrow points from the first column to the last, indicating a direct proportion.

- Vul bij de pijltjes boven, onder en naast de tabel de juiste getallen in.
- In de tabel zie je dat $10 \times 25 = 50 \times 5$. Er zijn in de tabel meer van deze producten die gelijk zijn. Ga na dat $10 \times 87,5$ gelijk is aan $50 \times 17,5$.
- Geef nog twee producten die ook gelijk zijn.



Theorie

Je kunt op verschillende manieren in een verhoudingstabel rekenen.

Bij de pijltjes boven en onder de tabel vermenigvuldig je van links naar rechts met hetzelfde getal of deel je door hetzelfde getal. Bij het pijltje rechts werk je van boven naar beneden.

In de verhoudingstabel tabel noem je 10×8 en 4×20

kruisproducten.

In een verhoudingstabel zijn de kruisproducten gelijk.

$$\begin{array}{c|cc} \times & 10 & 20 \\ \hline y & 4 & 8 \end{array}$$

$$10 \times 8 = 4 \times 20$$

Voorbeeld

Voor het bakken van 20 pannenkoeken heb je 450 gram bloem nodig. Hoeveel gram bloem heb je nodig voor 32 pannenkoeken?

Oplossing

In een verhoudingstabel zet je het aantal pannenkoeken en de hoeveelheid bloem.

aantal pannenkoeken	20	32
hoeveelheid bloem in grammen	450	?

kruisproduct $20 \times ? = 450 \times 32$

$$? = 450 \times 32 : 20 = 720$$

Voor 32 pannenkoeken heb je 720 gram bloem nodig.

Ondersteunende route → maak opdracht O5

- 5** Bereken in de verhoudingstabellen a , b en c met kruisproducten.

H

g	22,5	60
v	42	a

p	3,46	0,35	c
r	12,11	b	71,40

- 6** Bij de slager kost lamsgehakt € 9,45 per kg.
Lucy koopt 350 gram lamsgehakt.
- Bereken met kruisproducten hoeveel euro Lucy moet betalen.
 - Marja koopt ook lamsgehakt en betaalt precies € 7,-.
Hoeveel gram lamsgehakt hoopt Marja?

- 7** Welke van de tabellen zijn verhoudingstabellen?

a	<i>afstand</i> in km	10	20	30	40
	<i>bedrag</i> in euro's	25	40	55	70

c	<i>gewicht</i> in kg	1,2	2,3	4	10
	<i>bedrag</i> in euro's	21	40,25	70	175

b	<i>lengte</i> in meters	2	4	10	30
	<i>gewicht</i> in grammen	50	100	250	750

d	<i>inhoud</i> in liters	1	4	7	10
	<i>gewicht</i> in kg	1,3	4,3	7,3	10,3

- 8** Bedenk of je in de volgende gevallen wel of niet met een verhoudingstabel kunt werken. Verklaar steeds je antwoord.
- Een zakje met 10 schroeven van 40 mm kost € 1,60.
Hoeveel kosten drie zakjes met 10 schroeven van 40 mm?
 - Een zakje met 10 schroeven van 40 mm kost € 1,60.
Hoeveel kost een zakje met 10 schroeven van 80 mm?
 - Een volle fles met appelsap weegt 1200 gram.
Hoeveel weegt een fles die precies voor de helft gevuld is met appelsap?
 - Een atlete loopt de 100 meter in 13 seconden.
Hoe lang doet ze over de 1500 meter?
 - Een winkel verkoopt 840 kerstkaarten in de maand december.
Hoeveel kerstkaarten zullen ze naar verwachting in een half jaar verkopen?
 - Een kabel van 10 meter weegt 35 kg.
Hoeveel kg weegt een kabel van 25 meter?

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

03

<i>gewicht in grammen</i>	500	1	650
<i>bedrag in euro's</i>	1,95	...	...

Diagram illustrating the relationship between weight (gewicht in grammen) and price (bedrag in euro's) for two items:

- Item 1: 500 grams, 1.95 euros.
- Item 2: 650 grams, ... euros.

Arrows indicate the comparison of weights (500 to 650) and prices (1.95 to ...).



- Waarom staat 1,95 onder 500?
- Welke getallen moeten bij de pijltjes komen te staan?
- Vul de tabel verder in.
- Hoeveel kost 650 gram kersen?
- Om te berekenen hoeveel gram kersen je voor € 3,- kunt kopen, kun je ook een verhoudingstabel gebruiken. Waarom staat de 1 nu op de onderste rij in de tabel?

<i>gewicht in grammen</i>	500	...	...
<i>bedrag in euro's</i>	1,95	1	3

- f** Hoeveel gram kersen kun je kopen voor € 3,-?
g En hoeveel gram kersen kun je voor € 1,25 kopen?

05

A	<i>aantal</i>	5	10	2	20
	<i>gewicht in grammen</i>	240	480	96	960

B	<i>gewicht</i> in kg	1,5	2,5
	<i>lengte</i> in meters	6	p

- b** Welke kruisproducten zie je nog meer in de tabel A?
- c** Tabel B is een verhoudingstabel.
Op het blaadje is een begin gemaakt met het berekenen van p .
Maak deze berekening af.

$$1,5 \times p = 6 \times 2,5$$
$$p = 6 \times 2,5 : 1,5 = \dots$$

Uitdagende opdrachten

U1

1.2 Rekenen met breuken

Je leert

- hoe je breuken optelt, aftrekt, vermenigvuldigt en deelt

Leerroutes

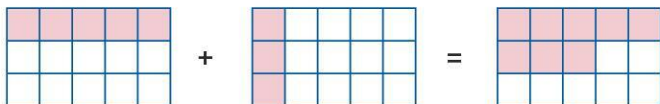
- ondersteunend: 9—010—11—012—12—13—14—15—16—17
- doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15—16—17—18
- uitdagend: 9—10—11—13—14—15—16—17—18—U2

Joep vult een bak met water. Het vullen duurt vijf seconden als hij alleen de grote kraan vol open zet. Als hij alleen de kleine kraan vol open zet, duurt het 20 seconden.

- Hoe lang duurt het vullen van de bak als hij beide kranen vol open zet?



- 9 De rechthoeken zijn verdeeld in 15 gelijke vierkantjes.



- Welk deel van elke rechthoek is gekleurd? Schrijf je antwoorden als een breuk en vereenvoudig indien mogelijk.
- Welke optelling van breuken wordt met deze rechthoeken afgebeeld?

Theorie

Om **breuken** te kunnen **optellen** of **afrekken**, moeten de noemers gelijk zijn. Als dat niet het geval is, moet je eerst de breuken **gelijknamig** maken.

Voorbeeld 1

$$\frac{7}{8} - \frac{2}{5} =$$

$$\frac{35}{40} - \frac{16}{40} = \frac{19}{40} \quad \text{gelijknamig maken}$$

$$\frac{2}{7} + \frac{6}{7} =$$

$$\frac{8}{7} = 1\frac{1}{7} \quad \text{helen eruit halen}$$

Voorbeeld 2

$$1\frac{5}{6} + 2\frac{2}{3} =$$

$$1\frac{5}{6} + 2\frac{4}{6} = \quad \text{gelijknamig maken}$$

$$3\frac{9}{6} = 4\frac{3}{6} \quad \text{helen eruit halen}$$

$$4\frac{3}{6} = 4\frac{1}{2} \quad \text{vereenvoudigen}$$

Voorbeeld 3

$$4\frac{1}{3} - 1\frac{4}{5} =$$

$$4\frac{5}{15} - 1\frac{12}{15} = \quad \text{gelijknamig maken}$$

$$4\frac{20}{15} - 1\frac{12}{15} = 2\frac{8}{15}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 010

- 10 Bereken en noteer alle tussenstappen.

H

a $\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$

d $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$

b $\frac{5}{6} + \frac{2}{3}$

e $3 - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

c $1\frac{3}{4} + \frac{1}{9}$

f $5\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

11 Melissa en Nikki moeten $\frac{1}{3} \times 6\frac{3}{5}$ berekenen.

- a Op het blaadje zie je dat Melissa $\frac{1}{3}$ van 6 en $\frac{1}{3}$ van $\frac{3}{5}$ berekent.
Maak de berekening van Melissa af.
- b Nikki schrijft $6\frac{3}{5}$ eerst als $\frac{33}{5}$ en berekent vervolgens $\frac{1}{3} \times \frac{33}{5}$ door teller keer teller en noemer keer noemer te doen.
Maak de berekening van Nikki af.
- c Welke methode kun je het beste gebruiken bij de vermenigvuldiging $\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{3}$? Leg uit waarom.

●	Melissa	$\frac{1}{3} \times 6\frac{3}{5} =$		
●		$\frac{1}{3} \times 6 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} =$		
●		$\dots + \dots = \dots = \dots$		
●	Nikki	$\frac{1}{3} \times 6\frac{3}{5} =$		
●		$\frac{1}{3} \times \frac{33}{5} = \frac{\dots}{\dots} = \dots = \dots$		

Theorie

Bij het **vermenigvuldigen van breuken** is het handig om de helen eerst als breuk schrijven. Vervolgens kun je de tellers met elkaar vermenigvuldigen en de noemers met elkaar vermenigvuldigen.

Voorbeeld 1

$$2\frac{1}{6} \times \frac{2}{3} =$$

$$\frac{13}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{26}{18} = 1\frac{8}{18} = 1\frac{4}{9}$$

Voorbeeld 2

$$1\frac{3}{7} + 2\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} =$$

$$\frac{10}{7} \times \frac{13}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{130}{70} = 1\frac{60}{70} = 1\frac{6}{7}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 012

12 Bereken en noteer alle tussenstappen.

- H** a $\frac{5}{8} \times \frac{3}{5}$ d $4\frac{1}{2} \times \frac{1}{27}$
b $1\frac{1}{4} \times \frac{4}{9}$ e $1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}$
c $2\frac{2}{3} \times 1\frac{1}{2}$ f $1\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{7}$

13 Bereken en noteer alle tussenstappen.

- H** a $\frac{1}{3} \times (\frac{2}{5} + \frac{1}{5})$ d $1\frac{2}{5} + 1\frac{1}{7} \times \frac{1}{2}$
b $\frac{2}{5} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$
c $\frac{4}{7} \times (\frac{1}{2})^2$ f $(\frac{1}{3})^2 \times (\frac{2}{5} + \frac{1}{2})$

14 Op het blaadje staan de bestemmingen van een deel van de passagiers die in de ochtendspits met de trein uit Hoorn vertrekken. Van de overige passagiers reist $\frac{1}{8}$ deel naar een andere bestemming in Noord Holland.
Welk deel van de passagiers reist naar een bestemming buiten Noord-Holland?

$\frac{1}{30}$ deel naar Heerhugowaard
 $\frac{1}{20}$ deel naar Alkmaar
 $\frac{1}{3}$ deel naar Amsterdam Sloterdijk
 $\frac{1}{4}$ deel naar Amsterdam Centraal

- 15**
- a** 6 liter water wordt verdeeld over flesjes van een $\frac{1}{2}$ liter.
Hoeveel flesjes kun je vullen?
Wat is dus de uitkomst van de deling $6 : \frac{1}{2}$?
- b** Hoeveel glazen met een inhoud van $\frac{1}{4}$ liter kun je vullen met een pak melk van $1\frac{1}{2}$ liter?
Wat is dus de uitkomst van de deling $1\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$?
- 16**
- a** Hoe vaak past $\frac{1}{7}$ in 4? Dus $4 : \frac{1}{7} =$
- b** Hoe vaak past $\frac{2}{7}$ in 4? Dus $4 : \frac{2}{7} =$
- c** Op het blaadje is een begin gemaakt met de deling $4\frac{4}{7}$
Maak deze berekening verder af.

	$\frac{4}{\frac{2}{7}}$	$= \frac{4}{\frac{2}{7}}$	$\times \frac{7}{7}$	$= \frac{4 \times 7}{\frac{2}{7} \times 7}$	$= \frac{\dots}{\dots}$	$= \dots$

Theorie

Bij **delen van breuken** vermenigvuldig je boven en onder met hetzelfde getal.

- 17** Bereken en noteer alle tussenstappen.

- H**
- a** $\frac{2}{\frac{1}{3}}$
- d** $\frac{6}{\frac{2}{5}}$
- b** $\frac{2}{\frac{2}{3}}$
- e** $\frac{1}{\frac{1}{7}}$
- c** $\frac{6}{\frac{1}{5}}$
- f** $\frac{4}{\frac{1}{7}}$

- 18** Aisja, Bea en Cornelia hebben € 45,- verdiend met oppassen. Dit bedrag moeten ze verdelen. Omdat ze niet alle drie even veel tijd hebben opgepast, stelt Aisja voor dat ze de helft krijgt, Bea $\frac{1}{3}$ deel en Cornelia de rest.
- a** Bereken hoeveel ieder krijgt volgens het voorstel van Aisja.
- b** Bea stelt voor om het in de verhouding 5 : 3 : 2 te verdelen. Ga na voor wie deze verdeling voordeliger is en voor wie het niet uitmaakt.

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

010 Vul in.

a $\frac{1}{5} + \frac{3}{10} =$

$\frac{\dots}{10} + \frac{3}{10} = \frac{\dots}{10} = \dots$

b $\frac{5}{6} + \frac{1}{3} =$

$\frac{5}{6} + \frac{\dots}{6} = \frac{\dots}{6} = \dots \frac{\dots}{6}$

c $5\frac{1}{6} - 1\frac{2}{3} =$

$4\frac{7}{6} - 1\frac{\dots}{6} = 3\frac{\dots}{6} = \dots$

d $1\frac{1}{3} - \frac{3}{7} =$

$\frac{\dots}{21} - \frac{\dots}{21} = \frac{\dots}{21}$

Bereken en noteer alle tussenstappen.

e $3 - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} =$

g $4\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2} =$

f $1\frac{3}{4} + \frac{3}{8} =$

h $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} =$

012 Op het blaadje zie je het begin van het berekenen van $1\frac{5}{8} \times 1\frac{3}{5}$

a Wat is er gedaan in stap 1?

b Maak de berekening op het blaadje af.

c Vul in.

$2\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} =$

$\frac{\dots}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{\dots \times \dots}{2 \times 5} = \frac{\dots}{\dots} = \dots \frac{\dots}{\dots} = \dots \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{5}{9} \times 1\frac{1}{8} \times \frac{2}{3} =$

$\frac{5}{9} \times \frac{\dots}{\dots} \times \frac{2}{3} = \frac{\dots \times \dots \times \dots}{\dots \times \dots \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

	$1\frac{1}{8} \times 1\frac{3}{5} =$				
	$\frac{9}{8} \times \frac{8}{5} =$				1
	$\frac{9 \times 8}{8 \times 5} = \frac{\dots}{\dots} = \dots \frac{\dots}{\dots} = \dots \frac{\dots}{\dots}$				2

Uitdagende opdrachten

U2 Van een rechthoek is $\frac{2}{3}$ deel groen gekleurd. Van het overgebleven deel is $\frac{2}{3}$ deel geel gekleurd en van wat dan overblijft, is $\frac{2}{3}$ deel blauw gemaakt.



a Welke deel van de oorspronkelijk rechthoek is blauw?

b Welk deel van de oorspronkelijke rechthoek is nu gekleurd?

c Iedere keer wordt $\frac{2}{3}$ deel van het overgebleven deel gekleurd.

Na hoeveel stappen is het witte deel minder dan één honderdste deel van de oorspronkelijke rechthoek?

1.3 Breuken en decimale getallen

Je leert

- hoe je van breuken decimale getallen maakt
- hoe je een deel van een hoeveelheid berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 19—020—21—22—23—024—25—26
- doorlopend: 19—20—21—22—23—24—25—26
- uitdagend: 19—20—21—22—23—25—26—U3

Marleen mag kiezen tussen $\frac{1}{7}$ deel of 15% van de dropjes.

- Voor welk deel zal Marleen kiezen? Verklaar je antwoord.



19 Schrijf als decimaal getal.

a $\frac{3}{4}$

d $\frac{3}{100}$

b $\frac{1}{5}$

e $\frac{2}{25}$

c $\frac{3}{20}$

f $\frac{5}{8}$

Breuken kun je als een deling invoeren op je rekenmachine. Let op de betekenis van een geheel getal plus een breuk. Zo is $2\frac{2}{7}$ gelijk aan $2 + \frac{2}{7}$

Voorbeeld

$$2 : 7 \approx 0,2857$$

$$3\frac{2}{7} = 3 + \frac{2}{7}$$

$$3\frac{2}{7} \approx 3,2857$$

→ Instructie rekenmachine | Breuken

Ondersteunende route → maak opdracht 020

20 Schrijf als decimaal getal, rond zo nodig af op vier decimalen.

a $\frac{5}{7}$

d $3\frac{6}{11}$

b $\frac{13}{16}$

e $2\frac{3}{8}$

c $2\frac{2}{3}$

f $1\frac{1}{12}$

- 21
- a Waarom geldt $\frac{1}{3} > 0,3$?
 - b Is 0,33 groter dan, kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{3}$?
 - c Beredeneer, zonder de rekenmachine te gebruiken, welk getal het grootst is van de volgende tweetallen.

A $\frac{2}{11}$ en 0,2

C $\frac{17}{19}$ en 0,85

B $\frac{4}{9}$ en 0,4

D $\frac{13}{40}$ en 0,34

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} \text{ en } 0,3 = \frac{3}{10}$$

- 22** Op het blaadje zie je hoe je decimale getallen kunt omzetten in breuken.
H Schrijf als breuk.

- a 0,25 d 2,45
b 0,125 e 3,44
c 0,08 f 1,004

$$0,175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$$
$$3,04 = 3 + \frac{4}{100} = 3 + \frac{1}{25} = 3 \frac{1}{25}$$

- 23** Een fabriek heeft 987 werknemers. Daarvan komt $\frac{1}{3}$ deel met het openbaar vervoer naar het werk.
- a Marcel en Cas moeten uitrekenen hoeveel werknemers er met het openbaar vervoer komen.
Marcel berekent met zijn rekenmachine $0,33 \times 987$.
Cas berekent $987 : 3$.
Wie vindt het juiste antwoord? Leg uit.
- b Van de werknemers komt $\frac{1}{7}$ deel lopend of met de fiets.
Hoeveel werknemers zijn dat?
- c De overige werknemers komen met de auto.
Reken uit hoeveel werknemers met de auto komen.

Je kunt op verschillende manieren een deel van een hoeveelheid uitrekenen.

Voorbeeld 1

Bereken $\frac{3}{7}$ deel van 335 gram.

Oplossing

$\frac{1}{7}$ deel van 335 gram is $335 : 7 = 47,857... \text{ gram}$.

$\frac{3}{7}$ deel van 335 gram is $3 \times 47,857... \approx 143,57 \text{ gram}$.

Voorbeeld 2

Bereken 0,45 deel van € 180,-.

Oplossing

0,45 deel van € 180,- is $0,45 \times € 180,- = € 81,-$.

Ondersteunende route → maak opdracht 024

- 24** Bereken.

- H**
- a $\frac{3}{4}$ deel van € 229,-
b 0,8 deel van 45 m^2
c $\frac{7}{15}$ deel van 18 liter
d 0,65 deel van 200 meter
e $\frac{2}{11}$ deel van 140 kilogram

- 25** Denk bij de volgende berekeningen steeds na over een zinvolle afronding.
- Joop rijdt van Groningen naar Maastricht. De afstand is 350 km. Hij heeft er inmiddels $\frac{2}{3}$ deel van de rit opzitten. Hoeveel kilometer heeft hij gereden?
 - Op een school zitten in 4 en 5 havo in totaal 104 leerlingen. Volgens de directeur heeft $\frac{2}{7}$ deel van deze leerlingen gekozen voor het profiel E&M. Hoeveel leerlingen hebben gekozen voor het profiel E&M?
 - In een voetbalstadion passen 31 000 mensen. Bij een wedstrijd is het stadion voor $\frac{3}{4}$ deel gevuld. Hoeveel bezoekers zijn er?
 - In een ander stadion zitten 28 500 mensen. Het stadion is voor $\frac{5}{7}$ deel gevuld. Hoeveel bezoekers kunnen er maximaal in dit stadion?



- 26** De handbalvereniging GroenZwart krijgt jaarlijks € 2.250,- subsidie van de gemeente. Van deze subsidie wordt $\frac{1}{5}$ deel besteed aan materiaal en de rest gaat naar de jeugdafdeling. Van het gedeelte voor materiaal wordt $\frac{2}{3}$ deel besteed aan nieuwe ballen. Van het gedeelte dat voor de jeugdafdeling bestemd is, wordt $\frac{3}{4}$ deel gebruikt voor de organisatie van de jaarlijkse jeugddag en $\frac{1}{4}$ deel voor de aanschaf van clubshirts voor de jeugd.
- Hoeveel euro wordt er jaarlijks uitgegeven aan ballen?
 - Hoeveel euro wordt besteed aan de jaarlijkse jeugddag?

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

020

a Vul in.

$$5\frac{3}{8} = 5 + \frac{3}{8} = 5 + 0, \dots = 5, \dots$$

$$2\frac{17}{20} = 2 + \frac{17}{20} = 2 + \dots = \dots$$

Schrijf als decimaal getal, rond zo nodig af op drie decimalen.

b $\frac{5}{11}$

e $3\frac{6}{17}$

c $\frac{5}{8}$

f $1\frac{3}{5}$

d $6\frac{1}{3}$

g $2\frac{7}{12}$

024

a Op het blaadje is een begin gemaakt van het berekenen van $\frac{3}{4}$ deel van 48 en van 0,2 deel van 36. Maak deze berekeningen verder af.

Bereken.

b $\frac{1}{5}$ deel van € 225,-

e $\frac{3}{13}$ deel van 260 gram

c $\frac{3}{5}$ deel van € 225,-

f 0,7 deel van 49 liter

d 0,4 deel van 36 meter

g $\frac{3}{4}$ deel van 172 meter

☐	$\frac{1}{4}$ deel van 48 is $48 : 4 = \dots$				
☐	$\frac{3}{4}$ deel van 48 is $3 \times \dots = \dots$				
☐	0,2 deel van 36 is $0,2 \times \dots = \dots$				
☐					
☐					

Uitdagende opdrachten

U3

Turnvereniging De rekstok organiseert de jaarlijkse loterij. De prijzenpot bevat € 8.400,-, te verdelen over één eerste prijs, vier tweede prijzen en tien derde prijzen. De voorzitter van de turnvereniging vindt dat de helft van de prijzenpot moet worden gereserveerd voor de eerste prijs, een kwart voor de vier tweede prijzen en de rest voor de tien derde prijzen.

a Bereken de geldwaarde van elke prijs.

b De penningmeester vindt dat de geldwaarde van de drie prijzen zich op de volgende manier moet verhouden: 1e prijs : 2e prijs : 3e prijs = 3 : 2 : 1. De clubleden nemen het voorstel van de penningmeester aan.

Bereken de geldwaarde van elk van de drie prijzen.



1.4 Procenten

Je leert

- hoe je met procenten rekent

Leerroutes

- ondersteunend: 27—028—28—29—030—30—31—33
- doorlopend: 27—28—29—30—31—32—33—34
- uitdagend: 27—28—30—31—32—33—34—U4



In 2017 is de waarde van de bolivar, de munteenheid van Venezuela, met 96% gedaald. Dit leidde tot grote demonstraties tegen de regering.

- Hoeveel keer zo duur zijn daardoor in 2017 de eerste levensbehoeften in Venezuela geworden?

27 Op 1 januari 2017 was het btw-tarief op de meeste goederen 21%. Een laptop kostte op dat moment € 649,- zonder btw.

- Bereken met de tabel welk bedrag een klant voor deze laptop moest betalen.
- Met welk getal moet je de prijs zonder btw vermenigvuldigen om de prijs inclusief btw te krijgen?
- Per 1 januari 2018 daalde de prijs met 3%. Met welk getal moet je de oude prijs vermenigvuldigen om de nieuwe prijs te berekenen?
- Geldt je antwoord op opdracht c voor de prijs exclusief btw of voor de prijs inclusief btw?

<i>bedrag in euro's</i>	649	?
<i>percentage</i>	100	121

Theorie

Bij het rekenen met procenten kun je gebruik maken van een verhoudingstabel of van een geschikte vermenigvuldiging. Als je een verhoudingstabel gebruikt, dan moet je vaststellen welke hoeveelheid hoort bij 100%. Als je een vermenigvuldiging gebruikt, bedenk dan welke factor hoort bij de toename of afname.

Voorbeeld 1

Een tv van € 480,- wordt 8% goedkoper.
Bereken de nieuwe prijs.

Oplossing

Met kruisproduct:

Er gaat 8% af, de nieuwe prijs is 92%.

<i>prijs in euro's</i>	480	?
<i>percentage</i>	100	92

$$480 \times 92 = 100 \times ?$$

$$? = 480 \times 92 : 100 = 441,6$$

De nieuwe prijs is € 441,60.

Met factor:

Er gaat 8% af, de factor is $(100 - 8) : 100 = 0,92$.

De nieuwe prijs is $0,92 \times € 480,- = € 441,60$.

Voorbeeld 2

Een iPad kost € 790,- inclusief 21% btw.
Bereken de prijs zonder btw.

Oplossing

De prijs inclusief btw is 121%, de prijs zonder btw is 100%.

<i>prijs in euro's</i>	790	?
<i>percentage</i>	121	100

Met kruisproduct:

$$790 \times 100 = 121 \times ?$$

$$? = 790 \times 100 : 121 \approx 652,892$$

De prijs zonder btw is € 652,89.

Ondersteunende route → maak opdracht 028**28****H**

- a Op een fiets van € 910,- wordt een korting van 20% gegeven.
Bereken de prijs van de fiets.
- b De prijs van de iPod wordt met 3,2% verhoogd.
Bereken de nieuwe prijs van een iPod van € 169,-
- c De kapper heeft zijn prijs verhoogd van € 17,50 naar € 21,25.
Met hoeveel procent is de prijs gestegen?
- d De prijs van een kilogram uien is gedaald van € 2,45 naar € 1,90.
Met hoeveel procent zijn de uien goedkoper geworden?

29**H**

- a In een klas met 32 leerlingen zitten 12 meisjes.
Hoeveel procent van de leerlingen is een meisje?
- b De afstand van Groningen naar Maastricht is 350 km.
Berend heeft 180 km van de totale afstand afgelegd.
Hoeveel procent van de totale afstand heeft hij afgelegd?

Ondersteunende route → maak opdracht 030**30**

- a Een fiets kost € 1.058,- inclusief 21% btw.
Hoeveel kost de fiets exclusief btw?
- b Een broek van € 69,- is in de aanbieding en kost nu € 44,85.
Hoeveel procent korting krijgt de klant?

- 31** Op 1 oktober 2017 zitten op een school 1950 leerlingen.
- a** Tijdens een griep epidemie is 15% van de leerlingen afwezig.
Hoeveel leerlingen zijn afwezig?
 - b** Het aantal leerlingen op 1 oktober 2017 was 7,3% hoger dan op 1 oktober 2016.
Hoeveel leerlingen waren er op 1 oktober 2016?
 - c** Op 1 oktober 2017 had 34% van de 4 havo leerlingen een profiel E&M, dat zijn 55 leerlingen.
Hoeveel leerlingen zaten er op dat moment in 4 havo?
- 32**
- a** Een bedrag wordt verlaagd met 0,5% en is daarna gelijk aan € 1.346,-.
Hoeveel euro was het bedrag voor de verlaging?
 - b** In januari 2018 is de omzet van een winkel gelijk aan € 12.045,- en dat is 23,7% minder dan in december 2017.
Hoeveel euro was de omzet in december 2017?
- 33**
- a** Een tablet wordt verkocht met 15% korting en kost nu € 378,25.
Bereken de prijs zonder korting.
 - b** Een printer heeft een inkoop prijs van € 180,-. De winkelier berekent een verkoopprijs die 35% hoger ligt. Over de verkoopprijs moet nog 21% btw berekend worden.
Bereken de prijs die de klant moet betalen.
 - c** Voor een scanner wordt € 57,75 aan btw betaald.
Bereken de prijs van de scanner voor de klant, dus inclusief de 21% btw.
- 34** Drie broers, Albert, Frits en Nicolaas, zijn gezamenlijk eigenaar van een stuk grond. De grond wordt verkocht voor € 325.000,- aan een projectontwikkelaar. Vanwege een aantal oude afspraken zal de opbrengst als volgt worden verdeeld:
- Albert krijgt 30% van de opbrengst
 - de rest zal worden verdeeld tussen Frits en Nicolaas in de verhouding 3 : 7.
- a** Bereken het bedrag dat Albert krijgt.
 - b** Bereken welke bedragen Frits en Nicolaas krijgen.
 - c** Hoeveel procent van de totale opbrengst krijgt Nicolaas?
 - d** Frits besluit het bedrag dat hij krijgt in drie gelijke delen te verdelen. Eén deel houdt hij zelf en zijn twee dochters Anna en Gina krijgen ook elk een deel.
Hoeveel procent van de totale opbrengst krijgt Gina?



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

028 Op een fiets van € 740,- krijg je 15% korting.

a De prijs zonder korting is 100%.

Leg uit dat de nieuwe prijs, dat is de prijs waar de korting van af is, dan overeenkomt met 85%.

b Vul de tabel verder in.

<i>prijs in euro's</i>	740	?
<i>percentage</i>	100	85

c Bereken de nieuwe prijs van de fiets.

d De prijs van appels is gestegen van € 1,90 naar € 2,65 per kilogram.

<i>prijs in euro's</i>	1,90	0,75
<i>percentage</i>	100	?

Verklaar de getallen in de verhoudingstabel.

e Met hoeveel procent is de prijs van de appels gestegen?



030 Een fietstas kost € 45,- inclusief 21% btw.

a Vul in: De prijs inclusief btw is $100\% + 21\% = \dots\%$.

b Leg uit dat de prijs exclusief btw overeenkomt met 100%.

c Welk percentage (100 of 121) komt er onder het getal 45 in de verhoudingstabel te staan?

d Bereken de prijs exclusief btw.

<i>prijs in euro's</i>	45	...
<i>percentage</i>	...	...

Uitdagende opdrachten

U4 Sommige mensen beginnen op jonge leeftijd met roken en proberen daar op latere leeftijd weer mee op te houden. Dat lukt niet altijd. Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) publiceert regelmatig cijfers waarmee het rookgedrag van Nederlanders kan worden bestudeerd. In de tabel vind je enkele getallen.

<i>jaar</i>	2014	2017
<i>aantal Nederlanders in miljoenen</i>	16,8	17,1
<i>percentage rokers</i>	25,7%	23,1%
<i>gemiddeld aantal sigaretten per roker per jaar</i>	3942	3905

Bereken met hoeveel procent het totale aantal gerookte sigaretten in 2017 is afgenomen ten opzichte van 2014.

1.5 Tijden

Je leert

- hoe je een gemiddelde snelheid berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 35–36–37–38–39–040–40–41
- doorlopend: 35–36–37–38–39–40–41–42
- uitdagend: 35–36–37–39–40–41–42–U5

Niek houdt de gegevens over zijn training op de fiets bij met zijn fietscomputer.

- Is de gemiddelde snelheid bij zijn training hoger, lager of gelijk aan 29,8 km per uur?



35

- a** Een raket zal worden gelanceerd over 1 uur, 10 minuten en 25 seconden.
Hoeveel seconden duurt het totdat de lancering plaats vindt?
- b** Yannick is precies 100 000 minuten oud.
Laat met een berekening zien dat Yannick 1666 uur en 40 minuten oud is.
- c** Hoeveel hele dagen passen er in 1666 uur?
- d** Hoeveel dagen, uren en minuten is Yannick oud?
- e** Henk is 1 090 775 minuten oud.
Bereken de leeftijd van Henk in jaren, dagen, uren en minuten.

$$100\,000 : 60 = 1666,66... \text{ uur}$$

0,66... uur is

$$0,66... \times 60 = \dots \text{minuten}$$

1666 uur = 69,41... dagen

0,41... daq is

$$0,41... \times 24 = ... \text{ uren}$$

36 Een vliegtuig vliegt een afstand van 1650 km met een gemiddelde snelheid van 600 km per uur.

a Hoeveel uur duurt deze vlucht?

b Bob denkt dat de vlucht 2 uur en 75 minuten duurt. Waarom klopt dit niet en hoeveel uur en minuten duurt de vlucht wel?

Theorie

Tijden worden niet weergegeven in het decimale stelsel. Er gaan bijvoorbeeld 60 minuten in een uur en 60 seconden in een minuut.

Voor het noteren van tijden is afgesproken dat tussen de uren, minuten en seconden een punt of dubbele punt wordt gebruikt.

7:14,13 minuten betekent 7 minuten en $14\frac{13}{100}$ seconden.

Voorbeeld 1

4,3 uur is 4 uren en 0,3 deel van een uur.

4,3 uur is

$$4 \times 60 + 0,3 \times 60 = 258 \text{ minuten}$$

of $4,3 \times 60 = 258 \text{ minuten}$.

Voorbeeld 2

2:17,66 minuten is

2 minuten en 17,66 seconden.

$$\text{Dit is } 2 \times 60 + 17,66 =$$

137,66 seconden.

Voorbeeld 3

2:36:48 uur is 2 uur en

36 minuten en 48 seconden.

Dit is

$$2 \times 3600 + 36 \times 60 + 48 =$$

9408 seconden.

- 37** **H** a Hoeveel seconden is 2 uur 14 minuten en 23 seconden?
 b Hoeveel seconden is 2:12,7 minuten?
 c Bram rijdt met een snelheid van 98 km per uur.
 Hoeveel meter rijdt Bram per uur? En hoeveel meter per seconde?
 d Sjoerd rijdt met een snelheid van 36 meter per seconde.
 Hoeveel km per uur is dit?

- 38** Bereken in uren, minuten en seconden.
 a 40 maal 45 seconden.
 b Het totaal van 2:53:45 uur en 3:17:28 uur.
 c Het totaal van 59:12,45 minuten en 14:45,75 minuten.
 d Een kwart van 6:14:48 uur.

- 39** Op een sportdag wordt een hardloopwedstrijd gehouden over een afstand van 800 meter. Ciska doet er 3.08 minuten over. Ze wil haar gemiddelde snelheid in km per uur berekenen.
 a Leg uit dat 3:08 minuten gelijk is aan 188 seconden.
 b Waarom zet Ciska 0,8 in de tabel? En waarom 3600?
 c Bereken de gemiddelde snelheid van Ciska in km per uur.

<i>afstand</i> in km	0,8	?
<i>tijd</i> in seconden	188	3600

Aanpak**Hoe bereken je een gemiddelde snelheid?**

- 1 Reken de totale tijd om naar minuten of seconden.
- 2 Maak een verhoudingstabel met afstand en tijd.
- 3 Bereken de afstand per tijdseenheid.

Voorbeeld

In 2018 werd Sifan Hassan Europees kampioene bij de 5000 meter hardlopen. Haar tijd was 14:46,12 minuten.

Bereken haar gemiddelde snelheid.

Oplossing

- 1** 14:46:12 minuten is
 $14 \times 60 + 46,12 = 886,12$ seconden.

<i>afstand</i> in km	5	?
<i>tijd</i> in seconden	886,12	3600

- 3** $5 \times 3600 = 886,12 \times ?$
 $5 \times 3600 : 886,12 = 20,31 \dots$
 Haar gemiddelde snelheid was ongeveer 20,3 km per uur.

Ondersteunende route → maak opdracht O40

- 40** **H** In september 2018 liep Eliud Kipchoge een nieuw wereldrecord op de marathon. De officiële tijd over de 42,195 km was 2:01:39 uur.
- Bereken de gemiddelde snelheid in km per uur van Eliud Kipchoge gedurende deze marathon.
 - Het persoonlijk record van Eliud Kipchoge op de 3000 meter is 7:27,66 minuten.
Hoe groot was de gemiddelde snelheid in km per uur bij deze wedstrijd?
 - In 2003 werd hij wereldkampioen op de 5000 meter. De gemiddelde snelheid bij zijn race was 23,29 km per uur. Welke tijd heeft hij op dit WK gelopen?



- 41** Het ruimtestation ISS draait om de aarde. Eén ronde om de aarde is 42 400 km. Het ruimtestation doet over één ronde 1 uur en 31 minuten.
- Bereken de snelheid van het ruimtestation in meters per seconde.
 - Hoe groot is de snelheid van het ruimtestation in km per uur?
- 42** Bij een wedstrijd over drie ronden op een atletiekbaan van 400 meter zijn de tijden per ronde bijgehouden.

	Roy	Gerco	Balasz
ronde 1	1:12,3	1:02,5	0:56,9
ronde 2	1:10,4	1:05,8	1:00,6
ronde 3	1:05,7	1:12,8	0:59,8

- In welke eenheden zijn de tijden uitgedrukt?
- Bereken de totale tijd voor elk van deze drie jongens.
- Bereken van Roy de gemiddelde snelheid in meter per seconde over de drie ronden.
- Wie heeft de snelste ronde gelopen? Bereken de gemiddelde snelheid van die ronde in meter per seconde en in km per uur.

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

040 Martijn deed mee aan een tijdrit van 65 kilometer op de fiets. Zijn tijd was 1:32:45 uur. Hij wil weten wat zijn gemiddelde snelheid in km per uur is geweest.

- a** Laat met een berekening zien dat hij 5565 seconden nodig had voor de 65 km.

<i>afstand</i> in km	65	...
<i>tijd</i> in seconden	...	3600

- b** Welk getal moet onder 65 staan in de verhoudingstabel?
c Verklaar het getal 3600 in de verhoudingstabel.
d Vul de tabel verder in.
e Met welke gemiddelde snelheid in km per uur fietste Martijn?

Uitdagende opdrachten

U5 Bij de Formule 1 autoraces wordt de startvolgorde bepaald door de rondetijden bij de kwalificatie. In 2018 werd op het circuit van Hockenheim de grote Prijs van Duitsland verreden. Dit circuit heeft een lengte van 4,574 km.

In de tabel zie je de startvolgorde en de rondetijden van enkele coureurs bij de kwalificatie.

- a** Bereken Vettels gemiddelde snelheid over één ronde, zowel in meter per seconde als in km per uur.
b Hoeveel procent was de gemiddelde snelheid van Verstappen lager dan die van Vettel?
c Stel dat Vettel en Vandoorne vanaf de start elke ronde met de gegeven rondetijd afleggen.
 Na hoeveel ronden zal Vandoorne dan worden ingehaald door Vettel?

<i>startplaats</i>	<i>coureur</i>	<i>tijd</i> in minuten
1	Vettel	1:11,212
2	Bottas	1:11,416
3	Raikkonen	1:11,547
4	Verstappen	1:11,822
...	...	...
20	Vandoorne	1:14,401



1.6 Standaardvorm

Je leert

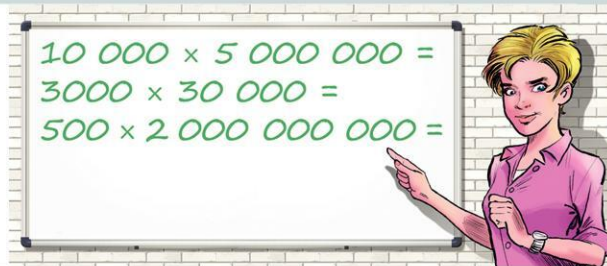
- wat de standaardvorm is

Leerroutes

- ondersteunend: 43—044—45—46—047—48—49—50—51
- doorlopend: 43—44—45—46—47—48—49—50—51
- uitdagend: 43—45—46—47—48—49—50—51—U6

Op het bord staan een paar vermenigvuldigingen.

- Hoeveel nullen hebben de antwoorden van de uitkomsten?



- 43** Op het blaadje zie je de namen van grote getallen. Het is handig om erg grote getallen te schrijven als machten van 10. Bijvoorbeeld $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$.
- Neem de namen over en schrijf de getallen als macht met grondtal 10.
 - Hoeveel nullen heeft 10^{30} als je het getal voluit schrijft?

duizend	1 000
miljoen	1 000 000
miljard	1 000 000 000
biljoen	1 000 000 000 000
biljard	1 000 000 000 000 000

Theorie

Grote getallen worden vaak in de **standaardvorm** of **wetenschappelijke notatie** geschreven.

Dit is een getal tussen 1 en 10, vermenigvuldigd met een macht van 10. De exponent geeft aan hoeveel plaatsen je de komma naar rechts moet verschuiven.

Voorbeeld 1

Het getal 3 298 000 is in de standaardvorm $3,298 \times 10^6$. Bij het getal 3,298 moet je de komma zes plaatsen naar rechts verschuiven om het getal 3 298 000 te krijgen.
 $3\ 298\ 000 = 3,298 \times 10^6$

Voorbeeld 2

Het getal $4,07 \times 10^4$ kun je als gewoon getal schrijven door de komma vier plaatsen naar rechts te verschuiven.
 $4,07 \times 10^4 = 40\ 700$

Ondersteunende route → maak opdracht 044

- 44** Schrijf in de standaardvorm.

H

- | | |
|-------------------|--------------|
| a 40 000 | c 230 |
| b 427 480 000 000 | d 99 999 999 |

- 45** Als de uitkomst van een berekening te groot wordt, geeft je rekenmachine het antwoord in de standaardvorm.

H

- a** Bereken de uitkomst van de vermenigvuldigingen. Rond het voorste getal af op twee decimalen.

- A $215\,000 \times 336\,000$ C $8,6^{10} \times 20,4^6$
B $6,3 \times 106 \times 5 \times 107$ D $2\,350\,000 \times 88\,701\,400$

- b** Noteer hoeveel cijfers de antwoorden van opdracht a hebben als deze voluit worden geschreven.

- 46** **a** Bereken de uitkomsten van de delingen op het blaadje met je rekenmachine.

- b** Verklaar de uitkomsten die je op je scherm van je rekenmachine ziet.

- c** Welke uitkomst zal je rekenmachine geven bij $3 : 10^{18}$?

- d** Hoeveel cijfers achter de komma staan er als je de uitkomst van opdracht c helemaal uitschrijft?

Het getal $3,298 \times 10^6$ wordt op je rekenmachine weergegeven als 3.298E6

●	3 : 10 = 0,3				
●	3 : 10 ² = 0,03				
●	3 : 10 ³ = 0,003				
●	3 : 10 ⁶ = ...				
●	3 : 10 ⁹ = ...				
●	3 : 10 ¹² = ...				

Theorie

Behalve voor heel grote getallen, wordt de **standaardvorm** ook gebruikt voor heel kleine getallen.

Dit is een getal tussen 1 en 10, vermenigvuldigd met een macht van 10 met een negatieve exponent. De exponent geeft aan hoeveel plaatsen je de komma naar links moet verschuiven.

Voorbeeld 1

Het getal 0,000 012 8 in de standaardvorm is $1,28 \times 10^{-5}$.
Bij het getal 1,28 moet je de komma vijf plaatsen naar links verschuiven om het getal 0,000 012 8 te krijgen.
 $0,000\,012\,8 = 1,28 \times 10^{-5}$

Voorbeeld 2

Het getal $1,057 \times 10^{-6}$ kun je als gewoon getal schrijven door de komma zes plaatsen naar links te verschuiven.
 $1,057 \times 10^{-6} = 0,000\,001\,057$

Ondersteunende route → maak opdracht 047

- 47** Schrijf in de standaardvorm.

H

- a** 0,006 C 0,000 032 1
b 0,1 D 0,000 099 999

- 48** Bereken en schrijf de antwoorden in de standaardvorm.

H

- a** 25×10^{-4} C 1000×10^{-3}
b $10 \times 0,000\,000\,002\,5$ D $2,7 \times 0,000\,03$

Het getal $1,28 \times 10^{-5}$ wordt op je rekenmachine weergegeven als 1.28E-5

- 49** Met een microscoop kun je heel kleine dingen, zoals cellen, sterk vergroot zien. Op de foto zie je rode bloedlichaampjes. De doorsnede ervan is in werkelijkheid 4×10^{-4} cm.

- a** Stel dat je rode bloedlichaampjes in een rij zou kunnen leggen.
Hoeveel passen er achter elkaar in één cm?
- b** Een levercel heeft een doorsnede van 2×10^{-3} cm en een poliovirus heeft een doorsnede van 2×10^{-5} cm.
Wat is het kleinst, een rood bloedlichaampje, een levercel of een poliovirus?



- 50** Mensenhaar groeit ruw geschat met een snelheid van $1,5 \times 10^{-2}$ cm per dag.
- a** Iris heeft haar haar heel kort laten knippen en heeft daar nu spijt van. Ze wil dat het minstens 15 cm groeit.
Hoeveel jaar zal dat ongeveer duren?
- b** Op de ochtend dat Anne aan de Elfstedentocht meedeed, heeft hij zich voor het laatst geschoren. Op 25 maart 1997 waren zijn baardharen zo'n 12 mm lang.
Op welke dag werd die Elfstedentocht verreden?

- 51** In 2016 was de productie van stroom met zonnepanelen $1,6 \times 10^9$ kWh. In 2017 is deze productie toegenomen tot $2,1 \times 10^9$ kWh.
- a** Met hoeveel procent is de hoeveelheid geproduceerde stroom met zonnepanelen toegenomen?
- b** Per persoon wordt er gemiddeld 1355 kWh per jaar gebruikt.
Voor hoeveel personen werd er in 2017 stroom geproduceerd met zonnepanelen?
- c** Hoeveel lampen met een verbruik van 25 Wh kunnen een uur branden op de stroom die in 2017 werd geproduceerd met zonnepanelen?

Afgeleide eenheden van wattuur		
factor	naam	symbool
10^{-3}	milliwattuur	mWh
1	wattuur	Wh
10^3	kilowattuur	kWh
10^6	megawattuur	MWh
10^9	gigawattuur	GWh
10^{12}	terawattuur	TWh
10^{15}	petawattuur	PWh

Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

- 045** Het getal 608 300 000 is in de standaardvorm $6,083 \times 10^{\dots}$.
Bij het getal 6,083 moet je de komma acht plaatsen naar rechts verschuiven, dus $608\,300\,000 = 6,083 \times 10^8$.

- a** Hoeveel plaatsen moet je de komma in het getal 1,401 82 naar rechts verschuiven om 14018,2 te krijgen?
b Schrijf 14018,2 in de standaardvorm.
c Vul in. $205\,423 = 2,054\,23 \times 10^{\dots}$

Schrijf in de standaardvorm.

- d** $50\,897 = 5,0897 \times 10^{\dots}$ **f** 703,1
e 9 351 000 **g** 830 400 000

- 047** Het getal 0,000 072 1 is in de standaardvorm $7,21 \times 10^{\dots}$.
Bij het getal 7,21 moet je de komma vijf plaatsen naar links verschuiven, dus $0,000\,072\,1 = 7,21 \times 10^{-5}$.

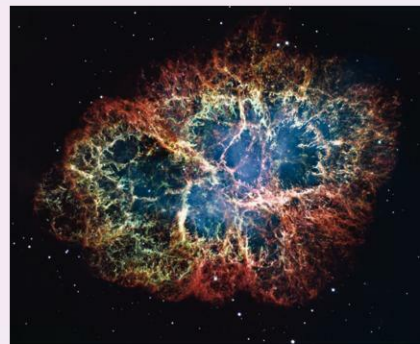
- a** Hoeveel plaatsen moet je de komma in het getal 5,039 naar links verschuiven om het getal 0,005 039 te krijgen?

Schrijf in de standaardvorm.

- b** $0,005\,039 = 5,039 \times 10^{\dots}$ **d** 0,000 160 291
c $0,000\,006\,88 = 6,88 \times 10^{\dots}$ **e** 0,04

Uitdagende opdrachten

- U6** De snelheid van het licht en van radiogolven is ongeveer $2,998 \times 10^8$ meter per seconde. Een lichtjaar is de afstand die het licht in één jaar aflegt en dat is ongeveer $9,45 \times 10^{15}$ meter.
- a** Een radiosignaal heeft ongeveer 1,28 seconden nodig om de afstand van de maan naar de aarde te overbruggen. Bereken deze afstand in km.
- b** De Krabnevel is 6000 lichtjaar van de aarde verwijderd. Dat betekent dat astronomen nu kunnen zien hoe de Krabnevel er 6000 jaar geleden uitzag. Hoeveel kilometer is de Krabnevel van de aarde verwijderd?
- c** De Andromedanevel bevindt zich op een afstand van ongeveer $2,08 \times 10^{18}$ kilometer van de aarde. Hoeveel lichtjaar is de Andromedanevel van de aarde verwijderd?



52 Bereken en noteer alle tussenstappen.

a $2\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$

e $1 + \left(2\frac{1}{2}\right)^2$

b $2 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$

f $\frac{1}{2} \times \left(5 + 7\frac{1}{2}\right)$

c $3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}$

g $3\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{5}$

d $\frac{4}{\frac{1}{9}}$

h $\frac{12}{\frac{3}{4}}$

53 Een Amerikaanse Pioneer-satelliet vloog in zes maanden tijd naar Venus. De afstand van de aarde naar Venus is ongeveer $4,32 \times 10^7$ km.

- a** Hoeveel km heeft de Pioneer gemiddeld per dag afgelegd? Neem 30 dagen voor elke maand.
- b** Bereken de gemiddelde snelheid in km per uur.
- c** Een Russische satelliet vliegt in driehonderd dagen naar Mars met een snelheid van 260 000 km per dag. Hoeveel km is de afstand van de aarde naar Mars? Geef je antwoord in de standaardvorm.



54 Bij een triatlon moet je 4,8 km zwemmen, 180 km fietsen en 42,2 km hardlopen. Rorik voltooit een triatlon met de volgende tijden: zwemmen 1:01:03 uur, fietsen 5:08:10 uur en hardlopen 3:22:53 uur.

- a** Bereken zijn totale tijd.
- b** Hoeveel procent van de totale tijd is aan het fietsen besteed?
- c** Bereken de gemiddelde snelheid in km per uur van Rorik tijdens het fietsen.

55 De voetbalclub VVI heeft 228 leden. Van deze leden is 15% jonger dan 12 jaar en 48% is ouder dan 18 jaar.

- a** Hoeveel leden heeft VVI vanaf 12 jaar tot en met 18 jaar?
- b** Van de leden jonger dan 12 jaar is $\frac{4}{17}$ deel een meisje. Welk deel van de leden is een meisje jonger dan 12 jaar? Geef je antwoord als breuk en als percentage.
- c** Van de voetbalclub Geel-Zwart is $\frac{1}{3}$ deel van de leden een meisje. Van deze meisjes is de helft jonger dan 12 jaar. Er zijn 23 meisjes jonger dan 12 jaar. Hoeveel leden heeft voetbalclub Geel-Zwart?





- 56** Bij de introductie van de euro in 2002 moesten er 46 miljard oude munten met een gemiddeld gewicht van 6,5 gram uit de roulatie worden genomen.
Een auto die geschikt is voor geldtransporten kan gemiddeld per rit 1800 kg aan muntgeld vervoeren.
Hoeveel van deze ritten waren er nodig om de hoeveelheid oude munten te vervoeren?

- 57** In de tabel zie je voor een aantal jaren het aantal studenten in het wetenschappelijk onderwijs in Nederland. In de laatste kolom staat de grootte van de Nederlandse bevolking.

<i>studiejaar</i>	<i>man</i> ($\times 1000$)	<i>vrouw</i> ($\times 1000$)	<i>bevolking</i> ($\times 10^6$)
2013–2014	121,9	127,6	16,78
2014–2015	124,3	130,4	16,83
2015–2016	127,3	132,1	16,90
2016–2017	130,2	135,8	16,98
2017–2018	135,5	142,6	17,08

Welke van de volgende conclusies kun je uit deze gegevens trekken? Geef steeds een verklaring van je antwoord.

- 1 Het aantal vrouwelijke studenten nam over deze jaren meer toe dan het aantal mannelijke studenten.
- 2 Het totale aantal studenten groeit in deze periode naar verhouding sneller dan de bevolking.
- 3 In de periode 2013–2018 volgen in verhouding steeds meer jongeren wetenschappelijk onderwijs.

Theorie

Standaardvorm of wetenschappelijke notatie

Grote getallen worden vaak in de standaardvorm of wetenschappelijke notatie geschreven.

Dit is een getal tussen 1 en 10, vermenigvuldigd met een macht van 10. De exponent geeft aan hoeveel plaatsen je de komma naar rechts moet verschuiven.

De standaardvorm wordt ook gebruikt voor heel kleine getallen. Het getal tussen 1 en 10 wordt dan vermenigvuldigd met een macht van 10 met een negatieve exponent. De exponent geeft aan hoeveel plaatsen je de komma naar links moet verschuiven.

Voorbeeld 1

Het getal 13 070 is in de standaardvorm $1,307 \times 10^4$.
Bij het getal 1,307 moet je de komma vier plaatsen naar rechts verschuiven.
 $13\ 070 = 1,307 \times 10^4$

Voorbeeld 2

Het getal 0,001 209 is in de standaardvorm $1,209 \times 10^{-3}$.
Bij het getal 1,209 moet je de komma drie plaatsen naar links verschuiven.
 $0,001\ 209 = 1,209 \times 10^{-3}$

S1 Schrijf in de standaardvorm.

a 28 030 000

c 0,023 01

b 80 000 000 000

d 0,000 000 19

Vaardigheid

Je kunt met een verhoudingstabel rekenen.

Bij de pijltjes boven en onder de tabel vermenigvuldig je van links naar rechts met hetzelfde getal of deel je door hetzelfde getal. Bij het pijltje rechts werk je van boven naar beneden. In de verhoudingstabel zijn de kruisproducten gelijk.

Voorbeeld

Tomaten kosten € 1,75 per 500 gram.
Hoeveel gram tomaten kun je kopen voor € 3,-?

Oplossing

<i>gewicht</i> in grammen	500	?
<i>bedrag</i> in euro's	1,75	3

kruisproduct $500 \times 3 = 1,75 \times ?$

$? = 500 \times 3 : 1,75 = 857,1\dots$

Voor € 3,- kun je 857 gram tomaten kopen.

S2 Bereken in de verhoudingstabellen a en b .

K	32,4	60
p	12	a

T	0,3	2,8
t	b	14,28

Vaardigheid

Je kunt breuken optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Om breuken te kunnen optellen of aftrekken moeten de noemers gelijk zijn. Als dat niet het geval is, moet je eerst de breuken gelijknamig maken.

Bij het vermenigvuldigen van breuken is het handig om de helen eerst als breuk schrijven. Vervolgens kun je de tellers met elkaar vermenigvuldigen en de noemers met elkaar vermenigvuldigen.

Bij het delen met breuken vermenigvuldig je boven en onder met hetzelfde getal.

Voorbeeld 1

$$\frac{17}{18} - \frac{1}{6} =$$

$$\frac{17}{18} - \frac{3}{18} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$2\frac{2}{5} + 1\frac{3}{4} =$$

$$2\frac{8}{20} + 1\frac{15}{20} = 3\frac{23}{20} = 4\frac{3}{20}$$

Voorbeeld 2

$$3\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} =$$

$$\frac{10}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{20}{15} = 1\frac{5}{15} = 1\frac{1}{3}$$

$$4 \times \frac{3}{7} =$$

$$\frac{4}{1} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$$

Voorbeeld 3

$$\frac{7}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{1} \times \frac{4}{4} = \frac{28}{1} = 28$$

$$\frac{3}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{5} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

S3 Bereken en noteer alle tussenstappen.

a $\frac{5}{8} + \frac{3}{4}$

d $\frac{1}{2} \times \frac{2}{11}$

b $1\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$

e $2\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$

c $2\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2}$

f $\frac{9}{\frac{3}{4}}$

Vaardigheid

Je kunt van breuken decimale getallen maken.

Breuken kun je als een deling invoeren op je rekenmachine.

Let op de betekenis van een geheel getal plus een breuk:

$4\frac{5}{13}$ betekent $4 + \frac{5}{13}$

Voorbeeld

$5 : 13 \approx 0,3846$

$4\frac{5}{13} = 4 + \frac{5}{13}$

$4\frac{5}{13} \approx 4,3846$

S4 Schrijf als decimaal getal, rond zo nodig af op drie decimalen.

a $\frac{5}{9}$

c $2\frac{6}{17}$

b $\frac{13}{25}$

d $12\frac{5}{8}$

Vaardigheid

Je kunt een deel van een hoeveelheid berekenen.

Je kunt op verschillende manieren een deel van een hoeveelheid uitrekenen.

Voorbeeld 1

Bereken 0,32 deel van € 142,-.

Oplossing

0,32 deel van € 142,- is $0,32 \times € 142,- = € 45,44$.

Voorbeeld 2

Bereken $\frac{2}{7}$ deel van 100 liter.

Oplossing

$\frac{1}{7}$ deel van 100 liter is $100 : 7 = 14,28... \text{ liter}$.

$\frac{2}{7}$ deel van 100 liter is $2 \times 14,28... \approx 28,6 \text{ liter}$.

S5 Bereken.

a $\frac{3}{7}$ deel van € 49,-

c $\frac{7}{20}$ deel van 280 gram

b $\frac{2}{15}$ deel van 83 meter

d 0,45 deel van 120 km

Vaardigheid

Je kunt met procenten rekenen.

Bij het rekenen met procenten kun je gebruik maken van een verhoudingstabel of van een geschikte vermenigvuldiging.

Als je een verhoudingstabel gebruikt, dan moet je vaststellen welke hoeveelheid hoort bij 100%.

Als je een vermenigvuldiging gebruikt, bedenk dan welke factor hoort bij de toename of afname.

Voorbeeld 1

Een flatscreen kost inclusief 21% btw € 745,-
Hoeveel kost deze flatscreen exclusief btw?

Oplossing

De prijs inclusief btw is $100\% + 21\% = 121\%$.

<i>prijs in euro's</i>	745	?
<i>percentage</i>	121	100

$$745 \times 100 = 121 \times ?$$

$$745 : 121 \times 100 = 615,702...$$

De flatscreen kost exclusief btw € 615,70.

Voorbeeld 2

Een laptop kost € 545,- exclusief 21% btw.
Bereken de prijs inclusief btw.

Oplossing

Er komt 21% bij.

De factor is $(100 + 21) : 100 = 1,21$.

De prijs inclusief btw is $1,21 \times € 545,- \approx € 659,45$.

- S6**
- Je krijgt 30% korting op een boek van € 19,95.
Hoeveel euro moet je betalen voor het boek?
 - De prijs van een DVD is verhoogd van € 15,- naar € 16,50.
Met hoeveel procent is de prijs verhoogd?
 - Een SD-kaart kost € 23,90 inclusief 21% btw.
Hoeveel euro kost de SD-kaart exclusief btw?

Vaardigheid

Je kunt een gemiddelde snelheid berekenen.

- Reken de totale tijd om naar minuten of seconden.
- Maak een verhoudingstabel met afstand en tijd.
- Bereken de afstand per tijdseenheid.

Voorbeeld

Een wielrenner heeft 48 km in 1:07:12,35 uur afgelegd.
Bereken zijn gemiddelde snelheid.

Oplossing

- 1:07:12,35 uur is $1 \times 3600 + 7 \times 60 + 12,35 = 4032,35$ seconden.

2	<i>afstand</i> in km	48	?
	<i>tijd</i> in seconden	4032,35	3600

- $48 \times 3600 = 4032,35 \times ?$
 $48 \times 3600 : 4032,35 \approx 42,8534$
Zijn gemiddelde snelheid was 42,85 km per uur.

- S7** Thomas heeft op de motor 78 km in 42:27 minuten afgelegd.
Bereken de gemiddelde snelheid van Thomas.

T1 Bereken en noteer alle tussenstappen.

a $\frac{5}{6} \times \left(\frac{7}{10} - \frac{2}{5}\right)$

d $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times 1\frac{1}{2}$

b $\frac{3}{\frac{2}{9}}$

e $\frac{7}{4} - 1\frac{1}{2}$

c $2\frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{6}$

f $\frac{7}{8} - \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{6}\right)$

T2 Alle 126 leerlingen van een lerarenopleiding hebben een rekentest gemaakt, waarvoor maximaal 82 punten konden worden behaald. $\frac{3}{7}$ deel van deze leerlingen scoorde minder dan 50 punten, waarvan de helft minder dan 40 punten behaalde. $\frac{1}{6}$ deel van de leerlingen scoorde meer dan 60 punten.

- a** Hoeveel leerlingen scoorden minder dan 40 punten?
- b** Welk deel van de leerlingen haalde een score van minstens 50 punten en hoogstens 60 punten?

T3 Angela reist met de Eurostar van Amsterdam naar Londen. De afstand van Amsterdam tot de Kanaaltunnel bij Calais bedraagt ongeveer 380 km. Daarvan is $\frac{3}{19}$ deel in Frankrijk, de helft in België en de rest in Nederland. Vanaf Calais tot Londen is de afstand nog 90 mijl (1 mijl $\approx$ 1,6 km).

- a** Bereken het aantal kilometers van deze reis in Frankrijk.
- b** Hoeveel procent van de totale afstand wordt in Nederland afgelegd?
- c** De totale reistijd tussen Amsterdam en Londen is 3:55 uur. Bereken de gemiddelde snelheid van de Eurostar tussen Amsterdam en Londen.



- T4**
- a** Een schoenwinkel geeft in de opruiming 25% korting. Lia ziet een paar laarzen die met korting € 123,75 kosten. Hoeveel kostten deze laarzen vóór de opruiming?
 - b** Een fiets wordt door een handelaar voor € 455,- ingekocht. De handelaar verhoogt de prijs eerst met 25%. Vervolgens moet over de nieuwe prijs nog 21% btw berekend worden. Bereken de prijs die de klant moet betalen.
 - c** Voor een artikel wordt € 51,- aan btw betaald. Bereken de prijs van het artikel voor de klant, dus inclusief btw.

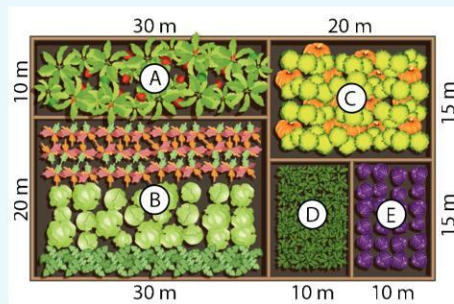
- T5**
- Een wielrenner rijdt een tijdrif over 5 km in 8:46,15 minuten. Bereken zijn gemiddelde snelheid in km per uur.
 - Tijdens de training reed hij 7,1 km in een tijd van 13:15,23 minuten. Ga na of zijn gemiddelde snelheid toen hoger was dan gedurende de tijdrif.

- T6** Bereken en schrijf de antwoorden in de standaardvorm. Rond het voorste getal af op drie decimalen.

- $123\,000 \times 456\,798$
- $0,0271 : 123\,619\,000\,000$
- 9071^{12}
- $\frac{1}{8} \times 0,000\,003\,45$
- $0,000\,13^7$

- T7** Een stuk land is in percelen verdeeld. Elk van de percelen wordt verhuurd als volkstuin. Het hele stuk grond moet € 2.700,- per jaar opbrengen. Tussen de percelen komt een afrastering van gaas. Van zo'n afrastering tussen twee volkstuinen moet iedere huurder de helft betalen. Het gaas inclusief de bijbehorende paaltjes kost € 32,- per strekkende meter.

- Hoeveel moet voor elk van de percelen aan huur betaald worden?
- Ga voor ieder perceel na welk deel van de kosten voor de afrastering betaald moet worden.
- Bereken voor ieder perceel de totale kosten voor huur en afrastering samen.



- T8** De snelheid van het licht is ongeveer $2,998 \times 10^8$ meter per seconde. Een lichtjaar is de afstand die het licht in één jaar aflegt.
- Toon aan dat een lichtjaar ongeveer $9,45 \times 10^{12}$ km is.
 - De afstand van de Aarde tot de ster Castor is $4,3 \times 10^{14}$ km. Hoeveel lichtjaren is de afstand van Castor tot de aarde?
 - De Poolster staat 425 lichtjaar van ons verwijderd. Hoeveel kilometer is dat?

Je kunt met een verhoudingstabel rekenen.

- E1** Bereken in de verhoudingstabellen a , b en c met kruisproducten.

x	18	60
y	38	a

p	1,40	0,85	c
q	12,82	b	61,90

Je kunt breuken optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

- E2** Bereken en noteer alle tussenstappen.

a $\frac{5}{7} \times \frac{3}{10} - \frac{6}{35}$	d $(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}) \times 1\frac{1}{2}$
b $\frac{5}{\frac{2}{7}}$	e $\frac{7}{\frac{6}{11}}$
c $2\frac{1}{5} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{5}$	f $\frac{7}{8} - \frac{6}{7} + \frac{1}{7}$

Je kunt van breuken decimale getallen maken.

- E3** Schrijf als decimaal getal, rond zo nodig af op drie decimalen.

a $\frac{15}{29}$	c $1\frac{5}{18}$
b $14\frac{29}{40}$	d $\frac{5}{8}$

Je kunt een deel van een hoeveelheid berekenen.

- E4** In een stad zijn 15 360 woningen. Daarvan bestaat $\frac{1}{4}$ deel uit flats en $\frac{2}{5}$ deel uit rijtjeshuizen.
- Bereken het aantal flats en het aantal rijtjeshuizen.
 - $\frac{5}{8}$ deel van de flats en de helft van de rijtjeshuizen zijn huurwoningen.
Hoeveel huurwoningen zijn er?



Je kunt met procenten rekenen.

- E5** Bij een plaatselijke sportzaak kunnen leden van de voetbalvereniging VCC artikelen kopen met 5% korting.
- Arthur is lid van VCC. Hij koopt een shirt dat normaal € 45,90 kost en een broek die normaal € 37,50 kost.
Hoeveel euro moet hij betalen?
 - Arthur betaalt voor een paar schoenen € 91,15.
Hoeveel euro is de normale verkoopprijs van deze schoenen?

Je kunt met een gemiddelde snelheid berekenen.

- E6** Kipkemoi won in 2018 de marathon van Rotterdam in een tijd van 2:05:43. Een marathon is 42 km en 195 m lang.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in km per uur en in meter per seconde.

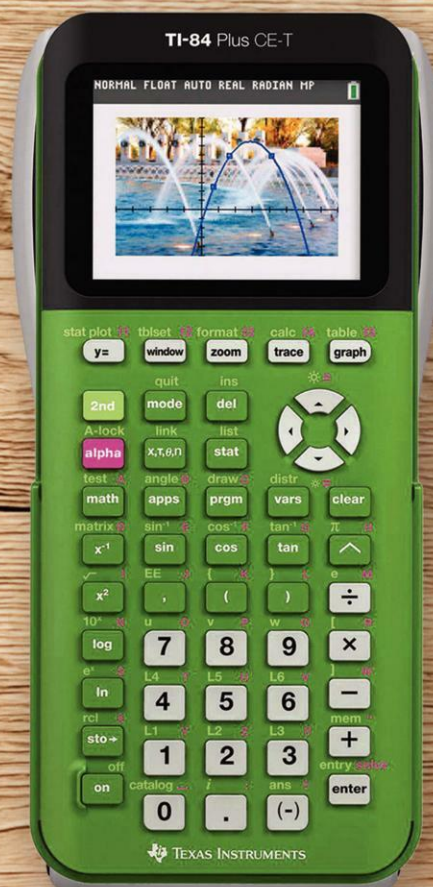
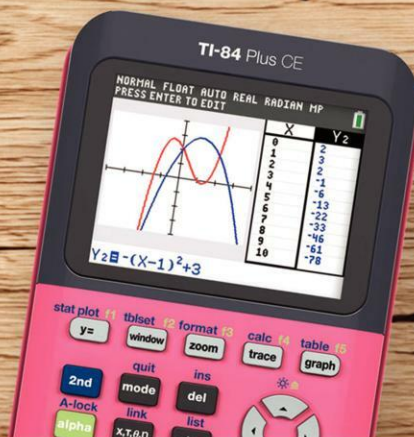
- E7** Eén cm^3 fijn zand bestaat uit ongeveer 15 000 korrels. Geef je antwoorden in deze opdracht in de standaardvorm. Rond het voorste getal indien nodig af op twee decimalen.
- a** Hoeveel zandkorrels zitten er in 250 cm^3 ?
 - b** Bereken het aantal korrels fijn zand in 1 m^3 .
 - c** Bereken het volume in cm^3 dat één zandkorrel inneemt.



- E8** Bij een snelheid van 110 km per uur heeft de auto een ‘verbruik’ van 1 op 14. Dat wil zeggen dat als de auto met een snelheid van 110 km per uur rijdt, 1 liter benzine nodig is voor 14 km. In het instructieboekje staat dat het verbruik met 25% toeneemt als de snelheid van 110 naar 130 km per uur toeneemt. Bij een snelheid van 90 km per uur ligt het verbruik 15% lager.
- a** Bereken het verbruik bij een snelheid van 130 km per uur.
 - b** Bereken het verbruik bij een snelheid van 90 km per uur.
 - c** Het verbruik wordt ook vaak gegeven als het aantal liters waarmee 100 km kan worden afgelegd. Bereken het verbruik bij 130 km per uur en bij 90 km per uur op deze manier.

- E9** Een fietsenhandelaar verkoopt onder andere fietsen van het type City Runner. Van dit type stijgt de prijs ieder jaar met 4%. Het aantal fietsen van het type City Runner dat de fietsenhandelaar verkoopt, stijgt jaarlijks met 6%.
- a** In 2018 kostte een fiets van dit type € 680,-. Hoeveel kost de fiets een jaar later?
 - b** Hoeveel kostte de fiets in het jaar 2017?
 - c** In 2018 verkocht de fietsenhandelaar 32 fietsen van het genoemde type. Hoeveel fietsen van dit type zal hij in 2019 verkopen?
 - d** Met hoeveel procent zal de omzet per jaar stijgen?

- E10** Tijdens een treinreis in Engeland vraagt Ed zich af hoe snel de trein rijdt. Langs de spoorbaan ziet hij mijlpalen staan. Er verlopen steeds ongeveer 38 seconden tussen het passeren van twee opeenvolgende mijlpalen. (1 mijl $\approx$ 1,6 km)
- a** Bereken de snelheid van de trein in km per uur.
 - b** De trein rijdt in de Kanaaltunnel met een snelheid van 220 km per uur. Hoeveel tijd verloopt dan tussen het passeren van twee mijlpalen?

