LEERBOEK | WISKUNDE A | 12E EDITIE | HAVO DEEL 2

MODERNE WISKUNDE A

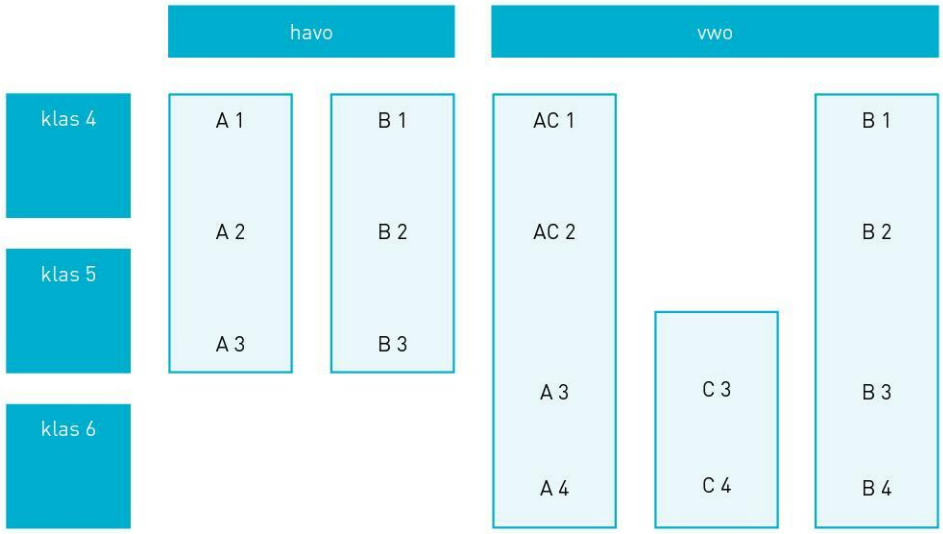
Noordhoff

12e editie

Moderne Wiskunde

havo A deel 2

Serieoverzicht Tweede Fase



Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlenen.

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication

ISBN 978-90-01-89226-5

© Noordhoff Uitgevers bv

12e editie

Moderne Wiskunde

havo A deel 2

Bert Boon
Ferdi Doddema
Wim Doekes
Gerben van der Hoek
Ilse de Jong
Gerard van Proosdij
Rindert Reijenga
Geertrui Schaberg
Ron Sinkeldam
Carolijn Tacken

Noordhoff

7 Statistische verwerking (met ICT) 6

Voorkennis 8
7.1 Klassenindeling 10
7.2 Frequentieverdelingen 14
7.3 Centrummaten 18
7.4 Spreidingsmaten 22
7.5 Cumulatieve verdelingen 26
7.6 Gemengde opdrachten 30
Onderzoeksopdrachten 31
Samenvatting 32
Test jezelf 36
Extra oefening 38

7 Statistische verwerking (zonder ICT) 40

Voorkennis 42
7.1 Klassenindeling 44
7.2 Frequentieverdelingen 48
7.3 Centrummaten 52
7.4 Spreidingsmaten 56
7.5 Cumulatieve verdelingen 60
7.6 Gemengde opdrachten 64
Onderzoeksopdrachten 65
Samenvatting 66
Test jezelf 70
Extra oefening 72

8 Grafieken en veranderingen 74

Voorkennis 76
8.1 Toenamediagrammen tekenen 78
8.2 Werken met toenamediagrammen 82
8.3 Gemiddelde verandering 86
8.4 Interpoleren 90
8.5 Extrapoleren 94
8.6 Trendlijn 98
8.7 Gemengde opdrachten 102
Onderzoeksopdrachten 103
Samenvatting 104
Test jezelf 108
Extra oefening 110

Vaardigheden 4 112
Rekenen 114
Wortels en machten 115
Herleiden 116
Vergelijkingen en ongelijkheden 117

9 Lineaire en exponentiële formules 118

Voorkennis 120
9.1 Lineaire verbanden 122
9.2 Gebieden 126
9.3 Exponentiële verbanden 130
9.4 Verdubbelingstijd en halveringstijd 134
9.5 Logaritmische schaalverdeling 138
9.6 Gemengde opdrachten 142
Onderzoeksopdrachten 143
Samenvatting 144
Test jezelf 148
Extra oefening 150

© Noordhoff Uitgevers bv

10 Verdelingen (met ICT) 152

Voorkennis 154
10.1 Normale verdeling 156
10.2 Rekenen met de vuistregels 160
10.3 Steekproevenverdeling van een proportie 164
10.4 Betrouwbaarheidsinterval voor een proportie 168
10.5 Steekproevenverdeling van een gemiddelde 172
10.6 Betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde 176
10.7 Gemengde opdrachten 180
Onderzoeksopdrachten 181
Samenvatting 182
Test jezelf 186
Extra oefening 188

10 Verdelingen (zonder ICT) 190

Voorkennis 192
10.1 Normale verdeling 194
10.2 Rekenen met de vuistregels 198
10.3 Steekproevenverdeling van een proportie 202
10.4 Betrouwbaarheidsinterval voor een proportie 206
10.5 Steekproevenverdeling van een gemiddelde 210
10.6 Betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde 214
10.7 Gemengde opdrachten 218
Onderzoeksopdrachten 219
Samenvatting 220
Test jezelf 224
Extra oefening 226

Vaardigheden 5 228
Breuken 230
Getallen 230
Herleiden 231
Grafieken 231
Toppen en snijpunten 233

Trefwoorden 234

Moderne Wiskunde

havo A deel 2

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Statistische verwerking (met ICT) 7

SE CE K

In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je al regelmatig bij data bijvoorbeeld een gemiddelde berekend of een boxplot getekend. Ook heb je klassenindelingen gemaakt en daarbij een gemiddelde berekend.

In dit hoofdstuk worden deze zaken herhaald en uitgebreid met nieuwe statistische begrippen. Je gaat daarbij verschillende groepen met elkaar vergelijken. Aan het eind van het hoofdstuk leer je hoe je data kunt weergeven in een frequentiepolygoon en in een somfrequentiepolygoon.

Het onderdeel statistiek wordt in H10 en in deel 3 uitgebreid en afgerond.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 19
- *Ordenen en structureren* opdracht 2
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 33

Bij diverse opdrachten in dit hoofdstuk is gebruik gemaakt van data die door het Centraal Bureau voor de Statistiek beschikbaar zijn gesteld.

© Noordhoff Uitgevers bv

V1 In de tabel staan de leeftijden van de jeugdleden van een handbalvereniging gesplitst op geslacht.

leeftijd	9	10	11	12	13	14	15	16	17	totaal
frequentie meisjes	3	6	8	11	7	9	12	4	7	67
frequentie jongens	6	11	9	5	4	10	9	6	10	70

a Hoeveel jeugdleden zijn jonger dan 12 jaar?
b Hoeveel procent van de jeugdleden is jonger dan 12 jaar?
c Welke leeftijd bij de meisjes heeft de grootste frequentie?
En welke leeftijd bij de jongens?
d Volgens Simone zijn er 33 meisjes jonger en 33 meisjes ouder dan dat ze zelf is.
Hoe oud is Simone?
e Bereken de gemiddelde leeftijd van de jeugdleden.

Theorie

Van een rij waarnemingen die op volgorde van klein naar groot staan, heet de middelste waarneming de mediaan. Bij een even aantal waarnemingen is de mediaan het gemiddelde van de middelste twee waarnemingen.
De waarneming met de grootste frequentie noem je de modus.

Voorbeeld 1

Léon scoorde bij tien basketbalwedstrijden 12, 13, 15, 13, 16, 14, 12, 14, 15 en 13 punten.
Geef de mediaan en de modus.

Oplossing
Het aantal punten van klein naar groot is:
12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 16
De mediaan is (13 + 14) : 2 = 13,5 punten.
De modus is 13 punten.

Voorbeeld 2

Scott scoorde bij negen basketbalwedstrijden 18, 22, 19, 21, 13, 17, 20, 17 en 22 punten.
Geef de mediaan en de modus.

Oplossing
Het aantal punten van klein naar groot is:
13, 17, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 22
De mediaan is 19 punten.
Er is geen modus.

V2 In de tabel zie je de eindcijfers van 109 leerlingen voor het vak economie.

cijfer	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	2	6	35	34	18	11	3

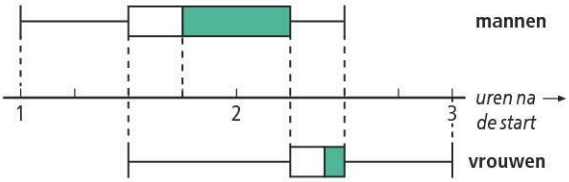
a Bereken het gemiddelde cijfer.
b Hoe groot is de mediaan?
c Welk cijfer is de modus?
d Hoeveel procent van de leerlingen heeft een onvoldoende?

© Noordhoff Uitgevers bv

V3 Van één boom zijn 59 kastanjes verzameld. De verdeling van de gewichten zie je in het steelbladdiagram. Vóór de streep staan de hele grammen, achter de streep de tiende grammen.

a Wat betekenen de drie nullen achter de acht?
b Hoeveel procent van de kastanjes heeft een gewicht van meer dan 9 gram?
c Hoe groot is het verschil in gewicht tussen de lichtste en de zwaarste kastanje?
d Hoe groot is de modus en hoe groot is de mediaan van de gewichten?

3	2 3
4	1 4 4 5
5	1 5 5 6 7 9
6	4 4 7 8 9 9 9
7	0 0 2 2 3 3 3 5 6 7 7 7 7
8	0 0 0 1 2 4 6 6 6 7 7 7 8 8 8 9 9
9	1 1 3 4 4 7 9 9 9
10	1



V4 In de boxplots zie je de resultaten van een veldloop over 20 km.

a Hoe groot is het verschil in tijd tussen de eerste man en de laatste man die over de finish ging?
b Leg uit hoe je in de boxplot kunt aflezen dat 25% van de mannen sneller was dan de snelste vrouw.
c Welke tijd was de mediaan bij de mannen?
d Hoeveel procent van de vrouwen had een tijd tussen 2:15 uur en 2:30 uur?
e Welke tijden behoren bij de 25% snelste vrouwen?
f Toen de langzaamste man over de finish kwam, waren er al 126 vrouwen over de finish.
Hoeveel vrouwen moesten daarna nog over de finish komen?

V5 In de dataset vind je de resultaten van een onderzoek naar de klanttevredenheid van een computerbedrijf.

a Hoeveel mensen hebben een scoreformulier ingevuld?
b Teken de boxplot van deze scores.
c Hoe hoog is de hoogste score? En hoe hoog is de laagste score?
d De bedrijfsleider besluit om de laagste score niet te gebruiken bij het beschrijven van de resultaten.
Welke reden kan hij daarvoor hebben?
e Teken een boxplot zonder de laagste score.
f Beschrijf de verschillen tussen de twee boxplots.

© Noordhoff Uitgevers bv

7.1 Klassenindeling

Je leert
- hoe je met een klassenindeling werkt

Leerroutes
- ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—3—4—5—6—U1

Op een punt waar de maximumsnelheid 30 km per uur is, wordt een snelheidsdisplay geplaatst. Dit display toont de automobilist zijn snelheid.
In de tabel staan de eerste 40 meetwaarden.
- Op welke manier kun je deze data het beste in beeld brengen?

32,1	35,1	29,3	34,2	42,8
36,3	42,8	31,3	36,5	30,1
30,5	28,7	33,7	33,3	36,4
38,2	40,7	44,2	39,1	33,9
34,1	31,7	35,5	30,4	42,8
27,9	34,4	40,7	38,4	36,7
33,4	37,3	28,1	34,6	40,7
31,8	32,3	32,2	35,4	38,3

1 H

In de frequentietabel zijn de data van de lengte van de jongens en de lengte van de meisjes in klassen ingedeeld.

a Waarom komt een lengte van 179,8 cm in de klasse 180-184?

b En in welke klasse komt een lengte van 164,4 cm?

c Wat is de kleinste lengte van een meisje die nog in de klasse 175-179 valt?

d Wat is de linker grens van de klasse 175-179? En wat is de rechter grens?

e Hoe breed is de klasse 155-159?

f Welk getal is het midden van de klasse 155-159?

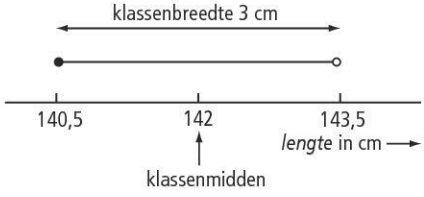
geslacht	m	v	
lengte	freq.	freq.	totaal
155-159	0	6	6
160-164	2	12	14
165-169	3	34	37
170-174	10	16	26
175-179	14	10	24
180-184	18	5	23
185-189	11	1	12
190-194	9	0	9
195-189	1	1	2
200-204	1	0	1
totaal	69	85	154

Theorie

Als een variabele veel verschillende waarden heeft, dan worden ze vaak ingedeeld in klassen. De **klassenbreedte** is de afstand tussen de grenzen van een klasse. Het **klassenmidden** ligt precies halverwege de linker grens en de rechter grens. Klassen worden vaak genoteerd met de klassengrenzen. Dit heet **intervalnotatie**. Bij de klasse [49,5; 59,5⟩ geeft de rechte haak aan dat de linker grens nog in de klasse valt en de punthaak geeft aan dat de rechter grens er net niet meer in valt. De intervalnotatie is eenduidig; bij allerlei andere notaties moet je goed opletten. Zo bevat de leeftijdsklasse 50-59 de leeftijden vanaf 50 jaar tot 60 jaar.

Voorbeeld

De klasse 141-143 kun je in de intervalnotatie schrijven als [140,5; 143,5⟩.
De klassenbreedte is 3 cm en het klassenmidden is 142 cm.



© Noordhoff Uitgevers bv

2 In de volgende situaties betekent de klasse 70-76 steeds iets anders.

a De administratie van een theater telt van elke voorstelling het aantal verkochte kaartjes.
Welke aantallen zitten in de klasse 70-76?

b Bij een onderzoek naar het gewicht van de leden van een atletiekvereniging wordt het gewicht afgerond op hele kg in klassen ingedeeld.
Leg uit dat bij de klasse 70-76 de intervalnotatie [69,5; 76,5⟩ hoort.

c Geef bij de situatie van opdracht b ook het klassenmidden en de klassenbreedte.

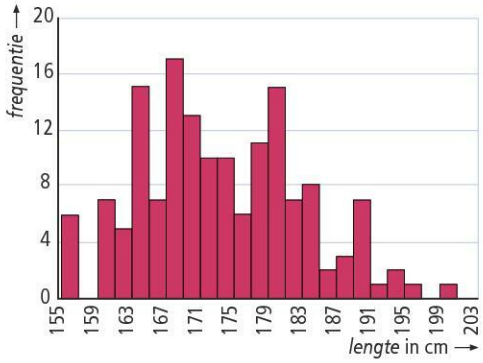
d Leg uit dat bij leeftijden in jaren het klassenmidden van de klasse 70-76 gelijk is aan 73,5 jaar.

e Geef de intervalnotatie bij de leeftijdsklasse 70-76.

f Hoe groot is de klassenbreedte van de leeftijdsklasse 70-76?

3 H

In de dataset staan van 154 leerlingen allerlei gegevens.
In de figuur is een staafdiagram getekend bij de variabele *lengte*.



a Welke klassenbreedte is gebruikt in de staafdiagram?

b Maak een staafdiagram bij de variabele *lengte* met klassenbreedte 5 cm.

c Vergelijk het staafdiagram uit opdracht b met de figuur hiernaast.
Welk van de twee geeft het duidelijkst de verdeling van de lengtes weer?

d Maak afzonderlijke staafdiagrammen van de lengtes van jongens en van meisjes.

e Maak staafdiagrammen waarbij je steeds een andere klassenbreedte neemt.
Bij welke klassenbreedte krijg je een goed beeld van de verdeling van de lengtes van de jongens en van de meisjes?

Ondersteunende route → maak opdracht 04

4

In de dataset zijn per leerling de gemiddelde cijfers voor de kernvakken opgenomen.

a Maak een staafdiagram van de variabele *Nederlands*, waarbij je de klassenindeling zo kiest dat je een overzicht krijgt van op gehelen afgeronde cijfers.

b Hoeveel leerlingen staan afgerond een 7?

c In welke klasse ligt de mediaan?

d Wat is in deze dataset bij deze klassenindeling de modale klasse?

De modale klasse is de klasse met de meeste waarnemingen.

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Een winkelier weegt de zakken aardappelen die hij in voorraad heeft. Je ziet een klassenindeling van de gewichten van de zakken Bintjes en Nicola met hun frequenties.

a Geef de klassenbreedte en de klassenmiddens.
b Waarom kun je de gewichten van de twee soorten niet goed vergelijken door absolute aantallen te gebruiken?
c Ga na dat 20% van de Bintjes in de klasse [2,48; 2,50⟩ zit.
d Maak bij beide rassen een staafdiagram bij de relatieve frequenties.
e Welk verschil is er tussen de twee staafdiagrammen?

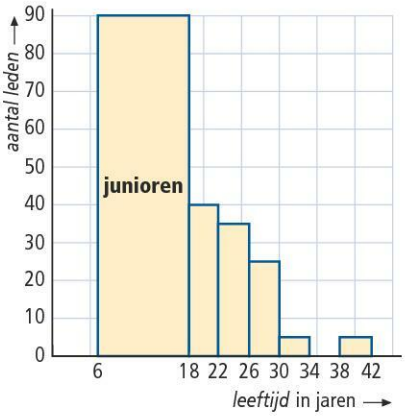
	aantal zakken	
gewicht in kg	Bintjes	Nicola
[2,48; 2,50⟩	18	0
[2,50; 2,52⟩	17	34
[2,52; 2,54⟩	21	62
[2,54; 2,56⟩	19	41
[2,56; 2,58⟩	15	13
totaal	90	150

6 In de tabel staat de leeftijdsverdeling van de 200 leden van een zwemvereniging.

leeftijd in jaren	6-17	18-21	22-25	26-29	30-33	34-37	38-41
aantal leden	90	40	35	25	5	0	5

Leden van de vereniging die jonger zijn dan 18 jaar heten junioren. De secretaris van de vereniging heeft voor het clubblad een diagram bij de tabel gemaakt.
Dat diagram geeft een verkeerde indruk van de leeftijdsverdeling van de leden van deze vereniging.

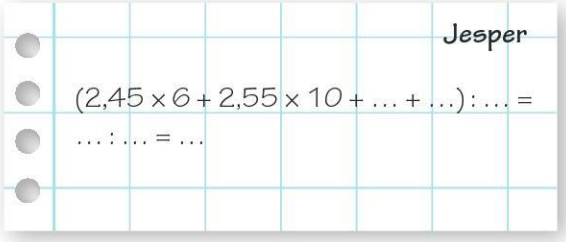
a Onderzoek waar dat door komt.
b Als je een beter diagram zou moeten tekenen, hoe zou je dat dan doen?



7 In de tabel staat een klassenindeling van de gewichten van dertig zakken peren.

gewicht in kg	[2,40; 2,50⟩	[2,50; 2,60⟩	[2,60; 2,70⟩	[2,70; 2,80⟩
aantal zakken	6	10	8	6

a Geef de klassenbreedte en de klassenmiddens.
b Jesper maakt met behulp van de klassenmiddens een schatting van het gemiddelde gewicht van een zak peren. Maak de berekening van Jesper af.
c Waar moet de verdeling binnen de klasse aan voldoen om het antwoord van opdracht b te kunnen gebruiken als een goede schatting?



Uitdagende route → maak opdracht U1

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O4 In de dataset zijn per leerling de gemiddelde cijfers voor de kernvakken opgenomen. De docente Engels wil een overzicht van de resultaten voor haar vak, afgerond op gehelen.

a Welke cijfers zijn afgerond een 7?
b Geef het antwoord van opdracht a in de intervalnotatie.
c Sorteer de dataset op de variabele *Engels* en lees af wat het laagste cijfer is.
d Wat is de linker grens van de klasse waarin het laagste cijfer voor Engels valt?
e Maak een staafdiagram van de variabele *Engels*, waarbij je de klassenindeling zo kiest, dat je een overzicht krijgt van op gehelen afgeronde cijfers.
f Hoeveel leerlingen staan afgerond een 7?
g In welke klasse ligt de mediaan?
h Geef de grenzen van de modale klasse.

De modale klasse is de klasse met de meeste waarnemingen.

Uitdagende opdrachten

U1 In de tabel staat de leeftijdsverdeling van de 50 leden van een bridgevereniging. De leeftijden van de leden zijn in klassen ingedeeld. In de tabel zijn twee frequenties weggevallen.

leeftijd in jaren	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89
aantal leden	3	8	…	14	…	3	2

Als je de gemiddelde leeftijd met de klassenmiddens berekent, krijg je als resultaat 70 jaar.
Zoek uit welke frequenties in de tabel weggevallen zijn.

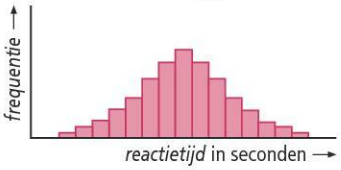
© Noordhoff Uitgevers bv

7.2 Frequentieverdelingen

Je leert
- wat de verschillende vormen van een frequentieverdeling zijn

Leerroutes
- ondersteunend: 8—9—10—11—O12—13
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 8—10—11—12—13—U2

Bij een biologiepracticum wordt de reactietijd van 228 leerlingen gemeten. De gemiddelde reactietijd is 0,8 seconden. De gegevens worden verwerkt in een staafdiagram. Het staafdiagram wordt klokvormig genoemd.



- Verklaar de vorm van het staafdiagram.

8

a Hoeveel variabelen bevat de dataset?

b Welke variabelen zijn kwantitatief en welke zijn kwalitatief?

c Maak staafdiagrammen bij de volgende variabelen.
- A *inkomen ouders*, met de eerste klasse [10 000, 15 000⟩.
- B *geboorte maand*
- C *vergooien*, met de eerste klasse [5, 10⟩.
- D *gewicht*, met de eerste klasse [40, 45⟩.

d Welke staafdiagrammen zijn min of meer symmetrisch?

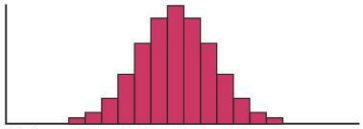
e Hoeveel meter verschil zit er tussen de twee beste worpen bij het vergooien?

Theorie

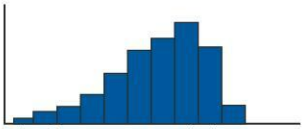
Datasets kun je ordenen in bijvoorbeeld frequentietabellen of staafdiagrammen. Dit zijn beide voorbeelden van een **frequentieverdeling**.
De vorm van een staafdiagram geeft informatie over de frequentieverdeling.
Een **klokvormige verdeling** is een symmetrische verdeling met in het midden de hoogste staaf. Bij een klokvormige verdeling zijn de modus, de mediaan en het gemiddelde aan elkaar gelijk.
Bij een **scheve verdeling** ligt de hoogste staaf meer naar links of naar rechts.
Bij een **uniforme verdeling** zijn alle staven ongeveer even hoog.
Bij een **meertoppige verdeling** zie je in het staafdiagram meer dan één top.
Een waarneming die erg afwijkt van de andere waarnemingen noem je een **uitschieter**.

© Noordhoff Uitgevers bv

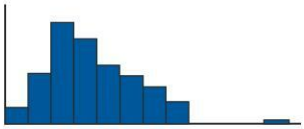
Voorbeeld



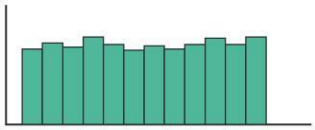
klokvormig



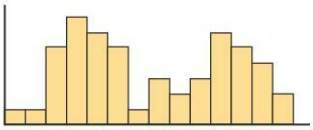
scheef met staart naar links



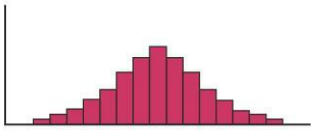
scheef met staart naar rechts en een uitschieter



uniform



meertoppig



klokvormig

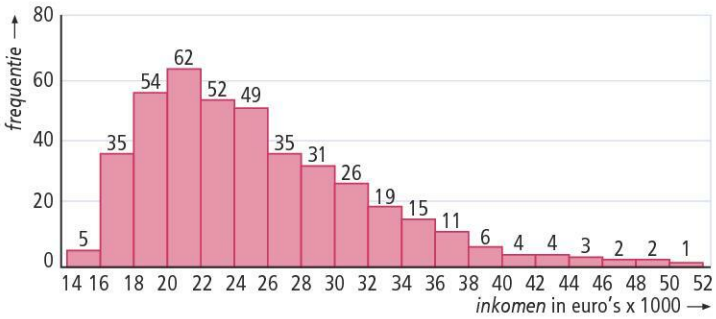
9 **a** Welke verdelingen in het voorbeeld zijn min of meer symmetrisch?
b Bij welke verdeling zijn de modus, de mediaan en het gemiddelde gelijk aan elkaar?
c Schets een meertoppige verdeling met één uitschieter.

10 **a** Welke vorm hebben de staafdiagrammen die je vond in opdracht 8?
b Kun je de vorm van elk staafdiagram verklaren?
c Voorspel de vorm van het staafdiagram bij de variabele *lengte*.
d Controleer het antwoord van opdracht c met een staafdiagram waarbij de eerste klasse [155, 160⟩ is.

11 Een computerfabrikant onderzoekt de levensduur van twee typen accu's voor laptops.
a Van hoeveel accu's onderzoekt de fabrikant de levensduur?
b Maak een staafdiagram bij de variabele *levensduur*. Neem als klassenbreedte 1 uur. Welke vorm heeft je staafdiagram?
c Welke vormen hebben de staafdiagrammen die je krijgt als je splitst op de variabele *type*?
d Er is één uitschieter.
Van welk type is deze uitschieter?
e Zoek uit wat het gemiddelde, de modus en de mediaan van de twee verschillende typen zijn.
f Vergelijk de resultaten van opdracht e met de staafdiagrammen van opdracht c.
Wat valt je op?

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O12



12 H

Je ziet de frequentieverdeling van de netto maandinkomens van de huishoudens in een dorp.

a Hoe karakteriseer je de vorm van deze verdeling?

b Welke klasse is de modale klasse?

c Zoek uit wat het gemiddelde inkomen is en geef het gemiddelde inkomen aan in het staafdiagram.

d Christina kijkt naar het staafdiagram en zegt: 'De helft van alle huishoudens verdient meer dan het gemiddelde.' Mohammed denkt dat dit aandeel kleiner is. Wat denk jij?

e Zoek uit hoeveel procent van de huishoudens meer verdient dan het gemiddelde.

f Vanaf welk inkomen kun je zeggen: 'Ik behoor tot de 50% meest verdienende huishoudens van dit dorp.'?

13

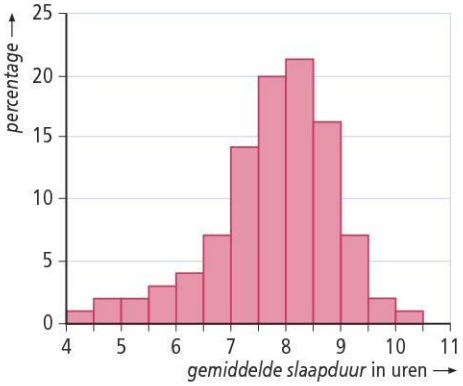
In de figuur zie je de verdeling van de gemiddelde slaapduur van de Nederlandse bevolking.

a Hoe karakteriseer je de vorm van deze verdeling?

b Welke klasse is de modale klasse?

c Slapen de Nederlanders gemiddeld langer of korter dan modaal?

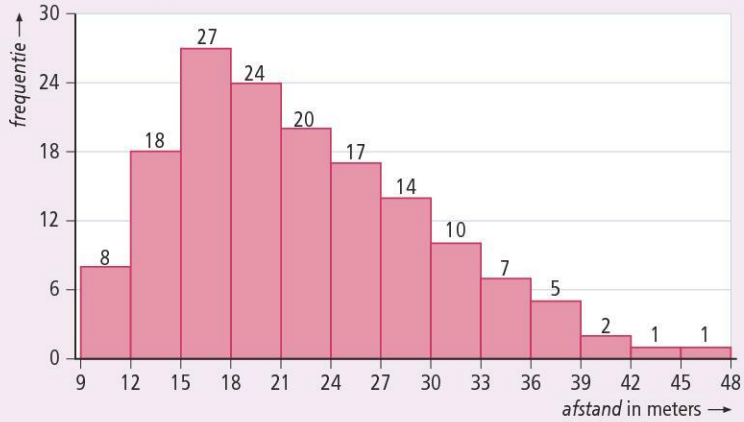
d Mensen met een slaapduur van 6 uur of minder hebben een grote kans op een chronisch slaaptekort. Hoeveel procent van de Nederlandse bevolking behoort ongeveer tot deze groep?



Uitdagende route → maak opdracht U2

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten



O12

a Je ziet een staafdiagram bij de variabele *vergooien* waarbij de eerste klasse [9, 12⟩ is.
Welke vorm heeft het staafdiagram?

b De modale klasse is de klasse met de hoogste frequentie.
Geef de modale klasse.

c Zoek uit wat het gemiddelde is en geef het gemiddelde aan in het staafdiagram.

d Hoeveel leerlingen hebben verder dan het gemiddelde gegooid? Is dat meer of minder dan de helft of precies de helft?

e Hoeveel procent van de leerlingen heeft verder dan het gemiddelde gegooid?

Uitdagende opdrachten

U2

Geef bij de volgende situaties aan welke vorm het bijbehorende staafdiagram heeft. Verklaar je antwoord.

a De leeftijd van de leerlingen die op een dag aanwezig zijn in het gebouw van een middelbare school waar basis 1 tot en met vwo 6 wordt lesgegeven.

b De hoeveelheid kilometers file op de Nederlandse wegen gedurende de uren van een werkdag.

c De inhoud van 1000 flessen frisdrank die gevuld worden door een machine die ingesteld staat op 1,53 liter.

© Noordhoff Uitgevers bv

7.3 Centrummaten

Je leert
- hoe je centrummaten gebruikt om conclusies te trekken

Leerroutes
- ondersteunend: 14—15—16—O17—18—19—20
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19—20
- uitdagend: 14—15—16—17—18—19—U3

Een wiskunde docent heeft in zijn drie klassen hetzelfde proefwerk afgenomen. In het overzicht zie je enkele gegevens.

	H4a	H4b	H4c
aantal leerlingen	28	19	24
gemiddelde	5,9	6,1	5,9
hoogste cijfer	7,3	10	8,1

- In welke klas is het percentage voldoendes waarschijnlijk het hoogst?

14 De leerlingen van havo 4 hebben bij een sportdag meegedaan aan het onderdeel 1500 meter hardlopen.

a Hoeveel deelnemers waren er bij het onderdeel 1500 meter?

b Hoeveel minuten en hoeveel seconden deed de snelste deelnemer over de 1500 meter? En welke tijd had de langzaamste?

c Hoe groot zijn het gemiddelde, de modus en de mediaan bij de 1500 meter?

d Welke van de waarden van opdracht c geven een goed beeld van de prestaties op de 1500 meter? Verklaar je antwoord.

e Er is één jongen die erg langzaam heeft gelopen. Welke van de maten gemiddelde, modus en mediaan verandert door het resultaat van deze jongen niet mee te nemen? Verklaar je antwoord.

15 Tijdens de sportdag hebben de leerlingen van havo 4 ook het onderdeel speerwerpen gedaan.

a Hoe groot zijn het gemiddelde en de mediaan bij het speerwerpen?

b Maak van de resultaten van het speerwerpen een klassenindeling. Neem voor de eerste klasse $[15, 18\rangle$.

c Welke klasse heeft de grootste frequentie?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Om statistische gegevens samen te vatten gebruik je een centrummaat. De centrummaten zijn het gemiddelde, de modus en de mediaan. De klasse met de grootste frequentie noem je de modale klasse.
Je moet altijd voorzichtig zijn met het trekken van conclusies uit statistische gegevens. Ook de keuze van een centrummaat hangt van de situatie af.
Uitschieters hebben in het algemeen veel meer invloed op het gemiddelde dan op de mediaan en op de modus.

Voorbeeld

Een bedrijf heeft 37 werknemers. De verdeling van het bruto maandsalaris in euro's staat in de tabel.
Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus.

bruto maandsalaris in euro's	*aantal werknemers*
15 000	1
10 000	3
8000	4
4000	6
3000	8
2000	11
1500	4

Oplossing

Het totaal aan salaris is $1 \times 15\,000 + 3 \times 10\,000 + \ldots + 4 \times 1500 = 153\,000$ euro.
Het aantal werknemers is $1 + 3 + \ldots + 4 = 37$.
Het gemiddelde is $153\,000 : 37 \approx 4135{,}14$ euro.
Van boven naar beneden geteld is het salaris van de 19e werknemer 3000 euro, dus de mediaan is 3000 euro.
Het waarnemingsgetal met de grootste frequentie is 2000 euro, dus de modus is 2000 euro.

16 Welke centrummaat in het voorbeeld geeft volgens jou het beste beeld van het bruto maandsalaris? Verklaar je antwoord.

Ondersteunende route → maak opdracht 017

17

a Maaike heeft bij de data van de sportdag van havo 4 bij het onderdeel 1500 meter hardlopen de centrummaten berekend en gesplitst op leeftijd. Ze komt tot de conclusie dat de 16-jarigen een beter resultaat bij de 1500 meter hebben dan de 18-jarigen.
Ben jij het eens met Maaike? Leg uit waarom.

b Waarom kun je de modus niet gebruiken om aan te geven welke leeftijdsgroep het beste resultaat heeft behaald bij de 1500 meter?

c Welke leeftijdsgroep heeft volgens jou het beste resultaat bij de 1500 meter hardlopen? Verklaar je antwoord.

d De deelnemers zijn verdeeld in drie groepen.
Onderzoek met de centrummaten welke groep het beste resultaat heeft bij het speerwerpen.

© Noordhoff Uitgevers bv

18 In de klassen 2A en 2B is een proefwerk gemaakt. Je ziet de resultaten in de frequentietabel.

a Hoeveel leerlingen zitten er in klas 2A? En in klas 2B?
b Bereken de modus, de mediaan en het gemiddelde van de proefwerkresultaten van klas 2A.
c Doe hetzelfde voor klas 2B.
d Welke van de drie centrummaten geeft volgens jou de verschillen tussen de klassen het beste weer? Leg uit waarom je dat vindt.

→ Instructie rekenmachine | Centrummaten

cijfer	*frequentie klas 2A*	*frequentie klas 2B*
2	0	3
3	1	4
4	3	4
5	8	0
6	3	10
7	3	2
8	3	1
9	2	0
10	1	0

19 In de dataset zie je de gegevens van een ziekenhuis over de geboortegewichten van de 87 baby's die daar in een maand geboren zijn. De gewichten zijn in grammen en afgerond op tientallen.

a Ga na dat 3426 gram het gemiddelde gewicht is.
b Ga na dat het gemiddelde gewicht van de jongens 3458,3 gram is en van de meisjes 3387,3 gram.
c Volgens Thomas klopt er iets niet aan het antwoord van opdracht a, want (3458,3 + 3387,3) : 2 = 3422,8.
Welke fout maakt Thomas?
d Waarom is het gemiddelde gewicht van de meisjes geen goede centrummaat voor het geboortegewicht?
e Hoe groot is het gemiddelde gewicht van de meisjes als je de twee uitschieters weglaat?
f Maak bij de variabele *geboortegewicht* een frequentietabel met als eerste klasse [1000, 1500⟩ gram.
Welke klasse is bij de jongens de modale klasse? En welke klasse is de modale klasse bij de meisjes?

20 H Een bedrijf heeft 1500 werknemers in dienst. In de tabel staat de verdeling van de jaarsalarissen.

a In welke klasse ligt de mediaan van de jaarsalarissen?
b En welke klasse is de modale klasse?
c Gebruik de klassenmiddens om het gemiddelde salaris te berekenen.
d De eigenaar van het bedrijf beweert dat hij zijn werknemers een uitstekend salaris betaalt.
Welke centrummaat kan hij gebruiken om dat aan te tonen?
e Stel dat je voor een vakbond de mensen vertegenwoordigt met een laag salaris.
Welke centrummaat zou jij kiezen om te laten zien wat je van de salarissen vindt?

salaris in euro's	*frequentie*
[0, 10 000⟩	752
[10 000, 25 000⟩	663
[25 000, 40 000⟩	76
[40 000, 60 000⟩	8
[60 000, 80 000⟩	1

Uitdagende route → maak opdracht U3

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O17 Bij de sportdag van havo 4 was speerwerpen een onderdeel.

a Bereken de centrummaten van de data bij het onderdeel speerwerpen. Splits de resultaten op leeftijd en ga na dat de 15-jarigen gemiddeld 28 meter gooiden.

b Als je kijkt naar de gemiddelden, welke leeftijd heeft dan het beste gepresteerd op het onderdeel speerwerpen?

c En als je kijkt naar de modus, welke leeftijd heeft dan het beste gepresteerd?

d Welke leeftijdsgroep heeft volgens jou de beste resultaten bij speerwerpen? Verklaar je antwoord.

e Mark vindt dat de 16-jarigen het beste hebben gepresteerd. Welk argument kan hij daarvoor gebruiken?

Uitdagende opdrachten

U3 In de Italiaanse voetbalcompetitie waren de uitslagen in een speelronde als volgt.

AC Milan – Atalanta	4 – 0	AS Roma – Juventus	1 – 3
Bologna – Napoli	1 – 0	Sampdoria – Udines	2 – 2
Catania – Fiorentina	2 – 2	Torino – Parma	0 – 0
Chievo – Genoa	1 – 0	Verona – Cagliari	1 – 3
Sassualo – Lazio	1 – 0	Inter – Livorno	2 – 1

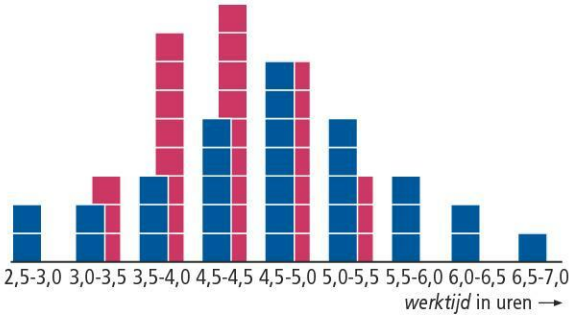
Gekeken wordt naar het aantal doelpunten per wedstrijd. De wedstrijd AS Roma – Juventus wordt om onregelmatigheden afgekeurd en moet worden over gespeeld. Bij rust is de tussenstand 2 – 0.
Onderzoek of er voor deze inhaalwedstrijd een einduitslag mogelijk is waarbij de mediaan van het aantal doelpunten gelijk is aan $3\frac{1}{2}$. Zo ja, geef dan alle mogelijke uitslagen.
(Er werden niet meer dan vijf doelpunten gescoord.)

7.4 Spreidingsmaten

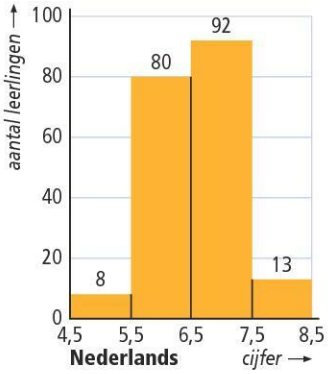
Je leert
- hoe je de spreiding in een dataset in een getal uitdrukt

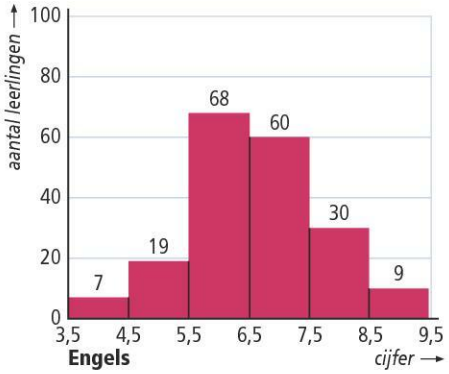
Leerroutes
- ondersteunend: 21—22—23—O24—25—26—27—28
- doorlopend: 21—22—23—24—25—26—27—28
- uitdagend: 21—22—24—25—26—27—28—U4

Een consumentenorganisatie heeft van twee soorten laptopaccu's uit dezelfde prijsklasse onderzocht hoelang ze stroom leveren voordat ze weer opgeladen moeten worden.
- Welk soort zou jij kopen?



21 In de staafdiagrammen zijn de eindcijfers voor Nederlands en Engels op het schoolexamen weergegeven van de leerlingen van het Agnes College.





In de tabel zie je de gegevens over de centrummaten, mediaan en gemiddelde. De centrummaten zijn nagenoeg gelijk, toch is er wel een verschil tussen de resultaten van Nederlands en Engels.
Beschrijf dit verschil.

	Nederlands	Engels
gemiddelde	6,53	6,54
mediaan	6,6	6,6

22 In de dataset vind je de resultaten van de leerlingen van het Agnes College.
- **a** Bereken bij elk van de vakken Nederlands en Engels het verschil tussen het laagste en het hoogste SE cijfer.
- **b** Geef het laagste SE cijfer van de 25% hoogste cijfers bij Nederlands.
- **c** Geef het hoogste SE cijfer van de 25% laagste cijfers.
- **d** Hoe groot is het verschil tussen de cijfers van opdracht b en c?

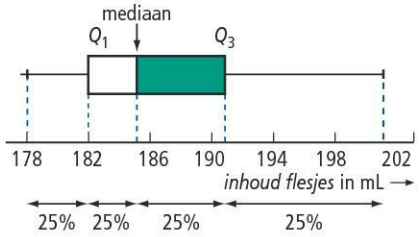
© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Met **spreidingsmaten** geef je aan hoe ver gegevens van elkaar af liggen. De eenvoudigste spreidingsmaat is de **spreidingsbreedte**, dat is het verschil tussen het grootste en het kleinste waarnemingsgetal.
Een andere spreidingsmaat is het verschil tussen het derde kwartiel Q_3 en het eerste kwartiel Q_1, de **kwartielafstand** of **interkwartielafstand**: $Q_3 - Q_1$.
Uit een boxplot kun je de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand gemakkelijk aflezen.
Centrummaten en spreidingsmaten worden **kentallen** van een verdeling genoemd.

Voorbeeld

In de boxplot is de verdeling van de inhoud van flesjes weergegeven.



De spreidingsbreedte is 201 − 178 = 23 mL.
De kwartielafstand is 191 − 182 = 9 mL.

23 H

a Welk van de drie kernvakken heeft de grootste spreidingbreedte?
b En welk vak heeft de kleinste spreidingsbreedte?
c Welk van de drie kernvakken heeft de grootste kwartielafstand?
d Maak boxplots bij de resultaten van de drie kernvakken.
e Bij welk vak heeft meer dan 75% van de leerlingen een voldoende?
f Hoeveel procent van de leerlingen heeft voor wiskunde een cijfer tussen 5,5 en 7,0?

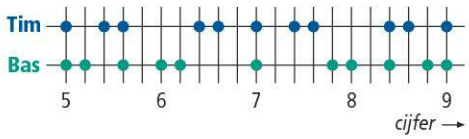
Ondersteunende route → maak opdracht 024

24

a Maak voor het vak geschiedenis in één figuur een boxplot bij de resultaten van het SE en een boxplot bij de resultaten van het CE.
b Vergelijk de twee boxplots. Welke overeenkomst zie je?
c Welke verschillen zie je tussen de twee boxplots?
d Hoeveel leerlingen met het profiel NG hebben eindexamen gedaan in het vak geschiedenis?
e Bereken voor elk van de vier profielen de spreidingsbreedte en de kwartielafstand van het CE resultaat geschiedenis.
f Waarom is bij het profiel NT de spreidingsbreedte en de kwartielafstand 0?
g Bij welk van de profielen is de spreiding het grootst?

© Noordhoff Uitgevers bv

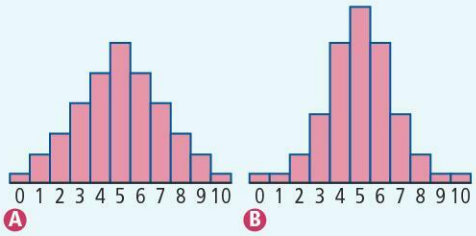
25 In de figuur staan door middel van stippen de resultaten weergegeven die twee leerlingen hebben gehaald op de proefwerken wiskunde in de derde klas.



- **a** Leg uit dat bij beide leerlingen het gemiddelde 7 is.
- **b** Bereken voor beide leerlingen de spreidingsbreedte.
- **c** Bereken voor beide leerlingen de kwartielafstand.
- **d** Bij welke leerling liggen de cijfers het dichtst bij het gemiddelde?
- **e** Bij welke leerling vind je de spreiding het grootst?

Theorie

Een spreidingsmaat die iets zegt over de spreiding rond het gemiddelde is de standaardafwijking of standaarddeviatie.
De korte notatie is SD of σ.
In figuur B liggen de waarnemingsgetallen gemiddeld dichter bij het gemiddelde dan in figuur A. In figuur B is de standaardafwijking dus kleiner dan in figuur A.



26 Jonathan heeft sinds het begin van het schooljaar bijgehouden welke cijfers hij voor SO's en voor proefwerken heeft gehaald.

- **a** Maak een staafdiagram bij de behaalde cijfers en splits op soort toets.
- **b** Hoe kun je aan de staafdiagrammen zien dat de standaardafwijking van de cijfers bij de SO's groter is?
- **c** Bereken voor zowel de cijfers bij de SO's als de cijfers bij de proefwerken de spreidingsbreedte en de kwartielafstand.
- **d** Geef bij de cijfers voor de proefwerken en de cijfers voor de SO's van Jonathan de standaardafwijking.

27

- **a** Welk van de drie kernvakken heeft de grootste spreiding als je als spreidingsmaat de standaardafwijking neemt?
- **b** En welk vak heeft de kleinste spreiding?
- **c** Vergelijk je antwoorden met je antwoorden bij opdracht 23. Welke spreidingsmaat geeft volgens jou het beste het verschil in spreiding bij de kernvakken weer?

28 H

- **a** Geef bij de vakken Nederlands en Engels de standaarddeviatie bij het SE en het CE. Zet de resultaten overzichtelijk in een tabel zoals hiernaast.
- **b** Geef een verklaring waarom bij beide vakken de standaarddeviatie bij het CE groter is dan bij het SE.
- **c** Controleer of dit ook het geval is bij het vak geschiedenis.

σ	SE	CE
Nederlands	…	…
Engels	…	…

Uitdagende route → maak opdracht U4

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O24

a Maak voor het vak geschiedenis in één figuur een boxplot bij de resultaten van het SE en een boxplot bij de resultaten van het CE.

b Welke overeenkomst tussen de resultaten van het SE en het CE bij het vak geschiedenis kun je uit de boxplots aflezen?

c Waarin verschillen de twee boxplots?

d Geef het laagste en het hoogste CE resultaat bij geschiedenis.

e De spreidingsbreedte is het verschil tussen de hoogste en de laagste waarde van een variabele.
Bereken de spreidingsbreedte van het CE resultaat bij geschiedenis.

f Zoek met kentallen uit welke waarde het eerste en het derde kwartiel hebben bij de CE resultaten bij geschiedenis.

g De kwartielafstand is het verschil tussen het derde en het eerste kwartiel van een variabele.
Bereken de kwartielafstand van het CE resultaat bij geschiedenis.

h Splits de groep op de variabele *profiel* en bereken voor elk profiel de spreidingsbreedte en de kwartielafstand van het CE resultaat geschiedenis.

i Waarom is bij het profiel NT de spreidingsbreedte en de kwartiel afstand 0?

j Bij welk van de profielen is de spreiding het grootst?

Uitdagende opdrachten

U4 Op een basisschool is van alle leerlingen in groep 1A en in groep 1B de lengte gemeten.

a Van groep 1A is de spreidingsbreedte gelijk aan 12 cm, de kwartielafstand gelijk aan 5 cm en heeft 25% van de leerlingen een lengte tussen 82 en 84 cm.
Teken bij deze gegevens een boxplot.

b Van groep 1B is de spreidingsbreedte groter dan die van groep 1A, de kwartielafstand is kleiner dan die van groep 1A.
Verder is gegeven dat 25% van de leerlingen in groep 1B kleiner is dan de 50% langste leerlingen in groep 1A.
Teken bij het boxplot van opdracht a een mogelijk boxplot van groep 1B.

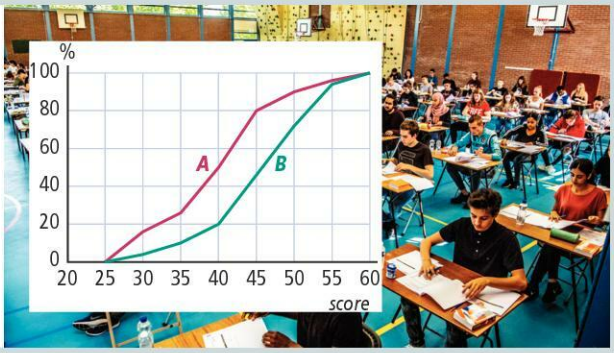
© Noordhoff Uitgevers bv

7.5 Cumulatieve verdelingen

Je leert
- wat een frequentiepolygoon en een cumulatieve frequentiepolygoon is
- hoe je een frequentiepolygoon en een cumulatieve frequentiepolygoon tekent en gebruikt

Leerroutes
- ondersteunend: 29—030—31—32—33—34
- doorlopend: 29—30—31—32—33—34
- uitdagend: 29—30—31—32—34—U5

In een onderwijsexperiment hebben twee groepen studenten zich op twee verschillende manieren voorbereid op hetzelfde tentamen.
In de figuur kun je bij de scores aflezen hoeveel procent dat aantal punten of minder heeft gehaald. Zo lees je bijvoorbeeld af dat 20% van groep B minder dan 40 punten heeft gescoord.
- Welke groep heeft het tentamen beter gemaakt?



29 In de tabel zie je van 85 meisjes de lengtes ingedeeld in klassen.

lengte	[155, 160⟩	[160, 165⟩	[165, 170⟩	[170, 175⟩	[175, 180⟩	[180, 185⟩	[185, 190⟩	[190, 195⟩	[195, 200⟩
frequentie	6	12	34	16	10	5	1	0	1

a Geef het klassenmidden van de klasse met de kleinste meisjes.
b Teken een lijndiagram bij deze klassenindeling. Zet de frequenties boven de klassenmiddens.
c Laat zien dat er 52 meisjes kleiner zijn dan 170 cm.
d Hoeveel meisjes zijn kleiner dan 175 cm?
e Wat betekent het getal 18 in de tabel hieronder?

lengte	< 160	< 165	< 170	< 175	< 180	< 185	< 190	< 195	< 200
frequentie	6	18	52	…	…	…	…	…	…

f Vul de tabel verder in.
g Maak een grafiek bij de tabel van opdracht f. Zet de frequenties boven de rechter klassengrens.

Theorie

In een **frequentiepolygoon** is langs de verticale as de frequentie, absoluut of relatief, uitgezet. Bij een indeling in klassen zet je de frequenties uit boven de klassenmiddens.
De **somfrequentie** of **cumulatieve frequentie** van een waarnemingsgetal is het totaal van alle frequenties vanaf het kleinste waarnemingsgetal.
De grafiek van de cumulatieve frequenties heet een **somfrequentiepolygoon** of **cumulatieve frequentiepolygoon**. Bij een indeling in klassen zet je de somfrequenties uit boven de rechter klassengrenzen.

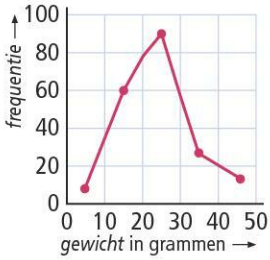
© Noordhoff Uitgevers bv

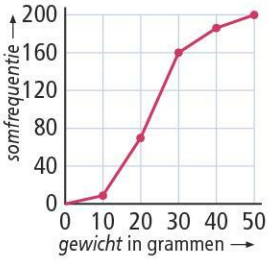
Voorbeeld

Teken bij de tabel een frequentiepolygoon en een somfrequentiepolygoon.

gewicht in grammen	*frequentie*	*somfrequentie*
[0, 10⟩	10	10
[10, 20⟩	60	70
[20, 30⟩	90	160
[30, 40⟩	25	185
[40, 50⟩	15	200

Oplossing





Ondersteunende route → maak opdracht O30

30 Waxinelichtjes zijn kleine kaarsjes, vroeger veel gebruikt in theelichtjes, tegenwoordig meer voor de gezelligheid. Maar niet alle waxinelichtjes zijn van dezelfde kwaliteit. In een onderzoek is onder andere gekeken naar de brandduur van de waxinelichtjes. In de tabel staan de gemeten waarden van twee van de onderzochte merken.

brandduur in uren	merk A	merk B
[3.30; 3.45⟩	3	1
[3.45; 4.00⟩	7	2
[4.00; 4.15⟩	11	9
[4.15; 4.30⟩	9	19
[4.30; 4.45⟩	4	28
[4.45; 5.00⟩	3	8
[5.00; 5.15⟩	2	2
[5.15; 5.30⟩	1	1

a Hoeveel waxinelichtjes van merk A zijn getest? En hoeveel van merk B?
b Leg uit dat het beter is om te werken met relatieve frequenties om de merken te vergelijken.
c Ga na dat de relatieve frequentie van de klasse [3.30; 3.45⟩ van merk A gelijk is aan 7,5%.
d Waarom zet je bij een cumulatieve frequentiepolygoon de frequenties boven de rechter klassengrenzen?
e Teken in één figuur de relatieve cumulatieve frequentiepolygonen.
f Omschrijf de verschillen in brandduur tussen de twee merken, waarbij je kijkt naar de mediaan en de spreiding.

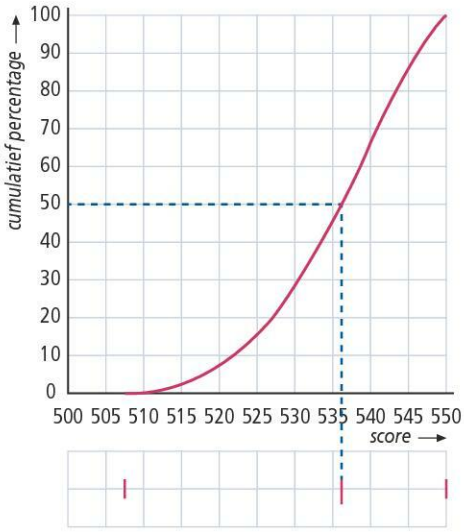
31 H

a Maak in één figuur de relatieve somfrequentiepolygonen voor de jongens en voor de meisjes bij de variabele *gewicht*. Kies als eerste klasse [40, 45⟩.
b Lees zo goed mogelijk uit de grafiek af hoe zwaar de 25% lichtste jongens maximaal zijn.
c Hoe zwaar zijn de 25% lichtste meisjes maximaal?
d Welke kwartielen heb je bij de opdrachten b en c afgelezen?
e Bij welk percentage kun je de mediaan aflezen? Geef de mediaan van het gewicht van de jongens en de meisjes.

© Noordhoff Uitgevers bv

32 H

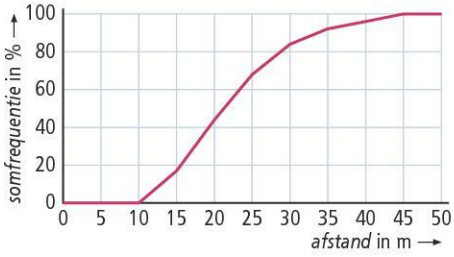
Elk jaar maken op veel basisscholen de leerlingen van groep 8 de 'Cito-toets'. De scores voor de toets zijn gehele getallen vanaf 500 tot en met 550. In de somfrequentiepolygoon zie je de resultaten van 2018. Er deden toen ruim 164 500 leerlingen mee aan deze toets.



- **a** Hoeveel procent van de leerlingen heeft een score van meer dan 545?
- **b** Hoeveel leerlingen hadden een score tussen 520 en 540?
- **c** Van de leerlingen scoort 50% minder dan 536 punten. Leg uit dat de mediaan 536 punten is.
- **d** Welke score hadden de 25% laagst scorende leerlingen maximaal? Welk kwartiel hoort hierbij?
- **e** En welke score hadden de 25% hoogst scorende leerlingen minimaal? Welk kwartiel hoort hierbij?
- **f** De minimale score, de maximale score en de mediaan zijn weergegeven onder de relatieve somfrequentiepolygoon. Teken op dezelfde manier de scores van opdracht d en e in de figuur en maak de boxplot af.

33

Bij de resultaten van het vergooien tijdens een sportdag van groep 8 is een relatieve somfrequentiepolygoon getekend.



- **a** Hoe kun je aan de relatieve somfrequentiepolygoon zien dat de resultaten in klassen zijn ingedeeld?
- **b** Geef de klassenbreedte.
- **c** Welke klasse is de modale klasse? Hoe zie je dat in de relatieve somfrequentiepolygoon?
- **d** Teken een boxplot bij de relatieve somfrequentiepolygoon.

34

- **a** Maak in één figuur de relatieve somfrequentiepolygonen voor de jongens en de meisjes bij de variabele *vergooien*. Kies een geschikte klassenbreedte.
- **b** Hoe zie je aan de relatieve somfrequentiepolygonen dat de jongens doorgaans verder gooien dan de meisjes?
- **c** Schat hoeveel procent van de jongens verder gooiden dan de beste worp bij de meisjes.
- **d** Maak in één figuur de relatieve somfrequentiepolygonen voor de jongens en de meisjes bij de variabele *sprint*.
- **e** Waarin verschilt deze figuur als je deze vergelijkt met de figuur bij opdracht a?

Uitdagende route → maak opdracht U5

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O30 In een onderzoek naar de opbrengst van aardappelen is voor twee aardappelrassen de oogst van enkele planten gewogen.

a Is er van beide rassen een gelijk aantal planten genomen?

b Ga na dat van het ras Doré er 23 planten waren met een opbrengst minder dan 650 gram.

c Maak een tabel met voor elk ras de cumulatieve frequenties.

d Waarom kun je bij het vergelijken van de aardappelrassen beter de relatieve frequenties gebruiken?

e De relatieve cumulatieve frequentie van het aantal planten van het ras Doré met een gewicht van minder dan 650 gram is $\frac{23}{73} \times 100 \approx 31{,}5\%$.
Maak een tabel met voor elk ras de relatieve cumulatieve frequenties.

f Waarom zet je bij een cumulatieve frequentiepolygoon de frequenties bij de rechter klassengrens?

g Teken in één figuur de relatieve cumulatieve frequentiepolygonen.

h Leg uit dat je de mediaan kunt aflezen bij de cumulatieve frequentie van 50%.

i Lees uit de figuur af bij welk ras de mediaan van de opbrengst het grootst is.

j Lees uit de figuur af hoe groot de kwartielen zijn.

k Omschrijf de verschillen in gewicht tussen de twee rassen, waarbij je kijkt naar de mediaan en de spreiding.

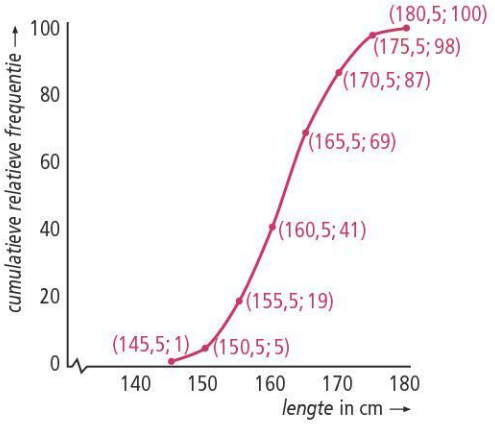
gewicht in grammen	Doré	Gloria
[500, 550⟩	3	1
[550, 600⟩	6	5
[600, 650⟩	14	11
[650, 700⟩	22	23
[700, 750⟩	16	39
[750, 800⟩	5	10
[800, 850⟩	4	2
[850, 900⟩	3	1
totaal	73	92

Uitdagende opdrachten

U5 Van een groot aantal leerlingen is onderzocht hoeveel kilometer zij dagelijks van en naar school fietsen. De resultaten zijn verwerkt in een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon.
Onderzoek of de mediaan of het gemiddelde groter is.

© Noordhoff Uitgevers bv

35 Bij een onderzoek onder 13-jarigen werd van 400 meisjes de lengte gemeten. In de grafiek staan de resultaten weergegeven.



- **a** Bij een van de punten staat genoteerd (165,5; 69). Welke betekenis hebben deze getallen?
- **b** Welke klassenindeling is gebruikt?
- **c** Bereken hoeveel meisjes een lengte hadden van minstens 150,5 cm en minder dan 155,5 cm.
- **d** Hoeveel meisjes waren langer dan 170,5 cm?
- **e** Geef de modale klasse.
- **f** Teken een boxplot bij de grafiek.

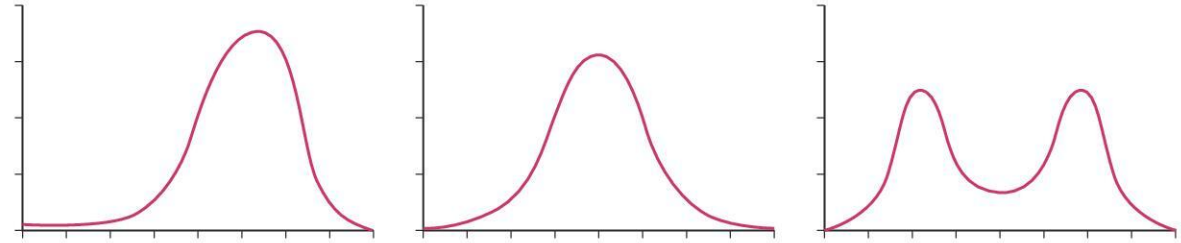
36 Op de sportdag zijn de leerlingen verdeeld in drie groepen.

- **a** Maak een staafdiagram bij de variabele speerwerpen met een klassenbreedte van 3 meter.
  Welke vorm heeft het staafdiagram?
- **b** Met welke centrummaten kun je laten zien dat groep 1 het slechtst presteerde bij hardlopen?
- **c** Eén van de leerlingen in groep 1 liep aanzienlijk langzamer dan de anderen.
  Presteerde groep 1 ook slechter dan de twee andere groepen als je deze leerling weglaat?
- **d** Geef de centrummaten van de drie groepen bij het onderdeel speerwerpen.
- **e** Welke conclusie kun je trekken uit de centrummaten voor dit onderdeel?
- **f** Met welke getallen kun je aangeven dat de prestaties van groep 2 en groep 3 wel verschillen op het onderdeel speerwerpen?
- **g** Laat met behulp van grafieken zien hoe de prestaties van de drie groepen verschillen.

37 Twee merken koffie worden verkocht in pakken waarop staat: 'Inhoud 250 gram'. Van elk merk wordt de inhoud van 80 pakken gewogen.

- **a** Bereken voor elk van de merken de spreidingsbreedte van het gewicht.
- **b** Maak in één figuur de boxplots bij de gewichten van merk A en bij merk B.
- **c** De verdeling van de gewichten voor de twee merken verschillen van elkaar.
  Welke van de spreidingsmaten geeft het verschil niet goed weer, de spreidingsbreedte of de interkwartielafstand?
- **d** Maak in één figuur voor elk merk een somfrequentiepolygoon.
- **e** Hoe kun je in de somfrequentiepolygonen zien dat de spreiding van de gewichten van merk B groter is dan die van merk A?

© Noordhoff Uitgevers bv

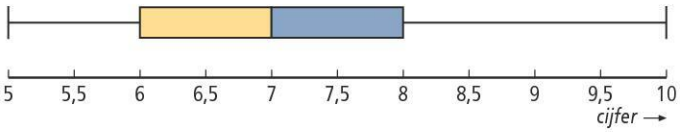


38 Je ziet drie frequentiepolygonen.

a Bij welke frequentiepolygoon zullen het gemiddelde, de modus en de mediaan dezelfde waarde hebben?

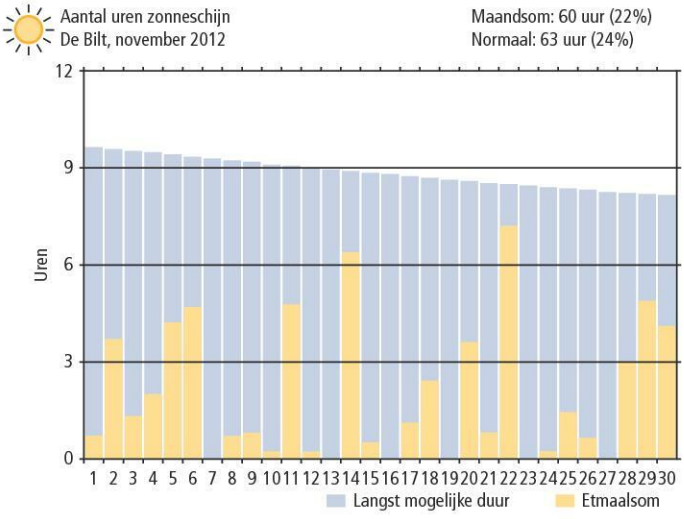
b Bij welke frequentiepolygoon heeft de mediaan de hoogste waarde?

39 Alle 196 havo-leerlingen hebben een rekentoets gemaakt. De resultaten zijn verwerkt in een boxplot.



De rekendocent beweert dat het gemiddelde een 7,8 is. Onderzoek of hij gelijk kan hebben.

40 In het diagram staat voor elke dag in november 2012 het aantal uren zonneschijn in De Bilt. Ook staat aangegeven hoeveel uur de zon had kunnen schijnen.
Onderzoek of de rechtsboven vermelde aantal uren en percentages uit de figuur zijn af te leiden.



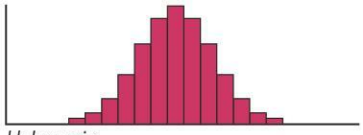
© Noordhoff Uitgevers bv

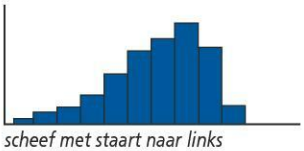
Theorie

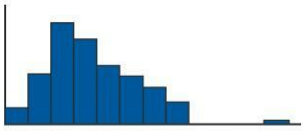
Frequentieverdeling, klokvormige verdeling, scheve verdeling, uniforme verdeling, meertoppige verdeling, uitschieter

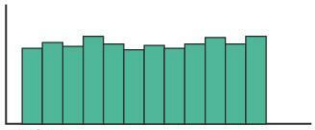
Datasets kun je ordenen in bijvoorbeeld frequentietabellen of staafdiagrammen. Dit zijn beide voorbeelden van een frequentieverdeling.
De vorm van een staafdiagram geeft informatie over de frequentieverdeling. Daarbij kun je onder andere letten op symmetrie en op uitschieters.
Een klokvormige verdeling is een symmetrische verdeling met in het midden de hoogste staaf. Bij een klokvormige verdeling zijn de modus, de mediaan en het gemiddelde aan elkaar gelijk.
Bij een scheve verdeling ligt de hoogste staaf meer naar links of naar rechts.
Bij een uniforme verdeling zijn alle staven ongeveer even hoog.
Bij een meertoppige verdeling zie je in het staafdiagram meer dan één top.

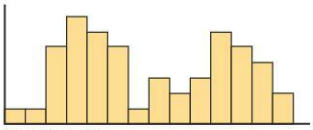
Voorbeeld

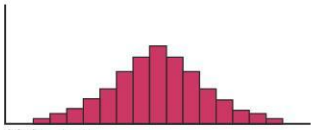

klokvormig


scheef met staart naar links


scheef met staart naar rechts en een uitschieter


uniform


meertoppig


klokvormig

S1 Je ziet de gegevens van 404 jongeren.

a Welke vorm heeft het staafdiagram van de variabele *lengte*, met de eerste klasse [130, 135⟩?

b Welke vorm heeft het staafdiagram van de variabele *gewicht*, met de eerste klasse [35, 40⟩?

Theorie

Frequentiepolygoon, cumulatieve frequentiepolygoon

In een frequentiepolygoon is langs de verticale as de frequentie, absoluut of relatief, uitgezet.
De somfrequentie of cumulatieve frequentie van een waarnemingsgetal is het totaal van alle frequenties vanaf het kleinste waarnemingsgetal.
De grafiek van de cumulatieve frequenties heet een somfrequentiepolygoon of cumulatieve frequentiepolygoon.

© Noordhoff Uitgevers bv

S2 Je ziet de resultaten van een onderzoek naar de wachttijden bij de kassa van een supermarkt. Van 193 klanten is de wachttijd bij de kassa genoteerd.

a Zijn de gegevens in een frequentiepolygoon of in een cumulatieve frequentiepolygoon verwerkt?

b Hoeveel procent van de klanten moesten minder dan één minuut wachten?

c Hoeveel klanten in dit onderzoek moesten minimaal twee minuten wachten bij de kassa?

Vaardigheid

Je kunt werken met een klassenindeling.

Als een variabele veel verschillende waarden kan hebben, dan worden de data vaak ingedeeld in klassen.
Met de intervalnotatie leg je de grenzen van een klasse vast.
De klassenbreedte is de afstand tussen de grenzen van de klassen. Het klassenmidden ligt precies halverwege de linker grens en de rechtergrens.

Voorbeeld

lengte in cm	*aantal*
[20, 25⟩	56
[25, 30⟩	78
[30, 35⟩	63
[35, 40⟩	42

De klassenbreedte is 5 cm.
De eerste klasse bevat alle meetwaarden die minstens 20 cm zijn, maar kleiner dan 25 cm.
Het klassenmidden van deze klasse is 22,5 cm.

S3 In een zuivelfabriek staan twee vulmachines waarmee literpakken yoghurt worden gevuld. Uit de productie van elk van de twee machines worden willekeurig honderd gevulde pakken genomen. De gemeten volumes zijn in mL.

a Maak met een geschikte klassenbreedte een staafdiagram bij de variabele *inhoud*. Welke klassenbreedte heb je gekozen?

b Geef het klassenmidden van de klasse met de kleinste inhouden bij deze verdeling.

c Maak afzonderlijke staafdiagrammen van de inhoud van de pakken van machine A en machine B.

d Welk verschil is er tussen de inhoud van de pakken van de machines?

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt centrummaten gebruiken om conclusies te trekken.

Je moet altijd voorzichtig zijn met het trekken van conclusies uit statistische gegevens. Ook de keuze van een centrummaat hangt van de situatie af. Een waarneming die erg afwijkt van de andere waarneming noem je een uitschieter. Uitschieters hebben in het algemeen veel meer invloed op het gemiddelde dan op de mediaan en op de modus.