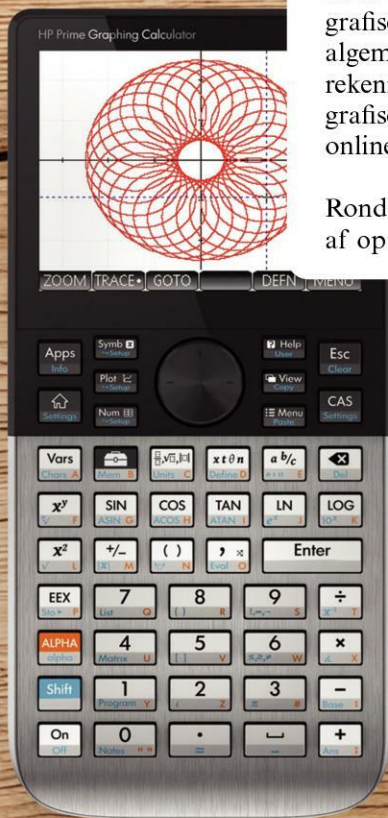
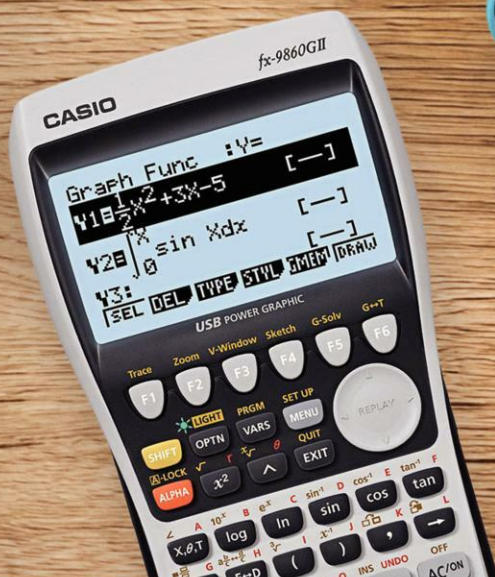


De grafische rekenmachine

In dit hoofdstuk

In de bovenbouw werk je bij het vak wiskunde met een grafische rekenmachine. In dit hoofdstukje vind je een algemene introductie voor het werken met een grafische rekenmachine. De informatie voor het werken met een grafische rekenmachine van een specifiek merk vind je online.

Rond alle antwoorden van de opdrachten in dit hoofdstukje af op twee decimalen.



Grafieken op de rekenmachine

- 1 Voer de formule $y = x^2 - 4x$ in op je rekenmachine. Laat de grafiek op je scherm verschijnen. Maak een schets.

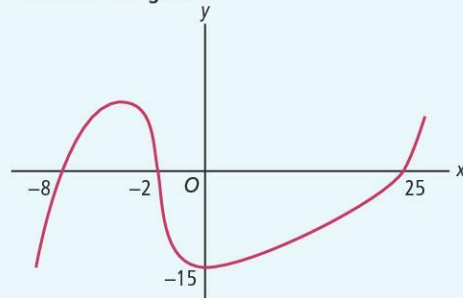
Theorie

Je kunt een grafische rekenmachine of een computerprogramma een grafiek laten tekenen. Dat heet **plotten**.

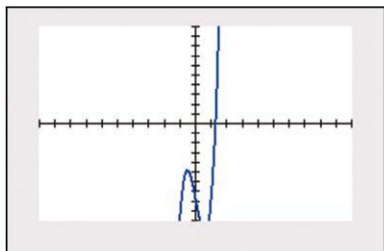
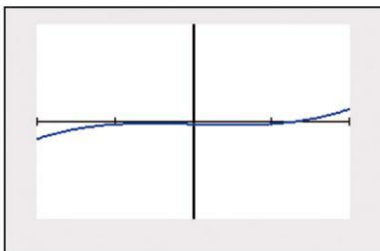
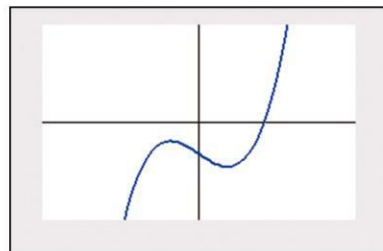
Schetsen houdt in dat je het verloop van de grafiek en de snijpunten met de assen aangeeft in je tekening.

Tekenen houdt in dat je nauwkeurig werkt. Het is dan nodig om méér punten van de grafiek te bepalen, bijvoorbeeld met een tabel. Je moet alle berekende punten van de grafiek nauwkeurig in het assenstelsel aangeven.

Schets van een grafiek



- 2 Gegeven is de formule $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$. Plot de grafiek bij deze formule. Neem de horizontale as van -4 tot 5 en de verticale as van -20 tot 15 . Schets de grafiek.
- 3 De grafiek bij de formule $y = 10x^3 - 9x - 8$ is drie keer geplot.
- In welke plot is de grafiek volgens jou het beste in beeld?
 - In de tweede plot is de bovenste helft van het venster vrijwel leeg. Om dat te voorkomen, kun je de maximale y -waarde veranderen. Moet deze waarde hoger of lager worden?

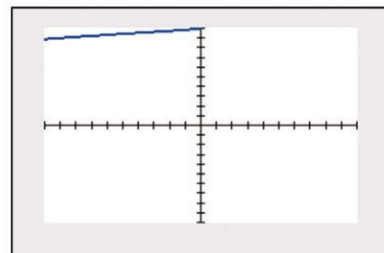


Vensterinstelling en tabellen maken

- 4 Gegeven is de formule $y = -\frac{1}{2}x^2 + 40x$.
- Geert maakt een tabel bij deze formule die begint bij $x = 0$ met stapgrootte 1.
Waarom is dit geen verstandige keuze?
 - Geef een betere keuze voor de startwaarde en de stapgrootte.
 - Teken een assenstelsel en gebruik de gegevens van de tabel om de grafiek bij de formule te tekenen.

Door het veranderen van de vensterinstelling kun je de grafiek beter in beeld krijgen. Daarbij is het vaak handig eerst met je rekenmachine een tabel te maken.

- 5 De grafiek bij de formule $y = \sqrt{2x + 100}$ is geplot.
- Wat is de kleinste waarde van x die je bij deze formule kunt invullen?
 - Welke instelling van het venster kies je om de grafiek bij de formule goed in beeld te krijgen?
- 6 De hoogte van een afgeschoten projectiel kun je berekenen met de formule $h = 15t - 4,9t^2$. Hierbij is h de hoogte in meters en is t de tijd in seconden.
- Waarom hoef je in dit geval voor de instelling van je venster alleen maar waarden groter dan of gelijk aan 0 te kiezen?
 - Welke waarden kunnen h en t ongeveer aannemen?
Maak zo nodig eerst een tabel.
 - Plot en schets een grafiek bij de hoogte van het projectiel.



Deze formule voer je in je rekenmachine in als $y = 15x - 4,9x^2$.

Theorie

Je moet de **vensterinstelling** van je rekenmachine zo kiezen, dat je een goed beeld krijgt van de grafiek. Je let daarbij op de volgende punten:

- Van enkele formules ken je de vorm van de bijbehorende grafiek. Kies waarden van x en y waarvoor je die vorm goed in beeld krijgt.
- Bij veel formules is het maken van een tabel een goed hulpmiddel om te ontdekken welke uitkomsten kunnen voorkomen.
- Als de variabelen een praktische betekenis hebben, zoals tijd of hoogte, neem je alleen waarden waarvoor de variabelen zinvol zijn.

De standaard vensterinstelling is:

$X_{\min} = -10$
 $X_{\max} = 10$
 $Y_{\min} = -10$
 $Y_{\max} = 10$

- 7 Geef bij deze formules een vensterinstelling waarbij de plot een goed beeld van de grafiek geeft.

a $y = (x + 12)(x - 10)$ c $y = 20 \cdot 1,05^x$
 b $y = 100 + \frac{3}{x}$ d $y = \frac{5}{x + 2}$

Toppen en snijpunten

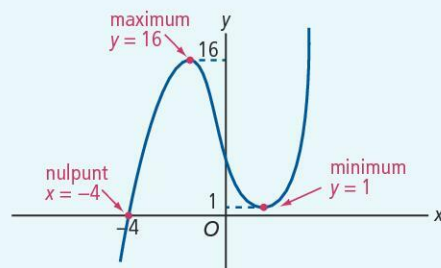
- 8 Gegeven is de formule $y = x^3 - 6x^2 - x - 5$.
- a Plot de grafiek. Neem de verticale as en de horizontale as van -10 tot 10 . Pas je instellingen daarna aan totdat je een goed beeld van de grafiek krijgt. Bij welke instellingen is dat het geval?
- b Zoek uit hoe je op jouw rekenmachine de coördinaten van de toppen en de snijpunten met beide assen kunt vinden en geef de coördinaten van deze punten.

Theorie

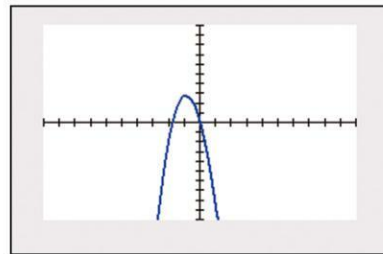
Een **nulpunt** van een formule is de waarde van x waarbij de uitkomst van de formule gelijk is aan 0 . Bij een nulpunt snijdt de grafiek bij de formule de x -as.

De formule waarvan hiernaast de grafiek staat, heeft één nulpunt. De grafiek heeft twee toppen. De y -coördinaat van de top is een maximum of een minimum van de formule.

Maximum en minimum heten ook wel **extreme waarden**.



- 9 Gegeven is de formule $y = -\frac{1}{2}x^4 + 5x - 1$.
- a Bereken de nulpunten van deze formule.
- b Bereken de coördinaten van de top van de grafiek.
- 10 Susan heeft de grafiek bij de formule $y = 0,2x^3 - 3x^2 - 6x$ geplot en denkt dat er twee nulpunten zijn. Carl beweert dat er drie nulpunten zijn.
- a Welke aanwijzing zal Carl aan Susan geven zodat zij ook het derde nulpunt kan vinden?
- b Bereken met je rekenmachine de drie nulpunten. Schrijf op hoe je de rekenmachine hebt gebruikt om de drie nulpunten te vinden.



Vergelijkingen oplossen

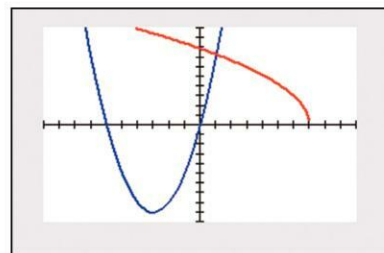
De vergelijking $x^2 + 6x = 3\sqrt{-x + 7}$ kun je niet oplossen met algebra.

Je kunt de oplossingen wel vinden door met je rekenmachine de coördinaten te berekenen van de snijpunten van de grafieken

van de formules $y = x^2 + 6x$ en $y = 3\sqrt{-x + 7}$.

De x -coördinaten van de snijpunten zijn de oplossingen van de vergelijking.

- 11 De grafieken van $y = x^2 + 6x$ en $y = 3\sqrt{-x + 7}$ zijn geplot.
- Bij de standaardinstelling van je venster krijg je niet alle snijpunten van de grafieken in beeld.
Geef een vensterinstelling waarbij dat wel het geval is.
 - Los de vergelijking $x^2 + 6x = 3\sqrt{-x + 7}$ met je rekenmachine op.
 - Los ook op: $x^2 + 6x < 3\sqrt{-x + 7}$



Theorie

Als je de rekenmachine gebruikt om bijvoorbeeld nulpunten te bepalen of om vergelijkingen op te lossen, doe je **verslag** van de manier waarop je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij moet je de volgende onderdelen opnemen: Invoer, Vensterinstelling en de gebruikte Opties.

Voorbeeld 1

Bereken de toppen van de grafiek van $y = x^4 - 5x^2 - 3x + 2$.

Oplossing

Invoer: $y = x^4 - 5x^2 - 3x + 2$

Venster: x van -10 tot 10 en y van -10 tot 10

Opties: minimum en maximum

De toppen zijn: $(-1,40; 0,24)$, $(1,71; -9,20)$ en $(-0,31; 2,46)$.

Voorbeeld 2

Los op $x^2 + 12x = 2\sqrt{x + 27}$.

Oplossing

Invoer: $y_1 = x^2 + 12x$ en $y_2 = 2\sqrt{x + 27}$

Venster: x van -30 tot 10 en y van -40 tot 20

Opties: snijpunten

De oplossingen zijn $x = -12,60$ en $x = 0,82$.

- 12 Bereken met de rekenmachine voor elke formule de nulpunten en de coördinaten van de toppen van de grafiek. Doe verslag van de manier waarop je de rekenmachine hebt gebruikt.
- $y = x^2 + 4x - 7$
 - $y = 200x^3 - 50x$
 - $y = 1000 - 11 \cdot 1,43^x$
 - $y = 19 - 3\sqrt{x}$



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je de coördinaten van snijpunten van grafieken berekend. Daarvoor moest je een vergelijking oplossen. Ook heb je ongelijkheden opgelost.

In dit hoofdstuk ga je vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met de grafische rekenmachine. Dankzij de grafische rekenmachine kun je ook moeilijkere vergelijkingen en ongelijkheden oplossen. Ook gebruik je de grafische rekenmachine om de coördinaten van toppen van een grafiek te berekenen.

Deze kennis heb je nodig in alle hoofdstukken waarin formules of vergelijkingen voorkomen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- | | |
|---|-------------|
| • <i>Probleem oplossen en analytisch denken</i> | opdracht 31 |
| • <i>Ordenen en structureren</i> | opdracht 45 |
| • <i>Abstraheren</i> | opdracht 22 |
| • <i>Logisch redeneren en bewijzen</i> | opdracht 38 |

●	$K = 2g(g-5)$
●	$\begin{array}{c c c} x & g & -5 \\ \hline 2g & 2g^2 & \dots \end{array}$
●	$K = \dots - \dots$

●	$K = 2g(g-5)$
●	$K = \dots - \dots$

V1 Op de blaadjes zie je hoe je de formule $K = 2g(g - 5)$ zonder haakjes kunt schrijven.
Vul de blaadjes verder in.

V2 Schrijf zonder haakjes.

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| a $y = 3(4x + 1)$ | e $T = 7t(t - 1)$ |
| b $K = -2(p - 3)$ | f $h = -3b(b - 1,2)$ |
| c $W = q(q + 2)$ | g $C = -d(d - 4)$ |
| d $b = 6(a^2 - 2,5)$ | h $L = 1,2g(g^2 + 3)$ |

Theorie

Soms kun je, nadat je de haakjes hebt weggewerkt, de formule nog korter schrijven door gelijksoortige termen samen te nemen.

In de formule $K = 2p + 6p - 5$ zijn $2p$ en $6p$ gelijksoortige termen. Deze formule kun je schrijven als $K = 8p - 5$.

Voorbeeld

Schrijf $y = 5x - 2x(x-3)$ zonder haakjes en zo kort mogelijk.

Oplossing

$\times$	x	-3
$-2x$	$-2x^2$	$+6x$

$$y = 5x - 2x^2 + 6x$$

$$y = -2x^2 + 11x$$

V3 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

- | | |
|--|--|
| a $P = 7k + 2(k - 5)$ | d $Q = 7w - 5(2 - w)$ |
| b $V = 4(5q + 2) - 6$ | e $T = 2\frac{1}{2} + 5(g - 2)$ |
| c $a = 1\frac{1}{2}(6b - 4) - 5b$ | f $k = d^2 - 3d(4 - d)$ |

- V4**
- Teken in één assenstelsel bij beide tabellen een grafiek.
 - Eén van de grafieken is een rechte lijn.
Leg uit hoe je dat aan de tabel kunt zien.
 - Schrijf het startgetal en het hellingsgetal van de lijn op.
 - Geef een formule die bij de rechte lijn hoort.
 - Hoe heet de grafiek bij de andere tabel?

A

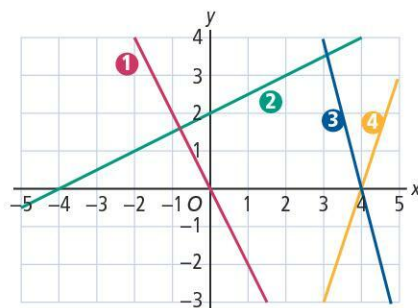
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-2	1	4	7	10	13	16

B

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	17	7	1	-1	1	7	17

- V5** In het assenstelsel zie je vier rechte lijnen die horen bij de lineaire formules hieronder. Geef bij elke formule aan welke van de vier lijnen erbij hoort. Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

- A $y = 3x - 12$
 B $y = -2x$
 C $y = \frac{1}{2}x + 2$
 D $y = -4x + 16$



Theorie

Een **lineair verband** kun je herkennen aan de grafiek, de tabel of de formule.

Bij een lineair verband is de toename of afname per eenheid steeds hetzelfde en de formule is van de vorm $y = ax + b$.

In de formule $y = ax + b$ is a het **hellingsgetal** of de **richtingscoëfficiënt** en b het **startgetal**.

Voorbeeld

x	0	1	2	3
y	-5	-2	1	4

$\begin{matrix} \text{+3} & \text{+3} & \text{+3} \end{matrix}$ is constant

Bij de tabel hoort een lineair verband met richtingscoëfficiënt 3 en startgetal -5. Bij de tabel hoort de formule $y = 3x - 5$.

- V6** a Bij welke tabel(len) kan het gaan om een lineair verband?

A

x	0	1	2	3	4
y	24	12	6	3	1,5

C

x	0	1	2	3	4
y	4	9	14	19	24

B

x	0	1	2	3	4
y	18	16,5	15	13,5	12

D

x	0	1	2	3	4
y	2	22	42	62	82

- b Geef bij de tabellen die bij een lineair verband horen een formule.

- V7** Op het blaadje zie je hoe je de vergelijking $5x + 8 - 3x = 14$ kunt oplossen.

- a Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
 b En wat is er bij stap 2 gebeurd?
 c Controleer de oplossing $x = 3$ door het getal 3 in te vullen in de vergelijking $5x + 8 - 3x = 14$.

$5x + 8 - 3x = 14$	
$2x + 8 = 14$	1
$2x = 6$	2
$x = 3$	3

- V8** Los de vergelijkingen op.

- a $5x + 8 = 48$ d $123 = 30p - 37 + 10p$
 b $7b + 13 = 83$ e $12y + 75 = 123$
 c $125 - 7x - 2x = 80$ f $c + 215 - 7c = 140$

2.1 Lineaire verbanden

Je leert

- hoe je een formule bij een lineair verband opstelt
- hoe je een lineaire vergelijkingen oplost met de balansmethode

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–03–4–5–06–7
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7
- uitdagend: 1–3–4–5–6–7–U1

Meneer de Wit huurt een auto. Hij krijgt de auto mee met een volle tank met benzine. Aan het eind van de dag levert hij de auto weer in met een tank die voor ongeveer een derde deel gevuld is. Hij wil graag weten hoeveel liter benzine de auto gemiddeld gebruikt heeft per kilometer.

- Welke gegevens heeft hij nodig?
- Hoe kan hij met die gegevens het gemiddelde verbruik berekenen?



- 1 Een volle rol elektriciteitsdraad bevat 100 meter draad. Om te weten te komen hoeveel meter er op een aangebroken rol zit, kun je de rol wegen. De lege rol weegt 2,8 kg en een volle rol 10,8 kg.
- Hoeveel weegt 100 meter draad zonder de rol?
 - Waarom is er sprake van een lineair verband?
 - Vul de tabel verder in en teken een grafiek bij deze tabel.
 - Laat zien dat per meter draad het gewicht van de rol met 0,08 kg toeneemt.
 - Het verband tussen de lengte l in meters en het gewicht g in kg kun je weergeven met de formule $g = 2,8 + 0,08l$. Welk getal is in deze formule het startgetal en welk getal is de richtingscoëfficiënt?

<i>lengte in m</i>	<i>gewicht in kg</i>
0	2,8
20	...
40	...
60	...
80	...
100	10,8

- 2 In een zwembad staat 50 cm water. Het zwembad wordt verder gevuld. Het zwembad heeft de vorm van een balk. Het water stroomt met een constante snelheid en vult het zwembad in 60 uur tot een hoogte van 290 cm. De formule $h = \dots \times t + \dots$ geeft de hoogte h in cm na een tijd van t uren.
- Vul de tabel in.
 - Hoeveel cm stijgt het waterniveau per 10 uur? En per uur?
 - Welke waarde heeft het startgetal? En welke waarde heeft de richtingscoëfficiënt?
 - Maak de formule af.

<i>tijd in uren</i>	<i>hoogte in cm</i>
0	...
10	...
20	...
30	...
40	...
50	...

Aanpak

Hoe stel je een formule op bij een lineair verband?

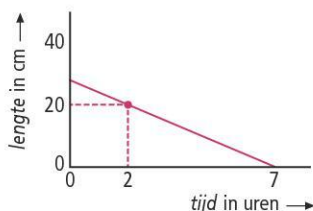
- 1 Schets eventueel eerst een grafiek bij de situatie.
- 2 Ga na welke variabelen worden gebruikt en schrijf de algemene formule voor het lineaire verband op.
- 3 Bereken de toename per (tijds-)eenheid is. Dat is de richtingscoëfficiënt.
- 4 Zoek uit wat de beginhoeveelheid b is. Dat is het startgetal. De grafiek snijdt de verticale as in het punt $(0, b)$.
- 5 Vul de richtingscoëfficiënt en het startgetal in de algemene formule in.

Voorbeeld

De lengte van een brandende kaars neemt lineair af. Na 2 uur is de kaars 20 cm en na 7 uur is de kaars opgebrand. Stel een formule op waarmee je de lengte L van de kaars na t uren kunt berekenen.

Oplossing

1



2 $L = at + b$

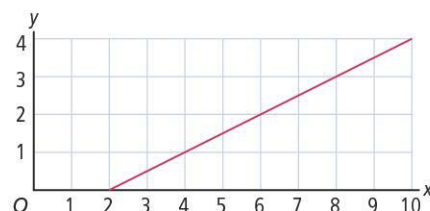
3 In 5 uur neemt de lengte 20 cm af.
Per uur neemt de lengte $20 : 5 = 4$ cm af.
De richtingscoëfficiënt is -4 .

4 Na 0 uur was de lengte $20 + 2 \times 4 = 28$ cm.
Het startgetal is 28.

5 $L = -4t + 28$

Ondersteunende route → maak opdracht 03

- 3
- H**
- a Stel een formule op bij de getekende lijn.
 - b Stel een formule op bij de lijn door de punten $A(0, 6)$ en $B(3, 0)$.
 - c Stel ook een formule op bij de lijn door de punten $C(-2, 1)$ en $D(2, 13)$



- 4
- Bij een boerderij staan twee tanks voor water. Tank A heeft een inhoud van 900 liter en tank B heeft een inhoud van 1200 liter.
- a Bij het begin van het vullen van tank A zit er al 60 liter water in. De tank wordt met een constante snelheid gevuld met water. Na 70 minuten is de tank vol. Stel een formule op waarmee je de hoeveelheid water W in liters na de tijd t in minuten kunt berekenen.
 - b Tank B wordt gelijktijdig met een andere kraan gevuld. Bij het begin van het vullen is deze tank helemaal leeg. Het duurt 80 minuten om deze tank te vullen. Stel ook een formule op bij de hoeveelheid water W en de tijd t in minuten voor tank B.
 - c Gebruik de formules om aan te tonen dat er in de tanks na 20 minuten evenveel water zit.

- 5 Bij het moment waarop in de tanks van opdracht 4 evenveel water zit, hoort de vergelijking $12t + 60 = 15t$. Op het blaadje is de vergelijking opgelost.
- Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
 - En wat is er bij stap 2 gebeurd? En in stap 3?
 - Controleer de oplossing $t = 20$ door het getal 20 in te vullen in de vergelijking $12t + 60 = 15t$.

	$12t + 60 = 15t$	
	$60 = 3t$	1
	$3t = 60$	2
	$t = 20$	3

Theorie

Een **eerstegraads vergelijking** of **lineaire vergelijking** kun je oplossen met **de balansmethode**: links en rechts van het gelijkteken voer je dezelfde bewerking uit. Daarmee vereenvoudig je de vergelijking zo ver dat de onbekende nog maar aan één kant van het gelijkteken staat. Soms moet je eerst breuken of haakjes wegwerken.

Voorbeeld 1

Los op $5x + 2 = 3x - 10$.

Oplossing

$$5x + 2 = 3x - 10$$

$$2x + 2 = -10$$

$$2x = -12$$

$$x = -12 : 2 = -6$$

De oplossing is $x = -6$.

links en rechts $-3x$

links en rechts -2

links en rechts $:$ 2

Voorbeeld 2

Los op $2(x - 1) = -4x + 7$.

Oplossing

$$2(x - 1) = -4x + 7$$

$$2x - 2 = -4x + 7$$

$$6x - 2 = 7$$

$$6x = 9$$

$$x = 9 : 6 = 1\frac{1}{2}$$

De oplossing is $x = 1\frac{1}{2}$

haakjes wegwerken

links en rechts $+4x$

links en rechts $+2$

links en rechts $:$ 6

Ondersteunende route → maak opdracht O6

- 6 Los de vergelijkingen op.

H

a $-3x + 8 = 2x - 12$

d $10 - 4x = -7x + 1$

b $8(x - 1) = -2x + 12$

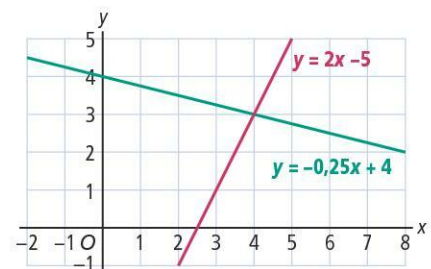
e $5(2 + x) = -x + 4$

c $\frac{1}{2}x - 5 = 1\frac{1}{2}x + 1$

f $4(x - 8) = 3(11 - 2x)$

- 7 Je ziet de grafieken bij de formules $y = 2x - 5$ en $y = -0,25x + 4$.

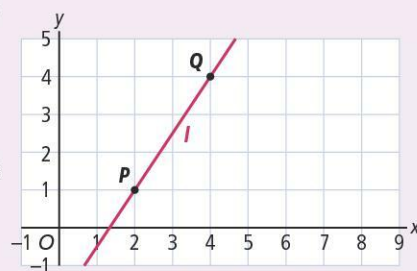
- Lees de coördinaten van het snijpunt af.
- Leg uit dat je de x -coördinaat van het snijpunt kunt vinden door de vergelijking $2x - 5 = -0,25x + 4$ op te lossen.
- Los de vergelijking op.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen bij de formules $y = 3x - 7$ en $y = -x + 11$.



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 03** Om een formule bij lijn l op te stellen, zijn de punten P en Q op lijn l gekozen. Beide punten hebben gehele coördinaten.
- Hoeveel neemt de x -coördinaat tussen de punten P en Q toe? En hoeveel is de toename van de y -coördinaat?
 - Bereken de richtingscoëfficiënt van lijn l .
 - Hoeveel stappen moet je van uit punt P naar links om bij de verticale as uit te komen?
 - Leg uit dat lijn l de verticale as snijdt in het punt $(0, -2)$.
 - Hoe groot is dus het startgetal van lijn l ?
 - Geef de formule van lijn l .
 - Stel een formule op bij de lijn door de punten $A(0, 12)$ en $B(4, 0)$.
 - Stel ook een formule op bij de lijn door de punten $C(-1, 3)$ en $D(5, 15)$.



- 06** Op het blaadje zie je hoe de lineaire vergelijking $2(x - 3) = -3x + 14$ is opgelost.
- Noteer bij elke stap welke bewerking is gedaan.
 - Controleer de oplossing van de vergelijking door die links en rechts van het gelijkteken in de vergelijking $2(x - 3) = -3x + 14$ in te vullen.

☐	$2(x - 3) = -3x + 14$	
☐	$2x - 6 = -3x + 14$	1
☐	$5x - 6 = 14$	2
☐	$5x = 20$	3
☐	$x = 4$	4

Los de vergelijkingen op.

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| c $2x + 8 = x - 13$ | f $5(2 - x) = 1 + 5x$ |
| d $8x - 1 = -2x + 19$ | g $12x + 10 = 5(2x + 6)$ |
| e $-2x - 5 = x + 1$ | h $-2(x - 7) = 5(x - 3) - 6$ |

Uitdagende opdrachten

- U1** De families de Leeuw, de Jong en de Vries betalen voor het verbruik van water hetzelfde vaste bedrag per jaar en hetzelfde bedrag voor elke verbruikte kubieke meter.
- In 2017 heeft de familie de Leeuw 87 m^3 water verbruikt en moet € 140,79 betalen. De familie de Jong verbruikten dat jaar 95 m^3 en moeten € 149,35 betalen. De familie de Vries moet € 127,95 betalen.
- Hoeveel m^3 water heeft de familie de Vries verbruikt?



2.2 Herleiden van formules

Je leert

- hoe je een variabele uitdrukt in een andere variabele
- hoe je in een formule een variabele vervangt door een andere formule

Leerroutes

- ondersteunend: 8–9–010–11–012–13–14–015–15
- doorlopend: 8–9–10–11–12–13–14–15–16
- uitdagend: 8–9–10–11–12–13–15–16–U2

In de supermarkt kosten vijf citroenen en één meloen samen € 4,35. Bij deze supermarkt kosten acht citroenen en één meloen € 6,-. Sofie wil twee meloenen en zo veel mogelijk citroenen kopen, maar ze heeft slechts € 5,- bij zich.

- Hoeveel citroenen kan ze maximaal kopen?



- 8 Jamila heeft nog € 10,- in haar portemonnee en wil hiervoor walnoten en dadels kopen. Ze betaalt per 100 gram walnoten € 2,- en per 100 gram dadels € 1,25.

- a Hoeveel gram dadels kan ze kopen als ze besluit 200 gram walnoten te nemen?

- b Het verband tussen de hoeveelheid walnoten en de hoeveelheid dadels wordt gegeven door de formule $2w + 1,25d = 10$.

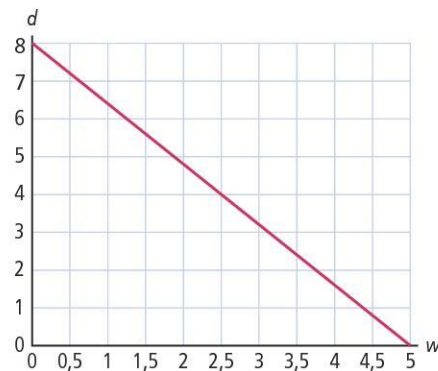
Leg deze formule uit en beschrijf nauwkeurig de betekenis van de variabelen w en d .

- c Bereken d in het geval $w = 0$ en geef de betekenis van de uitkomst.

- d Bereken ook w in het geval $d = 0$ en geef de betekenis van de uitkomst.

- e De grafiek hoort bij de formule $2w + 1,25d = 10$.

Ga na of deze grafiek overeenkomt met je antwoorden van de opdrachten a, c en d.



- 9 De grafiek van opdracht 8 hoort bij de formule $2w + 1,25d = 10$.

- a Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de grafiek? En hoe groot is het startgetal van de grafiek?

- b Schrijf de formule in de vorm $d = \dots w + \dots$.

- c Op het blaadje zie je hoe je de formule $7x - 2y = 14$ kunt schrijven als $y = 3,5x - 7$.

Laat op dezelfde manier zien dat je de formule $2w + 1,25d = 10$ kunt schrijven als $d = -1,6w + 8$.

●	$7x - 2y = 14$	
●	$-2y = 14 - 7x$	links en rechts $-7x$
●	$y = 3,5x - 7$	links en rechts : 2

Theorie

De grafiek hoort bij de formule $3p + 5q = 15$.
Als je q wilt berekenen als je p weet, dan kun je de **formule herleiden** zodat q wordt **uitgedrukt in p** .
Bij het herleiden gebruik je de balansmethode.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $3p + 5q = 15$.
Herleid de formule waarbij je q uitdrukt in p .

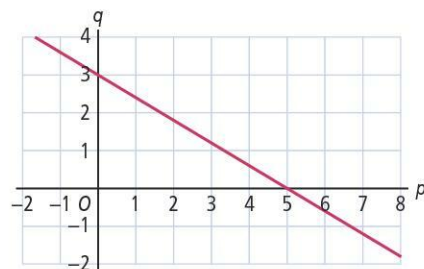
Oplossing

$$3p + 5q = 15$$

$$5q = 15 - 3p \quad \text{links en rechts } -3p$$

$$q = 3 - 0,6p \quad \text{links en rechts : } 5$$

De formule wordt $q = -0,6p + 3$ of $q = 3 - 0,6p$.



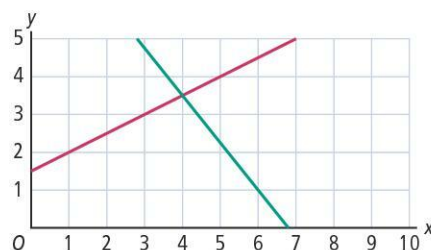
Ondersteunende route → maak opdracht 010

- 10 Herleid de formules waarbij je b uitdrukt in a .

- H**
- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| a $4b - 8a = 12$ | d $2b - 6 + 5a = 0$ |
| b $3b + 9a = 6$ | e $750a + 250b = 1000$ |
| c $7a - b + 2 = 0$ | f $2(b - 1) + 3a = 10$ |

- 11 De lijnen horen bij de formules $4y + 5x = 34$ en $2y - x = 3$.

- a** Welke formule hoort bij de lijn die door het punt $(1, 2)$ gaat?
b Om de coördinaten van het snijpunt van de lijnen te berekenen, kun je bij beide formules y uitdrukken in x . Herleid de formules waarbij je y uitdrukt in x .
c Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen.



Ondersteunende route → maak opdracht 012

- 12 Druk bij elk paar formules y uit in x en bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.

- a** $3x + 2y = 5$ en $y = 1 - x$
b $7x - y = 1$ en $-3x + 5y = 27$

Ondersteunende opdrachten

010 Op het blaadje is de formule $2p - 5q = 50$ herleid naar de vorm $q = \frac{2}{5}p - 10$.

- a** Waarom is bij stap 1 links en rechts $-2p$ gedaan?
- b** Waarom is bij stap 2 links en rechts gedeeld door -5 ?
- c** Leg uit wat er in stap 3 is gebeurd.

Herleid de formules waarbij je q uitdrukt in p .

- d** $3q + 6p = 36$
- e** $6p - 2q = 21$
- f** $8p + 5q - 20 = 0$
- g** $p - 3 + q = 0$
- h** $40p - 15q = 660$
- i** $3(8 - p) + 2q = 9$

☐	$2p - 5q = 50$				
☐	$-5q = 50 - 2p$			1	
☐	$q = -10 + \frac{2}{5}p$			2	
☐	$q = \frac{2}{5}p - 10$			3	

012 Je gaat de coördinaten berekenen van het snijpunt van de grafieken bij de formules $5x + y = 8$ en $2y - 3x = 3$.

- a** Herleid de formule $5x + y = 8$ waarbij je y uitdrukt in x .
- b** Herleid de formule $2y - 3x = 3$ waarbij je y uitdrukt in x .
- c** Bereken met de gevonden formules in de opdrachten a en b de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.
- d** Bereken ook de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij de formules $3y + 6x = 12$ en $y = -4x + 10$.

015 Op het blaadje zie je hoe de variabele t in de formule $b = 3t + 1$ vervangen is door de formule $t = 2 - 5p$.

- a** Waarom is het nodig om bij stap 1 haakjes te gebruiken?
- b** Leg uit wat er bij stap 2 is gebeurd.
- c** Leg uit wat er bij stap 3 is gebeurd.
- d** Substitueer formule B: $t = -5p$ in formule A: $b = 4t + 13$ en vereenvoudig het resultaat.

☐	$b = 3t + 1$				
☐	$b = 3(2 - 5p) + 1$			1	
☐	$b = 6 - 15p + 1$			2	
☐	$b = -15p + 7$			3	

Uitdagende opdrachten

U2 Anne, Beatrice en Clara kopen agenda's, viltstiften en schriften. Hoeveel euro kost een agenda?

Anne koopt één agenda en drie viltstiften.
Ze betaalt daarvoor € 11,65.

Beatrice koopt één schrift en drie viltstiften.
Ze betaalt daarvoor € 6,45.

Clara koopt één agenda en vijf schriften.
Ze betaalt daarvoor € 16,-.

2.3 Recht evenredig en omgekeerd evenredig

Je leert • hoe je een recht evenredig en een omgekeerd evenredig verband herkent

Leerroutes • ondersteunend: 17—018—19—20—021—21—22
 • doorlopend: 17—18—19—20—21—22—23
 • uitdagend: 17—18—20—21—22—23—U3

In een boekje over hardlopen staan twee tabellen.
 In tabel A kun je zien hoeveel kilometer je aflegt
 in bepaalde tijd.

In tabel B kun je zien hoeveel minuten je nodig
 hebt om een kilometer af te leggen met een
 bepaalde snelheid.

In beide tabellen zit een verband.

• Beschrijf bij beide tabellen het verband.

A	<i>tijd</i> in minuten	2	5	8	20
	<i>afstand</i> in km	0,4	1	1,6	4
B	<i>snelheid</i> in km/uur	8	10	12	15
	<i>tijd</i> in minuten	7,5	6	5	4

17 Van vier verschillende blokjes zink zijn zowel het volume V als de massa M bepaald. De resultaten staan in de tabel.

a Bereken voor elk blokje de uitkomst van $\frac{M}{V}$

Wat valt je op?

b Vul in: Als V twee keer zo groot wordt, dan wordt M ...

c Teken een grafiek voor het verband tussen M en V . Neem horizontaal V van 0 tot en met 30 en verticaal M van 0 tot en met 250.

d Waarom gaat de grafiek van opdracht c door de oorsprong?

V in cm^3	10	15	20	30
M in grammen	72	108	144	216
$\frac{M}{V}$ in gram/cm^3	...	...	...	...

Theorie

Twee variabelen heten **recht evenredig** als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig, of kortweg **evenredig** met x .

Een recht evenredig verband is een bijzonder lineair verband.

Er geldt $y = c \cdot x$ en dus ook $\frac{y}{x} = c$, waarbij c een constant getal is.

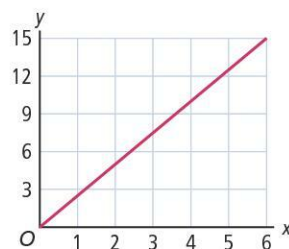
Je herkent een evenredig verband in een tabel als van de twee getallen in elke kolom de verhouding hetzelfde is.

De grafiek bij een evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.

Voorbeeld

x	1	2	3	4	5	6
y	2,5	5	7,5	10	12,5	15

Diagram showing ratios: $1 \rightarrow 2$ is $\times 2$, $2 \rightarrow 3$ is $\times 1,5$, $3 \rightarrow 4$ is $\times 1,33$, $4 \rightarrow 5$ is $\times 1,25$, $5 \rightarrow 6$ is $\times 1,2$. Overall, $1 \rightarrow 6$ is $\times 6$ for x and $2,5 \rightarrow 15$ is $\times 6$ for y .



Het verband tussen x en y is recht evenredig. Er geldt $y = 2\frac{1}{2}x$.

Ondersteunende route → maak opdracht 018

- 18** a Welke tabellen horen bij een recht evenredig verband?

H

A

x	4	5	6	7	8
y	28	35	42	49	...

C

w	1	2	3	5	10
r	...	15	21	33	63

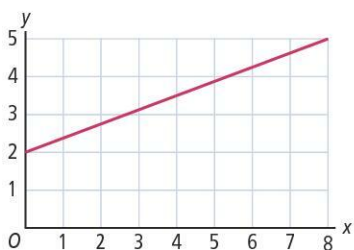
B

p	6	8	10	12	50
q	27	36	45	54	...

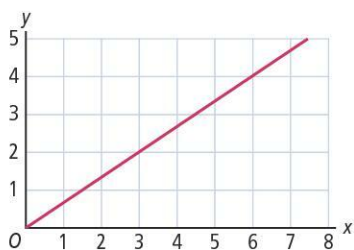
D

t	4	7	10	15	...
h	12	21	30	45	120

- b Vul de open plaatsen in.
c Stel bij elke tabel een formule op.



A



B

- 19** a Bij welke grafiek(en) is y evenredig met x ?
b Stel bij beide grafieken een formule op.

- 20** Thijs woont 10 kilometer van zijn school. Gemiddeld fietst hij 15 km per uur.

- a Ga na dat hij 40 minuten onderweg is.
b De volgende dag brengt zijn vader hem met de auto. Zijn vader rijdt gemiddeld vier keer zo snel als Thijs fietst. Hoelang doet zijn vader er over?
c Vul in: als de snelheid k keer zo groot wordt, dan wordt de tijd k keer zo ...
d Vul de tabel verder in.

snelheid in km per uur	15	30	60	90	100
tijd in minuten	40	...	...	...	...

- e Bereken in elke kolom de uitkomst van $tijd \times snelheid$.
f Teken de grafiek bij de tabel.

Theorie

Twee variabelen heten **omgekeerd evenredig** als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele k keer zo klein. Zijn de variabelen x en y , dan geldt $x \cdot y = c$, waarbij c een constant getal is.

Je kunt ook schrijven $y = \frac{c}{x}$ of $x = \frac{c}{y}$

Je herkent een omgekeerd evenredig verband in een tabel als het product van de variabelen in elke kolom steeds hetzelfde is.

Voorbeeld

v	6	9	18
t	1,5	1	0,5

Laat zien dat bij de tabel een omgekeerd evenredig verband hoort en stel de bijbehorende formules op.

Oplossing

$$v \cdot t = 6 \times 1,5 = 9 \times 1 = 18 \times 0,5 = 9$$

De formules zijn

$$v \cdot t = 9, \quad t = \frac{9}{v} \quad \text{of} \quad v = \frac{9}{t}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 021

- 21 a Welke tabellen horen bij een omgekeerd evenredig verband?

H

A

x	2	3	4	5	10
y	15	10	7,5	6	...

C

p	2	3	5	6	...
q	45	30	18	15	5

B

s	0,8	1,6	4,8	24	...
w	60	30	10	2	0,5

D

t	2	3	4	5	8
h	7	11	15	19	...

- b Vul de tabellen verder in.
c Stel bij elke tabel een formule op.

- 22 Leg bij elke situatie uit of er sprake is van een recht evenredig verband, een omgekeerd evenredig verband of een ander verband. Kies vervolgens geschikte variabelen, maak een formule bij het gevonden verband en beantwoord de vraag.

- a Een centrifuge maakt in 45 seconden 2700 toeren.
Hoeveel toeren maakt de centrifuge in 2 minuten?
- b Een stuk land van 750 meter bij 1600 meter heeft dezelfde oppervlakte als een ander stuk land met een lengte van 1500 meter.
Hoeveel meter breed is dit andere stuk land?
- c De waarde van een huis is in de periode 2013 tot 2017 ieder jaar met hetzelfde bedrag gedaald van € 223.000,- tot € 205.000,-.
Hoeveel euro was de waarde van het huis in het jaar 2016?

- 23 Ga voor de vier formules op het blaadje na of de variabelen recht evenredig of omgekeerd evenredig zijn. Als dit het geval is, schrijf dan de formule op nog een andere manier.

Uitdagende route → maak opdracht U3

●	A	$p \cdot q = 7$	C	$l = \frac{200}{b}$
●	B	$\frac{s}{t} = 50$	D	$y = 5x$

Ondersteunende opdrachten

018

De variabelen in de tabel zijn recht evenredig.

- a** Ga na dat de volgende uitspraak bij de tabel klopt.
Als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

- b** Ga na dat voor elke kolom de waarde van $\frac{y}{x}$ gelijk is.

- c** Vul de tabel verder in.

- d** De formule $\frac{y}{x} = 6$ hoort bij de tabel.

Leg uit dat de formule $y = 6x$ ook bij de tabel hoort.

- e** Welke van de volgende tabellen horen bij een recht evenredig verband?

A

x	1	3	5	8	9
y	4	12	20	32	...

B

s	3	4	5	8	9
w	15	20	25	40	...

C

p	2	6	8	10	...
q	9	27	36	45	54

D

t	3	4	6	9	10
h	13	17	25	37	...

- f** Vul de tabellen verder in.

- g** Stel bij elke tabel een formule op.

021

Bij de tabel hoort een omgekeerd evenredig verband.

- a** Ga na dat de volgende uitspraak bij deze tabel klopt.
Als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele k keer zo klein.

- b** Bereken in elke kolom $x \times y$.

- c** De formule $x \cdot y = 42$ hoort bij de tabel.

Leg uit dat de formules $y = \frac{42}{x}$ en $x = \frac{42}{y}$ ook bij de tabel horen.

x	1	2	3	4	7
y	42	21	14	10,5	6

Uitdagende opdrachten

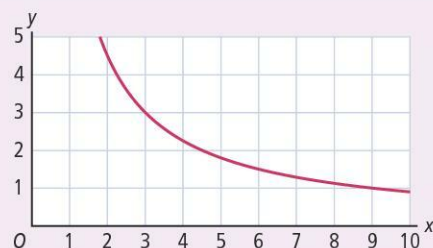
U3

Zoek bij elk van de volgende grafieken uit of deze bij een recht evenredig verband, een omgekeerd evenredig verband of een lineair verband hoort. Stel bij elke grafiek ook een formule op.

- a** De grafiek hiernaast.

- b** Een lijn l door de punten (400, 180) en (500, 225).

- c** Een lijn m door de punten (250, 30) en (300, 38).



2.4 Stijgen en dalen

Je leert

- hoe je de coördinaten van de top van een grafiek berekent
- wat de verschillende vormen van stijgen en dalen zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 24—25—026—27—28—29
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29
- uitdagend: 24—26—27—28—29—U4

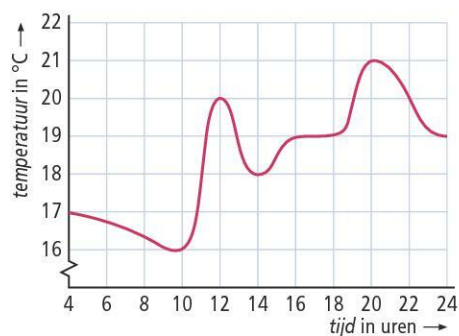
In de laatste etappe van de Tour de France in 2017 won Dylan Groenewegen de sprint op de Champs Élysées. In de grafiek zie je zijn snelheid in de laatste kilometer voor de finish.

- Na hoeveel seconden versnelde Dylan het meest?



- 24 In de grafiek is weergegeven hoe de temperatuur in een kamer op een dag verloopt.

- Noem perioden waarin de grafiek stijgend is.
- Noem ook perioden waarin de grafiek dalend is.
- Tussen welke tijdstippen is de temperatuur constant?
- Er zijn twee momenten waarop de temperatuur een hoogste waarde heeft. Geef die twee hoogste temperaturen.
- Er zijn ook twee momenten waarop de temperatuur een laagste waarde heeft. Geef die twee laagste temperaturen.



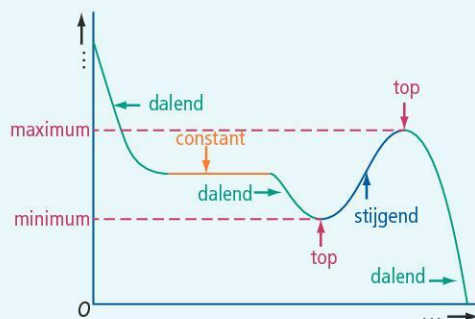
Theorie

Een grafiek kan een **stijgend**, een **dalend** of een **constant** verloop hebben. Ook kan een grafiek **toppen** hebben.

In een top gaat de grafiek over van dalen naar stijgen of van stijgen naar dalen.

In een top heeft de bijbehorende formule een **minimum** of een **maximum**.

De coördinaten van de toppen kun je vinden met je rekenmachine



Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van de formule $y = 4x - x^3$.

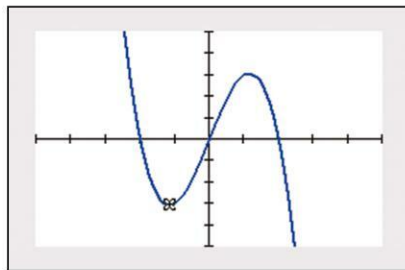
Oplossing

Invoer: $y = 4x - x^3$

Venster: x van -5 tot 5 en y van -5 tot 5

Opties: minimum, maximum

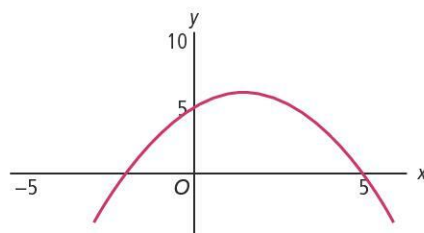
De coördinaten van de toppen van de grafiek zijn $(-1,15; 3,08)$ en $(1,15; 3,08)$.



25 De schets hoort bij de formule $y = -0,5x^2 + 1,5x + 5$.

H

- Plot de grafiek bij de formule.
- Bereken met je rekenmachine de coördinaten van de top van de grafiek.
- Bij welke waarden van x stijgt de grafiek?
- En bij welke waarden van x daalt de grafiek?



Ondersteunende route → maak opdracht 026

26 Mathijs schiet een bal omhoog. De hoogte van de bal kun je berekenen met de formule $H = 20t - 4,9t^2$. Hierin is H de hoogte in meters en t is de tijd in seconden.

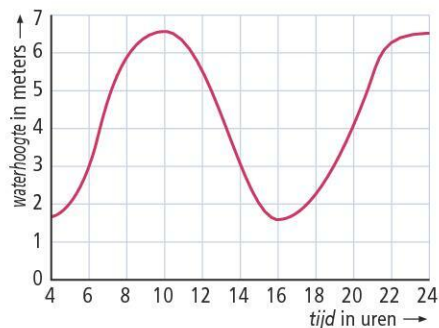
- Plot de grafiek bij de formule, neem x van 0 tot 5.
- Welke vensterinstelling gebruik je voor de waarden van y ?
- Hoe hoog komt de bal van Mathijs maximaal?
- Na hoeveel seconden begint de bal te dalen?
- Maak een tabel bij de formule. Begin bij $x = 0$ met stapgrootte 0,2.
Hoe kun je aan de tabel zien dat de bal steeds sneller daalt?

Je kunt de formule $H = 20t - 4,9t^2$ invoeren in je rekenmachine als $y = 20x - 4,9x^2$.

27 Door eb en vloed verandert de hoogte van het water in een vaargeul die toegang geeft tot de haven van St.Valéry.

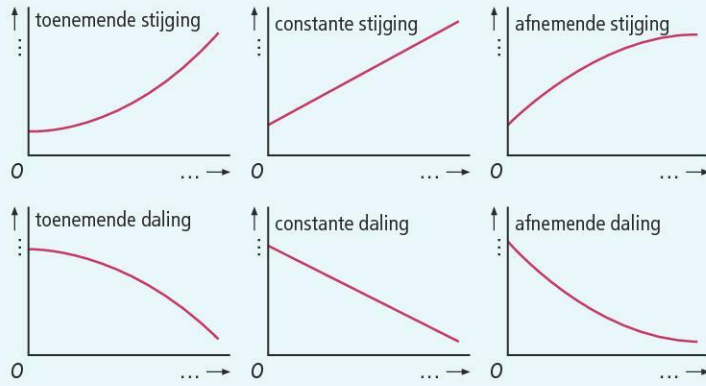
In de grafiek zie je de waterhoogten in de vaargeul.

- Schrijf de minimale en maximale waterhoogte op.
- In welke periode van een uur stijgt het water het snelst?
- In de periode van 12.00 uur tot 15.00 uur daalt het water met een vrijwel constante snelheid.
Met hoeveel cm per uur daalt het water in die periode?
- Vanaf 16.00 uur neemt de waterhoogte steeds sneller toe.
Op welk tijdstip stopt deze steeds snellere stijging?

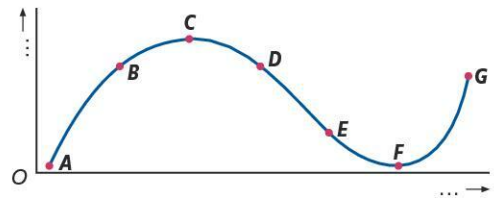


Theorie

Een grafiek kan op verschillende manieren stijgen of dalen: **toenemende stijging**, **constante stijging**, **afnemende stijging**, **toenemende daling**, **constante daling** en **afnemende daling**.



- 28** **H** a Van wat voor soort stijging is er sprake tussen de punten A en B?
 b Geef ook voor de andere gedeelten van de grafiek aan van welk soort stijgen of dalen er sprake is.



- 29** **H** Hiernaast zie je twee grote vazen. De hoogte van beide vazen is 60 cm. Iemand draait twee kranen open en in vijftien minuten stromen beide vazen vol.

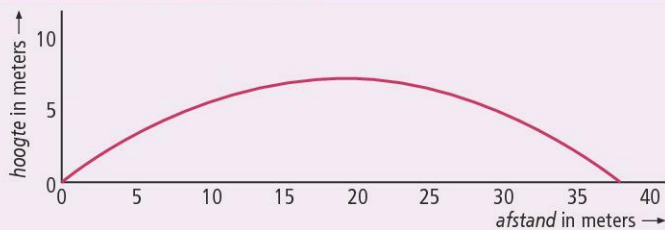
In de linker vaas neemt de waterhoogte steeds met dezelfde snelheid toe. De formule voor de waterhoogte is $h = 4t$. Hierin is h de waterhoogte in cm en t de tijd in minuten. Voor de rechter vaas geldt de formule $h = 15,5\sqrt{t}$.

- a Plot en schets in één assenstelsel de grafieken bij beide formules.
 b Geef bij beide vazen aan van welk soort stijging er sprake is.
 c Met hoeveel cm neemt de hoogte in de vijfde minuut toe in beide vazen? En in de zesde minuut?



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten



026

Jacco schiet een bal omhoog. De hoogte van de bal kun je berekenen met de formule $H = 0,76a - 0,02a^2$. Hierin is H de hoogte in meters en a is de afstand in meters.

- Welke variabele staat in de grafiek op de horizontale as en welke variabele staat op de verticale as?
- Waarom voer je in de rekenmachine de formule in als $y = 0,76x - 0,02x^2$?
- Lees uit de grafiek af hoe ver en hoe hoog de bal ongeveer komt.
- Gebruik de grafiek om een vensterinstelling voor je rekenmachine te kiezen.
Welke vensterinstelling heb je gekozen?
- Plot de grafiek bij de formule $H = 0,76a - 0,02a^2$.
- Met welke optie op je rekenmachine kun je de top van de grafiek berekenen?
- Welke hoogte bereikt de bal maximaal?
- Na hoeveel seconden begint de bal weer te dalen?
- Maak een tabel bij de formule. Begin de tabel bij $x = 20$ en neem stapgrootte 2.
- Hoe kun je aan de tabel zien dat de bal na 20 meter steeds sneller daalt?

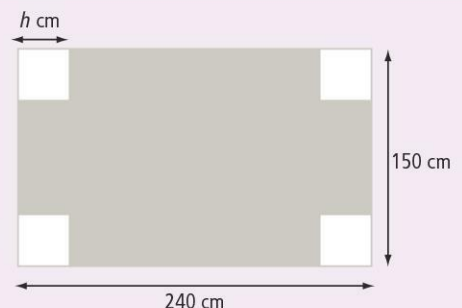


Uitdagende opdrachten

U4

Jamil heeft een plaat staal van 240 cm bij 150 cm. Hij maakt hiervan een bak zonder deksel. De bak wordt h cm hoog.

- Leg uit dat je met de inhoud I van de bak in cm^3 kunt berekenen met de formule $I = h(150 - 2h)(240 - 2h)$.
- Bereken de hoogte van de bak met een inhoud van 286 liter.
- Bij welke afmetingen heeft de bak een maximale inhoud?



2.5 Vergelijkingen

Je leert

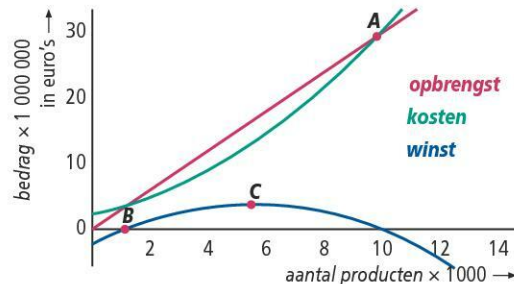
- hoe je een vergelijking met de rekenmachine oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 30—31—32—033—34
- doorlopend: 30—31—32—33—34
- uitdagend: 30—32—33—34—U5

Je ziet een grafiek die in een jaarverslag van een bedrijf staat. In de grafieken zijn de opbrengst, de kosten en de winst van het bedrijf uitgezet tegen de aantal geproduceerde producten. In de grafiek zijn enkele punten aangegeven.

- Welke betekenis hebben de punten in de praktijk?

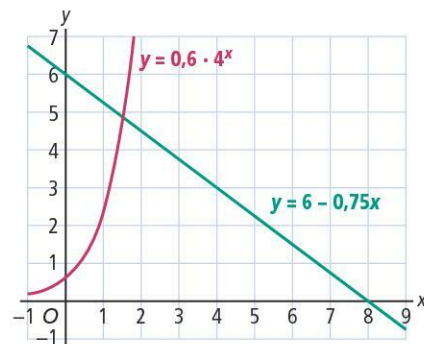


30

H

De grafieken horen bij de formules $y = 0,6 \cdot 4^x$ en $y = -0,75x + 6$.

- Leg uit dat bij het snijpunt van de lijn $y = -0,75x + 6$ met de horizontale as de vergelijking $-0,75x + 6 = 0$ hoort.
- Los de vergelijking $-0,75x + 6 = 0$ op.
- Plot de grafieken bij de formules $y = 0,6 \cdot 4^x$ en $y = -0,75x + 6$.
- Bereken met je rekenmachine de coördinaten van het snijpunt.
- Leg uit dat de vergelijking $0,6 \cdot 4^x = -0,75x + 6$ hoort bij de x -coördinaat van het snijpunt.

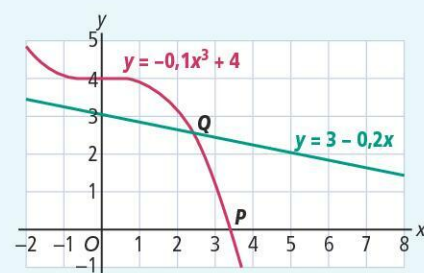


Theorie

Punt P is het snijpunt van de grafiek bij de formule $y = -0,1x^3 + 4$ met de horizontale as.

De y -waarde van de bijbehorende formule is daar nul.

Het snijpunt van de grafieken bij de formules $y = -0,1x^3 + 4$ en $y = 3 - 0,2x$ is punt Q . De coördinaten van een snijpunten kun je vinden door de grafieken te plotten op je rekenmachine.



Voorbeeld 1

Bereken de coördinaten van punt P .

Oplossing

Invoer: $y_1 = -0,1x^3 + 4$

Venster: x van -2 tot 6 en y van -2 tot 6

Optie: nulpunt

De coördinaten van punt P zijn (4, 0).

Voorbeeld 2

Bereken de coördinaten van punt Q .

Oplossing

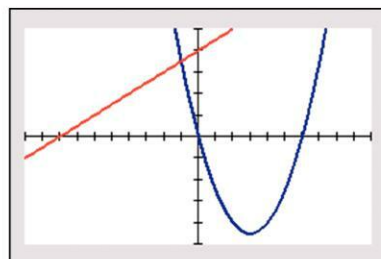
Invoer: $y_1 = -0,1x^3 + 4$ en $y_2 = 3 - 0,2x$

Venster: x van -2 tot 6 en y van -2 tot 6

Optie: snijpunten

De coördinaten van punt Q zijn (2, 42; 2, 51).

- 31** Lars berekent de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij de formules $y = 0,5x^2 - 3x$ en $y = 0,5x + 4$. Hij vindt twee snijpunten. Sanne heeft de grafieken geplot. Hiernaast zie je wat zij op haar scherm heeft. Ze vraagt aan Lars hoe hij aan het tweede snijpunt komt.
- Welke aanwijzing zal Lars aan Sanne geven zodat zij ook het tweede snijpunt kan vinden?
 - Bereken met je rekenmachine de coördinaten van de twee snijpunten. Schrijf op hoe je de rekenmachine gebruikt.



- 32** De waarde van een aandeel kun je berekenen met de formule $W = 64 \cdot 1,03^t$. Hierin is W de waarde van het aandeel in euro's en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2017.
- Bereken de waarde van het aandeel op 1 januari 2022.
 - Om te berekenen in welk jaar de waarde van het aandeel 100 euro is, moet je de vergelijking $64 \cdot 1,03^t = 100$ oplossen.
Plot de grafiek van W en de lijn $W = 100$.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.
 - In welk jaar heeft het aandeel een waarde van 100 euro?

Theorie

Sommige vergelijkingen zijn lastig op te lossen. In dat geval kun je de oplossingen met de rekenmachine vinden. De oplossing(en) vind je met behulp van de coördinaten van de snijpunten van de bijbehorende grafieken.

Voorbeeld

Los op $12x - x^2 = 2x + 6$.

Oplossing

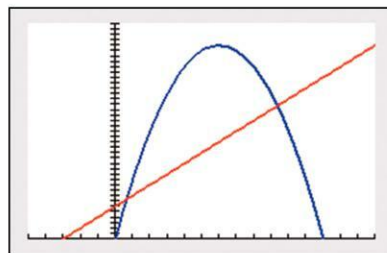
Invoer: $y_1 = 12x - x^2$ en $y_2 = 2x + 6$

Venster: x van -5 tot 15 en y van 0 tot 40

Opties: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(0,64; 7,28)$ en $(9,36; 24,72)$.

De oplossingen van de vergelijking zijn $x \approx 0,64$ en $x \approx 9,36$.



Ondersteunende route → maak opdracht 033

- 33** Los de vergelijkingen op. Schrijf op hoe je de rekenmachine gebruikt.

H

- a $x^2 + 4x - 7 = 5$
- b $a^4 + 4a - 5 = a - 2$
- c $0,1 \cdot 2^q = 1,5q + 3$

- 34** De dagwaarde van een auto bepaalt hoeveel euro een verzekeringsmaatschappij moet uitbetalen bij schade aan de auto. De dagwaarde wordt berekent met de formule $W = 18\,000 - 2000t$. Hierin is W de dagwaarde van de auto in euro en t het aantal jaren dat de auto oud is.



- a Hoe oud is een auto die voor de verzekering nog € 6.000,- waard is?
- b In de praktijk neemt de waarde van een auto in de eerste jaren sneller af.
Een andere maatschappij gebruikt daarom de formule $W = 18\,000 \cdot 0,8^t$.
Na hoeveel jaar is de auto bij beide maatschappijen evenveel waard? Rond je antwoord af op één decimaal.
- c Bij de tweede verzekering komt de waarde van de auto eerder onder de € 9.000,- dan bij de eerste verzekering. Hoeveel jaar eerder?

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

033

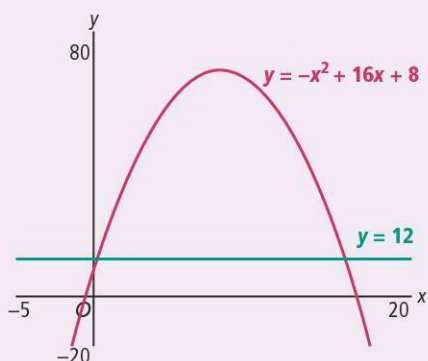
Je gaat de vergelijking $-x^2 + 16x + 8 = 12$ oplossen.

- a Plot de grafiek van $y = -x^2 + 16x + 8$ en de horizontale lijn $y = 12$.
- b Bereken met de rekenmachine de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van $y = -x^2 + 16x + 8$ met de horizontale lijn.
- c Het antwoord van opdracht b kun je de gebruiken om de oplossingen van de vergelijking $-x^2 + 16x + 8 = 12$ te geven.
Geef de oplossingen van de vergelijking.

Los de vergelijkingen op. Schrijf op hoe je de rekenmachine gebruikt.

d $n^4 - 6n + 7 = 8 - 2n$

e $3a - 2^a = -4 - 2a$



Uitdagende opdrachten

U5

Als een nieuw product op de markt wordt gebracht, duurt het vaak lange tijd voordat het door veel mensen is aangeschaft. Voor de invoering van een bepaald product geldt de formule

$$P = \frac{65}{1 + 2,69 \cdot 0,67^t}$$

Hierin is P het percentage van de mensen dat dit product gebruikt en t de tijd in jaren, met $t = 0$ op 1 januari 2018.

- a Hoeveel procent van de mensen zal op den duur dit product gebruiken?
- b In welk jaar zal de helft van alle mensen het product in gebruik hebben?
- c De fabrikant schat dat slechts één op de vier mensen die het product gebruiken, het product zelf heeft gekocht.
In welk jaar zal het aantal mensen dat het product heeft gekocht en ook zelf gebruikt, zijn toegenomen tot 15%?

2.6 Ongelijkheden

Je leert

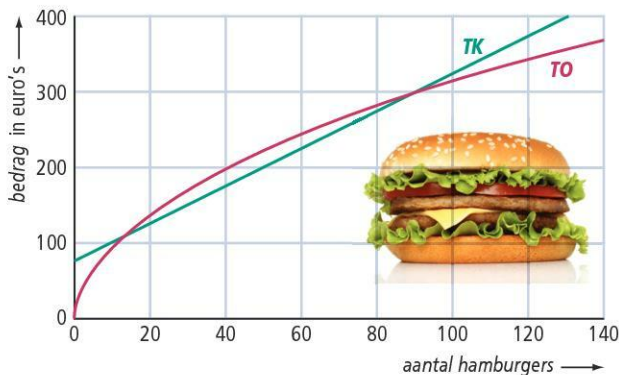
- hoe je een ongelijkheid oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 35—36—037—38—39—40—41
- doorlopend: 35—36—37—38—39—40—41
- uitdagend: 35—36—37—38—39—41—U6

Jim verkoopt hamburgers op de jaarmarkt. In de figuur zijn de totale opbrengsten en totale kosten uitgezet tegen het aantal verkochte hamburgers.

- Hoe kun je in de grafiek zien bij welke aantallen verkochte hamburgers Jim winst maakt?



- 35** Op een terras wordt een kop thee geserveerd met een temperatuur van 90°C . De buitentemperatuur is 25°C . De temperatuur van de thee kun je berekenen met de formule $T = 25 + 65 \cdot 0,8^t$.

Hierin T de temperatuur in graden Celsius en t de tijd in minuten na het inschenken.

- Plot de grafiek van T en de lijn $y = 50$.
- Na hoeveel minuten is de temperatuur van de thee lager dan 50°C ?

- 36** Gegeven is de ongelijkheid $x^2 - 2x - 12 < x + 6$.

- Plot de grafieken van $y = x^2 - 2x - 12$ en $y = x + 6$.
- Bereken met de rekenmachine de coördinaten van de snijpunten van de grafieken.
- Lees uit de plot af bij welke waarden van x geldt $x^2 - 2x - 12 < x + 6$.
- Geef ook de oplossing van de ongelijkheid $x^2 - 2x - 12 \geq x + 6$.

$<$ kleiner dan
 $\leq$ kleiner of gelijk dan
 $>$ groter dan
 $\geq$ groter of gelijk dan

Aanpak

Hoe los je een ongelijkheid op?

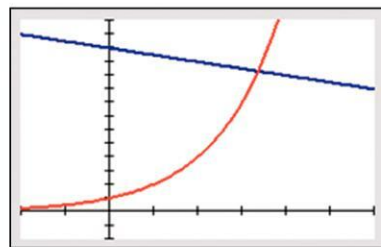
- 1 Plot de grafieken van de bijbehorende formules.
- 2 Bereken de coördinaten van de snijpunten.
- 3 Ga met behulp van de grafieken na bij welke waarden van x de gevraagde ongelijkheid geldt.

Voorbeeld

Los op $2^x > 12 - \frac{1}{2}x$.

Oplossing

- 1 Plot de grafieken van de formules $y = 2^x$ en $y = 12 - \frac{1}{2}x$.
- 2 Met de rekenmachine vind je het snijpunt $(3,37; 10,32)$.
- 3 Rechts van $x = 3,37$ ligt de grafiek van $y = 2^x$ hoger dan de grafiek van $y = 12 - \frac{1}{2}x$.
De oplossing van de ongelijkheid is $x > 3,37$.



Ondersteunende route → maak opdracht 037

- 37** Los de ongelijkheden op.

H

- a** $12 - x \leq 4x - 16$ **c** $3 \cdot 0,75^k \geq 4$
b $p^2 - 4p > p - 1$ **d** $3 \cdot 1,8^t > 1 - t$

- 38** Een bedrijf produceert voetballen. Voor de gemiddelde productiekosten GK per voetbal geldt $GK = 10 + \frac{600}{a}$. Hierin is GK in euro's en is a het aantal geproduceerde voetballen per dag.

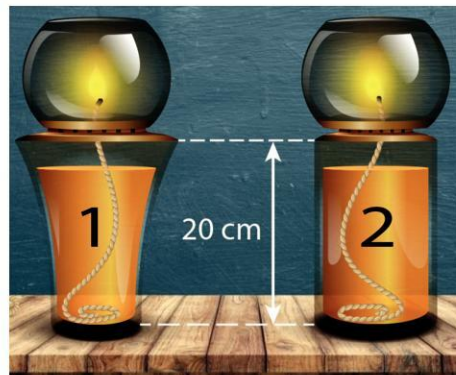
- Plot de grafiek bij de formule. Neem de horizontale as van 0 tot 500 en de verticale as van 0 tot 50.
- Er kan sprake zijn van toenemende daling, afnemende daling of constante daling.
Van wat voor soort daling is er sprake in de grafiek?
- Hoe kun je aan de formule zien dat de gemiddelde kosten per voetbal steeds lager worden als a steeds groter wordt?
- Vanaf welk aantal voetballen zijn de gemiddelde productiekosten per voetbal minder dan € 10,50?



- 39** Twee olielampjes zijn beide 20 cm hoog, maar verschillen van vorm. De hoogte van de olie hangt af van het aantal branduren en van de vorm van de lampjes en is te berekenen met de formules $H = 20 - 0,1t^2$ en $H = 20 - t$.

Hierin is H de hoogte in cm en t de tijd in uren.

- Plot voor beide lampjes een grafiek en maak in één figuur een schets van de grafieken.
- Op welke manier daalt het oliepeil in elk van de beide lampjes?
- Bereken hoelang beide lampjes branden.
- Beide lampjes worden op hetzelfde moment aangestoken. Bereken hoelang het oliepeil van het linker lampje hoger is dan dat van het rechter lampje.



- 40** Een rockband laat dvd's maken. Voor de totale kosten TK in euro's voor het maken van q dvd's geldt de formule

$$TK = 8000 + 3\sqrt{q}.$$

De dvd's worden verkocht voor € 9,95 per stuk.

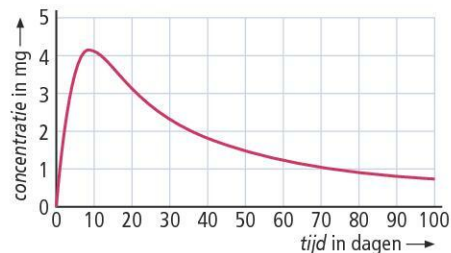
- Stel een formule op voor de totale opbrengst TO in euro's.
- Los op $TO > TK$.
- Welke praktische betekenis heeft het antwoord van opdracht b?

- 41** Door een fout loost een chemische fabriek een hoeveelheid van een giftige stof in een meer. Door natuurlijke afbraak neemt de concentratie van de giftige stof in het water op den duur af. De concentratie C van de giftige stof kan worden benaderd met

$$C = \frac{75t}{t^2 + 82}$$

Hierin is C de concentratie in mg per liter en t de tijd in dagen na het begin van de lozing van de giftige stof.

- Hoe groot is de maximale concentratie?
- Het gevaar voor de volksgezondheid is geweken zodra de concentratie minder dan 1 mg per liter water is. Na hoeveel dagen is dat?



Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

- 037** Je gaat de ongelijkheid $3 \cdot 1,1^x + 5 < 2x + 1$ oplossen. Je ziet een schets bij de grafieken van $y = 3 \cdot 1,1^x + 5$ en $y = 2x + 1$.



- Plot de grafieken bij de formules.
- Bereken met je rekenmachine de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.
- Bij welke waarden van x ligt de grafiek van $y = 3 \cdot 1,1^x + 5$ onder de grafiek van $y = 2x + 1$?
- Geef de oplossing van de ongelijkheid $3 \cdot 1,1^x + 5 < 2x + 1$.

Los de ongelijkheden op.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| e $x^2 + 1 \geq 2x + 4$ | g $128 \cdot 1,25^p \leq 200$ |
| f $5 - 0,2k < k - 3$ | h $3^x - 20 > x + 6$ |

Uitdagende opdrachten



- U6** Het aantal fruitvliegjes N in een afgesloten ruimte na t dagen kun je berekenen met de formule $N = 1500 - 850 \cdot 0,89^t$.
- Hoeveel fruitvliegjes zijn er op tijdstip $t = 0$?
 - Onderzoek na hoeveel dagen er meer dan 1000 fruitvliegjes in de ruimte zijn.
 - In hoeveel dagen neemt het aantal fruitvliegjes toe van 1300 tot 1400?
 - Hoeveel fruitvliegjes zijn er op den duur?

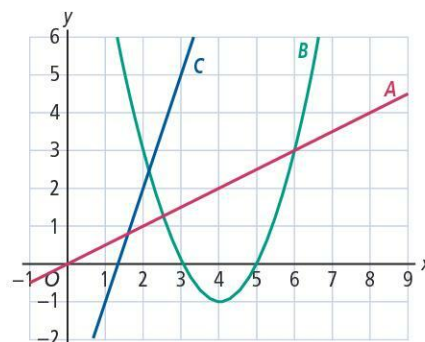
- 42**
- Welke tabel hoort bij een omgekeerd evenredig verband?
 - Vul de tabellen verder in.
 - Stel bij elke tabel een formule op.
 - Gegeven is de lineaire formule $2p + 5q = 17$.
Herleid deze formule waarbij je q uitdrukt in p .

A	x	2	4	6	8	20
	y	15	20	25	30	...

B	t	0,2	0,4	0,6	0,8	...
	w	30	15	10	7,5	1,5

- 43**
- Een koffiebrander levert koffie aan een groothandel voor een vaste prijs van € 400,- per container. Voor zijn totale kosten geldt de formule $TK = 6c^2 + 2500$.
Hierin is TK de totale kosten in euro's en c het aantal verkochte containers koffie per maand.
- Waarom hoort bij de totale opbrengst de formule $TO = 400c$?
 - Bij welk aantal verkochte containers maakt de koffiebrander winst?
 - De totale winst TW in euro's van de koffiebrander wordt beschreven door de formule $TW = 400c - 6c^2 - 2500$.
Bij welk aantal verkochte containers is de winst het grootst?
 - Hoe groot is de maximale winst?

- 44**
- Gegeven is de formule bij grafiek A: $y = \frac{1}{2}x$ en een formule bij grafiek B: $y = x^2 - 8x + 15$.
- Stel een formule op bij grafiek C.
 - Welke grafiek hoort bij een recht evenredig verband?
Verklaar je antwoord.
 - Beschrijf de manier waarop de grafiek van formule B daalt en stijgt.
 - Bereken de coördinaten van de snijpunten van grafiek A met grafiek B.
 - Los de ongelijkheid $x^2 - 8x + 15 < \frac{1}{2}x$ op.



- 45**
- Een bioloog doet bij een vogelsoort waarnemingen over de broedselgrootte B , dat is het aantal jongen per nest, en de hoeveelheid voedsel V in grammen die elk jong per dag krijgt. In de tabel staan de resultaten.
- Teken de punten in een assenstelsel.
 - Een lineair verband lijkt een goede benadering te zijn voor het verband tussen B en V .
Teken een rechte lijn die zo goed mogelijk door die punten gaat.
 - Stel een formule op bij de getekende lijn.
 - In een nest met 12 jongen krijgen de jongen 1,05 gram voedsel per jong per dag.
Controleer of deze waarde voldoet aan de formule van opdracht c.

B	2	3	5	6	7	9
V	1,95	1,87	1,75	1,66	1,60	1,46

- 46** Een fabrikant besluit schoenen te maken met zes paren gaatjes. De fabrikant wil daar zo kort mogelijke veters bij leveren. Hij rijgt daarom de veters op de Amerikaanse manier. Bij deze manier van rijgen hoort de volgende formule

$$L = 4 + 10\sqrt{d^2 + 16}.$$

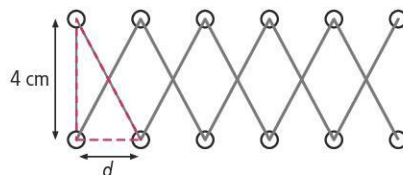
Hierin is L de benodigde veterlengte in cm en is d de gaatjesafstand in cm.

Om de stevigheid rond de voet te garanderen, maakt de fabrikant de afstand tussen de vetergaatjes bij de verschillende schoenmaten als volgt.

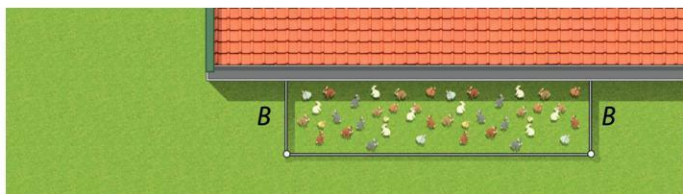
schoenmaat	38	39	40	41	42	43	44	45
afstand d in cm	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2

Voor een fatsoenlijke knoop is bij dit soort schoenen minimaal 42 cm extra veter nodig.

Onderzoek bij welke schoenmaten je een veter van 90 cm kunt gebruiken.

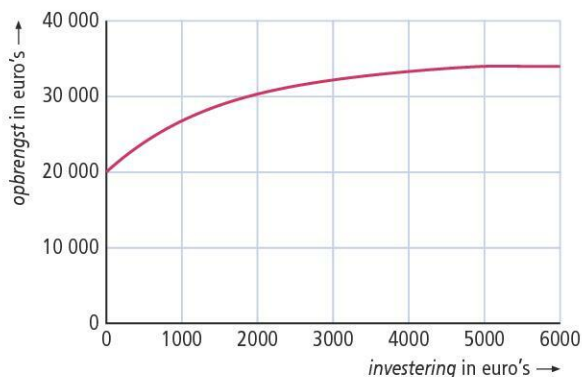


- 47** Carlos wil naast de schuur een stuk grasveld afrasteren voor zijn konijnen. Hij heeft elf meter gaas. Aan de kant van de schuur hoeft hij geen gaas te plaatsen. Hij wil de oppervlakte van het veldje zo groot mogelijk maken.



- Als Carlos de breedte twee meter maakt, houdt hij zeven meter gaas over voor de derde zijde. Hoe groot wordt de oppervlakte dan?
- Onderzoek bij welke breedte de oppervlakte van het grasveld het grootst is.

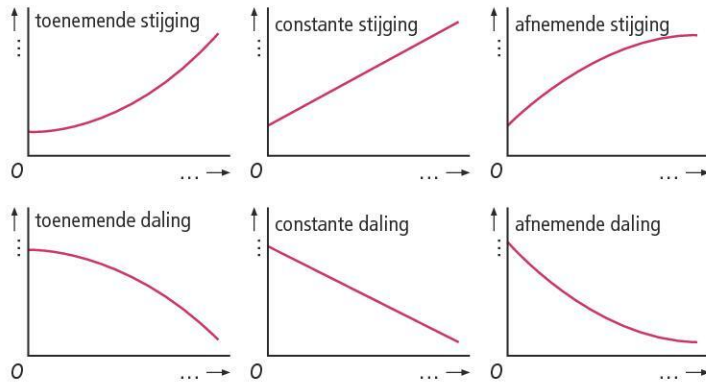
- 48** Een bedrijf wil graag meer opbrengst genereren en heeft een econoom laten uitzoeken wat het effect is van een reclamecampagne op de opbrengst. In een onderzoeksrapport staat onder andere deze grafiek. Je leest daar bijvoorbeeld in af dat bij een maandelijkse investering van 2000 euro in de reclamecampagne de te verwachten opbrengst gelijk zal zijn aan 30 000 euro die maand. Welk advies zou jij het bedrijf geven?



Theorie

toenemende stijging, constante stijging, afnemende stijging
toenemende daling, constante daling, afnemende daling.

Een grafiek kan op verschillende manieren stijgen of dalen.



- S1** Schets bij de uitspraken een passende grafiek.
- A De huizenprijzen stijgen steeds langzamer.
 - B De werkloosheid neemt constant af.
 - C Het waterpeil neemt steeds sneller toe.

Vaardigheid

Je kunt een formule opstellen bij een lineair verband.

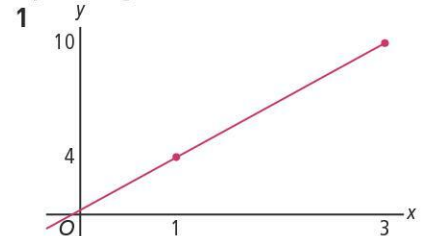
- 1 Schets eventueel eerst een grafiek bij de situatie.
- 2 Ga na welke variabelen worden gebruikt en schrijf de algemene formule voor het lineaire verband op.
- 3 Bereken de toename per (tijds-)eenheid is. Dat is de richtingscoëfficiënt.
- 4 Zoek uit wat de beginhoeveelheid b is. Dat is het startgetal. De grafiek snijdt de verticale as in het punt $(0, b)$.
- 5 Vul de richtingscoëfficiënt en het startgetal in de algemene formule in.

- S2**
- a Stel een formule op bij de lijn door de punten $(0, 2)$ en $(5, -13)$.
 - b Stel ook een formule op bij de lijn door de punten $(1, 7)$ en $(5, 29)$.

Voorbeeld

Stel een formule op voor de lijn door de punten $A(1, 4)$ en $B(3, 10)$.

Oplossing



- 2 $y = ax + b$
- 3 Bij 2 stappen naar rechts is de toename 6.
De richtingscoëfficiënt is $6 : 2 = 3$.
- 4 Van punt A naar de horizontale as is één stap naar links, dus 3 omlaag.
Het startgetal is $4 - 3 = 1$.
- 5 $y = 3x + 1$

Vaardigheid

Je kunt een lineaire vergelijking oplossen met de balansmethode.

Bij de balansmethode voer je links en rechts van het gelijkteken dezelfde bewerking uit. Daarmee vereenvoudig je de vergelijking zo ver, dat de onbekende nog maar aan één kant van het gelijkteken staat. Soms moet je eerst breuken of haakjes wegwerken.

Voorbeeld

Los op $-2(3x - 1) = -8x + 7$.

Oplossing

$$\begin{aligned} -2(3x - 1) &= -8x + 7 \\ -6x + 2 &= -8x + 7 && \text{haakjes wegwerken} \\ 2x + 2 &= 7 && \text{links en rechts} + 8x \\ 2x &= 5 && \text{links en rechts} - 2 \\ x &= 2\frac{1}{2} && \text{links en rechts} : 2 \end{aligned}$$

De oplossing is $x = 2\frac{1}{2}$.

S3 Los de vergelijkingen op.

a $8x - 1 = -2x + 19$

b $5(2 - x) = 1 + 5x$

Vaardigheid

Je kunt een variabele uitdrukken in een andere variabele.

Bij het herleiden pas je, net als bij het oplossen van vergelijkingen, steeds links en rechts dezelfde bewerkingen toe.

Voorbeeld

Herleid de formule $w - 2v = 8$ zodat v wordt uitgedrukt in w .

Oplossing

$$\begin{aligned} w - 2v &= 8 \\ -2v &= 8 - w && \text{links en rechts} - w \\ v &= \frac{1}{2}w - 4 && \text{links en rechts} : -2 \end{aligned}$$

De formule wordt $v = \frac{1}{2}w - 4$ of

$$v = -4 + \frac{1}{2}w.$$

S4 Herleid de vergelijkingen zodat q uitgedrukt wordt in p .

a $3q - 9p = 6 - 12q$

b $4p + 8 = -(2q - 6)$

Vaardigheid

Je kunt in een formule een variabele vervangen door een andere formule.

Een variabele vervangen door een andere formule heet substitueren. Bij het substitueren is het vaak nodig haakjes te gebruiken. Na het substitueren vereenvoudig je zo mogelijk de formule.

Voorbeeld

Substitueer $q = \frac{1}{2}p + 6$ in $k = -2q + 5$ en vereenvoudig het resultaat.

Oplossing

$$\begin{aligned} k &= -2q + 5 \\ q &= \frac{1}{2}p + 6 \\ k &= -2\left(\frac{1}{2}p + 6\right) + 5 \\ k &= -p - 12 + 5 \\ k &= -p - 7 \end{aligned}$$

S5 Substitueer formule B in formule A en vereenvoudig het resultaat.

a A: $w = 6 - 3t$ en B: $t = 2p$

b A: $r = 1 - 2x$ en B: $x = 6 - 3m$

Vaardigheid

Je kunt een recht evenredig en een omgekeerd evenredig verband herkennen.

Je herkent een recht evenredig verband in een tabel, als van de twee getallen in elke kolom de verhouding hetzelfde is.

De grafiek bij een evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.

Je herkent een omgekeerd evenredig verband in een tabel als het product van de variabelen in elke kolom hetzelfde is.

Voorbeeld 1

p	2	3	4
q	16	24	32

Laat zien dat p en q in deze tabel recht evenredig zijn en stel de bijbehorende formules op.

Oplossing

$$\frac{q}{p} = \frac{16}{2} = \frac{24}{3} = \frac{32}{4} = 8$$

De formules zijn $\frac{q}{p} = 8$ of $q = 8p$.

Voorbeeld 2

p	3	6	8
q	4	2	1,5

Laat zien dat p en q in deze tabel omgekeerd evenredig zijn en stel de bijbehorende formules op.

Oplossing

$$p \cdot q = 3 \times 4 = 6 \times 2 = 8 \times 1,5 = 12$$

De formules zijn $p \cdot q = 12$, $p = \frac{12}{q}$ of $q = \frac{12}{p}$

- S6**
- Welke van de tabellen hoort bij een recht evenredig verband en welke bij een omgekeerd evenredig verband?
 - Vul de tabellen verder in.
 - Stel bij beide tabellen een formule op.

A

x	2	3	4	5	6
y	7,5	5	3,75	3	...

B

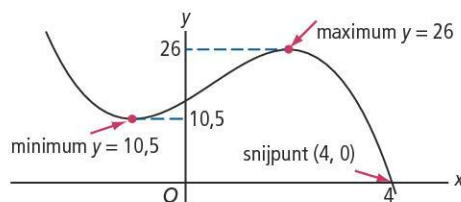
p	2	3	5	6	7
q	9	13,5	22,5	27	...

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van een top van een grafiek berekenen.

De grafiek heeft twee toppen. In een top heeft de bijbehorende formule een maximum of een minimum.

Bij het berekenen van de coördinaten van toppen, kun je de rekenmachine gebruiken.



Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van de formule $y = -2x^3 + 7x + 1$.

Oplossing

Invoer: $y = -2x^3 + 7x + 1$

Venster: x van -5 tot 5 en y van -5 tot 10

Opties: minimum, maximum

De coördinaten van de toppen van de grafiek zijn $(-1,08; -4,04)$ en $(1,08; 6,04)$.

- S7** Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}x^3 - 5x - 8$.
Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek.

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking met de rekenmachine oplossen.

Sommige vergelijkingen zijn lastig op te lossen. In dat geval kun je de oplossingen met de rekenmachine vinden. De oplossingen vind je met behulp van de coördinaten van de snijpunten van de bijbehorende grafieken.

Voorbeeld

Los op $-x^2 + 4x = -x + 2$.

Oplossing

Invoer: $y_1 = -x^2 + 4x$ en $y_2 = -x + 2$

Venster: x van -10 tot 10

y van -10 tot 10

Opties: snijpunt

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(0,44; 1,56)$ en $(-4,56; -2,56)$.

De oplossingen van de vergelijking zijn $x \approx 0,44$ en $x \approx 4,56$.

- S8** Los de vergelijkingen op. Schrijf op hoe je de rekenmachine gebruikt.

a $2\sqrt{x+5} = x^2 - 390$

b $2400 \cdot 0,5^a = 3a^2$

Vaardigheid

Je kunt een ongelijkheid oplossen.

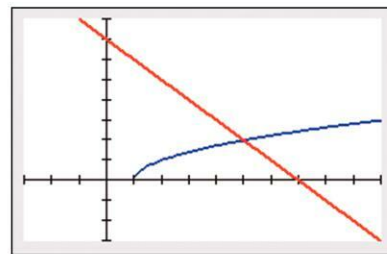
- 1 Plot de grafieken van de bijbehorende formules.
- 2 Bereken de coördinaten van de snijpunten.
- 3 Ga met behulp van de grafieken na bij welke waarden van x de gevraagde ongelijkheid geldt.

Voorbeeld

Los op $\sqrt{x-1} \geq 7-x$.

Oplossing

- 1 Plot de grafieken van de formules $y = \sqrt{x-1}$ en $y = 7-x$.
 - 2 Met de rekenmachine vind je het snijpunt $(5, 2)$.
 - 3 Rechts van $x = 5$ ligt de grafiek van $y = \sqrt{x-1}$ hoger dan de grafiek van $y = 7-x$.
- De oplossing van de ongelijkheid is $x > 5$.

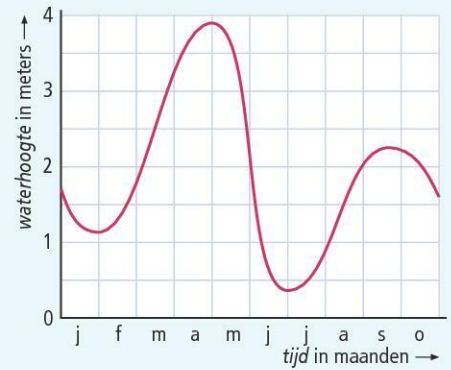


- S9** Los de ongelijkheden op.

a $x^2 + x - 3 \leq 4x + 7$

b $3 \cdot 0,9^x + 1 > x - 2$

- T1** Gedurende tien maanden is de waterhoogte in een rivier bijgehouden. De resultaten zijn verwerkt in een grafiek.
- In welke perioden is er sprake van een toenemende stijging?
 - Er zijn twee momenten waarop de waterhoogte maximaal is. Geef de maximale waterhoogten.
 - In welke maanden is er sprake van een afnemende daling?
 - In welke maand daalt de waterhoogte het snelst? Met hoeveel meter?



- T2** Los de vergelijkingen en ongelijkheden op. Schrijf op hoe je de rekenmachine gebruikt.

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| a $x^3 = 2x + 3$ | c $k^2 - 3k < 5$ |
| b $-t^2 + 2t + 5 = 0,8t$ | d $0,5q - 8 \geq -0,7q + 10$ |

- T3** Een pak melk wordt uit de koelkast gehaald. Daardoor stijgt de temperatuur van de melk. Met de formule $T = 20 - 16 \cdot 0,75^t$ kun je de temperatuur T in graden Celsius van de melk berekenen. Hierin is t de tijd in uren vanaf het moment dat de melk uit de koelkast is gehaald.
- Plot de grafiek bij de formule. Neem de horizontale as van 0 tot 30.
 - Van welk soort stijging is er sprake bij de grafiek?
 - Welke temperatuur heeft de melk op het moment dat zij uit de koelkast wordt gehaald?
 - Naar welke waarde nadert de temperatuur van de melk op den duur?
 - Na hoeveel minuten is de temperatuur van de melk hoger dan 15°C ?

- T4** In een zwembad gelden de volgende prijzen. Met een abonnement van € 48,- is de toegangsprijs € 2,- per keer. Voor de prijs geldt dus de formule $P = 48 + 2a$. Hierin is P de prijs in euro en a het aantal keer zwemmen. Zonder abonnement betaal je € 4,40 per keer. De formule is dan $P = 4,4a$.

- Welke van de twee formules hoort bij een recht evenredig verband?
- Los de vergelijking $48 + 2a = 4,4a$ op.
- Hoeveel keer moet je minstens gaan zwemmen om met een abonnement voordeliger uit te zijn?



T5 Bas schiet een voetbal in de richting van een teamgenoot die bij de zijlijn staat. De boog van de voetbal is een deel van de parabool met de formule $H = -0,1a^2 + 2a$. Hierin is H de hoogte van de voetbal in meters en a de horizontale afstand vanaf Bas.

- Plot en schets de grafiek. Neem als instelling de horizontale as van 0 tot 20 en de verticale as van 0 tot 15.
- Na hoeveel meter komt de voetbal weer op de grond?
- Hoe hoog komt de voetbal maximaal?
- Bas is 18 meter verwijderd van zijn teamgenoot. Kan zijn teamgenoot de voetbal binnenhouden?

T6 Een bedrijf schaft een machine aan om een nieuw model afvalbakken te maken. Deze machine kost € 12.000,- en de kosten aan grondstoffen per afvalbak zijn € 5,40. De totale kosten TK in euro's om a afvalbakken te produceren, kunnen berekend worden met de formule $TK = 12000 + 5,4a$.

De verkoopprijs is € 9,- per stuk. Bij deze verkoopprijs geldt voor de totale opbrengst TO in euro's de formule $TO = 9a$.

- Bij welk aantal afvalbakken is de totale opbrengst groter dan de totale kosten?
- De directie wil bij 3000 verkochte afvalbakken uit de kosten zijn. Welke verkoopprijs moet dan vastgesteld worden?
- Uit marktonderzoek blijkt dat het aantal verkochte afvalbakken afhangt van de prijs p in euro's. Voor dat verband geldt de formule $a = 20800 - 1200p$. Maakt het bedrijf winst bij een prijs van € 8,40 per stuk?
- De totale winst TW in euro's voldoet aan $TW = -124320 + 27280p - 1200p^2$. Bij welke prijs is de totale winst maximaal?
- Hoe groot is deze maximale winst?



T7 De grafieken horen bij de formules $5y + 2x = 40$ en $10y - x = 20$.

- Welke grafiek hoort bij de formule $5y + 2x = 40$?
- Herleid beide formules in de vorm waarbij je y uitdrukt in x .
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.



Je kunt een formule opstellen bij een lineair verband.

- E1** Een vat benzine bevat 100 liter en weegt 105 kg.
Een leeg vat weegt 25 kg.
- Hoeveel weegt één liter benzine?
 - Stel een formule op voor het verband tussen het gewicht G in kg van het vat benzine en het aantal liter l benzine.
 - Hoeveel liter benzine zit er in een vat dat 93 kg weegt?

Je kunt een lineaire vergelijking oplossen met de balansmethode.

- E2** Los de vergelijkingen op.
- $5x - 100 = 3x - 2$
 - $\frac{1}{2}p + 10 = p + 2$
 - $5,3k - 29,7 = 2,1k + 12,3$
 - $0,7q + 3 = q - 12$

Je kunt een variabele uitdrukken in een andere variabele.

- E3** Herleid de vergelijkingen zodat b uitgedrukt wordt in a .
- $12a + 4b = 30$
 - $2a + 1 = -2(2b - 3)$
 - $3a - 7b = -3(4b - 2)$
 - $\frac{1}{2}b - 3a = b + 10$

Je kunt in een formule een variabele vervangen door een andere formule.

- E4** Substitueer formule B in formule A en vereenvoudig het resultaat.
- A: $W = 8 + 3g$ en B: $g = 2k$
 - A: $P = 3q - 4$ en B: $q = 8 - \frac{1}{2}c$
 - A: $T = 11 - \frac{1}{4}h$ en B: $h = 6m - 12$

Je kunt een recht evenredig en een omgekeerd evenredig verband herkennen.

- E5**
- Welke van de tabellen hoort bij een recht evenredig verband en welke bij een omgekeerd evenredig verband?
 - Vul de tabellen verder in.
 - Stel een formule op bij de tabel die hoort bij het recht evenredig verband.
 - Geef bij de tabel die bij een omgekeerd evenredig verband hoort drie formules.



A	a	20	24	30	36	40
	w	6	7,2	9	10,8	...
B	t	4	5	8	12	...
	h	1,5	1,2	0,75	0,5	0,12

Je kunt de coördinaten van een top van een grafiek berekenen.

- E6** Gegeven is de formule $q = p^3 - 13p + 4$.
Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek.

Je kunt een vergelijking met de rekenmachine oplossen.

- E7** Los de vergelijkingen op. Rond je antwoord zo nodig af op twee decimalen. Schrijf op hoe je de rekenmachine gebruikt.

a $-x^2 + 8x - 2 = 6x - 5$ **c** $\sqrt{8-x} = \frac{1}{2}x$
b $x^3 - 9x = 4x + 12$ **d** $0,1 \cdot 2^x = 3x - 8$

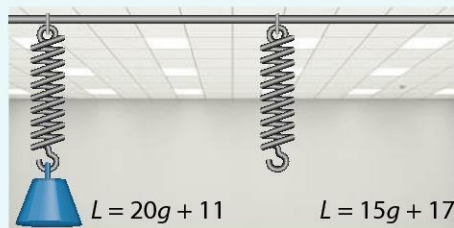
Je kunt een ongelijkheid oplossen.

- E8** Een grote watertank loopt leeg nadat de afvoerkraan is geopend. De hoogte H van het water in de tank hangt af van de tijd t in minuten volgens de formule $H = 150 - \sqrt{45t}$.

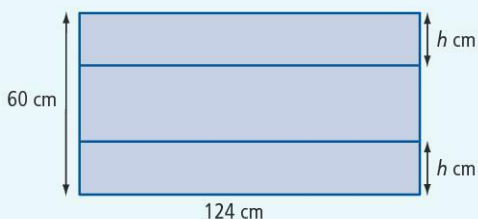
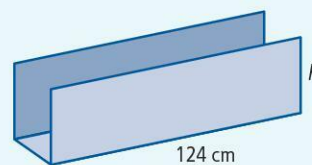
- a** Voor welke waarden van t heeft deze formule betekenis?
b Plot de grafiek van deze formule. Wat is een geschikte vensterinstelling?
c Na hoeveel minuten is de waterhoogte minder dan 90 cm?

- E9** Een veer rekt uit als je er een gewicht aan hangt. De formules $L = 20g + 11$ en $L = 15g + 17$ horen bij twee verschillende veren. Hierin is g de massa van het gewicht in kg en L de lengte in cm.

- a** Bereken bij welke massa de veren even lang zijn.
b Hoe lang zijn de veren dan?
c Zoek uit bij welke massa de linker veer 6,5 cm langer is dan de rechter veer.



- E10** Rechthoekige metalen platen van 60 cm breed en 124 cm lang worden gebruikt voor het aanleggen van irrigatiegoten. De platen worden in de lengterichting twee keer 90 graden gebogen zodat er een goot ontstaat waar water door kan stromen. De hoogte van de opstaande randen is h cm. Voor de inhoud I van zo'n goot in cm^3 geldt de formule $I = 7440h - 248h^2$.



- a** Welke waarden van h zijn mogelijk?
b Plot en schets de grafiek. Neem op de verticale as de waarden van 0 tot 60 000.
c Bij welke waarde van h kan de goot zoveel mogelijk water bevatten?
d Hoeveel liter water gaat er maximaal in de goot?

Ontwikkeling van de computer

Door de eeuwen heen hebben wetenschappers getracht om het rekenen te mechaniseren. Machines zoals de rekenliniaal uit het begin van de 17e eeuw (William Oughtred), de Pascaline (Pascal 1623 – 1662) en de Reckoner (Leibniz 1646 – 1716) zijn hier voorbeelden van. De differentiemachine, de eerste programmeerbare (mechanische) rekenmachine werd ontwikkeld door Charles Babbage (1792 – 1871).

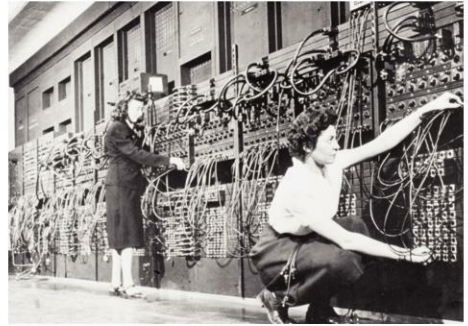
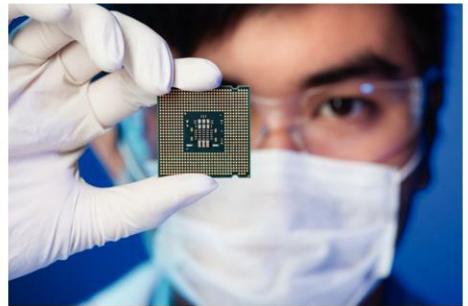
In 1946 werd de ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer), de eerste elektronische computer, ontwikkeld. Deze computer gebruikte bij het rekenen radiobuizen in plaats van mechanische onderdelen. De ENIAC bevatte 18 000 buizen, 70 000 weerstanden, 10 000 condensatoren en 6000 verschillende schakelaars. Het grote probleem was de onbetrouwbaarheid van de buizen. Met deze 18 000 buizen kon hij slechts 20 getallen onthouden.

De computers werden een stuk kleiner en sneller nadat de transistor in 1947 was uitgevonden. Met de komst van de 4004-siliciumchip, die in 1971 door Intel op de markt werd gebracht, kwam de ontwikkeling van de computer in een stroomversnelling. In een chip worden de transistoren met elkaar verbonden tot één geïntegreerd circuit. De 4004-siliciumchip bevatte 2300 transistoren.

Hoe snel neemt het aantal transistoren toe? Eén van de oprichters van het bedrijf Intel, Gordon Moore, deed in 1965 de voorspelling dat het aantal transistoren op een microchip iedere twee jaar zou verdubbelen. Deze voorspelling wordt ook wel de ‘Wet van Moore’ genoemd.

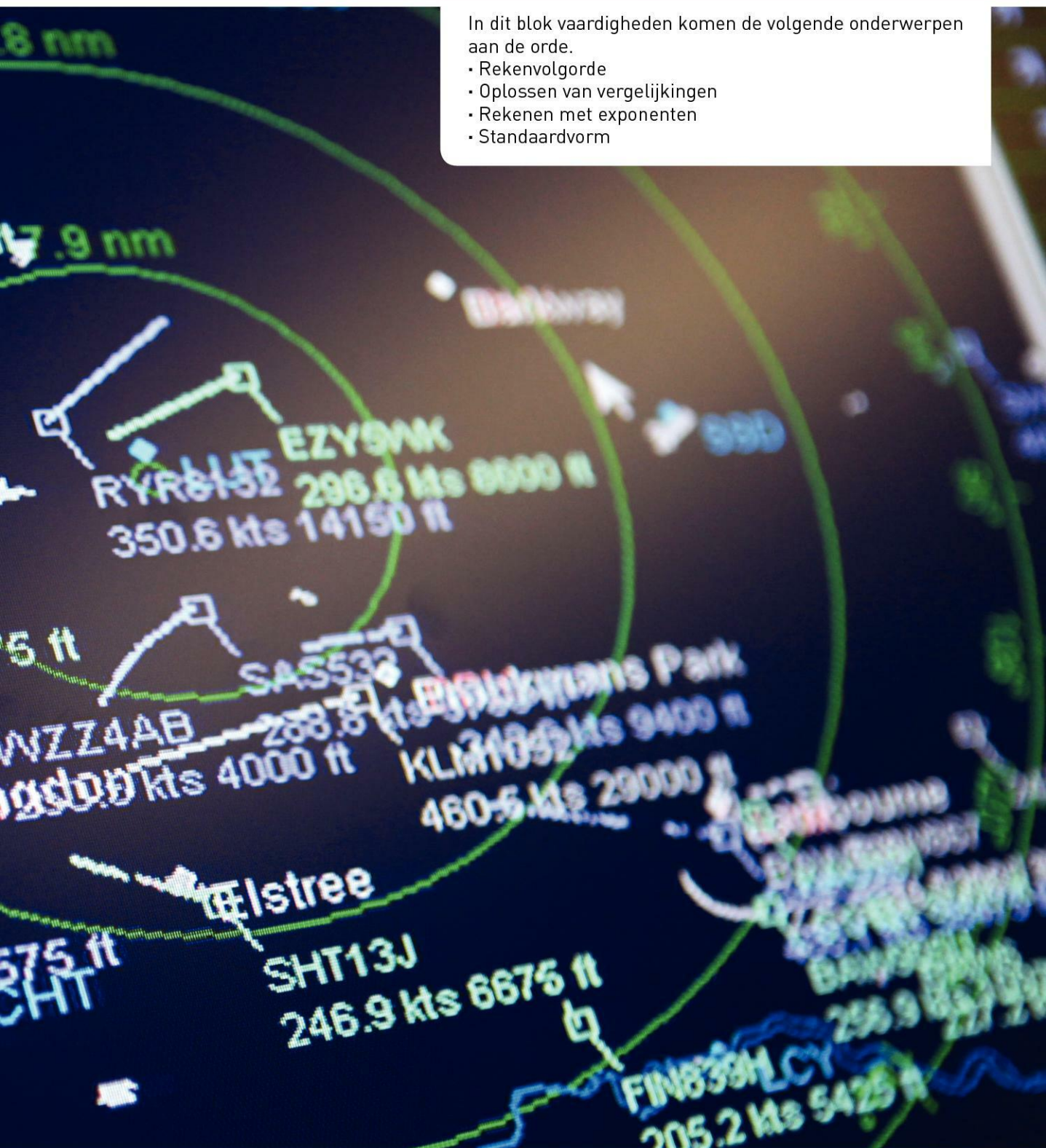
Opdracht

In 2008 waren er microchips met 731 miljoen transistoren. Als je uitgaat van 2300 transistoren in 1971, klopt het aantal transistoren in 2008 dan ongeveer met de voorspelling van Moore?



In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rekenvolgorde
- Oplossen van vergelijkingen
- Rekenen met exponenten
- Standaardvorm



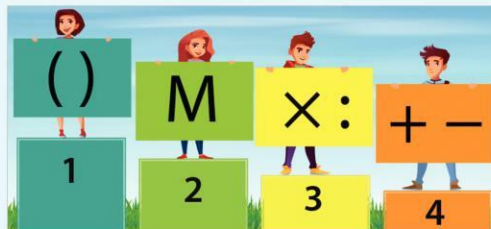
Rekenvolgorde

- 1 Anton, Ger en Yoline berekenen $10 - 3^2 \times 2$.
 Anton krijgt als antwoord 98, Ger krijgt als antwoord -8 en Yoline krijgt als antwoord 2.
 Wie van de drie heeft het juiste antwoord en welke fouten hebben de anderen gemaakt?

Theorie

Voor de volgorde bij berekeningen geldt:

- eerst uitrekenen wat binnen haakjes staat,
- dan machtsverheffen,
- dan vermenigvuldigen en delen van links naar rechts,
- dan optellen en aftrekken van links naar rechts.



- 2 Bereken en noteer alle tussenstappen.
- | | |
|---------------------------------------|-----------------------------------|
| a $(8 - 3)^3 \times -4$ | d $-5^2 - 7 + (-5)^2$ |
| b $10 - 2 \times 4^2 + 3 \times 5$ | e $3 \times (4 + 16) - \sqrt{49}$ |
| c $\frac{\sqrt{16} \times 7}{13 + 1}$ | f $\frac{100}{8 + 4 \times 8}$ |
- 3 Achter elke berekening staat hoe een leerling het in de rekenmachine heeft ingevoerd.
 Verbeter berekeningen die verkeerd zijn ingevoerd.

- a $\frac{9}{4 + 5}$ ingevoerd als $9/4 + 5$
- b $\frac{-12}{-3 + 1}$ ingevoerd als $-12/(-3 + 1)$
- c $2 \times 12\frac{1}{2}$ ingevoerd als $2 \times 12 + 1/2$
- d $\sqrt{25 - 9}$ ingevoerd als $\sqrt{(25) - 9}$
- e $\sqrt{7 + \frac{8}{3 + 1}}$ ingevoerd als $\sqrt{(7 + 8/3 + 1)}$

Oplossen van vergelijkingen

- 4 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.
- | | |
|--------------------------|------------------|
| a $3(x + 2)$ | d $A(A - 6)$ |
| b $p(1,5 - p)$ | e $7,2(2x + 6)$ |
| c $6(10 - \frac{1}{2}a)$ | f $x + 2(x + 1)$ |

5 Los de vergelijkingen op.

a $7x = 119$

d $\frac{1}{2}k = 7$

b $x + 10 = 21$

e $9 - x = 11$

c $1,2 - p = 0,3$

f $2(t + 5) = 24$

6 Alex lost de vergelijking $\frac{18}{1 + 2x} = 3$ op.

a Hij legt eerst een bordje op $1 + 2x$.
Welk getal moet er op de plaats van het bordje staan?

b Los de vergelijking verder op.

7 Tessa lost de vergelijking $6x - 2 = 4x + 8$ op.

a Waarom kan Tessa bij het oplossen van deze vergelijking geen bordjes gebruiken?

b Tessa gebruikt de balansmethode en trekt aan beide kanten van het gelijkteken $4x$ af.
Welke vergelijking krijgt zij dan?

c Los de vergelijking verder op.

Theorie

Voor het oplossen van een vergelijking kun je gebruik maken van de balansmethode of van bordjes. Bij de balansmethode voer je steeds links en rechts van het gelijkteken dezelfde bewerking uit. Je kunt een bordje gebruiken als in een vergelijking de variabele één keer voorkomt. Je rekent uit wat er op de plaats van het bordje moet staan.

Voorbeeld 1

Los op $6 - x = 3x - 22$.

Oplossing

$$6 - x = 3x - 22$$

$$6 = 4x - 22 \quad \text{links en rechts} + x$$

$$28 = 4x \quad \text{links en rechts} + 22$$

$$x = 28 : 4 = 7 \quad \text{links en rechts} : 4$$

Voorbeeld 2

Los op $\sqrt{6 - x} = 5$.

Oplossing

$$\sqrt{6 - x} = 5$$

$$6 - x = 25 \quad \text{bordje leggen}$$

$$-x = 19 \quad \text{links en rechts} - 6$$

$$x = -19 \quad \text{links en rechts} : -1$$

8 Los de vergelijkingen op.

a $17x - 21 = 21 - 3x$

d $3 = \sqrt{(12 - 6p)}$

b $1,2(x + 3) = 0,7 - 4,6x$

e $5(2\frac{1}{2}x + 6) = 55$

c $\frac{24}{2x - 9} = 6$

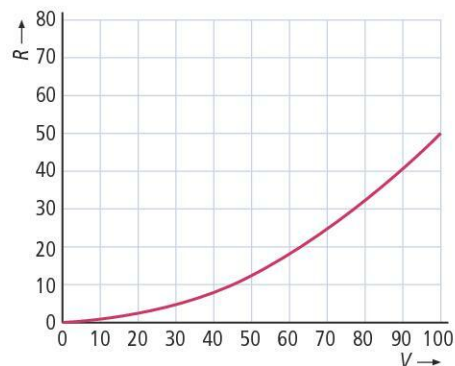
f $\frac{-2x + 3}{5} = 15$

- 9 De remweg van een auto bij een noodstop is afhankelijk van de snelheid die de auto heeft op het moment van remmen, maar natuurlijk ook van de gladheid van de weg en de kwaliteit van het remsysteem van de auto. Voor een bepaald type auto geldt

$$\text{bij droog weer de formule } R = \frac{v^2}{200}$$

Hierin is R de remweg in meters en v de snelheid in km per uur.

- Bereken de remweg bij een snelheid van 60 km per uur.
- Als de remweg gelijk is aan 50 meter, kun je met de vergelijking $50 = \frac{v^2}{200}$ uitrekenen welke snelheid de auto had. Je kunt deze vergelijking oplossen met een bordje. Welk getal moet er op de plaats van het bordje staan?
- Bereken de oplossing van de vergelijking.



Rekenen met exponenten

- 10 Esmee wil weten of ze $2^3 \times 2^4$ kan schrijven als één macht. Op het blaadje zie je hoe ze $2^3 \times 2^4$ heeft uitgeschreven.

- Vul in: $2^3 \times 2^4 = 2^{\dots}$.
- Schrijf de producten als één macht.

A $2^6 \times 2^3 =$

C $7^4 \times 7 =$

B $5^2 \times 5^8 =$

D $5^2 \times 5^6 =$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

- 11 a Op het blaadje zie je hoe Niels $(7^4)^3$ als één macht schrijft. Bereken op deze manier ook $(3^4)^5$.

- Schrijf als één macht.

A $(2^5)^3 =$

C $(3^4)^9 =$

B $(6^3)^7 =$

D $(1,5^3)^6 =$

$$\begin{aligned} (7^4)^3 &= 7^4 \times 7^4 \times 7^4 \\ &= 7^{4+4+4} \\ &= 7^3 \times 4 = 7^{12} \end{aligned}$$

- 12 a Op het blaadje zie je hoe je $\frac{3^5}{3^2}$ als één macht kunt schrijven.

Schrijf op deze manier ook $\frac{5^7}{5^3}$ en $\frac{2^9}{2^4}$ als één macht.

- Hoe kun je de uitkomst van $\frac{2^{13}}{2^4}$ berekenen zonder 2^{13} eerst helemaal uit te schrijven?

$$\begin{aligned} \frac{3^5}{3^2} &= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3} \\ &= \frac{3 \times 3 \times 3}{1} = 3^3 \end{aligned}$$

Theorie

Bij het rekenen met exponenten kun je gebruik maken van de volgende rekenregels:

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b} \quad (g^a)^b = g^{a \cdot b} \quad \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$$

Voorbeeld

Schrijf $4^2 \times (4^3)^5$ en $\frac{w^6}{w^4} \cdot w$ als één macht.

Oplossing

$$\begin{aligned} 4^2 \times (4^3)^5 &= 4^2 \times 4^{15} = 4^{17} \\ \frac{w^6}{w^4} \cdot w &= w^2 \cdot w = w^3 \end{aligned}$$

13 Schrijf als één macht.

a $(2^3)^2 \times 2^7 =$

c $4^2 \times 4 \times (4^2)^5 =$

b $\frac{9^7}{9^6} =$

d $\frac{8 \times 8^6}{(8^3)^2} =$

14 Schrijf de formules als één macht.

a $h = 3^a \cdot 3^{3a} \cdot 3^{2a}$

c $y = 2^x \cdot 2 \cdot (2^4)^x$

b $k = \frac{5^{5x}}{5^{4x}}$

d $l = \frac{7^{2n} \cdot (7^n)^4}{7^4}$

Standaardvorm**Theorie**

Een groot getal zoals 12 000 000 wordt op je rekenmachine weergegeven in de standaardvorm. In je scherm zie je dan 1,2E7. Dit geldt ook voor getallen heel dicht bij nul. Zo wordt het getal 0,000 000 025 weergegeven als 2,5E-8.

Voorbeeld

Bereken $\frac{8,1 \times 10^7}{9,7 \times 10^{-5}}$ en schrijf je antwoord in de standaardvorm.

Oplossing

$$(8,1 \times 10^7) : (9,7 \times 10^{-5}) \approx 8,35 \times 10^{11}$$

15 Schrijf als gewoon getal.

a $4,39 \times 10^6$

c $1,02 \times 10^{-5}$

b $3,0017 \times 10^2$

d $7,304 \times 10^{-2}$

16 Schrijf in de standaardvorm.

a 217 000 000

c 0,000 000 025

b 90 807 000

d 0,000 017

17 Bereken. Schrijf je antwoord in de standaardvorm en rond af op twee decimalen.

a $3,2 \times 10^{11} + 1,8 \times 10^{12}$

c $4213\,000 : 0,000\,021\,2$

b $\frac{9,9 \times 10^{-12}}{6,4 \times 10^{-15}}$

d $\frac{2 \times 10^5 + 7 \times 10^3}{8 \times 10^{-8} - 9 \times 10^{-7}}$





In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je kennis gemaakt met het verwerken van gegevens, zoals het maken van staafdiagrammen en boxplots.

In dit hoofdstuk leer je wat statistiek is. Je leert dat er verschillende soorten gegevens zijn en hoe je ze op verschillende manieren kunt weergeven. Je leert hoe je met de computer in grote hoeveelheden gegevens op zoek kunt gaan naar overeenkomsten en verschillen tussen de verzamelde waarnemingen en groepen.

In de volgende delen wordt het onderwerp statistiek uitgebreid en afgerond.

Voorbeelden van WDA in dit hoofdstuk

- *Logisch redeneren en bewijzen*
- *Analytisch denken en probleem oplossen*
- *Ordenen en structureren*

opdracht 18

opdracht 27

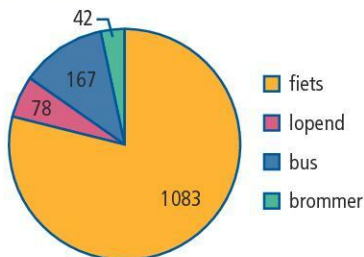
opdracht 25



Theorie

Gegevens kun je op verschillende manieren in beeld brengen. Je ziet vier manieren die je eerder bent tegengekomen, namelijk een **cirkeldiagram**, een **boxplot**, een **staafdiagram** en een **lijndiagram**.

Voorbeeld 1

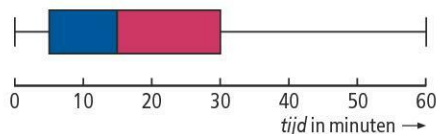


In het cirkeldiagram zie je hoe 1370 leerlingen naar school gaan. De delen van het cirkeldiagram worden sectoren genoemd.

De grootte van de hoek van de sector 'fiets' is $1083 : 1370 \times 360^\circ \approx 285^\circ$.

Van de leerlingen gaat $42 : 1370 \times 100\% \approx 3\%$ met de brommer naar school.

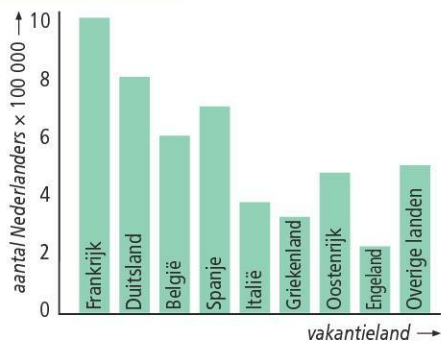
Voorbeeld 2



Een tandartspraktijk houdt bij hoeveel minuten na de afgesproken tijd een patiënt aan de beurt is. In de boxplot is te zien dat het eerste kwartiel 5 minuten is.

Dat betekent dat 25% van de patiënten binnen 5 minuten na de afgesproken tijd wordt geholpen.

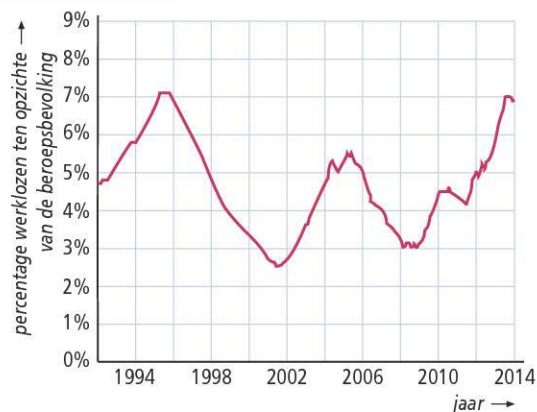
Voorbeeld 3



In een staafdiagram geeft de hoogte van de staaf het aantal keren dat een gegeven voorkomt.

Zo kun je in het staafdiagram aflezen hoeveel Nederlanders in de zomervakantie zijn geweest naar verschillende landen.

Voorbeeld 4



In het lijndiagram kun je aflezen dat op 1 januari 2000 ongeveer 3,3% van de beroepsbevolking werkloos was.

- V1**
- a** Lees in het cirkeldiagram af hoeveel leerlingen lopend naar school gaat. Hoeveel procent is dat?
 - b** Lees in de boxplot de waarde van het derde kwartiel af en leg uit wat dat betekent voor de wachttijd van de patiënten.
 - c** Waarom zijn de gegevens van het staafdiagram niet geschikt om een lijndiagram bij te maken?
 - d** In het lijndiagram zie je hoe in Nederland het aantal werklozen als percentage van de beroepsbevolking is veranderd. Op 1 januari 2012 was de totale beroepsbevolking 10,8 miljoen.
Hoeveel mensen waren er werkloos op 1 januari 2012?

- V2** De bevolking van Latijns-Amerika bestond rond 1880 uit ongeveer 7,6 miljoen indianen, 5,1 miljoen mestiezen, 0,8 miljoen zwarten en 3,4 miljoen blanken.
- a** Maak een staafdiagram van de samenstelling van de bevolking.
 - b** Hoeveel procent van de bevolking bestond in 1880 uit blanken?

- V3** In de tabel staan de eindcijfers voor het vak Engels.
- a** Hoeveel leerlingen hebben een voldoende?
 - b** Hoeveel procent van de leerlingen heeft een onvoldoende?

<i>cijfer</i>	4	5	6	7	8	9
<i>frequentie</i>	6	39	34	20	14	4

Theorie

Frequenties kun je **absoluut** of **relatief** weergeven. De absolute frequentie is het getelde aantal, de relatieve frequentie is bijvoorbeeld een percentage. In een cirkeldiagram is de hoek van de cirkelsector ook een voorbeeld van een relatieve maat voor de frequentie.

Voorbeeld

In de tabel staan de leeftijden van 105 leerlingen.
Het absolute aantal 18-jarigen is 8.
Het relatieve aantal 18-jarigen is $8 : 105 \times 100\% \approx 7,6\%$.

<i>leeftijd</i>	13	14	15	16	17	18
<i>frequentie</i>	2	10	18	32	35	8

- V4** Bekijk de tabel met eindcijfers bij opdracht V3.
- a** Zijn de frequenties absoluut of relatief weergegeven?
 - b** Maak een tabel met de relatieve frequenties.

3.1 Wat is statistiek?

Je leert

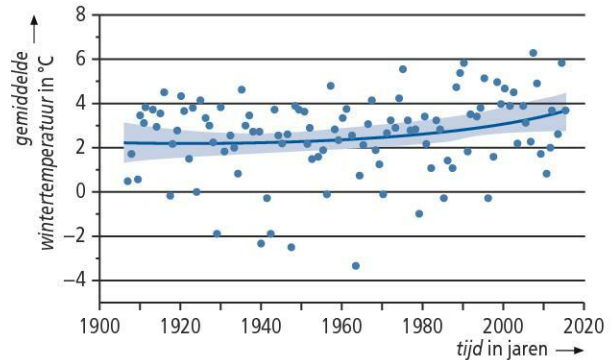
- wat statistiek is

Leerroutes

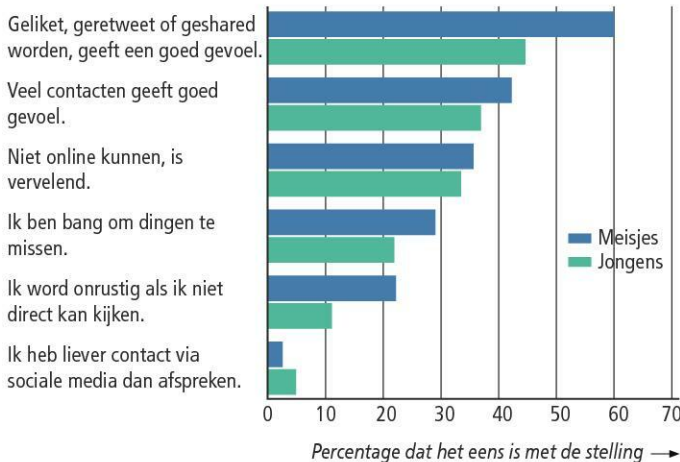
- ondersteunend: 1–2–3–04–5
- doorlopend: 1–2–3–4–5
- uitdagend: 1–3–4–5–U1

In de figuur staat voor elk jaar vanaf 1906 de gemiddelde wintertemperatuur in Midden-Nederland.

- Wat heeft de maker van deze figuur duidelijk willen maken?
- Kun je nu ook iets zeggen over de gemiddelde wintertemperatuur in Midden-Nederland in 2030?



- 1 In het diagram zie je informatie over het belang dat jongeren aan sociale media hechten.



- Op welke vraag proberen de onderzoekers die het diagram opstelden antwoord te krijgen?
- Over welke groep mensen gaat het diagram?
- Luca zegt: 'Meer dan 3 op de 10 jongeren vindt het vervelend om niet online te kunnen.' Ben jij het met de uitspraak van Luca eens?
- Formuleer op basis van het diagram een uitspraak over het belang dat jongeren aan sociale media hechten.

- 2 In de dataset zijn de prestaties van leerlingen bij een sportdag opgenomen.



- a Welke sporten hebben de leerlingen gedaan?
- b Hoeveel leerlingen deden mee aan de sportdag?
- c Waren het leerlingen van een basisschool of van een middelbare school?
- d Wat was de beste prestatie bij de sprint? Is deze prestatie geleverd door een jongen of door een meisje? Gebruik de sorteerfunctie.

Theorie

Statistiek is de naam van het vakgebied dat zich bezighoudt met het verzamelen, ordenen, samenvatten en analyseren van gegevens. Deze gegevens worden **data** genoemd en de verzamelde data vormen een **dataset**. Een **statistisch onderzoek** begint met een aantal vragen en de vaststelling over welke doelgroep het onderzoek gaat. Die doelgroep heet de **populatie**. Je gaat na op welke **statistische variabelen** het onderzoek betrekking heeft en je verzamelt data bij die variabelen. Je ordent de dataset om meer overzicht te krijgen. Uitspraken gedaan naar aanleiding van een statistisch onderzoek worden **statistische uitspraken** genoemd.

Voorbeeld

Een aantal jaren geleden zijn er strengere exameneisen ingevoerd. Het ministerie wil weten of deze maatregel de examenresultaten heeft beïnvloed. De populatie bestaat uit alle leerlingen die examen hebben gedaan, enkele jaren voor de invoering tot enkele jaren erna. Statistische variabelen waarover data wordt verzameld kunnen zijn geslacht, leeftijd, profiel, aantal keren doubleren, eindcijfers en examenuitslag. Een statistische uitspraak zou kunnen zijn: 'Het aantal onvoldoendes op de kernvakken is de eerste jaren na de invoering gedaald.'

- 3 In de dataset zie je de prestaties van leerlingen bij een sportdag.



- a Wat is de populatie?
- b Hoeveel data bevat de dataset?
- c Welke statistische variabelen zijn in de dataset opgenomen?
- d Geef bij de volgende statistische uitspraken aan of die op grond van de dataset kunnen worden gedaan.
 - A 'Van de 10 snelste leerlingen bij de sprint is de helft een meisje.'
 - B 'Ruim 9% leerlingen gooit 33 meter of verder.'
- e Welke statistische uitspraak kun je doen over de variabele *verspringen*?





Ondersteunende route → maak opdracht 04

4

H

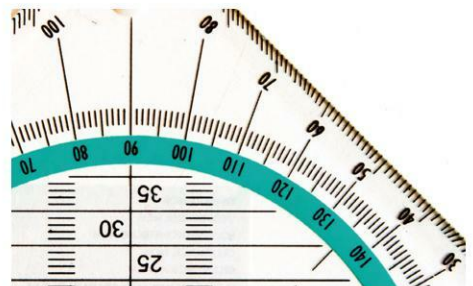
Op een middelbare school is de verkoop in de kantine in de pauze gedaald. De kantinebaas zegt dat dit komt doordat leerlingen naar de supermarkt gaan en daarom minder in de kantine komen. De rector denkt dat het komt omdat leerlingen de laatste jaren meer van gezond eten zijn gaan houden terwijl in de kantine bijna alleen maar ongezond eten te koop is. Voor hun profielwerkstuk besluiten twee leerlingen uit H4A te onderzoeken wie er gelijk heeft, de rector of de kantinebaas.

- Wat is in dit onderzoek de populatie?
- Geef twee voorbeelden van vragen die bij het onderzoek gesteld kunnen worden.
- Geef twee voorbeelden van statistische variabelen waarover data verzameld kunnen worden.
- Geef twee voorbeelden van statistische uitspraken die uit het onderzoek zouden kunnen komen.

5

Welke van de volgende uitspraken zijn statistische uitspraken?

- '18-jarigen geven het leven een 8,4.'
(publicatie NRC 05-01-2018)
- 'Vrouwen zijn iets vaker kostwinner.'
(Trouw, 09-03-2018)
- 'Hema verkocht geodriehoeken met drukfouten.'
(NRC, 11-05-2018)
- 'T-Mobile US biedt \$26 miljard voor telecombedrijf Sprint.'
(Financieel Dagblad, 30-04-2018)
- 'Klagen over huur levert vaak goed geld op.'
(Telegraaf, 11-05-2018)



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

04

Alle havo 4 klassen van een school gaan op werkweek naar Londen. Tijdens de werkweek worden verschillende activiteiten gedaan. Zo is er een rit in een reuzenrad, een bezoek aan een museum, een avondwandeling en een bezoek aan de musical. Op de laatste avond eten de leerlingen met zijn allen in een restaurant. De leerlingen overnachten in een hostel, waar ze behalve de laatste avond ook eten. De organisatie van de werkweek wil de werkweek evalueren. Daarom wordt een enquête gehouden onder de leerlingen.

- a Wat is de populatie?
- b Een voorbeeld van een vraag in de enquête is: Geef een cijfer voor de kwaliteit van het hostel.
Geef nog drie voorbeelden van een vraag die in de enquête gesteld kan worden.
- c Voorbeelden van statistische variabelen die in de enquête onderzocht kunnen worden zijn: *de lievelingsactiviteit van de leerling* en *de kwaliteit van het eten in het restaurant*. Geef nog twee voorbeelden van een statistische variabele die met de enquête onderzocht kunnen worden.
- d Een voorbeeld van een statistische uitspraak die uit de evaluatie kan komen is:
'80% van de leerlingen is ontevreden over het eten in het hostel.'
Geef nog twee voorbeelden van statistische uitspraken die uit de evaluatie kunnen komen.



Uitdagende opdrachten

U1

Een student sociologie krijgt de opdracht om de bevolking in een oudere stadswijk in kaart te brengen. De Gemeentelijke Basisadministratie, die beschikt over veel data over de inwoners, wil niet aan dit onderzoek meewerken, zodat de student zelf zijn data moet verzamelen.

Een van de zaken die hij wil onderzoeken is het aantal kinderen per huishouden. Om hierover gegevens te krijgen, vraagt hij 50 kinderen die op straat spelen hoeveel kinderen er zijn in hun gezin.

Noem drie redenen waarom de student op deze manier waarschijnlijk geen goede schatting kan maken van de grootte van de gezinnen in de wijk.



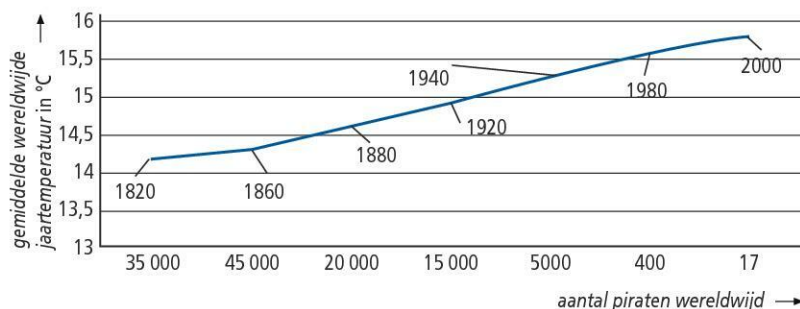
3.2 Statistische variabelen

Je leert

- wat een waarde van een statistische variabele is
- wat kwantitatieve en kwalitatieve variabelen zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 6—07—8—9—10—011—12—13
- doorlopend: 6—7—8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 6—7—9—10—11—12—13—U2



In de grafiek zijn gegevens verwerkt over het aantal piraten.

- Welke variabelen spelen een rol bij de grafiek?
- Geef commentaar op de grafiek.

6 In de dataset staan data van havo 4 leerlingen.



- Welke variabelen zijn onderzocht?
- Wat is de grootste uitkomst van de variabele *lengte*?
- Bij welke variabelen zijn de uitkomsten getallen?
- Tussen welke jaartallen varieert de variabele *geboortejaar*?
- Geef voor elk geboortejaar aan hoeveel leerlingen in dat jaar geboren zijn.
- Geef van de variabele *profiel* aan welke uitkomsten er zijn en hoe vaak elke uitkomst voorkomt.

Theorie

Een statistische variabele neemt verschillende **waarden** aan. Het aantal keer dat een waarde wordt aangenomen, is de **frequentie** van die waarde.

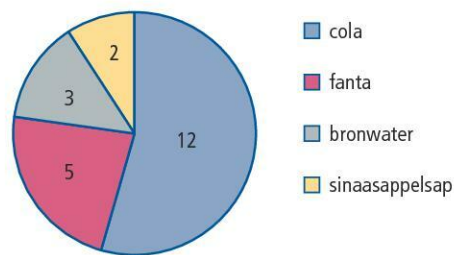
Voorbeeld

Een sportdocent heeft bijgehouden welke blessures zijn leerlingen dit schooljaar hebben opgelopen. In de tabel zie je de resultaten. De statistische variabele is *blessure*. De waarden die deze variabele aanneemt zijn botbreuk, verzwikking, schaafplek en snijwond. De frequentie van de waarde botbreuk is 1.

<i>blessure</i>	<i>frequentie</i>
botbreuk	1
verzwikking	7
schaafplek	34
snijwond	12

Ondersteunende route → maak opdracht 07

- 7** Klas H4A is uit eten geweest. In het cirkeldiagram zie je welke drankjes de leerlingen bij het eten bestelden.
- Over welke statistische variabele gaat het cirkeldiagram?
 - Welke waarden neemt de variabele aan?
 - Geef van elk van de waarden de frequentie.



- 8** In de dataset staat data over de examencijfers van havo 5.
- Welke waarden neemt de variabele *Nederlands Eind* aan?
 - Geef de frequentie van de waarde 5 bij de variabele *Nederlands Eind*.
 - Hoeveel procent van de leerlingen heeft een 5 als eindcijfer voor Nederlands?
 - Formuleer een statistische uitspraak met behulp van het antwoord van opdracht c.
- 9** De dataset bevat gegevens van studenten die zijn afgestudeerd aan een hbo-instelling.
- Welke variabelen zijn onderzocht?
 - Van welke variabelen kun je het gemiddelde uitrekenen?
 - Van welke variabelen is het uitrekenen van het gemiddelde zinvol?

Theorie

Statistische variabelen kun je verdelen in **kwantitatieve variabelen** en **kwalitatieve variabelen**. De waarde van een kwantitatieve variabele is een hoeveelheid uitgedrukt in een getal. De 'waarde' van een kwalitatieve variabele geeft een kenmerk weer.

Voorbeeld 1

Voorbeelden van kwantitatieve variabelen zijn:

- de prijs van een iPad
- het aantal schroeven in een doosje
- de temperatuur
- het aantal gezinsleden

Voorbeeld 2

Voorbeelden van kwalitatieve variabelen zijn:

- de kleur van een auto
- geboortemaand
- lievelingsdier
- het schooltype
- wel of niet brildragend

- 10** Welke van de variabelen zijn kwantitatief en welke zijn kwalitatief? Licht je antwoord toe.
- A de lengte van een leerling
 - B de inhoud in grammen van een koffiepak
 - C de plezierervaring in een achtbaan
 - D de smaak van een nieuwe soort chips

Ondersteunende route → maak opdracht 011

- 11**  **a** Waarom heeft het geen zin om het gemiddelde van de student ID nummers te berekenen?
- b** Leg uit dat voor de hbo instelling het ID nummer eigenlijk hetzelfde is als de naam van de student.
- c** Is het ID nummer een kwalitatieve of een kwantitatieve variabele? Licht je antwoord toe.

Soms worden kwalitatieve variabelen met een getal weergegeven. Je kunt herkennen of een variabele kwalitatief of kwantitatief is door te bedenken of een waarde van de variabele een kenmerk of een hoeveelheid weergeeft.

- 12**   De dataset bevat data over verschillende typen auto's. Geef van de variabelen aan of ze kwantitatief of kwalitatief zijn. Licht je antwoord toe.

- 13** Twee leerlingen voeren voor hun profielwerkstuk een onderzoek uit. Ze vragen zich af wat de invloed van een bijbaantje op de schoolprestaties is.
- a** Formuleer twee mogelijke onderzoeksvragen waarvan de statistische variabelen kwantitatief zijn.
 - b** Formuleer ook twee mogelijke onderzoeksvragen waarvan de statistische variabelen kwalitatief zijn.

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

07 De leerlingen in havo 4 hebben een proefwerk gemaakt. In de tabel zie je de resultaten.

<i>cijfer</i>	4	5	6	7	8
<i>aantal</i>	1	3	10	6	2

- Over welke statistische variabele staan in de tabel gegevens?
- Welke uitkomsten kan deze variabele aannemen? Dus welke waarden neemt de variabele aan?
- Hoe vaak komen deze waarden voor? Dus wat is van elk van de waarden de bijbehorende frequentie?

011 Sietse heeft in zijn klas onderzocht welke kleur ogen de leerlingen hebben. De resultaten staan in de dataset. Sietse heeft de volgende code gebruikt: blauw 1, bruin 2 en groen 3.



- Leg uit waarom het geen zin heeft om het gemiddelde van de waarden van de oogkleur uit te rekenen.
- Leg uit dat de waarden 1, 2 en 3 in de dataset een kenmerk weergeven.
- Roos zegt: 'Eigenlijk is de oogkleur weergegeven als getal bij een kwalitatieve variabele.'

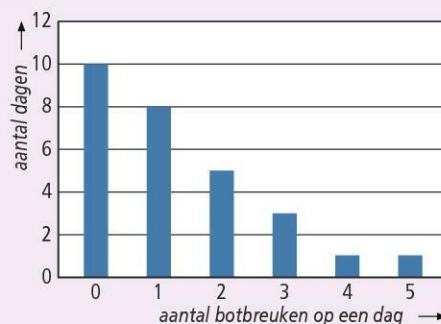
Ben jij het met Roos eens? Licht je antwoord toe.

Uitdagende opdrachten

U2 Gedurende vier weken wordt in een wintersportdorp bijgehouden hoeveel wintersporters op een dag een botbreuk oplopen.

- Wat is de statistische variabele?
- Brian zegt: 'De waarden die de variabele aanneemt, zijn 10, 8, 5, 3, 1 en 1.'

Ben jij het met de uitspraak van Brian eens? Licht je antwoord toe.



3.3 Data weergeven

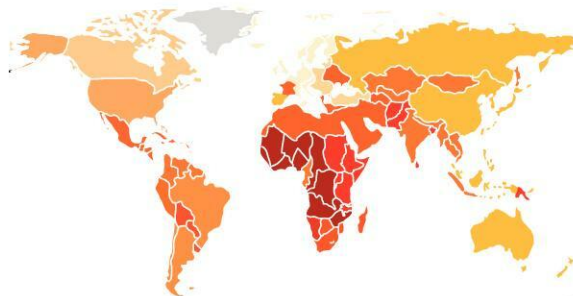
Je leert • hoe je data op verschillende manieren weergeeft

Leerroutes • ondersteunend: 14—15—016—17—18—19
• doorlopend: 14—15—16—17—18—19
• uitdagend: 14—15—16—17—19—U3

In de figuur is per land aangegeven hoe groot het aandeel 0 – 14 – jarigen is ten opzichte van de hele bevolking.

- In welk deel van de wereld lijkt de bevolkingsopbouw de komende jaren de meeste problemen op te leveren?