Voorbeeld

Bij een loterij zijn 50 prijzen te winnen. In de tabel zie je welke prijzen er zijn en hoe vaak deze worden uitgereikt.
Bereken het gemiddelde, de mediaan en geef de modus.

prijs in euro's	*aantal*
1000	1
500	2
250	10
100	20
10	50
totaal	83

Oplossing

Het totale prijzengeld is $1 \times 1000 + 2 \times 500 + \ldots + 10 \times 50 = 7000$ euro.
Het gemiddelde is $7000 : 83 \approx 84{,}34$ euro.
De mediaan is van boven naar beneden geteld de 42e prijs en dat is 10 euro.
De modus is 10 euro, want die prijs heeft de hoogste frequentie.

S4 Welke centrummaat in het voorbeeld geeft volgens jou het beste beeld van het prijzengeld?

S5

a Geef voor elke machine het gemiddelde, de mediaan en de modus.

b Een van de gevulde pakken heeft een inhoud van 1004 mL yoghurt.
Door welke machine is dit pak waarschijnlijk gevuld?

Vaardigheid

Je kunt de spreiding in een dataset uitdrukken in een getal.

Met spreidingsmaten geef je aan hoe ver gegevens van elkaar af liggen.
De spreidingsbreedte is het verschil tussen het grootste en het kleinste waarnemingsgetal.
De kwartielafstand of interkwartielafstand is het verschil tussen het eerste kwartiel en het derde kwartiel: $Q_3 - Q_1$.
De standaardafwijking of standaarddeviatie is een spreidingsmaat die iets zegt over de spreiding rond het gemiddelde.

Voorbeeld

	4	5	6	7	8	9
cijfers Duits	1	3	7	11	6	2
cijfers economie	0	1	15	11	3	0

De spreidingsbreedte bij Duits is $9 - 4 = 5$ en bij economie $8 - 5 = 3$.
De kwartielafstand bij Duits is $8 - 6 = 2$ en bij economie $7 - 6 = 1$.
De standaarddeviatie van de cijfers bij Duits is 1,17 en bij economie 0,72.
De spreiding bij Duits is groter dan bij economie.

© Noordhoff Uitgevers bv

S6

a Maak een boxplot bij de variabele *inhoud* en splits op machine.
b Beschrijf de verschillen tussen de producties van de twee machines.
c Bereken bij elke machine de kwartielafstand en de standaardafwijking van de variabele *inhoud*.
d Onderschrijven de kwartielafstand en de standaardafwijking je antwoord van opdracht b?

Vaardigheid

Je kunt een frequentiepolygoon en een cumulatieve frequentiepolygoon tekenen en gebruiken.

Bij het tekenen van een frequentiepolygoon zet je bij een indeling in klassen de frequenties uit boven de klassenmiddens.
Bij het tekenen van een cumulatieve frequentiepolygoon zet je bij een indeling in klassen de somfrequenties uit boven de rechter klassengrenzen.

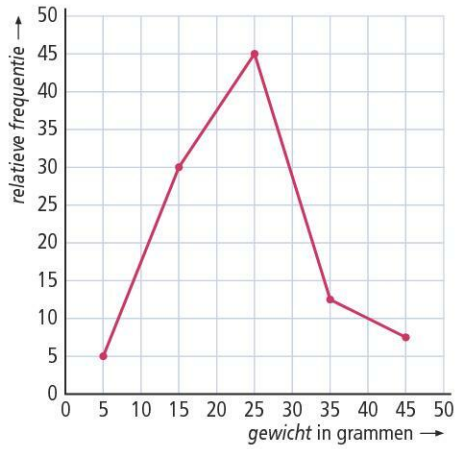
Voorbeeld

Teken bij de tabel een relatieve frequentiepolygoon en een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon.

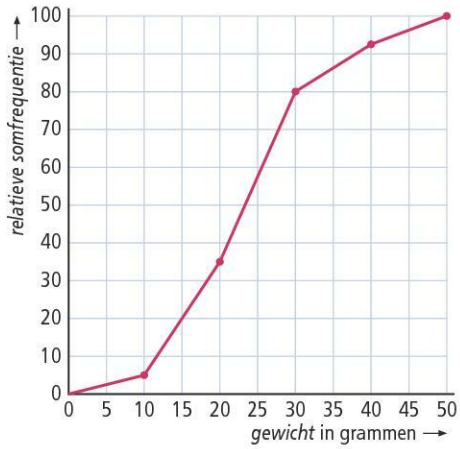
gewicht in grammen	[0, 10⟩	[10, 20⟩	[20, 30⟩	[30, 40⟩	[40, 50⟩
frequentie in procenten	5	30	45	12,5	7,5
somfrequentie in procenten	5	35	80	92,5	100

Oplossing

relatieve frequentiepolygoon



relatieve cumulatieve frequentiepolygoon



S7 Teken een relatieve somfrequentiepolygoon bij de tabel.

wachttijd in seconden	[0, 20⟩	[20, 40⟩	[40, 60⟩	[60, 80⟩	[80, 100⟩	[100, 120⟩
frequentie	58	96	16	10	4	16

© Noordhoff Uitgevers bv

T1

In een statistisch onderzoek naar huwelijken tussen mannen en vrouwen is onder andere onderzoek gedaan naar de leeftijden.

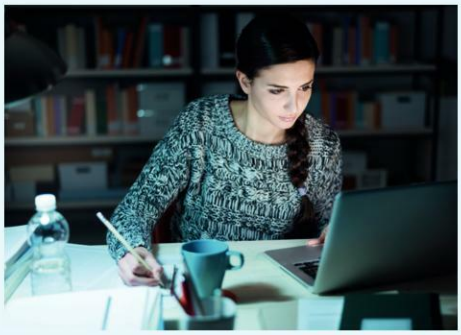
- **a** Maak een staafdiagram van de variabele *huwlft_mn* met de eerste klasse $[15, 20\rangle$.
- **b** Beschrijf de vorm van het staafdiagram.
- **c** Welke klasse is bij deze klassenindeling de modale klasse? Schrijf je antwoord in de intervalnotatie.
- **d** Geef van deze klasse het klassenmidden.
- **e** Bereken de centrummaten van de variabelen *leeft_mn* en *leeft_vr* en omschrijf hiermee het verschil in leeftijd tussen mannen en vrouwen in een huwelijk.

T2

In het onderzoek naar huwelijken tussen mannen en vrouwen is ook gekeken naar de lengte van de mannen en vrouwen.

- **a** Maak in één figuur de boxplots van de variabelen *lengte_mn* en *lengte_vr*.
- **b** Hoeveel procent van de vrouwen is kleiner dan de kleinste man?
- **c** De spreiding van de lengten van de mannen en van de vrouwen is niet gelijk.
  Ga na of de drie spreidingsmaten, spreidingsbreedte, kwartielafstand en standaarddeviatie, het zelfde geslacht aanwijzen als de groep met de grootste spreiding.

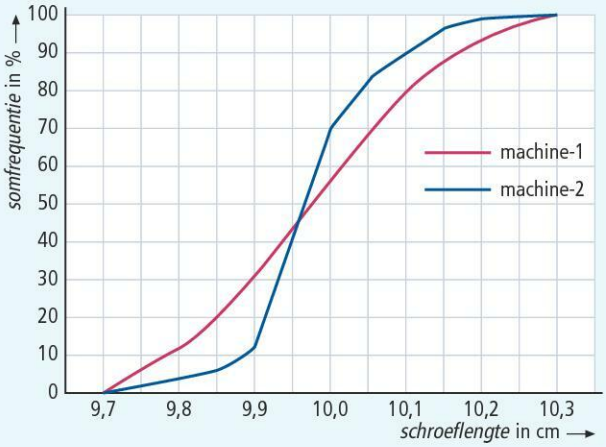
T3



In de dataset staan gegevens over hoeveel uur in een week leerlingen aan huiswerk besteden.

- **a** Maak een klassenindeling bij de variabele *huiswerk* en splits op de variabele *geslacht* waarbij de eerste klasse $[0, 4\rangle$ is.
- **b** Bereken met de klassenmiddens het gemiddelde aantal uur per week dat meisjes aan huiswerk besteden.
- **c** Hoeveel minuten wijkt het gemiddelde wat je in opdracht b berekend hebt af van het werkelijke gemiddelde?
- **d** Bereken hoeveel procent van de meisjes meer dan 14 uur per week aan huiswerk besteden.
- **e** Hoeveel procent van de leerlingen die minder dan 6 uur per week aan huiswerk besteden, is een jongen?
- **f** Bereken voor zowel de jongens als de meisjes de spreidingsbreedte, kwartielafstand en standaardafwijking en geef hiermee aan wie de grootste spreiding heeft in het aantal uur per week aan huiswerk besteden.

© Noordhoff Uitgevers bv



T4 In een fabriek worden schroeven gemaakt. De schroeven moeten een lengte krijgen van 10,0 cm. De schroeven worden door twee machines gemaakt, die niet even nauwkeurig zijn. In de relatieve somfrequentiepolygonen zie je gegevens over de lengte van de door beide machines geproduceerde schroeven.

a Teken bij beide machines een boxplot.

b Beschrijf het verschil tussen de productie van de schroeven bij machine 1 en die bij machine 2.

c Schroeven die korter zijn dan 9,9 cm of langer dan 10,1 cm worden afgekeurd.
Welke machine zal dus de voorkeur hebben?

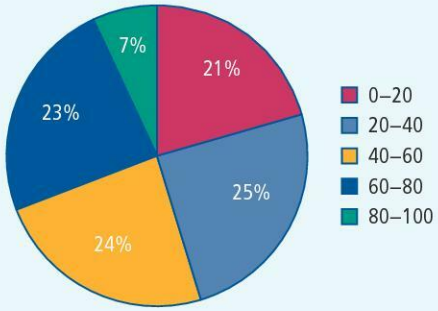
T5 In het cirkeldiagram zie je een prognose van de leeftijdsverdeling van de Nederlandse bevolking in 2030. Volgens deze prognose heeft Nederland dan in totaal 17,5 miljoen inwoners.

a Welke klasse is de modale klasse?

b In welke klasse ligt de mediaan?

c Teken een staafdiagram met de absolute aantallen inwoners per leeftijdsgroep.

d Teken een relatieve somfrequentiepolygoon bij deze gegevens.



© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt werken met een klassenindeling.

E1 De dataset bevat gegevens over het weer in Nederland gedurende de periode 1980 - 2014. De variabele *jaargemiddelde* geeft de gemiddelde temperatuur over een heel kalenderjaar.

- **a** Maak een staafdiagram bij de variabele *jaargemiddelde*.
- **b** Bij welke klassenbreedte krijg je de verdeling van de gemiddelde jaartemperaturen goed in beeld?
- **c** Waarom is het niet noodzakelijk om de waarden van de variabele *tropischeDagen* in klassen in te delen als je een staafdiagram gaat tekenen?
- **d** Hoeveel jaren in de periode 1980 - 2014 hadden geen enkele tropische dag?

Je kunt centrummaten gebruiken om conclusies te trekken.

E2 Bij de sportdag havo 4 zat ook het onderdeel kogelstoten.

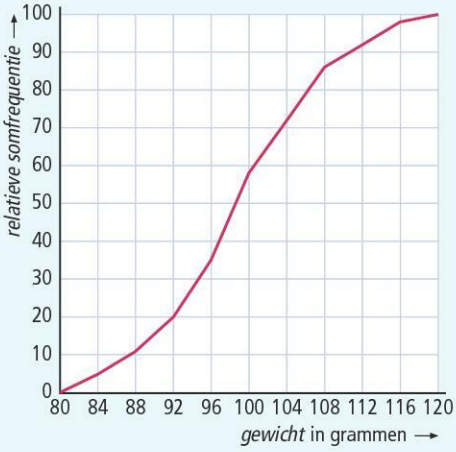
- **a** Maak een staafdiagram bij de variabele *kogelstoten* en splits op *groep*.
- **b** Bereken zowel voor groep 1, groep 2 als groep 3 de centrummaten.
- **c** Welke groep heeft volgens jou het beste gepresteerd op dit onderdeel?

Je kunt de spreiding in een dataset uitdrukken in een getal.

E3 Er zit verschil in de spreiding van de afstanden bij het onderdeel kogelstoten in groep 1, groep 2 en groep 3. Ga na of de drie spreidingsmaten, spreidingsbreedte, kwartielafstand en standaarddeviatie, dezelfde groep aanwijzen als de groep met de kleinste spreiding.

Je kunt een frequentiepolygoon en cumulatieve frequentiepolygoon tekenen en gebruiken.

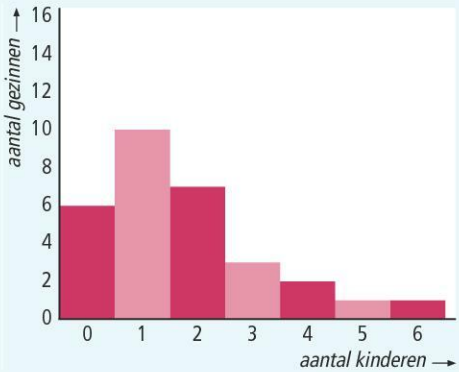
E4 Een boer heeft onderzoek gedaan naar het gewicht van de appels uit zijn boomgaard. Hij heeft daarbij 350 appels gewogen en de resultaten verwerkt in een relatieve somfrequentiepolygoon.



- **a** Hoe kun je zien dat de figuur een relatieve somfrequentiepolygoon is?
- **b** Hoe breed zijn de klassen waarin de data verdeeld zijn?
- **c** Welke klasse is de modale klasse?
- **d** Lees uit de relatieve somfrequentiepolygoon de waarde van de mediaan af.
- **e** Teken een boxplot bij de gewichten van de appels.
- **f** Hoe groot is de spreidingsbreedte? En hoe groot is de interkwartielafstand?

© Noordhoff Uitgevers bv

E5 In een straat is van alle gezinnen het aantal kinderen geteld. De resultaten daarvan zie je in het staafdiagram.
In het staafdiagram kun je bijvoorbeeld aflezen dat er tien gezinnen zijn met één kind.



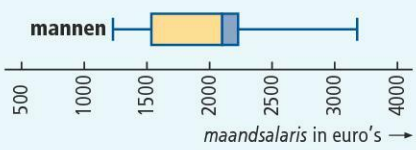
- **a** Hoeveel gezinnen wonen er in de straat?
- **b** Bereken het gemiddelde aantal kinderen per gezin in twee decimalen nauwkeurig.
- **c** Welke centrummaat geeft het beste weer hoeveel kinderen in een gezin in deze straat wonen?
- **d** Neem aan dat de gezinnen een goede afspiegeling zijn van het gehele dorp. In het dorp wonen 890 gezinnen. Hoeveel kinderen wonen er naar schatting in dat dorp?

E6 In de dataset zijn van 154 leerlingen gegevens opgenomen over onder andere het gemiddelde cijfer voor wiskunde.

- **a** Maak een staafdiagram bij de variabele *cijfgem* en splits op *wisgroep* waarbij de eerste klasse [6,0; 6,5⟩ is.
- **b** Welke groep heeft de meeste leerlingen met gemiddeld minimaal een 7,0?
- **c** En welke groep heeft naar verhouding de meeste leerlingen met gemiddeld minimaal een 7,0?
- **d** Onderzoek met de centrummaten welke groep volgens jou het best presteert.
- **e** Bereken van beide groepen de spreidingsmaten en onderzoek bij welke groep de spreiding van de cijfers het kleinst is.

E7 Bij Negan, een kantoormeubelenbedrijf, werken buiten de directie nog 125 werknemers: 75 vrouwen en 50 mannen.
In het financieel jaarverslag van 2012 is een overzicht van de betaalde salarissen opgenomen.
De verdeling van de salarissen staat in de tabel.

salaris-groep	*maandsalaris* in euro's	*aantal* ♀	*aantal* ♂
1	[800, 1000⟩	2	0
2	[1000, 1200⟩	6	0
3	[1200, 1400⟩	10	1
4	[1400, 1600⟩	5	4
5	[1600, 1800⟩	13	9
6	[1800, 2000⟩	10	10
7	[2000, 2200⟩	12	9
8	[2200, 2400⟩	9	7
9	[2400, 2600⟩	5	5
10	[2600, 2800⟩	3	3
11	[2800, 3000⟩	0	1
12	[3000, 3200⟩	0	1



- **a** Leg uit, zonder berekening, of het gemiddelde salaris bij de vrouwen hoger of lager is dan bij de mannen.
- **b** Teken een relatieve somfrequentiepolygoon van de salarissen van de vrouwen.
- **c** Onder de tabel is een boxplot getekend van de verdeling van de salarissen bij de mannen.
  Teken met behulp van de relatieve somfrequentiepolygoon van opdracht b een boxplot van de verdeling van de salarissen bij de vrouwen.
- **d** Iemand beweert dat je uit de boxplots het volgende kunt concluderen: 'Ongeveer twee maal zoveel mannen als vrouwen verdienen meer dan € 2.100,- per maand.'
  Ben je het hiermee eens? Licht je antwoord toe.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Statistische verwerking (zonder ICT) 7

SE CE K

In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je al regelmatig bij data bijvoorbeeld een gemiddelde berekend of een boxplot getekend. Ook heb je klassenindelingen gemaakt en daarbij een gemiddelde berekend.

In dit hoofdstuk worden deze zaken herhaald en uitgebreid met nieuwe statistische begrippen. Je gaat daarbij verschillende groepen met elkaar vergelijken. Aan het eind van het hoofdstuk leer je hoe je data kunt weergeven in een frequentiepolygoon en in een somfrequentiepolygoon.

Het onderdeel statistiek wordt in H10 en in deel 3 uitgebreid en afgerond.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

· *Probleem oplossen en analytisch denken*	opdracht 17
· *Ordenen en structureren*	opdracht 3
· *Logisch redeneren en bewijzen*	opdracht 25

© Noordhoff Uitgevers bv

V1 In de tabel staan de leeftijden van de jeugdleden van een handbalvereniging gesplitst op geslacht.

leeftijd	9	10	11	12	13	14	15	16	17	totaal
frequentie meisjes	3	6	8	11	7	9	12	4	7	67
frequentie jongens	6	11	9	5	4	10	9	6	10	70

a Hoeveel jeugdleden zijn jonger dan 12 jaar?
b Hoeveel procent van de jeugdleden is jonger dan 12 jaar?
c Welke leeftijd bij de meisjes heeft de grootste frequentie?
En welke leeftijd bij de jongens?
d Volgens Simone zijn er 33 meisjes jonger en 33 meisjes ouder dan dat ze zelf is.
Hoe oud is Simone?
e Bereken de gemiddelde leeftijd van de jeugdleden.

Theorie

Van een rij waarnemingen die op volgorde van klein naar groot staan, heet de middelste waarneming de mediaan. Bij een even aantal waarnemingen is de mediaan het gemiddelde van de middelste twee waarnemingen.
De waarneming met de grootste frequentie noem je de modus.

Voorbeeld 1

Léon scoorde bij tien basketbalwedstrijden 12, 13, 15, 13, 16, 14, 12, 14, 15 en 13 punten.
Geef de mediaan en de modus.

Oplossing
Het aantal punten van klein naar groot is:
12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 16
De mediaan is (13 + 14) : 2 = 13,5 punten.
De modus is 13 punten.

Voorbeeld 2

Scott scoorde bij negen basketbalwedstrijden 18, 22, 19, 21, 13, 17, 20, 17 en 22 punten.
Geef de mediaan en de modus.

Oplossing
Het aantal punten van klein naar groot is:
13, 17, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 22
De mediaan is 19 punten.
Er is geen modus.

V2 In de tabel zie je de eindcijfers van 109 leerlingen voor het vak economie.

cijfer	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	2	6	35	34	18	11	3

a Bereken het gemiddelde cijfer.
b Hoe groot is de mediaan?
c Welk cijfer is de modus?
d Hoeveel procent van de leerlingen heeft een onvoldoende?

© Noordhoff Uitgevers bv

V3 Van één boom zijn 59 kastanjes verzameld. De verdeling van de gewichten zie je in het steelbladdiagram. Vóór de streep staan de hele grammen, achter de streep de tiende grammen.

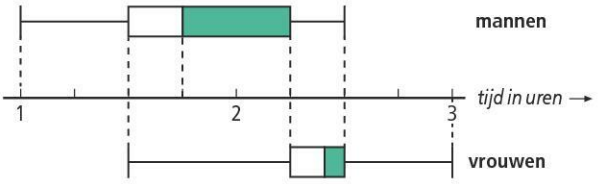
a Wat betekenen de drie nullen achter de acht?

b Hoeveel procent van de kastanjes heeft een gewicht van meer dan 9 gram?

c Hoe groot is het verschil in gewicht tussen de lichtste en de zwaarste kastanje?

d Hoe groot is de modus en hoe groot is de mediaan van de gewichten?

3	2 3
4	1 4 4 5
5	1 5 5 6 7 9
6	4 4 7 8 9 9 9
7	0 0 2 2 3 3 3 5 6 7 7 7 7
8	0 0 0 1 2 4 6 6 6 7 7 7 8 8 8 9 9
9	1 1 3 4 4 7 9 9 9
10	1



V4 In de boxplots zie je de resultaten van een veldloop over 20 km.

a Hoe groot is het verschil in tijd tussen de eerste man en de laatste man die over de finish ging?

b Leg uit hoe je in de boxplot kunt aflezen dat 25% van de mannen sneller was, dan de snelste vrouw.

c Welke tijd was de mediaan bij de mannen?

d Hoeveel procent van de vrouwen had een tijd tussen 2:15 uur en 2:30 uur?

e Welke tijden behoren bij de 25% snelste vrouwen?

f Toen de langzaamste man over de finish kwam, waren er al 126 vrouwen over de finish.
Hoeveel vrouwen moesten daarna nog over de finish komen?

V5 Bij een psychologische test kunnen de 150 deelnemers maximaal 30 punten halen.

a Hoe groot is de modus en hoe groot is de mediaan van de scores?

b Bereken de gemiddelde score.

c De onderzoeker besluit om de laagste score niet te gebruiken bij het beschrijven van de resultaten.
Welke reden kan hij daarvoor hebben?

d Leg uit dat hierdoor de modus en de mediaan niet veranderen.

score	*frequentie*
5	1
23	39
24	34
25	21
26	21
27	20
28	9
29	3
30	2

© Noordhoff Uitgevers bv

7.1 Klassenindeling

Je leert · hoe je met een klassenindeling werkt

Leerroutes
· ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—7
· doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
· uitdagend: 1—2—3—4—5—6—U1

Op een punt waar de maximumsnelheid 30 km per uur is, wordt een snelheidsdisplay geplaatst. Dit display toont de automobilist zijn snelheid.
In de tabel staan de eerste 40 meetwaarden.
· Op welke manier kun je deze data het best in beeld brengen?

32,1	35,1	29,3	34,2	42,8
36,3	42,8	31,3	36,5	30,1
30,5	28,7	33,7	33,3	36,4
38,2	40,7	44,2	39,1	33,9
34,1	31,7	35,5	30,4	42,8
27,9	34,4	40,7	38,4	36,7
33,4	37,3	28,1	34,6	40,7
31,8	32,3	32,2	35,4	38,3

1 H In de frequentietabel zijn de data van de lengte van de jongens en de lengte van de meisjes in klassen ingedeeld.

a Waarom komt een lengte van 179,8 cm in de klasse 180-184?
b En in welke klasse komt een lengte van 164,4 cm?
c Wat is de kleinste lengte van een meisje die nog in de klasse 175-179 valt?
d Wat is de linker grens van de klasse 175-179? En wat is de rechter grens?
e Hoe breed is de klasse 155-159?
f Welk getal is het midden van de klasse 155-159?

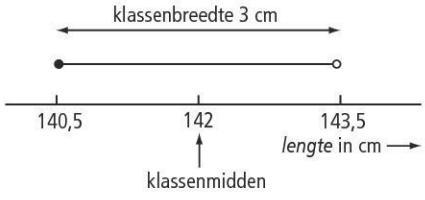
geslacht	m	v	
lengte	freq.	freq.	totaal
155-159	0	6	6
160-164	2	12	14
165-169	3	34	37
170-174	10	16	26
175-179	14	10	24
180-184	18	5	23
185-189	11	1	12
190-194	9	0	9
195-189	1	1	2
200-204	1	0	1
totaal	69	85	154

Theorie

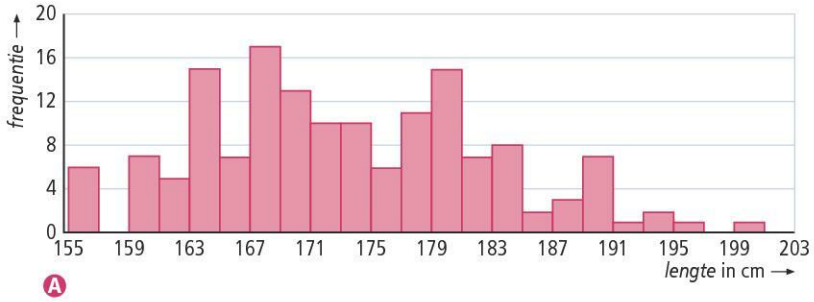
Als een variabele veel verschillende waarden heeft, dan worden ze vaak ingedeeld in klassen. De **klassenbreedte** is de afstand tussen de grenzen van een klasse. Het **klassenmidden** ligt precies halverwege de linker grens en de rechter grens. Klassen worden vaak genoteerd met de klassengrenzen. Dit heet **intervalnotatie**. Bij de klasse $[49{,}5; 59{,}5\rangle$ geeft de rechte haak aan dat de linker grens nog in de klasse valt en de punthaak geeft aan dat de rechter grens er net niet meer in valt. De intervalnotatie is eenduidig; bij allerlei andere notaties moet je goed opletten. Zo bevat de leeftijdsklasse 50-59 de leeftijden vanaf 50 jaar tot 60 jaar.

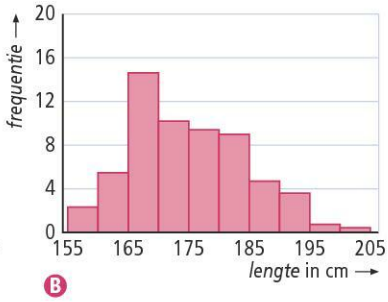
Voorbeeld

De klasse 141-143 kun je in de intervalnotatie schrijven als $[140{,}5; 143{,}5\rangle$.
De klassenbreedte is 3 cm en het klassenmidden is 142 cm.



© Noordhoff Uitgevers bv





2 Van 154 leerlingen is de lengte in cm gemeten. De gemeten lengtes zijn verwerkt in twee staafdiagrammen.

a Geef van beide staafdiagrammen de klassenbreedte.

b Geef van beide staafdiagrammen de modale klasse.

c Geef de voordelen en nadelen van beide staafdiagrammen.

De modale klasse is de klasse met de meeste waarnemingen.

3 In de volgende situaties betekent de klasse 70-76 steeds iets anders.

a De administratie van een theater telt van elke voorstelling het aantal verkochte kaartjes.
Welke aantallen zitten in de klasse 70-76?

b Bij een onderzoek naar het gewicht van de leden van een atletiekvereniging wordt het gewicht afgerond op hele kg in klassen ingedeeld.
Leg uit dat bij de klasse 70-76 de intervalnotatie $[69{,}5;\ 76{,}5\rangle$ hoort.

c Geef bij de situatie van opdracht b ook het klassenmidden en de klassenbreedte.

d Leg uit dat bij leeftijden in jaren het klassenmidden van de klasse 70-76 gelijk is aan 73,5 jaar.

e Geef de intervalnotatie bij de leeftijdsklasse 70-76.

f Hoe groot is de klassenbreedte van de leeftijdsklasse 70-76?

Ondersteunende route → maak opdracht 04

4 Je ziet de cijfers van leerlingen voor een proefwerk.

a Rond deze cijfers af op gehele getallen en verwerk ze vervolgens in een frequentietabel.

b Teken een staafdiagram bij de frequentietabel.

c In opdracht a heb je in feite een klassenindeling gemaakt.
Schrijf de klassengrenzen van de eerste klasse op.

d Hoe groot is de klassenbreedte in dit geval?

e In welke klasse ligt de mediaan?

f Geef de grenzen van de modale klasse.

3,8	4,2	4,8	4,9	5,0	5,1
5,4	5,7	5,7	5,8	5,9	6,0
6,2	6,2	6,2	6,3	6,3	6,5
6,6	6,7	6,7	6,8	7,0	7,2
7,4	7,7	7,9	8,2	8,5	8,9

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Een winkelier weegt de zakken aardappelen die hij in voorraad heeft. Je ziet een klassenindeling van de gewichten van de zakken Bintjes en Nicola met hun frequenties.

a Geef de klassenbreedte en de klassenmiddens.
b Waarom kun je de gewichten van de twee soorten niet goed vergelijken door absolute aantallen te gebruiken?
c Ga na dat 20% van de Bintjes in de klasse [2,48; 2,50⟩ zit.
d Bereken bij de klassenindeling voor beide rassen de relatieve frequenties.
e Teken bij beide rassen een staafdiagram bij de relatieve frequenties.
f Welk verschil is er tussen de twee staafdiagrammen?

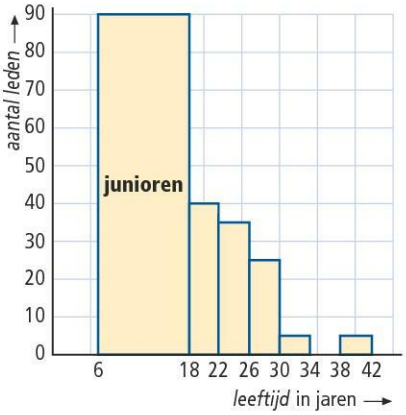
	aantal zakken	
gewicht in kg	Bintjes	Nicola
[2,48; 2,50⟩	18	0
[2,50; 2,52⟩	17	34
[2,52; 2,54⟩	21	62
[2,54; 2,56⟩	19	41
[2,56; 2,58⟩	15	13
totaal	90	150

6 In de tabel staat de leeftijdsverdeling van de 200 leden van een zwemvereniging.

leeftijd in jaren	6-17	18-21	22-25	26-29	30-33	34-37	38-41
aantal leden	90	40	35	25	5	0	5

Leden van de vereniging die jonger zijn dan 18 jaar heten junioren. De secretaris van de vereniging heeft voor het clubblad een diagram bij de tabel gemaakt.
Dat diagram geeft een verkeerde indruk van de leeftijdsverdeling van de leden van deze vereniging.

a Onderzoek waar dat door komt.
b Als je een beter diagram zou moeten tekenen, hoe zou je dat dan doen?



7 In de tabel staat een klassenindeling van de gewichten van dertig zakken peren.

gewicht in kg	[2,40; 2,50⟩	[2,50; 2,60⟩	[2,60; 2,70⟩	[2,70; 2,80⟩
aantal zakken	6	10	8	6

a Geef de klassenbreedte en de klassenmiddens.
b Jesper maakt met behulp van de klassenmiddens een schatting van het gemiddelde gewicht van een zak peren. Maak de berekening van Jesper af.
c Waar moet de verdeling binnen de klasse aan voldoen om het antwoord van opdracht b te kunnen gebruiken als een goede schatting?

Jesper

$(2{,}45 \times 6 + 2{,}55 \times 10 + \ldots + \ldots) : \ldots =$
$\ldots : \ldots = \ldots$

Uitdagende route → maak opdracht U1

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

4,1	4,3	4,4	4,9	5,1
5,2	5,2	5,2	5,3	5,4
5,5	5,5	5,7	5,7	5,7
5,7	5,7	6,0	6,0	6,0
6,3	6,3	6,3	6,5	6,6
6,8	6,8	6,9	7,1	7,1
7,2	7,2	7,2	7,3	7,3
7,4	7,4	7,4	7,4	7,4
7,5	7,9	8,0	8,0	8,4
8,4	8,4	8,5	9,1	9,2

O4 Je ziet de eindcijfers van de havo 4 leerlingen voor het vak Engels.

a Welke cijfers zijn afgerond een 7?
b Hoeveel leerlingen staan afgerond een 7?
c Geef het antwoord van opdracht a in de intervalnotatie.
d Er is een leerling met een 4,1 als eindcijfer.
Wat is de linkergrens van de klasse waarin dit cijfer valt?
e Rond de cijfers af op gehele getallen en verwerk ze vervolgens in een frequentietabel.
f Teken een staafdiagram bij de frequentietabel.
g In welke klasse ligt de mediaan?
h Geef de grenzen van de modale klasse.

Uitdagende opdrachten

U1 In de tabel staat de leeftijdsverdeling van de 50 leden van een bridgevereniging. De leeftijden van de leden zijn in klassen ingedeeld. In de tabel zijn twee frequenties weggevallen.

leeftijd in jaren	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89
aantal leden	3	8	…	14	…	3	2

Als je de gemiddelde leeftijd met de klassenmiddens berekent, krijg je als resultaat 70 jaar.
Zoek uit welke frequenties in de tabel weggevallen zijn.

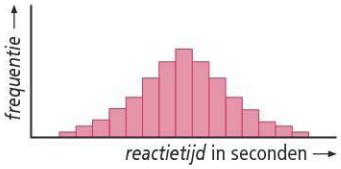
© Noordhoff Uitgevers bv

7.2 Frequentieverdelingen

Je leert
- wat de verschillende vormen van een frequentieverdeling zijn

Leerroutes
- ondersteunend: 8—9—10—O11—12
- doorlopend: 8—9—10—11—12
- uitdagend: 8—10—11—12—U2

Bij een biologiepracticum wordt de reactietijd van 228 leerlingen gemeten. De gemiddelde reactietijd is 0,8 seconden. De gegevens worden verwerkt in een staafdiagram. Het staafdiagram wordt klokvormig genoemd.



- Verklaar de vorm van het staafdiagram.

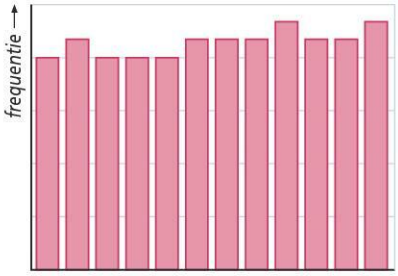
8 Van een groep leerlingen zijn data, zoals leeftijd, geboortemaand, lengte, gewicht, profiel en inkomen ouders verzameld.

a Welke van deze variabelen zijn kwantitatief?

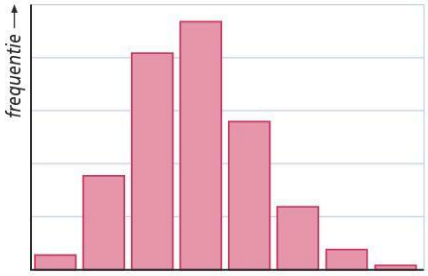
b De staafdiagrammen horen bij de data.
Geef van elk staafdiagram aan bij welke variabele ze kunnen horen.

c Welke staafdiagrammen zijn min of meer symmetrisch?

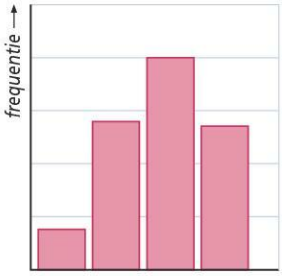
d Verklaar het verschil tussen de vorm van de staafdiagrammen.



A



B



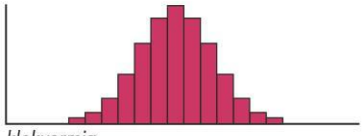
C

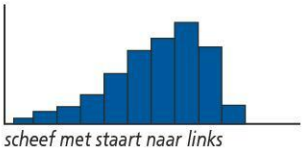
© Noordhoff Uitgevers bv

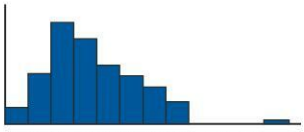
Theorie

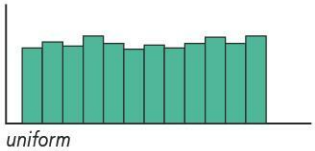
Datasets kun je ordenen in bijvoorbeeld frequentietabellen of staafdiagrammen. Dit zijn beide voorbeelden van een **frequentieverdeling**.
De vorm van een staafdiagram geeft informatie over de frequentieverdeling.
Een **klokvormige verdeling** is een symmetrische verdeling met in het midden de hoogste staaf. Bij een klokvormige verdeling zijn de modus, de mediaan en het gemiddelde aan elkaar gelijk.
Bij een **scheve verdeling** ligt de hoogste staaf meer naar links of naar rechts.
Bij een **uniforme verdeling** zijn alle staven ongeveer even hoog.
Bij een **meertoppige verdeling** zie je in het staafdiagram meer dan één top.
Een waarneming die erg afwijkt van de andere waarnemingen noem je een **uitschieter**.

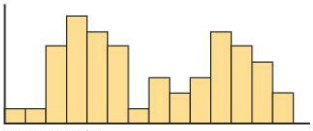
Voorbeeld

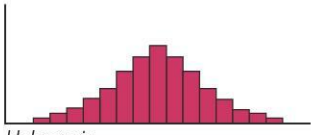

klokvormig


scheef met staart naar links


scheef met staart naar rechts en een uitschieter

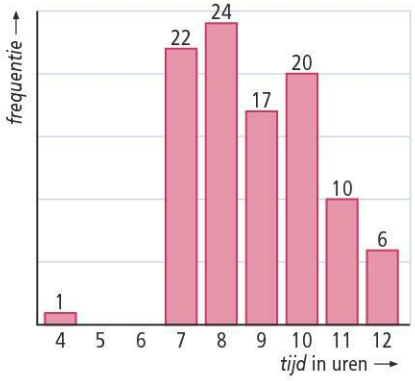

uniform


meertoppig

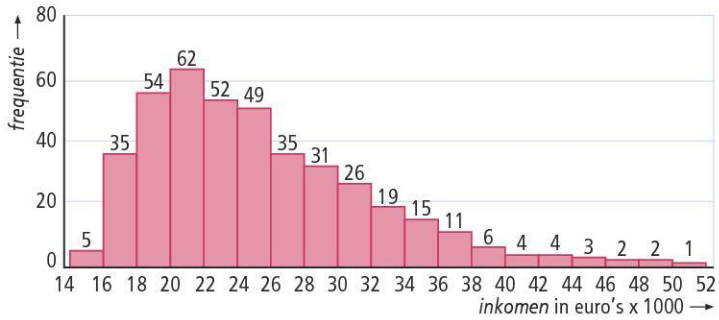

klokvormig

9
a Welke verdelingen in het voorbeeld zijn min of meer symmetrisch?
b Bij welke verdeling zijn de modus, de mediaan en het gemiddelde gelijk aan elkaar?
c Schets een meertoppige verdeling met één uitschieter.

10 Een computerfabrikant onderzoekt de levensduur van een accu voor laptops. De resultaten zijn afgerond op hele uren en verwerkt in een staafdiagram.
a Van hoeveel accu's onderzoekt de fabrikant de levensduur?
b Welke vorm heeft het staafdiagram?
c Geef de mediaan en de modus van de levensduur.
d Er is één uitschieter.
Op welke centrummaten heeft deze uitschieter geen invloed?



Ondersteunende route → maak opdracht O11



11 H

Je ziet de frequentieverdeling van de netto maandinkomens van 416 huishoudens in een dorp.

a Hoe karakteriseer je de vorm van deze verdeling?

b Welke klasse is de modale klasse?

c Het gemiddelde inkomen is € 24.900,-.
Geef het gemiddelde aan in het staafdiagram.

d Christina kijkt naar het staafdiagram en zegt: 'De helft van alle huishoudens verdient meer dan het gemiddelde.'
Mohammed denkt dat dit aandeel kleiner is.
Wat denk jij?

e Zoek uit hoeveel procent van de huishoudens meer verdient dan het gemiddelde.

f Vanaf welk inkomen kun je zeggen: 'Ik behoor tot de 50% meest verdienende huishoudens van dit dorp.'?

12

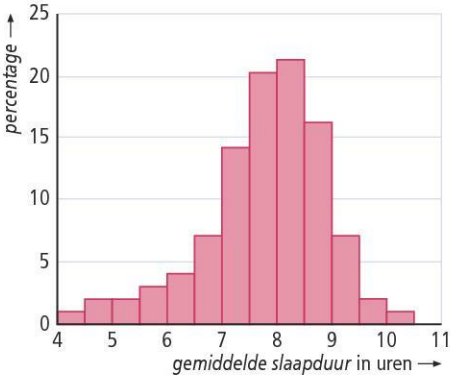
In de figuur zie je de verdeling van de gemiddelde slaapduur van de Nederlandse bevolking.

a Hoe karakteriseer je de vorm van deze verdeling?

b Welke klasse is de modale klasse?

c Slapen de Nederlanders gemiddeld langer of korter dan modaal?

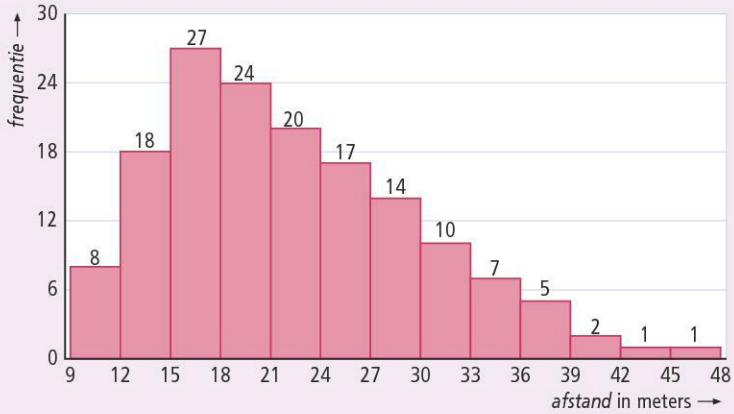
d Mensen met een slaapduur van 6 uur of minder hebben een grote kans op een chronisch slaaptekort.
Hoeveel procent van de Nederlandse bevolking behoort ongeveer tot deze groep?



Uitdagende route → maak opdracht U2

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten



O11 Op een sportdag hebben 154 leerlingen meegedaan aan het onderdeel vergooien. De afstanden die de leerlingen hebben gegooid, zijn afgerond op hele meters en verwerkt in een staafdiagram.

a Welke vorm heeft het staafdiagram?

b De modale klasse is de klasse met de hoogste frequentie
Geef de modale klasse.

c Het gemiddelde van de worpen bij het vergooien is 24 meter.
Geef het gemiddelde aan in het staafdiagram.

d Hoeveel leerlingen hebben verder dan het gemiddelde gegooid? Is dat meer of minder dan de helft of precies de helft?

e Hoeveel procent van de leerlingen heeft verder dan het gemiddelde gegooid?

Uitdagende opdrachten

U2 Geef bij de volgende situaties aan welke vorm het bijbehorende staafdiagram heeft. Verklaar je antwoord.

a De leeftijd van de leerlingen die op een dag aanwezig zijn in het gebouw van een middelbare school waar basis 1 tot en met vwo 6 wordt lesgegeven.

b De hoeveelheid kilometers file op de Nederlandse wegen gedurende de uren van een werkdag.

c De inhoud van 1000 flessen frisdrank die gevuld worden door een machine die ingesteld staat op 1,53 liter.

© Noordhoff Uitgevers bv

7.3 Centrummaten

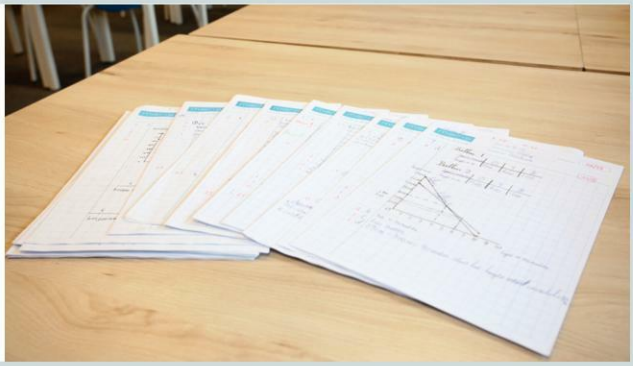
Je leert
- hoe je centrummaten gebruikt om conclusies te trekken

Leerroutes
- ondersteunend: 13—14—15—O16—16—18
- doorlopend: 13—14—15—16—17—18
- uitdagend: 13—14—16—17—18—U3

Een docent heeft in zijn drie wiskundeklassen hetzelfde proefwerk afgenomen. In het overzicht zie je enkele gegevens.

	H4a	H4b	H4c
aantal leerlingen	28	19	24
gemiddelde	5,9	6,1	5,9
hoogste cijfer	7,3	10	8,1

- In welke klas is het percentage voldoendes waarschijnlijk het hoogst?



13 In een theater zijn in de maand maart vier concerten gegeven. Veel mensen die concerten bezoeken, gaan meer dan één keer naar een concert. De directie heeft laten bijhouden hoeveel concerten iemand in die maand bezocht. In de tabel staat het resultaat.

aantal concertbezoeken	1	2	3	4	totaal
frequentie	375	293	196	163	1027

a Hoeveel concertbezoeken is de modus?
b Hoeveel concertbezoeken is de mediaan?
c Bereken het gemiddeld aantal keren dat deze concertbezoekers een concert bezochten.

14 H Bij een proefwerk werden de volgende cijfers gescoord.

cijfer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
frequentie	1	0	0	1	3	11	8	1	2	1

a Bereken de modus, de mediaan en het gemiddelde van de cijfers.
b Het cijfer 1 was het gevolg van spieken.
Wat zijn de gevolgen voor de modus, de mediaan en het gemiddelde als dit cijfer niet meegeteld wordt?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Om statistische gegevens samen te vatten gebruik je een centrummaat. De centrummaten zijn het gemiddelde, de modus en de mediaan. De klasse met de grootste frequentie noem je de modale klasse.
Je moet altijd voorzichtig zijn met het trekken van conclusies uit statistische gegevens. Ook de keuze van een centrummaat hangt van de situatie af.
Uitschieters hebben in het algemeen veel meer invloed op het gemiddelde dan op de mediaan en op de modus.

Voorbeeld

Een bedrijf heeft 37 werknemers. De verdeling van het bruto maandsalaris in euro's staat in de tabel.
Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus.

bruto maandsalaris in euro's	*aantal werknemers*
15 000	1
10 000	3
8000	4
4000	6
3000	8
2000	11
1500	4

Oplossing

Het totaal aan salaris is $1 \times 15\,000 + 3 \times 10\,000 + \ldots + 4 \times 1500 = 153\,000$ euro.
Het aantal werknemers is $1 + 3 + \ldots + 4 = 37$.
Het gemiddelde is $153\,000 : 37 \approx 4135{,}14$ euro.
Van boven naar beneden geteld is het salaris van de 19e werknemer 3000 euro, dus de mediaan is 3000 euro.
Het waarnemingsgetal met de grootste frequentie is 2000 euro, dus de modus is 2000 euro.

15 Welke centrummaat in het voorbeeld geeft volgens jou het beste beeld van het bruto maandsalaris? Verklaar je antwoord.

Ondersteunende route → maak opdracht 016

16 In de klassen 2A en 2B is een proefwerk gemaakt. Je ziet de resultaten in de frequentietabel.

a Hoeveel leerlingen zitten er in klas 2A? En in klas 2B?
b Bereken de modus, de mediaan en het gemiddelde van de proefwerkresultaten van klas 2A.
c Doe hetzelfde voor klas 2B.
d Welke van de drie centrummaten geeft volgens jou de verschillen tussen de klassen het beste weer? Leg uit waarom je dat vindt.

→ Instructie rekenmachine | Centrummaten

cijfer	*frequentie klas 2A*	*frequentie klas 2B*
2	0	3
3	1	4
4	3	4
5	8	0
6	3	10
7	3	2
8	3	1
9	2	0
10	1	0

© Noordhoff Uitgevers bv

17 In de tabel zie je de gegevens van een ziekenhuis over de geboortegewichten van de 87 baby's die daar in een maand geboren zijn.

geboortegewicht (g)	1000-1999	2000-2999	3000-3999	4000-4999	totaal
meisje	2	8	18	12	40
jongen	0	12	25	10	47

a Welke klasse is bij de jongens de modale klasse? En welke klasse is de modale klasse bij de meisjes?

b Het gemiddelde gewicht van de 87 baby's is 3426 gram. Het gemiddelde gewicht van de jongens is 3458,3 gram en van de meisjes 3387,3 gram.
Volgens Thomas kloppen deze gemiddelden niet, want (3458,3 + 3387,3) : 2 = 3422,8.
Welke fout maakt Thomas?

c Bereken met behulp van het gemiddelde gewicht van de meisjes en het gemiddelde gewicht van de jongens, het gemiddelde gewicht van de 87 baby's. Rond je antwoord af op één decimaal.

d Waarom is het gemiddelde gewicht van de meisjes geen goede centrummaat voor het geboortegewicht?

18 H Een bedrijf heeft 1500 werknemers in dienst. In de tabel staat de verdeling van de jaarsalarissen.

salaris in euro's	*frequentie*
[0, 10 000⟩	752
[10 000, 25 000⟩	663
[25 000, 40 000⟩	76
[40 000, 60 000⟩	8
[60 000, 80 000⟩	1

a In welke klasse ligt de mediaan van de jaarsalarissen?

b En welke klasse is de modale klasse?

c Gebruik de klassenmiddens om het gemiddelde salaris te berekenen.

d De eigenaar van het bedrijf beweert dat hij zijn werknemers een uitstekend salaris betaalt.
Welke centrummaat kan hij gebruiken om dat aan te tonen?

e Stel dat je voor een vakbond de mensen vertegenwoordigt met een laag salaris.
Welke centrummaat zou jij kiezen om te laten zien wat je van de salarissen vindt?

Uitdagende route → maak opdracht U3

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O16 Bij de sportdag van havo 4 was speerwerpen een onderdeel.

	afstand in meters			
leeftijd	15	16	17	18
aantal waarnemingen	9	29	29	9
gemiddelde	27,7	36,2	36,7	33,2
mediaan	23,5	38,9	37,5	30,0
modus	23,0	25,0	42,5	31,5

a Als je kijkt naar de gemiddelden, welke leeftijd heeft dan het beste gepresteerd op het onderdeel speerwerpen?
b De modus van de 16-jarigen is 25 meter.
Wat is de betekenis hiervan?
c Mark vindt dat de 16-jarigen het beste hebben gepresteerd.
Welk argument kan hij daarvoor gebruiken?
d Geef twee argumenten waarom de 17-jarigen het beste gepresteerd hebben.

Uitdagende opdrachten

U3 In de Italiaanse voetbalcompetitie waren de uitslagen in een speelronde als volgt.

AC Milan – Atalanta	4 – 0	AS Roma – Juventus	1 – 3
Bologna – Napoli	1 – 0	Sampdoria – Udines	2 – 2
Catania – Fiorentina	2 – 2	Torino – Parma	0 – 0
Chievo – Genoa	1 – 0	Verona – Cagliari	1 – 3
Sassualo – Lazio	1 – 0	Inter – Livorno	2 – 1

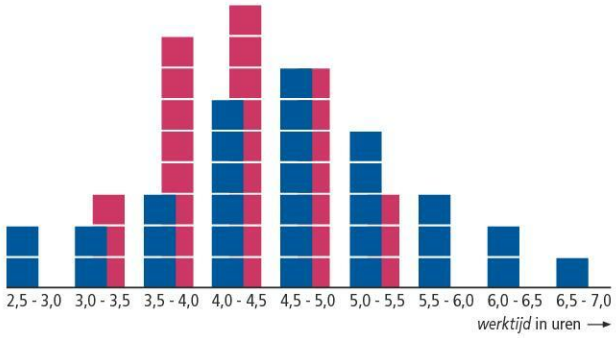
Gekeken wordt naar het aantal doelpunten per wedstrijd.
De wedstrijd AS Roma – Juventus wordt om onregelmatigheden afgekeurd en moet worden over gespeeld. Bij rust is de tussenstand 2 – 0.
Onderzoek of er voor deze inhaalwedstrijd een einduitslag mogelijk is waarbij de mediaan van het aantal doelpunten gelijk is aan $3\frac{1}{2}$. Zo ja, geef dan alle mogelijke uitslagen.
(Er werden niet meer dan vijf doelpunten gescoord.)

7.4 Spreidingsmaten

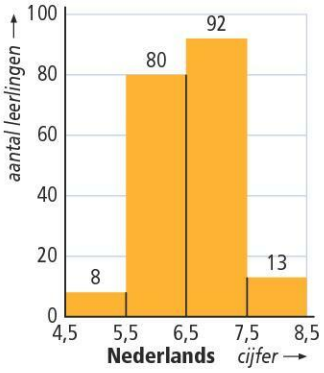
Je leert
- hoe je de spreiding in een dataset in een getal uitdrukt

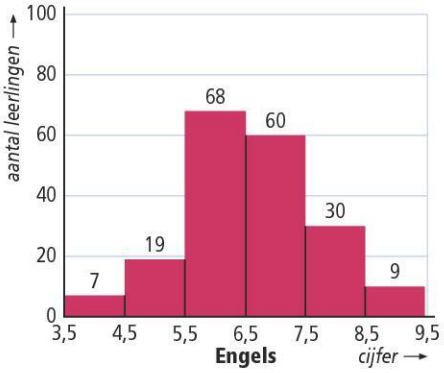
Leerroutes
- ondersteunend: 19—20—21—O22—23—24—25
- doorlopend: 19—20—21—22—23—24—25
- uitdagend: 19—20—22—23—24—25—U4

Een consumentenorganisatie heeft van twee soorten laptopaccu's uit dezelfde prijsklasse onderzocht hoelang ze stroom leveren voordat ze weer opgeladen moeten worden.
- Welk soort zou jij kopen?



19 In de staafdiagrammen zijn de eindcijfers voor Nederlands en Engels op het schoolexamen weergegeven van de leerlingen van het Agnes College.





In de tabel zie je de gegevens over de centrummaten mediaan en gemiddelde. De centrummaten zijn nagenoeg gelijk, toch is er wel een verschil tussen de resultaten van Nederlands en Engels.
Beschrijf dit verschil.

	Nederlands	Engels
gemiddelde	6,53	6,54
mediaan	6,6	6,6

20 Van een aantal flesjes koffiemelk is de inhoud in milliliters gemeten. De resultaten staan in het steelbladdiagram.
Het flesje met de kleinste inhoud bevat 178 mL koffiemelk.

a Hoeveel mL verschil zit er tussen het flesje met de grootste inhoud en het flesje met de kleinste inhoud?

b Bereken de mediaan.

c Hoeveel mL koffiemelk zit er maximaal in de 25% flesjes met de kleinste inhoud?

inhoud flesjes in mL

17	8 9 9
18	0 2 2 3 4 4 5 5 9
19	0 1 1 1 5 7
20	1 1

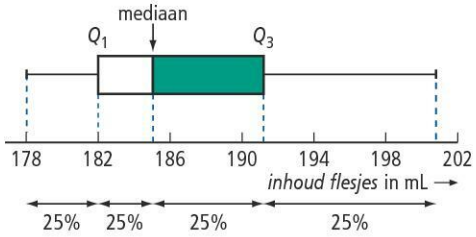
© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Met **spreidingsmaten** geef je aan hoe ver gegevens van elkaar af liggen. De eenvoudigste spreidingsmaat is de **spreidingsbreedte**, dat is het verschil tussen het grootste en het kleinste waarnemingsgetal.
Een andere spreidingsmaat is het verschil tussen het derde kwartiel Q_3 en het eerste kwartiel Q_1, de **kwartielafstand** of **interkwartielafstand**: $Q_3 - Q_1$.
Uit een boxplot kun je de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand gemakkelijk aflezen.
Centrummaten en spreidingsmaten worden **kentallen** van een verdeling genoemd.

Voorbeeld

In de boxplot is de verdeling van de inhoud van flesjes weergegeven.



De spreidingsbreedte is 201 − 178 = 23 mL.
De kwartielafstand is 191 − 182 = 9 mL.

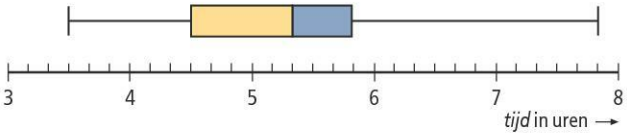
21 Een onderzoeker heeft voor een internetbedrijf onderzoek gedaan naar de klanttevredenheid. Door 250 mensen is een scoreformulier ingevuld. De scores per klant staan in de tabel.

score	*frequentie*
25	1
30	23
31	34
32	39
33	42
34	24
35	21
36	21
37	19
38	10
39	9
40	7

a Teken de boxplot van deze scores.
b Waarom liggen de beide kwartielen niet even ver van de mediaan af?
c De onderzoeker besluit om de laagste score niet te gebruiken bij het beschrijven van de resultaten. Welke reden kan hij daarvoor hebben?
d Teken een boxplot zonder de laagste score.
e Beschrijf de verschillen tussen de twee boxplots.

Ondersteunende route → maak opdracht 022

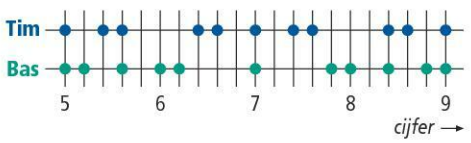
22 De leerlingen van havo 4 hebben een praktische opdracht voor het vak Engels gemaakt. De tijd die de leerlingen ermee bezig zijn geweest, is in een boxplot verwerkt.



a Pierre vindt dat het heel veel werk is geweest. De helft van de leerlingen heeft er meer dan 5 uur en 20 minuten aan gewerkt. Komt de bewering overeen met de boxplot?
b Volgens de docent hebben 3 van de 84 leerlingen er langer dan 6 uur aan gewerkt. Kan dit kloppen?

© Noordhoff Uitgevers bv

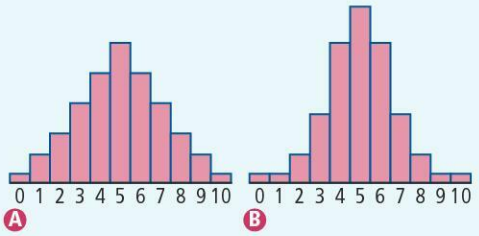
23 In de figuur staan door middel van stippen de resultaten weergegeven die twee leerlingen hebben gehaald op de proefwerken wiskunde in de derde klas.



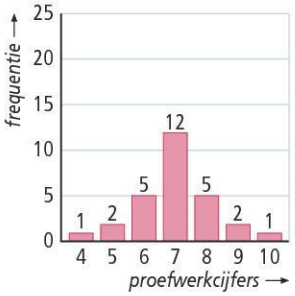
- **a** Leg uit dat bij beide leerlingen het gemiddelde 7 is.
- **b** Bereken voor beide leerlingen de spreidingsbreedte.
- **c** Bereken voor beide leerlingen de kwartielafstand.
- **d** Bij welke leerling liggen de cijfers het dichtst bij het gemiddelde?
- **e** Bij welke leerling vind je de spreiding het grootst?

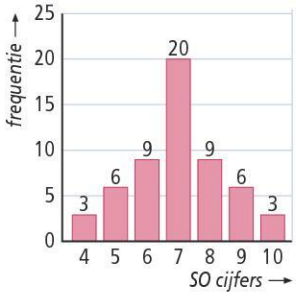
Theorie

Een spreidingsmaat die iets zegt over de spreiding rond het gemiddelde is de standaardafwijking of standaarddeviatie. De korte notatie is SD of σ.
In figuur B liggen de waarnemingsgetallen gemiddeld dichter bij het gemiddelde dan in figuur A. In figuur B is de standaardafwijking dus kleiner dan in figuur A.



24 H Jonathan heeft sinds het begin van het schooljaar bijgehouden welke cijfers hij voor proefwerken en voor SO's heeft gehaald. Hij heeft bij de resultaten staafdiagrammen gemaakt.





- **a** Bereken voor zowel de cijfers voor de proefwerken als de cijfers voor de SO's de spreidingsbreedte en de kwartielafstand.
- **b** Hoe kun je aan de staafdiagrammen zien dat de standaardafwijking van de cijfers voor de SO's groter is?

25 Meneer Haak heeft bij de leerlingen van klas 5A en klas 5B hetzelfde proefwerk gegeven. In beide klassen is het proefwerk door 28 leerlingen gemaakt

- **a** Bij welke klas is de spreidingsbreedte het grootst?
- **b** In welke klas zijn waarschijnlijk de meeste onvoldoendes gevallen? Verklaar je antwoord.

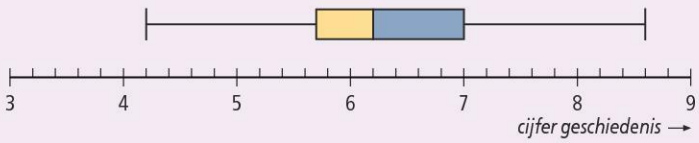
	5A	5B
laagste cijfer	3,4	4,1
hoogste cijfer	8,7	8,8
gemiddelde	6,9	6,9
standaardafwijking	1,27	2,07

Uitdagende route → maak opdracht U4

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O22 In de boxplot zijn de eindcijfers voor het vak geschiedenis van 60 leerlingen verwerkt.



a Marjolijn heeft als eindcijfer een 6,2.
Hoeveel procent van de leerlingen heeft een cijfer lager dan dat van Marjolijn?

b Hoeveel leerlingen hebben een cijfer 7 of hoger?

c Hoeveel procent van de leerlingen heeft een cijfer tussen 5,7 en 6,2?

d Hoeveel leerlingen hebben een cijfer 5,7 of lager?

e Volgens de leraar zijn er maar drie leerlingen met een onvoldoende voor geschiedenis.
Leg uit hoe dat mogelijk is.

Uitdagende opdrachten

U4 Op een basisschool is van alle leerlingen in groep 1A en in groep 1B de lengte gemeten.

a Van groep 1A is de spreidingsbreedte gelijk aan 12 cm, de kwartielafstand gelijk aan 5 cm en heeft 25% van de leerlingen een lengte tussen 82 en 84 cm.
Teken bij deze gegevens een boxplot.

b Van groep 1B is de spreidingsbreedte groter dan die van groep 1A, de kwartielafstand is kleiner dan die van groep 1A.
Verder is gegeven dat 25% van de leerlingen in groep 1B kleiner is dan de 50% langste leerlingen in groep 1A.
Teken bij het boxplot van opdracht a een mogelijk boxplot van groep 1B.

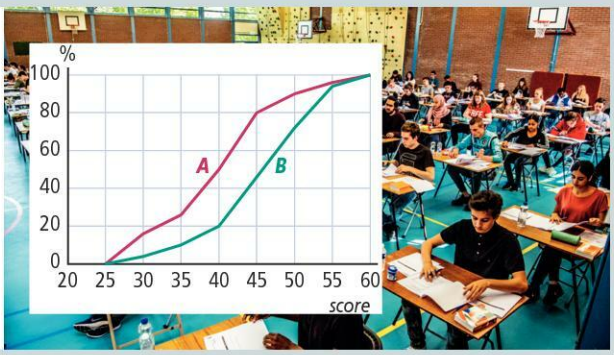
© Noordhoff Uitgevers bv

7.5 Cumulatieve verdelingen

Je leert
- wat een frequentiepolygoon en een cumulatieve frequentiepolygoon is
- hoe je een frequentiepolygoon en een cumulatieve frequentiepolygoon tekent en gebruikt

Leerroutes
- ondersteunend: 26—027—28—29—30—31
- doorlopend: 26—27—28—29—30—31
- uitdagend: 26—27—29—30—31—U5

In een onderwijsexperiment hebben twee groepen studenten zich op twee verschillende manieren voorbereid op hetzelfde tentamen. In de figuur kun je bij de scores aflezen hoeveel procent dat aantal punten of minder heeft gehaald. Zo lees je bijvoorbeeld af dat 20% van groep B minder dan 40 punten heeft gescoord.
- Welke groep heeft het tentamen beter gemaakt?



26 In de tabel zie je van 85 meisjes de lengtes ingedeeld in klassen.

lengte	[155, 160⟩	[160, 165⟩	[165, 170⟩	[170, 175⟩	[175, 180⟩	[180, 185⟩	[185, 190⟩	[190, 195⟩	[195, 200⟩
frequentie	6	12	34	16	10	5	1	0	1

a Geef het klassenmidden van de klasse met de kleinste meisjes.
b Teken een lijndiagram bij deze klassenindeling. Zet de frequenties boven de klassenmiddens.
c Laat zien dat er 52 meisjes kleiner zijn dan 170 cm.
d Hoeveel meisjes zijn kleiner dan 175 cm?
e Wat betekent het getal 18 in de tabel hieronder?

lengte	< 160	< 165	< 170	< 175	< 180	< 185	< 190	< 195	< 200
frequentie	6	18	52	…	…	…	…	…	…

f Vul de tabel verder in.
g Maak een grafiek bij de tabel van opdracht f. Zet de frequenties boven de rechter klassengrenzen.

Theorie

In een **frequentiepolygoon** is langs de verticale as de frequentie, absoluut of relatief, uitgezet. Bij een indeling in klassen zet je de frequenties uit boven de klassenmiddens.
De **somfrequentie** of **cumulatieve frequentie** van een waarnemingsgetal is het totaal van alle frequenties vanaf het kleinste waarnemingsgetal.
De grafiek van de cumulatieve frequenties heet een **somfrequentiepolygoon** of **cumulatieve frequentiepolygoon**. Bij een indeling in klassen zet je de somfrequenties uit boven de rechter klassengrenzen.

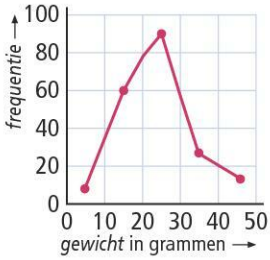
© Noordhoff Uitgevers bv

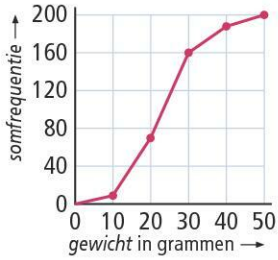
Voorbeeld

Teken bij de tabel een frequentiepolygoon en een somfrequentiepolygoon.

gewicht in grammen	*frequentie*	*somfrequentie*
[0; 10⟩	10	10
[10; 20⟩	60	70
[20; 30⟩	90	160
[30; 40⟩	25	185
[40; 50⟩	15	200

Oplossing





Ondersteunende route → maak opdracht 027

27 Waxinelichtjes zijn kleine kaarsjes, vroeger veel gebruikt in theelichtjes, tegenwoordig meer voor de gezelligheid. Maar niet alle waxinelichtjes zijn van dezelfde kwaliteit. In een onderzoek is onder andere gekeken naar de brandduur van de waxinelichtjes. In de tabel staan de gemeten waarden van twee van de onderzochte merken.

brandduur in uren	merk A	merk B
[3.30; 3.45⟩	3	1
[3.45; 4.00⟩	7	2
[4.00; 4.15⟩	11	9
[4.15; 4.30⟩	9	19
[4.30; 4.45⟩	4	28
[4.45; 5.00⟩	3	8
[5.00; 5.15⟩	2	2
[5.15; 5.30⟩	1	1

a Hoeveel waxinelichtjes van merk A zijn getest? En hoeveel van merk B?

b Leg uit dat het beter is om te werken met relatieve frequenties om de merken te vergelijken.

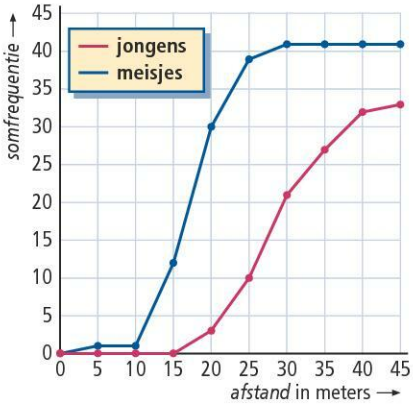
c Ga na dat de relatieve frequentie van de klasse [3.30;3.45⟩ van merk A gelijk is aan 7,5%.

d Waarom zet je bij een cumulatieve frequentiepolygoon de frequenties boven de rechter klassengrenzen?

e Teken in één figuur de relatieve cumulatieve frequentiepolygonen.

f Omschrijf de verschillen in brandduur tussen de twee merken, waarbij je kijkt naar de mediaan en de spreiding.

28 In de somfrequentiepolygonen zijn de resultaten van het onderdeel vergooien op een sportdag verwerkt.



a Hoeveel meisjes deden er mee aan de sportdag?

b Welke klassenindeling is gebruikt?

c Er is één uitschieter.
Hoeveel meter was deze worp maximaal? Is deze worp van een meisje of van een jongen?

d Hoe zie je aan de somfrequentiepolygonen dat de jongens doorgaans verder gooien dan de meisjes?

e Schat hoeveel procent van de jongens verder gooiden dan de beste worp bij de meisjes.

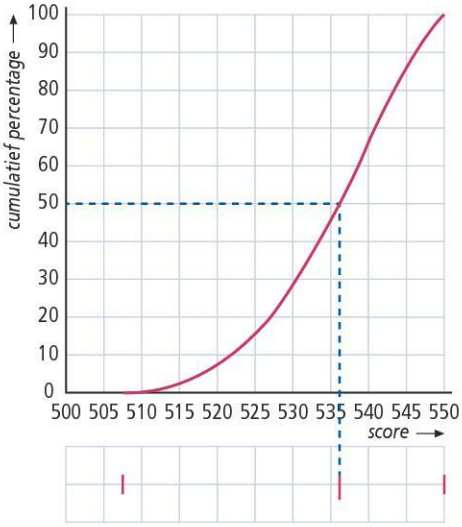
© Noordhoff Uitgevers bv

29 Op een school wordt door 120 havo leerlingen examen in het vak wiskunde A gedaan.

eindcijfer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
frequentie	0	0	1	3	9	34	49	20	4	0

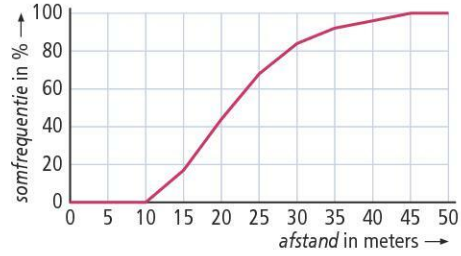
a In de tabel zie je de afgeronde cijfers.
Geef de klasse die hoort bij de cijfers die afgerond een 7 zijn.
b Hoeveel procent van de leerlingen heeft een 7 gehaald?
c Teken een relatieve somfrequentiepolygoon.
d Waar ligt het steilste gedeelte van de relatieve somfrequentiepolygoon? Wat is de betekenis daarvan?
e Bij welk percentage kun je de mediaan aflezen en hoe groot is de mediaan?

30 H Elk jaar maken op veel basisscholen de leerlingen van groep 8 de 'Cito-toets'. De scores voor de toets zijn gehele getallen vanaf 500 tot en met 550. In de somfrequentiepolygoon zie je de resultaten van 2018.
Er deden toen ruim 164 500 leerlingen mee aan deze toets.



a Hoeveel procent van de leerlingen heeft een score van meer dan 545?
b Hoeveel leerlingen hadden een score tussen 520 en 540?
c Van de leerlingen scoort 50% minder dan 536 punten. Leg uit dat de mediaan 536 punten is.
d Welke score hadden de 25% laagst scorende leerlingen maximaal? Welk kwartiel hoort hierbij?
e En welke score hadden de 25% hoogst scorende leerlingen minimaal? Welk kwartiel hoort hierbij?
f De minimale score, de maximale score en de mediaan zijn weergegeven onder de relatieve somfrequentiepolygoon. Teken op dezelfde manier de scores van opdracht d en e in de figuren en maak de boxplot af.