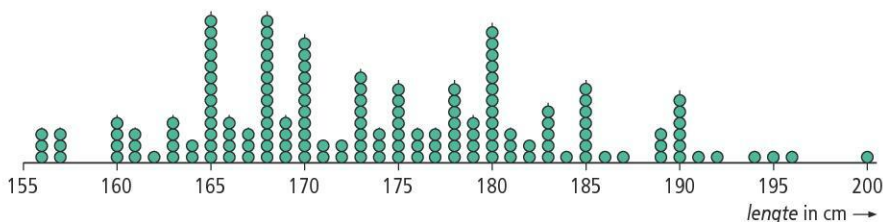
Percentage 0-14-jarigen



14 De dataset bevat gegevens over een aantal havo 4 leerlingen.



- a** De waarden van de variabele *lengte* zijn weergegeven in een dotplot.
Hoeveel leerlingen hebben een lengte van 170 cm?



- b** Maak een soortgelijke figuur bij de variabele *gewicht*.
c Er is één leerling met een gewicht van 71 kg.
Is dit een jongen of een meisje?
d In de figuur staan de gewichten van de jongens en de meisjes door elkaar.
Maak afzonderlijke figuren voor de gewichten van de jongens en de meisjes door de dataset te splitsen op de variabele *geslacht*.
e Formuleer een statistische uitspraak op basis van de resultaten van opdracht d.

- 15** In de dataset staat data over leerlingen in havo 5.
-  a Maak bij de variabele *advies* een dotplot, een staafdiagram en een cirkeldiagram.
- b Welk van de drie figuren vind je het meest geschikt om de data weer te geven? Leg je antwoord uit.
- c Maak een frequentietabel bij de variabele *advies*.
- d Hoeveel leerlingen hebben een havo advies?
- e Hoe groot is het percentage leerlingen met een havo advies?
- f Splits de frequentietabel op de variabele *klas*.
- g In welke klas zitten de minste leerlingen met een havo advies?

Je kunt data weergeven met bijvoorbeeld een frequentietabel, een cirkeldiagram, een staafdiagram of een dotplot. Welke keuze je maakt, hangt af van wat je wilt onderzoeken met de data. Je kunt daarbij ook de keuze maken tussen absolute of relatieve frequenties. Als je deelgroepen afzonderlijk wilt bekijken, dan splits je de dataset op de bijbehorende variabele.

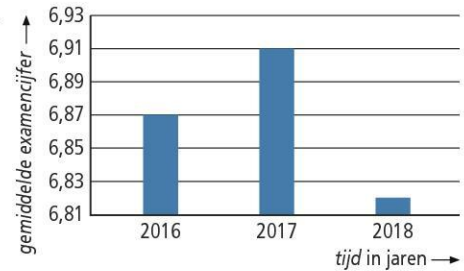
Ondersteunende route → maak opdracht 016

- 16**  a Zoek uit of er meer jongens of meisjes geslaagd zijn. Leg uit hoe je aan je antwoord komt.
- b In welke klas zijn de meeste leerlingen geslaagd? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.
- c Hoeveel leerlingen in klas 5Hb volgen het profiel NG en zijn geslaagd? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.
- 17**   In de dataset zie je gegevens van studenten die zijn afgestudeerd aan een hbo-instelling.
- a Welke studierichting hebben de meeste hbo studenten gekozen?
- b Binnen welke vooropleiding is de studierichting sociale vakken het vaakst gekozen?
- c Hoeveel leerlingen met een havo vooropleiding hebben gekozen voor de studierichting sociale vakken?
- d Hoeveel procent van de studenten met een havo of een vwo-vooropleiding hebben voor de studierichting landbouw gekozen?



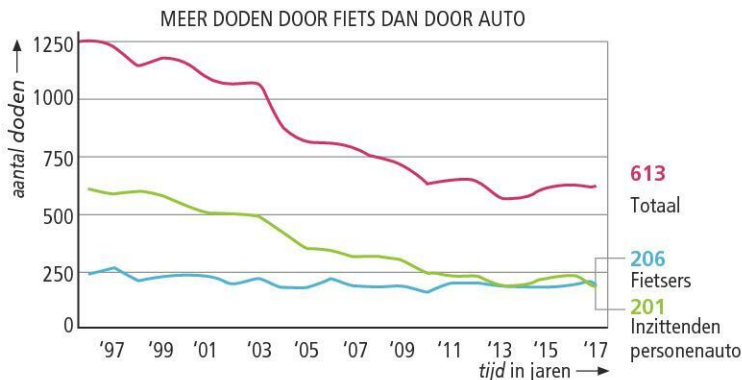
- 18** De directie van een school presenteert de examenresultaten van de havo van de afgelopen drie jaar met het staafdiagram met de tekst ‘Gemiddeld examencijfer havo na een stijgende lijn in 2018 drastisch gedaald.’

- Ben jij het met de directie eens? Licht je antwoord toe.
- Wat heeft de directie met de verticale as gedaan om hun uitspraak kracht bij te zetten?



Statistische weergaven worden veel gebruikt om statistische uitspraken kracht bij te zetten. In sommige gevallen wordt de data op zo'n manier weergegeven dat er een vertekend beeld van de werkelijke situatie ontstaat. Men spreekt dan van misleidende statistiek.

- 19** Je ziet een lijndiagram die bij een artikel in een krant staat dat gaat over het aantal ongevallen onder fietsers.



- Over welke variabelen gaat het lijndiagram?
- Noem een reden waarom de makers van dit diagram hebben gekozen voor een lijndiagram.
- Is het absolute aantal verkeersdoden op de fiets toegenomen of afgenomen in de periode 1996 - 2017?
- Is het relatieve aantal verkeersdoden op de fiets toegenomen of afgenomen in de periode 1996 - 2017? Hoe komt dat?
- Is het sinds 1996 gevaarlijker geworden op de fiets?
- Maak een tekst om boven het lijndiagram te zetten die beter past bij deze gegevens.

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

016

De dataset bevat gegevens over leerlingen in havo 4.



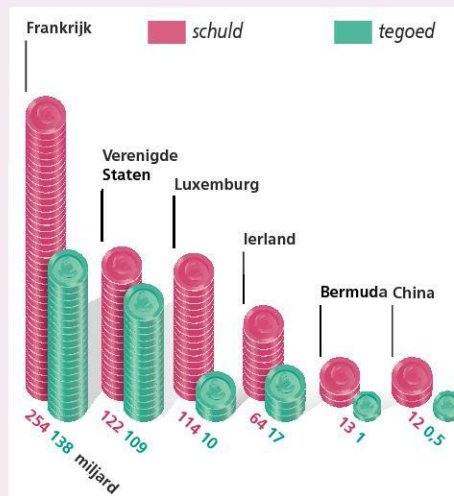
- Maak bij de variabele *profiel* een staafdiagram, een cirkeldiagram en een frequentietabel. Splits elk van de weergaven op *geslacht*.
- Met welk van de weergaven van opdracht a zie je het makkelijkst in één oogopslag of meer jongens of meisjes het profiel NG volgen?
- En met welk van de weergaven van opdracht a zie je het makkelijkst in één oogopslag of relatief gezien meer jongens of meer meisjes het profiel EM volgen?
- En met welk van de weergaven van opdracht a zie je het makkelijkst in één oogopslag hoeveel jongens het profiel NG of het profiel NT volgen?

Uitdagende opdrachten

U3

In het diagram wordt de staatsschuld van verschillende landen vergeleken met de tegoeden die de landen hebben.

- Toon met een berekening aan dat de muntjes met dezelfde grootte niet overal dezelfde waarde hebben.
- Geef een reden waarom de makers van het diagram dat gedaan hebben.
- Een maat voor welvaart is de netto staatsschuld, dat is het verschil tussen de schuld en het tegoed. Vergelijk de diagrammen van China en de Verenigde Staten met elkaar. Welk land lijkt het zo op het oog beter te doen?
- Bereken de netto staatsschuld van China en van de Verenigde Staten en vergelijk het resultaat met het antwoord van opdracht c.
- Vergelijk de netto staatsschuld van Frankrijk en Luxemburg met elkaar.
- Vind jij dit een goede weergave van de staatsschuld van de landen? Licht je antwoord toe.



3.4 Variabelen vergelijken

Je leert

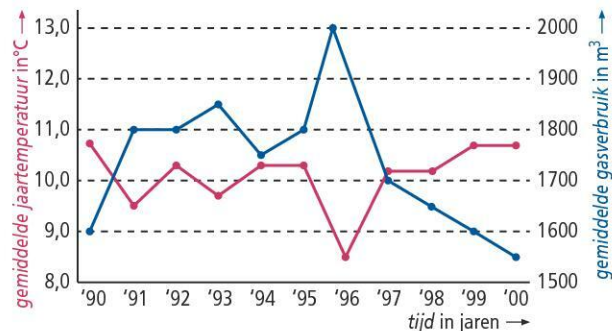
- hoe je onderzoekt of er een statistisch verband tussen variabelen bestaat

Leerroutes

- ondersteunend: 20—21—022—023—24—25
- doorlopend: 20—21—22—23—24—25
- uitdagend: 20—21—22—23—25—U4

Het CBS houdt allerlei gegevens bij, ook over het weer in Nederland en over het energieverbruik. In de figuur zijn voor de jaren 1990 tot en met 2000 de gemiddelde jaartemperatuur en het gemiddelde gasverbruik per huishouden weergegeven.

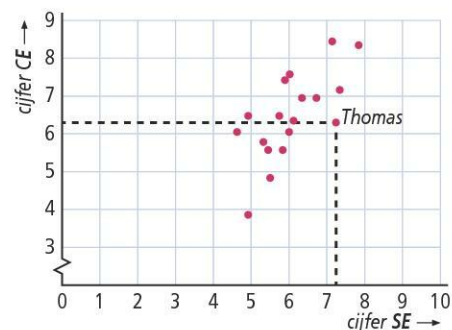
- Welk verband zie je tussen de gemiddelde jaartemperatuur en het gemiddelde gasverbruik? Klopt dit met wat je zou verwachten?



- 20** Van een aantal leerlingen is het verband tussen de cijfers voor wiskunde B op het schoolexamen (SE) en het centraal examen (CE) weergegeven. In dit diagram stelt elk punt één leerling voor.

Thomas had een 7,2 voor zijn SE en een 6,3 voor zijn CE.

- Hoeveel leerlingen hebben examen in wiskunde B gedaan?
- Hoeveel leerlingen hadden een zes of hoger voor hun SE?
- En hoeveel leerlingen hadden een zes of hoger voor hun CE?
- Hoe zie je aan de punten in het diagram dat het SE-cijfer en het CE-cijfer vrij nauw samenhangen?
- Hoeveel leerlingen hadden voor hun CE een lager cijfer dan voor hun SE?



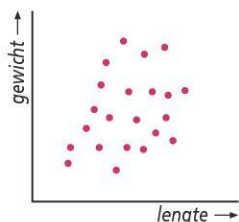
Theorie

Wanneer twee statistische variabelen kwantitatief zijn, kun je de samenhang of het **statistisch verband** onderzoeken met een **puntenwolk** of een **spreidingsdiagram**. Daarbij zet je de ene variabele op de horizontale as en de andere variabele op de verticale as. Het spreidingsdiagram bestaat uit een wolk van punten. Elk element uit de populatie wordt een punt in het spreidingsdiagram. Liggen de punten verspreid, dan is er geen statistische verband tussen de variabelen. Liggen de punten redelijk op één lijn, dan is er wel een statistisch verband tussen de variabelen. Soms kunnen punten samenvallen.

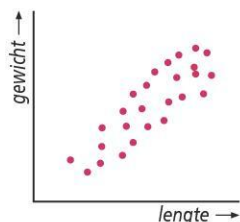
Voorbeeld

In de linker puntenwolk is er geen duidelijk statistisch verband tussen de kwantitatieve variabelen *lengte* en *gewicht*.

In de rechter puntenwolk zie je dat er een verband is tussen *lengte* en *gewicht*. Bij grotere waarden van de *lengte* is in het algemeen ook de waarde van het *gewicht* groter.



geen duidelijk statistisch verband



statistisch verband

21 De dataset bevat onder andere de gegevens van opdracht 20.



- Maak een puntenwolk waarbij je de resultaten van het schoolexamen Duits vergelijkt met die van het centraal examen Duits.
- Bij welk vak vind je het verband tussen het SE-cijfer en het CE-cijfer sterker, bij wiskunde B of Duits?
- Kun je het antwoord van opdracht b verklaren?

Ondersteunende route → maak opdracht 022

22 Jorien wil onderzoeken of er een statistisch verband bestaat tussen het geslacht van leerlingen en het gekozen profiel.



- Zijn deze variabelen kwalitatief of kwantitatief?
- Maak een puntenwolk bij deze variabelen en omschrijf hoe de puntenwolk eruit ziet.
- Leg uit waarom het tekenen van een puntenwolk bij twee kwalitatieve variabelen niet zinvol is.
- Hoe kun je deze twee variabelen beter met elkaar vergelijken?

Ondersteunende route → maak opdracht 023

23 Sander wil onderzoeken of er een statistisch verband is tussen het geslacht van een leerling en de keuze voor wiskunde A of wiskunde B.



- Maak een tabel zoals hiernaast bij de variabelen *geslacht* en *wisgroep*.
- Hoeveel procent van de jongens koos voor wiskunde A?
- En hoeveel procent van de meisjes koos voor wiskunde A?
- Wie kozen er in verhouding vaker voor wiskunde A, jongens of meisjes?

	wisgroep		
geslacht	A	B	totaal
m	...	...	...
v	...	...	...
totaal	...	...	...

Theorie

Bij kwalitatieve variabelen heeft het maken van een puntenwolk geen zin. De samenhang tussen twee kwalitatieve variabelen of een kwantitatieve en een kwalitatieve variabele kun je onderzoeken door de frequenties in een tabel te zetten. Zo'n tabel heet een **kruistabel**.

Voorbeeld

In de kruistabel zijn de waarden van de kwalitatieve variabelen *geslacht* en *profiel* verwerkt.

De relatieve frequentie van de jongens in het profiel EM is $15 : 42 \times 100\% \approx 35,7\%$.

De relatieve frequentie van het profiel EM bij de jongens is $15 : 69 \times 100\% \approx 21,7\%$.

<i>profiel</i>	<i>geslacht</i>		totaal
	m	v	
CM	2	9	11
EM	15	27	42
NG	17	43	60
NT	35	6	41
totaal	69	85	154

- 24** In de dataset staan onder andere gegevens over het profiel en het eindcijfer voor Engels.



- Zijn de variabelen *Profiel* en *Engels Eind* kwalitatief of kwantitatief?
- Maak een kruistabel bij de deze variabelen.
- In welk profiel hebben de meeste leerlingen een 6 als eindcijfer voor Engels?
- In welk profiel hebben relatief de meeste leerlingen een 6 als eindcijfer voor Engels?

- 25** Zolang de CITO-eindtoets bestaat, wordt er al over gediscussieerd. Annejet wil onderzoeken hoe sterk het statistisch verband is tussen de CITO-score van de basisschool en het gemiddelde van alle examenvakken.



- Kun je dit verband beter onderzoeken met een puntenwolk of met een kruistabel?
- Onderzoek de bewering: 'Een hogere CITO-score gaat vaak samen met een hoger gemiddelde van alle examenvakken.' Ben je het eens met deze bewering?



Uitdagende route → maak opdracht U4

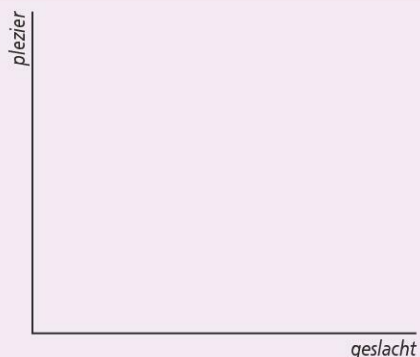
Ondersteunende opdrachten

022



Aan de leerlingen is gevraagd aan te geven hoeveel plezier ze hebben in wiskunde. Je gaat een puntenwolk maken bij de variabelen *geslacht* en *plezier*.

- Zijn deze variabelen kwantitatief of kwalitatief?
- Welke waarden kan de variabele *geslacht* aannemen? Dus hoeveel waarden komen er op de horizontale as?
- Hoeveel waarden komen er op de verticale as?
- Hoeveel punten zullen er zichtbaar zijn in de puntenwolk?
- Maak een puntenwolk bij de variabelen *geslacht* en *plezier*. Komt dit overeen met je antwoord bij opdracht d?
- Leg uit waarom het tekenen van een puntenwolk bij twee kwalitatieve variabelen niet zinvol is.



023

Een buurtvereniging organiseert voor leden een dag bij een outdoor centrum. Voor de eerste activiteit moet worden gekozen tussen schieten met een handboog en schieten met een kruisboog. In de kruistabel zie je de gemaakte keuzes.

- Hoeveel procent van de jeugd en hoeveel procent van de volwassenen heeft gekozen voor kruisboogschieten?
- Is de populariteit van het kruisboogschieten groter bij de jeugdleden of bij de volwassen leden?
- Hoeveel procent van handboogschutters en hoeveel procent van de kruisboogschutters behoort bij de jeugd?
- Welke instructeur heeft in verhouding de meeste jeugd in zijn groep, die van het handboogschieten of die van het kruisboogschieten?

	hand-boog	kruis-boog	totaal
jeugd	3	5	8
volwassenen	11	15	26
totaal	14	20	34

Uitdagende opdrachten

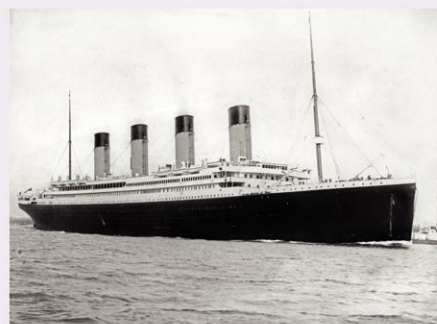
U4



De Titanic was een luxe passagiersboot die was bedoeld voor trans-Atlantisch transport. Maar al op de eerste tocht, in de nacht van 14 op 15 april 1912 kwam zij in de problemen. Waarschijnlijk is ze in aanvaring gekomen met een ijsberg en binnen drie uur was het schip gezonken. Met als triest resultaat dat 1522 van de opvarenden zijn verdronken.

In de dataset zijn van ruim 1300 passagiers gegevens opgenomen over de *klasse* van de hut (1ste, 2de of 3de), de *leeftijdscategorie* (volwassen of kind), het *geslacht* (man of vrouw) en of de ramp is overleefd.

Onderzoek welk van de variabelen het meest van invloed is geweest op de overlevingskans.



3.5 Groepen vergelijken

Je leert • hoe je groepen met elkaar vergelijkt

Leerroutes • ondersteunend: 26—027—28—29—30—031—32
• doorlopend: 26—27—28—29—30—31—32
• uitdagend: 26—28—29—30—31—32—U5

Aan de leerlingen van een school in Spanje en van een school in Nederland wordt gevraagd uit hoeveel personen het huishouden bestaat waartoe zij behoren. In de tabel zie je de resultaten.

aantal personen per huishouden

	2	3	4	5	6	7
Nederland	48	101	144	90	18	36
Spanje	79	105	190	141	39	18

- Is het aantal personen in het huishouden van de leerlingen op de Spaanse school groter dan bij de leerlingen op de Nederlandse school?



26 De dataset bevat informatie over havo 4 leerlingen.



- Maak een kruistabel bij de variabelen *plezier* en *geslacht*.
- Hebben meer jongens of meer meisjes veel plezier in school?
- Is het percentage jongens dat met veel plezier naar school gaat groter of kleiner dan het percentage bij de meisjes?
- Geef een verklaring voor het verschil tussen de antwoorden van de opdrachten b en c.
- Wat geeft beter weer wie er veel plezier heeft in school, de daadwerkelijke aantallen of de percentages? Waarom?

Statistische data kun je ordenen in kruistabellen. De data in zo'n tabel kun je absoluut of relatief weergeven. Relatieve frequenties zijn handiger als je groepen van verschillende grootte met elkaar wilt vergelijken.

Ondersteunende route → maak opdracht 027

27 Michel is één van de 154 leerlingen en hij heeft het profiel EM



gekozen. Hij denkt dat de leerlingen in het profiel EM naar verhouding de meeste leerlingen zitten die met veel plezier naar school gaan.
Onderzoek met een kruistabel of hij gelijk heeft. Als Michel geen gelijk heeft, geef dan aan welk profiel dan naar verhouding de meeste leerlingen heeft die met veel plezier naar school gaan.



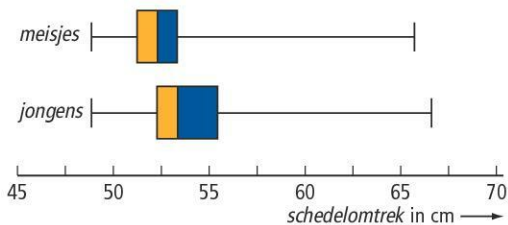
- 28** De gegevens in dit bestand gaan over 404 kinderen met een leeftijd van 10 en 12 jaar. Je gaat in deze opdracht onderzoeken in welke leeftijdsgroep er naar verhouding de meeste kinderen zijn met een bepaalde eigenschap.
- a Wat wordt er bedoeld met de waarden 0 en 1 bij de variabele *bril*?
 - b En wat wordt er bedoeld met de waarden 0 en 1 bij de variabele *links of rechtshandig*?
 - c In welke leeftijdsgroep zitten naar verhouding de meeste bril dragers? Licht je werkwijze toe.
 - d En in welke leeftijdsgroep zitten naar verhouding de meeste linkshandigen?
- 29** Je gaat onderzoeken of jongens of meisjes naar verhouding vaker linkshandig zijn.
- a Welk resultaat verwacht je bij dit onderzoekje? Licht je antwoord toe.
 - b Maak een kruistabel met absolute frequenties bij de variabelen *geslacht* en *links- of rechtshandig*.
 - c Waarom kun je in dit geval op basis van een kruistabel met absolute frequenties al een antwoord geven op de onderzoeksvraag?
 - d Formuleer een statistische uitspraak die bij de onderzoeksvraag hoort.
- 30** Miranda onderzoekt of de jongens of de meisjes naar verhouding het zwaarst zijn.
- a Geef aan of de variabelen *geslacht* en *gewicht* kwalitatief of kwantitatief zijn.
 - b Maak een kruistabel bij de variabelen *geslacht* en *gewicht*. Waarom is de kruistabel zo groot geworden?
 - c Maak een boxplot van de variabele *gewicht* en splits op *geslacht*.
 - d Zijn de jongens of de meisjes naar verhouding het zwaarst? Hoe zie je dat?

Theorie

Als je groepen wilt vergelijken, kan het gebeuren dat een kruistabel groot en dus onoverzichtelijk wordt. In zulke gevallen kun je groepen beter vergelijken met bijvoorbeeld staafdiagrammen, dotplots of boxplots.

Voorbeeld 1

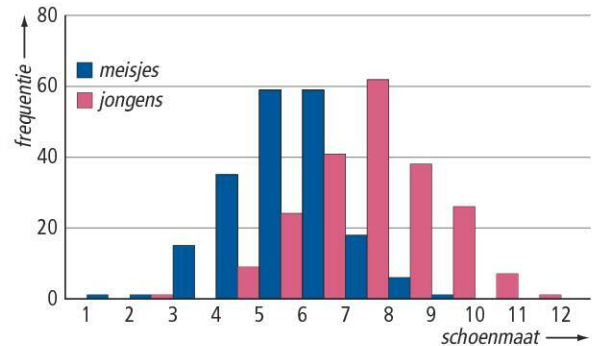
Bij de 404 jongeren is ook de schedelomtrek gemeten. In de boxplots zijn de resultaten verwerkt.



Naar verhouding hebben jongens een grotere schedelomtrek.

Voorbeeld 2

In het onderzoek bij de 404 jongeren is ook gelet op de schoenmaat. In de staafdiagrammen zijn de resultaten verwerkt.



Naar verhouding hebben jongens een grotere schoenmaat.

Ondersteunende route → maak opdracht 031

31 In deze opdracht ga je de jongens en de meisjes op bepaalde eigenschappen met elkaar vergelijken.



- Onderzoek met dotplots of de jongens of de meisjes naar verhouding een grotere handspan hebben.
- Onderzoek met boxplots of de jongens of de meisjes naar verhouding een grotere taille hebben.

32 Onderzoek wie er naar verhouding vaker kunnen tongrollen, de meisjes of jongens? Kies of je hierbij gebruikt maakt van een kruistabel of van een staafdiagram of van een ander soort diagram. Licht je werkwijze toe.



Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

027



Daniel is een van de 154 leerlingen en hij heeft het profiel CM gekozen. Hij denkt dat in het profiel CM naar verhouding de meeste leerlingen zitten die met weinig plezier naar school gaan.

- a Maak een kruistabel bij de variabelen *plezier* en *profiel*.
- b Waarom kun je de leerlingen met de verschillende profielen nu nog niet met elkaar vergelijken op de eigenschap ‘weinig plezier’?
- c Hoeveel procent van de leerlingen met een CM profiel gaan met weinig plezier naar school?
- d In welk profiel zitten naar verhouding de meeste leerlingen heeft die met weinig plezier naar school gaan?

031



In deze opdracht ga je de jongens en de meisjes op bepaalde eigenschappen met elkaar vergelijken.

- a Maak een dotplot bij de variabele *armspan* en splits op *geslacht*.
- b Hoeveel procent van de jongens heeft een armspan van 170 cm of meer? En hoeveel procent is dat bij de meisjes?
- c Hebben de jongens of de meisjes naar verhouding een grotere armspan?
- d Maak een boxplot bij de variabele *lengte* en splits op *geslacht*.
- e Zijn de jongens of de meisjes naar verhouding een het langst?

Uitdagende opdrachten

U5



De dataset bevat gegevens van studenten die zijn afgestudeerd aan een hbo-instelling. De variabele *Studieduur* geeft in maanden nauwkeurig de tijd die de student nodig heeft gehad om zijn studie af te ronden.

Onderzoek of er verschil in studieduur bestaat tussen verschillende groepen studenten. Denk daarbij aan de vooropleiding, studierichting en geslacht.



3.6 Gemengde opdrachten

Aantal jongeren met overgewicht opnieuw toegenomen.

Jongeren vinden Duits steeds leuker.

94 procent van de ouderen woont nog thuis en houdt dat graag zo.

- 33** De drie krantenkoppen bevatten elk een statistische uitspraak.
- Geef bij elk van de krantenkoppen aan wat de onderzoeksvraag is.
 - Geef bij elke krantenkop aan wat de populatie is.
 - Geef bij elk van de krantenkoppen aan welke statistische variabele een rol speelt.
 - Geef bij elke variabele van opdracht c aan of het kwalitatieve of kwantitatieve variabele is.

- 34** Je onderzoekt in deze opdracht of er in deze dataset verbanden zijn tussen verschillende variabelen.

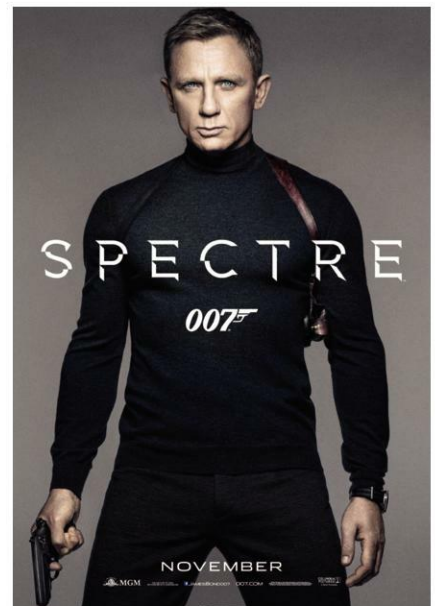


- Teken een puntenwolk met op de horizontale as de variabele *lengte* en op de verticale as de variabele *gewicht*.
- Wat is de betekenis van het meest rechter punt in de grafiek?
- Wat gebeurt er in het diagram als twee leerlingen dezelfde lengte en hetzelfde gewicht hebben?
- Hoe zie je aan de punten in de puntenwolk dat de variabelen *lengte* en *gewicht* redelijk nauw samenhangen?
- Onderzoek of er samenhang bestaat tussen de hoeveelheid tijd die een leerling aan huiswerk besteedt en het gemiddelde behaalde resultaat.

- 35** Op een online filmforum gaven mensen een rating van 1 tot en met 100 aan de nieuwste James Bond film. In de dataset zijn deze gegevens opgenomen.



- Maak staafdiagrammen van de waarderingen van jongeren en van de ouderen.
- In welke groep zijn de meningen het meest verdeeld over de film? Licht je antwoord toe.
- Maak boxplots van de waarderingen van de jongeren en van de ouderen.
Formuleer een statische uitspraak waarbij je de meningen van de jongeren en de ouderen met elkaar vergelijkt.



conducteur, citroen
advocaat, crank, beer,
appel, alkoof, duif,
bakker, druif, banaan,
biest, cheeta, drukker,
aap, deuvel

aap, alkoof, advocaat,
appel, biest, bakker,
banaan, beer, cheeta,
citroen, conducteur,
crank, druif, drukker,
duif, deuvel

aap, appel, advocaat
beer, bakker, cheeta,
alkoof, banaan,
conducteur, biest
druif, crank, citroen,
deuvel, druif, drukker

advocaat	appel
bakker	banaan
conducteur	citroen
drukker	druif
aap	alkoof
beer	biest
cheeta	crank
duif	deuvel

36



In een geheugenexperimentje kregen leerlingen aan het begin van de les elk één van de gekleurde kaartjes met de tekst naar beneden op tafel.

Het experiment ging als volgt. Na de uitleg mochten de kaartjes worden omgedraaid. Gedurende één minuut mochten de leerlingen, zonder bij de burens te kijken, de woorden bestuderen, waarna het kaartje weer op de kop op tafel moest worden gelegd. Daarna ging de les gewoon verder.

Na ongeveer een halfuur werd gevraagd op de achterkant alle onthouden woorden op te schrijven.

De onderzoeker veronderstelde:

hoe gestructureerde de woorden worden aangeboden, hoe beter ze worden onthouden en ook:

hoe bekender de woorden, hoe beter ze worden onthouden.

Onderzoek in hoeverre de veronderstellingen van de onderzoeker worden bevestigd door de verzamelde data.

37

In deze opdracht ga je een onderzoekje in je eigen klas uitvoeren.

- Bedenk een statistische uitspraak die voor de leerlingen in jouw klas zou kunnen gelden.
- Bedenk een paar vragen waarmee je kan nagaan of de uitspraak geldt bij de leerlingen.
- Ondervraag je klasgenoten, maak een dataset van de antwoorden en verwerk de gegevens op een geschikte manier.
- In welke mate geldt de uitspraak van opdracht a in jouw klas?

Theorie

Statistiek, data, dataset, statistisch onderzoek, populatie, statistische variabelen, statistische uitspraken.

Statistiek is de naam van het vakgebied dat zich bezighoudt met het verzamelen, ordenen, samenvatten en analyseren van gegevens. Deze gegevens worden data genoemd en de verzamelde data vormen een dataset. De doelgroep van een statistisch onderzoek heet de populatie. Je gaat na op welke statistische variabelen het onderzoek betrekking heeft en je verzamelt data bij die variabelen. Uitspraken gedaan naar aanleiding van een statistisch onderzoek worden statistische uitspraken genoemd.

- S1** In een onderzoek naar de hoeveelheid beweging bij jongeren tussen 12 en 18 jaar krijgen, zijn van 1387 respondenten data verzameld. In de tabel staat het begin van de dataset.

<i>naam</i>	<i>leeftijd</i>	<i>vervoermiddel</i>	<i>reisafstand</i>	<i>reistijd</i>	<i>sport</i>	<i>sporttijd</i>
Jasper	17	scooter	13,4	21	geen	0
Sofie	15	fiets	9,5	32	korfbal	210
Cor	16	bus	27	45	voetbal	300

- Wat is in dit onderzoek de populatie?
- Noteer de statistische variabelen bij dit onderzoek.
- Formuleer een mogelijke statistische uitspraak naar aanleiding van dit onderzoek.

Theorie

Waarden en frequentie

Een statistische variabele neemt verschillende waarden aan. Het aantal keer dat een waarde wordt aangenomen, is de frequentie van die waarde.

Voorbeeld

Op een muziekfestival wordt nagegaan welke soorten eten er het meest gekocht worden bij foodstands. Er blijken 1200 hamburgers, 1600 pannenkoeken en 400 doosjes sushi te zijn verkocht. De variabele is *het soort eten*. Deze variabele neemt de waarden hamburger, pannenkoek en sushi aan. De frequenties zijn 1200, 1600 en 400.

- S2** Bij een wielervereniging is gekeken welk merk racefiets de leden hebben. In de tabel zie je de resultaten. Geef aan wat de variabele, de waarden en de frequenties in de tabel zijn.

<i>merk</i>	Cube	Sensa	Trek	Anders
<i>aantal leden</i>	73	21	56	17

Theorie

Kwantitatieve en kwalitatieve variabelen

Statistische variabelen kun je verdelen in kwantitatieve en kwalitatieve variabelen. De waarde van een kwantitatieve variabele is een getal. De 'waarde' van een kwalitatieve variabele geeft een kenmerk weer.

Voorbeeld

De variabele *oppervlakte* die aangeeft hoeveel m² woonruimte een woning heeft, is kwantitatief.

De variabele *type* die aangeeft wat voor soort woning het betreft (vrijstaand, appartement, studio, ..) is kwalitatief.

- S3** Noteer bij elke statistische variabele uit het onderzoek bij opdracht S1 of deze kwantitatief of kwalitatief is.

Vaardigheid

Je kunt data op verschillende manieren weergeven.

Je kunt data weergeven met bijvoorbeeld een frequentietabel, een staafdiagram, een cirkeldiagram of een boxplot. Je kunt kiezen tussen absolute of relatieve frequenties. Als je deelgroepen afzonderlijk wilt bekijken, dan splits je de dataset op de bijbehorende variabele.

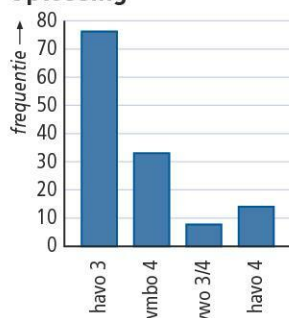
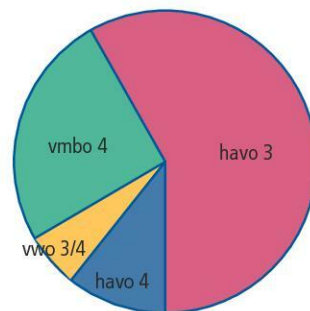
Voorbeeld

De frequentietabel geeft de verdeling van de leerlingen van havo 4.

<i>vorig jaar</i>	<i>aantal</i>
havo 3	76
vmbo 4	33
vwo 3/4	8
havo 4	14

Teken een staafdiagram en een cirkeldiagram bij deze frequentietabel.

Oplossing



- S4** In de dataset staan gegevens van 195 leerlingen.



- Maak een staafdiagram bij de variabele *leeftijd*.
- Maak een cirkeldiagram bij de variabele *vervoermiddel*.
- Maak voor de jongens en de meisjes afzonderlijke boxplots bij de variabele *leeftijd*.

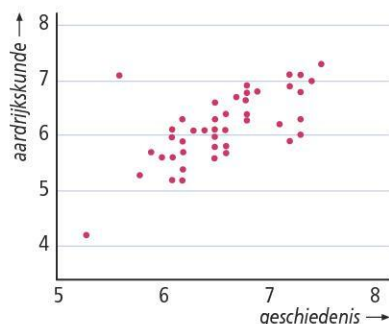
Vaardigheid

Je kunt onderzoeken of er een statistisch verband bestaat tussen variabelen.

Met een puntenwolk of een spreidingsdiagram onderzoek je of er een statistisch verband bestaat tussen twee kwantitatieve variabelen.

De samenhang tussen twee kwalitatieve variabelen of een kwantitatieve en een kwalitatieve variabele onderzoek je met een kruistabel. Daarbij is het vaak nodig om de aantallen om te rekenen naar relatieve frequenties.

Voorbeeld 1



In de puntenwolk zie je dat er een statistisch verband is tussen de cijfers van geschiedenis en aardrijkskunde.

Voorbeeld 2

profiel	vervoermiddel			totaal
	fiets	scooter	bus	
CM	9	3	4	16
EM	28	11	10	49
NG	37	13	11	61
NT	21	9	7	37
<i>totaal</i>	95	36	32	163

In de kruistabel zie je dat van de 95 leerlingen die met de fiets naar school gaan er 28 een EM profiel volgen.

Dat is $28 : 95 \times 100\% \approx 29,5\%$.

Van de 49 leerlingen die een EM profiel volgen, gaan er 11 met de scooter naar school.

Dat is $11 : 49 \times 100\% \approx 22,4\%$.

S5 Bereken de relatieve frequenties bij de tabel van voorbeeld 2, zodat je kunt zien in welk profiel naar verhouding de meeste leerlingen met de bus naar school gaan.

S6 Een socioloog veronderstelt dat de hoge plaats op de ranglijst komt door het hoge gemiddelde inkomen in Nederland. Onderzoek of er een verband is tussen de gemiddelde tevredenheid in een land en het gemiddelde maandinkomen.

*Nederlanders geven het leven een 7,8 en staan daarmee op plaats 5 in Europa.
Bron: CBS, 06 – 11 – 2015*

Vaardigheid

Je kunt groepen met elkaar vergelijken.

Statistische data kun je ordenen in kruistabellen. De data in zo'n tabel kun je absoluut of relatief weergeven. Relatieve frequenties zijn handiger als je groepen van verschillende grootte met elkaar wilt vergelijken.

Als je groepen wilt vergelijken, kan het gebeuren dat een kruistabel groot en dus onoverzichtelijk wordt. In zulke gevallen kun je groepen beter vergelijken met bijvoorbeeld staafdiagrammen, dotplots of boxplots.

Voorbeeld 1

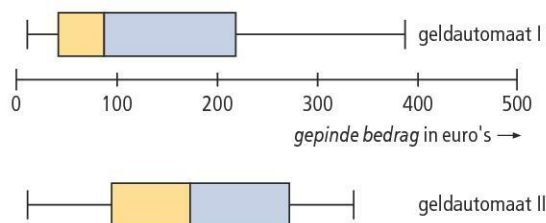
Op een school is gekeken naar welke profielen leerlingen volgen en welke wiskunde ze daarbij hebben gekozen.

profiel	wiskunde		totaal
	A	B	
CM	7	0	7
EM	41	7	48
NG	26	11	37
NT	0	19	19
totaal	74	37	111

In het profiel EM zijn er meer leerlingen die wiskunde A hebben dan die wiskunde B hebben.

Voorbeeld 2

Bij twee geldautomaten is bijgehouden hoeveel geld er steeds gepind is.



Bij de geldautomaat II wordt naar verhouding vaker een hoger bedrag gepind.

- S7**
- In welk profiel in voorbeeld 1 volgen naar verhouding de meeste leerlingen wiskunde A?
 - Bij welke geldautomaat in voorbeeld 2 wordt naar verhouding vaker een hoger bedrag gepind?

- S8**
- In welke leeftijdscategorie gaan relatief gezien de meeste leerlingen met de bus naar school?
 - Onderzoek of er naar verhouding meer jongens dan meisjes met de bus naar school gaan.

T1



In een statistisch onderzoek naar huwelijken tussen mannen en vrouwen is onder andere onderzoek gedaan naar de leeftijd waarop mensen trouwen en het verschil in leeftijd tussen man en vrouw.

- a Wat is de populatie in dit onderzoek?
- b Van welke statistische variabelen zijn de waarden in de dataset opgenomen?
- c Geef bij elke statistische variabele in deze dataset aan of hij kwantitatief of kwalitatief is.
- d Hoeveel procent van de mannen in het onderzoek was jonger dan 35 jaar?
- e Welke waarden neemt de variabele *huwelijksleeftijd man* aan?
- f Hoeveel mannen waren ouder dan vijftig jaar toen ze trouwden?
- g Bij hoeveel echtparen is de man jonger dan de vrouw?



T2



In de dataset zijn gegevens opgenomen over de resultaten van een sportdag. Foppe wil onderzoeken of er verband bestaat tussen de leeftijd van een deelnemer en het resultaat bij het verspringen.

- a De variabelen *Leeftijd* en *Verspringen* zijn beide kwantitatief.
Leg uit waarom het toch niet handig is het verband te onderzoeken met een puntenwolk.
- b Hoeveel leerlingen van 12 jaar zijn er?
- c Welke leeftijd hebben de drie leerlingen die het verst springen?
- d Foppe besluit het verschil te onderzoeken tussen de groepen leerlingen van 11 jaar en van 12 jaar.
In welke groep springen er meer leerlingen verder dan 3,00 meter?
- e In welke groep springt het grootste percentage van de leerlingen in de groep verder dan 3,00 meter?

T3



- a Onderzoek het verband tussen de resultaten bij de sprint en de resultaten bij verspringen.
- b Wat voor een verband tussen het geslacht en de resultaten bij het vergooien verwacht je?
- c Ga met de data na of je verwachting bij opdracht b klopt.
- d Onderzoek welk verband sterker is, het verband tussen de resultaten op de sprint en de resultaten bij het verspringen of het verband tussen de resultaten bij de sprint en de resultaten bij het vergooien.



T4 Pablo en Irene lezen de krantenkop. Pablo zegt: 'De krantenkop geeft aan dat meer meisjes voor wiskunde B kiezen dan voor wiskunde A.'



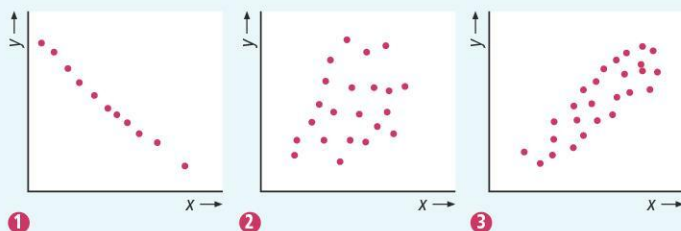
Irene zegt: 'De krantenkop geeft aan dat meer meisjes dan jongens wiskunde B kiezen.'

De dataset gaat over de situatie op de school van Pablo en Irene.

Onderzoek met behulp van de dataset wie er gelijk heeft.

Wiskunde B is populair bij meisjes.

T5 In de maand augustus is elke dag bijgehouden hoeveel ijsjes er zijn verkocht en hoe vaak de strandwacht moest ingrijpen omdat mensen te ver in zee gingen. Je maakt een puntenwolk bij de variabelen ijsverkoop en aantal ingrepen.



- Hoeveel punten staan er in elke grafiek?
- Welke van de grafieken geeft de samenhang tussen ijsverkoop en aantal ingrepen waarschijnlijk weer?
- Het hoge aantal ingrepen is natuurlijk niet het gevolg van de hoge aantallen ijsjes die verkocht worden. Wat verklaart wel de samenhang tussen beide variabelen?

T6 Bij een landelijke voorlichtingsdag van een beroepsopleiding is aan het eind aan de deelnemers gevraagd een enquête in te vullen. In de dataset zie je de resultaten.



- Van welke statistische variabelen zijn data opgenomen in deze dataset?
- Welke variabele is kwalitatief? Welke waarden neemt deze variabele aan?
- Uit welke provincie komen de meeste deelnemers?
- Hoeveel procent van de deelnemers komt uit de provincie Gelderland?
- Bij welke provincie is het grootste percentage van de deelnemers 19 jaar oud?
- De deelnemers hebben hun waardering voor de dag uitgedrukt in een cijfer. Het meest voorkomende cijfer is 7. Ga na of dit voor elke provincie afzonderlijk ook geldt.



Je kunt data op verschillende manieren weergeven.

- E1**  a Maak bij de variabele *plezier* een dotplot, een staafdiagram en een cirkeldiagram.
 b Welk van de drie figuren vind je het meest geschikt om de data weer te geven? Leg je antwoord uit.
 c Maak een frequentietabel bij de variabele *plezier*.
 d Hoeveel leerlingen hebben weinig plezier?
 e Hoe groot is het percentage leerlingen met weinig plezier?

Je kunt onderzoeken of er een statistisch verband bestaat tussen variabelen.

- E2**  In de dataset zijn voor een aantal jaren het aantal uren zon en het aantal dagen zonder zon opgenomen.
 a Welk statistisch verband verwacht je tussen deze variabelen? Licht je antwoord toe.
 b Maak een puntenwolk bij de variabelen *zonneuren* en *zonlozeDagen*.
 c Ondersteunt de puntenwolk je verwachting bij opdracht a?

- E3** Ieder jaar doen naar schatting 1 miljoen Nederlanders een poging om te stoppen met roken. Maar niet iedereen houdt het ook vol. In een onderzoek is gekeken naar het effect van het gebruik van hulpmiddelen (o.a. nicotinepleisters) en van persoonlijke begeleiding (o.a. telefonische ondersteuning). De kruistabel laat zien hoeveel mensen 12 maanden na het begin van de stoppoging niet meer hebben gerookt. Ga na welke methode het meest positieve effect heeft op de kans van slagen.

	na 12 maanden rookvrij	
	ja	nee
hulpmiddelen	27	357
begeleiding	12	129

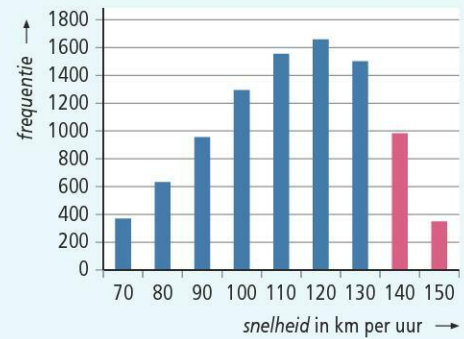
Je kunt groepen met elkaar vergelijken.

- E4**  In de dataset staat data over leerlingen in havo 4. Welke groep leerlingen heeft de hogere cijfergemiddelden, leerlingen die wiskunde A volgen of leerlingen die wiskunde B volgen?
- E5**  Een studentencoach beweert dat studenten die veel in de kroeg zitten minder studiepunten halen.
 a Wat denk jij? Licht je antwoord toe.
 b In de dataset vind je de resultaten van een enquête onder studenten.
 Van hoeveel studenten zie je gegevens?
 c Zoek met een puntenwolk uit of de studentencoach gelijk heeft.

E6 De politie houdt een snelheidcontrole op de A28. In de staafdiagram zijn de resultaten verwerkt. In totaal passeerden er 9300 voertuigen.

- Wat is de statistische variabele in dit onderzoek?
- Welke waarde komt het meest voor?
- Wat is de grootste waarde die is aangenomen?
- Bestuurders die sneller rijden dan 130 km per uur krijgen een bekeuring.

Maak een schatting van het percentage voertuigen waarvan de bestuurder een bekeuring krijgt.



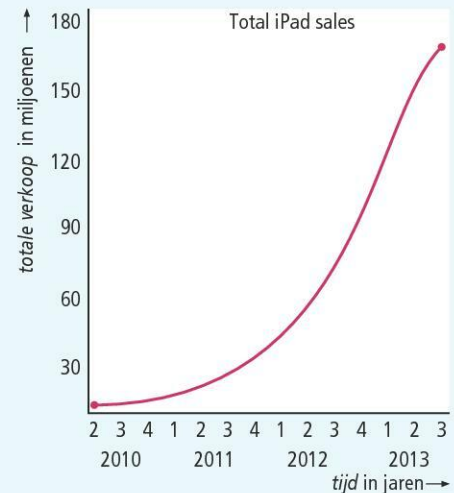
E7 a Maak bij de dataset een kruistabel bij de variabelen *klas* en *NE EIND*.



- Welke van deze twee variabelen is kwalitatief? Geef aan welke waarde deze variabele aanneemt en vermeld de bijbehorende frequenties.
- Welke van deze twee variabelen is kwantitatief? Geef aan welke waarde deze variabele aanneemt en vermeld de bijbehorende frequenties.
- In welke klas zitten naar verhouding de meeste leerlingen met een voldoende?

E8 Je ziet de grafiek die Apple in het vierde kwartaal van 2013 (oktober) toonde bij de cijfers van de iPad-verkoop. Horizontaal staan de kwartalen en verticaal staat de totale verkoop in miljoenen tot en met dat kwartaal.

- Wat ging sneller ging: de verkoop van de eerste 30 miljoen iPads, of van de tweede 30 miljoen?
- De grafiek suggereert dat de verkoop van iPads in 2010 begon. Met welk trucje hebben ze dit in de grafiek extra weten te benadrukken?
- Johannes beweert dat er steeds meer iPads verkocht worden. Marieke beweert dat het aantal verkochte iPads per kwartaal aan het afnemen is. Leg uit dat ze allebei gelijk hebben.
- Apple heeft ervoor gekozen de gegevens van de totale verkoop in beeld te brengen, in plaats van bijvoorbeeld de verkopen per kwartaal. Wat zou daarvan de reden kunnen zijn geweest?





SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je geleerd hoe je bij bepaalde telproblemen boomdiagrammen kunt gebruiken om systematisch het aantal mogelijkheden te tellen.

In dit hoofdstuk leer je eerst een aantal bijzondere vormen van boomdiagrammen kennen. Daarna leer je nog andere methodes om bepaalde soorten telproblemen systematisch op te lossen.

Aan het eind van het hoofdstuk ga je al deze methoden combineren om lastigere telproblemen aan te pakken.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

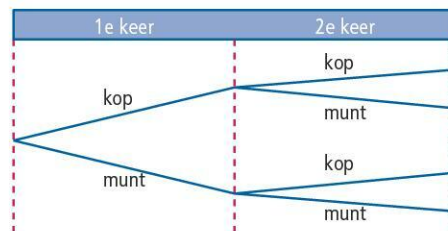
- *Probleem oplossen en analytisch denken*
- *Ordenen en structureren*
- *Logisch redeneren en bewijzen*

opdracht 47

opdracht 22

opdracht 38

- V1** Ruud, Harry en Frank hebben samen gegeten en ze hebben geen van drieën zin om af te wassen. Ruud stelt voor om te loten door twee keer met een geldstuk te gooien en daarbij het volgende af te spreken. Als er twee keer kop gegooid wordt, wast Ruud af. Bij twee keer munt moet Harry afwassen. En als het één keer kop en één keer munt wordt, wast Frank af. Ga met behulp van het boomdiagram na of dit een eerlijke afspraak is.



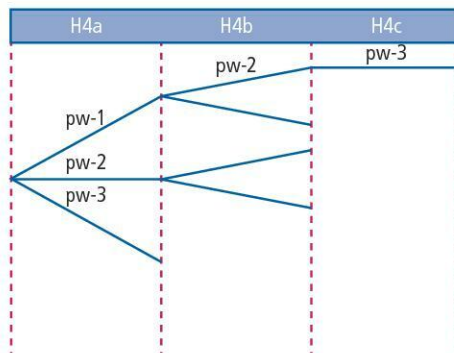
- V2** Een lerares geeft les aan drie klassen H4a, H4b en H4c. Van elk proefwerk maakt ze drie versies: pw-1, pw-2 en pw-3.

W

- a** Noteer in de tabel systematisch alle mogelijkheden waarop de lerares de proefwerken over de klassen kan verdelen.

H4a	H4b	H4c
pw-1	pw-2	pw-3
pw-1	pw-3	...
...	...	...

- b** Je kunt het probleem van opdracht a ook aanpakken met een boomdiagram. Maak het boomdiagram verder af.



Theorie

Een **boomdiagram** is een manier om alle mogelijkheden bij een telprobleem overzichtelijk weer te geven. Het laat zien om welke keuzes het gaat. Bij elk keuzemoment hoort een aantal **takken** en bij elke tak wordt de betreffende keuze genoteerd. Elke route van het beginpunt naar een eindpunt is een mogelijkheid bij een telprobleem.

Voorbeeld

Een auto wordt geleverd in de kleuren rood, grijs en zwart. Daarnaast kun je kiezen uit een uitvoering met drie of met vijf deuren. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er?

Oplossing

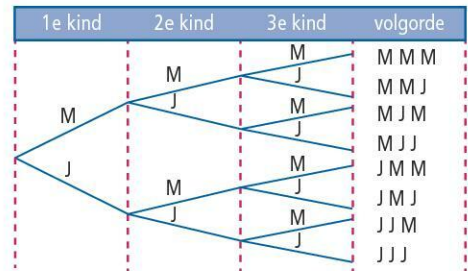
Het boomdiagram laat zien dat er bij de kleur drie keuzes zijn en bij de uitvoering twee. In totaal zijn er zes verschillende mogelijkheden.



V3 Bij gezinnen met drie kinderen kunnen verschillende geboortevolgorden voorkomen. In het boomdiagram staan alle mogelijke volgorden.

- Hoeveel verschillende volgorden zijn er?
- De volgorde MMJ hoort bij een gezin waar eerst twee meisjes geboren zijn en daarna een jongen. Schrijf ook de andere volgorden op die bij een gezin met twee meisjes en één jongen horen.
- In hoeveel volgorden is het tweede kind een meisje?
- Vul de tabel verder in.

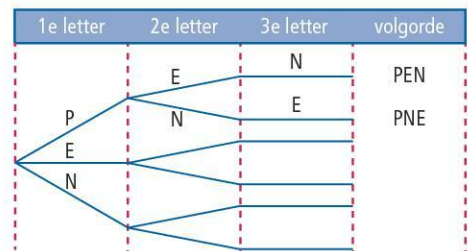
<i>aantal meisjes</i>	3	2	1	0
<i>aantal volgorden</i>	1	...	...	...



V4 Met de letters *E*, *N* en *P* kun je drieletterwoorden maken zoals *PEN* en *PNE*. Afsproken wordt dat elke letter maar één keer voor mag komen.

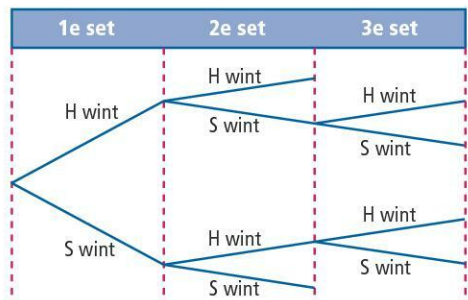
W

- Vul het boomdiagram verder in.
- Hoeveel verschillende drieletterwoorden kun je maken?
- De letter *O* wordt aan de letters *E*, *N* en *P* toegevoegd. Je gaat nu vierletterwoorden maken. Ook nu mag elke letter maar één keer voorkomen. Hoeveel verschillende vierletterwoorden kun je maken?



V5 Een damesfinale tennis wordt gespeeld om 'the best of three sets'. Dat wil zeggen dat degene die het eerst twee sets heeft gewonnen de kampioen is. Tijdens de kampioenschappen van Roland Garros in 2018 stonden Simone Halep en Sloane Stephens in de finale. De mogelijkheden voor het wedstrijdverloop staan in het boomdiagram, waarbij alleen wordt gelet op het winnen van de sets.

- Waarom bestaat het bovenste wedstrijdverloop uit maar twee sets?
- Hoeveel verschillende manieren zijn er waarop een wedstrijd kan verlopen?
- In hoeveel daarvan wint Halep?
- Schrijf op welk ander wedstrijdverloop ook had kunnen leiden tot een 2-1 overwinning voor Halep.



4.1 Mogelijkheden tellen

Je leert

- wat regelmatige en onregelmatige boomdiagrammen zijn

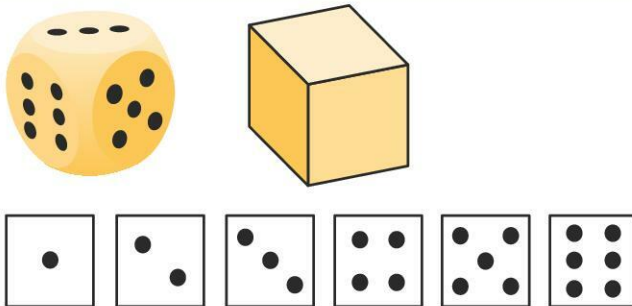
Leerroutes

- ondersteunend: 1—02—3—4—05—5—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
- uitdagend: 1—3—4—5—6—7—8—U1

Het is gebruikelijk dat op een dobbelsteen de 1 tegenover de 6 staat, de 2 tegenover de 5 en de 3 tegenover de 4. Maar dat hoeft natuurlijk niet.

In een klas met 29 leerlingen krijgt iedereen een kubusje en zes stickers met één tot en met zes ogen om deze op de vlakken te plakken.

- Is het mogelijk dat alle dobbelstenen van de 29 leerlingen verschillend zijn?



1

W

Je ziet de menukaart van bistro 'De Holterberg'. Een klant vraagt zich af op hoeveel verschillende manieren hij een menukaart van drie gangen kan samenstellen. Je ziet het begin van een boomdiagram.

- Waarom heeft het boomdiagram drie kolommen?
- Wat moet er op de stippen boven de kolommen staan?
- Maak het boomdiagram verder af.
- Hoeveel verschillende driegangen menu's kun je in deze bistro samenstellen?

Voorgerecht	Hoofdgerecht	Nagerecht
soep garnalen	entrecote schnitzel zalm	sorbet cappuccino
...	...	...

Ondersteunende route → maak opdracht 02

2

Een auto wordt geleverd in de kleuren rood, wit, blauw en zwart. Je kunt kiezen uit diesel, benzine of elektrisch en wel of geen trekhaak.

- Geef de situatie weer met een boomdiagram.
- Hoeveel verschillende uitvoeringen van de auto zijn er mogelijk?
- Hoe zou je het antwoord op vraag b kunnen vinden zonder boomdiagram?
- Hoeveel uitvoeringen rijden niet op diesel?
- Hoeveel uitvoeringen zijn er als de elektrische auto's niet worden geleverd met een trekhaak?

Theorie

Bij het oplossen van een telprobleem is een boomdiagram vaak een handig hulpmiddel. In een boomdiagram geef je overzichtelijk weer welke mogelijkheden er zijn.

Als het aantal vertakkingen op elk punt in een kolom gelijk is, dan is het een **regelmatisch boomdiagram**. Je kunt dan het aantal mogelijkheden uitrekenen zonder het hele boomdiagram te tekenen.

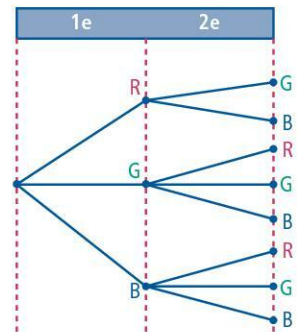
Als het aantal vertakkingen niet op elk punt in een kolom gelijk is, dan is het een **onregelmatisch boomdiagram**. Dan moet je het hele boomdiagram tekenen of de mogelijkheden systematisch opschrijven.

Voorbeeld

In een vaas zitten één rode, twee groene en drie blauwe ballen. Je trekt één voor één twee ballen uit de vaas en legt ze in volgorde van trekking naast elkaar. Bereken het aantal mogelijke volgorden.

Oplossing

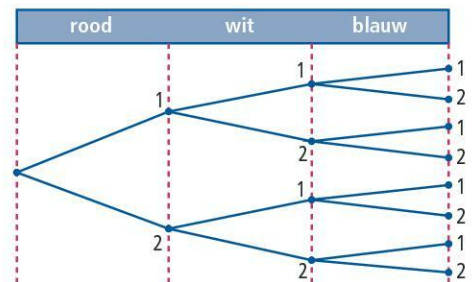
Voor de eerste trekking zijn er drie verschillende mogelijkheden. Het aantal mogelijkheden bij de tweede trekking hangt af van wat je de eerste keer hebt getrokken: was dat een rode, dan zijn er twee mogelijkheden voor de tweede trekking, anders drie. Het boomdiagram is dus onregelmatisch. Er zijn acht mogelijke volgorden.



- 3 Je trekt uit de vaas van het voorbeeld één voor één drie ballen uit de vaas. Bereken het aantal mogelijke volgorden.

- 4 Leo gaat verschillende vlaggen maken die uit twee horizontale banen bestaan. Hij heeft de keuze uit drie kleuren: rood, wit en blauw. De twee banen mogen dezelfde kleur hebben.

- a Om het aantal mogelijkheden te tellen, maakt Leo het boomdiagram dat hiernaast is getekend. Welke vergissing heeft Leo gemaakt?
- b Beschrijf hoe een correct boomdiagram er uit ziet en bereken het aantal mogelijke vlaggen.



Ondersteunende route → maak opdracht O5

- 5** Alexa maakt een vlag die bestaat uit vijf horizontale banen. Voor elke baan heeft ze de keus uit de kleuren rood, geel, blauw en groen, maar twee opeenvolgende banen moeten een verschillende kleur hebben. Bereken het aantal verschillende mogelijkheden.

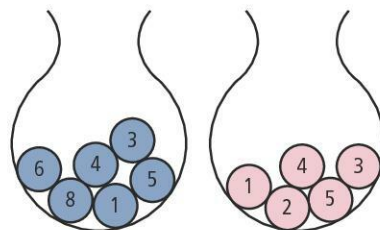


- 6** **H** Het koffiehuis Toscane in Nijmegen verkoopt maar liefst twaalf soorten koffie. Bij elk kopje koffie kun je kiezen uit de vier formaten, small, medium, large of extra-large. Bij de bestelling moet je ook aangeven of je wel of geen suiker en of je wel of geen melk in de koffie wilt.
- Is het boomdiagram bij deze situatie regelmatig of onregelmatig? Leg je antwoord uit.
 - Hoeveel verschillende bestellingen kun je doen?
 - Dennis drinkt zijn koffie altijd zonder suiker. Hoeveel verschillende bestellingen kan hij doen?
 - Anna kiest bij het koffiehuis Toscane nooit voor de mogelijkheid extra-large. Hoeveel verschillende bestellingen kan ze doen?

- 7** Stan gooit met twee dobbelstenen. In het schema is de som van het aantal ogen weergegeven.
- In hoeveel gevallen is de som van het aantal ogen gelijk aan zeven?
 - In hoeveel gevallen is de som van het aantal ogen zeven of elf?
 - Hoe vaak is de som van het aantal ogen een oneven getal?

		dobbelsteen 1					
		1	2	3	4	5	6
dobbelsteen 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

- 8** Kristel heeft twee vazen met genummerde ballen. Ze neemt uit elke vaas een bal en vermenigvuldigt de getallen met elkaar.
- Maak een schema met alle mogelijke uitkomsten.
 - In hoeveel gevallen is de uitkomst groter dan 20?
 - In hoeveel gevallen is de uitkomst een veelvoud van zes?



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 02** Steven heeft twee broeken in de kleuren blauw en bruin, drie truien in de kleuren blauw, grijs en rood en twee paar sokken in de kleuren blauw en zwart. Hij doet een broek, een trui en een paar sokken aan.

- a** Hoe vaak moet hij een keuze maken? Hoeveel kolommen heeft dus het boomdiagram?
- b** Teken het boomdiagram.
- c** Hoeveel mogelijke kledingcombinaties van een broek, een trui en een paar sokken kan Steven maken?
- d** Hoeveel combinaties zijn er mogelijk zonder de grijze trui?
- e** Bij hoeveel van de combinaties zijn de broek, de trui en het paar sokken allemaal verschillend van kleur?



- 05** Sharon gaat een sjaal breien. De sjaal bestaat uit zes stroken. Ze heeft drie kleuren wol: rood, geel en blauw. Twee aan elkaar liggende stroken krijgen een andere kleur.

- a** Uit hoeveel kleuren kan ze kiezen voor de eerste strook?
- b** Hoeveel mogelijkheden zijn er voor de tweede strook?
- c** Leg uit dat ze voor de derde strook kan kiezen uit twee kleuren.
- d** Bereken het aantal verschillende mogelijkheden waarop ze de kleuren voor de sjaal kan kiezen.
- e** Hoeveel mogelijkheden heeft Sharon als ze vijf kleuren wol heeft?



Uitdagende opdrachten

- U1** Iris wil haar zomervakantie plannen. Voor wat betreft tijdsduur, vervoer, bestemming en verblijfsmogelijkheden kan ze kiezen uit de volgende opties.

Duur:	1 week, 2 weken, 3 weken of 4 weken
Vervoer:	liften, vliegtuig, auto, trein of bus
Bestemming:	Duitsland, Frankrijk, Zweden of Zwitserland
Verblijf:	tent, hotel, appartement of caravan

Hoeveel verschillende vakanties kan Iris samenstellen als de combinatie vliegtuig-hotel en de combinatie trein-appartement te duur is?

4.2 Machtsbomen en faculteitsbomen

Je leert

- hoe je met een machtsboom of een faculteitsboom het aantal mogelijkheden berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 9—10—011—12—13—014—15—16
- doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15—16
- uitdagend: 9—11—12—13—14—15—16—U2

Zes vrienden fietsen altijd samen naar school, steeds twee aan twee naast elkaar.

- Lukt het de vrienden om elke dag in het schooljaar in een andere formatie te fietsen?



- 9 Bij een gokspelletje wordt een aantal keer een geldstuk gegooid. Na elke worp wordt de uitslag, kop of munt, opgeschreven.
- a Beschrijf het boomdiagram dat hoort bij drie keer gooien.
 - b Hoeveel verschillende uitslagvolgorden zijn er mogelijk bij drie keer gooien?
 - c Leg uit hoe het boomdiagram er uit komt te zien als er vijf keer wordt gegooid. Hoeveel volgorden zijn er dan mogelijk?
 - d Leg uit dat bij acht keer gooien 2^8 mogelijke volgorden zijn.
 - e Bij hoeveel keer gooien is het aantal mogelijke volgorden meer dan 1000?

Theorie

Een boomdiagram waarin bij elk keuzemoment het aantal takken gelijk is, noem je een **machtsboom**.

Het totaal aantal volgorden is een macht.

Bij drie keuzemomenten met steeds vijf mogelijkheden is het aantal mogelijke volgorden gelijk aan $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$.

Voorbeeld

Een wedstrijd kan eindigen in winst, verlies of gelijkspel.

Een team speelt vier wedstrijden.

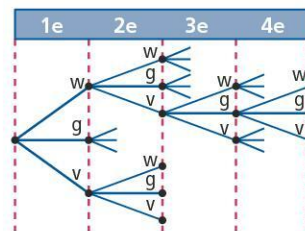
Bereken het aantal mogelijk volgorden van uitslagen.

Oplossing

Bij elke wedstrijd zijn er steeds drie keuzemogelijkheden.

Je hebt te maken met een machtsboom.

Het aantal mogelijk volgorden is $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$.



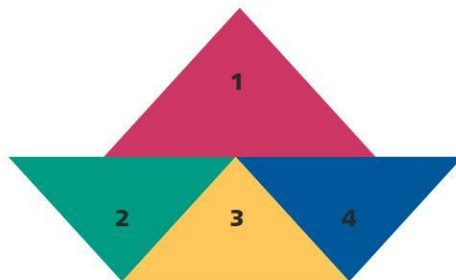
- 10 a Bereken het aantal mogelijke volgorden als het team in het voorbeeld zes wedstrijden speelt.
b Hoeveel mogelijke volgorden zijn er als het team twaalf wedstrijden speelt?

Ondersteunende route → maak opdracht 011

- 11 **H** Peter gaat een lunchpakket maken met drie boterhammen, een witte, een bruine en een volkoren. Voor elke boterham kan hij als beleg kiezen uit stroop, hagelslag, jam, kaas en pindakaas. Bereken het aantal manieren waarop hij zijn lunchpakket kan samenstellen.

- 12 Het logo van een kinderopvang bestaat uit vier verschillend gekleurde driehoeken. Voor de kleuren kun je kiezen uit rood, geel, groen en blauw. Milo vraagt zich af op hoeveel manieren de vier kleuren over de driehoeken verdeeld kunnen worden. Hij maakt een boomdiagram.

- a Hoeveel kolommen krijgt het boomdiagram?
b Hoeveel keuzemogelijkheden zijn er voor driehoek 1?
c Hoeveel mogelijkheden zijn er daarna voor driehoek 2?
d Bereken het aantal manieren waarop het logo ingekleurd kan worden.



Theorie

Een boomdiagram waarin bij elk keuzemoment het aantal takken één minder wordt, noem je een **faculteitsboom**.

Als je eerst drie keuzemogelijkheden hebt, daarna twee en tenslotte één, dan is het aantal mogelijke volgorden $3 \times 2 \times 1$.

Een product zoals $12 \times 11 \times 10 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ heet een **faculteit**.

Je noteert $12!$.

Voorbeeld

Je legt vier knikkers, een rode, een witte, een blauwe en een groene op een rijtje.

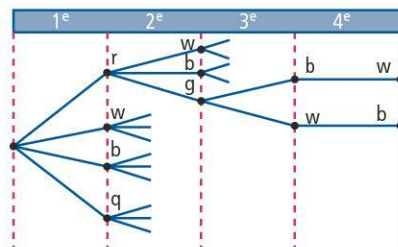
Bereken het aantal mogelijke volgorden.

Oplossing

Voor elke volgende knikker heb je een keuzemogelijkheid minder.

Je hebt te maken met een faculteitsboom.

Het aantal mogelijke volgorden is $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$.



- 13** a Bereken het aantal mogelijke volgorden als in het voorbeeld elf verschillende knikkers op een rij worden gelegd.
b Bereken $8!$ en $15!$.

→ Instructie rekenmachine | Faculteit

Ondersteunende route → maak opdracht 014

- 14** H Oma Weideveld heeft foto's van haar vier kleinkinderen op haar buffet gezet. Elke dag verandert ze de volgorde van de foto's.
Hoeveel dagen zijn er nodig totdat de foto's in alle mogelijke volgorden zijn geplaatst?

- 15** a Jonneke gaat naar de kermis. Ze heeft toegangskaartjes voor zes attracties: de draaimolen, de botsauto's, de rupsbaan, de calypso, de booster en het reuzenrad. Bereken het aantal mogelijke volgorden waarop ze de attracties kan kiezen.
b Bij een kantoor zijn negen parkeerplaatsen voor negen werknemers die met de auto naar het kantoor komen. Hoeveel volgorden zijn er waarop de negen werknemers hun auto kunnen parkeren?
c Bert gooit vier keer met een dobbelsteen. Na elke worp noteert hij het aantal geworpen ogen. Zo krijgt hij een getal van vier cijfers.
Bereken het aantal mogelijke getallen dat hij kan krijgen.



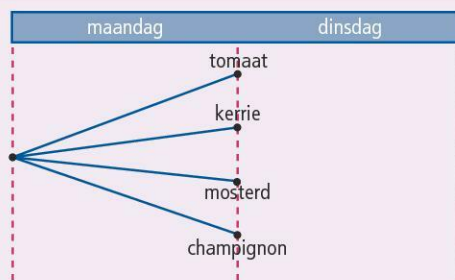
- 16** a Hoeveel verschillende volgorden zijn er om zeven kinderen op een rij te zetten?
b Hoeveel verschillende codes kun je maken met vier letters uit het alfabet? Je mag daarbij letters meer dan één keer gebruiken.
c Op hoeveel manieren kun je een 'woord' van vijf letters maken waarbij de letters A, B, C, D en E elk precies één keer gebruikt worden?
d Hoeveel manieren zijn er om een toets met 50 meerkeuzevragen te beantwoorden, waarbij je steeds uit drie mogelijke antwoorden moet kiezen?

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

011 Geke gaat vijf dagen per week naar school. Elke dag koopt ze een bekertje soep uit de soepautomaat. Elke keer kiest ze opnieuw tussen de vier smaken soep: tomaat, kerrie, mosterd of champignon.

- Stel dat Geke op een maandag voor kerrie kiest. Uit hoeveel smaken kan ze dan op dinsdag kiezen?
- Leg uit waarom je het aantal mogelijke weekmenu's kunt berekenen met een machtsboom.
- Hoeveel keuzemomenten heeft Geke per week?
- Beschrijf de vorm van het boomdiagram.
- Bereken het aantal mogelijke weekmenu's.



014 Acht leden van een roeivereniging, Bob, Cor, Han, Ide, Jan, Leo, Pim en Rik, gaan met een boot het water op. De instructeur neemt de plaats in van de stuurman; de leden nemen achter elkaar plaats in de boot. Je gaat berekenen hoeveel mogelijke volgorden er zijn waarop de acht roeiers in de boot plaats kunnen nemen.

- Uit hoeveel roeiers kun je kiezen voor de eerste plaats?
- Uit hoeveel roeiers kun je kiezen voor de tweede plaats?
- Leg uit waarom je het aantal mogelijkheden kunt berekenen met een faculteitsboom.
- Hoeveel kolommen heeft het boomdiagram?
- Bereken het aantal mogelijke volgorden.



Uitdagende opdrachten



U2 Ter gelegenheid van het dorpsfeest hebben bewoners van 15 huizen in een straat gezamenlijk feestverlichting gehuurd. Ieder huis krijgt een kabel met daaraan vier lantaarns om tussen twee palen die voor het huis zijn geplaatst te spannen. De vier lampen in de kleuren blauw, rood, groen en geel worden er los bijgeleverd. Iedereen mag zelf bepalen in welke volgorde ze de lampen in de lantaarns draaien.

- Op hoeveel manieren kunnen de vier lantaarns voor een huis worden opgehangen?
- Bereken het aantal mogelijke volgorden van de kleuren van de gezamenlijke feestverlichting.

4.3 Permutaties

Je leert

- hoe je het aantal permutaties berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 17—18—019—19—021—22
- doorlopend: 17—18—19—20—21—22
- uitdagend: 17—19—20—21—22—U3

Een toneelopleiding voor scholieren begint elke cursusavond met een improvisatie-oefening. Bij elke improvisatie-oefening zijn drie vaste personages: een bewoner, een enquêteur en een pakketbezorger.

- Lukt het om met vijf spelers een jaar lang elke week een andere rolverdeling te maken?



- 17** In een vereniging met dertien leden moet een nieuw bestuur worden gekozen. Eerst wordt een voorzitter gekozen, daarna een secretaris en tot slot een penningmeester. Voor elke functie wordt een ander lid gekozen. Je kunt het aantal mogelijke samenstellingen van zo'n bestuur berekenen met een boomdiagram.

- a Waarom is dit geen machtsboom en geen faculteitsboom?
- b Hoeveel kolommen heeft het boomdiagram?
- c Bereken voor elke kolom het aantal vertakkingen.
- d Hoeveel mogelijke bestuurssamenstellingen zijn er?

- 18** Een kunstschilder mag in een galerie een aantal werken ten toon stellen. In zijn atelier heeft hij negen werken staan die geschikt zijn om te exposeren.

- a Bereken het aantal manieren waarop de schilder de expositie kan inrichten als er precies negen plekken voor hem zijn gereserveerd.
- b Er zijn maar zes plekken beschikbaar. Hoeveel keuzes zijn er voor het schilderij op de eerste plek? En op de tweede plek?
- c Bereken het aantal manieren waarop de schilder de expositie van zes schilderijen kan inrichten.



Theorie

Een ander woord voor volgorde of rangschikking is **permutatie**. Een permutatie van 3 uit 10 is een rangschikking van een rijtje van drie dat je kiest uit tien verschillende dingen: een eerste, een tweede en een derde. Een boomdiagram is een geschikt telmodel voor het aantal permutaties. Het aantal permutaties van 3 uit 10 is $10 \times 9 \times 8 = 720$.

Voorbeeld

In een bak liggen 20 balletjes, genummerd 1 tot en met 20. Je trekt zes keer een balletje uit de bak en legt ze in volgorde van trekking naast elkaar. Hoeveel mogelijke volgordes zijn er?

Oplossing

Bij de eerste trekking is er keuze uit 20 balletjes; bij de tweede trekking uit 19 balletjes enzovoort. Het aantal mogelijke volgordes is het aantal permutaties van 6 uit 20:

$$20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 = 27\,907\,200$$

Ondersteunende route → maak opdracht 019

19

H

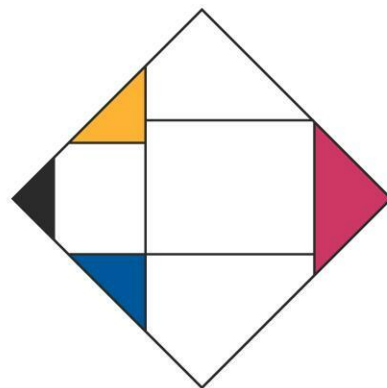
- a Jente breit een trui met vijf horizontale stroken. Elke strook krijgt een andere kleur. Ze heeft acht kleuren wol. Hoeveel verschillende truien zijn mogelijk?
- b Martijn kiest achtereenvolgens vier keer een letter uit het alfabet en schrijft ze achter elkaar. Een gekozen letter kiest hij niet opnieuw. Hoeveel 'woorden' zijn er mogelijk?
- c Op hoeveel manieren kan een docent Nederlands uit een lijst van 40 boektitels een top-5 samenstellen?
- d Een docent Engels gaat mondelinge toetsen afnemen in een klas met 24 leerlingen. Voor de maandagmiddag wil hij vier leerlingen achter elkaar inroosteren. Bereken het aantal mogelijke roosters voor de maandagmiddag.

→ Instructie rekenmachine | Permutatie

20

De Nederlandse schilder Piet Mondriaan (1874 - 1944) was een van de eerste kunstenaars die abstracte werken maakte. Je ziet een tegel in de stijl van Mondriaan: horizontale en verticale zwarte lijnen die de tegel in een aantal vlakjes verdelen. Een aantal van deze vlakjes wordt ingekleurd; de anderen blijven wit. Alleen de kleuren rood, geel, blauw en zwart worden gebruikt.

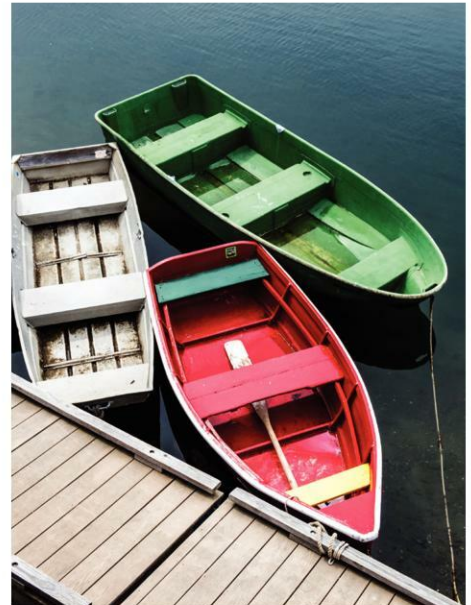
- a Bereken het aantal mogelijke manieren waarop de vier driehoekige vlakjes met verschillende kleuren ingekleurd kunnen worden.
- b Bereken het aantal mogelijke manieren waarop vier van de acht vlakjes met verschillende kleuren ingekleurd kunnen worden.



Ondersteunende route → maak opdracht 021

- 21** Een radiozender heeft een wedstrijd uitgeschreven voor de populairste artiest van 2019. Alle luisteraars mogen hun persoonlijke top-5 inleveren. Op zo'n lijstje moeten vijf verschillende artiesten worden vermeld. De radiozender heeft een voorselectie gemaakt van in totaal 30 verschillende artiesten waaruit de inzenders mogen kiezen. Jan en Norah willen hun top-5 insturen.
- Hoeveel mogelijke lijstjes kan Jan insturen?
 - Hoeveel mogelijke lijstjes kan Norah insturen waarop dezelfde artiesten staan als op het lijstje van Jan?
 - Justin Bieber is een van de artiesten uit de voorselectie van de radiozender.
Bereken het aantal mogelijke lijstjes waarop de naam van Justin Bieber bovenaan staat.

- 22** Arianne, Berber, Christel, Dorien, Karel, Luuk, Menno en Nico gaan samen een dagje uit. Iemand moet zorgen voor een picknickmand met eten, een ander voor een koelbox met drinken en een derde voor een tas met sportattributen. Ze loten wie waar voor moet zorgen.
- Bereken het aantal manieren waarop de drie taken kunnen worden verdeeld.
 - Ze huren twee roeiboten, een rode en een groene. Elke boot heeft twee bankjes waarop twee personen naast elkaar kunnen zitten.
Bereken het aantal manieren waarop de acht personen zich over de acht zitplaatsen kunnen verdelen.
 - Bereken het aantal manieren waarbij de vier meisjes in de groene boot zitten en de vier jongens in de rode.
 - Berber en Luuk willen graag naast elkaar zitten.
Berber kiest als eerste een zitplaats.
Uit hoeveel plaatsen kan zij kiezen? En Luuk?
 - Bereken het aantal manieren waarop de acht personen zich over de acht zitplaatsen kunnen verdelen, waarbij Berber en Luuk naast elkaar zitten.



Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

019 Een groep vrienden gaat een hele nacht lang griezelfilms kijken. Ze hebben een stapel van wel 18 dvd's. Dat is te veel voor één nacht. Ze besluiten dat ze er zeven gaan kijken. Je gaat berekenen hoeveel mogelijke kijk-volgorden er zijn.

- Hoeveel mogelijkheden zijn er voor de eerste film? En voor de tweede?
- Hoeveel getallen moet je met elkaar vermenigvuldigen om het aantal kijkvolgorden te berekenen?
- Bereken het aantal mogelijke kijkvolgorden.



021 De schoolclub organiseert de verkiezing van de populairste leraar van de school. Iedere leerling mag een lijstje met zijn/haar persoonlijke top-5 inleveren van leraren waar ze dit jaar les van hebben. Je ziet het lijstje van Sarina.

- Hoeveel verschillende lijstjes zijn er mogelijk met precies dezelfde leraren als op het lijstje van Sarina?
- De klas van Sarina heeft les van 14 verschillende leraren. Bereken op hoeveel mogelijke manieren een leerling uit de klas van Sarina het lijstje in kan vullen.
- Sarina vraagt zich af hoeveel verschillende lijstjes er voor leerlingen uit haar klas mogelijk zijn waarop de naam van meneer Kuipers bovenaan staat. Hoeveel posities zijn er nog vrij als de naam van meneer Kuipers bovenaan staat?
- Op hoeveel manieren kunnen de vrije posities worden gevuld met namen van de overige 13 leraren?

- | | |
|---|-----------------|
| 1 | dhr. Kuipers |
| 2 | mw. De Waard |
| 3 | mw. Visser |
| 4 | dhr. Boogaart |
| 5 | dhr. Schoemaker |

Uitdagende opdrachten

U3 Er zijn suikerzakjes met op zes verschillende plaatsen in zes verschillende talen het woord suiker.

- Op het suikerzakje van de foto staat suiker in het Duits, Frans, Italiaans, Engels, Retro-Romaans en Spaans. Hoeveel verschillende suikerzakjes zijn er mogelijk met deze zes talen?
- Hoeveel suikerzakjes zijn er mogelijk als er voor de zes talen op de wikkel wordt gekozen uit tien beschikbare talen?
- Er wordt gekozen uit tien talen waaronder Nederlands. Hoeveel verschillende suikerzakjes zijn mogelijk waarop je het woord 'suiker' aantreft?



4.4 Routes in een rooster

Je leert

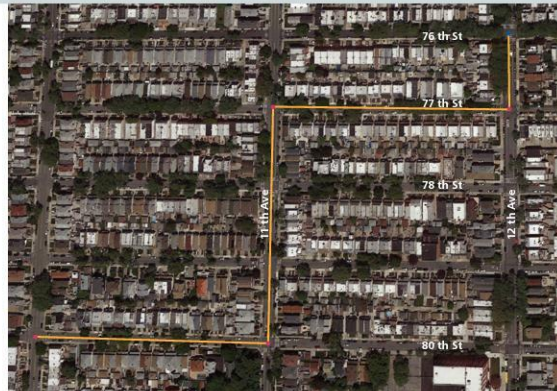
- hoe je het aantal kortste routes in een rooster berekent

Leerroutes

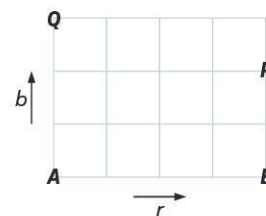
- ondersteunend: 23—24—025—26—27—28—29
- doorlopend: 23—24—25—26—27—28—29
- uitdagend: 23—24—26—27—28—29—U4

Je ziet een stukje van de plattegrond van New York. Donald staat op de hoek van 10th Ave en 80th Street (linksonder). Hij moet naar de hoek van 12th Ave en 76th Street (rechtsboven). Met de gele lijn is een mogelijke route aangegeven.

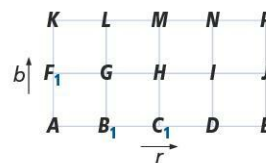
- Uit hoeveel routes kan Donald kiezen als hij zonder omweg naar zijn doel wil lopen?



- 23** Je gaat het aantal kortste routes tellen van het punt A naar het punt P via de roosterlijnen. Op ieder kruispunt van roosterlijnen heb je de keuze uit rechtsaf (r) of naar boven (b). De route die via punt E loopt, kun je beschrijven met $r-r-r-b-b$.
- Teken in het rooster de route $r-b-r-r-b-r$.
 - Schrijf nog twee routes van punt A naar punt P op.
 - Hoe kun je zonder te tekenen zien dat de route $b-r-r-b-r-b$ niet uitkomt in punt P ?
 - Waarom gaat er geen van de routes via punt Q ?



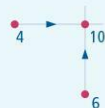
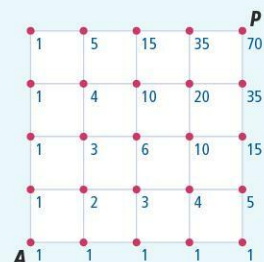
- 24** Het aantal kortste routes van punt A naar punt P kun je berekenen door bij elk kruispunt het aantal kortste routes van punt A naar dat kruispunt te noteren.
- Leg uit dat je de punten B , C en F maar op één manier kunt bereiken.
 - Welke andere punten kun je maar op één manier bereiken? Noteer bij al deze punten het getal 1.
 - Leg uit dat je punt G op twee manieren kunt bereiken en noteer het getal 2 bij punt G .
 - Punt H kun je bereiken via punt C (op één manier) of via punt G (op twee manieren).
Op hoeveel manieren kun je dus in punt H komen? Noteer dit aantal bij punt H .
 - Welk getal noteer je bij punt L ?
 - De punten H en L zijn de voorgangers van punt M .
Hoe bereken je met de getallen bij punt H en punt L het aantal mogelijke kortste routes naar punt M ?
 - Noteer bij alle punten het aantal kortste routes vanuit punt A .
 - Hoeveel kortste routes zijn er van punt A naar punt P ?



Aanpak

Hoe bereken je het aantal kortste routes in een rooster?

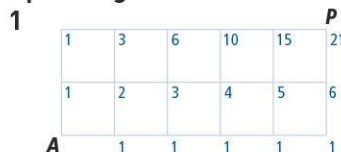
- 1 Noteer bij elk punt dat maar op één manier is te bereiken het getal 1.
- 2 Stel voor elk ander punt vast wat de voorgangers zijn en tel de bijbehorende aantallen bij elkaar op.



Voorbeeld

Bereken het aantal kortste routes van linksonder naar rechtsboven in een rooster van vijf breed en twee hoog.

Oplossing



- 2 Er zijn 21 kortste routes.

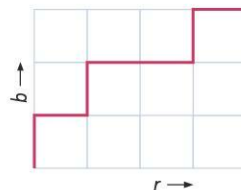
Ondersteunende route → maak opdracht 025

- 25 Bereken het aantal kortste routes van het punt linksonder naar het punt rechtsboven in een rooster van:

- a drie breed en twee hoog
- b drie breed en zes hoog
- c vier breed en vijf hoog

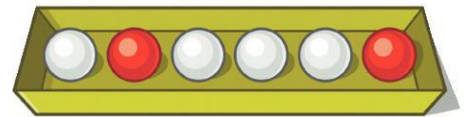
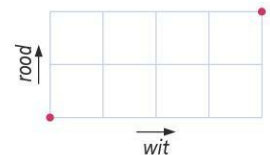
- 26 De voetbalwedstrijd tussen de amateurclubs Rapido en Broekster Boys eindigde in 4 - 3 voor Rapido. Je gaat met een rooster het aantal mogelijke scoreverlopen berekenen die tot deze eindstand leiden.

- a Welk scoreverloop komt overeen met de route die in het rooster is getekend?
- b Het scoreverloop waarbij Rapido eerst twee keer scoort, daarna Broekster Boys drie keer en Rapido tot slot twee keer, geef je aan met $r-r-b-b-b-r-r$. Teken in een rooster het scoreverloop $r-r-b-b-b-r-r$.
- c Teken in een rooster de route die overeenkomt met het scoreverloop waarbij de clubs om en om een doelpunt scoren.
- d Leg uit dat elk scoreverloop dat leidt tot de eindstand 4 - 3 overeenkomt met een route in het rooster.
- e Bereken het aantal mogelijke scoreverlopen die leiden tot de eindstand 4 - 3.

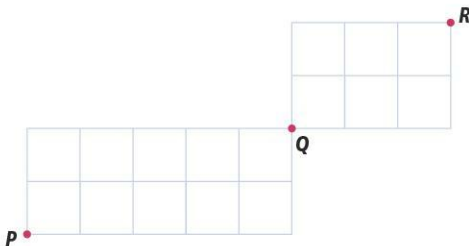


Bij telproblemen waarbij steeds gekozen moet worden uit twee mogelijkheden is een rooster een handig telmodel.

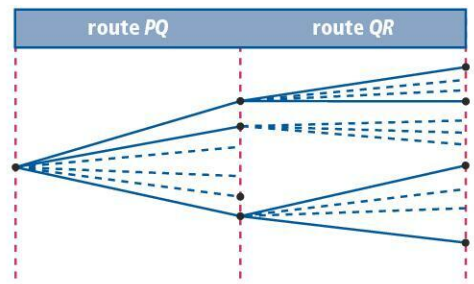
- 27** Je hebt twee rode en vier witte ballen. Je legt die ballen van links naar rechts in een doos zodat een kleurpatroon ontstaat. Het kleurpatroon in het plaatje kun je aangeven met $w-r-w-w-w-r$. De vraag is hoe groot het aantal verschillende kleurpatronen met rood en wit is. Omdat elk kleurpatroon bestaat uit vaste aantallen van twee kleuren, kun je hier een rooster gebruiken: bij een witte bal doe je een stap naar rechts, en bij een rode een stap omhoog.



- Teken in het rooster de route die hoort bij de getekende doos met ballen.
- Hoeveel verschillende kleurpatronen zijn er mogelijk?
- Hoeveel verschillende kleurpatronen zijn er mogelijk met drie rode en vijf witte ballen?



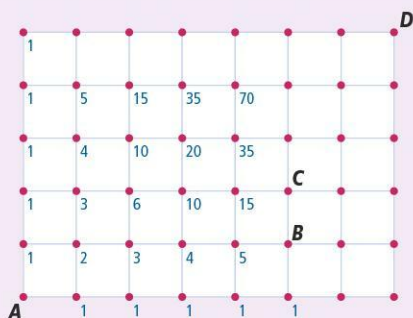
- 28**
- Bereken het aantal kortste routes van punt P naar punt Q .
 - Bereken het aantal kortste routes van punt Q naar punt R .
 - Een route van punt P naar punt R krijg je door eerst een route van punt P naar punt Q te kiezen en daarna een route van punt Q naar punt R . Het aantal routes van punt P naar punt R kun je berekenen met een boomdiagram.
Hoe groot is het aantal vertakkingen in de eerste kolom?
 - Hoe groot is het aantal vertakkingen in de tweede kolom?
 - Bereken het aantal routes van punt P naar punt R .



- 29** Lucia maakt twee testen met ja-nee vragen. De eerste test bestaat uit acht vragen; de tweede test heeft zes vragen. Omdat ze de stof niet goed heeft geleerd, gaat ze de antwoorden gokken. Ze besluit om bij elke test de helft van de vragen met ja te beantwoorden en de andere helft met nee. Bereken het aantal mogelijkheden waarop haar lijst met antwoorden er uit kan zien.

Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten



025

W

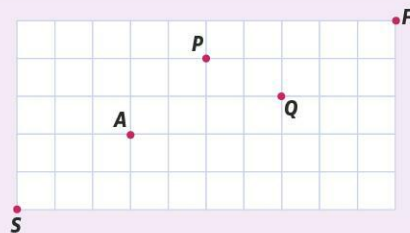
- Leg uit dat er 6 kortste routes zijn van punt A naar punt B .
- Leg uit waarom het aantal routes van punt A naar punt C gelijk is aan $15 + 6$.
- Noteer bij alle punten van het rooster het aantal kortste routes vanuit punt A .
- Hoeveel kortste routes zijn er van punt A naar punt D ?
- Lees uit je tekening af hoeveel kortste routes er zijn van linksonder naar rechtsboven in een rooster van vier breed en vijf hoog.
- Hoeveel kortste routes er zijn van linksonder naar rechtsboven in een rooster van drie breed en zes hoog?
- Bereken het aantal kortste routes van linksonder naar rechtsboven in een rooster van acht breed en twee hoog.
- Bereken het aantal routes in een rooster van vijf breed en zes hoog.

Uitdagende opdrachten

U4

Kevin loopt in het rooster van punt S naar punt F . In punt A ligt een voetbal en in zowel punt P als punt Q ligt een tennisbal.

- Kevin wil de voetbal meenemen.
Hoeveel kortste routes zijn er van punt S naar punt F via punt A ?
- Hoeveel kortste routes van punt S naar punt F zijn er als Kevin de voetbal en één tennisbal moet meenemen?



4.5 Combinaties

Je leert

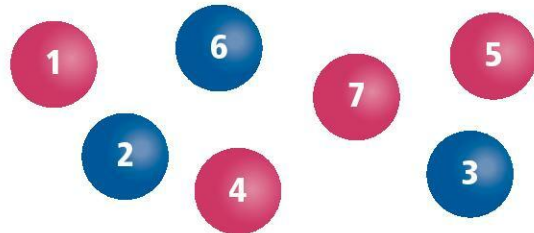
- hoe je het aantal combinaties berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 30—31—032—33—34—35
- doorlopend: 30—31—32—33—34—35
- uitdagend: 30—31—33—34—35—U5

Tom en Vera hebben zeven genummerde ballen. Vier daarvan zijn rood, de andere drie blauw. Ze vragen zich af op hoeveel manieren deze ballen op een rij gelegd kunnen worden. Ze maken elk een lijst met alle mogelijkheden. Tom let alleen op de nummers en Vera let alleen op de kleur.

- Wie van de twee heeft de langste lijst?



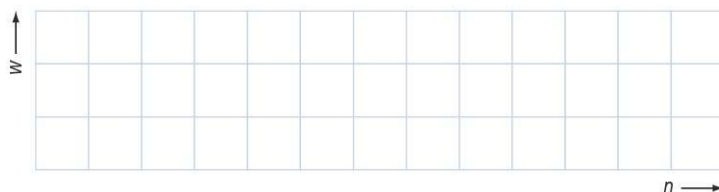
30 De vereniging van opdracht 17 met dertien leden krijgt een uitnodiging van de gemeente om te praten over subsidie. Voor een delegatie worden drie leden geselecteerd.

- Leg uit wat het verschil is met de situatie van opdracht 17.
- Op het blaadje staan drie voorbeelden voor de samenstelling van zo'n delegatie. De hoofdletters stellen de leden voor. Een n geeft aan dat het betreffende lid niet tot de delegatie behoort; een w betekent wel geselecteerd voor de delegatie.

Uit welke leden bestaat de delegatie die in het eerste voorbeeld staat aangegeven?

- Uit welke leden bestaat de delegatie die wordt weergegeven met het rijtje $n-n-n-w-n-n-w-n-n-n-w-n-n$?
- Geef het rijtje dat hoort bij de delegatie die bestaat uit de leden D, K en M.
- Omdat elke delegatie overeenkomt met een rijtje van tien keer een n en drie keer een w, kun je het aantal mogelijke samenstellingen van zo'n delegatie berekenen met een rooster.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M		
	n	n	w	n	w	n	n	n	n	n	n	w	n		
	n	n	w	n	n	n	n	n	n	w	n	n	w		
	n	w	n	n	n	n	w	n	n	n	n	w	n		



Geef in het rooster de route aan die hoort bij de delegatie uit opdracht d.

- Bereken met dit rooster het aantal mogelijke samenstellingen van de delegatie.

Theorie

Een ander woord voor een selectie is **combinatie**.

Een combinatie van 7 uit 10 is een selectie van zeven dingen uit tien verschillende dingen: zeven wel en drie niet.

Een rooster is een geschikt telmodel om het aantal mogelijke combinaties te berekenen want zeven kiezen uit tien komt overeen met: op hoeveel manieren kun je in een rooster zeven stappen naar rechts en drie stappen omhoog doen.

Het aantal combinaties van zeven uit 10 noteer je als $\binom{10}{7}$; dit spreek je uit als '10 boven 7'.

Dit is het aantal kortste routes in een rooster van zeven breed en drie hoog. Je kunt dit ook met je rekenmachine uitrekenen.

1	4	10	20	35	56	84	120
1	3	6	10	15	21	28	36
1	2	3	4	5	6	7	8
	1	1	1	1	1	1	1

Voorbeeld

In een bak liggen 20 balletjes, genummerd van 1 tot en met 20. Je pakt in één keer zes balletjes uit de bak. Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er?

Oplossing

Je pakt 6 balletjes wel en 14 niet. Het aantal combinaties van 6 uit 20 is het aantal kortste routes in een rooster van 6 breed en 14 hoog.

Dit is gelijk aan $\binom{20}{6}$. De rekenmachine geeft 38 760.

→ Instructie rekenmachine | Combinatie

- 31**
- H**
- a Bereken het aantal combinaties van 14 uit 20.
 - b Leg uit waarom het antwoord van opdracht a gelijk is aan het antwoord in het voorbeeld.
 - c Bereken het aantal combinaties van 3 uit 8, van 7 uit 12.
 - d Bereken $\binom{5}{2}$ en $\binom{15}{6}$.
 - e Bereken het aantal kortste routes in een rooster van tien breed en tien hoog

Ondersteunende route → maak opdracht 032

- 32**
- Alicia gaat vijf gelijke mutsen breien, maar elke muts krijgt wel een andere kleur.
- a Ze heeft acht kleuren wol. Hoeveel selecties van vijf kleuren zijn er mogelijk?
 - b Hoeveel selecties kan Alicia maken voor de vijf mutsen als ze tien kleuren wol heeft om uit te kiezen?



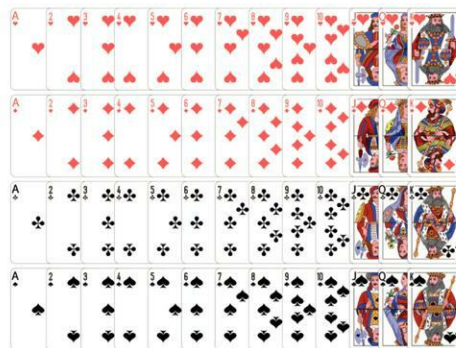
- 33** **H** a Martijn kiest vier verschillende letters uit het alfabet.
Hoeveel mogelijke viertallen zijn er?
- b Uit een lijst met 40 boektitels selecteert een docent Nederlands er vijf waarvan klassensets worden aangeschaft.
Hoeveel mogelijke selecties zijn er?
- c De supermarkt heeft haar assortiment uitgebreid met negen nieuwe maaltijdsalades. Shakira wil vier verschillende uitproberen.
Bereken uit hoeveel verschillende combinaties ze kan kiezen.

- 34** Sven is een groot liefhebber van de serie boeken over inspecteur Zomerman. Hij heeft alle 37 delen op de plank staan. Sven wil zijn twee vrienden Mark en Koen ook kennis laten maken met deze speurder. Daarom neemt hij acht boeken mee naar school om aan zijn vrienden uit te lenen.
- a Bereken op hoeveel manieren hij acht boeken uit de serie kan selecteren.
- b Mark en Koen krijgen elk drie boeken mee naar huis.
Bereken op hoeveel manieren Sven uit de acht meegenomen boeken deze twee drietallen aan zijn twee vrienden kan meegeven.

- 35** Een kaartspel bestaat uit 52 kaarten: 13 harten, 13 schoppen, 13 ruiten en 13 klaveren.

Een speler krijgt willekeurig acht kaarten uitgedeeld.

- a Hoeveel mogelijke combinaties van acht kaarten zijn er?
- b Bereken het aantal mogelijke combinaties waarin geen enkele schoppenkaart voorkomt.
- c Bereken met behulp van de vorige twee antwoorden het aantal combinaties waarin minstens één schoppenkaart voorkomt.
- d Hoeveel combinaties kun je maken van vijf rode kaarten uit de 26 rode kaarten?
- e Hoeveel combinaties kun je maken van drie zwarte kaarten uit de 26 zwarte kaarten?
- f Bereken het aantal mogelijke combinaties met vijf rode en drie zwarte kaarten.
- g Bereken het aantal combinaties met twee harten, twee schoppen, twee ruiten en twee klaveren.



Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

- 032** Op een spelletjesavond van een brugklas zijn er tien leerlingen die graag Catan willen spelen. Met de aanwezige editie kunnen slechts vier spelers meedoen. Er zullen dus vier van de tien leerlingen moeten worden geselecteerd. In de figuur zijn twee voorbeelden van zo'n selectie weergegeven.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

X	-	-	X	X	-	-	X	-	-
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

-	X	-	X	-	X	-	-	-	X
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- Uit welke leerlingen bestaat selectie in het eerste voorbeeld? En uit welke in het tweede voorbeeld?
- Teken de eerste selectie van de groep leerlingen in het rooster.
- Leg uit dat het aantal mogelijke selecties overeenkomt met het aantal manieren waarop je vier rode en zes witte ballen op een rij kunt leggen.
- Leg uit dat een rooster van zes breed en tien hoog een goed telmodel is.
- Je kunt het aantal mogelijke selecties uitrekenen met de rekenmachine.
Bereken het aantal mogelijke selecties van vier uit tien.



Uitdagende opdrachten

- U5** Habib zit in de derde klas. Op zijn rooster staan elf vakken. Aan het begin van het schooljaar heeft hij elf schriften gekocht, drie rood, vier blauw en vier groen. Bereken het aantal mogelijke manieren waarop hij de schriften over de vakken kan verdelen.



4.6 Het goede telmodel kiezen

Je leert • hoe je bij een telprobleem een goed telmodel kiest

Leerroutes • ondersteunend: 36—037—38—39—040—41
• doorlopend: 36—37—38—39—40—41
• uitdagend: 36—38—39—40—41—U6

In veel klaslokalen hangt tegenwoordig een telefoontas. In elk vakje past één telefoon. Twintig leerlingen uit H4A bergen hun telefoon er in op.

Janet denkt dat dit op $\binom{30}{20}$ manieren kan.

Volgens Roy kan het op $30 \times 29 \times 28 \times \dots \times 12 \times 11$ manieren.

• Wie heeft er volgens jou gelijk?



36 De personeelsvereniging organiseert een dag met een ochtend- een middag- en een avondprogramma. Iedereen moet voor elk dagdeel een activiteit kiezen. In de uitnodiging zie je welke activiteiten worden aangeboden.

- Bereken het aantal mogelijke dagprogramma's.
- Er zijn tien deelnemers die voor wandelen kiezen. De gidsen Douwe en Martin nemen elk vijf wandelaars mee. Bereken het aantal manieren waarop de tien wandelaars over de twee gidsen verdeeld kunnen worden.
- Bij klootschieten werpen de leden van een team in vaste volgorde een met lood verzwaarde bal. Bereken het aantal mogelijke volgorden bij een team van zeven leden.

Ochtend

wandelen, fietsen, zwemmen, roeien

Middag

boogschieten, midgetgolf, klootschieten, biljarten, tafeltennis

Avond

film, disco, volksdansen

Theorie

Bij het oplossen van een telprobleem kies je een goed telmodel. Ga na of je gebruik kunt maken van een boomdiagram, een rooster of een schema:

- als je te maken hebt met de keus uit twee mogelijkheden met vaste aantallen per mogelijkheid, dan is een rooster een handig telmodel;
- heeft een boomdiagram een regelmatige structuur, dan kun je het aantal mogelijkheden berekenen door de aantallen vertakkingen per kolom met elkaar te vermenigvuldigen;
- heeft het boomdiagram geen regelmatige structuur, dan moet je het boomdiagram tekenen of alle mogelijkheden systematisch opschrijven.

Voorbeeld 1

Voor een groep van acht personen zijn er vijf gele en drie rode T-shirts beschikbaar. Bereken het aantal manieren waarop de T-shirts over de personen kunnen worden verdeeld.

Oplossing

Er zijn steeds twee mogelijkheden (geel of rood) met vaste aantallen per mogelijkheid (vijf en drie). Een rooster is een goed telmodel.

Het aantal mogelijkheden is

$$\binom{8}{5} = 56.$$

Voorbeeld 2

Uit een vaas met tien balletjes genummerd 0 tot en met 9, trek je vijf keer een balletje. Bij elke trekking noteer je het getrokken nummer en doe je het balletje niet terug in de vaas. Bereken het aantal mogelijke uitkomsten.

Oplossing

Bij elke trekking is het aantal mogelijkheden één kleiner. Een boomdiagram is een goed telmodel.

Het aantal mogelijk uitkomsten is $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$.

Voorbeeld 3

Uit een vaas met tien balletjes, genummerd 0 tot en met 9, trek je vijf keer een balletje. Bij elke trekking noteer je het getrokken nummer en doe je het balletje terug in de vaas. Bereken het aantal mogelijke uitkomsten waaring elk volgend getal minstens twee groter is dan zijn voorganger.

Oplossing

Systematisch uitschrijven van alle mogelijkheden geeft:

02468, 02469, 02479, 02579, 03579, 13579

Er zijn zes mogelijkheden.

Ondersteunende route → maak opdracht 037

37

H

Margriet heeft een doos met 24 verschillende kleurpotloden.

- Ze heeft ze allemaal uit de doos gehaald. Uit hoeveel verschillende volgordes kan Margriet kiezen om ze weer in de doos te doen?
- Voor de tekenles moeten er tien potloden mee naar school. Hoeveel mogelijkheden zijn er om tien kleurpotloden te kiezen?
- Margriet kiest tien keer een kleurpotlood en legt ze in volgorde van kiezen voor zich op tafel. Hoeveel verschillende rijtjes kleurpotloden zijn mogelijk?



38

Een cijferslot werkt met een 'geheime code' bestaande uit vier cijfers, elk te kiezen uit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9.

- Hoeveel mogelijke codes zijn er bij dit cijferslot?
- Donald is vergeten welke geheime code zijn cijferslot heeft. Hij weet nog wel dat de code uit de cijfers 2, 3, 6 en 8 bestaat. Hoeveel verschillende codes moet hij maximaal proberen?
- Hoeveel verschillende codes kun je maken, als je weet dat er twee keer een 3 en twee keer een 4 in voorkomt?
- Hoeveel verschillende codes zijn er mogelijk met twee keer een 4, één keer een 3 en één keer een 1?

Er zijn telproblemen waarbij je het aantal mogelijkheden vindt door resultaten van deelproblemen te combineren.

Voorbeeld 1

In een klas met zeven jongens en zeven meisjes worden vijf leerlingen aangewezen om corvee te doen.

Bereken het aantal mogelijke vijftallen met drie jongens en twee meisjes.

Oplossing

Er zijn $\binom{7}{3} = 35$ mogelijke keuzes voor de drie jongens.

Er zijn $\binom{7}{2} = 21$ mogelijke keuzes voor de twee meisjes.

In totaal zijn er $35 \times 21 = 735$ mogelijke vijftallen.

Voorbeeld 2

Karin heeft een vaas met drie witte en vijf blauwe kralen. Ze neemt achter elkaar zeven keer een kraal uit de vaas en legt ze naast elkaar op tafel.

Hoeveel mogelijke rijtjes zijn er?

Oplossing

Er zijn twee soorten rijtjes:

- drie witte en vier blauwe kralen. Dat levert

$$\binom{7}{3} = 35 \text{ mogelijkheden.}$$

- twee witte en vijf blauwe kralen. Dat levert

$$\binom{7}{2} = 21 \text{ mogelijkheden.}$$

In totaal zijn er $35 + 21 = 56$ mogelijke rijtjes.

- 39** Leg uit waarom in voorbeeld 1 de getallen met elkaar worden vermenigvuldigd en in voorbeeld 2 bij elkaar opgeteld.

Ondersteunende route → maak opdracht 040

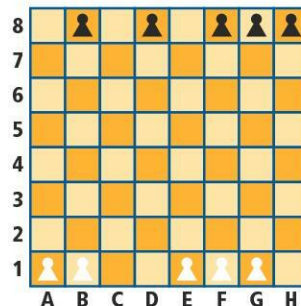
- 40** De 27 leerlingen van klas H4C gaan op excursie. Er gaan 15 jongens, 12 meisjes en twee docenten mee. Er komen twee bussen. In elke bus neemt een docent plaats. In de grote bus is plaats voor 19 leerlingen en in de kleine bus kunnen 11 leerlingen.

- Hoeveel manieren zijn er om de bussen te vullen als je alleen op het aantal leerlingen per bus let?
- Op hoeveel manieren kunnen de leerlingen zich over de bussen verdelen als alle meisjes in de grote bus gaan?

- 41** Met een schaakbord en schaakstukken kun je veel meer spelletjes spelen dan alleen maar schaken. Bij het spel Kurken zet elke speler aan het begin vijf van zijn eigen pionnen op zijn achterste rij.

- Bereken hoeveel mogelijke beginopstellingen er zijn.
- Michel en Ronald spelen dit spel. Op een gegeven moment zijn alle vakjes op rij 5 bezet door een pion. Bereken het aantal mogelijke manieren waarop dit kan.

Uitdagende route → maak opdracht U6

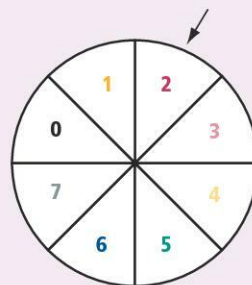


Ondersteunende opdrachten

037

Kevin draait zes keer met de tol. Elke keer noteert hij het aangewezen cijfer. Zo ontstaat een rijtje van zes cijfers.

- Waarom is een rooster geen handig telmodel om het aantal mogelijke rijtjes te berekenen?
- Welk telmodel is wel geschikt?
- Bereken hiermee het aantal mogelijke rijtjes.
- Met welk telmodel bereken je het aantal mogelijke rijtjes die bestaan uit allemaal verschillende cijfers?
- Waarom is een boomdiagram niet handig om het aantal rijtjes te tellen met twee keer een 0 en vier keer een 1? Welk telmodel is wel handig?
- Bereken het aantal rijtjes met twee keer een 0 en vier keer een 1.
- Victor draait drie keer met de schijf en schrijft de cijfers achter elkaar.
Bereken het aantal mogelijke rijtjes waarvan de som van de cijfers 3 is.



040

Een docent geschiedenis wil een toets maken met vier vragen over elk van de eerste drie hoofdstukken uit het boek. Hij heeft een bestand met bij hoofdstuk 1 acht toetsvragen, bij hoofdstuk 2 zeven toetsvragen en bij hoofdstuk 3 tien toetsvragen.

- Bereken hoeveel mogelijkheden er zijn om vier toetsvragen bij hoofdstuk 1 te selecteren.
- Bereken ook bij hoofdstuk 2 en bij hoofdstuk 3 het aantal mogelijke selecties van vier toetsvragen.
- Waarom moet je de antwoorden van opdracht a en opdracht b vermenigvuldigen?
- Bereken het aantal mogelijke toetsen dat de docent kan maken, waarbij de volgorde van de vragen niet van belang is.

H1	1	2	3	4	5	6	7	8		
H2	1	2	3	4	5	6	7			
H3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Uitdagende opdrachten

U6

Op de foto zie je speelgoed voor kleine kinderen. Je kunt twaalf bekertjes met een verschillende diameter stapelen tot een toren. In de fabriek worden de bekertjes geproduceerd in zes verschillende kleuren. Derk heeft van elke kleur twaalf bekertjes met een verschillende diameter.

- Derk bouwt torens waarbij hij twee kleuren gebruikt. Bereken het aantal mogelijke torens met rode en blauwe bekertjes.
- Bereken het aantal mogelijke torens die Derk kan bouwen met twee kleuren.

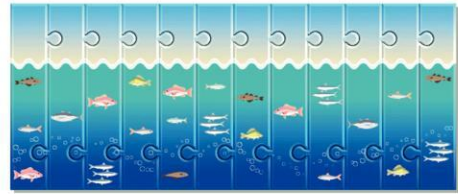


4.7 Gemengde opdrachten

- 42** Een puzzel bestaat uit twaalf stukken. Er is één stuk dat alleen aan het linker uiteinde geplaatst kan worden en één stuk dat alleen aan het rechter uiteinde geplaatst kan worden.

De overige stukken kunnen onderling van plaats worden gewisseld. Op de doos staat dat er 100 mogelijke volgorden zijn. Julia begint met het plaatsen van het stuk dat aan de linkerkant komt te staan. Daarna gaat ze een puzzelstuk eraan koppelen.

- Klopt de tekst op de doos? Leg je antwoord uit.
- Als je zo'n puzzel hebt die uit vijftien stukken bestaat, hoeveel mogelijke volgorden zijn er dan?



- 43** Op een kinderpartijtje zijn tien kinderen: vier jongetjes en zes meisjes. Er zijn twaalf feesthoedjes: vier goudkleurig en acht zilverkleurig. Elk kind krijgt bij binnenkomst een hoedje op. Bereken het aantal manieren waarop de hoedjes zo over de kinderen kunnen worden verdeeld dat alle jongetjes eenzelfde kleur hoedje krijgen.

- 44** In een sportkantine staan elf krukken waarvan er één bezet is. In de tekening zie je dat Jelmer op de middelste kruk zit. Floris en Daan willen naast elkaar gaan zitten maar beiden niet naast Jelmer. Op hoeveel manieren kan dat?



- 45** Op een plank staan zes busjes. Onder twee busjes ligt een munt, onder de andere vier niet. Je kunt aan de buitenkant niet zien of er wel of niet een munt onder het busje ligt. Iemand wil de beide munten hebben. Hij neemt willekeurig een busje van de plank en kijkt er onder. Vervolgens pakt hij een ander busje en kijkt er onder. Hij doet dit net zo lang tot hij de twee munten heeft.



- Maak een boomdiagram hierbij.
- Hoeveel verschillende volgorden zijn er?
- In hoeveel gevallen moeten er minder dan vier busjes worden opgetild om de munten te vinden?

- 46** Dieuwke stuurt na afloop van haar handbalwedstrijd een berichtje aan haar moeder: *We hebben gewonnen met 8 – 6! Het was wel spannend, want in de rust stond het 4 – 4. Gelukkig hebben we nooit achter gestaan.*
Onderzoek hoeveel scoreverlopen in overeenstemming zijn met dit bericht.

- 47** Omdat je winnaar bent van een prijsvraag die door bakker Hoekstra is georganiseerd, mag je een taart uitkiezen. Je hebt geen idee hoe groot de taarten zijn en één voor één krijg je vier taarten van verschillende grootte te zien. Direct na elke taart moet je zeggen of je deze wilt of niet, maar je mag maar één keer ja zeggen.
In deze opdracht onderzoek je of het uitmaakt welke strategie je volgt om de grootste taart te bemachtigen. Noem de taarten in volgorde van grootte 1, 2, 3 en 4, waarbij 1 de kleinste is en 4 de grootste is.
In de tabel zie je alle mogelijke volgorden waarin de taarten kunnen worden getoond.

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

- a** De meest eenvoudige strategie is om direct de eerste taart te kiezen.
In hoeveel van de gevallen krijg je dan de grootste taart?
- b** Je besluit om de eerste taart voorbij te laten gaan en daarna de eerstvolgende taart te kiezen die groter is dan de eerste. Natuurlijk wil je wel een taart mee, dus als alle taarten kleiner zijn dan de eerste, dan kies je toch de laatste. Onderzoek in hoeveel gevallen je met deze strategie de grootste taart krijgt.
- c** Je kunt ook de eerste twee taarten voorbij laten gaan. Je kiest de derde als deze groter is dan de eerste twee en anders kies je de laatste.
Ga na of dit een gunstiger strategie is dan in opdracht a en opdracht b als je de grootste taart wilt krijgen.
(Ontleend aan *CE havo wiskunde A 2011, tijdvak 1*)

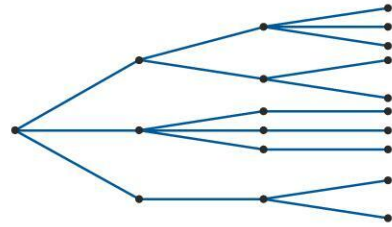


Theorie

Regelmatig boomdiagram, onregelmatig boomdiagram

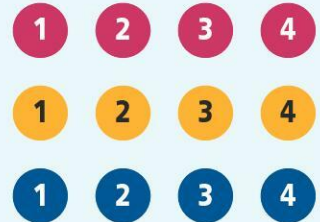
Als het aantal vertakkingen op elk punt in een kolom gelijk is, dan is de structuur van het boomdiagram regelmatig. Je kunt dan het aantal mogelijkheden uitrekenen zonder het hele boomdiagram te tekenen. Als de structuur van een boomdiagram niet regelmatig is, dan moet je het hele boomdiagram tekenen of de mogelijkheden systematisch opschrijven.

Voorbeeld



Dit is een onregelmatig boomdiagram met 10 mogelijke volgorden.

- S1 Harry heeft twaalf gekleurde genummerde balletjes. Hij neemt drie keer een balletje en legt ze in volgorde van trekking naast elkaar op tafel. De volgende opdrachten zijn uit te voeren door een boomdiagram te tekenen. Geef steeds eerst aan of het boomdiagram regelmatig of onregelmatig is.
- Bereken het aantal mogelijke rijtjes.
 - Hoeveel rijtjes zijn er met verschillende nummers?
 - Bereken het aantal rijtjes waarbij het product van de getallen zes is.



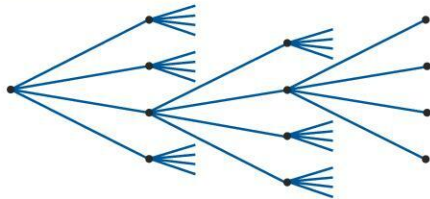
Vaardigheid

Je kunt met een machtsboom of een faculteitsboom het aantal mogelijkheden berekenen.

Een boomdiagram waarin bij elk keuzemoment het aantal takken gelijk is, noem je een machtsboom. Het totaal aantal volgorden is een macht.

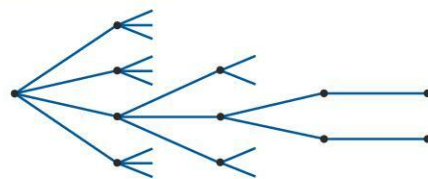
Een boomdiagram waarin bij elk keuzemoment het aantal takken één minder wordt, noem je een faculteitsboom. Het totaal aantal volgorden is een faculteit. Een product van de vorm $8 \times 7 \times 6 \times \dots \times 2 \times 1$ heet 8 faculteit. Je noteert dit als $8!$.

Voorbeeld 1



Een machtsboom met drie keuzemomenten, waarbij er steeds vier keuzemogelijkheden zijn. Het aantal volgorden is $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$.

Voorbeeld 2



Een faculteitsboom dat begint met vier keuzemogelijkheden, waarbij het aantal keuzemogelijkheden steeds één kleiner wordt. Het aantal volgorden is $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$.

- S2** Je gooit zes keer met een dobbelsteen en noteert steeds het aantal geworpen ogen.
- a** Bereken het aantal mogelijke rijtjes.
 - b** Hoeveel rijtjes zijn er waarin alleen oneven getallen voorkomen?
 - c** Bereken het aantal mogelijke rijtjes waarin alle getallen verschillend zijn.

Vaardigheid

Je kunt het aantal permutaties berekenen.

Een ander woord voor volgorde of rangschikking is permutatie. Een permutatie van 6 uit 15 is een rangschikking van een rijtje van zes dat je kiest uit vijftien verschillende dingen: een eerste, een tweede tot en met een zesde.

Voorbeeld

Een docent biologie heeft een klas met 24 leerlingen vijf vragen laten beantwoorden. Hij kiest bij elke vraag een andere leerling om het antwoord voor te lezen. Bereken op hoeveel manieren hij de vijf leerlingen kan aanwijzen.

Oplossing

Voor de eerste vraag heeft hij de keus uit 24 leerlingen. Voor de tweede vraag kan hij kiezen uit 23 leerlingen, enzovoort. In totaal zijn er $24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 = 5\,100\,480$ mogelijkheden.

- S3** Donya heeft tien blokjes met verschillende letters. Ze neemt er drie die ze naast elkaar op tafel legt. Bereken het aantal mogelijke 'woorden' die ze zo kan maken.



Vaardigheid

Je kunt het aantal kortste routes in een rooster berekenen.

- 1** Noteer bij elk punt dat maar op één manier is te bereiken het getal 1.
- 2** Stel voor elk ander punt vast wat de voorgangers zijn en tel de bijbehorende aantallen bij elkaar op.

Voorbeeld

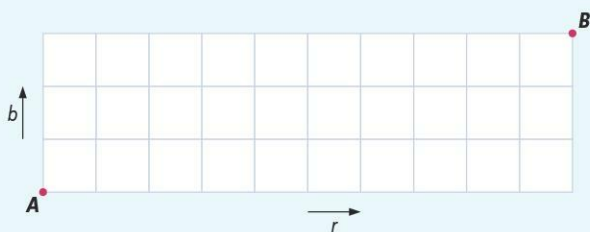
Bereken het aantal kortste routes van linksonder naar rechtsboven in een rooster van vier breed en drie hoog.

Oplossing

1

1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
	1	1	1	1

- 2** Het aantal kortste routes in een rooster van vier bij drie is 35.



- S4**
- Bereken het aantal kortste routes van punt A naar punt B .
 - Bereken het aantal kortste routes van linksonder naar rechtsboven in een rooster van vijf breed en vier hoog.

Vaardigheid

Je kunt het aantal combinaties berekenen.

Een ander woord voor een selectie is combinatie.

Een combinatie van 5 uit 12 is een selectie van vijf dingen uit twaalf verschillende dingen: vijf wel en zeven niet.

Het aantal combinaties van 5 uit 12 noteer je als $\binom{12}{5}$.

Dit spreek je uit als '12 boven 5'.

Voorbeeld

Uit een klas met 24 leerlingen worden elke week vijf leerlingen aangewezen om na de laatste les op vrijdag het lokaal aan te vegen.

Bereken het aantal mogelijke vijftallen.

Oplossing

Het aantal mogelijke vijftallen is het aantal combinaties van 5 uit 24: van de 24 leerlingen moeten er 5 wel en 19 niet vegen.

Het aantal combinaties is $\binom{24}{5} = 42\,504$.

- S5**
- Jan is jarig en hij mag van opa en oma drie autootjes uitzoeken. De winkel heeft 14 verschillende modellen in voorraad. Bereken het aantal mogelijke drietallen dat Jan kan kiezen.



Vaardigheid

Je kunt bij een telprobleem een goed telmodel kiezen.

Bij het oplossen van een telprobleem moet je een goed telmodel kiezen. Ga na of je gebruik kunt maken van een boomdiagram, een rooster of een schema:

- als je te maken hebt met de keus uit twee mogelijkheden met vaste aantallen per mogelijkheid, dan is een rooster een handig telmodel;
- heeft een boomdiagram een regelmatige structuur, dan kun je het aantal mogelijkheden berekenen door de aantallen vertakkingen per kolom met elkaar te vermenigvuldigen;
- heeft het boomdiagram geen regelmatige structuur, dan moet je het boomdiagram tekenen of alle mogelijkheden systematisch opschrijven.

Voorbeeld 1

Bij een roei-estafette moeten vier van de tien roeiers uit een team het eerste traject roeien. Uit hoeveel viertallen kan de coach kiezen?

Oplossing

Er zijn twee alternatieven (wel of niet beginnen) met vaste aantallen: vier wel en zes niet. Een rooster van vier bij zes is een geschikt telmodel.

Het aantal mogelijke viertallen is $\binom{10}{4} = 210$.

Voorbeeld 2

Bij een zwem-estafette moet een coach een team van vier zwemmers selecteren uit een groep van tien zwemmers. Daarbij is de volgorde waarop de zwemmers starten van belang.

Hoeveel verschillende teams kan de coach opstellen?

Oplossing

Voor de startzwemmer heeft de coach keuze uit tien, voor de 2e zwemmer keuze uit 9, enzovoort. Het aantal mogelijke teams is $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 3024$.

S6 Alfred gaat voor hemzelf en zijn zes vrienden wat te eten halen in de snackbar. Hij noteert op een lijstje de namen in alfabetische volgorde en noteert achter elke naam wat voor snack deze persoon wil. Iedereen mag uit vijf mogelijke snacks er één kiezen.

- Hoeveel verschillende lijstjes zijn er mogelijk?
- Onderweg is Alfred het lijstje kwijt geraakt. Hij heeft daarom vier kroketten en drie gehaktballen meegenomen. Bereken het aantal manieren waarop ze deze snacks onder elkaar kunnen verdelen.
- Alfred heeft zeven verschillende blikjes drinken gekocht, voor ieder één. Bereken het aantal manieren waarop de blikjes verdeeld kunnen worden.

- T1** Een vlag wordt samengesteld uit vier horizontale banen. Er mag gekozen worden uit rood, wit, blauw en groen.
- a** Bereken het aantal manieren waarop de vlag kan worden gekleurd.
 - b** Bereken het aantal mogelijke volgorden als elke kleur maar één keer mag voorkomen.
 - c** Het aantal kleuren wordt uitgebreid tot zes. Ook oranje en geel kunnen gekozen worden.
Bereken het aantal mogelijke volgorden als elke kleur maar één keer mag voorkomen.
 - d** Hoeveel verschillende volgorden zijn er als de kleuren vaker voor mogen voorkomen, maar aangrenzende banen niet dezelfde kleur mogen hebben?



- T2** Hanneke heeft vijf muzieknummers op haar telefoon staan. Van Willie Nelson de nummers 'So much to do', 'Always on my mind' en 'On the road again' en van Brett Young de nummers 'In case you didn't know' en 'Mercy'. Ze gebruikt de shuffle-optie om de nummers af te spelen. Dit betekent dat de vijf nummers in een volstrekt willekeurige volgorde elk éénmaal worden afgespeeld.
- a** In hoeveel volgorden kunnen de nummers worden afgespeeld?
 - b** Bij hoeveel van die volgorden worden de nummers van Brett Young achter elkaar afgespeeld?
 - c** De shuffle-optie werkt niet goed meer. Er wordt wel steeds een willekeurig nummer gekozen, maar er wordt niet meer onthouden welke nummers geweest zijn.
Bereken het aantal mogelijke volgordes voor de eerste zeven nummers die worden afgespeeld.

- T3** Clara moet voor haar verplichte boekenlijsten nog zes Nederlandse boeken en vijf Engelse boeken lezen.
- a** Bereken het aantal mogelijke volgorden waarin ze deze boeken kan lezen.
 - b** Bereken het aantal mogelijke volgorden als ze niet twee Nederlandse boeken achter elkaar wil lezen.
 - c** In de vakantie gaat Clara twee weken met haar ouders naar Frankrijk. Ze neemt vier boeken voor haar lijst mee.
Bereken uit hoeveel viertallen ze kan kiezen.
 - d** Bereken het aantal mogelijke viertallen als ze twee Nederlandse en twee Engelse boeken mee neemt.



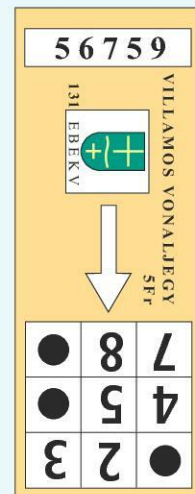
T4 Een groep van tien personen gaat een zeiltocht maken. Iedereen moet tijdens de tocht een zwemvest dragen. Er zijn zes gele en zes oranje zwemvesten beschikbaar.
Bereken het aantal manieren waarop de zwemvesten uitgedeeld kunnen worden, waarbij je let op welke kleur zwemvest iemand krijgt.

T5 Een voetbalcoach neemt naar een toernooi 17 spelers mee: twee keepers, zes verdedigers, vijf middenvelders en vier aanvallers. Het team speelt altijd in een 4-3-3-opstelling, dus met vier verdedigers, drie middenvelders en drie aanvallers. Verder staat er natuurlijk een keeper in het doel.

- Op hoeveel manieren kan de coach de aanvallers kiezen?
- Op hoeveel verschillende manieren kan de coach de middenvelders kiezen? En de verdedigers?
- Hoeveel verschillende teams kan de coach in het veld brengen?

T6 Wie in Budapest met de metro reisde, kocht een kaartje dat voorzien was van negen vakjes met daarin de cijfers 1 tot en met 9. Zodra je was ingestapt, moest je je kaartje in een ponsapparaat steken, volgens de pijlrichting en met de bedrukte zijde boven. Een of meer (maximaal 9) cijfers werden dan in één keer weggeponst. Daarmee was aan het kaartje te zien in welke trein je reis was begonnen. Je ziet een kaartje waarbij de vakjes 1, 6 en 9 zijn voorzien van een gaatje.

- Bereken op hoeveel verschillende manieren er in een kaartje drie gaatjes geponst kunnen worden.
- In een kaartje worden twee gaatjes geponst die niet in dezelfde rij of dezelfde kolom zitten. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er?
- Het aantal cijfers dat wordt weggeponst, mag variëren van 1 tot en met 9. Op een dag rijden op het metronet 400 treinen. Is het mogelijk dat in elke trein op een verschillende wijze gaatjes worden geponst?
(Ontleend aan het CE havo wiskunde A, 1992, tijdvak 2)

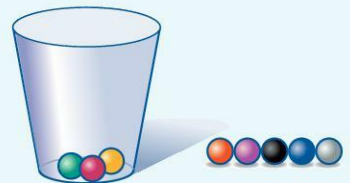


Je kunt met een machtsboom of een faculteitsboom het aantal mogelijkheden berekenen.

- E1** In een grote zak boerderijdrop zitten koeien, paarden, varkens, kippen, hooibergen en tractors. Zes kinderen kiezen één voor één een dropje en leggen dat voor zich op tafel.
- Bereken het aantal mogelijke rijtjes van zes dropjes.
 - Hoeveel rijtjes zijn er met zes verschillende dropjes?

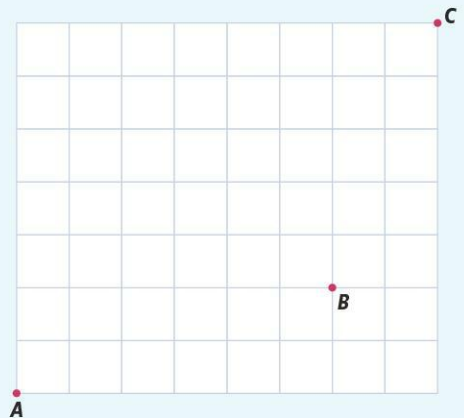
Je kunt het aantal permutaties berekenen.

- E2** Joëlle heeft een vaas met acht verschillend gekleurde knikkers. Zij trekt aselekt vijf keer een knikker uit de vaas en legt ze in volgorde van trekking naast elkaar neer.
- Hoeveel verschillende rijtjes kan ze maken?
 - En hoeveel verschillende rijtjes kan ze maken die beginnen met de rode knikker?



Je kunt het aantal kortste routes in een rooster berekenen.

- E3** Het rooster is een vereenvoudigde plattegrond van een gedeelte van een stad. De straten vormen een patroon van vierkanten.
- Langs hoeveel verschillende kortste routes kun je van punt A naar punt B rijden? En van punt B naar punt C?
 - Hoeveel kortste routes zijn er van punt A via punt B naar punt C?

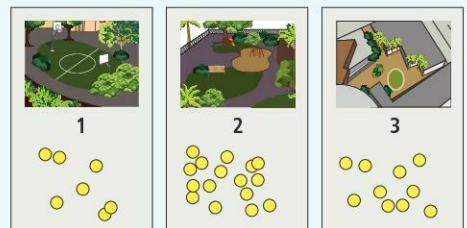


Je kunt het aantal combinaties berekenen.

- E4** Uit een klas met 24 leerlingen worden er drie geselecteerd om de klas te vertegenwoordigen in het leerlingenparlement.
- Bereken het aantal mogelijke selecties.
 - Bereken ook het aantal mogelijke selecties als niet drie maar vijf leerlingen worden aangewezen.

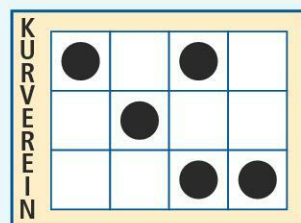
Je kunt bij een telprobleem een goed telmodel kiezen.

- E5**
- Je werpt zes keer met een euro. Hoeveel volgorden zijn er met drie keer kop en drie keer munt?
 - Er zijn drie vierde klassen met respectievelijk 23, 29 en 28 leerlingen. Uit elk van die klassen moet één leerling worden aangewezen voor de culturele commissie. Hoeveel drietallen zijn er mogelijk?
 - Na de presentatie van drie plannen voor de herinrichting van het schoolterrein mag iedereen zijn voorkeur aangeven door vijf gele stickertjes te verdelen over drie posters. Bereken het aantal manieren waarop iemand zijn vijf stickertjes kan verdelen.



- E6** Stefan heeft zeven witte en drie paarse viooltjes gekocht die hij naast elkaar in de bloembak op zijn balkon wil planten.
- Bereken het aantal mogelijke volgorden van de kleuren viooltjes.
 - Hoeveel mogelijke volgorden zijn er als de viooltjes op de beide uiteinden wit moeten zijn?
 - En hoeveel volgorden zijn er als de drie paarse viooltjes naast elkaar moeten staan?

- E7** Op de top van een berg vind je vaak een zogenaamd Gipfelbuch om je naam in te schrijven. Daarnaast hangt vaak een soort priktang. Met die tang maak je in een kaart een gaatjespatroon dat een code is voor de top van de berg.
- Bereken het aantal patronen met in elke kolom één gaatje.
 - Hoeveel patronen met zes gaatjes zijn er mogelijk?
 - Bereken het aantal patronen met in elke rij twee gaatjes.



- E8** Een verzorgingshuis organiseert een dagje uit voor een aantal bewoners. Er gaan 13 bewoners mee en 5 begeleiders. Er komt een bus voor 8 en een bus voor 12 passagiers.
- Laat zien dat er drie manieren zijn om de bussen te vullen als je alleen let op de aantallen personen in de bussen.
 - Op hoeveel manieren kunnen de bewoners over de bussen worden verdeeld als vijf bewoners en twee begeleiders in de kleine bus gaan en de anderen in de grote bus?
 - Op hoeveel manieren kunnen alle personen over de bussen worden verdeeld?

- E9** Een gezelschap van elf personen gaat aan een rechthoekige tafel zitten om te dineren. De gastheer en de gastvrouw zitten elk aan een van de uiteinden van de tafel.
- Hoeveel mogelijkheden zijn er voor de gasten om aan tafel te gaan zitten?
 - Na een onderbreking van het diner kan elk van de elf personen gaan zitten op de plaats die hij of zij wil. Op hoeveel manieren kan het gezelschap op de stoelen plaatsnemen?
 - Na een tweede onderbreking is iedereen opnieuw vrij een plaats te kiezen. De gastheer wil samen met zijn vrouw aan een van de lange zijden plaats nemen, waarbij zijn vrouw links naast hem komt te zitten. Op hoeveel manieren kunnen de leden van het gezelschap nu om de tafel zitten?



Wiskunde in de lage landen

In het Engels, in het Frans, in het Duits en in veel andere talen is het woord voor wiskunde afgeleid van het Griekse mathematikè. Het Nederlandse woord *wiskunde* danken we aan de Nederlandse wiskundige Simon Stevin (1548 - 1620). *Wis* heeft hier de betekenis van 'zeker', zoals in *vergewissen*. Afkomstig uit Vlaanderen, vertrok hij in 1581 naar de Universiteit van Leiden, die door Willem van Oranje in 1575 was gesticht. Prins Maurits, met wie een hechte vriendschap ontstond, vroeg Stevin een nieuw onderwijsprogramma te ontwikkelen dat snel ingenieurs kon opleiden. Aan deze opleiding in Leiden kregen leerlingen in het Nederlands lessen in rekenen, landmeetkunde en vestingbouw.

De 16de eeuw was een periode van nieuwe bloei voor de wiskunde. Naast de meetkunde en de astronomie die aan de universiteiten werd bestudeerd, ontstond er door de toenemende handel belangstelling voor een nieuw soort wiskunde: de toegepaste praktische wiskunde. Daarin ging het om bepaling van inhouden, wisselen van geld, positiebepaling op zee enzovoorts. In de tweede helft van de 16de eeuw schakelde men in de Nederlanden over van de onpraktische Romeinse cijfers naar de Arabische cijfers.

In 1585 publiceerde Stevin een klein boekje: *De Thiende*. Het bevatte een revolutionair idee, namelijk het gebruik van decimale breuken. Dit vereenvoudigde het rekenen met breuken sterk. Voorheen werd veel gebruik gemaakt van het zestigtallige stelsel, waarvan onze tijdsindeling een overblijfsel is. Wiskundigen zien door de systematische aanpak *De Thiende* als een mijlpaal in het werken met decimale breuken.

Stevin noteerde het getal 184,5429 als

184①5①4②2③9④

In de cirkels staat het aantal keer dat door je 10 moet delen.

Opdracht

- Hoe zou Stevin 3,141 592 654 noteren?
- In de tekst van *De Thiende* staat een optelling van drie decimale getallen.
Welke drie decimale getallen zijn dat?
- Schrijf de uitkomst van de optelling op de manier van Stevin.



THIENDE. 13
HET ANDER DEEL
DER THIENDE VANDE
WERCKINCHE.
I. VOORSTEL VANDE
VERGADERINGHE.

Wesende ghegeven Thiendetalen te vergaderen: hare Somme te vinden.

TH GHEGHEVEN. Het sijn drie oirdens van Thiendetalen, welcker eerste 27①8①4③7③, de tweede, 37①6①7③5③, de derde, 875①7①8③2③, T'BEGHEERDE. Wy moeten haer Somme vinden. WERCKING.
Men sal de ghegeven getalen in oirden stellen als
hier neven, die vergaderende naer de ghemene maniere der vergaderinghe van heegetalen aldus:

①①③③
27847
37675
875782
941304

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rekenen met breuken
- Breuken en decimale getallen
- Formules herleiden
- Telproblemen
- Lineaire formules opstellen



Rekenen met breuken

1 Vereenvoudig.

a $\frac{8}{20}$

c $\frac{12}{78}$

b $\frac{15}{36}$

d $\frac{15}{125}$

Theorie

Breuken kun je bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken door de noemers gelijknamig te maken.

Bij het vermenigvuldigen van breuken is het handig om de helen eerst als breuk schrijven. Vervolgens kun je de tellers met elkaar vermenigvuldigen en de noemers met elkaar vermenigvuldigen.

Voorbeeld 1

Bereken $\frac{3}{7} - \frac{2}{5}$ en $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$.

Oplossing

$$\frac{3}{7} - \frac{2}{5} =$$

$$\frac{15}{35} - \frac{14}{35} = \frac{1}{35}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} =$$

$$\frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = 1\frac{3}{6} = 1\frac{1}{2}$$

Voorbeeld 2

Bereken $2\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$ en $\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$.

Oplossing

$$2\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} =$$

$$\frac{7}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$$

$$\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} =$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{7}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

2 Berekenen en noteer alle tussenstappen.

a $\frac{5}{12} + \frac{7}{18}$

d $\frac{7}{10} - \frac{2}{3}$

b $2\frac{5}{8} + 1\frac{3}{4}$

e $2\frac{2}{5} - \frac{7}{8}$

c $4\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6} + \frac{7}{12}$

f $4\frac{1}{9} - 3\frac{1}{2}$

3 Berekenen en noteer alle tussenstappen.

a $\frac{5}{12} \times \frac{2}{5}$

d $\frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times 3$

b $1\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{3}$

e $\left(\frac{3}{5}\right)^2$

c $2 \times \frac{3}{10}$

f $3 \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4}$

Breuken en decimale getallen

4 Op het blaadje zie je hoe je een breuk als decimaal getal kunt schrijven.

Schrijf als decimaal getal, rond zo nodig af op drie decimalen.

a $\frac{3}{4}$

d $7\frac{4}{5}$

b $\frac{7}{9}$

e $-4\frac{1}{8}$

c $1\frac{1}{3}$

f $5\frac{4}{15}$

	$2\frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5}$
	$3 : 5 = 0,6$
	$2\frac{3}{5} = 2,6$

- 5 Op het blaadje zie je hoe je decimale getallen kunt omzetten in breuken. Schrijf als breuk.