31 Bij de resultaten van het vergooien tijdens een sportdag van groep 8 is een relatieve somfrequentiepolygoon getekend.



a Hoe kun je aan de relatieve somfrequentiepolygoon zien dat de resultaten in klassen zijn ingedeeld?
b Geef de klassenbreedte.
c Welke klasse is de modale klasse? Hoe zie je dat in de relatieve somfrequentiepolygoon?
d Teken een boxplot bij de relatieve somfrequentiepolygoon.

Uitdagende route → maak opdracht U5

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O27 In een onderzoek naar de opbrengst van aardappelen is voor twee aardappelrassen de oogst van enkele planten gewogen.

a Is er van beide rassen een gelijk aantal planten genomen?

b Ga na dat van het ras Doré er 23 planten waren met een opbrengst minder dan 650 gram.

c Maak een tabel met voor elk ras de cumulatieve frequenties.

d Waarom kun je bij het vergelijken van de aardappelrassen beter de relatieve frequenties gebruiken?

e De relatieve cumulatieve frequentie van het aantal planten van het ras Doré met een gewicht van minder dan 650 gram is $\frac{23}{73} \times 100 \approx 31{,}5\ \%$.
Maak een tabel met voor elk ras de relatieve cumulatieve frequenties.

f Waarom zet je bij een cumulatieve frequentiepolygoon de frequenties bij de rechter klassengrens?

g Teken in één figuur de relatieve cumulatieve frequentiepolygonen.

h Leg uit dat je de mediaan kunt aflezen bij de cumulatieve frequentie van 50%.

i Lees uit de figuur af bij welk ras de mediaan van de opbrengst het grootst is.

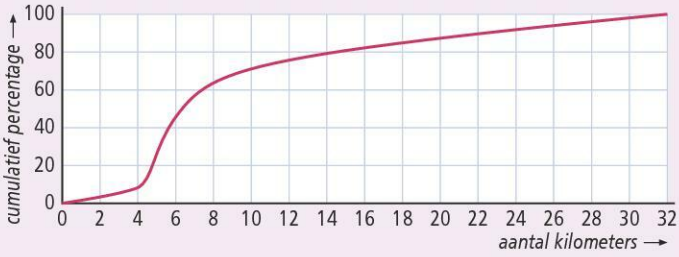
j Lees uit de figuur af hoe groot de kwartielen zijn.

k Omschrijf de verschillen in gewicht tussen de twee rassen, waarbij je kijkt naar de mediaan en de spreiding.

gewicht in grammen	Doré	Gloria
[500, 550⟩	3	1
[550, 600⟩	6	5
[600, 650⟩	14	11
[650, 700⟩	22	23
[700, 750⟩	16	39
[750, 800⟩	5	10
[800, 850⟩	4	2
[850, 900⟩	3	1
totaal	73	92

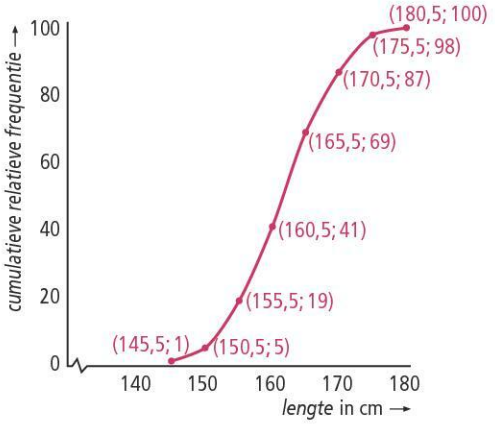
Uitdagende opdrachten

U5 Van een groot aantal leerlingen is onderzocht hoeveel kilometer zij dagelijks van en naar school fietsen. De resultaten zijn verwerkt in een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon.
Onderzoek of de mediaan of het gemiddelde groter is.



© Noordhoff Uitgevers bv

32 Bij een onderzoek onder 13-jarigen werd van 400 meisjes de lengte gemeten. In de grafiek staan de resultaten weergegeven.



a Bij een van de punten staat genoteerd (165,5; 69). Welke betekenis hebben deze getallen?
b Welke klassenindeling is gebruikt?
c Bereken hoeveel meisjes een lengte hadden van minstens 150,5 cm en minder dan 155,5 cm.
d Hoeveel meisjes waren langer dan 170,5 cm?
e Geef de modale klasse.
f Teken een boxplot bij de grafiek.

33 Bij een biologiepracticum werd van elke leerling van klas A en van klas B de longinhoud in liters gemeten. In het steelbladdiagram staan de resultaten.

longinhoud in liters

							7	2	4	4	6	6	7	7	7
		8	7	5	4	4	2	2	3	0	3	4	7	8	
7	6	6	5	4	2	1	1	0	4	6					
					7	5	4	1	5	0	0	2			
klas A										klas B					

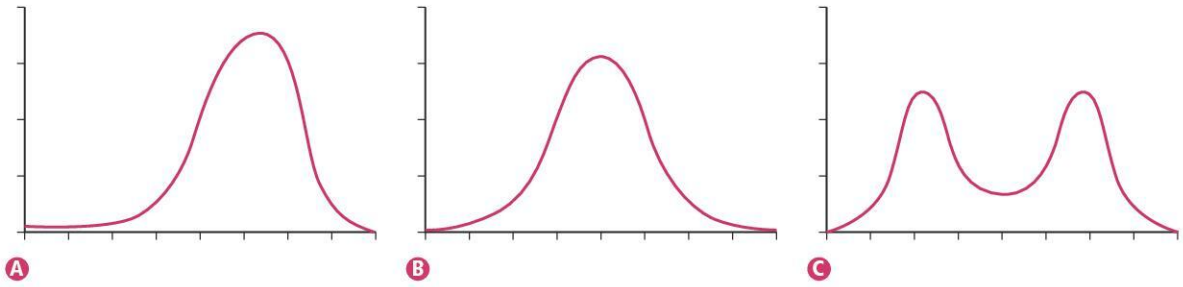
a Bereken de modus, de mediaan en het gemiddelde van klas A en van klas B.
b Met welke centrummaat kun je de longinhoud van de leerlingen in een klas het beste weergeven?
c Bereken van beide klassen de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.
d Vergelijk de longinhoud van de leerlingen van klas A en klas B met behulp van de spreidingsmaten.

34 Je ziet het gewicht in grammen van een aantal spinnen. De gewichten zijn afgerond op honderdsten en verdeeld in de klassen $[0;\ 0{,}05\rangle$, $[0{,}05;\ 0{,}10\rangle$, enzovoort.

0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
0,05	0,06	0,06	0,08	0,08	0,09
0,12	0,12	0,14	0,16	0,16	0,18
0,18	0,20	0,21	0,21	0,28	0,29

a Maak een tabel van de gewichtsklassen met de bijbehorende frequenties.
b Teken een cumulatieve frequentiepolygoon van de gewichten van de spinnen.
c Lees in de cumulatieve frequentiepolygoon de mediaan af.

© Noordhoff Uitgevers bv

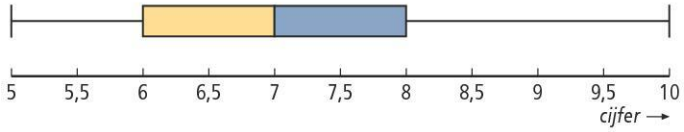


35 Je ziet drie frequentiepolygonen.

a Bij welke frequentiepolygoon zullen het gemiddelde, de modus en de mediaan dezelfde waarde hebben?

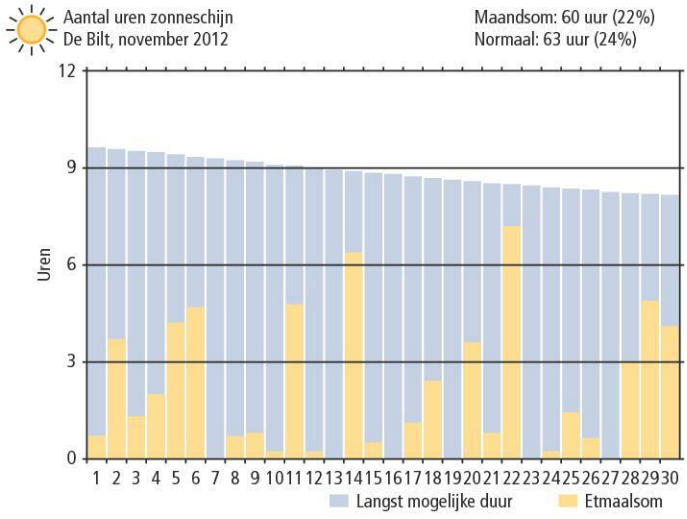
b Bij welke frequentiepolygoon heeft de mediaan de hoogste waarde?

36 Alle 196 havo leerlingen hebben een rekentoets gemaakt. De resultaten zijn verwerkt in een boxplot.



De rekendocent beweert dat het gemiddelde een 7,8 is. Onderzoek of hij gelijk kan hebben.

37 In het diagram staat voor elke dag in november 2012 het aantal uren zonneschijn in De Bilt. Ook staat aangegeven hoeveel uur de zon had kunnen schijnen.
Onderzoek of de rechtsboven vermelde aantal uren en percentages uit de figuur zijn af te leiden.



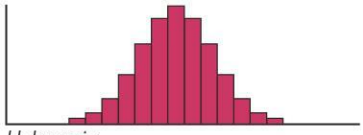
© Noordhoff Uitgevers bv

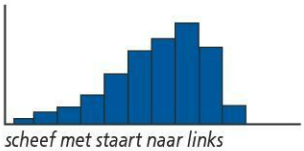
Theorie

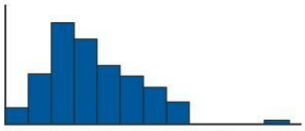
Frequentieverdeling, klokvormige verdeling, scheve verdeling, uniforme verdeling, meertoppige verdeling, uitschieter

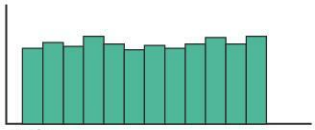
Datasets kun je ordenen in bijvoorbeeld frequentietabellen of staafdiagrammen. Dit zijn beide voorbeelden van een frequentieverdeling.
De vorm van een staafdiagram geeft informatie over de frequentieverdeling. Daarbij kun je onder andere letten op symmetrie en op uitschieters.
Een klokvormige verdeling is een symmetrische verdeling met in het midden de hoogste staaf. Bij een klokvormige verdeling zijn de modus, de mediaan en het gemiddelde aan elkaar gelijk.
Bij een scheve verdeling ligt de hoogste staaf meer naar links of naar rechts.
Bij een uniforme verdeling zijn alle staven ongeveer even hoog.
Bij een meertoppige verdeling zie je in het staafdiagram meer dan één top.

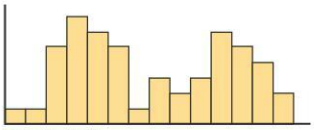
Voorbeeld

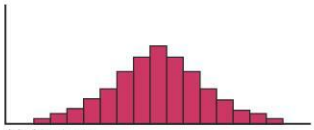

klokvormig


scheef met staart naar links


scheef met staart naar rechts en een uitschieter


uniform


meertoppig


klokvormig

S1 Bij een gymnastiekuitvoering hebben de kleuters en de ouders van de kleuters hun schoenen in de kleedkamer gezet. De gemiddelde schoenmaat van de kleuters is 28, die van de ouders is 43.
Teken een mogelijke frequentieverdeling bij de schoenmaten.

Theorie

Frequentiepolygoon, cumulatieve frequentiepolygoon

In een frequentiepolygoon is langs de verticale as de frequentie, absoluut of relatief, uitgezet.
De somfrequentie of cumulatieve frequentie van een waarnemingsgetal is het totaal van alle frequenties vanaf het kleinste waarnemingsgetal.
De grafiek van de cumulatieve frequenties heet een somfrequentiepolygoon of cumulatieve frequentiepolygoon.

© Noordhoff Uitgevers bv

S2 Je ziet de resultaten van een onderzoek naar de wachttijden bij de kassa van een supermarkt. Van 193 klanten is de wachttijd bij de kassa genoteerd.

a Zijn de gegevens in een frequentiepolygoon of in een cumulatieve frequentiepolygoon verwerkt?

b Hoeveel procent van de klanten moesten minder dan één minuut wachten?

c Hoeveel klanten in dit onderzoek moesten minimaal twee minuten wachten bij de kassa?

Vaardigheid

Je kunt werken met een klassenindeling.

Als een variabele veel verschillende waarden kan hebben, dan worden de data vaak ingedeeld in klassen.
Met de intervalnotatie leg je de grenzen van een klasse vast.
De klassenbreedte is de afstand tussen de grenzen van de klassen. Het klassenmidden ligt precies halverwege de linker grens en de rechter grens.

Voorbeeld

lengte in cm	*aantal*
[20, 25⟩	56
[25, 30⟩	78
[30, 35⟩	63
[35, 40⟩	42

De klassenbreedte is 5 cm.
De eerste klasse bevat alle meetwaarden die minstens 20 cm zijn, maar kleiner dan 25 cm.
Het klassenmidden van deze klasse is 22,5 cm.

S3 In een zuivelfabriek staan twee vulmachines waarmee literpakken yoghurt worden gevuld. Uit de productie van elk van de twee machines worden willekeurig honderd gevulde pakken genomen. De gemeten volumes zijn afgerond op hele mL.

a Schrijf de klasse 980-990 mL in de intervalnotatie.

b Geef het klassenmidden van de klasse 980-990 mL.

c Welke klasse is bij machine A de modale klasse? En van machine B?

d Bereken met behulp van de klassenmiddens de gemiddelde inhoud van de pakken yoghurt bij machine A.

inhoud in mL	*machine A*	*machine B*
980-990	0	0
990-1000	52	27
1000-1010	47	44
1010-1020	1	26
1020-1030	0	2
1030-1040	0	1

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt centrummaten gebruiken om conclusies te trekken.

Je moet altijd voorzichtig zijn met het trekken van conclusies uit statistische gegevens. Ook de keuze van een centrummaat hangt van de situatie af. Een waarneming die erg afwijkt van de andere waarneming noem je een uitschieter. Uitschieters hebben in het algemeen veel meer invloed op het gemiddelde dan op de mediaan en op de modus.

Voorbeeld

Bij een loterij zijn 50 prijzen te winnen. In de tabel zie je welke prijzen er zijn en hoe vaak deze worden uitgereikt.
Bereken het gemiddelde, de mediaan en geef de modus.

prijs in euro's	*aantal*
1000	1
500	2
250	10
100	20
10	50
totaal	83

Oplossing

Het totale prijzengeld is $1 \times 1000 + 2 \times 500 + \ldots + 10 \times 50 = 7000$ euro.
Het gemiddelde is $7000 : 83 \approx 84{,}34$ euro.
De mediaan is van boven naar beneden geteld de 42e prijs en dat is 10 euro.
De modus is 10 euro, want die prijs heeft de hoogste frequentie.

S4 Welke centrummaat in het voorbeeld geeft volgens jou het beste beeld van het prijzengeld?

S5 Bij een viswedstrijd werd het aantal vissen per deelnemer geteld.

aantal vissen	0	1	2	3	7	8	10
frequentie	2	9	6	8	2	3	1

a Bereken de modus, de mediaan en het gemiddelde van het aantal gevangen vissen per deelnemer.
b Welke centrummaat geeft het beste beeld van het aantal gevangen vissen per deelnemer?

Vaardigheid

Je kunt de spreiding in een dataset uitdrukken in een getal.

Met spreidingsmaten geef je aan hoe ver gegevens van elkaar af liggen.
De spreidingsbreedte is het verschil tussen het grootste en het kleinste waarnemingsgetal.
De kwartielafstand of interkwartielafstand is het verschil tussen het eerste kwartiel en het derde kwartiel: $Q_3 - Q_1$.
De standaardafwijking of standaarddeviatie is een spreidingsmaat die iets zegt over de spreiding rond het gemiddelde.

Voorbeeld

	4	5	6	7	8	9
cijfers Duits	1	3	7	11	6	2
cijfers economie	0	1	15	11	3	0

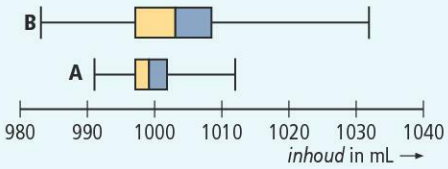
De spreidingsbreedte bij Duits is $9 - 4 = 5$ en bij economie $8 - 5 = 3$.
De kwartielafstand bij Duits is $8 - 6 = 2$ en bij economie $7 - 6 = 1$.
De standaarddeviatie van de cijfers bij Duits is 1,17 en bij economie 0,72.
De spreiding bij Duits is groter dan bij economie.

© Noordhoff Uitgevers bv

S6 In de boxplots zijn de gegevens van de vulmachines van opdracht S3 verwerkt.

a Bereken van beide machines de spreidingsbreedte en de kwartielafstand.

b Van welke machine is de standaardafwijking het grootst?



Vaardigheid

Je kunt een frequentiepolygoon en een cumulatieve frequentiepolygoon tekenen en gebruiken.

Bij het tekenen van een frequentiepolygoon zet je bij een indeling in klassen de frequenties uit boven de klassenmiddens.
Bij het tekenen van een cumulatieve frequentiepolygoon zet je bij een indeling in klassen de somfrequenties uit boven de rechter klassengrenzen.

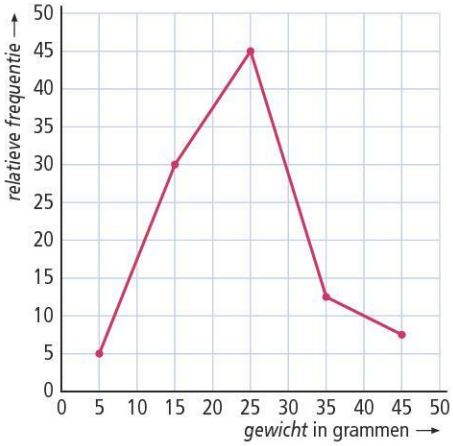
Voorbeeld

Teken bij de tabel een relatieve frequentiepolygoon en een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon.

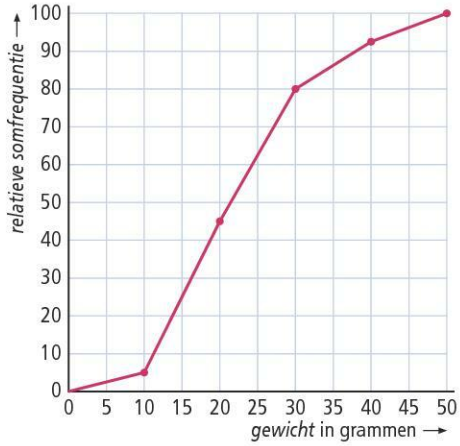
gewicht in grammen	[0, 10⟩	[10, 20⟩	[20, 30⟩	[30, 40⟩	[40, 50⟩
frequentie in procenten	5	30	45	12,5	7,5
somfrequentie in procenten	5	35	80	92,5	100

Oplossing

relatieve frequentiepolygoon



relatieve cumulatieve frequentiepolygoon



S7 Teken een relatieve somfrequentiepolygoon bij de tabel.

wachttijd in seconden	[0, 20⟩	[20, 40⟩	[40, 60⟩	[60, 80⟩	[80, 100⟩	[100, 120⟩
frequentie	58	96	16	10	4	16

© Noordhoff Uitgevers bv

T1 Uit twee partijen kiwi's wordt een steekproef genomen, waarbij het gewicht in grammen wordt bepaald.

a Bereken de mediaan van partij 1 en de mediaan van partij 2.

b Bereken de modus van elke partij.

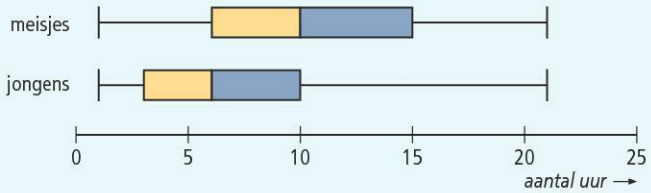
c Bereken het gemiddelde gewicht van elke partij.

d Welke centrummaat is het meest geschikt om de partijen te vergelijken?

gewicht in grammen

partij 1		*partij* 2
	6 | 8	
9 7 7 7 6 6 5 4 3 3 1	7 | 2 3 6 7 9 9 9	
9 5 4 2 1 1 0	8 | 0 0 1 3 3 4 5 6 7 9	
1	9 |	

T2 Bij een groep van 68 jongens en 78 meisjes is onderzocht hoeveel tijd ze aan het huiswerk besteden. In de boxplot zie je de resultaten.



a Hoe groot is de spreidingsbreedte en de kwartielafstand bij de meisjes? En bij de jongens?

b De onderzoeker heeft berekend dat de standaardafwijkingen 4,7 en 5,6 zijn.
Welke van deze twee standaardafwijkingen hoort bij de meisjes? Verklaar je antwoord.

c Hoeveel procent van de leerlingen besteedde meer dan 10 uur per week aan het huiswerk?

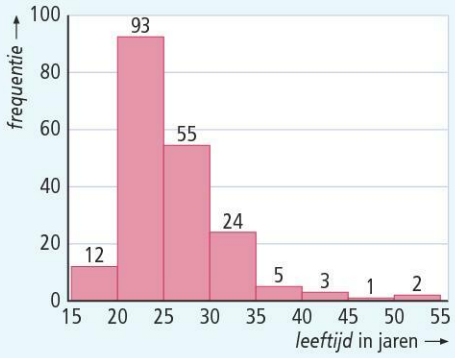
T3 In een statistisch onderzoek naar huwelijken tussen mannen en vrouwen is onder andere onderzoek gedaan naar de leeftijd waarop mensen trouwen. In het staafdiagram zie je de leeftijd waarop de vrouwen trouwen.

a Beschrijf de vorm van het staafdiagram.

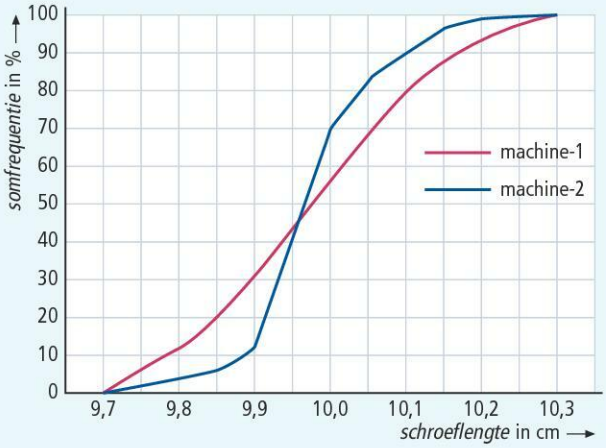
b Welke klasse is bij deze klassenindeling de modale klasse? Schrijf je antwoord in de intervalnotatie.

c Bereken met behulp van de klassenmiddens de gemiddelde leeftijd.

d De onderzoeker heeft berekend dat de gemiddelde leeftijd van de vrouwen 25,4 jaar is.
Waarom verschilt dit met het antwoord van opdracht c?



© Noordhoff Uitgevers bv



T4 In een fabriek worden schroeven gemaakt. De schroeven moeten een lengte krijgen van 10,0 cm. De schroeven worden door twee machines gemaakt, die niet even nauwkeurig zijn. In de relatieve somfrequentiepolygonen zie je gegevens over de lengte van de door beide machines geproduceerde schroeven.

a Teken bij beide machines een boxplot.

b Beschrijf het verschil tussen de productie van de schroeven bij machine 1 en die bij machine 2.

c Schroeven die korter zijn dan 9,9 cm of langer dan 10,1 cm worden afgekeurd.
Welke machine zal dus de voorkeur hebben?

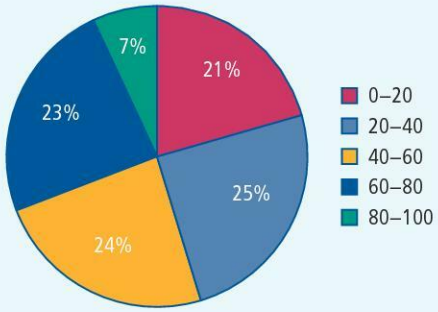
T5 In het cirkeldiagram zie je een prognose van de leeftijdsverdeling van de Nederlandse bevolking in 2030. Volgens deze prognose heeft Nederland dan in totaal 17,5 miljoen inwoners.

a Welke klasse is de modale klasse?

b In welke klasse ligt de mediaan?

c Teken een staafdiagram met de absolute aantallen inwoners per leeftijdsgroep.

d Teken een relatieve somfrequentiepolygoon bij deze gegevens.



© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt werken met een klassenindeling.

E1 Bij een onderzoek werd onder meer de schouderbreedte van 17-jarige jongens gemeten.

a Maak een frequentietabel waarbij je de schouderbreedten afrondt op hele centimeters.

b De frequentietabel is eigenlijk een indeling in klassen. Wat zijn de klassengrenzen van de eerste klasse?

c Hoeveel centimeter is de klassenbreedte?

35,2	35,5	36,5	36,9	37,3	37,5
38,0	38,0	38,5	38,6	38,7	39,1
39,5	39,6	39,6	40,0	40,0	40,0
40,1	40,3	40,7	40,9	41,2	41,4
41,5	41,8	41,9	42,3	42,4	42,9
43,2	43,7	44,1	44,2	45,3	45,5

Je kunt centrummaten gebruiken om conclusies te trekken.

E2 Bij de sportdag van 80 havo 4 leerlingen zit ook het onderdeel kogelstoten.

afstand in dm	[50, 60⟩	[60, 70⟩	[70, 80⟩	[80, 90⟩	[90, 100⟩	[100, 110⟩	[110, 120⟩	[120, 130⟩
frequentie	6	7	12	11	18	13	8	5

a Welke klasse is de modale klasse?

b In welke klasse ligt de mediaan?

c Bereken met behulp van de klassenmiddens het gemiddelde.

d Welke centrummaat geeft het beste beeld van de prestaties bij het kogelstoten? Verklaar je antwoord.

Je kunt de spreiding in een dataset uitdrukken in een getal.

E3 De leerlingen waren bij de sportdag in drie groepen ingedeeld. Er zit verschil in de spreiding van de afstanden bij het onderdeel kogelstoten in groep 1, groep 2 en groep 3. Ga na of de drie spreidingsmaten spreidingsbreedte, kwartielafstand en standaarddeviatie, dezelfde groep aanwijzen als de groep met de kleinste spreiding.

groep	1	2	3
minimum	66,1	66,2	68,4
maximum	124,5	127,6	114,9
mediaan	87,9	98,2	98,0
Q_1	78,0	85,3	74,2
Q_3	98,3	104,5	102,0
σ	18,0	19,9	16,5

Je kunt een frequentiepolygoon en cumulatieve frequentiepolygoon tekenen en gebruiken.

E4 Een boer heeft onderzoek gedaan naar het gewicht van de appels uit zijn boomgaard. Hij heeft daarbij 350 appels gewogen en de resultaten verwerkt in een relatieve somfrequentiepolygoon.

a Hoe kun je zien dat de figuur een relatieve somfrequentiepolygoon is?

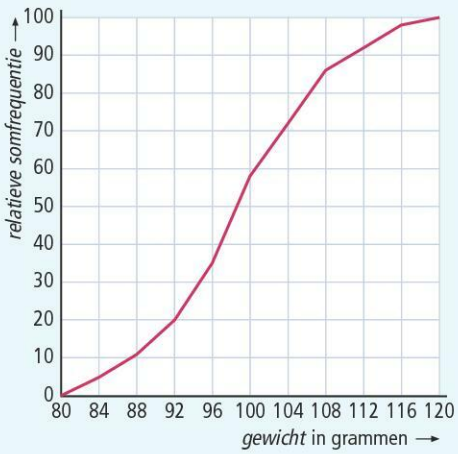
b Hoe breed zijn de klassen waarin de data verdeeld zijn?

c Welke klasse is de modale klasse?

d Lees uit de relatieve somfrequentiepolygoon de waarde van de mediaan af.

e Teken een boxplot bij de gewichten van de appels.

f Hoe groot is de spreidingsbreedte? En hoe groot is de interkwartielafstand?



© Noordhoff Uitgevers bv

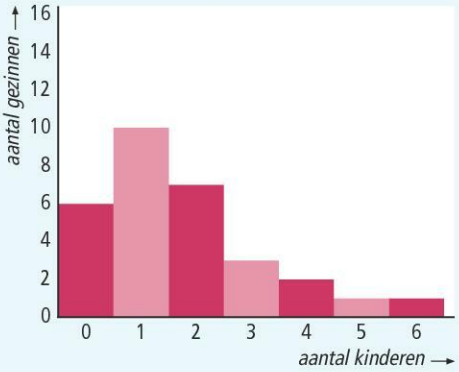
E5 In een straat is van alle gezinnen het aantal kinderen geteld. De resultaten daarvan zie je in het staafdiagram.
In het staafdiagram kun je bijvoorbeeld aflezen dat er tien gezinnen zijn met één kind.

a Hoeveel gezinnen wonen er in de straat?

b Bereken het gemiddelde aantal kinderen per gezin in twee decimalen nauwkeurig.

c Welke centrummaat geeft het beste weer hoeveel kinderen in een gezin in deze straat wonen?

d Neem aan dat de gezinnen een goede afspiegeling zijn van het gehele dorp. In het dorp wonen 890 gezinnen. Hoeveel kinderen wonen er naar schatting in dat dorp?



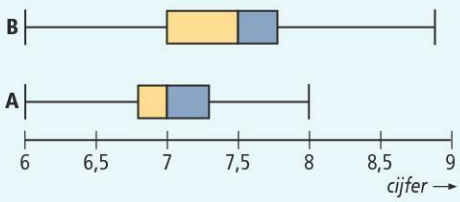
E6 In de boxplots zie je de gemiddelde cijfers voor wiskunde van 86 leerlingen met wiskunde B en 62 leerlingen met wiskunde A.

a Welke groep heeft de meeste leerlingen met gemiddeld minimaal een 7,0?

b Bereken van beide groepen de spreidingsbreedte en de kwartielafstand.

c Van welke groep is de standaardafwijking het grootst? Leg uit waarom.

d Gebruik de boxplot om drie argumenten te geven waarom de resultaten van de leerlingen met wiskunde B beter zijn dan de leerlingen met wiskunde A.



E7 Bij Negan, een kantoormeubelenbedrijf, werken buiten de directie nog 125 werknemers: 75 vrouwen en 50 mannen.
In het financieel jaarverslag van 2012 is een overzicht van de betaalde salarissen opgenomen.
De verdeling van de salarissen staat in de tabel.

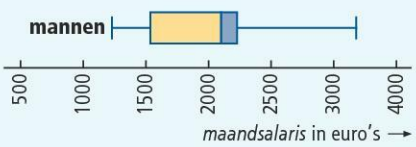
a Leg uit, zonder berekening, of het gemiddelde salaris bij de vrouwen hoger of lager is dan bij de mannen.

b Teken een relatieve somfrequentiepolygoon van de salarissen van de vrouwen.

c Onder de tabel is een boxplot getekend van de verdeling van de salarissen bij de mannen.
Teken met behulp van de relatieve somfrequentiepolygoon van opdracht b een boxplot van de verdeling van de salarissen bij de vrouwen.

d Iemand beweert dat je uit de boxplots het volgende kunt concluderen: 'Ongeveer twee maal zoveel mannen als vrouwen verdienen meer dan € 2.100,- per maand.'
Ben je het hiermee eens? Licht je antwoord toe.

salaris-groep	*maandsalaris* in euro's	*aantal* ♀	*aantal* ♂
1	[800, 1000⟩	2	0
2	[1000, 1200⟩	6	0
3	[1200, 1400⟩	10	1
4	[1400, 1600⟩	5	4
5	[1600, 1800⟩	13	9
6	[1800, 2000⟩	10	10
7	[2000, 2200⟩	12	9
8	[2200, 2400⟩	9	7
9	[2400, 2600⟩	5	5
10	[2600, 2800⟩	3	3
11	[2800, 3000⟩	0	1
12	[3000, 3200⟩	0	1

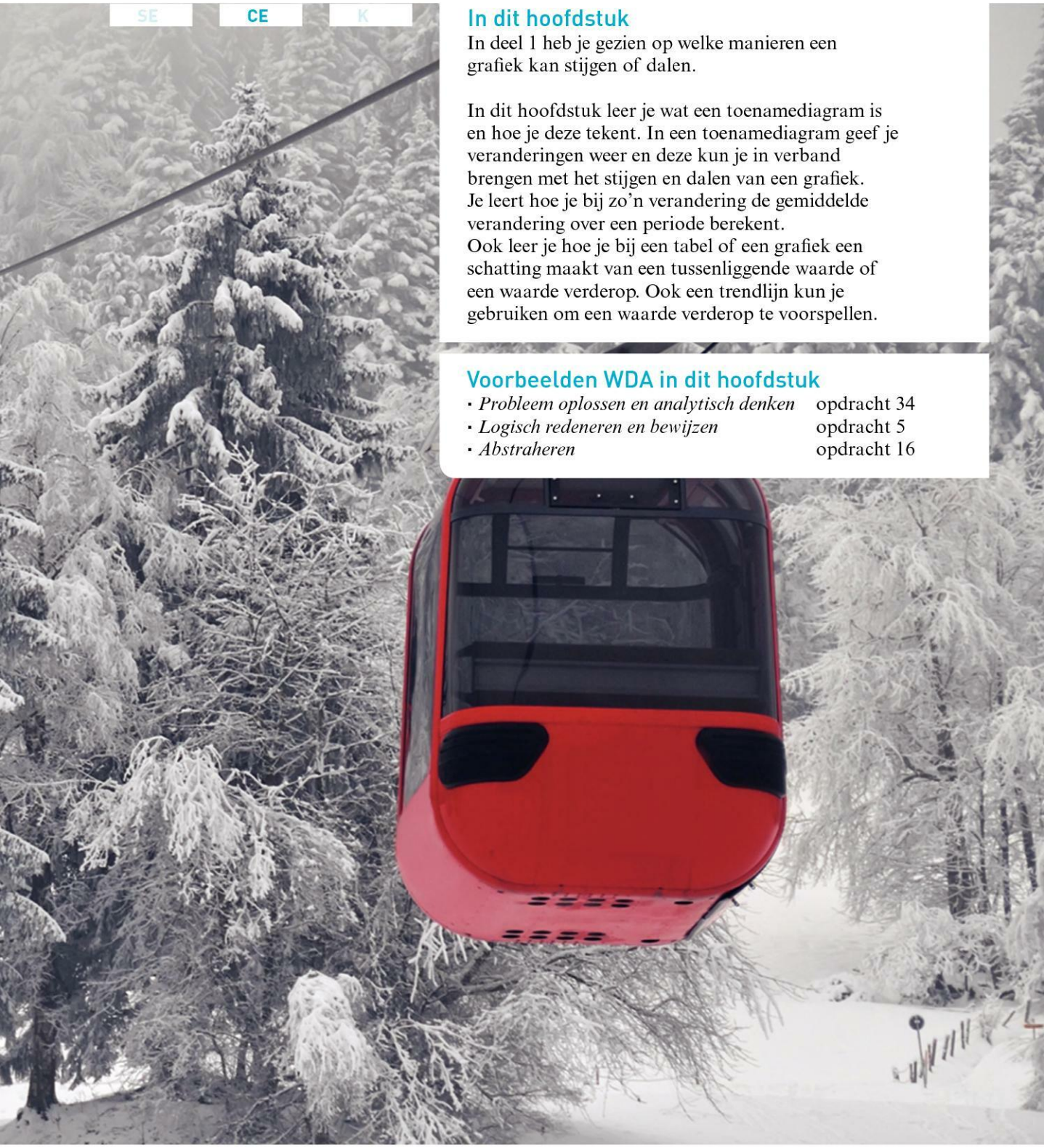


© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Grafieken en veranderingen 8

SE CE K



In dit hoofdstuk

In deel 1 heb je gezien op welke manieren een grafiek kan stijgen of dalen.

In dit hoofdstuk leer je wat een toenamediagram is en hoe je deze tekent. In een toenamediagram geef je veranderingen weer en deze kun je in verband brengen met het stijgen en dalen van een grafiek.
Je leert hoe je bij zo'n verandering de gemiddelde verandering over een periode berekent.
Ook leer je hoe je bij een tabel of een grafiek een schatting maakt van een tussenliggende waarde of een waarde verderop. Ook een trendlijn kun je gebruiken om een waarde verderop te voorspellen.

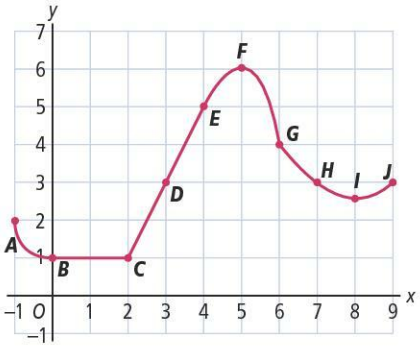
Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 34
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 5
- *Abstraheren* opdracht 16

© Noordhoff Uitgevers bv

V1

a Tussen welke punten is de grafiek dalend?
b Tussen welke punten is de grafiek constant?
c Tussen welke punten is er sprake van een lineaire toename?
d Hoeveel stijgt de grafiek per eenheid op dat gedeelte?
e Hoeveel daalt de grafiek tussen de punten F en H?
f Lijn l gaat door de punten F en H.
Bereken de richtingscoëfficiënt van lijn l.
g Lijn m gaat door de punten A en D.
Bereken de richtingscoëfficiënt van lijn m.



Theorie

Een grafiek kan een stijgend, een dalend of een constant verloop hebben. Een maximum is een hoogste waarde en wordt bereikt als de grafiek overgaat van stijgen naar dalen. Een minimum wordt bereikt als de grafiek overgaat van dalen naar stijgen.
Het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt van een lijn vind je door de toename in de verticale richting te delen door de toename in de horizontale richting.
Bij een dalende lijn hoort een negatieve helling, bij een stijgende lijn een positieve helling.

Voorbeeld

Bereken het hellingsgetal van de lijn door de punten $A(5, 1)$ en $B(11, -3)$.

Oplossing

De toename in de horizontale richting is $11 - 5 = 6$.
De toename in de verticale richting is $-3 - 1 = -4$.
De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

V2

Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn door de twee gegeven punten.

a $A(3, 5)$ en $B(6, 0)$
b $C(12, 15)$ en $D(20, 11)$
c $E(-9, 10)$ en $F(-3, 7)$
d $G(104, 6)$ en $H(109, -12)$

Aanpak

Hoe stel je een formule op bij een lineair verband?

1. Schets eventueel eerst een grafiek bij de situatie.
2. Ga na welke variabelen worden gebruikt en schrijf de algemene formule voor een lineair verband op.
3. Zoek uit wat de toename per (tijds-)eenheid is. Dat is de richtingscoëfficiënt.
4. Zoek uit wat de hoeveelheid b is. Dat is het startgetal. De grafiek snijdt de verticale as in het punt $(0, b)$.
5. Vul de richtingscoëfficiënt en het startgetal bij de algemene formule in.

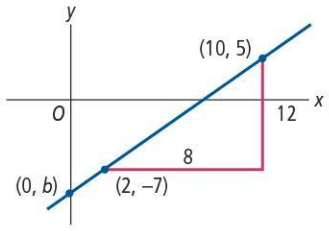
© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Stel een formule op bij een lineair verband waarvan de grafiek door de punten $(2, -7)$ en $(10, 5)$ gaat.

Oplossing

1



2 De variabelen zijn x en y.

3 De toemame in de horizontale richting is $10 - 2 = 8$.
De toemame in de verticale richting is $5 - -7 = 12$.
De richtingscoëfficiënt is $\frac{12}{8} = 1\frac{1}{2}$

4 Om het snijpunt met de y-as te vinden, moet je vanaf $(2, -7)$ twee eenheden naar links en dus $2 \times 1\ \frac{1}{2} = 3$ eenheden omlaag.
$-7 - 3 = -10$, het snijpunt met de y-as is $(0, -10)$.

5 Invullen in de algemene formule $y = ax + b$ geeft $y = 1\frac{1}{2}x - 10$.

V3 Stel de formule op van een lineair verband door de twee gegeven punten.

a $A(3, 7)$ en $B(10, 21)$

b $C(-2, 5)$ en $D(8, 10)$

c $E(7, -7)$ en $F(12, 23)$

d $G(-2, -14)$ en $H(6, -6)$

V4 Een vat met 15 liter olie weegt 24 kg. Als het vat 40 liter olie bevat, weegt het 46,5 kg.

a Hoeveel weegt één liter olie?

b Hoeveel weegt het vat als het leeg is?

c Geef een formule voor het gewicht G als het vat a liter olie bevat.

d Een vol vat weegt 60 kg.
Hoeveel liter olie kan er maximaal in het vat?

V5 Een grote kaars heeft na 20 minuten branden een hoogte van 48 cm. Na 100 minuten branden, is de kaars 32 cm hoog.

a Stel een formule op voor de hoogte H van de kaars na t minuten branden.

b Na hoeveel minuten is de kaars opgebrand?

V6 Twee tanks worden gevuld met water. Tank A bevat 120 liter op tijdstip $t = 0$. Deze tank wordt gevuld met een snelheid van 5,5 liter per seconde. Tank B is leeg op tijdstip $t = 0$ en wordt gevuld met een snelheid van 7 liter per seconde.

a Stel voor beide tanks een formule op voor de hoeveelheid water W na t seconden.

b Na hoeveel seconden bevatten beide tanks evenveel water?

© Noordhoff Uitgevers bv

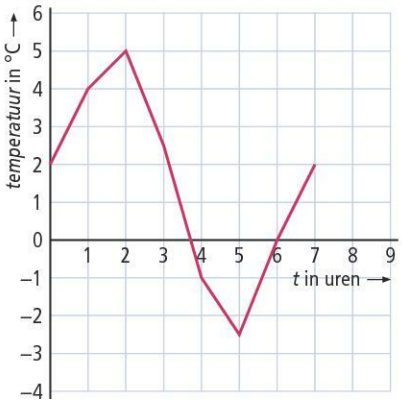
8.1 Toenamediagrammen tekenen

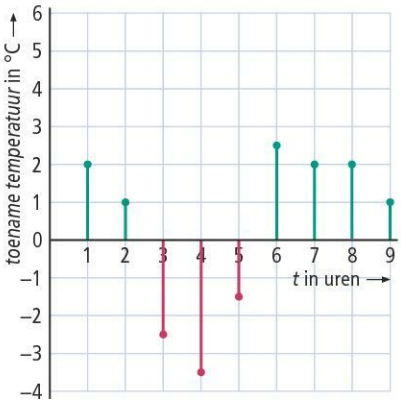
Je leert · hoe je een toenamediagram tekent

Leerroutes
- ondersteunend: 1—O2—3—O4—5
- doorlopend: 1—2—3—4—5
- uitdagend: 1—2—4—5—U1

De AEX Index (afgeleid van Amsterdam Exchange Index) is de belangrijkste Nederlandse beursindex. In het diagram zie je dat op 1 december de AEX index afsloot op +1 af. Dat wil zeggen dat de AEX index op deze dag 1 punt hoger is geëindigd dan de handelsdag ervoor.

· Op welke datum werd in deze periode de hoogste AEX index bereikt?





1 In de linker grafiek zie je het verloop van de temperatuur. In de rechter grafiek is met staafjes aangegeven hoeveel de temperatuur het voorgaande uur is veranderd. In de linker grafiek zie je dat tussen $t = 0$ en $t = 1$ de temperatuur met twee graden is gestegen. In de rechter grafiek wordt deze verandering met een staafje met lengte 2 bij $t = 1$ aangegeven.

a Met hoeveel graden is de temperatuur gestegen tussen $t = 6$ en $t = 7$? Hoe zie je dat terug in de rechter grafiek?

b Wat is de betekenis van het staafje met lengte 2,5 bij $t = 6$?

c Wat betekent het dat een staafje naar beneden getekend is?

d In de rechter grafiek is bij $t = 4$ het langste staafje naar beneden getekend.
Leg uit wat dit voor de temperatuur betekent.

e Gebruik de grafieken om de temperatuur op de tijdstippen $t = 8$ en $t = 9$ te berekenen.

© Noordhoff Uitgevers bv

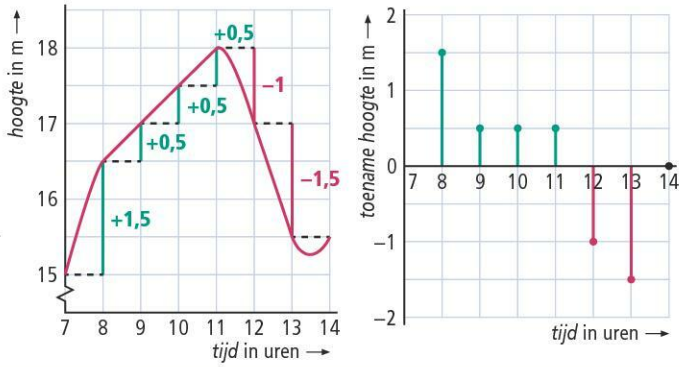
Theorie

In een **toenamediagram** maak je toenamen en afnamen zichtbaar. Bij toename worden de staafjes omhoog getekend, bij afname omlaag. De rechter grafiek in het voorbeeld is een toenamediagram met **stapgrootte** 1, omdat de afstand tussen de staafjes steeds 1 uur is.

Voorbeeld

In de grafiek zijn de toenamen met groen en de afnamen met rood aangegeven.
Het staafje omlaag bij *tijd* = 13 betekent dat er tussen *tijd* = 12 en *tijd* = 13 een afname is van 1,5 meter ofwel een verandering van −1,5 meter.

tijd in uren	8	9	10	11	12	13	14
toename hoogte in m	1,5	0,5	0,5	0,5	−1	−1,5	0



Ondersteunende route → maak opdracht 02

2 H

De eerste zes jaar van zijn leven is op elke verjaardag van Phil zijn lengte gemeten. In de tabel zie je het resultaat.

leeftijd in jaren	0	1	2	3	4	5	6
lengte in cm	57	78	94	102	111	119	126

a Teken een toenamediagram bij de tabel.
b Van zijn zesde tot zijn negende verjaardag groeide Phil steeds 6 cm per jaar.
Verwerk deze gegevens in je toenamediagram.
c Hoe lang was Phil op z'n negende verjaardag?

3

a Vul de tabel voor de formule $K = 160 \cdot 0{,}5^t$ verder in.

t	0	1	2	3	4	5	6
K	160	80	40	...	...	...	...

b Teken een toenamediagram met stapgrootte 1 bij de tabel.
c Teken een toenamediagram met stapgrootte 1 bij de formules. Neem op de horizontale as waarden van 1 tot en met 6.

A $H = -a^2 + 6a$

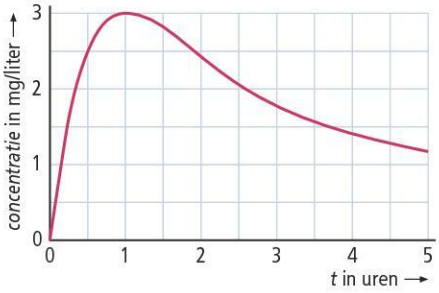
B $R = 2p + 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O4

4 H

In de grafiek zie je het verloop van de concentratie van een pijnstiller in mg per liter in het bloed van een patiënt. Het tijdstip $t = 0$ is het tijdstip waarop de pijnstiller is gegeven.



a Maak aan de hand van de grafiek een tabel, met op elk half uur de concentratie C. Neem t van 0 tot en met 5.

b Teken een toenamediagram van de concentratie met stapgrootte van een half uur.

c De grafiek van C is deels stijgend en deels dalend. Beschrijf de manier waarop de grafiek stijgt en daalt.

d Tussen welke twee tijdstippen daalt de grafiek het snelst? Hoe zie je dat in het toenamediagram?

5

Een wandelaar heeft gegevens verzameld over een wandelroute in de bergen. In de tabel is bij de afgelegde afstand a de hoogte h gegeven waarop de wandelaar zich bevindt. Hierbij zijn a en h beide uitgedrukt in meters.

a	h
0	1075
500	1100
1000	1125
1500	1140
2000	1150
2500	1130
3000	1125
3500	1100
4000	1120
4500	1160

a Teken een toenamediagram bij deze tabel.

b Tussen welke waarden van a is de klim het steilst? Hoe zie je dat in het toenamediagram?

c Na twee kilometer wandelen is er een uitzichtpunt. Hoe kun je dat in de tabel herkennen? En hoe in het toenamediagram?

Uitdagende route → maak opdracht U1

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O2 In de tabel zie je het gewicht van een hondje na zijn geboorte.

leeftijd in weken	0	1	2	3	4	5	6
gewicht in grammen	230	520	845	975	1385	1595	1700
toename gewicht in grammen		290	…	…	…	…	…

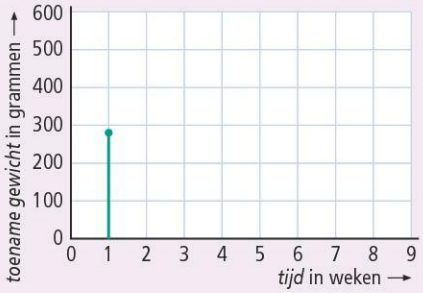
a In de tabel zie je dat de gewichtstoename in de eerste week 290 gram is.
Ga dit met een berekening na.

b Vul de tabel verder in.

c Maak het toenamediagram bij de tabel verder af.

d Na week 6 neemt het gewicht van het hondje drie weken lang elke week met 75 gram toe.
Verwerk deze gegevens in je toenamediagram.

e Laat met een berekening zien dat de hond na 9 weken 1925 gram weegt.



O4 Een fabrikant lanceert een nieuw product. In de grafiek zie je hoeveel exemplaren hij sindsdien in totaal heeft verkocht. Je gaat een toenamediagram tekenen met een stapgrootte van een halve maand.

a Vul aan de hand van de grafiek de tabel verder in.

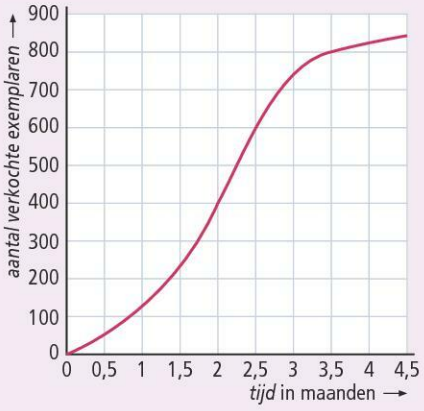
tijd in maanden	0	0,5	1	1,5	2
aantal verkochte exemplaren	0	40	120	…	…
toename		40	…	…	…

tijd in maanden	2,5	3	3,5	4	4,5
aantal verkochte exemplaren	…	…	…	…	…
toename	…	…	…	…	…

b Teken het toenamediagram met stapgrootte van een halve maand.

c De grafiek van A is steeds stijgend.
Beschrijf de manier waarop de grafiek stijgt.

d Tussen welke tijdstippen stijgt de grafiek het snelst? Hoe zie je dat in het toenamediagram?



Uitdagende opdrachten

U1 **a** Teken een toenamediagram dat hoort bij een constante grafiek.

b Een andere grafiek heeft drie toppen. Bij twee toppen gaat het om een maximum en bij één top gaat het om een minimum.
Teken een toenamediagram dat hoort bij deze grafiek.

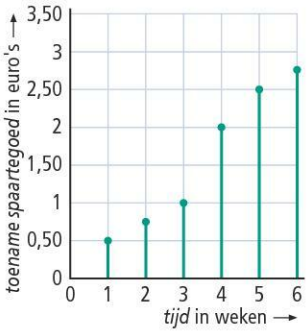
© Noordhoff Uitgevers bv

8.2 Werken met toenamediagrammen

Je leert
- hoe je werkt met een toenamediagram

Leerroutes
- ondersteunend: 6—7—8—9—O10—10
- doorlopend: 6—7—8—9—10—11
- uitdagend: 6—8—9—10—11—U2

Joris is aan het sparen. In het toenamediagram zie je met hoeveel euro het spaargeld van Joris in zes weken is toegenomen.
- Welke uitspraken kun je uit het toenamediagram afleiden?
  Licht je antwoord toe.
  A Joris heeft steeds meer gespaard.
  B Joris heeft in deze periode 9,50 euro gespaard.
  C Joris heeft in de derde en zesde week het minst gespaard.



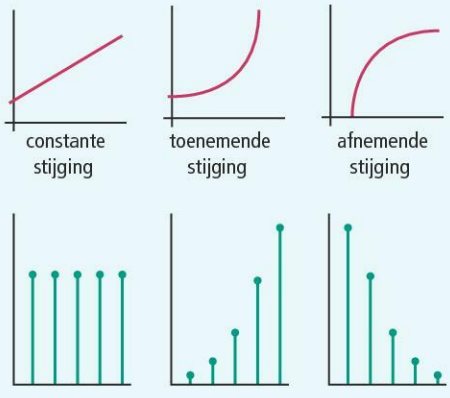
6 Bij de groei van een zonnebloem is op verschillende tijdstippen de hoogte gemeten.

tijd in weken	0	2	4	6	8	10	12	14	16
hoogte in cm	12	18	30	48	75	94	112	121	125

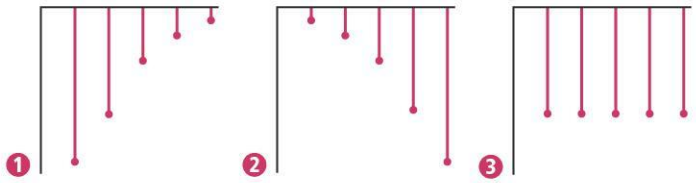
a Teken een toenamediagram met stapgrootte van twee weken bij de tabel.
b Wat valt je op aan de lengte van de staafjes?
c Wat kun je zeggen over de snelheid waarmee de zonnebloem groeit?

Theorie

In een toenamediagram kun je de verschillende soorten groei herkennen.
De grafiek bij een **constante stijging** is een rechte lijn die steeds even snel stijgt. In het bijbehorende toenamediagram zijn alle staafjes even lang, want de toenamen zijn steeds hetzelfde.
De grafiek bij een **toenemende stijging** stijgt steeds sneller. In het bijbehorende toenamediagram worden de staafjes steeds langer, want de toenamen worden steeds groter.
De grafiek bij een **afnemende stijging** stijgt steeds minder snel. In het bijbehorende toenamediagram worden de staafjes steeds korter, want de toenamen worden steeds kleiner.

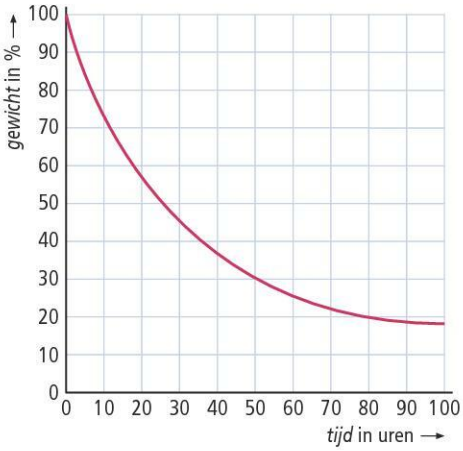


© Noordhoff Uitgevers bv



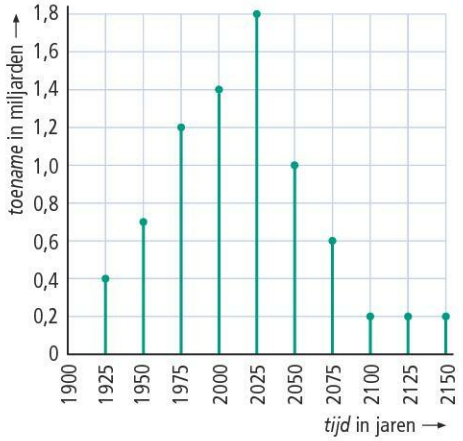
7
- **a** Hoe zie je dat de toenamediagrammen horen bij dalende grafieken?
- **b** Geef aan welk toenamediagram bij welk soort daling hoort. Kies uit constante daling, toenemende daling of afnemende daling. Leg je antwoord uit.

8 Tijdens een biologiepracticum worden bladeren gedroogd. Daarbij wordt het gewicht van de bladeren gewogen. In de grafiek zijn de gewichten uitgedrukt in procenten van het uitgangsgewicht.



- **a** Verwerk de gegevens uit de grafiek in een toenamediagram, met een stapgrootte van 10 uur.
- **b** Is er sprake van een toenemende of een afnemende daling van het gewicht?
- **c** Na verloop van tijd verandert het gewicht van de bladeren niet meer.
  Hoe blijkt dat uit het toenamediagram?
- **d** Welk percentage van het oorspronkelijk gewicht zullen de bladeren op den duur krijgen?

9 Een onderzoeker heeft onderzocht hoe groot de wereldbevolking sinds 1900 was en heeft een voorspelling tot 2150 gemaakt. De resultaten zijn in het toenamediagram verwerkt.



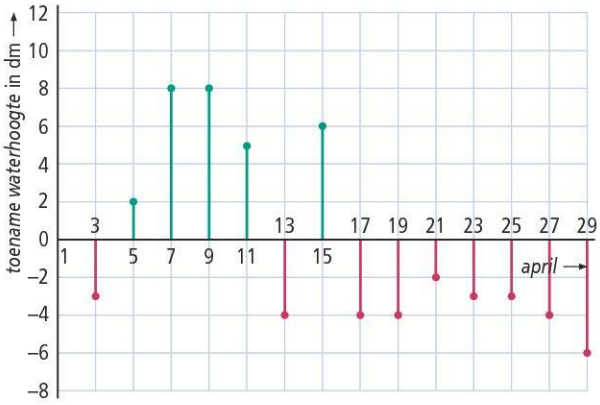
- **a** Beschrijf de soorten groei van de wereldbevolking.
- **b** Het toenamediagram geeft niet genoeg informatie om de grafiek van de wereldbevolking te kunnen tekenen. Waarom niet?
- **c** In 1925 was de wereldbevolking 2,2 miljard mensen. Ga met een berekening na dat de wereldbevolking in 1900 1,8 miljard mensen was.
- **d** Hoe groot was de wereldbevolking in 1950?
- **e** Teken de grafiek van de wereldbevolking over de periode 1900 - 2150 op basis van de gegevens in het toenamediagram.
- **f** In welke periode groeide de wereldbevolking het snelst en hoe zie je dat in het toenamediagram?

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O10

10 H

In een dorp aan een rivier is gedurende de maand april om de twee dagen bijgehouden met hoeveel dm de waterhoogte van de rivier gestegen of gedaald is. De resultaten staan in het toenamediagram.



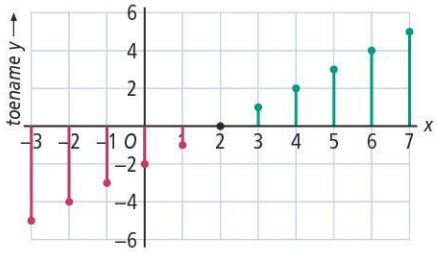
a Gedurende welke periode ging het water steeds sneller dalen? Hoe zie je dat in het toenamediagram?

b Op 7 april was de waterhoogte 5,5 meter. Maak een tabel voor de waterhoogten in april.

c Wat was in april de grootste gemeten waterhoogte?

d Teken de grafiek van de waterhoogte in april.

11 Teken bij het toenamediagram een mogelijke grafiek.

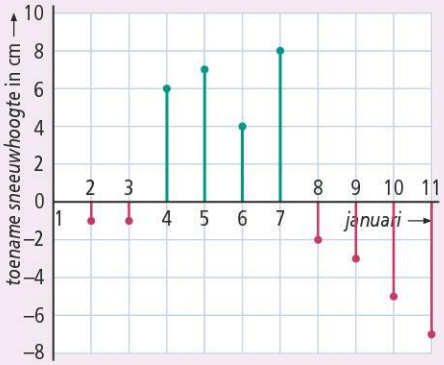


Uitdagende route → maak opdracht U2

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O10 In een skioord is in het eerste deel van de maand januari elke dag bijgehouden met hoeveel cm de sneeuwhoogte is gestegen of gedaald. De resultaten staan in het toenamediagram.



a Hoe kun je in het toenamediagram zien dat in de periode van 7 tot 11 januari de sneeuwhoogte steeds sneller daalde?

b Op 7 januari was de sneeuwhoogte 123 cm. Met hoeveel cm daalde de sneeuwhoogte tussen 7 en 8 januari? Hoeveel cm was de sneeuwhoogte op 8 januari?

c Tussen 6 en 7 januari steeg de sneeuwhoogte met 8 cm. Hoeveel cm was de sneeuwhoogte op 6 januari?

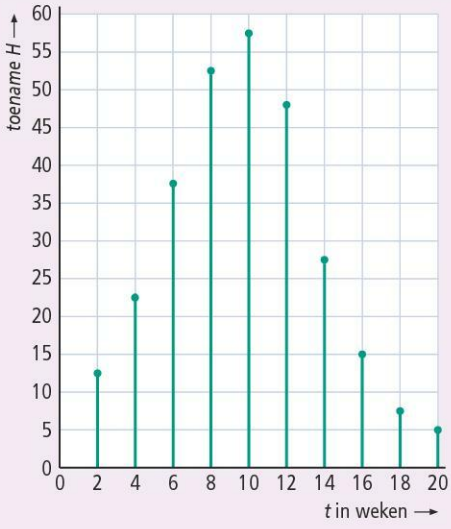
d Vul de tabel verder in.

dag	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	7/1	8/1	9/1	10/1	11/1
sneeuwhoogte in cm	…	…	…	…	…	…	123	…	…	…	…
toename sneeuwhoogte in cm		−1	−1	6	…	…	…	…	…	…	…

e Wat was in deze periode de grootste gemeten sneeuwhoogte?

Uitdagende opdrachten

U2 Elke twee weken is de hoogte in cm gemeten van een groot aantal maïsplanten. In het toenamediagram is de gemiddelde toename van de hoogte van de planten weergegeven. De gemiddelde hoogte op $t = 0$ was 10 centimeter.



a Teken de grafiek die bij dit toenamediagram hoort.

b De grafiek wordt een S-curve genoemd. Geef hiervoor een verklaring.

c Onderzoekers vonden voor het verband tussen de hoogte H in cm en de tijd t in weken de formule

$$H = \frac{300}{1 + 29 \cdot 0{,}67^t}$$

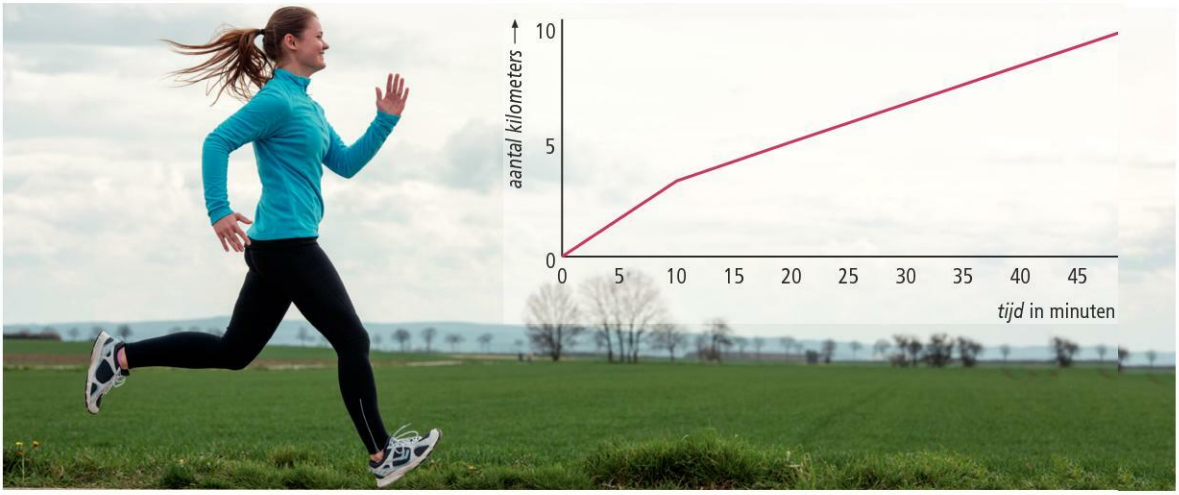
Ga na dat deze formule een benadering is van de getekende grafiek.

© Noordhoff Uitgevers bv

8.3 Gemiddelde verandering

Je leert
- hoe je een gemiddelde verandering berekent

Leerroutes
- ondersteunend: 12—013—14—15—16
- doorlopend: 12—13—14—15—16
- uitdagend: 12—14—15—16—U3



Roos heeft van een hardlooptraining over 15 kilometer gegevens verzameld. In de grafiek kun je zien dat ze in het begin wat harder liep, maar dat na tien minuten de snelheid redelijk constant was. Ze heeft de rest van haar training met dezelfde constante snelheid gelopen. Tijdens de training kan Roos op haar horloge haar gemiddelde snelheid zien van het stuk dat ze tot dan toe gelopen heeft.

- Hoe veranderde deze gemiddelde snelheid gedurende de training?

12 In de rivier de Brakel staat een meetapparaat dat elke dag de waterstand om 0.00 uur registreert. In de grafiek zie je de meetresultaten.

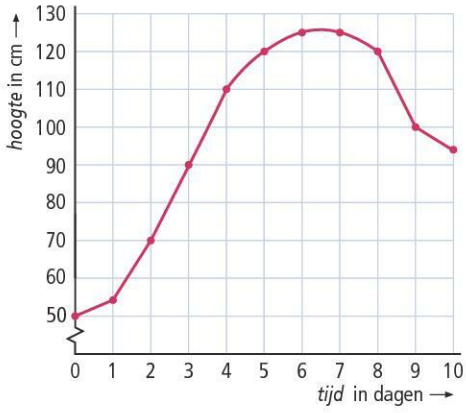
a Hoeveel cm nam de waterhoogte toe tussen $t = 0$ en $t = 1$?

b En hoeveel cm nam de waterhoogte toe tussen $t = 0$ en $t = 7$? Hoeveel cm was dat gemiddeld per dag?

c Hoeveel cm was de toename van de waterhoogte gemiddeld per dag tussen $t = 7$ en $t = 10$?

d Waarom is je antwoord bij opdracht c negatief?

e Waarom is de gemiddeld verandering van de waterhoogte tussen $t = 5$ en $t = 8$ gelijk aan 0 cm per dag?



© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Met het symbool Δ (delta) geef je vaak een toename aan.
Bij de periode van $t = 7$ tot $t = 9$ hoort $\Delta t = 2$.
Een verandering van x geef je aan met Δx. In een formule, tabel of grafiek die het verband tussen de variabelen x en y beschrijft, hoort bij elke verandering Δx een verandering Δy.

De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Als t de tijd is, dan is $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ de gemiddelde snelheid waarmee A verandert.

Voorbeeld

In de tabel zie je de hoogte van een ballon.

tijd in minuten	1	2	3	4
hoogte in meters	15	17	21	20

Bereken de gemiddelde verandering van de hoogte tussen $t = 1$ en $t = 4$.

Oplossing

$\Delta t = 4 - 1 = 3$ en $\Delta h = 20 - 15 = 5$
De gemiddelde verandering is
$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$ meter per minuut.

Ondersteunende route → maak opdracht 013

13 Op een dag is de buitentemperatuur gemeten. De resultaten staan in de tabel weergegeven. Hierin is T de temperatuur in °C en t de tijd in uren met $t = 0$ om 8.00 uur.

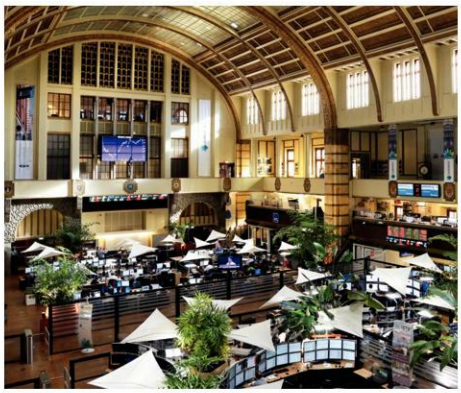
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	8	10	13	16	17	18	18	16	15	13	10

a Bereken de gemiddelde verandering van de temperatuur tussen 10.00 uur en 14.00 uur.
b Bereken de gemiddelde verandering van de temperatuur tussen 14.00 uur en 18.00 uur.
c Waarom is het antwoord van opdracht b negatief?

14 In de tabel zie je de slotkoers van de AEX-index in de periode van 16 augustus 2018 tot en met 21 september 2018.

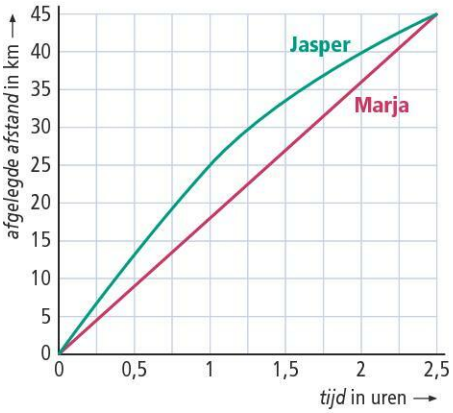
dag	16/8	24/8	3/9	6/9	10/9	18/9	21/9
index	556	560	560	539	540	543	550

a Hoeveel punten is de AEX-index in de periode van 16 augustus tot 24 augustus gemiddeld per dag gestegen?
b En hoeveel punten is de AEX-index in de periode van 16 augustus tot 3 september gemiddeld per dag gestegen?
c Van 24 augustus tot 6 september daalde de AEX. Met hoeveel punten per dag was dat gemiddeld?



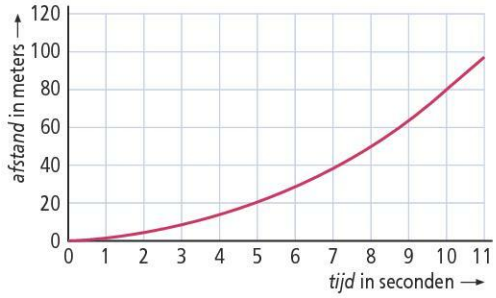
© Noordhoff Uitgevers bv

15 Marja en Jasper hebben in 2,5 uur hetzelfde traject van 45 km gefietst. In de grafiek kun je zien dat ze dat niet op dezelfde manier gedaan hebben.