- a 0,25 d 2,42
b 0,875 e 7,08
c 0,05 f 6,125

0,15	$= \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$				
2,034	$= 2 + \frac{34}{1000} = 2 + \frac{17}{500} = 2\frac{17}{500}$				

Theorie

Je kunt op verschillende manieren een deel van een hoeveelheid uitrekenen.

Voorbeeld 1

Bereken $\frac{4}{9}$ deel van 332 liter.

Oplossing

$\frac{1}{9}$ deel van 332 liter is $332 : 9 = 36,888\ldots$ liter.

$\frac{4}{9}$ deel van 332 liter is $4 \times 36,888\ldots \approx 147,56$ liter.

Voorbeeld 2

Bereken 0,13 deel van € 70,-.

Oplossing

0,13 deel van € 70,- is $0,13 \times € 70,- = € 9,10$.

- 6 Bereken.

- a $\frac{3}{14}$ deel van € 200,- c 0,18 deel van 4 ton
b $\frac{2}{5}$ deel van 16 gram d 0,63 deel van 18 km

Formules herleiden

- 7 Schrijf de formules korter door de gelijksoortige termen samen te nemen.

- a $p = 3a + 5a + 7a$ d $s = 5x^2 + 6x + 4x + 2x^2$
b $u = 18m - 6m + 3m$ e $q = 10n^2 - 4n + 8n + 5$
c $k = 3t + 2t + t$ f $w = 8a - 6a^2 + 4 - 9a$

- 8 Schrijf de formules zonder haakjes.

- a $y = 3(x + 2)$ d $y = -7(0,5x - 2)$
b $y = 2x(x + 12)$ e $y = -4x(-1\frac{1}{2}x + 6)$
c $y = 5x(2x - 3)$ f $y = -x(x - 8)$

- 9 Schrijf de volgende formules zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $y = 2x(3x + 5) + 7x$

b $y = x(x + 6) - 3x^2$

c $y = 4x(5x - 3) + 6x$

d $k = 12m(2 - 4m) + 6m^2$

e $c = -4w(4w - 4) + 25w - 35$

- 10 Gegeven is de formule $y = \frac{9x + 6}{3}$

- a Welke waarde heeft y bij $x = 0$? En bij $x = 2$?
b Op het blaadje zie je hoe je de formule kunt herleiden. Herleid de formules op dezelfde manier.

A $y = \frac{4x - 10}{2}$

C $K = \frac{-16p - 8}{2}$

B $y = \frac{21 + 15x}{3}$

D $Q = \frac{0,4c + 1,8}{2}$

$y = \frac{9x + 6}{3}$	
$y = \frac{9x}{3} + \frac{6}{3}$	splitsten
$y = 3x + 2$	vereenvoudigen

- 11 Op het blaadje zie je hoe de formule $3p + 5q = 15$ herleid is zodat q uitgedrukt wordt in p . Herleid de formules waarbij je b uitdrukt in a .

a $2b - 10a = 16$

d $-b - 4 = 10a$

b $4a = 6 - b$

e $18 = 2(a - b)$

c $2a - b + 7 = 0$

f $2(6 - b) = -10a$

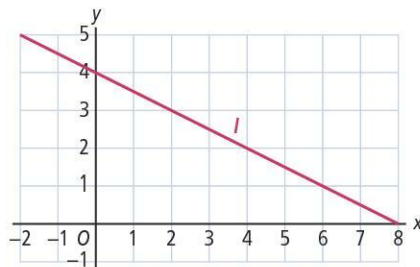
$3p + 5q = 15$	
$5q = 15 - 3p$	links en rechts $- 3p$
$q = 3 - 0,6p$	links en rechts : 5

Telproblemen

- 12
- Hoeveel verschillende volgorden zijn er om vijf bekertjes op een rij te zetten?
 - Hoeveel verschillende codes kun je maken met zes letters uit het alfabet? Je mag daarbij letters meer dan één keer gebruiken.
 - Op hoeveel manieren kun je een 'woord' van vier letters maken waarbij de letters K, P, A en H elk precies één keer gebruikt worden?
 - Hoeveel manieren zijn er om een toets met 12 meerkeuzevragen te beantwoorden, waarbij je steeds uit vier mogelijke antwoorden moet kiezen?

Lineaire formules opstellen

- 13** Lijn l is de grafiek bij een lineaire formule.
- Lees het startgetal en de richtingscoëfficiënt van lijn l af.
 - Geef de lineaire formule bij lijn l .
 - Lijn k loopt evenwijdig aan lijn l en snijdt de y -as in $(0, 7)$. Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van lijn k ?
 - Geef de lineaire formule bij lijn k .
 - Lijn m gaat door de punten $(0, 4)$ en $(2, 7)$. Bereken de richtingscoëfficiënt van lijn m .
 - Stel een formule op bij lijn m .



Theorie

Bij de lineaire formule $y = ax + b$ is de bijbehorende grafiek een rechte lijn. Hierin is a de richtingscoëfficiënt of het hellingsgetal en b het startgetal. De grafiek snijdt de verticale as in het punt $(0, b)$. Bij een horizontale lijn is de richtingscoëfficiënt 0. Een horizontale lijn die de verticale as snijdt in het punt $(0, b)$ heeft de formule $y = b$.

- 14** Stel een formule op bij de volgende lijnen.
- Lijn l gaat door $(0, 8)$ en heeft richtingscoëfficiënt -2 .
 - Lijn m gaat door $(0, 3)$ en $(6, 3)$.
 - Lijn n gaat door de oorsprong en $(8, 96)$.
- 15** Lijn k gaat door de punten $A(13, 14)$ en $B(19, 41)$.
- Laat met een berekening zien dat de richtingscoëfficiënt van lijn k gelijk is aan $4,5$.
 - Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn m door de punten $(-2, 12)$ en $(10, 36)$.
- 16** Lijn l met richtingscoëfficiënt 3 gaat door het punt $P(9, 41)$. Op het blaadje zie je hoe het startgetal van lijn l berekend wordt. Maak de berekening af en stel de formule bij lijn l op.
- 17** Stel een formule op bij de lijn door de twee punten.
- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a $(3, 10)$ en $(17, 52)$ | d $(5, 4)$ en $(10, -6)$ |
| b $(-2, 8)$ en $(2, 10)$ | e $(3, 3)$ en $(8, 3)$ |
| c $(21, 29)$ en $(25, 89)$ | f $(-4, 7)$ en $(-2, -17)$ |

De formule is $y = 3x + b$.
 Lijn l gaat door $(9, 41)$,
 vanuit dit punt moet je
 9 stapjes naar links om bij
 de verticale as te komen.
 $41 - 9 \times 3 = \dots$



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In klas 2 en 3 heb je kennis gemaakt met lineaire en exponentiële formules. In hoofdstuk 2 van dit deel zijn de lineaire formules herhaald.

In dit hoofdstuk ga je kijken wat het verschil is tussen lineaire en exponentiële groei. Verder leer je hoe je een exponentiële formule opstelt en hoe je de groeifactor bij exponentiële groei kunt omrekenen naar een andere tijdseenheid. Ook zie je hoe je met exponentiële formules kunt terugrekenen in de tijd.

De kennis van lineaire en exponentiële groei wordt in deel 2 uitgebreid.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Modelleren en algebraïseren* opdracht 34
- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 37
- *Abstraheren* opdracht 43



- V1** De prijs van een tuinbank wordt verhoogd van € 670,- naar € 844,20.
- Vul de verhoudingstabel verder in.
 - Met welk getal moet je de oude prijs vermenigvuldigen om de nieuwe prijs te krijgen?
 - Met hoeveel procent is de prijs van de tuinbank verhoogd?
 - Een bijpassende tuinstoel die normaal € 350,- kost, wordt nu aangeboden voor € 280,-.
Met welk getal moet je de oorspronkelijke prijs vermenigvuldigen om de nieuwe prijs te krijgen?

<i>prijs in euro's</i>	670	844,20
<i>percentage</i>	100	...

Theorie

Het getal waarmee je een oude hoeveelheid moet vermenigvuldigen om een nieuwe hoeveelheid te krijgen, heet de **factor**. Er geldt:

$$\text{oude hoeveelheid} \times \text{factor} = \text{nieuwe hoeveelheid}.$$

$$\text{Omgekeerd geldt: } \text{factor} = \frac{\text{nieuwe hoeveelheid}}{\text{oude hoeveelheid}}$$

Voorbeeld

Een smartphone is afgeprijsd van € 650,- naar € 520,-.

De factor waarmee je de oude prijs moet vermenigvuldigen om de nieuwe prijs te berekenen, is gelijk aan

$$\frac{520}{650} = 0,8.$$

- V2** Bereken de factor waarmee je de oude hoeveelheid moet vermenigvuldigen om de nieuwe hoeveelheid te krijgen.
- Het aantal voetbalclubleden neemt toe van 240 naar 288.
 - Het aantal tennisclubleden neemt af van 380 naar 228.

- V3** Een jong katje is vanaf de geboorte elke week gewogen. In de tabel staan de resultaten van de eerste vijf metingen.
- Elke week wordt het gewicht van het katje met ongeveer dezelfde factor vermenigvuldigd.
Hoe groot is die factor?
 - Teken een grafiek van het groeiproces van dit katje.
 - Neem aan dat de groei op deze manier doorgaat.
Welk gewicht heeft het katje dan na zes weken?

<i>tijd in weken</i>	<i>gewicht in grammen</i>
0	90
1	130
2	190
3	275
4	400

Theorie

Je noemt een groeiproces **exponentieel** als de factor per tijdseenheid waar je mee vermenigvuldigt steeds hetzelfde is. Deze factor heet de **groefactor**. Ook bij een afname spreek je van exponentiële groei.

Een formule van de vorm $h = b \cdot g^t$ heet een **exponentiële formule**. In deze formule is b de **beginhoeveelheid** op tijdstip $t = 0$ en is g de groefactor per tijdseenheid. De groefactor is altijd groter dan 0.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $A = 3 \cdot 1,8^x$

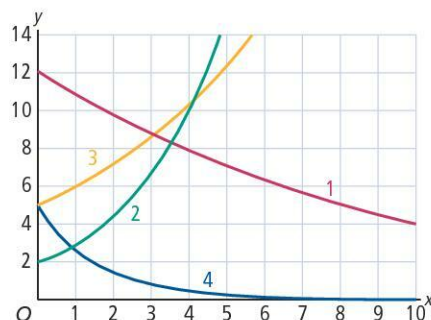
<i>x</i>	0	1	2	3
<i>A</i>	3	5,4	9,72	17,496

$\times 1,8 \quad \times 1,8 \quad \times 1,8$

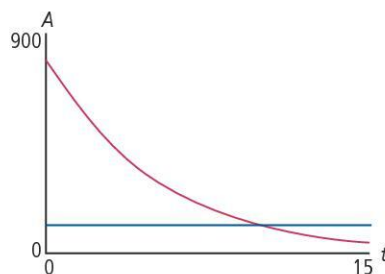
De groefactor is 1,8.

De beginhoeveelheid is 3.

- V4** Gegeven is de formule $y = 5 \cdot 1,2^x$.
- Maak op je rekenmachine een tabel bij de formule voor $x = 0$ tot en met $x = 6$ met stapgrootte 1. Rond je antwoorden eventueel af op één decimaal.
 - Hoe groot is de beginhoeveelheid?
 - En hoe groot is de groeifactor per tijdseenheid?
 - Welke van de getekende grafieken hoort bij de formule $y = 5 \cdot 1,2^x$?
 - Bij de andere grafieken horen de formules $y = 5 \cdot 0,5^x$, $y = 2 \cdot 1,5^x$ en $y = 12 \cdot 0,9^x$. Welke grafiek hoort bij welke formule?



- V5** Bij een proef met een biologisch bestrijdingsmiddel neemt het aantal rupsen met 8% per dag af. Aan het begin van de proef zijn er 800 rupsen.
- Hoeveel rupsen zijn er één dag later? En twee dagen later?
 - Je kunt het aantal rupsen berekenen met de formule $A = 800 \cdot 0,92^t$. Hierin is A het aantal rupsen en t de tijd in dagen. Je kunt deze formule in je rekenmachine invoeren als $y = 800 \times 0,92^x$. Maak een tabel bij de formule voor $t = 0$ tot en met $t = 8$.
 - Om te weten te komen na hoeveel dagen er 300 rupsen zijn, moet je het snijpunt vinden van de grafiek en de horizontale lijn $A = 300$. Bereken met je rekenmachine de coördinaten van dit snijpunt.
 - Na hoeveel dagen zijn er voor het eerst minder dan 50 rupsen?



- V6** Tussen de resterende hoeveelheid inkt in mL in een inktcartridge en het aantal geprinte pagina's bestaat een lineair verband.

<i>aantal geprinte pagina's</i>	50	60	80	200
<i>hoeveelheid inkt in mL</i>	7	6,8	6,4	4

- Bereken het hellingsgetal.
- Wat is het startgetal?
- Stel een formule op voor de resterende hoeveelheid inkt I in ml en het aantal geprinte pagina's p .

5.1 Lineaire groei

Je leert • hoe je lineaire groei herkent

Leerroutes • ondersteunend: 1–2–3–4–05–6–07–8
 • doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8
 • uitdagend: 1–2–3–5–6–7–8–U1

Mark en Ede laten beide een klus uitvoeren bij dezelfde timmerman. Voor een klus van 6 uur moet Mark € 205,- betalen voor het aantal gewerkte uren. Ede betaalt voor een klus van 8 uur € 260,- voor het aantal gewerkte uren.

- Hoe weet je dat de timmerman voorrijkosten in rekening brengt?



A	x	1	2	3	5	8
	y	2	5	8	12	21

B	x	4	5	6	7	10
	y	9,5	11	12,5	14	18,5

C	x	1	3	4	6	18
	y	36	12	9	6	2

- 1** Leg uit bij welke van de tabellen er sprake kan zijn van een lineair verband tussen de variabelen x en y .
- 2** Van een lineair verband tussen de variabelen t en R gaat de grafiek door de punten $(70, 220)$ en $(120, 20)$.

 - Met hoeveel neemt R af als t toeneemt van 70 tot 120?
 - Met hoeveel neemt R af als t met 10 toeneemt?
 - Vul de tabel verder in.

t	70	80	90	100	110	120
R	220	...	...	...	...	20

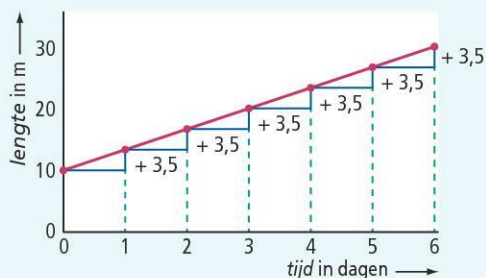
 - Met hoeveel neemt R af als t met 1 toeneemt?
 - Bereken R voor $t = 56$ en voor $t = 102$.
- 3** Tussen welke van onderstaande variabelen is er sprake van een lineair verband? Leg uit waarom wel of waarom niet.

 - De hoogte van de gasrekening en het gasverbruik.
 - De afgelegde afstand en de tijd bij een constante snelheid.
 - De lengte van de ribbe en de inhoud van een kubus.
 - De huurprijs en de tijd bij een jaarlijkse huurverhoging van 4,5%.

Theorie

Bij een **lineair verband** tussen twee variabelen is er sprake van een constante toename of constante afname. De bijbehorende formule is van de vorm $y = ax + b$. Een lineair verband kun je op verschillende manieren herkennen.

- De grafiek is een rechte lijn.
- In een tabel en in een grafiek is er bij gelijke stappen dezelfde toename of afname.
- Uit de tekst kun je opmaken dat de toename of afname bij gelijke stappen dezelfde is.



tijd in dagen	0	1	2	3	4
lengte in mm	10	13,5	17	20,5	24
		+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5

Voorbeeld

Een kabelhaspel met 10 meter kabel weegt 1472 gram. Dezelfde haspel met 5 meter kabel weegt 957 gram. Hoeveel weegt de haspel met 8 meter kabel?

Oplossing

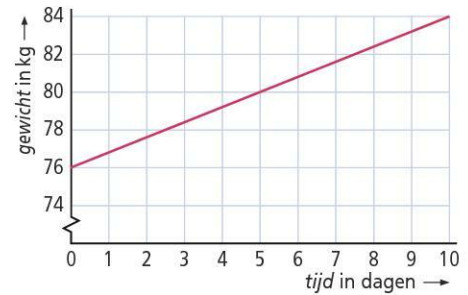
Er is sprake van een lineair verband, want per meter kabel is de toename van het gewicht constant.
 5 meter kabel weegt $1472 - 957 = 515$ gram.
 1 meter kabel weegt $515 : 5 = 103$ gram.
 Met 8 meter kabel weegt de haspel $957 + 3 \times 103 = 1266$ gram.

- 4** a Hoeveel weegt de kabelhaspel uit het voorbeeld als er 6,5 meter kabel op zit?
- H** b Een andere kabelhaspel weegt met 12 meter kabel 2410 gram en met 9 meter kabel 1990 gram. Hoeveel weegt deze haspel met 5 meter kabel?

Ondersteunende route → maak opdracht 05

- 5** Een buitenzwembad heeft de vorm van een balk. Het bad is 50 meter lang, 25 meter breed en overal even diep. Het bad wordt leeggepompt met pompen die zo zijn ingesteld dat het water uit het bad steeds met hetzelfde aantal liters per uur wordt afgevoerd. Na 10 uur pompen is er nog 1900 m^3 water in het bad over, na 18 uur is dat nog 1420 m^3 . Noem de hoeveelheid water in m^3 dat nog in het bad over is W en de tijd in uren t met $t = 0$ het moment dat de pompen worden aangezet.
- Uit welk gegeven kun je opmaken dat het verband tussen de variabelen W en t lineair is?
 - Bereken na hoeveel tijd pompen het zwembad leeg is. Geef je antwoord in hele minuten.
 - Bereken de hoeveelheid water na 24 uur pompen.
 - Hoe hoog stond het water na 24 uur pompen?
 - Na hoeveel uur pompen stond het water nog 140 cm hoog?

- 6 In de grafiek zie je het gewicht van een persoon die bezig is met een speciaal samengesteld 'fastfooddieet'. Hij nuttigt tijdens het ontbijt, de lunch en het avondeten fastfood.
- Ho veel kg woog hij bij de start van dit dieet?
 - Ho veel kg weegt hij na twee weken indien het groeien op dezelfde manier doorgaat?



Ondersteunende route → maak opdracht 07

- 7 Bij een regenmeter wordt de regen via een trechter opgevangen in een cilinder. De hoogte van het water in de cilinder is een maat voor de hoeveelheid regen die gevallen is. In de tabel staat de hoogte in centimeters die tijdens een regenbui werd gemeten. Het regende steeds even hard.

<i>tijdstip</i>	8.10	8.30	9.00	9.20
<i>hoogte in cm</i>	11,5	20,5	34,0	43,0

- Laat zien dat de waterhoogte toeneemt met 0,45 cm per minuut.
 - Stel een formule op voor de waterhoogte h in cm en de tijd t in minuten na 8.00 uur.
- 8 In de tabel zie je enkele gegevens van twee typen koelkasten. De koelkast van het type A+++ is duurder in aanschaf, maar verbruikt minder energie. Dat betekent dat na verloop van tijd de extra investering in de koelkast van het type A+++ zal zijn terugverdiend.

<i>koelkast</i>	<i>prijs</i>	<i>verbruik per jaar</i>
A+	€ 189,-	138 kWh
A+++	€ 235,-	82 kWh

Neem voor de prijs van elektriciteit € 0,19 per kWh.

- Meneer Huisman wil een koelkast kopen. Hij verwacht de koelkast ten minste acht jaar te gaan gebruiken.
Ga na welke koelkast hij het beste kan kopen.
- Met de formule $K = 189 + 26,22t$ kun je berekenen hoe veel euro het kost als je de koelkast van het type A+ koopt en t jaar in gebruik hebt.
Stel voor de koelkast van het type A+++ een dergelijke formule op.
- Onderzoek na hoeveel jaar een koelkast van het type A+++ goedkoper is dan een koelkast van het type A+.

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

05 Een cilindervormige regenton is tot aan de rand gevuld met water. De regenton wordt leeg gepompt. Iedere minuut wordt er steeds hetzelfde aantal liter uit de regenton gepompt. Na 5 minuten pompen zit er nog 489 liter water in en na 18 minuten nog 450 liter water. Noem de hoeveelheid water in de regenton W in liters en de tijd t in minuten met $t = 0$ het moment waarop de pomp wordt aangezet.

- Uit welke zin blijkt dat er een lineair verband bestaat tussen de variabelen W en t ?
- Bereken hoeveel liter water er tussen $t = 5$ en $t = 18$ is weggepompt.
- Hoeveel water is er tussen $t = 5$ en $t = 18$ per minuut weggepompt?
- Waarom geldt je antwoord van opdracht c ook vóór $t = 5$ en na $t = 18$.
- Na hoeveel tijd is de regenton leeg? Geef je antwoord in uren en minuten.
- Je wilt te weten komen na hoeveel tijd er nog 290 liter water in de regenton zit. Hoeveel liter water moet er na $t = 18$ nog worden weggepompt? Hoe lang duurt het voordat deze hoeveelheid is weggepompt?
- Op welk moment zit er nog 290 liter in de regenton?



07 Op een winterdag ontstaat er op een meer een laag ijs. In de tabel staat de dikte van het ijs die is gemeten op deze winterdag. De dikte van het ijs neemt elke uur evenveel toe.

- Uit welke zin blijkt dat er een lineair verband bestaat tussen het tijdstip en de dikte van het ijs in cm?
- Laat met een berekening zien dat de dikte van het ijs per uur met 0,05 cm toeneemt.
- Hoe dik was het ijs om 0.00 uur?
- De formule voor de dikte van het ijs d in cm en t de tijd in uren is van de vorm $d = \dots \times t + \dots$ met $t = 0$ om 0.00 uur. Welke getallen moeten er op de puntjes staan?

<i>tijdstip</i>	<i>dikte van het ijs in cm</i>
2.00	3,6
6.00	3,8
16.00	4,3

Uitdagende opdrachten

U1 Tussen zowel de variabelen y en x als de variabelen x en t bestaat een lineair verband. De bijbehorende formules zijn $y = 3x - 10$ en $x = -2t + 5$. Laat zien dat het verband tussen y en t ook lineair is en geef de bijbehorende formule.

5.2 Exponentiële groei

Je leert

- hoe je de groeifactor berekent bij exponentiële groei
- hoe je exponentiële groei herkent

Leerroutes

- ondersteunend: 9–10–11–12–O13–13–14–O15–16
- doorlopend: 9–10–11–12–13–14–15–16–17
- uitdagend: 9–10–11–12–13–14–15–17–U2

Jij krijgt van je ouders zakgeldverhoging. Je mag kiezen uit twee mogelijkheden:

- Het zakgeld wordt maandelijks verhoogd met 3%.
- Het zakgeld gaat elke maand met € 0.50,- omhoog.

Op dit moment krijg je € 15,- per maand.

- Welke optie kies je? Waarom?



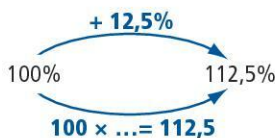
- 9 De prijs van een wasmachine stijgt van € 835,- naar € 901,80.
- Met welke factor moet je de oude prijs vermenigvuldigen om de nieuwe prijs te berekenen?
 - Met hoeveel procent is de prijs gestegen?
 - De prijs van een televisie daalt van € 670,- naar € 643,20. Met welke factor moet je de oude prijs vermenigvuldigen om de nieuwe prijs te berekenen?
 - Met welk percentage daalt de prijs?

Theorie

Bij een procentuele toename of procentuele afname kun je rekenen met een factor. Als een hoeveelheid met 8% toeneemt, dan kun je de nieuwe hoeveelheid berekenen door te vermenigvuldigen met de factor 1,08.

Voorbeeld 1

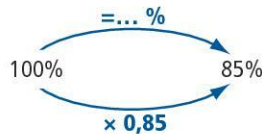
Bereken de factor bij een toename van 12,5%.



De factor is $112,5 : 100 = 1,125$.

Voorbeeld 2

Bereken de procentuele toe- of afname bij de factor 0,85.



Er is een afname van $100\% - 85\% = 15\%$.

- 10 Bereken de factor bij de percentages.

H

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a een toename van 10% | d een afname van 2,03% |
| b een toename van 0,5% | e een toename van 300% |
| c een afname van 1,7% | f een toename van 0,1% |

11 Welke procentuele toename of afname hoort bij de factoren?

- H**
- a 1,4 d 0,997
b 0,95 e 3,05
c 1,02 f 0,01

12 De huurprijs van een bepaalde woning wordt elk jaar met 3% verhoogd. In 2019 was de huur € 9.800,- per jaar.

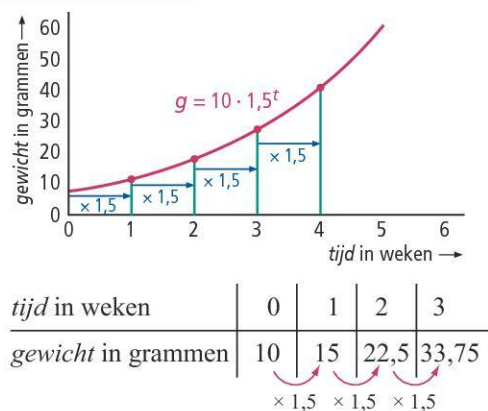
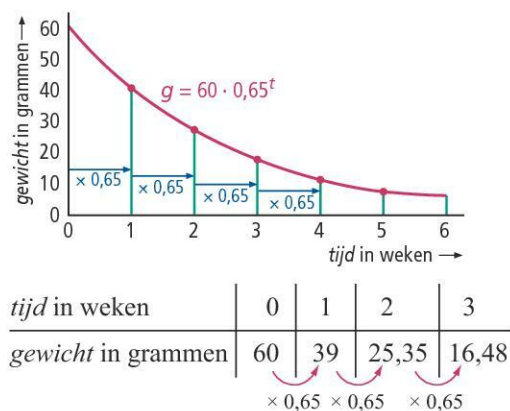
- a Welke factor hoort bij een groei van 3% per jaar?
b Vul de tabel verder in.
c Bereken de huurprijs van deze woning in 2023.

tijd in jaren	huurprijs in euro's
2019	9800
2020	...
2021	...

Theorie

Bij **exponentiële groei** is de **groefactor per tijdseenheid** constant. Bij een toename of afname met een vast percentage vermenigvuldig je telkens met dezelfde factor. Een groei met een vast percentage is dus ook exponentieel. Bij een toename is de groefactor groter dan 1. Bij een afname ligt de groefactor tussen 0 en 1.

Voorbeeld



Ondersteunende route → maak opdracht 013

13 a Bij welke van de tabellen is er sprake van exponentiële groei?
b Geef de groefactor bij de tabellen met exponentiële groei.

H

A

x	1	2	3	4	5
y	3	6	12	24	48

B

x	1	2	3	4	5
y	12	24	36	48	60

C

x	4	5	6	7	9
y	1215	405	135	45	5

- 14** Tussen welke variabelen is er sprake van een exponentieel verband? Leg uit waarom wel of waarom niet.
- De lengte van de zijde en de oppervlakte van een vierkant.
 - De tijd en het maandsalaris bij een jaarlijkse salarisverhoging van € 100,-.
 - De tijd en het saldo op een spaarrekening met een rente van 3,6% per jaar.
 - De tijd en het aantal virussen als het aantal virussen elke vijf maanden verdrievoudigd.

Ondersteunende route → maak opdracht 015

- 15** Het aantal hazen in een gebied neemt met 5% per jaar af.

H	<i>tijd</i> in jaren	0	1	2	3	4	5
	<i>aantal hazen</i>	...	...	...	...	243	...

- Leg uit dat je 243 met 0,95 moet vermenigvuldigen om het aantal hazen na vijf jaren te berekenen en bereken het aantal hazen na vijf jaren.
- Leg uit dat je het aantal hazen na drie jaren kunt berekenen met de berekening $243 : 0,95$ en vul de tabel verder in.



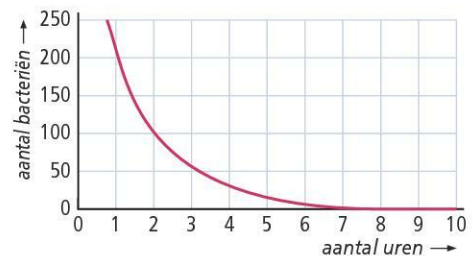
- 16** De tabel hoort bij exponentiële groei.

<i>tijd</i>	0	1	2	3	4	5
<i>aantal</i>	...	...	200	250	...	...

- Hoe groot is de bijbehorende groeifactor?
- Bereken het aantal op de tijdstippen $t = 4$ en $t = 5$.
- Met welke deling kun je het aantal op tijdstip $t = 1$ berekenen?
- Vul de tabel verder in.

- 17** In een onderzoek naar het afsterven van bacteriën na toevoegen van antibiotica is op meerdere momenten het aantal bacteriën gemeten. De meetresultaten zijn verwerkt in een grafiek.

- Ga na dat er sprake is van exponentiële groei.
- Met hoeveel procent neemt het aantal bacteriën per uur af?
- Neem aan dat de groei exponentieel doorgaat. Bereken het aantal bacteriën na 4 uur en 5 uur.
- Hoeveel bacteriën waren er aan het begin van het onderzoek aanwezig?



Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

013 Je wilt nagaan of de tabel bij exponentiële groei hoort.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	12 288	3072	768	192	48	...	3

×...

- Hoe bereken je het getal dat op de puntjes bij het pijltje moet komen te staan? Bereken dit getal.
- Het getal dat je bij opdracht a hebt berekend, heet de factor. Bereken ook de andere factoren die bij deze tabel horen. Wat valt je op?
- Ga na dat bij $x = 5$ de waarde $y = 12$ hoort.
- Leg uit dat er in deze tabel sprake is van exponentiële groei. Geef de bijbehorende groeifactor.

015 Het aantal inwoners van een stad neemt in de periode 2015-2019 elk jaar met 2% toe.

<i>jaar</i>	2015	2016	2017	2018	2019
<i>aantal inwoners</i>	...	...	13 248	...	...

- Leg uit dat de factor gelijk is aan 1,02.
- In de tabel kun je aflezen dat in het jaar 2017 het aantal inwoners 13 248 was. Bereken de aantallen inwoners in de jaren 2018 en 2019.
- Van 2016 naar 2017 is het aantal inwoners ook met 2% toegenomen. Leg uit dat je het aantal inwoners in 2016 kunt berekenen door 13 248 te delen door 1,02.
- Bereken het aantal inwoners in 2016 en vervolgens ook het aantal in 2015.

Uitdagende opdrachten

U2 In een natuurgebied groeit het aantal kakkerlakken het eerste jaar met 6% en het tweede jaar met 4%.

- Met welk percentage is het aantal kakkerlakken toegenomen in de eerste twee jaren?
- Ga ervan uit dat het aantal kakkerlakken na het tweede jaar steeds met 4% per jaar toeneemt. Na hoeveel jaar zal het aantal kakkerlakken verdubbeld zijn?



5.3 Exponentiële formules opstellen

Je leert

- hoe je een formule bij een exponentieel verband opstelt

Leerroutes

- ondersteunend: 18—020—21—022—22—23
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23—24
- uitdagend: 19—20—21—22—23—24—U3

Een nieuw virus verspreidt zich doordat ieder besmet persoon weer andere personen kan besmetten. Een voorbeeld hiervan is een uitbraak die start met vijf besmette personen en waarbij het aantal zieken iedere week vertienvoudigt. Volgens Susan kun je het aantal besmette personen A en de tijd t in weken berekenen met de formule $A = 5 \cdot 10^t$.

- Komt deze formule overeen met de beschreven uitbraak? Verklaar je antwoord.



- 18** Elke week wordt er een schatting gemaakt van het aantal vissen in een visvijver. De formule $A = 500 \cdot 0,9^t$ beschrijft het verband tussen de tijd t in weken en het aantal vissen A in de vijver.
- Bereken het aantal vissen na één week en na twee weken.
 - Hoeveel vissen waren er aan het begin van de telling?
 - Plot een grafiek van het verloop van de visstand in de vijver.
 - Als er minder dan honderd vissen in de vijver zitten, worden er nieuwe vissen uitgezet. Na hoeveel weken is dat het geval?

Je kunt de formules invoeren op je rekenmachine als $y = 500 \cdot 0,9^x$ en $y = 100$.

- 19** Het gewicht van een chihuahua neemt de eerste weken na de geboorte exponentieel toe. In de tabel is G het gewicht van de chihuahua in grammen en t de tijd in weken.
- Geef de algemene formule vorm van de formule voor een exponentieel verband tussen de variabelen t en G .
 - Bereken de groeifactor per week. Rond af op drie decimalen.
 - Welk gewicht had de chihuahua bij de geboorte, dus op $t = 0$? Rond af op gehele grammen.
 - Stel een formule op voor het gewicht G van de chihuahua in grammen na een tijd van t weken.

t	0	1	2	3
G	...	145	185	236

Aanpak

Hoe stel je een formule op bij een exponentieel verband?

- 1 Schrijf de algemene formule voor een exponentieel verband op.
Deze formule is van de vorm $N = b \cdot g^t$.
- 2 Zoek uit wat de groeifactor per (tijds)eenheid is.
- 3 Zoek uit wat de beginhoeveelheid is, dus de hoeveelheid op tijdstip 0.
- 4 Vul de groeifactor en de beginhoeveelheid in bij de algemene formule.
Geef aan welke (tijds)eenheid bij de groeifactor hoort.

Voorbeeld

Bij het schoonspelen van een vervuilde tank verdwijnt per uur 10% van het vuil. Na twee uur spoelen zit er nog 81 kg vuil in de tank. Stel een formule op bij dit proces.

Oplossing

- 1 Gebruik de formule $V = b \cdot g^t$ met t de tijd in uren en V de hoeveelheid vuil in kg.
- 2 Er verdwijnt 10% van het vuil, dus er blijft 90% over.
De groeifactor is dus 0,9.
- 3 De beginhoeveelheid op $t = 0$ is 100 kg want $81 : 0,9^2 = 100$.
- 4 $V = 100 \cdot 0,9^t$ met t de tijd in uren en V de hoeveelheid vuil in kg.

t	0	1	2
V	...	...	81

: 0,9

Ondersteunende route → maak opdracht 020

- 20** De tabellen horen bij een exponentieel verband.
Stel bij beide tabellen een formule op.

H

A

t	0	1	2	3	4
N	500	400	320	256	204,8

B

t	2	3	4	5	6
N	4500	5400	6480	7776	9331,2

- 21** Meneer Swietman heeft op 1 januari 2013 een bedrag gestort op een spaarrekening met een vast rentepercentage. Aan het eind van elk jaar wordt de rente bijgeschreven. Vanaf 2015 heeft hij opgeschreven hoeveel geld er op die rekening staat. Stel een formule op voor het bedrag B in euro's dat meneer Swietman na t jaar op zijn rekening heeft staan. Neem $t = 0$ op 1 januari 2013.

<i>datum</i>	<i>bedrag in euro's</i>
01-01-2015	3200,00
01-01-2016	3232,00
01-01-2017	3264,32
01-01-2018	3296,96

Ondersteunende route → maak opdracht 022

- 22** In 2018 woonden er 7,59 miljard mensen op aarde. Volgens sommige modellen neemt de wereldbevolking sinds 2015 jaarlijks met 1,1% toe.

H

Stel een formule op waarmee je het aantal mensen N na t jaren kunt berekenen. Neem voor $t = 0$ het jaar 2015.

- 23** Bij een proef worden bacteriën gekweekt in een kweekbakje. Irma begint te meten op 3 maart. De totale oppervlakte ingenomen door de bacteriën is dan $0,2 \text{ cm}^2$. Elke dag verdubbelt de oppervlakte.
- Geef de groeifactor van de oppervlakte per dag.
 - Hoe kun je de bedekte oppervlakte op 8 maart rechtstreeks berekenen met de oppervlakte van 3 maart?
 - Voordat Irma de oppervlakte begon te meten, zaten er al bacteriën in het bakje. Bereken de oppervlakte die de bacteriën op 1 maart bedekten.
 - Het tijdstip $t = 0$ komt overeen met 1 maart. Stel een formule op waarmee je de oppervlakte A in cm^2 op tijdstip t kunt uitrekenen.
 - Bereken de oppervlakte die de bacteriën op 11 maart bedekken.



- 24** Iemand krijgt 8 cc (8 cm^3) van een geneesmiddel via een injectie toegediend. Per dag raakt het lichaam $\frac{1}{4}$ deel van de aanwezige hoeveelheid geneesmiddel kwijt, zodat de hoeveelheid steeds verder afneemt.
- Hoeveel cc geneesmiddel is er na twee dagen nog aanwezig?
 - Waarom is deze afname een exponentieel proces?
 - Stel een formule op voor het verband tussen de aanwezige hoeveelheid geneesmiddel H in cc en de tijd t in dagen.
 - Na hoeveel dagen is er nog 1 cc over?
 - Bij een andere patiënt wordt drie dagen na het toedienen van de eerste injectie nog een injectie met 8 cc geneesmiddel toegediend. Na hoeveel dagen is er bij deze patiënt nog 1 cc over?

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

020

De tabel hoort bij een exponentieel verband. Je gaat een formule opstellen bij de tabel.

- a Welke algemene formule hoort bij de tabel? Gebruik de juiste letters voor de variabelen.
- b Je berekent de groeifactor door twee opeenvolgende waarden van N door elkaar te delen. Bereken de groeifactor per tijdseenheid.
- c Geef de beginhoeveelheid.
- d Stel een formule op en controleer de formule door $t = 2$ in te vullen.

t	0	1	2	3	4
N	800	1200	1800	2700	4050



022

Op een middelbare school neemt het aantal leerlingen sinds het schooljaar 2017-2018 af met 2,3% per jaar. Op 1 september 2018 had de school 2790 leerlingen.

- a Leg uit dat het aantal leerlingen exponentieel afneemt en dat de groeifactor per jaar gelijk is aan 0,977.
- b Bereken het aantal leerlingen op 1 september 2017.
- c Neem t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 september 2017. Stel een formule op voor het aantal leerlingen N in de vorm $N = b \cdot g^t$.
- d Maak een tabel bij de formule en ga na dat N op $t = 16$ voor het eerst lager is dan 2000.
- e In welk schooljaar is het aantal leerlingen voor het eerst lager dan 2000?

Uitdagende opdrachten

U3

De formule $N = 5 \cdot 2^{3(t+1)}$ hoort bij een exponentieel groeiproces.

Bepaal de waarden van b en g als de formule in de vorm $N = b \cdot g^t$ wordt geschreven.

5.4 Andere tijdseenheden

Je leert

- hoe je de groeifactor omrekent naar een andere tijdseenheid
- hoe je het groeipcentage berekent bij een andere tijdseenheid

Leerroutes

- ondersteunend: 25—26—027—28—29—030—31
- doorlopend: 25—26—27—28—29—30—31
- uitdagend: 26—27—28—29—30—31—U4

De waarde van een fiets neemt af naarmate hij ouder wordt. Een fietshandelaar gebruikt als vuistregel dat de waarde van een fiets elk jaar met 25% afneemt. Daphne zegt hierover: 'De waarde neemt elk jaar met 25% af, dus vier jaar na aankoop is de fiets niets meer waard'.

- Wat is er onjuist aan deze uitspraak?



- 25** Bij een aanvaring wordt een olietanker zo zwaar beschadigd dat een groot deel van de lading in zee stroomt. De olie verspreidt zich in de loop van de tijd over het water. Om 10 uur 's ochtends bedekt de uitgestroomde olie een oppervlakte van $0,12 \text{ km}^2$. De oppervlakte van de olievlek wordt elk uur drie keer zo groot.

- Vul de tabel verder in.
- Hoe groot is de groeifactor per uur?
- Hoeveel keer zo groot wordt de oppervlakte in drie uur? En in vijf uur?
- Hoe groot is de groeifactor per drie uur? En per vijf uur?
- Leg uit dat de groeifactor per vijf uur gelijk is aan 3^5 .
- Bereken met behulp van de groeifactor per uur, de groeifactor per zes uur. Controleer je antwoord met de tabel.

tijdstip	oppervlakte in m^2
10.00	0,12
11.00	0,36
12.00	...
13.00	...
14.00	...
15.00	...
16.00	...

- 26** In de zomer kunnen algen zich in voedselrijk water zeer snel vermenigvuldigen. Bij een proef in een kweekbak blijkt het verband tussen het aantal algen N en de tijd t in dagen exponentieel te zijn. Je kunt het aantal algen berekenen met de formule $N = 1000 \cdot 3,24^t$.

- Geef de groeifactor per dag.
- Bereken met de gegeven formule de waarde van N voor $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$, $t = 1\frac{1}{2}$ en $t = 2$.
- Welk getal komt er onder de pijltjes bij de tabel te staan?
- Hoe groot is de groeifactor per halve dag?
- Ga na dat de groeifactor per halve dag gelijk is aan $3,24^{\frac{1}{2}}$.

t	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
N	1000	...	...	...	...

$\times \dots$ $\times \dots$ $\times \dots$ $\times \dots$

Theorie

Als de groeifactor per week gelijk is aan g dan is de groeifactor per vier weken gelijk aan g^4 .

Een dag is $\frac{1}{7}$ deel van een week, dus de groeifactor per dag is dan $g^{\frac{1}{7}}$.

Voorbeeld 1

De groeifactor per uur is 1,13.
Bereken de groeifactor per 12 uur en per kwartier.

Oplossing

De groeifactor per 12 uur is $1,13^{12} \approx 4,335$.

Een kwartier is $\frac{1}{4}$ uur, dus de groeifactor per kwartier is $1,13^{\frac{1}{4}} \approx 1,031$.

Voorbeeld 2

De groeifactor per minuut is 0,89.
Bereken de groeifactor per seconde en per kwartier.

Oplossing

Een seconde is $\frac{1}{60}$ minuut, dus de groeifactor per seconde is $0,89^{\frac{1}{60}} \approx 0,998$.

De groeifactor per kwartier is $0,89^{15} \approx 0,174$.

Ondersteunende route → maak opdracht 027

27

H

- a De groeifactor per week is 1,52.
Bereken de groeifactor per dag en per vier weken. Rond af op drie decimalen.
- b De groeifactor per week is 1,002.
Bereken de groeifactor per jaar. Rond af op drie decimalen.

28

H

Bij de tabel hoort een exponentieel groeiproces. Hierin is A het aantal en t de tijd in jaren.

- a Bereken de groeifactor per vier jaar en per jaar.
- b Hoe groot is het groeipcentage per jaar?
- c Stel een formule op met t in jaren.
- d Stel ook een formule op met de tijd m in maanden. Rond daarbij de groeifactor af op drie decimalen.
- e Bereken met beide formules de waarde van A na 3,5 jaar.
Welke formule geeft het beste antwoord? Waarom?

t in jaren	2	6
A	36	2916

29

- Een bacteriekolonie groeit met 30% per dag.
- a Hoe groot is de groeifactor per dag?
- b Bereken de groeifactor per uur. Rond je antwoord af op drie decimalen.
- c Met hoeveel procent neemt het aantal bacteriën per uur toe?

Aanpak

Hoe reken je het groeipercentage om voor een andere tijdseenheid?

- 1 Bereken de groeifactor per gegeven tijdseenheid.
- 2 Bereken de groeifactor voor de gevraagde tijdseenheid.
- 3 Leid het gevraagde percentage af uit deze groeifactor.

Voorbeeld 1

De procentuele toename per dag is 5,8%.
Bereken de procentuele toename per week.

Oplossing

- 1 De groeifactor per dag is 1,058.
- 2 De groeifactor per week is $1,058^7 \approx 1,484$.
- 3 De procentuele toename per week is dus 48,4%.

Voorbeeld 2

De procentuele afname per uur is 42,9%.
Bereken de procentuele toename per kwartier.

Oplossing

- 1 De groeifactor per uur is 0,571.
- 2 De groeifactor per kwartier is $0,571^{\frac{1}{4}} \approx 0,869$.
- 3 De procentuele afname per kwartier is dus 13,1%.

Ondersteunende route → maak opdracht O30

30

H

- a De procentuele toename per 10 jaar is 30%.
Bereken de procentuele toename per jaar.
- b De procentuele toename per dag is 5%.
Bereken de procentuele toename per week.
- c De procentuele afname per dag is 0,6%.
Bereken de procentuele afname per jaar.
- d De procentuele afname per uur is 20%.
Bereken de procentuele afname per kwartier.

31

- In 2010 woonden er in Nederland 16,6 miljoen mensen.
In 2017 waren dat er 17,2 miljoen. Neem aan dat de bevolking in Nederland in deze periode exponentieel is gegroeid.
- a Met hoeveel procent per jaar is de bevolking tussen 2010 en 2017 gegroeid?
 - b Met hoeveel procent is de bevolking per jaar gegroeid?
 - c Veronderstel dat de Nederlandse bevolking op dezelfde manier exponentieel blijft groeien.
Onderzoek met een berekening of de bevolking vóór 2100 zal zijn verdubbeld ten opzichte van 2010.



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

- 027** Bij een exponentieel groeiproces is de groeifactor per uur gelijk aan 1,029.
- a** Een dag bestaat uit 24 uren. De groeifactor per dag is dus gelijk aan $1,029^{24}$.
Bereken deze groeifactor en rond af op drie decimalen.
 - b** Bereken de groeifactor per vier uren. Rond af op drie decimalen.
 - c** Waarom is de groeifactor per kwartier gelijk aan $1,029^{\frac{1}{4}}$?
 - d** Bereken de groeifactor per half uur. Rond af op drie decimalen.
 - e** Bereken de groeifactor per twee dagen en per 20 minuten. Rond af op drie decimalen.

- 030**
- a** Op het blaadje wordt het groeipercentage per week uitgerekend bij een procentuele toename van 1,6% per dag.
Vul het blaadje verder in.
 - b** Bij een exponentieel groeiproces is de procentuele afname per twee weken gelijk aan 12,4%.
Leg uit dat de groeifactor per twee weken gelijk is aan 0,876.
 - c** Ga na dat de groeifactor per dag gelijk is aan 0,991.
 - d** Hoe kan je hieruit afleiden dat de procentuele afname per dag gelijk is aan 0,9%?
 - e** Bij een ander exponentieel groeiproces is de procentuele toename per minuut gelijk 1,07%.
Bereken de procentuele toename per uur.
 - f** De procentuele afname per uur is 30%.
Bereken de procentuele afname per kwartier.

●	Groeipercentage per dag is 1,6%.
●	↓
●	Groeifactor per dag is 1,016.
●	↓
●	Groeifactor per week is $1,016^7 \approx \dots$
●	↓
●	Groeipercentage per week is ongeveer ...%.

Uitdagende opdrachten

- U4** Het bedrag op een spaarrekening met een vast rentepercentage per jaar is na 20 jaar verdubbeld.
Bereken het rentepercentage per jaar.



5.5 Negatieve exponenten

Je leert

- hoe je met negatieve exponenten terug in de tijd rekent

Leerroutes

- ondersteunend: 32—033—34—35—36
- doorlopend: 32—33—34—35—36
- uitdagend: 32—34—35—36—U5

Bij een proef met de schimmel *Cladosporium* verdubbelt de hoeveelheid elke dag. Op 4 juni is de hoeveelheid 40 gram.

- Bedenk twee manieren om de hoeveelheid op 1 juni te berekenen.

$$H = 40 \cdot 2^t$$



- 32** Het aantal *Salmonellabacteriën* in een kweek groeit exponentieel met 50% per uur.
- Welk getal moet er op de puntjes onder de pijltjes staan?
 - Vul de tabel verder in.
 - Je kunt het aantal *Salmonellabacteriën* ook berekenen met de formule $N = 900 \cdot 1,5^t$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 10.00 uur. Volgens de formule waren er om 10.00 uur $900 \times 1,5^0$ bacteriën. Hoe groot is $1,5^0$ blijkaar?
 - Leg uit dat je het aantal bacteriën om 9.00 uur met zowel $900 \times 1,5^{-1}$ als $900 : 1,5$ kunt berekenen.
 - Hoe volgt uit opdracht d dat vermenigvuldigen met $1,5^{-1}$ hetzelfde is als delen door 1,5?
 - Laat zien dat uit de tabel en de formule volgt dat vermenigvuldigen met $1,5^{-2}$ hetzelfde is als delen door $1,5^2$.

t	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00
N	...	...	900	...	...

$\begin{matrix} & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ & \vdots & \vdots & \times \dots & \times \dots \end{matrix}$

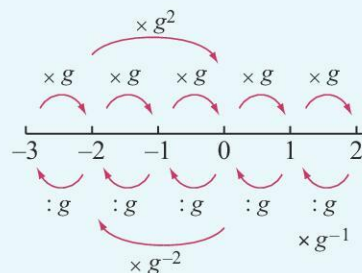
Theorie

Als je in de formule $N = b \cdot g^t$ voor t de waarde 2 invult, dan bereken je de hoeveelheid twee tijdseenheden na $t = 0$.

Als je $t = 0$ invult, bereken je de beginhoeveelheid.

Door $t = -1$ in de formule $N = b \cdot g^t$ in te vullen, bereken je de hoeveelheid één tijdseenheid voor $t = 0$. Deze kun je ook berekenen door de beginhoeveelheid te delen door g , wat het hetzelfde is als vermenigvuldigen met g^{-1} .

Zo is vermenigvuldigen met g^{-2} ook hetzelfde als delen door g^2 . Verder geldt $g^0 = 1$.



Voorbeeld

Van een exponentieel groeiproces is op $t = 0$ de hoeveelheid 1450 en de groeifactor per maand 0,7.

Hoeveel bedroeg de hoeveelheid 14 maanden voor $t = 0$?

Oplossing

De bijbehorende formule wordt $A = 1450 \cdot 0,7^t$.

Bij het tijdstip 14 maanden voor $t = 0$, hoort $t = -14$.

De hoeveelheid 14 maanden voor $t = 0$, bedroeg

$$1450 \times 0,7^{-14} \approx 213\,794$$

Ondersteunende route → maak opdracht 033

- 33** Het aantal op Facebook bekeken video's per jaar wordt beschreven door de formule $A = 1080 \cdot 3^t$. Hierin is A het aantal video's in miljarden en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2016.

- a** Hoeveel video's werden er in 2016 bekeken?
- b** Neem aan dat het aantal bekeken video's ook vóór 2016 op deze manier groeide.
Bereken het aantal bekeken video's in 2014 en 2015.

- 34** Alcohol is een stof die door het lichaam wordt afgebroken. De afbraaksnelheid hangt mede af van het lichaamsgewicht. Voor meneer Van Dijk geldt dat het promillage alcohol in zijn bloed exponentieel afneemt met 17% per uur.

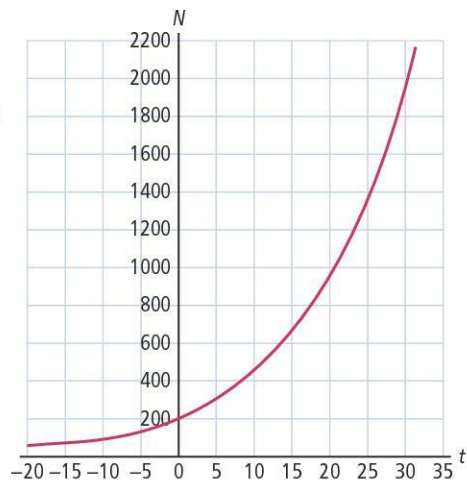
Meneer Van Dijk rijdt met de auto naar huis. Hij krijgt om 1.00 uur, twee uur nadat hij zijn laatste alcoholhoudende drank heeft gedronken, een alcoholcontrole. De politie meet een promillage van 0,6 terwijl dit maximaal 0,5 mag zijn.

Het promillage alcohol in het bloed van meneer Van Dijk na t uur kan berekend worden met de formule $P = b \cdot g^t$, met $t = 0$ om 1.00 uur.

- a** Geef de waarden van b en g .
- b** Hoe hoog was het promillage twee uur voor de alcoholcontrole?
- c** Op welk tijdstip had hij naar huis mogen rijden?
- d** Waarom mag je in de formule voor t geen waarden kleiner dan -2 invullen?

- 35** In de zomer kunnen bladluizen zich snel vermenigvuldigen. In een laboratorium wordt een proef gedaan met bladluizen. Enkele dagen na het begin van de proef wordt het aantal bladluizen geteld. Op dat moment zitten er 200 bladluizen in de kweekbak. Daarna wordt het aantal om de vijf dagen geteld. In de grafiek zie je het resultaat van deze tellingen. In deze grafiek is N het aantal bladluizen en t de tijd in dagen. Het aantal blijkt exponentieel toe te nemen met 8% per dag.

- Hoe kun je zien dat in deze grafiek $t = 0$ overeenkomt met het tijdstip van de eerste telling?
- Stel een formule op voor het verband tussen N en t .
- Als er meer dan 3000 bladluizen zijn, blijkt het aantal niet meer exponentieel te groeien.
Ga na wanneer dat het geval is.
- Ga ervan uit dat de groei van het aantal vóór $t = 0$ ook exponentieel was.
Hoeveel bladluizen waren er dan op $t = -15$? En op $t = -30$?
- Waarom kan de proef nog niet begonnen zijn 100 dagen voor het tijdstip $t = 0$?



- 36** In de periode 2000-2018 is de omzet van een speelgoedwinkel afgenomen met 0,7% per jaar. Volgens prognoses zal dit nog tot en met het jaar 2050 doorgaan waarna de winkel haar deuren zal moeten sluiten. In 2018 was de jaarlijkse omzet van de speelgoedwinkel € 72.000,-.
- Stel een formule op voor het verband tussen de jaarlijkse omzet J en de tijd t in jaren met $t = 0$ het jaar 2018.
 - Bij welke jaarlijkse omzet zal de winkel haar deuren gaan sluiten?
 - Bereken in welk jaar de jaarlijkse omzet voor het eerst minder dan € 80.000,- was.

Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten



- 033** Het aantal verkochte 3D-printers voldoet aan de formule $A = 0,5 \cdot 2^t$. Hierin is A het aantal verkochte 3D-printers in miljoenen en t is de tijd in jaren met $t = 0$ in 2016.
- a** Geef de beginhoeveelheid en de groeifactor.
 - b** Hoeveel 3D-printers werden er in 2016 verkocht?
 - c** Bereken het aantal verkochte 3D-printers in 2018.
 - d** Neem aan dat de formule ook geldt voor het aantal verkochte 3D-printers vóór 2016.
Leg uit dat $t = -1$ bij het jaar 2015 hoort.
 - e** Bereken het aantal verkochte 3D-printers in 2015.
 - f** Bereken ook het aantal verkochte 3D-printers in 2014.

Uitdagende opdrachten

- U5** Er wordt een experiment met de radioactieve stof radon-222 gedaan. De hoeveelheid radon-222 neemt exponentieel af met 16,6% per dag. Op 15 juni om 0.00 uur is er nog 50% van de oorspronkelijke hoeveelheid Radon-222 over. Bereken op welke datum en op welk tijdstip het experiment begon.



5.6 Gemengde opdrachten

- 37** In Nederland was het watergebruik in 1900 ongeveer 6 miljoen m^3 per jaar. Het waterverbruik is sindsdien elke 10 jaar met een factor 1,4 toegenomen. Neem aan dat het watergebruik exponentieel blijft groeien met dezelfde factor. Hoeveel m^3 water zal er dan in 2027 gebruikt worden?
- 38**
- a De hoeveelheid stof C14 neemt exponentieel af met 50% per 5730 jaar.
Bereken de procentuele afname per 10 jaar.
 - b Een aantal bacteriën neemt exponentieel toe met 316% per drie jaar.
Bereken de procentuele toename per jaar.
- 39** Om vochtig graan te drogen is een droogmachine ontwikkeld. De droogmachine zorgt ervoor dat elke 10 minuten 800 gram vocht uit het graan wordt verwijderd. Op tijdstip $t = 0$ bevat een lading graan 5000 gram vocht.
- a Hoeveel vocht zit er na een half uur nog in het graan?
 - b Stel een formule op waarmee je de hoeveelheid vocht V in het graan in grammen kunt berekenen na een tijd van t minuten.
 - c Na hoeveel minuten is het graan helemaal droog?
 - d Een andere droogmachine zorgt ervoor dat de hoeveelheid vocht elke 10 minuten met 50% afneemt.
Hoeveel procent neemt de hoeveelheid per minuut af?
 - e Stel een formule op voor de hoeveelheid vocht V in grammen in het graan t minuten nadat de droogmachine is aangezet.
 - f Na hoeveel minuten hebben beide machines evenveel vocht afgevoerd?

- 40** Door het gebruik van bestrijdingsmiddelen loopt het aantal veldmuizen in een akkerbouwgebied terug. De resultaten van de jaarlijkse tellingen staan in de tabel.

<i>tijd</i> in jaren	0	1	2	3	4
<i>aantal muizen</i>	13 400	12 060	10 850	9770	8790

Het aantal veldmuizen in dit gebied neemt exponentieel af.

- a Laat zien dat de in de tabel genoemde aantallen muizen in overeenstemming zijn met exponentiële afname.
- b Met hoeveel procent neemt het aantal muizen per jaar af?
- c Ga er vanuit dat het aantal veldmuizen exponentieel zal blijven afnemen.
Na hoeveel jaar zijn er nog ongeveer 5000 veldmuizen over?



- 41** In twee steden stijgt het aantal inwoners sinds het jaar 2017. In stad A woonden op 1 januari 2017 12 856 inwoners en in stad B woonden toen 13 590 inwoners. In stad A stijgt het inwonersaantal gemiddeld met 342 per jaar terwijl in stad B het inwonersaantal elk jaar met 1,5% toeneemt. Onderzoek in welke jaren er op 1 januari in stad A minder mensen wonen dan in stad B.

- 42** Een kopje koffie heeft direct na inschenken een temperatuur van 80°C . De temperatuur van de koffie wordt na 5, 15 en 25 minuten gemeten. In de kamer waarin het kopje koffie staat, is de omgevingstemperatuur 20°C .

<i>tijd in minuten</i>	<i>temperatuur koffie in $^{\circ}\text{C}$</i>	<i>verschil met omgeving in $^{\circ}\text{C}$</i>
0	80	60
5	52	...
15	29	...
25	25	...

In de tabel zie je de resultaten van de metingen. Onderzoek of het temperatuurverschil tussen de koffie en de omgeving lineair of exponentieel afneemt.



- 43** Bij een energiebedrijf kunnen klanten kiezen tussen drie verschillende tarieven voor de levering van elektriciteit.

<i>keuzetarief</i>	<i>vaste kosten per jaar</i>	<i>kosten per kWh</i>
Tarief I	36,54	0,171 98
Tarief II	44,54	0,169 18
Tarief III	60,54	0,166 58

In de tabel staan de bedragen die golden op 1 januari 2019. Deze bedragen zijn inclusief overheidsheffingen en gelden voor een zogenaamde enkeltariefmeter. Voor de website wil het energiebedrijf een overzicht maken waarin een klant bij elk verbruik kan zien welk keuzetarief het voordeligst is. Maak een dergelijk overzicht.

Vaardigheid

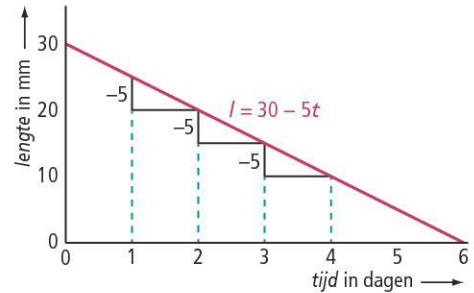
Je kunt lineaire groei herkennen.

Bij een lineair verband tussen twee variabelen is er sprake van een constante toename of constante afname.

De bijbehorende formule is van de vorm $y = ax + b$.

Een lineair verband kun je op verschillende manieren herkennen.

- De grafiek is een rechte lijn.
- In een tabel en in een grafiek is er bij gelijke stappen dezelfde toename of afname.
- Uit de tekst kun je opmaken dat de toename of afname bij gelijke stappen dezelfde is.



tijd in dagen	0	1	2	3	4
lengte in mm	30	25	20	15	10
		-5	-5	-5	-5

Voorbeeld

De hoogte van een kaars neemt nadat hij is aangestoken ieder uur met evenveel cm af.

Eén uur na het aansteken is een kaars 25 cm hoog en na 3 uur is hij nog 10 cm hoog.

Hoe hoog was de kaars 2,5 uur na het aansteken?

Oplossing

Er is sprake van een lineair verband, want de hoogte van de kaars neemt ieder uur met evenveel cm af.

In twee uur neemt de hoogte van de kaars met $25 - 10 = 15$ cm af.

Per uur neemt de hoogte van de kaars met $15 : 2 = 7,5$ cm af.

De kaars is 2,5 uur na het aansteken $25 - 1,5 \times 7,5 = 13,75$ cm hoog.

S1 Tussen welke van onderstaande variabelen is er sprake van een lineair verband? Leg uit waarom wel of waarom niet.

- De prijs en het gewicht van een stuk kaas.
- De schoenmaat en de leeftijd in jaren.

S2 Mevrouw Jager sluit voor het kopen van een huis een hypotheek af van € 288.000,-. Ze gaat de hypotheek in 30 jaar aflossen waarbij ze iedere maand hetzelfde bedrag afgelost. Hoe hoog is haar restbedrag na 16 jaar en 5 maanden?

Vaardigheid

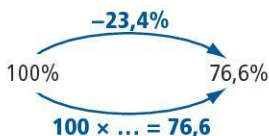
Je kunt de groeifactor berekenen bij exponentiële groei.

Als een hoeveelheid per tijdseenheid met 8,3% toeneemt, dan is de groeifactor gelijk aan 1,083.

Neemt een hoeveelheid per tijdseenheid met 12,6% af, dan is de groeifactor gelijk aan 0,874.

Voorbeeld 1

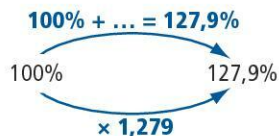
Bereken de factor bij een afname van 23,4%.



De factor is $76,6 : 100 = 0,766$.

Voorbeeld 2

Bereken de procentuele toename bij de factor 1,279.



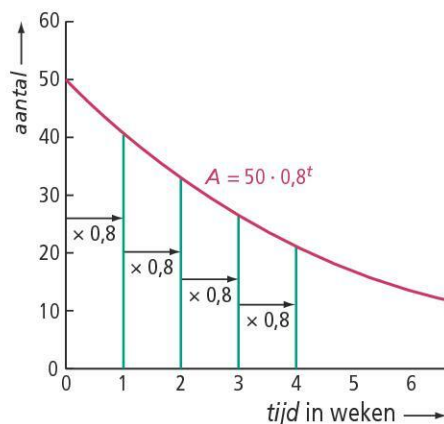
Er is een toename van $127,9\% - 100\% = 27,9\%$.

- S3** Welke factor hoort bij de percentages?
- een toename van 56,2%
 - een afname van 0,01%
- S4** Welke procentuele toe- of afname hoort bij de factoren?
- 0,568
 - 1,789

Vaardigheid**Je kunt exponentiële groei herkennen.**

Bij exponentiële groei is de groeifactor per tijdseenheid constant. Bij een toename of afname met een vast percentage vermenigvuldig je telkens met dezelfde factor. Een groei met een vast percentage is dus ook exponentieel. Bij een toename is de groeifactor groter dan 1. Bij een afname ligt de groeifactor tussen 0 en 1.

<i>tijd in weken</i>	0	1	2	3	4
<i>aantal</i>	50	40	32	25,6	20,48
		$\times 0,8$	$\times 0,8$	$\times 0,8$	$\times 0,8$



- S5** **a** Bij welk van de tabellen is er sprake van exponentiële groei?
- | | | | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|----|----|
| A | t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | N | 400 | 200 | 100 | 50 | 25 |
-
- | | | | | | | |
|----------|-----|----|----|----|----|------|
| B | t | 4 | 6 | 8 | 10 | 11 |
| | N | 15 | 30 | 45 | 60 | 67,5 |
- b** Geef de groeifactor bij de tabel met exponentiële groei.

Vaardigheid

Je kunt een formule bij een exponentieel verband opstellen.

- 1 Schrijf de algemene formule voor een exponentieel verband op.
Deze formule is van de vorm $N = b \cdot g^t$.
- 2 Zoek uit wat de groeifactor per (tijds)eenheid is.
- 3 Zoek uit wat de beginhoeveelheid is.
- 4 Vul de groeifactor en de beginhoeveelheid in bij de algemene formule.
Geef aan welke (tijds)eenheid bij de groeifactor hoort.

Voorbeeld

Een aantal bacteriën in een experiment neemt exponentieel toe met 98% per drie jaar. Na één jaar waren er 1250 bacteriën.
Welke formule hoort bij dit groeiproces?

Oplossing

- 1 Gebruik de formule $N = b \cdot g^t$ met t de tijd in jaren en N het aantal bacteriën.
- 2 De groeifactor per drie jaar is 1,98, dus de groeifactor per jaar is $1,98^{\frac{1}{3}} \approx 1,256$.
- 3 De beginhoeveelheid is $1250 : 1,256 \approx 995$.
- 4 $N = 995 \cdot 1,256^t$ met t de tijd in jaren en N het aantal bacteriën.

- S6** De tabel hoort bij een exponentieel verband.
Stel bij de tabel een formule op.

a	3	4	5	6
B	247,47	257,37	267,66	278,37

Vaardigheid

Je kunt een groeifactor omrekenen naar een andere tijdseenheid.

Als de groeifactor per jaar gelijk is aan g , dan is de groeifactor per vijf jaren gelijk aan g^5 .
De groeifactor per week is dan $g^{\frac{1}{52}}$, want een week is $\frac{1}{52}$ deel van een jaar.

Voorbeeld

De groeifactor per week is 0,98.
Bereken de groeifactor per dag en per drie weken.

Oplossing

De groeifactor per dag is $0,98^{\frac{1}{7}} \approx 0,997$.
De groeifactor per drie weken is $0,98^3 \approx 0,941$.

- S7** De groeifactor per drie uur is 1,2.
- a Bereken de groeifactor per uur.
 - b Bereken de groeifactor per dag.
 - c Bereken de groeifactor per 15 minuten.

Vaardigheid

Je kunt een groeipcentage omrekenen naar een andere tijdseenheid.

- 1 Bereken de groeifactor per gegeven tijdseenheid.
- 2 Bereken de groeifactor voor de gevraagde tijdseenheid.
- 3 Leid het gevraagde percentage af uit deze groeifactor.

Voorbeeld

Bij een exponentieel groeiproces is de toename per dag 3,7%.
Bereken de procentuele toename per week.

Oplossing

- 1 De groeifactor per dag is 1,037.
- 2 De groeifactor per week is dan $1,037^7 \approx 1,290$.
- 3 De procentuele toename per week is dus 29,0%.

- S8 Een hoeveelheid neemt per uur af met 10%.
- a Bereken de procentuele afname per dag.
 - b Bereken de procentuele afname per minuut.

Vaardigheid

Je kunt met negatieve exponenten terug in de tijd rekenen.

Als je in de formule $N = b \cdot g^t$ voor t een negatieve waarde invult, dan bereken je een hoeveelheid vóór $t = 0$.

Voorbeeld

De formule $A = 2932 \cdot 0,87^t$ beschrijft het verband tussen het aantal vissen A in een meer en de tijd t in jaren met $t = 0$ het jaar 2010.
Bereken het aantal vissen in 2007.

Oplossing

2007 is 3 jaar voor 2010, dus moet je $t = -3$ invullen.
Het aantal vissen in 2007 is dus $2932 \times 0,87^{-3} \approx 4453$.

- S9 Op 1 januari 2019 wonen er in een land 6 590 000 inwoners. Sinds 2015 neemt het aantal inwoners per jaar met 1,2% toe. Bereken het aantal inwoners op 1 januari 2017. Geef je antwoord in duizenden nauwkeurig.

- T1** In januari 2018 zijn er in een land 6,47 miljoen auto's. In de jaren voor 2018 is het aantal auto's jaarlijks toegenomen met 4,2%. De verwachting is dat het aantal auto's in de jaren na 2018 met hetzelfde percentage toeneemt.
- Stel een formule op voor het aantal auto's A in miljoenen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in januari 2018.
 - Bereken het aantal auto's in januari 2020 en het aantal auto's in juli 2022.
 - Hoeveel auto's zijn er in 2016 bijgekomen?
 - In welk jaar zal het aantal auto's zijn verdubbeld ten opzichte van het aantal auto's in 2018?

- T2** Een stuiterbal komt na elke keer stuiteren op $\frac{3}{4}$ van de vorige hoogte. Het balletje wordt losgelaten op een hoogte van 160 cm.

<i>aantal keer stuiteren</i>	<i>hoogte in cm</i>
0	160
1	...
2	...
3	...

- Vul de tabel verder in.
 - Noem de hoogte in cm h en het aantal keer stuiteren n . Stel een formule op bij het verband tussen h en n .
 - Na hoeveel keer stuiteren is de hoogte die het balletje nog kan bereiken minder dan 30 cm?
 - Hoeveel cm heeft het balletje afgelegd als hij voor de vierde keer weer bovenaan komt?
- T3** In de mijnbouw geldt de vuistregel dat de temperatuur drie graden stijgt voor elke 100 meter die je in een mijn afdaalt. Bij een mijn in Duitsland is de temperatuur aan het aardoppervlak 17°C .
- Wat is de temperatuur in de mijn op 100 meter diepte?
En op 200 meter diepte?
 - Noem de temperatuur in $^\circ\text{C}$ T en de diepte in meters d . Stel een formule op bij het verband tussen T en d .
 - Bereken de temperatuur op 680 meter diepte.
 - Op welke diepte is de temperatuur 30°C ?