- **a** Beschrijf hoe Marja haar fietstocht heeft opgebouwd.
- **b** Beschrijf ook hoe Jasper zijn fietstocht heeft opgebouwd.
- **c** Bereken voor beiden de gemiddelde snelheid over het gehele traject.
- **d** Wie fietste twee uur na het begin van de tocht harder? Hoe kun je dat aan de grafieken zien?
- **e** Er is een tijdstip waarop beiden dezelfde snelheid hebben. Leg uit hoe je dit tijdstip in de grafieken kunt vinden. Geef een schatting van dit tijdstip.

16 H Een auto trekt op nadat deze heeft stil gestaan voor een stoplicht. In de grafiek zie je de afstand die de auto gedurende de eerste 10 seconden heeft afgelegd.



- **a** Hoe kun je aan de grafiek zien dat de auto steeds sneller is gaan rijden?
- **b** De afstand die deze auto gedurende de eerste 10 seconden aflegt, kun je berekenen met de formule $S = 0{,}8t^2$. Hierin S de afstand in meters en t de tijd in seconden met $t = 0$ op het moment dat de auto begint te rijden.
  Maak een tabel met stapgrootte 1 bij deze formule.
- **c** Bereken de gemiddelde snelheid in meter per seconde gedurende de eerste vijf seconden.
- **d** Bereken ook de gemiddelde snelheid tussen $t = 5$ en $t = 10$.
- **e** Ga na dat de gemiddelde snelheid tussen $t = 9{,}9$ en $t = 10$ 15,92 meter per seconde is.
- **f** Waarom is het antwoord van opdracht e een benadering van de snelheid op $t = 10$?

Uitdagende route → maak opdracht U3

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O13 Josje is grieperig en heeft elk uur haar temperatuur gemeten. De resultaten zijn in de tabel weergegeven. Hierin is T haar temperatuur in °C en is t de tijd in uren met $t = 0$ om 12.00 uur.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
T	38	38,5	39	39,5	39,5	39	38,5	37,5	37

a Je gaat de gemiddelde verandering van haar temperatuur tussen 12.00 uur en 15.00 uur berekenen.
Welke waarde van t hoort bij 15.00 uur?

b Met hoeveel graden is de temperatuur tussen 12.00 uur en 15.00 uur gestegen?

c Hoe groot is dus Δt? En groot is ΔT?

d Vul in: de gemiddelde verandering van haar temperatuur is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$ graden per uur.

e Bereken de gemiddelde verandering van haar temperatuur tussen $t = 4$ en $t = 8$.

f Hoe kun je aan het antwoord van opdracht e zien dat haar temperatuur in deze periode daalde?

Uitdagende opdrachten

aantal meters vanaf de start	*aantal seconden na de start*
0	0
10	1,88
20	2,96
30	3,88
40	4,77
50	5,61
60	6,46
70	7,30
80	8,13
90	9,00
100	9,86

U3 Op 25 augustus 1991 liep Carl Lewis een nieuw wereldrecord op de 100 meter. Om de 10 meter is de tijd van Carl Lewis gemeten. In de tabel zie je de meetresultaten.
Over welke van deze 10 meter intervallen was de gemiddelde snelheid van Carl Lewis het hoogst? Bereken deze snelheid in km per uur.

© Noordhoff Uitgevers bv

8.4 Interpoleren

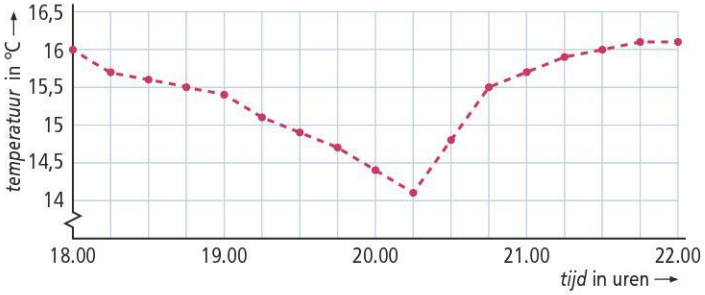
Je leert
- hoe je een tussenliggende waarde met lineair interpoleren schat

Leerroutes
- ondersteunend: 17—18—19—20—021—22
- doorlopend: 17—18—19—20—21—22
- uitdagend: 17—19—20—21—22—U4

Bernd ziet op internet een tabel en een grafiek die informatie geven over het aantal huishoudens met kinderen in Nederland. Bernd wil weten hoeveel huishoudens met kinderen er in zijn geboortejaar 2008 waren.
- Hoe kan hij dit aantal schatten als hij alleen de beschikking heeft over de tabel?
- Waarom zal zijn antwoord afwijken van het aantal dat je in de grafiek kunt aflezen?

jaar	*aantal huishoudens*
2002	2 506 613
2006	2 529 147
2010	2 535 114
2014	2 569 868
2018	2 594 888

17 Elk kwartier is de temperatuur in een schuur gemeten. Het resultaat is verwerkt in een grafiek.



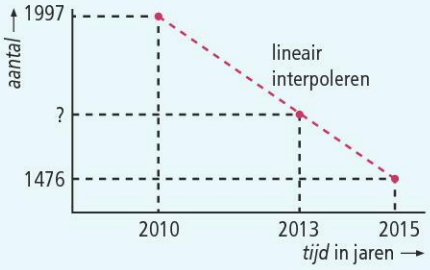
a Matthijs is aan het werk in de schuur. Op een gegeven moment doet hij een kachel aan.
Hoe hoog is de temperatuur op dat moment?

b Geef met behulp van de grafiek een schatting van de temperatuur om 19.55 uur en om 20.20 uur.

c Welke schatting is betrouwbaarder? Leg je antwoord uit.

Theorie

Het vinden van een tussenliggende waarde in een grafiek of in een tabel heet interpoleren. Je bepaalt de tussenliggende waarde door het verloop van de grafiek of de tabel zo goed mogelijk te volgen.
Als een grafiek bij een tabel op een bepaald gedeelte vrijwel een rechte lijn is, dan kun je een tussenliggende waarde schatten met lineair interpoleren.



© Noordhoff Uitgevers bv

18 Er zijn door de jaren heen allerlei maatregelen genomen om het aantal verkeersongevallen te verminderen. In de tabel staan gegevens over de aantallen verkeersslachtoffers.

tijd in jaren	*aantal doden*	*aantal gewonden*
1970	3516	64 034
1975	3005	62 171
1980	2521	59 979
1985	1997	56 623
1990	1477	48 450
1995	1334	43 329
2000	1160	43 580
2005	817	45 190
2010	640	49 667
2015	621	52 312

a Laat zien dat het aantal doden tussen 1970 en 1990 redelijk gelijkmatig afnam.

b Is dat ook het geval voor het aantal gewonden?

c Monique schrijft een werkstuk over de verkeersveiligheid. Ze wil voor de jaren tussen 1985 en 1990 ook het aantal verkeersdoden weten.
Met hoeveel nam het aantal verkeersdoden in deze vijf jaar af?

d Met hoeveel gemiddeld per jaar nam het aantal verkeersdoden in deze periode af?

e Vul de tabel verder in.

tijd in jaren	1985	1986	1987	1988	1989	1990
aantal doden	1997	…	…	…	…	1477

f Waarom is het lastig om voor de jaren 1986 tot en met 1989 het aantal gewonden betrouwbaar te schatten?

19 In opdracht 17 heb je de temperatuur om 19.55 uur met behulp van de grafiek geschat. Je kunt de temperatuur om 19.55 uur ook met lineair interpoleren schatten. Daarvoor gebruik je de meetgegevens van 19.45 uur en 20.00 uur. Neem aan dat de temperatuur tussen deze tijdstippen lineair afnam.

a Hoe veel graden verschilt de temperatuur tussen deze twee tijdstippen?

b Hoeveel minuten zit er tussen deze twee tijdstippen?

c Bereken de gemiddelde verandering van de temperatuur per minuut tussen deze twee tijdstippen.

d Vul in: Een schatting van de temperatuur om 19.55 uur is $14{,}7 + 10 \times \ldots = \ldots$ °C.

Aanpak

Hoe schat je een tussenliggende waarde met lineair interpoleren?

1. Bereken het verschil tussen de waarden aan het eind en aan het begin van de periode.
2. Bereken de lengte van de periode.
3. Bereken de gemiddelde toename per tijdseenheid.
4. Bereken hiermee de tussenliggende waarde.

Neem een zo klein mogelijke periode.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

In de tabel zie je het aantal inwoners van de gemeente Almere.
Schat met lineair interpoleren het aantal inwoners in 1993.

tijd in jaren	*aantal inwoners*
1990	71 000
2000	142 765
2010	188 160

Oplossing

1 De toename van het aantal inwoners tussen 1990 en 2000 is $142\,765 - 71\,000 = 71\,765$.
2 De lengte van die periode is 10 jaar.
3 De gemiddelde toename is $71\,765 : 10 = 7176{,}5$ inwoners per jaar.
4 In 1993 waren er in de gemeente Almere $71\,000 + 3 \times 7176{,}5 \approx 92\,530$ inwoners.

20 Schat met lineair interpoleren het aantal inwoners van de gemeente Almere in 1998.

Ondersteunende route → maak opdracht O21

21 H In de tabel staan cijfers over het aantal inwoners van Den Haag.

tijd in jaren	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2017
aantal inwoners (× 1000)	504	559	606	551	456	441	441	489	525

a Schat met lineair interpoleren het aantal inwoners van Den Haag in 2012.
b Doe dit ook voor 1968 en 1983.

22 In de tabel staan cijfers over de grootte van de bevolking in Afrika in de periode van 1950 tot 2010.

tijd in jaren	*aantal mensen* in miljoenen
1950	224
1960	280
1970	361
1980	479
1990	645
2000	872
2010	1203

a Teken een grafiek bij de tabel.
b Schat met lineair interpoleren de grootte van de bevolking van Afrika in 1955 en in 2005.
c Geef de bij opdracht b gevonden waarden met stippen aan in de grafiek van opdracht a.
d Waarom is de schatting van de grootte van bevolking in 2005 met lineair interpoleren niet zo betrouwbaar?

Uitdagende route → maak opdracht U4

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O21 In de tabel zie je het totaal aantal reizigerskilometers dat in Nederland in een jaar werd afgelegd per trein. Je gaat met lineair interpoleren het aantal reizigerskilometers per trein in 2007 schatten.

jaar	2000	2005	2010	2015
aantal kilometers in miljarden	15,2	15,7	14,6	15,8

a Hoe groot is de toename van het aantal reizigerskilometers per trein in de periode van 2000 tot 2005?
b Hoeveel jaar lang duurde deze periode?
c Bereken de gemiddelde verandering van het aantal reizigerskilometers per trein per jaar in deze periode.
d Maak met het antwoord van opdracht c een schatting van het aantal reizigerskilometers per trein in 2003.
e Schat met lineair interpoleren het aantal reizigerskilometers per trein in 2007 en in 2014.

Uitdagende opdrachten

U4 De ouders van Alicia hebben de afgelopen jaren op haar verjaardag haar lengte en haar gewicht bijgehouden. De resultaten staan in de tabel.

leeftijd	0	2	6	10	15
lengte in cm	52	85	108	140	185
gewicht in kg	3,8	12,1	18,3	32,8	54,1

a Schat met lineair interpoleren hoeveel kilogram Alicia woog toen ze 100 cm lang was.
b Schat met lineair interpoleren op welke leeftijd Alicia 30 kilogram woog.

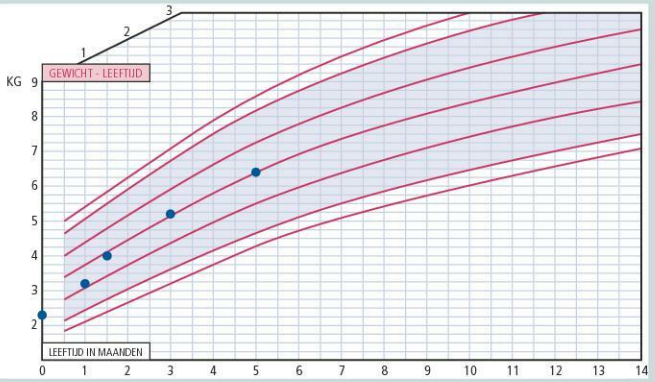
© Noordhoff Uitgevers bv

8.5 Extrapoleren

Je leert
- hoe je een waarde met extrapoleren schat

Leerroutes
- ondersteunend: 23—24—25—O26
- doorlopend: 23—24—25—26
- uitdagend: 23—24—25—U5

Thomas en Inge hebben een vijf maanden oude baby. Bij het consultatiebureau is de baby een paar keer gewogen. De resultaten zijn verwerkt op een papier met groeicurven. De groeicurven geven aan hoe het gewicht van een baby zich gemiddeld ontwikkelt.
- Hoeveel kg zal de baby van Thomas en Inge waarschijnlijk wegen op zijn eerste verjaardag?

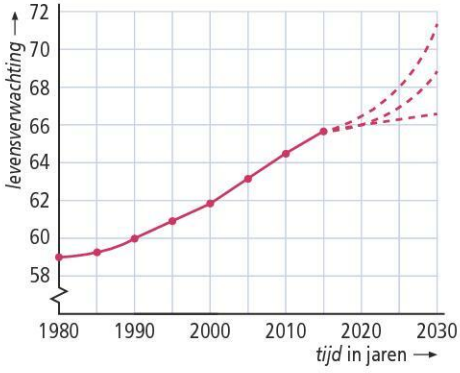


23 In de tabel zie je het aantal inwoners van de gemeente Zwolle.

jaar	1990	1995	2000	2005	2010	2015
aantal inwoners	94 131	100 160	105 801	111 900	119 030	123 861

a Teken de grafiek bij de tabel.
b Neem aan dat de groei op dezelfde manier doorgaat. Verleng de grafiek tot 2050.
c Schat met behulp van de grafiek het aantal inwoners in 2020 en in 2050.
d Waarom is de schatting voor 2050 niet betrouwbaar?

24 In de grafiek zie hoe de gemiddelde levensverwachting van 15-jarige mannen in de periode 1980 tot 2015 gestegen is. In 1980 had een 15-jarige man naar verwachting nog 59,2 jaar te leven. In 2015 had een 15-jarige man nog 65,2 jaar te leven.

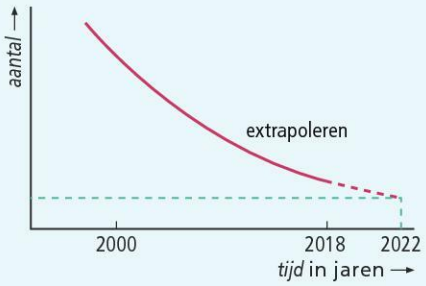


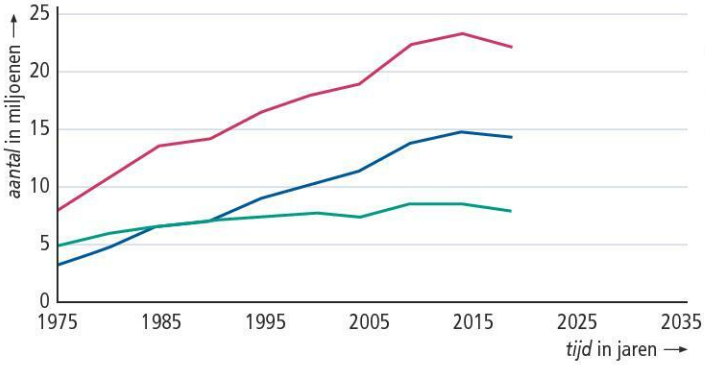
a Omschrijf hoe de grafiek in de periode van 1980 tot 2015 stijgt.
b Op basis van de gegevens van 1980 tot 2015 zijn drie prognoses tot 2030 gemaakt.
Geef voor elke prognose de levensverwachting van een 15-jarige man in 2030.
c Welke prognose vind jij de meest waarschijnlijke? Leg uit waarom.
d Hoeveel jaar schat jij de levensverwachting van een 15-jarige man in 2025?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Het vinden van een verder gelegen waarde in een tabel of in een grafiek heet **extrapoleren**.
Bij extrapoleren moet je de ontwikkeling van de grafiek zo goed mogelijk volgen.
Je gaat er daarbij vanuit dat die ontwikkeling op dezelfde manier doorgaat.





25 In de grafiek is informatie te lezen over de aantallen vakanties van Nederlanders in de periode van 1975 tot 2015. Tot 2010 namen de aantallen vakanties toe, maar als gevolg van de kredietcrisis in 2008 daalde na 2010 het aantal vakanties.

a Voorspel het aantal binnenlandse vakanties in 2035. Doe dit ook voor het aantal buitenlandse vakanties en het totaal aantal vakanties.

b In de periode 1975 tot 2010 nam het totaal aantal vakanties bij benadering lineair toe van 8,1 miljoen tot 23,3 miljoen.
Met hoeveel vakanties per jaar nam het totaal aantal vakanties in deze periode gemiddelde toe?

c Stel met je antwoord van opdracht b een formule op voor het totaal aantal vakanties V in jaar t, met $t = 0$ in 1975.

d Bereken met de formule het totaal aantal vakanties in 2035.

e Vergelijk de antwoorden van opdracht a en d en leg uit waarom deze verschillen.

f In welk jaar zal volgens de formule het totaal aantal vakanties gegroeid zijn tot 40 miljoen?

g Hoe betrouwbaar is je antwoord van opdracht f?

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O26

26 H

In de tabel zie je hoeveel aardgas in Nederland gewonnen is.
Een groot deel daarvan is gebruikt in bedrijven en huishoudens.
Naast de winning van aardgas werd er ook geëxporteerd en geïmporteerd. In de tabel staan de hoeveelheden in miljarden m^3.

jaar	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
winning	90,9	80,7	72,1	80,5	69,8	74,3	85,6	52,2
import	3,8	2,1	2,7	3,7	16,5	21,7	24,4	36,3
export	54,7	40,0	34,2	38,5	39,3	49,4	56,4	51,1

a Verwerk de gegevens in één assenstelsel.

b Neem aan dat de ontwikkelingen bij de winning, de import en de export zo doorgaan.
Voorspel hoeveel m^3 aardgas in 2030 gewonnen, geïmporteerd en geëxporteerd wordt.

c Met de gegevens kun je de hoeveelheid aardgas berekenen die in een jaar werd verbruikt.
Laat met een berekening zien dat in 1980 er 40,0 miljard m^3 aardgas werd verbruikt.

d Vul de tabel voor de jaren 1980, 1985, …., 2015 verder in.
Rond daarbij af op één decimaal.

jaar	1980	1985	…	…	2015
verbruik in m^3	40,0	…	…	…	…

e Teken de grafiek bij de tabel en voorspel hiermee het verbruik van aardgas in 2030.

f De regering heeft in 2018 een wetsvoorstel aangenomen waarin staat dat per 2030 twee miljoen huishoudens van het aardgas af moeten.
Wat voor invloed zou dit besluit op je antwoord van opdracht e kunnen hebben?

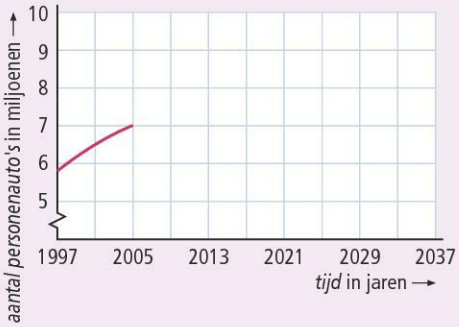
Uitdagende route → maak opdracht U5

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O26 In de tabel zie je het aantal personenauto's in Nederland.

jaar	1997	2001	2005	2009	2013	2017
aantal (× 1 000 000)	5,81	6,54	6,99	7,54	7,92	8,22



In het assenstelsel is een begin gemaakt van het tekenen van een grafiek bij deze gegevens.

a Maak de grafiek verder af.

b Omschrijf het verloop van de grafiek.

c Neem aan dat de groei van het aantal personenauto's zo doorgaat.
Verleng de grafiek tot 2037 en voorspel hoeveel personenauto's er in 2037 zullen zijn.

d In de tabel hieronder zie je hoeveel personenauto's per 1000 inwoners er waren.

jaar	1997	2001	2005	2009	2013	2017
aantal personenauto's per 1000 inwoners	373	409	429	458	472	481

Verwerk deze gegevens in een nieuw assenstelsel en voorspel het aantal personenauto's per 1000 inwoners in 2037.

Uitdagende opdrachten

U5 De bevolkingsdichtheid is het gemiddeld aantal inwoners per km^2. Bram heeft voor zijn profielwerkstuk de bevolkingsdichtheid van de gemeente waarin hij woont onderzocht.
In de tabel zie je de gegevens die hij gevonden heeft. In zijn onderzoek wil hij twee prognoses geven voor de bevolkingsdichtheid in 2030. Bij de ene prognose gaat hij uit van een lineaire groei en bij de andere prognose gaat hij uit van een exponentiële groei.
Hoeveel inwoners verschil zit er tussen zijn prognoses?

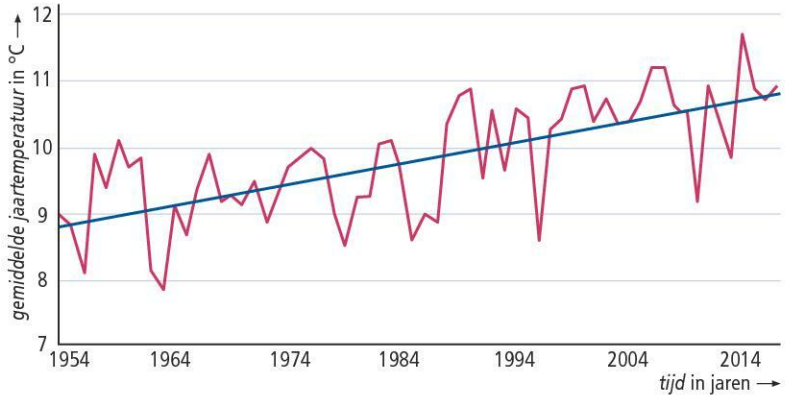
jaar	*bevolkingsdichtheid*
1980	415
1985	435
1990	457
1995	483
2000	506
2005	530
2010	557
2015	588

© Noordhoff Uitgevers bv

8.6 Trendlijn

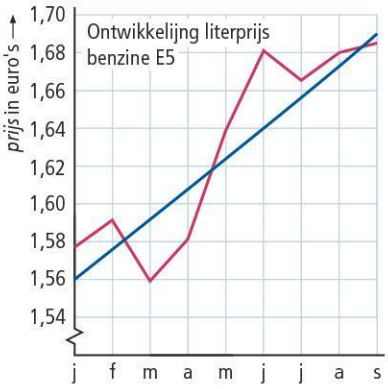
Je leert
- wat een trend en wat een trendlijn is
- hoe je met een trendlijn een voorspelling doet

Leerroutes
- ondersteunend: 27—28—29—030—31
- doorlopend: 27—28—29—30—31
- uitdagend: 27—28—30—31—U6



In de grafiek zie je gegevens over de gemiddelde jaartemperatuur in De Bilt.
- Wat probeert de maker van de grafiek met de blauwe lijn te benadrukken?
- Hoeveel graden Celsius zal volgens jou de gemiddelde jaartemperatuur in 2024 zijn?

27 De literprijs voor E5 benzine is in de loop van de tijd nogal eens veranderd vanwege economische en politieke invloeden. In de grafiek is de literprijs van E5 benzine in 2018 uitgezet tegen de tijd.



a Volgens Johan is de literprijs is in 2018 alleen maar gestegen.
Ben jij het met hem eens? Leg uit waarom.

b Door de grafiek is een lijn getekend waar de grafiek om heen schommelt. Deze lijn geeft een lineair verband tussen de literprijs P en de tijd t in maanden met $t = 0$ op 1 januari.
Stel bij deze lijn een formule op van de vorm $P = \ldots t + \ldots$.

c Gebruik de formule van de lijn om de literprijs op 1 december 2018 te schatten.

d Gebruik de formule ook om een schatting te geven voor de literprijs op 1 januari 2020. Waarom is deze schatting niet betrouwbaar?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

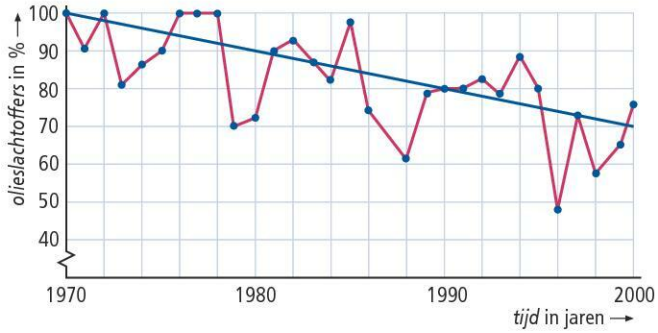
Een grafiek kan een stijgende of een dalende **trend** vertonen. Bij een trend kijk je niet naar kleine schommelingen, maar naar het verloop van de grafiek over langere tijd. Bij een duidelijke trend kun je een voorspelling doen over het verdere verloop van de grafiek. De lijn die je daarbij gebruikt, heet de **trendlijn**.
Bij het tekenen van een trendlijn zorg je ervoor dat ongeveer de helft van de grafiek boven als onder de trendlijn ligt.

28 Kijk nog eens naar de grafiek hierboven.

a Gebruik de trendlijn om het aantal jeugdleden in 2021 te schatten.

b De penningmeester voorspelde in 2017 met de trendlijn het aantal jeugdleden in 2019.
Hoeveel procent week zijn voorspelling af van het werkelijke aantal jeugdleden in 2019?

29 De jan-van-gent is een zeevogel die vaak het slachtoffer is van lozingen van stookolie op zee. Jaarlijks wordt het aantal aangespoelde jan-van-genten geteld. De resultaten zijn verwerkt in een indexgrafiek. Het aantal aangespoelde vogels in 1970 is op 100% gesteld. Voor de overige jaren is het aantal aangespoelde vogels vergeleken met het aantal in 1970.



a Waarom mag je in deze grafiek de stippen eigenlijk niet verbinden en waarom zijn de stippen in de grafiek toch wel verbonden?

b In de grafiek is een trendlijn getekend.
Stel een formule bij de trendlijn op. Neem $t = 0$ in 1970.

c Bereken met de formule wanneer het aantal aangespoelde jan-van-genten nog maar 40% is van het aantal uit 1970.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O30

30 H

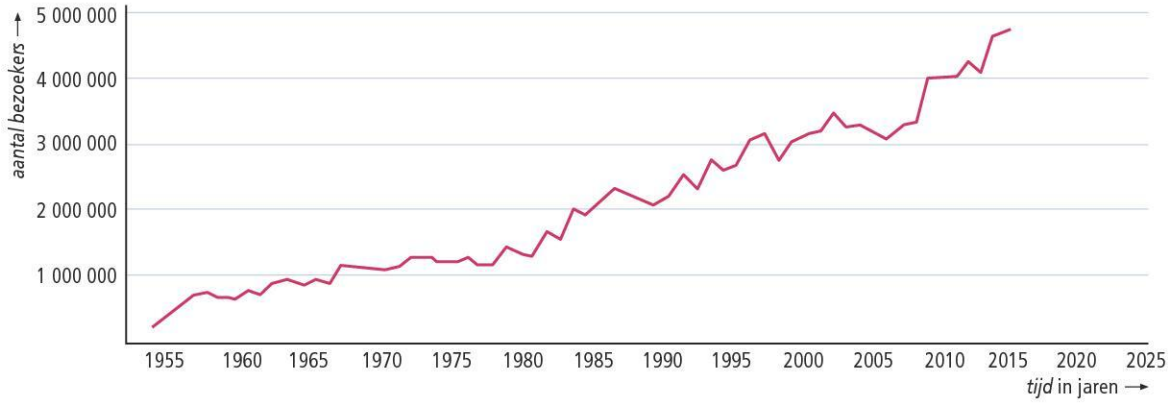
Ieder jaar wordt er een groot aantal nieuwe woningen gebouwd in Nederland. In de tabel zie je voor een aantal jaren het aantal nieuwe woningen.

jaar	*aantal nieuwe woningen*
1980	116 493
1985	101 116
1990	100 888
1995	97 726
2000	74 774
2005	71 541
2010	60 556
2015	48 381

a Teken een grafiek bij de tabel.
b Teken een rechte trendlijn.
c Stel een formule bij de trendlijn op. Neem $t = 0$ in 1980.
d Gebruik de formule van de trendlijn om het aantal nieuwe woningen in 2030 te schatten.
e Bereken met de formule in welk jaar het aantal nieuwe woningen voor het eerst minder dan 30 000 zal zijn.

31

In de grafiek zie je het verloop van de bezoekersaantallen van de Efteling tussen 1953 en 2015.



a In welk jaar waren er voor het eerst vier miljoen bezoekers?
b De grafiek van het aantal bezoekers verloopt grillig. Er zijn jaren waarin het bezoekersaantal sterk toeneemt.
Noem drie van deze jaren en geef een mogelijke verklaring.
c Het bezoekersaantal vertoont vanaf 1980 tot en met 2000 een trend.
Teken de bijbehorende trendlijn.
d Gebruik deze trendlijn om een voorspelling te doen in welk jaar voor het eerst het bezoekersaantal van 5 miljoen wordt gehaald.
e In 2017 kwam het aantal bezoekers voor het eerst boven de 5 miljoen.
Welke conclusie kun je trekken over de toename van het aantal bezoekers?

Uitdagende route → maak opdracht U6

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O30 Staatsbosbeheer heeft van 2004 tot en met 2017 in een natuurgebied het aantal everzwijnen bijgehouden. De resultaten zijn verwerkt in een grafiek waarin je een duidelijke dalende trend kunt zien.

- **a** Teken een rechte trendlijn. Zorg ervoor dat ongeveer de helft van de grafiek zowel boven als onder de trendlijn ligt.
- **b** Lees op de trendlijn het aantal everzwijnen in 2004 af.
- **c** Je gaat nu een formule opstellen bij de door jouw getekende trendlijn. De formule heeft de vorm $E = at + b$. Hierin is E het aantal everzwijnen en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2004.
  Bereken de gemiddelde verandering van het aantal everzwijnen per jaar .
- **d** Geef de formule bij de trendlijn.
- **e** Gebruik de formule van de trendlijn om het aantal everzwijnen in 2024 te schatten.
- **f** Bereken met de formule in welk jaar het aantal everzwijnen voor het eerst minder dan 500 zal zijn.

Uitdagende opdrachten

U6 In de grafiek zie je hoe de laatste jaren de gemiddelde verkoopprijs van een huis is gestegen. Zo kun je in de grafiek aflezen dat in 2015 in het 3e kwartaal (15 3) een huis voor gemiddeld 239 068 euro werd verkocht.

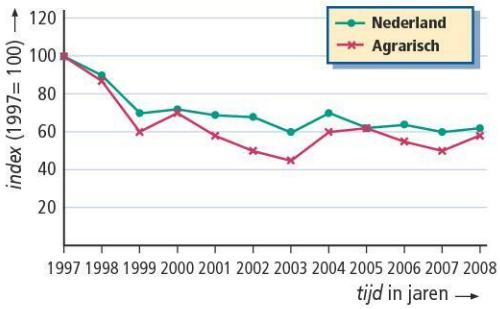
- **a** Teken een rechte trendlijn en stel bij de trendlijn een formule op van de vorm $V = \ldots t + \ldots$. Hierin is V de gemiddelde verkoopprijs van een huis en t de tijd in kwartalen waarbij $t = 0$ hoort bij het 3e kwartaal van 2015.
- **b** Bereken met de formule in welk jaar en welk kwartaal de gemiddelde verkoopprijs van een huis voor het eerst 350 000 euro is.
- **c** In deze grafiek zou je ook een kromme trendlijn kunnen tekenen waar een exponentieel verband bij hoort.
  Deze trendlijn gaat door de punten (15 3, 239 068) en (18 1, 286 462).
  Stel bij deze trendlijn een formule op en bereken hiermee in welk jaar en kwartaal de gemiddelde verkoopprijs van een huis voor het eerst 350 000 euro is.

© Noordhoff Uitgevers bv

Hazen hebben het moeilijk

Datum: 14 oktober 2009

Uit onderzoek, dat de Zoogdiervereniging in samenwerking met SOVON en het CBS uitvoert naar dagactieve zoogdieren, blijkt dat het aantal hazen in Nederland over de periode 1997-2008 met ongeveer dertig procent is afgenomen.
De haas heeft het met name in het agrarisch gebied moeilijk, zo blijkt uit het onderzoek. De oorzaak van de landelijke achteruitgang ligt waarschijnlijk in een combinatie van schaalvergroting, intensivering van de landbouw en ziekten.

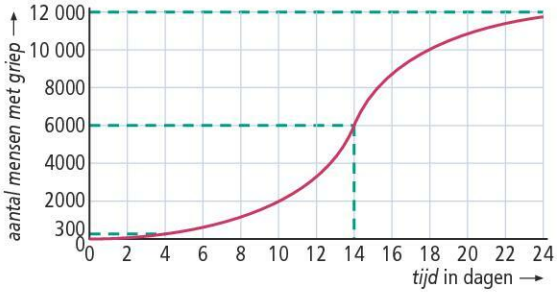


32 In de grafiek bij het artikel staan langs de verticale as indexcijfers. Het aantal hazen in 1997, dit waren er ongeveer 140 000, wordt op 100% gesteld. Als het indexcijfer bijvoorbeeld 90 is, betekent dit dat er 90% van 140 000, dus 126 000 hazen zijn.

a Hoeveel hazen waren er in Nederland in 1999? En in 2007?

b Stel bij de grafiek van het aantal hazen in Nederland de formule van een trendlijn op. Neem $t = 0$ in 2000.

c Het artikel klinkt wat alarmerend.
Zou dit ook zo zijn als het aantal hazen in 1999 op 100% was gesteld?



33 De grafiek beschrijft het verloop van een griepepidemie in een stad.

a Hoeveel mensen zullen er maximaal ziek worden?

b Maak een toenamediagram met stapgrootte van twee dagen bij de grafiek.

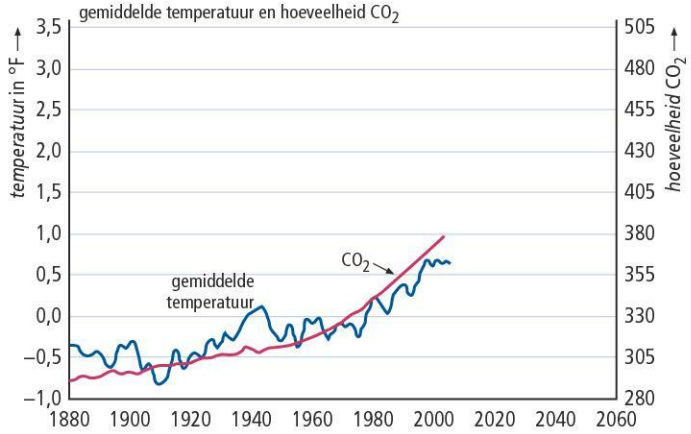
c Op welke dag heeft het toenamediagram een maximum?

d Leg uit hoe je met de grafiek kunt beredeneren wanneer het toenamediagram een maximum heeft.

e Het verloop van de epidemie in de eerste twee weken kan goed beschreven worden met behulp van een exponentiële formule. In de grafiek is te zien dat er na vier dagen 300 mensen griep hebben en na 14 dagen 6000 mensen. Met hoeveel procent neemt het aantal mensen met griep in deze periode per dag toe?

© Noordhoff Uitgevers bv

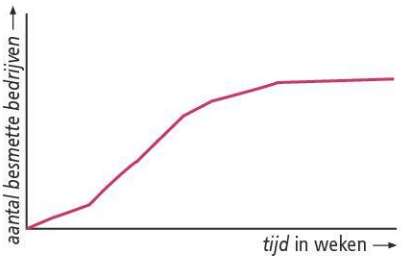
34 Tussen wetenschappers bestaan grote verschillen van mening over de feiten, oorzaken en gevolgen van klimaatverandering. De grafiek komt uit een artikel over dit onderwerp. De blauwe grafiek geeft het verloop van de gemiddelde jaartemperatuur. De rode grafiek toont de hoeveelheid CO_2, gemeten in deeltjes per miljoen deeltjes lucht.



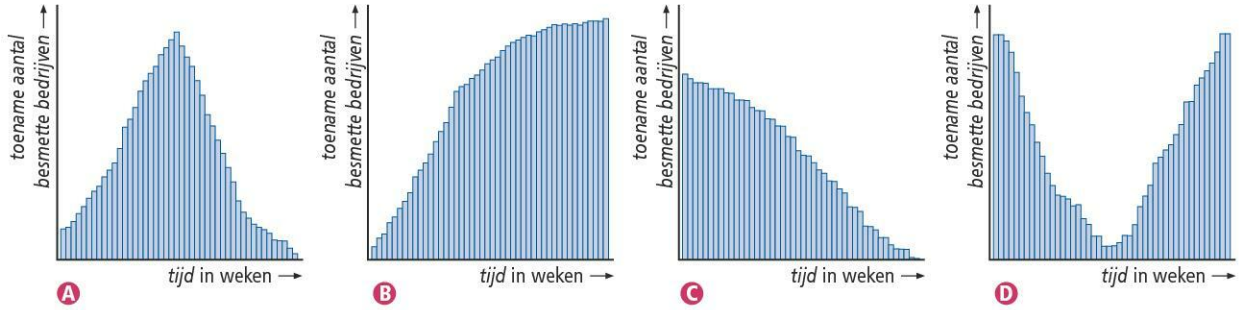
a Kun je uit deze grafieken de conclusie trekken dat een grotere hoeveelheid CO_2 in de atmosfeer een opwarming van de atmosfeer veroorzaakt? Verklaar je antwoord.

b Onderzoek in welk jaar de hoeveelheid CO_2 in de atmosfeer de waarde 500 bereikt.

35 In januari 1997 brak in Nederland de varkenspest uit. Op grond van wekelijkse tellingen van het toenmalige ministerie van Landbouw, Natuurbeheer en Visserij is de grafiek gemaakt van het totaal aantal besmette bedrijven sinds het begin van de uitbraak.



Het resultaat van de wekelijkse tellingen kun je ook weergeven met een toenamediagram. In de vier toenamediagrammen zijn de toenamen met staafjes weergegeven.
Welke van de vier toenamediagrammen past goed bij de grafiek? Licht je antwoord toe.

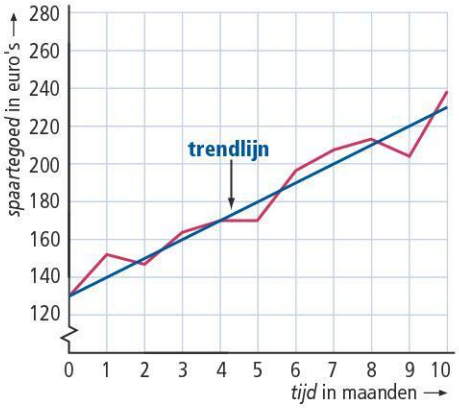


(Ontleend aan CE vwo wiskunde A1 2006, tijdvak 2)

Theorie

Trend, trendlijn

Een grafiek kan een stijgende of een dalende trend vertonen. Bij een trend kijk je niet naar kleine schommelingen, maar naar het verloop van de grafiek over langere tijd. Bij een duidelijke trend kun je een voorspelling doen over het verdere verloop van de grafiek. De lijn die je daarbij gebruikt, heet de trendlijn.



S1 Jeanne is sinds 1 januari 2019 aan het sparen voor een nieuwe IPhone. In de grafiek hierboven kun je haar spaartegoed voor de eerste tien maanden zien. In de grafiek is een trendlijn getekend.

a Stel een formule op bij de trendlijn van de vorm $S = \ldots t + \ldots$. Hierin is S haar spaartegoed en t de tijd in maanden waarbij $t = 0$ hoort bij 1 januari 2019.

b Gebruik de formule van de trendlijn om de hoogte van haar spaartegoed op 1 juli 2020 te schatten.

Vaardigheid

Je kunt een toenamediagram tekenen.

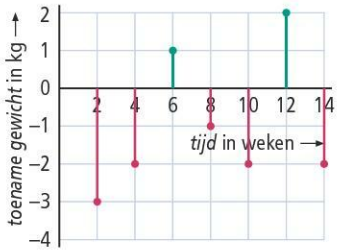
In een toenamediagram maak je toenamen en afnamen zichtbaar. Bij toenamen worden de staafjes omhoog getekend, bij afnamen omlaag.

Voorbeeld

Bram is bezig met een dieet en heeft zich om de twee weken gewogen. De resultaten staan in de tabel.
Teken een toenamediagram met een stapgrootte van twee weken bij de tabel.

tijd in weken	0	2	4	6	8	10	12	14
gewicht in kg	74	71	69	70	69	67	69	67

Oplossing



S2 De teamleider van de havo bovenbouw heeft het aantal absenten onder zijn leerlingen bijgehouden. In de tabel zie je de resultaten.

tijd in dagen	0	1	2	3	4	5	6	7	8
aantal absenten	17	14	5	3	2	0	6	9	7

Teken een toenamediagram met een stapgrootte van 1 dag bij de tabel.

© Noordhoff Uitgevers bv

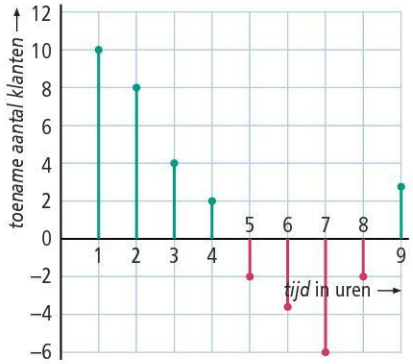
Vaardigheid

Je kunt werken met een toenamediagram.

In toenamediagrammen kun je verschillende soorten stijgen en dalen van een grafiek herkennen.
Zo is in het toenamediagram in de periode van $t = 0$ tot en met $t = 4$ een afnemende stijging te herkennen aan de steeds korter wordende staafjes omhoog.

Voorbeeld

Een bedrijfsleider heeft bijgehouden hoeveel klanten er in zijn winkel zijn. De resultaten staan in het toenamediagram.



S3

a Hoe kun je in het toenamediagram in de periode van $t = 5$ tot en met $t = 7$ zien dat er sprake is van een toenemende daling van het aantal klanten?
b Wat betekent dit in de praktijk?
c Op welk moment ongeveer zijn er de meeste klanten in de winkel?
d Op $t = 4$ zijn er 96 klanten in de winkel.
Hoeveel klanten zijn er op $t = 7$? En hoeveel op $t = 0$?

Vaardigheid

Je kunt een gemiddelde verandering berekenen.

Met het symbool Δ (delta) geef je vaak een toename aan.
Bij de periode van $t = 7$ tot $t = 9$ hoort $\Delta t = 2$.
Een verandering van x geef je aan met Δx. In een formule, tabel of grafiek die het verband tussen de variabelen x en y beschrijft, hoort bij elke verandering Δx een verandering Δy.
De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Als t de tijd is, dan is $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ de gemiddelde snelheid waarmee A verandert.

Voorbeeld

Teun doet mee aan een hardloopwedstrijd over 1000 meter. In de tabel staan de afstanden A in meters die Teun heeft gelopen na t minuten.

t	1	2	3	4	5
A	255	475	670	840	1000

Bereken de gemiddelde snelheid van Teun in km per uur tussen $t = 2$ en $t = 4$.

Oplossing

$\Delta t = 4 - 2 = 2$ en $\Delta A = 840 - 475 = 365$
De gemiddelde snelheid is
$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{365}{2} = 182{,}5$ meter per minuut.
Dit is $\frac{182{,}5 \times 60}{1000} = 10{,}95$ km per uur.

S4

a Bereken de gemiddelde snelheid in km per uur van Teun tussen $t = 2$ en $t = 5$.
b Bereken ook de gemiddelde snelheid tussen $t = 4$ en $t = 5$.
c Welke conclusie kun je trekken over de snelheid van Teun gedurende de wedstrijd?

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt een tussenliggende waarde met lineair interpoleren schatten.

1. Bereken het verschil tussen de waarden aan het eind en aan het begin van de periode.
2. Bereken de lengte van de periode.
3. Bereken de gemiddelde toename per tijdseenheid.
4. Bereken hiermee de tussenliggende waarde.

Voorbeeld

Aileen maakt een wandeling van $2\frac{1}{2}$ uur. In de tabel zie je de afstand die ze heeft gelopen na t minuten.
Schat met lineair interpoleren hoeveel km Aileen heeft gelopen na 55 minuten.

tijd in minuten	*afstand* in km
30	2,8
60	5,7
90	8,5
120	10,9
150	12,3

Oplossing

1. De toename van het aantal km tussen 30 en 60 minuten is $5{,}7 - 2{,}8 = 2{,}9$ km.
2. De lengte van die periode is 30 minuten.
3. De gemiddelde toename is $2{,}9 : 30 = 0{,}096\ldots$ km per minuut.
4. Aileen heeft na 55 minuten $2{,}8 + 25 \times 0{,}096\ldots \approx 5{,}2$ km gelopen.

S5

a Schat met lineair interpoleren hoeveel km Aileen na 70 minuten heeft gelopen.

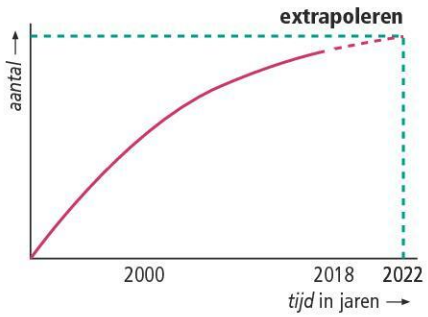
b Schat ook met lineair interpoleren hoeveel km Aileen na 135 minuten heeft gelopen.

c Welke schatting is betrouwbaarder? Verklaar je antwoord.

Vaardigheid

Je kunt een waarde met extrapoleren schatten.

Het vinden van een verder gelegen waarde in een tabel of in een grafiek heet extrapoleren.
Bij extrapoleren moet je de ontwikkeling van de grafiek zo goed mogelijk volgen.
Je gaat er daarbij vanuit dat die ontwikkeling op dezelfde manier doorgaat.



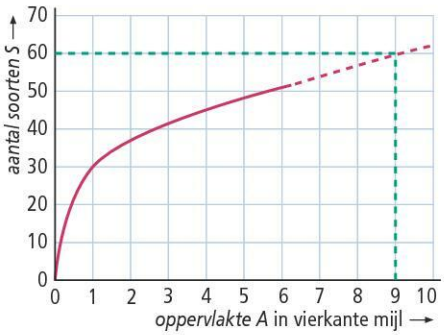
© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

In de tabel staat het aantal plantsoorten dat op de eilanden in de Galapagos-archipel te vinden is.

oppervlakte in vierkante mijl	0	2	4	6
aantal plantensoorten	0	36	45	52

Teken een grafiek bij de tabel en voorspel het aantal plantensoorten op een eiland met een oppervlakte van 9 vierkante mijl in deze archipel.



Oplossing

Een eiland met een oppervlakte van 9 vierkante mijl in deze archipel heeft ongeveer 60 plantensoorten.

S6 Pien is woordjes aan het leren voor een idioomtoets Engels. Ze houdt om de vijf minuten bij hoeveel woordjes ze al kent. De resultaten zie je in de tabel.

tijd in minuten	0	5	10	15	20	25	30	35	40
aantal woorden	0	21	35	43	51	57	62	66	69

a Teken een grafiek bij de tabel. Neem langs de horizontale as stapgrootte 5.

b Voorspel hoeveel woordjes ze na een uur leren al kent.

Vaardigheid

Je kunt met een trendlijn een voorspelling doen.

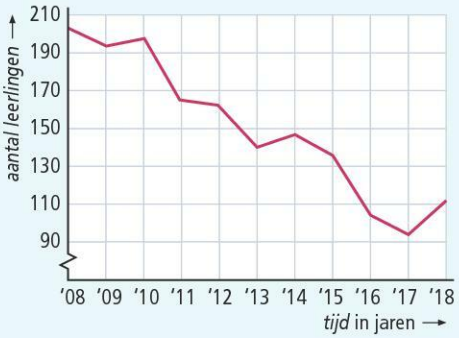
Bij het tekenen van een trendlijn zorg je ervoor dat ongeveer de helft van de grafiek boven als onder de trendlijn ligt. Met de trendlijn kun je een voorspelling doen.

S7 In de grafiek zie je de ontwikkeling van het aantal leerlingen op een basisschool.

a Teken een rechte trendlijn.

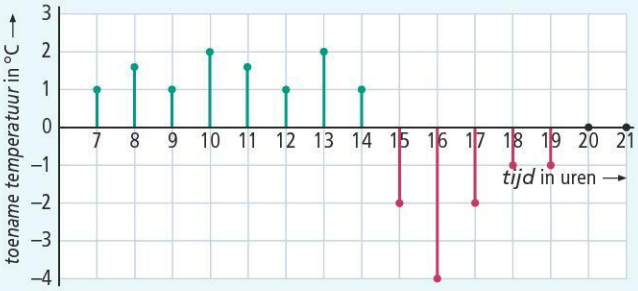
b Bij de trendlijn hoort een formule van de vorm $L = at + b$. Hierin is L het aantal leerlingen en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2008.
Stel een formule op bij de trendlijn.

c Gebruik de formule van de trendlijn om een schatting te maken wanneer het aantal leerlingen kleiner is dan 60.



© Noordhoff Uitgevers bv

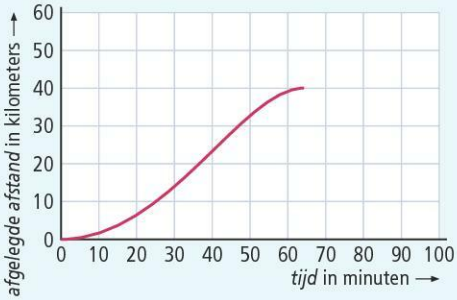
T1 Op een weerstation wordt gedurende een dag de temperatuur bijgehouden. In het toenamediagram zie je hoe de temperatuur die dag is veranderd. Om 12.00 uur is het 20 °C.



a Hoe kun je aan het toenamediagram zien dat de hoogste temperatuur waarschijnlijk tussen 14.00 uur en 15.00 uur werd bereikt?
b In welke periode was er sprake van een toenemende daling van de temperatuur?
c Hoe kun je aan het toenamediagram zien dat er een overgang was van een toenemende daling naar een afnemende daling?
d Bereken de gemiddelde verandering van de temperatuur tussen 6.00 uur en 12.00 uur.

T2 Stephen fietst een trainingsrit van 1,5 uur. Met de formule $S = 0{,}018t^2 - 0{,}000\,002t^4$ kun je voor het eerste uur zijn afgelegde afstand berekenen. Hierin is S zijn afgelegde afstand in kilometers na t minuten.

a Hoeveel kilometer per minuut is de gemiddelde snelheid van Stephen tussen $t = 15$ tot $t = 30$?
b Hoeveel km per uur is dat?
c Teken een toenamediagram met stapgrootte 10 minuten.
d Leg uit hoe je in de grafiek kunt zien dat de gemiddelde snelheid van Stephen tussen de 30e en 40e minuut groter was dan die tussen de 10e en de 20e minuut.
e Hoe zie je dat terug in je toenamediagram?
f Na $t = 60$ fietst Stephen de laatste 30 minuten met dezelfde snelheid door.
Voorspel hoeveel kilometer hij na 1,5 uur heeft afgelegd.



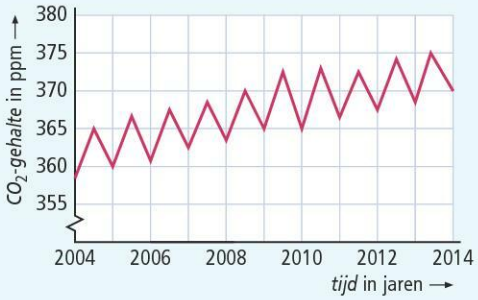
© Noordhoff Uitgevers bv

T3 Onder West-Nederland vallen de provincies Noord-Holland, Zuid-Holland, Utrecht en Zeeland. In de tabel staat het aantal inwoners van West-Nederland.

tijd in jaren	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
aantal × 1000	4060	4595	5068	5713	6320	6635	6967	7396	7777

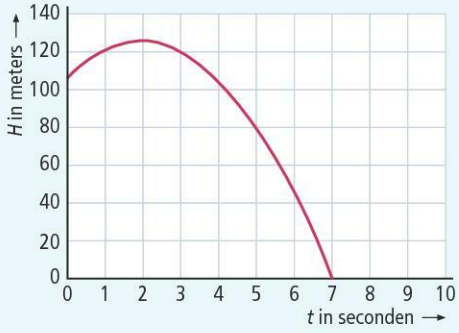
a Teken een grafiek bij deze tabel.
b Schat met lineair interpoleren het aantal inwoners in 1967 en in 1999.
c Welke van de uitkomsten is het meest betrouwbaar? Leg uit waarom.
d Bereken de gemiddelde verandering van het aantal inwoners tussen 1930 en 2010.
e Voorspel het aantal inwoners van West-Nederland in 2050.

T4 Op de sterrenwacht te Tenerife wordt het CO_2-gehalte gemeten. In de grafiek zijn de resultaten van 2004 tot 2014 weergegeven.



a Teken een rechte trendlijn.
b Stel bij de trendlijn een formule op van de vorm $G = \ldots t + \ldots$. Hierin is G het CO_2-gehalte en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2004.
c Gebruik de formule van de trendlijn om het CO_2-gehalte in Tenerife in 2020 te schatten.
d Voorspel ook het CO_2 gehalte in Tenerife in 2050. Waarom is deze voorspelling niet betrouwbaar?

T5 Een bal wordt van een toren omhoog gegooid en valt daarna naast de toren op de grond. Bij het verband tussen de hoogte H van de bal in meters en de tijd t in seconden hoort de formule $H = -5t^2 + 20t + 105$. In de grafiek kun je zien dat de grootste hoogte van de bal na twee seconden bereikt wordt.



a Bereken de gemiddelde snelheid van de bal tussen het moment dat hij losgelaten wordt en het moment dat hij zijn grootste hoogte bereikt.
b Bereken de gemiddelde snelheid van de bal tussen $t = 2$ en $t = 7$.
c Leg uit wat de betekenis is van je antwoord van opdracht b.
d Bereken de gemiddelde snelheid van de bal tussen $t = 6{,}9$ en $t = 7$.
e Met ongeveer welke snelheid valt de bal op de grond?

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt een toenamediagram tekenen.

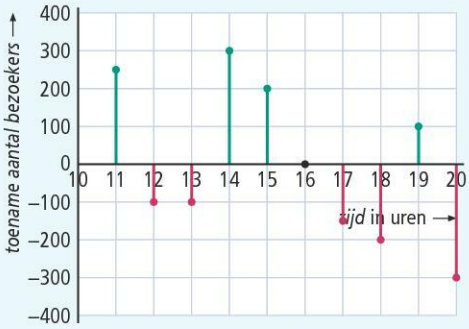
E1 Het percentage mensen boven de 18 jaar dat rookt, nam gedurende de laatste halve eeuw eerst toe, maar daarna sterk af. In de tabel zie je het percentage rokers tussen 1950 en 2010.

tijd in jaren	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
percentage	17	27	36	42	44	40	28

a Maak een toenamediagram bij de tabel.
b In welk jaar ongeveer bereikte het percentage rokers een maximale waarde en hoe zie je dat aan het toenamediagram?
c Is er bij de afname van het percentage rokers sprake van een afnemende of een toenemende daling? Leg uit hoe je dat aan het toenamediagram kunt zien.

Je kunt werken met een toenamediagram.

E2 Gegeven is het toenamediagram van het aantal bezoekers in een museum. Om 10.00 uur ging het museum open en om 20.00 uur ging het museum weer dicht. Op de horizontale as staat de tijd in uren.



a Met hoeveel nam het aantal bezoekers tussen 13.00 uur en 14.00 uur toe?
b Hoe groot was het maximaal aantal getelde bezoekers?
c Teken de grafiek van het aantal bezoekers in het museum tussen 10.00 uur en 20.00 uur.

Je kunt een gemiddelde verandering berekenen.

E3 Een steen wordt met een katapult recht omhoog geschoten. De hoogte van de steen H in meters na t seconden kun je berekenen met de formule $H = 45t - 5t^2$.

a Bereken de gemiddelde snelheid in meter per seconde van de steen van 0 tot 2 seconden.
b Bereken ook de gemiddelde snelheid in meter per seconde van de steen van 4 tot 9 seconden. Waarom is deze snelheid negatief?

Je kunt een tussenliggende waarde met lineair interpoleren schatten.

E4 Gebruik bij deze opdracht de tabel van opdracht E1.

a Schat met lineair interpoleren het percentage rokers in 1963 en in 2004.
b Welke schatting is het meest betrouwbaar?

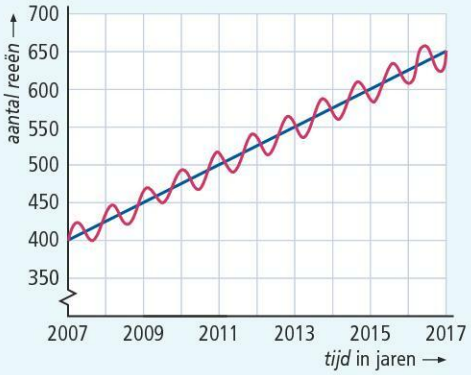
© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt een waarde buiten je gegevens met extrapoleren schatten.

E5
a Teken een grafiek bij de tabel van opdracht E1.
b Voorspel het percentage rokers in 2030.
c Vanaf welk jaar zal het percentage rokers nul procent zijn?
d Is je antwoord van opdracht c betrouwbaar?

Je kunt met een trendlijn een voorspelling doen.

E6 In de grafiek zie je de grootte van de populatie reeën in een natuurpark in de periode 2007 tot 2017. Zo zie je dat op 1 januari 2017 er 400 reeën waren.



a Welke bewering is juist?
I Er worden elk jaar evenveel reeën geboren.
II Het percentage reeën dat in een jaar sterft, is constant.
b Stel bij de trendlijn een formule op van de vorm $A = \ldots t + \ldots$. Hierin is A het aantal reeën en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2007.
c Gebruik de formule van de trendlijn om een schatting te maken van het aantal reeën in 2028 en in 2050. Zijn deze schattingen betrouwbaar?

E7 In de tabel zie je gegevens hoe Anna een berg omhoog fietst. Zo kun je zien dat Anna na 10 minuten 3,8 kilometer heeft gefietst.

tijd in minuten	0	5	10	15	20	25	30	35
afstand in km	0	1,8	3,8	5,1	6,1	7,0	8,3	9,9

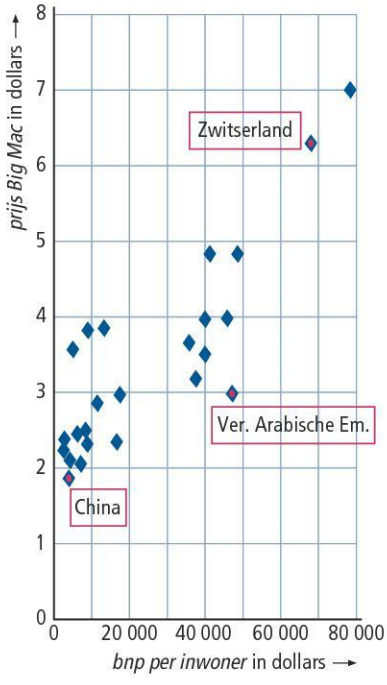
a Teken een toenamediagram met stapgrootte 5 bij de tabel.
b Waarom zijn in het toenamediagram alle staafjes omhoog getekend?
c In welke periode van 5 minuten fietst Anna het langzaamst? Hoe zie je dat in het toenamediagram?
d Bereken de gemiddelde snelheid in kilometer per uur van Anna tussen 10 minuten en 20 minuten.
e Schat met lineair interpoleren hoeveel kilometer zij na 16 minuten gefietst heeft.
f Neem aan dat na 35 minuten Anna nog 10 minuten met dezelfde snelheid doorfietst. Schat hoeveel kilometer ze dan gefietst heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

Big Mac-index

De Big Mac-index is bedacht door het Britse weekblad The Economist. Het is een informele berekeningswijze van de koopkracht in een land, gebaseerd op de prijs van een Big Mac. Bij deze index wordt de prijs van de Big Mac in de verschillende landen omgerekend naar de prijs in Amerikaanse dollars.
Een Big Mac is een verzameling van de producten als vlees, brood en sla. Maar ook arbeid en elektriciteit is nodig bij de productie. Het is dus een redelijke doorsnee van het prijsniveau in een economie. Aangezien McDonald's bijna overal gevestigd is en overal lokaal inkoopt, is de vergelijking interessant.

Om de welvaart van een land te meten, wordt het bnp (bruto nationaal product) gebruikt. Het bnp is de waarde van alle goederen en diensten die in een jaar door een bepaald land worden geproduceerd. Om een vergelijking te maken tussen landen wordt dit getal gedeeld door het aantal inwoners. Je krijgt dan het bnp per inwoner.
Het bnp per inwoner zegt nog niet zoveel over de koopkracht in verschillende landen. Om de koopkracht te vergelijken kun je gebruik maken van de 'Big Mac-index'. In de grafiek is van een aantal landen het bnp per persoon en de prijs van de Big Mac in een puntenwolk weergegeven. Je ziet dat in Zwitserland de prijs van de Big Mac ruim 6 dollar is bij een bnp per persoon van 68 000 dollar.



Opdracht

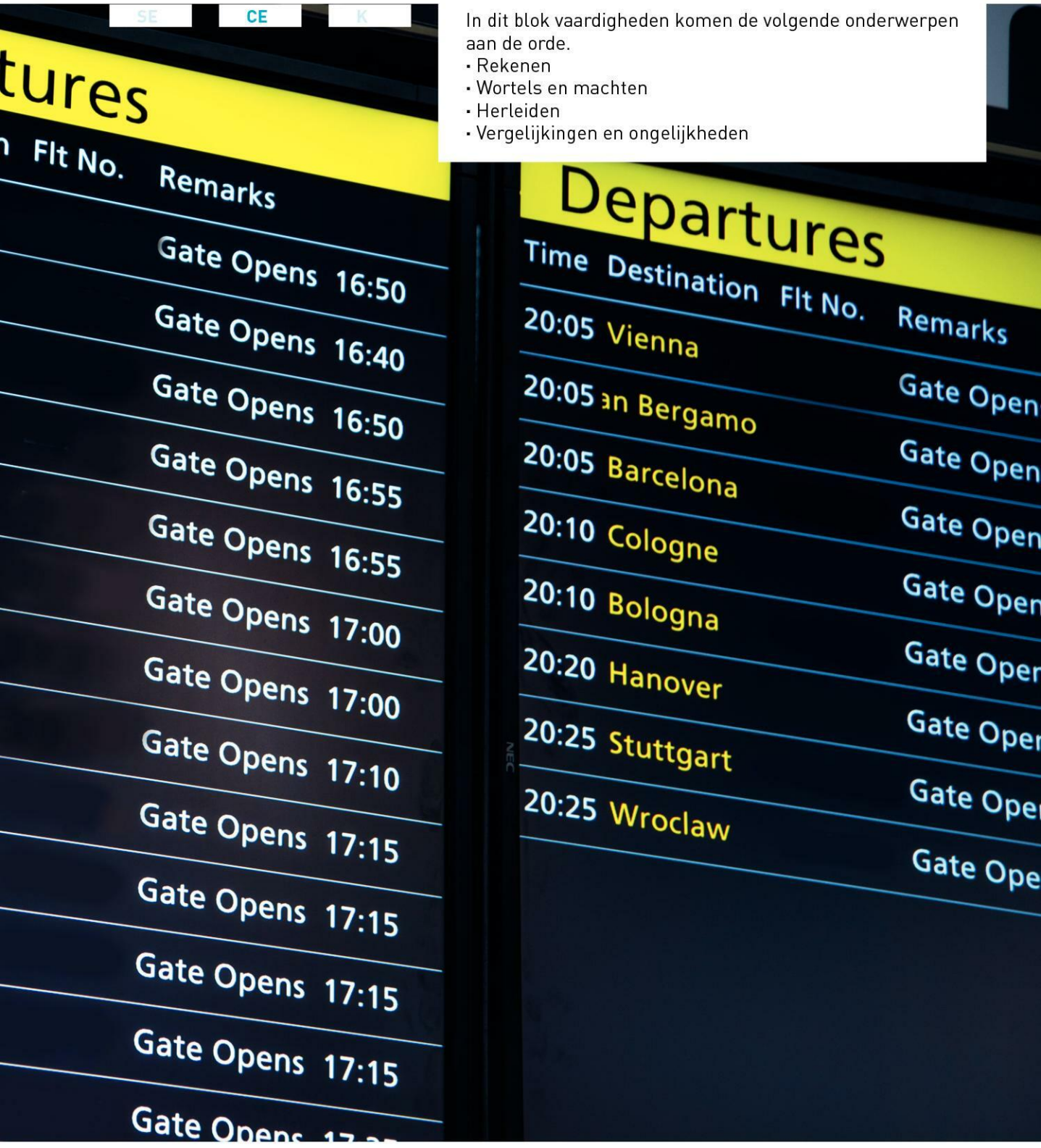
- Bekijk de gegeven puntenwolk.
  In welk land is de Big Mac naar verhouding goedkoper, in China of in de Verenigde Arabische Emeritaten? Verklaar je antwoord.
- Geef een schatting van de prijs van een Big Mac bij een bnp per inwoner van 60 000 dollar.
- In de dataset zie je gegevens over de minimumlonen en de prijzen van de Big Mac voor een aantal Europese landen. Onderzoek in welk land de Big Mac naar verhouding het goedkoopst en in welk land de Big Mac naar verhouding het duurst is.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheden 4

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rekenen
- Wortels en machten
- Herleiden
- Vergelijkingen en ongelijkheden



© Noordhoff Uitgevers bv

Rekenen

1 Bereken in de verhoudingstabellen a, b en c met kruisproducten. Rond je antwoorden af op drie decimalen.

q	9	a
w	16	3,5

s	13	b	18
d	7	4,5	c

2
a Op een koffer van € 41,- wordt een korting van 18% gegeven.
Bereken de prijs van de koffer.
b De prijs van de abonnement wordt met 2,6% verhoogd.
Bereken de nieuwe prijs van een abonnement van € 79,-.
c De schoonmaker heeft zijn uurtarief verhoogd van € 27,50 naar € 31,25.
Met hoeveel procent is zijn uurtarief gestegen?
d De prijs van een kilogram gehakt is gedaald van € 3,45 naar € 2,98.
Met hoeveel procent is het gehakt goedkoper geworden?

Aanpak

Hoe bereken je een gemiddelde snelheid?

1 Reken de totale tijd om naar minuten of seconden.
2 Maak een verhoudingstabel met afstand en tijd.
3 Bereken de afstand per tijdseenheid.

Voorbeeld

Carolien heeft het schoolrecord op de veldloop.
Zij heeft 4400 meter gelopen in 15:26,12 minuten.
Bereken haar gemiddelde snelheid in km per uur.

Oplossing

1 15:26,12 minuten is
$15 \times 60 + 26{,}12 = 926{,}12$ seconden.

2

afstand in km	4,4	?
tijd in seconden	926,12	3600

3 $4{,}4 \times 3600 = 926{,}12 \times ?$
$4{,}4 \times 3600 : 926{,}12 = 17{,}10\ldots$
Haar gemiddelde snelheid was 17,1 km per uur.

3
a Eduard is aan het trainen voor de halve marathon van Zwolle. Op maandag heeft hij 14,3 km gelopen in 58:43 minuten.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in km per uur.
b Op donderdag liep hij 18,7 km in 1:14:13 uur.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in km per uur.
c Eduard wil de halve marathon van 21,125 km gaan lopen met een gemiddelde snelheid van 15 km per uur.
Hoe lang zal hij dan over de halve marathon gaan doen?
Geef je antwoord in uren, minuten en seconden nauwkeurig.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Voor het rekenen met wortels heb je de volgende rekenregels:

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $\quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Voorbeeld

$\sqrt{50} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$

$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$

$\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7$

$5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2b} = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{b} = 10\sqrt{b}$

$\sqrt{64x} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{x} = 8\sqrt{x}$

$6\sqrt{\frac{x}{4}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} = 3\sqrt{x}$

4 Schrijf als één wortel en vereenvoudig indien mogelijk.

a $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$

b $6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{8}$

c $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

d $5\sqrt{\frac{12}{3}}$

5 Schrijf als één wortel.

a $y = 10\sqrt{\frac{x}{25}}$

b $y = 5\sqrt{9x}$

c $y = \sqrt{2a} \cdot \sqrt{8b}$

d $y = \sqrt{\frac{d}{36}} \cdot \sqrt{d}$

e $y = \sqrt{5x} \cdot \sqrt{5}$

f $y = 33\sqrt{\frac{x}{121}}$

Theorie

Voor het rekenen met machten heb je de volgend rekenregels:

$g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ $\quad \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ $\quad (g^a)^b = g^{a \cdot b}$

Voorbeeld

$3^4 \cdot 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$

$(6^2)^4 = 6^{2 \cdot 4} = 6^8$

$\frac{9^6}{9^2} = 9^{6-2} = 9^4$

$w^5 \cdot w^2 = w^{5+2} = w^7$

$(2h^3)^4 = 2^4 \cdot h^{3 \cdot 4} = 16h^{12}$

$\frac{z^5}{z^3} = z^{5-3} = z^2$

6 Schrijf als één macht.

a $3^2 \cdot 3^4$

b $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2$

c $(2^3)^6$

d $6^2 \cdot (6^2)^3$

e $(4^2)^3 \cdot 4$

f $11 \cdot 11^3 \cdot 11^4 \cdot 11^2$

7 Schrijf in de vorm $c \cdot x^n$.

a $x^3 \cdot x^4$

b $(2x)^4$

c $7x^4 \cdot x^2 \cdot (x^3)^5$

d $\frac{3x^5}{x^2}$

e $(3x^2)^5$

f $x \cdot (x^2)^4$

g $2x^3 \cdot 4x^2 \cdot x \cdot x^5$

h $\frac{10x^7}{2x^3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Herleiden

8 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $3(2x - 4)$

b $2(p - 7) - 3(p + 8)$

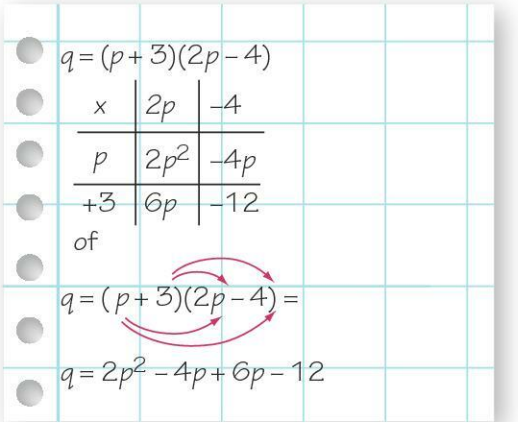
c $-3(2x - 4)$

d $-5(2{,}5x + 6{,}2)$

e $-(x + 5) - 3$

f $2a(4 - a)$

9 Op het blaadje zie je hoe bij de formule $q = (p + 3)(2p - 4)$ de haakjes kunt weg werken.
Leg uit dat je $q = (p + 3)(2p - 4)$ kunt schrijven als $q = 2p^2 + 2p - 12$.



10 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $(n + 4)(n - 5)$

b $(3n + 4)(n - 5)$

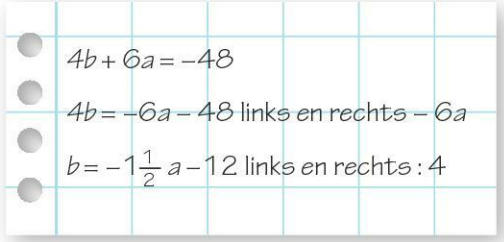
c $(5p - 2)(p - 3)$

d $(k + 7)^2$

e $(r - 7)^2$

f $(2w - 6)^2$

11 Op het blaadje zie je hoe de formule $4b + 6a = -48$ herleid is zodat b wordt uitgedrukt in a.
Herleid de formules waarbij je b uitdrukt in a.



a $6b + 3a = 12$

b $4b - 12a = 6$

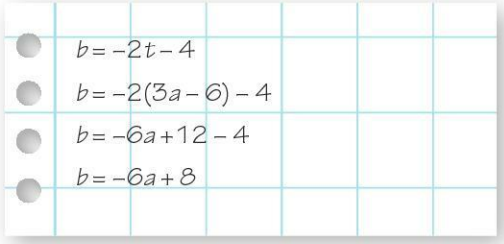
c $3a + b - 6 = 8$

d $700a = -20b - 500$

e $2(b - 6) - 8a = 0$

f $3b = 6(a - 5) + 9$

12 Op het blaadje zie je hoe de formule $t = 3a - 6$ gesubstitueerd wordt in de formule $b = -2t - 4$.
Substitueer formule B in formule A en vereenvoudig het resultaat.



a A: $b = 2t + 8$ en B: $t = p - 4$

b A: $b = 7 - t$ en B: $t = -2p + 9$

c A: $b = 4(t - 2)$ en B: $t = -p + 5$

13 Teken de halfvlakken bij elk van de lineaire ongelijkheden. Neem de t-as horizontaal.

a $2t - 8k \leq 32$

b $0{,}5t + 2k \geq 6$

c $30t + 10k \leq 450$

d $0{,}2k + 0{,}4t \geq 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

Vergelijkingen en ongelijkheden

14 Los de vergelijkingen op.

a $-x + 7 = 4x - 13$

b $\frac{1}{2}x + 6 = 2\frac{1}{2}x - 4$

c $-4x + 28 = 8(x - 4)$

d $-x = -4x - 9$

e $3(6 + x) = -x + 2$

f $2(x - 8) = 5(1 - 2x)$

Theorie

Sommige vergelijkingen zijn lastig op te lossen. In dat geval kun je de oplossingen met de rekenmachine vinden. De oplossing(en) vind je met behulp van de coördinaten van de snijpunten van de bijbehorende grafieken.

15 Los de vergelijkingen op. Schrijf op hoe je de rekenmachine gebruikt.

a $x^2 + 4x - 4 = 2x$

b $w^4 + 2w - 3 = w + 5$

c $4 \cdot 1{,}1^t = -0{,}5t + 8$

d $2\sqrt{x - 4} = x - 7$

Theorie

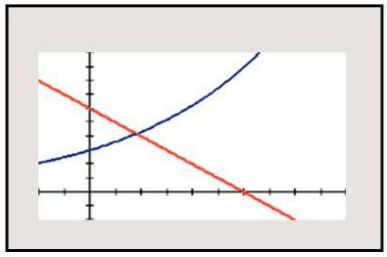
Ongelijkheden los je op met de grafische rekenmachine. Los eerst de bijbehorende vergelijking op. Bepaal vervolgens met een plot van de grafieken de oplossing van de ongelijkheid.

Voorbeeld

Los op $3 \cdot 1{,}2^x > 6 - x$.

Oplossing

1 Plot de grafieken van de formules $y = 3 \cdot 1{,}2^x$ en $y = 6 - x$.
2 Met de rekenmachine vind je het snijpunt (1,82; 4,18).
3 Rechts van $x = 1{,}82$ ligt de grafiek van $y = 3 \cdot 1{,}2^x$ hoger dan de grafiek van $y = 6 - x$.
De oplossing van de ongelijkheid is $x > 1{,}82$.



16 Los de ongelijkheden op.

a $-x + 6 \geq 3x - 28$

b $w^2 - 2w + 3 > w + 1$

c $128 \cdot 0{,}25^t \geq 0{,}5$

d $6 \cdot 1{,}8^t < t + 18$

© Noordhoff Uitgevers bv

Lineaire en exponentiële formules 9

SE CE K

In dit hoofdstuk

Je hebt geleerd wat lineaire en exponentiële groei is. Je weet hoe je een lineaire en exponentiële formule opstelt en hoe je bij exponentiële groei de groeifactor omrekent naar een andere tijdseenheid. Ook heb je geleerd hoe je bij een lineaire ongelijkheid een gebied tekent.

In dit hoofdstuk wordt alles wat je geleerd hebt over lineaire en exponentiële verbanden herhaald. Daarnaast wordt je kennis over het tekenen van gebieden bij lineaire ongelijkheden uitgebreid. Ook leer je hoe je bij exponentiële groei de verdubbelingstijd of de halveringstijd berekent. Ten slotte leer je wat een logaritmische schaalverdeling is en hoe je die kunt aflezen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 7
- *Abstraheren* opdracht 13
- *Modelleren en algebraïseren* opdracht 38

© Noordhoff Uitgevers bv

V1 In een gebied was sprake van een konijnenplaag. Op 1 januari 2014 werden vossen uitgezet om het aantal konijnen te laten afnemen. Vanaf dat tijdstip hebben biologen elk jaar het aantal konijnen geteld. In de tabel vind je het resultaat.

jaar	*aantal konijnen*
2014	1200
2015	1020
2016	870
2017	740
2018	630

a Met welk getal wordt het aantal konijnen elk jaar vermenigvuldigd?

b Neem aan dat de afname op dezelfde manier doorgaat. Hoeveel konijnen zijn er in 2020? En in 2021?

c In welk jaar zijn er voor het eerst minder dan 200 konijnen?

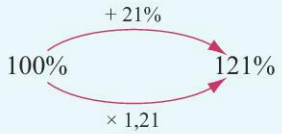
Theorie

Het getal waarmee je een oude hoeveelheid moet vermenigvuldigen om een nieuwe hoeveelheid te krijgen, heet de **factor**.

Er geldt *oude hoeveelheid* × *factor* = *nieuwe hoeveelheid*.

Omgekeerd geldt $factor = \frac{nieuwe\ hoeveelheid}{oude\ hoeveelheid}$

Een groeiproces heet **exponentieel** als de factor per tijdseenheid steeds hetzelfde is. Deze factor heet de **groeifactor**. Ook bij een afname spreek je van exponentiële groei. De groeifactor is in dat geval kleiner dan 1.



Bij een toename van 21% hoort de factor 121 : 100 = 1,21.

V2 Bereken de factor waarmee je de oude hoeveelheid moet vermenigvuldigen om de nieuwe hoeveelheid te krijgen.

a Een aantal leerlingen is afgenomen van 1480 tot 1332.

b De lengte van Gerrit is met 14 cm toegenomen tot 188 cm.

V3 Op een boerderij neemt het gewicht van een varken elke week met ongeveer 10% toe. Een varken weegt ongeveer 25 kg als het naar de mesterij wordt gebracht.

	begin	na één week
gewicht in kg	25	…
percentage	100	…
		…

a Vul de tabel verder in.

b Met welke factor moet je 25 vermenigvuldigen om het gewicht na één week te berekenen?

c Bereken het gewicht van het varken na 16 weken.

V4 Bereken de groeifactor.

a De toename is 12,5%.

b De toename is 2,8%.

c De toename is 0,3%.

d De afname is 20%.

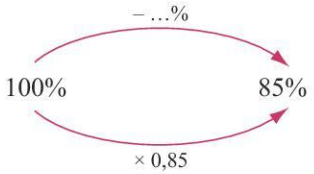
e De afname is 5,2%.

f De afname is 0,7%.

© Noordhoff Uitgevers bv

V5 Welke procentuele toename of afname hoort bij de groeifactoren?

a 0,85
b 1,36
c 0,981
d 1,016
e 1,205
f 0,735



V6 In een kweek neemt het aantal bacteriën elke week met 50% toe, dus de groeifactor van het aantal bacteriën is 1,5 per week.

a Leg uit dat de groeifactor van het aantal bacteriën per twee weken gelijk is aan 2,25.
b Hoe groot is de groeifactor per vier weken?
c Leg uit dat de groeifactor per dag $1{,}5^{\frac{1}{7}}$ is en bereken deze groeifactor.

Als de groeifactor per uur gelijk is aan g, dan is de groeifactor per zes uur gelijk aan g^6.
De groeifactor per kwartier is dan $g^{\frac{1}{4}}$.

V7
a De groeifactor per uur is 0,98.
Bereken de groeifactor per dag.
b De groeifactor per achttien dagen is 1,6.
Bereken de groeifactor per drie dagen.

Aanpak

Hoe bereken je bij een exponentieel groeiproces het groeipercentage voor een andere tijdseenheid?

1 Bereken de groeifactor per gegeven tijdseenheid.
2 Bereken de groeifactor voor de gevraagde tijdseenheid.
3 Leid het gevraagde percentage af uit deze groeifactor.

Voorbeeld 1

De procentuele afname per jaar is 4%.
Bereken de procentuele afname per 10 jaar.

Oplossing

1 $100\% - 4\% = 96\%$
De groeifactor per jaar is $96 : 100 = 0{,}96$.
2 De groeifactor per 10 jaar is $0{,}96^{10} \approx 0{,}665$.
3 De procentuele afname per 10 jaar is 33,5%.

Voorbeeld 2

De procentuele toename per dag is 65,8%.
Bereken de procentuele toename per uur.

Oplossing

1 $100\% + 65{,}8\% = 165{,}8\%$
De groeifactor per dag is $165{,}8 : 100 = 1{,}658$.
2 De groeifactor per uur is $1{,}658^{\frac{1}{24}} \approx 1{,}021$.
3 De procentuele toename per uur is 2,1%.

V8
a De rente per maand is 0,13%.
Bereken het rentepercentage per jaar.
b Het aantal insecten neemt elke week met 18% af.
Met hoeveel procent neemt het aantal insecten per dag af?
c Het aantal bacteriën neemt elke 15 uur met 98% toe.
Met hoeveel procent neemt het aantal bacteriën per uur toe?

© Noordhoff Uitgevers bv

9.1 Lineaire verbanden

Je leert
- hoe je met een lineair verband rekent

Leerroutes
- ondersteunend: 1—2—3—O4—5—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—4—5—6—7—U1

Merel koopt voor € 5,40 twee ananassen en drie grapefruits. Ahmed koopt in dezelfde winkel voor € 7,60 vier ananassen en twee grapefruits.
- Hoeveel kosten de ananassen en grapefruits per stuk?

x	1	2	3	5	7
y	2	5	8	14	20

A

x	4	5	6	7	10
y	9,5	8	6,5	5	0,5

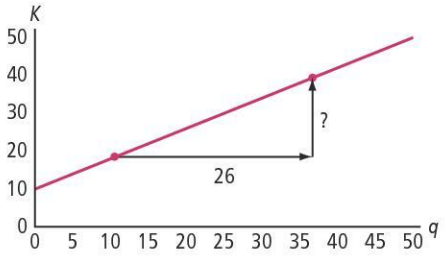
B

x	1	3	4	6	18
y	36	12	9	6	2

C

1
a Waarom hoort bij tabel A een lineair verband?
b Is bij de andere tabellen ook sprake van een lineair verband?

2 De grafiek laat het verband zien tussen de fabricagekosten K in euro's en het aantal geproduceerde theekoppen q. De grafiek gaat door de punten (11; 17,8) en (37; 38,6).



a Waarom mag je verwachten dat bij het verband tussen K en q een formule van de vorm $K = a \cdot q + b$ hoort?
b Hoeveel nemen de kosten toe als er 26 theekoppen meer worden geproduceerd?
c Bereken de richtingscoëfficiënt in de formule $K = a \cdot q + b$. Wat is de praktische betekenis hiervan?
d Laat met een berekening zien dat $b = 9$.
e Geef een formule bij het verband tussen K en q.

Theorie

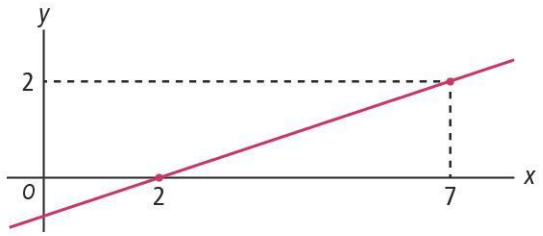
Een lineair verband kun je op verschillende manieren herkennen.
- De grafiek is een rechte lijn.
- In een tabel is er bij gelijke stappen telkens dezelfde toename of afname.
- Uit de tekst blijkt dat de toename of afname bij gelijke stappen dezelfde is.

Bij een lineair verband hoort een formule van de vorm $y = a \cdot x + b$ met a het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt en b het startgetal.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Stel een formule op bij de grafiek.



Oplossing

De grafiek is een rechte lijn, dus er is sprake van een lineair verband.
De lijn gaat door (2, 0) en (7, 2), dus de richtingscoëfficiënt van de lijn is $\frac{2-0}{7-2} = 0{,}4$.
Het startgetal is $0 - 2 \times 0{,}4 = -0{,}8$.
Een formule bij de grafiek is $y = 0{,}4x - 0{,}8$.

3 H Stel een formule op bij de tabellen bij opdracht 1 waar sprake is van een lineair verband.

Ondersteunende route → maak opdracht 04

4 H Een autobedrijf berekent voor de huur van een auto voor één dag een vast bedrag van € 40,- en vervolgens 56 eurocent per gereden kilometer. Bij een tweede autobedrijf betaal je ook een vast bedrag en een bedrag per gereden kilometer voor de autohuur van één dag. Bij dit bedrijf is de prijs € 144,- als je 200 kilometer hebt gereden en € 208,- bij 360 kilometer.

a Uit welke gegevens blijkt dat bij beide bedrijven het verband tussen de prijs P in euro's en het aantal gereden kilometers a lineair is?

b Stel een formule op voor het verband tussen P en a bij het eerste bedrijf.

c Bereken de prijs per kilometer bij het tweede bedrijf en stel ook voor dit bedrijf een formule op voor het verband tussen P en a.

d Bereken bij welke afstand de bedrijven even duur zijn. Hoeveel is de bijbehorende prijs?

5 Om de formule $2x + 5y = 30$ te kunnen invoeren op je rekenmachine, wordt deze herleid tot de vorm $y = a \cdot x + b$. Op het blaadje zie je hoe je dit doet.

a Noteer bij elke stap welke bewerking is gedaan.

b Herleid de formules tot de vorm $y = a \cdot x + b$.

A $12x + 6y = -108$

B $-3{,}5x - 4y = 70$

C $8\frac{1}{2}y - 17x = 68$

D $x = 10y + 74$

$2x + 5y = 30$

$5y = -2x + 30$ 1

$y = -\frac{2}{5}x + 6$ 2

© Noordhoff Uitgevers bv

6 Paul gaat naar een bouwmarkt om € 10,- te besteden aan bouten en moeren. De bouten kosten 25 eurocent per stuk en de moeren 15 eurocent per stuk. Jeroen gaat naar een andere bouwmarkt en heeft € 12,- te besteden aan bouten en moeren. In deze bouwmarkt kosten zowel de bouten als de moeren 20 eurocent per stuk. Noem het aantal bouten b en het aantal moeren m.

a Leg uit dat bij deze situatie de vergelijkingen $0{,}25b + 0{,}15m = 10$ en $0{,}2b + 0{,}2m = 12$ horen.

b Druk voor beide vergelijkingen m uit in b.

c Bereken de coördinaten van het snijpunt van de twee bijbehorende grafieken.

d Wat is de praktische betekenis van de coördinaten van het snijpunt?

7 Bij wasdrogers staat vaak aangegeven hoeveel de gemiddelde kosten in euro's zijn voor het drogen van één kilogram wasgoed.

	energieklasse	*prijs* in euro's	*kosten* per kg
1	A+	498	€ 0,04
2	A++	603	€ 0,025
3	A+++	749	€ 0,015

In de tabel staan de gegevens van drie wasdrogers in verschillende energieklassen. Ga er in de rest van de opdracht van uit dat wasdrogers een levensduur van 10 jaar hebben en dus na 10 jaar vervangen moeten worden.

a Irma heeft een wasdroger van het type A++. Zij weet dat de totale kosten na 10 jaar gelijk zijn aan € 693,40. Hoeveel kilogram wasgoed droogt zij gemiddeld per jaar?

b Johan schat dat hij per jaar 100 kilogram wasgoed droogt. Bereken voor de drie wasdrogers de totale kosten per 10 jaar.

c De keuze van de wasdroger hangt af van de hoeveelheid was die je per jaar wilt drogen.
Bereken vanaf hoeveel kilogram wasgoed per jaar het voordeliger is om wasdroger 2 aan te schaffen en vanaf hoeveel kilogram wasgoed het voordeliger is om wasdroger 3 aan te schaffen.

Uitdagende route → maak opdracht U1

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

04 Voor de huur van een verhuiswagen voor één dag betaal je bij een verhuurbedrijf een vast bedrag van € 100,- en vervolgens 22 eurocent per gereden kilometer.
Bij een tweede verhuurbedrijf betaal je ook een vast bedrag en een bedrag per gereden kilometer voor de huur van één dag.
Bij dit bedrijf is de prijs € 221,- bij 450 kilometer en € 248,- bij 600 kilometer.

a Uit welke gegevens blijkt dat bij beide bedrijven het verband tussen de prijs P in euro's en het aantal gereden kilometers k lineair is?

b Bij het eerste bedrijf kan het verband tussen de prijs P in euro's het aantal gereden kilometers k worden weergegeven met een formule van de vorm $P = a \cdot k + b$.
Leg uit dat b gelijk is aan 100.

c Geef ook de waarde van a en stel de formule op.

d Hoe volgt uit de gegevens dat je bij het tweede bedrijf bij 150 meer gereden kilometers € 27,- meer betaald?

e Bereken voor het tweede bedrijf de prijs per kilometer.

f Op het blaadje is een begin gemaakt met het berekenen van het startgetal.
Maak deze berekening af en stel vervolgens de formule voor de prijs P op.

$b = 221 - 450 \times \ldots$

$b = 221 - \ldots = \ldots$

g Welke vergelijking moet je oplossen om te berekenen bij welke afstand beide bedrijven even duur zijn?

h Los de vergelijking op.

i Bij welke afstand zijn de bedrijven even duur? Welke huurprijs hoort bij deze afstand?

Uitdagende opdrachten

U1 Drie echtparen reizen met een taxi van hetzelfde taxibedrijf naar Schiphol. Echtpaar Snel moet 36,32 euro betalen voor een rit van 15 kilometer. Echtpaar Hayward moet 64,32 euro betalen voor een rit van 40 kilometer.
Echtpaar Weenink moet 125,92 euro betalen.
Bereken hoeveel kilometer de rit van echtpaar Weenink is.

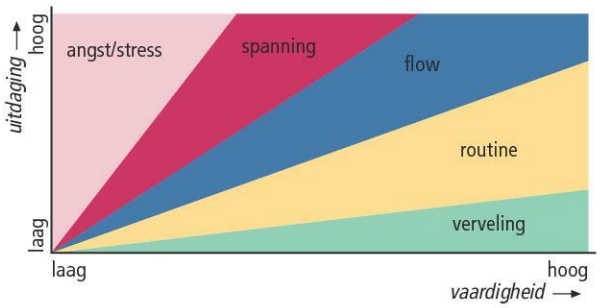
© Noordhoff Uitgevers bv

9.2 Gebieden

Je leert
- hoe je gebieden in een assenstelsel tekent

Leerroutes
- ondersteunend: 8—9—10—O11—12—13
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 8—9—10—12—13—U2

In het assenstelsel is voor leerlingen uitdaging uitgezet tegen vaardigheid. Het assenstelsel wordt door vier lijnen verdeeld in vijf gebieden.
- Een leerling ervaart weinig uitdaging bij het vak wiskunde A omdat hij er erg goed in is. In welk deel van het assenstelsel bevindt deze leerling zich?
- In welk deel van het assenstelsel bevind jij je bij het vak wiskunde A?



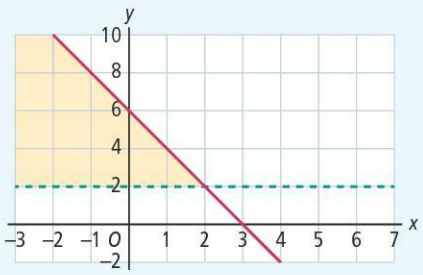
8 Het verband tussen de variabelen x en y wordt gegeven door de vergelijking $-7x + 3y = 42$.
- **a** Bereken de coördinaten van de snijpunten met de assen van de grafiek van $-7x + 3y = 42$.
- **b** Waarom is het niet nodig om de coördinaten van nog meer punten te berekenen om de grafiek van $-7x + 3y = 42$ te kunnen tekenen?
- **c** Teken in een assenstelsel de grafiek bij $-7x + 3y = 42$.

In een snijpunt met de x-as geldt $y = 0$ en in een snijpunt met de y-as geldt $x = 0$.

9 Je gaat in deze opdracht in assenstelsel van opdracht 8 het deel van het assenstelsel arceren dat hoort bij de ongelijkheid $-7x + 3y \leq 42$.
- **a** Vul de coördinaten van het punt $O(0, 0)$ in de ongelijkheid in en ga na of deze coördinaten een oplossing van de ongelijkheid zijn.
- **b** Arceer het deel van het assenstelsel dat voldoet aan de ongelijkheid.

Theorie

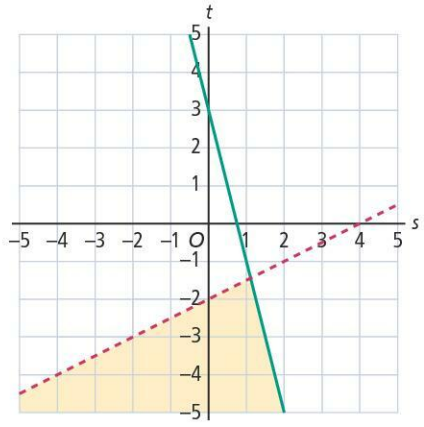
Een uitdrukking zoals $3x + 1\frac{1}{2}y \leq 9$ heet een **lineaire ongelijkheid**. De grafiek van een lineaire ongelijkheid is een **halfvlak**. Het halfvlak wordt begrensd door de lijn die bij de bijbehorende lineaire vergelijking hoort. De lijn bij de vergelijking $3x + 1\frac{1}{2}y = 9$ heet de **grenslijn**. Als de punten op de grenslijn niet voldoen aan de ongelijkheid, dan wordt de grenslijn gestippeld getekend. Hiernaast zie het gebied wat bepaald wordt door de halfvlakken bij $3x + 1\frac{1}{2}y \leq 9$ en $y > 2$.



© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Een gebied wordt bepaald door de ongelijkheden $2s - 4t > 8$ en $4s + t \leq 3$.
Kleur in een assentstelsel het gebied dat voldoet aan beide ongelijkheden. Neem s langs de horizontale as.



Oplossing

Het halfvlak bij de ongelijkheid $2s - 4t > 8$ ligt onder de rode stippellijn.
Het halfvlak bij de ongelijkheid $4s + t \leq 3$ ligt onder de groene lijn.
Het gevraagde gebied is het gebied dat zowel onder de rode stippellijn als onder de groene lijn ligt.
In de tekening is dat het geel gekleurde deel.

10 H

Teken in verschillende assenstelsels het gebied dat voldoet aan de gegeven ongelijkheden.

a $5x + 2y \leq 10$, $x > -2$ en $y \leq 3$

b $0{,}07x - 0{,}03y < 0{,}21$ en $0{,}06x - 0{,}18y \geq 0{,}36$

Ondersteunende route → maak opdracht O11

11 H

Jet gaat naar de supermarkt om avocado's en grapefruits te kopen. De avocado's kosten € 1,20 per stuk en de grapefruits € 0,60 per stuk.
Jet wil minstens twee avocado's en één grapefruit kopen, maar ze wil bij elkaar maximaal zes euro uitgeven.
Het aantal avocado's is a en het aantal grapefruits is g.

a Leg uit dat a en g aan de ongelijkheden $a \geq 2$, $g \geq 1$ en $1{,}2a + 0{,}6g \leq 6$ moeten voldoen.

b Geef in een assenstelsel het gebied aan waarin de mogelijke oplossingen van dit probleem liggen. Neem a langs de horizontale as.

c Waarom voldoen in dit geval alleen de roosterpunten van het getekende gebied?

d Hoeveel mogelijke oplossingen zijn er?

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeelden van voorwaarden die aan twee variabelen x en y kunnen worden gesteld zijn $x > 2$, $2x + 6y \leq 10$ en de eis dat een variabele alleen maar gehele getallen kan zijn.
De coördinaten van alle punten (x, y) in een assenstelsel die voldoen aan de gestelde voorwaarden vormen een gebied.

12 Bij een broodjeszaak kost een broodje kaas € 2,- en een broodje gezond € 3,50. Lisette haalt voor een picknick broodjes kaas en broodjes gezond bij deze broodjeszaak. Ze heeft € 17,50 bij zich en wil minimaal drie broodjes kopen.

a Noem het aantal broodjes kaas k en het aantal broodjes gezond g.
Aan welke voorwaarden moeten k en g voldoen?

b Geef in een assenstelsel het gebied aan waarin de oplossingen van dit probleem liggen. Neem k langs de horizontale as.

c Hoeveel mogelijke combinaties van broodjes kaas en broodjes gezond zijn er voor Lisette?

d Lisette kiest uiteindelijk de oplossing waarbij het totaal aantal broodjes het grootst is.
Hoeveel broodjes koopt Lisette?

13 Gijs houdt van een combinatie van sinaasappelsap en karnemelk. Hij gaat ze combineren in een glas waar maximaal 200 ml in kan. Gijs vindt zijn drankje het lekkerst als meer dan 10%, maar minder dan 60% van het glas met karnemelk gevuld is.

a Noem de hoeveelheid sinaasappelsap in ml s en de hoeveelheid karnemelk in ml k.
Leg uit dat s en k dan aan de ongelijkheden $s + k \leq 200$, $20 < k < 120$ en $s \geq 0$ moeten voldoen.

b Geef in een assenstelsel het gebied aan waarin de oplossingen van dit probleem liggen. Neem s langs de horizontale as.

c Zijn alle punten of alleen de roosterpunten in het gebied dat je hebt getekend oplossingen van dit probleem? Leg je antwoord uit.

Uitdagende route → maak opdracht U2

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O11 Een kledingwinkel verkoopt twee soorten sokken; effen en bedrukt. Een paar effen sokken kost € 1,20 en een paar bedrukte sokken € 1,50. Milou gaat naar deze winkel om sokken te kopen. Ze wil minstens twee paar effen sokken en minstens drie paar bedrukte sokken kopen voor minder dan € 12,-. Noem het aantal paren effen sokken e en het aantal paren bedrukte sokken b.

a Leg uit dat e en b aan de ongelijkheden $e \geq 2$, $b \geq 3$ en $1{,}2e + 1{,}5b < 12$ moeten voldoen.

b In het assenstelsel zie je de grenslijnen getekend. Waarom is de blauwe lijn gestippeld en zijn de andere twee lijnen niet gestippeld?

c Zijn de coördinaten van het punt (0, 0) een oplossing van de ongelijkheid $1{,}2e + 1{,}5b < 12$? Ligt het punt (0, 0) in het halfvlak dat bij deze ongelijkheid hoort?

d De punten die voldoen aan de ongelijkheid $e \geq 2$ liggen op de lijn $e = 2$ en in een halfvlak. Bevindt dit halfvlak zich links of rechts ten opzichte van de lijn $e = 2$?

e En waar liggen de punten die voldoen aan de ongelijkheid $b \geq 3$?

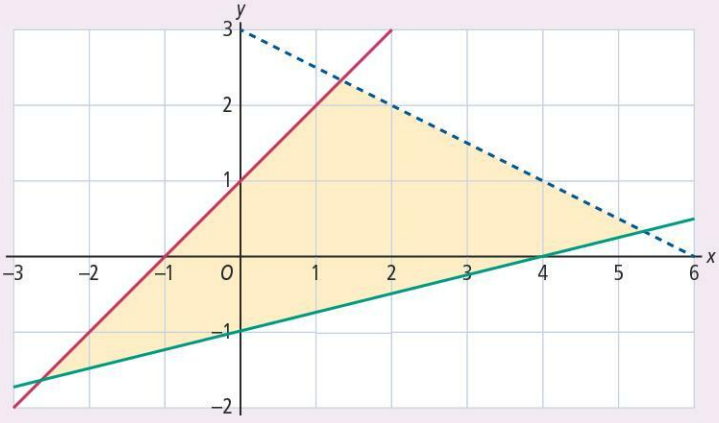
f Arceer het gebied waarin de oplossingen liggen.

g Waarom zijn alleen de roosterpunten in het gebied mogelijke oplossingen?

h Hoeveel oplossingen zijn er?

Uitdagende opdrachten

U2 Je ziet een gebied getekend in een assenstelsel.
Welke ongelijkheden kunnen bij dit gebied horen?



© Noordhoff Uitgevers bv

9.3 Exponentiële verbanden

Je leert
- hoe je met een exponentieel verband rekent

Leerroutes
- ondersteunend: 14—15—16—O17—18—O19—20—21—22
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19—20—21—22
- uitdagend: 14—15—16—18—19—20—21—22—U3

Een A4tje is 29,7 cm lang en 21cm breed. Je knipt het in de lengte door en legt de stroken achter elkaar. De rechthoek die dan ontstaat, knip je opnieuw in de lengte door. Enzovoort.
- Hoe vaak moet je knippen zodat je in theorie met de stroken de aarde langs de evenaar zou kunnen omspannen?

De aarde

Gegevens

Straal
6380 km

Omtrek
40 000 km

A

x	1	2	3	4	5
y	3	6	12	24	48

B

x	4	5	6	7
y	5184	3888	2916	2187

C

x	1	2	3	4	5
y	12	24	36	48	60

14
- **a** Waarom is er bij tabel A sprake van een exponentieel verband?
- **b** Is er bij de andere tabellen ook sprake van een exponentieel verband?

15 In 2017 werden in Nederland 420 miljoen pakketten verstuurd. Sinds 2012 groeit het aantal verstuurde pakketten in Nederland met ongeveer 14% per jaar.
- **a** Welke groeifactor per jaar hoort bij een toename van 14%?
- **b** Stel een formule op voor het verband tussen het aantal verstuurde pakketten P in miljoenen en de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ in 2017.
- **c** Bereken het te verwachten aantal verstuurde pakketten in het jaar 2030 als de groei met 14% per jaar zal blijven doorgaan.

Theorie

Een **exponentieel verband** kun je op verschillende manieren herkennen.
- In een tabel wordt er bij gelijke stappen met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
- Uit de tekst kun je opmaken dat er bij gelijke stappen een vast percentage bij komt of van af gaat.
- Uit de tekst kun je opmaken dat er bij gelijke stappen met hetzelfde getal vermenigvuldigd wordt.

Bij een exponentieel verband tussen de variabelen x en y hoort een formule van de vorm $y = b \cdot g^x$. Hierin is b de **beginhoeveelheid** en g de **groeifactor**.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

De tabel hoort bij een exponentieel groeiproces.
Stel een formule op bij de tabel.

t	2	3	4	5
N	32 000	25 600	20 480	16 384

Oplossing

De groeifactor is 25 600 : 32 000 = 0,8.

De beginhoeveelheid is 32 000 : $0{,}8^2$ = 50 000.

De formule is $N = 50\,000 \cdot 0{,}8^t$

16 Stel een formule op bij de tabellen van opdracht 14 waar een exponentieel verband bij hoort.

Ondersteunende route → maak opdracht O17

17 H

Stel in de volgende gevallen een formule op voor het verband tussen het aantal N en de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 juli 2017.

a Op 1 juli 2016 waren er in een gebied 800 ooievaars en dit aantal neemt jaarlijks met 6% toe.

b Het aantal banen in een sector groeit sinds 1 juli 2017 exponentieel. Tussen 1 juli 2018 en 1 juli 2019 is het aantal gegroeid van 11 500 naar 13 200.

18 In een land neemt het aantal krantenlezers elke maand met 0,13% af. Op 1 maart 2018 waren er nog 4,25 miljoen klantenlezers.

a Leg uit dat de groeifactor per maand gelijk is aan 0,9987.

b Welke groeifactor per jaar hoort hier bij?

c Met hoeveel procent neemt het aantal krantenlezer per jaar af?

d Stel een formule op voor het aantal miljoen krantenlezers N. Neem voor t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2018.

e Voor welke waarde van t is het aantal krantenlezers voor het eerst kleiner dan 3,5 miljoen? Rond af op één decimaal.

f Welke maand van welk jaar hoort bij die waarde van t?

Ondersteunende route → maak opdracht O19

19 De tabel hoort bij een exponentieel verband. Hierin is N het aantal en t de tijd in jaren.

t	12	20	30
N	4400	8084	17 292

a Bereken de groeifactor per jaar.

b Hoeveel is de jaarlijkse toename in procenten?

c Stel bij de tabel een exponentiële formule op.

© Noordhoff Uitgevers bv

20 De formule $N = 320 \cdot 2^t$ beschrijft het aantal bacteriën N in een kweek. Hierin is t de tijd in dagen met $t = 0$ op 10 april 2019.

a Bereken het aantal bacteriën op 14 april 2019.

b Op 10 april 2019 waren er $320 \times 2^0 = 320$ bacteriën. Hoe groot is 2^0 dus?

c Leg uit dat je het aantal bacteriën op 9 april met zowel 320×2^{-1} als $320 : 2$ kunt berekenen.

d Hoe volgt uit opdracht c dat vermenigvuldigen met 2^{-1} hetzelfde is als delen door 2?

e Laat zien dat uit de formule volgt dat vermenigvuldigen met 2^{-2} hetzelfde is als delen door 2^2.

Door $t = -1$ in de formule $N = b \cdot g^t$ in te vullen, bereken je de hoeveelheid één tijdseenheid voor $t = 0$. Deze kun je ook berekenen door de beginhoeveelheid te delen door g, wat het hetzelfde is als vermenigvuldigen met g^{-1}.
Zo is vermenigvuldigen met g^{-2} hetzelfde als delen door g^2.
Hieruit volgt dat $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$. Verder geldt $g^0 = 1$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $N = 10 \cdot 4^t$.

t	–3	–2	–1	0	1	2
N	...	...	...	10	40	160

$: 4^3$
$\times 4^{-3}$

Bij $t = -3$ geldt $N = 10 : 4^3 = 0{,}156\,25$.

Bij $t = -3$ geldt $N = 10 \times 4^{-3} = 0{,}156\,25$.

21 Een verkoper van vuurwerk heeft zijn inkomsten elk jaar met ongeveer 2,5% zien stijgen. In het jaar 2018 verkocht hij voor € 51.829,- aan vuurwerk.

a Stel een formule op voor het bedrag B dat hij aan vuurwerk verkoopt. Neem voor t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2018.

b Welk bedrag aan vuurwerk verkocht hij in 2015?

c Toen de verkoper startte met het verkopen van vuurwerk verkocht hij voor € 39.501,20 aan vuurwerk. In welk jaar startte hij met de verkoop van vuurwerk?

22 In 2018 vonden in een grote stad 3776 winkeldiefstallen plaats. Dit aantal verdubbelt elke 10 jaar.

a Leg uit dat de groeifactor per 10 jaar gelijk is aan 2.

b Stel een formule op voor het aantal winkeldiefstallen N. Neem voor t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2018.

c Bereken het aantal winkeldiefstallen in 2000 en in 2010.

d In welk jaar zal het aantal winkeldiefstallen voor het eerst meer dan 5000 zijn?

Uitdagende route → maak opdracht U3

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O17

a In 2016 leefden in een gebied 150 hazen en dit aantal neemt jaarlijks met 4% af.
Leg uit dat je het aantal hazen in 2017 kunt berekenen met de berekening $150 \times 0{,}96$ en bereken het aantal hazen in 2017.

b Stel een formule op voor het aantal hazen. Neem H voor het aantal hazen en t voor de tijd in jaren met $t = 0$ in 2017.

c In hetzelfde leefgebied neemt het aantal kikkers exponentieel toe. In 2018 waren er 870 en in 2019 waren er 914 kikkers. Het getal waar het aantal kikkers in 2018 mee vermenigvuldigd moet worden om het aantal kikkers in 2019 te berekenen, heet de groeifactor per jaar.
Bereken de groeifactor per jaar.

d Bereken het aantal kikkers in 2017

e Geef de formule voor het aantal kikkers K. Neem voor t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2017.

O19

a Tabel A hoort bij een exponentieel verband. Hierin is N het aantal en t de tijd in weken.
Leg uit dat je met 1080 : 600 de groeifactor per week kunt berekenen en bereken deze groeifactor.

b Een dag is $\frac{1}{7}$ deel van een week.
Bereken met behulp van je antwoord van opdracht a de groeifactor per dag bij tabel A.

c Ook bij tabel B hoort een exponentieel verband. In de tabel is R het aantal en t de tijd in uren.
Bereken de groeifactor per uur.

d Met hoeveel procent neemt het aantal per uur af?

e Stel bij tabel B een exponentiële formule op.

A

t	1	2	3
N	600	1080	1944

B

t	4	9	16
R	1260	559	179

Uitdagende opdrachten

U3

In een grote stad wordt het aantal diefstallen op straat elke 8,5 jaar twee keer zo groot. In een nabijgelegen stad neemt het aantal diefstallen op straat toe met 8,5% per jaar.
Onderzoek in welke stad het aantal diefstallen op straat naar verhouding het snelst groeit.

9.4 Verdubbelingstijd en halveringstijd

Je leert
- hoe je de verdubbelingstijd en halveringstijd berekent

Leerroutes
- ondersteunend: 23—024—25—26—27
- doorlopend: 23—24—25—26—27
- uitdagend: 23—25—26—27—U4

De zusjes Susan en Harma hebben beiden een deposito spaarrekening geopend met een vast rentepercentage van 1,05% per jaar. Susan heeft bij het openen van de rekening € 550,- gestort en Harma € 2.400,-.
- Wie moet het langst wachten totdat het bedrag is verdubbeld?

23 Het aantal watervlooien in een kweek neemt met 10,4% per dag toe. Aan het begin van de kweek zijn er 80 watervlooien.

a Leg uit dat je de vergelijking $80 \times 1{,}104^t = 160$ moet oplossen om te berekenen na hoeveel tijd het aantal watervlooien is verdubbeld.

b Los de vergelijking op met je rekenmachine.

c Na hoeveel dagen is het aantal watervlooien verdubbeld? Rond af op één decimaal.

d Bereken ook hoeveel dagen het duurt om te verdubbelen als er aan het begin van de kweek 120 watervlooien zijn.

e Leg uit dat je het antwoord van opdracht c en d ook had kunnen vinden door de vergelijking $1{,}104^t = 2$ op te lossen.

f Hoe volgt uit opdracht e dat de tijd die nodig is om te verdubbelen hetzelfde is bij elke beginhoeveelheid?

$y_1 = 80 \times 1{,}104^x$
$y_2 = 160$

Ondersteunende route → maak opdracht 024

24 Van een insectensoort neemt het aantal elk jaar met 8% af. Op $t = 0$ zijn er 500 insecten van deze soort.

a Gebruik je rekenmachine om te berekenen na hoeveel jaar het aantal insecten van deze soort gedaald is tot 250. Rond je antwoord af op één decimaal.

b In hoeveel jaar daalt het aantal insecten van 250 naar 125?

c Leg uit dat je het antwoord van opdracht b en c ook had kunnen vinden door de vergelijking $0{,}92^t = 0{,}5$ op te lossen.

d Is de tijd die nodig is om te halveren voor elke beginhoeveelheid hetzelfde?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

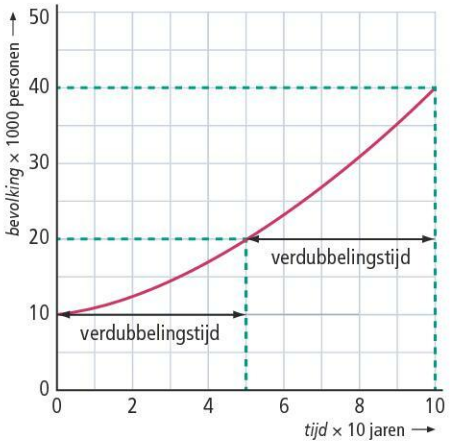
Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor g is de verdubbelingstijd de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen.
Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$.
De halveringstijd is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren.
Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 0{,}5$.

Voorbeeld

De bevolking groeit jaarlijks met 1,53%.
Na hoeveel jaren is de bevolking verdubbeld?

Oplossing

100% + 1,53% = 101,53%
De groeifactor per jaar is 101,53 : 100 = 1,0153.
$1{,}0153^t = 2$ oplossen met de rekenmachine geeft $t \approx 45{,}6$.
De verdubbelingstijd is dus ongeveer 45,6 jaren.



25 H

Bereken de verdubbelingstijd of halveringstijd. Rond je antwoord af op één decimaal.

a Iemand krijgt elk jaar 2,1% loonsverhoging.

b Een zonnepaneel verliest per jaar 0,7% van zijn vermogen.

c Het gewicht van een cavia neemt na de geboorte exponentieel toe. Een cavia die bij de geboorte 84 gram weegt, weegt na vijf dagen 150 gram.

d Bij een oplaadbare batterij neemt de lading exponentieel af. Iedere twee dagen verdwijnt er negen tiende deel van de lading.

26 H

Het aantal leerlingen op een basisschool neemt jaarlijks met 6,2% af.

a Bereken na hoeveel jaar het aantal leerlingen is gehalveerd.

b Hoe vaak is het aantal leerlingen gehalveerd als deze van 240 is afgenomen naar 30?

c Hoe kun je de antwoorden van opdracht a en b gebruiken om te weten hoelang het duurt totdat het aantal leerlingen van 240 is afgenomen tot 30?

© Noordhoff Uitgevers bv

27 In ziekenhuizen wordt veel gebruik gemaakt van radioactieve stoffen. Bij het radioactieve verval van deze stoffen komt straling vrij. Deze straling wordt onder andere gebruikt voor diagnose en behandeling van ziekten. Patiënten krijgen een injectie met een geringe hoeveelheid radioactieve stof. Daarna kijkt de arts met een speciale camera waar de stof zich in het lichaam concentreert.

Om een scan van de botten te maken, wordt een patiënt ingespoten met de radioactieve stof Technetium-99m (Tc-99m). Tc-99m heeft een halveringstijd van 6 uur. Dat wil zeggen dat telkens na 6 uur de helft van de radioactieve stof verdwenen is. Deze halveringstijd is lang genoeg om het medische onderzoek uit te voeren en kort genoeg om de patiënt na het onderzoek niet in het ziekenhuis te hoeven houden.

a Bereken hoeveel procent van de radioactieve stof Tc-99m 24 uur na toediening nog in het lichaam van de patiënt aanwezig is.

b Vanwege de korte halveringstijd is het voor een ziekenhuis onmogelijk om Tc-99m in voorraad te hebben. In het ziekenhuis wordt hiervoor eenmaal per week een technetiumkoe afgeleverd.
Deze 'koe' is eigenlijk een container met Molybdeen-99 (Mo-99). Tc-99m ontstaat bij het radioactieve verval van Mo-99, dat een veel langere halveringstijd heeft.
Uit de koe kan een week lang op elk gewenst moment Tc-99m worden 'gemolken'. Dit is voldoende voor vele tientallen patiënten.
Een container wordt gevuld met Mo-99. Het exponentiële radioactieve verval van Mo-99 is dusdanig dat na precies zeven dagen nog 17,3% van de stof over is. Op grond van dit gegeven kun je vaststellen dat de hoeveelheid Mo-99 ieder uur met ongeveer 1,04% afneemt.
Laat met een berekening zien dat dit klopt.

c Bereken met behulp van de genoemde 1,04% na hoeveel uur de hoeveelheid Mo-99 in de container gehalveerd is.

(*Ontleend aan CE havo wiskunde A 2012, tijdvak 2*)

Uitdagende route → maak opdracht U4

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O24 In een dorp wonen 2800 inwoners. Het aantal inwoners neemt met 8% per jaar af. Je gaat berekenen over hoeveel jaar het aantal inwoners zal zijn gehalveerd.

- **a** Welke groeifactor per jaar hoort er bij een jaarlijkse daling van 8%?
- **b** Hoeveel inwoners heeft het dorp als het aantal inwoners is gehalveerd?
- **c** Leg uit dat bij deze situatie de vergelijking $2800 \cdot 0{,}92^t = 1400$ hoort.
- **d** Los deze vergelijking op met je rekenmachine.
- **e** Over hoeveel jaar is het aantal inwoners gehalveerd?
- **f** Welke bewerking links en rechts van het gelijkteken moet je doen om de vergelijking $2800 \cdot 0{,}92^t = 1400$ te herleiden tot de vergelijking $0{,}92^t = 0{,}5$?
- **g** Ga na dat je ook de vergelijking $0{,}92^t = 0{,}5$ had gekregen als het aantal inwoners gedaald is van 9600 naar 4800.
- **h** Waarom krijg je voor elk aantal inwoners de vergelijking $0{,}92^t = 0{,}5$?

Uitdagende opdrachten

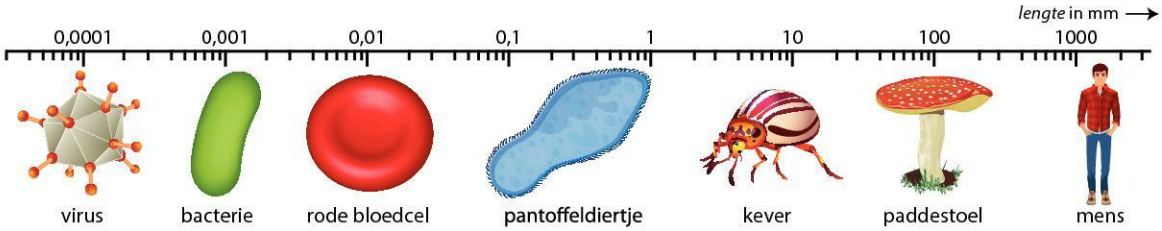
U4 In een gebied leven vossen en konijnen. Het aantal vossen neemt exponentieel toe met 4,3% per jaar terwijl het aantal konijnen exponentieel afneemt.
Bereken met hoeveel procent het aantal konijnen per jaar zou moeten afnemen zodat de halveringstijd van de konijnen twee keer zo groot is als de verdubbelingstijd van de vossen.

© Noordhoff Uitgevers bv

9.5 Logaritmische schaalverdeling

Je leert
- wat een logaritmische schaalverdeling is
- hoe je een logaritmische schaalverdeling afleest

Leerroutes
- ondersteunend: 28—29—30—031—32—33
- doorlopend: 28—29—30—31—32—33
- uitdagend: 28—29—31—32—33—U5



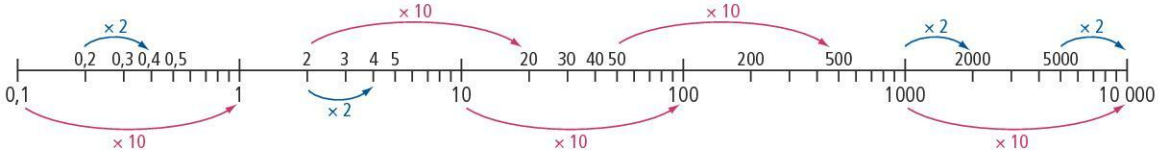
Langs een horizontale as is een aantal afbeeldingen geplaatst.
- Hoeveel keer zo groot is een bacterie als een virus? En hoeveel keer zo groot is een rode bloedcel als een bacterie?
- Wat valt je op als je naar de schaalverdeling kijkt?

28 Van een aantal visjes is de lengte en het gewicht gemeten. De resultaten staan in de tabel.

lengte in mm	*gewicht* in mg
10	12
20	53
30	233
40	1029
50	4539

a Laat zien dat er een exponentieel verband bestaat tussen de lengte en het gewicht van de visjes.
b Teken een grafiek bij deze tabel. Neem op de horizontale as de lengte van een visje met een stapgrootte van 5 mm.
c Waarom is het lastig een goede schaalverdeling voor de verticale as te bedenken?

29 Naast de lineaire schaalverdeling bestaat er een schaalverdeling waar bij gelijke stappen telkens dezelfde vermenigvuldigingsfactor hoort. In de figuur zijn bij twee verschillende stapgrootten de bijbehorende vermenigvuldigingsfactoren aangegeven.



a Ga na dat de afstand tussen 2 en 20 even groot is als tussen 20 en 200.
b Meet de afstand van 3 tot 6 in mm nauwkeurig.
c Ga vanaf 30 de bij opdracht b gemeten afstand naar rechts. Welk getal hoort daarbij op de schaal?
d Hoe groot zal de afstand tussen 3000 en 6000 zijn?

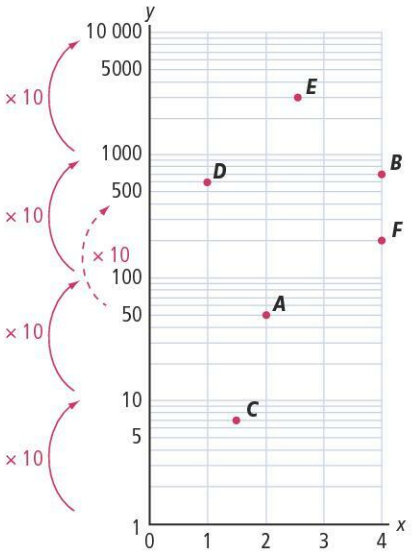
© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Bij een lineaire schaalverdeling wordt bij gelijke stappen telkens hetzelfde getal opgeteld.
Een schaalverdeling waar bij gelijke stappen telkens met dezelfde factor wordt vermenigvuldigd, heet een logaritmische schaalverdeling of kortweg log-schaal.
Je gebruikt een logschaal als je zowel erg grote als erg kleine waarden in één grafiek moet verwerken.

Voorbeeld

In het assenstelsel heeft de y-as een log-schaal. De afstand van 10 tot 100 is even groot als die van 100 tot 1000.
Tussen de getallen 5 en 10 op de verticale as geven de horizontale lijnen de y-waarden 6, 7, 8 en 9 weer.
Tussen de getallen 500 en 1000 geven de horizontale lijnen de getallen 600, 700, 800 en 900 weer.
De coördinaten van de punten A, B en C zijn $A(2, 50)$, $B(4, 700)$ en $C(1{,}5; 7)$.



30 Geef de coördinaten van de punten D, E en F in het assenstelsel naast het voorbeeld.

Ondersteunende route → maak opdracht 031

31 Gegeven is de exponentiële formule $y = 2 \cdot 10^x$.

a Vul de tabel in.

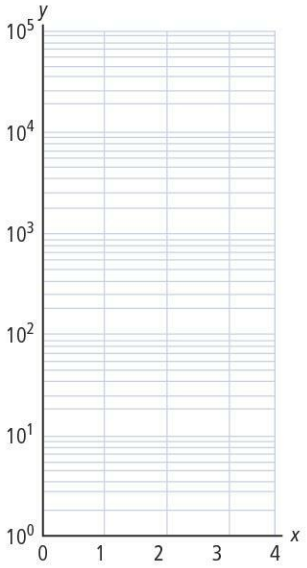
x	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…

b Hoe kun je zien dat in het assenstelsel de verticale as een log-schaal heeft?

c Teken de grafiek bij de formule in het assenstelsel.

d Teken ook de grafiek bij de exponentiële formule $y = 8000 \cdot 0{,}5^x$ in het assenstelsel.

e Welke vorm hebben de grafieken?



In een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling is de grafiek bij een exponentieel verband een rechte lijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

32 H

Van twee soorten bacteriën die op kweek zijn gezet, is elke dag het aantal bacteriën geteld. De resultaten zie je in de grafieken.

a Gegeven de punten $A(1, 100)$, $B(2, 10\,000)$, $C(2, 100\,000)$ en $D(5, 10\,000\,000)$.
Geef van elk punt aan of deze op de grafiek van soort 1, op de grafiek van soort 2 of op geen van beide ligt.

b Vul voor soort 1 de tabel in.

t in dagen	0	1	2	3	4	5
aantal N	…	…	…	…	…	…

c Stel de formule op voor het aantal bacteriën N van soort 1 met t de tijd in dagen.

d Hoe kun je aan de grafiek zien dat soort 1 in minder dan één dag verdubbelt?

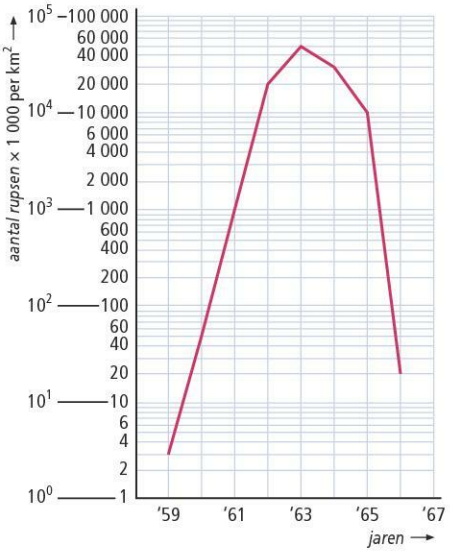
e Bereken de verdubbelingstijd van soort 1.

f Stel ook de formule op voor soort 2.

g Met hoeveel procent groeit soort 2 per dag? En met hoeveel procent per drie dagen?

33

In de periode van 1959 tot en met 1966 registreerde een bioloog in de Alpen het verloop van een rupsenplaag door telkens op 1 juli het aantal rupsen per km^2 vast te stellen. In de grafiek is aangegeven hoe dit verloop is geweest.



a Van welke soort groei is er sprake tussen 1959 en 1962? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

b Bereken voor de periode 1959 - 1962 de groeifactor per jaar en de jaarlijkse procentuele toename.

c In hoeveel dagen verdubbelde het aantal rupsen per km^2 in de periode 1959 - 1962?

d Vul in: van 1 juli … tot 1 juli … was de jaarlijkse absolute toename van het aantal rupsen het grootst.

e Neem aan dat het aantal lariksbossen in de periode 1965 - 1966 exponentieel afnam.
Stel voor deze periode een formule op voor het aantal rupsen A per km^2. Neem voor t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 juli 1965.

Uitdagende route → maak opdracht U5

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O31 Bij het assenstelsel staan langs de verticale as machten van 10.

a Ga na dat $10^0 = 1$ en bereken ook de andere machten.

b Hoe kun je zien dat in het assenstelsel de verticale as een log-schaal heeft?

c Pijltje A staat bij een lijn tussen 10^2 en 10^3.
Ga na dat pijltje A de waarde 300 aangeeft.

d Welke waarde hoort bij de lijn van pijltje B?

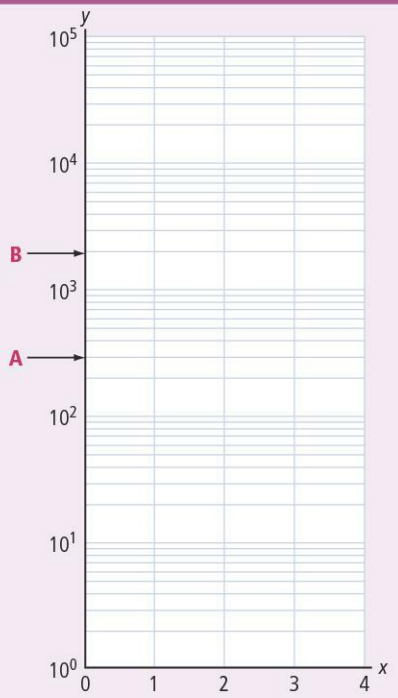
e Gegeven de exponentiële formule $y = 3 \cdot 10^x$.
Vul de tabel bij de formule verder in.

x	0	1	2	3	4
y	3	…	…	…	…

f Teken de punten uit de tabel in het assenstelsel en de grafiek door deze punten.

g Teken ook de grafiek bij de exponentiële formule $y = 800 \cdot 0{,}5^x$ in het assenstelsel.

h Welke vorm hebben de grafieken?



Uitdagende opdrachten

U5 In het assenstelsel zie je voor een bepaalde boomsoort het verband tussen de diameter van de stam in centimeters en de hoogte in meters. Bij het verband hoort een formule van de vorm $H = c \cdot d^a$.
Hierin is H de hoogte in meters en d de diameter in cm.
Leg uit hoe uit de grafiek volgt dat $c = 2{,}2$ en bereken de waarde van a. Rond de waarde van a af op twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

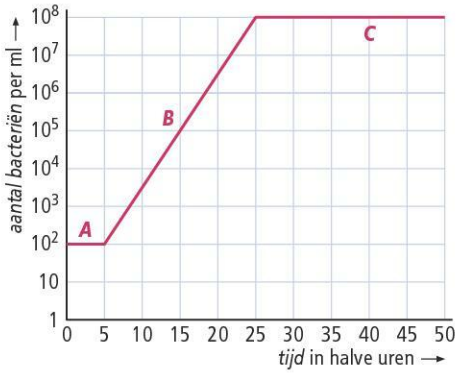
34 Medicijnen worden in het lichaam opgenomen en daar afgebroken. Meestal neemt de werkzame stof van het middel exponentieel af. Van het middel temazepam is bekend dat elk uur 20% van de werkzame stof afgebroken wordt.

- **a** Stel een formule op voor de hoeveelheid werkzame stof in mg W. Neem een beginhoeveelheid van 50 mg en neem voor t de tijd in uren met $t = 0$ het moment van inname.
- **b** Hoeveel mg is er nog over na 12 uur?
- **c** Zoek uit hoelang het duurt tot de hoeveelheid werkzame stof in het lichaam gehalveerd is. Geef het antwoord in minuten nauwkeurig.

35 Joy gaat naar de markt om ananassen en meloenen te kopen. De ananassen kosten 2 euro per stuk en de meloenen 1,25 euro per stuk. Joy wil minstens twee ananassen en minstens twee meloenen kopen, maar zij wil niet meer dan 10 euro uitgeven. Noem het aantal ananassen a en het aantal meloenen m.

- **a** Leg uit dat a en m aan de volgende eisen moeten voldoen: $a \geq 2$, $m \geq 2$, $2a + 1{,}25m \leq 10$ en a en m mogen alleen gehele getallen aannemen.
- **b** Kleur in een assenstelsel het gebied waarin de punten liggen die aan de drie ongelijkheden voldoen. Neem a langs de horizontale as.
- **c** Uit hoeveel verschillende mogelijkheden kan Joy kiezen?

36 Een voedselvergiftiging wordt vaak veroorzaakt door salmonellabacteriën. De grafiek laat de groei van het aantal bacteriën zien in voedsel dat uit de koeling komt en vervolgens bij een temperatuur van 20 °C bewaard wordt. Eerst is er de latentiefase (A) die ongeveer 2,5 uur duurt. In die fase delen de bacteriën zich nog niet, maar worden ze alleen maar groter. Daarna komt de exponentiële fase (B). Bij een temperatuur van 20 °C delen de bacteriën zich ieder half uur. Vervolgens is er de stationaire fase (C). Het aantal bacteriën dat afsterft is even groot als het aantal dat nieuw gevormd wordt.



- **a** Neem $t = 0$ voor de aanvangstijd van fase B.
  Leg uit waarom de formule voor de bacteriegroei in deze fase $N = 100 \cdot 2^t$ is met t in halve uren.
- **b** Bepaal met de formule de concentraties voor $t = 0$, $t = 10$ en $t = 20$. Ga na of de antwoorden kloppen met de waarden van de grafiek.
- **c** Een portie ijs wordt uit de koeling gehaald en daarna 8 uur bewaard bij 20 °C. De concentratie na 8 uur is 10^6 bacteriën per ml.
  Onderzoek hoe groot de concentratie bacteriën was toen het ijs uit de koeling kwam.

© Noordhoff Uitgevers bv

37 Van een bedrag dat tegen een rentepercentage p op de bank is gezet, kun je de verdubbelingstijd T berekenen met de vuistregel $T = 70 : p$.
Onderzoek voor welke gehele rentepercentages p de met de vuistregel berekende verdubbelingstijd T niet meer dan 1% afwijkt van de werkelijke verdubbelingstijd.

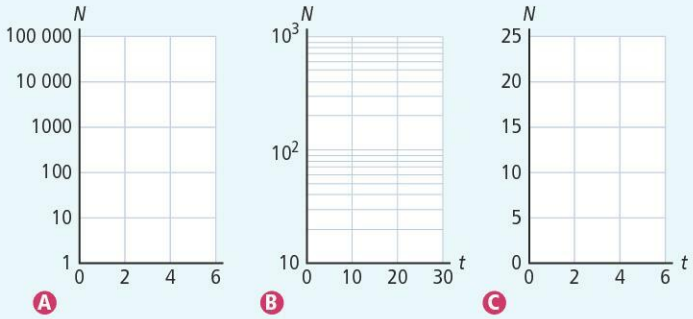
38 De (ecologische) voetafdruk is de hoeveelheid aardoppervlak die iemand jaarlijks nodig heeft vanwege zijn manier van leven. Zo heeft iemand die veel consumeert een grotere voetafdruk dan iemand die weinig consumeert. Deze voetafdruk wordt uitgedrukt in mha (mondiale hectares), waarbij mha staat voor een hectare aardoppervlak die gebruikt kan worden voor onder andere landbouw, visserij of industrie.
Als de totale voetafdruk van alle mensen op de wereld 10 miljard mha (of minder) is, dan heeft de aarde voldoende mogelijkheid om zichzelf te herstellen. Is de totale voetafdruk meer dan 10 miljard mha, dan zal de aarde op den duur uitgeput raken.
Al sinds lange tijd neemt zowel de wereldbevolking als de totale voetafdruk toe. In 1974 kwam de totale voetafdruk al boven de genoemde grens van 10 miljard uit.
In 2010 bestond de wereldbevolking uit 6,9 miljard mensen en was de gemiddelde voetafdruk per persoon 2,85 mha.
De totale voetafdruk in 2010 was dus
6,9 miljard $\times$ 2,85 $\approx$ 19,7 miljard mha.
Vanaf 2010 zijn er maatregelen getroffen om ervoor te zorgen dat de totale voetafdruk op termijn weer onder de 10 miljard mha komt.
We doen de volgende aannames voor de periode 2010 - 2050:
- Vanaf 2010 neemt de gemiddelde voetafdruk per persoon af met 0,11 mha per jaar, totdat een gemiddelde voetafdruk per persoon van 1,20 mha bereikt is. De jaren daarna blijft de gemiddelde voetafdruk per persoon 1,20 mha.
- De wereldbevolking neemt elk jaar toe met 0,7%.

De gemiddelde voetafdruk neemt dus af (tot 1,20 mha), maar de wereldbevolking neemt toe. Het is daarom de vraag of de genomen maatregelen voldoende zijn om de totale voetafdruk te laten dalen tot onder de 10 miljard mha. Dit blijkt een aantal jaren het geval te zijn maar na verloop van tijd komt de totale voetafdruk toch weer boven de 10 miljard mha.
Onderzoek in welke jaren in de periode 2010 - 2050 de totale voetafdruk minder dan 10 miljard mha is.
(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2018, tijdvak 1)

Theorie

Logaritmische schaalverdeling

Bij een lineaire schaalverdeling wordt bij gelijke stappen telkens hetzelfde getal opgeteld. Een schaalverdeling waar bij gelijke stappen telkens met dezelfde factor wordt vermenigvuldigd, heet een logaritmische schaalverdeling of kortweg log-schaal. Je gebruikt een logschaal als je zowel erg grote als erg kleine waarden in één grafiek moet verwerken.



S1 Bij welke assenstelsels heeft de verticale as een logaritmische schaalverdeling? Leg uit hoe je dit kunt zien.

Vaardigheid

Je kunt met een lineair verband rekenen.

Een lineair verband kun je op verschillende manieren herkennen:

- De grafiek is een rechte lijn.
- In een tabel is er bij gelijke stappen telkens dezelfde toename of afname.
- Uit de tekst blijkt dat de toename of afname bij gelijke stappen dezelfde is.

Bij een lineair verband hoort een formule van de vorm $y = a \cdot x + b$ met a het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt en b het startgetal.

Voorbeeld

De concentratie stikstofdioxide in de lucht is tussen 1996 en 2017 vrijwel lineair gedaald van 25 µg per m^3 naar 14 µg per m^3 (1 µg is 0,000 001 gram).
Stel een formule op voor de concentratie stikstofdioxide C.
Neem voor die tijd in jaren t met $t = 0$ in 1996.

Oplossing

De afname is lineair, de formule is dus van de vorm $C = a \cdot t + b$.
In 21 jaar tijd is de concentratie stikstofdioxide in de lucht met $25 - 14 = 11$ µg per m^3 gedaald.
Per jaar is de concentratie stikstofdioxide $11 : 21 = \frac{11}{21}$ µg per m^3 gedaald. Hieruit volgt dat $a = -\frac{11}{21}$.
In 1996 was de concentratie stikstofdioxide 25 µg per m^3, dus $b = 25$.
De formule is $C = -\frac{11}{21}t + 25$.

© Noordhoff Uitgevers bv

S2 De waarde van een auto daalt gemiddeld met € 2.800,- per jaar.
Na drieënhalf jaar is de auto nog € 18.600,- waard.
Stel een formule op voor de waarde W van de auto in euro's.
Neem voor t de tijd in maanden met $t = 0$ het moment waarop de auto wordt gekocht.

Vaardigheid

Je kunt gebieden in een assenstelsel tekenen.

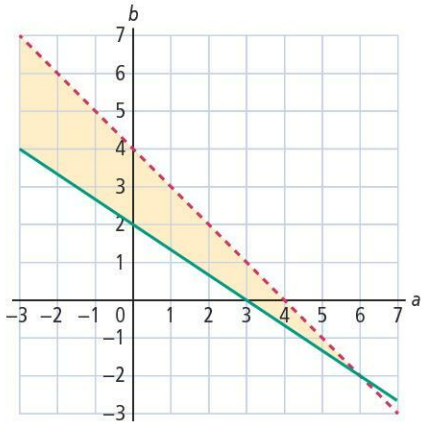
Een uitdrukking zoals $-2x + 6y > 12$ heet een lineaire ongelijkheid. De grafiek van een lineaire ongelijkheid is een halfvlak. Het halfvlak wordt begrensd door de lijn die bij de bijbehorende lineaire vergelijking hoort. De lijn bij de vergelijking $-2x + 6y = 12$ heet de grenslijn. Als de punten op de grenslijn niet voldoen aan de ongelijkheid, dan wordt de grenslijn gestippeld getekend. Bij een combinatie van meerdere halfvlakken ontstaat een gebied.

Voorbeeld

Een gebied wordt bepaald door de ongelijkheden $a + b < 4$ en $2a + 3b \geq 6$.
Geef in een assenstelsel het gebied aan dat voldoet aan beide ongelijkheden. Neem a langs de horizontale as.

Oplossing

Het halfvlak bij de ongelijkheid $a + b < 4$ ligt onder de rode stippellijn.
Het halfvlak bij de ongelijkheid $2a + 3b \geq 6$ ligt boven de groene lijn.
Het gevraagde gebied is het gebied dat zowel onder de rode stippellijn als boven de groene lijn ligt.
In de tekening is dat het geel gekleurde deel.

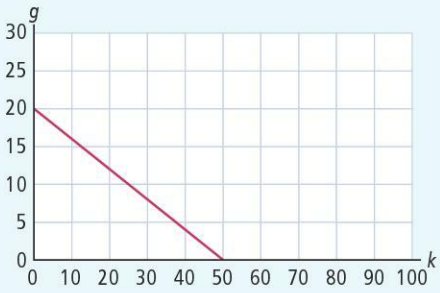


S3 Een speelgoedwinkel verkoopt kleine knikkers voor € 0,10 per stuk en grote knikkers voor € 0,25 per stuk. Herman gaat voor maximaal € 5,- aan knikkers kopen. Noem het aantal kleine knikkers k en het aantal grote knikkers g.

a Leg uit waarom k en g aan de ongelijkheden $k \geq 0$, $g \geq 0$ en $0{,}1k + 0{,}25g \leq 5$ moeten voldoen.

b Geef in het assenstelsel het gebied aan waarin de oplossingen van dit probleem liggen.

c Zijn alle punten of alleen de roosterpunten in het gebied dat je hebt getekend oplossingen van dit probleem? Leg je antwoord uit.



© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt met een exponentieel verband rekenen.

Een exponentieel verband kun je op verschillende manieren herkennen.

- In een tabel wordt er bij gelijke stappen met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
- Uit de tekst kun je opmaken dat er bij gelijke stappen een vast percentage bij komt of van af gaat.
- Uit de tekst kun je opmaken dat er bij gelijke stappen met hetzelfde getal vermenigvuldigd wordt.

Bij een exponentieel verband tussen de variabelen x en y hoort een formule van de vorm $y = b \cdot g^x$. Hierin is b de beginhoeveelheid en g de groeifactor. Bij een toename is de groeifactor groter dan 1. Bij een afname ligt de groeifactor tussen 0 en 1.

Voorbeeld

Een patiënt krijgt door een arts 500 mg van een pijnstiller ingespoten. Ieder uur breekt het lichaam 12,9 % van de nog aanwezige hoeveelheid af.
Stel een formule op voor de nog in het lichaam aanwezige hoeveelheid N in mg.
Neem voor t de tijd in uren met $t = 0$ het moment waarop de pijnstiller wordt ingespoten.

Oplossing

De afname in procenten is steeds gelijk, dus er is sprake van exponentiële groei.
De formule is van de vorm $N = b \cdot g^t$.
$100\% - 12{,}9\% = 87{,}1\%$, dus $g = 87{,}1 : 100 = 0{,}871$
Op $t = 0$ is er 500 mg in het lichaam aanwezig, dus $b = 500$.
De formule is $N = 500 \cdot 0{,}871^t$.

S4 De huurprijs van een huis steeg sinds 2017 elk jaar met hetzelfde percentage. In 2019 was de huurprijs € 410,30 en in 2020 was de huurprijs € 415,63.
Stel een formule op voor de huurprijs H in euro's. Neem voor t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2017.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt de verdubbelingstijd en halveringstijd berekenen.

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor g is de verdubbelingstijd de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen.
Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$.
De halveringstijd is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren.
Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 0{,}5$.

Voorbeeld

Het aantal neemt toe met 25% per week.
Na hoeveel dagen is het aantal verdubbeld?