- T4** In 2018 woonden in een bepaalde stad 73 000 mensen. Er waren op dat moment 25 000 woningen. Jaarlijks groeit de bevolking met 2% en worden er 500 woningen gebouwd. Het stadsbestuur wil voorkomen dat er te weinig woonruimte is. Men gebruikt als vuistregel dat er te weinig woonruimte is als er gemiddeld meer dan drie mensen in een woning moeten wonen.
- Stel een formule op die past bij de groei van de bevolking. Noem het aantal inwoners A en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2018.
 - Met de formule $M = 75\,000 + 1500t$ kun je het maximale aantal inwoners berekenen dat op tijdstip t in die stad kan wonen. Leg uit hoe je deze formule uit de gegevens kunt afleiden.
 - Bereken of er in het jaar 2018 te weinig woonruimte was volgens de vuistregel van het stadsbestuur.
 - Onderzoek na hoeveel tijd er te weinig woonruimte is.
 - Bij nader inzien besluit het stadsbestuur om per jaar niet 500, maar 800 woningen te laten bouwen. Veronderstel dat de groei van de bevolking steeds op dezelfde manier door blijft gaan. Wanneer komt er dan woningnood?

- T5** Volgens een telling op 1 januari 2019 leven op een vuilnisbelt 1250 ratten. Het aantal ratten neemt elke vier weken met 2,5% toe.
- Met hoeveel procent neemt het aantal ratten per jaar toe?
 - En met hoeveel procent neemt het aantal ratten per week toe?
 - Hoeveel ratten zullen er op 1 januari 2025 op de vuilnisbelt zijn?



- T6** Van de radioactieve stof Radium-228 is bekend dat er van een hoeveelheid na een jaar nog maar $\frac{9}{10}$ deel over is.
- Leg uit dat hier sprake is van exponentiële groei en bereken de groeifactor per tien jaar in twee decimalen nauwkeurig.
 - Hoe groot is de groeifactor per maand?
 - Op een gegeven moment is er 9,3 gram Radium-228 aanwezig. Bereken hoe lang het daarna duurt totdat er nog maar 1 gram over is.

Je kunt lineaire groei herkennen.

- E1** Linda krijgt vanaf haar 12e verjaardag elke week € 7,50 zakgeld. Ze besluit hiervan elke week $\frac{1}{3}$ deel in haar spaarpot te doen. Op haar 12e verjaardag zit al € 53,- in de spaarpot. Neem aan dat ze nooit geld uit haar spaarpot haalt.
- Waarom is hier sprake van lineaire groei?
 - Stel een formule op voor het bedrag B in haar spaarpot. Neem voor t de tijd in weken na haar 12^e verjaardag.
 - Na hoeveel weken heeft ze meer dan € 100,- in haar spaarpot?

Je kunt de groeifactor berekenen bij exponentiële groei.

- E2** Bereken in de volgende gevallen de groeifactoren.
- een toename van 23%
 - een toename van 11,3%
 - een afname van 1,9%
 - een toename van 3%
 - een toename van 100%
 - een afname van 0,02%

Je kunt exponentiële groei herkennen.

- E3** Joost heeft op 1 januari 2015 een bedrag op een spaarrekening gezet. Bij deze rekening geldt een vast rentepercentage. In de tabel zie je het bedrag dat op de spaarrekening staat op twee verschillende data.
- Waarom is hier sprake van exponentiële groei?
 - Hoeveel procent rente per jaar krijgt Joost?
 - Bereken het bedrag op 1 januari 2019.
 - Welk bedrag heeft Joost op 1 januari 2015 op de spaarrekening gezet?

<i>datum</i>	<i>bedrag in euro's</i>
1-1-2015	...
1-1-2016	2184,40
1-1-2017	2219,35

Je kunt een formule bij een exponentieel verband opstellen.

- E4** Van een insectensoort neemt het aantal jaarlijks exponentieel af met factor 0,92. Op 1 maart 2018 waren er 90 000 insecten. Noem het aantal insecten N en neem t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2018. Stel een formule op bij dit groeiproces



Je kunt een groeifactor omrekenen naar een andere tijdseenheid.

- E5** Bij een exponentieel groeiproces is de groeifactor per week gelijk aan 4,9.
- Bereken de groeifactor per drie weken.
 - Bereken de groeifactor per dag. Rond af op drie decimalen.
 - Bereken de groeifactor per uur. Rond af op vier decimalen.

Je kunt een groeipercantage omrekenen naar een andere tijdseenheid.

- E6** Bij een exponentieel groeiproces neemt de hoeveelheid elk uur met 16,5% af. Bereken met hoeveelheid procent de hoeveelheid afneemt in de volgende gevallen.

- a per kwartier c per minuut
b per vijf uur d per dag

Je kunt met negatieve exponenten terug in de tijd rekenen.

- E7** Met de formule $N = 600 \cdot 2^t$ kun je het aantal fruitvliegen N in een afgesloten ruimte berekenen. In deze formule is t de tijd in weken na 30 juni 2019. Ga er van uit dat deze formule ook vóór 30 juni 2019 geldt.

- a Bereken het aantal fruitvliegen op 23 juni 2019.
b Bereken het aantal fruitvliegen op 2 juni 2019.

- E8** Een aantal libellen blijkt exponentieel te groeien volgens de formule $A = 54 \cdot 1,07^t$ waarbij t de tijd per vijf jaar is met $t = 0$ op 1 juli 2015 en A het aantal libellen in duizenden.

- a Hoeveel libellen waren er op 1 juli 2005?
b Bereken het aantal libellen op 1 juli 2023.
c Hoe groot is de jaarlijkse procentuele toename?

- E9** De tabellen horen bij een lineair of exponentieel verband.

A	u	0	1	2	3	4	5	6
	v	8	4	0	-4	...	...	...

C	k	0	1	2	3	4	5	6
	l	...	2	...	7	...	...	14,5

B	x	0	1	2	3	4	5	6
	y	2	8	32	128	...	...	...

D	s	0	1	2	3	4	5	6
	t	...	...	80	64	51,2	...	...

- a Stel bij elke tabel een formule op.
b Vul de tabellen verder in.

- E10** Een reclameballon wordt gevuld met 100 m^3 gas. Door de enigszins poreuze huid verliest de ballon per dag 4% van het gas.

- a Stel een formule op de hoeveelheid gas G in m^3 . Neem de tijd t in uren nadat de ballon is gevuld.
b Als 10% van het gas is verdwenen, is de ballon te slap en moet hij worden bijgevuuld. Onderzoek na hoeveel tijd de ballon moet worden bijgevuuld.





SE

CE

K

In dit hoofdstuk

Grafieken worden getekend op basis van verzamelde data, maar ook op basis van formules. Beide manieren heb je geleerd in de onderbouw. Dit hoofdstuk bouwt op deze kennis voort.

In dit hoofdstuk leer je hoe je grafieken en tabellen kunt gebruiken om verbanden tussen verschillende grootheden weer te geven. Verder leer je hoe je grafieken kunt tekenen bij lineaire ongelijkheden.

Het tekenen van gebieden bij lineaire ongelijkheden wordt in H9 van deel 2 verder uitgebreid.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- | | |
|---------------------------------|---------------------|
| - Modelleren en algebraïseren | opdracht 25 |
| - Logisch redeneren en bewijzen | opdracht 31 |
| - Abstraheren | intro paragraaf 6.3 |

- V1** Over de omvang van de wereldbevolking zijn tegenwoordig redelijk betrouwbare cijfers bekend. Dit geldt niet voor de wereldbevolking van vroegere tijden. Die cijfers zijn gebaseerd op ruwe schattingen. In de tabel staat de grootte van de wereldbevolking voor een aantal jaartallen.

<i>tijd</i> in jaren	<i>aantal mensen</i> in miljoenen
1700	600
1750	725
1800	900
1850	1175
1900	1600
1950	2556
2000	6055
2015	7349

- Als je bij deze tabel een grafiek wilt maken, zet je de tijd op de horizontale as.
Wat zet je bij de verticale as? En wat is een geschikte schaalverdeling?
- Teken in een assenstelsel met geschikt gekozen stapgroottes een grafiek bij de tabel. Teken een vloeiende lijn die zo goed mogelijk aansluit bij de punten uit de tabel.
- Schat met jouw grafiek de omvang van de wereldbevolking in 1840.

- V2** In de tabel zie je het aantal inwoners op 1 januari van de jaren 2008 tot en met 2017 van de stad Amsterdam.

<i>tijd</i> in jaren	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
<i>aantal inwoners</i> $\times 1000$	747,1	755,6	767,5	779,8	790,0	799,3	810,9	821,7	833,6	844,9

- In welk jaar is het aantal inwoners absoluut het meest gestegen? En hoe groot was die stijging?
- Met hoeveel procent is het aantal inwoners in 2015 gestegen?
- In wel jaar was de relatieve stijging het grootst?
- In wel jaar waren er in Amsterdam voor het eerst meer dan 800 000 inwoners?

Absolute aantallen zijn de werkelijke aantallen.
Relatieve aantallen zijn verhoudingsgetallen, bijvoorbeeld procenten.

- V3** De tabellen horen bij een lineair verband.

<i>t</i>	0	1	2	3	4	<i>p</i>	5	6	7	8	9	10	<i>a</i>	50	60	70	80	90
<i>N</i>	30	27	...	...	18	<i>Q</i>	20	...	...	...	...	40	<i>K</i>	78	...	...	57	...

- Vul de tabellen verder in.
- Stel bij elke tabel een formule op.

- V4** Los de vergelijkingen op.

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| a $3x + 5 = 11$ | d $36a + 12 = -12$ |
| b $8 - 2p = 0$ | e $10k + 2 = 7$ |
| c $15 = 5q - 1$ | f $8t - 1 = 3$ |

V5 Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $3x + 2 = 5 - 2(x - 7)$.

- a Leg uit wat in stap 1 is gebeurt.
- b En wat is er in stap 2 en in stap 3 gebeurt?
- c Los de vergelijking verder op.

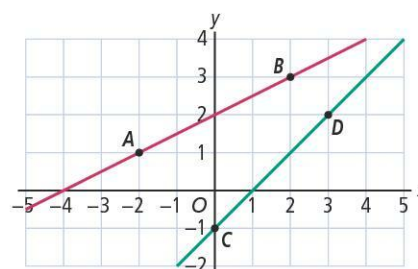
●	$3x + 2 = 5 - 2(x - 7)$	
●	$3x + 2 = 5 - 2x + 14$	1
●	$3x + 2 = 19 - 2x$	2
●	$5x + 2 = 19$	3

V6 Los de vergelijkingen op.

- a $a - 7 = 5 - 5a$
- b $15 - 10x = 22x - 1$
- c $2q + 8 = 14 - 8q + 21$
- d $-5 + 4(p + 1) = 15$
- e $10 = 4(20a - 5) + 10a$
- f $0,2m + 9,8 = 3,5m - 0,1$

V7 De formule van de lijn door de punten A en B is $y = \frac{1}{2}x + 2$.

- a Controleer met de formule dat lijn AB de x -as snijdt in het punt $(-4, 0)$.
- b Stel de formule op bij de lijn CD .
- c De x -coördinaat van het snijpunt van de twee lijnen kun je berekenen door de vergelijking $x - 1 = \frac{1}{2}x + 2$ op te lossen. Bereken de x -coördinaat van het snijpunt.
- d Bereken de y -coördinaat van het snijpunt.



Aanpak

Hoe bereken je de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van twee formules?

- 1 Schrijf de bijbehorende vergelijking op.
- 2 Bereken de x -coördinaat van het snijpunt door de vergelijking op te lossen.
- 3 Bereken de y -coördinaat van het snijpunt door de gevonden x -waarde in één van de formules in te vullen.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken bij de formules $y = -2x + 8$ en $y = -1,5x + 2$.

Oplossing

1 $-2x + 8 = -1,5x + 2$

2 $-0,5x = -6$

$x = 12$

3 $y = -2 \times 12 + 8 = -16$

De coördinaten van S zijn $(12, -16)$.

V8 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen met de formules.

- a $y = 3x - 2$ en $y = -7x + 38$
- b $y = 0,7x + 3,4$ en $y = 11,3x - 7,2$
- c $y = 1,25x - 0,5$ en $y = -0,25x + 0,25$

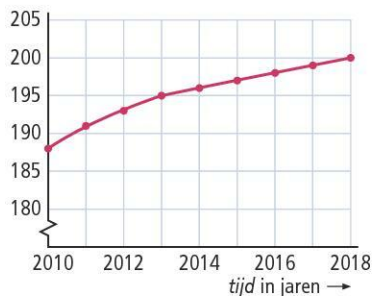
6.1 Grafieken tekenen

Je leert

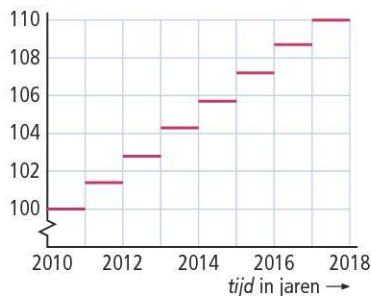
- wat de manieren zijn waarop je een grafiek tekent

Leerroutes

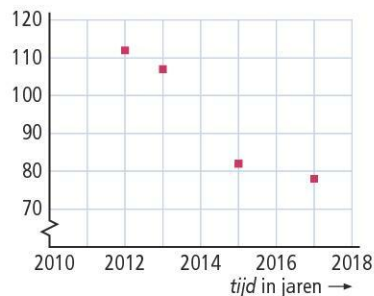
- ondersteunend: 1—2—03—4—5
- doorlopend: 1—2—3—4—5
- uitdagend: 1—3—4—5—U1



A



B



C

De drie grafieken laten drie verschillende ontwikkelingen zien in de tijd:

- 1 de grootte van de bevolking in Almere
- 2 het wereldrecord schaatsen op de 1000 meter bij de vrouwen
- 3 het bedrag op een spaarrekening met 1,4% rente per jaar

- Welke grafiek hoort bij welke ontwikkeling?
- Wat moet er bij de verticale assen komen te staan?

- 1 De tabel geeft de gemiddelde jaartemperatuur in Leeuwarden van 2007 tot 2017. Bij deze tabel ga je een grafiek maken.

tijd in jaren	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
gemiddelde temperatuur in °C	11,9	11,3	10,7	9,4	10,8	10,4	9,2	11,7	10,3	10,8	10,8

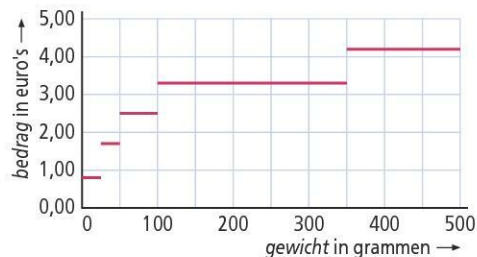
- a Welke waarden komen langs de verticale as?
- b Teken een assenstelsel en zet de gegevens bij de assen. Zorg ervoor dat alle gegevens in de grafiek passen. Kies daarvoor een geschikte stapgrootte.
- c Teken de punten uit de tabel in het assenstelsel.
- d Leg uit waarom je de punten van de grafiek eigenlijk niet met elkaar mag verbinden.
- e Vaak zie je in zulke grafieken dat de punten toch met elkaar worden verbonden. Wat zou de reden daarvan zijn?

- 2** De kosten voor het verzenden van een brief hangen af van het gewicht. In de tabel staan de tarieven die in 2018 golden.

H

gewicht in grammen	0-20	20-50	50-100	100-350	350-2000
bedrag in euro's	0,83	1,66	2,49	3,32	4,15

- a Wat is goedkoper te versturen: drie brieven van 10 gram, of één brief van 30 gram?
- b En hoe zit dat met drie brieven van 18 gram of één brief van 54 gram?
- c Je ziet de grafiek bij de tabel.
Leg uit waarom de grafiek uit losse horizontale lijnstukjes bestaat.



Theorie

Wanneer je een grafiek tekent bij een tabel ontstaat een verzameling punten in een assenstelsel. Vaak worden de punten verbonden. De vraag is of je dit altijd mag doen en zo ja, hoe je dat moet doen.

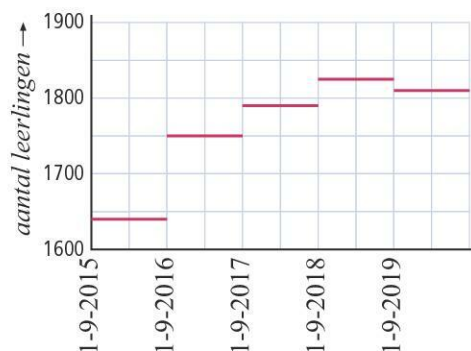
Een hulpmiddel hierbij is of je ook een betekenis kunt geven aan tussenliggende waarden in de tabel.

Voorbeeld

In de tabel zie je het aantal leerlingen op een grote scholengemeenschap.

datum	1-9-2015	1-9-2016	1-9-2017	1-9-2018	1-9-2019
aantal	1640	1750	1790	1825	1810

Gedurende het schooljaar zal het leerlingenaantal op een schooljaar niet of nauwelijks veranderen.
De grafiek bestaat uit horizontale lijnstukjes.



Ondersteunende route → maak opdracht 03

- 3** Rianne is gedurende tien jaar telkens op haar verjaardag gewogen.

leeftijd	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
gewicht in kg	3,4	10,2	14,8	17,3	22,5	25,2	31,1	35,0	39,2	43,2	44,8

- a Teken een grafiek bij de tabel.
- b Bedenk een argument waarom je bij deze grafiek de punten mag verbinden met een vloeiende lijn.

Stijging van de pensioenleeftijd

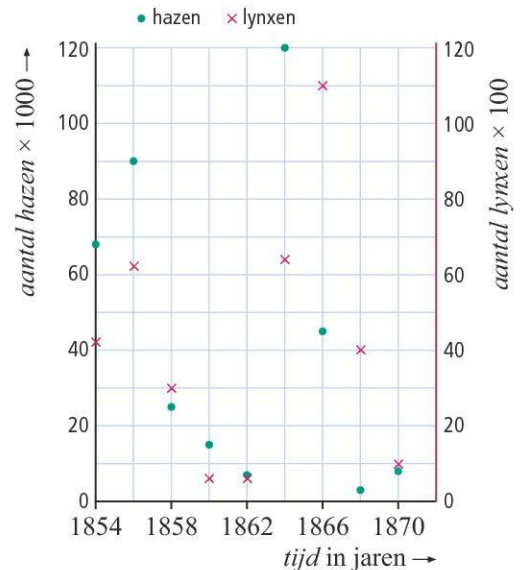


- 4** Vanaf 2013 steeg de AOW-leeftijd stapsgewijs naar 67 jaar of ouder. Dit had te maken met de toegenomen levensverwachting. In de grafiek lees je bijvoorbeeld af dat je in 2020 pas je AOW-leeftijd bereikt wanneer je in 2020 66 jaar en 8 maanden oud bent.

- a** Claudia werd op 1 januari 2012 59 jaar. In welk jaar en welke maand bereikt zij volgens dit diagram haar AOW-leeftijd?
- b** In 2018 had de regering het voornemen om de AOW-leeftijd minder snel te verhogen en de pensioenleeftijd van 67 jaar pas in 2025 te laten bereiken. Teken hierbij een mogelijke grafiek vanaf 2018 tot 2025 waarin je stapsgewijs de pensioenleeftijd kunt aflezen.

- 5** Je ziet de grafieken van de aantallen hazen (groen) en lynxen (rood), die in de periode 1854 - 1870 werden waargenomen voor de Hudson's Bay (USA). Lynxen eten hazen. Je spreekt van een zogenaamde prooi-roofdier-situatie.

- a** Hoeveel hazen en lynxen werden er in 1856 geteld?
- b** Eigenlijk mag je de groene punten niet met elkaar verbinden. Hetzelfde geldt voor de rode punten. Waarom niet?
- c** Als je de punten wel met elkaar verbindt, worden de grafieken duidelijker. Doe dit.
- d** Het grootste aantal hazen kwam voor in 1864. Waardoor kon het aantal hazen zo sterk toenemen?
- e** Leid uit de grafieken af waardoor de hazenbevolking vervolgens weer afnam.



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 03** Van Karlijn is gedurende 10 jaar telkens op haar verjaardag gemeten hoe lang ze was.

leeftijd	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
lengte in cm	49	77	89	98	106	113	120	126	133	139	144

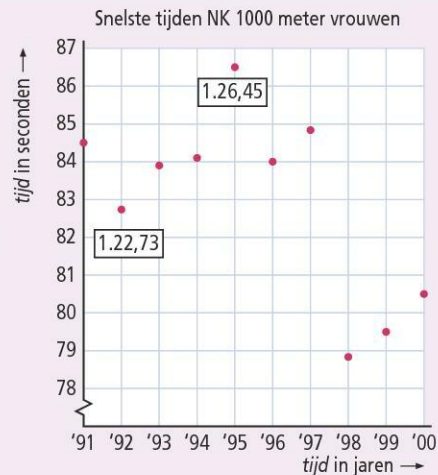
- Teken in een assenstelsel de punten uit deze tabel. Zet horizontaal de leeftijd en verticaal de lengte.
- Kun je uit de grafiek aflezen hoe lang Karlijn was toen ze drie maanden na haar 6e verjaardag naar groep 3 ging?
- Kun je met behulp van de grafiek een *schatting* geven hoe lang ze toen was?
- Waarom kun je de opdrachten b en c makkelijker beantwoorden wanneer je de punten met een vloeiende lijn verbindt?



Uitdagende opdrachten

- U1** In de jaren 80 van de vorige eeuw werd aan de Vrije Universiteit in Amsterdam de klapschaats ontwikkeld. Daarmee zou veel sneller geschaatst kunnen worden. De schaatswereld durfde pas in de jaren 90 voor de klapschaats te kiezen. Je ziet een grafiek van de snelste tijden bij de nationale kampioenschappen schaatsen op de 1000 meter vrouwen in de jaren 90.

- Wat betekent de tijd 1.22,73 bij de snelste afstand in 1992?
- Hoe zie je in de grafiek in welk jaar de klapschaats werd ingevoerd?
- In welk jaar werd de klapschaats ingevoerd?
- Gerard zegt dat de grafiek eigenlijk uit horizontale lijnstukjes moet bestaan. Ben je het met hem eens?



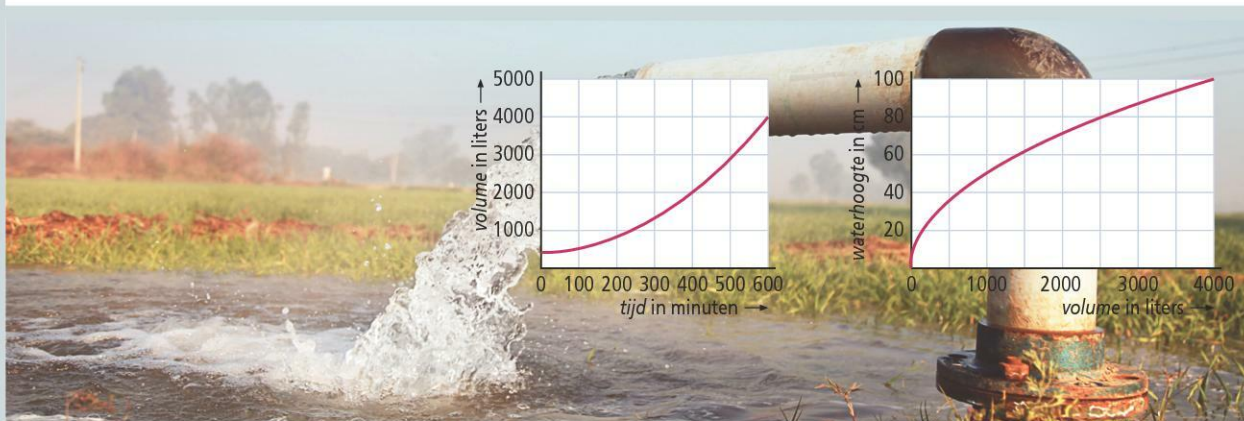
6.2 Tabellen en grafieken gebruiken

Je leert

- hoe je informatie uit tabellen of grafieken haalt

Leerroutes

- ondersteunend: 6—7—8—09
- doorlopend: 6—7—8—9
- uitdagend: 6—8—9—U2



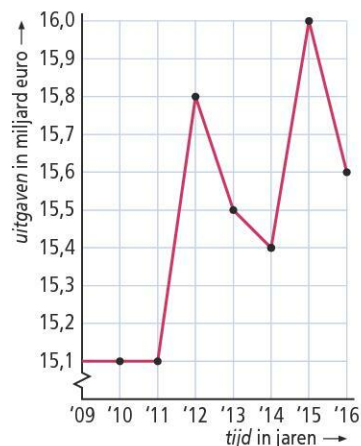
Een reservoir, dat 4000 liter water kan bevatten, wordt gevuld. Het beginvolume is 400 liter.

- Hoelang duurt het om het waterpeil te laten stijgen van 60 tot 80 cm?

- 6 De tabel bevat voor de jaren 2009 tot 2016 de gegevens over Nederlanders die op vakantie gingen.

<i>tijd in jaren</i>	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
<i>aantal deelnemers aan vakanties in miljoenen</i>	12,6	12,7	12,8	12,8	12,7	12,5	12,6	12,8
<i>aantal vakanties in Nederland in miljoenen</i>	18,0	17,7	17,7	18,1	17,5	17,1	17,0	17,6
<i>aantal vakanties in het buitenland in miljoenen</i>	18,4	18,4	18,6	18,6	18,1	17,9	18,1	17,9

- Met hoeveel procent is het totaal aantal vakanties gestegen of gedaald in deze periode?
- Bereken hoe vaak de deelnemers gemiddeld op vakantie gingen in 2011.
- Hoe kun je zonder berekening zien dat in 2012 de deelnemers gemiddeld vaker op vakantie gingen dan in 2011?
- Je ziet in de grafiek de totale uitgaven aan vakanties tussen 2009 en 2016. Waarom is de grafiek eigenlijk niet juist getekend?
- Leg uit waarom toch voor deze presentatie van de grafiek is gekozen.
- Bereken de gemiddelde uitgave per vakantie in 2009 en in 2016.



Theorie

Bij het aflezen van gegevens uit een tabel of grafiek let je op:

- welk verband wordt weergegeven,
- welke grootheden zijn gebruikt en
- welke stapgrootte en welke eenheid is gekozen.

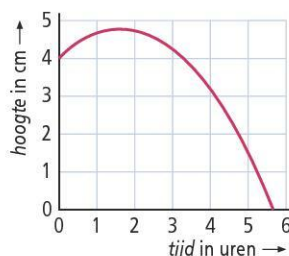
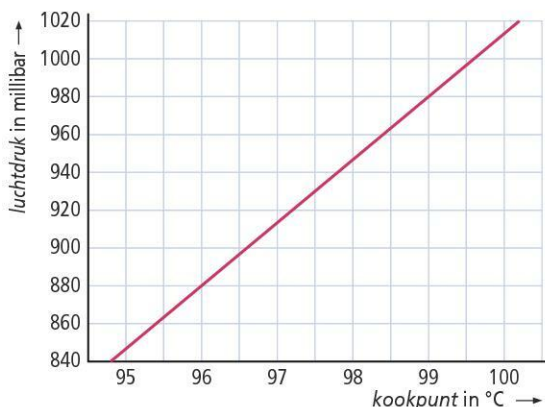
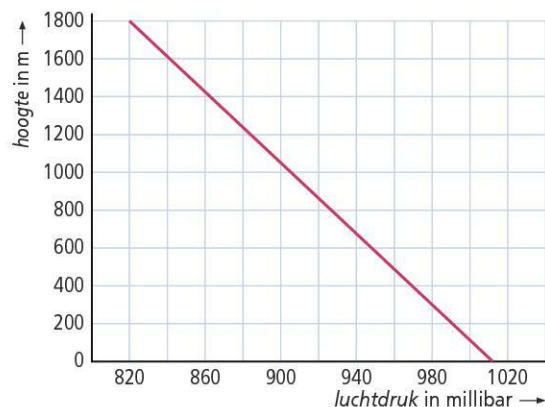
Een grootheid is bijvoorbeeld tijd, lengte en temperatuur.
Een eenheid is bijvoorbeeld uren, meters en graden.

Voorbeeld

In de grafiek is het verband weergegeven tussen de tijd in uren en de hoogte in cm.

Op de horizontale as is tijd de grootheid en uren de eenheid.

Op de verticale as is de hoogte de grootheid en cm de eenheid.

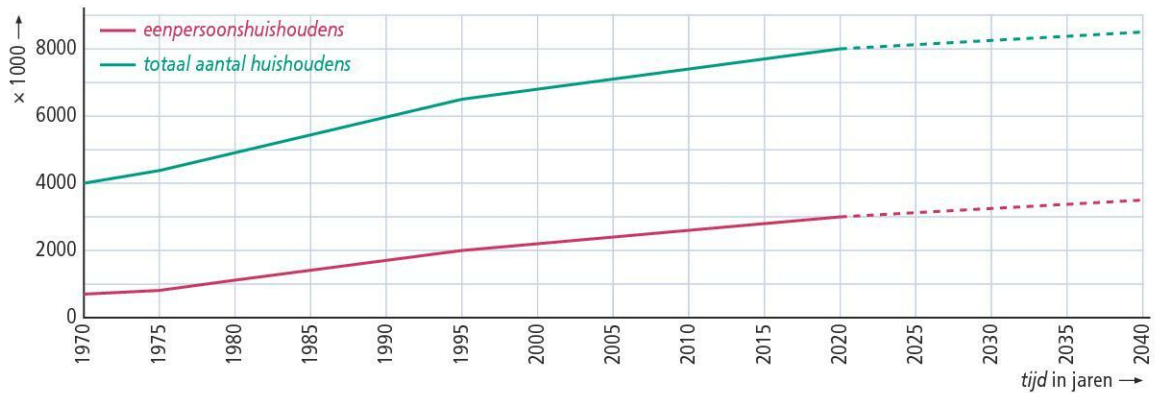


- 7** De temperatuur waarbij water begint te koken heet het kookpunt. Dit kookpunt hangt af van de luchtdruk. Op zeeniveau bij een luchtdruk van 1013 millibar kookt water bij 100 °C. Op grotere hoogte daalt de luchtdruk en kookt water bij een lagere temperatuur. Met behulp van het kookpunt van water kun je dus een schatting maken van de hoogte waarop je bent. Links zie je de grafiek van het verband tussen kookpunt en de luchtdruk, rechts geeft de grafiek het verband tussen de luchtdruk en de hoogte.

- Welke grootheden en eenheden zijn in de grafieken gebruikt?
- Dieuwke constateert dat het water kookt bij 98,1 °C. Hoe groot is de luchtdruk op die plek?
- Op welke hoogte zit Dieuwke?
- Gebruik de twee grafieken om de tabel in te vullen.
- Teken een grafiek bij de tabel.
- Op welke hoogte is het kookpunt 96 °C?



kookpunt in °C	95	97	99	100
hoogte in m	...	...	...	...



8 In de grafiek zie je de ontwikkeling van het aantal huishoudens en het aantal eenpersoonshuishoudens in Nederland.

H

- In welke periode van vijf jaar nam het aantal huishoudens het snelste toe?
- In welk jaar waren er voor het eerst meer dan vijf miljoen huishoudens?
- Hoeveel procent van de huishoudens was in 1990 een eenpersoonshuishouden?
- En hoeveel procent van de huishoudens was in 2015 een eenpersoonshuishouden?
- In 2015 waren er 16,8 miljoen inwoners in Nederland. Hoeveel personen hadden de huishoudens met meer personen gemiddeld?

Ondersteunende route → maak opdracht O9

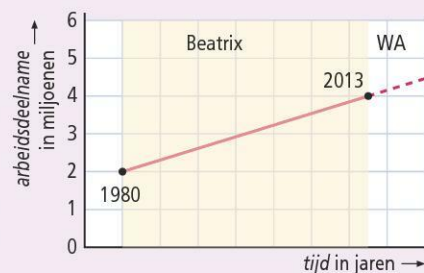
9 In de grafiek van opdracht 8 zie je een prognose van de ontwikkeling van het aantal huishoudens en het aantal eenpersoonshuishoudens vanaf 2020.

- Waarom is het belangrijk om te weten hoe het aantal huishoudens zich zal ontwikkelen en welk deel daarvan een eenpersoonshuishouden zal zijn?
- De prognose van de toename van het aantal eenpersoonshuishoudens tussen 2020 en 2040 is bij benadering lineair.
Stel een formule op voor het aantal eenpersoonshuishoudens na 2020 met A het aantal eenpersoonshuishoudens in miljoenen en t de tijd in jaren na 2020.
- Hoeveel eenpersoonshuishoudens zullen er volgens de formule zijn in 2060?

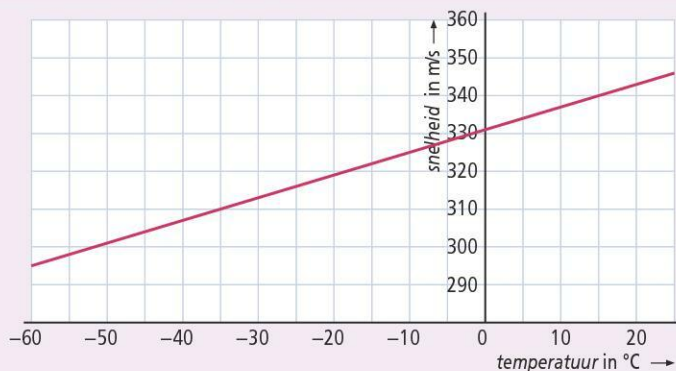
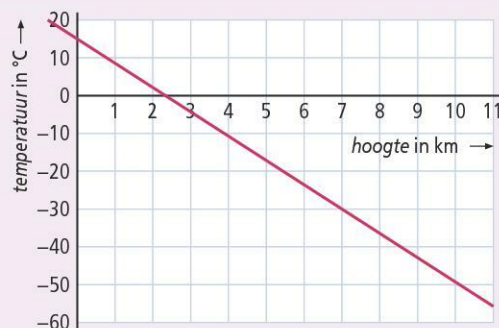
Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

- 09** In de regeringsperiode van koningin Beatrix (1980 - 2013) is de arbeidsdeelname van vrouwen bijna verdubbeld.
- Hoeveel vrouwen hadden in 1980 een baan?
 - Bereken de toename van de arbeidsdeelname van vrouwen per jaar.
 - Leg uit dat je de arbeidsdeelname van vrouwen kunt berekenen met de formule $A = 0,061t + 2,1$. Hierin is A de arbeidsdeelname in miljoenen en t de tijd in jaren na 1980.
 - Leg uit waarom voor 1980 geldt $t = 0$ en voor 2013 $t = 33$.
 - Bereken met de formule hoeveel vrouwen een baan hadden in 1980 en in 2013. Controleer je antwoorden met de grafiek.
 - Waarom past de formule bij de getekende grafiek?
 - Veronderstel dat de deelname van vrouwen aan het arbeidsproces zich zo zal voortzetten. Hoe groot is arbeidsdeelname van vrouwen in 2030?



Uitdagende opdrachten



- U2** Bij windstil weer is uit de linker figuur af te leiden hoe de geluidssnelheid in meter per seconde afhangt van de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$. In de rechter figuur kun je aflezen dat op een hoogte van 7 km de temperatuur is afgenomen tot -30°C .
- Langeafstandsvluchten worden op grote hoogte uitgevoerd, gezien de geringe luchtweerstand. Een Boeing 747 moet een kruissnelheid aanhouden van 980 km per uur. De snelheid mag echter slechts 90% van de geluidssnelheid zijn. Tot welke hoogte mag dit vliegtuig vliegen?
 - Teken een grafiek waarbij de hoogte in km is uitgezet tegen de geluidssnelheid in meter per seconde.

6.3 Vergelijkingen van lijnen

Je leert

- hoe je de grafiek bij de vergelijking van een lijn tekent

Leerroutes

- ondersteunend: 10—11—012—12—13—14—15
- doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16
- uitdagend: 10—11—12—13—15—16—U3

Op 11 november met Sint Maarten hebben Abe en zijn zusje Imme elk evenveel marsjes en evenveel snickers opgehaald. Abe eet dezelfde avond nog vier marsjes op en Imme twee snickers. Als ze naar bed gaan heeft Abe evenveel marsjes als snickers in zijn snoeptrommel terwijl Imme twee keer zoveel marsjes als snickers bezit.

- Hoeveel marsjes en snickers hebben zij die avond opgehaald?



10

H

Gegeven is de formule $2y + 3x = 12$. Op het blaadje zie je hoe je de formule $2y + 3x = 12$ kunt herleiden tot $y = -1,5x + 6$.

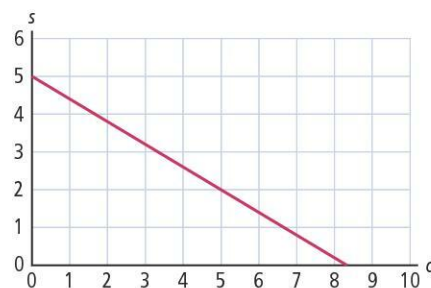
- Beschrijf wat er in stap 1 en in stap 2 is gebeurt.
- Schrijf de formule $4y - 2x = 10$ in de vorm $y = ax + b$.
- Hoe groot is de richtingscoëfficiënt en het startgetal van de lijn bij vergelijking $4y - 2x = 10$?
- Schrijf ook de formule $5x - 2y = 9$ in de vorm $y = ax + b$.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen bij de formules $4y - 2x = 10$ en $5x - 2y = 9$.

●	$2y + 3x = 12$		
●	$2y = -3x + 12$	1	
●	$y = -1,5x + 6$	2	

11

Kees heeft nog € 6,25 in zijn portemonnee en wil hiervoor zowel drop als snoep kopen. In de winkel waar hij dit koopt, kost 100 gram drop € 0,75 en 100 gram snoep € 1,25.

- Hoeveel gram drop kan hij kopen als hij besluit 200 gram snoep te nemen?
- Het verband tussen de hoeveelheid drop en de hoeveelheid snoep wordt gegeven door $0,75d + 1,25s = 6,25$. Leg deze formule uit en beschrijf nauwkeurig de betekenis van de variabelen d en s .
- Bereken s in het geval $d = 0$. Wat is de betekenis van de uitkomst?
- Bereken d in het geval $s = 0$. Wat betekent deze uitkomst?
- De grafiek hoort bij de formule $0,75d + 1,25s = 6,25$. Ga na of deze grafiek overeenkomt met je antwoorden van de opdrachten a, c en d.



Theorie

Een formule van de vorm $ax + by = c$ wordt ook wel de **vergelijking van een lijn** genoemd. De bijbehorende grafiek is een rechte lijn. Je tekent deze lijn door de coördinaten van twee punten op die lijn te berekenen, bijvoorbeeld de snijpunten van de lijn met de x -as en de y -as.

Voorbeeld

Teken in een assenstelsel de lijn met vergelijking $-5k + 7p = 35$. Zet k langs de horizontale as.

Oplossing

In het snijpunt met de horizontale as geldt $p = 0$.

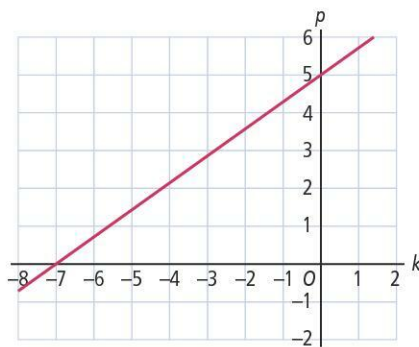
Invullen in de vergelijking geeft $-5k + 7 \times 0 = 35$.

Hieruit volgt $k = 35 : -5 = -7$. Het snijpunt is $(-7, 0)$.

In het snijpunt met de verticale as geldt $k = 0$.

Invullen in de vergelijking geeft $-5 \times 0 + 7p = 35$.

Hieruit volgt $p = 35 : 7 = 5$. Het snijpunt is $(0, 5)$.



Ondersteunende route → maak opdracht 012

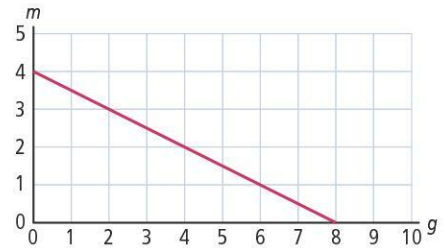
- 12** Teken de grafieken bij de vergelijkingen. Zet steeds p langs de horizontale as.
- H**
- a $5p + 12q = 60$
 - b $0,75p - 3q = 3,75$

- 13** Gegeven zijn de vergelijkingen $6x - 2y = 10$ en $x + y = 9$.
- a Teken in één assenstelsel de grafieken bij de vergelijkingen.
 - b Bereken de coördinaten van het snijpunt.

- 14** Een kermisexploitant betaalt per attractie staangeld aan de gemeente. Het bedrag hangt af van de grootte A in vierkante meter (m^2) van elke attractie en de hoeveelheid elektriciteit E in kilowattuur (kWh) die een attractie per dag verbruikt. De gemeente rekent € 5,- per m^2 en € 0,25 per kWh.
- a Leg uit dat het staangeld S in euro's berekend kan worden met de formule $S = 5A + 0,25E$.
 - b Geef de vergelijking van de lijn die het verband weergeeft tussen A en E indien het staangeld precies 5000 euro is.
 - c Teken een grafiek bij de vergelijking van opdracht b. Zet A langs de horizontale as.
 - d Een exploitant heeft een attractie van $450 m^2$. Lees in je grafiek het elektriciteitsverbruik van deze attractie af als hij 5000 euro staangeld moet betalen.



- 15** Anouk heeft nog € 3,20 in de portemonnee en wil hiervoor grapefruits en meloenen kopen op de markt. De grapefruits kosten € 0,40 en de meloenen € 0,80.
- Anouk neemt twee meloenen.
Hoeveel grapefruits kunnen daar nog bij?
 - Het verband tussen het aantal grapefruits en het aantal meloenen wordt gegeven door de formule $0,40g + 0,80m = 3,20$.
Leg deze formule uit en beschrijf de betekenis van de variabelen g en m .
 - Bereken m in het geval $g = 0$. Wat is de betekenis van de uitkomst?
 - Bereken g in het geval $m = 0$. Wat betekent deze uitkomst?
 - Je ziet de grafiek bij de formule $0,40g + 0,80m = 3,20$.
Waarom bestaat de grafiek die hoort bij het aantal grapefruits en citroenen die Anouk kan kopen uit punten?
 - Teken een assenstelsel en geef daarin aan alle oplossingen voor het aantal grapefruits en meloenen die Anouk kan kopen als ze precies € 3,20 uitgeeft.



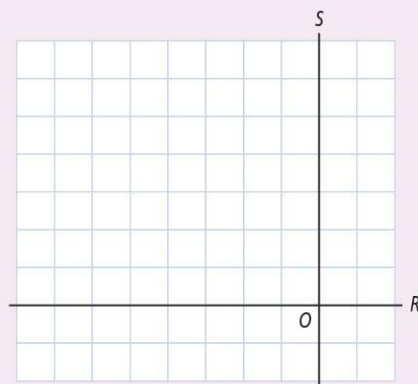
- 16** Steenfabriek De Volharding aan de IJssel maakt van klei uit de rivier twee soorten dakpannen. Voor het maken van één rode dakpan is 2 kg klei nodig en voor het maken van één zwarte dakpan 3 kg. Per dag verwerkt men 1200 kg klei.
- Men wil op een dag géén rode dakpannen maken.
Hoeveel zwarte dakpannen kunnen die dag worden gemaakt?
 - R is het aantal rode dakpannen en Z is het aantal zwarte dakpannen.
Leg uit dat voor de maximale dagproductie dan geldt $2R + 3Z = 1200$.
 - Teken in een assenstelsel de punten die horen bij $R = 0$ en bij $Z = 0$. Zet R langs de horizontale as.
 - Waarom mag je de punten van de grafiek bij de vergelijking $2R + 3Z = 1200$ niet met elkaar verbinden? En waarom is het toch handiger om dit wel te doen?
 - Teken de grafiek bij de vergelijking $2R + 3Z = 1200$.
 - Bij een maximale dagproductie zijn er in totaal 470 dakpannen gemaakt.
Zoek uit hoeveel rode en hoeveel zwarte dakpannen er zijn geproduceerd.

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

012 Je gaat de grafiek bij de vergelijking $3S - 14R = 84$ tekenen. Je ziet een assenstelsel met langs de horizontale as de variabele R . Je gaat eerst onderzoeken in welk punt de grafiek de horizontale as snijdt.

- a** Leg uit waarom voor elk punt op de horizontale as geldt $S = 0$.
- b** Leg uit dat in het snijpunt van de horizontale as met de grafiek moet gelden dat $-14R = 84$ en los deze vergelijking op.
- c** Wat zijn de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as?
- d** Voor elk punt op de verticale as geldt $R = 0$. Leg uit waarom.
- e** Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de verticale as.
- f** Teken in het assenstelsel de snijpunten met de assen en de grafiek door deze snijpunten.



Uitdagende opdrachten

U3 In de bergen hangt het wandeltempo sterk af van het hoogteverschil dat bij de tocht overbrugd moet worden. De volgende vuistregels worden gebruikt:
De tijdsduur van een wandeltocht is gelijk aan de tijd, die nodig zou zijn op een vlakke weg, vermeerderd met 20 minuten per 100 meter stijging.
Voor wandelen op een vlakke weg kun je uitgaan van een gemiddelde snelheid van 5 km per uur.

- a** Je wilt een wandeltocht uitzetten die 4 uur mag duren. Je moet daarbij rekening houden met stijgen en dalen. Stel dat het hoogteverschil dat je moet overbruggen gelijk is aan h km, dan kun je de maximale horizontale afstand die je aflegt, berekenen met de vergelijking $12a + 200h = 240$. Hierin is a de horizontale afstand die wordt afgelegd in km. Leg uit hoe deze vergelijking tot stand is gekomen.
- b** Teken in een assenstelsel de grafiek van de vergelijking $12a + 200h = 240$. Zet a langs de horizontale as.
- c** Geef met behulp van je grafiek een schatting van de hoogte die je mag overbruggen wanneer je horizontaal 15 km loopt.



6.4 Halfvlakken

Je leert • hoe je een halfvlak tekent bij een lineaire ongelijkheid

Leerroutes • ondersteunend: 17—18—19—020—21
 • doorlopend: 17—18—19—20—21
 • uitdagend: 17—19—20—21—U4

Joost doet mee aan 'schatzoeken'. Ergens in het gebied dat wordt weergegeven op de kaart is een schat verstopt. Joost bevindt zich linksonder. De eerste aanwijzing die Joost gekregen heeft, is dat de schat zich meer naar het Oosten dan naar het Noorden bevindt.

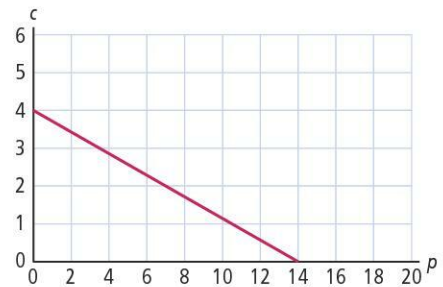
- Waar hoeft Joost niet naar de schat te gaan zoeken?



17 Marije koopt op de markt pinda's en cashewnoten. De pinda's kosten € 0,50 per 100 gram en de cashewnoten kosten € 1,75 per 100 gram. Marije wil niet meer dan € 7,- uitgeven.

W

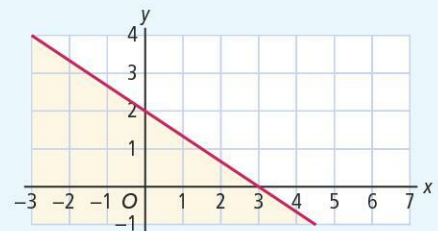
- Het verband tussen de hoeveelheid pinda's en de hoeveelheid cashewnoten wordt weergegeven door $0,50p + 1,75c \leq 7$. Leg deze ongelijkheid uit en beschrijf nauwkeurig de betekenis van de variabelen p en c .
- Laat zien dat Marije niet 600 gram pinda's en 300 gram cashewnoten zal kopen.
- Je ziet in het assenstelsel de lijn met vergelijking $0,5p + 1,75c = 7$ getekend. Geef in het assenstelsel met een stip de hoeveelheden pinda's en cashewnoten aan die Marije in opdracht b niet zal kopen.
- Laat zien dat Marije wel 600 gram pinda's en 200 gram cashewnoten wil betalen en geef dit ook met een stip aan in de figuur.
- Geef door arcen alle mogelijke hoeveelheden pinda's en cashewnoten aan die Marije wil betalen.



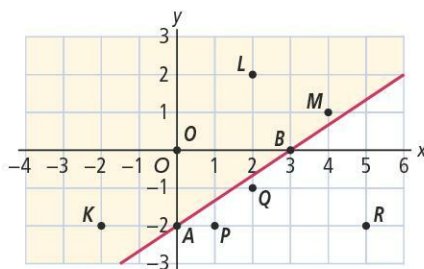
Theorie

Een uitdrukking als $2x + 3y \leq 6$ heet een **lineaire ongelijkheid**.

De grafiek van een lineaire ongelijkheid is een **halfvlak**. Het halfvlak wordt begrensd door de lijn die bij de bijbehorende lineaire ongelijkheid hoort. De lijn bij de vergelijking $2x + 3y = 6$ heet de **grenslijn**.



- 18** In het assenstelsel is de grafiek bij een lineair verband tussen de variabelen x en y getekend. Het gebied boven de lijn is gekleurd.
- Controleer met behulp van de coördinaten van de punten A en B dat bij de grafiek de vergelijking $2x - 3y = 6$ hoort.
 - Bereken de waarde van $2x - 3y$ voor de punten P , Q en R . Controleer dat de uitkomsten allemaal groter dan 6 zijn.
 - Ga na dat voor de punten K , L , M en O geldt dat $2x - 3y \leq 6$.
 - Van welke van de getekende punten zijn een oplossing van $2x - 3y \leq 6$?
 - Waar liggen alle punten waarvoor geldt $2x - 3y \leq 6$?



- 19** Gegeven is de ongelijkheid $2x + 3y \leq 24$.
- H**
- Teken in een assenstelsel de lijn $2x + 3y = 24$.
 - Kies bijvoorbeeld het punt $O(0, 0)$ en ga na dat $x = 0$ en $y = 0$ een oplossing van de ongelijkheid is.
 - Ligt het punt $O(0, 0)$ in het halfvlak dat hoort bij $2x + 3y \leq 24$?
 - Arceer het halfvlak dat bij de ongelijkheid hoort.

Aanpak

Hoe teken je het halfvlak bij een lineaire ongelijkheid?

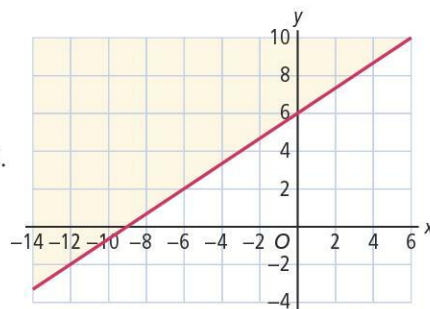
- Teken de grenslijn.
- Kies een punt dat niet op de grenslijn ligt en controleer of het een oplossing is van de ongelijkheid.
Als het punt een oplossing is, dan ligt het in het halfvlak.
- Arceer of kleur het halfvlak.

Voorbeeld

Teken het halfvlak dat hoort bij de ongelijkheid $-2x + 3y \geq 18$.

Oplossing

- De grenslijn $-2x + 3y = 18$ gaat door de punten $(-9, 0)$ en $(0, 6)$.
- Kies bijvoorbeeld het punt $O(0, 0)$, dit geeft $-2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$. $0 \geq 18$ klopt niet, dus $x = 0$ en $y = 0$ is geen oplossing van de ongelijkheid $-2x + 3y \geq 18$.
Het punt $O(0, 0)$ ligt niet in het gevraagde halfvlak.
- Het gevraagde halfvlak is het gebied waar het punt $O(0, 0)$ niet in ligt.



Ondersteunende route → maak opdracht 020

- 20** Teken de halfvlakken bij elk van de lineaire ongelijkheden.
 H Neem de t -as horizontaal.

- a $3t + 8k \leq 36$ c $500t + 750k \leq 2250$
 b $0,25t - 2k \geq 3$ d $0,02k - 0,04t \geq 1$



- 21** In de zomer kan in natuurgebieden met veel bos gemakkelijk brand ontstaan. Het risico op bosbrand wordt vooral bepaald door de temperatuur van de lucht en door de hoeveelheid vocht in de lucht. Een hoge temperatuur geeft een risico op brand, en een hoge vochtigheid verlaagt het risico enigszins. Indien geldt dat $0,1T - 0,05V \geq 0,7$ dan is er sprake van een zeer groot risico op bosbrand. Hierin is T de temperatuur, gemeten in $^{\circ}\text{C}$ en is V de relatieve vochtigheid in procenten. Een relatieve vochtigheid van bijvoorbeeld 40 geeft aan dat de lucht 40% vocht bevat van de hoeveelheid vocht die de lucht maximaal kan bevatten.
- a Op een zekere dag is de temperatuur 31°C en de relatieve luchtvochtigheid 40%. Onderzoek of er sprake is van een zeer groot risico op een bosbrand.
- b Hoe kun je aan de ongelijkheid zien dat een hoge luchtvochtigheid het risico op een bosbrand verlaagt?
- c Teken het halfvlak en geef daarin duidelijk aan bij welke waarden van T en V het risico op een bosbrand zeer groot is. Zet T op de horizontale as.
- d Op een andere zomerdag is de relatieve vochtigheid 35%. Bereken bij welke temperaturen er op deze dag sprake is van een zeer groot risico op bosbrand.
(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2018, tijdvak 1)

Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

020

Je gaat het halfvlak tekenen bij $2p - 5q^3 \geq -20$. De grenslijn is de lijn met vergelijking $2p - 5q = -20$. Je begint met het tekenen van de grenslijn. Je hebt daarvoor de coördinaten van minstens twee punten op die lijn nodig.

- a Neem de p -as horizontaal en laat zien dat $(-10, 0)$ het snijpunt is met de horizontale as.
- b Bereken het snijpunt van de grenslijn met de q -as.
- c Teken de lijn in een assenstelsel.
- d Kies een punt dat niet op de grenslijn ligt, bijvoorbeeld het punt $(0, 0)$.
Ga na dat $p = 0$ en $q = 0$ voldoet aan de ongelijkheid $2p - 5q^3 \geq -20$.
- e Ligt het punt $(0, 0)$ in het gevraagde halfvlak?
- f Arceer het gevraagde halfvlak.

Teken bij elk van de volgende lineaire ongelijkheden het bijbehorende halfvlak. Neem de t -as horizontaal.

- g $4t - 3k \geq 18$
- i $150t + 200k \leq 900$
- h $0,25t - 0,5k \geq 1$
- j $0,08k - 0,04t \geq 1$

Uitdagende opdrachten

U4

Je ziet een halfvlak getekend in een assenstelsel. Geef een lineaire ongelijkheid die bij dit halfvlak hoort.



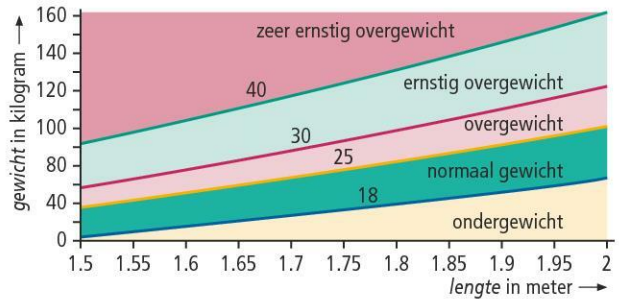
6.5 Gebieden in een assenstelsel-

Je leert • hoe je bij meer voorwaarden een gebied tekent

Leerroutes • ondersteunend: 22—23—024—24—25—26
 • doorlopend: 22—23—24—25—26—27
 • uitdagend: 22—23—25—26—27—U5

De BMI-index is een getal dat berekend wordt uit de lengte en het gewicht van een persoon. De waarde van de index geeft aan in hoeverre iemand een normaal lichaamsgewicht heeft. Je ziet een diagram uit een folder van een apotheek. Er staat bij dat bij een BMI van 25 tot 27 sprake is van een licht overgewicht en van 27 tot 30 van matig overgewicht.

• Hoe zou je 'licht overgewicht' en 'matig overgewicht' in de figuur kunnen weergeven?

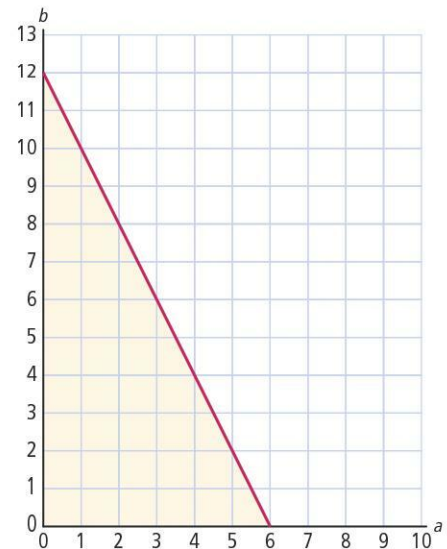


22

W

Een meubelfabriek maakt twee soorten stoelen. Voor stoel A is 1,5 uur machinetijd nodig en voor stoel B 0,75 uur. Per dag draait de machine maximaal 9 uur. a is het aantal stoelen van model A en b is het aantal stoelen van model B.

- Leg uit dat de ongelijkheid $1,5a + 0,75b \leq 9$ bij de dagproductie hoort die mogelijk is.
- In de figuur is de grafiek getekend van de ongelijkheid $1,5a + 0,75b \leq 9$. Hierbij is er rekening mee gehouden dat $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
 Waarom kunnen de variabelen a en b niet negatief zijn?
- Per dag worden complete stoelen gemaakt. De variabelen a en b moeten dus een geheel getal zijn. Geef in de figuur alle mogelijke combinaties van a en b aan.
- Stel met behulp van de grafiek vast of het mogelijk is om vier stoelen van model A en vijf stoelen van model B te produceren.
- Op een dag worden er evenveel stoelen van model A als van model B geproduceerd.
 Welke mogelijkheden zijn er voor die dagproductie?



Theorie

Soms worden aan twee variabelen x en y meer voorwaarden gesteld. Die kun je vertalen in ongelijkheden, zoals $3x - 5y \leq 7$ of $y \geq 0$. Ook de eis dat één of meer variabelen gehele getallen moeten zijn, is een voorbeeld van een voorwaarde. De coördinaten van alle punten (x, y) in een assenstelsel die voldoen aan de gestelde voorwaarden vormen een **gebied**.

Voorbeeld

Een gebied wordt bepaald door de ongelijkheden

$$K + 2p \leq 5 \text{ en } 3K + p \geq 3.$$

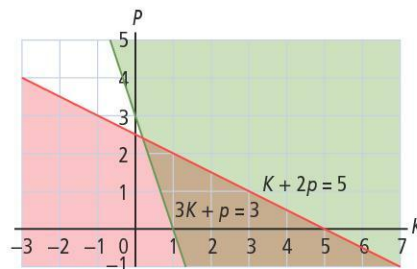
Kleur in een assenstelsel het gebied dat voldoet aan beide voorwaarden.

Oplossing

Het groene halfvlak hoort bij de ongelijkheid $3K + p \geq 3$.

Het rode halfvlak hoort bij de ongelijkheid $K + 2p \leq 5$.

Het gevraagde gebied is het deel waar de halfvlakken elkaar overlappen. In de tekening is dat het bruin gekleurde deel.



- 23** Gegeven is punt $P(4, 3)$ in het assenstelsel van het voorbeeld. Ga na dat de coördinaten van punt P niet voldoen aan de ongelijkheid $K + 2p \leq 5$.

Ondersteunende route → maak opdracht 024

- 24** Gegeven zijn de lineaire ongelijkheden $4x + 9y \leq 36$ en $2x - 3y \geq -6$.

H

- Kleur in een assenstelsel het gebied dat voldoet aan beide voorwaarden.
- Aan de variabelen x en y worden nog de voorwaarden $x \geq 0$, $y \geq 0$ en beide geheel opgelegd. Teken de punten die voldoen aan alle voorwaarden.

- 25** De regering van een ontwikkelingsland wil een menu van rijst en sojabonen vaststellen waarin voldoende eiwit en vitamine B2 zit. In de tabel zie je onder andere dat 100 gram sojabonen 35 gram eiwit en 0,48 mg vitamine B2 bevat. De minimumbehoefte per dag voor een volwassene aan eiwit is 70 gram en aan vitamine B2 is 1,6 mg.

- Laat zien dat voor de dagelijkse behoefte aan vitamine B2 geldt $0,48s + 0,04r \geq 1,6$ met s de hoeveelheid sojabonen en r de hoeveelheid rijst keer 100 gram.
- Geef de ongelijkheid die hoort bij de minimumbehoefte aan eiwit per dag.
- Teken het gebied dat hoort bij beide ongelijkheden. Zet s langs de horizontale as.
- Per persoon is er per dag 300 gram sojabonen beschikbaar. Bereken hoeveel rijst er per persoon nodig is om aan de voorwaarden te voldoen.

	eiwit	vitamine B2
100 gram sojabonen	35 g	0,48 mg
100 gram rijst	7 g	0,04 mg



26

H

Jessa wil een groot boeket samenstellen uit rozen, die € 4,50 per bos kosten en anjers met een prijs van € 3,- per bos.

Zij koopt n bossen rozen en t bossen anjers.

Ze kan hooguit € 27,- uitgeven.

- Schrijf haar voornemen als een ongelijkheid op.
- Aan welke vanzelfsprekende voorwaarden moeten n en t verder nog voldoen?
- Teken in een assenstelsel de punten die aan alle voorwaarden voldoen met de variabele n op de horizontale as.

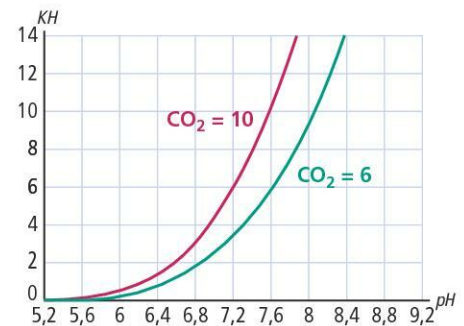
27

W

De kwaliteit van het water in een vijver hangt af van het CO_2 -gehalte van het water. Dit CO_2 -gehalte hangt op zijn beurt weer af van de hardheid en de zuurgraad van het water. Zowel hardheid als zuurgraad kunnen eenvoudig worden gemeten, waarbij de hardheid wordt uitgedrukt in KH en de zuurgraad in pH . Met behulp van een formule kan het CO_2 -gehalte worden berekend.

Je ziet twee grafieken. De rode grafiek geeft het verband tussen KH en pH weer als het CO_2 -gehalte gelijk is aan 10 mg per liter. De groene grafiek geeft het verband voor wanneer het CO_2 -gehalte gelijk is aan 6 mg per liter.

- Bij welke pH -waarde geeft de KH -waarde precies het CO_2 -gehalte aan?
- Het water in een vijver is van goede kwaliteit als voldaan is aan de volgende drie voorwaarden.
 - De KH -waarde van het water moet tenminste 6 en ten hoogste 10 zijn.
 - De pH -waarde van het water moet tenminste 7 en ten hoogste 8 zijn.
 - Het CO_2 -gehalte van het water moet tenminste 10 zijn.
 Geef in de figuur het gebied aan dat voldoet aan alle drie de voorwaarden voor vijverwater van goede kwaliteit.



Uitdagende route → maak opdracht U5

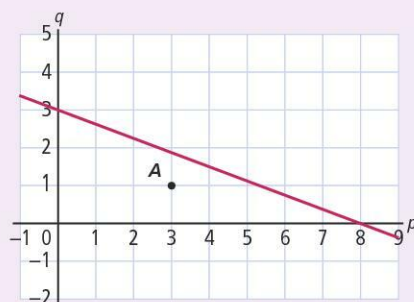
Ondersteunende opdrachten

024

W

Gegeven zijn de lineaire ongelijkheden $2p - 3q \leq 6$ en $3p + 8q \leq 24$. In het assenstelsel is de grenslijn $3p + 8q = 24$ getekend.

- Laat zien dat het punt $O(0, 0)$ een oplossing is van de ongelijkheid $3p + 8q \leq 24$ en arceer het halfvlak dat bij de ongelijkheid hoort.
- Geef de vergelijking van de andere grenslijn en teken deze in het assenstelsel.
- Arceer het halfvlak dat hoort bij de ongelijkheid $2p - 3q \leq 6$.
- Geef het gebied dat voldoet aan beide ongelijkheden duidelijk aan.
- Laat met een berekening zien dat de coördinaten van punt A voldoen aan beide ongelijkheden.
- Aan de variabelen p en q worden nog de voorwaarden $p \geq 0$ en beide geheel opgelegd. Tel met behulp van je tekening hoeveel punten aan alle voorwaarden voldoen.



Uitdagende opdrachten

U5

De huisarts van mevrouw Jansen constateert een tekort aan kalk en ijzer. Hij schrijft haar minstens 1000 mg kalk en minstens 10 mg ijzer per dag voor. Bij de apotheek heeft mevrouw Jansen de keuze uit tabletten van het merk A en B. In de tabel lees je hoeveel mg kalk en hoeveel mg ijzer een tablet van elk merk bevat.

Stel dat mevrouw Jansen a tabletten van merk A inneemt en b tabletten van merk B.

- Stel de ongelijkheden op die horen bij alle voorwaarden.
- Teken het gebied dat voldoet aan de voorwaarden. Zet a langs de horizontale as.
- Omdat mevrouw Jansen een hekel heeft aan het slikken van tabletten, wil zij zo weinig mogelijk tabletten per dag innemen. Hoeveel tabletten van elke merk zou jij adviseren?

Merk	kalk	ijzer
A	200 mg	3 mg
B	400 mg	1,5 mg



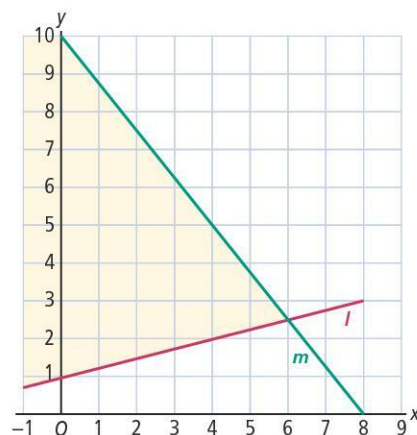
6.6 Gemengde opdrachten

- 28** In de tabel lees je af hoeveel geldige stemmen (in miljoenen) er op de PvdA, op de VVD en in totaal werden uitgebracht bij de verkiezingen voor de Tweede Kamer vanaf 2002.

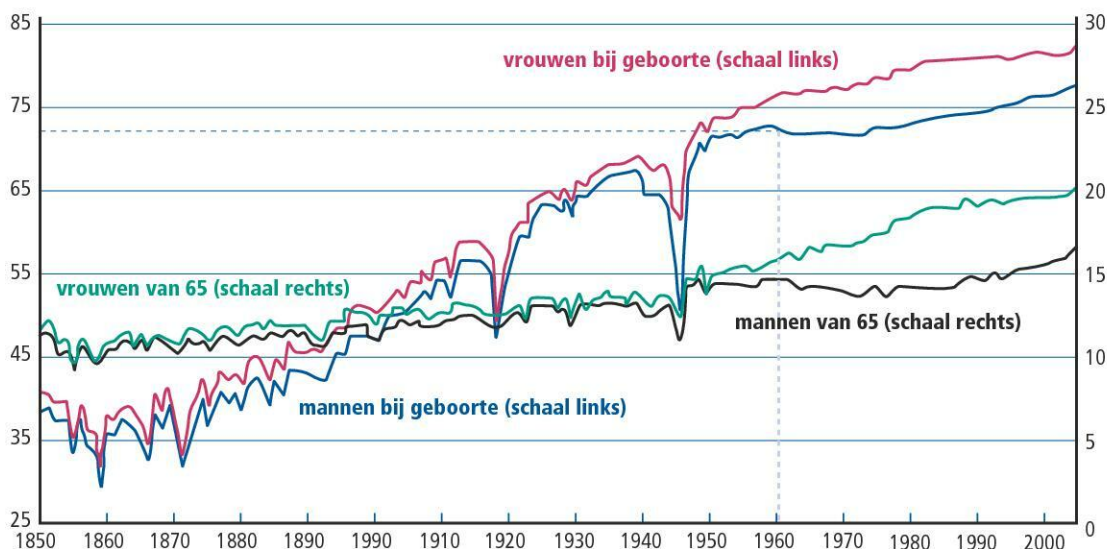
tijd in jaren	PvdA		VVD		totaal
	abs.	%	abs.	%	
2002	1,4	14,7	1,5	...	9,5
2003	2,6	27,1	1,7	...	9,6
2006	2,1	...	1,4	...	9,8
2010	1,8	...	1,9	20,2	9,4
2012	2,3	...	2,5	26,6	9,4
2017	0,6	5,7	2,2	21,0	10,5

- Laat met een berekening zien dat in 2002 14,7% van de uitgebrachte stemmen voor de PvdA was.
 - Vul de tabel verder in.
 - Teken in één figuur de ontwikkeling van de percentages uitgebrachte stemmen op de PvdA en de VVD vanaf 2002.
 - Beargumenteer of je de punten wel of niet mag verbinden.
- 29** Gert wil zijn tuin voor een deel met graszoden bedekken en een terras met grind aanleggen. Hij wil hier niet meer dan € 225,- voor uitgeven. Hij kiest voor graszoden die € 2,50 per m² kosten en voor grind met een prijs van € 15,- per m². Gert gebruikt voor het berekenen van de hoeveelheid graszoden en stenen die hij voor dit bedrag kan aanschaffen de ongelijkheid $2,5P + 15Q \leq 225$. Hierin is P het aantal m² gras en Q het aantal m² grind.
- Leg uit dat deze ongelijkheid juist is.
 - Gert wil bovendien ten minste twee keer zoveel m² gras als m² grind hebben.
Leg uit dat daarbij de formule $P - 2Q \geq 0$ hoort.
 - Teken in een assenstelsel het gebied dat aan beide voorwaarden voldoet. Neem P op de horizontale as.