Oplossing

$100\% + 25\% = 125\%$
De groeifactor is $125 : 100 = 1{,}25$.
$1{,}25^t = 2$ oplossen met de rekenmachine geeft $t \approx 3{,}11$.
De verdubbelingstijd is 3,11 weken.
Dat is na $3{,}11 \times 7 \approx 22$ dagen.

S5 In een dorp neemt het aantal inwoners af met 1,3% per jaar. Bereken na hoeveel tijd het aantal inwoners is gehalveerd. Geef je antwoord in maanden nauwkeurig.

Vaardigheid

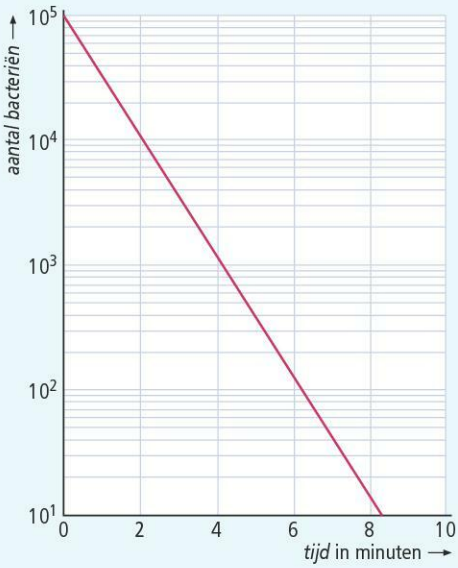
Je kunt een logaritmische schaalverdeling aflezen.

Bij het aflezen van een logaritmische schaalverdeling moet je er goed op letten welke waarden er bij de as staan.
In een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling is de grafiek bij een exponentieel verband een rechte lijn.

S6 In de grafiek zie je het aantal bacteriën tijdens een experiment.

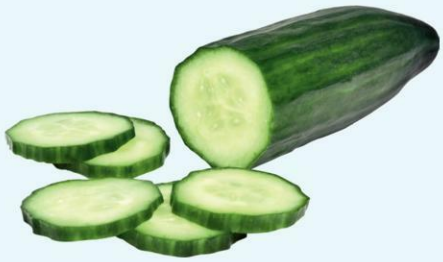
a Hoeveel bacteriën waren er in het begin van het experiment?

b En hoeveel bacteriën waren er nog na zes minuten?



© Noordhoff Uitgevers bv

T1 Voor het verband tussen het gemiddeld gewicht G in grammen van komkommers en de tijd t in dagen wordt de formule $G = 2{,}4 \cdot 1{,}14^t$ gebruikt.



- **a** Hoe groot is het gemiddelde gewicht van de komkommers op tijdstip $t = 0$?
- **b** Met hoeveel procent neemt het gemiddelde gewicht per dag toe?
- **c** Bereken met hoeveel procent het gemiddelde gewicht per week toeneemt.
- **d** Bereken in hoeveel uur het gemiddelde gewicht verdubbeld. Rond je antwoord af op gehele uren.
- **e** Voor een andere soort komkommers geldt dat het gemiddelde gewicht in één dag en 3 uren verdubbeld. Bereken met hoeveel procent het gemiddelde gewicht van deze komkommers per dag toeneemt.

T2 In de mijnbouw geldt de vuistregel dat de temperatuur drie graden stijgt voor elke 100 meter die je in een mijn afdaalt. Bij een mijn is de temperatuur aan het aardoppervlak 17 °C. Noem T de temperatuur in °C en d de diepte in meters.

- **a** Uit welk gegeven blijkt dat er een lineair verband bestaat tussen T en d?
- **b** Stel een formule op bij het verband tussen T en d.
- **c** Bereken de temperatuur op 680 meter diepte.
- **d** Op welke diepte is de temperatuur 30 °C?

T3 Karolina gaat naar de notenboer om hazelnoten en macadamianoten te kopen. De hazelnoten kosten € 3,75 per 250 gram en de macadamianoten € 10,- per 250 gram. Karolina kan hoogstens € 15,- besteden en wil maximaal 500 gram noten kopen. Noem aantal gram hazelnoten dat Karolina koopt h en het aantal gram macadamianoten m.

- **a** Leg uit dat h en m aan de ongelijkheden $h \geq 0$, $m \geq 0$, $0{,}015h + 0{,}04m \leq 15$ en $h + m \leq 500$ moeten voldoen.
- **b** Geef in een assenstelsel het gebied aan waarin de mogelijke oplossingen van dit probleem moeten liggen. Neem h langs de horizontale as.
- **c** Karolina kiest de oplossing waarbij ze precies € 15,- moet betalen.
  Hoeveel gram hazelnoten en hoeveel gram macadamianoten heeft ze gekocht?

© Noordhoff Uitgevers bv

T4 Bakker Kuipers verkoopt sinds 2010 ieder jaar rond de jaarwisseling oliebollen. In 2010 verkocht hij 4612 gevulde oliebollen en 8642 naturelle oliebollen. Ieder jaar neemt de verkoop van gevulde oliebollen met 2,2% toe. De verkoop van naturelle oliebollen neemt ieder jaar met 160 af.

a Bereken in welk jaar hij voor het eerst meer gevulde oliebollen dan naturelle oliebollen zal verkopen.

b Sinds 2010 neemt de totale verkoop van oliebollen bij bakker Kuipers af.
Ga na in welk jaar de totale verkoop voor het eerst weer zal toenemen.

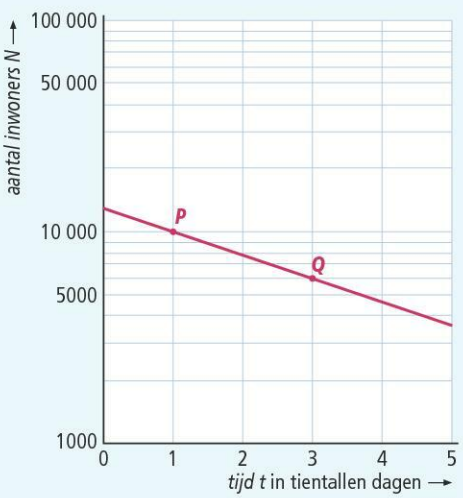
T5 Een nieuwe batterij van het merk A verliest, als hij niet wordt gebruikt, per week 3% van zijn lading.

a Bereken na hoeveel weken de lading van een batterij van merk A gehalveerd is.

b Van een batterij van het merk B is bekend dat hij per week 4% van zijn lading verliest als hij niet gebruikt wordt.
Wanneer een batterij 90% van zijn lading kwijt is, is hij niet meer bruikbaar.
Bereken hoeveel dagen langer een batterij van merk A bruikbaar is ten opzichte van merk B.

c Carlijn heeft twee batterijen; een van merk A met nog 60% van zijn oorspronkelijke lading en een van merk B met nog 70% van zijn oorspronkelijke lading.
Bereken na hoeveel dagen beide batterijen een nog even groot deel van hun oorspronkelijke lading over hebben.

T6 De grafiek geeft het verband weer tussen het aantal inwoners van een stad N en de tijd in tientallen jaren t. Het assenstelsel heeft op de verticale as een logaritmische schaalverdeling.



a Geef de coördinaten van de punten P en Q.

b Stel een formule op bij het verband tussen N en t.

c Bereken de halveringstijd met de formule.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt met een lineair verband rekenen.

E1 Het wordt kouder naarmate de hoogte toeneemt. De vuistregel is dat het 6 °C kouder wordt met iedere 1000 m stijging. Op 1225 meter hoogte is de temperatuur 14 °C.

a Uit welk gegeven kun je opmaken dat het verband tussen de temperatuur en de hoogte lineair is?

b Met hoeveel graden neemt de temperatuur af bij een stijging van 100 m?

c Hoeveel graden is de temperatuur op een hoogte van 3250 meter?

d Op welke hoogte is het 10 °C?

Je kunt gebieden in een assenstelsel tekenen.

E2 Wouter heeft een tuin van 30 m^2. Hij wil op een deel van zijn tuin gras zaaien en de rest betegelen. Noem de oppervlakte in m^2 dat hij met gras gaat inzaaien g en de oppervlakte in m^2 dat betegeld wordt t.

a Leg uit dat g en t aan de ongelijkheden $g \geq 0$, $t \geq 0$ en $g + t \leq 30$ moeten voldoen.

b Teken in een assenstelsel het gebied dat aan deze ongelijkheden voldoet. Neem g langs de horizontale as.

c Waarom zijn alle punten in het getekende gebied een oplossing van dit probleem en niet alleen de roosterpunten?

Je kunt met een exponentieel verband rekenen.

E3 Linda is in januari 2015 gestart als secretaresse en haar bruto jaarinkomen zal de eerste tien dienstjaren jaarlijks met 2,8% toenemen. Deze loonsverhoging geldt steeds vanaf januari.

a Met hoeveel procent is haar bruto maandinkomen na tien jaar gestegen?

b In 2015 was Linda's bruto maandinkomen € 1.760,-.
Stel een formule op voor Linda's bruto maandinkomen B.
Neem voor t de tijd in jaren met $t = 0$ het jaar 2015.

c In welk jaar zal Linda's bruto maandinkomen voor het eerst meer dan € 2.000,- zijn?

Je kunt de verdubbelingstijd en halveringstijd berekenen.

E4 **a** Vanaf het moment dat een auto de showroom uitrijdt, verliest hij per jaar 16% van zijn waarde.
Na hoeveel jaar is de waarde gehalveerd?

b De waarde van een oldtimer auto neemt met 0,8% per jaar toe.
Na hoeveel jaar is de waarde verdubbeld?

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt een logaritmische schaalverdeling aflezen.

E5 Geef de coördinaten van de punten A, B, C, D en E.

E6 Bij een waterbedrijf gelden de volgende tarieven voor de levering van drinkwater aan particulieren:

- Het vastrecht per jaar is € 38,48.
- Elke kubieke meter water kost € 0,57.
- Over elke kubieke meter water wordt € 0,37 waterbelasting geheven.
- Het totaal van deze bedragen wordt belast met 9% btw.

a Stel een formule op voor het verband tussen het eindbedrag E in euro's en het waterverbruik w in m^3.

b De familie Yildiz krijgt een jaarrekening van het waterbedrijf met als eindbedrag € 294,03.
Bereken hoeveel kubieke meter water de familie Yildiz dat jaar verbruikt heeft.

E7 Op een industrieterrein van 100 hectare kunnen grote en middelgrote bedrijven zich vestigen. De gemeente wil dat er zich minstens 10 en hoogstens 30 middelgrote bedrijven zullen gaan vestigen op het terrein. Elk middelgroot bedrijf zal zich vestigen op 2 hectare grond en elk groot bedrijf op 10 hectare grond. Noem het aantal grote bedrijven dat zich vestigt g en het aantal middelgrote bedrijven m.

a Leg uit dat dit leidt tot de ongelijkheden $m \geq 10$, $m \leq 30$, $g \geq 0$ en $2m + 10g \leq 100$.

b Teken in een assenstelsel het gebied dat aan deze ongelijkheden voldoet. Neem g langs de horizontale as.

c Hoeveel bedrijven kunnen zich maximaal vestigen?

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Verdelingen (met ICT) 10

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 3 heb je geleerd hoe je data kunt verwerken en op verschillende manieren kunt weergeven in grafieken. In hoofdstuk 7 heb je geleerd welke spreidingsmaten er zijn.

In dit hoofdstuk leer je meer over een veel voorkomende vorm van een verdeling, de zogenaamde normale verdeling. Bij deze verdeling horen vuistregels. Met deze vuistregels kun je berekenen hoeveel procent van een populatie aan een bepaalde eigenschap voldoet.
Aan de hand van de resultaten van een steekproef worden vaak statistische uitspraken gedaan over de populatie. In dit hoofdstuk leer je hoe je de betrouwbaarheid van zo'n statistische uitspraak kunt onderzoeken.

In deel 3 is er nog een afsluitend hoofdstuk statistiek. In dat hoofdstuk staat het trekken van conclusies uit data centraal.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 44
- *Ordenen en structureren* opdracht 9
- *Abstraheren* opdracht 22

© Noordhoff Uitgevers bv

V1 Een bioscoop heeft het afgelopen jaar minder bezoekers gehad. De manager zegt dat dit komt doordat de bioscoop minder goed bereikbaar was vanwege allerlei verbouwingen in de stad. Een medewerker denkt dat het komt doordat er het afgelopen jaar geen grote films zijn uitgekomen. De directie besluit een onderzoek onder haar bezoekers te starten om te ontdekken wat de redenen zijn voor het lagere aantal bezoekers.

a Wat is in dit onderzoek de populatie?
b Geef twee voorbeelden van vragen die bij het onderzoek gesteld kunnen worden.
c Geef twee voorbeelden van statistische variabelen waarover data verzameld kunnen worden.
d Geef twee voorbeelden van statistische uitspraken die uit het onderzoek zouden kunnen komen.

V2 De klassen 3 vmbo van een scholengemeenschap deden mee aan een rekentoets. De dataset bevat de resultaten van de leerlingen uit deze klassen.

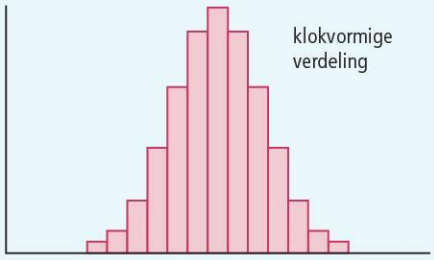
a Welke statistische variabelen komen in deze dataset voor?
b Welke waarden neemt de statistische variabele *niveau* aan?
c De data van het eindresultaat van alle leerlingen zijn verwerkt in de tabel.
Maak zelf zo'n tabel van de leerlingen met niveau BB en zo'n tabel van de leerlingen met niveau KB.
d Hoeveel procent van de BB-leerlingen heeft een voldoende? En hoeveel procent van de KB-leerlingen heeft een voldoende?
e Welke groep heeft de rekentoets het beste gemaakt, de BB-leerlingen of de KB-leerlingen? Verklaar je antwoord.
f Maak staafdiagrammen met klassenbreedte 1 van de variabele *eindresultaat* waarbij je splitst op de variabele *geslacht*.
Wie hebben de rekentoets het beste gemaakt, de jongens of meisjes? Verklaar je antwoord.

Als je de waarden van een variabele sorteert, oplopend, vind je snel de kleinste en de grootste waarde.

eindresultaat alle leerlingen	*aantal*	*percentage*
lager dan 5	53	44
5	50	42
hoger dan 5	17	14
totaal	120	100

Theorie

Een dataset bevat de waarden van één of meer statistische variabelen. Datasets kun je ordenen in bijvoorbeeld frequentietabellen of staafdiagrammen. Dit zijn beide voorbeelden van een frequentieverdeling.
De vorm van een staafdiagram geeft informatie over de frequentieverdeling. Daarbij kun je onder andere letten op symmetrie en op uitschieters.



© Noordhoff Uitgevers bv

V3

a Leg uit waarom bij een klokvormige verdeling de modus, de mediaan en het gemiddelde ongeveer gelijk zijn.

b Geef bij de volgende situaties aan welke vorm het bijbehorende staafdiagram heeft. Verklaar je antwoord.

A De gewichten van kg pakken suiker.

B Het aantal Nederlanders die in een bepaalde week van het jaar op vakantie zijn.

C Het aantal jarige leerlingen in een bepaalde maand.

V4

Je ziet van 55 leerlingen de eindresultaten van de kernvakken.

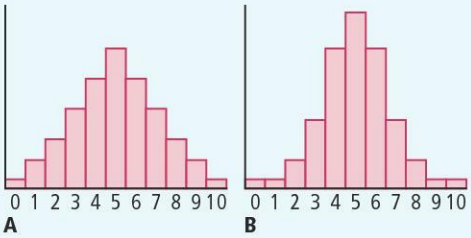
a Maak voor alle drie de kernvakken een staafdiagram met klassenbreedte 0,5 en omschrijf de vorm van het staafdiagram.

b Zoek uit wat de gemiddelden van de drie kernvakken zijn.

c Welk vak heeft de grootste spreiding als je als maat de spreidingsbreedte neemt?

Theorie

Om statistische gegevens samen te vatten gebruik je centrummaten. Er zijn drie centrummaten: het gemiddelde, de modus en de mediaan. De klasse met de grootste frequentie noem je de modale klasse.
Met spreidingsmaten geef je aan hoe ver gegevens van elkaar af liggen. De eenvoudigste spreidingsmaat is de spreidingsbreedte, dat is het verschil tussen het grootste en het kleinste waarnemingsgetal. Een andere spreidingsmaat is het verschil tussen het derde kwartiel Q_3 en het eerste kwartiel Q_1, de kwartielafstand. De standaardafwijking of standaarddeviatie zegt iets zegt over de spreiding rond het gemiddelde. De korte notatie is σ. In figuur B liggen meer waarnemingsgetallen dichter bij het gemiddelde dan in figuur A. In figuur B is de standaardafwijking dus kleiner dan in figuur A.



V5

Je ziet van 154 leerlingen gegevens waaronder hoeveel uur zij in een week aan huiswerk besteden.

a Maak een staafdiagram bij de variabele *huiswerk* met de eerste klasse $[0, 3\rangle$ en splits op *geslacht*.

b Bij welke groep is volgens jou de standaardafwijking van de huiswerktijd het grootst? Verklaar je antwoord.

c Zoek uit hoe groot de standaardafwijking bij de jongens en de meisjes van de variabele *huiswerk* is.

d Geef bij de variabele *huiswerk* voor de jongens en de meisjes de centrummaten en de spreidingsmaten.

© Noordhoff Uitgevers bv

10.1 Normale verdeling

Je leert
- wat een normale verdeling is

Leerroutes
- ondersteunend: 1—2—3—O4—5—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—3—5—6—7—U1

Een machine vult 1000 keer een fles met 1 liter water. Van alle flessen wordt na afloop de inhoud gemeten. De resultaten worden in een staafdiagram verwerkt.
- Hoe zal het staafdiagram bij deze resultaten er uitzien?

1 In 1901 werd uit het archief van Scotland Yard van 3000 criminelen de lengte in inch gepubliceerd.

a Maak een staafdiagram bij de variabele *lengte* bij elk van de klassenbreedten 5 inch, 3 inch, 2 inch en 1 inch.

b Bij welke klassenbreedte benadert het staafdiagram het beste een klokvormige verdeling?

2

a Geef van de lengte van de criminelen het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ in één decimaal nauwkeurig.

b Ga na dat $\mu - \sigma = 62{,}9$ en bereken $\mu + \sigma$.

c In het staafdiagram met klassenbreedte 1 inch is een vloeiende grafiek getekend die er zo goed mogelijk bij past. Je ziet dat bij $\mu - \sigma = 62{,}9$ de vloeiende grafiek overgaat van toenemend stijgend in afnemend stijgend.
Welke verandering in daling heeft de grafiek bij $\mu + \sigma$?

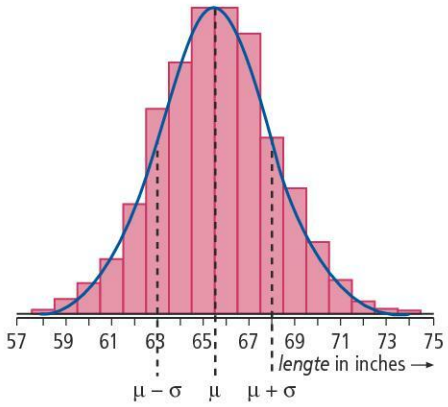
d Ga na dat 2032 criminelen een lengte hadden tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$. Gebruik de sorteerfunctie.

e Hoeveel procent van de criminelen had een lengte tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$?

f Bereken $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$. Geef die waarden op de horizontale as aan.

g Bereken hoeveel procent van de criminelen een lengte tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ had.

h Hoeveel procent van de criminelen had een lengte tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$?



© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

De frequentieverdeling van een variabele kun je vaak benaderen met een klokvormige grafiek. De belangrijkste kenmerken van zo'n grafiek zijn:

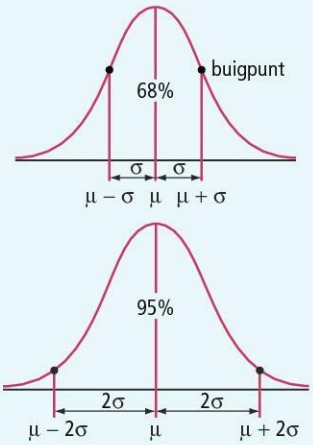
- De grafiek is symmetrisch.
- De symmetrieas ligt bij het gemiddelde μ.
- Het gemiddelde, de mediaan en de modus vallen samen.
- De standaardafwijking σ is de afstand van de symmetrieas tot de buigpunten van de grafiek.

Bij een normale verdeling gelden de volgende vuistregels:

1 Van de data ligt ongeveer 68% tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
2 Van de data ligt ongeveer 95% tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.
3 Van de data ligt vrijwel 100% tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.

Deze veel voorkomende klokvormige verdeling wordt de **normale verdeling** genoemd. Een variabele waarvan de frequentieverdeling benaderd kan worden door de normale verdeling heet **normaal verdeeld**.

In een buigpunt verandert een toenemende stijging (of daling) in een afnemende stijging (of daling).



3 In 1947 deden de wiskundigen Freudenthal en Sittig in opdracht van de Bijenkorf onderzoek naar onder andere de lengte van 5001 vrouwen. Dit onderzoek stond aan de basis van een nieuw maatsysteem voor damesconfectie.

a Maak een staafdiagram bij de variabele *lengte* waarbij de eerste klasse $[135, 140\rangle$ is.
b Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?
c Geef het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ van de lengte en bereken $\mu - \sigma$, $\mu + \sigma$, $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.
d Bereken het percentage vrouwen dat een lengte had tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
e Hoeveel procent van de vrouwen had een lengte tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$?
f Was de lengte van de vrouwen normaal verdeeld?

© Noordhoff Uitgevers bv

Om na te gaan of een variabele normaal verdeeld is, controleer je of het bijbehorende staafdiagram klokvormig is. Om meer zekerheid te hebben, kun je controleren of de 1e en de 2e vuistregel kloppen bij de frequentieverdeling.

Ondersteunende route → maak opdracht O4

4 Van 608 maïsplanten is de lengte in cm gemeten. De resultaten staan in de dataset.

a Maak een staafdiagram bij de variabele *lengte* waarbij de eerste klasse [60, 70⟩ is.

b Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?

c Onderzoek met de 1e en 2e vuistregel of de lengte van de maïsplanten normaal verdeeld is.

5 In het onderzoek van Freudenthal en Sittig werd ook gekeken naar de voetlengte van de 5001 vrouwen.

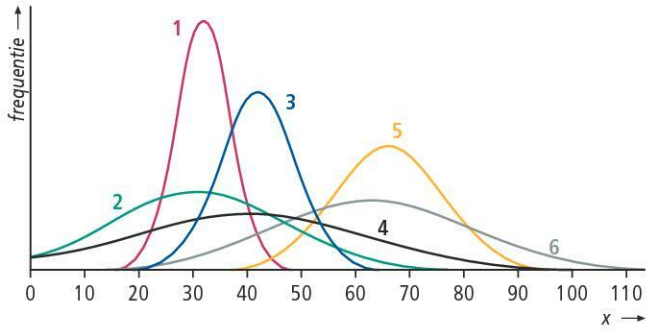
a Maak een staafdiagram bij de variabele *lengte* waarbij de klassenbreedte 1 cm is.

b Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?

c Onderzoek met de 1e en 2e vuistregel of de voetlengte van de 5001 vrouwen normaal verdeeld is.

6 **a** Wat gebeurt er met de grafiek van een normale verdeling als het gemiddelde kleiner wordt en de standaardafwijking gelijk blijft?

b En wat gebeurt er met de grafiek van een normale verdeling als de standaardafwijking kleiner wordt en het gemiddelde gelijk blijft?



7 Je ziet zes grafieken die bij zes statistische variabelen horen die normaal verdeeld zijn.

a Welke verdeling heeft het grootste gemiddelde? En welke het kleinste?

b Welke verdeling heeft de grootste standaardafwijking? En welke de kleinste?

Uitdagende route → maak opdracht U1

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O4 Onder 2111 hbo studenten is onderzocht in hoeveel maanden ze afstuderen.

a Maak een staafdiagram bij de variabele *studieduur* waarbij de eerste klasse $[39, 42\rangle$ is.

b Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?

c Zoek uit hoeveel het gemiddelde μ en hoeveel de standaardafwijking σ is. Rond beiden af op één decimaal.

d Bereken $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.

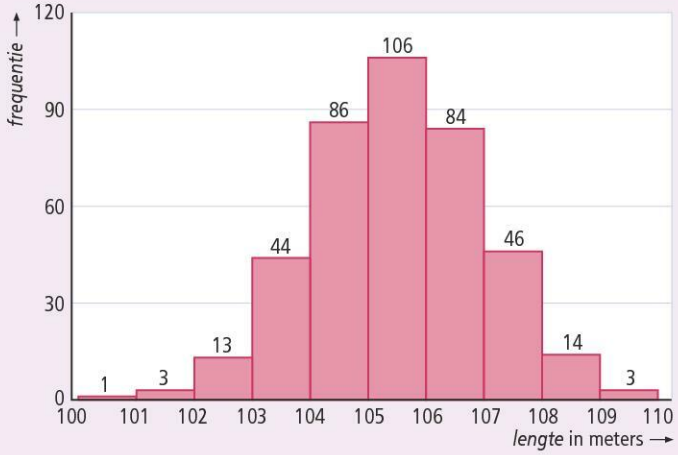
e Gebruik de sorteerfunctie om na te gaan dat 1369 van de hbo studenten een studieduur hebben van tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.

f Hoeveel procent is dat? Klopt de 1e vuistregel?

g Controleer ook de 2e vuistregel.

h Is de studieduur van de hbo studenten normaal verdeeld?

Uitdagende opdrachten



U1 In een textielfabriek worden rollen linnen gemaakt. Het is de bedoeling dat elke rol minstens 100 meter stof bevat. Door de onnauwkeurigheid van de machine zal niet elke rol precies evenveel meters stof bevatten. Van 400 rollen wordt de lengte nagemeten. In de dataset zie je in een klassenindeling de resultaten. Bij de klassenindeling is een staafdiagram getekend. De gemiddelde lengte van een rol is 105,5 meter en de standaardafwijking is 1,5 meter.
Onderzoek met de vuistregels of de lengte van de stof op een rol normaal verdeeld is.

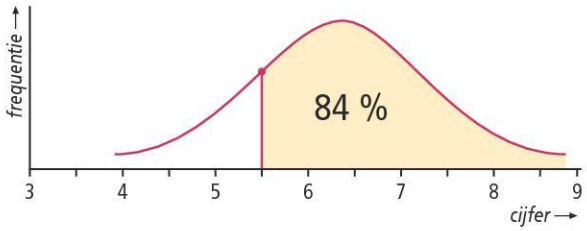
© Noordhoff Uitgevers bv

10.2 Rekenen met de vuistregels

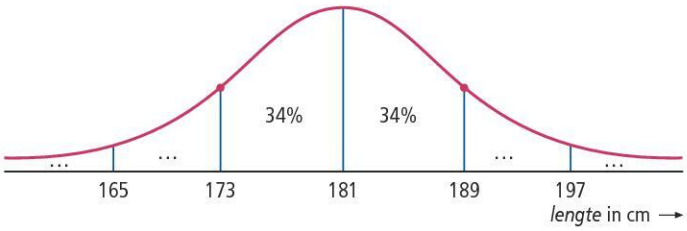
Je leert
- hoe je met de vuistregels van een normale verdeling rekent

Leerroutes
- ondersteunend: 8—9—O10—O11—12—13
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 8—10—11—12—13—U2

De resultaten van havo 5 leerlingen voor de rekentoets zijn in de grafiek weergegeven. Zo kun je zien dat 84% van de leerlingen een 5,5 of hoger hebben gehaald. De resultaten van de rekentoets zijn normaal verdeeld.
- Hoe kun je op basis van deze grafiek het gemiddelde en de standaardafwijking van de resultaten van de rekentoets bepalen?



8 Tot 1996 kende Nederland militaire dienstplicht. Elk jaar werden jonge mannen opgeroepen voor de dienstkeuring. Daarbij werden allerlei gegevens zoals bijvoorbeeld lengte en gewicht gemeten. Van de laatste groep dienstplichtigen was de gemiddelde lengte 181 cm en de standaardafwijking 8 cm. Ga ervan uit dat de variabele lengte normaal verdeeld is.



a Waarom staat bij de horizontale as 181 onder de top van de grafiek?

b En waarom staat bij de horizontale as onder de buigpunten van de grafiek 173 en 189?

c Volgens de 1e vuistregel hadden 68% van de dienstplichtigen een lengte tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$. Verklaar waarom onder de grafiek twee keer 34% staat.

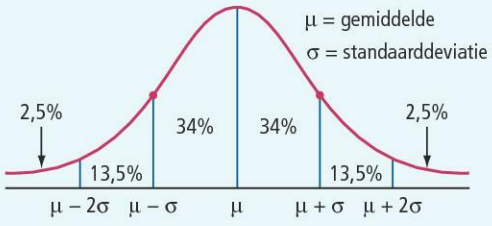
d Gebruik de 2e vuistregel om de andere vier percentages onder de grafiek uit te rekenen en vul deze op de puntjes in.

e Hoeveel procent van de dienstplichtigen had een lengte tussen 173 en 197 cm?

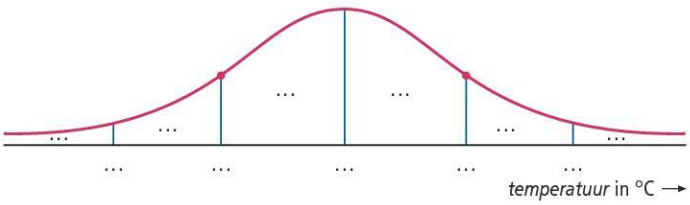
f Hoeveel procent van de jongens was langer dan 189 cm?

© Noordhoff Uitgevers bv

Met de vuistregels kun je de oppervlakte onder de grafiek van een normale verdeling opsplitsen in zes stukken. Bij het maken van opdrachten waarin gegeven is dat een variabele normaal verdeeld is, is het handig om een schets te maken van de grafiek van de bijbehorende normale verdeling.



9 Een monteur onderzoekt de temperatuur van 300 kopjes koffie uit een koffiezetapparaat. De temperatuur van de kopjes koffie is normaal verdeeld. Het gemiddelde is 78 °C en de standaardafwijking is 2,5 °C.



a Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.
b Hoeveel procent van de kopjes koffie is warmer dan 80,5 °C?
c De ideale temperatuur voor een kopje koffie ligt tussen 73 °C en 80,5 °C.
Hoeveel kopjes koffie hebben een ideale temperatuur?

Ondersteunende route → maak opdracht O10

10 H Een supermarkt verkoopt waspoeder in pakken van 4 kg. Een consumentenorganisatie controleert het gewicht van 500 pakken. Het gemiddelde gewicht blijkt 4,06 kg te zijn, met een standaardafwijking van 0,12 kg. Neem aan dat de gewichten van de pakken waspoeder normaal verdeeld zijn.

a Maak een schets van de grafiek bij de normale verdeling.
b Bereken het aantal pakken met een gewicht tussen 3,94 kg en 4,30 kg.
c Twintig procent van de pakken blijkt zwaarder te zijn dan 4,16 kg.
Welk gewicht hebben de twintig procent pakken met het laagste gewicht?
d Geef een schatting van het percentage pakken met een gewicht minder dan 4 kg.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O11

11 In een kantoorgebouw worden lampen gebruikt met een brandtijd van gemiddeld 1400 uur en een standaardafwijking van 150 uur. Neem aan dat de brandtijd normaal verdeeld is. Om arbeidsloon te besparen worden alle lampen tegelijk vervangen. Als 16% van de lampen stuk is, mag er vervangen worden.

a Na hoeveel branduren is dat het geval?

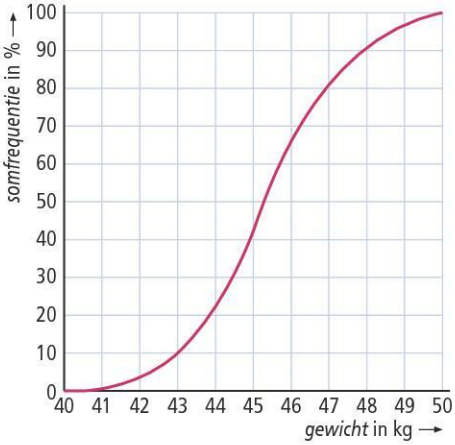
b Na een aantal jaren besluit de directie om over te stappen op ledverlichting. De brandtijd van deze lampen is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 75 uur. Na 3200 branduren is 2,5% van deze lampen stuk. Bereken de gemiddelde brandtijd van deze lampen.

12 H Een fabrikant van autobanden heeft van twee typen de levensduur onderzocht. De levensduur van beide type banden is normaal verdeeld. De gemiddelde levensduur van de banden van type A is 30 000 km met een standaardafwijking van 3500 km.

a Hoeveel procent van de banden van type A heeft een levensduur tussen de 26 500 km en 37 000 km?

b Van de banden van type B is bekend dat 50% van de banden langer dan 35 000 km mee gaan en dat 16% van de banden zelfs langer dan 38 000 km mee gaan. Hoeveel km is het gemiddelde en de standaardafwijking van de levensduur van de banden van type B?

13 Van een groot aantal scholieren is het gewicht gemeten. De resultaten zijn verwerkt in een relatieve somfrequentiepolygoon. Het gewicht van deze scholieren is normaal verdeeld.



a Bepaal met de grafiek de mediaan.

b Waarom is in deze situatie het gemiddelde gelijk aan de mediaan?

c Bij welk percentage kun je in de grafiek de waarde van $\mu + \sigma$ aflezen?

d Bereken de standaardafwijking.

Uitdagende route → maak opdracht U2

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O10 Een machine vult flesjes met 500 mL shampoo. Bij een controle van 1000 flesjes is de gemiddelde inhoud 512 mL en de standaardafwijking 8 mL. Neem aan dat de inhoud van de flesjes normaal verdeeld is.

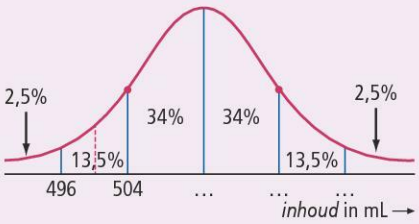
a Vul bij de horizontale as de juiste waarden in.

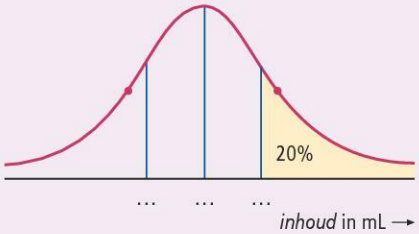
b Hoeveel procent van de flesjes heeft een inhoud tussen 504 mL en 520 mL? Hoeveel flesjes zijn dat?

c Het lijntje dat hoort bij 500 mL ligt precies tussen 496 mL en 504 mL.
Waarom is het percentage tussen 496 mL en 500 mL toch kleiner dan 6,75%?

d Geef een schatting van het percentage flesjes met minder dan 500 mL.

e Van 20% van de flesjes is de inhoud 519 mL of meer.
Gebruik de symmetrie van de grafiek om de inhoud van de 20% flesjes met de minste inhoud te bepalen.





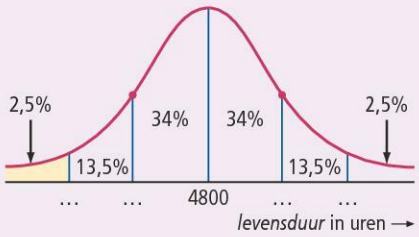
O11 De lampen van de lantaarnpalen bij een snelweg hebben een levensduur van gemiddeld 4800 uur en een standaardafwijking van 250 uur. Neem aan dat de variabele levensduur van de lampen normaal verdeeld is.

a Vul de schets verder in.

b Hoeveel procent van de lampen is na 4800 uur defect?

c Alle lampen worden in één keer vervangen als 2,5% van de lampen defect is.
Na hoeveel uren is dat het geval?

d Na een aantal jaren wordt er overgestapt op een ander merk lamp. De levensduur van deze lampen is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 175 uur.
Na 4000 uren is 2,5% van deze lampen defect.
Bereken de gemiddelde levensduur van deze lampen.



Uitdagende opdrachten

U2 Een fabrikant van inkt cartridges voor printers onderzoekt van twee type cartridges de levensduur. De levensduur van beide typen is normaal verdeeld.

a Bij type A gaan 504 van de 600 inkt cartridges meer dan 240 pagina's mee en is het gemiddelde aantal pagina's 252.
Bereken de standaardafwijking van type A.

b Bij type B gaan 15 van de 600 cartridges meer dan 240 pagina's mee en is de standaardafwijking 7 pagina's.
Bereken het gemiddelde van type B.

© Noordhoff Uitgevers bv

10.3 Steekproevenverdeling van een proportie

Je leert
- wat een steekproef is
- wat een populatieproportie en een steekproefproportie is

Leerroutes
- ondersteunend: 14—15—16—O17—18—O19—20
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19—20
- uitdagend: 14—15—16—17—18—20—U3

Van een grote partij spijkers moet worden gecontroleerd of ze wel recht zijn. Bij een controle van 50 spijkers zijn er drie krom.
- Hoeveel procent van alle spijkers is naar verwachting krom?
- Hoe kun je de partij spijkers nog beter testen zodat je een betere schatting krijgt?

14 Volgens de directie van een grote school is 20% van de leerlingen linkshandig. Sam wil nagaan of dit percentage klopt. Het ontbreekt haar aan tijd om dit aan alle leerlingen te vragen.

a Sam vraagt aan vijf willekeurige leerlingen of ze linkshandig zijn.
Is het mogelijk dat geen enkele van deze vijf leerlingen linkshandig is?

b Sam stelt dezelfde vraag aan 20 willekeurige leerlingen.
Hoeveel hiervan zijn waarschijnlijk linkshandig?

c In welke situatie is het waarschijnlijker dat geen enkele leerling linkshandig is, bij het ondervragen van vijf leerlingen of van 20 leerlingen?

Theorie

Om iets te weten te komen over een groep onderzoek je meestal slechts een deel van de groep. Je noemt dat een **steekproef**. De uitslag van een steekproef wordt voor een deel door het toeval bepaald. Door de **steekproefomvang** groter te maken, krijg je een betere schatting. Om juiste conclusies te kunnen trekken over een populatie, moet de steekproef **aselect** zijn. Dat wil zeggen dat iedereen (of ieder ding) uit de populatie evenveel kans moet hebben om in de steekproef terecht te komen. Een steekproef die **representatief** is, vormt een goede afspiegeling van de hele populatie.

Voorbeeld

Een bestuur van een vereniging wil een onderzoek houden onder haar 1168 leden naar de waardering van de activiteiten. De voorzitter stelt voor de mening van de 34 aanwezigen op de vergadering te peilen.
De secretaris wil willekeurige 60 namen uit de ledenlijst prikken en die leden een vragenlijst laten afnemen.
De steekproef in het voorstel van de voorzitter is niet aselect, die van de secretaris wel.

15 **a** Leg uit waarom de steekproef van de voorzitter in het voorbeeld niet aselect is en die van de secretaris wel.

b Geef bij beide steekproeven de steekproefomvang.

© Noordhoff Uitgevers bv

16 Een boer levert een grote partij sinaasappels aan bij de fabriek. Volgens de boer is 90% van de sinaasappels rijp. Een medewerker van de fabriek neemt een steekproef van 50 sinaasappels en er blijken er 43 rijp te zijn.

a Hoeveel procent van de sinaasappels in de steekproef is rijp?

b Je kunt de relatieve uitslag van de steekproef ook aangeven met een getal tussen 0 en 1.
Leg uit dat bij deze steekproef de waarde 0,86 hoort.

Theorie

Het deel van een populatie dat aan een bepaalde eigenschap voldoet, heet de populatieproportie. In een steekproef heet het deel dat die eigenschap heeft de steekproefproportie.
De populatieproportie en de steekproefproportie worden beide geschreven als een getal tussen 0 en 1.
De steekproefproportie is een schatting voor de populatieproportie.

Voorbeeld

Jan verkoopt op de markt plantjes. Van alle plantjes heeft 3% bladluis. De populatie bestaat uit alle plantjes die Jan verkoopt. De populatieproportie is 0,03. Een klant koopt bij Jan 20 plantjes. Van de 20 plantjes blijkt 5% bladluis te hebben. De 20 plantjes kun je beschouwen als een steekproef.
De steekproefproportie is dus 0,05.

Ondersteunende route → maak opdracht O17

17 H In een doos zitten 250 knikkers waarvan er 20 geel zijn.

a Bereken de populatieproportie van het aantal gele knikkers.

b Dirk pakt willekeurig 25 knikkers waarvan er 4 rood zijn.
Geef de steekproefproportie van het aantal rode knikkers.

c Hoe groot schat jij de populatieproportie van het aantal rode knikkers op basis van de steekproef van Dirk?

18 In de doos met 250 knikkers zitten 120 blauwe knikkers. Sanne trekt 100 knikkers uit de vaas en telt het aantal blauwe knikkers.

a Hoeveel blauwe knikkers zal ze naar verwachting trekken?

b Met een computer kun je het trekken van knikkers simuleren. In het bestand zie je het resultaat van 1000 steekproeven met een steekproefomvang van 100.
Maak een staafdiagram bij de steekproefproporties.

c Is het staafdiagram min of meer klokvormig?

d Hoe groot is het gemiddelde en de standaardafwijking van de steekproefproporties?

e Hoeveel procent van de steekproefproporties ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$?

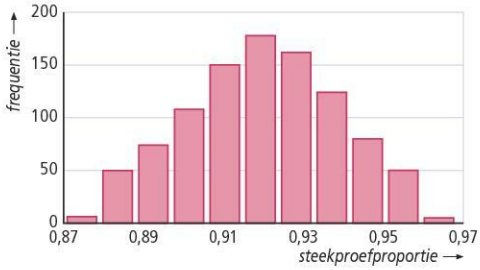
© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Door een groot aantal simulaties uit te voeren, zie je dat de steekproefproporties normaal verdeeld zijn. Je noemt dit de steekproevenverdeling van de proporties.

Ondersteunende route → maak opdracht O19

19 De RDW houdt bij hoeveel procent van de auto's bij een apk-keuring goedgekeurd worden. De RDW neemt 500 steekproeven met 200 keuringen. In de steekproevenverdelingen zie je de resultaten.



a Van een steekproef is de steekproefproportie 0,88. Hoeveel auto's zijn in deze steekproef goedgekeurd voor de apk-keuring?

b Hoeveel procent van de auto's zal goedgekeurd worden voor de apk-keuring?

20 Een gemeente wil in een wijk het inzamelen van afval anders organiseren. Volgens de wethouder is 55% van de bewoners voor het plan van de gemeente.

a Een buurtcomité ondervraagt 50 bewoners, waarvan 20 bewoners vóór het plan blijken te zijn. Bereken de steekproefproportie.

b Om de betrouwbaarheid van de uitspraak van de wethouder te onderzoeken, kun je steekproeven simuleren. Het bestand bevat het resultaat van 1000 steekproeven met steekproefomvang 50 bij een populatieproportie van 55%. Hoeveel steekproeven zijn er met een steekproefproportie die kleiner of gelijk is aan 0,40? Gebruik de sorteerfunctie.

c Stel dat de wethouder gelijk heeft. In hoeveel procent van de representatieve steekproeven, zullen 20 of minder van de 50 bewoners voor het plan zijn?

Uitdagende route → maak opdracht U3

© Noordhoff Uitgevers bv

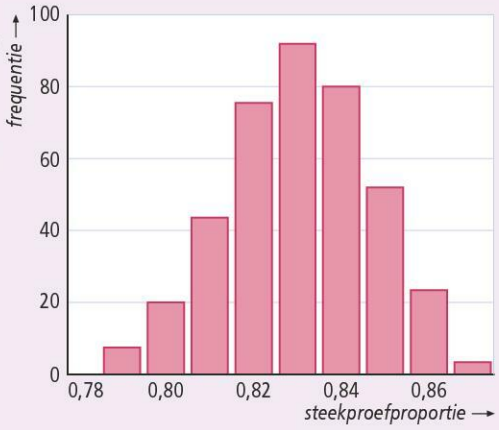
Ondersteunende opdrachten

O17 Een school onderzoekt hoeveel procent van alle scholieren stress ervaart op school. Bij een eerste onderzoek blijkt dat 26 van de 200 scholieren stress ervaart.

- **a** Hoeveel procent van de scholieren in het onderzoek ervaart stress op school?
- **b** Geef de steekproefproportie van het aantal leerlingen die stress ervaren op school.
- **c** Wat is de populatie?
- **d** Hoe groot schat jij het percentage scholieren dat stress op school ervaart op basis van dit eerste onderzoek?
- **e** Naar aanleiding van dit eerste onderzoek besluit de school alle scholieren te vragen of zij stress op school ervaren. Het resultaat is dat 98 van de 1286 scholieren aangeven stress op school te ervaren.
  Hoeveel procent is dat?
- **f** Geef de populatieproportie van het aantal leerlingen dat stress ervaart op school.

O19 De NS houdt bij hoeveel procent van de treinen op tijd rijdt. Elke dag neemt de NS een steekproef bij 200 treinen of ze op tijd rijden. Dit doen ze 400 dagen lang. In de steekproevenverdeling zie je de resultaten.

- **a** Van een steekproef is de steekproefproportie 0,85. Hoeveel procent van de treinen was in deze steekproef op tijd? Hoeveel van de 200 treinen zijn dat?
- **b** De steekproevenverdeling is normaal verdeeld. In een normale verdeling is het gemiddelde gelijk aan de modus en de mediaan.
  Hoe groot is het gemiddelde van de steekproevenverdeling?
- **c** Schat op basis van deze steekproevenverdeling hoeveel procent van de treinen op tijd rijdt.



Uitdagende opdrachten

U3 Een fabrikant van pennen controleert de kwaliteit van zijn geproduceerde pennen. Er worden 200 steekproeven met steekproefomvang 40 genomen waarbij gekeken wordt hoeveel procent van de pennen defect is. De resultaten zijn verwerkt in een steekproevenverdeling die normaal verdeeld is. Van deze steekproevenverdeling is gegeven dat 2,5% van de steekproeven een steekproefproportie had van minder dan 0,06 en dat 16% een steekproefproportie had van minder dan 0,08.
Hoeveel procent van de pennen is waarschijnlijk defect?

© Noordhoff Uitgevers bv

10.4 Betrouwbaarheidsinterval voor een proportie

Je leert
- hoe je het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een proportie op basis van één steekproef berekent

Leerroutes
- ondersteunend: 21—22—023—24—25—026
- doorlopend: 21—22—23—24—25—26
- uitdagend: 21—22—24—25—26—U4

Rondom verkiezingen worden er altijd peilingen gehouden waarbij onderzocht wordt hoeveel procent van de kiesgerechtigden mogelijk op bijvoorbeeld de VVD gaat stemmen. Bij een peiling onder 1000 kiesgerechtigheden blijkt 16% te overwegen op de VVD te gaan stemmen.
- Hoe zeker kun je er van zijn dat inderdaad precies 16% van alle kiesgerechtigden overweegt op de VVD te gaan stemmen?

21 Bij elke bezorging van een pakketje houdt DHL bij of er iemand thuis is als het pakketje bezorgd wordt. Ze nemen dagelijks een steekproef van 100 bezorgingen. De steekproevenverdeling hoort bij een groot aantal van deze steekproeven.

a Hoe kun je aan de steekproevenverdeling zien dat de populatieproportie van het aantal keren dat iemand thuis is gelijk is aan 0,80?

b Geef de standaardafwijking van de steekproevenverdeling.

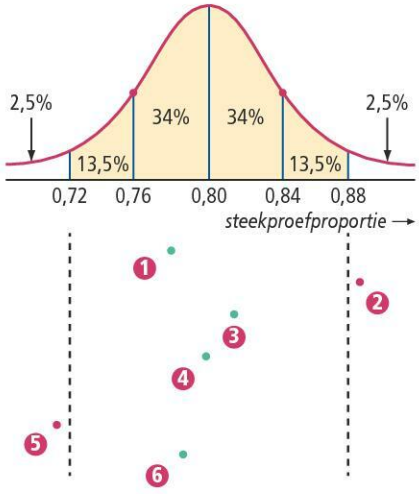
c Ga na dat de standaardafwijking van de steekproevenverdeling gelijk is aan $\sqrt{\frac{0{,}8\,(1-0{,}8)}{n}}$ waarbij n de steekproefomvang is.

d Tussen welke waarden liggen de middelste 95% van alle steekproefproporties?

e Onder de verdeling is van zes steekproeven de steekproefproportie aangegeven. Zo kun je zien dat bij steekproef 1 de steekproefproportie 0,78 was.
Bij welke steekproef was de steekproefproportie precies gelijk aan de populatieproportie?

f Waarom is de steekproefproportie niet altijd gelijk aan de populatieproportie?

g Bij welke steekproeven ligt de steekproefproportie buiten de middelste 95% van alle steekproefproporties?



Als je in de praktijk iets onderzoekt, heb je vaak maar één steekproef. Met de steekproefproportie van die ene steekproef maak je dan een schatting van de populatieproportie.

© Noordhoff Uitgevers bv

22 Bij de steekproefproporties van de zes steekproeven van opdracht 21 is aan beide kanten een lijnstuk van lengte 0,08 getekend. Dit levert een interval met lengte 0,16 op.

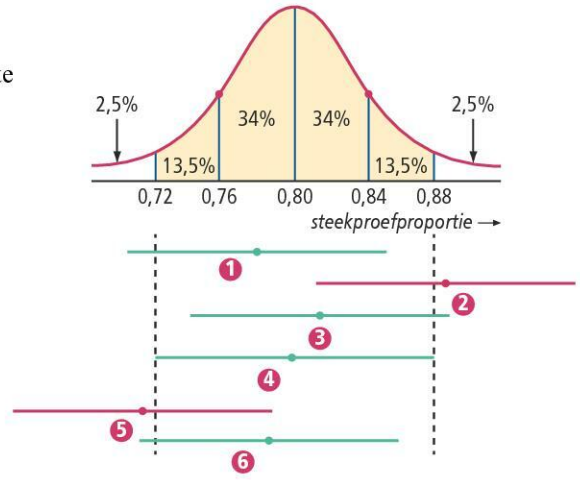
a Waarom is dit interval bij steekproef 4 gelijk aan [0,72; 0,88]?

b Schrijf het interval bij steekproef 1 op.

c Bij welke steekproeven bevat het interval de steekproefproportie 0,80?

d Leg uit dat alle intervallen waarbij de steekproefproportie tussen de twee gestippelde lijnen ligt de populatieproportie bevatten.

e Waarom zal in 95% van alle steekproeven het bijbehorende interval de populatieproportie bevatten?



Theorie

Op basis van één steekproef kun je een schatting maken van de populatieproportie. Met het 95%-betrouwbaarheidsinterval geef je de nauwkeurigheid van de schatting aan. Daarbij gebruik je de steekproefproportie en de steekproefomvang.
Met 95% zekerheid ligt de populatieproportie in het interval:

$$\left[p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\ p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Hierin is p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.
De halve lengte van het betrouwbaarheidsinterval is de foutenmarge.

Voorbeeld

Bij een steekproef onder 200 havo 5 leerlingen blijkt dat 73% van de leerlingen een bijbaantje heeft.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage havo 5 leerlingen dat een bijbaantje heeft. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

Oplossing

$$p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}73 - 2 \times \sqrt{\frac{0{,}73(1-0{,}73)}{200}} \approx 0{,}67$$

$$p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}73 + 2 \times \sqrt{\frac{0{,}73(1-0{,}73)}{200}} \approx 0{,}79$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,67; 0,79].
Met 95% zekerheid ligt het percentage havo 5 leerlingen dat een bijbaantje heeft tussen 67% en 79%.
De foutenmarge is (0,79 – 0,67) : 2 = 0,06 oftewel 6%.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O23

23 In een onderzoek onder 1500 inwoners uit Kampen blijkt dat 43% tegen de komst van airport Lelystad is.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie van het aantal tegenstanders onder alle inwoners van Kampen.
Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

24 H De regering overweegt om een aantal maatregelen in te voeren om de klimaatdoelen van Parijs te halen. Uit een groot opgezet onderzoek in 2018 blijkt dat 67% van de Nederlanders de maatregelen van de regering steunt.
Bij een onderzoek in 2019 onder 2000 Nederlanders blijkt dat 56% van de Nederlanders de maatregelen steunt.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage Nederlanders dat in 2019 de maatregelen van de regering steunt.
b Kun je concluderen dat de steun voor de klimaatmaatregelen is afgenomen? Verklaar je antwoord.

25 Een school onderzoekt hoeveel procent van de scholieren een iPhone heeft. Bij een onderzoek met steekproefomvang 300 blijkt dat 96 leerlingen een iPhone heeft.
a Bereken de steekproefproportie van het aantal leerlingen met een iPhone.
b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage scholieren dat een iPhone heeft.

Ondersteunende route → maak opdracht O26

26 In een onderzoek onder een groot aantal scholieren is gekeken naar het verband tussen het hebben van dyslexie en de resultaten voor het vak Nederlands. In de tabel zie je de resultaten.

	vol.	onv.	totaal
wel dyslexie	406	219	625
geen dyslexie	11 365	510	11 875
totaal	11 771	729	12 500

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage leerlingen zonder dyslexie dat een onvoldoende heeft voor het vak Nederlands.
b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage leerlingen met dyslexie dat een onvoldoende heeft voor het vak Nederlands.
c Welke conclusie kun je trekken over de invloed van dyslexie op het resultaat voor het vak Nederlands?

Uitdagende route → maak opdracht U4

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O23 Bij een onderzoek met steekproefomvang 600 blijkt dat 72% van de leerlingen een bijbaantje heeft. Je gaat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage scholieren dat een bijbaantje heeft berekenen.

a Geef de steekproefproportie van het aantal leerlingen dat een bijbaantje heeft.

b Vul in.
De linkergrens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}72 - 2 \times \sqrt{\frac{0{,}72(1-0{,}72)}{600}} \approx \ldots .$$

c Bereken de rechtergrens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

d Geef het 95%-betrouwbaarheidsinterval en de bijbehorende conclusie.

e Bereken de foutenmarge.

O26 In een onderzoek onder scholieren is gekeken naar het verband tussen dyscalculie en de resultaten voor de rekentoets. In de tabel zie je de resultaten.
Je gaat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie van leerlingen met dyscalculie dat een onvoldoende heeft voor de rekentoets berekenen.

	vol.	onv.	totaal
wel dyscalculie	50	278	328
geen dyscalculie	8513	659	9172
totaal	8563	937	9500

a Hoeveel leerlingen met dyscalculie zitten er in dit onderzoek? Dus hoe groot is n?

b Hoeveel procent van deze leerlingen heeft een onvoldoende voor de rekentoets? Hoe groot is dus p?

c Bereken het gevraagde 95%-betrouwbaarheidsinterval.

d Bereken ook het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de populatieproportie van de leerlingen zonder dyscalculie dat een onvoldoende voor de rekentoets heeft gehaald.

Uitdagende opdrachten

U4 De foutenmarge bij het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een proportie is gelijk is aan $2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

a Door een grote steekproefomvang te kiezen, zal het betrouwbaarheidsinterval kleiner worden.
Leg uit hoe je dat aan de formule kunt zien.

b Onderzoek hoeveel keer zo groot de foutenmarge wordt als de steekproefomvang twee keer zo groot wordt.

© Noordhoff Uitgevers bv

10.5 Steekproevenverdeling van een gemiddelde

Je leert
- wat een populatiegemiddelde en een steekproefgemiddelde is
- wat een steekproevenverdeling is

Leerroutes
- ondersteunend: 27—28—29—30—31—032
- doorlopend: 27—28—29—30—31—32
- uitdagend: 27—28—29—30—32—U5

Van een grote partij balken met een lengte van één meter moet de lengte worden gecontroleerd. Jan neemt een steekproef van tien balken en vindt een gemiddelde van 101 cm. Piet neemt twintig steekproeven van tien balken. Het gemiddelde van zijn steekproeven is 100,8 cm.
- Welk resultaat is het meest betrouwbaar?
- Hoe kun je een nog betrouwbaarder resultaat krijgen?

27 Een fabrikant verpakt pakken koffie met een inhoud van 500 gram.
De machine staat zo afgesteld dat er gemiddeld 504 gram in de pakken komt met een standaardafwijking van 2 gram. Het gewicht van de pakken koffie is normaal verdeeld.

a Hoeveel procent van de pakken koffie heeft een inhoud minder dan 500 gram?

b Waarom stelt de fabrikant de machine niet in op 500 gram?

c Marja koopt twee pakken koffie. Beide pakken wegen minder dan 500 gram.
Is er reden om te betwijfelen of de machine wel afgesteld staat op 504 gram?

d Bij een test van een consumentenorganisatie blijkt het gemiddelde gewicht van 50 pakken koffie 503,1 gram is.
Is er nu reden om te veronderstellen dat de machine toch niet op 504 gram staat afgesteld?

Theorie

Een kwantitatieve variabele van een populatie, bijvoorbeeld het gewicht, heeft een gemiddelde. Dit gemiddelde noem je het **populatiegemiddelde** μ.
Je kunt het populatiegemiddelde schatten met het gemiddelde van een steekproef. Het gemiddelde van een steekproef noem je het **steekproefgemiddelde** $\bar{x}$.
Bij een steekproef treedt door de rol van het toeval altijd variatie op. Je bent er dus niet zeker van of het steekproefgemiddelde een goede schatting is van het populatiegemiddelde.

Voorbeeld

Iris verkoopt op de markt appels.
Het gemiddelde gewicht van alle appels is 83 gram. De populatie bestaat uit alle appels die Iris mee heeft. Het populatiegemiddelde is dus 83 gram.
Een klant koopt bij Iris tien appels. Deze tien appels wegen gemiddeld 86 gram. Deze tien appels kun je beschouwen als een steekproef, waarbij het steekproefgemiddelde 86 gram is.

© Noordhoff Uitgevers bv

28 H

In een onderzoek onder alle leerlingen van een school blijkt dat deze leerlingen gemiddeld 11,2 uur per week aan huiswerk besteden. Bas neemt een steekproef van 25 leerlingen. Deze leerlingen besteden gemiddeld 8,7 uur per week aan huiswerk.

a Hoe groot is het populatiegemiddelde μ?

b Geef het steekproefgemiddelde $\bar{x}$.

c Hoe kan het komen dat het steekproefgemiddelde $\bar{x}$ lager is dan het populatiegemiddelde μ?

29

Om een betere schatting te maken van het gemiddelde gewicht van de pakken koffie van opdracht 27, heeft de consumentenorganisatie 200 keer een steekproef van 50 pakken genomen. Het gemiddelde gewicht van deze 50 pakken is steeds berekend. In de dataset zie je het resultaat van de 200 steekproeven.

a Hoeveel gram was het gemiddelde gewicht bij steekproef 1? En bij steekproef 2?

b Geef het gemiddelde van de 200 steekproefgemiddelden.

c De test van de consumentenorganisatie in opdracht 27 heeft van de in totaal 200 steekproeven het laagste gemiddelde. Op basis van die ene steekproef zou je het populatiegemiddelde te laag kunnen schatten.
Geef op basis van alle steekproeven een betere schatting.

d Denk jij dat de machine afgesteld staat op 504 gram?

30

Je kunt de rol van het toeval in het geval van de fabrikant van koffie onderzoeken door steekproeven te simuleren. In het bestand zie je simulaties met $\mu = 504$ en $\sigma = 2$ bij steekproeven met een omvang van 50, 100 en 200.

a Maak een staafdiagram bij de simulaties met $n = 50$.
Neem als eerste klasse $[503; 503{,}2\rangle$.
Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?

b Hoe groot is de spreidingsbreedte bij $n = 50$?

c Maak opdracht a en b ook voor $n = 100$ en $n = 200$.

d Bij welke omvang heeft de bijbehorende verdeling de kleinste spreiding?

Theorie

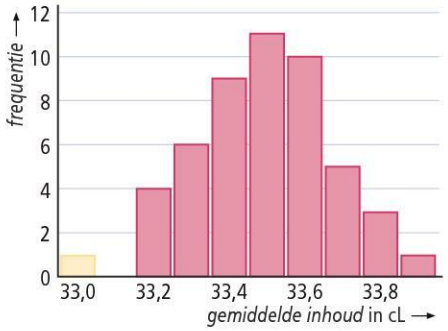
Door een groot aantal simulaties uit te voeren, zie je dat de gemiddelden van de steekproeven normaal verdeeld zijn.
Je noemt dit de steekproevenverdeling van de gemiddelden.
Door de steekproefomvang groter te maken, krijg je een betere schatting.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Een fabrikant vult 10 000 blikjes cola met een machine die volgens hem staat afgesteld op 33 cL.
Ter controle neemt hij één steekproef van 20 blikjes cola.
Het gemiddelde in deze steekproef is 33,0 cL.
De fabrikant denkt daarom dat de machine goed staat afgesteld.

Een medewerker neemt daarna nog 49 steekproeven van 20 blikjes cola en berekent bij elke steekproef de gemiddelde inhoud. In de figuur zie je hoe alle 50 gemiddelden verdeeld zijn.
De 50 steekproefgemiddelden vormen een steekproevenverdeling.
Op basis van de steekproevenverdeling denkt de medewerker dat de machine op meer dan 33 cL staat afgesteld.



31

a Wat is de populatie in het voorbeeld?

b De medewerker schat het populatiegemiddelde op 33,5 cL. Leg uit hoe hij op dit idee komt.

c Welke praktische betekenis heeft je antwoord van opdracht b voor de machine?

d Welk bezwaar heeft het maken van zo'n steekproevenverdeling in de praktijk?

Ondersteunende route → maak opdracht O32

32 H

In een fabriek worden schroeven geproduceerd. Deze worden verpakt in doosjes van 40 stuks. Een medewerker neemt een steekproef van 50 doosjes. In deze 50 doosjes zitten gemiddeld 40,9 schroeven.

a Hoe groot zal hij op basis van deze steekproef het populatiegemiddelde schatten? Geef de praktische betekenis van je antwoord.

b In de loop der jaren heeft de medewerker al veel vaker een steekproef van 50 doosjes genomen. In de dataset zie je het gemiddeld aantal schroeven per doosje bij deze steekproeven.
Hoe groot is het gemiddelde aantal schroeven in de doosjes die in deze fabriek worden geproduceerd?

Uitdagende route → maak opdracht U5

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O32 In een fabriek worden punaises geproduceerd. Deze worden verpakt in doosjes met 200 stuks. Een medewerker neemt een steekproef van 20 doosjes. In deze 20 doosjes zitten gemiddeld 202 punaises.

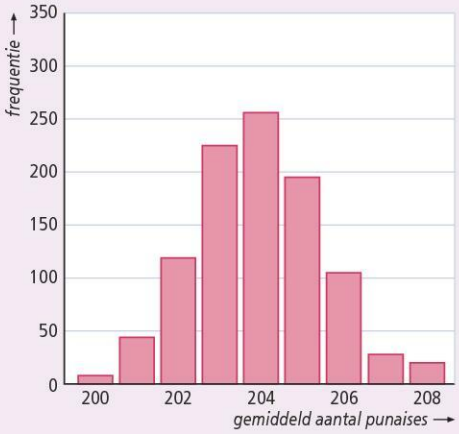
a Hoe groot zal hij op basis van dit steekproefgemiddelde het populatiegemiddelde schatten?

b Geef de praktische betekenis van het antwoord van opdracht a.

c De medewerker neemt vervolgens 1000 keer een steekproef van 20 doosjes. Hij berekent steeds het steekproefgemiddelde. De resultaten staan in de steekproevenverdeling.
Welke steekproefgemiddelde kwam het vaakst voor?

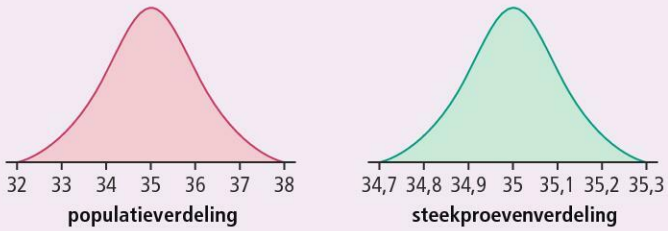
d De steekproevenverdeling is normaal verdeeld. In een normale verdeling is het gemiddelde gelijk aan de modus en de mediaan.
Hoe groot is het gemiddelde van de steekproevenverdeling?

e Geef met de steekproevenverdeling een schatting van het gemiddelde aantal punaises in de doosjes die in deze fabriek worden geproduceerd.



Uitdagende opdrachten

U5 In een populatie is een flink aantal steekproeven met een grote steekproefomvang genomen. De resultaten zijn verwerkt in een steekproevenverdeling.



a Geef bij beide verdelingen een schatting van het gemiddelde en de standaardafwijking.

b Geef een verklaring waarom de standaardafwijking van de steekproevenverdeling kleiner is.

© Noordhoff Uitgevers bv

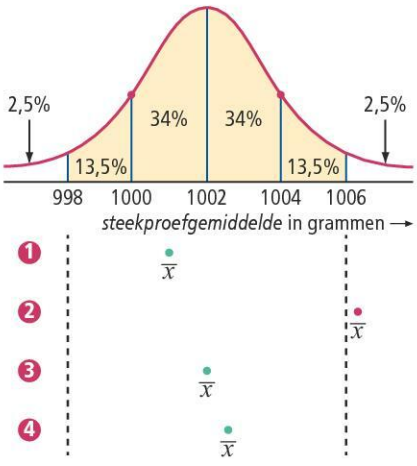
10.6 Betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde

Je leert
- hoe je het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde op basis van één steekproef berekent

Leerroutes
- ondersteunend: 33—34—035—36—37—38
- doorlopend: 33—34—35—36—37—38
- uitdagend: 33—34—35—36—38—U6

Bij een praktische opdracht laat een biologie docent vijf leerlingen de omtrek van een boomstam opmeten. Bij het verwerken van de resultaten krijgt hij als gemiddelde 3,6 meter.
- Hoe zeker is de docent er nu van dat de omtrek van de boomstam inderdaad 3,6 meter is?

33 In een fabriek worden pakken suiker gevuld door een machine. Het gewicht van de pakken suiker is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1002 gram en een standaardafwijking van 10 gram. Ter controle wordt ieder uur een steekproef van 25 pakken genomen. Van deze pakken wordt het gemiddelde gewicht bepaald. De schets van de steekproevenverdeling hoort bij een groot aantal van deze steekproeven.



a Leg met de schets uit dat de standaardafwijking van deze steekproevenverdeling gelijk aan 2 gram is.

b Ga na dat de standaardafwijking van de steekproevenverdeling gelijk is aan $\frac{10}{\sqrt{n}}$ waarbij n de steekproefomvang is.

c Tussen welke waarden liggen de middelste 95% van alle steekproefgemiddelden?

d Onder de verdeling is van vier steekproeven het steekproefgemiddelde $\overline{x}$ aangegeven. Zo kun je zien dat bij steekproef 1 het steekproefgemiddelde $\overline{x}$ 1001 gram was. Bij welke steekproef was het steekproefgemiddelde $\overline{x}$ precies gelijk aan het populatiegemiddelde μ?

e Waarom is het steekproefgemiddelde $\overline{x}$ niet altijd gelijk aan het populatiegemiddelde μ?

f Bij welke steekproef ligt het steekproefgemiddelde $\overline{x}$ buiten de middelste 95% van alle steekproefgemiddelden?

© Noordhoff Uitgevers bv

34 Bij het steekproefgemiddelde $\bar{x}$ van de vier steekproeven van opdracht 33 is aan beide kanten een lijnstuk van lengte 4 getekend. Dit levert een interval met lengte 8 op.

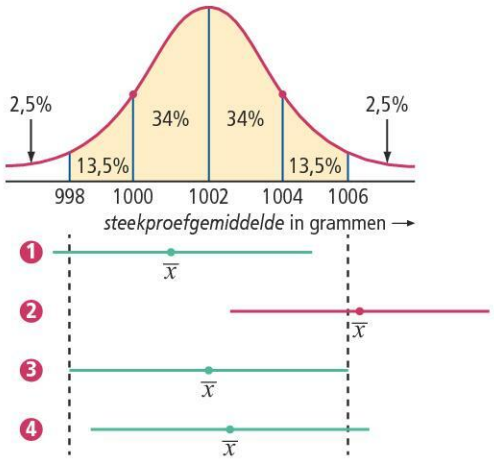
a Waarom is dit interval bij steekproef 3 gelijk aan [998, 1006]?

b Schrijf het interval bij steekproef 1 op.

c Bij welke steekproeven bevat het interval het populatiegemiddelde $\mu = 1002$ gram?

d Leg uit dat alle intervallen waarbij het steekproefgemiddelde $\bar{x}$ tussen de twee gestippelde lijnen ligt het populatiegemiddelde μ bevatten.

e Waarom zal in 95% van alle steekproeven het bijbehorende interval het populatiegemiddelde μ bevatten?



Theorie

Op basis van één steekproef kun je een schatting maken van het gemiddelde van de populatie. Met het 95%-betrouwbaarheidsinterval geef je de nauwkeurigheid van de schatting aan. Daarbij gebruik je het steekproefgemiddelde, de standaardafwijking van de steekproef en de steekproefomvang.

Met 95% zekerheid ligt het populatiegemiddelde in het interval: $\left[\bar{x} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

Hierin is $\bar{x}$ het steekproefgemiddelde, S de standaardafwijking van de steekproef en n de steekproefomvang.

De halve lengte van het betrouwbaarheidsinterval is de foutenmarge.

Voorbeeld

Bij een steekproef onder 200 havo 5 leerlingen blijkt dat deze leerlingen gemiddeld 38 uur aan hun profielwerkstuk werken. In deze steekproef is de standaardafwijking 4,2 uur.

Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde tijd die havo 5 leerlingen werken aan hun profielwerkstuk. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

Oplossing

$\bar{x} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 38 - 2 \times \frac{4{,}2}{\sqrt{200}} \approx 37{,}4$

$\bar{x} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 38 + 2 \times \frac{4{,}2}{\sqrt{200}} \approx 38{,}6$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [37,4 : 38,6].

Met 95% zekerheid ligt de gemiddelde tijd die havo 5 leerlingen aan hun proefielwerkstuk werken tussen 37,4 uur en 38,6 uur.

De foutenmarge is (38,6 – 37,4) : 2 = 0,6 uur.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O35

35 In een steekproef onder 400 havo 5 leerlingen blijkt dat die leerlingen gemiddelde 38,1 uur aan hun profielwerkstuk werken met een standaardafwijking van 3,9 uur.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde tijd die havo 5 leerlingen werken aan hun profielwerkstuk. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

36 H In een onderzoek onder 1500 inwoners uit de gemeente Hardenberg blijkt dat zij jaarlijks gemiddeld 778 euro aan vuurwerk uitgeven met een standaardafwijking van 128 euro.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde bedrag dat jaarlijks aan vuurwerk door de inwoners van Hardenberg wordt uitgegeven.

b Is het meer of minder dan 95% zeker dat het gemiddelde bedrag in euro's dat jaarlijks aan vuurwerk door de inwoners van Hardenberg wordt uitgegeven in het interval [770, 786] ligt? Licht je antwoord toe.

37 In het databestand zie je de gewichten van 404 jongeren van 10 tot 12 jaar. Beschouw deze groep jongeren als een steekproef van alle Nederlandse jongeren van 10 tot 12 jaar.

a Zoek uit wat het gemiddelde en de standaardafwijking van het gewicht van deze 404 jongeren is.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde gewicht van alle Nederlandse jongeren van 10 tot 12 jaar. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

38 Een studente heeft onderzoek gedaan naar de groei van peuters. Ze heeft daarbij een steekproef genomen van 50 meisjes en 50 jongens van 12 maanden oud uit Amsterdam.

a Bereken voor zowel de jongens als de meisjes het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde lengte.

b Leg uit dat uit de 95%-betrouwbaarheidsintervallen volgt dat het waarschijnlijk is dat van de Amsterdamse peuters de gemiddelde lengte van de jongens groter is dan die van de meisjes.

lichaamslengte in cm

	gemiddelde	standaard-afwijking
jongens	88,9	3,93
meisjes	87,5	3,12

Uitdagende route → maak opdracht U6

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O35 In een steekproef onder 500 havo 5 leerlingen blijkt dat die leerlingen gemiddeld 37,9 uur aan hun profielwerkstuk werken met een standaardafwijking van 3,8 uur. Je gaat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde tijd die havo 5 leerlingen aan hun profielwerkstuk werken berekenen.

a Hoe groot is de steekproefomvang n?

b Vul in: de linkergrens van het interval is

$$\bar{x} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 37{,}9 - 2 \times \frac{3{,}8}{\sqrt{500}} \approx \ldots.$$

c Bereken ook de rechtergrens van het interval en schrijf het 95%-betrouwbaarheidsinterval op.

d Bij het 95%-betrouwbaarheidsinterval hoort een conclusie. Vul in.
Met 95% zekerheid ligt de gemiddelde tijd die havo 5 leerlingen aan hun profielwerkstuk werken tussen … uur en … uur.

e Bereken de lengte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

f De foutenmarge is gelijk aan de halve lengte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval.
Bereken de foutenmarge.

Uitdagende opdrachten

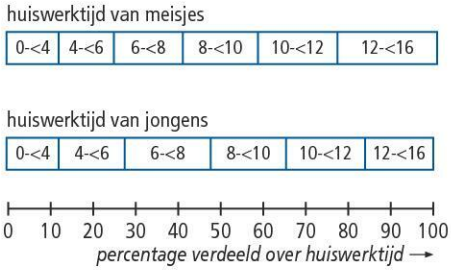
U6 Van een aantal leerlingen is onderzocht hoeveel kilometer zij dagelijks naar school fietsen. Deze leerlingen fietsen gemiddeld 5,6 kilometer met een standaardafwijking van 2,7 kilometer. Op basis van dit onderzoek blijkt dat voor de gemiddelde afstand van alle leerlingen de foutenmarge slechts 0,27 kilometer te zijn.

a Geef het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde afstand die de scholieren dagelijks naar school fietsen.

b Bereken de steekproefomvang.

© Noordhoff Uitgevers bv

39 Uit onderzoek is gebleken dat leerlingen gemiddeld ruim 8 uur per week aan huiswerk besteden en dat meisjes meer tijd aan huiswerk besteden dan jongens. De tijd in uren die leerlingen per week aan hun huiswerk besteden, noemen we de huiswerktijd. In de figuur zie je de resultaten van het onderzoek.

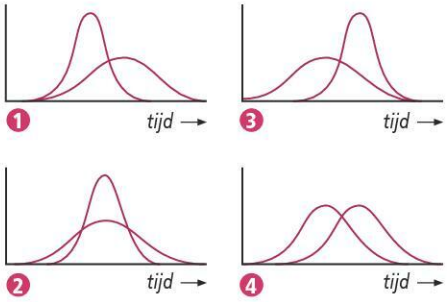


a Hoeveel procent van de meisjes besteedt 8 uur of meer per week aan het huiswerk? Licht je antwoord toe.

b Ga ervan uit dat de huiswerktijd van de meisjes normaal verdeeld is met een gemiddelde van 8,8 uur en een standaardafwijking van 3,2 uur.
Hoeveel procent van de meisjes besteedt minstens 12 uur per week aan huiswerk?

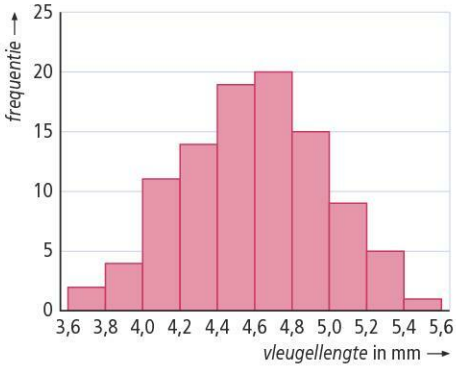
c De huiswerktijd van de jongens is ook normaal verdeeld. Het gemiddelde is 7,5 uur. Verder is gegeven dat 16 procent van hen minder dan 5 uur per week aan huiswerk besteedt.
Bereken de standaardafwijking van de huiswerktijd van de jongens.

d Men heeft een soortgelijk onderzoek gedaan onder studenten. Daarbij is gekeken naar de tijd die mannelijke en vrouwelijke studenten thuis aan hun studie besteden. Het onderzoek wijst uit dat vrouwen per week meer tijd aan 'huiswerk' besteden dan mannen. De spreiding in huiswerktijd bij de mannen is kleiner dan bij de vrouwen.
Welk van de figuren past het best bij de gegevens over de studenten? Licht je antwoord toe.



(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2007, tijdvak 2)

40 In 1955 onderzochten R. R. Sokal en P. E. Hunter de lengte van de vleugels van de huisvlieg. In het bestand staan de resultaten van hun 100 metingen. Het gemiddelde μ is 4,54 mm de standaardafwijking σ is 0,38 mm.



a Je ziet een staafdiagram die bij de tabel hoort.
Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?

b Onderzoek met de 1e en 2e vuistregel of de vleugellengte normaal verdeeld is.

c Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde vleugellengte van de huisvlieg en geef de bijbehorende foutenmarge.

41 Uit een onderzoek onder 3000 Nederlanders blijkt dat 61% van de deelnemers regelmatig naar soapseries kijkt.

a Als je werkt met een betrouwbaarheid van 95%, tussen welke waarden ligt dan het percentage Nederlanders die regelmatig naar soapseries kijken?

b Stel dat je met een betrouwbaarheid van 99% wilt werken. Wordt het betrouwbaarheidsinterval dan groter of kleiner?

© Noordhoff Uitgevers bv

42 In een meubelfabriek worden planken gemaakt. De zaagmachine produceert planken waarvan de lengte normaal verdeeld is met een gemiddelde van 800 mm en een standaardafwijking van 2 mm. De planken horen 800 mm lang te zijn, maar als ze hoogstens 2 mm langer of korter zijn, is het ook goed. Planken die langer dan 802 mm zijn, worden met de hand op maat gemaakt. Planken die korter zijn dan 798 mm zijn onbruikbaar. Op elke goede plank maakt de fabriek € 3,25 winst. Voor het op maat maken van een te lange plank gaat daar een halve euro af. Elke onbruikbare plank levert een verliespost van € 2,- op. Er komt een bestelling binnen voor 1000 planken.

a Hoeveel winst mag de fabriek verwachten?

b Is het voordeliger om de machine in te stellen op een gemiddelde lengte van 802 mm zodat je minder onbruikbare planken krijgt? Ga ervan uit dat de extra kosten voor het hout te verwaarlozen zijn.

43 Op 5 juni 2014 keek 9,2% van de Nederlandse bevolking op televisie naar het NOS-journaal van 20.00 uur. We zeggen dan dat de *kijkdichtheid* van dit journaal 9,2 is. Stel dat dit cijfer het resultaat is van een steekproef van 2700 personen.

a Laat zien dat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de kijkdichtheid van dit journaal gelijk is aan $9{,}2 \pm 1{,}1$.

b Stichting Kijk Onderzoek (SKO) houdt het kijkonderzoek om uitspraken te kunnen doen over hoeveel en welke mensen van de Nederlandse bevolking naar de verschillende televisiezenders en programma's kijken. SKO wil dat het betrouwbaarheidsinterval smaller wordt. Neem aan dat de kijkdichtheid bij een grotere steekproef steeds 9,2 blijft.
Hoe groot moet de steekproef minstens zijn, zodat de totale breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval in het kijkonderzoek kleiner dan 1 is? Geef je antwoorden in tientallen nauwkeurig.

(Ontleend aan een voorbeeld examenopgave statistiek wiskunde A havo)

44 In een onderzoek onder een groot aantal Nederlandse automobilisten is onderzocht hoeveel procent van hen een botsing heeft gehad in 2018. Op basis van dit representatieve onderzoek doet men de volgende uitspraak over alle Nederlandse automobilisten:
'Met 95% zekerheid ligt het percentage Nederlandse automobilisten die een botsing hebben gehad in 2018 tussen 1,72% en 3,28%.'
Onderzoek hoeveel van de ondervraagden een botsing hebben gehad.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Normale verdeling en vuistregels

De frequentieverdeling van een variabele kun je vaak benaderen met een klokvormige grafiek. De belangrijkste kenmerken van zo'n grafiek zijn:

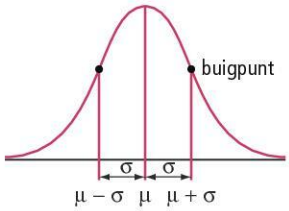
- De grafiek is symmetrisch.
- De symmetrieas ligt bij het gemiddelde μ.
- Het gemiddelde, de mediaan en de modus vallen samen.
- De standaardafwijking σ is de afstand van de symmetrieas tot de buigpunten van de grafiek.

Bij een normale verdeling gelden de volgende vuistregels:

1 van de data ligt ongeveer 68% tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
2 van de data ligt ongeveer 95% tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.
3 van de data ligt vrijwel 100% tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.

Deze veel voorkomende klokvormige verdeling wordt de normale verdeling genoemd. Een variabele waarvan de frequentieverdeling benaderd kan worden door de normale verdeling heet normaal verdeeld.

In een buigpunt verandert een toenemende stijging (of daling) in een afnemende stijging (of daling).



S1 Van 69 jongens zijn bij het onderdeel vergooien de resultaten genoteerd. De resultaten staan in de dataset.
Zijn de prestaties van de jongens op het onderdeel vergooien normaal verdeeld?

Theorie

Steekproef, steekproefomvang, aselect, representatief

Om iets te weten te komen over een groep onderzoek je meestal slechts een deel van de groep. Je noemt dat een steekproef. Om juiste conclusies te kunnen trekken over een populatie, moet de steekproefomvang groot genoeg zijn en moet de steekproef aselect zijn. Dat wil zeggen dat iedereen (of ieder ding) uit de populatie evenveel kans moet hebben om in de steekproef terecht te komen.
Een steekproef die representatief is, vormt een goede afspiegeling van de hele populatie.

Voorbeeld

De directie van een school met 2200 leerlingen wil onderzoeken of het beter is om de school om 8.30 uur te laten beginnen in plaats van om 8.15 uur. Ze nemen twee steekproeven.

A Ze ondervragen bij de fietsenstalling de eerste 200 leerlingen die daar aankomen.
B Ze kiezen willekeurig 200 leerlingen uit het leerlingenbestand.

Steekproef A is niet aselect en steekproef B wel.

S2
a Noem twee redenen waarom steekproef A in het voorbeeld niet aselect is.
b Hoe groot is in beide steekproeven de steekproefomvang?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Populatieproportie, steekproefproportie, steekproevenverdeling

Het deel van een populatie dat aan een bepaalde eigenschap voldoet, heet de populatieproportie. In een steekproef heet het deel dat die eigenschap heeft de steekproefproportie. De populatieproportie en de steekproefproportie worden beide geschreven als een getal tussen 0 en 1. De steekproefproportie is een schatting voor de populatieproportie. Door een groot aantal steekproeven uit te voeren, zie je dat de steekproefproporties normaal verdeeld zijn. Je noemt dit de steekproevenverdeling van de proporties.

Voorbeeld

Een boswachter beweert dat 7% van alle bomen in een bos ziek is.
De populatieproportie zou dan 0,07 zijn.
Bij een steekproef onder 100 bomen blijken 5 bomen ziek. Je kunt dan zeggen dat de steekproefproportie 0,05 is.
Door nog meer steekproeven te nemen, krijg je een steekproevenverdeling.
Het gemiddelde van de steekproevenverdeling is een goede schatter voor de populatieproportie.

S3 Een fastfoodketen doet onderzoek naar de meningen en wensen van de klanten. In 100 steekproeven wordt aan 50 klanten gevraagd of zij met pin betalen.

a Bij een steekproef is de steekproefproportie 0,38. Hoeveel van deze 50 klanten betalen met pin?

b Maak een staafdiagram bij de variabele *percentage dat met pin betaalt* waarbij de eerste klasse $[16, 18\rangle$ is.

c Schat de populatieproportie van het aantal klanten dat met pint betaalt.

Theorie

Populatiegemiddelde, steekproefgemiddelde, steekproevenverdeling

Een kwantitatieve variabele van een populatie, bijvoorbeeld leeftijd, heeft een gemiddelde. Dit gemiddelde noem je het populatiegemiddelde μ. Je kunt het populatiegemiddelde in de praktijk schatten met het gemiddelde van een steekproef ofwel het steekproefgemiddelde $\bar{x}$.
Door een groot aantal steekproeven uit te voeren, zie je dat de gemiddelden van de steekproeven normaal verdeeld zijn. Je noemt dit de steekproevenverdeling van de gemiddelden.

Voorbeeld

Een fabrikant van pillen beweert dat het gemiddelde gewicht van alle pillen 10,1 gram per pil is.
Het populatiegemiddelde zou dan 10,1 gram zijn.
Er wordt een steekproef van 100 pillen genomen waarbij het gemiddelde gewicht 9,8 gram per pil is.
Je kunt dan zeggen dat het steekproefgemiddelde 9,8 gram is.

S4 In het onderzoek van de fastfoodketen wordt aan de klanten gevraagd de smaak van de hamburger te beoordelen met een cijfer.

a Geef het laagste steekproefgemiddelde.

b Maak een staafdiagram bij de variabele *beoordeling*.

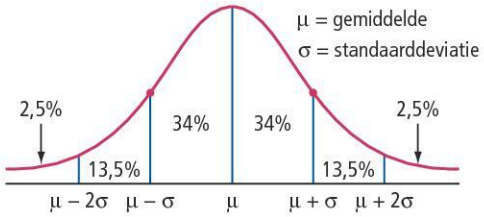
c Maak met de steekproevenverdeling een schatting van het populatiegemiddelde.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt met de vuistregels van een normale verdeling rekenen.

Met de vuistregels kun je de oppervlakte onder de grafiek van een normale verdeling opsplitsen in zes stukken. Bij het maken van opdrachten waarin gegeven is dat een variabele normaal verdeeld is, is het handig om een schets te maken van de grafiek van de bijbehorende normale verdeling.



S5 In het onderzoek van de fastfoodketen blijkt dat het bedrag dat een mannelijke klant uitgeeft bij een bestelling normaal verdeeld is met een gemiddelde van € 7,19 en een standaardafwijking van € 0,34.
Hoeveel procent van de mannelijke klanten geeft tussen de € 6,85 en de € 7,87 uit?

Vaardigheid

Je kunt het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een proportie op basis van één steekproef berekenen.

Op basis van één steekproef kun je een schatting maken van de populatieproportie. Met het 95%-betrouwbaarheidsinterval geef je de nauwkeurigheid van de schatting aan. Daarbij gebruik je de steekproefproportie en de steekproefomvang.
Met 95% zekerheid ligt de populatieproportie in het interval:

$$\left[p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Hierin is p de steekproefproportie en n is de steekproefomvang.
De halve lengte van het betrouwbaarheidsinterval is de foutenmarge.

Voorbeeld

Bij een steekproef onder 500 havo 5 leerlingen blijkt dat 82% van de leerlingen geslaagd is.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het slagingspercentage van alle havo 5 leerlingen.
Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

Oplossing

$$p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-2)}{n}} = 0{,}82 - 2 \times \sqrt{\frac{0{,}82(1-0{,}82)}{500}} \approx 0{,}786$$

$$p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}82 + 2 \times \sqrt{\frac{0{,}82(1-0{,}82)}{500}} \approx 0{,}854$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,786; 0,854].
Met 95% zekerheid ligt het percentage havo 5 leerlingen dat is geslaagd tussen 78,6% en 85,4%
De foutenmarge is (85,4 – 78,6) : 2 = 3,4%.

© Noordhoff Uitgevers bv

S6 In 2018 deden op een scholengemeenschap 160 havo leerlingen examen. Van deze leerlingen zijn er 104 geslaagd. Beschouw deze 160 leerlingen als een steekproef.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het slagingspercentage van alle havo leerlingen in 2018. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

Vaardigheid

Je kunt het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde op basis van één steekproef berekenen.

Op basis van één steekproef kun je een schatting maken van het gemiddelde van de populatie. Met het 95%-betrouwbaarheidsinterval geef je de nauwkeurigheid van de schatting aan. Daarbij gebruik je het steekproefgemiddelde, de standaardafwijking van de steekproef en de steekproefomvang. Met 95% zekerheid ligt het populatiegemiddelde in het interval:

$$\left[\overline{x} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{x} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Hierin is $\overline{x}$ het steekproefgemiddelde, S de standaardafwijking van de steekproef en n de steekproefomvang.
De halve lengte van het betrouwbaarheidsinterval is de foutenmarge.

Voorbeeld

Bij een steekproef onder 100 havo leerlingen blijkt dat deze leerlingen gemiddeld een 6,4 halen voor hun wiskunde A examen. In deze steekproef is de standaardafwijking 0,21.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde cijfer voor het wiskunde A havo examen.
Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

Oplossing

$$\overline{x} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 6{,}4 - 2 \times \frac{0{,}21}{\sqrt{100}} \approx 6{,}358$$

$$\overline{x} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 6{,}4 + 2 \times \frac{0{,}21}{\sqrt{100}} \approx 6{,}442$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [6,358; 6,442].
Met 95% zekerheid ligt het gemiddelde voor het wiskunde A havo examen tussen 6,358 en 6,442.
De foutenmarge is (6,442 − 6,358) : 2 = 0,042.

S7 Bij een steekproef onder 400 havoleerlingen blijkt dat deze leerlingen gemiddeld een 6,7 halen voor hun wiskunde B examen. In deze steekproef is de standaardafwijking 0,29.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde cijfer voor het wiskunde B havo examen. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

© Noordhoff Uitgevers bv

T1 Een autofabrikant is van plan een nieuw type autoband op de markt te brengen met de merknaam Quality. Natuurlijk wordt een nieuw type band uitvoerig getest. Onder allerlei omstandigheden wordt er 35 000 km met de banden gereden en daarna wordt de profieldiepte opgemeten. In de dataset staan de testgegevens van 200 banden van het type Quality.

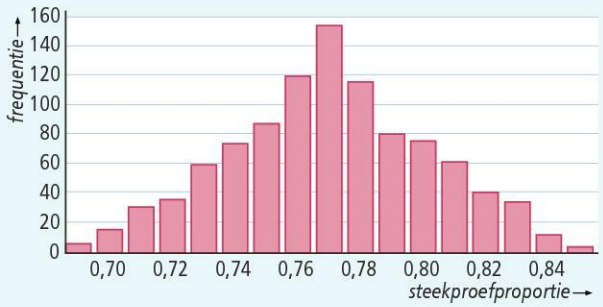
a Maak een staafdiagram bij de variabele *profieldiepte* waarbij de eerste klasse [1,55; 1,59⟩ is.

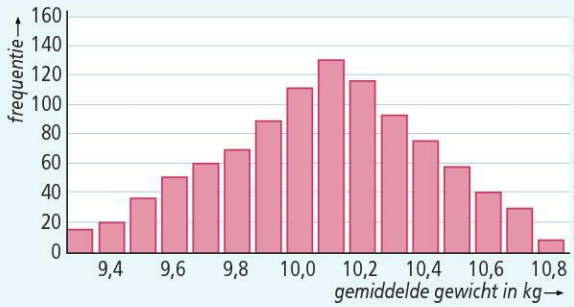
b Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?

c Onderzoek met de 1e en 2e vuistregel of de profieldiepte van de 200 banden normaal verdeeld is.

d De profieldiepte van een ander merk band, met de merknaam Excellent, is na 35 000 km normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,75 mm en een standaardafwijking van 0,1 mm.
Volgens de wet wordt een band met een profieldiepte van minder dan 1,6 mm afgekeurd.
Geef een schatting van het percentage banden van dit merk dat na 35 000 km wordt afgekeurd.

T2 Op een vliegveld houdt men dagelijks twee steekproeven. Bij de ene steekproef houden ze onder 500 reizigers bij hoeveel procent met een koffer reist. Bij de tweede steekproef weegt men het gewicht van 500 koffers. In de steekproevenverdelingen zie je de resultaten van 1000 van zulke steekproeven.





a Geef de hoogste steekproefproportie van het aantal reizigers dat met een koffer reist. Hoeveel reizigers hebben in een steekproef met zo'n steekproefproportie een koffer bij zich?

b Schat met de steekproevenverdeling het percentage reizigers dat met een koffer reist.

c In hoeveel procent van de steekproeven is het gemiddelde gewicht van de koffers meer dan 10,5 kg?

d Schat met de steekproevenverdeling het gemiddelde gewicht van een koffer.

© Noordhoff Uitgevers bv

T3 Enkele producenten van computerspelletjes willen onderzoek doen naar de bekendheid onder jongeren van een nieuw in Nederland op de markt gebracht computerspel.

a Geef van de onderzoeksmethoden aan waarom ze niet aselect zijn.

b Bedenk een onderzoeksmethode die wel een representatieve steekproef oplevert.

c Ze nemen een goede steekproef en vinden dat 56 van de 2000 ondervraagden het computerspel kent.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het percentage jongeren die het computerspel kent.

A Ze bellen de eerste 2000 mensen uit het telefoonboek van Zwolle.

B Ze zetten een enquête op hun website. Iedereen die deze invult, maakt kans op een prijs.

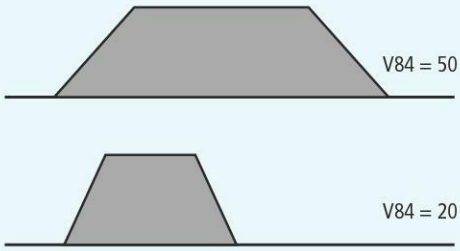
C Ze interviewen op vijf doordeweekse ochtenden in totaal 2000 mensen in een winkelcentrum.

T4 Volgens een autofabrikant is het gemiddelde verbruik van een bepaald type auto 7,3 liter op 100 km. In een onderzoek onder 400 automobilisten van dit type auto is het gemiddelde verbruik 7,9 liter op de 100 km met een standaardafwijking van 1,6 liter.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde verbruik van dit type auto op 100 km. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

b Denk jij dat de verbruikgegevens van de autofabrikant kloppen? Licht je antwoord toe.

T5 Verkeersdrempels zijn bedoeld om de snelheid van automobilisten te beïnvloeden. Afhankelijk van de gewenste snelheid worden de drempels steiler of minder steil gemaakt. De drempel met V84 = 50 is zo ontworpen dat 84% van de automobilisten de drempel passeert met een snelheid van minder dan 50 km per uur. In de praktijk blijkt dat de passeersnelheid bij een drempel normaal verdeeld is. Bij de drempel met V84 = 50 werd een gemiddelde passeersnelheid van 43,2 km per uur gevonden, met een standaardafwijking van 6,8 km per uur.



a Laat zien dat bij deze verdeling inderdaad 84% van de automobilisten niet harder dan 50 km per uur rijdt.

b Voor een test zal de snelheid van 1200 automobilisten worden gemeten bij een drempel met V84 = 50.
Bij hoeveel van deze 1200 metingen kan op grond van eerdere ervaringen een snelheid van meer dan 36,4 km per uur worden verwacht?

c In een kinderrijke buurt worden verkeersdrempels met V84 = 20 aangebracht. De passeersnelheid is weer normaal verdeeld met een standaardafwijking is 2,1 km per uur.
Bereken de gemiddelde passeersnelheid bij dit type drempels.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 1990, tijdvak 1)

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt met de vuistregels van een normale verdeling rekenen.

E1 In een onderzoek onder 404 kinderen is onder andere het gewicht en de schoenmaat opgemeten.

a Maak een staafdiagram bij de variabele *schoenmaat* waarbij de eerste klasse $[0, 2\rangle$ is.

b Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?

c Bereken het percentage kinderen met een schoenmaat tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.

d Hoeveel procent van de kinderen heeft een schoenmaat tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$?

e Is de schoenmaat van de kinderen normaal verdeeld?

f Onderzoek of het gewicht van deze kinderen normaal verdeeld is.

E2 Een tomatenkweker weet uit jarenlange ervaring dat het gewicht van de tomaten die hij oogst normaal verdeeld is. Het gemiddelde gewicht van de tomaten is 68 gram met een standaardafwijking van 18 gram. Tomaten die minder wegen dan 50 gram worden geselecteerd om verwerkt te worden tot tomatenpuree. Tomaten met een gewicht tussen 50 gram en 104 gram zijn bestemd voor de binnenlandse handel en tomaten met een gewicht van meer dan 104 gram zijn bedoeld voor de export.

a Bereken welk percentage van de tomaten voor puree is, welk percentage in Nederland wordt verkocht en welk percentage voor de export bestemd is.

b Door het gebruik van kunstmest wordt het gemiddelde gewicht van de tomaten 18 gram meer, maar de spreiding in de gewichten blijft hetzelfde. Dat jaar heeft de kweker 4 200 000 tomaten.
Bereken hoeveel tomaten verwerkt worden tot puree.

Je kunt het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde op basis van één steekproef berekenen.

E3 Volgens de berekeningen van het kabinet is het gemiddelde inkomen van een eenpersoonshuishouden € 31.000,-. In een steekproef onder 1500 eenpersoonshuishoudens is het gemiddelde inkomen € 30.400,- met een standaardafwijking van € 12.800,-.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde inkomen van een eenpersoonshuishouden. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

b Denk jij dat het kabinet gelijk heeft? Licht je antwoord toe.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een proportie op basis van één steekproef berekenen.

E4 Volgens de lijsttrekker van de politieke partij D66 zal ongeveer een kwart van alle stemgerechtigden op D66 gaan stemmen. Een opiniepeiler ondervraagt 400 stemgerechtigden of ze op D66 zullen gaan stemmen. In deze steekproef geven 92 stemgerechtigden aan dat ze dat gaan doen.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage stemgerechtigheden dat op D66 zal stemmen.

b Denk jij dat de lijsttrekker gelijk gaat hebben? Licht je antwoord toe.

E5 Een jamfabrikant heeft twee vulmachines. Een nieuwe die tamelijk precies afgesteld kan worden zodat de standaardafwijking van het gewicht 6 gram is en een oudere machine waarbij de standaardafwijking 15 gram is.
Op de wikkel van de jampotjes komt te staan dat het netto gewicht 340 gram is. De nieuwe machine wordt op een gemiddelde van 346 gram en de oudere machine op een gemiddelde van 355 gram afgesteld.
De gewichten zijn bij beide machines normaal verdeeld.

a Schets in één figuur voor beide machines de grafiek van de normale verdeling.

b Aan welke machine geef jij als consument de voorkeur? Waarom?

c Ga voor beide machines na hoeveel procent van de potjes minder dan 340 gram zal wegen.

d De fabrikant besluit de oudere machine te vervangen door een nieuwe. De machine die nu wordt aangeschaft vult de potjes met een standaardafwijking van 3,5 gram. De machine wordt zo afgesteld dat maximaal 2,5% van de potjes een gewicht onder de 340 gram heeft.
Op welk gemiddelde gewicht wordt de machine afgesteld?

E6 Uit een enquête in opdracht van de Stichting tegen Kanker van maart 2007 onder 1988 Belgen bleek 61% voorstander te zijn van het rookvrij maken van cafés. In oktober 2006 was dat nog 55% van de toen ondervraagde personen.
Onderzoek met een 95%-betrouwbaarheidsinterval of het aantal voorstanders in de periode van oktober 2006 tot maart 2007 is toegenomen.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Verdelingen (zonder ICT) 10

SE CE K

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 3 heb je geleerd hoe je data kunt verwerken en op verschillende manieren kunt weergeven in grafieken. In hoofdstuk 7 heb je geleerd welke spreidingsmaten er zijn.

In dit hoofdstuk leer je meer over een veel voorkomende vorm van een verdeling, de zogenaamde normale verdeling. Bij deze verdeling horen vuistregels. Met deze vuistregels kun je berekenen hoeveel procent van een populatie aan een bepaalde eigenschap voldoet.
Aan de hand van de resultaten van een steekproef worden vaak statistische uitspraken gedaan over de populatie. In dit hoofdstuk leer je hoe je de betrouwbaarheid van zo'n statistische uitspraak kunt onderzoeken.

In deel 3 is er nog een afsluitend hoofdstuk statistiek. In dat hoofdstuk staat het trekken van conclusies uit data centraal.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 43
- *Ordenen en structureren* opdracht 9
- *Abstraheren* opdracht 21

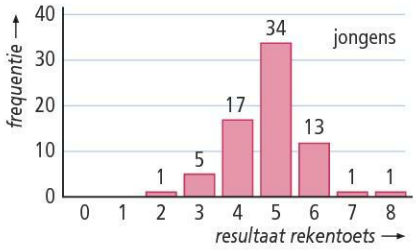
© Noordhoff Uitgevers bv

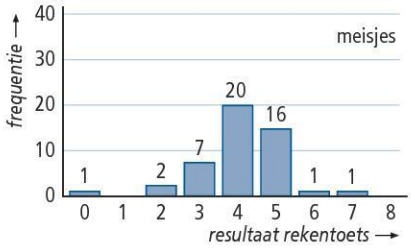
V1 Een bioscoop heeft het afgelopen jaar minder bezoekers gehad. De manager zegt dat dit komt doordat de bioscoop minder goed bereikbaar was vanwege allerlei verbouwingen in de stad. Een medewerker denkt dat het komt doordat er het afgelopen jaar geen grote films zijn uitgekomen. De directie besluit een onderzoek onder haar bezoekers te starten om te ontdekken wat de redenen zijn voor het lagere aantal bezoekers.

a Wat is in dit onderzoek de populatie?
b Geef twee voorbeelden van vragen die bij het onderzoek gesteld kunnen worden.
c Geef twee voorbeelden van statistische variabelen waarover data verzameld kunnen worden.
d Geef twee voorbeelden van statistische uitspraken die het onderzoek zouden kunnen komen.

V2 De klassen 3 vmbo van een scholengemeenschap deden mee aan een rekentoets. In de tabel zie je de resultaten van de leerlingen uit deze klassen gesplitst op niveau.

	eindresultaat									
niveau	0	1	2	3	4	5	6	7	8	totaal
BB	0	0	2	4	8	17	3	0	0	34
KB	1	0	1	8	29	33	11	2	1	86
totaal	1	0	3	12	37	50	14	2	1	120

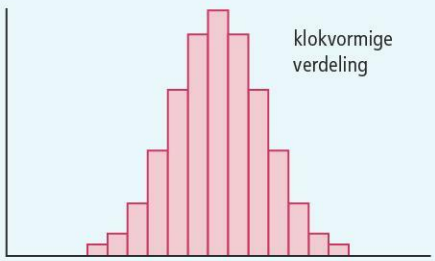




a Welke statistische variabelen komen in deze tabel voor?
b Welke waarden neemt de statistische variabele niveau aan?
c Hoeveel procent van de BB-leerlingen heeft een voldoende?
d En hoeveel procent van de KB-leerlingen heeft een voldoende?
e Welke groep heeft de rekentoets het beste gemaakt, de BB-leerlingen of de KB-leerlingen? Verklaar je antwoord.
f In de staafdiagrammen zie je de resultaten gesplitst op geslacht.
Wie hebben de rekentoets het beste gemaakt, de jongens of meisjes? Verklaar je antwoord.

Theorie

Een dataset bevat de waarden van één of meer statistische variabelen. Datasets kun je ordenen in bijvoorbeeld frequentietabellen of staafdiagrammen. Dit zijn beide voorbeelden van een frequentieverdeling.
De vorm van een staafdiagram geeft informatie over de frequentieverdeling. Daarbij kun je onder andere letten op symmetrie en op uitschieters.



© Noordhoff Uitgevers bv

V3

a Leg uit waarom bij een klokvormige verdeling de modus, de mediaan en het gemiddelde ongeveer gelijk zijn.

b Geef bij de volgende situaties aan welke vorm het bijbehorende staafdiagram heeft. Verklaar je antwoord.

A De gewichten van kg pakken suiker.

B Het aantal Nederlanders die in een bepaalde week van het jaar op vakantie zijn.

C Het aantal jarige leerlingen in een bepaalde maand.

V4

In de tabel zie je van drie kernvakken gegevens over de eindresultaten.

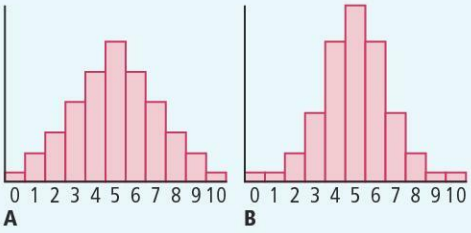
a Welk vak heeft de beste resultaten?

b Welk vak heeft de grootste spreiding als je als maat de spreidingsbreedte neemt?

	gem.	laagste	hoogste
Nederlands	5,9	4,1	7,6
Engels	6,4	4,1	8,2
wiskunde	6,2	3,7	8,5

Theorie

Om statistische gegevens samen te vatten gebruik je centrummaten. Er zijn drie centrummaten: het gemiddelde, de modus en de mediaan. De klasse met de grootste frequentie noem je de modale klasse.
Met spreidingsmaten geef je aan hoe ver gegevens van elkaar af liggen. De eenvoudigste spreidingsmaat is de spreidingsbreedte, dat is het verschil tussen het grootste en het kleinste waarnemingsgetal. Een andere spreidingsmaat is het verschil tussen het derde kwartiel Q_3 en het eerste kwartiel Q_1, de kwartielafstand. De standaardafwijking of standaarddeviatie zegt iets zegt over de spreiding rond het gemiddelde. De korte notatie is σ. In figuur B liggen meer waarnemingsgetallen dichter bij het gemiddelde dan in figuur A. In figuur B is de standaardafwijking dus kleiner dan in figuur A.



V5

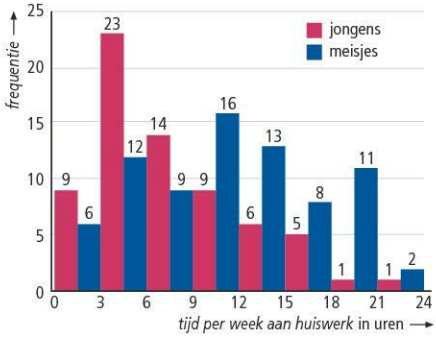
In de figuur zie je hoeveel uur jongens en meisjes in een week aan huiswerk besteden.

a Ga na dat de verdelingen een gelijke spreiding hebben als je let op de spreidingsbreedte.

b Bij welk geslacht wordt er gemiddeld het minste tijd in een week aan huiswerk besteed?

c Bij welk geslacht is volgens jou de spreiding van de huiswerktijd het grootst?

d Bij welk geslacht zal de standaardafwijking van de variabele huiswerktijd het grootst zijn? Licht je antwoord toe.



© Noordhoff Uitgevers bv

10.1 Normale verdeling

Je leert
- wat een normale verdeling is

Leerroutes
- ondersteunend: 1—2—03—4—5
- doorlopend: 1—2—3—4—5
- uitdagend: 1—2—4—5—U1

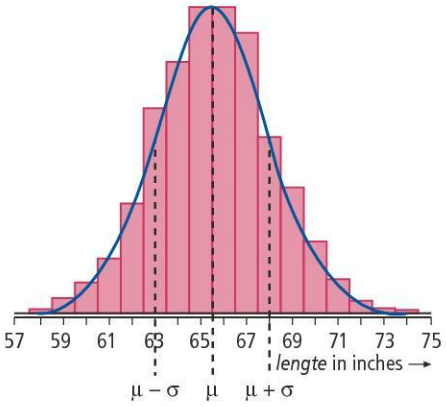
Een machine vult 1000 keer een fles met 1 liter water. Van alle flessen wordt na afloop de inhoud gemeten. De resultaten worden in een staafdiagram verwerkt.
- Hoe zal het staafdiagram bij deze resultaten eruitzien?

1 In 1901 is van 3000 mannen de lengte in inch gemeten. In de tabel zie je de resultaten.

lengte in inches	57	58	59	60	61	62	63	64	65
frequentie	1	4	22	46	83	156	307	388	465

lengte in inches	66	67	68	69	70	71	72	73	74
frequentie	463	421	296	162	107	52	19	6	2

Bij de tabel is een staafdiagram getekend met klassenbreedte 1 inch. Hierin is een vloeiende grafiek getekend die er zo goed mogelijk bij past. De gemiddelde lengte μ van de 3000 mannen is 65,6 inch en de standaardafwijking σ is 2,5 inch.



a Ga na dat $\mu - \sigma = 63{,}1$ en bereken $\mu + \sigma$.

b Je ziet dat bij $\mu - \sigma = 63{,}1$ de vloeiende grafiek overgaat van toenemend stijgend in afnemend stijgend. Welke verandering in daling heeft de grafiek bij $\mu + \sigma$?

c Ga na dat 2033 mannen een lengte hadden tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.

d Hoeveel procent van de mannen had een lengte tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$?

e Bereken $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$. Geef die waarden op de horizontale as aan.

f Bereken hoeveel procent van de mannen een lengte tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ had.

g Hoeveel procent van de mannen had een lengte tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

De frequentieverdeling van een variabele kun je vaak benaderen met een klokvormige grafiek. De belangrijkste kenmerken van zo'n grafiek zijn:

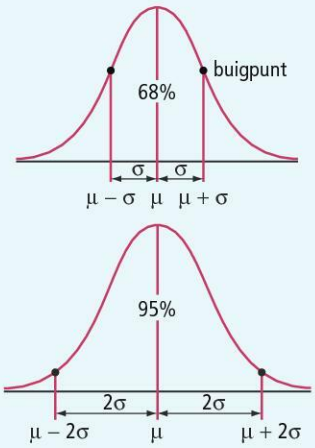
- De grafiek is symmetrisch.
- De symmetrieas ligt bij het gemiddelde μ.
- Het gemiddelde, de mediaan en de modus vallen samen.
- De standaardafwijking σ is de afstand van de symmetrieas tot de buigpunten van de grafiek.

Bij een normale verdeling gelden de volgende vuistregels:

1 Van de data ligt ongeveer 68% tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
2 Van de data ligt ongeveer 95% tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.
3 Van de data ligt vrijwel 100% tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.

Deze veel voorkomende klokvormige verdeling wordt de **normale verdeling** genoemd. Een variabele waarvan de frequentieverdeling benaderd kan worden door de normale verdeling heet **normaal verdeeld**.

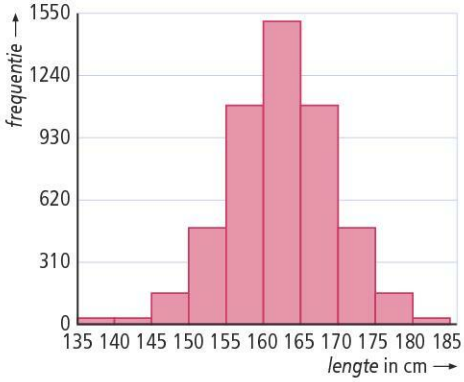
In een buigpunt verandert een toenemende stijging (of daling) in een afnemende stijging (of daling).



2 W

In 1947 deden de wiskundigen Freudenthal en Sittig in opdracht van de Bijenkorf onderzoek naar onder andere de lengte van 5001 vrouwen. Dit onderzoek stond aan de basis van een nieuw maatsysteem voor damesconfectie.
De resultaten staan in de tabel op het werkblad. Het gemiddelde μ is 162,0 cm en de standaardafwijking σ is 6,4 cm.

a Je ziet een staafdiagram die bij de variabele lengte hoort. Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?
b Bereken $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
c Hoeveel procent van de vrouwen had een lengte tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$?
d Hoeveel procent van de vrouwen had een lengte tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$?
e Was de lengte van de vrouwen normaal verdeeld?



© Noordhoff Uitgevers bv

Om na te gaan of een variabele normaal verdeeld is, controleer je of het bijbehorende staafdiagram klokvormig is. Om meer zekerheid te hebben, kun je controleren of de 1e en de 2e vuistregel kloppen bij de frequentieverdeling.

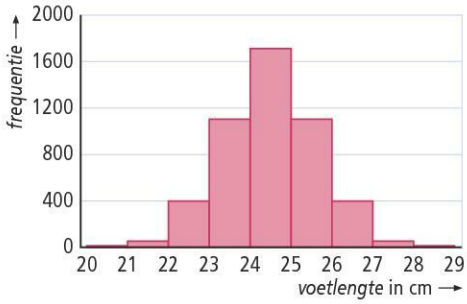
Ondersteunende route → maak opdracht O3

3 W H

In een onderzoek werd gekeken naar de voetlengte van 5001 vrouwen. De resultaten staan in de tabel op het werkblad. Het gemiddelde μ is 24,48 cm en de standaardafwijking σ is 1,20 cm.

a Je ziet een staafdiagram die bij de tabel hoort. Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?

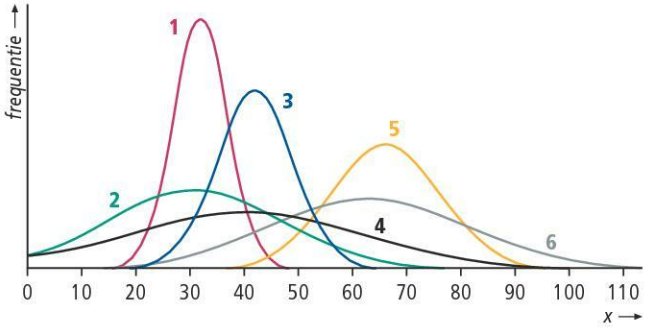
b Onderzoek met de 1e en 2e vuistregel of de voetlengte van de vrouwen normaal verdeeld is.



4

a Wat gebeurt er met de grafiek van een normale verdeling als het gemiddelde kleiner wordt en de standaardafwijking gelijk blijft?

b En wat gebeurt er met de grafiek van een normale verdeling als de standaardafwijking kleiner wordt en het gemiddelde gelijk blijft?



5

Je ziet zes grafieken die bij zes statistische variabelen horen die normaal verdeeld zijn.

a Welke verdeling heeft het grootste gemiddelde? En welke het kleinste?

b Welke verdeling heeft de grootste standaardafwijking? En welke de kleinste?

Uitdagende route → maak opdracht U1

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O3 W

Onder 2111 hbo studenten is onderzocht in hoeveel maanden ze afstuderen. De resultaten staan in de tabel op het werkblad. Het gemiddelde μ is 55,1 maanden en de standaardafwijking σ is 5,8 maanden.

a Je ziet een staafdiagram die bij de tabel hoort. Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?

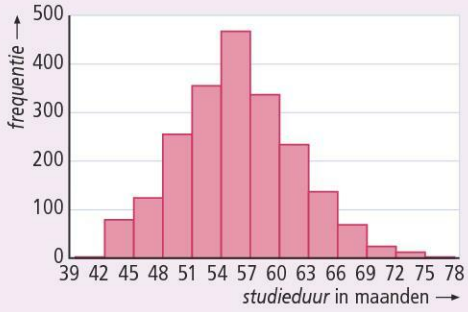
b Bereken $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.

c Ga na dat 1419 van de 2111 hbo studenten een studieduur hebben van tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.

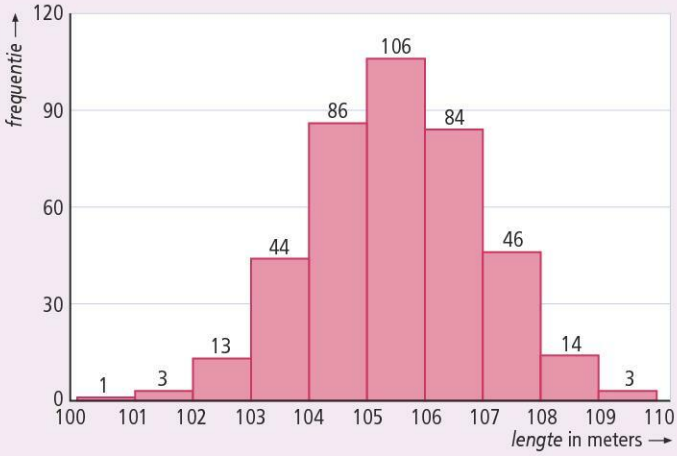
d Hoeveel procent is dat? Klopt de 1e vuistregel?

e Controleer ook de 2e vuistregel.

f Is de studieduur van de hbo studenten normaal verdeeld?



Uitdagende opdrachten



U1

In een textielfabriek worden rollen linnen gemaakt. Het is de bedoeling dat elke rol minstens 100 meter stof bevat. Door de onnauwkeurigheid van de machine zal niet elke rol precies evenveel meters stof bevatten. Van 400 rollen wordt de lengte nagemeten. De resultaten zijn verwerkt in een staafdiagram. De gemiddeld lengte van een rol is 105,5 meter en de standaardafwijking is 1,5 meter.
Onderzoek met de vuistregels of de lengte van de stof op een rol normaal verdeeld is.

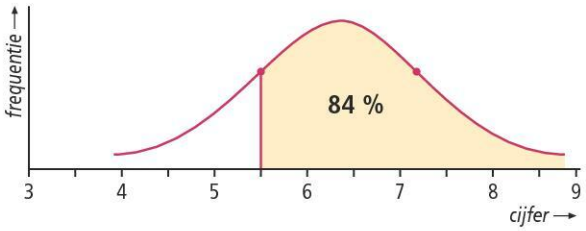
© Noordhoff Uitgevers bv

10.2 Rekenen met de vuistregels

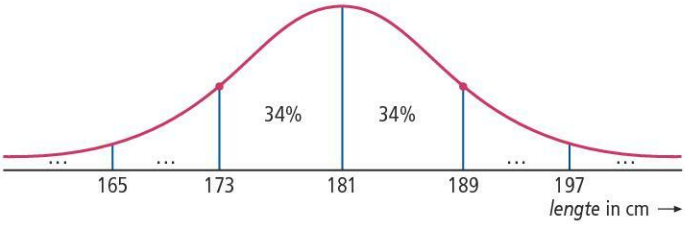
Je leert
- hoe je met de vuistregels van een normale verdeling rekent

Leerroutes
- ondersteunend: 6—7—08—09—10—11
- doorlopend: 6—7—8—9—10—11
- uitdagend: 6—8—9—10—11—U2

De resultaten van havo 5 leerlingen voor de rekentoets zijn in de grafiek weergegeven. Zo kun je zien dat 84% van de leerlingen een 5,5 of hoger hebben gehaald. De resultaten van de rekentoets zijn normaal verdeeld.
- Hoe kun je op basis van deze grafiek het gemiddelde en de standaardafwijking van de resultaten van de rekentoets bepalen?



6 Tot 1996 kende Nederland militaire dienstplicht. Elk jaar werden jonge mannen opgeroepen voor de dienstkeuring. Daarbij werden allerlei gegevens zoals bijvoorbeeld lengte en gewicht gemeten. Van de laatste groep dienstplichtigen was de gemiddelde lengte 181 cm en de standaardafwijking 8 cm. Ga ervan uit dat de variabele lengte normaal verdeeld is.



a Waarom staat bij de horizontale as 181 onder de top van de grafiek?

b En waarom staat er bij de horizontale as onder de buigpunten van de grafiek 173 en 189?

c Volgens de 1e vuistregel hadden 68% van de dienstplichtigen een lengte tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$. Verklaar waarom onder de grafiek twee keer 34% staat.

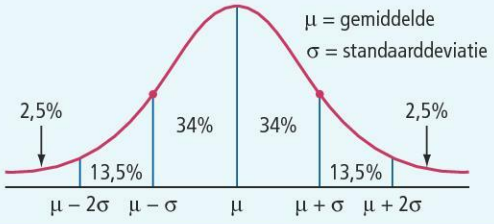
d Gebruik de 2e vuistregel om de andere vier percentages onder de grafiek uit te rekenen en vul deze op de puntjes in.

e Hoeveel procent van de dienstplichtigen had een lengte tussen 173 en 197 cm?

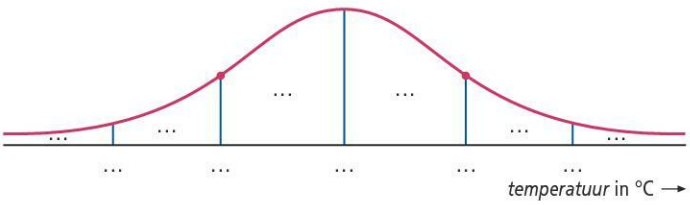
f Hoeveel procent van de jongens was langer dan 189 cm?

© Noordhoff Uitgevers bv

Met de vuistregels kun je de oppervlakte onder de grafiek van een normale verdeling opsplitsen in zes stukken. Bij het maken van opdrachten waarin gegeven is dat een variabele normaal verdeeld is, is het handig om een schets te maken van de grafiek van de bijbehorende normale verdeling.



7 Een monteur onderzoekt de temperatuur van 300 kopjes koffie uit een koffiezetapparaat. De temperatuur van de kopjes koffie is normaal verdeeld. Het gemiddelde is 78 °C en de standaardafwijking is 2,5 °C.



a Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.
b Hoeveel procent van de kopjes koffie is warmer dan 80,5 °C?
c De ideale temperatuur voor een kopje koffie ligt tussen 73 °C en 80,5 °C.
Hoeveel kopjes koffie hebben een ideale temperatuur?

Ondersteunende route → maak opdracht 08

8 H Een supermarkt verkoopt waspoeder in pakken van 4 kg. Een consumentenorganisatie controleert het gewicht van 500 pakken. Het gemiddelde gewicht blijkt 4,06 kg te zijn, met een standaardafwijking van 0,12 kg. Neem aan dat de gewichten van de pakken waspoeder normaal verdeeld zijn.

a Maak een schets van de grafiek bij de normale verdeling.
b Bereken het aantal pakken met een gewicht tussen 3,94 kg en 4,30 kg.
c Twintig procent van de pakken blijkt zwaarder te zijn dan 4,16 kg.
Welk gewicht hebben de twintig procent pakken met het laagste gewicht?
d Geef een schatting van het percentage pakken met een gewicht minder dan 4 kg.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O9

9 In een kantoorgebouw worden lampen gebruikt met een brandtijd van gemiddeld 1400 uur en een standaardafwijking van 150 uur. Neem aan dat de brandtijd normaal verdeeld is. Om arbeidsloon te besparen worden alle lampen tegelijk vervangen. Als 16% van de lampen stuk is, mag er vervangen worden.

a Na hoeveel branduren is dat het geval?

b Na een aantal jaren besluit de directie om over te stappen op ledverlichting. De brandtijd van deze lampen is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 75 uur. Na 3200 branduren is 2,5% van deze lampen stuk. Bereken de gemiddelde brandtijd van deze lampen.

10 H Een fabrikant van autobanden heeft van twee typen de levensduur onderzocht. De levensduur van beide type banden is normaal verdeeld. De gemiddelde levensduur van de banden van type A is 30 000 km met een standaardafwijking van 3500 km.

a Hoeveel procent van de banden van type A heeft een levensduur tussen de 26 500 km en 37 000 km?

b Van de banden van type B is bekend dat 50% van de banden langer dan 35 000 km mee gaan en dat 16% van de banden zelfs langer dan 38 000 km mee gaan. Hoeveel km is het gemiddelde en de standaardafwijking van de levensduur van de banden van type B?

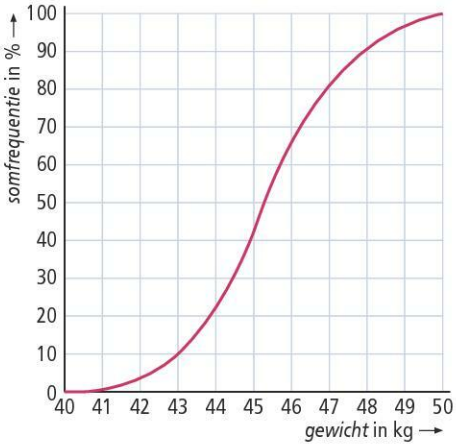
11 Van een groot aantal scholieren is het gewicht gemeten. De resultaten zijn verwerkt in een relatieve somfrequentiepolygoon. Het gewicht van deze scholieren is normaal verdeeld.

a Bepaal met de grafiek de mediaan.

b Waarom is in deze situatie het gemiddelde gelijk aan de mediaan?

c Bij welk percentage kun je in de grafiek de waarde van $\mu + \sigma$ aflezen?

d Bereken de standaardafwijking.



Uitdagende route → maak opdracht U2

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O8 Een machine vult flesjes met 500 mL shampoo. Bij een controle van 1000 flesjes is de gemiddelde inhoud 512 mL en de standaardafwijking 8 mL. Neem aan dat de inhoud van de flesjes normaal verdeeld is.

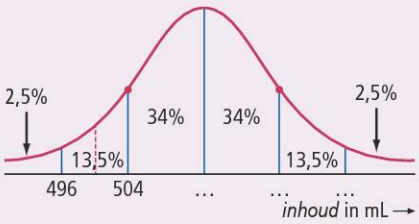
a Vul bij de horizontale as de juiste waarden in.

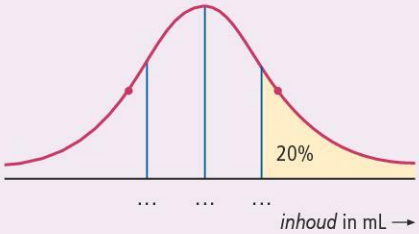
b Hoeveel procent van de flesjes heeft een inhoud tussen 504 mL en 520 mL? Hoeveel flesjes zijn dat?

c Het lijntje dat hoort bij 500 mL ligt precies tussen 496 mL en 504 mL.
Waarom is het percentage tussen 496 mL en 500 mL toch kleiner dan 6,75%?

d Geef een schatting van het percentage flesjes met minder dan 500 mL.

e Van 20% van de flesjes is de inhoud 519 mL of meer.
Gebruik de symmetrie van de grafiek om de inhoud van de 20% flesjes met de minste inhoud te bepalen.





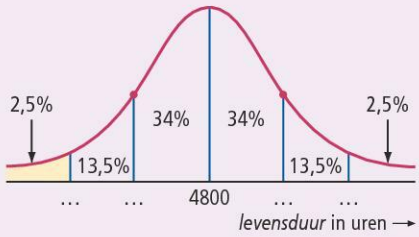
O9 De lampen van de lantaarnpalen bij een snelweg hebben een levensduur van gemiddeld 4800 uur en een standaardafwijking van 250 uur. Neem aan dat de variabele levensduur van de lampen normaal verdeeld is.

a Vul de schets verder in.

b Hoeveel procent van de lampen is na 4800 uur defect?

c Alle lampen worden in één keer vervangen als 2,5% van de lampen defect is.
Na hoeveel uren is dat het geval?

d Na een aantal jaren wordt er overgestapt op een ander merk lamp. De levensduur van deze lampen is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 175 uur.
Na 4000 uren is 2,5% van deze lampen defect.
Bereken de gemiddelde levensduur van deze lampen.



Uitdagende opdrachten

U2 Een fabrikant van inkt cartridges voor printers onderzoekt van twee type cartridges de levensduur. De levensduur van beide typen is normaal verdeeld.

a Bij type A gaan 504 van de 600 inkt cartridges meer dan 240 pagina's mee en is het gemiddelde aantal pagina's 252.
Bereken de standaardafwijking van type A.

b Bij type B gaan 15 van de 600 cartridges meer dan 240 pagina's mee en is de standaardafwijking 7 pagina's.
Bereken het gemiddelde van type B.

© Noordhoff Uitgevers bv

10.3 Steekproevenverdeling van een proportie

Je leert
- wat een steekproef is
- wat een populatieproportie en een steekproefproportie is

Leerroutes
- ondersteunend: 12—13—14—O15—16—O17—18
- doorlopend: 12—13—14—15—16—17—18
- uitdagend: 12—13—14—15—16—18—U3

Van een grote partij spijkers moet worden gecontroleerd of ze wel recht zijn. Bij een controle van 50 spijkers zijn er drie krom.
- Hoeveel procent van alle spijkers is naar verwachting krom?
- Hoe kun je de partij spijkers nog beter testen zodat je een betere schatting krijgt?

12 Volgens de directie van een grote school is 20% van de leerlingen linkshandig. Sam wil nagaan of dit percentage klopt. Het ontbreekt haar aan tijd om dit aan alle leerlingen te vragen.

a Sam vraagt aan vijf willekeurige leerlingen of ze linkshandig zijn.
Is het mogelijk dat geen enkele van deze vijf leerlingen linkshandig is?

b Sam stelt dezelfde vraag aan 20 willekeurige leerlingen.
Hoeveel hiervan zijn waarschijnlijk linkshandig?

c In welke situatie is het waarschijnlijker dat geen enkele leerling linkshandig is, bij het ondervragen van vijf leerlingen of van 20 leerlingen?

Theorie

Om iets te weten te komen over een groep onderzoek je meestal slechts een deel van de groep. Je noemt dat een steekproef. De uitslag van een steekproef wordt voor een deel door het toeval bepaald. Door de steekproefomvang groter te maken, krijg je een betere schatting. Om juiste conclusies te kunnen trekken over een populatie, moet de steekproef aselect zijn. Dat wil zeggen dat iedereen (of ieder ding) uit de populatie evenveel kans moet hebben om in de steekproef terecht te komen. Een steekproef die representatief is, vormt een goede afspiegeling van de hele populatie.

Voorbeeld

Een bestuur van een vereniging wil een onderzoek houden onder haar 1168 leden naar de waardering van de activiteiten. De voorzitter stelt voor de mening van de 34 aanwezigen op de vergadering te peilen.
De secretaris wil willekeurig 60 namen uit de ledenlijst prikken en die leden een vragenlijst laten afnemen.
De steekproef in het voorstel van de voorzitter is niet aselect, die van de secretaris wel.

13 **a** Leg uit waarom de steekproef van de voorzitter in het voorbeeld niet aselect is en die van de secretaris wel.

b Geef bij beide steekproeven de steekproefomvang.

© Noordhoff Uitgevers bv

14 Een boer levert een grote partij sinaasappels aan bij de fabriek. Volgens de boer is 90% van de sinaasappels rijp. Een medewerker van de fabriek neemt een steekproef van 50 sinaasappels en er blijken er 43 rijp te zijn.

a Hoeveel procent van de sinaasappels in de steekproef is rijp?

b Je kunt de relatieve uitslag van de steekproef ook aangeven met een getal tussen 0 en 1.
Leg uit dat bij deze steekproef de waarde 0,86 hoort.

Theorie

Het deel van een populatie dat aan een bepaalde eigenschap voldoet, heet de populatieproportie. In een steekproef heet het deel dat die eigenschap heeft de steekproefproportie. De populatieproportie en de steekproefproportie worden beide geschreven als een getal tussen 0 en 1. De steekproefproportie is een schatting voor de populatieproportie.

Voorbeeld

Jan verkoopt op de markt plantjes. Van alle plantjes heeft 3% bladluis. De populatie bestaat uit alle plantjes die Jan verkoopt. De populatieproportie is 0,03. Een klant koopt bij Jan 20 plantjes. Van de 20 plantjes blijkt 5% bladluis te hebben. De 20 plantjes kun je beschouwen als een steekproef. De steekproefproportie is dus 0,05.

Ondersteunende route → maak opdracht O15

15 H In een doos zitten 250 knikkers waarvan er 20 geel zijn.

a Bereken de populatieproportie van het aantal gele knikkers.

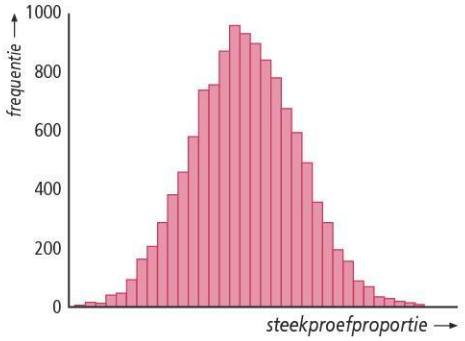
b Dirk pakt willekeurig 25 knikkers waarvan er 4 rood zijn.
Geef de steekproefproportie van het aantal rode knikkers.

c Hoe groot schat jij de populatieproportie van het aantal rode knikkers op basis van de steekproef van Dirk?

16 In de doos met 250 knikkers zitten 120 blauwe knikkers. Sanne trekt 100 knikkers uit de vaas en telt het aantal blauwe knikkers.

a Hoeveel blauwe knikkers zal ze naar verwachting trekken?

b Met een computer is het trekken van knikkers gesimuleerd. In het staafdiagram zie je de steekproefproporties van 1000 steekproeven met een steekproefomvang van 100. Is het staafdiagram min of meer klokvormig?



© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

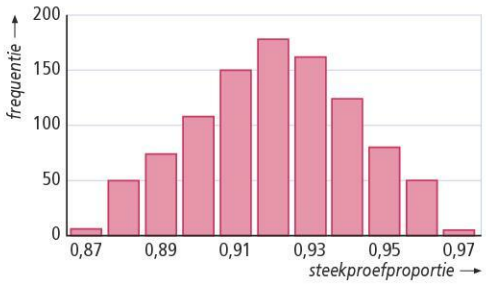
Door een groot aantal simulaties uit te voeren, zie je dat de steekproefproporties normaal verdeeld zijn. Je noemt dit de steekproevenverdeling van de proporties.

Ondersteunende route → maak opdracht O17

17 De RDW houdt bij hoeveel procent van de auto's bij een apk-keuring goedgekeurd worden. De RDW neemt 500 steekproeven met 200 keuringen. In de steekproevenverdelingen zie je de resultaten.

a Van een steekproef is de steekproefproportie 0,88. Hoeveel auto's zijn in deze steekproef goedgekeurd voor de apk-keuring?

b Hoeveel procent van de auto's zal goedgekeurd worden voor de apk-keuring?

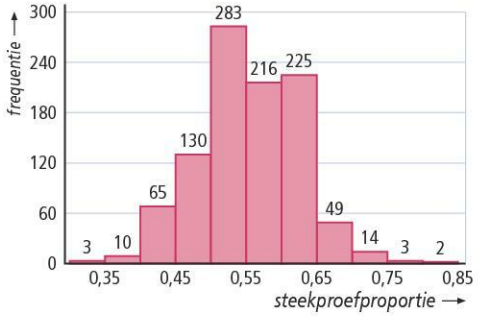


18 Een gemeente wil in een wijk het inzamelen van afval anders organiseren. Volgens de wethouder is 55% van de bewoners voor het plan van de gemeente.

a Een buurtcomité ondervraagt 50 bewoners, waarvan 20 bewoners vóór het plan blijken te zijn. Bereken de steekproefproportie.

b Om de betrouwbaarheid van de uitspraak van de wethouder te onderzoeken, kun je steekproeven simuleren. Het resultaat van 1000 steekproeven met steekproefomvang 50 bij een populatieproportie van 55% is in het staafdiagram verwerkt.
Hoeveel steekproeven zijn er met een steekproefproportie die kleiner of gelijk is aan 0,40?

c Stel dat de wethouder gelijk heeft.
In hoeveel procent van de representatieve steekproeven, zullen 20 of minder van de 50 bewoners voor het plan zijn?



Uitdagende route → maak opdracht U3

© Noordhoff Uitgevers bv

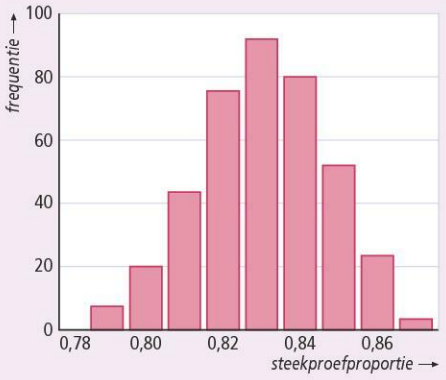
Ondersteunende opdrachten

O15 Een school onderzoekt hoeveel procent van alle scholieren stress ervaart op school. Bij een eerste onderzoek blijkt dat 26 van de 200 scholieren stress ervaart.

- **a** Hoeveel procent van de scholieren in het onderzoek ervaart stress op school?
- **b** Geef de steekproefproportie van het aantal leerlingen die stress ervaren op school.
- **c** Wat is de populatie?
- **d** Hoe groot schat jij het percentage scholieren dat stress op school ervaart op basis van dit eerste onderzoek?
- **e** Naar aanleiding van dit eerste onderzoek besluit de school alle scholieren te vragen of zij stress op school ervaren. Het resultaat is dat 98 van de 1286 scholieren aangeven stress op school te ervaren.
  Hoeveel procent is dat?
- **f** Geef de populatieproportie van het aantal leerlingen dat stress ervaart op school.

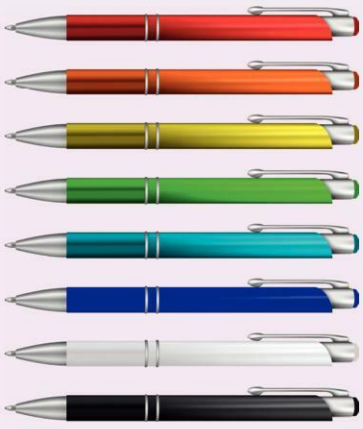
O17 De NS houdt bij hoeveel procent van de treinen op tijd rijdt. Elke dag neemt de NS een steekproef bij 200 treinen of ze op tijd rijden. Dit doen ze 400 dagen lang. In de steekproevenverdeling zie je de resultaten.

- **a** Van een steekproef is de steekproefproportie 0,85. Hoeveel procent van de treinen was in deze steekproef op tijd? Hoeveel van de 200 treinen zijn dat?
- **b** De steekproevenverdeling is normaal verdeeld. In een normale verdeling is het gemiddelde gelijk aan de modus en de mediaan.
  Hoe groot is het gemiddelde van de steekproevenverdeling?
- **c** Schat op basis van deze steekproevenverdeling hoeveel procent van de treinen op tijd rijdt.



Uitdagende opdrachten

U3 Een fabrikant van pennen controleert de kwaliteit van zijn geproduceerde pennen. Er worden 200 steekproeven met steekproefomvang 40 genomen waarbij gekeken wordt hoeveel procent van de pennen defect is. De resultaten zijn verwerkt in een steekproevenverdeling die normaal verdeeld is. Van deze steekproevenverdeling is gegeven dat 2,5% van de steekproeven een steekproefproportie had van minder dan 0,06 en dat 16% een steekproefproportie had van minder dan 0,08. Hoeveel procent van de pennen is waarschijnlijk defect?



© Noordhoff Uitgevers bv

10.4 Betrouwbaarheidsinterval voor een proportie

Je leert
- hoe je het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een proportie op basis van één steekproef berekent

Leerroutes
- ondersteunend: 19—20—021—22—23—024
- doorlopend: 19—20—21—22—23—24
- uitdagend: 19—20—22—23—24—U4

Rondom verkiezingen worden er altijd peilingen gehouden waarbij onderzocht wordt hoeveel procent van de kiesgerechtigden mogelijk op bijvoorbeeld de VVD gaat stemmen. Bij een peiling onder 1000 kiesgerechtigheden blijkt 16% te overwegen op de VVD te gaan stemmen.
- Hoe zeker kun je er van zijn dat inderdaad precies 16% van alle kiesgerechtigden overweegt op de VVD te gaan stemmen?

19 Bij elke bezorging van een pakketje houdt DHL bij of er iemand thuis is als het pakketje bezorgd wordt. Ze nemen dagelijks een steekproef van 100 bezorgingen. De steekproevenverdeling hoort bij een groot aantal van deze steekproeven.

a Hoe kun je aan de steekproevenverdeling zien dat de populatieproportie van het aantal keren dat iemand thuis is gelijk is aan 0,80?

b Geef de standaardafwijking van de steekproevenverdeling.

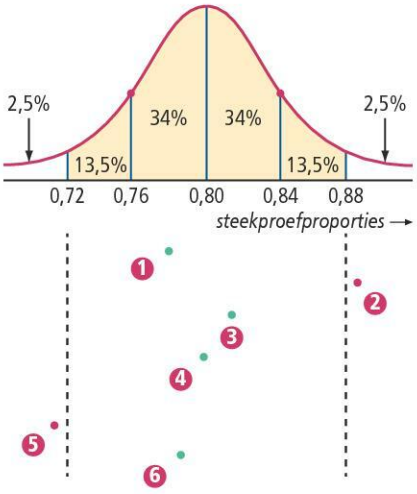
c Ga na dat de standaardafwijking van de steekproevenverdeling gelijk is aan $\sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{n}}$ waarbij n de steekproefomvang is.

d Tussen welke waarden liggen de middelste 95% van alle steekproefproporties?

e Onder de verdeling is van zes steekproeven de steekproefproportie aangegeven. Zo kun je zien dat bij steekproef 1 de steekproefproportie 0,78 was.
Bij welke steekproef was de steekproefproportie precies gelijk aan de populatieproportie?

f Waarom is de steekproefproportie niet altijd gelijk aan de populatieproportie?

g Bij welke steekproeven ligt de steekproefproportie buiten de middelste 95% van alle steekproefproporties?



Als je in de praktijk iets onderzoekt, heb je vaak maar één steekproef. Met de steekproefproportie van die ene steekproef maak je dan een schatting van de populatieproportie.

© Noordhoff Uitgevers bv

20 Bij de steekproefproporties van de zes steekproeven van opdracht 19 is aan beide kanten een lijnstuk van lengte 0,08 getekend. Dit levert een interval met lengte 0,16 op.