- 30** In de figuur is een gebied getekend met de twee grenslijnen bij de vergelijkingen $4y + 5x = 40$ en $4y - x = 4$.
- Welke vergelijking hoort bij lijn l ?
 - Welke ongelijkheid hoort bij het getekende gebied dat door de grenslijn $4y + 5x = 40$ wordt bepaald?
 - Welke ongelijkheid hoort bij de andere grenslijn?
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de twee grenslijnen.
 - Geef de coördinaten van de roosterpunten in het gekleurde gebied waarvoor geldt dat $y = 2x$.



- 31** In de grafieken zie je de levensverwachting van vrouwen en mannen op 65-jarige leeftijd en bij de geboorte. Je ziet dat een man die geboren is in 1960 bij de geboorte een levensverwachting heeft van 72 jaar. Mannen die in 1960 de 65 jarige leeftijd bereiken, hadden nog een levensverwachting van 14 jaar. Zij zullen dus gemiddeld 79 jaar oud zijn geworden.



- Je ziet in de grafieken na 1900 twee keer een opvallende daling.
Geef een mogelijke verklaring voor die dalingen van de levensverwachting.
- Jurjen, de opa van Anja, was 65 toen Anja in 1979 werd geboren.
Wat was de levensverwachting van Jurjen toen Anja werd geboren?
- Wat was de levensverwachting van Jurjen toen hij zelf werd geboren?
- Onderzoek bij elk van de volgende uitspraken of deze af te leiden is uit de grafieken.
 - De kindersterfte is in de loop der tijd sterk verminderd.
 - De levensverwachting van mannen is meer toegenomen dan de levensverwachting van vrouwen.
 - Door toename van de levensverwachting is de bevolkingsgrootte toegenomen.
 - In 2040 zal de levensverwachting van een pasgeboren vrouw ongeveer 92 jaar zijn.
 - De levensverwachting van mannen van 65 is sinds 1950 met ongeveer 7 jaar toegenomen.



Theorie

Wanneer je een grafiek tekent bij een tabel ontstaat een verzameling punten in een assenstelsel. Vaak worden de punten verbonden. De vraag is of je dit altijd mag doen en zo ja, hoe je dat moet doen.

Een hulpmiddel hierbij is of je ook een betekenis kunt geven aan tussenliggende waarden in de tabel.

Voorbeeld

Teken een grafiek bij de tabel met het aantal zomerse dagen tussen 1993 en 1998.

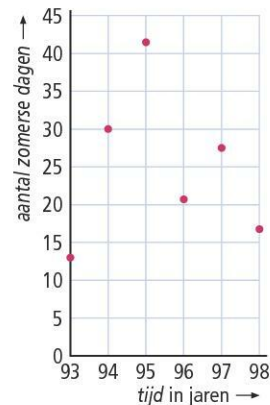
<i>tijd in jaren</i>	1993	1994	1995	1996	1997	1998
<i>aantal zomerse dagen</i>	13	30	41	20	27	17

Oplossing

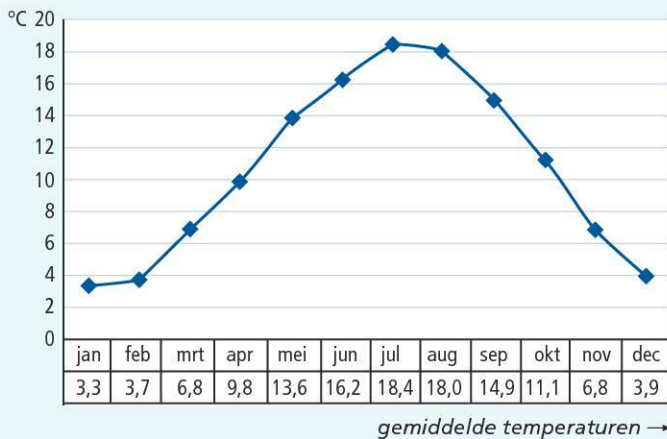
Zet bij de horizontale as de tijd en bij de verticale as het aantal dagen.

De punten zijn in het assenstelsel hiernaast getekend.

De punten horen niet met elkaar verbonden te worden.



- S1** In de grafiek is de gemiddelde van de maandtemperatuur weergegeven van een weerstation in Nederland.



- Leg uit waarom je in dit geval de punten eigenlijk niet met elkaar mag verbinden.
- Waarom heeft de maker van de grafiek de punten wel met elkaar verbonden?

Vaardigheid

Je kunt informatie uit een tabel of een grafiek halen.

Let op de volgende punten bij het aflezen uit een tabel of grafiek:

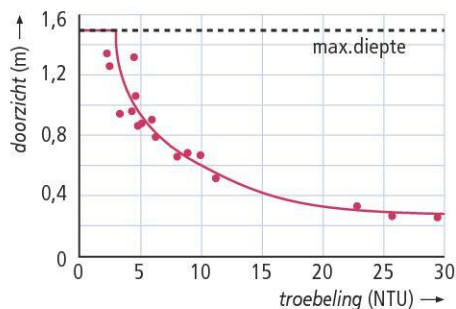
- welk verband wordt weergegeven,
- welke grootheden zijn gebruikt en
- welke stapgrootte en welke eenheid is gekozen.

Voorbeeld

Troebel water wordt gemeten in een zekere eenheid genaamd NTU. In de grafiek zie je het verband tussen de troebeling en hoe diep je nog kunt zien in een recreatieplas; dat heet het doorzicht. De troebeling neemt toe van 15 tot 20 NTU. Hoeveel cm neemt het doorzicht af?

Oplossing

In de figuur lees je af dat het doorzicht bij 15 NTU ongeveer gelijk is aan 0,41 meter en bij 20 NTU 0,34 meter. Het doorzicht neemt af met $0,41 - 0,34 = 0,07$ meter, dat is 7 cm.



- S2** Op zekere dag is het doorzicht in de recreatieplas van het voorbeeld elk uur gemeten.



- Welke grootheden en welke eenheden zijn gebruikt in de grafiek?
- Met behulp van de grafiek uit het voorbeeld kun je de troebeling op verschillende tijdstippen vaststellen. Hoeveel NTU is de troebeling om 18.00 uur?

Vaardigheid

Je kunt de grafiek bij de vergelijking van een lijn tekenen.

Een formule van de vorm $ax + by = c$ wordt ook wel de vergelijking van een lijn genoemd. De bijbehorende grafiek is een rechte lijn. Je tekent deze lijn door de coördinaten van twee punten op die lijn te berekenen, bijvoorbeeld de snijpunten van de lijn met de x -as en de y -as.

Voorbeeld

Teken de grafiek van de lijn met vergelijking $5p + 3,6q = 90$.
Zet p langs de horizontale as.

Oplossing

In het snijpunt met de p -as geldt $q = 0$.

Invullen in de vergelijking geeft $5p + 3,6 \times 0 = 90$.

Hieruit volgt $p = 90 : 5 = 18$.

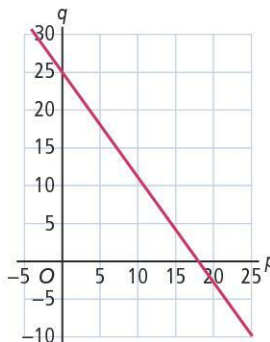
Het snijpunt van de lijn met de horizontale as is $(18, 0)$.

In het snijpunt met de q -as geldt $p = 0$.

Invullen in de vergelijking geeft $5 \times 0 + 3,6q = 90$.

Hieruit volgt $q = 90 : 3,6 = 25$.

Het snijpunt van de lijn met de verticale as is $(0, 25)$.



- S3**
- a Teken in een assenstelsel de lijn met vergelijking $x + \frac{1}{2}y = 8$.
 - b Teken in hetzelfde assenstelsel de lijn $-5x + y = 10$.

Vaardigheid

Je kunt een halfvlak tekenen bij een lineaire ongelijkheid.

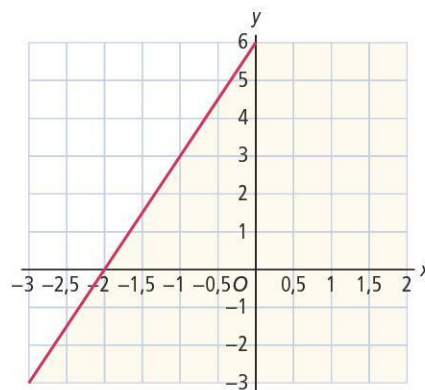
- 1 Teken de grenslijn.
- 2 Kies een punt dat niet op de grenslijn ligt en controleer of het een oplossing is van de ongelijkheid.
Als het punt een oplossing is, dan ligt het in het halfvlak.
- 3 Arceer of kleur het halfvlak.

Voorbeeld

Teken het halfvlak dat hoort bij de ongelijkheid $x - \frac{1}{3}y \geq -2$.

Oplossing

- 1 De grenslijn is de lijn met vergelijking $x - \frac{1}{3}y = -2$.
Deze gaat door de punten $(-2, 0)$ en $(0, 6)$.
- 2 Kies bijvoorbeeld het punt $O(0, 0)$, dit geeft $0 - \frac{1}{3} \times 0 = 0$.
 $0 \geq -2$ klopt, dus $x = 0$ en $y = 0$ is een oplossing van de ongelijkheid $x - \frac{1}{3}y \geq -2$.
- 3 Het punt $O(0, 0)$ ligt dus in het gevraagde halfvlak.
Het gevraagde halfvlak is het gebied waar het punt $O(0, 0)$ wel in ligt.



- S4** Teken het halfvlak dat hoort bij $\frac{1}{4}t - 2s \geq 5$. Zet s langs de horizontale as.

Vaardigheid

Je kunt een gebied tekenen bij meer voorwaarden.

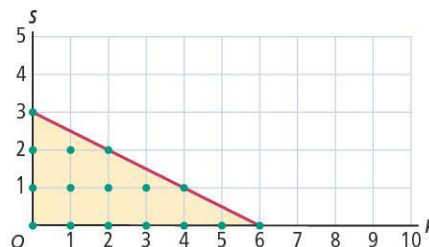
Soms worden aan variabelen verschillende voorwaarden gesteld. Deze kun je vertalen in ongelijkheden. Ook de eis dat één of meer variabelen gehele getallen moeten zijn, is een voorbeeld van een voorwaarde. De coördinaten van alle punten (x, y) in een assenstelsel die voldoen aan de gestelde voorwaarden vormen het gebied.

Voorbeeld

Michel koopt potloden van € 1,50 per stuk en stiften van € 3,- per stuk. Hij kan hieraan maximaal € 9,- besteden. Teken in een assenstelsel het gebied dat hoort bij deze voorwaarden.

Oplossing

Bij de voorwaarden hoort de ongelijkheid $3s + 1,5p \leq 9$. De grenslijn is $3s + 1,5p = 9$. Omdat het om potloden en stiften gaat, voldoen alleen gehele positieve waarden van p en s .



- S5** Een gebied wordt bepaald door de ongelijkheden $-a + b \leq 3$ en $5a + 3b \leq 40$. Zet a langs de horizontale as. Teken het gebied.

- T1** Bij de volgende situaties worden grafieken getekend.
- A De temperatuur van een glas water uitgezet tegen de tijd.
 - B Het aantal auto's dat een kruispunt passeert uitgezet tegen de tijd.
 - C Het aantal keren dat een klok slaat uitgezet tegen de tijd.
Ga erbij vanuit dat de klok op het hele uur het aantal uren op dat moment slaat. Dus om 20.00 uur slaat de klok acht keer.
 - D Het parkeertarief uitgezet tegen de tijd.
 - a In welke van de vier situaties bestaat de grafiek uit losse punten?
 - b Volgens Danny mag je bij het tekenen van de grafieken bij de andere situaties de punten met elkaar verbinden met een vloeiende lijn. Heeft Danny gelijk? Verklaar je antwoord.
 - c Ga uit van situatie C.
Teken de grafiek bij het aantal keren dat de klok slaat tegen de tijd. Neem op de horizontale as de tijden van 13.00 uur tot 24.00 uur.
 - d Beschrijf hoe de grafiek bij situatie D er uit zal zien.

P

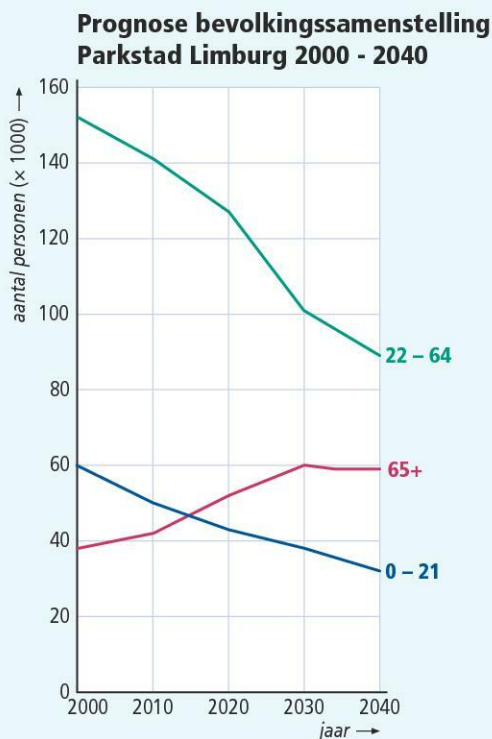
Parkeertarief

* 1^e t/m 4^e uur = € 2,50 per uur

* 5^e e.v. uren = € 2,00 per uur

* per 24 uur = € 50,00

- T2** In de krant lees je vaak over de dreigende vergrijzing: het percentage 65-plussers zal de komende jaren spectaculair stijgen. Stadsregio Parkstad Limburg omvat acht gemeenten in Zuidoost-Limburg met ongeveer 252 duizend inwoners in 2000. Er zijn prognoses gemaakt van de bevolkingssamenstelling tot 2040.
- a Laat met een berekening zien dat het percentage 65-plussers in 2000 ongeveer gelijk was aan 16%.
 - b Bereken het percentage 65-plussers in Parkstad Limburg in 2020.
 - c Bestuurders van Parkstad Limburg willen duidelijk maken dat de dreigende vergrijzing ook voor Parkstad Limburg geldt.
Teken een grafiek waarin de spectaculaire stijging van het percentage 65-plussers zichtbaar is.
- (Ontleend aan *CE havo pilot wiskunde A 2011, tijdvak 1*)

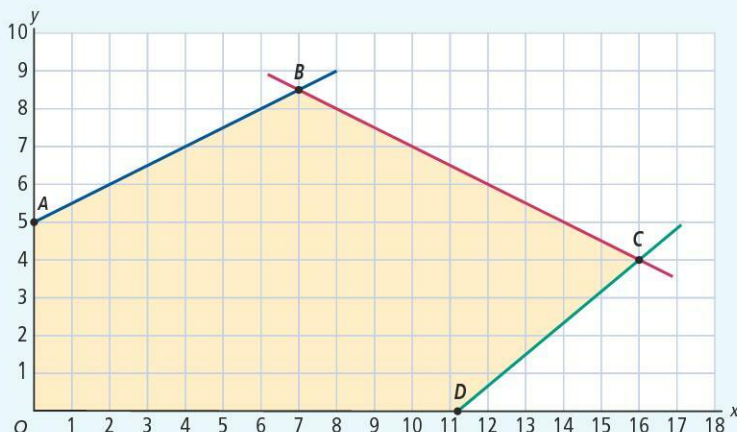


- T3** Teken het halfvlak bij de ongelijkheid $5y - 2x \geq 15$.

- T4** Gegeven zijn de lineaire vergelijkingen $3x + 4y = 24$ en $2y - 4x = 1$.
- Teken de grafieken bij de twee lineaire vergelijkingen in één assenstelsel.
 - Herschrijf beide vergelijkingen tot de vorm $y = ax + b$.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de twee lijnen.

- T5** Alex koopt in een schoolweek een aantal kopjes koffie en thee. Thee kost € 0,50 per kopje en koffie kost € 0,75 per kopje. Alex wil niet meer dan € 6,- per week uitgeven. Stel dat hij in een schoolweek k koppen koffie en t koppen thee koopt.
- Leg uit dat hierbij de ongelijkheid $0,75k + 0,5t \leq 6$ hoort.
 - Teken in een assenstelsel het gebied dat voldoet aan de gestelde voorwaarden. Zet k langs de horizontale as.

- T6** De grenslijnen bij het getekende gebied zijn $x + 2y = 24$, $x = 0$, $5x - 6y = 56$, $y = 0$ en $x - 2y = -10$.

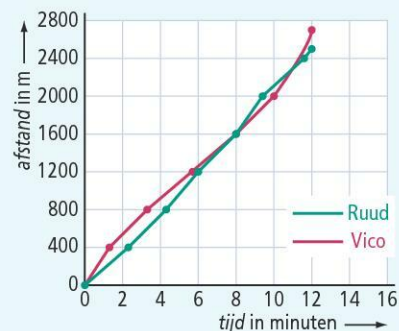


- Welke vergelijking hoort bij de lijn door de punten A en B?
- Bereken de coördinaten van punt D.
- Beschrijf het gebied met ongelijkheden.

Je kunt informatie uit een tabel of een grafiek halen.

- E1** Bij de Coopertest is het de bedoeling om in 12 minuten een zo groot mogelijke afstand hardlopend af te leggen. Van Ruud en Vico werd, na elke ronde van 400 meter, de tijd opgenomen. In de grafiek zie je de resultaten.

- Welke grootheden en eenheden zijn in het assenstelsel gebruikt?
- Wie van de twee behaalde het beste resultaat?
- Gedurende hoeveel minuten lag Ruud voor op Vico?
- Hoeveel km per uur heeft de winnaar gemiddeld sneller gelopen?



- E2** De tabel geeft informatie over hoeveel kosten de zorgverzekeraars gemiddeld per Nederlander over een heel jaar maakten voor hun bezoeken aan de huisarts in de jaren 2010 tot en met 2016.

tijd in jaren	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
kosten huisarts in euro's	131	142	136	139	149	149	152

- Teken de grafiek bij de tabel.
- Waarom mag je de punten eigenlijk niet verbinden?
- Bedenk een reden waarom je dat juist wel zou doen.

Je kunt de grafiek bij de vergelijking van een lijn tekenen.

- E3** Teken de grafiek bij de vergelijkingen. Maak iedere keer een nieuw assenstelsel.

- $4x - y = 12$
- $3x + 5y = 30$
- $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = -2$
- $-2y + 5x = 40$

Je kunt een halfvlak tekenen bij een lineaire ongelijkheid.

- E4** Teken bij de ongelijkheden de halfvlakken, neem k op de horizontale as.

- $4k + 2n \leq 16$
- $\frac{1}{2}k - 2n \geq -4$
- $4k - 5n \leq 20$
- $n - 3k \leq 9$

Je kunt een gebied tekenen bij meer voorwaarden.

E5 Een salade bestaat uit een gesneden witlof gemengd met appel. Op de verpakking staat dat er minstens 90 kilocalorie (kcal) aan energie in zit en minstens 5 gram vezels. In de tabel lees je onder andere af dat 100 gram witlofsalade 15 kcal energie levert en 1,25 gram vezels.

	energie	vet
100 gram witlof	15 kcal	1,25 g
100 grams appels	60 kcal	2,00 g

- Leg uit dat voor het verband tussen w en a moet gelden:
 $15w + 60a \geq 90$ met w en a het gewicht van de witlof en de appels keer 100 gram.
- Welke ongelijkheid hoort bij de minimale hoeveelheid vezels?
- Teken het gebied hoort bij de ongelijkheden. Zet w langs de horizontale as.
- De salade bevat 100 g gesneden witlof. Bereken hoeveel gram appels er in die salade moet zitten.

E6 In de tabel zie je gegevens over het gemiddelde jaarinkomen van werkenden in de periode 2001 - 2016. De gegevens zijn verdeeld in leeftijdscategorieën.

<i>jaarinkomen</i> $\times 1000$	2011	2012	2013	2014	2015	2016
15 tot 25 jaar	25,1	25,1	25,3	26,7	26,6	27,7
45 tot 65 jaar	30,3	30,4	30,7	32,8	32,3	33,2

- Teken in één figuur voor elke leeftijdscategorie een grafiek van het inkomen.
- Heb je de punten in je grafiek met elkaar verbonden? Leg uit waarom wel of waarom niet.
- Lees in de grafiek af tussen welke jaren de inkomsten het sterkst zijn gestegen.

E7 Peter stelt een boeket samen uit gele en oranje rozen. Een gele roos kost € 0,40 en een oranje roos kost € 0,75. Hij wil maximaal € 6,- uitgeven.

- Noem het aantal gele rozen in het boeket p en het aantal oranje rozen q .
 Leg uit dat je het voornemen van Peter kunt schrijven als de ongelijkheid $0,4p + 0,75q \leq 6$.
- Het aantal oranje rozen moet minstens zo groot zijn als het aantal gele rozen.
 Leg uit dat hieruit de ongelijkheid $q \geq p$ volgt.
- Teken in een assenstelsel de punten die aan alle voorwaarden voldoen. Neem de p -as horizontaal.
- Hoeveel keuzemogelijkheden heeft Peter?



Malthus

Thomas Robert Malthus (1766 - 1834) was een Brits geestelijke die zich veel bezighield met economische vraagstukken. Hij is bekend geworden om zijn pessimistische maar zeer invloedrijke meningen. In 1798 publiceerde hij 'An Essay on the Principle of Population', waarin hij aannam dat de totale bevolking exponentieel groeit, terwijl de middelen van bestaan lineair toenemen. Daardoor zou er uiteindelijk steeds minder voedsel per persoon beschikbaar zijn.

Na 1750 was de bevolking in Engeland sterk gaan groeien doordat er als gevolg van verbeterde hygiëne minder epidemieën optraden. Malthus liet zien dat de bevolking sinds 1750 elke 25 jaar verdubbelde.

In 1800 waren er ongeveer 1 miljard mensen op aarde. Neem aan dat er toen voldoende voedsel was. Dreigt er een hongersnood als de bevolking steeds verdubbelt en de hoeveelheid voedsel lineair groeit?



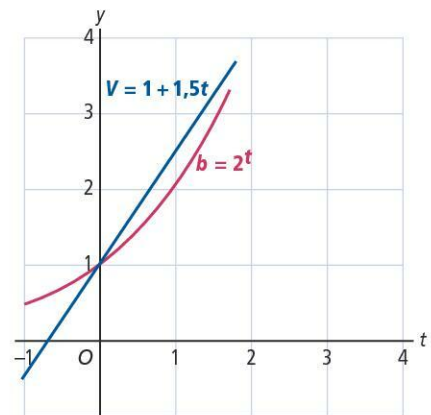
Opdracht

Je ziet de grafieken van $b = 2^t$ en $v = 1 + 1,5t$, waarbij b de omvang van de bevolking beschrijft, v het aantal mensen waarvoor het beschikbare voedsel toereikend is en t de tijd in perioden van 25 jaar.

- Onderzoek of elke formule $v = 1 + at$ met $a > 1$ een beperkte tijd van voldoende voedsel geeft en daarna voedselschaarste.
- In de tabel zie je hoe de wereldbevolking in werkelijkheid groeide.

jaartal	1750	1800	1850	1900	1950	2000
wereldbevolking	791	978	1262	1650	2521	6000

Onderzoek of de werkelijke groei nagenoeg volgens een exponentiële formule verloopt. Zo ja, met welke groeifactor? Zo nee, is er een periode waarin de groei wel ongeveer exponentieel is?





In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Meten
- Verhoudingen en procenten
- Formules herleiden
- Exponentieel verband

Meten

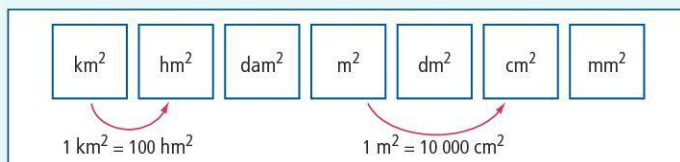
1 Vul in.

- a $12 \text{ m} = \dots \text{ km}$ d $1675 \text{ mm} = \dots \text{ m}$
 b $3500 \text{ m} = \dots \text{ dm}$ e $0,0087 \text{ km} = \dots \text{ cm}$
 c $0,56 \text{ km} = \dots \text{ hm}$ f $10\,900 \text{ mm} = \dots \text{ dm}$

Theorie

Veelgebruikte lengtematen zijn km, hm, m, dm, cm en mm. Veelgebruikte oppervlaktematen zijn km^2 , m^2 , dm^2 , cm^2 en mm^2 . Voor het omrekenen van oppervlaktematen kun je het volgende schema gebruiken.

Elke stap naar rechts betekent $\times 100$, elke stap naar links betekent : 100.



2 Vul in.

- a $1,25 \text{ m}^2 = \dots \text{ dm}^2$ d $0,685 \text{ dm}^2 = \dots \text{ m}^2$
 b $37 \text{ dm}^2 = \dots \text{ mm}^2$ e $0,0006 \text{ m}^2 = \dots \text{ cm}^2$
 c $1700 \text{ mm}^2 = \dots \text{ cm}^2$ f $20,006 \text{ km}^2 = \dots \text{ hm}^2$

3 Vul in.

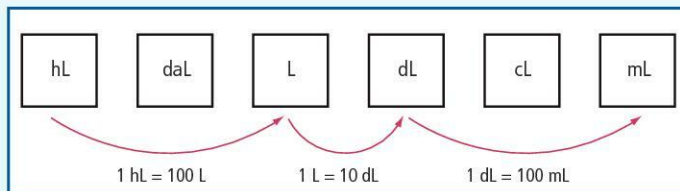
- a $1025 \text{ m}^3 = \dots \text{ dm}^3$ d $6400 \text{ cm}^3 = \dots \text{ m}^3$
 b $165 \text{ cm}^3 = \dots \text{ dm}^3$ e $170 \text{ mm}^3 = \dots \text{ cm}^3$
 c $45900 \text{ mm}^3 = \dots \text{ m}^3$ f $0,013 \text{ m}^3 = \dots \text{ cm}^3$

Theorie

Naast liter komen als inhoudsmaten ook hectoliter, decaliter, deciliter, centiliter en milliliter of cc (Engels: cubic centimetre) voor.

Voor het omrekenen van deze inhoudsmaten kun je het volgende schema gebruiken.

Elke stap naar rechts betekent $\times 10$, elke stap naar links betekent : 10.



$$\begin{aligned} 1 \text{ L} &= 1 \text{ dm}^3 \\ 1 \text{ ml} &= 1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ cc} \\ 1 \text{ kuub} &= 1 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

- 4 Vul in.
- a $2,8 \text{ hL} = \dots \text{ dL}$ d $415 \text{ mL} = \dots \text{ mm}^3$
 b $750 \text{ dm}^3 = \dots \text{ kuub}$ e $6500 \text{ mm}^3 = \dots \text{ cc}$
 c $245 \text{ dL} = \dots \text{ daL}$ f $0,51 \text{ L} = \dots \text{ cm}^3$

Verhoudingen en procenten

- 5 Met 35 liter benzine rijdt Fokke 630 km.
- a Vul de tabel verder in.
 b Hoeveel km rijdt Fokke met 25 liter?

<i>aantal liter</i>	35	5	25
<i>aantal kilometer</i>	630	...	...

Theorie

Je kunt op verschillende manieren in een verhoudingstabel rekenen. Bij de pijltjes boven en onder de tabel vermenigvuldig je van links naar rechts met hetzelfde getal of deel je door hetzelfde getal. Bij het pijltje rechts werk je van boven naar beneden.
 In een verhoudingstabel kun je ook rekenen met kruisproducten.

Voorbeeld

Met 40 liter rijdt Bas 700 km.
 Hoeveel km rijdt Bas met 45 liter?

Oplossing

<i>aantal liter</i>	40	45
<i>aantal kilometer</i>	700	?

$48 \times ? = 700 \times 45$
 $? = 700 \times 45 : 40 = 787,5$
 Bas rijdt 787,5 km met 45 liter.

- 6 Bereken in de verhoudingstabellen a en b met kruisproducten.

15	25
6	a

1,75	2,7
b	3,24

- 7 Het koor van Marc heeft 40 leden, waarvan 24 mannen.

<i>aandeel man</i>	24	?
<i>totaal</i>	40	100

- a Vul de verhoudingstabel verder in.
 b Hoeveel procent van de leden van het koor is man?
 c Van de 24 mannen is 12,5% jonger dan 18 jaar.
 Hoeveel mannen zijn dat?
- 8 In 235 gram jam zit 183 gram suiker.
 In hoeveel gram jam zit 157 gram suiker?

<i>aantal grammen suiker</i>	...	...
<i>aantal grammen jam</i>	...	...

Theorie

Bij het rekenen met procenten kun je gebruik maken van een verhoudingstabel of van een geschikte vermenigvuldiging. Als je een verhoudingstabel gebruikt, dan moet je vaststellen welke hoeveelheid hoort bij 100%. Als je een vermenigvuldiging gebruikt, bedenk dan welke factor hoort bij de toename of afname.

- 9 Bereken de nieuwe bedragen.
- a 15% korting op een scooter van € 1.180,-
 - b 2,3% korting op een smartphone van € 198,-
 - c 0,35% prijsverhoging op een auto van € 23.500,-
- 10
- a Een rekenmachine kost € 95,- exclusief 21% btw. Bereken de prijs van de rekenmachine inclusief btw.
 - b Een entreekaartje van een festival kost € 85,- inclusief btw. Hoeveel kost de entree exclusief btw?
 - c Een jas kost € 175,- exclusief btw. Sofie krijgt 5% korting. Hoeveel moet Sofie voor de jas inclusief btw betalen?

Formules herleiden

- 11 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.
- a $(3n + 4)(n - 5)$
 - b $(5p - 2)(p - 3)$
 - c $(x + 4)^2$
 - d $4(k + 1)(k - 2)$
 - e $\frac{1}{2}(2x - 1)(3x + 2)$
 - f $6 - (x + 2)(x - 6)$

Theorie

In een formule kun je een variabele vervangen door een andere formule. Je noemt dit substitueren. Vaak is het nodig daarbij haakjes te gebruiken. Na het substitueren vereenvoudig je zo mogelijk de formule.

- 12 Substitueer formule B in formule A en vereenvoudig het resultaat.
- a A: $b = 3t - 45$ en B: $t = 3p$
 - b A: $b = 5 - 2t$ en B: $t = 10 - 2p$
 - c A: $b = -7t + 4$ en B: $t = 9 - p$
 - d A: $b = -t - 4$ en B: $t = 3 - \frac{1}{2}p$

Voorbeeld

Een boek van € 48,- wordt 7% goedkoper. Bereken de nieuwe prijs.

Oplossing

Met kruisproduct:

Er gaat 7% af, de nieuwe prijs is 93%.

<i>prijs in euro's</i>	48	?
<i>percentage</i>	100	93

$$48 \times 93 = 100 \times ?$$

$$? = 48 \times 93 : 100 = 44,64$$

De nieuwe prijs is € 44,64.

Met factor:

Er gaat 7% af, de factor is

$$(100 - 7) : 100 = 0,93.$$

De nieuwe prijs is $0,93 \times € 48,- = € 44,64$.

Voorbeeld

Substitueer $q = 3p - 8$ in $w = -2q + 7$ en vereenvoudig het resultaat.

Oplossing

$$w = -2q + 7$$

$$q = 3p - 8$$

$$w = -2(3p - 8) + 7$$

$$w = -6p + 16 + 7$$

$$w = -6p + 23$$

Exponentieel verband

- 13** Welke groeifactoren horen bij de volgende groeipercentages?
- Een toename van 5,4%
 - Een afname van 3,7%
 - Een toename van 1,7%
 - Een afname van 0,9%
- 14**
- Plot de grafiek van de formule $H = 0,4 \cdot 0,8^t$, met de tijd t in jaren.
 - Hoe groot is de beginwaarde?
 - Hoe groot is de groeifactor per jaar?
 - Hoe kun je aan de formule zien dat de grafiek dalend is?
 - Na hoeveel jaar is de hoeveelheid gehalveerd?
- 15** Stel formules op bij de volgende exponentiële processen.
- De waarde van een beginkapitaal van € 2.000,- groeit exponentieel met een groeifactor van 1,03 per jaar.
 - Je lost 25 gram suiker op in een lauw water. Elke seconde lost 20% van de nog niet opgeloste suiker op.
 - Een waterhyacint bedekt 30 m² van een waterplas. De hyacint groeit snel: elk jaar neemt de bedekte oppervlakte A met ongeveer 50 procent toe.
 - De achterband van een fiets is opgepompt tot 4 bar. De band is poreus en de spanning neemt af met 45% per week.
- 16** Geef je antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.
- De groeifactor per maand is 1,005.
Bereken de groeifactor per jaar.
 - De groeifactor per week is 0,98.
Bereken de groeifactor per 10 weken.
 - De groeifactor per kwartaal is 1,5.
Bereken de groeifactor per jaar.
 - De groeifactor per dag is 0,8.
Bereken de groeifactor per week.
- 17** Op het blaadje zie je hoe de procentuele toename per jaar is berekend bij een procentuele toename van 3% per maand.
- De procentuele toename per dag is 1,7%.
Bereken de procentuele toename per week.
 - De procentuele afname per uur is 2%.
Bereken de procentuele afname per dag.
 - De procentuele toename per seconde is 0,86%.
Bereken de procentuele toename per minuut.
 - De procentuele afname per dag is 0,072%.
Bereken de procentuele afname per jaar.



De groeifactor per maand is	
$(100 + 3) : 100 = 1,03$.	
De groeifactor per jaar is	
$1,03^{12} = 1,4257\dots$	
$100 \times 1,4257\dots - 100 = 42,57\dots$	
De procentuele toename per jaar	
is ongeveer 42,6%.	



Keuzeonderwerpen

SE

CE

K

Data bewerken en presenteren in Excel

B2:D3

	A	B	C	D
1	leerling	geslacht	leeftijd	gewicht
2		1 m	15	70
3		2 m	15	55
4		3 m	16	60

Praktische opdracht | Statistisch onderzoek



Data bewerken en presenteren in Excel

Leerlingen uit 4 vwo van een school hebben een vragenlijst ingevuld. In deze praktische opdracht leer je hoe je deze gegevens met Excel kunt verwerken.

- 1 Het Excelwerkblad met de gegevens van de leerlingen bestaat uit vakjes die cellen genoemd worden. Elke cel wordt met behulp van één of meer letters en een getal aangeduid. In de kolomkoppen A1 tot en met H1 staan de namen van de statistische variabelen waarvan gegevens zijn verzameld. Geef de betekenis van het getal in cel H10.

Je selecteert een cel door er met de muis op te klikken. Als je vervolgens de Shifttoets ingedrukt houdt en op de pijltoetsen drukt, selecteert je meerdere cellen. Een selectie van meerdere cellen wordt een bereik genoemd. Hiernaast is het bereik B2 : D3 geselecteerd. Dit bereik kun je ook selecteren door in het naamvak B2 : D3 te typen en op Enter te drukken.

- 2
 - a Typ in het naamvak A1 : H155 en druk op **Enter**. Klik in het tabblad **Start** bij **Stijlen** op **Opmaken als tabel** en kies een tabelstijl. Druk in het pop-upvenster dat verschijnt op **OK**.
 - b Excel beschouwt het bereik A1 : H155 nu als een tabel met gegevens. In de cellen met de kolomnamen staan nu knopjes. Daarmee kun je de gegevens sorteren. Hoe lang is de grootste leerling? En hoe lang is de kortste?
 - c Met behulp van de knopjes kun je de gegevens ook filteren. Druk op het knopje naast geslacht en klik op het vinkje bij de letter **m** en druk op **OK**. Je ziet nu alleen nog gegevens over meisjes in de tabel en op het knopje verschijnt een filtersymbool.
 - d Controleer met behulp van filters dat er acht 15-jarige meisjes zijn met een lengte van 168 cm.
 - e Zet de filters stuk voor stuk weer uit door telkens een vinkje te zetten bij **Alles selecteren** en op **OK** te drukken. Het filtersymbool mag op geen enkel knopje meer voorkomen.
- 3
 - a Selecteer weer het bereik A1 : H155 zoals bij opdracht 2a. Klik in het tabblad **Formules** bij **Gedefinieerde namen** op **Maken o.b.v. selectie** en druk op **OK**.
 - b Selecteer de gegevens over de lengte van de leerlingen door in het naamvak **lengte** te typen en op **Enter** te drukken.

Enquête 4 vwo

Wat is je geslacht? m / v*
Wat is je leeftijd?
Wat is je lengte in centimeter?
Wat is je gewicht in kilogram?
Welk profiel heb je?
Wat is je gemiddeld cijfer over je profielvakken?
Ga je met plezier naar school?
1 nee 2 weinig 3 neutraal
4 behoorlijk 5 veel*
* Omcirkel wat van toepassing is.

naamvak

B2:D3	A	B	C	D	E
	leerling	geslacht	leeftijd	gewicht	lengte
2	1	m	15	70	190
3	2	m	15	55	170
4	3	m	16	60	170

A	B	C	D	E
leerling	geslacht	leeftijd	gewicht	lengte
	1 m	15	70	190

- ☒ (Alles selecteren)
- ☐ m
- ☒ v

Door het definiëren van namen ben je in het vervolg in staat om veel simpeler bereiken in te voeren. In plaats van D2:D155 kun je nu gewicht typen.

Een =-teken in een cel geeft aan dat er een functie of een berekening volgt.

- 4
- a Typ in cel A156 `=aantal(leerling)` en druk op **Enter**.
Wat is de betekenis van het getal dat verschijnt?
 - b Typ in cel B156 `=aantal(geslacht)` en druk op **Enter**.
Waarom krijg je het getal 0 als resultaat?
 - c Verander de formule in cel B156 in `=aantalarg(geslacht)`.
 - d Tel ook het aantal niet-lege cellen in de overige kolommen en verklaar de verschillen.

De functie **AANTAL(*b*)** telt het aantal cellen in bereik *b* waar een getal in staat.

De functie **AANTALARG(*b*)** telt het aantal niet lege cellen in bereik *b*.

- 5
- Je gaat nu een nieuw werkblad openen voor berekeningen en grafieken bij de data op werkblad 1. Daarmee voorkom je dat je per ongeluk gegevens wist of verandert.



- a Open een nieuw werkblad door linksonder op **Blad2** te klikken.
- b Typ in het bereik B1 : D1 achtereenvolgens **lengte**, **gewicht**, **leeftijd** en in het bereik A2 : A4 **minimum**, **maximum**, **gemiddelde**.
- c Pas de breedte van bijvoorbeeld kolom A aan door te dubbelklikken op de grens tussen de twee kolomaanduidingen A en B.
- d Typ in cel B2 `=min(lengte)`, in cel B3 `=max(lengte)` en in cel B4 `=gemiddelde(lengte)`.
- e Het heeft weinig zin om een gemiddelde lengte in meer dan één decimaal weer te geven.
Klik met de rechter muisknop op cel B4, kies bij **Celeigenschappen** voor **Getal** en stel het aantal decimalen in op 1.
- f Vul op dezelfde manier de tabel verder in.



Met de functies **MIN(*b*)**, **MAX(*b*)** en **GEMIDDELDE(*b*)** kun je de minimale, de maximale en de gemiddelde waarde van bereik *b* berekenen.

- 6
- De begrippen modus, mediaan, eerste en derde kwartiel, spreidingsbreedte, zijn in Excel gemakkelijk te berekenen.

- a Typ in het bereik A5 : A8 achtereenvolgens **modus**, **mediaan**, **Q1** en **Q3**.
- b Typ in cel B5 `=modus(lengte)`,
in cel B6 `=mediaan(lengte)`,
in cel B7 `=kwartiel(lengte;1)` en
in cel B8 `=kwartiel(lengte;3)`.
- c Vul de tabel verder in voor het gewicht en de leeftijd.

Met de functie **MODUS(*b*)** bereken je de modus en met de functie **MEDIAAN(*b*)** de mediaan van de getallen in het bereik *b*.
Met **KWARTIEL(*b*;1)** en **KWARTIEL(*b*;3)** bereken je het eerste en derde kwartiel.

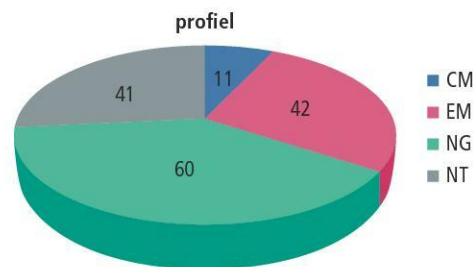
- 7
 - a Typ in cel A9 **spreadingsbreedte** en in cel A10 **kwartielafstand**. Pas de breedte van kolom A weer aan.
 - b Bereken de spreidingsbreedte van de lengte van de leerlingen door in cel B9 **=B3-B2** te typen.
 - c Bereken de kwartielafstand van de lengte van de leerlingen door in cel B10 **=B8-B7** te typen.
 - d Bereken ook de spreidingsbreedte en de kwartielafstand van het gewicht en de leeftijd van de leerlingen.
 - e Een boxplot tekenen met Excel is niet eenvoudig. Teken zelf bij de variabelen lengte en gewicht een boxplot.
- 8
 - a Typ in de cellen A12 en B12 achtereenvolgens **profiel**, **aantal** en in het bereik A13 : A16 de profielen **CM**, **EM**, **NG** en **NT**.
 - b Typ in cel B13 **=aantal.als(profiel;"CM")**.
 - c Bereken op dezelfde manier de aantallen leerlingen met de profielen EM, NG en NT.

	<i>lengte</i>	<i>gewicht</i>	<i>leeftijd</i>
minimum	156	40	14
maximum	200	90	17
gemiddelde	174,0	60,6	15,4
modus	168	55	15
mediaan	173	59	15
Q1	167	55	15
Q3	180	65	16
spreadingsbreedte	44	50	3
kwartielafstand	13	10	1

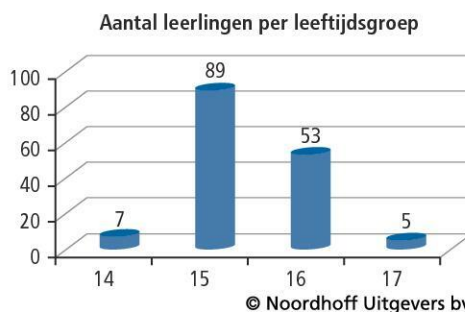
Met de functie **AANTAL.ALS(b; c)** bereken je van bereik *b* het aantal cellen dat voldoet aan criterium *c*. Het criterium *c* moet tussen dubbele aanhalingstekens gezet worden.

Met Excel kun je mooie diagrammen maken. Die diagrammen kun je in een verslag in Word plaatsen met behulp van kopiëren en plakken.

- 9
 - a Selecteer het bereik A12 : B16. Klik op het tabblad **Invoegen** bij de categorie **Grafieken** op **Cirkel** en kies een soort cirkeldiagram.
 - b Maak het cirkeldiagram zoals hiernaast op met behulp van de tabbladen **Ontwerpen**, **Indeling** en **Opmaak** van **Hulpmiddelen voor grafieken**.
- 10
 - a Typ in de cellen A18 en B18 **leeftijd** en **aantal** en in het bereik A19 : A22 de leeftijden **14**, **15**, **16** en **17**.
 - b Vul de waarden in het bereik B19 : B22 in met behulp van de functie **AANTAL.ALS()**.
 - c Selecteer het bereik B18 : B22, klik op het tabblad **Invoegen** bij **Grafieken** op **Kolom**, kies bij **Cilinder** voor **Gegroepeerde cilinder**.
 - d Bij de horizontale as staan nog niet de juiste getallen. Klik met de rechter muisknop ergens binnen het grafiekgebied en kies voor **Gegevens selecteren**. Druk bij **Horizontale aslabels** op **Bewerken**, selecteer in je werkblad het bereik A19 : A22 en druk twee keer op **OK**.
 - e Verwijder de legenda door erop te klikken en vervolgens op **Del** te drukken.
 - f Pas de grafiektitel aan.



⚠ Als je een staafdiagram of een lijndiagram wilt maken, selecteer je alléén de kolommen met de aantallen (of de frequenties).



Met de functie AANTAL.ALS($b; c$) kun je aan één bereik één criterium opleggen, maar als je bijvoorbeeld wilt weten hoeveel jongens kleiner zijn dan 175 cm, heb je de meer dan één bereik en meer dan één criterium nodig.
Met de functie AANTALLEN.ALS($b_1; c_1; b_2; c_2; \dots$) kun je zoveel bereiken en bijbehorende criteria gebruiken als nodig is.

- 11 a Typ in het bereik A24 : C24 achtereenvolgens lengte kleiner dan, m, v en in het bereik A25: A30 155, 165, 175, 185, 195 en 205.
b Typ in cel B25 =aantallen.als(lengte;"<155";geslacht;"m").
c Bereken op dezelfde manier de aantallen jongens in het bereik B26 : B30.
d Bereken ook de bijbehorende aantallen meisjes in het bereik C25 : C30.

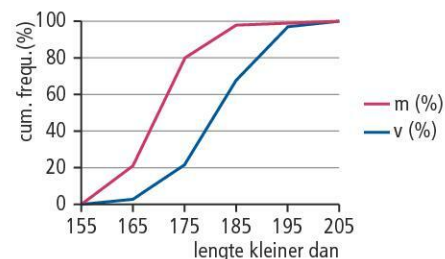
<i>lengte kleiner dan</i>	<i>m</i>	<i>v</i>
155	0	0
165	2	18
175	15	68
185	47	83
195	67	84
205	69	85

Het is lastig om de aantallen jongens en meisjes die kleiner zijn dan bijvoorbeeld 185 cm te vergelijken, omdat de totale aantallen jongens (69) en meisjes (85) verschillend zijn. Dan is het handig om over te gaan op percentages.

- 12 a Typ in het bereik A32 : C32 achtereenvolgens lengte kleiner dan, m (%), v (%) en kopieer de inhoud van het bereik A25 : A30 naar het bereik A33 : A38.
b Typ in de cel B33 =B25/69*100 en stel de weergave van de cel in op een geheel getal.
c Bereken op dezelfde manier de overige percentages jongens en meisjes.

- 13 a Selecteer het bereik A32 : C38. Kies in het tabblad **Invoegen** bij de categorie **Grafieken** voor **Spreiding** en kies **Spreiding met rechte lijnen**.
b Klik met de rechter muisknop op één van de getallen bij de horizontale as en kies in het popupvenster voor **As opmaken**. Stel de as in zoals boven de grafiek is aangegeven.
c Stel de verticale as in met vast minimum 0, vast maximum 100 en vaste primaire eenheid 20.
d Klik in **Hulpmiddelen voor grafieken** bij **Indeling** op **Astitels**, zet bij de horizontale as de titel *lengte kleiner dan* en zet bij de verticale as de titel *cum.frequ.(%)*.

Minimum: ☐ Automatisch ☒ Vast 155,0
Maximum: ☐ Automatisch ☒ Vast 205,0
Primaire eenheid: ☐ Automatisch ☒ Vast 10,0
Secundaire eenheid: ☒ Automatisch ☐ Vast 2,0

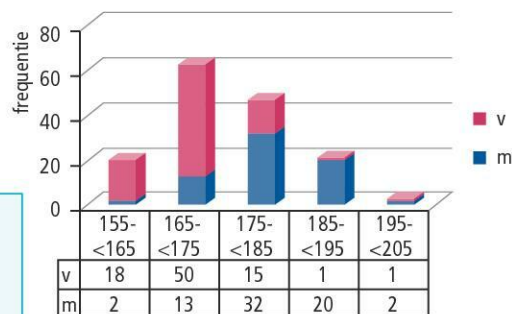


- 14** Met behulp van de gegevens uit de tabel uit opdracht 13 is eenvoudig een klassenindeling te maken.
- Typ in het bereik A40 : C40 achtereenvolgens **lengte**, **m**, **v** en in het bereik A41: A45 de klassen 155-<165, 165-<175, ..., 195-<205.
 - Typ in cel B33 =B26-B25.
 - Bereken op dezelfde manier de frequenties voor de overige klassen.
 - Selecteer het bereik A40 : C45. Kies in het tabblad **Invoegen** bij de categorie **Grafieken** voor **Kolom** en kies voor **Gestapelde kolom in 3D**.
 - Maak het diagram op met behulp van het tabblad **Ontwerpen** van **Hulpmiddelen voor grafieken**.

In de volgende opdrachten ga je op grond van de gegevens over de 4 vwo leerlingen antwoord geven op de vragen:

- Halen de jongens gemiddeld hogere cijfers dan de meisjes?
- Halen leerlingen die met plezier naar school gaan gemiddeld hogere cijfers?

<i>lengte</i>	<i>m</i>	<i>v</i>
155-<165	2	18
165-<175	13	50
175-<185	32	15
185-<195	20	1
195-<205	2	1



- 15**
- Open een nieuw werkblad door linksonder op Blad3 te klikken en typ in de cellen B1 en C1 achtereenvolgens **m**, **v** en in cel A2 gemiddeld cijfer.
 - Typ in cel B2 =gemiddelde als(geslacht;"m";cijfgem). Stel de weergave van de cel in op één decimaal.
 - Bereken ook het gemiddelde cijfer van de meisjes.
 - Is er een duidelijk verschil tussen de gemiddelde cijfers van de jongens en de meisjes?
- 16**
- Typ in cel B4 gemiddeld cijfer. Selecteer het bereik B4 : C4 en druk in het tabblad **Start** bij **Uitlijning** op de knop **Samenvoegen en centreren**.
 - Typ in het bereik A5 : C5 mate van plezier, **m**, **v** en in het bereik A6 : A10 de cijfers 1, 2, 3, 4 en 5.
 - Stel de weergave van het bereik B6 : C10 in op één decimaal en typ in cel B6 =gemiddelden.als(cijfgem;geslacht;"m";plezier"1").
 - Vul de rest van de tabel in.
 - Is er bij de jongens of bij de meisjes een verband te constateren tussen de mate waarin ze met plezier naar school gaan en de gemiddelde cijfers?

Met de functie

GEMIDDELDE.ALS(b_1 ; c_1 ; b) kun je het gemiddelde van de getallen uit het bereik b berekenen die voldoen aan het criterium c_1 voor het bereik b_1 .

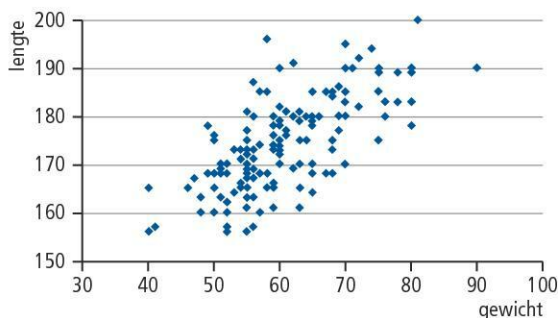
Bij meer criteria en bereiken gebruik je de functie

GEMIDDELDEN.ALS(b ; b_1 ; c_1 ; ...).

Hierbij is b het bereik waarvan het gemiddelde berekend moet worden. Je kunt de rij bereiken en criteria zo lang maken als nodig is.

<i>mate van plezier</i>	<i>gemiddeld cijfer</i>	
	<i>m</i>	<i>v</i>
1	7,2	7,5
2	7,2	7,5
3	7,4	7,4
4	7,3	7,3
5	7,1	7,1

- 17 a Selecteer cel A11, selecteer het tabblad **Invoegen** en kies bij de categorie **Grafieken** voor **Spreiding** en **Spreiding met alleen markeringen**.
- b Klik met de rechtermuisknop binnen het grafiekgebied en kies voor **Gegevens selecteren**. Typ in het vak **Gegevensbereik van de grafiek** het bereik **gewicht:lengte** en druk op **OK**.
- c Stel de assen in zoals in de figuur.
- d Breng een lijn in de figuur aan door op het tabblad **Indeling** van **Hulpmiddelen voor grafieken** te drukken op **Trendlijn** en te kiezen voor **Lineaire trendlijn**.
- e De trendlijn geeft de beste benadering voor het verband tussen het gewicht en de lengte van de leerlingen. Wat betekent het voor een leerling als zijn stip in het spreidingsdiagram onder de trendlijn ligt?



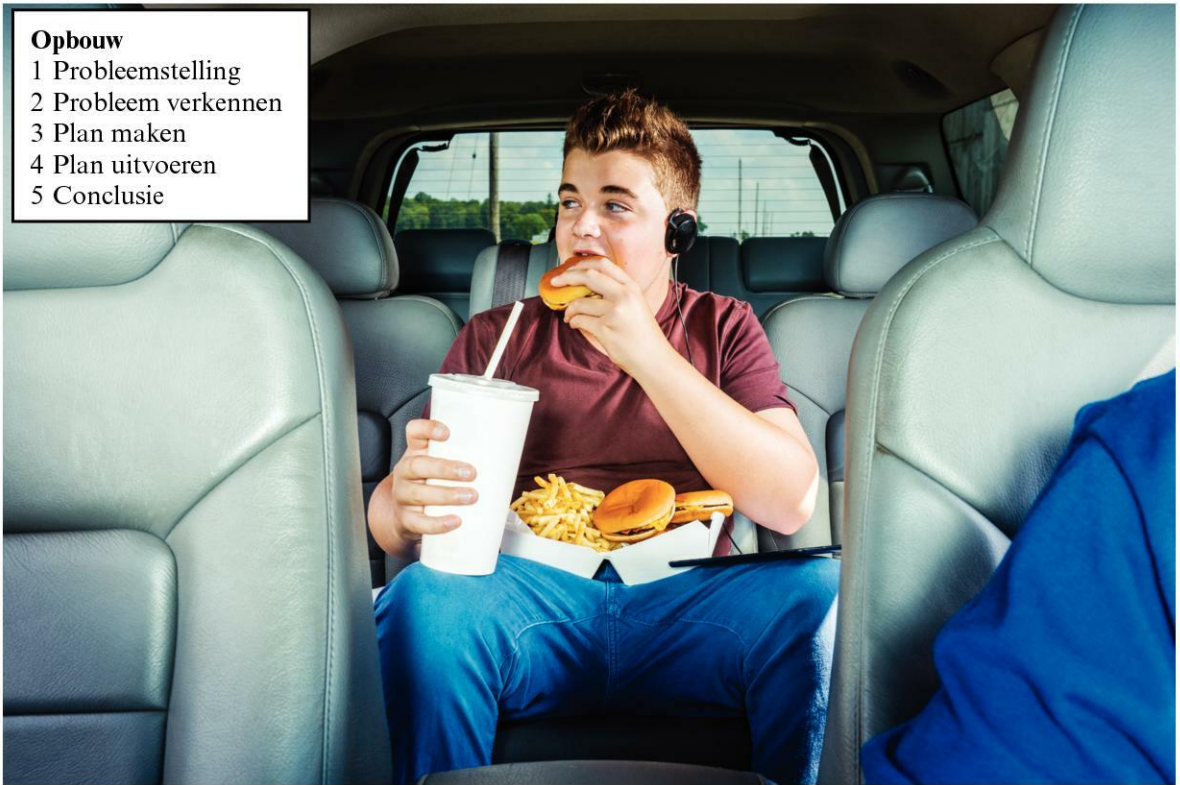
- 18 De Body Mass Index (BMI) is een maat die gebruikt wordt om te berekenen of iemand overgewicht heeft. De formule waarmee je de BMI berekent is $BMI = \frac{\text{gewicht}}{\text{lengte}^2}$ met het gewicht in kilogram en de lengte in meter. De tabel geeft de BMI-grenzen voor jongens en meisjes uit de 4 vwo klassen.

BMI	ernstig ondergewicht	ondergewicht	gezond gewicht	overgewicht	ernstig overgewicht
m	< 15,1	15,1 – < 17,5	17,5 – < 23,9	23,9 – < 28,9	≥ 28,9
v	< 15,5	15,5 – < 17,9	17,9 – < 24,4	24,4 – < 29,4	≥ 29,4

- a Ga naar het werkblad met de gegevens door linksonder op Blad1 te klikken en typ in cel I1 **BMI**.
- b Typ in cel I2 **=gewicht/(lengte/100)^2** en druk op **Enter**. Stel de weergave van de cellen in op één decimaal.
- c Selecteer het bereik I1 : I155 en voeg de naam in met behulp van **Maken o.b.v. selectie** op het tabblad **Formules**.
- d Sorteert de gegevens op grootte van de BMI van laag naar hoog. Verwijder de twee BMI-waarden waar 0,0 staat. Waarom is dat nodig?
- e Ga weer terug naar Blad3 en typ in het bereik A12: F12 achtereenvolgens in **BMI**, **ernstig ondergewicht**, **ondergewicht**, **gezond gewicht**, **overgewicht** en **ernstig overgewicht**.
- f Typ in de cellen A13 en A14 **m** en **v**.
- g Typ in cel B13 **=aantallen.als(geslacht;"m";BMI;"<15,1")**.
- h In cel C13 komt te staan **=aantallen.als(geslacht;"m";BMI;">=15,1";BMI;"<17,5")**.
- i Vul de rest van de tabel in.
- j Is overgewicht een belangrijk probleem bij deze groep 4 vwo leerlingen? Wat dan wel?

Opbouw

- 1 Probleemstelling
- 2 Probleem verkennen
- 3 Plan maken
- 4 Plan uitvoeren
- 5 Conclusie



In artikelen, tijdschriften en kranten kom je vaak uitspraken tegen die gebaseerd zijn op statistisch onderzoek. Hoe dat statistisch onderzoek is uitgevoerd, kun je uit dat artikel vaak niet opmaken. Het komt zelfs voor dat de uitspraken helemaal niet gebaseerd zijn op een statistisch onderzoek, maar alleen de mening van de schrijver vertegenwoordigen.

15 procent van de jongeren heeft overgewicht

Ongeveer 15 procent van de jongeren tussen de 2 en 25 jaar kampt met overgewicht. Jongeren in huishoudens met een lager inkomen hebben bovendien vaker overgewicht, blijkt uit onderzoek van het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) over het jaar 2012.

3 procent van de jongeren had in 2012 last van ernstig overgewicht. De overgewichtscijfers zijn daarmee al een paar jaar stabiel. Ook in 2010 leed rond de 15 procent van de ondervraagde kinderen en jongeren tot 25 jaar aan overgewicht, het ernstige overgewicht lag toen op 3,4 procent.

Opvallend is dat van de groep tussen 18 en 25 jaar bijna 20 procent te zwaar is. In de groep tussen 2 en 18 jaar ligt dat aantal beduidend lager: tussen de 12 en 13 procent. Bij de groep met extreem overgewicht ligt de piek juist bij de jongste kinderen tussen 2 en 9 jaar: 3,6 procent lijdt eraan.

- 1 Het artikel '15 procent van de jongeren heeft overgewicht' komt uit de NRC.
 - a Lees het artikel door.
 - b Waarom mag je ervan uitgaan dat de uitspraak '15 procent van de jongeren heeft overgewicht' gebaseerd is op gedegen statistisch onderzoek?
 - c Wat was bij dit onderzoek de populatie?
 - d Waarom mogen we in dit geval aannemen dat niet de gehele populatie onderzocht is maar dat de conclusie gebaseerd is op een steekproef?
 - e Omdat het onderzoek door het CBS is uitgevoerd, mag je aannemen dat de steekproef voldoende groot, aselekt en representatief was.
Vertel in je eigen woorden wat met aselekt en representatief wordt bedoeld.



Muziekles maakt jonge kinderen slimmer

Jonge kinderen die muziekles krijgen, ontwikkelen een beter geheugen dan leeftijdgenootjes die hiervan verstoken zijn. Dit blijkt uit een Canadees onderzoek dat vandaag is gepubliceerd in het neurologische vakblad *Brain*. De Canadese wetenschappers onderzochten een jaar lang twaalf kinderen tussen de vier en zes jaar oud. De helft van hen was recent gestart met muziekles (vijf kregen vioolles, één pianoles) op een Suzuki muziekschool, de anderen hadden geen muziekles. De kinderen ondergingen binnen een jaar viermaal een muziek- en een geheugen-test. Degenen die gedurende het jaar muziekles kregen, scoorden beter op beide tests. Volgens de onderzoekers komt dit omdat muziekles invloed heeft op de manier waarop de hersenen informatie verwerken en opslaan.

- 2 Het artikel 'Muziekles maakt jonge kinderen slimmer' werd gepubliceerd in het weekblad Elsevier.
 - a Lees het artikel door.
 - b Als je uitgaat van de titel vormden 'jonge kinderen' de populatie van het onderzoek en was de onderzochte groep een steekproef.
Hoe groot was de steekproef bij dit onderzoek?
 - c Is op basis van het artikel na te gaan of er sprake was van een aselechte en representatieve steekproef?
 - d Geef je mening over dit onderzoek en de conclusie die eruit getrokken is.

Probleemstelling en probleem verkennen

De bedoeling is dat je een statistisch onderzoek gaat uitvoeren. Bij het kiezen van een onderwerp moet je er op letten dat het statistisch onderzoek dat je gaat doen haalbaar is. De onderzoeksvraag 'Hoe maken leerlingen gebruik van sociale media?' is een voorbeeld van een onderzoeksvraag die een veel te groot gebied bestrijkt. Voorbeelden van betere onderzoeksvragen zijn:

- Welke sociale media zijn populair?
- Hoeveel tijd wordt er gemiddeld besteed aan de sociale media?
- Is er verschil in populariteit van de verschillende sociale media tussen de diverse afdelingen van de school?
- Is er een verschil te ontdekken in de tijd die besteed wordt aan sociale media tussen de leerlingen met een maatschappijprofiel en leerlingen met een natuurprofiel?



- 3 Kies een onderwerp die je statistisch wilt gaan onderzoeken. Formuleer een paar onderzoeksvragen. Let er op dat je onderzoek haalbaar is.

Plan maken en plan uitvoeren

Stel je hebt gekozen voor de onderzoeksvraag: ‘Is er een verschil te ontdekken in de tijd die besteed wordt aan sociale media tussen de leerlingen met een maatschappijprofiel en leerlingen met een natuurprofiel?’.

Je zult je vervolgens moeten afvragen wat de onderzoekspopulatie zal zijn. Kies je als populatie de 4 vwo leerlingen van je school, dan is het misschien niet eens nodig om een steekproef te gebruiken, maar kun je de gehele populatie bij het onderzoek betrekken.



- 4
- Bedenk wat de populatie bij jouw statistisch onderzoek is.
 - Kun je de gehele populatie bij het onderzoek betrekken of ga je werken met een steekproef?
 - Als je werkt met een steekproef, bedenk dan hoe je de steekproef gaat samenstellen.

De volgende stap is het opstellen van een vragenlijst.

Bedenk daarbij dat:

- De vragen van belang moeten zijn voor je onderzoek.
- De vragen moeten kort en duidelijk zijn.
- De antwoorden op de vragen moeten goed verwerkbaar zijn.

- 5 Bij de vraag ‘Hoeveel tijd wordt er gemiddeld besteed aan de sociale media?’ hebben Pieter en Lois allebei een vragenlijst gemaakt.

Pieter

Hoeveel tijd besteed jij aan sociale media? uur

Lois

Omcirkel hoeveel tijd jij gemiddeld per dag besteedt aan sociale media.

0-1 uur	1-2 uur	2-3 uur
3-4 uur	4-5 uur	>5 uur

- Welke vragenlijst vind jij het beste? Waarom?
- Zowel bij Pieter als bij Lois ontbreekt iets. Er staat niet bij wat er onder sociale media verstaan wordt. Maak een betere vragenlijst.

- 6 Maak een vragenlijst bij het onderwerp dat je bij opdracht 3 gekozen hebt.
- 7 Voer je statisch onderzoek uit. Verzamel en verwerk de data.

Conclusie

Het laatste deel van je statistisch onderzoek is het trekken van conclusies op grond van de data.

- 8
 - a Verwerk de gegevens op zo'n manier dat je de onderzoeksvraag kunt beantwoorden.
 - b Trek één of meer conclusies uit je onderzoek.
- 9 Schrijf een artikel waarbij je de belangrijkste conclusie uit je onderzoek als titel gebruikt. Begin je artikel met een beschrijving van de opzet van je onderzoek. Geef daarna een verslag over de uitvoering van je onderzoek. Vergeet niet om te vermelden tegen welke problemen je aangelopen bent tijdens je onderzoek. Geef aan welke conclusies je uit je onderzoek hebt getrokken en op grond waarvan je dat gedaan hebt. Illustreer je artikel met tabellen en diagrammen.

De conclusies die je uit je onderzoek getrokken hebt, hebben alleen betrekking op de bijbehorende populatie. Het kan zijn dat deze conclusies ook gelden voor een grotere populatie. Daarvoor moet je je afvragen of jouw steekproef ook representatief is voor die grotere populatie. Je zult de argumenten daarvoor dan in je artikel moeten vermelden. Vaak is het zo dat statistisch onderzoek niet oplevert wat de onderzoeker gehoopt had te vinden. Wel is het zo dat elk statistisch onderzoek altijd weer nieuwe onderzoeksvragen oproept. Je zou de vragen die jouw onderzoek oplevert ook in je artikel kunnen vermelden.



- A** absoluut 101
aflezen van gegevens uit een tabel of grafiek 219
afnemende daling 72
afnemende stijging 72
- B** balansmethode 60
beginhoeveelheid 178
boomdiagram 134
boxplot 100
breuken delen 20
breuken gelijknamig maken 18
breuken optellen en aftrekken 18
breuken vereenvoudigen 12
breuken vermenigvuldigen 12, 19
- C** cirkeldiagram 100
combinatie 153
constant 70
constante daling 72
constante stijging 72
coördinaten van een snijpunt berekenen 213
- D** dalen 70
data 103
data weergeven 111
dataset 103
decimale getallen 22
- E** eerstegraads vergelijking 60
evenredig 66
exponentieel 178
exponentiële formule 178
exponentiële formule opstellen 189
exponentiële groei 185
extreme waarden 52
- F** factor 178
faculteit 141
faculteitsboom 141
formule herleiden 63
frequentie 106
- G** gebied 230
gemiddelde snelheid 31
grafiek tekenen 215
grenslijn 226
groepen vergelijken 118
groefactor 178
groefactor per tijdseenheid 185
groeipercentage omrekenen 194
- H** halfvlak 226
hellingsgetal 57
- K** kruisproducten 15
kruistabel 116
kwalitatieve variabele 105
kwantitatieve variabele 105
- L** lijndiagram 100
lineair verband 181
lineaire formule opstellen 59
lineaire ongelijkheid 226
lineaire vergelijking 60
- M** machtsboom 140
maximum 70
minimum 70
- N** negatieve exponenten 196
nulpunt 52
- O** omgekeerd evenredig 68
ongelijkheid oplossen 79
onregelmatige boomdiagram 137
- P** permutatie 144
plotten 50
populatie 103
procenten 26
puntenwolk 114
- R** recht evenredig 66
regelmatige boomdiagram 137
relatief 101
richtingscoëfficiënt 57
routes in een rooster 149
- S** schetsen 50
spreidingsdiagram 114
staafdiagram 100
standaardvorm 34, 35
statistiek 103
statistisch onderzoek 103
statistisch verband 114
statistische uitspraken 103
statistische variabelen 103
startgetal 57
stijgen 70
substitueren 64

- T** takken 134
tekenen 50
telmodel kiezen 156
toenemende daling 72
toenemende stijging 72
toppen 70
- U** uitdrukken in 63
- V** vensterinstelling 51
verdelen in een bepaalde verhouding 13
vergelijking oplossen 75
vergelijking van een lijn 223
verslag 53
volgorde van berekeningen 13
- W** waarde 106
wetenschappelijke notatie 34

Ontwerp omslag G2K, Groningen/Amsterdam

Fotografie omslag Getty Images

Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer

Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht

Technisch tekenwerk Integra Software Services, India

Beeldresearch Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording

Google Earth: p. 6, 148

Stocktrek Images/Getty Images, Londen: p. 10-11

Geertrui Schaberg, Mildam: p. 14

Daliz, Den Haag: p. 15, 18, 48-49, 109ro, 147o, 170o, 269o

Shutterstock, New York: p. 17, 22, 24, 28, 29, 30r, 36, 37, 38, 44, 46,

47, 58, 61, 66, 73, 76, 78, 81, 92o, 104b, 105b, 109, 121, 128b, 129,

132-133, 142, 143, 146, 147b, 154, 157, 164, 166, 176-177, 180, 184,

186, 190, 192, 195, 196, 200, 201, 206, 207, 208, 209, 219, 223, 225,

232, 233, 235, 243, 251, 259, 260, 261, 272, 276, 277, 279, 280, 282, 285

Olimpik/NurPhoto/Getty Images, Londen: p. 25

DPA/ Picture Alliance/Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 26, 32

SIGMA-ELEKTRO GmbH, Neustadt: p. 30l

Tim Williams/Getty Images, Londen: p. 33

Floriada Today, Florida: p. 54-55

iStockphoto/Getty Images, Londen: p. 62, 103, 119, 144, 159, 183,

188, 199, 217, 218, 228, 249, 262-263, 268, 278, 283

David Stockman/Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 70

Visual China Group/Getty Images, Londen: p. 79

Marcel Antonisse/ANP Photo, Den Haag: p. 88

Nationale Beeldbank/Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 89

Alamy/Image Select, Wassenaar: p. 90, 92-93, 92b, 106, 117, 122,

170o, 170-171, 187, 210-211, 244-245

LightRocket/Getty Images, Londen: p. 98-99

Jerry Lampen/ANP Photo, Den Haag: p. 104o

Frank Wijn/Getty Images, Londen: p. 105o

Social work/Hogeschool van Arnhem en Nijmegen: p. 111

William Hoogteyling/Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 116, 222

Iconica/Getty Images, Londen: p. 118

Sol de Zuasnar Brebbia/Getty Images, Londen: p. 128o

Piet den Blanken/Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 140

Olaf Kraak/Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 156

Flip Fransen/Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 191

Remco de Waal/ANP Photo, Den Haag: p. 194

J.W. van Aalst, www.opentopo.nl: p. 226

Welcome Images, Londen: p. 244

Cultura/Getty Images, Londen: p. 250-251

Fertnig/Getty Images, Londen: p. 258

Ed van Alem, Oeffelt: p. 269b

Jan de Groen/Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 284



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89225-8



9 789001 892258