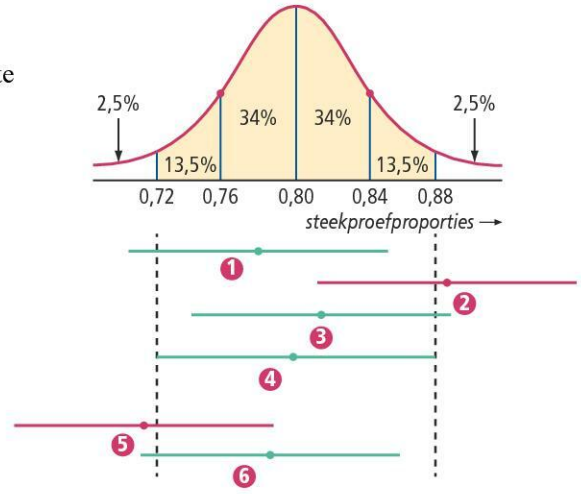
a Waarom is dit interval bij steekproef 4 gelijk aan [0,72; 0,88]?

b Schrijf het interval bij steekproef 1 op.

c Bij welke steekproeven bevat het interval de steekproefproportie 0,80?

d Leg uit dat alle intervallen waarbij de steekproefproportie tussen de twee gestippelde lijnen ligt de populatieproportie bevatten.

e Waarom zal in 95% van alle steekproeven het bijbehorende interval de populatieproportie bevatten?



Theorie

Op basis van één steekproef kun je een schatting maken van de populatieproportie. Met het 95%-betrouwbaarheidsinterval geef je de nauwkeurigheid van de schatting aan. Daarbij gebruik je de steekproefproportie en de steekproefomvang.
Met 95% zekerheid ligt de populatieproportie in het interval:

$$\left[p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\ p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Hierin is p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.
De halve lengte van het betrouwbaarheidsinterval is de foutenmarge.

Voorbeeld

Bij een steekproef onder 200 havo 5 leerlingen blijkt dat 73% van de leerlingen een bijbaantje heeft.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage havo 5 leerlingen dat een bijbaantje heeft. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

Oplossing

$$p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}73 - 2 \times \sqrt{\frac{0{,}73(1-0{,}73)}{200}} \approx 0{,}67$$

$$p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}73 + 2 \times \sqrt{\frac{0{,}73(1-0{,}73)}{200}} \approx 0{,}79$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,67; 0,79].
Met 95% zekerheid ligt het percentage havo 5 leerlingen dat een bijbaantje heeft tussen 67% en 79%.
De foutenmarge is (0,79 – 0,67) : 2 = 0,06 oftewel 6%.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O21

21 In een onderzoek onder 1500 inwoners uit Kampen blijkt dat 43% tegen de komst van airport Lelystad is.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie van het aantal tegenstanders onder alle inwoners van Kampen.
Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

22 H De regering overweegt om een aantal maatregelen in te voeren om de klimaatdoelen van Parijs te halen. Uit een groot opgezet onderzoek in 2018 blijkt dat 67% van de Nederlanders de maatregelen van de regering steunt.
Bij een onderzoek in 2019 onder 2000 Nederlanders blijkt dat 56% van de Nederlanders de maatregelen steunt.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage Nederlanders dat in 2019 de maatregelen van de regering steunt.
b Kun je concluderen dat de steun voor de klimaatmaatregelen is afgenomen? Verklaar je antwoord.

23 Een school onderzoekt hoeveel procent van de scholieren een iPhone heeft. Bij een onderzoek met steekproefomvang 300 blijkt dat 96 leerlingen een iPhone heeft.
a Bereken de steekproefproportie van het aantal leerlingen met een iPhone.
b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage scholieren dat een iPhone heeft.

Ondersteunende route → maak opdracht O24

24 In een onderzoek onder een groot aantal scholieren is gekeken naar het verband tussen het hebben van dyslexie en de resultaten voor het vak Nederlands. In de tabel zie je de resultaten.

	vol.	onv.	totaal
wel dyslexie	406	219	625
geen dyslexie	11 365	510	11 875
totaal	11 771	729	12 500

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage leerlingen zonder dyslexie dat een onvoldoende heeft voor het vak Nederlands.
b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage leerlingen met dyslexie dat een onvoldoende heeft voor het vak Nederlands.
c Welke conclusie kun je trekken over de invloed van dyslexie op het resultaat voor het vak Nederlands?

Uitdagende route → maak opdracht U4

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O21 Bij een onderzoek met steekproefomvang 600 blijkt dat 72% van de leerlingen een bijbaantje heeft. Je gaat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage scholieren dat een bijbaantje heeft berekenen.

a Geef de steekproefproportie van het aantal leerlingen dat een bijbaantje heeft.

b Vul in.
De linkergrens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}72 - 2 \times \sqrt{\frac{0{,}72(1-0{,}72)}{600}} \approx \ldots$$

c Bereken de rechtergrens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

d Geef het 95%-betrouwbaarheidsinterval en de bijbehorende conclusie.

e Bereken de foutenmarge.

O24 In een onderzoek onder scholieren is gekeken naar het verband tussen dyscalculie en de resultaten voor de rekentoets. In de tabel zie je de resultaten.
Je gaat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie van leerlingen met dyscalculie dat een onvoldoende heeft voor de rekentoets berekenen.

	vol.	onv.	totaal
wel dyscalculie	50	278	328
geen dyscalculie	8513	659	9172
totaal	8563	937	9500

a Hoeveel leerlingen met dyscalculie zitten er in dit onderzoek? Dus hoe groot is n?

b Hoeveel procent van deze leerlingen heeft een onvoldoende voor de rekentoets? Hoe groot is dus p?

c Bereken het gevraagde 95%-betrouwbaarheidsinterval.

d Bereken ook het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de populatieproportie van de leerlingen zonder dyscalculie dat een onvoldoende voor de rekentoets heeft gehaald.

Uitdagende opdrachten

U4 De foutenmarge bij het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een proportie is gelijk is aan $2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

a Door een grote steekproefomvang te kiezen, zal het betrouwbaarheidsinterval kleiner worden.
Leg uit hoe je dat aan de formule kunt zien.

b Onderzoek hoeveel keer zo groot de foutenmarge wordt als de steekproefomvang twee keer zo groot wordt.

© Noordhoff Uitgevers bv

10.5 Steekproevenverdeling van een gemiddelde

Je leert
- wat een populatiegemiddelde en een steekproefgemiddelde is
- wat een steekproevenverdeling is

Leerroutes
- ondersteunend: 25—26—27—28—29—030
- doorlopend: 25—26—27—28—29—30
- uitdagend: 25—26—27—28—30—U3

Van een grote partij balken met een lengte van één meter moet de lengte worden gecontroleerd. Jan neemt een steekproef van tien balken en vindt een gemiddelde van 101 cm. Piet neemt twintig steekproeven van tien balken. Het gemiddelde van zijn steekproeven is 100,8 cm.
- Welk resultaat is het meest betrouwbaar?
- Hoe kun je een nog betrouwbaarder resultaat krijgen?

25 Een fabrikant verpakt pakken koffie met een inhoud van 500 gram. De machine staat zo afgesteld dat er gemiddeld 504 gram in de pakken komt met een standaardafwijking van 2 gram. Het gewicht van de pakken koffie is normaal verdeeld.

a Hoeveel procent van de pakken koffie heeft een inhoud minder dan 500 gram?

b Waarom stelt de fabrikant de machine niet in op 500 gram?

c Marja koopt twee pakken koffie. Beide pakken wegen minder dan 500 gram.
Is er reden om te betwijfelen of de machine wel afgesteld staat op 504 gram?

d Bij een test van een consumentenorganisatie blijkt het gemiddelde gewicht van 50 pakken koffie 503,1 gram is.
Is er nu reden om te veronderstellen dat de machine toch niet op 504 gram staat afgesteld?

Theorie

Een kwantitatieve variabele van een populatie, bijvoorbeeld het gewicht, heeft een gemiddelde. Dit gemiddelde noem je het **populatiegemiddelde** μ.
Je kunt het populatiegemiddelde schatten met het gemiddelde van een steekproef. Het gemiddelde van een steekproef noem je het **steekproefgemiddelde** $\bar{x}$.
Bij een steekproef treedt door de rol van het toeval altijd variatie op. Je bent er dus niet zeker van of het steekproefgemiddelde een goede schatting is van het populatiegemiddelde.

Voorbeeld

Iris verkoopt op de markt appels.
Het gemiddelde gewicht van alle appels is 83 gram. De populatie bestaat uit alle appels die Iris mee heeft. Het populatiegemiddelde is dus 83 gram.
Een klant koopt bij Iris tien appels. Deze tien appels wegen gemiddeld 86 gram. Deze tien appels kun je beschouwen als een steekproef, waarbij het steekproefgemiddelde 86 gram is.

© Noordhoff Uitgevers bv

26 H

In een onderzoek onder alle leerlingen van een school blijkt dat deze leerlingen gemiddeld 11,2 uur per week aan huiswerk besteden. Bas neemt een steekproef van 25 leerlingen. Deze leerlingen besteden gemiddeld 8,7 uur per week aan huiswerk.

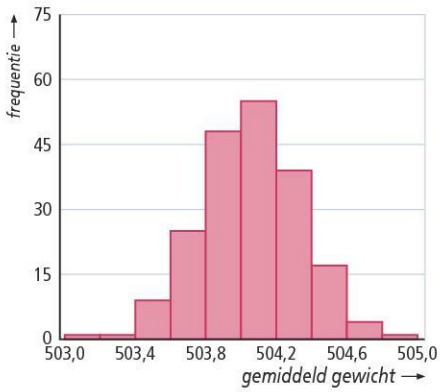
a Hoe groot is het populatiegemiddelde μ?

b Geef het steekproefgemiddelde $\bar{x}$.

c Hoe kan het komen dat het steekproefgemiddelde $\bar{x}$ lager is dan het populatiegemiddelde μ?

27

Om een betere schatting te maken van het gemiddelde gewicht van de pakken koffie van opdracht 25, heeft de consumentenorganisatie 200 keer een steekproef van 50 pakken genomen. Het gemiddelde van deze 50 pakken is steeds berekend. De resultaten zijn verwerkt in het staafdiagram. Het gemiddelde van alle steekproefgemiddelden is 504,0 gram en de standaardafwijking is 0,28 gram.



a Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?

b De test van de consumentenorganisatie in opdracht 25 heeft van de in totaal 200 steekproeven het laagste gemiddelde. Op basis van die ene steekproef zou je het populatiegemiddelde te laag kunnen schatten.
Geef op basis van alle steekproeven een betere schatting.

c Denk jij dat de machine afgesteld staat op 504 gram?

28

Hannah onderzoekt de rol van het toeval in het geval van de fabrikant van koffie door steekproeven te simuleren. Ze voert drie keer 1000 simulaties uit met respectievelijk een omvang 50, 100 en 200 pakken. In de tabel zie per omvang het gemiddelde van alle steekproefgemiddelden en de standaardafwijking.

omvang	50	100	200
gemiddelde	503,99	504,00	504,00
standaard-afwijking	0,28	0,20	0,14

a Wat kun je opmerken over de standaardafwijking en de omvang?

b Bij welke omvang heeft de bijbehorende verdeling de kleinste spreiding?

Theorie

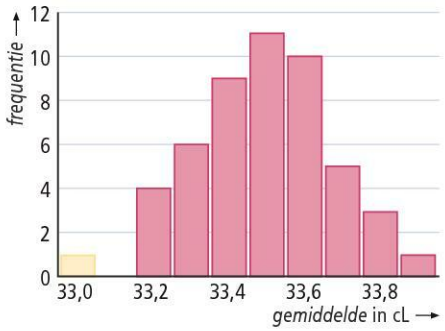
Door een groot aantal simulaties uit te voeren, zie je dat de gemiddelden van de steekproeven normaal verdeeld zijn.
Je noemt dit de steekproevenverdeling van de gemiddelden.
Door de steekproefomvang groter te maken, krijg je een betere schatting.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Een fabrikant vult 10 000 blikjes cola met een machine die volgens hem staat afgesteld op 33 cL.
Ter controle neemt hij één steekproef van 20 blikjes cola.
Het gemiddelde in deze steekproef is 33,0 cL.
De fabrikant denkt daarom dat de machine goed staat afgesteld.

Een medewerker neemt daarna nog 49 steekproeven van 20 blikjes cola en berekent bij elke steekproef de gemiddelde inhoud. In de figuur zie je hoe alle 50 gemiddelden verdeeld zijn.
De 50 steekproefgemiddelden vormen een steekproevenverdeling.
Op basis van de steekproevenverdeling denkt de medewerker dat de machine op meer dan 33 cL staat afgesteld.



29

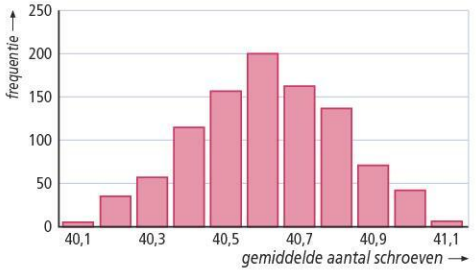
a Wat is de populatie in het voorbeeld?
b De medewerker schat het populatiegemiddelde op 33,5 cL. Leg uit hoe hij op dit idee komt.
c Welke praktische betekenis heeft je antwoord van opdracht b voor de machine?
d Welk bezwaar heeft het maken van zo'n steekproevenverdeling in de praktijk?

Ondersteunende route → maak opdracht O30

30 H

In een fabriek worden schroeven geproduceerd. Deze worden verpakt in doosjes van 40 stuks. Een medewerker neemt een steekproef van 50 doosjes. In deze 50 doosjes zitten gemiddeld 40,9 schroeven.

a Hoe groot zal hij op basis van deze steekproef het populatiegemiddelde schatten? Geef de praktische betekenis van je antwoord.
b In de loop der jaren heeft de medewerker al veel vaker een steekproef van 50 doosjes genomen. In het staafdiagram zie je van 1000 steekproeven het steekproefgemiddelde. Hoe groot is het gemiddelde aantal schroeven in de doosjes die in deze fabriek worden geproduceerd?



Uitdagende route → maak opdracht U5

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O30 In een fabriek worden punaises geproduceerd. Deze worden verpakt in doosjes met 200 stuks. Een medewerker neemt een steekproef van 20 doosjes. In deze 20 doosjes zitten gemiddeld 202 punaises.

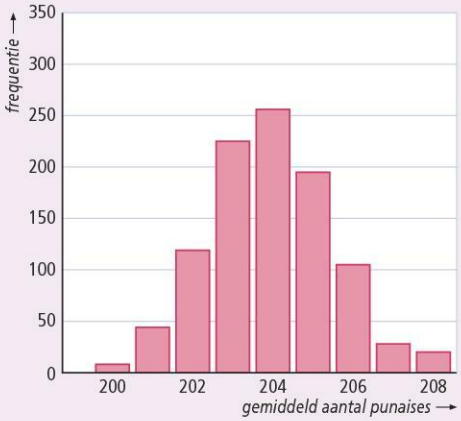
a Hoe groot zal hij op basis van dit steekproefgemiddelde het populatiegemiddelde schatten?

b Geef de praktische betekenis van het antwoord van opdracht a.

c De medewerker neemt vervolgens 1000 keer een steekproef van 20 doosjes. Hij berekent steeds het steekproefgemiddelde. De resultaten staan in de steekproevenverdeling.
Welke steekproefgemiddelde kwam het vaakst voor?

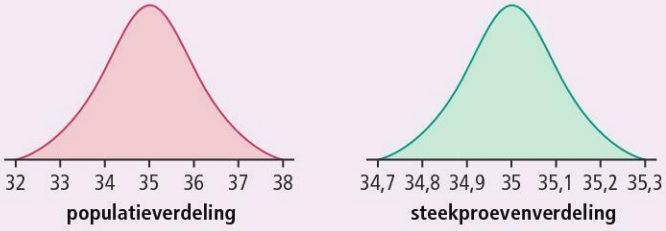
d De steekproevenverdeling is normaal verdeeld. In een normale verdeling is het gemiddelde gelijk aan de modus en de mediaan.
Hoe groot is het gemiddelde van de steekproevenverdeling?

e Geef met de steekproevenverdeling een schatting van het gemiddelde aantal punaises in de doosjes die in deze fabriek worden geproduceerd.



Uitdagende opdrachten

U5 In een populatie is een flink aantal steekproeven met een grote steekproefomvang genomen. De resultaten zijn verwerkt in een steekproevenverdeling.



a Geef bij beide verdelingen een schatting van het gemiddelde en de standaardafwijking.

b Geef een verklaring waarom de standaardafwijking van de steekproevenverdeling kleiner is.

© Noordhoff Uitgevers bv

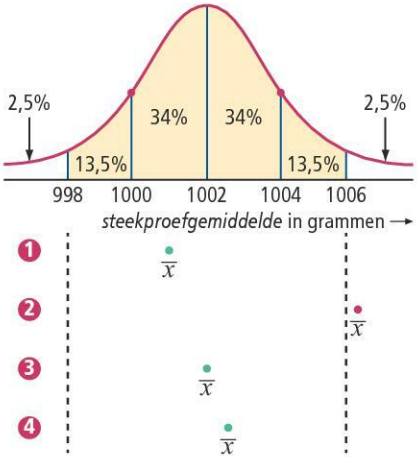
10.6 Betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde

Je leert
- hoe je het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde op basis van één steekproef berekent

Leerroutes
- ondersteunend: 31—32—033—34—35—36
- doorlopend: 31—32—33—34—35—36
- uitdagend: 31—32—33—34—36—U6

Bij een praktische opdracht laat een biologie docent vijf leerlingen de omtrek van een boomstam opmeten. Bij het verwerken van de resultaten krijgt hij als gemiddelde 3,6 meter.
- Hoe zeker is de docent er nu van dat de omtrek van de boomstam inderdaad 3,6 meter is?

31 In een fabriek worden pakken suiker gevuld door een machine. Het gewicht van de pakken suiker is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1002 gram en een standaardafwijking van 10 gram. Ter controle wordt ieder uur een steekproef van 25 pakken genomen. Van deze pakken wordt het gemiddelde gewicht bepaald. De schets van de steekproevenverdeling hoort bij een groot aantal van deze steekproeven.



a Leg met de schets uit dat de standaardafwijking van deze steekproevenverdeling gelijk aan 2 gram is.

b Ga na dat de standaardafwijking van de steekproevenverdeling gelijk is aan $\frac{10}{\sqrt{n}}$ waarbij n de steekproefomvang is.

c Tussen welke waarden liggen de middelste 95% van alle steekproefgemiddelden?

d Onder de verdeling is van vier steekproeven het steekproefgemiddelde $\overline{x}$ aangegeven. Zo kun je zien dat bij steekproef 1 het steekproefgemiddelde $\overline{x}$ 1001 gram was. Bij welke steekproef was het steekproefgemiddelde $\overline{x}$ precies gelijk aan het populatiegemiddelde μ?

e Waarom is het steekproefgemiddelde $\overline{x}$ niet altijd gelijk aan het populatiegemiddelde μ?

f Bij welke steekproef ligt het steekproefgemiddelde $\overline{x}$ buiten de middelste 95% van alle steekproefgemiddelden?

© Noordhoff Uitgevers bv

32 Bij het steekproefgemiddelde $\bar{x}$ van de vier steekproeven van opdracht 31 is aan beide kanten een lijnstuk van lengte 4 getekend. Dit levert een interval met lengte 8 op.

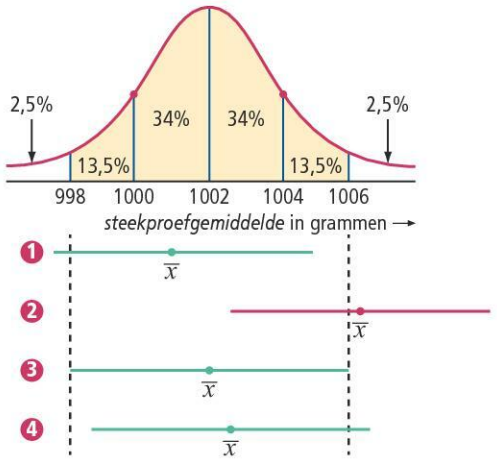
a Waarom is dit interval bij steekproef 3 gelijk aan [998, 1006]?

b Schrijf het interval bij steekproef 1 op.

c Bij welke steekproeven bevat het interval het populatiegemiddelde $\mu = 1002$ gram?

d Leg uit dat alle intervallen waarbij het steekproefgemiddelde $\bar{x}$ tussen de twee gestippelde lijnen ligt het populatiegemiddelde μ bevatten.

e Waarom zal in 95% van alle steekproeven het bijbehorende interval het populatiegemiddelde μ bevatten?



Theorie

Op basis van één steekproef kun je een schatting maken van het gemiddelde van de populatie. Met het 95%-betrouwbaarheidsinterval geef je de nauwkeurigheid van de schatting aan. Daarbij gebruik je het steekproefgemiddelde, de standaardafwijking van de steekproef en de steekproefomvang.
Met 95% zekerheid ligt het populatiegemiddelde in het

interval: $\left[\bar{x} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

Hierin is $\bar{x}$ het steekproefgemiddelde, S de standaardafwijking van de steekproef en n de steekproefomvang.
De halve lengte van het betrouwbaarheidsinterval is de foutenmarge.

Voorbeeld

Bij een steekproef onder 200 havo 5 leerlingen blijkt dat deze leerlingen gemiddeld 38 uur aan hun profielwerkstuk werken. In deze steekproef is de standaardafwijking 4,2 uur.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde tijd die havo 5 leerlingen werken aan hun profielwerkstuk. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

Oplossing

$\bar{x} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 38 - 2 \times \frac{4{,}2}{\sqrt{200}} \approx 37{,}4$

$\bar{x} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 38 + 2 \times \frac{4{,}2}{\sqrt{200}} \approx 38{,}6$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [37,4 : 38,6].
Met 95% zekerheid ligt de gemiddelde tijd die havo 5 leerlingen aan hun proefielwerkstuk werken tussen 37,4 uur en 38,6 uur.
De foutenmarge is (38,6 – 37,4) : 2 = 0,6 uur.

© Noordhoff Uitgevers bv

33 In een steekproef onder 400 havo 5 leerlingen blijkt dat die leerlingen gemiddelde 38,1 uur aan hun profielwerkstuk werken met een standaardafwijking van 3,9 uur.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde tijd die havo 5 leerlingen werken aan hun profielwerkstuk. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

34 H In een onderzoek onder 1500 inwoners uit de gemeente Hardenberg blijkt dat zij jaarlijks gemiddeld 778 euro aan vuurwerk uitgeven met een standaardafwijking van 128 euro.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde bedrag dat jaarlijks aan vuurwerk door de inwoners van Hardenberg wordt uitgegeven.

b Is het meer of minder dan 95% zeker dat het gemiddelde bedrag in euro's dat jaarlijks aan vuurwerk door de inwoners van Hardenberg wordt uitgegeven in het interval [770, 786] ligt? Licht je antwoord toe.

35 Het gewicht van 22 000 kinderen van 12 jaar in Nederland wordt gewogen. Het gemiddelde gewicht van deze kinderen is 56,7 kg en de standaardafwijking is 4,3 kg. Beschouw deze groep kinderen als een steekproef van alle Nederlandse kinderen van 12 jaar.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde gewicht van alle Nederlandse kinderen van 12 jaar. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

36 Een studente heeft onderzoek gedaan naar de groei van peuters. Ze heeft daarbij een steekproef genomen van 50 meisjes en 50 jongens van 12 maanden oud uit Amsterdam.

a Bereken voor zowel de jongens als de meisjes het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde lengte.

b Leg uit dat uit de 95%-betrouwbaarheidsintervallen volgt dat het waarschijnlijk is dat van de Amsterdamse peuters de gemiddelde lengte van de jongens groter is dan die van de meisjes.

	lichaamslengte in cm	
	gemiddelde	standaard-afwijking
jongens	88,9	3,93
meisjes	87,5	3,12

Uitdagende route → maak opdracht U6

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O33 In een steekproef onder 500 havo 5 leerlingen blijkt dat die leerlingen gemiddeld 37,9 uur aan hun profielwerkstuk werken met een standaardafwijking van 3,8 uur. Je gaat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde tijd die havo 5 leerlingen aan hun profielwerkstuk werken berekenen.

a Hoe groot is de steekproefomvang n?

b Vul in: de linkergrens van het interval is

$$\bar{x} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 37{,}9 - 2 \times \frac{3{,}8}{\sqrt{500}} \approx \ldots$$

c Bereken ook de rechtergrens van het interval en schrijf het 95%-betrouwbaarheidsinterval op.

d Bij het 95%-betrouwbaarheidsinterval hoort een conclusie. Vul in.
Met 95% zekerheid ligt de gemiddelde tijd die havo 5 leerlingen aan hun profielwerkstuk werken tussen … uur en … uur.

e Bereken de lengte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

f De foutenmarge is gelijk aan de halve lengte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval.
Bereken de foutenmarge.

Uitdagende opdrachten

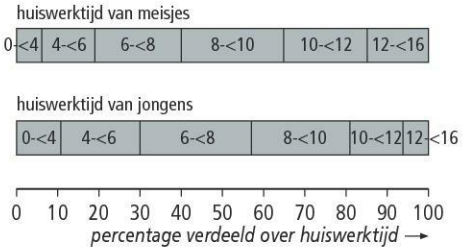
U6 Van een aantal leerlingen is onderzocht hoeveel kilometer zij dagelijks naar school fietsen. Deze leerlingen fietsen gemiddeld 5,6 kilometer met een standaardafwijking van 2,7 kilometer. Op basis van dit onderzoek blijkt dat voor de gemiddelde afstand van alle leerlingen de foutenmarge slechts 0,27 kilometer te zijn.

a Geef het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde afstand die de scholieren dagelijks naar school fietsen.

b Bereken de steekproefomvang.

© Noordhoff Uitgevers bv

37 Uit onderzoek is gebleken dat leerlingen gemiddeld ruim 8 uur per week aan huiswerk besteden en dat meisjes meer tijd aan huiswerk besteden dan jongens. De tijd in uren die leerlingen per week aan hun huiswerk besteden, noemen we de huiswerktijd. In de figuur zie je de resultaten van het onderzoek.

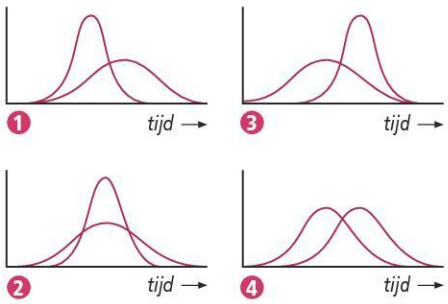


a Hoeveel procent van de meisjes besteedt 8 uur of meer per week aan het huiswerk? Licht je antwoord toe.

b Ga ervan uit dat de huiswerktijd van de meisjes normaal verdeeld is met een gemiddelde van 8,8 uur en een standaardafwijking van 3,2 uur.
Hoeveel procent van de meisjes besteedt minstens 12 uur per week aan huiswerk?

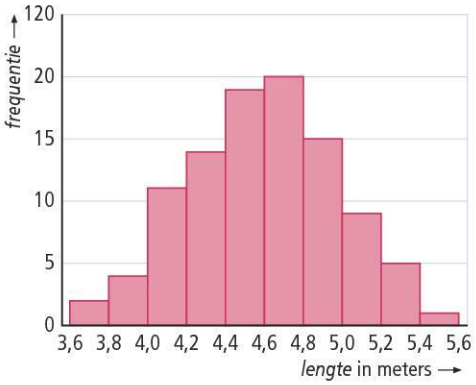
c De huiswerktijd van de jongens is ook normaal verdeeld. Het gemiddelde is 7,5 uur. Verder is gegeven dat 16 procent van hen minder dan 5 uur per week aan huiswerk besteedt.
Bereken de standaardafwijking van de huiswerktijd van de jongens.

d Men heeft een soortgelijk onderzoek gedaan onder studenten. Daarbij is gekeken naar de tijd die mannelijke en vrouwelijke studenten thuis aan hun studie besteden. Het onderzoek wijst uit dat vrouwen per week meer tijd aan 'huiswerk' besteden dan mannen. De spreiding in huiswerktijd bij de mannen is kleiner dan bij de vrouwen.
Welk van de figuren past het best bij de gegevens over de studenten? Licht je antwoord toe.



(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2007, tijdvak 2)

38 W In 1955 onderzochten R. R. Sokal en P. E. Hunter de lengte van de vleugels van de huisvlieg. In de tabel op het werkblad staan de resultaten van hun 100 metingen. Het gemiddelde μ is 4,45 mm de standaardafwijking σ is 0,39 mm.



a Je ziet een staafdiagram die bij de tabel hoort.
Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?

b Onderzoek met de 1e en 2e vuistregel of de vleugellengte normaal verdeeld is.

c Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde vleugellengte van de huisvlieg en geef de bijbehorende foutenmarge.

39 Uit een onderzoek onder 3000 Nederlanders blijkt dat 61% van de deelnemers regelmatig naar soapseries kijkt.

a Als je werkt met een betrouwbaarheid van 95%, tussen welke waarden ligt dan het percentage Nederlanders die regelmatig naar soapseries kijken?

b Stel dat je met een betrouwbaarheid van 99% wilt werken. Wordt het betrouwbaarheidsinterval dan groter of kleiner?

© Noordhoff Uitgevers bv

40 In een meubelfabriek worden planken gemaakt. De zaagmachine produceert planken waarvan de lengte normaal verdeeld is met een gemiddelde van 800 mm en een standaardafwijking van 2 mm. De planken horen 800 mm lang te zijn, maar als ze hoogstens 2 mm langer of korter zijn, is het ook goed. Planken die langer dan 802 mm zijn, worden met de hand op maat gemaakt. Planken die korter zijn dan 798 mm zijn onbruikbaar. Op elke goede plank maakt de fabriek € 3,25 winst. Voor het op maat maken van een te lange plank gaat daar een halve euro af. Elke onbruikbare plank levert een verliespost van € 2,- op. Er komt een bestelling binnen voor 1000 planken.

a Hoeveel winst mag de fabriek verwachten?

b Is het voordeliger om de machine in te stellen op een gemiddelde lengte van 802 mm zodat je minder onbruikbare planken krijgt? Ga ervan uit dat de extra kosten voor het hout te verwaarlozen zijn.

41 Op 5 juni 2014 keek 9,2% van de Nederlandse bevolking op televisie naar het NOS-journaal van 20.00 uur. We zeggen dan dat de *kijkdichtheid* van dit journaal 9,2 is. Stel dat dit cijfer het resultaat is van een steekproef van 2700 personen.

a Laat zien dat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de kijkdichtheid van dit journaal gelijk is aan $9{,}2 \pm 1{,}1$.

b Stichting Kijk Onderzoek (SKO) houdt het kijkonderzoek om uitspraken te kunnen doen over hoeveel en welke mensen van de Nederlandse bevolking naar de verschillende televisiezenders en programma's kijken. SKO wil dat het betrouwbaarheidsinterval smaller wordt. Neem aan dat de kijkdichtheid bij een grotere steekproef steeds 9,2 blijft.
Hoe groot moet de steekproef minstens zijn, zodat de totale breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval in het kijkonderzoek kleiner dan 1 is? Geef je antwoorden in tientallen nauwkeurig.

(Ontleend aan een voorbeeld examenopgave statistiek wiskunde A havo)

42 In een onderzoek onder een groot aantal Nederlandse automobilisten is onderzocht hoeveel procent van hen een botsing heeft gehad in 2018. Op basis van dit representatieve onderzoek doet men de volgende uitspraak over alle Nederlandse automobilisten:
'Met 95% zekerheid ligt het percentage Nederlandse automobilisten die een botsing hebben gehad in 2018 tussen 1,72% en 3,28%.'
Onderzoek hoeveel van de ondervraagden een botsing hebben gehad.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Normale verdeling en vuistregels

De frequentieverdeling van een variabele kun je vaak benaderen met een klokvormige grafiek. De belangrijkste kenmerken van zo'n grafiek zijn:

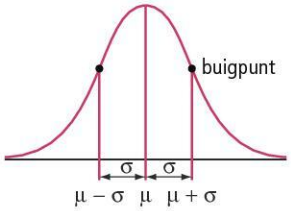
- De grafiek is symmetrisch.
- De symmetrieas ligt bij het gemiddelde μ.
- Het gemiddelde, de mediaan en de modus vallen samen.
- De standaardafwijking σ is de afstand van de symmetrieas tot de buigpunten van de grafiek.

Bij een normale verdeling gelden de volgende vuistregels:

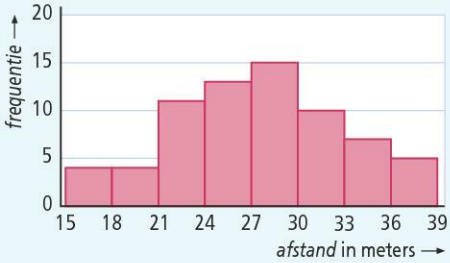
1 Van de data ligt ongeveer 68% tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
2 Van de data ligt ongeveer 95% tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.
3 Van de data ligt vrijwel 100% tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.

Deze veel voorkomende klokvormige verdeling wordt de normale verdeling genoemd. Een variabele waarvan de frequentieverdeling benaderd kan worden door de normale verdeling heet normaal verdeeld.

In een buigpunt verandert een toenemende stijging (of daling) in een afnemende stijging (of daling).



S1 Van 69 jongens zijn bij het onderdeel vergooien de resultaten genoteerd. De resultaten zijn verwerkt in een staafdiagram. Zijn de prestaties van de jongens op het onderdeel vergooien normaal verdeeld?



Theorie

Steekproef, steekproefomvang, aselect, representatief

Om iets te weten te komen over een groep onderzoek je meestal slechts een deel van de groep. Je noemt dat een steekproef. Om juiste conclusies te kunnen trekken over een populatie, moet de steekproefomvang groot genoeg zijn en moet de steekproef aselect zijn. Dat wil zeggen dat iedereen (of ieder ding) uit de populatie evenveel kans moet hebben om in de steekproef terecht te komen.
Een steekproef die representatief is, vormt een goede afspiegeling van de hele populatie.

Voorbeeld

De directie van een school met 2200 leerlingen wil onderzoeken of het beter is om de school om 8.30 uur te laten beginnen in plaats van om 8.15 uur. Ze nemen twee steekproeven.

A Ze ondervragen bij de fietsenstalling de eerste 200 leerlingen die daar aankomen.
B Ze kiezen willekeurig 200 leerlingen uit het leerlingenbestand.

Steekproef A is niet aselect en steekproef B wel.

S2
a Noem twee redenen waarom steekproef A in het voorbeeld niet aselect is.
b Hoe groot is in beide steekproeven de steekproefomvang?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Populatieproportie, steekproefproportie, steekproevenverdeling

Het deel van een populatie dat aan een bepaalde eigenschap voldoet, heet de populatieproportie. In een steekproef heet het deel dat die eigenschap heeft de steekproefproportie. De populatieproportie en de steekproefproportie worden beide geschreven als een getal tussen 0 en 1. De steekproefproportie is een schatting voor de populatieproportie. Door een groot aantal steekproeven uit te voeren, zie je dat de steekproefproporties normaal verdeeld zijn. Je noemt dit de steekproevenverdeling van de proporties.

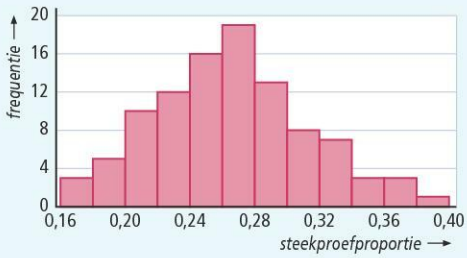
Voorbeeld

Een boswachter beweert dat 7% van alle bomen in een bos ziek is.
De populatieproportie zou dan 0,07 zijn.
Bij een steekproef onder 100 bomen blijken 5 bomen ziek. Je kunt dan zeggen dat de steekproefproportie 0,05 is.
Door nog meer steekproeven te nemen, krijg je een steekproevenverdeling.
Het gemiddelde van de steekproevenverdeling is een goede schatter voor de populatieproportie.

S3 Een fastfoodketen doet onderzoek naar de meningen en wensen van de klanten. In 100 steekproeven wordt aan 50 klanten gevraagd of zij met pin betalen.

a Bij een steekproef is de steekproefproportie 0,38. Hoeveel van deze 50 klanten betalen met pin?

b Schat de populatieproportie van het aantal klanten dat met pint betaalt.



Theorie

populatiegemiddelde, steekproefgemiddelde, steekproevenverdeling

Een kwantitatieve variabele van een populatie, bijvoorbeeld leeftijd, heeft een gemiddelde. Dit gemiddelde noem je het populatiegemiddelde μ. Je kunt het populatiegemiddelde in de praktijk schatten met het gemiddelde van een steekproef ofwel het steekproefgemiddelde $\bar{x}$.
Door een groot aantal steekproeven uit te voeren, zie je dat de gemiddelden van de steekproeven normaal verdeeld zijn. Je noemt dit de steekproevenverdeling van de gemiddelden.

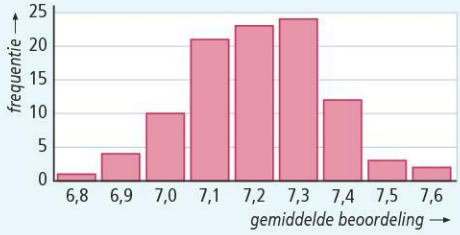
Voorbeeld

Een fabrikant van pillen beweert dat het gemiddelde gewicht van alle pillen 10,1 gram per pil is.
Het populatiegemiddelde zou dan 10,1 gram zijn.
Er wordt een steekproef van 100 pillen genomen waarbij het gemiddelde gewicht 9,8 gram per pil is.
Je kunt dan zeggen dat het steekproefgemiddelde 9,8 gram is.

S4 In het onderzoek van de fastfoodketen wordt aan de klanten gevraagd de smaak van de hamburger te beoordelen met een cijfer.

a Geef het laagste steekproefgemiddelde.

b Maak met de steekproevenverdeling een schatting van het populatiegemiddelde.

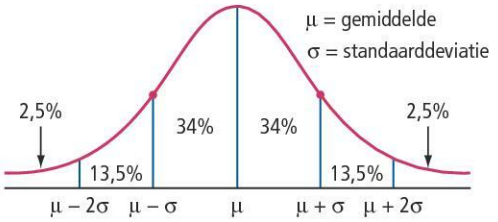


© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt met de vuistregels van een normale verdeling rekenen.

Met de vuistregels kun je de oppervlakte onder de grafiek van een normale verdeling opsplitsen in zes stukken. Bij het maken van opdrachten waarin gegeven is dat een variabele normaal verdeeld is, is het handig om een schets te maken van de grafiek van de bijbehorende normale verdeling.



S5 In het onderzoek van de fastfoodketen blijkt dat het bedrag dat een mannelijke klant uitgeeft bij een bestelling normaal verdeeld is met een gemiddelde van € 7,19 en een standaardafwijking van € 0,34.
Hoeveel procent van de mannelijke klanten geeft tussen de € 6,85 en de € 7,87 uit?

Vaardigheid

Je kunt het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een proportie op basis van één steekproef berekenen.

Op basis van één steekproef kun je een schatting maken van de populatieproportie. Met het 95%-betrouwbaarheidsinterval geef je de nauwkeurigheid van de schatting aan. Daarbij gebruik je de steekproefproportie en de steekproefomvang.
Met 95% zekerheid ligt de populatieproportie in het interval:

$$\left[p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\ p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Hierin is p de steekproefproportie en n is de steekproefomvang.
De halve lengte van het betrouwbaarheidsinterval is de foutenmarge.

Voorbeeld

Bij een steekproef onder 500 havo 5 leerlingen blijkt dat 82% van de leerlingen geslaagd is.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het slagingspercentage van alle havo 5 leerlingen.
Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

Oplossing

$$p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-2)}{n}} = 0{,}82 - 2 \times \sqrt{\frac{0{,}82(1-0{,}82)}{500}} \approx 0{,}786$$

$$p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}82 + 2 \times \sqrt{\frac{0{,}82(1-0{,}82)}{500}} \approx 0{,}854$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,786; 0,854].
Met 95% zekerheid ligt het percentage havo 5 leerlingen dat is geslaagd tussen 78,6% en 85,4%
De foutenmarge is (85,4 – 78,6) : 2 = 3,4%.

© Noordhoff Uitgevers bv

S6 In 2018 deden op een scholengemeenschap 160 havo leerlingen examen. Van deze leerlingen zijn er 104 geslaagd. Beschouw deze 160 leerlingen als een steekproef. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het slagingspercentage van alle havo leerlingen in 2018. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

Vaardigheid

Je kunt het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde op basis van één steekproef berekenen.

Op basis van één steekproef kun je een schatting maken van het gemiddelde van de populatie. Met het 95%-betrouwbaarheidsinterval geef je de nauwkeurigheid van de schatting aan. Daarbij gebruik je het steekproefgemiddelde, de standaardafwijking van de steekproef en de steekproefomvang. Met 95% zekerheid ligt het populatiegemiddelde in het interval:

$$\left[\overline{x} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{x} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Hierin is $\overline{x}$ het steekproefgemiddelde, S de standaardafwijking van de steekproef en n de steekproefomvang.
De halve lengte van het betrouwbaarheidsinterval is de foutenmarge.

Voorbeeld

Bij een steekproef onder 100 havo leerlingen blijkt dat deze leerlingen gemiddeld een 6,4 halen voor hun wiskunde A examen. In deze steekproef is de standaardafwijking 0,21. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde cijfer voor het wiskunde A havo examen.
Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

Oplossing

$$\overline{x} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 6{,}4 - 2 \times \frac{0{,}21}{\sqrt{100}} \approx 6{,}358$$

$$\overline{x} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 6{,}4 + 2 \times \frac{0{,}21}{\sqrt{100}} \approx 6{,}442$$

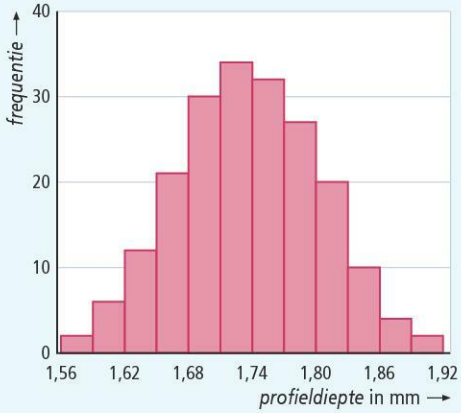
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [6,358; 6,442].
Met 95% zekerheid ligt het gemiddelde voor het wiskunde A havo examen tussen 6,358 en 6,442.
De foutenmarge is (6,442 − 6,358) : 2 = 0,042.

S7 Bij een steekproef onder 400 havoleerlingen blijkt dat deze leerlingen gemiddeld een 6,7 halen voor hun wiskunde B examen. In deze steekproef is de standaardafwijking 0,29. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde cijfer voor het wiskunde B havo-examen. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

© Noordhoff Uitgevers bv

T1 W

Een autofabrikant is van plan een nieuw type autoband op de markt te brengen met de merknaam Quality. Natuurlijk wordt een nieuw type band uitvoerig getest. Onder allerlei omstandigheden wordt er 35 000 km met de banden gereden en daarna wordt de profieldiepte opgemeten. De resultaten staan in de tabel op het werkblad. Het gemiddelde μ is 1,722 mm en de standaardafwijking σ is 0,065 mm.



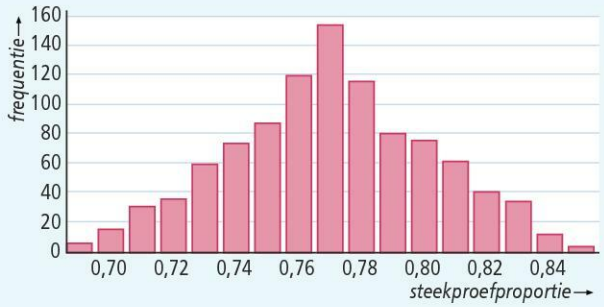
a Je ziet een staafdiagram die bij de tabel hoort. Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?

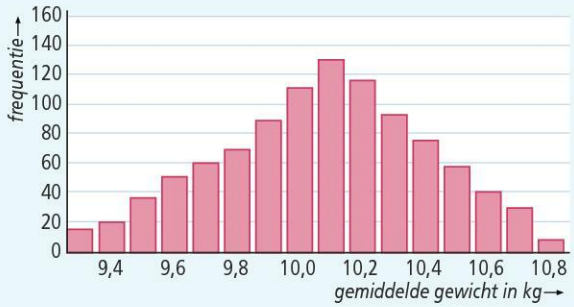
b Onderzoek met de 1e en 2e vuistregel of de profieldiepte van de 200 banden normaal verdeeld is.

c De profieldiepte van een ander merk band, met de merknaam Excellent, is na 35 000 km normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,75 mm en een standaardafwijking van 0,1 mm.
Volgens de wet wordt een band met een profieldiepte van minder dan 1,6 mm afgekeurd.
Geef een schatting van het percentage banden van dit merk dat na 35 000 km wordt afgekeurd.

T2

Op een vliegveld houdt men dagelijks twee steekproeven. Bij de ene steekproef houden ze onder 500 reizigers bij hoeveel procent met een koffer reist. Bij de tweede steekproef weegt men het gewicht van 500 koffers. In de steekproevenverdelingen zie je de resultaten van 1000 van zulke steekproeven.





a Geef de hoogste steekproefproportie van het aantal reizigers dat met een koffer reist. Hoeveel reizigers hebben in een steekproef met zo'n steekproefproportie een koffer bij zich?

b Schat met de steekproevenverdeling het percentage reizigers dat met een koffer reist.

c In hoeveel procent van de steekproeven is het gemiddelde gewicht van de koffers meer dan 10,5 kg?

d Schat met de steekproevenverdeling het gemiddelde gewicht van een koffer.

© Noordhoff Uitgevers bv

T3 Enkele producenten van computerspelletjes willen onderzoek doen naar de bekendheid onder jongeren van een nieuw in Nederland op de markt gebracht computerspel.

a Geef van de onderzoeksmethoden aan waarom ze niet aselect zijn.

b Bedenk een onderzoeksmethode die wel een representatieve steekproef oplevert.

c Ze nemen een goede steekproef en vinden dat 56 van de 2000 ondervraagden het computerspel kent.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het percentage jongeren die het computerspel kennen.

A Ze bellen de eerste 2000 mensen uit het telefoonboek van Zwolle.

B Ze zetten een enquête op hun website. Iedereen die deze invult, maakt kans op een prijs.

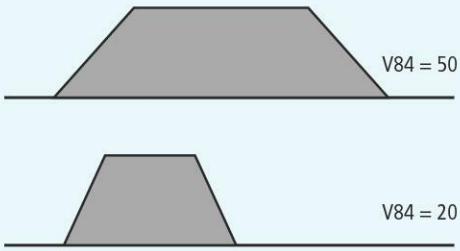
C Ze interviewen op vijf doordeweekse ochtenden in totaal 2000 mensen in een winkelcentrum.

T4 Volgens een autofabrikant is het gemiddelde verbruik van een bepaald type auto 7,3 liter op 100 km. In een onderzoek onder 400 automobilisten van dit type auto is het gemiddelde verbruik 7,9 liter op 100 km met een standaardafwijking van 1,6 liter.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde verbruik van dit type auto op 100 km. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

b Denk jij dat de verbruiksgegevens van de autofabrikant kloppen? Licht je antwoord toe.

T5 Verkeersdrempels zijn bedoeld om de snelheid van automobilisten te beïnvloeden. Afhankelijk van de gewenste snelheid worden de drempels steiler of minder steil gemaakt. De drempel met V84 = 50 is zo ontworpen dat 84% van de automobilisten de drempel passeert met een snelheid van minder dan 50 km per uur. In de praktijk blijkt dat de passeersnelheid bij een drempel normaal verdeeld is. Bij de drempel met V84 = 50 werd een gemiddelde passeersnelheid van 43,2 km per uur gevonden, met een standaardafwijking van 6,8 km per uur.



a Laat zien dat bij deze verdeling inderdaad 84% van de automobilisten niet harder dan 50 km per uur rijdt.

b Voor een test zal de snelheid van 1200 automobilisten worden gemeten bij een drempel met V84 = 50.
Bij hoeveel van deze 1200 metingen kan op grond van eerdere ervaringen een snelheid van meer dan 36,4 km per uur worden verwacht?

c In een kinderrijke buurt worden verkeersdrempels met V84 = 20 aangebracht. De passeersnelheid is weer normaal verdeeld met een standaardafwijking is 2,1 km per uur.
Bereken de gemiddelde passeersnelheid bij dit type drempels.

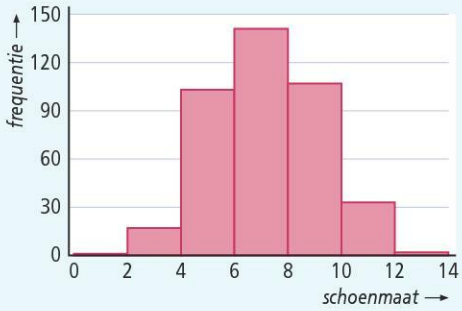
(Ontleend aan CE havo wiskunde A 1990, tijdvak 1)

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt met de vuistregels van een normale verdeling rekenen.

E1 W

Bij 404 kinderen is gekeken naar de schoenmaat. De resultaten staan in de tabel op het werkblad. De gemiddelde schoenmaat is 6,77 en de standaardafwijking is 1,91.



a Je ziet een staafdiagram die bij de tabel hoort. Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?

b Bereken het percentage kinderen met een schoenmaat tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.

c Hoeveel procent van de kinderen heeft een schoenmaat tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$?

d Is de schoenmaat van de kinderen normaal verdeeld?

E2

Een tomatenkweker weet uit jarenlange ervaring dat het gewicht van de tomaten die hij oogst normaal verdeeld is. Het gemiddelde gewicht van de tomaten is 68 gram met een standaardafwijking van 18 gram. Tomaten die minder wegen dan 50 gram worden geselecteerd om verwerkt te worden tot tomatenpuree. Tomaten met een gewicht tussen 50 gram en 104 gram zijn bestemd voor de binnenlandse handel en tomaten met een gewicht van meer dan 104 gram zijn bedoeld voor de export.

a Bereken welk percentage van de tomaten voor puree is, welk percentage in Nederland wordt verkocht en welk percentage voor de export bestemd is.

b Door het gebruik van kunstmest wordt het gemiddelde gewicht van de tomaten 18 gram meer, maar de spreiding in de gewichten blijft hetzelfde. Dat jaar heeft de kweker 4 200 000 tomaten.
Bereken hoeveel tomaten verwerkt worden tot puree.

Je kunt het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde op basis van één steekproef berekenen.

E3

Volgens de berekeningen van het kabinet is het gemiddelde inkomen van een eenpersoonshuishouden € 31.000,-. In een steekproef onder 1500 eenpersoonshuishoudens is het gemiddelde inkomen € 30.400,- met een standaardafwijking van € 12.800,-.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde inkomen van een eenpersoonshuishouden. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

b Denk jij dat het kabinet gelijk heeft? Licht je antwoord toe.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een proportie op basis van één steekproef berekenen.

E4 Volgens de lijsttrekker van de politieke partij D66 zal ongeveer een kwart van alle stemgerechtigden op D66 gaan stemmen. Een opiniepeiler ondervraagt 400 stemgerechtigden of ze op D66 zullen gaan stemmen. In deze steekproef geven 92 stemgerechtigden aan dat ze dat gaan doen.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage stemgerechtigheden dat op D66 zal stemmen.

b Denk jij dat de lijsttrekker gelijk gaat hebben? Licht je antwoord toe.

E5 Een jamfabrikant heeft twee vulmachines. Een nieuwe die tamelijk precies afgesteld kan worden zodat de standaardafwijking van het gewicht 6 gram is en een oudere machine waarbij de standaardafwijking 15 gram is.
Op de wikkel van de jampotjes komt te staan dat het netto gewicht 340 gram is. De nieuwe machine wordt op een gemiddelde van 346 gram en de oudere machine op een gemiddelde van 355 gram afgesteld.
De gewichten zijn bij beide machines normaal verdeeld.

a Schets in één figuur voor beide machines de grafiek van de normale verdeling.

b Aan welke machine geef jij als consument de voorkeur? Waarom?

c Ga voor beide machines na hoeveel procent van de potjes minder dan 340 gram zal wegen.

d De fabrikant besluit de oudere machine te vervangen door een nieuwe. De machine die nu wordt aangeschaft vult de potjes met een standaardafwijking van 3,5 gram. De machine wordt zo afgesteld dat maximaal 2,5% van de potjes een gewicht onder de 340 gram heeft.
Op welk gemiddelde gewicht wordt de machine afgesteld?

E6 Uit een enquête in opdracht van de Stichting tegen Kanker van maart 2007 onder 1988 Belgen bleek 61% voorstander te zijn van het rookvrij maken van cafés. In oktober 2006 was dat nog 55% van de toen ondervraagde personen.
Onderzoek met een 95%-betrouwbaarheidsinterval of het aantal voorstanders in de periode van oktober 2006 tot maart 2007 is toegenomen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoe oud zijn historische vondsten?

In 1940 werd in een grot bij Lascaux rotswandschilderingen ontdekt. Het is de rijkst beschilderde prehistorische grot die tot nu toe is ontdekt. Na de vondst maakten archeologen een schatting dat de tekeningen 10 000 tot 20 000 jaar oud waren.

C^{14} dateringsmethode

Er was behoefte aan een methode waarmee je de ouderdom van opgegraven voorwerpen en beenderen kunt bepalen.
C^{14} is een radioactieve vorm van koolstof, dat ieder levend organisme bevat. Nadat het organisme is doodgegaan, daalt de hoeveelheid C^{14} langzaam door radioactief verval. Na ongeveer 5730 jaar is er nog 50% van de oorspronkelijke hoeveelheid C^{14} over. De manier om met radioactief C^{14} de ouderdom te bepalen werd in 1949 ontdekt door Willard Frank Libby. In 1960 ontving Libby hiervoor de Nobelprijs voor de scheikunde.

Opdracht

Je mag aannemen dat radioactief verval exponentieel verloopt.

a Bereken de groeifactor per jaar bij een halveringstijd van 5730 jaar.

b In 1950 is gemeten dat er nog circa 14,5% van de hoeveelheid C^{14} aanwezig was in houtskoollijnen van één van de tekeningen in de grot bij Lascaux.
Bereken hoe oud de tekening toen was.

Onbekende Da Vinci gevonden

Leonardo da Vinci (1452 - 1519) was een architect, uitvinder, filosoof, natuurkundige, anatomist, beeldhouwer, schrijver, schilder en componist uit Florence, Italië. In totaal worden vijftien schilderijen geheel of deels aan Da Vinci toegeschreven. Over zes werken zijn de meningen verdeeld. Zo ook over een portret van markiezin Isabella d'Este, die als begunstiger van de vrije kunsten een hoofdrolspeelster was in de Renaissance.

Opdracht

Er is gemeten dat de aanwezige hoeveelheid C^{14} tussen 93,56% en 95,73% ligt.

a Geef een datering van het schilderij.

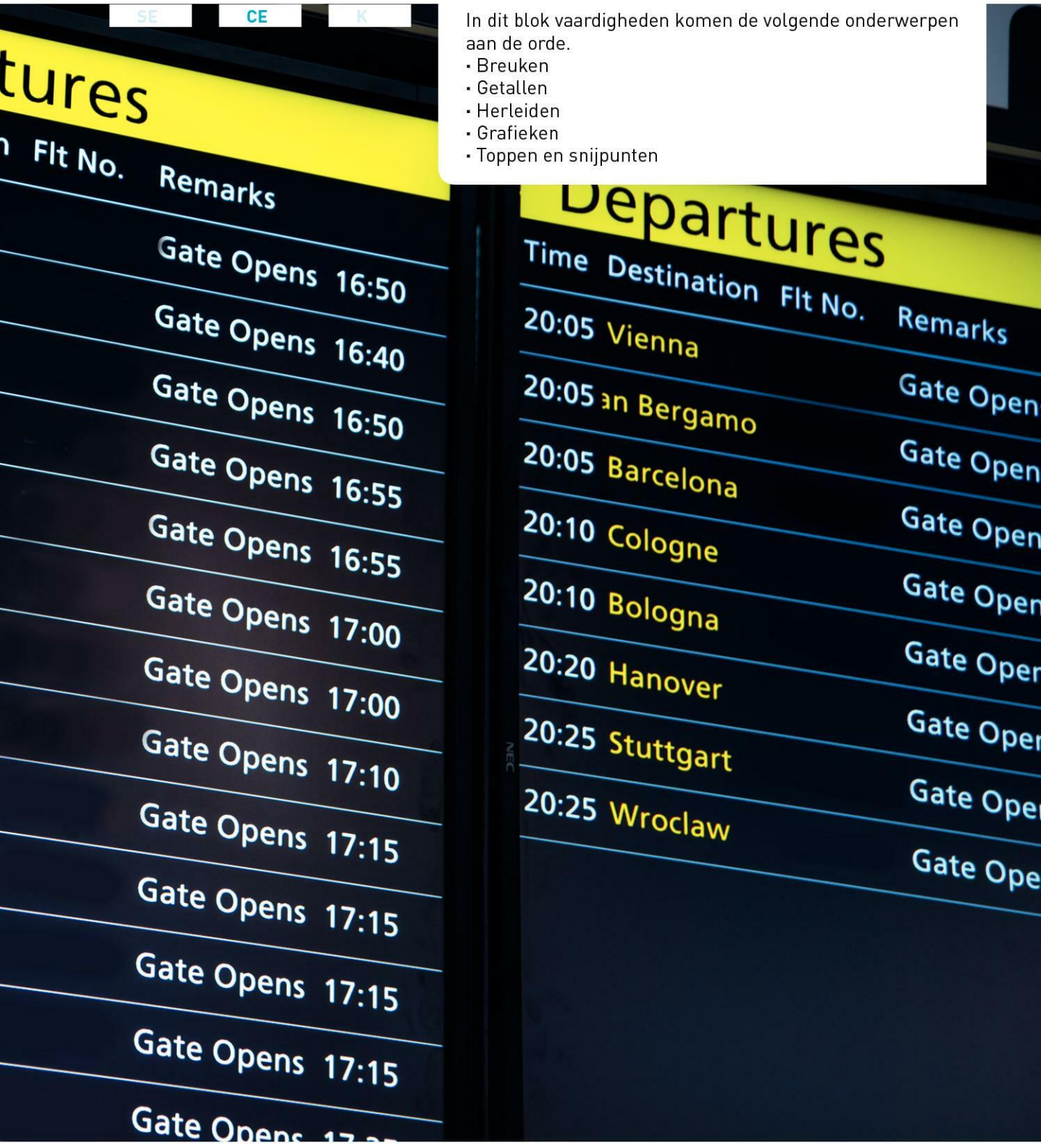
b Kan het schilderij toegeschreven worden aan Leonardo da Vinci?

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheden 5

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Breuken
- Getallen
- Herleiden
- Grafieken
- Toppen en snijpunten



© Noordhoff Uitgevers bv

Breuken

1 Bereken en noteer alle tussenstappen.

a $\frac{2}{5} + \frac{3}{10}$

b $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$

c $1\frac{1}{6} + 2\frac{3}{4}$

d $3\frac{2}{5} - \frac{1}{6}$

e $4\frac{2}{7} - 2\frac{3}{4}$

f $8 - 3\frac{4}{9}$

2 Bereken en noteer alle tussenstappen.

a $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5}$

b $2\frac{1}{4} \times \frac{2}{5}$

c $5 \times \frac{3}{8}$

d $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4}$

e $2\frac{1}{2} \times 1\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$

f $3\frac{1}{5} \times 4 \times \frac{3}{4}$

3 Vul <, > of = in.

a $\frac{3}{5}$ … 0,6

b $\frac{2}{3}$ … 0,67

c $6\frac{3}{8}$ … 6,38

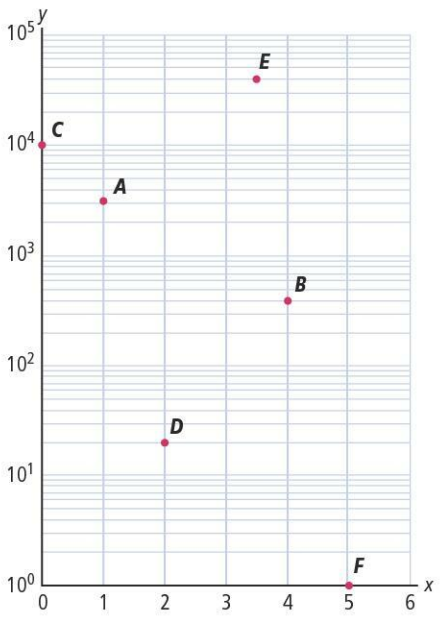
d $\frac{56}{100}$ … $\frac{14}{25}$

e $1\frac{3}{8}$ … $1\frac{3}{7}$

f $3\frac{5}{16}$ … $3\frac{1}{4}$

Getallen

4 **a** Hoe kun je zien dat in het assenstelsel de verticale as een log-schaal heeft?
b Geef de coördinaten van de punten *A* tot en met *F*.
c Teken een rechte lijn door de punten *A* en *D*.
d Stel een formule op bij de lijn door de punten *A* en *D*.



5 Schrijf in de standaardvorm.

a 800 000 000

b 42 404 000 000

c 24,7 miljoen

d 0,000 081

e 0,000 000 0701

f 23 duizendste

6 Schrijf als gewoon getal.

a 5×10^7

b $4{,}07 \times 10^4$

c $6{,}31 \times 10^8$

d $3{,}1 \times 10^{-6}$

e 4×10^{-7}

f $7{,}281\,617 \times 10^{-3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Herleiden

7 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $4(x - 5)$

b $6a + 3(4 - 5a)$

c $b(7b - 6) + 8b$

d $p(6 - 4p) + 3(p - 1)$

e $(w - 3)(w + 8)$

f $2q + (3q - 1)(q - 5)$

8 Substitueer formule B in formule A en vereenvoudig het resultaat.

a A: $w = 3q + 7$ en B: $q = 8 + t$

b A: $w = 4 - 2q$ en B: $q = -t + 3$

c A: $w = 2(q - 3) + q$ en B: $q = 2t - 5$

9 Herleid de formules waarbij je Q uitdrukt in p.

a $Q + 6p = 7$

b $2Q - 8p = 6$

c $10Q - p + 5 = 0$

d $30p = 100 + 20Q$

e $5(Q + 1) = 15p$

f $2Q = 8(p + 10) - 12$

Grafieken

10 Teken de grafieken bij de vergelijkingen. Zet steeds t langs de horizontale as.

a $4t + 16w = 48$

b $0{,}5w - t = 8$

c $w + 2t - 10 = 0$

Theorie

Bij het berekenen van de coördinaten van het snijpunt van twee lineaire formules stel je eerst de bijbehorende vergelijking op. Met het oplossen van deze vergelijking vind je de eerste coördinaat van het snijpunt. Bereken de tweede coördinaat van het snijpunt door de eerste coördinaat in te vullen in één van de formules.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij de fomules $y = -2x + 8$ en $y = x - 1$.

Oplossing

1 $-2x + 8 = x - 1$

2 $-3x + 8 = -1$

$-3x = -9$

$x = -9 : -3 = 3$

3 $y = 3 - 1 = 2$

De coördinaten van het snijpunt zijn $(3, 2)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

11 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken met de formules.

a $y = 4x - 6$ en $y = -6x + 34$

b $y = 0{,}5x + 3$ en $y = 11{,}1x - 7{,}6$

c $y + x = -0{,}5$ en $4y - 8x = 1$

12 De kosten voor het parkeren in de binnenstad hangen af van hoelang je de auto parkeert. In de tabel staan de tarieven die in 2018 golden.

tijd in minuten	0 - 15	15 - 30	30 - 60	60 - 120	120 - 180
bedrag in euro's	1,20	1,80	3,00	4,20	7,50

Teken een grafiek bij de tabel.

13 De politie van een stad houdt ieder jaar bij hoeveel ongelukken er op de ringweg in dat jaar plaats vinden. In de tabel zie je de resulaten van de jaren 2008 tot en met 2016.

a Teken een grafiek bij de tabel.
b Waarom mag je de punten eigenlijk niet verbinden?
c Teken een rechte trendlijn.
d Stel een formule bij de trendlijn op. Neem $t = 0$ in 2008.
e Gebruik de formule van de trendlijn om het aantal ongelukken in 2030 te schatten.
f Bereken met de formule in welk jaar het aantal ongelukken voor het eerst meer dan 300 zal zijn.

jaar	*aantal ongelukken*
2008	64
2009	59
2010	92
2011	101
2012	88
2013	99
2014	120
2015	135
2016	133

14 In de tabel zie je gegevens over een wandeltocht van Jochem door de bergen. Zo kun je zien dat Jochem na 30 minuten 1,8 kilometer heeft afgelgd.

tijd in minuten	0	15	30	45	60	75	90	105
afstand in km	0	1	1,8	2,4	3,2	3,9	4,5	5,2

a Teken een toenamediagram met stapgrootte 15 bij de tabel.
b Bereken de gemiddelde snelheid in kilometer per uur van Jochem tussen 30 minuten en 60 minuten.
c Schat met lineair interpoleren hoeveel kilometer hij na 34 minuten gelopen heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

Toppen en snijpunten

Theorie

Als je de rekenmachine gebruikt om coördinaten van toppen of snijpunten te bepalen, moet je toelichten hoe je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij neem je de volgende onderdelen op: Invoer, Vensterinstelling en de gebruikte Opties.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van $y = 4x - x^3$.

Oplossing

Invoer: $y = 4x - x^3$
Venster: x van -10 tot 10
y van -10 tot 10
Opties: minimum en maximum
De toppen zijn $(-1{,}15; -3{,}08)$ en $(1{,}15; 3{,}08)$.

15 Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van $y = \dfrac{3x}{\sqrt{2x - 7}}$ in twee decimalen nauwkeurig.

16
a Plot de grafiek van $y = x^3 - 8x$.
b De vergelijking $x^3 - 8x = 0$ heeft drie oplossingen. Hoe zie je dat in de grafiek?
c Bereken de oplossingen van de vergelijking $x^3 - 8x = 0$ in twee decimalen nauwkeurig.
d Bereken de coördinaten van de toppen. Rond af op twee decimalen.

17 Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x - 8$.
a Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as.
b Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek. Geef daarbij aan of een top bij een maximum of een minimum van de formule hoort.
c Los de volgende vergelijkingen op.

A $\frac{1}{2}x^3 - 3x - 8 = 4$

B $\frac{1}{2}x^3 - 3x - 8 = 3x - 7$

18 Los op. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
a $2x^2 = x + 6$
b $p^3 - 3p = 1$
c $2{,}13^t = 40$
d $\sqrt{10 - x} = x$

© Noordhoff Uitgevers bv

A
afnemende stijging of daling 82
aselect 164, 202

B
betrouwbaarheidsinterval 169, 177, 207, 215
beginhoeveelheid 130

C
centrummaten 19, 53, 155, 193
constante sijging of daling 82
cumulatieve frequentie 26, 60
cumulatieve frequentiepolygoon 26, 60

E
exponentieel 120
exponentieel verband 130
extrapoleren 95

F
factor 120
foutenmarge 169, 177, 207
frequentiepolygoon 26, 60
frequentieverdeling 14, 49, 154, 192

G
gemiddelde 19, 53, 155, 193
gemiddelde verandering 87
grenslijn 126
groeifactor 120, 130
groeipercentage 121

H
halveringstijd 135
halfvlak 126
hellingsgetal 122

I
interkwartielafstand 23, 57, 155, 193
interpoleren 90
intervalnotatie 10, 44

K
kentallen 23, 57
klassenbreedte 10, 44
klassenmidden 10, 44
klokvormige verdeling 14, 49
kwartielafstand 23, 57, 155, 193

L
lineair interpoleren 90
lineair verband 76, 122
lineaire ongelijkheid 126
log schaal 139
logaritmische schaalverdeling 139

M
meertoppige verdeling 14, 49
mediaan 8, 19, 42, 53, 155, 193
modus 8, 19, 42, 53, 155, 193

N
normaal verdeeld 157, 195
normale verdeling 157, 195

P
populatiegemiddelde 172, 210
populatieproportie 165, 203

R
representatief 164, 202
richtingscoëfficiënt 122

S
scheve verdeling 14, 49
somfrequentie 26, 60
somfrequentiepolygoon 26, 60
spreidingsbreedte 23, 57, 155, 193
spreidingsmaten 23, 57, 155, 193
standaardafwijking 24, 58, 155, 193
standaarddeviatie 24, 58, 155, 193
stapgrootte 79
startgetal 122
steekproef 164, 202
steekproefgemiddelde 172, 210
steekproefproportie 165, 203
steekproefomvang 164, 202
steekproevenverdeling 166, 173, 204, 211

T
toenamediagram 79
toenemende stijging of daling 82
trend 99
trendlijn 99

U
uitschieter 14, 49
uniforme verdeling 14, 49

V
verdubbelingstijd 135
vuistregels 161, 199

© Noordhoff Uitgevers bv

Ontwerp omslag G2K, Groningen/Amsterdam
Fotografie omslag Getty Images
Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer
Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht
Technisch tekenwerk Integra Software Services, India
Beeldresearch Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording

iStockphoto/ Getty Images, Amsterdam: p. 6-7, 40-41, 112-113, 128, 142, 181b, 219b, 228-229
Shutterstock, New York: p. 9, 10, 13, 14, 15, 18o, 20, 25, 26, 36, 38, 47, 48, 51, 54, 60, 80, 82, 86, 95, 98, 99, 108, 110, 122, 124, 127, 129, 130, 131, 133, 134, 137, 148, 149, 150, 156, 161, 162, 164, 168, 170, 174, 176, 178, 186, 188, 194, 199, 200, 202, 206, 208, 214, 216, 226
Dave de Bruin/ Daliz, Den Haag: p. 10, 18b, 30, 44, 52b
testing/ Shutterstock.com: p. 17
Paolo Bruno/ Getty Images, Amsterdam: p. 21, 55
Robin van Lonkhuijzen/ ANP Foto, Den Haag: p. 23
Jeanet Dijkstra/ Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 29, 63
Vetta/ Getty Images, Amsterdam: p. 74-75
Liia Galimzianova/ Dreamstime, San Francisco: p. 77
Berlinda van Dam/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 78, 87
Associated Press/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 84
David Madison/ Getty Images North America/ Getty Images, Amsterdam: p. 89
Robert Hoetink/ Shutterstock.com: p. 93
Anjo de Haan/ ANP Foto, Den Haag: p. 96
AFP/ ANP Foto, Den Haag: p. 111
Alamy/ Image Select, Wassenaar: p. 118-119, 172, 210, 228
Frank Broekhuizen/ Nationale Beeldbank, Den Haag: 125
Lex van Lieshout/ ANP Foto, Den Haag: p. 132, 173
Mike Dotta/ Shutterstock.com: p. 135
Examenblad.nl: p. 136
David Rozing/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 152-153, 190-191
Liek Bouma/ Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 166
William Hoogteyling/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 179, 217
Laurens van Putten/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 181o, 219o

© Noordhoff Uitgevers bv

LEERBOEK | WISKUNDE A | 12E EDITIE | **HAVO DEEL 2**

Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.

Noordhoff

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89226-5